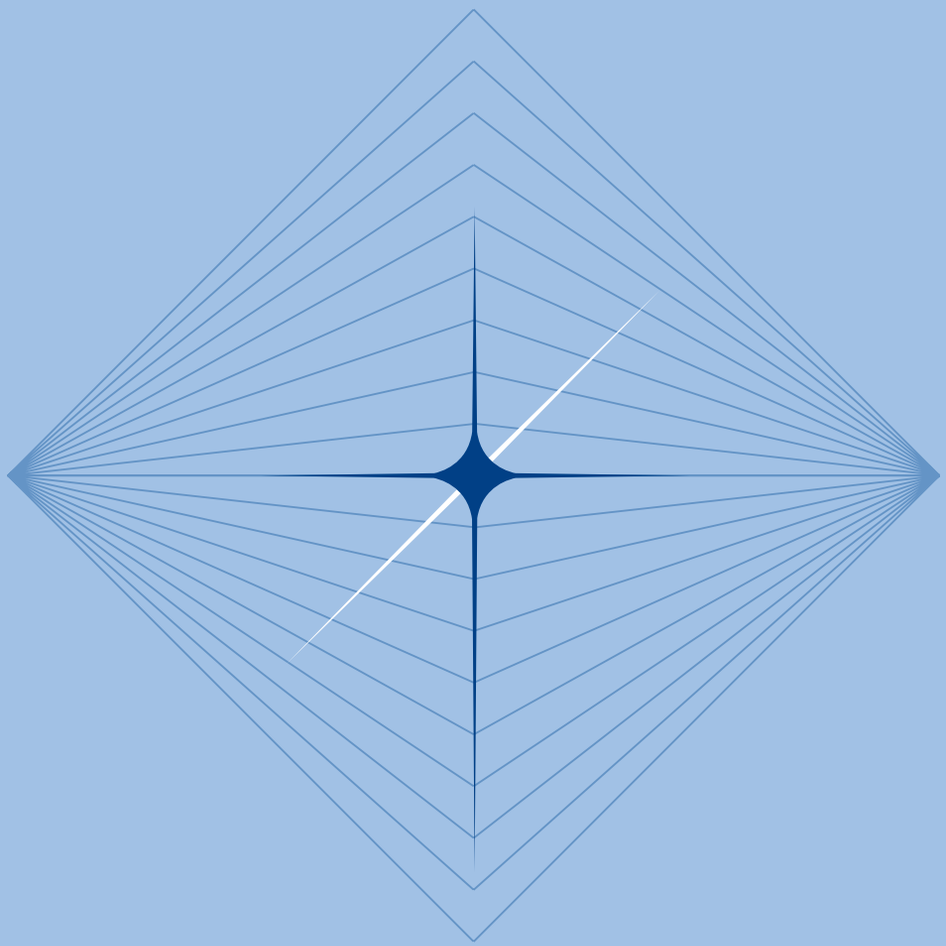
수학의 신



중학 수학 3·1

정답과 해설

빠른 정답

01 제곱근과 실수

STEP 1 핵심 문제 ▸18~19쪽

01 8 **02** ② **03** $-\frac{7}{3}$ **04** $-a+2b$ **05** 28
06 21 **07** ㄴ, ㅁ **08** 6 **09** $P(-1-\sqrt{5})$, $Q(1+\sqrt{10})$
10 ③, ④ **11** $b<a<c$ **12** ③

STEP 2 고난도 문제 ▸20~24쪽

01 29 **02** $\sqrt{10}$ cm **03** ③ **04** $\frac{1}{5}$
05 $(\sqrt{5}, 0)$ **06** 337 **07** $2x-y$ **08** ③ **09** 0
10 ③ **11** $-3\le a\le 1$ **12** 625 **13** $\frac{1}{9}$ **14** 7
15 19 **16** $a=84$, $b=112$ **17** 27
18 a^2, a, $\sqrt{a}$, $\sqrt{\frac{1}{a}}$, $\frac{1}{a}$ **19** $\frac{8}{21}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{11}{21}$, $\frac{13}{21}$ **20** 20
21 9 **22** 367 **23** ② **24** 75 **25** $\frac{7}{9}$ **26** ④
27 $6+\sqrt{5}$ **28** 178 **29** ⑤ **30** 9

STEP 3 최고난도 문제 ▸25쪽

01 22 **02** 3 **03** ㄱ, ㄴ **04** 75 **05** 168 **06** 78

02 근호를 포함한 식의 계산

STEP 1 핵심 문제 ▸26~27쪽

01 ③ **02** ③ **03** ③ **04** $\frac{1}{6}$ **05** $\frac{5\sqrt{30}}{3}$ **06** ⑤
07 ③ **08** $\frac{2}{5}$ **09** $\frac{5\sqrt{21}}{3}-3\sqrt{7}$ **10** $-10+\sqrt{5}$
11 $-\frac{1}{2}$, $-\frac{9}{2}$ **12** $38+6\sqrt{70}$

STEP 2 고난도 문제 ▸28~32쪽

01 -9 **02** ④ **03** 34 **04** 10, 20
05 $\frac{4\sqrt{6}}{15}$ **06** ③ **07** $\frac{\sqrt{14}}{2}$배 **08** 11.4126 **09** 4
10 $\frac{503}{40}$ **11** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **12** ⑤ **13** $8+3\sqrt{3}$ **14** -1
15 $x=1+\frac{\sqrt{35}}{19}$, $y=\frac{12}{19}$ **16** $-\frac{1}{2}$ **17** 33 **18** $\frac{\sqrt{70}}{5}$
19 $3\sqrt{14}$ cm, $36\sqrt{14}$ cm^3 **20** $\sqrt{5}\pi$ **21** $12\sqrt{2}$ **22** 30
23 $(2+\sqrt{2})\pi$ **24** $70\sqrt{2}$ **25** 578 **26** $8-5\sqrt{2}$
27 ② **28** ③ **29** 다섯 자리 **30** 6

STEP 3 최고난도 문제 ▸33쪽

01 $\frac{7\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ **02** 9 **03** $\frac{42+21\sqrt{3}}{4}$
04 나무 모양, 이유는 풀이 참조 **05** $5-2\sqrt{5}$

단원 마스터 ▸34~37쪽

01 $\frac{1}{5}$ **02** a^2+bc **03** 25 **04** 8 **05** 63 **06** 9
07 (5, 45, 5), (15, 5, 405) **08** 14, 15, 16 **09** 12
10 $3+12\sqrt{3}\pi$ **11** ④ **12** $6\sqrt{2}$ **13** $7\sqrt{3}$ cm **14** ①
15 -4 **16** $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$ **17** $\frac{11}{190}$ **18** A: 5개, B: 3개
19 ⑤ **20** $28\sqrt{5}$ cm **21** 142 **22** ②
23 $\frac{-6+7\sqrt{2}}{6}$ **24** $x=\frac{1}{4}$, $y=-\frac{1}{2}$

03 다항식의 곱셈

STEP 1 핵심 문제 ▶40~41쪽

01 $a=3,\ b=-2$ **02** ⑤ **03** ③ **04** 0 **05** ⑤

06 -1 **07** 64 **08** 27 **09** ① **10** ④

11 (1) 18 (2) 320 **12** (1) 6 (2) 34 **13** -4

STEP 2 고난도 문제 ▶42~46쪽

01 4 **02** -16 **03** $A=48,\ B=42$ **04** -1 **05** ②

06 -264 **07** ② **08** $-2x^2+7xy-6y^2$

09 $100a^4-196a^2-25a^2b^2+49b^2$ **10** 10 **11** 16 **12** ③

13 8 **14** 37 **15** 1 **16** 4 **17** ②

18 $(21-7\sqrt{6})$ cm **19** $-20-10\sqrt{3}$ **20** ④ **21** ⑤

22 ⑤ **23** 1 **24** $18+\sqrt{6}$ **25** $\frac{3}{2}$ **26** 164 **27** ②

28 $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$ **29** $\sqrt{3}$ **30** 0

STEP 3 최고난도 문제 ▶47쪽

01 $-80a-90$ **02** 98 **03** 5 **04** 2 **05** 4

06 5

04 인수분해

STEP 1 핵심 문제 ▶48~49쪽

01 ④ **02** 13 **03** ④ **04** $(x+4)(3x-1)$ **05** ③

06 $(a+2b+3)(a+2b-5)$ **07** $(x+2)(x-2)(x^2-6)$

08 $3x-9$ **09** 4 **10** $(x-y-5)(x-y+2)$

11 ㄱ, 8100 **12** ① **13** ⑤ **14** $-\frac{5}{4}$

STEP 2 고난도 문제 ▶50~54쪽

01 60 **02** ①, ④ **03** (18, 5), (−22, −5) **04** ①

05 $2(a+c)(a-c)$ **06** 7, 23 **07** 13 **08** ④ **09** ⑤

10 3 **11** $2x+3y$ **12** 32 cm **13** ③ **14** ④

15 $(x-1)^2(y-1)^2$ **16** ④ **17** ⑤ **18** $\frac{1}{6}$ **19** ①

20 $\frac{101}{200}$ **21** 228 **22** 149, 151 **23** 991 **24** 16

25 (337, −312) **26** -2 **27** $8-2\sqrt{7}$ **28** 48

29 14 **30** $9-\sqrt{3}$

STEP 3 최고난도 문제 ▶55쪽

01 18 **02** 6 **03** 0 **04** 10 **05** 33333 **06** 72

단원 마스터 ▶56~59쪽

01 ④ **02** $21x^2-2x-8$ **03** ④ **04** ② **05** ②

06 5 **07** ① **08** $1+2x^2+x^4-x^8$ **09** ⑤ **10** ②

11 $29-3\sqrt{11}$ **12** 2 **13** ① **14** ②

15 25, 190 **16** $3x-7$ **17** 10 **18** ⑤

19 $2x(x+2)(x-2)$ **20** ③ **21** $\frac{93}{100}$ **22** ③ **23** $\frac{10}{3}$

24 12

빠른 정답

05 이차방정식

STEP 1 핵심 문제 ▸62~63쪽

01 ㄱ, ㄷ **02** 9 **03** −11 **04** 5 **05** ③

06 ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅂ **07** −144 **08** ② **09** ②

10 −4 **11** 5 **12** ④ **13** ②

14 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

STEP 2 고난도 문제 ▸64~68쪽

01 ③ **02** ④ **03** 17 **04** (3, 4) **5** $x=1$

06 ② **07** $\frac{1}{2}$ **08** ④ **09** 0 **10** $x=-\frac{5}{8}$

11 2027 **12** $-\frac{1}{2}$ **13** ② **14** −5 **15** 1 **16** ⑤

17 6 **18** 8 **19** 42 **20** ② **21** 19 **22** ⑤

23 2 **24** 6 **25** ② **26** 0 **27** −2

28 $x=\frac{3\pm\sqrt{57}}{2}$ **29** 3 **30** ⑤

STEP 3 최고난도 문제 ▸69쪽

01 $\frac{8}{9}$ **02** 5 **03** $\frac{3+\sqrt{15}}{2}$ **04** $\frac{3}{200}$

05 $a=2+\sqrt{3}$, $b=3+2\sqrt{2}$ **06** 9

06 이차방정식의 활용

STEP 1 핵심 문제 ▸70~71쪽

01 ①, ④ **02** 2 **03** −5 **04** ⑤ **05** ① **06** 10

07 1 **08** $\frac{1}{2}$ **09** 21 **10** 15 **11** 4초 후 **12** ⑤

13 13초 후 **14** 2

STEP 2 고난도 문제 ▸72~74쪽

01 2 **02** ④ **03** 2 **04** 9

05 $3x^2+10x-25=0$ **06** ③ **07** 84 **08** 6 **09** 111

10 ② **11** 24 **12** 6월 26일 **13** 20 % **14** 24

15 (8, 5), (10, 4) **16** 2초 후 **17** 19

18 (1) 1 (2) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

STEP 3 최고난도 문제 ▸75쪽

01 ④ **02** $x^2-2026x-2027=0$ **03** 10

04 걸린 시간: 1시간 40분, $a=10$ **05** ④

단원 마스터 ▸76~79쪽

01 ⑤ **02** ② **03** $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$ **04** ③

05 ⑤ **06** $x=-\frac{1}{3}$ **07** ① **08** $-\frac{3}{2}$ **09** −1

10 ③ **11** ⑤ **12** $\frac{10+2\sqrt{37}}{3}$ **13** −1, 3

14 ④ **15** ⑤ **16** $a<\frac{9}{4}$ **17** ② **18** $x=4$ 또는 $x=6$

19 83 **20** 20 **21** 3초 **22** (6, 9) **23** $6+6\sqrt{5}$

24 4

07 이차함수와 그 그래프(1)

STEP 1 핵심 문제 ▶82~83쪽

01 ㄷ, ㅁ **02** ⑤ **03** 9 **04** ② **05** ③ **06** $-\frac{8}{3}$

07 1 **08** ③ **09** ④ **10** 1 **11** $\frac{3}{4}$

12 제3사분면

STEP 2 고난도 문제 ▶84~86쪽

01 6 **02** ③, ④ **03** $\frac{2}{5}\le a<\frac{5}{4}$ **04** $y=-\frac{1}{3}x^2$

05 $-\frac{1}{4}$ **06** 48 **07** $\frac{1}{3}$ **08** 18 **09** -1, 2

10 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **11** -15 **12** 18 **13** 제1사분면 **14** $\frac{13}{2}$

15 $a=-5$, $b=68$ **16** -4 **17** ②, ④ **18** ①

STEP 3 최고난도 문제 ▶87쪽

01 -502 **02** 3π **03** $\frac{9}{4}$ **04** 3 **05** 2688 **06** 2

08 이차함수와 그 그래프(2)

STEP 1 핵심 문제 ▶88~89쪽

01 -30 **02** $\frac{3}{2}$ **03** ⑤ **04** 10 **05** ③ **06** ③

07 $\frac{13}{10}$ **08** $x=-1$, $(-1, 1)$ **09** -2 **10** $\frac{15}{8}$ **11** ①

12 $\frac{15}{4}$ **13** ②

STEP 2 고난도 문제 ▶90~94쪽

01 $(-6, 36)$ **02** ④ **03** -6 **04** -12 **05** 8

06 ② **07** 10 **08** 9 **09** $\frac{15}{8}$ **10** -6

11 A$(-1, 0)$, B$(4, 0)$ **12** ㄱ, ㄷ, ㄹ

13 $a<0$, $b>0$, $c>0$ **14** 제3사분면 **15** 제3, 4사분면

16 $\frac{1}{30}$ **17** 3 **18** $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ **19** -2

20 $y=-(x+6)^2+7$ **21** ⑤ **22** -3 **23** 6 **24** 7

25 $(-3, 8)$, $(2, 3)$ **26** $a\ge\frac{3}{4}$ **27** 125 m

28 (1) -16 (2) $x=4$, $y=-4$ **29** 24 m^2 **30** $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$

31 20, 5

STEP 3 최고난도 문제 ▶95쪽

01 121 **02** $x=b$ 또는 $x=\frac{a+c}{2}$ **03** $-\frac{1}{4m}$

04 2 **05** 2750원

단원 마스터 ▶96~99쪽

01 ④ **02** ②, ⑤ **03** ④ **04** (2, 1) **05** $\left(-\frac{4}{9}, \frac{16}{81}\right)$

06 $\frac{14}{9}$ **07** 4 **08** ① **09** ① **10** 6 **11** ③

12 2 **13** 0 **14** $a=1$, $b=8$ **15** ②

16 12 m **17** 6 **18** 2 **19** $y=-\frac{1}{3}x^2+x+6$ **20** ④

21 5 **22** 900원 **23** 2초 후 **24** ④

01 제곱근과 실수

STEP 1 핵심 문제

▶ 18~19쪽

01 8 **02** ② **03** $-\frac{7}{3}$ **04** $-a+2b$ **05** 28

06 21 **07** ㄴ, ㅁ **08** 6 **09** $P(-1-\sqrt{5})$, $Q(1+\sqrt{10})$

10 ③, ④ **11** $b<a<c$ **12** ③

01 답 8

$(-5)^2=25$의 양의 제곱근은 5이므로 $a=5$

$\sqrt{81}=9$의 음의 제곱근은 -3이므로 $b=-3$

제곱근 36은 $\sqrt{36}=6$이므로 $c=6$

$\therefore a+b+c=5+(-3)+6=8$

02 답 ②

ㄱ. $x^2=a$일 때, x를 a의 제곱근이라 한다.

ㄴ. 3의 두 제곱근은 $\sqrt{3}$과 $-\sqrt{3}$이고, 그 절댓값은 $\sqrt{3}$으로 같다.

ㄷ. $\sqrt{0.0625}=\sqrt{0.25^2}=0.25$의 양의 제곱근은 $\sqrt{0.25}=\sqrt{0.5^2}=0.5$이다.

ㄹ. 49의 양의 제곱근은 7이고, 제곱근 7은 $\sqrt{7}$이다.

ㅁ. (제곱근 $(-1.\dot{7})^2)=\sqrt{(-1.\dot{7})^2}=1.\dot{7}=\frac{16}{9}$이므로

$\frac{16}{9}$의 제곱근은 $\pm\sqrt{\frac{16}{9}}=\pm\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\pm\frac{4}{3}$이다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ의 2개이다.

03 답 $-\frac{7}{3}$

$$\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}-\sqrt{1.44}\div\left(-\sqrt{\frac{6}{25}}\right)^2+\sqrt{2^6}\times(\sqrt{0.5^2})^2$$

$$=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}-\sqrt{1.2^2}\div\left(-\sqrt{\frac{6}{25}}\right)^2+\sqrt{(2^3)^2}\times(\sqrt{0.5^2})^2$$

$$=\frac{2}{3}-1.2\div\frac{6}{25}+2^3\times0.5^2$$

$$=\frac{2}{3}-1.2\times\frac{25}{6}+8\times0.25$$

$$=\frac{2}{3}-5+2=-\frac{7}{3}$$

04 답 $-a+2b$

$ab<0$이므로 a, b의 부호는 서로 다르고, $a<b$이므로 $a<0$, $b>0$이다. …… ❶

이때 $2a<0$, $-3b<0$이고 $a-b<0$이므로

$$\sqrt{4a^2}+\sqrt{(-3b)^2}-\sqrt{(a-b)^2}$$

$$=\sqrt{(2a)^2}+\sqrt{(-3b)^2}-\sqrt{(a-b)^2}$$

$$=-2a+\{-(-3b)\}-\{-(a-b)\}$$ …… ❷

$$=-2a+3b+a-b$$

$$=-a+2b$$ …… ❸

채점 기준

❶ a, b의 부호 구하기	30 %
❷ 주어진 식을 근호를 사용하지 않고 나타내기	40 %
❸ 주어진 식을 간단히 하기	30 %

05 답 28

$\sqrt{\frac{112}{n}}=\sqrt{\frac{2^4\times7}{n}}$이 자연수가 되려면 n은 112의 약수이면서 $7\times(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 한다.

따라서 두 자리의 자연수 n의 값은

$7\times2^2=28$

06 답 21

$5<\sqrt{\frac{a}{2}}<6$에서 각 변을 제곱하면

$5^2<\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)^2<6^2$, $25<\frac{a}{2}<36$

$\therefore 50<a<72$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 a의 개수는

$72-50-1=21$

참고 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수 구하기

m, $n(m>n)$이 정수일 때,

(1) $n<x<m$인 정수 x의 개수 ➡ $m-n-1$

(2) $n\le x\le m$인 정수 x의 개수 ➡ $m-n+1$

(3) $n<x\le m$(또는 $n\le x<m$)인 정수 x의 개수 ➡ $m-n$

07 답 ㄴ, ㅁ

ㄱ. 무한소수 중에서 순환소수는 유리수이다.

ㄴ. 모든 유한소수는 분수 $\frac{a}{b}$(a, b는 정수, $b\neq0$) 꼴로 나타낼 수 있으므로 유리수이다.

ㄷ. 0은 정수이므로 유리수이다.

ㄹ. 양의 유리수 4에 대하여 $\sqrt{4}=2$는 유리수이다.

ㅁ. 유리수가 아닌 수는 무리수이므로 유리수이면서 무리수인 수는 없다.

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㅁ이다.

08 답 6

$f(a)=\sqrt{0.\dot{a}}=\sqrt{\frac{a}{9}}=\sqrt{\frac{a}{3^2}}=\frac{\sqrt{a}}{3}$

이때 $\frac{\sqrt{a}}{3}$가 유리수가 되려면 a는 $(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 하므로 자연수 a가 $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$일 때, $f(1)$, $f(4)$, $f(9)$는 유리수이다.

따라서 무리수는 $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(6)$, $f(7)$, $f(8)$의 6개이다.

09 답 $P(-1-\sqrt{5})$, $Q(1+\sqrt{10})$

$\overline{AP}=\overline{AB}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

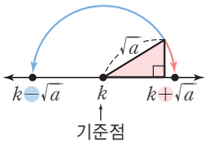
점 P에 대응하는 수는 $-1-\sqrt{5}$ $\therefore P(-1-\sqrt{5})$

$\overline{CQ}=\overline{CD}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$이므로

점 Q에 대응하는 수는 $1+\sqrt{10}$ $\therefore Q(1+\sqrt{10})$

비법 NOTE

직각삼각형의 빗변의 길이를 이용하여 무리수를 수직선 위의 점에 대응시킬 수 있다.
이때 대응하는 점이 기준점의
{ 오른쪽에 있으면 ➡ $k+\sqrt{a}$
{ 왼쪽에 있으면 ➡ $k-\sqrt{a}$



10 답 ③, ④

① 2에 가장 가까운 무리수는 알 수 없다.
② 3과 5 사이에는 무수히 많은 유리수가 있다.
⑤ 유리수이면서 무리수인 수는 없으므로 유리수와 무리수 중에서 수직선 위의 같은 점에 대응하는 수는 없다.
따라서 옳은 것은 ③, ④이다.

11 답 $b<a<c$

$2<\sqrt{6}<3$에서 $-3<-\sqrt{6}<-2$이므로
$5<8-\sqrt{6}<6$ …… ㉠
$2<\sqrt{7}<3$이므로 $4<2+\sqrt{7}<5$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $b<a$
$\sqrt{5}<\sqrt{6}$에서 $-\sqrt{6}<-\sqrt{5}$이므로
$8-\sqrt{6}<8-\sqrt{5}$
$\therefore a<c$
$\therefore b<a<c$

12 답 ③

$2<\sqrt{6}<3$이므로 $-3<-\sqrt{6}<-2$
$\therefore -1<2-\sqrt{6}<0$
또 $3<\sqrt{15}<4$이므로 $8<5+\sqrt{15}<9$
따라서 $2-\sqrt{6}$보다 크고 $5+\sqrt{15}$보다 작은 정수는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 9개이다.

STEP 2 고난도 문제 ▶20~24쪽

01 29	**02** $\sqrt{10}$ cm	**03** ③	**04** $\frac{1}{5}$	
05 $(\sqrt{5}, 0)$	**06** 337	**07** $2x-y$	**08** ③	**09** 0
10 ③	**11** $-3\le a\le 1$	**12** 625	**13** $\frac{1}{9}$	**14** 7
15 19	**16** $a=84$, $b=112$	**17** 27		
18 a^2, a, $\sqrt{a}$, $\sqrt{\frac{1}{a}}$, $\frac{1}{a}$		**19** $\frac{8}{21}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{11}{21}$, $\frac{13}{21}$		
20 20	**21** 9	**22** 367	**23** ②	**24** 75	**25** $\frac{7}{9}$
26 ④	**27** $6+\sqrt{5}$	**28** 178	**29** ⑤	**30** 9

01 답 29

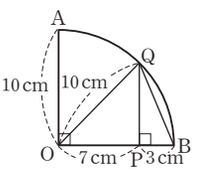
$1.0\dot{5}\times\frac{a}{b}=(2.\dot{1})^2$에서 $\frac{95}{90}\times\frac{a}{b}=\left(\frac{19}{9}\right)^2$
$\therefore \frac{a}{b}=\frac{19^2}{9^2}\times\frac{18}{19}=\frac{38}{9}$
따라서 $a=38$, $b=9$이므로
$a-b=38-9=29$

02 답 $\sqrt{10}$ cm

처음 정사각형의 넓이는 $(\sqrt{160})^2=160(\text{cm}^2)$이고, 정사각형을 한 번 접으면 그 넓이는 이전 단계 정사각형의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로 [1단계]에서 [4단계]까지 생기는 정사각형의 넓이는 각각 다음과 같다.
[1단계]: $160\times\frac{1}{2}=80(\text{cm}^2)$, [2단계]: $80\times\frac{1}{2}=40(\text{cm}^2)$,
[3단계]: $40\times\frac{1}{2}=20(\text{cm}^2)$, [4단계]: $20\times\frac{1}{2}=10(\text{cm}^2)$
따라서 [4단계]에서 생기는 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{10}$ cm이다.

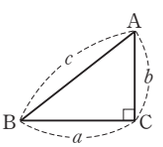
03 답 ③

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OQ}$를 그으면
$\overline{OQ}=\overline{OA}=10$ cm
$\overline{PB}=\overline{OB}-\overline{OP}=10-7=3(\text{cm})$
△OPQ에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{PQ}=\sqrt{10^2-7^2}=\sqrt{51}(\text{cm})$
△BQP에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{BQ}=\sqrt{3^2+(\sqrt{51})^2}=\sqrt{60}(\text{cm})$



개념 NOTE

피타고라스 정리를 이용하여 직각삼각형의 한 변의 길이 구하기
오른쪽 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여 $c^2=a^2+b^2$이므로
➡ $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ($\because c>0$)
$a=\sqrt{c^2-b^2}$ ($\because a>0$)
$b=\sqrt{c^2-a^2}$ ($\because b>0$)

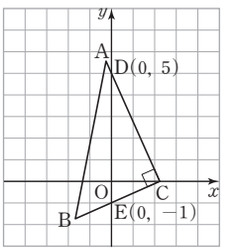


04 답 $\frac{1}{5}$

$$\sqrt{\frac{25^{17}+5^{24}}{125^{12}+25^{13}}}=\sqrt{\frac{(5^2)^{17}+5^{24}}{(5^3)^{12}+(5^2)^{13}}}=\sqrt{\frac{5^{34}+5^{24}}{5^{36}+5^{26}}}$$
$$=\sqrt{\frac{5^{24}(5^{10}+1)}{5^{26}(5^{10}+1)}}=\sqrt{\frac{1}{5^2}}=\frac{1}{5}$$

05 답 $(\sqrt{5}, 0)$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$가 y축과 만나는 점을 D, $\overline{BC}$가 y축과 만나는 점을 E라 하면 $\overline{OD}=5$, $\overline{OE}=1$
이때 △DOC와 △COE에서
$\angle DOC=\angle COE=90^\circ$,
$\angle OCD=90^\circ-\angle OCE$
$=\angle OEC$



이므로 △DOC∽△COE(AA 닮음)
즉, $\overline{OC}:\overline{OE}=\overline{DO}:\overline{CO}$에서
$\overline{CO}^2=\overline{OD}\times\overline{OE}=5\times1=5$ $\therefore \overline{CO}=\pm\sqrt{5}$
이때 $\overline{CO}>0$이므로 $\overline{CO}=\sqrt{5}$
따라서 점 C의 좌표는 $(\sqrt{5}, 0)$이다.

다른 풀이
△DOC에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{CD}^2=5^2+\overline{CO}^2$
△OEC에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{CE}^2=1^2+\overline{CO}^2$
△DEC에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{DE}^2=\overline{CD}^2+\overline{CE}^2$, $6^2=25+\overline{CO}^2+1+\overline{CO}^2$
$2\overline{CO}^2=10$, $\overline{CO}^2=5$ $\therefore \overline{CO}=\pm\sqrt{5}$
이때 $\overline{CO}>0$이므로 $\overline{CO}=\sqrt{5}$
따라서 점 C의 좌표는 $(\sqrt{5}, 0)$이다.

06 답 337
㈎에서 $\sqrt{a_1}$, $\sqrt{a_2}$, $\sqrt{a_3}$, $\sqrt{a_4}$, $\sqrt{a_5}$가 자연수이므로 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5는 모두 제곱인 수이다.
㈏, ㈐에서 $a_1=4$, $a_2=9$, $a_3=16$
이때 $a_2=\sqrt{a_4}$, $a_3=\sqrt{a_5}$이므로
$\sqrt{a_4}=9$, $\sqrt{a_5}=16$
따라서 $a_4=81$, $a_5=256$이므로
$a_4+a_5=81+256=337$

07 답 $2x-y$
$xy<0$이므로 x, y의 부호는 서로 다르다.
$x+y<0$, $|x|>|y|$이므로 $x<0$, $y>0$
$\therefore \sqrt{9x^2}-\sqrt{(2y)^2}+\sqrt{(-y)^2}-|5x|$
$=\sqrt{(3x)^2}-\sqrt{(2y)^2}+\sqrt{(-y)^2}-|5x|$
$=-3x-2y+\{-(-y)\}-(-5x)$
$=-3x-2y+y+5x$
$=2x-y$

08 답 ③
㈎에서 $b<c<a$이므로 $c-b>0$, $b-a<0$
㈏에서 $c(b-a)<0$이고 $b-a<0$이므로 $c>0$
이때 $c<a$이므로 $a>0$
㈐에서 $ac+b=0$이고 $a>0$, $c>0$이므로 $b=-ac<0$
$\therefore \sqrt{(c-b)^2}-\sqrt{4b^2}-\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(b-a)^2}$
$=\sqrt{(c-b)^2}-\sqrt{(2b)^2}-\sqrt{(-a)^2}+\sqrt{(b-a)^2}$
$=c-b-(-2b)-\{-(-a)\}+\{-(b-a)\}$
$=c-b+2b-a-b+a=c$

09 답 0
$-1<x<0$에서 $\frac{1}{x}<-1$이므로 $\frac{1}{x}<-1<x<0$
따라서 $x+\frac{1}{x}<0$, $x-\frac{1}{x}>0$이므로
$\sqrt{4x^2}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}$
$=\sqrt{(2x)^2}-\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}+\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}$
$=-2x-\left\{-\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}+x-\frac{1}{x}$
$=-2x+x+\frac{1}{x}+x-\frac{1}{x}$
$=0$

10 답 ③
ㄱ. $x<-1$이면 $1-x>0$, $x+1<0$이므로
$A=1-x-\{-(x+1)\}=1-x+x+1=2$
ㄴ. $-1<x<1$이면 $1-x>0$, $x+1>0$이므로
$A=1-x-(x+1)=1-x-x-1=-2x$
ㄷ. $x>1$이면 $1-x<0$, $x+1>0$이므로
$A=-(1-x)-(x+1)=-1+x-x-1=-2$
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11 답 $-3\le a\le1$
(i) $a\ge1$일 때,
$a+3>0$, $a-1\ge0$이므로
$\sqrt{(a+3)^2}+\sqrt{(a-1)^2}=a+3+a-1=2a+2$
즉, $2a+2=4$이므로 $a=1$
이때 $a\ge1$이므로 $a=1$은 조건을 만족시킨다.
(ii) $-3\le a<1$일 때,
$a+3\ge0$, $a-1<0$이므로
$\sqrt{(a+3)^2}+\sqrt{(a-1)^2}=a+3-(a-1)=4$
즉, $-3\le a<1$은 a의 값의 범위가 될 수 있다.
(iii) $a<-3$일 때,
$a+3<0$, $a-1<0$이므로
$\sqrt{(a+3)^2}+\sqrt{(a-1)^2}=-(a+3)-(a-1)=-2a-2$
즉, $-2a-2=4$이므로 $a=-3$
이때 $a<-3$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.
(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위는
$-3\le a\le1$

12 답 625
$\sqrt{25^2}<\sqrt{629}<\sqrt{26^2}$이므로 $25<x<26$
$\therefore \sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}+\cdots+\sqrt{(x-49)^2}+\sqrt{(x-50)^2}$
$=x-1+x-2+x-3+\cdots+x-25$
$\quad-(x-26)-(x-27)-(x-28)-\cdots-(x-50)$
$=-1-2-3-\cdots-25+26+27+28+\cdots+50$
$=(-1+26)+(-2+27)+\cdots+(-25+50)$
$=\underbrace{25+25+\cdots+25}_{25개}$
$=25\times25=625$

13 답 $\frac{1}{9}$

모든 경우의 수는 $6\times6=36$

$\sqrt{180ab}=\sqrt{2^2\times3^2\times5\times ab}$가 자연수가 되려면 $ab=5\times(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 한다. 이때 a, b는 주사위의 눈의 수이므로 $1\le ab\le36$이다.

$\therefore ab=5\times1^2,\ 5\times2^2$

(i) $ab=5\times1^2$일 때,

a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 5)$, $(5, 1)$의 2가지

(ii) $ab=5\times2^2$일 때,

a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(5, 4)$, $(4, 5)$의 2가지

(i), (ii)에서 $\sqrt{180ab}$가 자연수가 되는 경우의 수는 $2+2=4$이므로 구하는 확률은

$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

14 답 7

$1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10$

$=1\times2\times3\times2^2\times5\times(2\times3)\times7\times2^3\times3^2\times(2\times5)$

$=2^8\times3^4\times5^2\times7$

$=(2^4\times3^2\times5)^2\times7$

따라서 $\sqrt{\frac{(2^4\times3^2\times5)^2\times7}{n}}$이 자연수가 되도록 하는 가장 작은 자연수 n의 값은 7이다.

15 답 19

$\sqrt{200+a}-\sqrt{150-b}$가 가장 작은 정수가 되려면 $\sqrt{200+a}$는 가장 작은 자연수이고, $\sqrt{150-b}$는 가장 큰 자연수이어야 한다.

$\sqrt{200+a}$가 가장 작은 자연수가 되려면 $200+a$가 200보다 큰 $(\text{자연수})^2$ 꼴인 수 중 가장 작은 수이어야 하므로

$200+a=225$ $\therefore a=25$

$\sqrt{150-b}$가 가장 큰 자연수가 되려면 $150-b$가 150보다 작은 $(\text{자연수})^2$ 꼴인 수 중 가장 큰 수이어야 하므로

$150-b=144$ $\therefore b=6$

$\therefore a-b=25-6=19$

16 답 $a=84$, $b=112$

$a:b=3:4$이므로 $a=3k$, $b=4k$(k는 자연수)라 하자.

$\sqrt{a+b}=\sqrt{7k}$가 자연수가 되려면 $k=7\times(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 한다.

즉, $k=7\times1^2,\ 7\times2^2,\ 7\times3^2,\ 7\times4^2,\ \cdots$

이때 $3k$는 두 자리의 자연수이고 $4k$는 세 자리의 자연수이므로

$k=7\times2^2=28$

$\therefore a=3\times28=84,\ b=4\times28=112$

17 답 27

배추밭의 한 변의 길이는 $\sqrt{24n}$이고, $\sqrt{24n}=\sqrt{2^3\times3\times n}$이 자연수가 되려면 $n=2\times3\times(\text{자연수})^2=6\times(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 한다.

$\therefore n=6,\ 24,\ 54,\ 96,\ \cdots$ ····· ㉠

상추밭의 한 변의 길이는 $\sqrt{87-n}$이고, $\sqrt{87-n}$이 자연수가 되려면 $87-n$은 87보다 작은 $(\text{자연수})^2$ 꼴인 수이어야 한다.

$87-n=1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81$

$\therefore n=86,\ 83,\ 78,\ 71,\ 62,\ 51,\ 38,\ 23,\ 6$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $n=6$

따라서

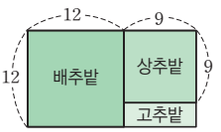
(배추밭의 한 변의 길이)$=\sqrt{2^3\times3\times6}=\sqrt{2^4\times3^2}=12$,

(상추밭의 한 변의 길이)$=\sqrt{87-6}=\sqrt{81}=9$

이므로 오른쪽 그림에서

(고추밭의 넓이)$=9\times(12-9)$

$=27$



18 답 a^2, a, $\sqrt{a}$, $\sqrt{\frac{1}{a}}$, $\frac{1}{a}$

$0<a<1$이므로 $a^2<a$

즉, $a^2<a<1$이므로

$a<\sqrt{a}<1,\ 1<\frac{1}{a}<\frac{1}{a^2}$

이때 $1<\frac{1}{a}<\frac{1}{a^2}$에서 $1<\sqrt{\frac{1}{a}}<\frac{1}{a}$

$\therefore a^2<a<\sqrt{a}<\sqrt{\frac{1}{a}}<\frac{1}{a}$

따라서 작은 것부터 차례로 나열하면

a^2, a, $\sqrt{a}$, $\sqrt{\frac{1}{a}}$, $\frac{1}{a}$

다른 풀이

$0<a<1$이므로 $a=\frac{1}{9}$이라 하면

$\sqrt{a}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$, $\frac{1}{a}=9$, $\sqrt{\frac{1}{a}}=\sqrt{9}=3$, $a^2=\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{1}{81}$이므로

$a^2<a<\sqrt{a}<\sqrt{\frac{1}{a}}<\frac{1}{a}$

19 답 $\frac{8}{21}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{11}{21}$, $\frac{13}{21}$

구하는 기약분수를 $\frac{x}{21}$(x는 자연수)라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{7}<\frac{x}{21}<\frac{\sqrt{5}}{3}$ ····· ❶

각 변을 제곱하면

$\left(\frac{\sqrt{3}}{7}\right)^2<\left(\frac{x}{21}\right)^2<\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2$

$\frac{3}{49}<\frac{x^2}{441}<\frac{5}{9}$ $\therefore 27<x^2<245$

이 식을 만족시키는 자연수 x는 6, 7, 8, ..., 15이다. ····· ❷

따라서 구하는 기약분수는 $\frac{8}{21}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{11}{21}$, $\frac{13}{21}$이다. ····· ❸

채점 기준	
❶ 구하는 기약분수를 x를 사용한 식으로 나타내고 부등식 세우기	30 %
❷ 부등식을 만족시키는 x의 값 구하기	50 %
❸ 조건을 만족시키는 기약분수 구하기	20 %

20 답 20

$\sqrt{1}=1$, $\sqrt{4}=2$, $\sqrt{9}=3$, $\sqrt{16}=4$, $\sqrt{25}=5$, …이고 $f(x)$는 $\sqrt{x}$ 이하의 자연수의 개수이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=1$,

$f(4)=f(5)=\cdots=f(8)=2$,

$f(9)=f(10)=\cdots=f(15)=3$,

$f(16)=f(17)=\cdots=f(24)=4$

이때 $f(1)+f(2)+\cdots+f(15)=1\times3+2\times5+3\times7=34$이고

$x=16, 17, \ldots, 24$일 때, $f(x)=4$이므로

$f(1)+f(2)+\cdots+f(15)+f(16)+\cdots+f(20)$

$=34+4\times5=54$

$\hookrightarrow 54-34=20$이므로 $f(x)=4$인 $f(x)$가 5개 더 필요하다.

따라서 주어진 식을 만족시키는 자연수 n의 값은 20이다.

21 답 9

$\sqrt{7a}+\sqrt{b}=11$에서 $\sqrt{7a}$와 $\sqrt{b}$는 모두 자연수이어야 하므로 $7a$와 b는 모두 (자연수)^2 꼴인 수이어야 한다.

이때 $7a$는 $11^2=121$보다 작은 (자연수)^2 꼴인 수이어야 하므로

$a=7$

$\sqrt{7\times7}+\sqrt{b}=11$에서 $\sqrt{b}=11-7=4$ $\therefore b=16$

따라서 $\sqrt{2a^2-b}=\sqrt{2\times7^2-16}=\sqrt{82}$이고, $\sqrt{81}<\sqrt{82}<\sqrt{100}$에서 $9<\sqrt{82}<10$이므로 $\sqrt{82}$보다 작은 자연수의 개수는 9이다.

22 답 367

(i) $\sqrt{3n}$이 유리수가 되는 경우

$n=3k^2$ (k는 자연수) 꼴이어야 하므로

$3k^2\le400$, 즉 $k^2\le\frac{400}{3}=133.333\cdots$

이때 k가 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, …, 11이므로 400 이하의 자연수 n은 3×1^2, 3×2^2, 3×3^2, …, 3×11^2의 11개이다.

(ii) $\sqrt{5n}$이 유리수가 되는 경우

$n=5p^2$ (p는 자연수) 꼴이어야 하므로

$5p^2\le400$, 즉 $p^2\le80$

이때 p가 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, …, 8이므로 400 이하의 자연수 n은 5×1^2, 5×2^2, 5×3^2, …, 5×8^2의 8개이다.

(iii) $\sqrt{18n}=\sqrt{2\times3^2\times n}$이 유리수가 되는 경우

$n=2q^2$ (q는 자연수) 꼴이어야 하므로

$2q^2\le400$, 즉 $q^2\le200$

이때 q가 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, …, 14이므로 400 이하의 자연수 n은 2×1^2, 2×2^2, 2×3^2, …, 2×14^2의 14개이다.

(i), (ii), (iii)에서 구한 n의 값은 중복되지 않으므로 $\sqrt{3n}$, $\sqrt{5n}$, $\sqrt{18n}$이 모두 무리수가 되도록 하는 400 이하의 자연수 n의 개수는

$400-(11+8+14)=367$

23 답 ②

ㄱ. (유리수)±(유리수)=(유리수)이므로

유리수 x, y에 대하여

$y-x\ne\sqrt{2}$ $\therefore y\ne x+\sqrt{2}$

ㄴ. 직선 $y=\sqrt{2}x$는 점 (0, 0)을 지난다.

ㄷ. $x=0$일 때, $xy=1$을 만족시키는 y는 존재하지 않는다.

ㄹ. 임의의 무리수 x에 대하여 $\frac{1}{x}$이 항상 존재하고 $x\times\frac{1}{x}=1$이므로

$xy=1$을 만족시키는 무리수 $y=\frac{1}{x}$이 존재한다.

ㅁ. x가 유리수이고 y가 무리수이면 x^2은 유리수, $-y$는 무리수이므로 x^2-y는 무리수이다.

ㅂ. $x=2$, $y=\sqrt{2}$이면 $\sqrt{x}-y=0$ (유리수)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ의 3개이다.

비법 NOTE

다음 식의 계산 결과는 항상 무리수이다.

(1) (유리수)±(무리수) 또는 (무리수)±(유리수)

(2) (0이 아닌 유리수)×(무리수)

(3) $\frac{\text{(0이 아닌 유리수)}}{\text{(무리수)}}$

(4) $\frac{\text{(무리수)}}{\text{(0이 아닌 유리수)}}$

24 답 75

$a.\dot{b}=\frac{10a+b-a}{9}=\frac{9a+b}{9}$이므로

$\sqrt{a.\dot{b}}=\sqrt{\frac{9a+b}{9}}=\frac{\sqrt{9a+b}}{3}$

$\frac{\sqrt{9a+b}}{3}$가 유리수가 되려면 $9a+b$가 (자연수)^2 꼴인 수이어야 한다.

이때 a와 b는 한 자리의 자연수이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는 (1, 7), (2, 7), (3, 9), (5, 4), (7, 1), (8, 9)의 6개이다.

한 자리의 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 전체 개수는 $9\times9=81$이므로 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$81-6=75$

25 답 $\frac{7}{9}$

모든 경우의 수는 $6\times6=36$

(i) $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$인 경우

a, b의 순서쌍 (a, b)는 (1, 1), (2, 2), …, (6, 6)의 6가지

(ii) $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$가 모두 유리수인 경우

a, b의 순서쌍 (a, b)는 (1, 1), (1, 4), (4, 1), (4, 4)이고, $a=b$인 경우를 제외하면 2가지

(i), (ii)에서 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$가 유리수인 경우의 수는 $6+2=8$이므로 구하는 확률은

$1-\frac{8}{36}=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

다른 풀이

모든 경우의 수는 $6\times6=36$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}$가 무리수인 경우를 다음과 같이 나누어 생각한다.

(i) $\sqrt{a}$가 무리수이고, $\sqrt{b}$가 유리수인 경우

$a=2, 3, 5, 6$이고 $b=1, 4$이므로

$4\times2=8$(가지)

(ii) $\sqrt{a}$가 유리수이고, $\sqrt{b}$가 무리수인 경우

$a=1$, 4이고 $b=2$, 3, 5, 6이므로

$2\times4=8$(가지)

(iii) $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$가 모두 무리수인 경우

$a=2$, 3, 5, 6이고 $b=2$, 3, 5, 6이므로

$4\times4=16$(가지)

그런데 $a=b$이면 $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$으로 유리수이므로

$a=b$인 4가지 경우를 제외하면

$16-4=12$(가지)

(i), (ii), (iii)에서 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$가 무리수인 경우의 수는 $8+8+12=28$이므로 구하는 확률은

$\frac{28}{36}=\frac{7}{9}$

26 답 ④

$\overline{AP}=\overline{AC}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 $p=a+\sqrt{2}$

ㄱ. $a=p-\sqrt{2}$에서 p가 유리수이면 (유리수)$-\sqrt{2}$=(무리수)이므로 a는 무리수이고, (무리수)$+1$=(무리수)이므로 b도 무리수이다.

ㄴ. $p=\sqrt{5}+\sqrt{2}$이면 $a=\sqrt{5}$, $b=1+\sqrt{5}$

즉, p가 무리수일 때 a, b가 모두 무리수인 경우도 있다.

ㄷ. b가 유리수이면 (유리수)-1=(유리수)이므로 a는 유리수이고, (유리수)$+\sqrt{2}$=(무리수)이므로 p는 무리수이다.

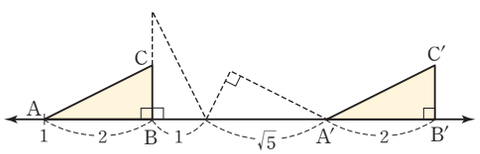
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

27 답 $6+\sqrt{5}$

△ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AC}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$

이때 △ABC는 다음 그림과 같이 이동한다.



따라서 점 B′에 대응하는 수는

$1+2+1+\sqrt{5}+2=6+\sqrt{5}$

28 답 178

$\langle1, 2\rangle=2=2\times1$

$\langle2, 3\rangle=4=2\times2$

$\langle3, 4\rangle=6=2\times3$

$\langle4, 5\rangle=8=2\times4$

⋮

즉, $\langle n, n+1\rangle=2\times n$이므로

$\langle89, 90\rangle=2\times89=178$

다른 풀이

$89=\sqrt{89^2}=\sqrt{7921}$, $90=\sqrt{90^2}=\sqrt{8100}$이므로

$\langle89, 90\rangle=8100-7921-1=178$

29 답 ⑤

$a+b=5+(\sqrt{37}-1)=4+\sqrt{37}>0$

$a-b=5-(\sqrt{37}-1)=6-\sqrt{37}=\sqrt{36}-\sqrt{37}<0$

$\therefore \sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{(a-b)^2}=a+b-\{-(a-b)\}$

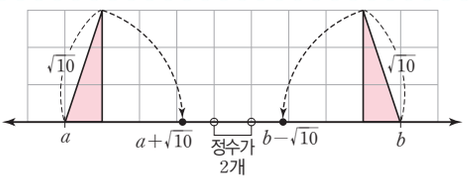
$=a+b+a-b=2a$

$=2\times5=10$

30 idea 답 9

한 눈금의 길이가 1인 모눈종이 위에 직각삼각형과 수직선을 그려 구한다.

$3<\sqrt{10}<4$이므로 $a+\sqrt{10}$과 $b-\sqrt{10}$을 빗변의 길이가 $\sqrt{10}$인 직각삼각형을 이용하여 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



위의 그림에서 a와 $a+\sqrt{10}$ 사이에 있는 정수는 3개,

$a+\sqrt{10}$과 $b-\sqrt{10}$ 사이에 있는 정수는 2개,

$b-\sqrt{10}$과 b 사이에 있는 정수는 3개이므로

두 정수 a, b 사이에 있는 정수는 모두 $3+2+3=8$(개)이다.

따라서 $b-a-1=8$이므로

$b-a=9$

다른 풀이

$3<\sqrt{10}<4$이므로 $a+3<a+\sqrt{10}<a+4$

또 $-4<-\sqrt{10}<-3$이므로 $b-4<b-\sqrt{10}<b-3$

$\therefore a+\sqrt{10}<a+4\le n\le b-4<b-\sqrt{10}$

이 식을 만족시키는 정수 n이 2개이므로

$b-4-(a+4)+1=2$

$\therefore b-a=9$

STEP 3 최고난도 문제 ▶25쪽

01 22 **02** 3 **03** ㄱ, ㄴ **04** 75 **05** 168 **06** 78

01 답 22

직선 $y=\sqrt{2}x$는 자연수 n에 대하여 점 $(n, n\sqrt{2})$를 지난다.

직선 $y=\sqrt{2}x$가 점들을 지나려면 y좌표가 $\sqrt{1000}$보다 작아야 하므로

$n\sqrt{2}\le\sqrt{1000}$의 양변을 제곱하면

$2n^2\le1000$, $n^2\le500$

이때 n은 자연수이므로 $1\le n\le22$

따라서 직선 $y=\sqrt{2}x$가 지나는 점의 개수는 22이다.

02 답 3

$\sqrt{18n}=\sqrt{3^2\times 2n}$이므로 $\langle\sqrt{18n}\rangle=\langle\sqrt{2n}\rangle$

$\sqrt{8n}=\sqrt{2^2\times 2n}$이므로 $\langle\sqrt{8n}\rangle=\langle\sqrt{2n}\rangle$ …… ❶

즉, $\langle\sqrt{18n}\rangle+\langle\sqrt{8n}\rangle=\langle\sqrt{2n}\rangle+\langle\sqrt{2n}\rangle$

$=2\times\langle\sqrt{2n}\rangle=6$

$\therefore \langle\sqrt{2n}\rangle=3$ …… ❷

즉, $\sqrt{6n}$이 유리수이므로 n은 $6\times$(자연수)^2 꼴인 수이어야 한다.

$\therefore n=6\times 1^2,\ 6\times 2^2,\ 6\times 3^2,\ 6\times 4^2,\ 6\times 5^2,\ \cdots$

따라서 두 자리의 자연수 n은 24, 54, 96의 3개이다. …… ❸

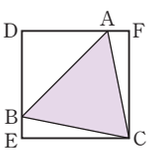
채점 기준	
❶ $\langle\sqrt{18n}\rangle=\langle\sqrt{8n}\rangle=\langle\sqrt{2n}\rangle$임을 알기	40 %
❷ $\langle\sqrt{2n}\rangle$의 값 구하기	40 %
❸ 두 자리의 자연수 n의 개수 구하기	20 %

참고 $\langle\sqrt{k^2n}\rangle=\langle\sqrt{n}\rangle$이므로

$\langle\sqrt{18n}\rangle=\langle\sqrt{3^2\times 2n}\rangle=\langle\sqrt{2n}\rangle$, $\langle\sqrt{8n}\rangle=\langle\sqrt{2^2\times 2n}\rangle=\langle\sqrt{2n}\rangle$

03 Idea 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. 삼각형은 외접하는 직사각형이 항상 존재하므로 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC=\square DECF-(\triangle ADB+\triangle BEC+\triangle CFA)$

이때 (유리수)−(유리수)=(유리수)이므로 삼각형의 넓이는 항상 유리수이다.

ㄴ. 임의의 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{\text{(자연수)}}$ 꼴이므로 정사각형의 넓이는 항상 정수이다.

ㄷ. 임의의 오각형은 한 꼭짓점에서 그은 대각선에 의해 3개의 삼각형으로 나누어지므로 ㄱ에 의하여 오각형의 넓이는 항상 유리수이다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04 답 75

$5.5\le\sqrt{\frac{y}{x}}<6.5$이므로

$\frac{11}{2}\le\sqrt{\frac{y}{x}}<\frac{13}{2}$

각 변을 제곱하면

$\left(\frac{11}{2}\right)^2\le\left(\sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2<\left(\frac{13}{2}\right)^2$

$\therefore \frac{121}{4}\le\frac{y}{x}<\frac{169}{4}$ …… ㉠

이때 $\frac{y}{x}>1$이므로 $y>x$에서 $x-y<0$

$\sqrt{(x-y)^2}=71$에서

$-(x-y)=71,\ -x+y=71$

$\therefore y=x+71$

㉠에 $y=x+71$을 대입하면

$\frac{121}{4}\le\frac{x+71}{x}<\frac{169}{4},\ \frac{121}{4}\le 1+\frac{71}{x}<\frac{169}{4}$

$\frac{117}{4}\le\frac{71}{x}<\frac{165}{4},\ \frac{4}{165}<\frac{x}{71}\le\frac{4}{117}$

$\therefore 1.72\cdots<x\le 2.42\cdots$

이때 x는 자연수이므로 $x=2$

따라서 $y=73$이므로 $x+y=2+73=75$

05 답 168

연속하는 세 짝수 a, b, c를 $a=m-2$, $b=m$, $c=m+2$(m은 2보다 큰 짝수)라 하면

$a+b+c=(m-2)+m+(m+2)=3m<400$ …… ㉠

$\sqrt{a+b+c}=\sqrt{3m}$이 자연수가 되어야 하므로 $m=3k^2$(k는 자연수) 꼴이어야 한다.

이때 ㉠에서 $3m=3\times 3k^2=9k^2<400$

$\therefore k^2<\frac{400}{9}=44.444\cdots$

즉, k^2의 값이 될 수 있는 수는 1, 4, 9, 16, 25, 36이고, $m=3k^2$이므로 m의 값은 3, 12, 27, 48, 75, 108 중에서 짝수인 12, 48, 108이다.

따라서 모든 b의 값의 합은

$12+48+108=168$

06 답 78

네 자리의 자연수 A의 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 각각 a, b, c, d($ad\neq 0$)라 하면

$A=1000a+100b+10c+d$, $B=1000d+100c+10b+a$이므로

$A-B=(1000a+100b+10c+d)-(1000d+100c+10b+a)$

$=999(a-d)+90(b-c)$

$=9\{111(a-d)+10(b-c)\}$

$\therefore \sqrt{A-B}=\sqrt{3^2\{111(a-d)+10(b-c)\}}$

$\sqrt{3^2\{111(a-d)+10(b-c)\}}$가 자연수이므로 근호 안의 수는 제곱인 수이다.

즉, $111(a-d)+10(b-c)=k^2$(k는 자연수) …… ㉠

$ad\neq 0$이고, a, d는 한 자리의 자연수이고, b, c는 $0\le b$, $c\le 9$인 정수이므로

$-8\le a-d\le 8,\ -9\le b-c\le 9$

그런데 ㉠에서 $a-d<0$이면 좌변이 음수가 되므로

$0\le a-d\le 8$

$\therefore a-d=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ …… ㉡

이때 $a-d$는 k^2의 일의 자리의 숫자이고, 제곱인 수의 일의 자리의 숫자는 0, 1, 4, 5, 6, 9뿐이므로 ㉡의 값 중에서 k^2이 최댓값을 가질 때의 $a-d$의 값은 6이다.

$\therefore k^2=111(a-d)+10(b-c)=666+10(b-c)$

이때 $-9\le b-c\le 9$이므로

$576(=24^2)\le 666+10(b-c)\le 756<784(=28^2)$

즉, $k^2=24^2$, 25^2, 26^2, 27^2인데 이 중 일의 자리의 숫자가 6인 k^2의 최댓값은 26^2이다.

$\therefore \sqrt{A-B}=\sqrt{3^2\{111(a-d)+10(b-c)\}}$

$\le\sqrt{3^2\times 26^2}=3\times 26=78$

따라서 구하는 최댓값은 78이다.

02 근호를 포함한 식의 계산

STEP 1 핵심 문제

▶ 26~27쪽

01 ③ **02** ③ **03** ③ **04** $\frac{1}{6}$ **05** $\frac{5\sqrt{30}}{3}$ **06** ⑤

07 ③ **08** $\frac{2}{5}$ **09** $\frac{5\sqrt{21}}{3}-3\sqrt{7}$ **10** $-10+\sqrt{5}$

11 $-\frac{1}{2}$, $-\frac{9}{2}$ **12** $38+6\sqrt{70}$

01 답 ③

ㄱ. $100\sqrt{a}=\sqrt{10000a}$

ㄴ. $\sqrt{a^3}\sqrt{b}=a\sqrt{a}\sqrt{b}=a\sqrt{ab}$

ㄷ. $\sqrt{0.001a}=\sqrt{\frac{a}{1000}}=\sqrt{\frac{10a}{10000}}=\frac{\sqrt{10a}}{100}$

ㄹ. $a>0$이므로 $\sqrt{(-a)^2b}=\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

02 답 ③

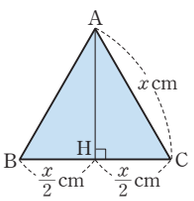
$\sqrt{0.025}=\sqrt{\frac{250}{10000}}=\frac{5\sqrt{10}}{100}=\frac{\sqrt{10}}{20}=\frac{1}{20}b$

$\sqrt{1200}=\sqrt{400\times3}=20\sqrt{3}=20a$

$\therefore \sqrt{0.025}+\sqrt{1200}=\frac{1}{20}b+20a=20a+\frac{1}{20}b$

03 답 ③

오른쪽 그림과 같은 정삼각형 ABC의 점 A에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{AC}=x$ cm라 하면



△AHC에서

$\overline{AH}=\sqrt{x^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$(cm)

이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times x\times\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$(cm^2)

즉, $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=4\sqrt{3}$이므로

$x^2=4\sqrt{3}\times\frac{4}{\sqrt{3}}=16$ $\therefore x=\pm4$

이때 $x>0$이므로 $x=4$

따라서 구하는 둘레의 길이는 $3\times4=12$(cm)

04 답 $\frac{1}{6}$

$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$이므로 $a=\frac{2}{5}$

$\frac{5}{\sqrt{48}}=\frac{5}{4\sqrt{3}}=\frac{5\times\sqrt{3}}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{12}$이므로 $b=\frac{5}{12}$

$\therefore ab=\frac{2}{5}\times\frac{5}{12}=\frac{1}{6}$

05 답 $\frac{5\sqrt{30}}{3}$

(직사각형의 넓이)$=5\sqrt{2}\times3\sqrt{5}=15\sqrt{10}$

(삼각형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times6\sqrt{3}\times x=3\sqrt{3}x$

이때 두 도형의 넓이가 같으므로 $15\sqrt{10}=3\sqrt{3}x$

$\therefore x=\frac{15\sqrt{10}}{3\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{10}}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{10}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{30}}{3}$

06 답 ⑤

① $\sqrt{4.33}=2.081$

② $\sqrt{40200}=\sqrt{4.02\times10000}=100\sqrt{4.02}=100\times2.005=200.5$

③ $\sqrt{0.00042}=\sqrt{\frac{4.2}{10000}}=\frac{\sqrt{4.2}}{100}=\frac{2.049}{100}=0.02049$

④ $\sqrt{1688}=\sqrt{400\times4.22}=20\sqrt{4.22}=20\times2.054=41.08$

⑤ $\sqrt{36900}=\sqrt{900\times41}=30\sqrt{41}$

따라서 그 값을 구할 수 없는 것은 ⑤이다.

07 답 ③

$(1+2\sqrt{2})a-(-1+\sqrt{2})b=a+2\sqrt{2}a+b-\sqrt{2}b$

$=a+b+(2a-b)\sqrt{2}$

$=5+7\sqrt{2}$

이때 a, b는 유리수이므로 $a+b=5$, $2a-b=7$

두 식을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=1$

$\therefore a-b=4-1=3$

08 답 $\frac{2}{5}$

$f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(49)$

$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{49}}-\frac{1}{\sqrt{50}}\right)$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{5\sqrt{2}}$

$=\frac{5\sqrt{2}}{10}-\frac{\sqrt{2}}{10}=\frac{4\sqrt{2}}{10}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$

따라서 $a\sqrt{2}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$이므로 $a=\frac{2}{5}$

09 답 $\frac{5\sqrt{21}}{3}-3\sqrt{7}$

$\frac{2\sqrt{7}+\sqrt{21}}{\sqrt{3}}-\sqrt{7}\left(4-\frac{6}{\sqrt{12}}\right)=\frac{(2\sqrt{7}+\sqrt{21})\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}-4\sqrt{7}+\frac{6\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$

$=\frac{2\sqrt{21}+3\sqrt{7}}{3}-4\sqrt{7}+\frac{3\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$=\frac{2\sqrt{21}}{3}+\sqrt{7}-4\sqrt{7}+\sqrt{21}$

$=\frac{5\sqrt{21}}{3}-3\sqrt{7}$

10 답 $-10+\sqrt{5}$

정사각형 PQRS의 넓이가 5이므로 한 변의 길이는 $\sqrt{5}$이다.

$\overline{RA}=\overline{RQ}=\sqrt{5}$, $\overline{RB}=\overline{RS}=\sqrt{5}$이므로

$a=-2-\sqrt{5}$, $b=-2+\sqrt{5}$

$\therefore\ 2a+3b=2\times(-2-\sqrt{5})+3\times(-2+\sqrt{5})$
$=-4-2\sqrt{5}-6+3\sqrt{5}$
$=-10+\sqrt{5}$

11 답 $-\frac{1}{2}$, $-\frac{9}{2}$

$\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\frac{a}{\sqrt{2}}\right)-2(2-a\sqrt{6})$
$=\sqrt{6}+a-4+2a\sqrt{6}$
$=a-4+(2a+1)\sqrt{6}$ …… ㉠ …… ❶
이때 유리수가 되려면 $2a+1=0$이어야 하므로
$a=-\frac{1}{2}$ …… ❷
㉠에 $a=-\frac{1}{2}$을 대입하면
$-\frac{1}{2}-4+(-1+1)\times\sqrt{6}=-\frac{9}{2}$ …… ❸

채점 기준

❶ 주어진 식 간단히 하기	40 %
❷ a의 값 구하기	40 %
❸ 식의 값 구하기	20 %

12 답 $38+6\sqrt{70}$

직육면체의 높이를 h라 하면 직육면체의 부피가 $14\sqrt{5}+5\sqrt{14}$이므로
$\sqrt{14}\times\sqrt{5}\times h=14\sqrt{5}+5\sqrt{14}$
$\therefore\ h=\frac{14\sqrt{5}+5\sqrt{14}}{\sqrt{14}\times\sqrt{5}}=\frac{14}{\sqrt{14}}+\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{14}+\sqrt{5}$
$\therefore$ (직육면체의 겉넓이)
$=2\times\{\sqrt{14}\times\sqrt{5}+\sqrt{14}\times(\sqrt{14}+\sqrt{5})+\sqrt{5}\times(\sqrt{14}+\sqrt{5})\}$
$=2\times(\sqrt{70}+14+\sqrt{70}+\sqrt{70}+5)$
$=2\times(19+3\sqrt{70})=38+6\sqrt{70}$

STEP 2 고난도 문제

▶ 28~32쪽

01 -9 **02** ④ **03** 34 **04** 10, 20
05 $\frac{4\sqrt{6}}{15}$ **06** ③ **07** $\frac{\sqrt{14}}{2}$배 **08** 11.4126
09 4 **10** $\frac{503}{40}$ **11** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **12** ⑤ **13** $8+3\sqrt{3}$
14 -1 **15** $x=1+\frac{\sqrt{35}}{19}$, $y=\frac{12}{19}$ **16** $-\frac{1}{2}$ **17** 33
18 $\frac{\sqrt{70}}{5}$ **19** $3\sqrt{14}$ cm, $36\sqrt{14}$ cm^3 **20** $\sqrt{5}\pi$ **21** $12\sqrt{2}$
22 30 **23** $(2+\sqrt{2})\pi$ **24** $70\sqrt{2}$ **25** 578
26 $8-5\sqrt{2}$ **27** ② **28** ③ **29** 다섯 자리
30 6

01 답 -9

$a<0$일 때, $\sqrt{a^2}=-a$이므로 $a=-\sqrt{a^2}$
마찬가지로 $b<0$일 때, $\sqrt{b^2}=-b$이므로 $b=-\sqrt{b^2}$
$\therefore\ a\sqrt{\frac{3b}{a}}+b\sqrt{\frac{12a}{b}}=-\sqrt{a^2}\sqrt{\frac{3b}{a}}-\sqrt{b^2}\sqrt{\frac{12a}{b}}$
$=-\sqrt{a^2\times\frac{3b}{a}}-\sqrt{b^2\times\frac{12a}{b}}$
$=-\sqrt{3ab}-\sqrt{12ab}$
$=-\sqrt{9}-\sqrt{36}$
$=-3-6=-9$

02 답 ④

$\sqrt{0.3}=\sqrt{\frac{3}{10}}=\sqrt{\frac{3^2}{30}}=\frac{3}{\sqrt{30}}=\frac{a^2}{b}$
$\sqrt{0.5}=\sqrt{\frac{5}{10}}=\sqrt{\frac{5^2}{50}}=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{c^2}{d}$
$\therefore\ \sqrt{0.3}+\sqrt{0.5}=\frac{a^2}{b}+\frac{c^2}{d}$

03 답 34

$a\sqrt{b}\sqrt{c}=\sqrt{a^2bc}=\sqrt{1350}=\sqrt{2\times3^3\times5^2}$
이때 b, c의 최대공약수가 5이고 $a\neq1$, $a<b<c$이므로
$a=3^2=9$, $b=2\times5=10$, $c=3\times5=15$
$\therefore\ a+b+c=9+10+15=34$

04 답 10, 20

넓이가 5π인 원의 반지름의 길이를 r라 하면
$\pi r^2=5\pi$, $r^2=5$ $\therefore\ r=\pm\sqrt{5}$
이때 $r>0$이므로 $r=\sqrt{5}$
즉, 내접하는 정사각형의 대각선의 길이는 $2\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$이므로
(내접하는 정사각형의 넓이)$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=10$
또 외접하는 정사각형의 한 변의 길이는 $2\sqrt{5}$이므로
(외접하는 정사각형의 넓이)$=2\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=20$

05 답 $\frac{4\sqrt{6}}{15}$

$\frac{5a+3b}{3a-b}=2$에서 $5a+3b=6a-2b$ $\therefore\ a=5b$
$\frac{\sqrt{32b^2}}{\sqrt{3a^2}}$에 $a=5b$를 대입하면
$\frac{\sqrt{32b^2}}{\sqrt{3a^2}}=\sqrt{\frac{32b^2}{3\times25b^2}}=\frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{6}}{15}$

06 답 ③

(가) $=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}\div\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{3}}=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{12}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{28}}$
$=\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{30}}{4\sqrt{7}}$
$=\frac{\sqrt{30}\times\sqrt{7}}{4\sqrt{7}\times\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{210}}{28}$

07 답 $\frac{\sqrt{14}}{2}$배

지구의 질량을 m kg, 반지름의 길이를 r km라 하면

지구에서 탈출 속력은 $\sqrt{\frac{2Gm}{r}}$ km/s

이때 천왕성의 질량은 $14m$ kg, 반지름의 길이는 $4r$ km이므로 천왕성에서 탈출 속력은 $\sqrt{\frac{2G\times 14m}{4r}}=\sqrt{\frac{7Gm}{r}}$(km/s)

$$\therefore \sqrt{\frac{7Gm}{r}}\div\sqrt{\frac{2Gm}{r}}=\sqrt{\frac{7Gm}{r}\times\frac{r}{2Gm}}$$
$$=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{7}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

따라서 천왕성에서 탈출 속력은 지구에서 탈출 속력의 $\frac{\sqrt{14}}{2}$배이다.

08 답 11.4126

$\sqrt{136}=\sqrt{100\times 1.36}=10\sqrt{1.36}=10\times 1.166=11.66$

$\sqrt{0.0612}=\sqrt{\frac{4\times 1.53}{100}}=\sqrt{\frac{1.53}{25}}=\frac{\sqrt{1.53}}{5}=\frac{1.237}{5}=0.2474$

$\therefore x=\sqrt{136}-\sqrt{0.0612}=11.66-0.2474=11.4126$

09 답 4

주어진 표에서 $234^2=54756$이므로

$(2.34\times 100)^2=54756$, $2.34^2\times 100^2=54756$

$2.34^2=\frac{54756}{100^2}$ $\therefore 2.34^2=5.4756$

같은 방법으로 하면 다음과 같은 표를 얻을 수 있다.

$\frac{a}{100}$	$\frac{a^2}{10000}$
2.34	5.4756
2.35	5.5225
2.36	5.5696
2.37	5.6169
2.38	5.6644

이때 $5.4756<5.5<5.5225$이므로

$2.34<\sqrt{5.5}<2.35$

따라서 $\sqrt{5.5}$를 소수로 나타내었을 때, 소수점 아래 둘째 자리의 숫자는 4이다.

10 답 $\frac{503}{40}$

$$\left(\sqrt{20}-\frac{\sqrt{108}}{\sqrt{15}}\right)^2+\left(\frac{18}{\sqrt{24}}-\sqrt{54}+\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2$$
$$=\left(2\sqrt{5}-\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{15}}\right)^2+\left(\frac{18}{2\sqrt{6}}-3\sqrt{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)^2$$
$$=\left(2\sqrt{5}-\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}-3\sqrt{6}+\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2$$
$$=\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2+\left(-\frac{5\sqrt{6}}{4}\right)^2$$
$$=\frac{16}{5}+\frac{75}{8}=\frac{503}{40}$$

11 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}}}=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}}$$
$$=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}}$$
$$=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{3}{2\sqrt{3}}}$$
$$=\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\sqrt{3}-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$=\sqrt{3}-\frac{2}{\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

12 답 ⑤

$3\sqrt{2}-4=\sqrt{18}-\sqrt{16}>0$이고,

$5-4\sqrt{2}=\sqrt{25}-\sqrt{32}<0$이므로

$\sqrt{(3\sqrt{2}-4)^2}-\sqrt{(5-4\sqrt{2})^2}+\sqrt{(-2)^2}$

$=3\sqrt{2}-4-\{-(5-4\sqrt{2})\}+2$

$=3\sqrt{2}-4+5-4\sqrt{2}+2$

$=3-\sqrt{2}$

따라서 $a=3$, $b=-1$이므로

$a+b=3+(-1)=2$

13 답 $8+3\sqrt{3}$

$A-B=(\sqrt{75}-2)-\sqrt{48}$

$=5\sqrt{3}-2-4\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}-2$

$=\sqrt{3}-\sqrt{4}<0$

$\therefore A<B$

$A-C=(\sqrt{75}-2)-(8-\sqrt{3})$

$=5\sqrt{3}-2-8+\sqrt{3}$

$=6\sqrt{3}-10$

$=\sqrt{108}-\sqrt{100}>0$

$\therefore A>C$

따라서 $C<A<B$이므로 $M=\sqrt{48}$, $m=8-\sqrt{3}$이다.

$\therefore M+m=\sqrt{48}+(8-\sqrt{3})$

$=4\sqrt{3}+8-\sqrt{3}$

$=8+3\sqrt{3}$

14 답 -1

$\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-\sqrt{3}>3\sqrt{2}x-1$에서

$3\sqrt{2}x-2\sqrt{3}x-3\sqrt{2}x>-1+\sqrt{3}$

$-2\sqrt{3}x>-1+\sqrt{3}$

$\therefore x<\dfrac{-1+\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}}=\dfrac{(-1+\sqrt{3})\times\sqrt{3}}{-2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-3}{6}$

이때 $1<\sqrt{3}<2$이므로 $-\dfrac{1}{3}<\dfrac{\sqrt{3}-3}{6}<-\dfrac{1}{6}$

따라서 $x<\dfrac{\sqrt{3}-3}{6}$에서 $\dfrac{\sqrt{3}-3}{6}$이 -1과 0 사이에 있는 수이므로 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값 중 가장 큰 정수는 -1이다.

15 답 $x=1+\dfrac{\sqrt{35}}{19}$, $y=\dfrac{12}{19}$

$\begin{cases}\sqrt{7}x+\sqrt{5}y=\sqrt{7}+\sqrt{5} & \cdots\cdots ㉠\\ \sqrt{5}x-2\sqrt{7}y=\sqrt{5}-\sqrt{7} & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠$\times\sqrt{5}$, ㉡$\times\sqrt{7}$을 하면

$\begin{cases}\sqrt{35}x+5y=\sqrt{35}+5 & \cdots\cdots ㉢\\ \sqrt{35}x-14y=\sqrt{35}-7 & \cdots\cdots ㉣\end{cases}$

㉢$-$㉣을 하면

$19y=12 \quad \therefore y=\dfrac{12}{19}$

$y=\dfrac{12}{19}$를 ㉢에 대입하면

$\sqrt{35}x+\dfrac{60}{19}=\sqrt{35}+5$, $\sqrt{35}x=\sqrt{35}+\dfrac{35}{19}$

$\therefore x=1+\dfrac{\sqrt{35}}{19}$

16 답 $-\dfrac{1}{2}$

$\sqrt{336a}=\sqrt{2^4\times3\times7\times a}$가 자연수가 되려면 $a=3\times7\times(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 한다.

따라서 가장 작은 자연수 a는

$3\times7\times1^2=21$

$4<\sqrt{21}<5$이므로 $-1<-5+\sqrt{21}<0$

$\therefore \sqrt{(-5+\sqrt{a})^2}-2b\sqrt{a}=\sqrt{(-5+\sqrt{21})^2}-2b\sqrt{21}$

$=-(-5+\sqrt{21})-2b\sqrt{21}$

$=5-\sqrt{21}-2b\sqrt{21}$

$=5-(1+2b)\sqrt{21}$

이때 유리수가 되려면 $1+2b=0$이어야 하므로

$b=-\dfrac{1}{2}$

17 답 33

$\sqrt{x}-\sqrt{2y}=\sqrt{3}$에서 $\sqrt{3}$은 무리수이고 x, y는 자연수이므로 $x=3a^2$, $2y=3b^2$ (a, b는 자연수) 꼴이어야 한다.

따라서 $\sqrt{x}=\sqrt{3a^2}=a\sqrt{3}$, $\sqrt{2y}=\sqrt{3b^2}=b\sqrt{3}$이므로 주어진 식에 대입하면

$a\sqrt{3}-b\sqrt{3}=\sqrt{3} \quad \therefore a-b=1$

이때 a, b는 자연수이므로 순서쌍 (a, b)는

$(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$, $(5, 4)$, ...

이 중 $x=3a^2$, $y=\dfrac{3}{2}b^2$이 자연수가 되는 순서쌍 (a, b)는 $(3, 2)$, $(5, 4)$, ...이므로 x, y의 최솟값은

$x=3\times3^2=27$, $y=\dfrac{3}{2}\times2^2=6$

따라서 $x+y$의 최솟값은 $27+6=33$

18 답 $\dfrac{\sqrt{70}}{5}$

$a:b:c=(\sqrt{5}+\sqrt{2}):(\sqrt{3}-\sqrt{2}):(\sqrt{5}-\sqrt{3})$이므로

$a=(\sqrt{5}+\sqrt{2})k$, $b=(\sqrt{3}-\sqrt{2})k$, $c=(\sqrt{5}-\sqrt{3})k$ ($k>0$)로 놓고

$a+b+c=\sqrt{7}$에 대입하면

$(\sqrt{5}+\sqrt{2})k+(\sqrt{3}-\sqrt{2})k+(\sqrt{5}-\sqrt{3})k=\sqrt{7}$

$2\sqrt{5}k=\sqrt{7} \quad \therefore k=\dfrac{\sqrt{7}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{35}}{10}$

$\therefore a-b-c=(\sqrt{5}+\sqrt{2})\dfrac{\sqrt{35}}{10}-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\dfrac{\sqrt{35}}{10}-(\sqrt{5}-\sqrt{3})\dfrac{\sqrt{35}}{10}$

$=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{35}}{10}=\dfrac{\sqrt{70}}{5}$

19 답 $3\sqrt{14}\,\text{cm}$, $36\sqrt{14}\,\text{cm}^3$

$\triangle BCD$에서 $\overline{BD}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}(\text{cm})$이므로

$\overline{DH}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\times6\sqrt{2}=3\sqrt{2}(\text{cm})$ ····· ❶

$\triangle OHD$에서

$\overline{OH}=\sqrt{12^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{14}(\text{cm})$

따라서 정사각뿔의 높이는 $3\sqrt{14}\,\text{cm}$이므로 ····· ❷

정사각뿔의 부피는

$\dfrac{1}{3}\times6\times6\times3\sqrt{14}=36\sqrt{14}(\text{cm}^3)$ ····· ❸

채점 기준

❶ $\overline{DH}$의 길이 구하기	30%
❷ 정사각뿔의 높이 구하기	30%
❸ 정사각뿔의 부피 구하기	40%

20 답 $\sqrt{5}\pi$

사분원 A의 반지름의 길이는 2

사분원 B의 반지름의 길이는

$(1+\sqrt{5})-2=\sqrt{5}-1$

사분원 C의 반지름의 길이는

$2-(\sqrt{5}-1)=3-\sqrt{5}$

사분원 D의 반지름의 길이는

$(\sqrt{5}-1)-(3-\sqrt{5})=2\sqrt{5}-4$

따라서 4개의 사분원 A, B, C, D의 호의 길이의 합은

$\dfrac{1}{4}\times2\pi\times2+\dfrac{1}{4}\times2\pi\times(\sqrt{5}-1)+\dfrac{1}{4}\times2\pi\times(3-\sqrt{5})$

$+\dfrac{1}{4}\times2\pi\times(2\sqrt{5}-4)$

$=\dfrac{1}{4}\times2\pi\times\{2+(\sqrt{5}-1)+(3-\sqrt{5})+(2\sqrt{5}-4)\}$

$=\dfrac{1}{4}\times2\pi\times2\sqrt{5}=\sqrt{5}\pi$

21 답 $12\sqrt{2}$

주어진 직육면체의 겉넓이는

$2(\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{b}\sqrt{c}+\sqrt{c}\sqrt{a})=12\sqrt{2}+8\sqrt{3}+4\sqrt{6}$이므로

$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$

$=\sqrt{72}+\sqrt{48}+\sqrt{24}$

이때 $ab<ac<bc$이므로 $ab=24$, $ac=48$, $bc=72$

$ab\times ac\times bc=24\times 48\times 72$

$=(2^3\times 3)\times(2^4\times 3)\times(2^3\times 3^2)$

$=2^{10}\times 3^4$

$=(abc)^2$

$\therefore abc=2^5\times 3^2$

따라서 직육면체의 부피는

$\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}=\sqrt{abc}=\sqrt{2^5\times 3^2}=12\sqrt{2}$

22 답 30

솔이의 자의 눈금 7에서부터 63까지의 거리와 민이의 자의 눈금 0에서부터 A까지의 거리가 같으므로 민이의 자의 눈금 0에서부터 A까지의 거리를 x라 하면

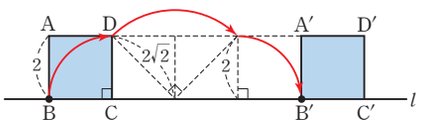
$\sqrt{63}-\sqrt{7}=x$, $3\sqrt{7}-\sqrt{7}=x$ $\therefore x=2\sqrt{7}$

이때 $A=x^2+2$이므로 이 식에 $x=2\sqrt{7}$을 대입하면

$A=(2\sqrt{7})^2+2=28+2=30$

23 답 $(2+\sqrt{2})\pi$

점 B가 움직인 거리는 다음 그림에서 색선으로 표시된 부분과 같다.



한 변의 길이가 2인 정사각형의 대각선의 길이는

$\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore$ (점 B가 움직인 거리)

$=\frac{1}{4}\times 2\pi\times 2+\frac{1}{4}\times 2\pi\times 2\sqrt{2}+\frac{1}{4}\times 2\pi\times 2$

$=\pi+\sqrt{2}\pi+\pi$

$=(2+\sqrt{2})\pi$

24 답 $70\sqrt{2}$

정사각형 A_7까지 그린 도형의 둘레의 길이는 7개의 정사각형 A_1, A_2, A_3, …, A_7의 둘레의 길이의 합에서 겹치는 부분인 6개의 정사각형의 둘레의 길이의 합을 뺀 것과 같다.

정사각형 A_1의 한 변의 길이는 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로 정사각형 A_1, A_2, A_3, …, A_7의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$, $7\sqrt{2}$이다.

이때 두 정사각형의 겹치는 부분인 정사각형의 한 변의 길이는 두 정사각형 중 작은 정사각형의 한 변의 길이의 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 정사각형 A_7까지 그렸을 때, 겹치는 부분인 6개의 정사각형의 한 변의 길이를 차례로 구하면

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\times 3\sqrt{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$,

$\frac{1}{2}\times 5\sqrt{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}\times 6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

즉, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2}$, $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $2\sqrt{2}$, $\frac{5\sqrt{2}}{2}$, $3\sqrt{2}$이다.

$\therefore$ (구하는 둘레의 길이)

$=$(7개의 정사각형 A_1, A_2, A_3, …, A_7의 둘레의 길이의 합)

$-$(겹치는 부분인 6개의 정사각형의 둘레의 길이의 합)

$=4\times(\sqrt{2}+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}+4\sqrt{2}+5\sqrt{2}+6\sqrt{2}+7\sqrt{2})$

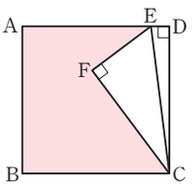
$-4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}+\frac{5\sqrt{2}}{2}+3\sqrt{2}\right)$

$=4\times 28\sqrt{2}-4\times\frac{21\sqrt{2}}{2}$

$=112\sqrt{2}-42\sqrt{2}=70\sqrt{2}$

25 답 578

오른쪽 그림과 같이 $\overline{CE}$를 긋자.



$\overline{DE}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\overline{AE}=\overline{AD}-\overline{ED}$

$=4\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{7\sqrt{2}}{2}$ …… ㉠

직각삼각형 ECD에서

$\overline{EC}^2=\overline{CD}^2+\overline{DE}^2=(4\sqrt{2})^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{65}{2}$

$\overline{EF}:\overline{FC}=4:7$에서 $\overline{EF}=\frac{4}{7}\overline{FC}$

직각삼각형 FCE에서

$\overline{EC}^2=\overline{EF}^2+\overline{FC}^2=\left(\frac{4}{7}\overline{FC}\right)^2+\overline{FC}^2=\frac{65}{49}\overline{FC}^2$

즉, $\frac{65}{49}\overline{FC}^2=\frac{65}{2}$이므로 $\overline{FC}^2=\frac{49}{2}$

$\therefore \overline{FC}=\frac{7\sqrt{2}}{2}$ ($\because \overline{FC}>0$) …… ㉡

$\overline{EF}=\frac{4}{7}\overline{FC}=2\sqrt{2}$ …… ㉢

정사각형 ABCD에서

$\overline{AB}=\overline{BC}=4\sqrt{2}$ …… ㉣

㉠, ㉡, ㉢, ㉣에서  모양의 도형의 둘레의 길이는

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CF}+\overline{FE}+\overline{EA}=4\sqrt{2}+4\sqrt{2}+\frac{7\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}+\frac{7\sqrt{2}}{2}$

$=17\sqrt{2}$

따라서 $a=17\sqrt{2}$이므로 $a^2=578$이다.

26 답 $8-5\sqrt{2}$

$2\sqrt{2}=\sqrt{8}$이고, $2<\sqrt{8}<3$이므로 $a=2\sqrt{2}-2$

$3\sqrt{2}=\sqrt{18}$이고, $4<\sqrt{18}<5$에서 $-5<-\sqrt{18}<-4$이므로

$5<10-\sqrt{18}<6$

$\therefore b=(10-3\sqrt{2})-5=5-3\sqrt{2}$

$a-1=(2\sqrt{2}-2)-1=2\sqrt{2}-3=\sqrt{8}-\sqrt{9}<0$이고,
$b=5-3\sqrt{2}=\sqrt{25}-\sqrt{18}>0$이므로
$\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{b^2}=-(a-1)+b$
$=-(2\sqrt{2}-3)+(5-3\sqrt{2})$
$=-2\sqrt{2}+3+5-3\sqrt{2}=8-5\sqrt{2}$

27 답 ②

$f(n)=8$에서 $\sqrt{n}$의 정수 부분이 8이므로
$8\le\sqrt{n}<9$, $64\le n<81$
이때 n은 자연수이므로 $a=64$, $b=80$
따라서 $f(ab)$는 $\sqrt{64\times80}$의 정수 부분이다.
$64\times80=5120$, $71^2=5041$, $72^2=5184$이므로
$71<\sqrt{64\times80}<72$
$\therefore f(ab)=71$

28 답 ③

$3\le\sqrt{x^2+y^2+z^2}<4$에서 $9\le x^2+y^2+z^2<16$
이때 $x\ge y\ge z$인 자연수이므로 순서쌍 (x, y, z)는
$(3, 2, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(2, 2, 2)$, $(2, 2, 1)$의 4개이다.

29 Idea 답 다섯 자리

근호 안의 수 $1\times2\times3\times\cdots\times10$을 소인수분해 하면
$1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10$
$=1\times2\times3\times2^2\times5\times(2\times3)\times7\times2^3\times3^2\times(2\times5)$
$=2^8\times3^4\times5^2\times7$
$=(2^4\times3^2\times5)^2\times7$
$=720^2\times7$
$\therefore 25\sqrt{1\times2\times3\times\cdots\times10}=25\sqrt{720^2\times7}$
$=25\times720\times\sqrt{7}$
$=18000\sqrt{7}$
이때 $2<\sqrt{7}<3$이므로
$36000<18000\sqrt{7}<54000$
따라서 정수 부분은 다섯 자리의 수이다.

30 답 6

nx가 자연수이므로 $nx=1, 2, 3, 4, \cdots$
$\therefore x=\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \frac{4}{n}, \cdots$ …… ㉠
$\sqrt{nx}$의 정수 부분이 2이므로
$2\le\sqrt{nx}<3$, $4\le nx<9$
$\therefore \frac{4}{n}\le x<\frac{9}{n}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $x=\frac{4}{n}, \frac{5}{n}, \frac{6}{n}, \frac{7}{n}, \frac{8}{n}$
이때 모든 실수 x의 값의 합이 5이므로
$\frac{1}{n}(4+5+6+7+8)=5$, $\frac{30}{n}=5$
$\therefore n=6$

STEP 3 최고난도 문제 ▶ 33쪽

01 $\frac{7\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ **02** 9 **03** $\frac{42+21\sqrt{3}}{4}$
04 나무 모양, 이유는 풀이 참조 **05** $5-2\sqrt{5}$

01 답 $\frac{7\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$

㉠	㉡	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$
㉢	㉣	㉤
$2\sqrt{2}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	x

위의 그림에서 하나의 수를 공통으로 가지는 가로, 세로, 대각선의 나머지 두 수의 합은 같으므로
$2\sqrt{2}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})=(\sqrt{2}+\sqrt{3})+$㉤ $\therefore$ ㉤$=0$
㉤$+x=$㉣$+2\sqrt{2}$에서 $0+x=$㉣$+2\sqrt{2}$ $\therefore$ ㉣$=x-2\sqrt{2}$
㉢$+2\sqrt{2}=$㉣$+x$에서 ㉢$+2\sqrt{2}=(x-2\sqrt{2})+x$
$\therefore$ ㉢$=2x-4\sqrt{2}$
따라서 ㉢$+$㉣$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})+x$에서
$(2x-4\sqrt{2})+(x-2\sqrt{2})=(\sqrt{2}+\sqrt{3})+x$
$2x=7\sqrt{2}+\sqrt{3}$ $\therefore x=\frac{7\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$
참고 ㉠ 또는 ㉡을 포함한 가로, 세로, 대각선의 합을 이용해도 된다.

02 Idea 답 9

세 자연수 a, b, c에 대하여 $2\sqrt{a}+b\sqrt{2}=\sqrt{c}$가 성립하려면 $a=2\times m^2$ (m은 자연수) 꼴이어야 한다.
$\sqrt{a}=\sqrt{2m^2}=m\sqrt{2}$이므로
$2\sqrt{a}+b\sqrt{2}=2m\sqrt{2}+b\sqrt{2}=(2m+b)\sqrt{2}=\sqrt{2(2m+b)^2}$
$\therefore c=2(2m+b)^2$
이때 $2m+b\ge3$ ($\because$ b, m은 자연수)이므로
$2m+b=3$일 때,
$c=2\times3^2=18$, $(m, b)=(1, 1)$
$\therefore (a, b, c)=(2, 1, 18)$
$2m+b=4$일 때,
$c=2\times4^2=32$, $(m, b)=(1, 2)$
$\therefore (a, b, c)=(2, 2, 32)$
$2m+b=5$일 때,
$c=2\times5^2=50$, $(m, b)=(1, 3), (2, 1)$
$\therefore (a, b, c)=(2, 3, 50), (8, 1, 50)$
$2m+b=6$일 때,
$c=2\times6^2=72$, $(m, b)=(1, 4), (2, 2)$
$\therefore (a, b, c)=(2, 4, 72), (8, 2, 72)$
$2m+b=7$일 때,
$c=2\times7^2=98$, $(m, b)=(1, 5), (2, 3), (3, 1)$
$\therefore (a, b, c)=(2, 5, 98), (8, 3, 98), (18, 1, 98)$
$2m+b\ge8$이면 $c>100$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$1+1+2+2+3=9$

03 답 $\frac{42+21\sqrt{3}}{4}$

정육각형과 각 변의 중점을 연결하여 그린 정육각형은 서로 닮음이고, 두 정육각형의 넓이의 비가 4 : 3으로 일정하므로 닮음비는

$\sqrt{4} : \sqrt{3} = 2 : \sqrt{3}$ …… ❶

즉, 두 정육각형의 한 변의 길이의 비는 $2 : \sqrt{3} = 1 : \frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 정육각형의 각 변의 중점을 연결하여 그린 정육각형의 둘레의 길이는 이전 정육각형의 둘레의 길이의 $\frac{\sqrt{3}}{2}$배이다. …… ❷

∴ (색칠한 부분의 둘레의 길이)

$= (4\text{개의 정육각형의 둘레의 길이의 합})$

$= 6+\left(6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= 6+3\sqrt{3}+\frac{9}{2}+\frac{9\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{42+21\sqrt{3}}{4}$ …… ❸

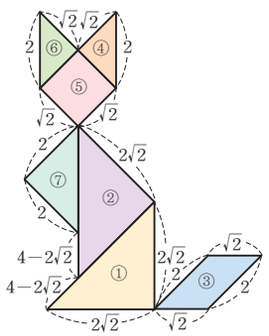
채점 기준

❶ 정육각형과 각 변의 중점을 연결하여 만든 정육각형의 닮음비 구하기	30 %
❷ 각 변의 중점을 연결하여 만든 정육각형의 둘레의 길이는 이전 정육각형의 둘레의 길이의 $\frac{\sqrt{3}}{2}$배임을 알기	20 %
❸ 색칠한 부분의 둘레의 길이 구하기	50 %

04 답 나무 모양, 이유는 풀이 참조

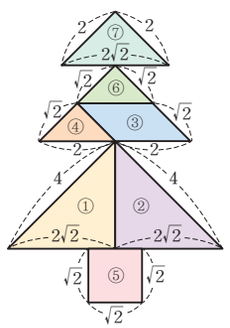
고양이 모양을 이루는 각 조각에 번호를 붙이면 다음 그림과 같으므로 고양이 모양의 도형의 둘레의 길이는

$2\times6+\sqrt{2}\times6+2\sqrt{2}\times3+(4-2\sqrt{2})\times2=20+8\sqrt{2}$



나무 모양을 이루는 각 조각에 번호를 붙이면 다음 그림과 같으므로 나무 모양의 도형의 둘레의 길이는

$2\times4+4\times2+\sqrt{2}\times7+2\sqrt{2}+(2\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\sqrt{2})=16+12\sqrt{2}$



이때 $(20+8\sqrt{2})-(16+12\sqrt{2})=4-4\sqrt{2}=\sqrt{16}-\sqrt{32}<0$이므로

$20+8\sqrt{2}<16+12\sqrt{2}$

따라서 나무 모양의 도형의 둘레의 길이가 더 길다.

05 답 $5-2\sqrt{5}$

㈎에서 a, b, c, d는 모두 (자연수)^2 꼴인 수이므로

㈏에서 $2a+b=11$을 만족시키는 a, b의 값은 $a=1$, $b=9$

$3c+d=129$를 만족시키는 c, d의 값은 $c=16$, $d=81$

이때 $2\sqrt{4a+c}=2\sqrt{4+16}=2\sqrt{20}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$이고,

$8<\sqrt{80}<9$이므로 $8<4\sqrt{5}<9$

∴ $x=4\sqrt{5}-8$

또 $\sqrt{2(b+d)}=\sqrt{2\times(9+81)}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$이고,

$13<\sqrt{180}<14$이므로 $13<6\sqrt{5}<14$

∴ $y=6\sqrt{5}-13$

∴ $|x-y|=|4\sqrt{5}-8-(6\sqrt{5}-13)|=|5-2\sqrt{5}|$

$=5-2\sqrt{5}$ ($\because 5>2\sqrt{5}$)

단원 마스터 ▸34~37쪽

01 $\frac{1}{5}$ **02** a^2+bc **03** 25 **04** 8 **05** 63

06 9 **07** (5, 45, 5), (15, 5, 405) **08** 14, 15, 16

09 12 **10** $3+12\sqrt{3}\pi$ **11** ④ **12** $6\sqrt{2}$

13 $7\sqrt{3}$ cm **14** ① **15** -4 **16** $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

17 $\frac{11}{190}$ **18** A: 5개, B: 3개 **19** ⑤ **20** $28\sqrt{5}$ cm

21 142 **22** ② **23** $\frac{-6+7\sqrt{2}}{6}$ **24** $x=\frac{1}{4}$, $y=-\frac{1}{2}$

01 답 $\frac{1}{5}$

$\sqrt{\frac{1}{3}\left(a\times\frac{q}{p}\right)}=0.\dot{3}$의 양변을 제곱하면

$\frac{1}{3}\left(a\times\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2$ ∴ $a=\frac{p}{3q}$

㈎에서 a를 기약분수로 나타내었을 때, 분모의 소인수가 2 또는 5뿐이어야 하므로 ㈏, ㈐에 의하여 $p=3$, $q=5$

∴ $a=\frac{p}{3q}=\frac{3}{3\times5}=\frac{1}{5}$

02 답 a^2+bc

$a<0$, $c<0$이므로 $-ac<0$

$\therefore \sqrt{(-ac)^2}=-(-ac)=ac$ …… ❶

$a<c$에서 $c-a>0$이고, $b<0$이므로

$b(c-a)<0$

$\therefore \sqrt{b^2(c-a)^2}=\sqrt{\{b(c-a)\}^2}=-b(c-a)$ …… ❷

$b<c$에서 $c-b>0$이고, $-a>0$이므로

$c-b-a=(c-b)+(-a)>0$

$\therefore \sqrt{(c-b-a)^2}=c-b-a$ …… ❸

$\therefore \sqrt{(-ac)^2}-\sqrt{b^2(c-a)^2}-a\sqrt{(c-b-a)^2}$

$=ac-\{-b(c-a)\}-a(c-b-a)$

$=ac+bc-ab-ac+ab+a^2$

$=a^2+bc$ …… ❹

채점 기준	
❶ $\sqrt{(-ac)^2}$을 근호를 사용하지 않고 나타내기	30 %
❷ $\sqrt{b^2(c-a)^2}$을 근호를 사용하지 않고 나타내기	30 %
❸ $\sqrt{(c-b-a)^2}$을 근호를 사용하지 않고 나타내기	30 %
❹ 주어진 식을 간단히 하기	10 %

03 답 25

$\sqrt{28}<a<\sqrt{32}$에서 $5<\sqrt{28}$, $\sqrt{32}<6$이므로 $5<a<6$

$\therefore \sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a-2)^2}+\sqrt{(a-3)^2}+\cdots+\sqrt{(a-10)^2}$

$=(a-1)+\cdots+(a-5)-(a-6)-\cdots-(a-10)$

$=-1-2-3-4-5+6+7+8+9+10$

$=(-1+6)+(-2+7)+(-3+8)+(-4+9)+(-5+10)$

$=5\times5=25$

04 답 8

$x=\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+\cdots}}}$의 양변을 제곱하면

$x^2=5+\sqrt{5+\sqrt{5+\cdots}}$, 즉 $x^2=5+x$

$\therefore x^2-x=5$

$\therefore x^2-x+3=5+3=8$

05 답 63

$\sqrt{2057+121a}=\sqrt{121(17+a)}=\sqrt{11^2(17+a)}$가 자연수가 되려면

$17+a$는 17보다 큰 (자연수)^2 꼴인 수이어야 한다.

즉, $17+a=25$, 36, 49, …

a가 가장 작은 자연수일 때 $a+b$의 값이 최소가 되므로

$17+a=25$ $\therefore a=8$

$\therefore b=\sqrt{11^2(17+8)}=55$

따라서 $a+b$의 최솟값은 $8+55=63$

06 답 9

$\sqrt{3n}$이 2의 배수가 되어야 하므로 $n=3\times4\times m^2$ (m은 자연수) 꼴이어야 한다. …… ❶

n은 1000 이하의 자연수이므로

$1\le n\le1000$에서 $1\le12m^2\le1000$

$\frac{1}{12}\le m^2\le\frac{1000}{12}=83.3\cdots$

$\therefore m=1, 2, 3, \ldots, 9$

따라서 n은 12×1^2, 12×2^2, 12×3^2, …, 12×9^2의 9개이다. …… ❷

채점 기준	
❶ $\sqrt{3n}$이 2의 배수가 되기 위한 조건 구하기	50 %
❷ n의 개수 구하기	50 %

07 답 (5, 45, 5), (15, 5, 405)

㈎에서 A가 자연수이므로 근호 안의 수가 제곱인 수가 되어야 한다.

따라서 B는 $3^2\times5^3$의 약수이면서 $5\times$(자연수)^2 꼴인 수이어야 하므로

$B=5$, $3^2\times5$, 5^3, $3^2\times5^3$ …… ㉠

㈏에서 $B=\sqrt{\frac{3^4\times5^3}{C}}$의 양변을 제곱하면

$B^2=\frac{3^4\times5^3}{C}$이므로 $C=\frac{3^4\times5^3}{B^2}$

이때 C가 자연수가 되려면 B^2의 값이 $3^4\times5^3$의 약수이어야 하므로

㉠에서 $B=5$, $3^2\times5$

$B=5$일 때, $A=\sqrt{\frac{3^2\times5^3}{5}}=15$, $C=\frac{3^4\times5^3}{5^2}=405$

$B=3^2\times5$일 때, $A=\sqrt{\frac{3^2\times5^3}{3^2\times5}}=5$, $C=\frac{3^4\times5^3}{3^4\times5^2}=5$

따라서 구하는 순서쌍 (A, B, C)는 (15, 5, 405), (5, 45, 5)이다.

08 답 14, 15, 16

x가 자연수이므로 주어진 식에서

$\sqrt{(x-1)^2}<\sqrt{230}<\sqrt{(x+2)^2}$

$x-1<\sqrt{230}<x+2$

이때 $\sqrt{15^2}<\sqrt{230}<\sqrt{16^2}$이므로 $15<\sqrt{230}<16$

$x-1\le15$에서

$x=1, 2, \ldots, 14, 15, 16$ …… ㉠

$x+2\ge16$에서

$x=14, 15, 16, 17, \ldots$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x의 값은 14, 15, 16이다.

09 답 12

$1<\sqrt{|3-x|}<2$의 각 변을 제곱하면 $1<|3-x|<4$

(i) $3-x\ge0$, 즉 $x\le3$일 때,

$1<3-x<4$ $\therefore -1<x<2$

이를 만족시키는 정수 x의 값은 0, 1이다.

(ii) $3-x<0$, 즉 $x>3$일 때,

$1<-3+x<4$ $\therefore 4<x<7$

이를 만족시키는 정수 x의 값은 5, 6이다.

(i), (ii)에서 모든 정수 x의 값의 합은

$0+1+5+6=12$

10 답 $3+12\sqrt{3}\pi$

원의 반지름의 길이를 r라 하면

$\pi r^2=12\pi$, $r^2=12$ $\therefore r=\pm 2\sqrt{3}$

이때 $r>0$이므로 $r=2\sqrt{3}$

$\therefore$ (원의 둘레의 길이)$=2\pi\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}\pi$

따라서 점 A에 대응하는 수가 3이므로 원을 세 바퀴 굴렸을 때, 점 P에 대응하는 수는

$3+3\times 4\sqrt{3}\pi=3+12\sqrt{3}\pi$

11 답 ④

① $-a>0$이므로

$\sqrt{(-a)^2b}=\sqrt{(-a)^2}\times\sqrt{b}=(-a)\times\sqrt{b}=-a\sqrt{b}$

② $ab<0$이므로

$\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{(ab)^2}=-ab$

③ $a^2b>0$이므로

$-\sqrt{a^4b^2}=-\sqrt{(a^2b)^2}=-a^2b$

④ $a<0$이므로

$\sqrt{\dfrac{b}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}=\dfrac{\sqrt{b}}{-a}=-\dfrac{\sqrt{b}}{a}$

⑤ $\dfrac{a}{b}<0$이므로

$-\sqrt{\dfrac{a^2}{b^2}}=-\sqrt{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2}=-\left(-\dfrac{a}{b}\right)=\dfrac{a}{b}$

따라서 옳은 것은 ④이다.

12 답 $6\sqrt{2}$

$$\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{a}+\frac{\sqrt{ab}}{b}$$
$$=\frac{b\sqrt{ab}}{ab}+\frac{a\sqrt{ab}}{ab}=\frac{\sqrt{ab}(a+b)}{ab}$$
$$=\frac{24\sqrt{8}}{8}=3\sqrt{8}=6\sqrt{2}$$

13 답 $7\sqrt{3}$ cm

△ADE와 △ABC에서

$\overline{BC}/\!/\overline{DE}$이므로 $\angle ADE=\angle ABC$ (동위각), $\angle A$는 공통

$\therefore$ △ADE∽△ABC (AA 닮음) …… ❶

이때 □DBCE : △ABC$=3:7$이므로

△ADE : △ABC$=4:7$ →△ADE=△ABC−□DBCE

즉, △ADE와 △ABC의 닮음비는 $\sqrt{4}:\sqrt{7}=2:\sqrt{7}$이다. …… ❷

이때 $\overline{BC}=x$ cm라 하면 $2:\sqrt{7}=2\sqrt{21}:x$에서

$2x=14\sqrt{3}$ $\therefore x=7\sqrt{3}$

따라서 $\overline{BC}$의 길이는 $7\sqrt{3}$ cm이다. …… ❸

채점 기준	
❶ △ADE∽△ABC임을 보이기	30 %
❷ △ADE와 △ABC의 닮음비 구하기	30 %
❸ $\overline{BC}$의 길이 구하기	40 %

14 답 ①

$$\sqrt{\frac{3}{4}}-\frac{1}{\sqrt{12}}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}+\sqrt{3}$$
$$=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}+6\sqrt{3}}{6}=\frac{8\sqrt{3}}{6}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$\therefore a=3$

$$4\sqrt{3}(2-\sqrt{3})+\frac{9}{\sqrt{3}}-\sqrt{108}=8\sqrt{3}-12+3\sqrt{3}-6\sqrt{3}$$
$$=5\sqrt{3}-12$$

$\therefore b=5$, $c=-12$

$\therefore a+b+c=3+5+(-12)=-4$

15 답 -4

$(a*b)+(2b*a)=1$에서

$(a\sqrt{2}+b)+(2b\sqrt{2}+a)=1$이므로

$(a+b)+(a+2b)\sqrt{2}=1$

이때 a, b는 유리수이므로

$a+b=1$, $a+2b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

$\therefore (b\sqrt{2})*(-a)=(-\sqrt{2})*(-2)$
$=-\sqrt{2}\times\sqrt{2}-2$
$=-2-2$
$=-4$

16 답 $2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$2\sqrt{3}x+3\sqrt{2}=\sqrt{3}x+2\sqrt{3}$에서

$\sqrt{3}x=2\sqrt{3}-3\sqrt{2}$

$\therefore x=\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=2-\sqrt{6}$

$x=2-\sqrt{6}$을 $\sqrt{6}(x+1)-(k-6)=\sqrt{2}(x-1)+3\sqrt{6}$에 대입하면

$\sqrt{6}(2-\sqrt{6}+1)-(k-6)=\sqrt{2}(2-\sqrt{6}-1)+3\sqrt{6}$

$3\sqrt{6}-6-k+6=\sqrt{2}-2\sqrt{3}+3\sqrt{6}$

$\therefore k=2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

17 답 $\dfrac{11}{190}$

서로 다른 자연수 20개 중에서 2개를 뽑으면 x, y가 한 가지로 정해지므로 전체 경우의 수는

$\dfrac{20\times 19}{②}=190$ → (a, b), (b, a)와 같이 뽑히는 경우는 서로 같으므로 2로 나눈다.

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{n}$이 성립하는 경우는

$x=1$일 때, $y=4$, 9, 16의 3가지

$x=2$일 때, $y=8$, 18의 2가지

$x=3$일 때, $y=12$의 1가지

$x=4$일 때, $y=9$, 16의 2가지

$x=5$일 때, $y=20$의 1가지

$x=8$일 때, $y=18$의 1가지

$x=9$일 때, $y=16$의 1가지

$\therefore 3+2+1+2+1+1+1=11$(가지)

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{11}{190}$이다.

18 답 A: 5개, B: 3개

나무 막대 A, B를 각각 x개, y개 연결하였다면

$(2+\sqrt{3})x+(3-\sqrt{3})y=19+2\sqrt{3}$

$(2x+3y)+(x-y)\sqrt{3}=19+2\sqrt{3}$

이때 x, y는 자연수이므로 $2x+3y=19$, $x-y=2$

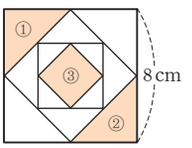
두 식을 연립하여 풀면 $x=5$, $y=3$

따라서 나무 막대 A는 5개, 나무 막대 B는 3개를 연결하였다.

19 답 ⑤

한 변의 길이가 8 cm인 정사각형 안에 그린 세 정사각형의 넓이는 차례로

$64\times\frac{1}{2}=32(\text{cm}^2)$, $32\times\frac{1}{2}=16(\text{cm}^2)$,



$16\times\frac{1}{2}=8(\text{cm}^2)$이므로 세 정사각형의 한 변의 길이는 차례로

$4\sqrt{2}$ cm, 4 cm, $2\sqrt{2}$ cm이다.

따라서 두 직각삼각형 ①, ②의 둘레의 길이는 모두

$4+4+4\sqrt{2}=8+4\sqrt{2}(\text{cm})$이고,

정사각형 ③의 둘레의 길이는 $4\times2\sqrt{2}=8\sqrt{2}(\text{cm})$이므로

(색칠한 부분의 둘레의 길이)

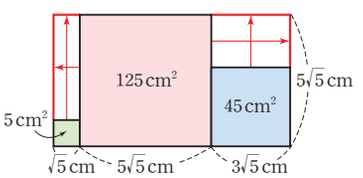
=(세 도형 ①, ②, ③의 둘레의 길이의 합)

$=2\times(8+4\sqrt{2})+8\sqrt{2}$

$=16+8\sqrt{2}+8\sqrt{2}=16+16\sqrt{2}(\text{cm})$

20 답 $28\sqrt{5}$ cm

넓이가 각각 5 cm², 125 cm², 45 cm²인 정사각형 모양의 색종이의 한 변의 길이는 각각 $\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{125}=5\sqrt{5}(\text{cm})$, $\sqrt{45}=3\sqrt{5}(\text{cm})$이다. …… ❶



위의 그림과 같이 색종이로 이루어진 도형의 둘레의 길이는 가로의 길이가 $\sqrt{5}+5\sqrt{5}+3\sqrt{5}=9\sqrt{5}(\text{cm})$, 세로의 길이가 $5\sqrt{5}$ cm인 직사각형의 둘레의 길이와 같으므로

(도형의 둘레의 길이)$=2\times(9\sqrt{5}+5\sqrt{5})$ …… ❷

$=2\times14\sqrt{5}$

$=28\sqrt{5}(\text{cm})$ …… ❸

채점 기준

❶ 정사각형 모양의 색종이의 한 변의 길이 구하기	30 %
❷ 도형의 둘레의 길이를 구하는 식 세우기	40 %
❸ 도형의 둘레의 길이 구하기	30 %

21 답 142

$\sqrt{2}=1.414$이므로 자연수 n에 대하여

$1\le n\le58$이면 $1<\sqrt{2}+\frac{n}{100}<2$

$\therefore\left[\sqrt{2}+\frac{n}{100}\right]=1$

$59\le n\le100$이면 $2<\sqrt{2}+\frac{n}{100}<3$

$\therefore\left[\sqrt{2}+\frac{n}{100}\right]=2$

$\therefore\left[\sqrt{2}+\frac{1}{100}\right]+\left[\sqrt{2}+\frac{2}{100}\right]+\left[\sqrt{2}+\frac{3}{100}\right]$

$+\cdots+\left[\sqrt{2}+\frac{99}{100}\right]+\left[\sqrt{2}+\frac{100}{100}\right]$

$=(\underbrace{1+\cdots+1}_{58\text{개}})+(\underbrace{2+\cdots+2}_{42\text{개}})$

$=1\times58+2\times42=142$

22 답 ②

$2<\sqrt{5}<3$에서 $-3<-\sqrt{5}<-2$이므로

$9<12-\sqrt{5}<10$

즉, $12-\sqrt{5}$의 정수 부분은 9이므로

$a=12-\sqrt{5}-9=3-\sqrt{5}$ …… ㉠

$4\sqrt{5}=\sqrt{80}$이고 $8<\sqrt{80}<9$에서 $4\sqrt{5}$의 정수 부분은 8이므로

$4\sqrt{5}$의 소수 부분은 $4\sqrt{5}-8$

㉠에서 $\sqrt{5}=3-a$이므로

$4\sqrt{5}-8=4(3-a)-8=4-4a$

23 답 $\frac{-6+7\sqrt{2}}{6}$

$3\sqrt{2}=\sqrt{18}$이고 $4<\sqrt{18}<5$에서

$2<3\sqrt{2}-2<3$이므로 $[a]=2$

$\therefore\frac{a}{[a]+a}-\frac{[a]-a}{[a]}=\frac{3\sqrt{2}-2}{2+(3\sqrt{2}-2)}-\frac{2-(3\sqrt{2}-2)}{2}$

$=\frac{3\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}}-\frac{4-3\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{6-2\sqrt{2}}{6}-\frac{12-9\sqrt{2}}{6}$

$=\frac{6-2\sqrt{2}-12+9\sqrt{2}}{6}$

$=\frac{-6+7\sqrt{2}}{6}$

24 답 $x=\frac{1}{4}$, $y=-\frac{1}{2}$

$1<\sqrt{2}<2$이므로

$a=\sqrt{2}-1$, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$a=\sqrt{2}-1$, $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$를 $(a-1)x+(b+3)y+2=0$에 대입하면

$(\sqrt{2}-1-1)x+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+3\right)y+2=0$

$\sqrt{2}x-2x+\frac{\sqrt{2}}{2}y+3y+2=0$

$(-2x+3y+2)+\left(x+\frac{1}{2}y\right)\sqrt{2}=0$

이때 x, y는 유리수이므로

$-2x+3y+2=0$, $x+\frac{1}{2}y=0$

두 식을 연립하여 풀면

$x=\frac{1}{4}$, $y=-\frac{1}{2}$

03 다항식의 곱셈

STEP 1 핵심 문제

▶ 40~41쪽

01 $a=3$, $b=-2$ **02** ⑤ **03** ③ **04** 0 **05** ⑤

06 -1 **07** 64 **08** 27 **09** ① **10** ④

11 (1) 18 (2) 320 **12** (1) 6 (2) 34 **13** -4

01 답 $a=3$, $b=-2$

x^3항이 나오는 부분만 전개하면

$x^2\times ax+x\times 2x^2=ax^3+2x^3=(a+2)x^3$

$a+2=5$ $\therefore a=3$

x^2항이 나오는 부분만 전개하면

$x^2\times b+x\times ax+(-4)\times 2x^2=bx^2+ax^2-8x^2$

$=(b+a-8)x^2$

$b+a-8=-7$

$\therefore b=-a+1=-3+1=-2$

비법 NOTE

(다항식)×(다항식)에서 특정한 항의 계수를 구할 때에는 모든 항을 전개하지 않고 필요한 항이 나오는 부분만 전개하여 구한다.

02 답 ⑤

$(-x+2a)^2+(2x-3)(x-1)=x^2-4ax+4a^2+2x^2-5x+3$

$=3x^2+(-4a-5)x+4a^2+3$

x^2의 계수는 3, x의 계수는 $-4a-5$이므로

$3=-4a-5$ $\therefore a=-2$

따라서 상수항은

$4a^2+3=4\times(-2)^2+3=19$

03 답 ③

(직육면체의 겉넓이)

$=2\{(x-1)(x+1)+(x+1)(2x+1)+(2x+1)(x-1)\}$

$=2(x^2-1+2x^2+3x+1+2x^2-x-1)$

$=2(5x^2+2x-1)$

$=10x^2+4x-2$

04 답 0

$(2x+a)(x-1)+(x-a)(-a-x)$

$=(2x+a)(x-1)-(x-a)(x+a)$

$=2x^2+(-2+a)x-a-(x^2-a^2)$

$=x^2+(-2+a)x+a^2-a$

x의 계수가 음수이므로

$-2+a<0$ $\therefore a<2$

이때 a는 자연수이므로 $a=1$

따라서 상수항은 $a^2-a=1^2-1=0$

05 답 ⑤

① $304^2=(300+4)^2$에서 $a=300$, $b=4$로 놓으면

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

② $299^2=(300-1)^2$에서 $a=300$, $b=1$로 놓으면

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

③ $201\times 199=(200+1)(200-1)$에서 $a=200$, $b=1$로 놓으면

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

④ $201\times 202=(200+1)(200+2)$에서 $x=200$, $a=1$, $b=2$로 놓으면

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

⑤ $48\times 52=(50-2)(50+2)$에서 $a=50$, $b=-2$로 놓으면

$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

따라서 적당하지 않은 것은 ⑤이다.

06 답 -1

$3726=x$로 놓으면

$$\frac{3720}{3726^2-3724\times 3729}=\frac{x-6}{x^2-(x-2)(x+3)}$$

$$=\frac{x-6}{x^2-(x^2+x-6)}$$

$$=\frac{x-6}{-(x-6)}=-1$$

07 답 64

$(\sqrt{7}+3)^5(\sqrt{7}-3)^6=(\sqrt{7}+3)^5(\sqrt{7}-3)^5(\sqrt{7}-3)$

$=\{(\sqrt{7}+3)(\sqrt{7}-3)\}^5(\sqrt{7}-3)$

$=(7-9)^5(\sqrt{7}-3)$

$=(-2)^5(\sqrt{7}-3)$

$=-32\sqrt{7}+96$

따라서 $a=96$, $b=-32$이므로

$a+b=96+(-32)=64$

08 답 27

$$\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-7}-\frac{2}{5\sqrt{2}+7}=\frac{\sqrt{2}(5\sqrt{2}+7)}{(5\sqrt{2}-7)(5\sqrt{2}+7)}-\frac{2(5\sqrt{2}-7)}{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)}$$

$$=\frac{10+7\sqrt{2}}{50-49}-\frac{10\sqrt{2}-14}{50-49}$$ …… ❶

$=10+7\sqrt{2}-10\sqrt{2}+14$

$=24-3\sqrt{2}$

따라서 $a=24$, $b=-3$이므로 …… ❷

$a-b=24-(-3)=27$ …… ❸

채점 기준

❶ 분모를 유리화하기	50 %
❷ a, b의 값 구하기	40 %
❸ $a-b$의 값 구하기	10 %

09 답 ①

$(2x+1-\sqrt{2})(2x-2-\sqrt{2})=(2x-\sqrt{2}+1)(2x-\sqrt{2}-2)$이므로

$2x-\sqrt{2}=A$로 놓으면

$(2x-\sqrt{2}+1)(2x-\sqrt{2}-2)=(A+1)(A-2)$
$=A^2-A-2$
$=(2x-\sqrt{2})^2-(2x-\sqrt{2})-2$
$=4x^2-4\sqrt{2}x+2-2x+\sqrt{2}-2$
$=4x^2+(-4\sqrt{2}-2)x+\sqrt{2}$
따라서 x의 계수와 상수항의 곱은
$(-4\sqrt{2}-2)\times\sqrt{2}=-8-2\sqrt{2}$

다른 풀이
x항이 나오는 부분만 전개하면
$2x(-2-\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})\times 2x$
$=-4x-2\sqrt{2}x+2x-2\sqrt{2}x$
$=-2x-4\sqrt{2}x$
$=(-2-4\sqrt{2})x$
상수항이 나오는 부분만 전개하면
$(1-\sqrt{2})(-2-\sqrt{2})=-2-\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2=\sqrt{2}$
따라서 x의 계수와 상수항의 곱은
$(-2-4\sqrt{2})\times\sqrt{2}=-2\sqrt{2}-8$

10 답 ④
$(x-1)(x+1)(2x+1)(2x+5)$
$=(x-1)(2x+5)(x+1)(2x+1)$
$=(2x^2+3x-5)(2x^2+3x+1)$
이므로 $2x^2+3x=A$로 놓으면
$(A-5)(A+1)=A^2-4A-5$
$=(2x^2+3x)^2-4(2x^2+3x)-5$
$=4x^4+12x^3+9x^2-8x^2-12x-5$
$=4x^4+12x^3+x^2-12x-5$

11 답 (1) 18 (2) 320
(1) $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$
$=4^2+2\times 1=18$
(2) $(x^2-y^2)^2=(x^2+y^2)^2-4x^2y^2$
$=(x^2+y^2)^2-4(xy)^2$
$=18^2-4\times 1^2$
$=324-4=320$

12 답 (1) 6 (2) 34
(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$
$=2^2+2=6$
(2) $x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2$
$=6^2-2=34$

13 답 -4
$x=2+\sqrt{3}$에서 $x-2=\sqrt{3}$이므로
$(x-2)^2=(\sqrt{3})^2$, $x^2-4x+4=3$
$\therefore x^2-4x=-1$
$\therefore x^2-4x-3=-1-3=-4$

STEP 2 고난도 문제 ▶ 42~46쪽

01 4 **02** -16 **03** $A=48$, $B=42$ **04** -1 **05** ②
06 -264 **07** ② **08** $-2x^2+7xy-6y^2$
09 $100a^4-196a^2-25a^2b^2+49b^2$ **10** 10 **11** 16
12 ③ **13** 8 **14** 37 **15** 1 **16** 4 **17** ②
18 $(21-7\sqrt{6})$ cm **19** $-20-10\sqrt{3}$ **20** ④ **21** ⑤
22 ⑤ **23** 1 **24** $18+\sqrt{6}$ **25** $\frac{3}{2}$ **26** 164
27 ② **28** $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$ **29** $\sqrt{3}$ **30** 0

01 답 4
a를 6으로 나눈 몫을 p, b를 9로 나눈 몫을 q(p, q는 자연수)라 하면
$a=6p+2$, $b=9q+8$에서
$ab=(6p+2)(9q+8)$
$=54pq+48p+18q+16$
$=6(9pq+8p+3q+2)+4$
따라서 ab를 6으로 나눈 나머지는 4이다.

02 답 -16
$(x+3y-1)^2(-3x+ay+5)$에 $x=1$, $y=1$을 대입하면
$(1+3-1)^2\times(-3+a+5)=9(a+2)=9a+18$
이때 상수항은 $(-1)^2\times 5=5$이고 상수항을 제외한 각 항의 계수의 총합은 22이므로
$(9a+18)-5=22$ $\therefore a=1$
즉, $(x+3y-1)(x+3y-1)(-3x+y+5)$에서 x^2y항이 나오는 부분만 전개하면
$x\times x\times y+x\times 3y\times(-3x)+3y\times x\times(-3x)$
$=x^2y-9x^2y-9x^2y$
$=-17x^2y$
$\therefore b=-17$
$\therefore a+b=1+(-17)=-16$

비법 NOTE
x에 대한 다항식 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$의 모든 항의 계수 및 상수항의 합 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$은 주어진 다항식에 $x=1$을 대입한 것과 같다.
따라서 상수항을 제외한 각 항의 계수의 총합은 모든 미지수에 1을 대입하여 구한 식의 값에서 상수항을 뺀 것과 같다.

03 답 $A=48$, $B=42$
A, B의 일의 자리의 숫자를 각각 a, b(a, b는 0 이상 9 이하의 정수이고, $a>b$)라 하면 $A=40+a$, $B=40+b$이고 $C=10a+4$, $D=10b+4$이다.
$AB=CD$이므로 $(40+a)(40+b)=(10a+4)(10b+4)$
$1600+40a+40b+ab=100ab+40a+40b+16$
$99ab=1584$ $\therefore ab=16$
이때 $a>b$이므로 $a=8$, $b=2$
$\therefore A=48$, $B=42$

04 답 -1

$\frac{1}{\sqrt{a}+1}+\frac{1}{\sqrt{b}+1}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+2}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{b}+1)}=1$에서

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+2=\sqrt{ab}+\sqrt{a}+\sqrt{b}+1 \quad \therefore \sqrt{ab}=1$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{a}-1}+\frac{1}{\sqrt{b}-1}=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)}$$
$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-2}{\sqrt{ab}-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1}$$
$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-2}{1-\sqrt{a}-\sqrt{b}+1}$$
$$=\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-2}{-(\sqrt{a}+\sqrt{b}-2)}$$
$$=-1$$

05 답 ②

진호가 전개한 식은

$(x+3)(x+A)=x^2+(3+A)x+3A$
$=x^2-8x+B$

이므로 $3+A=-8$, $3A=B$

$\therefore A=-11$, $B=-33$

수지가 전개한 식은

$(Cx-3)(x+1)=Cx^2+(C-3)x-3$
$=Cx^2-5x-3$

이므로 $C-3=-5$

$\therefore C=-2$

$\therefore A+B+C=-11+(-33)+(-2)=-46$

06 답 -264

$x(x^4+16)(x-2)(x^2+4)(x+2)+(2x-3)^2+1$
$=x(x-2)(x+2)(x^2+4)(x^4+16)+(2x-3)^2+1$
$=x(x^2-4)(x^2+4)(x^4+16)+(2x-3)^2+1$
$=x(x^4-16)(x^4+16)+(2x-3)^2+1$
$=x(x^8-256)+(2x-3)^2+1$
$=x^9-256x+4x^2-12x+9+1$
$=x^9+4x^2-268x+10$

따라서 $a=4$, $b=-268$이므로

$a+b=4+(-268)=-264$

07 답 ②

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab=x^2+cx-36$이므로

$a+b=c$, $ab=-36$

이때 $ab=-36$을 만족시키는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(-36, 1)$, $(-18, 2)$, $(-12, 3)$, $(-9, 4)$, $(-6, 6)$,
$(-4, 9)$, $(-3, 12)$, $(-2, 18)$, $(-1, 36)$, $(1, -36)$,
$(2, -18)$, $(3, -12)$, $(4, -9)$, $(6, -6)$, $(9, -4)$,
$(12, -3)$, $(18, -2)$, $(36, -1)$

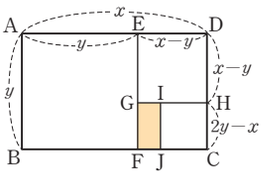
이므로 c의 값이 될 수 있는 수는 -35, -16, -9, -5, 0, 5, 9, 16, 35이다.

따라서 c의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

08 답 $-2x^2+7xy-6y^2$

다음 그림에서 세 사각형 ABFE, EGHD, IJCH는 한 변의 길이가 각각 y, $x-y$, $2y-x$인 정사각형이다.

$2y-x=y-(x-y)$



$\therefore$ (사각형 GFJI의 넓이)
=(직사각형 ABCD의 넓이)
−(세 정사각형 ABFE, EGHD, IJCH의 넓이의 합)
$=xy-\{y^2+(x-y)^2+(2y-x)^2\}$
$=xy-(y^2+x^2-2xy+y^2+4y^2-4xy+x^2)$
$=xy-(2x^2-6xy+6y^2)=-2x^2+7xy-6y^2$

다른 풀이

$\overline{GI}=\overline{FJ}=\overline{BC}-\overline{BF}-\overline{JC}$
$=x-y-(2y-x)=2x-3y$,
$\overline{IJ}=\overline{HC}=y-(x-y)=-x+2y$
$\therefore$ (사각형 GFJI의 넓이)$=(2x-3y)(-x+2y)$
$=-2x^2+4xy+3xy-6y^2$
$=-2x^2+7xy-6y^2$

09 답 $100a^4-196a^2-25a^2b^2+49b^2$

상자 한 개의 부피는 $(2a+b)(5a-7)(2a-b)$

상자는 바닥에 $a\times5=5a$(개)가 깔려 있고, 오른쪽에서 보면 그 위로 최소 $4+1+2=7$(개)의 상자가 쌓여 있으므로 상자 전체의 최소 개수는 $5a+7$이다.

따라서 상자 전체의 최소 부피는

$(2a+b)(5a-7)(2a-b)(5a+7)$
$=(2a+b)(2a-b)(5a+7)(5a-7)$
$=(4a^2-b^2)(25a^2-49)$
$=100a^4-196a^2-25a^2b^2+49b^2$

10 답 10

$2000=x$로 놓으면

$1997^2+11991=(2000-3)^2+6\times2000-9$
$=(x-3)^2+6x-9$
$=x^2-6x+9+6x-9=x^2$
$=2000^2=(2\times10^3)^2=4\times10^6$

따라서 $a=4$, $b=6$이므로 $a+b=4+6=10$

11 답 16

$3\times5\times17\times257=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)$
$=(2^8-1)(2^8+1)=2^{16}-1$

$\therefore a=16$

12 답 ③

$(10^{22}-5)^2=(10^{22})^2-2\times10^{22}\times5+5^2$

$=10^{44}-10^{23}+25$

이때 $10^{44}=1000\cdots0$ (0이 44개)이고 $10^{23}=1000\cdots0$ (0이 23개)이므로

$10^{44}-10^{23}+25=999\cdots9000\cdots0+25$ (9가 21개, 0이 23개)

$=999\cdots9000\cdots025$ (9가 21개, 0이 21개)

따라서 각 자리의 숫자의 합은

$9\times21+0\times21+2+5=196$

13 답 8

$(5-a\sqrt{2})+(b+3\sqrt{2})=5+b+(3-a)\sqrt{2}$

이 식의 값이 유리수가 되어야 하므로

$3-a=0 \quad \therefore a=3$ ····· ❶

$(5-a\sqrt{2})(b+3\sqrt{2})=(5-3\sqrt{2})(b+3\sqrt{2})$

$=5b-18+(15-3b)\sqrt{2}$

이 식의 값이 유리수가 되어야 하므로

$15-3b=0 \quad \therefore b=5$ ····· ❷

$\therefore a+b=3+5=8$ ····· ❸

채점 기준

❶ 두 수의 합이 유리수가 되도록 하는 a의 값 구하기	40 %
❷ 두 수의 곱이 유리수가 되도록 하는 b의 값 구하기	40 %
❸ $a+b$의 값 구하기	20 %

14 답 37

$f(1)f(2)f(4)f(8)f(16)$

$=(5+1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)$

$=\frac{1}{5-1}\times(5-1)(5+1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)$

$=\frac{1}{4}(5^2-1)(5^2+1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)$

$=\frac{1}{4}(5^4-1)(5^4+1)(5^8+1)(5^{16}+1)$

$=\frac{1}{4}(5^8-1)(5^8+1)(5^{16}+1)$

$=\frac{1}{4}(5^{16}-1)(5^{16}+1)$

$=\frac{1}{4}(5^{32}-1)=\frac{5^{32}-1}{4}$

따라서 $a=5$, $b=32$이므로

$a+b=5+32=37$

15 Idea 답 1

$4<\sqrt{17}<5$이므로 $0<\sqrt{17}-4<1$

따라서 $0<(\sqrt{17}-4)^{3000}<1$이므로 $A=(\sqrt{17}-4)^{3000}$

$\therefore (\sqrt{17}+4)^{3000}A=(\sqrt{17}+4)^{3000}(\sqrt{17}-4)^{3000}$

$=\{(\sqrt{17}+4)(\sqrt{17}-4)\}^{3000}$

$=\{(\sqrt{17})^2-4^2\}^{3000}$

$=1^{3000}=1$

비법 NOTE

$0<a<1$이면 $0<a^n<1$임을 이용한다. (단, n은 자연수)

16 답 4

$\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\frac{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}}{\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}\}\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}\}}$

$=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

따라서 $a=2$, $b=1$, $c=1$이므로

$a+b+c=2+1+1=4$

17 답 ②

$f(n)=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})}$

$=-\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$

$\therefore A=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$

$=-\sqrt{1}+\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{3}+\sqrt{4}-\cdots-\sqrt{100}+\sqrt{101}$

$=\sqrt{101}-1$

이때 $10<\sqrt{101}<11$이므로 $9<\sqrt{101}-1<10$

따라서 A보다 크지 않은 최대의 정수는 9이다.

18 답 $(21-7\sqrt{6})$ cm

두 정삼각형은 서로 닮은 도형이고, 넓이의 비가 2 : 3이므로 한 변의 길이의 비는 $\sqrt{2}:\sqrt{3}$이다.

이때 큰 정삼각형의 한 변의 길이와 작은 정삼각형의 한 변의 길이의 합은 $21\times\frac{1}{3}=7$(cm)이므로

(큰 정삼각형의 한 변의 길이)$=7\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

$=7\times\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$

$=7\times(3-\sqrt{6})$

$=21-7\sqrt{6}$(cm)

19 답 $-20-10\sqrt{3}$

$\langle1,3\rangle+\langle2,6\rangle+\langle3,9\rangle+\cdots+\langle10,30\rangle$

$=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{3}+\sqrt{9}}{\sqrt{3}-\sqrt{9}}+\cdots+\frac{\sqrt{10}+\sqrt{30}}{\sqrt{10}-\sqrt{30}}$

$=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{1}+\sqrt{3})}{\sqrt{2}(\sqrt{1}-\sqrt{3})}+\frac{\sqrt{3}(\sqrt{1}+\sqrt{3})}{\sqrt{3}(\sqrt{1}-\sqrt{3})}+\cdots+\frac{\sqrt{10}(\sqrt{1}+\sqrt{3})}{\sqrt{10}(\sqrt{1}-\sqrt{3})}$

$=\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}+\cdots+\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}$

$=10\times\frac{\sqrt{1}+\sqrt{3}}{\sqrt{1}-\sqrt{3}}=10\times\frac{(\sqrt{1}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{1}-\sqrt{3})(\sqrt{1}+\sqrt{3})}$

$=10\times\frac{4+2\sqrt{3}}{-2}=10\times(-2-\sqrt{3})$

$=-20-10\sqrt{3}$

20 답 ④

$n^2<n^2+n<n^2+2n+1=(n+1)^2$이므로

$\sqrt{n^2}<\sqrt{n^2+n}<\sqrt{(n+1)^2}$

$n<\sqrt{n^2+n}<n+1$ ($\because$ n은 자연수)

$\therefore f(n)=n,\ g(n)=\sqrt{n^2+n}-n$

$$\therefore \frac{f(n)}{g(n)}=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}-n}$$
$$=\frac{n(\sqrt{n^2+n}+n)}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}$$
$$=\frac{n(\sqrt{n^2+n}+n)}{(n^2+n)-n^2}$$
$$=\sqrt{n^2+n}+n$$

따라서 $\sqrt{n^2+n}$의 정수 부분이 n이므로 $\frac{f(n)}{g(n)}$의 정수 부분은 $2n$이다.

21 답 ⑤

$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{5}$의 양변을 제곱하면

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2=(\sqrt{5})^2$$

$$x+\frac{1}{x}+2=5$$

$$\therefore x+\frac{1}{x}=3$$

이 식의 양변에 x를 곱하면

$x^2+1=3x$에서 $x^2-3x=-1$

$\therefore (x+2)(x+3)(x-5)(x-6)$
$=\{(x+2)(x-5)\}\{(x+3)(x-6)\}$
$=(x^2-3x-10)(x^2-3x-18)$
$=(-1-10)\times(-1-18)$
$=-11\times(-19)$
$=209$

22 답 ⑤

$x+y=A,\ z-w=B,\ x-y=C,\ z+w=D$로 놓으면

$(x+y-z+w)(x+y+z-w)+(-x+y+z+w)(x-y+z+w)$
$=(A-B)(A+B)+(-C+D)(C+D)$
$=A^2-B^2-C^2+D^2$
$=(x+y)^2-(z-w)^2-(x-y)^2+(z+w)^2$
$=(x^2+2xy+y^2)-(z^2-2zw+w^2)$
$-(x^2-2xy+y^2)+(z^2+2zw+w^2)$
$=4xy+4zw$

23 답 **1**

$(2x-1)(2y-1)=3$에서

$4xy-2(x+y)-2=0,\ 2xy-(x+y)-1=0$

이때 $xy=2$이므로 $4-(x+y)-1=0$

$\therefore x+y=3$

$$\therefore \frac{x-1}{y}+\frac{y-1}{x}=\frac{x(x-1)+y(y-1)}{xy}$$
$$=\frac{x^2+y^2-(x+y)}{xy}$$
$$=\frac{(x+y)^2-2xy-(x+y)}{xy}$$
$$=\frac{3^2-2\times2-3}{2}=1$$

24 답 **$18+\sqrt{6}$**

$x^2-\sqrt{6}x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 x로 나누면

$$x-\sqrt{6}+\frac{1}{x}=0 \qquad \therefore x+\frac{1}{x}=\sqrt{6}$$

이때 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=(\sqrt{6})^2-2=4$,

$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=4^2-2=14$이므로

$$x^4+x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=14+4+\sqrt{6}=18+\sqrt{6}$$

25 답 $\frac{3}{2}$

$k^2=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}$이므로

$a+b+2\sqrt{ab}=2+\frac{\sqrt{7}}{2},\ a+b+2\sqrt{ab}=2+2\sqrt{\frac{7}{16}}$

$\therefore a+b=2,\ ab=\frac{7}{16}$

이때 $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$이므로

$$(a-b)^2=2^2-4\times\frac{7}{16}=\frac{9}{4}$$

즉, $a-b=\pm\sqrt{\frac{9}{4}}=\pm\frac{3}{2}$

$$\therefore |a-b|=\frac{3}{2}$$

26 답 **164**

$c^2+d^2=(c+d)^2-2cd=(-3)^2-2\times2=5$

$\therefore x^2+y^2=(ac+bd)^2+(ad+bc)^2$
$=a^2c^2+2abcd+b^2d^2+a^2d^2+2abcd+b^2c^2$
$=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+4abcd$
$=a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)+4abcd$
$=5a^2+5b^2+4\times8\times2$
$=5(a^2+b^2)+64$
$=5\times20+64=164$

27 답 ②

$$\frac{1}{\sqrt{5}-2}=\frac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}=\sqrt{5}+2$$

$2<\sqrt{5}<3$에서 $4<\sqrt{5}+2<5$이므로

$\sqrt{5}+2$의 정수 부분은 4이고, 소수 부분은

$x=(\sqrt{5}+2)-4=\sqrt{5}-2$이다.

즉, $x+2=\sqrt{5}$이므로 양변을 제곱하면

$(x+2)^2=(\sqrt{5})^2$, $x^2+4x+4=5$

따라서 $x^2+4x=1$이므로

$x^2+4x+3=1+3=4$

28 답 $\frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$

$x+y=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{5}$

$x-y=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$xy=\left(\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}$

$=\frac{x+2\sqrt{xy}+y}{x-y}$

$=\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{15}+\sqrt{6}}{3}$

29 답 $\sqrt{3}$

$x^2=4+2\sqrt{3}$, $y^2=4-2\sqrt{3}$이므로

$x^2+y^2=(4+2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3})=8$

$x^2y^2=(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})=16-12=4$

$\therefore xy=2$ ($\because x>0$, $y>0$)

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=8+4=12$

$\therefore x+y=2\sqrt{3}$ ($\because x+y>0$)

$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2=8-4=4$

$\therefore x-y=2$ ($\because x>y$)

$\therefore \frac{x+y}{x-y}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

30 답 0

$ab=(\sqrt{15}-4)(\sqrt{15}+4)$

$=15-16=-1$ …… ❶

$f(n)=(a^{3n}+b^{3n})^2-(a^{3n}-b^{3n})^2$

$=a^{6n}+2a^{3n}b^{3n}+b^{6n}-(a^{6n}-2a^{3n}b^{3n}+b^{6n})$

$=4a^{3n}b^{3n}$

$=4(ab)^{3n}=4\times(-1)^{3n}$ …… ❷

따라서

$f(1)=4\times(-1)^3=-4$

$f(2)=4\times(-1)^6=4$

$f(3)=4\times(-1)^9=-4$

⋮

$f(100)=4\times(-1)^{300}=4$

이므로 $f(n)$의 값은 n이 홀수일 때 -4, n이 짝수일 때 4이다.

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$

$=(-4)+4+(-4)+\cdots+4=0$ …… ❸

채점 기준	
❶ ab의 값 구하기	20 %
❷ $f(n)$을 간단히 하기	40 %
❸ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$의 값 구하기	40 %

STEP 3 최고난도 문제 ▶47쪽

01 $-80a-90$ **02** 98 **03** 5 **04** 2 **05** 4

06 5

01 idea 답 $-80a-90$

위에서 4번째 줄의 규칙이 4의 배수의 나열이므로 주어진 식을 $\langle 4, \square\rangle$를 사용한 식으로 변형할 수 있는지 생각해 본다.

$\langle 1, a\rangle=\langle 4, a\rangle-3=4a-3$

$\langle 2, a+1\rangle=\langle 4, a+1\rangle-2=4(a+1)-2=4a+2$

$\langle 3, a+2\rangle=\langle 4, a+2\rangle-1=4(a+2)-1=4a+7$

$\langle 4, a+3\rangle=4(a+3)=4a+12$

$\therefore \langle 1, a\rangle\times\langle 2, a+1\rangle-\langle 3, a+2\rangle\times\langle 4, a+3\rangle$

$=(4a-3)(4a+2)-(4a+7)(4a+12)$

$=16a^2-4a-6-(16a^2+76a+84)$

$=-80a-90$

다른 풀이

위에서 첫 번째 줄의 수 1, 5, 9, 13, … 중에서 왼쪽에서 a번째 수를 a를 사용하여 나타내면

$\langle 1, a\rangle=4a-3$ (a는 자연수)

$4a-3$의 위치에서 아래로 한 칸, 오른쪽으로 한 칸 이동한 곳에 있는 수가 $\langle 2, a+1\rangle$이므로

$\langle 2, a+1\rangle=(4a-3)+1+4=4a+2$

$4a+2$의 위치에서 아래로 한 칸, 오른쪽으로 한 칸 이동한 곳에 있는 수가 $\langle 3, a+2\rangle$이므로

$\langle 3, a+2\rangle=(4a+2)+1+4=4a+7$

$4a+7$의 위치에서 아래로 한 칸, 오른쪽으로 한 칸 이동한 곳에 있는 수가 $\langle 4, a+3\rangle$이므로

$\langle 4, a+3\rangle=(4a+7)+1+4=4a+12$

$\therefore \langle 1, a\rangle\times\langle 2, a+1\rangle-\langle 3, a+2\rangle\times\langle 4, a+3\rangle$

$=(4a-3)(4a+2)-(4a+7)(4a+12)$

$=16a^2-4a-6-(16a^2+76a+84)$

$=-80a-90$

02 답 98

주어진 조건의 식에서 x, y의 지수가 1씩 커지므로 $x+y$와의 곱을 생각한다.

$(ax^2+by^2)(x+y)=ax^3+ax^2y+bxy^2+by^3$

$=ax^3+by^3+xy(ax+by)$

에서 $10\times1=26+xy\times8$

$\therefore\ xy=-2$

$(ax^3+by^3)(x+y)=ax^4+ax^3y+bxy^3+by^4$

$=ax^4+by^4+xy(ax^2+by^2)$

에서 $26\times1=ax^4+by^4+(-2)\times10$

$\therefore\ ax^4+by^4=46$

$(ax^4+by^4)(x+y)=ax^5+ax^4y+bxy^4+by^5$

$=ax^5+by^5+xy(ax^3+by^3)$

에서 $46\times1=ax^5+by^5+(-2)\times26$

$\therefore\ ax^5+by^5=98$

03 답 5

$\sqrt{3}=1+\sqrt{3}-1$

$=1+\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}}$

$=1+\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}}$

$=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}}$

$=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}}}$

$=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}}$

$=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}-1}}$

$=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}}}}$

$=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}}}}$

$=1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}}}$

따라서 $a=1$, $b=1$, $c=2$, $d=1$이므로

$a+b+c+d=1+1+2+1=5$

비법 NOTE

$\sqrt{3}$을 원하는 형태로 나타내기 위하여 다음과 같이 변형한다.

(1) $\sqrt{3}=1+\sqrt{3}-1$

(2) $\sqrt{3}-1=\dfrac{1}{\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}}$

(3) $\sqrt{3}+1=2+\sqrt{3}-1$

04 답 2

$\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{\sqrt{6}-2}=\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}$이고, $2<\sqrt{6}<3$이므로

$2<\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}<\dfrac{5}{2}$

즉, $\dfrac{1}{x_1}$의 정수 부분이 2이므로

$x_2=\dfrac{1}{x_1}-2=\dfrac{\sqrt{6}+2}{2}-2=\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$ …… ❶

또 $\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{2}{\sqrt{6}-2}=\sqrt{6}+2$이고, $2<\sqrt{6}<3$이므로

$4<\sqrt{6}+2<5$

즉, $\dfrac{1}{x_2}$의 정수 부분이 4이므로

$x_3=\dfrac{1}{x_2}-4=(\sqrt{6}+2)-4=\sqrt{6}-2$ …… ❷

이와 같이 x_4, x_5, x_6, …의 값을 차례로 구하면

$x_1=x_3=x_5=\cdots=\sqrt{6}-2$,

$x_2=x_4=x_6=\cdots=\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$이므로 …… ❸

$x_{2030}=x_2=\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$, $x_{2031}=x_1=\sqrt{6}-2$

$\therefore\ \dfrac{x_{2031}}{x_{2030}}=\dfrac{\sqrt{6}-2}{\dfrac{\sqrt{6}-2}{2}}=2$ …… ❹

채점 기준

❶ x_2의 값 구하기	30 %
❷ x_3의 값 구하기	30 %
❸ x_n(n은 자연수)의 값 사이의 규칙 찾기	20 %
❹ $\dfrac{x_{2031}}{x_{2030}}$의 값 구하기	20 %

05 답 4

$\{(a+b)^n+(a-b)^n\}^2-\{(a+b)^n-(a-b)^n\}^2$에서

$(a+b)^n=A$, $(a-b)^n=B$로 놓으면

$(A+B)^2-(A-B)^2=(A^2+2AB+B^2)-(A^2-2AB+B^2)$

$=4AB$

$=4(a+b)^n(a-b)^n$

$=4\{(a+b)(a-b)\}^n$

$=4(a^2-b^2)^n$

이때 $a^2-b^2=1$이므로

$4(a^2-b^2)^n=4\times1^n=4$

06 답 5

$m^2+mn-n^2=0$의 양변을 $mn\,(mn\neq0)$으로 나누면

$\dfrac{m}{n}+1-\dfrac{n}{m}=0$ $\therefore\ \dfrac{m}{n}-\dfrac{n}{m}=-1$

$\therefore\ \left(\dfrac{m^2+n^2}{mn}\right)^2=\left(\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{m}\right)^2$

$=\left(\dfrac{m}{n}-\dfrac{n}{m}\right)^2+4$

$=(-1)^2+4$

$=5$

04 인수분해

STEP 1 핵심 문제

▶ 48~49쪽

01 ④ **02** 13 **03** ④ **04** $(x+4)(3x-1)$ **05** ③

06 $(a+2b+3)(a+2b-5)$ **07** $(x+2)(x-2)(x^2-6)$

08 $3x-9$ **09** 4 **10** $(x-y-5)(x-y+2)$

11 ㄱ, 8100 **12** ① **13** ⑤ **14** $-\frac{5}{4}$

01 답 ④

$(x-y)(y-z)^2-(z-y)^2(x-z)$

$=(x-y)(y-z)^2-(y-z)^2(x-z)$

$=(y-z)^2\{(x-y)-(x-z)\}$

$=(y-z)^2(x-y-x+z)$

$=(y-z)^2(-y+z)$

$=-(y-z)^3$

따라서 인수가 아닌 것은 ④이다.

02 답 13

$4x^2+ax+1=(2x)^2+ax+1^2$이므로

$a=\pm 2\times 2\times 1=\pm 4$

이때 $a>0$이므로 $a=4$

또 x^2-6x+b에서 $b=\left(\frac{-6}{2}\right)^2=(-3)^2=9$

$\therefore a+b=4+9=13$

03 답 ④

① $-4x^2+16xy-16y^2=-4(x^2-4xy+4y^2)=-4(x-2y)^2$

② $-9x^2+25=(-3x+5)(3x+5)$

③ $x^2-5xy-6y^2=(x+y)(x-6y)$

⑤ $15x^2+4x-4=(3x+2)(5x-2)$

따라서 인수분해 한 것이 옳은 것은 ④이다.

04 답 $(x+4)(3x-1)$

승재는 상수항을 제대로 보았으므로

$(x+2)(3x-2)=3x^2+4x-4$

에서 처음 이차식의 상수항은 -4이다. …… ❶

보아는 x의 계수를 제대로 보았으므로

$(x+3)(3x+2)=3x^2+11x+6$

에서 처음 이차식의 x의 계수는 11이다. …… ❷

따라서 처음 이차식은 $3x^2+11x-4$이므로 바르게 인수분해 하면

$3x^2+11x-4=(x+4)(3x-1)$ …… ❸

채점 기준	
❶ 처음 이차식의 상수항 구하기	30 %
❷ 처음 이차식의 x의 계수 구하기	30 %
❸ 처음 이차식을 바르게 인수분해 하기	40 %

05 답 ③

[그림 1]의 도형의 넓이는

$2x(x+2)-x=2x^2+4x-x=2x^2+3x$

$=x(2x+3)$

[그림 2]의 직사각형의 넓이는 (가로의 길이)$\times x$

이때 두 도형의 넓이가 서로 같으므로 [그림 2]의 직사각형의 가로의 길이는 $2x+3$

따라서 [그림 2]의 직사각형의 둘레의 길이는

$2\{x+(2x+3)\}=6x+6$

06 답 $(a+2b+3)(a+2b-5)$

$a+2b=A$로 놓으면

$(a+2b)(a+2b-2)-15=A(A-2)-15$

$=A^2-2A-15$

$=(A+3)(A-5)$

$=(a+2b+3)(a+2b-5)$

07 답 $(x+2)(x-2)(x^2-6)$

$(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)+15$

$=\{(x-1)(x+1)\}\{(x-3)(x+3)\}+15$

$=(x^2-1)(x^2-9)+15$

$x^2=A$로 놓으면

$(x^2-1)(x^2-9)+15=(A-1)(A-9)+15$

$=A^2-10A+24$

$=(A-4)(A-6)$

$=(x^2-4)(x^2-6)$

$=(x+2)(x-2)(x^2-6)$

08 답 $3x-9$

$x^3-9x^2-x+9=x^2(x-9)-(x-9)$

$=(x^2-1)(x-9)$

$=(x+1)(x-1)(x-9)$

따라서 세 일차식의 합은

$(x+1)+(x-1)+(x-9)=3x-9$

09 답 4

$25-4x^2-y^2+4xy=25-(4x^2-4xy+y^2)$

$=5^2-(2x-y)^2$

$=(5+2x-y)(5-2x+y)$

따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=5$, $d=-2$이므로

$a+b+c+d=2+(-1)+5+(-2)=4$

10 답 $(x-y-5)(x-y+2)$

x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해 하면

$x^2+y^2-3x+3y-2xy-10$

$=x^2-(2y+3)x+y^2+3y-10$

$=x^2-(2y+3)x+(y+5)(y-2)$

$=(x-y-5)(x-y+2)$

11 답 ㄱ, 8100

$81.5^2+17\times81.5+8.5^2=81.5^2+2\times81.5\times8.5+8.5^2$

$=(81.5+8.5)^2$

$=90^2=8100$

따라서 주어진 식을 계산하는 데 가장 알맞은 인수분해 공식은 ㄱ이고, 그 값은 8100이다.

12 답 ①

$31^2+52^2+82^2-21^2-42^2-72^2$

$=31^2-21^2+52^2-42^2+82^2-72^2$

$=(31+21)(31-21)+(52+42)(52-42)+(82+72)(82-72)$

$=52\times10+94\times10+154\times10$

$=10(52+94+154)$

$=10\times300$

$=3000$

$=3\times10^3$

$\therefore \dfrac{31^2+52^2+82^2-21^2-42^2-72^2}{10^3}=\dfrac{3\times10^3}{10^3}=3$

13 답 ⑤

$\dfrac{x^2-3xy+2y^2}{x-2y}=\dfrac{(x-y)(x-2y)}{x-2y}$

$=x-y$

$=11+6\sqrt{2}-(-3+3\sqrt{2})$

$=14+3\sqrt{2}$

14 답 $-\dfrac{5}{4}$

$\dfrac{-3x^2y^2+x^2y-xy^2}{x^2-2xy+y^2}=\dfrac{xy(-3xy+x-y)}{(x-y)^2}$

$=\dfrac{xy(-3xy-2xy)}{(-2xy)^2}$

$=\dfrac{-5x^2y^2}{4x^2y^2}=-\dfrac{5}{4}$

STEP 2 고난도 문제

▶ 50~54쪽

01 60 **02** ①, ④ **03** (18, 5), (−22, −5) **04** ①

05 $2(a+c)(a-c)$ **06** 7, 23 **07** 13 **08** ④ **09** ⑤

10 3 **11** $2x+3y$ **12** 32 cm **13** ③ **14** ④

15 $(x-1)^2(y-1)^2$ **16** ④ **17** ⑤ **18** $\dfrac{1}{6}$ **19** ①

20 $\dfrac{101}{200}$ **21** 228 **22** 149, 151 **23** 991 **24** 16

25 (337, −312) **26** −2 **27** $8-2\sqrt{7}$ **28** 48

29 14 **30** $9-\sqrt{3}$

01 답 60

$x^2-5ax+3b+(7ax-b)=x^2+2ax+2b$

이때 $2b=\left(\dfrac{2a}{2}\right)^2$이어야 하므로 $2b=a^2$

이를 만족시키는 50 이하의 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

(2, 2), (4, 8), (6, 18), (8, 32), (10, 50)

따라서 $a+b$의 값 중 가장 큰 값은

$10+50=60$

02 답 ①, ④

$x^8-256=(x^4+16)(x^4-16)$

$=(x^4+16)(x^2+4)(x^2-4)$

$=(x^4+16)(x^2+4)(x+2)(x-2)$

따라서 x^8-256의 인수인 것은 ①, ④이다.

03 답 (18, 5), (−22, −5)

$4x^2+(m+2)xy+25y^2=(2x)^2+(m+2)xy+(5y)^2$이므로

$m+2=\pm2\times2\times5=\pm20$

$\therefore m=18$ 또는 $m=-22$

(i) $m=18$일 때,

$4x^2+20xy+25y^2=(2x+5y)^2$이므로 $n=5$

(ii) $m=-22$일 때,

$4x^2-20xy+25y^2=(2x-5y)^2$이므로 $n=-5$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (m, n)은 (18, 5), (−22, −5)이다.

04 답 ①

$a>1$에서 $0<\dfrac{1}{a}<1$이므로 $a+\dfrac{1}{a}>0$

$0<b<1$에서 $\dfrac{1}{b}>1$이므로 $b-\dfrac{1}{b}<0$

$\therefore \sqrt{a^2+2+\dfrac{1}{a^2}}-\sqrt{\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2-4}-\dfrac{1}{\sqrt{a^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{b^2}}$

$=\sqrt{\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2}-\sqrt{\left(b-\dfrac{1}{b}\right)^2}-\dfrac{1}{\sqrt{a^2}}+\sqrt{\left(\dfrac{1}{b}\right)^2}$

$=a+\dfrac{1}{a}-\left\{-\left(b-\dfrac{1}{b}\right)\right\}-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

$=a+\dfrac{1}{a}+b-\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

$=a+b$

개념 NOTE

근호 안의 식이 완전제곱식으로 인수분해 되는 경우

근호 안의 식을 완전제곱식으로 인수분해 한 후 부호에 주의하여 근호를 없앤다.

➡ $\sqrt{(x-a)^2}=\begin{cases} x-a & (x-a\geq0) \\ -(x-a) & (x-a<0) \end{cases}$

05 답 $2(a+c)(a-c)$

$[-a, 2b, c]-[b, -4c, a]-[c, -2a, -b]$

$=(a^2-c^2+2abc)-(b^2-a^2+4abc)-(c^2-b^2-2abc)$

$=a^2-c^2+2abc-b^2+a^2-4abc-c^2+b^2+2abc$

$=2a^2-2c^2=2(a^2-c^2)$

$=2(a+c)(a-c)$

06 답 7, 23

$n^2+10n-96=(n+16)(n-6)$ …… ❶

따라서 $n^2+10n-96$이 소수가 되려면 $\underset{n=-15}{n+16=1}$ 또는 $\underset{n=7}{n-6=1}$이어야 한다. …… ❷

이때 n은 자연수이므로 $n=7$이고, …… ❸

그때의 소수는

$(7+16)\times(7-6)=23$ …… ❹

채점 기준

❶ 주어진 식을 인수분해 하기	30 %
❷ 주어진 식이 소수가 되는 조건 알기	30 %
❸ n의 값 구하기	20 %
❹ 소수 구하기	20 %

비법 NOTE

두 자연수 A, B에 대하여 AB=(소수)이려면

$A=1$, B=(소수) 또는 A=(소수), $B=1$

이어야 한다.

07 답 13

주어진 다항식이 $(x+a)(x+b)$(a, b는 정수, $a>b$)로 인수분해된다고 하면

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$에서

$a+b=-2$, $-200\le ab\le -1$

이를 만족시키는 두 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, -3)$, $(2, -4)$, $(3, -5)$, …, $(13, -15)$이므로 구하는 다항식의 개수는 13이다.

08 답 ④

a, c가 자연수이고, $x+c$가 $x^2+ax+27$의 인수이므로 c는 27의 약수이다.

또 b, c가 자연수이고, $x+c$가 $x^2+bx-18$의 인수이므로 c는 18의 약수이다.

즉, c는 27과 18의 공약수이고, 27과 18의 최대공약수는 9이므로

$c=1$, 3, 9

(i) $c=1$일 때,

$x^2+ax+27=(x+1)(x+27)$에서 $a=1+27=28$

$x^2+bx-18=(x+1)(x-18)$에서 $b=1-18=-17$

이때 b는 자연수가 아니다.

(ii) $c=3$일 때,

$x^2+ax+27=(x+3)(x+9)$에서 $a=3+9=12$

$x^2+bx-18=(x+3)(x-6)$에서 $b=3-6=-3$

이때 b는 자연수가 아니다.

(iii) $c=9$일 때,

$x^2+ax+27=(x+9)(x+3)$에서 $a=9+3=12$

$x^2+bx-18=(x+9)(x-2)$에서 $b=9-2=7$

(i), (ii), (iii)에서 $a=12$, $b=7$, $c=9$

$\therefore a+b+c=12+7+9=28$

09 답 ⑤

a가 소수이므로 $ax^2+30x+8=(ax+b)(x+c)$(b, c는 자연수)라 하면

$ax^2+30x+8=ax^2+(ac+b)x+bc$

$\therefore ac+b=30$, $bc=8$

(i) $b=1$, $c=8$일 때,

$8a+1=30$에서 $8a=29$ $\therefore a=\frac{29}{8}$ → 소수가 아니다.

(ii) $b=2$, $c=4$일 때,

$4a+2=30$에서 $4a=28$ $\therefore a=7$

(iii) $b=4$, $c=2$일 때,

$2a+4=30$에서 $2a=26$ $\therefore a=13$

(iv) $b=8$, $c=1$일 때,

$a+8=30$ $\therefore a=22$ → 소수가 아니다.

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 소수 a의 값은 7, 13이므로 구하는 합은

$7+13=20$

10 답 3

$x^2-(a+1)x+a=(x-1)(x-a)$이므로

$x^2-(a+3)x+a+6$은 $x-1$, $x-a$ 중 하나를 인수로 가져야 한다.

(i) 공통인 인수가 $x-1$일 때,

$x^2-(a+3)x+a+6=(x-1)(x-b)$($b$는 상수)라 하면

$x^2-(a+3)x+a+6=x^2-(b+1)x+b$

즉, $a+3=b+1$, $a+6=b$이므로

$a=b-2$, $a=b-6$

그런데 $b-2\neq b-6$이므로 성립하지 않는다.

(ii) 공통인 인수가 $x-a$일 때,

$x^2-(a+3)x+a+6=(x-a)(x-c)$($c$는 상수)라 하면

$x^2-(a+3)x+a+6=x^2-(a+c)x+ac$

즉, $a+3=a+c$, $a+6=ac$이므로

$a=3$, $c=3$

(i), (ii)에서 $a=3$

11 답 $2x+3y$

(색종이 A의 넓이)

=(색종이 C의 넓이)

−(색종이 C에서 색종이 B와 겹치지 않은 부분의 넓이)

−(색종이 B에서 색종이 A와 겹치지 않은 부분의 넓이)

$=(3x+4y)^2-(4x^2+11xy+5y^2)-(x^2+xy+2y^2)$

$=9x^2+24xy+16y^2-4x^2-11xy-5y^2-x^2-xy-2y^2$

$=4x^2+12xy+9y^2$

$=(2x+3y)^2$

따라서 색종이 A의 한 변의 길이는 $2x+3y$이다.

12 답 32 cm

$\overline{AC}$를 지름으로 하는 원의 반지름의 길이를 r cm라 하면

$2\pi r=36\pi$ $\therefore r=18$

$\therefore \overline{AC}=2r=2\times 18=36$(cm)

이때 $\overline{BC}=\overline{CD}=a$ cm라 하면
(색칠한 부분의 넓이)
=($\overline{AD}$를 지름으로 하는 원의 넓이)
−($\overline{AB}$를 지름으로 하는 원의 넓이)
$=\pi\left(\frac{36+a}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{36-a}{2}\right)^2$
$=\pi\left(\frac{36+a}{2}+\frac{36-a}{2}\right)\left(\frac{36+a}{2}-\frac{36-a}{2}\right)$
$=\pi\times36\times a$
$=36a\pi(\text{cm}^2)$
즉, $36a\pi=144\pi$이므로 $a=4$
따라서 $\overline{BC}=4$ cm이므로
$\overline{AB}=\overline{AC}-\overline{BC}=36-4=32(\text{cm})$

13 답 ③
$x+y=A$로 놓으면
$(x+y)^2-6(x+y)-55=A^2-6A-55$
$=(A+5)(A-11)$
$=(x+y+5)(x+y-11)$
이 식의 값이 소수가 되려면
$x+y+5=1$ 또는 $x+y-11=1$이어야 한다.
이때 x, y는 자연수이므로 $x+y=12$
따라서 $x+y=12$이면 $x+y+5=17$은 소수이므로
$x+y=12$를 만족시키는 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는
$(1, 11)$, $(2, 10)$, $(3, 9)$, …, $(11, 1)$의 11개이다.

14 답 ④
$x(x+2)(x+4)(x+6)+k$
$=\{x(x+6)\}\{(x+2)(x+4)\}+k$
$=(x^2+6x)(x^2+6x+8)+k$
$x^2+6x=A$로 놓으면
$(x^2+6x)(x^2+6x+8)+k=A(A+8)+k$
$=A^2+8A+k$
이 식이 완전제곱식이 되려면
$k=\left(\frac{8}{2}\right)^2=4^2=16$

15 답 $(x-1)^2(y-1)^2$
$x+y=A$, $xy=B$로 놓으면
$(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)$
$=(B-1)^2+(A-2)(A-2B)$
$=B^2-2B+1+A^2-2AB-2A+4B$
$=B^2-2AB+2B+A^2-2A+1$
$=B^2-2(A-1)B+(A-1)^2$
$=\{B-(A-1)\}^2$
$=(B-A+1)^2$
$=(xy-x-y+1)^2$
$=\{x(y-1)-(y-1)\}^2$
$=(x-1)^2(y-1)^2$

16 답 ④
x에 대하여 내림차순을 정리하여 인수분해 하면
$2x^2-5xy-3y^2+6x+10y-8$
$=2x^2-(5y-6)x-3y^2+10y-8$
$=2x^2-(5y-6)x-(3y^2-10y+8)$
$=2x^2-(5y-6)x-(3y-4)(y-2)$
$=\{2x+(y-2)\}\{x-(3y-4)\}$
$=(2x+y-2)(x-3y+4)$
따라서 $a=1$, $b=-2$, $c=-3$, $d=4$이므로
$a-b-c-d=1-(-2)-(-3)-4=2$

17 답 ⑤
x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해 하면
$xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$
$=x(yz+y+z+1)+(yz+y+z+1)$
$=(x+1)(yz+y+z+1)$
$=(x+1)\{y(z+1)+(z+1)\}$
$=(x+1)(y+1)(z+1)$

18 답 $\frac{1}{6}$
모든 경우의 수는 $6\times6=36$
$xy-2x-y+2=x(y-2)-(y-2)$
$=(x-1)(y-2)$
즉, $\sqrt{(x-1)(y-2)}$가 자연수가 되려면 $(x-1)(y-2)$가 (자연수)^2 꼴이어야 한다.
이때 $1\le x\le6$, $1\le y\le6$이므로 두 자연수 x, y의 순서쌍 (x, y)는 다음과 같다.
(i) $(x-1)(y-2)=1$일 때, $(2, 3)$
(ii) $(x-1)(y-2)=4$일 때, $(2, 6)$, $(3, 4)$, $(5, 3)$
(iii) $(x-1)(y-2)=9$일 때, $(4, 5)$
(iv) $(x-1)(y-2)=16$일 때, $(5, 6)$
(i)~(iv)에서 $\sqrt{xy-2x-y+2}$가 자연수가 되는 경우의 수는
$1+3+1+1=6$
따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

19 idea 답 ①
x, y는 연속하는 두 자연수이므로 $y=x+1$이라 하면
$X=\sqrt{x^2+y^2+x^2y^2}$
$=\sqrt{x^2+(x+1)^2+\{x(x+1)\}^2}$
$=\sqrt{2x^2+2x+1+(x^2+x)^2}$
$=\sqrt{(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1}$
$x^2+x=A$로 놓으면
$X=\sqrt{A^2+2A+1}=\sqrt{(A+1)^2}$
$=\sqrt{(x^2+x+1)^2}=x^2+x+1$ ($\because$ x는 자연수)
$=x(x+1)+1$

이때 연속하는 두 자연수의 곱 $x(x+1)$은 항상 짝수이므로 $X=x(x+1)+1$은 항상 홀수이다.

참고 $y=x-1\,(x>1)$이라 하면 $X=\underbrace{x(x-1)}_{\text{항상 짝수}}+1$이므로 X는 항상 홀수이다.

20 답 $\frac{101}{200}$

$$f(2)\times f(3)\times f(4)\times\cdots\times f(99)\times f(100)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{99^2}\right)\times\left(1-\frac{1}{100^2}\right)$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)$$
$$\times\cdots\times\left(1-\frac{1}{99}\right)\left(1+\frac{1}{99}\right)\times\left(1-\frac{1}{100}\right)\left(1+\frac{1}{100}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{98}{99}\times\frac{100}{99}\times\frac{99}{100}\times\frac{101}{100}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{101}{100}=\frac{101}{200}$$

21 답 228

$$\frac{215^2-225}{230}+\frac{3^{33}+3^{30}-3^3-1}{3^{30}-1}$$
$$=\frac{215^2-15^2}{230}+\frac{3^{30}(3^3+1)-(3^3+1)}{3^{30}-1}$$
$$=\frac{(215+15)(215-15)}{230}+\frac{(3^3+1)(3^{30}-1)}{3^{30}-1}$$
$$=215-15+3^3+1$$
$$=228$$

22 답 149, 151

22499는 두 소수의 곱으로 나타내어지므로 두 소수의 곱이 22499가 되는 수를 찾으면 된다.

$$22499=22500-1$$
$$=150^2-1^2$$
$$=(150+1)(150-1)$$
$$=151\times149$$

따라서 22499는 두 소수 149와 151의 곱으로 나타낼 수 있으므로 복호 키는 149와 151이다.

23 답 991

$30=x$로 놓으면

$$30\times31\times32\times33+1=x(x+1)(x+2)(x+3)+1$$
$$=\{x(x+3)\}\{(x+1)(x+2)\}+1$$
$$=(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1$$

$x^2+3x=A$로 놓으면

$$(x^2+3x)(x^2+3x+2)+1=A(A+2)+1$$
$$=A^2+2A+1$$
$$=(A+1)^2$$
$$=(x^2+3x+1)^2$$
$$=(30^2+3\times30+1)^2$$
$$=991^2$$

이때 $N>0$이므로 $N=991$

24 답 16

$$2^{48}-1=(2^{24}+1)(2^{24}-1)$$
$$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^{12}-1)$$
$$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^6+1)(2^6-1)$$
$$=(2^{24}+1)(2^{12}+1)(2^6+1)(2^3+1)(2^3-1)\quad\cdots\cdots\ ❶$$

따라서 $2^{48}-1$은 2^3+1과 2^3-1, 즉 9와 7로 나누어떨어지므로 구하는 합은

$$9+7=16\quad\cdots\cdots\ ❷$$

채점 기준	
❶ $2^{48}-1$을 인수분해 하기	50 %
❷ 두 자연수의 합 구하기	50 %

25 idea 답 (337, −312)

원점 또는 점 A_{n-1}에서 점 A_n으로 이동할 때, n이 홀수이면 x좌표가 변하고, n이 짝수이면 y좌표가 변하므로 원점에서 출발하여 각 점의 좌표를 차례로 나타내면

$A_1(1^2,\ 0)$, $A_2(1^2,\ 2^2)$, $A_3(1^2-3^2,\ 2^2)$,
$A_4(1^2-3^2,\ 2^2-4^2)$, $A_5(1^2-3^2+5^2,\ 2^2-4^2)$,
$A_6(1^2-3^2+5^2,\ 2^2-4^2+6^2)$, …

같은 방법으로 하면 점 A_{25}의 x좌표는

$$1^2-3^2+5^2-7^2+\cdots+21^2-23^2+25^2$$
$$=(1-3)(1+3)+(5-7)(5+7)+\cdots+(21-23)(21+23)+25^2$$
$$=-2\times(\underbrace{1+3+5+7+\cdots+21+23}_{\text{6개}})+25^2$$
$$\hookrightarrow(1+23)+(3+21)+(5+19)+\cdots+(11+13)=24\times6$$
$$=-2\times(24\times6)+625$$
$$=-288+625$$
$$=337$$

또 점 A_{25}의 y좌표는

$$2^2-4^2+6^2-8^2+\cdots+22^2-24^2$$
$$=(2-4)(2+4)+(6-8)(6+8)+\cdots+(22-24)(22+24)$$
$$=-2\times(\underbrace{2+4+6+8+\cdots+22+24}_{\text{6개}})$$
$$\hookrightarrow(2+24)+(4+22)+(6+20)+\cdots+(12+14)=26\times6$$
$$=-2\times(26\times6)$$
$$=-312$$

따라서 점 A_{25}의 좌표는 (337, −312)이다.

26 답 −2

주어진 식의 분자를 x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$$3x^2+4xy+y^2+6x+2y=3x^2+(4y+6)x+y^2+2y$$
$$=3x^2+(4y+6)x+y(y+2)$$
$$=(3x+y)(x+y+2)$$

$$\therefore\ \frac{3x^2+4xy+y^2+6x+2y}{x+y+2}=\frac{(3x+y)(x+y+2)}{x+y+2}$$
$$=3x+y$$
$$=3(\sqrt{5}-2)+(4-3\sqrt{5})$$
$$=3\sqrt{5}-6+4-3\sqrt{5}$$
$$=-2$$

27 답 $8-2\sqrt{7}$

$2<\sqrt{7}<3$에서 $\sqrt{7}$의 정수 부분이 2이므로

$a=\sqrt{7}-2$

또 $2\sqrt{3}=\sqrt{12}$이고, $3<2\sqrt{3}<4$에서

$1<5-2\sqrt{3}<2$이므로 $b=1$

$$\therefore \frac{a^3-b^3+a^2b-ab^2}{a-b}=\frac{a^3+a^2b-b^3-ab^2}{a-b}$$
$$=\frac{a^2(a+b)-b^2(a+b)}{a-b}$$
$$=\frac{(a^2-b^2)(a+b)}{a-b}$$
$$=\frac{(a+b)^2(a-b)}{a-b}$$
$$=(a+b)^2$$
$$=(\sqrt{7}-2+1)^2$$
$$=(\sqrt{7}-1)^2$$
$$=8-2\sqrt{7}$$

28 답 48

$2x+2y+xy=28$ …… ㉠

$x+y-xy=-4$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $3x+3y=24$이므로

$3(x+y)=24$ $\therefore x+y=8$

$x+y=8$을 ㉡에 대입하면

$8-xy=-4$ $\therefore xy=12$

또 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy=8^2-4\times12=16$이므로

$x-y=\pm4$

이때 $x>y$에서 $x-y>0$이므로 $x-y=4$

$$\therefore \sqrt{6xy(x^2-y^2)}=\sqrt{6xy(x+y)(x-y)}$$
$$=\sqrt{6\times12\times8\times4}$$
$$=\sqrt{(2^4\times3)^2}=48$$

29 답 14

$(a^2+b^2)(x^2+y^2)$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$

$=a^2x^2+2abxy+b^2y^2+a^2y^2-2abxy+b^2x^2$

$=(ax+by)^2+(ay-bx)^2$ ← 주어진 식에 $2abxy$를 더하고 빼서 완전제곱식으로 나타낸다.

$=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$

$=(2\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2$

$=12+2=14$

30 idea 답 $9-\sqrt{3}$

주어진 방정식을 연립방정식으로 나타내면

$x^2+\sqrt{3}y=y^2+\sqrt{3}x=2\sqrt{3}$에서

$$\begin{cases} x^2=2\sqrt{3}-\sqrt{3}y & \cdots\cdots ㉠ \\ y^2=2\sqrt{3}-\sqrt{3}x & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠−㉡을 하면

$x^2-y^2=\sqrt{3}x-\sqrt{3}y$

$(x+y)(x-y)=\sqrt{3}(x-y)$

이때 $x\neq y$, 즉 $x-y\neq0$이므로

$x+y=\sqrt{3}$

㉠+㉡을 하면

$x^2+y^2=4\sqrt{3}-\sqrt{3}(x+y)$

$=4\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}-3$

$\therefore x^3+x^2y+y^3+xy^2-xy$

$=x^2(x+y)+y^2(x+y)-xy$

$=(x^2+y^2)(x+y)-xy$

$=(4\sqrt{3}-3)\times\sqrt{3}-(3-2\sqrt{3})$

$=12-3\sqrt{3}-3+2\sqrt{3}$

$=9-\sqrt{3}$

STEP 3 최고난도 문제 ▶ 55쪽

01 18 **02** 6 **03** 0 **04** 10 **05** 33333 **06** 72

01 답 18

$p^2q<n\leq pq^2$을 만족시키는 자연수 n의 개수가 308이므로

$pq^2-p^2q=308$

$\therefore pq(q-p)=308$ …… ㉠

이때 $q>p$이고, $q-p>0$이므로 세 자연수 p, q, $q-p$ 중에서 가장 큰 수는 q이다.

즉, $308=2^2\times7\times11$이므로

$q=11$

또 p는 소수이므로 $p=2$ 또는 $p=7$

(i) $p=2$일 때,

$pq(q-p)=2\times11\times(11-2)=198$

그런데 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $p=7$일 때,

$pq(q-p)=7\times11\times(11-7)=308$

따라서 $p=7$, $q=11$이므로

$p+q=7+11=18$

02 idea 답 6

$8n^3-2n=2n(4n^2-1)$

$=2n(2n+1)(2n-1)$

$=(2n-1)\times2n\times(2n+1)$

즉, $8n^3-2n$은 연속하는 세 자연수의 곱이다.

이때 연속하는 세 자연수에는 2의 배수와 3의 배수가 적어도 하나씩 존재하므로 $8n^3-2n$은 항상 2의 배수이면서 3의 배수이다.

따라서 $8n^3-2n$은 항상 6의 배수이므로 k의 값 중 가장 큰 수는 6이다.

03 답 0

주어진 식의 분모를 각각 인수분해 하고, 분자는 변형하여 식을 간단히 하면

$$\frac{2a-b-c}{a^2+bc-ca-ab}+\frac{2b-c-a}{b^2+ca-ab-bc}+\frac{2c-a-b}{c^2+ab-bc-ca}$$

$$=\frac{2a-b-c}{a(a-b)-c(a-b)}+\frac{2b-c-a}{b(b-c)-a(b-c)}$$

$$+\frac{2c-a-b}{c(c-a)-b(c-a)}$$

$$=\frac{2a-b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{2b-c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{2c-a-b}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{(a-b)+(a-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b-c)+(b-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(c-a)+(c-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-b}+\frac{1}{c-a}$$

$$=\frac{1}{a-c}+\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a-b}+\frac{1}{b-c}-\frac{1}{b-c}-\frac{1}{a-c}$$

$=0$

04 답 10

$p+q+pq=11$에서 $pq+p+q+1=12$

$p(q+1)+(q+1)=12$

$\therefore (p+1)(q+1)=12$ …… ㉠

$q+r+qr=23$에서 $qr+q+r+1=24$

$q(r+1)+(r+1)=24$

$\therefore (q+1)(r+1)=24$ …… ㉡

$r+p+rp=17$에서 $rp+r+p+1=18$

$r(p+1)+(p+1)=18$

$\therefore (r+1)(p+1)=18$ …… ㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$\{(p+1)(q+1)(r+1)\}^2=12\times24\times18$

$=2^6\times3^4$

이때 $p+1>0$, $q+1>0$, $r+1>0$이므로

$(p+1)(q+1)(r+1)=2^3\times3^2=72$ …… ㉣

㉣÷㉠을 하면 $r+1=\frac{72}{12}=6$ $\therefore r=5$

㉣÷㉡을 하면 $p+1=\frac{72}{24}=3$ $\therefore p=2$

㉣÷㉢을 하면 $q+1=\frac{72}{18}=4$ $\therefore q=3$

$\therefore p+q+r=2+3+5=10$

비법 NOTE

$p+q+pq=11$, $q+r+qr=23$, $r+p+rp=17$과 같이 등식의 좌변이 인수분해 되지 않는 경우에는 양변에 적당한 수를 더해서 좌변이 인수분해 되도록 식을 변형한다.

05 Idea 답 33333

$11111=a$로 놓으면

$1111111111=1111100000+11111=a\times10^5+a$이고,

$22222=2\times11111=2a$이므로

$1111111111-22222=a\times10^5+a-2a$

$=a\times10^5-a$

$=a(10^5-1)$

$=a\times99999$

$=11111\times9\times11111$

$=(3\times11111)^2$

이때 n은 자연수이므로

$n=3\times11111=33333$

06 답 72

$x^2-xy+y^2=6$에서 $x^2-2xy+y^2=6-xy$이므로

$(x-y)^2=6-xy$

$\therefore x^4+y^4+(x-y)^4$

$=x^4+y^4+(6-xy)^2$

$=x^4+y^4+x^2y^2-12xy+36$

$=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2-12xy+36$

→ 주어진 식에 x^2y^2을 더하고 빼서 A^2-B^2 꼴로 나타낸다.

$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2-12xy+36$

$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)-12xy+36$

$=6(x^2+xy+y^2)-12xy+36$

$=6(x^2-xy+y^2)+36$

$=6\times6+36$

$=72$

단원 마스터

▶ 56~59쪽

01 ④	02 $21x^2-2x-8$	03 ④	04 ②	05 ②
06 5	07 ①	08 $1+2x^2+x^4-x^8$	09 ⑤	10 ②
11 $29-3\sqrt{11}$	12 2	13 ①	14 ②	
15 25, 190	16 $3x-7$		17 10	18 ⑤
19 $2x(x+2)(x-2)$		20 ③	21 $\frac{93}{100}$	22 ③
23 $\frac{10}{3}$	24 12			

01 답 ④

$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$에서 $a+b=10$이므로 이를 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(1, 9)$, $(2, 8)$, $(3, 7)$, $(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$, $(7, 3)$, $(8, 2)$, $(9, 1)$이다.

이때 $c=ab$이므로 ab의 값이 가장 큰 경우는 $a=5$, $b=5$일 때이다.

따라서 구하는 가장 큰 수는

$5\times5=25$

02 답 $21x^2-2x-8$

$(3x+a)(4x+7)=12x^2+(4a+21)x+7a$이므로

$4a+21=13$, $7a=-14$

$\therefore a=-2$

따라서 바르게 전개한 식은

$(3x-2)(7x+4)=21x^2-2x-8$

03 답 ④

점 D가 $\overline{AB}$의 중점이므로

$\overline{AD}=\frac{x+y}{2}$

$\therefore \overline{CD}=x-\frac{x+y}{2}=\frac{x-y}{2}$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)$=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2$

$=\frac{x^2+2xy+y^2}{4}+\frac{x^2-2xy+y^2}{4}$

$=\frac{2x^2+2y^2}{4}=\frac{x^2+y^2}{2}$

04 답 ②

$6(9+3)(9^2+3^2)(9^4+3^4)(9^8+3^8)+3^{16}$

$=(9-3)(9+3)(9^2+3^2)(9^4+3^4)(9^8+3^8)+3^{16}$

$=(9^2-3^2)(9^2+3^2)(9^4+3^4)(9^8+3^8)+3^{16}$

$=(9^4-3^4)(9^4+3^4)(9^8+3^8)+3^{16}$

$=(9^8-3^8)(9^8+3^8)+3^{16}$

$=(9^{16}-3^{16})+3^{16}=9^{16}$

$=(3^2)^{16}=3^{32}$

$\therefore x=32$

05 답 ②

$(4+a\sqrt{3})(1-2\sqrt{3})^2=(4+a\sqrt{3})(1-4\sqrt{3}+12)$

$=(4+a\sqrt{3})(13-4\sqrt{3})$

$=52+(-16+13a)\sqrt{3}-12a$

$=52-12a+(13a-16)\sqrt{3}$

이때 유리수가 되려면 $13a-16=0$이어야 하므로

$13a=16$ $\therefore a=\frac{16}{13}$

06 답 5

$a+\sqrt{b}+\frac{1}{a+\sqrt{b}}=a+\sqrt{b}+\frac{a-\sqrt{b}}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}$

$=a+\sqrt{b}+\frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}$

$=\left(a+\frac{a}{a^2-b}\right)+\left(1-\frac{1}{a^2-b}\right)\sqrt{b}$

이때 유리수가 되려면 $1-\frac{1}{a^2-b}=0$이어야 하므로

$\frac{1}{a^2-b}=1$ $\therefore b=a^2-1$

따라서 이를 만족시키는 40 이하의 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(2, 3)$, $(3, 8)$, $(4, 15)$, $(5, 24)$, $(6, 35)$의 5개이다.

07 답 ①

입장권의 넓이를 x라 하면 고객용 부분의 넓이는 $\frac{\sqrt{15}}{5}x$, 회수용 부분의 넓이는 $x-\frac{\sqrt{15}}{5}x$이므로

$x-\frac{\sqrt{15}}{5}x=4$에서 $\frac{5-\sqrt{15}}{5}x=4$

$\therefore x=4\times\frac{5}{5-\sqrt{15}}=\frac{20(5+\sqrt{15})}{(5-\sqrt{15})(5+\sqrt{15})}$

$=\frac{20(5+\sqrt{15})}{25-15}=2(5+\sqrt{15})$

$=10+2\sqrt{15}$

08 답 $1+2x^2+x^4-x^8$

$1+x^2=A$로 놓으면

$(1-x+x^2)(1+x+x^2)=(A-x)(A+x)$

$=A^2-x^2$

$=(1+x^2)^2-x^2$

$=1+2x^2+x^4-x^2$

$=1+x^2+x^4$

즉, 주어진 식은 $(1+x^2+x^4)(1+x^2-x^4)$이므로

$(1+x^2+x^4)(1+x^2-x^4)=(A+x^4)(A-x^4)$

$=A^2-(x^4)^2$

$=(1+x^2)^2-(x^4)^2$

$=1+2x^2+x^4-x^8$

09 답 ⑤

$(x+\sqrt{5})(y-\sqrt{5})=7-4\sqrt{5}$에서

$xy-5+(-x+y)\sqrt{5}=7-4\sqrt{5}$

따라서 $xy-5=7$, $-x+y=-4$이므로

$xy=12$, $x-y=4$

$\therefore x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$

$=4^2+2\times12=40$

10 답 ②

$2x^2-6x+1=0$에서 $x\neq0$이므로 양변을 $2x$로 나누면

$x-3+\frac{1}{2x}=0$ $\therefore x+\frac{1}{2x}=3$

이때 $x^2+\frac{1}{4x^2}=\left(x+\frac{1}{2x}\right)^2-1=3^2-1=8$이므로

$x^4+\frac{1}{16x^4}=\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)^2-\frac{1}{2}$

$=8^2-\frac{1}{2}=\frac{127}{2}$

11 답 $29-3\sqrt{11}$

$3<\sqrt{11}<4$이므로 $6<3+\sqrt{11}<7$

$\therefore \langle x\rangle=6$ ····· ❶

$2x=2(3+\sqrt{11})=6+2\sqrt{11}=6+\sqrt{44}$이고,

$6<\sqrt{44}<7$이므로 $12<6+\sqrt{44}<13$

$\therefore \langle 2x\rangle=12$ ····· ❷

$$\therefore \frac{x}{x-\langle x\rangle}+\frac{x-\langle 2x\rangle}{x}$$
$$=\frac{3+\sqrt{11}}{(3+\sqrt{11})-6}+\frac{(3+\sqrt{11})-12}{3+\sqrt{11}}$$
$$=\frac{\sqrt{11}+3}{\sqrt{11}-3}+\frac{\sqrt{11}-9}{\sqrt{11}+3}$$
$$=\frac{(\sqrt{11}+3)^2}{(\sqrt{11}-3)(\sqrt{11}+3)}+\frac{(\sqrt{11}-9)(\sqrt{11}-3)}{(\sqrt{11}+3)(\sqrt{11}-3)}$$
$$=\frac{11+6\sqrt{11}+9}{11-9}+\frac{11-3\sqrt{11}-9\sqrt{11}+27}{11-9}$$
$$=\frac{58-6\sqrt{11}}{2}$$
$$=29-3\sqrt{11} \quad \cdots\cdots ❸$$

채점 기준	
❶ $\langle x\rangle$의 값 구하기	20 %
❷ $\langle 2x\rangle$의 값 구하기	30 %
❸ 주어진 식의 값 구하기	50 %

12 답 2

$2^{3x}\times 2^{3y}=(12-4\sqrt{5})(12+4\sqrt{5})$
$=12^2-(4\sqrt{5})^2$
$=144-80$
$=64=2^6$
이때 $2^{3x}\times 2^{3y}=2^{3x+3y}=2^{3(x+y)}$이므로
$3(x+y)=6 \quad \therefore x+y=2$

개념 NOTE

m, n이 자연수일 때,
(1) $a^m\times a^n=a^{m+n}$
(2) $(a^m)^n=a^{mn}$
(3) $a^m\div a^n=\begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$ (단, $a\neq 0$)
(4) $(ab)^m=a^mb^m$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m=\dfrac{a^m}{b^m}$ (단, $b\neq 0$)

13 답 ①

$4x^2+6x+2=(2x+1)(2x+2)$,
$4x^2-4x-3=(2x-3)(2x+1)$
즉, 두 다항식의 공통인 인수가 $2x+1$이므로 $2x^2+ax-5$도 $2x+1$을 인수로 갖는다.
$2x^2+ax-5=(2x+1)(x+m)$ (m은 상수)이라 하면
$2x^2+ax-5=2x^2+(2m+1)x+m$
따라서 $2m+1=a$, $m=-5$이므로
$a=-9$

14 답 ②

$\sqrt{x}=a+3$의 양변을 제곱하면 $x=(a+3)^2$
$\therefore x=a^2+6a+9$
이때 $-2<a<4$에서 $a+2>0$, $a-4<0$이므로
$\sqrt{x-2a-5}+\sqrt{x-14a+7}$
$=\sqrt{a^2+6a+9-2a-5}+\sqrt{a^2+6a+9-14a+7}$
$=\sqrt{a^2+4a+4}+\sqrt{a^2-8a+16}$
$=\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{(a-4)^2}$
$=(a+2)-(a-4)=6$

15 답 25, 190

$n^2-21n+90=(n-15)(n-6)$이 19의 배수이므로
$n-15$ 또는 $n-6$이 19의 배수이다.
이때 자연수 n의 최솟값은 $n-6=19$일 때이므로
$n=25$
따라서 $(n-15)(n-6)$에 $n=25$를 대입하면
$(25-15)\times(25-6)=10\times 19=190$

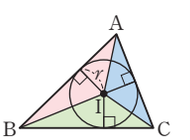
16 답 $3x-7$

$\triangle ABC$의 둘레의 길이가 $8x+10$이므로
$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=8x+10$
$\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면
$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$
$=\frac{1}{2}r(8x+10)=(4x+5)r \quad \cdots\cdots ❶$
한편 $\triangle ABC$의 넓이가
$12x^2-13x-35=(3x-7)(4x+5)$이므로 $\cdots\cdots ❷$
$(4x+5)r=(3x-7)(4x+5)$
이때 $4x+5\neq 0$이므로 $r=3x-7$
따라서 $\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이는 $3x-7$이다. $\cdots\cdots ❸$

채점 기준	
❶ $\triangle ABC$의 넓이를 내접원의 반지름의 길이를 사용한 식으로 나타내기	40 %
❷ $12x^2-13x-35$를 인수분해 하기	40 %
❸ $\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이 구하기	20 %

개념 NOTE

삼각형의 넓이와 내접원의 반지름의 길이
$\triangle ABC$의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면
$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$



17 답 10

$(x-3)(x-2)(x+3)(x+4)+9$
$=\{(x-3)(x+4)\}\{(x-2)(x+3)\}+9$
$=(x^2+x-12)(x^2+x-6)+9$
$x^2+x=A$로 놓으면
$(x^2+x-12)(x^2+x-6)+9=(A-12)(A-6)+9$
$=(A^2-18A+72)+9$
$=A^2-18A+81$
$=(A-9)^2$
$=(x^2+x-9)^2$

따라서 $m=1$, $n=-9$이므로

$m-n=1-(-9)=10$

18 답 ⑤

$x-1=A$, $2x+1=B$로 놓으면

$3(x-1)^2+5(x-1)(2x+1)-2(2x+1)^2$

$=3A^2+5AB-2B^2$

$=(A+2B)(3A-B)$

$=\{(x-1)+2(2x+1)\}\{3(x-1)-(2x+1)\}$

$=(5x+1)(x-4)$

따라서 $a=5$, $b=1$, $c=-4$이므로

$abc=5\times1\times(-4)=-20$

19 답 $2x(x+2)(x-2)$

$x^2=X$로 놓으면

$x^4-8x^2+16=X^2-8X+16=(X-4)^2$

$=(x^2-4)^2=\{(x+2)(x-2)\}^2$

$=(x+2)^2(x-2)^2$ …… ❶

따라서 인수 중에서 x^3의 계수가 1인 삼차식은 (차수가 3인 다항식)

$(x+2)^2(x-2)$, $(x+2)(x-2)^2$ …… ❷

$\therefore A=(x+2)^2(x-2)+(x+2)(x-2)^2$

$=(x+2)(x-2)\{(x+2)+(x-2)\}$

$=2x(x+2)(x-2)$ …… ❸

채점 기준

❶ x^4-8x^2+16을 인수분해 하기	50 %
❷ 삼차식인 인수를 모두 구하기	20 %
❸ A를 인수분해 하기	30 %

20 답 ③

x에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해 하면

$x^2-xy-2y^2-x+8y-6=x^2-(y+1)x-2y^2+8y-6$

$=x^2-(y+1)x-2(y^2-4y+3)$

$=x^2-(y+1)x-2(y-1)(y-3)$

$=\{x-2(y-1)\}\{x+(y-3)\}$

$=(x-2y+2)(x+y-3)$

따라서 두 일차식의 합은

$(x-2y+2)+(x+y-3)=2x-y-1$

21 답 $\frac{93}{100}$

$f(x)=\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^3+2x^2}=\frac{x^2(x+2)-(x+2)}{x^2(x+2)}$

$=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}$

$\therefore f(10)\times f(11)\times f(12)\times\cdots\times f(30)$

$=\frac{9\times11}{10^2}\times\frac{10\times12}{11^2}\times\frac{11\times13}{12^2}\times\cdots\times\frac{29\times31}{30^2}$

$=\frac{9\times11}{10\times10}\times\frac{10\times12}{11\times11}\times\frac{11\times13}{12\times12}\times\cdots\times\frac{29\times31}{30\times30}$

$=\frac{9}{10}\times\frac{31}{30}=\frac{93}{100}$

22 답 ③

$\left(\frac{4^2}{3}+\frac{6^2}{5}+\frac{8^2}{7}+\cdots+\frac{20^2}{19}\right)-\left(\frac{2^2}{3}+\frac{4^2}{5}+\frac{6^2}{7}+\cdots+\frac{18^2}{19}\right)$

$=\left(\frac{4^2}{3}-\frac{2^2}{3}\right)+\left(\frac{6^2}{5}-\frac{4^2}{5}\right)+\left(\frac{8^2}{7}-\frac{6^2}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{20^2}{19}-\frac{18^2}{19}\right)$

$=\frac{4^2-2^2}{3}+\frac{6^2-4^2}{5}+\frac{8^2-6^2}{7}+\cdots+\frac{20^2-18^2}{19}$

$=\frac{(4+2)(4-2)}{3}+\frac{(6+4)(6-4)}{5}+\frac{(8+6)(8-6)}{7}$

$+\cdots+\frac{(20+18)(20-18)}{19}$

$=\frac{6\times2}{3}+\frac{10\times2}{5}+\frac{14\times2}{7}+\cdots+\frac{38\times2}{19}$

$=\underbrace{2^2+2^2+2^2+\cdots+2^2}_{9\text{개}}$

$=2^2\times9=36$

23 답 $\frac{10}{3}$

$a(a-1)-b(b+1)=a^2-a-b^2-b$

$=a^2-b^2-a-b$

$=(a+b)(a-b)-(a+b)$

$=(a+b)(a-b-1)$

이때 $a+b=-3$이므로

$-3(a-b-1)=-7$에서 $a-b-1=\frac{7}{3}$

$\therefore a-b=\frac{10}{3}$

24 답 12

$9xy-6x+\frac{x}{y}=\frac{x}{y}(9y^2-6y+1)$

$=\frac{x}{y}(3y-1)^2$

즉, $\frac{x}{y}(3y-1)^2=242$에서 x, y는 자연수이고,

$242=2\times11^2=242\times1^2$이므로

(i) $\frac{x}{y}=2$, $3y-1=11$일 때,

$x=8$, $y=4$

(ii) $\frac{x}{y}=242$, $3y-1=1$일 때,

$x=\frac{484}{3}$, $y=\frac{2}{3}$

그런데 x, y는 자연수이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $x=8$, $y=4$이므로

$x+y=8+4=12$

05 이차방정식

STEP 1 핵심 문제

▶ 62~63쪽

01 ㄱ, ㄷ **02** 9 **03** −11 **04** 5 **05** ③

06 ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅂ **07** −144 **08** ② **09** ②

10 −4 **11** 5 **12** ④ **13** ②

14 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

01 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $x^2-1=-5x$에서 $x^2+5x-1=0$ ➡ 이차방정식

ㄴ. $3x^2-4x+2$ ➡ 등식이 아니므로 이차방정식이 아니다.

ㄷ. $x(x+1)=3$에서 $x^2+x=3$

$\therefore x^2+x-3=0$ ➡ 이차방정식

ㄹ. $x^2+2=x(x+3)$에서 $x^2+2=x^2+3x$

$\therefore -3x+2=0$ ➡ 일차방정식

ㅁ. $4x^2-x=(2x-1)^2$에서 $4x^2-x=4x^2-4x+1$

$\therefore 3x-1=0$ ➡ 일차방정식

ㅂ. $\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=3$에서 $\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}-3=0$

➡ 분모에 미지수가 있으므로 이차방정식이 아니다.

따라서 x에 대한 이차방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

02 답 9

$x^2-2ax+5a=0$에 $x=3$을 대입하면

$3^2-2a\times3+5a=0$

$9-a=0$ $\therefore a=9$

03 답 −11

$x^2+3x+1=0$에 $x=p$를 대입하면

$p^2+3p+1=0$에서 $p^2+3p=-1$

$2x^2-3x-5=0$에 $x=q$를 대입하면

$2q^2-3q-5=0$에서 $2q^2-3q=5$

$\therefore p^2+3p-4q^2+6q=(p^2+3p)-2(2q^2-3q)$

$=-1-2\times5$

$=-11$

04 답 5

$6x^2-11x-35=0$에서 $(3x+5)(2x-7)=0$

$\therefore x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=\frac{7}{2}$ …… ❶

이때 두 근 사이에 있는 정수는

$-1, 0, 1, 2, 3$ …… ❷

따라서 구하는 합은

$-1+0+1+2+3=5$ …… ❸

채점 기준

❶ $6x^2-11x-35=0$ 풀기	50 %
❷ 두 근 사이에 있는 정수 구하기	30 %
❸ 두 근 사이에 있는 모든 정수의 합 구하기	20 %

05 답 ③

$(x+3)(x-1)=-2-2x^2$에서

$x^2+2x-3=-2-2x^2$

$3x^2+2x-1=0$, $(x+1)(3x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

이때 $a>b$이므로 $a=\frac{1}{3}$, $b=-1$

$\therefore 3a+b=3\times\frac{1}{3}+(-1)=0$

06 답 ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅂ

ㄱ. $2x^2=2x+4$에서 $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

ㄴ. $x^2-6x=-9$에서 $x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0$ $\therefore x=3$

ㄷ. $x^2=\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}$에서 $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=0$

$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=0$ $\therefore x=\frac{1}{3}$

ㄹ. $x^2+4x=14x-24$에서 $x^2-10x+24=0$

$(x-4)(x-6)=0$ $\therefore x=4$ 또는 $x=6$

ㅁ. $3x^2+12x+12=0$에서 $x^2+4x+4=0$

$(x+2)^2=0$ $\therefore x=-2$

ㅂ. $(x-10)(x+2)=-36$에서 $x^2-8x-20=-36$

$x^2-8x+16=0$, $(x-4)^2=0$ $\therefore x=4$

따라서 중근을 갖는 이차방정식은 ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅂ이다.

07 답 −144

$3x^2+ax+12=0$의 양변을 3으로 나누면

→ x^2의 계수가 3이므로 양변을 3으로 나눈다.

$x^2+\frac{a}{3}x+4=0$

이 이차방정식이 중근을 가지려면

$4=\left(\frac{a}{6}\right)^2$, $a^2=144$

$\therefore a=-12$ 또는 $a=12$

따라서 모든 상수 a의 값의 곱은 -144이다.

08 답 ②

$3(x-2)^2=a$에서 $(x-2)^2=\frac{a}{3}$

$x-2=\pm\sqrt{\frac{a}{3}}$ $\therefore x=2\pm\sqrt{\frac{a}{3}}$

이때 두 근의 차가 4이므로

$\left(2+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)-\left(2-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=4$, $2\sqrt{\frac{a}{3}}=4$

$\sqrt{\frac{a}{3}}=2$, $\frac{a}{3}=4$ $\therefore a=12$

09 답 ②

$(x-a)^2=27$에서 $x-a=\pm\sqrt{27}$

$\therefore x=a\pm\sqrt{27}$

이때 두 근이 모두 양수가 되려면 $a+\sqrt{27}>0$, $a-\sqrt{27}>0$이어야 하므로 $a>\sqrt{27}$

따라서 $5<\sqrt{27}<6$이므로 구하는 자연수 a의 최솟값은 6이다.

$\sqrt{25}<\sqrt{27}<\sqrt{36}$

10 답 -4

$4x^2+8x-1=0$에서 $x^2+2x-\frac{1}{4}=0$

$x^2+2x=\frac{1}{4}$, $x^2+2x+1=\frac{1}{4}+1$ $\therefore (x+1)^2=\frac{5}{4}$

따라서 $a=1$, $b=\frac{5}{4}$이므로

$a-4b=1-4\times\frac{5}{4}=-4$

11 답 5

$x^2+3x-a=0$에서

$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times1\times(-a)}}{2\times1}=\frac{-3\pm\sqrt{9+4a}}{2}$ …… ❶

따라서 $-3=b$, $9+4a=17$이므로 $a=2$, $b=-3$ …… ❷

$\therefore a-b=2-(-3)=5$ …… ❸

채점 기준	
❶ $x^2+3x-a=0$의 해를 a를 사용하여 나타내기	50 %
❷ a, b의 값 구하기	30 %
❸ $a-b$의 값 구하기	20 %

12 답 ④

$5x^2+8x+3=4x^2-9$에서 $x^2+8x+12=0$

$(x+6)(x+2)=0$ $\therefore x=-6$ 또는 $x=-2$

이때 $p<q$이므로 $p=-6$, $q=-2$

따라서 $x^2+(p+q)x-q=0$, 즉 $x^2-8x+2=0$을 풀면

$x=-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-1\times2}=4\pm\sqrt{14}$

13 답 ②

$\frac{1}{2}x^2-0.3x=\frac{x}{5}+x^2-0.6$의 양변에 10을 곱하면

$5x^2-3x=2x+10x^2-6$, $5x^2+5x-6=0$

$\therefore x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times5\times(-6)}}{2\times5}=\frac{-5\pm\sqrt{145}}{10}$

따라서 $p=-5$, $5q=145$이므로 $p=-5$, $q=29$

$\therefore p+q=-5+29=24$

14 답 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

$x-\frac{1}{2}=A$로 놓으면

$4A^2-1=-3A$, $4A^2+3A-1=0$

$(A+1)(4A-1)=0$ $\therefore A=-1$ 또는 $A=\frac{1}{4}$

즉, $x-\frac{1}{2}=-1$ 또는 $x-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이므로

$x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{4}$

STEP 2 고난도 문제

▶ 64~68쪽

01 ③	**02** ④	**03** 17	**04** (3, 4)	**05** $x=1$
06 ②	**07** $\frac{1}{2}$	**08** ④	**09** 0	**10** $x=-\frac{5}{8}$
11 2027	**12** $-\frac{1}{2}$	**13** ②	**14** -5	**15** 1
16 ⑤	**17** 6	**18** 8	**19** 42	**20** ②
21 19	**22** ⑤	**23** 2	**24** 6	**25** ②
26 0	**27** -2	**28** $x=\frac{3\pm\sqrt{57}}{2}$	**29** 3	**30** ⑤

01 답 ③

$a^2x^2+ax+2=(a+2)x^2-1$에서

$(a^2-a-2)x^2+ax+3=0$

이 식이 x에 대한 이차방정식이 되려면 x^2의 계수가 0이 아니어야 하므로

$a^2-a-2\neq0$, $(a+1)(a-2)\neq0$

$\therefore a\neq-1$이고 $a\neq2$

02 답 ④

$kx^2+ax+(k+2)b=0$에 $x=1$을 대입하면

$k+a+(k+2)b=0$, $(1+b)k+a+2b=0$

이 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$1+b=0$, $a+2b=0$ $\therefore a=2$, $b=-1$

$\therefore a+b=2+(-1)=1$

03 답 17

$2x^2+ax=-5x+b$에 $x=-1$을 대입하면

$2\times(-1)^2+a\times(-1)=-5\times(-1)+b$

$2-a=5+b$ $\therefore a+b=-3$ …… ❶

$x^2-abx+3=0$에 $x=-3$을 대입하면

$(-3)^2-ab\times(-3)+3=0$

$9+3ab+3=0$, $3ab=-12$ $\therefore ab=-4$ …… ❷

$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$

$=(-3)^2-2\times(-4)=17$ …… ❸

채점 기준	
❶ $a+b$의 값 구하기	40 %
❷ ab의 값 구하기	40 %
❸ a^2+b^2의 값 구하기	20 %

04 답 (3, 4)

$x^2+ax-b=0$에 $x=a-\sqrt{b}$를 대입하면

$(a-\sqrt{b})^2+a(a-\sqrt{b})-b=0$, $2a^2=3a\sqrt{b}$

$a\neq0$이므로 양변을 $2a$로 나누면 $a=\frac{3}{2}\sqrt{b}$

이때 a는 자연수이므로 $\frac{3}{2}\sqrt{b}$도 자연수이어야 한다.

즉, b는 $4\times$(자연수)^2 꼴이어야 하므로

$b=4$, 16, 36, …

그런데 b는 10보다 작은 자연수이므로 $b=4$

따라서 $a=\frac{3}{2}\sqrt{b}=\frac{3}{2}\sqrt{4}=3$이므로 구하는 순서쌍 (a, b)는 (3, 4)이다.

05 답 $x=1$

두 이차방정식의 공통인 근을 $x=\alpha$라 하자.

$x^2+mx+n=0$에 $x=\alpha$를 대입하면

$\alpha^2+m\alpha+n=0$ …… ㉠

주어진 이차방정식의 x의 계수와 상수항을 바꾸면

$x^2+nx+m=0$이고, 이 식에 $x=\alpha$를 대입하면

$\alpha^2+n\alpha+m=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha^2+m\alpha+n=\alpha^2+n\alpha+m$

$(m-n)\alpha=m-n$

이때 $m\neq n$이므로 $\alpha=1$

따라서 두 이차방정식의 공통인 근은 $x=1$이다.

06 답 ②

$2x^2-6x-3=0$에 $x=\alpha$를 대입하면

$2\alpha^2-6\alpha-3=0$ …… ㉠

이때 $\alpha=0$이면 등식이 성립하지 않으므로 $\alpha\neq0$

㉠의 양변을 α로 나누면

$2\alpha-6-\frac{3}{\alpha}=0$ $\therefore 2\alpha-\frac{3}{\alpha}=6$

$\therefore 4\alpha^2+\frac{9}{\alpha^2}=\left(2\alpha-\frac{3}{\alpha}\right)^2+2\times2\alpha\times\frac{3}{\alpha}$

$=6^2+12=48$

07 답 $\frac{1}{2}$

$4x^2-(2m+1)x-4=0$에 $x=p$를 대입하면

$4p^2-(2m+1)p-4=0$ …… ㉠

이때 $p=0$이면 등식이 성립하지 않으므로 $p\neq0$

㉠의 양변을 p로 나누면 $4p-(2m+1)-\frac{4}{p}=0$

$4\left(p-\frac{1}{p}\right)=2m+1$ $\therefore p-\frac{1}{p}=\frac{2m+1}{4}$

따라서 $\frac{2m+1}{4}=m$이므로 $2m+1=4m$

$2m=1$ $\therefore m=\frac{1}{2}$

08 답 ④

$x^2-3x+1=0$에 $x=\alpha$를 대입하면

$\alpha^2-3\alpha+1=0$

$\therefore \alpha^5-5\alpha^4+7\alpha^3-\alpha^2-3\alpha+3$

$=\alpha^5-3\alpha^4-2\alpha^4+\alpha^3+6\alpha^3-2\alpha^2+\alpha^2-3\alpha+1+2$

$=\alpha^5-3\alpha^4+\alpha^3-2\alpha^4+6\alpha^3-2\alpha^2+\alpha^2-3\alpha+1+2$

$=\alpha^3(\alpha^2-3\alpha+1)-2\alpha^2(\alpha^2-3\alpha+1)+(\alpha^2-3\alpha+1)+2$

$=\alpha^3\times0-2\alpha^2\times0+0+2=2$

다른 풀이

$\alpha^2-3\alpha+1=0$에서 $\alpha^2=3\alpha-1$이므로

$\alpha^3=\alpha\times\alpha^2=\alpha(3\alpha-1)=3\alpha^2-\alpha=3(3\alpha-1)-\alpha=8\alpha-3$

$\alpha^4=\alpha\times\alpha^3=\alpha(8\alpha-3)=8\alpha^2-3\alpha=8(3\alpha-1)-3\alpha=21\alpha-8$

$\alpha^5=\alpha\times\alpha^4=\alpha(21\alpha-8)=21\alpha^2-8\alpha=21(3\alpha-1)-8\alpha=55\alpha-21$

$\therefore \alpha^5-5\alpha^4+7\alpha^3-\alpha^2-3\alpha+3$

$=(55\alpha-21)-5(21\alpha-8)+7(8\alpha-3)-(3\alpha-1)-3\alpha+3$

$=55\alpha-21-105\alpha+40+56\alpha-21-3\alpha+1-3\alpha+3$

$=2$

09 답 0

$x^2+ax+b=0$에 $x=\alpha$, $x=\beta$를 각각 대입하면

$\alpha^2+a\alpha+b=0$, $\beta^2+a\beta+b=0$ …… ㉠

$\therefore f(1002)+af(1001)+bf(1000)$

$=(\alpha^{1002}+\beta^{1002})+a(\alpha^{1001}+\beta^{1001})+b(\alpha^{1000}+\beta^{1000})$

$=(\alpha^{1002}+a\alpha^{1001}+b\alpha^{1000})+(\beta^{1002}+a\beta^{1001}+b\beta^{1000})$

$=\alpha^{1000}(\alpha^2+a\alpha+b)+\beta^{1000}(\beta^2+a\beta+b)$

$=\alpha^{1000}\times0+\beta^{1000}\times0$ ($\because$ ㉠)

$=0$

10 답 $x=-\frac{5}{8}$

$(a-1)x^2-a(a+4)x-10=0$에 $x=-2$를 대입하면

$(a-1)\times(-2)^2-a(a+4)\times(-2)-10=0$

$4a-4+2a^2+8a-10=0$

$2a^2+12a-14=0$, $a^2+6a-7=0$

$(a+7)(a-1)=0$ $\therefore a=-7$ 또는 $a=1$

이때 $a-1\neq0$에서 $a\neq1$이므로 $a=-7$

($a-1$: x^2의 계수)

즉, 주어진 이차방정식은 $8x^2+21x+10=0$이므로

$(x+2)(8x+5)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=-\frac{5}{8}$

따라서 구하는 다른 한 근은 $x=-\frac{5}{8}$이다.

11 답 2027

$2026^2x^2-2025\times2027x-1=0$에서

($2025\times2027=(2026-1)(2026+1)=2026^2-1$)

$(2026^2x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2026^2}$ 또는 $x=1$

$\therefore a=1$

$x^2+2025x-2026=0$에서 $(x+2026)(x-1)=0$

$\therefore x=-2026$ 또는 $x=1$

$\therefore b=-2026$

$\therefore a-b=1-(-2026)=2027$

12 답 $-\frac{1}{2}$

$P+Q=(x^2+4x-12)+(x^2-7x+10)=0$이므로

$2x^2-3x-2=0$, $(2x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$ ····· ㉠

이때 $PQ\neq0$이므로 $P\neq0$이고 $Q\neq0$이다.

$P=x^2+4x-12\neq0$에서 $(x+6)(x-2)\neq0$

$\therefore x\neq-6$이고 $x\neq2$ ····· ㉡

$Q=x^2-7x+10\neq0$에서 $(x-2)(x-5)\neq0$

$\therefore x\neq2$이고 $x\neq5$ ····· ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 조건을 만족시키는 x의 값은 $-\frac{1}{2}$이다.

13 답 ②

$x^2-|x|-2=x+1$에서

(i) $x\geq0$일 때, $|x|=x$이므로

$x^2-x-2=x+1$, $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

이때 $x\geq0$이므로 $x=3$

(ii) $x<0$일 때, $|x|=-x$이므로

$x^2+x-2=x+1$, $x^2=3$ $\therefore x=\pm\sqrt{3}$

이때 $x<0$이므로 $x=-\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 주어진 이차방정식의 해는 $x=3$ 또는 $x=-\sqrt{3}$이므로

$\alpha=3$, $\beta=-\sqrt{3}$ 또는 $\alpha=-\sqrt{3}$, $\beta=3$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=12$

비법 NOTE

절댓값 기호를 포함한 방정식은

$$|A|=\begin{cases} A & (A\geq0) \\ -A & (A<0) \end{cases}$$

임을 이용하여 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어서 푼다.

14 답 -5

$x^2+2(a+2)x+a^2+4a+3=0$에서

$x^2+2(a+2)x+(a+1)(a+3)=0$

$(x+a+1)(x+a+3)=0$

$\therefore x=-a-1$ 또는 $x=-a-3$

이때 두 근 중 큰 근은 $x=-a-1$이다.

또 $x^2-2x-8=0$에서 $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

이때 두 근 중 큰 근은 $x=4$이므로

$-a-1=4$ $\therefore a=-5$

다른 풀이

$x^2-2x-8=0$에서 $(x+2)(x-4)=0$

$x=-2$ 또는 $x=4$

이때 두 근 중 큰 근은 $x=4$이므로

$x^2+2(a+2)x+a^2+4a+3=0$에 $x=4$를 대입하면

$4^2+2(a+2)\times4+a^2+4a+3=0$

$a^2+12a+35=0$, $(a+7)(a+5)=0$

$\therefore a=-7$ 또는 $a=-5$

$x^2+2(a+2)x+a^2+4a+3=0$에 $a=-7$을 대입하면

$x^2+2\times(-5)\times x+(-7)^2+4\times(-7)+3=0$

$x^2-10x+24=0$, $(x-4)(x-6)=0$

$\therefore x=4$ 또는 $x=6$

이때 두 근 중 큰 근이 $x=6$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$x^2+2(a+2)x+a^2+4a+3=0$에 $a=-5$를 대입하면

$x^2+2\times(-3)\times x+(-5)^2+4\times(-5)+3=0$

$x^2-6x+8=0$, $(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$

이때 두 근 중 큰 근이 $x=4$이므로 조건을 만족시킨다.

따라서 구하는 상수 a의 값은 -5이다.

15 답 1

$x^2+ax+a-1=0$에서 $(x+1)(x+a-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-a+1$

$x^2-(a+3)x+3a=0$에서 $(x-3)(x-a)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=a$

(i) 공통인 해가 $x=-1$일 때,

$a=-1$

(ii) 공통인 해가 $x=3$일 때,

$-a+1=3$ $\therefore a=-2$

(iii) 공통인 해가 $x=-a+1$과 $x=a$일 때,

$-a+1=a$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 모든 상수 a의 값의 곱은

$-1\times(-2)\times\frac{1}{2}=1$

16 답 ⑤

$x^2-2ax+2x+a^2-2a-3=3b$에서

$x^2-2(a-1)x+(a+1)(a-3)=3b$

$(x-a-1)(x-a+3)=3b$ ····· ㉠

이때 $x+1=a+b$에서 $x-a=b-1$이므로

이를 ㉠에 대입하면 $(b-1-1)(b-1+3)=3b$

$(b-2)(b+2)=3b$, $b^2-3b-4=0$

$(b+1)(b-4)=0$ $\therefore b=-1$ 또는 $b=4$

따라서 모든 상수 b의 값의 합은

$-1+4=3$

다른 풀이

$x^2-2ax+2x+a^2-2a-3=3b$에서

$(x^2-2ax+a^2)+2(x-a)-3-3b=0$

$(x-a)^2+2(x-a)-3-3b=0$ ····· ㉠

이때 $x+1=a+b$에서 $x-a=b-1$이므로

이를 ㉠에 대입하면 $(b-1)^2+2(b-1)-3-3b=0$

$b^2-3b-4=0$, $(b+1)(b-4)=0$

$\therefore b=-1$ 또는 $b=4$

따라서 모든 상수 b의 값의 합은

$-1+4=3$

17 Idea 답 6

$\langle x\rangle^2+2\langle x\rangle-8=0$에서

$(\langle x\rangle+4)(\langle x\rangle-2)=0$

$\therefore \langle x\rangle=-4$ 또는 $\langle x\rangle=2$

이때 $\langle x\rangle>0$이므로 $\langle x\rangle=2$

└ $\langle x\rangle$는 약수의 개수이므로 항상 양수이다.

따라서 약수의 개수가 2인 자연수는 소수이므로 15 이하의 자연수 중에서 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13의 6개이다.

18 답 8

$x^2+2ax+7a-12=0$이 중근을 가지므로

$7a-12=\left(\frac{2a}{2}\right)^2$, $a^2-7a+12=0$

$(a-3)(a-4)=0$ $\therefore a=3$ 또는 $a=4$

(i) $a=3$일 때, $x^2+6x+9=0$이므로

$(x+3)^2=0$ $\therefore x=-3$

따라서 $b=-3$이므로 $a-b=3-(-3)=6$

(ii) $a=4$일 때, $x^2+8x+16=0$이므로

$(x+4)^2=0$ $\therefore x=-4$

따라서 $b=-4$이므로 $a-b=4-(-4)=8$

(i), (ii)에서 $a-b$의 값 중 가장 큰 값은 8이다.

다른 풀이

x^2의 계수가 1이고 $x=b$를 중근으로 갖는 이차방정식은

$(x-b)^2=0$ $\therefore x^2-2bx+b^2=0$

이 식이 $x^2+2ax+7a-12=0$과 일치하므로

$2a=-2b$, $7a-12=b^2$

이때 $a=-b$를 $7a-12=b^2$에 대입하면

$-7b-12=b^2$, $b^2+7b+12=0$

$(b+4)(b+3)=0$ $\therefore b=-4$ 또는 $b=-3$

따라서 $a=4$, $b=-4$ 또는 $a=3$, $b=-3$이므로

$a-b$의 값 중 가장 큰 값은 $4-(-4)=8$

19 답 42

$x^2+ax+8b=0$이 중근을 가지므로

└ 이차방정식의 두 근이 서로 같으면 이차방정식은 중근을 갖는다.

$8b=\left(\frac{a}{2}\right)^2$ $\therefore a^2=32b=2^5b$ …… ❶

즉, b의 값은 $2\times(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 하므로

$b=2, 8, 18, 32, 50, 72, 98, 128, \cdots$

이때 a, b는 두 자리의 자연수이고, a의 값이 최대가 되려면 b의 값이 최대이어야 하므로 $b=98$ …… ❷

$a^2=2^5b=2^5\times98=2^5\times2\times7^2=2^6\times7^2=(2^3\times7)^2$

이때 $a>0$이므로 $a=2^3\times7=56$ …… ❸

$\therefore b-a=98-56=42$ …… ❹

채점 기준

❶ a, b 사이의 관계식 구하기	30 %
❷ b의 값 구하기	30 %
❸ a의 값 구하기	20 %
❹ $b-a$의 값 구하기	20 %

20 답 ②

모든 경우의 수는 $6\times6=36$

$x^2+2ax+3b+1=0$이 중근을 가지려면

$3b+1=\left(\frac{2a}{2}\right)^2$ $\therefore 3b+1=a^2$ …… ㉠

㉠을 만족시키는 1 이상 6 이하의 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는 $(2, 1)$, $(4, 5)$의 2가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

21 Idea 답 19

$x^2-2kx+17p+1=0$이 중근을 가지므로

$17p+1=\left(\frac{-2k}{2}\right)^2$, $17p+1=k^2$

$k^2-1=17p$ $\therefore (k+1)(k-1)=17p$ …… ㉠

└ $(k+1)(k-1)$은 17의 배수이다.

이때 k는 2가 아닌 자연수이므로

$k+1\neq1$, $k-1\neq1$

(i) $k+1=17$일 때,

$k=16$이므로 ㉠에 대입하면

$(16+1)(16-1)=17p$ $\therefore p=15$

(ii) $k-1=17$일 때,

$k=18$이므로 ㉠에 대입하면

$(18+1)(18-1)=17p$ $\therefore p=19$

(i), (ii)에서 p는 소수이므로 $p=19$

22 답 ⑤

$x^2-ax-2a=0$에서 $x^2-ax+\frac{a^2}{4}=2a+\frac{a^2}{4}$

$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+2a$ $\therefore A=-\frac{a}{2}$, $B=\frac{a^2}{4}+2a$

$B=\frac{a^2}{4}+2a=5$에서 $a^2+8a-20=0$

$(a+10)(a-2)=0$ $\therefore a=-10$ 또는 $a=2$

이때 $a>0$이므로 $a=2$

$\therefore A=-\frac{2}{2}=-1$

23 답 2

$x^2+2mx+3n^2=m^2+4n$에서

$x^2+2mx+m^2=2m^2-3n^2+4n$

$\therefore (x+m)^2=2m^2-3n^2+4n$

이 식이 $(x-3n)^2=n+12$와 일치하므로

$m=-3n$, $2m^2-3n^2+4n=n+12$

$m=-3n$을 $2m^2-3n^2+4n=n+12$에 대입하면

$18n^2-3n^2+4n=n+12$

$15n^2+3n-12=0$, $5n^2+n-4=0$

$(n+1)(5n-4)=0$ $\therefore n=-1$ 또는 $n=\frac{4}{5}$

이때 n은 정수이므로 $n=-1$

따라서 $m=-3\times(-1)=3$이므로

$m+n=3+(-1)=2$

24 답 6

$x^2-6x+2a-7=0$에서 $x^2-6x+9=-2a+7+9$

$(x-3)^2=-2a+16$, $x-3=\pm\sqrt{16-2a}$

$\therefore x=3\pm\sqrt{16-2a}$

이때 서로 다른 두 근이 모두 자연수가 되려면 $\sqrt{16-2a}$가 3보다 작은 자연수이어야 한다.

(i) $\sqrt{16-2a}=1$일 때,

$16-2a=1$, $-2a=-15$ $\therefore a=\frac{15}{2}$

(ii) $\sqrt{16-2a}=2$일 때,

$16-2a=4$, $-2a=-12$ $\therefore a=6$

(i), (ii)에서 a는 자연수이므로 $a=6$

25 답 ②

$2x^2-8x+k-1=0$에서

$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-2\times(k-1)}}{2}=2\pm\frac{\sqrt{2(9-k)}}{2}$

이때 자연수 k에 대하여 해가 모두 정수가 되려면 $9-k$의 값이 0 또는 $2\times(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 한다.

(i) $9-k=0$일 때, $k=9$

(ii) $9-k=2\times1^2$일 때, $k=9-2=7$

(iii) $9-k=2\times2^2$일 때, $k=9-8=1$

(i), (ii), (iii)에서 모든 자연수 k의 값의 합은

$9+7+1=17$

26 답 0

$3x^2+5x-1=0$에서

$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3}=\frac{-5\pm\sqrt{37}}{6}$

$\therefore a=\frac{-5+\sqrt{37}}{6}$ ($\because a>0$)

이때 $6<\sqrt{37}<7$이므로 $1<-5+\sqrt{37}<2$

$\therefore \frac{1}{6}<\frac{-5+\sqrt{37}}{6}<\frac{1}{3}$

따라서 $\frac{1}{6}<a<\frac{1}{3}$이므로 $0<a<1$

$\therefore n=0$

27 답 -2

근의 공식을 잘못 적용하여 구한 두 근이 $-\frac{4}{5}$, 8이므로

$\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{a}=-\frac{4}{5}$, $\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{a}=8$

이때 $\alpha>\beta$이므로

$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{1}{2}\times\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{a}$

$=-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{2}{5}$

$\beta=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{1}{2}\times\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{a}$

$=-\frac{1}{2}\times8=-4$

$\therefore 5\alpha+\beta=5\times\frac{2}{5}-4=-2$

28 답 $x=\frac{3\pm\sqrt{57}}{2}$

$-0.1x^2-\frac{x(x+4)}{2}+\frac{(x-1)^2}{5}+1=0$의 양변에 10을 곱하면

$-x^2-5x(x+4)+2(x-1)^2+10=0$

$-4x^2-24x+12=0$, $x^2+6x-3=0$

$\therefore x=-3\pm\sqrt{3^2-1\times(-3)}=-3\pm\sqrt{12}$

따라서 $a=-3$, $b=12$이므로

$x^2+ax-b=0$에서 $x^2-3x-12=0$

$\therefore x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-12)}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{57}}{2}$

29 답 3

$x^2+y^2+2xy-3x-3y-4=0$에서

$(x+y)^2-3(x+y)-4=0$

$x+y=A$로 놓으면 …… ❶

$A^2-3A-4=0$, $(A+1)(A-4)=0$

$\therefore A=-1$ 또는 $A=4$

즉, $x+y=-1$ 또는 $x+y=4$

이때 x, y는 자연수이므로 $x+y=4$ …… ❷

따라서 구하는 순서쌍 (x, y)는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3개이다. …… ❸

채점 기준

❶ 주어진 식을 정리한 후 $x+y=A$로 놓기	30 %
❷ $x+y$의 값 구하기	40 %
❸ 순서쌍 (x, y)의 개수 구하기	30 %

30 idea 답 ⑤

$x^4-4x^3-3x^2-4x+1=0$에 $x=\alpha$를 대입하면

$\alpha^4-4\alpha^3-3\alpha^2-4\alpha+1=0$

$\alpha\neq0$이므로 양변을 α^2으로 나누면

$\alpha^2-4\alpha-3-\frac{4}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}=0$

$\left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)-4\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-3=0$

이때 $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-2$이므로

$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2-4\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)-5=0$

$\alpha+\frac{1}{\alpha}=A$로 놓으면

$A^2-4A-5=0$, $(A+1)(A-5)=0$

$\therefore A=-1$ 또는 $A=5$

$\therefore \alpha+\frac{1}{\alpha}=-1$ 또는 $\alpha+\frac{1}{\alpha}=5$

개념 NOTE

곱셈 공식의 변형

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$

(2) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$, $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$

STEP 3 최고난도 문제 ▶ 69쪽

01 $\frac{8}{9}$ **02** 5 **03** $\frac{3+\sqrt{15}}{2}$ **04** $\frac{3}{200}$

05 $a=2+\sqrt{3}$, $b=3+2\sqrt{2}$ **06** 9

01 답 $\frac{8}{9}$

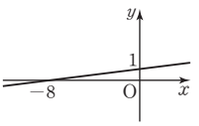
직선 $mx+8y=8$이 점 $(m+1, m^2)$을 지나므로

$m(m+1)+8m^2=8$, $9m^2+m-8=0$

$(m+1)(9m-8)=0$ $\therefore m=-1$ 또는 $m=\frac{8}{9}$

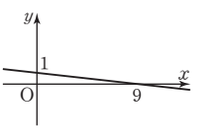
(i) $m=-1$일 때,

직선 $-x+8y=8$, 즉 $y=\frac{1}{8}x+1$은 오른쪽 그림과 같이 제3사분면을 지난다.



(ii) $m=\frac{8}{9}$일 때,

직선 $\frac{8}{9}x+8y=8$, 즉 $y=-\frac{1}{9}x+1$은 오른쪽 그림과 같이 제3사분면을 지나지 않는다.



(i), (ii)에서 $m=\frac{8}{9}$

02 Idea 답 5

$x^2-2cx+a=0$에서 a가 소수이므로 곱이 a가 되는 두 정수를 찾아 좌변을 인수분해 하면

$(x+a)(x+1)=0$ 또는 $(x-a)(x-1)=0$

이때 $(x+a)(x+1)=0$의 좌변을 정리하면

$x^2+(a+1)x+a=0$이고, 이 식이 $x^2-2cx+a=0$과 일치하므로

$a+1=-2c$이어야 한다.

그런데 a, c는 소수, 즉 자연수이므로 $a+1=-2c$는 성립하지 않는다.

따라서 $x^2-2cx+a=0$의 좌변을 인수분해 하면

$(x-a)(x-1)=0$이므로 $x=a$ 또는 $x=1$이다.

이때 주어진 두 이차방정식의 공통인 해를 $x=a$라 하자.

$x^2-ax+2b=0$에 $x=a$를 대입하면

$a^2-a^2+2b=0$ $\therefore b=0$

그런데 b는 소수이어야 하므로 $x=a$는 공통인 해가 아니다.

즉, 공통인 해는 $x=1$이므로

$x^2-ax+2b=0$에 $x=1$을 대입하면

$1-a+2b=0$ $\therefore a=2b+1$ …… ㉠

$x^2-2cx+a=0$에 $x=1$을 대입하면

$1-2c+a=0$ $\therefore a=2c-1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2b+1=2c-1$

$\therefore c=b+1$

따라서 b와 c는 소수이면서 연속하는 두 자연수이므로

$b=2$, $c=3$

$\therefore a=2b+1=2\times2+1=5$

참고 b, c가 4 이상인 소수라 가정하면 b, c는 연속하는 자연수이므로 둘 중 하나는 반드시 짝수가 된다. 4 이상의 짝수는 소수가 아니므로 b, c는 4 이상의 소수가 될 수 없다. 따라서 소수이면서 연속하는 두 자연수는 2, 3뿐이다.

03 답 $\frac{3+\sqrt{15}}{2}$

주어진 식에서 반복되는 부분이 x와 같음을 이용하면

$$x=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\boxed{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}=x}}$$

$=3+\cfrac{1}{2+\frac{1}{x}}=3+\cfrac{1}{\frac{2x+1}{x}}$

$=3+\cfrac{x}{2x+1}=\cfrac{7x+3}{2x+1}$

즉, $x=\frac{7x+3}{2x+1}$이므로

$x(2x+1)=7x+3$, $2x^2-6x-3=0$

$\therefore x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-2\times(-3)}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{15}}{2}$

이때 $x>0$이므로 $x=\frac{3+\sqrt{15}}{2}$

04 답 $\frac{3}{200}$

모든 경우의 수는 $20\times20=400$

$x^2-2x-\square=0$에서

$x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\times(-\square)}$

$=1\pm\sqrt{1+\square}$

이 해 중 자연수인 해가 있으려면 $1+\square$가 (자연수)^2 꼴이어야 한다.

(i) $1+\square=4$, 즉 $\square=3$일 때,

$x=1\pm\sqrt{4}$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

이때 $x>0$이므로 $x=3$

(ii) $1+\square=9$, 즉 $\square=8$일 때,

$x=1\pm\sqrt{9}$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

이때 $x>0$이므로 $x=4$

(iii) $1+\square=16$, 즉 $\square=15$일 때,

$x=1\pm\sqrt{16}$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=5$

이때 $x>0$이므로 $x=5$

(i), (ii), (iii)에서 $\square$ 안의 수는 20 이하의 자연수이므로 구한 해가 $x=3$, $x=4$, $x=5$인 경우에만 초콜릿을 받는다.

즉, 윤호와 다혜가 받은 초콜릿의 개수의 합이 8 이상인 경우에 두 사람이 구한 해를 순서쌍으로 나타내면 (3, 5), (4, 4), (4, 5), (5, 3), (5, 4), (5, 5)의 6가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{400}=\frac{3}{200}$

05 답 $a=2+\sqrt{3}$, $b=3+2\sqrt{2}$

2보다 큰 양수 x의 정수 부분을 m, 소수 부분을 α라 하면

$x=m+\alpha$이므로

$\langle x\rangle=\alpha$, $\left\langle\frac{1}{x}\right\rangle=\frac{1}{m+\alpha}$

이때 $\langle x\rangle+\left\langle\frac{1}{x}\right\rangle=1$이고, $m+\alpha\neq0$이므로 ($x=m+\alpha>0$)

$\alpha+\frac{1}{m+\alpha}=1$, $\alpha(m+\alpha)+1=m+\alpha$

$\alpha^2+(m-1)\alpha+1-m=0$

$\therefore\ \alpha=\frac{-(m-1)\pm\sqrt{(m-1)^2-4\times1\times(1-m)}}{2\times1}$ ($(m-1)^2+4(m-1)=(m-1)(m-1+4)=(m+3)(m-1)$)

$=\frac{-m+1\pm\sqrt{(m+3)(m-1)}}{2}$

이때 $0\le\alpha<1$이므로

$\alpha=\frac{-m+1+\sqrt{(m+3)(m-1)}}{2}$

$m=3$일 때, $\alpha=\frac{-2+2\sqrt{3}}{2}=-1+\sqrt{3}$이므로

$a=3+(-1+\sqrt{3})=2+\sqrt{3}$

$m=5$일 때, $\alpha=\frac{-4+4\sqrt{2}}{2}=-2+2\sqrt{2}$이므로

$b=5+(-2+2\sqrt{2})=3+2\sqrt{2}$

06 답 9

공통부분이 생기도록 두 일차식끼리 짝을 지어 전개하면

$n(n+1)(n+2)(n+3)+1=109^2$에서

$\{n(n+3)\}\{(n+1)(n+2)\}-(109^2-1)=0$

$(n^2+3n)(n^2+3n+2)-(109+1)(109-1)=0$

$n^2+3n=A$로 놓으면

$A(A+2)-110\times108=0$

$A^2+2A-110\times108=0$

$(A+110)(A-108)=0$

$\therefore\ A=-110$ 또는 $A=108$

이때 n은 자연수이므로 $A=n^2+3n>0$

$\therefore\ A=108$

즉, $n^2+3n=108$이므로

$n^2+3n-108=0$, $(n+12)(n-9)=0$

$\therefore\ n=-12$ 또는 $n=9$

이때 n은 자연수이므로 $n=9$

06 이차방정식의 활용

STEP 1 핵심 문제

▶ 70~71쪽

01 ①, ④ **02** 2 **03** -5 **04** ⑤ **05** ① **06** 10

07 1 **08** $\frac{1}{2}$ **09** 21 **10** 15 **11** 4초 후 **12** ⑤

13 13초 후 **14** 2

01 답 ①, ④

① $3^2-4\times1\times(-1)=13>0$ ➡ 서로 다른 두 근

② $(-1)^2-4\times3\times2=-23<0$ ➡ 근이 없다.

③ $x^2+5=-2x$에서 $x^2+2x+5=0$이므로

$1^2-1\times5=-4<0$ ➡ 근이 없다.

④ $0^2-4\times1\times(-25)=100>0$ ➡ 서로 다른 두 근

⑤ $16x^2+1=-8x$에서 $16x^2+8x+1=0$이므로

$4^2-16\times1=0$ ➡ 중근

따라서 서로 다른 두 근을 갖는 것은 ①, ④이다.

02 답 2

$x^2-2mx+2m+3=0$이 중근을 가지려면

$(-m)^2-1\times(2m+3)=0$이어야 하므로

$m^2-2m-3=0$, $(m+1)(m-3)=0$

$\therefore\ m=-1$ 또는 $m=3$

따라서 모든 상수 m의 값의 합은

$-1+3=2$

03 답 -5

$2x^2+8x+k+3=0$이 서로 다른 두 근을 가지므로

$4^2-2\times(k+3)>0$

$-2k+10>0$ $\therefore\ k<5$ …… ㉠ …… ❶

또 $x^2-(k-1)x+9=0$이 중근을 가지므로

$\{-(k-1)\}^2-4\times1\times9=0$

$(k-1)^2=36$, $k-1=\pm6$

$\therefore\ k=-5$ 또는 $k=7$ …… ㉡ …… ❷

㉠, ㉡에서 $k=-5$ …… ❸

채점 기준	
❶ $2x^2+8x+k+3=0$이 서로 다른 두 근을 갖도록 하는 k의 값의 범위 구하기	40 %
❷ $x^2-(k-1)x+9=0$이 중근을 갖도록 하는 k의 값 구하기	40 %
❸ k의 값 구하기	20 %

04 답 ⑤

$2x^2-3x-2=0$에서 $(2x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

따라서 두 근이 $-\frac{1}{2}-3=-\frac{7}{2}$, $2-3=-1$이고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2\left(x+\frac{7}{2}\right)(x+1)=0 \quad \therefore\ 2x^2+9x+7=0$

05 답 ①

중근이 $x=2$이고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3(x-2)^2=0 \quad \therefore\ 3x^2-12x+12=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$3(x-1)(x-a)=b$에서

$3x^2-3(a+1)x+3a-b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉡

이때 ㉠과 ㉡이 서로 같으므로

$-3(a+1)=-12,\ 3a-b=12$에서

$a=3,\ b=-3$

$\therefore\ a+b=3+(-3)=0$

06 답 10

두 근의 차가 4이므로 두 근을 a, $a+4$라 하면

$2(x-a)\{x-(a+4)\}=0$

$2x^2-4(a+2)x+2a(a+4)=0$

이 식이 $2x^2+12x+k=0$과 일치하므로

$-4(a+2)=12,\ a+2=-3 \quad \therefore\ a=-5$

$\therefore\ k=2a(a+4)=2\times(-5)\times(-5+4)=10$

다른 풀이

$2x^2+12x+k=0$에서

$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-2\times k}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{36-2k}}{2}$

이때 두 근의 차가 4이므로

$\frac{-6+\sqrt{36-2k}}{2}-\frac{-6-\sqrt{36-2k}}{2}=4$

$\sqrt{36-2k}=4,\ 36-2k=16$

$2k=20 \quad \therefore\ k=10$

07 답 1

경호가 푼 이차방정식은

$(x+2)(x-3)=0 \quad \therefore\ x^2-x-6=0$

이때 경호는 상수항을 제대로 보았으므로 처음 이차방정식의 상수항은 -6이다.

원주가 푼 이차방정식은

$(x+3)(x-8)=0 \quad \therefore\ x^2-5x-24=0$

이때 원주는 x의 계수를 제대로 보았으므로 처음 이차방정식의 x의 계수는 -5이다.

따라서 처음 이차방정식은 $x^2-5x-6=0$이므로

$a=-5,\ b=-6$

$\therefore\ a-b=-5-(-6)=1$

비법 NOTE

이차방정식 $x^2+ax+b=0$에서

(1) x의 계수를 잘못 본 경우 ➡ 상수항 b를 제대로 보았다.

(2) 상수항을 잘못 본 경우 ➡ x의 계수 a를 제대로 보았다.

08 답 $\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}x^2+ax+b=0$의 모든 계수와 상수항이 유리수이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{5}$이다.

두 근이 $1+\sqrt{5}$, $1-\sqrt{5}$이고 x^2의 계수가 $\frac{1}{2}$인 이차방정식은

$\frac{1}{2}\{x-(1+\sqrt{5})\}\{x-(1-\sqrt{5})\}=0$

$\therefore\ \frac{1}{2}x^2-x-2=0$

따라서 $a=-1,\ b=-2$이므로

$\frac{a}{b}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$

비법 NOTE

계수가 유리수인 이차방정식의 근

이차방정식 $ax^2+bx+c=0\ (a\neq0)$에서 a, b, c가 유리수일 때,

$x=\underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\text{유리수}}+\underbrace{\frac{1}{2a}}_{\text{유리수}}\sqrt{b^2-4ac}$ 또는 $x=\underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\text{유리수}}-\underbrace{\frac{1}{2a}}_{\text{유리수}}\sqrt{b^2-4ac}$

➡ 한 근이 $x=p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $x=p-q\sqrt{m}$이다.

(단, p, q는 유리수, $q\neq0$, $\sqrt{m}$은 무리수)

09 답 21

연속하는 세 홀수를 $x-2$, x, $x+2$ (x는 2보다 큰 홀수)라 하면

$(x-2)^2+x^2+(x+2)^2=155$

$3x^2=147,\ x^2=49$

$\therefore\ x=\pm7$

이때 $x>2$이므로 $x=7$

따라서 세 홀수는 5, 7, 9이므로 구하는 합은

$5+7+9=21$

10 답 15

학생 수를 x라 하면 한 사람이 받는 연필의 수는 $x-3$이므로

$x(x-3)=180,\ x^2-3x-180=0$

$(x+12)(x-15)=0 \quad \therefore\ x=-12$ 또는 $x=15$

이때 x는 자연수이므로 $x=15$

따라서 학생 수는 15이다.

11 답 4초 후

$50+70t-5t^2=250$에서 $5t^2-70t+200=0$

$t^2-14t+40=0,\ (t-4)(t-10)=0$

$\therefore\ t=4$ 또는 $t=10$

따라서 물체가 지면으로부터 250 m 높이의 지점을 처음으로 지나는 것은 쏘아 올린 지 4초 후이다.

12 답 ⑤

직각삼각형의 가장 긴 변의 길이가 $x+3$이므로

$(x+3)^2=x^2+(x+1)^2,\ x^2-4x-8=0$

$\therefore\ x=-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-1\times(-8)}=2\pm2\sqrt{3}$

이때 $x>2$이므로 $x=2+2\sqrt{3}$

13 답 13초 후

x초 후에 처음 직사각형과 넓이가 같아진다고 하면

$(20-x)(14+2x)=280$, $x^2-13x=0$

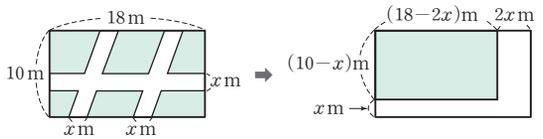
$\hookrightarrow 20\times14=280$

$x(x-13)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=13$

이때 $0<x<20$이므로 $x=13$

따라서 처음 직사각형과 넓이가 같아지는 것은 13초 후이다.

14 답 2



위의 그림에서 도로를 제외한 땅의 넓이가 112 m²이므로

$(18-2x)(10-x)=112$, $x^2-19x+34=0$

$(x-2)(x-17)=0$ $\therefore x=2$ 또는 $x=17$

이때 $0<2x<18$에서 $0<x<9$이므로 $x=2$

STEP 2 고난도 문제 ▶72~74쪽

01 2 **02** ④ **03** 2 **04** 9

05 $3x^2+10x-25=0$ **06** ③ **07** 84 **08** 6

09 111 **10** ② **11** 24 **12** 6월 26일 **13** 20 %

14 24 **15** (8, 5), (10, 4) **16** 2초 후 **17** 19

18 (1) 1 (2) $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

01 답 2

$x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 근을 가지므로

$a^2-4\times1\times b>0$ $\therefore a^2-4b>0$ …… ㉠

$x^2+(a-2c)x+b-ac=0$에서

$(a-2c)^2-4\times1\times(b-ac)=a^2-4ac+4c^2-4b+4ac$

$=a^2-4b+4c^2$

그런데 ㉠에서 $a^2-4b>0$이고, $4c^2\geq0$이므로

$a^2-4b+4c^2>0$

따라서 서로 다른 두 근을 갖는다.

02 답 ④

$ax^2+2(a+6)x+a+8=0$에서

$(a+6)^2-a\times(a+8)=a^2+12a+36-a^2-8a$

$=4a+36$

(i) $4a+36>0$, 즉 $a>-9$일 때, 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 근을 갖는다. →$a=-6$이면 서로 다른 두 근을 갖는다.

(ii) $4a+36=0$, 즉 $a=-9$일 때, 주어진 이차방정식은 중근을 갖는다.

(iii) $4a+36<0$, 즉 $a<-9$일 때, 주어진 이차방정식은 근을 갖지 않는다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

03 답 2

$x^2-ax+b+1=0$이 근을 가지므로

$(-a)^2-4\times1\times(b+1)\geq0$ $\therefore b\leq\dfrac{a^2}{4}-1$

즉, b의 최댓값은 $M=\dfrac{a^2}{4}-1$

이때 $-2\leq a\leq4$이므로 $0\leq a^2\leq16$

$0\leq\dfrac{a^2}{4}\leq4$, $-1\leq\dfrac{a^2}{4}-1\leq3$

$\therefore -1\leq M\leq3$

따라서 $p=-1$, $q=3$이므로

$p+q=-1+3=2$

04 답 9

$3x^2+2ax+2a+9=0$이 중근을 가지려면

$a^2-3\times(2a+9)=0$ …… ❶

$a^2-6a-27=0$, $(a+3)(a-9)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=9$ …… ❷

(i) $a=-3$일 때,

$3x^2-6x+3=0$, $x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$

그런데 $x=1$은 양수인 중근이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=9$일 때,

$3x^2+18x+27=0$, $x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0$ $\therefore x=-3$

(i), (ii)에서 $a=9$ …… ❸

채점 기준

❶ a에 대한 이차방정식 세우기	30 %
❷ a에 대한 이차방정식 풀기	30 %
❸ 음수인 중근을 갖도록 하는 a의 값 구하기	40 %

05 답 $3x^2+10x-25=0$

$y=ax+b$의 그래프에서 $a=\dfrac{5}{3}$, $b=-5$

$\hookrightarrow a=$(기울기), $b=$(y절편)

따라서 $\dfrac{5}{3}$, -5를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3\left(x-\dfrac{5}{3}\right)(x+5)=0$

$\therefore 3x^2+10x-25=0$

06 답 ③

$2<\sqrt{6}<3$이므로 $\sqrt{6}$의 소수 부분은 $\sqrt{6}-2$

$5<\sqrt{26}<6$에서 $4<\sqrt{26}-1<5$이므로 $\sqrt{26}-1$의 정수 부분은 4

두 근이 $\sqrt{6}-2$, 4이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-\sqrt{6}+2)(x-4)=0$

$\therefore x^2-(\sqrt{6}+2)x+4\sqrt{6}-8=0$

따라서 $a=-\sqrt{6}-2$, $b=4\sqrt{6}-8$이므로

$ab=(-\sqrt{6}-2)(4\sqrt{6}-8)$

$=-4(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}-2)$

$=-4\times(6-4)=-8$

07 답 84

$2x^2+ax+b=0$에서 a, b가 유리수이므로 다른 한 근은

$x=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$이다.

즉, 두 근이 $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$, $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$이고 x^2의 계수가 2인 이차방정식은

$2\left(x-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)=0$

$\therefore 2x^2-4x+1=0$

이 식이 $2x^2+ax+b=0$과 일치하므로

$a=-4$, $b=1$

$\therefore a+b=-3$, $ab=-4$

즉, 두 근이 -3, -4이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x+3)(x+4)=0$ $\therefore x^2+7x+12=0$

따라서 $p=7$, $q=12$이므로

$pq=7\times12=84$

08 답 6

두 근의 절댓값이 서로 같고, 부호는 서로 반대이므로 두 근을

k, $-k(k>0)$라 하면

$(x-k)(x+k)=0$ $\therefore x^2-k^2=0$

이 식이 $x^2-(a^2-3a-18)x-a+2=0$과 일치하므로

$0=-(a^2-3a-18)$ …… ㉠

$-k^2=-a+2$ …… ㉡

㉠에서 $a^2-3a-18=0$

$(a+3)(a-6)=0$ $\therefore a=-3$ 또는 $a=6$

㉡에서 $k^2=a-2$이므로

(i) $a=-3$일 때, $k^2=-5$

그런데 어떤 실수의 제곱은 음수가 될 수 없으므로 이를 만족시키는 k의 값은 없다.

(ii) $a=6$일 때, $k^2=4$ $\therefore k=\pm2$

이때 $k>0$이므로 $k=2$

(i), (ii)에서 $a=6$

09 Idea 답 111

$2x^2-30x+k=0$의 두 근의 최대공약수가 3이므로 두 근을

$a=3m$, $b=3n$(m, n은 서로소)이라 하면 …… ❶

$2(x-3m)(x-3n)=0$

$\therefore 2x^2-2(3m+3n)x+18mn=0$

이 식이 $2x^2-30x+k=0$과 일치하므로

$-2(3m+3n)=-30$ …… ㉠

$18mn=k$ …… ㉡

㉠에서 $m+n=5$이고

$a>b>3$에서 $3m>3n>3$ $\therefore m>n>1$

이때 m, n은 자연수이므로

$m=3$, $n=2$ …… ❷

㉡에서 $k=18\times3\times2=108$

$\therefore a-b+k=3m-3n+k$

$=3\times3-3\times2+108=111$ …… ❸

채점 기준

❶ $a=3m$, $b=3n$(m, n은 서로소)으로 놓기	30 %
❷ m, n의 값 구하기	50 %
❸ $a-b+k$의 값 구하기	20 %

10 답 ②

1단계의 바둑돌의 개수는 1×3

2단계의 바둑돌의 개수는 2×4

3단계의 바둑돌의 개수는 3×5

⋮

n단계의 바둑돌의 개수는 $n(n+2)$

즉, $n(n+2)=288$이므로

$n^2+2n-288=0$, $(n+18)(n-16)=0$

$\therefore n=-18$ 또는 $n=16$

이때 $n>0$이므로 $n=16$

따라서 구하는 단계는 16단계이다.

11 답 24

연속하는 세 짝수를 $x-2$, x, $x+2$(x는 2보다 큰 짝수)라 하면

$(x+2)^2=3x(x-2)-44$, $x^2-5x-24=0$

$(x+3)(x-8)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=8$

이때 $x>2$이므로 $x=8$

즉, 연속하는 세 짝수는 6, 8, 10이다.

이때 $6^2+8^2=10^2$이므로 6, 8, 10을 세 변의 길이로 하는 삼각형은 빗변의 길이가 10인 직각삼각형이다.

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times8=24$

12 답 6월 26일

넷째 주 목요일의 날짜를 6월 x일이라 하면 둘째 주 수요일의 날짜는 6월 $(x-15)$일이므로

$x(x-15)=216$ …… ❶

$x^2-15x-216=0$, $(x+9)(x-24)=0$

$\therefore x=-9$ 또는 $x=24$

이때 $x>15$이므로 $x=24$ …… ❷

따라서 넷째 주 목요일의 날짜는 6월 24일이므로 토요일의 날짜는

6월 26일이다. …… ❸

└ 24+2=26

채점 기준

❶ 이차방정식 세우기	40 %
❷ 이차방정식 풀기	40 %
❸ 넷째 주 토요일의 날짜 구하기	20 %

13 답 20 %

인상하기 전 1인당 입장료를 a원, 입장객 수를 b라 하면

입장료를 x % 올린 후의 입장료는 $\left(1+\frac{x}{100}\right)a$원,

입장객 수는 $\left(1-\frac{x}{400}\right)b$이다.

따라서 입장료를 x % 올린 후의 총수입은

$\left(1+\frac{x}{100}\right)a\times\left(1-\frac{x}{400}\right)b$(원)

이때 총수입이 14 % 증가해야 하므로

$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{400}\right)ab=\frac{114}{100}ab$

$\frac{100+x}{100}\times\frac{400-x}{400}=\frac{114}{100}$

$(100+x)(400-x)=45600$

$x^2-300x+5600=0$, $(x-20)(x-280)=0$

$\therefore x=20$ 또는 $x=280$

이때 $0<x<50$이므로 $x=20$

따라서 입장료는 20 %를 올려야 한다.

14 답 24

기존 야구 동아리 학생 수를 x라 하면 새로 들어온 2명의 학생이 각각 받은 관람권의 수는 $\frac{x}{2}$이므로 기존 학생 한 명이 갖고 있는 관람권의 수는 $\frac{x}{2}-9$이다.

즉, 재분배하기 전 기존 학생 한 명이 받은 관람권의 수가 $\frac{x}{2}-8$이므로

$x\left(\frac{x}{2}-8\right)=96$, $x^2-16x-192=0$

$(x+8)(x-24)=0$ $\therefore x=-8$ 또는 $x=24$

이때 x는 자연수이므로 $x=24$

따라서 기존 야구 동아리 학생 수는 24이다.

15 답 (8, 5), (10, 4)

점 P의 x좌표를 p라 하면

$P\left(p,\ -\frac{1}{2}p+9\right)$

$\square OAPB=\overline{OA}\times\overline{OB}$이므로

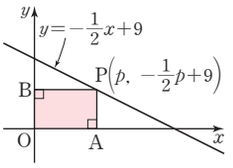
$p\left(-\frac{1}{2}p+9\right)=40$

$p^2-18p+80=0$, $(p-8)(p-10)=0$

$\therefore p=8$ 또는 $p=10$

따라서 점 P의 좌표는 (8, 5), (10, 4)이다.

$-\frac{1}{2}\times8+9=5$ $-\frac{1}{2}\times10+9=4$



16 답 2초 후

점 P가 출발한 지 t초 후에 $\overline{AP}=2t$ cm이므로

$\overline{BP}=(20-2t)$ cm

점 Q가 출발한 지 t초 후에 $\overline{BQ}=3t$ cm

$\triangle PBQ$의 넓이가 48 cm^2일 때,

$\frac{1}{2}\times(20-2t)\times3t=48$, $30t-3t^2=48$

$t^2-10t+16=0$, $(t-2)(t-8)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=8$

이때 $0<3t<18$이므로 $0<t<6$ $\therefore t=2$

따라서 $\triangle PBQ$의 넓이가 48 cm^2가 되는 것은 출발한 지 2초 후이다.

참고 $\overline{BC}=18$ cm이므로 점 Q가 움직일 수 있는 거리는 18 cm 미만이다.

➡ $0<3t<18$

17 답 19

idea

십자 모양에서 가로로 놓인 돌의 개수를 x라 하면 세로로 놓인 돌의 개수도 x이므로 전체 돌의 개수는 $2x-1$이다.

이때 돌의 반지름의 길이가 50 cm이므로 연못의 반지름의 길이는 $50x$ cm이다.

즉, 돌 1개의 넓이는 $\pi\times50^2=2500\pi$(cm^2)이고,

연못의 넓이는 $\pi\times(50x)^2=2500\pi x^2$($cm^2$)이므로

$2500\pi x^2-2500\pi\times(2x-1)=\frac{81}{100}\times2500\pi x^2$

$x^2-(2x-1)=\frac{81}{100}x^2$, $\frac{19}{100}x^2-2x+1=0$

$19x^2-200x+100=0$, $(19x-10)(x-10)=0$

$\therefore x=\frac{10}{19}$ 또는 $x=10$

이때 x는 자연수이므로 $x=10$

따라서 연못에 놓인 돌의 개수는

$2\times10-1=19$

18 답 (1) 1 (2) $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(1) 정오각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180^\circ\times(5-2)}{5}=108^\circ$이므로

$\angle ABC=108^\circ$

$\triangle ABC$는 $\overline{AB}=\overline{BC}$인 이등변삼각형이므로

$\angle BAC=\angle BCA=\frac{1}{2}\times(180^\circ-108^\circ)=36^\circ$

같은 방법으로 하면

$\triangle ABE$에서 $\angle ABE=36^\circ$이므로

$\angle FBC=108^\circ-36^\circ=72^\circ$

또 $\triangle ABF$에서 $\angle BFC=36^\circ+36^\circ=72^\circ$이므로

$\triangle BCF$는 $\overline{CB}=\overline{CF}$인 이등변삼각형이다.

$\therefore \overline{CF}=\overline{CB}=1$ …… ❶

(2) $\overline{AC}=\overline{AF}+\overline{CF}=x+1$이고,

$\triangle ABC$와 $\triangle AFB$에서

$\angle BCA=\angle FBA$, $\angle BAC$는 공통이므로

$\triangle ABC\backsim\triangle AFB$(AA 닮음)

즉, $\overline{AB}:\overline{AF}=\overline{AC}:\overline{AB}$이므로

$1:x=(x+1):1$, $x(x+1)=1$

$x^2+x-1=0$ …… ❷

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times1\times(-1)}}{2\times1}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

이때 $x>0$이므로 $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ …… ❸

채점 기준	
❶ $\overline{CF}$의 길이 구하기	40 %
❷ x에 대한 이차방정식 구하기	30 %
❸ x의 값 구하기	30 %

개념 NOTE

정n각형의 한 내각의 크기 ➡ $\frac{180^\circ\times(n-2)}{n}$

STEP 3 최고난도 문제 ▶ 75쪽

01 ④ **02** $x^2-2026x-2027=0$ **03** 10

04 걸린 시간: 1시간 40분, $a=10$ **05** ④

01 답 ④

$ax^2+bx+c=0$에 $x=-1$을 대입하면

$a-b+c=0$ …… ㉠

$cx^2+ax+b=0$에 $x=3$을 대입하면

$3a+b+9c=0$ …… ㉡

㉠$\times 9$−㉡을 하면 $6a-10b=0$

$\therefore 3a=5b$

이때 a, b는 서로소인 자연수이므로

$a=5$, $b=3$

㉠에 $a=5$, $b=3$을 대입하면

$5-3+c=0$ $\therefore c=-2$

즉, $5x^2+3x-2=0$에서 $(x+1)(5x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{2}{5}$

$\therefore \alpha=\frac{2}{5}$

또 $-2x^2+5x+3=0$에서 $2x^2-5x-3=0$

$(2x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=3$

$\therefore \beta=-\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{2}{5}$, $-\frac{1}{2}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 10인 이차방정식은

$10\left(x-\frac{2}{5}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$

$\therefore 10x^2+x-2=0$

즉, x의 계수는 1이다.

02 답 $x^2-2026x-2027=0$

$x^2-ax+b=0$의 두 근이 연속하는 자연수이므로 두 근을

α, $\alpha+1$ (α는 자연수)이라 하면

두 근의 제곱의 차가 5이므로

$(\alpha+1)^2-\alpha^2=5$, $\alpha^2+2\alpha+1-\alpha^2=5$

$2\alpha=4$ $\therefore \alpha=2$

즉, 두 근은 2, 3이므로

$(x-2)(x-3)=0$ $\therefore x^2-5x+6=0$

이 식이 $x^2-ax+b=0$과 일치하므로

$-5=-a$, $6=b$ $\therefore a=5$, $b=6$

이때 $a-b=-1$, $b-a=1$이므로

$A=(a-b)+(a-b)^2+\cdots+(a-b)^{2027}$

$=(-1)+(-1)^2+\cdots+(-1)^{2027}=-1$,

$B=(b-a)+(b-a)^2+\cdots+(b-a)^{2027}$

$=1+1^2+\cdots+1^{2027}=2027$

따라서 두 근이 -1, 2027이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x+1)(x-2027)=0$

$\therefore x^2-2026x-2027=0$

03 답 10

㈎의 시행 후 소금물에 들어 있는 소금의 양은 x g이므로

소금물의 농도는

$\frac{x}{100}\times 100=x(\%)$

㈏의 시행 후 소금물에 들어 있는 소금의 양은

$x-\frac{x}{100}\times(x+10)+(x+10)=\frac{-x^2+190x+1000}{100}$(g)

이므로 소금물의 농도는

$\frac{\frac{-x^2+190x+1000}{100}}{100}\times 100=\frac{-x^2+190x+1000}{100}(\%)$

이 소금물의 농도가 28 %이므로

$\frac{-x^2+190x+1000}{100}=28$

$x^2-190x+1800=0$, $(x-10)(x-180)=0$

$\therefore x=10$ 또는 $x=180$

이때 $0<x<90$이므로 $x=10$

↳ x g, $(x+10)$ g은 100 g의 물에서 덜어 내는 양이므로 100 g보다 적어야 한다.

개념 NOTE

(소금물의 농도)$=\frac{\text{(소금의 양)}}{\text{(소금물의 양)}}\times 100(\%)$

➡ (소금의 양)$=\frac{\text{(소금물의 농도)}}{100}\times$(소금물의 양)

04 답 걸린 시간: 1시간 40분, $a=10$

두 사람이 만날 때까지 걸린 시간을 x시간이라 하고, 두 사람이 만난 지점을 P 지점이라 하면 현우가 A 지점에서 P 지점까지 간 거리는 $8x$ km이고, 주아가 B 지점에서 P 지점까지 간 거리는 ax km이다.

이때 주아가 P 지점에서 A 지점까지 간 거리는 $\frac{4}{3}a$ km이므로

↳ $1\frac{20}{60}$시간$=\frac{4}{3}$시간 동안 이동한 거리

$8x=\frac{4}{3}a$, 즉 $a=6x$ …… ㉠

또 두 지점 A, B 사이의 거리가 30 km이므로

$8x+ax=30$ …… ㉡

↳ 또는 $\frac{4}{3}a+ax=30$

㉠을 ㉡에 대입하면 $8x+6x^2=30$

$3x^2+4x-15=0$, $(x+3)(3x-5)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

이때 $x>0$이므로 $x=\frac{5}{3}$

따라서 두 사람이 만날 때까지 걸린 시간은 $\frac{5}{3}$시간, 즉 1시간 40분이다.

또 $a=6x$에 $x=\frac{5}{3}$를 대입하면

$a=6\times\frac{5}{3}=10$

개념 NOTE

(거리)$=$(속력)$\times$(시간), (속력)$=\frac{\text{(거리)}}{\text{(시간)}}$, (시간)$=\frac{\text{(거리)}}{\text{(속력)}}$

05 답 ④

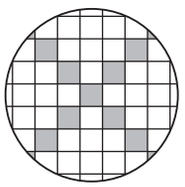
정사각형 ABCD의 내부를 정사각형 모양의 타일로 가로, 세로에 각각 n개씩 이어 붙여 채웠다고 하면 전체 타일의 개수는

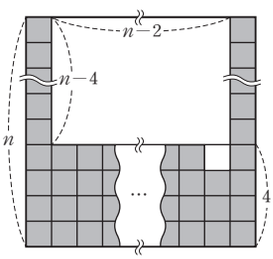
n^2

이때 정사각형 ABCD의 두 대각선이 교차하는 부분에 놓이는 타일의 모양은 n의 값에 따라 다음과 같이 두 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) n이 홀수일 때,

오른쪽 그림과 같이 두 대각선이 교차하는 부분에 검은색 타일이 하나 겹쳐지므로 정사각형 ABCD에 놓인 검은색 타일을 서로 인접하게 한쪽으로 이동하여 정리하면 다음 그림과 같은 모양이 된다.





즉, 흰색 타일의 개수는

$(n-2)(n-4)+1=168$

$n^2-6n-159=0$

→ 두 대각선이 교차하는 세로 줄만 검은색 타일이 3개이다.

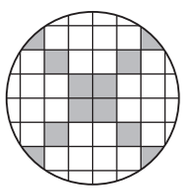
$\therefore n=-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-1\times(-159)}$

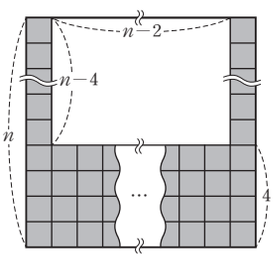
$=3\pm2\sqrt{42}$

따라서 조건을 만족시키는 홀수 n은 존재하지 않는다.

(ii) n이 짝수일 때,

오른쪽 그림과 같이 두 대각선이 교차하는 부분에 검은색 타일이 겹쳐지지 않으므로 정사각형 ABCD에 놓인 검은색 타일을 서로 인접하게 한쪽으로 이동하여 정리하면 다음 그림과 같은 모양이 된다.





즉, 흰색 타일의 개수는

$(n-4)(n-2)=168$

$n^2-6n-160=0$, $(n+10)(n-16)=0$

$\therefore n=-10$ 또는 $n=16$

이때 n은 자연수이므로 $n=16$

(i), (ii)에서 전체 타일의 개수는 $16^2=256$이므로 검은색 타일의 개수는

$256-168=88$

단원 마스터

▶ 76~79쪽

01 ⑤ **02** ② **03** $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$ **04** ③

05 ⑤ **06** $x=-\frac{1}{3}$ **07** ① **08** $-\frac{3}{2}$ **09** -1

10 ③ **11** ⑤ **12** $\frac{10+2\sqrt{37}}{3}$ **13** -1, 3

14 ④ **15** ⑤ **16** $a<\frac{9}{4}$ **17** ② **18** $x=4$ 또는 $x=6$

19 83 **20** 20 **21** 3초 **22** (6, 9)

23 $6+6\sqrt{5}$ **24** 4

01 답 ⑤

$(a+1)x^2-(b-a+1)x+2b+1=0$에 $x=1$을 대입하면

$(a+1)\times1^2-(b-a+1)\times1+2b+1=0$

$\therefore 2a+b=-1$ ····· ㉠

$(a+1)x^2-(b-a+1)x+2b+1=0$에 $x=-3$을 대입하면

$(a+1)\times(-3)^2-(b-a+1)\times(-3)+2b+1=0$

$\therefore 6a+5b=-13$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 풀면

$a=2$, $b=-5$

$\therefore a-b=2-(-5)=7$

02 답 ②

$x^2+5x-7=6x+2$, 즉 $x^2-x-9=0$에 $x=\alpha$을 대입하면

$\alpha^2-\alpha-9=0$ $\therefore \alpha^2-\alpha=9$ ····· ㉠

이때 $\alpha=0$이면 등식이 성립하지 않으므로

$\alpha\neq0$

㉠의 양변을 α로 나누면

$\alpha-1=\frac{9}{\alpha}$ $\therefore \alpha-\frac{9}{\alpha}=1$

$\therefore \alpha^2-2\alpha+\frac{9}{\alpha}=(\alpha^2-\alpha)-\left(\alpha-\frac{9}{\alpha}\right)$

$=9-1=8$

03 답 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

$(a+1)x^2-(a^2-3a+4)x-(a-1)=0$의 x^2의 계수와 상수항을 바꾸면

$-(a-1)x^2-(a^2-3a+4)x+(a+1)=0$

이 이차방정식에 $x=1$을 대입하면

$-(a-1)\times1^2-(a^2-3a+4)\times1+(a+1)=0$

$a^2-3a+2=0$, $(a-1)(a-2)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=2$

이때 $a-1\neq0$이므로 $a\neq1$

$\therefore a=2$

즉, 처음 이차방정식은 $3x^2-2x-1=0$이므로

$(3x+1)(x-1)=0$ $\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

04 답 ③

두 근이 모두 정수이려면 주어진 이차방정식의 좌변이 인수분해 되어야 한다.

이때 곱이 -12가 되는 두 정수를 순서쌍으로 나타내면

$(-12, 1), (-6, 2), (-4, 3), (-3, 4), (-2, 6), (-1, 12)$

이다.

따라서 상수 a의 값이 될 수 있는 수는 -11, -4, -1, 1, 4, 11의 6개이다.

05 답 ⑤

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f(x-1)-f(x)=a(x-1)^2+b(x-1)+c-(ax^2+bx+c)$

$=-2ax+a-b$

즉, $-2ax+a-b=4x-5$이므로

$-2a=4$, $a-b=-5$ $\therefore a=-2$, $b=3$

또 $f(0)=2$에서 $c=2$

따라서 $f(x)=-2x^2+3x+2$이므로

$f(x)=2x-1$에서 $-2x^2+3x+2=2x-1$

$2x^2-x-3=0$, $(x+1)(2x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

06 답 $x=-\frac{1}{3}$

$x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=0$에서 $\left(x-\frac{1}{3}\right)^2=0$

$\therefore x=\frac{1}{3}$

이때 $3x^2+ax-2=0$의 한 근이 $x=\frac{1}{3}\times6=2$이므로

$3\times2^2+a\times2-2=0$

$2a+10=0$ $\therefore a=-5$

즉, $3x^2-5x-2=0$이므로

$(3x+1)(x-2)=0$ $\therefore x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=2$

따라서 다른 한 근은 $x=-\frac{1}{3}$이다.

07 답 ①

$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

(i) 공통인 해가 $x=-1$일 때,

$2x^2+kx-6=0$에 $x=-1$을 대입하면

$2\times(-1)^2+k\times(-1)-6=0$

$-k-4=0$ $\therefore k=-4$

(ii) 공통인 해가 $x=2$일 때,

$2x^2+kx-6=0$에 $x=2$를 대입하면

$2\times2^2+k\times2-6=0$

$2k+2=0$ $\therefore k=-1$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$-4+(-1)=-5$

08 답 $-\frac{3}{2}$

주어진 $f(x)$의 분모를 먼저 유리화한 후 m의 값을 구하면

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}$

$=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$

$\therefore m=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(23)+f(24)$

$=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})$

$+\cdots+(\sqrt{24}-\sqrt{23})+(\sqrt{25}-\sqrt{24})$

$=\sqrt{25}-\sqrt{1}=5-1=4$

$(a^2-1)x^2+(5a-7)x-4(3a-5)=0$에 $x=4$를 대입하면

$(a^2-1)\times4^2+(5a-7)\times4-4(3a-5)=0$

$16a^2+8a-24=0$, $2a^2+a-3=0$

$(2a+3)(a-1)=0$ $\therefore a=-\frac{3}{2}$ 또는 $a=1$

이때 $a^2-1\neq0$에서 $a\neq-1$, $a\neq1$이므로 $a=-\frac{3}{2}$

09 답 -1

$(x+3)*(x-2)$

$=(x+3)(x-2)-(x+3)+2(x-2)+3$

$=x^2+2x-10$ ····· ❶

즉, $x^2+2x-10=-7$이므로

$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

이때 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=-3$, $\beta=1$ ····· ❷

따라서 $3\alpha+8\beta=3\times(-3)+8\times1=-1$이므로

$(3\alpha+8\beta)+(3\alpha+8\beta)^2+\cdots+(3\alpha+8\beta)^{2027}$

$=(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^{2026}+(-1)^{2027}$

$=\underline{(-1)+1}+\underline{(-1)+1}+\cdots+\underline{(-1)+1}+(-1)$

$=-1$ ····· ❸

채점 기준

❶ $(x+3)*(x-2)$를 x에 대한 식으로 나타내기	30 %
❷ α, β의 값 구하기	30 %
❸ 주어진 식의 값 구하기	40 %

10 답 ③

$4x^2-8ax+a=0$의 양변을 4로 나누면

$x^2-2ax+\frac{a}{4}=0$

이 이차방정식이 중근을 가지므로

$\frac{a}{4}=\left(-\frac{2a}{2}\right)^2$, $\frac{a}{4}=a^2$, $4a^2-a=0$

$a(4a-1)=0$ $\therefore a=0$ 또는 $a=\frac{1}{4}$

이때 $a\neq0$이므로 $a=\frac{1}{4}$

즉, $4x^2-2x+\frac{1}{4}=0$이므로

$16x^2-8x+1=0$, $(4x-1)^2=0$ $\therefore x=\frac{1}{4}$

따라서 $k=\frac{1}{4}$이므로 $a+k=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

11 답 ⑤

$a(x-p)^2=q$에서 $(x-p)^2=\frac{q}{a}$

ㄱ. $q=0$이면 $(x-p)^2=0$ $\therefore x=p$ (중근)

ㄴ. $q>0$이고 $a<0$이면 $\frac{q}{a}<0$이므로 근을 갖지 않는다.

ㄷ. $p=0$, $aq>0$이면 $x^2=\frac{q}{a}$이고, $\frac{q}{a}>0$이므로 $x=\pm\sqrt{\frac{q}{a}}$

즉, 두 근의 절댓값은 서로 같다.

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

12 답 $\frac{10+2\sqrt{37}}{3}$

$x^2-3x-7=0$에서

$x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-7)}}{2\times1}=\frac{3\pm\sqrt{37}}{2}$

이때 양수인 근은 $x=\frac{3+\sqrt{37}}{2}$이고,

$6<\sqrt{37}<7$에서 $9<3+\sqrt{37}<10$, $4.5<\frac{3+\sqrt{37}}{2}<5$이므로

$a=4$, $b=\frac{3+\sqrt{37}}{2}-4=\frac{-5+\sqrt{37}}{2}$

$\therefore \frac{a}{b}=4\times\frac{2}{-5+\sqrt{37}}=\frac{8(-5-\sqrt{37})}{(-5+\sqrt{37})(-5-\sqrt{37})}$

$=\frac{-8(5+\sqrt{37})}{-12}=\frac{10+2\sqrt{37}}{3}$

13 Idea 답 -1, 3

$x^2-2x+6=n^2$ (n은 정수)이라 하면

$x^2-2x+6-n^2=0$

$\therefore x=-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-1\times(6-n^2)}=1\pm\sqrt{n^2-5}$ …… ㉠

이때 x는 정수이므로 n^2-5는 (자연수)^2 꼴이어야 한다.

$n^2-5=k^2$ (k는 자연수)이라 하면

$n^2-k^2=5$ $\therefore (n+k)(n-k)=5$

(i) $n+k=-5$, $n-k=-1$일 때, $n=-3$, $k=-2$

(ii) $n+k=-1$, $n-k=-5$일 때, $n=-3$, $k=2$

(iii) $n+k=5$, $n-k=1$일 때, $n=3$, $k=2$

(iv) $n+k=1$, $n-k=5$일 때, $n=3$, $k=-2$

(i)~(iv)에서 k는 자연수이므로

$n=-3$, $k=2$ 또는 $n=3$, $k=2$

㉠에서 $x=1\pm\sqrt{(\pm3)^2-5}=1\pm2$이므로

$x=-1$ 또는 $x=3$

14 답 ④

$2(a+b)^2-a+b-6=8ab$에서

$2a^2+4ab+2b^2-8ab-a+b-6=0$

$2(a^2-2ab+b^2)-a+b-6=0$

$2(a-b)^2-(a-b)-6=0$

$a-b=A$로 놓으면

$2A^2-A-6=0$, $(2A+3)(A-2)=0$

$\therefore A=-\frac{3}{2}$ 또는 $A=2$

$\therefore a-b=-\frac{3}{2}$ 또는 $a-b=2$

이때 $a<b$에서 $a-b<0$이므로

$a-b=-\frac{3}{2}$

15 답 ⑤

모든 경우의 수는 $6\times6=36$

$px^2-5x+q=0$이 서로 다른 두 근을 가지려면

$(-5)^2-4\times p\times q>0$

$25-4pq>0$ $\therefore pq<\frac{25}{4}\left(=6\frac{1}{4}\right)$

이를 만족시키는 p, q의 순서쌍 (p, q)는 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(1, 6)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$의 14가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$

16 답 $a<\frac{9}{4}$

두 근이 p, q이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-p)(x-q)=0$ $\therefore x^2-(p+q)x+pq=0$

이때 $\begin{cases}p+q=3-2a\\pq=a^2-2a\end{cases}$이므로

$x^2-(3-2a)x+a^2-2a=0$, 즉 $x^2+(2a-3)x+a^2-2a=0$

이 이차방정식이 서로 다른 두 근을 가지므로

$(2a-3)^2-4\times1\times(a^2-2a)>0$

$-4a+9>0$ $\therefore a<\frac{9}{4}$

17 답 ②

두 근을 α, 2α ($\alpha\neq0$)라 하면 두 근이 α, 2α이고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$(x-\alpha)(x-2\alpha)=0$ $\therefore x^2-3\alpha x+2\alpha^2=0$

이 식이 $x^2+(m-5)x+32=0$과 일치하므로

$2\alpha^2=32$에서 $\alpha^2=16$ $\therefore \alpha=\pm4$ …… ㉠

또 $-3\alpha=m-5$에서 $m=-3\alpha+5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $m=-7$ 또는 $m=17$

따라서 모든 상수 m의 값의 합은

$-7+17=10$

18 답 $x=4$ 또는 $x=6$

현수가 푼 이차방정식은

$(x-5)^2=0$ $\therefore x^2-10x+25=0$

이때 현수는 x의 계수를 제대로 보았으므로 처음 이차방정식의 x의 계수는 -10이다.

민지가 푼 이차방정식은

$(x+12)(x+2)=0$ $\therefore x^2+14x+24=0$

이때 민지는 상수항을 제대로 보았으므로 처음 이차방정식의 상수항은 24이다.

따라서 처음 이차방정식은 $x^2-10x+24=0$이므로

$(x-4)(x-6)=0$ $\therefore x=4$ 또는 $x=6$

19 답 83

십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면 구하는 자연수는 $10x+y$이다.

㈏에서 $x^2+y^2=73$ …… ㉠

㈐에서 십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자를 바꾼 수는 $10y+x$이므로

$(10y+x)+(10x+y)=121$, $11x+11y=121$

$x+y=11$ $\therefore y=11-x$ …… ㉡

㉠에 ㉡을 대입하면 $x^2+(11-x)^2=73$

$x^2-11x+24=0$, $(x-3)(x-8)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=8$

㉡에서 $x=3$, $y=8$ 또는 $x=8$, $y=3$

이때 ㈎에서 $x>y$이므로 $x=8$, $y=3$

따라서 구하는 두 자리의 자연수는 83이다.

20 답 20

(정가)$=2000+2000\times\frac{a}{100}=2000+20a$(원)이므로

(판매 가격)$=(2000+20a)-(2000+20a)\times\frac{a}{100}$

$=2000-\frac{1}{5}a^2$(원) …… ❶

이때 (판매 가격)$-$(원가)$=-80$(원)이므로

$\left(2000-\frac{1}{5}a^2\right)-2000=-80$ …… ❷

$-\frac{1}{5}a^2=-80$, $a^2=400$

$\therefore a=-20$ 또는 $a=20$

이때 $a>0$이므로 $a=20$ …… ❸

채점 기준

❶ 판매 가격을 a에 대한 식으로 나타내기	40 %
❷ 이차방정식 세우기	30 %
❸ a의 값 구하기	30 %

개념 NOTE

정가, 원가에 대한 문제

(1) 원가가 x원인 물건에 a %의 이익을 붙여서 정한 정가

➡ (정가)$=$(원가)$+$(이익)$=x+\frac{a}{100}x=\left(1+\frac{a}{100}\right)x$(원)

(2) 정가가 y원인 물건을 b % 할인할 때, 판매 가격

➡ (판매 가격)$=$(정가)$-$(할인액)$=y-\frac{b}{100}y=\left(1-\frac{b}{100}\right)y$(원)

(3) (실제 이익)$=$(판매 가격)$-$(원가)

21 답 3초

물체의 높이가 50 m일 때,

$35t-5t^2=50$, $5t^2-35t+50=0$

$t^2-7t+10=0$, $(t-2)(t-5)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=5$

따라서 물체의 높이가 50 m 이상일 때는 쏘아 올린 지 2초 후부터 5초 후까지이므로 3초 동안이다.

참고 물체를 쏘아 올린 지 2초 후에 높이가 50 m인 지점을 지나 올라가다 가장 높은 위치에서 내려오면서 쏘아 올린 지 5초 후에 높이가 50 m인 지점을 다시 지난다.

22 답 (6, 9)

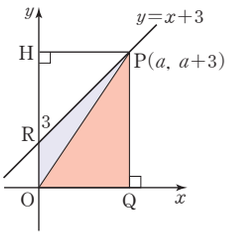
$y=x+3$의 그래프 위의 점 P의 좌표를 P$(a, a+3)$ $(a>0)$이라 하면

오른쪽 그림에서

$\overline{OQ}=a$, $\overline{PQ}=a+3$

$\therefore \triangle POQ=\frac{1}{2}\times a\times(a+3)$

$=\frac{a(a+3)}{2}$



점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PH}=\overline{OQ}=a$

또 $y=x+3$의 그래프의 y절편은 3이므로

$\overline{OR}=3$

$\therefore \triangle PRO=\frac{1}{2}\times 3\times a=\frac{3}{2}a$

$\triangle POQ:\triangle PRO=3:1$이므로

$\frac{a(a+3)}{2}:\frac{3}{2}a=3:1$, $\frac{a(a+3)}{2}=\frac{9}{2}a$

$a^2-6a=0$, $a(a-6)=0$ $\therefore a=0$ 또는 $a=6$

이때 $a>0$이므로 $a=6$

따라서 점 P의 좌표는 (6, 9)이다.

└ $y=6+3=9$

23 답 $6+6\sqrt{5}$

$\overline{BC}=x$라 하면 □ABFE는 정사각형이므로

$\overline{DE}=x-12$

□ABCD∽□DEFC이므로

$\overline{AB}:\overline{DE}=\overline{BC}:\overline{EF}$에서 $12:(x-12)=x:12$ …… ❶

$x(x-12)=144$, $x^2-12x-144=0$

$\therefore x=-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-1\times(-144)}=6\pm6\sqrt{5}$ …… ❷

이때 $x>12$이므로 $x=6+6\sqrt{5}$

따라서 $\overline{BC}$의 길이는 $6+6\sqrt{5}$이다. …… ❸

채점 기준

❶ 닮음을 이용하여 비례식 세우기	50 %
❷ 이차방정식 풀기	40 %
❸ $\overline{BC}$의 길이 구하기	10 %

24 답 4

모든 타일의 넓이의 합은

$x^2\times5+(1\times x)\times7+1^2\times7=5x^2+7x+7$(cm^2)

이때 타일 A, C가 각각 한 장씩 더 있으면 직사각형 모양의 벽면을 모두 채울 수 있으므로

$(5x^2+7x+7)+x^2+1=132$에서

$6x^2+7x-124=0$, $(6x+31)(x-4)=0$

$\therefore x=-\frac{31}{6}$ 또는 $x=4$

이때 $x>0$이므로 $x=4$

07 이차함수와 그 그래프(1)

STEP 1 핵심 문제

▶ 82~83쪽

01 ㄷ, ㅁ **02** ⑤ **03** 9 **04** ② **05** ③ **06** $-\frac{8}{3}$

07 1 **08** ③ **09** ④ **10** 1 **11** $\frac{3}{4}$

12 제3사분면

01 답 ㄷ, ㅁ

ㄱ. $y=2000x$ ➡ 일차함수

ㄴ. $y=80x$ ➡ 일차함수

ㄷ. $y=x\left(\frac{10}{2}-x\right)=-x^2+5x$ ➡ 이차함수

ㄹ. $y=x^3$ ➡ 이차함수가 아니다.

ㅁ. $y=4\pi x^2$ ➡ 이차함수

따라서 이차함수인 것은 ㄷ, ㅁ이다.

02 답 ⑤

$y=m^2(x-1)^2-3m(x^2+2)$

$=m^2(x^2-2x+1)-3m(x^2+2)$

$=(m^2-3m)x^2-2m^2x+m^2-6m$

이 함수가 x에 대한 이차함수가 되려면

$m^2-3m\neq0$에서 $m(m-3)\neq0$

$\therefore m\neq0$이고 $m\neq3$

03 답 9

$f(3)=2$에서 $-\frac{1}{3}\times3^2+3a-1=2$

$3a-4=2,\ 3a=6$

$\therefore a=2$

즉, $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+2x-1$이므로

$f(b)=-\frac{10}{3}$에서 $-\frac{1}{3}b^2+2b-1=-\frac{10}{3}$

$b^2-6b-7=0,\ (b+1)(b-7)=0$

$\therefore b=-1$ 또는 $b=7$

이때 b는 자연수이므로 $b=7$

$\therefore a+b=2+7=9$

04 답 ②

$y=ax^2$의 그래프가 색칠한 부분에만 나타나도록 하는 상수 a의 값의 범위는

$-2<a<0$ 또는 $0<a<\frac{2}{3}$

따라서 상수 a의 값이 될 수 있는 것은 ②이다.

05 답 ③

$y=ax^2$의 그래프가 $y=-\frac{1}{6}x^2$의 그래프와 x축에 대칭이므로

$a=\frac{1}{6}$

따라서 $y=\frac{1}{6}x^2$의 그래프가 점 $(-3,\ b)$를 지나므로

$b=\frac{1}{6}\times(-3)^2=\frac{3}{2}$

$\therefore ab=\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{4}$

06 답 $-\frac{8}{3}$

주어진 그래프는 $y=ax^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 그래프의 식은

$y=ax^2-3$

이 그래프가 점 $(3,\ 0)$을 지나므로

$0=a\times3^2-3,\ 9a=3$ $\therefore a=\frac{1}{3}$ …… ❶

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^2-3$ …… ❷

따라서

$f(-2)=\frac{1}{3}\times(-2)^2-3=-\frac{5}{3},\ f(1)=\frac{1}{3}\times1^2-3=-\frac{8}{3},$

$f(2)=\frac{1}{3}\times2^2-3=-\frac{5}{3}$이므로

$f(-2)+f(1)-f(2)=-\frac{5}{3}+\left(-\frac{8}{3}\right)-\left(-\frac{5}{3}\right)$

$=-\frac{8}{3}$ …… ❸

채점 기준

❶ a의 값 구하기	40 %
❷ 함수 $f(x)$ 구하기	20 %
❸ $f(-2)+f(1)-f(2)$의 값 구하기	40 %

참고 주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대칭이므로 모든 실수 k에 대하여 $f(-k)=f(k)$이다.

즉, $f(-2)=f(2)$이므로 $f(-2)+f(1)-f(2)=f(1)$

07 답 1

$y=a(x-p)^2$의 그래프의 축의 방정식은 $x=p$이므로

$p=-2$

따라서 $y=a(x+2)^2$의 그래프가 점 $(-4,\ -2)$를 지나므로

$-2=a\times(-4+2)^2,\ 4a=-2$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore ap=-\frac{1}{2}\times(-2)=1$

08 답 ③

① $y=3x^2+5$의 그래프의 축의 방정식은 $x=0$

$y=-3(x-5)^2$의 그래프의 축의 방정식은 $x=5$

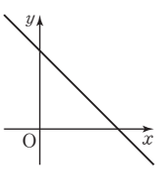
② $y=3x^2+5$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 5)$
$y=-3(x-5)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(5, 0)$
③ 이차항의 계수의 절댓값이 같으므로 그래프의 폭이 같다.
④ $y=-3(x-5)^2$의 그래프는 제3사분면과 제4사분면을 지난다.
⑤ $y=-3(x-5)^2$의 그래프는 $x<0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
따라서 옳은 것은 ③이다.

09 답 ④
$y=-2x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=-2(x-3)^2+a$
이 그래프가 점 $(2, -1)$을 지나므로
$-1=-2\times(2-3)^2+a$, $-1=-2+a$
$\therefore a=1$
따라서 $y=-2(x-3)^2+1$의 그래프가 점 $(5, b)$를 지나므로
$b=-2\times(5-3)^2+1=-7$
$\therefore a+b=1+(-7)=-6$

10 답 1
$y=2(x-p)^2+3p^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$(p, 3p^2)$
이 점이 직선 $y=-x+4$ 위에 있으므로
$3p^2=-p+4$, $3p^2+p-4=0$
$(3p+4)(p-1)=0$ $\therefore p=-\frac{4}{3}$ 또는 $p=1$
이때 $p>0$이므로 $p=1$

11 답 $\frac{3}{4}$
$y=\frac{3}{4}(x-2)^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은
$y=\frac{3}{4}(x-m-2)^2+1+n$
이 그래프와 $y=a(x-5)^2-2$의 그래프가 일치하므로
$a=\frac{3}{4}$, $-m-2=-5$, $1+n=-2$
따라서 $a=\frac{3}{4}$, $m=3$, $n=-3$이므로
$a+m+n=\frac{3}{4}+3+(-3)=\frac{3}{4}$

12 답 제3사분면
그래프가 위로 볼록한 포물선이므로 $a<0$
꼭짓점 $(-p, -q)$가 제2사분면 위에 있으므로
$-p<0$, $-q>0$
$\therefore p>0$, $q<0$
따라서 $y=ax-pq$의 그래프는
(기울기)$=a<0$, (y절편)$=-pq>0$이므로 오른쪽 그림과 같이 제3사분면을 지나지 않는다.



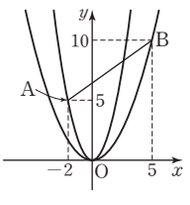
STEP 2 고난도 문제 ▶ 84~86쪽

01 6 **02** ③, ④ **03** $\frac{2}{5}\le a<\frac{5}{4}$ **04** $y=-\frac{1}{3}x^2$
05 $-\frac{1}{4}$ **06** 48 **07** $\frac{1}{3}$ **08** 18 **09** -1, 2
10 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **11** -15 **12** 18 **13** 제1사분면 **14** $\frac{13}{2}$
15 $a=-5$, $b=68$ **16** -4 **17** ②, ④ **18** ①

01 답 6
$y=ax^2$의 그래프가 y축에 대칭이므로
$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=2k\ (k>0)$라 하면
$B(-k, ak^2)$, $C(k, ak^2)$
따라서 점 D의 x좌표는 $k+2k=3k$이므로 $D(3k, 6k^2)$
이때 점 C와 점 D의 y좌표는 서로 같으므로 → $y=\frac{2}{3}\times(3k)^2=6k^2$
$ak^2=6k^2$ $\therefore a=6$

02 답 ③, ④
①, ④ $a>0$, $b>0$, $c<0$, $d<0$이고, $y=dx^2$의 그래프가 $y=cx^2$의 그래프보다 폭이 더 좁으므로 $|c|<|d|$
$\therefore ac<0$, $c>d$ → $d<c<0<b<a$
② $y=dx^2$의 그래프가 $y=bx^2$의 그래프보다 폭이 더 좁으므로 $|b|<|d|$
③ $y=ax^2$과 $y=dx^2$의 그래프, $y=bx^2$과 $y=cx^2$의 그래프가 각각 x축에 대칭이므로 $d=-a$, $c=-b$
$\therefore a+b+c+d=a+b+(-b)+(-a)=0$
⑤ 네 그래프의 축의 방정식은 모두 $x=0$이다.
따라서 옳은 것은 ③, ④이다.

03 답 $\frac{2}{5}\le a<\frac{5}{4}$
오른쪽 그림과 같이 $y=ax^2$의 그래프가 $\overline{AB}$와 한 점에서 만나려면 점 A$(-2, 5)$를 지날 때보다 폭이 넓고, 점 B$(5, 10)$을 지날 때보다 폭이 좁거나 같아야 한다.



(i) $y=ax^2$의 그래프가 점 A$(-2, 5)$를 지날 때,
$5=a\times(-2)^2$ $\therefore a=\frac{5}{4}$
따라서 $y=ax^2$의 그래프가 점 A를 지날 때보다 폭이 넓으려면
$a<\frac{5}{4}$ → $y=ax^2$의 그래프가 점 A를 지나면 $\overline{AB}$와 두 점에서 만나므로 $a\neq\frac{5}{4}$
(ii) $y=ax^2$의 그래프가 점 B$(5, 10)$을 지날 때,
$10=a\times5^2$ $\therefore a=\frac{2}{5}$
따라서 $y=ax^2$의 그래프가 점 B를 지날 때보다 폭이 좁거나 같으려면 $a\ge\frac{2}{5}$
(i), (ii)에서 $\frac{2}{5}\le a<\frac{5}{4}$

04 답 $y=-\frac{1}{3}x^2$

점 A의 x좌표를 $k\,(k>0)$라 하면

$A\left(k,\ \frac{1}{3}k^2\right)$, $B(k,\ -k^2)$

이때 점 M은 $\overline{AB}$의 중점이므로

$\left\{\frac{1}{3}k^2+(-k^2)\right\}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}k^2$

$\therefore M\left(k,\ -\frac{1}{3}k^2\right)$

구하는 이차함수의 식을 $y=ax^2$으로 놓으면

이 그래프가 점 $M\left(k,\ -\frac{1}{3}k^2\right)$을 지나므로

$-\frac{1}{3}k^2=ak^2$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{3}$

$\therefore y=-\frac{1}{3}x^2$

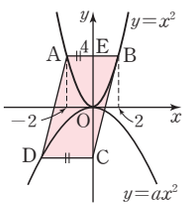
05 답 $-\frac{1}{4}$

두 점 A, B는 $y=x^2$의 그래프 위의 점이고, y좌표가 모두 4이므로

$4=x^2$ $\quad\therefore x=\pm2$

즉, A$(-2,\ 4)$, B$(2,\ 4)$이므로 $\overline{AB}=4$ ····· ❶

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$와 y축의 교점을 E라 하면



□ADCB$=\overline{AB}\times\overline{EC}=4\times\overline{EC}=32$이므로

$\overline{EC}=8$

$\therefore C(0,\ -4)$

이때 □ADCB는 평행사변형이므로

$\overline{DC}=\overline{AB}=4$

$\therefore D(-4,\ -4)$ ····· ❷

따라서 $y=ax^2$의 그래프가 점 D$(-4,\ -4)$를 지나므로

$-4=a\times(-4)^2$ $\quad\therefore a=-\frac{1}{4}$ ····· ❸

채점 기준

❶ $\overline{AB}$의 길이 구하기	30 %
❷ 점 D의 좌표 구하기	40 %
❸ a의 값 구하기	30 %

06 Idea 답 48

점 A$(p,\ 3)$이 $y=ax^2$의 그래프 위의 점이므로

$3=ap^2$, $p^2=\frac{3}{a}$ $\quad\therefore p=\pm\sqrt{\frac{3}{a}}$

한편 $y=ax^2$의 그래프는 y축에 대칭이므로 두 점 A, B의 y좌표가 같으면 두 점 A, B는 y축에 대칭이고, $p<q$이므로

$p=-\sqrt{\frac{3}{a}}$, $q=\sqrt{\frac{3}{a}}$

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{\frac{3}{a}}-\left(-\sqrt{\frac{3}{a}}\right)=2\sqrt{\frac{3}{a}}$

따라서 $\overline{CD}=1-(-1)=2$이고,

사다리꼴 ACDB의 높이는 $3-(-1)=4$이므로

└ $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$

□ACDB$=\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{CD})\times4$

$=\frac{1}{2}\times\left(2\sqrt{\frac{3}{a}}+2\right)\times4$

$=4+4\sqrt{\frac{3}{a}}=4+\sqrt{\frac{48}{a}}$

이때 □ACDB의 넓이가 자연수가 되려면 $\sqrt{\frac{48}{a}}$이 자연수가 되어야 한다.

즉, $\sqrt{\frac{48}{a}}=\sqrt{\frac{2^4\times3}{a}}$이 자연수가 되려면 a는 48의 약수이면서 $3\times(\text{자연수})^2$ 꼴이어야 하므로 자연수 a는

3×1^2, 3×2^2, 3×4^2

따라서 자연수 a의 최댓값은 $3\times4^2=48$

개념 NOTE

A가 자연수일 때, $\sqrt{\frac{A}{x}}$가 자연수가 되려면 $\frac{A}{x}$는 어떤 자연수의 제곱이어야 한다.

➡ A를 소인수분해 한 후 $\frac{A}{x}$의 소인수의 지수가 모두 짝수가 되도록 하는 자연수 x를 구한다.

07 답 $\frac{1}{3}$

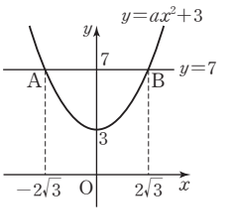
$y=ax^2+3$의 그래프의 축은 y축이므로

두 점 A, B는 y축에 대칭이다.

이때 $\overline{AB}=4\sqrt{3}$이고, 두 점 A, B의 y좌표는 7로 같으므로

A$(-2\sqrt{3},\ 7)$, B$(2\sqrt{3},\ 7)$

└ 점 A는 제2사분면 위의 점이다.



따라서 $y=ax^2+3$의 그래프가 점 B$(2\sqrt{3},\ 7)$을 지나므로

$7=a\times(2\sqrt{3})^2+3$, $12a=4$ $\quad\therefore a=\frac{1}{3}$

08 답 18

두 이차함수 $y=\frac{5}{4}x^2+m$, $y=-x^2+n$의 그래프가 모두 점 C$(2,\ 0)$을 지나므로

$0=\frac{5}{4}\times2^2+m$에서 $m=-5$

$0=-2^2+n$에서 $n=4$

따라서 주어진 두 이차함수는 각각 $y=\frac{5}{4}x^2-5$, $y=-x^2+4$이므로

B$(0,\ -5)$, D$(0,\ 4)$

$\therefore$ □ABCD$=$△ACD$+$△ABC

$=\frac{1}{2}\times4\times4+\frac{1}{2}\times4\times5$

$=8+10=18$

09 답 −1, 2

점 P의 x좌표를 a (a는 상수)라 하면

$y=x^2+2$의 그래프가 점 P를 지나므로 P$(a,\ a^2+2)$

$\overline{PQ}=6$이고, 두 점 P, Q의 y좌표는 서로 같으므로

Q$(a+6,\ a^2+2)$

이때 $y=x-2$의 그래프가 점 Q를 지나므로

$a^2+2=(a+6)-2$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

따라서 점 P의 x좌표는 -1 또는 2이다.

10 답 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

$y=a(x-p)^2$의 그래프의 축이 y축의 오른쪽에 있으므로

$p>0$

$y=a(x-p)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(p, 0)$이고,

$y=-\frac{1}{2}x^2+3$의 그래프가 이 점 $(p, 0)$을 지나므로

$0=-\frac{1}{2}p^2+3$, $p^2=6$

이때 $p>0$이므로 $p=\sqrt{6}$

$y=-\frac{1}{2}x^2+3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(0, 3)$이고,

$y=a(x-\sqrt{6})^2$의 그래프가 이 점 $(0, 3)$을 지나므로

$3=a\times(-\sqrt{6})^2$, $6a=3$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore ap=\frac{1}{2}\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

11 답 -15

㈎에서 이차함수의 식을 $f(x)=a(x-p)^2$으로 놓으면

㈏에서 $|a|=3$이고, ㈐에서 $a<0$이므로

$a=-3$

㈑에서 $f(5)=-27$이므로

$-3(5-p)^2=-27$, $(5-p)^2=9$

$p^2-10p+16=0$, $(p-2)(p-8)=0$

$\therefore p=2$ 또는 $p=8$

그런데 $p=8$이면 $y=-3(x-8)^2$에서 $x<8$일 때 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 ㈐를 만족시키지 않는다.

따라서 $p=2$이므로 $f(x)=-3(x-2)^2$

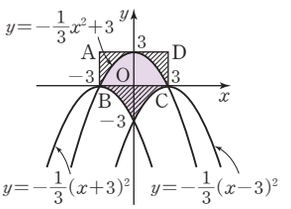
$\therefore f(1)+f(4)=-3\times(1-2)^2+(-3)\times(4-2)^2$

$=-3+(-12)=-15$

12 답 18

$y=-\frac{1}{3}x^2+3$의 그래프는 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, $y=-\frac{1}{3}(x-3)^2$, $y=-\frac{1}{3}(x+3)^2$의 그래프는 $y=-\frac{1}{3}x^2$의 그래프를 x축의 방향으로 각각 3만큼, -3만큼 평행이동한 것이므로 세 이차함수의 그래프의 폭은 모두 같다.

따라서 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는 직사각형 ABCD의 넓이와 같다.



즉, 구하는 넓이는

$\square ABCD=\overline{BC}\times\overline{CD}$

$=6\times3=18$

13 답 제1사분면

$y=-4(x+2a-4)^2-5a+13$의 그래프의 축의 방정식은

$x=-2a+4$

축이 y축의 오른쪽에 있으므로

$-2a+4>0$, $-2a>-4$

$\therefore a<2$

주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$(-2a+4, -5a+13)$

이때 $a<2$이므로 $-5a>-10$

$\therefore -5a+13>3$

따라서 꼭짓점 $(-2a+4, -5a+13)$은 제1사분면 위에 있다.

14 답 $\frac{13}{2}$

$y=ax+b$의 그래프가 두 점 $(-3, 0)$, $(0, -2)$를 지나므로

$0=-3a+b$, $-2=b$ $\therefore a=-\frac{2}{3}$, $b=-2$

즉, 주어진 이차함수의 식은 $y=-\frac{1}{3}(x-3)^2-\frac{4}{3}$이므로

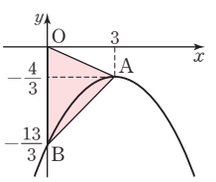
$A\left(3, -\frac{4}{3}\right)$

또 이 식에 $x=0$을 대입하면 $y=-\frac{1}{3}\times(-3)^2-\frac{4}{3}=-\frac{13}{3}$

$\therefore B\left(0, -\frac{13}{3}\right)$

따라서 $y=-\frac{1}{3}(x-3)^2-\frac{4}{3}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\triangle AOB=\frac{1}{2}\times\frac{13}{3}\times3=\frac{13}{2}$



15 답 $a=-5$, $b=68$

$y=-2(x-1)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-2(x-a-1)^2+4$ …… ❶

이 그래프를 x축에 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=-2(x-a-1)^2+4$ → y 대신 $-y$를 대입

$\therefore y=2(x-a-1)^2-4$ …… ❷

이 그래프가 점 $(-1, 14)$를 지나므로

$14=2(-a-2)^2-4$, $a^2+4a-5=0$

$(a+5)(a-1)=0$ $\therefore a=-5$ 또는 $a=1$

이때 $a<0$이므로 $a=-5$ …… ❸

따라서 $y=2(x+4)^2-4$의 그래프가 점 $(2, b)$를 지나므로

$b=2\times(2+4)^2-4=68$ …… ❹

채점 기준

❶ 평행이동한 그래프의 식 구하기	30 %
❷ 대칭이동한 그래프의 식 구하기	30 %
❸ a의 값 구하기	20 %
❹ b의 값 구하기	20 %

비법 NOTE

이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프의 대칭이동

(1) x축에 대칭이동: y의 부호가 바뀌므로 y 대신 $-y$를 대입하면

$-y=a(x-p)^2+q \Rightarrow y=-a(x-p)^2-q$

(2) y축에 대칭이동: x의 부호가 바뀌므로 x 대신 $-x$를 대입하면

$y=a(-x-p)^2+q \Rightarrow y=a(x+p)^2+q$

16 답 -4

$y=(x-2)^2$의 그래프는 $y=(x+4)^2$의 그래프를 x축의 방향으로 6만큼 평행이동한 그래프이므로

$\overline{AB}=6$

이때 $\triangle ACB=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times6\times\overline{AC}=12$이므로

$\overline{AC}=4$

따라서 $y=(x+4)^2+q$의 그래프는 $y=(x+4)^2$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 그래프이므로

$q=-4$

17 답 ②, ④

$ap<0$, $aq>0$이므로 a와 p는 부호가 서로 다르고, a와 q는 부호가 서로 같다.

(i) $a>0$, $p<0$, $q>0$일 때,

$a>0$이므로 아래로 볼록한 포물선이고,

$p<0$, $q>0$이므로 꼭짓점 (p, q)는 제2사분면 위에 있다.

(ii) $a<0$, $p>0$, $q<0$일 때,

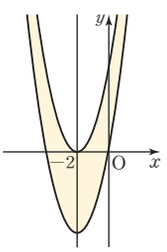
$a<0$이므로 위로 볼록한 포물선이고,

$p>0$, $q<0$이므로 꼭짓점 (p, q)는 제4사분면 위에 있다.

(i), (ii)에서 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프가 될 수 있는 것은 ②, ④이다.

18 답 ①

$y=3(x+2)^2+k-4$의 그래프는 아래로 볼록하므로 제4사분면만을 지나지 않으려면 그래프가 오른쪽 그림의 색칠한 부분에 위치해야 한다.



(i) $y=3(x+2)^2+k-4$의 그래프의 꼭짓점이 제3사분면 위에 있어야 하므로

(꼭짓점의 y좌표)<0이어야 한다.

이때 꼭짓점의 좌표는 $(-2, k-4)$이므로

$k-4<0$ $\quad\therefore k<4$

(ii) $y=3(x+2)^2+k-4$의 그래프와 y축과 만나는 점이 원점 또는 x축의 위쪽에 있어야 하므로 $x=0$일 때 (y의 값)≥0이어야 한다.

$y=3(x+2)^2+k-4$에 $x=0$을 대입하면

$y=3\times2^2+k-4=8+k\geq0$ $\quad\therefore k\geq-8$

(i), (ii)에서 상수 k의 값의 범위는

$-8\leq k<4$

STEP 3 최고난도 문제

▶ 87쪽

01 -502 **02** 3π **03** $\frac{9}{4}$ **04** 3 **05** 2688 **06** 2

01 idea 답 -502

$x_1=\frac{1}{2}$

$x_1+x_2=\frac{1}{2}+x_2=-\frac{1}{2}$이므로

$x_2=-1$

$x_2+x_3=(-1)+x_3=\frac{1}{2}$이므로

$x_3=\frac{3}{2}$

$x_3+x_4=\frac{3}{2}+x_4=-\frac{1}{2}$이므로

$x_4=-2$

$x_4+x_5=(-2)+x_5=\frac{1}{2}$이므로

$x_5=\frac{5}{2}$

$x_5+x_6=\frac{5}{2}+x_6=-\frac{1}{2}$이므로

$x_6=-3$

⋮

즉, $x_2=-1=-\frac{2}{2}$, $x_4=-2=-\frac{4}{2}$, $x_6=-3=-\frac{6}{2}$, …이므로

$x_{1004}=-\frac{1004}{2}=-502$

$y=x^2$에 $x=-502$를 대입하면

$y=(-502)^2=502^2$

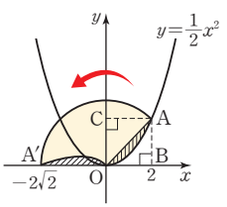
$\therefore P_{1004}(-502, 502^2)$

따라서 $a=-502$, $b=502^2$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{502^2}{-502}=-502$

02 답 3π

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$를 그으면 빗금 친 두 부분의 넓이는 서로 같으므로 색칠한 부분의 넓이는 부채꼴 A′OA의 넓이와 같다.



이때 점 A에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 B, C라 하면 A$(2, 2)$이므로 □OBAC는 한 변의 길이가 2인 정사각형이고, $\overline{OA}$는 그 대각선이므로 $\angle AOB=45°$이다.

따라서 부채꼴 A′OA의 반지름의 길이는 $\overline{OA}=\overline{OA'}=2\sqrt{2}$이고, 중심각의 크기는 $\angle A'OA=180°-45°=135°$이므로

(색칠한 부분의 넓이)=(부채꼴 A′OA의 넓이)

$=\pi\times(2\sqrt{2})^2\times\frac{135}{360}$

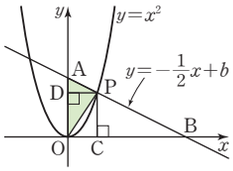
$=3\pi$

03 답 $\frac{9}{4}$

직선 $y=-\frac{1}{2}x+b$에서 x절편은 $2b$, y절편은 b이므로

$A(0,\ b)$, $B(2b,\ 0)$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하면



$\triangle AOB$에서 $\overline{AO}/\!/\overline{PC}$이므로

$\overline{AP}:\overline{PB}=\overline{OC}:\overline{CB}=1:3$

$\therefore \overline{OC}=\frac{1}{4}\overline{OB}=\frac{1}{4}\times 2b=\frac{b}{2}$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(\frac{b}{2},\ \frac{b^2}{4}\right)$이고, 직선 $y=-\frac{1}{2}x+b$가 점 P를 지나므로

$\frac{b^2}{4}=-\frac{1}{2}\times\frac{b}{2}+b$, $b^2-3b=0$

$b(b-3)=0$ $\therefore b=0$ 또는 $b=3$

이때 $b>0$이므로 $b=3$

따라서 $A(0,\ 3)$, $P\left(\frac{3}{2},\ \frac{9}{4}\right)$이므로

$\triangle AOP=\frac{1}{2}\times\overline{AO}\times\overline{DP}$ ($\overline{DP}=\overline{OC}$)

$=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$

04 답 3

$y=ax^2+8$의 그래프가 $y=b(x-4)^2$의 그래프의 꼭짓점 $(4,\ 0)$을 지나므로

$0=a\times 4^2+8$, $16a=-8$

$\therefore a=-\frac{1}{2}$

이때 $y=-\frac{1}{2}x^2+8$에 $x=1$을 대입하면

$y=-\frac{1}{2}\times 1^2+8=\frac{15}{2}$

$\therefore A\left(1,\ \frac{15}{2}\right)$ …… ❶

또 $y=b(x-4)^2$의 그래프가 $y=ax^2+8$의 그래프의 꼭짓점 $(0,\ 8)$을 지나므로

$8=b\times(-4)^2$, $16b=8$

$\therefore b=\frac{1}{2}$

이때 $y=\frac{1}{2}(x-4)^2$에 $x=1$을 대입하면

$y=\frac{1}{2}\times(1-4)^2=\frac{9}{2}$

$\therefore B\left(1,\ \frac{9}{2}\right)$ …… ❷

$\therefore \overline{AB}=\frac{15}{2}-\frac{9}{2}=3$ …… ❸

채점 기준

❶ 점 A의 좌표 구하기	40 %
❷ 점 B의 좌표 구하기	40 %
❸ $\overline{AB}$의 길이 구하기	20 %

05 답 2688

$f(x)=\frac{1}{3}(x+6)^2-1$의 그래프는 $g(x)=\frac{1}{3}(x+5)^2-1$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로

$f(x)=g(x+1)$

$\therefore \frac{f(-95)f(-94)f(-93)\cdots f(0)}{g(-95)g(-94)g(-93)\cdots g(0)}$

$=\frac{g(-94)g(-93)g(-92)\cdots g(1)}{g(-95)g(-94)g(-93)\cdots g(0)}$

$=\frac{g(1)}{g(-95)}$

이때 $g(1)=\frac{1}{3}\times(1+5)^2-1=11$,

$g(-95)=\frac{1}{3}\times(-95+5)^2-1=2699$이므로

$\frac{g(1)}{g(-95)}=\frac{11}{2699}$

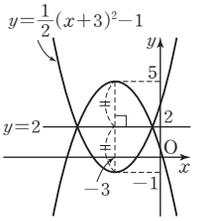
따라서 $a=11$, $b=2699$이므로

$b-a=2699-11=2688$

06 idea 답 2

오른쪽 그림과 같이 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-1$의 그래프를 직선 $y=2$에 대하여 대칭이동한 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ 5)$이다.

또 대칭이동한 그래프는 대칭이동하기 전의 그래프와 폭이 같고, 위로 볼록한 포물선이므로 이차항의 계수는 $-\frac{1}{2}$이다.



따라서 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{2}(x+3)^2+5$

이 그래프를 다시 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{2}(x-4+3)^2+5$

$\therefore y=-\frac{1}{2}(x-1)^2+5$

이 그래프가 점 $(m,\ 1)$을 지나므로

$1=-\frac{1}{2}(m-1)^2+5$, $\frac{1}{2}(m-1)^2=4$

$(m-1)^2=8$ $\therefore m=1\pm 2\sqrt{2}$

따라서 모든 실수 m의 값의 합은

$(1-2\sqrt{2})+(1+2\sqrt{2})=2$

참고 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-3,\ -1)$이다.

이 점을 직선 $y=2$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면

대칭이동하여도 꼭짓점의 x좌표는 변하지 않으므로

$a=-3$

두 점의 y좌표를 이은 선분의 중점이 2이므로

$\frac{-1+b}{2}=2$ $\therefore b=5$

08 이차함수와 그 그래프(2)

STEP 1 핵심 문제

▶ 88~89쪽

01 -30 **02** $\frac{3}{2}$ **03** ⑤ **04** 10 **05** ③ **06** ③

07 $\frac{13}{10}$ **08** $x=-1$, $(-1, 1)$ **09** -2 **10** $\frac{15}{8}$

11 ① **12** $\frac{15}{4}$ **13** ②

01 답 -30

$y=-2x^2-24x-40=-2(x+6)^2+32$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-2(x-m+6)^2+32+n$

이때 $y=-2x^2+4x-7=-2(x-1)^2-5$이므로

$-m+6=-1$, $32+n=-5$

$\therefore m=7$, $n=-37$

$\therefore m+n=7+(-37)=-30$

02 답 $\frac{3}{2}$

$y=-x^2+3x+a=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+a+\frac{9}{4}$이므로 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{3}{2}, a+\frac{9}{4}\right)$이다.

또 $y=2x^2+bx+\frac{9}{4}=2\left(x+\frac{1}{4}b\right)^2-\frac{1}{8}b^2+\frac{9}{4}$이므로 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{4}b, -\frac{1}{8}b^2+\frac{9}{4}\right)$이다.

이때 두 그래프의 꼭짓점이 일치하므로

$\frac{3}{2}=-\frac{1}{4}b$, $a+\frac{9}{4}=-\frac{1}{8}b^2+\frac{9}{4}$

$\therefore a=-\frac{9}{2}$, $b=-6$

$\therefore a-b=-\frac{9}{2}-(-6)=\frac{3}{2}$

03 답 ⑤

$y=\frac{3}{2}x^2-3x-4k+6=\frac{3}{2}(x-1)^2-4k+\frac{9}{2}$이므로 이 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(1, -4k+\frac{9}{2}\right)$이다.

이때 꼭짓점이 제1사분면 위에 있으므로

$-4k+\frac{9}{2}>0$, $-4k>-\frac{9}{2}$

$\therefore k<\frac{9}{8}\left(=1\frac{1}{8}\right)$

따라서 상수 k의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

04 답 10

$y=-x^2+3x+4$에 $y=0$을 대입하면

$-x^2+3x+4=0$, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

따라서 $B(-1, 0)$, $C(4, 0)$이므로

$\overline{BC}=4-(-1)=5$ ····· ❶

$y=-x^2+3x+4$에 $x=0$을 대입하면

$y=4$ $\therefore A(0, 4)$ ····· ❷

$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2}\times 5\times 4=10$ ····· ❸

채점 기준

❶ $\overline{BC}$의 길이 구하기	50 %
❷ 점 A의 좌표 구하기	30 %
❸ △ABC의 넓이 구하기	20 %

05 답 ③

그래프가 아래로 볼록하므로 $a>0$

축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab>0$ $\therefore b>0$

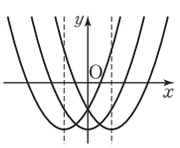
y축과 만나는 점이 x축보다 아래쪽에 있으므로 $c<0$

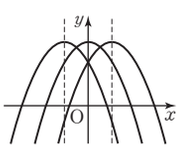
즉, $y=cx^2+bx+a$의 그래프는 $c<0$이므로 위로 볼록한 포물선이고, $cb<0$이므로 축이 y축의 오른쪽에 있고, $a>0$이므로 y축과 만나는 점이 x축보다 위쪽에 있다.

따라서 그래프로 알맞은 것은 ③이다.

06 답 ③

$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 모든 사분면을 지나는 경우는 다음 그림과 같다. 이때 원점 O는 항상 포물선의 안쪽에 있다.

(i) 

(ii) 

(i) $a>0$일 때,

(y축과 만나는 점의 y좌표)$=c<0$

(ii) $a<0$일 때,

(y축과 만나는 점의 y좌표)$=c>0$

(i), (ii)에서 $ac<0$

따라서 항상 옳은 것은 ③이다.

07 답 $\frac{13}{10}$

축의 방정식이 $x=4$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-4)^2+q$로 놓자.

이 그래프가 두 점 $(10, 0)$, $(0, -2)$를 지나므로

$0=36a+q$, $-2=16a+q$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{10}$, $q=-\frac{18}{5}$

$\therefore y=\frac{1}{10}(x-4)^2-\frac{18}{5}=\frac{1}{10}x^2-\frac{4}{5}x-2$

따라서 $a=\frac{1}{10}$, $b=-\frac{4}{5}$, $c=-2$이므로

$a+b-c=\frac{1}{10}+\left(-\frac{4}{5}\right)-(-2)=\frac{13}{10}$

08 답 $x=-1$, $(-1, 1)$

y축과 만나는 점의 좌표가 $(0, 3)$이므로 이차함수의 식을 $y=ax^2+bx+3$으로 놓자.

이 그래프가 두 점 $(-1, 1)$, $(1, 9)$를 지나므로

$1=a-b+3$, $9=a+b+3$

$\therefore a-b=-2$, $a+b=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$

따라서 $y=2x^2+4x+3=2(x+1)^2+1$이므로 이 그래프의 축의 방정식은 $x=-1$이고, 꼭짓점의 좌표는 $(-1, 1)$이다.

09 답 -2

x축과 두 점 $(-2, 0)$, $(4, 0)$에서 만나므로 이차함수의 식을 $y=a(x+2)(x-4)$로 놓자.

이 그래프가 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4=-8a \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$

$\therefore y=-\frac{1}{2}(x+2)(x-4)=-\frac{1}{2}x^2+x+4$

따라서 $b=1$, $c=4$이므로

$abc=-\frac{1}{2}\times1\times4=-2$

10 답 $\frac{15}{8}$

$y=-\frac{1}{2}x^2+2x-1=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1$이므로 $x=2$일 때 최댓값 1을 갖는다.

$\therefore M=1$

$y=2x^2-3x+2=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}$이므로 $x=\frac{3}{4}$일 때 최솟값 $\frac{7}{8}$을 갖는다.

$\therefore m=\frac{7}{8}$

$\therefore M+m=1+\frac{7}{8}=\frac{15}{8}$

11 답 ①

$y=-ax^2+2x+b$가 $x=1$에서 최댓값 3을 가지므로

$y=-a(x-1)^2+3=-ax^2+2ax-a+3$

따라서 $2=2a$, $b=-a+3$이므로

$a=1$, $b=2$

$\therefore a^2+b^2=1^2+2^2=5$

12 답 $\frac{15}{4}$

$y=x^2-3x+4$의 그래프가 점 $P(a, b)$를 지나므로

$b=a^2-3a+4$

$\therefore 2a+b=2a+(a^2-3a+4)=a^2-a+4$

$=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}$

따라서 $2a+b$의 최솟값은 $\frac{15}{4}$이다.

13 답 ②

부채꼴의 넓이를 $y\,\text{cm}^2$라 하면 부채꼴의 호의 길이는 $(36-2x)\,\text{cm}$이므로

$y=\frac{1}{2}x(36-2x)=-x^2+18x$

$=-(x-9)^2+81$

따라서 $x=9$일 때 부채꼴의 넓이는 최대이다.

개념 NOTE

부채꼴의 호의 길이와 넓이 사이의 관계

반지름의 길이가 r, 호의 길이가 l인 부채꼴의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}rl$

STEP 2 고난도 문제

▶ 90~94쪽

01 -6, 36 **02** ④ **03** -6 **04** -12 **05** 8

06 ② **07** 10 **08** 9 **09** $\frac{15}{8}$ **10** -6

11 $A(-1, 0)$, $B(4, 0)$ **12** ㄱ, ㄷ, ㄹ

13 $a<0$, $b>0$, $c>0$ **14** 제3사분면

15 제3, 4사분면 **16** $\frac{1}{30}$ **17** 3 **18** $\frac{5\sqrt{5}}{4}$ **19** -2

20 $y=-(x+6)^2+7$ **21** ⑤ **22** -3 **23** 6

24 7 **25** $(-3, 8)$, $(2, 3)$ **26** $a\geq\frac{3}{4}$ **27** 125 m

28 (1) -16 (2) $x=4$, $y=-4$ **29** $24\,\text{m}^2$

30 $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$ **31** 20, 5

01 답 $(-6, 36)$

$y=-x^2+4kx+k+3$

$=-(x-2k)^2+4k^2+k+3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이 그래프가 $x>-6$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하고, $x<-6$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하므로 축의 방정식은 $x=-6$이다.

㉠에서 이 그래프의 축의 방정식이 $x=2k$이므로

$2k=-6 \quad \therefore k=-3$

따라서 $y=-(x+6)^2+36$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-6, 36)$이다.

02 답 ④

$y=2x^2-3x+4a=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{8}+4a$의 그래프가 아래로 볼록한 포물선이므로 x축과 만나지 않으려면 (꼭짓점의 y좌표)>0이어야 한다.

즉, $-\frac{9}{8}+4a>0$이므로

$4a>\frac{9}{8}$ $\therefore a>\frac{9}{32}$

또 이 그래프가 점 (a, a^2+6)을 지나므로

$a^2+6=2a^2-3a+4a$, $a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0$ $\therefore a=-3$ 또는 $a=2$

이때 $a>\frac{9}{32}$이므로 $a=2$

비법 NOTE

이차함수 $y=ax^2+bx+c$를 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 고치면 꼭짓점의 좌표는 (p, q)이므로 이차함수의 그래프가

(1) x축과 한 점에서 만난다. ➡ $q=0$

(2) x축과 두 점에서 만난다. ➡ $a>0$이면 $q<0$, $a<0$이면 $q>0$

(3) x축과 만나지 않는다. ➡ $a>0$이면 $q>0$, $a<0$이면 $q<0$

03 답 −6

$y=\frac{1}{2}x^2-kx+k+1=\frac{1}{2}(x-k)^2-\frac{1}{2}k^2+k+1$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(k, -\frac{1}{2}k^2+k+1\right)$이다. …… ❶

이 점이 직선 $3x-y=5$ 위에 있으므로

$3k-\left(-\frac{1}{2}k^2+k+1\right)=5$, $\frac{1}{2}k^2+2k-6=0$

$k^2+4k-12=0$, $(k+6)(k-2)=0$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=2$ …… ❷

(i) $k=-6$일 때,

$y=\frac{1}{2}(x+6)^2-23$이므로 이 그래프는 모든 사분면을 지난다.

(ii) $k=2$일 때,

$y=\frac{1}{2}(x-2)^2+1$이므로 이 그래프는 제1사분면과 제2사분면을 지난다.

(i), (ii)에서 $k=-6$ …… ❸

채점 기준

❶ 주어진 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표 구하기	30%
❷ k에 대한 이차방정식 풀기	30%
❸ 그래프가 모든 사분면을 지날 때의 k의 값 구하기	40%

04 답 −12

$y=x^2-6x+5$에 $y=0$을 대입하면

$x^2-6x+5=0$, $(x-1)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=5$

즉, $y=x^2-6x+5$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $(1, 0)$, $(5, 0)$이므로 두 점 사이의 거리는 4이다.

또 $y=x^2-6x+5=(x-3)^2-4$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=(x-3)^2-4+k$

이 그래프의 축의 방정식은 $x=3$이고, 이 그래프가 x축과 만나는 두 점 사이의 거리는 8이므로 두 점의 좌표는

(8 = 2×4)

$(3-4, 0)$, $(3+4, 0)$, 즉 $(-1, 0)$, $(7, 0)$

따라서 $y=(x-3)^2-4+k$에 $x=-1$, $y=0$을 대입하면

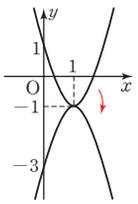
($x=7$, $y=0$을 대입해도 된다.)

$0=(-1-3)^2-4+k$ $\therefore k=-12$

05 답 8

$y=2x^2-4x+1=2(x-1)^2-1$의 그래프를 꼭짓점을 중심으로 180° 회전시킨 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

(직선 $y=-1$에 대하여 대칭인 그래프)



이때 회전시킨 그래프의 식은 $y=-2(x-1)^2-1$이고, 이 그래프를 y축의 방향으로 h만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-2(x-1)^2-1+h$

이 그래프가 점 $(3, 0)$을 지나므로

$0=-2\times(3-1)^2-1+h$, $h-9=0$

$\therefore h=9$

즉, $y=-2(x-1)^2+8$에 $y=0$을 대입하면

$0=-2(x-1)^2+8$, $(x-1)^2=4$

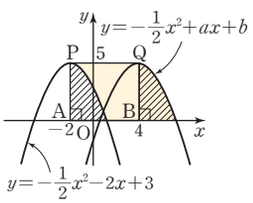
$x-1=\pm2$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

따라서 $k=-1$이므로

$h+k=9+(-1)=8$

06 답 ②

$y=-\frac{1}{2}x^2-2x+3=-\frac{1}{2}(x+2)^2+5$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-2, 5)$이고, 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라 하면 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 서로 같으므로



(색칠한 부분의 넓이)$=\square PABQ=5\overline{AB}$

즉, $5\overline{AB}=30$이므로 $\overline{AB}=6$ $\therefore \overline{PQ}=\overline{AB}=6$

따라서 $y=-\frac{1}{2}x^2+ax+b$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(4, 5)$이므로

($-2+6=4$)

$y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+5=-\frac{1}{2}x^2+4x-3$

따라서 $a=4$, $b=-3$이므로

$ab=4\times(-3)=-12$

07 답 10

$y=\frac{1}{2}x^2+2x+2=\frac{1}{2}(x+2)^2$의 그래프를 y축의 방향으로 $-q$만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-q$이므로 이 그래프는 직선 $x=-2$에 대하여 대칭이다.

이때 직선 $x=-2$를 축으로 하고, x축과 만나는 두 점의 x좌표가 모두 정수인 이차함수를 구하면 다음과 같다.

(i) 두 점의 x좌표가 -3, -1일 때,

$y=\frac{1}{2}(x+3)(x+1)=\frac{1}{2}(x^2+4x+3)=\frac{1}{2}(x+2)^2-\frac{1}{2}$

(ii) 두 점의 x좌표가 -4, 0일 때,

$y=\frac{1}{2}x(x+4)=\frac{1}{2}(x^2+4x)=\frac{1}{2}(x+2)^2-2$

(iii) 두 점의 x좌표가 -5, 1일 때,

$y=\frac{1}{2}(x+5)(x-1)=\frac{1}{2}(x^2+4x-5)=\frac{1}{2}(x+2)^2-\frac{9}{2}$

(iv) 두 점의 x좌표가 -6, 2일 때,

$y=\frac{1}{2}(x+6)(x-2)=\frac{1}{2}(x^2+4x-12)=\frac{1}{2}(x+2)^2-8$

(i)~(iv)에서 q의 값이 될 수 있는 한 자리의 자연수는 2, 8이므로 구하는 합은

$2+8=10$

08 답 9

$y=-x^2-2x+3=-(x+1)^2+4$이므로

$A(-1, 4)$, $D(0, 3)$

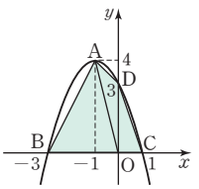
$y=-x^2-2x+3$에 $y=0$을 대입하면

$-x^2-2x+3=0$, $x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

$\therefore B(-3, 0)$, $C(1, 0)$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OA}$를 그으면



$\square ABCD=\triangle ABO+\triangle AOD+\triangle DOC$

$=\frac{1}{2}\times3\times4+\frac{1}{2}\times3\times1+\frac{1}{2}\times1\times3$

$=9$

09 답 $\frac{15}{8}$

$y=x^2+ax-6$의 그래프가 점 $(3, 0)$을 지나므로

$0=9+3a-6$, $3a=-3$ $\therefore a=-1$

$y=x^2-x-6=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$이므로

$B\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$

$y=x^2-x-6$에 $x=0$을 대입하면

$y=-6$ $\therefore C(0, -6)$

$\therefore \triangle ACB=\square OCBA-\triangle OCA$

$=\triangle OCB+\triangle OBA-\triangle OCA$

$=\frac{1}{2}\times6\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times3\times\frac{25}{4}-\frac{1}{2}\times3\times6$

$=\frac{15}{8}$

10 답 −6

$y=x^2-4x-12$에 $y=0$을 대입하면

$x^2-4x-12=0$, $(x+2)(x-6)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=6$

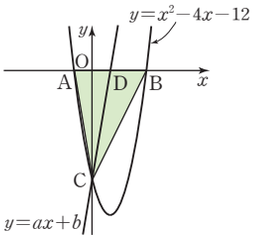
$\therefore A(-2, 0)$, $B(6, 0)$

$y=x^2-4x-12$에 $x=0$을 대입하면

$y=-12$ $\therefore C(0, -12)$

이때 점 C를 지나고 $\triangle ACB$의 넓이를 이등분하는 직선 $y=ax+b$가 x축과 만나는 점을 D라 하면 점 D는 $\overline{AB}$의 중점이므로

$D(2, 0) \rightarrow D\left(\frac{-2+6}{2}, 0\right)$



따라서 직선 $y=ax+b$는 두 점 $C(0, -12)$, $D(2, 0)$을 지나므로

$a=(\text{기울기})=\frac{0-(-12)}{2-0}=6$,

$b=(y\text{절편})=-12$

$\therefore a+b=6+(-12)=-6$

11 idea 답 A(−1, 0), B(4, 0)

$y=2x^2-6x+k$에 $x=0$을 대입하면

$y=k$ $\therefore C(0, k)\ (k<0)$

$y=2x^2-6x+k=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+k-\frac{9}{2}$이므로

$D\left(\frac{3}{2}, k-\frac{9}{2}\right)$

이때 $\triangle ACB$와 $\triangle ADB$는 밑변의 길이가 $\overline{AB}$로 같으므로 두 삼각형의 높이의 비는 넓이의 비와 같다.

즉, $|k| : \left|k-\frac{9}{2}\right|=16:25$이므로

$-k:\left(-k+\frac{9}{2}\right)=16:25$

$-25k=-16k+72$, $-9k=72$

$\therefore k=-8$

따라서 $y=2x^2-6x-8$에 $y=0$을 대입하면

$2x^2-6x-8=0$, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

$\therefore A(-1, 0)$, $B(4, 0)$

12 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0$ $\therefore b>0$

y축과 만나는 점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$

ㄱ. $abc<0$

ㄴ. $\frac{b}{2a}<0$

ㄷ. $-b<0$, $-c<0$이므로 $a-b-c<0$

ㄹ. $x=1$일 때, $y>0$이므로 $a+b+c>0$

ㅁ. $x=\frac{1}{2}$일 때, $y>0$이므로

$\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c=\frac{1}{4}(a+2b+4c)>0$

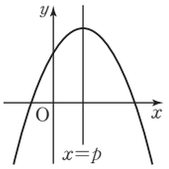
$\therefore a+2b+4c>0$

ㅂ. $b^2>0$, $ac<0$이므로 $b^2-4ac>0$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

13 답 $a<0$, $b>0$, $c>0$

㈎, ㈏를 모두 만족시키는 $y=ax^2+bx+c$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$

축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $ab<0$

$\therefore b>0$

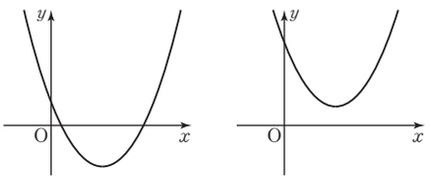
y축과 만나는 점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $c>0$

14 답 제3사분면

$a\neq0$, $b\neq0$, $c\neq0$이고, $\sqrt{a^2}=a$, $\sqrt{b^2}=-b$, $\sqrt{c^2}=c$이므로

$a>0$, $b<0$, $c>0$

따라서 $y=cx^2+bx+a$의 그래프는 아래로 볼록한 포물선이고, 그래프의 축은 y축의 오른쪽에 있으면서 y축과 만나는 점은 x축보다 위쪽에 있으므로 다음 그림과 같다.



즉, 그래프가 항상 지나지 않는 사분면은 제3사분면이다.

개념 NOTE

$\sqrt{a^2}$의 성질

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geq0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

15 답 제3, 4사분면

그래프가 위로 볼록하므로 $ab<0$ …… ㉠

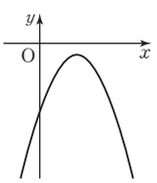
축이 y축의 왼쪽에 있으므로 $ab\times bc>0$

$\therefore bc<0$ …… ㉡

y축과 만나는 점이 x축보다 위쪽에 있으므로 $abc>0$ …… ㉢

㉠, ㉢에서 $c<0$, ㉡에서 $b>0$, ㉠에서 $a<0$ …… ❶

따라서 $y=a(x+c)^2-b$의 그래프는 위로 볼록한 포물선이고, 꼭짓점 $(-c, -b)$는 제4사분면 위에 있으므로 오른쪽 그림과 같다. …… ❷



즉, 그래프가 지나는 사분면은 제3, 4사분면이다. …… ❸

채점 기준

❶ a, b, c의 부호 구하기	40 %
❷ $y=a(x+c)^2-b$의 그래프의 개형 그리기	40 %
❸ $y=a(x+c)^2-b$의 그래프가 지나는 사분면 구하기	20 %

16 답 $\frac{1}{30}$

x축과 두 점 $(-5, 0)$, $(3, 0)$에서 만나므로 이차함수의 식은

$y=a(x+5)(x-3)=a(x^2+2x-15)$

$=a(x+1)^2-16a$

이 그래프의 꼭짓점 $(-1, -16a)$가 직선 $y=-3x+1$ 위에 있으므로

$-16a=4$ $\therefore a=-\frac{1}{4}$

따라서 $y=-\frac{1}{4}(x^2+2x-15)=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{15}{4}$이므로

$b=-\frac{1}{2}$, $c=\frac{15}{4}$

$\therefore \frac{ab}{c}=\left\{\left(-\frac{1}{4}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\div\frac{15}{4}=\frac{1}{8}\times\frac{4}{15}=\frac{1}{30}$

17 답 3

주어진 그래프의 꼭짓점의 x좌표가 -2이므로 축의 방정식은

$x=-2$

이때 두 점 A, B는 직선 $x=-2$에 대하여 대칭이고,

$\overline{AB}=6$이므로

A$(-5, 0)$, B$(1, 0)$ → A$(-2-3, 0)$, B$(-2+3, 0)$

$\therefore y=\frac{1}{3}(x+5)(x-1)=\frac{1}{3}(x^2+4x-5)$

$=\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$

따라서 $a=\frac{4}{3}$, $b=-\frac{5}{3}$이므로

$a-b=\frac{4}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)=3$

18 답 $\frac{5\sqrt{5}}{4}$

축의 방정식이 $x=-1$이므로 이차함수의 식을 $y=a(x+1)^2+q$로 놓자.

이 그래프가 두 점 $(0, 1)$, $(2, -1)$을 지나므로

$1=a+q$, $-1=9a+q$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{4}$, $q=\frac{5}{4}$

즉, $y=-\frac{1}{4}(x+1)^2+\frac{5}{4}$이므로 …… ❶

A$\left(-1, \frac{5}{4}\right)$ …… ❷

또 $y=-\frac{1}{4}(x+1)^2+\frac{5}{4}$에 $y=0$을 대입하면

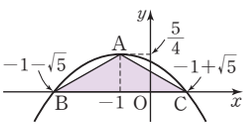
$0=-\frac{1}{4}(x+1)^2+\frac{5}{4}$, $(x+1)^2=5$

$x+1=\pm\sqrt{5}$ $\therefore x=-1\pm\sqrt{5}$

$\therefore$ B$(-1-\sqrt{5}, 0)$, C$(-1+\sqrt{5}, 0)$

또는

B$(-1+\sqrt{5}, 0)$, C$(-1-\sqrt{5}, 0)$



…… ❸

$\therefore$ △ABC

$=\frac{1}{2}\times\{(-1+\sqrt{5})-(-1-\sqrt{5})\}\times\frac{5}{4}$

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\frac{5}{4}=\frac{5\sqrt{5}}{4}$ …… ❹

채점 기준

❶ 이차함수의 식 구하기	30 %
❷ 점 A의 좌표 구하기	10 %
❸ 두 점 B, C의 좌표 구하기	30 %
❹ △ABC의 넓이 구하기	30 %

19 답 -2

$f(0)=2$이므로 $c=2$

$\therefore f(x)=ax^2+bx+2$

이때 $f(-1)=5$, $f(2)=-10$이므로

$a-b+2=5$, $4a+2b+2=-10$

$\therefore a-b=3$, $2a+b=-6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-4$

$\therefore f(x)=-x^2-4x+2=-(x+2)^2+6$

$y=-(x+2)^2+6$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-(x-p+2)^2+6+q$

이 그래프가 $y=-x^2-12x-28=-(x+6)^2+8$의 그래프와 일치하므로

$-p+2=6$, $6+q=8$ $\therefore p=-4$, $q=2$

$\therefore p+q=-4+2=-2$

20 답 $y=-(x+6)^2+7$

꼭짓점의 좌표가 $(2, 7)$이므로 이차함수의 식을 $y=k(x-2)^2+7$로 놓자.

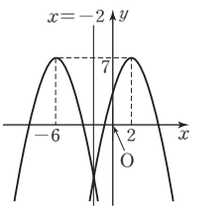
이 그래프가 점 $(0, 3)$을 지나므로

↳ y축과 만나는 점

$3=k\times(0-2)^2+7$, $4k=-4$ $\therefore k=-1$

따라서 $y=-(x-2)^2+7$의 그래프와 직선 $x=-2$에 대하여 대칭인 포물선은 오른쪽 그림과 같이 꼭짓점의 좌표가 $(-6, 7)$이고, 그래프의 모양과 폭이 같은 포물선이므로 구하는 이차함수의 식은

$y=-(x+6)^2+7$



21 답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\triangle OCA=\frac{1}{2}\times6\times\overline{AH}=3\overline{AH}$

즉, $3\overline{AH}=6$이므로 $\overline{AH}=2$ …… ㉠

$\triangle OBD=\triangle DCA$에서

$\triangle OBD+\triangle ODA=\triangle DCA+\triangle ODA$

즉, $\triangle OBA=\triangle OCA$이므로

$\frac{1}{2}\times5\times\overline{OH}=\frac{1}{2}\times6\times2$

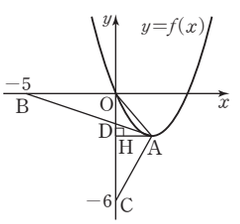
$\therefore \overline{OH}=\frac{12}{5}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 점 A는 제4사분면 위의 점이므로

$A\left(2, -\frac{12}{5}\right)$ → 점 A는 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이다.

이차함수의 식을 $f(x)=p(x-2)^2-\frac{12}{5}$로 놓으면 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로

$f(0)=p\times(0-2)^2-\frac{12}{5}=0$



$4p-\frac{12}{5}=0$ $\therefore p=\frac{3}{5}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{5}(x-2)^2-\frac{12}{5}$이므로

$f(10)=\frac{3}{5}\times(10-2)^2-\frac{12}{5}=36$

참고 $\overline{OD}=a(0<a<6)$라 하면

$\overline{DC}=\overline{OC}-\overline{OD}=6-a$이므로

$\triangle OBD=\frac{1}{2}\times5\times a=\frac{5}{2}a$, $\triangle DCA=\frac{1}{2}\times(6-a)\times2=6-a$

이때 $\triangle OBD=\triangle DCA$이므로

$\frac{5}{2}a=6-a$, $\frac{7}{2}a=6$ $\therefore a=\frac{12}{7}$

$\therefore \overline{OD}=\frac{12}{7}$

한편 $\triangle OBD\backsim\triangle HAD$(AA 닮음)이므로

↳ $\angle ODB=\angle HDA$(맞꼭지각), $\angle BOD=\angle AHD=90^\circ$

$\overline{BO}:\overline{AH}=\overline{OD}:\overline{HD}$에서 $5:2=\frac{12}{7}:\overline{HD}$

$5\overline{HD}=\frac{24}{7}$ $\therefore \overline{HD}=\frac{24}{35}$

$\therefore \overline{OH}=\overline{OD}+\overline{HD}=\frac{12}{7}+\frac{24}{35}=\frac{12}{5}$

22 답 -3

$y=-2x^2-4kx+1=-2(x+k)^2+2k^2+1$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-2(x+1+k)^2+2k^2+3$

이 이차함수의 최댓값이 9이므로

$2k^2+3=9$, $2k^2=6$

$k^2=3$ $\therefore k=\pm\sqrt{3}$

따라서 모든 상수 k의 값의 곱은

$\sqrt{3}\times(-\sqrt{3})=-3$

23 답 6

$y=-x^2+2px-q+3=-(x-p)^2+p^2-q+3$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

(p, p^2-q+3)

이 점이 직선 $y=2x-4$ 위에 있으므로

$p^2-q+3=2p-4$

$\therefore q=p^2-2p+7=(p-1)^2+6$

따라서 q는 $p=1$일 때 최솟값 6을 갖는다.

24 답 7

$y=2x^2+4kx+k^2-6k+1=2(x+k)^2-k^2-6k+1$이므로

$x=-k$일 때 최솟값 $-k^2-6k+1$을 갖는다.

$\therefore m=-k^2-6k+1=-(k+3)^2+10$

따라서 m은 $k=-3$일 때 최댓값 10을 가지므로 구하는 합은

$10+(-3)=7$

25 답 $(-3, 8)$, $(2, 3)$

$f(x)=x^2-2ax+b=(x-a)^2-a^2+b$이므로 $x=a$일 때 최솟값 $-a^2+b$를 갖는다.

즉, $-a^2+b=-1$ …… ㉠

$g(x)=-x^2+4x+a+b=-(x-2)^2+a+b+4$이므로 $x=2$일 때 최댓값 $a+b+4$를 갖는다.

즉, $a+b+4=9$이므로 $b=5-a$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$-a^2+(5-a)=-1$, $a^2+a-6=0$

$(a+3)(a-2)=0$ $\therefore a=-3$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b)는 $(-3, 8)$, $(2, 3)$이다.

$5-(-3)=8$, $5-2=3$

26 답 $a\geq\frac{3}{4}$

축의 방정식이 $x=2$이고, 최솟값이 -3이므로

꼭짓점의 좌표는 $(2, -3)$

$a>0$ …… ㉠

따라서 주어진 이차함수의 식은

$y=a(x-2)^2-3=ax^2-4ax+4a-3$

이 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 y축과 만나는 점이 원점과 일치하거나 x축보다 위쪽에 있어야 하므로

$4a-3\geq0$, $4a\geq3$ $\therefore a\geq\frac{3}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a\geq\frac{3}{4}$

27 답 125 m

$h=-5t^2+vt+80=-5\left(t-\frac{v}{10}\right)^2+\frac{v^2}{20}+80$

즉, $t=\frac{v}{10}$일 때 최댓값 $\frac{v^2}{20}+80$을 가지므로

최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간

$\frac{v}{10}=3$ $\therefore v=30$

따라서 도달한 최고 높이는

$\frac{v^2}{20}+80=\frac{30^2}{20}+80=125(\text{m})$

28 답 (1) -16 (2) $x=4$, $y=-4$

(1) 두 수의 차의 제곱이 64이므로

$(x-y)^2=64$ $\therefore x-y=\pm8$

이때 $x>y$이므로 $x-y=8$

즉, $y=x-8$이므로

$xy=x(x-8)=x^2-8x=(x-4)^2-16$

따라서 xy는 $x=4$일 때 최솟값 -16을 갖는다.

(2) $y=x-8$에 $x=4$를 대입하면

$y=4-8=-4$

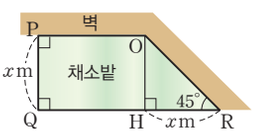
따라서 xy가 최소일 때의 x, y의 값은

$x=4$, $y=-4$

29 답 24 m²

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 $\overline{QR}$에 내린 수선의 발을 H라 하고,

$\overline{PQ}=x$ m라 하면



△OHR가 직각이등변삼각형이므로

$\overline{HR}=\overline{OH}=\overline{PQ}=x$ m,

$\overline{PO}=\overline{QH}=(12-2x)$ m

이때 채소밭의 넓이를 y m²라 하면

$y=\frac{1}{2}\times\{(12-2x)+(12-x)\}\times x$

$=-\frac{3}{2}x^2+12x=-\frac{3}{2}(x-4)^2+24$

따라서 $x=4$일 때 최댓값 24를 가지므로 채소밭의 넓이의 최댓값은 24 m²이다.

30 답 $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$

직선 l은 두 점 $(0, 4)$, $(5, 0)$을 지나므로 직선 l의 방정식은

$y=\frac{0-4}{5-0}x+4$ $\therefore y=-\frac{4}{5}x+4$ …… ❶

점 P의 좌표를 $\left(a, -\frac{4}{5}a+4\right)$라 하면

$\overline{OQ}=a$, $\overline{PQ}=-\frac{4}{5}a+4$

□OQPR의 넓이를 y라 하면

$y=a\left(-\frac{4}{5}a+4\right)=-\frac{4}{5}a^2+4a=-\frac{4}{5}\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+5$ …… ❷

따라서 $a=\frac{5}{2}$일 때 □OQPR의 넓이가 최대가 되므로 그때의 점 P의 좌표는 $\left(\frac{5}{2}, 2\right)$이다. …… ❸

$-\frac{4}{5}\times\frac{5}{2}+4=2$

채점 기준

❶ 직선 l의 방정식 구하기	30 %
❷ □OQPR의 넓이를 이차함수로 나타내기	40 %
❸ □OQPR의 넓이가 최대일 때의 점 P의 좌표 구하기	30 %

31 답 20, 5

$\overline{FC}=(10-x)$ cm이고, △ABC∽△DFC (AA 닮음)이므로

∠C는 공통, ∠ABC=∠DFC=90°

$\overline{AB}:\overline{DF}=\overline{BC}:\overline{FC}$에서 $8:\overline{DF}=10:(10-x)$

$8(10-x)=10\overline{DF}$ $\therefore \overline{DF}=8-\frac{4}{5}x(\text{cm})$

$\therefore y=x\left(8-\frac{4}{5}x\right)=-\frac{4}{5}x^2+8x=-\frac{4}{5}(x-5)^2+20$

따라서 y는 $x=5$일 때 최댓값 20을 갖는다.

STEP 3 최고난도 문제 ▶95쪽

01 121 **02** $x=b$ 또는 $x=\frac{a+c}{2}$ **03** $-\frac{1}{4m}$

04 2 **05** 2750원

01 Idea 답 121

$\triangle ABD : \triangle BCD = \frac{3}{2} : \frac{9}{2} = 1 : 3$이므로

$\triangle ABD$와 $\triangle BCD$의 밑변을 $\overline{BD}$라 하면 두 삼각형의 높이의 비는 $1 : 3$이고, 두 삼각형의 높이의 합은 점 A의 y좌표인 6이다.

점 B의 y좌표를 q라 하면

$q = 6 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{2}$이고, $\triangle BCD = \frac{9}{2}$이므로

$\frac{1}{2} \times \overline{BD} \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$ $\therefore \overline{BD} = 2$

$\therefore D\left(2, \frac{9}{2}\right)$

두 점 $A(3, 6)$, $D\left(2, \frac{9}{2}\right)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{\frac{9}{2} - 6}{2 - 3} = \frac{3}{2}$

따라서 직선의 방정식을 $y = \frac{3}{2}x + p$ (p는 상수)라 하면 이 직선은 점 $A(3, 6)$을 지나므로

$6 = \frac{3}{2} \times 3 + p$ $\therefore p = \frac{3}{2}$

$\therefore y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$

이 식에 $y = 0$을 대입하면

$0 = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ $\therefore x = -1$ $\therefore C(-1, 0)$

$f(x) = ax^2 + bx + \frac{9}{2}$ (a, b는 상수, $a < 0$)라 하면 $y = f(x)$의 그래프가 두 점 $A(3, 6)$, $C(-1, 0)$을 지나므로

$6 = 9a + 3b + \frac{9}{2}$, $0 = a - b + \frac{9}{2}$

$\therefore 3a + b = \frac{1}{2}$, $a - b = -\frac{9}{2}$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -1$, $b = \frac{7}{2}$

$\therefore f(x) = -x^2 + \frac{7}{2}x + \frac{9}{2} = -\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + \frac{121}{16}$

따라서 $y = f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{7}{4}, \frac{121}{16}\right)$이므로

$k = \frac{121}{16}$ $\therefore 16k = 121$

02 답 $x = b$ 또는 $x = \frac{a+c}{2}$

이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 각각 a, b이고, 이차항의 계수는 1이므로

$f(x) = (x-a)(x-b)$

이차함수 $y = g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 각각 b, c이고, 이차항의 계수는 1이므로

$g(x) = (x-b)(x-c)$

따라서 $f(x) + g(x) = 0$에서

$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) = 0$

$(x-b)(2x-a-c) = 0$

$\therefore x = b$ 또는 $x = \frac{a+c}{2}$

03 답 $-\frac{1}{4m}$

$\overline{OA} = \overline{OB}$이고, $B(0, m)$이므로 $A(-m, 0)$

두 점 $A(-m, 0)$, $B(0, m)$은 $y = ax^2 + bx + c$의 그래프 위의 점이므로

$0 = a(-m)^2 + b(-m) + c$, $m = c$

$\therefore am^2 - bm + c = 0$, $c = m$

따라서 $am^2 - bm + m = 0$이므로 $b = am + 1$ ($\because m \neq 0$)

$\therefore ab = a(am+1) = ma^2 + a$

$= m\left(a + \frac{1}{2m}\right)^2 - \frac{1}{4m}$

이때 $m < 0$이므로 ab는 $a = -\frac{1}{2m}$일 때 최댓값 $-\frac{1}{4m}$을 갖는다.

04 답 2

$y = x^2 - 4x - a = (x-2)^2 - a - 4$

$y = -x^2 + 4x + a = -(x-2)^2 + a + 4$

두 그래프의 축의 방정식이 $x = 2$이므로 직사각형은 직선 $x = 2$에 대하여 대칭이다. …… ❶

직사각형이 x축과 만나는 점의 x좌표를 각각 $2-t$, $2+t$ ($t > 0$)라 하면 직사각형의 가로의 길이는 $(2+t) - (2-t) = 2t$,

세로의 길이는

$\{-(2+t)^2 + 4(2+t) + a\} - \{(2+t)^2 - 4(2+t) - a\}$

$= -2t^2 + 8 + 2a$

이므로 직사각형의 둘레의 길이는

$2\{2t + (-2t^2 + 8 + 2a)\} = -4t^2 + 4t + 4a + 16$

$= -4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 4a + 17$ …… ❷

따라서 $t = \frac{1}{2}$일 때 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은 $4a + 17$이므로

$4a + 17 = 25$, $4a = 8$ $\therefore a = 2$ …… ❸

채점 기준

❶ 직사각형이 직선 $x = 2$에 대하여 대칭임을 알기	30 %
❷ 직사각형의 둘레의 길이를 이차함수로 나타내기	40 %
❸ a의 값 구하기	30 %

05 답 2750원

구매 신청자를 x명이라 하면

(i) $x \leq 100$일 때,

(총판매 금액) $= 4500 \times x = 4500x$(원)

따라서 구매 신청자가 100명일 때 총판매 금액의 최댓값은 450000원이다.

(ii) $x > 100$일 때,

(판매 가격) $= 4500 - 10(x - 100) = 5500 - 10x$(원)이므로

(총판매 금액) $= (5500 - 10x)x = -10x^2 + 5500x$

$= -10(x - 275)^2 + 756250$(원)

따라서 구매 신청자가 275명일 때 총판매 금액의 최댓값은 756250원이다.

(i), (ii)에서 구매 신청자가 275명일 때 총판매 금액이 756250원으로 최대가 되고, 이때의 판매 가격은 한 세트당
5500−2750=2750(원)이다.

단원 마스터

▶ 96~99쪽

01 ④ **02** ②, ⑤ **03** ④ **04** (2, 1)
05 $\left(-\frac{4}{9}, \frac{16}{81}\right)$ **06** $\frac{14}{9}$ **07** 4 **08** ① **09** ①
10 6 **11** ③ **12** 2 **13** 0 **14** $a=1$, $b=8$
15 ② **16** 12 m **17** 6 **18** 2
19 $y=-\frac{1}{3}x^2+x+6$ **20** ④ **21** 5 **22** 900원
23 2초 후 **24** ④

01 답 ④

① $y=\frac{x(x-3)}{2}=\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$ ➡ 이차함수

② 둘레의 길이가 $4\pi x$ cm인 원의 반지름의 길이는 $2x$ cm이므로
$y=\pi\times(2x)^2=4\pi x^2$ ➡ 이차함수

③ $y=\frac{1}{2}\times(x+x+2)\times 2x=2x^2+2x$ ➡ 이차함수

④ 주어진 원뿔의 옆넓이는 반지름의 길이가 10 cm, 호의 길이가 $2\pi x$ cm인 부채꼴의 넓이와 같으므로
$y=\frac{1}{2}\times 10\times 2\pi x=10\pi x$ ➡ 일차함수

⑤ $y=\frac{1}{3}\times x^2\times 12=4x^2$ ➡ 이차함수

따라서 이차함수가 아닌 것은 ④이다.

02 답 ②, ⑤

$y=k(k-1)x^2-12x^2-5x=(k^2-k-12)x^2-5x$
$=(k+3)(k-4)x^2-5x$
이 식이 x에 대한 이차함수가 되려면
$(k+3)(k-4)\neq 0$ $\therefore k\neq -3$이고 $k\neq 4$
따라서 상수 k의 값이 될 수 없는 것은 ②, ⑤이다.

03 답 ④

$f(x)=ax^2-\sqrt{3}$에서
$f(\sqrt{3})=a(\sqrt{3})^2-\sqrt{3}=3a-\sqrt{3}$
$f(f(\sqrt{3}))=f(3a-\sqrt{3})=a(3a-\sqrt{3})^2-\sqrt{3}$
즉, $a(3a-\sqrt{3})^2-\sqrt{3}=-\sqrt{3}$이므로
$a(3a-\sqrt{3})^2=0$
이때 $a\neq 0$이므로 $(3a-\sqrt{3})^2=0$
$3a-\sqrt{3}=0$, $3a=\sqrt{3}$ $\therefore a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

04 답 (2, 1)

$y=ax^2$의 그래프가 점 A(−4, 4)를 지나므로
$4=16a$ $\therefore a=\frac{1}{4}$
점 P의 x좌표를 k $(k>0)$라 하면 $\mathrm{P}\left(k, \frac{1}{4}k^2\right)$이고, 직선 AP의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로
$\frac{\frac{1}{4}k^2-4}{k-(-4)}=-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}k^2-8=-k-4$
$\frac{1}{2}k^2+k-4=0$, $k^2+2k-8=0$
$(k+4)(k-2)=0$ $\therefore k=-4$ 또는 $k=2$
이때 $k>0$이므로 $k=2$
따라서 점 P의 좌표는 (2, 1)이다.
↳ $\frac{1}{4}\times 2^2=1$

05 답 $\left(-\frac{4}{9}, \frac{16}{81}\right)$

점 B의 x좌표를 a $(a>0)$라 하면 $\mathrm{B}(a, a^2)$이고,
$y=x^2$의 그래프는 y축에 대칭이므로 $\mathrm{A}(-a, a^2)$
이때 점 C의 x좌표는 a이고, 점 C는 $y=-\frac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 점이므로
↳ 점 B의 x좌표와 같다.
$\mathrm{C}\left(a, -\frac{1}{2}a^2\right)$ …… ❶
$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=a-(-a)=2a$, $\overline{\mathrm{BC}}=a^2-\left(-\frac{1}{2}a^2\right)=\frac{3}{2}a^2$ …… ❷
즉, $2a:\frac{3}{2}a^2=3:1$이므로
$\frac{9}{2}a^2=2a$, $9a^2-4a=0$
$a(9a-4)=0$ $\therefore a=0$ 또는 $a=\frac{4}{9}$
이때 $a>0$이므로 $a=\frac{4}{9}$
따라서 점 A의 좌표는 $\left(-\frac{4}{9}, \frac{16}{81}\right)$이다. …… ❸

채점 기준

❶ 세 점 A, B, C의 좌표를 문자를 사용하여 나타내기	30 %
❷ $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이를 문자를 사용하여 나타내기	30 %
❸ 점 A의 좌표 구하기	40 %

06 답 $\frac{14}{9}$

점 A의 x좌표를 k $(k>0)$라 하면
$\mathrm{A}\left(k, \frac{1}{2}k^2\right)$, $\mathrm{D}(k, 2k^2)$
또 점 C의 y좌표는 $2k^2$이고, 점 C는 $y=\frac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 점이므로
↳ 점 D의 y좌표와 같다.
$2k^2=\frac{1}{2}x^2$, $x^2=4k^2$ $\therefore x=\pm 2k$
이때 $x>0$이므로 $x=2k$
↳ 점 C는 제1사분면 위의 점
$\therefore \mathrm{C}(2k, 2k^2)$, $\mathrm{B}\left(2k, \frac{1}{2}k^2\right)$

$\overline{AD}=2k^2-\frac{1}{2}k^2=\frac{3}{2}k^2$, $\overline{DC}=2k-k=k$이고,

이때 □ABCD가 정사각형이므로 $\overline{AD}=\overline{DC}$에서 $\frac{3}{2}k^2=k$

$\frac{3}{2}k^2-k=0$, $k\left(\frac{3}{2}k-1\right)=0$ $\therefore k=0$ 또는 $k=\frac{2}{3}$

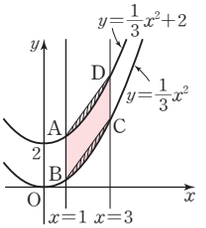
이때 $k>0$이므로 $k=\frac{2}{3}$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{9}\right)$이므로 구하는 합은

$\frac{4}{3}+\frac{2}{9}=\frac{14}{9}$

07 답 4

$y=\frac{1}{3}x^2+2$의 그래프는 $y=\frac{1}{3}x^2$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 서로 같고, □ABCD는 평행사변형이다.



이때 $\overline{AB}=2$이고, 두 직선 $x=1$, $x=3$ 사이의 거리는 2이므로

(구하는 넓이)=□ABCD=$2\times2=4$

08 답 ①

$y=(x-p)^2+q$의 그래프의 꼭짓점 (p, q)가 직선 $y=-2x$ 위에 있으므로 $q=-2p$

즉, $y=(x-p)^2-2p$의 그래프가 점 $(1, 2)$를 지나므로

$2=(1-p)^2-2p$, $p^2-4p-1=0$

$\therefore p=2\pm\sqrt{5}$

이때 $p>0$이므로 $p=2+\sqrt{5}$

$\therefore p+q=p+(-2p)=-p=-2-\sqrt{5}$

09 답 ①

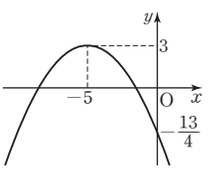
$y=-\frac{1}{4}(x-2)^2+3$의 그래프를 y축에 대칭이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{4}(-x-2)^2+3=-\frac{1}{4}(x+2)^2+3$

이 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{4}(x+3+2)^2+3=-\frac{1}{4}(x+5)^2+3$

따라서 $y=-\frac{1}{4}(x+5)^2+3$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면을 지나지 않는다.



10 답 6

$y=a(x-p)^2+q$의 그래프를 x축에 대칭이동한 그래프의 식은

$-y=a(x-p)^2+q$ $\therefore y=-a(x-p)^2-q$

이 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(-3, -1)$이므로

$p=-3$, $-q=-1$에서 $q=1$

따라서 $y=a(x+3)^2+1$의 그래프가 점 $(-1, -7)$을 지나므로

$-7=a\times(-1+3)^2+1$, $4a=-8$ $\therefore a=-2$

$\therefore apq=-2\times(-3)\times1=6$

11 답 ③

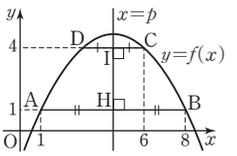
$y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 A, B의 y좌표가 서로 같으므로 직선 AB는 x축에 평행하고, $\overline{AB}$의 수직이등분선은 $y=f(x)$의 그래프의 축이다.

축의 방정식을 $x=p$라 하고, $\overline{AB}$와 직선 $x=p$가 만나는 점을 H라 하면

$\overline{AH}=\overline{BH}$이므로

$p-1=8-p$, $2p=9$

$\therefore p=\frac{9}{2}$



한편 $\overline{AB}/\!/\overline{CD}$이므로 직선 CD도 x축에 평행한 직선이다.

이때 점 C의 y좌표가 4이므로 직선 CD의 방정식은 $y=4$이고, 점 $D(a, b)$는 직선 $y=4$ 위에 있으므로

$b=4$

$\overline{CD}$와 직선 $x=\frac{9}{2}$가 만나는 점을 I라 하면 $\overline{CI}=\overline{DI}$이므로

$6-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}-a$ $\therefore a=3$

$\therefore a+b=3+4=7$

12 답 2

$y=-x^2-x+a=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{1}{4}$의 그래프의 축의 방정식은

$x=-\frac{1}{2}$

이때 $\overline{AB}=3$이므로 이 그래프의 축에서 두 점 A, B까지의 거리는 $\frac{3}{2}$으로 같다.

$\therefore$ A$(-2, 0)$, B$(1, 0)$ →A$\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}, 0\right)$, B$\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}, 0\right)$

따라서 $y=-x^2-x+a$에 $x=1$, $y=0$을 대입하면

$0=-1-1+a$ $\therefore a=2$

13 답 0

$y=-\frac{1}{2}x^2+2x+1=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3$이므로

A$(2, 3)$ …… ❶

이 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 그래프의 식은

$y=-\frac{1}{2}(x-p-2)^2+3+q$

$\therefore$ B$(p+2, 3+q)$ …… ❷

이때 두 점 A$(2, 3)$, B$(p+2, 3+q)$를 지나는 직선의 기울기가 -3이므로

$\frac{3+q-3}{p+2-2}=-3$에서 $\frac{q}{p}=-3$ $\therefore q=-3p$

$\therefore 3p+q=3p+(-3p)=0$ …… ❸

채점 기준

❶ 점 A의 좌표 구하기	30 %
❷ 점 B의 좌표 구하기	40 %
❸ $3p+q$의 값 구하기	30 %

14 답 $a=1$, $b=8$

$\triangle CAO$와 $\triangle COB$는 높이가 $\overline{CO}$로 같고,

$\triangle CAO : \triangle COB = 1 : 2$이므로

$\overline{AO} : \overline{BO} = 1 : 2$

$A(-k, 0)$, $B(2k, 0)$ $(k>0)$이라 하면

$y=-\frac{1}{4}x^2+ax+b$

$=-\frac{1}{4}(x+k)(x-2k)$

$=-\frac{1}{4}(x^2-kx-2k^2)$

$=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{9}{16}k^2$

이 그래프의 꼭짓점의 y좌표가 9이므로

$\frac{9}{16}k^2=9$, $k^2=16$ $\therefore k=\pm 4$

이때 $k>0$이므로 $k=4$

따라서 $y=-\frac{1}{4}(x^2-4x-32)=-\frac{1}{4}x^2+x+8$이므로

$a=1$, $b=8$

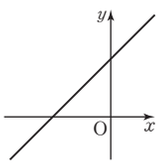
15 답 ②

$y=bx^2-ax=b\left(x-\frac{a}{2b}\right)^2-\frac{a^2}{4b}$의 그래프의 꼭짓점이 제4사분면 위에 있으므로

꼭짓점의 좌표는 $\left(\frac{a}{2b}, -\frac{a^2}{4b}\right)$

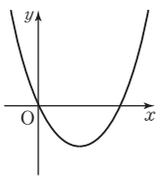
$\frac{a}{2b}>0$, $-\frac{a^2}{4b}<0$ $\therefore a>0$, $b>0$

따라서 $y=ax+ab$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 그래프가 지나는 사분면은 제1, 2, 3사분면이다.



다른 풀이

$y=bx^2-ax$의 그래프는 원점을 지나고 꼭짓점이 제4사분면 위에 있으므로 오른쪽 그림과 같다.



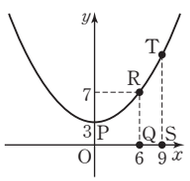
즉, 그래프가 아래로 볼록하므로 $b>0$

축이 y축의 오른쪽에 있으므로 $-a<0$

$\therefore a>0$

16 답 12 m

오른쪽 그림과 같이 지점 O가 원점, 지면이 x축, 선분 OP가 y축 위에 오도록 포물선을 좌표평면 위에 나타내면



P(0, 3), Q(6, 0), R(6, 7), S(9, 0)

꼭짓점의 좌표가 P(0, 3)이므로 이 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=ax^2+3$으로 놓자.

이 그래프가 점 R(6, 7)을 지나므로

$7=a\times 6^2+3$, $36a=4$ $\therefore a=\frac{1}{9}$

$\therefore y=\frac{1}{9}x^2+3$

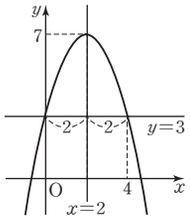
이때 점 T의 x좌표가 9이므로 이 식에 $x=9$를 대입하면

$y=\frac{1}{9}\times 9^2+3=12$

따라서 S 지점에서 T 지점까지의 높이는 12 m이다.

17 답 6

주어진 조건을 모두 만족시키는 이차함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



㈎, ㈏에서 꼭짓점의 좌표가 (2, 7)이므로

$y=a(x-2)^2+7$

㈐에서 이 그래프가 점 (0, 3)을 지나므로

$3=a\times(-2)^2+7$, $4a=-4$ $\therefore a=-1$

따라서 $y=-(x-2)^2+7=-x^2+4x+3$이므로

$b=4$, $c=3$

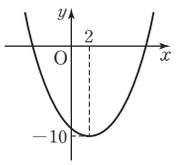
$\therefore a+b+c=-1+4+3=6$

18 답 2

꼭짓점의 좌표가 (2, −10)이므로 이차함수의 식은

$y=a(x-2)^2-10=ax^2-4ax+4a-10$

꼭짓점이 제4사분면 위에 있으므로 이 그래프가 모든 사분면을 지나려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



즉, 아래로 볼록해야 하므로

$a>0$ …… ㉠

또 y축과 만나는 점이 x축보다 아래쪽에 있어야 하므로

$4a-10<0$ $\therefore a<\frac{5}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 가능한 정수 a는 1, 2의 2개이다.

19 답 $y=-\frac{1}{3}x^2+x+6$

$\overline{BC}=6-(-3)=9$이므로

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times 9\times\overline{AO}=27$ $\therefore \overline{AO}=6$

$\therefore A(0, 6)$

주어진 이차함수의 그래프가 x축과 두 점 (−3, 0), (6, 0)에서 만나므로 이차함수의 식을 $y=a(x+3)(x-6)$으로 놓자.

이 그래프가 점 A(0, 6)을 지나므로

$6=-18a$ $\therefore a=-\frac{1}{3}$

$\therefore y=-\frac{1}{3}(x+3)(x-6)$

$=-\frac{1}{3}(x^2-3x-18)$

$=-\frac{1}{3}x^2+x+6$

20 답 ④

$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점 (−2, 0), (4, 0)에서 만나므로 이차함수의 식은

$y=a(x+2)(x-4)=a(x^2-2x-8)$

$=a(x-1)^2-9a$

이때 최솟값이 −9이므로

$-9a=-9$ $\therefore a=1$

따라서 $y=x^2-2x-8$이므로 $b=-2$, $c=-8$

$\therefore abc=1\times(-2)\times(-8)=16$

21 답 5

$y=ax^2+bx+c$의 그래프가 두 점 (0, 5), (2, 5)를 지나므로 축의 방정식은 $x=1$이고, 이때 최솟값이 1이므로 이차함수의 식을 $y=a(x-1)^2+1$로 놓자.

이 식에 $x=2$, $y=5$를 대입하면

$5=a\times(2-1)^2+1 \quad \therefore a=4$

즉, $y=4(x-1)^2+1=4x^2-8x+5$이므로

$b=-8$, $c=5$

$\therefore y=bx^2-ax+c=-8x^2-4x+5$

$=-8\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{11}{2}$

따라서 $x=-\frac{1}{4}$일 때 최댓값 $\frac{11}{2}$을 가지므로

$p=-\frac{1}{4}$, $q=\frac{11}{2}$

$\therefore 2p+q=2\times\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{11}{2}=5$

22 답 900원

호두과자의 하루 판매액을 y원이라 하면

$y=(800+10x)(500-5x)$

$=-50x^2+1000x+400000$

$=-50(x-10)^2+405000$

따라서 $x=10$일 때 호두과자의 하루 판매액이 최대이므로 그때의 호두과자 한 개의 가격은

$800+10\times10=900$(원)

23 답 2초 후

두 점 P, Q가 동시에 출발한 지 x초 후에 $\overline{BP}=2x$ cm, $\overline{CQ}=x$ cm이므로 $\triangle APQ$의 넓이를 y cm^{2}라 하면

$y=\square ABCD-(\triangle ABP+\triangle PCQ+\triangle AQD)$

$=4\times8-\left\{\frac{1}{2}\times4\times2x+\frac{1}{2}\times(8-2x)\times x+\frac{1}{2}\times8\times(4-x)\right\}$

$=32-(4x+4x-x^2+16-4x)$

$=x^2-4x+16=(x-2)^2+12$

따라서 $x=2$일 때 최솟값 12를 가지므로 출발한 지 2초 후에 $\triangle APQ$의 넓이가 최소가 된다.

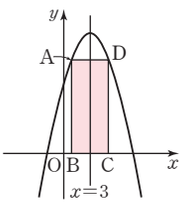
24 답 ④

$y=-\frac{1}{2}x^2+3x+8=-\frac{1}{2}(x-3)^2+\frac{25}{2}$의 그래프의 축의 방정식은 $x=3$

점 C의 x좌표를 k $(k>3)$라 하면 오른쪽 그림에서 $\overline{BC}=2(k-3)$

또 점 D의 좌표는 $\left(k,\ -\frac{1}{2}k^2+3k+8\right)$이므로

$\overline{CD}=-\frac{1}{2}k^2+3k+8$



이때 $\square ABCD$의 둘레의 길이는

$2(\overline{BC}+\overline{CD})=2\left\{2(k-3)+\left(-\frac{1}{2}k^2+3k+8\right)\right\}$

$=-k^2+10k+4$

$=-(k-5)^2+29$

따라서 $\square ABCD$의 둘레의 길이의 최댓값은 29이다.

MEMO

MEMO