기출 PICK

정답과 해설

확률과 통계

01 여러 가지 순열

난이도별 필수 기출 5~21쪽

0001 답 ③

구하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!\times2!\times2!}=210$

0002 답 ④

구하는 경우의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

0003 답 ④

구하는 자연수의 개수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$

0004 답 ③

3개의 문자 중에서 중복을 허용하여 2개, 3개, 4개, 5개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 각각

${}_3\Pi_2=3^2=9$, ${}_3\Pi_3=3^3=27$, ${}_3\Pi_4=3^4=81$, ${}_3\Pi_5=3^5=243$

따라서 구하는 경우의 수는

$9+27+81+243=360$

0005 답 ⑤

만의 자리와 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 1, 3의 2가지

나머지 네 자리에 3개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$2\times2\times81=324$

0006 답 ⑤

1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

${}_5\Pi_4=5^4=625$

모두 같은 숫자로만 이루어진 네 자리의 자연수는

1111, 2222, 3333, 4444, 5555의 5가지

따라서 구하는 자연수의 개수는

$625-5=620$

0007 답 ③

5의 배수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 5의 1가지

나머지 세 자리에 5개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 경우의 수는

$1\times125=125$

0008 답 ⑤

7개의 문자 s, c, i, e, n, c, e 중에서 모음은 i, e, e이므로 양 끝에 모음이 오도록 배열하는 경우는 다음과 같다.

(i) 양 끝에 i, e가 오는 경우

양 끝에 i, e를 배열하는 경우의 수는 $2!=2$

양 끝에 i, e를 배열한 상태에서 그 사이에 나머지 s, c, n, c, e의 5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

즉, 양 끝에 i, e가 오도록 배열하는 경우의 수는

$2\times60=120$

(ii) 양 끝에 e, e가 오는 경우

양 끝에 모음 e, e를 배열하는 경우의 수는 1

양 끝에 e, e를 배열한 상태에서 그 사이에 나머지 s, c, i, n, c의 5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

즉, 양 끝에 e, e가 오도록 배열하는 경우의 수는

$1\times60=60$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$120+60=180$

0009 답 ①

a를 제외한 b, b, b, c, c를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!\times2!}=10$

b, b, b, c, c의 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에서 3개를 택하여 a를 넣는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times20=200$

0010 답 33

(i) a가 두 번 나오는 경우

a, a, b, b 또는 a, a, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2\times\frac{4!}{2!\times2!}=2\times6=12$

a, a, b, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

즉, a가 두 번 나오는 경우의 수는

$12+12=24$

(ii) a가 세 번 나오는 경우

a, a, a, b 또는 a, a, a, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2\times\frac{4!}{3!}=2\times4=8$

(iii) a가 네 번 나오는 경우

a, a, a, a를 일렬로 나열하는 경우의 수는 1

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$24+8+1=33$

다른 풀이

a, b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

(i) a가 0번 나오는 경우

b, c 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_4=2^4=16$

(ii) a가 1번 나오는 경우

4개의 자리 중에서 a가 들어갈 자리 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

나머지 3개의 자리에 b, c 중에서 중복을 허락하여 3개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_3=2^3=8$

즉, a가 1번 나오는 경우의 수는 $4\times8=32$

(i), (ii)에서 a가 0번 또는 1번 나오는 경우의 수는

$16+32=48$

따라서 구하는 경우의 수는

$81-48=33$

0011 답 480

4개의 문자를 각각 홀수 개씩 사용하여 모두 6개를 택해 일렬로 나열하려면 1개의 문자는 3번, 나머지 3개의 문자는 각각 1번씩 사용해야 한다. …… ⓘ

4개의 문자 중에서 3번 사용할 문자 1개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$ …… ⓘⓘ

택한 6개 중에서 같은 것이 3개 있으므로 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{3!}=120$ …… ⓘⓘⓘ

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times120=480$ …… ⓘⓥ

채점 기준

ⓘ 홀수 개씩 사용하기 위한 각 문자의 개수 파악하기	30 %
ⓘⓘ 3번 사용할 문자 1개를 택하는 경우의 수 구하기	20 %
ⓘⓘⓘ 6개의 문자를 일렬로 나열하는 경우의 수 구하기	30 %
ⓘⓥ 각 문자를 홀수 개씩 사용하여 모두 6개를 일렬로 나열하는 경우의 수 구하기	20 %

0012 답 ①

a, b의 순서가 정해져 있으므로 a, b를 모두 x로 바꾸어 생각하여 x, x, l, l, o, o, n을 일렬로 배열한 후 첫 번째 x를 a로, 두 번째 x를 b로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$\frac{7!}{2!\times2!\times2!}=630$

0013 답 ③

양 끝 모두에 X, Y를 중복을 허락하여 나열하는 경우의 수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

양 끝을 제외한 나머지 네 자리 중에서 a가 들어갈 한 자리를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

나머지 세 자리에 a를 제외한 b, X, Y를 중복을 허락하여 나열하는 경우의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times4\times27=432$

0014 답 ⑤

4개의 문자 A, B, C, D 중에서 서로 다른 2개의 문자를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

서로 다른 2개의 문자를 x, y라 하자.

(i) x, x, x, x, y를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{4!}=5$

(ii) x, x, x, y, y를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!\times2!}=10$

(iii) x, x, y, y, y를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!\times3!}=10$

(iv) x, y, y, y, y를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{4!}=5$

(i)~(iv)에서 일렬로 나열하는 경우의 수는

$5+10+10+5=30$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times30=180$

다른 풀이

4개의 문자 A, B, C, D 중에서 서로 다른 2개의 문자를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

택한 2개의 문자 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_5=2^5=32$

이때 2개의 문자 중에서 한 종류의 문자만 나열되는 경우는 제외해야 하므로 그 경우의 수는

$32-2=30$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times30=180$

0015 답 600

(i) b끼리 서로 이웃하는 경우

2개의 b를 한 문자 B로 생각하여 a, B, c, d, e, e를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!}=360$

(ii) e끼리 서로 이웃하는 경우

2개의 e를 한 문자 E로 생각하여 a, b, b, c, d, E를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!}=360$

(iii) b끼리, e끼리 서로 이웃하는 경우

2개의 b를 한 문자 B로, 2개의 e를 한 문자 E로 생각하여 a, B, c, d, E를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$5!=120$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$360+360-120=600$

0016 답 ④

왼쪽에서 두 번째의 위치에는 C가 적힌 카드를 놓아야 하므로 나머지 4개의 위치에 카드를 나열하는 경우의 수만 구하면 된다.

나머지 4개의 위치에 카드를 나열하기 위해 C가 적힌 카드 1장을 제외한 나머지 5장의 카드 A, B, B, C, C 중에서 4장의 카드를 택하는 경우는

A, B, B, C 또는 A, B, C, C 또는 B, B, C, C

(i) A, B, B, C 또는 A, B, C, C를 나열하는 경우의 수는

$2\times\frac{4!}{2!}=24$

(ii) B, B, C, C를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$24+6=30$

0017 답 540

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

짝수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4의 3가지

나머지 두 자리에 6개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_6\Pi_2=6^2=36$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$5\times3\times36=540$

0018 답 100

천의 자리의 숫자를 $a(a\neq0)$, 일의 자리의 숫자를 b라 할 때,

$a+b=4$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)$의 4가지

나머지 두 자리에 5개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times25=100$

0019 답 ②

$a+b+c=7$, $a<b<3<c\leq5$를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c)는

$(0, 2, 5)$ 또는 $(1, 2, 4)$

(i) $(0, 2, 5)$인 경우

7개의 숫자 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\times5!}=21$

(ii) $(1, 2, 4)$인 경우

7개의 숫자 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\times4!}=105$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$21+105=126$

0020 답 ④

(i) 한 자리의 자연수인 경우

1, 2, 3, 4, 5의 5가지

(ii) 두 자리의 자연수인 경우

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2, 3, 4, 5의 6가지

즉, 두 자리의 자연수의 개수는

$5\times6=30$

(iii) 세 자리의 자연수인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

나머지 두 자리에 6개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_6\Pi_2=6^2=36$

즉, 세 자리의 자연수의 개수는

$5\times36=180$

(iv) 네 자리의 자연수 중에서 1□□□ 꼴인 경우

나머지 세 자리에 6개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_6\Pi_3=6^3=216$

(i)~(iv)에서 2000보다 작은 자연수의 개수는

$5+30+180+216=431$

따라서 2000은 432번째 수이다.

0021 답 ②

1, 3, 5의 순서가 정해져 있으므로 1, 3, 3, 3, 5를 모두 x로 바꾸어 생각하여 x, x, x, x, x, 2, 4를 일렬로 배열한 후 첫 번째 x를 1로, 두 번째, 세 번째, 네 번째 x를 3으로, 다섯 번째 x를 5로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$\frac{7!}{5!}=42$

0022 답 ④

(i) 천의 자리에 4가 오는 경우

① 백의 자리에 2가 오는 경우

십의 자리에 6이 오면 일의 자리에 2, 4, 6, 8 중에서 하나가 오면 되므로 그 경우의 수는 4

십의 자리에 8이 오면 일의 자리에 0, 2, 4, 6, 8 중에서 하나가 오면 되므로 그 경우의 수는 5

즉, 백의 자리에 2가 오는 경우의 수는

$4+5=9$

② 백의 자리에 4 또는 6 또는 8이 오는 경우

나머지 두 자리에 0, 2, 4, 6, 8의 5개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

즉, 백의 자리에 4 또는 6 또는 8이 오는 경우의 수는

$3\times25=75$

①, ②에서 천의 자리에 4가 오는 경우의 수는

$9+75=84$

(ii) 천의 자리에 6 또는 8이 오는 경우

나머지 세 자리에 0, 2, 4, 6, 8의 5개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

즉, 천의 자리에 6 또는 8이 오는 경우의 수는

$2\times125=250$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$84+250=334$

0023 답 ①

홀수끼리와 짝수끼리의 순서가 각각 정해져 있으므로 1, 3, 5, 7을 모두 x로, 2, 4, 6을 모두 y로 바꾸어 생각하여 x, x, x, x, y, y, y를 일렬로 나열한 후 x는 왼쪽부터 순서대로 1, 3, 5, 7로 바꾸고, y는 오른쪽부터 순서대로 2, 4, 6으로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$$\frac{7!}{4!\times3!}=35$$

0024 답 36

세 문자를 각각 1개, 2개, 2개 택해야 한다.

(i) 3개의 문자 중에서 1개만 택할 1개의 문자를 정하는 방법의 수는

${}_3C_1=3$

(ii) 1개, 2개, 2개 택한 5개의 문자를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{5!}{2!\times2!}=30$$

이때 a, b, b, c, c와 같이 2개를 택한 두 문자가 b, c이면 같은 문자끼리는 이웃하지 않아야 한다.

① b끼리 서로 이웃하는 경우

2개의 b를 한 문자 B로 생각하여 a, B, c, c를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

② c끼리 서로 이웃하는 경우

2개의 c를 한 문자 C로 생각하여 a, b, b, C를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

③ b끼리, c끼리 이웃하는 경우

2개의 b를 한 문자 B로, 2개의 c를 한 문자 C로 생각하여 a, B, C를 일렬로 나열하는 방법의 수는

$3!=6$

①, ②, ③에서 같은 문자가 이웃하도록 나열하는 방법의 수는

$12+12-6=18$

즉, 같은 문자끼리 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는

$30-18=12$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$3\times12=36$

0025 답 69

다섯 자리의 자연수를 만드는 데 사용될 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8이므로 각 자리의 수의 합이 10이 되도록 중복을 허용하여 5개를 택하는 경우는

8, 2, 0, 0, 0 또는 6, 4, 0, 0, 0 또는 6, 2, 2, 0, 0 또는

4, 4, 2, 0, 0 또는 4, 2, 2, 2, 0 또는 2, 2, 2, 2, 2 …… ⓘ

(i) 8, 2, 0, 0, 0 또는 6, 4, 0, 0, 0일 때

8, 2, 0, 0, 0 또는 6, 4, 0, 0, 0을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$2\times\frac{5!}{3!}=2\times20=40$$

이때 만의 자리에 0이 오는 경우의 수는 나머지 자리에 8, 2, 0, 0 또는 6, 4, 0, 0을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$2\times\frac{4!}{2!}=2\times12=24$$

즉, 8, 2, 0, 0, 0 또는 6, 4, 0, 0, 0인 경우의 수는

$40-24=16$

(ii) 6, 2, 2, 0, 0 또는 4, 4, 2, 0, 0일 때

6, 2, 2, 0, 0 또는 4, 4, 2, 0, 0을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$2\times\frac{5!}{2!\times2!}=2\times30=60$$

이때 만의 자리에 0이 오는 경우의 수는 나머지 자리에 6, 2, 2, 0 또는 4, 4, 2, 0을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$2\times\frac{4!}{2!}=2\times12=24$$

즉, 6, 2, 2, 0, 0 또는 4, 4, 2, 0, 0인 경우의 수는

$60-24=36$

(iii) 4, 2, 2, 2, 0일 때

4, 2, 2, 2, 0을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!}=20$$

이때 만의 자리에 0이 오는 경우의 수는 나머지 자리에 4, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{3!}=4$

즉, 4, 2, 2, 2, 0인 경우의 수는

$20-4=16$

(iv) 2, 2, 2, 2, 2일 때

2, 2, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 1 …… ⓘⓘ

(i)~(iv)에서 구하는 자연수의 개수는

$16+36+16+1=69$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 각 자리의 수의 합이 10이 되는 경우 구하기	50 %
ⓘⓘ ⓘ의 각 경우를 만족시키는 다섯 자리의 자연수의 개수 각각 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 다섯 자리의 자연수의 개수 구하기	10 %

0026 답 ②

7개의 문자 a, a, b, c, c, c, c 중에서 5개를 택할 때, 문자 c가 3번 이상 나오는 경우는

a가 2번, c가 3번 또는 a가 1번, b가 1번, c가 3번 또는

a가 1번, c가 4번 또는 b가 1번, c가 4번

(i) a가 2번, c가 3번 나오는 경우

a가 2번 나오면 a는 서로 이웃해야 하므로 a, a를 한 문자 A로 생각하여 A, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

(ii) a가 1번, b가 1번, c가 3번 나오는 경우

a, b, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!}=20$

(iii) a가 1번, c가 4번 또는 b가 1번, c가 4번 나오는 경우

a, c, c, c, c 또는 b, c, c, c, c를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2\times\frac{5!}{4!}=2\times5=10$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$4+20+10=34$

0027 답 ⑤

6의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이고, 일의 자리의 숫자가 짝수이어야 한다.

1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 중에서 택한 5개의 숫자의 합이

9인 경우 ➡ 1, 1, 2, 2, 3

12인 경우 ➡ 1, 1, 2, 4, 4 또는 1, 2, 2, 3, 4 또는 1, 1, 3, 3, 4

15인 경우 ➡ 1, 3, 3, 4, 4 또는 2, 2, 3, 4, 4

(i) 1, 1, 2, 2, 3인 경우

일의 자리에 2가 오고 나머지 자리에 1, 1, 2, 3의 4개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

(ii) 1, 1, 2, 4, 4인 경우

① 일의 자리에 2가 오고 나머지 자리에 1, 1, 4, 4의 4개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\times2!}=6$

② 일의 자리에 4가 오고 나머지 자리에 1, 1, 2, 4의 4개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

①, ②에서 1, 1, 2, 4, 4인 경우의 수는

$6+12=18$

(iii) 1, 2, 2, 3, 4인 경우

① 일의 자리에 2가 오고 나머지 자리에 1, 2, 3, 4의 4개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는 $4!=24$

② 일의 자리에 4가 오고 나머지 자리에 1, 2, 2, 3의 4개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

①, ②에서 1, 2, 2, 3, 4인 경우의 수는

$24+12=36$

(iv) 1, 1, 3, 3, 4인 경우

일의 자리에 4가 오고 나머지 자리에 1, 1, 3, 3의 4개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

(v) 1, 3, 3, 4, 4인 경우

일의 자리에 4가 오고 나머지 자리에 1, 3, 3, 4의 4개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(vi) 2, 2, 3, 4, 4인 경우

① 일의 자리에 2가 오고 나머지 자리에 2, 3, 4, 4의 4개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

② 일의 자리에 4가 오고 나머지 자리에 2, 2, 3, 4의 4개의 숫자를 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

①, ②에서 2, 2, 3, 4, 4인 경우의 수는

$12+12=24$

(i)~(vi)에서 구하는 6의 배수의 개수는

$12+18+36+6+12+24=108$

다른 풀이

6의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이고, 일의 자리의 숫자가 짝수이어야 하므로 일의 자리의 숫자는 2 또는 4이다.

(i) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

나머지 일곱 개의 숫자 1, 1, 2, 3, 3, 4, 4 중에서 택한 4개의 숫자의 합이

① 7인 경우

1, 1, 2, 3이므로 이를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

② 10인 경우

1, 1, 4, 4 또는 1, 2, 3, 4이므로 이를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}+4!=6+24=30$

③ 13인 경우

2, 3, 4, 4이므로 이를 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

①, ②, ③에서 일의 자리의 숫자가 2인 경우의 수는

$12+30+12=54$

(ii) 일의 자리의 숫자가 4인 경우

나머지 일곱 개의 숫자 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4 중에서 택한 4개의 숫자의 합이

① 8인 경우

1, 1, 2, 4 또는 1, 1, 3, 3 또는 1, 2, 2, 3이므로 이를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!\times2!}+\frac{4!}{2!}=12+6+12=30$

② 11인 경우

1, 3, 3, 4 또는 2, 2, 3, 4이므로 이를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}=12+12=24$

①, ②에서 일의 자리의 숫자가 4인 경우의 수는

$30+24=54$

(i), (ii)에서 구하는 6의 배수의 개수는

$54+54=108$

0028 답 ①

다섯 자리의 자연수를 만들 때 (가)에서 선택할 수 있는 홀수의 개수는 0, 1, 2, 3이고, (나)에서 선택할 수 있는 짝수의 개수는 0, 2, 4이다.

따라서 선택할 수 있는 다섯 개의 숫자는 홀수 1개, 짝수 4개 또는 홀수 3개, 짝수 2개이어야 한다.

(ⅰ) 홀수 1개, 짝수 4개를 선택하는 경우
→ 2, 4, 6 중에서 두 개를 골라 2번씩 선택
1, 3, 5 중에서 하나를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
2, 4, 6 중에서 두 개를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_2={}_3C_1=3$
선택한 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
→ 두 개의 짝수가 2번씩 사용
$\frac{5!}{2!\times2!}=30$
즉, 홀수 1개, 짝수 4개를 선택하는 경우의 수는
$3\times3\times30=270$

(ⅱ) 홀수 3개, 짝수 2개를 선택하는 경우
→ 2, 4, 6 중에서 한 개를 골라 2번 선택
1, 3, 5를 모두 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_3=1$
2, 4, 6 중에서 한 개를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
선택한 5개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는
→ 한 개의 짝수가 2번 사용
$\frac{5!}{2!}=60$
즉, 홀수 3개, 짝수 2개를 선택하는 경우의 수는
$1\times3\times60=180$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는
$270+180=450$

0029 답 97

(나)에서 1과 4는 서로 이웃할 수 없다.

(ⅰ) 1이 한 번 나오는 경우
① 1□□□, □□□1 꼴인 경우
1의 옆에 올 수 있는 숫자는 2, 3의 2개이고, 나머지 자리에는 2, 3, 4의 3개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는
$2\times2\times{}_3\Pi_2=2\times2\times3^2=36$
② □1□□, □□1□ 꼴인 경우
1의 양옆에는 2, 3의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 일렬로 나열하고, 나머지 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 4의 3개이므로 그 경우의 수는
$2\times{}_2\Pi_2\times3=2\times2^2\times3=24$
①, ②에서 1이 한 번 나오는 경우의 수는
$36+24=60$

(ⅱ) 1이 두 번 나오는 경우
① 1□1□, 1□□1, □11□, □1□1 꼴인 경우
1의 옆에는 2, 3의 2개의 숫자 중에서 중복을 허락하여 2개를 택하여 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는
$4\times{}_2\Pi_2=4\times2^2=16$
② 11□□, □□11 꼴인 경우
1의 옆에 올 수 있는 숫자는 2, 3의 2개이고, 나머지 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 4의 3개이므로 그 경우의 수는
$2\times2\times3=12$
①, ②에서 1이 두 번 나오는 경우의 수는
$16+12=28$

(ⅲ) 1이 세 번 나오는 경우
1, 1, 1, 2 또는 1, 1, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$2\times\frac{4!}{3!}=8$

(ⅳ) 1이 네 번 나오는 경우
1111의 1가지

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는
$60+28+8+1=97$

0030 답 ⑤

A에서 B로의 함수의 개수는 집합 B의 원소 a, b, c, d의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 A의 원소 1, 2에 대응시키는 경우의 수와 같다.
따라서 구하는 함수의 개수는
${}_4\Pi_2=4^2=16$

0031 답 81

X에서 Y로의 함수 f 중에서 $f(1)=2$인 함수의 개수는 집합 X의 원소 1에 집합 Y의 원소 2를 대응시키고, 집합 Y의 원소 1, 2, 3의 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 집합 X의 원소 2, 3, 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는
${}_3\Pi_4=3^4=81$

0032 답 ④

X에서 Y로의 함수의 개수는 집합 Y의 원소 a, b의 2개에서 중복을 허용하여 6개를 택하여 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_2\Pi_6=2^6=64$
이때 치역의 원소의 개수가 1인 경우는 $\{a\}$, $\{b\}$이고, 각 경우의 수는 1이다.
따라서 구하는 함수의 개수는
$64-2\times1=62$

0033 답 ②

X에서 Y로의 함수의 개수는 집합 Y의 원소 a, b, c, d, e의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 X의 원소 a, b, c에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 $m={}_5\Pi_3=5^3=125$
X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 집합 Y의 원소 a, b, c, d, e의 5개에서 서로 다른 3개를 택하여 집합 X의 원소 a, b, c에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 $n={}_5P_3=60$
$\therefore m-n=125-60=65$

0034 답 192

$f(1)=f(2)$이므로 $f(1)$과 $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4의 4가지
$f(3)\neq1$이므로 $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는 2, 3, 4의 3가지
또 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X의 원소 4, 5에 대응시키는 경우의 수는
${}_4\Pi_2=4^2=16$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$4\times3\times16=192$

다른 풀이

X에서 Y로의 함수 f 중에서 $f(1)=f(2)$인 함수의 개수는 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 집합 X의 원소 1, 3, 4, 5에 대응시키고 집합 X의 원소 2는 $f(1)$의 값에 대응시키면 되므로

${}_4\Pi_4=4^4=256$

X에서 Y로의 함수 f 중에서 $f(1)=f(2)$이고 $f(3)=1$인 함수의 개수는 집합 X의 원소 3에 집합 Y의 원소 1을 대응시키고, 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 X의 원소 1, 4, 5에 대응시킨 후 집합 X의 원소 2는 $f(1)$의 값에 대응시키면 되므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$256-64=192$

0035 답 ④

X에서 Y로의 함수 중에서 치역의 모든 원소의 합이 5이려면 치역은 $\{5\}$ 또는 $\{1, 4\}$ 또는 $\{2, 3\}$

(i) 치역이 $\{5\}$인 경우

집합 X의 모든 원소를 5에 대응시키면 되므로 치역이 $\{5\}$인 함수의 개수는 1

(ii) 치역이 $\{1, 4\}$인 경우

집합 Y의 원소 1, 4의 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

이때 치역이 $\{1\}$인 경우와 치역이 $\{4\}$인 경우는 제외해야 하므로 치역이 $\{1, 4\}$인 함수의 개수는

$16-2=14$

(iii) 치역이 $\{2, 3\}$인 경우

집합 Y의 원소 2, 3의 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

이때 치역이 $\{2\}$인 경우와 치역이 $\{3\}$인 경우는 제외해야 하므로 치역이 $\{2, 3\}$인 함수의 개수는

$16-2=14$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수의 개수는

$1+14+14=29$

0036 답 ①

$f(b)+f(c)+f(d)=8$이므로 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택할 때, 그 합이 8인 경우는

1, 2, 5 또는 1, 3, 4 또는 2, 2, 4 또는 2, 3, 3

(i) $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$의 값이 1, 2, 5인 경우의 수는 $3!=6$

(ii) $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$의 값이 1, 3, 4인 경우의 수는 $3!=6$

(iii) $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$의 값이 2, 2, 4인 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

(iv) $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$의 값이 2, 3, 3인 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

(i)~(iv)에서 $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$의 값을 정하는 경우의 수는

$6+6+3+3=18$

이때 $f(a)$, $f(e)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X의 원소 a, e에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$18\times25=450$

0037 답 ⑤

(i) $|f(1)-f(2)|=1$인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2))$는

$(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$의 6가지

이때 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 B의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 A의 원소 3, 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

즉, $|f(1)-f(2)|=1$인 함수 f의 개수는

$6\times64=384$

(ii) $|f(2)-f(3)|=1$인 경우

순서쌍 $(f(2), f(3))$은

$(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$의 6가지

이때 $f(1)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 B의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 A의 원소 1, 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

즉, $|f(2)-f(3)|=1$인 함수 f의 개수는

$6\times64=384$

(iii) $|f(1)-f(2)|=1$이고 $|f(2)-f(3)|=1$인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2), f(3))$은

$(1, 2, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 3, 2)$, $(2, 3, 4)$, $(3, 2, 1)$, $(3, 2, 3)$, $(3, 4, 3)$, $(4, 3, 2)$, $(4, 3, 4)$의 10가지

이때 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 B의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 A의 원소 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$

즉, $|f(1)-f(2)|=1$이고 $|f(2)-f(3)|=1$인 함수 f의 개수는

$10\times16=160$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$384+384-160=608$

0038 답 1050

(가)에서 $f(a)+f(b)$가 홀수이므로 $f(a)$, $f(b)$ 중 하나는 홀수이고 다른 하나는 짝수이다. ····· ㉠

(나)에서 $f(b)\times f(e)$가 짝수이므로 $f(b)$, $f(e)$ 중 적어도 하나는 짝수이다. ····· ㉡

(i) $f(b)$가 짝수인 경우

$f(b)$의 값이 될 수 있는 수는 2, 4의 2가지

㉠에서 $f(a)$는 홀수이어야 하므로 $f(a)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 3, 5의 3가지

㉡에서 $f(e)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

즉, $f(a)$, $f(b)$, $f(e)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2\times3\times5=30$

이때 $f(c)$, $f(d)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 B의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 A의 원소 c, d에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

즉, $f(b)$가 짝수인 함수 f의 개수는

$30\times25=750$ …… ⓘ

(ii) $f(b)$가 홀수인 경우

$f(b)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 3, 5의 3가지

㉠에서 $f(a)$는 짝수이어야 하므로 $f(a)$의 값이 될 수 있는 수는 2, 4의 2가지

㉡에서 $f(e)$는 짝수이어야 하므로 $f(e)$의 값이 될 수 있는 수는 2, 4의 2가지

즉, $f(a)$, $f(b)$, $f(e)$의 값을 정하는 경우의 수는

$3\times2\times2=12$

이때 $f(c)$, $f(d)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 B의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 A의 원소 c, d에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

즉, $f(b)$가 홀수인 함수 f의 개수는

$12\times25=300$ …… ⓘⓘ

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$750+300=1050$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(b)$가 짝수일 때 함수 f의 개수 구하기	40%
ⓘⓘ $f(b)$가 홀수일 때 함수 f의 개수 구하기	40%
ⓘⓘⓘ 조건을 만족시키는 함수 f의 개수 구하기	20%

0039 답 ③

$f(1)+f(3)=9$이므로

$f(1)=4$, $f(3)=5$ 또는 $f(1)=5$, $f(3)=4$

(i) $f(1)=4$, $f(3)=5$인 경우

집합 X의 원소 1, 2, 3의 3개에서 남은 치역의 원소 1개를 정하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

치역을 $\{4, 5, a\}$라 하면 $f(1)\neq f(2)$이므로

$f(2)=5$ 또는 $f(2)=a$

① $f(2)=5$인 경우

$f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 치역의 원소 4, 5, a의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X의 원소 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$

이때 $f(4)$, $f(5)$의 값이 4 또는 5인 경우의 수는 치역의 원소 4, 5의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X의 원소 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_2=2^2=4$

$f(2)=5$인 함수 f의 개수는

$9-4=5$

② $f(2)=a$인 경우

치역의 원소 4, 5, a의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X의 원소 4, 5에 대응시키는 경우의 수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$

①, ②에서 함수 f의 개수는

$5+9=14$

즉, $f(1)=4$, $f(3)=5$인 함수 f의 개수는

$3\times14=42$

(ii) $f(1)=5$, $f(3)=4$인 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 $f(1)=5$, $f(3)=4$인 함수 f의 개수는 42이다.

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$2\times42=84$

0040 답 ②

A에서 B로의 함수 f의 개수는 집합 B의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 A의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_6\Pi_3=6^3=216$

집합 B의 원소 중 3으로 나눈 나머지가 0인 경우는 3, 6이고, 1인 경우는 1, 4이고, 2인 경우는 2, 5이다.

이때 $f(1)+f(2)+f(3)$의 값이 3의 배수이려면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 3으로 나눈 나머지의 합이 3의 배수이어야 한다.

(i) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 3으로 나눈 나머지가 모두 같은 경우

① 나머지가 모두 0인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 B의 원소 3, 6의 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 A의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

② 나머지가 모두 1 또는 모두 2인 경우

①과 같은 방법으로 하면 각 함수 f의 개수는 8

①, ②에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 3으로 나눈 나머지가 모두 같은 함수 f의 개수는

$3\times8=24$

(ii) $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 3으로 나눈 나머지가 0, 1, 2인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 3으로 나눈 나머지를 배열하는 경우의 수는 $3!=6$

나머지가 0, 1, 2인 원소의 개수는 각각 2이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는

$2\times2\times2=8$

즉, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 3으로 나눈 나머지가 0, 1, 2인 함수 f의 개수는

$6\times8=48$

(i), (ii)에서 $f(1)+f(2)+f(3)$의 값이 3의 배수인 함수 f의 개수는
$24+48=72$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$216-72=144$

0041 답 ④

(i) $n(A)=3$인 경우
① $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1\}$인 경우
집합 A의 원소인 1, 2, 3을 1에 대응시키고, 4, 5를 2, 3에 하나씩 대응시키면 된다.
즉, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1\}$인 함수 f의 개수는
$1\times2=$ [(가) 2]
② $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2\}$인 경우
집합 A의 원소인 1, 2, 3을 1, 2에 대응시키고, ····· ㉠
4, 5 중에서 적어도 하나를 3에 대응시키면 된다. ····· ㉡
이때 ㉠은 A에서 B로의 함수 중에서
$f(1)=f(2)=f(3)=1$, $f(1)=f(2)=f(3)=2$인 경우를 제외하면 되고, ㉡은 $\{4, 5\}$에서 $\{1, 2, 3\}$으로의 함수 중에서 $\{4, 5\}$에서 $\{1, 2\}$로의 함수인 경우를 제외하면 된다.
즉, $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 2\}$인 함수 f의 개수는
$({}_2\Pi_3-2)\times({}_3\Pi_2-{}_2\Pi_2)=6\times5=$ [(나) 30]
(ii) $n(A)=4$이고 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 A는
$\{1, 2, 4, 5\}$뿐이다. 이때 $n(A)=4$에서 f의 치역 A의 원소 4개 중에서 2개는 같은 함숫값에 대응되므로 이 대응으로 얻는 $f\circ f$의 치역 B의 원소의 개수는 3 또는 4이다.
그런데 $n(A)>n(B)$이므로 $n(B)=3$이다.
즉, 집합 B는 $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 2, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 4, 5\}$이다.
$A=\{1, 2, 4, 5\}$, $B=\{1, 2, 4\}$인 경우
$f(3)=5$이고 집합 A의 원소 중 두 원소는 서로 같은 함숫값을 가져야 하므로 1, 2, 4를 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값으로 정하면 된다. ····· ㉢
이때 ㉢은 1, 1, 2, 4 또는 1, 2, 2, 4 또는 1, 2, 4, 4를 일렬로 나열하여 차례로 $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(5)$의 값에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 $3\times\frac{4!}{2!}=36$
즉, $n(A)=4$, $n(B)<4$이고 집합 A의 모든 원소의 합이 3의 배수가 되도록 하는 함수 f의 개수는
$4\times36=$ [(다) 144]
따라서 $p=2$, $q=30$, $r=144$이므로
$p+q+r=176$

0042 답 ①

(나)에서 $xf(x)$가 짝수이므로 x가 홀수일 때 $f(x)$는 짝수이어야 한다.
이때 함수 f의 치역의 원소의 개수가 2이므로 치역의 짝수인 원소의 개수는 1 또는 2이다.
(i) 치역의 짝수인 원소의 개수가 1인 경우
함수 f의 치역이 될 수 있는 집합은
$\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$
① 치역이 $\{1, 2\}$인 경우
$f(1)=2$, $f(3)=2$, $f(5)=2$이고, $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 치역의 원소 1, 2의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X의 원소 2, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_2\Pi_2=2^2=4$
이때 $f(2)$, $f(4)$의 값이 모두 2가 되는 경우를 제외해야 하므로 치역이 $\{1, 2\}$인 함수 f의 개수는
$4-1=3$
② 치역이 $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$인 경우
①과 같은 방법으로 하면 각 함수 f의 개수는
3
①, ②에서 치역의 짝수인 원소의 개수가 1인 함수 f의 개수는
$6\times3=18$
(ii) 치역의 짝수인 원소의 개수가 2인 경우
함수 f의 치역이 될 수 있는 집합은
$\{2, 4\}$
치역의 원소 2, 4의 2개에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5에 대응시키는 경우의 수는
${}_2\Pi_5=2^5=32$
이때 치역이 $\{2\}$인 경우와 치역이 $\{4\}$인 경우는 제외해야 하므로 치역이 $\{2, 4\}$인 함수 f의 개수는
$32-2=30$
(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는
$18+30=48$

0043 답 112

$f(1)\times f(4)=4$이므로
$f(1)=1$, $f(4)=4$ 또는 $f(1)=2$, $f(4)=2$ 또는
$f(1)=4$, $f(4)=1$
(i) $f(1)=1$, $f(4)=4$ 또는 $f(1)=4$, $f(4)=1$인 경우
집합 Y의 원소 2, 3의 2개에서 남은 치역의 원소 1개를 정하는 경우의 수는
${}_2C_1=2$
치역을 $\{1, 4, a\}$라 하고 $A=\{f(2), f(3), f(5)\}$라 하자.
$f(2)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 치역의 원소 1, 4, a의 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 X의 원소 2, 3, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_3\Pi_3=3^3=27$
이때 A가 $\{1\}$, $\{4\}$, $\{1, 4\}$인 경우의 수는 치역의 원소 1, 4의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X의 원소 2, 3, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_2\Pi_3=2^3=8$
치역이 $\{1, 4, a\}$인 함수 f의 개수는
$27-8=19$
즉, $f(1)=1$, $f(4)=4$ 또는 $f(1)=4$, $f(4)=1$인 함수 f의 개수는
$2\times2\times19=76$ ····· ⓘ

(ii) $f(1)=2$, $f(4)=2$인 경우

집합 Y의 원소 1, 3, 4의 3개에서 남은 치역의 원소 2개를 정하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

치역을 $\{2, a, b\}$라 하고 $A=\{f(2), f(3), f(5)\}$라 하자.

$f(2)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 치역의 원소 2, a, b의 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 X의 원소 2, 3, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_3\Pi_3=3^3=27$

이때 A가 $\{2\}$, $\{a\}$, $\{2, a\}$인 경우의 수는 치역의 원소 2, a의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X의 원소 2, 3, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_3=2^3=8$

또 A가 $\{2\}$, $\{b\}$, $\{2, b\}$인 경우의 수는 8이고, A가 $\{2\}$인 경우의 수는 1이다.

치역이 $\{2, a, b\}$인 함수 f의 개수는

$27-(8+8-1)=12$

즉, $f(1)=2$, $f(4)=2$인 함수 f의 개수는

$3\times12=36$ …… ii

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$76+36=112$ …… iii

채점 기준	
i $f(1)=1$, $f(4)=4$ 또는 $f(1)=4$, $f(4)=1$인 함수 f의 개수 구하기	40 %
ii $f(1)=2$, $f(4)=2$인 함수 f의 개수 구하기	40 %
iii 함수 f의 개수 구하기	20 %

0044 답 ①

$f(4)$는 짝수이므로 $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 2, 4, 6, 12

(i) $f(4)=2$인 경우

(나)에서 $x<4$이면 $f(x)\geq2$이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 6, 12의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

(다)에서 $x>4$이면 $f(x)<2$이므로 $f(6)$, $f(12)$의 값은 모두 1이다.

즉, $f(4)=2$인 함수 f의 개수는

$125\times1=125$

(ii) $f(4)=4$인 경우

(나)에서 $x<4$이면 $f(x)\geq4$이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 4, 6, 12의 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_3\Pi_3=3^3=27$

(다)에서 $x>4$이면 $f(x)<4$이므로 $f(6)$, $f(12)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 6, 12에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$

즉, $f(4)=4$인 함수 f의 개수는

$27\times9=243$

(iii) $f(4)=6$인 경우

(나)에서 $x<4$이면 $f(x)\geq6$이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 6, 12의 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

(다)에서 $x>4$이면 $f(x)<6$이므로 $f(6)$, $f(12)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 6, 12에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$

즉, $f(4)=6$인 함수 f의 개수는

$8\times16=128$

(iv) $f(4)=12$인 경우

(나)에서 $x<4$이면 $f(x)\geq12$이므로 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값은 모두 12이다.

(다)에서 $x>4$이면 $f(x)<12$이므로 $f(6)$, $f(12)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 6의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 6, 12에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

즉, $f(4)=12$인 함수 f의 개수는

$1\times25=25$

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f의 개수는

$125+243+128+25=521$

0045 답 ⑤

(가)에서 $X\subset Y^C$이고 $Y^C\subset X$이므로 $X=Y^C$

(나)에서 $f(1)$, $f(2)$의 값이 존재해야 하므로 1, 2는 집합 X의 원소이다.

또 $f(1)>f(2)$이므로 집합 Y의 원소의 개수는 2 이상이어야 한다.

(i) $n(X)=2$, $n(Y)=4$인 경우

$X=\{1, 2\}$, $Y=\{3, 4, 5, 6\}$이므로 두 집합 X, Y를 정하는 경우의 수는 1

이때 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 3, 4, 5, 6의 4개에서 2개를 택하여 크기가 큰 것부터 순서대로 집합 X의 원소 1, 2에 대응시키면 되므로

${}_4C_2=6$

즉, $n(X)=2$, $n(Y)=4$인 함수 f의 개수는

$1\times6=6$

(ii) $n(X)=3$, $n(Y)=3$인 경우

전체집합 U의 원소 3, 4, 5, 6의 4개에서 1, 2가 아닌 집합 X의 원소 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 3개에서 2개를 택하여 크기가 큰 것부터 순서대로 집합 X의 원소 1, 2에 대응시키면 되므로

${}_3C_2=3$

또 1, 2가 아닌 집합 X의 한 원소는 집합 Y의 모든 원소에 대응시킬 수 있으므로 그 경우의 수는 3

즉, $n(X)=3$, $n(Y)=3$인 함수 f의 개수는

$4\times3\times3=36$

(iii) $n(X)=4$, $n(Y)=2$인 경우

전체집합 U의 원소 3, 4, 5, 6의 4개에서 1, 2가 아닌 집합 X의 원소 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 2개를 크기가 큰 것부터 순서대로 집합 X의 원소 1, 2에 대응시키면 되므로 1가지

또 1, 2가 아닌 집합 X의 두 원소의 함숫값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X의 나머지 2개의 원소에 대응시키면 되므로

${}_2\Pi_2=2^2=4$

즉, $n(X)=4$, $n(Y)=2$인 함수 f의 개수는

$6\times1\times4=24$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$6+36+24=66$

0046 답 ②

전체집합 U의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 1, 3은 집합 $A\cap B$의 원소이고, 2, 4, 5는 각각 세 집합 $A-B$, $B-A$, $(A\cup B)^C$ 중에서 어느 한 집합의 원소이다.

따라서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는 3개의 집합에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_3=3^3=27$

0047 답 240

(가), (나)에서 $n(U)=6$, $n(A)=4$, $A\cup B=U$이므로 집합 A에 속하지 않는 2개의 원소는 반드시 집합 $B-A$의 원소이다.

전체집합 U의 원소 6개 중에서 집합 $B-A$의 원소 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$

$n(A)=4$이므로 4개의 원소는 각각 두 집합 $A-B$, $A\cap B$ 중에서 어느 한 집합의 원소이다.

즉, 4개의 원소가 속하는 집합을 정하는 경우의 수는 2개의 집합에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_4=2^4=16$

따라서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$15\times16=240$

0048 답 28

$C\subset A$이므로 집합 A의 5개의 원소는 각각 두 집합 C, $A-C$ 중에서 어느 한 집합의 원소이다.

즉, 5개의 원소가 속하는 집합을 정하는 경우의 수는 2개의 집합에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

$B\cap C=\varnothing$을 만족시키려면 집합 C가 집합 $A\cap B$의 원소인 1, 3, 5를 포함하지 않아야 하므로 가능한 집합 C의 원소는 2, 4이다.

이때 2, 4는 각각 두 집합 C, $A-C$ 중에서 어느 한 집합의 원소이므로 2개의 원소가 속하는 집합을 정하는 경우의 수는 2개의 집합에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

즉, $B\cap C=\varnothing$인 집합 C의 개수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

따라서 구하는 집합 C의 개수는

$32-4=28$

참고 원소의 개수가 n인 집합의 부분집합의 개수는 2^n이므로 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^5=32$

원소 1, 3, 5를 포함하지 않는 부분집합의 개수는 $2^{5-3}=2^2=4$

따라서 구하는 집합 C의 개수는 $32-4=28$

0049 답 211

$A\subset B$이므로 전체집합 U의 5개의 원소는 각각 세 집합 A, $B-A$, B^C 중에서 어느 한 집합의 원소이다.

즉, 5개의 원소가 속하는 집합을 정하는 경우의 수는 3개의 집합에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$ …… (i)

이때 $A\subset B$에서 $A\neq\varnothing$이면 $B\neq\varnothing$이므로 A, B가 공집합이 아니려면 $A\neq\varnothing$이어야 한다.

$A=\varnothing$이면 전체집합 U의 각 원소는 두 집합 $B-A$, B^C 중에서 어느 한 집합의 원소이고, 5개의 원소가 속하는 집합을 정하는 경우의 수는 2개의 집합에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$ …… (ii)

따라서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$243-32=211$ …… (iii)

채점 기준	
(i) $A\subset B$인 순서쌍 (A, B)의 개수 구하기	40%
(ii) $A\subset B$, $A=\varnothing$인 순서쌍 (A, B)의 개수 구하기	40%
(iii) $A\subset B$, $A\neq\varnothing$, $B\neq\varnothing$인 순서쌍 (A, B)의 개수 구하기	20%

0050 답 ⑤

$n(U)=6$, $n(A\cup B)=5$이므로 집합 $A\cup B$에 속하지 않는 원소 1개는 집합 $(A\cup B)^C$에 속한다.

전체집합 U의 6개의 원소 중에서 집합 $(A\cup B)^C$의 원소 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_1=6$

$A\cap B=\varnothing$이므로 집합 $A\cup B$의 원소 5개는 두 집합 A, B 중에서 어느 한 집합의 원소이다.

즉, 두 집합 A, B를 정하는 경우의 수는 2개의 집합에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 구하는 순서쌍 (A, B)의 개수는

$6\times32=192$

0051 답 ④

한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 눈의 수의 합이 13이 되는 경우는

1, 6, 6 또는 2, 5, 6 또는 3, 4, 6 또는 3, 5, 5 또는 4, 4, 5

(i) 1, 6, 6 또는 3, 5, 5 또는 4, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$3\times\frac{3!}{2!}=9$

(ii) 2, 5, 6 또는 3, 4, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수는
$2\times3!=12$
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$9+12=21$

0052 답 28

$a+b+c+d=9$가 되는 경우는
1, 1, 1, 6 또는 1, 1, 2, 5 또는 1, 1, 3, 4 또는 1, 2, 2, 4 또는
1, 2, 3, 3 또는 2, 2, 2, 3
이때 $abcd$가 4의 배수인 경우는
1, 1, 3, 4 또는 1, 2, 2, 4 또는 2, 2, 2, 3
1, 1, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$
1, 2, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$
2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$
따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$12+12+4=28$

0053 답 ③

$108=2^2\times3^3$이고 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 a, b, c, d 중 2개의 수가 서로 같거나 3개의 수가 서로 같아야 한다.
(i) 2개의 수가 서로 같은 경우
$108=2\times2\times3\times9=3\times3\times2\times6=6\times6\times1\times3$이므로 2개의 수가 서로 같은 경우는
2, 2, 3, 9 또는 3, 3, 2, 6 또는 6, 6, 1, 3
각각에 대하여 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 곱해진 4개의 수를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{2!}=12$
즉, 2개의 수가 서로 같은 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$3\times12=36$
(ii) 3개의 수가 서로 같은 경우
$108=3\times3\times3\times4$이므로 3개의 수가 서로 같은 경우는
3, 3, 3, 4
즉, 3개의 수가 서로 같은 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$\frac{4!}{3!}=4$
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$36+4=40$

0054 답 ③

(i) $a=1$일 때,
$\frac{bc}{a}=bc$는 항상 자연수이므로 b, c의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4의 4개의 숫자에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_2=4^2=16$
(ii) $a=2$일 때,
$\frac{bc}{a}=\frac{bc}{2}$가 자연수가 되려면 bc의 값은 2의 배수이어야 하므로 b, c의 값을 정하는 경우의 수에서 bc의 값이 홀수인 경우의 수를 빼면 된다.
b, c의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_2$이고, bc의 값이 홀수인 경우의 수는 1, 3의 2개의 숫자에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_2$이다.
즉, $a=2$일 때 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
${}_4\Pi_2-{}_2\Pi_2=4^2-2^2=12$
(iii) $a=3$일 때,
$\frac{bc}{a}=\frac{bc}{3}$가 자연수가 되려면 bc의 값은 3의 배수이어야 하므로 b, c의 값을 정하는 경우의 수에서 b, c의 값이 모두 3이 아닌 경우의 수를 빼면 된다.
b, c의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_2$이고, b, c의 값이 모두 3이 아닌 경우의 수는 1, 2, 4의 3개의 숫자에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_2$이다.
즉, $a=3$일 때 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
${}_4\Pi_2-{}_3\Pi_2=4^2-3^2=7$
(iv) $a=4$일 때,
$\frac{bc}{a}=\frac{bc}{4}$가 자연수가 되려면 bc의 값은 4의 배수이어야 하므로 b, c의 값이 모두 2이거나 b, c의 값 중에서 적어도 하나가 4이어야 한다.
① b, c의 값이 모두 2인 경우는 1가지
② b, c의 값 중에서 적어도 하나가 4이려면 b, c의 값을 정하는 경우의 수에서 b, c의 값이 모두 4가 아닌 경우의 수를 빼면 된다.
b, c의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_2$이고, b, c의 값이 모두 4가 아닌 경우의 수는 1, 2, 3의 3개의 숫자에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_2$이다.
즉, b, c의 값 중에서 적어도 하나가 4인 경우의 수는
${}_4\Pi_2-{}_3\Pi_2=4^2-3^2=7$
①, ②에서 $a=4$일 때 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$1+7=8$
(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는
$16+12+7+8=43$

0055 답 363

$a\times b\times c\times d$가 16의 배수가 되려면 a, b, c, d 중에서 짝수의 개수는 2 이상이어야 한다.
(i) a, b, c, d 중에서 짝수의 개수가 2인 경우
$a\times b\times c\times d$가 16의 배수이므로 짝수 2개 모두 4이어야 한다.
a, b, c, d 중에서 4인 수 2개를 택하는 경우의 수는
${}_4C_2=6$
나머지 2개의 수가 홀수인 경우의 수는
${}_3\Pi_2=3^2=9$
즉, 짝수의 개수가 2인 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$6\times9=54$
(ii) a, b, c, d 중에서 짝수의 개수가 3인 경우
$a\times b\times c\times d$가 16의 배수이므로 짝수 3개 중에서 적어도 하나는 4이어야 한다.
a, b, c, d 중에서 짝수인 수 3개를 택하는 경우의 수는
${}_4C_3={}_4C_1=4$

짝수 중에서 적어도 하나가 4이려면 짝수인 경우의 수에서 4가 아닌 짝수인 경우의 수를 빼면 된다.

${}_3\Pi_3-{}_2\Pi_3=3^3-2^3=19$

나머지 1개의 수가 홀수인 경우의 수는

${}_3\Pi_1=3$

즉, 짝수의 개수가 3인 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$4\times19\times3=228$

(iii) a, b, c, d 중에서 짝수의 개수가 4인 경우

모두 짝수이므로 짝수의 개수가 4인 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 ${}_3\Pi_4=3^4=81$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$54+228+81=363$

0056 답 ⑤

주머니에서 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수이면 적힌 수만큼 점수를 얻고, 짝수이면 적힌 수만큼 점수를 잃으므로 한 번에 얻을 수 있는 점수는 1, 3, 5, −2, −4이다.

이때 얻은 네 점수의 합이 짝수가 되려면 4번 중 홀수가 적힌 공이 0번 또는 2번 또는 4번 나와야 한다.

(i) 홀수가 적힌 공이 0번 나온 경우

짝수가 적힌 공이 4번 나오면 네 점수의 합은 −8 이하이므로 2가 되는 경우는 존재하지 않는다.

(ii) 홀수가 적힌 공이 2번 나온 경우

짝수가 적힌 공이 2번 나오므로 네 점수의 합이 2가 되려면

$1+5+(-2)+(-2)=2$, $3+3+(-2)+(-2)=2$,

$3+5+(-2)+(-4)=2$, $5+5+(-4)+(-4)=2$

이어야 한다.

① 1, 5, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

② 3, 3, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

③ 3, 5, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$4!=24$

④ 5, 5, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

①~④에서 네 점수의 합이 2가 되는 경우의 수는

$12+6+24+6=48$

(iii) 홀수가 적힌 공이 4번 나온 경우

홀수가 적힌 공이 4번 나오면 네 점수의 합은 4 이상이므로 2가 되는 경우는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$0+48+0=48$

0057 답 ⑤

구하는 방법의 수는 3개의 접시에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$

0058 답 ①

서로 다른 7개의 빵 중에서 바구니에 나누어 담을 3개의 빵을 택하는 방법의 수는

${}_7C_3=35$

택한 3개의 빵을 서로 다른 4개의 바구니에 나누어 담는 방법의 수는 4개의 바구니에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 방법의 수는

$35\times64=2240$

0059 답 135

서로 다른 6자루의 연필 중에서 필통 A에 담을 연필 4자루를 택하는 경우의 수는

${}_6C_4={}_6C_2=15$

나머지 연필 2자루를 3개의 필통 B, C, D에 나누어 담는 경우의 수는 3개의 필통에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times9=135$

0060 답 ③

A, B, C 세 사람에게 서로 다른 5개의 인형을 나누어 주는 방법의 수는 3명의 사람에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5$

D, E 두 사람에게 서로 다른 4개의 컵을 나누어 주는 방법의 수는 2명의 사람에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_4=2^4$

따라서 구하는 방법의 수는

$3^5\times2^4=3\times(2\times3)^4=3\times6^4$

0061 답 ②

서로 다른 5개의 공을 서로 다른 3개의 상자에 나누어 담는 방법의 수는 3개의 상자에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$

이때 각 상자에 적어도 1개의 공을 담으려면 모든 경우의 수에서 빈 상자가 존재하는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 빈 상자가 1개인 경우

5개의 공을 2개의 상자에 나누어 담으면 되므로 3개의 상자 중에서 공을 담을 2개의 상자를 택하는 방법의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

서로 다른 5개의 공을 서로 다른 2개의 상자에 나누어 담는 방법의 수는 2개의 상자에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

이때 5개의 공을 모두 1개의 상자에만 담는 2가지를 제외해야 하므로

$32-2=30$

즉, 빈 상자가 1개인 경우의 수는

$3\times30=90$

(ii) 빈 상자가 2개인 경우

5개의 공을 모두 1개의 상자에만 담으면 되므로 3개의 상자 중에서 공을 모두 담을 1개의 상자를 택하는 방법의 수는

${}_3C_1=3$

(i), (ii)에서 빈 상자가 존재하는 경우의 수는

$90+3=93$

따라서 구하는 방법의 수는

$243-93=150$

다른 풀이

서로 다른 5개의 공을 서로 다른 3개의 상자에 나누어 담을 때, 각 상자에 적어도 한 개의 공을 담으려면 각 상자에 공을 1개, 1개, 3개 또는 1개, 2개, 2개 담아야 한다.

(i) 1개, 1개, 3개 담는 경우

서로 다른 5개의 공을 1개, 1개, 3개로 나누고 일렬로 나열하여 순서대로 상자에 넣으면 되므로 그 방법의 수는

${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_3\times\frac{3!}{2!}=60$

(ii) 1개, 2개, 2개 담는 경우

서로 다른 5개의 공을 1개, 2개, 2개로 나누고 일렬로 나열하여 순서대로 상자에 넣으면 되므로 그 방법의 수는

${}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{3!}{2!}=90$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$60+90=150$

0062 답 64

(i) 공에 적힌 수의 합이 4인 경우

네 수의 합이 4이려면 4명이 가진 공에 적힌 수가 모두 1이면 되므로 그 경우의 수는 1 …… ⓘ

(ii) 공에 적힌 수의 합이 8인 경우

네 수의 합이 8인 경우는

$1+1+2+4=8$, $1+1+3+3=8$,

$1+2+2+3=8$, $2+2+2+2=8$

① 4명이 가진 공에 적힌 수가 1, 1, 2, 4인 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

② 4명이 가진 공에 적힌 수가 1, 1, 3, 3인 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

③ 4명이 가진 공에 적힌 수가 1, 2, 2, 3인 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

④ 4명이 가진 공에 적힌 수가 2, 2, 2, 2인 경우의 수는 1

①~④에서 공에 적힌 네 수의 합이 8인 경우의 수는

$12+6+12+1=31$ …… ⓘⓘ

(iii) 공에 적힌 수의 합이 12인 경우

네 수의 합이 12인 경우는

$1+3+4+4=12$, $2+2+4+4=12$,

$2+3+3+4=12$, $3+3+3+3=12$

① 4명이 가진 공에 적힌 수가 1, 3, 4, 4인 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

② 4명이 가진 공에 적힌 수가 2, 2, 4, 4인 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

③ 4명이 가진 공에 적힌 수가 2, 3, 3, 4인 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

④ 4명이 가진 공에 적힌 수가 3, 3, 3, 3인 경우의 수는 1

①~④에서 공에 적힌 네 수의 합이 12인 경우의 수는

$12+6+12+1=31$ …… ⓘⓘⓘ

(iv) 공에 적힌 수의 합이 16인 경우

네 수의 합이 16이려면 4명이 가진 공에 적힌 수가 모두 4이면 되므로 그 경우의 수는 1 …… ⓘⓥ

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$1+31+31+1=64$ …… ⓥ

채점 기준

ⓘ 공에 적힌 수의 합이 4인 경우의 수 구하기	10 %
ⓘⓘ 공에 적힌 수의 합이 8인 경우의 수 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 공에 적힌 수의 합이 12인 경우의 수 구하기	30 %
ⓘⓥ 공에 적힌 수의 합이 16인 경우의 수 구하기	10 %
ⓥ 공에 적힌 수의 합이 4의 배수가 되는 경우의 수 구하기	20 %

0063 답 ④

서로 다른 4개의 공을 서로 다른 4개의 상자에 나누어 넣는 방법의 수는 4개의 상자에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_4=4^4=256$

이때 공의 개수가 1인 상자가 없으려면 각 상자에 공을

4개, 0개, 0개, 0개 또는 2개, 2개, 0개, 0개 넣어야 한다.

(i) 4개, 0개, 0개, 0개 넣는 경우

4개의 공을 넣을 상자 1개를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

(ii) 2개, 2개, 0개, 0개 넣는 경우

빈 상자 2개를 정하고 남은 2개의 상자에 공을 2개씩 나누어 넣으면 되므로 그 경우의 수는

${}_4C_2\times({}_4C_2\times{}_2C_2)=36$

(i), (ii)에서 넣은 공의 개수가 1인 상자가 없는 경우의 수는

$4+36=40$

따라서 구하는 방법의 수는

$256-40=216$

다른 풀이

서로 다른 4개의 공을 서로 다른 4개의 상자에 나누어 넣을 때, 넣은 공의 개수가 1인 상자가 있도록 공을 나누어 넣으려면 각 상자에 공을 1개, 3개, 0개, 0개 또는 1개, 1개, 2개, 0개 또는

1개, 1개, 1개, 1개 넣어야 한다.

(i) 1개, 3개, 0개, 0개 넣는 경우

서로 다른 4개의 공을 1개, 3개로 나누고 일렬로 나열하여 상자에 넣으면 되므로 그 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_3C_3\times\frac{4!}{2!}=48$

(ii) 1개, 1개, 2개, 0개 넣는 경우

서로 다른 4개의 공을 1개, 1개, 2개로 나누고 일렬로 나열하여 상자에 넣으면 되므로 그 경우의 수는

${}_4C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_2 \times \frac{4!}{2!} = 144$

(iii) 1개, 1개, 1개, 1개 넣는 경우

서로 다른 4개의 공을 일렬로 나열하여 상자에 넣으면 되므로 그 경우의 수는

$4! = 24$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$48 + 144 + 24 = 216$

0064 답 ④

어떤 사람도 서로 같은 색의 공 2개를 받지 않으려면 6명의 사람이 각각 서로 다른 색의 공을 2개씩 받아야 한다.

빨간 공 1개, 흰 공 1개를 받는 사람이 x명,

빨간 공 1개, 검은 공 1개를 받는 사람이 y명,

흰 공 1개, 검은 공 1개를 받는 사람이 z명

이라 하면 모두 6명이므로

$x + y + z = 6$ ····· ㉠

또 빨간 공 4개, 흰 공 5개, 검은 공 3개가 있으므로

$x + y = 4$, $x + z = 5$, $y + z = 3$ ····· ㉡

㉡을 각각 ㉠에 대입하여 풀면

$z = 2$, $y = 1$, $x = 3$

따라서 구하는 방법의 수는

$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$

0065 답 ③

문자 A가 적혀 있는 카드가 들어간 3개의 상자에 적힌 수의 합이 홀수가 되는 경우는 3개의 상자에 적힌 수 중 홀수가 1개이거나 홀수가 3개인 경우이다.

(i) 홀수가 적힌 상자가 1개인 경우

홀수가 적힌 상자 1개와 짝수가 적힌 상자 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_1 \times {}_3C_2 = 4 \times 3 = 12$

택한 3개의 상자에 문자 A가 적혀 있는 카드를 나누어 넣는 경우의 수는 1

나머지 4개의 상자에 남은 4장의 카드를 나누어 넣는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!} = 12$

즉, 홀수가 적힌 상자가 1개인 경우의 수는

$12 \times 1 \times 12 = 144$

(ii) 홀수가 적힌 상자가 3개인 경우

홀수가 적힌 상자 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

택한 3개의 상자에 문자 A가 적혀 있는 카드를 나누어 넣는 경우의 수는 1

나머지 4개의 상자에 남은 4장의 카드를 나누어 넣는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!} = 12$

즉, 홀수가 적힌 상자가 3개인 경우의 수는

$4 \times 1 \times 12 = 48$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$144 + 48 = 192$

0066 답 ②

(i) 과일이 두 종류인 경우의 수

네 종류의 과일 중에서 두 종류를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$

두 종류의 과일을 a, b라 하면 4명에게 나누어 주는 경우는

a, a, a, b 또는 a, b, b, b 또는 a, a, b, b이다.

① a, a, a, b 또는 a, b, b, b를 4명에게 나누어 주는 경우의 수는

$2 \times \frac{4!}{3!} = 8$

② a, a, b, b를 4명에게 나누어 주는 경우의 수는

$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$

①, ②에서 두 종류의 과일을 4명에게 나누어 주는 경우의 수는

$8 + 6 = 14$

즉, 4명의 학생이 받은 과일이 두 종류인 경우의 수는

$p = 6 \times 14 = 84$

(ii) 과일이 세 종류인 경우의 수

네 종류의 과일 중에서 세 종류를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_3 = 4$

세 종류의 과일을 a, b, c라 하면 4명에게 나누어 주는 경우는

a, a, b, c 또는 a, b, b, c 또는 a, b, c, c이므로 그 경우의 수는

$3 \times \frac{4!}{2!} = 36$

즉, 4명의 학생이 받은 과일이 세 종류인 경우의 수는

$q = 4 \times 36 = 144$

$\therefore p + q = 84 + 144 = 228$

0067 답 ②

(i) 학생 B가 받는 빵의 개수가 0인 경우

서로 다른 6개의 빵을 두 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2\Pi_6 = 2^6 = 64$

이때 학생 A가 빵을 하나도 받지 못하는 1가지를 제외해야 하므로 그 경우의 수는

$64 - 1 = 63$

(ii) 학생 B가 받는 빵의 개수가 1인 경우

서로 다른 6개의 빵 중에서 학생 B가 받을 빵 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_1 = 6$

남은 5개의 빵을 두 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$

이때 학생 A가 빵을 하나도 받지 못하는 1가지를 제외해야 하므로 그 경우의 수는

$32 - 1 = 31$

즉, 학생 B가 받는 빵의 개수가 1인 경우의 수는

$6 \times 31 = 186$

(ⅲ) 학생 B가 받는 빵의 개수가 2인 경우

서로 다른 6개의 빵 중에서 학생 B가 받을 빵 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$

남은 4개의 빵을 두 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2\Pi_4=2^4=16$

이때 학생 A가 빵을 하나도 받지 못하는 1가지를 제외해야 하므로 그 경우의 수는

$16-1=15$

즉, 학생 B가 받는 빵의 개수가 2인 경우의 수는

$15\times15=225$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$63+186+225=474$

다른 풀이

서로 다른 6개의 빵을 세 학생 A, B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\Pi_6=3^6=729$

(ⅰ) 학생 A가 받는 빵의 개수가 0인 경우

서로 다른 6개의 빵을 두 학생 B, C에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2\Pi_6=2^6=64$

(ⅱ) 학생 A가 받는 빵의 개수가 1 이상이고, 학생 B가 받는 빵의 개수가 3 이상인 경우

세 학생 A, B, C가 받을 수 있는 빵의 개수를 순서쌍 (A, B, C)로 나타내면

(1, 3, 2) 또는 (1, 4, 1) 또는 (1, 5, 0) 또는

(2, 3, 1) 또는 (2, 4, 0) 또는 (3, 3, 0)

① (1, 3, 2)인 경우의 수는

${}_6C_1\times{}_5C_3\times{}_2C_2=60$

② (1, 4, 1)인 경우의 수는

${}_6C_1\times{}_5C_4\times{}_1C_1=30$

③ (1, 5, 0)인 경우의 수는

${}_6C_1\times{}_5C_5=6$

④ (2, 3, 1)인 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_3\times{}_1C_1=60$

⑤ (2, 4, 0)인 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_4=15$

⑥ (3, 3, 0)인 경우의 수는

${}_6C_3\times{}_3C_3=20$

①~⑥에서 그 경우의 수는

$60+30+6+60+15+20=191$

(ⅰ), (ⅱ)에서 학생 A가 빵을 받지 못하거나 학생 A가 빵을 받고 학생 B가 빵을 3개 이상 받는 경우의 수는

$64+191=255$

따라서 구하는 경우의 수는

$729-255=474$

0068 답 273

㈎를 만족시키려면 각 상자에 구슬이 하나도 없거나 짝수가 적힌 구슬이 1개 이상 있어야 한다. 즉, 홀수가 적힌 구슬은 짝수가 적힌 구슬이 들어 있는 상자에만 넣을 수 있다.

(ⅰ) 짝수가 적힌 구슬을 3개의 상자에 넣는 경우

세 상자에 짝수가 적힌 구슬을 하나씩 넣는 방법의 수는

$3!=6$

짝수가 적힌 구슬이 들어 있는 세 상자에 홀수가 적힌 구슬 3개를 나누어 넣는 방법의 수는

${}_3\Pi_3=3^3=27$

즉, 짝수가 적힌 구슬을 3개의 상자에 넣는 방법의 수는

$6\times27=162$

(ⅱ) 짝수가 적힌 구슬을 2개의 상자에 넣는 경우 → 빈 상자 1개

짝수가 적힌 구슬을 넣을 2개의 상자를 택하는 방법의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

짝수가 적힌 구슬 3개를 2개, 1개로 나누어 두 상자에 넣는 방법의 수는

${}_3C_2\times{}_1C_1\times2!=6$

짝수가 적힌 구슬이 들어 있는 두 상자에 홀수가 적힌 구슬 3개를 나누어 넣는 방법의 수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

즉, 짝수가 적힌 구슬을 2개의 상자에 넣는 방법의 수는

$3\times6\times8=144$

(ⅲ) 짝수가 적힌 구슬을 1개의 상자에 넣는 경우 → 빈 상자 2개

짝수가 적힌 구슬을 넣을 1개의 상자를 택하는 방법의 수는

${}_3C_1=3$

짝수가 적힌 구슬 3개를 한 상자에 넣는 방법의 수는 1

짝수가 적힌 구슬이 들어 있는 한 상자에 홀수가 적힌 구슬 3개를 넣는 방법의 수는 1

즉, 짝수가 적힌 구슬을 1개의 상자에 넣는 방법의 수는

$3\times1\times1=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 ㈎를 만족시키는 경우의 수는

$162+144+3=309$

이때 ㈏도 만족시키려면 위의 경우의 수에서 구슬이 3개 이상 들어 있는 상자가 없으면서, 즉 각 상자에 구슬이 2개씩 들어 있으면서 ㈎를 만족시키는 경우의 수를 빼야 한다.

각 상자에 짝수가 적힌 구슬 1개, 홀수가 적힌 구슬 1개씩 넣는 방법의 수는

$3!\times3!=36$

따라서 구하는 방법의 수는

$309-36=273$

0069 답 ④

동전 1개를 6번 던질 때 앞면이 2번 나오면 뒷면은 4번 나와야 한다.

즉, 동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 H, H, T, T, T, T를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{6!}{2!\times4!}=15$$

다른 풀이

동전 1개를 6번 던질 때 앞면이 2번 나오는 경우의 수는 서로 다른 6번의 시행 중에서 앞면이 나올 2번을 택하는 것과 같으므로

${}_6C_2=15$

0070 답 540

6명의 학생이 3개의 반 A, B, C에 배정되는 경우의 수는 3개의 반에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_6=3^6=729$ …… ⓘ

이때 각 반에 학생이 1명 이상 배정되어야 하므로 빈 반이 생기는 경우를 제외해야 한다.

(i) 학생이 모두 같은 반에 배정되는 경우

3개의 반 중에서 학생이 배정될 1개의 반을 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

(ii) 학생이 2개의 반에 배정되는 경우

3개의 반 중에서 학생이 배정될 2개의 반을 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

6명의 학생이 2개의 반에 배정되는 경우의 수는 2개의 반에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_6=2^6=64$

이때 6명의 학생이 하나의 반에 배정되는 2가지는 제외해야 하므로

$64-2=62$

즉, 학생이 2개의 반에 배정되는 경우의 수는

$3\times62=186$

(i), (ii)에서 빈 반이 생기는 경우의 수는

$3+186=189$ …… ⓘⓘ

따라서 각 반에 학생이 1명 이상 배정되는 경우의 수는

$729-189=540$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 6명의 학생이 3개의 반에 배정되는 경우의 수 구하기	20 %
ⓘⓘ 빈 반이 생기는 경우의 수 구하기	60 %
ⓘⓘⓘ 각 반에 학생이 1명 이상 배정되는 경우의 수 구하기	20 %

0071 답 ④

(i) 1칸씩 7번 오르는 경우의 수는 1

(ii) 1칸씩 5번, 2칸씩 1번 오르는 경우의 수는

$\frac{6!}{5!}=6$

(iii) 1칸씩 3번, 2칸씩 2번 오르는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!\times2!}=10$

(iv) 1칸씩 1번, 2칸씩 3번 오르는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$1+6+10+4=21$

다른 풀이

(i) 1칸씩 7번 오르는 경우

계단을 오르는 7번 중에서 2칸을 오르는 경우는 없으므로 그 경우의 수는 1

(ii) 1칸씩 5번, 2칸씩 1번 오르는 경우

계단을 오르는 6번 중에서 2칸을 오르는 1번을 고르는 경우의 수는 ${}_6C_1=6$

(iii) 1칸씩 3번, 2칸씩 2번 오르는 경우

계단을 오르는 5번 중에서 2칸을 오르는 2번을 고르는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

(iv) 1칸씩 1번, 2칸씩 3번 오르는 경우

계단을 오르는 4번 중에서 2칸을 오르는 3번을 고르는 경우의 수는 ${}_4C_3={}_4C_1=4$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$1+6+10+4=21$

0072 답 ②

(i) 주사위의 눈의 수의 합이 5인 경우

주사위의 눈의 수가 1, 1, 3 또는 1, 2, 2이어야 한다.

1, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

즉, 눈의 수의 합이 5인 경우의 수는 $3+3=6$

(ii) 주사위의 눈의 수의 합이 7인 경우

주사위의 눈의 수가 1, 1, 5 또는 1, 2, 4 또는 1, 3, 3 또는 2, 2, 3이어야 한다.

1, 1, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

1, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

1, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

즉, 눈의 수의 합이 7인 경우의 수는 $3+6+3+3=15$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6+15=21$

0073 답 ④

학생 4명이 각자 하나씩 놀이기구를 택하는 경우의 수에서 서로 다른 놀이기구를 택하는 경우의 수를 빼면 된다.

각자 하나씩 놀이기구를 택하는 경우의 수는 서로 다른 놀이기구 5개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_4=5^4=625$

서로 다른 놀이기구를 택하는 경우의 수는 서로 다른 놀이기구 5개 중에서 4개를 택하여 학생 4명에게 배정하는 경우의 수와 같으므로

${}_5P_4=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$625-120=505$

0074 답 31

○의 개수가 ●의 개수보다 커야 하므로 ●의 개수는 0 또는 1이어야 한다.

(i) ●의 개수가 0인 경우

○의 개수는 0보다 커야 하므로 ○의 개수는 1 또는 2 또는 3 또는 4이다.

① ○의 개수가 1인 경우

○, ◎, ◎, ◎를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

② ○의 개수가 2인 경우

○, ○, ◎, ◎를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

③ ○의 개수가 3인 경우

○, ○, ○, ◎를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

④ ○의 개수가 4인 경우

○, ○, ○, ○를 일렬로 나열하는 경우의 수는 1

①~④에서 ●의 개수가 0인 경우의 수는

$4+6+4+1=15$ …… ⓘ

(ii) ●의 개수가 1인 경우

○의 개수는 1보다 커야 하므로 ○의 개수는 2 또는 3이다.

① ○의 개수가 2인 경우

○, ○, ●, ◎를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

② ○의 개수가 3인 경우

○, ○, ○, ●를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

①, ②에서 ●의 개수가 1인 경우의 수는

$12+4=16$ …… ⓘⓘ

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$15+16=31$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ ●의 개수가 0인 경우의 수 구하기	40 %
ⓘⓘ ●의 개수가 1인 경우의 수 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ ○의 개수가 ●의 개수보다 큰 경우의 수 구하기	20 %

0075 답 76

나오는 눈의 수의 곱이 홀수인 경우의 수에서 5 미만의 홀수인 경우의 수를 빼면 된다.

주사위 1개를 4번 던져 나오는 눈의 수의 곱이 홀수이려면 4번 모두 홀수의 눈이 나와야 한다.

주사위 1개를 4번 던질 때 홀수의 눈이 4번 나오는 경우의 수는 홀수 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$

이때 눈의 수의 곱이 5 미만의 홀수인 경우는 네 눈의 수가 1, 1, 1, 1 또는 1, 1, 1, 3이어야 한다.

(i) 1, 1, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수는

1

(ii) 1, 1, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(i), (ii)에서 눈의 수의 곱이 5 미만의 홀수인 경우의 수는

$1+4=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$81-5=76$

0076 답 ⑤

각 요일별 봉사 활동 시간의 합이 8이 되는 경우는

1, 1, 3, 3 또는 1, 2, 2, 3 또는 2, 2, 2, 2

(i) 1시간 2일, 3시간 2일로 각 요일별 봉사 활동 시간을 정하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

(ii) 1시간 1일, 2시간 2일, 3시간 1일로 각 요일별 봉사 활동 시간을 정하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

(iii) 2시간 4일로 각 요일별 봉사 활동 시간을 정하는 경우의 수는 1

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$6+12+1=19$

0077 답 1560

4개의 기호 중에서 각 기호를 한 번 이상 사용하여 6자리의 잠금 코드를 만들려면 기호를 1번, 1번, 1번, 3번 또는 1번, 1번, 2번, 2번 사용해야 한다.

(i) 기호를 1번, 1번, 1번, 3번 사용하는 경우

4개의 기호 중에서 3번 사용할 기호 1개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

6개의 기호를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!}=120$

즉, 기호를 1번, 1번, 1번, 3번 사용하는 경우의 수는

$4\times 120=480$

(ii) 기호를 1번, 1번, 2번, 2번 사용하는 경우

4개의 기호 중에서 2번 사용할 기호 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

6개의 기호를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times 2!}=180$

즉, 기호를 1번, 1번, 2번, 2번 사용하는 경우의 수는

$6\times 180=1080$

(i), (ii)에서 구하는 잠금 코드의 개수는

$480+1080=1560$

0078 답 90

꺼낸 공에 적힌 숫자의 합이 홀수이므로 홀수가 적힌 공을 홀수 번 꺼내야 한다. 즉, 5가 적힌 공을 1번 또는 3번 꺼내야 한다.

(i) 5가 적힌 공을 1번 꺼내는 경우

$41-5=36$이므로 8, 8, 10, 10이 적힌 공을 꺼내야 한다.

즉, 5, 8, 8, 10, 10을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

(ii) 5가 적힌 공을 3번 꺼내는 경우

$41-15=26$이므로 8, 8, 10이 적힌 공을 꺼내야 한다.

즉, 5, 5, 5, 8, 8, 10을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times 2!}=60$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$30+60=90$

0079 답 210

향초를 크기가 작은 것부터 차례로 a_1, a_2, a_3이라 하고 향수병을 크기가 작은 것부터 차례로 b_1, b_2, b_3, b_4라 하자.

이때 (가), (나)를 만족시키려면 a_1, a_2, a_3, b_1이 이 순서대로 나열되어야 한다. …… ⓘ

a_1, a_2, a_3, b_1을 모두 x로 바꾸어 생각하여 x, x, x, x, b_2, b_3, b_4를 일렬로 배열한 후 첫 번째, 두 번째, 세 번째, 네 번째 x를 각각 a_1, a_2, a_3, b_1로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$\frac{7!}{4!}=210$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 향초와 향수병의 정해진 순서 파악하기	50 %
ⓘⓘ 향초 3개와 향수병 4개를 일렬로 나열하는 방법의 수 구하기	50 %

0080 답 ②

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{7!}{4!\times3!}=35$

A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!\times2!}\times2=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$35-20=15$

0081 답 ③

한 번에 2 또는 3만큼 움직여서 12만큼 움직이므로 홀수인 3만큼을 0번 또는 2번 또는 4번 움직여야 한다.

(i) 3만큼을 0번 움직이는 경우

2만큼을 6번 움직여야 하므로 그 경우의 수는 1

(ii) 3만큼을 2번 움직이는 경우

2만큼을 3번, 3만큼을 2번 움직여야 하므로 그 경우의 수는

$\frac{5!}{3!\times2!}=10$

(iii) 3만큼을 4번 움직이는 경우

그 경우의 수는 1

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$1+10+1=12$

0082 답 ①

오전의 학습 계획을 세우는 경우의 수는 A, A, B, C, C를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

오전의 학습 계획이 다음과 같이 정해졌다고 할 때,

	월	화	수	목	금
오전	A	A	B	C	C
오후					

오후에 B를 학습할 수 있는 요일은 수요일을 제외한 4일 중 하나이므로 그 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

월요일 오후에 B를 학습한다고 하면 화요일과 수요일 오후는 C, 목요일과 금요일 오후는 A를 학습해야 한다. 즉, 오후에 B를 학습할 요일을 1가지 정하면 나머지 과목의 요일도 1가지로 정해진다.

따라서 오전의 학습 계획이 앞과 같이 정해졌을 때, 오후의 학습 계획을 세우는 경우의 수는 $4\times1=4$

같은 방법으로 오전의 학습 계획이 임의로 정해졌을 때, 오후의 학습 계획을 세우는 경우의 수는 항상 4이다.

따라서 구하는 방법의 수는

$30\times4=120$

0083 답 ④

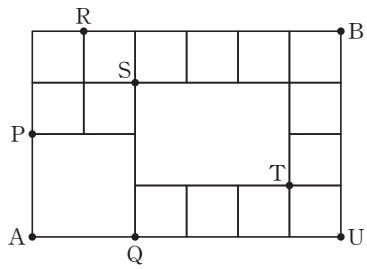
그림과 같이 여섯 지점 P, Q, R, S, T, U를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

A → P → R → B 또는

A → P → S → B 또는

A → Q → S → B 또는

A → Q → T → B 또는 A → Q → U → B



(i) A → P → R → B로 가는 경우의 수는

$1\times\frac{3!}{2!}\times1=3$

(ii) A → P → S → B로 가는 경우의 수는

$1\times\frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{4!}=15$

(iii) A → Q → S → B로 가는 경우의 수는

$1\times1\times\frac{5!}{4!}=5$

(iv) A → Q → T → B로 가는 경우의 수는

$1\times\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{3!}=16$

(v) A → Q → U → B로 가는 경우의 수는

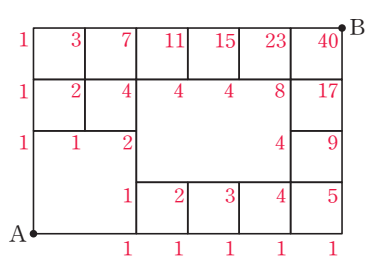
$1\times1\times1=1$

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$3+15+5+16+1=40$

다른 풀이

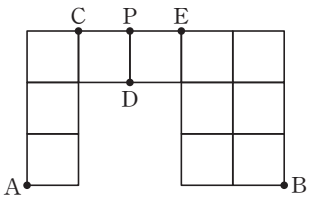
A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가려면 왼쪽에서 오른쪽으로, 아래쪽에서 위쪽으로 가야 한다. 따라서 어느 한 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 왼쪽에서 오는 경우의 수와 아래쪽에서 오는 경우의 수를 더하여 구할 수 있다. 이를 이용하여 각 지점까지 가는 경우의 수를 표시하면 그림과 같다.



따라서 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 40이다.

0084 답 ⑤

그림과 같이 세 지점 C, D, E를 잡으면 A 지점에서 출발하여 P 지점까지 가기 위해서는 C 지점 또는 D 지점 중에서 한 지점을 지나야 하고, P 지점에서 출발하여 B 지점까지 가기 위해서는 D 지점 또는 E 지점 중에서 한 지점을 지나야 한다. 이때 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않아야 하므로 D → P → D의 순서로 이동할 수 없다.



즉, A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

A → C → P → D → B 또는 A → C → P → E → B 또는

A → D → P → E → B

(i) A → C → P → D → B의 순서로 이동하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\times1\times1\times1\times\frac{4!}{2!\times2!}=24$

(ii) A → C → P → E → B의 순서로 이동하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\times1\times1\times\frac{5!}{2!\times3!}=40$

(iii) A → D → P → E → B의 순서로 이동하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\times1\times1\times1\times\frac{5!}{2!\times3!}=30$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$24+40+30=94$

0085 답 ①

켜진 세 전구를 왼쪽부터 순서대로 O_1, O_2, O_3이라 하고, 꺼진 전구를 X라 하자.

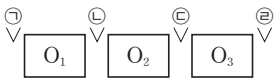
첫 번째 켜진 전구의 왼쪽에는 꺼진 전구가 1개 이상, 두 번째 켜진 전구의 왼쪽에는 꺼진 전구가 1개 이상, 세 번째 켜진 전구의 왼쪽에는 꺼진 전구가 2개 이상 있어야 하므로 XO_1, XO_2, XXO_3이 이 순서대로 나열되어야 한다.

이때 XO_1, XO_2, XXO_3의 순서가 정해져 있으므로 XO_1, XO_2, XXO_3을 각각 한 문자 Y로 생각하여 Y, Y, Y, X, X, X, X, X, X, X를 일렬로 나열한 후 첫 번째 Y를 XO_1로, 두 번째 Y를 XO_2로, 세 번째 Y를 XXO_3으로 바꾸고, O_1, O_2, O_3이 있는 위치의 전구만 켜면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 $\frac{11!}{3!\times8!}=165$

다른 풀이

켜진 세 전구를 왼쪽부터 순서대로 O_1, O_2, O_3이라 하고, O_1의 왼쪽, O_1과 O_2 사이, O_2와 O_3 사이, O_3의 오른쪽 공간을 각각 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣이라 하자.



주어진 규칙을 만족시키기 위해 꺼진 전구를 ㉠에 1개, ㉡에 1개, ㉢에 2개 놓고, 나머지 8개의 꺼진 전구는 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 나누어 놓으면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣ 중에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$

최고수준 도전 기출 22~23쪽

0086 답 ②

전략 720을 소인수분해하여 b가 될 수 있는 수에 따라 경우의 수를 구하고, a와 c가 서로소인 경우의 수를 뺀다.

720을 소인수분해하면 $720=2^4\times3^2\times5$

즉, (가)에서 b가 될 수 있는 수는

$1, 2, 3, 2^2=4, 2\times3=6, 2^2\times3=12$

(i) $b=1$인 경우

$ac=2^4\times3^2\times5$이므로 a, c는 $2^4\times3^2\times5$의 약수이다.

이때 a가 정해지면 c는 자동으로 정해지므로 가능한 순서쌍 (a, c)의 개수는 $2^4\times3^2\times5$의 약수의 개수와 같다. 즉,

$(4+1)\times(2+1)\times(1+1)=5\times3\times2=30$

이 중 a와 c가 서로소인 경우는 a와 c의 공약수가 1뿐인 경우이므로 2^4, 3^2, 5가 각각 a와 c 중 어느 하나의 약수이어야 한다.

즉, a와 c가 서로소인 순서쌍 (a, c)의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

그러므로 서로소가 아닌 자연수 a, c의 순서쌍 (a, c)의 개수는

$30-8=22$

(ii) $b=2$인 경우

$ac=2^2\times3^2\times5$이므로 a, c는 $2^2\times3^2\times5$의 약수이다.

이때 a가 정해지면 c는 자동으로 정해지므로 가능한 순서쌍 (a, c)의 개수는 $2^2\times3^2\times5$의 약수의 개수와 같다. 즉,

$(2+1)\times(2+1)\times(1+1)=3\times3\times2=18$

이 중 a와 c가 서로소인 경우는 a와 c의 공약수가 1뿐인 경우이므로 2^2, 3^2, 5가 각각 a와 c 중 어느 하나의 약수이어야 한다.

즉, a와 c가 서로소인 순서쌍 (a, c)의 개수는

${}_2\Pi_3=2^3=8$

그러므로 서로소가 아닌 자연수 a, c의 순서쌍 (a, c)의 개수는

$18-8=10$

(iii) $b=3$인 경우

$ac=2^4\times5$이므로 a, c는 $2^4\times5$의 약수이다.

이때 a가 정해지면 c는 자동으로 정해지므로 가능한 순서쌍 (a, c)의 개수는 $2^4\times5$의 약수의 개수와 같다. 즉,

$(4+1)\times(1+1)=5\times2=10$

이 중 a와 c가 서로소인 경우는 a와 c의 공약수가 1뿐인 경우이므로 2^4, 5가 각각 a와 c 중 어느 하나의 약수이어야 한다.

즉, a와 c가 서로소인 순서쌍 (a, c)의 개수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

그러므로 서로소가 아닌 자연수 a, c의 순서쌍 (a, c)의 개수는

$10-4=6$

(iv) $b=4$인 경우

$ac=3^2\times5$이므로 서로소가 아닌 자연수 a, c의 순서쌍 (a, c)의 개수는 $(3, 15)$ 또는 $(15, 3)$의 2

(v) $b=6$인 경우

$ac=2^2\times5$이므로 서로소가 아닌 자연수 a, c의 순서쌍 (a, c)의 개수는 $(2, 10)$ 또는 $(10, 2)$의 2

(vi) $b=12$인 경우

조건을 만족시키는 순서쌍 (a, c)는 존재하지 않는다.

(i)~(vi)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$22+10+6+2+2=42$

0087 답 171

전략 각 자리의 숫자를 3으로 나눈 나머지를 이용하여 3의 배수의 개수를 구하고, 각 자리의 숫자 중 짝수의 개수가 3개 이상인 경우의 수를 뺀다.

네 자리의 자연수가 3의 배수가 되려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 하므로 각 자리의 숫자를 3으로 나눈 나머지의 합이 0 또는 3의 배수이어야 한다.

이때 각 자리의 숫자를 3으로 나눈 나머지의 합이 0 또는 3의 배수인 경우는

0, 0, 0, 0 또는 0, 0, 1, 2 또는 0, 1, 1, 1 또는 0, 2, 2, 2 또는 1, 1, 2, 2

(i) 0, 0, 0, 0을 일렬로 나열하는 경우의 수는 1

이때 나머지가 0인 수는 3뿐이므로 3333의 1가지

(ii) 0, 0, 1, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

이때 0 대신에 3을, 1 대신에 1 또는 4를, 2 대신에 2 또는 5를 넣으면 되므로 그 자연수의 개수는

$12\times(1\times1\times2\times2)=48$

(iii) 0, 1, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

이때 0 대신에 3을, 1 대신에 1 또는 4를 넣으면 되므로 그 자연수의 개수는

$4\times(1\times2\times2\times2)=32$

(iv) 0, 2, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

이때 0 대신에 3을, 2 대신에 2 또는 5를 넣으면 되므로 그 자연수의 개수는

$4\times(1\times2\times2\times2)=32$

(v) 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

이때 1 대신에 1 또는 4를, 2 대신에 2 또는 5를 넣으면 되므로 그 자연수의 개수는

$6\times(2\times2\times2\times2)=96$

(i)~(v)에서 3의 배수의 개수는

$1+48+32+32+96=209$

이때 (나)를 만족시키는 3의 배수의 개수는 각 자리의 숫자 중에서 짝수가 3개 또는 4개인 경우를 제외하면 된다.

(i) 짝수가 3개인 3의 배수의 경우

짝수가 3개인 3의 배수의 경우는 2, 2, 2 또는 2, 2, 4 또는 2, 4, 4 또는 4, 4, 4이고, 이때 홀수 1, 3, 5 중에서 하나를 택해 그 숫자의 합이 3의 배수가 되도록 정하면 된다.

① 2, 2, 2, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

② 2, 2, 4, 1을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

③ 2, 4, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

④ 4, 4, 4, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

①~④에서 짝수가 3개인 3의 배수의 개수는

$4+12+12+4=32$

(ii) 짝수가 4개인 3의 배수의 경우

짝수가 4개인 3의 배수의 경우는

2, 2, 4, 4

즉, 짝수가 4개인 3의 배수의 개수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

(i), (ii)에서 짝수가 3개 이상인 3의 배수의 개수는

$32+6=38$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$209-38=171$

다른 풀이

(나)에서 각 자리의 숫자 중에서 짝수의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

(i) 짝수의 개수가 0인 경우

① 1, 1, 1, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

② 1, 1, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

③ 1, 3, 3, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

④ 3, 3, 3, 3을 일렬로 나열하는 경우의 수는 1

⑤ 3, 5, 5, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

①~⑤에서 짝수의 개수가 0인 3의 배수의 개수는

$4+6+12+1+4=27$

(ii) 짝수의 개수가 1인 경우

① 짝수가 2인 경우

ⓐ 1, 1, 5, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

ⓑ 1, 3, 3, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$
ⓒ 3, 5, 5, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$
ⓐ, ⓑ, ⓒ에서 짝수가 2인 경우의 수는
$12+12+12=36$

② 짝수가 4인 경우
ⓐ 1, 1, 3, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$
ⓑ 1, 5, 5, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$
ⓒ 3, 3, 5, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$
ⓐ, ⓑ, ⓒ에서 짝수가 4인 경우의 수는
$12+12+12=36$

①, ②에서 짝수의 개수가 1인 3의 배수의 개수는
$36+36=72$

(iii) 짝수의 개수가 2인 경우
① 짝수가 2, 2인 경우
ⓐ 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!\times2!}=6$
ⓑ 3, 5, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$
ⓐ, ⓑ에서 짝수가 2, 2인 경우의 수는
$6+12=18$

② 짝수가 2, 4인 경우
ⓐ 1, 5, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$4!=24$
ⓑ 3, 3, 2, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$
ⓐ, ⓑ에서 짝수가 2, 4인 경우의 수는
$24+12=36$

③ 짝수가 4, 4인 경우
ⓐ 1, 3, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!}=12$
ⓑ 5, 5, 4, 4를 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!\times2!}=6$
ⓐ, ⓑ에서 짝수가 4, 4인 경우의 수는
$12+6=18$

①, ②, ③에서 짝수의 개수가 2인 3의 배수의 개수는
$18+36+18=72$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는
$27+72+72=171$

0088 답 ⑤

전략 각 주머니에 모두 1과 2가 적힌 공이 하나씩 들어가야 하므로 3, 4, 5가 적힌 공을 2개, 2개, 2개, 2개, 0개 넣는 경우와 2개, 2개, 2개, 1개, 1개 넣는 경우로 나누어 구한다.

(나)에서 각 주머니에는 같은 숫자가 적힌 공이 들어갈 수 없으므로 5개의 주머니에는 모두 1과 2가 적힌 공이 하나씩 들어가야 한다.
따라서 (가)에서 3, 4, 5가 적힌 공은 각 주머니에 2개 이하로 들어가야 하므로 남은 8개의 공을 5묶음으로 나누는 경우는
2개, 2개, 2개, 2개, 0개 또는 2개, 2개, 2개, 1개, 1개

(i) 공을 2개, 2개, 2개, 2개, 0개로 나누는 경우
3, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5를 나누는 경우는
(3, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 5), (빈 묶음)
이 5개의 묶음을 5개의 주머니에 넣는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!}=60$

(ii) 공을 2개, 2개, 2개, 1개, 1개로 나누는 경우
① 1개씩 두 묶음에 3, 3을 넣는 경우
(3), (3), (3, 4), (4, 5), (4, 5)이므로 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

② 1개씩 두 묶음에 3, 4를 넣는 경우
(3), (4), (3, 4), (3, 5), (4, 5)이므로 일렬로 나열하는 경우의 수는
$5!=120$

③ 1개씩 두 묶음에 3, 5를 넣는 경우
(3), (5), (3, 4), (3, 4), (4, 5)이므로 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!}=60$

④ 1개씩 두 묶음에 4, 4를 넣는 경우
(4), (4), (3, 4), (3, 5), (3, 5)이므로 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

⑤ 1개씩 두 묶음에 4, 5를 넣는 경우
(4), (5), (3, 4), (3, 4), (3, 5)이므로 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!}=60$

⑥ 1개씩 두 묶음에 5, 5를 넣는 경우
(5), (5), (3, 4), (3, 4), (3, 4)이므로 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!\times3!}=10$

①~⑥에서 공을 2개, 2개, 2개, 1개, 1개로 나누는 경우의 수는
$30+120+60+30+60+10=310$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는
$60+310=370$

다른 풀이

(나)에서 각 주머니에는 같은 숫자가 적힌 공이 들어갈 수 없으므로 5개의 주머니에는 모두 1과 2가 적힌 공이 하나씩 들어가야 한다.

따라서 (가)에서 3, 4, 5가 적힌 공은 각 주머니에 2개 이하로 들어가야 한다.

먼저 3, 3, 3을 3개의 주머니에 넣는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

4, 4, 4를 넣는 경우는 5, 5를 3이 없는 2개의 주머니에 넣는 경우, 3이 있는 2개의 주머니에 넣는 경우, 3이 없는 주머니와 있는 주머니에 1개씩 넣는 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 5, 5를 3이 없는 2개의 주머니에 넣는 경우

5, 5를 넣는 경우의 수는

${}_2C_2=1$

이때 4, 4, 4를 5개의 주머니에 넣는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

(ii) 5, 5를 3이 있는 2개의 주머니에 넣는 경우

5, 5를 넣는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

이때 4, 4, 4를 3, 5가 같이 들어 있는 2개의 주머니를 제외한 나머지 3개의 주머니에 넣는 경우의 수는

${}_3C_3=1$

(iii) 5, 5를 3이 없는 주머니와 있는 주머니에 1개씩 넣는 경우

5, 5를 넣는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_3C_1=6$

이때 4, 4, 4를 3, 5가 같이 들어 있는 1개의 주머니를 제외한 나머지 4개의 주머니에 넣는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

(i), (ii), (iii)에서 4, 4, 4와 5, 5를 넣는 경우의 수는

$1\times10+3\times1+6\times4=37$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times37=370$

0089 답 ①

전략 (나)에서 서로 이웃할 수 없는 수를 파악하고, 1과 3이 각각 한 번 이상 나오는 경우로 나누어 구한다.

(나)에서 1과 4, 1과 5, 2와 5는 각각 서로 이웃할 수 없다.

(i) 1이 한 번, 3이 한 번 나오는 경우

① 13□□ 꼴인 경우

2, 4, 5의 3개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$

이때 택한 2개의 숫자가 2, 5인 경우는 제외해야 하므로 $2!=2$ 그 경우의 수는

$9-2=7$

② 1□3□ 또는 □13□ 꼴인 경우

1의 옆에 올 수 있는 숫자는 2뿐이고, 3의 옆에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 5이므로 구하는 경우의 수는

$2\times1\times3=6$

③ 1□□3 또는 □□13 꼴인 경우

1의 옆에 올 수 있는 숫자는 2뿐이고, 나머지 자리는 2의 옆이고 올 수 있는 숫자는 2, 4이므로 그 경우의 수는

$2\times1\times2=4$

④ □1□3 꼴인 경우

1의 양옆에 올 수 있는 숫자는 2뿐이므로 그 경우의 수는 1

①~④에서 1이 한 번, 3이 한 번 나오는 경우의 수는

$7+6+4+1=18$

(ii) 1이 두 번, 3이 한 번 나오는 경우

① 113□ 꼴인 경우

3의 옆에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 5이므로 그 경우의 수는 3

② 11□3 또는 1□13 또는 □113 꼴인 경우

1의 옆에 올 수 있는 숫자는 2뿐이므로 그 경우의 수는

$3\times1=3$

①, ②에서 1이 두 번, 3이 한 번 나오는 경우의 수는

$3+3=6$

(iii) 1이 한 번, 3이 두 번 나오는 경우

① 133□ 또는 13□3 꼴인 경우

3의 옆에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 5이므로 그 경우의 수는

$2\times3=6$

② 1□33 또는 □133 꼴인 경우

1의 옆에 올 수 있는 숫자는 2뿐이므로 그 경우의 수는

$2\times1=2$

①, ②에서 1이 한 번, 3이 두 번 나오는 경우의 수는

$6+2=8$

(iv) 1이 세 번, 3이 한 번 또는 1이 두 번, 3이 두 번 또는 1이 한 번, 3이 세 번 나오는 경우

1113, 1133, 1333이므로 그 경우의 수는 3

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$18+6+8+3=35$

0090 답 ③

전략 함숫값에 -9가 포함된 경우와 -9가 포함되지 않은 경우로 나누어 경우의 수를 구한다.

6개의 함숫값의 곱이 9이고, 공역의 원소는 -9, -3, -1, 0, 1, 3이므로 함숫값에 -9가 포함된 경우와 포함되지 않은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 함숫값에 -9가 포함된 경우

① 함숫값이 -9, -1, 1, 1, 1, 1인 경우의 수는

$\frac{6!}{4!}=30$

② 함숫값이 -9, -1, -1, -1, 1, 1인 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times2!}=60$

③ 함숫값이 -9, -1, -1, -1, -1, -1인 경우의 수는

$\frac{6!}{5!}=6$

①, ②, ③에서 함숫값에 -9가 포함된 함수 f의 개수는

$30+60+6=96$

(ⅱ) 함숫값에 −9가 포함되지 않은 경우

9=3×3이므로

① 함숫값에 −3, −3이 포함된 경우

ⓐ 함숫값이 −3, −3, 1, 1, 1, 1인 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times4!}=15$

ⓑ 함숫값이 −3, −3, −1, −1, 1, 1인 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times2!\times2!}=90$

ⓒ 함숫값이 −3, −3, −1, −1, −1, −1인 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times4!}=15$

ⓐ, ⓑ, ⓒ에서 함수 f의 개수는

15+90+15=120

② 함숫값에 −3, 3이 포함된 경우

ⓐ 함숫값이 −3, 3, −1, 1, 1, 1인 경우의 수는

$\frac{6!}{3!}=120$

ⓑ 함숫값이 −3, 3, −1, −1, −1, 1인 경우의 수는

$\frac{6!}{3!}=120$

ⓐ, ⓑ에서 함수 f의 개수는

120+120=240

③ 함숫값에 3, 3이 포함된 경우

①과 같은 방법으로 하면 함수 f의 개수는 120

①, ②, ③에서 함숫값에 −9가 포함되지 않은 함수 f의 개수는

120+240+120=480

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는

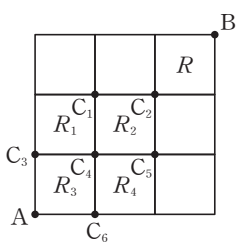
96+480=576

0091 답 40

전략 (가)를 만족시키기 위해 반드시 지나야 하는 지점을 찾고, (가)를 만족시키는 모든 경우의 수에서 정사각형 R 외에 네 변을 모두 지나는 정사각형이 생기는 경우의 수를 뺀다.

그림과 같이 6개의 지점 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6을 잡고 4개의 정사각형을 R_1, R_2, R_3, R_4라 하자. 이때 (가)를 만족시키려면

A → C_2 → B → C_2 → A의 순서로 이동해야 하고 (나)를 만족시키려면 정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4 중에서 네 변을 모두 지나는 정사각형은 없어야 한다.



(ⅰ) C_2 → B, B → C_2로 이동하는 경우

정사각형 R의 모든 변을 다 지나야 하므로

(C_2 지점에서 B 지점으로 가는 경우의 수)

×(B 지점에서 C_2 지점으로 가는 경우의 수)

=2×1=2

(ⅱ) A → C_2, C_2 → A로 이동하는 경우

(A 지점에서 C_2 지점으로 가는 경우의 수)

×(C_2 지점에서 A 지점으로 가는 경우의 수)

$=\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=36$

① 정사각형 R_1의 네 변을 모두 지나는 경우

A → C_3 → C_1 → C_2, C_2 → C_1 → C_3 → A의 순서로 이동하는 경우의 수이므로

(1×2×1)×(1×1×1)=2

② 정사각형 R_2의 네 변을 모두 지나는 경우

A → C_4 → C_2, C_2 → C_4 → A의 순서로 이동하는 경우의 수이므로

(2×2)×(1×2)=8

③ 정사각형 R_3의 네 변을 모두 지나는 경우

A → C_4 → C_2, C_2 → C_4 → A의 순서로 이동하는 경우의 수이므로

(2×2)×(2×1)=8

④ 정사각형 R_4의 네 변을 모두 지나는 경우

A → C_6 → C_5 → C_2, C_2 → C_5 → C_6 → A의 순서로 이동하는 경우의 수이므로

(1×2×1)×(1×1×1)=2

⑤ 두 정사각형 R_2, R_3의 네 변을 모두 지나는 경우

A → C_4 → C_2, C_2 → C_4 → A의 순서로 이동하는 경우의 수이므로

(2×2)×(1×1)=4

①~⑤에서 A → C_2, C_2 → A로 이동할 때, 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나는 정사각형이 없는 경우의 수는

36−{(2+8+8+2)−4}=20

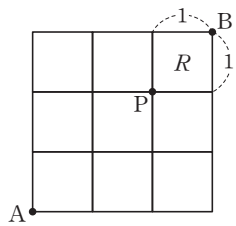
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 경우의 수는

2×20=40

다른 풀이

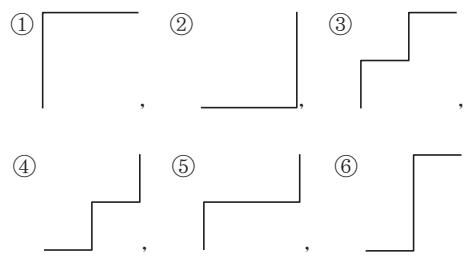
그림과 같이 지점 P를 잡을 때, (가)를 만족시키려면

A → P → B → P → A의 순서로 이동해야 한다.



(ⅰ) P → B → P로 이동하는 경우의 수는 2이다.

(ⅱ) A → P로 이동하는 경우의 수와 P → A로 이동하는 경우의 수는 각각 $\frac{4!}{2!\times2!}=6$이고, 각 경로는 다음 그림과 같다.



(나)를 만족시키려면 앞에서 A → P의 경로와 P → A의 경로를 하나씩 택하여 겹쳤을 때 정사각형이 만들어지지 않는 경우를 찾으면 된다.

A → P가 ①일 때, P → A는 ①, ②, ④, ⑤, ⑥의 5가지

A → P가 ②일 때, P → A는 ①, ②, ③, ⑤, ⑥의 5가지

A → P가 ③일 때, P → A는 ②, ③의 2가지

A → P가 ④일 때, P → A는 ①, ④의 2가지

A → P가 ⑤일 때, P → A는 ①, ②, ⑤의 3가지

A → P가 ⑥일 때, P → A는 ①, ②, ⑥의 3가지

즉, A → P, P → A로 이동하는 경우의 수는

$5+5+2+2+3+3=20$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$2\times20=40$

0092 답 59

전략 $f(3)$의 값으로 경우를 나눈 후, (가), (나)를 만족시키는 함숫값의 조합을 찾는다.

(가)에서 $f(3)\geq2$이므로 $f(3)$의 값은 2 또는 3 또는 4이다.

(i) $f(3)=2$인 경우

(가)에서 $f(1)+f(2)=2$이므로 집합 Y의 원소 중에서 중복을 허용하여 택한 두 수의 합이 2가 되는 경우는 (1, 1)의 1가지

(나)에서 $f(4)+f(5)+f(6)=4$이므로 집합 Y의 원소 중에서 중복을 허용하여 택한 세 수의 합이 4가 되는 경우는 (1, 1, 2)이고, 이 수를 각각 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$에 대응시키는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

즉, $f(3)=2$인 함수 f의 개수는

$1\times3=3$

(ii) $f(3)=3$인 경우

(가)에서 $f(1)+f(2)=3$이므로 집합 Y의 원소 중에서 중복을 허용하여 택한 두 수의 합이 3이 되는 경우는 (1, 2), (2, 1)의 2가지

(나)에서 $f(4)+f(5)+f(6)=6$이므로 집합 Y의 원소 중에서 중복을 허용하여 택한 세 수의 합이 6이 되는 경우는 (1, 1, 4), (1, 2, 3), (2, 2, 2)이고, 이 수를 각각 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$에 대응시키는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}+3!+1=10$

즉, $f(3)=3$인 함수 f의 개수는

$2\times10=20$

(iii) $f(3)=4$인 경우

(가)에서 $f(1)+f(2)=4$이므로 집합 Y의 원소 중에서 중복을 허용하여 택한 두 수의 합이 4가 되는 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

(나)에서 $f(4)+f(5)+f(6)=8$이므로 집합 Y의 원소 중에서 중복을 허용하여 택한 세 수의 합이 8이 되는 경우는 (1, 3, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 3)이고, 이 수를 각각 $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$에 대응시키는 경우의 수는

$3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=12$

즉, $f(3)=4$인 함수 f의 개수는

$3\times12=36$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$3+20+36=59$

0093 답 ①

전략 4개의 블록 중에서 같은 숫자가 적힌 블록의 쌍의 개수가 2, 1, 0일 때로 나누어 경우의 수를 구한다.

(i) 4개의 블록 중 같은 숫자가 적힌 블록이 2쌍 있는 경우

4개의 숫자 중에서 같은 숫자를 택할 2개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

4개의 블록에서 같은 숫자가 적힌 블록은 순서가 정해져 있으므로 같은 블록으로 생각하여 4개의 블록을 쌓는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$ → 같은 블록이 2개, 2개

즉, 4개의 블록 중 같은 숫자가 적힌 블록이 2쌍 있는 경우의 수는

$6\times6=36$

(ii) 4개의 블록 중 같은 숫자가 적힌 블록이 1쌍 있는 경우

4개의 숫자 중에서 같은 숫자를 택할 1개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

남은 3개의 숫자 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

이때 블록은 흰색, 검은색의 2가지이므로 2개의 블록의 색을 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_2=2^2=4$

4개의 블록에서 같은 숫자가 적힌 블록은 순서가 정해져 있으므로 같은 블록으로 생각하여 4개의 블록을 쌓는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$ → 같은 블록이 2개

즉, 4개의 블록 중 같은 숫자가 적힌 블록이 1쌍 있는 경우의 수는

$4\times3\times4\times12=576$

(iii) 4개의 블록 중 같은 숫자가 없는 경우

블록은 흰색, 검은색의 2가지이므로 4개의 블록의 색을 정하는 경우의 수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

1, 2, 3, 4가 적힌 블록이 각각 한 개씩 있으므로 4개의 블록을 쌓는 경우의 수는

$4!=24$

이때 홀수가 적힌 블록이 짝수가 적힌 블록보다 위쪽에 쌓는 경우의 수는 가장 아래쪽 2개는 짝수가 적힌 블록을 쌓고 그 위쪽 2개는 홀수가 적힌 블록을 쌓으면 되므로

$2!\times2!=4$

즉, 홀수가 적힌 블록 중에서 적어도 1개는 짝수가 적힌 블록보다 아래쪽에 쌓는 경우의 수는

$24-4=20$

즉, 4개의 블록 중 같은 숫자가 없는 경우의 수는

$16\times20=320$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$36+576+320=932$

02 중복조합

난이도별 필수 기출 25~39쪽

0094 답 ③

${}_5H_7={}_{11}C_7={}_{11}C_4=330$, ${}_2\Pi_3=2^3=8$

$\therefore {}_5H_7+{}_2\Pi_3=330+8=338$

0095 답 ⑤

${}_3H_r={}_{2+r}C_r={}_{2+r}C_2$이므로 ${}_{2+r}C_2={}_7C_2$

즉, $2+r=7$이므로 $r=5$

$\therefore {}_6H_r={}_6H_5={}_{10}C_5=252$

0096 답 ②

구하는 경우의 수는

${}_5H_3={}_7C_3=35$

0097 답 56

구하는 경우의 수는 4개의 숫자에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=56$

0098 답 15

구하는 경우의 수는 3종류의 과일에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

0099 답 20

서로 다른 m개의 문자에서 2개를 택하는 중복조합의 수는 ${}_mH_2$

${}_mH_2={}_3H_4$에서 ${}_{m+1}C_2={}_6C_4={}_6C_2$

즉, $m+1=6$이므로 $m=5$

이때 $n={}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$이므로

$m+n=5+15=20$

0100 답 ④

구하는 항의 개수는 4개의 문자 a, b, c, d에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_3={}_6C_3=20$

0101 답 ⑤

$(a+b+c)^5$의 전개식에서 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

$(x+y)^3$의 전개식에서 항의 개수는 2개의 문자 x, y에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

따라서 구하는 항의 개수는

$21\times4=84$

0102 답 15

$(a+b+c)^5$의 전개식에서 a를 포함하는 항의 개수는 먼저 a를 1개 택하고 3개의 문자 a, b, c에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

다른 풀이

$(a+b+c)^5$의 전개식에서 항의 개수는 3개의 문자 a, b, c에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

$(a+b+c)^5$의 전개식에서 a를 포함하지 않는 항의 개수는 a를 제외한 2개의 문자 b, c에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

따라서 구하는 항의 개수는

$21-6=15$

0103 답 ②

$(a+b)^4$의 전개식에서 항의 개수는 2개의 문자 a, b에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

$(x+y+z)^6$의 전개식에서 x를 포함하는 항의 개수는 먼저 x를 1개 택하고 3개의 문자 x, y, z에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

따라서 구하는 항의 개수는

$5\times21=105$

다른 풀이

$(a+b)^4$의 전개식에서 항의 개수는 2개의 문자 a, b에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

$(x+y+z)^6$의 전개식에서 항의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

$(x+y+z)^6$의 전개식에서 x를 포함하지 않는 항의 개수는 x를 제외한 2개의 문자 y, z에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

따라서 구하는 항의 개수는

$5\times(28-7)=105$

0104 답 7

$(x+y+z)^7$의 전개식에서 y를 포함하고 z를 포함하지 않는 항의 개수는 먼저 y를 1개 택하고 2개의 문자 x, y에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

다른 풀이

$(x+y+z)^7$의 전개식에서 z를 포함하지 않는 항의 개수는 2개의 문자 x, y에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_7={}_8C_7={}_8C_1=8$

$(x+y+z)^7$의 전개식에서 y, z를 모두 포함하지 않는 항은 x^7뿐이므로 1개이다.
따라서 구하는 항의 개수는
$8-1=7$

0105 답 233

$(a+b+c+d)^n$의 전개식에서 항의 개수는 4개의 문자 a, b, c, d에서 n개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4\mathrm{H}_n={}_{n+3}\mathrm{C}_n={}_{n+3}\mathrm{C}_3$
즉, ${}_{n+3}\mathrm{C}_3=560$이므로
$\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3!}=560$
$(n+3)(n+2)(n+1)=3360=16\times15\times14$
$\therefore n=13$ ($\because n$은 자연수)
즉, $(a+b+c+d)^{13}$의 전개식에서 $abcd$를 인수로 갖는 항의 개수는 먼저 a, b, c, d를 각각 1개씩 택하고 4개의 문자 a, b, c, d에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$k={}_4\mathrm{H}_9={}_{12}\mathrm{C}_9={}_{12}\mathrm{C}_3=220$
$\therefore n+k=13+220=233$

0106 답 ③

$f(a)\le f(b)$에서 $f(a)$, $f(b)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 a, b에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$
이때 $f(c)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4의 4개
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$10\times4=40$

0107 답 ⑤

$f(0)\le f(1)$에서 $f(0)$, $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 0, 1, 2, 3, 4의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 0, 1에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$
$f(2)\ge f(4)\ge3$에서 $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 3, 4의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 크거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 2, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$
$f(3)$의 값이 될 수 있는 수는 0, 1, 2, 3, 4의 5개
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$15\times3\times5=225$

0108 답 35

(나)에서 $f(1)\ge f(2)\ge f(3)\ge f(4)\ge f(5)$
(가)에서 $f(1)=4$이므로
$4\ge f(2)\ge f(3)\ge f(4)\ge f(5)$ …… ⓘ
$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 크기가 크거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 2, 3, 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는
${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=35$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 함숫값의 대소 관계 나타내기	30 %
ⓘⓘ 함수 f의 개수 구하기	70 %

0109 답 ②

$f(c)=5$이므로
$f(a)\le f(b)\le5\le f(d)$
$f(a)$, $f(b)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 3, 4, 5의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 a, b에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
$f(d)$의 값이 될 수 있는 수는 5, 6, 7의 3개
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$6\times3=18$

0110 답 ①

$f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$의 값은 집합 Y의 원소 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 정할 수 있으므로
$f(a)=x$, $f(b)=y$, $f(c)=z$, $f(d)=w$라 하면
x, y, z, w는 6 이하의 음이 아닌 정수이다.
이때 $f(a)+f(b)+f(c)+f(d)=6$을 만족시키는 함수 f의 개수는 방정식 $x+y+z+w=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수와 같고, 이는 4개의 문자 x, y, z, w에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같다.
따라서 구하는 함수 f의 개수는
${}_4\mathrm{H}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=84$

0111 답 63

(가)에서 $f(b)=3$ 또는 $f(b)=6$
(i) $f(b)=3$인 경우
(나)에서 $f(a)\le3\le f(c)\le f(d)$
$f(a)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3의 3개
$f(c)$, $f(d)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 3, 4, 5, 6, 7의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 c, d에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$
즉, $f(b)=3$인 함수 f의 개수는
$3\times15=45$
(ii) $f(b)=6$인 경우
(나)에서 $f(a)\le6\le f(c)\le f(d)$
$f(a)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개

$f(c)$, $f(d)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 6, 7의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 c, d에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

즉, $f(b)=6$인 함수 f의 개수는

$6\times3=18$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$45+18=63$

0112 답 ④

(가)에서 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$

(나)에서 $f(1)+f(4)=8$이므로

$f(1)=1$, $f(4)=7$ 또는 $f(1)=2$, $f(4)=6$ 또는

$f(1)=3$, $f(4)=5$ 또는 $f(1)=f(4)=4$

(i) $f(1)=1$, $f(4)=7$인 경우

$1\le f(2)\le f(3)\le7$에서 $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_7\mathrm{H}_2={}_8\mathrm{C}_2=28$

(ii) $f(1)=2$, $f(4)=6$인 경우

$2\le f(2)\le f(3)\le6$에서 $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 2, 3, 4, 5, 6의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$

(iii) $f(1)=3$, $f(4)=5$인 경우

$3\le f(2)\le f(3)\le5$에서 $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 3, 4, 5의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

(iv) $f(1)=f(4)=4$인 경우

$f(2)$, $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는 4의 1개

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f의 개수는

$28+15+6+1=50$

0113 답 114

(가)에서 $f(1)$, $f(3)$의 값은 모두 홀수이므로

$f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 3, 5의 3개

한편 $f(3)$의 값이 될 수 있는 수도 1, 3, 5이므로

$f(3)=1$ 또는 $f(3)=3$ 또는 $f(3)=5$

(i) $f(3)=1$인 경우

(나)에서 $f(2)\le1\le f(4)\le f(5)$

$f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 1의 1개

$f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$

즉, $f(3)=1$인 함수 f의 개수는

$1\times15=15$

(ii) $f(3)=3$인 경우

(나)에서 $f(2)\le3\le f(4)\le f(5)$

$f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3의 3개

$f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 3, 4, 5의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

즉, $f(3)=3$인 함수 f의 개수는

$3\times6=18$

(iii) $f(3)=5$인 경우

(나)에서 $f(2)\le5\le f(4)\le f(5)$

$f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개

$f(4)$, $f(5)$의 값이 될 수 있는 수는 5의 1개

즉, $f(3)=5$인 함수 f의 개수는

$5\times1=5$

(i), (ii), (iii)에서 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$15+18+5=38$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$3\times38=114$

0114 답 16

(가)에서 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$ …… ⓘ

(나)에서

$x=1$일 때, $f(1)=5$ 또는 $x=2$일 때, $f(2)=7$ 또는

$x=3$일 때, $f(3)=9$ 또는 $x=4$일 때, $f(4)=11$

이때 $9\notin Y$, $11\notin Y$이므로

$f(1)=5$ 또는 $f(2)=7$ …… ⓘⓘ

(i) $f(1)=5$인 경우

$5\le f(2)\le f(3)\le f(4)$에서 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 5, 6, 7의 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 집합 X의 원소 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

(ii) $f(2)=7$인 경우

$f(1)\le7\le f(3)\le f(4)$에서 $f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7개이고, $f(3)$, $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 7의 1개이므로

$7\times1=7$

(iii) $f(1)=5$, $f(2)=7$인 경우

$5\le7\le f(3)\le f(4)$에서 $f(3)$, $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 7의 1개이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f의 개수는

$10+7-1=16$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 함숫값의 대소 관계 나타내기	10 %
ⓘⓘ 조건을 만족시키는 경우 파악하기	20 %
ⓘⓘⓘ 함수 f의 개수 구하기	70 %

0115 답 ②

$f(a)\le f(b)<f(c)\le f(d)$를 만족시키는 함수 f의 개수는
$f(a)\le f(b)\le f(c)\le f(d)$를 만족시키는 함수 f의 개수에서
$f(a)\le f(b)=f(c)\le f(d)$를 만족시키는 함수 f의 개수를 빼면 된다.

(i) $f(a)\le f(b)\le f(c)\le f(d)$를 만족시키는 함수 f의 개수
$f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 3, 4, 5, 6, 7, 8의 6개에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 a, b, c, d에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_6\mathrm{H}_4={}_9\mathrm{C}_4=126$

(ii) $f(a)\le f(b)=f(c)\le f(d)$를 만족시키는 함수 f의 개수
$f(b)$의 값이 정해지면 $f(c)$의 값은 같은 값으로 정해진다.
$f(a)$, $f(b)$, $f(d)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 3, 4, 5, 6, 7, 8의 6개에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 a, b, d에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_6\mathrm{H}_3={}_8\mathrm{C}_3=56$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는
$126-56=70$

0116 답 156

(나)에서 $f(0)\ge f(1)\ge f(2)\ge f(3)\ge f(4)$
(가)에서 $f(2)+f(3)=3$이므로
$f(2)=3$, $f(3)=0$ 또는 $f(2)=2$, $f(3)=1$

(i) $f(2)=3$, $f(3)=0$인 경우
$f(0)\ge f(1)\ge 3\ge 0\ge f(4)$
$f(0)$, $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 3, 4, 5의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 크거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 0, 1에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
$f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 0의 1개
$f(5)$의 값이 될 수 있는 수는 0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개
즉, $f(2)=3$, $f(3)=0$인 함수 f의 개수는
$6\times1\times6=36$

(ii) $f(2)=2$, $f(3)=1$인 경우
$f(0)\ge f(1)\ge 2\ge 1\ge f(4)$
$f(0)$, $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 2, 3, 4, 5의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 크거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 0, 1에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$
$f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 0, 1의 2개
$f(5)$의 값이 될 수 있는 수는 0, 1, 2, 3, 4, 5의 6개
즉, $f(2)=2$, $f(3)=1$인 함수 f의 개수는
$10\times2\times6=120$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f의 개수는
$36+120=156$

0117 답 210

(가)에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 1, 3, 5의 3개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{P}_3=6$
(나)에서 $g(1)\le g(3)\le g(5)$
$g(1)$, $g(3)$, $g(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Z의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 Y의 원소 1, 3, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$
따라서 구하는 합성함수 $g\circ f$의 개수는
$6\times35=210$

0118 답 210

(나), (다)에서 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$, $f(5)\le f(6)$
(가)에서 $f(1)=1$, $f(3)=5$이므로
$1\le f(2)\le 5\le f(4)$, $f(5)\le f(6)$
$1\le f(2)\le 5$에서 $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개
$5\le f(4)$에서 $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 5, 6의 2개
$f(5)\le f(6)$에서 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 5, 6에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$5\times2\times21=210$

0119 답 ④

(가)에서
$f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le f(6)$
3의 배수 a에 대하여 $f(a)=b$라 하자.
(나)에서 $f(f(a))=a$이므로
$f(b)=a$
이때 $a>b$이면 $f(b)>f(a)$이고, $a<b$이면 $f(b)<f(a)$이므로 (가)를 만족시키지 않는다.
즉, $f(a)=a$에서 $f(3)=3$, $f(6)=6$이므로
$f(1)\le f(2)\le 3\le f(4)\le f(5)\le 6$
$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 1, 2, 3의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 1, 2에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
$f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 3, 4, 5, 6의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$
따라서 구하는 함수 f의 개수는
$6\times10=60$

0120 답 ④

$f(f(1))=3$이므로 $f(1)$의 값에 따라 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하면 다음과 같다.

(i) $f(1)=1$인 경우

$f(f(1))=3$에서 $f(1)=3$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(1)=2$인 경우

$f(f(1))=3$에서 $f(2)=3$

$f(1)\le f(2)\le f(3)$에서 $2\le 3\le f(3)$

$f(3)$의 값이 될 수 있는 수는 3, 4, 5의 3개

$f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X의 원소 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

즉, $f(1)=2$인 함수 f의 개수는

$3\times 25=75$

(iii) $f(1)=3$인 경우

$f(f(1))=3$에서 $f(3)=3$

$f(1)\le f(2)\le f(3)$에서 $3\le f(2)\le 3$

$\therefore f(2)=3$

$f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 X의 원소 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같다.

즉, $f(1)=3$인 함수 f의 개수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

(iv) $f(1)=4$인 경우

$f(f(1))=3$에서 $f(4)=3$

$f(1)\le f(2)\le f(3)$에서 $4\le f(2)\le f(3)$

$f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 4, 5의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

$f(5)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개

즉, $f(1)=4$인 함수 f의 개수는

$3\times 5=15$

(v) $f(1)=5$인 경우

$f(f(1))=3$에서 $f(5)=3$

$f(1)\le f(2)\le f(3)$에서 $5\le f(2)\le f(3)$

$\therefore f(2)=f(3)=5$

$f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개

즉, $f(1)=5$인 함수 f의 개수는

5

(i)~(v)에서 구하는 함수 f의 개수는

$75+25+15+5=120$

0121 답 ①

집합 X의 부분집합 중에서 원소의 합이 6인 집합은

$\{2, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{0, 2, 4\}$, $\{0, 1, 2, 3\}$

이므로 f의 치역에 따라 함수 f의 개수를 구하면 다음과 같다.

(i) 치역이 $\{2, 4\}$인 경우

$f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 먼저 집합 $\{2, 4\}$의 원소 2, 4를 각각 1개씩 택하고, 원소 2, 4의 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 0, 1, 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 그 함수 f의 개수는

${}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

(ii) 치역이 $\{1, 2, 3\}$인 경우

$f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 먼저 집합 $\{1, 2, 3\}$의 원소 1, 2, 3을 각각 1개씩 택하고, 원소 1, 2, 3의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 0, 1, 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 그 함수 f의 개수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

(iii) 치역이 $\{0, 2, 4\}$인 경우

$f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 먼저 집합 $\{0, 2, 4\}$의 원소 0, 2, 4를 각각 1개씩 택하고, 원소 0, 2, 4의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 0, 1, 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 그 함수 f의 개수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

(iv) 치역이 $\{0, 1, 2, 3\}$인 경우

$f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 먼저 집합 $\{0, 1, 2, 3\}$의 원소 0, 1, 2, 3을 각각 1개씩 택하고, 원소 0, 1, 2, 3의 4개에서 1개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 0, 1, 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 그 함수 f의 개수는 4이다.

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f의 개수는

$4+6+6+4=20$

0122 답 ②

(가)에서 $f(1)\times f(6)$의 값이 6의 약수인 경우는 1, 2, 3, 6이다.

이때 (나)에서 $2f(1)\le 2f(6)$, 즉 $f(1)\le f(6)$이므로 순서쌍 $(f(1), f(6))$은 $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 6)$, $(2, 3)$

(i) $f(1)=1$, $f(6)=1$인 경우

(나)에서 $2\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le 2$이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값이 될 수 있는 수는 2의 1개

(ii) $f(1)=1$, $f(6)=2$인 경우

(나)에서 $2\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le 4$이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 2, 3, 4의 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 2, 3, 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

(iii) $f(1)=1$, $f(6)=3$인 경우

(나)에서 $2\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le 6$이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 2, 3, 4, 5, 6의 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 2, 3, 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_5\mathrm{H}_4={}_8\mathrm{C}_4=70$

(ⅳ) $f(1)=1$, $f(6)=6$인 경우

(나)에서 $2\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le 12$이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 2, 3, 4, 5, 6의 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 2, 3, 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_5\mathrm{H}_4={}_8\mathrm{C}_4=70$

(ⅴ) $f(1)=2$, $f(6)=3$인 경우

(나)에서 $4\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le 6$이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X의 원소 4, 5, 6의 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 2, 3, 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

(ⅰ)~(ⅴ)에서 구하는 함수 f의 개수는

$1+15+70+70+15=171$

0123 답 91

(가)에서

$f(1)+2\le f(3)$이므로 $f(1)\le f(3)-2$

$f(3)+2\le f(5)$이므로 $f(3)-2\le f(5)-4$

$f(5)+2\le f(7)$이므로 $f(5)-4\le f(7)-6$

$f(7)+2\le f(9)$이므로 $f(7)-6\le f(9)-8$

이때 $Y=\{1, 2, 3, \cdots, 13\}$이므로

$1\le f(1)\le f(3)-2\le f(5)-4\le f(7)-6\le f(9)-8\le 5$

$f(1)$, $f(3)-2$, $f(5)-4$, $f(7)-6$, $f(9)-8$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 5개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 $f(1)$, $f(3)-2$, $f(5)-4$, $f(7)-6$, $f(9)-8$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

→ 이 값이 정해지면 $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$, $f(9)$의 값도 정해진다.

${}_5\mathrm{H}_5={}_9\mathrm{C}_5={}_9\mathrm{C}_4=126$

이때 (나)를 만족시키지 않으려면 $f(1)=2$이므로

$2\le f(3)-2\le f(5)-4\le f(7)-6\le f(9)-8\le 5$에서

$f(3)-2$, $f(5)-4$, $f(7)-6$, $f(9)-8$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5의 4개에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 $f(3)-2$, $f(5)-4$, $f(7)-6$, $f(9)-8$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=35$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

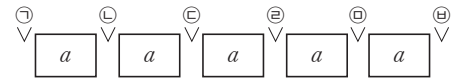
$126-35=91$

다른 풀이

(가)에서 $f(x+2)-f(x)\ge 2$이므로 집합 X의 원소가 커질수록 이에 대응하는 함숫값도 커지고, 이웃한 두 함숫값의 차는 항상 2 이상이어야 한다.

따라서 집합 Y의 원소 중에서 치역의 원소인 것을 a, 치역의 원소가 아닌 것을 b라 하면, 5개의 a와 8개의 b를 일렬로 나열한 후 왼쪽에서부터 순서대로 1, 2, 3, …, 13으로 생각하고, 5개의 a에 해당하는 수를 작은 수부터 순서대로 집합 X의 원소 1, 3, 5, 7, 9에 대응시키면 된다.

a와 a의 사이사이와 양쪽 끝 공간을 왼쪽에서부터 순서대로 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤, ㉥이라 하면



이웃한 두 함숫값의 차가 2 이상이어야 하므로 ㉡, ㉢, ㉣, ㉤에 b를 1개씩 놓고, 나머지 4개의 b를 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤, ㉥에 나누어 놓으면 된다.

즉, (가)를 만족시키는 함수의 개수는 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤, ㉥ 중에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{H}_4={}_9\mathrm{C}_4=126$

이때 (나)를 만족시키지 않으려면 $f(1)=2$이어야 하므로 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤에 b를 1개씩 놓고, 나머지 3개의 b를 ㉡, ㉢, ㉣, ㉤, ㉥에 나누어 놓으면 된다.

즉, (가)를 만족시키면서 (나)를 만족시키지 않는 함수의 개수는 ㉡, ㉢, ㉣, ㉤, ㉥ 중에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$126-35=91$

0124 답 ④

구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$

0125 답 ③

$3\le a\le b\le c\le d\le 10$에서 짝수 a, b, c, d의 값을 정하는 경우의 수는 4, 6, 8, 10의 4개의 짝수에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 a, b, c, d에 대응시키는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=35$

0126 답 85

$5\le x+y+z\le 7$에서 x, y, z가 음이 아닌 정수이므로

$x+y+z=5$ 또는 $x+y+z=6$ 또는 $x+y+z=7$

(ⅰ) $x+y+z=5$인 경우

순서쌍 (x, y, z)의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$

(ⅱ) $x+y+z=6$인 경우

순서쌍 (x, y, z)의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$

(ⅲ) $x+y+z=7$인 경우

순서쌍 (x, y, z)의 개수는 3개의 문자 x, y, z에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$21+28+36=85$

0127 답 ②

$X=x-3$, $Y=y-1$, $Z=z-2$라 하면 X, Y, Z는 음이 아닌 정수이다.

$x=X+3$, $y=Y+1$, $z=Z+2$를 $x+y+z=12$에 대입하면

$(X+3)+(Y+1)+(Z+2)=12$

$\therefore X+Y+Z=6$

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 $X+Y+Z=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, Y, Z의 순서쌍 (X, Y, Z)의 개수, 즉 3개의 문자 X, Y, Z에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$

0128 답 60

㈎에서 a, b, c, d, e는 모두 홀수이다.

㈏에서 $a\le b\le c\le 8<d<e<14$이므로 $1\le a\le b\le c\le 8$에서 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 1, 3, 5, 7의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 a, b, c에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$ …… ⅰ

$8<d<e<14$에서 d, e의 순서쌍 (d, e)의 개수는 9, 11, 13의 3개에서 2개를 택한 후 크기가 작은 것부터 순서대로 d, e에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$ …… ⅱ

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$20\times 3=60$ …… ⅲ

채점 기준	
ⅰ 순서쌍 (a, b, c)의 개수 구하기	40%
ⅱ 순서쌍 (d, e)의 개수 구하기	40%
ⅲ 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수 구하기	20%

0129 답 ②

a, b, c, d는 주사위의 눈의 수이므로 ㈎에서

$1\le a\le b\le c\le d\le 6$ …… ㉠

㈏에서 b는 홀수이므로

$b=1$ 또는 $b=3$ 또는 $b=5$

(ⅰ) $b=1$인 경우

㉠에서 $a=1$, $1\le c\le d\le 6$

c, d의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 c, d에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$

(ⅱ) $b=3$인 경우

㉠에서 $1\le a\le 3\le c\le d\le 6$

a의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3의 3개

c, d의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 5, 6의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 c, d에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

즉, $b=3$인 경우의 수는

$3\times 10=30$

(ⅲ) $b=5$인 경우

㉠에서 $1\le a\le 5\le c\le d\le 6$

a의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개

c, d의 값을 정하는 경우의 수는 5, 6의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 c, d에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

즉, $b=5$인 경우의 수는

$5\times 3=15$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$21+30+15=66$

0130 답 96

㈎에서 $abc=2^2\times 3^2\times 5$이고, a, b, c는 자연수이므로

$a=2^{x_1}\times 3^{y_1}\times 5^{z_1}$, $b=2^{x_2}\times 3^{y_2}\times 5^{z_2}$, $c=2^{x_3}\times 3^{y_3}\times 5^{z_3}$

(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3은 음이 아닌 정수)

이라 하면

$2^{x_1+x_2+x_3}\times 3^{y_1+y_2+y_3}\times 5^{z_1+z_2+z_3}=2^2\times 3^2\times 5$

$\therefore x_1+x_2+x_3=2$, $y_1+y_2+y_3=2$, $z_1+z_2+z_3=1$

이때 세 수 a, b, c를 정하는 경우의 수는 세 방정식 $x_1+x_2+x_3=2$, $y_1+y_2+y_3=2$, $z_1+z_2+z_3=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{H}_1={}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1=6\times 6\times 3=108$

$(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$을 만족시키지 않으려면

$(a-b)(b-c)(c-a)=0$이므로

$a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$

이때 $a=b=c$인 경우는 존재하지 않으므로 a, b, c 중에서 두 수가 같은 경우는

1, 1, 180 또는 2, 2, 45 또는 3, 3, 20 또는 6, 6, 5

각각의 경우에 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $\frac{3!}{2!}=3$

즉, a, b, c 중에서 두 수가 같은 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$4\times 3=12$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$108-12=96$

0131 답 ①

(ⅰ) $a\le b$인 경우

㈎, ㈏에서 $a\le b\le c\le d\le e$

순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 5개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 a, b, c, d, e에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{H}_5={}_9\mathrm{C}_5={}_9\mathrm{C}_4=126$

(ⅱ) $a\ge b$인 경우

㈎, ㈏에서 $b\le a\le c\le d\le e$

순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 5개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 b, a, c, d, e에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{H}_5={}_9\mathrm{C}_5={}_9\mathrm{C}_4=126$

(iii) $a=b$인 경우

(가), (나)에서 $a=b\le c\le d\le e$

a가 정해지면 b도 같은 수로 정해진다.

순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 a, c, d, e에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{H}_4={}_8\mathrm{C}_4=70$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$126+126-70=182$

0132 답 ④

(i) c가 짝수인 경우

(가)에서 $a+b$의 값이 짝수이므로 a, b가 모두 홀수이거나 모두 짝수이다.

① a, b가 모두 홀수인 경우

(나)에서 $1\le a\le b\le 8$

a, b의 값을 정하는 경우의 수는 1, 3, 5, 7의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 a, b에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

② a, b가 모두 짝수인 경우

(나)에서 $1\le a\le b\le 8$

a, b의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4, 6, 8의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 a, b에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

①, ②에서 a, b가 모두 홀수이거나 모두 짝수인 경우의 수는

$10+10=20$ ····· ㉠

한편 (나)에서 $8<c\le 12$

c의 값이 될 수 있는 수는 10, 12의 2개

즉, c가 짝수인 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$20\times 2=40$

(ii) c가 홀수인 경우

(가)에서 $a+b$의 값이 홀수이므로 a, b의 값을 정하는 경우에서 $a+b$의 값이 짝수인 경우를 제외하면 된다.

(나)에서 $1\le a\le b\le 8$

a, b의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 8개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 a, b에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_8\mathrm{H}_2={}_9\mathrm{C}_2=36$

이때 $a+b$의 값이 짝수인 경우의 수는 20 ($\because$ ㉠)

즉, $a+b$의 값이 홀수인 경우의 수는 $36-20=16$

한편 (나)에서 $8<c\le 12$

c의 값이 될 수 있는 수는 9, 11의 2개

즉, c가 홀수인 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$16\times 2=32$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$40+32=72$

다른 풀이

(ii)에서 $a+b$의 값이 홀수인 경우의 수를 다음과 같이 구할 수도 있다.

$a+b$의 값이 홀수이려면 a, b 중에서 하나는 홀수, 하나는 짝수이어야 하는데, (나)에서 $1\le a\le b\le 8$이므로 홀수인 1, 3, 5, 7 중에서 하나를 택하고 짝수인 2, 4, 6, 8 중에서 하나를 택하여 둘 중에서 작은 수를 a, 큰 수를 b로 정하면 된다.

따라서 $a+b$의 값이 홀수인 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=16$

0133 답 ④

(가)에서 방정식 $x+y+z+w=12$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_{12}={}_{15}\mathrm{C}_{12}={}_{15}\mathrm{C}_3=455$

(나)를 만족시키지 않으려면 $x=3y$이어야 하므로 이것을 방정식 $x+y+z+w=12$에 대입하면

$3y+y+z+w=12$ $\therefore\ 4y+z+w=12$

(i) $y=0$인 경우 → $x=0$

방정식 $z+w=12$를 만족시키는 음이 아닌 정수 z, w의 순서쌍 (z, w)의 개수는 2개의 문자 z, w에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_{12}={}_{13}\mathrm{C}_{12}={}_{13}\mathrm{C}_1=13$

(ii) $y=1$인 경우 → $x=3$

방정식 $4+z+w=12$, 즉 $z+w=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 z, w의 순서쌍 (z, w)의 개수는 2개의 문자 z, w에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_8={}_9\mathrm{C}_8={}_9\mathrm{C}_1=9$

(iii) $y=2$인 경우 → $x=6$

방정식 $8+z+w=12$, 즉 $z+w=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 z, w의 순서쌍 (z, w)의 개수는 2개의 문자 z, w에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$

(iv) $y=3$인 경우 → $x=9$

방정식 $12+z+w=12$, 즉 $z+w=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 z, w의 순서쌍 (z, w)는 $(0, 0)$의 1개

(i)~(iv)에서 $x=3y$이면서 방정식 $x+y+z+w=12$를 만족시키는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$13+9+5+1=28$

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$455-28=427$

0134 답 56

a, b, c, d는 자연수이므로

(나)에서 $a=3x+2$, $b=3y+1$, $c=3z+3$, $d=3w+3$(x, y, z, w는 음이 아닌 정수)라 하고 (가)에 대입하면

$(3x+2)+(3y+1)+(3z+3)+(3w+3)=24$

$\therefore\ x+y+z+w=5$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 방정식 $x+y+z+w=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수, 즉 4개의 문자 x, y, z, w에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=56$

0135 답 ④

㈎에서 $-a-3\geq 0$, $-b-4\geq 0$, $-c-2\geq 0$

이때 $X=-a-3$, $Y=-b-4$, $Z=-c-2$라 하면 X, Y, Z는 음이 아닌 정수이다. $\longleftarrow X+Y+Z\geq 0$

㈏에서 $a+b+c\geq -13$이므로 $a=-X-3$, $b=-Y-4$, $c=-Z-2$를 $a+b+c\geq -13$에 대입하면

$(-X-3)+(-Y-4)+(-Z-2)\geq -13$

$\therefore X+Y+Z\leq 4$

(i) $X+Y+Z=0$일 때,

순서쌍 (X, Y, Z)는 $(0, 0, 0)$의 1개

(ii) $X+Y+Z=1$일 때,

순서쌍 (X, Y, Z)의 개수는 3개의 문자 X, Y, Z에서 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$

(iii) $X+Y+Z=2$일 때,

순서쌍 (X, Y, Z)의 개수는 3개의 문자 X, Y, Z에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

(iv) $X+Y+Z=3$일 때,

순서쌍 (X, Y, Z)의 개수는 3개의 문자 X, Y, Z에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

(v) $X+Y+Z=4$일 때,

순서쌍 (X, Y, Z)의 개수는 3개의 문자 X, Y, Z에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

(i)~(v)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$1+3+6+10+15=35$

0136 답 9

a, b, c가 1보다 큰 자연수이므로 자연수 x, y, z에 대하여 $a=2^x$, $b=2^y$, $c=2^z$이라 하면 $abc=2^n$에서

$2^{x+y+z}=2^n$ $\therefore x+y+z=n$

이때 x, y, z가 자연수이므로 $x'=x-1$, $y'=y-1$, $z'=z-1$이라 하면 x', y', z'은 음이 아닌 정수이다.

$x=x'+1$, $y=y'+1$, $z=z'+1$을 $x+y+z=n$에 대입하면

$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=n$

$\therefore x'+y'+z'=n-3$

이때 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 방정식 $x'+y'+z'=n-3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z'의 순서쌍 (x', y', z')의 개수, 즉 3개의 문자 x', y', z'에서 $(n-3)$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_{n-3}={}_{n-1}\mathrm{C}_{n-3}={}_{n-1}\mathrm{C}_2=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$

즉, $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}=28$이므로

$(n-1)(n-2)=56=8\times 7$ $\therefore n=9$ ($\because n$은 자연수)

0137 답 ⑤

a, b, c, d는 음이 아닌 정수이므로

㈎에서 $a=2a'$, $b=2b'$, $c=2c'+1$(a', b', c'은 음이 아닌 정수)이라 하고 ㈏에 대입하면

$2a'+2b'+(2c'+1)+3d=20$

$\therefore 2(a'+b'+c')=19-3d$ ⟶ 좌변이 짝수이므로 우변도 짝수이고, 홀수에서 홀수를 빼야 짝수이다.

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 d는 홀수이어야 하므로

$d=1$ 또는 $d=3$ 또는 $d=5$

(i) $d=1$인 경우

$2(a'+b'+c')=16$ $\therefore a'+b'+c'=8$

즉, 방정식 $a'+b'+c'=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 순서쌍 (a', b', c')의 개수는 3개의 문자 a', b', c'에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_8={}_{10}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_2=45$

(ii) $d=3$인 경우

$2(a'+b'+c')=10$ $\therefore a'+b'+c'=5$

즉, 방정식 $a'+b'+c'=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 순서쌍 (a', b', c')의 개수는 3개의 문자 a', b', c'에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$

(iii) $d=5$인 경우

$2(a'+b'+c')=4$ $\therefore a'+b'+c'=2$

즉, 방정식 $a'+b'+c'=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 순서쌍 (a', b', c')의 개수는 3개의 문자 a', b', c'에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$45+21+6=72$

0138 답 ④

㈎에서 b는 홀수, c는 8 이하의 자연수이고, ㈏에서 $e+1<b\leq c$이므로

$2\leq e+1<b\leq c\leq 8$

$\therefore b=3$ 또는 $b=5$ 또는 $b=7$

(i) $b=3$인 경우

㈏에서 a, d, e에 대하여 $a\leq d<e+1<3$이므로

$1\leq a\leq d\leq e<2$

즉, 자연수 a, d, e의 순서쌍 (a, d, e)의 개수는 $(1, 1, 1)$의 1개

$3\leq c\leq 8$이므로 c의 값이 될 수 있는 수는 3, 4, 5, 6, 7, 8의 6개

즉, $b=3$인 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$1\times 6=6$

(ii) $b=5$인 경우

㈏에서 $a\leq d<e+1<5$이므로 $1\leq a\leq d\leq e<4$

a, d, e의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3의 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 a, d, e에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

$5 \le c \le 8$이므로 c의 값이 될 수 있는 수는 5, 6, 7, 8의 4개

즉, $b=5$인 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$10 \times 4 = 40$

(iii) $b=7$인 경우

(나)에서 $a \le d < e+1 < 7$이므로 $1 \le a \le d \le e < 6$

a, d, e의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 a, d, e에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{H}_3 = {}_7\mathrm{C}_3 = 35$

$7 \le c \le 8$이므로 c의 값이 될 수 있는 수는 7, 8의 2개

즉, $b=7$인 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$35 \times 2 = 70$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$6+40+70=116$

0139 답 ③

(나)에서 $a+c$는 홀수이므로 a, c 중에서 홀수는 1개이다.

(다)에서 a, b, c, d, e 중에서 적어도 3개는 홀수이므로 b, d, e 중에서 적어도 2개는 홀수이다.

(가)에서 $b+d+e$는 짝수이므로 b, d, e 중에서 홀수는 2개이다.

a, c 중에서 홀수 1개를 정하는 경우의 수는 ㉠

${}_2\mathrm{C}_1 = 2$

b, d, e 중에서 홀수 2개를 정하는 경우의 수는 ㉡

${}_3\mathrm{C}_2 = {}_3\mathrm{C}_1 = 3$

이때 a, b, d가 홀수, c, e가 0 또는 짝수라 하면

$a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'$, $d=2d'+1$, $e=2e'$

(단, a', b', c', d', e'은 음이 아닌 정수)

$a+b+c+d+e=9$에 대입하면

$(2a'+1)+(2b'+1)+2c'+(2d'+1)+2e'=9$

$\therefore a'+b'+c'+d'+e'=3$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d', e'의 순서쌍 (a', b', c', d', e')의 개수는

${}_5\mathrm{H}_3 = {}_7\mathrm{C}_3 = 35$

즉, a, b, d가 홀수, c, e가 0 또는 짝수인 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는 35이다.

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$\underset{㉠}{2} \times \underset{㉡}{3} \times 35 = 210$

0140 답 ④

(나)에서 $-2 \le a-b+c-d+e \le 2$

(가)에서 $a+c+e=10-b-d$이므로 위의 식에 대입하면

$-2 \le 10-2(b+d) \le 2$, $-12 \le -2(b+d) \le -8$

$\therefore 4 \le b+d \le 6$

(i) $b+d=4$, 즉 $a+c+e=6$인 경우

방정식 $b+d=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 b, d의 순서쌍 (b, d)의 개수는

${}_2\mathrm{H}_4 = {}_5\mathrm{C}_4 = {}_5\mathrm{C}_1 = 5$

방정식 $a+c+e=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c, e의 순서쌍 (a, c, e)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_6 = {}_8\mathrm{C}_6 = {}_8\mathrm{C}_2 = 28$

즉, $b+d=4$인 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$5 \times 28 = 140$

(ii) $b+d=5$, 즉 $a+c+e=5$인 경우

방정식 $b+d=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 b, d의 순서쌍 (b, d)의 개수는

${}_2\mathrm{H}_5 = {}_6\mathrm{C}_5 = {}_6\mathrm{C}_1 = 6$

방정식 $a+c+e=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c, e의 순서쌍 (a, c, e)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_2 = 21$

즉, $b+d=5$인 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$6 \times 21 = 126$

(iii) $b+d=6$, 즉 $a+c+e=4$인 경우

방정식 $b+d=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, d의 순서쌍 (b, d)의 개수는

${}_2\mathrm{H}_6 = {}_7\mathrm{C}_6 = {}_7\mathrm{C}_1 = 7$

방정식 $a+c+e=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c, e의 순서쌍 (a, c, e)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_4 = {}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = 15$

즉, $b+d=6$인 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$7 \times 15 = 105$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$140+126+105=371$

0141 답 238

(가)에서 방정식 $a+b+c+d=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

${}_4\mathrm{H}_{10} = {}_{13}\mathrm{C}_{10} = {}_{13}\mathrm{C}_3 = 286$

이때 (나)를 만족시키지 않으려면 두 점 (a, b), (c, d)가 일치하거나 두 점 (a, b), (c, d) 중 적어도 하나는 직선 $y=3x$ 위에 있어야 한다.

(i) 두 점 (a, b), (c, d)가 일치하는 경우

$a=c$, $b=d$이므로

$2a+2b=10$

$\therefore a+b=5$

즉, 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 방정식 $a+b=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_5 = {}_6\mathrm{C}_5 = {}_6\mathrm{C}_1 = 6$

(ii) 점 (a, b)가 직선 $y=3x$ 위에 있는 경우

$b=3a$이므로 $4a+c+d=10$

① $a=0$일 때,

$b=0$이고, $c+d=10$

즉, 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 방정식 $c+d=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d의 순서쌍 (c, d)의 개수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_{10} = {}_{11}\mathrm{C}_{10} = {}_{11}\mathrm{C}_1 = 11$

② $a=1$일 때,
$b=3$이고, $c+d=6$
즉, 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 방정식 $c+d=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d의 순서쌍 (c, d)의 개수와 같으므로
${}_2\mathrm{H}_6={}_7\mathrm{C}_6={}_7\mathrm{C}_1=7$

③ $a=2$일 때,
$b=6$이고, $c+d=2$
즉, 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 방정식 $c+d=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 c, d의 순서쌍 (c, d)의 개수와 같으므로
${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

①, ②, ③에서 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$11+7+3=21$

(iii) 점 (c, d)가 직선 $y=3x$ 위에 있는 경우
(ii)와 같은 방법으로 하면 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 21

(iv) 두 점 (a, b), (c, d)가 모두 직선 $y=3x$ 위에 있는 경우
$b=3a$, $d=3c$이므로
$4a+4c=10$
$\therefore a+c=2.5$
이때 a, c는 음이 아닌 정수이므로 이를 만족시키는 정수는 존재하지 않는다.
즉, 두 점 (a, b), (c, d)가 모두 직선 $y=3x$ 위에 있는 경우는 없다. → 두 점 (a, b), (c, d)가 일치하면서 직선 $y=3x$ 위에 있는 경우도 없다.

(i)~(iv)에서 (나)를 만족시키지 않는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$6+21+21=48$
따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는
$286-48=238$

0142 답 ④

구하는 경우의 수는 서로 다른 3개의 상자에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$

0143 답 ②

각 상자에 빵이 1개 이상씩 들어가려면 1개, 1개, 2개 담아야 하므로 그 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_2\times\frac{1}{2!}=6$
이때 똑같은 상자 3개에 서로 다른 빵이 들어가므로 서로 다른 상자 3개로 구분된다.
각 상자에 똑같은 음료수가 1개 이상씩 들어가려면 음료수를 각 상자에 먼저 1개씩 담고 남은 음료수 5개를 남김없이 담으면 된다.
남은 음료수 5개를 서로 다른 상자 3개에 담는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$
따라서 구하는 방법의 수는
$6\times21=126$

0144 답 ①

각 학생이 적어도 1자루의 연필을 받으려면 세 명의 학생에게 연필을 1자루씩 먼저 나누어 주고 남은 3자루의 연필을 남김없이 나누어 주면 된다.
남은 3자루의 연필을 세 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$
지우개 5개를 세 명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$
따라서 구하는 경우의 수는
$10\times21=210$

0145 답 ⑤

각 책장 안의 책이 4권 이하가 되는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 한 책장 안의 책이 5권 또는 6권인 경우의 수를 뺀 것과 같다.
같은 종류의 책 6권을 서로 다른 3개의 책장에 넣는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$
(i) 3개의 책장에 0권, 1권, 5권 넣는 경우의 수는 $3!=6$
(ii) 3개의 책장에 0권, 0권, 6권 넣는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$
(i), (ii)에서 한 책장 안의 책이 5권 또는 6권인 경우의 수는
$6+3=9$
따라서 구하는 경우의 수는
$28-9=19$

0146 답 ③

(i) 2개, 2개 택하는 경우 → 2가지 색의 공을 2개씩
3가지 색 중에서 공을 2개씩 택할 2가지 색을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$
택한 2가지 색의 공에 대하여 1가지 색의 공 2개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$ (㉠)
즉, 2개, 2개 택하는 경우의 수는
$3\times6\times6=108$ (㉠, ㉠)

(ii) 2개, 1개, 1개 택하는 경우 → 1가지 색의 공을 2개, 나머지는 1개씩
3가지 색 중에서 2개의 공을 택할 1가지 색을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$
택한 1가지 색의 공 2개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$
나머지 2가지 색의 공에 대하여 1가지 색의 공 1개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$ (㉡)
즉, 2개, 1개, 1개 택하는 경우의 수는
$3\times6\times3\times3=162$ (㉡, ㉡)

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$108+162=270$

0147 답 ④

4명의 학생 중에서 아무것도 받지 못하는 학생 1명을 정하는 방법의 수는 ${}_4C_1=4$

나머지 3명의 학생은 공을 1개 이상씩 받아야 하므로 3명의 학생에게 공을 1개씩 먼저 나누어 주고, 남은 공 5개를 남김없이 나누어 주면 된다.

이때 남은 공 5개를 3명의 학생에게 나누어 주는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

따라서 구하는 방법의 수는

$4\times21=84$

0148 답 ②

(가), (나)에서 학생 A에게 떡 2개, 학생 B에게 약과 1개를 먼저 나누어 주고, 남은 떡 6개, 약과 2개를 세 명의 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주면 되므로 그 방법의 수는

${}_3H_6\times{}_3H_2={}_8C_6\times{}_4C_2={}_8C_2\times{}_4C_2$

$=28\times6=168$

(다)를 만족시키려면 학생 C가 떡과 약과를 한 개도 받지 못하는 경우를 제외해야 한다.

학생 C가 떡과 약과를 한 개도 받지 못하도록 떡과 약과를 나누어 주는 방법의 수는 남은 떡 6개와 약과 2개를 두 명의 학생 A, B에게 남김없이 나누어 주는 방법의 수와 같으므로

${}_2H_6\times{}_2H_2={}_7C_6\times{}_3C_2={}_7C_1\times{}_3C_1$

$=7\times3=21$

따라서 구하는 방법의 수는

$168-21=147$

0149 답 60

주황 탁구공 3개를 세 주머니 A, B, C에 담는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$ …… ⓘ

이때 (나)에서 주황 탁구공을 담는 주머니에는 흰 탁구공도 담고, (가)에서 주황 탁구공을 담지 않는 주머니에도 적어도 1개의 흰 탁구공을 담는다.

즉, 세 주머니 A, B, C에는 각각 적어도 1개의 흰 탁구공을 담아야 하므로 먼저 흰 탁구공을 각 주머니에 1개씩 담고, 남은 흰 탁구공 2개를 남김없이 담으면 된다.

이때 남은 흰 탁구공 2개를 세 주머니 A, B, C에 담는 방법의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_4C_2=6$ …… ⓘⓘ

따라서 구하는 방법의 수는

$10\times6=60$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 주머니에 주황 탁구공을 담는 방법의 수 구하기	30 %
ⓘⓘ 주머니에 흰 탁구공을 담는 방법의 수 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ 주머니에 주황 탁구공과 흰 탁구공을 담는 방법의 수 구하기	20 %

0150 답 ⑤

(가), (나)에서 사탕과 빵 중에서 1가지만 받는 학생은 없으므로 각각의 학생은 사탕과 빵을 둘 다 받거나 아무것도 받지 못한다.

(ⅰ) 사탕과 빵을 둘 다 받는 학생이 1명인 경우 → 나머지 2명은 아무것도 받지 못한다.

사탕 5개와 빵 4개를 모두 받는 학생 1명을 정하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

(ⅱ) 사탕과 빵을 둘 다 받는 학생이 2명인 경우 → 나머지 1명은 아무것도 받지 못한다.

사탕과 빵을 둘 다 받는 학생 2명을 정하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

사탕과 빵을 둘 다 받는 학생 2명에게 먼저 사탕과 빵을 1개씩 나누어 주고, 남은 사탕 3개와 빵 2개를 남김없이 나누어 주면 된다.

남은 사탕 3개를 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

남은 빵 2개를 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 2개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

즉, 사탕과 빵을 둘 다 받는 학생이 2명인 경우의 수는

$3\times4\times3=36$

(ⅲ) 사탕과 빵을 둘 다 받는 학생이 3명인 경우

학생 3명에게 먼저 사탕과 빵을 1개씩 나누어 주고, 남은 사탕 2개와 빵 1개를 남김없이 나누어 주면 된다.

남은 사탕 2개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_4C_2=6$

남은 빵 1개를 받는 학생 1명을 정하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

즉, 사탕과 빵을 둘 다 받는 학생이 3명인 경우의 수는

$6\times3=18$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 방법의 수는

$3+36+18=57$

0151 답 ②

4개의 주머니 A, B, C, D에 담는 구슬의 개수를 각각 a, b, c, d라 하면

$a+b+c+d=13$ (단, a, b, c, d는 음이 아닌 정수)

(가)에서 a의 값은 5 이하의 소수이므로 $a=2$ 또는 $a=3$ 또는 $a=5$

(ⅰ) $a=2$인 경우

방정식 $b+c+d=11$을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d의 순서쌍 (b, c, d)의 개수는

${}_3H_{11}={}_{13}C_{11}={}_{13}C_2=78$

이때 (나)를 만족시키려면 b, c, d의 값이 모두 홀수인 경우를 제외하면 된다.

$b=2b'+1$, $c=2c'+1$, $d=2d'+1$(b', c', d'은 음이 아닌 정수)이라 하고 $b+c+d=11$에 대입하면

$(2b'+1)+(2c'+1)+(2d'+1)=11$

$\therefore\ b'+c'+d'=4$

$b'+c'+d'=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 b', c', d'의 순서쌍 (b', c', d')의 개수는

${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

즉, $a=2$인 경우의 수는

$78-15=63$

(ii) $a=3$인 경우

방정식 $b+c+d=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d의 순서쌍 (b, c, d)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$

이때 (나)를 만족시키려면 b, c, d의 값이 모두 홀수인 경우를 제외하면 된다.

그런데 b, c, d의 값이 모두 홀수이면 $b+c+d$의 값은 홀수이므로 짝수인 10이 될 수 없다.

따라서 b, c, d의 값이 모두 홀수인 경우는 없다.

즉, $a=3$인 경우의 수는

$66-0=66$

(iii) $a=5$인 경우

방정식 $b+c+d=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d의 순서쌍 (b, c, d)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_8={}_{10}\mathrm{C}_8={}_{10}\mathrm{C}_2=45$

이때 (나)를 만족시키려면 b, c, d의 값이 모두 홀수인 경우를 제외하면 된다.

그런데 b, c, d의 값이 모두 홀수이면 $b+c+d$의 값은 홀수이므로 짝수인 8이 될 수 없다.

따라서 b, c, d의 값이 모두 홀수인 경우는 없다.

즉, $a=5$인 경우의 수는

$45-0=45$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

$63+66+45=174$

0152 답 ③

(i) $n=12$인 경우

공이 4개씩 모두 20개가 들어 있는 5개의 상자에서 총 8개의 공을 꺼내는 경우의 수는 서로 다른 5개의 상자에서 8개를 택하는 중복조합의 수에서 한 상자에서 5개 이상의 공을 꺼내는 경우의 수를 뺀 것이므로

→ 한 상자를 택하여 5개의 공을 꺼내고, 중복을 허용하여 다시 3개의 공을 더 꺼낼 상자를 택하는 경우의 수

$f(12)={}_5\mathrm{H}_8-{}_5\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{H}_3$

$={}_{12}\mathrm{C}_8-5\times{}_7\mathrm{C}_3$

$={}_{12}\mathrm{C}_4-5\times35$

$=495-175$

$=\boxed{\text{(가) } 320}$

(ii) $n=13$인 경우

공이 4개씩 모두 20개가 들어 있는 5개의 상자에서 총 $\boxed{\text{(나) } 7}$개의 공을 꺼내는 경우의 수는 서로 다른 5개의 상자에서 7개를 택하는 중복조합의 수에서 한 상자에서 5개 이상의 공을 꺼내는 경우의 수를 뺀 것이므로

→ 한 상자를 택하여 5개의 공을 꺼내고, 중복을 허용하여 다시 2개의 공을 더 꺼낼 상자를 택하는 경우의 수

$f(13)={}_5\mathrm{H}_7-{}_5\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{H}_2$

$={}_{11}\mathrm{C}_7-5\times{}_6\mathrm{C}_2$

$={}_{11}\mathrm{C}_4-5\times15$

$=330-75$

$=\boxed{\text{(다) } 255}$

(i), (ii)에 의하여

$f(12)+f(13)=320+255$

$=\boxed{\text{(라) } 575}$

따라서 $a=320$, $b=7$, $c=255$, $d=575$이므로

$a+b+c+d=1157$

0153 답 ①

흰 상자에는 각각 1개 이상의 구슬이 들어 있도록 넣어야 하므로 4개의 흰 상자에 구슬을 1개씩 먼저 넣고, 나머지 4개의 구슬을 8개의 상자에 남김없이 나누어 넣으면 된다.

이때 검은 상자에는 구슬을 많아야 1개씩만 넣을 수 있고, 흰 상자에는 중복하여 넣을 수 있다.

→ 조합의 수를 이용할 수 있다.

→ 중복조합의 수를 이용할 수 있다.

나머지 4개의 구슬을 검은 상자와 흰 상자에 넣는 개수에 따라 나누어 생각하자.

(i) 검은 상자에 0개, 흰 상자에 4개를 넣는 경우

흰 상자 4개에 중복을 허용하여 4개를 넣는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=35$

(ii) 검은 상자에 1개, 흰 상자에 3개를 넣는 경우

1개를 넣을 검은 상자 1개를 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

흰 상자 4개에 중복을 허용하여 3개를 넣는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

즉, 검은 상자에 1개, 흰 상자에 3개를 넣는 경우의 수는

$4\times20=80$

(iii) 검은 상자에 2개, 흰 상자에 2개를 넣는 경우

1개씩 2개를 넣을 검은 상자 2개를 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

흰 상자 4개에 중복을 허용하여 2개를 넣는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

즉, 검은 상자에 2개, 흰 상자에 2개를 넣는 경우의 수는

$6\times10=60$

(iv) 검은 상자에 3개, 흰 상자에 1개를 넣는 경우

1개씩 3개를 넣을 검은 상자 3개를 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

흰 상자 4개에 중복을 허용하여 1개를 넣는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_1={}_4\mathrm{C}_1=4$

즉, 검은 상자에 3개, 흰 상자에 1개를 넣는 경우의 수는

$4\times4=16$

(v) 검은 상자에 4개, 흰 상자에 0개를 넣는 경우

1개씩 4개를 넣을 검은 상자 4개를 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_4=1$

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$35+80+60+16+1=192$

0154 답 ①

각 주머니에는 주머니의 숫자와 다른 숫자가 적힌 공을 담아야 하므로 주머니 1에는 2, 3이 적힌 2가지 공에서 3개를 택하여 담고, 주머니 2에는 1, 3이 적힌 2가지 공에서 3개를 택하여 담고, 주머니 3에는 1, 2가 적힌 2가지 공에서 3개를 택하여 담으면 된다.

[주머니 1] 222, 223, 233, 333

[주머니 2] 111, 113, 133, 333

[주머니 3] 111, 112, 122, 222

각 경우의 수는 서로 다른 2개에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 각 공에 적힌 숫자가 주머니의 숫자와 같지 않도록 공을 담는 경우의 수는

$${}_2\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_3\times{}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_3\times{}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=64$$

그런데 1, 2, 3이 적힌 공은 각각 5개씩 있으므로 같은 숫자가 적힌 공을 6개 담는 경우를 제외해야 한다.

주머니 2, 3에 1이 적힌 공을 3개씩 담고, 주머니 1에 2, 3이 적힌 공을 3개 담는 경우의 수는

$$1\times1\times{}_2\mathrm{H}_3=1\times1\times{}_4\mathrm{C}_3=1\times1\times{}_4\mathrm{C}_1=4$$

주머니 1, 3에 2가 적힌 공을 3개씩 담고, 주머니 2에 1, 3이 적힌 공을 3개 담는 경우의 수는

$$1\times1\times{}_2\mathrm{H}_3=1\times1\times{}_4\mathrm{C}_3=1\times1\times{}_4\mathrm{C}_1=4$$

주머니 1, 2에 3이 적힌 공을 3개씩 담고, 주머니 3에 1, 2가 적힌 공을 3개 담는 경우의 수는

$$1\times1\times{}_2\mathrm{H}_3=1\times1\times{}_4\mathrm{C}_3=1\times1\times{}_4\mathrm{C}_1=4$$

즉, 같은 숫자가 적힌 공을 6개 담는 경우의 수는

$4+4+4=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$64-12=52$

0155 답 ①

(i)의 경우:

n명의 사람이 각자 세 상자 중 공을 넣을 두 상자를 선택하는 경우의 수는 n명의 사람이 각자 공을 넣지 않을 한 상자를 선택하는 경우의 수와 같다. 따라서 세 상자에서 중복을 허락하여 n개의 상자를 선택하는 경우의 수인 $\boxed{(가)\ {}_3\mathrm{H}_n}$이다.

(iii)의 경우:

두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가면 상자 C에는 최대 n개의 공을 넣을 수 있으므로 두 상자 A, B에 각각 $\frac{n}{2}$개보다 작은 개수의 공이 들어갈 수 없다. 따라서 두 상자 A, B에 같은 개수의 공이 들어가려면 두 상자에 들어 있는 공의 개수는 각각

$$\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}+1,\ \frac{n}{2}+2,\ \cdots,\ \frac{n}{2}+\frac{n}{2}$$

이므로 경우의 수는 $\boxed{(나)\ \frac{n}{2}+1}$이다. 이때 세 상자에 모두 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수 1을 제외해야 한다.

같은 개수의 공이 들어가는 상자 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2$ ㉠

이므로 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는

$${}_3\mathrm{C}_2\times\left(\boxed{(나)\ \frac{n}{2}+1}-1\right)=\frac{3n}{2}$$

따라서 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수는

$$\boxed{(다)\ {}_3\mathrm{H}_n-1-\frac{3n}{2}}$$

이때 $f(n)={}_3\mathrm{H}_n$, $g(n)=\frac{n}{2}+1$, $h(n)={}_3\mathrm{H}_n-1-\frac{3n}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\frac{f(30)}{g(30)}+h(30)&=\frac{{}_3\mathrm{H}_{30}}{16}+{}_3\mathrm{H}_{30}-46=\frac{{}_{32}\mathrm{C}_{30}}{16}+{}_{32}\mathrm{C}_{30}-46\\&=\frac{{}_{32}\mathrm{C}_2}{16}+{}_{32}\mathrm{C}_2-46=31+496-46\\&=481\end{aligned}$$

0156 답 ①

흰 공 1개, 검은 공 2개, 파란 공 2개, 노란 공 3개를 세 상자 A, B, C에 나누어 담는 경우의 수는 …… ㉠

$$\begin{aligned}{}_3\mathrm{H}_1\times{}_3\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{H}_2\times{}_3\mathrm{H}_3&={}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_3\\&={}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2\\&=3\times6\times6\times10=1080\end{aligned}$$

㉠에서 (가) 또는 (나)를 만족시키지 않는 경우를 제외하면 된다.

(i) (가)를 만족시키지 않는 경우

상자 A 또는 B에 공이 없는 경우이다.

상자 A에 공이 없는 경우의 수는 흰 공 1개, 검은 공 2개, 파란 공 2개, 노란 공 3개를 두 상자 B, C에 나누어 담는 경우의 수와 같으므로

$$\begin{aligned}{}_2\mathrm{H}_1\times{}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_2\times{}_2\mathrm{H}_3&={}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_3\\&={}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1\\&=2\times3\times3\times4=72\end{aligned}$$

같은 방법으로 하면 상자 B에 공이 없는 경우의 수도 72이다.

두 상자 A, B에 모두 공이 없는 경우의 수는 1 → 모든 공이 상자 C에 들어간다.

즉, (가)를 만족시키지 않는 경우의 수는

$72+72-1=143$

(ii) (나)를 만족시키지 않는 경우

상자 A에 네 종류의 색상의 공이 들어 있는 경우이다.

먼저 상자 A에 흰 공 1개, 검은 공 1개, 파란 공 1개, 노란 공 1개를 넣고 남은 검은 공 1개, 파란 공 1개, 노란 공 2개를 세 상자 A, B, C에 나누어 담으면 되므로 그 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_3\mathrm{H}_1\times{}_3\mathrm{H}_1\times{}_3\mathrm{H}_2&={}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2=3\times3\times6\\&=54\end{aligned}$$

(iii) (가)와 (나)를 모두 만족시키지 않는 경우

상자 A에 네 종류의 색상의 공이 들어 있고, 상자 B에 공이 없는 경우이다.

먼저 상자 A에 흰 공 1개, 검은 공 1개, 파란 공 1개, 노란 공 1개를 넣고 남은 검은 공 1개, 파란 공 1개, 노란 공 2개를 두 상자 A, C에 나누어 담으면 되므로 그 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_2\mathrm{H}_1\times{}_2\mathrm{H}_1\times{}_2\mathrm{H}_2&={}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2\\&={}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\\&=2\times2\times3=12\end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 (가) 또는 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는

$143+54-12=185$

따라서 구하는 경우의 수는

$1080-185=895$

0157 답 ④

다섯 명의 학생 A, B, C, D, E에게 나누어 주는 야구공의 개수를 각각 a, b, c, d, e라 하면

$a+b+c+d+e=9$ (단, a, d, e는 음이 아닌 정수, b, c는 자연수) ····· ㉠

㈎에서 $b=3c$

(i) $c=1$, $b=3$인 경우

㉠에서 $a+d+e=5$

방정식 $a+d+e=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, d, e의 순서쌍 (a, d, e)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$

(ii) $c=2$, $b=6$인 경우

㉠에서 $a+d+e=1$

방정식 $a+d+e=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, d, e의 순서쌍 (a, d, e)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$

(i), (ii)에서 야구공을 나누어 주는 경우의 수는

$21+3=24$

㈏에서 각 학생이 받는 테니스공의 개수는 4 이하이므로 각 학생이 4개씩 받았다고 하면 총 20개의 테니스공 중에서 6개를 반납하면 된다.

다섯 명의 학생 A, B, C, D, E가 반납하는 테니스공의 개수를 각각 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5라 하면

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=6$

(단, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5는 4 이하의 음이 아닌 정수) ····· ㉡

㉡을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5의 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$의 개수에서 한 수가 6이거나 두 수가 각각 5, 1인 순서쌍의 개수를 빼면 되므로 그 경우의 수는

5명 중에서 1명을 뽑아 6개를 반납하는 경우와 5명 중에서 2명을 뽑아 5개, 1개를 반납하는 경우

$$\begin{aligned}{}_5\mathrm{H}_6-({}_5\mathrm{P}_1+{}_5\mathrm{P}_2)&={}_{10}\mathrm{C}_6-(5+20)\\&={}_{10}\mathrm{C}_4-25\\&=210-25\\&=185\end{aligned}$$

따라서 야구공과 테니스공을 나누어 주는 경우의 수는

$a=24\times185$

$$\therefore\ \frac{a}{30}=\frac{24\times185}{30}=148$$

0158 답 ④

구하는 경우의 수는 5곳에서 투표할 6곳을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{H}_6={}_{10}\mathrm{C}_6={}_{10}\mathrm{C}_4=210$

0159 답 20

2, 3, 4, 5가 적힌 공에서 중복을 허용하여 3개를 택하면 각각의 경우마다 공에 적힌 수를 모두 곱한 값은 서로 다르다.

따라서 구하는 정수의 개수는

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

참고 $2\times2=4$이지만 2가 적힌 공을 2번 뽑으면 남은 시행은 1회이고, 4가 적힌 공을 1번 뽑으면 남은 시행은 2회이므로 같은 정수를 만드는 중복되는 경우는 존재하지 않는다.

0160 답 ②

택한 6개 중에서 2개는 홀수이고, 4개는 짝수이어야 한다.

홀수 1, 3, 5의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

짝수 2, 4의 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 경우의 수는

${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times5=30$

0161 답 ①

네 종류의 카드가 적어도 1장씩 포함되어야 하므로 네 종류의 카드를 각각 1장씩 먼저 꺼내고, 4장을 더 꺼내면 된다.

이때 네 종류의 카드가 2장씩 남아 있으므로 네 종류의 카드에서 각각 4장, 0장, 0장, 0장을 꺼내는 경우와 3장, 1장, 0장, 0장을 꺼내는 경우를 제외해야 한다.

네 종류의 카드에서 4장을 꺼내는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=35$

네 종류의 카드에서 각각 4장, 0장, 0장, 0장을 꺼내는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

네 종류의 카드에서 각각 3장, 1장, 0장, 0장을 꺼내는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$35-(4+12)=19$

0162 답 ①

3명의 학생의 왼쪽으로부터 순서를 정하는 경우의 수는 $3!=6$

이때 ㉠~㉤ 4개의 자리에 선택하지 않은 5개의 레인을 배치해야 하는데, 학생과 학생 사이에 레인이 적어도 1개씩 있어야 하므로 ㉡, ㉢에 1개씩 먼저 배치하고, 남은 3개의 레인을 ㉠~㉤ 4개의 자리에 배치하면 된다.



이 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times20=120$

다른 풀이

선택하지 않은 레인 5개를 먼저 배치하고, 레인과 레인 사이와 양쪽 끝의 6개의 자리 중에서 3개의 자리에 3명이 학생이 선택한 레인을 배치하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{P}_3=120$

0163 답 ①

세 수의 곱이 6 이상이 되도록 택하는 경우의 수는 모든 경우의 수에서 세 수의 곱이 6 미만인 경우의 수를 뺀 것과 같다.

1, 2, 3, 6의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

세 수의 곱이 6 미만인 경우는
1, 1, 1 또는 1, 1, 2 또는 1, 1, 3 또는 1, 2, 2의 4가지
따라서 구하는 경우의 수는 $20-4=16$

0164 답 ⑤

10원, 100원, 500원짜리 동전을 각각 4개 이하로 택할 때, 겹치는 금액은 없다.

(i) 동전 1개를 사용하는 경우
3가지의 동전 중에서 중복을 허용하여 1개를 택하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$

(ii) 동전 2개를 사용하는 경우
3가지의 동전 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

(iii) 동전 3개를 사용하는 경우
3가지의 동전 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$
이때 500원짜리 동전은 2개 있으므로 500원짜리 동전을 3개 택하는 경우를 제외하면 그 경우의 수는
$10-1=9$

(iv) 동전 4개를 사용하는 경우
3가지의 동전 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 경우의 수는
${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$
이때 500원짜리 동전은 2개 있으므로 500원짜리 동전을 3개 또는 4개 택하는 경우를 제외하면 그 경우의 수는
$15-(2+1)=12$

(i)~(iv)에서 지불할 수 있는 금액의 수는
$3+6+9+12=30$

0165 답 ①

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 각각 a, b, c, d라 하면 4000보다 작은 네 자리의 자연수의 각 자리의 수의 합이 12이므로 a는 3 이하의 자연수이고
$a+b+c+d=12$ (단, b, c, d는 9 이하의 음이 아닌 정수)

(i) $a=1$인 경우
$a+b+c+d=12$에서 $b+c+d=11$
이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d의 순서쌍 (b, c, d)의 개수는
${}_3\mathrm{H}_{11}={}_{13}\mathrm{C}_{11}={}_{13}\mathrm{C}_2=78$
이때 b, c, d가 10 이상인 경우, 즉 11, 0, 0 또는 10, 1, 0인 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}+3!=9$
즉, $a=1$인 자연수의 개수는
$78-9=69$

(ii) $a=2$인 경우
$a+b+c+d=12$에서 $b+c+d=10$
이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d의 순서쌍 (b, c, d)의 개수는
${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$
이때 b, c, d가 10 이상인 경우, 즉 10, 0, 0인 경우의 수는
$\frac{3!}{2!}=3$
즉, $a=2$인 자연수의 개수는
$66-3=63$

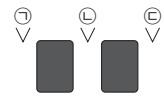
(iii) $a=3$인 경우
$a+b+c+d=12$에서 $b+c+d=9$
이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d의 순서쌍 (b, c, d)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_9={}_{11}\mathrm{C}_9={}_{11}\mathrm{C}_2=55$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는
$69+63+55=187$

0166 답 25

(가)에서 흰색 카드 8장은 순서가 정해져 있으므로 똑같은 카드 8장으로 생각하여 배열한 후, 가장 왼쪽에 있는 카드부터 순서대로 1, 2, 3, …, 8로 바꾸면 된다.

(가), (나)를 만족시키려면 검은색 카드 사이, 즉 ㉡ 자리에 흰색 카드 2장을 먼저 놓고, 남은 6장의 흰색 카드를 ㉠, ㉡, ㉢ 3개의 자리에 나누어 놓으면 된다.



이 경우의 수는 서로 다른 3개에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$

이때 (다)를 만족시키지 않는 경우는 검은색 카드 사이의 흰색 카드에 적힌 수가 1, 2 또는 4, 5 또는 7, 8인 경우이므로 그 경우의 수는 3

따라서 구하는 경우의 수는
$28-3=25$

0167 답 ③

택한 19권의 책 중에서 네 종류의 책 A, B, C, D의 권수를 각각 a, b, c, d라 하면
$a+b+c+d=19$ (단, a, b, c, d는 10 이하의 음이 아닌 정수)

(가)에서 $a\geq3$, $b\geq3$이므로 $a=a'+3$, $b=b'+3$이라 하고
$a+b+c+d=19$에 대입하면
$(a'+3)+(b'+3)+c+d=19$
$\therefore a'+b'+c+d=13$ (단, a', b'은 7 이하의 음이 아닌 정수, c, d는 10 이하의 음이 아닌 정수)

(i) $c=d=0$인 경우
$a'+b'+c+d=13$에서 $a'+b'=13$
즉, 방정식 $a'+b'=13$을 만족시키는 a', b'의 순서쌍 (a', b')은 $(7, 6)$, $(6, 7)$의 2개이다.

(ii) $c\geq4$, $d\geq4$인 경우
$c=c'+4$, $d=d'+4$라 하고 $a'+b'+c+d=13$에 대입하면
$a'+b'+(c'+4)+(d'+4)=13$
$\therefore a'+b'+c'+d'=5$
즉, 방정식 $a'+b'+c'+d'=5$를 만족시키는 a', b', c', d'의 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는
${}_4\mathrm{H}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=56$

(ⅲ) $c=0$, $d\geq4$ 또는 $c\geq4$, $d=0$인 경우

두 수 c, d 중에서 그 값이 0이 되는 것을 택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

$c=0$이라 하면 $d\geq4$이므로 $d=d'+4$라 하고

$a'+b'+c+d=13$에 대입하면

$a'+b'+(d'+4)=13$

$\therefore a'+b'+d'=9$

즉, 방정식 $a'+b'+d'=9$를 만족시키는 a', b', d'의 순서쌍 (a', b', d')의 개수는

${}_3H_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$

이때 $0\leq a'\leq7$, $0\leq b'\leq7$, $0\leq d'\leq6$이므로

$a'\geq8$ 또는 $b'\geq8$ 또는 $d'\geq7$인 경우를 제외해야 한다.

① $a'\geq8$인 경우

$(8, 1, 0)$, $(8, 0, 1)$, $(9, 0, 0)$의 3가지

② $b'\geq8$인 경우

$(1, 8, 0)$, $(0, 8, 1)$, $(0, 9, 0)$의 3가지

③ $d'\geq7$인 경우

$(2, 0, 7)$, $(0, 2, 7)$, $(1, 1, 7)$,

$(1, 0, 8)$, $(0, 1, 8)$, $(0, 0, 9)$의 6가지

①, ②, ③에서 $a'\geq8$ 또는 $b'\geq8$ 또는 $d'\geq7$인 경우의 수는

$3+3+6=12$

즉, $c=0$, $d\geq4$ 또는 $c\geq4$, $d=0$인 경우의 수는

$2\times(55-12)=86$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는

$2+56+86=144$

최고수준 도전 기출 40~41쪽

0168 답 ④

전략 치역으로 가능한 집합을 구한 후 정의역의 원소를 치역의 원소에 대응시키는 경우의 수를 구한다.

(가), (나)에서 함수 f의 치역으로 가능한 집합은

$\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 4\}$의 2가지이다.

이때 집합 X에서 집합 $\{1, 2, 6\}$으로의 함수 f의 개수를 구해 보자.

$f(a)\leq f(b)\leq f(c)\leq f(e)$에서 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(e)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $\{1, 2, 6\}$의 원소 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 a, b, c, e에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

$f(d)$의 값이 될 수 있는 수는 집합 $\{1, 2, 6\}$의 원소 3개이다.

즉, 집합 X에서 집합 $\{1, 2, 6\}$으로의 함수 f의 개수는

$15\times3=45$

그런데 치역의 원소의 개수는 3이므로 치역의 원소의 개수가 1 또는 2인 경우를 제외해야 한다.

(ⅰ) 치역의 원소의 개수가 1인 경우

치역으로 가능한 집합은 $\{1\}$, $\{2\}$, $\{6\}$의 3가지이므로 함수 f의 개수는 3개

(ⅱ) 치역의 원소의 개수가 2인 경우

치역으로 가능한 집합은 $\{1, 2\}$, $\{1, 6\}$, $\{2, 6\}$의 3가지

① $f(a)=f(b)=f(c)=f(e)$일 때,

$f(a)$의 값이 정해지면 $f(b)$, $f(c)$, $f(e)$의 값은 같은 값으로 정해진다.

$f(a)$, $f(d)$의 값을 정하는 경우의 수는 치역의 원소 2개를 집합 X의 원소 a, d에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$2!=2$

② $f(a)<f(b)\leq f(c)\leq f(e)$ 또는 $f(a)\leq f(b)<f(c)\leq f(e)$ 또는 $f(a)\leq f(b)\leq f(c)<f(e)$일 때,

$f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(e)$의 값을 정하는 경우의 수는 치역의 원소 2개를 크기가 작은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 a와 b, c, e 또는 a, b와 c, e 또는 a, b, c와 e에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 3이다.

이때 $f(d)$의 값이 될 수 있는 수는 치역의 원소 2개이므로 그 경우의 수는

$3\times2=6$

①, ②에서 함수 f의 개수는

$2+6=8$

즉, 치역의 원소의 개수가 2인 함수 f의 개수는

$3\times8=24$

(ⅰ), (ⅱ)에서 치역의 원소의 개수가 1 또는 2인 함수 f의 개수는

$3+24=27$

즉, 치역이 $\{1, 2, 6\}$인 함수 f의 개수는

$45-27=18$

같은 방법으로 하면 치역이 $\{1, 3, 4\}$인 함수 f의 개수는 18이다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$18+18=36$

0169 답 108

전략 대소 관계를 만족시키는 함수의 개수를 구한 후 $x+f(x)\in X$를 만족시키지 않는 경우를 찾아 제외한다.

(나)에서

$f(-2)\geq f(-1)\geq f(0)\geq f(1)\geq f(2)$

즉, (나)를 만족시키는 함수 f의 개수는

${}_5H_5={}_9C_5={}_9C_4=126$

이때 (가)에서

$-2+f(-2)\in X$이어야 하므로 $f(-2)\neq-2$, $f(-2)\neq-1$

$-1+f(-1)\in X$이어야 하므로 $f(-1)\neq-2$

$1+f(1)\in X$이어야 하므로 $f(1)\neq2$

$2+f(2)\in X$이어야 하므로 $f(2)\neq1$, $f(2)\neq2$

즉, 다음 경우를 제외해야 한다.

(ⅰ) $f(-2)=-2$인 경우

$f(-1)=f(0)=f(1)=f(2)=-2$이므로 함수 f의 개수는 1이다.

(ii) $f(-2)=-1$인 경우

$f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 -2, -1의 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 크기가 크거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 -1, 0, 1, 2에 대응시키면 된다.

즉, 그 함수 f의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$

(iii) $f(-2)\neq-2$, $f(-2)\neq-1$, $f(-1)=-2$인 경우

$f(-2)$의 값은 0, 1, 2 중 하나이고 $f(0)=f(1)=f(2)=-2$이므로 함수 f의 개수는 3이다.

(iv) $f(2)=2$인 경우

$f(-2)=f(-1)=f(0)=f(1)=2$이므로 함수 f의 개수는 1이다.

(v) $f(2)=1$인 경우

$f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2의 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 크기가 크거나 같은 것부터 순서대로 집합 X의 원소 -2, -1, 0, 1에 대응시키면 된다.

즉, 그 함수 f의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_4={}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$

(vi) $f(2)\neq2$, $f(2)\neq1$, $f(1)=2$인 경우

$f(2)$의 값은 -2, -1, 0 중 하나이고

$f(-2)=f(-1)=f(0)=2$이므로 함수 f의 개수는 3이다.

(i)~(vi)에서 중복되는 경우는 없으므로 제외해야 하는 함수 f의 개수는

$1+5+3+1+5+3=18$

따라서 구하는 함수 f의 개수는

$126-18=108$

0170 답 880

전략 a, b, c, d를 각각 2의 거듭제곱과 5의 거듭제곱의 곱 꼴로 나타내어 지수에 대한 방정식을 세운다.

(가)에서 $abcd=2^5\times5^5$이고, a, b, c, d는 2 이상의 자연수이므로

$a=2^{x_1}\times5^{y_1}$, $b=2^{x_2}\times5^{y_2}$, $c=2^{x_3}\times5^{y_3}$, $d=2^{x_4}\times5^{y_4}$

(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4는 음이 아닌 정수, $x_1+y_1\neq0$, $x_2+y_2\neq0$, $x_3+y_3\neq0$, $x_4+y_4\neq0$)

이라 하면

$2^{x_1+x_2+x_3+x_4}\times5^{y_1+y_2+y_3+y_4}=2^5\times5^5$

$\therefore\ x_1+x_2+x_3+x_4=5$, $y_1+y_2+y_3+y_4=5$

(나)에서 a, b, c, d의 합이 홀수이므로 a, b, c, d는 홀수 1개, 짝수 3개 또는 홀수 3개, 짝수 1개이다.

(i) a, b, c, d가 홀수 1개, 짝수 3개인 경우

a, b, c, d 중에서 홀수가 되는 1개를 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

이때 a가 홀수, b, c, d가 짝수이면

$x_1=0$, $y_1\geq1$, $x_2\geq1$, $y_2\geq0$, $x_3\geq1$, $y_3\geq0$, $x_4\geq1$, $y_4\geq0$

$x_2'=x_2-1$, $x_3'=x_3-1$, $x_4'=x_4-1$이라 하면 x_2', x_3', x_4'은 음이 아닌 정수이고 $x_1+x_2+x_3+x_4=5$에서

$0+(x_2'+1)+(x_3'+1)+(x_4'+1)=5$

$\therefore\ x_2'+x_3'+x_4'=2$

즉, 음이 아닌 정수 x_2', x_3', x_4'의 순서쌍 (x_2', x_3', x_4')의 개수는

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

$y_1'=y_1-1$이라 하면 y_1'은 음이 아닌 정수이고

$y_1+y_2+y_3+y_4=5$에서

$(y_1'+1)+y_2+y_3+y_4=5$

$\therefore\ y_1'+y_2+y_3+y_4=4$

즉, 음이 아닌 정수 y_1', y_2, y_3, y_4의 순서쌍 (y_1', y_2, y_3, y_4)의 개수는

${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=35$

즉, a, b, c, d가 홀수 1개, 짝수 3개인 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$4\times6\times35=840$

(ii) a, b, c, d가 홀수 3개, 짝수 1개인 경우

a, b, c, d 중에서 홀수가 되는 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

이때 a, b, c가 홀수, d가 짝수이면

$x_1=0$, $y_1\geq1$, $x_2=0$, $y_2\geq1$, $x_3=0$, $y_3\geq1$, $x_4\geq1$, $y_4\geq0$

$x_1+x_2+x_3+x_4=5$이므로

$x_4=5$

즉, 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4)는 $(0, 0, 0, 5)$의 1개

$y_1'=y_1-1$, $y_2'=y_2-1$, $y_3'=y_3-1$이라 하면 y_1', y_2', y_3'은 음이 아닌 정수이고 $y_1+y_2+y_3+y_4=5$에서

$(y_1'+1)+(y_2'+1)+(y_3'+1)+y_4=5$

$\therefore\ y_1'+y_2'+y_3'+y_4=2$

즉, 음이 아닌 정수 y_1', y_2', y_3', y_4의 순서쌍 (y_1', y_2', y_3', y_4)의 개수는

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

즉, a, b, c, d가 홀수 3개, 짝수 1개인 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$4\times1\times10=40$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$840+40=880$

0171 답 ②

전략 a, b, c, d 중에서 짝수인 것을 정하는 경우의 수를 구한 후 방정식 $a+b+c+d=33$을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구한다.

(나)에서 a, b, c, d 중에서 짝수 1개를 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

12 이하의 자연수 a, b, c, d에 대하여 a가 짝수, b, c, d가 홀수라 하면

$a=2a'+2$, $b=2b'+1$, $c=2c'+1$, $d=2d'+1$

(단, a', b', c', d'은 5 이하의 음이 아닌 정수)

(가)에서 $a+b+c+d=33$이므로

$(2a'+2)+(2b'+1)+(2c'+1)+(2d'+1)=33$

$\therefore\ a'+b'+c'+d'=14$ ····· ㉠

a', b', c', d'은 5 이하의 음이 아닌 정수이므로

$a'=5-x$, $b'=5-y$, $c'=5-z$, $d'=5-w$라 하자.

이를 ㉠에 대입하면

$(5-x)+(5-y)+(5-z)+(5-w)=14$

$\therefore x+y+z+w=6$ (단, x, y, z, w는 5 이하의 음이 아닌 정수)

방정식 $x+y+z+w=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

${}_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

이때 x, y, z, w에서 적어도 1개가 6 이상인 경우, 즉 6, 0, 0, 0인 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

즉, $x+y+z+w=6$을 만족시키는 5 이하의 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

$84-4=80$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$4\times80=320$

0172 답 ⑤

전략 c가 적힌 공을 나누어 주는 방법에 따라 경우를 나누어 각각의 경우의 수를 구한다.

세 명의 학생을 A, B, C라 하자.

(i) c가 적힌 공 2개를 1명의 학생이 모두 받는 경우

c가 적힌 공 2개를 모두 받는 1명의 학생을 정하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

c가 적힌 공 2개를 모두 받은 학생이 A이면 학생 A는 a, b가 적힌 공도 반드시 각각 1개 이상씩 받아야 하므로 학생 A에게 a가 적힌 공 1개와 b가 적힌 공 1개를 먼저 나누어 주고, 남은 a가 적힌 공 2개와 b가 적힌 공 2개를 세 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주면 된다.

즉, 남은 a가 적힌 공 2개와 b가 적힌 공 2개를 세 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_3H_2\times{}_3H_2={}_4C_2\times{}_4C_2$

$=6\times6=36$

이때 학생 B가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는 남은 a가 적힌 공 2개와 b가 적힌 공 2개를 두 학생 A, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수와 같으므로

${}_2H_2\times{}_2H_2={}_3C_2\times{}_3C_2={}_3C_1\times{}_3C_1$

$=3\times3=9$

같은 방법으로 학생 C가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는 9이다.

두 학생 B, C가 모두 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는 남은 a가 적힌 공 2개와 b가 적힌 공 2개를 학생 A에게 주는 경우의 수와 같으므로 1이다.

즉, c가 적힌 공 2개를 1명의 학생이 모두 받는 경우의 수는

$3\times\{36-(9+9-1)\}=57$

(ii) c가 적힌 공을 1개씩 2명의 학생이 받는 경우

c가 적힌 공을 1개씩 받는 2명의 학생을 정하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

c가 적힌 공을 1개씩 받은 학생이 A, B일 때, 두 학생 A, B는 모두 a, b가 적힌 공도 반드시 각각 1개 이상씩 받아야 하므로 두 학생 A, B에게 각각 a가 적힌 공 1개와 b가 적힌 공 1개를 먼저 나누어 주고, 남은 a가 적힌 공 1개와 b가 적힌 공 1개를 세 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주면 된다.

즉, 남은 a가 적힌 공 1개와 b가 적힌 공 1개를 세 학생 A, B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_3H_1\times{}_3H_1={}_3C_1\times{}_3C_1$

$=3\times3=9$

이때 학생 C가 공을 하나도 받지 못하는 경우의 수는 남은 a가 적힌 공 1개와 b가 적힌 공 1개를 두 학생 A, B에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수와 같으므로

${}_2H_1\times{}_2H_1={}_2C_1\times{}_2C_1$

$=2\times2=4$

따라서 c가 적힌 공을 1개씩 2명의 학생이 받는 경우의 수는

$3\times(9-4)=15$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$57+15=72$

0173 답 201

전략 학생 A가 받는 검은색 모자의 개수로 경우를 나누어 각각의 경우에서 나머지 모자를 나누어 주는 경우의 수를 구한다.

(나), (다)에서 학생 A는 검은색 모자를 4개 또는 5개 받아야 한다.

(i) 학생 A가 검은색 모자를 4개 받는 경우

① 나머지 세 명의 학생 중에서 한 명의 학생이 검은색 모자를 2개 받는 경우

세 명의 학생 중에서 검은색 모자를 2개 받는 학생을 정하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

ⓐ 검은색 모자를 2개 받은 학생이 흰색 모자를 받지 않는 경우

검은색 모자를 받지 못한 두 명의 학생에게 흰색 모자를 1개씩 나누어 주고, 남은 흰색 모자 4개를 검은색 모자를 2개 받은 학생을 제외한 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

이때 학생 A가 흰색 모자 4개를 모두 받는 경우를 제외해야 한다.

즉, 그 경우의 수는

$15-1=14$

ⓑ 검은색 모자를 2개 받은 학생이 흰색 모자를 1개 받는 경우

검은색 모자를 받지 못한 두 명의 학생에게 흰색 모자를 1개씩 나누어 주고, 남은 흰색 모자 3개를 검은색 모자를 2개 받은 학생을 제외한 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

즉, 학생 A가 검은색 모자를 4개 받고 나머지 한 명의 학생이 검은색 모자를 2개 받는 경우의 수는
$3\times(14+10)=72$

② 나머지 세 명의 학생 중에서 두 명의 학생이 검은색 모자를 1개씩 받는 경우
검은색 모자를 1개씩 받는 두 명의 학생을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_2={}_3C_1=3$
정한 두 명의 학생 중에서 검은색 모자를 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생을 정하는 경우의 수는
${}_2C_1=2$
검은색 모자를 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생에게는 흰색 모자를 나누어 주면 안 되므로 다른 두 명의 학생에게 흰색 모자를 1개씩 나누어 주고, 남은 흰색 모자 4개를 세 명의 학생 중에서 검은색 모자를 흰색 모자보다 더 많이 받은 학생을 제외한 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는
${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$
이때 학생 A가 흰색 모자 4개를 모두 받는 경우를 제외해야 한다.
즉, 그 경우의 수는
$3\times2\times(15-1)=84$

①, ②에서 학생 A가 검은색 모자를 4개 받는 경우의 수는
$72+84=156$

(ii) 학생 A가 검은색 모자를 5개 받는 경우
나머지 세 명의 학생 중에서 검은색 모자를 1개 받는 학생을 정하는 경우의 수는
${}_3C_1=3$
검은색 모자를 받지 못한 두 학생에게 흰색 모자를 1개씩 나누어 주고, 남은 흰색 모자 4개를 검은색 모자를 1개 받은 학생을 제외한 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는
${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$
즉, 학생 A가 검은색 모자를 5개 받는 경우의 수는
$3\times15=45$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$156+45=201$

0174 답 ①

전략 각 자리의 수의 합이 7보다 작은 자연수의 개수를 구한 후 만의 자리와 일의 자리의 수의 차가 1 이하인 경우를 제외한다.

만의 자리, 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 수를 각각 a, b, c, d, e(a는 9 이하의 자연수, b, c, d, e는 9 이하의 음이 아닌 정수)라 하자.

(나)에서 각 자리의 수의 합이 7보다 작으므로
$a+b+c+d+e<7$
$\therefore a+b+c+d+e\le6$

이때 $a\neq0$이므로 $a=a'+1$(a'은 9 이하의 음이 아닌 정수)이라 하면 $a+b+c+d+e\le6$에서
$(a'+1)+b+c+d+e\le6$
$\therefore a'+b+c+d+e\le5$

부등식 $a'+b+c+d+e\le5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b, c, d, e의 순서쌍 (a', b, c, d, e)의 개수는
${}_5H_0+{}_5H_1+{}_5H_2+{}_5H_3+{}_5H_4+{}_5H_5$
$=1+{}_5C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5$
$=1+5+15+35+70+126$
$=252$

이때 전체 경우의 수에서 (가)를 만족시키지 않는 경우, 즉 $|a-e|\le1$인 경우의 수를 빼면 된다.

(i) $|a-e|=0$, 즉 $a=e$인 경우
① $a=e=1$일 때,
$a+b+c+d+e\le6$에서
$b+c+d\le4$
순서쌍 (b, c, d)의 개수는
${}_3H_0+{}_3H_1+{}_3H_2+{}_3H_3+{}_3H_4=1+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4$
$=1+3+6+10+15$
$=35$

② $a=e=2$일 때,
$a+b+c+d+e\le6$에서
$b+c+d\le2$
순서쌍 (b, c, d)의 개수는
${}_3H_0+{}_3H_1+{}_3H_2=1+{}_3C_1+{}_4C_2$
$=1+3+6$
$=10$

③ $a=e=3$일 때,
$a+b+c+d+e\le6$에서
$b+c+d=0$
순서쌍 (b, c, d)는 $(0, 0, 0)$의 1개

①, ②, ③에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는
$35+10+1=46$

(ii) $|a-e|=1$인 경우
④ $a=1$, $e=0$일 때,
$a+b+c+d+e\le6$에서
$b+c+d\le5$
순서쌍 (b, c, d)의 개수는
${}_3H_0+{}_3H_1+{}_3H_2+{}_3H_3+{}_3H_4+{}_3H_5$
$=1+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+{}_7C_5$
$=1+3+6+10+15+21$
$=56$

⑤ $a=2$, $e=1$ 또는 $a=1$, $e=2$일 때,
$a+b+c+d+e\le6$에서
$b+c+d\le3$
순서쌍 (b, c, d)의 개수는
${}_3H_0+{}_3H_1+{}_3H_2+{}_3H_3=1+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3$
$=1+3+6+10$
$=20$
즉, 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는
$2\times20=40$

⑥ $a=3$, $e=2$ 또는 $a=2$, $e=3$일 때,

$a+b+c+d+e\le 6$에서

$b+c+d\le 1$

순서쌍 (b, c, d)의 개수는

${}_3H_0+{}_3H_1={}_1+{}_3C_1$

$=1+3$

$=4$

즉, 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$2\times 4=8$

④, ⑤, ⑥에서 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$56+40+8=104$

(i), (ii)에서 $|a-e|\le 1$인 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수는

$46+104=150$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$252-150=102$

0175 답 45

전략 <B형> 2번, <C형> 2번이 나타나도록 5개의 바둑돌을 먼저 나열한 후, <A형> 4번, <D형> 1번이 나타나도록 5개의 바둑돌을 추가로 나열한다.

<B형>과 <C형>이 각각 2번 나타나도록 5개의 바둑돌을 나열하는 경우는

●○●○● 또는 ○●○●○

(i) ●○●○●인 경우

1번의 <D형>을 만드는 경우의 수는 이미 나열되어 있는 2개의 ○에 이웃하도록 새로운 1개의 ○을 나열하면 되므로

${}_2C_1=2$

4번의 <A형>을 만드는 경우의 수는 이미 나열되어 있는 3개의 ●에 이웃하도록 중복을 허용하여 새로운 4개의 ●을 나열하면 되므로

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

즉, ●○●○●인 경우의 수는

$2\times 15=30$

(ii) ○●○●○인 경우

1번의 <D형>을 만드는 경우의 수는 이미 나열되어 있는 3개의 ○에 이웃하도록 새로운 1개의 ○을 나열하면 되므로

${}_3C_1=3$

4번의 <A형>을 만드는 경우의 수는 이미 나열되어 있는 2개의 ●에 이웃하도록 중복을 허용하여 새로운 4개의 ●을 나열하면 되므로

${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

즉, ○●○●○인 경우의 수는

$3\times 5=15$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$30+15=45$

03 이항정리

난이도별 필수 기출 43~52쪽

0176 답 ⑤

$(x^2+2)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(x^2)^{5-r}2^r={}_5C_r2^rx^{10-2r}$

x^4항은 $10-2r=4$일 때이므로

$r=3$

따라서 구하는 x^4의 계수는

${}_5C_3\times 2^3={}_5C_2\times 8=10\times 8=80$

0177 답 ④

$(a-2b)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_ra^{6-r}(-2b)^r={}_6C_r(-2)^ra^{6-r}b^r$

a^2b^4항은 $6-r=2$, $r=4$일 때이므로

$r=4$

따라서 구하는 a^2b^4의 계수는

${}_6C_4\times(-2)^4={}_6C_2\times 16=15\times 16=240$

0178 답 2

$(x+2a)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_rx^{6-r}(2a)^r={}_6C_r2^ra^rx^{6-r}$

x^3항은 $6-r=3$일 때이므로

$r=3$

이때 x^3의 계수가 1280이므로

${}_6C_3\times 2^3\times a^3=1280$

$20\times 8\times a^3=1280$, $a^3=8$

$\therefore a=2$ ($\because a$는 실수)

0179 답 ③

$(2-ax)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r2^{5-r}(-ax)^r={}_5C_r2^{5-r}(-a)^rx^r$

x^5항은 $r=5$일 때이고, x^5의 계수가 -243이므로

${}_5C_5\times 2^0\times(-a)^5=-243$

$-a^5=-243$, $a^5=243$

$\therefore a=3$ ($\because a$는 실수)

0180 답 8

$(x+2)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_rx^{n-r}2^r={}_nC_r2^rx^{n-r}$

x^2항은 $n-r=2$일 때이므로 $r=n-2$

즉, x^2의 계수는

${}_nC_{n-2}\times 2^{n-2}={}_nC_2\times 2^{n-2}$

한편, x^3항은 $n-r=3$일 때이므로

$r=n-3$

즉, x^3의 계수는

${}_nC_{n-3}\times 2^{n-3}={}_nC_3\times 2^{n-3}$

이때 x^2의 계수와 x^3의 계수가 같으므로

${}_nC_2\times 2^{n-2}={}_nC_3\times 2^{n-3}$, ${}_nC_2\times 2={}_nC_3$

$\frac{n(n-1)}{2}\times 2=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

$6n(n-1)=n(n-1)(n-2)$

$n\geq 3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$6=n-2$ $\therefore n=8$

0181 답 ②

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=10$, $n=19$를 대입하면

$11^{19}={}_{19}C_0+{}_{19}C_1\times 10+{}_{19}C_2\times 10^2+\cdots+{}_{19}C_{19}\times 10^{19}$

$=1+19\times 10+10^2({}_{19}C_2+{}_{19}C_3\times 10+\cdots+{}_{19}C_{19}\times 10^{17})$

$=191+10^2({}_{19}C_2+{}_{19}C_3\times 10+\cdots+{}_{19}C_{19}\times 10^{17})$

이때 $10^2({}_{19}C_2+{}_{19}C_3\times 10+\cdots+{}_{19}C_{19}\times 10^{17})$은 100으로 나누어떨어지므로 11^{19}을 100으로 나누었을 때의 나머지는 191을 100으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 $191=100\times 1+91$이므로 11^{19}을 100으로 나누었을 때의 나머지는 91이다.

0182 답 ④

$(x^n+1)^{10}$의 전개식의 일반항은

${}_{10}C_r(x^n)^{10-r}1^r={}_{10}C_rx^{n(10-r)}$

x^5항은 $n(10-r)=5$(n은 자연수, r는 $0\leq r\leq 10$인 정수)일 때이므로 n, r의 순서쌍 (n, r)는

$(1, 5)$, $(5, 9)$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$1+5=6$

0183 답 8

$(x^2-1)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r(x^2)^{n-r}(-1)^r={}_nC_r(-1)^rx^{2n-2r}$

x^6항은 $2n-2r=6$일 때이므로 $r=n-3$

즉, x^6의 계수는

${}_nC_{n-3}\times(-1)^{n-3}={}_nC_3\times(-1)^{n-3}$ …… ⓘ

한편, x^2항은 $2n-2r=2$일 때이므로 $r=n-1$

즉, x^2의 계수는

${}_nC_{n-1}\times(-1)^{n-1}={}_nC_1\times(-1)^{n-1}$ …… ⓘⓘ

이때 x^6의 계수가 x^2의 계수의 7배이므로

${}_nC_3\times\underbrace{(-1)^{n-3}}=7\times{}_nC_1\times\underbrace{(-1)^{n-1}}$

두 부호는 같다.

$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=7\times n$, $n(n-1)(n-2)=42n$

$n\geq 3$이므로 양변을 n으로 나누면

$(n-1)(n-2)=42$

$n^2-3n-40=0$, $(n+5)(n-8)=0$

$\therefore n=8$ ($\because n$은 자연수) …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ x^6의 계수를 n에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘ x^2의 계수를 n에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘⓘ n의 값 구하기	40 %

0184 답 ②

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=20$, $n=13$을 대입하면

$21^{13}={}_{13}C_0+{}_{13}C_1\times 20+{}_{13}C_2\times 20^2+{}_{13}C_3\times 20^3+\cdots+{}_{13}C_{13}\times 20^{13}$

$=1+13\times 20+78\times 400$

$+20^3({}_{13}C_3+{}_{13}C_4\times 20+\cdots+{}_{13}C_{13}\times 20^{10})$

$=31461+20^3({}_{13}C_3+{}_{13}C_4\times 20+\cdots+{}_{13}C_{13}\times 20^{10})$

이때 $20^3({}_{13}C_3+{}_{13}C_4\times 20+\cdots+{}_{13}C_{13}\times 20^{10})$은 1000으로 나누어떨어지므로 21^{13}의 백, 십, 일의 자리의 숫자는 각각 31461의 백, 십, 일의 자리의 숫자인 4, 6, 1이다.

따라서 $a=4$, $b=6$, $c=1$이므로

$a+b+c=11$

0185 답 ④

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r1^{n-r}x^r={}_nC_rx^r$

x^2항은 $r=2$일 때이므로 x^2의 계수는 $a={}_nC_2$

x^3항은 $r=3$일 때이므로 x^3의 계수는 $b={}_nC_3$

x^4항은 $r=4$일 때이므로 x^4의 계수는 $c={}_nC_4$

$7b=4(a+c)$에서

$7\times{}_nC_3=4({}_nC_2+{}_nC_4)$, $7\times\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

$=4\left\{\left(\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}\right)\right\}$

$7n(n-1)(n-2)=12n(n-1)+n(n-1)(n-2)(n-3)$

$n\geq 4$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$7(n-2)=12+(n-2)(n-3)$

$7n-14=n^2-5n+18$

$n^2-12n+32=0$, $(n-4)(n-8)=0$

$\therefore n=4$ 또는 $n=8$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$4+8=12$

0186 답 ①

$\left(\sqrt{2}x+\frac{1}{2}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(\sqrt{2}x)^{6-r}\left(\frac{1}{2}\right)^r={}_6C_r(\sqrt{2})^{6-r}\frac{1}{(\sqrt{2})^{2r}}x^{6-r}$

$={}_6C_r\frac{(\sqrt{2})^{6-r}}{(\sqrt{2})^{2r}}x^{6-r}$

일반항의 계수 ${}_6C_r\frac{(\sqrt{2})^{6-r}}{(\sqrt{2})^{2r}}$($r=0, 1, 2, \ldots, 6$)이 정수이려면

$6-r-2r=2k$, 즉 $6-3r=2k$(k는 음이 아닌 정수)이어야 하므로

$r=0$ 또는 $r=2$

(ⅰ) $r=0$일 때,

$x^{6-r}=x^6$의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_0\times\dfrac{(\sqrt{2})^6}{(\sqrt{2})^0}=1\times2^3=8$

(ⅱ) $r=2$일 때,

$x^{6-r}=x^4$의 계수는 ${}_6\mathrm{C}_2\times\dfrac{(\sqrt{2})^4}{(\sqrt{2})^4}=15\times1=15$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 항의 계수의 합은

$8+15=23$

0187 답 ③

$(x+2)^{19}$의 전개식의 일반항은

${}_{19}\mathrm{C}_r\,x^{19-r}2^r={}_{19}\mathrm{C}_r\,2^r x^{19-r}$

x^k항은 $19-r=k$, 즉 $r=19-k$일 때이므로 x^k의 계수는

${}_{19}\mathrm{C}_{19-k}\times2^{19-k}={}_{19}\mathrm{C}_k\times2^{19-k}$

x^{k+1}항은 $19-r=k+1$, 즉 $r=18-k$일 때이므로 x^{k+1}의 계수는

${}_{19}\mathrm{C}_{18-k}\times2^{18-k}={}_{19}\mathrm{C}_{k+1}\times2^{18-k}$

이때 x^k의 계수가 x^{k+1}의 계수보다 커야 하므로

${}_{19}\mathrm{C}_k\times2^{19-k}>{}_{19}\mathrm{C}_{k+1}\times2^{18-k}$, ${}_{19}\mathrm{C}_k\times2>{}_{19}\mathrm{C}_{k+1}$

$\dfrac{19!}{k!(19-k)!}\times2>\dfrac{19!}{(k+1)!(18-k)!}$

$\dfrac{2}{19-k}>\dfrac{1}{k+1}$, $2(k+1)>19-k$ ($\because$ $1\le k\le19$)

$3k>17$ $\quad\therefore\ k>\dfrac{17}{3}=5.6\cdots$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6이다.

0188 답 ⑤

오늘부터 7^{10}일 후의 요일이 목요일이고 7^{10}을 7로 나누었을 때의 나머지가 0이므로 오늘은 목요일이다.

$(2+x)^n={}_n\mathrm{C}_0 2^n+{}_n\mathrm{C}_1 2^{n-1}x+{}_n\mathrm{C}_2 2^{n-2}x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n x^n$의 양변에 $x=7$, $n=10$을 대입하면

$9^{10}={}_{10}\mathrm{C}_0\times2^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_1\times2^9\times7+{}_{10}\mathrm{C}_2\times2^8\times7^2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\times7^{10}$

$=1\times1024+7({}_{10}\mathrm{C}_1\times2^9+{}_{10}\mathrm{C}_2\times2^8\times7+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\times7^9)$

$=1024+7({}_{10}\mathrm{C}_1\times2^9+{}_{10}\mathrm{C}_2\times2^8\times7+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\times7^9)$

즉, 9^{10}을 7로 나누었을 때의 나머지는 1024를 7로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 $1024=7\times146+2$이므로 9^{10}을 7로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

따라서 목요일부터 9^{10}일 후의 요일은 토요일이다.

0189 답 ⑤

$x^{10}=\{1+(x-1)\}^{10}$

$={}_{10}\mathrm{C}_0+{}_{10}\mathrm{C}_1(x-1)+{}_{10}\mathrm{C}_2(x-1)^2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}(x-1)^{10}$

$=1+10(x-1)+(x-1)^2\{{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}(x-1)^8\}$

$=10x-9+(x-1)^2\{{}_{10}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}(x-1)^8\}$

따라서 $R(x)=10x-9$이므로

$R(5)=10\times5-9=41$

참고 다항식의 나눗셈에서 나머지의 차수는 나누는 식의 차수보다 작아야 하므로 이차식 $(x-1)^2$으로 나눈 나머지 $R(x)$는 일차 이하의 다항식이다.

0190 답 ①

$\left(x+\dfrac{3}{x^2}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r\,x^{6-r}\left(\dfrac{3}{x^2}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r\,3^r\dfrac{x^{6-r}}{x^{2r}}$

x^3항은 $6-r-2r=3$일 때이므로 $r=1$

따라서 구하는 x^3의 계수는

${}_6\mathrm{C}_1\times3=6\times3=18$

0191 답 −100

$\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r(2x)^{6-r}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^r={}_6\mathrm{C}_r\,2^{6-r}(-1)^r\dfrac{x^{6-r}}{x^r}$

$\dfrac{1}{x^2}$항은 $r-(6-r)=2$, 즉 $r=4$일 때이므로 $\dfrac{1}{x^2}$의 계수는

${}_6\mathrm{C}_4\times2^2\times(-1)^4={}_6\mathrm{C}_2\times4\times1$

$=15\times4\times1=60$

상수항은 $6-r=r$, 즉 $r=3$일 때이므로

${}_6\mathrm{C}_3\times2^3\times(-1)^3=20\times8\times(-1)$

$=-160$

따라서 구하는 합은

$60+(-160)=-100$

0192 답 ③

$\left(x+\dfrac{a}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r\,x^{5-r}\left(\dfrac{a}{x}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r\,a^r\dfrac{x^{5-r}}{x^r}$

x항은 $5-r-r=1$일 때이므로 $r=2$

이때 x의 계수가 90이므로

${}_5\mathrm{C}_2\times a^2=90$

$10a^2=90$, $a^2=9$

$\therefore\ a=3$ ($\because$ $a>0$)

0193 답 ②

$\left(x^2+\dfrac{a}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r(x^2)^{5-r}\left(\dfrac{a}{x}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r\,a^r\dfrac{x^{10-2r}}{x^r}$

$\dfrac{1}{x^2}$항은 $r-(10-2r)=2$, 즉 $r=4$일 때이므로 $\dfrac{1}{x^2}$의 계수는

${}_5\mathrm{C}_4\times a^4={}_5\mathrm{C}_1\times a^4=5a^4$

x항은 $10-2r-r=1$, 즉 $r=3$일 때이므로 x의 계수는

${}_5\mathrm{C}_3\times a^3={}_5\mathrm{C}_2\times a^3=10a^3$

이때 $\dfrac{1}{x^2}$의 계수와 x의 계수가 같으므로

$5a^4=10a^3$

$a>0$이므로 양변을 a^3으로 나누면

$5a=10$ $\quad\therefore\ a=2$

0194 답 ④

$\left(x+\frac{1}{x^n}\right)^8$의 전개식의 일반항은

${}_8\mathrm{C}_r x^{8-r}\left(\frac{1}{x^n}\right)^r={}_8\mathrm{C}_r\frac{x^{8-r}}{x^{nr}}$

이때 상수항은 $8-r=nr$, 즉 $r(n+1)=8$(n은 자연수, r는 $0\le r\le 8$인 정수)일 때이므로 n, r의 순서쌍 (n, r)는

$(1, 4)$, $(3, 2)$, $(7, 1)$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 곱은

$1\times 3\times 7=21$

0195 답 378

$\left(ax-\frac{4}{x}\right)^9$의 전개식에서 각 항의 계수의 총합은

$\left(ax-\frac{4}{x}\right)^9$에 $x=1$을 대입한 값과 같으므로

$(a-4)^9=-1$, $a-4=-1$ ($\because$ a는 실수)

$\therefore\ a=3$

$\left(3x-\frac{4}{x}\right)^9$의 전개식의 일반항은

${}_9\mathrm{C}_r(3x)^{9-r}\left(-\frac{4}{x}\right)^r={}_9\mathrm{C}_r 3^{9-r}(-4)^r\frac{x^{9-r}}{x^r}$

x항은 $9-r-r=1$일 때이므로 $r=4$

이때 x의 계수는 $k\times 12^4$이므로

${}_9\mathrm{C}_4\times 3^5\times(-4)^4=k\times 12^4$

$126\times 3\times 3^4\times 4^4=k\times 12^4$

따라서 $378\times 12^4=k\times 12^4$이므로

$k=378$

0196 답 ⑤

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^5$, $\left(x+\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^2의 계수와 x^3의 계수를 각각 구해 더한다.

(i) $\left(x+\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 x^2항과 x^3항

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r 2^r\frac{x^{5-r}}{x^r}$

x^2항은 $5-r-r=2$, 즉 $r=\frac{3}{2}$일 때이고 r는 $0\le r\le 5$인 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

x^3항은 $5-r-r=3$, 즉 $r=1$일 때이므로 x^3의 계수는

${}_5\mathrm{C}_1\times 2=5\times 2=10$

(ii) $\left(x+\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식에서 x^2항과 x^3항

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_s x^{6-s}\left(\frac{2}{x}\right)^s={}_6\mathrm{C}_s 2^s\frac{x^{6-s}}{x^s}$

x^2항은 $6-s-s=2$, 즉 $s=2$일 때이므로 x^2의 계수는

${}_6\mathrm{C}_2\times 2^2=15\times 4=60$

x^3항은 $6-s-s=3$, 즉 $s=\frac{3}{2}$일 때이고 s는 $0\le s\le 6$인 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 x^2의 계수는 60, x^3의 계수는 10이므로 그 합은

$60+10=70$

0197 답 ①

$\left(x^7+\frac{2}{x^3}\right)^n$의 전개식의 일반항은

${}_n\mathrm{C}_r(x^7)^{n-r}\left(\frac{2}{x^3}\right)^r={}_n\mathrm{C}_r 2^r\frac{x^{7n-7r}}{x^{3r}}$

이때 x^4항은 $7n-7r-3r=4$, 즉 $7n=10r+4$(n은 30 이하의 자연수, r는 $0\le r\le n$인 정수)일 때이므로 n, r의 순서쌍 (n, r)는

$(2, 1)$, $(12, 8)$, $(22, 15)$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$2+12+22=36$

0198 답 1120

$\left(2x^3+\frac{1}{x^2}\right)^n$의 전개식의 일반항은

${}_n\mathrm{C}_r(2x^3)^{n-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r={}_n\mathrm{C}_r 2^{n-r}\frac{x^{3n-3r}}{x^{2r}}$

x^9항은 $r=r_1$일 때라 하면

$3n-3r_1-2r_1=9$

$5r_1=3n-9$ (단, $r_1=0, 1, 2, \cdots, n$) ····· ㉠

x^{14}항은 $r=r_2$일 때라 하면

$3n-3r_2-2r_2=14$

$5r_2=3n-14$ (단, $r_2=0, 1, 2, \cdots, n$) ····· ㉡

㉠−㉡을 하면

$5r_1-5r_2=5$, $r_1-r_2=1$

$\therefore\ r_1=r_2+1$ ····· ㉢

한편, x^9의 계수와 x^{14}의 계수가 같으므로

${}_n\mathrm{C}_{r_1}\times 2^{n-r_1}={}_n\mathrm{C}_{r_2}\times 2^{n-r_2}$에서

${}_n\mathrm{C}_{r_2+1}\times 2^{n-r_2-1}={}_n\mathrm{C}_{r_2}\times 2^{n-r_2}$ ($\because$ ㉢)

$\frac{n!}{(r_2+1)!(n-r_2-1)!}=\frac{n!}{r_2!(n-r_2)!}\times 2$

$\frac{1}{r_2+1}=\frac{2}{n-r_2}$

$n-r_2=2r_2+2$

$\therefore\ n=3r_2+2$ ····· ㉣

㉣을 ㉡에 대입하면

$5r_2=3(3r_2+2)-14$

$5r_2=9r_2-8$

$4r_2=8$ $\therefore\ r_2=2$

이것을 ㉣에 대입하면

$n=3\times 2+2=8$

x^4항은 $3n-3r-2r=4$, 즉 $24-5r=4$일 때이므로

$r=4$

따라서 구하는 x^4의 계수는

${}_8\mathrm{C}_4\times 2^{8-4}=70\times 2^4=70\times 16=1120$

0199 답 ④

$\left(x+\frac{a}{x}\right)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r x^{n-r}\left(\frac{a}{x}\right)^r={}_nC_r a^r\frac{x^{n-r}}{x^r}$

상수항은 $n-r=r$, 즉 $n=2r$일 때이므로 n은 짝수이다.

$\left(x+\frac{a}{x}\right)^2$의 전개식에서 상수항은 $2=2r$, 즉 $r=1$일 때이므로

${}_2C_1\times a=2a$

$\left(x+\frac{a}{x}\right)^4$의 전개식에서 상수항은 $4=2r$, 즉 $r=2$일 때이므로

${}_4C_2\times a^2=6a^2$

이때 상수항이 28이므로

$2a+6a^2=28$, $3a^2+a-14=0$

$(3a+7)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because$ a는 자연수)

$\frac{1}{x}$항은 $r-(n-r)=1$, 즉 $n=2r-1$일 때이므로 n은 홀수이다.

$\left(x+\frac{2}{x}\right)$에서 $\frac{1}{x}$의 계수는 2이다.

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^3$의 전개식에서 $\frac{1}{x}$항은 $3=2r-1$, 즉 $r=2$일 때이므로

$\frac{1}{x}$의 계수는

${}_3C_2\times 2^2={}_3C_1\times 4=12$

$\left(x+\frac{2}{x}\right)^5$의 전개식에서 $\frac{1}{x}$항은 $5=2r-1$, 즉 $r=3$일 때이므로

$\frac{1}{x}$의 계수는

${}_5C_3\times 2^3={}_5C_2\times 8=80$

따라서 $\frac{1}{x}$의 계수는

$2+12+80=94$

0200 답 ②

$\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^2}\right)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r(x^{m-2})^{n-r}\left(\frac{1}{x^2}\right)^r={}_nC_r\frac{x^{(m-2)(n-r)}}{x^{2r}}$

상수항은 $(m-2)(n-r)=2r$일 때이고, 자연수 n의 값에 관계없이 항상 상수항이 존재하려면 $(m-2)(n-r)=2r$를 만족시키는 정수 $r(0\le r\le n)$가 항상 존재해야 한다.

$(m-2)(n-r)=2r$에서

$mn-2n-mr=0$, $mr=(m-2)n$

m은 자연수이므로 양변을 m으로 나누면

$r=\left(1-\frac{2}{m}\right)n$

이때 n은 자연수이므로 $1-\frac{2}{m}$는 0 또는 자연수이어야 한다.

즉, m은 2의 약수이므로

$m=1$일 때, $1-\frac{2}{m}=-1$

$m=2$일 때, $1-\frac{2}{m}=0$

$\therefore m=2$

0201 답 ①

$(2x-1)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(2x)^{5-r}(-1)^r={}_5C_r 2^{5-r}(-1)^r x^{5-r}$ ····· ㉠

$(2x-1)^5(x+2)=x(2x-1)^5+2(2x-1)^5$이므로 x^2항은 x와 ㉠의 x항을 곱하는 경우, 2와 ㉠의 x^2항을 곱하는 경우에 나타난다.

(i) x와 ㉠의 x항을 곱하는 경우

㉠의 x항은 $5-r=1$, 즉 $r=4$일 때이므로

${}_5C_4\times 2\times(-1)^4\times x={}_5C_1\times 2\times 1\times x$

$=5\times 2\times x=10x$

즉, x와 ㉠의 x항을 곱하면

$x\times 10x=10x^2$

(ii) 2와 ㉠의 x^2항을 곱하는 경우

㉠의 x^2항은 $5-r=2$, 즉 $r=3$일 때이므로

${}_5C_3\times 2^2\times(-1)^3\times x^2={}_5C_2\times 4\times(-1)\times x^2$

$=10\times 4\times(-1)\times x^2=-40x^2$

즉, 2와 ㉠의 x^2항을 곱하면

$2\times(-40x^2)=-80x^2$

(i), (ii)에서 구하는 x^2의 계수는

$10+(-80)=-70$

0202 답 ③

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$의 전개식의 일반항은

${}_8C_r x^{8-r}\left(-\frac{1}{x}\right)^r={}_8C_r(-1)^r\frac{x^{8-r}}{x^r}$ ····· ㉠

$(2x^2-1)\left(x-\frac{1}{x}\right)^8=2x^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^8-\left(x-\frac{1}{x}\right)^8$이므로 x^2항은 $2x^2$과 ㉠의 상수항을 곱하는 경우, -1과 ㉠의 x^2항을 곱하는 경우에 나타난다.

(i) $2x^2$과 ㉠의 상수항을 곱하는 경우

㉠의 상수항은 $8-r=r$, 즉 $r=4$일 때이므로

${}_8C_4\times(-1)^4=70$

즉, $2x^2$과 ㉠의 상수항을 곱하면

$2x^2\times 70=140x^2$

(ii) -1과 ㉠의 x^2항을 곱하는 경우

㉠의 x^2항은 $8-r-r=2$, 즉 $r=3$일 때이므로

${}_8C_3\times(-1)^3\times x^2=56\times(-1)\times x^2=-56x^2$

즉, -1과 ㉠의 x^2항을 곱하면

$-1\times(-56x^2)=56x^2$

(i), (ii)에서 구하는 x^2의 계수는

$140+56=196$

0203 답 −1

$\left(ax^2+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(ax^2)^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r a^{4-r}\frac{x^{8-2r}}{x^r}$

$(x-2)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_s x^{6-s}(-2)^s={}_6C_s(-2)^s x^{6-s}$

$\left(ax^2+\frac{1}{x}\right)^4(x-2)^6$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r a^{4-r}\frac{x^{8-2r}}{x^r}\times{}_6C_s(-2)^s x^{6-s}$

$={}_4C_r\times{}_6C_s a^{4-r}(-2)^s\frac{x^{14-2r-s}}{x^r}$ …… ⓘ

상수항은 $14-2r-s=r$, 즉 $3r+s=14$(r, s는 $0\le r\le 4$, $0\le s\le 6$인 정수)일 때이므로 r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(3, 5)$, $(4, 2)$ …… ⓘⓘ

이때 상수항이 828이므로

${}_4C_3\times{}_6C_5\times a\times(-2)^5+{}_4C_4\times{}_6C_2\times(-2)^2=828$

${}_4C_1\times{}_6C_1\times a\times(-2)^5+{}_4C_4\times{}_6C_2\times(-2)^2=828$

$-768a+60=828$, $768a=-768$

$\therefore a=-1$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\left(ax^2+\frac{1}{x}\right)^4(x-2)^6$의 전개식의 일반항 구하기	40 %
ⓘⓘ 상수항이 될 때의 r, s의 순서쌍 (r, s) 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ a의 값 구하기	20 %

0204 답 ⑤

$(x-1)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r x^{5-r}(-1)^r={}_5C_r(-1)^r x^{5-r}$ …… ㉠

$(x-1)^5(x^2+a)=x^2(x-1)^5+a(x-1)^5$ …… ㉡

이므로 x^2항은 x^2과 ㉠의 상수항을 곱하는 경우, a와 ㉠의 x^2항을 곱하는 경우에 나타난다.

(i) x^2과 ㉠의 상수항을 곱하는 경우

㉠의 상수항은 $5-r=0$, 즉 $r=5$일 때이므로

${}_5C_5\times(-1)^5=-1$

즉, x^2과 ㉠의 상수항을 곱하면

$x^2\times(-1)=-x^2$

(ii) a와 ㉠의 x^2항을 곱하는 경우

㉠의 x^2항은 $5-r=2$, 즉 $r=3$일 때이므로

${}_5C_3\times(-1)^3\times x^2={}_5C_2\times(-1)\times x^2=-10x^2$

즉, a와 ㉠의 x^2항을 곱하면

$a\times(-10x^2)=-10ax^2$

(i), (ii)에서 x^2의 계수는 $-1-10a$

즉, $-1-10a=-21$이므로 $a=2$

한편, ㉡에서 $x^2(x-1)^5$의 전개식에서 상수항은 존재하지 않으므로 구하는 상수항은 $a(x-1)^5$의 전개식에서의 상수항과 같다.

따라서 구하는 상수항은 a와 ㉠의 상수항의 곱과 같으므로

$2\times(-1)=-2$

0205 답 3

$(2+x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r 2^{5-r}x^r$ …… ㉠

$(1+ax)(2+x)^5=(2+x)^5+ax(2+x)^5$ …… ㉡

이므로 x^2항은 ㉠의 x^2항의 경우, ax와 ㉠의 x항을 곱하는 경우에 나타난다.

(i) ㉠의 x^2항은 $r=2$일 때이므로

${}_5C_2\times2^3\times x^2=80x^2$

(ii) ax와 ㉠의 x항을 곱하는 경우

㉠의 x항은 $r=1$일 때이므로

${}_5C_1\times2^4\times x=80x$

즉, ax와 ㉠의 x항을 곱하면

$ax\times80x=80ax^2$

(i), (ii)에서 x^2의 계수는 $80+80a$

㉡에서 x^3항은 ㉠의 x^3항의 경우, ax와 ㉠의 x^2항을 곱하는 경우에 나타난다.

(iii) ㉠의 x^3항은 $r=3$일 때이므로

${}_5C_3\times2^2\times x^3=40x^3$

(iv) ax와 ㉠의 x^2항을 곱하는 경우

㉠의 x^2항은 (i)에서 $80x^2$이므로 ax와 ㉠의 x^2항을 곱하면

$ax\times80x^2=80ax^3$

(iii), (iv)에서 x^3의 계수는 $40+80a$

이때 x^2의 계수와 x^3의 계수의 합이 600이므로

$(80+80a)+(40+80a)=600$

$160a=480$ $\therefore a=3$

0206 답 ③

$(1+x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r x^r$

$(1+x^2)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_s(x^2)^s={}_nC_s x^{2s}$

$(1+x)^4(1+x^2)^n$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r x^r\times{}_nC_s x^{2s}={}_4C_r\times{}_nC_s x^{r+2s}$

x^2항은 $r+2s=2$(r, s는 $0\le r\le 4$, $0\le s\le n$인 정수)일 때이므로

r, s의 순서쌍 (r, s)는

$(2, 0)$, $(0, 1)$

이때 x^2의 계수가 11이므로

${}_4C_2\times{}_nC_0+{}_4C_0\times{}_nC_1=11$

$6+n=11$ $\therefore n=5$

0207 답 ②

$(1+ax)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_r(ax)^r={}_nC_r a^r x^r$

x^2항은 $(1+ax)^2$의 전개식부터 나오므로

$(1+ax)^2$의 전개식에서 x^2의 계수는

${}_2C_2 a^2=a^2$

$(1+ax)^3$의 전개식에서 x^2의 계수는

${}_3C_2 a^2=3a^2$

$(1+ax)^4$의 전개식에서 x^2의 계수는

${}_4C_2 a^2=6a^2$

이때 x^2의 계수가 $\frac{5}{2}$이므로

$a^2+3a^2+6a^2=\frac{5}{2}$, $10a^2=\frac{5}{2}$

$a^2=\frac{1}{4}$ $\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because a$는 양수)

$(1+ax)$에서 x의 계수는 a

$(1+ax)^2$의 전개식에서 x의 계수는 ${}_2\mathrm{C}_1 a=2a$

$(1+ax)^3$의 전개식에서 x의 계수는 ${}_3\mathrm{C}_1 a=3a$

$(1+ax)^4$의 전개식에서 x의 계수는 ${}_4\mathrm{C}_1 a=4a$

따라서 구하는 x의 계수는

$a+2a+3a+4a=10a=10\times\frac{1}{2}=5$

0208 답 ⑤

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_n\mathrm{C}_r x^r$

(i) $(1+x)^2$의 전개식에서 x의 계수는 ${}_2\mathrm{C}_1=2$

(ii) $\frac{(1+x)^3}{x}$의 전개식에서 x의 계수는 $(1+x)^3$의 전개식에서 x^2의 계수와 같으므로

${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

(iii) $\frac{(1+x)^4}{x^2}$의 전개식에서 x의 계수는 $(1+x)^4$의 전개식에서 x^3의 계수와 같으므로

${}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

(iv) $\frac{(1+x)^5}{x^3}$의 전개식에서 x의 계수는 $(1+x)^5$의 전개식에서 x^4의 계수와 같으므로

${}_5\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_1=5$

(v) $\frac{(1+x)^6}{x^4}$의 전개식에서 x의 계수는 $(1+x)^6$의 전개식에서 x^5의 계수와 같으므로

${}_6\mathrm{C}_5={}_6\mathrm{C}_1=6$

(i)~(v)에서 구하는 x의 계수는

$2+3+4+5+6=20$

0209 답 ②

$3(x+a)^n$의 전개식의 일반항은

$3\times{}_n\mathrm{C}_r x^{n-r}a^r=3\times{}_n\mathrm{C}_r a^r x^{n-r}$

x^{n-1}항은 $n-r=n-1$, 즉 $r=1$일 때이므로 $3(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$3\times{}_n\mathrm{C}_1\times a=3an$

$(x-1)(x+a)^n=x(x+a)^n-(x+a)^n$이므로

$(x+a)^n$의 전개식의 일반항은

${}_n\mathrm{C}_s x^{n-s}a^s={}_n\mathrm{C}_s a^s x^{n-s}$ ····· ㉠

$x(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는 $(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-2}의 계수와 같다.

㉠에서 x^{n-2}항은 $n-s=n-2$, 즉 $s=2$일 때이므로 $(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-2}의 계수는

${}_n\mathrm{C}_2 a^2=\frac{n(n-1)}{2}a^2$

㉠에서 x^{n-1}항은 $n-s=n-1$, 즉 $s=1$일 때이므로 $(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

${}_n\mathrm{C}_1 a=an$

즉, $(x-1)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$\frac{n(n-1)}{2}a^2-an$

이때 $3(x+a)^n$과 $(x-1)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수가 같으므로

$3an=\frac{n(n-1)}{2}a^2-an$, $4an=\frac{a^2n(n-1)}{2}$

a, n은 자연수이므로 양변을 an으로 나누면

$4=\frac{a(n-1)}{2}$ $\therefore a(n-1)=8$

위의 방정식을 만족시키는 a, n의 순서쌍 (a, n)은

$(1, 9)$, $(2, 5)$, $(4, 3)$, $(8, 2)$

즉, an의 값은 9, 10, 12, 16이다.

따라서 $M=16$, $m=9$이므로

$M+m=16+9=25$

0210 답 ①

$x^2(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는 $(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-3}의 계수와 같다.

$(x+a)^n$의 전개식의 일반항은

${}_n\mathrm{C}_r x^r a^{n-r}={}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}x^r$

따라서 x^{n-3}항은 $r=n-3$일 때이므로 x^{n-3}의 계수는

${}_n\mathrm{C}_{n-3}\times a^3=\boxed{(가)\ {}_n\mathrm{C}_3}\times a^3$

$a^2n=\boxed{(가)\ {}_n\mathrm{C}_3}\times a^3-2a^2n$이고, 이 식을 정리하여 a를 n에 관한 식으로 나타내면

$a=\frac{3n}{{}_n\mathrm{C}_3}=\frac{3n}{\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}}=\frac{18}{\boxed{(나)\ (n-1)(n-2)}}$

여기서 a는 자연수이고 n은 4 이상의 자연수이므로

$(n-1)(n-2)$는 18의 양의 약수이어야 한다.

따라서 $(n-1)(n-2)=3\times2$이므로

$n-1=3$ $\therefore n=\boxed{(다)\ 4}$

이때 $f(n)={}_n\mathrm{C}_3$, $g(n)=(n-1)(n-2)$, $k=4$이므로

$f(k)+g(k)=f(4)+g(4)={}_4\mathrm{C}_3+(4-1)\times(4-2)$

$={}_4\mathrm{C}_1+3\times2=4+6=10$

0211 답 ①

$(a+b)^4$의 전개식에서 모든 항의 계수의 합은 $(a+b)^4$에 $a=1$, $b=1$을 대입한 값과 같으므로

$(1+1)^4=2^4=16$

0212 답 ③

${}_{13}\mathrm{C}_0+{}_{13}\mathrm{C}_1+{}_{13}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_6$

$={}_{13}\mathrm{C}_{13}+{}_{13}\mathrm{C}_{12}+{}_{13}\mathrm{C}_{11}+\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_7$

이고

$({}_{13}\mathrm{C}_0+{}_{13}\mathrm{C}_1+{}_{13}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_6)$

$+({}_{13}\mathrm{C}_{13}+{}_{13}\mathrm{C}_{12}+{}_{13}\mathrm{C}_{11}+\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_7)=2^{13}$

이므로

$2({}_{13}\mathrm{C}_0+{}_{13}\mathrm{C}_1+{}_{13}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_6)=2^{13}$

$\therefore {}_{13}\mathrm{C}_0+{}_{13}\mathrm{C}_1+{}_{13}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_6=2^{12}$

이때 ${}_{13}\mathrm{C}_0=1$이므로

${}_{13}\mathrm{C}_1+{}_{13}\mathrm{C}_2+{}_{13}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{13}\mathrm{C}_6=2^{12}-1$

0213 답 ⑤

$a={}_4C_0+{}_4C_1+{}_4C_2+{}_4C_3+{}_4C_4$
$=2^4=16$
$b={}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1+{}_6C_1$
$=2+3+4+5+6=20$
$\therefore a+b=16+20=36$

0214 답 ④

$A={}_9C_0+{}_9C_1+{}_9C_2+{}_9C_3+\cdots+{}_9C_9$
$=2^9$
$B={}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_9C_3$
$={}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_9C_3$
$={}_5C_4+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_9C_3$
$={}_6C_4+{}_6C_3+\cdots+{}_9C_3$
$\vdots$
$={}_9C_4+{}_9C_3$
$={}_{10}C_4=210$
$=2\times3\times5\times7$
따라서 $AB=2^{10}\times3\times5\times7$이므로 AB의 양의 약수의 개수는
$(10+1)(1+1)(1+1)(1+1)=88$
참고 서로 다른 소수 p, q에 대하여 자연수 $N=p^a\times q^b$의 양의 약수의 개수는 $(a+1)(b+1)$

0215 답 ⑤

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로 주어진 부등식은
$1000<2^n<10000$
이때 $2^9=512$, $2^{10}=1024$, $2^{13}=8192$, $2^{14}=16384$이므로 부등식을 만족시키는 n의 값은
10, 11, 12, 13
따라서 모든 자연수 n의 값의 합은
$10+11+12+13=46$

0216 답 ②

${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n-1}$이므로
${}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+{}_{2n}C_6+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n-1}-{}_{2n}C_0$
$=2^{2n-1}-1$
이 값이 세 자리의 자연수가 되려면
$100\le2^{2n-1}-1\le999$
$101\le2^{2n-1}\le1000$ ····· ㉠
이때 $2^5=32$, $2^7=128$, $2^9=512$, $2^{11}=2048$이므로 부등식 ㉠에서
$2n-1=7$ 또는 $2n-1=9$
$\therefore n=4$ 또는 $n=5$
따라서 모든 자연수 n의 값의 합은
$4+5=9$

0217 답 ③

(i) ${}_2C_0+{}_3C_0+{}_4C_0+\cdots+{}_{12}C_0$
$=1+1+1+\cdots+1=11$
(ii) ${}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+\cdots+{}_{12}C_1$
$={}_2C_2+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+\cdots+{}_{12}C_1-{}_2C_2$
$={}_3C_2+{}_3C_1+{}_4C_1+\cdots+{}_{12}C_1-1$
$={}_4C_2+{}_4C_1+{}_5C_1+\cdots+{}_{12}C_1-1$
$\vdots$
$={}_{12}C_2+{}_{12}C_1-1$
$={}_{13}C_2-1$
$=78-1=77$
(iii) ${}_2C_2={}_3C_3$이므로
${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{12}C_2$
$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{12}C_2$
$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_{12}C_2$
$={}_5C_3+{}_5C_2+{}_6C_2+\cdots+{}_{12}C_2$
$\vdots$
$={}_{12}C_3+{}_{12}C_2$
$={}_{13}C_3=286$
(i), (ii), (iii)에서 색칠한 부분에 있는 모든 수의 합은
$11+77+286=374$

0218 답 4

${}_{20}C_1+{}_{20}C_3+{}_{20}C_5+\cdots+{}_{20}C_{19}=2^{20-1}=2^{19}$,
${}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}=2^{2n-1}$이므로
$\frac{{}_{20}C_1+{}_{20}C_3+{}_{20}C_5+\cdots+{}_{20}C_{19}}{{}_{2n}C_0+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_4+\cdots+{}_{2n}C_{2n}}=4096$에서
$\frac{2^{19}}{2^{2n-1}}=2^{12}$
즉, $19-(2n-1)=12$이므로
$-2n+20=12$ $\therefore n=4$

0219 답 ①

(i) ${}_1C_0+{}_2C_0+{}_3C_0+\cdots+{}_6C_0$
$=1+1+1+1+1+1=6$
(ii) ${}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+\cdots+{}_7C_1$
$={}_2C_2+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+\cdots+{}_7C_1-{}_2C_2$
$={}_3C_2+{}_3C_1+{}_4C_1+\cdots+{}_7C_1-1$
$={}_4C_2+{}_4C_1+\cdots+{}_7C_1-1$
$\vdots$
$={}_7C_2+{}_7C_1-1$
$={}_8C_2-1$
$=28-1=27$
(iii) ${}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_8C_2$
$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_8C_2-{}_3C_3$
$={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+\cdots+{}_8C_2-1$
$={}_5C_3+{}_5C_2+\cdots+{}_8C_2-1$
$\vdots$
$={}_8C_3+{}_8C_2-1$
$={}_9C_3-1$
$=84-1=83$

(ⅳ) ${}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_9C_3$
$={}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_9C_3-{}_4C_4$
$={}_5C_4+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_9C_3-1$
$={}_6C_4+{}_6C_3+\cdots+{}_9C_3-1$
⋮
$={}_9C_4+{}_9C_3-1$
$={}_{10}C_4-1$
$=210-1=209$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 나열된 모든 수의 합은
$6+27+83+209=325$

0220 답 ①

${}_2C_0={}_3C_0$이므로
${}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{20}C_{18}$
$={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{20}C_{18}$
$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{20}C_{18}$
$={}_5C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{20}C_{18}$
⋮
$={}_{20}C_{17}+{}_{20}C_{18}$
$={}_{21}C_{18}$
$\therefore n=21$
${}_3C_3={}_4C_4$이므로
${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{15}C_3$
$={}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{15}C_3$
$={}_5C_4+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{15}C_3$
$={}_6C_4+{}_6C_3+\cdots+{}_{15}C_3$
⋮
$={}_{15}C_4+{}_{15}C_3$
$={}_{16}C_4={}_{16}C_{12}$
$\therefore r=12$ ($\because 8<r<16$)
$\therefore n-r=21-12=9$

0221 답 ③

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_rx^r$
a_2는 좌변의 각 항의 전개식에서 x^2의 계수의 합과 같으므로
$(1+x)^2$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_2C_2$
$(1+x)^3$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_3C_2$
$(1+x)^4$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_4C_2$
⋮
$(1+x)^{11}$의 전개식에서 x^2의 계수는 ${}_{11}C_2$
$\therefore a_2={}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{11}C_2$
$={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{11}C_2$
$={}_4C_3+{}_4C_2+\cdots+{}_{11}C_2$
⋮
$={}_{11}C_3+{}_{11}C_2$
$={}_{12}C_3=220$

a_3은 좌변의 각 항의 전개식에서 x^3의 계수의 합과 같으므로
$(1+x)^3$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_3C_3$
$(1+x)^4$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_4C_3$
$(1+x)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_5C_3$
⋮
$(1+x)^{11}$의 전개식에서 x^3의 계수는 ${}_{11}C_3$
$\therefore a_3={}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_{11}C_3$
$={}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_{11}C_3$
$={}_5C_4+{}_5C_3+\cdots+{}_{11}C_3$
⋮
$={}_{11}C_4+{}_{11}C_3$
$={}_{12}C_4=495$
$\therefore a_2+a_3=220+495=715$

0222 답 ④

$(x+1)^{12}$의 전개식에서 x^6의 계수는 ${}_{12}C_{\boxed{\text{가}}6}$이다.
└ 전개식의 일반항은 ${}_{12}C_rx^r$
한편 $(1+x)^{12}=(1+x)^6(1+x)^6$이므로
$(1+x)^6$에서 상수항과 $(1+x)^6$에서 x^6의 계수의 곱,
$(1+x)^6$에서 x의 계수와 $(1+x)^6$에서 x^5의 계수의 곱,
$(1+x)^6$에서 x^2의 계수와 $(1+x)^6$에서 x^4의 계수의 곱,
⋮
$(1+x)^6$에서 x^6의 계수와 $(1+x)^6$에서 상수항의 곱들의 총합으로 도 나타낼 수 있다. 즉,
${}_{12}C_{\boxed{\text{가}}6}={}_6C_0\times{}_6C_6+{}_6C_1\times{}_6C_5+{}_6C_2\times{}_6C_{\boxed{\text{나}}4}+\cdots+{}_6C_6\times{}_6C_0$
이때 ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로
${}_{12}C_{\boxed{\text{가}}6}=({}_6C_0)^2+({}_6C_1)^2+({}_6C_2)^2+\cdots+({}_6C_6)^2$
$\therefore a=6,\ b=4$
$({}_5C_0)^2+({}_5C_1)^2+({}_5C_2)^2+({}_5C_3)^2+({}_5C_4)^2+({}_5C_5)^2$
$={}_5C_0\times{}_5C_5+{}_5C_1\times{}_5C_4+{}_5C_2\times{}_5C_3+\cdots+{}_5C_5\times{}_5C_0$
에서 위의 식은 $(1+x)^5(1+x)^5$의 전개식에서 x^5의 계수와 같다.
이때 $(1+x)^5(1+x)^5=(1+x)^{10}$이므로 $(1+x)^5(1+x)^5$의 전개식에서 x^5의 계수는 $(1+x)^{10}$의 전개식에서 x^5의 계수와 같다.
└ 전개식의 일반항은 ${}_{10}C_rx^r$
$\therefore c=({}_5C_0)^2+({}_5C_1)^2+({}_5C_2)^2+({}_5C_3)^2+({}_5C_4)^2+({}_5C_5)^2$
$={}_{10}C_5=252$
$\therefore a+b+c=6+4+252=262$

0223 답 ⑤

$(1+x)^{n+1}$에서 x^k의 계수는 $\boxed{\text{가}}\ {}_{n+1}C_k$
한편, $(1+x)^{n+1}=(1+x)(1+x)^n=(1+x)^n+x(1+x)^n$이므로
$(1+x)^n$에서 x^k의 계수는 ${}_nC_k$, x^{k-1}의 계수는 $\boxed{\text{나}}\ {}_nC_{k-1}$
즉, $(1+x)^{n+1}$은
$(1+x)({}_nC_0+\cdots+\boxed{\text{나}}\ {}_nC_{k-1}x^{k-1}+{}_nC_kx^k+\cdots+{}_nC_nx^n)$
꼴로 나타내어지므로 $\boxed{\text{다}}\ x^k$의 계수는
${}_nC_k+{}_nC_{k-1}$

0224 답 ⑤

집합 A의 부분집합 중에서 두 원소 1, 2를 모두 포함하고 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는 집합 $\{3, 4, 5, \ldots, 25\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수와 같다.

집합 $\{3, 4, 5, \cdots, 25\}$의 원소 23개 중에서
1개를 택하는 경우의 수는 ${}_{23}C_1$
3개를 택하는 경우의 수는 ${}_{23}C_3$
5개를 택하는 경우의 수는 ${}_{23}C_5$
$\vdots$
23개를 택하는 경우의 수는 ${}_{23}C_{23}$
따라서 구하는 부분집합의 개수는
${}_{23}C_1+{}_{23}C_3+{}_{23}C_5+\cdots+{}_{23}C_{21}+{}_{23}C_{23}=2^{23-1}=2^{22}$

0225 답 83

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=\frac{1}{3}$을 대입하면

$a_n=\left(\frac{4}{3}\right)^n={}_nC_0+\frac{{}_nC_1}{3}+\frac{{}_nC_2}{3^2}+\cdots+\frac{{}_nC_n}{3^n}$

한편, ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$이므로

$b_n={}_nC_0\times\underbrace{{}_nC_n}_{{}_nC_n={}_nC_0}+{}_nC_1\times{}_nC_{n-1}+{}_nC_2\times{}_nC_{n-2}$
$+\cdots+{}_nC_{n-1}\times{}_nC_1+{}_nC_n\times{}_nC_0$
$=\{(1+x)^n(1+x)^n$의 전개식에서 x^n의 계수$\}$
$=\{(1+x)^{2n}$의 전개식에서 x^n의 계수$\}$
$={}_{2n}C_n$

$a_n<x<b_n$에서 $\left(\frac{4}{3}\right)^n<x<{}_{2n}C_n$

$n=3$일 때, $\left(\frac{4}{3}\right)^3<x<{}_6C_3$, 즉 $\frac{64}{27}<x<20$을 만족시키는 자연수 x는 3, 4, 5, …, 19이므로
$f(3)=17$

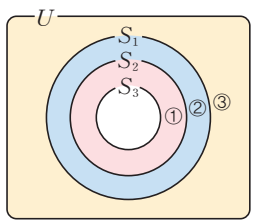
$n=4$일 때, $\left(\frac{4}{3}\right)^4<x<{}_8C_4$, 즉 $\frac{256}{81}<x<70$을 만족시키는 자연수 x는 4, 5, 6, …, 69이므로
$f(4)=66$
$\therefore\ f(3)+f(4)=17+66=83$

0226 답 75

$n(S_3)=k$(k는 $3\le k\le 10$인 자연수)인 집합 S_3의 개수는 전체집합 U의 원소 10개 중에서 서로 다른 k개를 선택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_{10}C_k$이다.

$S_3\subset S_2\subset S_1$이므로 집합 S_3에 속하지 않는 참가자는 전체집합 U에 대하여 세 집합 S_2-S_3, S_1-S_2, $U-S_1$ 중에서 어느 한 집합에 속해야 한다.

즉, S_3에 속하지 않는 $(10-k)$개의 원소를 그림과 같은 벤다이어그램의 세 영역 ①, ②, ③ 중에서 한 영역에 속하도록 정하면 된다. 이 경우의 수는 서로 다른 세 영역에서 $(10-k)$개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로



${}_3\Pi_{10-k}=3^{10-k}$

그러므로 $n(S_3)=k$일 때 집합 S_1, S_2, S_3의 순서쌍 (S_1, S_2, S_3)의 개수는 ${}_{10}C_k\times\boxed{(가)\ 3^{10-k}}$이다.

따라서 $n(S_3)\ge 3$, $S_3\subset S_2\subset S_1$을 만족시키는 순서쌍 (S_1, S_2, S_3)의 개수는 이항정리에 의하여

${}_{10}C_3\times 3^7+{}_{10}C_4\times 3^6+\cdots+{}_{10}C_9\times 3+{}_{10}C_{10}$
$=\underbrace{{}_{10}C_0\times 3^{10}+{}_{10}C_1\times 3^9+{}_{10}C_2\times 3^8}$
$+{}_{10}C_3\times 3^7+{}_{10}C_4\times 3^6+\cdots+{}_{10}C_9\times 3+{}_{10}C_{10}$
$\underline{-({}_{10}C_0\times 3^{10}+{}_{10}C_1\times 3^9+{}_{10}C_2\times 3^8)}$
$=(1+3)^{10}-({}_{10}C_0\times 3^{10}+{}_{10}C_1\times 3^9+{}_{10}C_2\times 3^8)$
$=4^{10}-(3^{10}+10\times 3^9+45\times 3^8)$
$=4^{10}-(9\times 3^8+30\times 3^8+45\times 3^8)$
$=4^{10}-\boxed{(나)\ 84}\times 3^8$

이때 $f(k)=3^{10-k}$, $a=84$이므로
$a-f(8)=84-3^2=84-9=75$

최고수준 도전 기출 53쪽

0227 답 4

전략 a_n, b_n을 간단히 정리한 후, $n(A\cup B)=11$에서 $n(A)$의 값에 따라 n의 값을 구한다.

$a_n={}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}$
$=\underline{{}_nC_0}+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}+\underline{{}_nC_n}\underline{-({}_nC_0+{}_nC_n)}$
$=2^n-2$

$b_n={}_{2n}C_0+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+\cdots+{}_{2n}C_{2n}$
$=2^{2n}$

집합 B는 $b_n=2^{2n}$의 양의 약수의 집합이므로
$\underline{n(B)=2n+1}$
$\hookrightarrow B=\{2^0, 2^1, 2^2, \cdots, 2^{2n}\}$

이때 $a_n=2(2^{n-1}-1)$이고 $n\ge 2$일 때 $2^{n-1}-1$은 홀수이므로 a_n의 약수 중 2의 거듭제곱은 1, 2뿐이다.

즉, $A\cap B=\{1, 2\}$이므로
$n(A\cap B)=2$
$n(A\cup B)=11$이므로
$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$에서
$11=n(A)+(2n+1)-2$
$\therefore\ n(A)=12-2n$ ····· ㉠
$n(A)\ge 2$이므로
$12-2n\ge 2$
$\therefore\ n\le 5$

그런데 n은 2 이상의 자연수이므로 n은 2, 3, 4, 5이다.

(i) $n=2$일 때,
$a_2=2^2-2=2$
2의 양의 약수는 1, 2의 2개이므로
$n(A)=2$
㉠에서 $n(A)=8$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=3$일 때,
$a_3=2^3-2=6$
$6=2\times3$의 양의 약수의 개수는
$n(A)=(1+1)\times(1+1)=4$
㉠에서 $n(A)=6$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(iii) $n=4$일 때,
$a_4=2^4-2=14$
$14=2\times7$의 양의 약수의 개수는
$n(A)=(1+1)\times(1+1)=4$
㉠에서 $n(A)=4$이므로 조건을 만족시킨다.
(iv) $n=5$일 때,
$a_5=2^5-2=30$
$30=2\times3\times5$의 양의 약수의 개수는
$n(A)=(1+1)\times(1+1)\times(1+1)=8$
㉠에서 $n(A)=2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 n의 값은 4이다.

0228 답 ③

전략 $(1+x)^n$의 전개식을 이용하여 $f(n)$을 정리한 후 A의 값을 구하고, 이항계수의 성질을 이용하여 $g(n)$을 구하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

(i) $(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$ ····· ㉠
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$3^n={}_nC_0+{}_nC_1\times2+{}_nC_2\times2^2+\cdots+{}_nC_n\times2^n$
$\therefore f(n)=3^n$
(ii) ${}_2C_0={}_3C_0$이므로
$g(n)={}_2C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_nC_{n-2}$
$={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_nC_{n-2}$
$={}_4C_1+{}_4C_2+\cdots+{}_nC_{n-2}$
$\vdots$
$={}_nC_{n-3}+{}_nC_{n-2}$
$={}_{n+1}C_{n-2}$
$={}_{n+1}C_3$
(iii) ㉠의 양변에 $x=-10$, $n=6$을 대입하면
$(-9)^6={}_6C_0+{}_6C_1\times(-10)+{}_6C_2\times(-10)^2+\cdots$
$+{}_6C_5\times(-10)^5+{}_6C_6\times(-10)^6$
$={}_6C_6+{}_6C_5\times(-10)+{}_6C_4\times(-10)^2+\cdots$
$+{}_6C_1\times(-10)^5+{}_6C_0\times(-10)^6$
$=1-{}_6C_5\times10+{}_6C_4\times10^2-\cdots-{}_6C_1\times10^5+10^6$
$=10^6-{}_6C_1\times10^5+{}_6C_2\times10^4-\cdots-{}_6C_5\times10+1$
$\therefore A=(-9)^6=9^6=3^{12}$
ㄱ. $f(15)=3^{15}$, $A=3^{12}$이므로
$f(15)\times\frac{2}{A}=3^{15}\times\frac{2}{3^{12}}=3^3\times2=54$
ㄴ. $g(7)={}_8C_3=56$
ㄷ. $f(n)g(n)=3^n\times{}_{n+1}C_3$
(i) $n=2$일 때,
$f(2)g(2)=3^2\times{}_3C_3=3^2$이므로 양의 약수의 개수는
$2+1=3$
(ii) $n=3$일 때,
$f(3)g(3)=3^3\times{}_4C_3=2^2\times3^3$이므로 양의 약수의 개수는
$(2+1)\times(3+1)=12$
(iii) $n=4$일 때,
$f(4)g(4)=3^4\times{}_5C_3=2\times3^4\times5$이므로 양의 약수의 개수는
$(1+1)\times(4+1)\times(1+1)=20$
(iv) $n=5$일 때,
$f(5)g(5)=3^5\times{}_6C_3=2^2\times3^5\times5$이므로 양의 약수의 개수는
$(2+1)\times(5+1)\times(1+1)=36$
(v) $n=6$일 때,
$f(6)g(6)=3^6\times{}_7C_3=3^6\times5\times7$이므로 양의 약수의 개수는
$(6+1)\times(1+1)\times(1+1)=28$
(i)~(v)에서 $2\le n\le6$일 때 $f(n)g(n)$의 양의 약수의 개수가 30보다 작은 n은 2, 3, 4, 6의 4개이다.
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0229 답 ④

전략 다항식의 전개식의 일반항과 조합의 성질을 이용하여 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 구한다.

$(1+x)^{2n}$의 전개식의 일반항은
${}_{2n}C_rx^r$
x^n항은 $r=n$일 때이므로 x^n의 계수는 $\boxed{\text{(가) } {}_{2n}C_n}$이다.
$(1+x)^n(1+x)^n$의 전개식에서 x^n의 계수는
${}_nC_0\times{}_nC_n+{}_nC_1\times{}_nC_{n-1}+{}_nC_2\times{}_nC_{n-2}+\cdots$
$+{}_nC_{n-1}\times{}_nC_1+{}_nC_n\times{}_nC_0$
$=({}_nC_0)^2+({}_nC_1)^2+({}_nC_2)^2+\cdots+({}_nC_n)^2$
이다. 즉,
$({}_nC_0)^2+({}_nC_1)^2+({}_nC_2)^2+\cdots+({}_nC_n)^2={}_{2n}C_n$ ····· ㉠
그러므로
$2({}_nC_1)^2+4({}_nC_2)^2+6({}_nC_3)^2+\cdots+2n({}_nC_n)^2$
$=({}_nC_1)^2+2({}_nC_2)^2+3({}_nC_3)^2+\cdots+n({}_nC_n)^2$
$+({}_nC_1)^2+2({}_nC_2)^2+3({}_nC_3)^2+\cdots+n({}_nC_n)^2$
$=({}_nC_1)^2+2({}_nC_2)^2+3({}_nC_3)^2+\cdots+n({}_nC_n)^2$
$+({}_nC_{n-1})^2+2({}_nC_{n-2})^2+3({}_nC_{n-3})^2+\cdots+n({}_nC_0)^2$
$=\boxed{\text{(나) } n}\times\{({}_nC_0)^2+({}_nC_1)^2+({}_nC_2)^2+\cdots+({}_nC_n)^2\}$
$=\boxed{\text{(나) } n}\times\boxed{\text{(가) } {}_{2n}C_n}$ ($\because$ ㉠)
부등식 $2({}_nC_1)^2+4({}_nC_2)^2+\cdots+2n({}_nC_n)^2\ge12\,{}_{2n}C_{n+1}$에서
$n\times{}_{2n}C_n\ge12\times{}_{2n}C_{n+1}$
$n\times\frac{(2n)!}{n!\times n!}\ge12\times\frac{(2n)!}{(n+1)!\times(n-1)!}$
$1\ge\frac{12}{n+1}$, $n+1\ge12$ ($\because$ n은 자연수)
$\therefore n\ge11$
따라서 부등식을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 $\boxed{\text{(다) } 11}$이다.
이때 $f(n)={}_{2n}C_n$, $g(n)=n$, $p=11$이므로
$f(2)+g(2)+p={}_4C_2+2+11=19$

04 확률

난이도별 필수 기출 55~73쪽

0230 답 ④

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$이므로 $n(S)=8$

$A=\{1, 3, 5, 7\}$, $B=\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에서

$A\cap B=\{3, 5, 7\}$이므로 $n(A\cap B)=3$

$\therefore\ n(S)+n(A\cap B)=8+3=11$

0231 답 ⑤

표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{3, 6\}$, $C=\{5\}$

ㄱ. $n(A)=3$

ㄴ. $A\cap C=\{5\}\neq\varnothing$이므로 두 사건 A, C는 서로 배반사건이 아니다.

ㄷ. $B\cap C=\varnothing$이므로 두 사건 B, C는 서로 배반사건이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0232 답 ④

표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A=\{3, 6, 9\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$

(가)에서 $A\cap C=\varnothing$이므로 사건 C는 A^C의 부분집합이고,

(나)에서 $B^C\cap C=\varnothing$이므로 사건 C는 B의 부분집합이다.

즉, 사건 C는 $A^C\cap B$의 부분집합이다.

이때 $A^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$이므로

$A^C\cap B=\{2, 5, 7\}$

따라서 구하는 사건 C의 개수는 $A^C\cap B$의 공집합이 아닌 부분집합의 개수이므로

$2^3-1=7$

공통수학2 다시보기

집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n\}$에서

(1) 집합 A의 부분집합의 개수 ➡ 2^n

(2) 집합 A의 진부분집합의 개수 ➡ 2^n-1

→ 부분집합 중 자기 자신을 제외한 모든 부분집합

0233 답 ②

표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

A와 B_n이 서로 배반사건이려면 $A\cap B_n=\varnothing$이어야 하므로

사건 B_n은 A^C의 부분집합이다.

이때 사건 A^C은 홀수가 적힌 카드가 나오는 사건이므로

$A^C=\{1, 3, 5, 7, 9\}$

즉, 사건 B_n이 A^C의 부분집합이려면 n은 홀수이어야 한다.

(i) $n=1$일 때

$B_1=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$이므로

$A\cap B_1=\{2, 4, 6, 8, 10\}$

즉, A와 B_1은 서로 배반사건이 아니다.

(ii) $n=3$일 때

$B_3=\{3, 6, 9\}$이므로 $A\cap B_3=\{6\}$

즉, A와 B_3은 서로 배반사건이 아니다.

(iii) $n=5$일 때

$B_5=\{5, 10\}$이므로 $A\cap B_5=\{10\}$

즉, A와 B_5는 서로 배반사건이 아니다.

(iv) $n=7$일 때

$B_7=\{7\}$이므로 $A\cap B_7=\varnothing$

즉, A와 B_7은 서로 배반사건이다.

(v) $n=9$일 때

$B_9=\{9\}$이므로 $A\cap B_9=\varnothing$

즉, A와 B_9는 서로 배반사건이다.

(i)~(v)에서 구하는 자연수 n은 7, 9의 2개이다.

다른 풀이

n의 값을 구할 때, (i)~(v)와 같이 하나씩 대입하지 않아도 다음과 같이 구할 수도 있다.

사건 B_n이 A^C의 부분집합이므로 n은 홀수이어야 한다.

또 사건 B_n의 원소에 10 이하의 짝수가 존재하지 않으려면 $n>5$이어야 한다.

즉, 자연수 n은 $5<n<10$인 홀수이다.

따라서 구하는 자연수 n은 7, 9의 2개이다.

0234 답 16

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$에서

$A=\{1, 2, 4, 8\}$, $B=\{4, 5\}$

C와 A는 서로 배반사건이므로 $C\cap A=\varnothing$에서 사건 C는 A^C의 부분집합이고, C와 B는 서로 배반사건이므로 $C\cap B=\varnothing$에서 사건 C는 B^C의 부분집합이다.

즉, 사건 C는 $A^C\cap B^C$의 부분집합이어야 한다. …… ⓘ

이때 $A\cup B=\{1, 2, 4, 5, 8\}$이므로

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C=\{3, 6, 7\}$

이때 사건 C의 모든 원소의 합이 최대이려면

$C=A^C\cap B^C=\{3, 6, 7\}$ …… ⓘⓘ

따라서 구하는 최댓값은

$3+6+7=16$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 사건 C가 $A^C\cap B^C$의 부분집합임을 알기	40%
ⓘⓘ 모든 원소의 합이 최대일 때의 집합 C 구하기	30%
ⓘⓘⓘ 사건 C의 모든 원소의 합의 최댓값 구하기	30%

0235 답 ⑤

표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$A=\{1, 3\}$, $B=\{2, 4, 6\}$, $C=\{1, 2, 4\}$

ㄱ. $A\cap B=\varnothing$이므로 A, B는 서로 배반사건이다.

ㄴ. $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 6\}$이므로 $(A\cup B)^C=\{5\}$

즉, $(A\cup B)^C\cap C=\varnothing$이므로 $(A\cup B)^C$와 C는 서로 배반사건이다.

ㄷ. 사건 A와 서로 배반인 사건은 A^C의 부분집합이다.

이때 $A^C=\{2, 4, 5, 6\}$이므로 A^C의 부분집합의 개수는

$2^4=16$

즉, 사건 A와 서로 배반인 사건의 개수는 16이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0236 답 ①

만들 수 있는 두 자리의 자연수의 개수는

${}_4P_2=12$

일의 자리의 숫자가 6인 경우는 26, 46, 86의 3가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

0237 답 ③

만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$5!=120$

다섯 자리의 자연수가 짝수이려면 □□□□2, □□□□4이므로 그 경우의 수는

$2\times4!=48$

따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$

0238 답 ④

두 수 a, b를 선택하는 모든 경우의 수는

$5\times4=20$

(i) $b=2$일 때, $2a>20$에서 $a>10$

이를 만족시키는 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $b=4$일 때, $4a>20$에서 $a>5$

이를 만족시키는 a는 7, 9의 2가지

(iii) $b=6$일 때, $6a>20$에서 $a>\frac{10}{3}$

이를 만족시키는 a는 5, 7, 9의 3가지

(iv) $b=8$일 때, $8a>20$에서 $a>\frac{5}{2}$

이를 만족시키는 a는 3, 5, 7, 9의 4가지

(i)~(iv)에서 $a\times b>20$인 경우의 수는

$2+3+4=9$

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{20}$

0239 답 ⑤

8개의 숫자 중에서 2개를 택하는 모든 경우의 수는

${}_8C_2=28$

$\frac{a}{b}$가 자연수이려면 a는 b의 배수이어야 하므로 이를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(4, 2)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, $(8, 2)$, $(8, 4)$, $(9, 3)$의 6가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$

0240 답 ④

만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$5!=120$

천의 자리와 일의 자리에 1, 3, 5의 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 나열하고, 나머지 자리에 남은 3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_3P_2\times3!=6\times6=36$

따라서 구하는 확률은 $\frac{36}{120}=\frac{3}{10}$

0241 답 ①

만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

1□□ 꼴의 자연수의 개수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

21□, 22□ 꼴의 자연수의 개수는

$2\times4=8$

234보다 작은 23□ 꼴의 자연수는

231, 232, 233의 3개

즉, 234보다 작은 세 자리의 자연수의 개수는

$16+8+3=27$

따라서 구하는 확률은 $\frac{27}{64}$

0242 답 ③

맨 앞자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지이므로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$5\times{}_5P_3=300$

네 자리의 자연수가 5의 배수이려면 일의 자리에 올 수 있는 숫자가 0 또는 5이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 자리에 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 3개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_5P_3=60$

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

맨 앞자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지이고, 나머지 자리에 남은 4개의 숫자에서 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$4\times{}_4P_2=48$

(i), (ii)에서 5의 배수인 경우의 수는

$60+48=108$

따라서 구하는 확률은 $\frac{108}{300}=\frac{9}{25}$

0243 답 4

맨 앞자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2의 2가지이므로 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$2\times{}_3\Pi_4=2\times3^4=162$ …… i

다섯 자리의 자연수가 4의 배수이려면 끝의 두 자리의 수가 00 또는 4의 배수이어야 한다.

맨 앞자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2의 2가지이고,
끝의 두 자리는 00, 12, 20의 3가지이고,
나머지 자리에 0, 1, 2의 3개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는
$2\times3\times{}_3\Pi_2=2\times3\times3^2=54$ ····· ⅱ
즉, 4의 배수일 확률은 $\frac{54}{162}=\frac{1}{3}$ ····· ⅲ
따라서 $p=3$, $q=1$이므로
$p+q=3+1=4$ ····· ⅳ

채점 기준	
ⅰ 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수 구하기	30 %
ⅱ 4의 배수인 경우의 수 구하기	40 %
ⅲ 4의 배수일 확률 구하기	20 %
ⅳ $p+q$의 값 구하기	10 %

0244 답 ②
만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는
${}_3\Pi_4=3^4=81$
(ⅰ) 숫자 1이 포함되지 않는 경우
2, 3의 2개의 숫자에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는
${}_2\Pi_4=2^4=16$
(ⅱ) 숫자 1이 한 번 포함되는 경우
네 자리 중에서 숫자 1을 나열할 1개의 자리를 택하고,
나머지 자리에 2, 3의 2개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는
${}_4C_1\times{}_2\Pi_3=4\times2^3=32$
(ⅰ), (ⅱ)에서 숫자 1이 한 번 이하 포함되는 경우의 수는
$16+32=48$
따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{81}=\frac{16}{27}$

0245 답 ⑤
1부터 6까지의 자연수 중에서 3개를 택하는 모든 경우의 수는
${}_6C_3=20$
a와 b가 모두 짝수이려면 선택된 3개의 숫자 중 짝수가 1개 또는 2개이어야 한다.
(ⅰ) 선택된 3개의 숫자 중 짝수가 1개인 경우
짝수 3개 중에서 1개, 홀수 3개 중에서 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는
${}_3C_1\times{}_3C_2={}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$
(ⅱ) 선택된 3개의 숫자 중 짝수가 2개인 경우
짝수 3개 중에서 2개, 홀수 3개 중에서 1개를 택하면 되므로 그 경우의 수는
${}_3C_2\times{}_3C_1={}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$
(ⅰ), (ⅱ)에서 a와 b가 모두 짝수인 경우의 수는
$9+9=18$
따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$

다른 풀이
a와 b가 모두 짝수인 경우의 수는 모든 경우의 수에서 a 또는 b가 홀수인 경우의 수를 빼서 구할 수도 있다.
a 또는 b가 홀수이려면 선택된 3개의 숫자 중 짝수가 0개 또는 3개이어야 한다.
(ⅰ) 선택된 3개의 숫자 중 짝수가 0개인 경우
홀수 3개 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 1
(ⅱ) 선택된 3개의 숫자 중 짝수가 3개인 경우
짝수 3개 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 1
(ⅰ), (ⅱ)에서 a와 b가 모두 짝수인 경우의 수는
$20-(1+1)=18$

0246 답 ②
맨 앞자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 9가지, 십의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 각각 10가지이므로
세 자리의 자연수의 개수는
$9\times10\times10=900$
세 자리의 자연수의 백의 자리의 숫자를 x, 십의 자리의 숫자를 y, 일의 자리의 숫자를 z(x, y, z는 음이 아닌 정수, $x\neq0$)라 하면 각 자리의 숫자의 합이 8이므로
$x+y+z=8$ ····· ㉠
$X=x-1$이라 하면 X는 음이 아닌 정수이고, $x=X+1$을 ㉠에 대입하면
$X+y+z=7$
이때 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 방정식 $X+y+z=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 X, y, z의 순서쌍 (X, y, z)의 개수와 같다.
즉, 각 자리의 숫자의 합이 8인 경우의 수는 3개의 문자 X, y, z에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$
따라서 구하는 확률은 $\frac{36}{900}=\frac{1}{25}$

0247 답 ①
1부터 10까지의 자연수 중에서 4개를 택하는 모든 경우의 수는
${}_{10}C_4=210$
택한 4개의 숫자의 곱이 5의 배수이려면 4개의 숫자 중에서 5 또는 10이 적어도 하나 포함되어야 한다.
또 택한 4개의 숫자의 합이 3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.
1부터 10까지의 자연수를 각각 3으로 나누었을 때의 나머지가 n인 수의 집합을 S_n이라 하면
$S_0=\{3, 6, 9\}$, $S_1=\{1, 4, 7, 10\}$, $S_2=\{2, 5, 8\}$
(ⅰ) 선택된 4개의 숫자에 5가 포함된 경우
ⓐ S_0에서 2개, S_1에서 1개를 택하는 경우의 수는
${}_3C_2\times{}_4C_1={}_3C_1\times{}_4C_1=3\times4=12$
ⓑ S_0에서 1개, S_2에서 5를 제외한 2개의 숫자 중에서 2개를 택하는 경우의 수는
${}_3C_1\times{}_2C_2=3\times1=3$

ⓒ S_1에서 2개, S_2에서 5를 제외한 2개의 숫자 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2C_1=6\times2=12$

즉, 선택된 4개의 숫자에 5가 포함된 경우의 수는

$12+3+12=27$

(ii) 선택된 4개의 숫자에 10이 포함된 경우

ⓐ S_0에서 1개, S_1에서 10을 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_3C_2={}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$

ⓑ S_0에서 2개, S_2에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_3C_1={}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$

ⓒ S_1에서 10을 제외한 3개의 숫자 중에서 1개, S_2에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_3C_2={}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$

즉, 선택된 4개의 숫자에 10이 포함된 경우의 수는

$9+9+9=27$

(iii) 선택된 4개의 숫자에 5와 10이 모두 포함된 경우

ⓐ S_0에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

ⓑ S_1에서 10을 제외한 3개의 숫자 중에서 1개, S_2에서 5를 제외한 숫자 2개 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_2C_1=3\times2=6$

즉, 선택된 4개의 숫자에 5와 10이 모두 포함된 경우의 수는

$3+6=9$

(i), (ii), (iii)에서 택한 4개의 숫자의 곱이 5의 배수이고 합은 3의 배수인 경우의 수는

$27+27-9=45$

따라서 구하는 확률은 $\frac{45}{210}=\frac{3}{14}$

참고 선택된 4개의 숫자를 각각 3으로 나누었을 때의 나머지의 합이 3의 배수가 되도록 한다.

0248 답 ③

방정식 $a+b+c+d=14$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

${}_4H_{14}={}_{17}C_{14}={}_{17}C_3=680$

$a+b+c+d=14$에서 $a+b+c+d$가 짝수이므로 a, b, c, d 중에서 짝수는 0개 또는 2개 또는 4개이어야 한다.

이때 (가)에서 a, b, c, d 중에서 짝수는 1개 이하이므로 a, b, c, d는 모두 홀수이어야 한다.

$a=2a'+1$, $b=2b'+1$, $c=2c'+1$, $d=2d'+1$ (a', b', c', d'은 음이 아닌 정수)이라 하면 $a+b+c+d=14$에서

$(2a'+1)+(2b'+1)+(2c'+1)+(2d'+1)=14$

$\therefore a'+b'+c'+d'=5$ ····· ㉠

(나)에서

$1\le2a'+1\le2b'+1\le2c'+1\le2d'+1\le9$

$\therefore 0\le a'\le b'\le c'\le d'\le4$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d')은

$(0, 0, 1, 4)$, $(0, 0, 2, 3)$, $(0, 1, 1, 3)$, $(0, 1, 2, 2)$, $(1, 1, 1, 2)$

(가), (나)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 ㉠, ㉡을 만족시키는 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수와 같으므로 조건을 만족시키는 경우의 수는 5이다.

즉, 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{5}{680}=\frac{1}{136}$

따라서 $p=136$, $q=1$이므로

$p+q=136+1=137$

0249 답 ①

만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

(가)에서 만든 네 자리의 자연수가 4의 배수이려면

□□12, □□24, □□32, □□44 꼴이어야 한다.

(다)에서 1, 2, 3, 4의 양의 약수의 개수는 각각 1, 2, 2, 3이므로 숫자 1은 1번 이하, 숫자 2는 2번 이하, 숫자 3은 2번 이하, 숫자 4는 3번 이하로 사용된다.

(나)에서 숫자 1과 숫자 3은 각각 적어도 한 번씩 사용하므로 숫자 1은 1번, 숫자 3은 1번 또는 2번 사용된다.

(i) 숫자 3을 1번 사용하는 경우

택한 4개의 숫자로 가능한 것은

1, 3, 2, 4 또는 1, 3, 2, 2 또는 1, 3, 4, 4

ⓐ 1, 3, 2, 4일 때

□□12, □□24, □□32 꼴의 3가지이고, 나머지 자리에 남은 2개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$3\times2!=3\times2=6$

ⓑ 1, 3, 2, 2일 때

□□12, □□32 꼴의 2가지이고, 나머지 자리에 남은 2개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$2\times2!=2\times2=4$

ⓒ 1, 3, 4, 4일 때

□□44 꼴의 1가지이고, 나머지 자리에 남은 2개의 숫자를 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$1\times2!=1\times2=2$

즉, 숫자 3을 1번 사용하는 경우의 수는 $6+4+2=12$

(ii) 숫자 3을 2번 사용하는 경우

택한 4개의 숫자로 가능한 것은

1, 3, 3, 2 또는 1, 3, 3, 4

ⓐ 1, 3, 3, 2일 때

□□12 꼴이면 나머지 자리에 3, 3을 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는 1

□□32 꼴이면 나머지 자리에 1, 3을 일렬로 나열하면 되므로 그 경우의 수는 $2!=2$

즉, 이때의 경우의 수는 $1+2=3$

ⓑ 1, 3, 3, 4일 때

4의 배수인 네 자리의 자연수는 존재하지 않는다.

즉, 숫자 3을 2번 사용하는 경우의 수는 $3+0=3$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는 $12+3=15$

따라서 구하는 확률은 $\frac{15}{256}$

0250 답 ①

8장의 카드 중에서 2장을 뽑는 모든 경우의 수는

${}_8C_2=28$

1, 3, 5, 7이 적힌 4장의 카드 중에서 2장을 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{28}=\frac{3}{14}$

0251 답 ③

5개의 공 중에서 2개를 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_5C_2=10$

파란색 공을 제외한 4개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

0252 답 ④

7개의 공 중에서 3개를 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_7C_3=35$

흰 공 1개와 검은 공 2개가 나오는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_4C_2=3\times6=18$

따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{35}$

0253 답 ⑤

9개의 공 중에서 2개를 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_9C_2=36$

꺼낸 2개의 공에 적힌 두 자연수가 1이 아닌 공약수를 갖는 경우는

(2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 6),

(3, 9), (4, 6), (4, 8), (4, 10), (5, 10),

(6, 8), (6, 9), (6, 10), (8, 10)의 14가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{14}{36}=\frac{7}{18}$

0254 답 ②

두 상자에서 각각 카드를 1장씩 꺼내는 모든 경우의 수는

$5\times5=25$

상자 A에서 꺼낸 카드에 적힌 숫자를 a, 상자 B에서 꺼낸 카드에 적힌 숫자를 b라 할 때, $a+b=8$인 경우는

(1, 7), (3, 5), (5, 3)의 3가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{25}$

0255 ③

A가 4장의 카드 중에서 1장을 뽑고, B가 남은 3장의 카드 중에서 2장의 카드를 뽑는 모든 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_3C_2={}_4C_1\times{}_3C_1=4\times3=12$

(i) A가 뽑은 카드에 적힌 수가 3인 경우

B가 뽑은 2장의 카드에 적힌 수의 곱이 2이어야 하므로

(1, 2)의 1가지

(ii) A가 뽑은 카드에 적힌 수가 4인 경우

B가 뽑은 2장의 카드에 적힌 수의 곱이 2 또는 3이어야 하므로

(1, 2), (1, 3)의 2가지

(i), (ii)에서 A가 뽑은 카드에 적힌 수가 B가 뽑은 2장의 카드에 적힌 수의 곱보다 큰 경우의 수는

$1+2=3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

참고 A가 뽑은 카드에 적힌 숫자가 1 또는 20이면 B가 뽑은 2장의 카드에 적힌 수의 곱보다 항상 작다.

0256 답 ①

카드에 적힌 문자를 각각 A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3이라 하자.

7장의 카드를 일렬로 배열하는 모든 경우의 수는

$7!=5040$

이때 C_1, C_2, C_3이 적힌 카드 중에서 2장을 택하여 양 끝에 배열하고, 그 사이사이에 나머지 5장을 배열하는 경우의 수는

${}_3P_2\times5!=6\times120=720$

따라서 구하는 확률은 $\frac{720}{5040}=\frac{1}{7}$

0257 답 5

흰색 탁구공 3개, 주황색 탁구공 n개가 들어 있는 상자에서 탁구공 2개를 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_{n+3}C_2=\frac{(n+3)(n+2)}{2}$

주황색 탁구공 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$

즉, 꺼낸 두 공이 모두 주황색 탁구공일 확률은

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+3)(n+2)}{2}}=\frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}$$

이때 $\frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}=\frac{5}{14}$이므로

$14n(n-1)=5(n+3)(n+2)$

$9n^2-39n-30=0$, $3(3n+2)(n-5)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수)

0258 답 ③

12개의 공 중에서 2개를 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_{12}C_2=66$

검은 공의 개수를 $n(n\geq6)$이라 하면 흰 공의 개수는

$12-n$

흰 공 2개 또는 검은 공 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_nC_2+{}_{12-n}C_2=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(12-n)(11-n)}{2}$$

$$=n^2-12n+66$$

$$\therefore P(A)=\frac{n^2-12n+66}{66}$$

흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우의 수는

${}_nC_1\times{}_{12-n}C_1=n(12-n)=-n^2+12n$

$$\therefore P(B)=\frac{-n^2+12n}{66}$$

이때 $P(A)=P(B)+\frac{1}{33}$이므로

$\frac{n^2-12n+66}{66}=\frac{-n^2+12n}{66}+\frac{1}{33}$

$n^2-12n+66=-n^2+12n+2$

$2n^2-24n+64=0$, $2(n-4)(n-8)=0$

$\therefore n=8$ ($\because n\geq 6$)

따라서 검은 공의 개수는 8이다.

0259 답 ②

9장의 카드 중에서 5장을 택하는 모든 경우의 수는

${}_9C_5={}_9C_4=126$

이때 $a\geq 2$, $b\leq 8$이므로 $b-a=4$인 경우는

$a=2$, $b=6$ 또는 $a=3$, $b=7$ 또는 $a=4$, $b=8$

(i) $a=2$, $b=6$인 경우

첫 번째는 1이 적힌 카드를 나열하고,

세 번째는 3, 4, 5가 적힌 카드 중에서 1장을 택하여 나열하고,

다섯 번째는 7, 8, 9가 적힌 카드 중에서 1장을 택하여 나열하면 된다.

즉, 그 경우의 수는

$1\times{}_3C_1\times{}_3C_1=1\times 3\times 3=9$

(ii) $a=3$, $b=7$인 경우

첫 번째는 1, 2가 적힌 카드 중에서 1장을 택하여 나열하고,

세 번째는 4, 5, 6이 적힌 카드 중에서 1장을 택하여 나열하고,

다섯 번째는 8, 9가 적힌 카드 중에서 1장을 택하여 나열하면 된다.

즉, 그 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_3C_1\times{}_2C_1=2\times 3\times 2=12$

(iii) $a=4$, $b=8$인 경우

첫 번째는 1, 2, 3이 적힌 카드 중에서 1장을 택하여 나열하고,

세 번째는 5, 6, 7이 적힌 카드 중에서 1장을 택하여 나열하고,

다섯 번째는 9가 적힌 카드를 나열하면 된다.

즉, 그 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_3C_1\times 1=3\times 3\times 1=9$

(i), (ii), (iii)에서 $b-a=4$인 경우의 수는

$9+12+9=30$

따라서 구하는 확률은 $\frac{30}{126}=\frac{5}{21}$

참고 카드에 적힌 수가 작은 수부터 크기 순서대로 왼쪽부터 일렬로 나열하므로 두 번째 카드에 적혀 있는 숫자는 1보다 커야 하고, 네 번째 카드에 적혀 있는 숫자는 9보다 작아야 한다. 즉, $a\geq 2$, $b\leq 8$이어야 한다.

0260 답 ⑤

10장의 카드 중에서 4장을 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_{10}C_4=210$

$a_1\times a_2$의 값이 홀수이려면 a_1, a_2가 모두 홀수이어야 하므로

$a_1\leq 5$, $a_2\leq 7$

$a_1\times a_2$의 값이 홀수가 되는 순서쌍 (a_1, a_2)는

(1, 3) 또는 (1, 5) 또는 (1, 7) 또는

(3, 5) 또는 (3, 7) 또는 (5, 7)

(i) 순서쌍 (a_1, a_2)가 (1, 3)인 경우 → 이때 $a_3\geq 4$이다.

$a_3+a_4\geq 16$을 만족시키는 순서쌍 (a_3, a_4)는

(6, 10), (7, 9), (7, 10), (8, 9), (8, 10), (9, 10)의 6가지

(ii) 순서쌍 (a_1, a_2)가 (1, 5), (3, 5)인 경우 → 이때 $a_3\geq 6$이다.

$a_3+a_4\geq 16$을 만족시키는 순서쌍 (a_3, a_4)는

(6, 10), (7, 9), (7, 10), (8, 9), (8, 10), (9, 10)의 6가지

즉, 그 경우의 수는 $2\times 6=12$

(iii) 순서쌍 (a_1, a_2)가 (1, 7), (3, 7), (5, 7)인 경우 → 이때 $a_3\geq 8$이다.

$a_3+a_4\geq 16$을 만족시키는 순서쌍 (a_3, a_4)는

(8, 9), (8, 10), (9, 10)의 3가지

즉, 그 경우의 수는 $3\times 3=9$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$6+12+9=27$

따라서 구하는 확률은 $\frac{27}{210}=\frac{9}{70}$

참고 $a_1\geq 6$이고 a_1, a_2가 모두 홀수이면 a_4의 값이 존재하지 않으므로 $a_1\leq 5$이어야 한다. 또 $a_2\geq 8$이고 a_1, a_2가 모두 홀수이면 a_4의 값이 존재하지 않으므로 $a_2\leq 7$이어야 한다.

0261 답 23

7개의 공 중에서 3개를 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_7C_3=35$ …… ⓘ

(가)에서 3개의 공에 적힌 수의 합이 홀수이려면 공에 적힌 수가 홀수 3개이거나 홀수 1개, 짝수 2개이어야 한다.

또 (나)에서 세 수의 곱이 3의 배수이려면 꺼낸 공에 적힌 수 중에서 적어도 하나는 3 또는 6이어야 한다.

(i) 홀수가 적힌 공 3개를 꺼내는 경우

3이 적힌 공을 반드시 꺼내고, 1, 5, 7이 적힌 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$1\times{}_3C_2=1\times{}_3C_1=1\times 3=3$

(ii) 홀수가 적힌 공 1개와 짝수가 적힌 공 2개를 꺼내는 경우

1, 3, 5, 7이 적힌 공 중에서 1개를 꺼내고, 2, 4, 6이 적힌 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_3C_2={}_4C_1\times{}_3C_1=4\times 3=12$

이때 3, 6이 적힌 공을 모두 꺼내지 않는 경우의 수는 1, 5, 7이 적힌 공 중에서 1개를 꺼내고, 2, 4가 적힌 공을 모두 꺼내는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1\times{}_2C_2=3\times 1=3$

즉, 홀수가 적힌 공 1개와 짝수가 적힌 공 2개를 꺼내는 경우의 수는 $12-3=9$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$3+9=12$ …… ⓘⓘ

즉, 조건을 만족시킬 확률은 $\frac{12}{35}$ …… ⓘⓘⓘ

따라서 $p=35$, $q=12$이므로

$p-q=35-12=23$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ 모든 경우의 수 구하기	20 %
ⓘⓘ 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ 조건을 만족시킬 확률 구하기	20 %
ⓘⓥ $p-q$의 값 구하기	10 %

0262 답 ④

카드에 적힌 문자를 각각 A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C라 하자.

6장의 카드를 일렬로 배열하는 모든 경우의 수는

$6!=720$

(i) B_1, C, B_2 또는 B_2, C, B_1의 순서대로 배열하는 경우

B_1, C, B_2의 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에서 3개를 택하여 A_1, A_2, A_3을 배열하면 된다.

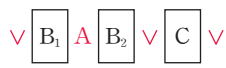


B_2, C, B_1도 마찬가지의 방법으로 구하면 그 경우의 수는

$2\times{}_4P_3=2\times24=48$

(ii) B_1, B_2, C 또는 B_2, B_1, C의 순서대로 배열하는 경우

B_1, B_2 사이에 반드시 A_1, A_2, A_3 중 하나를 배열하고 B_2, C 사이와 양 끝의 3개의 자리에서 2개를 택하여 A_1, A_2, A_3 중 남은 2개를 배열하면 된다.



B_2, B_1, C도 마찬가지의 방법으로 구하면 그 경우의 수는

$2\times{}_3C_1\times{}_3P_2=2\times3\times6=36$

(iii) C, B_1, B_2 또는 C, B_2, B_1의 순서대로 배열하는 경우

(ii)와 같은 방법으로 구하면 그 경우의 수는 36이다.



(i), (ii), (iii)에서 같은 문자끼리 서로 이웃하지 않게 배열하는 경우의 수는

$48+36+36=120$

따라서 구하는 확률은 $\frac{120}{720}=\frac{1}{6}$

0263 답 ③

7장의 카드를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

$7!=5040$

(i) 3이 적힌 카드와 4가 적힌 카드가 이웃하지 않는 경우

5, 6, 7이 적힌 카드 중에서 2장을 택하여 3이 적힌 카드의 양옆에 나열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

1, 2가 적힌 카드를 4가 적힌 카드의 양옆에 나열하는 경우의 수는 $2!=2$

3이 적힌 카드와 양옆의 2장을 1장으로 생각하고, 4가 적힌 카드와 양옆의 2장을 1장으로 생각하여 나머지 1장의 카드와 함께 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

즉, 3이 적힌 카드와 4가 적힌 카드가 이웃하지 않는 경우의 수는

$6\times2\times6=72$

(ii) 3이 적힌 카드와 4가 적힌 카드가 이웃하는 경우

3과 4가 적힌 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2!=2$

5, 6, 7이 적힌 카드 중에서 3이 적힌 카드의 다른 한 쪽에 나열할 카드 1장을 택하여 나열하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

1, 2가 적힌 카드 중에서 4가 적힌 카드의 다른 한 쪽에 나열할 카드 1장을 택하여 나열하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$

3, 4가 적힌 카드와 그 양옆의 2장의 카드를 1장으로 생각하고 나머지 3장의 카드와 함께 4장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $4!=24$

즉, 3이 적힌 카드와 4가 적힌 카드가 이웃하는 경우의 수는

$2\times3\times2\times24=288$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$72+288=360$

따라서 구하는 확률은 $\frac{360}{5040}=\frac{1}{14}$

0264 답 ⑤

10개의 공 중에서 5개를 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_{10}C_5=252$

(i) 연속된 세 자연수가 1, 2, 3인 경우

4를 제외한 숫자가 적혀 있는 6개의 공 중에서 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

${}_6C_2=15$

(ii) 연속된 세 자연수가 2, 3, 4 또는 3, 4, 5 또는 4, 5, 6 또는 5, 6, 7 또는 6, 7, 8 또는 7, 8, 9인 경우

연속된 세 자연수와 그 양옆의 수를 제외한 5개의 숫자가 적혀 있는 공 중에서 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$6\times{}_5C_2=6\times10=60$

(iii) 연속된 세 자연수가 8, 9, 10인 경우

7을 제외한 숫자가 적혀 있는 6개의 공 중에서 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

${}_6C_2=15$

(i), (ii), (iii)에서 사건 A가 일어나는 경우의 수는

$15+60+15=90$

따라서 구하는 확률은 $\frac{90}{252}=\frac{5}{14}$

0265 ②

공에 적힌 수를 각각 1, 2_A, 2_B, 3, 4라 하자.

5개의 공 중에서 4개를 꺼내어 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

${}_5P_4=120$

(i) 2_A, 2_B를 모두 포함하는 경우

2_A, 2_B가 적힌 공을 나열하고, 1, 3, 4가 적힌 공 중에서 2개를 꺼내어 크기 순서대로 나열하는 경우의 수는

$2!\times{}_3C_2=2!\times{}_3C_1=2\times3=6$

(ii) 2_A, 2_B 중 1개만 포함하는 경우

2_A, 2_B가 적힌 공 중 1개를 꺼내고, 1, 3, 4가 적힌 공 중에서 3개를 꺼내어 크기 순서대로 나열하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_3C_3=2\times1=2$

(i), (ii)에서 $a\le b\le c\le d$인 경우의 수는

$6+2=8$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$

0266 22

공에 적힌 수를 각각 1_A, 1_B, 2_A, 2_B, 3_A, 3_B라 하자.

6개의 공을 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

$6!=720$

이때 $m>n$이려면 $a_1>a_4$ 또는 $a_1=a_4$, $a_2>a_5$이어야 한다.

(i) $a_1 > a_4$인 경우

ⓐ a_1에 3_A, 3_B가 적힌 공 중에서 1개를 나열하고,
a_4에 1_A, 1_B, 2_A, 2_B가 적힌 공 중에서 1개를 나열하고,
a_2, a_3, a_5, a_6에 나머지 4개를 나열하는 경우의 수는
${}_2C_1 \times {}_4C_1 \times 4! = 2 \times 4 \times 24 = 192$

ⓑ a_1에 2_A, 2_B가 적힌 공 중에서 1개를 나열하고,
a_4에 1_A, 1_B가 적힌 공 중에서 1개를 나열하고,
a_2, a_3, a_5, a_6에 나머지 4개를 나열하는 경우의 수는
${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times 4! = 2 \times 2 \times 24 = 96$

즉, 그 경우의 수는 $192+96=288$

(ii) $a_1 = a_4$, $a_2 > a_5$인 경우

ⓐ a_1, a_4에 3_A, 3_B가 적힌 공을 나열하고,
a_2에 2_A, 2_B가 적힌 공 중에서 1개를 나열하고,
a_5에 1_A, 1_B가 적힌 공 중에서 1개를 나열하고,
a_3, a_6에 나머지 2개를 나열하는 경우의 수는
$2! \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times 2! = 16$

ⓑ a_1, a_4에 2_A, 2_B가 적힌 공을 나열하고,
a_2에 3_A, 3_B가 적힌 공 중에서 1개를 나열하고,
a_5에 1_A, 1_B가 적힌 공 중에서 1개를 나열하고,
a_3, a_6에 나머지 2개를 나열하는 경우의 수는
$2! \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times 2! = 16$

ⓒ a_1, a_4에 1_A, 1_B가 적힌 공을 나열하고,
a_2에 3_A, 3_B가 적힌 공 중에서 1개를 나열하고,
a_5에 2_A, 2_B가 적힌 공 중에서 1개를 나열하고,
a_3, a_6에 나머지 2개를 나열하는 경우의 수는
$2! \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times 2! = 16$

즉, 그 경우의 수는 $16+16+16=48$

(i), (ii)에서 $m > n$인 경우의 수는
$288+48=336$

즉, $m > n$일 확률은 $\frac{336}{720} = \frac{7}{15}$

따라서 $p=15$, $q=7$이므로
$p+q=15+7=22$

다른 풀이

$m > n$인 경우의 수는 다음과 같은 방법으로도 구할 수 있다.

주어진 시행을 6번 반복할 때 결과는 $m > n$, $m = n$, $m < n$ 중 하나이고, $m > n$인 경우에서 a_1과 a_4, a_2와 a_5, a_3과 a_6을 각각 서로 바꾸면 $m < n$인 경우가 되므로 $m > n$인 경우의 수와 $m < n$인 경우의 수는 서로 같다.

즉, $m > n$인 경우의 수는 모든 경우의 수에서 $m = n$인 경우의 수를 뺀 후 2로 나누면 된다.

6개의 공을 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 $6! = 720$

$m = n$이려면 처음 3개의 공을 1, 2, 3 중에서 각각 1개씩 꺼내고, 꺼낸 순서와 동일하게 남은 3개의 공을 꺼내야 하므로 $m = n$인 경우의 수는

${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times 3! \times 1 = 48$

즉, $m > n$인 경우의 수는

$(720-48) \times \frac{1}{2} = 336$

참고 $a_1 = a_4$, $a_2 = a_5$이면 $a_3 = a_6$이므로 $m > n$을 만족시키지 않는다.

0267 답 ③

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$6 \times 6 = 36$

같은 눈의 수가 나오는 경우는
(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)의 6가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

0268 답 ②

서로 다른 세 개의 동전을 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$2 \times 2 \times 2 = 8$

앞면이 2번 나오는 경우는
(앞, 앞, 뒤), (앞, 뒤, 앞), (뒤, 앞, 앞)의 3가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{8}$

0269 답 ③

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$6 \times 6 = 36$

두 눈의 수의 합이 짝수이려면 두 눈의 수가 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 한다.

(i) 두 눈의 수가 모두 짝수인 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$

(ii) 두 눈의 수가 모두 홀수인 경우의 수는 $3 \times 3 = 9$

(i), (ii)에서 두 눈의 수의 합이 짝수인 경우의 수는
$9+9=18$

따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

0270 답 ②

두 개의 주사위 A, B를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$6 \times 6 = 36$

$|a-b| = 3$을 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)는
(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)의 6가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

0271 답 ④

서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$6 \times 6 \times 6 = 216$

나오는 세 눈의 수의 합이 6인 경우는
1, 1, 4 또는 1, 2, 3 또는 2, 2, 2

(i) 1, 1, 4를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\frac{3!}{2!} = 3$

(ii) 1, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는
$3! = 6$

(iii) 2, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는 1

(i), (ii), (iii)에서 세 눈의 수의 합이 6인 경우의 수는
$3+6+1=10$

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{216} = \frac{5}{108}$

0272 답 ①

한 개의 주사위와 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times2\times2=24$

주사위의 눈이 소수인 경우는 2, 3, 5의 3가지

두 개의 동전이 모두 뒷면이 나오는 경우는 1가지

즉, 주사위는 소수의 눈이 나오고 두 개의 동전은 모두 뒷면이 나오는 경우의 수는

$3\times1=3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$

0273 답 ④

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4b\geq0$ $\therefore a^2\geq4b$

(i) $a=1$일 때, 이를 만족시키는 b의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a=2$일 때, $b=1$의 1가지

(iii) $a=3$일 때, $b=1$, 2의 2가지

(iv) $a=4$일 때, $b=1$, 2, 3, 4의 4가지

(v) $a=5$일 때, $b=1$, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지

(vi) $a=6$일 때, $b=1$, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지

(i)~(vi)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$1+2+4+6+6=19$

따라서 구하는 확률은 $\frac{19}{36}$

0274 답 ⑤

서로 다른 네 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6\times6=6^4$

이때 네 눈의 수의 곱이 18인 경우는

1, 1, 3, 6 또는 1, 2, 3, 3

(i) 1, 1, 3, 6을 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

(ii) 1, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

(i), (ii)에서 네 눈의 수의 곱이 18인 경우의 수는

$12+12=24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{6^4}=\frac{1}{54}$

0275 답 ⑤

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

a, b의 값은 6 이하의 자연수이므로 $f(x)=x^2-5x+4$에서

$f(1)=0$, $f(2)<0$, $f(3)<0$, $f(4)=0$, $f(5)>0$, $f(6)>0$

이때 $f(a)f(b)>0$이려면 $f(a)$, $f(b)$의 값의 부호가 같아야 한다.

(i) $f(a)>0$, $f(b)>0$인 경우

a, b가 될 수 있는 값은 각각 5, 6의 2가지이므로 그 경우의 수는

$2\times2=4$

(ii) $f(a)<0$, $f(b)<0$인 경우

a, b가 될 수 있는 값은 각각 2, 3의 2가지이므로 그 경우의 수는

$2\times2=4$

(i), (ii)에서 $f(a)f(b)>0$인 경우의 수는

$4+4=8$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

0276 답 ①

한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

$(a-2)^2+(b-3)^2+(c-4)^2=2$에서

$(a-2)^2$, $(b-3)^2$, $(c-4)^2$의 값은 각각 0 또는 1이어야 한다.

(i) $(a-2)^2=0$, $(b-3)^2=1$, $(c-4)^2=1$인 경우

이를 만족시키는 a, b, c의 값은 각각 1개, 2개, 2개이므로

그 경우의 수는 $1\times2\times2=4$

(ii) $(a-2)^2=1$, $(b-3)^2=0$, $(c-4)^2=1$인 경우

이를 만족시키는 a, b, c의 값은 각각 2개, 1개, 2개이므로

그 경우의 수는 $2\times1\times2=4$

(iii) $(a-2)^2=1$, $(b-3)^2=1$, $(c-4)^2=0$인 경우

이를 만족시키는 a, b, c의 값은 각각 2개, 2개, 1개이므로

그 경우의 수는 $2\times2\times1=4$

(i), (ii), (iii)에서 $(a-2)^2+(b-3)^2+(c-4)^2=2$인 경우의 수는

$4+4+4=12$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{216}=\frac{1}{18}$

0277 답 181

한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$ ····· i

(i) $a>b>c$인 경우

6개의 숫자에서 서로 다른 3개를 택하여 큰 수부터 순서대로 a, b, c에 대응시키면 되므로

${}_6C_3=20$

(ii) $a>b=c$인 경우

6개의 숫자에서 서로 다른 2개를 택하여 큰 수부터 순서대로 a, b에 대응시키면 되므로

${}_6C_2=15$

→ $b=c$이므로 b의 값이 정해지면 c의 값도 정해진다.

(i), (ii)에서 $a>b\geq c$인 경우의 수는

$20+15=35$ ····· ii

즉, $a>b\geq c$일 확률은 $\frac{35}{216}$ ····· iii

따라서 $p=216$, $q=35$이므로

$p-q=216-35=181$ ····· iv

채점 기준	
i 모든 경우의 수 구하기	30%
ii $a>b\geq c$인 경우의 수 구하기	40%
iii $a>b\geq c$일 확률 구하기	20%
iv $p-q$의 값 구하기	10%

다른 풀이

$a>b\geq c$인 경우의 수를 다음과 같이 나누어 구할 수도 있다.

(i) $a\geq b\geq c$인 경우

6개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 크거나 같은 수부터 순서대로 a, b, c에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

${}_6\mathrm{H}_3={}_8\mathrm{C}_3=56$

(ii) $a=b\geq c$인 경우

6개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 크거나 같은 수부터 순서대로 b, c에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$

→ $a=b$이므로 b의 값이 정해지면 a의 값도 정해진다.

(i), (ii)에서 $a>b\geq c$인 경우의 수는

$56-21=35$

0278 답 ①

주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6^2\times2^4$

(i) 앞면이 나오는 동전이 1개일 때

앞면이 나오는 동전의 개수가 1인 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1=4$

두 주사위에서 나오는 눈의 수의 곱이 1인 경우는 (1, 1)의 1가지

즉, 이때의 경우의 수는

$4\times1=4$

(ii) 앞면이 나오는 동전이 2개일 때

앞면이 나오는 동전의 개수가 2인 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

두 주사위에서 나오는 눈의 수의 곱이 2인 경우는

(1, 2), (2, 1)의 2가지

즉, 이때의 경우의 수는

$6\times2=12$

(iii) 앞면이 나오는 동전이 3개일 때

앞면이 나오는 동전의 개수가 3인 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

두 주사위에서 나오는 눈의 수의 곱이 3인 경우는

(1, 3), (3, 1)의 2가지

즉, 이때의 경우의 수는

$4\times2=8$

(iv) 앞면이 나오는 동전이 4개일 때

앞면이 나오는 동전의 개수가 4인 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_4=1$

두 주사위에서 나오는 눈의 수의 곱이 4인 경우는

(1, 4), (2, 2), (4, 1)의 3가지

즉, 이때의 경우의 수는

$1\times3=3$

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$4+12+8+3=27$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{27}{6^2\times2^4}=\dfrac{3}{64}$

0279 답 ②

한 개의 주사위를 세 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

$b>0$이므로 $ab\geq bc$에서 $a\geq c$

$a\geq c$이려면 6개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 크거나 같은 수부터 순서대로 a, c에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$

이때 b는 6 이하의 자연수이므로 $ab\geq bc$인 경우의 수는

$21\times6=126$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{126}{216}=\dfrac{7}{12}$

0280 답 $\dfrac{5}{36}$

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

$x^2-4x+3=0$에서

$(x-1)(x-3)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=3$

(i) $x^2-ax+b=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우

$1-a+b=0$에서 $b=a-1$

이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)의 5가지 …… ㉠

이때 $x=3$을 근으로 갖지 않으므로

$9-3a+b\neq0$ $\therefore b\neq3a-9$

즉, ㉠에서 $b=3a-9$를 만족시키는 (4, 3)의 1가지를 제외하면

이때의 경우의 수는 $5-1=4$

(ii) $x^2-ax+b=0$이 $x=3$을 근으로 갖는 경우

$9-3a+b=0$에서 $b=3a-9$

이를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

(4, 3), (5, 6)의 2가지 …… ㉡

이때 $x=1$을 근으로 갖지 않으므로

$1-a+b\neq0$ $\therefore b\neq a-1$

즉, ㉡에서 $b=a-1$을 만족시키는 (4, 3)의 1가지를 제외하면

이때의 경우의 수는 $2-1=1$

(i), (ii)에서 두 이차방정식이 오직 한 개의 근만 공통으로 갖는 경우의 수는

$4+1=5$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{5}{36}$

0281 답 ①

서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

주사위를 던져 나오는 눈의 수는 6 이하의 자연수이므로 세 눈의 수의 합을 5로 나누었을 때의 나머지가 3인 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) 세 눈의 수의 합이 3인 경우

합이 3이 되는 경우는 1, 1, 1이므로 그 경우의 수는 1

(ii) 세 눈의 수의 합이 8인 경우

합이 8이 되는 경우는

1, 1, 6 또는 1, 2, 5 또는 1, 3, 4 또는 2, 2, 4 또는 2, 3, 3

이때 각각을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}+3!+3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=3+6+6+3+3=21$

(iii) 세 눈의 수의 합이 13인 경우

합이 13이 되는 경우는

1, 6, 6 또는 2, 5, 6 또는 3, 4, 6 또는 3, 5, 5 또는 4, 4, 5

이때 각각을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}+3!+3!+\frac{3!}{2!}+\frac{3!}{2!}=3+6+6+3+3=21$

(iv) 세 눈의 수의 합이 18인 경우

합이 18이 되는 경우는 6, 6, 6이므로 그 경우의 수는 1

(i)~(iv)에서 세 눈의 수의 합을 5로 나누었을 때의 나머지가 3인 경우의 수는

$1+21+21+1=44$

따라서 구하는 확률은 $\frac{44}{216}=\frac{11}{54}$

0282 답 ⑤

두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

3^m+7^n이 10의 배수이려면 3^m, 7^n의 일의 자리의 숫자의 합이 10이어야 한다.

이때 3^m의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 반복되고, 7^n의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 반복되므로 일의 자리의 숫자의 합이 10이 되는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) 3^m의 일의 자리의 숫자가 3이고, 7^n의 일의 자리의 숫자가 7일 때

m의 값은 1, 5의 2가지, n의 값은 1, 5의 2가지

즉, 이때의 경우의 수는 $2\times2=4$

(ii) 3^m의 일의 자리의 숫자가 9이고, 7^n의 일의 자리의 숫자가 1일 때

m의 값은 2, 6의 2가지, n의 값은 4의 1가지

즉, 이때의 경우의 수는 $2\times1=2$

(iii) 3^m의 일의 자리의 숫자가 7이고, 7^n의 일의 자리의 숫자가 3일 때

m의 값은 3의 1가지, n의 값은 3의 1가지

즉, 이때의 경우의 수는 $1\times1=1$

(iv) 3^m의 일의 자리의 숫자가 1이고, 7^n의 일의 자리의 숫자가 9일 때

m의 값은 4의 1가지, n의 값은 2, 6의 2가지

즉, 이때의 경우의 수는 $1\times2=2$

(i)~(iv)에서 3^m+7^n이 10의 배수인 경우의 수는

$4+2+1+2=9$

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

0283 답 ⑤

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

$i^m\times(-i)^n=i^m\times(-1)^n\times i^n=(-1)^n\times i^{m+n}$

이므로 $(-1)^n\times i^{m+n}=-i$를 만족시키는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $n=1$일 때, m의 값은 4의 1가지

(ii) $n=2$일 때, m의 값은 1, 5의 2가지

(iii) $n=3$일 때, m의 값은 2, 6의 2가지

(iv) $n=4$일 때, m의 값은 3의 1가지

(v) $n=5$일 때, m의 값은 4의 1가지

(vi) $n=6$일 때, m의 값은 1, 5의 2가지

(i)~(vi)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$1+2+2+1+1+2=9$

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$

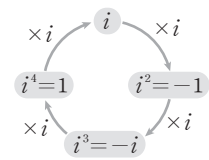
✓ 공통수학1 다시보기

허수단위 i에 대하여

$i^{4k+1}=i$, $i^{4k+2}=-1$,

$i^{4k+3}=-i$, $i^{4k+4}=1$

(단, k는 음이 아닌 정수이다.)



0284 답 ④

서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

$ab=kc^2$을 만족시키는 자연수 k가 존재하려면 ab가 c^2의 배수이어야 한다.

(i) $c=1$일 때

$c^2=1$이고, ab는 항상 1의 배수이므로 순서쌍 (a, b)의 개수는

$6\times6=36$

(ii) $c=2$일 때

$c^2=4$이고, ab가 4의 배수이려면

ⓐ a, b가 모두 짝수일 때

순서쌍 (a, b)의 개수는 $3\times3=9$

ⓑ $a=4$, b는 홀수 또는 a는 홀수, $b=4$일 때

순서쌍 (a, b)의 개수는 $2\times1\times3=6$

즉, ab가 4의 배수인 순서쌍 (a, b)의 개수는

$9+6=15$

(iii) $c=3$일 때

$c^2=9$이고, ab가 9의 배수이려면 a, b가 둘 다 3의 배수이어야 하므로 순서쌍 (a, b)의 개수는 $2\times2=4$

(iv) $c=4$일 때

$c^2=16$이고, ab가 16의 배수인 순서쌍 (a, b)는 $(4, 4)$의 1가지

(v) $c=5$일 때

$c^2=25$이고, ab가 25의 배수인 순서쌍 (a, b)는 $(5, 5)$의 1가지

(vi) $c=6$일 때

$c^2=36$이고, ab가 36의 배수인 순서쌍 (a, b)는 $(6, 6)$의 1가지

(i)~(vi)에서 $ab=kc^2$을 만족시키는 자연수 k가 존재하는 경우의 수는

$36+15+4+1+1+1=58$

따라서 구하는 확률은 $\frac{58}{216}=\frac{29}{108}$

참고 (iii)에서 a, b는 각각 6 이하의 자연수이므로 a, b가 9의 배수일 수는 없다. 즉, ab가 9의 배수이려면 a, b가 모두 3의 배수이어야 한다.

0285 답 ⑤

8개의 점 중에서 2개를 택하는 모든 경우의 수는

${}_8C_2=28$

택한 두 점 사이의 거리가 1이려면 두 점은 이웃한 점이어야 하므로 그 경우의 수는 12 → 모서리 1개를 택하는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$

0286 답 ⑤

반지름의 길이가 6인 원의 넓이는 36π

색칠한 부분의 넓이는 반지름의 길이가 4인 원의 넓이에서 반지름의 길이가 2인 원의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$16\pi-4\pi=12\pi$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12\pi}{36\pi}=\frac{1}{3}$

0287 답 ④

9개의 점 중에서 3개를 택하는 모든 경우의 수는

${}_9C_3=84$

삼각형의 각 꼭짓점은 2개의 변에 동시에 포함되므로 택한 3개의 점이 모두 서로 다른 변 위의 점이려면 꼭짓점이 아닌 점이어야 한다.

삼각형의 각 변에 꼭짓점이 아닌 점의 개수가 2이므로 3개의 점이 모두 서로 다른 변 위의 점인 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_1=2\times2\times2=8$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{84}=\frac{2}{21}$

0288 답 ④

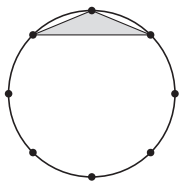
8개의 점 중에서 3개를 택하는 모든 경우의 수는

${}_8C_3=56$

3개의 점으로 만든 삼각형이 둔각삼각형인 경우는 다음과 같다.

(i) 3개의 점이 모두 이웃한 경우

8개의 점 중에서 이웃한 3개의 점을 택하는 경우의 수는 8



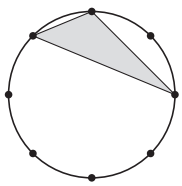
(ii) 이웃한 4개의 점 중에서 2개만 이웃한 경우

8개의 점에서 이웃한 4개의 점을 택하는 경우의 수는 8

이때 이웃한 4개의 점을 차례로 A, B, C, D라 하면 2개의 점만 이웃하도록 세 점을 택하는 경우는

(A, B, D), (A, C, D)의 2가지

즉, 이때의 경우의 수는 $8\times2=16$



(i), (ii)에서 만든 삼각형이 둔각삼각형인 경우의 수는

$8+16=24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{56}=\frac{3}{7}$

참고 원 위의 세 점으로 삼각형을 만들 때, 가장 긴 변의 길이가

(i) 지름의 길이와 같으면 ➡ 직각삼각형

(ii) 지름의 길이보다 짧고 삼각형이 반원에 속하면 ➡ 둔각삼각형

(iii) 그 외의 경우는 ➡ 예각삼각형

0289 답 ①

a, b가 6 이하의 자연수이므로 점 A를 정할 수 있는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

$\overline{OR}=6$이고, 삼각형 ORA가 이등변삼각형인 경우는 다음과 같이 나눈다.

(i) $\overline{OA}=\overline{OR}$인 경우

$\sqrt{a^2+b^2}=6$에서 $a^2+b^2=36$

이 식을 만족시키는 a, b의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $\overline{RA}=\overline{OR}$인 경우

$\sqrt{(a-6)^2+b^2}=6$에서 $(a-6)^2+b^2=36$

이 식을 만족시키는 a의 값은 6뿐이므로

$b^2=36$ $\therefore b=6$

즉, $\overline{RA}=\overline{OR}$인 경우는 (6, 6)의 1가지

(iii) $\overline{RA}=\overline{OA}$인 경우

$\sqrt{(a-6)^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2}$에서

$(a-6)^2+b^2=a^2+b^2$

$12a=36$ $\therefore a=3$

즉, $\overline{RA}=\overline{OA}$인 경우는

(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)의 6가지

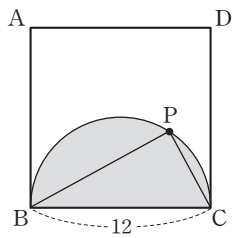
(i), (ii), (iii)에서 삼각형 ORA가 이등변삼각형인 경우의 수는

$1+6=7$

따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{36}$

0290 답 ④

그림과 같이 선분 BC를 지름으로 하는 반원을 그리면 반원 위의 점 P에 대하여 삼각형 PBC는 직각삼각형이므로 삼각형 PBC가 둔각삼각형이려면 점 P는 색칠한 영역(경계선 제외)에 있어야 한다.



이때 정사각형 ABCD의 넓이는

$12\times12=144$

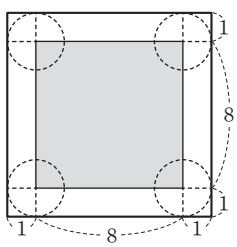
색칠한 영역의 넓이는

$\frac{1}{2}\pi\times6^2=18\pi$

따라서 구하는 확률은 $\frac{18\pi}{144}=\frac{\pi}{8}$

0291 답 ④

그림과 같이 동전이 색종이의 테두리 안쪽에 완전히 놓이려면 동전의 중심이 색종이의 테두리로부터 반지름의 길이인 1 이상 떨어져 있어야 한다.



즉, 동전의 중심은 색칠한 영역에 있어야 한다.

이때 색종이 전체의 넓이는

$10\times10=100$

색칠한 영역의 넓이는

$8\times8=64$

따라서 구하는 확률은 $\frac{64}{100}=\frac{16}{25}$

0292 답 ③

10개의 꼭짓점 중 3개를 택하는 모든 경우의 수는 ${}_{10}C_3=120$

면 ABCDE에서 3개의 꼭짓점을 택하는 경우와 면 FGHIJ에서 3개의 꼭짓점을 택하는 경우는 만들어진 삼각형의 세 변 중 오각기둥의 모서리가 반드시 있다.

즉, 만들어진 삼각형의 어떤 변도 오각기둥의 모서리가 아닌 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) 면 ABCDE에서 1개, 면 FGHIJ에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우

면 ABCDE에서 1개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 5이고, 그 각각의 경우에 대하여 면 FGHIJ에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 3이므로 그 경우의 수는 $5\times3=15$

→면 ABCDE에서 점 A를 택할 때, 면 FGHIJ에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우는 점 F를 제외한 4개의 점 중 대각선을 이루는 2개의 점을 택해야 하므로 G, I 또는 G, J 또는 H, J의 3가지

(ii) 면 FGHIJ에서 1개, 면 ABCDE에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우

면 FGHIJ에서 1개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 5이고, 그 각각의 경우에 대하여 면 ABCDE에서 2개의 꼭짓점을 택하는 경우의 수는 3이므로 그 경우의 수는 $5\times3=15$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는 $15+15=30$

따라서 구하는 확률은 $\frac{30}{120}=\frac{1}{4}$

0293 답 ④

12개의 점 중에서 2개를 택하여 선분을 만드는 모든 경우의 수는 ${}_{12}C_2=66$

2개의 점을 이어 만든 선분의 길이가 유리수인 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) 가로 방향의 한 행 위의 점 중에서 2개를 택하는 경우

가로 방향의 3개의 행 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

한 행 위의 4개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

즉, 이때의 경우의 수는 $3\times6=18$

(ii) 세로 방향의 한 열 위의 점 중에서 2개를 택하는 경우

세로 방향의 4개의 열 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

한 열 위의 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2={}_3C_1=3$

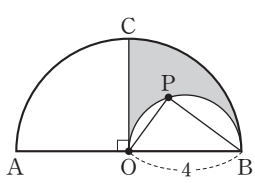
즉, 이때의 경우의 수는 $4\times3=12$

(i), (ii)에서 선분의 길이가 유리수인 경우의 수는 $18+12=30$

따라서 구하는 확률은 $\frac{30}{66}=\frac{5}{11}$

0294 답 ⑤

그림에서 $\angle BOC=90^\circ$인 점 C를 잡을 때, 삼각형 POB가 직각삼각형이려면 점 P가 선분 OB를 지름으로 하는 반원 위에 있거나 선분 OC 위에 있어야 한다.



즉, 삼각형 POB가 예각삼각형이려면 점 P는 색칠한 영역(경계선 제외)에 있어야 한다.

이때 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 넓이는

$\frac{1}{2}\pi\times4^2=8\pi$

색칠한 영역의 넓이는

$\frac{1}{4}\pi\times4^2-\frac{1}{2}\pi\times2^2=4\pi-2\pi=2\pi$

따라서 구하는 확률은 $\frac{2\pi}{8\pi}=\frac{1}{4}$

0295 답 ②

8개의 꼭짓점 중에서 3개를 택하는 모든 경우의 수는 ${}_8C_3=56$

직육면체의 꼭짓점 중에서 서로 같은 모서리 위에 있지 않은 점끼리 묶으면 (A, C, F, H), (B, D, E, G)

이때 각각의 묶음에서 3개의 점을 택하면 어느 두 점도 같은 모서리 위에 있지 않다.

(i) 네 점 A, C, F, H 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

(ii) 네 점 B, D, E, G 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

(i), (ii)에서 어느 두 점도 같은 모서리 위에 있지 않도록 3개의 점을 택하는 경우의 수는 $4+4=8$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{56}=\frac{1}{7}$

0296 답 ②

9개의 점 중에서 3개를 택하여 삼각형을 만드는 경우는

직선 l 위의 점 2개, 직선 m 위의 점 1개를 택하거나

직선 l 위의 점 1개, 직선 m 위의 점 2개를 택할 때이다.

즉, 만들 수 있는 모든 삼각형의 개수는

${}_5C_2\times{}_4C_1+{}_5C_1\times{}_4C_2=10\times4+5\times6=70$

이때 두 직선 l, m 사이의 거리가 4이므로 삼각형의 높이는 4이고, 밑변의 길이를 a(a는 자연수)라 하면 삼각형의 넓이가 2 이상 3 이하이므로

$2\le\frac{1}{2}\times a\times4\le3,\ 1\le a\le\frac{3}{2}$ $\therefore a=1$ ($\because$ a는 자연수)

즉, 삼각형의 밑변을 이루는 두 점은 한 직선 위의 이웃한 점이어야 한다.

(i) 삼각형의 밑변이 직선 l 위에 있는 경우

직선 l 위의 5개의 점 중에서 이웃한 두 점을 택하는 경우의 수는 4이고, 직선 m 위의 4개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1$이므로 이때의 경우의 수는

$4\times{}_4C_1=4\times4=16$

(ii) 삼각형의 밑변이 직선 m 위에 있는 경우

직선 m 위의 4개의 점 중에서 이웃한 두 점을 택하는 경우의 수는 3이고, 직선 l 위의 5개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_1$이므로 이때의 경우의 수는

$3\times{}_5C_1=3\times5=15$

(i), (ii)에서 삼각형의 넓이가 2 이상 3 이하인 경우의 수는

$16+15=31$

따라서 구하는 확률은 $\frac{31}{70}$

0297 답 ①

집합 A의 부분집합의 개수는 $2^5=32$

집합 A의 부분집합 중에서 원소 1, 2를 모두 포함하는 부분집합의 개수는 $2^{5-2}=2^3=8$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$

0298 답 ②

X에서 X로의 함수 f의 개수는 ${}_3\Pi_3=3^3=27$

X에서 X로의 일대일함수의 개수는 ${}_3P_3=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$

0299 답 ③

X에서 X로의 함수 f의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$

$f(1)=f(2)$이므로 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

$f(3)\neq f(4)$이므로 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

즉, $f(1)=f(2)$, $f(3)\neq f(4)$를 만족시키는 함수의 개수는 $4\times12=48$

따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{256}=\frac{3}{16}$

0300 답 $\frac{1}{5}$

X에서 Y로의 함수 f의 개수는 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

$f(a)+f(b)=6$을 만족시키는 순서쌍 $(f(a), f(b))$는 $(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$의 5가지

이때 $f(c)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

즉, $f(a)+f(b)=6$을 만족시키는 함수의 개수는 $5\times5=25$

따라서 구하는 확률은 $\frac{25}{125}=\frac{1}{5}$

0301 답 3

X에서 X로의 함수 f의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$

이때 $3+7+7=17$, $5+5+7=17$이므로 (나)를 만족시키는 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 3, 7, 7 또는 5, 5, 7을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같다.

(i) 3, 7, 7을 일렬로 나열하여 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

(가)에서 치역의 원소의 개수가 2이려면 치역은 $\{3, 7\}$이어야 하므로 $f(7)$의 값을 정하는 경우의 수는 2

즉, 이때의 함수 f의 개수는 $3\times2=6$

(ii) 5, 5, 7을 일렬로 나열하여 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

(가)에서 치역의 원소의 개수가 2이려면 치역은 $\{5, 7\}$이어야 하므로 $f(7)$의 값을 정하는 경우의 수는 2

즉, 이때의 함수 f의 개수는 $3\times2=6$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 함수의 개수는 $6+6=12$

따라서 $p=\frac{12}{256}=\frac{3}{64}$이므로 $64p=64\times\frac{3}{64}=3$

0302 답 ⑤

X에서 Y로의 함수 f의 개수는

${}_5\Pi_4=5^4=625$

$f(1)\times f(2)\times f(3)\neq0$이므로 $f(1)\neq0$, $f(2)\neq0$, $f(3)\neq0$이고, $f(1)\neq f(3)$이다.

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$

$f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y의 원소 중 0과 $f(1)$의 값을 제외한 나머지 3개의 원소에서 1개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1=3$

$f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$

즉, 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$16\times3\times5=240$

따라서 구하는 확률은 $\frac{240}{625}=\frac{48}{125}$

0303 답 ④

집합 X에서 Y로의 모든 일대일함수 f의 개수는

${}_7P_4=840$

(가)에서 $f(2)=2$이므로 (나)를 만족시키려면 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$ 중 짝수의 개수가 1 이상이어야 한다.

$f(1)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 모든 경우의 수는 집합 Y의 원소 중 2를 제외한 6개의 원소에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_6P_3=120$

그중에서 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 모두 홀수인 경우의 수는 1, 3, 5, 7의 4개의 홀수에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_4P_3=24$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는 $120-24=96$

따라서 구하는 확률은 $\frac{96}{840}=\frac{4}{35}$

0304 답 64

12개의 원소 중에서 3개를 택하는 모든 경우의 수는

${}_{12}C_3=220$ …… ⓘ

2^k을 5로 나누었을 때의 나머지가 1, 2, 3, 4인 수의 집합을 각각 A_1, A_2, A_3, A_4라 하면

$A_1=\{2^4, 2^8, 2^{12}\}$, $A_2=\{2, 2^5, 2^9\}$,

$A_3=\{2^3, 2^7, 2^{11}\}$, $A_4=\{2^2, 2^6, 2^{10}\}$

이때 택한 세 원소의 합이 5의 배수이려면 세 원소를 5로 나누었을 때의 나머지의 합이 5 또는 10이어야 한다.

(i) 나머지의 합이 5일 때

ⓐ 집합 A_1에서 1개, 집합 A_2에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_3C_2={}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$

ⓑ 집합 A_1에서 2개, 집합 A_3에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_3C_1={}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$

즉, 이때의 경우의 수는 $9+9=18$

(ii) 나머지의 합이 10일 때

ⓐ 집합 A_2에서 1개, 집합 A_4에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_3C_2={}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$

ⓑ 집합 A_3에서 2개, 집합 A_4에서 1개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_3C_1={}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$

즉, 이때의 경우의 수는 $9+9=18$

(i), (ii)에서 택한 세 원소의 합이 5의 배수인 경우의 수는

$18+18=36$ …… ii

즉, 택한 세 원소의 합이 5의 배수일 확률은 $\frac{36}{220}=\frac{9}{55}$ …… iii

따라서 $p=55$, $q=9$이므로

$p+q=55+9=64$ …… iv

채점 기준	
i 모든 경우의 수 구하기	20 %
ii 택한 세 원소의 합이 5의 배수인 경우의 수 구하기	50 %
iii 택한 세 원소의 합이 5의 배수일 확률 구하기	20 %
iv $p+q$의 값 구하기	10 %

0305 답 ①

집합 $\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$의 원소의 개수가 4인 부분집합의 개수는 ${}_{10}C_4=210$

1부터 10까지의 자연수 중에서 3으로 나눈 나머지가 0, 1, 2인 수의 집합을 각각 A_0, A_1, A_2라 하면

$A_0=\{3, 6, 9\}$, $A_1=\{1, 4, 7, 10\}$, $A_2=\{2, 5, 8\}$

이때 세 원소의 합이 3의 배수인 경우는 세 집합 A_1, A_2, A_3 중 어느 한 집합의 세 원소를 더하거나 세 집합에서 1개씩 원소를 더하는 경우이다. 즉, 세 원소의 합이 항상 3의 배수가 아니려면 집합 X는 세 집합 A_0, A_1, A_2 중 두 집합에서 각각 2개의 원소를 택하여 이 네 수를 원소로 해야 한다.

(i) 두 집합 A_0, A_1에서 각각 2개의 원소를 택하는 경우

집합 X의 개수는

${}_3C_2\times{}_4C_2={}_3C_1\times{}_4C_2=3\times6=18$

(ii) 두 집합 A_0, A_2에서 각각 2개의 원소를 택하는 경우

집합 X의 개수는

${}_3C_2\times{}_3C_2={}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$

(iii) 두 집합 A_1, A_2에서 각각 2개의 원소를 택하는 경우

집합 X의 개수는

${}_4C_2\times{}_3C_2={}_4C_2\times{}_3C_1=6\times3=18$

(i), (ii), (iii)에서 집합 X의 서로 다른 세 원소의 합이 항상 3의 배수가 아닌 경우의 수는

$18+9+18=45$

따라서 구하는 확률은 $\frac{45}{210}=\frac{3}{14}$

0306 답 ⑤

집합 S의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는 $2^4-1=15$이고, 이 중에서 서로 다른 두 부분집합 A, B를 택하는 모든 경우의 수는

${}_{15}P_2=210$

(나)에서 $n(B)=3$이므로 집합 S의 원소 중에서 집합 B의 원소 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

(가)에서 $A\subset B$이고 $A\neq\varnothing$, $A\neq B$이므로 집합 A의 개수는

$2^3-1-1=6$

즉, $A\subset B$, $n(B)=3$을 만족시키도록 두 집합 A, B를 택하는 경우의 수는 $4\times6=24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{210}=\frac{4}{35}$

0307 답 ②

2학년 학생 186명 중에서 남학생의 수는 $186-86=100$

따라서 구하는 확률은 $\frac{100}{186}=\frac{50}{93}$

0308 답 ③

5명의 학생을 일렬로 세우는 모든 경우의 수는 $5!=120$

왼쪽에서 세 번째에 서는 학생이 자신과 이웃한 2명보다 키가 큰 경우의 수는 5명의 학생 중 3명을 택하여 그 중 키가 가장 큰 학생을 왼쪽에서 세 번째 자리에 배열하고, 나머지 2명을 양옆에 배열하는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_3\times2!={}_5C_2\times2!=10\times2=20$

나머지 2명의 학생을 남은 자리에 배열하는 경우의 수는 $2!=2$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는 $20\times2=40$

따라서 구하는 확률은 $\frac{40}{120}=\frac{1}{3}$

0309 답 ③

4명의 학생에게 서로 다른 볼펜 6자루를 나누어 주는 모든 경우의 수는 ${}_4\Pi_6=4^6$

볼펜 6자루 중에서 2자루를 택하여 A와 B에게 먼저 1자루씩 나누어 주는 경우의 수는 ${}_6P_2=30$

나머지 볼펜 4자루를 C와 D에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_2\Pi_4=2^4=16$

즉, A와 B가 각각 볼펜 1자루만 받는 경우의 수는 $30\times16=480$

따라서 구하는 확률은 $\frac{480}{4^6}=\frac{15}{128}$

0310 답 ①

7명의 학생이 일렬로 서는 모든 경우의 수는 $7!=5040$

여학생과 남학생이 교대로 서려면

남−여−남−여−남−여−남

의 순서로 서야 한다.

남학생 4명이 일렬로 서는 경우의 수는 $4!=24$

남학생 4명의 사이사이에 여학생 3명이 서는 경우의 수는 $3!=6$

즉, 남학생과 여학생이 교대로 서는 경우의 수는 $24\times6=144$

따라서 구하는 확률은 $\frac{144}{5040}=\frac{1}{35}$

0311 답 ⑤

12개의 자리에 5명의 학생이 앉는 모든 경우의 수는 ${}_{12}\mathrm{P}_5$

어느 누구도 서로 이웃하지 않게 앉으려면 학생이 앉지 않는 7개의 빈자리를 나열하고 그 사이사이와 양 끝의 8개의 자리에 5명의 학생이 앉으면 되므로 그 경우의 수는 ${}_8\mathrm{P}_5$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{{}_8\mathrm{P}_5}{{}_{12}\mathrm{P}_5}=\frac{8\times7\times6\times5\times4}{12\times11\times10\times9\times8}=\frac{7}{99}$$

0312 답 ④

5명의 학생이 가위바위보를 한 번 할 때, 나오는 모든 경우의 수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$

이기는 사람 3명을 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

각각의 경우에 대하여 이기는 경우는

(가위, 가위, 가위, 보, 보), (바위, 바위, 바위, 가위, 가위),

(보, 보, 보, 바위, 바위)의 3가지

즉, 3명만 이기는 경우의 수는 $10\times3=30$

따라서 구하는 확률은 $\frac{30}{243}=\frac{10}{81}$

0313 답 ④

A반 학생 3명과 B반 학생 4명 중 5명을 뽑아 5일 동안의 청소 순서를 정하는 경우의 수는

${}_7\mathrm{P}_5=2520$

첫째 날에 청소할 B반 학생 1명을 택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1=4$

마지막 날에 청소할 A반 학생 1명을 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1=3$

남은 5명의 학생 중에서 나머지 3일 동안 청소할 학생 3명을 택하여 청소 순서를 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3=60$

즉, 첫째 날에 B반 학생이 청소하고 마지막 날에 A반 학생이 청소하는 경우의 수는

$4\times3\times60=720$

따라서 구하는 확률은 $\frac{720}{2520}=\frac{2}{7}$

0314 답 ②

음료수를 주문하는 모든 경우의 수는 ${}_6\Pi_3=6^3=216$

같은 음료수를 주문할 두 사람을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

6종류의 음료수 중에서 2명, 1명이 주문할 음료수 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{P}_2=30$

즉, 두 사람만 같은 음료수를 주문하는 경우의 수는

$3\times30=90$

따라서 구하는 확률은 $\frac{90}{216}=\frac{5}{12}$

0315 답 ②

7명이 차례대로 공연 순서를 정하는 모든 경우의 수는 $7!=5040$

남자 가수 4명 중에서 마지막에 공연할 남자 가수 1명을 정하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1=4$

마지막에 공연할 남자 가수 1명을 제외한 3명의 남자 가수의 순서를 정하는 경우의 수는 $3!=6$

여자 가수 3명 중에서 서로 이웃하여 공연할 2명을 택하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

3명의 남자 가수의 사이사이와 양 끝의 4개의 위치에 서로 이웃하여 공연할 여자 가수 2명과 나머지 여자 가수 1명을 나열하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2=12$

이웃하여 공연할 여자 가수 2명의 순서를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

즉, 여자 가수 3명 중 2명만 서로 이웃하고 남자 가수가 맨 마지막에 공연하도록 순서를 정하는 경우의 수는

$4\times6\times3\times12\times2=1728$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1728}{5040}=\frac{12}{35}$

0316 답 ④

남학생의 수를 n이라 하면 여학생의 수는 $320-n$이므로 수학동아리에 가입한 남학생의 수는 $0.6n$이고, 여학생의 수는 $160-0.5n$이다.

즉, 수학동아리에 가입한 전체 학생 수는

$0.6n+(160-0.5n)=0.1n+160$

이므로 $p_1=\frac{0.6n}{0.1n+160}$, $p_2=\frac{160-0.5n}{0.1n+160}$

이때 $p_1=2p_2$에서

$$\frac{0.6n}{0.1n+160}=2\times\frac{160-0.5n}{0.1n+160}$$

$0.6n=320-n$, $1.6n=320$ $\therefore n=200$

따라서 남학생은 200명이다.

0317 답 4

10명 중에서 대표 3명을 뽑는 모든 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_3=120$ …… ⓘ

1학년 학생 수를 x라 하면 2학년 학생 수는 $10-x$이므로

대표 3명 모두 같은 학년 학생이 뽑히는 경우의 수는

$${}_x\mathrm{C}_3+{}_{10-x}\mathrm{C}_3=\frac{x(x-1)(x-2)}{6}+\frac{(10-x)(9-x)(8-x)}{6}$$

$$=\frac{1}{6}(24x^2-240x+720)$$

$$=4x^2-40x+120$$ …… ⓘⓘ

즉, 그 확률이 $\frac{3}{10}$이므로

$$\frac{4x^2-40x+120}{120}=\frac{3}{10},\ x^2-10x+21=0$$

$(x-3)(x-7)=0$ $\therefore x=3$ 또는 $x=7$ …… ⓘⓘⓘ

따라서 1학년 학생 수와 2학년 학생 수는 각각 3, 7 또는 7, 3이므로 두 학년의 학생 수의 차는

$|7-3|=4$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ 모든 경우의 수 구하기	20 %
ⓘⓘ 1학년 학생 수를 x로 놓고, 대표 3명 모두 같은 학년이 뽑히는 경우의 수를 x에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘⓘ x의 값 구하기	20 %
ⓘⓥ 1학년 학생 수와 2학년 학생 수의 차 구하기	20 %

0318 답 ④

8명의 학생 중에서 5명을 선택하는 모든 경우의 수는

${}_8C_5={}_8C_3=56$

(i) 1학년 학생이 1명, 2학년 학생이 1명인 경우

1학년 학생 3명 중에서 1명, 2학년 학생 2명 중에서 1명, 3학년 학생 3명 중에서 3명을 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_3C_3=3\times2\times1=6$

(ii) 1학년 학생이 2명, 2학년 학생이 2명인 경우

1학년 학생 3명 중에서 2명, 2학년 학생 2명 중에서 2명, 3학년 학생 3명 중에서 1명을 선택하는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_2C_2\times{}_3C_1={}_3C_1\times{}_2C_2\times{}_3C_1=3\times1\times3=9$

(i), (ii)에서 선택된 1학년 학생 수와 2학년 학생 수가 서로 같은 경우의 수는

$6+9=15$

따라서 구하는 확률은 $\frac{15}{56}$

0319 답 ①

6명의 면접자가 6개의 자리에 앉는 모든 경우의 수는

$6!=720$

1번 면접자와 3번 면접자가 서로 이웃하여 앉으므로 1번 면접자와 3번 면접자를 한 사람 A로 생각하자.

이때 A와 2번 면접자는 순서가 정해져 있으므로 A와 2번 면접자를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, X, 4, 5, 6을 일렬로 배열한 후 첫 번째 X를 A로, 두 번째 X를 2로 바꾸면 된다.

X, X, 4, 5, 6을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

1번 면접자와 3번 면접자가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

즉, 조건을 만족시키는 경우의 수는 $60\times2=120$

따라서 구하는 확률은 $\frac{120}{720}=\frac{1}{6}$

0320 답 ③

학생 5명을 A, B, C, D, E라 하자.

5명에게 이름표를 나누어 주는 모든 경우의 수는

$5!=120$

5명 중 자신의 이름표를 받는 사람 한 명을 선택하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

E가 자신의 이름표를 받았을 때, A가 B의 이름표를 받고 B, C, D가 다른 사람의 이름표를 받는 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

학생	A	B	C	D
학생이 받은 이름표의 이름	B	A	D	C
	B	C	D	A
	B	D	A	C

같은 방법으로 A가 C 또는 D의 이름표를 받고 B, C, D가 다른 사람의 이름표를 받는 경우의 수도 각각 3이므로 E가 자신의 이름표를 받았을 때, A, B, C, D가 다른 사람의 이름표를 받는 경우의 수는

$3\times3=9$

즉, 5명 중 한 명만 자신의 이름표를 받는 경우의 수는

$5\times9=45$

따라서 구하는 확률은 $\frac{45}{120}=\frac{3}{8}$

0321 답 ②

8명이 좌석에 앉는 모든 경우의 수는 $8!$

같은 반의 학생끼리의 좌석 번호의 차가 1 또는 10인 경우는 다음과 같이 나눈다.

(i) 각 반의 학생의 좌석 번호의 차가 모두 1인 경우

(1과 2), (11과 12), (21과 22), (31과 32)의 1가지

(ii) 각 반의 학생의 좌석 번호의 차가 모두 10인 경우

(1과 11), (2와 12), (21과 31), (22와 32)의 1가지

(iii) 2개 반의 학생의 좌석 번호의 차는 1이고, 2개 반의 학생의 좌석 번호의 차는 10인 경우

(1과 2), (11과 12), (21과 31), (22와 32) 또는

(1과 11), (2와 12), (21과 22), (31과 32) 또는

(1과 2), (11과 21), (12와 22), (31과 32)의 3가지

(i), (ii), (iii)에서 좌석을 4개의 구역으로 나누는 경우의 수는

$1+1+3=5$

위의 4개의 구역에 4개의 반 A, B, C, D의 학생이 앉는 경우의 수는

$4!=24$

이때 같은 반의 학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 각 구역마다 2가지이므로 2^4

즉, 같은 반의 학생끼리는 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되도록 앉는 경우의 수는

$5\times24\times2^4$

따라서 구하는 확률은 $\frac{5\times24\times2^4}{8!}=\frac{1}{21}$

최고수준 도전 기출 74~75쪽

0322 답 51

전략 꺼낸 공이 서로 다른 색인 경우와 서로 같은 색인 경우로 나누어 시행 후에 얻은 점수가 24 이하의 짝수가 되는 경우의 수를 구한다.

8개의 공 중에서 2개를 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_8C_2=28$

(i) 꺼낸 2개의 공이 서로 다른 색인 경우

꺼낸 공이 서로 다른 색이면 12를 점수로 얻으므로 24 이하의 짝수이다.

즉, 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_4C_1=4\times4=16$

(ii) 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색인 경우

ⓐ 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공인 경우

2개의 흰 공에 적힌 수의 곱이 24 이하의 짝수인 경우는

(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)의 5가지

ⓑ 꺼낸 2개의 공이 모두 검은 공인 경우
2개의 검은 공에 적힌 수의 곱이 24 이하의 짝수인 경우는
(4, 5), (4, 6)의 2가지
즉, 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색이고 얻은 점수가 24 이하의 짝수인 경우의 수는
5+2=7
(i), (ii)에서 얻은 점수가 24 이하의 짝수인 경우의 수는
16+7=23
즉, 얻은 점수가 24 이하의 짝수일 확률은 $\frac{23}{28}$
따라서 $p=28$, $q=23$이므로
$p+q=28+23=51$

0323 답 ②

전략 A열의 좌석에 1학년, 2학년, 3학년이 각각 이웃하여 앉는 경우로 나누어 확률을 구한다. 이때 3학년 학생 3명이 모두 함께 B열에 앉으면 이웃하는 학생이 생길 수밖에 없음에 유의한다.

7명의 학생이 7개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉는 모든 경우의 수는 7!
A열의 좌석에 각 학년 학생들이 이웃하여 앉는 경우로 나누어 생각한다.
(i) A열의 좌석에 1학년 학생 2명이 이웃하여 앉는 경우
㈏에 의하여 3학년 학생 3명이 모두 B열의 좌석에 앉을 수 없으므로 3학년 학생 중 1명은 반드시 A열의 좌석에 앉아야 한다.
A열의 좌석에 1학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우의 수는
$2\times2!=4$
A열의 남은 한 좌석에 앉을 3학년 학생 1명을 정하는 경우의 수는
${}_3C_1=3$
즉, A열의 3개의 좌석에 학생들이 앉는 경우의 수는
$4\times3=12$ …… ㉠
이때 B열에는 2학년 학생 2명과 3학년 학생 2명이 앉아야 한다.
2학년 학생들이 앉는 자리를 △, 3학년 학생들이 앉는 자리를 □라 하면 같은 학년의 학생끼리 이웃하지 않아야 하므로 그 경우는
△□△□, □△□△의 2가지
이 각각에 대하여 2개 학년의 학생 두 명씩 총 4명의 학생이 앉는 경우의 수는
$2!\times2!=4$
즉, B열의 4개의 좌석에 학생들이 앉는 경우의 수는
$2\times4=8$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 A열의 좌석에 1학년 학생들이 이웃하여 앉는 경우의 수는
$12\times8=96$
(ii) A열의 좌석에 2학년 학생 2명이 이웃하여 앉는 경우
(i)과 같은 방법으로 하면 A열의 좌석에 2학년 학생들이 이웃하여 앉는 경우의 수는 96
(iii) A열의 좌석에 3학년 학생 2명이 이웃하여 앉는 경우
ⓐ A열의 좌석에 1학년 학생이 앉는 경우
A열의 좌석에 앉을 3학년 학생 2명을 선택하는 경우의 수는
${}_3C_2={}_3C_1=3$
선택된 3학년 학생 2명이 A열의 두 좌석에 이웃하여 앉는 경우의 수는 $2\times2!=4$
A열의 남은 한 좌석에 앉을 1학년 학생 한 명을 정하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$
즉, A열의 3개의 좌석에 학생들이 앉는 경우의 수는
$3\times4\times2=24$ …… ㉢
이때 B열에는 1학년 학생 1명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 1명이 앉아야 한다.
4명의 학생이 B열의 4개의 좌석에 조건과 상관없이 앉는 경우의 수는 $4!=24$
B열의 4개의 좌석에 2학년 학생 2명이 이웃하여 앉는 경우의 수는 $3!\times2!=12$
즉, B열의 4개의 좌석에 학생들이 앉는 경우의 수는
$24-12=12$ …… ㉣
㉢, ㉣에서 이때의 경우의 수는
$24\times12=288$
ⓑ A열의 좌석에 2학년 학생이 앉는 경우
ⓐ와 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 288
ⓐ, ⓑ에서 A열의 좌석에 3학년 학생들이 이웃하여 앉는 경우의 수는
288+288=576
(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는
96+96+576=768
따라서 구하는 확률은 $\frac{768}{7!}=\frac{16}{105}$

0324 답 ②

전략 원과 직선의 교점이 존재하지 않으려면 원의 중심과 직선 사이의 거리가 반지름의 길이보다 길어야 함을 이용하여 b의 값에 따른 순서쌍 (a, c)의 개수를 구한다.

서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6\times6\times6=216$
원 $(x-a)^2+(y-c)^2=2b^2$과 직선 $y=-x$의 교점이 존재하지 않으려면 원의 중심 (a, c)와 직선 $y=-x$, 즉 $x+y=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 $\sqrt{2}b$보다 길어야 하므로
$\frac{|a+c|}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}b$, $|a+c|>2b$
$\therefore a+c>2b$ ($\because a>0, c>0$)
(i) $b=1$, 즉 $a+c>2$일 때
a, c의 값이 될 수 있는 것은 각각 1, 2, 3, …, 6의 6가지이므로
$6\times6=36$
$a+c\le2$를 만족시키는 순서쌍 (a, c)는 (1, 1)의 1가지
즉, 이때의 경우의 수는
$36-1=35$

(ii) $b=2$, 즉 $a+c>4$일 때

a, c의 값이 될 수 있는 것은 각각 1, 2, 3, …, 6의 6가지이므로

$6\times6=36$

이때 $a+c\le4$를 만족시키는 순서쌍 (a, c)는

$a=1$일 때, $c=1$, 2, 3의 3가지

$a=2$일 때, $c=1$, 2의 2가지

$a=3$일 때, $c=1$의 1가지

즉, 이때의 경우의 수는

$36-(3+2+1)=30$

(iii) $b=3$, 즉 $a+c>6$일 때

a, c의 값이 될 수 있는 것은 각각 1, 2, 3, …, 6의 6가지이므로

$6\times6=36$

이때 $a+c\le6$을 만족시키는 순서쌍 (a, c)는

$a=1$일 때, $c=1$, 2, 3, 4, 5의 5가지

$a=2$일 때, $c=1$, 2, 3, 4의 4가지

$a=3$일 때, $c=1$, 2, 3의 3가지

$a=4$일 때, $c=1$, 2의 2가지

$a=5$일 때, $c=1$의 1가지

즉, 이때의 경우의 수는

$36-(5+4+3+2+1)=21$

(iv) $b=4$, 즉 $a+c>8$일 때

$a+c>8$을 만족시키는 순서쌍 (a, c)는

$a=3$일 때, $c=6$의 1가지

$a=4$일 때, $c=5$, 6의 2가지

$a=5$일 때, $c=4$, 5, 6의 3가지

$a=6$일 때, $c=3$, 4, 5, 6의 4가지

즉, 이때의 경우의 수는

$1+2+3+4=10$

(v) $b=5$, 즉 $a+c>10$일 때

$a+c>10$을 만족시키는 순서쌍 (a, c)는

$a=5$일 때, $c=6$의 1가지

$a=6$일 때, $c=5$, 6의 2가지

즉, 이때의 경우의 수는

$1+2=3$

(vi) $b=6$, 즉 $a+c>12$일 때

$a+c>12$를 만족시키는 순서쌍 (a, c)는 존재하지 않는다.

(i)~(vi)에서 원과 직선의 교점이 존재하지 않는 경우의 수는

$35+30+21+10+3=99$

따라서 구하는 확률은 $\frac{99}{216}=\frac{11}{24}$

0325 답 ②

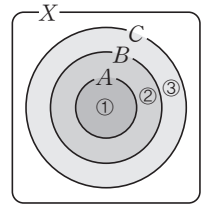
전략 $A\subset B\subset C$이려면 $A\neq\varnothing$, $B-A\neq\varnothing$, $C-B\neq\varnothing$이어야 함을 알고, 벤 다이어그램을 이용하여 세 집합 A, $B-A$, $C-B$의 원소의 개수에 따라 경우를 나누어 부분집합의 개수를 구한다.

공집합이 아닌 모든 부분집합 15개 중에서 서로 다른 세 부분집합을 뽑아 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는

${}_{15}P_3=2730$

A, B, C는 공집합이 아닌 서로 다른 집합이므로 $A\subset B\subset C$이려면 $A\neq\varnothing$, $B-A\neq\varnothing$, $C-B\neq\varnothing$이어야 한다.

그림과 같이 A, $B-A$, $C-B$를 각각 ①, ②, ③이라 하고 각 부분의 원소의 개수에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.



(i) 원소가 ①에 1개, ②에 1개, ③에 1개 있는 경우

1, 2, 3, 4 중에서 3개를 뽑아 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4P_3=24$

(ii) 원소가 ①에 1개, ②에 1개, ③에 2개 있는 경우

1, 2, 3, 4 중에서 ③에 들어갈 원소 2개를 뽑는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

나머지 2개의 원소를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$2!=2$

즉, 이때의 경우의 수는 $6\times2=12$

(iii) 원소가 ①에 1개, ②에 2개, ③에 1개 있는 경우

(ii)와 같은 방법으로 하면 이때의 경우의 수는 12

(iv) 원소가 ①에 2개, ②에 1개, ③에 1개 있는 경우

(ii)와 같은 방법으로 하면 이때의 경우의 수는 12

(i)~(iv)에서 $A\subset B\subset C$인 경우의 수는

$24+12+12+12=60$

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{2730}=\frac{2}{91}$

0326 답 ②

전략 ○, □의 모양이 4번 바뀌려면 ○끼리, □끼리 각각 묶어서 총 5개의 구역을 만들어 교대로 나오게 하면 된다.

6개의 ○와 4개의 □를 일렬로 배열하는 모든 경우의 수는

$\frac{10!}{6!\times4!}=210$

○, □의 모양이 4번 바뀌는 경우를 맨 앞에 오는 모양에 따라 나누어 생각하면 다음과 같다.

(i) 맨 앞에 ○가 오는 경우

3개의 ○와 2개의 □를 ○□○□○와 같이 배열한 후, ○가 있는 세 구역에 나머지 3개의 ○를 추가로 배열하고, □가 있는 두 구역에 나머지 2개의 □를 추가로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_3H_3\times{}_2H_2={}_5C_3\times{}_3C_2={}_5C_2\times{}_3C_1=10\times3=30$

(ii) 맨 앞에 □가 오는 경우

2개의 ○와 3개의 □를 □○□○□와 같이 배열한 후, ○가 있는 두 구역에 나머지 4개의 ○를 추가로 배열하고, □가 있는 세 구역에 나머지 1개의 □를 추가로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_2H_4\times{}_3H_1={}_5C_4\times{}_3C_1={}_5C_1\times3=5\times3=15$

(i), (ii)에서 ○, □의 모양이 4번 바뀌는 경우의 수는

$30+15=45$

따라서 구하는 확률은 $\frac{45}{210}=\frac{3}{14}$

05 확률의 덧셈정리

난이도별 필수 기출 77~87쪽

0327 답 ④

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$\frac{7}{15}=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-P(A\cap B)$ $\therefore P(A\cap B)=\frac{4}{15}$

0328 답 ②

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$\frac{5}{9}=P(A)+\frac{1}{3}$ $\therefore P(A)=\frac{2}{9}$

0329 답 ④

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

이고, 두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$\frac{5}{6}=\frac{1}{2}+P(B)$ $\therefore P(B)=\frac{1}{3}$

0330 답 ①

ㄱ. $P(A^C)=1-P(A)$이므로 $2P(A)=P(A^C)$에서

$2P(A)=1-P(A)$, $3P(A)=1$

$\therefore P(A)=\frac{1}{3}$

ㄴ. [반례] $S=\{1, 2, 3, 4\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{3, 4\}$이면

$P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$이지만 $A\neq B$이다.

ㄷ. [반례] $S=\{1, 2, 3, 4\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$이면

$P(A)+P(B)=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=1$이지만 $A\neq B^C$이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

0331 답 ①

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$1=\frac{1}{4}+P(B)-\frac{1}{8}$ $\therefore P(B)=\frac{7}{8}$

$\therefore P(B^C)=1-P(B)=1-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$

0332 답 ④

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$P(A\cup B)=4\times P(A\cap B)-P(A\cap B)$

$=3\times P(A\cap B)$

따라서 $\frac{2}{3}=3\times P(A\cap B)$이므로

$P(A\cap B)=\frac{2}{9}$

0333 답 ⑤

$P(A)=\frac{4}{3}P(A\cap B)$, $P(B)=\frac{5}{3}P(A\cap B)$이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{4}{3}P(A\cap B)+\frac{5}{3}P(A\cap B)-P(A\cap B)$

$=2P(A\cap B)$

$\therefore \frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{P(A\cap B)}{2P(A\cap B)}=\frac{1}{2}$

0334 답 $\frac{11}{40}$

$P(A)-P(B)=\frac{1}{5}$에서

$P(A)=P(B)+\frac{1}{5}$ ····· ⓘ

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$\frac{3}{4}=P(B)+\frac{1}{5}+P(B)$

$2P(B)=\frac{11}{20}$ $\therefore P(B)=\frac{11}{40}$ ····· ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $P(A)$를 $P(B)$에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘ $P(B)$의 값 구하기	70 %

0335 답 ④

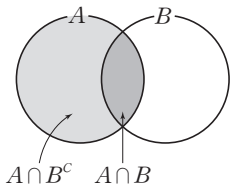
$P(A\cup B)=P(A^C\cap B)+P(A\cap B^C)+P(A\cap B)$에서

$\frac{3}{4}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+P(A\cap B)$ $\therefore P(A\cap B)=\frac{7}{20}$

0336 답 ③

$P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap B^C)$

$=\frac{5}{8}-\frac{1}{5}=\frac{17}{40}$

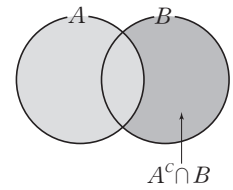


0337 답 ①

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(A^C\cap B)$

$=\frac{3}{5}+\frac{1}{6}=\frac{23}{30}$



0338 답 ④

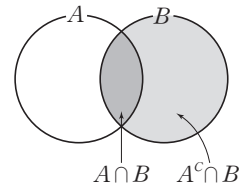
$P(A\cap B)=P(B)-P(A^C\cap B)$

$=\frac{1}{3}-\frac{2}{15}=\frac{1}{5}$

따라서 $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로

$P(A^C\cup B^C)=1-P(A\cap B)$

$=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$



0339 답 $\frac{7}{12}$

$A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$이므로

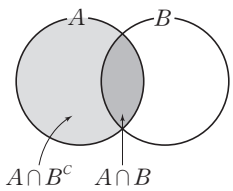
$\mathrm{P}(A \cap B) = 1 - \mathrm{P}(A^C \cup B^C) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ …… ⓘ

$\therefore \mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B^C) + \mathrm{P}(A \cap B)$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$ …… ⓘⓘ

$\therefore \mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A)$

$= 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ …… ⓘⓘⓘ



채점 기준	
ⓘ $\mathrm{P}(A \cap B)$의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ $\mathrm{P}(A)$의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $\mathrm{P}(A^C)$의 값 구하기	20 %

0340 답 ②

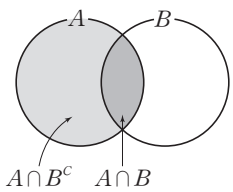
$\mathrm{P}(A \cap B^C) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$

$= \frac{5}{6} - \frac{1}{8} = \frac{17}{24}$

따라서 $A^C \cup B = (A \cap B^C)^C$이므로

$\mathrm{P}(A^C \cup B) = 1 - \mathrm{P}(A \cap B^C)$

$= 1 - \frac{17}{24} = \frac{7}{24}$



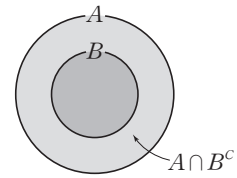
0341 답 ①

두 사건 A^C, B가 서로 배반사건이므로

$A^C \cap B = \varnothing$ $\therefore B \subset A$

$\therefore \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B^C)$

$= \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$



0342 답 ③

두 사건 A, B^C이 서로 배반사건이므로

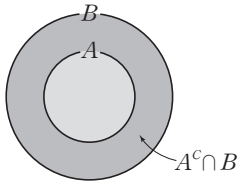
$A \cap B^C = \varnothing$ $\therefore A \subset B$

$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{7}{9}$에서

$\frac{1}{3} + \mathrm{P}(B) = \frac{7}{9}$ $\therefore \mathrm{P}(B) = \frac{4}{9}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C \cap B) = \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B) = \frac{4}{9} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$



0343 답 ①

두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $A \cap B = \varnothing$이므로

$A \cap B^C = A$, $A^C \cap B = B$

$\therefore \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A \cap B^C) + \mathrm{P}(A^C \cap B)$

$= \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{11}{12}$

따라서 $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$이므로

$\mathrm{P}(A^C \cap B^C) = 1 - \mathrm{P}(A \cup B) = 1 - \frac{11}{12} = \frac{1}{12}$

0344 답 ⑤

두 사건 A, B가 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$에서

$\frac{5}{6} = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B)$ $\therefore \mathrm{P}(A) = \frac{5}{6} - \mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{4} \le \mathrm{P}(A) \le \frac{1}{3}$에서

$\frac{1}{4} \le \frac{5}{6} - \mathrm{P}(B) \le \frac{1}{3}$ $\therefore \frac{1}{2} \le \mathrm{P}(B) \le \frac{7}{12}$

따라서 $\mathrm{P}(B)$의 최댓값은 $\frac{7}{12}$, 최솟값은 $\frac{1}{2}$이므로 그 곱은

$\frac{7}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{24}$

0345 답 ⑤

뽑은 카드에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 하면 $A \cap B$는 15의 배수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A) = \frac{10}{30}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{6}{30}$, $\mathrm{P}(A \cap B) = \frac{2}{30}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

$= \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{2}{30} = \frac{7}{15}$

0346 답 ①

7명 중에서 대표 2명을 뽑는 모든 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_2 = 21$

대표 2명이 모두 남자인 사건을 A, 모두 여자인 사건을 B라 하자.

남자 3명 중에서 대표 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2 = {}_3\mathrm{C}_1 = 3$

여자 4명 중에서 대표 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$

$\therefore \mathrm{P}(A) = \frac{3}{21}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{6}{21}$

따라서 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{3}{21} + \frac{6}{21} = \frac{3}{7}$

0347 답 ④

7명을 일렬로 세우는 모든 경우의 수는 $7!$

선생님을 맨 앞에 세우는 사건을 A, 맨 뒤에 세우는 사건을 B라 하자.

선생님을 맨 앞 또는 맨 뒤에 세우고, 학생 6명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $6!$

$\therefore \mathrm{P}(A) = \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{6!}{7!} = \frac{1}{7}$

따라서 A, B는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{2}{7}$

0348 답 $\frac{3}{10}$

임의로 택한 한 명이 A 음원 사이트에 가입한 학생인 사건을 A, B 음원 사이트에 가입한 학생인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A) = \frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A \cup B) = \frac{4}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B)$

$= \frac{3}{5} + \frac{1}{2} - \frac{4}{5} = \frac{3}{10}$

0349 답 ②

10개의 공 중에서 4개를 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_{10}C_4=210$

꺼낸 공 중에서 빨간 공이 3개인 사건을 A, 4개인 사건을 B라 하자.

(i) 꺼낸 공 중에서 빨간 공이 3개인 경우

빨간 공 6개 중에서 3개, 흰 공 4개 중에서 1개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_6C_3\times{}_4C_1=20\times4=80$

$\therefore P(A)=\frac{80}{210}$

(ii) 꺼낸 공 중에서 빨간 공이 4개인 경우

빨간 공 6개 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_6C_4={}_6C_2=15$

$\therefore P(B)=\frac{15}{210}$

따라서 A, B는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{80}{210}+\frac{15}{210}=\frac{19}{42}$

0350 답 ⑤

7장의 카드 중에서 2장을 뽑는 모든 경우의 수는 ${}_7C_2=21$

카드에 적힌 수의 합이 홀수인 사건을 A, 곱이 홀수인 사건을 B라 하자.

(i) 합이 홀수인 경우

홀수가 적힌 카드 1장, 짝수가 적힌 카드 1장을 뽑아야 하므로 그 경우의 수는 ${}_4C_1\times{}_3C_1=4\times3=12$

$\therefore P(A)=\frac{12}{21}$

(ii) 곱이 홀수인 경우

홀수가 적힌 카드 4장 중에서 2장을 뽑아야 하므로 그 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

$\therefore P(B)=\frac{6}{21}$

따라서 A, B는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{12}{21}+\frac{6}{21}=\frac{6}{7}$

0351 답 ③

두 자리의 자연수의 개수는 90

택한 수가 짝수인 사건을 A, 십의 자리의 수가 6의 약수인 사건을 B라 하자.

(i) 짝수인 경우

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지,

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, …, 9의 9가지이다.

즉, 그 경우의 수는 $5\times9=45$

$\therefore P(A)=\frac{45}{90}$

(ii) 십의 자리의 수가 6의 약수인 경우

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 6의 4가지,

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, …, 9의 10가지이다.

즉, 그 경우의 수는 $4\times10=40$

$\therefore P(B)=\frac{40}{90}$

(iii) 짝수이면서 십의 자리의 수가 6의 약수인 경우

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 6의 4가지,

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8의 5가지이다.

즉, 그 경우의 수는 $4\times5=20$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{20}{90}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{45}{90}+\frac{40}{90}-\frac{20}{90}=\frac{13}{18}$

0352 답 $\frac{9}{25}$

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지이고, 나머지 자리는 남은 5개의 숫자 중에서 3개를 택하여 나열하면 되므로 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$5\times{}_5P_3=300$

이때 네 자리의 자연수가 5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 5이어야 하므로 일의 자리의 숫자가 0인 사건을 A, 일의 자리의 숫자가 5인 사건을 B라 하자.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리에 1, 2, 3, 4, 5 중 3개를 나열하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_5P_3=60$

$\therefore P(A)=\frac{60}{300}$ …… ⓘ

(ii) 일의 자리의 숫자가 5인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지

백의 자리, 십의 자리에 남은 4개의 숫자 중 2개를 택하여 나열하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

즉, 일의 자리의 숫자가 5인 경우의 수는 $4\times12=48$

$\therefore P(B)=\frac{48}{300}$ …… ⓘⓘ

따라서 A, B는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{60}{300}+\frac{48}{300}=\frac{9}{25}$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 일의 자리의 숫자가 0일 확률 구하기	40 %
ⓘⓘ 일의 자리의 숫자가 5일 확률 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 5의 배수일 확률 구하기	20 %

0353 답 ③

다섯 개의 문자를 일렬로 배열하는 모든 경우의 수는

$5!=120$

A가 B보다 왼쪽에 있는 사건을 X, E가 C보다 오른쪽에 있는 사건을 Y라 하자.

(i) A가 B보다 왼쪽에 있는 경우

A, B를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, X, C, D, E를 일렬로 배열하는 경우와 같다.

배열한 후에 왼쪽에 있는 X는 A로 오른쪽에 있는 X는 B로 바꾼다.

즉, 그 경우의 수는 $\frac{5!}{2!}=60$

$\therefore P(X)=\frac{60}{120}$

(ii) E가 C보다 오른쪽에 있는 경우

C, E를 모두 Y로 바꾸어 생각하여 A, B, Y, D, Y를 일렬로 배열하는 경우와 같다.

즉, 그 경우의 수는 $\frac{5!}{2!}=60$

(배열한 후에 왼쪽에 있는 Y는 C로 오른쪽에 있는 Y는 E로 바꾼다.)

$\therefore \mathrm{P}(Y)=\frac{60}{120}$

(iii) A가 B보다 왼쪽에 있고, E가 C보다 오른쪽에 있는 경우

A, B를 모두 X로, C, E를 모두 Y로 바꾸어 생각하여 X, X, Y, D, Y를 일렬로 배열하는 경우와 같다.

즉, 그 경우의 수는 $\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

(배열한 후에 왼쪽에 있는 X는 A로, 오른쪽에 있는 X는 B로, 왼쪽에 있는 Y는 C로, 오른쪽에 있는 Y는 E로 바꾼다.)

$\therefore \mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{30}{120}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\cup Y)=\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)-\mathrm{P}(X\cap Y)$

$=\frac{60}{120}+\frac{60}{120}-\frac{30}{120}=\frac{3}{4}$

0354 답 ②

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times 6=36$

$|a-3|+|b-3|=2$인 사건을 A, $a=b$인 사건을 B라 하자.

(i) $|a-3|+|b-3|=2$인 경우

$|a-3|+|b-3|=2$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(3, 5)$, $(4, 2)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$의 8가지

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{8}{36}$

(ii) $a=b$인 경우

$a=b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$의 6가지

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{6}{36}$

(iii) $|a-3|+|b-3|=2$이고 $a=b$인 경우

(i)에서 $a=b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 2)$, $(4, 4)$의 2가지

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{36}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{8}{36}+\frac{6}{36}-\frac{2}{36}=\frac{1}{3}$

0355 답 $\frac{5}{6}$

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times 6=36$

$a\le b$인 사건을 A, $2a+b$가 홀수인 사건을 B라 하자.

(i) $a\le b$인 경우

1부터 6까지 6개의 수에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작거나 같은 수부터 순서대로 a, b로 정하면 되므로 그 경우의 수는

${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{21}{36}$

(ii) $2a+b$가 홀수인 경우

$2a+b$가 홀수이려면 $2a$는 항상 짝수이므로 b가 홀수이어야 한다.

즉, $b=1$, 3, 5의 3가지이고, 이 각각에 대하여 a의 값을 정하는 경우의 수는 6

즉, $2a+b$가 홀수인 경우의 수는 $3\times 6=18$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{18}{36}$

(iii) $a\le b$이고 $2a+b$가 홀수인 경우

(ii)에서 b의 값은 1, 3, 5이므로

$b=1$일 때, $a=1$의 1가지

$b=3$일 때, $a=1$, 2, 3의 3가지

$b=5$일 때, $a=1$, 2, 3, 4, 5의 5가지

즉, $a\le b$이고 $2a+b$가 홀수인 경우의 수는 $1+3+5=9$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{9}{36}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{21}{36}+\frac{18}{36}-\frac{9}{36}=\frac{5}{6}$

0356 답 ①

X에서 X로의 모든 함수 f의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$

$f(1)=f(3)$을 만족시키는 사건을 A, $f(2)=f(4)$를 만족시키는 사건을 B라 하자.

(i) $f(1)=f(3)$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 정의역의 원소 1, 2, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

$f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

즉, $f(1)=f(3)$인 함수의 개수는 $64\times 1=64$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{64}{256}$

(ii) $f(2)=f(4)$인 경우

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 정의역의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

$f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

즉, $f(2)=f(4)$인 함수의 개수는 $64\times 1=64$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{64}{256}$

(iii) $f(1)=f(3)$이고 $f(2)=f(4)$인 경우

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 공역의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 정의역의 원소 1, 2에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_2=4^2=16$

$f(3)$과 $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 $1\times 1=1$

즉, $f(1)=f(3)$이고 $f(2)=f(4)$인 함수의 개수는 $16\times 1=16$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{16}{256}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{64}{256}+\frac{64}{256}-\frac{16}{256}=\frac{7}{16}$$

0357 답 ⑤

서로 다른 두 개의 주사위를 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

a, b는 각각 1부터 6까지의 자연수이므로 두 수 a, b가 가질 수 있는 1보다 큰 공약수는 2, 3, 5이다.

두 수 a, b가 공약수 2를 갖는 사건을 A, 공약수 3을 갖는 사건을 B, 공약수 5를 갖는 사건을 C라 하자.

(i) 공약수 2를 갖는 경우

a, b 모두 짝수이어야 하므로 그 경우의 수는 $3\times3=9$

$\therefore P(A)=\frac{9}{36}$

(ii) 공약수 3을 갖는 경우

a, b 모두 3의 배수이어야 하므로 그 경우의 수는 $2\times2=4$

$\therefore P(B)=\frac{4}{36}$

(iii) 공약수 5를 갖는 경우

a, b 모두 5의 배수이어야 하므로 그 경우의 수는 1

$\therefore P(C)=\frac{1}{36}$

(iv) 공약수 2, 3을 모두 갖는 경우

a, b 모두 6의 배수이어야 하므로 그 경우의 수는 1

$\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{36}$

이때 A와 C, B와 C는 각각 서로 배반사건이므로 (i)~(iv)에서 구하는 확률은

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{9}{36}+\frac{4}{36}+\frac{1}{36}-\frac{1}{36}=\frac{13}{36}$$

0358 답 ②

10개의 공 중에서 2개를 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_{10}C_2=45$

꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색인 사건을 A, 꺼낸 2개의 공에 적힌 수가 서로 같은 사건을 B라 하자.

(i) 꺼낸 2개의 공이 서로 같은 색인 경우

흰 공 5개 중에서 2개를 꺼내거나 검은 공 5개 중에서 2개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는 ${}_5C_2+{}_5C_2=10+10=20$

$\therefore P(A)=\frac{20}{45}$

(ii) 꺼낸 2개의 공이 적힌 수가 같은 경우

흰 공에 적힌 수를 a, 검은 공에 적힌 수를 b라 할 때 $a=b$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$의 4가지

$\therefore P(B)=\frac{4}{45}$

따라서 A, B는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{20}{45}+\frac{4}{45}=\frac{8}{15}$$

0359 답 ④

만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수의 개수는 ${}_5\Pi_4=5^4=625$

택한 수가 5의 배수인 사건을 A, 3200 이상인 사건을 B라 하자.

(i) 5의 배수인 경우

일의 자리의 숫자가 5이면 되므로 5의 배수인 자연수의 개수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

$\therefore P(A)=\frac{125}{625}$

(ii) 3200 이상인 경우

32□□, 33□□, 34□□, 35□□ 꼴인 자연수의 개수는 각각 ${}_5\Pi_2=5^2=25$

4□□□, 5□□□ 꼴인 자연수의 개수는 각각 ${}_5\Pi_3=5^3=125$

즉, 3200 이상인 자연수의 개수는 $4\times25+2\times125=350$

$\therefore P(B)=\frac{350}{625}$

(iii) 5의 배수이고 3200 이상인 경우

32□5, 33□5, 34□5, 35□5 꼴인 자연수의 개수는 각각 5

4□□5, 5□□5 꼴인 자연수의 개수는 각각 ${}_5\Pi_2=5^2=25$

즉, 5의 배수이고 3200 이상인 자연수의 개수는

$4\times5+2\times25=70$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{70}{625}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{125}{625}+\frac{350}{625}-\frac{70}{625}=\frac{81}{125}$$

0360 답 7

10명에서 당번 2명을 뽑는 모든 경우의 수는 ${}_{10}C_2=45$

남학생 수를 x라 하면 여학생 수는 $10-x$

이때 남학생 수가 여학생 수보다 많으므로

$x>10-x$, $2x>10$ $\therefore x>5$

당번 2명이 모두 남학생인 사건을 A, 모두 여학생인 사건을 B라 하자.

(i) 당번 2명이 모두 남학생인 경우

남학생 x명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_xC_2=\frac{x(x-1)}{2}$

$\therefore P(A)=\frac{x(x-1)}{90}$ …… i

(ii) 당번 2명이 모두 여학생인 경우

여학생 $(10-x)$명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10-x}C_2=\frac{(10-x)(9-x)}{2}$

$\therefore P(B)=\frac{(10-x)(9-x)}{90}$ …… ii

A와 B는 서로 배반사건이므로 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$\frac{8}{15}=\frac{x(x-1)}{90}+\frac{(10-x)(9-x)}{90}$

$2x^2-20x+42=0$, $2(x-3)(x-7)=0$

$\therefore x=7$ ($\because x>5$)

따라서 구하는 남학생 수는 7이다. …… iii

채점 기준	
ⓘ 남학생 수를 x로 놓고, 당번 2명이 모두 남학생일 확률을 x에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘ 당번 2명이 모두 여학생일 확률을 x에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘⓘ 남학생 수 구하기	20 %

0361 답 ③

$24x^2-10ax+a^2=0$에서

$(4x-a)(6x-a)=0$ $\therefore x=\frac{a}{4}$ 또는 $x=\frac{a}{6}$

이 이차방정식이 정수해를 가지려면 a가 4의 배수 또는 6의 배수이어야 한다.

a가 4의 배수인 사건을 A, 6의 배수인 사건을 B라 하면

$A\cap B$는 12의 배수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{12}{50}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{8}{50}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{50}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{12}{50}+\frac{8}{50}-\frac{4}{50}=\frac{8}{25}$

0362 답 ②

방정식 $x+y+z+w=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수는

${}_4\mathrm{H}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=84$

$(x+y-3)(z-2)=0$에서 $x+y=3$ 또는 $z=2$

$x+y=3$인 사건을 A, $z=2$인 사건을 B라 하자.

(i) $x+y=3$인 경우

$x+y=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

$x+y+z+w=6$에서

$3+z+w=6$ $\therefore z+w=3$

$z+w=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 z, w의 순서쌍 (z, w)의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

즉, $x+y=3$인 경우의 수는 $4\times4=16$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{16}{84}$

(ii) $z=2$인 경우

$x+y+z+w=6$에서

$x+y+2+w=6$ $\therefore x+y+w=4$

$x+y+w=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, w의 순서쌍 (x, y, w)의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

즉, $z=2$인 경우의 수는 15

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{15}{84}$

(iii) $x+y=3$이고 $z=2$인 경우

$x+y=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

$x+y+z+w=6$에서

$3+2+w=6$ $\therefore w=1$

즉, $x+y=3$이고 $z=2$인 경우의 수는 $4\times1=4$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{84}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{16}{84}+\frac{15}{84}-\frac{4}{84}=\frac{9}{28}$

0363 답 ③

문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허용하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$

a가 한 개만 포함되는 사건을 A, b가 한 개만 포함되는 사건을 B라 하자.

(i) a가 한 개만 포함되는 경우

4개의 자리 중 a가 나열될 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1=4$

나머지 세 자리에 b, c, d에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_3=3^3=27$

즉, a가 한 개만 포함되는 경우의 수는 $4\times27=108$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{108}{256}$

(ii) b가 한 개만 포함되는 경우

4개의 자리 중 b가 나열될 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1=4$

나머지 세 자리에 a, c, d에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_3=3^3=27$

즉, b가 한 개만 포함되는 경우의 수는 $4\times27=108$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{108}{256}$

(iii) a와 b가 각각 한 개씩만 포함되는 경우

4개의 자리 중 2개를 택하여 a, b를 나열하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2=12$

나머지 두 자리에 c, d에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_2\Pi_2=2^2=4$

즉, a와 b가 각각 한 개씩만 포함되는 경우의 수는 $12\times4=48$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{48}{256}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{108}{256}+\frac{108}{256}-\frac{48}{256}=\frac{21}{32}$

0364 답 ①

7명의 학생을 일렬로 세우는 모든 경우의 수는 $7!$

3학년 학생 사이에 2학년 학생 1명만 있는 사건을 A, 2학년 학생 사이에 3학년 학생 1명만 있는 사건을 B라 하자.

(i) 3학년 학생 사이에 2학년 학생 1명만 있는 경우

3학년 학생 사이에 세울 2학년 학생 1명을 택하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1=2$

3학년 학생 2명과 그 사이에 세운 2학년 학생 1명을 한 묶음으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!$

3학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!

즉, 그 경우의 수는 $2\times5!\times2!$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{2\times5!\times2!}{7!}=\dfrac{2}{21}$

(ii) 2학년 학생 사이에 3학년 학생 1명만 있는 경우

2학년 학생 사이에 세울 3학년 학생 1명을 택하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1=2$

2학년 학생 2명과 그 사이에 세운 3학년 학생 1명을 한 묶음으로 생각하여 5명을 일렬로 나열하는 경우의 수는 5!

2학년 학생 2명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!

즉, 그 경우의 수는 $2\times5!\times2!$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\dfrac{2\times5!\times2!}{7!}=\dfrac{2}{21}$

(iii) 3학년 학생 사이에 2학년 학생 1명만, 2학년 학생 사이에 3학년 학생 1명만 있는 경우

2학년 학생을 X, 3학년 학생을 Y라 하면 2학년 학생 2명과 3학년 학생 2명이 서로 이웃해야 하므로

Y−X−Y−X, X−Y−X−Y의 2가지

2학년 학생 2명과 3학년 학생 2명을 한 묶음으로 생각하여 4명을 일렬로 나열하는 경우의 수는 4!

2학년 학생끼리, 3학년 학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 각각 2!

즉, 그 경우의 수는 $2\times4!\times2!\times2!$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{2\times4!\times2!\times2!}{7!}=\dfrac{4}{105}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{2}{21}+\frac{2}{21}-\frac{4}{105}=\frac{16}{105}$$

0365 답 ①

만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4=256$

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 각각 a, b, c, d라 하고, 각 자리의 숫자의 합이 7 이하인 사건을 A, 백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 곱이 12 이상인 사건을 B라 하자.

(i) 각 자리의 숫자의 합이 7 이하인 경우

$a+b+c+d\le7$ ····· ㉠

a, b, c, d는 모두 1 이상 4 이하인 자연수이므로

$a'=a-1$, $b'=b-1$, $c'=c-1$, $d'=d-1$(a', b', c', d'은 0 이상 3 이하인 정수)이라 하면 ㉠에서

$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)+(d'+1)\le7$

$\therefore a'+b'+c'+d'\le3$

즉, $a'+b'+c'+d'=0$ 또는 $a'+b'+c'+d'=1$

또는 $a'+b'+c'+d'=2$ 또는 $a'+b'+c'+d'=3$

위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d'의 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수는

${}_4\mathrm{H}_0+{}_4\mathrm{H}_1+{}_4\mathrm{H}_2+{}_4\mathrm{H}_3={}_3\mathrm{C}_0+{}_4\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_3$

$=1+4+10+20=35$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{35}{256}$

(ii) 백의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 곱이 12 이상인 경우

$bd\ge12$이고, 이를 만족시키는 순서쌍 (b, d)는

$(3, 4)$, $(4, 3)$, $(4, 4)$의 3가지

천의 자리, 십의 자리의 숫자를 정하는 경우의 수는 숫자 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$

즉, 이때의 경우의 수는 $3\times16=48$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\dfrac{48}{256}$

따라서 A, B는 서로 배반사건이므로 (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{35}{256}+\frac{48}{256}=\frac{83}{256}$$

참고 (ii)에서 $bd\ge12$를 만족시키는 순서쌍 (b, d)는 $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(4, 4)$

이때 위의 각 경우에 대하여 $a+b+c+d\le7$을 만족시키는 자연수 a, c가 존재하지 않는다.

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)=0$이므로 두 사건 A, B는 서로 배반사건이다.

0366 답 ⑤

10개의 제비 중에서 3개를 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_3=120$

꺼낸 3개 중 적어도 1개는 당첨 제비가 아닌 사건을 A라 하면

A^C은 3개 모두 당첨 제비인 사건이다.

꺼낸 3개 모두 당첨 제비인 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\dfrac{10}{120}=\dfrac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$$

0367 답 ③

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

ab가 짝수인 사건을 A라 하면 A^C은 ab가 홀수인 사건이다.

이때 ab가 홀수이려면 a, b가 모두 홀수이어야 하므로 그 경우의 수는 $3\times3=9$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

0368 답 $\frac{19}{28}$

8개의 공 중에서 3개를 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_3=56$

꺼낸 3개의 공 중에서 같은 색의 공이 적어도 2개인 사건을 A라 하면 A^C은 꺼낸 3개의 공의 색이 모두 다른 사건이다.

이때 꺼낸 3개의 공의 색이 모두 다르려면 흰 공, 검은 공, 노란 공이 각각 1개씩 나와야 하므로 그 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=3\times3\times2=18$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\dfrac{18}{56}=\dfrac{9}{28}$ ····· ⓘ

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{9}{28}=\frac{19}{28}$$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 3개의 공의 색이 모두 다를 확률 구하기	50 %
ⓘⓘ 같은 색의 공이 적어도 2개 있을 확률 구하기	50 %

0369 답 ③

16명의 학생 중에서 3명을 택하는 모든 경우의 수는 ${}_{16}C_3=560$

선택한 3명의 학생 중에서 적어도 한 명이 과목 B를 선택한 학생인 사건을 X라 하면 X^C은 3명 모두 과목 A를 선택한 학생인 사건이다.

과목 A를 선택한 학생 9명 중에서 3명을 선택하는 경우의 수는

${}_9C_3=84$

$$\therefore P(X^C)=\frac{84}{560}=\frac{3}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X)=1-P(X^C)=1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}$$

0370 답 ②

10개의 점 중에서 2개를 택하는 모든 경우의 수는 ${}_{10}C_2=45$

선분의 길이가 1보다 긴 사건을 A라 하면 A^C은 선분의 길이가 1인 사건이다.

이때 선분의 길이가 1이려면 이웃하는 두 점이어야 하므로 그 경우의 수는 10

$$\therefore P(A^C)=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

0371 답 4

10개의 공 중에서 3개를 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_{10}C_3=120$

파란 공이 적어도 1개 나오는 사건을 A라 하면 A^C은 3개 모두 빨간 공이 나오는 사건이다.

주머니에 들어 있는 빨간 공의 개수를 n이라 하면 꺼낸 3개의 공이 모두 빨간 공인 경우의 수는

$${}_nC_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$\therefore P(A^C)=\frac{n(n-1)(n-2)}{720}$$

이때 $P(A)=\frac{29}{30}$이므로

$$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{29}{30}=\frac{1}{30}$$

즉, $\frac{n(n-1)(n-2)}{720}=\frac{1}{30}$이므로

$n(n-1)(n-2)=24$

이때 $24=4\times3\times2$이므로

$n=4$($\because$ n은 자연수)

따라서 빨간 공의 개수는 4이다.

0372 답 $\frac{19}{21}$

9개의 점 중에서 3개를 택하는 모든 경우의 수는 ${}_9C_3=84$

세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 만들어지는 사건을 A라 하면 A^C은 삼각형이 만들어지지 않는 사건이다.

이때 삼각형이 만들어지지 않으려면 세 점이 한 직선 위에 있어야 한다. …… ⓘ

(i) 가로 방향의 줄 3개 중에서 1개를 택하고, 그 줄 위의 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_3C_3=3\times1=3$

(ii) 세로 방향의 줄 3개 중에서 1개를 택하고, 그 줄 위의 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_3C_3=3\times1=3$

(iii) 대각선 방향의 줄 2개 중에서 1개를 택하고, 그 줄 위의 3개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_3C_3=2\times1=2$

(i), (ii), (iii)에서 삼각형이 만들어지지 않는 경우의 수는

$3+3+2=8$

$$\therefore P(A^C)=\frac{8}{84}=\frac{2}{21}$$ …… ⓘⓘ

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{21}=\frac{19}{21}$$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 삼각형이 만들어지지 않는 조건 알기	20 %
ⓘⓘ 삼각형이 만들어지지 않을 확률 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ 삼각형이 만들어질 확률 구하기	30 %

0373 답 ①

11장의 카드 중에서 2장을 택하는 모든 경우의 수는 ${}_{11}C_2=55$

택한 카드 중에서 적어도 한 장의 카드에 적힌 숫자가 5 이하의 홀수, 즉 1, 3, 5인 사건을 A라 하면 A^C은 두 장 모두 1, 3, 5가 아닌 수, 즉 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 11인 사건이다.

5 이하의 홀수가 아닌 8개의 수 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=28$

$$\therefore P(A^C)=\frac{28}{55}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{28}{55}=\frac{27}{55}$$

0374 답 ②

8장의 손수건 중에서 4장을 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_8C_4=70$

꺼낸 흰색 손수건이 2장 이상인 사건을 A라 하면 A^C은 꺼낸 흰색 손수건이 2장 미만인 사건이다.

(i) 흰색 손수건이 1장인 경우

흰색 손수건 4장 중에서 1장을 꺼내고, 검은색 손수건 4장 중에서 3장을 꺼내면 되므로 그 경우의 수는

${}_4C_1\times{}_4C_3={}_4C_1\times{}_4C_1=4\times4=16$

(ii) 흰색 손수건이 0장인 경우

검은색 손수건만 4장 꺼내면 되므로 그 경우의 수는 ${}_4C_4=1$

(i), (ii)에서 흰색 손수건을 2장 미만으로 꺼내는 경우의 수는

$16+1=17$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{17}{70}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{17}{70}=\frac{53}{70}$

0375 답 ④

7개의 공을 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 $7!=5040$

같은 숫자가 적힌 공이 서로 이웃하지 않는 사건을 A라 하면

A^C은 같은 숫자가 적힌 공이 서로 이웃하는 사건이다.

이때 같은 숫자가 적힌 공은 3이 적힌 흰 공 1개와 검은 공 1개이므로 이 2개의 공을 한 묶음으로 생각하여 6개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는 $6!=720$

3이 적힌 흰 공과 검은 공이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

즉, 같은 숫자가 적힌 공이 서로 이웃하는 경우의 수는

$720\times2=1440$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{1440}{5040}=\frac{2}{7}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$

0376 답 ③

12개의 자연수 중에서 3개를 택하는 모든 경우의 수는 ${}_{12}C_3=220$

꺼낸 수 중에서 가장 작은 수가 3 이하이거나 7 이상인 사건을 A라 하면 A^C은 가장 작은 수가 4 또는 5 또는 6인 사건이다.

(i) 꺼낸 수 중에서 가장 작은 수가 4인 경우

4를 택하고, 5부터 12까지의 8개의 자연수 중에서 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_8C_2=28$

(ii) 꺼낸 수 중에서 가장 작은 수가 5인 경우

5를 택하고, 6부터 12까지의 7개의 자연수 중에서 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_7C_2=21$

(iii) 꺼낸 수 중에서 가장 작은 수가 6인 경우

6을 택하고, 7부터 12까지의 6개의 자연수 중에서 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_6C_2=15$

(i), (ii), (iii)에서 가장 작은 수가 4 또는 5 또는 6인 경우의 수는

$28+21+15=64$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{64}{220}=\frac{16}{55}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{16}{55}=\frac{39}{55}$

0377 답 ④

한 개의 주사위를 3번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

시행을 3번 반복한 후 숫자 7이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 1 이상인 사건을 A라 하면 A^C은 숫자 7이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 0인 사건이다.

이때 숫자 7이 적힌 상자에 들어 있는 공의 개수가 0이려면 주사위를 3번 던져 나오는 눈의 수가 모두 달라야 한다.

주사위를 3번 던져 나오는 눈의 수가 모두 다른 경우의 수는

${}_6P_3=120$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{120}{216}=\frac{5}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$

0378 답 ④

카드에 적힌 수가 15와 서로소인 사건을 A라 하면

A^C은 15와 2 이상의 공약수를 갖는 사건이다.

이때 $15=3\times5$이므로 15와 2 이상의 공약수를 갖는 경우는 3의 배수 또는 5의 배수인 경우이다.

(i) 3의 배수일 확률은 $\frac{16}{48}$

(ii) 5의 배수일 확률은 $\frac{9}{48}$

(iii) 15의 배수일 확률은 $\frac{3}{48}$

(i), (ii), (iii)에서 카드에 적힌 수가 15와 2 이상의 공약수를 가질 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{16}{48}+\frac{9}{48}-\frac{3}{48}=\frac{11}{24}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{11}{24}=\frac{13}{24}$

0379 답 ②

세 사람이 각자 4개의 영화 중에서 임의로 하나를 관람하는 모든 경우의 수는 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

두 사람만 같은 영화를 관람하는 사건을 A라 하면 A^C은 세 사람이 모두 같은 영화를 관람하거나 모두 다른 영화를 관람하는 사건이다.

(i) 세 사람이 모두 같은 영화를 관람하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

(ii) 세 사람이 모두 다른 영화를 관람하는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$

(i), (ii)에서 세 사람이 모두 같은 영화를 관람하거나 모두 다른 영화를 관람하는 경우의 수는 $4+24=28$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{28}{64}=\frac{7}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{16}=\frac{9}{16}$

다른 풀이

세 사람이 각자 4개의 영화 중에서 임의로 하나를 관람하는 모든 경우의 수는 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

세 사람 중 같은 영화를 관람할 두 사람을 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

두 사람이 관람할 영화를 고르는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$
남은 한 사람이 관람할 다른 영화를 고르는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
즉, 두 사람만 같은 영화를 관람하는 경우의 수는
$3\times4\times3=36$
따라서 구하는 확률은 $\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$

0380 답 ⑤

X에서 Y로의 모든 함수 f의 개수는 ${}_4\Pi_3=4^3=64$
$f(a)f(b)f(c)\le0$인 사건을 A라 하면 A^C은 $f(a)f(b)f(c)>0$인 사건이다.
이때 $f(a)f(b)f(c)>0$이려면 $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$가 모두 양수이거나 1개는 양수, 2개는 음수이어야 한다.
(i) 모두 양수인 경우
$f(a)$, $f(b)$, $f(c)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2의 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 X의 원소 a, b, c에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_2\Pi_3=2^3=8$
(ii) 1개는 양수이고, 2개는 음수인 경우
$f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ 중에서 함숫값이 양수인 것을 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
집합 Y의 원소 중에서 양수는 1, 2의 2개, 음수는 -1의 1개이므로 양수인 함숫값을 정하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$이고, 음수인 함숫값을 정하는 경우의 수는 1
즉, 이때의 경우의 수는 $3\times2\times1=6$
(i), (ii)에서 $f(a)f(b)f(c)>0$인 경우의 수는 $8+6=14$
$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{14}{64}=\frac{7}{32}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{32}=\frac{25}{32}$

0381 답 $\frac{65}{81}$

서로 다른 네 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6\times6\times6=1296$
네 눈의 수의 곱이 3으로 나누어떨어지는 사건을 A라 하면
A^C은 네 눈의 수의 곱이 3으로 나누어떨어지지 않는 사건이다.
이때 네 눈의 수의 곱이 3으로 나누어떨어지지 않으려면 네 눈의 수가 모두 3의 배수가 아니어야 한다. …… ⓘ
네 눈의 수가 모두 3의 배수가 아닌 경우의 수는 1, 2, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_4=4^4=256$
$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{256}{1296}=\frac{16}{81}$ …… ⓘⓘ
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{16}{81}=\frac{65}{81}$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 네 눈의 수의 곱이 3으로 나누어떨어지지 않는 조건 알기	30 %
ⓘⓘ 네 눈의 수의 곱이 3으로 나누어떨어지지 않을 확률 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 네 눈의 수의 곱이 3으로 나누어떨어질 확률 구하기	30 %

0382 답 ①

운전자를 제외한 5명이 좌석에 앉는 모든 경우의 수는 $5!=120$
내렸다가 다시 탄 2명을 X, Y라 하고, X, Y 모두 처음에 앉았던 좌석이 아닌 다른 좌석에 앉게 되는 사건을 A라 하면 A^C은 X, Y 중 적어도 1명은 처음에 앉았던 좌석에 앉는 사건이다.
(i) X가 처음에 앉았던 좌석에 다시 앉는 경우
X를 제외한 나머지 4명이 좌석에 앉는 경우의 수는 $4!=24$
(ii) Y가 처음에 앉았던 좌석에 다시 앉는 경우
Y를 제외한 나머지 4명이 좌석에 앉는 경우의 수는 $4!=24$
(iii) X, Y 모두 처음에 앉았던 좌석에 다시 앉는 경우
X, Y를 제외한 나머지 3명이 좌석에 앉는 경우의 수는 $3!=6$
(i), (ii), (iii)에서 X, Y 중 적어도 1명은 처음에 앉았던 좌석에 앉는 경우의 수는 $24+24-6=42$
$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{42}{120}=\frac{7}{20}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{20}=\frac{13}{20}$

다른 풀이

운전자를 제외한 5명이 좌석에 앉는 모든 경우의 수는 $5!=120$
운전석을 제외한 5개의 좌석을 A, B, C, D, E, 내렸다가 다시 탄 2명을 X, Y라 하고, X, Y가 처음에 각각 A, B 자리에 앉았다고 하자.
(i) X가 좌석 B에 앉는 경우
Y는 남은 4개의 좌석에 모두 앉을 수 있으므로 Y를 포함한 4명이 좌석에 앉는 경우의 수는 $4!=24$
(ii) X가 좌석 C, D, E 중에서 1개의 좌석에 앉는 경우
X가 앉을 수 있는 좌석은 C, D, E의 3가지
Y가 앉을 수 있는 좌석은 X가 다시 앉은 좌석과 B를 제외한 3가지
나머지 3명이 남은 3개의 좌석에 앉는 경우의 수는 $3!=6$
즉, 이때의 경우의 수는 $3\times3\times6=54$
(i), (ii)에서 X, Y가 처음에 앉았던 좌석이 아닌 다른 좌석에 앉는 경우의 수는 $24+54=78$
따라서 구하는 확률은 $\frac{78}{120}=\frac{13}{20}$

0383 답 ⑤

12명 중에서 3명을 택하는 모든 경우의 수는 ${}_{12}C_3=220$
택한 3명 중 적어도 1명은 중학생이고 적어도 1명은 수학 동아리 회원인 사건을 A라 하면 A^C은 3명 모두 고등학생이거나 과학 동아리 회원인 사건이다.
(i) 3명 모두 고등학생인 경우
고등학생 6명 중에서 3명을 택하는 경우의 수는
${}_6C_3=20$
(ii) 3명 모두 과학 동아리 회원인 경우
과학 동아리 회원 7명 중에서 3명을 택하는 경우의 수는
${}_7C_3=35$

(iii) 3명 모두 고등학생이고 과학 동아리 회원인 경우

과학 동아리 회원인 고등학생 3명 중에서 3명을 택하는 경우의 수는 1

(i), (ii), (iii)에서 3명 모두 고등학생이거나 과학 동아리 회원인 경우의 수는 $20+35-1=54$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{54}{220}=\frac{27}{110}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{27}{110}=\frac{83}{110}$

0384 답 ③

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_{10}={}_{12}\mathrm{C}_2=66$

$x<3$ 또는 $y<2$인 사건을 A라 하면 A^C은 $x\geq3$이고 $y\geq2$인 사건이다.

$x'=x-3$, $y'=y-2$라 하면 $x+y+z=10$에서

$(x'+3)+(y'+2)+z=10 \quad \therefore x'+y'+z=5$

x', y', z는 음이 아닌 정수이므로 위의 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z의 순서쌍 (x', y', z)의 개수는

${}_3\mathrm{H}_5={}_7\mathrm{C}_5={}_7\mathrm{C}_2=21$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{21}{66}=\frac{7}{22}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{22}=\frac{15}{22}$

0385 답 47

시행을 5번 반복하여 5개의 수를 확인하는 모든 경우의 수는 1, 2, 3의 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$

5개의 수의 곱이 6의 배수인 사건을 A라 하면 A^C은 5개의 수의 곱이 6의 배수가 아닌 사건이다.

이때 5개의 수의 곱이 6의 배수가 아니려면 2가 나오지 않거나 3이 나오지 않아야 한다.

(i) 2가 나오지 않는 경우

1, 3의 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

(ii) 3이 나오지 않는 경우

1, 2의 2개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

(iii) 2도 나오지 않고 3도 나오지 않는 경우

1만 나오는 경우의 수는 1

(i), (ii), (iii)에서 5개의 수의 곱이 6의 배수가 아닌 경우의 수는

$32+32-1=63$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{63}{243}=\frac{7}{27}$

즉, 5개의 수의 곱이 6의 배수일 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{7}{27}=\frac{20}{27}$

따라서 $p=27$, $q=20$이므로

$p+q=27+20=47$

최고수준 도전 기출 88~89쪽

0386 답 ③

전략 A가 B보다 먼저 발표하는 사건과 A와 B 사이에 3명이 발표하는 사건, A가 B보다 먼저 발표하고 그 사이에 3명이 발표하는 사건의 확률을 각각 구한 후, 확률의 덧셈정리를 이용한다.

7명의 학생이 발표 순서를 정하는 모든 경우의 수는

$7!=5040$

A가 B보다 먼저 발표하는 사건을 X, A와 B 사이에 3명만 발표하는 사건을 Y라 하자.

(i) A가 B보다 먼저 발표하는 경우

A, B를 모두 X로 바꾸어 생각하고 X, X를 포함한 7명의 발표 순서를 정하는 경우의 수는 → 나열한 후 첫 번째 X는 A로, 두 번째 X는 B로 바꾼다.

$\frac{7!}{2!}=2520$

$\therefore \mathrm{P}(X)=\frac{2520}{5040}=\frac{1}{2}$

(ii) A와 B 사이에 3명이 발표하는 경우

A, B를 제외한 5명 중에서 A와 B 사이에 발표할 3명의 학생을 택하여 순서를 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3=60$

A, B와 그 사이에 발표할 3명을 한 묶음으로 생각하여 3명의 발표 순서를 정하는 경우의 수는 $3!=6$

A와 B가 발표 순서를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

즉, 이때의 경우의 수는 $60\times6\times2=720$

$\therefore \mathrm{P}(Y)=\frac{720}{5040}=\frac{1}{7}$

(iii) A가 B보다 먼저 발표하고, A와 B 사이에 3명이 발표하는 경우

A, B를 제외한 5명 중에서 A와 B 사이에 발표할 3명의 학생을 택하여 순서를 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_3=60$

A와 B를 모두 X로 바꾸어 생각하고 X, X와 그 사이에 발표할 3명을 한 묶음으로 생각하여 3명의 발표 순서를 정하는 경우의 수는 → 나열한 후 첫 번째 X는 A로, 두 번째 X는 B로 바꾼다.

$3!=6$

즉, 이때의 경우의 수는 $60\times6=360$

$\therefore \mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{360}{5040}=\frac{1}{14}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X\cup Y)=\mathrm{P}(X)+\mathrm{P}(Y)-\mathrm{P}(X\cap Y)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}-\frac{1}{14}=\frac{4}{7}$

0387 답 ②

전략 역함수가 존재하는 사건과 모든 함숫값의 합이 10인 사건, 역함수가 존재하면서 모든 함숫값의 합이 10인 사건의 확률을 각각 구한 후, 확률의 덧셈정리를 이용한다. 이때 역함수가 존재하려면 함수가 일대일대응이어야 함을 이용한다.

X에서 X로의 모든 함수 f의 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

역함수가 존재하는 사건을 A, 모든 함숫값의 합이 10인 사건을 B라 하자.

(i) 역함수가 존재하는 경우

함수 f가 일대일대응이어야 하므로 그 경우의 수는 $4!=24$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{24}{256}$

(ii) 모든 함숫값의 합이 10인 경우

모든 함숫값의 합이 10이 되는 경우는 다음과 같이 나눌 수 있다.

ⓐ 함숫값이 1, 1, 4, 4인 함수의 개수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

ⓑ 함숫값이 1, 2, 3, 4인 함수의 개수는

$4!=24$

ⓒ 함숫값이 1, 3, 3, 3인 함수의 개수는

$\frac{4!}{3!}=4$

ⓓ 함숫값이 2, 2, 2, 4인 함수의 개수는

$\frac{4!}{3!}=4$

ⓔ 함숫값이 2, 2, 3, 3인 함수의 개수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

즉, 이때의 경우의 수는 $6+24+4+4+6=44$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{44}{256}$

(iii) 역함수가 존재하고 모든 함숫값의 합이 10인 경우

(ii)에서 함숫값이 1, 2, 3, 4일 때 일대일대응이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{24}{256}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{24}{256}+\frac{44}{256}-\frac{24}{256}=\frac{11}{64}$

0388 답 ④

전략 $f(1)<2$이고 함수 f의 치역이 B가 아닌 사건의 확률을 구한 후, 여사건의 확률을 이용한다.

집합 A에서 집합 B로의 모든 함수 f의 개수는

${}_3\Pi_4=3^4=81$

$f(1)\geq2$이거나 함수 f의 치역이 B인 사건을 X라 하면

X^C은 $f(1)<2$이고 함수 f의 치역이 B가 아닌 사건이다.

이때 $f(1)<2$이므로 $f(1)=1$의 1가지이고,

$f(1)=1$에서 1은 치역의 원소이므로 함수 f의 치역이 B가 아니려면 2 또는 3은 치역의 원소가 아니여야 한다.

(i) 2가 치역의 원소가 아닌 경우

$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 B의 원소 중 2를 제외한 1, 3의 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 A의 원소 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

(ii) 3이 치역의 원소가 아닌 경우

$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 B의 원소 중 3을 제외한 1, 2의 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 A의 원소 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

(iii) 2, 3이 모두 치역의 원소가 아닌 경우

$f(2)=f(3)=f(4)=1$이므로 그 경우의 수는 1

(i), (ii), (iii)에서 $f(1)<2$이고 함수 f의 치역이 B가 아닌 경우의 수는 $8+8-1=15$

$\therefore \mathrm{P}(X^C)=\frac{15}{81}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X)=1-\mathrm{P}(X^C)=1-\frac{15}{81}=\frac{22}{27}$

0389 답 ②

전략 $a+b=7$인 사건, $b\geq c$인 사건, $a+b=7$이고 $b\geq c$인 사건의 확률을 각각 구한 후, 확률의 덧셈정리를 이용한다.

서로 다른 세 개의 주사위를 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

$a+b=7$인 사건을 A, $b\geq c$인 사건을 B라 하자.

(i) $a+b=7$인 경우

$a+b=7$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$의 6가지

이 각각에 대하여 c의 값을 정하는 경우의 수는 6

즉, 이때의 경우의 수는 $6\times6=36$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{36}{216}$

(ii) $b\geq c$인 경우

$b\geq c$이려면 6개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 크거나 같은 수부터 순서대로 b, c에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$

이 각각에 대하여 a의 값을 정하는 경우의 수는 6

즉, 이때의 경우의 수는 $21\times6=126$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{126}{216}$

(iii) $a+b=7$이고 $b\geq c$인 경우는

$a=1$, $b=6$일 때, $c=1, 2, 3, 4, 5, 6$의 6가지

$a=2$, $b=5$일 때, $c=1, 2, 3, 4, 5$의 5가지

$a=3$, $b=4$일 때, $c=1, 2, 3, 4$의 4가지

$a=4$, $b=3$일 때, $c=1, 2, 3$의 3가지

$a=5$, $b=2$일 때, $c=1, 2$의 2가지

$a=6$, $b=1$일 때, $c=1$의 1가지

즉, 이때의 경우의 수는 $6+5+4+3+2+1=21$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{21}{216}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{36}{216}+\frac{126}{216}-\frac{21}{216}=\frac{47}{72}$

0390 답 ⑤

전략 같은 색을 서로 이웃하지 않게 칠하는 사건에 대한 확률을 구한 후, 여사건의 확률을 이용한다. 이때 이웃하는 색을 한 묶음으로 생각하여 그 사이에 빨간색을 나열하는 방법을 이용한다.

10개의 칸에 색을 칠하는 모든 경우의 수는

$$\frac{10!}{2!\times4!\times4!}=3150$$

같은 색을 2칸 이상 연속으로 칠하는 사건을 A라 하면 A^C은 같은 색을 서로 이웃하지 않게 칠하는 사건이다.

빨간색을 R, 노란색을 Y, 파란색을 B라 하면 2개의 R, 4개의 Y, 4개의 B를 같은 문자끼리 서로 이웃하지 않게 나열하는 경우의 수는 Y와 B를 먼저 나열한 후, R를 나열하여 구할 수 있다. → 이때 Y 또는 B가 이웃해도 그 사이에 R를 나열하여 이웃하지 않도록 나열할 수 있다.

(i) Y와 B가 모두 이웃하지 않는 경우

4개의 Y와 4개의 B가 모두 이웃하지 않는 경우는

YBYBYBYB, BYBYBYBY의 2가지

이때 R는 Y와 B의 사이사이와 양 끝의 9개의 자리에서 2개를 택하여 나열하면 되므로

${}_9C_2=36$

즉, 이때의 경우의 수는

$2\times36=72$

(ii) 2개의 Y만 1번 이웃하는 경우

YY를 한 묶음 Y로 생각하여 Y, Y, Y, B, B, B, B를 Y끼리, B끼리 서로 이웃하지 않게 나열하는 경우는

BYBYBYB의 1가지

이때 3개의 Y 중에서 YY를 나열할 Y를 1개 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

2개의 R 중에서 하나는 YY 사이에 나열하고, 나머지 하나는 Y와 B의 사이사이와 양 끝의 8개의 자리에서 1개를 택하여 나열하면 되므로 ${}_8C_1=8$

즉, 이때의 경우의 수는

$1\times3\times8=24$

(iii) 2개의 B만 1번 이웃하는 경우

(ii)와 같은 방법으로 하면 경우의 수는 24

(iv) 2개의 Y와 2개의 B가 1번씩 이웃하는 경우

YY와 BB를 각각 한 묶음 Y, B로 생각하여 Y, Y, Y, B, B, B를 Y끼리, B끼리 서로 이웃하지 않게 나열하는 경우는

YBYBYB, BYBYBY의 2가지

이때 3개의 Y 중에서 YY를 나열할 Y를 1개 택하고, 3개의 B 중에서 BB를 나열할 B를 1개 택하는 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_3C_1=3\times3=9$

2개의 R를 YY와 BB 사이에 1개씩 나열하면 되므로 1

즉, 이때의 경우의 수는

$2\times9\times1=18$

(i)~(iv)에서 같은 색을 서로 이웃하지 않게 칠하는 경우의 수는

$72+24+24+18=138$

$\therefore P(A^C)=\frac{138}{3150}=\frac{23}{525}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{23}{525}=\frac{502}{525}$

참고 2개의 Y가 2번 이웃하는 경우, 2개의 B가 2번 이웃하는 경우, 3개의 Y가 1번 이웃하는 경우, 3개의 B가 1번 이웃하는 경우에는 Y끼리, B끼리 이웃하지 않게 나열할 수 없다.

0391 답 ⑤

전략 8개의 자리를 서로 이웃하지 않는 2개의 묶음으로 나누어 B반 학생끼리 이웃하지 않게 앉는 사건에 대한 확률을 구한 후, 여사건의 확률을 이용한다.

8명의 학생을 자리에 배정하는 모든 경우의 수는 8!

적어도 2명의 B반 학생이 서로 이웃하게 앉는 사건을 X라 하면 X^C은 B반 학생끼리 이웃하지 않게 앉는 사건이다.

그림과 같이 각 자리의 위치를 1, 2, 3, …, 8이라 하면 B반 학생끼리 이웃하지 않게 앉는 경우를 순서쌍으로 나타내면

(1, 3, 6, 8), (2, 4, 5, 7)의 2가지

각 자리에 A반 학생, B반 학생이 앉는 경우의 수는 각각 4!

1	2	3
4		5
6	7	8

즉, B반 학생끼리 이웃하지 않게 앉는 경우의 수는

$2\times4!\times4!$

$\therefore P(X^C)=\frac{2\times4!\times4!}{8!}=\frac{1}{35}$

따라서 구하는 확률은

$P(X)=1-P(X^C)=1-\frac{1}{35}=\frac{34}{35}$

0392 답 ⑤

전략 $A\cap B=\varnothing$인 사건, 즉 $a_2<b_1$ 또는 $b_2<a_1$인 사건에 대한 확률을 구한 후, 여사건의 확률을 이용한다.

모든 경우의 수는 6장의 카드 중에서 두 장의 카드를 동시에 꺼내고 다시 넣는 시행을 두 번 반복하는 경우의 수이므로

${}_6C_2\times{}_6C_2=15\times15=225$

$A\cap B\neq\varnothing$인 사건을 X라 하면 X^C은 $A\cap B=\varnothing$인 사건이다.

이때 $a_1<a_2$, $b_1<b_2$이고 $A\cap B=\varnothing$이려면 $a_2<b_1$ 또는 $b_2<a_1$이어야 한다.

(i) $a_2<b_1$인 경우

$a_1<a_2<b_1<b_2$이므로 1부터 6까지 6개의 수에서 서로 다른 4개의 수를 택하여 작은 수부터 차례로 a_1, a_2, b_1, b_2로 정하면 된다.

즉, 이때의 경우의 수는 ${}_6C_4={}_6C_2=15$

(ii) $b_2<a_1$인 경우

$b_1<b_2<a_1<a_2$이므로 1부터 6까지 6개의 수에서 서로 다른 4개의 수를 택하여 작은 수부터 차례로 b_1, b_2, a_1, a_2로 정하면 된다.

즉, 이때의 경우의 수는 ${}_6C_4={}_6C_2=15$

(i), (ii)에서 $A\cap B=\varnothing$인 경우의 수는 $15+15=30$

$\therefore P(X^C)=\frac{30}{225}=\frac{2}{15}$

따라서 구하는 확률은

$P(X)=1-P(X^C)=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$

06 조건부확률

난이도별 필수 기출 91~101쪽

0393 답 ③

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{12}{25}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{5}$$

0394 답 ②

$A\cap B=\{2, 4, 8\}$이므로

$$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5},\ P(A\cap B)=\frac{3}{10}$$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{2}{5}}=\frac{3}{4}$$

참고 $\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{3}{4}$

0395 답 ③

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$이므로

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$에서

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{8}=\frac{5}{48}$$

0396 답 ①

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$에서

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$$

따라서 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$$1=\frac{2}{5}+P(B)-\frac{1}{10}\qquad\therefore P(B)=\frac{7}{10}$$

0397 답 $\frac{1}{2}$

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$에서 $P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$이므로

$$\frac{1}{6}=\frac{2}{5}P(B)\qquad\therefore P(B)=\frac{5}{12}\quad\cdots\cdots\ \text{i}$$

이때 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$$\frac{7}{12}=P(A)+\frac{5}{12}-\frac{1}{6}\qquad\therefore P(A)=\frac{1}{3}\quad\cdots\cdots\ \text{ii}$$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots\ \text{iii}$$

채점 기준	
i $P(B)$의 값 구하기	30%
ii $P(A)$의 값 구하기	30%
iii $P(B\|A)$의 값 구하기	40%

0398 답 ①

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$에서

$$\frac{1}{3}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\qquad\therefore P(A)=3P(A\cap B)$$

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$에서

$$\frac{1}{4}=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}\qquad\therefore P(B)=4P(A\cap B)$$

이때 $P(A)+P(B)=\frac{3}{4}$이므로

$$3P(A\cap B)+4P(A\cap B)=\frac{3}{4}$$

$$7P(A\cap B)=\frac{3}{4}\qquad\therefore P(A\cap B)=\frac{3}{28}$$

0399 답 $\frac{5}{8}$

두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$A^C\cap B=B$

$$\therefore P(A^C\cap B)=P(B)=\frac{1}{4}\quad\cdots\cdots\ \text{i}$$

따라서 $P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$이므로 ····· ii

$$P(B|A^C)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(A^C)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{5}}=\frac{5}{8}\quad\cdots\cdots\ \text{iii}$$

채점 기준	
i $P(A^C\cap B)$의 값 구하기	30%
ii $P(A^C)$의 값 구하기	30%
iii $P(B\|A^C)$의 값 구하기	40%

0400 답 ②

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$에서

$$\frac{5}{8}=P(A\cap B)+\frac{1}{4}\qquad\therefore P(A\cap B)=\frac{3}{8}$$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{5}{8}}=\frac{3}{5}$$

0401 답 ①

$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$에서

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{9}+P(A\cap B^C)\qquad\therefore P(A\cap B^C)=\frac{5}{36}$$

$$\therefore P(B^C|A)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{36}}{\frac{1}{4}}=\frac{5}{9}$$

0402 답 ③

$$P(A|B)+P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

$$=P(A\cap B)\left\{\frac{1}{P(B)}+\frac{1}{P(A)}\right\}$$

$$=P(A\cap B)\times\frac{P(A)+P(B)}{P(A)P(B)}$$

$$=\frac{1}{7}\times\frac{5P(A)P(B)}{P(A)P(B)}=\frac{5}{7}$$

0403 답 ④

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$에서

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$

$\therefore P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{3}}=\frac{3}{10}$

0404 답 $\frac{3}{5}$

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$에서

$P(A\cap B)=P(B)P(A|B)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{20}$ …… ⓘ

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$에서

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$이므로

$\frac{3}{20}=\frac{1}{3}P(A)$ $\therefore P(A)=\frac{9}{20}$ …… ⓘⓘ

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{9}{20}+\frac{3}{10}-\frac{3}{20}=\frac{3}{5}$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $P(A\cap B)$의 값 구하기	40%
ⓘⓘ $P(A)$의 값 구하기	40%
ⓘⓘⓘ $P(A\cup B)$의 값 구하기	20%

0405 답 10

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$P(A\cup B)=1-P(A^C\cap B^C)$

$=1-0.25=0.75$ …… ⓘ

이때 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$0.75=0.3+0.5-P(A\cap B)$

$\therefore P(A\cap B)=0.05$ …… ⓘⓘ

따라서 $p=P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.05}{0.5}=\frac{1}{10}$이므로

$100p=100\times\frac{1}{10}=10$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $P(A\cup B)$의 값 구하기	30%
ⓘⓘ $P(A\cap B)$의 값 구하기	30%
ⓘⓘⓘ $100p$의 값 구하기	40%

0406 답 ④

$P(B^C)=1-P(B)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$이고

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이므로

$P(A^C\cap B^C)=1-P(A\cup B)=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

$\therefore P(A^C|B^C)=\frac{P(A^C\cap B^C)}{P(B^C)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{4}{5}}=\frac{15}{32}$

0407 답 ⑤

$P(B)=\frac{1}{2}$이므로

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=2P(A\cap B)$

$P(A)=\frac{1}{3}$이므로

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=3P(A\cap B)$

$\therefore P(A|B)+P(B|A)=2P(A\cap B)+3P(A\cap B)$

$=5P(A\cap B)$

따라서 $5P(A\cap B)=\frac{10}{7}$이므로 $P(A\cap B)=\frac{2}{7}$

0408 답 ④

$4P(B^C|A)=9P(B|A)$에서

$4\times\frac{P(A\cap B^C)}{P(A)}=9\times\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

즉, $4P(A\cap B^C)=9P(A\cap B)$이므로

$P(A\cap B^C)=\frac{9}{4}P(A\cap B)$

$=\frac{9}{4}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{4}$

$\therefore P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)$

$=\frac{1}{9}+\frac{1}{4}=\frac{13}{36}$

0409 답 $\frac{7}{4}$

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$에서

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

$=\frac{1}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{30}$ …… ⓘ

이때 $P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{5}-\frac{1}{30}=\frac{1}{6}$

이므로 $P(B^C|A)=\frac{P(A\cap B^C)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{5}}=\frac{5}{6}$ …… ⓘⓘ

또 $P(A^C\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{2}{5}-\frac{1}{30}=\frac{11}{30}$

이므로 $P(A^C|B)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{11}{30}}{\frac{2}{5}}=\frac{11}{12}$ …… ⓘⓘⓘ

$\therefore P(B^C|A)+P(A^C|B)=\frac{5}{6}+\frac{11}{12}=\frac{7}{4}$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ $P(A\cap B)$의 값 구하기	30%
ⓘⓘ $P(B^C|A)$의 값 구하기	30%
ⓘⓘⓘ $P(A^C|B)$의 값 구하기	30%
ⓘⓥ $P(B^C|A)+P(A^C|B)$의 값 구하기	10%

0410 답 2

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{3}{2}\mathrm{P}(A\cap B)$

(i) $\mathrm{P}(A\cap B)$가 최대인 경우

$B\subset A$ 또는 $A\subset B$일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$가 최대이다.

이때 $\mathrm{P}(B)<\mathrm{P}(A)$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은 $B\subset A$일 때 최대이고 최댓값은 $\frac{3}{5}$이다.

(ii) $\mathrm{P}(A\cap B)$가 최소인 경우

$\mathrm{P}(A\cup B)\le 1$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\le 1$

$\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\mathrm{P}(A\cap B)\le 1$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\ge\frac{4}{15}$

즉, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 최솟값은 $\frac{4}{15}$이다.

(i), (ii)에서 $M=\frac{3}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{10}$, $m=\frac{3}{2}\times\frac{4}{15}=\frac{2}{5}$이므로

$4(M-m)=4\times\left(\frac{9}{10}-\frac{2}{5}\right)=2$

0411 답 ⑤

임의로 선택한 1명이 20세 미만인 사건을 A, 여자 회원인 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{7}{30}}{\frac{12}{30}}=\frac{7}{12}$

참고 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{7}{12}$

0412 답 ②

임의로 선택한 1명이 교내 봉사활동에 참가한 학생인 사건을 A, 남학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{11}{30}}{\frac{23}{30}}=\frac{11}{23}$

참고 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{11}{23}$

0413 답 ②

임의로 선택한 1명이 여학생인 사건을 A, 2학년 학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{70}{300}}{\frac{60+70}{300}}=\frac{7}{13}$

참고 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{70}{60+70}=\frac{7}{13}$

0414 답 ④

임의로 선택한 1명이 A반 학생인 사건을 A, B반 학생인 사건을 B, 바나나를 좋아하는 학생인 사건을 X, 딸기를 좋아하는 학생인 사건을 Y라 하면

$p_1=\mathrm{P}(A|X)=\frac{\mathrm{P}(A\cap X)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{8}{45}}{\frac{22}{45}}=\frac{4}{11}$

$p_2=\mathrm{P}(Y|B)=\frac{\mathrm{P}(Y\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{10}{45}}{\frac{24}{45}}=\frac{5}{12}$

$\therefore p_1p_2=\frac{4}{11}\times\frac{5}{12}=\frac{5}{33}$

참고 $p_1=\frac{n(A\cap X)}{n(X)}=\frac{8}{22}=\frac{4}{11}$, $p_2=\frac{n(Y\cap B)}{n(B)}=\frac{10}{24}=\frac{5}{12}$

0415 답 ①

임의로 선택한 1명이 디자인 A안을 선호한 직원인 사건을 A, 디자인팀 여자 직원인 사건을 X라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap X)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{10}{100}}{\frac{55}{100}}=\frac{2}{11}$

참고 $\mathrm{P}(X|A)=\frac{n(A\cap X)}{n(A)}=\frac{10}{55}=\frac{2}{11}$

0416 답 15

영화 A를 관람한 남학생 수를 x라 하고 두 영화 A, B를 관람한 남학생과 여학생 수를 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
영화 A	x	$20-x$	20 ← $36-16$
영화 B	10	6	16 ← $10+6$
합계			36

임의로 선택한 1명이 영화 A를 관람한 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 X라 하면 $\mathrm{P}(X|A)=\frac{3}{4}$에서

$\mathrm{P}(X|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap X)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{20-x}{36}}{\frac{20}{36}}=\frac{20-x}{20}$ …… ⓘ

즉, $\frac{20-x}{20}=\frac{3}{4}$이므로

$4(20-x)=60 \quad \therefore x=5$ …… ⓘⓘ

따라서 이 동아리의 남학생 수는

$10+5=15$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 영화 A를 관람한 남학생 수를 x로 놓고, 임의로 선택한 1명이 영화 A를 관람한 학생일 때, 그 학생이 여학생일 확률을 x에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘ x의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 동아리의 남학생 수 구하기	20 %

0417 답 ③

산을 좋아하는 학생 수를 x라 하면 바다를 좋아하는 학생 수는 $3x$이고, 전체 학생 수가 120이므로

$x+3x=120$, $4x=120$ $\therefore x=30$

즉, 산을 좋아하는 학생은 30명, 바다를 좋아하는 학생은 90명이다.

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	1학년	2학년	합계
산	20		30
바다	50 (70−20)	40 (90−50)	90
합계	70	50	120

임의로 선택한 1명이 바다를 좋아하는 학생인 사건을 A, 2학년 학생인 사건을 X라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap X)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{40}{120}}{\frac{90}{120}}=\frac{4}{9}$$

참고 $\mathrm{P}(X|A)=\frac{n(A\cap X)}{n(A)}=\frac{40}{90}=\frac{4}{9}$

0418 답 ⑤

전체 학생 수는 50+50=100이고, 축구를 선택한 남학생 수를 x라 하면 임의로 선택한 1명이 축구를 선택한 남학생일 확률이 $\frac{1}{4}$이므로

$\frac{x}{100}=\frac{1}{4}$ $\therefore x=25$

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	여학생	남학생	합계
축구		25	40 (100×0.4)
농구	35 (60−25)	25 (50−25)	60 (100×0.6)
합계	50	50	100

임의로 선택한 1명이 농구를 선택한 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 X라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap X)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{35}{100}}{\frac{60}{100}}=\frac{7}{12}$$

참고 $\mathrm{P}(X|A)=\frac{n(A\cap X)}{n(A)}=\frac{35}{60}=\frac{7}{12}$

0419 답 $\frac{15}{22}$

전체 직원 수가 70이므로

$a+10+14+b=70$ $\therefore a+b=46$ …… ㉠

임의로 선택한 1명이 설악산을 선호하는 직원인 사건을 A, 제주도를 선호하는 직원인 사건을 B, 여자 직원인 사건을 X라 하면

$\mathrm{P}(X|A)=\frac{7}{15}$에서

$$\mathrm{P}(X|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap X)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{14}{70}}{\frac{a+14}{70}}=\frac{14}{a+14}$$

즉, $\frac{14}{a+14}=\frac{7}{15}$이므로

$7(a+14)=210$, $a+14=30$

$\therefore a=16$

$a=16$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=30$ …… ⓘ

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	설악산	제주도	합계
남자 직원	16	10	26
여자 직원	14	30	44
합계	30	40	70

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|X)=\frac{\mathrm{P}(B\cap X)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{30}{70}}{\frac{44}{70}}=\frac{15}{22}$$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a, b의 값 구하기	60 %
ⓘⓘ 임의로 선택한 1명이 여자일 때, 그 직원이 제주도를 선호할 확률 구하기	40 %

참고 $\mathrm{P}(X|A)=\frac{n(A\cap X)}{n(A)}=\frac{14}{a+14}$

$\mathrm{P}(B|X)=\frac{n(B\cap X)}{n(X)}=\frac{30}{44}=\frac{15}{22}$

0420 답 ③

A 과목을 선택한 학생이 80명, B 과목을 선택한 학생이 20명이므로 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	A 과목	B 과목	합계
C 과목을 선택함	8 (80×0.1)	6 (20×0.3)	14
C 과목을 선택하지 않음	72 (80−8)	14 (20−6)	86
합계	80	20	100

임의로 선택한 1명이 C 과목을 선택한 학생인 사건을 X, B 과목을 선택한 학생인 사건을 Y라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{6}{100}}{\frac{14}{100}}=\frac{3}{7}$$

참고 $\mathrm{P}(Y|X)=\frac{n(X\cap Y)}{n(X)}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$

0421 답 ①

전체 방문객 수가 150이므로

$a+5b+(a+10)+(20+b)=150$

$2a+6b=120$ $\therefore a+3b=60$ …… ㉠

임의로 선택한 1명이 여성인 사건을 W, 코스 A를 선택한 방문객인 사건을 A라 하면 $\mathrm{P}(A|W)=\frac{2}{3}$에서

$$P(A|W)=\frac{P(A\cap W)}{P(W)}=\frac{\frac{a+10}{150}}{\frac{a+b+30}{150}}=\frac{a+10}{a+b+30}$$

즉, $\frac{a+10}{a+b+30}=\frac{2}{3}$이므로

$3(a+10)=2(a+b+30)$ $\therefore a-2b=30$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=42$, $b=6$

$\therefore a-b=42-6=36$

참고 $P(A|W)=\frac{n(A\cap W)}{n(W)}=\frac{a+10}{a+b+30}$

0422 답 72

도서관 이용자 300명 중에서 30대가 차지하는 비율이 12 %이므로

$(60-a)+b=300\times0.12$

$60-a+b=36$ $\therefore a-b=24$ ····· ㉠

임의로 선택한 1명이 남성인 사건을 M, 여성인 사건을 W, 20대인 사건을 A, 30대인 사건을 B라 하자.

임의로 선택한 1명이 남성일 때, 이 이용자가 20대일 확률은

$$P(A|M)=\frac{P(M\cap A)}{P(M)}=\frac{\frac{a}{300}}{\frac{200}{300}}=\frac{a}{200}$$

임의로 선택한 1명이 여성일 때, 이 이용자가 30대일 확률은

$$P(B|W)=\frac{P(W\cap B)}{P(W)}=\frac{\frac{b}{300}}{\frac{100}{300}}=\frac{b}{100}$$

즉, $\frac{a}{200}=\frac{b}{100}$이므로 $a=2b$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=48$, $b=24$

$\therefore a+b=48+24=72$

참고 $P(A|M)=\frac{n(A\cap W)}{n(M)}=\frac{a}{200}$

$P(B|W)=\frac{n(B\cap W)}{n(W)}=\frac{b}{100}$

0423 답 ④

임의로 선택한 1명이 남학생인 사건을 M, 안경을 쓴 학생인 사건을 A라 하면 구하는 확률은

$$P(A|M)=\frac{P(M\cap A)}{P(M)}=\frac{\frac{30}{100}}{\frac{60}{100}}=\frac{1}{2}$$

0424 답 ⑤

전체 학생 수를 a라 하면 버스로 등교한 학생 수는 $\frac{3}{5}a$,

걸어서 등교한 학생 수는 $\frac{2}{5}a$이다.

이때 버스로 등교한 학생 중 지각한 학생 수는

$\frac{3}{5}a\times\frac{1}{20}=\frac{3}{100}a$

또 걸어서 등교한 학생 중 지각한 학생 수는

$\frac{2}{5}a\times\frac{1}{15}=\frac{2}{75}a$

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	버스로 등교	걸어서 등교	합계
지각함	$\frac{3}{100}a$	$\frac{2}{75}a$	$\frac{17}{300}a$
지각하지 않음			$\frac{3}{100}a+\frac{2}{75}a$
합계	$\frac{3}{5}a$	$\frac{2}{5}a$	a

임의로 선택한 1명의 학생이 지각한 학생인 사건을 A, 버스로 등교한 학생인 사건을 X라 하면 구하는 확률은

$$P(X|A)=\frac{P(A\cap X)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{100}a}{\frac{17}{300}a}=\frac{9}{17}$$

0425 답 $\frac{4}{9}$

전체 제품 수를 a라 하면 A 기계에서 생산된 제품 수는 $\frac{3}{5}a$,

B 기계에서 생산된 제품 수는 $\frac{2}{5}a$이다.

이때 A 기계에서 생산된 제품 중 불량품의 수는

$\frac{3}{5}a\times\frac{1}{15}=\frac{1}{25}a$ ····· i

또 B 기계에서 생산된 제품 중 불량품의 수는

$\frac{2}{5}a\times\frac{1}{8}=\frac{1}{20}a$ ····· ii

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 개)

	A 기계	B 기계	합계
정상품			
불량품	$\frac{1}{25}a$	$\frac{1}{20}a$	$\frac{9}{100}a$
합계	$\frac{3}{5}a$	$\frac{2}{5}a$	a

$\frac{1}{25}a+\frac{1}{20}a$

임의로 선택한 1개의 제품이 불량품인 사건을 X, A 기계에서 생산된 제품인 사건을 A라 하면 구하는 확률은

$$P(A|X)=\frac{P(A\cap X)}{P(X)}=\frac{\frac{1}{25}a}{\frac{9}{100}a}=\frac{4}{9}$$ ····· iii

채점 기준	
i 전체 제품 수를 a로 놓고, A 기계에서 생산된 제품 중 불량품의 수를 a에 대한 식으로 나타내기	30 %
ii B 기계에서 생산된 제품 중 불량품의 수를 a에 대한 식으로 나타내기	30 %
iii 임의로 선택한 1개의 제품이 불량품일 때, 그 제품이 A 기계에서 생산되었을 확률 구하기	40 %

0426 답 ⑤

전체 신입 사원 수를 a라 하면 남녀 인원이 같으므로 남자 사원의 수는 $\frac{1}{2}a$, 여자 사원의 수는 $\frac{1}{2}a$이다.

이때 A 노트북을 사용하는 남성 사원의 수는 $\frac{1}{10}a$, A 노트북을 사용하지 않는 여성 사원의 수는 $\frac{1}{5}a$이다.

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남성 사원	여성 사원	합계
A 노트북을 사용함	$\frac{1}{10}a$		
A 노트북을 사용하지 않음	$\frac{2}{5}a$	$\frac{1}{5}a$	$\frac{3}{5}a$
합계	$\frac{1}{2}a$	$\frac{1}{2}a$	a

$\frac{2}{5}a-\frac{1}{10}a=\frac{1}{2}a$, $\frac{3}{5}a-\frac{2}{5}a=\frac{1}{5}a$

임의로 선택한 1명이 A 노트북을 사용하지 않는 사원인 사건을 A, 남성 사원인 사건을 M이라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(M|A)=\frac{\mathrm{P}(M\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{5}a}{\frac{3}{5}a}=\frac{2}{3}$$

0427 답 ⑤

전체 학생 수를 a라 하면 남학생 수와 여학생 수의 비가 3 : 2이므로 남학생 수는 $\frac{3}{5}a$, 여학생 수는 $\frac{2}{5}a$이다.

이때 동아리에 가입하지 않은 남학생 수는 $\frac{1}{5}a$, 동아리에 가입한 여학생 수는 $\frac{1}{10}a$이다.

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
동아리 가입		$\frac{1}{10}a$	
동아리 미가입	$\frac{1}{5}a$	$\frac{3}{10}a$	$\frac{1}{2}a$
합계	$\frac{3}{5}a$	$\frac{2}{5}a$	a

$\frac{2}{5}a-\frac{1}{10}a=\frac{3}{10}a$, $\frac{1}{2}a-\frac{1}{5}a=\frac{3}{10}a$

임의로 선택한 1명이 동아리에 가입하지 않은 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 X라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap X)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{10}a}{\frac{1}{2}a}=\frac{3}{5}$$

0428 답 ④

여학생 수를 a라 하면 전체 학생 수는 여학생 수의 1.5배이므로 전체 학생 수는 $\frac{3}{2}a$, 남학생 수는 $\frac{1}{2}a$이다.

자원봉사에 참여한 학생 수와 참여하지 않은 학생 수가 4 : 1이므로 자원봉사에 참여한 학생 수는 $\frac{3}{2}a\times\frac{4}{5}=\frac{6}{5}a$

이때 자원봉사에 참여하지 않은 여학생 수는 $\frac{3}{2}a\times\frac{1}{10}=\frac{3}{20}a$

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
자원봉사 참여		$\frac{17}{20}a$	$\frac{6}{5}a$
자원봉사 미참여		$\frac{3}{20}a$	
합계	$\frac{1}{2}a$	a	$\frac{3}{2}a$

$\frac{17}{20}a-\frac{3}{20}a=a$

임의로 선택한 1명이 자원봉사에 참여한 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 X라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(X|A)=\frac{\mathrm{P}(X\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{17}{20}a}{\frac{6}{5}a}=\frac{17}{24}$$

0429 답 ③

전체 학생 수를 a라 하면 여학생 수는 $\frac{3}{10}a$, 남학생 수는 $\frac{7}{10}a$이다.

이때 교내 체육 활동에 만족한 학생 수는 $\frac{7}{10}a$, 불만족한 학생 수는 $\frac{3}{10}a$이므로 교내 체육 활동에 만족한 남학생 수는

$\frac{7}{10}a\times\frac{80}{100}=\frac{14}{25}a$

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
교내 체육 활동 만족	$\frac{14}{25}a$	$\frac{7}{50}a$	$\frac{7}{10}a$
교내 체육 활동 불만족		$\frac{7}{10}a-\frac{14}{25}a$	$\frac{3}{10}a$
합계	$\frac{7}{10}a$	$\frac{3}{10}a$	a

임의로 선택한 1명이 여학생인 사건을 X, 교내 체육 활동에 만족한 학생인 사건을 A라 하면 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|X)=\frac{\mathrm{P}(A\cap X)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{7}{50}a}{\frac{3}{10}a}=\frac{7}{15}$$

0430 답 47

전체 학생 수를 a라 하면 점심에 한식을 선택한 학생 수는 $\frac{3}{5}a$, 점심에 양식을 선택한 학생 수는 $\frac{2}{5}a$이다.

점심에 양식을 선택하고 저녁에도 양식을 선택한 학생 수는

$\frac{2}{5}a\times\frac{25}{100}=\frac{1}{10}a$

점심에 한식을 선택하고 저녁에도 한식을 선택한 학생 수는

$\frac{3}{5}a\times\frac{30}{100}=\frac{9}{50}a$

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	저녁 한식	저녁 양식	합계
점심 한식	$\frac{9}{50}a$	$\frac{21}{50}a$	$\frac{3}{5}a$
점심 양식		$\frac{1}{10}a$	$\frac{2}{5}a$
합계	$\frac{21}{50}a+\frac{1}{10}a$	$\frac{13}{25}a$	a

$\frac{21}{50}a-\frac{3}{5}a=\frac{9}{50}a$

임의로 선택한 1명이 저녁에 양식을 선택한 학생인 사건을 A, 점심에 한식을 선택한 학생인 사건을 B라 하면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{21}{50}a}{\frac{13}{25}a}=\frac{21}{26}$$

따라서 $p=26$, $q=21$이므로

$p+q=26+21=47$

0431 답 ③

표본공간을 S라 하면

$S=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$

이때 $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B=\{3, 6, 9\}$, $A\cap B=\{6\}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$

참고 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{1}{3}$

0432 답 ④

표본공간을 S라 하고, 나오는 눈의 수가 홀수인 사건을 A, 6의 약수인 사건을 B라 하면

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$

이때 $A\cap B=\{1, 3\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

참고 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{2}{3}$

0433 답 ②

임의로 선택한 1개가 4의 배수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 하면 $A\cap B$는 20의 배수인 사건이므로

$n(A)=25$, $n(A\cap B)=5$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{5}$

참고 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{5}{25}=\frac{1}{5}$

0434 답 ⑤

임의로 선택한 1명이 쫄면을 선택한 학생인 사건을 X, 김밥을 선택한 학생인 사건을 Y라 하자.

쫄면을 선택한 학생은 A, B, C, E이므로

$\mathrm{P}(X)=\frac{4}{5}$

김밥과 쫄면을 모두 선택한 학생은 A, B, C이므로

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{3}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$

참고 $\mathrm{P}(Y|X)=\frac{n(X\cap Y)}{n(X)}=\frac{3}{4}$

0435 답 ⑤

두 학생이 주문한 것이 서로 다른 사건을 A, 두 학생이 주문한 것이 모두 아이스크림인 사건을 B라 하자.

두 학생이 주문할 수 있는 모든 경우의 수는 $5\times5=25$

두 학생이 주문한 것이 서로 다른 경우의 수는 5개 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열한 경우의 수와 같으므로 ${}_5\mathrm{P}_2=20$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$

두 학생이 주문한 것이 서로 다르고 두 학생이 주문한 것이 모두 아이스크림인 경우의 수는 2개 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열한 경우의 수와 같으므로 ${}_2\mathrm{P}_2=2$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{25}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{25}}{\frac{4}{5}}=\frac{1}{10}$

참고 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$

0436 답 ②

5의 눈이 한 번도 나오지 않는 사건을 A, 나온 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 사건을 B라 하자.

서로 다른 두 개의 주사위를 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

(i) 5의 눈이 한 번도 나오지 않는 경우

두 눈의 수가 모두 5가 아니어야 하므로 그 경우의 수는

$5\times5=25$

(ii) 5의 눈이 한 번도 나오지 않고, 두 눈의 수의 합이 4의 배수인 경우

두 눈의 수의 합이 4일 때, (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지

두 눈의 수의 합이 8일 때, (2, 6), (4, 4), (6, 2)의 3가지

두 눈의 수의 합이 12일 때, (6, 6)의 1가지

즉, 이때의 경우의 수는 $3+3+1=7$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{25}{36}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{36}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{7}{36}}{\frac{25}{36}}=\frac{7}{25}$

참고 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{7}{25}$

0437 답 $\frac{1}{3}$

$a+b$가 3의 배수인 사건을 A, ab가 3의 배수인 사건을 B라 하자.

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

(i) $a+b$가 3의 배수인 경우

$a+b=3$일 때, (1, 2), (2, 1)의 2가지

$a+b=6$일 때, (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지

$a+b=9$일 때, (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 4가지

$a+b=12$일 때, (6, 6)의 1가지

즉, $a+b$가 3의 배수인 경우의 수는

$2+5+4+1=12$ …… ⓘ

(ⅱ) $a+b$가 3의 배수이면서 ab도 3의 배수인 경우

(ⅰ)에서 ab도 3의 배수인 경우는

$(3, 3), (3, 6), (6, 3), (6, 6)$의 4가지 …… ⓘⓘ

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $a+b$가 3의 배수인 경우의 수 구하기	30 %
ⓘⓘ $a+b$가 3의 배수이면서 ab도 3의 배수인 경우의 수 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ $a+b$가 3의 배수일 때, ab도 3의 배수일 확률 구하기	40 %

참고 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

0438 답 ⑤

한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례대로 a, b라 하고, ab가 6의 배수인 사건을 A, $a+b<10$인 사건을 B라 하자.

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

(ⅰ) ab가 6의 배수인 경우

$ab=6$일 때, $(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)$의 4가지

$ab=12$일 때, $(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)$의 4가지

$ab=18$일 때, $(3, 6), (6, 3)$의 2가지

$ab=24$일 때, $(4, 6), (6, 4)$의 2가지

$ab=30$일 때, $(5, 6), (6, 5)$의 2가지

$ab=36$일 때, $(6, 6)$의 1가지

즉, ab가 6의 배수인 경우의 수는

$4+4+2+2+2+1=15$

(ⅱ) ab가 6의 배수이면서 $a+b<10$인 경우

$(1, 6), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6),$

$(4, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3)$의 10가지

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{12}}=\frac{2}{3}$

참고 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$

0439 답 ②

당첨 제비를 딱 1개 뽑는 사건을 A, 1등 당첨 제비를 뽑는 사건을 B라 하자.

15개의 제비 중에서 3개를 뽑는 모든 경우의 수는 ${}_{15}\mathrm{C}_3=455$

(ⅰ) 당첨 제비를 딱 1개 뽑는 경우

당첨 제비 10개 중에 1개, 그 외의 5개의 제비 중에 2개를 뽑아야 하므로 그 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2=10\times10=100$

(ⅱ) 당첨 제비를 딱 1개 뽑으면서 1등 당첨 제비인 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2=4\times10=40$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{100}{455}=\frac{20}{91}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{40}{455}=\frac{8}{91}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{8}{91}}{\frac{20}{91}}=\frac{2}{5}$

참고 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$

0440 답 ①

꺼낸 3개의 공에 적힌 수의 곱이 짝수인 사건을 A, 3개의 공에 적힌 수가 모두 짝수인 사건을 B라 하자.

이때 A^C은 3개의 공에 적힌 수의 곱이 홀수인 사건이다. 즉, 3개의 공에 적힌 수가 모두 홀수인 사건이다.

10개의 공 중에서 3개를 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_3=120$

3개의 공에 적힌 수가 모두 홀수인 경우는 5개의 홀수에서 3개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

즉, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$이므로

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{12}=\frac{11}{12}$

3개의 공에 적힌 수가 모두 짝수인 경우는 5개의 짝수에서 3개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$

이때 $B\subset A$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(B)=\frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{11}{12}}=\frac{1}{11}$

0441 답 ②

$2a\geq b$인 사건을 A, 꺼낸 검은 공의 개수가 2인 사건을 B라 하자.

10개의 공 중에서 4개를 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_{10}\mathrm{C}_4=210$

(ⅰ) $2a\geq b$인 경우

ⓐ $a=2$, $b=2$일 때,

흰 공 4개 중에서 2개, 검은 공 6개 중에서 2개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_2=6\times15=90$

ⓑ $a=3$, $b=1$일 때,
흰 공 4개 중에서 3개, 검은 공 6개 중에서 1개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는
${}_4C_3\times{}_6C_1={}_4C_1\times{}_6C_1=4\times6=24$
ⓒ $a=4$, $b=0$일 때,
흰 공 4개 중에서 4개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는
${}_4C_4=1$
즉, $2a\geq b$인 경우의 수는
$90+24+1=115$
(ii) $2a\geq b$이고, 꺼낸 검은 공의 개수가 2인 경우
(i)에서 $a=2$, $b=2$인 경우의 수와 같으므로 90
(i), (ii)에서
$P(A)=\frac{115}{210}=\frac{23}{42}$, $P(A\cap B)=\frac{90}{210}=\frac{3}{7}$
따라서 구하는 확률은
$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{7}}{\frac{23}{42}}=\frac{18}{23}$$
참고 $P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{90}{115}=\frac{18}{23}$

0442 답 ②

이차방정식 $x^2-ax+b=0$이 실근을 갖는 사건을 A, a가 5 이상인 사건을 B라 하자.
한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
$6\times6=36$
(i) 주어진 방정식이 실근을 갖는 경우
이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 판별식을 D라 하면
$D=a^2-4b\geq0$ $\therefore a^2\geq4b$
$a=1$일 때, $1\geq4b$에서 $b<\frac{1}{4}$이므로 이를 만족시키는 b의 값은 존재하지 않는다.
$a=2$일 때, $4\geq4b$에서 $b\leq1$이므로
$(2, 1)$의 1가지
$a=3$일 때, $9\geq4b$에서 $b\leq\frac{9}{4}$이므로
$(3, 1)$, $(3, 2)$의 2가지
$a=4$일 때, $16\geq4b$에서 $b\leq4$이므로
$(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, $(4, 4)$의 4가지
$a=5$일 때, $25\geq4b$에서 $b\leq\frac{25}{4}$이므로
$(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, $(5, 4)$, $(5, 5)$, $(5, 6)$의 6가지
$a=6$일 때, $36\geq4b$에서 $b\leq9$이므로
$(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, $(6, 4)$, $(6, 5)$, $(6, 6)$의 6가지
즉, 이때의 경우의 수는
$0+1+2+4+6+6=19$
(ii) 주어진 방정식이 실근을 갖고, a가 5 이상인 경우
$a^2\geq4b$이고 $a\geq5$이어야 하므로 이때의 경우의 수는
$(5, 1)$, $(5, 2)$, $(5, 3)$, …, $(5, 6)$,
$(6, 1)$, $(6, 2)$, $(6, 3)$, …, $(6, 6)$의 12가지
(i), (ii)에서
$P(A)=\frac{19}{36}$, $P(A\cap B)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$
따라서 구하는 확률은
$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{19}{36}}=\frac{12}{19}$$
참고 $P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{12}{19}$

0443 답 ⑤

$a+b+c$가 짝수인 사건을 A, a가 홀수인 사건을 B라 하자.
8개의 공 중에서 3개를 꺼내는 모든 경우의 수는
${}_8C_3=56$
(i) $a+b+c$가 짝수인 경우
ⓐ 세 수 a, b, c가 모두 짝수인 경우
짝수 4개 중에서 3개를 꺼내 작은 수부터 차례대로 a, b, c로 정하면 되므로 그 경우의 수는
${}_4C_3={}_4C_1=4$
ⓑ 세 수 a, b, c 중에서 하나만 짝수인 경우
짝수 4개 중에서 1개, 홀수 4개 중에서 2개를 꺼내 작은 수부터 차례대로 a, b, c로 정하면 되므로 그 경우의 수는
${}_4C_1\times{}_4C_2=4\times6=24$
즉, $a+b+c$가 짝수인 경우의 수는
$4+24=28$
(ii) $a+b+c$가 짝수이고 a가 홀수인 경우
$b+c$는 홀수이어야 하므로 a보다 큰 홀수 1개, a보다 큰 짝수 1개를 꺼내 작은 수를 b, 큰 수를 c로 정하면 된다.
ⓐ $a=1$일 때,
홀수 3, 5, 7 중에서 1개, 짝수 2, 4, 6, 8 중에서 1개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는
${}_3C_1\times{}_4C_1=3\times4=12$
ⓑ $a=3$일 때,
홀수 5, 7 중에서 1개, 짝수 4, 6, 8 중에서 1개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는
${}_2C_1\times{}_3C_1=2\times3=6$
ⓒ $a=5$일 때,
홀수 7을 꺼내고, 짝수 6, 8 중에서 1개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는
$1\times{}_2C_1=1\times2=2$
즉, $a+b+c$가 짝수이고 a가 홀수인 경우의 수는
$12+6+2=20$
(i), (ii)에서
$P(A)=\frac{28}{56}=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{20}{56}=\frac{5}{14}$
따라서 구하는 확률은
$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{5}{14}}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{7}$$
참고 $P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{20}{28}=\frac{5}{7}$

0444 답 ④

$f(1)\le f(2)$인 사건을 A, $f(1)+f(5)=5$인 사건을 B라 하자.

X에서 X로의 함수 f의 개수는 ${}_5\Pi_5=5^5$

(i) $f(1)\le f(2)$인 경우

$f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_2={}_6C_2=15$

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 각각 5

즉, $f(1)\le f(2)$인 경우의 수는 $15\times5^3=1875$

(ii) $f(1)\le f(2)$이고 $f(1)+f(5)=5$인 경우

ⓐ $f(1)=1$, $f(5)=4$일 때,

$1\le f(2)$이므로 $f(2)$의 값으로 가능한 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지이고, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 각각 5

즉, 이때의 경우의 수는 $5\times5^2=125$

ⓑ $f(1)=2$, $f(5)=3$일 때,

$2\le f(2)$이므로 $f(2)$의 값으로 가능한 수는 2, 3, 4, 5의 4가지이고, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 각각 5

즉, 이때의 경우의 수는 $4\times5^2=100$

ⓒ $f(1)=3$, $f(5)=2$일 때,

$3\le f(2)$이므로 $f(2)$의 값으로 가능한 수는 3, 4, 5의 3가지이고, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 각각 5

즉, 이때의 경우의 수는 $3\times5^2=75$

ⓓ $f(1)=4$, $f(5)=1$일 때,

$4\le f(2)$이므로 $f(2)$의 값으로 가능한 수는 4, 5의 2가지이고, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 각각 5

즉, 이때의 경우의 수는 $2\times5^2=50$

ⓐ~ⓓ에서 $f(1)\le f(2)$이고 $f(1)+f(5)=5$인 경우의 수는

$125+100+75+50=350$

(i), (ii)에서

$$P(A)=\frac{1875}{5^5}=\frac{3}{5},\ P(A\cap B)=\frac{350}{5^5}=\frac{14}{125}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{14}{125}}{\frac{3}{5}}=\frac{14}{75}$$

참고 $P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{350}{1875}=\frac{14}{75}$

0445 답 50

흰 공을 2개 꺼내는 사건을 A, 같은 숫자가 적힌 공이 있는 사건을 B라 하자.

주머니 A에 들어 있는 5개의 공 중에서 2개를 꺼내고, 주머니 B에 들어 있는 5개의 공 중에서 2개를 꺼내는 모든 경우의 수는

${}_5C_2\times{}_5C_2=10\times10=100$

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공 중 흰 공의 개수를 a, 주머니 B에서 꺼낸 2개의 공 중 흰 공의 개수를 b라 하자.

(i) 흰 공을 2개 꺼내는 경우

ⓐ $a=0$, $b=2$일 때,

주머니 A에서 검은 공 2개를 꺼내고, 주머니 B에서 흰 공 2개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는

${}_3C_0\times{}_2C_2\times{}_2C_2\times{}_3C_0=1\times1\times1\times1=1$

ⓑ $a=1$, $b=1$일 때,

주머니 A에서 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내고, 주머니 B에서 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는

${}_3C_1\times{}_2C_1\times{}_2C_1\times{}_3C_1=3\times2\times2\times3=36$

ⓒ $a=2$, $b=0$일 때,

주머니 A에서 흰 공 2개를 꺼내고, 주머니 B에서 검은 공 2개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3C_2\times{}_2C_0\times{}_2C_0\times{}_3C_2={}_3C_1\times{}_2C_0\times{}_2C_0\times{}_3C_1$$
$$=3\times1\times1\times3=9$$

즉, 흰 공을 2개 꺼내는 경우의 수는 $1+36+9=46$

(ii) 흰 공을 2개 꺼내고 같은 숫자가 적힌 공이 있는 경우

ⓐ $a=0$, $b=2$일 때,

주머니 A에서 숫자 2, 4가 적힌 검은 공을 꺼내고, 주머니 B에서 숫자 2, 4가 적힌 흰 공을 꺼내면 되므로 그 경우의 수는 1

ⓑ $a=1$, $b=1$일 때,

주머니 A에서 숫자 1, 3이 적힌 흰 공 중 1개, 숫자 2, 4가 적힌 검은 공 중 1개를 꺼낼 때, 같은 숫자가 적힌 공이 없으려면 주머니 B에서 숫자 2, 4가 적힌 흰 공 중 주머니 A에서 뽑은 검은 공에 적힌 숫자를 제외한 1개, 숫자 5, 6, 7이 적힌 검은 공 중 1개를 꺼내야 하므로 그 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_1\times1\times{}_3C_1=2\times2\times1\times3=12$

주머니 A에서 숫자 5가 적힌 흰 공 1개, 숫자 2, 4가 적힌 검은 공 중 1개를 꺼낼 때, 같은 숫자가 적힌 공이 없으려면 주머니 B에서 숫자 2, 4가 적힌 흰 공 중 주머니 A에서 뽑은 검은 공에 적힌 숫자를 제외한 1개, 숫자 6, 7이 적힌 검은 공 중 1개를 꺼내야 하므로 그 경우의 수는

$1\times{}_2C_1\times1\times{}_2C_1=1\times2\times1\times2=4$

즉, 같은 숫자가 적힌 공이 있는 경우의 수는

$36-(12+4)=20$

ⓒ $a=2$, $b=0$일 때,

주머니 A에서 숫자 1, 3, 5가 적힌 공 중 2개를 꺼내고 주머니 B에서 숫자 5, 6, 7이 적힌 공 중 2개를 꺼내야 하므로 같은 숫자는 5만 가능하다. 즉, 두 주머니 모두 숫자 5가 적힌 공을 포함하여 꺼내야 하므로 같은 숫자가 적힌 공이 있는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_1=2\times2=4$

즉, 흰 공을 2개 꺼내고 같은 숫자가 적힌 공이 있는 경우의 수는

$1+20+4=25$

(i), (ii)에서

$$P(A)=\frac{46}{100}=\frac{23}{50},\ P(A\cap B)=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$$

따라서 $p=P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{23}{50}}=\frac{25}{46}$이므로

$$92p=92\times\frac{25}{46}=50$$

참고 $P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{25}{46}$

최고수준 도전 기출 102~103쪽

0446 답 ④

전략 (가), (나)에서 $n(A\cap B)$, $n(A)$, $n(B)$를 구한 후 세 집합 $A\cap B$, $A-B$, $B-A$의 원소를 정하는 방법의 수를 구한다.

$n(S)=6$이고, (나)에서 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$이므로

$\frac{n(A\cap B)}{6}=\frac{1}{6}$ $\therefore n(A\cap B)=1$

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{n(A)}{6}=\frac{1}{2}$ $\therefore n(A)=3$

또 $\mathrm{P}(A|B)=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$에서

$\frac{1}{n(B)}=\frac{1}{2}$ $\therefore n(B)=2$

두 사건 A, B에 대하여 두 집합 A, B의 원소를 정하는 방법의 수는 다음과 같이 구할 수 있다.

(i) 집합 $A\cap B$의 원소를 정하는 방법의 수는
$n(A\cap B)=1$이므로
${}_6\mathrm{C}_1=6$

(ii) 집합 $A-B$의 원소를 정하는 방법의 수는
$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=3-1=2$이므로
${}_5\mathrm{C}_2=10$

(iii) 집합 $B-A$의 원소를 정하는 방법의 수는
$n(B-A)=n(B)-n(A\cap B)=2-1=1$이므로
${}_3\mathrm{C}_1=3$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 순서쌍 (A, B)의 개수는
$6\times10\times3=180$

0447 답 ①

전략 $a_k\le k$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값이 3이 되기 위한 a_1, a_2, a_3의 값의 범위를 정하고, a_3의 값에 따라 경우를 나누어 조건부확률을 구한다.

$a_k\le k$를 만족시키는 자연수 k $(1\le k\le5)$의 최솟값이 3인 사건을 A, $a_1+a_2=a_4+a_5$인 사건을 B라 하자.

5개의 공을 순서대로 꺼내는 모든 경우의 수는
$5!=120$

(i) $a_k\le k$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값이 3인 경우
$a_1>1$, $a_2>2$, $a_3\le3$이어야 한다.

ⓐ $a_3=1$일 때,
a_2가 될 수 있는 것은 3, 4, 5의 3가지
a_1이 될 수 있는 것은 2, 3, 4, 5 중에서 a_2를 제외한 3가지
a_4가 될 수 있는 것은 2, 3, 4, 5 중에서 a_1, a_2를 제외한 2가지
a_5가 될 수 있는 것은 2, 3, 4, 5 중에서 a_1, a_2, a_4를 제외한 1가지
즉, $a_3=1$인 경우의 수는
$3\times3\times2\times1=18$

ⓑ $a_3=2$일 때,
a_2가 될 수 있는 것은 3, 4, 5의 3가지
a_1이 될 수 있는 것은 3, 4, 5 중에서 a_2를 제외한 2가지
a_4가 될 수 있는 것은 1, 3, 4, 5 중에서 a_1, a_2를 제외한 2가지
a_5가 될 수 있는 것은 1, 3, 4, 5 중에서 a_1, a_2, a_4를 제외한 1가지
즉, $a_3=2$인 경우의 수는
$3\times2\times2\times1=12$

ⓒ $a_3=3$일 때,
a_2가 될 수 있는 것은 4, 5의 2가지
a_1이 될 수 있는 것은 2, 4, 5 중에서 a_2를 제외한 2가지
a_4가 될 수 있는 것은 1, 2, 4, 5 중에서 a_1, a_2를 제외한 2가지
a_5가 될 수 있는 것은 1, 2, 4, 5 중에서 a_1, a_2, a_4를 제외한 1가지
즉, $a_3=3$인 경우의 수는
$2\times2\times2\times1=8$

즉, 이때의 경우의 수는 $18+12+8=38$

(ii) $a_k\le k$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값이 3이고,
$a_1+a_2=a_4+a_5$인 경우
$a_1+a_2=a_4+a_5=m$이라 하면
$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=15$에서 $a_3=15-2m$
즉, a_3은 홀수이고, $a_3\le3$이므로 $a_3=1$ 또는 $a_3=3$이다.

ⓐ $a_3=1$일 때,
$1=15-2m$에서 $m=7$
$a_1+a_2=a_4+a_5=7$이고 $a_1>1$, $a_2>2$를 만족시키는 순서쌍 (a_1, a_2, a_4, a_5)는
$(2, 5, 3, 4)$, $(2, 5, 4, 3)$, $(3, 4, 2, 5)$, $(3, 4, 5, 2)$, $(4, 3, 2, 5)$, $(4, 3, 5, 2)$의 6가지

ⓑ $a_3=3$일 때,
$3=15-2m$에서 $m=6$
$a_1+a_2=a_4+a_5=6$이고 $a_1>1$, $a_2>2$를 만족시키는 순서쌍 (a_1, a_2, a_4, a_5)는
$(2, 4, 1, 5)$, $(2, 4, 5, 1)$의 2가지

즉, 이때의 경우의 수는 $6+2=8$

(i), (ii)에서
$\mathrm{P}(A)=\frac{38}{120}=\frac{19}{60}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{19}{60}}=\frac{4}{19}$

참고 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{8}{38}=\frac{4}{19}$

0448 답 50

전략 갑, 을, 병이 꺼낸 카드에 적힌 수를 각각 a, b, c라 하고 $a>b$인 경우의 확률과 $a>b$이고 $a>b+c$인 경우의 확률을 구한다.

갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을이 꺼낸 카드에 적힌 수보다 큰 사건을 A, 갑이 꺼낸 카드에 적힌 수가 을과 병이 꺼낸 카드에 적힌 수의 합보다 큰 사건을 B라 하자.

갑, 을, 병이 각각 주머니에서 1장의 카드를 꺼내는 모든 경우의 수는
${}_6C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_1=6\times3\times3=54$
갑, 을, 병이 꺼낸 카드에 적힌 수를 각각 a, b, c라 하자.
(i) $a>b$인 경우
$b=1$일 때, $a=2$, 3, 4, 5, 6의 5가지
$b=2$일 때, $a=3$, 4, 5, 6의 4가지
$b=3$일 때, $a=4$, 5, 6의 3가지
이때 각각의 경우에 대하여 병이 3장의 카드 중에서 1장을 꺼내는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
즉, $a>b$인 경우의 수는
$(5+4+3)\times3=36$
(ii) $a>b$이고 $a>b+c$인 경우
ⓐ $b=1$, $c=1$일 때,
$a=3$, 4, 5, 6의 4가지
ⓑ $b=1$, $c=2$ 또는 $b=2$, $c=1$일 때,
$a=4$, 5, 6의 3가지
즉, 그 경우의 수는 $2\times3=6$
ⓒ $b=1$, $c=3$ 또는 $b=2$, $c=2$ 또는 $b=3$, $c=1$일 때,
$a=5$, 6의 2가지
즉, 그 경우의 수는 $3\times2=6$
ⓓ $b=2$, $c=3$ 또는 $b=3$, $c=2$일 때,
$a=6$의 1가지
즉, 그 경우의 수는 $2\times1=2$
즉, $a>b$이고 $a>b+c$인 경우의 수는
$4+6+6+2=18$
(i), (ii)에서
$\mathrm{P}(A)=\frac{36}{54}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{18}{54}=\frac{1}{3}$
따라서 $k=\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$이므로
$100k=100\times\frac{1}{2}=50$
참고 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

0449 답 ⑤

전략 n의 양의 약수의 개수가 홀수이려면 n이 완전제곱수이어야 함을 이용하여 확률을 구한다.

선택한 2장의 카드에 적힌 두 수의 곱 n의 양의 약수의 개수가 홀수인 사건을 A, 두 수의 합이 5 이상인 사건을 B라 하자.
16장의 카드 중에서 2장을 선택하는 모든 경우의 수는 ${}_{16}C_2=120$
(i) n의 양의 약수의 개수가 홀수인 경우
n의 양의 약수의 개수가 홀수이려면 n은 완전제곱수이어야 한다.
ⓐ $n=1$일 때
1이 적힌 카드가 1장뿐이므로 조건을 만족시키지 않는다.
ⓑ $n=4$일 때
1이 적힌 카드 1장, 4가 적힌 카드 1장을 택하거나 2가 적힌 카드 2장을 택하면 되므로 그 경우는 수는
${}_1C_1\times{}_4C_1+{}_2C_2=4+1=5$
ⓒ $n=9$일 때
3이 적힌 카드 2장을 택하면 되므로 그 경우는 수는
${}_3C_2={}_3C_1=3$
ⓓ $n=16$일 때
4가 적힌 카드 2장을 택하면 되므로 그 경우는 수는
${}_4C_2=6$
ⓔ $n=36$일 때
6이 적힌 카드 2장을 택하면 되므로 그 경우는 수는
${}_6C_2=15$
즉, 이때의 경우의 수는
$5+3+6+15=29$
(ii) n의 양의 약수의 개수가 홀수이면서 두 수의 합이 5 이상인 경우
(i)에서 2가 적힌 카드 2장을 택하는 경우만 제외하면 되므로
이때의 경우의 수는 $29-1=28$
(i), (ii)에서
$\mathrm{P}(A)=\frac{29}{120}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{28}{120}=\frac{7}{30}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{7}{30}}{\frac{29}{120}}=\frac{28}{29}$
참고 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{28}{29}$

0450 답 $\frac{7}{45}$

전략 $f(1)$, $f(5)$의 값에 따라 경우를 나누어 조건부확률을 구한다.

함수 f가 3 이하의 모든 자연수 n에 대하여 $f(2n-1)<f(2n)$인 사건을 A, $f(1)+f(5)=6$인 사건을 B라 하자.
집합 X에서 X로의 함수 f의 개수는
${}_6\Pi_6=6^6$
(i) $f(2n-1)<f(2n)$ $(n=1, 2, 3)$인 경우
$f(2n-1)<f(2n)$에 $n=1$, 2, 3을 차례대로 대입하면
$f(1)<f(2)$, $f(3)<f(4)$, $f(5)<f(6)$
ⓐ $f(1)<f(2)$를 만족시키도록 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 1부터 6까지의 자연수 중에서 2개를 택하여 크기가 작은 것부터 순서대로 $f(1)$, $f(2)$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_6C_2=15$
ⓑ $f(3)<f(4)$를 만족시키도록 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수도 ⓐ와 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 15
ⓒ $f(5)<f(6)$을 만족시키도록 $f(5)$, $f(6)$의 값을 정하는 경우의 수도 ⓐ와 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 15
즉, 이때의 경우의 수는
$15\times15\times15=15^3$
(ii) $f(2n-1)<f(2n)$ $(n=1, 2, 3)$이고 $f(1)+f(5)=6$인 경우
ⓐ $f(1)=1$, $f(5)=5$일 때,
$f(2)$가 될 수 있는 것은 2, 3, 4, 5, 6의 5가지
$f(6)$이 될 수 있는 것은 6의 1가지
$f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$
즉, $f(1)=1$, $f(5)=5$인 경우의 수는 $5\times1\times15=75$

ⓑ $f(1)=2$, $f(5)=4$일 때,
$f(2)$가 될 수 있는 것은 3, 4, 5, 6의 4가지
$f(6)$이 될 수 있는 것은 5, 6의 2가지
$f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$
즉, $f(1)=2$, $f(5)=4$인 경우의 수는 $4\times2\times15=120$
ⓒ $f(1)=3$, $f(5)=3$일 때,
$f(2)$가 될 수 있는 것은 4, 5, 6의 3가지
$f(6)$이 될 수 있는 것은 4, 5, 6의 3가지
$f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$
즉, $f(1)=3$, $f(5)=3$인 경우의 수는 $3\times3\times15=135$
ⓓ $f(1)=4$, $f(5)=2$일 때,
$f(2)$가 될 수 있는 것은 5, 6의 2가지
$f(6)$이 될 수 있는 것은 3, 4, 5, 6의 4가지
$f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$
즉, $f(1)=4$, $f(5)=2$인 경우의 수는 $2\times4\times15=120$
ⓔ $f(1)=5$, $f(5)=1$일 때,
$f(2)$가 될 수 있는 것은 6의 1가지
$f(6)$이 될 수 있는 것은 2, 3, 4, 5, 6의 5가지
$f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$
즉, $f(1)=5$, $f(5)=1$인 경우의 수는 $1\times5\times15=75$
즉, 이때의 경우의 수는
$75+120+135+120+75=525$

(i), (ii)에서
$\mathrm{P}(A)=\frac{15^3}{6^6}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{525}{6^6}$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{525}{6^6}}{\frac{15^3}{6^6}}=\frac{7}{45}$$
참고 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{525}{15^3}=\frac{7}{45}$

0451 답 ④

전략 $f(1)$의 값에 따라 경우를 나누어 조건부확률을 구한다.

a가 b의 약수이면 $f(a)$는 $f(b)$의 약수인 사건을 A, $f(4)$가 짝수인 사건을 B라 하자.
집합 X에서 X로의 함수 f의 개수는 ${}_4\Pi_4=4^4$
(i) a가 b의 약수이면 $f(a)$는 $f(b)$의 약수인 경우는 다음 네 가지 경우가 동시에 일어나는 경우이다.
$f(1)$은 $f(2)$의 약수이다.
$f(1)$은 $f(3)$의 약수이다.
$f(1)$은 $f(4)$의 약수이다.
$f(2)$는 $f(4)$의 약수이다.
이때 $f(1)$의 값에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.
ⓐ $f(1)=1$인 경우
㉠ $f(2)=1$일 때,
$f(3)$이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4가지
$f(4)$가 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4가지
즉, 이 경우의 수는 $4\times4=16$
㉡ $f(2)=2$일 때,
$f(3)$이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4가지
$f(4)$가 될 수 있는 것은 2, 4의 2가지
즉, 이 경우의 수는 $4\times2=8$
㉢ $f(2)=3$일 때,
$f(3)$이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4가지
$f(4)$가 될 수 있는 것은 3의 1가지
즉, 이 경우의 수는 $4\times1=4$
㉣ $f(2)=4$일 때,
$f(3)$이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, 4의 4가지
$f(4)$가 될 수 있는 것은 4의 1가지
즉, 이 경우의 수는 $4\times1=4$
즉, $f(1)=1$인 경우의 수는
$16+8+4+4=32$
ⓑ $f(1)=2$인 경우
㉠ $f(2)=2$일 때,
$f(3)$이 될 수 있는 것은 2, 4의 2가지
$f(4)$가 될 수 있는 것은 2, 4의 2가지
즉, 이 경우의 수는 $2\times2=4$
㉡ $f(2)=4$일 때,
$f(3)$이 될 수 있는 것은 2, 4의 2가지
$f(4)$가 될 수 있는 것은 4의 1가지
즉, 이 경우의 수는 $2\times1=2$
즉, $f(1)=2$인 경우의 수는
$4+2=6$
ⓒ $f(1)=3$인 경우
$f(2)=f(3)=f(4)=3$인 경우뿐이므로 1가지
ⓓ $f(1)=4$인 경우
$f(2)=f(3)=f(4)=4$인 경우뿐이므로 1가지
즉, a가 b의 약수이면 $f(a)$는 $f(b)$의 약수인 경우의 수는
$32+6+1+1=40$
(ii) a가 b의 약수이면 $f(a)$는 $f(b)$의 약수이면서 $f(4)$가 짝수인 경우
(i)의 ⓐ에서 $f(4)$가 짝수인 경우의 수는
$4\times2+4\times2+4\times1=20$
(i)의 ⓑ에서 $f(4)$가 짝수인 경우의 수는
$2\times2+2\times1=6$
(i)의 ⓒ에서 $f(4)$가 짝수인 경우는 없다.
(i)의 ⓓ에서 $f(4)$가 짝수인 경우의 수는 1
즉, 이때의 경우의 수는
$20+6+0+1=27$
(i), (ii)에서
$\mathrm{P}(A)=\frac{40}{4^4}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{27}{4^4}$
따라서 구하는 확률은
$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{27}{4^4}}{\frac{40}{4^4}}=\frac{27}{40}$$
참고 $\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{27}{40}$

07 확률의 곱셈정리

난이도별 필수 기출 105~121쪽

0452 답 ④

임의로 택한 1명이 컵라면을 구매한 고객인 사건을 A, 삼각 김밥을 구매한 고객인 사건을 B라 하면

$P(A)=0.8$, $P(B|A)=0.6$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=0.8\times0.6=0.48$

0453 답 ②

임의로 택한 1명이 여자 고객인 사건을 A, 40대 고객인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{3}{8}$, $P(B|A)=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$

0454 답 $\frac{2}{15}$

민수가 파란색 볼펜을 꺼내는 사건을 A, 영희가 파란색 볼펜을 꺼내는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $P(B|A)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$

0455 답 18

A가 딸기 맛 사탕을 꺼내는 사건을 A, B가 포도 맛 사탕을 꺼내는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$, $P(B|A)=\frac{9}{14}$

따라서 $p=P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{9}{14}=\frac{9}{35}$이므로

$70p=70\times\frac{9}{35}=18$

0456 답 ①

A가 3의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, B가 4의 배수가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{3}{10}$, $P(B|A)=\frac{2}{9}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$

0457 답 ②

지아가 숫자 2가 적힌 카드를 뽑는 사건을 A, 윤수가 숫자 2가 적힌 카드를 뽑는 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$, $P(B|A)=\frac{4}{9}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{9}$

0458 답 ①

주머니 A를 택하는 사건을 X, 500원짜리 동전을 꺼내는 사건을 Y라 하면

$P(X)=\frac{1}{2}$, $P(Y|X)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

따라서 구하는 확률은

$P(X\cap Y)=P(X)P(Y|X)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

0459 답 $\frac{3}{5}$

A가 이기려면 당첨 제비를 첫 번째에 뽑거나 세 번째에 뽑거나 다섯 번째에 뽑아야 한다. 이때 B는 당첨 제비를 뽑지 않아야 한다.

(i) A가 첫 번째에 당첨 제비를 뽑을 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ …… ⓘ

(ii) A가 세 번째에 당첨 제비를 뽑을 확률은

첫 번째와 두 번째에는 당첨 제비를 뽑지 않아야 하므로

$\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{1}{5}$ …… ⓘⓘ

(iii) A가 다섯 번째에 당첨 제비를 뽑을 확률은

첫 번째부터 네 번째까지는 당첨 제비를 뽑지 않아야 하므로

$\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{15}$ …… ⓘⓘⓘ

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}=\frac{3}{5}$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ A가 첫 번째에 당첨 제비를 뽑을 확률 구하기	30 %
ⓘⓘ A가 세 번째에 당첨 제비를 뽑을 확률 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ A가 다섯 번째에 당첨 제비를 뽑을 확률 구하기	30 %
ⓘⓥ A가 이길 확률 구하기	10 %

0460 답 ⑤

4회 이내에 연습이 끝나려면 3회에서 연습이 끝나거나 4회에서 연습이 끝나야 한다.

(i) 3회에서 연습이 끝나는 경우

(성공, 성공, 성공)이므로 3회 시도에서 연습이 끝날 확률은

$\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{25}$

(ii) 4회에서 연습이 끝나는 경우

(성공, 성공, 실패, 성공)일 때 그 확률은

$\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{4}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{25}$

(성공, 실패, 성공, 성공)일 때 그 확률은

$\left(1-\frac{4}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{4}{5}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{25}$

즉, 4회에서 연습이 끝날 확률은 $\frac{2}{25}+\frac{2}{25}=\frac{4}{25}$

(i), (ii)에서 4회 이내에 연습이 끝날 확률은

$\frac{16}{25}+\frac{4}{25}=\frac{4}{5}$

0461 답 12

성주가 노란 공을 꺼내는 사건을 A, 지호가 파란 공을 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{n}{n+4}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{n+3}$

이때 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{4n}{(n+4)(n+3)}$

즉, $\frac{4n}{(n+4)(n+3)}=\frac{1}{5}$이므로

$(n+4)(n+3)=20n$, $n^2-13n+12=0$

$(n-1)(n-12)=0$ $\therefore n=12$ ($\because n>4$)

0462 답 ④

주머니 A에서 꺼낸 공이 검은 공인 사건을 A, 주머니 B에서 꺼낸 공이 검은 공인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

0463 답 ②

화요일에 비가 오는 사건을 A, 수요일에 비가 오는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.6$, $\mathrm{P}(A^C)=1-0.6=0.4$

$\mathrm{P}(B|A)=0.6$, $\mathrm{P}(B|A^C)=0.3$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.6\times0.6=0.36$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=0.4\times0.3=0.12$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=0.36+0.12=0.48$

0464 답 ②

첫 번째 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 같은 사건을 A, 두 번째 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 서로 다른 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1}=\frac{1}{5}$

첫 번째 꺼낸 두 구슬에 적힌 숫자가 같으면 두 주머니에는 각각 4개의 구슬이 남고, 남아 있는 구슬에 적힌 숫자는 모두 같으므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1}=\frac{3}{4}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{20}$

0465 답 6

빨간색 볼펜의 개수를 n이라 하면 검은색 볼펜의 개수는 $10-n$

이때 $n>10-n$에서 $n>5$

수지가 검은색 볼펜을 꺼내는 사건을 A, 민재가 빨간색 볼펜을 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{10-n}{10}$ …… ⓘ

수지가 검은색 볼펜을 꺼내고 나면 상자에 남은 빨간색 볼펜의 개수는 n, 검은색 볼펜의 개수는 $9-n$이므로

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n}{9}$ …… ⓘⓘ

이때 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{15}$에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\frac{10-n}{10}\times\frac{n}{9}=\frac{n(10-n)}{90}$ …… ⓘⓘⓘ

즉, $\frac{n(10-n)}{90}=\frac{4}{15}$이므로

$n(10-n)=24$, $n^2-10n+24=0$

$(n-4)(n-6)=0$ $\therefore n=6$ ($\because n>5$)

따라서 빨간색 볼펜의 개수는 6이다. …… ⓘⓥ

채점 기준

ⓘ 빨간색 볼펜의 개수를 n으로 놓고 수지가 검은색 볼펜을 꺼낼 확률을 n에 대한 식으로 나타내기	20 %
ⓘⓘ 수지가 검은색 볼펜을 꺼낼 때, 민재가 빨간색 볼펜을 꺼낼 확률을 n에 대한 식으로 나타내기	20 %
ⓘⓘⓘ 수지가 검은색 볼펜, 민재가 빨간색 볼펜을 꺼낼 확률을 n에 대한 식으로 나타내기	20 %
ⓘⓥ 빨간색 볼펜의 개수 구하기	40 %

0466 답 ⑤

꺼낸 두 장의 카드 중에서 홀수가 적힌 카드가 적어도 한 장인 사건의 여사건은 두 장의 카드 모두 짝수가 적힌 카드인 사건이다.

이때 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수가 모두 짝수일 확률은

$\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$

$\therefore p_1=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

꺼낸 두 장의 카드 중에서 한 장의 카드만 홀수가 적힌 카드이려면 첫 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 홀수이고 두 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 짝수이거나 첫 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 짝수이고 두 번째 꺼낸 카드에 적힌 수가 홀수이어야 하므로

$p_2=\frac{5}{9}\times\frac{4}{8}+\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{9}$

$\therefore \frac{p_1}{p_2}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{9}}=\frac{3}{2}$

0467 답 ①

(i) 상자 A에서 흰 공 2개를 꺼낸 경우

상자 A에서 흰 공 2개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

상자 B에는 흰 공 4개, 검은 공 3개가 들어 있으므로

검은 공 2개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{3}{10}\times\frac{1}{7}=\frac{3}{70}$

(ii) 상자 A에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼낸 경우

상자 A에서 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

상자 B에는 흰 공 3개, 검은 공 4개가 들어 있으므로

검은 공 2개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}=\frac{6}{35}$

(iii) 상자 A에서 검은 공 2개를 꺼낸 경우

상자 A에서 검은 공 2개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

상자 B에는 흰 공 2개, 검은 공 5개가 들어 있으므로

검은 공 2개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_5C_2}{{}_7C_2}=\frac{10}{21}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{1}{10}\times\frac{10}{21}=\frac{1}{21}$

(i), (ii), (iii)에서 상자 B에서 검은 공 2개를 꺼낼 확률은

$\frac{3}{70}+\frac{6}{35}+\frac{1}{21}=\frac{11}{42}$

0468 답 ④

(i) 첫 번째 시행에서 게임이 끝나는 경우

첫 번째 시행에서 꺼낸 카드는 빨간 카드 1장, 노란 카드 1장이어야 하므로 그 확률은

$\frac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}=\frac{8}{15}$

(ii) 두 번째 시행에서 게임이 끝나는 경우

첫 번째 시행에서 꺼낸 2장의 카드가 모두 노란 카드이고, 두 번째 시행에서 꺼낸 카드는 빨간 카드 1장, 노란 카드 1장이어야 하므로 그 확률은

$\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{6}{15}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{15}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{8}{15}+\frac{4}{15}=\frac{4}{5}$

참고 (i)에서 첫 번째 시행에서 꺼낸 카드가 빨간 카드 2장인 경우와 (ii)에서 두 번째 시행에서 꺼낸 카드가 빨간 카드 2장인 경우는 게임이 끝난 후 B 봉투에 빨간 카드가 2장 들어 있으므로 조건을 만족시키지 않는다.

0469 답 ③

(다)에서 $3P(A)=2P(B)=6P(C)$이므로

$P(B)=\frac{3}{2}P(A)$, $P(C)=\frac{1}{2}P(A)$ ····· ㉠

(나)에서 A와 B, A와 C, B와 C는 모두 서로 배반사건이므로

$P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=P(A\cap B\cap C)=0$

이때 (가)에서 $P(A\cup B\cup C)=1$이므로

$1=P(A)+P(B)+P(C)$

$1=P(A)+\frac{3}{2}P(A)+\frac{1}{2}P(A)$

$3P(A)=1$ $\therefore P(A)=\frac{1}{3}$

$\therefore P(B)=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{1}{6}$ ($\because$ ㉠)

따라서 $A\cup B\cup C=S$이고, 사건 D가 S의 부분집합이므로

$D=(A\cap D)\cup(B\cap D)\cup(C\cap D)$

$\therefore P(D)=P(A\cap D)+P(B\cap D)+P(C\cap D)$

$=P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$

$=\frac{13}{36}$

0470 답 ④

5회 이상 시행을 한 후 멈추려면 시행을 5회 또는 6회 하고 멈춰야 한다.

(i) 5회 시행을 한 후 멈추는 경우

네 번째 시행까지 소수가 적힌 공 2개와 소수가 아닌 수가 적힌 공 2개를 꺼내고 다섯 번째 시행에서 소수가 적힌 공을 꺼내야 한다.

네 번째 시행까지 소수가 적힌 공 2개와 소수가 아닌 수가 적힌 공 2개를 꺼내는 경우의 수는 소수가 적힌 공 2개, 소수가 아닌 수가 적힌 공 2개를 꺼낸 후 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 그 확률은

$\frac{{}_3C_2\times{}_3C_2\times4!}{{}_6P_4}=\frac{3}{5}$

다섯 번째 시행에서 소수가 적힌 공 1개, 소수가 아닌 수가 적힌 공 1개 중에서 소수가 적힌 공 1개를 꺼내면 되므로 그 확률은

$\frac{1}{2}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$

(ii) 6회 시행을 한 후 멈추는 경우

다섯 번째 시행까지 소수가 적힌 공 2개와 소수가 아닌 수가 적힌 공 3개를 꺼내고 여섯 번째 시행에서 소수가 적힌 공을 꺼내야 한다.

다섯 번째 시행까지 소수가 적힌 공 2개와 소수가 아닌 수가 적힌 공 3개를 꺼내는 경우의 수는 소수가 적힌 공 2개, 소수가 아닌 수가 적힌 공 3개를 꺼낸 후 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로 그 확률은

$\frac{{}_3C_2\times{}_3C_3\times5!}{{}_6P_5}=\frac{1}{2}$

여섯 번째 시행에서 남은 공은 소수가 적힌 공 1개이므로 소수가 적힌 공을 꺼낼 확률은 1

즉, 이때의 확률은 $\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{10}+\frac{1}{2}=\frac{4}{5}$

0471 답 469

주머니에서 꺼낸 공에 적힌 수가 1인 사건을 A, 얻은 점수가 12점인 사건을 B라 하면 주머니에서 꺼낸 공에 적힌 수가 2인 사건은 A^C이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

(i) 주머니에서 꺼낸 공에 적힌 수가 1인 경우

주사위를 3번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 6^3

주사위를 3번 던져 나오는 세 눈의 수의 곱이 12가 되는 경우는 (1, 2, 6), (1, 3, 4), (2, 2, 3)

이므로 그 경우의 수는

$3!+3!+\frac{3!}{2!}=6+6+3=15$

$\therefore \mathrm{P}(B|A)=\frac{15}{6^3}=\frac{5}{72}$

(ii) 주머니에서 꺼낸 공에 적힌 수가 2인 경우

주사위를 4번 던질 때 나오는 모든 경우의 수는 6^4

주사위를 4번 던져 나오는 네 눈의 수의 합이 12가 되는 경우는 (1, 1, 4, 6), (1, 1, 5, 5), (1, 2, 3, 6), (1, 2, 4, 5), (1, 3, 3, 5), (1, 3, 4, 4), (2, 2, 2, 6), (2, 2, 3, 5), (2, 2, 4, 4), (2, 3, 3, 4), (3, 3, 3, 3)의 11가지

ⓐ (1, 2, 3, 6), (1, 2, 4, 5)인 경우의 수는 각각 $4!=24$

ⓑ (1, 1, 4, 6), (1, 3, 3, 5), (1, 3, 4, 4), (2, 2, 3, 5), (2, 3, 3, 4)인 경우의 수는 각각 $\frac{4!}{2!}=12$

ⓒ (1, 1, 5, 5), (2, 2, 4, 4)인 경우의 수는 각각 $\frac{4!}{2!\times 2!}=6$

ⓓ (2, 2, 2, 6)인 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

ⓔ (3, 3, 3, 3)인 경우의 수는 1

즉, 이때의 경우의 수는

$2\times 24+5\times 12+2\times 6+4+1=125$

$\therefore \mathrm{P}(B|A^C)=\frac{125}{6^4}=\frac{125}{1296}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)$

$=\frac{2}{5}\times\frac{5}{72}+\frac{3}{5}\times\frac{125}{1296}=\frac{37}{432}$

따라서 $p=432$, $q=37$이므로

$p+q=432+37=469$

0472 답 ②

임의로 꺼낸 송편이 쑥 송편인 사건을 A, 콩이 든 송편인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$

즉, 콩이 들어 있는 송편일 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{10}+\frac{2}{5}=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}$

0473 답 ①

첫 번째에 흰 공을 꺼내는 사건을 A, 두 번째에 검은 공을 꺼내는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{7}{10}$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{7}{9}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{7}{30}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{7}{10}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{15}$

즉, 두 번째 꺼낸 공이 검은 공일 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{7}{30}+\frac{7}{15}=\frac{7}{10}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{7}{30}}{\frac{7}{10}}=\frac{1}{3}$

0474 답 ①

임의로 선택한 제품이 A 기계에서 생산된 제품인 사건을 X, 불량품인 사건을 Y라 하면

$\mathrm{P}(X)=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(X^C)=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{3}{100}$, $\mathrm{P}(Y|X^C)=\frac{4}{100}$

$\therefore \mathrm{P}(X\cap Y)=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y|X)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{100}=\frac{3}{250}$

$\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y|X^C)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{100}=\frac{3}{125}$

즉, 불량품일 확률은

$\mathrm{P}(Y)=\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\frac{3}{250}+\frac{3}{125}=\frac{9}{250}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X|Y)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(Y)}=\frac{\frac{3}{250}}{\frac{9}{250}}=\frac{1}{3}$

0475 답 ④

임의로 선택한 1명이 여학생인 사건을 A, 박물관을 선택한 학생인 사건을 B라 하면

$P(A^C)=0.4$, $P(A)=1-0.4=0.6$

$P(B|A^C)=0.7$, $P(B|A)=1-0.4=0.6$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=0.6\times0.6=0.36$

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=0.4\times0.7=0.28$

즉, 박물관을 선택한 학생일 확률은

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)=0.36+0.28=0.64$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.36}{0.64}=\frac{9}{16}$$

0476 답 ④

임의로 선택한 1명이 개발직 직원인 사건을 A, 인공지능 관련 자격증을 보유한 직원인 사건을 B라 하면

$P(A)=0.7$, $P(A^C)=0.3$

$P(B|A)=0.2$, $P(B|A^C)=0.1$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=0.7\times0.2=0.14$

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=0.3\times0.1=0.03$

즉, 인공지능 관련 자격증을 보유할 확률은

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)=0.14+0.03=0.17$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.14}{0.17}=\frac{14}{17}$$

0477 답 ⑤

갑이 꺼낸 흰 공의 개수가 을이 꺼낸 흰 공의 개수보다 많은 사건을 A, 을이 꺼낸 공이 모두 검은 공인 사건을 B라 하면 B^C은 을이 꺼낸 공 중에서 적어도 한 개는 흰 공인 사건이다.

(i) 갑이 흰 공 2개, 을이 흰 공 0개를 꺼내는 경우

갑이 5개의 공 중에서 2개를 꺼낼 때 흰 공 3개 중에서 2개를 꺼내고, 을이 남아 있는 3개의 공 중에서 2개를 꺼낼 때 검은 공 2개 중에서 2개를 꺼내는 경우이므로 그 확률은

$$P(A\cap B)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}=\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$$

(ii) 갑이 흰 공 2개, 을이 흰 공 1개를 꺼내는 경우

갑이 5개의 공 중에서 2개를 꺼낼 때 흰 공 3개 중에서 2개를 꺼내고, 을이 남아 있는 3개의 공 중에서 2개를 꺼낼 때 흰 공 1개 중에서 1개와 검은 공 2개 중에서 1개를 꺼내는 경우이므로 그 확률은

$$P(A\cap B^C)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}\times\frac{1\times{}_2C_1}{{}_3C_2}=\frac{3}{10}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$$

(i), (ii)에서

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{3}$$

참고 갑이 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내면 을은 검은 공 2개를 꺼내야 한다. 그런데 갑이 공을 꺼내고 주머니에 남아 있는 검은 공은 1개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

0478 답 ②

주사위의 눈의 수가 짝수인 사건을 A, 동전의 앞면의 개수가 2인 사건을 B라 하면

$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(A^C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(i) 주사위의 눈의 수가 짝수인 경우

동전을 2번 던져 나오는 모든 경우의 수는 $2^2=4$이고, 동전의 앞면의 개수가 2인 경우의 수는 1이므로

$P(B|A)=\frac{1}{4}$

(ii) 주사위의 눈의 수가 홀수인 경우

동전을 3번 던져 나오는 모든 경우의 수는 $2^3=8$이고, 동전의 앞면의 개수가 2인 경우의 수는 ${}_3C_2=3$이므로

$P(B|A^C)=\frac{3}{8}$

(i), (ii)에서

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{16}$

즉, 동전의 앞면의 개수가 2일 확률은

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)=\frac{1}{8}+\frac{3}{16}=\frac{5}{16}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{5}{16}}=\frac{2}{5}$$

0479 답 ③

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3의 배수인 사건을 X, 주머니에서 꺼낸 2개의 공이 모두 파란 공인 사건을 Y라 하면

$P(X)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(X^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

(i) 주사위의 눈의 수가 3의 배수인 경우

주머니 A에 들어 있는 5개의 공 중에서 2개를 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_5C_2=10$이고, 2개의 파란 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_2C_2=1$이므로

$P(Y|X)=\frac{1}{10}$

(ii) 주사위의 눈의 수가 3의 배수가 아닌 경우

주머니 B에 들어 있는 6개의 공 중에서 2개를 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_6C_2=15$이고, 4개의 파란 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$이므로

$P(Y|X^C)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

(i), (ii)에서

$P(X\cap Y)=P(X)P(Y|X)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{30}$

$P(X^C\cap Y)=P(X^C)P(Y|X^C)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$

즉, 꺼낸 2개의 공이 모두 파란 공일 확률은

$$P(Y)=P(X\cap Y)+P(X^C\cap Y)=\frac{1}{30}+\frac{4}{15}=\frac{3}{10}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X|Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}=\frac{\frac{1}{30}}{\frac{3}{10}}=\frac{1}{9}$$

0480 답 ⑤

흰 공이 적어도 한 번 나오는 사건을 A, 흰 공이 한 번만 나오는 사건을 B라 하면 A^C은 2번 모두 검은 공이 나오는 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{6}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

흰 공이 한 번만 나오는 경우는 차례대로 흰 공, 검은 공을 꺼내거나 검은 공, 흰 공을 꺼내는 경우이므로

$$P(B)=\frac{4}{10}\times\frac{6}{9}+\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}=\frac{8}{15}$$

이때 $B\subset A$이므로

$$P(A\cap B)=P(B)=\frac{8}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{8}{15}}{\frac{2}{3}}=\frac{4}{5}$$

0481 답 $\frac{11}{18}$

승우가 던진 주사위의 눈의 수가 4의 약수인 사건을 A, 연지가 이기는 사건을 B라 하면

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$ ····· ⓘ

(i) 승우가 던진 주사위의 눈의 수가 1인 경우

승우가 던진 주사위의 눈의 수가 1일 확률은 $\frac{1}{6}$

연지가 던진 주사위의 눈의 수가 2, 3, 4, 5, 6일 확률은 $\frac{5}{6}$

즉, 연지가 이길 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36}$

(ii) 승우가 던진 주사위의 눈의 수가 2인 경우

승우가 던진 주사위의 눈의 수가 2일 확률은 $\frac{1}{6}$

연지가 던진 주사위의 눈의 수가 3, 4, 5, 6일 확률은 $\frac{4}{6}$

즉, 연지가 이길 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{9}$

(iii) 승우가 던진 주사위의 눈의 수가 4인 경우

승우가 던진 주사위의 눈의 수가 4일 확률은 $\frac{1}{6}$

연지가 던진 주사위의 눈의 수가 5, 6일 확률은 $\frac{2}{6}$

즉, 연지가 이길 확률은 $\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{18}$

(i), (ii), (iii)에서

$$P(A\cap B)=\frac{5}{36}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{11}{36}$$ ····· ⓘⓘ

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{11}{36}}{\frac{1}{2}}=\frac{11}{18}$$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 승우가 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 4의 약수일 확률 구하기	30 %
ⓘⓘ 승우가 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 4의 약수이고 연지가 이길 확률 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 승우가 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 4의 약수일 때, 연지가 이길 확률 구하기	30 %

0482 답 ③

스마트폰을 가지고 있지 않은 학생 수는 $15\times\frac{1}{3}=5$이고, 스마트폰을 가지고 있는 학생 수는 $15-5=10$이다.

처음 선택한 학생이 스마트폰을 가지고 있지 않은 사건을 A, 선택한 두 명 중 적어도 한 명이 스마트폰을 가지고 있지 않은 사건을 B라 하면 B^C은 두 명 모두 스마트폰을 가지고 있는 사건이므로

$$P(A)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3},\ P(B^C)=\frac{10}{15}\times\frac{9}{14}=\frac{3}{7},$$

$$P(B)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$$

이때 $A\subset B$이므로

$$P(A\cap B)=P(A)=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{7}}=\frac{7}{12}$$

0483 답 ⑤

주사위 A를 선택하는 사건을 X, 두 번 모두 1의 눈이 나오는 사건을 Y라 하면

$$P(X)=\frac{1}{2},\ P(X^C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

주사위 A에서 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

주사위 B에서 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이므로

$$P(Y|X)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

$$P(Y|X^C)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

$$\therefore P(X\cap Y)=P(X)P(Y|X)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{18}$$

$$P(X^C\cap Y)=P(X^C)P(Y|X^C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{36}=\frac{1}{72}$$

즉, 두 번 모두 1의 눈이 나올 확률은

$$P(Y)=P(X\cap Y)+P(X^C\cap Y)=\frac{1}{18}+\frac{1}{72}=\frac{5}{72}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X|Y)=\frac{P(X\cap Y)}{P(Y)}=\frac{\frac{1}{18}}{\frac{5}{72}}=\frac{4}{5}$$

0484 답 ①

주사위를 던져 나온 눈의 수가 3의 배수인 사건을 A, 꺼낸 2장의 카드에 적힌 두 수의 합이 소수인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

(i) 상자 A에서 2장의 카드를 꺼내는 경우

두 수의 합이 소수이려면 2와 3이 적힌 카드를 각각 1장씩 꺼내거나 3과 4가 적힌 카드를 각각 1장씩 꺼내야 하므로 그 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{8}{15}$

(ii) 상자 B에서 2장의 카드를 꺼내는 경우

두 수의 합이 소수이려면 3과 4가 적힌 카드를 각각 1장씩 꺼내거나 5와 6이 적힌 카드를 각각 1장씩 꺼내야 하므로 그 확률은

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1\times1+{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{3}\times\frac{8}{15}=\frac{8}{45}$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$

즉, 두 수의 합이 소수일 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{8}{45}+\frac{2}{9}=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{8}{45}}{\frac{2}{5}}=\frac{4}{9}$

0485 답 ②

수신된 메일이 실제로 스팸 메일인 사건을 A, 앱이 스팸 메일이라고 판정한 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.05$, $\mathrm{P}(A^C)=1-0.05=0.95$

$\mathrm{P}(B|A)=0.96$, $\mathrm{P}(B|A^C)=0.04$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.05\times0.96=0.048$

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=0.95\times0.04=0.038$

즉, 앱이 스팸 메일이라고 판정할 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=0.048+0.038=0.086$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.048}{0.086}=\frac{24}{43}$

0486 답 ①

검사를 받은 한 사람이 실제로 건강한 사건을 A, 질병에 걸렸다고 판정받는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.8$, $\mathrm{P}(A^C)=0.2$

$\mathrm{P}(B^C|A^C)=0.05$, $\mathrm{P}(B|A)=0.1$

$\therefore\ \mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C|A^C)=0.2\times0.05=0.01$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.8\times0.1=0.08$

이때 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)$에서

$0.8=0.08+\mathrm{P}(A\cap B^C)$ $\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B^C)=0.72$

즉, $\mathrm{P}(B^C)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=0.72+0.01=0.73$이므로

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-0.73=0.27$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{0.08}{0.27}=\frac{8}{27}$

0487 답 30

임의로 꺼낸 2개의 구슬이 서로 같은 색인 사건을 X, 모두 흰색인 사건을 Y라 하면 Y^C은 적어도 1개의 구슬은 검은색인 사건이다.

(i) 두 상자 A, B에서 흰 구슬을 각각 1개씩 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{a}{100}\times\frac{100-2a}{100}=\frac{a(100-2a)}{10000}$

(ii) 두 상자 A, B에서 검은 구슬을 각각 1개씩 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(X\cap Y^C)=\frac{100-a}{100}\times\frac{2a}{100}=\frac{2a(100-a)}{10000}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(X)=\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X\cap Y^C)$

$=\frac{a(100-2a)}{10000}+\frac{2a(100-a)}{10000}=\frac{a(300-4a)}{10000}$

임의로 꺼낸 구슬이 서로 같은 색일 때, 그 색이 흰색일 확률은

$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{a(100-2a)}{10000}}{\frac{a(300-4a)}{10000}}=\frac{100-2a}{300-4a}$

즉, $\frac{100-2a}{300-4a}=\frac{2}{9}$이므로

$9(100-2a)=2(300-4a)$ $\therefore\ a=30$

0488 답 ⑤

처음 꺼낸 공에 적힌 숫자가 홀수인 사건을 A, [2]에서 구한 두 수의 합이 짝수인 사건을 B라 하자.

(i) 처음 꺼낸 공에 적힌 숫자가 홀수인 경우

처음 꺼낸 공에 적힌 숫자가 1일 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

[1]의 시행을 마친 후 주머니에는 홀수가 적힌 공이 6개, 짝수가 적힌 공이 2개 들어 있다.

이 주머니에서 꺼낸 2개의 공에 적힌 두 수의 합이 짝수이려면 홀수 2개를 꺼내거나 짝수 2개를 꺼내야 하므로 그 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2+{}_2\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{4}{7}$

즉, 처음 꺼낸 공에 적힌 숫자가 홀수이고 [2]에서 꺼낸 2개의 공에 적힌 두 수의 합이 짝수일 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{3}\times\frac{4}{7}=\frac{8}{21}$

(ii) 처음 꺼낸 공에 적힌 숫자가 짝수인 경우

처음 꺼낸 공에 적힌 숫자가 2일 확률은

$\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

[1]의 시행을 마친 후 주머니에는 홀수가 적힌 공이 4개, 짝수가 적힌 공이 4개 들어 있다.

이 주머니에서 꺼낸 2개의 공에 적힌 두 수의 합이 짝수이려면 홀수 2개를 꺼내거나 짝수 2개를 꺼내야 하므로 그 확률은

$$P(B|A^C)=\frac{{}_4C_2+{}_4C_2}{{}_8C_2}=\frac{3}{7}$$

즉, 처음 꺼낸 공에 적힌 숫자가 2이고 [2]에서 꺼낸 2개의 공에 적힌 두 수의 합이 짝수일 확률은

$$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$$

(i), (ii)에서

$$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)=\frac{8}{21}+\frac{1}{7}=\frac{11}{21}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{8}{21}}{\frac{11}{21}}=\frac{8}{11}$$

0489 답 ②

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$$

0490 답 ③

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(B)=P(B|A)=\frac{1}{2},\ P(A)=P(A|B)=\frac{2}{3}$$

$$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$$

0491 답 $\frac{5}{6}$

$2P(A^C)=3P(A)$에서

$2\{1-P(A)\}=3P(A)$

$5P(A)=2 \quad \therefore P(A)=\frac{2}{5}$ ····· (i)

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$에서

$\frac{1}{3}=\frac{2}{5}P(B) \quad \therefore P(B)=\frac{5}{6}$ ····· (ii)

채점 기준	
(i) $P(A)$의 값 구하기	50 %
(ii) $P(B)$의 값 구하기	50 %

0492 답 ④

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

즉, $P(A\cap B)=P(A)-P(B)$에서

$P(A)P(B)=P(A)-P(B)$

$\frac{3}{8}P(A)=P(A)-\frac{3}{8}$

$\frac{5}{8}P(A)=\frac{3}{8} \quad \therefore P(A)=\frac{3}{5}$

0493 답 ⑤

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A)=P(A|B)=\frac{1}{4}$

이때 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이므로

$\frac{1}{6}=\frac{1}{4}P(B) \quad \therefore P(B)=\frac{2}{3}$

두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}P(A^C\cap B)&=P(A^C)P(B)\\&=\{1-P(A)\}P(B)\\&=\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

0494 답 ①

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(B)=P(B|A)=\frac{1}{5}$

$\therefore P(B^C)=1-P(B)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이므로 $P(A^C\cap B^C)=\frac{3}{5}$에서

$P(A^C)P(B^C)=\frac{3}{5},\ \{1-P(A)\}\times\frac{4}{5}=\frac{3}{5}$

$1-P(A)=\frac{3}{4} \quad \therefore P(A)=\frac{1}{4}$

0495 답 ④

$$\begin{aligned}P(A^C)&=P(A^C\cap B)+P(A^C\cap B^C)\\&=\frac{1}{4}+\frac{2}{9}=\frac{17}{36}\end{aligned}$$

$\therefore P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{17}{36}=\frac{19}{36}$

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$P(A^C\cap B)=\frac{1}{4}$에서

$P(A^C)P(B)=\frac{1}{4}$

$\frac{17}{36}P(B)=\frac{1}{4} \quad \therefore P(B)=\frac{9}{17}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{19}{36}\times\frac{9}{17}=\frac{19}{68}$

0496 답 ④

(가)에서 두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{5}P(B)$

(나)에서 $P(A\cup B)=\frac{7}{10}$이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$\frac{7}{10}=\frac{1}{5}+P(B)-\frac{1}{5}P(B)$

$\frac{4}{5}P(B)=\frac{1}{2} \quad \therefore P(B)=\frac{5}{8}$

0497 답 ②

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(B)=P(B|A)=\frac{1}{2}$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$=\frac{2}{7}+\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{14}$

0498 답 ③

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A)=P(A|B)=\frac{1}{5}$

이때 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

$\frac{2}{3}=\frac{1}{5}+P(B)-\frac{1}{5}P(B)$

$\frac{4}{5}P(B)=\frac{7}{15}$ $\therefore P(B)=\frac{7}{12}$

두 사건 A, B가 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)$

$=P(A)\{1-P(B)\}$

$=\frac{1}{5}\times\left(1-\frac{7}{12}\right)=\frac{1}{12}$

0499 답 ⑤

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{6}P(B)$이고,

$P(A\cap B^C)+P(A^C\cap B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)$

$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$

$=\frac{1}{6}+P(B)-\frac{1}{3}P(B)$

$=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}P(B)$

즉, $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}P(B)=\frac{1}{4}$이므로

$\frac{2}{3}P(B)=\frac{1}{12}$ $\therefore P(B)=\frac{1}{8}$

$\therefore P(B^C)=1-P(B)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

다른 풀이

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C과 두 사건 A^C, B도 서로 독립이다.

$P(A\cap B^C)+P(A^C\cap B)=\frac{1}{4}$에서

$P(A)P(B^C)+P(A^C)P(B)=\frac{1}{4}$

$P(A)P(B^C)+\{1-P(A)\}\{1-P(B^C)\}=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{6}P(B^C)+\frac{5}{6}\{1-P(B^C)\}=\frac{1}{4}$

$\frac{2}{3}P(B^C)=\frac{7}{12}$ $\therefore P(B^C)=\frac{7}{8}$

0500 답 $\frac{5}{6}$

두 사건 A, B가 서로 독립이면 $P(A|B)=P(A)$이므로

$P(A)=4P(B)$ ……㉠

이때 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$에서

$P(A)P(B)=\frac{1}{9}$, $4\{P(B)\}^2=\frac{1}{9}$

$\{P(B)\}^2=\frac{1}{36}$ $\therefore P(B)=\frac{1}{6}$ ($\because 0<P(B)<1$)

이것을 ㉠에 대입하여 풀면 $P(A)=\frac{2}{3}$

$\therefore P(A)+P(B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

0501 답 ④

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$에서

$\frac{1}{3}=\frac{3}{4}P(B)$ $\therefore P(B)=\frac{4}{9}$

두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로

$P(B|A^C)=P(B)=\frac{4}{9}$

0502 답 ③

$P(B)=1-P(B^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\frac{1}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{24}$

따라서 $A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$이므로

$P(A^C\cup B^C)=1-P(A\cap B)=1-\frac{5}{24}=\frac{19}{24}$

0503 답 ⑤

ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이므로

$P(B|A)+P(B^C|A^C)=P(B)+P(B^C)=1$

ㄴ. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$P(A)+P(B)=P(A\cup B)+P(A\cap B)$

$P(A)+P(B)>1$이면

$P(A\cup B)+P(A\cap B)>1$

즉, $P(A\cap B)>1-P(A\cup B)$

이때 $0<P(A\cup B)\le 1$이므로

$P(A\cap B)>1-P(A\cup B)\ge 0$

즉, $P(A\cap B)\neq 0$이므로 두 사건 A, B는 서로 배반사건이 아니다.

ㄷ. $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이면 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

이때 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로 두 사건 A, B^C은 서로 종속이 아니다.

ㄹ. $A\subset B$이면 $A\cap B=A$이므로

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

0504 답 ⑤

ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면
$P(A|B)=P(A)$, $P(B|A)=P(B)$
이때 $P(A)\neq P(B)$이면 $P(A|B)\neq P(B|A)$이다.

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이므로
$\{1-P(A)\}\{1-P(B)\}$
$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$
$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$
$=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}$
$=1-P(A\cup B)$

ㄷ. $P(A|B)=P(A|B^C)$이면 사건 B와 관계없이 사건 A가 일어날 확률이 항상 같으므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄴ. 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이므로
$\{1-P(A)\}\{1-P(B)\}=P(A^C)P(B^C)$
$=P(A^C\cap B^C)$
$=P((A\cup B)^C)$
$=1-P(A\cup B)$

0505 답 $\frac{7}{8}$

$P(A)\geq P(A^C)$에서
$P(A)\geq 1-P(A)$, $2P(A)\geq 1$
$\therefore P(A)\geq\frac{1}{2}$ ····· ㉠
두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$
$P(A\cap B)=\frac{1}{8}$에서
$P(A)P(B)=\frac{1}{8}$ ····· ㉡
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서
$\frac{5}{8}=P(A)+P(B)-\frac{1}{8}$
$\therefore P(B)=\frac{3}{4}-P(A)$
이것을 ㉡에 대입하면
$P(A)\left\{\frac{3}{4}-P(A)\right\}=\frac{1}{8}$
$8\{P(A)\}^2-6P(A)+1=0$
$\{4P(A)-1\}\{2P(A)-1\}=0$ $\therefore P(A)=\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉠)
이것을 ㉡에 대입하여 풀면 $P(B)=\frac{1}{4}$
이때 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로
$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B)$
$=\{1-P(A)\}P(B)$
$=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$
따라서 $A\cup B^C=(A^C\cap B)^C$이므로
$P(A\cup B^C)=1-P(A^C\cap B)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

0506 답 ④

두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$에서
$P(A)P(B)=k$ ····· ㉠
이때 $P(A\cap B^C)=\frac{1}{8}$에서
$P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-k$
즉, $P(A)-k=\frac{1}{8}$이므로
$P(A)=k+\frac{1}{8}$ ····· ㉡
또 $P(A^C\cap B)=\frac{1}{4}$에서
$P(A^C\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=P(B)-k$
즉, $P(B)-k=\frac{1}{4}$이므로
$P(B)=k+\frac{1}{4}$ ····· ㉢
㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면
$\left(k+\frac{1}{8}\right)\left(k+\frac{1}{4}\right)=k$ $\therefore k^2-\frac{5}{8}k+\frac{1}{32}=0$
따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{5}{8}$이다.

0507 답 $\frac{4}{9}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$에서
$P(A)P(B)=\frac{1}{9}$
또 두 사건 A, B^C과 두 사건 A^C, B도 각각 서로 독립이므로
$P(A\cap B^C)+P(A^C\cap B)$
$=P(A)P(B^C)+P(A^C)P(B)$
$=P(A)\{1-P(B)\}+\{1-P(A)\}P(B)$
$=P(A)+P(B)-2P(A)P(B)$
$=P(A)+P(B)-\frac{2}{9}$ ····· ㉠
이때 $P(A)>0$, $P(B)>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
$P(A)+P(B)\geq 2\sqrt{P(A)P(B)}=2\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}$
$\left(\text{단, 등호는 } P(A)=P(B)=\frac{1}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$
$\therefore P(A\cap B^C)+P(A^C\cap B)\geq\frac{2}{3}-\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$ ($\because$ ㉠)
따라서 구하는 최솟값은 $\frac{4}{9}$이다.

0508 답 ③

표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{1, 2\}$, $C=\{3, 6\}$, $D=\{2, 4, 6\}$이므로
$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,
$P(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(D)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

① $A\cap B=\{1\}$이므로 $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$P(A)P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

즉, $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이다.

② $A\cap C=\{3\}$이므로 $P(A\cap C)=\frac{1}{6}$

$P(A)P(C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

즉, $P(A\cap C)=P(A)P(C)$이므로 두 사건 A, C는 서로 독립이다.

③ $B\cap C=\varnothing$이므로 $P(B\cap C)=0$

$P(B)P(C)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

즉, $P(B\cap C)\neq P(B)P(C)$이므로 두 사건 B, C는 서로 종속이다.

④ $B\cap D=\{2\}$이므로 $P(B\cap D)=\frac{1}{6}$

$P(B)P(D)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

즉, $P(B\cap D)=P(B)P(D)$이므로 두 사건 B, D는 서로 독립이다.

⑤ $C\cap D=\{6\}$이므로 $P(C\cap D)=\frac{1}{6}$

$P(C)P(D)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

즉, $P(C\cap D)=P(C)P(D)$이므로 두 사건 C, D는 서로 독립이다.

따라서 서로 독립이 아닌 두 사건은 B와 C이다.

0509 답 ①

세 학생 A, B, C가 합격하는 사건을 각각 A, B, C라 하면

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{2}{3}$, $P(C)=\frac{4}{5}$

세 사건 A, B, C는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$

0510 답 ④

갑, 을이 표적을 명중시키는 사건을 각각 A, B라 하면

$P(A)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$, $P(B)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A, B^C도 서로 독립이다.

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)=P(A)\{1-P(B)\}$

$=\frac{4}{5}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{8}{25}$

0511 답 ⑤

ㄱ. (i) 두 수의 합이 홀수인 경우

홀수, 짝수가 적힌 공을 각각 1개씩 꺼내야 하므로 그 확률은

$P(A)=\frac{{}_5C_1\times{}_5C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{5}{9}$

(ii) 두 수의 곱이 짝수인 경우

B^C은 꺼낸 공에 적힌 두 수의 곱이 홀수인 사건이다.

즉, 홀수가 적힌 공을 2개 꺼내야 하므로 그 확률은

$P(B^C)=\frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{9}$

$\therefore P(B)=1-P(B^C)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

(iii) 한 공에 적힌 수가 다른 공에 적힌 수의 배수인 경우

꺼낸 공에 적힌 두 수를 a, b $(a<b)$라 하자.

b가 a의 배수인 경우는

$a=1$일 때, $b=2, 3, 4, \cdots, 10$의 9가지

$a=2$일 때, $b=4, 6, 8, 10$의 4가지

$a=3$일 때, $b=6, 9$의 2가지

$a=4$일 때, $b=8$의 1가지

$a=5$일 때, $b=10$의 1가지

즉, 그 경우의 수는

$9+4+2+1+1=17$

$\therefore P(C)=\frac{17}{{}_{10}C_2}=\frac{17}{45}$

(i), (ii), (iii)에서 $P(C)<P(A)<P(B)$

ㄴ. 꺼낸 공에 적힌 두 수의 합이 홀수이고 곱이 짝수이려면 홀수, 짝수가 적힌 공을 각각 1개씩 꺼내야 하므로 그 확률은

$P(A\cap B)=\frac{{}_5C_1\times{}_5C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{5}{9}$

이때 $P(A)P(B)=\frac{5}{9}\times\frac{7}{9}=\frac{35}{81}$이므로

$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

즉, 두 사건 A, B는 서로 종속이다.

ㄷ. 꺼낸 공에 적힌 두 수의 합이 홀수이고 한 공에 적힌 수가 다른 공에 적힌 수의 배수인 경우는

$(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 10),$

$(3, 6), (5, 10)$의 7가지

즉, $P(A\cap C)=\frac{7}{{}_{10}C_2}=\frac{7}{45}$이므로

$P(A|C)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{7}{45}}{\frac{17}{45}}=\frac{7}{17}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0512 답 ①

표본공간을 S라 하면 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$이므로

$A_3=\{3, 6, 9, 12\}$

$\therefore P(A_3)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

두 사건 A_3과 A_k가 서로 독립이려면

$P(A_3\cap A_k)=P(A_3)P(A_k)$이어야 한다.

(i) $k=1$이면 $A_1=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$

$A_3\cap A_1=A_3$이므로

$P(A_1)=\frac{12}{12}=1$, $P(A_3\cap A_1)=P(A_3)=\frac{1}{3}$

$\therefore P(A_3\cap A_1)=P(A_3)P(A_1)$

즉, 두 사건 A_3과 A_1은 서로 독립이다.

(ii) $k=2$이면 $A_2=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$

$A_3\cap A_2=\{6, 12\}$이므로

$\mathrm{P}(A_2)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A_3\cap A_2)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A_3\cap A_2)=\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(A_2)$

즉, 두 사건 A_3과 A_2는 서로 독립이다.

(iii) $k=4$이면 $A_4=\{4, 8, 12\}$

$A_3\cap A_4=\{12\}$이므로

$\mathrm{P}(A_4)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(A_3\cap A_4)=\frac{1}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(A_3\cap A_4)=\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(A_4)$

즉, 두 사건 A_3과 A_4는 서로 독립이다.

(iv) $k=5$이면 $A_5=\{5, 10\}$

$A_3\cap A_5=\varnothing$이므로

$\mathrm{P}(A_5)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A_3\cap A_5)=0$

$\therefore \mathrm{P}(A_3\cap A_5)\neq\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(A_5)$

즉, 두 사건 A_3과 A_5는 서로 종속이다.

(v) $k=6$이면 $A_6=\{6, 12\}$

$A_3\cap A_6=A_6$이므로

$\mathrm{P}(A_6)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A_3\cap A_6)=\mathrm{P}(A_6)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A_3\cap A_6)\neq\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(A_6)$

즉, 두 사건 A_3과 A_6은 서로 종속이다.

(vi) $k=7, 8, 10, 11$이면 $A_k=\{k\}$

$A_3\cap A_k=\varnothing$이므로

$\mathrm{P}(A_k)=\frac{1}{12}$, $\mathrm{P}(A_3\cap A_k)=0$

$\therefore \mathrm{P}(A_3\cap A_k)\neq\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(A_k)$

즉, 두 사건 A_3과 A_k는 서로 종속이다.

(vii) $k=9, 12$이면 $A_k=\{k\}$

$A_3\cap A_k=A_k$이므로

$\mathrm{P}(A_k)=\frac{1}{12}$, $\mathrm{P}(A_3\cap A_k)=\mathrm{P}(A_k)=\frac{1}{12}$

$\therefore \mathrm{P}(A_3\cap A_k)\neq\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(A_k)$

즉, 두 사건 A_3과 A_k는 서로 종속이다.

(i)~(vii)에서 구하는 모든 k의 값의 합은

$1+2+4=7$

0513 답 ①

임의로 선택한 사람이 여자인 사건을 A, 차를 선호하는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{c}{100}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{b}{100}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{b}{100}=\frac{3}{5}\times\frac{c}{100}$ $\therefore b=\frac{3}{5}c$

이때 표에서 $18+b=c$이므로

$18+\frac{3}{5}c=c$, $\frac{2}{5}c=18$ $\therefore c=45$

$\therefore x=100-c=100-45=55$

다른 풀이

임의로 선택한 사람이 차를 선호하는 사람인 사건과 여자인 사건이 서로 독립이므로 남자든, 여자든 관계없이 차를 선호할 확률은 일정하고, 커피를 선호할 확률도 일정하다.

즉, $\frac{22}{40}=\frac{x}{100}$이므로 $x=55$

0514 답 ④

두 학생 A, B가 예약에 성공하는 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

이때 두 학생 중에서 한 학생만 예약에 성공하는 사건은

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)$

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C과 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}\{(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)\}$

$=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

$=\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}+\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{2}{3}=\frac{7}{12}$

0515 답 ②

A와 B가 승부차기에 성공하는 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{20}$

이때 적어도 한 명이 승부차기에 성공하는 사건은 $A\cup B$이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{5}-\frac{3}{20}=\frac{4}{5}$

다른 풀이

$\mathrm{P}(A\cup B)$의 값은 다음과 같이 구할 수도 있다.

$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$이고

두 사건 A, B가 독립이면 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$

$=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$=\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

0516 답 ⑤

세 선수 A, B, C가 화살을 한 번 쏘아 표적을 맞히는 사건을 각각 A, B, C라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{4}{5}$

세 선수가 각각 화살을 한 번씩 쏠 때, 표적을 맞힌 화살이 있는 사건은 $A\cup B\cup C$이다.

$(A\cup B\cup C)^C=A^C\cap B^C\cap C^C$이고, 세 사건 A, B, C가 서로 독립이면 세 사건 A^C, B^C, C^C도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B^C\cap C^C)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\mathrm{P}(C^C)\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}\{1-\mathrm{P}(C)\}\\&=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\left(1-\frac{4}{5}\right)=\frac{1}{60}\end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B\cup C)&=1-\mathrm{P}(A^C\cap B^C\cap C^C)\\&=1-\frac{1}{60}=\frac{59}{60}\end{aligned}$$

0517 답 ②

두 사람 A, B가 예선을 통과하는 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^C도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$에서

$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B^C)$ $\therefore\ \mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

이때 두 사건 A^C, B도 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)\\&=\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)\\&=\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

0518 답 ⑤

두 주머니 A, B에서 꺼낸 공에 적힌 수가 짝수인 사건을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 두 사건 A^C, B^C도 서로 독립이다.

이때 꺼낸 공에 적힌 두 수의 합이 짝수이려면 두 수 모두 짝수이거나 모두 홀수이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B^C)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)+\{1-\mathrm{P}(A)\}\{1-\mathrm{P}(B)\}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

0519 답 ③

구독 서비스 이용 경험이 없는 여학생 수를 x라 하면

조사한 학생 수는 $24+12+32+x=68+x$

주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
구독 서비스 이용 경험 있음	24	32	56
구독 서비스 이용 경험 없음	12	x	$12+x$
합계	36	$32+x$	$68+x$

임의로 선택한 1명이 여학생인 사건을 A, 구독 서비스 이용 경험이 있는 학생인 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{32+x}{68+x}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{56}{68+x}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{32}{68+x}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{32}{68+x}=\frac{32+x}{68+x}\times\frac{56}{68+x}$

$32(68+x)=56(32+x)$ $\therefore\ x=16$

즉, 구독 서비스 이용 경험이 없는 여학생 수는 16이다.

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}=\frac{\frac{16}{84}}{\frac{28}{84}}=\frac{4}{7}$$

참고 $\mathrm{P}(A|B^C)=\frac{n(A\cap B^C)}{n(B^C)}=\frac{16}{28}=\frac{4}{7}$

0520 답 ②

$f(a)=0$이 되는 a는 3, 4의 2가지,

$f(b)=0$이 되는 b는 3, 4의 2가지이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ $\therefore\ m=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ $\therefore\ n=\frac{1}{9}$

이때 $\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}$ $\therefore\ k=\frac{5}{9}$

$\therefore\ m\times n\times k=\frac{1}{3}\times\frac{1}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{243}$

0521 답 ⑤

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{3, 6\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

이때 $n(A\cap B)=x$, $n(B)=y(y>0)$라 하면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{6}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{y}{6}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{x}{6}=\frac{1}{3}\times\frac{y}{6}$ $\therefore\ y=3x$

이때 $A\cap B$는 A의 부분집합이므로

$n(A\cap B)\le n(A)$, 즉 $x\le 2$

(i) $x=1$이면 $y=3$이므로

$n(A\cap B)=1$, $n(B)=3$

즉, B는 A의 원소 2개 중에서 1개를 포함하고, A^C의 원소 4개 중에서 2개를 포함해야 하므로 사건 B의 개수는

${}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2=2\times 6=12$

(ii) $x=2$이면 $y=6$이므로

$n(A\cap B)=2$, $n(B)=6$

이때 $n(S)=6$이므로 $B=S$

즉, 사건 B의 개수는 1

(i), (ii)에서 구하는 사건 B의 개수는 $12+1=13$

0522 답 $\frac{23}{90}$

세 학생 A, B, C가 부전승 자리에 배정받을 확률은 모두 $\frac{1}{3}$로 같다.

(i) A가 부전승 자리에 배정받는 경우

B와 C가 시합하여 B가 이기고, 다시 B가 A와 시합하여 우승할 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}$ …… ⓘ

└→ A가 부전승 자리에 배정받을 확률

(ii) B가 부전승 자리에 배정받는 경우

ⓐ A와 C가 시합하여 A가 이기고, 다시 B가 A와 시합하여 우승할 확률은

$\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{45}$

└→ B가 부전승 자리에 배정받을 확률

ⓑ A와 C가 시합하여 C가 이기고, 다시 B가 C와 시합하여 우승할 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{10}$

└→ B가 부전승 자리에 배정받을 확률

즉, B가 부전승 자리에 배정받고 우승할 확률은

$\frac{2}{45}+\frac{1}{10}=\frac{13}{90}$ …… ⓘⓘ

(iii) C가 부전승 자리에 배정받는 경우

A와 B가 시합하여 B가 이기고, 다시 B가 C와 시합하여 우승할 확률은

$\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$ …… ⓘⓘⓘ

└→ C가 부전승 자리에 배정받을 확률

(i), (ii), (iii)에서 B가 우승할 확률은

$\frac{1}{18}+\frac{13}{90}+\frac{1}{18}=\frac{23}{90}$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ A가 부전승 자리에 배정받고 B가 우승할 확률 구하기	30 %
ⓘⓘ B가 부전승 자리에 배정받고 B가 우승할 확률 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ C가 부전승 자리에 배정받고 B가 우승할 확률 구하기	30 %
ⓘⓥ B가 우승할 확률 구하기	10 %

0523 답 ④

지아가 이기는 사건을 A, 수지가 이기는 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

(i) 지아가 승자로 결정되는 경우

사건이 $BABAA$ 순서로 일어나야 하므로 그 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{243}$

(ii) 수지가 승자로 결정되는 경우

사건이 $ABABB$ 순서로 일어나야 하므로 그 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{243}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{8}{243}+\frac{4}{243}=\frac{4}{81}$

0524 답 ③

주사위 한 개를 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수인 사건을 A, 6의 약수가 아닌 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

3번째 시행에서 5가 적혀 있는 카드가 뒤집히려면 2번째 시행까지 뒤집힌 카드는 3장 또는 4장 이어야 한다.

(i) 사건이 ABB 순서로 일어날 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$

(ii) 사건이 BAB 순서로 일어날 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$

(iii) 사건이 BBA 순서로 일어날 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$

(iv) 사건이 BBB 순서로 일어날 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$

(i)~(iv)에서 구하는 확률은

$\frac{2}{27}+\frac{2}{27}+\frac{2}{27}+\frac{1}{27}=\frac{7}{27}$

0525 답 34

$A=\{1, 2, 4\}$이고, 사건 B의 원소의 개수가 2이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

즉, $A\cap B$의 원소의 개수는 1이므로 이차방정식 $n^2-an+b=0$의 서로 다른 두 실근 중에서 하나는 8의 약수이어야 한다.

B의 원소 중 8의 약수인 원소를 x, 8의 약수가 아닌 원소를 y라 하면 x, y가 이차방정식 $n^2-an+b=0$의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$x+y=a$, $xy=b$

x의 값으로 가능한 수는 1, 2, 4, y의 값으로 가능한 수는 3, 5, 6이고, $a+b=x+y+xy$이므로 $a+b$의 최댓값은 x, y의 값이 각각 최대일 때이다.

따라서 구하는 최댓값은 $x=4$, $y=6$일 때이므로

$4+6+24=34$

0526 답 ③

A가 최종 우승하려면 B는 3번 또는 4번 또는 5번 자리에 배치되고, 결승에 올라가기 전에 패배해야 하고, A는 2번 자리에 배치된 학생과의 경기에서 승리하고 결승에서 승리해야 한다.

이때 B가 3번 또는 4번 또는 5번 자리에 배치될 확률은 모두 $\frac{1}{4}$로 같다.

(i) B가 3번 자리에 배치되는 경우

ⓐ 4번 자리에 배치된 학생과의 경기에서 B가 패배할 확률은

$\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$

└→ B가 3번 자리에 배치될 확률

ⓑ 4번 자리에 배치된 학생과의 경기에서 B가 승리하고, 5번 자리에 배치된 학생과의 경기에서 B가 패배할 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{16}$

└→ B가 3번 자리에 배치될 확률

즉, B가 3번 자리에 배치되고 결승에 올라가기 전에 패배할 확률은 $\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{3}{16}$

(ii) B가 4번 자리에 배치되는 경우

(i)과 같은 방법으로 B가 4번 자리에 배치되고 결승에 올라가기 전에 패배할 확률은 $\frac{3}{16}$

(iii) B가 5번 자리에 배치되는 경우

3번 자리에 배치된 학생과 4번 자리에 배치된 학생의 경기에서의 승자와 경기하여 B가 패배할 확률은

$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

└→ B가 5번 자리에 배치될 확률

(i), (ii), (iii)에서 B가 결승에 올라가기 전에 패배할 확률은

$\frac{3}{16}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

이때 A가 2번 자리에 배치된 학생과의 경기에서 이기고, 결승에서도 이길 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

따라서 A가 최종 우승할 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

최고수준 도전 기출 122~123쪽

0527 답 $\frac{1}{10}$

전략 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^a+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^b$을 간단히 정리하여 a의 값에 따라 경우를 나누어 구한다.

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^a+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^b=0$인 사건을 A, ab의 값이 25보다 큰 사건을 B라 하자.

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$

$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$

이므로 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^a+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^b=i^a+(-i)^b=0$

(i) $a=1$일 때,

$(-i)^b=-i$이어야 하므로 $b=1, 5, 9$의 3가지이다.

(ii) $a=2$일 때,

$(-i)^b=1$이어야 하므로 $b=4, 8$의 2가지이다.

(iii) $a=3$일 때,

$(-i)^b=i$이어야 하므로 $b=3, 7$의 2가지이다.

(iv) $a=4$일 때,

$(-i)^b=-1$이어야 하므로 $b=2, 6, 10$의 3가지이다.

(i)~(iv)에서 그 경우의 수는 $3+2+2+3=10$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{10}{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_{10}\mathrm{C}_1}=\frac{1}{4}$

또 (i)~(iv)에서 ab의 값이 25보다 큰 경우를 a, b의 순서쌍 (a, b)로 나타내면 $(4, 10)$의 1가지이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{10}{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_{10}\mathrm{C}_1}=\frac{1}{40}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{40}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{10}$

0528 답 ③

전략 첫 번째 시행에서 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자가 1, 1 또는 1, 2 또는 2, 2인 경우로 나눈 후, 두 번째 시행 후 주머니 속에 숫자 2가 적힌 공이 3개 이상 있을 확률을 구한다.

(i) 첫 번째 시행에서 숫자 1이 적힌 공 2개를 꺼내는 경우

첫 번째 시행에서 숫자 1이 적힌 공 2개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

공에 적힌 숫자의 곱이 홀수이므로 숫자 2가 적힌 공 2개를 넣으면 주머니에는 숫자 2가 적힌 공 5개가 들어 있다.

두 번째 시행에서는 항상 숫자 2가 적힌 공 2개가 나오고, 공에 적힌 숫자의 곱이 짝수이므로 숫자 1이 적힌 공 2개를 넣으면 주머니에는 숫자 1이 적힌 공 2개, 숫자 2가 적힌 공 3개가 들어 있다.

즉, 이때의 주머니 속에 숫자 2가 적힌 공이 3개 이상일 확률은

$\frac{1}{10}\times1=\frac{1}{10}$

(ii) 첫 번째 시행에서 숫자 1, 2가 적힌 공을 각각 한 개씩 꺼내는 경우

첫 번째 시행에서 숫자 1, 2가 적힌 공을 각각 한 개씩 꺼낼 확률은

$\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2\times3}{10}=\frac{3}{5}$

공에 적힌 숫자의 곱이 짝수이므로 숫자 1이 적힌 공 2개를 넣으면 주머니에는 숫자 1이 적힌 공 3개, 숫자 2가 적힌 공 2개가 들어 있다.

이 주머니에서 두 번째 시행 후 숫자 2가 적힌 공이 3개 이상이려면 숫자 2가 적힌 공의 개수가 늘어나야 하므로 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자의 곱이 홀수이어야 한다.

즉, 숫자 1이 적힌 공 2개를 꺼내야 하므로 그 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

즉, 이때의 주머니 속에 숫자 2가 적힌 공이 3개 이상일 확률은

$\frac{3}{5}\times\frac{3}{10}=\frac{9}{50}$

(iii) 첫 번째 시행에서 숫자 2가 적힌 공 2개를 꺼내는 경우

첫 번째 시행에서 숫자 2가 적힌 공 2개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

공에 적힌 숫자의 곱이 짝수이므로 숫자 1이 적힌 공 2개를 넣으면 주머니에는 숫자 1이 적힌 공 4개, 숫자 2가 적힌 공 1개가 들어 있다.

이 주머니에서 두 번째 시행 후 숫자 2가 적힌 공이 3개 이상이려면 숫자 2가 적힌 공의 개수가 늘어나야 하므로 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자의 곱이 홀수이어야 한다.

즉, 숫자 1이 적힌 공 2개를 꺼내야 하므로 그 확률은

$\frac{{}_4C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{5}$

즉, 이때의 주머니 속에 숫자 2가 적힌 공이 3개 이상일 확률은

$\frac{3}{10}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{50}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{10}+\frac{9}{50}+\frac{9}{50}=\frac{23}{50}$

0529 답 ⑤

전략 점 P가 직선 $y=x$ 위에 도착하는 경우는 점 (3, 3) 또는 점 (6, 6)에 도착하는 경우이므로 3의 배수가 나온 횟수를 0, 1, 2, 3, 4로 나누어 점 (3, 3) 또는 점 (6, 6)에 도착하는 경우를 찾는다.

주사위를 한 번 던져 나오는 눈의 수가 3의 배수인 사건을 A, 3의 배수가 아닌 사건을 B라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

(i) 3의 배수가 0번 나오는 경우

3의 배수가 아닌 숫자만 나왔으므로 점 P는 x축의 양의 방향으로 2만큼, y축의 양의 방향으로 1만큼씩 4번 이동한다.

이때 점 P는 직선 $y=x$ 위를 지나지 않으므로 그 확률은 0

(ii) 3의 배수가 1번 나오는 경우

사건이 $ABBB$ 또는 $BABB$ 순서로 일어나면 두 번째 시행 후 점 P의 위치는 (3, 3)이므로 직선 $y=x$ 위의 점이다.

즉, 이때의 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$

(iii) 3의 배수가 2번 나오는 경우

네 번째 시행 후 점 P의 최종 위치는 점 (6, 6)이므로 점 P는 직선 $y=x$ 위의 점을 적어도 한 번은 지난다.

3의 배수가 2번 나오는 경우의 수는 A, A, B, B를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

즉, 이때의 확률은

$6\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{8}{27}$

(iv) 3의 배수가 3번 나오는 경우

사건이 $BAAA$ 또는 $ABAA$ 순서로 일어나면 두 번째 시행 후 점 P의 위치는 (3, 3)이므로 직선 $y=x$ 위의 점이다.

즉, 이때의 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{81}$

(v) 3의 배수가 4번 나오는 경우

3의 배수만 나왔으므로 점 P는 x축의 양의 방향으로 1만큼, y축의 양의 방향으로 2만큼씩 4번 이동한다.

이때 점 P는 직선 $y=x$ 위를 지나지 않으므로 그 확률은 0

(i)~(v)에서 구하는 확률은

$0+\frac{16}{81}+\frac{8}{27}+\frac{4}{81}+0=\frac{44}{81}$

0530 답 ③

전략 첫 번째 시행에서 등록 상태가 같은 카드 키가 나오고 두 번째 시행 후 보관함 A에 남은 카드 키가 3개일 확률과 첫 번째 시행에서 등록 상태가 다른 카드 키가 나오고 두 번째 시행 후 보관함 A에 남은 카드 키가 3개일 확률을 각각 구한 후 조건부확률을 이용한다.

첫 번째 시행에서 꺼낸 2개의 카드 키의 등록 상태가 서로 다른 사건을 X, 두 번째 시행 후 보관함 A에 남은 카드 키가 총 3개인 사건을 Y라 하자.

(i) 첫 번째 시행에서 등록 상태가 같은 카드 키가 나오는 경우

등록된 카드 키 2개를 꺼내거나 미등록된 카드 키 2개를 꺼내야 하므로 그 확률은 각각

$\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{5}$

첫 번째 시행 후, 보관함 A에는 등록된 카드 키 2개와 미등록된 카드 키 3개가 남거나 등록된 카드 키 3개와 미등록된 카드 키 2개가 남는다.

이때 두 번째 시행 후 보관함 A에 남은 카드 키가 총 3개이려면 2개의 카드 키가 보관함 B로 이동해야 하므로 두 번째 시행에서 등록 상태가 서로 다른 카드 키를 꺼내야 한다.

즉, 두 번째 시행에서 보관함 A에서 등록된 카드 키 1개와 미등록된 카드 키 1개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X^C\cap Y)=\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$

(ii) 첫 번째 시행에서 등록 상태가 다른 카드 키가 나오는 경우

등록된 카드 키 1개와 미등록된 카드 키 1개를 꺼내야 하므로 그 확률은

$\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{3}{5}$

첫 번째 시행 후, 보관함 A에는 등록된 카드 키 2개와 미등록된 카드 키 2개가 남고, 보관함 B에는 등록된 카드 키 1개와 미등록된 카드 키 1개가 남는다.

이때 두 번째 시행 후 보관함 A에 남은 카드 키가 총 3개이려면 1개의 카드 키가 보관함 B로 이동해야 하므로 두 번째 시행에서 등록 상태가 서로 같은 카드 키를 꺼내야 한다.

즉, 두 번째 시행에서 보관함 A에서 등록된 카드 키 2개를 꺼내거나 미등록된 카드 키 2개를 꺼낼 확률은

$\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}+\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(Y)=\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)=\frac{1}{5}+\frac{6}{25}=\frac{11}{25}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X|Y)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(Y)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{11}{25}}=\frac{5}{11}$

0531 답 ④

전략 주어진 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8이 되는 경우를 나누어 각각의 확률을 구하고, 이 중 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2일 확률을 찾아 조건부확률을 이용한다.

주어진 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8인 사건을 A, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2인 사건을 B라 하자.

주머니에서 숫자 1이 적힌 카드가 나오는 사건을 X, 숫자 2 또는 숫자 3이 나오는 사건을 Y, 숫자 4가 적힌 카드가 나오는 사건을 Z라 하면

$$\mathrm{P}(X)=\frac{1}{4},\ \mathrm{P}(Y)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(Z)=\frac{1}{4}$$

시행을 4번 반복한 후, 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8인 경우는 X가 2번, Z가 2번 일어나거나 X가 1번, Y가 2번, Z가 1번 일어나거나 Y가 4번 일어나야 한다.

(i) X가 2번, Z가 2번 일어나는 경우

X, X, Z, Z를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!\times 2!}=6$$

각각에 대하여 그 확률은

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{256}$$

즉, X가 2번, Z가 2번 일어날 확률은

$$6\times\frac{1}{256}=\frac{3}{128}$$

(ii) X가 1번, Y가 2번, Z가 1번 일어나는 경우

X, Y, Y, Z를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

각각에 대하여 그 확률은

$$\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{64}$$

즉, X가 1번, Y가 2번, Z가 1번 일어날 확률은

$$12\times\frac{1}{64}=\frac{3}{16}$$

(iii) Y가 4번 일어나는 경우

Y, Y, Y, Y를 일렬로 나열하는 경우의 수는 1

그 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}$$

즉, Y가 4번 일어날 확률은 $\frac{1}{16}$

(i), (ii), (iii)에서

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{128}+\frac{3}{16}+\frac{1}{16}=\frac{35}{128}$$

상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2가 되는 경우는 X가 2번, Z가 2번인 경우이므로 (i)에서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{128}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{128}}{\frac{35}{128}}=\frac{3}{35}$$

08 독립시행의 확률

난이도별 필수 기출 125~133쪽

0532 답 ④

자유투를 성공할 확률은 $\frac{2}{3}$이므로 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$$

0533 답 ⑤

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 2 이하의 눈이 나올 확률은

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$$

0534 답 ③

한 개의 동전을 한 번 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 4의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이다.

즉, 동전은 앞면이 나오고 주사위는 4의 약수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{9}{64}$$

0535 답 ⑤

한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

한 개의 동전을 6번 던질 때, 앞면이 n번 나올 확률은

$${}_6\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{6-n}=\frac{{}_6\mathrm{C}_n}{64}$$

즉, $\frac{{}_6\mathrm{C}_n}{64}=\frac{15}{64}$이므로 ${}_6\mathrm{C}_n=15$

이때 ${}_6\mathrm{C}_2={}_6\mathrm{C}_4=15$이므로

$n=2$ 또는 $n=4$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은

$2+4=6$

0536 답 ④

5번째 경기에서 우승자가 결정되려면 4번째 경기 후 갑과 을이 모두 2승 2패로 우승자가 결정되지 않아야 한다.

따라서 구하는 확률은

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{216}{625}$$

0537 답 $\frac{1}{2}$

한 개의 동전을 4번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수와 뒷면이 나오는 횟수의 곱이 3이려면 앞면이 1번, 뒷면이 3번 나오거나 앞면이 3번, 뒷면이 1번 나와야 한다. …… ⓘ

한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다. …… ⓘⓘ

(i) 앞면이 1번, 뒷면이 3번 나올 확률은 ${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$

(ii) 앞면이 3번, 뒷면이 1번 나올 확률은 ${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 앞면이 나오는 횟수와 뒷면이 나오는 횟수의 곱이 3인 경우 알기	30 %
ⓘⓘ 한 개의 동전을 던질 때, 앞면이 나올 확률 구하기	20 %
ⓘⓘⓘ 앞면이 나오는 횟수와 뒷면이 나오는 횟수의 곱이 3일 확률 구하기	50 %

0538 답 ①

예매한 좌석을 취소할 확률은 $\frac{1}{4}$이고, 좌석이 부족하게 되려면 5건의 예약 중 0건 또는 1건이 취소되어야 한다.

(i) 5건 중 0건이 취소될 확률은 ${}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{243}{1024}$

(ii) 5건 중 1건이 취소될 확률은 ${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{405}{1024}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{243}{1024}+\frac{405}{1024}=\frac{81}{128}$

0539 답 ④

5명의 지원자 중에서 2명 이상이 승진하는 사건을 A라 하면 A^C은 5명의 지원자 중에서 1명 이하가 승진하는 사건이다.

지원자 1명이 승진 시험에 통과하여 승진할 확률은

$\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{4}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

(i) 5명 중 1명이 승진할 확률은 ${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{32}$

(ii) 5명 모두 승진하지 못할 확률은 ${}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$

0540 답 289

각 회원이 모임에 참석할 확률은 $\frac{1}{3}$이고, 모임이 개최되려면 12명의 회원 중 10명 이상이 참석하여야 한다.

(i) 10명이 모임에 참석할 확률은 ${}_{12}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{264}{3^{12}}$

(ii) 11명이 모임에 참석할 확률은 ${}_{12}\mathrm{C}_{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{11}\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{24}{3^{12}}$

(iii) 12명이 모임에 참석할 확률은 ${}_{12}\mathrm{C}_{12}\left(\frac{1}{3}\right)^{12}=\frac{1}{3^{12}}$

(i), (ii), (iii)에서 모임이 개최될 확률은

$\frac{264}{3^{12}}+\frac{24}{3^{12}}+\frac{1}{3^{12}}=\frac{289}{3^{12}}$

따라서 $\frac{289}{3^{12}}=\frac{k}{3^{12}}$이므로 $k=289$

0541 답 $\frac{17}{81}$

A가 우승하려면 3번째 경기에서 우승하거나 4번째 경기에서 우승하거나 5번째 경기에서 우승해야 한다.

이때 각 경기에서 A가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

(i) 3번째 경기에서 우승하는 경우

3번째 경기까지 3번 모두 이겨야 하므로 그 확률은

${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$ …… ⓘ

(ii) 4번째 경기에서 우승하는 경우

3번째 경기까지 2번 이기고 1번 진 다음 4번째 경기에서 이겨야 하므로 그 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$ …… ⓘⓘ

(iii) 5번째 경기에서 우승하는 경우

4번째 경기까지 2번 이기고 2번 진 다음 5번째 경기에서 이겨야 하므로 그 확률은

${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{8}{81}$ …… ⓘⓘⓘ

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{27}+\frac{2}{27}+\frac{8}{81}=\frac{17}{81}$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ A가 3번째 경기에서 우승할 확률 구하기	30 %
ⓘⓘ A가 4번째 경기에서 우승할 확률 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ A가 5번째 경기에서 우승할 확률 구하기	30 %
ⓘⓥ A가 우승할 확률 구하기	10 %

0542 답 ③

A가 1승 2패인 상황에서 A가 최종 우승을 하려면 A는 남은 경기에서 3번을 더 이겨야 한다.

(i) A가 4~6차전에서 모두 이길 확률은

${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$

(ii) A가 4~6차전에서 2승 1패를 한 후 7차전에서 이길 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\frac{3}{4}=\frac{81}{256}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{27}{64}+\frac{81}{256}=\frac{189}{256}$

0543 답 ⑤

여섯 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A라 하면 A^C은 여섯 눈의 수의 곱이 홀수인 사건이다.

여섯 눈의 수의 곱이 홀수이려면 여섯 눈의 수가 모두 홀수이어야 한다.

이때 한 개의 주사위를 던져 홀수의 눈이 나올 확률은

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{P}(A^C)={}_6\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$

0544 답 ①

$a+b=6$이려면 $a=2$, $b=4$ 또는 $a=3$, $b=3$이어야 한다.

이때 한 개의 주사위를 한 번 던져 소수의 눈이 나올 확률은

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이다.

(i) $a=2$, $b=4$인 경우

A는 주사위를 3번 던져 소수의 눈이 2번 나오고, B는 주사위를 4번 던져 소수의 눈이 4번 나와야 하므로 그 확률은

${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times{}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{3}{8}\times\frac{1}{16}=\frac{3}{128}$

(ii) $a=3$, $b=3$인 경우

A는 주사위를 3번 던져 소수의 눈이 3번 나오고, B는 주사위를 4번 던져 소수의 눈이 3번 나와야 하므로 그 확률은

${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{128}+\frac{1}{32}=\frac{7}{128}$

0545 답 ②

$a\times b\times c\times d$의 값이 9의 배수이려면 3의 배수의 눈이 2번 이상 나와야 한다.

3의 배수의 눈이 2번 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C은 3의 배수의 눈이 0번 또는 1번 나오는 사건이다.

이때 한 개의 주사위를 던져 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

(i) 3의 배수의 눈이 0번 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$

(ii) 3의 배수의 눈이 1번 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{16}{81}+\frac{32}{81}=\frac{16}{27}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{16}{27}=\frac{11}{27}$

다른 풀이

$a\times b\times c\times d$의 값이 9의 배수이려면 3의 배수의 눈이 2번 이상 나와야 한다.

이때 한 개의 주사위를 던져 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

(i) 3의 배수의 눈이 2번 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

(ii) 3의 배수의 눈이 3번 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$

(iii) 3의 배수의 눈이 4번 나올 확률은

${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{8}{27}+\frac{8}{81}+\frac{1}{81}=\frac{11}{27}$

0546 답 $\frac{1}{2}$

꺼낸 카드에 적힌 다섯 숫자의 합이 짝수이려면 홀수가 적힌 카드가 0번 또는 2번 또는 4번 나와야 한다.

이때 임의로 꺼낸 한 장의 카드에 적힌 숫자가 홀수일 확률은

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이다.

(i) 홀수가 적힌 카드가 0번 나올 확률은 ${}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

(ii) 홀수가 적힌 카드가 2번 나올 확률은 ${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

(iii) 홀수가 적힌 카드가 4번 나올 확률은 ${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{32}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{32}+\frac{5}{16}+\frac{5}{32}=\frac{1}{2}$

0547 답 ②

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 각 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이고, 한 개의 동전을 한 번 던질 때, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) 주사위를 던져 나온 눈의 수가 1인 경우

동전 3개를 던져 뒷면이 1개 나와야 하므로 그 확률은

$\frac{1}{6}\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{16}$

(ii) 주사위를 던져 나온 눈의 수가 2인 경우

동전 3개를 던져 뒷면이 2개 나와야 하므로 그 확률은

$\frac{1}{6}\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{6}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{16}$

(iii) 주사위를 던져 나온 눈의 수가 3인 경우

동전 3개를 던져 뒷면이 3개 나와야 하므로 그 확률은

$\frac{1}{6}\times{}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{6}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{48}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{48}=\frac{7}{48}$

0548 답 $\frac{19}{60}$

꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다른 경우는 흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우이므로 그 확률은 $\frac{{}_4C_1\times{}_6C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{4\times6}{45}=\frac{8}{15}$

꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같을 확률은

$1-\frac{8}{15}=\frac{7}{15}$ …… ⓘ

또 한 개의 동전을 한 번 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다른 경우

한 개의 동전을 3번 던질 때, 앞면이 2번 나올 확률은

$\frac{8}{15}\times{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{8}{15}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{5}$ …… ⓘⓘ

(ii) 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같은 경우

한 개의 동전을 2번 던질 때, 앞면이 2번 나올 확률은

$\frac{7}{15}\times{}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{15}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{60}$ …… ⓘⓘⓘ

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{5}+\frac{7}{60}=\frac{19}{60}$ …… ⓘⓥ

채점 기준

ⓘ 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다를 확률과 색이 서로 같을 확률 구하기	30 %
ⓘⓘ 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 다를 때, 동전의 앞면이 2번 나올 확률 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 꺼낸 2개의 공의 색이 서로 같을 때, 동전의 앞면이 2번 나올 확률 구하기	30 %
ⓘⓥ 동전의 앞면이 2번 나올 확률 구하기	10 %

0549 답 ⑤

문자 B가 보이도록 카드를 놓으려면 카드를 뒤집는 횟수가 홀수이어야 한다. 즉, 4번의 시행 중 동전의 앞면이 나온 횟수가 3인 경우가 1번 또는 3번이어야 한다.

이때 한 개의 동전을 세 번 던져 앞면이 나온 횟수가 3일 확률은

${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

(i) 카드를 뒤집는 횟수가 1인 경우

동전의 앞면이 나온 횟수가 3인 경우가 1번이므로 그 확률은

${}_4C_1\left(\frac{1}{8}\right)^1\left(\frac{7}{8}\right)^3=\frac{1372}{8^4}$

(ii) 카드를 뒤집는 횟수가 3인 경우

동전의 앞면이 나온 횟수가 3인 경우가 3번이므로 그 확률은

${}_4C_3\left(\frac{1}{8}\right)^3\left(\frac{7}{8}\right)^1=\frac{28}{8^4}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1372}{8^4}+\frac{28}{8^4}=\frac{1400}{8^4}=\frac{175}{512}$

0550 답 ②

한 개의 동전을 한 번 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) 앞면이 3번 나오는 경우

㈏를 만족시키려면 앞면이 3번 나오는 경우에서 앞면이 3번 연속해서 나오는 경우를 제외해야 한다.

한 개의 동전을 6번 던질 때, 앞면이 3번 나올 확률은

${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

이때 앞면이 3번 연속해서 나오는 것을 하나로 생각하여 뒷면 3개를 나열하고 그 사이사이와 양 끝의 4자리 중 1자리에 앞면 3개를 나열하면 되므로 그 확률은

${}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{5}{16}-\frac{1}{16}=\frac{1}{4}$

(ii) 앞면이 4번 나오는 경우

㈏를 만족시키려면 앞면이 4번 나오는 경우에서 앞면이 3번만 연속해서 나오는 경우와 앞면이 4번 연속해서 나오는 경우를 제외해야 한다.

한 개의 동전을 6번 던질 때, 앞면이 4번 나올 확률은

${}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64}$

이때 앞면이 3번 연속해서 나오는 것을 하나로 생각하여 뒷면 2개를 나열하고 그 사이사이와 양 끝의 3자리 중 2자리에 앞면 3개와 앞면 1개를 나열하면 되므로 그 확률은

${}_3P_2\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{32}$

또 앞면이 4번 연속해서 나오는 것을 하나로 생각하여 뒷면 2개를 나열하고 그 사이사이와 양 끝의 3자리 중 1자리에 앞면 4개를 나열하면 되므로 그 확률은

${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{64}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{15}{64}-\frac{3}{32}-\frac{3}{64}=\frac{3}{32}$

(iii) 앞면이 5번 이상 나오는 경우

앞면이 5번 이상 나오면 앞면이 3번 이상 연속하게 되므로 앞면이 연속해서 나오는 횟수의 최댓값이 2일 수 없다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{4}+\frac{3}{32}=\frac{11}{32}$

0551 답 ①

앞면이 나오는 횟수를 x라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $8-x$이다.

이때 앞면이 뒷면보다 2번 더 많이 나오므로

$x=(8-x)+2,\ 2x=10 \quad \therefore x=5$

즉, 앞면이 5번, 뒷면이 3번 나와야 한다.

이때 한 개의 동전을 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 확률은

${}_8C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{32}$

0552 답 ⑤

흰 공이 나오는 횟수를 x라 하면 검은 공이 나오는 횟수는 $5-x$이다.

5번의 시행 후 1점을 얻으려면

$x-(5-x)=1,\ 2x=6 \quad \therefore x=3$

즉, 흰 공은 3번, 검은 공은 2번 나와야 한다.

이때 꺼낸 1개의 공이 흰 공일 확률은 $\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$이다.

따라서 구하는 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$

0553 답 ④

4의 약수의 눈이 나오는 횟수를 x라 하면 그 외의 눈이 나오는 횟수는 $6-x$이다.

이때 얻은 점수가 30점이려면

$10x-5(6-x)=30,\ 15x=60 \quad \therefore\ x=4$

즉, 4의 약수의 눈이 4번, 그 외의 눈이 2번 나와야 한다.

이때 한 개의 주사위를 한 번 던져 4의 약수의 눈이 나올 확률은

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 확률은

${}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64}$

0554 답 ⑤

소수의 눈이 나오는 횟수를 x라 하면 그 외의 눈이 나오는 횟수는 $6-x$이므로

$x(6-x)=8,\ x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0 \quad \therefore\ x=2$ 또는 $x=4$

즉, 소수의 눈이 2번 또는 4번 나와야 한다.

이때 한 개의 주사위를 한 번 던져 소수의 눈이 나올 확률은

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이다.

(i) 소수의 눈이 2번 나올 확률은 ${}_6\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{64}$

(ii) 소수의 눈이 4번 나올 확률은 ${}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{15}{64}+\frac{15}{64}=\frac{15}{32}$

0555 답 ④

3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 x라 하면 그 외의 눈이 나오는 횟수는 $6-x$이다.

6번의 시행 후 점 P의 좌표가 2보다 작으려면

$3x-(6-x)<2,\ 4x<8 \quad \therefore\ x<2$

즉, 3의 배수의 눈이 0번 또는 1번 나와야 한다.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

(i) 3의 배수의 눈이 0번 나올 확률은 ${}_6\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{64}{729}$

(ii) 3의 배수의 눈이 1번 나올 확률은 ${}_6\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{64}{243}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{64}{729}+\frac{64}{243}=\frac{256}{729}$

0556 ④

두 개의 동전을 한 번 던져서 서로 같은 면이 나오는 횟수를 x라 하면 서로 다른 면이 나오는 횟수는 $4-x$이다.

이때 얻은 점수의 합이 6 이상이려면

$2x+(4-x)\geq 6 \quad \therefore\ x\geq 2$

즉, 서로 같은 면이 2번 이상 나와야 한다.

이때 두 개의 동전을 한 번 던져 서로 같은 면이 나오려면 모두 앞면이거나 모두 뒷면이어야 하므로 그 확률은 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이다.

두 개의 동전을 한 번 던져 서로 같은 면이 2번 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C은 서로 같은 면이 0번 또는 1번 나오는 사건이다.

(i) 서로 같은 면이 0번 나올 확률은 ${}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(ii) 서로 같은 면이 1번 나올 확률은 ${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}=\frac{5}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$

0557 답 $\frac{2}{3}$

한 개의 주사위를 한 번 던져 6의 약수의 눈이 나올 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이고, 그 외의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

또 한 개의 동전을 한 번 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고,

뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) 주사위를 한 번 던져서 6의 약수의 눈이 나온 경우

동전을 4번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 x라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $4-x$이다.

이때 받은 점수의 합이 9점 이상이려면

$3x+2(4-x)\geq 9 \quad \therefore\ x\geq 1$

즉, 앞면이 1번 이상 나와야 한다.

동전을 4번 던져서 앞면이 1번 이상 나오는 사건을 A라 하면 A^C은 앞면이 한 번도 나오지 않는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{15}{16}=\frac{5}{8}$ ····· ⓘ

(ii) 주사위를 한 번 던져서 6의 약수의 눈이 나오지 않은 경우

동전을 3번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 y라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $3-y$이다.

이때 받은 점수의 합이 9점 이상이려면

$3y+2(3-y)\geq 9 \quad \therefore\ y\geq 3$

즉, 앞면이 3번 나와야 한다.

동전을 3번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은 ${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{24}$ ····· ⓘⓘ

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{5}{8}+\frac{1}{24}=\frac{2}{3}$ …… ㉢

채점 기준	
㉠ 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수일 때, 받은 점수의 합이 9점 이상일 확률 구하기	50 %
㉡ 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수가 아닐 때, 받은 점수의 합이 9점 이상일 확률 구하기	40 %
㉢ 받은 점수의 합이 9점 이상일 확률 구하기	10 %

0558 답 ③

가위바위보를 5번 하여 갑이 이기는 횟수를 x, 비기는 횟수를 y, 지는 횟수를 z라 하면

$x+y+z=5$ …… ㉠

가위바위보를 5번 한 후 갑의 위치가 처음 위치와 같으므로

$2x-z=0$ $\therefore z=2x$

이것을 ㉠에 대입하면

$3x+y=5$

이때 $0\le x\le 5$이므로 조건을 만족시키는 순서쌍 (x, y, z)는

$(0, 5, 0)$, $(1, 2, 2)$

이때 가위바위보를 한 번 하여 갑이 이길 확률, 비길 확률, 질 확률은 각각 $\frac{1}{3}$이다.

(i) $x=0$, $y=5$, $z=0$인 경우

가위바위보를 5번 하여 5번 비기는 경우의 수는 5개의 y를 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 1

즉, 이때의 확률은

$1\times\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$

(ii) $x=1$, $y=2$, $z=2$인 경우

가위바위보를 5번 하여 1번 이기고, 2번 비기고, 2번 지는 경우의 수는 1개의 x, 2개의 y, 2개의 z를 일렬로 나열하는 경우와 같으므로

$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

즉, 이때의 확률은

$30\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{81}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{243}+\frac{10}{81}=\frac{31}{243}$

0559 답 137

$a-b=3$이려면 $a=3$, $b=0$ 또는 $a=4$, $b=1$ 또는 $a=5$, $b=2$이어야 한다.

이때 한 개의 주사위를 한 번 던져 홀수의 눈이 나올 확률은

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이고, 한 개의 동전을 한 번 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) $a=3$, $b=0$인 경우

한 개의 주사위를 5번 던질 때 홀수의 눈이 3번 나오고, 한 개의 동전을 4번 던질 때 앞면이 0번 나와야 하므로 그 확률은

${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times{}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{16}\times\frac{1}{16}=\frac{5}{256}$

(ii) $a=4$, $b=1$인 경우

한 개의 주사위를 5번 던질 때 홀수의 눈이 4번 나오고, 한 개의 동전을 4번 던질 때 앞면이 1번 나와야 하므로 그 확률은

${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1\times{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{32}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{128}$

(iii) $a=5$, $b=2$인 경우

한 개의 주사위를 5번 던질 때 홀수의 눈이 5번 나오고, 한 개의 동전을 4번 던질 때 앞면이 2번 나와야 하므로 그 확률은

${}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\times{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{32}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{256}$

(i), (ii), (iii)에서 $a-b=3$일 확률은

$\frac{5}{256}+\frac{5}{128}+\frac{3}{256}=\frac{9}{128}$

따라서 $p=128$, $q=9$이므로

$p+q=128+9=137$

0560 답 43

동전을 던지는 횟수만큼 x축의 방향으로 이동하므로 $a=6$

이때 $0\le b\le 6$이므로 $a+b$가 3의 배수이려면

$b=0$ 또는 $b=3$ 또는 $b=6$이어야 한다.

즉, 동전의 뒷면이 0번 또는 3번 또는 6번 나와야 한다.

이때 한 개의 동전을 한 번 던져 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) 뒷면이 0번, 앞면이 6번 나올 확률은 ${}_6C_0\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$

(ii) 뒷면이 3번, 앞면이 3번 나올 확률은 ${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

(iii) 뒷면이 6번, 앞면이 0번 나올 확률은 ${}_6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$

(i), (ii), (iii)에서 $a+b$가 3의 배수가 될 확률은

$\frac{1}{64}+\frac{5}{16}+\frac{1}{64}=\frac{11}{32}$

따라서 $p=32$, $q=11$이므로

$p+q=32+11=43$

0561 답 ⑤

승자가 A 또는 B인 사건을 X라 하면 X^C은 승자가 C인 사건이다.

승자가 C이려면 C는 앞면이 4번 또는 5번 나와야 한다.

이때 한 개의 동전을 한 번 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) C가 앞면이 4번 나올 확률은 ${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{32}$

(ii) C가 앞면이 5번 나올 확률은 ${}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(X^C)=\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{3}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X)=1-\mathrm{P}(X^C)=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$

참고 C가 앞면이 0번 또는 1번 또는 2번 나오면 승자는 A이고, C가 앞면이 3번 나오면 승자는 B이다.

0562 답 ②

주머니 A에서 3번 반복하여 꺼낸 공에 적힌 수의 합이 될 수 있는 수는 3, 4, 5, 6이고, 주머니 B에서 4번 반복하여 꺼낸 공에 적힌 수의 합이 될 수 있는 수는 12, 13, 14, 15, 16이다.

주머니 A에서 나온 3개의 수의 합을 a, 주머니 B에서 나온 4개의 수의 합을 b라 하면 $a+b=20$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(4, 16), (5, 15), (6, 14)$

(i) $a=4$, $b=16$인 경우

주머니 A에서 숫자 1이 적힌 공이 2번, 숫자 2가 적힌 공이 1번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$$

주머니 B에서 숫자 4가 적힌 공이 4번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

즉, 이때의 확률은 $\frac{3}{8}\times\frac{1}{16}=\frac{3}{128}$

(ii) $a=5$, $b=15$인 경우

주머니 A에서 숫자 1이 적힌 공이 1번, 숫자 2가 적힌 공이 2번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

주머니 B에서 숫자 3이 적힌 공이 1번, 숫자 4가 적힌 공이 3번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$$

즉, 이때의 확률은 $\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$

(iii) $a=6$, $b=14$인 경우

주머니 A에서 숫자 2가 적힌 공이 3번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_3C_0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

주머니 B에서 숫자 3이 적힌 공이 2번, 숫자 4가 적힌 공이 2번 나와야 하므로 그 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$$

즉, 이때의 확률은 $\frac{1}{8}\times\frac{3}{8}=\frac{3}{64}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{128}+\frac{3}{32}+\frac{3}{64}=\frac{21}{128}$$

0563 답 ②

동전의 앞면이 나오는 횟수를 a라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $3-a$이고, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 b라 하면 3의 배수가 아닌 눈이 나오는 횟수는 $3-b$이다.

시행을 3번 반복한 후 점 P의 좌표를 구하면

$2a-(3-a)=3a-3$, $b-(3-b)=2b-3$에서

$P(3a-3, 2b-3)$

이 점이 직선 $y=x-2$ 위의 점이려면

$2b-3=(3a-3)-2$ $\therefore 2b=3a-2$

이때 a, b는 $0\le a\le 3$, $0\le b\le 3$인 정수이므로

$a=2$, $b=2$

즉, 동전의 앞면이 2번 나오고 3의 배수의 눈이 2번 나와야 한다.

한 개의 동전을 한 번 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 한 개의 주사위를 한 번 던져 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

따라서 구하는 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times{}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{3}{8}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{12}$$

0564 답 ③

한 개의 주사위를 6번 던져 짝수의 눈이 나오는 횟수가 m, 홀수의 눈이 나오는 횟수가 n이므로

$m+n=6$ …… ㉠

$i^{m-n}=1$을 만족시키려면 $m-n=4k$ (k는 정수)이어야 한다.

㉠에서 $n=6-m$이므로

$m-(6-m)=4k$ $\therefore m=2k+3$

이때 $0\le m\le 6$이므로

$0\le 2k+3\le 6$, $-3\le 2k\le 3$ $\therefore -\frac{3}{2}\le k\le\frac{3}{2}$

그런데 k는 정수이므로

$k=-1$ 또는 $k=0$ 또는 $k=1$

즉, 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은

$(1, 5), (3, 3), (5, 1)$

한 개의 주사위를 한 번 던져 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이고, 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이다.

(i) $m=1$, $n=5$인 경우

짝수의 눈이 1번, 홀수의 눈이 5번 나올 확률은

$${}_6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{32}$$

(ii) $m=3$, $n=3$인 경우

짝수의 눈이 3번, 홀수의 눈이 3번 나올 확률은

$${}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$$

(iii) $m=5$, $n=1$인 경우

짝수의 눈이 5번, 홀수의 눈이 1번 나올 확률은

$${}_6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{32}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{32}+\frac{5}{16}+\frac{3}{32}=\frac{1}{2}$$

0565 답 ⑤

3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 x라 하면 그 외의 눈이 나오는 횟수는 $4-x$이다.

점 P가 시계 방향으로 이동한 거리를 +, 시계 반대 방향으로 이동한 거리를 −로 나타낼 때, 꼭짓점 A에서 출발한 점 P가 꼭짓점 B에 있으려면 점 P는 $4k+3$(k는 정수)만큼 이동해야 하므로

$2x-(4-x)=4k+3$ $\therefore 4k=3x-7$

이때 x는 $0\le x\le 4$인 정수이므로 $x=1$

즉, 3의 배수의 눈이 1번 나와야 한다.
이때 한 개의 주사위를 한 번 던져 3의 배수의 눈이 나올 확률은
$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.
따라서 구하는 확률은 ${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81}$

0566 답 ②

서로 다른 두 주사위를 n번 던질 때, 두 눈의 수의 곱이 홀수인 횟수를 a라 하면 두 눈의 수의 곱이 짝수인 횟수는 $n-a$이다.
원점 O를 출발한 점 P가 점 (4, 5)에 도착하려면
$a+(n-a)=4$, $2a-(n-a)=5$에서
$n=4$, $3a-n=5$ $\therefore n=4$, $a=3$
즉, 서로 다른 두 개의 주사위를 4번 던져 두 눈의 수의 곱이 홀수가 3번, 짝수가 1번 나와야 한다.
서로 다른 두 개의 주사위를 한 번 던질 때, 두 눈의 수의 곱이 홀수이려면 두 주사위의 눈의 수가 모두 홀수이어야 하므로 그 확률은
$\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$
따라서 구하는 확률은 ${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^1=\frac{3}{64}$

0567 답 $\frac{3}{4}$

세 수의 합이 홀수인 사건을 A, 곱이 짝수인 사건을 B라 하자.
세 수의 합이 홀수가 되려면 세 수가 모두 홀수이거나 홀수가 1개, 짝수가 2개이어야 한다.
이때 홀수가 적힌 공을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이고, 짝수가 적힌 공을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이다.
(i) 세 수가 모두 홀수일 확률은
${}_3\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$
(ii) 세 수 중에서 홀수가 1개, 짝수가 2개일 확률은
${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$
(i), (ii)에서 세 수의 합이 홀수일 확률은
$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{8}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}$
세 수의 곱이 짝수가 되려면 세 수 중 적어도 하나는 짝수이어야 하므로 세 수의 합이 홀수이면서 곱이 짝수일 확률은
$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{8}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}$

0568 답 ④

B가 동전을 던져서 앞면이 1개 나오는 사건을 X, A가 동전을 2개 던져서 앞면이 2개 나오는 사건을 Y라 하자.
이때 한 개의 동전을 한 번 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.
(i) A가 동전을 2개 던져서 나온 앞면이 1개인 경우
A가 동전을 2개 던져서 앞면이 1개 나올 확률은
${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$
B가 동전을 1개 던져서 앞면이 1개 나올 확률은 $\frac{1}{2}$
즉, 이때의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$
(ii) A가 동전을 2개 던져서 나온 앞면이 2개인 경우
A가 동전을 2개 던져서 앞면이 2개 나올 확률은
${}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$
B가 동전을 2개를 던져서 앞면이 1개 나올 확률은
${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$
즉, 이때의 확률은 $\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$
(i), (ii)에서
$\mathrm{P}(X)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$, $\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{1}{8}$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}}=\frac{1}{3}$

0569 답 $\frac{19}{49}$

앞면이 나온 동전의 개수가 주사위의 눈의 수보다 큰 사건을 A, 앞면이 나온 동전의 개수가 4 이상인 사건을 B라 하자.
한 개의 동전을 한 번 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 한 개의 주사위를 한 번 던져 각 눈의 수가 나올 확률은 모두 $\frac{1}{6}$이다.
(i) 앞면이 나온 동전이 2개인 경우
앞면이 나온 동전이 2개일 확률은
${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$
주사위의 눈의 수는 1이어야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{6}$
즉, 이때의 확률은 $\frac{5}{16}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{96}$
(ii) 앞면이 나온 동전이 3개인 경우
앞면이 나온 동전이 3개일 확률은
${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$
주사위의 눈의 수는 1 또는 2 이어야 하므로 그 확률은
$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
즉, 이때의 확률은 $\frac{5}{16}\times\frac{1}{3}=\frac{5}{48}$
(iii) 앞면이 나온 동전이 4개인 경우
앞면이 나온 동전이 4개일 확률은 ${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{5}{32}$
주사위의 눈의 수는 1 또는 2 또는 3이어야 하므로 그 확률은
$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
즉, 이때의 확률은 $\frac{5}{32}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{64}$

(ⅳ) 앞면이 나온 동전이 5개인 경우

앞면이 나온 동전이 5개일 확률은 ${}_5C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

주사위의 눈의 수는 1 또는 2 또는 3 또는 4이어야 하므로

그 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{1}{32}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{48}$

(ⅰ)~(ⅳ)에서

$P(A)=\frac{5}{96}+\frac{5}{48}+\frac{5}{64}+\frac{1}{48}=\frac{49}{192}$

$P(A\cap B)=\frac{5}{64}+\frac{1}{48}=\frac{19}{192}$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{19}{192}}{\frac{49}{192}}=\frac{19}{49}$

0570 답 $\frac{8}{9}$

A의 점수의 합이 B의 점수의 합보다 큰 사건을 X, A가 점수를 얻은 횟수가 홀수인 사건을 Y라 하자.

A가 점수를 얻은 횟수를 x라 하면 B가 점수를 얻은 횟수는 $4-x$이다.

A의 점수의 합이 B의 점수의 합보다 크므로

$4x>2(4-x)+6,\ 6x>14 \quad \therefore x>\frac{7}{3}$

이때 x는 $0\le x\le 4$인 정수이므로 $x=3$ 또는 $x=4$

즉, A가 점수를 얻은 횟수가 3 또는 4이어야 한다. …… ⓘ

한 개의 주사위를 한 번 던져 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이고, 그 이외의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이다.

즉, A가 점수를 얻을 확률은 $\frac{1}{3}$, B가 점수를 얻을 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

(ⅰ) A가 점수를 얻은 횟수가 3일 확률은

${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$

(ⅱ) A가 점수를 얻은 횟수가 4일 확률은

${}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$P(X)=\frac{8}{81}+\frac{1}{81}=\frac{1}{9}$ …… ⓘⓘ

$P(X\cap Y)=\frac{8}{81}$ …… ⓘⓘⓘ

따라서 구하는 확률은

$P(Y|X)=\frac{P(X\cap Y)}{P(X)}=\frac{\frac{8}{81}}{\frac{1}{9}}=\frac{8}{9}$ …… ⓘⓥ

채점 기준

ⓘ A가 점수를 얻은 횟수 구하기	30%
ⓘⓘ A의 점수의 합이 B의 점수의 합보다 클 확률 구하기	30%
ⓘⓘⓘ A의 점수의 합이 B의 점수의 합보다 크고, A가 점수를 얻은 횟수가 홀수일 확률 구하기	20%
ⓘⓥ A의 점수의 합이 B의 점수의 합보다 클 때, A가 점수를 얻은 횟수가 홀수일 확률 구하기	20%

0571 답 $\frac{3}{10}$

동전의 앞면이 2번 나오는 사건을 A, 꺼낸 2개의 공에 적힌 숫자의 곱이 홀수인 사건을 B라 하자.

이때 한 개의 동전을 한 번 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(ⅰ) 꺼낸 공에 적힌 수의 곱이 홀수인 경우

두 수의 곱이 홀수이려면 두 수 모두 홀수이어야 하므로 꺼낸 공에 적힌 수의 곱이 홀수일 확률은 $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

한 개의 동전을 4번 던져 앞면이 2번 나올 확률은

${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{3}{10}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{80}$

(ⅱ) 꺼낸 공에 적힌 수의 곱이 짝수인 경우

두 수의 곱이 짝수인 사건은 두 수의 곱이 홀수인 사건의 여사건이므로 그 확률은 $1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

한 개의 동전을 3번 던져 앞면이 2번 나올 확률은

${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{3}{8}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{7}{10}\times\frac{3}{8}=\frac{21}{80}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$P(A)=\frac{9}{80}+\frac{21}{80}=\frac{3}{8}$, $P(A\cap B)=\frac{9}{80}$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{9}{80}}{\frac{3}{8}}=\frac{3}{10}$

0572 답 $\frac{4}{9}$

홀수의 눈이 3번 나오는 사건을 A, 주사위를 4번 던지는 사건을 B라 하자.

한 개의 동전을 한 번 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 한 개의 주사위를 한 번 던져 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이다.

(ⅰ) 앞면이 2개 이상 나오는 경우

동전 3개를 던져 앞면이 2개 이상 나올 확률은

${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$

주사위를 5번 던져 홀수의 눈이 3번 나올 확률은

${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{5}{16}=\frac{5}{32}$

(ⅱ) 앞면이 2개 미만 나오는 경우

동전 3개를 던져 앞면이 2개 미만 나오는 사건은 2개 이상 나오는 사건의 여사건이므로 그 확률은 $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

주사위를 4번 던져 홀수의 눈이 3번 나올 확률은

${}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{32}+\frac{1}{8}=\frac{9}{32}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{9}{32}}=\frac{4}{9}$$

0573 답 61

4번의 시행을 반복한 후 점 P의 좌표가 0 이상인 사건을 A, 확인한 네 개의 수의 곱이 홀수인 사건을 B라 하자.

꺼낸 한 장의 카드에 적힌 수가 홀수일 확률은 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이다.

(i) 네 개의 수가 모두 홀수인 경우

점 P의 좌표는 항상 0 이상이므로 이때의 확률은

${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(ii) 네 개의 수 중에서 홀수가 3개, 짝수가 1개인 경우

네 개의 수가 1, 1, 1, 4인 경우만 제외하면 점 P의 좌표는 0 이상이다.

네 개의 수 중에서 홀수가 3개, 짝수가 1개일 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$

이때 네 개의 수가 1, 1, 1, 4일 확률은

$\frac{4!}{3!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{1}{64}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{1}{4}-\frac{1}{64}=\frac{15}{64}$

(iii) 네 개의 수 중에서 홀수가 2개, 짝수가 2개인 경우

점 P의 좌표가 0 이상인 경우는 네 개의 수가 3, 3, 2, 4 또는 3, 3, 2, 2 또는 3, 1, 2, 2일 때이다.

ⓐ 네 개의 수가 3, 3, 2, 4일 확률은

$\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^1=\frac{3}{64}$

ⓑ 네 개의 수가 3, 3, 2, 2일 확률은

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{128}$

ⓒ 네 개의 수가 3, 1, 2, 2일 확률은

$\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{64}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{3}{64}+\frac{3}{128}+\frac{3}{64}=\frac{15}{128}$

(i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{16}+\frac{15}{64}+\frac{15}{128}=\frac{53}{128}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{16}$

즉, 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{53}{128}}=\frac{8}{53}$$

따라서 $p=53$, $q=8$이므로

$p+q=53+8=61$

참고 네 수 중에서 홀수가 1개, 짝수가 3개이거나 4개 모두 짝수이면 점 P의 좌표는 항상 0 미만이다.

0574 답 $\frac{5}{16}$

점 A의 x좌표가 처음으로 4가 되는 사건을 X, 점 A의 y좌표가 2인 사건을 Y라 하자.

한 개의 동전을 한 번 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이고, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

(i) 점 A의 좌표가 (4, 0)인 경우

한 개의 동전을 4번 던질 때, 앞면이 4번, 뒷면이 0번 나와야 하므로 이때의 확률은

${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(ii) 점 A의 좌표가 (4, 1)인 경우

4번의 시행에서 점 A를 점 (3, 1)까지 이동시킨 후 5번째 시행에서 점 A를 x축의 양의 방향으로 1만큼 이동시키면 된다.

즉, 한 개의 동전을 4번 던질 때, 앞면이 3번, 뒷면이 1번 나오고 5번째 던진 동전이 앞면이 나와야 하므로 이때의 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

(iii) 점 A의 좌표가 (4, 2)인 경우

5번의 시행에서 점 A를 점 (3, 2)까지 이동시킨 후 6번째 시행에서 점 A를 x축의 양의 방향으로 1만큼 이동시키면 된다.

즉, 한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 3번, 뒷면이 2번 나오고 6번째 던진 동전이 앞면이 나와야 하므로 이때의 확률은

${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$

(iv) 점 A의 좌표가 (4, 3)인 경우

6번째 시행에서 점 A를 점 (3, 3)까지 이동시킨 후 7번째 시행에서 점 A를 x축의 양의 방향으로 1만큼 이동시키면 된다.

즉, 한 개의 동전을 6번 던질 때, 앞면이 3번, 뒷면이 3번 나오고 7번째 던진 동전이 앞면이 나와야 하므로 이때의 확률은

${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{5}{16}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$

(i)~(iv)에서

$\mathrm{P}(X)=\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{5}{32}+\frac{5}{32}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{5}{32}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{5}{32}}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{16}$$

0575 답 $\frac{1}{12}$

$a_1+a_2>a_3+a_4$인 사건을 A, $a_1=1$인 사건을 B라 하자.

바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수가 1이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이고, 2가 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이다.

이때 1, 2 중에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 그 두 수의 합을 구하면

$1+1=2$, $1+2=3$, $2+2=4$

즉, 두 수의 합은 2 또는 3 또는 4이다.

$\therefore\ 4\geq a_1+a_2>a_3+a_4\geq2$

(i) $a_1+a_2=3$, $a_3+a_4=2$인 경우

$a_1+a_2=3$이려면 숫자 1이 1번, 숫자 2가 1번 나와야 하므로 그 확률은

${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$

$a_3+a_4=2$이려면 숫자 1이 2번 나와야 하므로 그 확률은

${}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{4}{81}$

(ii) $a_1+a_2=4$, $a_3+a_4=3$인 경우

$a_1+a_2=4$이려면 숫자 2가 2번 나와야 하므로 그 확률은

${}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

$a_3+a_4=3$이려면 숫자 1이 1번, 숫자 2가 1번 나와야 하므로 그 확률은

${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{4}{9}\times\frac{4}{9}=\frac{16}{81}$

(iii) $a_1+a_2=4$, $a_3+a_4=2$인 경우

$a_1+a_2=4$이려면 숫자 2가 2번 나와야 하므로 그 확률은

${}_2\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

$a_3+a_4=2$이려면 숫자 1이 2번 나와야 하므로 그 확률은

${}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{4}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{4}{81}$

(i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{81}+\frac{16}{81}+\frac{4}{81}=\frac{8}{27}$

$4\ge a_1+a_2>a_3+a_4\ge 2$에서 $a_1=1$이면 $a_2=2$이어야 하므로

$a_3+a_4=2$

이때 $a_3+a_4=2$일 확률은 $\frac{1}{9}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{9}=\frac{2}{81}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{2}{81}}{\frac{8}{27}}=\frac{1}{12}$

최고수준 도전 기출 134~135쪽

0576 답 ⑤

전략 n의 값에 따라 $f(n)$의 값을 구한 후, 독립시행의 확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구한다.

$n=1, 2, 3, 4, 5, 6$이므로

$f(1)=f(3)=f(5)=-1$, $f(2)=f(4)=f(6)=2$

이때 $f(n_1)+f(n_2)+f(n_3)+\cdots+f(n_6)=3$이 되려면

$f(n_1)$, $f(n_2)$, $f(n_3)$, $f(n_4)$, $f(n_5)$, $f(n_6)$의 값 중에서

-1이 3개, 2가 3개이어야 한다.

한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수 n에 대하여

$f(n)=-1$일 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $f(n)=2$일 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이다.

따라서 구하는 확률은 ${}_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

0577 답 ④

전략 네 눈의 수의 곱이 8의 배수가 아닐 확률을 구한 후, 여사건의 확률을 이용한다.

한 개의 주사위를 4번 던져 나오는 네 눈의 수의 곱이 8의 배수인 사건을 A라 하면 A^C은 네 눈의 수의 곱이 8의 배수가 아닌 사건이다.

네 눈의 수의 곱이 8의 배수가 아니려면 곱이 홀수이거나, 2의 배수이지만 4의 배수가 아니거나, 4의 배수이지만 8의 배수가 아니어야 한다.

한 개의 주사위를 한 번 던져 나오는 눈의 수가 1, 3, 5일 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이고, 2, 6일 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이고, 4일 확률은 $\frac{1}{6}$이다.

(i) 네 눈의 수의 곱이 홀수인 경우 → 곱을 소인수분해 하였을 때 2의 지수가 0

네 눈의 수가 모두 홀수이어야 하므로 그 확률은

${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(ii) 네 눈의 수의 곱이 2의 배수이지만 4의 배수가 아닌 경우 ← 곱을 소인수분해 하였을 때 2의 지수가 1

네 눈의 수 중에서 1개는 2 또는 6이고, 나머지 3개는 홀수이어야 하므로 그 확률은

${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{6}$

(iii) 네 눈의 수의 곱이 4의 배수이지만 8의 배수가 아닌 경우 ← 곱을 소인수분해 하였을 때 2의 지수가 2

네 눈의 수 중에서 2개는 2 또는 6이고, 나머지 2개는 홀수이거나 1개는 4이고, 나머지 3개는 홀수이어야 하므로 그 확률은

${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$

(i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{16}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{23}{48}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{23}{48}=\frac{25}{48}$

0578 답 14

전략 A가 가진 공의 개수가 늘어나는 사건, 줄어드는 사건, 그대로인 사건이 각각 몇 번 일어나야 하는지 구한 후, 독립시행의 확률을 이용한다.

두 사람 A, B가 주사위를 한 번씩 던질 때, A는 홀수의 눈이 나오고 B는 짝수의 눈이 나오는 사건을 X, A는 짝수의 눈이 나오고 B는 홀수의 눈이 나오는 사건을 Y, 그 외의 경우가 나오는 사건을 Z라 하면

$\mathrm{P}(X)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(Y)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

$\mathrm{P}(Z)=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

4번째 시행 후 A가 가진 공의 개수가 6이 되려면

X가 2번, Y가 0번, Z가 2번 일어나거나

X가 3번, Y가 1번, Z가 0번 일어나야 한다.

(i) X가 2번, Y가 0번, Z가 2번 일어나는 경우

처음 3번의 시행에서 X가 1번, Z가 2번 일어나고, 4번째 시행에서 X가 일어나야 하므로 그 확률은

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{64}$$

(ii) X가 3번, Y가 1번, Z가 0번 일어나는 경우

처음 3번의 시행에서 X가 2번, Y가 1번 일어나고, 4번째 시행에서 X가 일어나야 한다.

그런데 처음 2번의 시행에서 연달아 X가 일어나면 2번째 시행 후 A가 가진 공의 개수가 처음으로 6이 되므로 조건을 만족시키지 않는다.

즉, 처음 2번의 시행에서 X가 1번, Y가 1번 일어나고, 3번째와 4번째 시행에서 모두 X가 일어나야 하므로 그 확률은

$${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{128}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$k=\frac{3}{64}+\frac{1}{128}=\frac{7}{128}$$

$$\therefore\ 256k=256\times\frac{7}{128}=14$$

0579 답 $\frac{5}{12}$

전략 2 이하이면서 홀수, 2 이하이면서 짝수, 3 이상이면서 홀수, 3 이상이면서 짝수가 나오는 횟수를 각각 미지수로 놓고, 조건을 만족시키는 각 눈의 수가 나오는 횟수를 구한 후 독립시행의 확률을 이용한다.

1의 눈이 나오는 횟수를 a, 2의 눈이 나오는 횟수를 b, 3 또는 5의 눈이 나오는 횟수를 c, 4 또는 6의 눈이 나오는 횟수를 d라 하면

$a+b+c+d=3$

한 개의 주사위를 3번 던진 후, 두 점 P, Q의 좌표는

$\mathrm{P}(a+b,\ c+d)$, $\mathrm{Q}(-b-d,\ -a-c)$

선분 PQ가 원 $x^2+y^2=7$과 접하지 않고 오직 한 점에서 만나려면 두 점 P, Q 중에서 한 점은 원의 내부에, 한 점은 원의 외부에 있어야 하므로

$(a+b)^2+(c+d)^2<7,\ (-b-d)^2+(-a-c)^2>7$ → 점 P는 원의 내부, 점 Q는 원의 외부

또는 $(a+b)^2+(c+d)^2>7,\ (-b-d)^2+(-a-c)^2<7$ → 점 P는 원의 외부, 점 Q는 원의 내부

$\therefore\ (a+b)^2+(c+d)^2<7,\ (a+c)^2+(b+d)^2>7$

또는 $(a+b)^2+(c+d)^2>7,\ (a+c)^2+(b+d)^2<7$

이때 한 개의 주사위를 한 번 던져 1의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$

2의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$, 3 또는 5의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

4 또는 6의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

(i) $(a+b)^2+(c+d)^2<7,\ (a+c)^2+(b+d)^2>7$인 경우

조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$는

$(1,\ 0,\ 2,\ 0)$, $(2,\ 0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0,\ 2)$, $(0,\ 2,\ 0,\ 1)$

ⓐ $(1,\ 0,\ 2,\ 0)$인 경우

한 개의 주사위를 3번 던져서 1의 눈이 1번, 3 또는 5의 눈이 2번 나올 확률은 ${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$

ⓑ $(2,\ 0,\ 1,\ 0)$인 경우

한 개의 주사위를 3번 던져서 1의 눈이 2번, 3 또는 5의 눈이 1번 나올 확률은 ${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{36}$

ⓒ $(0,\ 1,\ 0,\ 2)$인 경우

한 개의 주사위를 3번 던져서 2의 눈이 1번, 4 또는 6의 눈이 2번 나올 확률은 ${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$

ⓓ $(0,\ 2,\ 0,\ 1)$인 경우

한 개의 주사위를 3번 던져서 2의 눈이 2번, 4 또는 6의 눈이 1번 나올 확률은 ${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{36}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{1}{18}+\frac{1}{36}+\frac{1}{18}+\frac{1}{36}=\frac{1}{6}$

(ii) $(a+b)^2+(c+d)^2>7,\ (a+c)^2+(b+d)^2<7$인 경우

조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$는

$(1,\ 2,\ 0,\ 0)$, $(2,\ 1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1,\ 2)$, $(0,\ 0,\ 2,\ 1)$

ⓐ $(1,\ 2,\ 0,\ 0)$인 경우

한 개의 주사위를 3번 던져서 1의 눈이 1번, 2의 눈이 2번 나올 확률은 ${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{72}$

ⓑ $(2,\ 1,\ 0,\ 0)$인 경우

한 개의 주사위를 3번 던져서 1의 눈이 2번, 2의 눈이 1번 나올 확률은 ${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^1=\frac{1}{72}$

ⓒ $(0,\ 0,\ 1,\ 2)$인 경우

한 개의 주사위를 3번 던져서 3 또는 5의 눈이 1번, 4 또는 6의 눈이 2번 나올 확률은 ${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

ⓓ $(0,\ 0,\ 2,\ 1)$인 경우

한 개의 주사위를 3번 던져서 3 또는 5의 눈이 2번, 4 또는 6의 눈이 1번 나올 확률은 ${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{1}{9}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{1}{72}+\frac{1}{72}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{4}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$$

0580 답 $\frac{3}{11}$

전략 $a_4+b_4\geq6$일 확률과 이 경우에 대하여 $a_k=b_k$인 4 이하의 자연수 k가 존재할 확률을 구한 후, 조건부확률을 구한다.

$a_4+b_4\geq6$인 사건을 A, $a_k=b_k$인 4 이하의 자연수 k가 존재하는 사건을 B라 하자.

3 이하의 눈이 나오는 횟수를 x라 하면 4 이상의 눈이 나오는 횟수는 $4-x$이다.

4번의 시행 후 주머니에 들어 있는 공이 6개 이상이려면

$2x+(4-x)\geq6$ $\quad\therefore\ x\geq2$

즉, 3 이하의 눈이 2번 이상 나와야 한다.

이때 한 개의 주사위를 한 번 던져 3 이하의 눈이 나올 확률은

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이고, 4 이상의 눈이 나올 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이다.

(i) 3 이하의 눈이 2번 나올 확률은 ${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$

(ii) 3 이하의 눈이 3번 나올 확률은 ${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$

(iii) 3 이하의 눈이 4번 나올 확률은 ${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$

k번째 시행 후 주머니에 들어 있는 공의 개수가 같은 경우는 흰 공 2개, 검은 공 2개가 들어 있는 경우, 즉 $a_3=b_3$인 경우이다.

이때 $a_4+b_4\geq 6$이면서 $a_3=b_3$인 경우는 3번의 시행에서 3 이하의 눈이 1번, 4 이상의 눈이 2번 나온 후 4번째 시행에서 3 이하의 눈이 나와야 하므로 그 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)={}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{11}{16}}=\frac{3}{11}$

0581 답 ②

전략 5번의 시행에서 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 n이라 하고, n에 대한 부등식을 세워 n의 값을 구한 후 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 구한다.

5번의 시행을 반복한 후 지유가 가지고 있는 공이 민호가 가지고 있는 공보다 많은 사건을 A, 주사위에서 소수의 눈이 4번 나오는 사건을 B라 하자.

5번의 시행에서 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 n이라 하면 6의 약수가 아닌 눈이 나오는 횟수는 $5-n$이다.

지유가 가지고 있는 공의 개수는 $10-3n+2(5-n)=20-5n$

민호가 가지고 있는 공의 개수는 $10+3n-2(5-n)=5n$

지유가 가지고 있는 공이 민호가 가지고 있는 공보다 많으려면

$20-5n>5n$, $10n<20$ $\quad\therefore n<2$

즉, 6의 약수의 눈이 0번 또는 1번 나와야 한다.

한 개의 주사위를 한 번 던져 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이고, 그 외의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

(i) 6의 약수의 눈이 0번 나올 확률은 ${}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{3^5}$

(ii) 6의 약수의 눈이 1번 나올 확률은 ${}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{10}{3^5}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3^5}+\frac{10}{3^5}=\frac{11}{3^5}$

지유가 가지고 있는 공이 민호가 가지고 있는 공보다 많을 때, 주사위에서 소수의 눈이 4번 나오는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(iii) 6의 약수의 눈이 0번, 소수의 눈이 4번 나오는 경우

5의 눈이 4번, 4의 눈이 1번 나오는 경우이므로 그 확률은

$\frac{5!}{4!}\times\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^1=\frac{5}{6^5}$

(iv) 6의 약수의 눈이 1번, 소수의 눈이 4번 나오는 경우

↳ 6의 약수 중에서 소수가 나왔을 때와 소수가 아닌 수가 나왔을 때로 나누어 생각한다.

ⓐ 2 또는 3의 눈이 1번, 5의 눈이 3번, 4의 눈이 1번 나오는 경우이므로 그 확률은

$\frac{5!}{3!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^1=\frac{40}{6^5}$

ⓑ 1 또는 6의 눈이 1번, 5의 눈이 4번 나오는 경우이므로 그 확률은 $\frac{5!}{4!}\times\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{10}{6^5}$

즉, 이때의 확률은 $\frac{40}{6^5}+\frac{10}{6^5}=\frac{50}{6^5}$

(iii), (iv)에서

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{5}{6^5}+\frac{50}{6^5}=\frac{55}{6^5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{55}{6^5}}{\frac{11}{243}}=\frac{5}{32}$

0582 답 ⑤

전략 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수일 확률과 이 경우에 대하여 상자 A와 C에 들어 있는 공의 개수의 합이 8 이상일 확률을 구한 후, 조건부확률을 구한다.

5번의 시행을 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 홀수인 사건을 X, 두 상자 A와 C에 들어 있는 공의 개수의 합이 8 이상인 사건을 Y라 하자.

3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 x라 하면 3의 배수가 아닌 눈이 나오는 횟수는 $5-x$이다. 이때 5번의 시행 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수는 $2x+(5-x)=x+5$

즉, $x+5$가 홀수이려면 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=4$이어야 한다.

이때 한 개의 주사위를 한 번 던져 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이고, 3의 배수가 아닌 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이다.

(i) $x=0$인 경우 → A, C에 들어 있는 공의 개수: $(1+1)\times 5=10$

5번의 시행에서 3의 배수의 눈이 0번 나올 확률은

${}_5\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{32}{243}$

(ii) $x=2$인 경우 → A, C에 들어 있는 공의 개수: $(1+0)\times 2+(1+1)\times 3=8$

5번의 시행에서 3의 배수의 눈이 2번 나올 확률은

${}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{243}$

(iii) $x=4$인 경우 → A, C에 들어 있는 공의 개수: $(1+0)\times 4+(1+1)\times 1=6$

5번의 시행에서 3의 배수의 눈이 4번 나올 확률은

${}_5\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{10}{243}$

(i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{P}(X)=\frac{32}{243}+\frac{80}{243}+\frac{10}{243}=\frac{122}{243}$

$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{32}{243}+\frac{80}{243}=\frac{112}{243}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}=\frac{\frac{112}{243}}{\frac{122}{243}}=\frac{56}{61}$

09 이산확률변수

난이도별 필수 기출 137~154쪽

0583 답 ④

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 동전 3개를 동시에 던져서 나오는 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

500원	500원	100원	받는 금액(원)
H	H	H	1100
H	H	T	1000
H	T	H	600
T	H	H	600
H	T	T	500
T	H	T	500
T	T	H	100
T	T	T	0

따라서 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 100, 500, 600, 1000, 1100이므로 그 합은

$0+100+500+600+1000+1100=3300$(원)

0584 답 ②

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{6}+\frac{5}{12}+a+\frac{1}{4}=1 \quad \therefore a=\frac{1}{6}$

0585 답 $\frac{13}{6}$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이므로

$a=3$ ····· ⅰ

이때 각각의 확률은

$b=\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ c=\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ ····· ⅱ

$\therefore ab+2c=3\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{13}{6}$ ····· ⅲ

채점 기준	
ⅰ a의 값 구하기	40 %
ⅱ b, c의 값 각각 구하기	40 %
ⅲ $ab+2c$의 값 구하기	20 %

0586 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\cdots+\mathrm{P}(X=8)=1$

$\frac{a}{1\times2}+\frac{a}{2\times3}+\frac{a}{3\times4}+\cdots+\frac{a}{8\times9}=1 \rightarrow \frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$

$a\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{9}\right)\right\}=1$

$a\left(1-\frac{1}{9}\right)=1,\ \frac{8}{9}a=1$

$\therefore a=\frac{9}{8}$

0587 답 ①

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_6\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{2},$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10},\ \mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{1}{30}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

$\therefore \mathrm{P}(X\geq2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=\frac{3}{10}+\frac{1}{30}=\frac{1}{3}$

0588 답 ⑤

$X^2-7X+10\geq0$에서 $(X-2)(X-5)\geq0$

$\therefore X\leq2$ 또는 $X\geq5$

$\therefore \mathrm{P}(X^2-7X+10\geq0)$

$=\mathrm{P}(X\leq2 \text{ 또는 } X\geq5)$

$=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)$

$=\frac{1}{15}+\frac{4}{15}+\frac{5}{15}=\frac{2}{3}$

0589 답 ③

확률의 총합은 1이므로

$3a+\frac{1}{4}+a+\frac{1}{8}=1,\ 4a=\frac{5}{8}$

$\therefore a=\frac{5}{32}$

$\therefore \mathrm{P}(1\leq X\leq3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{1}{4}+a+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}+\frac{5}{32}+\frac{1}{8}=\frac{17}{32}$

다른 풀이

여사건의 확률을 이용하여 다음과 같이 구할 수도 있다.

$\mathrm{P}(1\leq X\leq3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=1-\mathrm{P}(X=0)=1-3a$

$=1-3\times\frac{5}{32}=\frac{17}{32}$

0590 답 ④

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이므로

$\mathrm{P}(X\leq2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

뽑은 카드에 적힌 두 수를 각각 a, $b(a<b)$라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수의 차가

(ⅰ) 1인 경우는 (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)의 4가지이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}$

(ⅱ) 2인 경우는 (1, 3), (2, 4), (3, 5)의 3가지이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$\mathrm{P}(X\leq2)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

참고 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

0591 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

$\frac{2+k}{20}+\frac{k}{20}+\frac{k}{20}+\frac{2+k}{20}+\frac{6+k}{20}=1$

$\frac{5k+10}{20}=1,\ 5k=10$

$\therefore k=2$

$X^2-X>0$에서 $X(X-1)>0$

$\therefore X<0$ 또는 $X>1$

$\therefore P(X^2-X>0)=P(X<0 \text{ 또는 } X>1)$

$=P(X=-1)+P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{2+k}{20}+\frac{2+k}{20}+\frac{6+k}{20}$

$=\frac{4}{20}+\frac{4}{20}+\frac{8}{20}=\frac{4}{5}$

다른 풀이

여사건의 확률을 이용하여 다음과 같이 구할 수도 있다.

$P(X^2-X>0)=P(X<0 \text{ 또는 } X>1)$

$=P(X=-1)+P(X=2)+P(X=3)$

$=1-\{P(X=0)+P(X=1)\}$

$=1-\left(\frac{k}{20}+\frac{k}{20}\right)$

$=1-\left(\frac{2}{20}+\frac{2}{20}\right)=\frac{4}{5}$

0592 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$

$\frac{k}{1\times3}+\frac{k}{3\times5}+\frac{k}{5\times7}+\frac{k}{7\times9}=1$

$\frac{k}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)\right\}=1$

$\frac{k}{2}\left(1-\frac{1}{9}\right)=1,\ \frac{4}{9}k=1$

$\therefore k=\frac{9}{4}$

$\therefore P(X<3)=P(X=1)+P(X=2)$

$=\frac{k}{1\times3}+\frac{k}{3\times5}$

$=\frac{3}{4}+\frac{3}{20}=\frac{9}{10}$

0593 답 ③

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{10}+a+\frac{1}{5}+b+c=1$

$\therefore a+b+c=\frac{7}{10}$ ····· ㉠

$P(X\le1)=P(X\ge1)$에서

$P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)$

$=P(X=1)+P(X=2)$

$\frac{1}{10}+a+\frac{1}{5}+b=b+c$

$\therefore c=a+\frac{3}{10}$

이를 ㉠에 대입하면

$a+b+\left(a+\frac{3}{10}\right)=\frac{7}{10},\ 2a+b=\frac{2}{5}$

$0\le a\le\frac{1}{5}$

$\therefore b=\frac{2}{5}-2a$

$\therefore ab=a\left(\frac{2}{5}-2a\right)=-2a^2+\frac{2}{5}a$

$=-2\left(a-\frac{1}{10}\right)^2+\frac{1}{50}$

따라서 ab는 $a=\frac{1}{10}$일 때 최댓값이 $\frac{1}{50}$이다.

0594 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=1$

$\left(\frac{1}{6}+k\right)+\left(\frac{1}{6}-k\right)+\left(\frac{1}{6}+k\right)+\left(\frac{1}{6}-k\right)+\left(\frac{1}{6}+k\right)=1$

$\frac{5}{6}+k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{6}$

$\therefore P(X\ge3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$=\left(\frac{1}{6}+k\right)+\left(\frac{1}{6}-k\right)+\left(\frac{1}{6}+k\right)$

$=\frac{1}{2}+k=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

다른 풀이

여사건의 확률을 이용하여 다음과 같이 구할 수도 있다.

$P(X\ge3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$=1-\{P(X=1)+P(X=2)\}$

$=1-\left\{\left(\frac{1}{6}+k\right)+\left(\frac{1}{6}-k\right)\right\}=\frac{2}{3}$

0595 답 $\frac{7}{64}$

확률의 총합은 1이므로 $\frac{1}{12}+a+\frac{1}{4}+b=1$

$\therefore a+b=\frac{2}{3}$ ····· ㉠ ····· ⓘ

$P(X<3)=\frac{3}{8}$에서 $P(X=1)+P(X=2)=\frac{3}{8}$

$\frac{1}{12}+a=\frac{3}{8} \quad \therefore a=\frac{7}{24}$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=\frac{3}{8}$ ····· ⓘⓘ

$\therefore ab=\frac{7}{24}\times\frac{3}{8}=\frac{7}{64}$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 확률의 총합은 1임을 이용하여 $a+b$의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ a, b의 값 각각 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ ab의 값 구하기	20 %

0596 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$(a^2+2a)+3a^2+a=1$

$4a^2+3a-1=0,\ (a+1)(4a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{4}\ (\because a>0)$

$\therefore \mathrm{P}(|X|=1)=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)$

$=(a^2+2a)+a=a^2+3a$

$=\left(\frac{1}{4}\right)^2+3\times\frac{1}{4}$

$=\frac{13}{16}$

다른 풀이

여사건의 확률을 이용하여 다음과 같이 구할 수도 있다.

$\mathrm{P}(|X|=1)=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=1)$

$=1-\mathrm{P}(X=0)=1-3a^2$

$=1-3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$

$=\frac{13}{16}$

0597 답 ②

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, …, 12이므로

$\mathrm{P}(4\le X\le 6)=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)$

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 경우의 수는

$6\times 6=36$

나오는 두 눈의 수를 각각 a, b라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 눈의 수의 합이

(i) 4인 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$

(ii) 5인 경우는 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지이므로

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

(iii) 6인 경우는 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지이므로

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{5}{36}$

(i), (ii), (iii)에서

$\mathrm{P}(4\le X\le 6)=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)$

$=\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{5}{36}=\frac{1}{3}$

0598 답 ⑤

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5, 6, 7이므로

$\mathrm{P}(X\ge 5)=\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)+\mathrm{P}(X=7)$

$=1-\{\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)\}$

당첨 제비를 뽑는 경우를 ○, 당첨 제비가 아닌 제비를 뽑는 경우를 ×라 하면 당첨 제비 3장이 모두 나올 때까지 제비를 꺼낸 횟수가

(i) 3인 경우는 3회 연속하여 당첨 제비를 꺼내야 하므로

(○, ○, ○)

$\therefore \mathrm{P}(X=3)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{35}$

(ii) 4인 경우는 3회까지 당첨 제비를 2장 꺼내고, 4회에 당첨 제비를 꺼내야 하므로

(○, ○, ×, ○), (○, ×, ○, ○), (×, ○, ○, ○)

$\therefore \mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$

$+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{35}+\frac{1}{35}+\frac{1}{35}=\frac{3}{35}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(X\ge 5)=1-\{\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)\}$

$=1-\left(\frac{1}{35}+\frac{3}{35}\right)=\frac{31}{35}$

참고 제비를 꺼내는 순서를 놓이는 자리로 생각하면 다음과 같다.

7개의 자리 중에서 당첨 제비 3장이 놓이는 자리를 정하는 경우의 수는

${}_7\mathrm{C}_3=35$

(i)의 경우는 앞의 3개의 자리에서 3개를 택하면 되므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3}{35}=\frac{1}{35}$

(ii)의 경우는 앞의 3개의 자리에서 2개를 택하고 4번째 자리를 택하면 되므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times 1}{35}=\frac{3}{35}$

0599 답 ①

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이다.

$X^2-6X+5=0$에서 $(X-1)(X-5)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=5$

(i) 여학생 1명, 남학생 4명인 경우

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_6\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{6\times 1}{252}=\frac{1}{42}$

(ii) 여학생 5명인 경우

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{{}_6\mathrm{C}_5}{{}_{10}\mathrm{C}_5}=\frac{6}{252}=\frac{1}{42}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(X^2-6X+5=0)=\mathrm{P}(X=1\text{ 또는 }X=5)$

$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=5)$

$=\frac{1}{42}+\frac{1}{42}=\frac{1}{21}$

0600 답 ④

숫자 1, 2, 3이 적혀 있는 공의 개수를 각각 a, b, c라 하면

$a+b+c=7$ …… ㉠

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{{}_b\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\frac{b(b-1)}{42}=\frac{1}{21}$에서

$b(b-1)=2$

$\therefore b=2\ (\because b$는 자연수)

이를 ㉠에 대입하면

$a+c=5$ …… ㉡

$2\mathrm{P}(X=2)=3\mathrm{P}(X=6)$에서

$2\times\frac{{}_a\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=3\times\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_c\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}$

$\therefore 2a=3c$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=3,\ c=2$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\le 3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}+\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}+\dfrac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}$

$=\dfrac{1}{7}+\dfrac{2}{7}+\dfrac{2}{7}=\dfrac{5}{7}$

0601 답 ⑤

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이므로

$\mathrm{P}(X\ge 1)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

이차방정식 $x^2-2ax+6a-8=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-(6a-8)=a^2-6a+8=(a-2)(a-4)$

(i) 이차방정식이 중근을 가질 때,

$\dfrac{D}{4}=0$에서 $(a-2)(a-4)=0$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=4$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=1)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

(ii) 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 때,

$\dfrac{D}{4}>0$에서 $(a-2)(a-4)>0$

$\therefore\ a<2$ 또는 $a>4$

즉, a는 1, 5, 6의 3개이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

(i), (ii)에서

$\mathrm{P}(X\ge 1)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{6}$

다른 풀이

여사건의 확률을 이용하여 다음과 같이 구할 수도 있다.

이차방정식이 허근을 가질 때,

$\dfrac{D}{4}<0$에서 $(a-2)(a-4)<0$

$\therefore\ 2<a<4$

즉, $a=3$이므로 $\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{1}{6}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 1)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)$

$=1-\mathrm{P}(X=0)=1-\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{6}$

0602 답 8

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, …, 8이므로

$\mathrm{P}(X>2)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)+\cdots+\mathrm{P}(X=8)$

$=1-\{\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\}$ …… ⓘ

(i) $X=1$인 사건은 상자에서 한 장의 카드를 꺼내어 그 카드에 적힌 수가 4의 배수인 경우이다.

4의 배수가 적힌 카드는 4, 8의 2장이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$

(ii) $X=2$인 사건은 상자에서 2장의 카드를 꺼내어 그 카드에 적힌 수의 합이 4의 배수인 경우이다.

1부터 8까지의 자연수를 4로 나눈 나머지가 n인 수의 집합을 A_n이라 하면

$A_1=\{1, 5\}$, $A_2=\{2, 6\}$, $A_3=\{3, 7\}$, $A_0=\{4, 8\}$

꺼낸 카드에 적힌 두 수의 합이 4의 배수이려면 두 수가 각각 집합 A_1, A_3의 원소이거나 모두 집합 A_2의 원소이어야 하므로

$\mathrm{P}(X=2)=\dfrac{2\times({}_2\mathrm{P}_1\times{}_2\mathrm{P}_1)+{}_2\mathrm{P}_2}{{}_8\mathrm{P}_2}=\dfrac{5}{28}$ …… ⓘⓘ

(i), (ii)에서

$k=\mathrm{P}(X>2)=1-\{\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\}$

$=1-\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{28}\right)=\dfrac{4}{7}$

$\therefore\ 14k=14\times\dfrac{4}{7}=8$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $\mathrm{P}(X>2)$를 $1-\{\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)\}$로 나타내기	30 %
ⓘⓘ $\mathrm{P}(X=1)$, $\mathrm{P}(X=2)$의 값 각각 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ $14k$의 값 구하기	20 %

0603 답 ①

무게가 1인 추를 주머니에 넣는 경우는 주사위의 눈의 수가 2 이하 → 1, 2의 2가지

인 경우이므로 그 확률은 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

무게가 2인 추를 주머니에 넣는 경우는 주사위의 눈의 수가 3 이상 → 3, 4, 5, 6의 4가지

인 경우이므로 그 확률은 $\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

(i) $X=3$인 사건은 주머니에 무게가 2인 추 3개가 들어 있는 경우이므로

$\mathrm{P}(X=3)={}_3\mathrm{C}_0\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\boxed{(\text{가})\ \dfrac{8}{27}}$

(ii) $X=4$인 사건은

① 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 네 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우

세 번째 시행까지는 무게가 1인 추 2개, 무게가 2인 추 1개를 넣어야 하므로 그 확률은 ${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\times\dfrac{2}{3}$

② 세 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우

네 번째 시행에서는 어떤 추를 넣어도 추의 총무게가 6보다 크거나 같다. 즉, 세 번째 시행까지 무게가 1인 추 1개, 무게가 2인 추 2개를 넣어야 하므로 그 확률은 ${}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

①, ②에서

$\mathrm{P}(X=4)=\boxed{(\text{나})\ {}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^1\times\dfrac{2}{3}}+{}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^2$

(iii) $X=5$인 사건은

① 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 4이고 다섯 번째 시행에서 무게가 2인 추를 넣는 경우

네 번째 시행까지는 모두 무게가 1인 추를 넣어야 하므로 그 확률은 ${}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^0\times\dfrac{2}{3}$

② 네 번째 시행까지 넣은 추의 총무게가 5인 경우

다섯 번째 시행에서는 어떤 추를 넣어도 추의 총무게가 6보다 크거나 같다. 즉, 네 번째 시행까지 무게가 1인 추 3개, 무게가 2인 추 1개를 넣어야 하므로 그 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^1$

①, ②에서

$$P(X=5)={}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^0\times\frac{2}{3}+\boxed{{}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1}$$

따라서 $a=\frac{8}{27}$, $b={}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$,

$c={}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$이므로

$$\frac{ab}{c}=\frac{\frac{8}{27}\times\frac{4}{27}}{\frac{8}{81}}=\frac{4}{9}$$

0604 답 ⑤

검은 구슬의 개수를 n이라 하면 흰 구슬의 개수는 $10-n$

서로 다른 동전 2개를 동시에 던져 앞면이 나오는 개수를 확률변수 Y라 하면 Y가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 각각의 확률은

$$P(Y=0)=\frac{1}{4},\ P(Y=1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\ P(Y=2)=\frac{1}{4}$$

$X=1$은 동전 앞면이 1개 나오고 검은 구슬을 1개 꺼내거나 동전 앞면이 2개 나오고 검은 구슬을 1개, 흰 구슬을 1개 꺼내는 경우이다.

$P(X=1)=\frac{4}{15}$에서

$$P(Y=1)\times\frac{{}_nC_1}{{}_{10}C_1}+P(Y=2)\times\frac{{}_nC_1\times{}_{10-n}C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{4}{15}$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{n}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{n(10-n)}{45}=\frac{4}{15}$$

$$\frac{n}{20}+\frac{n(10-n)}{180}=\frac{4}{15}$$

$n^2-19n+48=0$, $(n-3)(n-16)=0$

$\therefore n=3$ ($\because 0\le n\le 10$)

이때 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

(i) $X=0$일 때,

동전 앞면이 0개 나오거나,

동전 앞면이 1개 나오고 흰 구슬을 1개 꺼내거나,

동전 앞면이 2개 나오고 흰 구슬을 2개 꺼내는 경우이므로

$$P(X=0)=P(Y=0)+P(Y=1)\times\frac{{}_7C_1}{{}_{10}C_1}+P(Y=2)\times\frac{{}_7C_2}{{}_{10}C_2}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{7}{10}+\frac{1}{4}\times\frac{21}{45}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{7}{20}+\frac{7}{60}=\frac{43}{60}$$

(ii) $X=1$일 때, $P(X=1)=\frac{4}{15}$

(iii) $X=2$일 때,

동전 앞면이 2개 나오고 검은 구슬을 2개 꺼내는 경우이므로

$$P(X=2)=P(Y=2)\times\frac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{4}\times\frac{3}{45}=\frac{1}{60}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$E(X)=0\times\frac{43}{60}+1\times\frac{4}{15}+2\times\frac{1}{60}=\frac{3}{10}$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{43}{60}+1^2\times\frac{4}{15}+2^2\times\frac{1}{60}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{1}{3}-\left(\frac{3}{10}\right)^2=\frac{73}{300}$$

0605 답 ④

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, ..., 8이므로

$P(4\le X\le 6)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)$

(i) 세 수의 중앙값이 4인 경우

① 세 수 중에서 4가 1개인 경우

세 수를 a, 4, b($a<4<b$)라 하자.

a의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3의 3가지

b의 값이 될 수 있는 수는 5, 6, 7, 8의 4가지

세 수 a, 4, b의 순서를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

즉, 이때의 경우의 수는 $3\times4\times6=72$

② 세 수 중에서 4가 2개인 경우

세 수를 4, 4, a($a\ne4$)라 하자.

a의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8의 7가지

세 수 4, 4, a의 순서를 바꾸는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

즉, 이때의 경우의 수는 $7\times3=21$

③ 세 수 중에서 4가 3개인 경우는 4, 4, 4의 1가지

①, ②, ③에서 중앙값이 4인 경우의 수는

$72+21+1=94$

$\therefore P(X=4)=\frac{94}{8^3}$

(ii) 세 수의 중앙값이 5인 경우

① 세 수 중에서 5가 1개인 경우

세 수를 a, 5, b($a<5<b$)라 하자.

a의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4의 4가지

b의 값이 될 수 있는 수는 6, 7, 8의 3가지

세 수 a, 5, b의 순서를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

즉, 이때의 경우의 수는 $4\times3\times6=72$

② 세 수 중에서 5가 2개인 경우

세 수를 5, 5, a($a\ne5$)라 하자.

a의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8의 7가지

세 수 5, 5, a의 순서를 바꾸는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

즉, 이때의 경우의 수는 $7\times3=21$

③ 세 수 중에서 5가 3개인 경우는 5, 5, 5의 1가지

①, ②, ③에서 중앙값이 5인 경우의 수는

$72+21+1=94$

$\therefore P(X=5)=\frac{94}{8^3}$

(iii) 세 수의 중앙값이 6인 경우

① 세 수 중에서 6이 1개인 경우

세 수를 a, 6, b($a<6<b$)라 하자.

a의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

b의 값이 될 수 있는 수는 7, 8의 2가지

세 수 a, 6, b의 순서를 바꾸는 경우의 수는

$3!=6$

즉, 이때의 경우의 수는 $5\times2\times6=60$

② 세 수 중에서 6이 2개인 경우

세 수를 6, 6, $a(a\neq6)$라 하자.

a의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8의 7가지

세 수 6, 6, a의 순서를 바꾸는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

즉, 이때의 경우의 수는 $7\times3=21$

③ 세 수 중에서 6이 3개인 경우는 6, 6, 6의 1가지

①, ②, ③에서 중앙값이 6인 경우의 수는

$60+21+1=82$

$\therefore \mathrm{P}(X=6)=\frac{82}{8^3}$

(i), (ii), (iii)에서

$$\mathrm{P}(4\le X\le6)=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)$$
$$=\frac{94}{8^3}+\frac{94}{8^3}+\frac{82}{8^3}=\frac{135}{256}$$

중3 다시보기

(1) 평균: 자료의 변량의 총합을 변량의 개수로 나눈 것

(2) 중앙값: 자료의 변량을 작은 값부터 크기순으로 나열할 때, 한가운데 있는 값

(3) 최빈값: 자료의 변량 중에서 가장 많이 나타난 값

0606 답 ③

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{10}+2\times\frac{2}{5}+4\times\frac{3}{10}+6\times\frac{1}{5}=\frac{16}{5}$

0607 답 ④

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{4}{9}=\frac{29}{9}$

0608 답 ②

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{2}{7}+2\times\frac{3}{7}+4\times\frac{2}{7}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{2}{7}+2^2\times\frac{3}{7}+4^2\times\frac{2}{7}=\frac{44}{7}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{44}{7}-2^2=\frac{16}{7}$

0609 답 ②

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 4, 5, 10이므로 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	5	10	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+10\times\frac{1}{6}=4$

0610 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$a+2a+3a+\frac{1}{2}=1$

$6a=\frac{1}{2}$

$\therefore a=\frac{1}{12}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{1}{2}=\frac{19}{6}$

0611 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{2}+b=1 \quad \therefore a+b=\frac{1}{2}$ ····· ㉠

$\mathrm{E}(X)=3.5$에서

$1\times a+3\times\frac{1}{2}+5\times b=3.5$

$\therefore a+5b=2$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{8}, b=\frac{3}{8}$

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{1}{8}}=3$

0612 답 $-\frac{1}{4}$

$$\mathrm{P}(|X|\le1)=\mathrm{P}(-1\le X\le1)$$
$$=\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$$
$$=1-\mathrm{P}(X=2)$$

$\mathrm{P}(|X|\le1)=\frac{7}{8}$에서 $1-\mathrm{P}(X=2)=\frac{7}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{8}$ ····· ⓘ

즉, $\frac{3-a}{8}=\frac{1}{8}$에서 $3-a=1$

$\therefore a=2$ ····· ⓘⓘ

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=-1\times\frac{5}{8}+0\times\frac{1}{8}+1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{8}=-\frac{1}{4}$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\mathrm{P}(X=2)$의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ a의 값 구하기	20 %
ⓘⓘⓘ X의 평균 구하기	40 %

0613 답 ③

$P(X=-x)=P(X=x)(x=1, 3)$이므로

$P(X=-1)=P(X=1)=a$, $P(X=-3)=P(X=3)=b$

라 하자.

확률의 총합은 1이므로

$b+a+a+b=1$, $2(a+b)=1$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}$ ····· ㉠

$E(X)=(-3)\times b+(-1)\times a+1\times a+3\times b=0$

$E(X^2)=(-3)^2\times b+(-1)^2\times a+1^2\times a+3^2\times b=2a+18b$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=2a+18b$

$V(X)=5$에서 $2a+18b=5$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{4}$

$\therefore P(X\geq 2)=P(X=3)=b=\frac{1}{4}$

따라서 $p=4$, $q=1$이므로

$p+q=4+1=5$

0614 답 2

확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$

$(a+b)+(2a+b)+(3a+b)+(4a+b)=1$

$10a+4b=1$ $\therefore 5a+2b=\frac{1}{2}$ ····· ㉠ ····· ⅰ

$E(X)=\frac{12}{5}$에서

$1\times(a+b)+2\times(2a+b)+3\times(3a+b)+4\times(4a+b)=\frac{12}{5}$

$30a+10b=\frac{12}{5}$ $\therefore 3a+b=\frac{6}{25}$ ····· ㉡ ····· ⅱ

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{1}{50}$, $b=\frac{3}{10}$ ····· ⅲ

$\therefore 10(5a+b)=10\times\left\{5\times\left(-\frac{1}{50}\right)+\frac{3}{10}\right\}=2$ ····· ⅳ

채점 기준	
ⅰ 확률의 총합은 1임을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기	30 %
ⅱ $E(X)=\frac{12}{5}$임을 이용하여 a, b에 대한 식 세우기	30 %
ⅲ a, b의 값 각각 구하기	20 %
ⅳ $10(5a+b)$의 값 구하기	20 %

0615 답 3

확률의 총합은 1이므로

$a+b+c=1$ ····· ㉠

$E(X)=2$에서 $0\times a+2\times b+4\times c=2$

$2b+4c=2$ $\therefore b+2c=1$ ····· ㉡

$E(X^2)=0^2\times a+2^2\times b+4^2\times c=4b+16c$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=4b+16c-2^2=4b+16c-4$

$V(X)=2$에서 $4b+16c-4=2$

$4b+16c=6$ $\therefore 2b+8c=3$ ····· ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{1}{4}$

이를 ㉠에 대입하여 풀면

$a=\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	2	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

이때 $X^2-4X=0$에서 $X(X-4)=0$

$\therefore X=0$ 또는 $X=4$

$\therefore k=P(X^2-4X=0)=P(X=0 \text{ 또는 } X=4)$

$=P(X=0)+P(X=4)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

$\therefore 6k=6\times\frac{1}{2}=3$

0616 답 ①

$P(X=k+2)-P(X=k)=\frac{(-1)^k}{4}(k=1, 2)$이므로

$P(X=1)=a$라 하면

$P(X=3)-P(X=1)=P(X=3)-a=-\frac{1}{4}$

$\therefore P(X=3)=a-\frac{1}{4}$

$P(X=2)=b$라 하면

$P(X=4)-P(X=2)=P(X=4)-b=\frac{1}{4}$

$\therefore P(X=4)=b+\frac{1}{4}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	a	b	$a-\frac{1}{4}$	$b+\frac{1}{4}$	1

확률의 총합은 1이므로

$a+b+\left(a-\frac{1}{4}\right)+\left(b+\frac{1}{4}\right)=1$

$2a+2b=1$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}$ ····· ㉠

$E(X)=\frac{21}{8}$에서

$1\times a+2\times b+3\times\left(a-\frac{1}{4}\right)+4\times\left(b+\frac{1}{4}\right)=\frac{21}{8}$

$4a+6b+\frac{1}{4}=\frac{21}{8}$

$\therefore 4a+6b=\frac{19}{8}$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{5}{16}$, $b=\frac{3}{16}$

$\therefore P(X=1)=a=\frac{5}{16}$

0617 답 ⑤

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{2}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$, $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{2}$

$\therefore 2(a+b)=ab$ ····· ㉠

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{2}+a\times\frac{1}{a}+b\times\frac{1}{b}=\frac{5}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{2}+a^2\times\frac{1}{a}+b^2\times\frac{1}{b}=\frac{1}{2}+a+b$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{1}{2}+a+b-\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$=a+b-\frac{23}{4}$

$\mathrm{V}(X)=\frac{13}{4}$에서

$a+b-\frac{23}{4}=\frac{13}{4}$

$a+b=9$

$\therefore b=9-a$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$18=a(9-a)$

$a^2-9a+18=0$

$(a-3)(a-6)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $a=6$

이를 ㉡에 대입하면

$a=3$, $b=6$ 또는 $a=6$, $b=3$

이때 $a<b$이므로

$a=3$, $b=6$

$\therefore a^2+b^2=3^2+6^2=45$

0618 답 ③

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6이다.

뽑은 2장의 카드에 적힌 수를 각각 a, $b(a<b)$라 하면 순서쌍 (a, b)에 대하여 두 수 중 큰 수가

(i) 2인 경우는 (1, 2)의 1가지이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{1}{15}$

(ii) 3인 경우는 (1, 3), (2, 3)의 2가지이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{15}$

(iii) 4인 경우는 (1, 4), (2, 4), (3, 4)의 3가지이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

(iv) 5인 경우는 (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)의 4가지이므로

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{4}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{15}$

(v) 6인 경우는 (1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6)의 5가지이므로

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{5}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

(i)~(v)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	1

$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{15}+3\times\frac{2}{15}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{4}{15}+6\times\frac{1}{3}=\frac{14}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\frac{1}{15}+3^2\times\frac{2}{15}+4^2\times\frac{1}{5}+5^2\times\frac{4}{15}+6^2\times\frac{1}{3}=\frac{70}{3}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{70}{3}-\left(\frac{14}{3}\right)^2=\frac{14}{9}$

따라서 $p=9$, $q=14$이므로

$p+q=9+14=23$

0619 답 ⑤

$\mathrm{E}(X)=a$, $\mathrm{E}(X^2)=10a+11$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=10a+11-a^2$

$=-(a-5)^2+36$

$\mathrm{V}(X)$는 $a=5$일 때 최댓값 36을 가지므로

$M=36$, $k=5$

$\therefore M+k=36+5=41$

0620 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$a+(a+b)+b=1$

$2a+2b=1$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}$ ····· ㉠

이때 $\mathrm{E}(X^2)=1^2\times a+2^2\times(a+b)+3^2\times b$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=2a+\frac{11}{4}$에서

$a+4a+4b+9b=2a+\frac{11}{4}$

$\therefore 3a+13b=\frac{11}{4}$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{3}{8}$, $b=\frac{1}{8}$

$\therefore a-b=\frac{3}{8}-\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

0621 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$\left(k-\frac{1}{4}\right)+\left(k-\frac{1}{2}\right)+\frac{k}{4}+\frac{k}{2}=1$

$\frac{11}{4}k=\frac{7}{4}$

$\therefore k=\frac{7}{11}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{17}{44}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{7}{44}$	$\frac{7}{22}$	1

$\therefore E(X)=1\times\frac{17}{44}+2\times\frac{3}{22}+3\times\frac{7}{44}+4\times\frac{7}{22}=\frac{53}{22}$

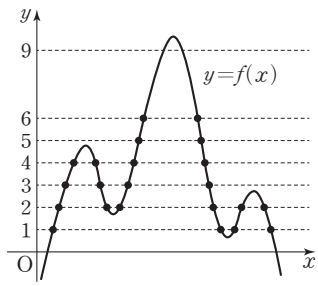
0622 답 14

한 개의 주사위를 한 번 던져서 나온 눈의 수가 a이므로 그림에서 a의 값에 따라 교점의 개수를 구하면

$a=1$일 때 4, $a=2$일 때 6,

$a=3$일 때 4, $a=4$일 때 4,

$a=5$일 때 2, $a=6$일 때 2



X가 될 수 있는 값은 2, 4, 6이고 각각의 확률은

$P(X=2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(X=4)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(X=6)=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$\therefore E(X)=2\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{2}+6\times\frac{1}{6}=\frac{11}{3}$

따라서 $p=3$, $q=11$이므로

$p+q=3+11=14$

0623 답 ③

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

꺼낸 2개의 공에 적힌 두 수의 차가

(i) 0인 경우는 2가 적힌 공을 2개 꺼내거나 3이 적힌 공을 2개 꺼낼 때이므로

$P(X=0)=\frac{{}_2C_2+{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1+3}{15}=\frac{4}{15}$

(ii) 1인 경우는 1, 2가 적힌 공을 각각 1개씩 꺼내거나 2, 3이 적힌 공을 각각 1개씩 꺼낼 때이므로

$P(X=1)=\frac{{}_1C_1\times{}_2C_1+{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{2+6}{15}=\frac{8}{15}$

(iii) 2인 경우는 1, 3이 적힌 공을 각각 1개씩 꺼낼 때이므로

$P(X=2)=\frac{{}_1C_1\times{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{5}$	1

$\therefore E(X)=0\times\frac{4}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{5}=\frac{14}{15}$

0624 답 ③

$E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+a\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}a+\frac{7}{6}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{3}+a^2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}a^2+\frac{11}{6}$

$\sigma(X)=E(X)$에서 $V(X)=\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)-\{E(X)\}^2=\{E(X)\}^2$

$E(X^2)=2\{E(X)\}^2$

$\frac{1}{6}a^2+\frac{11}{6}=2\left(\frac{1}{6}a+\frac{7}{6}\right)^2$

$a^2-7a-8=0$, $(a+1)(a-8)=0$

$\therefore a=8$ ($\because a>2$)

$\therefore E(X^2)+E(X)=\frac{1}{6}a^2+\frac{11}{6}+\frac{1}{6}a+\frac{7}{6}$

$=\frac{1}{6}(a^2+a)+3$

$=12+3=15$

0625 답 $\frac{1}{9}$

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{3}+b=1$ $\therefore a+b=\frac{2}{3}$ ····· ㉠ ····· ⓘ

$E(X)=-2\times a+0\times\frac{1}{3}+2\times b$

$=-2a+2b=2(b-a)$

$E(X^2)=(-2)^2\times a+0^2\times\frac{1}{3}+2^2\times b$

$=4a+4b=4(a+b)$

$=4\times\frac{2}{3}$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{8}{3}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{8}{3}-4(b-a)^2$ ····· ⓘⓘ

따라서 $V(X)$가 최대가 되려면 $4(b-a)^2=0$, 즉 $a=b$이어야 한다.

$a=b$를 ㉠에 대입하면

$2a=\frac{2}{3}$ $\therefore a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{3}$

$\therefore ab=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $a+b$의 값 구하기	30%
ⓘⓘ $V(X)$를 a, b에 대한 식으로 나타내기	30%
ⓘⓘⓘ ab의 값 구하기	40%

0626 답 ④

$P(X=k)=P(X=k+2)$ $(k=0, 1, 2)$이므로

$P(X=0)=a$라 하면

$P(X=0)=P(X=2)=P(X=4)=a$

$P(X=1)=b$라 하면

$P(X=1)=P(X=3)=b$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	a	b	a	b	a	1

확률의 총합은 1이므로

$3a+2b=1$ ····· ㉠

이때 $E(X^2)=0^2\times a+1^2\times b+2^2\times a+3^2\times b+4^2\times a$이므로

$E(X^2)=\frac{35}{6}$에서

$20a+10b=\frac{35}{6}$ $\therefore 2a+b=\frac{7}{12}$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{1}{4}$

$\therefore P(X=0)=a=\frac{1}{6}$

0627 답 $2\sqrt{2}$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

(i) 앞면과 뒷면이 교대로 나오는 경우

(H, T, H), (T, H, T)의 2가지이고, 이때 2점을 얻으므로

$P(X=2)=\frac{2}{2\times2\times2}=\frac{1}{4}$

(ii) 앞면 또는 뒷면이 연속해서 2회만 나오는 경우

(H, H, T), (T, H, H), (T, T, H), (H, T, T)의 4가지이고, 이때 6점을 얻으므로

$P(X=6)=\frac{4}{2\times2\times2}=\frac{1}{2}$

(iii) 앞면 또는 뒷면이 연속해서 3회 나오는 경우

(H, H, H), (T, T, T)의 2가지이고, 이때 10점을 얻으므로

$P(X=10)=\frac{2}{2\times2\times2}=\frac{1}{4}$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	6	10	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$E(X)=2\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{2}+10\times\frac{1}{4}=6$

$E(X^2)=2^2\times\frac{1}{4}+6^2\times\frac{1}{2}+10^2\times\frac{1}{4}=44$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=44-6^2=8$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

0628 답 64

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이다.

꺼낸 2장의 카드에 적힌 두 수의 합이

(i) 1인 경우는 0, 1이 적힌 카드를 각각 1장씩 뽑을 때이므로

$P(X=1)=\frac{{}_1C_1\times{}_1C_1}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

(ii) 2인 경우는 0, 2가 적힌 카드를 각각 1장씩 뽑을 때이므로

$P(X=2)=\frac{{}_1C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

(iii) 3인 경우는 0, 3이 적힌 카드를 각각 1장씩 뽑거나 1, 2가 적힌 카드를 각각 1장씩 뽑을 때이므로

$P(X=3)=\frac{{}_1C_1\times{}_1C_1+{}_1C_1\times{}_2C_1}{{}_5C_2}=\frac{1+2}{10}=\frac{3}{10}$

(iv) 4인 경우는 1, 3이 적힌 카드를 각각 1장씩 뽑거나 2가 적힌 카드를 2장 뽑을 때이므로

$P(X=4)=\frac{{}_1C_1\times{}_1C_1+{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1+1}{10}=\frac{1}{5}$

(v) 5인 경우는 2, 3이 적힌 카드를 각각 1장씩 뽑을 때이므로

$P(X=5)=\frac{{}_2C_1\times{}_1C_1}{{}_5C_2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

(i)~(v)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$E(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}=\frac{16}{5}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{3}{10}+4^2\times\frac{1}{5}+5^2\times\frac{1}{5}=\frac{59}{5}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{59}{5}-\left(\frac{16}{5}\right)^2=\frac{39}{25}$

따라서 $p=25$, $q=39$이므로

$p+q=25+39=64$

0629 답 ②

(i) $P(Y=0)=P(X=0)={}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ → 앞면이 0번

(ii) $P(Y=1)=P(X=1)={}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$ → 앞면이 1번

(iii) $P(Y=2)=1-\{P(Y=0)+P(Y=1)\}$

$=1-\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{16}$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 Y의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	0	1	2	합계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	1

$\therefore E(Y)=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{11}{16}=\frac{13}{8}$

0630 답 ④

공에 번호를 적는 경우의 수는 흰 공 3개와 검은 공 4개를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{7!}{3!\times4!}=35$

이때 확률변수 X가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5, 6이다.

(i) $X=3$일 때,

'3'이 적힌 검은 공 앞에 검은 공 2개, '3'이 적힌 검은 공 뒤에 흰 공 3개와 검은 공 1개를 나열하는 경우의 수는 $1\times\frac{4!}{3!}=4$

$\therefore P(X=3)=\frac{4}{35}$

(ii) $X=4$일 때,

'4'가 적힌 검은 공 앞에 흰 공 1개와 검은 공 2개, '4'가 적힌 검은 공 뒤에 흰 공 2개와 검은 공 1개를 나열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\times\frac{3!}{2!}=3\times3=9$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=4)=\frac{9}{35}$

(iii) $X=5$일 때,

'5'가 적힌 검은 공 앞에 흰 공 2개와 검은 공 2개, '5'가 적힌 검은 공 뒤에 흰 공 1개와 검은 공 1개를 나열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times2!=6\times2=12$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=5)=\frac{12}{35}$

(iv) $X=6$일 때,

$\mathrm{P}(X=6)=1-\{\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)\}$

$=1-\left(\frac{4}{35}+\frac{9}{35}+\frac{12}{35}\right)=\frac{10}{35}$

(i)~(iv)에서

$\mathrm{E}(X)=3\times\mathrm{P}(X=3)+4\times\mathrm{P}(X=4)+5\times\mathrm{P}(X=5)+6\times\mathrm{P}(X=6)$

$=3\times\frac{4}{35}+4\times\frac{9}{35}+5\times\frac{12}{35}+6\times\frac{10}{35}$

$=\frac{24}{5}$

0631 답 ②

$\mathrm{E}(2X+5)=2\mathrm{E}(X)+5$

$=2\times10+5=25$

0632 답 ③

$\mathrm{E}(4X-2)+\mathrm{V}(3X+2)=4\mathrm{E}(X)-2+3^2\mathrm{V}(X)$

$=4\times6-2+9\times4$

$=22+36=58$

0633 답 ④

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=19-4^2=3$

$\therefore\ \mathrm{V}(5X-1)=5^2\mathrm{V}(X)=25\times3=75$

0634 답 ③

$\mathrm{E}(X)=-3\times\frac{2}{9}+0\times\frac{4}{9}+3\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \mathrm{E}(3X+4)=3\mathrm{E}(X)+4=3\times\frac{1}{3}+4=5$

0635 답 ⑤

정사면체 모양의 주사위의 네 면에 적힌 숫자의 합은

$1+3+5+7=16$

즉, $X+Y=16$이므로

$Y=16-X$

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 3, 5, 7이고 그 확률은 각각 $\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{4}+7\times\frac{1}{4}=4$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}+5^2\times\frac{1}{4}+7^2\times\frac{1}{4}=21$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=21-4^2=5$

$Y=16-X$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(16-X)=16-\mathrm{E}(X)=16-4=12$

$\therefore\ \mathrm{V}(2X-3)+\mathrm{E}(3Y+1)=2^2\mathrm{V}(X)+3\mathrm{E}(Y)+1$

$=4\times5+3\times12+1$

$=20+37=57$

0636 답 8

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$9=25-\{\mathrm{E}(X)\}^2$, $\{\mathrm{E}(X)\}^2=16$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=4\ (\because\ \mathrm{E}(X)>0)$

$\mathrm{V}(aX+b)=36$에서 $a^2\mathrm{V}(X)=36$

$9a^2=36$, $a^2=4$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

$\mathrm{E}(aX+b)=14$에서 $a\mathrm{E}(X)+b=14$

$2\times4+b=14$ $\therefore\ b=6$

$\therefore\ a+b=2+6=8$

0637 답 ④

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{1}{7}+5\times\frac{1}{7}=\frac{15}{7}$

$\therefore\ \mathrm{E}(14X+1)=14\mathrm{E}(X)+1$

$=14\times\frac{15}{7}+1=31$

0638 답 ⑤

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{7}+1\times\frac{3}{14}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{5}{14}=\frac{13}{7}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{7}+1^2\times\frac{3}{14}+2^2\times\frac{2}{7}+3^2\times\frac{5}{14}=\frac{32}{7}$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{32}{7}-\left(\frac{13}{7}\right)^2=\frac{55}{49}$

$\therefore\ \mathrm{V}(-7X+5)=(-7)^2\mathrm{V}(X)$

$=49\times\frac{55}{49}=55$

0639 답 ⑤

확률의 총합은 1이므로

$\frac{{}_4C_1}{k}+\frac{{}_4C_2}{k}+\frac{{}_4C_3}{k}+\frac{{}_4C_4}{k}=1$, $\frac{4}{k}+\frac{6}{k}+\frac{4}{k}+\frac{1}{k}=1$

$\frac{15}{k}=1$ $\therefore k=15$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	4	8	16	계
$P(X=x)$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$\therefore E(X)=2\times\frac{4}{15}+4\times\frac{2}{5}+8\times\frac{4}{15}+16\times\frac{1}{15}=\frac{16}{3}$

$\therefore E(3X+1)=3E(X)+1=3\times\frac{16}{3}+1=17$

0640 답 89

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{10}+a+2a+\frac{3}{10}=1$, $3a=\frac{3}{5}$

$\therefore a=\frac{1}{5}$ …… ⓘ

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{2}{5}+3\times\frac{3}{10}=\frac{19}{10}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{2}{5}+3^2\times\frac{3}{10}=\frac{9}{2}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{9}{2}-\left(\frac{19}{10}\right)^2=\frac{89}{100}$ …… ⓘⓘ

$\therefore V(10X-5)=10^2V(X)=100\times\frac{89}{100}=89$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a의 값 구하기	20%
ⓘⓘ $V(X)$의 값 구하기	50%
ⓘⓘⓘ $V(10X-5)$의 값 구하기	30%

0641 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{5}+a+b=1$ $\therefore a+b=\frac{4}{5}$ …… ㉠

$E(10X)=22$에서 $10E(X)=22$

즉, $E(X)=\frac{11}{5}$이므로

$1\times\frac{1}{5}+2\times a+3\times b=\frac{11}{5}$

$\therefore 2a+3b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{5}$, $b=\frac{2}{5}$

$\therefore 3a+2b=3\times\frac{2}{5}+2\times\frac{2}{5}=2$

0642 답 ①

$E(X)=5$, $V(X)=4$이므로

$E(aX+b)=11$에서 $aE(X)+b=11$

$\therefore 5a+b=11$ …… ㉠

$V(aX+b)=16$에서 $a^2V(X)=16$

$4a^2=16$, $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

이를 ㉠에 대입하면

$10+b=11$ $\therefore b=1$

$\therefore a-b=2-1=1$

0643 답 38

$E(2X-1)=11$에서

$2E(X)-1=11$, $2E(X)=12$

$\therefore E(X)=6$

$V(3X+1)=18$에서

$3^2V(X)=18$, $9V(X)=18$

$\therefore V(X)=2$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=2+6^2=38$

0644 답 ③

$E(X)=-3\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{4}+a\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}$

$E(X)=-1$에서

$\frac{1}{4}a-\frac{3}{2}=-1$, $\frac{1}{4}a=\frac{1}{2}$

$\therefore a=2$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-3	0	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$E(X^2)=(-3)^2\times\frac{1}{2}+0^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{11}{2}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{11}{2}-(-1)^2=\frac{9}{2}$

$\therefore V(aX)=V(2X)=2^2V(X)=4\times\frac{9}{2}=18$

0645 답 990

첫 번째, 두 번째, 세 번째 숫자를 각각 X_1, X_2, X_3이라 하면

$X=100X_1+10X_2+X_3$

확률변수 X_1, X_2, X_3이 가질 수 있는 값은 각각 1, 2, 3, 4, 5이고 각각의 확률은

$P(X_1=x)=P(X_2=x)=P(X_3=x)=\frac{1}{5}$ ($x=1, 2, 3, 4, 5$)

이므로

$E(X_1)=E(X_2)=E(X_3)$

$=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}=3$

$\therefore$ $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(100X_1+10X_2+X_3)$

$=100\mathrm{E}(X_1)+10\mathrm{E}(X_2)+\mathrm{E}(X_3)$

$=100\times3+10\times3+3=333$

$\therefore$ $\mathrm{E}(3X-9)=3\mathrm{E}(X)-9=3\times333-9=990$

0646 답 30

$Y=10X-5$이므로 …… ⓘ

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(10X-5)=10\mathrm{E}(X)-5=10\times2.5-5=20$ …… ⓘⓘ

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=7.25-(2.5)^2=1$이므로

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$

$\therefore$ $\sigma(Y)=\sigma(10X-5)=|10|\sigma(X)=10\times1=10$ …… ⓘⓘⓘ

$\therefore$ $\mathrm{E}(Y)+\sigma(Y)=20+10=30$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ Y를 X에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘ Y의 평균 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ Y의 표준편차 구하기	30 %
ⓘⓥ Y의 평균과 표준편차의 합 구하기	10 %

0647 답 ①

확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{1}{10}$	a	1

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+0+\frac{1}{10}+a=1$ $\therefore$ $a=\frac{3}{5}$

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{1}{10}+2\times0+3\times\frac{1}{10}+4\times\frac{3}{5}=\frac{14}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times0+3^2\times\frac{1}{10}+4^2\times\frac{3}{5}=\frac{53}{5}$

$\therefore$ $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{53}{5}-\left(\frac{14}{5}\right)^2=\frac{69}{25}$

$\therefore$ $\mathrm{V}\left(\frac{3}{a}X\right)=\mathrm{V}(5X)=5^2\mathrm{V}(X)=25\times\frac{69}{25}=69$

0648 답 ⑤

$\mathrm{E}(Y)=-1\times a+0\times b+1\times\frac{2}{3}=-a+\frac{2}{3}$

$\mathrm{E}(Y)=0.5$에서 $-a+\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$ $\therefore$ $a=\boxed{(가)\ \frac{1}{6}}$

확률의 총합은 1이므로

$a+b+\frac{2}{3}=1$ $\therefore$ $a+b=\frac{1}{3}$

$a=\frac{1}{6}$을 대입하여 풀면 $b=\boxed{(나)\ \frac{1}{6}}$

한편 $Y=10X-2.21$이므로

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(10X-2.21)=\boxed{(다)\ 100}\times\mathrm{V}(X)$

따라서 $p=\frac{1}{6}$, $q=\frac{1}{6}$, $r=100$이므로

$pqr=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times100=\frac{25}{9}$

0649 답 ④

정사각형의 한 변의 길이를 확률변수 X라 하면 정사각형의 둘레의 길이는 $4X$, 넓이는 X^2이다.

정사각형의 둘레의 길이의 평균이 16이므로 $\mathrm{E}(4X)=16$에서

$4\mathrm{E}(X)=16$ $\therefore$ $\mathrm{E}(X)=4$

정사각형의 둘레의 길이의 표준편차가 8이므로 $\sigma(4X)=8$에서

$\mathrm{V}(4X)=64$, $4^2\mathrm{V}(X)=64$ $\therefore$ $\mathrm{V}(X)=4$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로 정사각형의 넓이의 평균은

$\mathrm{E}(X^2)=4+4^2=20$

0650 답 ④

ㄱ. $X=70$일 때 $T=75$이므로

$75=15\left(\frac{70-m}{\sigma}\right)+60$ $\therefore$ $\sigma=70-m$ …… ㉠

$X=80$일 때 $T=90$이므로

$90=15\left(\frac{80-m}{\sigma}\right)+60$ $\therefore$ $\sigma=40-\frac{m}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=60$, $\sigma=10$

ㄴ. $T=15\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)+60=\frac{15}{\sigma}X-\frac{15m}{\sigma}+60$이므로

$\mathrm{E}(T)=\mathrm{E}\left(\frac{15}{\sigma}X-\frac{15m}{\sigma}+60\right)$

$=\frac{15}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{15m}{\sigma}+60$

$=\frac{15m}{\sigma}-\frac{15m}{\sigma}+60=60$

$\sigma(T)=\sigma\left(\frac{15}{\sigma}X-\frac{15m}{\sigma}+60\right)$

$=\left|\frac{15}{\sigma}\right|\sigma(X)=15$

따라서 T의 평균과 표준편차는 각각 60, 15이다.

ㄷ. ㄱ에서 $m=60$, $\sigma=10$이므로 $T=15\left(\frac{X-60}{10}\right)+60$

시험 점수가 76점인 학생 A의 표준 점수는

$15\left(\frac{76-60}{10}\right)+60=84$

즉, 학생 A의 표준 점수는 82점보다 높다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0651 답 20

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이다.

(i) $X=1$일 때,

2개의 서랍에 적혀 있는 자연수 중 작은 수가 1이 되는 경우는

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)이므로

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{4}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

(ii) $X=2$일 때,

2개의 서랍에 적혀 있는 자연수 중 작은 수가 2가 되는 경우는

(2, 3), (2, 4), (2, 5)이므로

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{3}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$

(iii) $X=3$일 때,

2개의 서랍에 적혀 있는 자연수 중 작은 수가 3이 되는 경우는 (3, 4), (3, 5)이므로

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

(iv) $X=4$일 때,

2개의 서랍에 적혀 있는 자연수 중 작은 수가 4가 되는 경우는 (4, 5)이므로

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$

(i)~(iv)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$\therefore \mathrm{E}(X)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{10}=2$

$\therefore \mathrm{E}(10X)=10\mathrm{E}(X)=10\times2=20$

0652 답 3

$\mathrm{E}(X)=\mathrm{P}(X=1)+2\mathrm{P}(X=2)+3\mathrm{P}(X=3)+4\mathrm{P}(X=4)+5\mathrm{P}(X=5)=3$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{P}(Y=1)+2\mathrm{P}(Y=2)+3\mathrm{P}(Y=3)+4\mathrm{P}(Y=4)+5\mathrm{P}(Y=5)$

$=\left\{\frac{1}{3}\mathrm{P}(X=1)+\frac{2}{15}\right\}+2\left\{\frac{1}{3}\mathrm{P}(X=2)+\frac{2}{15}\right\}+3\left\{\frac{1}{3}\mathrm{P}(X=3)+\frac{2}{15}\right\}+4\left\{\frac{1}{3}\mathrm{P}(X=4)+\frac{2}{15}\right\}+5\left\{\frac{1}{3}\mathrm{P}(X=5)+\frac{2}{15}\right\}$

$=\frac{1}{3}\{\mathrm{P}(X=1)+2\mathrm{P}(X=2)+3\mathrm{P}(X=3)+4\mathrm{P}(X=4)+5\mathrm{P}(X=5)\}+\frac{2}{15}(1+2+3+4+5)$

$=\frac{1}{3}\mathrm{E}(X)+\frac{2}{15}\times15=\frac{1}{3}\times3+2=3$ ($\because \mathrm{E}(X)=3$)

0653 답 ②

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이다.

곰 인형 4개와 토끼 인형 2개를 일렬로 세우는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!\times2!}=15$

(i) $X=1$일 때,

1번 자리에 토끼 인형을 세우고, 나머지 5개 자리에 곰 인형 4개와 토끼 인형 1개를 일렬로 세우는 경우의 수는 $\frac{5!}{4!}=5$

$\therefore \mathrm{P}(X=1)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

(ii) $X=2$일 때,

1번 자리에 곰 인형, 2번 자리에 토끼 인형을 세우고, 나머지 4개 자리에 곰 인형 3개와 토끼 인형 1개를 일렬로 세우는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{4}{15}$

(iii) $X=3$일 때,

1, 2번 자리에 곰 인형, 3번 자리에 토끼 인형을 세우고, 나머지 3개 자리에 곰 인형 2개와 토끼 인형 1개를 일렬로 세우는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

$\therefore \mathrm{P}(X=3)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$

(iv) $X=4$일 때,

1, 2, 3번 자리에 곰 인형, 4번 자리에 토끼 인형을 세우고, 5, 6번 자리에 곰 인형 1개와 토끼 인형 1개를 일렬로 세우는 경우의 수는 $2!=2$

$\therefore \mathrm{P}(X=4)=\frac{2}{15}$

(v) $X=5$일 때,

1, 2, 3, 4번 자리에 곰 인형을 세우고, 5, 6번 자리에 토끼 인형을 세우는 경우의 수는 1

$\therefore \mathrm{P}(X=5)=\frac{1}{15}$

(i)~(v)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{4}{15}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{2}{15}+5\times\frac{1}{15}=\frac{7}{3}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{4}{15}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{2}{15}+5^2\times\frac{1}{15}=7$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=7-\left(\frac{7}{3}\right)^2=\frac{14}{9}$

$\therefore \mathrm{V}(3X+2)=3^2\mathrm{V}(X)$

$=9\times\frac{14}{9}=14$

0654 답 ③

(i) 삼각형 ABF와 같이 이웃한 세 점을 택한 경우

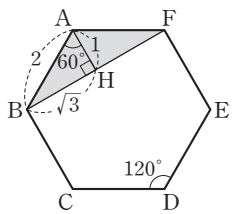
6개의 꼭짓점 중에서 이웃한 세 점을 택하는 경우의 수는 6

이때 점 A에서 선분 BF에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}=1$, $\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{3}$이므로

삼각형 ABF의 넓이는

$2\times\triangle\mathrm{ABH}=2\times\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}$

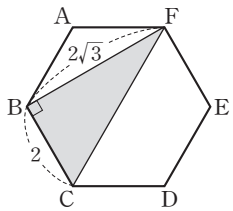
$\therefore \mathrm{P}(X=\sqrt{3})=\frac{6}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{3}{10}$



(ii) 삼각형 BCF와 같이 한 변과 이웃하지 않은 한 점을 택한 경우

6개의 꼭짓점 중에서 한 변을 택하는 경우의 수는 6이고, 이웃하지 않은 한 점을 택하는 경우의 수는 2이므로 세 점을 택하는 경우의 수는

$6\times2=12$



(i)에서 $\overline{BF}=2\sqrt{3}$이므로

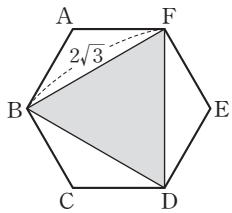
삼각형 BCF의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$\therefore P(X=2\sqrt{3})=\frac{12}{{}_6C_3}=\frac{3}{5}$

(iii) 삼각형 BDF와 같이 이웃하지 않은 세 점을 택한 경우

6개의 꼭짓점 중에서 이웃하지 않은 세 점을 택하여 만든 삼각형은 BDF, ACE의 2가지



(i)에서 $\overline{BF}=2\sqrt{3}$이므로 삼각형 BDF는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이다.

따라서 삼각형 BDF의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{3})^2=3\sqrt{3}$

$\therefore P(X=3\sqrt{3})=\frac{2}{{}_6C_3}=\frac{1}{10}$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

$E(X)=\sqrt{3}\times\frac{3}{10}+2\sqrt{3}\times\frac{3}{5}+3\sqrt{3}\times\frac{1}{10}=\frac{9\sqrt{3}}{5}$

$E(X^2)=(\sqrt{3})^2\times\frac{3}{10}+(2\sqrt{3})^2\times\frac{3}{5}+(3\sqrt{3})^2\times\frac{1}{10}=\frac{54}{5}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{54}{5}-\left(\frac{9\sqrt{3}}{5}\right)^2=\frac{27}{25}$

$\therefore V(5X+2)=5^2V(X)$

$=25\times\frac{27}{25}=27$

0655 답 ⑤

X가 될 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이다.

순서쌍 (a, b)에 대하여

(i) $|a-b|$의 값이 0인 경우는 (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)의 5가지이므로

$P(X=0)=\frac{5}{5\times5}=\frac{1}{5}$

(ii) $|a-b|$의 값이 1인 경우는 (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3), (4, 5), (5, 4)의 8가지이므로

$P(X=1)=\frac{8}{5\times5}=\frac{8}{25}$

(iii) $|a-b|$의 값이 2인 경우는 (1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 5), (5, 3)의 6가지이므로

$P(X=2)=\frac{6}{5\times5}=\frac{6}{25}$

(iv) $|a-b|$의 값이 3인 경우는 (1, 4), (4, 1), (2, 5), (5, 2)의 4가지이므로

$P(X=3)=\frac{4}{5\times5}=\frac{4}{25}$

(v) $|a-b|$의 값이 4인 경우는 (1, 5), (5, 1)의 2가지이므로

$P(X=4)=\frac{2}{5\times5}=\frac{2}{25}$

(i)~(v)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{25}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{8}{25}+2\times\frac{6}{25}+3\times\frac{4}{25}+4\times\frac{2}{25}=\frac{8}{5}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{8}{25}+2^2\times\frac{6}{25}+3^2\times\frac{4}{25}+4^2\times\frac{2}{25}=4$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=4-\left(\frac{8}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$

$\therefore V(Y)=V(-3X+4)=(-3)^2V(X)$

$=9\times\frac{36}{25}=\frac{324}{25}$

$\therefore V(5Y+2)=5^2V(Y)=25\times\frac{324}{25}$

$=324$

0656 답 ③

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이다.

갈림길에서 왼쪽으로 갈 확률이 $\frac{1}{2}$이므로 오른쪽으로 갈 확률은

$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

구슬이 갈림길에서 왼쪽으로 가는 경우를 ←, 오른쪽으로 가는 경우를 →라 하자.

구슬이 도착하는 상자의 번호가

(i) 1인 경우

←, ←, ←의 순서로 이동하므로

$P(X=1)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

(ii) 2인 경우

←, ←, →의 순서로 이동하므로

$P(X=2)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

(iii) 3인 경우

←, → 또는 →, ← 또는 →, →, ←의 순서로 이동하므로

$P(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{8}$

(iv) 4인 경우

→, →, →의 순서로 이동하므로

$P(X=4)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

(i)~(iv)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$E(X)=1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{5}{8}+4\times\frac{1}{8}=\frac{11}{4}$

$\therefore E(8X+5)=8E(X)+5=8\times\frac{11}{4}+5=27$

최고수준 도전 기출 155~157쪽

0657 답 253

전략 꺼낸 공에 적힌 수의 합이 홀수가 되면서 공을 최대로 많이 꺼낼 수 있는 조건을 파악한 후, 확률을 구한다.

주머니에 들어 있는 10개의 공 중 홀수가 적힌 공은 1, 3, 5, 7, 9의 5개이고, 짝수가 적힌 공은 2, 4, 6, 8, 10의 5개이다.

이때 시행을 멈출 때까지 꺼낸 공의 개수 X가 최대가 되려면 짝수가 적힌 공을 모두 꺼낸 다음 홀수가 적힌 공을 꺼내면 되므로 X가 가질 수 있는 값 중 가장 큰 값은 6이다.

즉, $a=6$

$X=6$인 경우는 처음 5번의 시행에서 모두 짝수가 적힌 공을 꺼내고 6번째 시행에서 홀수가 적힌 공을 꺼낼 때이므로

$$\mathrm{P}(X=6)=\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{5}=\frac{1}{252}$$

따라서 $p=252$, $q=1$이므로

$p+q=252+1=253$

0658 답 ①

전략 1과 1 사이에 있는 0의 개수에 따라 경우를 나누고, 1과 0을 먼저 나열한 후 2를 나열한다.

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

0, 0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 나열하여 만든 여섯 자리의 자연수의 개수는 맨 앞에 1 또는 2를 놓고 나머지 숫자를 나열하면 되므로 그 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!\times2!}+\frac{5!}{2!\times2!}=30+30=60$$

(i) 1과 1 사이에 0이 없는 경우

1과 0을 나열하는 경우는 1100, 0110, 0011의 3가지이다.

① 1100인 경우

1, 1, 0, 0의 4개의 숫자 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 2를 나열하면 되므로 그 경우의 수는 → ∨1∨1∨0∨0∨의 5개 자리(∨)에서 2개 선택

${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$

② 0110인 경우

맨 앞자리에 0이 올 수 없으므로, 맨 앞자리에 2를 놓고 5개의 자리에서 1개를 택하여 2를 나열하면 되므로 그 경우의 수는 → 2∨0∨1∨1∨0∨의 5개 자리(∨)에서 1개 선택

5

③ 0011인 경우

맨 앞자리에 0이 올 수 없으므로, 맨 앞자리에 2를 놓고 5개의 자리에서 1개를 택하여 2를 나열하면 되므로 그 경우의 수는 → 2∨0∨0∨1∨1∨의 5개 자리(∨)에서 1개 선택

5

①, ②, ③에서 $X=0$인 경우의 수는

$15+5+5=25$

$\therefore \mathrm{P}(X=0)=\frac{25}{60}=\frac{5}{12}$

(ii) 1과 1 사이에 0이 1개 있는 경우

1과 0을 나열하는 경우는 1010, 0101의 2가지이다.

① 1010인 경우

1, 0, 1, 0의 4개의 숫자 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 2를 나열하면 되므로 그 경우의 수는 → ∨1∨0∨1∨0∨의 5개 자리(∨)에서 2개 선택

${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$

② 0101인 경우

맨 앞자리에 0이 올 수 없으므로, 맨 앞자리에 2를 놓고 5개의 자리에서 1개를 택하여 2를 나열하면 되므로 그 경우의 수는 → 2∨0∨1∨0∨1∨의 5개 자리(∨)에서 1개 선택

5

①, ②에서 $X=1$인 경우의 수는

$15+5=20$

$\therefore \mathrm{P}(X=1)=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$

(iii) 1과 1 사이에 0이 2개 있는 경우

1과 0을 나열하는 경우는 1001의 1가지이다.

1, 0, 0, 1의 4개의 숫자 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 2를 나열하면 되므로 그 경우의 수는

${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$ ∨1∨0∨0∨1∨의 5개 자리(∨)에서 2개 선택

$\therefore \mathrm{P}(X=2)=\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$

(i), (ii), (iii)에서

$$\frac{\mathrm{P}(X=1)}{\mathrm{P}(X=0)}+\mathrm{P}(X=2)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{12}}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{21}{20}$$

0659 답 ③

전략 시행 횟수가 6회가 되기 전에 시행이 중단되는 조건에 유의하여 X의 최댓값과 각 좌표에 도달할 확률을 구한다.

주사위의 눈의 수가 처음부터 6의 약수가 연속으로 5회 나오는 경우 확률변수 X는 최댓값을 가지므로 최댓값은 (가) 10

한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 6의 약수일 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

주사위의 눈의 수가 6의 약수가 아닐 확률은

$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$X=-3$일 때, 6의 약수인 눈이 1회, 6의 약수가 아닌 눈이 5회 나오면 되므로

${}_6\mathrm{C}_1$

이때 6의 약수인 눈을 ○, 6의 약수가 아닌 눈을 ×라 하면

×××××○, ×××××○×

일 때, 4회에서 이미 시행이 끝나므로 이 경우를 제외해야 한다.

즉, 그 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_1-2=6-2=4$

$\therefore \mathrm{P}(X=-3)=$ (나) 4 $\times\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^5$

$X=9$일 때, 6의 약수인 눈이 5회, 6의 약수가 아닌 눈이 1회 나오면 되므로

${}_6C_5$

이때 6의 약수인 눈을 ○, 6의 약수가 아닌 눈을 ×라 하면

○○○○○×

일 때, 5회에서 이미 시행이 끝나므로 이 경우를 제외해야 한다.

즉, 그 경우의 수는

${}_6C_5-1=6-1=5$

$\therefore P(X=9)=\boxed{(\text{나})\ 5}\times\left(\frac{2}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^1$

따라서 $a=10$, $b=4$, $c=5$이므로

$a+b+c=19$

0660 답 ①

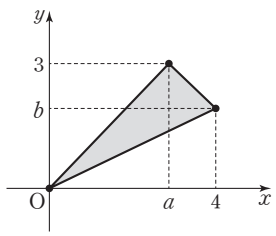
전략 세 점 $(0, 0)$, $(a, 3)$, $(4, b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 a, b에 대한 식으로 나타내고, a, b의 값에 따른 확률변수 X의 값을 구한다.

세 점 $(0, 0)$, $(a, 3)$, $(4, b)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$X=4\times3-\frac{1}{2}\times(3-b)\times(4-a)-\frac{1}{2}\times4\times b-\frac{1}{2}\times a\times3$

$=\frac{12-ab}{2}$

$X=\frac{1}{2}|ab-12|$와 같이 구할 수도 있다.



a, b의 값에 따른 $\frac{12-ab}{2}$의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

b \ a	1	2	2	3	3
1	$\frac{11}{2}$	5	5	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$
2	5	4	4	3	3
3	$\frac{9}{2}$	3	3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
4	4	2	2	0	0

즉, X가 가질 수 있는 값은 0, $\frac{3}{2}$, 2, 3, 4, $\frac{9}{2}$, 5, $\frac{11}{2}$이므로 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	$\frac{3}{2}$	2	3	4	$\frac{9}{2}$	5	$\frac{11}{2}$	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{20}$	1

$E(X)=0\times\frac{1}{10}+\frac{3}{2}\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{3}{20}$

$+\frac{9}{2}\times\frac{3}{20}+5\times\frac{3}{20}+\frac{11}{2}\times\frac{1}{20}$

$=\frac{13}{4}$

0661 답 ③

전략 흰 공의 개수를 n이라 하고 $P(X=3)$을 이용하여 n의 값을 구한다.

주머니에 들어 있는 흰 공의 개수를 n이라 하면 검은 공의 개수는

$8-n$

동전 한 개를 4번 던져 앞면이 나온 횟수를 확률변수 Y라 하면 확률변수 Y가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고, 동전을 1번 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

$P(Y=y)={}_4C_y\left(\frac{1}{2}\right)^y\left(\frac{1}{2}\right)^{4-y}={}_4C_y\left(\frac{1}{2}\right)^4\ (y=0, 1, 2, 3, 4)$

주머니에서 꺼낸 흰 공의 개수가 3인 경우는

동전의 앞면이 3번 나와서 공을 3개 꺼내는 경우와

동전의 앞면이 4번 나와서 공을 4개 꺼내는 경우이므로

$P(X=3)=P(Y=3)\times\frac{{}_nC_3}{{}_8C_3}+P(Y=4)\times\frac{{}_nC_3\times{}_{8-n}C_1}{{}_8C_4}$

$={}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{{}_nC_3}{56}+{}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{{}_nC_3\times{}_{8-n}C_1}{70}$

$=\frac{{}_nC_3}{16\times14}\left(1+\frac{8-n}{5}\right)$

$=\frac{1}{224}\times\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\times\frac{13-n}{5}$

$=\frac{n(n-1)(n-2)(13-n)}{224\times6\times5}$

$P(X=3)=\frac{1}{14}$이므로

$\frac{n(n-1)(n-2)(13-n)}{224\times6\times5}=\frac{1}{14}$

$n(n-1)(n-2)(13-n)=480=5\times4\times3\times8$

$\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수)

따라서 주머니에는 흰 공 5개, 검은 공 3개가 들어 있다.

주머니에서 꺼낸 흰 공의 개수가 0인 경우는

동전의 앞면이 m($m=0, 1, 2, 3$)번 나와서 공을 m개 꺼낼 때 m개 모두 검은색 공이 나오는 경우이므로

$P(X=0)$

$=P(Y=0)\times1+P(Y=1)\times\frac{{}_3C_1}{{}_8C_1}+P(Y=2)\times\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}$

$+P(Y=3)\times\frac{{}_3C_3}{{}_8C_3}$

$={}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^4\times1+{}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{3}{8}+{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{3}{28}$

$+{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{56}$

$=\frac{1}{16}+\frac{3}{32}+\frac{9}{224}+\frac{1}{224}=\frac{45}{224}$

0662 답 $\frac{1}{2}$

전략 평균을 구하는 공식과 확률의 총합은 1임을 이용하여 Y의 평균을 구한다.

확률변수 X의 확률의 총합은 1이므로

$p_1+p_2+p_3+p_4=1$ ····· ㉠

확률변수 Y의 확률의 총합은 1이므로

$(ap_1+b)+(ap_2+b)+(ap_3+b)+(ap_4+b)=1$

$a(p_1+p_2+p_3+p_4)+4b=1$

$\therefore\ a+4b=1\ (\because$ ㉠$)$ ····· ㉡

$\mathrm{E}(X)=2$에서

$1\times p_1+2\times p_2+3\times p_3+4\times p_4=2$

$\therefore\ p_1+2p_2+3p_3+4p_4=2$ ····· ㉢

$\mathrm{E}(3Y-1)=14$에서

$3\mathrm{E}(Y)-1=14,\ 3\mathrm{E}(Y)=15$

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=5$

$\mathrm{E}(Y)=5$에서

$1\times(ap_1+b)+4\times(ap_2+b)+7\times(ap_3+b)+10\times(ap_4+b)=5$

$a(p_1+4p_2+7p_3+10p_4)+22b=5$

$a\{3(p_1+2p_2+3p_3+4p_4)-2(p_1+p_2+p_3+p_4)\}+22b=5$

㉠, ㉢을 대입하면

$4a+22b=5$ ····· ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{6}$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

0663 답 ⑤

전략 4의 약수인 눈이 연속하여 나오는 최대 횟수에 따라 확률변수 X의 확률분포를 구한다.

X가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 4의 약수인 눈이 나올 확률은

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

4의 약수인 눈이 나오지 않을 확률은

$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

주사위를 던져 4의 약수인 눈이 나오는 경우를 ○, 4의 약수인 눈이 나오지 않는 경우를 ×라 하자.

(i) 4의 약수인 눈이 연속하여 나오는 최대 횟수가 4인 경우

(○, ○, ○, ○)의 1가지이고, 이때 3점을 얻으므로

$\mathrm{P}(X=3)=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(ii) 4의 약수인 눈이 연속하여 나오는 최대 횟수가 3인 경우

(○, ○, ○, ×), (×, ○, ○, ○)의 2가지이고, 이때 2점을 얻으므로

$\mathrm{P}(X=2)=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$

(iii) 4의 약수인 눈이 연속하여 나오는 최대 횟수가 2인 경우

(○, ○, ×, ×), (○, ○, ×, ○),

(×, ○, ○, ×), (×, ×, ○, ○),

(○, ×, ○, ○)의 5가지이고, 이때 1점을 얻으므로

$\mathrm{P}(X=1)=5\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{16}$

(iv) 4의 약수인 눈이 연속하여 나오는 경우가 없는 경우

이때 0점을 얻고, 확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)=1-\{\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)\}$

$=1-\left(\frac{5}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)=\frac{1}{2}$

(i)~(iv)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{5}{16}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{16}=\frac{3}{4}$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{5}{16}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{1}{16}=\frac{11}{8}$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{11}{8}-\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$=\frac{13}{16}$

0664 답 78

전략 두 확률변수 X, Y의 평균, 분산을 이용하여 식을 세운다.

확률변수 X의 확률의 총합은 1이므로

$2a+2b+c=1$ ····· ㉠

$\mathrm{E}(X)=1\times a+3\times b+5\times c+7\times b+9\times a$

$=10a+10b+5c$

$=5(2a+2b+c)$

$=5\times1\ (\because$ ㉠$)$

$=5$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times a+3^2\times b+5^2\times c+7^2\times b+9^2\times a$

$=82a+58b+25c$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\{\mathrm{E}(X)\}^2+\mathrm{V}(X)$이고 $\mathrm{V}(X)=\frac{31}{5}$이므로

$82a+58b+25c=5^2+\frac{31}{5}$ ····· ㉡

$\mathrm{E}(Y)=1\times\left(a+\frac{1}{20}\right)+3\times b+5\times\left(c-\frac{1}{10}\right)+7\times b$

$+9\times\left(a+\frac{1}{20}\right)$

$=10a+10b+5c$

$=5(2a+2b+c)$

$=5\times1\ (\because$ ㉠$)$

$=5$

$\mathrm{E}(Y^2)=1^2\times\left(a+\frac{1}{20}\right)+3^2\times b+5^2\times\left(c-\frac{1}{10}\right)+7^2\times b$

$+9^2\times\left(a+\frac{1}{20}\right)$

$=82a+58b+25c+\frac{8}{5}$

$=5^2+\frac{31}{5}+\frac{8}{5}\ (\because$ ㉡$)$

$=25+\frac{39}{5}$

$\therefore\ \mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2$

$=25+\frac{39}{5}-5^2$

$=\frac{39}{5}$

$\therefore\ 10\times\mathrm{V}(Y)=10\times\frac{39}{5}=78$

0665 답 ①

전략 각 규칙을 시행한 횟수를 a, b, c로 놓고 a, b, c 사이의 관계식을 이용하여 확률변수 X가 가질 수 있는 값과 그 경우의 수를 구한다.

x축의 방향으로 1만큼 평행이동하는 규칙을 A, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하는 규칙을 B, x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하는 규칙을 C라 하자.

A, B, C를 시행한 횟수를 각각 a, b, c라 하면 $a+b+c=X$

점 (0, 0)에서 점 (3, 4)까지 이동하므로

$a+c=3$, $b+c=4$

위의 식을 만족시키는 a, b, c의 값과 X의 값을 표로 나타내면 다음과 같다.

a	b	c	X
3	4	0	7
2	3	1	6
1	2	2	5
0	1	3	4

확률변수 X가 가질 수 있는 값은 4, 5, 6, 7이다.

(i) $X=4$인 경우

B를 1번, C를 3번 시행하므로 그 경우의 수는 $\frac{4!}{3!}=4$

(ii) $X=5$인 경우

A를 1번, B를 2번, C를 2번 시행하므로 그 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

(iii) $X=6$인 경우

A를 2번, B를 3번, C를 1번 시행하므로 그 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times 3!}=60$

(iv) $X=7$인 경우

A를 3번, B를 4번 시행하므로 그 경우의 수는

$\frac{7!}{3!\times 4!}=35$

(i)~(iv)에서 이동하는 경우의 수는 $4+30+60+35=129$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	4	5	6	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{4}{129}$	$\frac{30}{129}$	$\frac{60}{129}$	$\frac{35}{129}$	1

$$E(X)=4\times\frac{4}{129}+5\times\frac{30}{129}+6\times\frac{60}{129}+7\times\frac{35}{129}=\frac{257}{43}$$

$$\therefore E(43X+3)=43E(X)+3=43\times\frac{257}{43}+3=260$$

0666 답 39

전략 (가), (나)를 이용하여 각 숫자가 적힌 공의 개수를 추론한다.

(가)의 $P(X=3)=\frac{8}{125}$에서 $3=1+1+1$이므로 숫자 1이 적힌 공이 뽑힐 확률을 p라 하면

$$p^3=\frac{8}{125}=\left(\frac{2}{5}\right)^3 \quad \therefore p=\frac{2}{5}$$

즉, 숫자 1이 적힌 공은 2개이다.

각 공에 적힌 숫자는 4 이하의 자연수이므로 $11=3+4+4$에서 주머니에는 3과 4가 적힌 공이 적어도 하나씩 들어 있다.

나머지 3개의 공에 적힌 숫자가

2, 3, 4이면

$$P(X=11)=\frac{3!}{2!}\times\frac{1}{5}\times\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{3}{125}$$ → 공에 적힌 숫자는 1, 1, 2, 3, 4

3, 3, 4이면

$$P(X=11)=\frac{3!}{2!}\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{6}{125}$$ → 공에 적힌 숫자는 1, 1, 3, 3, 4

이므로 (나)를 만족시키지 않고,

3, 4, 4이면

$$P(X=11)=\frac{3!}{2!}\times\frac{1}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{12}{125}$$ → 공에 적힌 숫자는 1, 1, 3, 4, 4

이므로 (나)를 만족시킨다.

따라서 주머니에 들어 있는 공에 적힌 숫자는 1, 1, 3, 4, 4이다.

$3=1+1+1$, $5=1+1+3$, $6=1+1+4$, $7=1+3+3$,

$8=1+3+4$, $9=1+4+4=3+3+3$, $10=3+3+4$,

$11=3+4+4$, $12=4+4+4$

이므로 X가 가질 수 있는 값은 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12이다.

(가), (나)에서

$$P(X=3)=\frac{8}{125},\ P(X=11)=\frac{12}{125}$$

(i) $X=5$인 경우

1, 1, 3이 나와야 하므로

$$P(X=5)=\frac{3!}{2!}\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{1}{5}=\frac{12}{125}$$

(ii) $X=6$인 경우

1, 1, 4가 나와야 하므로

$$P(X=6)=\frac{3!}{2!}\times\left(\frac{2}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}=\frac{24}{125}$$

(iii) $X=7$인 경우

1, 3, 3이 나와야 하므로

$$P(X=7)=\frac{3!}{2!}\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{6}{125}$$

(iv) $X=8$인 경우

1, 3, 4가 나와야 하므로

$$P(X=8)=3!\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{24}{125}$$

(v) $X=9$인 경우

1, 4, 4 또는 3, 3, 3이 나와야 하므로

$$P(X=9)=\frac{3!}{2!}\times\frac{2}{5}\times\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{25}{125}$$

(vi) $X=10$인 경우

3, 3, 4가 나와야 하므로

$$P(X=10)=\frac{3!}{2!}\times\left(\frac{1}{5}\right)^2\times\frac{2}{5}=\frac{6}{125}$$

(vii) $X=12$인 경우

4, 4, 4가 나와야 하므로

$$P(X=12)=\left(\frac{2}{5}\right)^3=\frac{8}{125}$$

(i)~(viii)과 (가), (나)에서

$$\mathrm{E}(X)=3\times\frac{8}{125}+5\times\frac{12}{125}+6\times\frac{24}{125}+7\times\frac{6}{125}+8\times\frac{24}{125}+9\times\frac{25}{125}+10\times\frac{6}{125}+11\times\frac{12}{125}+12\times\frac{8}{125}=\frac{39}{5}$$

$$\therefore\ \mathrm{E}(5X)=5\mathrm{E}(X)=5\times\frac{39}{5}=39$$

0667 답 17

전략 두 원의 중심 사이의 거리와 두 반지름의 길이의 합 사이의 관계를 이용하여 교점의 개수를 구한다.

두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 각각 r, r'이라 하고, 두 원의 중심 사이의 거리를 d라 하자.

원을 평행이동하면 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$r'=r=1$ $\quad\therefore\ r+r'=2$

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가

(i) 1일 확률은 $\frac{1}{6}$

원 C_1의 중심 $(0,\ 0)$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원 C_2의 중심의 좌표는 $(1,\ 1)$이므로

$d=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$d<r+r'$이므로 두 원 C_1, C_2는 서로 다른 두 점에서 만난다.

(ii) 2 또는 3 또는 4일 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

원 C_1의 중심 $(0,\ 0)$을 x축의 방향으로 $\sqrt{3}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원 C_2의 중심의 좌표는 $(\sqrt{3},\ 1)$이므로

$d=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$

$d=r+r'$이므로 두 원 C_1, C_2는 한 점에서 만난다.

(iii) 5 또는 6일 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

원 C_1의 중심 $(0,\ 0)$을 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $2\sqrt{3}$만큼 평행이동한 원 C_2의 중심의 좌표는 $(2,\ 2\sqrt{3})$이므로

$d=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$

$d>r+r'$이므로 두 원 C_1, C_2는 서로 만나지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $\mathrm{P}(X=0)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{6}$

이므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	1

$$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

$$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{6}=\frac{7}{6}$$

$$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{7}{6}-\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{17}{36}$$

$$\therefore\ \mathrm{V}(6X+2)=6^2\mathrm{V}(X)=36\times\frac{17}{36}=17$$

10 이항분포

난이도별 필수 기출 159~170쪽

0668 답 ②

수인이의 자유투 성공률은

$$\frac{90}{100}=\frac{9}{10}$$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{9}{10}\right)$를 따른다.

0669 답 ③

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4,\ \frac{2}{3}\right)$를 따르므로 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{3}\right)^x\left(\frac{1}{3}\right)^{4-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$$\therefore\ \mathrm{P}(X\le1)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)={}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{81}+\frac{8}{81}=\frac{1}{9}$$

0670 답 ①

확률변수 X의 확률질량함수가

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{60}\mathrm{C}_x\frac{4^{60-x}}{5^{60}}={}_{60}\mathrm{C}_x\frac{1^x\times4^{60-x}}{5^x\times5^{60-x}}={}_{60}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{60-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 60)$$

이므로 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(60,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

따라서 $n=60$, $p=\frac{1}{5}$이므로

$$n+5p=60+5\times\frac{1}{5}=61$$

0671 답 ②

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(8,\ p)$를 따르므로 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_8\mathrm{C}_xp^x(1-p)^{8-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$

이때 $2\mathrm{P}(X=3)=3\mathrm{P}(X=2)$에서

$2\times{}_8\mathrm{C}_3p^3(1-p)^5=3\times{}_8\mathrm{C}_2p^2(1-p)^6$

$2\times56p^3(1-p)^5=3\times28p^2(1-p)^6$

$4p=3(1-p)\ (\because\ 0<p<1)$

$4p=3-3p$

$7p=3$ $\quad\therefore\ p=\frac{3}{7}$

0672 답 193

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{1}{5}\right)$을 따른다.

X의 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{5-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)\quad\cdots\cdots\ \text{i}$$

$\therefore$ $P(3<X\le5)=P(X=4)+P(X=5)$

$$={}_5C_4\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^1+{}_5C_5\left(\frac{1}{5}\right)^5$$

$$=\frac{20}{5^5}+\frac{1}{5^5}=\frac{21}{5^5}$$

$$=\frac{21\times2^3}{5^2\times5^3\times2^3}=\frac{168}{25\times10^3}$$ …… ⓘⓘ

따라서 $a=168$, $b=25$이므로

$a+b=168+25=193$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ X가 따르는 이항분포와 확률질량함수 구하기	40 %
ⓘⓘ $P(3<X\le5)$의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $a+b$의 값 구하기	20 %

0673 답 ④

확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_nC_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{n-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, n)$$

$\frac{P(X=3)}{P(X=2)}=\frac{2}{3}$에서

$$\frac{{}_nC_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{n-3}}{{}_nC_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\times\frac{2^{n-3}}{3^n}}{\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{2^{n-2}}{3^n}}=\frac{2}{3}$$

$\frac{n-2}{6}=\frac{2}{3}$, $n-2=4$ $\therefore$ $n=6$

0674 답 ⑤

확률변수 X는 이항분포 $B\left(6, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_6C_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{6-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 6)$$

$P(X=2)=kP(X=4)$에서

$${}_6C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^4=k\times{}_6C_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^2$$

${}_6C_4={}_6C_2$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2=k\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$ $\therefore$ $k=9$

0675 답 ⑤

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 5 이상의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(5, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 5)$$

$\therefore$ $P(X\ge2)=1-\{P(X=0)+P(X=1)\}$

$$=1-\left\{{}_5C_0\left(\frac{2}{3}\right)^5+{}_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4\right\}$$

$$=1-\left(\frac{32}{3^5}+\frac{80}{3^5}\right)=1-\frac{112}{243}$$

$$=\frac{131}{243}$$

0676 답 499

화살을 4번 쏠 때, 명중시킨 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(4, \frac{3}{4}\right)$을 따르므로 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{4-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 4)$$ …… ⓘ

이때 적어도 2번 명중시킬 확률은

$P(X\ge2)=1-\{P(X=0)+P(X=1)\}$

$$=1-\left\{{}_4C_0\left(\frac{1}{4}\right)^4+{}_4C_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^3\right\}$$

$$=1-\left(\frac{1}{4^4}+\frac{12}{4^4}\right)$$

$$=1-\frac{13}{256}=\frac{243}{256}$$ …… ⓘⓘ

따라서 $p=256$, $q=243$이므로

$p+q=256+243=499$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ X가 따르는 이항분포와 확률질량함수 구하기	40 %
ⓘⓘ 적어도 2번 명중시킬 확률 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $p+q$의 값 구하기	20 %

0677 답 ④

확률변수 X는 이항분포 $B(50, p)$를 따르므로 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{50}C_x p^x(1-p)^{50-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 50)$$

$13P(X=26)=25P(X=25)$에서

$$13\times{}_{50}C_{26}p^{26}(1-p)^{24}=25\times{}_{50}C_{25}p^{25}(1-p)^{25}$$

$$13\times\frac{50!}{26!\times24!}p^{26}(1-p)^{24}=25\times\frac{50!}{25!\times25!}p^{25}(1-p)^{25}$$

$$13\times\frac{p}{26}=25\times\frac{1-p}{25}\ (\because\ 0<p<1)$$

$p=2-2p$ $\therefore$ $p=\frac{2}{3}$

0678 답 ③

약을 환자 15명에게 투여하였을 때, 치유되는 환자 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B\left(15, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{15}C_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{15-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 15)$$

치유되는 환자가 14명 이상일 확률은

$P(X\ge14)=P(X=14)+P(X=15)$

$$={}_{15}C_{14}\left(\frac{4}{5}\right)^{14}\left(\frac{1}{5}\right)^1+{}_{15}C_{15}\left(\frac{4}{5}\right)^{15}$$

$$=\frac{15\times4^{14}}{5^{15}}+\frac{4^{15}}{5^{15}}=(15+4)\times\frac{4^{14}}{5^{15}}$$

$$=19\times\frac{4^{14}}{5^{15}}$$

$\therefore$ $k=19$

0679 답 0.3848

이 농장에서 생산하는 오렌지의 당도가 14브릭스 이상일 확률이 0.8이므로 14브릭스 미만일 확률은

$1-0.8=0.2$

한 망에 담긴 오렌지 5개 중 당도가 14브릭스 미만인 오렌지의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}(5,\ 0.2)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_5\mathrm{C}_x\times0.2^x\times0.8^{5-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$

따라서 한 망이 리필 대상으로 분류될 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X\geq2)&=1-\{\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)\}\\&=1-({}_5\mathrm{C}_0\times0.8^5+{}_5\mathrm{C}_1\times0.2^1\times0.8^4)\\&=1-(0.8^5+5\times0.2\times0.8^4)=1-(0.8^5+0.8^4)\\&=1-0.74=0.26\end{aligned}$$

따라서 오렌지 두 망 중 한 망만 리필 대상일 확률은

${}_2\mathrm{C}_1\times0.26^1\times0.74^1=2\times0.26\times0.74=0.3848$

0680 답 ③

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(90,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=90\times\frac{1}{3}=30\quad\therefore\ a=30$

$\mathrm{V}(X)=90\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=20\quad\therefore\ b=20$

$\therefore\ a+b=30+20=50$

0681 답 ②

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{3}{5}\right)$을 따른다.

$\sigma(X)=6$에서 $\mathrm{V}(X)=36$이므로

$n\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=36,\ \frac{6}{25}n=36\quad\therefore\ n=150$

0682 답 ⑤

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(98,\ \frac{2}{7}\right)$를 따르므로

$\mathrm{V}(X)=98\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{7}=20$

0683 답 ②

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(20,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=20p,\ \mathrm{V}(X)=20p(1-p)$

이때 $\{\mathrm{E}(X)\}^2=\mathrm{V}(X)$에서

$(20p)^2=20p(1-p)$

$20p=1-p\ (\because\ p>0)\quad\therefore\ p=\frac{1}{21}$

0684 답 ①

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=6$에서 $np=6\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{E}(X^2)=40$이므로 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=40-6^2=4$

$\therefore\ np(1-p)=4\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $6-6p=4\quad\therefore\ p=\frac{1}{3}$

이를 ㉠에 대입하면 $\frac{n}{3}=6\quad\therefore\ n=18$

$\therefore\ n+p=18+\frac{1}{3}=\frac{55}{3}$

0685 답 ④

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(450,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=90$에서 $450p=90\quad\therefore\ p=\frac{1}{5}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(450,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=450\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=72$

$\therefore\ \mathrm{V}\left(\frac{1}{3}X+1\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{V}(X)=\frac{1}{9}\times72=8$

0686 답 ④

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=4$에서 $np=4\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\sigma(X)=\sqrt{2}$에서 $\mathrm{V}(X)=2$이므로

$np(1-p)=2\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4-4p=2\quad\therefore\ p=\frac{1}{2}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{n}{2}=4\quad\therefore\ n=8$

0687 답 ③

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(20,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=20\times\frac{1}{4}=5$

이때 함수 $f(a)$는

$$\begin{aligned}f(a)&=-\mathrm{E}\{(X-a)^2\}\\&=-\mathrm{E}(X^2-2aX+a^2)\\&=-\{\mathrm{E}(X^2)-2a\mathrm{E}(X)+a^2\}\\&=-a^2+2\mathrm{E}(X)a-\mathrm{E}(X^2)\\&=-a^2+10a-\mathrm{E}(X^2)\ (\because\ \mathrm{E}(X)=5)\\&=-(a-5)^2+25-\mathrm{E}(X^2)\end{aligned}$$

따라서 함수 $f(a)$는 $a=5$일 때 최댓값을 갖는다.

0688 답 ①

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(64,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=8$에서 $64p=8\quad\therefore\ p=\frac{1}{8}$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$a=64\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{8}+8^2=7+64=71$

$\therefore\ ap=71\times\frac{1}{8}=\frac{71}{8}$

0689 답 ⑤

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=10$에서 $np=10\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{V}(X)=8$에서 $np(1-p)=8\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$10-10p=8\quad\therefore\ p=\frac{1}{5}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{n}{5}=10$ $\therefore n=50$

$\therefore \frac{n}{p}=\frac{50}{\frac{1}{5}}=250$

0690 답 ③

확률변수 X는 이항분포 $B(n, p)$를 따르므로 확률질량함수는

$P(X=x)={}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, n)$

$3P(X=n)=P(X=n-1)$에서

$3\times {}_nC_n p^n={}_nC_{n-1}p^{n-1}(1-p)^1$

$3p=n(1-p)$ ····· ㉠

$V(X)=\frac{3}{4}$에서

$np(1-p)=\frac{3}{4}$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$3p^2=\frac{3}{4}$, $p^2=\frac{1}{4}$ $\therefore p=\frac{1}{2}$ $(\because p>0)$

이를 ㉠에 대입하면

$3\times\frac{1}{2}=n\times\frac{1}{2}$ $\therefore n=3$

따라서 X는 이항분포 $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{2}\right)^2=3$

0691 답 ②

두 확률변수 X, Y가 각각 이항분포 $B(6, p)$, $B(3, 1-p)$를 따르므로

$V(X)=6p(1-p)$, $E(Y)=3(1-p)$

이때 $V(X)=E(Y)$에서

$6p(1-p)=3(1-p)$ $\therefore p=\frac{1}{2}$ $(\because 0<p<1)$

따라서 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(3, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로 확률질량함수는

$P(Y=y)={}_3C_y\left(\frac{1}{2}\right)^y\left(\frac{1}{2}\right)^{3-y}={}_3C_y\left(\frac{1}{2}\right)^3$ $(y=0, 1, 2, 3)$

$\therefore P(Y=2)={}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$

0692 답 24

확률변수 X는 이항분포 $B\left(24, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=24\times\frac{1}{3}=8$ ····· ⓘ

$V(X)=24\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$ ····· ⓘⓘ

이때 $E(3X+a)=V(3X+a)$에서

$3E(X)+a=3^2V(X)$

$3\times8+a=9\times\frac{16}{3}$

$24+a=48$ $\therefore a=24$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $E(X)$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ $V(X)$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ a의 값 구하기	40 %

0693 답 ①

확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=n\times\frac{1}{4}=\frac{n}{4}$

$V(X)=n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3n}{16}$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$

$=\frac{3n}{16}+\left(\frac{n}{4}\right)^2=\frac{n^2+3n}{16}$

따라서 $E(X^2)-E(X)=62$에서

$\frac{n^2+3n}{16}-\frac{n}{4}=62$, $\frac{n^2+3n-4n}{16}=62$

$n^2-n-992=0$, $(n+31)(n-32)=0$

$\therefore n=32$ $(\because n$은 자연수$)$

0694 답 ④

$E(2X+10)=90$에서 $2E(X)+10=90$

$2E(X)=80$ $\therefore E(X)=40$

$\sigma(2X+10)=12$에서 $|2|\sigma(X)=12$

$\sigma(X)=6$ $\therefore V(X)=36$

확률변수 X는 이항분포 $B(n, p)$를 따르므로

$np=40$ ····· ㉠

$np(1-p)=36$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$40-40p=36$ $\therefore p=\frac{1}{10}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{n}{10}=40$ $\therefore n=400$

0695 답 ⑤

확률변수 X는 이항분포 $B(n, p)$를 따르므로

$E(X)=20$에서 $np=20$ ····· ㉠

또 $E(X^2)=404$에서

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=404-20^2=4$

$\therefore np(1-p)=4$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$20-20p=4$ $\therefore p=\frac{4}{5}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{4}{5}n=20$ $\therefore n=25$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(25, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{25}C_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{25-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 25)$

$$\therefore \frac{P(X=2)}{P(X=1)}=\frac{{}_{25}C_2\left(\frac{4}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^{23}}{{}_{25}C_1\left(\frac{4}{5}\right)^1\left(\frac{1}{5}\right)^{24}}$$

$$=\frac{300\times\frac{4}{5}}{25\times\frac{1}{5}}=48$$

0696 답 ②

확률변수 X가 이항분포 $B(15, p)$를 따르므로 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{15}C_x p^x(1-p)^{15-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 15)$

이때 $\frac{P(X=3)}{P(X=4)}=2$에서 $\frac{{}_{15}C_3 p^3(1-p)^{12}}{{}_{15}C_4 p^4(1-p)^{11}}=2$

$\frac{1-p}{3p}=2$, $1-p=6p$ $\therefore p=\frac{1}{7}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(15, \frac{1}{7}\right)$을 따르므로

$E(X)=15\times\frac{1}{7}=\frac{15}{7}$

$V(X)=15\times\frac{1}{7}\times\frac{6}{7}=\frac{90}{49}$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$

$=\frac{90}{49}+\left(\frac{15}{7}\right)^2=\frac{45}{7}$

0697 답 ①

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로 이 식에

$E(X^2)=V(X)+25$를 대입하면

$V(X)=V(X)+25-\{E(X)\}^2$, $\{E(X)\}^2=25$

$\therefore E(X)=5$ ($\because E(X)>0$)

확률변수 X가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따르고 $E(X)=5$이므로

$n\times\frac{1}{2}=5$ $\therefore n=10$

0698 답 ③

확률변수 X는 이항분포 $B(n, p)$를 따르므로

㈎에서 $V(X)=6$이므로

$np(1-p)=6$ ····· ㉠

한편 X의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_nC_x p^x(1-p)^{n-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, n)$

이때 ㈏에서 $\frac{P(X=n)}{P(X=n-1)}=\frac{1}{96}$이므로

$\frac{{}_nC_n p^n}{{}_nC_{n-1}p^{n-1}(1-p)^1}=\frac{1}{96}$

$\frac{p}{n(1-p)}=\frac{1}{96}$ $\therefore 96p=n(1-p)$ ····· ㉡

㉠에서 $n(1-p)=\frac{6}{p}$이므로 이를 ㉡에 대입하면

$96p=\frac{6}{p}$, $p^2=\frac{1}{16}$ $\therefore p=\frac{1}{4}$ ($\because p>0$)

이를 ㉠에 대입하면

$n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=6$, $\frac{3}{16}n=6$

$\therefore n=32$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(32, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=32\times\frac{1}{4}=8$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=6+8^2=70$

0699 답 ③

확률변수 X는 이항분포 $B\left(10, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$E(X)=10\times\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$

$V(X)=10\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{20}{9}$

$\therefore E(6X-2)+V(3X)=6E(X)-2+3^2V(X)$

$=\left(6\times\frac{20}{3}-2\right)+9\times\frac{20}{9}$

$=38+20=58$

0700 답 ④

$E(3X-5)=55$에서 $3E(X)-5=55$

$\therefore E(X)=20$

확률변수 X는 이항분포 $B(100, p)$를 따르므로

$E(X)=100p$

즉, $100p=20$이므로 $p=\frac{1}{5}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$V(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$

$\therefore V(3X-5)=3^2V(X)=9\times16=144$

0701 답 27

$E(3X)=27$에서

$3E(X)=27$ $\therefore E(X)=9$

$E(3X^2)=261$에서

$3E(X^2)=261$ $\therefore E(X^2)=87$

확률변수 X는 이항분포 $B(n, p)$를 따르므로

$E(X)=9$에서 $np=9$ ····· ㉠

$E(X^2)=87$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=87-9^2=6$

$\therefore np(1-p)=6$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$9-9p=6$ $\therefore p=\frac{1}{3}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{n}{3}=9$ $\therefore n=27$

0702 답 1269

확률변수 X의 확률질량함수가

$$P(X=x)={}_{48}C_x\times\frac{3^x}{4^{48}}$$

$$={}_{48}C_x\times\frac{3^x\times1^{48-x}}{4^x\times4^{48-x}}$$

$$={}_{48}C_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{48-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 48)$$

이므로 X는 이항분포 $B\left(48,\ \frac{3}{4}\right)$을 따른다. …… ⓘ

$$E(X)=48\times\frac{3}{4}=36$$ …… ⓘⓘ

$$V(X)=48\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=9$$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2$$

$$=9+36^2=1305$$ …… ⓘⓘⓘ

$$\therefore E(X^2)-E(X)=1305-36=1269$$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ X가 따르는 이항분포 구하기	30 %
ⓘⓘ $E(X)$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ $E(X^2)$의 값 구하기	30 %
ⓘⓥ $E(X^2)-E(X)$의 값 구하기	10 %

0703 답 ①

확률변수 X는 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르므로

$E(X)=6$에서 $np=6$ …… ㉠

$\sigma(X)=2$에서 $V(X)=4$이므로

$np(1-p)=4$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$6-6p=4$ $\therefore p=\frac{1}{3}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{n}{3}=6$ $\therefore n=18$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(18,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{18}C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 18)$$

$$\therefore P(X=1)={}_{18}C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^{17}=18\times\frac{2^{17}}{3^{18}}=\frac{2^{18}}{3^{16}}$$

따라서 $a=18$, $b=16$이므로

$a+b=18+16=34$

0704 답 ④

확률변수 X가 이항분포 $B(n,\ p)$를 따르므로 확률질량함수는

$P(X=x)={}_nC_xp^x(1-p)^{n-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

㈎에서 $21P(X=3)=(n-2)P(X=2)$이므로

$21\times{}_nC_3p^3(1-p)^{n-3}=(n-2)\times{}_nC_2p^2(1-p)^{n-2}$

$7p=1-p$

$\therefore p=\frac{1}{8}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{8}\right)$을 따르므로

$$E(X)=n\times\frac{1}{8}=\frac{n}{8}$$

$$V(X)=n\times\frac{1}{8}\times\frac{7}{8}=\frac{7}{64}n$$

이때 ㈏에서 $E(X^2)=57$이고

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$\frac{7}{64}n=57-\left(\frac{n}{8}\right)^2$, $7n=3648-n^2$

$n^2+7n-3648=0$, $(n+64)(n-57)=0$

$\therefore n=57$ ($\because n$은 자연수)

$$\therefore E\left(\frac{X}{p}+n\right)=\frac{1}{p}E(X)+n=\frac{1}{p}\times np+n=n+n$$

$$=2n=2\times57=114$$

0705 답 ③

제품 50개를 생산할 때, 불량품의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B(50,\ 0.2)$를 따른다.

따라서 불량품 개수의 평균은

$E(X)=50\times0.2=10$

0706 답 ①

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(84,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$V(X)=84\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{56}{3}$$

$$\therefore V(3X-9)=3^2V(X)=9\times\frac{56}{3}=168$$

0707 답 ②

가위바위보를 한 번 할 때, 민채가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(10,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$E(X)=10\times\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$$

$$V(X)=10\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{9}$$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=\frac{20}{9}+\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{40}{3}$$

0708 답 ⑤

시행을 30번 반복할 때, 빨간 공이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 한 번의 시행에서 빨간 공이 나올 확률은 $\frac{x}{60}$이다.

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(30,\ \frac{x}{60}\right)$를 따르므로

$$E(X)=30\times\frac{x}{60}=\frac{x}{2}$$

$E(X)=12$에서 $\frac{x}{2}=12$ $\therefore x=24$

0709 답 ②

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(12,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=12\times\frac{1}{4}=3$

$\mathrm{V}(X)=12\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{9}{4}$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=3+\frac{9}{4}=\frac{21}{4}$

0710 답 ⑤

시행을 100번 반복할 때, 흰 공이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 검은 공이 나오는 횟수는 $100-X$이다.

100번의 시행에서 얻는 총액을 확률변수 Y라 하면

$Y=500X-200(100-X)=700X-20000$

이때 한 번의 시행에서 흰 공이 나올 확률은 $\frac{3}{5}$이다.

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{3}{5}=60$

$\therefore\ \mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(700X-20000)$

$=700\mathrm{E}(X)-20000$

$=700\times60-20000$

$=22000$(원)

0711 답 ①

$n(A)=6$이므로 집합 A의 부분집합의 개수는

$2^6=64$

이때 집합 A의 부분집합 중에서 원소의 개수가 x인 집합의 개수는 ${}_6\mathrm{C}_x$이므로 확률변수 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{{}_6\mathrm{C}_x}{64}$

$={}_6\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{6-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(6,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=6\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

0712 답 86

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 홀수의 눈이 나올 확률은

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

두 개의 동전을 한 번 던질 때, 두 동전이 모두 앞면이 나올 확률은

$\frac{1}{4}$

즉, 두 확률변수 X, Y는 각각 이항분포 $\mathrm{B}\left(64,\ \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{4}\right)$을 따른다. …… ⓘ

이때 $\mathrm{V}(X)<\mathrm{V}(Y)$이어야 하므로

$64\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}<n\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}$

$\therefore\ n>\frac{256}{3}=85.33\cdots$ …… ⓘⓘ

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 86이다. …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ X, Y가 따르는 이항분포 각각 구하기	50 %
ⓘⓘ n의 값의 범위 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ n의 최솟값 구하기	20 %

0713 답 ③

시행을 30번 반복할 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $30-Y$이므로

$X=5Y+2(30-Y)=3Y+60$

이때 한 개의 동전을 한 번 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

즉, 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(30,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=30\times\frac{1}{2}=15$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(3Y+60)$

$=3\mathrm{E}(Y)+60$

$=3\times15+60=105$

0714 답 ⑤

주어진 그래프에서 $0<x<3$일 때 $f(x)>0$이므로 한 개의 주사위를 던져 나온 눈의 수 m에 대하여 $f(m)$이 0보다 큰 사건은 m이 1 또는 2인 경우이다.

따라서 사건 A가 일어날 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=15\times\frac{1}{3}=5$

0715 답 ④

서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던질 때, 앞면과 뒷면이 한 개씩 나올 확률은 $\mathrm{P}(A)={}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=n\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$

$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$

이때 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$이므로

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{n}{4}+\left(\frac{n}{2}\right)^2$

$=\frac{n^2+n}{4}$

$\mathrm{E}(X^2)=203$에서 $\frac{n^2+n}{4}=203$이므로

$n^2+n-812=0$

$(n+29)(n-28)=0$

$\therefore\ n=28\ (\because\ n$은 자연수)

따라서 $\mathrm{V}(X)=\frac{28}{4}=7$이므로

$\mathrm{V}(2X+5)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times7=28$

0716 답 44

주머니에서 숫자 1이 적힌 공을 꺼낼 확률은

$\frac{a}{a+4}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{a}{a+4}\right)$를 따르므로

$E(X)=n\times\frac{a}{a+4}=\frac{na}{a+4}$

$V(X)=n\times\frac{a}{a+4}\times\frac{4}{a+4}=\frac{4na}{(a+4)^2}$ …… ⓘ

X의 평균이 12, 분산이 3이므로

$\frac{na}{a+4}=12$ …… ㉠

$\frac{4na}{(a+4)^2}=3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{4\times12}{a+4}=3$, $3a+12=48$

$3a=36$

$\therefore a=12$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{12n}{16}=12$

$\therefore n=16$ …… ⓘⓘ

$\therefore a+2n=12+2\times16=44$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $E(X)$, $V(X)$를 각각 a, n에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘ a, n의 값 각각 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $a+2n$의 값 구하기	20 %

0717 답 ⑤

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 6의 약수의 눈이 나온 주사위가 1개일 확률은

${}_2C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(81, \frac{4}{9}\right)$를 따르므로

$V(X)=81\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{9}=20$

0718 답 ②

한 세트에서 1점을 얻을 확률은

${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1+{}_3C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{4}{9}+\frac{8}{27}=\frac{20}{27}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(6, \frac{20}{27}\right)$을 따르므로

$E(X)=6\times\frac{20}{27}=\frac{40}{9}$

0719 답 ④

확률변수 Y의 확률질량함수는

$P(Y=y)={}_{20}C_y p^y q^{20-y}$ $(y=0, 1, 2, \cdots, 20)$ …… ㉠

사건 A가 일어나지 않는 횟수는 $20-Y$이므로

$X=4Y-2(20-Y)=6Y-40$ …… ㉡

ㄱ. ㉡에서 $X=20$이면 $6Y-40=20$

$6Y=60$

$\therefore Y=10$

$\therefore P(X=20)=P(Y=10)$

$={}_{20}C_{10}p^{10}q^{10}$

ㄴ, ㄷ. ㉠에서 Y는 이항분포 $B(20, p)$를 따르므로

$E(Y)=20p$

$\therefore E(X)=E(6Y-40)$

$=6E(Y)-40$

$=6\times20p-40$

$=120p-40$

ㄹ, ㅁ. ㉠에서 Y는 이항분포 $B(20, p)$를 따르므로

$V(Y)=20pq$

$\therefore V(X)=V(6Y-40)$

$=6^2V(Y)$

$=36\times20pq$

$=720pq$

따라서 보기에서 옳은 것의 개수는 4이다.

0720 답 ③

동전을 20번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $20-Y$이므로 이동된 점 P의 좌표는

$X=3Y-(20-Y)=4Y-20$

이때 동전을 한 번 던져 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

즉, 확률변수 Y는 이항분포 $B\left(20, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(Y)=20\times\frac{1}{2}=10$

$\therefore E(X)=E(4Y-20)$

$=4E(Y)-20$

$=4\times10-20=20$

0721 답 ⑤

주사위를 n번 던질 때, 홀수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 짝수의 눈이 나오는 횟수는 $n-X$이다.

게임을 n번 반복하여 얻은 점수의 합을 확률변수 Y라 하면

$Y=5X-3(n-X)=8X-3n$

이때 한 개의 주사위를 한 번 던져 홀수의 눈이 나올 확률은

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=n\times\frac{1}{2}=\frac{n}{2}$

이때 $E(Y)\geq300$이어야 하므로

$E(8X-3n)\geq300$, $8E(X)-3n\geq300$

$8\times\frac{n}{2}-3n\geq300$

$\therefore n\geq300$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 300이다.

0722 답 ③

한 개의 주사위를 18회 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 그 외의 눈이 나오는 횟수는 $18-Y$이므로

$X=70+4Y-2(18-Y)=6Y+34$

이때 한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

즉, 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(18,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=18\times\frac{1}{3}=6$

$\mathrm{V}(Y)=18\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=4$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)+\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(6Y+34)+\mathrm{V}(6Y+34)$

$=6\mathrm{E}(Y)+34+6^2\mathrm{V}(Y)$

$=6\times6+34+36\times4$

$=70+144$

$=214$

0723 답 ⑤

1부터 6까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 6장의 카드 중에서 임의로 3장의 카드를 동시에 꺼내는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_3=20$

$a+b\le5$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3)$

$(a,\ b)=(1,\ 2)$에서 c가 될 수 있는 수는 3, 4, 5, 6의 4개

$(a,\ b)=(1,\ 3)$에서 c가 될 수 있는 수는 4, 5, 6의 3개

$(a,\ b)=(1,\ 4)$에서 c가 될 수 있는 수는 5, 6의 2개

$(a,\ b)=(2,\ 3)$에서 c가 될 수 있는 수는 4, 5, 6의 3개

즉, 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는

$4+3+2+3=12$

따라서 시행을 한 번 할 때, 조건을 만족시킬 확률은

$\frac{12}{20}=\frac{3}{5}$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100,\ \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{3}{5}=60$

0724 답 ③

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 5의 약수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

ㄱ. 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

ㄴ. ㄱ에서

$\mathrm{E}(X)=10\times\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

$\mathrm{V}(X)=10\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{20}{9}$

이므로 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{20}{9}+\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{40}{3}$

ㄷ. ㄱ에서 X의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{10-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 10)$

한편 이항정리에 의하여

$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^{10}={}_{10}\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^9$

$+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)^{10}={}_{10}\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^{10}-{}_{10}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^9$

$+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면

$1^{10}+\frac{1}{3^{10}}=2\left\{{}_{10}\mathrm{C}_0\left(\frac{2}{3}\right)^{10}+{}_{10}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^8+\cdots+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right\}$

$\therefore\ 1+\frac{1}{3^{10}}=2\{\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=10)\}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0725 답 ①

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 경우의 수는

$6\times6=36$

원 $x^2+y^2=a$의 중심인 원점 O와 직선 $x+y=b$, 즉 $x+y-b=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-b|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{b}{\sqrt{2}}$

이때 원 $x^2+y^2=a$의 반지름의 길이는 $\sqrt{a}$이므로 원과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $\frac{b}{\sqrt{2}}<\sqrt{a}$, 즉 $b^2<2a$이어야 한다.

$b^2<2a$를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 다음과 같이 나누어 구할 수 있다.

(i) $a=1$일 때,

$b^2<2$이므로 b가 될 수 있는 수는 1의 1가지이다.

(ii) $a=2$일 때,

$b^2<4$이므로 b가 될 수 있는 수는 1의 1가지이다.

(iii) $a=3$일 때,

$b^2<6$이므로 b가 될 수 있는 수는 1, 2의 2가지이다.

(iv) $a=4$일 때,

$b^2<8$이므로 b가 될 수 있는 수는 1, 2의 2가지이다.

(v) $a=5$일 때,

$b^2<10$이므로 b가 될 수 있는 수는 1, 2, 3의 3가지이다.

(vi) $a=6$일 때,

$b^2<12$이므로 b가 될 수 있는 수는 1, 2, 3의 3가지이다.

(i)~(vi)에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$1+1+2+2+3+3=12$

즉, 사건 A가 일어날 확률은

$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(180,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=180\times\frac{1}{3}=60$

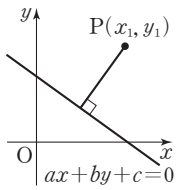
공통수학2 다시보기

점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

특히 원점 O와 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$



최고수준 도전 기출 171쪽

0726 답 14

전략 한 번 시행할 때의 확률을 구한 후, 확률변수 X가 따르는 이항분포를 이용하여 자연수 n의 값을 구한다.

상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 7 이하인 수가 적힌 공이 나올 확률은

$$\frac{1+2+3+\cdots+7}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{\frac{7\times 8}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{56}{n(n+1)}$$

즉, 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(210, \frac{56}{n(n+1)}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=56$에서 $210\times\frac{56}{n(n+1)}=56$

$n^2+n-210=0$, $(n+15)(n-14)=0$

$\therefore n=14$ ($\because n$은 자연수)

참고 1부터 n까지의 자연수의 합을 A라 하면

$$\begin{aligned} A&=1+\quad 2\quad +\quad 3\quad +\cdots+(n-1)+n \\ +)\ A&=n+(n-1)+(n-2)+\cdots+\quad 2\quad +1 \\ \hline 2A&=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1) \end{aligned}$$

$\therefore A=\frac{n(n+1)}{2}$

0727 답 ③

전략 시행을 15번 반복할 때, 2 이하의 눈의 수가 나오는 횟수를 확률변수로 정하고 이 확률변수가 따르는 이항분포를 이용하여 평균을 구한다.

주사위를 15번 던져 2 이하의 눈의 수가 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 3 이상의 눈의 수가 나오는 횟수는 $15-Y$이므로 이동된 점 P의 좌표는 $(3Y, 15-Y)$

점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리는

$$X=\frac{|3\times 3Y+4\times(15-Y)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|5Y+60|}{5}=Y+12\ (\because Y\geq 0)$$

주사위를 한 번 던져 2 이하의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$이다.

즉, 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=15\times\frac{1}{3}=5$

$\therefore \mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(Y+12)=\mathrm{E}(Y)+12=5+12=17$

0728 답 ①

전략 예약한 50명 중 실제로 자동차를 대여하지 않는 사람 수를 확률변수로 정하고, 이 확률변수의 확률질량함수를 이용하여 k의 값을 구한다.

예약자가 실제로 자동차를 대여하지 않을 확률은

$\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$

예약한 50명 중 실제로 자동차를 대여하지 않는 사람 수를 확률변수 X라 하자.

확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로 확률질량함수는

$$\mathrm{P}(X=x)={}_{50}\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{50-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 50)$$

이때 자동차가 부족하지 않으려면 자동차를 대여하지 않는 사람이 2명 이상이어야 하므로

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X\geq 2)&=1-\{\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)\} \\ &=1-\left\{{}_{50}\mathrm{C}_0\left(\frac{4}{5}\right)^{50}+{}_{50}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{5}\right)^1\left(\frac{4}{5}\right)^{49}\right\} \\ &=1-\left(\frac{4^{50}}{5^{50}}+\frac{50\times 4^{49}}{5^{50}}\right) \\ &=1-\frac{54\times 4^{49}}{5^{50}}=1-27\times\frac{2^{99}}{5^{50}} \end{aligned}$$

$\therefore k=27$

0729 답 ②

전략 추가 부품 중 부품 A의 개수를 확률변수로 정하고, 이 확률변수의 확률질량함수를 이용하여 조건부확률을 구한다.

추가 부품 중 부품 A의 개수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(4, \frac{1}{2}\right)$을 따른다. 즉, X의 확률질량함수는

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X=x)&={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x} \\ &={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{{}_4\mathrm{C}_x}{16}\ (x=0, 1, 2, 3, 4) \end{aligned}$$

이때 11개의 부품 중 부품 B의 개수는 $2+(4-X)=6-X$

11개의 부품 중 임의로 1개를 택한 것이 부품 B인 사건을 B, 추가 부품이 모두 부품 A인 사건을 A라 하면

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(B)&=\mathrm{P}(X=0)\times\frac{6}{11}+\mathrm{P}(X=1)\times\frac{5}{11}+\cdots \\ &\qquad +\mathrm{P}(X=4)\times\frac{2}{11} \\ &=\frac{{}_4\mathrm{C}_0}{16}\times\frac{6}{11}+\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{16}\times\frac{5}{11}+\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{16}\times\frac{4}{11}+\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{16}\times\frac{3}{11} \\ &\qquad +\frac{{}_4\mathrm{C}_4}{16}\times\frac{2}{11} \\ &=\frac{6}{176}+\frac{20}{176}+\frac{24}{176}+\frac{12}{176}+\frac{2}{176} \\ &=\frac{64}{176}=\frac{4}{11} \end{aligned}$$

$$\mathrm{P}(B\cap A)=\mathrm{P}(X=4)\times\frac{2}{11}=\frac{{}_4\mathrm{C}_4}{16}\times\frac{2}{11}=\frac{2}{176}=\frac{1}{88}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{88}}{\frac{4}{11}}=\frac{1}{32}$$

따라서 $p=32$, $q=1$이므로

$p-q=32-1=31$

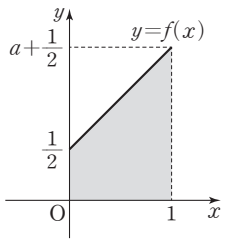
11 정규분포

난이도별 필수 기출 174~193쪽

0730 답 1

$f(x)\geq 0$이므로 $a\geq -\frac{1}{2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times\left\{\frac{1}{2}+\left(a+\frac{1}{2}\right)\right\}\times 1=1$

$a+1=2$

$\therefore a=1$

0731 답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

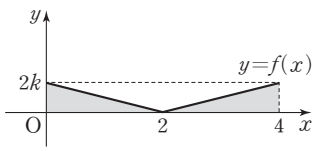
$\frac{1}{2}\times 9\times k=1$, $\frac{9}{2}k=1$

$\therefore k=\frac{2}{9}$

0732 답 $\frac{3}{8}$

$f(x)\geq 0$이므로 $k\geq 0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

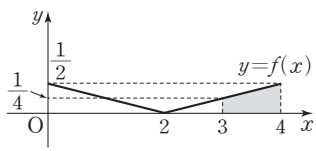


$2\times\frac{1}{2}\times 2\times 2k=1$

$4k=1$ $\therefore k=\frac{1}{4}$ …… ⓘ

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}|x-2|\ (0\leq x\leq 4)$

따라서 구하는 확률은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=3$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(3\leq X\leq 4)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times 1$

$=\frac{3}{8}$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ k의 값 구하기	50%
ⓘⓘ $\mathrm{P}(3\leq X\leq 4)$의 값 구하기	50%

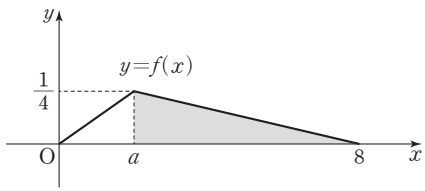
0733 답 ④

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times 8\times b=1$, $4b=1$

$\therefore b=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(a\leq X\leq 8)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(a\leq X\leq 8)=\frac{3}{4}$에서

$\frac{1}{2}\times(8-a)\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$8-a=6$

$\therefore a=2$

$\therefore a+b=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

0734 답 ①

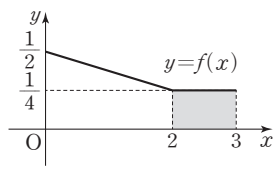
함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\times a+(3-a)\times\frac{1}{4}=1$

$\frac{3}{8}a+\frac{3}{4}-\frac{a}{4}=1$

$\frac{a}{8}=\frac{1}{4}$ $\therefore a=2$

$\mathrm{P}(a\leq X\leq 3)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

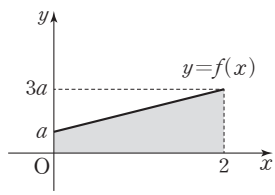


$\mathrm{P}(a\leq X\leq 3)=(3-2)\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

0735 답 ①

$f(x)\geq 0$이므로 $a\geq 0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로



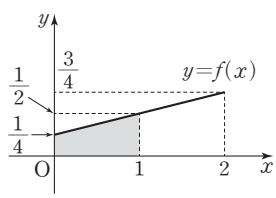
$\frac{1}{2}\times(a+3a)\times 2=1$

$4a=1$

$\therefore a=\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}(x+1)\ (0\leq x\leq 2)$

$\mathrm{P}(0\leq X\leq 1)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(0\leq X\leq 1)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times 1$

$=\frac{3}{8}$

따라서 $p=8$, $q=3$이므로

$p+q=8+3=11$

0736 답 ③

$\mathrm{P}(1\le X\le 3)=a$, $\mathrm{P}(5\le X\le 6)=b$로 놓으면

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=3$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{P}(1\le X\le 3)=\mathrm{P}(3\le X\le 5)=a$,

$\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\mathrm{P}(5\le X\le 6)=b$

$2\mathrm{P}(1\le X\le 3)=3\mathrm{P}(5\le X\le 6)$에서

$2a=3b$ ····· ㉠

$\mathrm{P}(0\le X\le 3)=\frac{1}{2}$이므로

$\mathrm{P}(0\le X\le 1)+\mathrm{P}(1\le X\le 3)=\frac{1}{2}$

$a+b=\frac{1}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{3}{10}$, $b=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(1\le X\le 5)=\mathrm{P}(1\le X\le 3)+\mathrm{P}(3\le X\le 5)$

$=2a=2\times\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$

0737 답 ④

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=2a$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

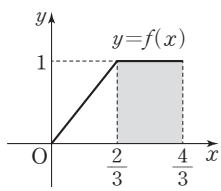
$\frac{1}{2}\times\{(2a-a)+2a\}\times\frac{3}{2}a=1$

$\frac{9}{4}a^2=1$

$a^2=\frac{4}{9}$

$\therefore a=\frac{2}{3}$ ($\because a>0$)

$\mathrm{P}(a\le X\le 2a)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\frac{2}{3}$, $x=\frac{4}{3}$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(a\le X\le 2a)=\left(\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\right)\times 1=\frac{2}{3}$

$\therefore a\mathrm{P}(a\le X\le 2a)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

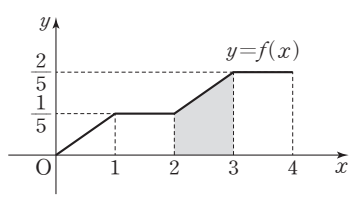
0738 답 ⑤

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times 1\times k+1\times k+\frac{1}{2}\times(k+2k)\times 1+1\times 2k=1$

$5k=1$ $\therefore k=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(2\le X\le 3)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

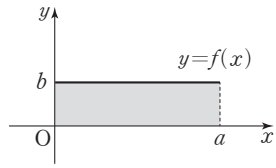


$\mathrm{P}(2\le X\le 3)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}\right)\times 1=\frac{3}{10}$

$\therefore k+\mathrm{P}(2\le X\le 3)=\frac{1}{5}+\frac{3}{10}=\frac{1}{2}$

0739 답 ①

함수 $f(x)=b$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

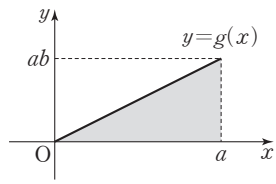


$ab=1$ ····· ㉠

이때 $g(x)=\mathrm{P}(0\le X\le x)$에서

$g(x)=bx$

함수 $g(x)=bx$의 그래프와 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로



$\frac{1}{2}\times a\times ab=1$

$\therefore a^2b=2$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a=2$

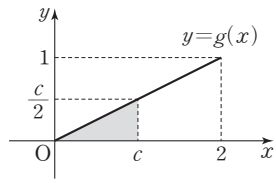
이를 ㉠에 대입하면

$2b=1$

$\therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}x(0\le x\le 2)$

$\mathrm{P}(0\le Y\le c)$는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=c$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(0\le Y\le c)=\frac{1}{4}$에서

$\frac{1}{2}\times c\times\frac{c}{2}=\frac{1}{4}$

$\therefore c^2=1$

$\therefore ab+c^2=1+1=2$

0740 답 ②

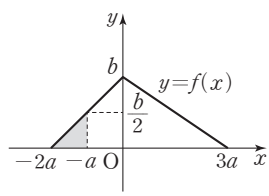
함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times\{3a-(-2a)\}\times b=1$

$\frac{5}{2}ab=1$

$\therefore ab=\frac{2}{5}$

$\mathrm{P}(-2a\le X\le -a)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=-a$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(-2a\le X\le -a)$

$=\frac{1}{2}\times\{-a-(-2a)\}\times\frac{b}{2}$

$=\frac{1}{4}ab=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(-a\le X\le 3a)=1-\mathrm{P}(-2a\le X\le -a)$

$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

따라서 $p=10$, $q=9$이므로

$p+q=10+9=19$

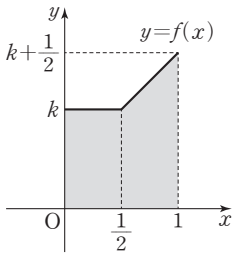
0741 답 ⑤

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times k+\frac{1}{2}\times\left\{k+\left(k+\frac{1}{2}\right)\right\}\times\frac{1}{2}=1$

$k+\frac{1}{8}=1$ $\therefore k=\frac{7}{8}$

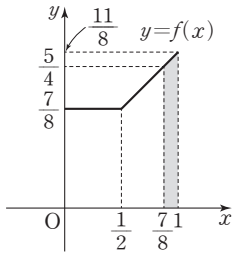
$\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{7}{8} & \left(0\le x<\frac{1}{2}\right)\\ x+\frac{3}{8} & \left(\frac{1}{2}\le x\le 1\right)\end{cases}$



$\mathrm{P}(k\le X\le 1)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=\frac{7}{8}$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(k\le X\le 1)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{4}+\frac{11}{8}\right)\times\frac{1}{8}$

$=\frac{21}{128}$



0742 답 ③

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times a\times c=1$ $\therefore ac=2$ ····· ㉠

$\mathrm{P}(0\le X\le b)-\mathrm{P}(b\le X\le a)=\frac{1}{5}$에서

$\mathrm{P}(0\le X\le b)-\{1-\mathrm{P}(0\le X\le b)\}=\frac{1}{5}$

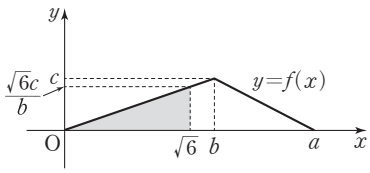
$2\mathrm{P}(0\le X\le b)=\frac{6}{5}$ $\therefore \mathrm{P}(0\le X\le b)=\frac{3}{5}$

따라서 $\frac{1}{2}\times b\times c=\frac{3}{5}$이므로

$bc=\frac{6}{5}$ ····· ㉡

한편 $\mathrm{P}(0\le X\le b)=\frac{3}{5}>\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{P}(0\le X\le\sqrt{6})=\frac{1}{2}$이려면 $b>\sqrt{6}$이어야 한다.

$0\le x\le b$일 때 $f(x)=\frac{c}{b}x$이고 그림에서 색칠한 부분의 넓이가 $\frac{1}{2}$이므로



$\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{6}c}{b}=\frac{1}{2}$, $\frac{3c}{b}=\frac{1}{2}$

$\therefore b=6c$

이를 ㉡에 대입하면

$6c^2=\frac{6}{5}$, $c^2=\frac{1}{5}$

$\therefore c=\frac{\sqrt{5}}{5}$ $(\because c>0)$

$c=\frac{\sqrt{5}}{5}$를 ㉠, ㉡에 각각 대입하여 풀면

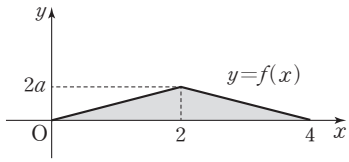
$a=2\sqrt{5}$, $b=\frac{6\sqrt{5}}{5}$

$\therefore 5abc=5\times 2\sqrt{5}\times\frac{6\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}=12\sqrt{5}$

0743 답 ①

㈎에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.

㈏에서 $0\le x\le 2$일 때 $f(x)=ax$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



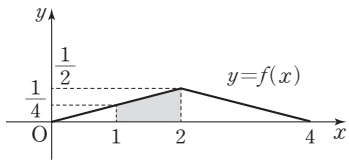
함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times 4\times 2a=1$, $4a=1$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

$\therefore k=\mathrm{P}(4a\le X\le 4-4a)=\mathrm{P}(1\le X\le 3)$

$=\mathrm{P}(1\le X\le 2)+\mathrm{P}(2\le X\le 3)=2\mathrm{P}(1\le X\le 2)$

$\mathrm{P}(1\le X\le 2)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}(1\le X\le 2)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times 1=\frac{3}{8}$

$\therefore k=2\mathrm{P}(1\le X\le 2)=2\times\frac{3}{8}=\frac{3}{4}$

$\therefore 16k=16\times\frac{3}{4}=12$

0744 답 ②

$f(1+x)=f(1-x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$p_2=\mathrm{P}(1+a\le X\le 1+b)=\mathrm{P}(1-b\le X\le 1-a)$

$\therefore \mathrm{P}(1-b\le X\le 1+b)$

$=\mathrm{P}(1-b\le X\le 1-a)+\mathrm{P}(1-a\le X\le 1+b)$

$=p_2+p_1$

0745 답 ②

㈎에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=0$에 대하여 대칭이다.

$\mathrm{P}(-4\le X\le 4)=1$이므로

$\mathrm{P}(-4\le X\le 0)+\mathrm{P}(0\le X\le 4)=1$

$2\mathrm{P}(0\le X\le 4)=1$ $\therefore \mathrm{P}(0\le X\le 4)=\frac{1}{2}$

㈏에서 $\mathrm{P}(0\le X\le 1)=3\mathrm{P}(1\le X\le 4)$이므로

$\mathrm{P}(1\le X\le 4)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(0\le X\le 1)$

$\therefore \mathrm{P}(0\le X\le 4)=\mathrm{P}(0\le X\le 1)+\mathrm{P}(1\le X\le 4)$

$=\mathrm{P}(0\le X\le 1)+\frac{1}{3}\mathrm{P}(0\le X\le 1)$

$=\frac{4}{3}\mathrm{P}(0\le X\le 1)$

즉, $\frac{4}{3}\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{3}{8}$

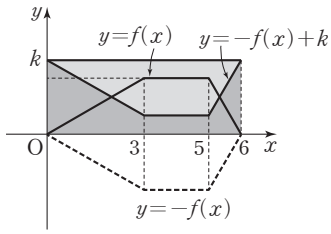
$\therefore \mathrm{P}(-1\le X\le 0)=\mathrm{P}(0\le X\le 1)=\frac{3}{8}$

0746 답 31

$f(x)+g(x)=k$에서

$g(x)=-f(x)+k$

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분, 함수 $y=-f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분, 직선 $y=k$와 함수 $y=-f(x)+k$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 모두 1로 같다.



또 함수 $y=-f(x)+k$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이도 1이다.

따라서 직선 $y=k$와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=6$으로 둘러싸인 직사각형의 넓이는 2이므로

$6k=2$

$\therefore k=\frac{1}{3}$

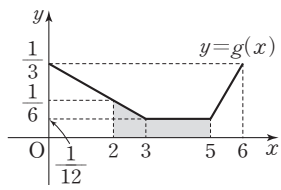
연속확률변수 X의 확률밀도함수는

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{12}x & (0\le x\le 3)\\ \frac{1}{4} & (3\le x\le 5)\\ -\frac{1}{4}x+\frac{3}{2} & (5\le x\le 6)\end{cases}$$

$g(x)=-f(x)+\frac{1}{3}$이므로 연속확률변수 Y의 확률밀도함수는

$$g(x)=\begin{cases}-\frac{1}{12}x+\frac{1}{3} & (0\le x\le 3)\\ \frac{1}{12} & (3\le x\le 5)\\ \frac{1}{4}x-\frac{7}{6} & (5\le x\le 6)\end{cases}$$

이때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같고 $\mathrm{P}(6k\le Y\le 15k)$, 즉 $\mathrm{P}(2\le Y\le 5)$는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=5$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



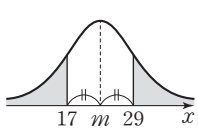
$$\mathrm{P}(6k\le Y\le 15k)=\mathrm{P}(2\le Y\le 5)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)\times 1+2\times\frac{1}{12}$$
$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{7}{24}$$

따라서 $p=24$, $q=7$이므로

$p+q=24+7=31$

0747 답 ④

정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 $\mathrm{P}(X\le 17)=\mathrm{P}(X\ge 29)$이므로



$m=\frac{17+29}{2}=23$

0748 답 ①

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(10, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-10}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$$\therefore \mathrm{P}(6\le X\le 12)=\mathrm{P}\left(\frac{6-10}{4}\le Z\le\frac{12-10}{4}\right)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0.5)$$
$$=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$$
$$=0.3413+0.1915=0.5328$$

0749 답 ③

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(21, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-21}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(k\le X\le 29)=0.8185$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{k-21}{4}\le Z\le\frac{29-21}{4}\right)=0.8185$

$\mathrm{P}\left(\frac{k-21}{4}\le Z\le 2\right)=0.8185 \longrightarrow \mathrm{P}\left(\frac{k-21}{4}\le Z\le 2\right)=0.8185>0.5$

$\mathrm{P}\left(\frac{k-21}{4}\le Z\le 0\right)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.8185$ 이므로 $\frac{k-21}{4}<0$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{21-k}{4}\right)+0.4772=0.8185$

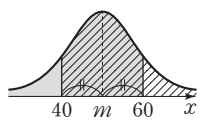
$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{21-k}{4}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{21-k}{4}=1$, $21-k=4$ $\quad\therefore k=17$

0750 답 ③

확률변수 X의 평균을 m이라 하면 X의 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 $\mathrm{P}(X\ge 40)=\mathrm{P}(X\le 60)$이므로



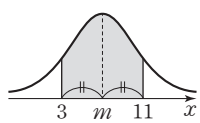
$m=\frac{40+60}{2}=50$

$\therefore k=\mathrm{P}(40\le X\le 50)=\mathrm{P}(50\le X\le 60)=0.48$

$\therefore 100k=48$

0751 답 ②

확률변수 X가 평균이 m인 정규분포를 따르므로 X의 확률밀도함수는 $x=m$에서 최댓값을 갖고, 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

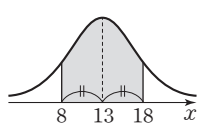


따라서 $a=5$일 때 최댓값 $\mathrm{P}(3\le X\le 11)$을 가지려면 3, 11의 평균이 m이어야 하므로

$m=\frac{3+11}{2}=7$

0752 답 ⑤

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(13, 9)$를 따르므로 X의 확률밀도함수는 $x=13$에서 최댓값을 갖고, 정규분포곡선은 직선 $x=13$에 대하여 대칭이다.



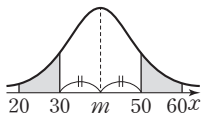
따라서 $P(k-10\le X\le k)$가 최댓값을 가지려면 $k-10$, k의 평균이 13이어야 하므로

$\frac{(k-10)+k}{2}=13$, $2k-10=26$

$\therefore k=18$

0753 답 72

정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.



㈎에서 $P(20\le X\le 30)=P(50\le X\le 60)$이므로

$m=\frac{30+50}{2}=40$ …… ⓘ

㈏에서 $P(X\le m-\sigma)=P(X\ge 45)$, 즉

$P(X\le 40-\sigma)=P(X\ge 45)$이므로

$\frac{(40-\sigma)+45}{2}=40$ $\therefore \sigma=5$ …… ⓘⓘ

따라서 $P\left(\frac{m}{\sigma}\le X\le 50\right)=P(30\le X\le k)$에서

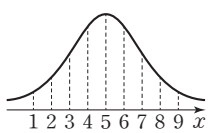
$P(8\le X\le 50)=P(30\le X\le k)$이므로

$\frac{8+k}{2}=40$ $\therefore k=72$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ m의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ σ의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ k의 값 구하기	40 %

0754 답 ①

정규분포 $N(5, 4^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포곡선은 직선 $x=5$에 대하여 대칭이므로



$P(X\le 1)+P(X\le 9)=P(X\le 1)+P(X\ge 1)=1$

$P(X\le 2)+P(X\le 8)=P(X\le 2)+P(X\ge 2)=1$

$P(X\le 3)+P(X\le 7)=P(X\le 3)+P(X\ge 3)=1$

$P(X\le 4)+P(X\le 6)=P(X\le 4)+P(X\ge 4)=1$

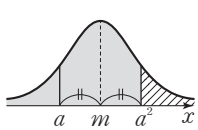
$P(X\le 5)=\frac{1}{2}$

$\therefore P(X\le 1)+P(X\le 2)+P(X\le 3)+P(X\le 4)+P(X\le 5)$
$+P(X\le 6)+P(X\le 7)+P(X\le 8)+P(X\le 9)$
$=\{P(X\le 1)+P(X\le 9)\}+\{P(X\le 2)+P(X\le 8)\}$
$+\{P(X\le 3)+P(X\le 7)\}+\{P(X\le 4)+P(X\le 6)\}$
$+P(X\le 5)$
$=1+1+1+1+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

따라서 $a=\frac{9}{2}$이므로 $10a=45$

0755 답 ①

정규분포 $N\left(m, \left(\frac{1}{m}\right)^2\right)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.



$P(X\le a)+P(X\le a^2)=1$에서

$\frac{a+a^2}{2}=m$

$\therefore a^2+a=2m$

확률변수 X가 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{1}{m}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\frac{1}{m}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\le a^2+a)=0.8413$에서

$P(X\le 2m)=0.8413$

$P\left(Z\le\frac{2m-m}{\frac{1}{m}}\right)=0.8413$

$P(Z\le m^2)=0.8413$

$P(Z\le 0)+P(0\le Z\le m^2)=0.8413$

$0.5+P(0\le Z\le m^2)=0.8413$

$\therefore P(0\le Z\le m^2)=0.3413$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$m^2=1$ $\therefore m=1$ ($\because m>0$)

즉, $a^2+a=2$이므로

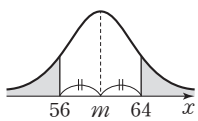
$a^2+a-2=0$, $(a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because a<0$)

$\therefore P(X\ge a^2-1)=P(X\ge 3)=P\left(Z\ge\frac{3-1}{1}\right)$
$=P(Z\ge 2)=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)$
$=0.5-0.4772=0.0228$

0756 답 ④

정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 ㈎에서



$m=\frac{56+64}{2}=60$

㈏에서 $E(X^2)=3616$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=3616-60^2=16$

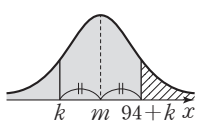
$\therefore \sigma=\sqrt{16}=4$ ($\because \sigma>0$)

따라서 $m=60$, $\sigma=4$이므로

$P(X\le 68)=P(X\le 60+2\times 4)=P(X\le m+2\sigma)$
$=P(X\le m)+P(m\le X\le m+2\sigma)$
$=0.5+0.4772=0.9772$

0757 답 ④

정규분포 $N(m, 12^2)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로 ㈎에서



$\frac{k+(94+k)}{2}=m$

$2k+94=2m$ $\therefore k=m-47$ …… ㉠

확률변수 X가 정규분포 $N(m, 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{12}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

㈏에서 $\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{2k-m}{12}\right)=0.0668$

$\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{2k-m}{12}\right)=0.0668$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{2k-m}{12}\right)=0.0668$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{2k-m}{12}\right)=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.5)=0.4332$이므로

$\frac{2k-m}{12}=1.5$

$\therefore\ 2k-m=18$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2(m-47)-m=18$

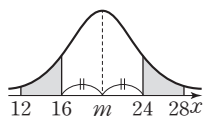
$\therefore\ m=112$

0758 답 ④

$F(12)=F(24)$에서

$\mathrm{P}(12\leq X\leq16)=\mathrm{P}(24\leq X\leq28)$

이때 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ 16)$을 따르는 확률변수 X의 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로



$m=\frac{16+24}{2}=20$

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 16)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(X\leq26)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{26-20}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\leq1.5)$

$=\mathrm{P}(Z\leq0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.5)$

$=0.5+0.4332=0.9332$

0759 답 ②

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \left(\frac{m}{4}\right)^2\right)$을 따르므로

$Z=\frac{X-m}{\frac{m}{4}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\leq15)=0.9772$에서 $\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{15-m}{\frac{m}{4}}\right)=0.9772$

$\mathrm{P}(Z\leq0)+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{15-m}{\frac{m}{4}}\right)=0.9772$

$0.5+\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{15-m}{\frac{m}{4}}\right)=0.9772$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{15-m}{\frac{m}{4}}\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq2)=0.4772$이므로

$\frac{15-m}{\frac{m}{4}}=2,\ 15-m=\frac{m}{2}$

$\frac{3}{2}m=15$ $\therefore\ m=10$

0760 답 ④

$\mathrm{P}(m-a\leq X\leq m+a)=0.6$에서

$\mathrm{P}(m-a\leq X\leq m)+\mathrm{P}(m\leq X\leq m+a)=0.6$

$2\mathrm{P}(m\leq X\leq m+a)=0.6$

$\therefore\ \mathrm{P}(m\leq X\leq m+a)=0.3$

$\mathrm{P}(m-3a\leq X\leq m+3a)=0.94$에서

$\mathrm{P}(m-3a\leq X\leq m)+\mathrm{P}(m\leq X\leq m+3a)=0.94$

$2\mathrm{P}(m\leq X\leq m+3a)=0.94$

$\therefore\ \mathrm{P}(m\leq X\leq m+3a)=0.47$

$\therefore\ \mathrm{P}(m+a\leq X\leq m+3a)$

$=\mathrm{P}(m\leq X\leq m+3a)-\mathrm{P}(m\leq X\leq m+a)$

$=0.47-0.3=0.17$

0761 답 ④

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(m\leq X\leq m+18)-\mathrm{P}(X\leq m-18)=0.3664$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{m-m}{\sigma}\leq Z\leq\frac{m+18-m}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{m-18-m}{\sigma}\right)=0.3664$

$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{18}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(Z\leq-\frac{18}{\sigma}\right)=0.3664$

$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{18}{\sigma}\right)-\mathrm{P}\left(Z\geq\frac{18}{\sigma}\right)=0.3664$

$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{18}{\sigma}\right)-\left\{\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{18}{\sigma}\right)\right\}=0.3664$

$\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{18}{\sigma}\right)-\left\{0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{18}{\sigma}\right)\right\}=0.3664$

$2\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{18}{\sigma}\right)=0.8664$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{18}{\sigma}\right)=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq1.5)=0.4332$이므로

$\frac{18}{\sigma}=1.5$ $\therefore\ \sigma=12$

0762 답 70

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\leq40)=0.3$에서

$\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{40-m}{\sigma}\right)=0.3,\ \mathrm{P}\left(Z\geq\frac{m-40}{\sigma}\right)=0.3$

$\mathrm{P}(Z\geq0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{m-40}{\sigma}\right)=0.3$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{m-40}{\sigma}\right)=0.3$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\leq Z\leq\frac{m-40}{\sigma}\right)=0.2$

이때 $\mathrm{P}(0\leq Z\leq0.5)=0.2$이므로

$\frac{m-40}{\sigma}=0.5$ $\therefore\ m-0.5\sigma=40$ ····· ㉠ ····· i

$\mathrm{P}(X\le 76)=0.9$에서 $\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{76-m}{\sigma}\right)=0.9$

$\mathrm{P}(Z\le 0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{76-m}{\sigma}\right)=0.9$

$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{76-m}{\sigma}\right)=0.9$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{76-m}{\sigma}\right)=0.4$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.3)=0.4$이므로

$\dfrac{76-m}{\sigma}=1.3$ $\therefore m+1.3\sigma=76$ ····· ㉡ ····· ⅱ

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

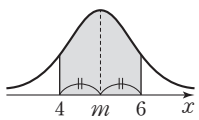
$m=50$, $\sigma=20$

$\therefore m+\sigma=50+20=70$ ····· ⅲ

채점 기준	
ⅰ $\mathrm{P}(X\le 40)=0.3$을 이용하여 m, σ에 대한 식 세우기	40%
ⅱ $\mathrm{P}(X\le 76)=0.9$를 이용하여 m, σ에 대한 식 세우기	40%
ⅲ $m+\sigma$의 값 구하기	20%

0763 답 ①

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르므로 X의 확률밀도함수는 $x=m$에서 최댓값을 갖고, 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.



따라서 함수 $f(t)$가 $t=4$일 때 최댓값 $f(4)=\mathrm{P}(4\le X\le 6)$을 가지려면 4, 6의 평균이 m이어야 하므로

$m=\dfrac{4+6}{2}=5$

$m=5$이므로 $f(5)=\mathrm{P}(5\le X\le 7)$

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(5, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-5}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(5\le X\le 7)=0.3413$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{5-5}{\sigma}\le Z\le\dfrac{7-5}{\sigma}\right)=0.3413$

$\therefore \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{2}{\sigma}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\dfrac{2}{\sigma}=1$ $\therefore \sigma=2$

$\therefore f(7)=\mathrm{P}(7\le X\le 9)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{7-5}{2}\le Z\le\dfrac{9-5}{2}\right)$

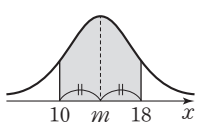
$=\mathrm{P}(1\le Z\le 2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 2)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)$

$=0.4772-0.3413=0.1359$

0764 답 ③

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(m, 5^2)$을 따르므로 X의 확률밀도함수는 $x=m$에서 최댓값을 갖고, 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.



즉, $a=15$일 때 최댓값 $\mathrm{P}(10\le X\le 18)$을 가지려면 10, 18의 평균이 m이어야 하므로

$m=\dfrac{10+18}{2}=14$

따라서 확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(14, 5^2)$을 따른다.

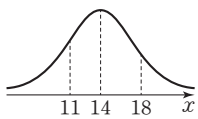
ㄱ. $m=14$이므로 $\mathrm{P}(X>14)=0.5$

ㄴ. $\mathrm{P}(X\le 10)=\mathrm{P}(X\le 14-4)$

$=\mathrm{P}(X\ge 14+4)$

$=\mathrm{P}(X\ge 18)$

ㄷ. 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$는 $x=14$에서 최댓값을 갖고, $x=14$에서 멀어질수록 값이 점점 작아지므로



$f(11)>f(18)$

ㄹ. $\mathrm{P}(X\le 5)=\mathrm{P}(X\le 14-9)$

$=\mathrm{P}(X\ge 14+9)$

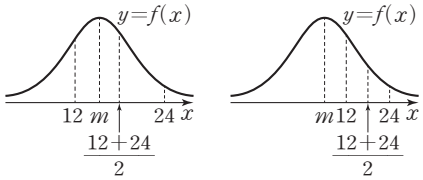
$=\mathrm{P}(X\ge 23)$

$\therefore \mathrm{P}(X\le 5)>\mathrm{P}(X\ge 24)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

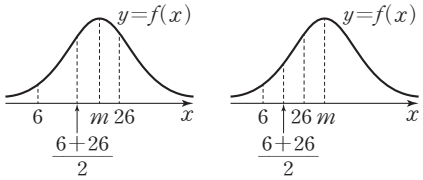
0765 답 150

확률변수 X의 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 $f(x)$의 값이 클수록 x가 평균 m에 가까워지므로 (가)를 만족시키려면 그림과 같아야 한다.



즉, $m<\dfrac{12+24}{2}$이므로 $m<18$ ····· ㉠

(나)를 만족시키려면 그림과 같아야 한다.



즉, $m>\dfrac{6+26}{2}$이므로 $m>16$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $16<m<18$이므로

$m=17$ ($\because m$은 자연수)

즉, 확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(17, 4^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-17}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(19\le X\le 21)=\mathrm{P}\left(\dfrac{19-17}{4}\le Z\le\dfrac{21-17}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 1)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=0.341-0.191=0.15$

따라서 $a=0.15$이므로

$1000a=150$

0766 답 ④

확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$F(x)=P(X\le x)=P\left(Z\le\frac{x-m}{\sigma}\right)$

$0.5\le F\left(\frac{23}{2}\right)\le 0.6915$에서

$0.5\le P\left(Z\le\frac{\frac{23}{2}-m}{\sigma}\right)\le 0.6915$

$0.5\le P(Z\le 0)+P\left(0\le Z\le\frac{\frac{23}{2}-m}{\sigma}\right)\le 0.6915$

$0.5\le 0.5+P\left(0\le Z\le\frac{\frac{23}{2}-m}{\sigma}\right)\le 0.6915$

$\therefore\ 0\le P\left(0\le Z\le\frac{\frac{23}{2}-m}{\sigma}\right)\le 0.1915$

이때 $P(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$0\le\frac{\frac{23}{2}-m}{\sigma}\le 0.5$

$\therefore\ 0\le\frac{23}{2}-m\le 0.5\sigma$ ····· ㉠

$F(13)=0.9332$에서

$P\left(Z\le\frac{13-m}{\sigma}\right)=0.9332$

$P(Z\le 0)+P\left(0\le Z\le\frac{13-m}{\sigma}\right)=0.9332$

$0.5+P\left(0\le Z\le\frac{13-m}{\sigma}\right)=0.9332$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{13-m}{\sigma}\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{13-m}{\sigma}=1.5$

$\therefore\ \sigma=\frac{13-m}{1.5}$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$0\le\frac{23}{2}-m\le 0.5\times\frac{13-m}{1.5}$

$\therefore\ \frac{43}{4}\le m\le\frac{23}{2}$

$\therefore\ m=11$ ($\because$ m은 자연수)

이를 ㉡에 대입하면 $\sigma=\frac{4}{3}$

따라서 $F(k)=0.9772$에서

$P\left(Z\le\frac{k-11}{\frac{4}{3}}\right)=0.9772$

$P\left(Z\le\frac{3k-33}{4}\right)=0.9772$

$P(Z\le 0)+P\left(0\le Z\le\frac{3k-33}{4}\right)=0.9772$

$0.5+P\left(0\le Z\le\frac{3k-33}{4}\right)=0.9772$

$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{3k-33}{4}\right)=0.4772$

이때 $P(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{3k-33}{4}=2$, $3k-33=8$

$\therefore\ k=\frac{41}{3}$

0767 답 673

확률변수 X가 정규분포 $N(1, t^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-1}{t}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\le 5t)\ge\frac{1}{2}$에서 $P\left(Z\le\frac{5t-1}{t}\right)\ge\frac{1}{2}$

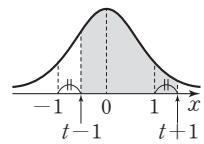
즉, $\frac{5t-1}{t}\ge 0$이므로 $t\ge\frac{1}{5}$ ($\because$ $t>0$)

$P(t^2-t+1\le X\le t^2+t+1)$

$=P\left(\frac{t^2-t+1-1}{t}\le Z\le\frac{t^2+t+1-1}{t}\right)$

$=P(t-1\le Z\le t+1)$ ····· ㉢

이때 $(t+1)-(t-1)=2$로 일정하므로 t의 값이 확률변수 Z의 평균 0에 가까울수록 ㉢의 값은 증가한다.



이때 $t\ge\frac{1}{5}$이므로

$P(t^2-t+1\le X\le t^2+t+1)$은 $t=\frac{1}{5}$일 때 최댓값을 갖는다.

$\therefore\ k=P\left(\frac{1}{5}-1\le Z\le\frac{1}{5}+1\right)$

$=P(-0.8\le Z\le 1.2)$

$=P(-0.8\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.2)$

$=P(0\le Z\le 0.8)+P(0\le Z\le 1.2)$

$=0.288+0.385=0.673$

$\therefore\ 1000\times k=1000\times 0.673=673$

0768 답 ①

확률변수 X가 정규분포 $N(45, 4^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-45}{4}$로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(45\le X\le 49)=0.3413$에서

$P\left(\frac{45-45}{4}\le Z_X\le\frac{49-45}{4}\right)=0.3413$

$\therefore\ P(0\le Z_X\le 1)=0.3413$

확률변수 Y가 정규분포 $N(60, 10^2)$을 따르므로 $Z_Y=\frac{Y-60}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore\ P(Y\le 50)=P\left(Z_Y\le\frac{50-60}{10}\right)$

$=P(Z_Y\le -1)$

$=P(Z_Y\ge 1)$

$=P(Z_Y\ge 0)-P(0\le Z_Y\le 1)$

$=0.5-0.3413=0.1587$

0769 답 ④

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(m, 2^2)$, $N(3m, \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-m}{2}$, $Z_Y=\frac{Y-3m}{\sigma}$으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\le 10)+P(Y\le 10)=1$에서

$$P\left(Z_X\le\frac{10-m}{2}\right)+P\left(Z_Y\le\frac{10-3m}{\sigma}\right)=1$$

$$P\left(Z_X\le\frac{10-m}{2}\right)+P\left(Z_Y\ge\frac{3m-10}{\sigma}\right)=1$$

$$\therefore \frac{10-m}{2}=\frac{3m-10}{\sigma} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$P(Y\le 2m+2)=0.1587$에서

$$P\left(Z_Y\le\frac{(2m+2)-3m}{\sigma}\right)=0.1587$$

$$P\left(Z_Y\le\frac{2-m}{\sigma}\right)=0.1587$$

$$P\left(Z_Y\ge\frac{m-2}{\sigma}\right)=0.1587$$

$$P(Z_Y\ge 0)-P\left(0\le Z_Y\le\frac{m-2}{\sigma}\right)=0.1587$$

$$0.5-P\left(0\le Z_Y\le\frac{m-2}{\sigma}\right)=0.1587$$

$$\therefore P\left(0\le Z_Y\le\frac{m-2}{\sigma}\right)=0.3413$$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$$\frac{m-2}{\sigma}=1 \quad \therefore \sigma=m-2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{10-m}{2}=\frac{3m-10}{m-2}$$

$$-m^2+12m-20=6m-20$$

$$m^2-6m=0,\ m(m-6)=0$$

$\therefore m=6$ ($\because m>2$)

이를 ㉡에 대입하면

$\sigma=6-2=4$

$$\therefore P(X\le\sigma)=P(X\le 4)=P\left(Z_X\le\frac{4-6}{2}\right)$$
$$=P(Z_X\le -1)=P(Z_X\ge 1)$$
$$=P(Z_X\ge 0)-P(0\le Z_X\le 1)$$
$$=0.5-0.3413=0.1587$$

0770 답 $\frac{1}{2}$

표준편차가 클수록 확률밀도함수의 그래프는 가운데 부분의 높이가 낮아지고 양쪽으로 넓게 퍼진 모양이 된다. …… ⅰ

주어진 그래프는 가운데 부분의 높이가 높은 순서대로 대칭축이 직선 $x=20$, $x=50$, $x=40$이고,

$\sigma(Y)<\sigma(Z)<\sigma(X)$이므로

대칭축이 직선 $x=20$, $x=50$, $x=40$인 그래프가 각각 Y, Z, X의 확률밀도함수의 그래프이다. …… ⅱ

따라서 $E(X)=40$, $E(Y)=20$, $E(Z)=50$이므로

$$\frac{E(Z)-E(X)}{E(Y)}=\frac{50-40}{20}=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots ⅲ$$

채점 기준	
ⅰ 표준편차에 따른 확률밀도함수의 그래프 특징 나타내기	40 %
ⅱ 세 확률변수 X, Y, Z의 확률밀도함수의 그래프 구분하기	40 %
ⅲ $\frac{E(Z)-E(X)}{E(Y)}$의 값 구하기	20 %

0771 답 ②

확률변수 X가 정규분포 $N(30, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-30}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\therefore P(92\le Y\le 104)=P(92\le 3X-10\le 104)$$
$$=P(34\le X\le 38)$$
$$=P\left(\frac{34-30}{4}\le Z\le\frac{38-30}{4}\right)$$
$$=P(1\le Z\le 2)$$
$$=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1)$$
$$=0.4772-0.3413=0.1359$$

다른 풀이

$E(X)=30$, $\sigma(X)=4$이므로

$E(Y)=E(3X-10)=3E(X)-10=3\times 30-10=80$

$\sigma(Y)=\sigma(3X-10)=|3|\sigma(X)=3\times 4=12$

따라서 확률변수 Y가 정규분포 $N(80, 12^2)$을 따르므로

$Z=\frac{Y-80}{12}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\therefore P(92\le Y\le 104)=P\left(\frac{92-80}{12}\le Z\le\frac{104-80}{12}\right)$$
$$=P(1\le Z\le 2)$$
$$=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1)$$
$$=0.4772-0.3413=0.1359$$

0772 답 ④

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(m_1, \sigma^2)$, $N(m_2, \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-m_1}{\sigma}$, $Z_Y=\frac{X-m_2}{\sigma}$로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

(가)에서 $P\left(\frac{m_1+m_2}{2}\le X\le m_2\right)=0.05$이므로

$$P\left(\frac{\frac{m_1+m_2}{2}-m_1}{\sigma}\le Z_X\le\frac{m_2-m_1}{\sigma}\right)=0.05$$

$$\therefore P\left(\frac{m_2-m_1}{2\sigma}\le Z_X\le\frac{m_2-m_1}{\sigma}\right)=0.05 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(나)에서 $P\left(\frac{m_1+m_2}{2}\le Y\le m_2\right)=0.30$이므로

$$P\left(\frac{\frac{m_1+m_2}{2}-m_2}{\sigma}\le Z_Y\le\frac{m_2-m_2}{2}\right)=0.30$$

$$P\left(\frac{m_1-m_2}{2\sigma}\le Z_Y\le 0\right)=0.30$$

$$\therefore P\left(0\le Z_Y\le\frac{m_2-m_1}{2\sigma}\right)=0.30 \quad \cdots\cdots ㉡$$

$\therefore$ $P(2m_1-m_2\le X\le m_2)$

$=P\left(\frac{2m_1-m_2-m_1}{\sigma}\le Z_X\le\frac{m_2-m_1}{\sigma}\right)$

$=P\left(\frac{m_1-m_2}{\sigma}\le Z_X\le\frac{m_2-m_1}{\sigma}\right)$

$=P\left(-\frac{m_2-m_1}{\sigma}\le Z_X\le\frac{m_2-m_1}{\sigma}\right)$

$=P\left(-\frac{m_2-m_1}{\sigma}\le Z_X\le 0\right)+P\left(0\le Z_X\le\frac{m_2-m_1}{\sigma}\right)$

$=2P\left(0\le Z\le\frac{m_2-m_1}{\sigma}\right)$

$=2\left\{P\left(0\le Z\le\frac{m_2-m_1}{2\sigma}\right)+P\left(\frac{m_2-m_1}{2\sigma}\le Z\le\frac{m_2-m_1}{\sigma}\right)\right\}$

$=2\times(0.30+0.05)$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=0.70$

0773 답 ②

ㄱ. 표준편차가 클수록 확률밀도함수의 그래프는 가운데 부분의 높이가 낮아지므로

$\sigma(X)<\sigma(Y)$

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=12$에 대하여 대칭이고, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=24$에 대하여 대칭이다.

즉, $E(X)=12$, $E(Y)=24$이므로

$E(2X+6)=2E(X)+6=2\times12+6=30$

$E(1.5Y-6)=1.5E(Y)-6=1.5\times24-6=30$

$\therefore$ $E(2X+6)=E(1.5Y-6)$

ㄷ. 두 확률변수 X, Y의 표준편차를 각각 σ_1, σ_2라 하면 ㄱ에서

$\sigma_1<\sigma_2$

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(12, \sigma_1^2)$, $N(24, \sigma_2^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-12}{\sigma_1}$, $Z_Y=\frac{Y-24}{\sigma_2}$로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(6\le X\le18)=P(16\le Y\le32)$에서

$P(6\le X\le18)$

$=P\left(\frac{6-12}{\sigma_1}\le Z_X\le\frac{18-12}{\sigma_1}\right)$

$=P\left(-\frac{6}{\sigma_1}\le Z_X\le\frac{6}{\sigma_1}\right)$

$=P\left(-\frac{6}{\sigma_1}\le Z_X\le0\right)+P\left(0\le Z_X\le\frac{6}{\sigma_1}\right)$

$=2P\left(0\le Z_X\le\frac{6}{\sigma_1}\right)$

$P(16\le Y\le32)$

$=P\left(\frac{16-24}{\sigma_2}\le Z_Y\le\frac{32-24}{\sigma_2}\right)$

$=P\left(-\frac{8}{\sigma_2}\le Z_Y\le\frac{8}{\sigma_2}\right)$

$=P\left(-\frac{8}{\sigma_2}\le Z_Y\le0\right)+P\left(0\le Z_Y\le\frac{8}{\sigma_2}\right)$

$=2P\left(0\le Z_Y\le\frac{8}{\sigma_2}\right)$

즉, $2P\left(0\le Z_X\le\frac{6}{\sigma_1}\right)=2P\left(0\le Z_Y\le\frac{8}{\sigma_2}\right)$에서

$P\left(0\le Z_X\le\frac{6}{\sigma_1}\right)=P\left(0\le Z_Y\le\frac{8}{\sigma_2}\right)$이므로

$\frac{6}{\sigma_1}=\frac{8}{\sigma_2}$, $4\sigma_1=3\sigma_2$ $\therefore$ $4\sigma(X)=3\sigma(Y)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

0774 답 ②

㈎에서 $Y=2X-k$이므로

$\sigma(Y)=\sigma(2X-k)=|2|\sigma(X)$

이때 $\sigma(X)=3$, $\sigma(Y)=\sigma$이므로

$\sigma=2\times3=6$

또 ㈎에서 $Y=2X-k$이므로

$E(Y)=E(2X-k)=2E(X)-k$

이때 $E(X)=m$, $E(Y)=m$이므로

$m=2m-k$ $\therefore$ $k=m$ ····· ㉠

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(m, 3^2)$, $N(m, 6^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-m}{3}$, $Z_Y=\frac{Y-m}{6}$으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

㈏에서 $P(X\le7)=P(Y\ge k)$이므로

$P(X\le7)=P(Y\ge m)$ ($\because$ ㉠)

$P\left(Z_X\le\frac{7-m}{3}\right)=P\left(Z_Y\ge\frac{m-m}{6}\right)$

$\therefore$ $P\left(Z_X\ge\frac{m-7}{3}\right)=P(Z_Y\ge0)$

즉, $\frac{m-7}{3}=0$이므로 $m=7$

$\therefore$ $P(Y\ge16)=P\left(Z_Y\ge\frac{16-7}{6}\right)=P(Z_Y\ge1.5)$

$=P(Z_Y\ge0)-P(0\le Z_Y\le1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

0775 답 ⑤

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(20, 4^2)$, $N(m, \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-20}{4}$, $Z_Y=\frac{Y-m}{\sigma}$으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(Y\le20)+P(20\le X\le26)=\frac{1}{2}$에서

$P\left(Z_Y\le\frac{20-m}{\sigma}\right)+P\left(\frac{20-20}{4}\le Z_X\le\frac{26-20}{4}\right)=\frac{1}{2}$

$P\left(Z_Y\le\frac{20-m}{\sigma}\right)+P(0\le Z_X\le1.5)=\frac{1}{2}$

$P\left(Z_Y\ge\frac{m-20}{\sigma}\right)+0.4332=0.5$, $P\left(Z_Y\ge\frac{m-20}{\sigma}\right)=0.0668$

$P(Z_Y\ge0)-P\left(0\le Z_Y\le\frac{m-20}{\sigma}\right)=0.0668$

$0.5-P\left(0\le Z_Y\le\frac{m-20}{\sigma}\right)=0.0668$

$\therefore$ $P\left(0\le Z_Y\le\frac{m-20}{\sigma}\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z_Y\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{m-20}{\sigma}=1.5$ ····· ㉠

$\therefore P(Y\ge 20-\sigma)=P\left(Z_Y\ge\frac{20-\sigma-m}{\sigma}\right)$

$=P\left(Z_Y\ge-\frac{m-20}{\sigma}-1\right)$

$=P(Z_Y\ge -1.5-1)$ ($\because$ ㉠)

$=P(Z_Y\ge -2.5)$

$=P(Z_Y\le 2.5)$

$=P(Z_Y\le 0)+P(0\le Z_Y\le 2.5)$

$=0.5+0.4938$

$=0.9938$

0776 답 ②

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(50, \sigma^2)$, $N(80, 4\sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-50}{\sigma}$, $Z_Y=\frac{Y-80}{2\sigma}$으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\ge k)=P(Y\le k)=0.0668$에서

$P\left(Z_X\ge\frac{k-50}{\sigma}\right)=P\left(Z_Y\le\frac{k-80}{2\sigma}\right)=0.0668$

즉, $\frac{k-50}{\sigma}=-\frac{k-80}{2\sigma}$이므로

$2(k-50)=-(k-80)$

$3k=180$

$\therefore k=60$

이를 $P\left(Z_X\ge\frac{k-50}{\sigma}\right)=0.0668$에 대입하면

$P\left(Z_X\ge\frac{10}{\sigma}\right)=0.0668$

$P(Z_X\ge 0)-P\left(0\le Z_X\le\frac{10}{\sigma}\right)=0.0668$

$0.5-P\left(0\le Z_X\le\frac{10}{\sigma}\right)=0.0668$

$\therefore P\left(0\le Z_X\le\frac{10}{\sigma}\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{10}{\sigma}=1.5$ $\therefore \sigma=\frac{20}{3}$

$\therefore k\sigma=60\times\frac{20}{3}=400$

0777 답 ③

정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 평균이 각각 10, 18이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 각각 직선 $x=10$, $x=18$에 대하여 대칭이다.

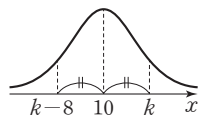
X, Y의 표준편차가 4로 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 8만큼 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치한다.

즉, $g(x)=f(x-8)$

이때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 x좌표가 k이므로 $f(k)=g(k)$에서

$f(k)=f(k-8)$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=10$에 대하여 대칭이므로



$\frac{(k-8)+k}{2}=10$, $2k=28$

$\therefore k=14$

확률변수 Y가 정규분포 $N(18, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{Y-18}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore P(10\le Y\le k)=P(10\le Y\le 14)$

$=P\left(\frac{10-18}{4}\le Z\le\frac{14-18}{4}\right)$

$=P(-2\le Z\le -1)$

$=P(1\le Z\le 2)$

$=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1)$

$=0.4772-0.3413$

$=0.1359$

0778 답 316

확률변수 X가 정규분포 $N(60, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-60}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(b\le X\le 64)=0.1498$에서

$P\left(\frac{b-60}{4}\le Z\le\frac{64-60}{4}\right)=0.1498$

$P\left(\frac{b-60}{4}\le Z\le 1\right)=0.1498$

$P(0\le Z\le 1)-P\left(0\le Z\le\frac{b-60}{4}\right)=0.1498$

$0.3413-P\left(0\le Z\le\frac{b-60}{4}\right)=0.1498$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{b-60}{4}\right)=0.1915$

이때 $P(0\le Z\le 0.5)=0.1915$이므로

$\frac{b-60}{4}=0.5$ $\therefore b=62$ ····· ⓘ

$3X+Y=a$에서 $Y=-3X+a$이므로

$P(b\le Y\le a-180)=0.3413$에서

$P(62\le -3X+a\le a-180)=0.3413$

$P\left(60\le X\le\frac{a-62}{3}\right)=0.3413$

$P\left(\frac{60-60}{4}\le Z\le\frac{\frac{a-62}{3}-60}{4}\right)=0.3413$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-242}{12}\right)=0.3413$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{a-242}{12}=1$ $\therefore a=254$ ····· ⓘⓘ

$\therefore a+b=254+62=316$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ b의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ a의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $a+b$의 값 구하기	20 %

0779 답 ②

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(m_1, \sigma_1^2)$, $N(m_2, \sigma_2^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-m_1}{\sigma_1}$, $Z_Y=\frac{Y-m_2}{\sigma_2}$로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

ㄱ. $P(X\ge m_1)=P(Y\ge m_2)=0.5$

ㄴ. $P(m_1-\sigma_1\le X\le m_1+\sigma_1)$

$=P\left(\frac{m_1-\sigma_1-m_1}{\sigma_1}\le Z_X\le\frac{m_1+\sigma_1-m_1}{\sigma_1}\right)$

$=P(-1\le Z_X\le 1)$

$P(m_2-\sigma_2\le Y\le m_2+\sigma_2)$

$=P\left(\frac{m_2-\sigma_2-m_2}{\sigma_2}\le Z_Y\le\frac{m_2+\sigma_2-m_2}{\sigma_2}\right)$

$=P(-1\le Z_Y\le 1)$

$\therefore P(m_1-\sigma_1\le X\le m_1+\sigma_1)=P(m_2-\sigma_2\le Y\le m_2+\sigma_2)$

ㄷ. $P(X\ge m_1+a)=P\left(Z_X\ge\frac{m_1+a-m_1}{\sigma_1}\right)$

$=P\left(Z_X\ge\frac{a}{\sigma_1}\right)$

$P(Y\ge m_2+a)=P\left(Z_Y\ge\frac{m_2+a-m_2}{\sigma_2}\right)$

$=P\left(Z_Y\ge\frac{a}{\sigma_2}\right)$

[반례] $\sigma_1=1$, $\sigma_2=2$, $a=-2$이면

$P(Z_X\ge -2)>P(Z_Y\ge -1)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

0780 답 ⑤

㈎에서 $P(-k\le X\le 0)=P(0\le X\le k)=0.4332$

㈏에서 $P(0\le X\le k)-P(0\le Z\le k)=0.0919$이므로

$0.4332-P(0\le Z\le k)=0.0919$

$\therefore P(0\le Z\le k)=0.3413$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로 $k=1$

한편 확률변수 X가 정규분포 $N(0, \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

㈎에서 $P(0\le X\le 1)=0.4332$이므로

$P\left(0\le Z_X\le\frac{1}{\sigma}\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{1}{\sigma}=1.5$ $\therefore \sigma=\frac{2}{3}$

0781 답 ①

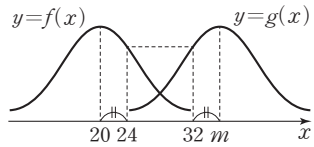
확률변수 Y가 정규분포 $N(m, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{Y-m}{5}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore P(Y\le 26)=P\left(Z\le\frac{26-m}{5}\right)$

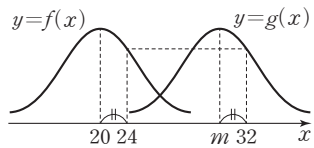
이때 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 5로 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치한다.

X, Y의 평균이 각각 20, m이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 각각 직선 $x=20$, $x=m$에 대하여 대칭이고,

$f(24)=g(32)$를 만족시키려면 그림과 같아야 한다.



[$m>32$인 경우]



[$m<32$인 경우]

즉, $|32-m|=4$에서

$m=28$ 또는 $m=36$

이때 $P(Y\ge 32)\ge 0.5$이므로 $m\ge 32$

$\therefore m=36$

$\therefore P(Y\le 26)=P\left(Z\le\frac{26-36}{5}\right)$

$=P(Z\le -2)=P(Z\ge 2)$

$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)$

$=0.5-P(0\le Z\le 2)$

$=0.5-0.4772$

$=0.0228$

0782 답 ③

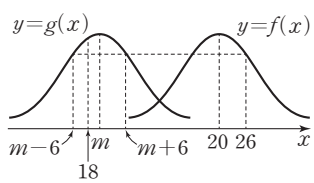
확률변수 Y가 정규분포 $N(m, 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{Y-m}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore P(15\le Y\le 21)=P\left(\frac{15-m}{3}\le Z\le\frac{21-m}{3}\right)$

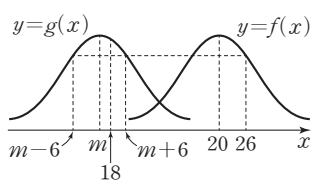
이때 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 3으로 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치한다.

X, Y의 평균이 각각 20, m이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 각각 직선 $x=20$, $x=m$에 대하여 대칭이고,

$f(26)\le g(18)$을 만족시키려면 그림과 같아야 한다.



[$m>18$인 경우]



[$m<18$인 경우]

즉, $|m-18|\le 6$에서 $-6\le m-18\le 6$

$\therefore 12\le m\le 24$

$12 \le m \le 24$에서 $P(15 \le Y \le 21)$은 $m=18$일 때 최댓값을 가지므로

$$P(15 \le Y \le 21) = P\left(\frac{15-18}{3} \le Z \le \frac{21-18}{3}\right) = P(-1 \le Z \le 1)$$
$$= P(-1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1)$$
$$= 2P(0 \le Z \le 1)$$
$$= 2 \times 0.3413 = 0.6826$$

0783 답 70

두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $N(m, 1^2)$, $N(m^2+2m+16, \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X = \frac{X-m}{1}$, $Z_Y = \frac{Y-(m^2+2m+16)}{\sigma}$으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X \le 0) = P(Y \le 0)$에서

$$P\left(Z_X \le \frac{0-m}{1}\right) = P\left(Z_Y \le \frac{0-(m^2+2m+16)}{\sigma}\right)$$

$$P(Z_X \le -m) = P\left(Z_Y \le -\frac{m^2+2m+16}{\sigma}\right)$$

즉, $m = \frac{m^2+2m+16}{\sigma}$이므로 $\sigma = \frac{m^2+2m+16}{m}$

$$\therefore \sigma = m+2+\frac{16}{m}$$

이때 $m>0$, $\frac{16}{m}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\sigma = 2+m+\frac{16}{m} \ge 2+2\sqrt{m \times \frac{16}{m}} = 2+2\times 4 = 10$$

(단, 등호는 $m=\frac{16}{m}$, 즉 $m=4$일 때 성립한다.)

즉, σ의 최솟값은 10이고 이때의 m의 값은 4이므로

$m_1 = 4$ ($\because m>0$)

즉, $m=m_1$일 때, 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $N(4, 1^2)$, $N(40, 10^2)$을 따르므로 $P(X \ge 1) = P(Y \le k)$에서

$$P\left(Z_X \ge \frac{1-4}{1}\right) = P\left(Z_Y \le \frac{k-40}{10}\right)$$

$$P(Z_X \ge -3) = P\left(Z_Y \ge -\frac{k-40}{10}\right)$$

따라서 $3 = \frac{k-40}{10}$이므로 $k=70$

0784 답 25

확률변수 X가 정규분포 $N(m, 3^2)$을 따르므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

(가)에서 $f(14) < f(22)$이므로 → 22가 14보다 평균 m에 가깝다.

$$m > \frac{14+22}{2} = 18 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(가)에서 $f(13) > f(26)$이므로 → 13이 26보다 평균 m에 가깝다.

$$m < \frac{13+26}{2} = 19.5 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $18 < m < 19.5$이고 m은 자연수이므로

$m=19$ ····· ⓘ

두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $N(19, 3^2)$, $N(28, \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X = \frac{X-19}{3}$, $Z_Y = \frac{Y-28}{\sigma}$로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

(나)에서 $P(X \le 22) = P(Y \ge 22)$이므로

$$P\left(Z_X \le \frac{22-19}{3}\right) = P\left(Z_Y \ge \frac{22-28}{\sigma}\right)$$

$$P(Z_X \le 1) = P\left(Z_Y \ge -\frac{6}{\sigma}\right)$$

$$P(Z_X \le 1) = P\left(Z_Y \le \frac{6}{\sigma}\right)$$

따라서 $1 = \frac{6}{\sigma}$이므로 $\sigma=6$ ····· ⓘⓘ

$\therefore m+\sigma = 19+6 = 25$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ m의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ σ의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $m+\sigma$의 값 구하기	20 %

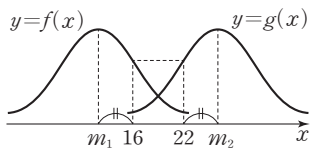
0785 답 ①

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(m_1, \sigma^2)$, $N(m_2, \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X = \frac{X-m_1}{\sigma}$, $Z_Y = \frac{Y-m_2}{\sigma}$로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

이때 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 확률밀도함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하면 표준편차가 σ로 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치한다.

X, Y의 평균이 각각 m_1, m_2이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 각각 직선 $x=m_1$, $x=m_2$에 대하여 대칭이다.

이때 (가)에서 $m_1 < 16$, $m_2 > 22$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



(가)에서 $P(m_1 \le X \le 16) = 0.3413$이므로

$$P\left(\frac{m_1-m_1}{\sigma} \le Z_X \le \frac{16-m_1}{\sigma}\right) = 0.3413$$

$$\therefore P\left(0 \le Z_X \le \frac{16-m_1}{\sigma}\right) = 0.3413$$

이때 $P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$이므로

$$\frac{16-m_1}{\sigma} = 1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(가)에서 $P(22 \le Y \le m_2) = 0.3413$이므로

$$P\left(\frac{22-m_2}{\sigma} \le Z_Y \le \frac{m_2-m_2}{\sigma}\right) = 0.3413$$

$$P\left(\frac{22-m_2}{\sigma} \le Z_Y \le 0\right) = 0.3413$$

$$\therefore P\left(0 \le Z_Y \le \frac{m_2-22}{\sigma}\right) = 0.3413$$

이때 $P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$이므로

$$\frac{m_2-22}{\sigma} = 1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\frac{16-m_1}{\sigma} = \frac{m_2-22}{\sigma}$

$16-m_1 = m_2-22$ $\therefore m_1+m_2 = 38$ ····· ㉢

(나)에서 $P(Y\ge28)=1-P(X\le16)$이므로

$P\left(Z_Y\ge\frac{28-m_2}{\sigma}\right)=1-P\left(Z_X\le\frac{16-m_1}{\sigma}\right)$

$P\left(Z_Y\ge\frac{28-m_2}{\sigma}\right)=P\left(Z_X\ge\frac{16-m_1}{\sigma}\right)$

즉, $\frac{28-m_2}{\sigma}=\frac{16-m_1}{\sigma}$이므로

$m_1-m_2=-12$ ····· ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$m_1=13$, $m_2=25$

$m_1=13$을 ㉠에 대입하여 풀면

$\sigma=3$

$\therefore P(7\le X\le10)=P\left(\frac{7-m_1}{\sigma}\le Z_X\le\frac{10-m_1}{\sigma}\right)$

$=P\left(\frac{7-13}{3}\le Z_X\le\frac{10-13}{3}\right)$

$=P(-2\le Z_X\le-1)$

$=P(1\le Z_X\le2)$

$=P(0\le Z_X\le2)-P(0\le Z_X\le1)$

$=0.4772-0.3413$

$=0.1359$

0786 답 ①

$E(X)=m_1$, $E(Y)=m_2$, $V(X)=V(Y)=\sigma^2(\sigma>0)$이라 하자.

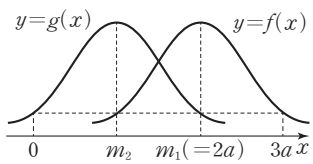
두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(m_1, \sigma^2)$, $N(m_2, \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-m_1}{\sigma}$, $Z_Y=\frac{Y-m_2}{\sigma}$로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=m_1$에 대하여 대칭이고 $f(a)=f(3a)$이므로

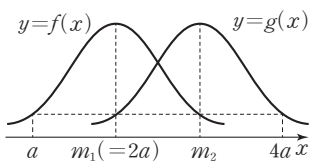
$m_1=\frac{a+3a}{2}=2a$

이때 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 σ로 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치한다.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=m_2$에 대하여 대칭이고 $m_1=2a$이므로 $f(a)=f(3a)=g(2a)$를 만족시키려면 그림과 같아야 한다.



[$m_1>m_2$인 경우]



[$m_1<m_2$인 경우]

$\therefore m_2=a$ 또는 $m_2=3a$

이때 $P(Y\le2a)=0.6915>0.5$이므로

$m_2=a$

$P(Y\le2a)=0.6915$에서 $P\left(Z_Y\le\frac{2a-m_2}{\sigma}\right)=0.6915$

$P\left(Z_Y\le\frac{2a-a}{\sigma}\right)=0.6915$ ($\because m_2=a$)

$P\left(Z_Y\le\frac{a}{\sigma}\right)=0.6915$

$0.5+P\left(0\le Z_Y\le\frac{a}{\sigma}\right)=0.6915$

$\therefore P\left(0\le Z_Y\le\frac{a}{\sigma}\right)=0.1915$

이때 $P(0\le Z\le0.5)=0.1915$이므로

$\frac{a}{\sigma}=0.5$ $\therefore \sigma=2a$

$\therefore P(0\le X\le3a)$

$=P\left(\frac{0-m_1}{\sigma}\le Z_X\le\frac{3a-m_1}{\sigma}\right)$

$=P\left(\frac{0-2a}{2a}\le Z_X\le\frac{3a-2a}{2a}\right)$ ($\because m_1=2a$, $\sigma=2a$)

$=P(-1\le Z_X\le0.5)$

$=P(0\le Z_X\le1)+P(0\le Z_X\le0.5)$

$=0.3413+0.1915$

$=0.5328$

0787 답 ③

두 확률변수 X, Y의 평균이 각각 a, b이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 각각 직선 $x=a$, $x=b$에 대하여 대칭이다.

(가)에서 $P(X\le10)=P(X\ge30)$이므로

$a=\frac{10+30}{2}=20$

또 정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y의 표준편차가 σ로 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치한다.

(나)에서 $f(24)=g(24)$이므로

$\frac{a+b}{2}=24$, $a+b=48$

$\therefore b=48-a=48-20=28$

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(20, \sigma^2)$, $N(28, \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-20}{\sigma}$, $Z_Y=\frac{Y-28}{\sigma}$로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

(다)에서 $P(14\le X\le18)=0.24$이므로

$P\left(\frac{14-20}{\sigma}\le Z_X\le\frac{18-20}{\sigma}\right)=0.24$

$P\left(-\frac{6}{\sigma}\le Z_X\le-\frac{2}{\sigma}\right)=0.24$

$\therefore P\left(\frac{2}{\sigma}\le Z_X\le\frac{6}{\sigma}\right)=0.24$

$\therefore 100P(22\le Y\le26)=100P\left(\frac{22-28}{\sigma}\le Z_Y\le\frac{26-28}{\sigma}\right)$

$=100P\left(-\frac{6}{\sigma}\le Z_Y\le-\frac{2}{\sigma}\right)$

$=100P\left(\frac{2}{\sigma}\le Z_Y\le\frac{6}{\sigma}\right)$

$=100\times0.24=24$

0788 답 ②

컴퓨터의 부팅 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(30, 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-30}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(X\geq 33)=P\left(Z\geq \frac{33-30}{2}\right)=P(Z\geq 1.5)$$
$$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1.5)$$
$$=0.5-0.4332=0.0668$$

0789 답 0.8185

연구원 K가 하루 동안 추출하는 호르몬의 양을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(15, 0.8^2)$을 따른다. …… ⅰ

$Z=\frac{X-15}{0.8}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(13.4\leq X\leq 15.8)=P\left(\frac{13.4-15}{0.8}\leq Z\leq \frac{15.8-15}{0.8}\right)$$
$$=P(-2\leq Z\leq 1) \quad \cdots\cdots \text{ⅱ}$$
$$=P(-2\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 1)$$
$$=P(0\leq Z\leq 2)+P(0\leq Z\leq 1)$$
$$=0.4772+0.3413=0.8185 \quad \cdots\cdots \text{ⅲ}$$

채점 기준	
ⅰ X가 따르는 정규분포 구하기	40 %
ⅱ 표준화하여 나타내기	40 %
ⅲ $P(13.4\leq X\leq 15.8)$의 값 구하기	20 %

0790 답 ③

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(62, 8^2)$, $N(72, 10^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-62}{8}$, $Z_Y=\frac{Y-72}{10}$로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

고등학교 A에서 수학 성적이 70점 이상일 확률은

$$P(X\geq 70)=P\left(Z_X\geq \frac{70-62}{8}\right)=P(Z_X\geq 1)$$
$$=P(Z_X\geq 0)-P(0\leq Z_X\leq 1)=0.5-0.34=0.16$$

즉, 고등학교 A에서 수학 성적이 70점 이상인 학생 수는

$500\times 0.16=80$

이때 고등학교 B에서 수학 성적이 k점 이상인 학생 수는

$80+75=155$

즉, 고등학교 B에서 수학 성적이 k점 이상일 확률은

$$P(Y\geq k)=\frac{155}{500}=0.31,\ P\left(Z_Y\geq \frac{k-72}{10}\right)=0.31$$

$$P(Z_Y\geq 0)-P\left(0\leq Z_Y\leq \frac{k-72}{10}\right)=0.31$$

$$0.5-P\left(0\leq Z_Y\leq \frac{k-72}{10}\right)=0.31$$

$$\therefore P\left(0\leq Z_Y\leq \frac{k-72}{10}\right)=0.19$$

이때 $P(0\leq Z_Y\leq 0.5)=0.19$이므로

$\frac{k-72}{10}=0.5$, $k-72=5$ $\quad\therefore k=77$

0791 답 ④

학생들의 등교 시간을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(30, 4^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-30}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 등교 시간이 32분 이상일 확률은

$$P(X\geq 32)=P\left(Z\geq \frac{32-30}{4}\right)$$
$$=P(Z\geq 0.5)$$
$$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 0.5)$$
$$=0.5-0.19$$
$$=0.31$$

$\therefore P(X<32)=1-P(X\geq 32)=1-0.31=0.69$

따라서 등교 시간이 32분 이상인 학생들 중에서 60 %, 32분 미만인 학생들 중에서 30 %가 자전거를 이용하였으므로 구하는 확률은

$P(X\geq 32)\times 0.6+P(X<32)\times 0.3$

$=0.31\times 0.6+0.69\times 0.3$

$=0.186+0.207=0.393$

0792 답 ②

평균이 클수록 정규분포곡선의 대칭축은 오른쪽에 있고, 표준편차가 클수록 정규분포곡선은 가운데 부분의 높이는 낮아지고 양쪽으로 넓게 퍼진 모양이 된다.

ㄱ. 수학 성적의 정규분포곡선의 대칭축이 50으로 가장 왼쪽에 있으므로 수학 성적의 평균이 세 과목 중 가장 낮다.

ㄴ. 국어 성적의 정규분포곡선이 영어 성적의 정규분포곡선보다 가운데 부분의 높이가 높고 양쪽으로 좁게 모인 모양이므로 국어 성적의 표준편차는 영어 성적의 표준편차보다 작다.

ㄷ. 국어 성적과 영어 성적을 각각 확률변수 X, Y라 하고, 표준편차를 σ_1, σ_2라 하면 X, Y의 평균은 60으로 같으므로 두 확률변수 X, Y는 정규분포 $N(60, \sigma_1^2)$, $N(60, \sigma_2^2)$을 따른다.

$Z_X=\frac{X-60}{\sigma_1}$, $Z_Y=\frac{Y-60}{\sigma_2}$으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

국어, 영어 성적이 80점 이상인 학생의 비율은

$$P(X\geq 80)=P\left(Z_X\geq \frac{80-60}{\sigma_1}\right)=P\left(Z_X\geq \frac{20}{\sigma_1}\right),$$

$$P(Y\geq 80)=P\left(Z_Y\geq \frac{80-60}{\sigma_2}\right)=P\left(Z_Y\geq \frac{20}{\sigma_2}\right)$$

ㄴ에서 $\sigma_1<\sigma_2$이므로 $\frac{20}{\sigma_1}>\frac{20}{\sigma_2}$

$$\therefore P\left(Z_X\geq \frac{20}{\sigma_1}\right)<P\left(Z_Y\geq \frac{20}{\sigma_2}\right)$$

즉, 80점 이상인 학생의 비율은 영어보다 국어가 더 낮다.

ㄹ. 표준편차가 작을수록 성적이 평균 점수에 밀집되어 있으므로 성적이 평균 점수에 가장 밀집되어 있는 과목은 국어이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

0793 답 ③

영어 말하기 대회 지원자의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(65, 10^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-65}{10}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 지원자의 점수가 77점 이상일 확률은

$$P(X\geq 77)=P\left(Z\geq\frac{77-65}{10}\right)=P(Z\geq 1.2)$$
$$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1.2)$$
$$=0.5-0.3850=0.115$$

따라서 본선에 진출한 인원 수는

$1000\times 0.115=115$

0794 답 ⑤

학생들의 수행평가 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(18, 4^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-18}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 수행평가 점수가 24점 이상일 확률은

$$P(X\geq 24)=P\left(Z\geq\frac{24-18}{4}\right)=P(Z\geq 1.5)$$
$$=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 1.5)$$
$$=0.5-0.43=0.07$$

따라서 수행평가 점수가 24점인 학생은 성적순으로 $0.07\times 100=7$, 즉 상위 7 %에 속한다.

0795 답 ⑤

A, B 과목 시험 점수를 각각 확률변수 X, Y라 하면 X, Y는 각각 정규분포 $N(m, \sigma^2)$, $N(m+3, \sigma^2)$을 따른다.

$Z_X=\frac{X-m}{\sigma}$, $Z_Y=\frac{Y-(m+3)}{\sigma}$으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

A 과목 시험 점수가 80점 이상인 학생의 비율이 9 %이므로

$P(X\geq 80)=0.09$

$$P\left(Z_X\geq\frac{80-m}{\sigma}\right)=0.09$$

$$P(Z_X\geq 0)-P\left(0\leq Z_X\leq\frac{80-m}{\sigma}\right)=0.09$$

$$0.5-P\left(0\leq Z_X\leq\frac{80-m}{\sigma}\right)=0.09$$

$$\therefore P\left(0\leq Z_X\leq\frac{80-m}{\sigma}\right)=0.41$$

이때 $P(0\leq Z\leq 1.34)=0.41$이므로

$$\frac{80-m}{\sigma}=1.34$$

$$\therefore m+1.34\sigma=80 \quad \cdots\cdots ㉠$$

B 과목 시험 점수가 80점 이상인 학생의 비율이 15 %이므로

$P(Y\geq 80)=0.15$

$$P\left(Z_Y\geq\frac{80-(m+3)}{\sigma}\right)=0.15$$

$$P(Z_Y\geq 0)-P\left(0\leq Z_Y\leq\frac{77-m}{\sigma}\right)=0.15$$

$$0.5-P\left(0\leq Z_Y\leq\frac{77-m}{\sigma}\right)=0.15$$

$$\therefore P\left(0\leq Z_Y\leq\frac{77-m}{\sigma}\right)=0.35$$

이때 $P(0\leq Z\leq 1.04)=0.35$이므로

$$\frac{77-m}{\sigma}=1.04$$

$$\therefore m+1.04\sigma=77 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=66.6$, $\sigma=10$

$\therefore m+\sigma=66.6+10=76.6$

0796 답 ⑤

학생들의 국어 수행평가 점수 X는 정규분포 $N(20, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

조정된 점수 Y가 상위 6.68 %에 속하기 위한 최저 점수를 k라 하면

$P(Y\geq k)=0.0668$

$Y=2X+10$이므로

$P(2X+10\geq k)=0.0668$

$$P\left(X\geq\frac{k-10}{2}\right)=0.0668$$

$$P\left(Z\geq\frac{\frac{k-10}{2}-20}{4}\right)=0.0668$$

$$P\left(Z\geq\frac{k-50}{8}\right)=0.0668$$

$$P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq\frac{k-50}{8}\right)=0.0668$$

$$0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{k-50}{8}\right)=0.0668$$

$$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{k-50}{8}\right)=0.4332$$

이때 $P(0\leq Z\leq 1.5)=0.4332$이므로

$$\frac{k-50}{8}=1.5 \quad \therefore k=62$$

따라서 최저 점수는 62점이다.

다른 풀이

학생들의 국어 수행평가 점수 X는 정규분포 $N(20, 4^2)$을 따르고, $Y=2X+10$이므로

$E(Y)=E(2X+10)=2E(X)+10=2\times 20+10=50$

$V(Y)=V(2X+10)=2^2V(X)=4\times 4^2=64=8^2$

즉, 확률변수 Y는 정규분포 $N(50, 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{Y-50}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

조정된 점수 Y가 상위 6.68 %에 속하기 위한 최저 점수를 k라 하면

$P(Y\geq k)=0.0668$

$$P\left(Z\geq\frac{k-50}{8}\right)=0.0668$$

$$P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq\frac{k-50}{8}\right)=0.0668$$

$$0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{k-50}{8}\right)=0.0668$$

$$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{k-50}{8}\right)=0.4332$$

이때 $P(0\leq Z\leq 1.5)=0.4332$이므로

$$\frac{k-50}{8}=1.5 \quad \therefore k=62$$

따라서 최저 점수는 62점이다.

0797 답 315

소고기, 돼지고기 한 팩의 무게를 각각 확률변수 X, Y라 하면 X, Y는 각각 정규분포 $N(300, 10^2)$, $N(500, 20^2)$을 따른다.

이때 임의로 택한 소고기 한 팩의 무게가 300 g 이상 a g 이하일 확률과 임의로 택한 돼지고기 한 팩의 무게가 470 g 이상 500 g 이하일 확률이 같으므로

$P(300 \le X \le a) = P(470 \le Y \le 500)$ …… ⓘ

$Z_X = \frac{X-300}{10}$, $Z_Y = \frac{Y-500}{20}$으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$P(300 \le X \le a) = P\left(\frac{300-300}{10} \le Z_X \le \frac{a-300}{10}\right)$$
$$= P\left(0 \le Z_X \le \frac{a-300}{10}\right)$$

$$P(470 \le Y \le 500) = P\left(\frac{470-500}{20} \le Z_Y \le \frac{500-500}{20}\right)$$
$$= P(-1.5 \le Z_Y \le 0)$$
$$= P(0 \le Z_Y \le 1.5)$$ …… ⓘⓘ

따라서 $\frac{a-300}{10} = 1.5$이므로

$a - 300 = 15$

$\therefore a = 315$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 소고기와 돼지고기의 무게에 대한 확률을 각각 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘ 표준화하여 나타내기	40 %
ⓘⓘⓘ a의 값 구하기	20 %

0798 답 ②

A, B 그룹의 수면 진입 시간을 각각 확률변수 X, Y라 하면 X, Y는 각각 정규분포 $N(m, \sigma^2)$, $N(m+5, \sigma^2)$을 따른다.

$Z_X = \frac{X-m}{\sigma}$, $Z_Y = \frac{Y-(m+5)}{\sigma}$로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

A 그룹의 수면 진입 시간이 70분 이상인 사람의 비율이 2 %이므로

$P(X \ge 70) = 0.02$

$$P\left(Z_X \ge \frac{70-m}{\sigma}\right) = 0.02$$

$$P(Z_X \ge 0) - P\left(0 \le Z_X \le \frac{70-m}{\sigma}\right) = 0.02$$

$$0.5 - P\left(0 \le Z_X \le \frac{70-m}{\sigma}\right) = 0.02$$

$$\therefore P\left(0 \le Z_X \le \frac{70-m}{\sigma}\right) = 0.48$$

이때 $P(0 \le Z \le 2) = 0.48$이므로

$\frac{70-m}{\sigma} = 2$

$70 - m = 2\sigma$

$\therefore m + 2\sigma = 70$ …… ㉠

B 그룹의 수면 진입 시간이 70분 이상인 사람의 비율이 7 %이므로

$P(Y \ge 70) = 0.07$

$$P\left(Z_Y \ge \frac{70-(m+5)}{\sigma}\right) = 0.07$$

$$P(Z_Y \ge 0) - P\left(0 \le Z_Y \le \frac{65-m}{\sigma}\right) = 0.07$$

$$0.5 - P\left(0 \le Z_Y \le \frac{65-m}{\sigma}\right) = 0.07$$

$$\therefore P\left(0 \le Z_Y \le \frac{65-m}{\sigma}\right) = 0.43$$

이때 $P(0 \le Z \le 1.5) = 0.43$이므로

$\frac{65-m}{\sigma} = 1.5$

$65 - m = 1.5\sigma$

$\therefore m + 1.5\sigma = 65$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m = 50$, $\sigma = 10$

$\therefore 3m + \sigma = 3 \times 50 + 10$
$= 160$

0799 답 80점

응시자의 점수를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(70, 10^2)$을 따른다.

$Z = \frac{X-70}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

장학금을 받기 위한 최저 점수를 a점이라 하면

$P(X \ge a) = 0.1587$

$$P\left(Z \ge \frac{a-70}{10}\right) = 0.1587$$

$$P(Z \ge 0) - P\left(0 \le Z \le \frac{a-70}{10}\right) = 0.1587$$

$$0.5 - P\left(0 \le Z \le \frac{a-70}{10}\right) = 0.1587$$

$$\therefore P\left(0 \le Z \le \frac{a-70}{10}\right) = 0.3413$$

이때 $P(0 \le Z \le 1) = 0.3413$이므로

$\frac{a-70}{10} = 1$, $a - 70 = 10$

$\therefore a = 80$

따라서 장학금을 받기 위한 최저 점수는 80점이다.

0800 답 ③

사과 한 개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(240, 20^2)$을 따른다.

$Z = \frac{X-240}{20}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

사과의 무게가 290 g 이상이면 특상품으로 분류되므로

$p_1 = P(X \ge 290)$

$$= P\left(Z \ge \frac{290-240}{20}\right)$$
$$= P(Z \ge 2.5)$$
$$= P(Z \ge 0) - P(0 \le Z \le 2.5)$$
$$= 0.5 - 0.4938$$
$$= 0.0062$$

사과의 무게가 210 g 미만이면 사과주스의 재료로 분류되므로

$p_2=\mathrm{P}(X<210)=\mathrm{P}\left(Z<\frac{210-240}{20}\right)$

$=\mathrm{P}(Z<-1.5)=\mathrm{P}(Z\geq 1.5)$

$=\mathrm{P}(Z\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

$\therefore\ p_1+p_2=0.0062+0.0668=0.0730$

0801 답 85.5

영업부와 개발부 직원의 평가 점수를 각각 확률변수 X, Y라 하면 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(70,\ 8^2)$, $\mathrm{N}(78,\ 5^2)$을 따른다.

$Z_X=\frac{X-70}{8}$, $Z_Y=\frac{X-78}{5}$로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

영업부 직원 중 임의로 택한 한 명의 점수가 82점 이상일 확률은

$p_1=\mathrm{P}(X\geq 82)=\mathrm{P}\left(Z_X\geq\frac{82-70}{8}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_X\geq 1.5)=\mathrm{P}(Z_X\geq 0)-\mathrm{P}(0\leq Z_X\leq 1.5)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\leq Z_X\leq 1.5)$

개발부 직원 중 임의로 택한 한 명의 점수가 a점 이상일 확률은

$p_2=\mathrm{P}(Y\geq a)=\mathrm{P}\left(Z_Y\geq\frac{a-78}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_Y\geq 0)-\mathrm{P}\left(0\leq Z_Y\leq\frac{a-78}{5}\right)$

$=0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z_Y\leq\frac{a-78}{5}\right)$

이때 $p_1\geq p_2$에서

$0.5-\mathrm{P}(0\leq Z_X\leq 1.5)\geq 0.5-\mathrm{P}\left(0\leq Z_Y\leq\frac{a-78}{5}\right)$이므로

$\mathrm{P}(0\leq Z_X\leq 1.5)\leq\mathrm{P}\left(0\leq Z_Y\leq\frac{a-78}{5}\right)$

즉, $\frac{a-78}{5}\geq 1.5$이므로

$a-78\geq 7.5\qquad\therefore\ a\geq 85.5$

따라서 실수 a의 최솟값은 85.5이다.

0802 답 700

배터리의 종합 성능 점수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

임의로 택한 배터리 한 개의 종합 성능 점수가 D 등급일 확률은

$\mathrm{P}(m-2\sigma\leq X<m-\sigma)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{m-2\sigma-m}{\sigma}\leq Z<\frac{m-\sigma-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\leq Z<-1)=\mathrm{P}(1<Z\leq 2)$

$=\mathrm{P}(0\leq Z\leq 2)-\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1)$

$=0.48-0.34=0.14$

따라서 전체 배터리 5000개 중 D 등급으로 평가된 배터리 수는

$5000\times 0.14=700$

0803 답 ⑤

세 양식장 A, B, C에서 생산되는 전복 한 마리의 무게를 각각 확률변수 X_A, X_B, X_C라 하면 X_A, X_B, X_C는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(a,\ 8^2)$, $\mathrm{N}(62,\ 16^2)$, $\mathrm{N}(66,\ b^2)$을 따른다.

$Z_\mathrm{A}=\frac{X_\mathrm{A}-a}{8}$, $Z_\mathrm{B}=\frac{X_\mathrm{B}-62}{16}$, $Z_\mathrm{C}=\frac{X_\mathrm{C}-66}{b}$으로 놓으면 세 확률변수 Z_A, Z_B, Z_C는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

세 양식장에서 임의로 뽑은 전복이 L로 구분될 확률은 각각

$\mathrm{P_A}=\mathrm{P}(X_\mathrm{A}\geq 70)=\mathrm{P}\left(Z_\mathrm{A}\geq\frac{70-a}{8}\right)$

$\mathrm{P_B}=\mathrm{P}(X_\mathrm{B}\geq 70)=\mathrm{P}\left(Z_\mathrm{B}\geq\frac{70-62}{16}\right)=\mathrm{P}(Z_\mathrm{B}\geq 0.5)$

$\mathrm{P_C}=\mathrm{P}(X_\mathrm{C}\geq 70)=\mathrm{P}\left(Z_\mathrm{C}\geq\frac{70-66}{b}\right)=\mathrm{P}\left(Z_\mathrm{C}\geq\frac{4}{b}\right)$

이때 부등식 $\mathrm{P_A}\geq\mathrm{P_B}\geq\mathrm{P_C}$가 성립해야 하므로

(i) $\mathrm{P_A}\geq\mathrm{P_B}$에서 $\mathrm{P}\left(Z_\mathrm{A}\geq\frac{70-a}{8}\right)\geq\mathrm{P}(Z_\mathrm{B}\geq 0.5)$이므로

$\frac{70-a}{8}\leq 0.5,\ 70-a\leq 4$

$\therefore\ a\geq 66$

(ii) $\mathrm{P_B}\geq\mathrm{P_C}$에서 $\mathrm{P}(Z_\mathrm{B}\geq 0.5)\geq\mathrm{P}\left(Z_\mathrm{C}\geq\frac{4}{b}\right)$이므로

$0.5\leq\frac{4}{b},\ 0.5b\leq 4\ (\because\ b>0)$

$\therefore\ b\leq 8$

(i), (ii)에서 a의 최솟값은 66, b의 최댓값은 8이므로 구하는 합은

$66+8=74$

0804 답 ③

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(162,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=162\times\frac{1}{3}=54$

$\mathrm{V}(X)=162\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=36$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(54,\ 6^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-54}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(X\leq 63)=\mathrm{P}\left(Z\leq\frac{63-54}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\leq 1.5)$

$=\mathrm{P}(Z\leq 0)+\mathrm{P}(0\leq Z\leq 1.5)$

$=0.5+0.4332$

$=0.9332$

0805 답 ②

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(225,\ \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=225\times\frac{1}{5}=45$

$\mathrm{V}(X)=225\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=36$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(45, 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-45}{6}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\therefore P(39\le X\le 51)=P\left(\frac{39-45}{6}\le Z\le\frac{51-45}{6}\right)$$
$$=P(-1\le Z\le 1)$$
$$=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)$$
$$=2P(0\le Z\le 1)$$
$$=2\times 0.3413$$
$$=0.6826$$

0806 답 5

확률변수 Y가 이항분포 $B\left(72, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$E(Y)=72\times\frac{1}{3}=24$$

$$V(Y)=72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=16$$

즉, 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $N(24, 4^2)$을 따른다. …… ⓘ

두 확률변수 X, Y가 각각 정규분포 $N(50, \sigma^2)$, $N(24, 4^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-50}{\sigma}$, $Z_Y=\frac{Y-24}{4}$로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\le 45)=P(Y\ge 28)$에서

$$P\left(Z_X\le\frac{45-50}{\sigma}\right)=P\left(Z_Y\ge\frac{28-24}{4}\right)$$

$$P\left(Z_X\le-\frac{5}{\sigma}\right)=P(Z_Y\ge 1)$$

$$P\left(Z_X\ge\frac{5}{\sigma}\right)=P(Z_Y\ge 1)$$ …… ⓘⓘ

따라서 $\frac{5}{\sigma}=1$이므로

$\sigma=5$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ Y가 따르는 정규분포 구하기	40 %
ⓘⓘ 표준화하여 나타내기	40 %
ⓘⓘⓘ σ의 값 구하기	20 %

0807 답 ②

예약 고객의 20 %가 실제 탑승 시점에 나타나지 않으므로 80 %는 실제 탑승 시점에 나타난다.

실제 탑승 시점에 나타나는 고객 수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $B(225, 0.8)$을 따르므로

$E(X)=225\times 0.8=180$

$V(X)=225\times 0.8\times 0.2=36$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(180, 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-180}{6}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

탑승하지 못하는 고객이 발생하려면 실제로 나타난 인원이 192명 이상이어야 하므로 구하는 확률은

$$P(X\ge 192)=P\left(Z\ge\frac{192-180}{6}\right)$$
$$=P(Z\ge 2)$$
$$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5-0.4772$$
$$=0.0228$$

0808 답 ③

이산확률변수 X는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

ㄱ. $E(X)=60$이므로

$n\times\frac{1}{3}=60$

$\therefore n=180$

ㄴ. $V(X)=180\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=40$이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(60, 40)$을 따른다.

ㄷ. 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(60, 40)$을 따르므로 $Z=\frac{X-60}{\sqrt{40}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\therefore P(60-2\sqrt{10}\le X\le 60+4\sqrt{10})$$
$$=P\left(\frac{60-2\sqrt{10}-60}{\sqrt{40}}\le Z\le\frac{60+4\sqrt{10}-60}{\sqrt{40}}\right)$$
$$=P(-1\le Z\le 2)$$
$$=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)$$
$$=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2)$$
$$=0.34+0.48$$
$$=0.82$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0809 답 0.96

생산된 제품 1개의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(150, 10^2)$을 따른다.

$Z_X=\frac{X-150}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 제품 1개의 무게가 137 g 이상 163 g 이하일 확률은

$$P(137\le X\le 163)=P\left(\frac{137-150}{10}\le Z_X\le\frac{163-150}{10}\right)$$
$$=P(-1.3\le Z_X\le 1.3)$$
$$=P(-1.3\le Z_X\le 0)+P(0\le Z_X\le 1.3)$$
$$=2P(0\le Z_X\le 1.3)$$
$$=2\times 0.40$$
$$=0.8$$

생산된 제품 400개 중 무게가 137 g 이상 163 g 이하인 제품의 개수를 확률변수 Y라 하면 Y는 이항분포 $B(400, 0.8)$을 따르므로

$E(Y)=400\times 0.8=320$

$V(Y)=400\times 0.8\times 0.2=64$

즉, 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $N(320, 8^2)$을 따르므로 $Z_Y=\frac{Y-320}{8}$으로 놓으면 확률변수 Z_Y는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(304\le Y\le 336)&=\mathrm{P}\left(\frac{304-320}{8}\le Z_Y\le\frac{336-320}{8}\right)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z_Y\le 2)\\&=\mathrm{P}(-2\le Z_Y\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 2)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 2)\\&=2\times 0.48\\&=0.96\end{aligned}$$

0810 답 ④

동전을 64회 던질 때 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(64,\ \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=64\times\frac{1}{2}=32$

$\mathrm{V}(X)=64\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=16$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(32,\ 4^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-32}{4}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

한편 뒷면이 나오는 횟수는 $64-X$이므로 게임에서 얻는 점수를 Y라 하면

$Y=2X-(64-X)=3X-64$

따라서 게임에서 얻은 점수가 20점 이상일 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Y\ge 20)&=\mathrm{P}(3X-64\ge 20)=\mathrm{P}(X\ge 28)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{28-32}{4}\right)=\mathrm{P}(Z\ge -1)\\&=\mathrm{P}(-1\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=0.3413+0.5=0.8413\end{aligned}$$

0811 답 23

집합 $A=\{2,\ 3,\ 4\}$의 부분집합은

$\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{3,\ 4\}$, $\{2,\ 3,\ 4\}$

집합 $B=\{2,\ 3\}$의 부분집합은

$\varnothing$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{2,\ 3\}$

따라서 한 번의 시행에서 선택할 수 있는 경우의 수는

$8\times 4=32$

선택한 집합 A의 부분집합을 X, 집합 B의 부분집합을 Y라 할 때 $n(X\cap Y)=1$이 되는 경우의 수는

(i) $Y=\{2\}$인 경우

$2\in X$이어야 하므로 집합 A의 부분집합 중 2를 원소로 갖는 집합의 개수는 $2^{3-1}=4$

(ii) $Y=\{3\}$인 경우

$3\in X$이어야 하므로 집합 A의 부분집합 중 3를 원소로 갖는 집합의 개수는 $2^{3-1}=4$

(iii) $Y=\{2,\ 3\}$인 경우

조건을 만족시키는 집합 X는

$\{2\}$, $\{3\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{3,\ 4\}$

(i), (ii), (iii)에서 $n(X\cap Y)=1$이 되는 경우의 수는

$4+4+4=12$

따라서 한 번의 시행에서 교집합의 원소의 개수가 1일 확률은

$\frac{12}{32}=\frac{3}{8}$

이 시행을 15360번 반복할 때 기록한 수가 1인 횟수를 확률변수 X라 하면 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15360,\ \frac{3}{8}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=15360\times\frac{3}{8}=5760$

$\mathrm{V}(X)=15360\times\frac{3}{8}\times\frac{5}{8}=3600$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(5760,\ 60^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-5760}{60}$으로 놓으면 구하는 확률은

$$\begin{aligned}k&=\mathrm{P}(X\ge 5880)=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{5880-5760}{60}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 2)=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.477=0.023\end{aligned}$$

$\therefore\ 1000\times k=1000\times 0.023=23$

최고수준 도전 기출 194~195쪽

0812 답 $\frac{9}{16}$

전략 확률밀도함수와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1임을 이용하여 a의 값을 구하고, 최댓값, 최솟값을 갖는 t의 값을 각각 구하여 M, m을 구한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2}\times 4\times a=1,\ 2a=1 \qquad \therefore\ a=\frac{1}{2}$

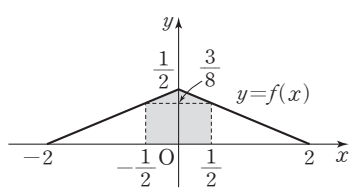
$$\therefore\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}x+\frac{1}{2} & (-2\le x<0)\\ -\frac{1}{4}x+\frac{1}{2} & (0\le x\le 2)\end{cases}$$

$\mathrm{P}(t\le x\le t+1)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=t$, $x=t+1$로 둘러싸인 부분의 넓이이고, 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값을 갖고 $x=2$일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 함수 $G(t)$는 두 직선 $x=t$, $x=t+1$이 $x=0$에 대하여 대칭일 때, 즉 $t=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값을 갖고 $t+1=2$, 즉 $t=1$일 때 최솟값을 갖는다.

(i) $t=-\frac{1}{2}$일 때,

$\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

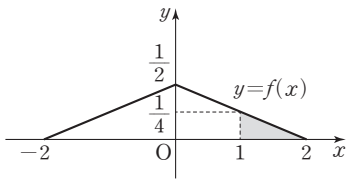


$$M=G\left(-\frac{1}{2}\right)=\mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{7}{16}$$

(ii) $t=1$일 때,

$\mathrm{P}(1\le X\le 2)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$m=G(1)=\mathrm{P}(1\le X\le 2)$

$=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$

(i), (ii)에서 $M=\frac{7}{16}$, $m=\frac{1}{8}$이므로

$M+m=\frac{7}{16}+\frac{1}{8}=\frac{9}{16}$

0813 답 9

전략 확률밀도함수의 성질을 이용하여 $f(x)$를 구하고, (나)를 이용하여 $g(x)$를 구한 후 확률을 구한다.

$\mathrm{P}(-1\le X\le a)=1$이므로

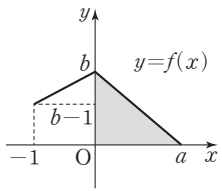
$\mathrm{P}(-1\le X\le 0)+\mathrm{P}(0\le X\le a)=1$

(가)에서 $\mathrm{P}(-1\le X\le 0)=\mathrm{P}(0\le X\le a)$이므로

$2\mathrm{P}(0\le X\le a)=1$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le X\le a)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(-1\le X\le 0)=\frac{1}{2}$

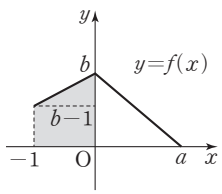
$\mathrm{P}(0\le X\le a)=\frac{1}{2}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=0$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}$이므로



$\frac{1}{2}\times a\times b=\frac{1}{2}$

$\therefore\ ab=1$ ····· ㉠

$\mathrm{P}(-1\le X\le 0)=\frac{1}{2}$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=0$으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}$이므로



$\frac{1}{2}\times(b-1+b)\times 1=\frac{1}{2}$

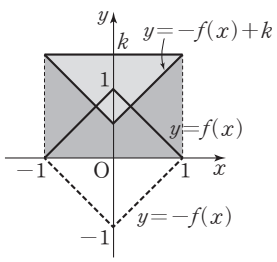
$2b-1=1$, $2b=2$

$\therefore\ b=1$

이를 ㉠에 대입하면 $a=1$

$\therefore\ f(x)=\begin{cases} x+1 & (-1\le x\le 0) \\ -x+1 & (0\le x\le 1) \end{cases}$

한편 (나)에서 $g(x)=-f(x)+k$이고, $g(x)=-f(x)+k\ge 0$, 즉 $f(x)\le k$이므로 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분, 함수 $y=-f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분, 직선 $y=k$와 함수 $y=-f(x)+k$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는 모두 1로 같다.



또 함수 $y=-f(x)+k$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이도 1이다.

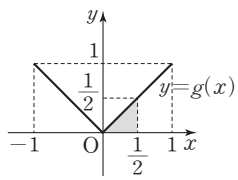
따라서 직선 $y=k$와 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 직사각형의 넓이는 2이므로

$2k=2$ $\therefore\ k=1$

$\therefore\ g(x)=-f(x)+1$

$=\begin{cases} -x & (-1\le x\le 0) \\ x & (0\le x\le 1) \end{cases}$

이때 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같고 $\mathrm{P}\left(0\le Y\le\frac{a}{2}\right)$, 즉 $\mathrm{P}\left(0\le Y\le\frac{1}{2}\right)$은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축 및 직선 $x=\frac{1}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



$\mathrm{P}\left(0\le Y\le\frac{a}{2}\right)=\mathrm{P}\left(0\le Y\le\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$

$\therefore\ p=8$, $q=1$

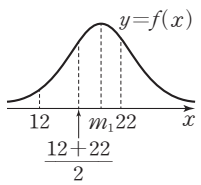
$\therefore\ p+q=8+1=9$

0814 답 2

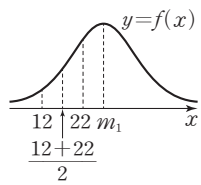
전략 정규분포곡선의 성질을 이용하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 관계를 파악하고 m_1, m_2의 값을 구한 후 $\mathrm{P}(X_2\le 28)=0.0228$을 이용하여 σ의 값을 구한다.

정규분포를 따르는 두 확률변수 X_1, X_2의 표준편차가 σ로 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치한다.

(가)에서 $f(12)<f(22)$이므로 이를 만족시키려면 그림과 같아야 한다.



[$12<m_1<22$인 경우]

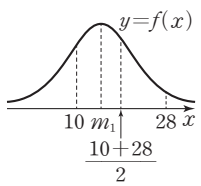


[$m_1>22$인 경우]

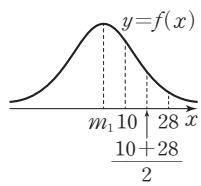
따라서 $m_1>\frac{12+22}{2}$이므로

$m_1>17$ ····· ㉠

(가)에서 $f(10)>f(28)$이므로 이를 만족시키려면 그림과 같아야 한다.



[$10<m_1<28$인 경우]



[$m_1>10$인 경우]

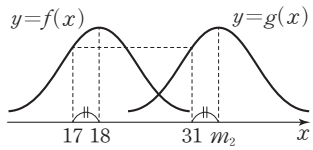
따라서 $m_1<\frac{10+28}{2}$이므로

$m_1<19$ ····· ㉡

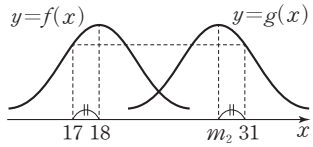
㉠, ㉡에서 $17<m_1<19$이므로

$m_1=18$ ($\because$ m_1은 정수)

한편 (나)에서 $f(17)=g(31)$을 만족시키려면 그림과 같아야 한다.



[$m_2>31$인 경우]



[$m_2<31$인 경우]

즉, $|31-m_2|=1$이므로

$31-m_2=1$ 또는 $31-m_2=-1$

$\therefore m_2=30$ 또는 $m_2=32$

이때 $P(X_2\geq 31)\geq\frac{1}{2}$이려면 $m_2\geq 31$이어야 하므로

$m_2=32$

확률변수 X_2는 정규분포 $N(32, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X_2-32}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X_2\leq 28)=0.0228$에서

$$P\left(Z\leq\frac{28-32}{\sigma}\right)=0.0228$$

$$P\left(Z\leq-\frac{4}{\sigma}\right)=0.0228$$

$$P\left(Z\geq\frac{4}{\sigma}\right)=0.0228$$

$$P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq\frac{4}{\sigma}\right)=0.0228$$

$$0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{4}{\sigma}\right)=0.0228$$

$$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{4}{\sigma}\right)=0.4772$$

이때 $P(0\leq Z\leq 2)=0.4772$이므로

$\frac{4}{\sigma}=2$

$\therefore \sigma=2$

0815 답 6

전략 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형을 파악하고 확률밀도함수의 성질을 이용하여 $g(x)$를 구한 후, 도형의 넓이를 이용하여 확률을 구한다.

$\{g(x)-f(x)\}\{g(x)-a\}=0$에서

$g(x)=f(x)$ 또는 $g(x)=a$

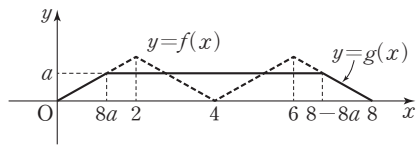
$0\leq x\leq 2$에서 $f(x)=\frac{1}{8}x$이고, $8a\leq x\leq 4$에서 $g(x)=a$이므로

$x=8a$는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이다.

$f(8a)=\frac{1}{8}\times 8a=a$에서 교점의 좌표는 $(8a, a)$이다.

$f(x)$의 최댓값이 $\frac{1}{4}$이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이 되기 위해서는 $0<a<\frac{1}{4}$이어야 한다.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이고, $g(x)$가 확률밀도함수이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.

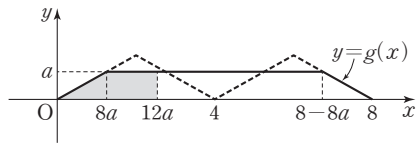


확률밀도함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2}\times 8a\times a+(8-16a)\times a+\frac{1}{2}\times 8a\times a=1$$

$$8a^2-8a+1=0 \qquad \therefore a=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(\because 0<a<\frac{1}{4}\right)$$

이때 $8a<12a<4$이고 $P(0\leq Y\leq 12a)$는 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로



$$P(0\leq Y\leq 12a)=\frac{1}{2}\times 8a\times a+(12a-8a)\times a=8a^2$$

$$=8\times\left(\frac{2-\sqrt{2}}{4}\right)^2=3-2\sqrt{2}$$

따라서 $p=3$, $q=2$이므로

$p\times q=3\times 2=6$

0816 답 0.8664

전략 정규분포곡선의 성질을 이용하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 사이의 관계를 파악하고, 확률이 최대가 되기 위한 조건을 파악한 후 표준화하여 확률을 구한다.

확률변수 X가 정규분포 $N(10, 2^2)$을 따르므로

$P(X\geq 10)=0.5$

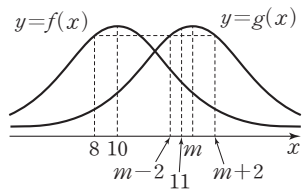
(가)에서 $P(X\geq 10)\leq P(Y\leq 12)$이므로

$0.5\leq P(Y\leq 12)$

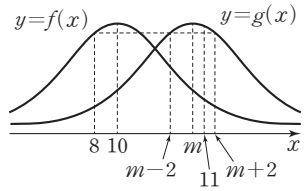
이때 확률변수 Y는 정규분포 $N(m, 2^2)$을 따르므로

$m\leq 12$ ····· ㉠

두 확률변수 X, Y의 표준편차가 2로 같으므로 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 평행이동하면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치한다. (나)에서 $f(8)<g(11)$을 만족시키려면 그림과 같아야 한다.



[$m>11$인 경우]



[$m<11$인 경우]

즉, $|11-m|<2$이므로

$-2<11-m<2$에서

$9<m<13$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$9<m\le 12$

한편 $P(|X-m|\le 3)=P(m-3\le X\le m+3)$이 최댓값을 가지려면 $m-3$과 $m+3$의 평균이 10이어야 하므로

$\frac{(m-3)+(m+3)}{2}=m=10$

따라서 $P(|X-m|\le 3)$은 $m=10$일 때 최댓값을 갖는다.

즉, 확률변수 X가 정규분포 $N(10, 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-10}{2}$으로 놓으면

$$\begin{aligned}P(|X-m|\le 3)&=P(m-3\le X\le m+3)\\&=P(7\le X\le 13)\\&=P\left(\frac{7-10}{2}\le Z\le\frac{13-10}{2}\right)\\&=P(-1.5\le Z\le 1.5)\\&=P(-1.5\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.5)\\&=2P(0\le Z\le 1.5)\\&=2\times 0.4332\\&=0.8664\end{aligned}$$

0817 답 ④

전략 정규분포곡선의 성질을 이용하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프 사이의 관계를 파악하고, X, Y를 각각 표준화하여 조건을 만족시키는 평균과 표준편차를 구한다.

$g(x)=f(x+6)$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 것이므로 두 확률변수 X, Y의 표준편차는 같다.

확률변수 X의 평균을 m, 표준편차를 σ라 하면 확률변수 Y의 평균은 $m-6$, 표준편차는 σ이다.

따라서 두 확률변수 X와 Y는 각각 정규분포 $N(m, \sigma^2)$, $N(m-6, \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-m}{\sigma}$, $Z_Y=\frac{Y-(m-6)}{\sigma}$으로 놓는다.

㈎에서 $P(X\le 11)=P(Y\ge 23)$이므로

$P\left(Z_X\le\frac{11-m}{\sigma}\right)=P\left(Z_Y\ge\frac{29-m}{\sigma}\right)$

$P\left(Z_X\le\frac{11-m}{\sigma}\right)=P\left(Z_Y\le-\frac{29-m}{\sigma}\right)$

즉, $\frac{11-m}{\sigma}=-\frac{29-m}{\sigma}$이므로

$11-m=-(29-m)$

$2m=40$

$\therefore m=20$

$\therefore E(X)=m=20$

㈏에서 $P(X\le k)+P(Y\le k)=1$이므로

$P\left(Z_X\le\frac{k-20}{\sigma}\right)+P\left(Z_Y\le\frac{k-14}{\sigma}\right)=1$ ($\because m=20$)

$P\left(Z_X\le\frac{k-20}{\sigma}\right)+P\left(Z_Y\ge-\frac{k-14}{\sigma}\right)=1$

즉, $\frac{k-20}{\sigma}=-\frac{k-14}{\sigma}$이므로

$k-20=-(k-14)$

$2k=34$

$\therefore k=17$

$$\begin{aligned}\therefore P(X\le k)+P(Y\ge k)&=P(X\le 17)+P(Y\ge 17)\\&=P\left(Z_X\le-\frac{3}{\sigma}\right)+P\left(Z_Y\ge\frac{3}{\sigma}\right)\\&=P\left(Z_X\ge\frac{3}{\sigma}\right)+P\left(Z_Y\ge\frac{3}{\sigma}\right)\\&=2P\left(Z_X\ge\frac{3}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

즉, $2P\left(Z_X\ge\frac{3}{\sigma}\right)=0.1336$이므로

$P\left(Z_X\ge\frac{3}{\sigma}\right)=0.0668$

$P(Z_X\ge 0)-P\left(0\le Z_X\le\frac{3}{\sigma}\right)=0.0668$

$0.5-P\left(0\le Z_X\le\frac{3}{\sigma}\right)=0.0668$

$\therefore P\left(0\le Z_X\le\frac{3}{\sigma}\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{3}{\sigma}=1.5$ $\therefore \sigma=2$

$\therefore \sigma(Y)=\sigma=2$

$\therefore E(X)+\sigma(Y)=20+2=22$

0818 답 66

전략 ㈎, ㈏를 이용하여 확률변수 X에 대한 확률을 식으로 나타낸 후, 표준화를 이용하여 m, σ에 대한 식을 구한다. 이때 응시자의 점수가 k_2 이상이면 최종 합격하므로 그 확률이 $\frac{23+44}{1000}=0.067$임을 이용한다.

확률변수 X가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

㈎에서 점수가 76점 이상인 응시자의 비율은 15.9 %이므로

$P(X\ge 76)=0.159$

$P\left(Z\ge\frac{76-m}{\sigma}\right)=0.159$

$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{76-m}{\sigma}\right)=0.159$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{76-m}{\sigma}\right)=0.159$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{76-m}{\sigma}\right)=0.341$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.341$이므로

$\frac{76-m}{\sigma}=1$

$\therefore 76-m=\sigma$ ····· ㉠

㈏에서 1차 합격자는 23명이므로

$P(X \geq k_1)=\frac{23}{1000}=0.023$

$P\left(Z \geq \frac{k_1-m}{\sigma}\right)=0.023$

$P(Z \geq 0)-P\left(0 \leq Z \leq \frac{k_1-m}{\sigma}\right)=0.023$

$0.5-P\left(0 \leq Z \leq \frac{k_1-m}{\sigma}\right)=0.023$

$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k_1-m}{\sigma}\right)=0.477$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2)=0.477$이므로

$\frac{k_1-m}{\sigma}=2$

$\therefore k_1=2\sigma+m$ ····· ㉡

모든 합격자는 $23+44=67$(명)이므로

$P(X \geq k_2)=\frac{67}{1000}=0.067$

$P\left(Z \geq \frac{k_2-m}{\sigma}\right)=0.067$

$P(Z \geq 0)-P\left(0 \leq Z \leq \frac{k_2-m}{\sigma}\right)=0.067$

$0.5-P\left(0 \leq Z \leq \frac{k_2-m}{\sigma}\right)=0.067$

$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k_2-m}{\sigma}\right)=0.433$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5)=0.433$이므로

$\frac{k_2-m}{\sigma}=1.5$

$\therefore k_2=1.5\sigma+m$ ····· ㉢

㈏에서 $k_1-k_2=5$이므로 ㉡, ㉢을 대입하면

$(2\sigma+m)-(1.5\sigma+m)=5$

$0.5\sigma=5$

$\therefore \sigma=10$

이를 ㉠에 대입하면

$76-m=10$

$\therefore m=66$

0819 답 ⑤

전략 X가 따르는 이항분포를 구하고, X가 근사적으로 따르는 정규분포를 구한 후, 표준화하여 확률을 구한다.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

따라서 확률변수 X는 이항분포 $B\left(450, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=450\times\frac{1}{3}=150$

$V(X)=450\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=100$

즉, 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $N(150, 10^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-150}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

ㄱ. $P(X \geq 175)=P\left(Z \geq \frac{175-150}{10}\right)$

$=P(Z \geq 2.5)$

$=P(Z \leq -2.5)$

ㄴ. $P(140 \leq X \leq a) \leq 0.7745$에서

$P(140 \leq X \leq a)$

$=P\left(\frac{140-150}{10} \leq Z \leq \frac{a-150}{10}\right)$

$=P\left(-1 \leq Z \leq \frac{a-150}{10}\right)$

$=P(-1 \leq Z \leq 0)+P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-150}{10}\right)$

$=P(0 \leq Z \leq 1)+P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-150}{10}\right)$

$=0.3413+P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-150}{10}\right)$

즉, $0.3413+P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-150}{10}\right) \leq 0.7745$이므로

$P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-150}{10}\right) \leq 0.4332$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{a-150}{10} \leq 1.5$

$a-150 \leq 15$

$\therefore a \leq 165$

따라서 자연수 a의 최댓값은 $M=165$이다.

$\therefore P(X \leq M-30)=P(X \leq 135)$

$=P\left(Z \leq \frac{135-150}{10}\right)$

$=P(Z \leq -1.5)$

$=P(Z \geq 1.5)$

$=P(Z \geq 0)-P(0 \leq Z \leq 1.5)$

$=0.5-0.4332$

$=0.0668$

ㄷ. 정규분포곡선이 직선 $x=150$에 대하여 대칭이므로

$P(X \leq 140)=P(X \geq k)$에서

$\frac{140+k}{2}=150$

$140+k=300$

$\therefore k=160$

$\therefore P(150 \leq X \leq k+10)$

$=P(150 \leq X \leq 170)$

$=P\left(\frac{150-150}{10} \leq Z \leq \frac{170-150}{10}\right)$

$=P(0 \leq Z \leq 2)$

$=0.4772$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

12 표본평균과 표본비율의 분포

난이도별 필수 기출 198~211쪽

0820 답 ③

모표준편차가 15, 표본의 크기가 25이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{15}{\sqrt{25}}=3$

0821 답 ①

모표준편차가 15, 표본의 크기가 n이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{15}{\sqrt{n}}$

이때 $\sigma(\overline{X})=5$이므로

$\frac{15}{\sqrt{n}}=5$, $\sqrt{n}=3$ $\therefore n=9$

0822 답 125

모비율이 0.2, 표본의 크기가 100이므로

$\mathrm{E}(\hat{p})=0.2$, $\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{0.2\times0.8}{100}=0.0016$

$\therefore \frac{\mathrm{E}(\hat{p})}{\mathrm{V}(\hat{p})}=\frac{0.2}{0.0016}=125$

0823 답 ④

모비율이 0.25, 표본의 크기가 75이므로

$\mathrm{E}(\hat{p})=0.25$, $\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{75}}=0.05$

$\therefore 100\{\mathrm{E}(\hat{p})+\sigma(\hat{p})\}=100(0.25+0.05)$

$=30$

0824 답 ②

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{2}=1$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

$\mathrm{E}(X)=-1\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

$\mathrm{E}(X^2)=(-1)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}=\frac{9}{4}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{9}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{27}{16}$

이때 표본의 크기가 15이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{15}=\frac{\frac{27}{16}}{15}=\frac{9}{80}$

0825 답 ②

모평균이 m, 모분산이 64, 표본의 크기가 16이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=m$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{64}{16}=4$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$이므로

$4=40-m^2$, $m^2=36$

$\therefore m=6$ ($\because m>0$)

0826 답 ③

모평균이 80, 모표준편차가 12, 표본의 크기가 n이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=80$, $\sigma(\overline{X})=\frac{12}{\sqrt{n}}$

이때 $\mathrm{E}(\overline{X})-\sigma(\overline{X})\geq77$이므로

$80-\frac{12}{\sqrt{n}}\geq77$, $\frac{12}{\sqrt{n}}\leq3$

$\sqrt{n}\geq4$ $\therefore n\geq16$

따라서 자연수 n의 최솟값은 16이다.

0827 답 ④

모표준편차가 σ이므로

$\sigma(\overline{X_1})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$, $\sigma(\overline{X_2})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

이때 $\sigma(\overline{X_1})=3$이므로

$\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}=3$, $\sqrt{n_1}=\frac{\sigma}{3}$ $\therefore n_1=\frac{\sigma^2}{9}$

또 $\sigma(\overline{X_2})=2$이므로

$\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}=2$, $\sqrt{n_2}=\frac{\sigma}{2}$ $\therefore n_2=\frac{\sigma^2}{4}$

$n_1+n_2=117$이므로

$\frac{\sigma^2}{9}+\frac{\sigma^2}{4}=117$, $\frac{13\sigma^2}{36}=117$

$\sigma^2=324$ $\therefore \sigma=18$ ($\because \sigma>0$)

0828 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{6}+a+b=1$

$\therefore a+b=\frac{5}{6}$ ····· ㉠

$\mathrm{E}(X^2)=\frac{16}{3}$에서

$0^2\times\frac{1}{6}+2^2\times a+4^2\times b=\frac{16}{3}$

$4a+16b=\frac{16}{3}$

$\therefore a+4b=\frac{4}{3}$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{6}$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{3}+4\times\frac{1}{6}=2$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{16}{3}-2^2=\frac{4}{3}$

이때 표본의 크기가 20이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{20}=\frac{\frac{4}{3}}{20}=\frac{1}{15}$

0829 답 ②

모비율이 $\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$, 표본의 크기가 n이므로

$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}}{n}}=\sqrt{\frac{6}{25n}}$

이때 $\sigma(\hat{p})=\frac{1}{50}$이므로

$\sqrt{\frac{6}{25n}}=\frac{1}{50}$, $\frac{6}{25n}=\frac{1}{2500}$ $\therefore\ n=600$

0830 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+b=1$ $\therefore\ a+b=\frac{3}{4}$ …… ㉠

$\mathrm{E}(\overline{X})=1$이므로 $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=1$

즉, $0\times\frac{1}{4}+1\times a+2\times b=1$이므로

$a+2b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$

즉, 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

이때 표본의 크기가 4이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{4}=\frac{\frac{1}{2}}{4}=\frac{1}{8}$

$\therefore\ \sigma(\overline{X})=\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\therefore\ 12\sigma(\overline{X})=12\times\frac{\sqrt{2}}{4}=3\sqrt{2}$

0831 답 ①

모평균이 120, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=120$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$

이때 $\mathrm{E}(\overline{X})=15n$이므로

$15n=120$ $\therefore\ n=8$

또 $\mathrm{V}(\overline{X})=2$이므로

$\frac{\sigma^2}{n}=2$, $\sigma^2=2n=2\times8=16$ $\therefore\ \sigma=4\ (\because\ \sigma>0)$

$\therefore\ n+\sigma=8+4=12$

0832 답 ③

모집단의 확률변수를 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	9	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}+7\times\frac{1}{5}+9\times\frac{1}{5}=5$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{5}+5^2\times\frac{1}{5}+7^2\times\frac{1}{5}+9^2\times\frac{1}{5}=33$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=33-5^2=8$

이때 표본의 크기가 3이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{3}=\frac{8}{3}$

$\mathrm{V}(a\overline{X}+6)=24$에서 $a^2\mathrm{V}(\overline{X})=24$

$\frac{8}{3}a^2=24$, $a^2=9$ $\therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$

0833 답 ②

모비율이 p, 표본의 크기가 n일 때의 표본비율이 $\hat{p}_1$이므로

$\sigma(\hat{p}_1)=\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

이때 $\sigma(\hat{p}_1)=\frac{1}{20}$이므로

$\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}=\frac{1}{20}$ $\therefore\ \frac{p(1-p)}{n}=\frac{1}{400}$

표본의 크기가 $4n$일 때의 표본비율이 $\hat{p}_2$이므로

$\sigma(\hat{p}_2)=\sqrt{\frac{p(1-p)}{4n}}=\sqrt{\frac{1}{4\times400}}=\frac{1}{40}$

0834 답 2

주사위를 한 번 던질 때, 나오는 눈의 수를 확률변수 X라 하고 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	6	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}$

$=\frac{91}{6}$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$ …… ⓘ

표본의 크기가 n이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{n}=\frac{\frac{35}{12}}{n}=\frac{35}{12n}$ …… ⓘⓘ

이때 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{35}{24}$이므로

$\frac{35}{12n}=\frac{35}{24}$ $\therefore\ n=2$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $V(X)$의 값 구하기	50 %
ⓘⓘ $V(\overline{X})$를 n에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘⓘ n의 값 구하기	20 %

0835 답 ④

주머니에서 숫자 1이 적힌 공을 꺼낼 확률을 모비율 p라 하면

$p=\frac{1}{5}=0.2$이다. 이 시행을 $n=100$번 반복할 때, 표본비율 $\hat{p}$의 기댓값과 분산은 다음과 같다.

$E(\hat{p})=p=0.2$, $V(\hat{p})=\frac{p(1-p)}{n}=\frac{0.2\times0.8}{100}=$ (가) 0.0016

한편 100번의 시행 중 숫자 1이 나온 횟수 Y는 표본비율의 정의에 의해 $Y=100\hat{p}$으로 나타낼 수 있다.

따라서 $V(Y)$는 분산의 성질에 의해 다음과 같다.

$V(Y)=V(100\hat{p})=100^2V(\hat{p})=10000\times0.0016=$ (나) 16

이 결과는 Y가 이항분포 $B(100, 0.2)$를 따른다는 사실을 이용하여 구한 $V(Y)=100\times0.2\times0.8=$ (나) 16의 값과 일치한다.

따라서 $a=0.0016$, $b=16$이므로

$10000a+b=10000\times0.0016+16=32$

0836 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

$\therefore p_1+p_2+p_3=1$

이때 $\frac{p_1+p_3}{3}=p_2$에서 $p_1+p_3=3p_2$이므로 이를 위 식에 대입하면

$3p_2+p_2=1$, $4p_2=1$

$\therefore p_2=\frac{1}{4}$

$\therefore p_1+p_3=\frac{3}{4}$ ····· ㉠

한편 $E(\overline{X})=\frac{9}{4}$이므로 $E(X)=E(\overline{X})=\frac{9}{4}$

$1\times p_1+2\times p_2+3\times p_3=\frac{9}{4}$

$p_1+2\times\frac{1}{4}+3p_3=\frac{9}{4}$

$\therefore p_1+3p_3=\frac{7}{4}$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p_1=\frac{1}{4}$, $p_3=\frac{1}{2}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{2}=\frac{23}{4}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{23}{4}-\left(\frac{9}{4}\right)^2=\frac{11}{16}$

이때 표본의 크기가 2이므로

$V(\overline{X})=\frac{V(X)}{2}=\frac{\frac{11}{16}}{2}=\frac{11}{32}$

0837 답 ③

모평균이 m, 모분산이 σ^2, 모표준편차가 σ이므로

크기가 n_1인 표본의 표본평균 $\overline{X_1}$에 대하여

$E(\overline{X_1})=m$, $V(\overline{X_1})=\frac{\sigma^2}{n_1}$, $\sigma(\overline{X_1})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$

크기가 n_2인 표본의 표본평균 $\overline{X_2}$에 대하여

$E(\overline{X_2})=m$, $V(\overline{X_2})=\frac{\sigma^2}{n_2}$, $\sigma(\overline{X_2})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

ㄱ. $E(\overline{X_1})=m$, $E(\overline{X_2})=m$이므로 $E(\overline{X_1})=E(\overline{X_2})$

ㄴ. $4n_1=n_2$이면

$4V(\overline{X_1})=4\times\frac{\sigma^2}{n_1}=\frac{4\sigma^2}{n_1}$

$V(\overline{X_2})=\frac{\sigma^2}{n_2}=\frac{\sigma^2}{4n_1}$

$\therefore 4V(\overline{X_1})\neq V(\overline{X_2})$

ㄷ. $n_1=4n_2$이면

$\sigma(2\overline{X_1})=|2|\sigma(\overline{X_1})=2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$

$=2\times\frac{\sigma}{\sqrt{4n_2}}=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

$\sigma(\overline{X_2})=\frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$

$\therefore \sigma(2\overline{X_1})=\sigma(\overline{X_2})$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0838 답 15

주머니에서 임의로 꺼낸 1개의 공에 적혀 있는 숫자를 확률변수 X라 하면 $\overline{X}$는 크기가 2인 표본의 표본평균이다.

$\overline{X}=1$인 경우는 2번의 시행에서 모두 1의 숫자가 적혀 있는 공을 꺼내는 경우이므로 그 확률은

$P(\overline{X}=1)=\frac{2}{n+5}\times\frac{2}{n+5}=\frac{4}{(n+5)^2}$

이때 $P(\overline{X}=1)=\frac{1}{64}$이므로

$\frac{4}{(n+5)^2}=\frac{1}{64}$, $(n+5)^2=256$

$n+5=\pm16$

$\therefore n=11$ ($\because n>0$)

따라서 주머니에 숫자 1이 적혀 있는 공 2개, 숫자 2가 적혀 있는 공 3개, 숫자 a가 적혀 있는 공 11개가 들어 있으므로 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	a	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{11}{16}$	1

$E(X)=1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{3}{16}+a\times\frac{11}{16}=\frac{8+11a}{16}$

이때 $E(\overline{X})=\frac{13}{4}$이고 $E(\overline{X})=E(X)$이므로

$\frac{8+11a}{16}=\frac{13}{4}$

$8+11a=52$, $11a=44$

$\therefore a=4$

$\therefore a+n=4+11=15$

0839 답 ③

주머니에서 임의로 꺼낸 한 개의 공에 적혀 있는 숫자를 확률변수 X라 하면 $\overline{X}$는 임의추출한 크기가 3인 표본의 표본평균이다.

한 개의 공을 꺼내 숫자 1, 2, 4가 나올 확률을 각각 a, b, c라 하면 확률의 총합은 1이므로

$a+b+c=1$ ····· ㉠

㈎에서 $\overline{X}=1$인 경우는 3번의 시행에서 모두 숫자 1이 적혀 있는 공을 꺼내는 경우이므로 그 확률은

$a\times a\times a=\frac{1}{27}$, $a^3=\left(\frac{1}{3}\right)^3$

$\therefore a=\frac{1}{3}$

㈏에서 $\overline{X}=4$인 경우는 3번의 시행에서 모두 숫자 4가 적혀 있는 공을 꺼내는 경우이므로 그 확률은

$c\times c\times c=\frac{1}{64}$, $c^3=\left(\frac{1}{4}\right)^3$

$\therefore c=\frac{1}{4}$

$a=\frac{1}{3}$, $c=\frac{1}{4}$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{3}+b+\frac{1}{4}=1$ $\therefore b=\frac{5}{12}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	1

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{5}{12}+4\times\frac{1}{4}=\frac{13}{6}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{5}{12}+4^2\times\frac{1}{4}=6$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=6-\left(\frac{13}{6}\right)^2=\frac{47}{36}$

이때 표본의 크기가 3이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=\frac{13}{6}$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{3}=\frac{\frac{47}{36}}{3}=\frac{47}{108}$

이때 $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$

$=\frac{47}{108}+\left(\frac{13}{6}\right)^2=\frac{277}{54}$

따라서 $p=54$, $q=277$이므로

$p+q=54+277=331$

0840 답 ③

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(10, 8^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(10, \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(10, 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-10}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(10\le\overline{X}\le13)=\mathrm{P}\left(\frac{10-10}{2}\le Z\le\frac{13-10}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$

0841 답 ④

표본비율 $\hat{p}$이 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.2, 0.04^2)$을 따르므로

$Z=\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(0.12\le\hat{p}\le0.28)=\mathrm{P}\left(\frac{0.12-0.2}{0.04}\le Z\le\frac{0.28-0.2}{0.04}\right)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le2)$

$=\mathrm{P}(-2\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=2\times0.4772$

$=0.9544$

0842 답 ⑤

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(10, 36)$을 따르고 표본의 크기가 9인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(10, \frac{36}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(10, 2^2)$을 따른다.

또 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(20, 100)$을 따르고 표본의 크기가 25인 표본의 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(20, \frac{100}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(20, 2^2)$을 따른다.

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-10}{2}$, $Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-20}{2}$으로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge14)=\mathrm{P}(\overline{Y}\le a)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{14-10}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{a-20}{2}\right)$

$\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge2)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\ge-\frac{a-20}{2}\right)$

즉, $2=-\frac{a-20}{2}$이므로

$-4=a-20$

$\therefore a=16$

0843 답 ②

모집단에서 크기가 2인 표본을 임의추출할 때 추출된 표본을 (X_1, X_2)라 하면

$\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$

$\overline{X}\ge5$에서 $\frac{X_1+X_2}{2}\ge5$, 즉 $X_1+X_2\ge10$

$X_1+X_2\ge10$인 경우는 $(4, 6)$, $(6, 4)$, $(6, 6)$일 때이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge5)$

$=\mathrm{P}(X_1+X_2\ge10)$

$=\mathrm{P}(X=4)\times\mathrm{P}(X=6)+\mathrm{P}(X=6)\times\mathrm{P}(X=4)$

$+\mathrm{P}(X=6)\times\mathrm{P}(X=6)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$

$=\frac{3}{16}$

따라서 $p=16$, $q=3$이므로

$p+q=16+3=19$

0844 답 ④

$P(X=10)=a$, $P(X=20)=b$, $P(X=30)=c$라 하면 확률의 총합은 1이므로

$a+b+c=1$ ····· ㉠

$E(\overline{X})=20$이므로 $E(X)=E(\overline{X})=20$

즉, $10\times a+20\times b+30\times c=20$이므로

$a+2b+3c=2$ ····· ㉡

또 표본의 크기가 3이고 $V(\overline{X})=\frac{20}{3}$이므로

$\frac{V(X)}{3}=\frac{20}{3}$ $\therefore V(X)=20$

이때 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$20=10^2\times a+20^2\times b+30^2\times c-20^2$

$\therefore a+4b+9c=\frac{21}{5}$ ····· ㉢

㉡−㉠을 하면

$b+2c=1$ ····· ㉣

㉢−㉡을 하면

$2b+6c=\frac{11}{5}$ $\therefore b+3c=\frac{11}{10}$ ····· ㉤

㉤−㉣을 하면 $c=\frac{1}{10}$

이를 ㉣에 대입하여 풀면 $b=\frac{4}{5}$

$\therefore P(X=20)=b=\frac{4}{5}$

0845 답 ①

모집단이 정규분포 $N(m, 3^2)$을 따르고 표본의 크기가 m^2이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{3^2}{m^2}\right)$, 즉 $N\left(m, \left(\frac{3}{m}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{3}{m}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(m-1\le\overline{X}\le m+1)=0.9544$에서

$P\left(\frac{m-1-m}{\frac{3}{m}}\le Z\le\frac{m+1-m}{\frac{3}{m}}\right)=0.9544$

$P\left(-\frac{m}{3}\le Z\le\frac{m}{3}\right)=0.9544$

$P\left(-\frac{m}{3}\le Z\le 0\right)+P\left(0\le Z\le\frac{m}{3}\right)=0.9544$

$2P\left(0\le Z\le\frac{m}{3}\right)=0.9544$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{m}{3}\right)=0.4772$

이때 $P(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\frac{m}{3}=2$ $\therefore m=6$

0846 답 1587

모비율이 0.2, 표본의 크기가 n일 때의 표본비율이 $\hat{p}_1$이므로

$E(\hat{p}_1)=0.2$, $V(\hat{p}_1)=\frac{0.2\times 0.8}{n}=\frac{0.16}{n}$

표본의 크기 n은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}_1$은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.2, \left(\frac{0.4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다. ····· ⓘ

$Z_1=\frac{\hat{p}_1-0.2}{\frac{0.4}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(\hat{p}_1\ge 0.24)=0.1587$에서

$P\left(Z_1\ge\frac{0.24-0.2}{\frac{0.4}{\sqrt{n}}}\right)=0.1587$

$P\left(Z_1\ge\frac{\sqrt{n}}{10}\right)=0.1587$

$P(Z_1\ge 0)-P\left(0\le Z_1\le\frac{\sqrt{n}}{10}\right)=0.1587$

$0.5-P\left(0\le Z_1\le\frac{\sqrt{n}}{10}\right)=0.1587$

$\therefore P\left(0\le Z_1\le\frac{\sqrt{n}}{10}\right)=0.3413$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{10}=1$, $\sqrt{n}=10$

$\therefore n=100$ ····· ⓘⓘ

한편 모비율이 0.2, 표본의 크기가 $4n$, 즉 400일 때의 표본비율이 $\hat{p}_2$이므로

$E(\hat{p}_2)=0.2$, $V(\hat{p}_2)=\frac{0.2\times 0.8}{400}=0.02^2$

표본의 크기 400은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}_2$은 근사적으로 정규분포 $N(0.2, 0.02^2)$을 따른다. ····· ⓘⓘⓘ

$Z_2=\frac{\hat{p}_2-0.2}{0.02}$로 놓으면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$\begin{aligned}P(\hat{p}_2\le 0.18)&=P\left(Z_2\le\frac{0.18-0.2}{0.02}\right)\\&=P(Z_2\le -1)\\&=P(Z_2\ge 1)\\&=P(Z_2\ge 0)-P(0\le Z_2\le 1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

$\therefore 10000P(\hat{p}_2\le 0.18)=10000\times 0.1587=1587$ ····· ⓘⓥ

채점 기준

ⓘ $\hat{p}_1$이 근사적으로 따르는 정규분포 구하기	20 %
ⓘⓘ n의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ $\hat{p}_2$이 근사적으로 따르는 정규분포 구하기	20 %
ⓘⓥ $10000P(\hat{p}_2\le 0.18)$의 값 구하기	30 %

0847 답 ⑤

한 번의 시행에서 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X라 하자.

(i) $X=1$일 때,

주머니 속에는 총 8개의 공이 들어 있고 1의 숫자가 적혀 있는 공이 1개이므로

$P(X=1)=\frac{1}{8}$

(ii) $X=2$일 때,

주머니 속에는 총 8개의 공이 들어 있고 2의 숫자가 적혀 있는 공이 2개이므로

$P(X=2)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

(iii) $X=3$일 때,

주머니 속에는 총 8개의 공이 들어 있고 3의 숫자가 적혀 있는 공이 5개이므로

$P(X=3)=\frac{5}{8}$

따라서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	1

2번의 시행 후 $\overline{X}=2$인 경우의 순서쌍은 (1, 3), (2, 2), (3, 1)이므로

$P(\overline{X}=2)=\frac{1}{8}\times\frac{5}{8}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{5}{8}\times\frac{1}{8}=\frac{7}{32}$

0848 답 0.9772

정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

$f(x)=f(60-x)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=30$에 대하여 대칭이므로

$m=30$

모집단이 정규분포 $N(30, \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(30, \frac{\sigma^2}{16}\right)$, 즉 $N\left(30, \left(\frac{\sigma}{4}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z_1=\frac{\overline{X}-30}{\frac{\sigma}{4}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P\left(\overline{X}\le\frac{120+2\sigma}{4}\right)=P\left(\overline{X}\le30+\frac{\sigma}{2}\right)$$
$$=P\left(Z_1\le\frac{30+\frac{\sigma}{2}-30}{\frac{\sigma}{4}}\right)$$
$$=P(Z_1\le2)$$
$$=P(Z_1\le0)+P(0\le Z_1\le2)$$
$$=0.5+P(0\le Z_1\le2) \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편 모집단의 확률변수를 X라 하면 X는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르므로 $Z_2=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

이때 주어진 그래프에서

$P(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)=0.9544$이므로

$P\left(\frac{m-2\sigma-m}{\sigma}\le Z_2\le\frac{m+2\sigma-m}{\sigma}\right)=0.9544$

$P(-2\le Z_2\le2)=0.9544$

$P(-2\le Z_2\le0)+P(0\le Z_2\le2)=0.9544$

$2P(0\le Z_2\le2)=0.9544$

$\therefore P(0\le Z_2\le2)=0.4772$

따라서 ㉠에서 구하는 확률은

$$P\left(\overline{X}\le\frac{120+2\sigma}{4}\right)=0.5+P(0\le Z_1\le2)$$
$$=0.5+0.4772$$
$$=0.9772$$

0849 답 0.245

모비율이 p, 표본의 크기가 64이므로

$E(\hat{p})=p$, $V(\hat{p})=\frac{p(1-p)}{64}$

표본의 크기 64는 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N\left(p, \left(\frac{\sqrt{p(1-p)}}{8}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\hat{p}-p}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{8}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(|\hat{p}-p|\le a\sqrt{p(1-p)})=0.95$에서

$$P\left(\left|\frac{\hat{p}-p}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{8}}\right|\le\frac{a\sqrt{p(1-p)}}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{8}}\right)=0.95$$

$$P\left(|Z|\le\frac{a\sqrt{p(1-p)}}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{8}}\right)=0.95$$

$\therefore P(|Z|\le8a)=0.95$

이때 $P(|Z|\le1.96)=0.95$이므로

$8a=1.96$

$\therefore a=0.245$

0850 답 ①

정규분포 $N(40, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 25인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(40, \frac{\sigma^2}{25}\right)$, 즉 $N\left(40, \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

또 정규분포 $N(60, 12^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 16인 표본의 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(60, \frac{12^2}{16}\right)$, 즉 $N(60, 3^2)$을 따른다.

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-40}{\frac{\sigma}{5}}$, $Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-60}{3}$으로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\ge43)+P(\overline{Y}\ge57)=1$에서

$P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{43-40}{\frac{\sigma}{5}}\right)+P\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{57-60}{3}\right)=1$

$P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{15}{\sigma}\right)+P(Z_{\overline{Y}}\ge-1)=1$

$P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{15}{\sigma}\right)+P(Z_{\overline{Y}}\le1)=1$

즉, $\frac{15}{\sigma}=1$이므로

$\sigma=15$

$$\therefore P(\overline{X}\ge46)=P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{46-40}{3}\right)$$
$$=P(Z_{\overline{X}}\ge2)$$
$$=P(Z_{\overline{X}}\ge0)-P(0\le Z_{\overline{X}}\le2)$$
$$=0.5-0.4772$$
$$=0.0228$$

0851 답 ②

모집단이 정규분포 $N(m, 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{10^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(m, \left(\frac{10}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(m-2\le\overline{X}\le m+4)\le0.8185$에서

$$P\left(\frac{m-2-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{m+4-m}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)\le0.8185$$

$$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\le Z\le\frac{2\sqrt{n}}{5}\right)\le0.8185$$

$$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\le Z\le0\right)+P\left(0\le Z\le\frac{2\sqrt{n}}{5}\right)\le0.8185$$

$$P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)+P\left(0\le Z\le\frac{2\sqrt{n}}{5}\right)\le0.8185$$

이때 $P(0\le Z\le1)=0.3413$, $P(0\le Z\le2)=0.4772$에서

$P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le2)=0.8185$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{5}\le1$, $\sqrt{n}\le5$

$\therefore n\le25$

따라서 자연수 n의 최댓값은 25이다.

0852 답 ⑤

정규분포 $N(m, 10^2)$을 따르는 확률변수 X의 확률밀도함수는 $x=m$에서 최댓값을 가지므로

$m=50$

따라서 모집단이 정규분포 $N(50, 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50, \frac{10^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(50, \left(\frac{10}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-50}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\le54)=0.9772$에서

$$P\left(Z\le\frac{54-50}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)=0.9772$$

$$P\left(Z\le\frac{2\sqrt{n}}{5}\right)=0.9772$$

$$P(Z\le0)+P\left(0\le Z\le\frac{2\sqrt{n}}{5}\right)=0.9772$$

$$0.5+P\left(0\le Z\le\frac{2\sqrt{n}}{5}\right)=0.9772$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{2\sqrt{n}}{5}\right)=0.4772$$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\frac{2\sqrt{n}}{5}=2$, $\sqrt{n}=5$

$\therefore n=25$

$\therefore m+n=50+25=75$

0853 답 600

모비율이 0.6, 표본의 크기가 n이므로

$E(\hat{p})=0.6$, $V(\hat{p})=\frac{0.6\times0.4}{n}=\frac{0.24}{n}$

표본의 크기 n은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.6, \left(\sqrt{\frac{0.24}{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\hat{p}-0.6}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(0.56\le\hat{p}\le0.74)\ge0.95$에서

$$P\left(\frac{0.56-0.6}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\le Z\le\frac{0.74-0.6}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right)\ge0.95$$

$$P\left(\frac{-0.04}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\le Z\le\frac{0.14}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right)\ge0.95$$

이때 $P(|Z|\le2)=0.95$이고 $\frac{0.04}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}<\frac{0.14}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}$이므로 위의 부등식을 만족시키려면

$\frac{0.04}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\ge2$, $\sqrt{\frac{0.24}{n}}\le0.02$

$\frac{0.24}{n}\le0.0004$ $\therefore n\ge\frac{0.24}{0.0004}=600$

따라서 자연수 n의 최솟값은 600이다.

0854 답 209

한 번의 시행에서 2개의 공에 적힌 수의 차를 확률변수 X라 하자.

주사위를 한 번 던질 때, 짝수의 눈이 나올 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이고 홀수의 눈이 나올 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$이다.

주머니에서 꺼낸 두 공에 적힌 숫자를 순서쌍으로 나타내면

(i) $X=1$일 때,

주머니 A에서 (1, 2), (2, 3), (3, 4)를 꺼내거나

주머니 B에서 (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)를 꺼내야 하므로

$$P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{{}_4C_2}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{{}_5C_2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{10}=\frac{9}{20}$$

(ii) $X=2$일 때,

주머니 A에서 (1, 3), (2, 4)를 꺼내거나

주머니 B에서 (1, 3), (2, 4), (3, 5)를 꺼내야 하므로

$$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{{}_4C_2}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{{}_5C_2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{19}{60}$$

(iii) $X=3$일 때,

주머니 A에서 (1, 4)를 꺼내거나

주머니 B에서 (1, 4), (2, 5)를 꺼내야 하므로

$$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{{}_4C_2}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{{}_5C_2}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{10}=\frac{11}{60}$$

(iv) $X=4$일 때,

주머니 B에서 (1, 5)를 꺼내야 하므로

$$P(X=4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{{}_5C_2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{20}$$

(i)~(iv)에서 확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{9}{20}$	$\frac{19}{60}$	$\frac{11}{60}$	$\frac{1}{20}$	1

2번의 시행 후 $\overline{X}=2.5$인 경우, 즉 두 수의 합이 5인 경우의 순서쌍 (X_1, X_2)는 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)이므로

$$P(\overline{X}=2.5)=\frac{9}{20}\times\frac{1}{20}+\frac{19}{60}\times\frac{11}{60}+\frac{11}{60}\times\frac{19}{60}+\frac{1}{20}\times\frac{9}{20}$$
$$=\frac{9}{400}+\frac{209}{3600}+\frac{209}{3600}+\frac{9}{400}=\frac{29}{180}$$

따라서 $p=180$, $q=29$이므로

$p+q=180+29=209$

0855 답 ⑤

ㄱ. 표본의 크기가 n이므로 $V(\overline{X})=\frac{2^2}{n}=\frac{4}{n}$

ㄴ. 정규분포 $N(10, 2^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(10, \frac{2^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(10, \left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

따라서 $\overline{X}$의 정규분포곡선은 직선 $x=10$에 대하여 대칭이므로

$P(\overline{X}\le 10-a)=P(\overline{X}\ge 10+a)$

ㄷ. $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\ge a)=P(Z\le b)$에서

$$P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}\right)=P(Z\le b)$$

즉, $\frac{a-10}{\frac{2}{\sqrt{n}}}=-b$이므로

$$a-10=-\frac{2}{\sqrt{n}}b \qquad \therefore\ a+\frac{2}{\sqrt{n}}b=10$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0856 답 ②

임의추출한 400명 중에서 학교 축제 공연에 참여한 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율이 0.2, 표본의 크기가 400이므로

$$E(\hat{p})=0.2,\ V(\hat{p})=\frac{0.2\times 0.8}{400}=0.0004=0.02^2$$

표본의 크기 400은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.2, 0.02^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\hat{p}-0.2}{0.02}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(\hat{p}\le 0.23)=P\left(Z\le\frac{0.23-0.2}{0.02}\right)=P(Z\le 1.5)$$
$$=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.5)$$
$$=0.5+0.4332=0.9332$$

0857 답 0.8413

임의추출한 16명의 학생이 등교할 때 걸리는 시간의 평균을 $\overline{X}$라 하면 모집단이 정규분포 $N(36, 8^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(36, \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $N(36, 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-36}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(\overline{X}\ge 34)=P\left(Z\ge\frac{34-36}{2}\right)$$
$$=P(Z\ge -1)=P(Z\le 1)$$
$$=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5+0.3413=0.8413$$

0858 답 0.1587

임의추출한 사과 100개 중 특급 사과의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율이 0.2, 표본의 크기가 100이므로

$$E(\hat{p})=0.2,\ V(\hat{p})=\frac{0.2\times 0.8}{100}=0.0016=0.04^2$$

표본의 크기 100은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.2, 0.04^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$P(\hat{p}\ge 0.24)=P\left(Z\ge\frac{0.24-0.2}{0.04}\right)=P(Z\ge 1)$$
$$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)$$
$$=0.5-0.3413=0.1587$$

0859 답 ②

A 제품의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m, 4^2)$을 따르므로 임의추출한 9개의 평균 무게를 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{4^2}{9}\right)$, 즉 $N\left(m, \left(\frac{4}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

B 제품의 무게를 확률변수 Y라 하면 Y는 정규분포 $N(3m, 6^2)$을 따르므로 임의추출한 9개의 평균 무게를 $\overline{Y}$라 하면 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(3m, \frac{6^2}{9}\right)$, 즉 $N(3m, 2^2)$을 따른다.

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-m}{\frac{4}{3}}$, $Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-3m}{2}$으로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(\overline{X}\ge k)=P(\overline{Y}\le k)$에서

$$P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{k-m}{\frac{4}{3}}\right)=P\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{k-3m}{2}\right)$$

$$P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{k-m}{\frac{4}{3}}\right)=P\left(Z_{\overline{Y}}\ge-\frac{k-3m}{2}\right)$$

즉, $\frac{k-m}{\frac{4}{3}}=-\frac{k-3m}{2}$이므로 $\frac{3(k-m)}{4}=-\frac{k-3m}{2}$

$3k-3m=-2k+6m$, $5k=9m$

$$\therefore\ \frac{k}{m}=\frac{9}{5}=1.8$$

0860 답 ①

임의추출한 25개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 모집단이 정규분포 $N(120, 10^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(120, \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(120, 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-120}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(k\le\overline{X}\le122)=0.8185$에서

$P\left(\frac{k-120}{2}\le Z\le\frac{122-120}{2}\right)=0.8185$

$P\left(\frac{k-120}{2}\le Z\le1\right)=0.8185$

$P\left(\frac{k-120}{2}\le Z\le0\right)+P(0\le Z\le1)=0.8185$

$P\left(0\le Z\le-\frac{k-120}{2}\right)+0.3413=0.8185$

$\therefore P\left(0\le Z\le-\frac{k-120}{2}\right)=0.4772$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$-\frac{k-120}{2}=2$

$k-120=-4$

$\therefore k=116$

0861 답 ③

확률변수 X가 따르는 정규분포를 $N(m, \sigma^2)$이라 하면

$P(X\ge3.4)=\frac{1}{2}$에서

$m=3.4$

따라서 확률변수 X는 정규분포 $N(3.4, \sigma^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-3.4}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(X\le3.9)+P(Z\le-1)=1$에서

$P\left(Z\le\frac{3.9-3.4}{\sigma}\right)+P(Z\le-1)=1$

$P\left(Z\le\frac{0.5}{\sigma}\right)+P(Z\ge1)=1$

즉, $\frac{0.5}{\sigma}=1$이므로

$\sigma=0.5$

모집단이 정규분포 $N(3.4, 0.5^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(3.4, \frac{0.5^2}{25}\right)$, 즉 $N(3.4, 0.1^2)$을 따른다.

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-3.4}{0.1}$로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\ge3.55)&=P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{3.55-3.4}{0.1}\right)\\&=P(Z_{\overline{X}}\ge1.5)\\&=P(Z_{\overline{X}}\ge0)-P(0\le Z_{\overline{X}}\le1.5)\\&=0.5-0.4332\\&=0.0668\end{aligned}$$

0862 답 ④

임의추출한 1600명 중에서 광고를 클릭한 방문자의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율이 0.2, 표본의 크기가 1600이므로

$E(\hat{p})=0.2$, $V(\hat{p})=\frac{0.2\times0.8}{1600}=0.0001=0.01^2$

표본의 크기 1600은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.2, 0.01^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\hat{p}-0.2}{0.01}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(\hat{p}\le k)=0.0668$에서

$P\left(Z\le\frac{k-0.2}{0.01}\right)=0.0668$

$P\left(Z\ge-\frac{k-0.2}{0.01}\right)=0.0668$

$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le-\frac{k-0.2}{0.01}\right)=0.0668$

$0.5-P\left(0\le Z\le-\frac{k-0.2}{0.01}\right)=0.0668$

$\therefore P\left(0\le Z\le-\frac{k-0.2}{0.01}\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$-\frac{k-0.2}{0.01}=1.5$

$k-0.2=-0.015$

$\therefore k=0.185$

0863 답 2012

약품 1병의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

㈎에서 $P(X\ge2048)=0.1587$이므로

$P\left(Z\ge\frac{2048-m}{\sigma}\right)=0.1587$

$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{2048-m}{\sigma}\right)=0.1587$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{2048-m}{\sigma}\right)=0.1587$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{2048-m}{\sigma}\right)=0.3413$

이때 $P(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$\frac{2048-m}{\sigma}=1$

$\therefore m+\sigma=2048$ …… ㉠ …… ⓘ

한편 크기가 16인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{\sigma^2}{16}\right)$, 즉 $N\left(m, \left(\frac{\sigma}{4}\right)^2\right)$을 따르므로 $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-m}{\frac{\sigma}{4}}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

㈏에서 $P(\overline{X}\le2039)=0.9772$이므로

$P\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{2039-m}{\frac{\sigma}{4}}\right)=0.9772$

$P(Z_{\overline{X}}\le0)+P\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{4(2039-m)}{\sigma}\right)=0.9772$

$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\dfrac{4(2039-m)}{\sigma}\right)=0.9772$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\dfrac{4(2039-m)}{\sigma}\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\dfrac{4(2039-m)}{\sigma}=2$

$\therefore\ 2m+\sigma=4078$ ····· ㉡ ····· ii

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=2030,\ \sigma=18$

$\therefore\ m-\sigma=2030-18=2012$ ····· iii

채점 기준	
i (가)를 이용하여 m과 σ의 관계식 구하기	40 %
ii (나)를 이용하여 m과 σ의 관계식 구하기	40 %
iii $m-\sigma$의 값 구하기	20 %

0864 답 225

모비율이 0.2, 표본의 크기가 n이므로

$\mathrm{E}(\hat{p})=0.2,\ \mathrm{V}(\hat{p})=\dfrac{0.2\times0.8}{n}=\dfrac{0.16}{n}=\left(\dfrac{0.4}{\sqrt{n}}\right)^2$

표본의 크기 n은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.2,\ \left(\dfrac{0.4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\hat{p}-0.2}{\dfrac{0.4}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로

$\mathrm{P}(\hat{p}\ge0.24)=0.0668$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{0.24-0.2}{\dfrac{0.4}{\sqrt{n}}}\right)=0.0668$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{\sqrt{n}}{10}\right)=0.0668$

$\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{10}\right)=0.0668$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{10}\right)=0.0668$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{10}\right)=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{\sqrt{n}}{10}=1.5$

$\sqrt{n}=15$

$\therefore\ n=225$

0865 답 ③

임의추출한 비누 16개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(150,\ 10^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(150,\ \dfrac{10^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(150,\ \left(\dfrac{5}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-150}{\dfrac{5}{2}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

완성된 비누 세트의 무게는 $16\overline{X}+100$이므로 비누 세트가 정상 제품으로 판정될 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(16\overline{X}+100\ge2440)&=\mathrm{P}(16\overline{X}\ge2340)\\&=\mathrm{P}(\overline{X}\ge146.25)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{146.25-150}{2.5}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge-1.5)\\&=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le0)+\mathrm{P}(Z\ge0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)+0.5\\&=0.4332+0.5\\&=0.9332\end{aligned}$$

따라서 생산된 10000개의 세트 중 판매 가능한 상자의 개수는

$10000\times0.9332=9332$

0866 답 ⑤

모비율이 0.6, 표본의 크기가 n이므로

$\mathrm{E}(\hat{p})=0.6,\ \mathrm{V}(\hat{p})=\dfrac{0.6\times0.4}{n}=\dfrac{0.24}{n}=\left(\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}\right)^2$

표본의 크기 n은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(0.6,\ \left(\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\hat{p}-0.6}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\hat{p}\ge0.59)=0.6915$에서

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{0.59-0.6}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}}\right)=0.6915$

$\mathrm{P}\left(Z\ge-\dfrac{0.01}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}}\right)=0.6915$

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{0.01}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}}\right)=0.6915$

$\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{0.01}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}}\right)=0.6915$

$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{0.01}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}}\right)=0.6915$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{0.01}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}}\right)=0.1915$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)=0.1915$이므로

$\dfrac{0.01}{\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}}=0.5$

$\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}=\dfrac{1}{50}$

$\dfrac{0.24}{n}=\dfrac{1}{2500}$

$\therefore\ n=600$

0867 답 ③

모집단이 정규분포 $N(80, \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(80, \frac{\sigma^2}{25}\right)$, 즉 $N\left(80, \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-80}{\frac{\sigma}{5}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(80\le\overline{X}\le81.2)=0.4772$에서

$P\left(\frac{80-80}{\frac{\sigma}{5}}\le Z\le\frac{81.2-80}{\frac{\sigma}{5}}\right)=0.4772$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{6}{\sigma}\right)=0.4772$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\frac{6}{\sigma}=2$

$\therefore \sigma=3$

0868 답 ④

감자튀김 한 봉지의 무게를 X라 하면 확률변수 X는 정규분포 $N(200, 20^2)$을 따른다.

ㄱ. 표본평균 $\overline{X_A}$와 $\overline{X_B}$는 서로 다른 표본에서 얻은 확률변수이므로 그 값이 항상 같다고 할 수 없다.

ㄴ. 세 지점 A, B, C에서 추출한 표본의 크기가 각각 16, 64, 100이므로 각 지점의 표본평균 $\overline{X_A}$, $\overline{X_B}$, $\overline{X_C}$에 대하여

$\sigma(\overline{X_A})=\frac{20}{\sqrt{16}}=5$

$\sigma(\overline{X_B})=\frac{20}{\sqrt{64}}=\frac{5}{2}$

$\sigma(\overline{X_C})=\frac{20}{\sqrt{100}}=2$

즉, $\sigma(\overline{X_A})>\sigma(\overline{X_B})>\sigma(\overline{X_C})$이므로 C 지점의 표본평균 $\overline{X_C}$의 표준편차가 세 지점 중에서 가장 작다.

ㄷ. 세 표본평균 $\overline{X_A}$, $\overline{X_B}$, $\overline{X_C}$가 각각 정규분포 $N(200, 5^2)$, $N\left(200, \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$, $N(200, 2^2)$을 따르므로

$Z_A=\frac{\overline{X_A}-200}{5}$, $Z_B=\frac{\overline{X_B}-200}{\frac{5}{2}}$, $Z_C=\frac{\overline{X_C}-200}{2}$으로 놓으면 세 확률변수 Z_A, Z_B, Z_C는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

A 지점의 표본평균과 모평균의 차가 5 이하일 확률은

$P(|\overline{X_A}-200|\le5)=P\left(\left|\frac{\overline{X_A}-200}{5}\right|\le1\right)$

$=P(|Z_A|\le1)$

C 지점의 표본평균과 모평균의 차가 5 이하일 확률은

$P(|\overline{X_C}-200|\le5)=P\left(\left|\frac{\overline{X_C}-200}{2}\right|\le\frac{5}{2}\right)$

$=P(|Z_C|\le2.5)$

이때 $P(-1\le Z\le1)<P(-2.5\le Z\le2.5)$이므로 표본평균과 모평균의 차가 5 이하일 확률은 C 지점이 A 지점보다 높다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0869 답 ⑤

임의추출한 64명의 일주일 근무 시간의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 모집단이 정규분포 $N(m, 6^2)$을 따르므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{6^2}{64}\right)$, 즉 $N\left(m, \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{3}{4}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\ge42.5)=0.9772$에서

$P\left(Z\ge\frac{42.5-m}{\frac{3}{4}}\right)=0.9772$

$P\left(Z\ge\frac{170-4m}{3}\right)=0.9772$

$P\left(Z\le\frac{4m-170}{3}\right)=0.9772$

$P(Z\le0)+P\left(0\le Z\le\frac{4m-170}{3}\right)=0.9772$

$0.5+P\left(0\le Z\le\frac{4m-170}{3}\right)=0.9772$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{4m-170}{3}\right)=0.4772$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\frac{4m-170}{3}=2$, $4m-170=6$

$4m=176$ $\therefore m=44$

0870 답 25

모집단이 정규분포 $N(8, 1.2^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(8, \frac{1.2^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(8, \left(\frac{1.2}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$P(7.76\le\overline{X}\le8.24)\ge0.6826$에서

$P\left(\frac{7.76-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{8.24-8}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\right)\ge0.6826$

$P\left(-\frac{\sqrt{n}}{5}\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge0.6826$

$2P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge0.6826$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{5}\right)\ge0.3413$

이때 $P(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{5}\ge1$, $\sqrt{n}\ge5$

$\therefore n\ge25$

따라서 구하는 n의 최솟값은 25이다.

0871 답 144

모집단이 정규분포 $N(450, 24^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(450, \frac{24^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(450, \left(\frac{24}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-450}{\frac{24}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(|\overline{X}-450|\le 3)\le 0.8664$에서

$P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-450}{\frac{24}{\sqrt{n}}}\right|\le\dfrac{3}{\frac{24}{\sqrt{n}}}\right)\le 0.8664$

$P\left(|Z|\le\dfrac{\sqrt{n}}{8}\right)\le 0.8664$, $P\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{8}\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{8}\right)\le 0.8664$

$P\left(-\dfrac{\sqrt{n}}{8}\le Z\le 0\right)+P\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{8}\right)\le 0.8664$

$2P\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{8}\right)\le 0.8664$

$\therefore P\left(0\le Z\le\dfrac{\sqrt{n}}{8}\right)\le 0.4332$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{\sqrt{n}}{8}\le 1.5$, $\sqrt{n}\le 12$ $\quad\therefore n\le 144$

따라서 자연수 n의 최댓값은 144이다.

0872 답 150

모비율이 0.4, 표본의 크기가 n이므로

$E(\hat{p})=0.4$, $V(\hat{p})=\dfrac{0.4\times 0.6}{n}=\dfrac{0.24}{n}=\left(\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}\right)^2$

표본의 크기 n은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.4, \left(\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\hat{p}-0.4}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}$로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(\hat{p}\le 0.46)=0.9332$에서

$P\left(Z\le\dfrac{0.46-0.4}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right)=0.9332$

$P\left(Z\le\dfrac{0.06}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right)=0.9332$

$P(Z\le 0)+P\left(0\le Z\le\dfrac{0.06}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right)=0.9332$

$0.5+P\left(0\le Z\le\dfrac{0.06}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right)=0.9332$

$\therefore P\left(0\le Z\le\dfrac{0.06}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{0.06}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}=1.5$, $\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}=\dfrac{1}{25}$

$\dfrac{0.24}{n}=\dfrac{1}{625}$ $\quad\therefore n=150$

0873 답 ④

모집단이 정규분포 $N(150, 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(150, \dfrac{12^2}{16}\right)$, 즉 $N(150, 3^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-150}{3}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(|\overline{X}-150|\le k)=0.8664$에서

$P\left(\left|\dfrac{\overline{X}-150}{3}\right|\le\dfrac{k}{3}\right)=0.8664$

$P\left(|Z|\le\dfrac{k}{3}\right)=0.8664$

$P\left(-\dfrac{k}{3}\le Z\le\dfrac{k}{3}\right)=0.8664$

$P\left(-\dfrac{k}{3}\le Z\le 0\right)+P\left(0\le Z\le\dfrac{k}{3}\right)=0.8664$

$2P\left(0\le Z\le\dfrac{k}{3}\right)=0.8664$

$\therefore P\left(0\le Z\le\dfrac{k}{3}\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{k}{3}=1.5$ $\quad\therefore k=4.5$

0874 답 ①

확률변수 X가 정규분포 $N(m, 4^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-m}{4}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(m\le X\le a)=0.3413$에서

$P\left(\dfrac{m-m}{4}\le Z\le\dfrac{a-m}{4}\right)=0.3413$

$\therefore P\left(0\le Z\le\dfrac{a-m}{4}\right)=0.3413$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\dfrac{a-m}{4}=1$ $\quad\therefore a=m+4$

임의추출한 제품 16개의 길이의 표본평균을 $\overline{X}$라 하면 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \dfrac{4^2}{16}\right)$, 즉 $N(m, 1^2)$을 따른다.

따라서 $Z_{\overline{X}}=\overline{X}-m$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\ge a-2)&=P(\overline{X}\ge m+2)\ (\because a=m+4)\\&=P(Z_{\overline{X}}\ge m+2-m)\\&=P(Z_{\overline{X}}\ge 2)\\&=P(Z_{\overline{X}}\ge 0)-P(0\le Z_{\overline{X}}\le 2)\\&=0.5-0.4772\\&=0.0228\end{aligned}$$

0875 답 400

A 마을의 모비율이 0.1, 표본의 크기가 900이므로

$E(\hat{p}_A)=0.1$, $V(\hat{p}_A)=\dfrac{0.1\times 0.9}{900}=0.0001=0.01^2$

표본의 크기 900은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}_A$은 근사적으로 정규분포 $N(0.1, 0.01^2)$을 따른다.

$Z_A=\dfrac{\hat{p}_A-0.1}{0.01}$로 놓으면 확률변수 Z_A는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

또 B 마을의 모비율이 0.2, 표본의 크기가 n이므로

$E(\hat{p}_B)=0.2$, $V(\hat{p}_B)=\dfrac{0.2\times 0.8}{n}=\dfrac{0.16}{n}=\left(\dfrac{0.4}{\sqrt{n}}\right)^2$

표본의 크기 n은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}_B$은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.2,\ \left(\frac{0.4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z_B=\frac{\hat{p}_B-0.2}{\frac{0.4}{\sqrt{n}}}$로 놓으면 확률변수 Z_B는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(\hat{p}_A\geq 0.12)=P(\hat{p}_B\leq 0.16)$에서

$$P\left(Z_A\geq\frac{0.12-0.1}{0.01}\right)=P\left(Z_B\leq\frac{0.16-0.2}{\frac{0.4}{\sqrt{n}}}\right)$$

$$P(Z_A\geq 2)=P\left(Z_B\leq-\frac{\sqrt{n}}{10}\right)$$

$$P(Z_A\geq 2)=P\left(Z_B\geq\frac{\sqrt{n}}{10}\right)$$

즉, $2=\frac{\sqrt{n}}{10}$이므로

$\sqrt{n}=20$ $\therefore n=400$

최고수준 도전 기출 212~213쪽

0876 답 0.5999

전략 (가)에서 여사건을 이용하여 확률을 구하고, (나)에서 크기가 4인 표본의 표본평균이 따르는 정규분포를 이용하여 확률을 구한다.

모집단의 확률변수를 X라 하면 X가 정규분포 $N(10,\ 10^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-10}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

X가 5보다 작을 확률은

$$\begin{aligned}P(X<5)&=P\left(Z_X<\frac{5-10}{10}\right)\\&=P(Z_X<-0.5)\\&=P(Z_X>0.5)\\&=P(Z_X\geq 0)-P(0\leq Z_X\leq 0.5)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore P(X\geq 5)&=1-P(X<5)\\&=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}\end{aligned}$$

이때 (가)에서 모집단에서 임의추출한 표본 X_1, X_2, X_3, X_4 중에서 5보다 작은 것이 적어도 하나 존재하는 사건의 여사건은 X_1, X_2, X_3, X_4 모두 5보다 크거나 같은 사건이므로 X_1, X_2, X_3, X_4 모두 5보다 크거나 같을 확률은

$\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}\times\frac{7}{10}=\frac{2401}{10000}=0.2401$ …… ㉠

한편 표본평균을 $\overline{X}$라 하면

$\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}=\overline{X}$

또 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(10,\ \frac{10^2}{4}\right)$, 즉 $N(10,\ 5^2)$을 따른다.

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-10}{5}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 (나)에서

$$\begin{aligned}&P(X_1+X_2+X_3+X_4>20)\\&=P\left(\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}>5\right)\\&=P(\overline{X}>5)=P\left(Z_{\overline{X}}>\frac{5-10}{5}\right)\\&=P(Z_{\overline{X}}>-1)=P(Z_{\overline{X}}<1)\\&=P(Z_{\overline{X}}\leq 0)+P(0\leq Z_{\overline{X}}\leq 1)\\&=\frac{1}{2}+\frac{17}{50}=\frac{84}{100}=0.84\end{aligned}$$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 X_1, X_2, X_3, X_4가 모두 5보다 크거나 같으면 $X_1+X_2+X_3+X_4\geq 20$이므로 (가), (나)를 모두 만족시키는 확률은 $X_1+X_2+X_3+X_4\geq 20$을 만족시키는 확률에서 X_1, X_2, X_3, X_4가 모두 5보다 크거나 같을 확률을 빼면 된다.

따라서 구하는 확률은

$0.84-0.2401=0.5999$

0877 답 27

전략 임의로 꺼낸 한 개의 공에 적혀 있는 수를 Y, 표본의 크기가 2인 표본평균을 $\overline{Y}$로 놓고 (가), (나)와 X와 Y의 관계식을 이용하여 Y의 확률분포를 구한다. Y의 분산을 구하고, 표본평균의 분산을 이용하여 X의 분산을 구한다.

주머니에서 임의로 꺼낸 한 개의 공에 적혀 있는 수를 확률변수 Y라 하고, $P(Y=1)=a$, $P(Y=2)=b$, $P(Y=3)=c$, $P(Y=4)=d$라 하자.

$X=2$일 때는 확인한 두 수가 모두 1이어야 하므로

$P(X=2)=a\times a=a^2$

(가)에서 $a^2=\frac{1}{25}$

$\therefore a=\frac{1}{5}$ ($\because 0\leq a\leq 1$)

$X=8$일 때는 확인한 두 수가 모두 4이어야 하므로

$P(X=8)=d\times d=d^2$

(가)에서 $4d^2=\frac{1}{25}$

$\therefore d=\frac{1}{10}$ ($\because 0\leq d\leq 1$)

한편 확률의 총합은 1이므로

$a+b+c+d=1$에서 $\frac{1}{5}+b+c+\frac{1}{10}=1$

$\therefore b+c=\frac{7}{10}$ …… ㉠

확인한 두 수의 표본평균을 $\overline{Y}$라 하면 $X=2\overline{Y}$이므로

$$\begin{aligned}E(X)&=E(2\overline{Y})=2E(\overline{Y})=2E(Y)\\&=2\left(1\times\frac{1}{5}+2\times b+3\times c+4\times\frac{1}{10}\right)\\&=2\left(\frac{3}{5}+2b+3c\right)\end{aligned}$$

(나)에서 $E(X)=5$이므로 $2\left(\frac{3}{5}+2b+3c\right)=5$

$\therefore 2b+3c=\frac{19}{10}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=\frac{1}{5}$, $c=\frac{1}{2}$

$\mathrm{E}(Y)=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)=\frac{5}{2}$

$\mathrm{E}(Y^2)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{10}=\frac{71}{10}$

$\therefore\ \mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=\frac{71}{10}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{17}{20}$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(2\overline{Y})=2^2\mathrm{V}(\overline{Y})=2\mathrm{V}(Y)=2\times\frac{17}{20}=\frac{17}{10}$

따라서 $p=10$, $q=17$이므로

$p+q=10+17=27$

0878 답 430

전략 (가)를 이용하여 확률변수 $\overline{X}$의 평균을 구하고 $\overline{X}$, $\overline{Y}$가 따르는 정규분포를 구한 후, 표준화를 이용하여 (나)를 만족시키는 k의 값을 구한다.

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 9인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{9}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{3}\right)^2\right)$을 따른다.

또 표본의 크기가 16인 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(m, \left(\frac{\sigma}{4}\right)^2\right)$을 따른다.

한편 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

$\mathrm{P}(\overline{X}\ge15+x)=\mathrm{P}(\overline{X}\le25-x)$이므로

$m=\frac{(15+x)+(25-x)}{2}=20$

즉, $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-20}{\frac{\sigma}{3}}$, $Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-20}{\frac{\sigma}{4}}$으로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

(나)에서 $\mathrm{P}(\overline{X}\le18)+\mathrm{P}(\overline{Y}\le k)=1$이므로

$\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{18-20}{\frac{\sigma}{3}}\right)+\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{k-20}{\frac{\sigma}{4}}\right)=1$

$\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\le-\frac{6}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{4(k-20)}{\sigma}\right)=1$

$\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{6}{\sigma}\right)+\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{4(k-20)}{\sigma}\right)=1$

즉, $\frac{6}{\sigma}=\frac{4(k-20)}{\sigma}$이므로

$6=4(k-20)$

$\therefore\ k=\frac{43}{2}$

$\therefore\ mk=20\times\frac{43}{2}=430$

0879 답 ③

전략 제품 1개가 불량품일 확률을 구하여 이항분포와 정규분포 사이의 관계를 적용하고, 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포와 비교하여 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(100, 10^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-100}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z_X는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

제품 1개가 불량품일 확률은

$\mathrm{P}(X\le80)=\mathrm{P}\left(Z_X\le\frac{80-100}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_X\le-2)=\mathrm{P}(Z_X\ge2)$

$=\mathrm{P}(Z_X\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z_X\le2)$

$=0.5-0.48=0.02$

한편 표본의 크기가 400이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(100, \frac{10^2}{400}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(100, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

또 불량품의 개수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}(400, 0.02)$를 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=400\times0.02=8$

$\mathrm{V}(Y)=400\times0.02\times0.98=2.8^2$

이때 표본의 크기 400은 충분히 크므로 확률변수 Y는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(8, 2.8^2)$을 따른다.

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-100}{\frac{1}{2}}$, $Z_Y=\frac{Y-8}{2.8}$로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\overline{X}}$, Z_Y는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

ㄱ. $\mathrm{P}(\overline{X}\ge101)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{101-100}{\frac{1}{2}}\right)=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge2)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le2)$

$=0.5-0.48=0.02$

ㄴ. $\mathrm{P}(\overline{X}\le99)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{99-100}{\frac{1}{2}}\right)=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le-2)$

$=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\ge2)$

$\mathrm{P}(Y\ge12)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{12-8}{2.8}\right)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\frac{10}{7}\right)$

이때 $\mathrm{P}(Z\ge2)\ne\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{10}{7}\right)$이므로

$\mathrm{P}(\overline{X}\le99)\ne\mathrm{P}(Y\ge12)$

ㄷ. $\mathrm{P}(8-k\le Y\le8+k)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{8-k-8}{2.8}\le Z_Y\le\frac{8+k-8}{2.8}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{k}{2.8}\le Z_Y\le\frac{k}{2.8}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{k}{2.8}\le Z_Y\le0\right)+\left(0\le Z_Y\le\frac{k}{2.8}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\frac{k}{2.8}\right)$

$=2\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\frac{5}{14}k\right)$

$\mathrm{P}(100-k\le\overline{X}\le100+k)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{100-k-100}{\frac{1}{2}}\le Z_{\overline{X}}\le\frac{100+k-100}{\frac{1}{2}}\right)$

$=\mathrm{P}(-2k\le Z_{\overline{X}}\le2k)$

$=\mathrm{P}(-2k\le Z_{\overline{X}}\le0)+\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le2k)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le2k)$

이때 양수 k에 대하여 $\frac{5}{14}k<2k$이므로

$2\mathrm{P}\left(0\le Z_Y\le\frac{5}{14}k\right)<2\mathrm{P}(0\le Z_{\overline{X}}\le2k)$

$\therefore\ \mathrm{P}(8-k\le Y\le8+k)<\mathrm{P}(100-k\le\overline{X}\le100+k)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0880 답 400

전략 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구하고 $f(m)$을 표준화한 후, 정규분포곡선의 대칭성을 이용하여 n의 최솟값을 구한다.

모집단이 정규분포 $N(m, 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{4^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(m, \left(\frac{4}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-m}{\frac{4}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$f(m)=P\left(\overline{X}\le\frac{5}{\sqrt{n}}\right)=P\left(Z\le\frac{\frac{5}{\sqrt{n}}-m}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right)=P\left(Z\le\frac{5-m\sqrt{n}}{4}\right)$$

$\therefore f(0)=P\left(Z\le\frac{5}{4}\right)=P(Z\le1.25)$,

$f(0.5)=P\left(Z\le\frac{5-0.5\sqrt{n}}{4}\right)$

이때 $f(0)+f(0.5)\le1$에서

$P(Z\le1.25)+P\left(Z\le\frac{5-0.5\sqrt{n}}{4}\right)\le1$

$P\left(Z\le\frac{5-0.5\sqrt{n}}{4}\right)\le1-P(Z\le1.25)$

$P\left(Z\le\frac{5-0.5\sqrt{n}}{4}\right)\le P(Z\ge1.25)$

$P\left(Z\le\frac{5-0.5\sqrt{n}}{4}\right)\le P(Z\le-1.25)$

즉, $\frac{5-0.5\sqrt{n}}{4}\le-1.25$이므로

$5-0.5\sqrt{n}\le-5$, $0.5\sqrt{n}\ge10$

$\sqrt{n}\ge20$ $\therefore n\ge400$

따라서 자연수 n의 최솟값은 400이다.

0881 답 ③

전략 두 확률변수 X, $\overline{X}$가 따르는 정규분포를 구하여 $G(k)$, $H(k)$를 각각 표준화한 후, ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판별한다.

확률변수 X가 정규분포 $N(m, 30^2)$을 따르므로 크기가 9인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{30^2}{9}\right)$, 즉 $N(m, 10^2)$을 따른다.

$Z_X=\frac{X-m}{30}$, $Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-m}{10}$으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, $Z_{\overline{X}}$는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$G(k)=P(X\le m+30k)$

$=P\left(Z_X\le\frac{m+30k-m}{30}\right)=P(Z_X\le k)$

$H(k)=P(\overline{X}\ge m-30k)$

$=P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{m-30k-m}{10}\right)=P(Z_{\overline{X}}\ge-3k)$

ㄱ. $G(0)=P(Z_X\le0)=0.5$

$H(0)=P(Z_{\overline{X}}\ge0)=0.5$

$\therefore G(0)=H(0)$

ㄴ. $G(3)=P(Z_X\le3)$

$H(1)=P(Z_{\overline{X}}\ge-3)=P(Z_{\overline{X}}\le3)$

$\therefore G(3)=H(1)$

ㄷ. $G(1)=P(Z_X\le1)$, $H(-1)=P(Z_{\overline{X}}\ge3)$이므로

$G(1)+H(-1)=P(Z_X\le1)+P(Z_{\overline{X}}\ge3)$

$<P(Z_X\le1)+P(Z_{\overline{X}}\ge1)=1$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0882 답 ①

전략 X, Y가 따르는 정규분포를 이용하여 $\overline{X}$, $\overline{Y}$가 따르는 정규분포를 구한 후, 표준화를 이용하여 확률을 구한다.

확률변수 X의 표준편차를 σ라 하면 (나)에서 확률변수 Y의 표준편차는 $\frac{3\sigma}{2}$이다.

확률변수 X는 정규분포 $N(400, \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 n이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(400, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(400, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

또 확률변수 Y는 정규분포 $N\left(440, \left(\frac{3\sigma}{2}\right)^2\right)$을 따르고 표본의 크기가 $9n$이므로 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(440, \frac{\left(\frac{3\sigma}{2}\right)^2}{9n}\right)$, 즉 $N\left(440, \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-400}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\le392)=0.0228$에서

$$P\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{392-400}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right)=0.0228$$

$P\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{-8\sqrt{n}}{\sigma}\right)=0.0228$

$P\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{8\sqrt{n}}{\sigma}\right)=0.0228$

$P(Z_{\overline{X}}\ge0)-P\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{8\sqrt{n}}{\sigma}\right)=0.0228$

$0.5-P\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{8\sqrt{n}}{\sigma}\right)=0.0228$

$\therefore P\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{8\sqrt{n}}{\sigma}\right)=0.4772$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\frac{8\sqrt{n}}{\sigma}=2$ $\therefore \frac{\sigma}{\sqrt{n}}=4$

$\therefore \frac{\sigma}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{1}{2}\times4=2$

따라서 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N(440, 2^2)$을 따른다.

$Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-440}{2}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{Y}}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로

$$P(\overline{Y}\ge439)=P\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{439-440}{2}\right)$$

$=P(Z_{\overline{Y}}\ge-0.5)$

$=P(Z_{\overline{Y}}\le0.5)$

$=P(Z_{\overline{Y}}\le0)+P(0\le Z_{\overline{Y}}\le0.5)$

$=0.5+0.1915$

$=0.6915$

13 모평균과 모비율의 추정

난이도별 필수 기출 215~222쪽

0883 답 ①

표본비율이 0.2, 표본의 크기가 100이고, 표본의 크기 100은 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.2-1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}\le p\le 0.2+1.96\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}$$

$\therefore\ 0.1216\le p\le 0.2784$

0884 답 10.32

모표준편차가 12, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\times\frac{12}{\sqrt{36}}=10.32$$

0885 답 ③

표본평균이 $\bar{x}$, 모표준편차가 $3\sqrt{2}$, 표본의 크기가 72이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x}-1.96\times\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{72}}\le m\le\bar{x}+1.96\times\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{72}}$$

$\therefore\ \bar{x}-0.98\le m\le\bar{x}+0.98$

이 신뢰구간이 $\bar{x}-c\le m\le\bar{x}+c$와 같으므로 $c=0.98$

다른 풀이

모표준편차가 $3\sqrt{2}$, 표본의 크기가 72이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times1.96\times\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{72}}=1.96$$

즉, $\bar{x}+c-(\bar{x}-c)=1.96$이므로

$2c=1.96 \quad \therefore\ c=0.98$

0886 답 ③

표본비율이 $\hat{p}=\frac{2}{5}$, 표본의 크기가 2400이고, 표본의 크기 2400은 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}}{2400}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}}{2400}}$$

$\therefore\ \hat{p}-0.0196\le p\le\hat{p}+0.0196$

이 신뢰구간이 $a\le p\le a+k$와 같으므로

$a=\hat{p}-0.0196,\ a+k=\hat{p}+0.0196$

$\therefore\ k=(a+k)-a=(\hat{p}+0.0196)-(\hat{p}-0.0196)=0.0392$

다른 풀이

표본비율이 $\hat{p}=\frac{2}{5}$, 표본의 크기가 2400이고, 표본의 크기 2400은 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times1.96\sqrt{\frac{\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}}{2400}}=0.0392 \quad \therefore\ k=(a+k)-a=0.0392$$

0887 답 ④

표본평균을 $\bar{x}$라 하면 모표준편차가 5, 표본의 크기가 225이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\bar{x}-2.58\times\frac{5}{\sqrt{225}}\le m\le\bar{x}+2.58\times\frac{5}{\sqrt{225}}$$

$\therefore\ \bar{x}-0.86\le m\le\bar{x}+0.86$

이 신뢰구간이 $a\le m\le b$와 같으므로

$a=\bar{x}-0.86,\ b=\bar{x}+0.86$

$\therefore\ b-a=(\bar{x}+0.86)-(\bar{x}-0.86)=1.72$

다른 풀이

모표준편차가 5, 표본의 크기가 225이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times2.58\times\frac{5}{\sqrt{225}}=1.72$$

$\therefore\ b-a=1.72$

0888 답 ②

표본평균이 $\bar{x}$, 모표준편차가 20, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x}-1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le\bar{x}+1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}$$

$\therefore\ \bar{x}-3.92\le m\le\bar{x}+3.92$

이 신뢰구간이 $146.08\le m\le a$와 같으므로

$\bar{x}-3.92=146.08 \quad \therefore\ \bar{x}=150$

$\therefore\ a=\bar{x}+3.92=150+3.92=153.92$

$\therefore\ \bar{x}+a=150+153.92=303.92$

0889 답 0.0021

표본비율이 0.3, 표본의 크기가 100이고, 표본의 크기 100은 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.3-1.96\sqrt{\frac{0.3\times0.7}{100}}\le p\le 0.3+1.96\sqrt{\frac{0.3\times0.7}{100}}$$

$\therefore\ 0.3-1.96\sqrt{0.0021}\le p\le 0.3+1.96\sqrt{0.0021}$ ····· ⓘ

이 신뢰구간이 $0.3-1.96\sqrt{a}\le p\le 0.3+1.96\sqrt{a}$와 같으므로

$a=0.0021$ ····· ⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 신뢰구간 구하기	50 %
ⓘⓘ a의 값 구하기	50 %

0890 답 ④

표본평균을 $\bar{x}$라 하면 모표준편차가 $\frac{1}{2}$, 표본의 크기가 36이고, $P(|Z|\le c)=0.99$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\bar{x}-c\times\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{36}}\le m\le\bar{x}+c\times\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{36}}$$

$\therefore\ \bar{x}-\frac{c}{12}\le m\le\bar{x}+\frac{c}{12}$

이 신뢰구간이 $a \le m \le b$와 같으므로

$a=\overline{x}-\frac{c}{12}$, $b=\overline{x}+\frac{c}{12}$

$b-a=\left(\overline{x}+\frac{c}{12}\right)-\left(\overline{x}-\frac{c}{12}\right)=\frac{c}{6}$

$\therefore c=6(b-a)$

다른 풀이

모표준편차가 $\frac{1}{2}$, 표본의 크기가 36이고, $P(|Z| \le c)=0.99$이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2 \times c \times \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{36}}=\frac{c}{6}$

즉, $b-a=\frac{c}{6}$이므로 $c=6(b-a)$

0891 답 ②

표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 10, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간이 $34.84 \le m \le 45.16$과 같으므로

$\overline{x}-\frac{25.8}{\sqrt{n}}=34.84$ ····· ㉠

$\overline{x}+\frac{25.8}{\sqrt{n}}=45.16$ ····· ㉡

㉡−㉠을 하면

$2 \times \frac{25.8}{\sqrt{n}}=10.32$

$\sqrt{n}=5$ $\therefore n=25$

다른 풀이

모표준편차가 10, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2 \times 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}}=\frac{51.6}{\sqrt{n}}$

즉, $45.16-34.84=\frac{51.6}{\sqrt{n}}$이므로

$10.32=\frac{51.6}{\sqrt{n}}$, $\sqrt{n}=5$ $\therefore n=25$

0892 답 ④

표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 49이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96 \times \frac{10}{\sqrt{49}} \le m \le \overline{x}+1.96 \times \frac{10}{\sqrt{49}}$

$\therefore \overline{x}-2.8 \le m \le \overline{x}+2.8$

이 신뢰구간이 $a \le m \le \frac{9}{8}a$와 같으므로

$\overline{x}-2.8=a$ ····· ㉠

$\overline{x}+2.8=\frac{9}{8}a$ ····· ㉡

㉡−㉠을 하면

$5.6=\frac{1}{8}a$ $\therefore a=44.8$

이를 ㉠에 대입하면

$\overline{x}-2.8=44.8$ $\therefore \overline{x}=47.6$

0893 답 ④

$P(|Z| \le k)=\frac{x}{100}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 x %의 신뢰구간의 길이는 $b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. 표본평균의 값은 신뢰구간의 길이에 영향을 주지 않는다.

ㄴ. 표본의 크기 n이 일정할 때, 신뢰도가 높아지면 k의 값은 커지므로 $b-a$의 값은 커진다.

ㄷ. 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 4배가 되면 신뢰구간의 길이는 $2k\frac{\sigma}{\sqrt{4n}}=\frac{1}{2} \times 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

즉, $b-a$의 값은 $\frac{1}{2}$배가 된다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0894 답 ①

표본비율이 k, 표본의 크기가 400이고, 표본의 크기 400은 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2 \times 2.58\sqrt{\frac{k(1-k)}{400}}=0.1032$

$\sqrt{\frac{k(1-k)}{400}}=0.02$, $k(1-k)=0.16$

$25k^2-25k+4=0$, $(5k-1)(5k-4)=0$

$\therefore k=\frac{1}{5}$ $\left(\because 0<k<\frac{1}{2}\right)$

$\therefore 20k=20 \times \frac{1}{5}=4$

0895 답 ③

크기가 400인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 $\overline{x_1}$라 하면 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 400이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}} \le m \le \overline{x_1}+1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}}$

$\therefore \overline{x_1}-0.098\sigma \le m \le \overline{x_1}+0.098\sigma$

이 신뢰구간이 $80a \le m \le 81a$와 같으므로

$\overline{x_1}-0.098\sigma=80a$ ····· ㉠

$\overline{x_1}+0.098\sigma=81a$ ····· ㉡

㉡−㉠을 하면 $a=0.196\sigma$ ····· ㉢

또 크기가 100인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균을 $\overline{x_2}$라 하면 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_2}-1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \le m \le \overline{x_2}+1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}}$

$\therefore \overline{x_2}-0.196\sigma \le m \le \overline{x_2}+0.196\sigma$

이 신뢰구간이 $79a \le m \le 80a+0.98$과 같으므로

$\overline{x_2}-0.196\sigma=79a$ ····· ㉣

$\overline{x_2}+0.196\sigma=80a+0.98$ ····· ㉤

㉤−㉣을 하면 $0.392\sigma=a+0.98$ ····· ㉥

㉢을 ㉥에 대입하면

$0.392\sigma=0.196\sigma+0.98$

$0.196\sigma=0.98$ $\therefore \sigma=5$

0896 답 25

표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ \overline{x}-\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간이 $120.2\le m\le139.8$과 같으므로

$\overline{x}-\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}=120.2$ ····· ㉠

$\overline{x}+\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}=139.8$ ····· ㉡

㉡−㉠을 하면

$2\times\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}=19.6$ $\therefore\ \sigma=5\sqrt{n}$ ····· ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$\overline{x}-9.8=120.2$ $\therefore\ \overline{x}=130$ ····· ㉣

같은 표본을 이용하여 얻은 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$130-2.58\times5\le m\le130+2.58\times5$ ($\because$ ㉢, ㉣)

$\therefore\ 117.1\le m\le142.9$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$142-118+1=25$

0897 답 ④

표본의 크기가 25일 때, 표본평균을 $\overline{x_1}$라 하면 모표준편차가 σ이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}$

$\therefore\ \overline{x_1}-0.392\sigma\le m\le\overline{x_1}+0.392\sigma$

이 신뢰구간이 $196.08\le m\le203.92$와 같으므로

$\overline{x_1}-0.392\sigma=196.08$ ····· ㉠

$\overline{x_1}+0.392\sigma=203.92$ ····· ㉡

㉡−㉠을 하면

$0.784\sigma=7.84$

$\therefore\ \sigma=10$

또 표본의 크기가 n일 때, 표본평균을 $\overline{x_2}$라 하면 모표준편차가 10이므로 모평균 m에 대한 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}=\frac{51.6}{\sqrt{n}}$

즉, $\frac{51.6}{\sqrt{n}}\le8.6$이므로

$\sqrt{n}\ge6$ $\therefore\ n\ge36$

따라서 자연수 n의 최솟값은 36이다.

0898 답 144

표본의 크기가 100일 때, 표본비율을 $\hat{p}_1$, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 표본의 크기 100은 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$\hat{p}_1-k\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{100}}\le p\le\hat{p}_1+k\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{100}}$

이 신뢰구간이 $\frac{1}{10}-c\le p\le\frac{1}{10}+c$와 같으므로

$\hat{p}_1-k\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{100}}=\frac{1}{10}-c$ ····· ㉠

$\hat{p}_1+k\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{100}}=\frac{1}{10}+c$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면 $2\hat{p}_1=\frac{2}{10}$ $\therefore\ \hat{p}_1=\frac{1}{10}$

㉡−㉠을 하면 $2k\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{100}}=2c$

$\therefore\ c=k\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{100}}=k\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}{100}}=\frac{3k}{100}$

또 표본의 크기가 n일 때, 표본비율을 $\hat{p}_2$이라 하면 표본의 크기 n은 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$\hat{p}_2-k\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}\le p\le\hat{p}_2+k\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}$

이 신뢰구간이 $\frac{1}{4}-\frac{25\sqrt{3}}{36}c\le p\le\frac{1}{4}+\frac{25\sqrt{3}}{36}c$와 같으므로

$\hat{p}_2-k\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}=\frac{1}{4}-\frac{25\sqrt{3}}{36}c$ ····· ㉢

$\hat{p}_2+k\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}=\frac{1}{4}+\frac{25\sqrt{3}}{36}c$ ····· ㉣

㉢+㉣을 하면 $2\hat{p}_2=\frac{2}{4}$ $\therefore\ \hat{p}_2=\frac{1}{4}$

㉣−㉢을 하면 $2k\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}=\frac{25\sqrt{3}}{18}c$

$\therefore\ c=\frac{36}{25\sqrt{3}}k\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}=\frac{12\sqrt{3}}{25}k\sqrt{\frac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}{n}}=\frac{9k}{25\sqrt{n}}$

이때 $c=\frac{3k}{100}$이므로

$\frac{3k}{100}=\frac{9k}{25\sqrt{n}}$, $\sqrt{n}=12$

$\therefore\ n=144$

0899 답 ③

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 $L(n,\alpha)=2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. 표본의 크기 n이 일정할 때, 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이가 길어지므로 $\alpha<\beta$이면 $L(n,\alpha)<L(n,\beta)$

ㄴ. 신뢰도 α %가 일정할 때, 표본의 크기가 커지면 신뢰구간의 길이는 짧아진다.
이때 $n>4$이면 $n^2>4n$이므로 $L(n^2,\alpha)<L(4n,\alpha)$

ㄷ. $\sqrt{n}L(n,\alpha)=\sqrt{n}\times2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2k\sigma$
즉, $\sqrt{n}L(n,\alpha)=2k\sigma$이므로 그 값은 n의 값에 관계없이 일정하다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0900 답 ②

표본평균이 500, 모표준편차가 10, 표본의 크기가 25이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$500-1.96\times\frac{10}{\sqrt{25}}\le m\le 500+1.96\times\frac{10}{\sqrt{25}}$

$\therefore\ 496.08\le m\le 503.92$

0901 답 ③

제품 A를 사용하는 가구의 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 표본의 크기가 400이므로

$\hat{p}=\frac{80}{400}=0.2$

표본의 크기 400은 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.2-2.58\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{400}}\le p\le 0.2+2.58\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{400}}$

$\therefore\ 0.1484\le p\le 0.2516$

0902 답 ①

표본평균이 $\bar{x}$, 모표준편차가 1.2, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\bar{x}-2.58\times\frac{1.2}{\sqrt{36}}\le m\le\bar{x}+2.58\times\frac{1.2}{\sqrt{36}}$

$\therefore\ \bar{x}-0.516\le m\le\bar{x}+0.516$

이 신뢰구간이 $\bar{x}-c\le m\le\bar{x}+c$와 같으므로

$c=0.516$

0903 답 290.2

표본평균을 $\bar{x}$라 하면 모표준편차가 45, 표본의 크기가 81이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$\bar{x}-1.96\times\frac{45}{\sqrt{81}}\le m\le\bar{x}+1.96\times\frac{45}{\sqrt{81}}$

$\therefore\ \bar{x}-9.8\le m\le\bar{x}+9.8$ …… ⓘ

이 신뢰구간이 $a\le m\le 309.8$과 같으므로

$\bar{x}+9.8=309.8\qquad\therefore\ \bar{x}=300$ …… ⓘⓘ

$\therefore\ a=\bar{x}-9.8=300-9.8=290.2$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 신뢰구간 구하기	40 %
ⓘⓘ 표본평균 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ a의 값 구하기	20 %

0904 답 2

표본평균을 $\bar{x}$라 하면 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\bar{x}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}\le m\le\bar{x}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{36}}$

$\therefore\ \bar{x}-0.43\sigma\le m\le\bar{x}+0.43\sigma$

이 신뢰구간이 $a\le m\le b$와 같으므로

$a=\bar{x}-0.43\sigma,\ b=\bar{x}+0.43\sigma$

$\therefore\ b-a=0.86\sigma$

이때 $b-a=1.72$이므로

$0.86\sigma=1.72\qquad\therefore\ \sigma=2$

0905 답 ①

표본평균이 14.12, 모표준편차가 0.6, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$14.12-1.96\times\frac{0.6}{\sqrt{n}}\le m\le 14.12+1.96\times\frac{0.6}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ 14.12-\frac{1.176}{\sqrt{n}}\le m\le 14.12+\frac{1.176}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간이 $a\le m\le 14.316$과 같으므로

$14.12+\frac{1.176}{\sqrt{n}}=14.316$

$\frac{1.176}{\sqrt{n}}=0.196$

$\sqrt{n}=6$

$\therefore\ n=36$

따라서 $a=14.12-\frac{1.176}{\sqrt{36}}=13.924$이므로

$n+a=36+13.924=49.924$

0906 답 64

표본평균을 $\bar{x}$라 하면 모표준편차가 2, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\bar{x}-1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+1.96\times\frac{2}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ \bar{x}-\frac{3.92}{\sqrt{n}}\le m\le\bar{x}+\frac{3.92}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간이 $a\le m\le b$와 같으므로

$a=\bar{x}-\frac{3.92}{\sqrt{n}},\ b=\bar{x}+\frac{3.92}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ b-a=2\times\frac{3.92}{\sqrt{n}}=\frac{7.84}{\sqrt{n}}$

이때 $b-a=0.98$이므로

$\frac{7.84}{\sqrt{n}}=0.98,\ \sqrt{n}=8$

$\therefore\ n=64$

0907 답 30.87

표본평균이 25.58, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$25.58-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}\le m\le 25.58+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}$

$\therefore\ 25.58-0.3225\sigma\le m\le 25.58+0.3225\sigma$ …… ⓘ

이 신뢰구간이 $24.29\le m\le a$와 같으므로

$25.58-0.3225\sigma=24.29$

$0.3225\sigma=1.29$

$\therefore\ \sigma=4$ …… ⓘⓘ

따라서 $a=25.58+0.3225\times4=26.87$이므로 …… ⓘⓘⓘ

$a+\sigma=26.87+4=30.87$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ 신뢰구간 구하기	40 %
ⓘⓘ σ의 값 구하기	20 %
ⓘⓘⓘ a의 값 구하기	20 %
ⓘⓥ $a+\sigma$의 값 구하기	20 %

0908 답 ⑤

유니폼을 착용한 관람객의 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 표본의 크기가 300이므로

$\hat{p}=\frac{75}{300}=0.25$

표본의 크기 300은 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.25-1.96\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{300}}\le p\le0.25+1.96\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{300}}$

$\therefore\ 0.201\le p\le0.299$

이 신뢰구간이 $a\le p\le b$와 같으므로

$a=0.201,\ b=0.299$

$\therefore\ 1000(2a+b)=1000\times(2\times0.201+0.299)=701$

0909 답 ③

떡볶이를 좋아하는 학생의 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면

$\hat{p}=\frac{64}{100}=0.64$

표본의 크기 n은 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.64-1.96\sqrt{\frac{0.64\times0.36}{n}}\le p\le0.64+1.96\sqrt{\frac{0.64\times0.36}{n}}$

$\therefore\ 0.64-\frac{0.9408}{\sqrt{n}}\le p\le0.64+\frac{0.9408}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간이 $a\le p\le b$와 같으므로

$a=0.64-\frac{0.9408}{\sqrt{n}},\ b=0.64+\frac{0.9408}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ b-a=2\times\frac{0.9408}{\sqrt{n}}=\frac{1.8816}{\sqrt{n}}$

이때 $b-a=0.04704$이므로

$\frac{1.8816}{\sqrt{n}}=0.04704,\ \sqrt{n}=40$

$\therefore\ n=1600$

0910 답 ④

표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{64}}$

$\therefore\ \overline{x}-0.245\sigma\le m\le\overline{x}+0.245\sigma$

이 신뢰구간이 $248.53\le m\le251.47$과 같으므로

$\overline{x}-0.245\sigma=248.53$ ····· ㉠

$\overline{x}+0.245\sigma=251.47$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면 $2\overline{x}=500$

$\therefore\ \overline{x}=250$

이를 ㉠에 대입하면

$250-0.245\sigma=248.53$

$0.245\sigma=1.47$

$\therefore\ \sigma=6$

이때 $\frac{\sigma}{\overline{x}}=k$이므로

$750k=750\times\frac{6}{250}=18$

0911 답 2260

크기가 25인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 200, 모표준편차가 σ이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$200-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}\le m\le200+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}$

$\therefore\ 200-0.392\sigma\le m\le200+0.392\sigma$

이 신뢰구간이 $a\le m\le b$와 같으므로

$b=200+0.392\sigma$ ····· ㉠

다시 크기가 25인 표본을 임의추출하여 얻은 표본평균이 205이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$205-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}\le m\le205+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{25}}$

$\therefore\ 205-0.516\sigma\le m\le205+0.516\sigma$

이 신뢰구간이 $c\le m\le b+9.52$와 같으므로

$b+9.52=205+0.516\sigma$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$200+0.392\sigma+9.52=205+0.516\sigma$

$0.124\sigma=4.52$

$\therefore\ \sigma=\frac{1130}{31}$

$\therefore\ 62\sigma=62\times\frac{1130}{31}=2260$

0912 답 ②

강의를 전부 들은 수강생의 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면

$\hat{p}=\frac{64}{100}=0.64$

표본의 크기 n은 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.64-2.58\sqrt{\frac{0.64\times0.36}{n}}\le p\le0.64+2.58\sqrt{\frac{0.64\times0.36}{n}}$

$\therefore\ 0.64-\frac{1.2384}{\sqrt{n}}\le p\le0.64+\frac{1.2384}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간이 $0.64-c\le p\le0.64+c$와 같으므로

$c=\frac{1.2384}{\sqrt{n}}$

이때 $c=0.0774$이므로

$\frac{1.2384}{\sqrt{n}}=0.0774$

$\sqrt{n}=16$

$\therefore\ n=256$

0913 답 ③

표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 16이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{16}}$

$\therefore\ \overline{x}-0.49\sigma\le m\le\overline{x}+0.49\sigma$

이 신뢰구간이 $\overline{x}-c\le m\le\overline{x}+c$와 같으므로

$c=0.49\sigma$ ····· ㉠

한편 이 마트에서 판매한 세제 리필제품 1개의 용량을 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따른다.

$Z=\frac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 Z는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 이 마트에서 판매한 리필제품 중에서 임의로 1개를 택할 때, 이 리필제품의 용량이 $m+c$ 이하일 확률은

$$\begin{aligned}P(X\le m+c)&=P\left(Z\le\frac{m+c-m}{\sigma}\right)\\&=P\left(Z\le\frac{c}{\sigma}\right)\\&=P\left(Z\le\frac{0.49\sigma}{\sigma}\right)\ (\because \text{㉠})\\&=P(Z\le0.49)\\&=P(Z\le0)+P(0\le Z\le0.49)\\&=0.5+0.1879=0.6879\end{aligned}$$

0914 답 99.52

표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 20, 표본의 크기가 100이므로

$P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-k\times\frac{20}{\sqrt{100}}\le m\le\overline{x}+k\times\frac{20}{\sqrt{100}}$$

$\therefore\ \overline{x}-2k\le m\le\overline{x}+2k$

이 신뢰구간이 $194.36\le m\le205.64$와 같으므로

$\overline{x}-2k=194.36$ …… ㉠

$\overline{x}+2k=205.64$ …… ㉡

㉡−㉠을 하면

$4k=11.28$ $\therefore\ k=2.82$

이때 $P(0\le Z\le2.82)=0.4976$이므로

$P(|Z|\le2.82)=2\times0.4976=0.9952$

따라서 $\frac{\alpha}{100}=0.9952$이므로 $\alpha=99.52$

0915 답 ②

표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 100이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$$

$\therefore\ \overline{x_1}-0.196\sigma\le m\le\overline{x_1}+0.196\sigma$

이 신뢰구간이 $a\le m\le b$와 같으므로

$a=\overline{x_1}-0.196\sigma$, $b=\overline{x_1}+0.196\sigma$

또 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 400이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}$$

$\therefore\ \overline{x_2}-0.129\sigma\le m\le\overline{x_2}+0.129\sigma$

이 신뢰구간이 $c\le m\le d$와 같으므로

$c=\overline{x_2}-0.129\sigma$

$a=c$에서 $\overline{x_1}-0.196\sigma=\overline{x_2}-0.129\sigma$이므로

$\overline{x_1}-\overline{x_2}=0.067\sigma$

이때 $\overline{x_1}-\overline{x_2}=1.34$이므로

$0.067\sigma=1.34$ $\therefore\ \sigma=20$

$$\begin{aligned}\therefore\ b-a&=(\overline{x_1}+0.196\sigma)-(\overline{x_1}-0.196\sigma)\\&=0.392\sigma=0.392\times20=7.84\end{aligned}$$

최고수준 도전 기출 223쪽

0916 답 ⑤

전략 같은 모집단에서 표본의 크기가 서로 다를 때의 모평균의 두 신뢰구간을 각각 구한 후, n의 값을 구한다.

표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 100이므로

$P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$\overline{x_1}-k\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\le m\le\overline{x_1}+k\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$$

$\therefore\ \overline{x_1}-\frac{k\sigma}{10}\le m\le\overline{x_1}+\frac{k\sigma}{10}$

이 신뢰구간이 $\overline{x_1}-c\le m\le\overline{x_1}+c$와 같으므로

$c=\frac{k\sigma}{10}$ …… ㉠

또 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모표준편차가 σ, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$\overline{x_2}-k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\therefore\ \overline{x_2}-\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간이 $\overline{x_2}-\frac{2}{5}c\le m\le\overline{x_2}+\frac{2}{5}c$와 같으므로

$\frac{2}{5}c=\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{2}{5}\times\frac{k\sigma}{10}=\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$, $\sqrt{n}=25$ $\therefore\ n=625$

0917 답 ①

전략 모비율의 신뢰구간을 구하여 표본비율을 구한 후, 표본비율의 정의를 이용한다.

기능 결함이 발견된 제품의 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 표본의 크기가 n이고, 표본의 크기가 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

이 신뢰구간이 $0.0706\le p\le0.1294$와 같으므로

$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.0706$ …… ㉠

$\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=0.1294$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2\hat{p}=0.2$ $\therefore\ \hat{p}=0.1$

$\hat{p}=0.1$을 ㉠에 대입하면

$0.1-1.96\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}=0.0706$, $0.1-\frac{0.588}{\sqrt{n}}=0.0706$

$\frac{0.588}{\sqrt{n}}=0.0294$, $\sqrt{n}=20$

$\therefore\ n=400$

이때 $\hat{p}=0.1=\frac{m}{400}$이므로 $m=40$

$\therefore\ m+n=40+400=440$

0918 답 121

전략 같은 모집단에서 표본의 크기가 서로 다를 때의 모평균의 두 신뢰구간을 각각 구한 후, n의 값을 구한다.

표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모표준편차가 8, 표본의 크기가 16이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x_1}-1.96\times\frac{8}{\sqrt{16}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{8}{\sqrt{16}}$$

$\therefore\ \overline{x_1}-3.92\le m\le\overline{x_1}+3.92$

이 신뢰구간이 $100-a\le m\le100+a$와 같으므로

$\overline{x_1}=100,\ a=3.92$

또 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모표준편차가 8, 표본의 크기가 n이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x_2}-1.96\times\frac{8}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+1.96\times\frac{8}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ \overline{x_2}-\frac{15.68}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x_2}+\frac{15.68}{\sqrt{n}}$$

이 신뢰구간이 $\frac{24}{25}\overline{x_1}-\frac{4}{5}a\le m\le\frac{24}{25}\overline{x_1}+\frac{4}{5}a$와 같으므로

$$\overline{x_2}=\frac{24}{25}\overline{x_1}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

$$\frac{15.68}{\sqrt{n}}=\frac{4}{5}a\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠에 $\overline{x_1}=100$을 대입하면

$$\overline{x_2}=\frac{24}{25}\times100=96$$

㉡에 $a=3.92$를 대입하면

$$\frac{15.68}{\sqrt{n}}=\frac{4}{5}\times3.92,\ \frac{15.68}{\sqrt{n}}=3.136$$

$\sqrt{n}=5\qquad\therefore\ n=25$

$\therefore\ n+\overline{x_2}=25+96=121$

0919 답 98.58

전략 모비율의 신뢰구간을 이용하여 신뢰도를 구한다.

임의추출한 n개의 마스크 중 필터 성능이 기준치를 통과한 제품이 144개이고 이는 추출된 마스크 전체의 36 %이므로

$$n\times\frac{36}{100}=144\qquad\therefore\ n=400$$

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 표본비율이 0.36, 표본의 크기가 400이고, 표본의 크기 400은 충분히 크므로 모비율 p에 대한 신뢰도 α %의 신뢰구간은

$$0.36-k\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{400}}\le p\le0.36+k\sqrt{\frac{0.36\times0.64}{400}}$$

$\therefore\ 0.36-0.024k\le p\le0.36+0.024k$

이 신뢰구간이 $0.3012\le p\le0.4188$과 같으므로

$0.36+0.024k=0.4188,\ 0.024k=0.0588$

$\therefore\ k=2.45$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le2.45)=0.4929$이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le2.45)=2\times0.4929=0.9858$

따라서 $\frac{\alpha}{100}=0.9858$이므로 $\alpha=98.58$

MEMO

MEMO