기출 PICK

정답과 해설

미적분 I

01 함수의 극한

난이도별 필수 기출 6~23쪽

0001 답 ⑤

ㄱ. $x\to0+$일 때, $f(x)$는 양의 무한대로 발산하고,
$x\to0-$일 때, $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다.

ㄴ. $x\to0$일 때, $f(x)$는 양의 무한대로 발산한다.

ㄷ. $x\to0$일 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워진다.
즉, $f(x)$는 1에 수렴한다.

ㄹ. $x\to0$일 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워진다.
즉, $f(x)$는 0에 수렴한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

0002 답 ⑤

① $\lim\limits_{x\to2}(7-x)=5$

② $\lim\limits_{x\to3}5=5$

③ $\lim\limits_{x\to-1}\sqrt{1-x}=\sqrt{2}$

④ $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4}{x-1}=2$

⑤ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2-x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x(x-1)}{x}=\lim\limits_{x\to0}(x-1)=-1$

따라서 극한값을 바르게 구한 것은 ⑤이다.

0003 답 ⑤

ㄱ. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-2)=\infty$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to\infty}|x+1|=\infty$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=\infty$

ㄹ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\dfrac{1}{x+3}\right)=0$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

0004 답 ②

ㄱ. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x+3)=6$

ㄴ. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{1}{|x+2|}=\infty$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{4-x}=0$

ㄹ. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2x+1}=\infty$

따라서 보기에서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0005 답 ③

ㄱ. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{(x-2)^2}=\infty$

ㄴ. $x\to\infty$일 때 $x+3>0$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{|x+3|}{x^2+3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+3}{x(x+3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to\infty}(4-x^2)=-\infty$

ㄹ. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x-5}=\infty$

따라서 보기에서 양의 무한대로 발산하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

0006 답 ⑤

$\lim\limits_{x\to-1-}f(x)+\lim\limits_{x\to0+}f(x)+\lim\limits_{x\to1}f(x)=0+1+3=4$

0007 답 ②

$f(1)+\lim\limits_{x\to0}f(x)=1+1=2$

0008 답 ⑤

$a=\lim\limits_{x\to-1+}f(x)+3\lim\limits_{x\to-1-}g(x)$

$=-1+3\times1=2$

$b=2\lim\limits_{x\to1+}f(x)-\lim\limits_{x\to1-}g(x)$

$=2\times(-1)-1=-3$

$\therefore a-b=2-(-3)=5$

0009 답 ⑤

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}x(3x-1)=2$

$\lim\limits_{x\to-2-}f(x)=\lim\limits_{x\to-2-}(4x+2)=-6$

$\therefore\lim\limits_{x\to1+}f(x)-\lim\limits_{x\to-2-}f(x)=2-(-6)=8$

0010 답 24

$\lim\limits_{x\to-1+}\dfrac{x^3+x^2-4x-4}{|x+1|}=\lim\limits_{x\to-1+}\dfrac{(x+1)(x+2)(x-2)}{x+1}$

$=\lim\limits_{x\to-1+}(x+2)(x-2)=-3$

$\therefore a=-3$ ····· ⓘ

$\lim\limits_{x\to4-}\dfrac{x^3-6x^2+8x}{|x-4|}=\lim\limits_{x\to4-}\dfrac{x(x-2)(x-4)}{-(x-4)}$

$=\lim\limits_{x\to4-}\{-x(x-2)\}=-8$

$\therefore b=-8$ ····· ⓘⓘ

$\therefore ab=(-3)\times(-8)=24$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a의 값 구하기	40%
ⓘⓘ b의 값 구하기	40%
ⓘⓘⓘ ab의 값 구하기	20%

0011 답 ⑤

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}(3x-1)=2$

ㄴ. $x-1=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}f(x-1)=\lim\limits_{t\to-1+}f(t)=\lim\limits_{t\to-1+}1=1$

ㄷ. $f(x)=s$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $s\to2+$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(f(x))=\lim\limits_{s\to2+}f(s)=\lim\limits_{s\to2+}(3s-1)=5$

ㄹ. $f(x)=s$로 놓으면 $x\to0-$일 때 $s=1$이므로

$\lim\limits_{x\to0-}f(f(x))=f(1)=2$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

0012 답 ①

$\lim_{x\to2+}\frac{[x]^2-x}{[x]}=\frac{2^2-2}{2}=1$, $\lim_{x\to2-}\frac{[x]+x}{[x+1]}=\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore \lim_{x\to2+}\frac{[x]^2-x}{[x]}+\lim_{x\to2-}\frac{[x]+x}{[x+1]}=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

참고 정수 n에 대하여 $\lim_{x\to n+}[x]=n$, $\lim_{x\to n-}[x]=n-1$

0013 답 ②

(i) $\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2+}f(x)=-1$

즉, 주어진 부등식을 만족시키지 않는다.

(ii) $\lim_{x\to-1-}f(x)=0$, $\lim_{x\to-1+}f(x)=3$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)<\lim_{x\to-1+}f(x)$

(iii) $\lim_{x\to0-}f(x)=2$, $\lim_{x\to0+}f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)>\lim_{x\to0+}f(x)$

즉, 주어진 부등식을 만족시키지 않는다.

(iv) $\lim_{x\to1-}f(x)=-1$, $\lim_{x\to1+}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)<\lim_{x\to1+}f(x)$

(v) $\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2+}f(x)=2$

즉, 주어진 부등식을 만족시키지 않는다.

(i)~(v)에서 정수 a는 -1, 1의 2개이다.

0014 답 ④

$x+2=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to2$이므로

$\lim_{x\to0}f(x+2)=\lim_{t\to2}f(t)=2$

$-x=s$로 놓으면 $x\to1-$일 때 $s\to-1+$이므로

$\lim_{x\to1-}f(-x)=\lim_{s\to-1+}f(s)=-1$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x+2)+\lim_{x\to1-}f(-x)=2+(-1)=1$

0015 답 ⑤

$\lim_{x\to1-}f(x)=2$이므로 $a=2$

$3-x=t$로 놓으면 $x\to2+$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to2+}f(3-x)=\lim_{t\to1-}f(t)=2$

0016 답 ①

$1-x=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim_{x\to1+}f(1-x)=\lim_{t\to0-}f(t)=2$

$x+1=s$로 놓으면 $x\to1-$일 때 $s\to2-$이므로

$\lim_{x\to1-}f(x+1)=\lim_{s\to2-}f(s)=-1$

$\therefore \lim_{x\to1+}f(1-x)+\lim_{x\to1-}f(x+1)=2+(-1)=1$

0017 답 ③

$g(x)=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to-1}f(g(x))=\lim_{t\to0}f(t)=1$

또 $x\to0+$일 때 $t\to2-$이므로

$\lim_{x\to0+}f(g(x))=\lim_{t\to2-}f(t)=1$

$\therefore \lim_{x\to-1}f(g(x))+\lim_{x\to0+}f(g(x))=1+1=2$

0018 답 ②

$x+2=t$로 놓으면 $x\to-3+$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to-3+}f(x+2)=\lim_{t\to-1+}f(t)=-1$

$f(x)=s$로 놓으면 $x\to0$일 때 $s\to0$이므로

$\lim_{x\to0}f(f(x))=\lim_{s\to0}f(s)=0$

$\therefore \lim_{x\to-3+}f(x+2)+\lim_{x\to0}f(f(x))=-1+0=-1$

0019 답 ④

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to2-$이므로

$\lim_{x\to0+}f(f(x))=\lim_{t\to2-}f(t)=2$

또 $x\to3+$일 때 $t=1$이므로

$\lim_{x\to3+}f(f(x))=f(1)=2$

$\therefore \lim_{x\to0+}f(f(x))+\lim_{x\to3+}f(f(x))=2+2=4$

0020 답 ②

ㄱ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t=-1$이므로

$\lim_{x\to1+}f(g(x))=f(-1)=0$

ㄴ. $f(x)=s$로 놓으면 $x\to1-$일 때 $s\to0-$이므로

$\lim_{x\to1-}g(f(x))=\lim_{s\to0-}g(s)=0$

ㄷ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to0+}f(g(x))=\lim_{t\to0+}f(t)=-1$

$f(x)=s$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $s\to-1+$이므로

$\lim_{x\to0+}g(f(x))=\lim_{s\to-1+}g(s)=1$

$\therefore \lim_{x\to0+}f(g(x))\neq\lim_{x\to0+}g(f(x))$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

0021 답 2

$x>0$일 때 $g(x)=\frac{x}{x}=1$이고,

$x<0$일 때 $g(x)=\frac{x}{-x}=-1$이다.

$\therefore g(x)=\begin{cases}1 & (x>0)\\ -1 & (x<0)\end{cases}$

$g(x)=t$로 놓으면 $x\to-1+$일 때 $t=-1$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(g(x))=f(-1)=1$ …… ⓘ

$f(x)=s$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $s\to1-$이므로

$\lim_{x\to1+}g(f(x))=\lim_{s\to1-}g(s)=1$ …… ⓘⓘ

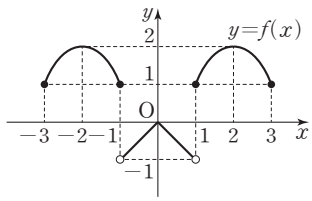
$\therefore \lim_{x\to-1+}f(g(x))+\lim_{x\to1+}g(f(x))=1+1=2$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\lim_{x\to-1+}f(g(x))$의 값 구하기	50 %
ⓘⓘ $\lim_{x\to1+}g(f(x))$의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $\lim_{x\to-1+}f(g(x))+\lim_{x\to1+}g(f(x))$의 값 구하기	10 %

0022 답 ③

$-3\le x\le 3$에서 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

즉, 주어진 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하면 $-3\le x\le 3$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $\lim_{x\to -2-} f(x)=2$, $\lim_{x\to -1+} f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to -2-} f(x)-\lim_{x\to -1+} f(x)=2-(-1)=3$

다른 풀이

$x=-t$로 놓으면 $x\to -2-$일 때 $t\to 2+$이므로

$\lim_{x\to -2-} f(x)=\lim_{t\to 2+} f(-t)=\lim_{t\to 2+} f(t)=2$

또 $x\to -1+$일 때 $t\to 1-$이므로

$\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{t\to 1-} f(-t)=\lim_{t\to 1-} f(t)=-1$

$\therefore \lim_{x\to -2-} f(x)-\lim_{x\to -1+} f(x)=2-(-1)=3$

0023 답 ②

$-2\le x\le 2$에서 $\lim_{x\to -1-} f(x)=-1$

이때 $f(x+4)=f(x)$이고 $x+4=t$로 놓으면

$x\to -1-$일 때 $t\to 3-$이므로

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-} f(x+4)=\lim_{t\to 3-} f(t)$

$\therefore \lim_{x\to 3-} f(x)=-1$

또 $x\to 3-$일 때 $t\to 7-$이므로

$\lim_{x\to 3-} f(x)=\lim_{x\to 3-} f(x+4)=\lim_{t\to 7-} f(t)$

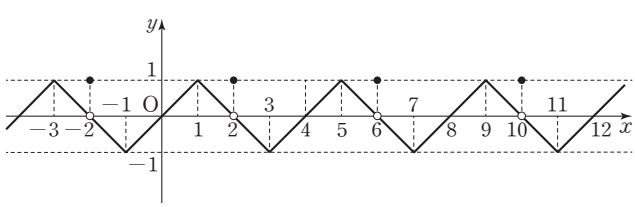
$\therefore \lim_{x\to 7-} f(x)=-1$

같은 방법으로 구하면

$\lim_{x\to 11-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 15-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 19-} f(x)=-1$

따라서 자연수 n은 3, 7, 11, 15, 19의 5개이다.

참고 $f(x)=f(x+4)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 $-2\le x\le 2$에서의 그래프가 반복해서 그려진다.



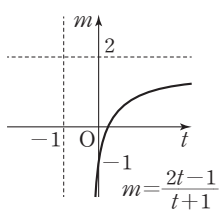
0024 답 ⑤

$\frac{2t-1}{t+1}=m$으로 놓으면

$m=\frac{2(t+1)-3}{t+1}=-\frac{3}{t+1}+2$

즉, $t\to\infty$일 때 $m\to 2-$이므로

$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{2t-1}{t+1}\right)=\lim_{m\to 2-} f(m)=1$

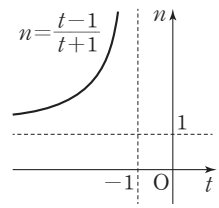


$\frac{t-1}{t+1}=n$으로 놓으면

$n=\frac{(t+1)-2}{t+1}=-\frac{2}{t+1}+1$

즉, $t\to -\infty$일 때 $n\to 1+$이므로

$\lim_{t\to -\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=\lim_{n\to 1+} f(n)=2$



$\therefore \lim_{t\to\infty} f\left(\frac{2t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to -\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)=1+2=3$

0025 답 ④

(i) $\lim_{x\to -1+} f(x)=2$, $\lim_{x\to -1-} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to -1+} f(x)\ne\lim_{x\to -1-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to -1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $\lim_{x\to 0+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to 0+} f(x)\ne\lim_{x\to 0-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $\lim_{x\to 1+} f(x)=2$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=2$

(iv) $\lim_{x\to 2+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 2-} f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)=1$

(v) $\lim_{x\to 3+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 3-} f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to 3} f(x)=0$

(vi) $\lim_{x\to 4+} f(x)=2$, $\lim_{x\to 4-} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to 4+} f(x)\ne\lim_{x\to 4-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to 4} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

(vii) $\lim_{x\to 5+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 5-} f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to 5+} f(x)\ne\lim_{x\to 5-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to 5} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(vii)에서 정수 k는 -1, 0, 4, 5의 4개이다.

0026 답 ③

ㄱ. $\lim_{x\to 0+}\frac{2x^2}{|x|}=\lim_{x\to 0+}\frac{2x^2}{x}=\lim_{x\to 0+} 2x=0$

$\lim_{x\to 0-}\frac{2x^2}{|x|}=\lim_{x\to 0-}\frac{2x^2}{-x}=\lim_{x\to 0-}(-2x)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{|x|}=0$

ㄴ. $\lim_{x\to -1+}\frac{|x+1|}{x^2+x}=\lim_{x\to -1+}\frac{x+1}{x(x+1)}=\lim_{x\to -1+}\frac{1}{x}=-1$

$\lim_{x\to -1-}\frac{|x+1|}{x^2+x}=\lim_{x\to -1-}\frac{-(x+1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to -1-}\left(-\frac{1}{x}\right)=1$

이므로 $\lim_{x\to -1+}\frac{|x+1|}{x^2+x}\ne\lim_{x\to -1-}\frac{|x+1|}{x^2+x}$

즉, $\lim_{x\to -1}\frac{|x+1|}{x^2+x}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to -2+}\frac{(x+2)^2}{|x+2|}=\lim_{x\to -2+}\frac{(x+2)^2}{x+2}=\lim_{x\to -2+}(x+2)=0$

$\lim_{x\to -2-}\frac{(x+2)^2}{|x+2|}=\lim_{x\to -2-}\frac{(x+2)^2}{-(x+2)}=\lim_{x\to -2-}\{-(x+2)\}=0$

$\therefore \lim_{x\to -2}\frac{(x+2)^2}{|x+2|}=0$

ㄹ. $\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{|x^2-1|}=\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to1-}\frac{x-1}{|x^2-1|}=\lim_{x\to1-}\frac{x-1}{-(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{1}{-(x+1)}=-\frac{1}{2}$

이므로 $\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{|x^2-1|}\neq\lim_{x\to1-}\frac{x-1}{|x^2-1|}$

즉, $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{|x^2-1|}$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0027 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)=0$, $\lim_{x\to1-}f(x)=-2$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

즉, $\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to2+}f(x)=1$, $\lim_{x\to2-}f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=1$

ㄷ. $-1<a<1$인 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)$이므로

$\lim_{x\to a}f(x)$의 값은 존재한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0028 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

즉, $\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $3-2x=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to-1$이므로

$\lim_{x\to2}f(3-2x)=\lim_{t\to-1}f(t)=-1$

ㄷ. $x+2=s$로 놓으면 $x\to-2$일 때 $s\to0$이므로

$\lim_{x\to-2}f(x+2)=\lim_{s\to0}f(s)=0$

ㄹ. $x^2+1=k$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $k\to2$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x^2+1)=\lim_{k\to2}f(k)=0$

따라서 보기에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

0029 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}(x+1)=0$

ㄴ. $\lim_{x\to0+}f(x)=-1$, $\lim_{x\to0-}f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)\neq\lim_{x\to0-}f(x)$

즉, $\lim_{x\to0}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to-1+$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(f(x))=\lim_{t\to0+}f(t)=-1$

또 $x\to-1-$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim_{x\to-1-}f(f(x))=\lim_{t\to0-}f(t)=1$

즉, $\lim_{x\to-1+}f(f(x))\neq\lim_{x\to-1-}f(f(x))$이므로 $\lim_{x\to-1}f(f(x))$의 값은 존재하지 않는다.

ㄹ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t\to1+$이므로

$\lim_{x\to1+}f(f(x))=\lim_{t\to1+}f(t)=1$

또 $x\to1-$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to1-}f(f(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=1$

$\therefore\lim_{x\to1}f(f(x))=1$

따라서 보기에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

0030 답 −2

(i) $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(2x+1)=5$

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(9-x^2)=5$

$\therefore\lim_{x\to2}f(x)=5$

(ii) $\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2+}(9-x^2)=5$

$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2-}(2x+1)=-3$

이므로 $\lim_{x\to-2+}f(x)\neq\lim_{x\to-2-}f(x)$

즉, $\lim_{x\to-2}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-2$

참고 $a\neq-2$, $a\neq2$이면 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하므로 $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하지 않도록 하는 상수 a의 값은 -2, 2 중에서 찾으면 된다.

0031 답 6

$\lim_{x\to3}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)$이어야 한다.

$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3+}(k+3)x^2=9k+27$ …… ⓘ

$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}(x+k)^2=(3+k)^2$ …… ⓘⓘ

즉, $9k+27=(3+k)^2$이므로

$k^2-3k-18=0$, $(k+3)(k-6)=0$

$\therefore k=6$ ($\because k>0$) …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\lim_{x\to3+}f(x)$를 k에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘ $\lim_{x\to3-}f(x)$를 k에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘⓘ 양수 k의 값 구하기	40 %

0032 답 ⑤

ㄱ. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t=1$이므로

$\lim_{x\to1+}f(g(x))=f(1)=0$

또 $x\to1-$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to1-}f(g(x))=\lim_{t\to1-}f(t)=1$

즉, $\lim_{x\to1+}f(g(x))\neq\lim_{x\to1-}f(g(x))$이므로 $\lim_{x\to1}f(g(x))$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(x)=s$로 놓으면 $x\to-1+$일 때 $s=1$이므로

$\lim_{x\to-1+}g(f(x))=g(1)=1$

또 $x\to-1-$일 때 $s\to1+$이므로

$\lim_{x\to-1-}g(f(x))=\lim_{s\to1+}g(s)=1$

$\therefore\lim_{x\to-1}g(f(x))=1$

ㄷ. $x-1=k$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $k\to-1+$이고,

$g(k)=t$로 놓으면 $k\to-1+$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to0+}f(g(x-1))=\lim_{k\to-1+}f(g(k))=\lim_{t\to0+}f(t)=1$

또 $x\to0-$일 때 $k\to-1-$이고,

$k\to-1-$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim\limits_{x\to0-}f(g(x-1))=\lim\limits_{k\to-1-}f(g(k))=\lim\limits_{t\to0+}f(t)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}f(g(x-1))=1$

ㄹ. $x+1=m$으로 놓으면 $x\to0+$일 때 $m\to1+$이고,

$f(m)=s$로 놓으면 $m\to1+$일 때 $s\to1-$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}g(f(x+1))=\lim\limits_{m\to1+}g(f(m))=\lim\limits_{s\to1-}g(s)=1$

또 $x\to0-$일 때 $m\to1-$이고,

$m\to1-$일 때 $s=1$이므로

$\lim\limits_{x\to0-}g(f(x+1))=\lim\limits_{m\to1-}g(f(m))=g(1)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}g(f(x+1))=1$

따라서 보기에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

0033 답 ④

$\lim\limits_{x\to n}\dfrac{[x]^2+3x}{[x]}$의 값이 존재하려면

$\lim\limits_{x\to n+}\dfrac{[x]^2+3x}{[x]}=\lim\limits_{x\to n-}\dfrac{[x]^2+3x}{[x]}$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to n+}\dfrac{[x]^2+3x}{[x]}=\dfrac{n^2+3n}{n}=n+3$

$\lim\limits_{x\to n-}\dfrac{[x]^2+3x}{[x]}=\dfrac{(n-1)^2+3n}{n-1}=\dfrac{n^2+n+1}{n-1}$

즉, $n+3=\dfrac{n^2+n+1}{n-1}$이므로

$(n+3)(n-1)=n^2+n+1 \quad \therefore n=4$

이때 $a=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{[x]^2+3x}{[x]}=4+3=7$이므로

$a+n=7+4=11$

0034 답 ⑤

$\lim\limits_{x\to1}\{2f(x)-g(x)\}=2\lim\limits_{x\to1}f(x)-\lim\limits_{x\to1}g(x)$

$=2\times1-(-5)=7$

0035 답 ③

$\lim\limits_{x\to-1}(x^3+1)f(x)=\lim\limits_{x\to-1}(x+1)(x^2-x+1)f(x)$

$=\lim\limits_{x\to-1}(x^2-x+1)\times\lim\limits_{x\to-1}(x+1)f(x)$

$=3\times3=9$

0036 답 ①

$\lim\limits_{x\to4}\{f(x)+1\}=2$에서

$\lim\limits_{x\to4}f(x)+1=2 \quad \therefore \lim\limits_{x\to4}f(x)=1$

$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3g(x)}{x+2}=1$에서

$\dfrac{3\lim\limits_{x\to4}g(x)}{6}=1 \quad \therefore \lim\limits_{x\to4}g(x)=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to4}\dfrac{2-f(x)}{1+g(x)}=\dfrac{2-1}{1+2}=\dfrac{1}{3}$

0037 답 ①

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=-1$이고,

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1-$일 때 $t\to0-$이므로

$\lim\limits_{x\to1-}f(x-1)=\lim\limits_{t\to0-}f(t)=2$

$\therefore \lim\limits_{x\to1-}f(x)f(x-1)=\lim\limits_{x\to1-}f(x)\times\lim\limits_{x\to1-}f(x-1)$

$=(-1)\times2=-2$

0038 답 ②

$\lim\limits_{x\to1-}3f(x)g(x)=3\times\lim\limits_{x\to1-}f(x)\times\lim\limits_{x\to1-}g(x)$

$=3\times2\times2=12$

$g(x)=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to1+$이므로

$\lim\limits_{x\to0+}f(g(x))=\lim\limits_{t\to1+}f(t)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to1-}3f(x)g(x)-\lim\limits_{x\to0+}f(g(x))=12-1=11$

0039 답 ⑤

ㄱ. $\lim\limits_{x\to2+}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to2+}f(x)+\lim\limits_{x\to2+}g(x)$

$=0+1=1$

$\lim\limits_{x\to2-}\{f(x)+g(x)\}=\lim\limits_{x\to2-}f(x)+\lim\limits_{x\to2-}g(x)$

$=0+(-1)=-1$

이므로 $\lim\limits_{x\to2+}\{f(x)+g(x)\}\neq\lim\limits_{x\to2-}\{f(x)+g(x)\}$

즉, $\lim\limits_{x\to2}\{f(x)+g(x)\}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to2+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to2+}f(x)\times\lim\limits_{x\to2+}g(x)$

$=0\times1=0$

$\lim\limits_{x\to2-}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)\times\lim\limits_{x\to2-}g(x)$

$=0\times(-1)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to2}f(x)g(x)=0$

ㄷ. $\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{x+f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2+}x+\lim\limits_{x\to2+}f(x)}{\lim\limits_{x\to2+}g(x)}=\dfrac{2+0}{1}=2$

$\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{x+f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to2-}x+\lim\limits_{x\to2-}f(x)}{\lim\limits_{x\to2-}g(x)}=\dfrac{2+0}{-1}=-2$

이므로 $\lim\limits_{x\to2+}\dfrac{x+f(x)}{g(x)}\neq\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{x+f(x)}{g(x)}$

즉, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x+f(x)}{g(x)}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄹ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to2}g(f(x))=\lim\limits_{t\to0}g(t)=-1$

따라서 보기에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄹ이다.

0040 답 ①

$\lim\limits_{x\to0}\{f(x)+kg(x)\}$의 값이 존재하려면

$\lim\limits_{x\to0+}\{f(x)+kg(x)\}=\lim\limits_{x\to0-}\{f(x)+kg(x)\}$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to0+}\{f(x)+kg(x)\}=\lim\limits_{x\to0+}f(x)+k\lim\limits_{x\to0+}g(x)=-1-k$

$\lim\limits_{x\to0-}\{f(x)+kg(x)\}=\lim\limits_{x\to0-}f(x)+k\lim\limits_{x\to0-}g(x)=1+k$

즉, $-1-k=1+k$이므로

$2k=-2 \quad \therefore k=-1$

0041 답 ③

ㄱ. $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha$, $\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$ (α, β는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)+g(x)\}+\{f(x)-g(x)\}}{2}$$
$$=\frac{\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}+\lim_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}}{2}$$
$$=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)$$

ㄴ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases}0 & (x\geq a)\\ 1 & (x<a)\end{cases}$이면

$\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=0$이지만 $\lim_{x\to a}g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim_{x\to a}g(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (α, β는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{g(x)\times\frac{f(x)}{g(x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to a}g(x)\times\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha\beta$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0042 답 ②

ㄱ. [반례] $f(x)=\begin{cases}0 & (x\geq a)\\ 1 & (x<a)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\geq a)\\ 0 & (x<a)\end{cases}$이면

$\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}g(x)$의 값은 모두 존재하지 않지만

$f(x)+g(x)=1$이므로 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=1$

ㄴ. $\lim_{x\to a}(x-a)f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=\beta$ (α, β는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}\left\{(x-a)f(x)\times\frac{g(x)}{x-a}\right\}$$
$$=\lim_{x\to a}(x-a)f(x)\times\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=\alpha\beta$$

ㄷ. [반례] $f(x)=x-1$, $g(x)=\frac{1}{x}$이면 $\lim_{x\to 1}f(x)$와 $\lim_{x\to 1}g(x)$의 값이 모두 존재하지만 $g(f(x))=\frac{1}{x-1}$에서 $\lim_{x\to 1}g(f(x))$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

0043 답 2

$\lim_{x\to 3}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to 3}g(x)=\beta$이므로

$\lim_{x\to 3}\{f(x)-2\}=5$에서

$\alpha-2=5$ $\therefore \alpha=7$ …… ⓘ

$\lim_{x\to 3}f(x)g(x)=14$에서

$7\beta=14$ $\therefore \beta=2$ …… ⓘⓘ

$\therefore \lim_{x\to 3}\frac{(2x+1)g(x)}{f(x)}=\frac{7\beta}{\alpha}=\frac{7\times 2}{7}=2$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ α의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ β의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $\lim_{x\to 3}\frac{(2x+1)g(x)}{f(x)}$의 값 구하기	20 %

0044 답 13

$\lim_{x\to -2}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to -2}g(x)=\beta$이므로

$\lim_{x\to -2}\{f(x)+2g(x)\}=9$에서

$\alpha+2\beta=9$ …… ㉠

$\lim_{x\to -2}f(x)g(x)=4$에서

$\alpha\beta=4$ …… ㉡

㉠에서 $\alpha=9-2\beta$를 ㉡에 대입하면

$(9-2\beta)\beta=4$, $2\beta^2-9\beta+4=0$

$(2\beta-1)(\beta-4)=0$ $\therefore \beta=\frac{1}{2}$ 또는 $\beta=4$

$\beta=\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하여 풀면 $\alpha=8$

$\beta=4$를 ㉡에 대입하여 풀면 $\alpha=1$

이때 $\alpha<\beta$이므로 $\alpha=1$, $\beta=4$

$\therefore \lim_{x\to -2}\frac{2g(x)+5}{3f(x)-2}=\frac{2\beta+5}{3\alpha-2}=\frac{2\times 4+5}{3\times 1-2}=13$

0045 답 ⑤

$\lim_{x\to 1}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to 1}g(x)=\beta$이므로

$\lim_{x\to 1}\{f(x)+g(x)\}=5$에서

$\alpha+\beta=5$

$\lim_{x\to 1}|f(x)-g(x)|=1$에서

$|\alpha-\beta|=1$

이때 $(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+4\alpha\beta$에서

$25=1+4\alpha\beta$ $\therefore \alpha\beta=6$

$\therefore \lim_{x\to 1}[\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3]=\alpha^3+\beta^3$
$=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$
$=125-3\times 6\times 5=35$

참고 주어진 조건으로 α, β의 값을 직접 구할 수도 있지만 곱셈 공식의 변형을 이용하면 $\alpha^3+\beta^3$의 값을 바로 구할 수 있다.

0046 답 3

$\lim_{x\to 0}f(x)=2$에서 $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=2$ …… ⓘ

$x<0$일 때, $f(x)-g(x)=3x^2+x+1$에서

$g(x)=f(x)-3x^2-x-1$

$\therefore \lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}\{f(x)-3x^2-x-1\}$
$=2-1=1$ …… ⓘⓘ

또 $x>0$일 때, $f(x)+g(x)=x^2-2x+5$에서

$g(x)=x^2-2x+5-f(x)$

$\therefore \lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}\{x^2-2x+5-f(x)\}$
$=5-2=3$ …… ⓘⓘⓘ

$\therefore \lim_{x\to 0-}g(x)\times\lim_{x\to 0+}g(x)=1\times 3=3$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ $\lim_{x\to 0+}f(x)$, $\lim_{x\to 0-}f(x)$의 값 구하기	10 %
ⓘⓘ $\lim_{x\to 0-}g(x)$의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $\lim_{x\to 0+}g(x)$의 값 구하기	40 %
ⓘⓥ $\lim_{x\to 0-}g(x)\times\lim_{x\to 0+}g(x)$의 값 구하기	10 %

0047 답 ③

$f(x)+2g(x)=h(x)$라 하면 $\lim_{x\to 0} h(x)=-6$이고

$g(x)=\dfrac{h(x)-f(x)}{2}$

$\therefore \lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{h(x)-f(x)}{2}=\dfrac{-6-2}{2}=-4$

0048 답 ②

$(x+1)f(x)=h(x)$라 하면 $\lim_{x\to 2} h(x)=6$이고 $f(x)=\dfrac{h(x)}{x+1}$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\dfrac{h(x)}{x+1}=\dfrac{6}{3}=2$

이때 $\lim_{x\to 2}(x^2+ax-5)f(x)=10$에서

$2(2a-1)=10 \quad \therefore a=3$

0049 답 ①

$$\lim_{x\to -2}\frac{x}{(x^2-4)f(x)}=\lim_{x\to -2}\frac{x}{(x-2)(x+2)f(x)}$$
$$=\lim_{x\to -2}\frac{x}{x-2}\times\lim_{x\to -2}\frac{1}{(x+2)f(x)}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

0050 답 ④

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x}{3\{f(x)\}^3+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{3\left\{\dfrac{f(x)}{x}\right\}^3+\dfrac{2}{x^3}}=\frac{1}{3\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^3}=9$$

0051 답 ②

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)g(x)}{2x^2-g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\times\dfrac{g(x)}{x^2}}{2-\dfrac{g(x)}{x^2}}=\frac{2\times(-1)}{2-(-1)}=-\frac{2}{3}$$

0052 답 ⑤

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^3}\{f(x)+3x^3\}=0$에서

$\lim_{x\to\infty}\left\{\dfrac{f(x)}{x^3}+3\right\}=0 \quad \therefore \lim_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=-3$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+x^2}{f(x)-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\times\dfrac{f(x)}{x^3}+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{f(x)}{x^3}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}$$
$$=\frac{4\times(-3)}{-3}=4$$

0053 답 ③

$x-3=t$로 놓으면 $x=t+3$이고, $x\to 3$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x-3)}{x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x-3)}{x(x-3)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t(t+3)}=2$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f(x)}{x(x+3)}\times(x+3)\right\}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x(x+3)}\times\lim_{x\to 0}(x+3)=2\times 3=6$$

0054 답 ⑤

$\lim_{x\to 5}\dfrac{f(x-5)}{x-5}=\alpha(\alpha\neq 0)$라 하고

$x-5=t$로 놓으면 $x\to 5$일 때 $t\to 0$이므로

$\lim_{x\to 5}\dfrac{f(x-5)}{x-5}=\lim_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{t}=\alpha$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-x^2}{f(x)+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\times\dfrac{f(x)}{x}-x}{\dfrac{f(x)}{x}+x}=\frac{2\alpha}{\alpha}=2$$

0055 답 2

$\lim_{x\to 0} g(x)=\infty$이므로 $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{g(x)}=0$ ····· ⓘ

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{g(x)\{5f(x)-2\}}{f(x)g(x)-1}=\lim_{x\to 0}\frac{5f(x)-2}{f(x)-\dfrac{1}{g(x)}}$$
$$=\frac{5\alpha-2}{\alpha}$$ ····· ⓘⓘ

즉, $\dfrac{5\alpha-2}{\alpha}=4$이므로 $\alpha=2$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{g(x)}$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ $\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)\{5f(x)-2\}}{f(x)g(x)-1}$를 α에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘⓘ α의 값 구하기	30 %

0056 답 ①

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)f(x)\times\dfrac{1}{(x+2)(x-2)}}{g(x)\times\dfrac{1}{(x+2)(x-2)}}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{\dfrac{f(x)}{x-2}}{\dfrac{g(x)}{x^2-4}}=\frac{4}{2}=2$$

0057 답 ⑤

$2f(x)-5g(x)=h(x)$라 하면 $\lim_{x\to\infty} h(x)=1$이고

$f(x)=\dfrac{5g(x)+h(x)}{2}$

이때 $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$이므로 $\lim_{x\to\infty}\dfrac{h(x)}{g(x)}=0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+5g(x)}{6f(x)-3g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\times\dfrac{5g(x)+h(x)}{2}+5g(x)}{6\times\dfrac{5g(x)+h(x)}{2}-3g(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{15g(x)+2h(x)}{12g(x)+3h(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{15+2\times\dfrac{h(x)}{g(x)}}{12+3\times\dfrac{h(x)}{g(x)}}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$$

0058 답 ②

$3f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 $\lim_{x\to\infty}h(x)=5$이고

$g(x)=3f(x)-h(x)$

이때 삼차함수 $f(x)$는 $x\to\infty$일 때 발산하므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)}{f(x)}=0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)+g(x)}{f(x)-2g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)+\{3f(x)-h(x)\}}{f(x)-2\{3f(x)-h(x)\}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5f(x)-h(x)}{-5f(x)+2h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-\frac{h(x)}{f(x)}}{-5+2\times\frac{h(x)}{f(x)}}=\frac{5}{-5}=-1$$

0059 답 ④

$x+1=t$로 놓으면 $x=t-1$이고, $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{t\to0}\frac{f(t-1)}{t}=2$$

$x-3=s$로 놓으면 $x=s+3$이고, $x\to3$일 때 $s\to0$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{g(x)}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{g(x)}{(x+3)(x-3)}$$

$$=\lim_{s\to0}\frac{g(s+3)}{s(s+6)}=6$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{(x+6)f(x-1)}{g(x+3)}=\lim_{x\to0}\frac{f(x-1)}{x}\times\lim_{x\to0}\frac{x(x+6)}{g(x+3)}$$

$$=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

0060 답 ②

$f(x)-2g(x)=h(x)$라 하면 $\lim_{x\to1}h(x)=\frac{1}{4}$이고

$g(x)=\frac{f(x)-h(x)}{2}$

이때 $\lim_{x\to1}f(x)=\infty$이므로 $\lim_{x\to1}\frac{h(x)}{f(x)}=0$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{\{f(x)\}^3-8\{g(x)\}^3}{f(x)g(x)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-2g(x)\}^3+6f(x)g(x)\{f(x)-2g(x)\}}{f(x)g(x)}$$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{\{f(x)-2g(x)\}^3}{f(x)g(x)}+6\{f(x)-2g(x)\}\right]$$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{\{h(x)\}^3}{f(x)\times\frac{f(x)-h(x)}{2}}+6h(x)\right]$$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{2\{h(x)\}^3}{\{f(x)\}^2-f(x)h(x)}+6h(x)\right]$$

$$=\lim_{x\to1}\left[\frac{2h(x)\times\left\{\frac{h(x)}{f(x)}\right\}^2}{1-\frac{h(x)}{f(x)}}+6h(x)\right]$$

$$=0+6\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

0061 답 ①

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x^3+2)}{f(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{f(x^3+2)}{(x^3+2)-1}\times\frac{x^2-1}{f(x^2)}\times\frac{(x^3+2)-1}{x^2-1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{f(x^3+2)}{(x^3+2)-1}\times\frac{x^2-1}{f(x^2)}\times\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{f(x^3+2)}{(x^3+2)-1}\times\frac{x^2-1}{f(x^2)}\times\frac{x^2-x+1}{x-1}\right\}$$

$x^3+2=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to1$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x^3+2)}{(x^3+2)-1}=\lim_{t\to1}\frac{f(t)}{t-1}=3$$

$x^2=s$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $s\to1$이므로

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{f(x^2)}=\lim_{s\to1}\frac{s-1}{f(s)}=\lim_{s\to1}\frac{1}{\frac{f(s)}{s-1}}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{f(x^3+2)}{f(x^2)}$$

$$=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{f(x^3+2)}{(x^3+2)-1}\times\frac{x^2-1}{f(x^2)}\times\frac{x^2-x+1}{x-1}\right\}$$

$$=3\times\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}$$

참고 문제에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$이 주어졌으므로 주어진 식을 $\lim_{\blacksquare\to1}\frac{f(\blacksquare)}{\blacksquare-1}$와 같은 꼴을 포함하도록 변형한 후 $\lim_{\blacksquare\to1}\frac{f(\blacksquare)}{\blacksquare-1}=3$임을 이용한다.

0062 답 ③

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x-5)+g(6-x)}{x^2-9}$$

$$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x-5)}{x^2-9}+\frac{g(6-x)}{x^2-9}\right\}$$

$$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x-5)}{(x+3)(x-3)}+\frac{g(6-x)}{(x+3)(x-3)}\right\}$$

$x-5=t$로 놓으면 $x=t+5$이고, $x\to3$일 때 $t\to-2$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x-5)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{t\to-2}\frac{f(t)}{(t+8)(t+2)}$$

$$=\lim_{t\to-2}\frac{1}{t+8}\times\lim_{t\to-2}\frac{f(t)}{t+2}$$

$$=\frac{1}{6}\times3=\frac{1}{2}$$

$6-x=s$로 놓으면 $x=6-s$이고, $x\to3$일 때 $s\to3$이므로

$$\lim_{x\to3}\frac{g(6-x)}{(x+3)(x-3)}=\lim_{s\to3}\frac{g(s)}{(9-s)(3-s)}$$

$$=\lim_{s\to3}\frac{g(s)}{(s-9)(s-3)}$$

$$=\lim_{s\to3}\frac{1}{s-9}\times\lim_{s\to3}\frac{g(s)}{s-3}$$

$$=\left(-\frac{1}{6}\right)\times6=-1$$

$$\therefore \lim_{x\to3}\frac{f(x-5)+g(6-x)}{x^2-9}$$

$$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x-5)}{(x+3)(x-3)}+\frac{g(6-x)}{(x+3)(x-3)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}+(-1)=-\frac{1}{2}$$

0063 답 ①

ㄱ. $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$

$\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}=\alpha$ (α는 상수)라 하면

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\{f(x)-g(x)\}\times\lim_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}$

$=\alpha\times 0=0$

즉, $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\left\{1-\frac{g(x)}{f(x)}\right\}=0$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=1$

$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{g(x)}{f(x)}}=1$

ㄴ. [반례] $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$라 하면

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$이지만

$f(x)g(x)=\frac{1}{x}\times x=1$이므로 $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)=1$

ㄷ. [반례] $f(x)=\frac{2}{x}$, $g(x)=\frac{1}{x}$이라 하면

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=0$이지만

$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{2}{x}}{\frac{1}{x}}=2$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=2$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

참고 ㄷ에서 $\alpha\neq 0$의 조건이 있으면 참인 명제이다.

0064 답 ④

① $\lim_{x\to 2}(x^2-2)=2$

② $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+4}-\sqrt{x})(\sqrt{x+4}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x}}=0$

③ $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=2$

④ $\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(3x+2)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(3x+2)=5$

⑤ $\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x^2+3)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}(x^2+3)=3$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0065 답 ④

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-2x-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{(3x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(3x+1)=4$

0066 답 ③

① $\lim_{x\to 5}\frac{x^2+3}{1-x}=-7$

② $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$

③ $\lim_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)(x-1)(x^2+3)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}(x+1)(x^2+3)=8$

④ $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$

⑤ $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{1-\sqrt{x-2}}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(1+\sqrt{x-2})}{(1-\sqrt{x-2})(1+\sqrt{x-2})}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(1+\sqrt{x-2})}{-(x-3)}$

$=\lim_{x\to 3}(-1-\sqrt{x-2})=-2$

따라서 극한값이 가장 큰 것은 ③이다.

0067 답 ⑤

$\lim_{x\to 5-}\frac{f(x)}{5-x}=\lim_{x\to 5-}\frac{-x^2+5x}{5-x}$

$=\lim_{x\to 5-}\frac{-x(x-5)}{-(x-5)}=\lim_{x\to 5-} x=5$

$\lim_{x\to 5+}\frac{f(x)}{x-5}=\lim_{x\to 5+}\frac{x^2-3x-10}{x-5}$

$=\lim_{x\to 5+}\frac{(x+2)(x-5)}{x-5}$

$=\lim_{x\to 5+}(x+2)=7$

$\therefore \lim_{x\to 5-}\frac{f(x)}{5-x}\times\lim_{x\to 5+}\frac{f(x)}{x-5}=5\times 7=35$

0068 답 ③

$\lim_{x\to -1}\frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x^4+x^2+1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1}(x^4+x^2+1)=3$

0069 답 ②

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}\left(\frac{1}{6-x}-\frac{1}{4}\right)=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{1}{x-2}\times\frac{x-2}{4(6-x)}\right\}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{4(6-x)}=\frac{1}{16}$

0070 답 21

$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{7}{x^2}}-\frac{3}{x}}{1-\frac{4}{x}}=1$

$\therefore a=1$ ····· ⓘ

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{x^2-7}-3)(\sqrt{x^2-7}+3)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{x^2-16}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{(x+4)(x-4)}{(x-4)(\sqrt{x^2-7}+3)}$$
$$=\lim_{x\to4}\frac{x+4}{\sqrt{x^2-7}+3}=\frac{4}{3}$$

$\therefore\ b=\frac{4}{3}$ …… ii

$\therefore\ 9(a+b)=9\left(1+\frac{4}{3}\right)=21$ …… iii

채점 기준	
i a의 값 구하기	40%
ii b의 값 구하기	50%
iii $9(a+b)$의 값 구하기	10%

0071 답 ①

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4-x^2}-\sqrt{4-x}}{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4+x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{4-x^2}-\sqrt{4-x})(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4-x})(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4+x})}{(\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4+x})(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4+x})(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4-x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-(x^2-x)(\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4+x})}{(x^2-x)(\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4-x})}$$
$$=-\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{4+x^2}+\sqrt{4+x}}{\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4-x}}=-1$$

0072 답 ②

$x\to3-$일 때 $x>0$, $x-3<0$이므로

$$\lim_{x\to3-}\frac{|x-3|^2+2|x|-6}{|x-3|}=\lim_{x\to3-}\frac{(x-3)^2+2(x-3)}{-(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to3-}\{-(x-1)\}=-2$$

0073 답 ⑤

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{12x-5}{\sqrt{x^2-4}-2x}=\lim_{t\to\infty}\frac{-12t-5}{\sqrt{t^2-4}+2t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-12-\frac{5}{t}}{\sqrt{1-\frac{4}{t^2}}+2}=-4$$

0074 답 ③

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{t\to\infty}\frac{|-t|-3}{-2t+5}=\lim_{t\to\infty}\frac{t-3}{-2t+5}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1-\frac{3}{t}}{-2+\frac{5}{t}}=-\frac{1}{2}$$

참고 $t\to\infty$이면 $t>0$이므로 $-t<0$

$\therefore\ |-t|=-(-t)=t$

0075 답 ①

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}x^2\left(\frac{1}{3}+\frac{x}{\sqrt{9x^2+1}}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}t^2\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{\sqrt{9t^2+1}}\right)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2(\sqrt{9t^2+1}-3t)}{3\sqrt{9t^2+1}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2(\sqrt{9t^2+1}-3t)(\sqrt{9t^2+1}+3t)}{3\sqrt{9t^2+1}(\sqrt{9t^2+1}+3t)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2}{3\sqrt{9t^2+1}(\sqrt{9t^2+1}+3t)}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{3\sqrt{9+\frac{1}{t^2}}\left(\sqrt{9+\frac{1}{t^2}}+3\right)}=\frac{1}{54}$$

0076 답 ①

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+5x}-\sqrt{x^2-3x})$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-5t}-\sqrt{t^2+3t})$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2-5t}-\sqrt{t^2+3t})(\sqrt{t^2-5t}+\sqrt{t^2+3t})}{\sqrt{t^2-5t}+\sqrt{t^2+3t}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-8t}{\sqrt{t^2-5t}+\sqrt{t^2+3t}}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-8}{\sqrt{1-\frac{5}{t}}+\sqrt{1+\frac{3}{t}}}=-4$$

0077 답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{1-\sqrt{1+xf(x)}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x\{1+\sqrt{1+xf(x)}\}}{\{1-\sqrt{1+xf(x)}\}\{1+\sqrt{1+xf(x)}\}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x\{1+\sqrt{1+xf(x)}\}}{-xf(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\sqrt{1+xf(x)}}{-f(x)}=\frac{1+1}{-2}=-1$$

0078 답 10

$$\lim_{x\to2}\frac{(x^2-4)f(x)}{x^3-2x^2+x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)f(x)}{(x-2)(x^2+1)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)f(x)}{x^2+1}$$
$$=\frac{4}{5}f(2)$$ …… i

따라서 $\frac{4}{5}f(2)=8$이므로 $f(2)=10$ …… ii

채점 기준	
i 주어진 등식의 좌변을 $f(2)$를 사용하여 나타내기	50%
ii $f(2)$의 값 구하기	50%

참고 함수 $f(x)$가 다항함수이면 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$ (a는 상수)이다.

0079 답 ①

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax+1}{\sqrt{ax^2+1}+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\frac{1}{x}}{\sqrt{a+\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x}}=\sqrt{a}$$

즉, $\sqrt{a}=2$이므로 $a=4$

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-3)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x-3}{x+1}=-1$$

즉, $b+2=-1$이므로 $b=-3$

$\therefore a+b=4+(-3)=1$

0080 답 ④

$a+2\neq0$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{(a+2)x^2-bx+4}{x-6}$는 ∞ 또는 $-\infty$이므로

$a+2=0 \quad \therefore a=-2$

$a=-2$를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-bx+4}{x-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{-b+\frac{4}{x}}{1-\frac{6}{x}}=-b$$

즉, $-b=-5$이므로 $b=5$

$\therefore a+b=-2+5=3$

0081 답 ⑤

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5k}{\sqrt{9x^2+kx}-3x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5k(\sqrt{9x^2+kx}+3x)}{(\sqrt{9x^2+kx}-3x)(\sqrt{9x^2+kx}+3x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5k(\sqrt{9x^2+kx}+3x)}{kx}$$

$$=5\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9+\frac{k}{x}}+3\right)$$

$=5\times6=30$

0082 답 ③

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+ax-2}-\sqrt{ax^2+1})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+ax-2}-\sqrt{ax^2+1})(\sqrt{4x^2+ax-2}+\sqrt{ax^2+1})}{\sqrt{4x^2+ax-2}+\sqrt{ax^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(4-a)x^2+ax-3}{\sqrt{4x^2+ax-2}+\sqrt{ax^2+1}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 값이 존재하려면

$4-a=0 \quad \therefore a=4$

$a=4$를 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-3}{\sqrt{4x^2+4x-2}+\sqrt{4x^2+1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}}{\sqrt{4+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}=1$$

$\therefore ab=4\times1=4$

0083 답 $\frac{3}{2}$

$a\leq0$이면 $\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2-x+3}-(ax+b)\}=\infty$이므로

$a>0$ ····· ⓘ

주어진 등식의 좌변을 정리하면

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{x^2-x+3}-(ax+b)\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{\sqrt{x^2-x+3}-(ax+b)\}\{\sqrt{x^2-x+3}+(ax+b)\}}{\sqrt{x^2-x+3}+(ax+b)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+3-b^2}{\sqrt{x^2-x+3}+ax+b}$$

이고, 이 값이 0이어야 하므로

$1-a^2=0,\ 1+2ab=0$

이때 $1-a^2=0$에서

$a^2=1 \quad \therefore a=1\ (\because a>0)$ ····· ⓘⓘ

$a=1$을 $1+2ab=0$에 대입하여 풀면 $b=-\frac{1}{2}$ ····· ⓘⓘⓘ

$\therefore a-b=1-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$ ····· ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ a의 값의 범위 구하기	30%
ⓘⓘ a의 값 구하기	30%
ⓘⓘⓘ b의 값 구하기	30%
ⓘⓥ $a-b$의 값 구하기	10%

0084 답 ③

$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n-1}{x^3+5x-2}=5$에서 ax^n-1은 최고차항의 계수가 5인 삼차식임을 알 수 있다.

따라서 $a=5,\ n=3$이므로

$a+n=5+3=8$

참고 (i) $n\leq2$일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2-1}{x^3+5x-2}=0$

(ii) $n=3$일 때, $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3-1}{x^3+5x-2}=a$

(iii) $n\geq4$일 때,

$a>0$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n-1}{x^3+5x-2}=\infty$, $a<0$이면 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n-1}{x^3+5x-2}=-\infty$

0085 답 ①

$a>6$이므로 $x\to2$일 때 $3x-a<0$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{|3x-a|-(a-6)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{-(3x-a)-(a-6)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{-3(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}(-3)=-3$$

0086 답 6

(나)에서 $\lim_{x\to1}|a^2x^2-2x-7|=0$이어야 하므로

$|a^2-9|=0,\ a^2=9$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=3$

(ⅰ) $a=-3$일 때, (가)에서

$b=\lim_{x\to 3}\dfrac{12(x-3)}{x^2+9}=0$

이때 $\lim_{x\to 1}\left|\dfrac{9x^2-2x-7}{x^2+6}\right|=0$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅱ) $a=3$일 때, (가)에서

$b=\lim_{x\to 3}\dfrac{12(x-3)}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\dfrac{12(x-3)}{(x+3)(x-3)}$

$=\lim_{x\to 3}\dfrac{12}{x+3}=2$

이때 $\lim_{x\to 1}\left|\dfrac{9x^2-2x-7}{x^2-2x+6}\right|=0$이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=-3$, $b=0$ 또는 $a=3$, $b=2$

따라서 $M=3\times 2=6$, $m=(-3)\times 0=0$이므로

$M+m=6+0=6$

0087 답 ④

$g(x)=t$라 하면 $f(t)=x$이므로 $x=t^2+t$

$f(0)=0$이고, 함수 $f(t)$는 일대일대응이므로

$x\to 0$일 때 $t\to 0$이다.

$\therefore \lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{4x}=\lim_{t\to 0}\dfrac{t}{4(t^2+t)}=\lim_{t\to 0}\dfrac{1}{4(t+1)}=\dfrac{1}{4}$

0088 답 ⑤

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+4x}-x}{x^n(\sqrt{x^6+2}-x^3)}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+4x}-x)(\sqrt{x^2+4x}+x)(\sqrt{x^6+2}+x^3)}{x^n(\sqrt{x^6+2}-x^3)(\sqrt{x^6+2}+x^3)(\sqrt{x^2+4x}+x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x(\sqrt{x^6+2}+x^3)}{x^n(\sqrt{x^2+4x}+x)}$ ····· ㉠

이때 ㉠의 값이 존재하고, 그 값이 0이 아니려면 분모와 분자의 식의 차수가 같아야 하므로

$n+1=4$ $\therefore n=3$

$n=3$을 ㉠에 대입하면

$a=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x(\sqrt{x^6+2}+x^3)}{x^3(\sqrt{x^2+4x}+x)}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2(\sqrt{x^6+2}+x^3)}{x^2(\sqrt{x^2+4x}+x)}$

$=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x^6}}+1\right)}{\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}+1}=2$

$\therefore n+a=3+2=5$

0089 답 ③

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{5x^m+3}{x^{2n}+1}=0$이어야 하므로 $m<2n$

이를 만족시키는 자연수 m의 개수는 $2n-1$이므로

$g(n)=2n-1$

$\therefore g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+g(5)=1+3+5+7+9$

$=25$

최고수준 도전 기출 24~25쪽

0090 답 ⑤

전략 $f(x)=f(x+4)$, $g(x)=g(x+4)$이므로 상수 a에 대하여

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to(4+a)+}f(x)$, $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to(4+a)-}f(x)$

$\lim_{x\to a+}g(x)=\lim_{x\to(4+a)+}g(x)$, $\lim_{x\to a-}g(x)=\lim_{x\to(4+a)-}g(x)$

가 성립함을 이용한다.

ㄱ. $\lim_{x\to 0+}\{f(x)-g(x)\}=-1-1=-2$

$\lim_{x\to 0-}\{f(x)-g(x)\}=1-1=0$

즉, $\lim_{x\to 0+}\{f(x)-g(x)\}\neq\lim_{x\to 0-}\{f(x)-g(x)\}$이므로

$\lim_{x\to 0}\{f(x)-g(x)\}$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $g(x)=s$로 놓으면 $x\to 1$일 때 $s\to 0+$이므로

$\lim_{x\to 1}f(g(x))=\lim_{s\to 0+}f(s)=-1$

ㄷ. $\dfrac{6-6t}{t+1}=m$으로 놓으면

$m=\dfrac{-6(t+1)+12}{t+1}=-6+\dfrac{12}{t+1}$

즉, $t\to\infty$일 때 $m\to -6+$이므로

$\lim_{t\to\infty}g\left(\dfrac{6-6t}{t+1}\right)=\lim_{m\to -6+}g(m)=\lim_{m\to -2+}g(m)=1$

ㄹ. $x+1=k$로 놓으면 $x\to 7-$일 때 $k\to 8-$이므로

$\lim_{x\to 7-}\{f(x+1)+g(x+1)\}=\lim_{k\to 8-}\{f(k)+g(k)\}$

$=\lim_{k\to 4-}\{f(k)+g(k)\}$

$=\lim_{k\to 0-}\{f(k)+g(k)\}$

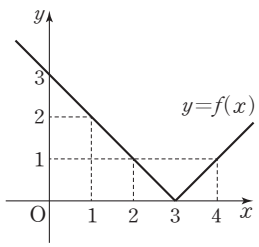
$=1+1=2$

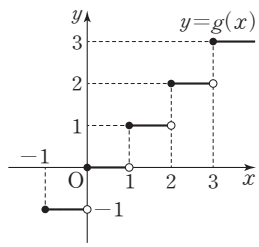
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

0091 답 ③

전략 $x\to a+$일 때 $f(x)$의 값이 어느 값에 한없이 가까워져야 하는지를 함수 $y=g(x)$의 그래프를 이용하여 구한 후, 함수 $y=f(x)$의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 정수 a의 값을 구한다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.





$\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to 1-$일 때 $t\to 1+$이므로

$\lim_{x\to 1-}g\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 1+}g(t)=1$

즉, $\lim_{x\to a+}g(f(x))=1$이려면 $x\to a+$일 때

$f(x)\to 1+$ 또는 $f(x)\to 2-$이어야 한다.

$x\to 4+$일 때 $f(x)\to 1+$이고, $x\to 1+$일 때 $f(x)\to 2-$이므로

$a=1$ 또는 $a=4$

따라서 구하는 모든 정수 a의 값의 합은 $1+4=5$

0092 답 ④

전략 $f(x)$를 주어진 식에 대입한 후 근호를 포함한 식을 유리화하여 a의 값을 구한다.

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{f(-x)}-\sqrt{f(x)}\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{a(-x-5)^2}-\sqrt{a(x-5)^2}\}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{\sqrt{a(x+5)^2}-\sqrt{a(x-5)^2}\}\{\sqrt{a(x+5)^2}+\sqrt{a(x-5)^2}\}}{\sqrt{a(x+5)^2}+\sqrt{a(x-5)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{20ax}{\sqrt{a(x+5)^2}+\sqrt{a(x-5)^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{20a}{\sqrt{a\left(1+\frac{5}{x}\right)^2}+\sqrt{a\left(1-\frac{5}{x}\right)^2}}=10\sqrt{a}$$

따라서 $10\sqrt{a}=30$이므로

$\sqrt{a}=3$ $\therefore a=9\ (\because a>0)$

0093 답 ③

전략 $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k$를 이용하기 위해 $x=-t$로 치환하여 주어진 식을 변형한다.

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{-t}=k \quad \therefore \lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{t}=-k$$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+f(x)}+2f(x)}=\frac{1}{3}$에서

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+f(x)}+2f(x)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)}{\sqrt{t^2+f(-t)}+2f(-t)}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{f(-t)}{t}}{\sqrt{1+\frac{f(-t)}{t}\times\frac{1}{t}}+2\times\frac{f(-t)}{t}}$$

$$=\frac{-k}{1-2k}=\frac{k}{2k-1}$$

따라서 $\frac{k}{2k-1}=\frac{1}{3}$이므로

$3k=2k-1$ $\therefore k=-1$

0094 답 ①

전략 $x=[x]+a\ (0\le a<1)$를 이용하여 극한값을 구한다.

$x=[x]+a\ (0\le a<1)$라 하면 $[x]=x-a$이므로

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+[x]}-2x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+x-a}-2x)$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+x-a}-2x)(\sqrt{4x^2+x-a}+2x)}{\sqrt{4x^2+x-a}+2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x-a}{\sqrt{4x^2+x-a}+2x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{a}{x}}{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}}+2}=\frac{1}{4}$$

0095 답 ④

전략 모든 실수 a에 대하여 극한값이 존재하려면 $\frac{x^2}{\{f(x)\}^2-k(x+2)f(x)}$의 분모가 0이 되는 x의 값이 존재하지 않거나 0뿐이어야 함을 이용한다.

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2}{\{f(x)\}^2-k(x+2)f(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x^2}{f(x)\{f(x)-k(x+2)\}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x^2}{(x^2+6x+12)\{x^2+(6-k)x+12-2k\}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 모든 실수 x에 대하여

$x^2+6x+12=(x+3)^2+3>0$

이므로 모든 실수 a에 대하여 ㉠의 값이 존재하는 경우는 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) 이차방정식 $x^2+(6-k)x+12-2k=0$의 실근이 존재하지 않으면 ㉠의 분모가 0이 되는 x의 값이 존재하지 않으므로 모든 실수 a에 대하여 ㉠의 값이 존재한다.

이차방정식 $x^2+(6-k)x+12-2k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(6-k)^2-4(12-2k)<0$

$k^2-4k-12<0$, $(k+2)(k-6)<0$

$\therefore -2<k<6$

(ii) 이차방정식 $x^2+(6-k)x+12-2k=0$의 실근이 0뿐이면

$x^2+(6-k)x+12-2k=x^2$ ····· ㉡

㉠에서

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2}{(x^2+6x+12)x^2}=\lim_{x\to a}\frac{1}{x^2+6x+12}$$

이므로 모든 실수 a에 대하여 ㉠의 값이 존재한다.

즉, ㉡에서

$6-k=0$, $12-2k=0$ $\therefore k=6$

(i), (ii)에서 $-2<k\le6$

따라서 정수 k는 -1, 0, 1, …, 6의 8개이다.

0096 답 42

전략 주어진 극한값이 $x=1$, $x=2$에서 모두 존재함을 이용하여 $g(1)=g(2)=0$임을 알고, 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 $g(x)=(x-1)(x-2)h(x)$로 놓고 $g(x)$를 구한다.

$f(x)=0$에서

$(x-1)(x-2)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=2$

모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}$의 값이 존재하므로

$x=1$, $x=2$에서 극한값이 모두 존재하여야 한다.

(i) $a=1$일 때,

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to1+}\frac{-f(x)g(x)}{f(x)}$$

$$=-\lim_{x\to1+}g(x)$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to1-}\frac{g(x)f(x)}{f(x)}$$

$$=\lim_{x\to1-}g(x)$$

즉, $-\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1-}g(x)$이어야 하므로 $\lim_{x\to1}g(x)=0$

(ii) $a=2$일 때,

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)f(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}g(x)$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)\times|f(x)|}{f(x)}=\lim_{x\to 2-}\frac{-f(x)g(x)}{f(x)}=-\lim_{x\to 2-}g(x)$$

즉, $\lim_{x\to 2+}g(x)=-\lim_{x\to 2-}g(x)$이어야 하므로 $\lim_{x\to 2}g(x)=0$

사차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 (i), (ii)에서

$g(1)=g(2)=0$

즉, 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여

$g(x)=(x-1)(x-2)h(x)=f(x)h(x)$로 놓으면

$$\lim_{x\to a}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)h(x)-f(x)|}{f(x)h(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)||h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

이고, 모든 실수 a에 대하여 이 극한값이 존재하므로 $x=1$, $x=2$에서 극한값이 모두 존재하여야 한다.

(iii) $a=1$일 때,

$$\lim_{x\to 1+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to 1+}\frac{-f(x)|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$=-\lim_{x\to 1+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$=\lim_{x\to 1-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

에서 $-\lim_{x\to 1+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}=\lim_{x\to 1-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$ ····· ㉠

이때 $h(1)=0$이면 ㉠의 값이 존재하지 않으므로 $h(1)\neq 0$

즉, ㉠에서

$$-\frac{|h(1)-1|}{h(1)}=\frac{|h(1)-1|}{h(1)}$$

$|h(1)-1|=0$ $\therefore h(1)=1$

(iv) $a=2$일 때,

$$\lim_{x\to 2+}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$=\lim_{x\to 2+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{|g(x)-f(x)|}{g(x)}=\lim_{x\to 2-}\frac{-f(x)|h(x)-1|}{f(x)h(x)}$$

$$=-\lim_{x\to 2-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$$

에서 $\lim_{x\to 2+}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}=-\lim_{x\to 2-}\frac{|h(x)-1|}{h(x)}$ ····· ㉡

이때 $h(2)=0$이면 ㉡의 값이 존재하지 않으므로 $h(2)\neq 0$

즉, ㉡에서

$$\frac{|h(2)-1|}{h(2)}=-\frac{|h(2)-1|}{h(2)}$$

$|h(2)-1|=0$ $\therefore h(2)=1$

이차함수 $h(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 (iii), (iv)에서

$h(x)=(x-1)(x-2)+1=x^2-3x+3$

따라서 $g(x)=(x-1)(x-2)(x^2-3x+3)$이므로

$g(-1)=42$

02 함수의 극한의 활용

난이도별 필수 기출

27~41쪽

0097 답 ⑤

$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-ax+8}{\sqrt{x}-2}=8$에서 $x\to 4$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 4}(x^2-ax+8)=0$이므로

$24-4a=0$ $\therefore a=6$

0098 답 ③

$\lim_{x\to 2}\frac{x+a}{x^2-2x}=b$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}(x+a)=0$이므로

$2+a=0$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$$

따라서 $b=\frac{1}{2}$이므로 $ab=(-2)\times\frac{1}{2}=-1$

0099 답 ①

$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)-3}{x-5}=4$에서 $x\to 5$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 5}\{f(x)-3\}=0$이므로 $\lim_{x\to 5}f(x)=3$

$$\therefore \lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\{f(x)\}^2-9}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\{f(x)+3\}\{f(x)-3\}}$$

$$=\lim_{x\to 5}\left\{\frac{1}{f(x)+3}\times\frac{1}{\frac{f(x)-3}{x-5}}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{24}$$

0100 답 ②

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x^3-1}=3$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$이므로

$1+a+b=0$ $\therefore b=-a-1$ ····· ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-(a+1)}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+a+1}{x^2+x+1}=\frac{a+2}{3}$$

즉, $\frac{a+2}{3}=3$이므로

$a+2=9$ $\therefore a=7$

$a=7$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-8$

$\therefore a-b=7-(-8)=15$

0101 답 5

$\lim_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x^2+a}+b}{x+1}=-\dfrac{1}{2}$에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to-1}(\sqrt{x^2+a}+b)=0$이므로

$\sqrt{1+a}+b=0$ $\therefore b=-\sqrt{1+a}$ …… ㉠ …… ⓘ

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{1+a}}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{1+a})(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})}{(x+1)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{(x+1)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a})}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{1+a}}=-\frac{1}{\sqrt{1+a}}$$

즉, $-\dfrac{1}{\sqrt{1+a}}=-\dfrac{1}{2}$이므로

$\sqrt{1+a}=2$ $\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-2$ …… ⓘⓘ

$\therefore a-b=3-(-2)=5$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ b를 a에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘ a, b의 값 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ $a-b$의 값 구하기	10 %

0102 답 ③

$\lim_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{ax+b}}{x^2-4}=1$에서 $x\to-2$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to-2}(\sqrt{2x+5}-\sqrt{ax+b})=0$이므로

$1-\sqrt{-2a+b}=0$, $\sqrt{-2a+b}=1$

$-2a+b=1$ $\therefore b=2a+1$ …… ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{ax+2a+1}}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(\sqrt{2x+5}-\sqrt{ax+2a+1})(\sqrt{2x+5}+\sqrt{ax+2a+1})}{(x^2-4)(\sqrt{2x+5}+\sqrt{ax+2a+1})}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(2-a)x+2(2-a)}{(x^2-4)(\sqrt{2x+5}+\sqrt{ax+2a+1})}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{(2-a)(x+2)}{(x+2)(x-2)(\sqrt{2x+5}+\sqrt{ax+2a+1})}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{2-a}{(x-2)(\sqrt{2x+5}+\sqrt{ax+2a+1})}=\frac{a-2}{8}$$

즉, $\dfrac{a-2}{8}=1$이므로

$a-2=8$ $\therefore a=10$

$a=10$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=21$

$\therefore 3a-b=3\times10-21=9$

0103 답 ①

$\lim_{x\to-3}\dfrac{3\sqrt{x^2-5}+2x}{ax+b}=5$에서 $x\to-3$일 때 (분자)$\to$0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to-3}(ax+b)=0$이므로

$-3a+b=0$ $\therefore b=3a$ …… ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-3}\frac{3\sqrt{x^2-5}+2x}{ax+3a}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{(3\sqrt{x^2-5}+2x)(3\sqrt{x^2-5}-2x)}{a(x+3)(3\sqrt{x^2-5}-2x)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{5(x^2-9)}{a(x+3)(3\sqrt{x^2-5}-2x)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{5(x+3)(x-3)}{a(x+3)(3\sqrt{x^2-5}-2x)}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{5(x-3)}{a(3\sqrt{x^2-5}-2x)}=-\frac{5}{2a}$$

즉, $-\dfrac{5}{2a}=5$이므로 $a=-\dfrac{1}{2}$

$a=-\dfrac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $b=-\dfrac{3}{2}$

$\therefore a-b=\left(-\dfrac{1}{2}\right)-\left(-\dfrac{3}{2}\right)=1$

0104 답 ③

$\lim_{x\to2}\dfrac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-b}=-1$에서 $x\to2$일 때 (분자)$\to$0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^2-b)=0$이므로

$4-b=0$ $\therefore b=4$

$b=4$를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-(a+2)x+2a}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-a)}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x-a}{x+2}=\frac{2-a}{4}$$

즉, $\dfrac{2-a}{4}=-1$이므로

$2-a=-4$ $\therefore a=6$

$\therefore a+b=6+4=10$

0105 답 ⑤

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{b}\right)=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x-1}\times\frac{b-(x+a)}{b(x+a)}\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-x-a+b}{b(x-1)(x+a)}$$ …… ㉠

$\lim_{x\to1}\dfrac{-x-a+b}{b(x-1)(x+a)}=-\dfrac{1}{4}$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to1}(-x-a+b)=0$이므로

$-1-a+b=0$ $\therefore b=a+1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{-x-a+a+1}{(a+1)(x-1)(x+a)}=\lim_{x\to1}\frac{-(x-1)}{(a+1)(x-1)(x+a)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-1}{(a+1)(x+a)}$$
$$=-\frac{1}{(a+1)^2}$$

즉, $-\frac{1}{(a+1)^2}=-\frac{1}{4}$이므로

$(a+1)^2=4$ $\therefore a=-3$ 또는 $a=1$

$a=-3$을 ㉡에 대입하여 풀면 $b=-2$

$a=1$을 ㉡에 대입하여 풀면 $b=2$

즉, $a^2+b^2=13$ 또는 $a^2+b^2=5$

따라서 구하는 a^2+b^2의 최댓값은 13이다.

0106 답 ④

$\lim_{x\to3}\frac{x^n-8x-3}{x-3}=a$에서 $x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to3}(x^n-8x-3)=0$이므로

$3^n-27=0$, $3^n=27$ $\therefore n=3$

$n=3$을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{x^3-8x-3}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x^2+3x+1)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}(x^2+3x+1)=19$$

따라서 $a=19$이므로

$a+n=19+3=22$

0107 답 −18

$\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+ax-b}{|x+1|}$에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}(3x^2+ax-b)=0$이므로

$3-a-b=0$ $\therefore b=-a+3$ ····· ㉠ ····· ⓘ

즉, $f(x)=\frac{3x^2+ax+a-3}{|x+1|}=\frac{(x+1)(3x+a-3)}{|x+1|}$이고,

$\lim_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재하므로 $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)$에서

$$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)(3x+a-3)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1+}(3x+a-3)=a-6$$
$$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}\frac{(x+1)(3x+a-3)}{-(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1-}(-3x-a+3)=6-a$$

즉, $a-6=6-a$이므로

$2a=12$ $\therefore a=6$

$a=6$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-3$ ····· ⓘⓘ

$\therefore ab=6\times(-3)=-18$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ b를 a에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘ a, b의 값 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ ab의 값 구하기	10 %

0108 답 −3

$\lim_{x\to1+}f(x)=\infty$이면 $\lim_{x\to1+}\frac{1}{f(x)}=0$이므로

$\lim_{x\to1+}(x^2+ax+2)=0$

$3+a=0$ $\therefore a=-3$

이때 $\lim_{x\to2}f(x)g(x)=k$에서 $\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+b}-2}{x^2-3x+2}=k$ ····· ㉠

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(\sqrt{x+b}-2)=0$이므로

$\sqrt{2+b}-2=0$, $\sqrt{2+b}=2$ $\therefore b=2$

$b=2$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-1)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+2}+2)}=\frac{1}{4}$$

따라서 $k=\frac{1}{4}$이므로

$4(a+b+k)=4\left(-3+2+\frac{1}{4}\right)=-3$

0109 답 10

$\lim_{x\to\infty}f(x)=-1$에서 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2-1}=-1$

즉, ax^3+bx^2+cx+d는 최고차항의 계수가 −1인 이차식이므로

$a=0$, $b=-1$ ····· ⓘ

이때 $\lim_{x\to1}f(x)=2$에서 $\lim_{x\to1}\frac{-x^2+cx+d}{x^2-1}=2$ ····· ㉠

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(-x^2+cx+d)=0$이므로

$-1+c+d=0$ $\therefore d=1-c$ ····· ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{-x^2+cx+1-c}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(-x-1+c)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{-x-1+c}{x+1}=\frac{c-2}{2}$$

즉, $\frac{c-2}{2}=2$이므로 $c=6$

$c=6$을 ㉡에 대입하여 풀면 $d=-5$ ····· ⓘⓘ

$\therefore a+b+c-d=0+(-1)+6-(-5)=10$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a, b의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ c, d의 값 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ $a+b+c-d$의 값 구하기	10 %

다른 풀이

㉠에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(-x^2+cx+d)=0$이므로 $-x^2+cx+d$는 $x-1$을 인수로 갖는다.

$-x^2+cx+d=(x-1)(-x+k)$ (k는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{-x^2+cx+d}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(-x+k)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{-x+k}{x+1}=\frac{k-1}{2}$$

즉, $\frac{k-1}{2}=2$이므로

$k-1=4$ $\therefore k=5$

따라서 $-x^2+cx+d=(x-1)(-x+5)=-x^2+6x-5$이므로

$c=6$, $d=-5$

$\therefore a+b+c-d=0+(-1)+6-(-5)=10$

0110 답 ①

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to1}(x^3+ax+b)=0$에서

$1+a+b=0$ $\therefore b=-a-1$ ····· ㉠

즉, $f(x)=x^3+ax-a-1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax-a-1}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+a+1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+a+1}{x-1}$$

이때 $\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+a+1}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+x+a+1)=0$이므로

$3+a=0$ $\therefore a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x+2$이므로 $f(3)=20$

다른 풀이

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 $f(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

$f(x)=(x-1)^2(x-k)$ (k는 상수)라 하면

$f(x)=x^3-(k+2)x^2+(2k+1)x-k$

이 식이 $f(x)=x^3+ax+b$와 일치하므로

$k+2=0$, $2k+1=a$, $-k=b$

$\therefore k=-2$, $a=-3$, $b=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x+2$이므로 $f(3)=20$

0111 답 ③

$\lim_{x\to2}\frac{g(x)-2x}{x-2}$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}\{g(x)-2x\}=0$이므로 $\lim_{x\to2}g(x)=4$

$f(x)+x-2=(x-2)g(x)$에서

$f(x)=(x-2)\{g(x)-1\}$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)g(x)}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)\{g(x)-1\}g(x)}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{\{g(x)-1\}g(x)}{x+2}$$

$$=\frac{3\times4}{4}=3$$

0112 답 ③

㈎에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다. 즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로

$f(1)-g(1)=0$ $\therefore f(1)=g(1)$

㈎, ㈏의 두 식을 변끼리 더하면

$$\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-g(x)}{x-1}+\frac{f(x)+g(x)-2f(1)}{x-1}\right\}=12$$

$$\lim_{x\to1}\frac{2\{f(x)-f(1)\}}{x-1}=12 \quad \therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-a\}=0$이므로 $f(1)=a$ ····· ㉠

이때 $g(1)=f(1)$이므로 $g(1)=a$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-a}{x-1}=b\times g(1)$에 대입하면

$$ab=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=6$$

0113 답 ⑤

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=3$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

$f(x)=(x-2)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2}(x+a)=2+a$$

즉, $2+a=3$이므로 $a=1$

따라서 $f(x)=(x-2)(x+1)$이므로 $f(-4)=18$

0114 답 $-\frac{1}{16}$

$\lim_{x\to7}\frac{f(x)}{x-7}=16$에서 $x\to7$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to7}f(x)=0$이므로 $f(7)=0$ ····· ㉠

또 $\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{f(x)}=k$에서 $x\to-1$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$ ····· ㉡ ····· ⓘ

㉠, ㉡에서 $f(x)=a(x+1)(x-7)$ (a는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$$\lim_{x\to7}\frac{f(x)}{x-7}=\lim_{x\to7}\frac{a(x+1)(x-7)}{x-7}$$

$$=\lim_{x\to7}a(x+1)=8a$$

즉, $8a=16$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=2(x+1)(x-7)$이므로 …… ⅱ

$k=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{f(x)}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{2(x+1)(x-7)}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{2(x-7)}=-\frac{1}{16}$ …… ⅲ

채점 기준	
ⅰ $f(7)$, $f(-1)$의 값 구하기	30 %
ⅱ $f(x)$ 구하기	40 %
ⅲ k의 값 구하기	30 %

0115 답 ④

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+8x-3}=3$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=-1$에서 $x\to1$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(3x+a)$ (a는 상수)라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(3x+a)}$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{3x+a}=\frac{1}{3+a}$

즉, $\frac{1}{3+a}=-1$이므로 $a=-4$

따라서 $f(x)=(x-1)(3x-4)$이므로 $f(2)=2$

0116 답 ⑤

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{x^2}=4$에서 $f(x)-x^3$은 최고차항의 계수가 4인 이차함수이므로 $f(x)-x^3=4x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=x^3+4x^2+ax+b$

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=-5$에서 $x\to-2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-2}f(x)=0$에서 $f(-2)=0$이므로

$8-2a+b=0$ $\therefore b=2a-8$ …… ㉠

즉, $f(x)=x^3+4x^2+ax+2a-8$이므로

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{x^3+4x^2+ax+2a-8}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}\frac{(x+2)(x^2+2x+a-4)}{x+2}$

$=\lim_{x\to-2}(x^2+2x+a-4)=a-4$

즉, $a-4=-5$이므로 $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-10$

따라서 $f(x)=x^3+4x^2-x-10$이므로 $f(1)=-6$

0117 답 14

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=0$이므로 $f(x)$는 이차 이하의 다항함수이고,

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=1$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수)라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(ax+b)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(ax+b)=a+b$

$\therefore a+b=1$ …… ㉠

㈐에서 $f(2)=4$이므로

$2a+b=4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=-2$

따라서 $f(x)=(x-1)(3x-2)$이므로 $f(3)=14$

0118 답 ③

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^2}{x}=3$에서 $f(x)-x^2$은 최고차항의 계수가 3인 일차함수이므로 $f(x)-x^2=3x+a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=x^2+3x+a$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to0+}x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^2+3t+a}{t^2}$

$=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{3}{t}+\frac{a}{t^2}\right)=1$

0119 답 ②

$\lim_{x\to-5}\frac{f(x)}{x+5}=a$, $\lim_{x\to3}\frac{f(x)}{x-3}=b$에서 $x\to-5$, $x\to3$일 때 각각 (분모)$\to0$이고 극한값이 모두 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-5}f(x)=0$, $\lim_{x\to3}f(x)=0$이므로

$f(-5)=0$, $f(3)=0$

$f(x)=(x+5)(x-3)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)라 하면

방정식 $f(x)=0$은 적어도 2개의 실근을 갖는다.

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

0120 답 ⑤

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=2$에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$

$f(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)라 하면

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2+ax+b)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)=1-a+b$

즉, $1-a+b=2$이므로 $b=a+1$

$\therefore f(x)=(x+1)(x^2+ax+a+1)$

이때 $f(1)\le8$에서

$2(2+2a)\le8$ $\therefore a\le1$

$\therefore f(3)=16a+40\le56$ ($\because a\le1$)

따라서 $f(3)$의 최댓값은 56이다.

0121 답 ④

(가)에서 $x\to1+$, $x\to1-$일 때 각각 (분모)$\to0$이고 극한값이 모두 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1+}f(x)=0$, $\lim_{x\to1-}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=2(x-1)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)}{|x-1|}=\lim_{x\to1+}\frac{2(x-1)(x+a)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}2(x+a)$$
$$=2(1+a)$$
$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)}{|x-1|}=\lim_{x\to1-}\frac{2(x-1)(x+a)}{-(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1-}\{-2(x+a)\}$$
$$=-2(1+a)$$

즉, (나)에서 $-2(1+a)-2(1+a)=4$이므로

$4a=-8$ $\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=2(x-1)(x-2)$이므로 $f(4)=12$

0122 답 5

(가)에서 $\{f(x)\}^2$은 최고차항의 계수가 4인 사차함수이고, $f(x)$의 최고차항의 계수는 양수이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다. …… ⓘ

(나)의 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x^2}{x-1}=5$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-x^2\}=0$이므로 $f(1)=1$ …… ⓘⓘ

$f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 $f(1)=1$에서

$2+a+b=1$ $\therefore b=-a-1$

즉, $f(x)=2x^2+ax-a-1$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-x^2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(x+a+1)=a+2$$

즉, $a+2=5$이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=2x^2+3x-4$이므로 …… ⓘⓘⓘ

$f(-3)=5$ …… ⓘⓥ

채점 기준

ⓘ $f(x)$의 최고차항의 계수와 차수 구하기	30 %
ⓘⓘ $f(1)$의 값 구하기	20 %
ⓘⓘⓘ $f(x)$ 구하기	40 %
ⓘⓥ $f(-3)$의 값 구하기	10 %

0123 답 ⑤

(가)에서 함수 $f(x)g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이므로

$f(x)g(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하자.

(나)의 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=-4$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)g(x)=0$에서 $c=0$이므로

$f(x)g(x)=2x^3+ax^2+bx$

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^3+ax^2+bx}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2x^2+ax+b}{x}\quad\cdots\cdots\ ㉠$$

㉠에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to0}(2x^2+ax+b)=0$이므로 $b=0$

$b=0$을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{2x^2+ax}{x}=\lim_{x\to0}(2x+a)=a$$

즉, $a=-4$이므로

$f(x)g(x)=2x^3-4x^2=2x^2(x-2)$

이때 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 상수항과 계수가 모두 정수이므로

$f(5)$의 값은 $f(x)=2x^2$, $g(x)=x-2$일 때 최대이다.

따라서 $f(5)$의 최댓값은 50이다.

다른 풀이

(가)에서 $f(x)g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이고, (나)에서 $f(x)g(x)$는 x^2을 인수로 가져야 하므로

$f(x)g(x)=2x^2(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2(x+a)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}2(x+a)=2a$$

즉, $2a=-4$이므로 $a=-2$

$\therefore f(x)g(x)=2x^2(x-2)$

이때 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 상수항과 계수가 모두 정수이므로

$f(5)$의 값은 $f(x)=2x^2$, $g(x)=x-2$일 때 최대이다.

따라서 $f(5)$의 최댓값은 50이다.

참고 $f(x)g(x)=2x^2(x-2)$이고, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 상수항과 계수가 모두 정수이므로 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $f(x)=x^2$, $g(x)=2(x-2)$일 때, $f(5)=25$

(ii) $f(x)=2x^2$, $g(x)=x-2$일 때, $f(5)=50$

(iii) $f(x)=x$, $g(x)=2x(x-2)$일 때, $f(5)=5$

(iv) $f(x)=2x$, $g(x)=x(x-2)$일 때, $f(5)=10$

(v) $f(x)=x-2$, $g(x)=2x^2$일 때, $f(5)=3$

(vi) $f(x)=2(x-2)$, $g(x)=x^2$일 때, $f(5)=6$

(vii) $f(x)=x(x-2)$, $g(x)=2x$일 때, $f(5)=15$

(viii) $f(x)=2x(x-2)$, $g(x)=x$일 때, $f(5)=30$

0124 답 ④

(가)에서 $x\to-3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-3}f(x)=0$이므로 $f(-3)=0$

$f(x)=(x+3)(x+a)$ (a는 상수)라 하면 (나)에서

$$\lim_{x\to5}\frac{x-4}{|(x+3)(x+a)|}=\infty$$

즉, $\lim_{x\to5}|(x+3)(x+a)|=0$이므로

$|8(5+a)|=0$ $\therefore a=-5$

따라서 $f(x)=(x+3)(x-5)$이므로 $f(6)=9$

0125 답 84

$\lim_{x\to-4}\frac{x^2+ax+b}{x+4}=c$에서 $x\to-4$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to-4}(x^2+ax+b)=0$이므로 x^2+ax+b는 $x+4$를 인수로 갖는다.

$\lim_{x\to3}\frac{1}{|f(x)|}=\infty$이면 $\lim_{x\to3}|f(x)|=0$이므로

$\lim_{x\to3}\left|\frac{x^2+ax+b}{x+4}\right|=0$

즉, $\lim_{x\to3}|x^2+ax+b|=0$이므로 x^2+ax+b는 $x-3$을 인수로 갖는다.

이때 $x^2+ax+b=(x+4)(x-3)=x^2+x-12$이므로

$a=1$, $b=-12$

$\therefore \lim_{x\to-4}\frac{x^2+x-12}{x+4}=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)(x-3)}{x+4}$

$=\lim_{x\to-4}(x-3)=-7$

따라서 $c=-7$이므로

$abc=1\times(-12)\times(-7)=84$

다른 풀이

$\lim_{x\to-4}\frac{x^2+ax+b}{x+4}=c$에서 $x\to-4$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to-4}(x^2+ax+b)=0$이므로

$16-4a+b=0 \quad \therefore b=4a-16$ ····· ㉠

즉, $f(x)=\frac{x^2+ax+4a-16}{x+4}$이므로

$\lim_{x\to-4}f(x)=\lim_{x\to-4}\frac{x^2+ax+4a-16}{x+4}$

$=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)(x+a-4)}{x+4}$

$=\lim_{x\to-4}(x+a-4)=a-8$

$\therefore a-8=c$ ····· ㉡

$\lim_{x\to3}\frac{1}{|f(x)|}=\infty$이면 $\lim_{x\to3}|f(x)|=0$이므로

$\lim_{x\to3}\left|\frac{x^2+ax+4a-16}{x+4}\right|=\lim_{x\to3}\left|\frac{(x+4)(x+a-4)}{x+4}\right|$

$=\lim_{x\to3}|x+a-4|=|a-1|$

즉, $|a-1|=0$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉠, ㉡에 대입하여 풀면 $b=-12$, $c=-7$

$\therefore abc=1\times(-12)\times(-7)=84$

0126 답 ②

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=7$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+7$ (a, b는 상수)이라 하자.

$x-1=t$로 놓으면 $x\to2$일 때 $t\to1$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{f(x-1)-5}{x^2-4}=\lim_{t\to1}\frac{f(t)-5}{(t+1)^2-4}$

$=\lim_{t\to1}\frac{f(t)-5}{t^2+2t-3}$

$=\lim_{t\to1}\frac{f(t)-5}{(t+3)(t-1)}$ ····· ㉠

㉠에서 $t\to1$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{t\to1}\{f(t)-5\}=0$에서 $f(1)=5$이므로

$8+a+b=5 \quad \therefore b=-a-3$ ····· ㉡

$\therefore f(x)=x^3+ax^2-(a+3)x+7$

이것을 ㉠에 대입하면

$\lim_{t\to1}\frac{f(t)-5}{(t+3)(t-1)}=\lim_{t\to1}\frac{t^3+at^2-(a+3)t+2}{(t+3)(t-1)}$

$=\lim_{t\to1}\frac{(t-1)\{t^2+(a+1)t-2\}}{(t+3)(t-1)}$

$=\lim_{t\to1}\frac{t^2+(a+1)t-2}{t+3}=\frac{a}{4}$

즉, $\frac{a}{4}=3$이므로 $a=12$

$a=12$를 ㉡에 대입하여 풀면 $b=-15$

따라서 $f(x)=x^3+12x^2-15x+7$이므로 $f(2)=33$

0127 답 3

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^3}=1$에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고,

$\lim_{x\to-3}\frac{f(x+3)}{x+3}=-2$에서 $x\to-3$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to-3}f(x+3)=0$이므로 $f(0)=0$

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)라 하면 방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 합이 -2이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a=-2 \quad \therefore a=2$

즉, $f(x)=x^3+2x^2+bx$이고,

$x+3=t$로 놓으면 $x\to-3$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to-3}\frac{f(x+3)}{x+3}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t^3+2t^2+bt}{t}$

$=\lim_{t\to0}(t^2+2t+b)=b$

$\therefore b=-2$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-2x$이므로 $f(-1)=3$

✓ 공통수학1 다시보기

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

0128 답 8

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=3$에서 $f(x)$와 $g(x)$는 차수가 같고, 최고차항의 계수의 비는 3 : 1이다.

또 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g(x)}{x+1}=4$에서 $f(x)-g(x)$는 최고차항의 계수가 4인 일차함수이므로 $f(x)$, $g(x)$는 모두 일차함수이다.

$f(x)=3ax+b$, $g(x)=ax+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f(x)-g(x)=2ax+b-c$이므로

$2a=4 \quad \therefore a=2$

$\therefore f(x)=6x+b$, $g(x)=2x+c$

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)+g(x)}{x+2}=k$에서 $x\to-2$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to-2}\{f(x)+g(x)\}=0$이므로

$\lim_{x\to-2}(8x+b+c)=0 \quad \therefore b+c=16 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$$\therefore \lim_{x\to-2}\frac{f(x)+g(x)}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{8x+b+c}{x+2}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{8x+16}{x+2}\ (\because \text{㉠})$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{8(x+2)}{x+2}=\lim_{x\to-2}8=8$$

$\therefore k=8$

참고 $f(x)$와 $g(x)$는 차수가 같고 최고차항의 계수는 같지 않으므로 $f(x)-g(x)$의 차수는 $f(x)$와 $g(x)$의 차수와 같다.

0129 답 ③

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\{f(x)-6x^2\}}{6x^3}=2$에서 $f(x)\{f(x)-6x^2\}$은 최고차항의 계수가 12인 삼차함수이므로 $f(x)$는 이차 이하의 다항함수이어야 한다.

└ $f(x)$의 차수가 3 이상이면 분자의 차수는 6 이상이다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=14$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

(i) $f(x)$가 일차함수인 경우

$f(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f(x)\{f(x)-6x^2\}=(ax+b)(-6x^2+ax+b)$

이때 최고차항의 계수는 $-6a$이므로

$-6a=12 \quad \therefore a=-2$

또 $f(1)=0$에서

$-2+b=0 \quad \therefore b=2$

즉, $f(x)=-2x+2$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-2x+2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{-2(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}(-2)=-2\neq14$$

이는 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)$가 이차함수인 경우

$f(x)\{f(x)-6x^2\}$이 삼차함수이려면 $f(x)-6x^2$은 일차함수이어야 하므로 $f(x)$의 이차항의 계수는 6이어야 한다.

$f(x)=6x^2+cx+d$ (c, d는 상수)라 하면

$f(x)\{f(x)-6x^2\}=(6x^2+cx+d)(cx+d)$

이때 최고차항의 계수는 $6c$이므로

$6c=12 \quad \therefore c=2$

또 $f(1)=0$에서

$6+2+d=0 \quad \therefore d=-8$

즉, $f(x)=6x^2+2x-8$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{6x^2+2x-8}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{2(x-1)(3x+4)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}2(3x+4)=14$$

(i), (ii)에서 $f(x)=6x^2+2x-8$이므로 $f(2)=20$

0130 답 67

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=\alpha$, $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{x-b}=\beta$, $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{x-c}=\gamma$에서

$x\to a$, $x\to b$, $x\to c$일 때 각각 (분모)$\to$0이고 극한값이 모두 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\lim_{x\to b}f(x)=0$, $\lim_{x\to c}f(x)=0$이므로

$f(a)=0$, $f(b)=0$, $f(c)=0$ ····· ⓘ

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$라 하면

$$\alpha=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}(x-b)(x-c)$$
$$=(a-b)(a-c)$$
$$\beta=\lim_{x\to b}\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-b}$$
$$=\lim_{x\to b}(x-a)(x-c)$$
$$=(b-a)(b-c)$$
$$\gamma=\lim_{x\to c}\frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{x-c}$$
$$=\lim_{x\to c}(x-a)(x-b)$$
$$=(c-a)(c-b) \quad \cdots\cdots$$ ⓘⓘ

이때 a, b, c는 삼차방정식 $x^3-x^2-22x+40=0$의 세 근이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b+c=1$, $ab+bc+ca=-22$

$$\therefore \alpha+\beta+\gamma=(a-b)(a-c)+(b-a)(b-c)+(c-a)(c-b)$$
$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)$$
$$=1^2-3\times(-22)=67 \quad \cdots\cdots$$ ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$의 값 구하기	20%
ⓘⓘ α, β, γ를 각각 a, b, c에 대한 식으로 나타내기	50%
ⓘⓘⓘ $\alpha+\beta+\gamma$의 값 구하기	30%

0131 답 ④

$f(9)\neq0$이면

$\lim_{x\to9}\frac{f(x)+2(\sqrt{x}-3)}{f(x)-2(\sqrt{x}-3)}=\frac{f(9)}{f(9)}=1\neq-1$

이는 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 $f(9)=0$

$f(x)=(x-9)(x-a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to9}\frac{f(x)+2(\sqrt{x}-3)}{f(x)-2(\sqrt{x}-3)}$$
$$=\lim_{x\to9}\frac{(x-9)(x-a)+2(\sqrt{x}-3)}{(x-9)(x-a)-2(\sqrt{x}-3)}$$
$$=\lim_{x\to9}\frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)(x-a)+2(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)(x-a)-2(\sqrt{x}-3)}$$
$$=\lim_{x\to9}\frac{(\sqrt{x}+3)(x-a)+2}{(\sqrt{x}+3)(x-a)-2}=\frac{56-6a}{52-6a}$$

즉, $\frac{56-6a}{52-6a}=-1$이므로

$12a=108 \quad \therefore a=9$

따라서 $f(x)=(x-9)^2$이므로 $f(7)=4$

0132 답 ③

(ⅰ) $n=1$일 때,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1}=6$에서 $f(x)-4x^3+3x^2$은 최고차항의 계수가 6인 이차함수이므로

$f(x)-4x^3+3x^2=6x^2+ax+b\,(a,\,b$는 상수$)$라 하면

$f(x)=4x^3+3x^2+ax+b$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=4$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$에서 $f(0)=0$이므로 $b=0$

$f(x)=4x^3+3x^2+ax$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^3+3x^2+ax}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}(4x^2+3x+a)=a$

$\therefore\ a=4$

즉, $f(x)=4x^3+3x^2+4x$이므로 $f(1)=11$

(ⅱ) $n=2$일 때,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1}=6$에서 $f(x)-4x^3+3x^2$은 최고차항의 계수가 6인 삼차함수이므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 10인 삼차함수이다.

또 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=4$에서 $f(x)$는 x^2을 인수로 가지므로

$f(x)=10x^2(x+c)\,(c$는 상수$)$라 하면

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10x^2(x+c)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}10(x+c)=10c$

즉, $10c=4$이므로 $c=\dfrac{2}{5}$

$f(x)=10x^2\left(x+\dfrac{2}{5}\right)$이므로 $f(1)=14$

(ⅲ) $n\geq3$일 때,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6$에서 $f(x)-4x^3+3x^2$은 최고차항의 계수가 6인 $(n+1)$차함수이므로 $f(x)$도 최고차항의 계수가 6인 $(n+1)$차함수이다.

또 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^n}=4$에서 $f(x)$는 x^n을 인수로 가지므로

$f(x)=6x^n(x+d)\,(d$는 상수$)$라 하면

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{6x^n(x+d)}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}6(x+d)=6d$

즉, $6d=4$이므로 $d=\dfrac{2}{3}$

$f(x)=6x^n\left(x+\dfrac{2}{3}\right)$이므로 $f(1)=10$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $f(1)$의 최댓값은 14이다.

0133 답 ④

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-3x^2}{x-1}=8$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-3x^2\}=0$이므로 $f(1)=3$

$g(x)=f(x)-f(1)=f(x)-3$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)g(x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)\{f(x)-3\}}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\left\{\dfrac{f(x)-3}{x-1}\times\dfrac{f(x)}{x+1}\right\}$

이때

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-3x^2+3x^2-3}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\left\{\dfrac{f(x)-3x^2}{x-1}+\dfrac{3(x+1)(x-1)}{x-1}\right\}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-3x^2}{x-1}+\lim\limits_{x\to1}3(x+1)$

$=8+6=14$

따라서 구하는 극한값은

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)g(x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\left\{\dfrac{f(x)-3}{x-1}\times\dfrac{f(x)}{x+1}\right\}=14\times\dfrac{3}{2}=21$

0134 답 ①

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a,\,b,\,c,\,d$는 상수, $a\neq0)$라 하면

$b=0,\ d=0$이므로 $f(x)=ax^3+cx$

$x+1=t$로 놓으면 $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x+1)}{x+1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(t)}{t}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{at^3+ct}{t}$

$=\lim\limits_{t\to0}(at^2+c)=c$

즉, $c=2$이므로 $f(x)=ax^3+2x$

$\dfrac{1}{x}=s$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $s\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}xf\left(\dfrac{x+4}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}xf\left(1+\dfrac{4}{x}\right)$

$=\lim\limits_{s\to0}\dfrac{f(1+4s)}{s}=k$

$s\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{s\to0}f(1+4s)=0$에서 $f(1)=0$이므로

$a+2=0\qquad\therefore\ a=-2$

따라서 $f(x)=-2x^3+2x=-2x(x+1)(x-1)$이므로

$k=\lim\limits_{s\to0}\dfrac{f(1+4s)}{s}$

$=\lim\limits_{s\to0}\dfrac{-2(1+4s)(2+4s)\times4s}{s}$

$=\lim\limits_{s\to0}\{-8(1+4s)(2+4s)\}=-16$

0135 답 ⑤

(가)에서 $f(-3)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{g(x)}{f(x)}$에서 $x\to-3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to-3}g(x)=0$이므로 $g(-3)=0$

또 $g(-3)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{f(x+4)}{g(x)}$에서 $x\to-3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to-3}f(x+4)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=(x+3)(x-1)$, $g(x)=(x+3)(x-1)(x+a)$ (a는 상수)
라 하면
$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-1)(x+a)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+a}$
이때 $\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}$의 값은 존재하지 않으므로
$\lim_{x\to 3}(x+a)=0$
즉, $3+a=0$이므로 $a=-3$
따라서 $g(x)=(x+3)(x-1)(x-3)$이므로 $g(4)=21$

0136 답 ④

$\lim_{x\to 1}(x^2+x+2)=4$, $\lim_{x\to 1}(2x^2-x+3)=4$이므로
$\lim_{x\to 1}f(x)=4$

0137 답 6

$\lim_{x\to 2}(-x^2+2x-3)=-3$, $\lim_{x\to 2}(x^2-6x+5)=-3$이므로
$\lim_{x\to 2}f(x)=-3$ …… ⓘ
$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2x+1}{x-3}=\frac{-6}{-1}=6$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\lim_{x\to 2}f(x)$의 값 구하기	70 %
ⓘⓘ $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-2x+1}{x-3}$의 값 구하기	30 %

0138 답 ③

$x>2$이므로 주어진 부등식의 각 변을 x로 나누면
$\frac{x^2+2x+3}{x\sqrt{x^2+1}}<f(x)<\frac{x^2+3x+4}{x^2-2x}$이고,
$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{x\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$
$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+4}{x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}=1$
이므로 $\lim_{x\to\infty}f(x)=1$

0139 답 ②

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}x^2+7x\right)=0$, $\lim_{x\to 0}(x^2+7x)=0$이므로 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$
$x>0$일 때, 주어진 부등식의 각 변을 x로 나누면
$\frac{1}{2}x+7<\frac{f(x)}{x}<x+7$
이때 $\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{2}x+7\right)=7$, $\lim_{x\to 0+}(x+7)=7$이므로
$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=7$
또 $x<0$일 때, 주어진 부등식의 각 변을 x로 나누면
$x+7<\frac{f(x)}{x}<\frac{1}{2}x+7$
이때 $\lim_{x\to 0-}(x+7)=7$, $\lim_{x\to 0-}\left(\frac{1}{2}x+7\right)=7$이므로
$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}=7$
즉, $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)}{x}=7$이므로 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=7$
$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{xf(x)+6x}{2f(x)-5x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+6}{2\times\frac{f(x)}{x}-5}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

0140 답 12

주어진 부등식에서 $6x-1<f(x)<6x+1$
$x\to\infty$일 때 $x>0$이므로 부등식의 각 변을 x로 나누면
$6-\frac{1}{x}<\frac{f(x)}{x}<6+\frac{1}{x}$
이때 $\lim_{x\to\infty}\left(6-\frac{1}{x}\right)=6$, $\lim_{x\to\infty}\left(6+\frac{1}{x}\right)=6$이므로 $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=6$
$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{3x^2-x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}{3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{36}{3}=12$

0141 답 $\frac{4}{3}$

$\lim_{x\to 3}(-x^2+9x-15)=3$, $\lim_{x\to 3}(x^2-3x+3)=3$이므로
$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{g(x)}=3$
$\therefore \lim_{x\to 3}\frac{\{f(x)\}^2-5\{g(x)\}^2}{f(x)g(x)}=\lim_{x\to 3}\frac{\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}^2-5}{\frac{f(x)}{g(x)}}$
$=\frac{9-5}{3}=\frac{4}{3}$

0142 답 2

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x+5}{2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4+\frac{5}{x}}{2-\frac{1}{x}}=2$이므로
$\lim_{x\to-\infty}\{4-f(x)\}=4-2=2$
$\therefore \lim_{x\to-\infty}g(x)=2$

0143 답 ②

$x>0$일 때 $2x>0$이므로 주어진 부등식의 각 변을 $2x$로 나누면
$\frac{5x^2+ax}{2x}<\frac{f(x)}{2x}<\frac{6x^2+ax}{2x}$
이때
$\lim_{x\to 0+}\frac{5x^2+ax}{2x}=\lim_{x\to 0+}\frac{5x+a}{2}=\frac{a}{2}$
$\lim_{x\to 0+}\frac{6x^2+ax}{2x}=\lim_{x\to 0+}\frac{6x+a}{2}=\frac{a}{2}$
이므로 $\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)}{2x}=\frac{a}{2}$
따라서 $\frac{a}{2}=4$이므로 $a=8$

0144 답 ①

$2x=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}xf(2x)=\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to\infty}tf(t)$

$x>0$일 때 $\frac{x}{x^2+3}>0$이므로 주어진 부등식의 각 변에 $\frac{x}{x^2+3}$를 곱하면

$\frac{4x^2}{x^2+3}<xf(x)<\frac{4x^2+7x}{x^2+3}$

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2}{x^2+3}=4$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+7x}{x^2+3}=4$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=4$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}xf(2x)=\frac{1}{2}\lim\limits_{t\to\infty}tf(t)=\frac{1}{2}\times4=2$

다른 풀이

$4x<(x^2+3)f(x)<4x+7$에서 x 대신 $2x$를 대입하면

$8x<(4x^2+3)f(2x)<8x+7$

$x>0$일 때 $\frac{x}{4x^2+3}>0$이므로 위의 부등식의 각 변에 $\frac{x}{4x^2+3}$를 곱하면

$\frac{8x^2}{4x^2+3}<xf(2x)<\frac{8x^2+7x}{4x^2+3}$

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2}{4x^2+3}=2$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2+7x}{4x^2+3}=2$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}xf(2x)=2$

0145 답 1

점 Q의 좌표는 $(t, 0)$이므로 $\overline{OQ}=t$이고,

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+(-\sqrt{2t-4})^2}=\sqrt{t^2+2t-4}$

$\therefore \lim\limits_{t\to\infty}(\overline{OP}-\overline{OQ})$

$=\lim\limits_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+2t-4}-t)$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+2t-4}-t)(\sqrt{t^2+2t-4}+t)}{\sqrt{t^2+2t-4}+t}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2t-4}{\sqrt{t^2+2t-4}+t}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{2-\frac{4}{t}}{\sqrt{1+\frac{2}{t}-\frac{4}{t^2}}+1}=1$

0146 답 ④

세 점 P, Q, R의 좌표는 $P(t, \sqrt{t+1})$, $Q(0, 1)$, $R(t, 0)$

이때 $\overline{OR}=t$이므로

$C(t)=\pi\times\left(\frac{t}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}t^2$

또 $\overline{OQ}=1$, $\overline{PR}=\sqrt{t+1}$이므로

$S(t)=\frac{1}{2}t(1+\sqrt{t+1})$

$\therefore \lim\limits_{t\to0+}\frac{t\times S(t)}{C(t)}=\lim\limits_{t\to0+}\frac{\frac{1}{2}t^2(1+\sqrt{t+1})}{\frac{\pi}{4}t^2}$

$=\lim\limits_{t\to0+}\frac{2}{\pi}(1+\sqrt{t+1})=\frac{4}{\pi}$

0147 답 ③

점 $P(t, t+3)$을 지나고 직선 $y=x+3$에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 직선의 방정식은

$y-(t+3)=-(x-t)$ $\therefore y=-x+2t+3$

즉, 점 Q의 좌표는 $(0, 2t+3)$이므로

$\overline{AP}^2=(t+3)^2+(t+3)^2=2t^2+12t+18$

$\overline{AQ}^2=3^2+(2t+3)^2=4t^2+12t+18$

$\therefore \lim\limits_{t\to\infty}\frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{4t^2+12t+18}{2t^2+12t+18}=2$

0148 답 ②

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+(\sqrt{2t})^2}=\sqrt{t^2+2t}$이고,

$\overline{OP}=\overline{OQ}$이므로 점 Q의 좌표는 $(-\sqrt{t^2+2t}, 0)$

즉, 삼각형 OPQ의 무게중심의 x좌표 $f(t)$는

$f(t)=\frac{0+t+(-\sqrt{t^2+2t})}{3}=\frac{t-\sqrt{t^2+2t}}{3}$

$\therefore \lim\limits_{t\to\infty}f(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{t-\sqrt{t^2+2t}}{3}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{(t-\sqrt{t^2+2t})(t+\sqrt{t^2+2t})}{3(t+\sqrt{t^2+2t})}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{-2t}{3(t+\sqrt{t^2+2t})}$

$=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{-2}{3\left(1+\sqrt{1+\frac{2}{t}}\right)}=-\frac{1}{3}$

✓ 공통수학2 다시보기

좌표평면 위의 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

0149 답 ③

점 H의 x좌표를 구하면

$\sqrt{3x+2}=2\sqrt{x}$, $3x+2=4x$ $\therefore x=2$

$f(2)=g(2)=2\sqrt{2}$이므로 점 H의 y좌표는 $2\sqrt{2}$이다.

즉, 직선 l의 방정식은 $y=2\sqrt{2}$이므로

점 R의 좌표는 $(t, 2\sqrt{2})$

또 직선 m의 방정식은 $x=t$이므로

점 Q의 좌표는 $(t, 2\sqrt{t})$

따라서 $\overline{PR}=\sqrt{3t+2}-2\sqrt{2}$, $\overline{QR}=2\sqrt{t}-2\sqrt{2}$이고, 점 P가 점 H에 한없이 가까워질 때 $t\to2+$이므로 구하는 값은

$\lim\limits_{t\to2+}\frac{\overline{PR}}{\overline{QR}}=\lim\limits_{t\to2+}\frac{\sqrt{3t+2}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{t}-2\sqrt{2}}$

$=\lim\limits_{t\to2+}\frac{(\sqrt{3t+2}-2\sqrt{2})(\sqrt{3t+2}+2\sqrt{2})(\sqrt{t}+\sqrt{2})}{2(\sqrt{t}-\sqrt{2})(\sqrt{t}+\sqrt{2})(\sqrt{3t+2}+2\sqrt{2})}$

$=\lim\limits_{t\to2+}\frac{3(t-2)(\sqrt{t}+\sqrt{2})}{2(t-2)(\sqrt{3t+2}+2\sqrt{2})}$

$=\lim\limits_{t\to2+}\frac{3(\sqrt{t}+\sqrt{2})}{2(\sqrt{3t+2}+2\sqrt{2})}=\frac{3}{4}$

0150 답 ③

함수 $y=\left|\frac{2}{x}-3\right|$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$\left|\frac{2}{x}-3\right|=0 \quad \therefore x=\frac{2}{3}$

함수 $y=\left|\frac{2}{x}-3\right|$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 x좌표를 구하면

(i) $0<x<\frac{2}{3}$일 때, $\left|\frac{2}{x}-3\right|=\frac{2}{x}-3$이므로

$\frac{2}{x}-3=t \quad \therefore x=\frac{2}{3+t}$

(ii) $x>\frac{2}{3}$일 때, $\left|\frac{2}{x}-3\right|=-\frac{2}{x}+3$이므로

$-\frac{2}{x}+3=t \quad \therefore x=\frac{2}{3-t}$

(i), (ii)에서 두 점 사이의 거리 $f(t)$는

$f(t)=\frac{2}{3-t}-\frac{2}{3+t}=\frac{4t}{(3-t)(3+t)}$

$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{1}{t}\times\frac{4t}{(3-t)(3+t)}\right\}$

$=\lim_{t\to0+}\frac{4}{(3-t)(3+t)}=\frac{4}{9}$

0151 답 2

선분 BP가 $\angle OBA$의 이등분선이므로

$\overline{OB}:\overline{AB}=\overline{OP}:\overline{AP}$이다.

$\overline{OB}=\sqrt{t^2+(3t)^2}=\sqrt{10}t \ (\because t>0)$

$\overline{AB}=\sqrt{(t-4)^2+(3t)^2}=\sqrt{10t^2-8t+16}$ …… ⓘ

이때 점 P는 선분 OA를 $\sqrt{10}t:\sqrt{10t^2-8t+16}$으로 내분하는 점이므로

$f(t)=\frac{4\sqrt{10}t}{\sqrt{10}t+\sqrt{10t^2-8t+16}}$ …… ⓘⓘ

$\therefore \lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{4\sqrt{10}t}{\sqrt{10}t+\sqrt{10t^2-8t+16}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{10}+\sqrt{10-\frac{8}{t}+\frac{16}{t^2}}}$

$=\frac{4\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}=2$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\overline{OB}$, $\overline{AB}$를 t에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘ $f(t)$ 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ $\lim_{t\to\infty}f(t)$의 값 구하기	40 %

0152 답 ④

직선 l의 기울기는 1이고 y절편이 $g(t)$이므로 직선 l의 방정식은

$y=x+g(t)$

$A(\alpha, \alpha+g(t))$, $B(\beta, \beta+g(t))$ $(\alpha<\beta)$라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2=x+g(t)$, 즉 $x^2-x-g(t)=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-g(t)$

이때 $\overline{AB}=2t$이므로

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=2t$, $(\alpha-\beta)^2=2t^2$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=2t^2$, $1+4g(t)=2t^2$

따라서 $g(t)=\frac{2t^2-1}{4}$이므로

$\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)}{t^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2-1}{4t^2}=\frac{1}{2}$

0153 답 ①

삼각형 ABC의 넓이를 $S(a)$라 하면 $\overline{OA}=4$, $\overline{BC}=2a$이므로

$S(a)=\frac{1}{2}\times2a\times4=4a$ …… ㉠

또 $\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{a^2+16}$이고, 삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이가 r이므로

$S(a)=\frac{1}{2}r(\sqrt{a^2+16}+2a+\sqrt{a^2+16})$

$=r(a+\sqrt{a^2+16})$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $4a=r(a+\sqrt{a^2+16})$이므로

$r=\frac{4a}{a+\sqrt{a^2+16}}$

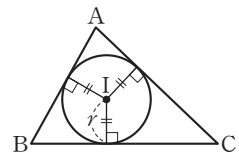
$\therefore \lim_{a\to0+}\frac{r}{a}=\lim_{a\to0+}\left(\frac{1}{a}\times\frac{4a}{a+\sqrt{a^2+16}}\right)$

$=\lim_{a\to0+}\frac{4}{a+\sqrt{a^2+16}}=1$

✓ 중2 다시보기

삼각형 ABC의 내접원 I의 반지름의 길이를 r라 하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC})$



0154 답 $\frac{3}{4}$

두 점 Q, R의 좌표는 $Q(t, \sqrt{2t})$, $R\left(t, \frac{4}{t}\right)$이므로

$\overline{QR}=\sqrt{2t}-\frac{4}{t}$

$\therefore S(t)=\frac{1}{2}\times\left(\sqrt{2t}-\frac{4}{t}\right)\times(t-2)$

$\therefore \lim_{t\to2+}\frac{S(t)}{(t-2)^2}=\lim_{t\to2+}\frac{\left(\sqrt{2t}-\frac{4}{t}\right)(t-2)}{2(t-2)^2}$

$=\lim_{t\to2+}\frac{t\sqrt{2t}-4}{2t(t-2)}$

$=\lim_{t\to2+}\frac{(t\sqrt{2t}-4)(t\sqrt{2t}+4)}{2t(t-2)(t\sqrt{2t}+4)}$

$=\lim_{t\to2+}\frac{2(t^3-8)}{2t(t-2)(t\sqrt{2t}+4)}$

$=\lim_{t\to2+}\frac{2(t-2)(t^2+2t+4)}{2t(t-2)(t\sqrt{2t}+4)}$

$=\lim_{t\to2+}\frac{t^2+2t+4}{t(t\sqrt{2t}+4)}=\frac{3}{4}$

0155 답 ①

점 Q의 좌표를 $(0, a)$, 점 P의 좌표를 $(t, 2t^2)$이라 하면

$\overline{OQ}=\overline{PQ}$, 즉 $\overline{OQ}^2=\overline{PQ}^2$이므로

$a^2=t^2+(2t^2-a)^2$, $4t^4-4t^2a+t^2=0$

$4t^2a=4t^4+t^2$ $\therefore a=t^2+\frac{1}{4}$ ($\because t\neq0$)

이때 점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t\to0$이므로

$\lim_{t\to0}a=\lim_{t\to0}\left(t^2+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}$

따라서 점 P가 곡선 $y=2x^2$을 따라 원점 O에 한없이 가까워질 때, 점 Q가 한없이 가까워지는 점의 y좌표는 $\frac{1}{4}$이다.

0156 답 ①

원 C의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 중심 $C\left(a, a-\frac{1}{a}\right)$과 직선 $y=x+1$, 즉 $x-y+1=0$ 사이의 거리는 r와 같으므로

$$r=\frac{\left|a-\left(a-\frac{1}{a}\right)+1\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a}+1\right)\ (\because a>1)$$

이때 $\overline{OC}=\sqrt{a^2+\left(a-\frac{1}{a}\right)^2}=\sqrt{2a^2-2+\frac{1}{a^2}}$이므로

$$d=\overline{OC}+r=\sqrt{2a^2-2+\frac{1}{a^2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a}+1\right)$$

$$\therefore \lim_{a\to\infty}\frac{d}{6a-1}=\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{2a^2-2+\frac{1}{a^2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a}+1\right)}{6a-1}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{2}{a^2}+\frac{1}{a^4}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}\right)}{6-\frac{1}{a}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{6}$$

0157 답 10

점 $P(a, b)$를 중심으로 하고 원 C와 x축에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면

$r=b$ ····· ㉠

두 원의 중심 사이의 거리는 두 원의 반지름의 길이의 합과 같으므로 $\overline{PC}=r+2$에서

$\sqrt{a^2+(b-3)^2}=b+2$ ($\because$ ㉠)

$a^2+(b-3)^2=(b+2)^2$, $a^2-10b+5=0$

$\therefore b=\frac{a^2+5}{10}$ ····· ⓘ

따라서 $\overline{PH}=a$, $\overline{PC}=\frac{a^2+5}{10}+2=\frac{a^2+25}{10}$이므로

$$\lim_{a\to\infty}\frac{\overline{PH}^2}{\overline{PC}}=\lim_{a\to\infty}\frac{a^2}{\frac{a^2+25}{10}}=\lim_{a\to\infty}\frac{10a^2}{a^2+25}=10$$ ····· ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ b를 a에 대한 식으로 나타내기	50%
ⓘⓘ $\lim_{a\to\infty}\frac{\overline{PH}^2}{\overline{PC}}$의 값 구하기	50%

0158 답 ⑤

직선 l의 방정식을 $y=-2x+a$ (a는 상수)라 하면 원 C의 중심 C(2, 0)과 직선 $y=-2x+a$, 즉 $2x+y-a=0$ 사이의 거리는 r와 같으므로

$$r=\frac{|4+0-a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|4-a|}{\sqrt{5}}$$

즉, $|4-a|=\sqrt{5}r$이므로

$a=4-\sqrt{5}r$ 또는 $a=4+\sqrt{5}r$

이때 원 C'의 중심 $C'(3, 3)$과 직선 $2x+y-a=0$ 사이의 거리는 $f(r)$와 같으므로

$$f(r)=\frac{|6+3-a|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|9-a|}{\sqrt{5}}$$

(i) $a=4-\sqrt{5}r$일 때,

$|9-a|=|9-(4-\sqrt{5}r)|=5+\sqrt{5}r$ ($\because 0<r<\sqrt{5}$)이므로

$$\lim_{r\to0+}f(r)=\lim_{r\to0+}\frac{5+\sqrt{5}r}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

(ii) $a=4+\sqrt{5}r$일 때,

$|9-a|=|9-(4+\sqrt{5}r)|=5-\sqrt{5}r$ ($\because 0<r<\sqrt{5}$)이므로

$$\lim_{r\to0+}f(r)=\lim_{r\to0+}\frac{5-\sqrt{5}r}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

(i), (ii)에서 $\lim_{r\to0+}f(r)=\sqrt{5}$

0159 답 (0, 2)

점 P의 좌표를 (t, t^2) ($t>0$)이라 하면

$\overline{OQ}=\overline{OP}=\sqrt{t^2+(t^2)^2}$

$=t\sqrt{1+t^2}$ ($\because t>0$)

즉, 점 Q의 좌표는 $(t\sqrt{1+t^2}, 0)$

두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{t^2-0}{t-t\sqrt{1+t^2}}=\frac{t}{1-\sqrt{1+t^2}}$$

이므로 직선의 방정식은

$$y-t^2=\frac{t}{1-\sqrt{1+t^2}}(x-t)$$

$$\therefore y=\frac{t}{1-\sqrt{1+t^2}}x+t^2-\frac{t^2}{1-\sqrt{1+t^2}}$$

즉, 점 R의 좌표는

$$\left(0, t^2-\frac{t^2}{1-\sqrt{1+t^2}}\right)$$ ····· ⓘ

이때 점 P가 원점에 한없이 가까워지면 $t\to0+$이므로

$$\lim_{t\to0+}\left(t^2-\frac{t^2}{1-\sqrt{1+t^2}}\right)$$

$$=\lim_{t\to0+}\left\{t^2-\frac{t^2(1+\sqrt{1+t^2})}{(1-\sqrt{1+t^2})(1+\sqrt{1+t^2})}\right\}$$

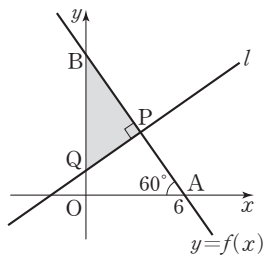
$$=\lim_{t\to0+}\left\{t^2-\frac{t^2(1+\sqrt{1+t^2})}{-t^2}\right\}$$

$$=\lim_{t\to0+}(t^2+1+\sqrt{1+t^2})=2$$ ····· ⓘⓘ

따라서 점 P가 곡선 $y=x^2$을 따라 원점에 한없이 가까워질 때, 점 R가 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $(0, 2)$이다. ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 점 R의 좌표를 t에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘ $t \to 0+$일 때, 점 R의 y좌표가 한없이 가까워지는 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 점 R가 한없이 가까워지는 점의 좌표 구하기	20 %

0160 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$



직선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점을 A, y축과 만나는 점을 B라 하고, 직선 l이 y축과 만나는 점을 Q라 하자.

직각삼각형 OAB에서

$\overline{OB}=6\tan 60^\circ=6\sqrt{3}$

직선 $y=f(x)$는 기울기가

$-\tan 60^\circ=-\sqrt{3}$이고

y절편이 $6\sqrt{3}$이므로 직선의 방정식은

$y=-\sqrt{3}x+6\sqrt{3}$

즉, 점 P의 좌표는 $(t,\ -\sqrt{3}t+6\sqrt{3})$

직선 l은 직선 $y=f(x)$와 수직이므로 기울기가 $\frac{1}{\sqrt{3}}$이고, 점 P를 지나므로 직선 l의 방정식은

$y-(-\sqrt{3}t+6\sqrt{3})=\frac{1}{\sqrt{3}}(x-t)$

$\therefore\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}t+6\sqrt{3}$

즉, 점 Q의 좌표는 $\left(0,\ -\frac{4\sqrt{3}}{3}t+6\sqrt{3}\right)$이므로

$S(t)=\frac{1}{2}\times\left\{6\sqrt{3}-\left(-\frac{4\sqrt{3}}{3}t+6\sqrt{3}\right)\right\}\times t=\frac{2\sqrt{3}}{3}t^2$

$\therefore\ \lim_{t\to\infty}\frac{S(t)}{2t^2+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{2\sqrt{3}t^2}{3(2t^2+1)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

0161 답 ②

점 $P(\alpha,\ \beta)$는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$\alpha^2+\beta^2=1,\ \beta^2=1-\alpha^2 \quad \therefore\ \beta=\sqrt{1-\alpha^2}\ (\because\ \beta>0)$

점 Q는 점 P와 y축에 대하여 대칭이므로 점 Q의 좌표는

$(-\alpha,\ \beta)$

즉, $\overline{PQ}=2\alpha$이므로

$S(\alpha)=\frac{1}{2}\times 2\alpha\times\beta=\alpha\beta=\alpha\sqrt{1-\alpha^2}$

$\therefore\ \lim_{\alpha\to 1-}\frac{S(\alpha)}{\sqrt{1-\alpha}}=\lim_{\alpha\to 1-}\frac{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha}}=\lim_{\alpha\to 1-}\frac{\alpha\sqrt{(1+\alpha)(1-\alpha)}}{\sqrt{1-\alpha}}$

$=\lim_{\alpha\to 1-}\alpha\sqrt{1+\alpha}=\sqrt{2}$

0162 답 ③

$f(x)=-x^2+4=-(x+2)(x-2)$이므로

$A(-2,\ 0),\ B(2,\ 0),\ C(0,\ 4)$

$P(t,\ -t^2+4)\ (0<t<2)$라 하면 직선 CP의 기울기는

$\frac{-t^2+4-4}{t-0}=-t$

이므로 직선 CP의 방정식은 $y=-tx+4$

즉, 점 Q의 좌표는 $\left(\frac{4}{t},\ 0\right)$

이때 직선 AP의 기울기는

$\frac{-t^2+4-0}{t-(-2)}=\frac{-(t+2)(t-2)}{t+2}=2-t$

이므로 직선 AP의 방정식은

$y-0=(2-t)\{x-(-2)\}$

$\therefore\ y=(2-t)x+4-2t$

이 식에 $x=\frac{4}{t}$를 대입하면 $y=\frac{8}{t}-2t$

즉, 점 R의 좌표는 $\left(\frac{4}{t},\ \frac{8}{t}-2t\right)$

$\therefore\ \overline{RQ}=\frac{8}{t}-2t,\ \overline{BQ}=\frac{4}{t}-2$

따라서 점 P가 곡선 $y=f(x)$를 따라 점 B에 한없이 가까워지면 $t\to 2-$이므로 구하는 값은

$\lim_{t\to 2-}\frac{\overline{RQ}}{\overline{BQ}}=\lim_{t\to 2-}\frac{\frac{8}{t}-2t}{\frac{4}{t}-2}=\lim_{t\to 2-}\frac{8-2t^2}{4-2t}$

$=\lim_{t\to 2-}\frac{-2(t+2)(t-2)}{-2(t-2)}$

$=\lim_{t\to 2-}(t+2)=4$

0163 답 1

$A(1,\ 0)$이고, 점 P의 좌표를 $(t,\ 0)\ (0<t<1)$이라 하자.

주어진 원의 방정식 $x^2+y^2=1$에 $x=t$를 대입하여 점 Q의 y좌표를 구하면

$t^2+y^2=1,\ y^2=1-t^2 \quad \therefore\ y=\sqrt{1-t^2}\ (\because\ y>0)$

즉, 점 Q의 좌표는 $(t,\ \sqrt{1-t^2})$이고, 이 점에서의 원의 접선의 방정식은

$tx+y\sqrt{1-t^2}=1 \quad \therefore\ y=-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}x+\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$

즉, 점 R의 좌표는 $\left(\frac{1}{t},\ 0\right)$ ····· ⓘ

$\therefore\ \overline{AR}=\frac{1}{t}-1,\ \overline{PA}=1-t$ ····· ⓘⓘ

따라서 점 P가 점 A에 한없이 가까워지면 $t\to 1-$이므로 구하는 값은

$\lim_{t\to 1-}\frac{\overline{AR}}{\overline{PA}}=\lim_{t\to 1-}\frac{\frac{1}{t}-1}{1-t}=\lim_{t\to 1-}\frac{1-t}{t(1-t)}$

$=\lim_{t\to 1-}\frac{1}{t}=1$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 점 R의 좌표를 t에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘ $\overline{AR}$, $\overline{PA}$를 각각 t에 대한 식으로 나타내기	20 %
ⓘⓘⓘ $\frac{\overline{AR}}{\overline{PA}}$가 한없이 가까워지는 값 구하기	40 %

✓ 공통수학2 다시보기

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

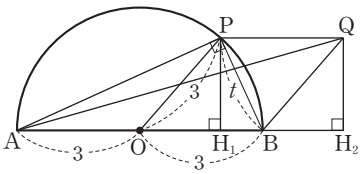
$x_1x+y_1y=r^2$

0164 답 −2

점 O는 반원의 중심이므로

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OP}=3$

그림과 같이 두 점 P, Q에서 $\overline{AB}$와 $\overline{AB}$의 연장선에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하자.



$\overline{AB}$는 반원의 지름이므로 $\angle APB=90^\circ$

직각삼각형 APB에서

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{AB}^2$, $\overline{AP}^2+t^2=6^2$

$\therefore \overline{AP}^2=36-t^2$ ····· ㉠

직각삼각형 OH_1P에서

$\overline{OH_1}^2+\overline{PH_1}^2=\overline{OP}^2$

$\therefore \overline{PH_1}^2=9-\overline{OH_1}^2$ ····· ㉡

직각삼각형 AH_1P에서

$\overline{AH_1}^2+\overline{PH_1}^2=\overline{AP}^2$

$(3+\overline{OH_1})^2+(9-\overline{OH_1}^2)=36-t^2$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$18+6\overline{OH_1}=36-t^2$ $\therefore \overline{OH_1}=\dfrac{18-t^2}{6}$

직각삼각형 AH_2Q에서

$\overline{AH_2}^2+\overline{QH_2}^2=\overline{AQ}^2=f(t)$

이때 $\triangle OH_1P\equiv\triangle BH_2Q$에서

$\overline{BH_2}=\overline{OH_1}$, $\overline{QH_2}=\overline{PH_1}$이므로

$$\begin{aligned}f(t)&=\overline{AH_2}^2+\overline{QH_2}^2\\&=(6+\overline{OH_1})^2+\overline{PH_1}^2\\&=(6+\overline{OH_1})^2+9-\overline{OH_1}^2\ (\because \text{㉡})\\&=12\overline{OH_1}+45\\&=12\times\frac{18-t^2}{6}+45=81-2t^2\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{f(t)-81}{t^2}=\lim_{t\to0+}\frac{81-2t^2-81}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{-2t^2}{t^2}=\lim_{t\to0+}(-2)=-2$$

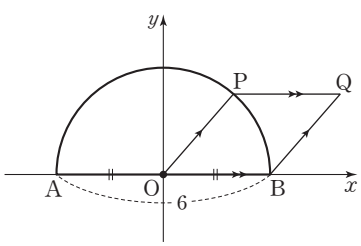
참고 $\triangle OH_1P$와 $\triangle BH_2Q$에서

$\angle PH_1O=\angle QH_2B=90^\circ$, $\overline{OP}=\overline{BQ}$, $\angle POH_1=\angle QBH_2$

$\therefore \triangle OH_1P\equiv\triangle BH_2Q$(RHA 합동)

다른 풀이

그림과 같이 점 O를 원점으로 하고 $\overline{AB}$를 x축으로 하는 좌표평면을 생각하면 반원의 방정식은 $x^2+y^2=9$ $(y\ge0)$이고, A(−3, 0), B(3, 0)이다.



점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 $a^2+b^2=9$이고,

$\overline{BP}^2=(a-3)^2+b^2=a^2+b^2-6a+9$

$=18-6a$

즉, $18-6a=t^2$이므로 $a=3-\dfrac{t^2}{6}$

$a=3-\dfrac{t^2}{6}$을 $a^2+b^2=9$에 대입하면

$\left(3-\dfrac{t^2}{6}\right)^2+b^2=9$ $\therefore b^2=t^2-\dfrac{t^4}{36}$

사각형 OBQP는 평행사변형이고 $\overline{PQ}=\overline{OB}=3$이므로

점 Q의 좌표는 $\left(6-\dfrac{t^2}{6}, b\right)$

$$\begin{aligned}\therefore f(t)=\overline{AQ}^2&=\left(9-\frac{t^2}{6}\right)^2+b^2\\&=\left(9-\frac{t^2}{6}\right)^2+t^2-\frac{t^4}{36}\\&=81-2t^2\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{f(t)-81}{t^2}=\lim_{t\to0+}\frac{81-2t^2-81}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{-2t^2}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0+}(-2)=-2$$

최고수준 도전 기출 42~43쪽

0165 답 16

전략 삼차방정식 $f(x)=0$의 실근은 오직 하나뿐임을 알고, 그 실근을 이용하여 $f(1)$의 최댓값을 구한다.

삼차방정식 $f(x)=0$의 한 실근을 β라 하면 주어진 조건에서

$x\to\beta$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to\beta}f(2x+1)=0$이므로

$f(2\beta+1)=0$

이때 $\beta\ne2\beta+1$이면 삼차방정식 $f(x)=0$의 실근 $2\beta+1$에 대하여

같은 방법으로 $f(4\beta+3)=0$

또 삼차방정식 $f(x)=0$의 한 실근 $4\beta+3$에 대하여 같은 방법으로

$f(8\beta+7)=0$이므로 삼차방정식 $f(x)=0$의 실근이 4개 이상이 된다. → 삼차방정식은 근은 최대 3개라는 것에 모순이다.

즉, $\beta=2\beta+1$이므로 $\beta=-1$

삼차방정식 $f(x)=0$의 실근은 -1뿐이어야 하므로

$f(-1)=0$에서

$a-b+3=0$ $\therefore b=a+3$

$$\begin{aligned}\therefore f(x)&=x^3+ax^2+(a+3)x+4\\&=(x+1)\{x^2+(a-1)x+4\}\end{aligned}$$

이때 이차방정식 $x^2+(a-1)x+4=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a-1)^2-16<0$, $a^2-2a-15<0$

$(a+3)(a-5)<0$ $\therefore -3<a<5$

그런데 a는 정수이므로 $a=-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

따라서 $f(1)=2a+8$이고, $f(1)$의 값은 $a=4$일 때 최대이므로 최댓값은 16이다.

참고 삼차방정식 $f(x)=0$의 실근이 -1뿐이려면 이차방정식

$x^2+(a-1)x+4=0$ ····· ㉠

은 $x=-1$을 중근으로 가지거나 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이때 x^2의 계수가 1이므로 $x=-1$을 중근으로 갖는 이차방정식은

$(x+1)^2=0$, 즉 $x^2+2x+1=0$

이 이차방정식은 ㉠과 일치하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

0166 답 ⑤

전략 함수 $f(x)$가 $x+3$, $x-1$을 인수로 가짐을 알고, $f(x)=(x+3)(x-1)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)로 놓고 조건을 만족시키는 $Q(x)$를 구한다.

$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{f(x)}{x+3}=-4$에서 $x\to-3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to-3}f(x)=0$이므로 $f(-3)=0$

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=8$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=(x+3)(x-1)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)라 하면

$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{f(x)}{x+3}=-4$에서

$$\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-1)Q(x)}{x+3}=\lim_{x\to-3}(x-1)Q(x)$$
$$=-4Q(-3)$$

즉, $-4Q(-3)=-4$이므로

$Q(-3)=1$ ····· ㉠

또 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=8$에서

$$\lim_{x\to1}\frac{(x+3)(x-1)Q(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x+3)Q(x)$$
$$=4Q(1)$$

즉, $4Q(1)=8$이므로

$Q(1)=2$ ····· ㉡

이때 $Q(x)$의 차수가 낮아지면 $f(x)$의 차수도 낮아지고, ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 다항식 $Q(x)$ 중 차수가 가장 낮은 것은 일차식이다. → $Q(x)$가 상수이면 $Q(-3)=Q(1)$이므로 ㉠, ㉡을 만족시키지 않는다.

$Q(x)=ax+b$ (a, b는 실수, $a\neq0$)라 하면

㉠, ㉡에서

$-3a+b=1$, $a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{7}{4}$

$\therefore\ Q(x)=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{4}$

따라서 $g(x)=(x+3)(x-1)\left(\dfrac{1}{4}x+\dfrac{7}{4}\right)$이므로

$g(5)=96$

0167 답 20

전략 (가)에서 모든 실수에 대하여 극한값이 존재해야 하므로 분모가 0이 되는 x의 값에서 극한값이 존재해야 함을 이용한다.

$g(x)=f(x)-5x$라 하면 (가)에서 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{g(x)}{x^2-4}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)}{x^2-4}$의 값이 각각 존재하고 $x\to-2$, $x\to2$일 때 모두 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to-2}g(x)=0$, $\lim\limits_{x\to2}g(x)=0$이므로

$g(-2)=0$, $g(2)=0$

이때 $g(x)=(x+2)(x-2)Q(x)$ ($Q(x)$는 다항식)라 하면

$f(x)-5x=(x+2)(x-2)Q(x)$

$\therefore\ f(x)=(x^2-4)Q(x)+5x$

(나)에서

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{f(x)}-x+3\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\{\sqrt{f(x)}-(x-3)\}\{\sqrt{f(x)}+(x-3)\}}{\sqrt{f(x)}+(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-(x-3)^2}{\sqrt{f(x)}+(x-3)}$$

이 극한값이 존재하므로 $f(x)-(x-3)^2$은 일차식이어야 한다.

즉, $f(x)=(x^2-4)Q(x)+5x$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이어야 하므로

$Q(x)=1$

따라서 $f(x)=x^2+5x-4$이므로 $f(3)=20$

0168 답 ②

전략 (나)의 식에 $n=3$을 대입하여 $g(x)$를 구한 후, (나)의 식에 $n=1$, 2를 각각 대입하여 $f(x)$를 구한다.

(가)에서 $\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}g\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to0}g(t)=-3$$

$\therefore\ g(0)=-3$

(나)에서 $n=3$을 대입하면

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{g(x)}{f(x)}=0$

이때 $f(x)$는 일차함수이므로

$\lim\limits_{x\to3}f(x)=f(3)$

즉, $\lim\limits_{x\to3}g(x)=0$이므로 $g(3)=0$

$g(x)=4x^2+ax-3$ (a는 상수)이라 하면 $g(3)=0$에서

$33+3a=0$ $\therefore\ a=-11$

$\therefore\ g(x)=4x^2-11x-3$

(나)에서 $n=1$을 대입하면

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)}{f(x)}=-\dfrac{1}{2}$

이때 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2-11x-3}{f(x)}$

$=-\dfrac{10}{f(1)}$ → $g(1)\neq0$이므로 $f(1)\neq0$

즉, $-\dfrac{10}{f(1)}=-\dfrac{1}{2}$이므로 $f(1)=20$

(나)에서 $n=2$를 대입하면

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{f(x)}=-\dfrac{1}{3}$

이때 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-11x-3}{f(x)}$

$=-\dfrac{9}{f(2)}$ → $g(2)\neq 0$이므로 $f(2)\neq 0$

즉, $-\dfrac{9}{f(2)}=-\dfrac{1}{3}$이므로 $f(2)=27$

$f(x)=bx+c$ (b, c는 상수, $b\neq 0$)라 하면

$f(1)=20$, $f(2)=27$에서

$b+c=20$, $2b+c=27$

두 식을 연립하여 풀면 $b=7$, $c=13$

따라서 $f(x)=7x+13$이므로 $f(-1)=6$

0169 답 ②

전략 점 P에서 선분 OQ에 내린 수선의 발은 선분 OQ의 중점이고, 점 R에서 선분 OP에 내린 수선의 발은 선분 OP의 중점임을 이용하여 두 삼각형 POQ, PRO의 넓이를 구한다.

점 P$(t,\ t^2)$에서 선분 OQ에 내린 수선의 발의 좌표는 $(t,\ 0)$이고, 이 점은 선분 OQ의 중점이므로

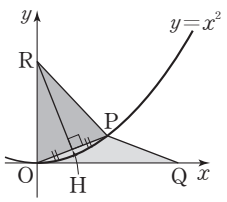
Q$(2t,\ 0)$

삼각형 POQ의 넓이 $S(t)$는

$S(t)=\dfrac{1}{2}\times 2t\times t^2=t^3$

점 R에서 선분 OP에 내린 수선의 발을 H라 하면 이 점은 선분 OP의 중점이므로

H$\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{t^2}{2}\right)$



이때 직선 OP의 기울기는 $\dfrac{t^2}{t}=t$이므로

직선 RH의 기울기는 $-\dfrac{1}{t}$이다.

즉, 직선 RH의 방정식은

$y-\dfrac{t^2}{2}=-\dfrac{1}{t}\left(x-\dfrac{t}{2}\right)$ $\therefore\ y=-\dfrac{1}{t}x+\dfrac{t^2+1}{2}$

이므로 점 R의 좌표는 $\left(0,\ \dfrac{t^2+1}{2}\right)$

삼각형 PRO의 넓이 $T(t)$는

$T(t)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{t^2+1}{2}\times t=\dfrac{t^3+t}{4}$

$\therefore\ \lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{T(t)-S(t)}{t}=\lim\limits_{t\to 0+}\dfrac{\frac{t^3+t}{4}-t^3}{t}$

$=\lim\limits_{t\to 0+}\left(-\dfrac{3}{4}t^2+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}$

0170 답 $\dfrac{1}{2}$

전략 점 Q의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$로 놓고 점 Q에서의 접선의 방정식을 이용하여 x_1을 t에 대한 식으로 나타내어 $S(t)$를 구한다.

점 Q$(x_1,\ y_1)$이라 하면 점 Q에서의 원의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=\dfrac{1}{t^2}$

이 직선이 점 P$\left(t+\dfrac{2}{t},\ 0\right)$을 지나므로

$x_1\left(t+\dfrac{2}{t}\right)=\dfrac{1}{t^2}$ $\therefore\ x_1=\dfrac{1}{t(t^2+2)}$

이때 점 R의 좌표는 $\left(0,\ -\dfrac{1}{t}\right)$이므로

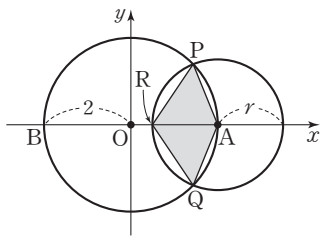
$S(t)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{t}\times\dfrac{1}{t(t^2+2)}=\dfrac{1}{2t^2(t^2+2)}$ ($\because\ t>1$)

$\therefore\ \lim\limits_{t\to\infty}\{t^4\times S(t)\}=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t^4}{2t^2(t^2+2)}=\dfrac{1}{2}$

0171 답 ①

전략 사각형 APRQ의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{RA}}$임을 이용하여 $S(r)$를 구한다.

그림과 같이 원 O의 중심 O를 원점으로 하고 직선 OA를 x축으로 하는 좌표평면을 생각하면 A$(2,\ 0)$



두 원 O, A의 방정식은 각각

$x^2+y^2=4$, $(x-2)^2+y^2=r^2$

$\therefore\ y^2=4-x^2$, $y^2=r^2-(x-2)^2$

두 원이 만나는 두 점 P, Q의 x좌표를 구하면

$4-x^2=r^2-(x-2)^2$, $4x=8-r^2$

$\therefore\ x=2-\dfrac{r^2}{4}$

이것을 $y^2=4-x^2$에 대입하여 두 점 P, Q의 y좌표를 구하면

$y^2=4-\left(2-\dfrac{r^2}{4}\right)^2$, $y^2=\dfrac{r^2(16-r^2)}{16}$

$\therefore\ y=\pm\dfrac{r\sqrt{16-r^2}}{4}$ ($\because\ 0<r<4$)

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=2\times\dfrac{r\sqrt{16-r^2}}{4}=\dfrac{r\sqrt{16-r^2}}{2}$, $\overline{\mathrm{RA}}=r$이므로

$S(r)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{RA}}=\dfrac{r^2\sqrt{16-r^2}}{4}$

$\therefore\ \lim\limits_{r\to 4-}\dfrac{S(r)}{\sqrt{4-r}}=\lim\limits_{r\to 4-}\dfrac{r^2\sqrt{16-r^2}}{4\sqrt{4-r}}$

$=\lim\limits_{r\to 4-}\dfrac{r^2\sqrt{(4-r)(4+r)}}{4\sqrt{4-r}}$

$=\lim\limits_{r\to 4-}\dfrac{r^2\sqrt{4+r}}{4}=8\sqrt{2}$

참고 선분 PQ가 x축과 만나는 점을 H라 하면

□APRQ=△RPQ+△APQ이므로

$S(r)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{RH}}+\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{AH}}$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times(\overline{\mathrm{RH}}+\overline{\mathrm{AH}})$

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{RA}}$

03 함수의 연속

난이도별 필수 기출 46~61쪽

0172 답 ③

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)=f(2)$이어야 한다.

즉, $5a-6=-a+6$에서

$6a=12 \quad \therefore a=2$

$\therefore f(2)=\lim_{x\to 2-} f(x)=-2+6=4$ → $f(2)=\lim_{x\to 2+} f(x)=10-6=4$

0173 답 ④

(i) $\lim_{x\to -1+} f(x)=3$, $\lim_{x\to -1-} f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to -1+} f(x)\neq \lim_{x\to -1-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to -1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $\lim_{x\to 1+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to 1+} f(x)\neq \lim_{x\to 1-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(iii) $\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)=2$이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)=2$

이때 $f(2)=1$이므로 $\lim_{x\to 2} f(x)\neq f(2)$

즉, $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

(iv) $\lim_{x\to 3+} f(x)=2$, $\lim_{x\to 3-} f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to 3+} f(x)\neq \lim_{x\to 3-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to 3} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

(i)~(iv)에서 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$, $x=3$에서 극한값이 존재하지 않고, $x=-1$, $x=1$, $x=2$, $x=3$에서 불연속이므로

$m=3$, $n=4$

$\therefore m+n=3+4=7$

참고 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $x=-1$, $x=1$, $x=2$, $x=3$에서와 같이 그래프가 끊어져 있으면 그 점에서 함수 $f(x)$는 불연속이다.

0174 답 ④

① $f(x)$는 $x=-1$에서 정의되지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

② $\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+} (x+[x])=-1-1=-2$

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-} (x+[x])=-1-2=-3$

이므로 $\lim_{x\to -1+} f(x)\neq \lim_{x\to -1-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to -1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

③ $\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1} (x+1)^2=0$이고, $f(-1)=1$이므로

$\lim_{x\to -1} f(x)\neq f(-1)$

즉, $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

④ $\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+} \frac{x^2-1}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1+} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1+} (x-1)=-2$

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-} (3x+1)=-2$

이므로 $\lim_{x\to -1} f(x)=-2$

이때 $f(-1)=-2$이므로 $\lim_{x\to -1} f(x)=f(-1)$

즉, $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

⑤ $\lim_{x\to -1+} f(x)=\lim_{x\to -1+} \frac{x+1}{2(x+1)}=\lim_{x\to -1+} \frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to -1-} f(x)=\lim_{x\to -1-} \frac{-(x+1)}{2(x+1)}=\lim_{x\to -1-} \left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

이므로 $\lim_{x\to -1+} f(x)\neq \lim_{x\to -1-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to -1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

따라서 $x=-1$에서 연속인 함수는 ④이다.

0175 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1}=-1$이고,

$f(0)=-1$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

즉, $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} \frac{x^3+3x}{x}=\lim_{x\to 0} (x^2+3)=3$이고,

$f(0)=0$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$

즉, $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} \frac{x}{x}=\lim_{x\to 0+} 1=1$

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-} \frac{x}{-x}=\lim_{x\to 0-} (-1)=-1$

이므로 $\lim_{x\to 0+} f(x)\neq \lim_{x\to 0-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 보기에서 $x=0$에서 불연속인 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

0176 답 ②

ㄱ. $f(x)=3x-1$일 때, $g(2)=f(2)=5$이고

$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2} \frac{3x-1-5}{x-2}=\lim_{x\to 2} \frac{3x-6}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2} \frac{3(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2} 3=3$

즉, $\lim_{x\to 2} g(x)\neq g(2)$이므로 $g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(x)=x^2+x-1$일 때, $g(2)=f(2)=5$이고

$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-1-5}{x-2}=\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2} (x+3)=5$

즉, $\lim_{x\to 2} g(x)=g(2)$이므로 $g(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

ㄷ. $f(x)=x^3-3$일 때, $g(2)=f(2)=5$이고

$$\lim_{x\to 2} g(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-3-5}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12$$

즉, $\lim_{x\to 2} g(x)\neq g(2)$이므로 $g(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 보기에서 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이 되도록 하는 함수는 ㄴ이다.

0177 답 ⑤

① $f(0)=2$

② $\lim_{x\to 0+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=2$이므로

$\lim_{x\to 0+} f(x)\neq\lim_{x\to 0-} f(x)$

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

③ $\lim_{x\to 1} f(x)=3$, $f(1)=2$이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

④ 열린구간 $(-1, 1)$에서 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 0의 1개이다.

⑤ $f(3-1)=f(2)=1$이고,

$x-1=t$로 놓으면 $x\to 3$일 때 $t\to 2$이므로

$\lim_{x\to 3} f(x-1)=\lim_{t\to 2} f(t)=1$

즉, $\lim_{x\to 3} f(x-1)=f(2)$이므로 $f(x-1)$은 $x=3$에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$에 대한 설명으로 옳은 것은 ⑤이다.

0178 답 ①

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$이어야 하므로

$$a=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+3}}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+3})(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3})}{(x-2)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3})}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3})}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+3}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$$

0179 답 7

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=f(a)$이어야 하므로

$a^2-5a+6=2a+3$

$\therefore a^2-7a+3=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 상수 a의 값의 합은 7이다.

0180 답 48

함수 $f(x)$가 $x=-3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -3+} f(x)=\lim_{x\to -3-} f(x)=f(-3)$에서

$$\lim_{x\to -3-}\frac{x^2-5x+a}{x+3}=b-9 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\to -3$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to -3}(x^2-5x+a)=0$이므로

$24+a=0$ $\therefore a=-24$ ····· ⓘ

$a=-24$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to -3-}\frac{x^2-5x-24}{x+3}=\lim_{x\to -3-}\frac{(x+3)(x-8)}{x+3}$$
$$=\lim_{x\to -3-}(x-8)=-11$$

즉, $b-9=-11$이므로 $b=-2$ ····· ⓘⓘ

$\therefore ab=(-24)\times(-2)=48$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a의 값 구하기	50 %
ⓘⓘ b의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ ab의 값 구하기	10 %

0181 답 ⑤

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$에서

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{4x+5}+b}{x-1}=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}(a\sqrt{4x+5}+b)=0$이므로

$3a+b=0$ $\therefore b=-3a$ ····· ㉡

$b=-3a$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{a\sqrt{4x+5}-3a}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a(\sqrt{4x+5}-3)(\sqrt{4x+5}+3)}{(x-1)(\sqrt{4x+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{4a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{4x+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{4a}{\sqrt{4x+5}+3}=\frac{2}{3}a$$

즉, $\frac{2}{3}a=2$이므로 $a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하면 $b=-9$

$\therefore a-b=3-(-9)=12$

0182 답 ①

ㄱ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to 3+$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{x\to 3+} f(f(x))=\lim_{t\to 0+} f(t)=2$

또 $x\to 3-$일 때 $t\to 0-$이므로

$\lim_{x\to 3-} f(f(x))=\lim_{t\to 0-} f(t)=1$

즉, $\lim_{x\to 3+} f(f(x))\neq\lim_{x\to 3-} f(f(x))$이므로

$\lim_{x\to 3} f(f(x))$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $f(1+2)=f(3)=0$이고,

$x+2=s$로 놓으면 $x\to1$일 때 $s\to3$이므로

$\lim_{x\to1}f(x+2)=\lim_{s\to3}f(s)=0$

즉, $\lim_{x\to1}f(x+2)=f(3)$이므로 $f(x+2)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $f(2)f(1)=(-1)\times0=0$이고,

$x-1=k$로 놓으면 $x\to2+$일 때 $k\to1+$이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)f(x-1)=\lim_{x\to2+}f(x)\times\lim_{x\to2+}f(x-1)$

$=\lim_{x\to2+}f(x)\times\lim_{k\to1+}f(k)$

$=(-1)\times0=0$

또 $x\to2-$일 때 $k\to1-$이므로

$\lim_{x\to2-}f(x)f(x-1)=\lim_{x\to2-}f(x)\times\lim_{x\to2-}f(x-1)$

$=\lim_{x\to2-}f(x)\times\lim_{k\to1-}f(k)$

$=(-2)\times0=0$

$\therefore\lim_{x\to2}f(x)=0$

즉, $\lim_{x\to2}f(x)f(x-1)=f(2)f(1)$이므로

$f(x)f(x-1)$은 $x=2$에서 연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

0183 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to1+}g(x)$

$=1\times2=2$

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\times\lim_{x\to1-}g(x)$

$=1\times(-1)=-1$

이므로 $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)g(x)$

즉, $\lim_{x\to1}f(x)g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1+}f(x)+\lim_{x\to1+}g(x)$

$=1+2=3$

$\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to1-}f(x)+\lim_{x\to1-}g(x)$

$=1+(-1)=0$

이므로 $\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}\neq\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}$

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}$의 값은 존재하지 않으므로

$f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $g(f(0))=g(0)=-1$이고,

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to0}g(f(x))=\lim_{t\to0}g(t)=-1$

즉, $\lim_{x\to0}g(f(x))=g(f(0))$이므로 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0184 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to1+}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to1+}f(x)-\lim_{x\to1+}g(x)$

$=(-1)-(-1)=0$

$\lim_{x\to1-}\{f(x)-g(x)\}=\lim_{x\to1-}f(x)-\lim_{x\to1-}g(x)$

$=1-1=0$

$\therefore\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=0$

ㄴ. $g(-1)=-1$이고,

$\lim_{x\to-1+}g(x)=-1$, $\lim_{x\to-1-}g(x)=-1$

이므로 $\lim_{x\to-1}g(x)=-1$

즉, $\lim_{x\to-1}g(x)=g(-1)$이므로 $g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

ㄷ. $f(1)g(1)=(-1)\times(-1)=1$이고,

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=\lim_{x\to1+}f(x)\times\lim_{x\to1+}g(x)$

$=(-1)\times(-1)=1$

$\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=\lim_{x\to1-}f(x)\times\lim_{x\to1-}g(x)$

$=1\times1=1$

이므로 $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=1$

즉, $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$이므로 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0185 답 ③

$|x|\neq1$일 때,

$f(x)=\frac{x^3+1}{x^2-1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-x+1}{x-1}$

ㄱ. $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-x+1}{x-1}=\infty$

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}\frac{x^2-x+1}{x-1}=-\infty$

즉, $\lim_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^2-x+1}{x-1}=-\frac{3}{2}$이고,

$f(-1)=1$이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)\neq f(-1)$

즉, $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 x의 값은 -1, 1의 2개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

0186 답 23

함수 $f(x)g(x)$가 $x=5$에서 연속이므로

$\lim_{x\to5+}f(x)g(x)=\lim_{x\to5-}f(x)g(x)=f(5)g(5)$에서

$f(5)g(5)=(-25+a)\times(-5)$

$=-5(a-25)$

$\lim_{x\to5+}f(x)g(x)=\lim_{x\to5+}\frac{x^2-25}{x-5}$

$=\lim_{x\to5+}\frac{(x+5)(x-5)}{x-5}$

$=\lim_{x\to5+}(x+5)=10$

$\lim_{x\to5-}f(x)g(x)=\lim_{x\to5-}(-x^2+a)(x-10)$

$=-5(a-25)$ ····· ⓘ

즉, $-5(a-25)=10$이므로 $a=23$ ····· ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(5)g(5)$, $\lim_{x\to5+}f(x)g(x)$, $\lim_{x\to5-}f(x)g(x)$의 값을 a에 대한 식으로 나타내기	70%
ⓘⓘ a의 값 구하기	30%

0187 답 ④

$f(-x)=\begin{cases}2x+3 & (|x|>2)\\ x^2+1 & (|x|\le 2)\end{cases}$ 이므로

$f(-x)\{f(x)+k\}=\begin{cases}(2x+3)(-2x+3+k) & (|x|>2)\\ (x^2+1)(x^2+1+k) & (|x|\le 2)\end{cases}$

함수 $f(-x)\{f(x)+k\}$가 $x=2$에서 연속이려면

$\lim\limits_{x\to 2+} f(-x)\{f(x)+k\}=\lim\limits_{x\to 2-} f(-x)\{f(x)+k\}$

$=f(-2)\{f(2)+k\}$

이어야 한다.

$f(-2)\{f(2)+k\}=5(5+k)$

$\lim\limits_{x\to 2+} f(-x)\{f(x)+k\}=\lim\limits_{x\to 2+}(2x+3)(-2x+3+k)$

$=7(-1+k)$

$\lim\limits_{x\to 2-} f(-x)\{f(x)+k\}=\lim\limits_{x\to 2-}(x^2+1)(x^2+1+k)$

$=5(5+k)$

즉, $5(5+k)=7(-1+k)$이므로

$2k=32 \quad \therefore k=16$

0188 답 ③

$f(x)=4-\dfrac{1}{\dfrac{x^2-x-1}{x+2}}=4-\dfrac{x+2}{x^2-x-1}$

함수 $f(x)$는 $x+2=0$, $x^2-x-1=0$인 x의 값에서 정의되지 않으므로 $f(x)$가 불연속이 되는 모든 x의 값의 합은

$-2+1=-1$

참고 $x+2=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-2$이고, $x^2-x-1=0$을 만족시키는 모든 x의 값의 합은 근과 계수의 관계에 의하여 1이다.

0189 답 3

$k=0$일 때, 방정식 $kx^2-2(k+4)x+(5k-4)=0$에서

$-8x-4=0 \quad \therefore x=-\dfrac{1}{2}$

즉, 주어진 방정식은 오직 한 개의 실근을 가지므로 $f(0)=1$

$k\neq 0$일 때, 이차방정식 $kx^2-2(k+4)x+(5k-4)=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=\{-(k+4)\}^2-k(5k-4)=-4(k+1)(k-4)$

(i) $-1<k<0$ 또는 $0<k<4$일 때,

$\dfrac{D}{4}>0$이므로 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 개의 실근을 갖는다.

$\therefore f(k)=2$

(ii) $k=-1$ 또는 $k=4$일 때,

$\dfrac{D}{4}=0$이므로 주어진 이차방정식은 중근을 갖는다.

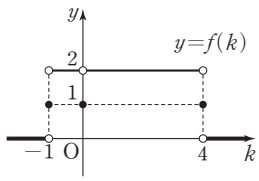
$\therefore f(k)=1$

(iii) $k<-1$ 또는 $k>4$일 때,

$\dfrac{D}{4}<0$이므로 주어진 이차방정식은 실근을 갖지 않는다.

$\therefore f(k)=0$

따라서 함수 $f(k)$가 불연속이 되도록 하는 k의 값은 -1, 0, 4의 3개이다.



0190 답 ④

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=g(2)$에서

$\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\lim\limits_{x\to 2}[f(x)]$

$=\lim\limits_{x\to 2}[-(x-2)^2+k]$

$=k-1$ ($\because k$는 정수)

이때 $g(2)=3$이므로

$k-1=3 \quad \therefore k=4$

0191 답 ③

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\{f(x)+|f(x)|\}=0+0=0$

$\lim\limits_{x\to 0-} g(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\{f(x)+|f(x)|\}=-1+|-1|=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} g(x)=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

ㄴ. $|h(0)|=|f(0)+f(0)|=\left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\right|=1$이고,

$-x=t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $t\to 0-$이므로

$\lim\limits_{x\to 0+} h(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\{f(x)+f(-x)\}$

$=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)+\lim\limits_{t\to 0-} f(t)=0+(-1)=-1$

또 $x\to 0-$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim\limits_{x\to 0-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\{f(x)+f(-x)\}$

$=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)+\lim\limits_{t\to 0+} f(t)=-1+0=-1$

이므로 $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=-1$에서

$\lim\limits_{x\to 0}|h(x)|=1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

즉, $\lim\limits_{x\to 0}|h(x)|=|h(0)|$이므로 $|h(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $g(0)=f(0)+|f(0)|=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$이고,

ㄴ에서 $|h(0)|=1$이므로 $g(0)|h(0)|=1\times 1=1$

$\lim\limits_{x\to 0} g(x)|h(x)|=\lim\limits_{x\to 0} g(x)\times\lim\limits_{x\to 0}|h(x)|$

$=0\times 1=0$ ($\because$ ㉠, ㉡)

즉, $\lim\limits_{x\to 0} g(x)|h(x)|\neq g(0)|h(0)|$이므로 $g(x)|h(x)|$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0192 답 72

삼차함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$는 $f(x)\neq 0$인 모든 실수 x에서 연속이다.

이때 $\lim\limits_{x\to 3} g(x)=g(3)-5$에서 $\lim\limits_{x\to 3} g(x)\neq g(3)$이므로 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

즉, $f(3)=0$이므로 $g(3)=3$

$\lim\limits_{x\to 3} g(x)=g(3)-5=3-5=-2$이므로

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}=-2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠에서 $x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to3}f(x+3)\{f(x)+1\}=0$이므로

$f(6)\{f(3)+1\}=0 \quad \therefore f(6)=0\ (\because f(3)=0)$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-3)(x-6)(x-k)$ (k는 상수)라 하고 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{x(x-3)(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-3)(x-6)(x-k)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{x(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-6)(x-k)}=-\frac{6-k}{3-k}$$

즉, $-\dfrac{6-k}{3-k}=-2$이므로

$6-k=2(3-k) \quad \therefore k=0$

따라서 $f(x)=x(x-3)(x-6)$이므로

$$g(5)=\frac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}=\frac{80\times(-9)}{-10}=72$$

0193 답 ③

(i) $x\ge t$일 때, $|x-t|=x-t$이므로

$y=x-t+t-\sqrt{2}=x-\sqrt{2}$ ····· ㉠

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉠, 즉 $x-y-\sqrt{2}=0$ 사이의 거리는

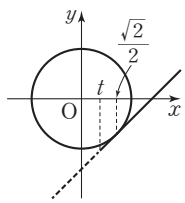
$\dfrac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=1$

이고, 이 값이 원의 반지름의 길이인 1과 같으므로 주어진 원과 직선 ㉠은 접한다.

원과 직선 ㉠의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2+(x-\sqrt{2})^2=1,\ 2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$

$(\sqrt{2}x-1)^2=0 \quad \therefore x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$



즉, $x\ge t$일 때

$$f(t)=\begin{cases}0\left(t>\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ 1\left(t\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

→ $x\ge t$에 접점의 x좌표가 포함되므로 원과 직선의 교점의 개수는 1이다.

(ii) $x<t$일 때, $|x-t|=-(x-t)$이므로

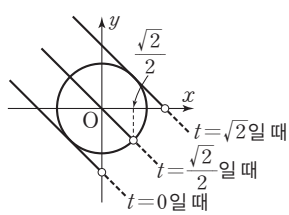
$y=-(x-t)+t-\sqrt{2}=-x+2t-\sqrt{2}$ ····· ㉡

원과 직선 ㉡, 즉 $x+y-2t+\sqrt{2}=0$이 만나려면 원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 ㉡ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 1보다 작아야 하므로

$\dfrac{|-2t+\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}\le1$

$|-2t+\sqrt{2}|\le\sqrt{2}$

$\therefore 0\le t\le\sqrt{2}$



즉, $x<t$일 때

$$f(t)=\begin{cases}0\ (t<0\text{ 또는 }t>\sqrt{2})\\ 1\left(t=0\text{ 또는 }t=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{ 또는 }t=\sqrt{2}\right)\\ 2\left(0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{ 또는 }\dfrac{\sqrt{2}}{2}<t<\sqrt{2}\right)\end{cases}$$

→ 두 교점 중 하나는 (i)에서 접점이다.

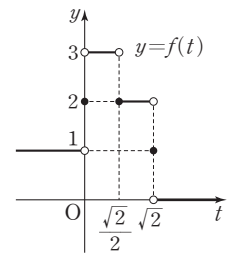
(i), (ii)에서

$$f(t)=\begin{cases}0\ (t>\sqrt{2})\\ 1\ (t<0\text{ 또는 }t=\sqrt{2})\\ 2\left(t=0\text{ 또는 }\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le t<\sqrt{2}\right)\\ 3\left(0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

즉, 함수 $f(t)$가 불연속이 되도록 하는 t의 값은 $0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}$

따라서 구하는 모든 t의 값의 합은

$0+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$



0194 답 ③

ㄱ. 함수 $f(x)$는 모든 실수 a에 대하여 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$가 성립하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄴ. $\lim\limits_{x\to3+}g(x)=\lim\limits_{x\to3+}(x^2-3x+1)=1$

$\lim\limits_{x\to3-}g(x)=\lim\limits_{x\to3-}\sqrt{7-2x}=1$

이므로 $\lim\limits_{x\to3}g(x)=1$

이때 $g(3)=1$이므로 $\lim\limits_{x\to3}g(x)=g(3)$

즉, 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to4+}h(x)=\infty,\ \lim\limits_{x\to4-}h(x)=-\infty$

즉, $\lim\limits_{x\to4}h(x)$의 값은 존재하지 않으므로 $h(x)$는 $x=4$에서 불연속이다.

따라서 보기에서 실수 전체의 집합에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

0195 답 24

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to-2+}f(x)=\lim\limits_{x\to-2-}f(x)=f(-2)$에서

$$\lim_{x\to-2-}\frac{\sqrt{x^2+ax}+b}{x+2}=-\frac{5}{4} \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\to-2-$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to-2-}(\sqrt{x^2+ax}+b)=0$이므로

$\sqrt{4-2a}+b=0 \quad \therefore b=-\sqrt{4-2a}$ ····· ㉡ ····· (i)

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-2-}\frac{\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{4-2a}}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to-2-}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{4-2a})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{4-2a})}{(x+2)(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{4-2a})}$$

$$=\lim_{x\to-2-}\frac{x^2+ax-4+2a}{(x+2)(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{4-2a})}$$

$$=\lim_{x\to-2-}\frac{(x+2)(x-2+a)}{(x+2)(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{4-2a})}$$

$$=\lim_{x\to-2-}\frac{x-2+a}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{4-2a}}=\frac{-4+a}{2\sqrt{4-2a}}$$

즉, $\frac{-4+a}{2\sqrt{4-2a}}=-\frac{5}{4}$이므로 $5\sqrt{4-2a}=8-2a$

양변을 제곱하면

$25(4-2a)=(8-2a)^2$, $4a^2+18a-36=0$

$2(2a-3)(a+6)=0$ $\therefore a=-6\ (\because a<0)$

$a=-6$을 ㉡에 대입하여 풀면 $b=-4$ …… ⅱ

$\therefore ab=(-6)\times(-4)=24$ …… ⅲ

채점 기준	
ⅰ b를 a에 대한 식으로 나타내기	40%
ⅱ a, b의 값 구하기	50%
ⅲ ab의 값 구하기	10%

0196 답 ②

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-3$, $x=3$에서 연속이어야 한다.

$x=-3$에서 연속이려면

$\lim_{x\to-3+}f(x)=\lim_{x\to-3-}f(x)=f(-3)$이어야 하므로

$a-3=-3b-3$ $\therefore a+3b=0$ …… ㉠

또 $x=3$에서 연속이려면

$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=f(3)$이어야 하므로

$3b-3=a+3$ $\therefore a-3b=-6$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=1$

$\therefore a+b=-3+1=-2$

0197 답 ②

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되려면 $x=a$에서 연속이어야 한다. 즉, $\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a-}f(x)=f(a)$이어야 하므로

$ak-4=a^2-2a+k$

$\therefore a^2-(k+2)a+(k+4)=0$ …… ㉠

실수 a의 값이 존재하려면 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 할 때, $D\ge0$이어야 하므로

$D=(k+2)^2-4(k+4)\ge0$

$k^2-12\ge0$, $(k+2\sqrt{3})(k-2\sqrt{3})\ge0$ $\therefore k\ge2\sqrt{3}\ (\because k>0)$

따라서 구하는 양수 k의 최솟값은 $2\sqrt{3}$이다.

0198 답 7

함수 $|f(x)|$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a+}|f(x)|=\lim_{x\to a-}|f(x)|=|f(a)|$에서

$|a^2-2a+3|=|4a+10|$

(ⅰ) $a^2-2a+3=4a+10$일 때,

$a^2-6a-7=0$, $(a+1)(a-7)=0$ $\therefore a=7\ (\because a>0)$

(ⅱ) $a^2-2a+3=-(4a+10)$일 때,

$a^2+2a+13=0$이고, 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-13=-12<0$

즉, 이 이차방정식의 실근은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 양수 a의 값은 7이다.

0199 답 −3

$x^2\ne1$일 때,

$f(x)=\frac{x^3+ax^2+bx+4}{x^2-1}=\frac{x^3+ax^2+bx+4}{(x+1)(x-1)}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$, $x=1$에서 연속이다.

$x=-1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$에서

$\lim_{x\to-1}\frac{x^3+ax^2+bx+4}{x^2-1}=f(-1)$ …… ㉠

㉠에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}(x^3+ax^2+bx+4)=0$이므로

$a-b+3=0$ $\therefore a-b=-3$ …… ㉡

또 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$에서

$\lim_{x\to1}\frac{x^3+ax^2+bx+4}{x^2-1}=f(1)$ …… ㉢

㉢에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^3+ax^2+bx+4)=0$이므로

$a+b+5=0$ $\therefore a+b=-5$ …… ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=-1$

따라서 $x^2\ne1$일 때, $f(x)=\frac{x^3-4x^2-x+4}{x^2-1}$이므로

$f(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^3-4x^2-x+4}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1}(x-4)=-3$

0200 답 48

$x\ne3$일 때, $f(x)=\frac{a\sqrt{x-1}+b}{x-3}$

함수 $f(x)$가 $x\ge1$인 모든 실수 x에서 연속이면 $x=3$에서 연속이므로 $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$에서

$\lim_{x\to3}\frac{a\sqrt{x-1}+b}{x-3}=\sqrt{2}$ …… ㉠

㉠에서 $x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to3}(a\sqrt{x-1}+b)=0$이므로

$\sqrt{2}a+b=0$ $\therefore b=-\sqrt{2}a$ …… ㉡ …… ⅰ

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to3}\frac{a\sqrt{x-1}-\sqrt{2}a}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{a(\sqrt{x-1}-\sqrt{2})(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})}{(x-3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})}$

$=\lim_{x\to3}\frac{a(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x-1}+\sqrt{2})}$

$=\lim_{x\to3}\frac{a}{\sqrt{x-1}+\sqrt{2}}=\frac{a}{2\sqrt{2}}$

즉, $\frac{a}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$이므로 $a=4$

$a=4$를 ㉡에 대입하면 $b=-4\sqrt{2}$ …… ⅱ

$\therefore a^2+b^2=16+32=48$ …… ⅲ

채점 기준	
ⓘ b를 a에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘ a, b의 값 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ a^2+b^2의 값 구하기	10 %

0201 답 ①

주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$|f(1)|=0 \quad \therefore f(1)=0$

주어진 식의 양변에 $x=3$을 대입하면 $g(3)=0$이므로

$|f(3)|=0 \quad \therefore f(3)=0$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-1)(x-3)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$x\neq1$일 때, $g(x)=\dfrac{|(x-1)(x-3)(x+a)|}{x-1}$

이때 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1+}g(x)=\lim\limits_{x\to1-}g(x)=g(1)$에서

$$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}\frac{-(x-1)(x-3)|x+a|}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\{-(x-3)|x+a|\}$$
$$=2|1+a|$$

$$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x-3)|x+a|}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(x-3)|x+a|$$
$$=-2|1+a|$$

즉, $2|1+a|=-2|1+a|$이므로

$4|1+a|=0 \quad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=(x-1)^2(x-3)$이므로 $f(4)=9$

0202 답 ②

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$, $x=2$에서 연속이다.

(i) $x=1$에서 연속이면 $\lim\limits_{x\to1+}g(x)=\lim\limits_{x\to1-}g(x)=g(1)$에서

$\lim\limits_{x\to1+}g(x)=\lim\limits_{x\to1+}(x-a)(x-b)$
$=(1-a)(1-b)$

$\lim\limits_{x\to1-}g(x)=\lim\limits_{x\to1-}(x-a)(x-b)(3-x^2)$
$=2(1-a)(1-b)$

$g(1)=(1-a)(1-b)$

즉, $(1-a)(1-b)=2(1-a)(1-b)$이므로

$(1-a)(1-b)=0 \quad \therefore a=1$ 또는 $b=1$

(ii) $x=2$에서 연속이면 $\lim\limits_{x\to2+}g(x)=\lim\limits_{x\to2-}g(x)=g(2)$에서

$\lim\limits_{x\to2+}g(x)=\lim\limits_{x\to2+}(x-a)(x-b)(x^3-2x+5)$
$=9(2-a)(2-b)$

$\lim\limits_{x\to2-}g(x)=\lim\limits_{x\to2-}(x-a)(x-b)$
$=(2-a)(2-b)$

$g(2)=9(2-a)(2-b)$

즉, $9(2-a)(2-b)=(2-a)(2-b)$이므로

$(2-a)(2-b)=0 \quad \therefore a=2$ 또는 $b=2$

(i), (ii)에서 $a=1$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=1$이므로

$|a-b|=1$

0203 답 ④

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)=f(2)$에서 $b=5$

한편 $f(x)=f(x+4)$에서 $f(0)=f(4)$이므로

$3=4a+b \quad \therefore b=3-4a$ ····· ㉠

$b=5$를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-\dfrac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x+3 & (0\le x\le2)\\ -\dfrac{1}{2}(x-2)^2+5 & (2<x\le4)\end{cases}$ 이므로

$f(27)=f(23)=f(19)=\cdots=f(3)=\dfrac{9}{2}$

참고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$이면

$\cdots=f(x-4)=f(x)=f(x+4)=f(x+8)=\cdots$

을 만족시키므로 $f(x)=f(x+4n)$ (n은 정수)이다.

0204 답 2

함수 $h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to2}h(x)=h(2)$에서

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-1)^2+a(x-1)+1}{x-2}=b+1$ ····· ㉠

㉠에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to2}\{(x-1)^2+a(x-1)+1\}=0$이므로

$a+2=0 \quad \therefore a=-2$ ····· ⓘ

$a=-2$를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{(x-1)^2-2(x-1)+1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2-4x+4}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2}(x-2)=0$$

즉, $b+1=0$이므로 $b=-1$ ····· ⓘⓘ

$ab=(-2)\times(-1)=2$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ b의 값 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ ab의 값 구하기	10 %

0205 답 2

(i) $n=0$일 때,

$\lim\limits_{x\to0+}g(x)=\lim\limits_{x\to0+}(x-2)f(x)=(-2)\times1=-2$

$\lim\limits_{x\to0-}g(x)=\lim\limits_{x\to0-}\{f(x)\}^2=2^2=4$

이므로 $\lim\limits_{x\to0+}g(x)\neq\lim\limits_{x\to0-}g(x)$

즉, $\lim\limits_{x\to0}g(x)$의 값은 존재하지 않으므로 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(ii) $n=1$일 때,

$\lim_{x\to1} g(x)=\lim_{x\to1}(x-2)f(x)=(-1)\times3=-3$

$g(1)=-f(1)=-1$

즉, $\lim_{x\to1} g(x)\neq g(1)$이므로 $g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$가 불연속이 되도록 하는 정수 n은 0, 1의 2개이다.

참고 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 $x=0$, $x=1$과 함수 $g(x)$의 정의역에서 경계가 되는 $x=0$에서의 연속성을 확인하면 된다.

0206 답 $\frac{8}{7}$

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0} g(x)=g(0)$

(나)에서 $g(0)=-1$이므로 $\lim_{x\to0} g(x)=-1$

(가)에서 $f(x)\neq0$일 때, $g(x)=\frac{x(3x-1)}{f(x)}$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{x(3x-1)}{f(x)}=-1$ ····· ㉠

㉠에서 $x\to0$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to0} f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)라 하고

이것을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{x(3x-1)}{x(x^2+ax+b)}=\lim_{x\to0}\frac{3x-1}{x^2+ax+b}=-\frac{1}{b}$

즉, $-\frac{1}{b}=-1$이므로 $b=1$

$\therefore f(x)=x(x^2+ax+1)$

이때 $f(1)=2+a$이고, 이 값이 자연수이므로 a는 -1 이상의 정수이어야 한다.

한편 함수 $g(x)=\frac{x(3x-1)}{x(x^2+ax+1)}=\frac{3x-1}{x^2+ax+1}$ ($x\neq0$)이 모든 실수 x에서 연속이려면 이차방정식 $x^2+ax+1=0$을 만족시키는 실수 x의 값이 존재하지 않아야 한다.

이차방정식 $x^2+ax+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4<0$, $(a+2)(a-2)<0$

$\therefore -2<a<2$

그런데 a는 -1 이상의 정수이므로 정수 a는 -1, 0, 1이다.

따라서 $g(3)=\frac{8}{10+3a}$은 $a=-1$일 때 최대이므로 구하는 최댓값은 $\frac{8}{7}$이다.

0207 답 ⑤

ㄱ. $f(x)=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to0} f(f(x))=\lim_{t\to0} f(t)=0$

이때 $f(f(0))=f(0)=0$이므로

$\lim_{x\to0} f(f(x))=f(f(0))$

즉, $f(f(x))$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. $h(x)=f(x)g(x)+af(x)=f(x)\{g(x)+a\}$

함수 $f(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 불연속이므로 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=-1$, $x=1$에서 연속이어야 한다.

(i) $x=-1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to-1+} h(x)=\lim_{x\to-1-} h(x)=h(-1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to-1+} h(x)=\lim_{x\to-1+} f(x)\{g(x)+a\}$

$=(-1)\times(-1+a)=1-a$

$\lim_{x\to-1-} h(x)=\lim_{x\to-1-} f(x)\{g(x)+a\}$

$=1\times(-1+a)=a-1$

$h(-1)=f(-1)\{g(-1)+a\}$

$=1\times(-1+a)=a-1$

즉, $1-a=a-1$이므로

$2a=2$ $\therefore a=1$

(ii) $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to1+} h(x)=\lim_{x\to1-} h(x)=h(1)$이어야 하므로

$\lim_{x\to1+} h(x)=\lim_{x\to1+} f(x)\{g(x)+a\}$

$=(-1)\times(-1+a)=1-a$

$\lim_{x\to1-} h(x)=\lim_{x\to1-} f(x)\{g(x)+a\}$

$=1\times(-1+a)=a-1$

$h(1)=f(1)\{g(1)+a\}$

$=(-1)\times(-1+a)=1-a$

즉, $1-a=a-1$이므로

$2a=2$ $\therefore a=1$

(i), (ii)에서 함수 $h(x)$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 정수 a는 1의 1개이다.

ㄷ. (i) $x=-1$일 때,

$g(f(-1))=g(1)=-1$

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to-1+$일 때 $t\to-1+$이므로

$\lim_{x\to-1+} g(f(x))=\lim_{t\to-1+} g(t)=-1$

또 $x\to-1-$일 때 $t=1$이므로

$\lim_{x\to-1-} g(f(x))=g(1)=-1$

$\therefore \lim_{x\to-1} g(f(x))=-1$

즉, $\lim_{x\to-1} g(f(x))=g(f(-1))$이므로 $g(f(x))$는 $x=-1$에서 연속이다.

(ii) $x=1$일 때,

$g(f(1))=g(-1)=-1$

$f(x)=t$로 놓으면 $x\to1+$일 때 $t=-1$이므로

$\lim_{x\to1+} g(f(x))=g(-1)=-1$

또 $x\to1-$일 때 $t\to1-$이므로

$\lim_{x\to1-} g(f(x))=\lim_{t\to1-} g(t)=-1$

$\therefore \lim_{x\to1} g(f(x))=-1$

즉, $\lim_{x\to1} g(f(x))=g(f(1))$이므로 $g(f(x))$는 $x=1$에서 연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $g(f(x))$에서 극한값이 존재하지 않는 점의 개수와 불연속인 점의 개수는 모두 0으로 서로 같다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0208 답 ②

함수 $\{g(x)\}^2$이 모든 실수 x에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\{g(0)\}^2$

$x+1=t$로 놓으면 $x\to0+$일 때 $t\to1+$이므로

$\lim_{x\to0+}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0+}\{f(x+1)\}^2=\lim_{t\to1+}\{f(t)\}^2$

$=\{f(1)\}^2=(k+3)^2$

$x-1=s$로 놓으면 $x\to0-$일 때 $s\to-1-$이므로

$\lim_{x\to0-}\{g(x)\}^2=\lim_{x\to0-}\{f(x-1)\}^2=\lim_{s\to-1-}\{f(s)\}^2$

$=\{f(-1)\}^2=(k+1)^2$

$\{g(0)\}^2=\{f(1)\}^2=(k+3)^2$

즉, $(k+3)^2=(k+1)^2$이므로

$k^2+6k+9=k^2+2k+1$, $4k=-8$ $\therefore k=-2$

0209 답 ⑤

$x\neq-1$일 때, $f(x)=\dfrac{x^4+3x+2g(x)}{x+1}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$에서

$\lim_{x\to-1}\dfrac{x^4+3x+2g(x)}{x+1}=9$ ····· ㉠

㉠에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}\{x^4+3x+2g(x)\}=0$이므로

$-2+2g(-1)=0$ $\therefore g(-1)=1$

이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 $g(-1)=1$에서

$1-a+b=1$ $\therefore b=a$

$\therefore g(x)=x^2+ax+a$ ····· ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^4+3x+2g(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^4+3x+2(x^2+ax+a)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{x^4+2x^2+(3+2a)x+2a}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^3-x^2+3x+2a)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x^3-x^2+3x+2a)=2a-5$$

즉, $2a-5=9$이므로 $a=7$

따라서 $g(x)=x^2+7x+7$이므로 $g(2)=25$

0210 답 3

(i) 직선 $y=tx$가 점 $(3,\ -3)$을 지날 때,

$-3=3t$ $\therefore t=-1$

(ii) 직선 $y=tx$가 곡선 $y=-x^2+2x$와 접할 때,

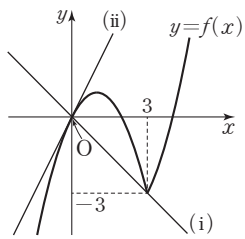
$-x^2+2x=tx$에서

$x^2+(t-2)x=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(t-2)^2=0$ $\therefore t=2$

$$\therefore g(t)=\begin{cases}1 & (t<-1)\\ 2 & (t=-1 \text{ 또는 } t=2)\\ 3 & (-1<t<2 \text{ 또는 } t>2)\end{cases}$$



이차함수 $h(t)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$h(t)=t^2+at+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$g(t)h(t)=\begin{cases}t^2+at+b & (t<-1)\\ 2(t^2+at+b) & (t=-1 \text{ 또는 } t=2)\\ 3(t^2+at+b) & (-1<t<2 \text{ 또는 } t>2)\end{cases}$$

함수 $g(t)h(t)$가 모든 실수 t에서 연속이므로 $t=-1$, $t=2$에서 연속이다.

함수 $g(t)h(t)$가 $t=-1$에서 연속이면

$\lim_{t\to-1+}g(t)h(t)=\lim_{t\to-1-}g(t)h(t)=g(-1)h(-1)$에서

$3(1-a+b)=1-a+b=2(1-a+b)$

즉, $1-a+b=0$이므로 $a-b=1$ ····· ㉠

함수 $g(t)h(t)$가 $t=2$에서 연속이면

$\lim_{t\to2}g(t)h(t)=g(2)h(2)$에서

$3(4+2a+b)=2(4+2a+b)$

즉, $4+2a+b=0$이므로 $2a+b=-4$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-2$

따라서 $h(t)=t^2-t-2$이므로

$\lim_{t\to3}\dfrac{4g(t)}{h(t)}=\lim_{t\to3}\dfrac{4g(t)}{t^2-t-2}=\dfrac{4\times3}{4}=3$

0211 답 ③

$a>2$이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(-x^2+ax)=-4+2a>0$

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x^2-4x+3)=-1$

$\therefore \lim_{x\to2+}f(x)\neq\lim_{x\to2-}f(x)$

즉, $\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

또 $f(1)=0$, $f(a)=0$이고, 삼차함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 (가)에서 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$, $x=a$, $x=2$에서 연속이다.

(i) $x=1$에서 연속이면 $\lim_{x\to1}h(x)=h(1)$에서

$\lim_{x\to1}\dfrac{g(x)}{f(x)}=h(1)$ ····· ㉠

㉠에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}g(x)=0$이므로 $g(1)=0$ ····· ㉡

(ii) $x=a$에서 연속이면 $\lim_{x\to a}h(x)=h(a)$에서

$\lim_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)}=h(a)$ ····· ㉢

㉢에서 $x\to a$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이므로 $g(a)=0$ ····· ㉣

(iii) $x=2$에서 연속이면 $\lim_{x\to2+}h(x)=\lim_{x\to2-}h(x)=h(2)$에서

$\lim_{x\to2+}h(x)=\lim_{x\to2+}\dfrac{g(x)}{-x^2+ax}=\dfrac{g(2)}{2a-4}$

$\lim_{x\to2-}h(x)=\lim_{x\to2-}\dfrac{g(x)}{x^2-4x+3}=-g(2)$

$h(2)=\dfrac{g(2)}{-1}=-g(2)$

즉, $\frac{g(2)}{2a-4}=-g(2)$이므로

$g(2)=-(2a-4)g(2)$, $(2a-3)g(2)=0$

$\therefore g(2)=0$ ($\because a>2$) ····· ㉤

삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 ㉡, ㉣, ㉤에서

$g(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$라 하자.

㉠에서

$$h(1)=\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{x^2-4x+3}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-1)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-2)(x-a)}{x-3}$$
$$=\frac{1-a}{2}$$ ····· ㉥

㉢에서

$$h(a)=\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-x^2+ax}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{-x(x-a)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-2)}{-x}$$
$$=-\frac{(a-1)(a-2)}{a}$$

㈏에서 $h(1)=h(a)$이므로

$\frac{1-a}{2}=\frac{-(a-1)(a-2)}{a}$

$a(a-1)=2(a-1)(a-2)$, $(a-1)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>2$)

$a=4$를 ㉥에 대입하여 풀면 $h(1)=-\frac{3}{2}$

또 $g(x)=(x-1)(x-2)(x-4)$이므로

$h(3)=\frac{g(3)}{f(3)}=-\frac{2}{3}$

$\therefore h(1)+h(3)=-\frac{3}{2}+\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{13}{6}$

0212 답 ④

① 함수 $f(x)-g(x)=\frac{1}{x}-x^2-4$는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

② 함수 $f(x)g(x)=\frac{x^2+4}{x}$는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

③ 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{x(x^2+4)}$은 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

④ 함수 $f(g(x))=\frac{1}{x^2+4}$은 $x^2+4>0$이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

⑤ 함수 $g(f(x))=\frac{1}{x^2}+4$는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 모든 실수 x에서 연속인 함수는 ④이다.

0213 답 2

$\lim_{x\to1+}f(x)=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=-1$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

즉, $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

함수 $g(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

ㄱ. $\lim_{x\to1+}\{f(x)-g(x)\}=1-0=1$

$\lim_{x\to1-}\{f(x)-g(x)\}=-1-0=-1$

이므로 $\lim_{x\to1+}\{f(x)-g(x)\}\neq\lim_{x\to1-}\{f(x)-g(x)\}$

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}$의 값이 존재하지 않으므로

$f(x)-g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(1)g(1)=1\times0=0$이고,

$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=1\times0=0$, $\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=(-1)\times0=0$

이므로 $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=0$

즉, $\lim_{x\to1}f(x)g(x)=f(1)g(1)$이므로 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄷ. $\frac{g(1)}{f(1)}=\frac{0}{1}=0$이고,

$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{0}{1}=0$, $\lim_{x\to1-}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{0}{-1}=0$

이므로 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=0$

즉, $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(1)}{f(1)}$이므로 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄹ. $\lim_{x\to1+}\frac{1}{f(x)+g(x)}=\frac{1}{1+0}=1$

$\lim_{x\to1-}\frac{1}{f(x)+g(x)}=\frac{1}{-1+0}=-1$

이므로 $\lim_{x\to1+}\frac{1}{f(x)+g(x)}\neq\lim_{x\to1-}\frac{1}{f(x)+g(x)}$

즉, $\lim_{x\to1}\frac{1}{f(x)+g(x)}$의 값이 존재하지 않으므로

$\frac{1}{f(x)+g(x)}$은 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 보기에서 $x=1$에서 항상 연속인 함수는 ㄴ, ㄷ의 2개이다.

0214 답 ①

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$, $\lim_{x\to a}g(x)=g(a)$

ㄱ. $\lim_{x\to a}\{5f(x)+g(x)\}=5\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$
$=5f(a)+g(a)$

즉, 함수 $5f(x)+g(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to a}\{f(x)\}^2=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}f(x)=\{f(a)\}^2$

즉, 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. [반례] $f(x)=x$, $g(x)=x-1$이면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

이때 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x}{x-1}$는 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $x=1$에서 불연속이다.

ㄹ. [반례] $f(x)=\begin{cases} x-2 & (x\geq 1) \\ x & (x<1) \end{cases}$, $g(x)=-x$이면

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

이때 $\lim_{x\to -1+} f(g(x))=1$, $\lim_{x\to -1-} f(g(x))=-1$이므로

$\lim_{x\to -1+} f(g(x))\neq \lim_{x\to -1-} f(g(x))$

즉, 함수 $f(g(x))$는 $x=-1$에서 불연속이다.

따라서 보기에서 $x=a$에서 항상 연속인 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

0215 답 7

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 방정식 $f(x)=0$,

즉 $x^2-ax+3a=0$은 실근을 갖지 않아야 한다.

이차방정식 $x^2-ax+3a=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-a)^2-4\times 3a<0$, $a^2-12a<0$

$a(a-12)<0$ $\therefore 0<a<12$ ····· ㉠ ····· i

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 방정식 $g(x)=0$,

즉 $x^2+ax+a+8=0$은 실근을 갖지 않아야 한다.

이차방정식 $x^2+ax+a+8=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2-4(a+8)<0$, $a^2-4a-32<0$

$(a+4)(a-8)<0$ $\therefore -4<a<8$ ····· ㉡ ····· ii

㉠, ㉡에서 $0<a<8$ ····· iii

따라서 정수 a의 최댓값은 7이다. ····· iv

채점 기준	
i 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 a의 값의 범위 구하기	30 %
ii 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 a의 값의 범위 구하기	30 %
iii 두 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$, $\frac{f(x)}{g(x)}$가 모두 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 a의 값의 범위 구하기	30 %
iv 정수 a의 최댓값 구하기	10 %

0216 답 ②

ㄱ. [반례] $f(x)=0$, $g(x)=\begin{cases} 1 & (x\geq a) \\ -1 & (x<a) \end{cases}$이면 $f(x)g(x)=0$이므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=a$에서 연속이지만 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

ㄴ. 임의의 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a} g(x)=b$라 하면 함수 $g(x)$가 연속함수이므로 $b=g(a)$

이때 함수 $f(x)$는 연속함수이므로 $x=g(a)$, 즉 $x=b$에서 연속이다. $g(x)=t$로 놓으면 $x\to a$일 때 $t\to b$이므로

$\lim_{x\to a} f(g(x))=\lim_{t\to b} f(t)=f(b)=f(g(a))$

즉, 함수 $f(g(x))$도 연속함수이다.

ㄷ. [반례] $f(x)=\begin{cases} 1 & (x\geq a) \\ -1 & (x<a) \end{cases}$이면 $\{f(x)\}^2=1$이므로 함수 $\{f(x)\}^2$은 $x=a$에서 연속이지만 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

0217 답 ⑤

(가)에서 함수 $\frac{x}{f(x)}$가 $x=-2$, $x=5$에서 불연속이면

$f(-2)=0$, $f(5)=0$

$f(x)=k(x+2)(x-5)$ (k는 상수, $k\neq 0$)라 하면 (나)에서

$\lim_{x\to -2} \frac{f(x)}{x+2}=\lim_{x\to -2} \frac{k(x+2)(x-5)}{x+2}$

$=\lim_{x\to -2} k(x-5)=-7k$

즉, $-7k=14$이므로 $k=-2$

따라서 $f(x)=-2(x+2)(x-5)$이므로 $f(2)=24$

0218 답 ③

함수 $\frac{1}{g(x)}$이 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2+} \frac{1}{g(x)}=\lim_{x\to 2-} \frac{1}{g(x)}=\frac{1}{g(2)}$에서

$\lim_{x\to 2+} \frac{1}{g(x)}=\lim_{x\to 2+} \frac{1}{f(x-2)}=\frac{1}{f(0)}$

$\lim_{x\to 2-} \frac{1}{g(x)}=\lim_{x\to 2-} \frac{1}{f(x)}=\frac{1}{f(2)}$

$\frac{1}{g(2)}=\frac{1}{4}$

즉, $\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{f(2)}=\frac{1}{4}$에서 $f(0)=f(2)=4$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=1$이다.

이때 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 자연수이므로

$f(x)=a(x-1)^2+b$ (a는 자연수, b는 상수)라 하면

$f(0)=4$에서

$a+b=4$ $\therefore b=4-a$

$\therefore f(x)=a(x-1)^2+4-a$

함수 $\frac{1}{g(x)}$이 모든 실수 x에서 연속이면 두 방정식 $f(x)=0$, $f(x-2)=0$은 모두 실근을 갖지 않아야 하므로 두 함수 $f(x)$, $f(x-2)$의 최솟값이 모두 0보다 커야 한다.

이때 두 함수 $f(x)$, $f(x-2)$의 최솟값은 $4-a$이므로

$4-a>0$ $\therefore a<4$

그런데 a는 자연수이므로 $a=1$, 2, 3

따라서 $f(4)=8a+4$이고 $a=3$일 때 최대이므로 $f(4)$의 최댓값은 28이다.

참고 함수 $y=f(x-2)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 함수 $f(x-2)$의 최솟값은 함수 $f(x)$의 최솟값과 같다.

0219 답 ④

ㄱ. 함수 $f(x)=\frac{1}{x+2}$은 $x\neq -2$인 모든 실수에서 연속이다.

즉, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄴ. $x^2+1>0$에서 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

즉, 함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄷ. 함수 $h(x)$는 열린구간 $(3, 5)$에서 연속이지만 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.

따라서 보기에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

0220 답 ①

ㄱ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄴ. 닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$는 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄷ. 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $f(x)$는 최댓값은 없고, 최솟값을 갖는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

0221 답 6

닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$일 때 최댓값 2를 가지므로 $f(1)=2$에서

$\frac{k}{2}=2 \quad \therefore k=4$

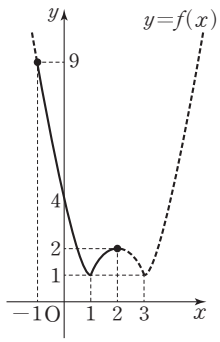
따라서 닫힌구간 $[1, 4]$에서 함수 $g(x)=\sqrt{x}+4$는 $x=4$일 때 최댓값 6을 갖는다.

0222 답 8

$f(x)=|x^2-4x+3|+1$

$=|(x-1)(x-3)|+1$

이므로 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$일 때 최댓값 9를 갖고, $x=1$일 때 최솟값 1을 갖는다.

따라서 $M=9$, $m=1$이므로

$M-m=9-1=8$

0223 답 ⑤

ㄱ. 함수 $f(x)+g(x)=x-2+\frac{1}{x+1}$은 $x\neq-1$인 모든 실수에서 연속이다. 즉, $f(x)+g(x)$는 닫힌구간 $[0, 5]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄴ. 함수 $f(x)g(x)=\frac{x-2}{x+1}$는 $x\neq-1$인 모든 실수에서 연속이다. 즉, $f(x)g(x)$는 닫힌구간 $[0, 5]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄷ. 함수 $g(f(x))=\frac{1}{x-1}$은 $x\neq1$인 모든 실수에서 연속이다.

이때 $\lim_{x\to1+} g(f(x))=\infty$, $\lim_{x\to1-} g(f(x))=-\infty$이므로 $g(f(x))$는 닫힌구간 $[0, 5]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.

ㄹ. 함수 $f(g(x))=\frac{1}{x+1}-2$는 $x\neq-1$인 모든 실수에서 연속이다. 즉, $f(g(x))$는 닫힌구간 $[0, 5]$에서 연속이므로 최대·최소 정리에 의하여 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

따라서 보기에서 닫힌구간 $[0, 5]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는 함수는 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

0224 답 −13

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-2$, $x=2$에서도 연속이다.

$x=-2$에서 연속이면 $\lim_{x\to-2+} f(x)=\lim_{x\to-2-} f(x)=f(-2)$에서

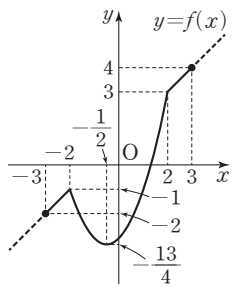
$4-2a+b=-2+a \quad \therefore 3a-b=6 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 $x=2$에서 연속이면 $\lim_{x\to2+} f(x)=\lim_{x\to2-} f(x)=f(2)$에서

$2+a=4+2a+b \quad \therefore a+b=-2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$

$\therefore f(x)=\begin{cases} x+1 & (|x|\geq2) \\ x^2+x-3 & (|x|<2) \end{cases}$ ····· i



이때 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값 4를 갖고, $x=-\frac{1}{2}$일 때 최솟값 $-\frac{13}{4}$을 갖는다. ····· ii

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

$4\times\left(-\frac{13}{4}\right)=-13$ ····· iii

채점 기준	
i $f(x)$ 구하기	40 %
ii 최댓값과 최솟값 구하기	50 %
iii 최댓값과 최솟값의 곱 구하기	10 %

0225 답 ④

함수 $f(x)$는 $x<b$에서 함숫값이 감소하고 $x\geq b$에서 함숫값이 증가하므로 $x=b$일 때 최솟값을 갖는다.

$\therefore f(b)=1$

이때 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=b$에서 연속이므로

$\lim_{x\to b+} f(x)=\lim_{x\to b-} f(x)=f(b)$에서

$\lim_{x\to b+} f(x)=\lim_{x\to b+} \sqrt{3x-a}=\sqrt{3b-a}$

$\lim_{x\to b-} f(x)=\lim_{x\to b-} 2(a-x)=2(a-b)$

$f(b)=\sqrt{3b-a}=1$

즉, $\sqrt{3b-a}=2(a-b)=1$이므로

$3b-a=1$, $a-b=\frac{1}{2}$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{5}{4}$, $b=\frac{3}{4}$

$\therefore a+b=\frac{5}{4}+\frac{3}{4}=2$

0226 답 3

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=f(1)$에서

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+} \dfrac{x^3-5x^2+5x-a}{x-1}$

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-} (ax+b)=a+b$

$f(1)=a+b$

$\therefore \lim_{x\to1+} \dfrac{x^3-5x^2+5x-a}{x-1}=a+b$ ····· ㉠

㉠에서 $x\to1+$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1+} (x^3-5x^2+5x-a)=0$이므로 $1-a=0$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to1+} \dfrac{x^3-5x^2+5x-1}{x-1}=\lim_{x\to1+} \dfrac{(x-1)(x^2-4x+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+} (x^2-4x+1)=-2$

즉, $a+b=-2$이므로

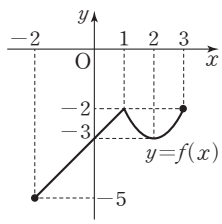
$1+b=-2$ $\therefore b=-3$

$\therefore f(x)=\begin{cases} x-3 & (-2\le x\le1) \\ \dfrac{x^3-5x^2+5x-1}{x-1} & (1<x\le3) \end{cases}$

이때 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 최댓값 -2를 갖고, $x=-2$에서 최솟값 -5를 갖는다.

따라서 $M=-2$, $m=-5$이므로

$M-m=-2-(-5)=3$



0227 답 ⑤

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to2} f(x)=f(2)$에서

$\lim_{x\to2} \dfrac{x^2+x-a}{x-2}=b$ ····· ㉠

㉠에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2} (x^2+x-a)=0$이므로

$6-a=0$ $\therefore a=6$

$a=6$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to2} \dfrac{(x+3)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to2} (x+3)=5$

즉, $b=5$이므로

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} & (x\ne2) \\ 5 & (x=2) \end{cases}$

ㄱ. $f(1)+f(2)=4+5=9$

ㄴ. 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(3)=6$이다.

ㄷ. $g(x)=x$라 하면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모두 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$, 즉 $xf(x)$도 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이다. 즉, 최대·최소 정리에 의하여 함수 $xf(x)$는 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0228 답 ⑤

$f(x)=\lim_{t\to\infty} \dfrac{1+tx}{\sqrt{1+t^2}}(3-x)=\lim_{t\to\infty} \dfrac{\frac{1}{t}+x}{\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}(3-x)$

$=x(3-x)=-x^2+3x$

$=-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$

따라서 닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{3}{2}$일 때 최대이고,

구하는 최댓값은 $\dfrac{9}{4}$이다.

0229 답 ④

① $f(x)=x^3-2x-3$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고, $f(0)=-3$, $f(1)=-4$에서 $f(0)f(1)>0$

② $f(x)=x^3+x^2+1$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고, $f(0)=1$, $f(1)=3$에서 $f(0)f(1)>0$

③ $f(x)=x^4-x^2+4$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고, $f(0)=4$, $f(1)=4$에서 $f(0)f(1)>0$

④ $f(x)=x^3-x^2-2x+1$이라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고, $f(0)=1$, $f(1)=-1$에서 $f(0)f(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

즉, 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

⑤ $f(x)=x^4+x^3-x+2$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고, $f(0)=2$, $f(1)=3$에서 $f(0)f(1)>0$

따라서 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근이 반드시 존재하는 것은 ④이다.

0230 답 5

방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(-1, 4)$에서 중근이 아닌 오직 하나의 실근을 가지려면 $f(-1)f(4)<0$이어야 하므로

$(a-4)(2a+3)<0$ $\therefore -\dfrac{3}{2}<a<4$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

0231 답 ④

$f(x)=x^4-2x^3-5x^2+1$이라 하면 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-2)=13>0$, $f(-1)=-1<0$, $f(0)=1>0$,

$f(1)=-5<0$, $f(2)=-19<0$, $f(3)=-17<0$, $f(4)=49>0$

① $f(-2)f(-1)<0$ ② $f(-1)f(0)<0$

③ $f(0)f(1)<0$ ④ $f(1)f(2)>0$

⑤ $f(3)f(4)<0$

따라서 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 구간 $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 가지므로 실근이 존재하지 않는 구간은 ④이다.

0232 답 13

$f(x)=x^2-6x+a=(x-3)^2+a-9$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 축의 방정식은 $x=3$이므로 그 구간에서 x의 값이 증가하면 $f(x)$의 값은 감소한다.

이때 $f(-1)=a+7$, $f(2)=a-8$이고 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(-1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면

$f(-1)f(2)<0$이어야 하므로

$(a+7)(a-8)<0$ $\therefore -7<a<8$ …… ⓘ

따라서 $M=7$, $m=-6$이므로 …… ⓘⓘ

$M-m=7-(-6)=13$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a의 값의 범위 구하기	60%
ⓘⓘ M, m의 값 구하기	30%
ⓘⓘⓘ $M-m$의 값 구하기	10%

0233 답 ⑤

ㄱ. $g(x)=f(x)+x$라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고

$g(0)=f(0)+0=5>0$, $g(1)=f(1)+1=1>0$

즉, $g(0)g(1)>0$이므로 방정식 $g(x)=0$이 열린구간 $(0, 1)$에서 실근을 갖는지 알 수 없다.

ㄴ. $g(x)=f(x)-2x^2+1$이라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고

$g(0)=f(0)+1=6>0$, $g(1)=f(1)-1=-1<0$

즉, $g(0)g(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $g(x)=f(x)-\dfrac{1}{x+1}$이라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고

$g(0)=f(0)-1=4>0$, $g(1)=f(1)-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}<0$

즉, $g(0)g(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄹ. $g(x)=f(x)-2\sqrt{4-x}$라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고

$g(0)=f(0)-4=1>0$, $g(1)=f(1)-2\sqrt{3}=-2\sqrt{3}<0$

즉, $g(0)g(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 보기에서 방정식의 실근이 열린구간 $(0, 1)$에 반드시 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

0234 답 ④

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(1)f(3)<0$, $f(3)f(5)<0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 3)$, $(3, 5)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 실근은

$x(x-m)(x-n)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=m$ 또는 $x=n$

이때 m, n은 자연수이고, 열린구간 $(1, 3)$에 속하는 자연수는 2뿐이고 열린구간 $(3, 5)$에 속하는 자연수는 4뿐이므로

$m=2$, $n=4$ 또는 $m=4$, $n=2$

따라서 $f(x)=x(x-2)(x-4)$이므로 $f(6)=48$

0235 답 36

방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$에서

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=(x^5+x^3-3x^2+k)-(x^3-5x^2+3)$

$=x^5+2x^2+k-3$

함수 $h(x)$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고, 그 구간에서 x의 값이 증가하면 x^5, $2x^2$의 값도 증가하므로 $h(x)$의 값도 증가한다.

즉, 방정식 $h(x)=0$이 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $h(1)h(2)<0$이어야 한다.

이때 $h(1)=k$, $h(2)=k+37$이므로

$k(k+37)<0$ $\therefore -37<k<0$

따라서 정수 k는 -36, -35, -34, …, -2, -1의 36개이다.

0236 답 ⑤

$f(x)=x^2(x-1)+x^2(x-2)+(x-1)(x-2)$라 하면

$f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄱ. $f(0)=2>0$, $f(1)=-1<0$

즉, $f(0)f(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f(1)=-1<0$, $f(2)=4>0$

즉, $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $f(-2)=-16<0$, $f(-1)=1>0$

즉, $f(-2)f(-1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때 삼차방정식의 실근은 최대 3개이고, ㄱ, ㄴ에 의하여 열린구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근이 존재하므로 열린구간 $(-2, -1)$에 한 개의 실근이 존재하고, 더이상의 실근은 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0237 답 2개

두 곡선 $y=f(x)$, $y=x^2-3$이 만나는 점의 개수는 방정식 $f(x)=x^2-3$, 즉 $f(x)-x^2+3=0$의 실근의 개수와 같다.

$g(x)=f(x)-x^2+3$이라 하면 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$g(-2)=f(-2)-1=4>0$

$g(-1)=f(-1)+2=3>0$

$g(0)=f(0)+3=-1<0$

$g(1)=f(1)+2=4>0$

$g(2)=f(2)-1=2>0$

이때 $g(-1)g(0)<0$, $g(0)g(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(x)=x^2-3$은 열린구간 $(-1, 0)$, $(0, 1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=x^2-3$은 적어도 2개의 점에서 만난다.

0238 답 ④

$f(4+x)=f(4-x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.
즉, $f(1)=f(7)$, $f(2)=f(6)$, $f(3)=f(5)$이므로
$f(1)f(2)<0$, $f(2)f(3)<0$, $f(4)f(5)<0$에서
$f(6)f(7)<0$, $f(5)f(6)<0$, $f(3)f(4)<0$
함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$, $(5, 6)$, $(6, 7)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 적어도 6개의 실근을 갖는다.

0239 답 ③

㈎의 $f(-x)=-f(x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면
$f(0)=-f(0)$ $\therefore f(0)=0$
즉, 방정식 $f(x)=0$은 0을 근으로 갖는다.
㈏에서 $f(1)f(2)f(3)<0$, $f(2)f(3)f(4)<0$, $f(3)f(4)f(5)<0$이고, ㈐에서 $f(3)>0$이므로
$f(1)f(2)<0$, $f(2)f(4)<0$, $f(4)f(5)<0$
즉, 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 5)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 가지므로 열린구간 $(1, 5)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.
이때 ㈎에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-5, -1)$에서도 적어도 3개의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-5, 5)$에서 적어도 7개의 실근을 가지므로 $k=7$

0240 답 ③

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$도 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이다.
ㄱ. $h(x)=f(x)g(x)$라 하면
$h(0)=f(0)g(0)>0$, $h(1)=f(1)g(1)<0$
즉, $h(0)h(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$, 즉 $f(x)g(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
ㄴ. $f(1)g(1)<0$, $f(1)g(2)>0$에서 $g(1)$의 값의 부호와 $g(2)$의 값의 부호는 다르므로 $g(1)g(2)<0$
즉, 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 방정식 $f(x)g(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
ㄷ. $f(2)g(2)<0$, $f(3)g(2)<0$에서 $f(2)$의 값의 부호와 $f(3)$의 값의 부호는 같으므로 $f(2)f(3)>0$
즉, 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(2, 3)$에서 실근을 갖는지 알 수 없다. ····· ㉠
또 $f(3)g(2)<0$, $f(3)g(3)<0$에서 $g(2)$의 값의 부호와 $g(3)$의 값의 부호는 같으므로 $g(2)g(3)>0$
즉, 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(2, 3)$에서 실근을 갖는지 알 수 없다. ····· ㉡
㉠, ㉡에 의하여 방정식 $f(x)g(x)=0$은 열린구간 $(2, 3)$에서 실근을 갖는지 알 수 없다.
따라서 보기에서 방정식 $f(x)g(x)=0$이 적어도 하나의 실근을 반드시 갖는 구간은 ㄱ, ㄴ이다.

0241 답 3개

㈎의 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.
즉, $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$ ····· ㉠
㈏의 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.
즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$ ····· ㉡ ····· i
㉠, ㉡에서 $f(x)=x(x-1)g(x)$ ($g(x)$는 다항식)라 하면
$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x-1)g(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x-1)g(x)=-g(0)$$
즉, $-g(0)=2$이므로 $g(0)=-2$
$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}xg(x)=g(1)$$
$\therefore g(1)=3$ ····· ii
함수 $g(x)$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 $g(0)g(1)=-6<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖고 $f(0)=0$, $f(1)=0$이므로 방정식 $f(x)=0$은 닫힌구간 $[0, 1]$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다. ····· iii

채점 기준

i $f(0)$, $f(1)$의 값 구하기	30%
ii $g(0)$, $g(1)$의 값 구하기	30%
iii 방정식 $f(x)=0$이 닫힌구간 $[0, 1]$에서 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구하기	40%

0242 답 ③

$f(x)=x^3-3x+1$이라 하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고
$f(-3)=-17<0$, $f(-2)=-1<0$, $f(-1)=3>0$,
$f(0)=1>0$, $f(1)=-1<0$, $f(2)=3>0$
이때 $f(-2)f(-1)<0$, $f(0)f(1)<0$, $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 삼차방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 하나의 실근을 갖는다.

즉, α는 열린구간 $(-2, -1)$, β는 열린구간 $(1, 2)$에 존재하므로
$m=-2$, $n=1$
$\therefore 2m^2-n^2=2\times(-2)^2-1^2=7$

0243 답 ⑤

㈎에서 $f(x)=f(-x)$이므로
㈐의 $f(0)f(1)<0$에서 $f(-1)f(0)<0$
㈏에서 $f(x)=f(2+x)$이므로
$f(-4)=f(-2)=f(0)=f(2)=f(4)$
$f(-3)=f(-1)=f(1)=f(3)=f(5)$
즉, $f(-1)f(0)<0$, $f(0)f(1)<0$에서
$f(-4)f(-3)<0$, $f(-3)f(-2)<0$, $f(-2)f(-1)<0$,
$f(1)f(2)<0$, $f(2)f(3)<0$, $f(3)f(4)<0$, $f(4)f(5)<0$
함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-4, 5]$에서 연속이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-4, -3)$, $(-3, -2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(4, 5)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-4, 5)$에서 적어도 9개의 실근을 가지므로 $n=9$

0244 답 ③

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하고 축의 방정식은 $x=3$이므로 그 구간에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.
이때 $f(0)=a$, $f(2)=a-8$이고,
㈎에 의하여 $f(0)f(2)<0$이어야 하므로
$a(a-8)<0$ $\quad\therefore 0<a<8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
㈏에서 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로
$\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=\lim_{x\to a-} f(x)g(x)=f(a)g(a)$에서
$\lim_{x\to a+} f(x)g(x)=\lim_{x\to a+}(x^2-6x+a)\times\lim_{x\to a+}(2x-a)$
$=a(a^2-5a)$
$\lim_{x\to a-} f(x)g(x)$
$=\lim_{x\to a-}(x^2-6x+a)\times\lim_{x\to a-}\{(x+3)^2-6(x+3)+a\}$
$=(a^2-5a)(a^2+a-9)$
$f(a)g(a)=a(a^2-5a)$
즉, $a(a^2-5a)=(a^2-5a)(a^2+a-9)$이므로
$(a^2-5a)(a^2-9)=0$, $a(a+3)(a-3)(a-5)=0$
$\therefore a=3$ 또는 $a=5$ ($\because a>0$)
따라서 모든 양수 a의 값의 곱은 $3\times5=15$

0245 답 3

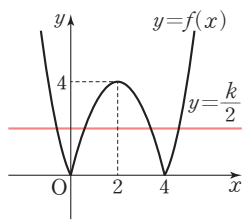
p는 곡선 $y=x^3-2x$와 직선 $y=x+4$의 교점의 x좌표이므로 방정식 $x^3-2x=x+4$, 즉 $x^3-3x-4=0$의 실근이다.
$f(x)=x^3-3x-4$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, n]$에서 연속이고 $f(0)=-4<0$, $f(n)=n^3-3n-4$
이때 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(0, n)$에서 오직 하나의 실근을 가지려면 $f(0)f(n)<0$이어야 하므로
$f(n)>0$ ($\because f(0)<0$)
이때 n은 자연수이므로 $n=1$일 때 $f(1)=-6<0$,
$n=2$일 때 $f(2)=-2<0$, $n=3$일 때 $f(3)=14>0$이다.
따라서 자연수 n의 최솟값은 3이다.

최고수준 도전 기출 62~63쪽

0246 답 ③

전략 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 연속임을 이용하여 $f(a)$를 k에 대한 식으로 나타내고, $h(k)=4$를 만족시키는 k의 값의 범위를 구한다.

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=a$에서 연속이므로
$\lim_{x\to a+} g(x)=\lim_{x\to a-} g(x)=g(a)$에서
$\lim_{x\to a+} g(x)=\lim_{x\to a+}\{k-f(x)\}=k-f(a)$
$\lim_{x\to a-} g(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=f(a)$
$g(a)=k-f(a)$
즉, $k-f(a)=f(a)$이므로 $f(a)=\frac{k}{2}$
이때 $h(k)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{k}{2}$의 교점의 개수와 같으므로
$h(k)=4$이려면
$0<\frac{k}{2}<4$ $\quad\therefore 0<k<8$



따라서 정수 k는 1, 2, 3, …, 7의 7개이다.

0247 답 ④

전략 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 연속임을 이용하여 a에 대한 이차방정식을 세운 후 판별식을 이용하여 n의 값에 따른 a_n의 값을 구한다.

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=a$에서 연속이므로
$\lim_{x\to a+} g(x)=\lim_{x\to a-} g(x)=g(a)$에서
$\lim_{x\to a+} g(x)=\lim_{x\to a+}\{1-f(x+3-n)\}$
$=1-f(a+3-n)=1-(a+2-n)^2$
$\lim_{x\to a-} g(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=(a-1)^2$
$g(a)=1-f(a+3-n)=1-(a+2-n)^2$
즉, $1-(a+2-n)^2=(a-1)^2$이므로
$2a^2+2(1-n)a+n^2-4n+4=0$
위의 a에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(1-n)^2-2(n^2-4n+4)=-n^2+6n-7$
$n=1$일 때, $\frac{D}{4}=-2<0$이므로 $a_1=0$
$n=2$일 때, $\frac{D}{4}=1>0$이므로 $a_2=2$
$n=3$일 때, $\frac{D}{4}=2>0$이므로 $a_3=2$
$n=4$일 때, $\frac{D}{4}=1>0$이므로 $a_4=2$
$n=5$일 때, $\frac{D}{4}=-2<0$이므로 $a_5=0$
$\therefore a_1+a_2+\cdots+a_5=0+2+2+2+0=6$

0248 답 ⑤

전략 $f(0)$, $f(1)$의 값을 구하고, 세 함수 $f(2x)$, $f(3-x)$, $f(x^2)$도 다항함수임을 안다.

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+3}{x}$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다. 즉, $\lim\limits_{x\to0}\{f(x)+3\}=0$이므로

$f(0)+3=0$ $\therefore f(0)=-3$

또 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다. 즉, $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-5\}=0$이므로

$f(1)-5=0$ $\therefore f(1)=5$

ㄱ. $g(x)=f(2x)$라 하면 함수 $g(x)$는 다항함수이므로 닫힌구간 $\left[0,\ \frac{1}{2}\right]$에서 연속이고

$g(0)=f(0)=-3<0$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)=5>0$

즉, $g(0)g\left(\frac{1}{2}\right)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$, 즉 $f(2x)=0$은 열린구간 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $h(x)=f(3-x)$라 하면 함수 $h(x)$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 연속이고

$h(2)=f(1)=5>0$, $h(3)=f(0)=-3<0$

즉, $h(2)h(3)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$, 즉 $f(3-x)=0$은 열린구간 $(2,\ 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $k(x)=f(x^2)$이라 하면 함수 $k(x)$는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-1,\ 1]$에서 연속이고

$k(-1)=f(1)=5>0$, $k(0)=f(0)=-3<0$,

$k(1)=f(1)=5>0$

이때 $k(-1)k(0)<0$, $k(0)k(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $k(x)=0$, 즉 $f(x^2)=0$은 열린구간 $(-1,\ 0)$, $(0,\ 1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

즉, 방정식 $f(x^2)=0$은 열린구간 $(-1,\ 1)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0249 답 19

전략 원 O가 변 BC 또는 변 AC에 접할 때의 x의 값을 기준으로 구간을 나누어 $f(x)$를 구한다.

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}^2=4^2+3^2=25$ $\therefore \overline{AC}=5$

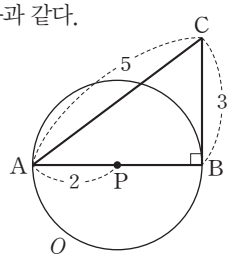
원 O가 삼각형 ABC에 접하는 경우는 다음과 같다.

(i) 원 O가 변 BC에 접하는 경우

변 AB는 원의 지름과 같으므로

$x=\frac{1}{2}\overline{AB}$

$=\frac{1}{2}\times4=2$



(ii) 원 O가 변 AC에 접하는 경우

접점을 H라 하면 $\angle AHP=90^\circ$

선분 PH의 길이는 원의 반지름의 길이와 같으므로

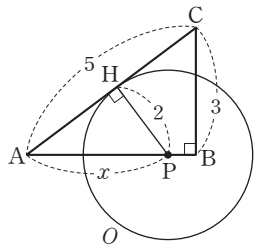
$\overline{PH}=2$

이때 $\triangle ABC\backsim\triangle AHP$이므로

$\overline{AC}:\overline{AP}=\overline{BC}:\overline{HP}$에서

$5:x=3:2$

$3x=10$ $\therefore x=\frac{10}{3}$



(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases}2\left(0<x<2 \text{ 또는 } \frac{10}{3}<x<4\right)\\ 3\left(x=2 \text{ 또는 } x=\frac{10}{3}\right)\\ 4\left(2<x<\frac{10}{3}\right)\end{cases}$$

함수 $f(x)$는 $x=2$, $x=\frac{10}{3}$에서 불연속이므로

$a=2$ 또는 $a=\frac{10}{3}$

즉, 함수 $f(x)$가 불연속이 되는 모든 실수 a의 값의 합은

$2+\frac{10}{3}=\frac{16}{3}$

따라서 $p=3$, $q=16$이므로

$p+q=3+16=19$

참고 $\triangle ABC$와 $\triangle AHP$에서

$\angle A$는 공통, $\angle ABC=\angle AHP=90^\circ$

$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle AHP$(AA 닮음)

0250 답 20

전략 (가)에서 함수 $f(x)$의 차수를 구하고, (나)에서 함수 $g(x)$가 $x=-2$, $x=2$에서 연속임을 이용하여 $f(x)$, $g(x)$를 구한다.

(가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

(나)에서 $x\neq2$일 때,

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{(x+6)(x-2)}{x-2} & (|x|>2)\\ \dfrac{f(x)}{x-2} & (|x|<2)\end{cases}$$

$$\therefore g(x)=\begin{cases}x+6 & (|x|>2)\\ \dfrac{f(x)}{x-2} & (|x|<2)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-2$, $x=2$에서 연속이다.

$x=-2$에서 연속이면 $\lim\limits_{x\to-2+}g(x)=\lim\limits_{x\to-2-}g(x)=g(-2)$에서

$-\dfrac{f(-2)}{4}=4$ $\therefore f(-2)=-16$

또 $x=2$에서 연속이면 $\lim\limits_{x\to2+}g(x)=\lim\limits_{x\to2-}g(x)=g(2)$에서

$\lim\limits_{x\to2-}\dfrac{f(x)}{x-2}=8$ ····· ㉠

㉠에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim\limits_{x\to2-}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

이때 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로
$f(x)=(x-2)(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)라 하면
$f(-2)=-16$에서
$-4(4-2a+b)=-16$ $\therefore b=2a$
$\therefore f(x)=(x-2)(x^2+ax+2a)$
이 식을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 2-}\frac{(x-2)(x^2+ax+2a)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}(x^2+ax+2a)$$
$$=4a+4$$

즉, $4a+4=8$이므로 $a=1$

$$\therefore f(x)=(x-2)(x^2+x+2),\ g(x)=\begin{cases}x+6 & (|x|>2)\\ x^2+x+2 & (|x|<2)\end{cases}$$

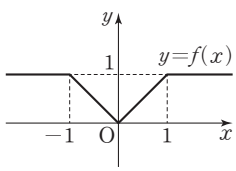
이때 $\frac{x+1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t-1}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to 1$이므로

$$\lim_{x\to\infty}5x\left\{f\left(\frac{x+1}{x}\right)+g\left(\frac{x+1}{x}\right)\right\}$$
$$=5\lim_{t\to 1}\frac{f(t)+g(t)}{t-1}$$
$$=5\lim_{t\to 1}\frac{(t-2)(t^2+t+2)+(t^2+t+2)}{t-1}$$
$$=5\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)(t^2+t+2)}{t-1}$$
$$=5\lim_{t\to 1}(t^2+t+2)=20$$

0251 답 ③

전략 함수 $f(x)$의 최댓값이 1, 최솟값이 0임을 이용하여 치역을 구하고, 주어진 등식을 만족시키는 $f(x)$를 구한다.

$\{f(x)\}^3-\{f(x)\}^2-x^2f(x)+x^2=0$에서
$\{f(x)\}^2\{f(x)-1\}-x^2\{f(x)-1\}=0$
$[\{f(x)\}^2-x^2]\{f(x)-1\}=0$
$\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}\{f(x)-1\}=0$
$\therefore f(x)=-x$ 또는 $f(x)=x$ 또는 $f(x)=1$
이때 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 최댓값이 1, 최솟값이 0이므로 함수 $f(x)$의 치역은
$\{y|0\le y\le 1\}$
즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같아야 하므로



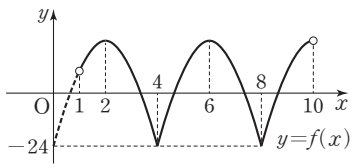
$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\le -1 \text{ 또는 } x\ge 1)\\ -x & (-1<x\le 0)\\ x & (0<x<1)\\ 1 & (x\ge 1)\end{cases}$$

$$\therefore f\left(-\frac{4}{3}\right)+f(0)+f\left(\frac{1}{2}\right)=1+0+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

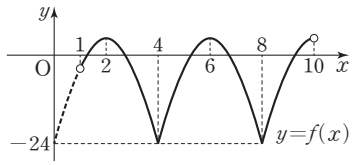
0252 답 ④

전략 함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구하고, $1<x<10$일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 5가 되도록 하는 $0\le x<4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 위치를 구한다.

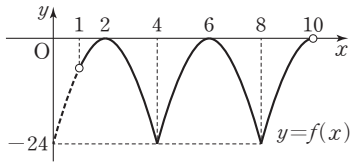
㈏에서 $f(x+4)=f(x)$이므로
$f(4)=f(0)=-24$
이때 $f(x)=ax^2+bx-24$에서 $a=0$이면 $f(4)=-24$이므로
$4b-24=-24$ $\therefore b=0$
$\therefore f(x)=-24$
이는 $1<x<10$에서 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 5라는 조건을 만족시키지 않으므로 $a\ne 0$
즉, 함수 $f(x)$는 이차함수이므로 $0\le x<4$에서 연속이다.
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=4$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 4-}f(x)=f(4)$에서
$16a+4b-24=-24$ $\therefore b=-4a$ ……㉠
$\therefore f(x)=ax^2-4ax-24$
$=a(x-2)^2-4a-24$
즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이다.
㈏에서 $f(x+4)=f(x)$이고 $f(0)=-24<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $0\le x<4$에서 x축과 만나려면 위로 볼록해야 한다.
(i) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $0<x\le 1$에서 x축과 만나는 경우



$1<x<10$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 4개의 점에서 만나므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $1<x<2$에서 x축과 만나는 경우



$1<x<10$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 5개의 점에서 만나므로 조건을 만족시킨다.
(iii) 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하는 경우



$1<x<10$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 2개의 점에서 만나므로 조건을 만족시키지 않는다.
(i), (ii), (iii)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $1<x<2$에서 x축과 만난다.
즉, 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 실근을 가지므로
$f(1)f(2)<0$
이때 $f(1)=-3a-24$, $f(2)=-4a-24$이므로
$(-3a-24)(-4a-24)<0$, $12(a+8)(a+6)<0$
$\therefore -8<a<-6$
이때 a는 정수이므로 $a=-7$
$a=-7$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=28$
$\therefore a+b=-7+28=21$

04 미분계수와 도함수

난이도별 필수 기출 66~83쪽

0253 답 ②

함수 $f(x)=x^2$에서 x의 값이 2에서 5까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=\frac{25-4}{3}=7$$

0254 답 ③

함수 $f(x)=x^2+ax$에서 x의 값이 -2에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{(9+3a)-(4-2a)}{5}=1+a$$

따라서 $1+a=2$이므로 $a=1$

0255 답 ③

함수 $f(x)=x^2+3x-1$에서 x의 값이 a에서 $a+3$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a+3)-f(a)}{(a+3)-a}=\frac{\{(a+3)^2+3(a+3)-1\}-(a^2+3a-1)}{3}$$
$$=2a+6$$

따라서 $2a+6=4$이므로

$2a=-2$ $\therefore a=-1$

0256 답 -1

함수 $f(x)$에서 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율은 직선 AB의 기울기와 같으므로

$$\frac{f(4)-f(1)}{3}=1$$

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$f(-2)=f(4)$

따라서 x의 값이 -2에서 1까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{f(1)-f(4)}{3}=-\frac{f(4)-f(1)}{3}=-1$$

다른 풀이

C$(-2,\ f(-2))$라 하면 함수 $f(x)$에서 x의 값이 -2에서 1까지 변할 때의 평균변화율은 직선 AC의 기울기와 같다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$f(-2)=f(4)$

즉, 직선 AC와 직선 AB는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고

직선 AB의 기울기가 1이므로 직선 AC의 기울기는 -1이다.

따라서 구하는 평균변화율은 -1이다.

0257 답 ④

α의 값은 직선 AC의 기울기, β의 값은 직선 BC의 기울기, γ의 값은 직선 AB의 기울기와 같으므로

$\alpha>0,\ \beta<0,\ \gamma>0$

이때 직선 AB의 기울기는 직선 AC의 기울기보다 작으므로 $\gamma<\alpha$

$\therefore \beta<\gamma<\alpha$

0258 답 -4

함수 $f(x)=x(x+3)(x-1)$에서 x의 값이 -4에서 1까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(1)-f(-4)}{1-(-4)}=\frac{0-(-20)}{5}=4 \quad \cdots\cdots \text{ⓘ}$$

함수 $f(x)=x(x+3)(x-1)$에서 x의 값이 -3에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(-3)}{a-(-3)}=\frac{a(a+3)(a-1)-0}{a+3}=a(a-1) \quad \cdots\cdots \text{ⓘⓘ}$$

즉, $a(a-1)=4$에서

$a^2-a-4=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 상수 a의 값의 곱은 -4이다. $\cdots\cdots$ ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ x의 값이 -4에서 1까지 변할 때의 평균변화율 구하기	40%
ⓘⓘ x의 값이 -3에서 a까지 변할 때의 평균변화율 구하기	40%
ⓘⓘⓘ 모든 상수 a의 값의 곱 구하기	20%

0259 답 ③

함수 $f(x)$에서 x의 값이 k에서 $k+1$까지 변할 때의 평균변화율이 k^2이므로

$$\frac{f(k+1)-f(k)}{(k+1)-k}=k^2 \quad \therefore f(k+1)-f(k)=k^2$$

따라서 x의 값이 3에서 5까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(5)-f(3)}{5-3}=\frac{\{f(5)-f(4)\}+\{f(4)-f(3)\}}{2}$$
$$=\frac{4^2+3^2}{2}=\frac{25}{2}$$

0260 답 ④

$f(a)=1,\ f(b)=6$에서

$g(1)=a,\ g(6)=b$

이때 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a에서 b까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{5}{b-a} \quad \therefore \frac{5}{b-a}=5$$

따라서 함수 $g(x)$에서 x의 값이 1에서 6까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{g(6)-g(1)}{6-1}=\frac{b-a}{5}=\frac{1}{\frac{5}{b-a}}=\frac{1}{5}$$

0261 답 ③

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{4h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times\frac{3}{4}$$
$$=\frac{3}{4}f'(a)$$

0262 답 ①

함수 $f(x)$에서 x의 값이 5에서 $5+h$까지 변할 때의 평균변화율이 h^2-7h+3이므로

$$\frac{f(5+h)-f(5)}{h}=h^2-7h+3$$

$$\therefore f'(5)=\lim_{h\to0}\frac{f(5+h)-f(5)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}(h^2-7h+3)=3$$

0263 답 ②

$$f'(2)=\lim_{x\to0}\frac{f(x+2)-f(2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3-3x^2+4x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}(x^2-3x+4)=4$$

0264 답 ②

부등식 $f'(1)\le\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$을 항상 만족시키려면 $1<x<a$인 모든 실수 x에 대하여 두 점 $(1,\ f(1))$, $(x,\ f(x))$를 지나는 직선의 기울기가 곡선 위의 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기보다 크거나 같아야 한다.

따라서 보기에서 주어진 부등식을 항상 만족시키는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0265 답 ③

ㄱ. $\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)+f(a)-f(a-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\times\frac{1}{2}-\lim_{h\to0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}f'(a)+\frac{1}{2}f'(a)=f'(a)$$

ㄴ. $x+2a=t$로 놓으면 $x\to-a$일 때 $t\to a$이므로

$$\lim_{x\to-a}\frac{f(x+2a)-f(a)}{x+a}=\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=f'(a)$$

ㄷ. $x^3=s$로 놓으면 $x\to a$일 때 $s\to a^3$이므로

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x^3)-f(a^3)}{x^3-a^3}=\lim_{s\to a^3}\frac{f(s)-f(a^3)}{s-a^3}=f'(a^3)$$

따라서 보기에서 $f'(a)$의 값과 항상 같은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0266 답 ⑤

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1+4h)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)+f(1)-f(1+4h)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\times\left(-\frac{1}{3}\right)-\lim_{h\to0}\frac{f(1+4h)-f(1)}{4h}\times\frac{4}{3}$$
$$=-\frac{1}{3}f'(1)-\frac{4}{3}f'(1)$$
$$=-\frac{5}{3}f'(1)$$
$$=\left(-\frac{5}{3}\right)\times(-6)=10$$

0267 답 ③

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2-x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x+1)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x+1}$$
$$=f'(2)\times\frac{1}{3}$$
$$=3\times\frac{1}{3}=1$$

0268 답 ①

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0)-f(2\Delta x)}{5\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+2\Delta x)-f(0)}{-5\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(0+2\Delta x)-f(0)}{2\Delta x}\times\left(-\frac{2}{5}\right)$$
$$=-\frac{2}{5}f'(0)$$

따라서 $-\frac{2}{5}f'(0)=10$이므로 $f'(0)=-25$

0269 답 4

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+5h)-f(1+3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+5h)-f(1)+f(1)-f(1+3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{5h}\times5-\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times3$$
$$=5f'(1)-3f'(1)$$
$$=2f'(1)$$

즉, $2f'(1)=4$이므로 $f'(1)=2$

$$\therefore\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{(x-1)(x+1)}\times(x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to1}(x+1)$$
$$=f'(1)\times2$$
$$=2\times2=4$$

0270 답 8

$\lim_{h\to0}\frac{f(7+h)-4}{2h}=4$에서 $h\to0$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{h\to0}\{f(7+h)-4\}=0$이므로

$f(7)-4=0$ $\quad\therefore f(7)=4$ …… ⓘ

$$\therefore\lim_{h\to0}\frac{f(7+h)-4}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{f(7+h)-f(7)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(7+h)-f(7)}{h}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}f'(7)$$ …… ⓘⓘ

따라서 $\frac{1}{2}f'(7)=4$이므로 $f'(7)=8$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(7)$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ $\lim_{h\to0}\frac{f(7+h)-4}{2h}$를 $f'(7)$을 이용하여 나타내기	40 %
ⓘⓘⓘ $f'(7)$의 값 구하기	30 %

0271 답 ②

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-3x+1$이 점 $(1, -2)$에서 접하므로

$f(1)=-2$, $f'(1)=-3$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+4h)+2}{3h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+4h)-f(1)}{3h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+4h)-f(1)}{4h}\times\frac{4}{3}$$

$$=\frac{4}{3}f'(1)$$

$$=\frac{4}{3}\times(-3)=-4$$

0272 답 ③

$3f(1)=6$, $4f'(1)=6$에서

$f(1)=2$, $f'(1)=\frac{3}{2}$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{2(1+h^2)-f(1+h^2)}{h^2}=\lim_{h\to0}\frac{2h^2+2-f(1+h^2)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to0}\left\{2+\frac{f(1)-f(1+h^2)}{h^2}\right\}$$

$$=2-\lim_{h\to0}\frac{f(1+h^2)-f(1)}{h^2}$$

$$=2-f'(1)$$

$$=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

0273 답 ④

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-xf(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)+f(1)-xf(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)-f(1)(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-f(1)$$

$$=f'(1)-1$$

$$=3-1=2$$

0274 답 2

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{f(x)-f(2)}=\lim_{x\to2}\frac{(x+2)(x-2)}{f(x)-f(2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+2}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}=\frac{4}{f'(2)}$$

즉, $\frac{4}{f'(2)}=\frac{1}{3}$이므로 $f'(2)=12$ …… ⓘ

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(2+kh)-f(2-h)}{3h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+kh)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{3h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+kh)-f(2)}{kh}\times\frac{k}{3}-\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{k}{3}f'(2)+\frac{1}{3}f'(2)$$

$$=\frac{k+1}{3}f'(2)$$

$$=\frac{k+1}{3}\times12=4(k+1)$$ …… ⓘⓘ

따라서 $4(k+1)=12$이므로 $k=2$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f'(2)$의 값 구하기	30%
ⓘⓘ $\lim_{h\to0}\frac{f(2+kh)-f(2-h)}{3h}$를 k에 대한 식으로 나타내기	50%
ⓘⓘⓘ k의 값 구하기	20%

0275 답 ③

$\lim_{x\to-3}\frac{f(x)-9}{x+3}=-1$에서 $x\to-3$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to-3}\{f(x)-9\}=0$이므로

$f(-3)-9=0$ $\therefore f(-3)=9$

이때 $\lim_{x\to-3}\frac{f(x)-9}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}=f'(-3)$이므로

$f'(-3)=-1$

$$\therefore \lim_{x\to-3}\frac{x^2-f(x)}{x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9+9-f(x)}{x+3}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{x^2-9+f(-3)-f(x)}{x+3}$$

$$=\lim_{x\to-3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}-\lim_{x\to-3}\frac{f(x)-f(-3)}{x-(-3)}$$

$$=\lim_{x\to-3}(x-3)-f'(-3)$$

$$=-6-(-1)=-5$$

0276 답 1

$\lim_{x\to1}\frac{f(x+1)-1}{x^2-1}=6$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x+1)-1\}=0$이므로

$f(2)-1=0$ $\therefore f(2)=1$ …… ⓘ

$x+1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to2$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x+1)-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x+1)-f(2)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{t\to2}\frac{f(t)-f(2)}{t(t-2)}$$

$$=\lim_{t\to2}\frac{f(t)-f(2)}{t-2}\times\lim_{t\to2}\frac{1}{t}$$

$$=\frac{1}{2}f'(2)$$

즉, $\frac{1}{2}f'(2)=6$이므로 $f'(2)=12$ …… ⓘⓘ

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2+2x+4}$$

$$=f'(2)\times\frac{1}{12}$$

$$=12\times\frac{1}{12}=1$$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(2)$의 값 구하기	30%
ⓘⓘ $f'(2)$의 값 구하기	30%
ⓘⓘⓘ $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-1}{x^3-8}$의 값 구하기	40%

0277 답 ④

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(1-\frac{2}{x}\right)-f\left(1+\frac{3}{x}\right)\right\}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{f(1-2t)-f(1+3t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{f(1-2t)-f(1)+f(1)-f(1+3t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{f(1-2t)-f(1)}{-2t}\times(-2)-\lim_{t\to0}\frac{f(1+3t)-f(1)}{3t}\times3$$
$$=-2f'(1)-3f'(1)=-5f'(1)$$
$$=(-5)\times(-3)=15$$

0278 답 ⑤

$\frac{1}{n}=x$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $x\to0$이고, $f(0)=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}nf\left(\frac{1}{4n}\right)=\lim_{x\to0}\frac{f\left(\frac{x}{4}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f\left(\frac{x}{4}\right)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f\left(\frac{x}{4}\right)-f(0)}{\frac{x}{4}}\times\frac{1}{4}$$
$$=\frac{1}{4}f'(0)=\frac{1}{4}\times2=\frac{1}{2}$$

0279 답 ③

$\lim_{x\to0}\frac{(x+2)f(x)-4}{x}=5$에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to$ 0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to0}\{(x+2)f(x)-4\}=0$이므로

$2f(0)-4=0$ $\therefore f(0)=2$

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{(x+2)f(x)-4}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x+2)f(x)-2f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{xf(x)+2\{f(x)-f(0)\}}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}f(x)+2\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=f(0)+2f'(0)$$
$$=2+2f'(0)$$

따라서 $2+2f'(0)=5$이므로 $f'(0)=\frac{3}{2}$

0280 답 ①

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)+3}{x-2}=-5$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to2}\{f(x)+3\}=0$이므로

$f(2)+3=0$ $\therefore f(2)=-3$

이때 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)+3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=-5$

$$\therefore f'(-2)=\lim_{h\to0}\frac{f(-2+h)-f(-2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}\times(-1)$$
$$=-f'(2)=5$$

$\therefore f(2)+f'(-2)=-3+5=2$

참고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$이므로

$f(-2+h)=f(-(2-h))=f(2-h)$

0281 답 ⑤

두 점 $(1, f(1))$, $(a, f(a))$ 사이의 거리가 a^2-1이므로

$\sqrt{(a-1)^2+\{f(a)-f(1)\}^2}=a^2-1$

$(a-1)^2+\{f(a)-f(1)\}^2=(a^2-1)^2$

$\therefore\{f(a)-f(1)\}^2=(a^2-1)^2-(a-1)^2$
$=(a-1)^2(a^2+2a)$

이때 $a>1$이면 $f(a)>f(1)$이므로

$f(a)-f(1)=(a-1)\sqrt{a^2+2a}$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$f'(1)=\lim_{a\to1+}\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\lim_{a\to1+}\frac{(a-1)\sqrt{a^2+2a}}{a-1}$$
$$=\lim_{a\to1+}\sqrt{a^2+2a}=\sqrt{3}$$

0282 답 ④

ㄱ. 직선 OA의 기울기는 직선 OB의 기울기보다 작으므로

$\frac{f(a)-f(0)}{a-0}<\frac{f(b)-f(0)}{b-0}$ $\therefore\frac{f(a)}{a}<\frac{f(b)}{b}$

ㄴ. 점 A에서의 접선의 기울기가 점 B에서의 접선의 기울기보다 작으므로 $f'(a)<f'(b)$

ㄷ. 직선 AB의 기울기는 직선 $y=\frac{1}{2}x$의 기울기보다 크므로

$\frac{1}{2}<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

이때 $b-a>0$이므로

$b-a<2\{f(b)-f(a)\}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0283 답 ⑤

ㄱ. $a>0$일 때, 원점과 점 $(a, f(a))$를 지나는 직선의 기울기는 직선 $y=2x$의 기울기보다 작거나 같으므로

$\frac{f(a)}{a}\le2$

ㄴ. $a>1$일 때, 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 직선 $y=2x$의 기울기보다 작으므로 $f'(a)<2$

ㄷ. $2<a<4$일 때, 원점과 점 $(a, f(a))$를 지나는 직선의 기울기는 양수이고, 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 음수이므로

$f'(a)<0<\frac{f(a)}{a}$ $\therefore af'(a)<f(a)\ (\because a>0)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0284 답 ④

ㄱ. 원점과 점 $(a, f(a))$를 지나는 직선의 기울기는
원점과 점 $(c, f(c))$를 지나는 직선의 기울기보다 작으므로
$\frac{f(a)}{a}<\frac{f(c)}{c}$

ㄴ. 세 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, $(c, f(c))$ 중 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기가 가장 작고, 점 $(c, f(c))$에서의 접선의 기울기가 가장 크므로
$f'(a)<f'(b)<f'(c)$

ㄷ. 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는
점 $(b, f(b))$에서의 접선의 기울기보다 작으므로
$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}<f'(b)$
이때 $b-a>0$이므로
$f(b)-f(a)<(b-a)f'(b)$
$\therefore (a-b)f'(b)<f(a)-f(b)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0285 답 16

㈎의 $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-g(1+h)}{2h}=5$에서 $h\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.
즉, $\lim_{h\to0}\{f(1+h)-g(1+h)\}=0$이므로
$f(1)-g(1)=0 \quad \therefore f(1)=g(1)$ …… ㉠
$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-g(1+h)}{2h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+g(1)-g(1+h)}{2h}$ ($\because$ ㉠)
$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\frac{1}{2}-\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}\times\frac{1}{2}$
$=\frac{1}{2}\{f'(1)-g'(1)\}$

즉, $\frac{1}{2}\{f'(1)-g'(1)\}=5$이므로
$f'(1)-g'(1)=10$ …… ㉡ …… i

또 ㈏에서
$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)+g(1-2h)-2f(1)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+g(1-2h)-g(1)}{h}$ ($\because$ ㉠)
$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{g(1-2h)-g(1)}{-2h}\times(-2)$
$=f'(1)-2g'(1)$
$\therefore f'(1)-2g'(1)=7$ …… ㉢ …… ii

㉡, ㉢을 연립하여 풀면
$f'(1)=13, g'(1)=3$ …… iii
$\therefore f'(1)+g'(1)=13+3=16$ …… iv

채점 기준	
i ㈎에서 $f'(1), g'(1)$에 대한 식 세우기	30 %
ii ㈏에서 $f'(1), g'(1)$에 대한 식 세우기	30 %
iii $f'(1), g'(1)$의 값 구하기	30 %
iv $f'(1)+g'(1)$의 값 구하기	10 %

0286 답 3

$\frac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $h\to0$이므로
$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{3}{n}\right)g\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)g(1)\right\}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)g(1+h)-f(1)g(1)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)g(1+h)-f(1)g(1+h)+f(1)g(1+h)-f(1)g(1)}{h}$
$=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)\{f(1+3h)-f(1)\}+f(1)\{g(1+h)-g(1)\}}{h}$
$=\lim_{h\to0}g(1+h)\times\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times3$
$\quad+f(1)\times\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$
$=3g(1)f'(1)+f(1)g'(1)$
$=3\times2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{2}{3}=3$

0287 답 ③

$f'(x)=3x^2+2ax+4$이므로 $f'(1)=7+2a$
따라서 $7+2a=5$이므로 $a=-1$

0288 답 ①

$\{f(x)g(x)h(x)\}'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)$
$\quad+f(x)g(x)h'(x)$
따라서 구하는 미분계수는
$f'(3)g(3)h(3)+f(3)g'(3)h(3)+f(3)g(3)h'(3)$
$=1\times5\times(-1)+(-3)\times0\times(-1)+(-3)\times5\times(-2)$
$=25$

0289 답 ④

$f(x)=ax^2+bx+2$에서 $f'(x)=2ax+b$
$f(2)=10$에서
$4a+2b+2=10 \quad \therefore 2a+b=4$ …… ㉠
$f'(7)=10$에서
$14a+b=10$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2}, b=3$
따라서 $f'(x)=x+3$이므로 $f'(-1)=2$

0290 답 ①

$g'(x)=10x+f(x)+xf'(x)$이므로
$g'(3)=30+f(3)+3f'(3)$
$\quad=30+2+3\times1=35$

0291 답 ⑤

$\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{3h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\times\frac{2}{3}$
$\quad=\frac{2}{3}f'(x)$
즉, $\frac{2}{3}f'(x)=6x^2-x+2$이므로 $f'(x)=9x^2-\frac{3}{2}x+3$
$\therefore f'(2)=36$

0292 답 ②

함수 $f(x)=x^2+3$에서 x의 값이 1에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(a^2+3)-4}{a-1}=\frac{a^2-1}{a-1}$$
$$=\frac{(a+1)(a-1)}{a-1}=a+1$$

이때 $f'(x)=2x$이므로 $x=2$에서의 미분계수는 $f'(2)=4$

따라서 $a+1=4$이므로 $a=3$

0293 답 ①

함수 $f(x)=x^3-3x^2-x+2$에서 x의 값이 1에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{14-(-1)}{3}=5$$

이때 $f'(x)=3x^2-6x-1$이므로

$f'(a)=3a^2-6a-1$

즉, $3a^2-6a-1=5$이므로 $a^2-2a-2=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 상수 a의 값의 곱은 -2이다.

0294 답 −17

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2-4h)-f(2+h)}{5h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2-4h)-f(2)+f(2)-f(2+h)}{5h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2-4h)-f(2)}{-4h}\times\left(-\frac{4}{5}\right)-\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\times\frac{1}{5}$$
$$=-\frac{4}{5}f'(2)-\frac{1}{5}f'(2)$$
$$=-f'(2)\quad\cdots\cdots\text{ⓘ}$$

이때 $f'(x)=6x^2-4x+1$이므로 $f'(2)=17$ ……ⓘⓘ

따라서 구하는 값은

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2-4h)-f(2+h)}{5h}=-f'(2)=-17\quad\cdots\cdots\text{ⓘⓘⓘ}$$

채점 기준	
ⓘ $\lim_{h\to0}\frac{f(2-4h)-f(2+h)}{5h}$를 $f'(2)$를 이용하여 나타내기	50%
ⓘⓘ $f'(2)$의 값 구하기	30%
ⓘⓘⓘ $\lim_{h\to0}\frac{f(2-4h)-f(2+h)}{5h}$의 값 구하기	20%

0295 답 ②

$f(x)=ax^2+bx+1$이라 하면 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 2)$를 지나므로 $f(1)=2$에서

$a+b+1=2$ $\therefore a+b=1$ ……㉠

$f'(x)=2ax+b$이고, 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기가 -1이므로 $f'(1)=-1$에서

$2a+b=-1$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=3$

따라서 $f(x)=-2x^2+3x+1$이므로

$k=f(2)=-1$

0296 답 ⑤

$\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x^2+2x}=3$에서 $x\to-2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-2}f(x)=0$이므로 $f(-2)=0$

$$\therefore\lim_{x\to-2}\frac{f(x)}{x^2+2x}=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}\times\lim_{x\to-2}\frac{1}{x}$$
$$=-\frac{1}{2}f'(-2)$$

즉, $-\frac{1}{2}f'(-2)=3$이므로 $f'(-2)=-6$

$f(x)=x^2+ax+b$이므로 $f(-2)=0$에서

$4-2a+b=0$ $\therefore 2a-b=4$ ……㉠

$f'(x)=2x+a$이므로 $f'(-2)=-6$에서

$-4+a=-6$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-8$

$\therefore ab=(-2)\times(-8)=16$

0297 답 ②

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3h)-f(-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+3h)-f(0)+f(0)-f(0-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+3h)-f(0)}{3h}\times\frac{3}{2}-\lim_{h\to0}\frac{f(0-h)-f(0)}{-h}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}f'(0)+\frac{1}{2}f'(0)$$
$$=2f'(0)$$

즉, $2f'(0)=6$이므로 $f'(0)=3$

이때 $f'(x)=(3x^2+a)(ax^2-2)+(x^3+ax+1)\times2ax$이므로

$f'(0)=-2a$

따라서 $-2a=3$이므로 $a=-\frac{3}{2}$

0298 답 12

$f'(x)=4(2x+a)^3\times2=8(2x+a)^3$이므로 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$에서

$8(1+a)^3=0$ $\therefore a=-1$ ($\because a$는 실수) ……ⓘ

즉, $f(x)=(2x-1)^4$이므로 $f(1)=1$

$$\therefore\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^3)-f(1)}{(x+1)(x-1)}\times\frac{x^2+x+1}{x^2+x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^3)-f(1)}{x^3-1}\times\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x+1}$$
$$=\frac{3}{2}f'(1)\quad\cdots\cdots\text{ⓘⓘ}$$

이때 $f'(x)=8(2x-1)^3$이므로 $f'(1)=8$ …… ⓘⓘⓘ

따라서 구하는 값은

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x^3)-1}{x^2-1}=\dfrac{3}{2}f'(1)=\dfrac{3}{2}\times8=12$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ a의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x^3)-1}{x^2-1}$을 $f'(1)$을 이용하여 나타내기	30 %
ⓘⓘⓘ $f'(1)$의 값 구하기	20 %
ⓘⓥ $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x^3)-1}{x^2-1}$의 값 구하기	20 %

0299 답 ③

$f(x)=x^2+ax-b$, $g(x)=-x^2+c$라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(1,\ -2)$를 지나므로 $f(1)=-2$에서

$1+a-b=-2$ $\therefore a-b=-3$ …… ㉠

$g(1)=-2$에서

$-1+c=-2$ $\therefore c=-1$

이때 $f'(x)=2x+a$, $g'(x)=-2x$이고, 점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 기울기가 같으므로 $f'(1)=g'(1)$에서

$2+a=-2$ $\therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-1$

$\therefore ab+c=(-4)\times(-1)+(-1)=3$

0300 답 14

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=9$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{f(x)-5\}=0$이므로

$f(1)-5=0$ $\therefore f(1)=5$

이때 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이므로

$f'(1)=9$

따라서 $g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$g'(1)=f(1)+f'(1)=5+9=14$

0301 답 −11

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-3}{x+1}=2$에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to-1}\{f(x)-3\}=0$이므로

$f(-1)-3=0$ $\therefore f(-1)=3$

이때 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-3}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$이므로

$f'(-1)=2$

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{g(x)+4}{x+1}=-1$에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to-1}\{g(x)+4\}=0$이므로

$g(-1)+4=0$ $\therefore g(-1)=-4$

이때 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{g(x)+4}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}=g'(-1)$이므로

$g'(-1)=-1$

따라서 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 구하는 미분계수는

$f'(-1)g(-1)+f(-1)g'(-1)=2\times(-4)+3\times(-1)$

$=-11$

0302 답 −1

$g(x)=(x^3+5)f(x)$에서 $g(1)=6f(1)$이므로

$-2=6f(1)$ $\therefore f(1)=-\dfrac{1}{3}$ …… ⓘ

$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+5)f'(x)$에서

$g'(1)=3f(1)+6f'(1)$이므로

$3=3\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)+6f'(1)$

$6f'(1)=4$ $\therefore f'(1)=\dfrac{2}{3}$ …… ⓘⓘ

$\therefore f(1)-f'(1)=-\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}=-1$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(1)$의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ $f'(1)$의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $f(1)-f'(1)$의 값 구하기	20 %

0303 답 ④

$g(x)=(x^3-2x^2+1)f(x)$라 하면 $g(2)=f(2)=-5$이므로

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^3-2x^2+1)f(x)+5}{x^3-3x-2}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-g(2)}{(x-2)(x^2+2x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}\times\lim\limits_{x\to2}\dfrac{1}{x^2+2x+1}$

$=\dfrac{1}{9}g'(2)$

이때 $g'(x)=(3x^2-4x)f(x)+(x^3-2x^2+1)f'(x)$이므로

$g'(2)=4f(2)+f'(2)$

$=4\times(-5)+2=-18$

따라서 구하는 값은

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^3-2x^2+1)f(x)+5}{x^3-3x-2}=\dfrac{1}{9}g'(2)$

$=\dfrac{1}{9}\times(-18)=-2$

0304 답 ②

$f'(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-10)$

$+x(x-2)(x-3)\cdots(x-10)$

$+x(x-1)(x-3)\cdots(x-10)$

$+\cdots+x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-9)$

이므로

$f'(1)=1\times(1-2)\times(1-3)\times\cdots\times(1-10)$

$=-(1\times2\times3\times\cdots\times9)$

$f'(10)=10\times(10-1)\times(10-2)\times\cdots\times(10-9)$

$=10\times9\times8\times\cdots\times1$

$\therefore \dfrac{f'(1)}{f'(10)}=\dfrac{-(1\times2\times3\times\cdots\times9)}{10\times9\times8\times\cdots\times1}=-\dfrac{1}{10}$

0305 답 -2

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로

$f(x)=-f(-x)$

즉, $f(1)=-f(-1)$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{f(x)+f(1)}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{f(x)-f(-1)}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\left\{\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\dfrac{x+1}{f(x)-f(-1)}\times(x-1)\right\}$

$=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}}\times\lim\limits_{x\to-1}(x-1)$

$=f'(1)\times\dfrac{1}{f'(-1)}\times(-2)=-\dfrac{2f'(1)}{f'(-1)}$

이때 임의의 실수 a에 대하여

$f'(a)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{-f(-a-h)+f(-a)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(-a-h)-f(-a)}{-h}=f'(-a)$

즉, $f'(-1)=2$에서 $f'(1)=2$

따라서 구하는 값은

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x^2)-f(1)}{f(x)+f(1)}=-\dfrac{2f'(1)}{f'(-1)}=-\dfrac{2\times2}{2}=-2$

참고 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=-f(-x)$이므로

$f(a+h)=-f(-(a+h))=-f(-a-h)$

0306 답 12

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+g(x)}{x}=2$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}=0$이므로

$f(0)+g(0)=0$ ····· ㉠

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)+g(x)-\{f(0)+g(0)\}}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}+\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

$=f'(0)+g'(0)$

즉, $f'(0)+g'(0)=2$ ····· ㉡

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2}{xg(x)}=1$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to0}\{f(x)-2\}=0$이므로

$f(0)-2=0$ $\therefore f(0)=2$

$f(0)=2$를 ㉠에 대입하여 풀면 $g(0)=-2$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-2}{xg(x)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{xg(x)}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{g(x)}$

$=f'(0)\times\dfrac{1}{g(0)}=-\dfrac{f'(0)}{2}$

즉, $-\dfrac{f'(0)}{2}=1$이므로 $f'(0)=-2$

$f'(0)=-2$를 ㉡에 대입하여 풀면 $g'(0)=4$

따라서 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$=(-2)\times(-2)+2\times4=12$

0307 답 32

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x-1)-4}{x-1}=8$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to1}\{g(x-1)-4\}=0$이므로

$g(0)-4=0$ $\therefore g(0)=4$ ····· ⓘ

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x-1)-4}{x-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{g(t)-g(0)}{t}=g'(0)$

$\therefore g'(0)=8$ ····· ⓘⓘ

$h(x)=f(x)g(x)$라 하면 $h(0)=f(0)g(0)=1\times4=4$이므로

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)g(x)-4}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{h(x)-h(0)}{x}=h'(0)$

따라서 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로 구하는 값은

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)g(x)-4}{x}=h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$

$=6\times4+1\times8=32$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $g(0)$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ $g'(0)$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)g(x)-4}{x}$의 값 구하기	40 %

0308 답 ②

① $\lim\limits_{h\to0+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}\neq\lim\limits_{h\to0-}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

③ $\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq f(1)$이므로 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

④ 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 정의되지 않으므로 $x=1$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

⑤ $\lim\limits_{x\to1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-}f(x)$이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않는다. 즉, $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

따라서 $x=1$에서 미분가능한 것은 ②이다.

참고 함수 $f(x)$가 미분가능하면 연속이다. 또 함수 $f(x)$가 불연속이면 미분가능하지 않다.

0309 답 ③

열린구간 $(-3, 4)$에서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 -1, 1, 3이고, 미분가능하지 않은 x의 값은 -2, -1, 1, 2, 3이므로

$a=3$, $b=5$

$\therefore a+b=3+5=8$

0310 답 ②

ㄱ. $g(x)=x-2f(x)$라 하면 $g(0)=0-2f(0)=0$이고,

$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\{x-2f(x)\}=0-2=-2$

즉, $\lim_{x\to 0} g(x)\neq g(0)$이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

ㄴ. $g(x)=xf(x)$라 하면 $g(0)=0$이고,

$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0} xf(x)=0\times 1=0$

즉, $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{xf(x)}{x}=\lim_{x\to 0+} f(x)=1$

$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{xf(x)}{x}=\lim_{x\to 0-} f(x)=1$

즉, $x=0$에서의 미분계수가 존재하므로 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄷ. $g(x)=|x|f(x)$라 하면 $g(0)=0$이고,

$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}|x|f(x)=0\times 1=0$

즉, $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{xf(x)}{x}=\lim_{x\to 0+} f(x)=1$

$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-xf(x)}{x}=\lim_{x\to 0-}\{-f(x)\}=-1$

즉, $x=0$에서의 미분계수가 존재하지 않으므로 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 보기에서 $x=0$에서 연속이고 미분가능한 함수인 것은 ㄴ이다.

0311 답 ②

ㄱ. $f(0)=0$이고,

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0+} x^2=0$

$\lim_{x\to 0-} f(x)=\lim_{x\to 0-}(-x^2)=0$

즉, $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to 0+} x=0$

$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x^2}{x}=\lim_{x\to 0-}(-x)=0$

즉, $x=0$에서의 미분계수가 존재하므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. $g(0)=0$이고,

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+}(-x^2+x)=0$

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-}(x^2-x)=0$

즉, $\lim_{x\to 0} g(x)=g(0)$이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{-x^2+x}{x}$

$=\lim_{x\to 0+}(-x+1)=1$

$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{x^2-x}{x}$

$=\lim_{x\to 0-}(x-1)=-1$

즉, $x=0$에서의 미분계수가 존재하지 않으므로 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 $x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

따라서 보기에서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ㄴ이다.

다른 풀이

ㄱ. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x\geq 0) \\ -x^2 & (x<0) \end{cases}$에서

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$이므로

$f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이때 $f_1(x)=x^2$, $f_2(x)=-x^2$이라 하면

$f_1'(x)=2x$, $f_2'(x)=-2x$

즉, $f_1'(0)=f_2'(0)$이므로 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. 함수 $g(x)=\begin{cases} -x^2+x & (0\leq x\leq 1) \\ x^2-x & (x<0 \text{ 또는 } x>1) \end{cases}$에서

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0-} g(x)=g(0)$이므로

$g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

이때 $g_1(x)=-x^2+x$, $g_2(x)=x^2-x$라 하면

$g_1'(x)=-2x+1$, $g_2'(x)=2x-1$

즉, $g_1'(0)\neq g_2'(0)$이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. 함수 $h(x)=\begin{cases} 1 & (x>0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$은 $x=0$에서 정의되지 않으므로

$x=0$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

따라서 보기에서 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ㄴ이다.

0312 답 ⑤

ㄱ. $h(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$라 하면 $h(2)=\frac{g(2)}{f(2)}=\frac{0}{1}=0$이고,

$\lim_{x\to 2+} h(x)=\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{0}{2}=0$

$\lim_{x\to 2-} h(x)=\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{0}{2}=0$

즉, $\lim_{x\to 2} h(x)=h(2)$이므로 $h(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

ㄴ. $h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$3\leq x<4$일 때, $f(x)=2$, $g(x)=-x+4$이고,

$4\leq x<5$일 때, $f(x)=-x+6$, $g(x)=-x+4$이므로

$h(x)=\begin{cases} 2(-x+4) & (3\leq x<4) \\ (x-4)(x-6) & (4\leq x<5) \end{cases}$

$\lim_{x\to 4+}\frac{h(x)-h(4)}{x-4}=\lim_{x\to 4+}\frac{(x-4)(x-6)-0}{x-4}$

$=\lim_{x\to 4+}(x-6)=-2$

$$\lim_{x\to4-}\frac{h(x)-h(4)}{x-4}=\lim_{x\to4-}\frac{2(-x+4)-0}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4-}\frac{-2(x-4)}{x-4}=-2$$

즉, $x=4$에서의 미분계수가 존재하므로 $h(x)$는 $x=4$에서 미분가능하다.

ㄷ. $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$라 하고, $t=f(x)$라 하면

$x\to1+$일 때 $t=2$이고, $x\to1-$일 때 $t=0$이므로

$\lim_{x\to1+}h(x)=\lim_{x\to1+}g(f(x))=g(2)=0$

$\lim_{x\to1-}h(x)=\lim_{x\to1-}g(f(x))=g(0)=1$

즉, $\lim_{x\to1+}h(x)\neq\lim_{x\to1-}h(x)$이므로 $h(x)$는 $x=1$에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0313 답 2

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=1$에서 미분가능하다. 즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 $x=1$에서의 미분계수가 존재한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$a+b=-3$ $\therefore b=-a-3$ ····· ㉠ ····· ⓘ

또 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(ax^3+b)-(-3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{ax^3+(-a-3)+3}{x-1}\ (\because\ ㉠)$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{a(x^3-1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{a(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}a(x^2+x+1)=3a$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x^2-5x+1)-(-3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x^2-5x+4}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x-4)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(x-4)=-3$$

즉, $3a=-3$이므로 $a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-2$ ····· ⓘⓘ

$\therefore ab=(-1)\times(-2)=2$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속임을 이용하여 식 세우기	40 %
ⓘⓘ a, b의 값 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ ab의 값 구하기	10 %

다른 풀이

$g(x)=ax^3+b$, $h(x)=x^2-5x+1$이라 하면

$g'(x)=3ax^2$, $h'(x)=2x-5$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$에서

$a+b=-3$ ····· ㉠

또 $x=1$에서의 미분계수가 존재하므로 $g'(1)=h'(1)$에서

$3a=-3$ $\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-2$

$\therefore ab=(-1)\times(-2)=2$

0314 답 8

$f(x)=\begin{cases}-(x-4) & (x<4)\\ x-4 & (x\geq4)\end{cases}$이므로

$f(x)g(x)=\begin{cases}-(x-4)(2x-a) & (x<4)\\ (x-4)(2x-a) & (x\geq4)\end{cases}$

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=4$에서 미분가능하다. 즉, 함수 $f(x)g(x)$는 $x=4$에서 연속이고 $x=4$에서의 미분계수가 존재한다.

$f(4)g(4)=0$이고,

$\lim_{x\to4+}f(x)g(x)=\lim_{x\to4+}(x-4)(2x-a)=0$

$\lim_{x\to4-}f(x)g(x)=\lim_{x\to4-}\{-(x-4)(2x-a)\}=0$

즉, $\lim_{x\to4}f(x)g(x)=f(4)g(4)$이므로

$f(x)g(x)$는 $x=4$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to4+}\frac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4}=\lim_{x\to4+}\frac{(x-4)(2x-a)-0}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4+}(2x-a)=8-a$$

$$\lim_{x\to4-}\frac{f(x)g(x)-f(4)g(4)}{x-4}=\lim_{x\to4-}\frac{-(x-4)(2x-a)-0}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to4-}(-2x+a)=-8+a$$

즉, $x=4$에서의 미분계수가 존재하므로

$8-a=-8+a$, $2a=16$ $\therefore a=8$

다른 풀이

$f(x)g(x)=\begin{cases}-(x-4)(2x-a) & (x<4)\\ (x-4)(2x-a) & (x\geq4)\end{cases}$에서

$h_1(x)=-(x-4)(2x-a)$, $h_2(x)=(x-4)(2x-a)$라 하면

$h_1(4)=h_2(4)=0$이므로 $h(x)$는 $x=4$에서 연속이다.

$h_1'(x)=-(2x-a)-2(x-4)=-4x+a+8$

$h_2'(x)=2x-a+2(x-4)=4x-a-8$

이때 $x=4$에서의 미분계수가 존재하므로 $h_1'(4)=h_2'(4)$에서

$-8+a=8-a$, $2a=16$ $\therefore a=8$

0315 답 ⑤

$f(x)=\begin{cases}0 & (1\leq x<2)\\ x^2+ax+b & (2\leq x<3)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이고 $x=2$에서의 미분계수가 존재한다.

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$에서

$4+2a+b=0$ ····· ㉠

또 $x=2$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{(x^2+ax+b)-(4+2a+b)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{x^2+ax-2(a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}(x+a+2)=a+4$$

$$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2-}\frac{0-(4+2a+b)}{x-2}=0\ (\because\ ㉠)$$

즉, $a+4=0$이므로 $a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=4$

$\therefore b-a=4-(-4)=8$

다른 풀이

$f(x)=\begin{cases} 0 & (1\le x<2) \\ x^2+ax+b & (2\le x<3) \end{cases}$에서

$g(x)=0$, $h(x)=x^2+ax+b$라 하면

$g'(x)=0$, $h'(x)=2x+a$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로 $g(2)=h(2)$에서

$0=4+2a+b$ ····· ㉠

또 $x=2$에서의 미분계수가 존재하므로 $g'(2)=h'(2)$에서

$0=4+a$ $\therefore a=-4$

$a=-4$를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=4$

$\therefore b-a=4-(-4)=8$

0316 답 −1

함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=a$에서 미분가능하다. 즉, 함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이고 $x=a$에서의 미분계수가 존재한다.

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to a+} g(x)=\lim\limits_{x\to a-} g(x)=g(a)$에서

$12-f(a)=f(a)$ ····· ㉠

$2f(a)=12$ $\therefore f(a)=6$

또 $x=a$에서의 미분계수가 존재하므로

$$\lim_{x\to a+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{12-f(x)-\{12-f(a)\}}{x-a}$$
$$=-\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-f'(a)$$
$$\lim_{x\to a-}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-\{12-f(a)\}}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ (\because ㉠)$$
$$=f'(a)$$

즉, $-f'(a)=f'(a)$이므로 $f'(a)=0$

이때 $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9$

(i) $f(a)=6$에서

$a^3-3a^2-9a-5=0$, $(a+1)^2(a-5)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=5$

(ii) $f'(a)=0$에서

$3a^2-6a-9=0$, $3(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$

(i), (ii)에서 $a=-1$

다른 풀이

$f(a)$, $f'(a)$의 값은 다음과 같이 구할 수도 있다.

$g(x)=\begin{cases} 12-f(x) & (x\ge a) \\ f(x) & (x<a) \end{cases}$에서 $h(x)=12-f(x)$라 하면

$h'(x)=-f'(x)$

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 연속이므로 $h(a)=f(a)$에서

$12-f(a)=f(a)$ $\therefore f(a)=6$

또 $x=a$에서의 미분계수가 존재하므로 $h'(a)=f'(a)$에서

$-f'(a)=f'(a)$ $\therefore f'(a)=0$

0317 답 ④

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ ····· ㉠

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않으므로 $x=0$에서의 미분계수가 존재하지 않는다.

즉, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$의 값이 존재하지 않는다.

ㄱ. $g(x)=xf(x)$라 하면 $g(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-0}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0} f(x)$$
$$=f(0)\ (\because ㉠)$$

즉, $x=0$에서의 미분계수가 존재하므로 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

ㄴ. $g(x)=(x^2+1)f(x)$라 하면 $g(0)=f(0)$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+1)f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)+f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0} xf(x)+\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

즉, $x=0$에서의 미분계수가 존재하지 않으므로 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $g(x)=\dfrac{1}{1-x^3f(x)}$이라 하면 $g(0)=1$이고

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{1-x^3f(x)}-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2f(x)}{1-x^3f(x)}=0$$

즉, $x=0$에서의 미분계수가 존재하므로 $g(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

따라서 보기에서 $x=0$에서 미분가능한 함수인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0318 답 ②

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=k$에서 미분가능해야 한다.

$f(x)=x^3-x^2-9x-6$에서

$f'(x)=3x^2-2x-9$

$h(x)=f(2k-x)$라 하면

$h(x)=(2k-x)^3-(2k-x)^2-9(2k-x)-6$

$h'(x)=-3(2k-x)^2+2(2k-x)+9$

이때 $x=k$에서의 미분계수가 존재해야 하므로 $f'(k)=h'(k)$에서

$3k^2-2k-9=-3k^2+2k+9$

$\therefore\ 3k^2-2k-9=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{2}{3}$이다.

0319 답 ③

다항식 x^5+1을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^5+1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ····· ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$2=a+b$ ····· ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$5x^4=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=1$을 대입하면 $a=5$

$a=5$를 ㉡에 대입하여 풀면 $b=-3$

따라서 구하는 나머지는 $5x-3$이다.

0320 답 ②

다항식 x^3+ax^2+bx-4를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2x+3$이므로

$x^3+ax^2+bx-4=(x-1)^2Q(x)+2x+3$ ····· ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$a+b-3=5$ $\therefore\ a+b=8$ ····· ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+2ax+b=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+2$

양변에 $x=1$을 대입하면

$3+2a+b=2$ $\therefore\ 2a+b=-1$ ····· ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-9$, $b=17$

$\therefore\ b-a=17-(-9)=26$

0321 답 -1

다항식 x^3-3x+k를 $(x-a)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$x^3-3x+k=(x-a)^2Q(x)$ ····· ㉠ ····· ⓘ

양변에 $x=a$를 대입하면

$a^3-3a+k=0$ ····· ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-3=2(x-a)Q(x)+(x-a)^2Q'(x)$

양변에 $x=a$를 대입하면

$3a^2-3=0$, $3(a+1)(a-1)=0$

$\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$ ····· ⓘⓘ

$a=1$을 ㉡에 대입하여 풀면 $k=2$ ····· ⓘⓘⓘ

$\therefore\ a-k=1-2=-1$ ····· ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ 몫을 $Q(x)$라 하고 식 세우기	20%
ⓘⓘ a의 값 구하기	40%
ⓘⓘⓘ k의 값 구하기	30%
ⓘⓥ $a-k$의 값 구하기	10%

0322 답 ⑤

다항식 $x^{100}-x+1$을 $x(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$x^{100}-x+1=x(x+1)^2Q(x)+ax^2+bx+c$ ····· ㉠

양변에 $x=0$을 대입하면 $c=1$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$3=a-b+c$ $\therefore\ a-b=2\ (\because\ c=1)$ ····· ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$100x^{99}-1=(x+1)^2Q(x)+2x(x+1)Q(x)+x(x+1)^2Q'(x)+2ax+b$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-101=-2a+b$ ····· ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=99$, $b=97$

따라서 $R(x)=99x^2+97x+1$이므로 $R(1)=197$

0323 답 ④

곡선 $y=f(x)$가 직선 $y=x-3$과 점 $(2,\ -1)$에서 접하므로

$f(2)=-1$, $f'(2)=1$

다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+ax+b$ ····· ㉠

양변에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=-1$이므로

$-1=2a+b$ ····· ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=2$를 대입하면 $f'(2)=1$이므로 $a=1$

$a=1$을 ㉡에 대입하여 풀면 $b=-3$

따라서 $R(x)=x-3$이므로 $R(5)=2$

0324 답 1

$\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)+1}{x-3}=2$에서 $x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to3}\{f(x)+1\}=0$이므로

$f(3)+1=0$ $\therefore\ f(3)=-1$

이때 $\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)+1}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)$이므로

$f'(3)=2$ ····· ⓘ

다항식 $f(x)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-3)^2Q(x)+ax+b$ ····· ㉠

양변에 $x=3$을 대입하면 $f(3)=-1$이므로

$-1=3a+b$ ····· ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-3)Q(x)+(x-3)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=3$을 대입하면 $f'(3)=2$이므로 $a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하여 풀면 $b=-7$

따라서 $R(x)=2x-7$이므로 ····· ⅱ

$R(4)=1$ ····· ⅲ

채점 기준	
ⅰ $f(3)$, $f'(3)$의 값 구하기	40 %
ⅱ $R(x)$ 구하기	40 %
ⅲ $R(4)$의 값 구하기	20 %

0325 답 3

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\left\{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\dfrac{1}{x+1}\right\}=\dfrac{1}{2}f'(1)$

즉, $\dfrac{1}{2}f'(1)=6$이므로 $f'(1)=12$

이때 $f(x)=(x+3)(x-1)Q(x)+1$이므로

$f'(x)=(x-1)Q(x)+(x+3)Q(x)+(x+3)(x-1)Q'(x)$

양변에 $x=1$을 대입하면 $f'(1)=12$이므로

$12=4Q(1)$ $\therefore Q(1)=3$

다른 풀이

$f(x)=(x+3)(x-1)Q(x)+1$이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+3)(x-1)Q(x)+1-1}{x^2-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+3)(x-1)Q(x)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+3)Q(x)}{x+1}=2Q(1)$

즉, $2Q(1)=6$이므로 $Q(1)=3$

0326 답 3

㈎에서 삼차식 $f(x)+5$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면

$f(x)+5=(x-1)^2Q_1(x)$ ····· ㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)+5=0$ $\therefore f(1)=-5$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q_1(x)+(x-1)^2Q_1'(x)$

양변에 $x=1$을 대입하면 $f'(1)=0$

㈏에서 삼차식 $f(x)-3$을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)-3=(x+1)^2Q_2(x)$ ····· ㉡

양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)-3=0$ $\therefore f(-1)=3$

㉡의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x+1)Q_2(x)+(x+1)^2Q_2'(x)$

양변에 $x=-1$을 대입하면 $f'(-1)=0$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

이때 $f'(1)=0$, $f'(-1)=0$이므로

$f'(x)=3a(x-1)(x+1)=3ax^2-3a$

즉, $3ax^2+2bx+c=3ax^2-3a$이므로

$b=0$, $c=-3a$

$\therefore f(x)=ax^3-3ax+d$

또 $f(1)=-5$, $f(-1)=3$이므로

$-2a+d=-5$, $2a+d=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=-1$

따라서 $f(x)=2x^3-6x-1$이므로 $f(2)=3$

0327 답 ③

다항식 $f(x)$를 $(x-4)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-4)^2g(x)+ax+b$ ····· ㉠

다항식 $g(x)$를 $x-3$으로 나누었을 때의 나머지가 1이므로

$g(3)=1$

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-3}=2$에서 $x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to3}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로

$f(3)-g(3)=0$ $\therefore f(3)=g(3)=1$ ····· ㉡

$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-g(x)}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)+f(3)-g(x)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)+g(3)-g(x)}{x-3}$ ($\because$ ㉡)

$=\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}-\lim\limits_{x\to3}\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}$

$=f'(3)-g'(3)$

$\therefore f'(3)-g'(3)=2$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$1=1+3a+b$ ($\because$ ㉡)

$\therefore 3a+b=0$ ····· ㉢

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-4)g(x)+(x-4)^2g'(x)+a$

양변에 $x=3$을 대입하면

$f'(3)=-2g(3)+g'(3)+a$

$\therefore a=\{f'(3)-g'(3)\}+2g(3)$

$=2+2\times1=4$

$a=4$를 ㉢에 대입하여 풀면 $b=-12$

따라서 $f(x)=(x-4)^2g(x)+4x-12$이므로 $f(4)=4$

0328 답 ②

$f(x)=x^3-3x^2-xf'(4)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-6x-f'(4)$

양변에 $x=4$를 대입하면

$f'(4)=24-f'(4)$ $\therefore f'(4)=12$

따라서 $f'(x)=3x^2-6x-12$이므로 $f'(-1)=-3$

0329 답 ③

$f(x)+g(x)=2g(x)+g(x)=3g(x)$이므로

$\{f(x)+g(x)\}'=\{3g(x)\}'=3g'(x)$

따라서 $3g'(x)=x^3+2x+3$이므로

$g'(x)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{2}{3}x+1$ $\therefore g'(1)=2$

0330 답 ⑤

$\lim_{x\to3}\frac{x^n-x^3-9x-27}{x-3}=a$에서 $x\to3$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to3}(x^n-x^3-9x-27)=0$이므로

$3^n-81=0$, $3^n=3^4$ $\therefore n=4$

$$\therefore a=\lim_{x\to3}\frac{x^4-x^3-9x-27}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x^3+2x^2+6x+9)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}(x^3+2x^2+6x+9)=72$$

$\therefore n+a=4+72=76$

0331 답 ①

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-x^3}{ax^2+3a-1}=1$에서 $f(x)-x^3$은 최고차항의 계수가 a인 이차함수이므로 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=2$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to0}f'(x)=0$이므로

$f'(0)=0$ $\therefore b=0$

이때 $f'(x)=3x^2+2ax$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{3x^2+2ax}{x}=\lim_{x\to0}(3x+2a)=2a$

즉, $2a=2$이므로 $a=1$

따라서 $f'(x)=3x^2+2x$이므로 $f'(-4)=40$

0332 답 4

곡선 $y=f(x)$가 세 점 (1, 2), (3, 2), (5, 2)를 지나므로

$f(1)=2$, $f(3)=2$, $f(5)=2$

삼차방정식 $f(x)=2$, 즉 $f(x)-2=0$의 세 근이 1, 3, 5이고

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-2=(x-1)(x-3)(x-5)$

즉, $f(x)=(x-1)(x-3)(x-5)+2$이므로 …… ⓘ

$f'(x)=(x-3)(x-5)+(x-1)(x-5)+(x-1)(x-3)$

따라서 $f(2)=5$, $f'(2)=-1$이므로 …… ⓘⓘ

$f(2)+f'(2)=5+(-1)=4$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(x)$ 구하기	50%
ⓘⓘ $f(2)$, $f'(2)$의 값 구하기	40%
ⓘⓘⓘ $f(2)+f'(2)$의 값 구하기	10%

0333 답 ④

$f(2)=f(a)=f(2a)=k$ (k는 실수)라 하면

삼차방정식 $f(x)=k$, 즉 $f(x)-k=0$의 세 근이 2, a, $2a$이고

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이므로

$f(x)-k=-(x-2)(x-a)(x-2a)$

즉, $f(x)=-(x-2)(x-a)(x-2a)+k$이므로

$f'(x)=-(x-a)(x-2a)-(x-2)(x-2a)-(x-2)(x-a)$

이때 $f'(2)=-12$이므로

$-12=-(2-a)(2-2a)$, $2a^2-6a-8=0$

$2(a+1)(a-4)=0$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$)

0334 답 ②

$\lim_{x\to1}\frac{x^n-3x+2}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x-2)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x-2)$

$=(n-1)-2$

$=n-3$

1	1	0 … 0	−3	2
		1 … 1	1	−2
	1	1 … 1	−2	0

따라서 $n-3=10$이므로 $n=13$

0335 답 ③

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=5$에서 $x\to3$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to3}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로

$f(3)-g(3)=0$

이때 $f(3)=4$이므로 $g(3)=4$

이차방정식 $g(x)=4$, 즉 $g(x)-4=0$의 한 근이 3이고 이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)-4=(x-3)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$g(x)=(x-3)(x+a)+4$

이것을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-(x-3)(x+a)-4}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-(x-3)(x+a)-f(3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x+a)}{x-3}$$
$$=f'(3)-\lim_{x\to3}(x+a)$$
$$=1-(3+a)$$
$$=-a-2$$

즉, $-a-2=5$이므로 $a=-7$

따라서 $g(x)=(x-3)(x-7)+4$이므로 $g(1)=16$

0336 답 ④

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\frac{1}{4}$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(-1)=0$이므로

$f(x)=(x+1)(x-2)(x-k)$ (k는 상수, $k\neq2$)라 하면

$f'(x)=(x-2)(x-k)+(x+1)(x-k)+(x+1)(x-2)$

$=3x^2-2(1+k)x+k-2$

이것을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)(x-k)}{(x-2)\{3x^2-2(1+k)x+k-2\}^2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-k)}{\{3x^2-2(1+k)x+k-2\}^2}$$

$$=\frac{3(2-k)}{(6-3k)^2}=\frac{1}{3(2-k)}$$

즉, $\frac{1}{3(2-k)}=\frac{1}{4}$이므로

$6-3k=4$ $\therefore k=\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=(x+1)(x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right)$이므로 $f(5)=78$

참고 $k=2$이면 $f(x)=(x+1)(x-2)^2$, $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)^2}{(x-2)\{3x(x-2)\}^2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{9x^2(x-2)}\neq\frac{1}{4}$$

따라서 $k\neq 2$이어야 한다.

0337 답 ①

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(1)=0$에서 $1+a+b+c=0$ ····· ㉠

$f'(1)=0$에서 $3+2a+b=0$ ····· ㉡

이때 모든 실수 x에 대하여 $f'(2+x)=f'(2-x)$를 만족시키므로 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 대칭축은 직선 $x=2$이다.

즉, $f'(x)=3x^2+2ax+b=3\left(x+\frac{a}{3}\right)^2-\frac{a^2}{3}+b$에서

$-\frac{a}{3}=2$ $\therefore a=-6$

$a=-6$을 ㉡에 대입하여 풀면 $b=9$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $c=-4$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$이므로 $f(2)=-2$

0338 답 ③

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하므로

$f(x)=(x-a)^2$ (a는 상수)라 하면

$f'(x)=2(x-a)$

$\therefore g(x)=2(x-3)(x-a)$

$=2x^2-2(a+3)x+6a$

이때 곡선 $y=g(x)$가 y축에 대하여 대칭이므로

$-2(a+3)=0$ $\therefore a=-3$

따라서 $f(x)=(x+3)^2$이므로 $f(0)=9$

참고 다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이면

(1) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$가 성립한다.

(2) $f(x)$는 짝수 차수의 항 또는 상수항으로만 이루어져 있다.

0339 답 ①

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$x(2ax+b)=(ax^2+bx+c)+2x^2+1$

$\therefore (2-a)x^2+c+1=0$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

$2-a=0$, $c+1=0$ $\therefore a=2$, $c=-1$

즉, $f'(x)=4x+b$이고 $f'(2)=6$이므로

$8+b=6$ $\therefore b=-2$

따라서 $f(x)=2x^2-2x-1$이므로 $f(3)=11$

0340 답 ①

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 삼차함수 $f(x)$는 홀수 차수의 항으로만 이루어져 있다.

즉, $f(x)=ax^3+bx$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+b$

$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면

$2(ax^3+bx)=x(3ax^2+b)-x^3+9x$

$\therefore (a-1)x^3+(9-b)x=0$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

$a-1=0$, $9-b=0$ $\therefore a=1$, $b=9$

따라서 $f(x)=x^3+9x$이므로 $f(-2)=-26$

참고 다항함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이면

(1) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=-f(-x)$가 성립한다.

(2) $f(x)$는 홀수 차수의 항으로만 이루어져 있다.

0341 답 ①

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)+4}{x-1}=8$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}\{f(x)g(x)+4\}=0$이므로

$f(1)g(1)+4=0$ $\therefore f(1)g(1)=-4$

이때 $f(1)=-2$이므로

$-2g(1)=-4$ $\therefore g(1)=2$

$g(x)=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하면 $g'(x)=a$

$g(1)=2$에서 $a+b=2$ ····· ㉠

(나)에서 $g(0)=g'(0)$이므로 $b=a$

$a=b$를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=1$, $b=1$

$\therefore g(x)=x+1$

이것을 (가)의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)g(x)+4}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)f(x)-2f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f(x)+2f(x)-2f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}f(x)+2\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=f(1)+2f'(1)$$

$$=-2+2f'(1)$$

따라서 $-2+2f'(1)=8$이므로 $f'(1)=5$

0342 답 16

다항함수 $f(x)$의 차수를 n (n은 자연수)이라 하면
$f'(x)$의 차수는 $n-1$이므로 $f(x)f'(x)$의 차수는
$n+(n-1)=2n-1$
이때 주어진 등식의 우변의 차수는 3이므로
$2n-1=3$ $\therefore n=2$
즉, 이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로
$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 $f'(x)=2x+a$
$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 식에 대입하면
$(x^2+ax+b)(2x+a)=2x^3-9x^2+5x+6$
$2x^3+3ax^2+(a^2+2b)x+ab=2x^3-9x^2+5x+6$
이 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로
$3a=-9$, $a^2+2b=5$, $ab=6$ $\therefore a=-3$, $b=-2$
따라서 $f(x)=x^2-3x-2$이므로 $f(-3)=16$

0343 답 ⑤

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면
$f'(0)=-1$ ····· ㉠
다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n (a는 상수, n은 자연수, $a\neq0$)이라 하면 주어진 등식의 좌변의 최고차항은 $a(n+1)x^{n+1}$이다.
이때 $a(n+1)\neq0$에서 좌변의 차수는 $n+1$이고, 우변의 차수는 3이므로
$n+1=3$ $\therefore n=2$
즉, $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면
$f'(x)=2ax+b$
㉠에서 $b=-1$이므로
$f(x)=ax^2-x+c$, $f'(x)=2ax-1$
$f(x)$와 $f'(x)$를 주어진 등식에 대입하면
$x(ax^2-x+c)+(x^2+1)(2ax-1)=3x^3-2x^2+2x-1$
$\therefore 3ax^3-2x^2+(2a+c)x-1=3x^3-2x^2+2x-1$
이 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로
$3a=3$, $2a+c=2$ $\therefore a=1$, $c=0$
따라서 $f(x)=x^2-x$이므로 $f(2)=2$

0344 답 8

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$ ····· ⓘ

$$\therefore f'(6)=\lim_{h\to0}\frac{f(6+h)-f(6)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(6)+f(h)+6h-f(6)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+6$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+6$$
$$=f'(0)+6=2+6=8$$ ····· ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(0)$의 값 구하기	50%
ⓘⓘ $f'(6)$의 값 구하기	50%

0345 답 ⑤

$f(x+y)=f(x)+f(y)-2xy+1$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0)+1$ $\therefore f(0)=-1$

$$\therefore f'(2)=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2)+f(h)-4h+1-f(2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}-4$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}-4$$
$$=f'(0)-4$$

즉, $f'(0)-4=1$이므로 $f'(0)=5$

$$\therefore f'(-1)=\lim_{h\to0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(-1)+f(h)+2h+1-f(-1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+1}{h}+2$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+2$$
$$=f'(0)+2$$
$$=5+2=7$$

0346 답 ⑤

$f(x+y)=f(x)f(y)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)f(0)$ $\therefore f(0)=1$ ($\because f(0)>0$)

$$\therefore f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)f(h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1)\{f(h)-1\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\times f(1)$$
$$=f'(0)f(1)=8f(1)$$

따라서 $f'(1)=8f(1)$이므로
$\dfrac{f'(1)}{f(1)}=8$ ($\because f(1)>0$)

0347 답 $-\frac{9}{4}$

$f(x+y)=f(x)+f(y)+xy(x+y+1)$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면
$f(0)=f(0)+f(0)$ $\therefore f(0)=0$

$$\therefore f'(3)=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3)+f(h)+3h(3+h+1)-f(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}+\lim_{h\to0}(3h+12)$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+12$$
$$=f'(0)+12$$

즉, $f'(0)+12=10$이므로

$f'(0)=-2$ …… ⓘ

$\therefore f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x)+f(h)+xh(x+h+1)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)}{h}+\lim_{h\to0}(x^2+xh+x)$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}+x^2+x$

$=f'(0)+x^2+x$

$=x^2+x-2$ …… ⓘⓘ

이때 $f'(x)=x^2+x-2=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$이므로

$f'(x)$의 최솟값은 $-\dfrac{9}{4}$이다. …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f'(0)$의 값 구하기	40%
ⓘⓘ $f'(x)$ 구하기	40%
ⓘⓘⓘ $f'(x)$의 최솟값 구하기	20%

0348 답 ①

다항함수 $f(x)$의 차수를 n(n은 자연수)이라 하면 $f'(x)$의 차수는 $n-1$, $(f\circ f')(x)$의 차수는 $n(n-1)$이다.

$n>1$이면 $n(n-1)>n-1$이므로 (다)의 등식의 좌변의 차수는 $n(n-1)$이고 우변의 차수는 0이다.

그런데 $n(n-1)>0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore n=1$

$f(x)=ax+b$(a, b는 상수, $a<0$)라 하면 $f'(x)=a$

$f(1)=-7$에서

$a+b=-7$ $\therefore b=-7-a$ …… ㉠

(나)의 $(f\circ f')(x)-f'(x)=1$에서

$f(a)-a=1$, $a^2+b-a=1$

$a^2+(-7-a)-a=1$ ($\because$ ㉠)

$a^2-2a-8=0$, $(a+2)(a-4)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because a<0$)

$a=-2$를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-5$

따라서 $f(x)=-2x-5$이므로 $f(-3)=1$

0349 답 28

$\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}=14$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-f'(x)\}=0$이므로

$f(1)-f'(1)=0$ $\therefore f(1)=f'(1)$ …… ㉠

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy-1$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)-1$ $\therefore f(0)=1$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x)+f(h)+2xh-1-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)+2xh-1}{h}$

$=2x+\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=2x+f'(0)$

즉, $f'(x)=2x+f'(0)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=2+f'(0)$

$\therefore f'(0)=f'(1)-2=f(1)-2$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f'(x)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-2x-f'(0)}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-2x-f(1)+2}{x^2-1}$

$=\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}-\lim_{x\to1}\dfrac{2(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{1}{2}f'(1)-1$

즉, $\dfrac{1}{2}f'(1)-1=14$이므로 $f'(1)=30$

$\therefore f'(0)=f'(1)-2=30-2=28$

최고수준 도전 기출 84~85쪽

0350 답 ③

전략 조건 (가)에서 $f'(x)$를 구하고, 이를 조건 (나)의 식에 대입하여 $\{g(x)\}^2$를 구한다. 이때 $f(x)g(x)$를 $\{g(x)\}^2$을 이용하여 나타낸 후, $f(2)g(2)$의 값을 구한다.

(가)의 $f(x)=x^3g(x)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2g(x)+x^3g'(x)$

이것을 (나)의 식에 대입하면

$\{3x^2g(x)+x^3g'(x)\}g(x)-x^3g(x)g'(x)=27x^4$

$3x^2\{g(x)\}^2=27x^4$ $\therefore \{g(x)\}^2=9x^2$

$\therefore f(x)g(x)=x^3g(x)\times g(x)=x^3\{g(x)\}^2$

$=x^3\times9x^2=9x^5$

따라서 $f(2)g(2)=288$

0351 답 31

전략 $2k-8=4k^2+14k$인 정수 k의 값에 대하여 $\dfrac{f(k+2)-f(k)}{2}=2k-8$임을 이용하여 $f(x)$를 구한다. $f'(3)$의 값을 구할 때 $f(x)$의 상수항은 미분하면 0이 되므로 상수항은 구할 필요가 없다.

$g(k)=2k-8$, $h(k)=4k^2+14k$라 하고, $g(k)=h(k)$인 정수 k의 값을 구하면

$2k-8=4k^2+14k$, $4k^2+12k+8=0$

$4(k+2)(k+1)=0$ $\therefore k=-2$ 또는 $k=-1$

(i) $k=-2$일 때, 주어진 부등식에서

$$-12\le\frac{f(0)-f(-2)}{2}\le-12$$

$\therefore\ f(0)-f(-2)=-24$

(ii) $k=-1$일 때, 주어진 부등식에서

$$-10\le\frac{f(1)-f(-1)}{2}\le-10$$

$\therefore\ f(1)-f(-1)=-20$

이때 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(0)-f(-2)=-24$에서

$c-(-8+4a-2b+c)=-24$

$\therefore\ 2a-b=16$ ····· ㉠

$f(1)-f(-1)=-20$에서

$(1+a+b+c)-(-1+a-b+c)=-20$ $\therefore\ b=-11$

$b=-11$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=\frac{5}{2}$

$\therefore\ f(x)=x^3+\frac{5}{2}x^2-11x+c$

따라서 $f'(x)=3x^2+5x-11$이므로 $f'(3)=31$

0352 답 ①

전략 $h(x)$가 미분가능하고 $f(x)+g(x)$가 미분가능하므로 $|f(x)-g(x)|$도 미분가능함을 이용한다. 이때 $f(x)-g(x)=0$인 x의 값을 α라 할 때, $x=\alpha$에서 미분가능하면 $x=\alpha$에서의 미분계수는 0임을 이용한다.

실수 전체의 집합에서 $h(x)$와 $f(x)+g(x)$가 미분가능하므로 $|f(x)-g(x)|$도 미분가능하다.

$f(x)-g(x)=(x^3+kx+1)-(-9x+1)$

$=x^3+(k+9)x=x(x^2+k+9)$

$f'(x)-g'(x)=3x^2+k+9$

방정식 $f(x)-g(x)=0$에서

$x(x^2+k+9)=0$ $\therefore\ x=0$ 또는 $x^2+k+9=0$

$|f(x)-g(x)|$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서의 미분계수는 0이므로 $f'(0)-g'(0)=0$에서

$k+9=0$ $\therefore\ k=-9$

이때 $f(x)-g(x)=x^3$이므로 $f(x)-g(x)=0$이 되는 x의 값은 0뿐이다. 즉, 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$\therefore\ f(x)=x^3-9x+1$

따라서 $f(1)=-7$, $g(1)=-8$에서 $f(1)>g(1)$이므로

$h(1)=2f(1)=2\times(-7)=-14$

참고 $p(x)=|f(x)-g(x)|$라 할 때, $p(0)=0$이고 $x=0$의 좌우에서 $f(x)-g(x)$의 부호가 바뀌므로

$\lim\limits_{h\to0+}\frac{p(0+h)-p(0)}{h}=\alpha$라 하면 $\lim\limits_{h\to0-}\frac{p(0+h)-p(0)}{h}=-\alpha$

이때 $\alpha\neq0$이면 $\lim\limits_{h\to0+}\frac{p(0+h)-p(0)}{h}\neq\lim\limits_{h\to0-}\frac{p(0+h)-p(0)}{h}$이므로

$p(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

따라서 $p(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $\alpha=0$, 즉 $x=0$에서의 미분계수는 0이다.

0353 답 10

전략 $f(x)$가 $x=1$에서 연속임을 이용하여 $g(1)$, $g'(1)$을 n에 대한 식으로 나타낸다. 또 다항식 $g(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지 $R(x)$를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하고 a, b를 n에 대한 식으로 나타내어 n의 값을 구한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)$에서

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2nx}{x-1}=5n+3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다. 즉, $\lim\limits_{x\to1}\{g(x)-2nx\}=0$이므로

$g(1)-2n=0$ $\therefore\ g(1)=2n$ ····· ㉡

$g(1)=2n$을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-2nx}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)x}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)+g(1)-g(1)x}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)-g(1)(x-1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}-g(1)$$

$$=g'(1)-g(1)$$

즉, $g'(1)-g(1)=5n+3$이므로

$g'(1)-2n=5n+3$ ($\because$ ㉡)

$\therefore\ g'(1)=7n+3$ ····· ㉢

이때 다항식 $g(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$g(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ ····· ㉣

양변에 $x=1$을 대입하면 $2n=a+b$ ($\because$ ㉡) ····· ㉤

㉣의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=1$을 대입하면 $7n+3=a$ ($\because$ ㉢)

$a=7n+3$을 ㉤에 대입하면

$2n=(7n+3)+b$ $\therefore\ b=-5n-3$

$\therefore\ R(x)=(7n+3)x-5n-3$

따라서 $R(2)=93$에서

$9n+3=93$ $\therefore\ n=10$

0354 답 243

전략 $h(x)=f(x)-g(x)$라 하고 주어진 조건을 이용하여 $h(x)$가 갖는 인수를 구한 다음 삼차방정식 $h(x)=0$의 나머지 한 실근을 α, β를 이용하여 나타내고, $\alpha-\beta$의 값을 구한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $f(\alpha)=g(\alpha)$이므로

$h(\alpha)=f(\alpha)-g(\alpha)=0$

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$이고, $f'(\alpha)=g'(\alpha)$이므로

$h'(\alpha)=f'(\alpha)-g'(\alpha)=0$

즉, $h(x)$는 $(x-\alpha)^2$을 인수로 갖는다.

삼차함수 $h(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$h(x)=(x-\alpha)^2(x-k)$ (k는 상수)라 하면

$h'(x)=2(x-\alpha)(x-k)+(x-\alpha)^2=(x-\alpha)(3x-\alpha-2k)$

또 $f'(\beta)=g'(\beta)$에서 $h'(\beta)=f'(\beta)-g'(\beta)=0$이므로

$(\beta-\alpha)(3\beta-\alpha-2k)=0$

이때 (가), (나)에서 $f'(\alpha)=-16$, $f'(\beta)=16$이므로

$\alpha\neq\beta$ $\therefore\ \beta-\alpha\neq0$

즉, $3\beta-\alpha-2k=0$이므로 $k=\dfrac{3\beta-\alpha}{2}$

$\therefore\ h(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\dfrac{3\beta-\alpha}{2}\right)$

이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로

$g(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$g'(x)=4x+a$

(가)에서 $g'(\alpha)=-16$이므로

$4\alpha+a=-16$ ····· ㉠

(나)에서 $g'(\beta)=16$이므로

$4\beta+a=16$ ····· ㉡

㉡−㉠을 하면

$4(\alpha-\beta)=-32$ $\therefore\ \alpha-\beta=-8$

$\therefore\ g(\beta+1)-f(\beta+1)=-h(\beta+1)$

$=-(\beta+1-\alpha)^2\left(\beta+1-\dfrac{3\beta-\alpha}{2}\right)$

$=-(\alpha-\beta-1)^2\times\dfrac{\alpha-\beta+2}{2}$

$=-(-8-1)^2\times\dfrac{-8+2}{2}$

$=243$

0355 답 ④

전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=-1$이므로 $f(x)=a(x+1)^2+b$(b는 상수)로 놓고 $f'(x)$를 구한다.

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 a이고 함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축이 직선 $x=-1$이므로

$f(x)=a(x+1)^2+b$ (b는 상수)라 하면

$f'(x)=2a(x+1)$

$|f'(x)|\le4x^2+5$에서

$-4x^2-5\le2a(x+1)\le4x^2+5$

(i) $-4x^2-5\le2a(x+1)$에서

$4x^2+2ax+2a+5\ge0$

모든 실수 x에 대하여 이 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $4x^2+2ax+2a+5=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=a^2-4(2a+5)\le0$, $a^2-8a-20\le0$

$(a+2)(a-10)\le0$ $\therefore\ -2\le a\le10$

(ii) $2a(x+1)\le4x^2+5$에서

$4x^2-2ax-2a+5\ge0$

모든 실수 x에 대하여 이 부등식이 성립해야 하므로 이차방정식 $4x^2-2ax-2a+5=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=(-a)^2-4(-2a+5)\le0$, $a^2+8a-20\le0$

$(a+10)(a-2)\le0$ $\therefore\ -10\le a\le2$

(i), (ii)에서 $-2\le a\le2$

그런데 $a\neq0$이므로 $-2\le a<0$, $0<a\le2$

따라서 정수 a는 -2, -1, 1, 2의 4개이다.

0356 답 ①

전략 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2f(x)}{f(x^2)+\{f'(x)\}^2}=1$에서 $x^2f(x)$와 $f(x^2)+\{f'(x)\}^2$의 최고차항의 차수와 계수가 각각 같음을 이용하여 $f(x)$의 차수를 구하고, $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x+2}=-6$을 이용하여 $f(x)$를 구한다.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2f(x)}{f(x^2)+\{f'(x)\}^2}=1$에서 $x^2f(x)$, $f(x^2)+\{f'(x)\}^2$은 최고차항의 차수와 계수가 각각 같다.

$f(x)$의 최고차항을 $4x^n$ (n은 자연수)이라 하면

$x^2f(x)$의 최고차항은 $4x^{n+2}$ ····· ㉠

$f(x^2)$의 최고차항은 $4x^{2n}$이고,

$\{f'(x)\}^2$의 최고차항은 $(4nx^{n-1})^2=16n^2x^{2n-2}$이므로

$f(x^2)+\{f'(x)\}^2$의 최고차항은 $4x^{2n}$ ····· ㉡

㉠과 ㉡이 같아야 하므로

$n+2=2n$ $\therefore\ n=2$

즉, $f(x)=4x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=8x+a$

이때 $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x+2}=-6$에서 $x\to-2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to-2}\{f(x)+f'(x)\}=0$이므로 $f(-2)+f'(-2)=0$에서

$(16-2a+b)+(-16+a)=0$ $\therefore\ a=b$

즉, $f(x)=4x^2+ax+a$, $f'(x)=8x+a$이므로

$\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{f(x)+f'(x)}{x+2}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{4x^2+(a+8)x+2a}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(4x+a)(x+2)}{x+2}$

$=\lim\limits_{x\to-2}(4x+a)=-8+a$

즉, $-8+a=-6$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=4x^2+2x+2$이므로 $f(2)=22$

0357 답 ③

전략 $f'(4)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$에서 $4+h=4\left(1+\dfrac{h}{4}\right)$로 놓고 $f'(4)$를 $f'(1)$을 이용하여 나타낸다.

$f(xy)=f(x)+f(y)$의 양변에 $x=1$, $y=1$을 대입하면

$f(1)=f(1)+f(1)$ $\therefore\ f(1)=0$

$f'(4)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$에서 $4+h=4\left(1+\dfrac{h}{4}\right)$는 0에 가까운 실수 h에 대하여 $1+\dfrac{h}{4}$가 양수이므로

$f'(4)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(4+h)-f(4)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f\left(4\left(1+\frac{h}{4}\right)\right)-f(4)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(4)+f\left(1+\frac{h}{4}\right)-f(4)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f\left(1+\frac{h}{4}\right)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f\left(1+\frac{h}{4}\right)-f(1)}{\frac{h}{4}}\times\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{4}f'(1)=\dfrac{1}{4}\times2=\dfrac{1}{2}$

05 접선의 방정식, 평균값 정리

난이도별 필수 기출 88~107쪽

0358 답 ②

$f(x)=x^3-x^2-2x+3$이라 하면 $f'(x)=3x^2-2x-2$

이때 점 P의 x좌표를 a라 하면 점 P에서의 접선이 x축과 평행하므로 $f'(a)=0$에서

$3a^2-2a-2=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 모든 점 P의 x좌표의 곱은 $-\frac{2}{3}$이다.

0359 답 ①

$h(x)=f(x)g(x)$라 하면

$h'(x)=(2x+1)(2x-1)+(x^2+x-3)\times 2$

$=6x^2+2x-7$

따라서 점 $(1, -1)$에서의 접선의 기울기는 $h'(1)=1$

0360 답 ①

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+x+1$이라 하면

$f'(x)=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$

즉, $f'(x)$는 $x=2$에서 최소이고 최솟값은 -3이다.

따라서 구하는 기울기 m의 최솟값은 -3이다.

0361 답 ④

$f(x)=x^3+ax+b$라 하면 $f'(x)=3x^2+a$

점 $(1, 5)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=5$에서

$1+a+b=5$ $\therefore a+b=4$ ····· ㉠

점 $(1, 5)$에서의 접선의 기울기는 4이므로 $f'(1)=4$에서

$3+a=4$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=3$

$\therefore a+2b=1+2\times 3=7$

0362 답 $\sqrt{3}$

함수 $f(x)=x^3-4x+1$에서 x의 값이 -3에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$\frac{f(3)-f(-3)}{3-(-3)}=\frac{16-(-14)}{6}=5$ ····· i

이때 $f'(x)=3x^2-4$이므로 점 $(k, f(k))$에서의 접선의 기울기는

$f'(k)=3k^2-4$ ····· ii

즉, $3k^2-4=5$이므로

$3k^2=9$, $k^2=3$ $\therefore k=\sqrt{3}$ ($\because k>0$) ····· iii

채점 기준	
i x의 값이 -3에서 3까지 변할 때의 평균변화율 구하기	30%
ii 점 $(k, f(k))$에서의 접선의 기울기를 k에 대한 식으로 나타내기	30%
iii k의 값 구하기	40%

0363 답 ⑤

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기가 -2이므로

$f(1)=3$, $f'(1)=-2$

이때 $g(x)=(2x^2-1)f(x)$에서

$g'(x)=4xf(x)+(2x^2-1)f'(x)$

$\therefore g'(1)=4f(1)+f'(1)$

$=4\times 3+(-2)=10$

0364 답 2

$f(x)=x^2-x+a$라 하고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x-2$의 접점의 좌표를 $(t, 3t-2)$라 하면 접선의 기울기가 3이므로

$f'(t)=3$

이때 $f'(x)=2x-1$이므로

$2t-1=3$ $\therefore t=2$

즉, 접점의 좌표는 $(2, 4)$ ····· i

따라서 곡선 $y=f(x)$는 점 $(2, 4)$를 지나므로

$2+a=4$ $\therefore a=2$ ····· ii

채점 기준	
i 접점의 좌표 구하기	50%
ii a의 값 구하기	50%

0365 답 ③

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x^2)-3}{x+1}=2$에서 $x\to -1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to -1}\{f(x^2)-3\}=0$이므로

$f(1)-3=0$ $\therefore f(1)=3$

$x^2=t$로 놓으면 $x\to -1$일 때 $t\to 1$이므로

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x^2)-3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to -1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x-1)\right\}$

$=\lim_{t\to 1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\times\lim_{x\to -1}(x-1)$

$=-2f'(1)$

즉, $-2f'(1)=2$이므로 $f'(1)=-1$

따라서 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$이다.

0366 답 ④

주어진 식을 a에 대하여 정리하면

$a(x+1)^2+(x^3+x-y)=0$

이 등식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$(x+1)^2=0$, $x^3+x-y=0$

$\therefore x=-1$, $y=-2$

즉, 주어진 곡선은 항상 점 P$(-1, -2)$를 지난다.

이때 $f(x)=x^3+ax^2+(2a+1)x+a$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+2a+1$

따라서 점 P$(-1, -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=4$이다.

0367 답 ③

$f(x)=ax^2-1$, $g(x)=bx^3+cx$라 하면 두 곡선이 점 $(2, 1)$에서 만나므로 $f(2)=1$에서

$4a-1=1$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$g(2)=1$에서 $8b+2c=1$ ····· ㉠

즉, $f(x)=\frac{1}{2}x^2-1$, $g(x)=bx^3+cx$에서

$f'(x)=x$, $g'(x)=3bx^2+c$

두 곡선의 교점 $(2, 1)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(2)g'(2)=-1$에서

$2(12b+c)=-1$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=-\frac{1}{8}$, $c=1$

$\therefore 8(a+b+c)=8\left\{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{8}\right)+1\right\}=11$

0368 답 ④

점 $(1, f(1))$에서의 접선과 직선 $y=-2x+1$이 서로 수직이므로

$f'(1)=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{n}=h$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $h\to0$이므로

$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f\left(1-\frac{3}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3}\times(-3)$

$=f'(1)+3f'(1)=4f'(1)$

$=4\times\frac{1}{2}=2$

0369 답 ①

곡선 $y=f(x)$는 두 점 $(-1, 3)$, $(2, -6)$을 지나므로

$f(-1)=3$, $f(2)=-6$

이때 점 $(2, -6)$에서의 접선의 기울기는 두 점 $(-1, 3)$, $(2, -6)$을 지나는 직선의 기울기와 같으므로

$f'(2)=\frac{-6-3}{2-(-1)}=-3$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f(-1)=3$에서 $a-b+c=4$ ····· ㉠

$f(2)=-6$에서 $4a+2b+c=-14$ ····· ㉡

$f'(2)=-3$에서 $4a+b=-15$ ····· ㉢

㉡−㉠을 하면

$3a+3b=-18$ $\therefore a+b=-6$ ····· ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-3$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $c=4$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-3x+4$이므로 $f(3)=-5$

0370 답 ④

$f(x)=x^4-x^2+x-3$이라 하면

$f'(x)=4x^3-2x+1$

점 $(1, -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3$이므로

접선의 방정식은

$y-(-2)=3(x-1)$ $\therefore y=3x-5$

이 직선이 점 $(a, 4)$를 지나므로

$3a-5=4$ $\therefore a=3$

0371 답 ①

$f(x)=x^3+2x^2-2x-1$이라 하면

$f'(x)=3x^2+4x-2$

점 $(-2, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=2$이므로

접선의 방정식은

$y-3=2\{x-(-2)\}$ $\therefore y=2x+7$

따라서 구하는 접선의 y절편은 7이다.

0372 답 ②

$f(x)=2x^3-3x+1$이라 하면

$f'(x)=6x^2-3$

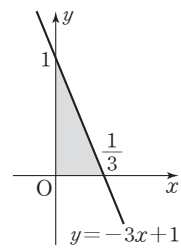
점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=-3$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-3(x-0)$ $\therefore y=-3x+1$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{6}$



0373 답 ②

$f(x)=x^4+ax^3+1$이라 하면 점 $(-1, 3)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(-1)=3$에서

$2-a=3$ $\therefore a=-1$

즉, $f(x)=x^4-x^3+1$이므로 $f'(x)=4x^3-3x^2$

점 $(-1, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-7$이므로

접선의 방정식은

$y-3=-7\{x-(-1)\}$ $\therefore y=-7x-4$

따라서 $a=-1$, $b=-7$, $c=-4$이므로

$abc=(-1)\times(-7)\times(-4)=-28$

0374 답 ③

$g'(x)=f(x)=(2x-3)^2$이므로 점 $(3, g(3))$에서의 접선의 기울기는 $g'(3)=f(3)=9$

이때 접선의 y절편이 -6이므로 접선의 방정식은

$y=9x-6$

따라서 구하는 접선의 x절편은 $\frac{2}{3}$이다.

0375 답 ④

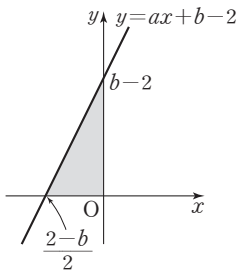
$f(x)=x^2+a$라 하면 $f'(x)=2x$

점 $(1, b)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=b$에서

$1+a=b$ ····· ㉠

점 $(1, b)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로
접선의 방정식은
$y-b=2(x-1)$ $\therefore y=2x+b-2$
이 접선의 x절편은 $\frac{2-b}{2}$이고, y절편은 $b-2$이다.

이때 $b>2$에서 $\frac{2-b}{2}<0$, $b-2>0$이므로 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는



$\frac{1}{2}\times\frac{b-2}{2}\times(b-2)=\frac{(b-2)^2}{4}$
즉, $\frac{(b-2)^2}{4}=4$이므로
$(b-2)^2=16$ $\therefore b=6$ ($\because b>2$)
$b=6$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=5$
$\therefore a+b=5+6=11$

0376 답 ③

$f(x)=x^3-3x^2+3x+1$이라 하면
$f'(x)=3x^2-6x+3$
점 P(3, 10)에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=12$이므로
접선의 방정식은
$y-10=12(x-3)$ $\therefore y=12x-26$ …… ㉠
$g(x)=x^3+k$라 하면 $g'(x)=3x^2$
점 Q의 좌표를 (a, a^3+k)라 하면 점 Q에서의 접선의 기울기는
$g'(a)=3a^2$이므로 접선의 방정식은
$y-(a^3+k)=3a^2(x-a)$
$\therefore y=3a^2x-2a^3+k$ …… ㉡
이때 ㉠, ㉡이 일치하므로
$3a^2=12$, $-2a^3+k=-26$
$3a^2=12$에서
$a^2=4$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=2$
$-2a^3+k=-26$에서 $k=2a^3-26$이므로
$a=-2$일 때 $k=-42$, $a=2$일 때 $k=-10$
따라서 구하는 모든 상수 k의 값의 곱은
$(-42)\times(-10)=420$

공통수학2 다시보기

두 직선 $y=mx+n$, $y=m'x+n'$이
① 서로 평행하다. ➡ $m=m'$, $n\neq n'$
② 일치한다. ➡ $m=m'$, $n=n'$

0377 답 ②

$f(x)=2x^2-\frac{1}{2}$, $g(x)=-x^2+ax$라 하면
$f'(x)=4x$, $g'(x)=-2x+a$
두 곡선의 교점의 x좌표를 t라 하면 $f(t)=g(t)$에서
$2t^2-\frac{1}{2}=-t^2+at$ $\therefore at=3t^2-\frac{1}{2}$ …… ㉠
두 접선이 서로 수직이므로 $f'(t)g'(t)=-1$에서
$4t(-2t+a)=-1$ $\therefore 8t^2-4at=1$
㉠을 이 식에 대입하면
$8t^2-4\left(3t^2-\frac{1}{2}\right)=1$, $4t^2=1$
$\therefore t=-\frac{1}{2}$ 또는 $t=\frac{1}{2}$
$t=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-\frac{1}{2}$
$t=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=\frac{1}{2}$
따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 곱은
$\left(-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

0378 답 ①

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 1)$에서의 접선의 방정식이 $y=4x-7$이므로
$f(2)=1$, $f'(2)=4$
$g(x)=(x^2-2x)f(x)$라 하면 $g(2)=0$이고
$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x)f'(x)$
곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=2$인 점에서의 접선의 기울기는
$g'(2)=2f(2)=2\times1=2$ ← $g(2)=0$이므로 이 점의 좌표는 $(2, 0)$
이므로 접선의 방정식은
$y-0=2(x-2)$ $\therefore y=2x-4$
이 직선이 점 $(k, 4)$를 지나므로
$4=2k-4$ $\therefore k=4$

0379 답 $4\sqrt{2}$

$\lim_{x\to2}\frac{f(x-1)-3}{x-2}=-1$에서 $x\to2$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.
즉, $\lim_{x\to2}\{f(x-1)-3\}=0$이므로 $f(1)=3$
$x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이고, $x\to2$일 때 $t\to1$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x-1)-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x-1)-f(1)}{x-2}$$
$$=\lim_{t\to1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}$$
$$=f'(1)$$

$\therefore f'(1)=-1$
점 $(1, 3)$에서의 접선의 기울기는 -1이므로 접선의 방정식은
$y-3=-(x-1)$ $\therefore y=-x+4$ …… ⓘ
이 직선의 x절편은 4, y절편은 4이므로
A(4, 0), B(0, 4) …… ⓘⓘ
따라서 두 점 A, B 사이의 거리는
$\overline{AB}=\sqrt{(0-4)^2+(4-0)^2}=4\sqrt{2}$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 방정식 구하기	60 %
ⓘⓘ 두 점 A, B의 좌표 구하기	20 %
ⓘⓘⓘ 두 점 A, B 사이의 거리 구하기	20 %

0380 답 ⑤

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-2}{x-a}=4$에서 $x\to a$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0이다.

즉, $\lim_{x\to a}\{f(x)-2\}=0$이므로 $f(a)=2$

이때 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-2}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$이므로

$f'(a)=4$

점 $(a, 2)$에서의 접선의 기울기는 4이므로 접선의 방정식은

$y-2=4(x-a)$ $\therefore y=4x-4a+2$

이 직선의 y절편이 6이므로

$-4a+2=6$, $4a=-4$ $\therefore a=-1$

$\therefore f(-1)=2$, $f'(-1)=4$

이때 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$이므로

$f(x)=x^3+px^2+qx$ (p, q는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2px+q$

$f(-1)=2$에서

$-1+p-q=2$ $\therefore p-q=3$ ····· ㉠

$f'(-1)=4$에서

$3-2p+q=4$ $\therefore -2p+q=1$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=-4$, $q=-7$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2-7x$이므로 $f(-2)=-10$

0381 답 ④

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=2$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

점 $(0, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=b$이므로 접선의 방정식은

$y-2=b(x-0)$ $\therefore y=bx+2$

이 직선이 점 $(2, -2)$를 지나므로

$-2=2b+2$ $\therefore b=-2$

또 곡선 $y=x^3+ax^2-2x+2$가 점 $(2, -2)$를 지나므로

$-2=6+4a$ $\therefore a=-2$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2-2x+2$이므로 $f(3)=5$

0382 답 $\frac{9}{2}$

$f(x)=x^3-3x^2+x+2$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x+1$

점 P$(2, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=1$이므로

접선의 방정식은

$y-0=x-2$ $\therefore y=x-2$ ····· ⓘ

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x-2$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-3x^2+x+2=x-2$

$x^3-3x^2+4=0$, $(x+1)(x-2)^2=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

즉, 점 Q의 x좌표는 -1이므로 두 점 Q, H의 좌표는

Q$(-1, -3)$, H$(-1, 0)$ ····· ⓘⓘ

따라서 구하는 삼각형 HPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 3\times 3=\frac{9}{2}$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 점 P$(2, 0)$에서의 접선의 방정식 구하기	40%
ⓘⓘ 두 점 Q, H의 좌표 구하기	40%
ⓘⓘⓘ 삼각형 HPQ의 넓이 구하기	20%

0383 답 ③

$f(x)=x^3-2kx-k+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-2k$

점 P$(-1, k)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=3-2k$이므로

접선의 방정식은

$y-k=(3-2k)\{x-(-1)\}$

$\therefore y=(3-2k)x+3-k$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=(3-2k)x+3-k$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-2kx-k+1=(3-2k)x+3-k$

$x^3-3x-2=0$, $(x+1)^2(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

즉, 점 Q의 x좌표는 2이므로 점 Q의 좌표는 $(2, 9-5k)$이고,

$\overline{PQ}=3$에서

$\sqrt{\{2-(-1)\}^2+\{(9-5k)-k\}^2}=3$

$\sqrt{9+(9-6k)^2}=3$, $(9-6k)^2=0$ $\therefore k=\frac{3}{2}$

0384 답 ③

$f(x)=x^3$, $g(x)=2x^2-x$라 하면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=4x-1$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$f(t)=g(t)$에서

$t^3=2t^2-t$, $t^3-2t^2+t=0$

$t(t-1)^2=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=1$

$f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2=4t-1$, $3t^2-4t+1=0$

$(3t-1)(t-1)=0$ $\therefore t=\frac{1}{3}$ 또는 $t=1$

즉, 두 곡선은 $t=1$인 점에서 공통인 접선을 갖는다.

따라서 접점의 좌표는 $(1, 1)$이고, 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=g'(1)=3$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=3(x-1)$ $\therefore y=3x-2$

0385 답 ⑤

$f(x)=x^3-ax+b$, $g(x)=-2x^2+c$라 하면

$f'(x)=3x^2-a$, $g'(x)=-4x$

점 $(1, 0)$에서 두 곡선이 만나므로 $f(1)=g(1)=0$에서

$1-a+b=0$, $-2+c=0$

$\therefore a-b=1$, $c=2$ ····· ㉠

점 $(1, 0)$에서 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$에서

$3-a=-4$ $\therefore a=7$

$a=7$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=6$

$\therefore a+b+c=7+6+2=15$

0386 답 ①

$f(x)=x^3+ax$, $g(x)=x^2+3$이라 하면

$f'(x)=3x^2+a$, $g'(x)=2x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

$f(t)=g(t)$에서

$t^3+at=t^2+3$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2+a=2t$ $\therefore a=2t-3t^2$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$t^3+t(2t-3t^2)=t^2+3$

$2t^3-t^2+3=0$, $(t+1)(2t^2-3t+3)=0$

$\therefore t=-1$ ($\because t$는 실수)

$2t^2-3t+3=2\left(t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{8}>0$

따라서 $t=-1$을 ㉡에 대입하여 풀면 $a=-5$

0387 답 ④

$f(x)=x^3+3$, $g(x)=ax^2+bx$라 하면

$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=2ax+b$

두 곡선이 $x=t$인 제1사분면 위의 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면 이 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(t)=g'(t)=3$, $f(t)=g(t)$

$f'(t)=3$에서

$3t^2=3$, $t^2=1$ $\therefore t=1$ ($\because t>0$)

$f(1)=4$에서 접점의 좌표는 $(1, 4)$이므로 $g(1)=4$에서

$a+b=4$ ····· ㉠

또 $g'(1)=3$에서

$2a+b=3$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=5$

이때 접선 $y=3x+k$는 점 $(1, 4)$를 지나므로

$3+k=4$ $\therefore k=1$

$\therefore ab+k=(-1)\times5+1=-4$

0388 답 ③

$f(x)=x^3-x+3$이라 하면 $f'(x)=3x^2-1$

점 $(-1, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=2$이므로

접선의 방정식은

$y-3=2\{x-(-1)\}$ $\therefore y=2x+5$ ····· ㉠

$g(x)=x^4-2x+a$라 하면 $g'(x)=4x^3-2$

접선 ㉠과 곡선 $y=g(x)$의 접점의 좌표를 $(t, g(t))$라 하면 접선의 기울기는 2이므로 $g'(t)=2$에서

$4t^3-2=2$, $t^3=1$ $\therefore t=1$ ($\because t$는 실수)

점 $(1, g(1))$은 접선 ㉠ 위의 점이므로 $g(1)=7$에서

$-1+a=7$ $\therefore a=8$

0389 답 $y=2x$

$\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)-g(x)}{x^2-1}=5$에서 $x\to-1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to-1}\{f(x)-g(x)\}=0$이므로

$f(-1)-g(-1)=0$ $\therefore f(-1)=g(-1)$ ····· ㉠

이때 $g(x)=x^3f(x)-4$의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-f(-1)-4$ ($\because$ ㉠)

즉, $2f(-1)=-4$이므로 $f(-1)=-2$

또 ㉠에서 $g(-1)=f(-1)=-2$ ····· ⓘ

이때

$$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-g(x)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)+f(-1)-g(x)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)+g(-1)-g(x)}{(x+1)(x-1)}\ (\because \text{㉠})$$

$$=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\times\frac{1}{x-1}\right\}$$

$$-\lim_{x\to-1}\left\{\frac{g(x)-g(-1)}{x-(-1)}\times\frac{1}{x-1}\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\{f'(-1)-g'(-1)\}$$

즉, $-\frac{1}{2}\{f'(-1)-g'(-1)\}=5$이므로

$f'(-1)-g'(-1)=-10$ ····· ㉡

이때 $g(x)=x^3f(x)-4$에서

$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x)$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$g'(-1)=3\times(-2)-\{g'(-1)-10\}$ ($\because$ ㉡)

$2g'(-1)=4$ $\therefore g'(-1)=2$ ····· ⓘⓘ

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-1, g(-1))$, 즉 점 $(-1, -2)$에서의 접선의 기울기는 2이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(-2)=2\{x-(-1)\}$ $\therefore y=2x$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $f(-1)$, $g(-1)$의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ $g'(-1)$의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=-1$인 점에서의 접선의 방정식 구하기	20 %

0390 답 ⑤

점 $(0, 0)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(0)=0$

점 $(0, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)$이므로 접선의 방정식은

$y=f'(0)x$ ····· ㉠

$g(x)=xf(x)$라 하면 점 $(1, 2)$는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$g(1)=f(1)=2$

$g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로 점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는

$g'(1)=f(1)+f'(1)=2+f'(1)$

이므로 접선의 방정식은

$y-2=\{2+f'(1)\}(x-1)$

$\therefore y=\{2+f'(1)\}x-f'(1)$ ····· ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$2+f'(1)=f'(0)$, $-f'(1)=0$

$\therefore f'(0)=2$, $f'(1)=0$

이때 $f(x)$는 삼차함수이고 $f(0)=0$이므로

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f(1)=2$에서 $a+b+c=2$ ····· ㉢
$f'(0)=2$에서 $c=2$
$f'(1)=0$에서 $3a+2b+c=0$ ····· ㉣
$c=2$를 ㉢, ㉣에 각각 대입하여 정리하면
$a+b=0$, $3a+2b=-2$
두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=2$
따라서 $f'(x)=-6x^2+4x+2$이므로 $f'(2)=-14$

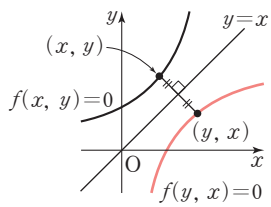
0391 답 ②

점 $(a, -1)$은 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로
$g(a)=-1$ $\therefore f(-1)=a$
즉, $f(x)=x^2-6x+4\,(x<3)$에서 $a=11$
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(11, -1)$에서의 접선은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 11)$에서의 접선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것과 같다.
$f'(x)=2x-6$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, 11)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-8$이므로 접선의 방정식은
$y-11=-8\{x-(-1)\}$ $\therefore y=-8x+3$
이 직선을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면
$x=-8y+3$
따라서 $y=0$을 대입하면 구하는 접선의 x절편은 3이다.

참고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 (a, b)에서의 접선과 함수 $y=g(x)$의 그래프 위의 점 (b, a)에서의 접선도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

공통수학2 다시보기

방정식 $f(x, y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y, x)=0$이다.



0392 답 ③

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로
$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
점 $(-2, f(-2))$에서의 접선의 기울기는
$f'(-2)=12-4a+b$
이므로 접선의 방정식은
$y-(-8+4a-2b+c)=(12-4a+b)\{x-(-2)\}$
$\therefore y=(12-4a+b)x+16-4a+c$
이 직선이 점 $(1, 3)$을 지나므로
$3=28-8a+b+c$ $\therefore 8a-b-c=25$ ····· ㉠
이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, 3)$을 지나므로 $f(2)=3$에서
$8+4a+2b+c=3$ $\therefore 4a+2b+c=-5$ ····· ㉡
점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기는
$f'(2)=12+4a+b$
이고, 두 점 $(2, 3)$, $(1, 3)$을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{3-3}{1-2}=0$이므로
$12+4a+b=0$ $\therefore 4a+b=-12$ ····· ㉢
㉠+㉡을 하면 $12a+b=20$ ····· ㉣
㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-28$
이것을 ㉠에 대입하여 풀면 $c=35$
따라서 $f(x)=x^3+4x^2-28x+35$이므로 $f(0)=35$

0393 답 ①

$f(x)=x^3-10$, $g(x)=x^3+22$라 하면
$f'(x)=3x^2$, $g'(x)=3x^2$
접선 $y=h(x)$와 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 접점을 각각 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, g(\beta))$라 하면 $f'(\alpha)=g'(\beta)$에서
$3\alpha^2=3\beta^2$, $\alpha^2=\beta^2$
$\therefore \alpha=\beta$ 또는 $\alpha=-\beta$
이때 $\alpha=\beta$이면 $f(\alpha)=g(\alpha)$에서
$\alpha^3-10=\alpha^3+22$
이를 만족시키는 실수 α의 값은 존재하지 않으므로 $\alpha\neq\beta$
$\therefore \alpha=-\beta$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (α, α^3-10)에서의 접선의 기울기는 $f'(\alpha)=3\alpha^2$이므로 접선의 방정식은
$y-(\alpha^3-10)=3\alpha^2(x-\alpha)$
$\therefore y=3\alpha^2x-2\alpha^3-10$ ····· ㉠
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(-\alpha, -\alpha^3+22)$에서의 접선의 기울기는 $g'(-\alpha)=3\alpha^2$이므로 접선의 방정식은
$y-(-\alpha^3+22)=3\alpha^2\{x-(-\alpha)\}$
$\therefore y=3\alpha^2x+2\alpha^3+22$ ····· ㉡
이때 ㉠, ㉡이 일치하므로
$-2\alpha^3-10=2\alpha^3+22$, $4\alpha^3=-32$
$\alpha^3=-8$ $\therefore \alpha=-2$ ($\because \alpha$는 실수)
$\alpha=-2$를 ㉠에 대입하면 $y=12x+6$, 즉 $h(x)=12x+6$이므로
$h(1)=18$

0394 답 ③

$f(x)=x^2+1$에서 $f'(x)=2x$
점 P$(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로
접선 l의 방정식은
$y-2=2(x-1)$ $\therefore y=2x$
점 Q의 좌표를 (a, b)라 하면 점 Q는 직선 $y=2x$ 위의 점이므로
$b=2a$ ····· ㉠
$g(x)=-(x-3)^2+k$에서 $g'(x)=-2(x-3)$
점 Q(a, b)에서의 접선의 기울기는 2이므로 $g'(a)=2$에서
$-2(a-3)=2$ $\therefore a=2$
$a=2$를 ㉠에 대입하면 $b=4$
즉, 점 Q의 좌표는 $(2, 4)$

이때 점 Q는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로 $g(2)=4$에서

$4=-1+k$ $\therefore k=5$

$\therefore g(x)=-(x-3)^2+5$

곡선 $y=g(x)$와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$-(x-3)^2+5=0$, $x^2-6x+4=0$

이때 두 점 R, S의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4$이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=36-16=20$

$\therefore \overline{SR}=|\alpha-\beta|=2\sqrt{5}$

따라서 구하는 삼각형 QRS의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 4=4\sqrt{5}$

0395 답 ①

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 점 $(2, k)$에서 만나므로

$f(2)=g(2)=k$

점 $(2, k)$에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$f'(2)g'(2)=-1$ ····· ㉠

이때 곡선 $y=f(x)g(x)$ 위의 점 $(2, k^2)$에서의 접선의 기울기가 0이므로 $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$에서

$f'(2)g(2)+f(2)g'(2)=0$

$kf'(2)+kg'(2)=0$

$\therefore f'(2)+g'(2)=0 (\because k\neq 0)$

즉, $g'(2)=-f'(2)$이므로 이것을 ㉠에 대입하면

$f'(2)\times\{-f'(2)\}=-1$, $\{f'(2)\}^2=1$

$\therefore f'(2)=-1$ 또는 $f'(2)=1$

㉠에서 $f'(2)=-1$이면 $g'(2)=1$이고,

$f'(2)=1$이면 $g'(2)=-1$이다.

그런데 $f'(2)>g'(2)$이므로 $f'(2)=1$, $g'(2)=-1$

$\therefore f'(2)-g'(2)=1-(-1)=2$

0396 답 ③

$f(x)=x^2+x+2$라 하면 $f'(x)=2x+1$

접점의 좌표를 (t, t^2+t+2)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 -1이므로 $f'(t)=-1$에서

$2t+1=-1$ $\therefore t=-1$

즉, 접점의 좌표는 $(-1, 2)$이므로 접선의 방정식은

$y-2=-\{x-(-1)\}$ $\therefore y=-x+1$

따라서 구하는 직선의 y절편은 1이다.

0397 답 ⑤

$f(x)=-x^3+7x-4$라 하면 $f'(x)=-3x^2+7$

점 P의 좌표를 $(t, -t^3+7t-4)$ $(t>0)$라 하면

직선 $x-5y+10=0$, 즉 $y=\frac{1}{5}x+2$에 수직인 직선의 기울기는 -5이므로 $f'(t)=-5$에서

$-3t^2+7=-5$, $t^2=4$ $\therefore t=2 (\because t>0)$

따라서 점 P의 좌표는 $(2, 2)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$

0398 답 ②

$f(x)=2x^2+x-3$이라 하면 $f'(x)=4x+1$

접점의 좌표를 $(t, 2t^2+t-3)$이라 하면 직선 $y=3x-1$을 평행이동한 직선의 기울기는 3이므로 $f'(t)=3$에서

$4t+1=3$ $\therefore t=\frac{1}{2}$

즉, 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$이므로 $m=\frac{1}{2}$, $n=-2$

$\therefore mn=\frac{1}{2}\times(-2)=-1$

참고 직선을 평행이동하여도 기울기는 변하지 않는다.

0399 답 ⑤

$f(x)=x^3+kx^2-5$라 하면 $f'(x)=3x^2+2kx$

기울기가 1인 두 접선의 접점의 x좌표 p, q는 방정식 $f'(x)=1$, 즉 $3x^2+2kx-1=0$의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$p+q=-\frac{2}{3}k$, $pq=-\frac{1}{3}$

따라서 $(p-q)^2=(p+q)^2-4pq$에서

$4=\frac{4}{9}k^2+\frac{4}{3}$, $k^2=6$ $\therefore k=\sqrt{6} (\because k>0)$

0400 답 ④

$f(x)=2x^3-4x+3$이라 하면 $f'(x)=6x^2-4$

점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$이므로 기울기가 2인 또 다른 접선의 접점의 좌표를 $(t, 2t^3-4t+3)$ $(t\neq 1)$이라 하면

$f'(t)=2$에서

$6t^2-4=2$, $t^2=1$ $\therefore t=-1 (\because t\neq 1)$

즉, 접점의 좌표는 $(-1, 5)$이므로 접선의 방정식은

$y-5=2\{x-(-1)\}$ $\therefore y=2x+7$

이 직선이 점 $(a, 3)$을 지나므로

$3=2a+7$ $\therefore a=-2$

0401 답 12

$f(x)=x^3+3x+4$라 하면 $f'(x)=3x^2+3$

접점의 좌표를 (t, t^3+3t+4)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 6이므로 $f'(t)=6$에서

$3t^2+3=6$, $t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

즉, 접점의 좌표는 $(-1, 0)$ 또는 $(1, 8)$ ····· ⓘ

이 두 점은 모두 직선 $y=6x+k$ 위의 점이므로

$0=-6+k$ 또는 $8=6+k$

$\therefore k=6$ 또는 $k=2$ ····· ⓘⓘ

따라서 구하는 모든 상수 k의 값의 곱은

$6\times 2=12$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 접점의 좌표 구하기	50 %
ⓘⓘ k의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 모든 상수 k의 값의 곱 구하기	10 %

0402 답 ④

$f(x)=x^3+x+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2+1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+t+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+t+1)=(3t^2+1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+1)x-2t^3+1$

이 직선이 $y=mx+3$과 일치해야 하므로

$3t^2+1=m,\ -2t^3+1=3$

이때 $-2t^3+1=3$에서

$t^3=-1 \quad \therefore t=-1\ (\because t$는 실수)

따라서 $t=-1$을 $3t^2+1=m$에 대입하면 $m=4$

0403 답 ①

$f'(x)=3x^2+2ax+8$이고, 점 $(1,\ f(1))$에서의 접선의 기울기가 -1이므로 $f'(1)=-1$에서

$2a+11=-1 \quad \therefore a=-6$

즉, $f(x)=x^3-6x^2+8x-5$이므로 $f(1)=-2$

점 $(1,\ -2)$에서의 접선의 방정식은

$y-(-2)=-(x-1) \quad \therefore y=-x-1$

이 직선이 점 $(2,\ b)$를 지나므로 $b=-3$

$\therefore ab=(-6)\times(-3)=18$

0404 답 ③

$f'(x)=3x^2+6ax-9a^2$이고, 직선 $y=3$이 곡선 $y=f(x)$에 접하므로 접점의 좌표를 $(t,\ 3)$이라 하면 접선의 기울기는 0이므로

$f'(t)=0$에서

$3t^2+6at-9a^2=0,\ 3(t+3a)(t-a)=0$

$\therefore t=-3a$ 또는 $t=a$

이때 점 $(t,\ 3)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(t)=3$에서

$t^3+3at^2-9a^2t+2=3$

$\therefore t^3+3at^2-9a^2t-1=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

(i) $t=-3a$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$27a^3-1=0,\ a^3=\frac{1}{27} \quad \therefore a=\frac{1}{3}\ (\because a>0)$

(ii) $t=a$를 ㉠에 대입하여 정리하면

$-5a^3-1=0,\ a^3=-\frac{1}{5}$

이를 만족시키는 양수 a의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=x^3+x^2-x+2$이므로 $f(2)=12$

0405 답 ③

$f(x)=2x^2+x+3$이라 하면 $f'(x)=4x+1$

점 $(-1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-3$이므로 접선의 방정식은

$y-4=-3\{x-(-1)\} \quad \therefore y=-3x+1$

곡선 $y=x^3-3x^2+1$을 y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면

$y=x^3-3x^2+1+k$

$g(x)=x^3-3x^2+1+k$라 하면 $g'(x)=3x^2-6x$

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=-3x+1$의 접점의 좌표를 $(t,\ -3t+1)$이라 하면 $g'(t)=-3$에서

$3t^2-6t=-3,\ 3(t-1)^2=0 \quad \therefore t=1$

즉, 접점의 좌표는 $(1,\ -2)$이므로 $g(1)=-2$에서

$-1+k=-2 \quad \therefore k=-1$

0406 답 8

$f(x)=2x^3-3x^2-5x+1$이라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-5$

점 A에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=7$ ····· ⓘ

점 B의 x좌표를 $t\,(t\neq2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 7이므로 $f'(t)=7$에서

$6t^2-6t-5=7,\ 6t^2-6t-12=0$

$6(t+1)(t-2)=0 \quad \therefore t=-1\ (\because t\neq2)$

즉, 점 B의 좌표는 $(-1,\ 1)$ ····· ⓘⓘ

점 B에서의 접선의 기울기는 7이므로 접선의 방정식은

$y-1=7\{x-(-1)\} \quad \therefore y=7x+8$ ····· ⓘⓘⓘ

따라서 구하는 접선의 y절편은 8이다. ····· ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ 점 A에서의 접선의 기울기 구하기	30%
ⓘⓘ 점 B의 좌표 구하기	30%
ⓘⓘⓘ 점 B에서의 접선의 방정식 구하기	30%
ⓘⓥ 점 B에서의 접선의 y절편 구하기	10%

0407 답 ④

$f(x)=2x^2-3x+1$이라 하면 $f'(x)=4x-3$

점 $(1,\ 0)$에서의 접선 l의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 직선 l과 수직인 직선을 m이라 하면 직선 m의 기울기는 -1이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 m의 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면

$f'(t)=-1$에서

$4t-3=-1 \quad \therefore t=\frac{1}{2}$

즉, 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$이므로 직선 m의 방정식은

$y-0=-\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad \therefore y=-x+\frac{1}{2}$

따라서 이 직선이 점 $(k,\ -1)$을 지나므로

$-1=-k+\frac{1}{2} \quad \therefore k=\frac{3}{2}$

0408 답 ②

$f(x)=-x^3+x^2+kx+1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+2x+k=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}+k$

이므로 $f'(x)$는 $x=\frac{1}{3}$일 때 최댓값 $\frac{1}{3}+k$를 갖는다.

따라서 $\frac{1}{3}+k=1$이므로 $k=\frac{2}{3}$

0409 답 ③

$f(x)=x^3+6x^2+14x+9$라 하면

$f'(x)=3x^2+12x+14=3(x+2)^2+2$

이므로 $f'(x)$는 $x=-2$일 때 최솟값 2를 갖는다.

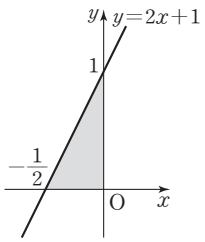
즉, 접점의 좌표는 $(-2, -3)$이고 접선의 기울기는 2이므로 접선의 방정식은

$y-(-3)=2\{x-(-2)\}$

$\therefore y=2x+1$

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{4}$



0410 답 $y=4x+6$

$f(x)=x^3-3x^2+7x+5$라 하면 $f'(x)=3x^2-6x+7$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+7t+5)라 하면 접선의 기울기가 m이므로 $f'(t)=m$에서

$3t^2-6t+7=m$ $\therefore 3t^2-6t+7-m=0$

이때 이 이차방정식을 만족시키는 실수 t의 값이 1개이어야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-3)^2-3(7-m)=0$

$-12+3m=0$ $\therefore m=4$ …… ⅰ

즉, $f'(t)=4$이므로

$3t^2-6t+7=4$, $3t^2-6t+3=0$

$3(t-1)^2=0$ $\therefore t=1$

즉, 접점의 좌표는 $(1, 10)$ …… ⅱ

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-10=4(x-1)$ $\therefore y=4x+6$ …… ⅲ

채점 기준	
ⅰ m의 값 구하기	60%
ⅱ 접점의 좌표 구하기	20%
ⅲ 접선의 방정식 구하기	20%

0411 답 ⑤

$f(x)=2x^3-6$이라 하면 $f'(x)=6x^2$

접점의 좌표를 $(t, 2t^3-6)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 6이므로 $f'(t)=6$에서

$6t^2=6$, $t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

즉, 접점의 좌표는 $(-1, -8)$ 또는 $(1, -4)$이므로 접선의 방정식은

$y-(-8)=6\{x-(-1)\}$ 또는 $y-(-4)=6(x-1)$

$\therefore y=6x-2$ 또는 $y=6x-10$

따라서 두 접선 사이의 거리는 직선 $y=6x-2$ 위의 점 $(0, -2)$와 직선 $y=6x-10$, 즉 $6x-y-10=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|2-10|}{\sqrt{6^2+(-1)^2}}=\frac{8}{\sqrt{37}}=\frac{8\sqrt{37}}{37}$

0412 답 ①

$f(x)=x^3-3x^2-5x+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-6x-5$

기울기가 4인 접선의 접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2-5t+1)이라 하면

$f'(t)=4$에서

$3t^2-6t-5=4$, $3t^2-6t-9=0$

$3(t+1)(t-3)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉, 두 접점 A, B의 좌표는 $(-1, 2)$, $(3, -14)$이므로

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2-14}{2}\right)$ $\therefore (1, -6)$

따라서 $m=1$, $n=-6$이므로

$m-n=1-(-6)=7$

0413 답 ⑤

$f(x)=-x^3+3x-6$에서 $f'(x)=-3x^2+3$

기울기가 -9인 접선의 접점의 좌표를 $(t, -t^3+3t-6)$이라 하면

$f'(t)=-9$에서

$-3t^2+3=-9$, $t^2=4$ $\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

즉, 두 점 P, Q의 좌표는 $(-2, -4)$, $(2, -8)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{\{2-(-2)\}^2+\{-8-(-4)\}^2}=4\sqrt{2}$

두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

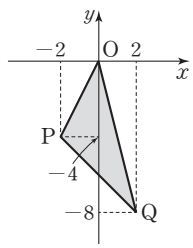
$y-(-8)=\frac{-8-(-4)}{2-(-2)}(x-2)$ $\therefore y=-x-6$

이때 원점과 직선 $y=-x-6$, 즉 $x+y+6=0$ 사이의 거리는

$\frac{|6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$

따라서 삼각형 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times3\sqrt{2}=12$



다른 풀이

세 점 O(0, 0), P(−2, −4), Q(2, −8)에 대하여 삼각형 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times|(-2)\times(-8)-(-4)\times2|=12$

0414 답 ⑤

곡선 위의 점 $P(a, b)$와 직선 $2x-y+1=0$, 즉 $y=2x+1$ 사이의 거리가 최소이려면 점 P가 기울기가 2인 접선의 접점이어야 한다.

$f(x)=-x^2+4x-2$라 하면 $f'(x)=-2x+4$

점 $P(a, b)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(a)=2$에서

$-2a+4=2$ $\therefore a=1$

이때 $P(1, b)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $b=1$

$\therefore a+b=1+1=2$

0415 답 ④

곡선 위의 점 P에서 직선 $y=-x-5$ 사이의 거리가 최소이려면 점 P가 기울기가 -1인 접선의 접점이어야 한다.

$f(x)=x^3-4x-1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-4$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-4t-1)$이라 하면 접선의 기울기가 -1이므로 $f'(t)=-1$에서

$3t^2-4=-1,\ t^2=1 \qquad \therefore\ t=1\ (\because\ t>0)$

즉, 접점의 좌표는 $(1,\ -4)$

따라서 d는 점 $(1,\ -4)$와 직선 $y=-x-5$, 즉 $x+y+5=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$d=\frac{|1-4+5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$\therefore\ d^2=(\sqrt{2})^2=2$

0416 답 ②

삼각형 OAP의 넓이가 최대가 될 때는 점 P와 직선 $y=x$ 사이의 거리가 최대일 때이므로 점 P는 직선 $y=x$와 평행한 접선의 접점이어야 한다.

$f(x)=ax(x-2)^2$에서

$f'(x)=a(x-2)^2+2ax(x-2)=a(x-2)(3x-2)$

즉, $x=\frac{1}{2}$인 점에서의 접선의 기울기가 1이어야 하므로

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=1$에서

$\frac{3}{4}a=1 \qquad \therefore\ a=\frac{4}{3}$

0417 답 $\frac{21}{2}$

삼각형 ABP의 넓이가 최소가 될 때는 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소일 때이므로 점 P는 직선 AB와 평행한 접선의 접점이어야 한다.

$f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$

직선 AB의 기울기는 $\frac{2-(-4)}{5-2}=2$이므로 직선 AB의 방정식은

$y-(-4)=2(x-2) \qquad \therefore\ 2x-y-8=0$ ····· ⓘ

점 P의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면 $f'(t)=2$에서

$2t=2 \qquad \therefore\ t=1$

즉, 점 P의 좌표는 $(1,\ 1)$이다. ····· ⓘⓘ

점 P와 직선 $2x-y-8=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-1-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}$$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(5-2)^2+(2+4)^2}=3\sqrt{5}$이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은

$\frac{1}{2}\times\frac{7\sqrt{5}}{5}\times3\sqrt{5}=\frac{21}{2}$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 직선 AB의 방정식 구하기	40 %
ⓘⓘ 점 P의 좌표 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값 구하기	30 %

0418 답 ①

삼각형 ABC의 넓이가 최대가 될 때는 점 C와 직선 l 사이의 거리가 최대일 때이므로 점 C는 직선 l과 평행한 접선의 접점이어야 한다.

$f(x)=-x^2+2x+3$이라 하면 $f'(x)=-2x+2$

직선 l의 기울기는 $\frac{0-3}{3-0}=-1$이므로 직선 l의 방정식은

$y=-x+3$, 즉 $x+y-3=0$

점 C의 좌표를 $(t,\ -t^2+2t+3)$이라 하면 $f'(t)=-1$에서

$-2t+2=-1 \qquad \therefore\ t=\frac{3}{2}$

즉, 점 C의 좌표는 $\left(\frac{3}{2},\ \frac{15}{4}\right)$이다.

점 C와 직선 $x+y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{\left|\frac{3}{2}+\frac{15}{4}-3\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{9}{4\sqrt{2}}=\frac{9\sqrt{2}}{8}$$

이때 $\overline{AB}=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$이므로 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\frac{9\sqrt{2}}{8}=\frac{27}{8}$

0419 답 $8\sqrt{2}$

사각형 ABCD가 정사각형이므로 두 직선 AB, CD는 평행하고 $\angle ABO=45^\circ$에서 두 직선 AB, CD의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$이다.

$f(x)=x^3-2x$라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

기울기가 1인 접선의 접점을 $(t,\ t^3-2t)$라 하면 $f'(t)=1$에서

$3t^2-2=1,\ t^2=1 \qquad \therefore\ t=-1$ 또는 $t=1$

즉, 접점의 좌표는 $(-1,\ 1)$ 또는 $(1,\ -1)$이므로 접선의 방정식은

$y-1=x-(-1)$ 또는 $y-(-1)=x-1$

$\therefore\ y=x+2$ 또는 $y=x-2$ ····· ⓘ

이때 직선 $y=x+2$의 x절편은 -2, y절편은 2이므로

$A(0,\ 2),\ B(-2,\ 0)$ ····· ⓘⓘ

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

따라서 정사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$4\times2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 접선의 방정식 구하기	50 %
ⓘⓘ 두 점 A, B의 좌표 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 정사각형 ABCD의 둘레의 길이 구하기	20 %

참고 접선 $y=x-2$에서 두 점 C, D의 좌표를 구하여 선분 CD의 길이를 구한 후, 정사각형 ABCD의 둘레의 길이를 구할 수도 있다.

0420 답 ①

$f(x)=x^3+ax^2+ax+3$이라 하면 $f'(x)=3x^2+2ax+a$

접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2at+a$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+at^2+at+3)=(3t^2+2at+a)(x-t)$

$\therefore\ y=(3t^2+2at+a)x-2t^3-at^2+3$

이 직선이 직선 $y=x+3$과 일치하므로

$3t^2+2at+a=1,\ -2t^3-at^2+3=3$

$\therefore\ 3t^2+2at+a-1=0,\ 2t^3+at^2=0$

이때 $2t^3+at^2=0$에서

$t^2(2t+a)=0 \qquad \therefore\ t=0$ 또는 $t=-\frac{a}{2}$

(i) $t=0$일 때, $3t^2+2at+a-1=0$에서

$a-1=0$ $\therefore a=1$

(ii) $t=-\frac{a}{2}$일 때, $3t^2+2at+a-1=0$에서

$\frac{1}{4}a^2-a+1=0$, $\frac{1}{4}(a-2)^2=0$ $\therefore a=2$

(i), (ii)에서 구하는 모든 상수 a의 값의 곱은

$1\times2=2$

다른 풀이

곡선 $y=x^3+ax^2+ax+3$과 직선 $y=x+3$의 교점의 x좌표를 구하면 $x^3+ax^2+ax+3=x+3$에서

$x^3+ax^2+(a-1)x=0$ $\therefore x(x^2+ax+a-1)=0$

주어진 곡선과 직선이 접하려면 이 삼차방정식이 중근을 가져야 한다.

(i) $x^2+ax+a-1=0$이 $x=0$을 근으로 갖는 경우

$a-1=0$ $\therefore a=1$

(ii) $x^2+ax+a-1=0$이 $x=0$이 아닌 중근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+ax+a-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4(a-1)=0$, $a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0$ $\therefore a=2$

(i), (ii)에서 구하는 모든 상수 a의 값의 곱은

$1\times2=2$

0421 답 ②

$f(x)=x^3-3x^2+2x+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2-6x+2$

기울기가 m인 접선의 접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+2t+1)이라 하면 $f'(t)=m$에서

$3t^2-6t+2=m$ $\therefore 3t^2-6t+2-m=0$ ····· ㉠

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 t_1, t_2라 하자.

ㄱ. t_1, t_2는 이차방정식 ㉠의 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $t_1+t_2=2$

즉, 두 점 P, Q의 x좌표의 합은 2이다.

ㄴ. 기울기가 m인 접선이 두 개이려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=(-3)^2-3(2-m)>0$

$3m>-3$ $\therefore m>-1$

ㄷ. 두 접선 사이의 거리와 선분 PQ의 길이가 같으려면 직선 PQ가 두 접선과 수직이어야 하므로 직선 PQ의 기울기가 $-\frac{1}{m}$이어야 한다. 이때 직선 PQ의 기울기는

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}$$
$$=\frac{(t_2^3-3t_2^2+2t_2+1)-(t_1^3-3t_1^2+2t_1+1)}{t_2-t_1}$$
$$=\frac{(t_2^3-t_1^3)-3(t_2^2-t_1^2)+2(t_2-t_1)}{t_2-t_1}$$
$$=\frac{(t_2-t_1)(t_2^2+t_1t_2+t_1^2)-3(t_2+t_1)(t_2-t_1)+2(t_2-t_1)}{t_2-t_1}$$
$$=(t_1+t_2)^2-t_1t_2-3(t_1+t_2)+2$$

이때 이차방정식 ㉠에서 근과 계수의 관계에 의하여 $t_1+t_2=2$, $t_1t_2=\frac{2-m}{3}$이므로

$$\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_2-t_1}=(t_1+t_2)^2-t_1t_2-3(t_1+t_2)+2=\frac{m-2}{3}$$

즉, $\frac{m-2}{3}=-\frac{1}{m}$에서

$m(m-2)=-3$ $\therefore m^2-2m+3=0$ ····· ㉡

이차방정식 ㉡의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-3=-2<0$

이므로 이차방정식 ㉡을 만족시키는 실수 m의 값은 존재하지 않는다.

즉, 두 접선 사이의 거리와 선분 PQ의 길이가 같아지는 실수 m의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

0422 답 ①

$f(x)=x^3-2x$라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

접점의 좌표를 (t, t^3-2t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-2t)=(3t^2-2)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-2)x-2t^3$

이 직선이 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=-2t^3$, $t^3=-1$ $\therefore t=-1$ ($\because t$는 실수)

즉, 접점의 좌표는 $(-1, 1)$이므로 $a=-1$, $b=1$

$\therefore a+2b=-1+2\times1=1$

0423 답 ②

$f(x)=-x^2+2$라 하면 $f'(x)=-2x$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+2)=-2t(x-t)$

$\therefore y=-2tx+t^2+2$

이 직선이 점 $(0, 5)$를 지나므로

$5=t^2+2$, $t^2=3$ $\therefore t=-\sqrt{3}$ 또는 $t=\sqrt{3}$

즉, 두 접선의 기울기의 곱은

$f'(-\sqrt{3})\times f'(\sqrt{3})=(-2\sqrt{3})\times2\sqrt{3}=-12$

0424 답 ④

$f(x)=(x-1)^3$이라 하면 $f'(x)=3(x-1)^2$

접점의 좌표를 $(t, (t-1)^3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3(t-1)^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t-1)^3=3(t-1)^2(x-t)$

$\therefore y=3(t-1)^2x-(t-1)^2(2t+1)$ ····· ㉠

이 직선이 점 $(1, -2)$를 지나므로

$-2=3(t-1)^2-(t-1)^2(2t+1)$

$-2=-2(t-1)^3$, $(t-1)^3=1$

이때 t는 실수이므로

$t-1=1$ $\therefore t=2$

$t=2$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=3x-5$

따라서 구하는 접선의 x절편은 $\frac{5}{3}$이다.

0425 답 ④

$f(x)=x^3-x+3$이라 하면 $f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-t+3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-t+3)=(3t^2-1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-1)x-2t^3+3$ ····· ㉠

이 직선이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=-2t^3+3,\ t^3=1$ $\therefore t=1$ ($\because t$는 실수)

$t=1$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=2x+1$

이 직선이 점 $(k,\ 5)$를 지나므로

$5=2k+1$ $\therefore k=2$

0426 답 ⑤

$f(x)=x^3-2x^2+3x-4$라 하면 $f'(x)=3x^2-4x+3$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-2t^2+3t-4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-4t+3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-2t^2+3t-4)=(3t^2-4t+3)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-4t+3)x-2t^3+2t^2-4$

이 직선이 점 $\mathrm{P}(1,\ -1)$을 지나므로

$-1=-2t^3+5t^2-4t-1,\ t(2t^2-5t+4)=0$

$\therefore t=0$ ($\because t$는 실수)

$2t^2-5t+4=2\left(t-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{7}{8}>0$

따라서 점 Q의 좌표는 $(0,\ -4)$이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(0-1)^2+\{-4-(-1)\}^2}=\sqrt{10}$

0427 답 ③

$f(x)=x^2-x-2$라 하면 $f'(x)=2x-1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-t-2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-t-2)=(2t-1)(x-t)$

$\therefore y=(2t-1)x-t^2-2$

이 직선이 점 $(1,\ -6)$을 지나므로

$-6=2t-1-t^2-2,\ t^2-2t-3=0$

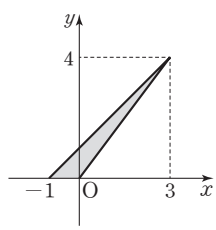
$(t+1)(t-3)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

즉, 접점의 좌표는

$(-1,\ 0),\ (3,\ 4)$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times4=2$



0428 답 ①

$f(x)=-x^3-3x^2+x-1$이라 하면 $f'(x)=-3x^2-6x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^3-3t^2+t-1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-3t^2-6t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^3-3t^2+t-1)=(-3t^2-6t+1)(x-t)$

$\therefore y=(-3t^2-6t+1)x+2t^3+3t^2-1$

이 직선이 원점을 지나므로

$0=2t^3+3t^2-1,\ (2t-1)(t+1)^2=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=-1$

즉, 두 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{11}{4},\ f'(-1)=4$

이때 기울기가 양수인 접선과 평행한 직선의 기울기는 4이고,

점 $(1,\ 1)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y-1=4(x-1)$ $\therefore y=4x-3$

따라서 $a=4,\ b=-3$이므로

$ab=4\times(-3)=-12$

0429 답 ④

$f(x)=-x^2+3x+4$라 하면 $f'(x)=-2x+3$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+3t+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+3$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+3t+4)=(-2t+3)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+3)x+t^2+4$

이 직선이 점 $\mathrm{P}(1,\ 15)$를 지나므로

$15=-2t+3+t^2+4$

$t^2-2t-8=0,\ (t+2)(t-4)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=4$

따라서 접점의 좌표는 $(-2,\ -6),\ (4,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{4-(-2)\}^2+\{0-(-6)\}^2}=6\sqrt{2}$

0430 답 ①

$f(x)=x^2+8x+13$이라 하면 $f'(x)=2x+8$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+8t+13)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+8$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+8t+13)=(2t+8)(x-t)$

$\therefore y=(2t+8)x-t^2+13$ ····· ㉠

이 직선이 점 $(-2,\ 0)$을 지나므로

$0=-2(2t+8)-t^2+13$

$t^2+4t+3=0,\ (t+3)(t+1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=-1$

이것을 ㉠에 각각 대입하면 접선의 방정식은

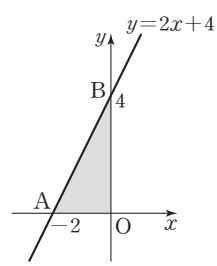
$y=2x+4$ 또는 $y=6x+12$

이때 기울기가 작은 접선의 방정식은

$y=2x+4$

따라서 $\mathrm{A}(-2,\ 0),\ \mathrm{B}(0,\ 4)$이므로 구하는 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times4=4$



0431 답 ①

$f(x)=x^3-ax+2$에서 $f'(x)=3x^2-a$

기울기가 3인 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^3-at+2)$라 하면

$f'(t)=3$이므로

$3t^2-a=3$ ····· ㉠

즉, 점 (t, t^3-at+2)에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-at+2)=3(x-t)$

$\therefore y=3x+t^3-(a+3)t+2$

이 직선이 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4=t^3-(a+3)t+2$ $\therefore t^3-(a+3)t-2=0$

㉠에서 $a+3=3t^2$을 위의 식에 대입하면

$-2t^3-2=0$, $t^3=-1$ $\therefore t=-1$ ($\because t$는 실수)

$t=-1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=0$

따라서 $f(x)=x^3+2$이므로 $f(2)=10$

0432 답 ③

$f(x)=-x^2+2x+1$이라 하면 $f'(x)=-2x+2$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+2t+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+2$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+2t+1)=(-2t+2)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+2)x+t^2+1$

이 직선이 점 $\mathrm{P}(1, k)$를 지나므로

$k=-2t+2+t^2+1$ $\therefore t^2-2t+3-k=0$

이 이차방정식의 두 실근을 각각 t_1, t_2라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$t_1+t_2=2$, $t_1t_2=3-k$ ····· ㉠

이때 두 접선이 서로 수직이므로 $f'(t_1)f'(t_2)=-1$에서

$(-2t_1+2)(-2t_2+2)=-1$

$4t_1t_2-4(t_1+t_2)+5=0$

$4(3-k)-8+5=0$ ($\because$ ㉠)

$4k=9$ $\therefore k=\frac{9}{4}$

0433 답 $\frac{16}{3}$

$f(x)=-x^2+4x-3$이라 하면 $f'(x)=-2x+4$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+4t-3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+4$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2+4t-3)=(-2t+4)(x-t)$

$\therefore y=(-2t+4)x+t^2-3$ ····· ㉠ ····· ⓘ

이 직선이 점 $(1, 4)$를 지나므로

$4=-2t+4+t^2-3$, $t^2-2t-3=0$

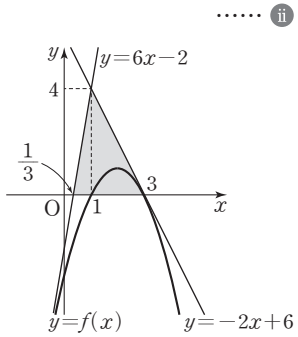
$(t+1)(t-3)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

이것을 ㉠에 각각 대입하면 접선의 방정식은

$y=6x-2$, $y=-2x+6$ ····· ⓘⓘ

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\left(3-\frac{1}{3}\right)\times 4=\frac{16}{3}$ ····· ⓘⓘⓘ



채점 기준	
ⓘ 접점의 x좌표를 t로 놓고, 접선의 방정식을 t에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘ 두 접선의 방정식 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 도형의 넓이 구하기	30 %

0434 답 ④

$f(x)=x^2+5x-5$라 하면 $f'(x)=2x+5$

접점의 좌표를 (t, t^2+5t-5)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+5$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+5t-5)=(2t+5)(x-t)$

$\therefore y=(2t+5)x-t^2-5$

이 직선이 점 $\mathrm{A}(a, 0)$을 지나므로

$0=(2t+5)a-t^2-5$ $\therefore t^2-2at+5-5a=0$ ····· ㉠

이 이차방정식의 두 실근을 t_1, t_2라 하면 t_1, t_2는 각각 두 점 B, C의 x좌표이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$t_1+t_2=2a$

이때 삼각형 ABC의 무게중심의 x좌표는 2이므로

$\frac{a+t_1+t_2}{3}=2$, $\frac{a+2a}{3}=2$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉠에 대입하면

$t^2-4t-5=0$, $(t+1)(t-5)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=5$

즉, 접점의 좌표는 $(-1, -9)$, $(5, 45)$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 y좌표 b는

$b=\frac{0+(-9)+45}{3}=12$

$\therefore a+b=2+12=14$

0435 답 ①

$f(x)=x^3-3x+6$이라 하면 $f'(x)=3x^2-3$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t+6)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t+6)=(3t^2-3)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-3)x-2t^3+6$ ····· ㉠

이 직선이 점 $\mathrm{P}(0, -10)$을 지나므로

$-10=-2t^3+6$, $t^3=8$ $\therefore t=2$ ($\because t$는 실수)

즉, 점 Q의 x좌표는 2이다.

$t=2$를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=9x-10$

이 직선과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 x좌표를 구하면

$9x-10=x^3-3x+6$, $x^3-12x+16=0$

$(x-2)^2(x+4)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

따라서 점 R의 x좌표는 -4이다.

참고 곡선 $y=f(x)$와 접선 $y=9x-10$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-3x+6=9x-10$에서 $(x-2)^2(x+4)=0$

이때 점 Q에서 접선과 곡선이 접하므로 점 Q의 x좌표는 2, 점 R의 x좌표는 -4이다.

0436 답 20

$f(x)=3x^3$이라 하면 $f'(x)=9x^2$

점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $\mathrm{A}(t, 3t^3)$, 점 $(0, a)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $\mathrm{B}(s, 3s^3)$이라 하면 $f'(t)=f'(s)$에서

$9t^2=9s^2$, $9(t^2-s^2)=0$

$9(t+s)(t-s)=0$ $\therefore t=-s\ (\because t\neq s)$

점 $\mathrm{A}(t, 3t^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3t^3=9t^2(x-t)$ $\therefore y=9t^2x-6t^3$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$9at^2-6t^3=0$ ····· ㉠

점 $\mathrm{B}(s, 3s^3)$에서의 접선의 방정식은

$y-3s^3=9s^2(x-s)$ $\therefore y=9s^2x-6s^3$

이때 $t=-s$에서 $s=-t$이므로

$y=9t^2x+6t^3$

이 직선이 점 $(0, a)$를 지나므로

$a=6t^3$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$54t^5-6t^3=0$, $6t^3(3t+1)(3t-1)=0$

$\therefore t=-\frac{1}{3}$ 또는 $t=0$ 또는 $t=\frac{1}{3}$

(i) $t=-\frac{1}{3}$을 ㉡에 대입하여 풀면 $a=-\frac{2}{9}$

(ii) $t=0$을 ㉡에 대입하여 풀면 $a=0$

(iii) $t=\frac{1}{3}$을 ㉡에 대입하여 풀면 $a=\frac{2}{9}$

그런데 $a>0$이므로 $t=\frac{1}{3}$, $a=\frac{2}{9}$

$\therefore 90a=90\times\frac{2}{9}=20$

참고 $t=s$이면 두 접선의 방정식이 일치하므로 두 접선이 평행하다는 조건에 맞지 않는다. 따라서 $t\neq s$이다.

0437 답 −1

$f(x)=3x^2+4x+k$라 하면 $f'(x)=6x+4$

접점의 좌표를 $(t, 3t^2+4t+k)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=6t+4$이므로 접선의 방정식은

$y-(3t^2+4t+k)=(6t+4)(x-t)$

$\therefore y=(6t+4)x-3t^2+k$ ····· (i)

이 직선이 점 $(1, 5)$를 지나므로

$5=6t+4-3t^2+k$

$\therefore 3t^2-6t+1-k=0$ ····· ㉠

접선이 2개이려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-3(1-k)>0$

$6+3k>0$ $\therefore k>-2$ ····· (ii)

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 -1이다. ····· (iii)

채점 기준	
(i) 접점의 x좌표를 t로 놓고, 접선의 방정식을 t에 대한 식으로 나타내기	40 %
(ii) k의 값의 범위 구하기	40 %
(iii) 정수 k의 최솟값 구하기	20 %

0438 답 45

$f(x)=x^3-3x^2+3x$에서 $f'(x)=3x^2-6x+3$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+3t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t+3$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-3t^2+3t)=(3t^2-6t+3)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-6t+3)x-2t^3+3t^2$ ····· ㉠

이 직선이 원점을 지나므로

$0=-2t^3+3t^2$, $t^2(2t-3)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=\frac{3}{2}$

(i) $t=0$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=3x$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-3x^2+3x=3x$, $x^3-3x^2=0$

$x^2(x-3)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=3$

(ii) $t=\frac{3}{2}$을 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=\frac{3}{4}x$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{3}{4}x$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-3x^2+3x=\frac{3}{4}x$, $x^3-3x^2+\frac{9}{4}x=0$

$x\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

(i), (ii)에서 $x=3$, $x=\frac{3}{2}$ $(\because x\neq 0)$

따라서 $S=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$이므로

$10S=10\times\frac{9}{2}=45$

0439 답 ④

$f(x)=x^2-4x$라 하면 $f'(x)=2x-4$

접점의 좌표를 (t, t^2-4t)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-4t)=(2t-4)(x-t)$

$\therefore y=(2t-4)x-t^2$

이 직선이 점 $(1, -7)$을 지나므로

$-7=2t-4-t^2$, $t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=3$

이때 점 (t, t^2-4t)에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2t-4}$이므로 직선의 방정식은

$y-(t^2-4t)=-\frac{1}{2t-4}(x-t)$

이 식에 $t=-1$, $t=3$을 각각 대입하면

$y=\frac{1}{6}x+\frac{31}{6}$ 또는 $y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$

따라서 두 직선의 x절편은 각각 -31, -3이므로

$ab=(-31)\times(-3)=93$

0440 답 ①

$g(x)=-6x^2+9x-1$이라 하면 $g'(x)=-12x+9$

접점의 좌표를 $(p, -6p^2+9p-1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $g'(p)=-12p+9$이므로 접선의 방정식은

$y-(-6p^2+9p-1)=(-12p+9)(x-p)$

$\therefore y=(-12p+9)x+6p^2-1$

이 직선이 점 $(1, t)$를 지나므로

$t=-12p+9+6p^2-1$

$\therefore 6p^2-12p+8-t=0$ ····· ㉠

주어진 곡선에 그을 수 있는 접선의 개수는 이차방정식 ㉠의 실근의 개수와 같으므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-6)^2-6(8-t)=6t-12$

즉, $f(t)=\begin{cases}2\ (6t-12>0)\\1\ (6t-12=0)\\0\ (6t-12<0)\end{cases}=\begin{cases}2\ (t>2)\\1\ (t=2)\\0\ (t<2)\end{cases}$

따라서 함수 $f(t)$는 $t=2$에서 불연속이므로 $a=2$

0441 답 ⑤

$f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$

점 P의 좌표를 $(a, 2a-4)$, 점 P에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 (t, t^2)이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-t^2=2t(x-t)$ $\therefore y=2tx-t^2$

이 접선이 점 P를 지나므로

$2a-4=2at-t^2$ $\therefore t^2-2at+2a-4=0$ ····· ㉠

$A(\alpha, \alpha^2)$, $B(\beta, \beta^2)$이라 하면 α, β는 이차방정식 ㉠의 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=2a-4$

이때 직선 AB의 기울기는

$\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}=\frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{\beta-\alpha}=\beta+\alpha=2a$

이므로 직선 AB의 방정식은

$y-\alpha^2=2a(x-\alpha)$ $\therefore y=2ax+\alpha^2-2a\alpha$ ····· ㉡

그런데 α는 ㉠의 실근이므로

$\alpha^2-2a\alpha+2a-4=0$ $\therefore \alpha^2-2a\alpha=4-2a$ ····· ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 직선 AB의 방정식은

$y=2ax+4-2a$ $\therefore 2a(x-1)-(y-4)=0$

이 등식이 a의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x-1=0$, $y-4=0$ $\therefore x=1$, $y=4$

즉, 직선 AB는 항상 점 $(1, 4)$를 지나므로 $m=1$, $n=4$

$\therefore m+n=1+4=5$

0442 답 ②

$f(x)=-4x^2+8x+5$에서 $f'(x)=-8x+8$

접점의 좌표를 $(t, -4t^2+8t+5)$라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=-8t+8$이므로 접선의 방정식은

$y-(-4t^2+8t+5)=(-8t+8)(x-t)$

$\therefore y=(-8t+8)x+4t^2+5$

이 직선이 점 $(a, 8)$을 지나므로

$8=a(-8t+8)+4t^2+5$

$\therefore 4t^2-8at+8a-3=0$ ····· ㉠

접선이 두 개 존재하려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=16a^2-4(8a-3)>0$

$16a^2-32a+12>0$, $4(2a-1)(2a-3)>0$

$\therefore a>\frac{3}{2}$ 또는 $a<\frac{1}{2}$

따라서 구하는 자연수 a의 최솟값은 2이다.

0443 답 ④

함수 $f(x)=-2x^2+4x+5$는 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 3)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(3)=-1$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

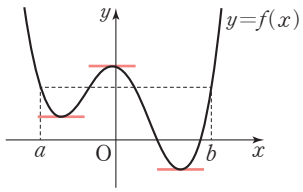
$f'(x)=-4x+4$이므로 $f'(c)=0$에서

$-4c+4=0$ $\therefore c=1$

0444 답 ③

$f(a)=f(b)$이므로 닫힌구간 $[a, b]$에서 롤의 정리를 만족시키는 상수 c는 x축에 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.

이때 그림과 같이 x축에 평행한 접선을 3개 그을 수 있으므로 구하는 상수 c의 개수는 3이다.



0445 답 ⑤

함수 $f(x)=-x^2+kx$는 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 3)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-2)=f(3)$이어야 하므로

$-4-2k=-9+3k$ $\therefore k=1$

롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=-2x+1$이므로 $f'(c)=0$에서

$-2c+1=0$ $\therefore c=\frac{1}{2}$

$\therefore k+c=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

0446 답 ①

함수 $f(x)=(x-a)(x-5)$는 닫힌구간 $[a, 5]$에서 연속이고 열린구간 $(a, 5)$에서 미분가능하며 $f(a)=f(5)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(a, 5)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=(x-5)+(x-a)=2x-5-a$이므로

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=0$에서

$-6-a=0$ $\therefore a=-6$

0447 답 $\frac{4}{3}$

함수 $f(x)=x^3+2x^2-4x+1$은 닫힌구간 $[-a, a]$에서 연속이고 열린구간 $(-a, a)$에서 미분가능하다.

이때 롤의 정리를 만족시키려면 $f(-a)=f(a)$이어야 하므로

$-a^3+2a^2+4a+1=a^3+2a^2-4a+1$

$2a^3-8a=0,\ 2a(a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a$는 자연수) ····· ⓘ

즉, 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=3x^2+4x-4$이므로 $f'(c)=0$에서

$3c^2+4c-4=0,\ (3c-2)(c+2)=0$

$\therefore c=\frac{2}{3}\ (\because -2<c<2)$ ····· ⓘⓘ

$\therefore a-c=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ c의 값 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ $a-c$의 값 구하기	10 %

0448 답 ③

함수 $f(x)=x^3+x$는 닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(0,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{30-0}{3}=10$이고, $f'(x)=3x^2+1$이므로

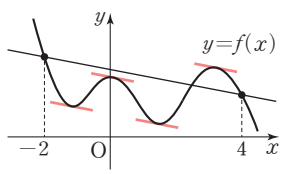
$10=3c^2+1,\ c^2=3$

$\therefore c=\sqrt{3}\ (\because 0<c<3)$

0449 답 4

닫힌구간 $[-2,\ 4]$에서 평균값 정리를 만족시키는 상수 c는 열린구간 $(-2,\ 4)$에서 두 점 $(-2,\ f(-2))$, $(4,\ f(4))$를 지나는 직선과 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.

이때 그림과 같이 두 점 $(-2,\ f(-2))$, $(4,\ f(4))$를 지나는 직선에 평행한 접선을 4개 그을 수 있으므로 구하는 상수 c의 개수는 4이다.



0450 답 ④

함수 $f(x)=x^3+x-1$은 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{9-(-3)}{3}=4$이고, $f'(x)=3x^2+1$이므로

$4=3c^2+1,\ c^2=1$

$\therefore c=1\ (\because -1<c<2)$

0451 답 −7

함수 $f(x)=x^2-4x-6$은 닫힌구간 $[-1,\ 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-1,\ 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1,\ 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{-9-(-1)}{4}=-2$이고, $f'(x)=2x-4$이므로

$-2=2c-4 \qquad \therefore c=1$ ····· ⓘ

방정식 $f(x)=1$에서

$x^2-4x-6=1 \qquad \therefore x^2-4x-7=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 x의 값의 곱은 -7이다. ····· ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ c의 값 구하기	50 %
ⓘⓘ 모든 x의 값의 곱 구하기	50 %

0452 답 ②

$f(1)=1$이고

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x-2)^2=1,\ \lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(-x^2+2)=1$

이므로 $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 닫힌구간 $[-1,\ 4]$에서 연속이다.

$$\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x-2)^2-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-4x+3}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x-3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x-3)=-2$$

$$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{(-x^2+2)-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{-x^2+1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{-(x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}(-x-1)=-2$$

에서 $f'(1)=-2$이므로 함수 $f(x)$는 열린구간 $(-1,\ 4)$에서 미분가능하다.

즉, 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1,\ 4)$에 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(4)-f(-1)}{4-(-1)}=\frac{4-1}{5}=\frac{3}{5}$이고

(i) $x\geq1$일 때, $f'(x)=2(x-2)$이므로

$\frac{3}{5}=2(c-2) \qquad \therefore c=\frac{23}{10}$

(ii) $x<1$일 때, $f'(x)=-2x$이므로

$\frac{3}{5}=-2c \qquad \therefore c=-\frac{3}{10}$

(i), (ii)에서 구하는 상수 c의 값의 합은

$\frac{23}{10}+\left(-\frac{3}{10}\right)=2$

0453 답 ②

$f(2)=3$에서

$4a+2b+2=3$ $\therefore 4a+2b=1$ ····· ㉠

함수 $f(x)=ax^2+bx+2$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(9a+3b+2)-(a+b+2)}{2}=4a+b$이고,

$f'(x)=2ax+b$이므로

$4a+b=2a^2+b$, $2a(a-2)=0$ $\therefore a=2 (\because a>0)$

$a=2$를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-\frac{7}{2}$

$\therefore a-2b=2-2\times\left(-\frac{7}{2}\right)=9$

0454 답 $-\frac{7}{3}$

함수 $f(x)=x^3-kx$는 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-2, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}=\frac{(27-3k)-(-8+2k)}{5}=7-k$이고,

$f'(x)=3x^2-k$이므로

$7-k=3c^2-k$, $3c^2-7=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 $c_1c_2=-\frac{7}{3}$이다.

0455 답 ③

함수 $f(x)=x^2-7x-1$은 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(b^2-7b-1)-(a^2-7a-1)}{b-a}$

$=\frac{(b-a)(a+b-7)}{b-a}=a+b-7$

이고, $f'(x)=2x-7$에서 $c=4$이므로

$a+b-7=1$ $\therefore a+b=8$

0456 답 1

함수 $f(x)=x^2+6x$는 닫힌구간 $[-1, 2k]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2k)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(2k)-f(-1)}{2k-(-1)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1, 2k)$에 적어도 하나 존재한다.

한편 $c=\frac{k}{2}$이므로 $-1<\frac{k}{2}<2k$

즉, $-1<\frac{k}{2}$에서 $k>-2$이고, $\frac{k}{2}<2k$에서 $k>0$이므로

$k>0$

이때 $\frac{f(2k)-f(-1)}{2k-(-1)}=\frac{(4k^2+12k)-(-5)}{2k+1}$

$=\frac{(2k+5)(2k+1)}{2k+1}=2k+5$

이고, $f'(x)=2x+6$에서 $c=\frac{k}{2}$이므로

$2k+5=k+6$ $\therefore k=1$

0457 답 ③

함수 $f(x)=4x^2-3x+9$는 닫힌구간 $[n, n+3]$에서 연속이고 열린구간 $(n, n+3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(n+3)-f(n)}{(n+3)-n}=f'(a_n)$인 a_n이 열린구간 $(n, n+3)$에 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(n+3)-f(n)}{(n+3)-n}$

$=\frac{\{4(n+3)^2-3(n+3)+9\}-(4n^2-3n+9)}{(n+3)-n}$

$=\frac{24n+27}{3}=8n+9$

이고, $f'(x)=8x-3$이므로

$8n+9=8a_n-3$ $\therefore a_n=n+\frac{3}{2}$

$\therefore a_1+a_3=\left(1+\frac{3}{2}\right)+\left(3+\frac{3}{2}\right)=7$

0458 답 5

함수 $f(x)=x^2-2x+5$는 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

$f'(x)=2x-2$이므로 $k=f'(c)=2c-2$ ····· ⓘ

이때 $-3<c<0$이므로

$-8<2c-2<-2$ $\therefore -8<k<-2$ ····· ⓘⓘ

따라서 정수 k는 -7, -6, -5, -4, -3의 5개이다. ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ k를 c에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘ k의 값의 범위 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ 정수 k의 개수 구하기	10 %

0459 답 ⑤

ㄱ. 다항함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{13-1}{4}=3$이므로 $f'(c)=3$인 c가 열린구간 $(-1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄴ. 다항함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[3, 6]$에서 연속이고 열린구간 $(3, 6)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(6)-f(3)}{6-3}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(3, 6)$에 적어도 하나 존재한다.

$\frac{f(6)-f(3)}{6-3}=\frac{22-13}{3}=3$이므로 $f'(c)=3$인 c가 열린구간 $(3, 6)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. 다항함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[-1, 6]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 6)$에서 미분가능하며

$g(-1)=2f(-1)+6=2\times1+6=8$

$g(6)=2f(6)-36=2\times22-36=8$

즉, $g(-1)=g(6)$이므로 롤의 정리에 의하여 $g'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 6)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄷ. $g(x)=2f(x)-6x$에서 $g'(x)=2f'(x)-6$

$g'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 6)$에 적어도 하나 존재하려면 $2f'(c)-6=0$, 즉 $f'(c)=3$인 c가 열린구간 $(-1, 6)$에 적어도 하나 존재해야 한다.

$\frac{f(6)-f(-1)}{6-(-1)}=\frac{22-1}{7}=3$이므로 $f'(c)=3$인 c가 열린구간 $(-1, 6)$에 적어도 하나 존재한다.

0460 답 ④

함수 $g(x)=(x+2)f(x)$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{g(4)-g(0)}{4-0}=g'(c)$를 만족시키는 c가 열린구간 $(0, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

$\therefore g'(c)=\frac{6f(4)-2f(0)}{4}=\frac{6\times13-2\times5}{4}=17$

0461 답 ③

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하면 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c)$, 즉 $f(1)-f(-1)=2f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

ㄱ. $f(x)=x^2|x|=\begin{cases}x^3 & (x\geq0)\\ -x^3 & (x<0)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)=0$

이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이다.

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{x^3-0}{x}=\lim_{x\to0+}x^2=0$

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x^3-0}{x}=\lim_{x\to0-}(-x^2)=0$

에서 $f'(0)$의 값이 존재하므로 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하다.

즉, 평균값 정리에 의하여 $f(1)-f(-1)=2f'(c)$인 c가 존재한다.

ㄴ. $-1\leq x\leq1$에서 $f(x)=2\sqrt{(x+5)^2}=2(x+5)$

즉, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$f(1)-f(-1)=2f'(c)$인 c가 존재한다.

ㄷ. $f(x)=-x^2+6|x|=\begin{cases}-x^2+6x & (x\geq0)\\ -x^2-6x & (x<0)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)=0$

이므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이지만

$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{-x^2+6x}{x}=\lim_{x\to0+}(-x+6)=6$

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{-x^2-6x}{x}=\lim_{x\to0-}(-x-6)=-6$

에서 $f'(0)$의 값이 존재하지 않으므로 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하지 않다.

즉, 평균값 정리를 만족시키지 않는다.

이때 $f'(c)=\frac{f(1)-f(-1)}{2}=\frac{5-5}{2}=0$이지만, $f'(0)$의 값이 존재하지 않고 $f'(x)=\begin{cases}-2x+6 & (x>0)\\ -2x-6 & (x<0)\end{cases}$이므로 $f'(c)=0$인 상수 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 조건을 만족시키는 함수는 ㄱ, ㄴ이다.

0462 답 ②

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 모든 실수 x에서 연속이다. 즉, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[x-1, x+2]$에서 연속이고 열린구간 $(x-1, x+2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(x+2)-f(x-1)}{(x+2)-(x-1)}=f'(c)$

인 c가 열린구간 $(x-1, x+2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x-1<c<x+2$에서 $x\to\infty$일 때 $c\to\infty$이므로

$\lim_{x\to\infty}\{f(x+2)-f(x-1)\}=3\lim_{x\to\infty}\frac{f(x+2)-f(x-1)}{(x+2)-(x-1)}$

$=3\lim_{c\to\infty}f'(c)=3\times2=6$

최고수준 도전 기출 108~109쪽

0463 답 ①

전략 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재함을 이용한다.

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

그런데 (나)에서 $0<c<2$인 모든 c에 대하여 $|f'(c)|\le 5$이므로

$\left|\frac{f(2)-f(0)}{2}\right|\le 5$, $|8-f(0)|\le 10$

$-10\le 8-f(0)\le 10$ $\therefore -2\le f(0)\le 18$

따라서 $M=18$, $m=-2$이므로

$M+m=18+(-2)=16$

0464 답 ④

전략 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식을 구한 후 $g(t)$를 구한다. 이때 $g(t)=|$(접선의 y절편)$|$임을 이용한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2at+b$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+at^2+bt)=(3t^2+2at+b)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+2at+b)x-2t^3-at^2$

즉, 점 P의 좌표는 $(0, -2t^3-at^2)$이므로 원점에서 점 P까지의 거리 $g(t)$는

$g(t)=|-2t^3-at^2|=t^2|-2t-a|$

$$=\begin{cases} 2t^3+at^2 & \left(t\ge -\frac{a}{2}\right) \\ -2t^3-at^2 & \left(t<-\frac{a}{2}\right) \end{cases}$$

(나)에서 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$t=-\frac{a}{2}$에서 미분가능하다.

$h_1(t)=2t^3+at^2$, $h_2(t)=-2t^3-at^2$이라 하면

$h_1'(t)=6t^2+2at$, $h_2'(t)=-6t^2-2at$

이때 $g'\left(-\frac{a}{2}\right)$의 값이 존재하므로 $h_1'\left(-\frac{a}{2}\right)=h_2'\left(-\frac{a}{2}\right)$에서

$\frac{1}{2}a^2=-\frac{1}{2}a^2$, $a^2=0$ $\therefore a=0$

즉, $f(x)=x^3+bx$이므로 $f(1)=2$에서

$1+b=2$ $\therefore b=1$

따라서 $f(x)=x^3+x$이므로 $f(3)=30$

0465 답 ①

전략 직선 l을 a에 대한 식으로 나타낸 후, 두 직선 l, m의 기울기가 같음을 이용하여 직선 m을 a에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x)=x^2$에서 $f'(x)=2x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $A(a, a^2)$에서의 접선의 기울기는

$f'(a)=2a$이므로 접선 l의 방정식은

$y-a^2=2a(x-a)$ $\therefore y=2ax-a^2$ ····· ㉠

$g(x)=-x^2+6x-9$에서 $g'(x)=-2x+6$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $B(b, g(b))$에서의 접선의 기울기가 $2a$이므로 $g'(b)=2a$에서

$-2b+6=2a$ $\therefore b=3-a$

즉, 점 B의 좌표는 $(3-a, -a^2)$이므로 이 점에서의 접선 m의 방정식은

$y-(-a^2)=2a(x-3+a)$ $\therefore y=2ax+a^2-6a$ ····· ㉡

두 직선 l, m 사이의 거리는 직선 l 위의 점 $A(a, a^2)$과 직선 ㉡, 즉 $2ax-y+a^2-6a=0$ 사이의 거리와 같으므로

$D(a)=\frac{|2a^2-a^2+a^2-6a|}{\sqrt{(2a)^2+(-1)^2}}=\frac{|2a^2-6a|}{\sqrt{4a^2+1}}$

이때 $-a=t$로 놓으면 $a\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{a\to-\infty}\frac{D(a)}{a}=\lim_{t\to\infty}\frac{D(-t)}{-t}=\lim_{t\to\infty}\frac{|2t^2+6t|}{-t\sqrt{4t^2+1}}$

$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left|2+\frac{6}{t}\right|}{-\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}}=-1$

0466 답 ④

전략 두 직선 AB, BC의 기울기가 같음을 이용하여 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있음을 알고, 사각형 AQCP의 넓이를 삼각형 PAC, 삼각형 QAC의 넓이의 합으로 생각하여 두 점 P, Q의 위치를 찾는다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{0-(-6)}{2-(-1)}=2$

직선 BC의 기울기는 $\frac{4-0}{4-2}=2$

즉, 세 점 A, B, C는 기울기가 2인 한 직선 위에 있다.

이때 사각형 AQCP의 넓이는 삼각형 PAC와 삼각형 QAC의 넓이의 합과 같으므로 사각형 AQCP의 넓이가 최대이려면 삼각형 PAC와 삼각형 QAC의 넓이가 각각 최대이어야 한다.

즉, 두 점 P, Q가 기울기가 2인 접선의 접점이어야 한다.

$f(x)=x^3-5x^2+4x+4$라 하면 $f'(x)=3x^2-10x+4$

기울기가 2인 접선의 접점의 x좌표를 t라 하면 $f'(t)=2$에서

$3t^2-10t+4=2$ $\therefore 3t^2-10t+2=0$

이 이차방정식의 두 실근이 두 점 P, Q의 x좌표이므로 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 x좌표의 곱은 $\frac{2}{3}$이다.

0467 답 ②

전략 접점의 x좌표를 t로 놓고 접선의 방정식을 t에 대한 식으로 나타낸 후 원의 접선은 그 접점과 원의 중심을 잇는 직선에 수직임을 이용하여 t의 값을 구한다.

$f(x)=\frac{1}{4}x^2$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{2}x$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{4}t^2\right)$이라 하면 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1}{2}t$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{4}t^2=\frac{1}{2}t(x-t)$ $\therefore y=\frac{1}{2}tx-\frac{1}{4}t^2$ ····· ㉠

이때 접점 $\left(t, \frac{1}{4}t^2\right)$과 원 C의 중심 $(0, 4)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{\frac{1}{4}t^2-4}{t-0}=\frac{1}{4}t-\frac{4}{t}$

이 직선은 직선 ㉠과 수직이므로

$\left(\frac{1}{4}t-\frac{4}{t}\right)\times\frac{1}{2}t=-1$, $\frac{1}{8}t^2=1$

$t^2=8$ $\therefore t=-2\sqrt{2}$ 또는 $t=2\sqrt{2}$

두 접점의 좌표는 $(-2\sqrt{2}, 2)$, $(2\sqrt{2}, 2)$이고, 원 C의 반지름의 길이는 원 C의 중심 $(0, 4)$와 점 $(2\sqrt{2}, 2)$ 사이의 거리이므로

$\sqrt{(2\sqrt{2}-0)^2+(2-4)^2}=2\sqrt{3}$

0468 답 ③

전략 두 접선 l, m의 기울기를 이용하여 두 점 A, B의 좌표를 k에 대한 식으로 나타내고, 네 접선으로 둘러싸인 도형은 평행사변형임을 이용한다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+1$에서

$f'(x)=x^2-2kx$

두 접선 l, m의 기울기가 $3k^2$이므로 $f'(x)=3k^2$에서

$x^2-2kx=3k^2$, $x^2-2kx-3k^2=0$

$(x+k)(x-3k)=0$

$\therefore x=-k$ 또는 $x=3k$

이때 $\mathrm{A}\left(-k,\ 1-\frac{4}{3}k^3\right)$, $\mathrm{B}(3k,\ 1)$이라 하면 점 A에서의 접선 l의 방정식은

$y-\left(1-\frac{4}{3}k^3\right)=3k^2\{x-(-k)\}$

$\therefore y=3k^2x+\frac{5}{3}k^3+1$

또 점 B에서의 접선 m의 방정식은

$y-1=3k^2(x-3k)$

$\therefore y=3k^2x-9k^3+1$

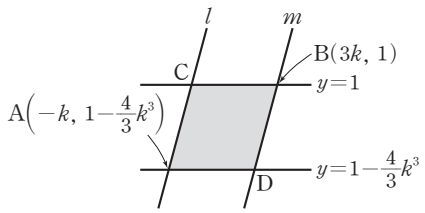
이때 곡선 $y=f(x)$에 접하고 x축에 평행한 접선의 기울기는 0이므로 $f'(x)=0$에서

$x^2-2kx=0$, $x(x-2k)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2k$

$f(0)=1$, $f(2k)=1-\frac{4}{3}k^3$이므로 x축에 평행한 두 접선의 방정식은

$y=1$, $y=1-\frac{4}{3}k^3$



직선 l과 직선 $y=1$의 교점을 C, 직선 m과 직선 $y=1-\frac{4}{3}k^3$의 교점을 D라 하면 사각형 ADBC는 평행사변형이다.

이때 점 C의 x좌표를 구하면

$3k^2x+\frac{5}{3}k^3+1=1$

$3k^2x=-\frac{5}{3}k^3$ $\therefore x=-\frac{5}{9}k$

$\therefore \overline{\mathrm{BC}}=3k-\left(-\frac{5}{9}k\right)=\frac{32}{9}k$

또 두 직선 $y=1-\frac{4}{3}k^3$, $y=1$ 사이의 거리는

$1-\left(1-\frac{4}{3}k^3\right)=\frac{4}{3}k^3$

따라서 평행사변형 ADBC의 넓이가 24이므로

$\frac{32}{9}k\times\frac{4}{3}k^3=24$, $k^4=\frac{81}{16}$

$\therefore k=\frac{3}{2}$ ($\because k>0$)

06 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

난이도별 필수 기출

112~125쪽

0469 답 ④

$f(x)=-x^3+12x+2$에서

$f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$f(-2)$	↗	$f(2)$	↘

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 증가한다.

따라서 $\beta-\alpha=2-(-2)=4$

다른 풀이

$f(x)=-x^3+12x+2$에서

$f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

$f'(x)\geq 0$인 구간에서 함수 $f(x)$는 증가하므로

$-3(x+2)(x-2)\geq 0$, $(x+2)(x-2)\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq 2$

즉, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2,\ 2]$에서 증가한다.

따라서 $\beta-\alpha=2-(-2)=4$

0470 답 ②

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-8x+1$에서

$f'(x)=x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-4$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$f(-4)$	↘	$f(2)$	↗

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-4,\ 2]$에서 감소한다.

따라서 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 함수 $f(x)$가 감소하도록 하는 양수 a의 최댓값은 2이다.

다른 풀이

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-8x+1$에서

$f'(x)=x^2+2x-8=(x+4)(x-2)$

$f'(x)\leq 0$인 구간에서 함수 $f(x)$는 감소하므로

$(x+4)(x-2)\leq 0$ $\therefore -4\leq x\leq 2$

즉, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-4,\ 2]$에서 감소한다.

따라서 닫힌구간 $[-a,\ a]$에서 함수 $f(x)$가 감소하도록 하는 양수 a의 최댓값은 2이다.

0471 답 ③

$f(x)=x^3+ax^2-(a^2-4a)x+7$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-(a^2-4a)$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+3(a^2-4a)\leq 0,\ 4a^2-12a\leq 0$

$4a(a-3)\leq 0 \quad \therefore\ 0\leq a\leq 3$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

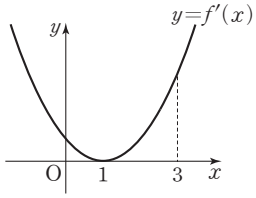
0472 답 ②

$f(x)=x^3-3x^2+ax-2$에서

$f'(x)=3x^2-6x+a$

$\quad =3(x-1)^2+a-3$

함수 $f(x)$가 $0<x<3$에서 증가하려면 $0<x<3$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로



$f'(1)\geq 0$

즉, $a-3\geq 0$에서 $a\geq 3$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 3이다.

0473 답 ①

함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 조건에 의하여 1, 3은 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$1+3=-\frac{2}{3}a,\ 1\times 3=\frac{1}{3}b$

따라서 $a=-6$, $b=9$이므로

$a+b=-6+9=3$

0474 답 ⑤

$f(x)=-2x^3+6x^2+ax-3$에서

$f'(x)=-6x^2+12x+a$

함수 $f(x)$가 증가하는 x의 값의 범위가 $-2\leq x\leq b$이므로 -2, b는 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이다.

이때 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+b=2,\ (-2)\times b=-\frac{1}{6}a$

따라서 $b=4$, $a=48$이므로

$a-b=48-4=44$

0475 답 −2

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-(a-2)x+5$에서

$f'(x)=x^2+2ax-(a-2)$

함수 $f(x)$가 $x_1<x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다. …… ⓘ

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+(a-2)\leq 0,\ a^2+a-2\leq 0$

$(a+2)(a-1)\leq 0 \quad \therefore\ -2\leq a\leq 1$ …… ⓘⓘ

따라서 정수 a는 −2, −1, 0, 1이므로 구하는 합은

$-2+(-1)+0+1=-2$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하기 위한 조건 알기	40 %
ⓘⓘ a의 값의 범위 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 모든 정수 a의 값의 합 구하기	20 %

0476 답 ③

$f(x)=ax^3+2ax^2-2x+1$에서 $f'(x)=3ax^2+4ax-2$

삼차함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로

$a<0$ …… ㉠

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2+6a\leq 0,\ 2a(2a+3)\leq 0$

$\therefore\ -\frac{3}{2}\leq a\leq 0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{3}{2}\leq a<0$

따라서 구하는 정수 a의 값은 −1이다.

0477 답 ③

$f(x)=x^3-(2a+1)x^2-(4a+2)x+1$에서

$f'(x)=3x^2-2(2a+1)x-4a-2$

함수 $f(x)$가 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$일 때 $f(x_1)\neq f(x_2)$가 성립하려면 $f(x)$는 일대일함수이어야 한다.

이때 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a+1)^2+3(4a+2)\leq 0,\ 4a^2+16a+7\leq 0$

$(2a+7)(2a+1)\leq 0 \quad \therefore\ -\frac{7}{2}\leq a\leq -\frac{1}{2}$

따라서 $M=-\frac{1}{2}$, $m=-\frac{7}{2}$이므로 $M-m=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{7}{2}\right)=3$

0478 답 ④

$f(x)=-x^3+ax^2+3ax+2$에서 $f'(x)=-3x^2+2ax+3a$

함수 $f(x)$가 일대일대응이려면 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

이때 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\leq 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2+9a\leq 0,\ a(a+9)\leq 0 \quad \therefore\ -9\leq a\leq 0$

따라서 정수 a는 −9, −8, −7, …, −2, −1, 0의 10개이다.

0479 답 7

$f(x)=-\frac{8}{3}x^3+2ax^2-(a+4)x$에서

$f'(x)=-8x^2+4ax-a-4$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하고 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다. …… ⓘ

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-8(a+4)\le 0$, $4a^2-8a-32\le 0$

$4(a+2)(a-4)\le 0$ $\therefore -2\le a\le 4$ …… ⓘⓘ

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$-2+(-1)+\cdots+3+4=7$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 함수 $f(x)$의 역함수가 존재할 조건 구하기	40 %
ⓘⓘ a의 값의 범위 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 모든 정수 a의 값의 합 구하기	20 %

0480 답 ④

$f(x)=x^3+ax^2-15x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-15$

함수 $f(x)$가 $-2\le x\le 1$에서 감소하려면 $-2\le x\le 1$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 $f'(-2)\le 0$, $f'(1)\le 0$

$f'(-2)\le 0$에서

$-4a-3\le 0$ $\therefore a\ge -\frac{3}{4}$ …… ㉠

$f'(1)\le 0$에서

$2a-12\le 0$ $\therefore a\le 6$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{3}{4}\le a\le 6$

0481 답 ③

$f(x)=2x^3+ax^2-5$에서 $f'(x)=6x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 열린구간 (1, 2)에서 감소하고, 구간 (3, ∞)에서 증가하려면 $1<x<2$에서 $f'(x)\le 0$, $x>3$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 $f'(1)\le 0$, $f'(2)\le 0$, $f'(3)\ge 0$

$f'(1)\le 0$에서

$6+2a\le 0$ $\therefore a\le -3$ …… ㉠

$f'(2)\le 0$에서

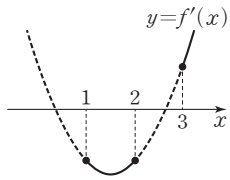
$24+4a\le 0$ $\therefore a\le -6$ …… ㉡

$f'(3)\ge 0$에서

$54+6a\ge 0$ $\therefore a\ge -9$ …… ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-9\le a\le -6$

따라서 정수 a는 -9, -8, -7, -6의 4개이다.



다른 풀이

$f'(x)=6x^2+2ax=2x(3x+a)$이므로 위의 그림에서

$2\le -\frac{a}{3}\le 3$ $\therefore -9\le a\le -6$

따라서 정수 a는 -9, -8, -7, -6의 4개이다.

0482 답 −5

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(6-a)x+1$에서

$f'(x)=x^2-2ax+6-a=(x-a)^2-a^2-a+6$

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 증가하려면 $-1\le x\le 2$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

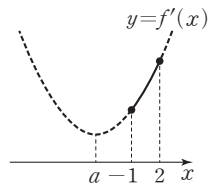
이때 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=a$이므로 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.

(i) $a<-1$일 때,

$f'(-1)\ge 0$이어야 하므로

$7+a\ge 0$ $\therefore a\ge -7$

그런데 $a<-1$이므로 $-7\le a<-1$



(ii) $-1\le a\le 2$일 때,

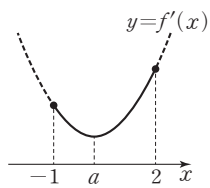
$f'(a)\ge 0$이어야 하므로

$-a^2-a+6\ge 0$, $a^2+a-6\le 0$

$(a+3)(a-2)\le 0$

$\therefore -3\le a\le 2$

그런데 $-1\le a\le 2$이므로 $-1\le a\le 2$

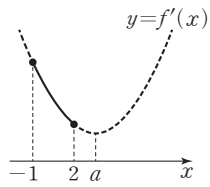


(iii) $a>2$일 때,

$f'(2)\ge 0$이어야 하므로

$10-5a\ge 0$ $\therefore a\le 2$

이는 조건을 만족시키지 않는다.



(i), (ii), (iii)에서 $-7\le a\le 2$

따라서 정수 a의 최댓값은 2, 최솟값은 -7이므로 구하는 합은

$2+(-7)=-5$

0483 답 ②

$f(x)=\begin{cases}3x^3-x+a & (x<a)\\ 3x^3+x-a & (x\ge a)\end{cases}$에서 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이므로 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 $x<a$와 $x\ge a$에서 각각 $f(x)$가 증가하면 된다.

즉, 모든 실수 x에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

(i) $x<a$일 때,

$f'(x)=9x^2-1$이고 $f'(x)\ge 0$에서

$9x^2-1\ge 0$, $(3x+1)(3x-1)\ge 0$

$\therefore x\le -\frac{1}{3}$ 또는 $x\ge \frac{1}{3}$

즉, $x<a$에서 $f'(x)\ge 0$이려면 $a\le -\frac{1}{3}$이어야 한다.

(ii) $x>a$일 때,

$f'(x)=9x^2+1>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x\ge a$에서 증가한다.

(i), (ii)에서 $a\le -\frac{1}{3}$

따라서 상수 a의 최댓값은 $-\frac{1}{3}$이다.

0484 답 ④

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+(a-3)x^2+(a-5)x+7$에서

$f'(x)=-x^2+2(a-3)x+a-5$

$x \le t$에서 $g(t)=f(t)$가 성립하려면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \le 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-3)^2+(a-5) \le 0$, $a^2-5a+4 \le 0$

$(a-1)(a-4) \le 0$ $\therefore 1 \le a \le 4$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

0485 답 ①

$f(x)=4x^3-(a-1)x^2+ax+1$에서

$f'(x)=12x^2-2(a-1)x+a$

점 $(t, f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$\therefore y=f'(t)x+f(t)-tf'(t)$

즉, $g(t)=f(t)-tf'(t)$이므로

$g(t)=4t^3-(a-1)t^2+at+1-t\{12t^2-2(a-1)t+a\}$

$=-8t^3+(a-1)t^2+1$

$\therefore g'(t)=-24t^2+2(a-1)t$

함수 $g(t)$가 닫힌구간 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$에서 증가하려면 $\frac{1}{2} \le t \le 1$에서

$g'(t) \ge 0$이어야 하므로 $g'\left(\frac{1}{2}\right) \ge 0$, $g'(1) \ge 0$

$g'\left(\frac{1}{2}\right) \ge 0$에서

$a-7 \ge 0$ $\therefore a \ge 7$ ····· ㉠

$g'(1) \ge 0$에서

$2a-26 \ge 0$ $\therefore a \ge 13$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $a \ge 13$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 13이다.

0486 답 −54

$f(x)=x^4-2(2a+1)x^2+8ax+3$에서

$f'(x)=4x^3-4(2a+1)x+8a$

$=4(x-1)(x^2+x-2a)$

㈎에 의하여 $-3 \le x \le 1$에서 $f'(x) \ge 0$이어야 하므로

$f'(-3) \ge 0$, $f'(1) \ge 0$

이때 $f'(1)=0$이고, $f'(-3) \ge 0$에서

$-16(6-2a) \ge 0$ $\therefore a \ge 3$ ····· ㉠

㈏에 의하여 $1 \le x \le 4$에서 $f'(x) \le 0$이어야 하므로

$f'(1) \le 0$, $f'(4) \le 0$

이때 $f'(1)=0$이고, $f'(4) \le 0$에서

$12(20-2a) \le 0$ $\therefore a \ge 10$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $a \ge 10$

$f(3)=-12a+66$에서 $-12a+66 \le -54$

따라서 구하는 $f(3)$의 최댓값은 −54이다.

0487 답 ④

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	a	···	0	···	d	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗		↘		↗		↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, a]$, $[0, d]$에서 증가하고 구간 $[a, 0]$, $[d, \infty)$에서 감소하므로 함수 $f(x)$가 증가하는 구간인 것은 ④이다.

0488 답 ④

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	−2	···	1	···	3	···
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-2, 1]$, $[3, \infty)$에서 증가하고 구간 $(-\infty, -2]$, $[1, 3]$에서 감소하므로 옳은 것은 ④이다.

0489 답 ①

$h(x)=f(x)-g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

$h'(x)>0$인 구간에서 함수 $h(x)$는 증가하므로

$f'(x)-g'(x)>0$, 즉 $f'(x)>g'(x)$

주어진 그래프에서 $h'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	b	···	d	···
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗		↘		↗

따라서 함수 $h(x)$는 구간 $(-\infty, b]$, $[d, \infty)$에서 증가하고 구간 $[b, d]$에서 감소하므로 함수 $h(x)$가 증가하는 구간인 것은 ①이다.

0490 답 ②

$g(x)=\{f(x)\}^2$이라 하면 $g'(x)=2f(x)f'(x)$

주어진 그래프에서 $f(x)$와 $f'(x)$의 부호를 조사하여 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	a	···	b	···	c	···	0	···	d	···
$f(x)$	+	0	−	−	−	0	+	+	+	+	+
$f'(x)$	−	−	−	0	+	+	+	0	+	+	+

$x<a$, $b<x<c$에서 $g'(x)<0$이므로 함수 $g(x)$는 $(-\infty, a]$, $[b, c]$에서 감소한다.

따라서 함수 $\{f(x)\}^2$이 감소하는 구간인 것은 ②이다.

0491 답 ③

$f(x)=2x^3+3x^2-12x-7$에서

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	−2	···	1	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고 극댓값은 $f(-2)=13$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=-14$이다.
따라서 $M=13$, $m=-14$이므로
$M-m=13-(-14)=27$

0492 답 ②

$f(x)=x^4-6x^2+8x+1$에서
$f'(x)=4x^3-12x+8=4(x-1)^2(x+2)$
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗

함수 $f(x)$는 극댓값은 없고, $x=-2$에서 극솟값을 갖는다.
따라서 $a=0$, $b=1$이므로
$2a+3b=2\times0+3\times1=3$

0493 답 ⑤

$g(x)=(x^3+3)f(x)$에서
$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+3)f'(x)$
함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극댓값을 가지므로 $g'(1)=0$에서
$3f(1)+4f'(1)=0$ ····· ㉠
이때 극댓값이 12이므로 $g(1)=12$에서
$4f(1)=12$ $\therefore f(1)=3$
따라서 $f(1)=3$을 ㉠에 대입하여 풀면 $f'(1)=-\frac{9}{4}$

0494 답 22

$f(x)=x^3+(a-1)x^2-9x$에서
$f'(x)=3x^2+2(a-1)x-9$
함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로 $f'(1)=0$에서
$-6+2(a-1)=0$ $\therefore a=4$ ····· i
즉, $f(x)=x^3+3x^2-9x$이므로
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$ ····· ii
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이고 극댓값은 $f(-3)=27$,
$x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=-5$이다. ····· iii
따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은
$27+(-5)=22$ ····· iv

채점 기준

i a의 값 구하기	30%
ii $f(x)$, $f'(x)$ 구하기	30%
iii 극댓값과 극솟값 구하기	30%
iv 극댓값과 극솟값의 합 구하기	10%

0495 답 ①

$f(x)=-2x^3+ax^2+6x+b$에서
$f'(x)=-6x^2+2ax+6$
함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값을 가지므로 $f'(-1)=0$에서
$-2a=0$ $\therefore a=0$
이때 극솟값이 -2이므로 $f(-1)=-2$에서
$a+b-4=-2$ $\therefore b=2$ ($\because a=0$)
즉, $f(x)=-2x^3+6x+2$이므로
$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(1)=6$이다.

0496 답 ②

$f(x)=x^4+ax^2+b$에서 $f'(x)=4x^3+2ax$
함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극소이므로 $f'(2)=0$에서
$32+4a=0$ $\therefore a=-8$
즉, $f(x)=x^4-8x^2+b$이므로
$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은
$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 -3이므로 $f(0)=-3$에서 $b=-3$
$\therefore ab=(-8)\times(-3)=24$

0497 답 58

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서
$f'(x)=-3x^2+2ax+b$
함수 $f(x)$가 $x=-4$, $x=2$에서 극값을 가지므로
$f'(-4)=0$, $f'(2)=0$
$f'(x)=-3(x+4)(x-2)=-3x^2-6x+24$
즉, $2a=-6$, $b=24$이므로 $a=-3$, $b=24$ ····· i
$\therefore f(x)=-x^3-3x^2+24x+c$
$f'(x)=-3x^2-6x+24=-3(x+4)(x-2)$
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-4$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 극소이고 극솟값은 -50이므로

$f(-4)=-50$에서

$-80+c=-50$ $\therefore c=30$ ····· ⅱ

$\therefore f(x)=-x^3-3x^2+24x+30$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고 극댓값은

$f(2)=58$ ····· ⅲ

채점 기준	
ⅰ a, b의 값 구하기	40 %
ⅱ c의 값 구하기	30 %
ⅲ 극댓값 구하기	30 %

0498 답 ③

$f(x)=2x^3-3ax^2+10a$에서

$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=a$

이때 함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지므로 $a\neq0$

(ⅰ) $a>0$일 때,

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	0	···	a	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 a이므로

$f(0)=a$에서 $10a=a$ $\therefore a=0$

그런데 $a>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a<0$일 때,

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	a	···	0	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고 극댓값은 a이므로

$f(a)=a$에서

$-a^3+10a=a$, $a^3-9a=0$

$a(a+3)(a-3)=0$ $\therefore a=-3$ ($\because a<0$)

$\therefore f(x)=2x^3+9x^2-30$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $f(0)=-30$

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)$의 극솟값은 -30이다.

0499 답 ③

$f(x)=-2x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=-6x^2-6x=-6x(x+1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	−1	···	0	···
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=a$, $x=-1$에서 극소이고 극솟값은 $f(-1)=a-1$이다.

이때 모든 극값의 곱이 6이므로

$a(a-1)=6$, $a^2-a-6=0$

$(a+2)(a-3)=0$ $\therefore a=3$ ($\because a>0$)

0500 답 ④

$f(x)=x^3-6x^2+k$에서

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	0	···	4	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=k$, $x=4$에서 극소이고 극솟값은 $f(4)=k-32$이다.

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 서로 다르므로

$k=-(k-32)$, $2k=32$ $\therefore k=16$

0501 답 1

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax+b$에서 $f'(x)=x^2-2x+a$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극값을 가지므로 $f'(-1)=0$에서

$3+a=0$ $\therefore a=-3$

즉, $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+b$이고

$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	−1	···	3	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=b+\frac{5}{3}$,

$x=3$에서 극소이고 극솟값은 $f(3)=b-9$이다.

이때 극댓값과 극솟값의 합이 -8이므로

$b+\frac{5}{3}+b-9=-8$, $2b=-\frac{2}{3}$ $\therefore b=-\frac{1}{3}$

$\therefore ab=(-3)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=1$

0502 답 ⑤

$f(x)=x^3+(a-3)x^2-5x+1$에서

$f'(x)=3x^2+2(a-3)x-5$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대이고 $x=\beta$에서 극소라 하면 α, β는 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이다.

이때 극대가 되는 점과 극소가 되는 점이 점 $(0, 1)$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=0$ $\therefore \alpha+\beta=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{2(a-3)}{3}=0$ $\therefore a=3$

0503 답 6

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=2$에서 극값을 가지므로

$f'(0)=0$, $f'(2)=0$

이때 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 $3a$인 이차함수이므로

$f'(x)=3ax(x-2)=3ax^2-6ax$

즉, $2b=-6a$, $c=0$이므로

$b=-3a$, $c=0$ ····· ㉠ ····· ⓘ

$\therefore f(x)=ax^3-3ax^2+1$

두 점 $(0, f(0))$, $(2, f(2))$를 지나는 직선의 기울기는

$\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=\dfrac{(1-4a)-1}{2}=-2a$

즉, $-2a=6$이므로 $a=-3$

$a=-3$을 ㉠에 대입하면 $b=9$ ····· ⓘⓘ

$\therefore a+b+c=-3+9+0=6$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a, b의 관계식과 c의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ a, b의 값 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ $a+b+c$의 값 구하기	10 %

0504 답 −14

$f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-4)x+2$에서

$f'(x)=3x^2-6ax+3(a^2-4)$

$=3\{x^2-2ax+(a+2)(a-2)\}$

$=3\{x-(a-2)\}\{x-(a+2)\}$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=a-2$ 또는 $x=a+2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	$a-2$	···	$a+2$	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=a+2$에서 극소이고 극솟값이 -30이므로

$f(a+2)=-30$에서

$(a+2)^3-3a(a+2)^2+3(a^2-4)(a+2)+2=-30$

$a^3-12a+16=0$, $(a-2)^2(a+4)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=2$

(i) $a=-4$일 때, $f(x)=x^3+12x^2+36x+2$

이때 $f(1)=51>0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$일 때, $f(x)=x^3-6x^2+2$

이때 $f(1)=-3<0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=2$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+2$이므로

$f(a)=f(2)=-14$

0505 답 ①

함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x=k\,(k\neq 0)$인 점에서 x축에 접한다고 하면 $f(x)$는 $(x-k)^2$을 인수로 갖고, $f(0)=0$이므로

$f(x)=-x(x-k)^2$

$f'(x)=-(x-k)^2-2x(x-k)=-(3x-k)(x-k)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=\dfrac{k}{3}$ 또는 $x=k$

(i) $k>0$일 때,

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	$\frac{k}{3}$	···	k	···
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{k}{3}$에서 극소이고 극솟값은 $f\left(\dfrac{k}{3}\right)=-\dfrac{4}{27}k^3$이다.

즉, $-\dfrac{4}{27}k^3=-4$이므로

$k^3=27$ $\therefore k=3\,(\because k$는 실수)

(ii) $k<0$일 때,

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	k	···	$\frac{k}{3}$	···
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극소이고 극솟값은 $f(k)=0$이다.

이는 극솟값이 -4라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $k=3$

즉, $f(x)=-x(x-3)^2=-x^3+6x^2-9x$이므로

$a=6$, $b=-9$

$\therefore a-2b=6-2\times(-9)=24$

0506 답 ①

$f(x)=x^4-2ax^2+b$에서

$f'(x)=4x^3-4ax=4x(x^2-a)$

함수 $f(x)$가 극댓값, 극솟값을 모두 가지므로 $a>0$이고 (가)에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값 16을 가지므로 $f(0)=16$에서 $b=16$

$\therefore f(x)=x^4-2ax^2+16$

$f'(x)=4x^3-4ax=4x(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{a}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	$-\sqrt{a}$	···	0	···	$\sqrt{a}$	···
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{a}$, $x=\sqrt{a}$에서 극소이고 극솟값은

$f(-\sqrt{a})=f(\sqrt{a})=16-a^2$이다.

$16-a^2$은 양의 정수이므로

$16-a^2>0$, $(a+4)(a-4)<0$

$\therefore 0<a<4\,(\because a>0)$

이때 $\sqrt{a}$가 정수이므로 $a=1$

따라서 $f(x)=x^4-2x^2+16$이므로 $f(1)=15$

0507 답 ④

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극솟값을 가지므로 $f'(-2)=0$에서

$12a-4b+c=0$ ····· ㉠

이때 극솟값이 -16이므로 $f(-2)=-16$에서

$-8a+4b-2c+d=-16$ ····· ㉡

㈏에서 $f(0)=0$, $f'(0)=12$이므로 $d=0$, $c=12$

이것을 ㉠, ㉡에 대입하여 정리하면

$3a-b=-3$, $2a-b=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=0$

즉, $f(x)=-x^3+12x$이므로

$f'(x)=-3x^2+12=-3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	-2	···	2	···
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고 극댓값은 $f(2)=16$이다.

0508 답 6

$g(x)=\begin{cases}-x^3+6x^2-ax+b-10 & (x<3)\\ x^3-6x^2+ax+10 & (x\geq3)\end{cases}$이고,

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$에서도 연속이다.

즉, $\lim\limits_{x\to3+}g(x)=\lim\limits_{x\to3-}g(x)=g(3)$에서

$-17+3a=17-3a+b$ $\therefore 6a-b=34$ ····· ㉠

$h_1(x)=-x^3+6x^2-ax+b-10$, $h_2(x)=x^3-6x^2+ax+10$이라 하면

$h_1'(x)=-3x^2+12x-a$, $h_2'(x)=3x^2-12x+a$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=3$에서 미분가능하므로 미분계수 $g'(3)$이 존재한다.

즉, $h_1'(3)=h_2'(3)$에서

$9-a=-9+a$, $2a=18$ $\therefore a=9$

$a=9$를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=20$

$\therefore g(x)=\begin{cases}-x^3+6x^2-9x+10 & (x<3)\\ x^3-6x^2+9x+10 & (x\geq3)\end{cases}$

(i) $x<3$일 때,

$g'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$x<3$에서 $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=1$

(ii) $x\geq3$일 때,

$g'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$x\geq3$에서 $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	1	···	3	···
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$g(x)$	↘	극소	↗		↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $g(1)=6$이다.

0509 답 ②

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)라 하면 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(-x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

즉, $a=c=0$이므로

$f(x)=x^4+bx^2+d$, $f'(x)=4x^3+2bx$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $f'(1)=0$에서

$4+2b=0$ $\therefore b=-2$

이때 극솟값이 5이므로 $f(1)=5$에서

$1+b+d=5$ $\therefore d=6$ ($\because b=-2$)

즉, $f(x)=x^4-2x^2+6$이므로

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	-1	···	0	···	1	···
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=6$이다.

참고 $f(x)=f(-x)$이므로

$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=x^4-ax^3+bx^2-cx+d$

$\therefore 2ax^3+2cx=0$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 $a=c=0$

0510 답 ④

기울기가 5인 직선을 $y=5x+k$ (k는 상수)라 하면 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=5x+k$가 $x=-1$인 점에서 접하고 $x=3$인 점에서 만나므로

$f(x)-(5x+k)=(x+1)^2(x-3)$

$\therefore f(x)=(x+1)^2(x-3)+5x+k$

$f'(x)=2(x+1)(x-3)+(x+1)^2+5$

$=3x^2-2x=x(3x-2)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	0	···	$\frac{2}{3}$	···
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=\frac{2}{3}$에서 극소이므로

$M=f(0)=k-3$, $m=f\left(\frac{2}{3}\right)=k-\frac{85}{27}$

$\therefore M-m=(k-3)-\left(k-\frac{85}{27}\right)=\frac{4}{27}$

0511 답 ①

삼차함수 $g(x)$가 $x=1$에서 극소이면 $g'(1)=0$이므로 $g(x)$는 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

이때 삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)=x(x-1)^2$ 또는 $g(x)=(x-1)^2(x-2)$

(i) $g(x)=x(x-1)^2$일 때,

$g'(x)=(x-1)^2+2x(x-1)=(3x-1)(x-1)$

$g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	$\frac{1}{3}$	⋯	1	⋯
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $g(x)=(x-1)^2(x-2)$일 때,

$g'(x)=2(x-1)(x-2)+(x-1)^2=(x-1)(3x-5)$

$g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=\frac{5}{3}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	1	⋯	$\frac{5}{3}$	⋯
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $g(x)$는 $x=\frac{5}{3}$에서 극소이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $g(x)=x(x-1)^2$

따라서 $f(x)=x(x-2)^2$이므로 $f(3)=3$

참고 삼차함수 $g(x)$가 $x-1$을 인수로 갖지 않으면

$g(x)=x^2(x-2)$ 또는 $g(x)=x(x-2)^2$

$\therefore g'(x)=2x(x-2)+x^2$ 또는 $g'(x)=(x-2)^2+2x(x-2)$

이때 $g'(1)\neq0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

즉, 함수 $g(x)$는 $x-1$을 인수로 갖고 $g'(1)=0$이므로 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

0512 답 −4

$g(x)=a(3x-x^3)$, $h(x)=x^3-6ax$라 하면

$g'(x)=a(3-3x^2)=-3a(x+1)(x-1)$

$h'(x)=3x^2-6a=3(x^2-2a)$

(i) $a>0$일 때,

$x<0$에서 $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$

$x\geq0$에서 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=\sqrt{2a}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	−1	⋯	0	⋯	$\sqrt{2a}$	⋯
$f'(x)$	−	0	+		−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $f(0)=0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때,

$x<0$에서 $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$

$x\geq0$에서 $h'(x)=3x^2-6a>0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	−1	⋯	0	⋯
$f'(x)$	+	0	−		+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은 8이므로

$f(-1)=8$에서 $-2a=8$ $\therefore a=-4$

(i), (ii)에서 $a=-4$

0513 답 ⑤

(가)의 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=-20$에서 $x\to2$일 때 (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0이다.

즉, $\lim_{x\to2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

이때 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$이므로

$f'(2)=-20$

(나)에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극값을 가지므로 $f'(0)=0$

$f(x)=-2x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=-6x^2+2ax+b$

$f'(0)=0$에서 $b=0$

$f(2)=0$에서 $4a+c-16=0$ ····· ㉠

$f'(2)=-20$에서 $4a-24=-20$ $\therefore a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $c=12$

즉, $f(x)=-2x^3+x^2+12$이므로

$f'(x)=-6x^2+2x=-2x(3x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	0	⋯	$\frac{1}{3}$	⋯
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이므로 극솟값은 $f(0)=12$

0514 답 ③

$f(x)=x^3+ax^2+(a^2-6)x-5$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+a^2-6$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2-6)>0$, $-2a^2+18>0$

$a^2-9<0$, $(a+3)(a-3)<0$ $\therefore -3<a<3$

따라서 정수 a는 −2, −1, 0, 1, 2의 5개이다.

0515 답 ④

$f(x)=x^3+(k-1)x^2+(k+5)x+1$에서

$f'(x)=3x^2+2(k-1)x+k+5$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-3(k+5)\le 0$

$k^2-5k-14\le 0$, $(k+2)(k-7)\le 0$

$\therefore -2\le k\le 7$

따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 7이다.

0516 답 19

$f(x)=x^4-4x^3+(a-2)x^2+1$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2+2(a-2)x=2x(2x^2-6x+a-2)$

함수 $f(x)$가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $2x^2-6x+a-2=0$이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x=0$이 이차방정식 $2x^2-6x+a-2=0$의 근이 아니어야 하므로

$a-2\ne 0$ $\therefore a\ne 2$ ····· ㉠ ····· ⓘ

이차방정식 $2x^2-6x+a-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-2(a-2)>0$, $13-2a>0$

$\therefore 0<a<\frac{13}{2}$ ($\because a>0$) ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$0<a<2$ 또는 $2<a<\frac{13}{2}$ ····· ⓘⓘ

따라서 자연수 a는 1, 3, 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$1+3+4+5+6=19$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $a\ne 2$임을 확인하기	40%
ⓘⓘ a의 값의 범위 구하기	40%
ⓘⓘⓘ 모든 정수 a의 값의 합 구하기	20%

0517 답 ②

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+ax-3$에서 $f'(x)=x^2-4x+a$

함수 $f(x)$가 $-1<x<3$에서 극댓값을 갖고, $x>3$에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근 중 한 근은 -1과 3 사이에 있고, 다른 한 근은 3보다 커야 한다.

$f'(-1)>0$이어야 하므로

$a+5>0$ $\therefore a>-5$ ····· ㉠

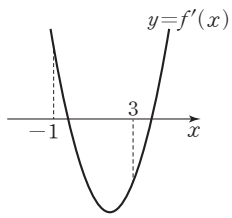
$f'(3)<0$이어야 하므로

$a-3<0$ $\therefore a<3$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $-5<a<3$

따라서 $m=-5$, $n=3$이므로

$m+n=-5+3=-2$



0518 답 ②

$f(x)=x^3+ax^2-ax+1$에서 $f'(x)=3x^2+2ax-a$

함수 $f(x)$가 $x>0$에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

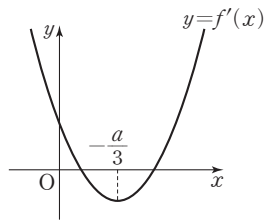
$\frac{D}{4}=a^2+3a>0$

$a(a+3)>0$

$\therefore a<-3$ 또는 $a>0$

(ii) $f'(0)>0$이어야 하므로

$-a>0$ $\therefore a<0$



(iii) 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=-\frac{a}{3}$이므로

$-\frac{a}{3}>0$ $\therefore a<0$

(i), (ii), (iii)에서 $a<-3$

따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 -4이다.

0519 답 ⑤

$f(x)=x^3-3x^2+kx+1$에서 $f'(x)=3x^2-6x+k$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지므로 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-3k>0$ $\therefore k<3$

이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하며

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\frac{k}{3}$

이때 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 갖고, 모든 극값의 합은 3이므로

$f(\alpha)+f(\beta)=3$에서

$(\alpha^3-3\alpha^2+k\alpha+1)+(\beta^3-3\beta^2+k\beta+1)=3$

$(\alpha^3+\beta^3)-3(\alpha^2+\beta^2)+k(\alpha+\beta)-1=0$

$(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-3\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+k(\alpha+\beta)-1=0$

$8-2k-3\left(4-\frac{2}{3}k\right)+2k-1=0$

$-5+2k=0$ $\therefore k=\frac{5}{2}$

0520 답 ③

$f(x)=-x^3+6x^2+kx-2$에서 $f'(x)=-3x^2+12x+k$

삼차함수 $f(x)$가 $0<x<5$에서 하나의 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 두 실근 중 한 근만 0과 5 사이에 있어야 한다.

(i) $f'(0)=0$일 때,

$k=0$

(ii) $f'(0)>0$, $f'(5)<0$일 때,

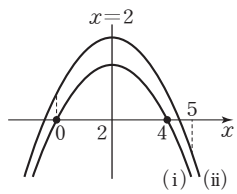
$f'(0)>0$에서 $k>0$

$f'(5)<0$에서

$-15+k<0$ $\therefore k<15$

(i), (ii)에서 $0\le k<15$

따라서 정수 k는 0, 1, 2, …, 14의 15개이다.



참고 함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=2$이므로 $f'(0)=0$이면 $f'(4)=0$이다.

0521 답 1

$f(x)=x^4-4ax^3+3ax^2-5$에서

$f'(x)=4x^3-12ax^2+6ax=2x(2x^2-6ax+3a)$

함수 $f(x)$가 열린구간 $(-1, 3)$에서 모든 극값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 $-1<x<3$에서 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

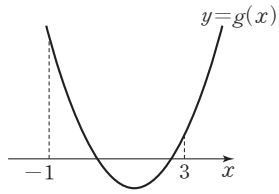
즉, 이차방정식 $2x^2-6ax+3a=0$이 $-1<x<3$에서 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$g(x)=2x^2-6ax+3a$라 하자.

(i) $x=0$이 이차방정식 $g(x)=0$의 근이 아니어야 하므로

$3a\neq0$ $\therefore a\neq0$

(ii) 이차방정식 $g(x)=0$의 판별식을 D라 하면



$\frac{D}{4}=9a^2-6a>0$

$3a(3a-2)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>\frac{2}{3}$

(iii) $g(-1)>0$이어야 하므로

$2+9a>0$ $\therefore a>-\frac{2}{9}$

$g(3)>0$이어야 하므로

$18-15a>0$ $\therefore a<\frac{6}{5}$

즉, $-\frac{2}{9}<a<\frac{6}{5}$

(iv) 함수 $y=g(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{3}{2}a$이므로

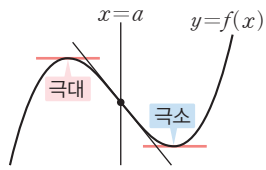
$-1<\frac{3}{2}a<3$ $\therefore -\frac{2}{3}<a<2$

(i)~(iv)에서 $-\frac{2}{9}<a<0$ 또는 $\frac{2}{3}<a<\frac{6}{5}$

따라서 구하는 정수 a의 값은 1이다.

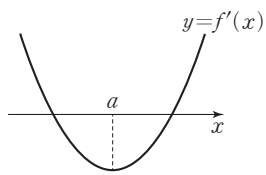
0522 답 ②

직선 $x=a$가 곡선 $y=f(x)$의 극대가 되는 점과 극소가 되는 점 사이를 지나려면 방정식 $f'(x)=0$의 두 실근 사이에 a가 존재해야 하므로



$f'(a)<0$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+4x+1$에서



$f'(x)=x^2-2ax+4$

즉, $f'(a)=-a^2+4$이므로

$-a^2+4<0$

$\therefore a<-2$ 또는 $a>2$

0523 답 −8

$f(x)=\frac{1}{2}x^4+(a-4)x^2-4ax$에서

$f'(x)=2x^3+2(a-4)x-4a=2(x-2)(x^2+2x+a)$

사차함수 $f(x)$가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖지 않아야 한다. 즉, 중근 또는 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

(i) 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근을 갖는 경우

ⓐ 이차방정식 $x^2+2x+a=0$이 $x=2$를 근으로 가질 때,

$8+a=0$ $\therefore a=-8$

ⓑ 이차방정식 $x^2+2x+a=0$이 중근을 가질 때, 이차방정식 $x^2+2x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-a=0$ $\therefore a=1$

(ii) 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+2x+a=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+2x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-a<0$ $\therefore a>1$

(i), (ii)에서 $a=-8$ 또는 $a\geq1$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 -8이다.

0524 답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 8)$에서 직선 $y=-2x+8$과 접하므로

$f'(0)=-2$, $f(0)=8$ ····· ㉠

(가)에서 $(x^2-a)^3$은 (삼차식)×(삼차식) 꼴로 인수분해 되어야 하므로 $a\geq0$

$a=0$이면 $f(x)g(x)=x^6$이므로 $f(x)=px^3$ (단, $p>0$)

그런데 $f(0)=0$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

즉, $a>0$이고,

$f(x)g(x)=(x^2-a)^3=(x+\sqrt{a})^3(x-\sqrt{a})^3$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 $k\,(k>0)$라 하자.

(i) $f(x)=k(x+\sqrt{a})^3$일 때,

$f'(x)=3k(x+\sqrt{a})^2$

그런데 $f'(0)=3ka>0$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)=k(x+\sqrt{a})^2(x-\sqrt{a})$일 때,

$f(0)=-ka\sqrt{a}<0$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(iii) $f(x)=k(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})^2$일 때,

$f'(x)=k(x-\sqrt{a})^2+2k(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$

$=k(x-\sqrt{a})(3x+\sqrt{a})$

이때 $f'(0)=-ka<0$이므로 ㉠을 만족시킨다.

(iv) $f(x)=k(x-\sqrt{a})^3$일 때,

$f(0)=-ka\sqrt{a}<0$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서

$f(x)=k(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})^2$, $f'(x)=k(x-\sqrt{a})(3x+\sqrt{a})$

$f(0)=8$에서 $ka\sqrt{a}=8$ ····· ㉡

$f'(0)=-2$에서 $-ka=-2$ ····· ㉢

㉢에서 $ka=2$를 ㉡에 대입하면

$2\sqrt{a}=8$ $\therefore a=16$

$a=16$을 ㉢에 대입하여 풀면 $k=\frac{1}{8}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{8}(x+4)(x-4)^2$

$f'(x)=\frac{1}{8}(x-4)^2+\frac{1}{4}(x+4)(x-4)=\frac{1}{8}(x-4)(3x+4)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-\frac{4}{3}$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{4}{3}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{4}{3}$에서 극대이고 $x=4$에서 극소이다.

따라서 $\alpha=-\frac{4}{3}$, $\beta=4$이므로

$\alpha+\beta=-\frac{4}{3}+4=\frac{8}{3}$

0525 답 ③

함수 $f(x)$가 $x=t$에서 극대이려면 $f'(t)=0$이고 $x=t$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌어야 한다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=c$에서 극대이다.

0526 답 ③

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은
$x=b$ 또는 $x=d$ 또는 $x=e$
이때 $x=b$, $x=d$, $x=e$의 좌우에서 각각 $h'(x)$의 부호가 바뀌므로 $h(x)$의 극값은 3개이다.

0527 답 ②

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↗	극대	↘	극소	↗	

① $f(-3)$의 값은 알 수 없다.
② $-2<x<1$에서 $f'(x)\geq 0$이므로 $f(x)$는 구간 $(-2, 1)$에서 증가한다.
③ 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고 극댓값 $f(2)$를 갖는다.
④ 구간 $(3, 4)$에서 $f'(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점에서의 접선의 기울기는 음수이다.
⑤ $f(x)$는 $x=2$, $x=4$에서 극값을 가지므로 극값은 2개이다.
따라서 옳은 것은 ②이다.

0528 답 ④

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗		↗	극대	↘

ㄱ. 구간 $(0, 2)$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.
ㄴ. $f'(0)=0$이지만 $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 $f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다.
ㄷ. $f(x)$는 $x=-3$에서 극솟값을 갖고 $f(-3)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=-3$에서 x축에 접한다.
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0529 답 ④

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은
$x=a$ 또는 $x=d$
주어진 그래프에서 $h'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	d	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

① 구간 $(-\infty, b)$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.
② 함수 $h(x)$, 즉 $f(x)-g(x)$는 $x=d$에서 극대이다.
③ $f(a)=g(a)$이면 $h(a)=0$이고 구간 (a, b)에서 $h'(x)>0$이므로 $h(x)$는 증가한다.
즉, $h(b)>h(a)$이므로 $f(b)-g(b)>0$
$\therefore f(b)>g(b)$
④ $f(b)=g(b)$이면 $h(b)=0$이고 구간 (b, c)에서 $h'(x)>0$이므로 $h(x)$는 증가한다.
즉, $h(c)>h(b)$이므로 $f(c)-g(c)>0$
$\therefore f(c)>g(c)$
⑤ $h(x)$의 함숫값은 알 수 없으므로 구간 (c, d)에서 $h(x)<0$, 즉 $f(x)<g(x)$인지는 알 수 없다.
따라서 옳은 것은 ④이다.

0530 답 ①

함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 $x=-2$, $x=1$에서 접하므로
$h(x)=(x+2)^2(x-1)^2$
즉, $h'(x)=2(x+2)(x-1)^2+2(x+2)^2(x-1)$
$=2(x+2)(x-1)(2x+1)$
$h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은
$x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $h(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극대이므로 극댓값은
$h\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{81}{16}$

0531 답 ⑤

$g(x)=f(x)-kx$에서 $g'(x)=f'(x)-k$

함수 $g(x)$가 $x=-3$에서 극값을 가지므로 $g'(-3)=0$에서

$f'(-3)-k=0$

$f'(x)=x^2-1$에서 $f'(-3)=8$이므로

$8-k=0$ $\therefore k=8$

0532 답 4

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=x^2+2ax+b$

주어진 그래프에서 $f'(0)=0$, $f'(2)=0$이므로

$f'(x)=x(x-2)=x^2-2x$

즉, $2a=-2$, $b=0$이므로 $a=-1$, $b=0$ …… ⓘ

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+c$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고 극솟값은 $\frac{8}{3}$이므로 $f(2)=\frac{8}{3}$에서

$-\frac{4}{3}+c=\frac{8}{3}$ $\therefore c=4$ …… ⓘⓘ

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+4$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이므로 극댓값은

$f(0)=4$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a, b의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ c의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 극댓값 구하기	40 %

0533 답 ④

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

주어진 그래프에서 $f'(0)=0$, $f'(4)=0$이므로

$f'(x)=3ax(x-4)=3ax^2-12ax$

즉, $2b=-12a$, $c=0$이므로 $b=-6a$, $c=0$

$\therefore f(x)=ax^3-6ax^2+d$

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극대이고 극댓값은 14이므로 $f(4)=14$에서

$-32a+d=14$ …… ㉠

또 $x=0$에서 극소이고 극솟값은 6이므로 $f(0)=6$에서

$d=6$

$d=6$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+6$이므로 $f(2)=10$

0534 답 ②

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

이때 $f'(0)=-3$에서 $c=-3$이므로

$f'(x)=3ax^2+2bx-3$

또 $f'(-3)=0$, $f'(1)=0$에서

$27a-6b-3=0$, $3a+2b-3=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{3}$, $b=1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x+d$

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이고 극댓값은 $f(-3)=d+9$,

$x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=d-\frac{5}{3}$이다.

따라서 극댓값과 극솟값의 차는

$\left|(d+9)-\left(d-\frac{5}{3}\right)\right|=\frac{32}{3}$

0535 답 ③

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극대이고, $x=4$에서 극소이므로

$f'(2)=0$, $f'(4)=0$에서

$f'(x)=k(x-2)(x-4)$ (k는 상수, $k>0$)라 하면

$g(x)=x^2-f(x)$에서

$g'(x)=2x-f'(x)$

$=2x-k(x-2)(x-4)$

$=-kx^2+(2+6k)x-8k$

함수 $g(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지므로 α, β는 이차방정식 $g'(x)=0$의 두 근이다. 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=8$

이때 $g'(\alpha)=0$, $g'(\beta)=0$에서

$2\alpha-f'(\alpha)=0$, $2\beta-f'(\beta)=0$

따라서 $f'(\alpha)=2\alpha$, $f'(\beta)=2\beta$이므로

$f'(\alpha)f'(\beta)=2\alpha\times2\beta=4\alpha\beta$

$=4\times8=32$

0536 답 ①

ㄱ. $f'(b)$의 값이 존재하므로 $f(x)$는 $x=b$에서 미분가능하다.

ㄴ. 구간 (a, c)에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

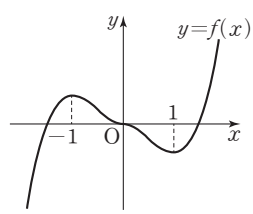
$\therefore f(a)>f(c)$

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=a$, $x=c$에서 극값을 가지므로 $f(x)$의 극값은 2개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

0537 답 0

도함수 $y=f'(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로 $f(0)=0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.



즉, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)$이다.

이때 $f(1)=-f(-1)$이므로 구하는 극댓값과 극솟값의 합은

$f(-1)+f(1)=0$

0538 답 ③

함수 $y=xf'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 세 점의 x좌표가 -1, 0, 1이므로 $xf'(x)=kx(x+1)(x-1)$ (k는 상수, $k<0$)이라 하면

$f'(x)=k(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

$k<0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

ㄱ. 구간 $(-1, 1)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이다.

ㄷ. $f(0)$의 값을 알 수 없으므로 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$가 성립하는지 알 수 없다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

참고 ㄷ. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라 하면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$이므로 $xf'(x)=kx(x+1)(x-1)$에서

$3ax^3+2bx^2+cx=kx(x+1)(x-1)$

$3ax^3+2bx^2+cx=kx^3-kx$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

$3a=k$, $2b=0$, $c=-k$ $\therefore a=\frac{k}{3}$, $b=0$, $c=-k$

즉, $f(x)=\frac{k}{3}x^3-kx+d$, $f(-x)=-\frac{k}{3}x^3+kx+d$이므로 $f(-x)=-f(x)$가 성립하려면 $d=0$, 즉 $f(0)=0$이어야 한다.

최고수준 도전 기출 126~127쪽

0539 답 ⑤

전략 $x_1\neq x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\neq f(x_2)$이므로 $f(x)$는 일대일함수이어야 한다. 즉, $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 함을 이용한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

㈎에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, f(0))$, 즉 $(0, c)$에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=b$이므로 접선의 방정식은

$y-c=b(x-0)$ $\therefore y=bx+c$

이 직선이 점 $(-1, 0)$을 지나므로

$0=-b+c$ $\therefore c=b$

$\therefore f(x)=x^3+ax^2+bx+b$

㈏에서 $x_1\neq x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\neq f(x_2)$이므로 $f(x)$는 일대일함수이어야 하고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3b\leq0$ $\therefore 3b\geq a^2$ ····· ㉠

이때 $f(2)=8+4a+3b$

$\geq4a+8+a^2$ ($\because$ ㉠)

$=(a+2)^2+4$

따라서 $f(2)$의 최솟값은 4이다.

0540 답 ①

전략 사차함수 $f(x)$가 극값을 오직 하나만 갖기 위해서는 삼차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 서로 다른 두 허근을 가짐을 이용하여 문제를 해결한다.

$f(x)=x^4+(2a-1)x^3+2x^2-3$에서

$f'(x)=4x^3+3(2a-1)x^2+4x=x\{4x^2+3(2a-1)x+4\}$

사차함수 $f(x)$가 극값을 오직 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖지 않아야 한다. 즉, 중근 또는 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이때 이차방정식 $4x^2+3(2a-1)x+4=0$이 0을 근으로 가질 수 없으므로 이차방정식 $4x^2+3(2a-1)x+4=0$은 0이 아닌 중근 또는 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $4x^2+3(2a-1)x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9(2a-1)^2-64\leq0$, $(2a-1)^2\leq\frac{64}{9}$

$-\frac{8}{3}\leq2a-1\leq\frac{8}{3}$ $\therefore -\frac{5}{6}\leq a\leq\frac{11}{6}$

따라서 실수 a의 최댓값 M은 $\frac{11}{6}$, 최솟값 m은 $-\frac{5}{6}$이므로

$M+m=\frac{7}{6}+\left(-\frac{1}{6}\right)=1$

0541 답 ②

전략 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(-x)$가 성립하면 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $f'(x)$는 짝수 차수의 항 또는 상수항으로만 이루어져 있음을 이용한다.

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

㈎에서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=f'(-x)$가 성립하므로

$3x^2+2ax+b=3x^2-2ax+b$에서 $4ax=0$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

$4a=0$ $\therefore a=0$

$\therefore f(x)=x^3+bx+c$, $f'(x)=3x^2+b$

㈏의 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-2}{x+1}=0$에서 $x\to-1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}\{f(x)-2\}=0$이므로 $f(-1)=2$

이때 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$이므로

$f'(-1)=0$

즉, $3+b=0$이므로 $b=-3$

또 $f(-1)=2$에서

$-1-b+c=2$ $\therefore c=0$ ($\because b=-3$)

즉, $f(x)=x^3-3x$이므로

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 극댓값은 $f(-1)=2$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=-2$이다.
따라서 구하는 극댓값과 극솟값의 곱은
$2\times(-2)=-4$

0542 답 ④

전략 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(p+x)=f(p-x)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=p$에 대하여 대칭임을 이용하여 사차함수 $f(x)$가 극값을 갖는 x의 값을 찾는다.

㈎의 $f(-2+x)=f(4-x)$에 x 대신 $x+3$을 대입하면
$f(1+x)=f(1-x)$
즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=1$에 대하여 대칭이다.
이때 ㈏에서 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값을 가지므로 $x=3$에서도 극솟값을 갖는다.
즉, $f'(-1)=0$, $f'(3)=0$
최고차항의 계수가 양수인 사차함수가 두 개의 극솟값을 가지면 한 개의 극댓값을 가지므로 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 가져야 한다.
$\therefore f'(1)=0$
$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)라 하면
$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$
$f'(-1)=0$, $f'(1)=0$, $f'(3)=0$이므로
$f'(x)=4(x+1)(x-1)(x-3)$
$\quad=4x^3-12x^2-4x+12$
즉, $3a=-12$, $2b=-4$, $c=12$이므로
$\therefore a=-4$, $b=-2$, $c=12$
$\therefore f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+d$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값은 $f(1)=d+7$, $x=-1$에서 극소이고 극솟값은 $f(-1)=d-9$이므로
$M-m=(d+7)-(d-9)=16$

0543 답 ①

전략 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 홀수 차수의 항만 존재함을 이용하여 식을 세우고, $f(x)$가 $x=\frac{1}{2}$에서 극소임을 이용하여 사각형 ADBC의 넓이를 식으로 나타낸다.

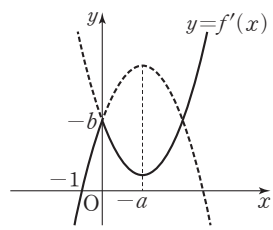
함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$가 성립한다.
즉, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a>0$)라 하면
$-ax^3+bx^2-cx+d=-ax^3-bx^2-cx-d$
$\therefore 2bx^2+2d=0$
이 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로
$2b=0$, $2d=0$ $\quad\therefore b=0$, $d=0$
$\therefore f(x)=ax^3+cx$, $f'(x)=3ax^2+c$
두 점 C, D는 원점에 대하여 대칭이고 점 D의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이므로 점 C의 x좌표는 $-\frac{1}{2}$이다.
즉, 함수 $f(x)$가 $x=-\frac{1}{2}$에서 극댓값을 갖고 $x=\frac{1}{2}$에서 극솟값을 가지므로 $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$에서
$\frac{3}{4}a+c=0$ $\quad\therefore c=-\frac{3}{4}a$
$\therefore f(x)=ax^3-\frac{3}{4}ax=ax\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$f(x)=0$을 만족시키는 x의 값은
$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$
즉, 두 점 A, B의 좌표는 각각 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$이므로
$\overline{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}$
점 C의 좌표를 $\left(-\frac{1}{2},\ k\right)$라 하면 사각형 ADBC의 넓이는 두 삼각형 ABC, ABD의 넓이의 합과 같으므로
$\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times k+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times|-k|=\sqrt{3}k$
즉, $\sqrt{3}k=\sqrt{3}$이므로 $k=1$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극대이므로 극댓값은
$f\left(-\frac{1}{2}\right)=k=1$

0544 답 ③

전략 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고 구간 $[-1,\ \infty)$에서 증가하므로 $f'(-1)=0$임을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한다. 또 이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 축의 방정식 $x=-a$에 대하여 a의 값에 따라 함수의 그래프를 그려 본다.

$$f'(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-b & (x<0)\\ x^2+2ax-b & (x>0)\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-(x+a)^2+a^2-b & (x<0)\\ (x+a)^2-a^2-b & (x>0)\end{cases}$$

이므로 $f'(0)=-b$이다.
함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하므로 $f'(x)\le0$이고 구간 $[-1,\ \infty)$에서 증가하므로 $f'(x)\ge0$이다.
즉, $f'(-1)=0$이므로
$-1+2a-b=0$ $\quad\therefore b=2a-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠
(i) $a<0$일 때



$x\ge-1$에서 $f'(x)\ge0$이므로
$f'(-a)\ge0$이어야 한다.
$-a^2-b\ge0$
$\therefore a^2+b\le0$
이 식에 ㉠을 대입하면
$a^2+2a-1\le0$
$\{a-(-1-\sqrt{2})\}\{a-(-1+\sqrt{2})\}\le0$
$\therefore -1-\sqrt{2}\le a\le-1+\sqrt{2}$
그런데 $a<0$이므로 $-1-\sqrt{2}\le a<0$

(ii) $a \geq 0$일 때

$x \geq -1$에서 $f'(x) \geq 0$이므로

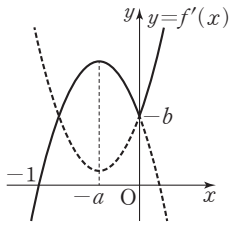
$f'(0) \geq 0$이어야 한다.

$-b \geq 0 \quad \therefore b \leq 0$

이 식에 ㉠을 대입하면

$2a-1 \leq 0 \quad \therefore a \leq \frac{1}{2}$

그런데 $a \geq 0$이므로 $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$



(i), (ii)에서 $-1-\sqrt{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$

이때 $a+b=a+(2a-1)=3a-1$이므로

$-4-3\sqrt{2} \leq 3a-1 \leq \frac{1}{2}$

따라서 $a+b$의 최댓값 M은 $\frac{1}{2}$, 최솟값 m은 $-4-3\sqrt{2}$이므로

$M-m=\frac{1}{2}-(-4-3\sqrt{2})=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$

0545 답 17

전략 함수 $f(x)$의 도함수를 이용하여 함수 $f(x)$가 감소하는 구간을 구하고, 이 감소하는 구간에 구간 $(k, k+1)$이 포함되도록 하는 정수 k의 값의 범위를 구한다.

$f(x)=x^4-16x^2$에서

$f'(x)=4x^3-32x=4x(x+2\sqrt{2})(x-2\sqrt{2})$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-2\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$2\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

(가)에서 $f'(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$x<-2\sqrt{2}$ 또는 $0<x<2\sqrt{2}$

이때 (가)를 만족시키는 k의 값의 범위는

$k+1 \leq -2\sqrt{2}$ 또는 $k \geq 0$이고 $k+1 \leq 2\sqrt{2}$

(i) $k+1 \leq -2\sqrt{2}$에서 $k \leq -2\sqrt{2}-1$

즉, 정수 k의 값의 범위는 $k \leq -4$

(ii) $k \geq 0$이고 $k+1 \leq 2\sqrt{2}$에서

$0 \leq k \leq 2\sqrt{2}-1$

즉, 정수 k의 값의 범위는 $0 \leq k \leq 1$

(i), (ii)에서 $k \leq -4$ 또는 $0 \leq k \leq 1$

$k=0$이면 $f'(0)=0$이므로 (나)를 만족시키지 못한다.

$k=1$이면 $f'(1)<0$, $f'(3)>0$이므로 (나)를 만족시킨다.

$k=-4$이면 $f'(-4)<0$, $f'(-2)>0$이므로 (나)를 만족시킨다.

$k \leq -5$이면 $k+2 \leq -3$에서 $f'(k)<0$, $f'(k+2)<0$이므로 (나)를 만족시키지 못한다.

따라서 (나)를 만족시키는 정수 k는 1, -4이므로 구하는 모든 정수 k의 값의 제곱의 합은

$1^2+(-4)^2=17$

07 함수의 그래프

난이도별 필수 기출

130~143쪽

0546 답 ④

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -3, 2이므로 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-3$ 또는 $x=2$

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↗	극대	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ④이다.

0547 답 ④

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 -2, 0, 1이므로 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

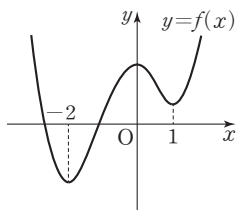
ㄱ. 구간 $(1, \infty)$에서 $f'(x)>0$이므로 $f(x)$는 증가한다.

즉, $f(1)<f(3)$

이때 $f(1)>0$이므로 $f(3)>0$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=0$, $x=1$에서 극값을 가지므로 극값은 3개이다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같으므로 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0548 답 1

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극소, $x=\beta$에서 극대라 하면 α, β는 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{2}{3}a$, $\alpha\beta=-\frac{1}{3}b$

이때 $0<\alpha<\beta$이므로

$\frac{2}{3}a>0$, $-\frac{1}{3}b>0 \quad \therefore a>0, b<0$

또 함수 $y=f(x)$의 그래프의 y절편은 양수이므로 $f(0)>0$에서

$c>0$ ····· ⓘ

$\therefore \dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}+\dfrac{|c|}{c}=\dfrac{a}{a}+\dfrac{-b}{b}+\dfrac{c}{c}$

$=1-1+1=1$ ····· ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a, b, c의 부호 구하기	70%
ⓘⓘ $\dfrac{|a|}{a}+\dfrac{|b|}{b}+\dfrac{|c|}{c}$의 값 구하기	30%

0549 답 ㄷ

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$에서

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 위를 향하고 있으므로

$a>0$ ····· ㉠

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 극대, $x=\beta$에서 극소라 하면 α, β는 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{2b}{3a}$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{3a}$

이때 $0<\alpha<\beta$이므로

$-\dfrac{2b}{3a}>0$, $\dfrac{c}{3a}>0$ $\therefore b<0$, $c>0$ ($\because$ ㉠)

또 함수 $y=f(x)$의 그래프의 y절편은 음수이므로 $f(0)<0$에서

$d<0$

ㄱ. $a>0$, $d<0$이므로 $ad<0$

ㄴ. $b<0$, $c>0$이므로 $bc<0$

ㄷ. $b<0$, $d<0$이므로 $bd>0$

ㄹ. $c>0$, $d<0$이므로 $cd<0$

따라서 보기에서 양수인 것은 ㄷ이다.

0550 답 ⑤

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=2$에서 $x\to a$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$이므로 $f(a)=0$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(a, 0)$을 지난다.

이때 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$이므로

$f'(a)=2$

즉, 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 양수이다.

또 $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)-1}{x-b}=-1$에서 $x\to b$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim\limits_{x\to b}\{f(x)-1\}=0$이므로

$f(b)-1=0$ $\therefore f(b)=1$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(b, 1)$을 지난다.

이때 $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)-1}{x-b}=\lim\limits_{x\to b}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'(b)$이므로

$f'(b)=-1$

즉, 점 $(b, f(b))$에서의 접선의 기울기는 음수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

0551 답 ②

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 0이므로

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$+$	0	$+$		$-$
$f(x)$	↘		↗		↗		↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ②이다.

0552 답 ③

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 a, c, e이므로 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=a$ 또는 $x=c$ 또는 $x=e$

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 닫힌구간 $[a, e]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	e
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=c$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은 $f(c)$이다.

0553 답 ④

함수 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표가 a, x_3, b이므로 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=a$ 또는 $x=x_3$ 또는 $x=b$

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 $a\le x\le b$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	a	$\cdots$	x_3	$\cdots$	b
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=x_3$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은 $f(x_3)$이다.

0554 답 ①

$f(x)=-x^4+6x^2-8x-20$에서

$f'(x)=-4x^3+12x-8=-4(x+2)(x-1)^2$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	↗	4 극대	↘	-23	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이면서 최대이고 최댓값은 4이다.

0555 답 24

$f(x)=x^3+3x^2+10$에서

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$-1\le x\le 1$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	12	↘	10 극소	↗	14

…… ⓘ

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최대이고 최댓값은 14, $x=0$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 10이다. …… ⓘⓘ

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$14+10=24$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내기	50%
ⓘⓘ 최댓값과 최솟값 구하기	40%
ⓘⓘⓘ 최댓값과 최솟값의 합 구하기	10%

0556 답 ②

$f(x)=\begin{cases} x^3+x^2-x+1 & (x<0) \\ x^3+x^2+x+1 & (x\ge 0) \end{cases}$에서

$g(x)=x^3+x^2-x+1$, $h(x)=x^3+x^2+x+1$이라 하면

$g'(x)=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$

$x<0$에서 $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$

$h'(x)=3x^2+2x+1=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$

$x\ge 0$에서 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 존재하지 않는다.

닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$+$	
$f(x)$	-1	↗	2 극대	↘	1 극소	↗	15

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최대이고 최댓값은 15, $x=-2$에서 최소이고 최솟값은 -1이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$15+(-1)=14$

0557 답 16

$f(x)=-x^2(x-6)=-x^3+6x^2$에서

$f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0 극소	↗	32 극대	↘

(i) $a=-1$일 때,

닫힌구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최소이고 최솟값은 0이다.

$\therefore g(-1)=0$

(ii) $a=2$일 때,

닫힌구간 $[2, 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최소이고 최솟값은 16이다.

$\therefore g(2)=16$

(i), (ii)에서 $g(-1)+g(2)=0+16=16$

0558 답 −107

$f(x)=x^3-9x^2+1$에서

$f'(x)=3x^2-18x=3x(x-6)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=6$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

(i) $-3\le a<0$일 때,

닫힌구간 $[a-2, a]$에서 함수 $f(x)$는 $x=a$일 때 최댓값을 가지므로

$g(a)=f(a)$

이때 $x\le 0$에서 $f'(x)\ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

즉, $-3\le a<0$일 때, $g(a)$의 최솟값은

$g(-3)=f(-3)=-107$

(ii) $0\le a\le 2$일 때, → 닫힌구간 $[a-2, a]$에 $x=0$이 포함되는 경우

닫힌구간 $[a-2, a]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값을 가지므로

$g(a)=f(0)=1$

즉, $g(a)$의 최솟값은 1이다.

(iii) $2<a\le 4$일 때,

닫힌구간 $[a-2, a]$에서 함수 $f(x)$는 $x=a-2$일 때 최댓값을 가지므로

$g(a)=f(a-2)$

이때 $0\le x\le 4$에서 $f'(x)\le 0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.

즉, $2<a\le 4$일 때, $g(a)$의 최솟값은

$g(4)=f(2)=-27$

(i), (ii), (iii)에서 함수 $g(a)$의 최솟값은 -107이다.

0559 답 ③

$x^2+2x-3=(x+1)^2-4$이므로 $x^2+2x-3=t$로 놓으면

$-2\le x\le 1$에서 $-4\le t\le 0$

$f(x)=(x^2+2x-3)^3+3(x^2+2x-3)^2-5$에서

$f(t)=t^3+3t^2-5$ (단, $-4\le t\le 0$)

$f'(t)=3t^2+6t=3t(t+2)$

$-4\le t\le 0$에서 $f'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은

$t=-2$ 또는 $t=0$

$-4 \le t \le 0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-4	$\cdots$	-2	$\cdots$	0
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0
$f(t)$	-21	↗	-1 극대	↘	-5

함수 $f(t)$는 $t=-2$에서 극대이면서 최대이고 최댓값 M은 -1,
$t=-4$에서 최소이고 최솟값 m은 -21이므로
$M-m=-1-(-21)=20$

참고 $x^2+2x-3=t$에서
$x=-2$일 때 $t=-3$, $x=-1$일 때 $t=-4$, $x=1$일 때 $t=0$
이므로 $-2 \le x \le 1$에서 $-4 \le t \le 0$이다.

0560 답 ①

$g(x)=x^2-4x=(x-2)^2-4$이므로 $g(x)=t$로 놓으면
$t \ge -4$
$\therefore (f \circ g)(x)=f(g(x))=f(t)$ (단, $t \ge -4$)
$f(t)=-t^3+3t-12$에서
$f'(t)=-3t^2+3=-3(t+1)(t-1)$
$t \ge -4$에서 $f'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은
$t=-1$ 또는 $t=1$
$t \ge -4$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-4	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	40	↘	-14 극소	↗	-10 극대	↘

함수 $f(t)$는 $t=-4$에서 최대이고 최댓값은 40이다.
따라서 함수 $(f \circ g)(x)$의 최댓값은 40이다.

0561 답 ②

$f(x)=x^4-4x^2+1$에서
$f'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은
$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3 극소	↗	1 극대	↘	-3 극소	↗

이때 닫힌구간 $[-a, a]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 1이어야 하므로 0이 아닌 실수 x에 대하여 $f(x)=1$이라 하면
$x^4-4x^2+1=1$, $x^2(x+2)(x-2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$ ($\because x \ne 0$)
즉, 최댓값이 1이 되려면 $0<a \le 2$
따라서 자연수 a는 1, 2의 2개이다.

참고 $a>2$이면 $f(a)>1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 최대이고 최댓값은 1보다 크다.

0562 답 ⑤

$f(x)=-2x^3+6x+a-10$에서
$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$
$-2 \le x \le 3$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은
$x=-1$ 또는 $x=1$
닫힌구간 $[-2, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$a-6$	↘	$a-14$ 극소	↗	$a-6$ 극대	↘	$a-46$

함수 $f(x)$는 $x=-2$와 $x=1$에서 최대이고 최댓값은 $a-6$,
$x=3$에서 최소이고 최솟값은 $a-46$이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 차는
$|(a-6)-(a-46)|=40$

0563 답 ④

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+a$에서
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은
$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a-5$ 극소	↗	a 극대	↘	$a-32$ 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 -10이므로 $f(2)=-10$에서
$a-32=-10$ $\therefore a=22$

0564 답 ③

$f(x)=-3x^4+4x^3+12x^2+k$에서
$f'(x)=-12x^3+12x^2+24x=-12x(x+1)(x-2)$
$-2 \le x \le 2$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은
$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
닫힌구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$k-32$	↗	$k+5$ 극대	↘	k 극소	↗	$k+32$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최대이고 최댓값은 $k+32$, $x=-2$에서 최소이고 최솟값은 $k-32$이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합이 16이므로
$(k+32)+(k-32)=16$, $2k=16$ $\therefore k=8$

0565 답 1

$f(x)=x^3-x^2-5x+a$에서

$f'(x)=3x^2-2x-5=(x+1)(3x-5)$

$-3\le x\le 1$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$

닫힌구간 $[-3, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$a-21$	↗	$a+3$ 극대	↘	$a-5$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이면서 최대이고 최댓값은 $a+3$, $x=-3$에서 최소이고 최솟값은 $a-21$이다. …… ⓘ

즉, 최댓값이 25이므로

$a+3=25 \quad \therefore a=22$ …… ⓘⓘ

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(-3)=a-21=22-21=1$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 최댓값과 최솟값을 a에 대한 식으로 나타내기	50%
ⓘⓘ a의 값 구하기	30%
ⓘⓘⓘ 최솟값 구하기	20%

0566 답 3

$f(x)=ax^4+4ax^3+b$에서

$f'(x)=4ax^3+12ax^2=4ax^2(x+3)$

$-4\le x\le -1$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-3$

$a>0$이므로 닫힌구간 $[-4, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$	b	↘	$b-27a$ 극소	↗	$b-3a$

함수 $f(x)$는 $x=-4$에서 최대이고 최댓값은 b, $x=-3$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $b-27a$이다.

즉, $b=3$, $b-27a=-24$이므로

$a=1$, $b=3$

$\therefore ab=1\times 3=3$

0567 답 ①

$f(x)=x^3+3x^2-kx-1$에서

$f'(x)=3x^2+6x-k$

이차방정식 $3x^2+6x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9+3k\le 0 \ (\because k\le -3)$

즉, 이차함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

닫힌구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최소이고 최솟값이 -3이므로 $f(-1)=-3$에서

$1+k=-3 \quad \therefore k=-4$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(3)=53-3k=53+12=65$

0568 답 ①

$f(2)=2a$이므로

$g(a)=f(2a)=2a^2(2a-1)=4a^3-2a^2$

$g'(a)=12a^2-4a=4a(3a-1)$

$0\le a\le 1$에서 $g'(a)=0$을 만족시키는 a의 값은 $a=0$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

$0\le a\le 1$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$g'(a)$	0	−	0	+	
$g(a)$	0	↘	$-\frac{2}{27}$ 극소	↗	2

함수 $g(a)$는 $a=1$에서 최대이고 최댓값은 2, $a=\frac{1}{3}$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $-\frac{2}{27}$이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$2+\left(-\frac{2}{27}\right)=\frac{52}{27}$

0569 답 ⑤

$f(x)=-x^3+ax+b$에서

$f'(x)=-3x^2+a$

$f'(1)=6$에서 $-3+a=6 \quad \therefore a=9$

즉, $f(x)=-x^3+9x+b$이므로

$f'(x)=-3x^2+9=-3(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

$-1\le x\le 2$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=\sqrt{3}$

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$b-8$	↗	$b+6\sqrt{3}$ 극대	↘	$b+10$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최소이고 최솟값은 $b-8$이다.

즉, 최솟값이 7이므로

$b-8=7 \quad \therefore b=15$

따라서 $f(x)=-x^3+9x+15$이므로 $f(1)=23$

0570 답 ②

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=4$에서 극값을 가지므로

$f'(0)=0$, $f'(4)=0$에서

$b=0$, $48+8a+b=0 \quad \therefore a=-6, b=0$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+c$

$-3 \le x \le 5$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=4$

닫힌구간 $[-3, 5]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$	5
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$c-81$	↗	c 극대	↘	$c-32$ 극소	↗	$c-25$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이면서 최대이고 최댓값은 c, $x=-3$에서 최소이고 최솟값은 $c-81$이다.

즉, 최댓값과 최솟값의 합이 -35이므로

$c+(c-81)=-35$, $2c=46$ $\therefore c=23$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극소이고 극솟값은

$c-32=23-32=-9$

0571 답 7

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

주어진 그래프에서 $f'(-1)=0$, $f'(2)=0$이므로

$3-2a+b=0$, $12+4a+b=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-\frac{3}{2}$, $b=-6$ …… ⓘ

$\therefore f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+c$

$-2 \le x \le 1$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$

닫힌구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$c-2$	↗	$c+\frac{7}{2}$ 극대	↘	$c-\frac{13}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이면서 최대이고 최댓값은 $c+\frac{7}{2}$,

$x=1$에서 최소이고 최솟값은 $c-\frac{13}{2}$이다.

즉, 최솟값이 -3이므로

$c-\frac{13}{2}=-3$ $\therefore c=\frac{7}{2}$ …… ⓘⓘ

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$c+\frac{7}{2}=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=7$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a, b의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ c의 값 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ 최댓값 구하기	20 %

0572 답 1

$f(x)=4x^3-3a^2x+2$에서

$f'(x)=12x^2-3a^2=3(2x+a)(2x-a)$

$-a \le x \le 2a$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-\frac{a}{2}$ 또는 $x=\frac{a}{2}$

$a>0$이므로 닫힌구간 $[-a, 2a]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-a$	$\cdots$	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$	$2a$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$2-a^3$	↗	$2+a^3$ 극대	↘	$2-a^3$ 극소	↗	$2+26a^3$

함수 $f(x)$는 $x=2a$에서 최대이고 최댓값은 $2+26a^3$,

$x=-a$와 $x=\frac{a}{2}$에서 최소이고 최솟값은 $2-a^3$이다.

즉, 최댓값이 28이므로

$2+26a^3=28$, $a^3=1$ $\therefore a=1$ ($\because a$는 실수)

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$2-a^3=2-1=1$

0573 답 ①

$f(x)=ax^2(x-3)=ax^3-3ax^2$에서

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$0 \le x \le 4$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=2$

(i) $a>0$일 때,

닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-4a$ 극소	↗	$16a$

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최대이고 최댓값은 $16a$, $x=2$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $-4a$이다.

이때 최댓값이 10이므로

$16a=10$ $\therefore a=\frac{5}{8}$

즉, 함수 $f(x)$의 최솟값은

$-4a=(-4)\times\frac{5}{8}=-\frac{5}{2}$

이는 최솟값이 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<0$일 때,

닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$-4a$ 극대	↘	$16a$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이고 최댓값은 $-4a$, $x=4$에서 최소이고 최솟값은 $16a$이다.

이때 최댓값이 10이므로

$-4a=10$ $\therefore a=-\frac{5}{2}$

즉, 함수 $f(x)$의 최솟값은

$16a=16\times\left(-\frac{5}{2}\right)=-40$

이는 최솟값이 정수라는 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=-\frac{5}{2}$

0574 답 3

$f(x)=-2x^3+3kx^2-12$에서

$f'(x)=-6x^2+6kx=-6x(x-k)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=k$

(i) $0<k<1$일 때,

$x\geq1$에서 $f'(x)<0$이므로 $f(x)$는 감소한다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최대이고 최댓값이 15이므로

$f(1)=15$에서

$3k-14=15$, $3k=29$ $\therefore k=\frac{29}{3}$

이는 $0<k<1$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $k>1$일 때,

$x\geq1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$	$3k-14$	↗	k^3-12 극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극대이면서 최대이고 최댓값은 k^3-12이다.

이때 최댓값이 15이므로

$k^3-12=15$, $k^3=27$ $\therefore k=3$ ($\because$ k는 실수)

(i), (ii)에서 $k=3$

0575 답 ④

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+2ax^2+(a^3+a^2+4)x+1$에서

$f'(x)=x^2+4ax+a^3+a^2+4$

$=(x+2a)^2+a^3-3a^2+4$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기의 최솟값 $g(a)$는

$g(a)=a^3-3a^2+4$

$\therefore g'(a)=3a^2-6a=3a(a-2)$

$0\leq a\leq4$에서 $g'(a)=0$을 만족시키는 a의 값은

$a=0$ 또는 $a=2$

$0\leq a\leq4$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$g'(a)$	0	−	0	+	
$g(a)$	4	↘	0 극소	↗	20

함수 $g(a)$는 $a=4$에서 최대이고 최댓값은 20, $a=2$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 0이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$20+0=20$

0576 답 ①

$f(x)=kx^3-6(k+1)x^2+48x$에서

$f'(x)=3kx^2-12(k+1)x+48$

$=3(kx-4)(x-4)$

(i) $\frac{4}{k}>4$, 즉 $0<k<1$일 때

$0\leq x\leq4$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=4$

닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	4
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	0	↗	$96-32k$

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최대이고 최댓값이 40이므로 $f(4)=40$에서

$96-32k=40$, $32k=56$ $\therefore k=\frac{7}{4}$

이는 $0<k<1$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0<\frac{4}{k}<4$, 즉 $k>1$일 때

$0\leq x\leq4$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=\frac{4}{k}$ 또는 $x=4$

닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{4}{k}$	$\cdots$	4
$f'(x)$		+	0	−	0
$f(x)$	0	↗	$\frac{96}{k}-\frac{32}{k^2}$ 극대	↘	$96-32k$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{4}{k}$에서 극대이면서 최대이고 최댓값이 40이므로 $f\left(\frac{4}{k}\right)=40$에서

$\frac{96}{k}-\frac{32}{k^2}=40$, $40k^2-96k+32=0$

$8(5k-2)(k-2)=0$ $\therefore k=2$ ($\because$ $k>1$)

(i), (ii)에서 $k=2$

0577 답 −20

$f(x)=2x^3-3ax^2+a^2$에서

$f'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$

(i) $0<a\leq2$일 때,

$0\leq x\leq2$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=a$

닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	−	0	+	
$f(x)$	a^2	↘	$-a^3+a^2$ 극소	↗	$a^2-12a+16$

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이면서 최소이므로

$g(a)=-a^3+a^2$

$g'(a)=-3a^2+2a=-a(3a-2)$

$0<a\le 2$에서 $g'(a)=0$을 만족시키는 a의 값은 $a=\frac{2}{3}$

$0<a\le 2$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	…	$\frac{2}{3}$	…	2
$g'(a)$		+	0	−	
$g(a)$	(0)	↗	$\frac{4}{27}$ 극대	↘	-4

즉, 함수 $g(a)$는 $a=2$에서 최소이고 최솟값은 -4이다. …… ⓘ

(ii) $a>2$일 때,

$0\le x\le 2$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$

닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	2
$f'(x)$	0	−	
$f(x)$	a^2	↘	$a^2-12a+16$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최소이므로

$g(a)=a^2-12a+16=(a-6)^2-20$

즉, 함수 $g(a)$는 $a=6$에서 최솟값 -20을 갖는다. …… ⓘⓘ

(i), (ii)에서 함수 $g(a)$의 최솟값은 -20이다. …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $0<a\le 2$일 때 $g(a)$의 최솟값 구하기	40 %
ⓘⓘ $a>2$일 때 $g(a)$의 최솟값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $g(a)$의 최솟값 구하기	20 %

0578 답 4

$f(x)=-2x^3+3ax^2+12a^2x+1$에서

$f'(x)=-6x^2+6ax+12a^2=-6(x+a)(x-2a)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-a$ 또는 $x=2a$

이때 $t<-2$인 실수 t에 대하여 닫힌구간 $[t, -2]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 항상 $g(t)$이므로 $x\le -2$에서 $f(x)$는 감소한다.

즉, $x\le -2$에서 $f'(x)\le 0$이다.

(i) $a>0$일 때,

$-a<2a$이므로 $x\le -a$에서 $f'(x)\le 0$이다.

즉, $-a\ge -2$이므로 $a\le 2$

$\therefore\ 0<a\le 2$

(ii) $a=0$일 때,

$f'(x)=-6x^2$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이다.

(iii) $a<0$일 때,

$2a<-a$이므로 $x\le 2a$에서 $f'(x)\le 0$이다.

즉, $2a\ge -2$이므로 $a\ge -1$

$\therefore\ -1\le a<0$

(i), (ii), (iii)에서 $-1\le a\le 2$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1, 2의 4개이다.

0579 답 ③

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\ge g(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$의 최솟값이 함수 $g(x)$의 최댓값보다 항상 크거나 같아야 한다.

$f(x)=3x^4+4x^3+6$에서

$f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	0	…
$f'(x)$	−	0	+	0	+
$f(x)$	↘	5 극소	↗	6	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 5이다.

$g(x)=-x^2+ax+a^2=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{5}{4}a^2$이므로

함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{5}{4}a^2$이다.

즉, $5\ge\frac{5}{4}a^2$이어야 하므로

$a^2\le 4$ $\therefore\ -2\le a\le 2$

따라서 $M=2$, $m=-2$이므로

$M-m=2-(-2)=4$

0580 답 ⑤

$f(x)=x^3-3x$에서 $f'(x)=3x^2-3$

이때 $f(-x)=-x^3+3x=-(x^3-3x)=-f(x)$이므로

$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x\le a) \\ -f(x)+b & (x>a) \end{cases}$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=a$에서 연속이다.

$\lim_{x\to a+} g(x)=\lim_{x\to a-} g(x)=g(a)$에서

$-f(a)+b=f(a)$ $\therefore\ b=2f(a)=2a^3-6a$ …… ㉠

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=a$에서 미분가능하다.

$g'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x<a) \\ -f'(x) & (x>a) \end{cases}=\begin{cases} 3x^2-3 & (x<a) \\ -3x^2+3 & (x>a) \end{cases}$이므로

$\lim_{x\to a+} g'(x)=\lim_{x\to a-} g'(x)$에서

$-3a^2+3=3a^2-3$, $a^2=1$

$\therefore\ a=-1\ (\because\ a<0)$

$a=-1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $b=4$

즉, $g(x)=\begin{cases} x^3-3x & (x\le -1) \\ -x^3+3x+4 & (x>-1) \end{cases}$이므로

$g'(x)=\begin{cases} 3x^2-3 & (x<-1) \\ -3x^2+3 & (x>-1) \end{cases}$

$=\begin{cases} 3(x+1)(x-1) & (x<-1) \\ -3(x+1)(x-1) & (x>-1) \end{cases}$

$g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[-3, 0]$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	-18	↗	2	↗	4

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 최대이고 최댓값 M은 4, $x=-3$에서 최소이고 최솟값 m은 -18이므로

$M-m=4-(-18)=22$

0581 답 ⑤

$f(x)=x^2+2x+k=(x+1)^2+k-1$이므로 $f(x)=t$로 놓으면

$t\geq k-1$

$\therefore (g\circ f)(x)=g(f(x))=g(t)$ (단, $t\geq k-1$)

$g(t)=2t^3-9t^2+12t-2$에서

$g'(t)=6t^2-18t+12=6(t-1)(t-2)$

$g'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 $t=1$ 또는 $t=2$

함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$	↗	3 극대	↘	2 극소	↗

이때 함수 $g(t)$의 최솟값이 2이므로 $g(t)=2$인 t의 값을 구하면

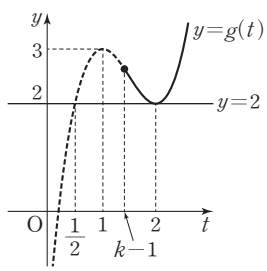
$2t^3-9t^2+12t-2=2$, $2t^3-9t^2+12t-4=0$

$(2t-1)(t-2)^2=0$ $\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=2$

$t\geq k-1$에서 함수 $g(t)$의 최솟값이 2가 되려면

$\frac{1}{2}\leq k-1\leq 2$ $\therefore \frac{3}{2}\leq k\leq 3$

따라서 구하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.



0582 답 4

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2$에서

$f'(x)=x^2-ax=x(x-a)$

$-1\leq x\leq 3$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=a$ ($\because 0<a<3$)

$-1\leq x\leq 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a$	↗	0 극대	↘	$-\frac{1}{6}a^3$ 극소	↗	$9-\frac{9}{2}a$

(i) $f(-1)\leq f(a)$이면 $g(a)=f(-1)$이고, 이때 a의 값의 범위는

$-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a\leq -\frac{1}{6}a^3$

$a^3-3a-2\geq 0$, $(a+1)^2(a-2)\geq 0$

그런데 $0<a<3$에서 $(a+1)^2>0$이므로

$a-2\geq 0$ $\therefore 0<a\leq 2$

(ii) $f(a)\leq f(-1)$이면 $g(a)=f(a)$이고, 이때 a의 값의 범위는

$-\frac{1}{6}a^3\leq -\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a$

$a^3-3a-2\geq 0$, $(a+1)^2(a-2)\geq 0$

그런데 $0<a<3$에서 $(a+1)^2>0$이므로

$a-2\geq 0$ $\therefore 2\leq a<3$

(i), (ii)에서 $g(a)=\begin{cases} -\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a & (0<a\leq 2) \\ -\frac{1}{6}a^3 & (2\leq a<3) \end{cases}$

따라서 $h(a)=|g(a)|=\begin{cases} \frac{1}{3}+\frac{1}{2}a & (0<a\leq 2) \\ \frac{1}{6}a^3 & (2\leq a<3) \end{cases}$ 이므로

$h\left(\frac{4}{3}\right)+h(\sqrt[3]{18})=1+3=4$

0583 답 2

$f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2$에서

$f'(x)=-12x^3+12(a-1)x^2+12ax$

$=-12x(x+1)(x-a)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=a$

$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$2a+1$ 극대	↘	0 극소	↗	a^4+2a^3 극대	↘

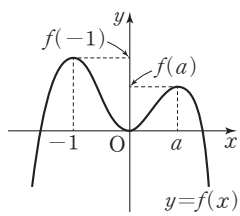
(i) $f(-1)\geq f(a)$인 경우

$t<-1$일 때, $g(t)=f(t)$

$t\geq -1$일 때, $g(t)=f(-1)$

즉, $g(t)=\begin{cases} f(t) & (t<-1) \\ f(-1) & (t\geq -1) \end{cases}$ 에서

$g'(t)=\begin{cases} f'(t) & (t<-1) \\ 0 & (t>-1) \end{cases}$



$\lim_{t\to -1+} g'(t)=\lim_{t\to -1+} 0=0$

$\lim_{t\to -1-} g'(t)=\lim_{t\to -1-} f'(t)=0$

에서 함수 $g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하므로 모든 실수 t에서 미분가능하다.

즉, 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(-1)<f(a)$인 경우

$0<k<a$인 실수 k에 대하여

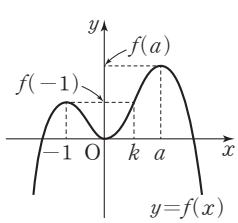
$f(k)=f(-1)$이라 하자.

$t<-1$일 때, $g(t)=f(t)$

$-1\leq t\leq k$일 때, $g(t)=f(-1)$

$k<t<a$일 때, $g(t)=f(t)$

$t\geq a$일 때, $g(t)=f(a)$



즉, $g(t)=\begin{cases} f(t) & (t<-1 \text{ 또는 } k<t<a) \\ f(-1) & (-1\leq t\leq k) \\ f(a) & (t\geq a) \end{cases}$ 에서

$g'(t)=\begin{cases} f'(t) & (t<-1 \text{ 또는 } k<t<a) \\ 0 & (-1<t<k \text{ 또는 } t>a) \end{cases}$

$\lim_{t\to -1+} g'(t)=\lim_{t\to -1+} 0=0$

$\lim_{t\to -1-} g'(t)=\lim_{t\to -1-} f'(t)=0$

즉, 함수 $g(t)$는 $t=-1$에서 미분가능하다.

이때 $0<x<a$에서 $f'(x)>0$이므로

$\lim_{t\to k+} g'(t)=\lim_{t\to k+} f'(t)>0$

$\lim_{t\to k-} g'(t)=\lim_{t\to k-} 0=0$

즉, 함수 $g(t)$는 $t=k$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 $f(-1)<f(a)$이어야 하므로

$2a+1<a^4+2a^3$

$a^4+2a^3-2a-1>0$, $(a-1)(a+1)^3>0$

그런데 $a>0$에서 $(a+1)^3>0$이므로

$a-1>0 \quad \therefore a>1$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 2이다.

0584 답 ①

점 P의 좌표를 (a, a^2)이라 하면

$\overline{AP}=\sqrt{(a-3)^2+(a^2)^2}=\sqrt{a^4+a^2-6a+9}$

$f(a)=a^4+a^2-6a+9$라 하면

$f'(a)=4a^3+2a-6=2(a-1)(2a^2+2a+3)$

$f'(a)=0$을 만족시키는 a의 값은 $\quad \because 2a^2+2a+3=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}>0$

$a=1$ ($\because a$는 실수)

함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$
$f(a)$	$\searrow$	5 극소	$\nearrow$

함수 $f(a)$는 $a=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 5이다.

따라서 구하는 거리의 최솟값은 $\sqrt{5}$이다.

0585 답 ⑤

점 P의 좌표를 (a, a^2+2)라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\{a^2+(a^2+1)^2\}+\{(a-10)^2+(a^2+1)^2\}$

$=2a^4+6a^2-20a+102$

$f(a)=2a^4+6a^2-20a+102$라 하면

$f'(a)=8a^3+12a-20=4(a-1)(2a^2+2a+5)$

$f'(a)=0$을 만족시키는 a의 값은 $\quad \because 2a^2+2a+5=2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}>0$

$a=1$ ($\because a$는 실수)

함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$
$f(a)$	$\searrow$	90 극소	$\nearrow$

함수 $f(a)$는 $a=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 90이다.

따라서 구하는 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값은 90이다.

0586 답 2

점 $\left(1, \frac{5}{4}\right)$를 지나는 직선의 방정식의 기울기를 a라 하면

$y-\frac{5}{4}=a(x-1) \quad \therefore y=ax-a+\frac{5}{4}$

이 직선과 곡선 $y=x^2$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2=ax-a+\frac{5}{4}$, $x^2-ax+a-\frac{5}{4}=0$

이 이차방정식의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=a-\frac{5}{4}$

이때 직선과 곡선 $y=x^2$의 두 교점의 좌표는 (α, α^2), (β, β^2)이고, 직선이 곡선 $y=x^2$에 의하여 잘려진 선분의 길이는 두 교점 사이의 거리와 같으므로

$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha^2-\beta^2)^2}$

$=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2}$

$=\sqrt{(\alpha-\beta)^2\{1+(\alpha+\beta)^2\}}$

$=\sqrt{\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}\{1+(\alpha+\beta)^2\}}$

$=\sqrt{\left\{a^2-4\left(a-\frac{5}{4}\right)\right\}(1+a^2)}$

$=\sqrt{(a^2-4a+5)(1+a^2)}$

$=\sqrt{a^4-4a^3+6a^2-4a+5}$

$f(a)=a^4-4a^3+6a^2-4a+5$라 하면

$f'(a)=4a^3-12a^2+12a-4=4(a-1)^3$

$f'(a)=0$을 만족시키는 a의 값은 $a=1$

함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$
$f(a)$	$\searrow$	4 극소	$\nearrow$

함수 $f(a)$는 $a=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 4이다.

따라서 구하는 선분의 길이의 최솟값은 $\sqrt{4}=2$이다.

0587 답 ②

삼각형 PHQ의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}(5-t)(-t^2+5t)=\frac{1}{2}t(t-5)^2$

$S'(t)=\frac{1}{2}(t-5)(3t-5)$

$0<t<5$에서 $S'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 $t=\frac{5}{3}$

$0<t<5$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	5
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{5}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 삼각형 PHQ의 넓이는 $t=\frac{5}{3}$에서 최대이다.

0588 답 ③

곡선 $y=-x^2+4$와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2+4=0$, $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

즉, 두 점 A, B의 좌표는 A$(-2, 0)$, B$(2, 0)$

점 C의 좌표를 $(t, -t^2+4)$ $(0<t<2)$라 하고, 사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}(2t+4)(-t^2+4)=(t+2)(-t^2+4)$

$S'(t)=-(t+2)(3t-2)$

$0<t<2$에서 $S'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 $t=\frac{2}{3}$

$0<t<2$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	…	$\frac{2}{3}$	…	2
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	$\frac{256}{27}$ 극대	↘	

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값은

$k=S\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{256}{27}$

$\therefore 27k=27\times\frac{256}{27}=256$

0589 답 ④

점 D의 좌표를 $(t, -t^2+1)$ $(0<t<1)$이라 하고, 직사각형 ABCD의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=2t\times2(-t^2+1)=-4t^3+4t$

$S'(t)=-12t^2+4=-12\left(t+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(t-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$0<t<1$에서 $S'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$0<t<1$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	…	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	…	1
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	$\frac{8\sqrt{3}}{9}$ 극대	↘	

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 직사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은

$S\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{8\sqrt{3}}{9}$

0590 답 $\frac{1}{3}$

$f(x)=(x-1)^2$이라 하면

$f'(x)=2(x-1)=2x-2$

점 P$(t, (t-1)^2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t-1)^2=(2t-2)(x-t)$

$\therefore y=2(t-1)x-t^2+1$ …… ⓘ

즉, 두 점 A, B의 좌표는 A$\left(\frac{t+1}{2}, 0\right)$, B$(0, -t^2+1)$

삼각형 OAB의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times\frac{t+1}{2}\times(-t^2+1)$

$=\frac{1}{4}(t+1)(-t^2+1)$

$S'(t)=-\frac{1}{4}(t+1)(3t-1)$ …… ⓘⓘ

$0<t<1$에서 $S'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 $t=\frac{1}{3}$

$0<t<1$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	…	$\frac{1}{3}$	…	1
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{1}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 점 P의 x좌표는 $\frac{1}{3}$이다. …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 점 P에서의 접선의 방정식 구하기	30 %
ⓘⓘ $S(t)$, $S'(t)$ 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 점 P의 x좌표 구하기	40 %

0591 답 ③

곡선 $y=-x^2+2$와 직선 $y=-x+k$의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2+2=-x+k$ $\quad\therefore x^2-x+k-2=0$

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-x+k-2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하며

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=k-2$

이때 두 점 P, Q의 좌표는 $(\alpha, -\alpha+k)$, $(\beta, -\beta+k)$이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는

$\overline{PQ}=\sqrt{(\alpha-\beta)^2+\{(-\alpha+k)-(-\beta+k)\}^2}$

$=\sqrt{2(\alpha-\beta)^2}$

$=\sqrt{2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}$

$=\sqrt{2\{1-4(k-2)\}}$

$=\sqrt{18-8k}$

이때 원점과 직선 $y=-x+k$, 즉 $x+y-k=0$ 사이의 거리는

$\frac{|-k|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}k$ $(\because k>0)$

즉, 삼각형 OQP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{18-8k}\times\frac{\sqrt{2}}{2}k=\frac{1}{2}k\sqrt{9-4k}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{-4k^3+9k^2}$

$f(k)=-4k^3+9k^2$이라 하면

$f'(k)=-12k^2+18k=-6k(2k-3)$

$k>0$에서 $f'(k)=0$을 만족시키는 k의 값은 $k=\frac{3}{2}$

$k>0$에서 함수 $f(k)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	0	…	$\frac{3}{2}$	…
$f'(k)$		+	0	−
$f(k)$		↗	$\frac{27}{4}$ 극대	↘

함수 $f(k)$는 $k=\frac{3}{2}$에서 극대이면서 최대이고 최댓값은 $\frac{27}{4}$이다.

따라서 삼각형 OQP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

0592 답 ②

점 P의 좌표를 $(t,\ -t^2+4)\ (0<t<2)$라 하고, 삼각형 AQP의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}(-t^2+4)(t+2)$

$S'(t)=-\frac{1}{2}(t+2)(3t-2)$

$0<t<2$에서 $S'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 $t=\frac{2}{3}$

$0<t<2$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	…	$\frac{2}{3}$	…	2
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	극대	↘	

$S(t)$는 $t=\frac{2}{3}$에서 극대이면서 최대이고, 이때의 점 P의 좌표는

$\left(\frac{2}{3},\ \frac{32}{9}\right)$

이 점은 직선 $y=mx$ 위에 있으므로

$\frac{32}{9}=\frac{2}{3}m \qquad \therefore\ m=\frac{16}{3}$

0593 답 ④

관의 밑면의 반지름의 길이를 r라 하면 직사각형의 가로의 길이는 $2\pi r$이므로

$2(2\pi r+h)=6k \qquad \therefore\ h=3k-2\pi r$

관의 부피를 $V(r)$라 하면

$V(r)=\pi r^2h=\pi r^2(3k-2\pi r)\ \left(\text{단, } 0<r<\frac{3k}{2\pi}\right)$

$V'(r)=-6\pi r(\pi r-k)$

$0<r<\frac{3k}{2\pi}$에서 $V'(r)=0$을 만족시키는 r의 값은 $r=\frac{k}{\pi}$

$0<r<\frac{3k}{2\pi}$에서 함수 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	…	$\frac{k}{\pi}$	…	$\frac{3k}{2\pi}$
$V'(r)$		+	0	−	
$V(r)$		↗	$\frac{k^3}{\pi}$ 극대	↘	

$V(r)$는 $r=\frac{k}{\pi}$에서 극대이면서 최대이고 최댓값이 8π이므로

$V\left(\frac{k}{\pi}\right)=8\pi$에서

$\frac{k^3}{\pi}=8\pi \qquad \therefore\ k^3=8\pi^2$

0594 답 ⑤

원의 반지름의 길이를 r라 하면 원의 둘레의 길이는 $2\pi r$이고, 정육각형의 둘레의 길이는 $24-2\pi r$이므로 정육각형의 한 변의 길이는

$\frac{12-\pi r}{3}$ → $(24-2\pi r)\times\frac{1}{6}$

정육각형과 원의 넓이의 곱을 $S(r)$라 하면

$S(r)=\left\{6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{12-\pi r}{3}\right)^2\right\}\times\pi r^2$

$=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi(12r-\pi r^2)^2\ \left(\text{단, } 0<r<\frac{12}{\pi}\right)$

$S'(r)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi r(\pi r-12)(\pi r-6)$

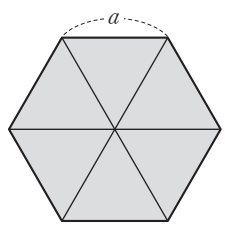
$0<r<\frac{12}{\pi}$에서 $S'(r)=0$을 만족시키는 r의 값은 $r=\frac{6}{\pi}$

$0<r<\frac{12}{\pi}$에서 함수 $S(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	…	$\frac{6}{\pi}$	…	$\frac{12}{\pi}$
$S'(r)$		+	0	−	
$S(r)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(r)$는 $r=\frac{6}{\pi}$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 원의 반지름의 길이는 $\frac{6}{\pi}$이다.

참고 한 변의 길이가 a인 정육각형의 넓이는 한 변의 길이가 a인 정삼각형 6개의 넓이를 더한 것과 같다.



0595 답 24

잘라낸 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 상자의 밑면인 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각

$(12-2x)$ cm, $(6-2x)$ cm

상자의 부피를 $V(x)$ cm^{3}라 하면

$V(x)=x(12-2x)(6-2x)$

$=4x^3-36x^2+72x$ (단, $0<x<3$)

$V'(x)=12x^2-72x+72=12(x^2-6x+6)$

$=12\{x-(3-\sqrt{3})\}\{x-(3+\sqrt{3})\}$

$0<x<3$에서 $V'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=3-\sqrt{3}$

$0<x<3$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	$3-\sqrt{3}$	…	3
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	$24\sqrt{3}$ 극대	↘	

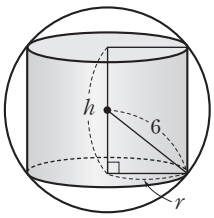
$V(x)$는 $x=3-\sqrt{3}$에서 극대이면서 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은 $24\sqrt{3}$ cm^{3}이다.

따라서 $M=24\sqrt{3}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{3}M=\frac{\sqrt{3}}{3}\times 24\sqrt{3}=24$

0596 답 ⑤

구에 내접하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면



$r^2+\left(\frac{h}{2}\right)^2=6^2$

$\therefore\ r^2=36-\frac{h^2}{4}$ (단, $0<h<12$)

원기둥의 부피를 $V(h)$라 하면

$V(h)=\pi r^2h=\pi h\left(36-\frac{h^2}{4}\right)$

$=\pi\left(36h-\frac{h^3}{4}\right)$ (단, $0<h<12$)

$V'(h)=\pi\left(36-\frac{3}{4}h^2\right)=-\frac{3}{4}\pi(h^2-48)$

$=-\frac{3}{4}\pi(h-4\sqrt{3})(h+4\sqrt{3})$

$0<h<12$에서 $V'(h)=0$을 만족시키는 h의 값은 $h=4\sqrt{3}$

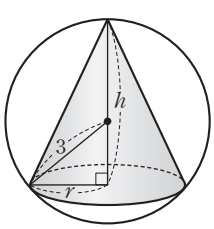
$0<h<12$에서 함수 $V(h)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	0	…	$4\sqrt{3}$	…	12
$V'(h)$		+	0	−	
$V(h)$		↗	$96\sqrt{3}\pi$ 극대	↘	

따라서 $V(h)$는 $h=4\sqrt{3}$에서 극대이면서 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은 $V(4\sqrt{3})=96\sqrt{3}\pi$이다.

0597 답 ④

구에 내접하는 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면



$r^2+(h-3)^2=3^2$

$\therefore\ r^2=6h-h^2$ (단, $0<h<6$)

원뿔의 부피를 $V(h)$라 하면

$V(h)=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{\pi}{3}(6h-h^2)h$

$=\frac{\pi}{3}(6h^2-h^3)$ (단, $0<h<6$)

$V'(h)=\frac{\pi}{3}(12h-3h^2)=-\pi h(h-4)$

$0<h<6$에서 $V'(h)=0$을 만족시키는 h의 값은 $h=4$

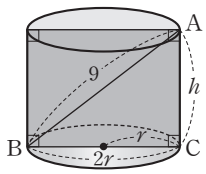
$0<h<6$에서 함수 $V(h)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	0	…	4	…	6
$V'(h)$		+	0	−	
$V(h)$		↗	$\frac{32}{3}\pi$ 극대	↘	

따라서 $V(h)$는 $h=4$에서 극대이면서 최대이므로 원뿔의 부피의 최댓값은 $V(4)=\frac{32}{3}\pi$이다.

0598 답 $3\sqrt{3}$

그림의 직각삼각형 ABC에서



$(2r)^2+h^2=9^2$이므로

$r^2=\frac{81-h^2}{4}$ (단, $0<h<9$)

원기둥의 부피를 $V(h)$라 하면

$V(h)=\pi r^2h=\pi\left(\frac{81-h^2}{4}\right)h$

$=\frac{\pi}{4}(81h-h^3)$ (단, $0<h<9$) …… ⓘ

$V'(h)=\frac{\pi}{4}(81-3h^2)=-\frac{3}{4}\pi(h^2-27)$

$=-\frac{3}{4}\pi(h+3\sqrt{3})(h-3\sqrt{3})$

$0<h<9$에서 $V'(h)=0$을 만족시키는 h의 값은 $h=3\sqrt{3}$

$0<h<9$에서 함수 $V(h)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

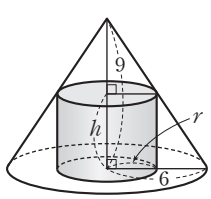
h	0	…	$3\sqrt{3}$	…	9
$V'(h)$		+	0	−	
$V(h)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(h)$는 $h=3\sqrt{3}$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 높이는 $3\sqrt{3}$이다. …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $V(h)$를 h에 대한 식으로 나타내기	50 %
ⓘⓘ 원기둥의 부피가 최대가 되도록 하는 높이 구하기	50 %

0599 답 ①

원뿔에 내접하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면



$9:6=(9-h):r$, $9r=54-6h$

$\therefore\ h=9-\frac{3}{2}r$ (단, $0<r<6$)

원기둥의 부피를 $V(r)$라 하면

$V(r)=\pi r^2h=\pi r^2\left(9-\frac{3}{2}r\right)$

$=\pi\left(9r^2-\frac{3}{2}r^3\right)$ (단, $0<r<6$)

$V'(r)=\pi\left(18r-\frac{9}{2}r^2\right)=-\frac{9}{2}\pi r(r-4)$

$0<r<6$에서 $V'(r)=0$을 만족시키는 r의 값은 $r=4$

$0<r<6$에서 함수 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	…	4	…	6
$V'(r)$		+	0	−	
$V(r)$		↗	48π 극대	↘	

따라서 $V(r)$는 $r=4$에서 극대이면서 최대이므로 원기둥의 부피의 최댓값은 $V(4)=48\pi$이다.

0600 답 ③

$\overline{BE}=x$라 하면 $\overline{EC}=4-x$

두 삼각형 ABE와 ECF는 닮음이므로 $\overline{AB}:\overline{EC}=\overline{BE}:\overline{CF}$에서

$2:(4-x)=x:\overline{CF}$, $2\overline{CF}=x(4-x)$

$\therefore \overline{CF}=\frac{1}{2}x(4-x)$

직각삼각형 ABE에서

$\overline{AE}=\sqrt{x^2+4}$

직각삼각형 ECF에서

$$\overline{EF}=\sqrt{(4-x)^2+\left\{\frac{1}{2}x(4-x)\right\}^2}$$

$$=\frac{1}{2}(4-x)\sqrt{x^2+4}$$

삼각형 AEF의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4}\times\frac{1}{2}(4-x)\sqrt{x^2+4}$$

$$=\frac{1}{4}(x^2+4)(4-x)$$

$$=-\frac{1}{4}(x^3-4x^2+4x-16)\ (\text{단, } 0<x<4)$$

$$S'(x)=-\frac{1}{4}(3x^2-8x+4)=-\frac{1}{4}(3x-2)(x-2)$$

$0<x<4$에서 $S'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

$0<x<4$에서 함수 $S(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	$\frac{2}{3}$	…	2	…	4
$S'(x)$		−	0	+	0	−	
$S(x)$	(4)	↘	극소	↗	극대	↘	(0)

따라서 $S(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이고 삼각형 AEF의 넓이의 최댓값은 $S(2)=4$이다.

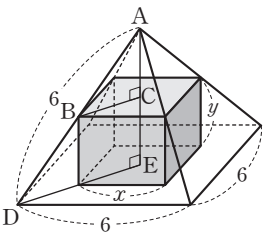
참고 두 삼각형 ABE와 ECF에서

$\angle ABE=\angle ECF=90^\circ$, $\angle BAE=90^\circ-\angle AEB=\angle CEF$

이므로 $\triangle ABE\backsim\triangle ECF$ (AA 닮음)

0601 답 $16\sqrt{2}$

정사각뿔에 내접하는 직육면체의 밑면은 정사각형이므로 직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 x, 높이를 y라 하자.



정사각뿔의 밑면의 대각선의 길이는 $6\sqrt{2}$이므로

$\overline{DE}=\frac{1}{2}\times6\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

직육면체의 밑면의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}x$이므로

$\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}x=\frac{\sqrt{2}}{2}x$

직각삼각형 ADE에서

$\overline{AE}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

즉, 삼각형 ADE가 직각이등변삼각형이므로 삼각형 ABC도 직각이등변삼각형이다.

$\overline{AC}=\overline{BC}=\frac{\sqrt{2}}{2}x$이므로

$$y=3\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}x=\frac{\sqrt{2}}{2}(6-x)\ (\text{단, } 0<x<6)$$

직육면체의 부피를 $V(x)$라 하면

$$V(x)=x^2y=\frac{\sqrt{2}}{2}x^2(6-x)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(6x^2-x^3)\ (\text{단, } 0<x<6)$$

$$V'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(12x-3x^2)=-\frac{3\sqrt{2}}{2}x(x-4)$$

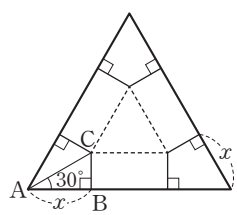
$0<x<6$에서 $V'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=4$

$0<x<6$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	4	…	6
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	$16\sqrt{2}$ 극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=4$에서 극대이면서 최대이므로 직육면체의 부피의 최댓값은 $V(4)=16\sqrt{2}$이다.

0602 답 $\frac{4}{3}$



정삼각형의 한 내각의 크기는 60°이므로 그림의 직각삼각형 ABC에서

$\angle CAB=30^\circ$

$\therefore \overline{BC}=\overline{AB}\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}x$

상자의 밑면인 정삼각형의 한 변의 길이는 $8-2x$

상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(8-2x)^2\times\frac{\sqrt{3}}{3}x$

$=x^3-8x^2+16x$ (단, $0<x<4$)

$V'(x)=3x^2-16x+16=(3x-4)(x-4)$

$0<x<4$에서 $V'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=\frac{4}{3}$

$0<x<4$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	$\frac{4}{3}$	…	4
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=\frac{4}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 x의 값은 $\frac{4}{3}$이다.

0603 답 ①

정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이고 두 대각선의 교점의 좌표가 $(0, 2)$이므로

직선 BC의 방정식은 $y=1$

직선 CD의 방정식은 $x=1$

정사각형 EFGH의 한 변의 길이가 2이므로 두 대각선의 교점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ $(t>0)$이라 하면

직선 EF의 방정식은 $x=t-1$

직선 EH의 방정식은 $y=\frac{1}{2}t^2+1$

이때 두 정사각형 ABCD, EFGH가 겹치는 부분이 있으려면

$t-1<1$, $1<\frac{1}{2}t^2+1$이어야 하므로

$0<t<2$

두 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\{1-(t-1)\}\times\left\{\left(\frac{1}{2}t^2+1\right)-1\right\}$

$=-\frac{1}{2}t^3+t^2$ (단, $0<t<2$)

$S'(t)=-\frac{3}{2}t^2+2t=-\frac{1}{2}t(3t-4)$

$0<t<2$에서 $S'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 $t=\frac{4}{3}$

$0<t<2$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	…	$\frac{4}{3}$	…	2
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	$\frac{16}{27}$ 극대	↘	

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{4}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 두 정사각형이 겹치는 부분의 넓이의 최댓값은 $S\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{27}$이다.

0604 답 ⑤

곡선 $y=-x^2(x-6)$과 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2(x-6)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=6$

즉, 점 A의 좌표는 $(6, 0)$

곡선 $y=-x^2(x-6)$과 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2(x-6)=mx$, $x^3-6x^2+mx=0$

$\therefore x(x^2-6x+m)=0$

두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(\alpha, m\alpha)$ $(\beta, m\beta)$ $(\alpha<\beta)$라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-6x+m=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=m$

이때 삼각형 APQ의 넓이는 삼각형 OAQ의 넓이에서 삼각형 OAP의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\triangle APQ=\frac{1}{2}\times6\times m\beta-\frac{1}{2}\times6\times m\alpha$

$=3m(\beta-\alpha)$

$=3m\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$ ($\because \alpha<\beta$)

$=3m\sqrt{36-4m}$

$=6\sqrt{9m^2-m^3}$

$f(m)=9m^2-m^3$이라 하면

$f'(m)=18m-3m^2=-3m(m-6)$

$0<m<9$에서 $f'(m)=0$을 만족시키는 m의 값은 $m=6$

$0<m<9$에서 함수 $f(m)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

m	0	…	6	…	9
$f'(m)$		+	0	−	
$f(m)$		↗	108 극대	↘	

함수 $f(m)$은 $m=6$에서 극대이면서 최대이고 최댓값은 $f(6)=108$이다.

따라서 삼각형 APQ의 넓이의 최댓값은 $6\sqrt{108}=36\sqrt{3}$이다.

0605 답 $8\sqrt{3}$

정사각뿔 O−ABCD의 높이를 h라 하면 그림에서 $\overline{OH}=h$, $\overline{OM}=3$이고

직각삼각형 OHM에서

$\overline{HM}=\sqrt{9-h^2}$

사각형 ABCD가 정사각형이므로

$\overline{AB}=2\overline{HM}=2\sqrt{9-h^2}$

정사각뿔의 부피를 $V(h)$라 하면

$V(h)=\frac{1}{3}(2\sqrt{9-h^2})^2\times h$

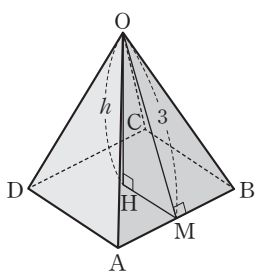
$=\frac{4}{3}(9h-h^3)$ (단, $0<h<3$)

$V'(h)=\frac{4}{3}(9-3h^2)=-4(h^2-3)$

$=-4(h+\sqrt{3})(h-\sqrt{3})$

$0<h<3$에서 $V'(h)=0$을 만족시키는 h의 값은 $h=\sqrt{3}$

$0<h<3$에서 함수 $V(h)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

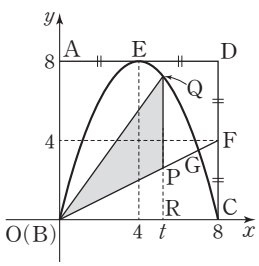


h	0	…	$\sqrt{3}$	…	3
$V'(h)$		+	0	−	
$V(h)$		↗	$8\sqrt{3}$ 극대	↘	

따라서 $V(h)$는 $h=\sqrt{3}$에서 극대이면서 최대이므로 정사각뿔의 부피의 최댓값은 $V(\sqrt{3})=8\sqrt{3}$이다.

0606 답 ③

그림과 같이 점 B를 원점으로 하고 직선 BC를 x축, 직선 AB를 y축으로 하는 좌표평면을 생각하자.



E(4, 8)이므로 포물선의 방정식을

$y=a(x-4)^2+8\ (a<0)$

이라 하면 이 포물선이 원점을 지나므로

$0=16a+8 \qquad \therefore\ a=-\frac{1}{2}$

즉, 포물선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+8=-\frac{1}{2}x^2+4x$

이때 직선 BF의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$이므로 이 직선과 포물선의 교점의 x좌표를 구하면

$-\frac{1}{2}x^2+4x=\frac{1}{2}x,\ x^2-7x=0$

$x(x-7)=0 \qquad \therefore\ x=0$ 또는 $x=7$

즉, 점 G의 x좌표는 7이다.

점 P의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{2}t\right)(0<t<7)$라 하면 점 Q의 좌표는

$\left(t,\ -\frac{1}{2}t^2+4t\right)$

$\therefore\ \overline{PQ}=-\frac{1}{2}t^2+4t-\frac{1}{2}t=-\frac{1}{2}t^2+\frac{7}{2}t$

삼각형 BPQ의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}t\left(-\frac{1}{2}t^2+\frac{7}{2}t\right)$

$=-\frac{1}{4}(t^3-7t^2)$ (단, $0<t<7$)

$S'(t)=-\frac{1}{4}(3t^2-14t)=-\frac{1}{4}t(3t-14)$

$0<t<7$에서 $S'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 $t=\frac{14}{3}$

$0<t<7$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	…	$\frac{14}{3}$	…	7
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(t)$는 $t=\frac{14}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 선분 BR의 길이는 $\frac{14}{3}$이다.

최고수준 도전 기출 144~145쪽

0607 답 ②

전략 주어진 등식을 변형하여 x^2-xy^2을 x에 대한 식으로 나타낸 후 최댓값과 최솟값을 구한다. 이때 주어진 등식에서 x의 값의 범위를 구한다.

등식 $2x^2+3y^2=12$에서

$y^2=\frac{12-2x^2}{3} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $y^2\geq 0$이므로

$\frac{12-2x^2}{3}\geq 0,\ x^2\leq 6$

$\therefore\ -\sqrt{6}\leq x\leq\sqrt{6}$

x^2-xy^2에 ㉠을 대입하면

$x^2-xy^2=x^2-x\left(\frac{12-2x^2}{3}\right)$

$=\frac{2}{3}x^3+x^2-4x$

$f(x)=\frac{2}{3}x^3+x^2-4x$라 하면

$f'(x)=2x^2+2x-4=2(x+2)(x-1)$

$-\sqrt{6}\leq x\leq\sqrt{6}$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=1$

$-\sqrt{6}\leq x\leq\sqrt{6}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\sqrt{6}$	…	-2	…	1	…	$\sqrt{6}$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$	-6	↗	$\frac{20}{3}$ 극대	↘	$-\frac{7}{3}$ 극소	↗	-6

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이면서 최대이고 최댓값 M은 $\frac{20}{3}$,

$x=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값 m은 $-\frac{7}{3}$이므로

$M-m=\frac{20}{3}-\left(-\frac{7}{3}\right)=9$

0608 답 ③

전략 주어진 곡선이 원점을 지나므로 원점에서 곡선에 그은 접선은 원점이 접점인 경우와 원점이 아닌 다른 접점에서의 접선이 원점을 지나는 경우가 있음을 이용한다.

$f(x)=x(x-a)(x-6)=x^3-(a+6)x^2+6ax$라 하면

$f'(x)=3x^2-2(a+6)x+6a$

$f(0)=0$에서 곡선 $y=f(x)$는 원점을 지나므로 원점에서 곡선에 그은 접선을 다음과 같은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 원점이 접점인 경우

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=6a \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) 원점이 아닌 다른 접점에서의 접선이 원점을 지나는 경우

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-(a+6)t^2+6at)\ (t\neq 0)$라 하면 접선의

기울기는 $f'(t)=3t^2-2(a+6)t+6a$이므로 접선의 방정식은

$y-\{t^3-(a+6)t^2+6at\}=\{3t^2-2(a+6)t+6a\}(x-t)$

$\therefore y=\{3t^2-2(a+6)t+6a\}x-2t^3+(a+6)t^2$

이 직선이 원점을 지나므로

$0=-2t^3+(a+6)t^2,\ t^2\{2t-(a+6)\}=0$

$\therefore t=\frac{a+6}{2}\ (\because t\neq 0)$

이때 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{a+6}{2}\right)=-\frac{1}{4}a^2+3a-9$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 두 접선의 기울기의 곱을 $g(a)$라 하면

$g(a)=6a\left(-\frac{1}{4}a^2+3a-9\right)=-\frac{3}{2}a^3+18a^2-54a$

$g'(a)=-\frac{9}{2}a^2+36a-54=-\frac{9}{2}(a-2)(a-6)$

$0<a<6$에서 $g'(a)=0$을 만족시키는 a의 값은 $a=2$

$0<a<6$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	···	2	···	6
$g'(a)$		−	0	+	
$g(a)$		↘	−48 극소	↗	

따라서 $g(a)$는 $a=2$에서 극소이면서 최소이므로 두 접선의 기울기의 곱의 최솟값은 -48이다.

0609 답 ⑤

전략 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이고 미분계수 $g'(0)$이 존재함을 이용하여 $f(0)$, $f'(0)$의 값을 구한다. 또 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작으므로 $x\geq 0$에서 $f(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다 작음을 이용한다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0-}g(x)=g(0)$에서

$f(0)=\frac{1}{2}$ $\therefore c=\frac{1}{2}$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$에서도 미분가능하다. 즉, 미분계수 $g'(0)$이 존재한다.

$g'(x)=\begin{cases}0 & (x<0)\\ f'(x) & (x>0)\end{cases}$이므로

$f'(0)=0$ $\therefore b=0$

$\therefore f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$

ㄱ. $g(0)+g'(0)=f(0)+f'(0)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$

ㄴ. $f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$에서

$f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

이때 $-\frac{2}{3}a\leq 0$이면 $x\geq 0$에서 $f'(x)\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

즉, $x\geq 0$일 때 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최소이고 최솟값은 $\frac{1}{2}$이므로 함수 $g(x)$의 최솟값도 $\frac{1}{2}$이다.

이는 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$보다는 작다는 조건을 만족시키지 않는다.

즉, $-\frac{2}{3}a>0$이므로 $a<0$

$\therefore g(1)=f(1)=a+\frac{3}{2}<\frac{3}{2}$

ㄷ. 함수 $g(x)$의 최솟값이 0이면 $x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다.

$x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	···	$-\frac{2}{3}a$	···
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{2}{3}a$에서 극소이면서 최소이고 최솟값이 0이므로 $f\left(-\frac{2}{3}a\right)=0$에서

$\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}=0,\ a^3=-\frac{27}{8}$

$\therefore a=-\frac{3}{2}\ (\because a<0)$

즉, $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$이므로

$g(2)=f(2)=\frac{5}{2}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0610 답 ②

전략 $g(t)-h(t)=\triangle RUQ-\triangle TSU=\triangle RSQ-\triangle TSQ$임을 이용하여 $g(t)-h(t)$의 식을 구한다.

$f(x)=\frac{3}{32}x^3-\frac{3}{32}x^2-\frac{3}{4}x+\frac{9}{8}$에서

$f'(x)=\frac{9}{32}x^2-\frac{3}{16}x-\frac{3}{4}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$이므로 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$\therefore y=f'(t)x+f(t)-tf'(t)$

즉, 두 점 R, Q의 좌표는

$R(0,\ f(t)-tf'(t)),\ Q\left(t-\frac{f(t)}{f'(t)},\ 0\right)$

$\therefore \overline{OR}=f(t)-tf'(t),\ \overline{OQ}=t-\frac{f(t)}{f'(t)}$

이때 $\overline{OS}=t$, $\overline{OT}=f(t)$이므로

$g(t)-h(t)$

$=\triangle RUQ-\triangle TSU$

$=(\triangle RUQ+\triangle USQ)-(\triangle TSU+\triangle USQ)$

$=\triangle RSQ-\triangle TSQ$

$=\frac{1}{2}\times\overline{SQ}\times\overline{OR}-\frac{1}{2}\times\overline{SQ}\times\overline{OT}$

$=\frac{1}{2}\times\overline{SQ}(\overline{OR}-\overline{OT})$

$=\frac{1}{2}\times\left\{-\frac{f(t)}{f'(t)}\right\}\times\{f(t)-tf'(t)-f(t)\}$

$=\frac{1}{2}tf(t)$

$S(t)=\frac{1}{2}tf(t)$라 하면

$S'(t)=\frac{1}{2}f(t)+\frac{1}{2}tf'(t)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{32}t^3-\frac{3}{32}t^2-\frac{3}{4}t+\frac{9}{8}\right)+\frac{1}{2}t\left(\frac{9}{32}t^2-\frac{3}{16}t-\frac{3}{4}\right)$

$=\frac{3}{64}(4t^3-3t^2-16t+12)$

$=\frac{3}{64}(t+2)(t-2)(4t-3)$

$\frac{1}{3}<t<2$에서 $S'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 $t=\frac{3}{4}$

$\frac{1}{3}<t<2$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	2
$S'(t)$		+	0	−	
$S(t)$		↗	극대	↘	

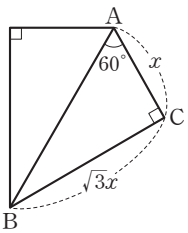
따라서 함수 $S(t)$, 즉 $g(t)-h(t)$는 $t=\frac{3}{4}$에서 극대이면서 최대이므로 $k=\frac{3}{4}$

0611 답 ⑤

전략 잘라낸 사각형의 짧은 변의 길이를 x라 하고 삼각비를 이용하여 정육각기둥의 높이를 x에 대한 식으로 나타낸다.

잘라낸 사각형의 짧은 변의 길이를 x라 하면 상자의 밑면인 정육각형의 한 변의 길이는 $4-2x$

정육각형의 한 내각의 크기는 $120°$이므로 직각삼각형 ABC에서



$\angle BAC=\frac{1}{2}\times120°=60°$

$\therefore \overline{BC}=\overline{AC}\tan60°=\sqrt{3}x$

상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}(4-2x)^2\times\sqrt{3}x$

$=18(x^3-4x^2+4x)$ (단, $0<x<2$)

$V'(x)=18(3x^2-8x+4)=18(3x-2)(x-2)$

$0<x<2$에서 $V'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=\frac{2}{3}$

$0<x<2$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

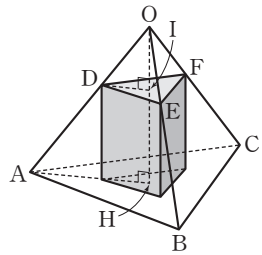
x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	2
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	$\frac{64}{3}$ 극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=\frac{2}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 상자의 부피의 최댓값은 $V\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{64}{3}$이다.

0612 답 4

전략 삼각기둥의 높이를 x에 대한 식으로 나타낸 후 정삼각기둥의 부피에 관한 식을 세운다.

정사면체 O−ABC의 밑면에 평행한 평면으로 자른 단면이 선분 OA, OB, OC와 만나는 점을 각각 D, E, F라 하고, 점 O에서 삼각형 ABC에 내린 수선의 발을 H, 삼각형 DEF에 내린 수선의 발을 I라 하자.



$\overline{OA}=6$, $\overline{AH}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{3}=2\sqrt{3}$

이므로 직각삼각형 AHO에서

$\overline{OH}=\sqrt{6^2-(2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{6}$

이때 사면체 O−DEF도 정사면체이므로 $\overline{OD}=\overline{DE}=x$이고,

$\overline{OA}:\overline{OD}=\overline{OH}:\overline{OI}$에서

$6:x=2\sqrt{6}:\overline{OI}$, $6\overline{OI}=2x\sqrt{6}$

$\therefore \overline{OI}=\frac{\sqrt{6}}{3}x$

정삼각기둥의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2\times\left(2\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{3}x\right)$

$=-\frac{\sqrt{2}}{4}(x^3-6x^2)$ (단, $0<x<6$)

$V'(x)=-\frac{\sqrt{2}}{4}(3x^2-12x)=-\frac{3\sqrt{2}}{4}x(x-4)$

$0<x<6$에서 $V'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=4$

$0<x<6$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	극대	↘	

따라서 $V(x)$는 $x=4$에서 극대이면서 최대이므로 구하는 정삼각기둥의 밑면의 한 변의 길이는 4이다.

08 방정식과 부등식에의 활용

난이도별 필수 기출 147~161쪽

0613 답 2

$f(x)=x^4-2x^2-1$이라 하면

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

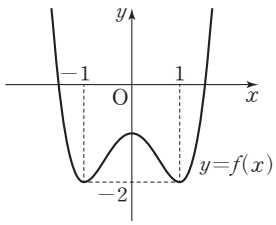
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2 극소	↗	-1 극대	↘	-2 극소	↗

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



0614 답 ③

주어진 방정식에서 $2x^3-3x^2-12x=a$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

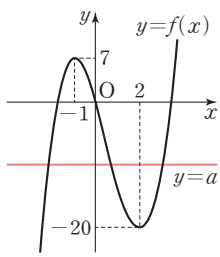
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7 극대	↘	-20 극소	↗

$f(0)=0$이고, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-20<a<7$

따라서 $M=6$, $m=-19$이므로

$M-m=6-(-19)=25$



다른 풀이

$g(x)=2x^3-3x^2-12x-a$라 하면

$g'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $g(-1)g(2)<0$이어야 하므로

$(7-a)(-20-a)<0$, $(a-7)(a+20)<0$

$\therefore\ -20<a<7$

따라서 $M=6$, $m=-19$이므로

$M-m=6-(-19)=25$

0615 답 4

주어진 방정식에서 $3x^4-16x^3+18x^2=-k$

$f(x)=3x^4-16x^3+18x^2$이라 하면

$f'(x)=12x^3-48x^2+36x=12x(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0 극소	↗	5 극대	↘	-27 극소	↗

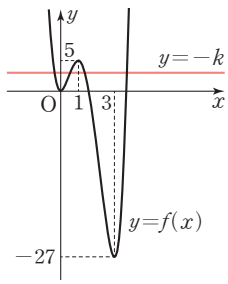
$\cdots\cdots$ ⓘ

즉, 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로

$0<-k<5$

$\therefore\ -5<k<0$ $\cdots\cdots$ ⓘⓘ

따라서 정수 k는 -4, -3, -2, -1의 4개이다. $\cdots\cdots$ ⓘⓘⓘ



채점 기준

ⓘ $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내기	50 %
ⓘⓘ k의 값의 범위 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 정수 k의 개수 구하기	10 %

0616 답 ④

$g(x)=f(x)+k$이므로 방정식 $g(x)=0$에서

$x^3-3x^2-9x+3+k=0$

$\therefore\ x^3-3x^2-9x+3=-k$

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	8 극대	↘	-24 극소	↗

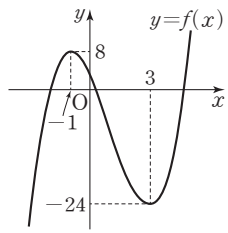
$f(0)=3$이고, 방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$-k=8$ 또는 $-k=-24$

$\therefore\ k=-8$ 또는 $k=24$

따라서 구하는 모든 상수 k의 값의 합은

$-8+24=16$



다른 풀이

$g(x)=f(x)+k$에서

$g'(x)=f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $g(-1)g(3)=0$이어야 하므로

$(k+8)(k-24)=0$ $\therefore k=-8$ 또는 $k=24$

따라서 구하는 모든 상수 k의 값의 합은

$-8+24=16$

0617 답 2

방정식 $f(x)=2$에서 $f(x)-2=0$이므로

$2x^3-3ax^2+8=0$

$g(x)=2x^3-3ax^2+8$이라 하면

$g'(x)=6x^2-6ax=6x(x-a)$

$g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=a$

방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $g(0)g(a)=0$이어야 하므로

$8(8-a^3)=0$, $a^3=8$ $\therefore a=2$ ($\because a$는 실수)

0618 답 ①

주어진 방정식에서 $x^4-\frac{4}{3}x^3-12x^2+24=k$

$f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3-12x^2+24$라 하면

$f'(x)=4x^3-4x^2-24x=4x(x+2)(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

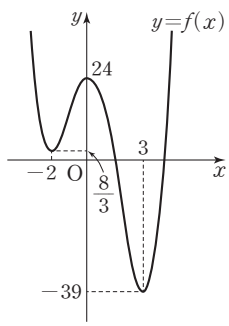
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\frac{8}{3}$ 극소	↗	24 극대	↘	-39 극소	↗

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$k=\frac{8}{3}$ 또는 $k=24$

따라서 구하는 모든 상수 k의 값의 곱은

$\frac{8}{3}\times24=64$



0619 답 7

주어진 방정식에서 $2x^3-6x^2=-k$

$f(x)=2x^3-6x^2$이라 하면

$f'(x)=6x^2-12x=6x(x-2)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

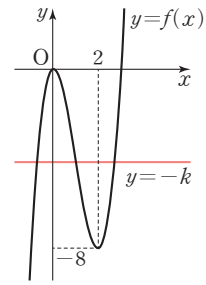
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	0 극대	↘	-8 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$의 교점이 $x>0$에서 2개이려면

$-8<-k<0$ $\therefore 0<k<8$

따라서 정수 k는 1, 2, …, 7의 7개이다.



0620 답 ②

주어진 방정식에서 $4x^3-12x+1=-k$

$f(x)=4x^3-12x+1$이라 하면

$f'(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	9 극대	↘	-7 극소	↗

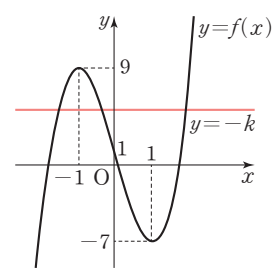
$f(0)=1$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$의 교점이 $x>0$에서 1개, $x<0$에서 2개이려면

$1<-k<9$

$\therefore -9<k<-1$

따라서 구하는 정수 k의 최댓값은

-2이다.



0621 답 ⑤

주어진 방정식에서 $x^4-4x^3+10=-k$

$f(x)=x^4-4x^3+10$이라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

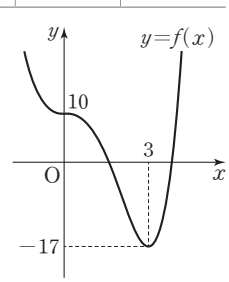
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	10	↘	-17 극소	↗

주어진 방정식이 한 중근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$가 한 점에서 만나고 그 점에서 접해야 하므로

$-k=-17$ $\therefore k=17$



0622 답 ④

주어진 방정식에서 $\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3-2x^2+3=k$

$g(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3-2x^2+3$이라 하면

$g'(x)=2x^3-2x^2-4x=2x(x+1)(x-2)$

$g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

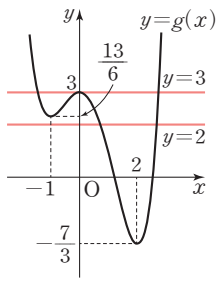
$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	$\frac{13}{6}$ 극소	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$	$-\frac{7}{3}$ 극소	$\nearrow$

$f(k)$는 $x>0$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같으므로

$f(2)+f(3)=2+1=3$



0623 답 ①

주어진 방정식에서 $2x^3-9x^2=a$ ····· ㉠

방정식 ㉠이 $-1\le x\le 3$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=2x^3-9x^2$과 직선 $y=a$가 $-1\le x\le 3$에서 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=2x^3-9x^2$이라 하면

$f'(x)=6x^2-18x=6x(x-3)$

$-1\le x\le 3$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=3$

$-1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

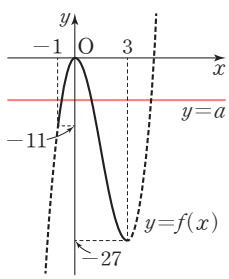
x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	-11	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$	-27

주어진 방정식이 $-1\le x\le 3$에서 서로 다른 두 실근을 가지려면

$-11\le a<0$

따라서 $M=-1$, $m=-11$이므로

$M-m=-1-(-11)=10$



0624 답 ③

$f(x)=x^3-3x-1$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

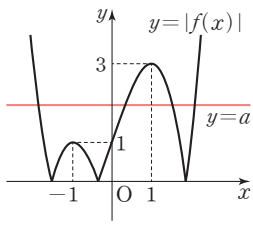
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$	-3 극소	$\nearrow$

$|f(0)|=1$이고, 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 $x>0$에서 3개, $x<0$에서 1개이려면

$1<a<3$



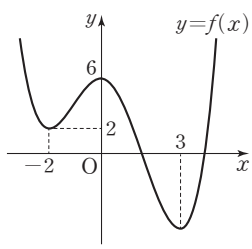
0625 답 ③

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	2 극소	$\nearrow$	6 극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

이때 $f(3)<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



0626 답 7

$f(0)=-2$이므로 $f(x)=ax^3+bx^2+cx-2$ (a, b, c는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

이때 $f'(0)=-3$에서 $c=-3$이므로

$f'(x)=3ax^2+2bx-3$

또 $f'(-2)=0$, $f'(2)=0$에서

$12a-4b-3=0$, $12a+4b-3=0$

두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{4}$, $b=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x-2$ ····· ⓘ

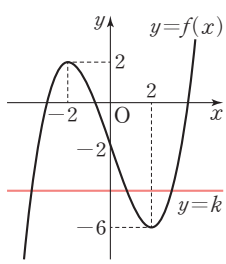
주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2 극대	$\searrow$	-6 극소	$\nearrow$

방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-6<k<2$ ····· ⓘⓘ

따라서 정수 k는 -5, -4, …, 0, 1의 7개이다. ····· ⓘⓘⓘ



채점 기준

ⓘ $f(x)$ 구하기	40 %
ⓘⓘ k의 값의 범위 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ 정수 k의 개수 구하기	10 %

0627 답 ①

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

이차함수 $y=f'(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1, 2)$이므로

$f'(x)=3a(x-1)^2+2$

$f'(-1)=0$에서

$12a+2=0$ $\therefore a=-\frac{1}{6}$

$\therefore f'(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$

즉, $2b=1$, $c=\frac{3}{2}$이므로 $b=\frac{1}{2}$, $c=\frac{3}{2}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+d$

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

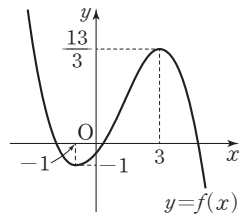
함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이고 극솟값이 -1이므로

$f(-1)=-1$에서

$-\frac{5}{6}+d=-1$ $\therefore d=-\frac{1}{6}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{6}$

$f(0)=-\frac{1}{6}$, $f(3)=\frac{13}{3}$이고, 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$k=-1$ 또는 $k=\frac{13}{3}$

따라서 구하는 모든 상수 k의 값의 합은

$-1+\frac{13}{3}=\frac{10}{3}$

0628 답 $1<t<2$

$f(x)=-x^3+6x^2-11x+8$에서

$f'(x)=-3x^2+12x-11$

점 $(1, t)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(a, -a^3+6a^2-11a+8)$이라 하면 접선의 기울기는

$f'(a)=-3a^2+12a-11$이므로 접선의 방정식은

$y-(-a^3+6a^2-11a+8)=(-3a^2+12a-11)(x-a)$

$\therefore y=(-3a^2+12a-11)x+2a^3-6a^2+8$

이 직선이 점 $(1, t)$를 지나므로

$t=2a^3-9a^2+12a-3$ ····· ㉠

이때 서로 다른 접선의 개수가 3이려면 방정식 ㉠이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$h(a)=2a^3-9a^2+12a-3$이라 하면

$h'(a)=6a^2-18a+12=6(a-1)(a-2)$

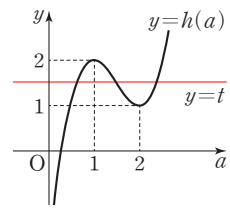
$h'(a)=0$을 만족시키는 a의 값은 $a=1$ 또는 $a=2$

함수 $h(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(a)$	↗	2 극대	↘	1 극소	↗

방정식 $h(a)=t$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y=h(a)$의 그래프와 직선 $y=t$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$1<t<2$



0629 답 1

점 $(3, 0)$은 곡선 $y=x^3-kx+3$ 위의 점이 아니므로

$30-3k\neq0$ $\therefore k\neq10$

$f(x)=x^3-kx+3$이라 하면 $f'(x)=3x^2-k$

접점의 좌표를 (t, t^3-kt+3)이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2-k$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-kt+3)=(3t^2-k)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-k)x-2t^3+3$

이 직선이 점 $(3, 0)$을 지나므로

$0=3(3t^2-k)-2t^3+3$

$\therefore 2t^3-9t^2+3k-3=0$ ····· ㉠

이때 서로 다른 접선의 개수가 2이려면 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$g(t)=2t^3-9t^2+3k-3$이라 하면

$g'(t)=6t^2-18t=6t(t-3)$

$g'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 $t=0$ 또는 $t=3$

방정식 $g(t)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $g(0)g(3)=0$이어야 하므로

$(3k-3)(3k-30)=0$ $\therefore k=1$ ($\because k\neq10$)

0630 답 ③

$f(x)=x^3+3x^2+1$이라 하면 $f'(x)=3x^2+6x$

접점의 좌표를 (t, t^3+3t^2+1)이라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+6t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3+3t^2+1)=(3t^2+6t)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2+6t)x-2t^3-3t^2+1$

이 직선이 점 $(a, 1)$을 지나므로

$1=a(3t^2+6t)-2t^3-3t^2+1$

$2t^3+3(1-a)t^2-6at=0$

$\therefore t\{2t^2+3(1-a)t-6a\}=0$

이때 서로 다른 접선의 개수가 2이려면 위의 방정식은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 즉, t에 대한 이차방정식

$2t^2+3(1-a)t-6a=0$ ····· ㉠

이 0이 아닌 중근을 갖거나 $t=0$과 또 다른 실근을 가져야 한다.

(i) 방정식 ㉠이 0이 아닌 중근을 갖는 경우

$t=0$은 방정식 ㉠의 근이 아니므로

$-6a\neq0$ $\therefore a\neq0$

방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=9(1-a)^2+48a=0$

$9a^2+30a+9=0$, $3(a+3)(3a+1)=0$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=-\frac{1}{3}$

(ii) 방정식 ㉠이 $t=0$과 또 다른 실근을 갖는 경우

$t=0$은 방정식 ㉠의 근이므로

$6a=0$ $\quad\therefore a=0$

$a=0$을 ㉠에 대입하면

$2t^2+3t=0$, $t(2t+3)=0$

즉, 방정식 ㉠의 근은 $t=0$ 또는 $t=-\frac{3}{2}$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=-3$ 또는 $a=-\frac{1}{3}$ 또는 $a=0$

따라서 구하는 실수 a의 개수는 3이다.

0631 답 ⑤

$g(x)=x^3-12x+k$라 하면

$g'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	$k+16$ 극대	↘	$k-16$ 극소	↗

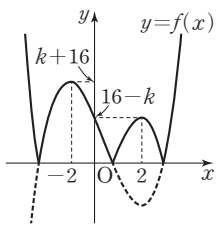
$k>0$이므로 함수 $g(x)$의 극댓값은 항상 양수이다. 즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 함수 $g(x)$의 극솟값의 부호에 따라 다음과 같다.

(i) $k-16<0$, 즉 $0<k<16$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수인 실수 a의 값은

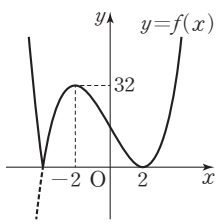
0, $16-k$, $k+16$

의 3개이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $k-16=0$, 즉 $k=16$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수인 실수 a의 값은 32로 오직 하나이다.

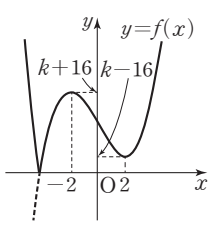


(iii) $k-16>0$, 즉 $k>16$일 때

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수인 실수 a의 값은

0, $k-16$, $k+16$

의 3개이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.



(i), (ii), (iii)에서 $k=16$

0632 답 ②

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax+a$에서 $f'(x)=x^2-a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 $a>0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=x^2-a=(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$이므로

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-\sqrt{a}$ 또는 $x=\sqrt{a}$

방정식 $f(x)=0$이 오직 한 개의 실근을 가지려면

$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a})>0$이어야 하므로

$\left(a+\frac{2}{3}a\sqrt{a}\right)\left(a-\frac{2}{3}a\sqrt{a}\right)>0$, $a^2\left(1-\frac{4}{9}a\right)>0$

이때 $a^2>0$이므로 $1-\frac{4}{9}a>0$ $\quad\therefore a<\frac{9}{4}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $0<a<\frac{9}{4}$

따라서 정수 a의 값은 1, 2이므로 구하는 합은 $1+2=3$

0633 답 ①

㈏에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 $x=1$에서만 꺾인 모양이므로

$f(1)=0$

㈐에서 방정식 $f(x)=0$의 1이 아닌 다른 한 실근을 k라 하면

$f(k)=0$

이때 함수 $|f(x)|$가 $x=k$에서 미분가능해야 하므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=k$에서 x축과 만나지만 $x=k$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x=k$에서 x축에 접한다.

삼차함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1이고 $(x-k)^2$을 인수로 가지므로 $f(x)=(x-1)(x-k)^2$ $(k\neq1)$이라 하면

㈎에서 $f(0)=-1$이므로

$k^2=1$ $\quad\therefore k=-1$ $(\because k\neq1)$

따라서 $f(x)=(x-1)(x+1)^2$이므로 $f(-2)=-3$

0634 답 ④

삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$를 만족시키므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,

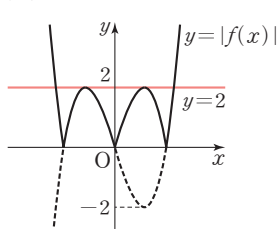
$f(0)=0$이다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이므로

$f(x)=x^3+ax$ (a는 상수)라 하면 $f'(x)=3x^2+a$

방정식 $|f(x)|=2$가 서로 다른 네 실근을 가지므로 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=2$는 서로 다른 네 점에서 만난다.

즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 2, 극솟값은 -2이다.



함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극대라 하면 $f'(k)=0$에서

$3k^2+a=0$ $\quad\therefore a=-3k^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 극댓값이 2이므로 $f(k)=2$에서

$k^3+ak=2$

위의 식에 ㉠을 대입하면

$k^3-3k^3=2$, $k^3=-1$ $\quad\therefore k=-1$ $(\because k$는 실수)

$k=-1$을 ㉠에 대입하여 풀면 $a=-3$

따라서 $f(x)=x^3-3x$이므로 $f(3)=18$

0635 답 ⑤

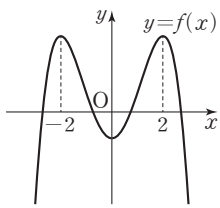
㈎에서 사차함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$f(x)=ax^4+bx^2+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=4ax^3+2bx$

㈏에서 $f'(2)=0$이므로 $f'(-2)=0$이고 ㈐에서 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 감소하므로 닫힌구간 $[0, 2]$에서 증가한다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 네 실근을 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위가 $-1<k<3$이므로 $f(x)$는 $x=-2$, $x=2$에서 극대이고 극댓값은 3, $x=0$에서 극소이고 극솟값은 -1이어야 한다.

$f'(2)=0$에서

$32a+4b=0$ $\therefore 8a+b=0$ ····· ㉠

또 $f(-2)=f(2)=3$, $f(0)=-1$에서

$16a+4b+c=3$, $c=-1$

즉, $16a+4b=4$에서 $4a+b=1$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-\frac{1}{4}$, $b=2$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+2x^2-1$이므로 $f(1)=\frac{3}{4}$

0636 답 ③

주어진 방정식에서 $3x^4+4x^3-1=0$

$f(x)=3x^4+4x^3-1$이라 하면

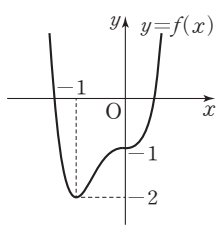
$f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	-1	···	0	···
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2 극소	↗	-1	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



0637 답 ④

주어진 방정식에서 $2x^3-12x^2+18x+3=k$

$f(x)=2x^3-12x^2+18x+3$이라 하면

$f'(x)=6x^2-24x+18=6(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

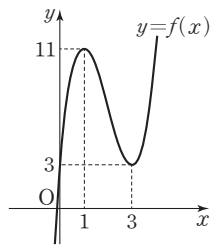
x	···	1	···	3	···
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	11 극대	↘	3 극소	↗

$f(0)=3$이고, 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$k=3$ 또는 $k=11$

따라서 구하는 모든 상수 k의 값의 합은

$3+11=14$



다른 풀이

주어진 방정식에서 $2x^3-12x^2+18x+3-k=0$

$g(x)=2x^3-12x^2+18x+3-k$라 하면

$g'(x)=6x^2-24x+18=6(x-1)(x-3)$

$g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 $g(1)g(3)=0$이어야 하므로

$(11-k)(3-k)=0$ $\therefore k=3$ 또는 $k=11$

따라서 구하는 모든 상수 k의 값의 합은 $3+11=14$

0638 답 ①

주어진 방정식에서 $\frac{1}{4}x^4-x^3+5=k$

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+5$라 하면

$f'(x)=x^3-3x^2=x^2(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

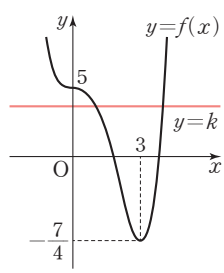
x	···	0	···	3	···
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	5	↘	$-\frac{7}{4}$ 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 $x>0$에서 2개이려면

$-\frac{7}{4}<k<5$

따라서 $M=4$, $m=-1$이므로

$M-m=4-(-1)=5$



0639 답 ②

주어진 방정식에서 $2x^3-3x^2-12x+3=a$

$h(x)=2x^3-3x^2-12x+3$이라 하면

$h'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

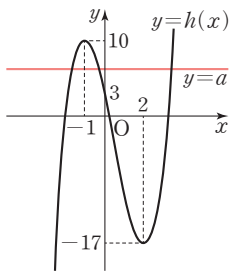
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	10 극대	↘	-17 극소	↗

$h(0)=3$이고, 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 $x>0$에서 1개, $x<0$에서 2개이려면

$3<a<10$

따라서 정수 a는 4, 5, …, 9의 6개이다.



0640 답 ④

주어진 방정식에서 $\frac{1}{2}x^4-2x^3-x^2+6x+1=k$

$f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3-x^2+6x+1$이라 하면

$f'(x)=2x^3-6x^2-2x+6=2(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

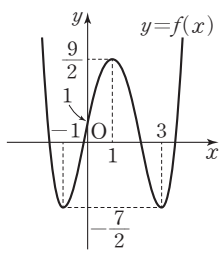
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{7}{2}$ 극소	↗	$\frac{9}{2}$ 극대	↘	$-\frac{7}{2}$ 극소	↗

$f(0)=1$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 $x>0$에서 2개, $x<0$에서 2개이려면

$-\frac{7}{2}<k<1$

따라서 정수 k는 -3, -2, -1, 0의 4개이다.



0641 답 ⑤

주어진 방정식에서 $x^3-6x^2+9x+2=k$

$f(x)=x^3-6x^2+9x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

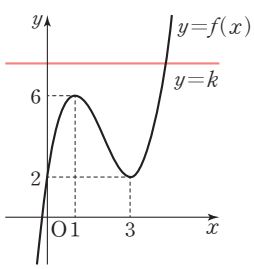
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6 극대	↘	2 극소	↗

$f(0)=2$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 $x>0$에서 1개이려면

$k>6$

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 7이다.



0642 답 2

두 곡선이 만나는 점의 개수는 방정식

$2x^4+x^3-x^2+1=-x^4+x^3+5x^2+k+1$, 즉 $3x^4-6x^2=k$

의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$f(x)=3x^4-6x^2$이라 하면

$f'(x)=12x^3-12x=12x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-3 극소	↗	0 극대	↘	-3 극소	↗

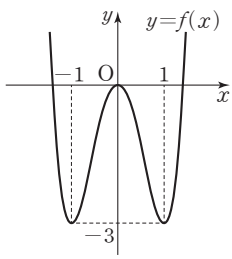
…… ⓘ

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수는 $k>0$ 또는 $k=-3$일 때 2, $k=0$일 때 3, $-3<k<0$일 때 4, $k<-3$일 때 0이다.

즉, 교점의 개수가 최대가 되도록 하는 k의 값의 범위는

$-3<k<0$ …… ⓘⓘ

따라서 정수 k는 -2, -1의 2개이다. …… ⓘⓘⓘ



채점 기준	
ⓘ $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내기	50 %
ⓘⓘ k의 값의 범위 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 정수 k의 개수 구하기	10 %

0643 답 ④

주어진 곡선과 직선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식

$x^3+3x^2-7x-5=2x+k$, 즉 $x^3+3x^2-9x-5=k$ …… ㉠

가 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x-5$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

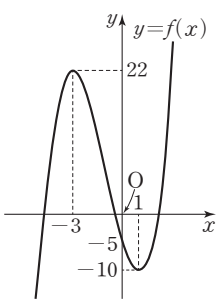
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	22 극대	↘	-10 극소	↗

$f(0)=-5$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 3개이려면

$-10<k<22$

따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 21이다.



다른 풀이

방정식 ㉠에서 $x^3+3x^2-9x-5-k=0$

$g(x)=x^3+3x^2-9x-5-k$라 하면

$g'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면 $g(-3)g(1)<0$이어야 하므로

$(22-k)(-10-k)<0$, $(k-22)(k+10)<0$

$\therefore\ -10<k<22$

따라서 정수 k의 최댓값은 21이다.

0644 답 ③

두 곡선이 만나는 점의 개수가 2이려면 방정식

$2x^3-5x^2-2k=x^3-2x^2-1$, 즉 $x^3-3x^2+1=2k$ ····· ㉠

가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x^2+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

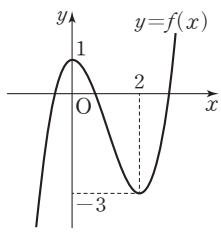
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	0	···	2	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	1 극대	↘	−3 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2k$의 교점이 2개이려면

$2k=-3$ 또는 $2k=1$

$\therefore\ k=-\frac{3}{2}$ 또는 $k=\frac{1}{2}$



따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{3}{2}$이므로

$\alpha-\beta=\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)=2$

다른 풀이

방정식 ㉠에서 $x^3-3x^2+1-2k=0$

$g(x)=x^3-3x^2+1-2k$라 하면

$g'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

방정식 $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $g(0)g(2)=0$이어야 하므로

$(1-2k)(-3-2k)=0$ $\therefore\ k=\frac{1}{2}$ 또는 $k=-\frac{3}{2}$

따라서 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{3}{2}$이므로

$\alpha-\beta=\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)=2$

0645 답 ①

두 곡선이 오직 한 점에서만 만나려면 방정식

$x^3+\frac{1}{2}x^2+3x=3x^3-x^2-k$, 즉 $2x^3-\frac{3}{2}x^2-3x=k$ ····· ㉠

가 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

$f(x)=2x^3-\frac{3}{2}x^2-3x$라 하면

$f'(x)=6x^2-3x-3=3(2x+1)(x-1)$

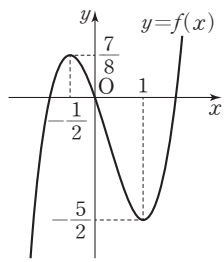
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	$-\frac{1}{2}$	···	1	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{7}{8}$ 극대	↘	$-\frac{5}{2}$ 극소	↗

$f(0)=0$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 1개이려면

$k>\frac{7}{8}$ 또는 $k<-\frac{5}{2}$



따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 1이다.

다른 풀이

방정식 ㉠에서 $2x^3-\frac{3}{2}x^2-3x-k=0$

$g(x)=2x^3-\frac{3}{2}x^2-3x-k$라 하면

$g'(x)=6x^2-3x-3=3(2x+1)(x-1)$

$g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$

방정식 $g(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지려면 $g\left(-\frac{1}{2}\right)g(0)>0$이어야 하므로

$\left(\frac{7}{8}-k\right)\left(-\frac{5}{2}-k\right)>0$, $\left(k-\frac{7}{8}\right)\left(k+\frac{5}{2}\right)>0$

$\therefore\ k>\frac{7}{8}$ 또는 $k<-\frac{5}{2}$

따라서 구하는 자연수 k의 최솟값은 1이다.

0646 답 ①

곡선과 직선이 한 점에서 만나고 다른 한 점에서는 접하려면 방정식

$x^3+2x+7=5x+k$, 즉 $x^3-3x+7=k$가 한 실근과 중근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-3x+7$이라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

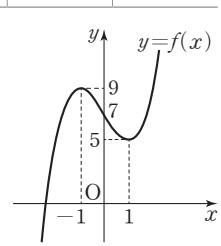
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	−1	···	1	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	9 극대	↘	5 극소	↗

$f(0)=7$이고, 방정식 $f(x)=k$가 한 실근과 중근을 가지려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나고 다른 한 점에서 접해야 하므로

$k=5$ 또는 $k=9$



따라서 구하는 모든 상수 k의 값의 곱은

$5\times9=45$

0647 답 ④

방정식 $f(x)=g(x)$에서 $x^4+4x^2-3=k$ ····· ㉠

방정식 ㉠이 $-1\le x\le 2$에서 오직 하나의 실근을 가지려면 함수 $y=x^4+4x^2-3$의 그래프와 직선 $y=k$가 $-1\le x\le 2$에서 오직 한 점에서만 만나야 한다.

$h(x)=x^4+4x^2-3$이라 하면

$h'(x)=4x^3+8x=4x(x^2+2)$

$-1\le x\le 2$에서 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$

$-1\le x\le 2$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

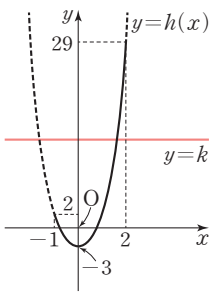
x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	2	↘	-3 극소	↗	29

주어진 방정식이 $-1\le x\le 2$에서 오직 하나의 실근을 가지려면

$k=-3$ 또는 $2<k\le 29$

따라서 $M=29$, $m=-3$이므로

$M-m=29-(-3)=32$



0648 답 ③

$h(x)=f(x)-g(x)$에서 $h'(x)=f'(x)-g'(x)$

주어진 그래프에서 $h'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

ㄱ. $0<x<2$에서 $h'(x)<0$이므로 함수 $h(x)$는 감소한다.

ㄴ. 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극대이고 $x=2$에서 극소이다.

즉, 함수 $h(x)$의 극값은 2개이다.

ㄷ. $h(0)$, $h(2)$의 값을 알 수 없으므로 방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖는지는 알 수 없다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0649 답 ⑤

두 곡선의 교점의 개수는 방정식

$x^3-2x^2+9x-a=4x^2+3a$, 즉 $x^3-6x^2+9x-4a=0$

의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

$f(x)=x^3-6x^2+9x-4a$라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$4-4a$ 극대	↘	$-4a$ 극소	↗

ㄱ. $a=0$이면 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=4$, 극솟값은 $f(3)=0$이므로

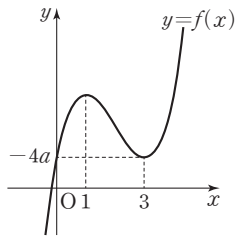
$f(1)f(3)=4\times 0=0$

즉, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 곡선은 서로 다른 두 점에서 만난다.

ㄴ. $a<0$이면 $f(0)=-4a>0$,

$f(3)=-4a>0$이므로 $x>0$에서 $f(x)>0$이다.

즉, $x>0$에서 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖지 않으므로 $x>0$에서 두 곡선은 만나지 않는다.



ㄷ. 방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(1)f(3)<0$이어야 하므로

$(4-4a)\times(-4a)<0$, $a(a-1)<0$ $\therefore 0<a<1$

이를 만족시키는 정수 a는 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0650 답 27

두 점 A$(-2, 1)$, B$(2, 13)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-1=\frac{13-1}{2-(-2)}\{x-(-2)\}$ $\therefore y=3x+7$

함수 $y=x^3+3x^2-6x+k$의 그래프가 선분 AB와 만나려면 방정식 $x^3+3x^2-6x+k=3x+7$, 즉 $x^3+3x^2-9x-7=-k$가 $-2\le x\le 2$에서 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+3x^2-9x-7$이라 하면

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$-2\le x\le 2$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=1$

$-2\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	15	↘	-12 극소	↗	-5

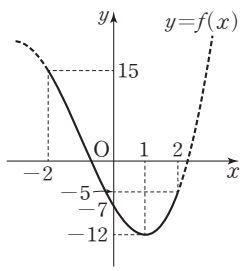
$f(0)=-7$이고, $-2\le x\le 2$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-k$의 교점이 1개이려면

$-k=-12$ 또는 $-5<-k\le 15$

$\therefore k=12$ 또는 $-15\le k<5$

따라서 $M=12$, $m=-15$이므로

$M-m=12-(-15)=27$



0651 답 ④

ㄱ. $k=0$일 때, 방정식 $f(x)=2-g(x)$에서

$x^3+3x^2+1=2-(3x^2+1)$

$x^3+6x^2=0$, $x^2(x+6)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=0$

즉, 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. $k>1$일 때, 방정식 $f(x)-x=g(x)+2$에서

$x^3+3x^2+(k-1)x+1=3x^2+3$

$\therefore x^3+(k-1)x-2=0$

$h(x)=x^3+(k-1)x-2$라 하면

$h'(x)=3x^2+k-1$

이때 $k-1>0$이므로 $h'(x)>0$

함수 $h(x)$는 모든 실수 x에서 증가하므로 함수 $y=h(x)$의 그래프와 x축은 오직 한 점에서만 만난다.

즉, 주어진 방정식은 오직 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. 방정식 $f(x)+9=2g(x)-x^2$에서

$x^3+3x^2+kx+10=2(3x^2+1)-x^2$

$\therefore -x^3+2x^2-8=kx$ ····· ㉠

삼차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=-x^3+2x^2-8$의 그래프와 직선 $y=kx$가 접해야 한다.

$h(x)=-x^3+2x^2-8$이라 하면

$h'(x)=-3x^2+4x$

함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=kx$의 접점의 좌표를 $(t, -t^3+2t^2-8)$이라 하면 접선의 기울기는

$h'(t)=-3t^2+4t$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^3+2t^2-8)=(-3t^2+4t)(x-t)$

$\therefore y=(-3t^2+4t)x+2t^3-2t^2-8$

이 직선이 원점을 지나므로

$0=2t^3-2t^2-8$, $(t-2)(2t^2+2t+4)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t$는 실수)

$2t^2+2t+4=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{2}>0$

$\therefore k=h'(2)=-4$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0652 답 ⑤

방정식 $f(x)=x-2g(x)$에서

$3x^4-6x^2-9x-k=x-2(4x^3-7x)$

$\therefore 3x^4+8x^3-6x^2-24x=k$

$h(x)=3x^4+8x^3-6x^2-24x$라 하면

$h'(x)=12x^3+24x^2-12x-24$

$=12(x+2)(x+1)(x-1)$

$h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

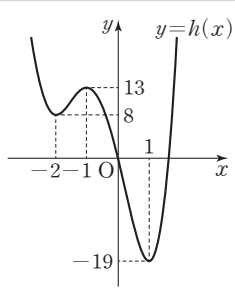
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	-2	···	-1	···	1	···
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	8 극소	↗	13 극대	↘	-19 극소	↗

$h(0)=0$이고, $p(k)=q(k)$이려면 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점 중 x좌표가 양수인 것과 음수인 것의 개수가 같아야 하므로

$0<k<8$ ($\because k<13$)

따라서 정수 k는 1, 2, …, 7의 7개이다.



0653 답 ④

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

즉, $x^4-4tx^3+(4t^2-1)x^2=-x^2+t$에서

$x^4-4tx^3+4t^2x^2-t=0$

$k(x)=x^4-4tx^3+4t^2x^2-t$라 하면

$k'(x)=4x^3-12tx^2+8t^2x$

$=4x(x-t)(x-2t)$

$k'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=t$ 또는 $x=2t$

$t>0$이므로 함수 $k(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	0	···	t	···	$2t$	···
$k'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$k(x)$	↘	$-t$ 극소	↗	t^4-t 극대	↘	$-t$ 극소	↗

이때 함수 $k(x)$는 $x=t$에서 극대이고 극댓값은

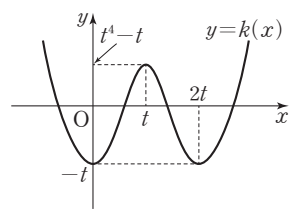
$k(t)=t^4-t=t(t-1)(t^2+t+1)$

(i) $t>1$인 경우

$t-1>0$, $t^2+t+1>0$이므로

$k(t)=t(t-1)(t^2+t+1)>0$

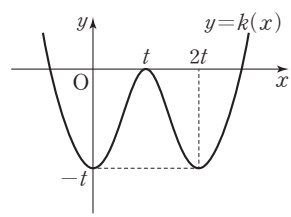
즉, 함수 $y=k(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 네 점에서 만나므로 방정식 $k(t)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



(ii) $t=1$인 경우

$k(t)=t(t-1)(t^2+t+1)=0$

즉, 함수 $y=k(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $k(t)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

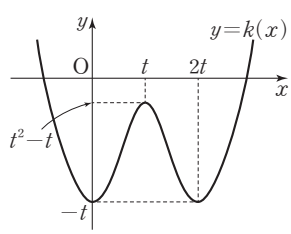


(iii) $0<t<1$인 경우

$t-1<0$, $t^2+t+1>0$이므로

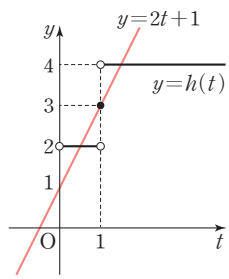
$k(t)=t(t-1)(t^2+t+1)<0$

즉, 함수 $y=k(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $k(t)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



(i), (ii), (iii)에서 $h(t)=\begin{cases}2 & (0<t<1)\\ 3 & (t=1)\\ 4 & (t>1)\end{cases}$

방정식 $h(t)=2t+1$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=2t+1$의 교점의 개수와 같으므로 따라서 구하는 실근의 개수는 3이다.



0654 답 ④

함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고 (가)에서 x축과 $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$에서 만나므로

$-\alpha=\gamma$, $\beta=0$

즉, $f(0)=0$이므로 $c=0$

(나)에서 $f(2)=0$이므로

$\alpha=-2$, $\gamma=2$ ($\because \alpha<\beta<\gamma$)

이때 $f(2)=0$에서

$16a+4b=0$ ($\because c=0$)

즉, $b=-4a$이므로

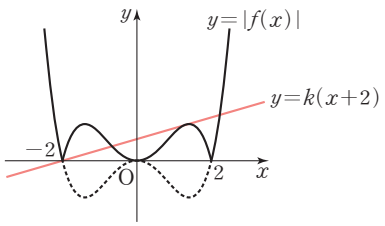
$f(x)=ax^4-4ax^2$, $f'(x)=4ax^3-8ax$

(나)에서 $f'(1)=-1$이므로

$-4a=-1 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

즉, $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^2$, $f'(x)=x^3-2x$

방정식 $|f(x)|=k(x+2)$가 서로 다른 네 실근을 가지려면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=k(x+2)$가 서로 다른 네 점에서 만나야 한다. 이때 직선 $y=k(x+2)$는 k의 값과 관계없이 점 $(-2, 0)$을 지나므로 직선 $y=k(x+2)$는 $0\le x\le 2$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 접해야 한다.



점 $(-2, 0)$에서 곡선 $y=-f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $\left(t, -\frac{1}{4}t^4+t^2\right)$ $(0<t<2)$이라 하면 접선의 기울기는

$-f'(t)=-t^3+2t$이므로 접선의 방정식은

$y-\left(-\frac{1}{4}t^4+t^2\right)=(-t^3+2t)(x-t)$

$\therefore y=(-t^3+2t)x+\frac{3}{4}t^4-t^2$

이 직선이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$0=-2(-t^3+2t)+\frac{3}{4}t^4-t^2$

$\frac{3}{4}t^4+2t^3-t^2-4t=0$, $\frac{1}{4}t(t+2)^2(3t-4)=0$

$\therefore t=\frac{4}{3}$ ($\because 0<t<2$)

$\therefore k=-f'\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{8}{27}$

0655 답 21

주어진 방정식에서 $f(x)+|f(x)+x|-6x=k$

$f(x)+x=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+11x=\frac{1}{2}x(x^2-9x+22)$

이때 $x^2-9x+22=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$이므로

$x<0$일 때, $f(x)+x<0$이고, $x\ge 0$일 때 $f(x)+x\ge 0$이다.

$g(x)=f(x)+|f(x)+x|-6x$라 하면

$$g(x)=\begin{cases} -7x & (x<0) \\ 2f(x)-5x & (x\ge 0) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} -7x & (x<0) \\ x^3-9x^2+15x & (x\ge 0) \end{cases}$$

$h(x)=x^3-9x^2+15x$라 하면

$h'(x)=3x^2-18x+15=3(x-1)(x-5)$

$x\ge 0$에서 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=5$

$x\ge 0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

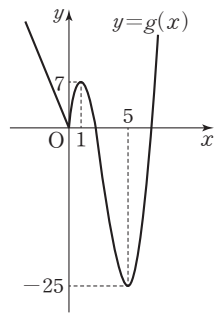
x	0	⋯	1	⋯	5	⋯
$h'(x)$		+	0	−	0	+
$h(x)$	0	↗	7 극대	↘	−25 극소	↗

함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 4개이려면

$0<k<7$

따라서 구하는 모든 정수 k의 값의 합은

$1+2+3+4+5+6=21$



0656 답 ①

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ (a, b는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

(가)에서 $g(0)=0$이므로

$f(0)+|f'(0)|=0$, $|b|=0 \quad \therefore b=0$

즉, $f(x)=x^3+ax^2$이므로 방정식 $f(x)=0$에서

$x^3+ax^2=0$, $x^2(x+a)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=-a$

(나)에서 방정식 $f(x)=0$이 양의 실근을 가지므로

$-a>0 \quad \therefore a<0$

$\therefore f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=-\frac{2}{3}a$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	0	⋯	$-\frac{2}{3}a$	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	0 극대	↘	$\frac{4}{27}a^3$ 극소	↗

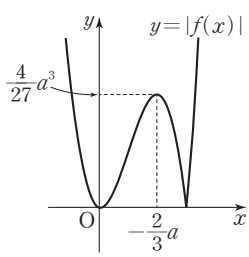
방정식 $|f(x)|=4$의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=4$는 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-\frac{4}{27}a^3=4$, $a^3=-27$

$\therefore a=-3$ ($\because a$는 실수)

즉, $f(x)=x^3-3x^2$, $f'(x)=3x^2-6x$이므로

$g(x)=x^3-3x^2+|3x^2-6x| \quad \therefore g(3)=9$



0657 답 ④

$f(x)=3x^4+4x^3+2$라 하면

$f'(x)=12x^3+12x^2=12x^2(x+1)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1 극소	$\nearrow$	2	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 1이므로

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq k$가 성립하려면

$k\leq 1$

따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 1이다.

0658 답 ③

$f(x)=-x^4+4x^2+1$이라 하면

$f'(x)=-4x^3+8x=-4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	1 극소	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$

함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$에서 극대이면서 최대이고 최댓값은 5이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)<k$가 성립하려면

$k>5$

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 6이다.

0659 답 ④

$f(x)=x^3-5x^2+3x+k$라 하면

$f'(x)=3x^2-10x+3=(3x-1)(x-3)$

$x\geq 1$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=3$

$x\geq 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$k-1$	$\searrow$	$k-9$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $k-9$이므로 $x\geq 1$일 때 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$k-9\geq 0$ $\therefore k\geq 9$

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 9이다.

0660 답 7

$f(x)=x^4+4x-a^2+6a+3$에서

$f'(x)=4x^3+4=4(x+1)(x^2-x+1)$

이때 $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-a^2+6a$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은

$-a^2+6a$ ····· ⓘ

모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$-a^2+6a\geq 0$, $a(a-6)\leq 0$ $\therefore 0\leq a\leq 6$ ····· ⓘⓘ

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6의 7개이다. ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 함수 $f(x)$의 최솟값을 a에 대한 식으로 나타내기	50 %
ⓘⓘ a의 값의 범위 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 정수 a의 개수 구하기	10 %

0661 답 ④

$f(x)=\frac{1}{2}x^4+(a-3)x^2-4(a+1)x+a^2$이라 하면

$f'(x)=2x^3+2(a-3)x-4(a+1)$

$=2(x-2)(x^2+2x+a+1)$

이때 $a>0$이므로 $x^2+2x+a+1=(x+1)^2+a>0$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$a^2-4a-12$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은

$a^2-4a-12$이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면

$a^2-4a-12>0$, $(a+2)(a-6)>0$

$\therefore a>6$ ($\because a>0$)

따라서 구하는 자연수 a의 최솟값은 7이다.

0662 답 ③

$f(x)=2x^3-9x^2+k+5$라 하면

$f'(x)=6x^2-18x=6x(x-3)$

$-2\leq x\leq 2$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$

$-2\leq x\leq 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$k-47$	$\nearrow$	$k+5$ 극대	$\searrow$	$k-15$

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최소이고 최솟값은 $k-47$이므로

$-2\leq x\leq 2$일 때 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면

$k-47>0$ $\therefore k>47$

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 48이다.

0663 답 ①

주어진 부등식에서 $2x^3+3x^2-12x+1-k\geq 0$

$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1-k$라 하면

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$x\geq -3$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=1$

$x\geq -3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$10-k$	↗	$21-k$ 극대	↘	$-6-k$ 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $-6-k$이므로 $x\geq -3$일 때 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$-6-k\geq 0$ $\therefore k\leq -6$

따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 -6이다.

0664 답 ④

$f(x)=x^3+4x-a(a+6)$이라 하면

$f'(x)=3x^2+4$

$x\geq 2$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최소이므로 $x\geq 2$일 때 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면 $f(2)\geq 0$이어야 한다.

$16-a(a+6)\geq 0$, $a^2+6a-16\leq 0$

$(a+8)(a-2)\leq 0$ $\therefore -8\leq a\leq 2$

따라서 $M=2$, $m=-8$이므로

$M-m=2-(-8)=10$

0665 답 ②

주어진 부등식에서 $-x^3+3x^2-5x+1-k>0$

$f(x)=-x^3+3x^2-5x+1-k$라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x-5=-3(x-1)^2-2$

$x<1$에서 $f'(2)<0$이므로 함수 $f(x)$는 감소한다.

즉, $x<1$일 때 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(1)\geq 0$이어야 하므로

$x\leq 1$일 때 $f(x)$는 $x=1$에서 최소이다.

$-2-k\geq 0$ $\therefore k\leq -2$

따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 -2이다.

0666 답 25

$f(x)=x^3-3x^2-5$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$-2\leq x\leq 4$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=2$

$-2\leq x\leq 4$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-25	↗	-5 극대	↘	-9 극소	↗	11

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최대이고 최댓값은 11이고, $x=-2$에서 최소이고 최솟값은 -25이다. …… ⓘ

즉, $-2\leq x\leq 4$일 때 부등식 $-k\leq f(x)\leq k$가 성립하려면 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-k$보다 크거나 같아야 하므로

$-25\geq -k$ $\therefore k\geq 25$ …… ㉠

또 함수 $f(x)$의 최댓값은 k보다 작거나 같아야 하므로

$11\leq k$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k\geq 25$ …… ⓘⓘ

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 25이다. …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값 구하기	50 %
ⓘⓘ k의 값의 범위 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 정수 k의 최솟값 구하기	10 %

참고 $-2\leq x\leq 2$에서 부등식 $-k\leq f(x)\leq k$가 성립하려면 함수 $f(x)$의 최댓값이 k보다 작거나 같고, 최솟값이 $-k$보다 크거나 같아야 한다.

0667 답 15

주어진 부등식에서 $-15<4x^3-3x^2-6x+k<15$

$f(x)=4x^3-3x^2-6x+k$라 하면

$f'(x)=12x^2-6x-6=6(2x+1)(x-1)$

$0\leq x\leq 2$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=1$

$0\leq x\leq 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	k	↘	$k-5$ 극소	↗	$k+8$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최대이고 최댓값은 $k+8$이고, $x=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $k-5$이다.

$0\leq x\leq 2$일 때 부등식 $-15<f(x)<15$가 성립하려면 함수 $f(x)$의 최솟값은 -15보다 커야 하므로

$k-5>-15$ $\therefore k>-10$ …… ㉠

또 함수 $f(x)$의 최댓값은 15보다 작아야 하므로

$k+8<15$ $\therefore k<7$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-10<k<7$

따라서 $M=6$, $m=-9$이므로

$M-m=6-(-9)=15$

0668 답 ②

$f(x)=x^4-4k^3x+12$라 하면

$f'(x)=4x^3-4k^3=4(x-k)(x^2+kx+k^2)$

이때 $x^2+kx+k^2=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2+\frac{3}{4}k^2>0$이므로

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=k$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	k	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$12-3k^4$ 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $12-3k^4$이므로 모든 실수 x에서 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$12-3k^4\geq 0$, $3(k^4-4)\leq 0$

$3(k^2+2)(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})\leq 0$

이때 $k^2+2>0$이므로

$(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2})\leq 0$ $\therefore -\sqrt{2}\leq k\leq\sqrt{2}$

따라서 정수 k는 -1, 0, 1의 3개이다.

0669 답 $\frac{1}{2}$

$f(x)=x^3-3kx^2+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-6kx=3x(x-2k)$

(i) $k>0$일 때

$x\geq k$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=2k$

$x\geq k$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	k	$\cdots$	$2k$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$2-2k^3$	↘	$2-4k^3$ 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=2k$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $2-4k^3$이므로 $x\geq k$일 때 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$2-4k^3\geq 0$ $\therefore 0<k^3\leq\frac{1}{2}$ ($\because k>0$)

(ii) $k=0$일 때

$x\geq 0$에서 $f'(x)=3x^2\geq 0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최소이고 최솟값은 $f(0)=2$이므로 $x\geq 0$일 때 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립한다.

(iii) $k<0$일 때

$x\geq k$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$

$x\geq k$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	k	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$2-2k^3$	↘	2 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 2이므로 $x\geq k$일 때 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립한다.

(i), (ii), (iii)에서 $k^3\leq\frac{1}{2}$

따라서 구하는 k^3의 최댓값은 $\frac{1}{2}$이다.

0670 답 -1

$f(x)=x^3-6ax^2+9a^2x-4$라 하면

$f'(x)=3x^2-12ax+9a^2=3(x-a)(x-3a)$

(i) $a\geq 1$일 때

$x\geq 1$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=a$ 또는 $x=3a$

$x\geq 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	a	$\cdots$	$3a$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$9a^2-6a-3$	↗	$4a^3-4$ 극대	↘	-4 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=3a$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 -4이므로 $x\geq 1$일 때 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하지 않는다.

(ii) $\frac{1}{3}<a<1$, 즉 $1<3a<3$일 때

$x\geq 1$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=3a$

$x\geq 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	$3a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$9a^2-6a-3$	↘	-4 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=3a$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 -4이므로 $x\geq 1$일 때 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하지 않는다.

(iii) $3a\leq 1$, 즉 $a\leq\frac{1}{3}$일 때

$x\geq 1$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최소이므로 $x\geq 1$일 때 부등식 $f(x)\geq 0$이 성립하려면 $f(1)\geq 0$이어야 한다.

$9a^2-6a-3\geq 0$, $3(3a+1)(a-1)\geq 0$

$\therefore a\leq-\frac{1}{3}$ $\left(\because a\leq\frac{1}{3}\right)$

(i), (ii), (iii)에서 $a\leq-\frac{1}{3}$

따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 -1이다.

0671 답 ⑤

주어진 부등식에서 $x^{n+1}-(n+1)x-2n(n-9)>0$

$f(x)=x^{n+1}-(n+1)x-2n(n-9)$라 하면

$f'(x)=(n+1)x^n-(n+1)=(n+1)(x^n-1)$

$=(n+1)(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1)$

$x>1$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

즉, $x>1$일 때 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(1)\geq 0$이어야 하므로

$1-(n+1)-2n(n-9)\geq 0$

$2n^2-17n\leq 0$, $n(2n-17)\leq 0$ $\therefore 0\leq n\leq\frac{17}{2}$

따라서 구하는 자연수 n의 최댓값은 8이다.

참고 $x>1$에서 $x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+1>0$이다.

0672 답 ①

(가)에서 $f(0)=0$이고, 사차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로
$f(x)=x^4+px^3+qx^2+rx$ (p, q, r는 상수)라 하면
$f'(x)=4x^3+3px^2+2qx+r$
(가)에서 $f'(0)=0$이므로 $r=0$
$\therefore f'(x)=4x^3+3px^2+2qx$ ····· ㉠
(나)에서 양수 k에 대하여 구간 $(-\infty, k)$에서 $f'(x)\le 0$이므로 함수 $f'(x)$는 $x=0$의 좌우에서 부호가 바뀌지 않는다.
즉, 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 $x=0$에서 x축에 접하므로
$f'(x)=4x^2(x-a)$ (a는 상수)라 하자.
(가)에서 $f'(2)=16$이므로
$16(2-a)=16$ $\therefore a=1$
$\therefore f'(x)=4x^2(x-1)=4x^3-4x^2$ ····· ㉡
㉠, ㉡에서 $3p=-4$, $2q=0$이므로 $p=-\frac{4}{3}$, $q=0$
$\therefore f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	0	···	1	···
$f'(x)$	−	0	−	0	+
$f(x)$	↘	0	↘	$-\frac{1}{3}$ 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $-\frac{1}{3}$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge -\frac{1}{3}$
따라서 실수 a의 값의 범위는 $a\le -\frac{1}{3}$이므로 a의 값이 될 수 없는 것은 ①이다.

0673 답 36

함수 $f(x)-(5x+1)$은 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 적어도 하나의 실근을 갖는다.
방정식 $f(x)-(5x+1)=0$의 한 실근을 a라 하면 (가)에 의하여 방정식 $f(x)-(5x+1)=0$은 삼중근을 가져야 하므로
$f(x)-(5x+1)=(x-a)^3$
$\therefore f(x)=(x-a)^3+5x+1$ ····· ㉠
(나)에서 모든 실수 x에 대하여 $xf(x)\ge 0$이므로
$x>0$일 때 $f(x)\ge 0$이고 $x<0$일 때 $f(x)\le 0$이다.
삼차함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이므로 $f(0)=0$
㉠에 $x=0$을 대입하면
$-a^3+1=0$, $a^3=1$
$\therefore a=1$ ($\because a$는 실수)
$f(x)=(x-1)^3+5x+1=x^3-3x^2+8x$이므로
$f'(x)=3x^2-6x+8=3(x-1)^2+5$
모든 실수 x에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.
즉, 닫힌구간 $[-1, 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최소이고 최솟값 m은 $f(-1)=-12$, $x=4$에서 최대이고 최댓값 M은 $f(4)=48$이다.
$\therefore M+m=48+(-12)=36$

0674 답 2

주어진 부등식에서 $2x^3-2x^2-2x+5-k>0$
$f(x)=2x^3-2x^2-2x+5-k$라 하면
$f'(x)=6x^2-4x-2=2(3x+1)(x-1)$
$x\ge 0$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=1$
$x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	···	1	···
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$	$5-k$	↘	$3-k$ 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $3-k$이므로 $x\ge 0$일 때 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면
$3-k>0$ $\therefore k<3$
따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 2이다.

0675 답 ①

주어진 부등식에서 $3x^4-4x^3-12x^2+20-k\ge 0$
$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+20-k$라 하면
$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은
$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	−1	···	0	···	2	···
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	$15-k$ 극소	↗	$20-k$ 극대	↘	$-12-k$ 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $-12-k$이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\ge 0$이 성립하려면
$-12-k\ge 0$ $\therefore k\le -12$
따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 -12이다.

0676 답 ②

주어진 부등식에서 $2x^3+3x^2-36x+k-1<0$
$f(x)=2x^3+3x^2-36x+k-1$이라 하면
$f'(x)=6x^2+6x-36=6(x+3)(x-2)$
$x<0$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-3$
$x<0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	−3	···	0
$f'(x)$	+	0	−	
$f(x)$	↗	$k+80$ 극대	↘	

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이면서 최대이고 최댓값은 $k+80$이므로 $x<0$일 때 부등식 $f(x)<0$이 성립하려면
$k+80<0$ $\therefore k<-80$
따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 -81이다.

0677 답 ⑤

주어진 부등식에서 $x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+a\geq 0$

$h(x)=x^4+\frac{4}{3}x^3-4x^2+a$라 하면

$h'(x)=4x^3+4x^2-8x=4x(x+2)(x-1)$

$h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	$a-\frac{32}{3}$ 극소	↗	a 극대	↘	$a-\frac{5}{3}$ 극소	↗

함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $a-\frac{32}{3}$

이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)\geq 0$이 성립하려면

$a-\frac{32}{3}\geq 0$ $\therefore a\geq\frac{32}{3}$

따라서 구하는 실수 a의 최솟값은 $\frac{32}{3}$이다.

0678 답 7

주어진 부등식에서 $4x^3+3x^2-6x+a+1\geq 0$

$h(x)=4x^3+3x^2-6x+a+1$이라 하면

$h'(x)=12x^2+6x-6=6(x+1)(2x-1)$

$-2\leq x\leq 0$에서 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-1$

$-2\leq x\leq 0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$	$a-7$	↗	$a+6$ 극대	↘	$a+1$

함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 최소이고 최솟값은 $a-7$이므로

$-2\leq x\leq 0$일 때 부등식 $h(x)\geq 0$이 성립하려면

$a-7\geq 0$ $\therefore a\geq 7$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 7이다.

0679 답 20

주어진 부등식에서 $x^3-3x+1-a<0$

$h(x)=x^3-3x+1-a$라 하면

$h'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$-3\leq x\leq 3$에서 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=1$

$-3\leq x\leq 3$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-17-a$	↗	$3-a$ 극대	↘	$-1-a$ 극소	↗	$19-a$

함수 $h(x)$는 $x=3$에서 최대이고 최댓값은 $19-a$이므로

$-3\leq x\leq 3$일 때 부등식 $h(x)<0$이 성립하려면

$19-a<0$ $\therefore a>19$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 20이다.

0680 답 3

주어진 부등식에서 $x^3-3x^2-9x+30-k\geq 0$

$h(x)=x^3-3x^2-9x+30-k$라 하면

$h'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$-1\leq x\leq 4$에서 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=3$

$-1\leq x\leq 4$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$35-k$	↘	$3-k$ 극소	↗	$10-k$

함수 $h(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $3-k$이므로 $-1\leq x\leq 4$일 때 부등식 $h(x)\geq 0$이 성립하려면

$3-k\geq 0$ $\therefore k\leq 3$

따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 3이다.

0681 답 51

주어진 부등식에서 $x^3-2x^2-4x-k-4<0$

$f(x)=x^3-2x^2-4x-k-4$라 하면

$f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

$2<x<5$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

즉, $2<x<5$일 때 부등식 $f(x)<0$이 성립하려면 $f(5)\leq 0$이어야 하므로

$51-k\leq 0$ $\therefore k\geq 51$

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 51이다.

0682 답 6

함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<g(x)$, 즉

$f(x)-g(x)<0$이어야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=-x^4+8x^3+10-(2x^4+6x^2+2a)$

$=-3x^4+8x^3-6x^2+10-2a$

$\therefore h'(x)=-12x^3+24x^2-12x=-12x(x-1)^2$

$h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$h(x)$	↗	$10-2a$ 극대	↘	$9-2a$	↘

함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극대이면서 최대이고 최댓값은

$10-2a$ ····· ⓘ

모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)<0$이 성립하려면

$10-2a<0$ $\therefore a>5$ ····· ⅱ

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 6이다. ····· ⅲ

채점 기준	
ⅰ $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 $h(x)$의 최댓값을 a에 대한 식으로 나타내기	50 %
ⅱ a의 값의 범위 구하기	40 %
ⅲ 정수 a의 최솟값 구하기	10 %

0683 답 ⑤

$x>2$에서 곡선 $y=4x^3-10x^2+9x+1$이 곡선 $y=2x^2-6x+k$ 보다 항상 위쪽에 있으려면 $x>2$일 때 부등식

$4x^3-10x^2+9x+1>2x^2-6x+k$, 즉

$4x^3-12x^2+15x+1-k>0$이 성립해야 한다.

$f(x)=4x^3-12x^2+15x+1-k$라 하면

$f'(x)=12x^2-24x+15=12(x-1)^2+3$

$x>2$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

즉, $x>2$일 때 부등식 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(2)\geq0$이어야 하므로

$15-k\geq0$ $\therefore k\leq15$

따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 15이다.

0684 답 1

주어진 부등식에서 $x^3-3kx^2+12k-8\geq0$

$f(x)=x^3-3kx^2+12k-8$이라 하면

$f'(x)=3x^2-6kx=3x(x-2k)$

(ⅰ) $k>0$일 때,

$x\geq0$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=2k$

$x\geq0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	···	$2k$	···
$f'(x)$	0	−	0	+
$f(x)$	$12k-8$	↘	$-4k^3+12k-8$ 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=2k$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은

$-4k^3+12k-8$이므로 $x\geq0$일 때 부등식 $f(x)\geq0$이 성립하려면

$-4k^3+12k-8\geq0$, $4(k-1)^2(k+2)\leq0$

이때 $k>0$에서 $k+2>0$이므로

$(k-1)^2\leq0$ $\therefore k=1$

(ⅱ) $k=0$일 때,

$x\geq0$에서 $f'(x)=3x^2\geq0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최소이고 최솟값은 $f(0)=-8$이므로 $x\geq0$일 때 부등식 $f(x)\geq0$이 성립하지 않는다.

(ⅲ) $k<0$일 때,

$x\geq0$에서 $f'(x)\geq0$이므로 함수 $f(x)$는 증가한다.

즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최소이고 최솟값은

$f(0)=12k-8$

이때 $k<0$에서 $12k-8<0$이므로 $x\geq0$일 때 부등식 $f(x)\geq0$이 성립하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $k=1$

0685 답 ④

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 $f(x_1)\geq g(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$의 최솟값이 함수 $g(x)$의 최댓값보다 크거나 같아야 한다.

$f(x)=x^4-4x^2+16x+1$에서

$f'(x)=4x^3-8x+16=4(x+2)(x^2-2x+2)$

이때 $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0$이므로

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	-2	···
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	-31 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 -31이다.

또 $g(x)=-3x^2+3x-a=-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}-a$이므로 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{3}{4}-a$이다.

즉, $-31\geq\frac{3}{4}-a$이므로 $a\geq\frac{127}{4}$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 32이다.

0686 답 34

(ⅰ) $f(x)\leq12x+k$에서 $-x^4-2x^3-x^2\leq12x+k$

$\therefore x^4+2x^3+x^2+12x+k\geq0$

$h(x)=x^4+2x^3+x^2+12x+k$라 하면

$h'(x)=4x^3+6x^2+2x+12$

$=2(x+2)(2x^2-x+3)$

이때 $2x^2-x+3=2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}>0$이므로

$h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-2$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	-2	···
$h'(x)$	−	0	+
$h(x)$	↘	$k-20$ 극소	↗

함수 $h(x)$는 $x=-2$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $k-20$이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식 $h(x)\geq0$이 성립하려면

$k-20\geq0$ $\therefore k\geq20$

(ⅱ) $12x+k\leq g(x)$에서 $12x+k\leq3x^2+a$

$\therefore 3x^2-12x+a-k\geq0$

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $3x^2-12x+a-k=0$의 판별식을 D라 할 때

$\frac{D}{4}=36-3(a-k)\le 0$

$3k\le 3a-36$ $\therefore k\le a-12$

(i), (ii)에서 $k\ge 20$, $k\le a-12$

이를 만족시키는 자연수 k의 개수가 3이므로

$22\le a-12<23$ $\therefore 34\le a<35$

따라서 구하는 자연수 a의 값은 34이다.

0687 답 ⑤

부등식 $f(x)\ge g(x)$에서 $f(x)-g(x)\ge 0$

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h'(x)=f'(x)-g'(x)$

(가)에서 $f'(0)=g'(0)$, $f'(a)=g'(a)$이므로

$f'(0)-g'(0)=0$, $f'(a)-g'(a)=0$

$\therefore h'(0)=0$, $h'(a)=0$

a는 자연수이므로 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=a$

이때 삼차함수 $h(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 $x>0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$		↘	극소	↗

함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $h(a)$이므로 $x>0$일 때 부등식 $h(x)\ge 0$이 성립하려면 $h(a)\ge 0$이어야 한다.

(나)에서 $f(a)=4a+7$, $g(a)=a^2+a-3$이므로

$h(a)=f(a)-g(a)=-a^2+3a+10$

즉, $-a^2+3a+10\ge 0$에서

$a^2-3a-10\le 0$, $(a+2)(a-5)\le 0$

$\therefore -2\le a\le 5$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

참고 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이고, $g(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이므로 $h(x)=f(x)-g(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이다.

즉, $h'(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이다.

0688 답 ②

$x<0$에서 곡선 $y=x^3+6x^2+9x$가 직선 $y=kx$보다 항상 아래쪽에 있으려면 $x<0$일 때 부등식 $x^3+6x^2+9x<kx$가 성립해야 한다.

$f(x)=x^3+6x^2+9x$라 하면

$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+1)(x+3)$

$x<0$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-3$ 또는 $x=-1$

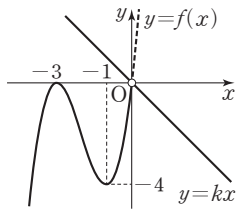
$x<0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	↗	0 극대	↘	-4 극소	↗	(0)

이때 직선 $y=kx$는 원점을 지나므로 $x<0$일 때 부등식 $f(x)<kx$가 성립하려면

$k<0$

따라서 구하는 정수 k의 최댓값은 -1이다.



0689 답 ⑤

(가)에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

(나)에서 $f(0)=f'(0)$이므로 $c=b$

$\therefore f(x)=x^3+ax^2+bx+b$

(다)에서 $x\ge -1$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge f'(x)$, 즉 $f(x)-f'(x)\ge 0$이므로

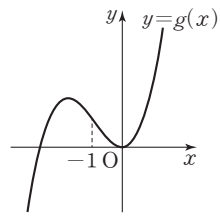
$x^3+ax^2+bx+b-(3x^2+2ax+b)\ge 0$

$\therefore x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x\ge 0$

$g(x)=x^3+(a-3)x^2+(b-2a)x$라 하면

$g'(x)=3x^2+2(a-3)x+b-2a$

$g(0)=0$이고, $x\ge -1$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $g(x)\ge 0$이 성립하려면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x=0$에서 x축에 접해야 한다.



즉, 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 극소이므로

$g'(0)=0$에서

$b-2a=0$ $\therefore b=2a$

$\therefore g(x)=x^3+(a-3)x^2$

또 $g(-1)\ge 0$이므로

$a-4\ge 0$ $\therefore a\ge 4$

$f(x)=x^3+ax^2+2ax+2a$이므로 $f(2)=10a+8$

이때 $a\ge 4$에서 $10a+8\ge 48$이므로 $f(2)\ge 48$

따라서 $f(2)$의 최솟값은 48이다.

최고수준 도전 기출 162~163쪽

0690 답 ④

전략 (가), (나)를 이용하여 이차함수 $f'(x)$를 식으로 나타내고, $1<x<3$에서 함수 $f(x)$가 감소함을 이용하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프의 개형을 그려 본다.

삼차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 이차함수이고 (가)에서 이차함수 $f'(x)$가 $x=2$에서 최솟값을 가지므로

함수 $y=f'(x)$의 그래프의 대칭축의 방정식은 $x=2$이다.

즉, (나)에서 $f'(3)=0$이면 $f'(1)=0$이므로

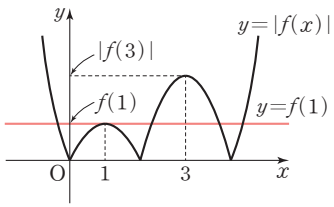
$f'(x)=m(x-1)(x-3)$ (단, $m>0$)

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

$m>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$1<x<3$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로 $1<a<3$인 a에 대하여
$f(3)<f(a)<f(1)$
이때 (다)에서 $f(1)=-f(a)$이므로 $f(a)<f(1)$에서
$f(a)<-f(a)$, $2f(a)<0$ $\therefore f(a)<0$
즉, $f(1)=-f(a)>0$
또 $f(3)<f(a)$에서 $f(a)<0$이므로 $|f(a)|<|f(3)|$이다.
즉, $f(1)=|-f(a)|=|f(a)|<|f(3)|$

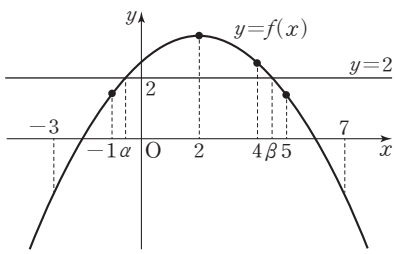


따라서 방정식 $|f(x)|=f(1)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(1)$의 교점의 개수와 같으므로 5이다.

0691 답 ②

전략 $A(x)B(x)\le0$이면 $A(x)\le0$, $B(x)\ge0$ 또는 $A(x)\ge0$, $B(x)\le0$임을 이용한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하자.



$f'(x)\{f(x)-2\}\le0$에서
$f'(x)\le0$, $f(x)-2\ge0$ 또는 $f'(x)\ge0$, $f(x)-2\le0$
(i) $f'(x)\le0$, $f(x)-2\ge0$일 때
$f'(x)\le0$을 만족시키는 x의 값의 범위는
$x\ge2$ ····· ㉠
$f(x)-2\ge0$, 즉 $f(x)\ge2$를 만족시키는 x의 값의 범위는
$\alpha\le x\le\beta$ ····· ㉡
㉠, ㉡에서 $2\le x\le\beta$
즉, 이를 만족시키는 정수 x의 값은 2, 3, 4이다.
(ii) $f'(x)\ge0$, $f(x)-2\le0$일 때
$f'(x)\ge0$을 만족시키는 x의 값의 범위는
$x\le2$ ····· ㉢
$f(x)-2\le0$, 즉 $f(x)\le2$를 만족시키는 x의 값의 범위는
$x\le\alpha$ 또는 $x\ge\beta$ ····· ㉣
㉢, ㉣에서 $x\le\alpha$
즉, 이를 만족시키는 정수 x의 값은 -2, -1이다.
(i), (ii)에서 정수 x는 2, 3, 4, -2, -1의 5개이다.

0692 답 ⑤

전략 $f(x)$는 $x-\alpha$, $x-\beta$를 인수로 가짐을 이용하여 식을 세운다. 허근은 반드시 켤레복소수의 형태로 존재하므로 허근의 개수는 0 또는 짝수임에 유의한다.

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)g(x)$, $g(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\ne0$)라 하면
$f'(x)=(x-\beta)g(x)+(x-\alpha)g(x)+(x-\alpha)(x-\beta)g'(x)$
ㄱ. $f'(\alpha)=0$에서
$(\alpha-\beta)g(\alpha)=0$ $\therefore g(\alpha)=0$ ($\because \alpha\ne\beta$)
즉, 이차함수 $g(x)$는 $x-\alpha$를 인수로 가지므로
$f(x)$는 $(x-\alpha)^2$으로 나누어떨어진다.
ㄴ. $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면 $f'(\alpha)=0$ 또는 $f'(\beta)=0$
(i) $f'(\alpha)=0$일 때,
ㄱ에 의하여 $f(x)$는 $(x-\alpha)^2$과 $x-\beta$를 인수로 갖는다.
(ii) $f'(\beta)=0$일 때,
ㄱ에 의하여 $f(x)$는 $(x-\beta)^2$과 $x-\alpha$를 인수로 갖는다.
(i), (ii)에서 사차방정식 $f(x)=0$은 실수인 중근과 한 근을 가지므로 나머지 한 근도 실근이 된다.
즉, $f'(\alpha)f'(\beta)=0$이면 사차방정식 $f(x)=0$은 허근을 갖지 않는다.
ㄷ. $f'(\alpha)f'(\beta)\ne0$이므로 α, β는 중근이 아니고
$f'(\alpha)=(\alpha-\beta)g(\alpha)$, $f'(\beta)=(\beta-\alpha)g(\beta)$이므로
$f'(\alpha)f'(\beta)=-(\alpha-\beta)^2g(\alpha)g(\beta)>0$
이때 $(\alpha-\beta)^2>0$이므로
$g(\alpha)g(\beta)<0$
이때 $g(x)$는 이차함수이므로 사잇값 정리에 의하여 $g(x)=0$은 구간 (α, β)에서 중근이 아닌 하나의 실근을 갖는다.
즉, 사차방정식 $f(x)=0$은 적어도 세 개의 실근을 갖고 세 실근은 모두 중근이 아니므로 사차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 네 실근을 갖는다.
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0693 답 ③

전략 곡선 위의 점 P에서의 접선과 수직이고 점 P를 지나는 직선의 방정식을 구하고, 이 직선이 점 $(a, 2)$를 지남을 이용하여 a를 t에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x)=x^2$이라 하면 $f'(x)=2x$
$t=0$일 때, 직선 l의 방정식은 $x=0$이다.
이때 이 직선이 점 $(a, 2)$를 지나므로 $a=0$
$t\ne0$일 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(t, t^2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 직선 l의 기울기는 $-\frac{1}{2t}$이다.
즉, 직선 l의 방정식은
$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t)$ $\therefore y=-\frac{1}{2t}x+\frac{1}{2}+t^2$

이 직선이 점 $(a, 2)$를 지나므로

$2=-\frac{1}{2t}a+\frac{1}{2}+t^2$ $\therefore a=2t^3-3t$

이때 서로 다른 직선 l이 세 개 존재하려면 방정식 $a=2t^3-3t$를 만족시키는 서로 다른 실수 t의 값이 세 개 존재해야 하므로 곡선 $y=2t^3-3t$와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$g(t)=2t^3-3t$라 하면

$g'(t)=6t^2-3=6\left(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$g'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은

$t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$

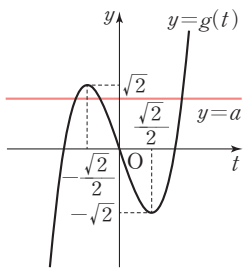
함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$g'(t)$	+	0	−	0	+
$g(t)$	↗	$\sqrt{2}$ 극대	↘	$-\sqrt{2}$ 극소	↗

곡선 $y=2t^3-3t$와 직선 $y=a$가 서로 다른 세 점에서 만나려면

$-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다.



0694 답 ①

전략 $h(x)=f(x)-g(x)$로 놓고 $h(0)=0$, $h(3)=0$, $h'(3)=0$임을 이용하여 $h(x)$를 구한다.

$x\geq a$일 때, 부등식 $f(x)\geq g(x)+4$, 즉 $f(x)-g(x)\geq 4$가 성립해야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 y축에서 만나므로

$f(0)=g(0)$

즉, $h(0)=f(0)-g(0)=0$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프에서 x좌표가 3인 점에서의 접선이 서로 일치하므로

$f(3)=g(3)$, $f'(3)=g'(3)$

$\therefore h(3)=f(3)-g(3)=0$

$h'(3)=f'(3)-g'(3)=0$

$h(x)=x(x-3)^2=x^3-6x^2+9x$

$h'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	4 극대	↘	0 극소	↗

$x\geq a$일 때 부등식 $h(x)\geq 4$가 성립하도록 하는 상수 a의 최솟값은 1이 아니면서 $h(a)=4$를 만족시키는 값이다.

즉, $h(a)=4$에서

$a^3-6a^2+9a-4=0$, $(a-1)^2(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a\neq 1$)

따라서 구하는 상수 a의 최솟값은 4이다.

0695 답 32

전략 (가)에 의하여 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고, 미분계수 $f'(a)$가 존재함을 이용하여 a의 값을 먼저 구한다.

(가)에서 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=a$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)=f(a)$에서

$(a-1)^2(2a+1)=0$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$ ····· ㉠

함수 $f(x)$가 실수 전체에서 미분가능하면 $x=a$에서 미분가능하므로 미분계수 $f'(a)$가 존재한다.

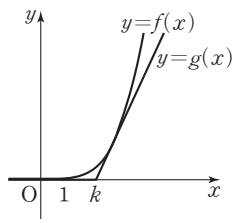
$f'(x)=\begin{cases}0 & (x<a)\\ 6x(x-1) & (x>a)\end{cases}$이므로

$\lim_{x\to a+} f'(x)=\lim_{x\to a-} f'(x)$에서

$6a(a-1)=0$ $\therefore a=0$ 또는 $a=1$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $a=1$

$\therefore f(x)=\begin{cases}0 & (x\leq 1)\\ (x-1)^2(2x+1) & (x>1)\end{cases}$



이때 $x>1$에서 $f(x)>0$이고 $x>k$에서 $g(x)>0$이므로 (나)를 만족시키려면 $k>1$

또 $x>1$일 때 부등식 $(x-1)^2(2x+1)\geq 12(x-k)$, 즉 $2x^3-3x^2-12x+12k+1\geq 0$이 성립해야 한다.

$h(x)=2x^3-3x^2-12x+12k+1$이라 하면

$h'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$x>1$에서 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=2$

$x>1$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		−	0	+
$h(x)$		↘	$12k-19$ 극소	↗

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $12k-19$이므로 $x>1$일 때 부등식 $h(x)\geq 0$이 성립하려면

$12k-19\geq 0$ $\therefore k\geq\frac{19}{12}$

즉, k의 최솟값은 $\frac{19}{12}$이므로

$p=12$, $q=19$

$\therefore a+p+q=1+12+19=32$

0696 답 ④

전략 점 $(0, t)$에서 주어진 곡선에 그은 접선의 방정식을 세운 후, 조건에서 합성함수 $g(t)$는 $g(t)=c\,(c>1)$ 꼴인 상수함수임을 안다.

$p(x)=x^3-ax^2+3x-5$라 하면

$p'(x)=3x^2-2ax+3$

접점의 좌표를 (k, k^3-ak^2+3k-5)라 하면 접선의 기울기는

$p'(k)=3k^2-2ak+3$이므로 접선의 방정식은

$y-(k^3-ak^2+3k-5)=(3k^2-2ak+3)(x-k)$

$\therefore y=(3k^2-2ak+3)x-2k^3+ak^2-5$

이 직선이 점 $(0, t)$를 지나므로

$t=-2k^3+ak^2-5$ ····· ㉠

이때 서로 다른 접선의 개수 $f(t)$는 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

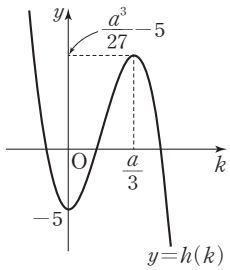
$h(k)=-2k^3+ak^2-5$라 하면

$h'(k)=-6k^2+2ak=-2k(3k-a)$

$h'(k)=0$을 만족시키는 k의 값은 $k=0$ 또는 $k=\frac{a}{3}$

a는 자연수이므로 함수 $h(k)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	···	0	···	$\frac{a}{3}$	···
$h'(k)$	−	0	+	0	−
$h(k)$	↘	-5 극소	↗	$\frac{a^3}{27}-5$ 극대	↘



$f(t)$는 함수 $y=h(k)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같으므로

$$f(t)=\begin{cases}1 & \left(t<-5 \text{ 또는 } t>\frac{a^3}{27}-5\right)\\ 2 & \left(t=-5 \text{ 또는 } t=\frac{a^3}{27}-5\right)\\ 3 & \left(-5<t<\frac{a^3}{27}-5\right)\end{cases}$$

$$\therefore g(t)=f(f(t))=\begin{cases}f(1) & \left(t<-5 \text{ 또는 } t>\frac{a^3}{27}-5\right)\\ f(2) & \left(t=-5 \text{ 또는 } t=\frac{a^3}{27}-5\right)\\ f(3) & \left(-5<t<\frac{a^3}{27}-5\right)\end{cases}$$

(가)에서 $g(t)>1$이고, (나)에서 함수 $g(t)$의 치역의 원소의 개수가 1이므로 $g(t)=2$ 또는 $g(t)=3$

(i) $g(t)=2$일 때,

$f(1)=f(2)=f(3)=2$이어야 한다.

그런데 $t=-5$, $t=\frac{a^3}{27}-5$일 때만 $f(t)=2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(t)=3$일 때,

$f(1)=f(2)=f(3)=3$이어야 한다.

즉, $t=1$, $t=2$, $t=3$이 $-5<t<\frac{a^3}{27}-5$에 속해야 하므로

$\frac{a^3}{27}-5>3$, $a^3-216>0$

$(a-6)(a^2+6a+36)>0$

이때 $a^2+6a+36=(a+3)^2+27>0$이므로

$a-6>0$ $\therefore a>6$

(i), (ii)에서 $a>6$

즉, 자연수 a의 최솟값은 7이므로 $m=7$

따라서 $g(m)=g(7)=3$이므로

$m+g(m)=7+3=10$

0697 답 296

전략 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c\,(a, b, c$는 상수$)$로 놓고 주어진 부등식을 정리한 후, 함수의 그래프의 위치 관계를 이용한다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c\,(a, b, c$는 상수$)$라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

0이 아닌 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{f(2x)-f(0)}{2x}=\frac{(8x^3+4ax^2+2bx+c)-c}{2x}=4x^2+2ax+b$$

이므로 주어진 부등식에서

$$\frac{3x^2+2ax+b}{2}+x^2-2\le 4x^2+2ax+b\le x^4$$

$\therefore 5x^2+2ax+b-4\le 8x^2+4ax+2b\le 2x^4$

(i) $5x^2+2ax+b-4\le 8x^2+4ax+2b$에서

$-3x^2-4\le 2ax+b$

(ii) $8x^2+4ax+2b\le 2x^4$에서

$4ax+2b\le 2x^4-8x^2$ $\therefore 2ax+b\le x^4-4x^2$

(i), (ii)에서 $-3x^2-4\le 2ax+b\le x^4-4x^2$ ····· ㉠

$g(x)=-3x^2-4$, $h(x)=x^4-4x^2$이라 하자.

함수 $y=g(x)$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(0, -4)$인 위로 볼록한 포물선이다.

$h'(x)=4x^3-8x=4x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

$h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

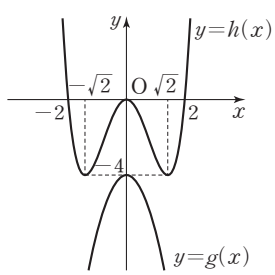
x	···	$-\sqrt{2}$	···	0	···	$\sqrt{2}$	···
$h'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$h(x)$	↘	-4 극소	↗	0 극대	↘	-4 극소	↗

부등식 ㉠을 만족시키려면 직선 $y=2ax+b$는 $y=-4$이어야 하므로

$a=0$, $b=-4$

따라서 $f'(x)=3x^2-4$이므로

$f'(10)=296$



09 속도와 가속도

난이도별 필수 기출 165~178쪽

0698 답 ①

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-10t$

따라서 $t=2$에서 점 P의 속도는 4이다.

0699 답 ②

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-8t+12$, $a=\frac{dv}{dt}=6t-8$

따라서 $t=1$에서 점 P의 가속도는 -2이다.

0700 답 ⑤

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-12t-15$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$3t^2-12t-15=0$, $3(t+1)(t-5)=0$

$\therefore t=5\ (\because t>0)$

0701 답 28

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=9t^2-26t+4$, $a=\frac{dv}{dt}=18t-26$

점 P의 속도가 7이면

$9t^2-26t+4=7$, $9t^2-26t-3=0$

$(9t+1)(t-3)=0$ $\therefore t=3\ (\because t\geq 0)$

즉, 시각 $t=3$에서 점 P의 속도가 7이다. …… ⓘ

따라서 $t=3$에서 점 P의 가속도는 28이다. …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 속도가 7인 순간의 시각 구하기	50 %
ⓘⓘ 속도가 7인 순간의 점 P의 가속도 구하기	50 %

0702 답 ③

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-10t+20$

점 P의 속도가 12이면

$3t^2-10t+20=12$, $3t^2-10t+8=0$

$(3t-4)(t-2)=0$ $\therefore t=\frac{4}{3}$ 또는 $t=2$

따라서 점 P의 속도가 두 번째로 12가 되는 시각은 $t=2$이고, 이때의 점 P의 위치는 28이다.

0703 답 ②

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+18t$, $a=\frac{dv}{dt}=-6t+18$

점 P의 가속도가 0이면

$-6t+18=0$ $\therefore t=3$

즉, 시각 $t=3$에서 점 P의 가속도가 0이고, 이때의 점 P의 위치가 12이므로

$54-k=12$ $\therefore k=42$

0704 답 ①

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3kt^2-12t+8$

시각 $t=k$에서 점 P의 속도가 8이므로

$3k^3-12k+8=8$, $3k(k+2)(k-2)=0$ $\therefore k=2\ (\because k>0)$

시각 t에서의 점 P의 가속도를 a라 하면 $v=6t^2-12t+8$이므로

$a=\frac{dv}{dt}=12t-12$

따라서 구하는 시각 $t=4$에서 점 P의 가속도는 36이다.

0705 답 6

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2+2(a+1)t-4$

시각 $t=2$에서 점 P의 속도가 k이므로

$8+4(a+1)=k$ $\therefore 12+4a=k$ …… ㉠

시각 t에서의 점 P의 가속도는

$\frac{dv}{dt}=6t+2(a+1)$

시각 $t=3$에서 점 P의 가속도가 8이므로

$18+2(a+1)=8$, $2a=-12$ $\therefore a=-6$

$a=-6$을 ㉠에 대입하여 풀면 $k=-12$

$\therefore a-k=-6-(-12)=6$

0706 답 ②

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-6t^2-18t+24$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$-6t^2-18t+24=0$, $-6(t+4)(t-1)=0$ $\therefore t=1\ (\because t>0)$

따라서 시각 $t=1$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌고, 이때의 점 P의 위치는 10이다.

0707 답 8

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=t^2-6t-7$, $a=\frac{dv}{dt}=2t-6$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$t^2-6t-7=0$, $(t+1)(t-7)=0$ $\therefore t=7\ (\because t>0)$

따라서 시각 $t=7$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌고, 이때의 점 P의 가속도는 8이다.

0708 답 ①

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2+2at+b$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $t=2$에서 점 P의 속도는 0이다.

즉, $12+4a+b=0$ ····· ㉠

시각 t에서의 점 P의 가속도는

$\frac{dv}{dt}=6t+2a$

시각 $t=3$에서 점 P의 가속도가 0이므로

$18+2a=0$ $\therefore a=-9$

$a=-9$를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=24$

$\therefore a+b=-9+24=15$

0709 답 32

점 P가 원점을 지나는 순간의 위치는 0이므로

$t^3-5t^2-14t=0$, $t(t+2)(t-7)=0$

$\therefore t=7$ ($\because t>0$)

즉, 시각 $t=7$에서 점 P는 다시 원점을 지난다. ····· ⓘ

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-10t-14$, $a=\frac{dv}{dt}=6t-10$

따라서 $t=7$에서 점 P의 가속도는 32이다. ····· ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 점 P가 출발한 후 다시 원점을 지나는 순간의 시각 구하기	50 %
ⓘⓘ 점 P가 출발한 후 다시 원점을 지나는 순간의 가속도 구하기	50 %

0710 답 54

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-27$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$3t^2-27=0$, $3(t+3)(t-3)=0$ $\therefore t=3$ ($\because t>0$)

즉, 시각 $t=3$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌고 이때의 점 P의 위치가 0이므로

$-54+k=0$ $\therefore k=54$

0711 답 ④

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=f'(t)=-3t^2+6t+8=-3(t-1)^2+11$

즉, $0\le t\le 3$에서 $-1\le f'(t)\le 11$이므로

$0\le|f'(t)|\le 11$

따라서 구하는 점 P의 속력의 최댓값은 11이다.

0712 답 ④

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-6t$, $a=\frac{dv}{dt}=6t-6$

ㄱ. 시각 $t=1$에서 점 P의 속도는 -3이므로 이때의 점 P의 속력은 $|-3|=3$이다.

ㄴ. 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$3t^2-6t=0$, $t(t-2)=0$ $\therefore t=2$ ($\because t>0$)

즉, 점 P는 출발한 후 운동 방향을 한 번 바꾼다.

ㄷ. 점 P가 원점을 지나는 순간의 위치는 0이므로

$t^3-3t^2-16=0$, $(t-4)(t^2+t+4)=0$

$\therefore t=4$ ($\because t$는 실수) $\quad\leftarrow t^2+t+4=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{15}{4}>0$

즉, 시각 $t=4$에서 점 P가 원점을 지나고, 이때의 점 P의 가속도는 18이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0713 답 ④

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=t^2-2kt+2k+15$

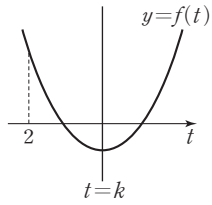
점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$t^2-2kt+2k+15=0$ ····· ㉠

$t>2$에서 점 P의 운동 방향이 두 번 바뀌려면 이차방정식 ㉠은 2보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t)=t^2-2kt+2k+15$

$=(t-k)^2-k^2+2k+15$라 하자.



(i) 이차방정식 $f(t)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(2k+15)>0$

$k^2-2k-15>0$, $(k+3)(k-5)>0$

$\therefore k<-3$ 또는 $k>5$

(ii) $f(2)>0$이어야 하므로

$19-2k>0$ $\therefore k<\frac{19}{2}$

(iii) 이차함수 $y=f(t)$의 그래프의 축의 방정식이 $t=k$이므로 $k>2$

(i), (ii), (iii)에서 $5<k<\frac{19}{2}$

따라서 정수 k는 6, 7, 8, 9의 4개이다.

0714 답 ②

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=2t^2+2at+b$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $t=3$에서 점 P의 속도는 0이다.

즉, $18+6a+b=0$이므로

$6a+b=-18$ ····· ㉠

시각 $t=3$에서 점 P의 위치가 3이므로

$9a+3b+12=3$ $\therefore 3a+b=-3$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=12$

$\therefore v=2t^2-10t+12=2(t-2)(t-3)$

즉, 점 P가 시각 $t=3$ 이외에 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=2$이다.

이때 시각 t에서의 점 P의 가속도는

$\frac{dv}{dt}=4t-10$

따라서 시각 $t=2$에서 점 P의 가속도는 -2이다.

0715 답 ④

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$, 가속도를 각각 $a_P(t)$, $a_Q(t)$라 하면

$v_P(t)=6t^3+3t^2$, $v_Q(t)=6t^2$

$a_P(t)=18t^2+6t$, $a_Q(t)=12t$

두 점 P, Q의 가속도가 같아지는 시각은 $a_P(t)=a_Q(t)$에서

$18t^2+6t=12t$, $6t(3t-1)=0$ $\therefore t=\frac{1}{3}$ ($\because t>0$)

0716 답 ①

두 점 P, Q의 위치가 같아지는 시각은 $x_1=x_2$에서

$t^2+t-6=-t^3+7t^2$, $t^3-6t^2+t-6=0$

$(t-6)(t^2+1)=0$ $\therefore t=6$ ($\because t^2+1>0$)

즉, 시각 $t=6$에서 두 점 P, Q의 위치가 같다.

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_1, v_2, 가속도를 각각 a_1, a_2라 하면

$v_1=2t+1$, $v_2=-3t^2+14t$

$a_1=2$, $a_2=-6t+14$

즉, 시각 $t=6$에서 점 P의 가속도는 2, 점 Q의 가속도는 -22이다.

따라서 $p=2$, $q=-22$이므로

$p-q=2-(-22)=24$

0717 답 ③

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$라 하면

$v_P(t)=3t^2-4t+4$, $v_Q(t)=2t^2+2t-5$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각은 $v_P(t)=v_Q(t)$에서

$3t^2-4t+4=2t^2+2t-5$, $t^2-6t+9=0$

$(t-3)^2=0$ $\therefore t=3$

즉, 시각 $t=3$에서 두 점 P, Q의 속도는 같다.

따라서 시각 $t=3$에서 점 P의 위치는 $x_P(3)=20$, 점 Q의 위치는 $x_Q(3)=10$이므로 구하는 거리는

$|20-10|=10$

0718 답 -6

시각 t에서의 점 M의 위치를 $x_M(t)$라 하면

$$x_M(t)=\frac{(2t^3-15t^2+8t)+(t^2+12t)}{2}$$

$$=\frac{2t^3-14t^2+20t}{2}=t^3-7t^2+10t \quad \cdots\cdots \text{i}$$

점 M이 원점이 되는 순간의 위치는 0이므로

$t^3-7t^2+10t=0$, $t(t-2)(t-5)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=5$ ($\because t>0$)

즉, 시각 $t=2$에서 점 M은 처음으로 원점이 된다. $\cdots\cdots$ ii

시각 t에서의 점 M의 속도를 $v_M(t)$라 하면

$v_M(t)=3t^2-14t+10$

따라서 시각 $t=2$에서 점 M의 속도는 -6이다. $\cdots\cdots$ iii

채점 기준	
i 시각 t에서의 점 M의 위치 구하기	30 %
ii 점 M이 처음으로 원점이 되는 순간의 시각 구하기	40 %
iii 점 M이 처음으로 원점이 되는 순간의 속도 구하기	30 %

✓ 공통수학2 다시보기

수직선 위의 두 점 $A(x_1)$, $B(x_2)$에 대하여 선분 AB의 중점 M의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$이다.

0719 답 12

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$라 하면

$v_P(t)=3t^2-4t-32$, $v_Q(t)=2t-a$

시각 $t=k$에서 두 점 P, Q의 운동 방향이 동시에 바뀌므로

$v_P(k)=0$, $v_Q(k)=0$

이때 $v_P(k)=0$에서

$3k^2-4k-32=0$, $(3k+8)(k-4)=0$

$\therefore k=4$ ($\because k>0$)

또 $v_Q(k)=0$에서

$2k-a=0$ $\therefore k=\frac{a}{2}$

즉, $4=\frac{a}{2}$이므로 $a=8$

$\therefore a+k=8+4=12$

0720 답 ④

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$라 하면

$v_P(t)=3t^2-12t$, $v_Q(t)=6t^2-6t$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이므로 $v_P(t)v_Q(t)<0$에서

$(3t^2-12t)(6t^2-6t)<0$, $18t^2(t-1)(t-4)<0$

$\therefore 1<t<4$ ($\because t^2>0$)

0721 답 ④

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$f'(t)=3at^2+4t$, $g'(t)=2(a-1)t-8$

시각 $t=2$에서 두 점 P, Q가 서로 같은 방향으로 움직이므로

$f'(2)g'(2)>0$에서

$(12a+8)(4a-12)>0$, $16(3a+2)(a-3)>0$

$\therefore a>3$ ($\because a>0$)

따라서 구하는 자연수 a의 최솟값은 4이다.

0722 답 2

두 점 P, Q가 시각 $t=a$에서 만나므로 $x_P(a)=x_Q(a)$에서

$5a=a^3-7a^2+15a$

$a^3-7a^2+10a=0$, $a(a-2)(a-5)=0$

$\therefore a=2$ 또는 $a=5$ ($\because a>0$) $\cdots\cdots$ ㉠ $\cdots\cdots$ i

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$라 하면

$v_P(t)=5$, $v_Q(t)=3t^2-14t+15$

시각 $t=a$에서 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이므로

$v_P(a)v_Q(a)<0$에서

$5(3a^2-14a+15)<0$, $5(3a-5)(a-3)<0$

$\therefore \frac{5}{3}<a<3$ $\cdots\cdots$ ㉡ $\cdots\cdots$ ii

㉠, ㉡에서 $a=2$ $\cdots\cdots$ iii

채점 기준	
ⓘ 두 점 P, Q가 만나는 순간의 시각 구하기	40 %
ⓘⓘ 두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이는 시각 a의 값의 범위 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ a의 값 구하기	10 %

0723 답 20

시각 t에서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|x_1(t)-x_2(t)|=|t^3-5t^2+9t-(4t^2-6t-30)|$

$=|t^3-9t^2+15t+30|$

$f(t)=t^3-9t^2+15t+30$이라 하면

$f'(t)=3t^2-18t+15=3(t-1)(t-5)$

$t\geq 0$에서 $f'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 $t=1$ 또는 $t=5$

$t\geq 0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	⋯	1	⋯	5	⋯
$f'(t)$		+	0	−	0	+
$f(t)$	30	↗	37 극대	↘	5 극소	↗

함수 $f(t)$는 $t=5$에서 극소이면서 최소이므로 두 점 P, Q 사이의 거리는 $t=5$에서 최소이다.

시각 t에서의 점 P의 속도를 $v_1(t)$, 가속도를 $a_1(t)$라 하면

$v_1(t)=3t^2-10t+9$, $a_1(t)=6t-10$

따라서 $t=5$에서 점 P의 가속도는 20이다.

0724 답 $\frac{3}{2}$

시각 t에서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|x_P(t)-x_Q(t)|=|t^2(2t+3)-2t(t-1)|=|2t^3+t^2+2t|$

두 점 P, Q 사이의 거리가 12이면

$|2t^3+t^2+2t|=12$

(i) $2t^3+t^2+2t=12$일 때,

$2t^3+t^2+2t-12=0$, $(2t-3)(t^2+2t+4)=0$

$t^2+2t+4=(t+1)^2+3>0$

$\therefore t=\frac{3}{2}$ ($\because t$는 실수)

(ii) $2t^3+t^2+2t=-12$일 때,

$2t^3+t^2+2t+12=0$에서 $f(t)=2t^3+t^2+2t+12$라 하면

$f'(t)=6t^2+2t+2=6\left(t+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{11}{6}$

즉, $t\geq 0$에서 $f'(t)>0$이므로 함수 $f(t)$는 증가한다.

이때 $f(0)=12>0$이므로 $t\geq 0$에서 $f(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $t=\frac{3}{2}$

0725 답 ②

두 점 P, Q가 만나는 시각은 $x_P(t)=x_Q(t)$에서

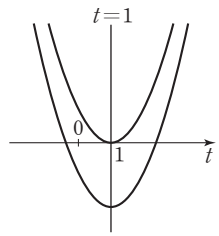
$t^2+t+5=3t+a$ $\therefore t^2-2t+5-a=0$ ⋯⋯ ㉠

두 점 P, Q가 출발한 후 적어도 한 번 이상 만나려면 $t>0$에서 이차방정식 ㉠이 적어도 하나의 양의 실근을 가져야 한다.

$f(t)=t^2-2t+5-a=(t-1)^2+4-a$라 하면 이차함수 $y=f(t)$의 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ 4-a)$이므로 이차방정식 ㉠이 적어도 하나의 양의 실근을 가지려면

$4-a\leq 0$ $\therefore a\geq 4$

따라서 구하는 정수 a의 최솟값은 4이다.



0726 답 ⑤

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$라 하면

$v_P(t)=3t^2-18t$, $v_Q(t)=-3t^2+12t$

두 점 P, Q의 운동 방향이 같으므로 $v_P(t)v_Q(t)>0$에서

$v_P(t)>0$, $v_Q(t)>0$ 또는 $v_P(t)<0$, $v_Q(t)<0$

(i) $v_P(t)>0$, $v_Q(t)>0$일 때,

$v_P(t)>0$에서

$3t^2-18t>0$, $3t(t-6)>0$

$\therefore t>6$ ($\because t>0$) ⋯⋯ ㉡

$v_Q(t)>0$에서

$-3t^2+12t>0$, $3t(t-4)<0$

$\therefore 0<t<4$ ⋯⋯ ㉢

㉡, ㉢의 공통 부분은 없으므로 조건을 만족시키는 t의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $v_P(t)<0$, $v_Q(t)<0$일 때,

$v_P(t)<0$에서

$3t^2-18t<0$, $3t(t-6)<0$

$\therefore 0<t<6$ ⋯⋯ ㉣

$v_Q(t)<0$에서

$-3t^2+12t<0$, $3t(t-4)>0$

$\therefore t>4$ ($\because t>0$) ⋯⋯ ㉤

㉣, ㉤에서 $4<t<6$

(i), (ii)에서 $4<t<6$

시각 t에서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|x_P(t)-x_Q(t)|=|(t^3-9t^2)-(-t^3+6t^2)|=|2t^3-15t^2|$

$f(t)=2t^3-15t^2$이라 하면

$f'(t)=6t^2-30t=6t(t-5)$

$4<t<6$에서 $f'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 $t=5$

$4<t<6$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	4	⋯	5	⋯	6
$f'(t)$		−	0	+	
$f(t)$	(-112)	↘	-125 극소	↗	(-108)

$4<t<6$에서 $f(t)<0$이므로

$|x_P(t)-x_Q(t)|=|f(t)|=-f(t)$

따라서 두 점 P, Q 사이의 최대 거리는 $-f(5)=125$이다.

0727 답 ②

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$라 하면

$v_P(t)=t^3-6t^2+10t+1$, $v_Q(t)=t+a$

두 점 P, Q의 속도가 같아질 때, $v_P(t)=v_Q(t)$에서

$t^3-6t^2+10t+1=t+a$

$\therefore\ t^3-6t^2+9t+1=a$ ····· ㉠

두 점 P, Q가 출발한 후 속도가 같아지는 순간이 세 번이려면 삼차방정식 ㉠은 서로 다른 세 개의 양의 실근을 가져야 한다.

$f(t)=t^3-6t^2+9t+1$이라 하면

$f'(t)=3t^2-12t+9=3(t-1)(t-3)$

$t>0$에서 $f'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 $t=1$ 또는 $t=3$

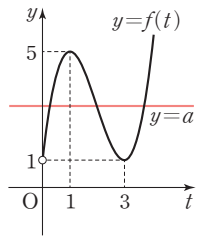
$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	···	1	···	3	···
$f'(t)$		+	0	−	0	+
$f(t)$	(1)	↗	5 극대	↘	1 극소	↗

방정식 $f(t)=a$가 서로 다른 세 개의 양의 실근을 가지려면 $t>0$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 3개이어야 하므로

$1<a<5$

따라서 정수 a는 2, 3, 4의 3개이다.



0728 답 ③

제동을 건 지 t초 후의 기차의 속도를 $v(t)$ m/s라 하면

$v(t)=36-6t$

기차가 정지하는 순간의 속도는 0 m/s이므로 $v(t)=0$에서

$36-6t=0$ $\therefore\ t=6$

따라서 기차가 제동을 건 후 정지할 때까지 걸린 시간은 6초이다.

0729 답 ①

브레이크를 밟은 지 t초 후의 차의 속도를 $v(t)$ m/s라 하면

$v(t)=6-3t$

차가 정지하는 순간의 속도는 0 m/s이므로 $v(t)=0$에서

$6-3t=0$ $\therefore\ t=2$

즉, 차가 브레이크를 밟은 후 정지할 때까지 걸린 시간은 2초이다.

따라서 $x(2)=6$이므로 2초 동안 차가 움직인 거리는 6 m이다.

0730 답 ②

t초 후의 물체의 속도를 $v(t)$ m/s라 하면

$v(t)=15-10t$

물체가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0 m/s이므로 $v(t)=0$에서

$15-10t=0$ $\therefore\ t=\frac{3}{2}$

즉, 물체는 $\frac{3}{2}$초 후에 최고 높이에 도달하므로 $a=\frac{3}{2}$

물체가 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0 m이므로 $x(t)=0$에서

$15t-5t^2=0$, $5t(3-t)=0$ $\therefore\ t=3\ (\because\ t>0)$

즉, 물체는 3초 후에 지면에 떨어지므로 $b=3$

$\therefore\ 4a+b=4\times\frac{3}{2}+3=9$

0731 답 ⑤

t초 후의 물체의 속도를 $v(t)$ m/s라 하면

$v(t)=10-10t$

물체가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0 m/s이므로 $v(t)=0$에서

$10-10t=0$ $\therefore\ t=1$

즉, 물체는 1초 후에 최고 높이에 도달한다.

따라서 $x(1)=20$이므로 구하는 물체의 최고 높이는 20 m이다.

0732 답 ④

물체가 지면으로부터 높이가 15 m인 지점을 지나는 순간은

$x(t)=15$에서

$45+25t-5t^2=15$, $5t^2-25t-30=0$

$5(t+1)(t-6)=0$ $\therefore\ t=6\ (\because\ t>0)$

즉, 물체는 6초 후에 높이가 15 m인 지점을 지난다.

t초 후의 물체의 속도를 $v(t)$ m/s라 하면

$v(t)=25-10t$

따라서 $v(6)=-35$이므로 구하는 물체의 속도는 −35 m/s이다.

0733 답 −50 m/s

물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 3초이고, 그때의 높이가 125 m이므로 $x(3)=125$에서

$a+3b-45=125$ $\therefore\ a+3b=170$ ····· ㉠

t초 후의 물체의 속도를 $v(t)$ m/s라 하면

$v(t)=b-10t$

물체가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0 m/s이므로 $v(3)=0$에서

$b-30=0$ $\therefore\ b=30$

$b=30$을 ㉠에 대입하면

$a+90=170$ $\therefore\ a=80$ ····· ⓘ

$\therefore\ x(t)=80+30t-5t^2$, $v(t)=30-10t$

물체가 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0 m이므로 $x(t)=0$에서

$80+30t-5t^2=0$, $5(t+2)(t-8)=0$

$\therefore\ t=8\ (\because\ t>0)$

즉, 물체는 8초 후에 지면에 떨어진다. ····· ⓘⓘ

따라서 $v(8)=-50$이므로 구하는 물체의 속도는 −50 m/s이다. ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ a, b의 값 구하기	50 %
ⓘⓘ 물체가 지면에 떨어지는 순간의 시각 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 물체가 지면에 떨어지는 순간의 속도 구하기	20 %

0734 답 ②

브레이크를 밟은 지 t초 후의 자동차의 속도를 $v(t)$ m/s라 하면

$v(t)=40-2at$

자동차가 정지하는 순간의 속도는 0 m/s이므로 $v(t)=0$에서

$40-2at=0 \qquad \therefore t=\frac{20}{a}$

즉, $\frac{20}{a}$초 동안 차가 움직인 거리가 25 m를 넘지 않아야 하므로

$x\left(\frac{20}{a}\right)\le 25$에서 $\frac{400}{a}\le 25 \qquad \therefore a\ge 16$

따라서 양수 a의 최솟값은 16이다.

0735 답 ③

t초 후의 물체의 속도를 $v(t)$ m/s라 하면

$v(t)=a-10t$

물체가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0 m/s이므로

$v(t)=0$에서

$a-10t=0 \qquad \therefore t=\frac{a}{10}$

즉, $t=\frac{a}{10}$에서 물체의 지면으로부터의 높이가 45 m 이상이어야 하므로

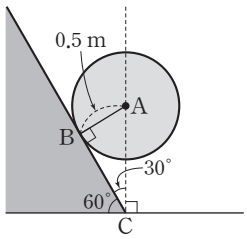
$x\left(\frac{a}{10}\right)\ge 45$에서

$\frac{a^2}{20}\ge 45$, $a^2\ge 900 \qquad \therefore a\ge 30\ (\because a>0)$

따라서 양수 a의 최솟값은 30이다.

0736 답 ④

그림과 같이 공의 중심을 A라 하고, 공이 경사면과 만날 때 공과 경사면의 접점을 B, 경사면이 바닥과 만나는 지점을 C라 하면



$\angle ACB=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\frac{\overline{AB}}{\sin 30^\circ}=0.5\times 2=1(\text{m})$

즉, 공이 경사면과 충돌하는 순간의 공의 중심의 높이는 1 m이므로

$h(a)=1$에서

$21-5a^2=1$, $a^2=4 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$

0737 답 ②

점 P의 위치가 원점이면 $x(t)=0$에서

$t=b$ 또는 $t=d$

따라서 시각 $t=b$에서 점 P는 처음으로 원점을 지난다.

0738 답 ②

ㄱ. $a<t<b$에서 $v(t)>0$이므로 점 P는 움직인다.

ㄴ. $v(b)>0$, $v(d)<0$이므로 $t=b$일 때와 $t=d$일 때 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.

ㄷ. $v(t)=0$이고 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 $0<t<e$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=c$이다.

즉, $0<t<e$에서 점 P는 운동 방향을 한 번 바꾼다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

0739 답 ⑤

ㄱ. $v(b)=0$이고 $t=b$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=b$에서 점 P의 운동 방향이 바뀐다.

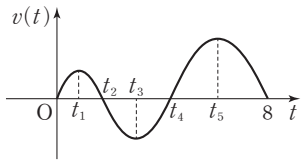
ㄴ. $a<t<c$에서 $v'(t)<0$이므로 점 P의 가속도는 음의 값이다.

ㄷ. $v'(c)=0$이므로 $t=c$에서 점 P의 가속도는 0이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0740 답 ③

그림과 같이 함수 $v(t)$의 극값의 t좌표를 t_1, t_3, t_5라 하고, t축과 만나는 t좌표를 t_2, t_4라 하자.



ㄱ. 점 P의 가속도가 0이면 $v'(t)=0$에서

$t=t_1$ 또는 $t=t_3$ 또는 $t=t_5$

즉, 점 P의 가속도가 0이 되는 순간은 3번이다.

ㄴ. $v(t)=0$이고 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 $0<t\le 8$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=t_2$, $t=t_4$이다.

즉, 점 P는 출발한 후 운동 방향을 2번 바꾼다.

ㄷ. 점 P가 출발한 후 운동 방향을 처음으로 바꾸는 순간은 $t=t_2$이고, $v'(t_2)<0$이므로 이때의 가속도는 음의 값이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0741 답 ②

ㄱ. $a<t<b$에서 t의 값이 커질 때 $x'(t)$의 값도 커지므로 점 P의 속도는 증가하고, $b<t<c$에서 t의 값이 커질 때 $x'(t)$의 값은 작아지므로 점 P의 속도는 감소한다.

ㄴ. $x'(c)=0$이므로 $t=c$에서 점 P의 속도는 0이다.

ㄷ. $x'(t)=0$이고 그 좌우에서 $x'(t)$의 부호가 바뀔 때 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 $0<t<e$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=a$, $t=c$이다.

즉, $0<t<e$에서 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

0742 답 ⑤

ㄱ. $x'(a)>0$이므로 $t=a$에서 점 P는 양의 방향으로 움직인다.

ㄴ. $x'(b)=0$이고 $x=b$의 좌우에서 $x'(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=b$에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

ㄷ. $|x(t)|$의 값이 $t=b$에서 가장 크므로 $t=b$에서 점 P는 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0743 답 ④

ㄱ. 점 P의 위치가 원점이면 $x(t)=0$에서

$t=2$, $t=4$, $t=7$, $t=9$

즉, 점 P는 출발한 후 원점을 4번 지났다.

ㄴ. $0<t<1$에서 $x'(t)>0$이고 $x'(1)=0$이므로 $x'(t)>x'(1)$
즉, $0<t<2$에서 점 P의 속도는 $t=1$일 때 최대가 아니다.
ㄷ. $x'(7)=0$이고 $t=7$의 좌우에서 $x'(t)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $t=7$에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0744 답 ④

ㄱ. $f'(t)=g'(t)$, 즉 두 함수 $y=f'(t)$, $y=g'(t)$의 그래프가 만날 때 두 점 P, Q의 속도가 같으므로 $0<t<e$에서 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각은 $t=c$, $t=d$
즉, $0<t<e$에서 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은 2번 있었다.
ㄴ. $a<t<b$에서 $f'(t)>0$, $g'(t)<0$이므로 두 점 P, Q는 반대 방향으로 움직이고, $b<t<c$에서 $f'(t)>0$, $g'(t)>0$이므로 두 점 P, Q는 같은 방향으로 움직인다.
ㄷ. $t=d$에서 곡선 $y=f'(t)$의 접선의 기울기는 양수이므로 점 P의 가속도는 양의 값이고, 곡선 $y=g'(t)$의 접선의 기울기는 음수이므로 점 Q의 가속도는 음의 값이다.
즉, $t=d$에서 두 점 P, Q의 가속도의 곱은 음수이다.
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0745 답 ③

$x(t)=kt(t-1)(t-3)=kt^3-4kt^2+3kt\ (k>0)$라 하고
시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$, 가속도를 $a(t)$라 하면
$v(t)=3kt^2-8kt+3k$, $a(t)=6kt-8k$
따라서 점 P의 가속도가 0이면 $a(t)=0$에서
$6kt-8k=0 \qquad \therefore t=\frac{4}{3}\ (\because k>0)$

0746 답 ①

ㄱ. $f(t)=g(t)$, 즉 두 함수 $y=f(t)$, $y=g(t)$의 그래프가 만날 때 두 점 P, Q가 만나므로 $0\le t\le 10$에서 두 점 P, Q가 만나는 시각은 $t=1$, $t=8$
즉, 두 점 P, Q는 2번 만난다.
ㄴ. $0<g'(8)<f'(8)$이므로 $t=8$에서 점 P의 속도는 점 Q의 속도보다 빠르다.
ㄷ. $1\le t\le 6$에서 점 P가 움직인 거리는 $f(6)-f(1)$이고 점 Q가 움직인 거리는 $g(6)-g(1)$이다.
이때 $f(1)=g(1)$이고 $f(6)<g(6)$이므로
$f(6)-f(1)<g(6)-g(1)$
즉, $1\le t\le 6$에서 점 Q가 움직인 거리가 점 P가 움직인 거리보다 길다.
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

0747 답 ③

t초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(1+3t)$ cm이므로 정사각형의 넓이를 $S(t)$ cm^{2}라 하면
$S(t)=(1+3t)^2$
$S'(t)=6(1+3t)$
따라서 $t=4$에서 정사각형의 넓이의 변화율은
$S'(4)=78$ (cm^2/s)

0748 답 ②

t초 후 밑면의 반지름의 길이는 $(5+2t)$ cm, 높이는 $(10-t)$ cm이므로
원기둥의 부피를 $V(t)$ cm^{3}라 하면
$V(t)=\pi(5+2t)^2(10-t)$ (단, $0<t<10$)
$V'(t)=\pi(5+2t)(35-6t)$
따라서 $t=2$에서 원기둥의 부피의 변화율은
$V'(2)=207\pi$ (cm^3/s)

0749 답 ④

t초 후 정삼각형의 한 변의 길이는 $(9+t)$ cm이므로 정삼각형의 넓이를 $S(t)$ cm^{2}라 하면
$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(9+t)^2$
$S'(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}(9+t)$
시각 $t=a$에서 정삼각형의 넓이가 $36\sqrt{3}$ cm^{2}이면
$\frac{\sqrt{3}}{4}(9+a)^2=36\sqrt{3}$, $(9+a)^2=144 \qquad \therefore a=3\ (\because a>0)$
따라서 $t=3$에서 정삼각형의 넓이가 $36\sqrt{3}$ cm^{2}가 되고, 이때의 넓이의 변화율은 $S'(3)=6\sqrt{3}$ (cm^2/s)

0750 답 ⑤

t초 후 직사각형의 가로의 길이는 $(3+0.5t)$ cm, 세로의 길이는 $(6+0.2t)$ cm이므로 직사각형의 넓이를 $S(t)$ cm^{2}라 하면
$S(t)=(3+0.5t)(6+0.2t)=18+3.6t+0.1t^2$
$S'(t)=3.6+0.2t$
시각 $t=a$에서 직사각형이 정사각형이 되면
$3+0.5a=6+0.2a$, $0.3a=3 \qquad \therefore a=10$
따라서 $t=10$에서 직사각형이 정사각형이 되고, 이때의 넓이의 변화율은 $S'(10)=5.6$ (cm^2/s)

0751 답 1

t초 후 직육면체의 밑면의 한 변의 길이는 $8-t$, 높이는 $2+2t$이므로 직육면체의 부피를 $V(t)$라 하면
$V(t)=(8-t)^2(2+2t)$ (단, $0<t<8$) …… ⓘ
$V'(t)=6t^2-60t+96$
시각 $t=a$에서 직육면체의 부피의 변화율이 42이므로
$6a^2-60a+96=42$, $6(a^2-10a+9)=0$
$6(a-1)(a-9)=0 \qquad \therefore a=1\ (\because 0<a<8)$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 직육면체의 부피를 t에 대한 식으로 세우기	50 %
ⓘⓘ a의 값 구하기	50 %

0752 답 ①

점 P가 출발한 지 t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는

$P(3t, 0)$, $Q(0, 4(t-2))$

t초 후의 선분 PQ를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\overline{PQ}^2=(-3t)^2+16(t-2)^2$

$=25t^2-64t+64$ (단, $t\geq 2$)

$S'(t)=50t-64$

따라서 $t=3$에서 정사각형의 넓이의 변화율은

$S'(3)=86$

0753 답 ①

t초 후 $\overline{AP}=2t$, $\overline{BP}=12-2t$이므로

두 원의 넓이의 합을 $S(t)$라 하면

$S(t)=\pi t^2+\pi(6-t)^2$

$=\pi(2t^2-12t+36)$ (단, $0<t<6$)

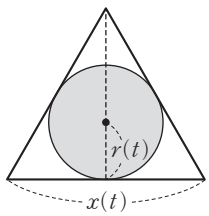
$S'(t)=\pi(4t-12)$

따라서 $t=5$에서 두 원의 넓이의 합의 변화율은

$S'(5)=8\pi$

0754 답 36

t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이를 $x(t)$라 하고, 정삼각형에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(t)$라 하면



$x(t)=12\sqrt{3}+3\sqrt{3}t=3\sqrt{3}(4+t)$

이때 정삼각형에 내접하는 원의 중심은 정삼각형의 무게중심과 일치하므로

$r(t)=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}x(t)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 3\sqrt{3}(4+t)=6+\frac{3}{2}t$

t초 후 정삼각형에 내접하는 원의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\pi\left(6+\frac{3}{2}t\right)^2$

$S'(t)=3\pi\left(6+\frac{3}{2}t\right)$

시각 $t=b$에서 정삼각형의 한 변의 길이가 $24\sqrt{3}$이면

$3\sqrt{3}(4+b)=24\sqrt{3}$ $\therefore b=4$

즉, $t=4$에서 정삼각형의 한 변의 길이가 $24\sqrt{3}$이 되고, 이때의 원의 넓이의 시간(초)에 대한 변화율은

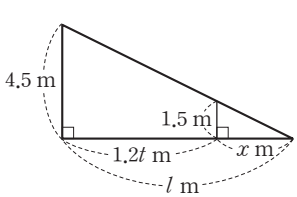
$S'(4)=36\pi$ $\therefore a=36$

0755 답 ④

학생이 t초 동안 걸어간 거리는

$1.2t$ m

가로등의 바로 밑에서부터 그림자의 끝까지의 거리를 l m라 하면



$4.5 : 1.5 = l : (l-1.2t)$

$1.5l=4.5(l-1.2t)$, $3l=5.4t$ $\therefore l=1.8t$

즉, $\frac{dl}{dt}=1.8$이므로 그림자의 끝이 움직이는 속도는 1.8 m/s이다.

이때 그림자의 길이를 x m라 하면

$x=l-1.2t=1.8t-1.2t=0.6t$

즉, $\frac{dx}{dt}=0.6$이므로 그림자의 길이의 변화율은 0.6 m/s이다.

따라서 $a=1.8$, $b=0.6$이므로

$a+b=1.8+0.6=2.4$

0756 답 114

t초 후의 두 점 P, Q의 좌표는

$P(3t, 0)$, $Q(3t, 18t^3-27t^2+6t+4)$

선분 PQ의 길이를 $l(t)$라 하면

$l(t)=18t^3-27t^2+6t+4$

$l'(t)=54t^2-54t+6$

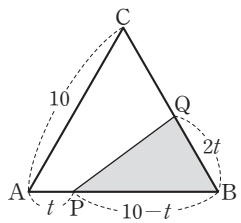
따라서 $t=2$에서 선분 PQ의 길이의 변화율은

$l'(2)=114$

0757 답 ②

t초 후 $\overline{BP}=10-t$, $\overline{BQ}=2t$이므로

삼각형 PBQ의 넓이를 $S(t)$라 하면



$S(t)=\frac{1}{2}\times(10-t)\times 2t\times\sin 60°$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}t(10-t)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}(10t-t^2)$ (단, $0<t\leq 5$)

$S'(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}(10-2t)=\sqrt{3}(5-t)$

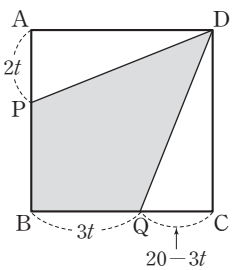
따라서 $t=3$에서 삼각형 PBQ의 넓이의 변화율은

$S'(3)=2\sqrt{3}$

0758 답 18

t초 후 $\overline{PA}=2t$, $\overline{QC}=20-3t$이므로

삼각형 PBQ의 넓이를 $S(t)$라 하면



$S(t)=\frac{1}{2}\times 3t\times(20-2t)$

$=-3t^2+30t$ $\left(\text{단, } 0<t<\frac{20}{3}\right)$

$S'(t)=-6t+30$

t초 후 사각형 DPBQ의 넓이는

$\square DPBQ=\square ABCD-\triangle DPA-\triangle DQC$

$=400-20t-10(20-3t)$

$=10t+200$

$t=a$에서 사각형 DPBQ의 넓이가 정사각형 ABCD의 넓이의 $\frac{11}{20}$이면

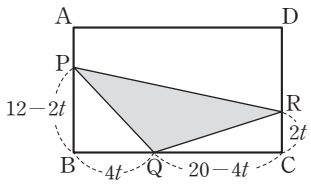
$10a+200=400\times\frac{11}{20}$, $10a=20$ $\therefore a=2$

따라서 $t=2$에서 삼각형 PBQ의 넓이의 변화율은

$S'(2)=18$

0759 답 ③

t초 후 $\overline{BP}=12-2t$, $\overline{BQ}=4t$,
$\overline{CQ}=20-4t$, $\overline{CR}=2t$이다.
삼각형 PQR의 넓이를 $S(t)$라 하면



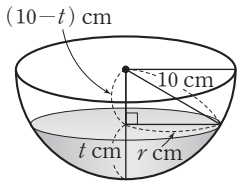
$S(t)$
$=\square ABCD-\square APRD-\triangle PBQ-\triangle QCR$
$=240-\underline{120}-2t(12-2t)-t(20-4t)$ ($\underline{120}=\frac{20\{2t+(12-2t)\}}{2}$)
$=8t^2-44t+120$ (단, $0<t<5$)
$S'(t)=16t-44$
이때 $\angle PQR=90°$이면 삼각형 PBQ와 삼각형 QCR는 서로 닮음이므로
$4t:2t=(12-2t):(20-4t)$
$2t(12-2t)=4t(20-4t)$, $12t^2-56t=0$
$4t(3t-14)=0$ $\therefore t=\frac{14}{3}$ ($\because 0<t<5$)

따라서 $t=\frac{14}{3}$에서 삼각형 PQR의 넓이의 변화율은
$S'\left(\frac{14}{3}\right)=\frac{92}{3}$

참고 $\angle PQR=90°$일 때, 삼각형 PBQ와 삼각형 QCR에서
$\angle PBQ=\angle QCR=90°$
$\angle BPQ=90°-\angle BQP=\angle CQR$ ($\because \angle PQR=90°$)
즉, 삼각형 PBQ와 삼각형 QCR는 AA 닮음이다.

0760 답 ②

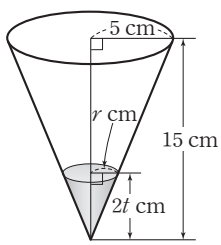
t초 후 수면의 높이는 t cm이므로
수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$r^2+(10-t)^2=10^2$
$\therefore r^2=20t-t^2$
수면의 넓이를 $S(t)$ cm^{2}라 하면
$S(t)=\pi r^2=\pi(20t-t^2)$ (단, $0<t<10$)
$S'(t)=\pi(20-2t)$
따라서 $t=5$에서 수면의 넓이의 변화율은
$S'(5)=10\pi$(cm^2/s)

0761 답 8π cm^3/s

t초 후 수면의 높이는 $2t$ cm이므로
수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면

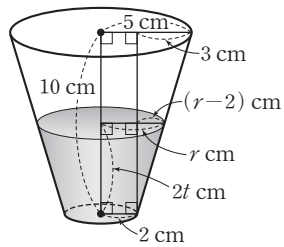


$15:2t=5:r$
$15r=10t$ $\therefore r=\frac{2}{3}t$ ····· i
물의 부피를 $V(t)$ cm^{3}라 하면
$V(t)=\frac{1}{3}\pi r^2\times 2t$
$=\frac{8}{27}\pi t^3$ $\left(\text{단, } 0<t<\frac{15}{2}\right)$
$V'(t)=\frac{8}{9}\pi t^2$ ····· ii
이때 $t=a$에서 물의 깊이가 6 cm이면
$2a=6$ $\therefore a=3$ ····· iii
따라서 $t=3$에서 물의 부피의 변화율은
$V'(3)=8\pi$ (cm^3/s) ····· iv

채점 기준	
i 수면의 반지름의 길이를 t에 대한 식으로 나타내기	20%
ii 물의 부피의 변화율 구하기	30%
iii 물의 깊이가 6 cm인 순간의 시각 구하기	30%
iv 물의 깊이가 6 cm인 순간의 물의 부피의 변화율 구하기	20%

0762 답 21π

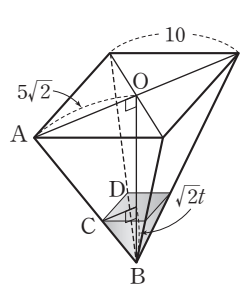
t초 후 수면의 높이는 $2t$ cm이므로
수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면



$10:2t=3:(r-2)$
$6t=10(r-2)$ $\therefore r=\frac{3}{5}t+2$
수면의 넓이를 $S(t)$ cm^{2}라 하면
$S(t)=\pi r^2=\pi\left(\frac{3}{5}t+2\right)^2$ (단, $0<t<5$)
$S'(t)=\frac{6}{5}\pi\left(\frac{3}{5}t+2\right)$
이때 $t=a$에서 수면의 높이가 5 cm이면
$2a=5$ $\therefore a=\frac{5}{2}$
즉, $t=\frac{5}{2}$에서 수면의 넓이의 변화율은
$S'\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{21}{5}\pi$ (cm^2/s)
따라서 $p=\frac{21}{5}\pi$이므로
$5p=5\times\frac{21}{5}\pi=21\pi$

0763 답 ⑤

정사각뿔의 밑면의 대각선의 길이는
$10\sqrt{2}$이므로



$\overline{OA}=\frac{1}{2}\times 10\sqrt{2}=5\sqrt{2}$
직각삼각형 OAB에서
$\overline{OB}=\sqrt{10^2-(5\sqrt{2})^2}=5\sqrt{2}$
t초 후 수면의 높이는 $\sqrt{2}t$이고,
$\triangle OAB\sim\triangle DCB$이므로
$5\sqrt{2}:\sqrt{2}t=5\sqrt{2}:\overline{CD}$, $5\sqrt{2}\,\overline{CD}=10t$
$\therefore \overline{CD}=\sqrt{2}t$
즉, 수면의 한 변의 길이는 $\sqrt{2}t\times\sqrt{2}=2t$이므로 물의 부피를 $V(t)$라 하면
$V(t)=\frac{1}{3}\times(2t)^2\times\sqrt{2}t$
$=\frac{4\sqrt{2}}{3}t^3$ (단, $0<t<5$)
$V'(t)=4\sqrt{2}t^2$

이때 $t=a$에서 수면의 넓이가 16이면 한 변의 길이는 4이므로

$2a=4 \quad \therefore a=2$

따라서 $t=2$에서 물의 부피의 변화율은

$V'(2)=16\sqrt{2}$

최고수준 도전 기출 179쪽

0764 답 2

전략 점 Q에서의 접선의 방정식을 구하여 점 R의 x좌표를 t에 대한 식으로 나타낸 후 상수 k의 값을 구한다.

$f(x)=x^2$이라 하면

$f'(x)=2x$

접점 Q의 좌표를 $(a, a^2)\ (a\neq 0)$이라 하면 점 R의 좌표는 $(a, 0)$이고, $f'(a)=2a$이므로 점 Q에서의 접선의 방정식은

$y-a^2=2a(x-a) \quad \therefore y=2ax-a^2$

이 직선이 점 $P(2t^3+3kt^2, 0)$을 지나므로

$0=2a(2t^3+3kt^2)-a^2,\ a(a-4t^3-6kt^2)=0$

$\therefore a=4t^3+6kt^2\ (\because a\neq 0)$

즉, 점 R의 x좌표는 $4t^3+6kt^2$이다.

$g(t)=4t^3+6kt^2$이라 하고, 시각 t에서 점 R가 x축 위를 움직이는 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=g'(t)=12t^2+12kt$

이때 $g'(1)=36$에서

$12+12k=36,\ 12k=24$

$\therefore k=2$

참고 $a=0$이면 점 Q에서의 접선의 방정식은 $y=0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

0765 답 ①

전략 점 P가 움직이는 방향이 바뀌지 않으려면 $t\geq 0$인 모든 실수 t에 대하여 점 P의 속도 $v(t)$가 $v(t)\geq 0$ 또는 $v(t)\leq 0$이어야 한다.

시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=3t^2-10t+a$

$=3\left(t-\frac{5}{3}\right)^2+a-\frac{25}{3}$

점 P가 움직이는 방향이 바뀌지 않으려면 $t\geq 0$인 모든 실수 t에 대하여 $v(t)\geq 0$이어야 한다.

이때 $v(t)$는 최고차항의 계수가 양수인 이차함수이고, $t\geq 0$에서 $v(t)$의 최솟값은 $a-\frac{25}{3}$이므로

$a-\frac{25}{3}\geq 0 \quad \therefore a\geq\frac{25}{3}$

따라서 구하는 자연수 a의 최솟값은 9이다.

0766 답 ②

전략 시각 $t=1$에서 두 점 P, Q가 만나고, 그때의 속도가 같으므로 $f(1)=g(1)$, $f'(1)=g'(1)$임을 이용하여 상수 a, b의 값을 구한다.

$f(t)-g(t)=t^4-\frac{8}{3}t^3-2t^2+at+b$에서

$f'(t)-g'(t)=4t^3-8t^2-4t+a$

시각 $t=1$에서 두 점 P, Q가 만나므로

$f(1)=g(1)$, 즉 $f(1)-g(1)=0$에서

$a+b-\frac{11}{3}=0 \quad \therefore a+b=\frac{11}{3} \quad \cdots\cdots$ ㉠

시각 $t=1$에서 두 점 P, Q의 속도가 같으므로

$f'(1)=g'(1)$, 즉 $f'(1)-g'(1)=0$에서

$a-8=0 \quad \therefore a=8$

$a=8$을 ㉠에 대입하여 풀면

$b=-\frac{13}{3}$

$\therefore f(t)-g(t)=t^4-\frac{8}{3}t^3-2t^2+8t-\frac{13}{3},$

$f'(t)-g'(t)=4t^3-8t^2-4t+8$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각은

$f'(t)=g'(t)$, 즉 $f'(t)-g'(t)=0$에서

$4t^3-8t^2-4t+8=0,\ 4(t+1)(t-1)(t-2)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2\ (\because t\geq 0)$

따라서 시각 $t=2$에서 두 점 P, Q의 속도가 다시 같아지고, 이때의 두 점 사이의 거리는

$|f(2)-g(2)|=\frac{5}{3}$

0767 답 ④

전략 두 자동차가 만나는 시각의 전후에서 두 자동차의 속도를 생각한다.

㈎에서 $f(10)=g(10)$이므로 두 자동차는 $t=10$에서 만난다.

㈏에 의하여 $5\leq t\leq 20$에서 자동차 B의 속도는 자동차 A의 속도보다 더 빠르다.

즉, B는 $5\leq t<10$에서 A의 뒤에 있고 $t=10$에서 A를 추월하여 $10<t\leq 20$에서 A의 앞에 있다.

따라서 $5\leq t\leq 20$에서 B는 A를 한 번 추월하므로 옳은 것은 ④이다.

다른 풀이

$h(t)=f(t)-g(t)$라 하자.

$5\leq t\leq 20$에서 $f'(t)<g'(t)$이므로

$h'(t)=f'(t)-g'(t)<0$

즉, $5\leq t\leq 20$에서 함수 $h(t)$는 감소한다.

이때 $h(10)=f(10)-g(10)=0$이므로

$5\leq t<10$에서 $h(t)>0$

$\therefore f(t)>g(t)$

$10<t\leq 20$에서 $h(t)<0$

$\therefore f(t)<g(t)$

따라서 $t=10$에서 B가 A를 한 번 추월한다.

10 부정적분

난이도별 필수 기출 181~192쪽

0768 답 ④

① $(x^4)'=4x^3$ ② $(x^4-3)'=4x^3$

③ $\left(x^4-\frac{1}{2}\right)'=4x^3$ ④ $(x^4+x)'=4x^3+1$

⑤ $(x^4+6)'=4x^3$

따라서 함수 $f(x)=4x^3$의 부정적분이 아닌 것은 ④이다.

0769 답 ⑤

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 x^3-3x^2+2x+1이므로

$f(x)=(x^3-3x^2+2x+1)'=3x^2-6x+2$

$\therefore f(-1)=11$

0770 답 ①

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)=x^2-x-2$

$\therefore F'(3)=4$

0771 답 ④

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $2x^3-x^2+x+C$이므로

$f(x)=(2x^3-x^2+x+C)'=6x^2-2x+1$

$\therefore f(4)=89$

0772 답 ⑤

$F(x)$, $G(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$F(x)=G(x)+C$ $\therefore F(x)-G(x)=C$

이때 $F(2)=5$, $G(2)=-1$이므로

$C=F(2)-G(2)=5-(-1)=6$

따라서 $F(x)-G(x)=6$이므로

$F(7)-G(7)=6$

0773 답 ①

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)=4x^3-6x^2+x-1$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)$$

$$=\frac{1}{2}\times(-2)=-1$$

0774 답 ②

$F(x)$, $G(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$F(x)=G(x)+C$ $\therefore F(x)-G(x)=C$

이때 $F(0)=1$, $G(0)=4$이므로

$C=F(0)-G(0)=1-4=-3$

따라서 $F(2)-G(2)=-3$이고 $F(2)=13$이므로

$13-G(2)=-3$ $\therefore G(2)=16$

0775 답 102

함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$f(x)=F'(x)=3x^2+2ax+b$ …… ⓘ

$f'(x)=6x+2a$

이때 $f(1)=4$에서

$3+2a+b=4$ $\therefore 2a+b=1$ …… ㉠

또 $f'(1)=2$에서

$6+2a=2$ $\therefore a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=5$

따라서 $F(x)=x^3-2x^2+5x+2$이므로 …… ⓘⓘ

$F(5)=102$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $f(x)$를 a, b에 대한 식으로 나타내기	40%
ⓘⓘ $F(x)$ 구하기	50%
ⓘⓘⓘ $F(5)$의 값 구하기	10%

0776 답 ③

함수 $h(x)$의 한 부정적분이 $f(x)g(x)$이므로

$h(x)=\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$=2(x+2)(x^3-1)+(x+2)^2\times3x^2$

$\therefore h(-1)=2\times1\times(-2)+1\times3=-1$

0777 답 ②

주어진 등식에서

$x^2+ax-3=bx^2+4x+c$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

$b=1$, $a=4$, $c=-3$

$\therefore a+b+c=4+1+(-3)=2$

0778 답 ③

주어진 방정식에서

$(x^2+x+1)+(2x^2-5)=0$

$\therefore 3x^2+x-4=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 근의 합은 $-\frac{1}{3}$이다.

0779 답 ①

$$F(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(2x^3+x)\right\}dx=2x^3+x+C$$

이때 $F(1)=2$에서

$3+C=2$ $\therefore C=-1$

따라서 $F(x)=2x^3+x-1$이므로 $F(2)=17$

0780 답 ⑤

ㄱ. $\frac{d}{dx}\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=\frac{d}{dx}\{f(x)+C\}=f'(x)$

ㄴ. $\int f(x)\,dx=\int g(x)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=\frac{d}{dx}\int g(x)\,dx$ $\therefore f(x)=g(x)$

ㄷ. $\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x)$, $\int\left\{\frac{d}{dx}g(x)\right\}dx=g(x)+C$이므로

$f(x)=g(x)+C$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=g'(x)$

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0781 답 15

$F(x)=\frac{d}{dx}\int(x-4)f(x)\,dx$

$=(x-4)f(x)=3x(x-4)^2$

$\therefore F(5)=15$

0782 답 ②

$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(2x^2-1)(x+a)\right\}dx$

$=(2x^2-1)(x+a)+C$

$\therefore f'(x)=4x(x+a)+(2x^2-1)\times1$

$=6x^2+4ax-1$

이때 $f'(a)=4$에서

$6a^2+4a^2-1=4$, $a^2=\frac{1}{2}$ $\therefore a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because a>0$)

0783 답 ①

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$x^2-3x+f(x)=3x^2+2$

따라서 $f(x)=2x^2+3x+2$이므로 $f(-2)=4$

0784 답 ⑤

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$(2x+1)f(x)=4x^3+x+1$

$=(2x+1)(2x^2-x+1)$

따라서 $f(x)=2x^2-x+1$이므로 $f(3)=16$

0785 답 −7

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x-1)f(x)=4x^3-12x^2+2x$

$xf(x)=4x^3-12x^2+2x$

$\therefore f(x)=4x^2-12x+2$ ····· ⓘ

$=4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-7$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 -7이다. ····· ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(x)$ 구하기	50 %
ⓘⓘ $f(x)$의 최솟값 구하기	50 %

0786 답 ③

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=(2x-2)\int g(x)\,dx+(x^2-2x+5)g(x)$

양변에 $x=1$을 대입하면

$1=4g(1)$ $\therefore g(1)=\frac{1}{4}$

0787 답 ④

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g(x)=4(x-1)^3f(x)+(x-1)^4f'(x)$

양변에 $x=0$을 대입하면

$g(0)=-4f(0)+f'(0)$

$=(-4)\times(-3)+2=14$

0788 답 ①

$f(x)=\int\left[\frac{d}{dx}\{xf'(x)\}\right]dx=xf'(x)+C$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=2f'(2)+C$

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$f(-2)=-2f'(-2)+C$

$\therefore f(2)-f(-2)=\{2f'(2)+C\}-\{-2f'(-2)+C\}$

$=2\{f'(2)+f'(-2)\}$

$=2\times3=6$

0789 답 8

$\frac{d}{dx}\int\{2f(x)-x^2\}dx=2f(x)-x^2$

$\int\left[\frac{d}{dx}\{f(x)-3x\}\right]dx=f(x)-3x+C$

즉, $2f(x)-x^2=f(x)-3x+C$이므로

$f(x)=x^2-3x+C$ ····· ⓘ

이때 $f(1)=2$에서

$-2+C=2$ $\therefore C=4$

따라서 $f(x)=x^2-3x+4$이므로 ····· ⓘⓘ

$f(4)=8$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(x)$를 적분상수 C를 이용하여 나타내기	40 %
ⓘⓘ $f(x)$ 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ $f(4)$의 값 구하기	10 %

0790 답 ②

$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(-x^2+6x)\right\}dx$

$=-x^2+6x+C$

$=-(x-3)^2+9+C$

함수 $f(x)$의 최댓값이 $9+C$이므로

$9+C=8$ $\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=-(x-3)^2+8$이므로 $f(6)=-1$

0791 답 28

$g(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C$

$=x^3+x+4+C$

이때 $g(0)=3$에서

$4+C=3 \quad \therefore C=-1$

즉, $g(x)=x^3+x+3$이므로

$h(x)=\frac{d}{dx}\int\{f(x)-2g(x)\}dx=f(x)-2g(x)$

$=(x^3+x+4)-2(x^3+x+3)$

$=-x^3-x-2$

$\therefore h(-3)=28$

0792 답 6

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{4h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{4h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\frac{1}{4}-\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{4}f'(1)+\frac{1}{2}f'(1)=\frac{3}{4}f'(1)$ …… ⓘ

이때 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x^2+1)(x-3)^2$ …… ⓘⓘ

따라서 $f'(1)=8$이므로 구하는 값은

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{4h}=\frac{3}{4}f'(1)=\frac{3}{4}\times8=6$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{4h}$를 $f'(1)$을 사용하여 나타내기	40 %
ⓘⓘ $f'(x)$ 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-2h)}{4h}$의 값 구하기	20 %

0793 답 ⑤

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+g(x)=4x^3-9x^2+5$ …… ㉠

함수 $y=g(x)$의 그래프가 원점을 지나므로 $g(0)=0$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+g(0)=5 \quad \therefore f(0)=5$

0794 답 −4

$f(x)=\int\left[\frac{d}{dx}\{3x^2-x+7g(x)\}\right]dx$

$=3x^2-x+7g(x)+C$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=6x-1+7g'(x)$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(5,\ f(5))$에서의 접선의 기울기가 1이므로

$f'(5)=1$에서

$29+7g'(5)=1 \quad \therefore g'(5)=-4$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(5,\ g(5))$에서의 접선의 기울기는 -4이다.

0795 답 ②

$\frac{d}{dx}\int\{f(x)+x^3+1\}dx=f(x)+x^3+1$

$\int\left[\frac{d}{dx}\{2f(x)-3x^2\}\right]dx=2f(x)-3x^2+C$

즉, $f(x)+x^3+1=2f(x)-3x^2+C$이므로

$f(x)=x^3+3x^2+1-C$

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-2	…	0	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$5-C$	↘	$1-C$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고 극댓값은 $5-C$, $x=0$에서 극소이고 극솟값은 $1-C$이다.

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$|(5-C)-(1-C)|=4$

0796 답 ④

$g(x)=\int\left[\frac{d}{dx}\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx\right]dx$

$=f(x)+C=x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots+99x^{99}+100x^{100}+C$

$g(0)=2$에서 $C=2$이므로

$g(x)=x+2x^2+3x^3+4x^4+\cdots+99x^{99}+100x^{100}+2$

$\therefore g(-1)=(-1+2)+(-3+4)+\cdots+(-99+100)+2$

$=50+2=52$

0797 답 29

$f(x)=\int xg(x)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=xg(x)$ …… ㉠

$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=5x^3-x$에서

$f'(x)-g'(x)=5x^3-x$

이 식에 ㉠을 대입하면

$xg(x)-g'(x)=5x^3-x$ …… ㉡

이때 다항함수 $g(x)$의 차수를 n이라 하면 $xg(x)$의 차수는 $n+1$, $g'(x)$의 차수는 $n-1$이므로 ㉡의 좌변의 차수는 $n+1$, 우변의 차수는 3이다.

즉, $n+1=3$이므로 $n=2$

$g(x)=ax^2+bx+c$(a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면

$g'(x)=2ax+b$

이것을 ㉡에 대입하면

$x(ax^2+bx+c)-(2ax+b)=5x^3-x$

$ax^3+bx^2+(c-2a)x-b=5x^3-x$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

$a=5$, $b=0$, $c-2a=-1$

$\therefore a=5$, $b=0$, $c=9$

따라서 $g(x)=5x^2+9$이므로 $g(2)=29$

0798 답 ④

$f(x)=\int(4x+5)\,dx=2x^2+5x+C$

$f(0)=6$에서 $C=6$

따라서 $f(x)=2x^2+5x+6$이므로 $f(-3)=9$

0799 답 ⑤

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int(3x^2-x-1)\,dx$

$=x^3-\frac{1}{2}x^2-x+C$

$F(-1)=\frac{1}{2}$에서

$-\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}$ $\therefore C=1$

따라서 $F(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-x+1$이므로 $F(-2)=-7$

0800 답 ③

$\int(x+1)^2dx+\int(x-1)^2dx$

$=\int\{(x+1)^2+(x-1)^2\}dx$

$=\int\{(x^2+2x+1)+(x^2-2x+1)\}dx$

$=\int(2x^2+2)\,dx$

$=\frac{2}{3}x^3+2x+C$

0801 답 ②

$\int\{3f(x)-2g(x)\}dx=3\int f(x)\,dx-2\int g(x)\,dx$

$=3(x^2+x+C_1)-2(2x^2+C_2)$

$=-x^2+3x+C$

참고 적분상수가 여러 개일 때는 이들을 묶어서 하나의 적분상수 C로 나타낸다.

0802 답 ③

$f(x)=\int(2x+4)\,dx=x^2+4x+C$

이때 $f(-1)=C-3$, $f(1)=C+5$이므로

$f(-1)+f(1)=0$에서

$(C-3)+(C+5)=0$, $2C=-2$ $\therefore C=-1$

따라서 $f(x)=x^2+4x-1$이므로 $f(2)=11$

0803 답 45

$f(x)=\int\left\{(x^3+2x+1)-\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)\right\}dx$

$=\int\left(\frac{1}{2}x^3+x+1\right)dx$

$=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}x^2+x+C$ ····· ⓘ

$f(0)=1$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}x^2+x+1$이므로 ····· ⓘⓘ

$f(4)=45$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(x)$를 적분상수 C를 이용하여 나타내기	40 %
ⓘⓘ $f(x)$ 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ $f(4)$의 값 구하기	10 %

0804 답 ①

$f(x)=\int\left(\frac{x^3}{x+2}+\frac{8}{x+2}\right)dx$

$=\int\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x+2}\,dx$

$=\int(x^2-2x+4)\,dx=\frac{1}{3}x^3-x^2+4x+C$

$f(3)=5$에서

$12+C=5$ $\therefore C=-7$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+4x-7$이므로 $f(6)=53$

0805 답 ②

$f(x)=\int\{(x+2)^3-(x-2)^3\}dx$

$=\int\{(x^3+6x^2+12x+8)-(x^3-6x^2+12x-8)\}dx$

$=\int(12x^2+16)\,dx=4x^3+16x+C$

방정식 $f(x)=0$의 한 근이 1이므로 $f(1)=0$에서

$20+C=0$ $\therefore C=-20$

따라서 $f(x)=4x^3+16x-20$이므로 $f(3)=136$

0806 답 ④

$f(1)=k$라 하면 $f'(x)=6x^2-2kx$이므로

$f(x)=\int(6x^2-2kx)\,dx=2x^3-kx^2+C$

$f(0)=4$에서 $C=4$이므로

$f(x)=2x^3-kx^2+4$

양변에 $x=1$을 대입하면

$k=2-k+4$, $2k=6$ $\therefore k=3$

따라서 $f(x)=2x^3-3x^2+4$이므로 $f(2)=8$

0807 답 ④

$f(x)=\int(2x^3-x+a)\,dx=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+ax+C$

$f(1)=2$에서 $a+C=2$ ····· ㉠

$f(2)=3$에서

$6+2a+C=3$ $\therefore 2a+C=-3$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $C=7$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2-5x+7$이므로

$f(-3)=58$

0808 답 -4

$f(x)=\int\{(\sqrt{x}+a)^2+(\sqrt{x}-a)^2\}\,dx$

$=\int\{(x+2a\sqrt{x}+a^2)+(x-2a\sqrt{x}+a^2)\}\,dx$

$=\int(2x+2a^2)\,dx$

$=x^2+2a^2x+C$ …… ⓘ

$f(0)=-3$에서 $C=-3$이므로 …… ⓘⓘ

$f(x)=x^2+2a^2x-3$

$f(1)=6$에서

$2a^2-2=6$, $a^2=4$ $\therefore a=-2$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 곱은 -4이다. …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(x)$를 적분상수 C를 이용하여 나타내기	40 %
ⓘⓘ 적분상수 C 구하기	20 %
ⓘⓘⓘ 모든 상수 a의 값의 곱 구하기	40 %

0809 답 ⑤

$\int f'(x)g(x)\,dx=x^4+2x^3-x^2+4x+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)g(x)=4x^3+6x^2-2x+4$

$=2(x+2)(2x^2-x+1)$

이때 $f'(x)$는 일차함수, $g(x)$는 이차함수이고, $g(0)=1$이므로

$f'(x)=2(x+2)$, $g(x)=2x^2-x+1$

$\therefore f(x)=\int(2x+4)\,dx=x^2+4x+C$

$f(-1)=5$에서

$-3+C=5$ $\therefore C=8$

따라서 $f(x)=x^2+4x+8$이므로

$f(1)+g(1)=13+2=15$

0810 답 ①

$f(x)-g(x)=\int\{f'(x)-g'(x)\}\,dx$

$=\int(2x-5)\,dx$

$=x^2-5x+C_1$

양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)-g(0)=C_1$ $\therefore C_1=5-3=2$

$\therefore f(x)-g(x)=x^2-5x+2$ …… ㉠

$f(x)g(x)=\int\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}\,dx$

$=\int(6x^2-6x+1)\,dx$

$=2x^3-3x^2+x+C_2$

양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=C_2$ $\therefore C_2=5\times3=15$

$\therefore f(x)g(x)=2x^3-3x^2+x+15$

$=(2x+3)(x^2-3x+5)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $f(0)=5$, $g(0)=3$이므로

$f(x)=x^2-3x+5$, $g(x)=2x+3$

$\therefore f(-2)-g(2)=15-7=8$

0811 답 ②

$\lim_{x\to3}\frac{F(x)-F(3)}{x^2-9}=\lim_{x\to3}\frac{F(x)-F(3)}{(x+3)(x-3)}$

$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{F(x)-F(3)}{x-3}\times\frac{1}{x+3}\right\}$

$=\frac{1}{6}F'(3)$

$=\frac{1}{6}f(3)$

$=\frac{1}{6}\times30=5$

0812 답 ①

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가 t^2-6t+2이므로

$f'(x)=x^2-6x+2$

$\therefore f(x)=\int(x^2-6x+2)\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3-3x^2+2x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(3\ ,-2)$를 지나므로 $f(3)=-2$에서

$-12+C=-2$ $\therefore C=10$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+2x+10$이므로 $f(6)=-14$

0813 답 ③

$xf'(x)=3x^3-x+f(0)+1$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=f(0)+1$ $\therefore f(0)=-1$

즉, $xf'(x)=3x^3-x$이므로 $f'(x)=3x^2-1$

$\therefore f(x)=\int(3x^2-1)\,dx=x^3-x+C$

$f(0)=-1$에서 $C=-1$이므로

$f(x)=x^3-x-1$

$\therefore f(4)=59$

0814 답 ②

다항함수 $f(x)$의 한 부정적분이 $F(x)$이므로

$F'(x)=f(x)$

함수 $2f(x)+1$의 한 부정적분이 $G(x)$이므로

$G'(x)=2f(x)+1$

즉, $G'(x)=2F'(x)+1$이므로 양변을 x에 대하여 적분하면

$G(x)=2F(x)+x+C$

$\therefore G(x)-2F(x)=x+C$ …… ㉠

이때 $G(3)=2F(3)$에서 $G(3)-2F(3)=0$이므로

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$0=3+C$ $\therefore C=-3$

따라서 $G(x)-2F(x)=x-3$이므로

$G(5)-2F(5)=5-3=2$

0815 답 5

$\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+3h)-f(x+2h)}{4h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+3h)-f(x)+f(x)-f(x+2h)}{4h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\times\dfrac{3}{4}-\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{3}{4}f'(x)-\dfrac{1}{2}f'(x)=\dfrac{1}{4}f'(x)$

즉, $\dfrac{1}{4}f'(x)=2x^3-3x+1$이므로

$f'(x)=8x^3-12x+4$

$\therefore f(x)=\int(8x^3-12x+4)\,dx=2x^4-6x^2+4x+C$

이때 $f(1)=5$에서 $C=5$

따라서 $f(x)=2x^4-6x^2+4x+5$이므로 $f(-2)=5$

0816 답 14

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f(x)=f(x)+(x+1)f'(x)-1$

$\therefore f(x)=(x+1)f'(x)-1$ ····· ㉠

$f(x)=ax+b$(a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면 $f'(x)=a$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$ax+b=ax+a-1$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

$b=a-1$ ····· ㉡

이때 $f(1)=5$에서 $a+b=5$ ····· ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=2$

따라서 $f(x)=3x+2$이므로 $f(4)=14$

0817 답 2

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+3)f'(x)+3x^2+8x-3$

$(x+3)f'(x)=-3x^2-8x+3$

$=-(x+3)(3x-1)$

즉, $f'(x)=-3x+1$이므로

$f(x)=\int(-3x+1)\,dx=-\dfrac{3}{2}x^2+x+C$ ····· ⓘ

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$18=3f(0)$ $\therefore f(0)=6$ ····· ⓘⓘ

즉, $f(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+x+C$에서

$f(0)=6$이므로 $C=6$

따라서 $f(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+x+6$이므로 ····· ⓘⓘⓘ

$f(2)=2$ ····· ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ $f(x)$를 적분상수 C를 이용하여 나타내기	30%
ⓘⓘ $f(0)$의 값 구하기	30%
ⓘⓘⓘ $f(x)$ 구하기	30%
ⓘⓥ $f(2)$의 값 구하기	10%

0818 답 ⑤

$f'(x)=\begin{cases}2x+2 & (x\geq2)\\ 4x-2 & (x<2)\end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases}x^2+2x+C_1 & (x\geq2)\\ 2x^2-2x+C_2 & (x<2)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$에서

$8+C_1=4+C_2=3$

$\therefore C_1=-5$, $C_2=-1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-5 & (x\geq2)\\ 2x^2-2x-1 & (x<2)\end{cases}$이므로

$f(-1)f(3)=3\times10=30$

0819 답 ①

$F(x)=\begin{cases}k(x^2-2x^3)+C_1 & (x\geq0)\\ -2x^2+C_2 & (x<0)\end{cases}$

함수 $F(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$에서 미분가능하다. 즉, $F(x)$는 $x=0$에서 연속이고 $x=0$에서의 미분계수가 존재한다.

$F(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}F(x)=\lim_{x\to0-}F(x)=F(0)$에서

$C_1=C_2$

이때 $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=0$이므로 $x=0$에서의 미분계수는 존재한다.

즉, $F(2)=-12k+C_1$, $F(-3)=-18+C_2=-18+C_1$이므로

$F(2)-F(-3)=-6$에서

$(-12k+C_1)-(-18+C_1)=-6$

$-12k=-24$ $\therefore k=2$

0820 답 ②

다항함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq0$이다.

$f'(x)=\{3x-f(1)\}(x-1)$

$=3x^2-\{f(1)+3\}x+f(1)$

이차방정식 $3x^2-\{f(1)+3\}x+f(1)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{f(1)+3\}^2-12f(1)\leq0$

$\{f(1)-3\}^2\leq0$ $\therefore f(1)=3$

즉, $f'(x)=3x^2-6x+3$이므로

$f(x)=\int(3x^2-6x+3)\,dx$

$=x^3-3x^2+3x+C$

이때 $f(1)=3$에서

$1+C=3$ $\therefore C=2$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$이므로

$f(2)=4$

0821 답 -2

$f(x)=\int(x^3-3x^2-x+3)\,dx$

$=\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{1}{2}x^2+3x+C$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^3-3x^2-x+3=(x+1)(x-1)(x-3)$ …… ⓘ

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	1	…	3	…
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 극댓값이 2이므로 $f(1)=2$에서

$\frac{7}{4}+C=2$ $\therefore C=\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3-\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{1}{4}$ …… ⓘⓘ

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$과 $x=3$에서 극소이고

극솟값은 -2이다. …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f'(x)$ 구하기	30 %
ⓘⓘ $f(x)$ 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $f(x)$의 극솟값 구하기	30 %

0822 답 ④

$f'(x)=3x(x-2)=3x^2-6x$에서

$f(x)=\int(3x^2-6x)\,dx=x^3-3x^2+C$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	0	…	2	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	C	↘	$C-4$	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 C, $x=2$에서 극소이고 극솟값은 $C-4$이다.

이때 곡선 $y=f(x)$가 x축에 접하고 $f(x)$의 극댓값이 양수이므로 극솟값은 0이다.

즉, $C-4=0$이므로 $C=4$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+4$이므로 $f(-2)=-16$

0823 답 ②

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이고 $f'(-3)=f'(1)=0$이므로

$f'(x)=3(x+3)(x-1)=3x^2+6x-9$

$\therefore f(x)=\int(3x^2+6x-9)\,dx$

$=x^3+3x^2-9x+C$

$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-3	…	1	…
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$C+27$	↘	$C-5$	↗

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이고 극댓값은 $C+27$, $x=1$에서 극소이고 극솟값은 $C-5$이다.

이때 함수 $f(x)$의 극솟값이 2이므로

$C-5=2$ $\therefore C=7$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 34이다.

0824 답 ④

$f'(x)=a(x-1)^2-4(a>0)$라 하면 $f'(0)=-3$이므로

$a-4=-3$ $\therefore a=1$

$\therefore f'(x)=(x-1)^2-4=x^2-2x-3$

$=(x+1)(x-3)$

$f(x)=\int(x^2-2x-3)\,dx=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+C$

닫힌구간 $[0, 5]$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=3$

닫힌구간 $[0, 5]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	3	…	5
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	C	↘	$-9+C$	↗	$\frac{5}{3}+C$

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 -10이므로 $f(3)=-10$에서

$-9+C=-10$ $\therefore C=-1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 최대이므로 구하는 최댓값은

$f(5)=\frac{2}{3}$

0825 답 2

(나)의 $\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-2}{x^3+1}=-4$에서 $x\to-1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}\{f(x)-2\}=0$이므로

$f(-1)-2=0$ $\therefore f(-1)=2$

이때

$\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-2}{x^3+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$

$=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\times\frac{1}{x^2-x+1}\right\}$

$=\frac{1}{3}f'(-1)$

즉, $\frac{1}{3}f'(-1)=-4$이므로 $f'(-1)=-12$

(가)에서 $f'(x)=4x^3+ax$이므로

$-4-a=-12$ $\therefore a=8$

즉, $f'(x)=4x^3+8x$이므로

$f(x)=\int(4x^3+8x)\,dx=x^4+4x^2+C$

이때 $f(-1)=2$에서

$5+C=2 \quad \therefore C=-3$

따라서 $f(x)=x^4+4x^2-3$이므로

$f(1)=2$

0826 답 17

$f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{(k+1)xh+2h^2}{h}$

$=\lim_{h\to0}\{(k+1)x+2h\}$

$=(k+1)x$

$\therefore f(x)=\int(k+1)x\,dx=\dfrac{k+1}{2}x^2+C$

이때 $f(1)=1$에서

$\dfrac{k+1}{2}+C=1 \quad \therefore k+2C=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 $f(2)=7$에서

$2(k+1)+C=7 \quad \therefore 2k+C=5 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $k=3$, $C=-1$

따라서 $f(x)=2x^2-1$이므로

$f(3)=17$

0827 답 ③

$f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+xy^2+1$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+1 \quad \therefore f(0)=-1$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x)+f(h)+x^2h+xh^2+1-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{x^2+xh+\dfrac{f(h)+1}{h}\right\}$

$=x^2+\lim_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$

$=x^2+f'(0)$

$=x^2+2$

$\therefore f(x)=\int(x^2+2)\,dx=\dfrac{1}{3}x^3+2x+C$

이때 $f(0)=-1$에서 $C=-1$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3+2x-1$이므로

$f(3)=14$

0828 답 ⑤

곡선 $y=f(x)$의 접선 중 기울기가 가장 작을 때의 접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$\therefore y=f'(t)x+f(t)-tf'(t)$

이 직선이 직선 $y=-x+2$와 일치하므로

$f'(t)=-1$, $f(t)-tf'(t)=2$

즉, $f(t)+t=2$이므로

$f(t)=-t+2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

또 함수 $f'(x)$는 $x=t$에서 최소이고 최솟값이 -1이므로

$f'(x)=3(x-t)^2-1$

$\quad=3x^2-6tx+3t^2-1$

$\therefore f(x)=\int(3x^2-6tx+3t^2-1)\,dx$

$\quad=x^3-3tx^2+(3t^2-1)x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 1)$을 지나므로 $f(0)=1$에서

$C=1$

$\therefore f(x)=x^3-3tx^2+(3t^2-1)x+1$

이때 ㉠에서

$t^3-3t^3+t(3t^2-1)+1=-t+2$

$t^3=1 \quad \therefore t=1 (\because t$는 실수)

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$이므로

$f(4)=25$

0829 답 ③

$g(x)=\int\{x^2+f(x)\}\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=x^2+f(x)$

$\therefore f(x)=g'(x)-x^2$

이것을 $g(x)-f(x)=2x^2-6x+k$에 대입하면

$g(x)-\{g'(x)-x^2\}=2x^2-6x+k$

$\therefore g(x)-g'(x)=x^2-6x+k \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 다항함수 $g(x)$의 차수를 n이라 하면 $g'(x)$의 차수는 $n-1$이므로 ㉠의 좌변의 차수는 n, 우변의 차수는 2이다.

$\therefore n=2$

$g(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면

$g'(x)=2ax+b$

이것을 ㉠에 대입하면

$(ax^2+bx+c)-(2ax+b)=x^2-6x+k$

$\therefore ax^2+(b-2a)x+(c-b)=x^2-6x+k$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

$a=1$, $b-2a=-6$, $c-b=k$

$\therefore a=1$, $b=-4$, $c=k-4$

$\therefore g(x)=x^2-4x+k-4$

함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 두 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=k-4$

따라서 $|\alpha-\beta|=\sqrt{2}$이므로 $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$에서

$2=16-4(k-4)$, $4k=30 \quad \therefore k=\dfrac{15}{2}$

0830 답 ①

$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{2x+1}=3$에서 $f'(x)$는 일차항의 계수가 6인 일차함수이어야 하므로 $f'(x)=6x+a$(a는 상수)라 하자.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=1$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

이때

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)$$

즉, $\frac{1}{2}f'(1)=1$에서 $f'(1)=2$이므로

$6+a=2$ $\therefore a=-4$

즉, $f'(x)=6x-4$이므로

$$f(x)=\int(6x-4)\,dx=3x^2-4x+C$$

이때 $f(1)=0$에서

$-1+C=0$ $\therefore C=1$

$\therefore f(x)=3x^2-4x+1$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $3x^2-4x+1=0$의 모든 근의 곱은 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{1}{3}$이다.

0831 답 ⑤

$f'(x)=x^2-kx=x(x-k)$이므로

$$f(x)=\int(x^2-kx)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}kx^2+C$$

닫힌구간 $[0, 6]$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=0$ 또는 $x=k$ ($\because 0<k<4$)

닫힌구간 $[0, 6]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	k	$\cdots$	6
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	C	$\searrow$	$-\frac{1}{6}k^3+C$	$\nearrow$	$72-18k+C$

이때 $0<k<4$에서 $0<72-18k<72$이므로

$f(0)<f(6)$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=6$에서 최대이고 최댓값은 $72-18k+C$,

$x=k$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $-\frac{1}{6}k^3+C$이다.

닫힌구간 $[0, 6]$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차가 $\frac{45}{2}$이므로

$$72-18k+C-\left(-\frac{1}{6}k^3+C\right)=\frac{45}{2}$$

$\frac{1}{6}k^3-18k+\frac{99}{2}=0$, $k^3-108k+297=0$

$(k-3)(k^2+3k-99)=0$ $\therefore k=3$ ($\because 0<k<4$)

0832 답 ①

$f(x)$가 사차함수이므로 $f'(x)$는 삼차함수이고,

$f'(-\sqrt{2})=f'(0)=f'(\sqrt{2})=0$이므로

$f'(x)=ax(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=ax^3-2ax$ ($a>0$)라 하면

$$f(x)=\int(ax^3-2ax)\,dx$$
$$=\frac{a}{4}x^4-ax^2+C$$

이때 $f(0)=1$에서 $C=1$이므로

$$f(x)=\frac{a}{4}x^4-ax^2+1$$

또 $f(\sqrt{2})=-3$에서

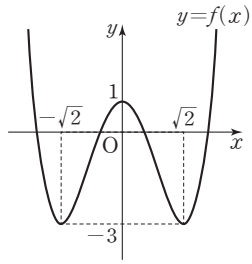
$-a+1=-3$ $\therefore a=4$

$\therefore f(x)=x^4-4x^2+1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 $f(-2)=1>0$, $f(-1)=-2<0$, $f(0)=1>0$,

$f(1)=-2<0$, $f(2)=1>0$이므로 $f(m)f(m+1)<0$을 만족시키는 정수 m의 값은 -2, -1, 0, 1이다.

따라서 구하는 모든 정수 m의 값의 합은

$-2+(-1)+0+1=-2$

0833 답 ③

$h(x)-\int\{f(x)+2g(x)\}\,dx=k$에서

$h(x)=\int\{f(x)+2g(x)\}\,dx+k$ ····· ㉠

$h(x)=f'(x)-g'(x)$이므로 ㉠에서

$f'(x)-g'(x)=\int\{f(x)+2g(x)\}\,dx+k$

이때 $f(x)$, $g(x)$가 모두 삼차함수이므로 $f'(x)-g'(x)$는 이차 이하의 함수이다.

즉, $f(x)+2g(x)$는 일차 이하의 함수이므로

$f(x)+2g(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$2g(x)=-f(x)+ax+b$

$=-(4x^3-6x^2+2x+1)+ax+b$

$=-4x^3+6x^2+(a-2)x+b-1$

즉, $g(x)=-2x^3+3x^2+\left(\frac{a}{2}-1\right)x+\frac{b-1}{2}$이므로

$g'(x)=-6x^2+6x+\frac{a}{2}-1$

이때 $f(x)=4x^3-6x^2+2x+1$에서

$f'(x)=12x^2-12x+2$이므로

$h(x)=f'(x)-g'(x)$

$=(12x^2-12x+2)-\left(-6x^2+6x+\frac{a}{2}-1\right)$

$=18x^2-18x+3-\frac{a}{2}$

$\therefore h'(x)=36x-18$ ····· ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$h'(x)=f(x)+2g(x)=ax+b$ ····· ㉢

㉡, ㉢에서 $a=36$, $b=-18$

따라서 $g(x)=-2x^3+3x^2+17x-\frac{19}{2}$이므로 $g\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$

최고수준 도전 기출 193쪽

0834 답 ④

전략 구간을 $x\le-2$, $-2<x<2$, $x\ge2$로 나누어 $f'(x)$의 부정적분을 구하고, $f(x)$가 $x=-2$, $x=2$에서 연속임을 이용하여 적분상수를 구한다.

$f'(x)=\begin{cases} x^2+x-4 & (x\le-2 \text{ 또는 } x\ge2) \\ -x^2+x+4 & (-2<x<2) \end{cases}$이므로

$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-4x+C_1 & (x\le-2) \\ -\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x+C_2 & (-2<x<2) \\ \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-4x+C_3 & (x\ge2) \end{cases}$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 원점을 지나므로 $f(0)=0$에서

$C_2=0$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-2$, $x=2$에서 연속이어야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2-}f(x)=f(-2)$에서

$-\frac{10}{3}=\frac{22}{3}+C_1\ (\because C_2=0)$

$\therefore C_1=-\frac{32}{3}$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$에서

$-\frac{10}{3}+C_3=\frac{22}{3}\ (\because C_2=0)$

$\therefore C_3=\frac{32}{3}$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-4x-\frac{32}{3} & (x\le-2) \\ -\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+4x & (-2<x<2) \\ \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-4x+\frac{32}{3} & (x\ge2) \end{cases}$이므로

$f(-4)+f(4)=-8+24=16$

0835 답 ②

전략 $g'(x)=f(x)$를 이용하여 $\lim_{x\to1+}\frac{|g'(x)|-g'(x)}{x-1}=2$에서 $f(1)$의 값을 구한 후, $f(x)$를 구한다.

$g(x)=\int f(x)\,dx$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$

$\lim_{x\to1+}\frac{|f(x)|-f(x)}{x-1}=2$에서 $x\to1+$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1+}\{|f(x)|-f(x)\}=0$이므로

$|f(1)|-f(1)=0$, $|f(1)|=f(1)$ $\therefore f(1)\ge0$

그런데 $f(1)>0$이면

$\lim_{x\to1+}\frac{|f(x)|-f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(x)}{x-1}=0\ne2$

이는 주어진 조건을 만족시키지 않으므로 $f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(x+k)$(k는 상수)라 하면

$\lim_{x\to1+}\frac{|f(x)|-f(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{|(x-1)(x+k)|-(x-1)(x+k)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\{|x+k|-(x+k)\}$

$=|1+k|-1-k$

즉, $|1+k|-1-k=2$이므로

$|1+k|=3+k$

(i) $1+k=3+k$일 때,

이를 만족시키는 k의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $1+k=-(3+k)$일 때,

$2k=-4$ $\therefore k=-2$

(i), (ii)에서 $f(x)=(x-1)(x-2)$이므로 $f(0)=2$

0836 답 ⑤

전략 다항함수 $f(x)$의 최고차항을 px^n(p는 상수, n은 자연수, $p\ne0$)이라 하고, 주어진 식의 좌변과 우변의 차수를 비교하여 p, n의 값을 구한다.

$F(x)=x^2f(x)-3x^4+kx+1$ ····· ㉠

다항함수 $f(x)$의 최고차항을 px^n(p는 상수, n은 자연수, $p\ne0$)이라 하면 $x^2f(x)$의 최고차항은 px^{n+2}이다.

이때 ㉠의 좌변의 차수는 $n+1$이므로 우변의 차수도 $n+1$이어야 한다.

즉, ㉠의 우변에서 $px^{n+2}-3x^4=0$이어야 한다.

$px^{n+2}=3x^4$ $\therefore p=3$, $n=2$

$f(x)=3x^2+ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$F(x)=\int(3x^2+ax+b)\,dx$

$=x^3+\frac{a}{2}x^2+bx+C$

이것을 ㉠에 대입하면

$x^3+\frac{a}{2}x^2+bx+C=x^2(3x^2+ax+b)-3x^4+kx+1$

$\therefore x^3+\frac{a}{2}x^2+bx+C=ax^3+bx^2+kx+1$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

$1=a,\ \frac{a}{2}=b,\ b=k,\ C=1$

$\therefore\ a=1,\ b=\frac{1}{2},\ k=\frac{1}{2},\ C=1$

따라서 $F(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$이므로 $F(1)=3$

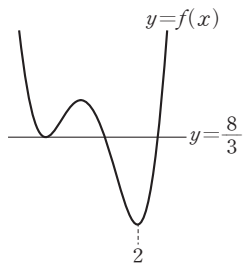
0837 답 15

전략 조건에서 함수 $f(x)$의 두 극솟값 중 큰 값이 $\frac{8}{3}$이고, $f(x)$가 극소가 되는 두 개의 x의 값 중 큰 값이 2임을 이용한다.

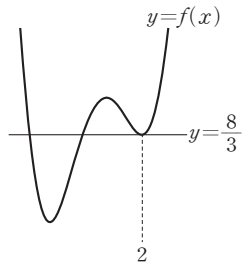
(나)에서 방정식 $f(x)=k$의 서로 다른 실근의 개수가 3 이상인 실수 k의 값이 존재하고 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$는 극솟값 2개와 극댓값 1개를 갖고, 두 극솟값 중 큰 값이 $\frac{8}{3}$이다.

(가)에서 $x=2$는 함수 $f(x)$가 감소하는 구간에 속하는 x의 값 중 가장 큰 값이므로 $f(x)$가 극소가 되는 두 개의 x의 값 중 큰 값이 2이다.

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같이 두 가지 경우가 가능하다.



[그림 1]



[그림 2]

이때 $f'(1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 갖는다.

그런데 [그림 1]에서 $f(0)\geq\frac{8}{3}$이므로 $f(0)=0$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

즉, 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 [그림 2]와 같다.

함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이다.

이때 $f'(1)=0,\ f'(2)=0$이므로

$f'(x)=4(x-1)(x-2)(x-k)$ (k는 상수)라 하면

$$f(x)=\int 4(x-1)(x-2)(x-k)\,dx$$
$$=\int\{4x^3-4(k+3)x^2+4(3k+2)x-8k\}\,dx$$
$$=x^4-\frac{4}{3}(k+3)x^3+2(3k+2)x^2-8kx+C$$

이때 $f(0)=0$에서 $C=0$

또 $f(2)=\frac{8}{3}$에서

$16-\frac{32}{3}(k+3)+8(3k+2)-16k=\frac{8}{3}$

$-\frac{8}{3}k=\frac{8}{3}\qquad\therefore\ k=-1$

따라서 $f(x)=x^4-\frac{8}{3}x^3-2x^2+8x$이므로 $f(3)=15$

11 정적분

난이도별 필수 기출 196~215쪽

0838 답 ④

$f(x)=\frac{d}{dx}\int_1^x(3t^2-2t-1)\,dt=3x^2-2x-1$

$\therefore\ f(2)=7$

0839 답 ①

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x^3-2x+3$

$\therefore\ f(1)=5$

0840 답 ③

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-x$

$\therefore\ \int_1^3 f'(x)\,dx=\int_1^3(3x^2-x)\,dx$
$=\left[x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_1^3=22$

다른 풀이

$f(x)=\int_2^x(3t^2-t)\,dt=\left[t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_2^x=x^3-\frac{1}{2}x^2-6$이므로

$\int_1^3 f'(x)\,dx=\left[f(x)\right]_1^3=f(3)-f(1)=22$

0841 답 ④

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{5h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times\frac{2}{5}$
$=\frac{2}{5}f'(1)$

이때 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=4x^3-2x+3$

따라서 구하는 값은

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{5h}=\frac{2}{5}f'(1)=\frac{2}{5}\times5=2$

0842 답 ⑤

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=3-a\qquad\therefore\ a=3$

$\int_1^x f(t)\,dt=x^4+x^3-3x^2+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x^3+3x^2-6x$

따라서 $f(-1)=5$이므로

$a+f(-1)=3+5=8$

0843 답 ①

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x^2+2ax$

이때 $f(1)=4$에서

$6+2a=4 \quad \therefore a=-1$

$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt=2x^3-x^2+b$의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-3+b \quad \therefore b=3$

$\therefore ab=(-1)\times 3=-3$

0844 답 4

$\int_{-2}^{x}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt=\int_{-2}^{x} f'(t)\,dt$이므로

$\int_{-2}^{x} f'(t)\,dt=x^3+ax^2-x+2$

양변에 $x=-2$를 대입하면

$0=4a-4 \quad \therefore a=1$ ····· ⓘ

$\int_{-2}^{x} f'(t)\,dt=x^3+x^2-x+2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+2x-1$ ····· ⓘⓘ

$\therefore f'(a)=f'(1)=4$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a의 값 구하기	40%
ⓘⓘ $f'(x)$ 구하기	40%
ⓘⓘⓘ $f'(a)$의 값 구하기	20%

0845 답 ③

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)-7 \quad \therefore f(1)=7$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2-10x$

$xf'(x)=6x^2+10x \quad \therefore f'(x)=6x+10$

즉, $f(x)=\int(6x+10)\,dx=3x^2+10x+C$이고,

$f(1)=7$에서

$13+C=7 \quad \therefore C=-6$

따라서 $f(x)=3x^2+10x-6$이므로 $f(2)=26$

0846 답 ②

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=\{1-f(2)\}^2 \quad \therefore f(2)=1$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$1-f(x)=-2\{1-f(x)\}f'(x)$

$\{1-f(x)\}\{1+2f'(x)\}=0$

$\therefore f(x)=1$ 또는 $f'(x)=-\frac{1}{2}$

이때 함수 $f(x)$는 상수함수가 아닌 다항함수이므로 $f(x)\neq 1$

즉, $f'(x)=-\frac{1}{2}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(-\frac{1}{2}\right)dx=-\frac{1}{2}x+C$

$f(2)=1$에서

$-1+C=1 \quad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}x+2$이므로 $f(6)=-1$

0847 답 ③

$\int_{-1}^{3}(x-1)(x^2+x+1)\,dx=\int_{-1}^{3}(x^3-1)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-x\right]_{-1}^{3}=16$

0848 답 ⑤

$\int_{-2}^{1}(4x^3-6x+a)\,dx=\left[x^4-3x^2+ax\right]_{-2}^{1}=3a-6$

따라서 $3a-6=9$이므로 $a=5$

0849 답 ②

$\int_{0}^{a}(9x^2+2x-2)\,dx=\left[3x^3+x^2-2x\right]_{0}^{a}$

$=3a^3+a^2-2a$

즉, $3a^3+a^2-2a=0$에서

$a(a+1)(3a-2)=0 \quad \therefore a=\frac{2}{3}\ (\because a>0)$

0850 답 ①

$\int_{1}^{3} f'(x)\,dx=\left[f(x)\right]_{1}^{3}=f(3)-f(1)$

이때 모든 실수 x에 대하여 $f(x)-f(1)=2x^3-5x^2+3x$이므로

이 식에 $x=3$을 대입하면

$f(3)-f(1)=18$

따라서 구하는 값은

$\int_{1}^{3} f'(x)\,dx=f(3)-f(1)=18$

0851 답 ④

$f(x)=4x^3-9x^2+k$이므로

$\int_{0}^{2} f(x)\,dx=\int_{0}^{2}(4x^3-9x^2+k)\,dx$

$=\left[x^4-3x^3+kx\right]_{0}^{2}=-8+2k$

따라서 $-8+2k=0$이므로 $k=4$

0852 답 ②

$\int_{1}^{3} f(x)\,dx=\int_{1}^{3}(2x^3-ax+1)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}ax^2+x\right]_{1}^{3}=42-4a$

이때 $f(1)=3-a$이므로

$42-4a=3-a,\ 3a=39 \quad \therefore a=13$

0853 답 ⑤

$$\int_0^1 \{f(x)\}^2 dx=\int_0^1 (3x-2)^2 dx$$
$$=\int_0^1 (9x^2-12x+4)\,dx$$
$$=\left[3x^3-6x^2+4x\right]_0^1=1$$
$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 (3x-2)\,dx$$
$$=\left[\frac{3}{2}x^2-2x\right]_0^1=-\frac{1}{2}$$

즉, $1=k\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2$이므로 $k=4$

0854 답 3

$f'(x)=3x^2+6x-2$이므로

$f(x)=\int (3x^2+6x-2)\,dx=x^3+3x^2-2x+C$ …… ⓘ

$\therefore \int_{-1}^2 f(x)\,dx=\int_{-1}^2 (x^3+3x^2-2x+C)\,dx$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2+Cx\right]_{-1}^2$$
$$=\frac{39}{4}+3C$$ …… ⓘⓘ

즉, $\frac{39}{4}+3C=\frac{3}{4}$이므로

$3C=-9$ $\therefore C=-3$ …… ⓘⓘⓘ

따라서 $f(x)=x^3+3x^2-2x-3$이므로 $f(-3)=3$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ $f(x)$를 적분상수 C를 이용하여 나타내기	20 %
ⓘⓘ $\int_{-1}^2 f(x)\,dx$의 값을 적분상수 C를 이용하여 나타내기	30 %
ⓘⓘⓘ 적분상수 C 구하기	30 %
ⓘⓥ $f(-3)$의 값 구하기	20 %

0855 답 ③

$$\int_{-2}^3 (4x^3+kx^2-kx+1)\,dx=\left[x^4+\frac{k}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2+x\right]_{-2}^3$$
$$=70+\frac{55}{6}k$$

즉, $70+\frac{55}{6}k<180$에서

$\frac{55}{6}k<110$ $\therefore k<12$

따라서 정수 k의 최댓값은 11이다.

0856 답 ③

$f(x)=\int (x+3)\,dx=\frac{1}{2}x^2+3x+C$이므로

$$\int_{-2}^0 xf(x)\,dx=\int_{-2}^0 \left(\frac{1}{2}x^3+3x^2+Cx\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{8}x^4+x^3+\frac{1}{2}Cx^2\right]_{-2}^0=6-2C$$

즉, $6-2C=2$이므로 $C=2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+3x+2$이므로 $f(-4)=-2$

0857 답 ④

$$\int_{-1}^4 (2x^3-|x|+3)\,dx$$
$$=\int_{-1}^0 (2x^3+x+3)\,dx+\int_0^4 (2x^3-x+3)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_0^4$$
$$=2+132=134$$

0858 답 ⑤

이차방정식 $x^2-3x+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

$\therefore \int_\alpha^\beta (3x^2+1)\,dx=\left[x^3+x\right]_\alpha^\beta$
$$=(\beta^3+\beta)-(\alpha^3+\alpha)$$
$$=(\beta^3-\alpha^3)+(\beta-\alpha)$$
$$=(\beta-\alpha)^3+3\alpha\beta(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)$$

이때 $(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta$에서

$(\beta-\alpha)^2=9-4=5$ $\therefore \beta-\alpha=\sqrt{5}\ (\because \beta-\alpha>0)$

따라서 구하는 값은

$$\int_\alpha^\beta (3x^2+1)\,dx=(\beta-\alpha)^3+3\alpha\beta(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)$$
$$=5\sqrt{5}+3\sqrt{5}+\sqrt{5}=9\sqrt{5}$$

0859 답 ③

$f(x)=a(x+3)(x-1)\ (a>0)$이라 하면 $f(0)=-2$에서

$-3a=-2$ $\therefore a=\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}(x+3)(x-1)=\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x-2$이므로

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3 \left(\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x-2\right)dx$$
$$=\left[\frac{2}{9}x^3+\frac{2}{3}x^2-2x\right]_0^3=6$$

0860 답 23

$f(x)=\begin{cases}3x^2-2x+C_1 & (x\geq 1)\\ 4x+C_2 & (x<1)\end{cases}$이고, $f(0)=1$에서 $C_2=1$이므로

$f(x)=\begin{cases}3x^2-2x+C_1 & (x\geq 1)\\ 4x+1 & (x<1)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$에서

$1+C_1=5$ $\therefore C_1=4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}3x^2-2x+4 & (x\geq 1)\\ 4x+1 & (x<1)\end{cases}$이므로 …… ⓘ

$$\int_{-2}^3 f(x)\,dx=\int_{-2}^1 (4x+1)\,dx+\int_1^3 (3x^2-2x+4)\,dx$$
$$=\left[2x^2+x\right]_{-2}^1+\left[x^3-x^2+4x\right]_1^3$$
$$=-3+26=23$$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(x)$ 구하기	50 %
ⓘⓘ $\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$의 값 구하기	50 %

0861 답 ②

$$\int_0^1 (a^2x^2-4ax+2)\,dx=\left[\frac{a^2}{3}x^3-2ax^2+2x\right]_0^1$$
$$=\frac{a^2}{3}-2a+2=\frac{1}{3}(a-3)^2-1$$

즉, 주어진 정적분의 값은 $a=3$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

따라서 $m=3$, $n=-1$이므로

$m+n=3+(-1)=2$

0862 답 ①

$xf(x)=f(x)+x^4-2x+1$에서

$xf(x)-f(x)=x^4-2x+1$

$(x-1)f(x)=(x-1)(x^3+x^2+x-1)$

$\therefore\ f(x)=x^3+x^2+x-1$

$\therefore\ \int_{-3}^{3} f(x)\,dx=\int_{-3}^{3}(x^3+x^2+x-1)\,dx \rightarrow \int_{-3}^{3}x^3\,dx=\int_{-3}^{3}x\,dx=0$

$$=2\int_0^3 (x^2-1)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^3=2\times 6=12$$

0863 답 ④

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(x^2+ax+b)\,dx \rightarrow \int_{-1}^{1}ax\,dx=0$

$$=2\int_0^1 (x^2+b)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+bx\right]_0^1=2\left(\frac{1}{3}+b\right)$$

즉, $2\left(\frac{1}{3}+b\right)=-\frac{4}{3}$이므로 $b=-1$

$f(x)=x^2+ax-1$이므로

$\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(x^3+ax^2-x)\,dx \rightarrow \int_{-1}^{1}x^3\,dx=\int_{-1}^{1}x\,dx=0$

$$=2\int_0^1 ax^2\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}ax^3\right]_0^1=\frac{2}{3}a$$

즉, $\frac{2}{3}a=2$이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=x^2+3x-1$이므로 $f(2)=9$

0864 답 ①

$0<a\le 6$이므로

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=\int_{-a}^{0}(4x-2)\,dx+\int_0^a (x^2+4x-2)\,dx$$
$$=\left[2x^2-2x\right]_{-a}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2-2x\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{3}a^3-4a$$

$g(a)=\frac{1}{3}a^3-4a$라 하면 $g'(a)=a^2-4=(a+2)(a-2)$

$0<a\le 6$에서 $g'(a)=0$을 만족시키는 a의 값은 $a=2$

$0<a\le 6$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	…	2	…	6
$g'(a)$		−	0	+	
$g(a)$	(0)	↘	$-\frac{16}{3}$	↗	48

함수 $g(a)$는 $a=6$에서 최대이고 최댓값은 48, $a=2$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $-\frac{16}{3}$이다.

따라서 $M=48$, $m=-\frac{16}{3}$이므로

$Mm=48\times\left(-\frac{16}{3}\right)=-256$

0865 답 114

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극댓값 3을 갖고, $x=0$에서 극솟값 -1을 가지므로

$f'(-2)=0$, $f(-2)=3$, $f'(0)=0$, $f(0)=-1$ …… ⓘ

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a ($a>0$)라 하면

$f'(x)$는 최고차항의 계수가 $3a$인 이차함수이다.

$f'(x)=3ax(x+2)=3ax^2+6ax$ ($a>0$)라 하면

$f(x)=\int(3ax^2+6ax)\,dx=ax^3+3ax^2+C$

이때 $f(0)=-1$에서 $C=-1$이므로

$f(x)=ax^3+3ax^2-1$

또 $f(-2)=3$에서

$4a-1=3 \quad \therefore\ a=1$

즉, $f'(x)=3x(x+2)$이므로 …… ⓘⓘ

$$|f'(x)|=\begin{cases} 3x^2+6x & (x<-2 \text{ 또는 } x>0) \\ -3x^2-6x & (-2\le x\le 0) \end{cases}$$

$\therefore\ \int_{-1}^{4}|f'(x)|\,dx$

$$=\int_{-1}^{0}(-3x^2-6x)\,dx+\int_0^4(3x^2+6x)\,dx$$
$$=\left[-x^3-3x^2\right]_{-1}^{0}+\left[x^3+3x^2\right]_0^4$$
$$=2+112=114$$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f'(-2)$, $f(-2)$, $f'(0)$, $f(0)$의 값 구하기	20 %
ⓘⓘ $f'(x)$ 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $\int_{-1}^{4}\lvert f'(x)\rvert\,dx$의 값 구하기	40 %

0866 답 ②

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표가 0, 1이므로 이차방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 두 근이 0, 1이다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=ax(x-1)$ (a는 상수, $a\neq0$)
양변에 $x=2$를 대입하면
$h(2)=2a$
이때 $h(2)=f(2)-g(2)=3-1=2$이므로
$2a=2$ $\therefore a=1$
따라서 $h(x)=f(x)-g(x)=x(x-1)=x^2-x$이므로
$$\int_0^3\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^3(x^2-x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$$

0867 답 16

$\int_0^1 f'(x)dx=\int_0^5 f'(x)dx=0$에서
$f(1)-f(0)=f(5)-f(0)=0$
$\therefore f(0)=f(1)=f(5)$
이때 $f(0)=f(1)=f(5)=a$ (a는 상수)라 하면 삼차방정식 $f(x)=a$, 즉 $f(x)-a=0$의 세 근이 0, 1, 5이고 삼차항의 계수가 1이므로
$f(x)-a=x(x-1)(x-5)$
$\therefore f(x)=x(x-1)(x-5)+a$
$=x^3-6x^2+5x+a$
$f(2)=3$에서
$-6+a=3$ $\therefore a=9$
따라서 $f(x)=x^3-6x^2+5x+9$이므로
$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(x^3-6x^2+5x+9)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+\frac{5}{2}x^2+9x\right]_0^2=16$$

0868 답 14

$|x-n|=\begin{cases}x-n & (x\geq n)\\ -x+n & (x<n)\end{cases}$이므로
$$f(n)=\int_0^{2n}|x-n|dx$$
$$=\int_0^n(-x+n)dx+\int_n^{2n}(x-n)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+nx\right]_0^n+\left[\frac{1}{2}x^2-nx\right]_n^{2n}$$
$$=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n^2=n^2$$
$\therefore f(1)+f(2)+f(3)=1^2+2^2+3^2=14$

0869 답 ④

$f(x)+f(-x)=0$에서
$f(-x)=-f(x)$ → 그래프가 원점에 대하여 대칭이다.
양변에 $x=0$을 대입하면
$f(0)=-f(0)$ $\therefore f(0)=0$
이때 $f(x)$는 홀수 차수의 항으로만 이루어져 있으므로 $f'(x)$는 짝수 차수의 항 또는 상수항으로만 이루어져 있다.
$$\therefore\int_{-1}^1\{f'(x)+3x^2\}dx=2\int_0^1\{f'(x)+3x^2\}dx$$
$$=2\left[f(x)+x^3\right]_0^1$$
$$=2\{f(1)+1-f(0)\}$$
$$=2\left(\frac{3}{2}+1-0\right)=5$$

참고 그래프가 원점에 대하여 대칭인 다항함수는 홀수 차수의 항으로만 이루어져 있다. 이를 미분한 도함수는 짝수 차수의 항 또는 상수항으로만 이루어져 있으므로 그래프가 y축에 대하여 대칭인 함수이다.

0870 답 ②

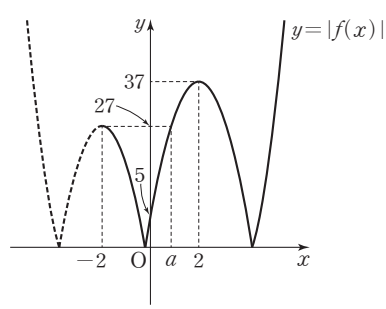
$h(x)=f(x)g(x)$에서
$f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$이므로
$h(-x)=f(-x)g(-x)$
$=f(x)\times\{-g(x)\}$
$=-f(x)g(x)=-h(x)$ → 그래프가 원점에 대하여 대칭이다.
양변에 $x=0$을 대입하면
$h(0)=-h(0)$ $\therefore h(0)=0$
이때 $h(x)$는 홀수 차수의 항으로만 이루어져 있으므로 $h'(x)$는 짝수 차수의 항 또는 상수항으로만 이루어져 있고, $xh'(x)$는 홀수 차수의 항으로만 이루어져 있다.
$$\therefore\int_{-5}^5(x+3)h'(x)dx$$
$$=\int_{-5}^5\{xh'(x)+3h'(x)\}dx \leftarrow \int_{-5}^5 xh'(x)dx=0$$
$$=6\int_0^5 h'(x)dx$$
$$=6\left[h(x)\right]_0^5$$
$$=6\{h(5)-h(0)\}=6h(5)$$
즉, $6h(5)=12$이므로 $h(5)=2$

0871 답 ④

$f(x)=2x^3-24x-5$에서
$f'(x)=6x^2-24=6(x+2)(x-2)$
$x\geq-2$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은
$x=-2$ 또는 $x=2$
$x\geq-2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	27	↘	-37	↗

$f(0)=-5$이므로 $x\geq-2$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



$0<x<2$에서 $|f(x)|=f(-2)$를 만족시키는 x의 값을 a라 하면

$-2a^3+24a+5=27$에서

$2a^3-24a+22=0$, $2(a-1)(a^2+a-11)=0$

$\therefore a=1\ (\because 0<a<2)$

즉, $-2\le t\le 1$일 때 $|f(x)|$의 최댓값은 27이고, $1<t\le 2$일 때 $|f(x)|$의 최댓값은 $-f(t)$이므로 닫힌구간 $[-2, 2]$에서

$$g(t)=\begin{cases}27 & (-2\le t\le 1)\\ -2t^3+24t+5 & (1<t\le 2)\end{cases}$$

$$\therefore \int_{-2}^{2} g(t)\,dt=\int_{-2}^{1}27\,dt+\int_{1}^{2}(-2t^3+24t+5)\,dt$$

$$=\Big[27t\Big]_{-2}^{1}+\Big[-\frac{1}{2}t^4+12t^2+5t\Big]_{1}^{2}$$

$$=81+\frac{67}{2}=\frac{229}{2}$$

0872 답 ⑤

$f(x)=2x^3-6x+1$이라 하면

$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

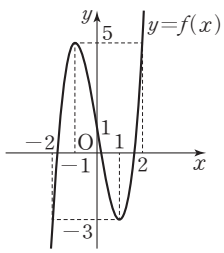
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5	↘	-3	↗

$f(0)=1$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(-2)=-3<0$, $f(2)=5>0$이므로

$-2<\alpha<-1$, $1<\beta<2$

이때 α, β는 방정식 $f(x)=0$의 근이므로 $f(\alpha)=0$에서

$2\alpha^3-6\alpha+1=0$ $\quad\therefore \alpha^3-3\alpha=-\frac{1}{2}$

또 $f(\beta)=0$에서

$2\beta^3-6\beta+1=0$ $\quad\therefore \beta^3-3\beta=-\frac{1}{2}$

따라서 $|x^2-1|=\begin{cases}x^2-1 & (x<-1 \text{ 또는 } x>1)\\ -x^2+1 & (-1\le x\le 1)\end{cases}$ 이므로

$$\int_{\alpha}^{\beta}|x^2-1|\,dx$$

$$=\int_{\alpha}^{-1}(x^2-1)\,dx+\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx+\int_{1}^{\beta}(x^2-1)\,dx$$

$$=\Big[\frac{1}{3}x^3-x\Big]_{\alpha}^{-1}+\Big[-\frac{1}{3}x^3+x\Big]_{-1}^{1}+\Big[\frac{1}{3}x^3-x\Big]_{1}^{\beta}$$

$$=\Big(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\alpha^3+\alpha\Big)+\frac{4}{3}+\Big(\frac{1}{3}\beta^3-\beta+\frac{2}{3}\Big)$$

$$=-\frac{1}{3}(\alpha^3-3\alpha)+\frac{1}{3}(\beta^3-3\beta)+\frac{8}{3}$$

$$=\Big(-\frac{1}{3}\Big)\times\Big(-\frac{1}{2}\Big)+\frac{1}{3}\times\Big(-\frac{1}{2}\Big)+\frac{8}{3}$$

$$=\frac{8}{3}$$

0873 답 45

(가)에서 $\int_0^2|f(x)|\,dx=-\int_0^2 f(x)\,dx$이므로

닫힌구간 $[0, 2]$에서 $f(x)\le 0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(나)에서 $\int_2^3|f(x)|\,dx=\int_2^3 f(x)\,dx$이므로

닫힌구간 $[2, 3]$에서 $f(x)\ge 0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $f(2)=0$

$f(x)$는 이차함수이고, $f(0)=0$, $f(2)=0$이므로

$f(x)=ax(x-2)=ax^2-2ax$ (a는 상수, $a\ne 0$)라 하면

(가)에서 $\int_0^2 f(x)\,dx=-4$이므로

$$\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2(ax^2-2ax)\,dx$$

$$=\Big[\frac{1}{3}ax^3-ax^2\Big]_0^2$$

$$=-\frac{4}{3}a$$

즉, $-\frac{4}{3}a=-4$이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=3x^2-6x$이므로

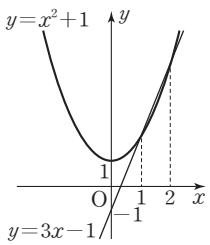
$f(5)=45$

0874 답 ③

(나), (다)에서

$x^2+3x=(x^2+1)+(3x-1)$

이므로 두 함수 $y=x^2+1$, $y=3x-1$의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면



$x^2+1=3x-1$, $x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

$x\le 1$ 또는 $x\ge 2$일 때 $x^2+1\ge 3x-1$,

$1\le x\le 2$일 때 $x^2+1\le 3x-1$이므로

(가)에 의하여

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & (x\le 1 \text{ 또는 } x\ge 2)\\ 3x-1 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

$$\therefore \int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^1(x^2+1)\,dx+\int_1^2(3x-1)\,dx$$

$$=\Big[\frac{1}{3}x^3+x\Big]_0^1+\Big[\frac{3}{2}x^2-x\Big]_1^2$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{7}{2}$$

$$=\frac{29}{6}$$

0875 답 ⑤

$$\int_0^3(x^2+x+2)\,dx-\int_0^3 x(x-3)\,dx$$

$$=\int_0^3\{(x^2+x+2)-x(x-3)\}\,dx$$

$$=\int_0^3(4x+2)\,dx$$

$$=\Big[2x^2+2x\Big]_0^3$$

$$=24$$

0876 답 ③

$$\int_2^4 \frac{x^2+3x-5}{x-1}dx+\int_4^2 \frac{x-2}{x-1}dx$$
$$=\int_2^4 \frac{x^2+3x-5}{x-1}dx-\int_2^4 \frac{x-2}{x-1}dx$$
$$=\int_2^4 \left(\frac{x^2+3x-5}{x-1}-\frac{x-2}{x-1}\right)dx$$
$$=\int_2^4 \frac{x^2+2x-3}{x-1}dx=\int_2^4 \frac{(x+3)(x-1)}{x-1}dx$$
$$=\int_2^4 (x+3)\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2+3x\right]_2^4=12$$

0877 답 −32

$$\int_{-3}^1 \{x^2-f(x)\}dx-\int_{-3}^1 \{5x+f(x)\}dx$$
$$=\int_{-3}^1 [\{x^2-f(x)\}-\{5x+f(x)\}]dx$$
$$=\int_{-3}^1 \{x^2-5x-2f(x)\}dx$$
$$=\int_{-3}^1 \{x^2-5x-2(2x^2-3x)\}dx$$
$$=\int_{-3}^1 (-3x^2+x)\,dx$$
$$=\left[-x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^1=-32$$

0878 답 ①

$$\int_0^1 x\,dx+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2dx+\frac{1}{3}\int_0^1 x^3dx+\cdots+\frac{1}{n}\int_0^1 x^n dx$$
$$=\int_0^1 \left(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{1}{n}x^n\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2\times3}x^3+\frac{1}{3\times4}x^4+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}x^{n+1}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

따라서 $\frac{n}{n+1}=\frac{10}{11}$이므로 $n=10$

참고 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$(단, $A\neq B$, $AB\neq0$)

0879 답 −2

$$\int_{-1}^2 (x+k)^2dx-\int_2^{-1}(x-k)^2dx$$
$$=\int_{-1}^2 (x+k)^2dx+\int_{-1}^2 (x-k)^2dx$$
$$=\int_{-1}^2 \{(x+k)^2+(x-k)^2\}dx$$
$$=\int_{-1}^2 (2x^2+2k^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3+2k^2x\right]_{-1}^2=6k^2+6 \quad \cdots\cdots \text{ⓘ}$$

즉, $6k^2+6=18$이므로

$k^2=2$ $\therefore k=-\sqrt{2}$ 또는 $k=\sqrt{2}$

따라서 구하는 모든 실수 k의 값의 곱은

$(-\sqrt{2})\times\sqrt{2}=-2$ ····· ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 주어진 등식의 좌변을 k에 대한 식으로 나타내기	60%
ⓘⓘ 모든 실수 k의 값의 곱 구하기	40%

0880 답 ⑤

$\int_0^a (5x^2-3x+1)\,dx=\int_0^a (2x^2+3x)\,dx$에서

$$\int_0^a (5x^2-3x+1)\,dx-\int_0^a (2x^2+3x)\,dx$$
$$=\int_0^a \{(5x^2-3x+1)-(2x^2+3x)\}dx$$
$$=\int_0^a (3x^2-6x+1)\,dx$$
$$=\left[x^3-3x^2+x\right]_0^a=a^3-3a^2+a$$

즉, $a^3-3a^2+a=0$이므로

$a(a^2-3a+1)=0$ $\therefore a^2-3a+1=0\ (\because a\neq0)$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 a의 값의 합은 3이다.

0881 답 ①

$\int_a^3 f(x)\,dx=\int_0^3 f(x)\,dx$에서

$$\int_a^3 f(x)\,dx-\int_0^3 f(x)\,dx=\int_a^3 f(x)\,dx+\int_3^0 f(x)\,dx$$
$$=\int_a^0 f(x)\,dx$$
$$=\int_a^0 (9x^2+10x-2)\,dx$$
$$=\left[3x^3+5x^2-2x\right]_a^0$$
$$=-3a^3-5a^2+2a$$

즉, $-3a^3-5a^2+2a=0$이므로

$-a(a+2)(3a-1)=0$ $\therefore a=\frac{1}{3}\ (\because a>0)$

0882 답 ③

$$\int_{-a}^a (x^5+3x^3+x^2)\,dx-2\int_a^{-a}(x^3+x^2-x)\,dx$$
$$=\int_{-a}^a (x^5+3x^3+x^2)\,dx+2\int_{-a}^a (x^3+x^2-x)\,dx$$
$$=\int_{-a}^a \{(x^5+3x^3+x^2)+2(x^3+x^2-x)\}dx$$
$$=\int_{-a}^a (x^5+5x^3+3x^2-2x)\,dx$$
$$=2\int_0^a 3x^2dx=2\left[x^3\right]_0^a=2a^3$$

$\int_{-a}^a x^5dx=\int_{-a}^a 5x^3dx$

$=\int_{-a}^a (-2x)\,dx=0$

즉, $2a^3=\frac{1}{4}$이므로

$a^3=\frac{1}{8}$ $\therefore a=\frac{1}{2}\ (\because a$는 실수)

0883 답 ④

$$\int_{-2}^{5} f(x)\,dx-\int_{8}^{5} f(x)\,dx+\int_{8}^{4} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{5} f(x)\,dx+\int_{5}^{8} f(x)\,dx+\int_{8}^{4} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{4} (2x^3-x+3)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-2}^{4}=132$$

0884 답 23

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{5} f(x)\,dx+\int_{5}^{2} f(x)\,dx+\int_{2}^{3} f(x)\,dx+\int_{3}^{1} f(x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{5} f(x)\,dx-\int_{2}^{5} f(x)\,dx+\int_{2}^{3} f(x)\,dx-\int_{1}^{3} f(x)\,dx$$

$=45-15+3-7$

$=26$ …… ⓘ

$$\therefore \int_{0}^{1}\{f(x)-6x\}\,dx=\int_{0}^{1} f(x)\,dx-\int_{0}^{1} 6x\,dx$$

$$=\int_{0}^{1} f(x)\,dx-\left[3x^2\right]_{0}^{1}$$

$=26-3=23$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$의 값 구하기	50 %
ⓘⓘ $\int_{0}^{1}\{f(x)-6x\}\,dx$의 값 구하기	50 %

0885 답 ①

$f(0)-f(-2)=\int_{-2}^{0} f'(x)\,dx$이므로

$$f(0)-f(-2)+\int_{0}^{2}\{x^2-6x+f'(x)\}\,dx$$

$$=\int_{-2}^{0} f'(x)\,dx+\int_{0}^{2}(x^2-6x)\,dx+\int_{0}^{2} f'(x)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2} f'(x)\,dx+\int_{0}^{2}(x^2-6x)\,dx$$

$$=0+\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2\right]_{0}^{2}=-\frac{28}{3}$$

0886 답 ①

$$\int_{-3}^{3}(4x-1)f(x)\,dx=36-\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$$에서

$$\int_{-3}^{3} 4xf(x)\,dx-\int_{-3}^{3} f(x)\,dx=36-\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$$

$$4\int_{-3}^{3} xf(x)\,dx=36$$

$$\therefore \int_{-3}^{3} xf(x)\,dx=9$$

이때 $f(x)=x^2+ax$이므로

$$\int_{-3}^{3} xf(x)\,dx=\int_{-3}^{3} x(x^2+ax)\,dx$$

$$=\int_{-3}^{3}(x^3+ax^2)\,dx \longrightarrow \int_{-3}^{3} x^3\,dx=0$$

$$=2\int_{0}^{3} ax^2\,dx$$

$$=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_{0}^{3}=18a$$

따라서 $18a=9$이므로 $a=\frac{1}{2}$

0887 답 11

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{0}^{2} f(x)\,dx$$에서

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx=\int_{0}^{2} f(x)\,dx$$

$$\therefore \int_{-2}^{0} f(x)\,dx=0,\ \int_{0}^{2} f(x)\,dx=0$$

이차함수 $f(x)$에 대하여 $f(0)=-1$이므로

$f(x)=ax^2+bx-1$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)이라 하면

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx=0$$에서

$$\int_{-2}^{0}(ax^2+bx-1)\,dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_{-2}^{0}$$

$$=\frac{8}{3}a-2b-2$$

$$\therefore \frac{8}{3}a-2b-2=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\int_{0}^{2} f(x)\,dx=0$$에서

$$\int_{0}^{2}(ax^2+bx-1)\,dx=\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{b}{2}x^2-x\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{8}{3}a+2b-2$$

$$\therefore \frac{8}{3}a+2b-2=0 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{4}$, $b=0$

따라서 $f(x)=\frac{3}{4}x^2-1$이므로 $f(4)=11$

0888 답 9

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로

$$\int_{-5}^{-2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{1} f(x)\,dx=\int_{1}^{4} f(x)\,dx$$ …… ⓘ

$$\therefore \int_{-5}^{4} f(x)\,dx=\int_{-5}^{-2} f(x)\,dx+\int_{-2}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{4} f(x)\,dx$$

$$=3\int_{1}^{4} f(x)\,dx$$

$=3\times 3=9$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\int_{-5}^{-2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{1} f(x)\,dx=\int_{1}^{4} f(x)\,dx$임을 알기	50 %
ⓘⓘ $\int_{-5}^{4} f(x)\,dx$의 값 구하기	50 %

0889 답 ⑤

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x-1)=f(x+1)$이므로

$\int_{-5}^{-3}f(x)\,dx=\int_{-3}^{-1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\cdots=\int_{13}^{15}f(x)\,dx$

$\therefore \int_{-5}^{15}f(x)\,dx$

$=\int_{-5}^{-3}f(x)\,dx+\int_{-3}^{-1}f(x)\,dx+\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$

$+\cdots+\int_{13}^{15}f(x)\,dx$

$=10\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=10\int_{-1}^{1}(x^4-3x^2+2)\,dx$

$=20\int_{0}^{1}(x^4-3x^2+2)\,dx$

$=20\left[\frac{1}{5}x^5-x^3+2x\right]_0^1$

$=20\times\frac{6}{5}=24$

0890 답 ①

함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축에 대하여 대칭이므로

$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=13$에서

$2\int_{0}^{a}f(x)\,dx=13 \quad \therefore \int_{0}^{a}f(x)\,dx=\frac{13}{2}$

$\int_{0}^{3}f(x)\,dx=\int_{0}^{1}x\,dx+\int_{1}^{2}dx+\int_{2}^{3}(-x+3)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1+\left[x\right]_1^2+\left[-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_2^3$

$=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}=2$

$f(x+3)=f(x)$이므로

$\int_{0}^{3}f(x)\,dx=\int_{3}^{6}f(x)\,dx=\int_{6}^{9}f(x)\,dx=\cdots=2$

$\therefore \int_{0}^{9}f(x)\,dx=\int_{0}^{3}f(x)\,dx+\int_{3}^{6}f(x)\,dx+\int_{6}^{9}f(x)\,dx$

$=2+2+2=6$

$\int_{0}^{a}f(x)\,dx=\int_{0}^{9}f(x)\,dx+\int_{9}^{a}f(x)\,dx$이므로

$\frac{13}{2}=6+\int_{9}^{a}f(x)\,dx \quad \therefore \int_{9}^{a}f(x)\,dx=\frac{1}{2}$

이때 $\int_{0}^{1}f(x)\,dx=\int_{3}^{4}f(x)\,dx=\int_{6}^{7}f(x)\,dx=\int_{9}^{10}f(x)\,dx=\frac{1}{2}$

이므로 $a=10$

0891 답 ⑤

(가)에서 $f(-x)=f(x)$이므로

$\int_{-1}^{0}f(x)\,dx=\int_{0}^{1}f(x)\,dx \quad \cdots\cdots$ ㉠

$g(x)=xf(x)$라 하면

$g(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-g(x)$이므로

$\int_{-1}^{1}g(x)\,dx=\int_{-1}^{1}xf(x)\,dx=0$

$\therefore \int_{-1}^{0}(x+2)f(x)\,dx+\int_{0}^{1}(x+3)f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{0}xf(x)\,dx+2\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{1}xf(x)\,dx+3\int_{0}^{1}f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}xf(x)\,dx+2\int_{0}^{1}f(x)\,dx+3\int_{0}^{1}f(x)\,dx$ ($\because$ ㉠)

$=\int_{-1}^{1}xf(x)\,dx+5\int_{0}^{1}f(x)\,dx$

$=0+5\times5=25$

0892 답 ②

(가)에서 $f(-x)=-f(x)$이므로

$\int_{-2}^{2}f(x)\,dx=0$

$g(x)=x^2f(x)$라 하면

$g(-x)=x^2f(-x)=-x^2f(x)=-g(x)$이므로

$\int_{-2}^{2}g(x)=\int_{-2}^{2}x^2f(x)\,dx=0$

$h(x)=xf(x)$라 하면

$h(-x)=-xf(-x)=xf(x)=h(x)$이므로

$\int_{-2}^{2}h(x)\,dx=2\int_{0}^{2}h(x)\,dx=2\int_{0}^{2}xf(x)\,dx$

$=2\times(-2)=-4$

$\therefore \int_{-2}^{2}(3x^2-4x+1)f(x)\,dx$

$=3\int_{-2}^{2}x^2f(x)\,dx-4\int_{-2}^{2}xf(x)\,dx+\int_{-2}^{2}f(x)\,dx$

$=3\times0-4\times(-4)+0=16$

0893 답 ④

$\int_{-3}^{5}f(x)\,dx=\int_{-3}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{5}f(x)\,dx$

$=4+5=9$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$\int_{-3}^{1}f(x)\,dx=\int_{1}^{5}f(x)\,dx$

$\therefore \int_{-3}^{5}f(x)\,dx=\int_{-3}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{5}f(x)\,dx$

$=\int_{1}^{5}f(x)\,dx+\int_{1}^{5}f(x)\,dx$

$=2\int_{1}^{5}f(x)\,dx$

즉, $2\int_{1}^{5}f(x)\,dx=9$이므로 $\int_{1}^{5}f(x)\,dx=\frac{9}{2}$

참고 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 모든 실수 s, t에 대하여 $\int_{1-t}^{1-s}f(x)\,dx=\int_{1+s}^{1+t}f(x)\,dx$이다.

0894 답 14

$g(x)=xf(x)$라 하면

$g(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-g(x)$이므로

$\int_{-1}^{1}g(x)\,dx=0$

$\int_{-1}^{5} xf(x)\,dx=4$에서

$\int_{-1}^{5} xf(x)\,dx=\int_{-1}^{5} g(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{1} g(x)\,dx+\int_{1}^{5} g(x)\,dx$

$=\int_{1}^{5} g(x)\,dx$

$\therefore \int_{1}^{5} g(x)\,dx=4$

$\int_{-2}^{1} xf(x)\,dx=10$에서

$\int_{-2}^{1} xf(x)\,dx=\int_{-2}^{1} g(x)\,dx$

$=\int_{-2}^{-1} g(x)\,dx+\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$

$=\int_{-2}^{-1} g(x)\,dx$

이때 $\int_{-2}^{-1} g(x)\,dx=-\int_{1}^{2} g(x)\,dx$이므로

$-\int_{1}^{2} g(x)\,dx=10 \quad \therefore \int_{1}^{2} g(x)\,dx=-10$

$\therefore \int_{2}^{5} xf(x)\,dx=\int_{2}^{5} g(x)\,dx=\int_{2}^{1} g(x)\,dx+\int_{1}^{5} g(x)\,dx$

$=-\int_{1}^{2} g(x)\,dx+\int_{1}^{5} g(x)\,dx$

$=-(-10)+4=14$

참고 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 $g(-x)=-g(x)$를 만족시키므로 그래프가 원점에 대하여 대칭이다. 즉, $\int_{-2}^{-1} g(x)\,dx=-\int_{1}^{2} g(x)\,dx$

0895 답 ③

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0$

㉠에 y 대신 $-x$를 대입하면

$f(0)=f(x)+f(-x) \quad \therefore f(-x)=-f(x)$

$\therefore \int_{-3}^{2} f(x)\,dx+\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$

$=\int_{-3}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx+\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{3} f(x)\,dx$

$=\int_{-3}^{3} f(x)\,dx+\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=0$

0896 답 40

$g(x)=xf(x)$라 하면

$g(-x)=-xf(-x)=-xf(x)=-g(x)$이므로

$\int_{-1}^{1} g(x)=\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx=0$

㈐에서

$\int_{-1}^{1} (2x+3)f(x)\,dx=2\int_{-1}^{1} xf(x)\,dx+3\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

$=3\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

즉, $3\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=15$이므로 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=5$

㈏에서 $\int_{-6}^{-4} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=5$이고,

$\int_{-6}^{-4} f(x)\,dx=\int_{-4}^{-2} f(x)\,dx=\cdots=\int_{8}^{10} f(x)\,dx$이므로

$\int_{-6}^{10} f(x)\,dx=\int_{-6}^{-4} f(x)\,dx+\int_{-4}^{-2} f(x)\,dx+\cdots+\int_{8}^{10} f(x)\,dx$

$=8\int_{-6}^{-4} f(x)\,dx$

$=8\times5=40$

0897 답 ⑤

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=1$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2+x+1$

즉, $f'(1)=3$이므로

$f(1)+f'(1)=1+3=4$

0898 답 ④

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2x+f(x)+x^2$

$xf'(x)=x^2+2x \quad \therefore f'(x)=x+2$

$\therefore \int_{1}^{2} f'(x)\,dx=\int_{1}^{2} (x+2)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{1}^{2}=\frac{7}{2}$

0899 답 ③

주어진 등식에서

$x\int_{2}^{x} f(t)\,dt-\int_{2}^{x} tf(t)\,dt=x^4-2x^3-8x+16$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{2}^{x} f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=4x^3-6x^2-8$

$\therefore \int_{2}^{x} f(t)\,dt=4x^3-6x^2-8$

양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x)=12x^2-12x$

$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right)=9$

0900 답 ①

$\int_{0}^{x} (x-t)f'(t)\,dt=x^3$에서

$x\int_{0}^{x} f'(t)\,dt-\int_{0}^{x} tf'(t)\,dt=x^3$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{0}^{x} f'(t)\,dt+xf'(x)-xf'(x)=3x^2$

$\therefore \int_{0}^{x} f'(t)\,dt=3x^2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $f'(x)=6x$

$\therefore f(x)=\int 6x\,dx=3x^2+C$

$f(0)=1$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=3x^2+1$이므로 $f(3)=28$

0901 답 ①

주어진 등식에서

$\int_{-3}^{3} xf(x)\,dx+\int_{-3}^{3} f(x)\,dx=\int_{-3}^{3} f(x)\,dx+9$

$\therefore \int_{-3}^{3} xf(x)\,dx=9$

이때 $f(x)=x^2-3ax$이므로

$\int_{-3}^{3} xf(x)\,dx=\int_{-3}^{3}(x^3-3ax^2)\,dx$ → $\int_{-3}^{3} x^3\,dx=0$

$=2\int_{0}^{3}(-3ax^2)\,dx$

$=2\left[-ax^3\right]_{0}^{3}=-54a$

즉, $-54a=9$이므로 $a=-\frac{1}{6}$

따라서 $f(x)=x^2+\frac{1}{2}x$이므로 $f(2)=5$

0902 답 10

$\int_{0}^{1} f(t)\,dt=k$(k는 상수)로 놓으면 $f(x)=x^2-6x+9k$이므로

$\int_{0}^{1} f(t)\,dt=\int_{0}^{1}(t^2-6t+9k)\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+9kt\right]_{0}^{1}=9k-\frac{8}{3}$

즉, $9k-\frac{8}{3}=k$이므로

$8k=\frac{8}{3}$ $\therefore k=\frac{1}{3}$ …… ⓘ

따라서 $f(x)=x^2-6x+3$이므로 …… ⓘⓘ

$f(-1)=10$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\int_{0}^{1} f(t)\,dt=k$로 놓고 k의 값 구하기	70 %
ⓘⓘ $f(x)$ 구하기	20 %
ⓘⓘⓘ $f(-1)$의 값 구하기	10 %

0903 답 ⑤

주어진 등식에서

$f(x)=3x^2+x\int_{0}^{2} f(t)\,dt-\int_{0}^{2} f(t)\,dt$

$\int_{0}^{2} f(t)\,dt=k$(k는 상수)로 놓으면 $f(x)=3x^2+kx-k$이므로

$\int_{0}^{2} f(t)\,dt=\int_{0}^{2}(3t^2+kt-k)\,dt=\left[t^3+\frac{k}{2}t^2-kt\right]_{0}^{2}=8$

$\therefore k=8$

따라서 $f(x)=3x^2+8x-8$이므로 $f(2)=20$

0904 답 −3

$\int_{-1}^{2} tf(t)\,dt=k$($k$는 상수)로 놓으면 $f(x)=4x^2+3x+k$이므로

$\int_{-1}^{2} tf(t)\,dt=\int_{-1}^{2}(4t^3+3t^2+kt)\,dt$

$=\left[t^4+t^3+\frac{k}{2}t^2\right]_{-1}^{2}=24+\frac{3}{2}k$

즉, $24+\frac{3}{2}k=k$이므로

$\frac{1}{2}k=-24$ $\therefore k=-48$

따라서 $f(x)=4x^2+3x-48$이므로 $f(3)=-3$

0905 답 ⑤

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-6+\int_{0}^{1} f'(t)\,dt$ $\therefore \int_{0}^{1} f'(t)\,dt=6$

즉, $xf(x)=ax^3+2x=x(ax^2+2)$이므로

$f(x)=ax^2+2$

이때 $\int_{0}^{1} f'(t)\,dt=f(1)-f(0)=(a+2)-2=a$이므로

$a=6$

따라서 $f(x)=6x^2+2$이므로

$\int_{-3}^{1} f(x)\,dx=\int_{-3}^{1}(6x^2+2)\,dx$

$=\left[2x^3+2x\right]_{-3}^{1}=64$

0906 답 ①

$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx=k$(k는 상수)로 놓으면 $f(x)=|x|+k$이므로

$\int_{-2}^{1} f(x)\,dx=\int_{-2}^{1}(|x|+k)\,dx$

$=\int_{-2}^{0}(-x+k)\,dx+\int_{0}^{1}(x+k)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^2+kx\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{2}x^2+kx\right]_{0}^{1}$

$=(2+2k)+\left(\frac{1}{2}+k\right)=3k+\frac{5}{2}$

즉, $3k+\frac{5}{2}=k$이므로

$2k=-\frac{5}{2}$ $\therefore k=-\frac{5}{4}$

이때 $f(x)=|x|-\frac{5}{4}$이므로

$\int_{-1}^{a}\{x^2+4f(x)\}\,dx$

$=\int_{-1}^{a}(x^2+4|x|-5)\,dx$

$=\int_{-1}^{0}(x^2-4x-5)\,dx+\int_{0}^{a}(x^2+4x-5)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2-5x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2-5x\right]_{0}^{a}$

$=\frac{1}{3}a^3+2a^2-5a-\frac{8}{3}$

즉, $\frac{1}{3}a^3+2a^2-5a-\frac{8}{3}=-2$이므로

$\frac{1}{3}a^3+2a^2-5a-\frac{2}{3}=0$, $\frac{1}{3}(a^3+6a^2-15a-2)=0$

$\frac{1}{3}(a-2)(a^2+8a+1)=0$ $\therefore a=2$ ($\because a>0$)

참고 이차방정식 $a^2+8a+1=0$의 두 근은

$a=-4-\sqrt{15}$ 또는 $a=-4+\sqrt{15}$

즉, 이차방정식 $a^2+8a+1=0$의 두 근은 모두 음수이다.

0907 답 31

주어진 등식에서

$f(x)=x^2+x\int_0^2 f(t)\,dt+\int_0^1 f(t)\,dt$

$\int_0^2 f(t)\,dt=a$, $\int_0^1 f(t)\,dt=b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(x)=x^2+ax+b$이므로 $\int_0^2 f(t)\,dt=a$에서

$\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2 (t^2+at+b)\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^2=\frac{8}{3}+2a+2b$

즉, $\frac{8}{3}+2a+2b=a$이므로

$a+2b=-\frac{8}{3}$ ····· ㉠

또 $\int_0^1 f(t)\,dt=b$에서

$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1 (t^2+at+b)\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_0^1=\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b$

즉, $\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b=b$이므로 $a=-\frac{2}{3}$

$a=-\frac{2}{3}$를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-1$

따라서 $f(x)=x^2-\frac{2}{3}x-1$이므로 $f(6)=31$

0908 답 ①

$\int_1^x (x-2-t)f(t)\,dt=ax^2-12x+b$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a-12+b$ $\therefore a+b=12$ ····· ㉡

㉠에서

$x\int_1^x f(t)\,dt-2\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt=ax^2-12x+b$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-2f(x)-xf(x)=2ax-12$

$\therefore \int_1^x f(t)\,dt=2f(x)+2ax-12$

양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=4$이므로

$0=8+2a-12$, $2a=4$ $\therefore a=2$

$a=2$를 ㉡에 대입하여 풀면 $b=10$

$\therefore ab=2\times 10=20$

0909 답 30

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=2+k+\int_2^1 (3t^2-4t)\,dt$

$0=2+k+\left[t^3-2t^2\right]_2^1$

$0=1+k$ $\therefore k=-1$ ····· ⓘ

즉, $\int_1^x f(t)\,dt=2x^2-x+\int_2^x (3t^2-4t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x-1+3x^2-4x$

따라서 $f(x)=3x^2-1$이므로 ····· ⓘⓘ

$\int_{-2}^3 f(x)\,dx=\int_{-2}^3 (3x^2-1)\,dx$

$=\left[x^3-x\right]_{-2}^3=30$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ k의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ $f(x)$ 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $\int_{-2}^3 f(x)\,dx$의 값 구하기	30 %

0910 답 ②

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_0^1 f(t)\,dt=-2-\int_0^1 f(t)\,dt$

$2\int_0^1 f(t)\,dt=-2$ $\therefore \int_0^1 f(t)\,dt=-1$

즉, $\int_0^x f(t)\,dt=x^3-3x^2+x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-6x+1=3(x-1)^2-2$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 -2이다.

0911 답 ⑤

주어진 등식의 양변에 $x=4$를 대입하면

$4f(4)=8$ $\therefore f(4)=2$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2f(x)$

$\therefore f(x)=xf'(x)$

양변에 $x=4$를 대입하면

$f(4)=4f'(4)$, $2=4f'(4)$ $\therefore f'(4)=\frac{1}{2}$

0912 답 −2

$x^2f(x)=3x^4-x^3+2\int_{-1}^x tf(t)\,dt$ ····· ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=12x^3-3x^2+2xf(x)$

$x^2f'(x)=12x^3-3x^2$

즉, $f'(x)=12x-3$이므로

$f(x)=\int (12x-3)\,dx=6x^2-3x+C$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $f(-1)=4$

즉, $9+C=4$이므로 $C=-5$

$\therefore f(x)=6x^2-3x-5$

이때 $f(k)=7$에서

$6k^2-3k-5=7$ $\therefore 2k^2-k-4=0$

따라서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 모든 실수 k의 값의 곱은 -2이다.

0913 답 ③

$xf(x)=2x^3+ax^2+3a+\int_1^x f(t)\,dt$ ····· ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=6x^2+2ax+f(x)$

$xf'(x)=6x^2+2ax$

즉, $f'(x)=6x+2a$이므로

$f(x)=\int(6x+2a)\,dx=3x^2+2ax+C$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=4a+2$

즉, $3+2a+C=4a+2$이므로 $C=2a-1$

$\therefore\ f(x)=3x^2+2ax+2a-1$

이때 $f(1)=\int_0^1 f(t)\,dt$에서

$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1(3t^2+2at+2a-1)\,dt$

$=\left[t^3+at^2+(2a-1)t\right]_0^1=3a$

즉, $3a=4a+2$이므로 $a=-2$

따라서 $f(x)=3x^2-4x-5$이므로 $f(3)=10$

0914 답 $\frac{5}{3}$

주어진 등식에서

$\int_1^x f(t)\,dt+x\int_1^3 f(t)\,dt-\int_1^3 tf(t)\,dt=x-a$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+\int_1^3 f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=1$

$\therefore\ f(x)=1-\int_1^3 f(t)\,dt$

$\int_1^3 f(t)\,dt=k$(k는 상수)로 놓으면 $f(x)=1-k$이므로

$\int_1^3 f(t)\,dt=\int_1^3(1-k)\,dt$

$=\left[(1-k)t\right]_1^3=2-2k$

즉, $2-2k=k$이므로

$3k=2$ $\therefore\ k=\frac{2}{3}$ ····· ⓘ

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{3}$ ····· ⓘⓘ

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^3(1-t)f(t)\,dt=1-a$에서

$\int_1^3\frac{1}{3}(1-t)\,dt=1-a$, $\frac{1}{3}\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_1^3=1-a$

$-\frac{2}{3}=1-a$ $\therefore\ a=\frac{5}{3}$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\int_1^3 f(t)\,dt=k$로 놓고 k의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ $f(x)$ 구하기	20 %
ⓘⓘⓘ a의 값 구하기	40 %

0915 답 ③

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x+3)f'(x)=4f(x)-2x^2$

$\therefore\ (x+3)f'(x)=3f(x)-2x^2$ ····· ㉠

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

이를 ㉠에 대입하면

$(x+3)(2ax+b)=3(ax^2+bx+c)-2x^2$

$2ax^2+(6a+b)x+3b=(3a-2)x^2+3bx+3c$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

$2a=3a-2$, $6a+b=3b$, $3b=3c$ $\therefore\ a=2$, $b=6$, $c=6$

따라서 $f(x)=2x^2+6x+6$이므로 $f(2)=26$

0916 답 23

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=-7+a+b$ $\therefore\ a+b=7$ ····· ㉠

주어진 등식에서

$x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt=x^4-8x^2+ax+b$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=4x^3-16x+a$

$\therefore\ \int_1^x f(t)\,dt=4x^3-16x+a$ ····· ㉡

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=-12+a$ $\therefore\ a=12$

$a=12$를 ㉠에 대입하여 풀면 $b=-5$

㉡에서 $\int_1^x f(t)\,dt=4x^3-16x+12$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2-16$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 -16이므로 $m=-16$

$\therefore\ a+b-m=12+(-5)-(-16)=23$

0917 답 2

$\int_0^1 g(t)\,dt=k$(k는 상수)로 놓으면 (가)에서 $f(x)=3x+2k$

(나)에서 $g(0)-k=-1$ $\therefore\ g(0)=k-1$

$g(x)$는 함수 $f(x)$의 한 부정적분이므로

$g(x)=\int f(x)\,dx=\int(3x+2k)\,dx$

$=\frac{3}{2}x^2+2kx+C$

이때 $g(0)=k-1$이므로 $C=k-1$

즉, $g(x)=\frac{3}{2}x^2+2kx+k-1$이므로

$\int_0^1 g(t)\,dt=\int_0^1\left(\frac{3}{2}t^2+2kt+k-1\right)dt$

$=\left[\frac{1}{2}t^3+kt^2+(k-1)t\right]_0^1=2k-\frac{1}{2}$

즉, $2k-\frac{1}{2}=k$이므로 $k=\frac{1}{2}$

따라서 $g(x)=\frac{3}{2}x^2+x-\frac{1}{2}$이므로 $g(1)=2$

0918 답 13

$\int_0^1 g(t)\,dt=k$, $\int_{-2}^0 f(t)\,dt=m$ (k, m은 상수)으로 놓으면

$f(x)=4x^3-3x+k$, $g(x)=6x^2-m$이므로

$$\int_0^1 g(t)\,dt=\int_0^1 (6t^2-m)\,dt$$
$$=\left[2t^3-mt\right]_0^1=2-m$$

즉, $2-m=k$이므로 $k+m=2$ ····· ㉠

$$\int_{-2}^0 f(t)\,dt=\int_{-2}^0 (4t^3-3t+k)\,dt$$
$$=\left[t^4-\frac{3}{2}t^2+kt\right]_{-2}^0=2k-10$$

즉, $2k-10=m$이므로 $2k-m=10$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $k=4$, $m=-2$

따라서 $f(x)=4x^3-3x+4$, $g(x)=6x^2+2$이므로

$f(1)+g(1)=5+8=13$

0919 답 ④

$\int_0^x f(t)\,dt=2x^3+\int_0^{-x} f(t)\,dt$에서

$$\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^{-x} f(t)\,dt=2x^3$$

$$\int_0^x f(t)\,dt+\int_{-x}^0 f(t)\,dt=2x^3 \quad \therefore \int_{-x}^x f(t)\,dt=2x^3$$

$f(x)=3x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$$\int_{-x}^x f(t)\,dt=\int_{-x}^x (3t^2+at+b)\,dt$$ → $\int_{-x}^x at\,dt=0$

$$=2\int_0^x (3t^2+b)\,dt$$
$$=2\left[t^3+bt\right]_0^x=2x^3+2bx$$

즉, $2x^3+2bx=2x^3$이므로

$2bx=0$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 $b=0$

즉, $f(x)=3x^2+ax$이고 $f(-1)=7$에서

$3-a=7 \quad \therefore a=-4$

따라서 $f(x)=3x^2-4x$이므로 $f(4)=32$

0920 답 ⑤

㈎의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)+xg(x)=12x^3+12x^2-10x$

$x\{f(x)+g(x)\}=x(12x^2+12x-10)$

$\therefore f(x)+g(x)=12x^2+12x-10$

이때 ㈏에서 $f(x)=xg'(x)$이므로

$xg'(x)+g(x)=12x^2+12x-10$

$\{xg(x)\}'=12x^2+12x-10$

$$\therefore xg(x)=\int (12x^2+12x-10)\,dx$$
$$=4x^3+6x^2-10x+C$$

양변에 $x=0$을 대입하면 $C=0$

즉, $xg(x)=4x^3+6x^2-10x$이므로

$g(x)=4x^2+6x-10$

$$\therefore \int_0^3 g(x)\,dx=\int_0^3 (4x^2+6x-10)\,dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}x^3+3x^2-10x\right]_0^3=33$$

0921 답 ③

$g(x)+2\int_1^x f(t)\,dt=4x^2-8x+1$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g(1)=-3$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)+2f(x)=8x-8$ ····· ㉡

이때

$f(x)g'(x)=6x^2-16x+8$
$=2(x-2)(3x-2)$ ····· ㉢

㉡, ㉢에서 $f(x)$, $g'(x)$는 모두 일차함수이어야 한다.

(i) $f(x)=3x-2$, $g'(x)=2(x-2)$일 때 → $g'(x)+2f(x)=(2x-4)+2(3x-2)=8x-8$

$g(x)=\int (2x-4)\,dx=x^2-4x+C_1$

$g(1)=-3$에서

$-3+C_1=-3 \quad \therefore C_1=0$

$\therefore g(x)=x^2-4x$

그런데 $g(0)=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)=x-2$, $g'(x)=2(3x-2)$일 때 → $g'(x)+2f(x)=(6x-4)+2(x-2)=8x-8$

$g(x)=\int (6x-4)\,dx=3x^2-4x+C_2$

$g(1)=-3$에서

$-1+C_2=-3 \quad \therefore C_2=-2$

$\therefore g(x)=3x^2-4x-2$

이때 $g(0)=-2\neq 0$이므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $f(x)=x-2$, $g(x)=3x^2-4x-2$이므로

$f(3)+g(3)=1+13=14$

0922 답 24

$2x^2f(x)=3\int_0^x (x-t)\{f(x)+f(t)\}\,dt$에서

$$2x^2f(x)=3\int_0^x (x-t)f(x)\,dt+3\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$
$$=3f(x)\int_0^x (x-t)\,dt+3\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$
$$=3f(x)\left[xt-\frac{1}{2}t^2\right]_0^x+3\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$
$$=\frac{3}{2}x^2f(x)+3\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$$

즉, $\frac{1}{2}x^2f(x)=3\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$이므로

$x^2f(x)=6\int_0^x (x-t)f(t)\,dt$에서

$x^2f(x)=6x\int_0^x f(t)\,dt-6\int_0^x tf(t)\,dt$

양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)+x^2f'(x)=6\int_0^x f(t)\,dt+6xf(x)-6xf(x)$

$\therefore\ 2xf(x)+x^2f'(x)=6\int_0^x f(t)\,dt$ ····· ㉠

이때 $f'(2)=4$이므로 다항함수 $f(x)$의 차수는 1 이상이다.

다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n(a는 상수, n은 자연수, $a\neq0$)이라 하면 $2xf(x)$의 최고차항은 $2ax^{n+1}$, $x^2f'(x)$의 최고차항은 anx^{n+1}, $6\int_0^x f(t)\,dt$의 최고차항은 $\frac{6a}{n+1}x^{n+1}$이다.

즉, ㉠의 좌변의 최고차항은 $2ax^{n+1}+anx^{n+1}=a(n+2)x^{n+1}$이고, 우변의 최고차항은 $\frac{6a}{n+1}x^{n+1}$이므로

$a(n+2)=\frac{6a}{n+1}$, $(n+2)(n+1)=6$

$n^2+3n-4=0$, $(n+4)(n-1)=0$

$\therefore\ n=1$ ($\because$ n은 자연수)

즉, 함수 $f(x)$는 일차함수이므로

$f(x)=ax+b$(a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면 $f'(x)=a$

이때 $f'(2)=4$에서 $a=4$

즉, $f(x)=4x+b$이므로 ㉠에서

$2x(4x+b)+4x^2=6\int_0^x(4t+b)\,dt$

$12x^2+2bx=6\left[2t^2+bt\right]_0^x$

$12x^2+2bx=12x^2+6bx$

즉, $2b=6b$이므로 $b=0$

따라서 $f(x)=4x$이므로 $f(6)=24$

참고 다항함수 $f(x)$가 상수함수이면 $f'(x)=0$이어야 한다. 그런데 $f'(2)=4$이므로 함수 $f(x)$는 상수함수가 아닌 다항함수이다. 즉, $f(x)$의 차수는 1 이상이다.

0923 답 ②

$f(x)=\int_0^x(t-1)(t-5)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-1)(x-5)$

$\therefore\ f'(3)=-4$

0924 답 ④

$f(x)=\int_0^x(t^3+kt-7)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^3+kx-7$

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로 $f'(1)=0$에서

$k-6=0$ $\therefore\ k=6$

0925 답 ③

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_0^h f(x)\,dx=\lim_{h\to0}\frac{F(h)-F(0)}{h}$

$=F'(0)=f(0)=7$

0926 답 ②

$f(x)=\int_2^x(3t^2-t+2)\,dt$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2-x+2$

따라서 구하는 값은

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=12$

0927 답 ④

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$

$=F'(0)=f(0)=3$

이때 $f(x)=\int(3x^2-4x-6)\,dx=x^3-2x^2-6x+C$이고,

$f(0)=3$에서 $C=3$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2-6x+3$이므로 $f(4)=11$

0928 답 ③

$f(x)=x^4-x^2+x+a$라 하고 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+2h}(x^4-x^2+x+a)\,dx$

$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+2h}f(x)\,dx$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1)+F(1)-F(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(1+2h)-F(1)}{2h}\times2-\lim_{h\to0}\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}\times(-1)$

$=2F'(1)+F'(1)=3F'(1)$

$=3f(1)=3(1+a)$

따라서 $3(1+a)=2$이므로 $a=-\frac{1}{3}$

0929 답 40

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)\,dt=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{(x+1)(x-1)}$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$

$=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)$ ····· ⓘ

즉, $\frac{1}{2}f(1)=3$이므로 $f(1)=6$에서

$1+a+b=6$ $\therefore\ a+b=5$ ····· ㉠

$f(-1)=8$에서

$-1-a+b=8$ $\therefore\ a-b=-9$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=7$ ····· ⓘⓘ

따라서 $f(x)=x^3-2x+7$이므로

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx=\int_{-1}^{3}(x^3-2x+7)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^2+7x\right]_{-1}^{3}=40 \quad \cdots\cdots \text{iii}$$

채점 기준

i $\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)\,dt$를 $f(1)$을 사용하여 나타내기	30 %
ii a, b의 값 구하기	40 %
iii $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$의 값 구하기	30 %

0930 답 ①

$f(t)=t^5+t^4+t^3+t^2+t+1$이라 하고 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^3}(t^5+t^4+t^3+t^2+t+1)\,dt$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^3} f(t)\,dt$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^3)-F(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x^3)-F(1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\times(x^2+x+1)\right\}$$

$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{F(x^3)-F(1)}{x^3-1}\times(x^2+x+1)\right\}$$

$$=3F'(1)=3f(1)$$

$$=3\times6=18$$

0931 답 ③

$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

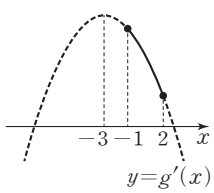
$$g'(x)=f(x)=-x^2-6x+a$$

$$=-(x+3)^2+a+9$$

함수 $g(x)$가 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 증가하려면 $-1\le x\le2$에서 $g'(x)\ge0$이어야 하므로 $g'(2)\ge0$에서

$-16+a\ge0 \quad \therefore a\ge16$

따라서 상수 a의 최솟값은 16이다.



0932 답 ②

$f(x)=a(x+1)(x-1)(x-2)(a>0)$라 하면 $f(0)=2$에서

$2a=2 \quad \therefore a=1$

즉, $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)=x^3-2x^2-x+2$

$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)$

즉, $f(x)$는 $g(x)$의 도함수이다.

주어진 그래프에서 $f(x)$의 부호를 조사하여 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	-1	⋯	1	⋯	2	⋯
$g'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 극댓값은

$$g(1)=\int_0^1 f(t)\,dt$$

$$=\int_0^1(t^3-2t^2-t+2)\,dt$$

$$=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{2}{3}t^3-\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^1=\frac{13}{12}$$

0933 답 ③

$f(x)=a(x+1)(x-3)\ (a>0)$이라 하면

$$g(x)=\int_x^{x+1} f(t)\,dt$$

$$=\int_x^{x+1} a(t+1)(t-3)\,dt$$

$$=\int_x^{x+1} a(t^2-2t-3)\,dt$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$g'(x)=a[\{(x+1)^2-2(x+1)-3\}-(x^2-2x-3)]$$

$$=a(2x-1)$$

$g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은 $x=\frac{1}{2}$

$a>0$이므로 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	⋯	$\frac{1}{2}$	⋯
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극소이면서 최소이므로 $k=\frac{1}{2}$

0934 답 $-\frac{1}{2}$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^3-x=x(x+1)(x-1)$ ⋯⋯ i

$-1\le x\le2$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	⋯	0	⋯	1	⋯	2
$f'(x)$	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

이때

$$f(-1)=\int_0^{-1}(t^3-t)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_0^{-1}=-\frac{1}{4}$$

$f(0)=0$

$$f(1)=\int_0^1(t^3-t)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=-\frac{1}{4}$$

$$f(2)=\int_0^2(t^3-t)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=2 \quad \cdots\cdots \text{ii}$$

즉, 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최대이고 최댓값은 2이고,

$x=-1$, $x=1$에서 최소이고 최솟값은 $-\frac{1}{4}$이다. ⋯⋯ iii

따라서 $M=2$, $m=-\frac{1}{4}$이므로

$$Mm=2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots \text{iv}$$

채점 기준	
ⓘ $f'(x)$ 구하기	20 %
ⓘⓘ $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$의 값 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ 최댓값과 최솟값 구하기	20 %
ⓘⓥ Mm의 값 구하기	10 %

0935 답 ③

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2-|x|$

$0\le x\le 4$에서 $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구하면

$2-|x|=0$, $|x|=2$ $\therefore x=2$

$0\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$$f(2)=\int_{-1}^{2}(2-|t|)\,dt$$
$$=\int_{-1}^{0}(2+t)\,dt+\int_{0}^{2}(2-t)\,dt$$
$$=\left[2t+\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{0}+\left[2t-\frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{3}{2}+2=\frac{7}{2}$$

0936 답 ⑤

$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=f(x)=2x^2+3x+k$

함수 $g(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

이때 함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\ge 0$이어야 하므로

$2x^2+3x+k\ge 0$

이차방정식 $2x^2+3x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$D=9-8k\le 0$ $\therefore k\ge\frac{9}{8}$

따라서 정수 k의 최솟값은 2이다.

0937 답 ⑤

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-2f(-1)=4$ $\therefore f(-1)=-2$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+(x-1)f'(x)=2(x-1)+f(x)$

$(x-1)f'(x)=2(x-1)$ $\therefore f'(x)=2$

즉, $f(x)=\int 2\,dx=2x+C$

이때 $f(-1)=-2$에서

$-2+C=-2$ $\therefore C=0$

$\therefore f(x)=2x$

따라서 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_5^{x+5}f(t)\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{F(x+5)-F(5)}{x}$$
$$=F'(5)=f(5)=10$$

0938 답 −2

$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x f(t)\,dt-f(x)}{x^3-1}=\frac{2}{3}$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}\left\{\int_1^x f(t)\,dt-f(x)\right\}=0$이므로

$-f(1)=0$ $\therefore f(1)=0$ …… ㉠

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{\int_1^x f(t)\,dt-f(x)}{x^3-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)-f(x)}{x^3-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x^3-1}-\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^3-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\times\frac{1}{x^2+x+1}\right\}$$
$$-\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x^2+x+1}\right\}$$
$$=\frac{1}{3}F'(1)-\frac{1}{3}f'(1)$$
$$=\frac{1}{3}f(1)-\frac{1}{3}f'(1)$$
$$=-\frac{1}{3}f'(1)\ (\because ㉠)$$

따라서 $-\frac{1}{3}f'(1)=\frac{2}{3}$이므로 $f'(1)=-2$

0939 답 84

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+b$ $\therefore a+b=-1$ …… ㉠

주어진 등식에서

$x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt=x^4+ax^2+bx$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=4x^3+2ax+b$

$\therefore \int_1^x f(t)\,dt=4x^3+2ax+b$

양변에 $x=1$을 대입하면

$0=4+2a+b$ $\therefore 2a+b=-4$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=2$

$\therefore \int_1^x f(t)\,dt=4x^3-6x+2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2-6$

이때 $g(t)=t^2f(t)=t^2(12t^2-6)$이라 하고,
함수 $g(t)$의 한 부정적분을 $G(t)$라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-2x}\int_2^x t^2f(t)\,dt=\lim_{x\to2}\frac{G(x)-G(2)}{x(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{G(x)-G(2)}{x-2}\times\frac{1}{x}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}G'(2)=\frac{1}{2}g(2)$$
$$=\frac{1}{2}\times168=84$$

0940 답 7

$g(x)=\int_{-4}^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$g'(x)=f(x)$
즉, $g'(x)=\begin{cases}3x^2+6x+a & (x<0)\\ 3x+a & (x\geq0)\end{cases}$이고,
$g(x)$가 $x=3$에서 극값을 가지므로 $g'(3)=0$에서
$9+a=0 \quad \therefore a=-9$ …… ⓘ
$\therefore g'(x)=\begin{cases}3x^2+6x-9 & (x<0)\\ 3x-9 & (x\geq0)\end{cases}$
$x<0$에서 $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구하면
$3x^2+6x-9=0,\ 3(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-3$
$x\geq0$에서 $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구하면
$3x-9=0,\ 3(x-3)=0 \quad \therefore x=3$
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-3	…	3	…
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $g(x)$는 $x=-3$에서 극대이고 극댓값은
$g(-3)=\int_{-4}^{-3}(3t^2+6t-9)\,dt$
$=\left[t^3+3t^2-9t\right]_{-4}^{-3}=7$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a의 값 구하기	50%
ⓘⓘ $g(x)$의 극댓값 구하기	50%

0941 답 ②

$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면
$F'(x)=f(x)=x^3-5x^2-8x+a$
$F(x)$는 사차함수이므로 $F(x)$가 오직 하나의 극값을 가지려면 삼차방정식 $F'(x)=0$, 즉 $f(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 갖지 않아야 한다. 즉, 중근 또는 허근을 가져야 한다.
$f(x)=x^3-5x^2-8x+a$에서
$f'(x)=3x^2-10x-8=(3x+2)(x-4)$
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은
$x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=4$
삼차방정식 $f(x)=0$이 중근 또는 허근을 가지려면
$f\left(-\frac{2}{3}\right)f(4)\geq0$이어야 하므로
$\left(a+\frac{76}{27}\right)(a-48)\geq0 \quad \therefore a\leq-\frac{76}{27}$ 또는 $a\geq48$
따라서 양수 a의 최솟값은 48이다.

0942 답 ⑤

$G(x)=\int_1^x(x-t)f(t)\,dt$라 하면 주어진 등식에서
$\lim_{x\to2}\frac{G(x)}{x-2}=7$
$x\to2$일 때 (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0이다.
즉, $\lim_{x\to2}G(x)=0$이므로 $G(2)=0$
이때 $\lim_{x\to2}\frac{G(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{G(x)-G(2)}{x-2}=G'(2)$이므로
$G'(2)=7$
$G(x)=\int_1^x(x-t)f(t)\,dt$에서
$G(x)=x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt$ …… ㉠
양변을 x에 대하여 미분하면
$G'(x)=\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)$
$\therefore G'(x)=\int_1^x f(t)\,dt$
양변에 $x=2$를 대입하면 $G'(2)=7$이므로
$\int_1^2 f(t)\,dt=7$
㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $G(2)=0$이므로
$2\int_1^2 f(t)\,dt-\int_1^2 tf(t)\,dt=0$
$\therefore \int_1^2 tf(t)\,dt=2\int_1^2 f(t)\,dt=2\times7=14$
즉, $\int_1^2 xf(x)\,dx=14$이므로
$\int_1^2(3x-5)f(x)\,dx=3\int_1^2 xf(x)\,dx-5\int_1^2 f(x)\,dx$
$=3\times14-5\times7=7$

0943 답 ②

$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt+f(x)$ …… ㉠
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$g'(x)=f(x)+f'(x)$ …… ㉡
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $g(0)=f(0)$
㈎에서 $g'(0)=0,\ g(0)=0$이므로 ㉡에 $x=0$을 대입하면
$g'(0)=f(0)+f'(0)$
이때 $g'(0)=0,\ f(0)=g(0)=0$이므로 $f'(0)=0$
즉, $f'(0)=0,\ f(0)=0$이므로 함수 $f(x)$는 x^2을 인수로 갖는다.
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -1이므로
$f(x)=-x^2(x+a)=-x^3-ax^2$ (a는 상수)이라 하면
$f'(x)=-3x^2-2ax$

이를 ㉡에 대입하면

$g'(x)=(-x^3-ax^2)+(-3x^2-2ax)$

$\quad=-x^3-(a+3)x^2-2ax$

㈏에서 $g'(-x)=-g'(x)$이므로 함수 $g'(x)$는 홀수 차수의 항으로만 이루어져 있다.

$-(a+3)=0 \quad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2$이므로 $f(1)=2$

0944 답 ⑤

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면 ㈎에서

$$\lim_{x\to -2}\frac{1}{x+2}\int_{-2}^{x}f(t)\,dt=\lim_{x\to -2}\frac{F(x)-F(-2)}{x-(-2)}$$

$$=F'(-2)=f(-2)$$

$\therefore f(-2)=12$

㈏의 $\lim_{x\to\infty}xf\left(\frac{1}{x}\right)$에서 $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to\infty$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to\infty}xf\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$$

이때 $t\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{t\to 0}f(t)=0$이므로 $f(0)=0$

$$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t}=f'(0)$$

㈏의 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x}$에서 $x+1=s$로 놓으면 $x\to 0$일 때 $s\to 1$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x}=\lim_{s\to 1}\frac{f(s)}{s-1}$$

이때 $s\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{s\to 1}f(s)=0$이므로 $f(1)=0$

$$\therefore \lim_{s\to 1}\frac{f(s)}{s-1}=\lim_{s\to 1}\frac{f(s)-f(1)}{s-1}=f'(1)$$

㈏에서 $\lim_{x\to\infty}xf\left(\frac{1}{x}\right)+\lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x}=3$이므로

$f'(0)+f'(1)=3 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $f(0)=0$, $f(1)=0$이므로

$f(x)=x(x-1)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$f(-2)=12$에서

$6(-2a+b)=12 \quad \therefore -2a+b=2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

$f'(x)=(x-1)(ax+b)+x(ax+b)+ax(x-1)$이므로

㉠에서

$-b+(a+b)=3 \quad \therefore a=3$

$a=3$을 ㉡에 대입하여 풀면 $b=8$

따라서 $f(x)=x(x-1)(3x+8)$이므로 $f(2)=28$

0945 답 8

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=2x\int_0^x f(t)\,dt+x^2f(x)-x^2f(x)$

$\therefore g'(x)=2x\int_0^x f(t)\,dt$

$g'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $\int_0^x f(t)\,dt=0$

$h(x)=\int_0^x f(t)\,dt$라 하면 $f(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

이때 ㈎, ㈏에 의하여 $x=0$과 $x=3$의 좌우에서 $g'(x)$의 값의 부호는 변하지 않는다. 즉, 방정식 $h(x)=0$은 3을 중근으로 갖고 0을 다른 한 실근으로 갖는다.

$h(x)=x(x-3)^2=x^3-6x^2+9x$이므로

$\int_0^x f(t)\,dt=x^3-6x^2+9x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

따라서 $|f(x)|=\begin{cases}3x^2-12x+9 & (x<1 \text{ 또는 } x>3)\\ -3x^2+12x-9 & (1\le x\le 3)\end{cases}$이므로

$$\int_0^3|f(x)|\,dx=\int_0^1(3x^2-12x+9)\,dx+\int_1^3(-3x^2+12x-9)\,dx$$

$$=\Big[x^3-6x^2+9x\Big]_0^1+\Big[-x^3+6x^2-9x\Big]_1^3$$

$$=4+4=8$$

최고수준 도전 기출 216~217쪽

0946 답 43

전략 $x=4$를 경계로 적분 구간을 나누어 정적분 $\int_a^{a+4}f(x)\,dx$의 값을 a에 대한 식으로 나타낸다.

$0\le a\le 4$이므로

$$\int_a^{a+4}f(x)\,dx=\int_a^4(-x^2+4x)\,dx+\int_4^{a+4}(x-4)\,dx$$

$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\Big]_a^4+\Big[\frac{1}{2}x^2-4x\Big]_4^{a+4}$$

$$=\Big(\frac{1}{3}a^3-2a^2+\frac{32}{3}\Big)+\frac{1}{2}a^2$$

$$=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$$

$g(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{3}{2}a^2+\frac{32}{3}$라 하면

$g'(a)=a^2-3a=a(a-3)$

$0\le a\le 4$에서 $g'(a)=0$을 만족시키는 a의 값은

$a=0$ 또는 $a=3$

$0\le a\le 4$에서 함수 $g(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	…	3	…	4
$g'(a)$	0	−	0	+	
$g(a)$	$\frac{32}{3}$	↘	$\frac{37}{6}$ 극소	↗	8

함수 $g(a)$는 $a=3$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $\frac{37}{6}$이다.

따라서 $p=6$, $q=37$이므로

$p+q=6+37=43$

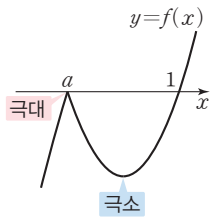
0947 답 ④

전략 $a<1$, $a=1$, $a>1$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 각각 그려 보고, 함수 $f(x)$가 극댓값을 갖는 경우를 찾는다.

(i) $a<1$일 때

$$f(x)=\begin{cases}-(x-1)(x-a) & (x<a)\\ (x-1)(x-a) & (x\geq a)\end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



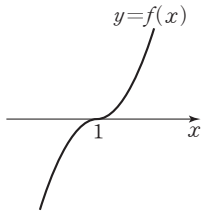
이때 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이고 극댓값이 0이다.

이는 극댓값이 1이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=1$일 때

$$f(x)=\begin{cases}-(x-1)^2 & (x<1)\\ (x-1)^2 & (x\geq 1)\end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$$f'(x)=\begin{cases}-2(x-1) & (x<1)\\ 2(x-1) & (x\geq 1)\end{cases}$$ 에서

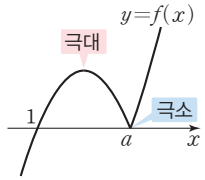
$f'(1)=0$이지만 $x=1$의 좌우에서 $f'(x)$의 값의 부호가 바뀌지 않으므로 극값을 갖지 않는다.

이는 극댓값을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a>1$일 때

$$f(x)=\begin{cases}-(x-1)(x-a) & (x<a)\\ (x-1)(x-a) & (x\geq a)\end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$$f'(x)=\begin{cases}-2x+a+1 & (x<a)\\ 2x-a-1 & (x\geq a)\end{cases}$$

이때 함수 $f(x)$가 $x=k(1<k<a)$에서 극대라 하면

$f'(k)=0$에서

$$-2k+a+1=0 \qquad \therefore k=\frac{a+1}{2}$$

함수 $f(x)$의 극댓값이 1이므로 $f\left(\frac{a+1}{2}\right)=1$에서

$$-\left(\frac{a+1}{2}-1\right)\left(\frac{a+1}{2}-a\right)=1,\ (a-1)^2=4$$

$\therefore a=3\ (\because a>1)$

(i), (ii), (iii)에서 $a=3$이므로

$$f(x)=\begin{cases}-(x-1)(x-3) & (x<3)\\ (x-1)(x-3) & (x\geq 3)\end{cases}$$

$$\therefore \int_{-2}^{4}f(x)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{3}\{-(x-1)(x-3)\}dx+\int_{3}^{4}(x-1)(x-3)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{3}(-x^2+4x-3)\,dx+\int_{3}^{4}(x^2-4x+3)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_{-2}^{3}+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x\right]_{3}^{4}$$

$$=-\frac{50}{3}+\frac{4}{3}$$

$$=-\frac{46}{3}$$

0948 답 ①

전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 실근임을 이용하여 $f(x)$를 a, b에 대한 식으로 나타낸다.

삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 서로 다른 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(a,\ a)$, $\mathrm{Q}(b,\ b)$에서 만나므로 0, a, b는 삼차방정식 $f(x)=x$, 즉 $f(x)-x=0$의 서로 다른 세 실근이다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-x=x(x-a)(x-b)$라 하면

$$f(x)=x(x-a)(x-b)+x$$
$$=x^3-(a+b)x^2+(ab+1)x$$

$$f'(x)=3x^2-2(a+b)x+ab+1$$

이때 $f'(0)=3$에서

$ab+1=3 \qquad \therefore ab=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

즉, $f(x)=x^3-(a+b)x^2+3x$이므로

$$\int_0^a f(x)\,dx=\int_0^a\{x^3-(a+b)x^2+3x\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+b}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^a$$

$$=-\frac{1}{12}a^4-\frac{1}{3}a^3b+\frac{3}{2}a^2$$

$$=-\frac{1}{12}a^4-\frac{2}{3}a^2+\frac{3}{2}a^2\ (\because \text{㉠})$$

$$=-\frac{1}{12}a^4+\frac{5}{6}a^2$$

즉, $-\frac{1}{12}a^4+\frac{5}{6}a^2=\frac{3}{4}$이므로

$a^4-10a^2+9=0$, $(a^2-1)(a^2-9)=0$

$(a+1)(a-1)(a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3\ (\because a>0)$

(i) $a=1$을 ㉠에 대입하여 풀면

$b=2$

(ii) $a=3$을 ㉠에 대입하여 풀면

$b=\frac{2}{3}$

(i), (ii)에서 $a<b$이어야 하므로

$a=1$, $b=2$

$\therefore 3a-b=3-2=1$

0949 답 ③

전략 $\int_n^{n+3}f(x)\,dx$를 n에 대한 식으로 나타내고, 이 식을 이용할 수 있도록 $\int_7^9 f(x)\,dx$를 변형한다.

(나)에서

$$\int_n^{n+3}f(x)\,dx=\int_n^{n+1}(x-2)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2-2x\right]_n^{n+1}=n-\frac{3}{2}$$

$$\int_7^9 f(x)\,dx=\int_7^0 f(x)\,dx+\int_0^9 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^9 f(x)\,dx-\int_0^7 f(x)\,dx$$

이때 $\int_0^9 f(x)\,dx=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^6 f(x)\,dx+\int_6^9 f(x)\,dx$

$=\left(0-\frac{3}{2}\right)+\left(3-\frac{3}{2}\right)+\left(6-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2}$

또 (가)에서 $\int_0^1 f(x)\,dx=0$이므로

$\int_0^7 f(x)\,dx=\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^4 f(x)\,dx+\int_4^7 f(x)\,dx$

$=0+\left(1-\frac{3}{2}\right)+\left(4-\frac{3}{2}\right)=2$

따라서 구하는 값은

$\int_7^9 f(x)\,dx=\int_0^9 f(x)\,dx-\int_0^7 f(x)\,dx$

$=\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$

0950 답 ②

전략 (가)의 등식의 양변을 x에 대하여 미분한 후, 다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n(a는 상수, n은 자연수, $a\neq0$)라 하고 좌변과 우변의 최고차항을 비교하여 다항함수 $f(x)$의 차수를 구한다.

(가)에서 $\int_1^x f(t)\,dt=\frac{x-1}{2}\{f(x)+f(1)\}$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(1)\}+\frac{x-1}{2}f'(x)$

$\therefore\ f(x)=f(1)+(x-1)f'(x)$ ····· ㉠

다항함수 $f(x)$의 최고차항을 ax^n(a는 상수, n은 자연수, $a\neq0$)이라 하면 $f'(x)$의 최고차항은 nax^{n-1}이므로 $xf'(x)$의 최고차항은 nax^n이다.

이때 ㉠에서 좌변의 최고차항은 ax^n이고 우변의 최고차항은 nax^n이므로

$a=na$ $\therefore\ n=1\ (\because\ a\neq0)$

즉, $f(x)$는 일차함수이고 $f(0)=3$이므로

$f(x)=ax+3$이라 하면 (나)에서

$\int_0^2 (ax+3)\,dx=\left[\frac{1}{2}ax^2+3x\right]_0^2=2a+6$

$5\int_{-1}^1 x(ax+3)\,dx=5\int_{-1}^1 (ax^2+3x)\,dx$ → $\int_{-1}^1 3x\,dx=0$

$=10a\int_0^1 x^2\,dx$

$=10a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{10}{3}a$

즉, $2a+6=\frac{10}{3}a$이므로

$\frac{4}{3}a=6$ $\therefore\ a=\frac{9}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{9}{2}x+3$이므로 $f(10)=48$

0951 답 ④

전략 $f(x)=x^2+ax+b$(a, b는 상수)로 놓고, (나)에서 $g'(x)$를 a, b에 대한 식으로 나타낸다. 이때 (다)에서 함수 $g(x)$는 짝수 차수인 항 또는 상수항으로만 이루어져 있으므로 $g'(x)$는 홀수 차수인 항으로만 이루어져 있음을 이용한다.

(가)의 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=16$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}g(x)=0$이므로 $g(1)=0$

이때 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$이므로

$g'(1)=16$

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2+ax+b$(a, b는 상수)라 하면 $f'(x)=2x+a$

(나)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$g'(x)=2f'(x)f(x)$

$=2(2x+a)(x^2+ax+b)$

$=4x^3+6ax^2+2(a^2+2b)x+2ab$

이때 (다)에서 함수 $g(x)$는 y축에 대하여 대칭이므로 짝수 차수인 항 또는 상수항으로만 이루어져 있다. 즉, $g'(x)$는 홀수 차수인 항으로만 이루어져 있으므로

$6a=0$, $2ab=0$ $\therefore\ a=0$

즉, $g'(x)=4x^3+4bx$이고, $g'(1)=16$에서

$4+4b=16$ $\therefore\ b=3$

따라서 $f(x)=x^2+3$, $f'(x)=2x$이므로

$g(x)=2\int_1^x 2t(t^2+3)\,dt$

$=\int_1^x (4t^3+12t)\,dt$

$=\left[t^4+6t^2\right]_1^x=x^4+6x^2-7$

$\therefore\ f(2)+g(-2)=7+33=40$

0952 답 10

전략 (나)에서 $f(x)G(x)+F(x)g(x)=\{F(x)G(x)\}'$임을 이용하여 $G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수임을 안다. 이때 $G(x)=x^2+ax+b$(a, b는 상수)로 놓으면 b의 값은 구하지 않아도 정적분 $\int_1^3 g(x)dx$의 값을 구할 수 있음을 안다.

(가)의 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x$

$xf'(x)=4x$ $\therefore\ f'(x)=4$

$\therefore\ f(x)=\int 4\,dx=4x+C_1$

(가)의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)-3$ $\therefore\ f(1)=3$

즉, $4+C_1=3$이므로 $C_1=-1$

$f(x)=4x-1$이므로

$F(x)=\int(4x-1)\,dx=2x^2-x+C_2$

(나)에서 $f(x)G(x)+F(x)g(x)=\{F(x)G(x)\}'$이므로

$\{F(x)G(x)\}'=8x^3+3x^2+1$

양변을 x에 대하여 적분하면

$F(x)G(x)=\int(8x^3+3x^2+1)\,dx$

$=2x^4+x^3+x+C_3$ ····· ㉡

이때 $F(x)$, $G(x)$가 모두 다항함수이고 $F(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로 $G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$G(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면 ㉠에서

$(2x^2-x+C_2)(x^2+ax+b)=2x^4+x^3+x+C_3$

이 등식이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로 양변의 x^3의 계수를 비교하면

$2a-1=1$ $\therefore a=1$

즉, $G(x)=x^2+x+b$이므로

$$\int_1^3 g(x)\,dx=G(3)-G(1)$$
$$=(12+b)-(2+b)=10$$

0953 답 66

전략 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ (a, b는 상수)로 놓고, (가)에서 $\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)$임을 이용한다. 또 $x\ge0$일 때 함수 $g(x)$를 p에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 정적분의 값을 이용한다.

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=1$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ (a, b는 상수)이라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

(가)에서 $g'(0)=0$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=0$$

(나)에서 $g(0)=f(p)-f(p)=0$이고, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0+}\frac{f(x+p)-f(p)}{x}=f'(p)$$

$$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to0-}\frac{f(x-p)-f(-p)}{x}=f'(-p)$$

$\therefore f'(p)=f'(-p)=0$

이때 $f'(p)=f'(-p)$에서

$3p^2+2ap+b=3p^2-2ap+b$

$4ap=0$ $\therefore a=0$ ($\because p>0$)

$\therefore f(x)=x^3+bx+1$, $f'(x)=3x^2+b$

또 $f'(p)=0$에서

$3p^2+b=0$ $\therefore b=-3p^2$

즉, $f(x)=x^3-3p^2x+1$이므로 $x\ge0$일 때

$g(x)=f(x+p)-f(p)$

$=(x+p)^3-3p^2(x+p)+1-(p^3-3p^3+1)$

$=x^3+3px^2$

$\int_0^p g(x)\,dx=20$에서

$$\int_0^p g(x)\,dx=\int_0^p (x^3+3px^2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+px^3\right]_0^p=\frac{5}{4}p^4$$

즉, $\frac{5}{4}p^4=20$이므로

$p^4=16$ $\therefore p=2$ ($\because p>0$)

따라서 $f(x)=x^3-12x+1$이므로 $f(5)=66$

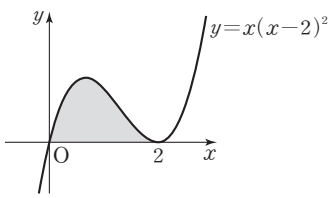
12 넓이

난이도별 필수 기출 220~238쪽

0954 답 ①

곡선 $y=x(x-2)^2$과 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$x(x-2)^2=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

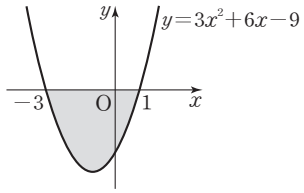
$$S=\int_0^2 x(x-2)^2\,dx=\int_0^2 (x^3-4x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=\frac{4}{3}$$

0955 답 ②

곡선 $y=3x^2+6x-9$와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$3x^2+6x-9=0$, $3(x+3)(x-1)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=1$



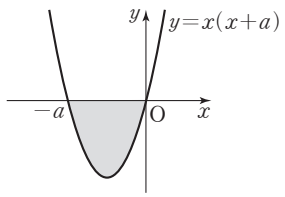
따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-3}^1 (-3x^2-6x+9)\,dx \to \frac{|-3|}{6}\times\{1-(-3)\}^3=32$$
$$=\left[-x^3-3x^2+9x\right]_{-3}^1=32$$

0956 답 ②

곡선 $y=x(x+a)$와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$x(x+a)=0$ $\therefore x=-a$ 또는 $x=0$



$a>0$이므로 곡선 $y=x(x+a)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-a}^0 \{-x(x+a)\}\,dx \to \frac{|-1|}{6}\times\{0-(-a)\}^3=\frac{1}{6}a^3$$
$$=\int_{-a}^0 (-x^2-ax)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2\right]_{-a}^0=\frac{1}{6}a^3$$

즉, $\frac{1}{6}a^3=\frac{9}{2}$이므로

$a^3=27$ $\therefore a=3$ ($\because a$는 실수)

0957 답 ③

$0\le x\le 2$에서

$y=-(x^2-2x)+1=-x^2+2x+1$

따라서 구하는 넓이는

$\int_0^2(-x^2+2x+1)\,dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_0^2=\frac{10}{3}$

0958 답 ②

곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$과 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이 A는

$A=\int_0^2\frac{1}{4}x^2\,dx=\left[\frac{1}{12}x^3\right]_0^2=\frac{2}{3}$

곡선 $y=\frac{1}{4}x^2$과 y축 및 직선 $y=1$로 둘러싸인 도형의 넓이 B는 가로의 길이가 2, 세로의 길이가 1인 직사각형의 넓이에서 A를 뺀 것과 같으므로

$B=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

$\therefore \frac{A}{B}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{2}$

0959 답 36

$f(x)=\int(x^2-4)\,dx=\frac{1}{3}x^3-4x+C$

이때 $f(-1)=9$에서

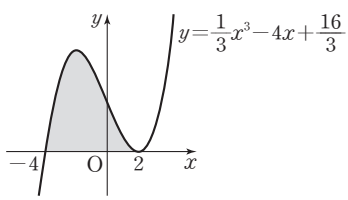
$\frac{11}{3}+C=9$ $\therefore C=\frac{16}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x+\frac{16}{3}$ …… ⓘ

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$\frac{1}{3}x^3-4x+\frac{16}{3}=0$, $\frac{1}{3}(x^3-12x+16)=0$

$\frac{1}{3}(x+4)(x-2)^2=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=2$ …… ⓘⓘ



따라서 구하는 넓이는

$\int_{-4}^2\left(\frac{1}{3}x^3-4x+\frac{16}{3}\right)dx=\left[\frac{1}{12}x^4-2x^2+\frac{16}{3}x\right]_{-4}^2$

$=36$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(x)$ 구하기	30 %
ⓘⓘ 곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	40 %

0960 답 ③

$f(x)=a(x+1)^2(x-2)$ $(a>0)$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_{-1}^2\{-a(x+1)^2(x-2)\}\,dx=a\int_{-1}^2(-x^3+3x+2)\,dx$

$=a\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2$

$=\frac{27}{4}a$

즉, $\frac{27}{4}a=3$이므로 $a=\frac{4}{9}$

따라서 $f(x)=\frac{4}{9}(x+1)^2(x-2)$이므로 $f(5)=48$

0961 답 ③

$f(x)=3x^2-|2x|-1$이라 하면

$f(x)=\begin{cases}3x^2-2x-1 & (x\ge 0)\\ 3x^2+2x-1 & (x<0)\end{cases}$

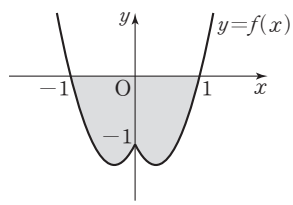
함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

(i) $x\ge 0$일 때

$3x^2-2x-1=0$, $(3x+1)(x-1)=0$ $\therefore x=1$

(ii) $x<0$일 때

$3x^2+2x-1=0$, $(x+1)(3x-1)=0$ $\therefore x=-1$



함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 도형의 넓이는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$2\int_0^1(-3x^2+2x+1)\,dx=2\left[-x^3+x^2+x\right]_0^1$

$=2\times 1=2$

0962 답 ④

(가)에서 $3\int_{-1}^2f(x)\,dx=-2\int_2^5f(x)\,dx=k$ (k는 상수)라 하면

$\int_{-1}^2f(x)\,dx=\frac{k}{3}$, $\int_2^5f(x)\,dx=-\frac{k}{2}$

(나)에서 $\int_{-1}^5f(x)\,dx=\int_{-1}^2f(x)\,dx+\int_2^5f(x)\,dx$이므로

$4=\frac{k}{3}+\left(-\frac{k}{2}\right)$, $4=-\frac{k}{6}$ $\therefore k=-24$

$\therefore \int_{-1}^2f(x)\,dx=\frac{1}{3}\times(-24)=-8$

$\int_2^5f(x)\,dx=\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-24)=12$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{-1}^5|f(x)|\,dx=\int_{-1}^2\{-f(x)\}\,dx+\int_2^5f(x)\,dx$

$=-(-8)+12=20$

0963 답 ②

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$kx(x-2)(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

이때 $\overline{OP}<\overline{OQ}$에서 $P(2,\ 0)$, $Q(3,\ 0)$이므로

$$\begin{aligned}(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})&=\int_0^2 f(x)\,dx-\int_2^3\{-f(x)\}\,dx\\&=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx\\&=\int_0^3 f(x)\,dx\\&=\int_0^3 kx(x-2)(x-3)\,dx\\&=k\int_0^3(x^3-5x^2+6x)\,dx\\&=k\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^3=\frac{9}{4}k\end{aligned}$$

즉, $\frac{9}{4}k=3$이므로 $k=\frac{4}{3}$

0964 답 ④

$S_1=S_2$이므로

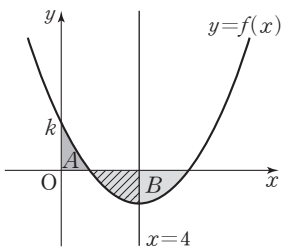
$\int_0^k\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)dx=0$, $\left[\frac{1}{6}x^3-x^2\right]_0^k=0$

$\frac{1}{6}k^3-k^2=0$, $\frac{1}{6}k^2(k-6)=0$ $\quad\therefore k=6\ (\because k>4)$

0965 답 $\frac{32}{3}$

$A:B=1:2$에서 $B=2A$

이때 곡선 $y=x^2-8x+k=(x-4)^2+k-16$은 직선 $x=4$에 대하여 대칭이므로 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}B$이고, 이는 A와 같다. …… ⓘ



즉, 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 곡선 $y=x^2-8x+k$와 x축, y축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^4(x^2-8x+k)\,dx=0$ …… ⓘⓘ

$\left[\frac{1}{3}x^3-4x^2+kx\right]_0^4=0$

$4k-\frac{128}{3}=0$ $\quad\therefore k=\frac{32}{3}$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ A와 $\frac{1}{2}B$가 같음을 알기	20%
ⓘⓘ 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 곡선과 x축, y축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 같음을 이용하여 식 세우기	40%
ⓘⓘⓘ k의 값 구하기	40%

0966 답 ⑤

$$\begin{aligned}A+B&=\int_0^k(-x^2+kx)\,dx+\int_k^1(x^2-kx)\,dx\\&=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2\right]_0^k+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{k}{2}x^2\right]_k^1\\&=\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k+\frac{1}{3}\end{aligned}$$

$S(k)=\frac{1}{3}k^3-\frac{1}{2}k+\frac{1}{3}$이라 하면

$S'(k)=k^2-\frac{1}{2}=\left(k+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(k-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$0<k<1$에서 $S'(k)=0$을 만족시키는 k의 값은

$k=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0<k<1$에서 함수 $S(k)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	0	…	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	…	1
$S'(k)$		−	0	+	
$S(k)$		↘	극소	↗	

따라서 함수 $S(k)$는 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 극소이면서 최소이므로 구하는 k의 값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.

0967 답 $\frac{8}{15}$

(나)에 의하여 $f'(x)=ax(x+1)(x-1)\ (a>0)$라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=\int ax(x+1)(x-1)\,dx\\&=\int(ax^3-ax)\,dx\\&=\frac{a}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2+C\end{aligned}$$

(가)에서 $f(1)=0$이므로

$-\frac{a}{4}+C=0$ $\quad\therefore C=\frac{a}{4}$

$\therefore f(x)=\frac{a}{4}x^4-\frac{a}{2}x^2+\frac{a}{4}$

$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

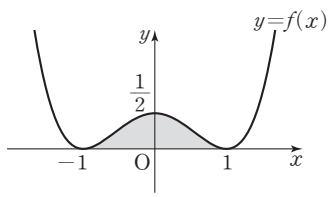
x	…	-1	…	0	…	1	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값은 $\frac{1}{2}$이므로

$f(0)=\frac{1}{2}$에서

$\frac{a}{4}=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore a=2$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}x^4-x^2+\frac{1}{2}$ …… ⓘ



따라서 구하는 넓이는

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{2}x^4-x^2+\frac{1}{2}\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x^4-x^2+\frac{1}{2}\right)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{10}x^5-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x\right]_0^1$$

$$=2\times\frac{8}{30}=\frac{8}{15} \quad \cdots\cdots \text{ii}$$

채점 기준	
i $f(x)$ 구하기	50 %
ii 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	50 %

0968 답 33

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$16a-4=0 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$

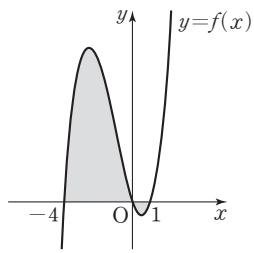
주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=x^3+3x^2-4x$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3+3x^2-4x=0,\ x(x+4)(x-1)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$



곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{-4}^{0}(x^3+3x^2-4x)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^3-3x^2+4x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+x^3-2x^2\right]_{-4}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-x^3+2x^2\right]_0^1$$

$$=32+\frac{3}{4}=\frac{131}{4}$$

$\therefore a+S=\frac{1}{4}+\frac{131}{4}=33$

0969 답 6

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$-(x-a)(x-b)=0 \quad \therefore x=a$ 또는 $x=b$

따라서 $a\le x\le b$에서 $f(x)\ge 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$=\int_a^0 f(x)\,dx+\int_0^b f(x)\,dx$$

$$=-\int_0^a f(x)\,dx+\int_0^b f(x)\,dx$$

$$=-(-1)+5=6$$

0970 답 ②

$f(x)=2x^2+7$이라 하고, 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하자.

모든 실수 x에 대하여 $f(x)>0$이므로

$$S(h)=\int_{5-h}^{5+h}f(x)\,dx=F(5+h)-F(5-h)$$

$$\therefore \lim_{h\to 0+}\frac{S(h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{F(5+h)-F(5-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{F(5+h)-F(5)+F(5)-F(5-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+}\frac{F(5+h)-F(5)}{h}-\lim_{h\to 0+}\frac{F(5-h)-F(5)}{-h}\times(-1)$$

$$=F'(5)+F'(5)$$

$$=2F'(5)$$

$$=2f(5)$$

$$=2\times 57=114$$

0971 답 ④

$$S_1+S_2+S_3=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)\,dx \to \frac{|-1|}{6}\times\{2-(-1)\}^3=\frac{9}{2}$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{9}{2}$$

이때 $2S_2=S_1+S_3$이므로

$S_1+S_2+S_3=2S_2+S_2=3S_2$

즉, $3S_2=\frac{9}{2}$이므로

$S_2=\frac{1}{3}\times\frac{9}{2}=\frac{3}{2}$

0972 답 ③

$$\int_0^{2027}f(x)\,dx-\int_3^{2027}f(x)\,dx=\int_0^{2027}f(x)\,dx+\int_{2027}^{3}f(x)\,dx$$

$$=\int_0^3 f(x)\,dx=0$$

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 1이고 $f(3)=0$이므로

$f(x)=(x-3)(x-a)$ (a는 상수)라 하면

$$\int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3(x-3)(x-a)\,dx$$

$$=\int_0^3\{x^2-(a+3)x+3a\}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+3)x^2+3ax\right]_0^3$$

$$=\frac{9}{2}a-\frac{9}{2}$$

즉, $\frac{9}{2}a-\frac{9}{2}=0$이므로 $a=1$

$\therefore f(x)=(x-3)(x-1)$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$(x-3)(x-1)=0 \quad \therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 $1\le x\le 3$일 때 $f(x)\le 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_1^3\{-(x-3)(x-1)\}\,dx \to \frac{|-1|}{6}\times(3-1)^3=\frac{4}{3}$$

$$=\int_1^3(-x^2+4x-3)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2-3x\right]_1^3=\frac{4}{3}$$

0973 답 ②

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$(x^2-4)(x^2-k)=0$

$(x+2)(x-2)(x+\sqrt{k})(x-\sqrt{k})=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=-\sqrt{k}$ 또는 $x=\sqrt{k}$ 또는 $x=2$

$f(-x)=\{(-x)^2-4\}\{(-x)^2-k\}$

$=(x^2-4)(x^2-k)=f(x)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

이때 $0<k<4$이고, $B=A+C$이므로

$\int_{-2}^{2}f(x)dx=0 \quad \therefore\ 2\int_{0}^{2}f(x)dx=0$

즉, $\int_{0}^{2}f(x)dx=0$이므로

$\int_{0}^{2}(x^2-4)(x^2-k)\,dx=0,\ \int_{0}^{2}\{x^4-(k+4)x^2+4k\}dx=0$

$\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{k+4}{3}x^3+4kx\right]_0^2=0$

$\frac{16}{3}k-\frac{64}{15}=0 \quad \therefore\ k=\frac{4}{5}$

0974 답 ④

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 원점에 대하여 대칭이므로 $f(x)=x^3+ax$ (a는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+a$ ····· ㉠

함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$에서 극값을 가지므로

$f'(\alpha)=0,\ f'(\beta)=0$

$\therefore\ f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$

$=3x^2-3(\alpha+\beta)x+3\alpha\beta$ ····· ㉡

이때 ㉠=㉡이므로

$\alpha+\beta=0,\ 3\alpha\beta=a$ ····· ㉢

$\int_{\alpha}^{\beta}f'(x)dx=-4$에서

$-\frac{3}{6}(\beta-\alpha)^3=-4,\ (\beta-\alpha)^3=8$

$\therefore\ \beta-\alpha=2$ ($\because$ α, β는 실수) ····· ㉣

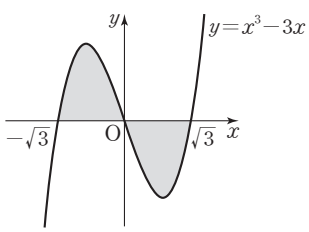
㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $\alpha=-1,\ \beta=1,\ a=-3$

즉, $f'(x)=3x^2-3$이므로 $f(x)=x^3-3x$

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-3x=0,\ x(x^2-3)=0$

$\therefore\ x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$



구하는 도형의 넓이는 닫힌구간 $[0,\ \sqrt{3}]$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로

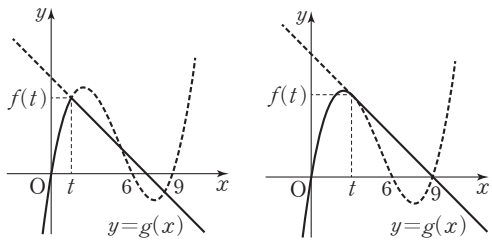
$2\int_{0}^{\sqrt{3}}(-x^3+3x)\,dx=2\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}$

$=2\times\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$

0975 답 ③

함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(t,\ f(t))$ $(0<t<6)$에 대하여 $x<t$이면 $g(x)=f(x)$이고, $x\geq t$이면 $g(x)$는 기울기가 -1이고 점 $(t,\ f(t))$를 지나는 직선의 방정식이다.

즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 다음과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이가 최대가 되려면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-(x-t)+f(t)$가 $x=t$에서 접해야 한다.

$f(x)=\frac{1}{9}x(x-6)(x-9)=\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+6x$에서

$f'(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{10}{3}x+6$

점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가 -1이어야 하므로

$f'(t)=-1$에서

$\frac{1}{3}t^2-\frac{10}{3}t+6=-1,\ \frac{1}{3}(t^2-10t+21)=0$

$\frac{1}{3}(t-3)(t-7)=0 \quad \therefore\ t=3$ ($\because$ $0<t<6$)

즉, 접점의 좌표는 $(3,\ 6)$이고, 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-6=-(x-3)$

$\therefore\ y=-x+9$

$\therefore\ g(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+6x & (x<3)\\ -x+9 & (x\geq 3)\end{cases}$

따라서 구하는 넓이의 최댓값은

$\int_{0}^{3}\left(\frac{1}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+6x\right)dx+\int_{3}^{9}(-x+9)\,dx$

$=\left[\frac{1}{36}x^4-\frac{5}{9}x^3+3x^2\right]_0^3+\left[-\frac{1}{2}x^2+9x\right]_3^9$

$=\frac{57}{4}+18$

$=\frac{129}{4}$

0976 답 ④

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하고 $\int_{0}^{6}f(x)\,dx=0$이므로 $6\leq x\leq 9$에서 $f(x)>0$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=6$, $x=9$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{6}^{9}f(x)\,dx=\int_{6}^{9}\{f(x-3)+4\}dx$

$=\int_{6}^{9}f(x-3)\,dx+\int_{6}^{9}4\,dx$

$=\int_{3}^{6}f(x)\,dx+\left[4x\right]_6^9$ ($\because\ \int_{6}^{9}f(x-3)\,dx=\int_{3}^{6}f(x)\,dx$)

$=\int_{3}^{6}f(x)\,dx+12$ ····· ㉠

(나)의 $\int_0^6 f(x)\,dx=0$에서

$\int_0^6 f(x)\,dx$

$=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^6 f(x)\,dx$

$=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^6 \{f(x-3)+4\}\,dx$

$=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^6 f(x-3)\,dx+\int_3^6 4\,dx$

$\int_3^6 f(x-3)\,dx=\int_0^3 f(x)\,dx$

$=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_0^3 f(x)\,dx+\Big[4x\Big]_3^6$

$=2\int_0^3 f(x)\,dx+12$

즉, $2\int_0^3 f(x)\,dx+12=0$이므로

$\int_0^3 f(x)\,dx=-6$

또 $\int_0^6 f(x)\,dx=\int_0^3 f(x)\,dx+\int_3^6 f(x)\,dx$이므로

$0=-6+\int_3^6 f(x)\,dx \quad \therefore \int_3^6 f(x)\,dx=6$

따라서 구하는 넓이는 ㉠에서

$\int_6^9 f(x)\,dx=\int_3^6 f(x)\,dx+12$

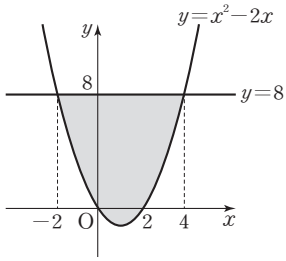
$=6+12=18$

0977 답 ①

곡선 $y=x^2-2x$와 직선 $y=8$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2-2x=8,\ x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=4$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-2}^4 \{8-(x^2-2x)\}\,dx$

$=\int_{-2}^4 (-x^2+2x+8)\,dx$ → $\frac{|-1|}{6}\times\{4-(-2)\}^3=36$

$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+x^2+8x\Big]_{-2}^4$

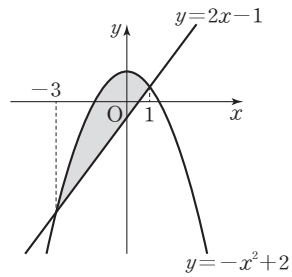
$=36$

0978 답 ②

곡선 $y=-x^2+2$와 직선 $y=2x-1$의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2+2=2x-1,\ x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-3$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-3}^1 \{(-x^2+2)-(2x-1)\}\,dx$

$=\int_{-3}^1 (-x^2-2x+3)\,dx$ → $\frac{|-1|}{6}\times\{1-(-3)\}^3=\frac{32}{3}$

$=\Big[-\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\Big]_{-3}^1$

$=\frac{32}{3}$

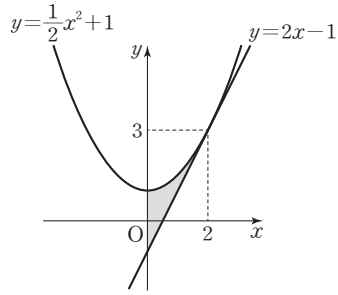
0979 답 ③

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+1$이라 하면

$f'(x)=x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=2$이므로 접선의 방정식은

$y-3=2(x-2) \quad \therefore y=2x-1$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^2 \Big\{\Big(\frac{1}{2}x^2+1\Big)-(2x-1)\Big\}\,dx$

$=\int_0^2 \Big(\frac{1}{2}x^2-2x+2\Big)\,dx$

$=\Big[\frac{1}{6}x^3-x^2+2x\Big]_0^2$

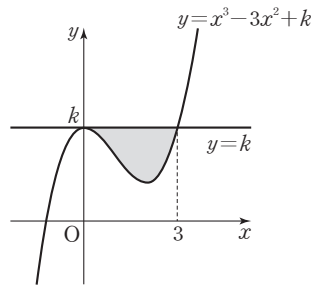
$=\frac{4}{3}$

0980 답 ⑤

곡선 $y=x^3-3x^2+k$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-3x^2+k=k,\ x^3-3x^2=0$

$x^2(x-3)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^3\{k-(x^3-3x^2+k)\}\,dx$$

$$=\int_0^3(-x^3+3x^2)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_0^3=\frac{27}{4}$$

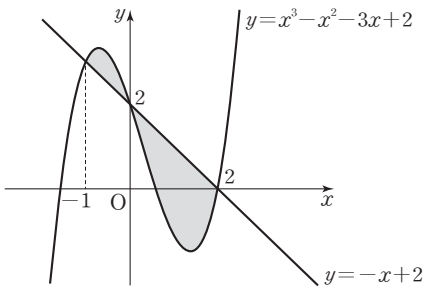
0981 답 ④

곡선 $y=x^3-x^2-3x+2$와 직선 $y=-x+2$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-x^2-3x+2=-x+2$

$x^3-x^2-2x=0$, $x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^0\{(x^3-x^2-3x+2)-(-x+2)\}\,dx$$

$$+\int_0^2\{(-x+2)-(x^3-x^2-3x+2)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^0(x^3-x^2-2x)\,dx+\int_0^2(-x^3+x^2+2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2$$

$$=\frac{5}{12}+\frac{8}{3}=\frac{37}{12}$$

0982 답 $\frac{27}{4}$

$f(x)=x^3-3x^2+3x-4$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x+3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ -2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=3$이므로 접선의 방정식은

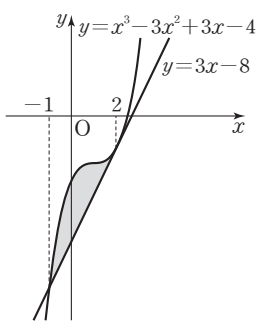
$y-(-2)=3(x-2)$ $\therefore\ y=3x-8$ ····· ⓘ

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x-8$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-3x^2+3x-4=3x-8$

$x^3-3x^2+4=0$, $(x+1)(x-2)^2=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$ ····· ⓘⓘ



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^2\{(x^3-3x^2+3x-4)-(3x-8)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^2(x^3-3x^2+4)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_{-1}^2$$

$$=\frac{27}{4}$$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 점 $(2,\ -2)$에서의 접선의 방정식 구하기	30 %
ⓘⓘ 곡선과 접선의 교점의 x좌표 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	40 %

0983 답 ②

$f(x)=|x^2-4x|$라 하면

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4x & (0\le x\le 4)\\ x^2-4x & (x\le 0 \text{ 또는 } x\ge 4)\end{cases}$$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

(i) $0\le x\le 4$일 때,

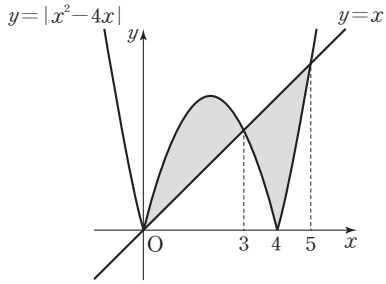
$-x^2+4x=x$, $x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$ $\therefore\ x=0$ 또는 $x=3$

(ii) $x\le 0$ 또는 $x\ge 4$일 때,

$x^2-4x=x$, $x^2-5x=0$

$x(x-5)=0$ $\therefore\ x=0$ 또는 $x=5$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^3\{(-x^2+4x)-x\}\,dx+\int_3^4\{x-(-x^2+4x)\}\,dx$$

$$+\int_4^5\{x-(x^2-4x)\}\,dx$$

$$=\int_0^3(-x^2+3x)\,dx+\int_3^4(x^2-3x)\,dx+\int_4^5(-x^2+5x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3+\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_3^4+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_4^5$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{11}{6}+\frac{13}{6}$$

$$=\frac{17}{2}$$

참고 $3\le x\le 4$에서 $y=-x^2+4x$, $4\le x\le 5$에서 $y=x^2-4x$이므로 $3\le x\le 5$에서 도형의 넓이를 $\int_3^5\{x-(-x^2+4x)\}\,dx$ 또는 $\int_3^5\{x-(x^2-4x)\}\,dx$로 계산하지 않도록 주의한다.

0984 답 ②

$f(x)=x^2+1$이라 하면

$f'(x)=2x$

접점의 좌표를 (t, t^2+1)이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+1)=2t(x-t)$ $\therefore y=2tx-t^2+1$

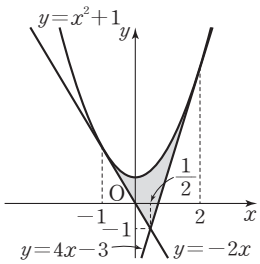
이 직선이 점 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$을 지나므로

$-1=t-t^2+1$, $t^2-t-2=0$

$(t+1)(t-2)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

즉, 접선의 방정식은

$y=-2x$ 또는 $y=4x-3$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{(x^2+1)-(-2x)\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\{(x^2+1)-(4x-3)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(x^2+2x+1)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}(x^2-4x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=\frac{9}{8}+\frac{9}{8}=\frac{9}{4}$$

0985 답 1

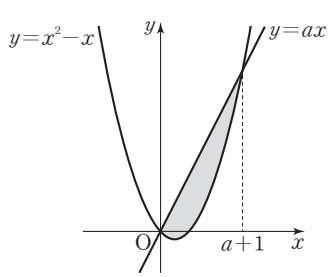
곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2-x=ax$, $x^2-(a+1)x=0$

$x(x-a-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a+1$ …… ⓘ

이때 $a>0$에서 $a+1>0$



곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{a+1}\{ax-(x^2-x)\}dx$$

$$=\int_{0}^{a+1}\{-x^2+(a+1)x\}dx \rightarrow \frac{|-1|}{6}\times\{(a+1)-0\}^3=\frac{(a+1)^3}{6}$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+1}{2}x^2\right]_{0}^{a+1}$$

$$=\frac{(a+1)^3}{6}$$ …… ⓘⓘ

즉, $\frac{(a+1)^3}{6}=\frac{4}{3}$이므로

$(a+1)^3=8$

이때 a는 실수이므로

$a+1=2$ $\therefore a=1$ …… ⓘⓘⓘ

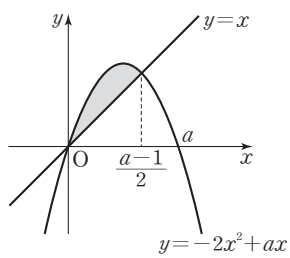
채점 기준	
ⓘ 곡선과 직선의 교점의 x좌표를 a에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘ 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘⓘ a의 값 구하기	30 %

0986 답 ④

곡선 $y=-2x^2+ax$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$-2x^2+ax=x$, $2x^2-(a-1)x=0$

$x(2x-a+1)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{a-1}{2}$



곡선 $y=-2x^2+ax$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{\frac{a-1}{2}}\{(-2x^2+ax)-x\}dx$$

$$=\int_{0}^{\frac{a-1}{2}}\{-2x^2+(a-1)x\}dx \rightarrow \frac{|-2|}{6}\times\left(\frac{a-1}{2}-0\right)^3=\frac{(a-1)^3}{24}$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{a-1}{2}x^2\right]_{0}^{\frac{a-1}{2}}$$

$$=\frac{(a-1)^3}{24}$$

즉, $\frac{(a-1)^3}{24}=9$이므로

$(a-1)^3=216$

이때 a는 실수이므로

$a-1=6$ $\therefore a=7$

0987 답 ③

곡선 $y=x^3+x^2-3x$와 직선 $y=-2x+k$의 서로 다른 교점의 개수가 2이려면 방정식 $x^3+x^2-3x=-2x+k$, 즉 $x^3+x^2-x=k$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3+x^2-x$라 하면

$f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$

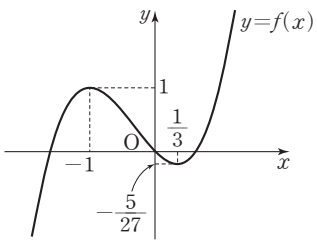
$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1	↘	$-\frac{5}{27}$	↗

이때 $f(0)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

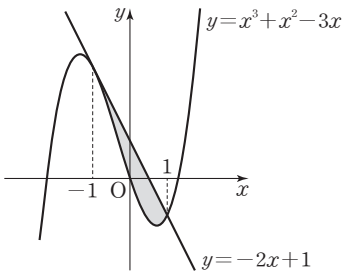
$k=1\ (\because\ k>0)$

곡선 $y=x^3+x^2-3x$와 직선 $y=-2x+1$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3+x^2-3x=-2x+1$

$x^3+x^2-x-1=0,\ (x+1)^2(x-1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-1}^{1}\{(-2x+1)-(x^3+x^2-3x)\}\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(-x^3-x^2+x+1)\,dx$ → $\int_{-1}^{1}x^3\,dx=\int_{-1}^{1}x\,dx=0$

$=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)\,dx$

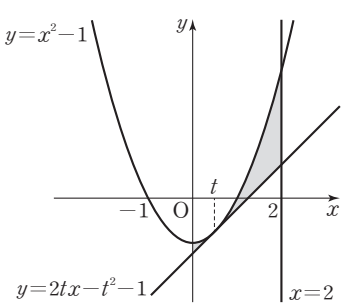
$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

0988 답 ①

$f(x)=x^2-1$이라 하면 $f'(x)=2x$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ t^2-1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-1)=2t(x-t)$ $\therefore\ y=2tx-t^2-1$



곡선 $y=x^2-1$과 접선 $y=2tx-t^2+1$ 및 y축과 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^2\{(x^2-1)-(2tx-t^2-1)\}\,dx$

$=\int_0^2(x^2-2tx+t^2)\,dx$

$=\left[\frac{1}{3}x^3-tx^2+t^2x\right]_0^2$

$=2t^2-4t+\frac{8}{3}$

$=2(t-1)^2+\frac{2}{3}$

따라서 $0<t<2$에서 구하는 넓이의 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다.

0989 답 250

곡선 $y=x^2-5x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\int_0^5(-x^2+5x)\,dx$ → $\frac{|-1|}{6}\times(5-0)^3=\frac{125}{6}$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_0^5=\frac{125}{6}$ …… ⓘ

$0\le x\le 5$에서 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2-5x=mx,\ x^2-(m+5)x=0$

$x(x-m-5)=0$ $\therefore\ x=0$ 또는 $x=m+5$

곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\int_0^{m+5}\{mx-(x^2-5x)\}\,dx$

$=\int_0^{m+5}\{-x^2+(m+5)x\}\,dx$ → $\frac{|-1|}{6}\times\{(m+5)-0\}^3=\frac{(m+5)^3}{6}$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{m+5}{2}x^2\right]_0^{m+5}$

$=\frac{(m+5)^3}{6}$ …… ⓘⓘ

이때 $S_1=2S_2$이므로

$\frac{125}{6}=\frac{(m+5)^3}{3}$ $\therefore\ (m+5)^3=\frac{125}{2}$

$\therefore\ 4(m+5)^3=4\times\frac{125}{2}=250$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 곡선 $y=x^2-5x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	30 %
ⓘⓘ 곡선 $y=x^2-5x$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 도형의 넓이를 m에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘⓘ $4(m+5)^3$의 값 구하기	40 %

0990 답 ⑤

곡선 $y=-x^2+4x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$S_1+S_2=\int_0^4(-x^2+4x)\,dx$ → $\frac{|-1|}{6}\times(4-0)^3=\frac{32}{3}$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4=\frac{32}{3}$

곡선 $y=-x^2+4x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2+4x=x$, $x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=3$

곡선 $y=-x^2+4x$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$S_1=\int_0^3\{(-x^2+4x)-x\}\,dx$

$=\int_0^3(-x^2+3x)\,dx$ → $\frac{|-1|}{6}\times(3-0)^3=\frac{9}{2}$

$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^3=\frac{9}{2}$

$\therefore S_2=(S_1+S_2)-S_1=\frac{32}{3}-\frac{9}{2}=\frac{37}{6}$

$\therefore \frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{9}{2}}{\frac{37}{6}}=\frac{27}{37}$

다른 풀이

S_2의 값은 다음과 같이 구할 수도 있다.

$S_2=\int_0^3 x\,dx+\int_3^4(-x^2+4x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^3+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_3^4$

$=\frac{9}{2}+\frac{5}{3}=\frac{37}{6}$

0991 답 ⑤

곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표를 구하면

$\frac{1}{2}(x+1)^3+4=0$, $(x+1)^3=-8$

이때 x는 실수이므로

$x+1=-2$ $\therefore x=-3$

즉, A$(-3, 0)$이므로 직선 l의 방정식은 $x=-3$

따라서 $S_1=S_2$이므로 $\int_{-3}^0\{f(x)-k\}\,dx=0$에서

$\int_{-3}^0\left\{\frac{1}{2}(x+1)^3+4-k\right\}dx=0$

$\int_{-3}^0\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}-k\right)dx=0$

$\left[\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{4}x^2+\left(\frac{9}{2}-k\right)x\right]_{-3}^0=0$

$3k-\frac{81}{8}=0$ $\therefore k=\frac{27}{8}$

0992 답 $\frac{1}{3}$

곡선 $y=3x(x-1)^2$과 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표를 구하면

$3x(x-1)^2=mx$, $3x^3-6x^2+3x=mx$

$\therefore x(3x^2-6x+3-m)=0$

이차방정식 $3x^2-6x+3-m=0$의 두 실근 중 큰 근을 $\alpha\,(\alpha\neq0)$라 하면 $3\alpha^2-6\alpha+3-m=0$에서

$m=3\alpha^2-6\alpha+3$ …… ㉠ …… ⓘ

이때 곡선과 직선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^\alpha\{3x(x-1)^2-mx\}\,dx=0$ …… ⓘⓘ

$\int_0^\alpha\{3x^3-6x^2+(3-m)x\}\,dx=0$

$\left[\frac{3}{4}x^4-2x^3+\frac{3-m}{2}x^2\right]_0^\alpha=0$

$\frac{3}{4}\alpha^4-2\alpha^3+\frac{(3-m)}{2}\alpha^2=0$, $\alpha^2\left(\frac{3}{4}\alpha^2-2\alpha+\frac{3-m}{2}\right)=0$

$\therefore \frac{3}{4}\alpha^2-2\alpha+\frac{3-m}{2}=0\,(\because \alpha\neq0)$

이 식에 ㉠을 대입하면

$\frac{3}{4}\alpha^2-2\alpha+\frac{3-(3\alpha^2-6\alpha+3)}{2}=0$

$-\frac{3}{4}\alpha^2+\alpha=0$, $-\frac{3}{4}\alpha\left(\alpha-\frac{4}{3}\right)=0$ $\therefore \alpha=\frac{4}{3}\,(\because \alpha\neq0)$

$\alpha=\frac{4}{3}$를 ㉠에 대입하여 풀면 $m=\frac{1}{3}$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 방정식 $3x(x-1)^2=mx$의 두 실근 중 큰 근을 α로 놓고, m을 α에 대한 식으로 나타내기	20 %
ⓘⓘ $\int_0^\alpha\{3x(x-1)^2-mx\}\,dx=0$임을 알기	20 %
ⓘⓘⓘ m의 값 구하기	60 %

0993 답 ①

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표가 0, 2, 4이므로 0, 2, 4는 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$의 세 실근이다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $h(0)=h(2)=h(4)=0$이므로

$h(x)=x(x-2)(x-4)=x^3-6x^2+8x$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^2 h(x)\,dx+\int_2^4\{-h(x)\}\,dx$

$=\int_0^2(x^3-6x^2+8x)\,dx+\int_2^4(-x^3+6x^2-8x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+4x^2\right]_0^2+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^3-4x^2\right]_2^4$

$=4+4=8$

0994 답 ①

곡선 $y=-2x^2+7x$와 직선 $y=3x$의 교점의 x좌표를 구하면

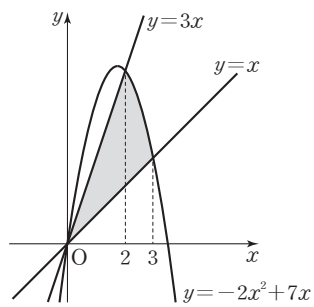
$-2x^2+7x=3x$, $2x^2-4x=0$

$2x(x-2)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=2$

곡선 $y=-2x^2+7x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$-2x^2+7x=x$, $2x^2-6x=0$

$2x(x-3)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2(3x-x)\,dx+\int_2^3\{(-2x^2+7x)-x\}\,dx$$
$$=\int_0^2 2x\,dx+\int_2^3(-2x^2+6x)\,dx$$
$$=\Big[x^2\Big]_0^2+\Big[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\Big]_2^3$$
$$=4+\frac{7}{3}=\frac{19}{3}$$

다른 풀이

$$S=\int_0^3\{(-2x^2+7x)-x\}\,dx-\int_0^2\{(-2x^2+7x)-3x\}\,dx$$
$$=\int_0^3(-2x^2+6x)\,dx-\int_0^2(-2x^2+4x)\,dx$$
$$=\Big[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\Big]_0^3-\Big[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\Big]_0^2$$
$$=9-\frac{8}{3}=\frac{19}{3}$$

$\rightarrow \frac{|-2|}{6}\times(3-0)^3-\frac{|-2|}{6}\times(2-0)^3=9-\frac{8}{3}$

0995 답 ③

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 -3이고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 $x=1$인 점에서 접하고 $x=0$인 점에서 만나므로

$f(x)-g(x)=-3x(x-1)^2$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1\{g(x)-f(x)\}\,dx=\int_0^1 3x(x-1)^2\,dx$$
$$=\int_0^1(3x^3-6x^2+3x)\,dx$$
$$=\Big[\frac{3}{4}x^4-2x^3+\frac{3}{2}x^2\Big]_0^1=\frac{1}{4}$$

0996 답 ④

곡선 $y=x^2-5x+4$와 직선 $y=-x+k$의 교점의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 하면

$$A=\int_\alpha^\beta\{(-x+k)-(x^2-5x+4)\}\,dx$$
$$=\int_\alpha^\beta(-x^2+4x-4+k)\,dx$$
$$B=\int_0^\alpha\{(x^2-5x+4)-(-x+k)\}\,dx$$
$$=\int_0^\alpha(x^2-4x+4-k)\,dx$$

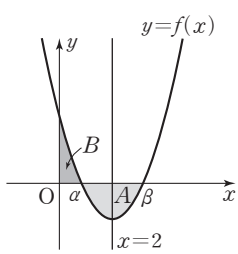
이때 $A:B=2:1$에서 $A=2B$

$f(x)=x^2-4x+4-k=(x-2)^2-k$

라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이므로

$\int_0^2 f(x)\,dx=0$에서

$$\int_0^2(x^2-4x+4-k)\,dx=0$$
$$\Big[\frac{1}{3}x^3-2x^2+(4-k)x\Big]_0^2=0$$
$$\frac{8}{3}-2k=0 \qquad \therefore k=\frac{4}{3}$$



0997 답 ④

$x>0$일 때, 두 함수 $y=ax^2+2$, $y=2x$의 그래프가 점 B에서 접하므로 이차방정식 $ax^2+2=2x$, 즉 $ax^2-2x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=1-2a=0 \qquad \therefore a=\frac{1}{2}$$

접점 B의 x좌표를 구하면

$$\frac{1}{2}x^2+2=2x,\ \frac{1}{2}x^2-2x+2=0$$
$$\frac{1}{2}(x-2)^2=0 \qquad \therefore x=2$$

이때 두 함수 $y=\frac{1}{2}x^2+2$, $y=2|x|$의 그래프는 각각 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 두 함수 $y=\frac{1}{2}x^2+2$, $y=2|x|$의 그래프와 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=2\int_0^2\Big\{\Big(\frac{1}{2}x^2+2\Big)-2x\Big\}\,dx$$
$$=2\int_0^2\Big(\frac{1}{2}x^2-2x+2\Big)\,dx$$
$$=2\Big[\frac{1}{6}x^3-x^2+2x\Big]_0^2$$
$$=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

0998 답 ③

곡선 $y=f(x)$와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-x=0$, $x(x+1)(x-1)=0$

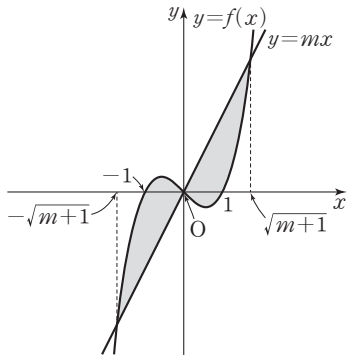
$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-x=mx$, $x^3-(1+m)x=0$

$x(x^2-m-1)=0$

$\therefore x=-\sqrt{m+1}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{m+1}$ ($\because m>0$)



곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^1|f(x)|\,dx$$
$$=2\int_0^1(-x^3+x)\,dx$$
$$=2\Big[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$
$$=2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S(m)$은 닫힌구간 $[0,\sqrt{m+1}]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=mx$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로

$$S(m)=2\int_0^{\sqrt{m+1}}\{mx-(x^3-x)\}dx$$
$$=2\int_0^{\sqrt{m+1}}\{-x^3+(m+1)x\}dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{m+1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{m+1}}$$
$$=2\times\frac{(m+1)^2}{4}=\frac{(m+1)^2}{2}$$

즉, $\dfrac{S(m)}{S}=\dfrac{\frac{(m+1)^2}{2}}{\frac{1}{2}}=(m+1)^2$이므로

$(m+1)^2=16$

이때 $m>0$이므로

$m+1=4$ $\therefore m=3$

0999 답 ②

S_1+S_2는 삼각형 OAB의 넓이와 같으므로

$S_1+S_2=\frac{1}{2}\times2\times3=3$

이때 $S_1:S_2=13:3$에서

$S_1=3\times\frac{13}{16}=\frac{39}{16}$ ……㉠

두 점 A(2, 0), B(0, 3)을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{3-0}{0-2}=-\frac{3}{2}$

이므로 직선의 방정식은

$y-3=-\frac{3}{2}(x-0)$ $\therefore y=-\frac{3}{2}x+3$

곡선 $y=ax^2$과 직선 $y=-\frac{3}{2}x+3$이 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표를 $p\,(0<p<2)$라 하면

$ap^2=-\frac{3}{2}p+3$ ……㉡

곡선 $y=ax^2$과 직선 $y=-\frac{3}{2}x+3$ 및 y축으로 둘러싸인 부분 중에서 제1사분면에 있는 부분의 넓이 S_1은

$$S_1=\int_0^p\left(-\frac{3}{2}x+3-ax^2\right)dx$$
$$=\left[-\frac{3}{4}x^2+3x-\frac{a}{3}x^3\right]_0^p$$
$$=-\frac{3}{4}p^2+3p-\frac{a}{3}p^3$$
$$=-\frac{3}{4}p^2+3p-\frac{1}{3}p\left(-\frac{3}{2}p+3\right)\ (\because ㉡)$$
$$=-\frac{1}{4}p^2+2p$$

즉, ㉠에서 $-\frac{1}{4}p^2+2p=\frac{39}{16}$이므로

$4p^2-32p+39=0$, $(2p-3)(2p-13)=0$

$\therefore p=\frac{3}{2}\ (\because 0<p<2)$

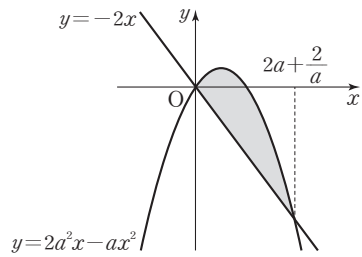
따라서 $p=\frac{3}{2}$을 ㉡에 대입하여 풀면 $a=\frac{1}{3}$

1000 답 $\frac{32}{3}$

곡선 $y=2a^2x-ax^2$과 직선 $y=-2x$의 교점의 x좌표를 구하면

$2a^2x-ax^2=-2x$, $ax^2-2(a^2+1)x=0$

$x\{ax-2(a^2+1)\}=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=2a+\frac{2}{a}$



$a>0$에서 $2a+\frac{2}{a}>0$이므로

$$S(a)=\int_0^{2a+\frac{2}{a}}\{(2a^2x-ax^2)-(-2x)\}dx$$
$$=\int_0^{2a+\frac{2}{a}}\{-ax^2+2(a^2+1)x\}dx$$
$$=\left[-\frac{a}{3}x^3+(a^2+1)x^2\right]_0^{2a+\frac{2}{a}}$$
$$=\frac{4}{3}a\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$$

→ $\frac{|-a|}{6}\times\left\{\left(2a+\frac{2}{a}\right)-0\right\}^3=\frac{4}{3}a\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$

$\therefore \dfrac{S(a)}{a}=\frac{4}{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$

이때 $a>0$, $\frac{1}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+\frac{1}{a}\ge2\sqrt{a\times\frac{1}{a}}=2$ (단, 등호는 $a=1$일 때 성립한다.)

$\therefore \dfrac{S(a)}{a}=\frac{4}{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3\ge\frac{4}{3}\times2^3=\frac{32}{3}$

따라서 $\frac{S(a)}{a}$의 최솟값은 $\frac{32}{3}$이다.

1001 답 ③

구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{2}\left\{\left(\frac{4}{5}x^2+2\right)-\left(-\frac{1}{5}x^2+1\right)\right\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{-1}^{2}=6$$

1002 답 ①

구하는 넓이를 S라 하면

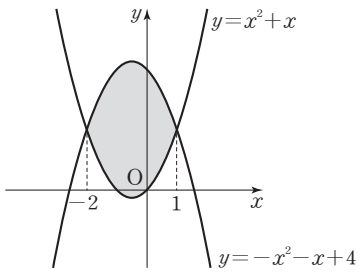
$$S=\int_0^2\{(-x^2+2x)-(x^2-4x)\}dx$$
$$+\int_2^4\{(-x^2+6x-8)-(x^2-4x)\}dx$$
$$=\int_0^2(-2x^2+6x)dx+\int_2^4(-2x^2+10x-8)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2\right]_0^2+\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x\right]_2^4$$
$$=\frac{20}{3}+\frac{20}{3}=\frac{40}{3}$$

1003 답 ⑤

두 곡선 $y=x^2+x$, $y=-x^2-x+4$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2+x=-x^2-x+4$, $2x^2+2x-4=0$

$2(x+2)(x-1)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^{1}\{(-x^2-x+4)-(x^2+x)\}\,dx$$

$$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)\,dx \rightarrow \frac{|-2|}{6}\times\{1-(-2)\}^3=9$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}=9$$

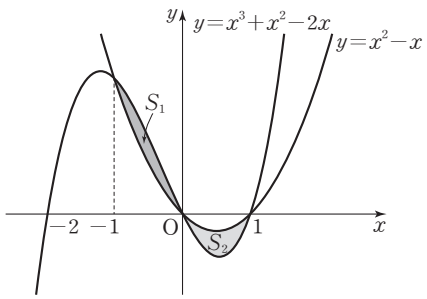
1004 답 ②

두 곡선 $y=x^3+x^2-2x$, $y=x^2-x$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3+x^2-2x=x^2-x$

$x^3-x=0$, $x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{0}\{(x^3+x^2-2x)-(x^2-x)\}\,dx$$

$$+\int_{0}^{1}\{(x^2-x)-(x^3+x^2-2x)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

1005 답 ③

$y=-f(x-1)-1$

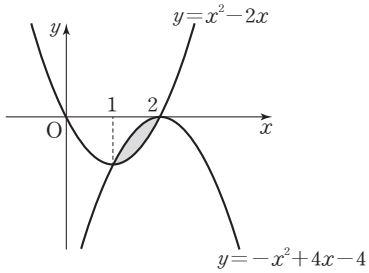
$=-\{(x-1)^2-2(x-1)\}-1$

$=-x^2+4x-4$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=-f(x-1)-1$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2-2x=-x^2+4x-4$, $2x^2-6x+4=0$

$2(x-1)(x-2)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{1}^{2}\{(-x^2+4x-4)-(x^2-2x)\}\,dx$$

$$=\int_{1}^{2}(-2x^2+6x-4)\,dx \rightarrow \frac{|-2|}{6}\times(2-1)^3=\frac{1}{3}$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+3x^2-4x\right]_{1}^{2}=\frac{1}{3}$$

1006 답 ②

$A=\int_{-5}^{0}\{g(x)-f(x)\}\,dx$, $B=\int_{0}^{5}\{f(x)-g(x)\}\,dx$,

$C=\int_{5}^{7}\{g(x)-f(x)\}\,dx$이므로

$$\int_{-5}^{7}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

$$=\int_{-5}^{0}\{f(x)-g(x)\}\,dx+\int_{0}^{5}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

$$+\int_{5}^{7}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

$$=-\int_{-5}^{0}\{g(x)-f(x)\}\,dx+\int_{0}^{5}\{f(x)-g(x)\}\,dx$$

$$-\int_{5}^{7}\{g(x)-f(x)\}\,dx$$

$=-A+B-C$

$=-11+9-6=-8$

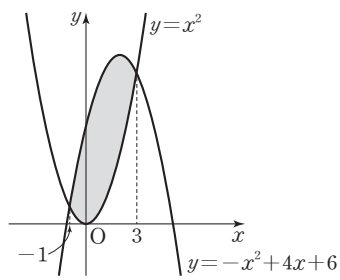
1007 답 ④

$f(x)=-(x-2)^2+10=-x^2+4x+6$이므로

두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+4x+6$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2=-x^2+4x+6$, $2x^2-4x-6=0$

$2(x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{3}\{(-x^2+4x+6)-x^2\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{3}(-2x^2+4x+6)\,dx \rightarrow \frac{|-2|}{6}\times\{3-(-1)\}^3=\frac{64}{3}$$

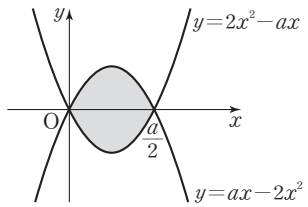
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2+6x\right]_{-1}^{3}=\frac{64}{3}$$

1008 답 ②

두 곡선 $y=2x^2-ax$, $y=ax-2x^2$의 교점의 x좌표를 구하면

$2x^2-ax=ax-2x^2$, $4x^2-2ax=0$

$2x(2x-a)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{a}{2}$ ($\because a>0$)



두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^{\frac{a}{2}}\{(ax-2x^2)-(2x^2-ax)\}\,dx$

$=\int_0^{\frac{a}{2}}(-4x^2+2ax)\,dx$ → $\frac{|-4|}{6}\times\left(\frac{a}{2}-0\right)^3=\frac{1}{12}a^3$

$=\left[-\frac{4}{3}x^3+ax^2\right]_0^{\frac{a}{2}}=\frac{1}{12}a^3$

즉, $\frac{1}{12}a^3=\frac{2}{3}$이므로

$a^3=8$ $\therefore a=2$ ($\because a$는 실수)

다른 풀이

두 곡선은 x축에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=ax-2x^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

따라서 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 다음과 같이 구할 수도 있다.

$2\int_0^{\frac{a}{2}}(ax-2x^2)\,dx=2\left[\frac{a}{2}x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_0^{\frac{a}{2}}$

$=2\times\frac{1}{24}a^3=\frac{1}{12}a^3$

1009 답 ③

두 곡선 $y=x^3-3x^2+ax+1$, $y=ax^2-2ax+1$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-3x^2+ax+1=ax^2-2ax+1$

$x^3-(a+3)x^2+3ax=0$, $x(x-a)(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=a$ 또는 $x=3$

이때 $0<a<3$이고, 두 곡선으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^3\{x^3-3x^2+ax+1-(ax^2-2ax+1)\}\,dx=0$

$\int_0^3\{x^3-(a+3)x^2+3ax\}\,dx=0$

$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+3}{3}x^3+\frac{3}{2}ax^2\right]_0^3=0$

$\frac{9}{2}a-\frac{27}{4}=0$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

1010 답 ④

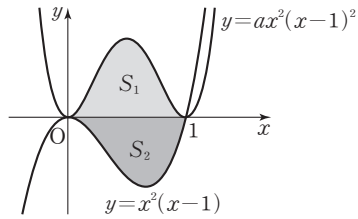
두 곡선 $y=ax^2(x-1)^2$, $y=x^2(x-1)$의 교점의 x좌표를 구하면

$ax^2(x-1)^2=x^2(x-1)$

$x^2(x-1)(ax-a-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=1+\frac{1}{a}$

곡선 $y=ax^2(x-1)^2$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 곡선 $y=x^2(x-1)$과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하자.



$S_1=\int_0^1 ax^2(x-1)^2\,dx$

$=a\int_0^1(x^4-2x^3+x^2)\,dx$

$=a\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{30}a$

$S_2=\int_0^1\{-x^2(x-1)\}\,dx$

$=\int_0^1(-x^3+x^2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{12}$

이때 $S_1=S_2$이므로

$\frac{1}{30}a=\frac{1}{12}$ $\therefore a=\frac{5}{2}$

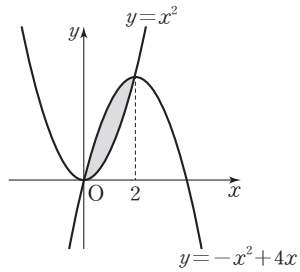
참고 $a>0$에서 $1+\frac{1}{a}>1$이므로 닫힌구간 $[0, 1]$에서 두 곡선의 교점의 x좌표는 $x=0$ 또는 $x=1$이다.

1011 답 1

두 곡선 $y=x^2$과 $y=-x^2+4x$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2=-x^2+4x$, $2x^2-4x=0$

$2x(x-2)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=2$ …… i



두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+4x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\int_0^2\{(-x^2+4x)-x^2\}\,dx$

$=\int_0^2(-2x^2+4x)\,dx$ → $\frac{|-2|}{6}\times(2-0)^3=\frac{8}{3}$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^2=\frac{8}{3}$ …… ii

닫힌구간 $[0, a]$에서 두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+4x$와 직선 $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\int_0^a\{(-x^2+4x)-x^2\}\,dx$

$=\int_0^a(-2x^2+4x)\,dx$

$=\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^a=-\frac{2}{3}a^3+2a^2$ …… iii

이때 $S_1=2S_2$이므로

$\frac{8}{3}=2\left(-\frac{2}{3}a^3+2a^2\right)$, $\frac{4}{3}a^3-4a^2+\frac{8}{3}=0$

$a^3-3a^2+2=0$, $(a-1)(a^2-2a-2)=0$

$\therefore a=1\ (\because 0<a<2)$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ 두 곡선의 교점의 x좌표 구하기	20 %
ⓘⓘ 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 닫힌구간 $[0, a]$에서 두 곡선과 직선 $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓥ a의 값 구하기	20 %

참고 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이와 닫힌구간 $[a, 2]$에서 두 곡선과 직선 $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이를 비교하여 구할 수도 있다.

1012 답 ③

두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=-x^4+x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\int_0^1\{(-x^4+x)-(x^4-x^3)\}dx$$
$$=\int_0^1(-2x^4+x^3+x)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1=\frac{7}{20}$$

두 곡선 $y=x^4-x^3$, $y=ax(x-1)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_0^1\{(x^4-x^3)-ax(x-1)\}dx$$
$$=\int_0^1(x^4-x^3-ax^2+ax)dx$$
$$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{4}x^4-\frac{a}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^1=\frac{1}{6}a-\frac{1}{20}$$

이때 $S_1=S_2$이므로

$\frac{7}{20}=\frac{1}{6}a-\frac{1}{20}$, $\frac{1}{6}a=\frac{2}{5}$ $\therefore a=\frac{12}{5}$

1013 답 ②

닫힌구간 $[-3, 0]$에서 곡선 $y=x^2+3x$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S_1은

$$S_1=\int_{-3}^0(-x^2-3x)dx \rightarrow \frac{|-1|}{6}\times\{0-(-3)\}^3=\frac{9}{2}$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^0=\frac{9}{2}$$

이때 $S_1:S_2=3:2$에서 $S_2=\frac{2}{3}S_1$이므로

$S_2=\frac{2}{3}\times\frac{9}{2}=3$

두 곡선 $y=x^2+3x$, $y=ax(x^2-9)$로 둘러싸인 도형의 넓이 S_2는

$$S_2=\int_{-3}^0\{ax(x^2-9)-(x^2+3x)\}dx$$
$$=\int_{-3}^0\{ax^3-x^2-(9a+3)x\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}ax^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{9a+3}{2}x^2\right]_{-3}^0=\frac{81}{4}a+\frac{9}{2}$$

즉, $\frac{81}{4}a+\frac{9}{2}=3$이므로

$\frac{81}{4}a=-\frac{3}{2}$ $\therefore a=-\frac{2}{27}$

1014 답 ②

두 곡선 $y=x^n$, $y=x^{n+1}$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^n=x^{n+1}$, $x^{n+1}-x^n=0$

$x^n(x-1)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=1$

이때 닫힌구간 $[0, 1]$에서 $x^n\geq x^{n+1}$이므로

$$S_n=\int_0^1(x^n-x^{n+1})dx$$
$$=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

$$\therefore S_2+S_3+\cdots+S_{10}$$
$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

1015 답 4

곡선 $y=x^2\ (x\geq0)$과 직선 $y=4$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2=4$ $\therefore x=2\ (\because x\geq0)$

곡선 $y=x^2\ (x\geq0)$과 y축 및 직선 $y=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

$$S_1=\int_0^2(4-x^2)dx$$
$$=\left[4x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^2=\frac{16}{3}$$ …… ⓘ

곡선 $y=ax^2\ (x\geq0)$과 직선 $y=4$의 교점의 x좌표를 구하면

$ax^2=4$, $x^2=\frac{4}{a}$ $\therefore x=\frac{2}{\sqrt{a}}\ (\because x\geq0, a>0)$

곡선 $y=ax^2\ (x\geq0)$과 y축 및 직선 $y=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$$S_2=\int_0^{\frac{2}{\sqrt{a}}}(4-ax^2)dx$$
$$=\left[4x-\frac{a}{3}x^3\right]_0^{\frac{2}{\sqrt{a}}}=\frac{16}{3\sqrt{a}}$$ …… ⓘⓘ

이때 $S_1=2S_2$에서 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$\frac{16}{3\sqrt{a}}=\frac{8}{3}$, $\sqrt{a}=2$

$\therefore a=4$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 곡선 $y=x^2\ (x\geq0)$과 y축 및 직선 $y=4$로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	30 %
ⓘⓘ 곡선 $y=ax^2\ (x\geq0)$과 y축 및 직선 $y=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 a에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘⓘ a의 값 구하기	30 %

1016 답 40

곡선 $y=\frac{1}{2}x^3$과 x축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이 S_1은

$S_1=\int_0^1 \frac{1}{2}x^3\,dx=\left[\frac{1}{8}x^4\right]_0^1=\frac{1}{8}$

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(a)=b$에서

$b=\frac{1}{2}a^3$

곡선 $y=\frac{1}{2}x^3$과 두 직선 $x=1$, $y=\frac{1}{2}a^3$으로 둘러싸인 부분의 넓이 S_2는

$S_2=\int_1^a\left(\frac{1}{2}a^3-\frac{1}{2}x^3\right)dx$

$=\left[\frac{1}{2}a^3x-\frac{1}{8}x^4\right]_1^a=\frac{3}{8}a^4-\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{8}$

이때 $S_1=S_2$에서

$\frac{1}{8}=\frac{3}{8}a^4-\frac{1}{2}a^3+\frac{1}{8}$

$3a^4-4a^3=0,\ a^3(3a-4)=0 \quad \therefore\ a=\frac{4}{3}\ (\because\ a>1)$

$\therefore\ 30a=30\times\frac{4}{3}=40$

1017 답 ①

㈎, ㈏의 등식의 양변을 각각 x에 대하여 미분하면

$f(x)+g(x)=3x^2+9x$

$f(x)-g(x)=3x^2-3x-6$

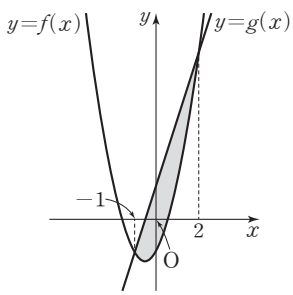
위의 두 식을 연립하여 풀면

$f(x)=3x^2+3x-3,\ g(x)=6x+3$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표를 구하면

$3x^2+3x-3=6x+3,\ 3x^2-3x-6=0$

$(x+1)(x-2)=0 \quad \therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-1}^2\{(6x+3)-(3x^2+3x-3)\}\,dx$

$=\int_{-1}^2(-3x^2+3x+6)\,dx \rightarrow \frac{|-3|}{6}\times\{2-(-1)\}^3=\frac{27}{2}$

$=\left[-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x\right]_{-1}^2=\frac{27}{2}$

1018 답 ⑤

$f(x)=\int(3x^2+4x-1)\,dx=x^3+2x^2-x+C_1$

$g(x)=\int(8x+3)\,dx=4x^2+3x+C_2$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 서로 다른 교점의 개수가 2이므로 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=x^3+2x^2-x+C_1-(4x^2+3x+C_2)$

$=x^3-2x^2-4x+C$

이때 $f(0)>g(0)$이므로

$h(0)=f(0)-g(0)>0 \quad \therefore\ C>0$

$h'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$

$h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값은

$x=-\frac{2}{3}$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	$-\frac{2}{3}$	…	2	…
$h'(x)$	+	0	−	0	+
$h(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

방정식 $h(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$h\left(-\frac{2}{3}\right)h(2)=0$이어야 하므로

$\left(\frac{40}{27}+C\right)(-8+C)=0 \quad \therefore\ C=8\ (\because\ C>0)$

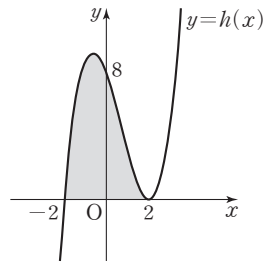
$\therefore\ h(x)=x^3-2x^2-4x+8$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표를 구하면

$f(x)=g(x)$, 즉 $h(x)=0$에서

$x^3-2x^2-4x+8=0,\ (x+2)(x-2)^2=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-2}^2(x^3-2x^2-4x+8)\,dx \rightarrow \int_{-2}^2 x^3\,dx=\int_{-2}^2 4x\,dx=0$

$=2\int_0^2(-2x^2+8)\,dx$

$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+8x\right]_0^2=\frac{64}{3}$

1019 답 ⑤

곡선 $y=ax^2$과 직선 $y=1$의 교점의 x좌표를 구하면

$ax^2=1,\ x^2=\frac{1}{a} \quad \therefore\ x=\frac{1}{\sqrt{a}}\ (\because\ x>0)$

이때 $S_1+S_2=1$이고, $S_1:S_2=4:5$이므로 $S_2=\frac{5}{9}$이어야 한다.

$\therefore\ S_2=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(1-ax^2)\,dx$

$=\left[x-\frac{a}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{2}{3\sqrt{a}}$

즉, $\frac{2}{3\sqrt{a}}=\frac{5}{9}$이므로

$\sqrt{a}=\frac{6}{5}$ $\therefore a=\frac{36}{25}$

1020 답 ①

$f(1-x)=-f(1+x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(1)=-f(1)$ $\therefore f(1)=0$

$f(1-x)=-f(1+x)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(0)=-f(2)$

이때 $f(0)=0$이므로 $f(2)=0$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x(x-1)(x-2)=x^3-3x^2+2x$

$g(x)=(x^2-2x)(x^2-1)-f(x)$라 하면

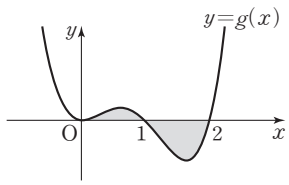
$g(x)=(x^2-2x)(x^2-1)-(x^3-3x^2+2x)$

$=x^4-3x^3+2x^2$

곡선 $y=g(x)$와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$x^4-3x^3+2x^2=0$, $x^2(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^1(x^4-3x^3+2x^2)\,dx+\int_1^2(-x^4+3x^3-2x^2)\,dx$

$=\left[\frac{1}{5}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^1+\left[-\frac{1}{5}x^5+\frac{3}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_1^2$

$=\frac{7}{60}+\frac{23}{60}=\frac{1}{2}$

1021 답 ⑤

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이고 $f(1)=f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$ (a는 상수)라 하면

$f'(x)=(x-2)(x-a)+(x-1)(x-a)+(x-1)(x-2)$

이때 $f'(0)=-7$에서

$3a+2=-7$, $3a=-9$ $\therefore a=-3$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x+3)$

$=x^3-7x+6$

즉, $f(3)=12$이므로 점 P의 좌표는 $(3, 12)$

두 점 $O(0, 0)$, $P(3, 12)$를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{12-0}{3-0}=4$

이므로 직선의 방정식은 $y=4x$

이때 점 Q의 x좌표를 k라 하면

$A=\int_0^k\{f(x)-4x\}\,dx$

$B=\int_k^3\{4x-f(x)\}\,dx$

$\therefore B-A=\int_k^3\{4x-f(x)\}\,dx-\int_0^k\{f(x)-4x\}\,dx$

$=\int_k^3\{4x-f(x)\}\,dx+\int_0^k\{4x-f(x)\}\,dx$

$=\int_0^3\{4x-f(x)\}\,dx$

$=\int_0^3\{4x-(x^3-7x+6)\}\,dx$

$=\int_0^3(-x^3+11x-6)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{11}{2}x^2-6x\right]_0^3=\frac{45}{4}$

1022 답 ④

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $y=f(x)$가 점 $(-1, 0)$을 지나고 점 $(1, 0)$에서 x축에 접하므로

$f(x)=(x+1)(x-1)^2=x^3-x^2-x+1$

이차함수 $g(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a>0$)라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 $x=0$에서 공통인 접선을 가지므로

$f(0)=g(0)$에서 $c=1$

두 곡선의 $x=0$에서의 접선의 기울기가 같고

$f'(x)=3x^2-2x-1$, $g'(x)=2ax+b$이므로

$f'(0)=g'(0)$에서 $b=-1$

$\therefore g(x)=ax^2-x+1$

또 $x=3$에서 두 곡선이 만나므로 $f(3)=g(3)$에서

$16=9a-2$ $\therefore a=2$

$\therefore g(x)=2x^2-x+1$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^3\{(2x^2-x+1)-(x^3-x^2-x+1)\}\,dx$

$=\int_0^3(-x^3+3x^2)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3\right]_0^3=\frac{27}{4}$

1023 답 ④

두 곡선 $y=ax^3$, $y=-\frac{1}{a}x^3$은 원점에서 만나고, $a>0$이므로 닫힌 구간 $[0, 1]$에서 $ax^3\geq-\frac{1}{a}x^3$

두 곡선 $y=ax^3$, $y=-\frac{1}{a}x^3$과 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_0^1\left\{ax^3-\left(-\frac{1}{a}x^3\right)\right\}dx=\left(a+\frac{1}{a}\right)\int_0^1x^3\,dx$

$=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$

$=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)$

이때 $a>0$, $\frac{1}{a}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)\geq\frac{1}{4}\times2\sqrt{a\times\frac{1}{a}}=\frac{1}{2}$

(단, 등호는 $a=1$일 때 성립한다.)

따라서 구하는 넓이의 최솟값은 $\frac{1}{2}$이다.

1024 답 ①

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

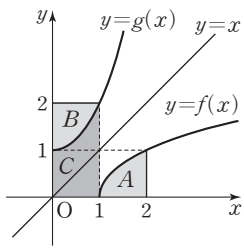
따라서 구하는 넓이는

$$2\int_1^4\{x-f(x)\}\,dx=\int_1^4 2x\,dx-2\int_1^4 f(x)\,dx$$
$$=\Big[x^2\Big]_1^4-2\times 6$$
$$=15-12=3$$

1025 답 ②

$f(1)=0$, $f(2)=1$이므로 $g(0)=1$, $g(1)=2$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



이때 $A=B$이므로

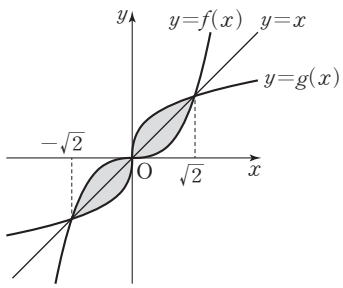
$$\int_1^2 f(x)\,dx+\int_0^1 g(x)\,dx=A+C=B+C$$
$$=1\times 2=2$$

1026 답 ④

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$\frac{1}{2}x^3=x$, $\frac{1}{2}x(x^2-2)=0$

$\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{2}$



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

이때 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-\sqrt{2}}^0\left(\frac{1}{2}x^3-x\right)dx+\int_0^{\sqrt{2}}\left(x-\frac{1}{2}x^3\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-\sqrt{2}}^0+\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4\right]_0^{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

따라서 구하는 넓이는

$2S=2\times 1=2$

1027 답 ①

$f(x)=x^3-x^2+x$에서 $f'(x)=3x^2-2x+1$

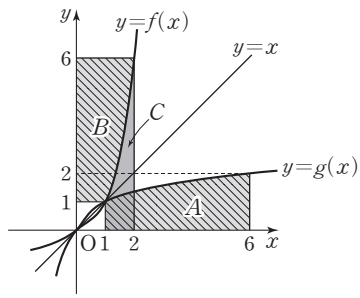
이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-3=-2<0$

즉, 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$f(1)=1$, $f(2)=6$이므로 $g(1)=1$, $g(6)=2$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



$A=\int_1^6 g(x)\,dx$, $C=\int_1^2 f(x)\,dx$라 하면 $A=B$이므로

$$\int_1^2 f(x)\,dx+\int_1^6 g(x)\,dx=C+A=C+B$$
$$=2\times 6-1\times 1=11$$

1028 답 $\frac{4}{3}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 접하면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$도 접한다.

즉, 이차방정식 $\frac{1}{4}x^2+2a=x$, 즉 $x^2-4x+8a=0$이 중근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

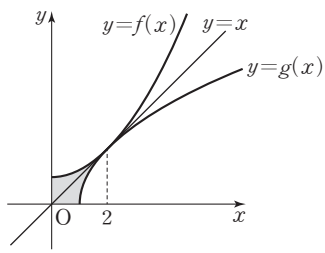
$\frac{D}{4}=(-2)^2-8a=0$, $8a=4$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$ …… ⓘ

$\therefore f(x)=\frac{1}{4}x^2+1$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$\frac{1}{4}x^2+1=x$, $\frac{1}{4}x^2-x+1=0$

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$ $\quad\therefore x=2$ …… ⓘⓘ



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 구하는 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$2\int_0^2\left\{\left(\frac{1}{4}x^2+1\right)-x\right\}dx=2\int_0^2\left(\frac{1}{4}x^2-x+1\right)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^2$$
$$=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	40 %

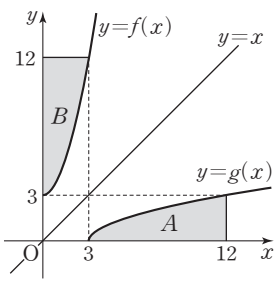
1029 답 ①

$f(0)=3$이므로 $g(3)=0$

$g(12)=a$라 하면 $f(a)=12$이므로

$a^2+3=12$, $a^2=9$ $\therefore a=3$ ($\because a\geq 0$)

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



$A=\int_3^{12} g(x)\,dx$라 하면 $A=B$이므로 구하는 넓이는

$$\int_3^{12} g(x)\,dx=3\times 12-\int_0^3 f(x)\,dx=36-\int_0^3 (x^2+3)\,dx$$

$$=36-\left[\frac{1}{3}x^3+3x\right]_0^3=36-18=18$$

1030 답 ③

$g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$a^3+a-1=1$, $a^3+a-2=0$

$(a-1)(a^2+a+2)=0$ $\therefore a=1$ ($\because a$는 실수)

즉, $f(1)=1$이므로 $g(1)=1$

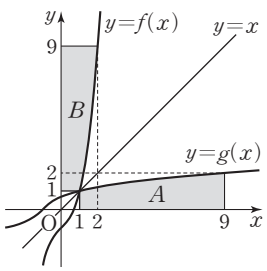
$g(9)=b$라 하면 $f(b)=9$이므로

$b^3+b-1=9$, $b^3+b-10=0$

$(b-2)(b^2+2b+5)=0$ $\therefore b=2$ ($\because b$는 실수)

즉, $f(2)=9$이므로 $g(9)=2$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



$A=\int_1^9 g(x)\,dx$라 하면 $A=B$이므로

$$\int_1^9 g(x)\,dx=2\times 9-1\times 1-\int_1^2 f(x)\,dx$$

$$=17-\int_1^2 (x^3+x-1)\,dx$$

$$=17-\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-x\right]_1^2$$

$$=17-\frac{17}{4}=\frac{51}{4}$$

1031 답 ①

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=5$로 둘러싸인 부분을 A,

곡선 $y=g(x)$와 y축 및 직선 $y=5$로 둘러싸인 부분을 B라 하자.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$A=B$

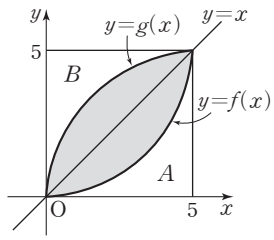
즉, 색을 칠하지 않은 부분의 넓이는

$A+B=2A$

이때 색을 칠하지 않은 부분과 색을 칠한 부분의 넓이의 비가 2 : 3이므로

$2A=(5\times 5)\times\frac{2}{5}=10$ $\therefore A=5$

$\therefore \int_0^5 f(x)\,dx=5$



1032 답 ③

(다)에서 $f(-2)=-2$, $f(1)=1$이므로

$g(-2)=-2$, $g(1)=1$

(나)에서 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 $f(x)\leq x$이고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 $f(x)\leq x\leq g(x)$

따라서 구하는 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로

$$2\int_{-2}^1 \{x-f(x)\}\,dx=\int_{-2}^1 2x\,dx-2\int_{-2}^1 f(x)\,dx$$

$$=\left[x^2\right]_{-2}^1-2\times\left(-\frac{7}{2}\right)$$

$$=-3+7=4$$

1033 답 ③

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$\frac{1}{2}x^3+x+4=x$, $\frac{1}{2}x^3=-4$

$x^3=-8$ $\therefore x=-2$ ($\because x$는 실수)

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+4$의 교점의 x좌표를 구하면

$\frac{1}{2}x^3+x+4=-x+4$

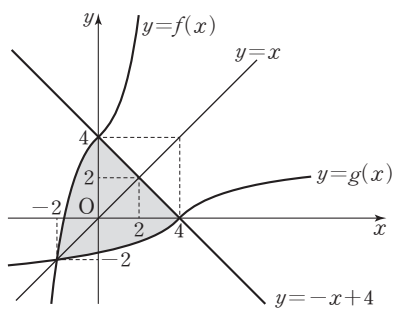
$\frac{1}{2}x^3+2x=0$, $\frac{1}{2}x(x^2+4)=0$

$\therefore x=0$ ($\because x$는 실수)

두 직선 $y=x$, $y=-x+4$의 교점의 x좌표를 구하면

$x=-x+4$, $2x=4$ $\therefore x=2$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



구하는 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x$, $y=-x+4$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

이때 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=x$, $y=-x+4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^{0}\left\{\left(\frac{1}{2}x^3+x+4\right)-x\right\}dx+\int_{0}^{2}\{(-x+4)-x\}dx$$

$$=\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{2}x^3+4\right)dx+\int_{0}^{2}(-2x+4)dx$$

$$=\left[\frac{1}{8}x^4+4x\right]_{-2}^{0}+\left[-x^2+4x\right]_{0}^{2}$$

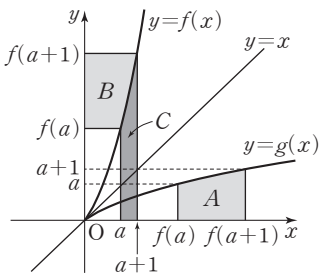
$$=6+4=10$$

따라서 구하는 넓이는

$2S=2\times10=20$

1034 답 ①

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



$A=\int_{f(a)}^{f(a+1)}g(x)dx$, $C=\int_{a}^{a+1}f(x)dx$라 하면 $A=B$이므로

$$\int_{a}^{a+1}f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(a+1)}g(x)dx$$

$=C+A$

$=C+B$

$=(a+1)\times f(a+1)-a\times f(a)$

$=(a+1)\{(a+1)^2+2(a+1)\}-a(a^2+2a)$

$=3a^2+7a+3$

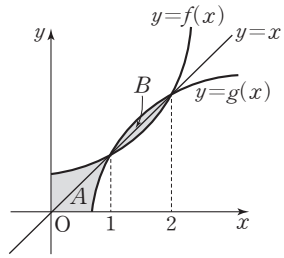
즉, $3a^2+7a+3=13$이므로

$3a^2+7a-10=0$, $(a-1)(3a+10)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

1035 답 ④

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 1, 2이므로

$f(1)=1$, $f(2)=2$에서

$a+b=1$, $4a+b=2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{2}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}$

$$\therefore A-B=2\int_{0}^{1}\{f(x)-x\}dx-2\int_{1}^{2}\{x-f(x)\}dx$$

$$=2\int_{0}^{1}\{f(x)-x\}dx+2\int_{1}^{2}\{f(x)-x\}dx$$

$$=2\int_{0}^{2}\{f(x)-x\}dx$$

$$=2\int_{0}^{2}\left(\frac{1}{3}x^2-x+\frac{2}{3}\right)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x\right]_{0}^{2}$$

$$=2\times\frac{2}{9}=\frac{4}{9}$$

최고수준 도전 기출 239쪽

1036 답 ②

전략 조건 (가), (나)를 이용하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를 구한 후 조건 (다)를 만족시키는 a의 값을 구한다.

(나)의 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$에서 $x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to0}f(x)=0$이므로 $f(0)=0$

이때 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$이므로

$f'(0)=0$

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x^2$

(나)의 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=0$에서 $x\to a$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to a}g(x)=0$이므로 $g(a)=0$

이때 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{x-a}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}=g'(a)$이므로

$g'(a)=0$

(가)에 의하여 $g(0)=f(0)=0$

삼차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$g(x)=x(x-a)^2$

(다)에서 $\int_{0}^{a}\{f(x)-g(x)\}dx=0$이므로

$$\int_{0}^{a}\{x^2-x(x-a)^2\}dx=0$$

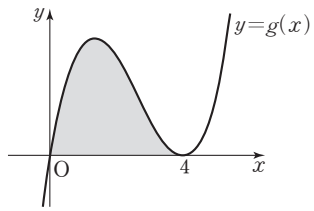
$$\int_{0}^{a}\{-x^3+(2a+1)x^2-a^2x\}dx=0$$

$$\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2a+1}{3}x^3-\frac{a^2}{2}x^2\right]_{0}^{a}=0$$

$$-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3}a^3=0,\ a^4-4a^3=0$$

$a^3(a-4)=0$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$)

$\therefore\ g(x)=x(x-4)^2=x^3-8x^2+16x$



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^4 (x^3-8x^2+16x)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{8}{3}x^3+8x^2\right]_0^4$$
$$=\frac{64}{3}$$

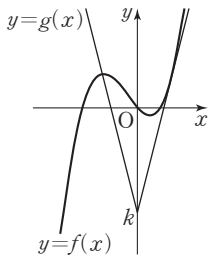
1037 답 80

전략 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그린 후, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 만나는 점의 개수가 2가 되는 조건을 찾아 k의 값을 구한다.

$f(x)=0$에서

$x^3+x^2-x=0,\ x(x^2+x-1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$



이때 $g(x)=\begin{cases}4x+k & (x\geq 0)\\ -4x+k & (x<0)\end{cases}$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수가 2가 되려면 $x>0$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=4x+k$가 접해야 한다.

$f(x)=x^3+x^2-x$에서

$f'(x)=3x^2+2x-1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+t^2-t)\ (t>0)$라 하면 접선의 기울기는

$f'(t)=3t^2+2t-1$이므로 $f'(t)=4$에서

$3t^2+2t-1=4,\ 3t^2+2t-5=0$

$(3t+5)(t-1)=0 \qquad \therefore\ t=1\ (\because\ t>0)$

즉, 접점의 좌표는 $(1,\ 1)$

이 점은 직선 $y=4x+k$ 위의 점이므로

$1=4+k \qquad \therefore\ k=-3$

$x<0$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-4x-3$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3+x^2-x=-4x-3,\ x^3+x^2+3x+3=0$

$(x+1)(x^2+3)=0 \qquad \therefore\ x=-1\ (\because\ x$는 실수$)$

즉, 구하는 부분의 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{0}\{(x^3+x^2-x)-(-4x-3)\}\,dx$$
$$+\int_0^1\{(x^3+x^2-x)-(4x-3)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2+3x+3)\,dx+\int_0^1(x^3+x^2-5x+3)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_0^1$$
$$=\frac{19}{12}+\frac{13}{12}=\frac{8}{3}$$

$\therefore\ 30\times S=30\times\dfrac{8}{3}=80$

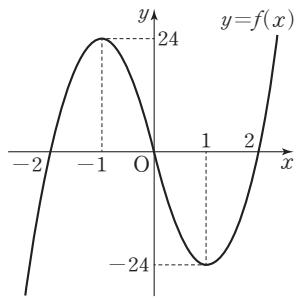
1038 답 46

전략 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후 실수 t의 값에 따라 닫힌구간 $[t,\ t+1]$에서 함수 $f(t)$의 최댓값과 최솟값을 각각 찾아보며 $g(x)$, $h(x)$를 구한다. 대칭성과 평행이동을 활용하여 구하는 도형의 넓이를 직사각형과 간단한 정적분으로 변형하여 구한다.

(나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$x<0$일 때, $f(x)=-24x(x+2)$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



닫힌구간 $[t,\ t+1]$에서 $f(t)$의 최댓값 $g(t)$를 구하면

$t\leq -2$일 때, $g(t)=f(t+1)$

$-2<t\leq -1$일 때, $g(t)=f(-1)=24$

$-1<t\leq\dfrac{1}{2}$일 때, $g(t)=f(t)$

$t>\dfrac{1}{2}$일 때, $g(t)=f(t+1)$

닫힌구간 $[t,\ t+1]$에서 $f(t)$의 최솟값 $h(t)$를 구하면

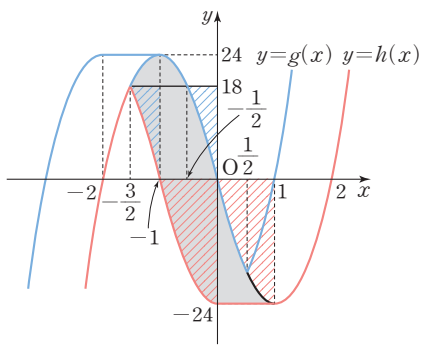
$t\leq -\dfrac{3}{2}$일 때, $h(t)=f(t)$

$-\dfrac{3}{2}<t\leq 0$일 때, $h(t)=f(t+1)$

$0<t\leq 1$일 때, $h(t)=f(1)=-24$

$t>1$일 때, $h(t)=f(t)$

즉, 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 빗금 친 두 도형의 넓이가 각각 서로 같으므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=1\times 18+1\times 24+\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}}\{-24x(x+2)-18\}\,dx$$
$$=42+\int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}}(-24x^2-48x-18)\,dx$$
$$=42+\left[-8x^3-24x^2-18x\right]_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}}$$
$$=42+4=46$$

1039 답 $\frac{4}{3}$

전략 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 A, 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 B, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 C라 하고, 구하는 도형의 넓이를 A, B, C를 이용하여 나타내어 구한다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표를 구하면

$\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{2}x=2$, $\frac{1}{2}(3x^3+x-4)=0$

$\frac{1}{2}(x-1)(3x^2+3x+4)=0$

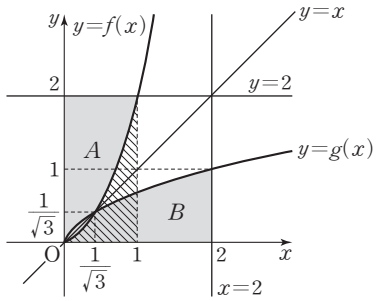
$\therefore x=1$ ($\because$ x는 실수)

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{2}x=x$, $\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{2}x=0$

$\frac{1}{2}x(3x^2-1)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.



곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 A라 하면

$A=1\times2-\int_0^1 f(x)\,dx$

$=2-\int_0^1\left(\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{2}x\right)dx$

$=2-\left[\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{4}x^2\right]_0^1$

$=2-\frac{5}{8}=\frac{11}{8}$

곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 B라 하면 $B=A$이므로

$B=\int_0^2 g(x)\,dx=\frac{11}{8}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 C라 하면 C는 닫힌구간 $\left[0,\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로

$C=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left\{x-\left(\frac{3}{2}x^3+\frac{1}{2}x\right)\right\}dx$

$=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}x^3\right)dx$

$=2\left[\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{8}x^4\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=2\times\frac{1}{24}=\frac{1}{12}$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=2\times2-(A+B-C)$

$=4-\left(\frac{11}{8}+\frac{11}{8}-\frac{1}{12}\right)=\frac{4}{3}$

13 속도와 거리

난이도별 필수 기출 241~252쪽

1040 답 ④

시각 $t=2$에서 점 P의 위치는

$1+\int_0^2(3t^2-t)\,dt=1+\left[t^3-\frac{1}{2}t^2\right]_0^2$

$=1+6=7$

1041 답 ②

시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$\int_1^3(t^3+4t)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4+2t^2\right]_1^3=36$

1042 답 ①

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v(t)=0$에서

$2t-4=0$ $\therefore t=2$

따라서 시각 $t=2$에서 점 P의 위치는

$0+\int_0^2(2t-4)\,dt=\left[t^2-4t\right]_0^2=-4$

1043 답 ③

시각 $t=6$에서 점 P의 위치는

$0+\int_0^6 v(t)\,dt=\int_0^3(5t-t^2)\,dt+\int_3^6(9-t)\,dt$

$=\left[\frac{5}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^3+\left[9t-\frac{1}{2}t^2\right]_3^6$

$=\frac{27}{2}+\frac{27}{2}=27$

1044 답 ⑤

$0\le t\le1$에서 $v(t)\le0$이고, $1\le t\le2$에서 $v(t)\ge0$이므로

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^2|t^3-t|\,dt=\int_0^1(-t^3+t)\,dt+\int_1^2(t^3-t)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1+\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_1^2$

$=\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=\frac{5}{2}$

1045 답 8

시각 $t=3$에서 점 P의 위치는

$0+\int_0^3(t^2+6t-a)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3+3t^2-at\right]_0^3$

$=36-3a$

즉, $36-3a=12$이므로

$3a=24$ $\therefore a=8$

1046 답 ③

ㄱ. $k=0$일 때, $v(t)=t^2+4$

즉, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는

$0+\int_0^1 (t^2+4)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3+4t\right]_0^1=\frac{13}{3}$

ㄴ. $k=2$일 때, $v(t)=t^2-2t+4$

이때 $t^2-2t+4=(t-1)^2+3>0$이므로 속도 $v(t)$의 부호가 바뀌지 않는다.

즉, 출발한 후 점 P의 운동 방향은 바뀌지 않는다.

ㄷ. $k=5$일 때, $v(t)=t^2-5t+4$

$0\le t\le 1$에서 $v(t)\ge 0$이고, $1\le t\le 2$에서 $v(t)\le 0$이므로

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^2 |t^2-5t+4|\,dt$

$=\int_0^1 (t^2-5t+4)\,dt+\int_1^2 (-t^2+5t-4)\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{5}{2}t^2+4t\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{5}{2}t^2-4t\right]_1^2$

$=\frac{11}{6}+\frac{7}{6}=3$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

1047 답 ③

시각 $t=0$에서 점 P의 위치를 x_0이라 하면 시각 $t=2$에서 점 P의 위치는

$x_0+\int_0^2 (3t^2-5t)\,dt=x_0+\left[t^3-\frac{5}{2}t^2\right]_0^2$

$=x_0-2$

즉, $x_0-2=2$이므로 $x_0=4$

따라서 시각 $t=4$에서 점 P의 위치는

$4+\int_0^4 (3t^2-5t)\,dt=4+\left[t^3-\frac{5}{2}t^2\right]_0^4$

$=4+24=28$

다른 풀이

시각 $t=4$에서 점 P의 위치는 시각 $t=2$에서 점 P의 위치에 시각 $t=2$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량을 더한 것과 같으므로

$2+\int_2^4 (3t^2-5t)\,dt=2+\left[t^3-\frac{5}{2}t^2\right]_2^4$

$=2+26=28$

1048 답 20

시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=v'(t)=3t^2-12$ …… ⓘ

시각 $t=k$에서 점 P의 가속도가 0이므로

$3k^2-12=0$, $3(k+2)(k-2)=0$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$ …… ⓘⓘ

따라서 $0\le t\le 2$에서 $v(t)\le 0$이므로 구하는 거리는

$\int_0^2 |t^3-12t|\,dt=\int_0^2 (-t^3+12t)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{4}t^4+6t^2\right]_0^2=20$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 시각 t에서의 점 P의 가속도 구하기	30 %
ⓘⓘ k의 값 구하기	20 %
ⓘⓘⓘ 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리 구하기	50 %

1049 답 ①

$2\le t\le k$에서 $v(t)\ge 0$이므로 시각 $t=2$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_2^k |3t^2-6|\,dt=\int_2^k (3t^2-6)\,dt$

$=\left[t^3-6t\right]_2^k=k^3-6k+4$

즉, $k^3-6k+4=13$이므로

$k^3-6k-9=0$, $(k-3)(k^2+3k+3)=0$

$\therefore k=3\ (\because k>2)$

1050 답 ②

점 P의 시각 $t=2$에서의 위치와 시각 $t=k$에서의 위치가 서로 같으므로 시각 $t=2$에서 $t=k$까지 점 P의 위치의 변화량이 0이다.

즉, $\int_2^k (2t-5)\,dt=0$에서

$\left[t^2-5t\right]_2^k=0$, $k^2-5k+6=0$

$(k-2)(k-3)=0$ $\therefore k=3\ (\because k>2)$

1051 답 1

시각 $t=6$에서 점 P가 다시 출발점을 지나므로 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량은 0이다.

즉, $\int_0^6 v(t)\,dt=0$에서

$\int_0^3 (t^2-3t)\,dt+\int_3^6 a(t-3)\,dt=0$

$\left[\frac{1}{3}t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_0^3+\left[\frac{a}{2}t^2-3at\right]_3^6=0$

$-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}a=0$ $\therefore a=1$

1052 답 8

점 P가 다시 원점으로 돌아오는 시각을 $t=a$라 하면

$\int_0^a (3t^2-6t)\,dt=0$에서

$\left[t^3-3t^2\right]_0^a=0$, $a^3-3a^2=0$

$a^2(a-3)=0$ $\therefore a=3\ (\because a>0)$

즉, 시각 $t=3$에서 점 P가 다시 원점으로 돌아온다. …… ⓘ

따라서 $0\le t\le 2$에서 $v(t)\le 0$이고, $2\le t\le 3$에서 $v(t)\ge 0$이므로 구하는 거리는

$\int_0^3 |3t^2-6t|\,dt=\int_0^2 (-3t^2+6t)\,dt+\int_2^3 (3t^2-6t)\,dt$

$=\left[-t^3+3t^2\right]_0^2+\left[t^3-3t^2\right]_2^3$

$=4+4=8$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 점 P가 다시 원점으로 돌아오는 시각 구하기	50 %
ⓘⓘ 점 P가 다시 원점으로 돌아올 때까지 움직인 거리 구하기	50 %

1053 답 ⑤

시각 t에서의 점 P의 가속도를 $a(t)$라 하면

$a(t)=v'(t)=t^2-4t$

점 P의 가속도가 5가 되는 시각을 $t=k$라 하면

$k^2-4k=5$, $k^2-4k-5=0$

$(k+1)(k-5)=0$ $\therefore k=5\ (\because k>0)$

즉, 시각 $t=5$에서 점 P의 가속도가 5이다.

따라서 $0\le t\le 5$에서 $v(t)\le 0$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^5\left|\frac{1}{3}t^3-2t^2\right|dt=\int_0^5\left(-\frac{1}{3}t^3+2t^2\right)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{12}t^4+\frac{2}{3}t^3\right]_0^5=\frac{125}{4}$$

1054 답 ②

$0\le t\le 2$일 때

$$v(t)=\int a(t)\,dt=\int(kt-2)\,dt=\frac{k}{2}t^2-2t+C$$

㈎에서 $v(0)=5$이므로 $C=5$

㈐에서 $v(2)=2$이므로

$2k+1=2$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

즉, $v(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}t^2-2t+5 & (0\le t\le 2)\\ 4-t & (t\ge 2)\end{cases}$이고,

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이다.

(ⅰ) $0\le t\le 2$일 때, $v(t)=0$에서

$\frac{1}{4}t^2-2t+5=0$

이때 $\frac{1}{4}t^2-2t+5=\frac{1}{4}(t-4)^2+1>0$이므로 $v(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $t\ge 2$일 때, $v(t)=0$에서

$4-t=0$ $\therefore t=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 시각은 $t=4$이다.

따라서 $0\le t\le 2$에서 $v(t)>0$이고, $2\le t\le 4$에서 $v(t)\ge 0$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^4|v(t)|\,dt=\int_0^2\left(\frac{1}{4}t^2-2t+5\right)dt+\int_2^4(4-t)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{12}t^3-t^2+5t\right]_0^2+\left[4t-\frac{1}{2}t^2\right]_2^4$$
$$=\frac{20}{3}+2=\frac{26}{3}$$

1055 답 ③

시각 t에서의 점 P의 속도를 $v(t)$라 하면

$v(t)=x'(t)=t^2-8t+7=(t-4)^2-9$

이때 $v(0)=7$, $v(4)=-9$, $v(8)=7$이므로

$|v(0)|=7$, $|v(4)|=9$, $|v(8)|=7$

즉, $0\le t\le 8$에서 점 P의 속력이 최대가 되는 시각은 $t=4$이다.

따라서 $a=4$이고, $0\le t\le 1$에서 $v(t)\ge 0$, $1\le t\le 4$에서 $v(t)\le 0$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^4|t^2-8t+7|\,dt=\int_0^1(t^2-8t+7)\,dt+\int_1^4(-t^2+8t-7)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-4t^2+7t\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+4t^2-7t\right]_1^4$$
$$=\frac{10}{3}+18=\frac{64}{3}$$

참고 속도 $v(t)$의 절댓값 $|v(t)|$를 시각 t에서의 점 P의 속력이라 한다.

1056 답 24

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v(t)=0$에서

$t^2-(a+1)t=0$, $t(t-a-1)=0$

$a>0$에서 $a+1>0$이므로 시각 $t=a+1$에서 점 P가 운동 방향을 바꾼다.

이때 $0\le t\le a+1$에서 $v(t)\le 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=a+1$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{a+1}|t^2-(a+1)t|\,dt$$
$$=\int_0^{a+1}\{-t^2+(a+1)t\}\,dt \xrightarrow{\frac{|-1|}{6}\times\{(a+1)-0\}^3=\frac{(a+1)^3}{6}}$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{a+1}{2}t^2\right]_0^{a+1}=\frac{(a+1)^3}{6}$$

즉, $\frac{(a+1)^3}{6}=4$이므로 $(a+1)^3=24$

1057 답 16

운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$0\le t\le 3$일 때, $v(t)=0$에서

$-t^2+t+2=0$, $-(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=2\ (\because 0\le t\le 3)$

즉, 시각 $t=2$에서 점 P의 운동 방향이 처음으로 바뀐다.

점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각을 $t=a$라 하면

$a>3$이고, $v(t)=0$에서

$k(a-3)-4=0$ $\therefore a=3+\frac{4}{k}$

시각 $t=3+\frac{4}{k}$에서 점 P의 위치가 1이므로

$$\int_0^{3+\frac{4}{k}}v(t)\,dt=\int_0^3(-t^2+t+2)\,dt+\int_3^{3+\frac{4}{k}}(kt-3k-4)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+2t\right]_0^3+\left[\frac{1}{2}kt^2-(3k+4)t\right]_3^{3+\frac{4}{k}}$$
$$=\frac{3}{2}-\frac{8}{k}$$

즉, $\frac{3}{2}-\frac{8}{k}=1$이므로 $\frac{8}{k}=\frac{1}{2}$ $\therefore k=16$

1058 답 ②

시각 t에서 점 P의 위치를 $x(t)$라 하면

$$x(t)=-3+\int_0^t(a-s)\,ds$$
$$=-3+\left[as-\frac{1}{2}s^2\right]_0^t=-\frac{1}{2}t^2+at-3$$

$x(0)=-3$이므로 점 P가 원점을 지나지 않으려면 $t>0$에서 $x(t)<0$이어야 한다.

$x(t)=-\frac{1}{2}t^2+at-3=-\frac{1}{2}(t-a)^2+\frac{1}{2}a^2-3$

이고, $a>0$이므로 $x(t)$의 최댓값은 $\frac{1}{2}a^2-3$이다.

즉, $\frac{1}{2}a^2-3<0$이어야 하므로

$a^2<6$ $\therefore 0<a<\sqrt{6}\ (\because a>0)$

따라서 구하는 자연수 a의 최댓값은 2이다.

1059 답 ③

점 P가 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸므로 $t>0$에서 $v(t)$의 부호가 한 번만 바뀌어야 한다.

즉, 함수 $y=v(t)$의 그래프가 $t=0$ 또는 $t=1$에서 t축과 접해야 하므로 $a=0$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$이어야 한다.

(i) $a=0$일 때, $v(t)=-t^3(t-1)$이므로

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 v(t)\,dt=\int_0^2\{-t^3(t-1)\}\,dt$$
$$=\int_0^2(-t^4+t^3)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{4}t^4\right]_0^2=-\frac{12}{5}$$

(ii) $a=\frac{1}{2}$일 때, $v(t)=-t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2$이므로

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 v(t)\,dt=\int_0^2\left\{-t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2\right\}dt$$
$$=\int_0^2\left(-t^4+\frac{5}{2}t^3-2t^2+\frac{1}{2}t\right)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{5}{8}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t^2\right]_0^2=-\frac{11}{15}$$

(iii) $a=1$일 때, $v(t)=-t(t-1)^2(t-2)$이므로

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 v(t)\,dt=\int_0^2\{-t(t-1)^2(t-2)\}\,dt$$
$$=\int_0^2(-t^4+4t^3-5t^2+2t)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+t^4-\frac{5}{3}t^3+t^2\right]_0^2=\frac{4}{15}$$

(i), (ii), (iii)에서 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은 $\frac{4}{15}$이다.

1060 답 ④

시각 t에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^t 3(s-1)(s-a)\,ds=\int_0^t\{3s^2-3(a+1)s+3a\}\,ds$$
$$=\left[s^3-\frac{3}{2}(a+1)s^2+3as\right]_0^t$$
$$=t^3-\frac{3}{2}(a+1)t^2+3at$$
$$=t\left\{t^2-\frac{3}{2}(a+1)t+3a\right\}$$

이때 점 P의 위치가 0이 되는 순간이 한 번뿐이려면 $t>0$에서 이차방정식 $t^2-\frac{3}{2}(a+1)t+3a=0$은 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

(i) 0이 아닌 중근을 갖는 경우

이차방정식 $t^2-\frac{3}{2}(a+1)t+3a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\frac{9}{4}(a+1)^2-4\times3a=0$, $\frac{3}{4}(3a^2-10a+3)=0$

$\frac{3}{4}(3a-1)(a-3)=0$ $\therefore a=3\ (\because a>1)$

(ii) 0과 또 다른 실근을 갖는 경우

$t=0$을 이차방정식 $t^2-\frac{3}{2}(a+1)t+3a=0$에 대입하면

$3a=0$ $\therefore a=0$

이는 $a>1$이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=3$

따라서 $v(t)=3(t-1)(t-3)$이므로 $v(4)=9$

1061 답 ④

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간은 $v_P(t)=v_Q(t)$에서

$3t^2+t=2t^2+3t$, $t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$ $\therefore t=2\ (\because t>0)$

시각 $t=2$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2 v_P(t)\,dt=\int_0^2(3t^2+t)\,dt$$
$$=\left[t^3+\frac{1}{2}t^2\right]_0^2=10$$

시각 $t=2$에서 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^2 v_Q(t)\,dt=\int_0^2(2t^2+3t)\,dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^2=\frac{34}{3}$$

따라서 시각 $t=2$에서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$\left|10-\frac{34}{3}\right|=\frac{4}{3}$

1062 답 ①

두 점 P, Q가 만나려면 시각 $t=a$에서 두 점의 위치가 같아야 한다.

시각 $t=a$에서 점 P의 위치는

$$-1+\int_0^a v_P(t)\,dt=-1+\int_0^a(3t^2-4t+3)\,dt$$
$$=-1+\left[t^3-2t^2+3t\right]_0^a$$
$$=a^3-2a^2+3a-1$$

시각 $t=a$에서 점 Q의 위치는

$$-1+\int_0^a v_Q(t)\,dt=-1+\int_0^a(-4t+7)\,dt$$
$$=-1+\left[-2t^2+7t\right]_0^a$$
$$=-2a^2+7a-1$$

즉, $a^3-2a^2+3a-1=-2a^2+7a-1$이므로

$a^3-4a=0$, $a(a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$

1063 답 3

시각 $t=2$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2 v(t)\,dt=\int_0^2 (3t^2+2at)\,dt$$

$$=\left[t^3+at^2\right]_0^2=4a+8$$

두 점 A, P 사이의 거리가 14이므로

$|(4a+8)-6|=14$, $|4a+2|=14$ $\therefore a=3$ 또는 $a=-4$

그런데 $a>0$이므로 $a=3$

1064 답 ③

두 점 P, Q가 만나는 시각을 $t=a$라 하면 시각 $t=a$에서 두 점의 위치가 같아야 한다.

시각 $t=a$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^a v_P(t)\,dt=\int_0^a (3t^2+8t)\,dt$$

$$=\left[t^3+4t^2\right]_0^a=a^3+4a^2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

시각 $t=a$에서 점 Q의 위치는

$$10+\int_0^a v_Q(t)\,dt=10+\int_0^a (6t+1)\,dt$$

$$=10+\left[3t^2+t\right]_0^a=3a^2+a+10$$

즉, $a^3+4a^2=3a^2+a+10$이므로

$a^3+a^2-a-10=0$, $(a-2)(a^2+3a+5)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a$는 실수) $\quad a^2+3a+5=\left(a+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0$

즉, 시각 $t=2$에서 두 점 P, Q가 만난다.

따라서 $a=2$를 ㉠에 대입하면 구하는 위치는 24이다.

1065 답 8

두 점 P, Q가 다시 만나는 시각을 $t=a$라 하면 시각 $t=a$에서 두 점의 위치가 같아야 한다.

시각 $t=a$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^a v_P(t)\,dt=\int_0^a (3t^2-6t-4)\,dt$$

$$=\left[t^3-3t^2-4t\right]_0^a=a^3-3a^2-4a$$

시각 $t=a$에서 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^a v_Q(t)\,dt=\int_0^a (-2t+4)\,dt$$

$$=\left[-t^2+4t\right]_0^a=-a^2+4a \quad \cdots\cdots ⓘ$$

즉, $a^3-3a^2-4a=-a^2+4a$이므로

$a^3-2a^2-8a=0$

$a(a+2)(a-4)=0$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$)

즉, 시각 $t=4$에서 두 점 P, Q가 다시 만난다. $\cdots\cdots$ ⓘⓘ

따라서 $0\le t\le 2$에서 $v_Q(t)\ge 0$이고, $2\le t\le 4$에서 $v_Q(t)\le 0$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^4 |-2t+4|\,dt=\int_0^2 (-2t+4)\,dt+\int_2^4 (2t-4)\,dt$$

$$=\left[-t^2+4t\right]_0^2+\left[t^2-4t\right]_2^4$$

$$=4+4=8 \quad \cdots\cdots$$ ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 두 점이 다시 만나는 시각을 $t=a$라 하고, 시각 $t=a$에서 두 점의 위치를 각각 a에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘ 두 점이 다시 만나는 시각 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 두 점이 다시 만날 때까지 점 Q가 움직인 거리 구하기	40 %

1066 답 ②

시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$라 하면

$$x_P(t)=1+\int_0^t (s-6)\,ds$$

$$=1+\left[\frac{1}{2}s^2-6s\right]_0^t=\frac{1}{2}t^2-6t+1$$

$$x_Q(t)=-1+\int_0^t (s^2-2s-1)\,ds$$

$$=-1+\left[\frac{1}{3}s^3-s^2-s\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3-t^2-t-1$$

이때 시각 t에서 선분 PQ를 3 : 2로 내분하는 점 R의 위치는

$$\frac{2x_P(t)+3x_Q(t)}{5}$$

시각 t에서 점 R의 속도를 $v_R(t)$라 하면

$$v_R(t)=\frac{2v_P(t)+3v_Q(t)}{5}$$

$$=\frac{2(t-6)+3(t^2-2t-1)}{5}=\frac{1}{5}(3t^2-4t-15)$$

점 R의 운동 방향이 바뀌는 순간의 속도는 0이므로 $v_R(t)=0$에서

$\frac{1}{5}(3t^2-4t-15)=0$, $\frac{1}{5}(3t+5)(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

즉, 시각 $t=3$에서 점 R의 운동 방향이 바뀐다.

따라서 시각 $t=3$에서 점 P의 위치는 $x_P(3)=-\frac{25}{2}$, 점 Q의 위치는 $x_Q(3)=-4$이므로 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$\left|-\frac{25}{2}-(-4)\right|=\frac{17}{2}$$

1067 답 $\frac{8}{3}$

시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$라 하면

$$x_P(t)=0+\int_0^t (2s^2-1)\,ds$$

$$=\left[\frac{2}{3}s^3-s\right]_0^t=\frac{2}{3}t^3-t$$

$$x_Q(t)=0+\int_0^t (1-4s)\,ds$$

$$=\left[s-2s^2\right]_0^t=t-2t^2$$

시각 t에서 선분 PQ의 중점 M의 위치를 $x_M(t)$라 하면

$$x_M(t)=\frac{x_P(t)+x_Q(t)}{2}=\frac{\left(\frac{2}{3}t^3-t\right)+(t-2t^2)}{2}=\frac{1}{3}t^3-t^2$$

이때 점 M이 다시 원점을 지나는 시각을 $t=a$라 하면

$x_M(a)=0$에서

$\frac{1}{3}a^3-a^2=0$, $\frac{1}{3}a^2(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

즉, 시각 $t=3$에서 점 M이 다시 원점을 지난다. $\cdots\cdots$ ⓘ

시각 t에서 점 M의 속도를 $v_M(t)$라 하면

$v_M(t)=t^2-2t$ …… ⅱ

따라서 $0\le t\le 2$에서 $v_M(t)\le 0$이고, $2\le t\le 3$에서 $v_M(t)\ge 0$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^3 |t^2-2t|\,dt=\int_0^2 (-t^2+2t)\,dt+\int_2^3 (t^2-2t)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+t^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}t^3-t^2\right]_2^3$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ 점 M이 다시 원점을 지나는 시각 구하기	40%
ⅱ 점 M의 속도 구하기	20%
ⅲ 점 M이 다시 원점을 지날 때까지 움직인 거리 구하기	40%

1068 답 5

두 점 P, Q 사이의 거리가 15가 되는 시각을 $t=a$라 하자.

시각 $t=a$에서 점 P의 위치는

$$-2+\int_0^a v_P(t)\,dt=-2+\int_0^a (3t^2-1)\,dt$$
$$=-2+\left[t^3-t\right]_0^a=a^3-a-2$$

시각 $t=a$에서 점 Q의 위치는

$$4+\int_0^a v_Q(t)\,dt=4+\int_0^a (4-2t)\,dt$$
$$=4+\left[4t-t^2\right]_0^a=-a^2+4a+4$$

즉, $|(a^3-a-2)-(-a^2+4a+4)|=15$이므로

$|a^3+a^2-5a-6|=15$

(ⅰ) $a^3+a^2-5a-6=15$일 때,

$a^3+a^2-5a-21=0$, $(a-3)(a^2+4a+7)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>0)$

(ⅱ) $a^3+a^2-5a-6=-15$일 때,

$a^3+a^2-5a+9=0$

$f(a)=a^3+a^2-5a+9$라 하면

$f'(a)=3a^2+2a-5=(3a+5)(a-1)$

$a>0$에서 $f'(a)=0$을 만족시키는 a의 값은 $a=1$

$a>0$에서 함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	…	1	…
$f'(a)$		−	0	+
$f(a)$		↘	6 극소	↗

$f(a)$는 $a=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 6이다.

즉, $f(a)=0$을 만족시키는 양수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 점 P, Q 사이의 거리가 15가 되는 시각은 $t=3$이다.

따라서 $0\le t\le 2$에서 $v_Q(t)\ge 0$이고, $2\le t\le 3$에서 $v_Q(t)\le 0$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^3 |4-2t|\,dt=\int_0^2 (4-2t)\,dt+\int_2^3 (-4+2t)\,dt$$
$$=\left[4t-t^2\right]_0^2+\left[-4t+t^2\right]_2^3$$
$$=4+1=5$$

1069 답 9

시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$라 하면

$$x_P(t)=0+\int_0^t (s^2-2s)\,ds$$
$$=\left[\frac{1}{3}s^3-s^2\right]_0^t=\frac{1}{3}t^3-t^2$$

$$x_Q(t)=0+\int_0^t (-s^2+4s)\,ds$$
$$=\left[-\frac{1}{3}s^3+2s^2\right]_0^t=-\frac{1}{3}t^3+2t^2$$

두 점 P, Q가 만나는 시각을 $t=a$라 하면 시각 $t=a$에서 두 점의 위치가 같아야 한다.

즉, $\frac{1}{3}a^3-a^2=-\frac{1}{3}a^3+2a^2$이므로

$\frac{2}{3}a^3-3a^2=0$, $\frac{1}{3}a^2(2a-9)=0$ $\quad\therefore a=\frac{9}{2}\ (\because a>0)$

즉, 시각 $t=\frac{9}{2}$에서 두 점 P, Q가 출발한 후 다시 만난다.

이때 시각 t에서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$|x_P(t)-x_Q(t)|=\left|\left(\frac{1}{3}t^3-t^2\right)-\left(-\frac{1}{3}t^3+2t^2\right)\right|=\left|\frac{2}{3}t^3-3t^2\right|$$

$f(t)=\frac{2}{3}t^3-3t^2$이라 하면 $f'(t)=2t^2-6t=2t(t-3)$

$0\le t\le\frac{9}{2}$에서 $f'(t)=0$을 만족시키는 t의 값은

$t=0$ 또는 $t=3$

$0\le t\le\frac{9}{2}$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	…	3	…	$\frac{9}{2}$
$f'(t)$	0	−	0	+	
$f(t)$	0	↘	−9 극소	↗	0

함수 $f(t)$는 $t=3$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 -9이다.

따라서 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리 $|f(t)|$의 최댓값은 9이다.

1070 답 3

두 점 P, Q가 만나는 시각을 $t=a$라 하면 시각 $t=a$에서 두 점의 위치가 같아야 한다.

시각 $t=a$에서 점 P의 위치는

$$5+\int_0^a v_P(t)\,dt=5+\int_0^a (3t^2-1)\,dt$$
$$=5+\left[t^3-t\right]_0^a=a^3-a+5$$

시각 $t=a$에서 점 Q의 위치는

$$k+\int_0^a v_Q(t)\,dt=k+\int_0^a 2\,dt=k+\left[2t\right]_0^a=2a+k$$

$a^3-a+5=2a+k$에서 $a^3-3a+5-k=0$

즉, 두 점 P, Q가 출발한 후 한 번도 만나지 않으려면 $a>0$에서 방정식 $a^3-3a+5-k=0$의 실근이 존재하지 않아야 한다.

$f(a)=a^3-3a+5-k$라 하면

$f'(a)=3a^2-3=3(a+1)(a-1)$

$a>0$에서 $f'(a)=0$을 만족시키는 a의 값은 $a=1$

$a>0$에서 함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	…	1	…
$f'(a)$		−	0	+
$f(a)$		↘	$3-k$ 극소	↗

함수 $f(a)$는 $a=1$에서 극소이면서 최소이고 최솟값은 $3-k$이므로 $a>0$에서 방정식 $f(a)=0$의 실근이 존재하지 않으려면

$3-k>0$ $\therefore k<3$

따라서 두 점 P, Q가 출발한 후 한 번도 만나지 않도록 하는 자연수 k의 값은 1, 2이므로 구하는 합은 $1+2=3$

1071 답 ⑤

두 점 P, Q가 만나는 시각을 $t=k$라 하면 시각 $t=k$에서 두 점의 위치가 같아야 한다.

시각 $t=k$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^k v_P(t)\,dt=\int_0^k(-3t^2+at)\,dt$$
$$=\left[-t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^k=-k^3+\frac{a}{2}k^2$$

시각 $t=k$에서 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^k v_Q(t)\,dt=\int_0^k(-t+1)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}t^2+t\right]_0^k=-\frac{1}{2}k^2+k$$

즉, $-k^3+\frac{a}{2}k^2=-\frac{1}{2}k^2+k$이므로

$k^3-\frac{a+1}{2}k^2+k=0$ $\therefore k\left(k^2-\frac{a+1}{2}k+1\right)=0$

두 점 P, Q가 출발한 후 한 번만 만나려면 $k>0$에서 이차방정식 $k^2-\frac{a+1}{2}k+1=0$은 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $k^2-\frac{a+1}{2}k+1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=\frac{a+1}{2}>0$, (두 근의 곱)$=1>0$

즉, 이 이차방정식은 양의 실근과 음의 실근을 1개씩 가질 수 없으므로 양수인 중근을 가져야 한다.

이차방정식 $k^2-\frac{a+1}{2}k+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\left(-\frac{a+1}{2}\right)^2-4=0$

$a^2+2a-15=0$, $(a+5)(a-3)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

따라서 $v_P(t)=-3t^2+3t$이고, $0\le t\le 1$에서 $v_P(t)\ge 0$, $1\le t\le 4$에서 $v_P(t)\le 0$이므로 구하는 거리는

$$\int_0^4|-3t^2+3t|\,dt=\int_0^1(-3t^2+3t)\,dt+\int_1^4(3t^2-3t)\,dt$$
$$=\left[-t^3+\frac{3}{2}t^2\right]_0^1+\left[t^3-\frac{3}{2}t^2\right]_1^4$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{81}{2}=41$$

참고 $a=3$을 $k^2-\frac{a+1}{2}k+1=0$에 대입하면

$k^2-2k+1=0$, $(k-1)^2=0$ $\therefore k=1$

즉, 두 점 P, Q는 출발한 후 시각 $t=1$에서 한 번만 만난다.

1072 답 ②

두 점 P, Q가 만나는 시각을 $t=k$라 하면 시각 $t=k$에서 두 점의 위치가 같아야 한다.

시각 $t=k$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^k v_P(t)\,dt=\int_0^k a\,dt=\left[at\right]_0^k=ak$$

시각 $t=k$에서 점 Q의 위치는

$$18+\int_0^k v_Q(t)\,dt=18+\int_0^k(3t^2-8t)\,dt$$
$$=18+\left[t^3-4t^2\right]_0^k=k^3-4k^2+18$$

두 점 P, Q가 출발한 후 적어도 한 번 만나려면 $k>0$에서 방정식 $k^3-4k^2+18=ak$의 실근이 적어도 하나 존재해야 한다.

$f(k)=k^3-4k^2+18$이라 하면

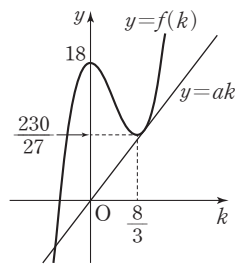
$f'(k)=3k^2-8k=k(3k-8)$

$k>0$에서 $f'(k)=0$을 만족시키는 k의 값은 $k=\frac{8}{3}$

$k>0$에서 함수 $f(k)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	0	…	$\frac{8}{3}$	…
$f'(k)$		−	0	+
$f(k)$		↘	$\frac{230}{27}$ 극소	↗

곡선 $y=f(k)$와 직선 $y=ak$가 $k>0$에서 적어도 한 번 만나야 하므로 a의 값이 최소일 때는 직선 $y=ak$가 곡선 $y=f(k)$의 접선일 때이다.



접점의 좌표를 $(p,\ f(p))$ $(p>0)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(p)=3p^2-8p$이므로 접선의 방정식은

$y-(p^3-4p^2+18)=(3p^2-8p)(x-p)$

$\therefore y=(3p^2-8p)x-2p^3+4p^2+18$

이 직선이 원점을 지나므로

$-2p^3+4p^2+18=0$, $-2(p-3)(p^2+p+3)=0$

$\therefore p=3$ ($\because p$는 실수)

$p^2+p+3=\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}>0$

이때 $f'(3)=3$이므로 $a\ge 3$

따라서 구하는 양수 a의 최솟값은 3이다.

1073 답 ③

시각 t에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$라 하면

$$x_P(t)=0+\int_0^t s\,ds=\left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^t=\frac{1}{2}t^2$$

$$x_Q(t)=0+\int_2^t a\,ds=\left[as\right]_2^t=a(t-2)$$

ㄱ. 점 Q가 출발하는 시각은 $t=2$이므로 이때의 점 P의 위치는

$x_P(2)=\frac{1}{2}\times 4=2$

ㄴ. $a=2$이면 $x_Q(t)=2(t-2)$

두 점 P, Q가 만나는 시각을 $t=k$라 하면 $x_P(k)=x_Q(k)$에서

$\frac{1}{2}k^2=2(k-2)$ $\therefore \frac{1}{2}k^2-2k+4=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-2=-1<0$

즉, 이차방정식의 실근이 존재하지 않으므로 두 점 P, Q는 만나지 않는다.

ㄷ. $a=4$이면 $x_Q(t)=4(t-2)$이므로

$x_P(t)-x_Q(t)=\frac{1}{2}t^2-4(t-2)=\frac{1}{2}t^2-4t+8$

$=\frac{1}{2}(t-4)^2\geq 0$

즉, $x_P(t)\geq x_Q(t)$이므로 점 Q가 점 P를 추월하지는 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

1074 답 6

출발한 지 x초 후의 점 P의 위치는

$0+\int_0^x(4t-13)\,dt=\left[2t^2-13t\right]_0^x=2x^2-13x$

출발한 지 x초 후의 점 Q의 위치는

$0+\int_0^x(2t+7)\,dt=\left[t^2+7t\right]_0^x=x^2+7x$

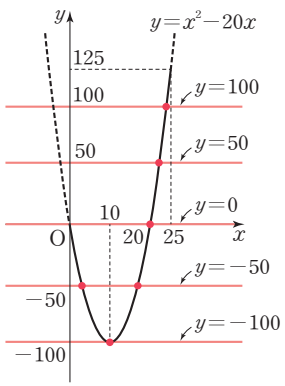
곡선의 둘레의 길이가 50 cm이므로 두 점 P, Q가 만나려면

$(2x^2-13x)-(x^2+7x)=50k$

$\therefore x^2-20x=50k$ (단, k는 정수이다.)

이때 $0<x\leq 25$에서 함수 $y=x^2-20x$의 그래프와 직선 $y=50k$의 교점의 개수는 6이다.

따라서 두 점 P, Q가 출발한 후 25초 동안 만나는 횟수는 6이다.



1075 답 ⑤

공원과 도서관 사이의 거리는 시각 $t=2$에서 $t=6$까지 수지의 위치의 변화량과 같으므로

$\int_2^6 10(6t-t^2)\,dt=10\left[3t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_2^6=\frac{800}{3}(\mathrm{m})$

1076 답 ①

3초 후의 물체의 높이는

$0+\int_0^3(v_0-10t)\,dt=\left[v_0t-5t^2\right]_0^3=3v_0-45(\mathrm{m})$

즉, $3v_0-45=60$이므로

$3v_0=105 \quad \therefore v_0=35$

1077 답 400 m

전동차가 정지하는 순간의 속도는 0 m/s이므로 $v(t)=0$에서

$40-2t=0 \quad \therefore t=20$

즉, 전동차가 제동을 걸고 20초 후에 정지한다.

따라서 $0\leq t\leq 20$에서 $v(t)\geq 0$이므로 구하는 거리는

$\int_0^{20}|40-2t|\,dt=\int_0^{20}(40-2t)\,dt$

$=\left[40t-t^2\right]_0^{20}=400(\mathrm{m})$

1078 답 ④

열차가 A역을 출발한 후 3 km를 달리는 데 걸린 시간을 a분이라 하면 $\int_0^a\left|\frac{3}{2}t\right|dt=3$에서

$\int_0^a\left|\frac{3}{2}t\right|dt=\int_0^a\frac{3}{2}t\,dt=\left[\frac{3}{4}t^2\right]_0^a=\frac{3}{4}a^2$

즉, $\frac{3}{4}a^2=3$이므로

$a^2=4 \quad \therefore a=2\ (\because a>0)$

이때 2분 후의 속도는

$v(2)=\frac{3}{2}\times 2=3(\mathrm{km/min})$

따라서 구하는 거리는

$\int_0^2\left|\frac{3}{2}t\right|dt+\int_2^{10}|3|\,dt=3+\left[3t\right]_2^{10}$

$=3+24=27(\mathrm{km})$

1079 답 ⑤

함수 $v(t)$는 $0\leq t\leq 9$에서 연속이므로 $t=2$, $t=5$에서 연속이어야 한다.

$t=2$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{t\to 2+}v(t)=\lim_{t\to 2-}v(t)=v(2)$에서 $a=4$

또 $t=5$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{t\to 5+}v(t)=\lim_{t\to 5-}v(t)=v(5)$에서

$b-5=4 \quad \therefore b=9$

$\therefore v(t)=\begin{cases}4t-t^2 & (0\leq t<2)\\ 4 & (2\leq t\leq 5)\\ 9-t & (5<t\leq 9)\end{cases}$

이때 자동차가 정지하는 순간의 속도는 0 km/min이므로

(i) $0\leq t<2$일 때, $v(t)=0$에서

$4t-t^2=0,\ t(4-t)=0$

이때 $0<t<2$이므로 $v(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $2\leq t\leq 5$일 때, $v(t)=4$이므로 $v(t)=0$을 만족시키는 t의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $5<t\leq 9$일 때, $v(t)=0$에서

$9-t=0 \quad \therefore t=9$

(i), (ii), (iii)에서 자동차가 출발 후 정지하는 순간의 시각은 $t=9$이다.

따라서 $0\leq t\leq 9$에서 $v(t)\geq 0$이므로 구하는 거리는

$\int_0^2|4t-t^2|\,dt+\int_2^5|4|\,dt+\int_5^9|9-t|\,dt$

$=\int_0^2(4t-t^2)\,dt+\int_2^5 4\,dt+\int_5^9(9-t)\,dt$

$=\left[2t^2-\frac{1}{3}t^3\right]_0^2+\left[4t\right]_2^5+\left[9t-\frac{1}{2}t^2\right]_5^9$

$=\frac{16}{3}+12+8=\frac{76}{3}(\mathrm{km})$

1080 답 63 m

출발한 지 t초 후의 엘리베이터의 속도를 $v(t)$ m/초, 가속도를 $a(t)$ m/초^{2}이라 하자.

(i) $0\le t\le 2$일 때, $a(t)=3$이므로

$$v(t)=\int_0^t 3\,ds=\Big[3s\Big]_0^t=3t$$

(ii) $2<t\le 10$일 때,

$v(2)=3\times 2=6$이고, 이 속도로 일정하게 움직이므로

$v(t)=6$

(iii) $t>10$일 때,

$v(10)=6$이고, $a(t)=-2$이므로

$$v(t)=6+\int_{10}^t(-2)\,ds$$

$$=6+\Big[-2s\Big]_{10}^t=-2t+26$$

이때 엘리베이터가 멈추는 순간의 속도는 0 m/초이므로

$v(t)=0$에서

$-2t+26=0$ $\therefore t=13$

(i), (ii), (iii)에서

$$v(t)=\begin{cases}3t & (0\le t\le 2)\\ 6 & (2<t\le 10)\\ -2t+26 & (10<t\le 13)\end{cases}$$

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^2|3t|\,dt+\int_2^{10}|6|\,dt+\int_{10}^{13}|-2t+26|\,dt$$

$$=\int_0^2 3t\,dt+\int_2^{10}6\,dt+\int_{10}^{13}(-2t+26)\,dt$$

$$=\Big[\frac{3}{2}t^2\Big]_0^2+\Big[6t\Big]_2^{10}+\Big[-t^2+26t\Big]_{10}^{13}$$

$=6+48+9=63$(m)

1081 답 ④

ㄱ. $0\le t\le 10$일 때, $v(t)$의 부호는 바뀌지 않는다.

$10\le t\le 16$일 때

$$v(t)=6t-\frac{1}{2}t^2=-\frac{1}{2}t(t-12)$$

이때 $t=12$의 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 시각 $t=12$에서 운동 방향을 바꾼다.

즉, 열기구는 운동 방향을 한 번 바꾼다.

ㄴ. 열기구가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0 m/s이다.

즉, ㄱ에 의하여 시각 $t=12$에서 열기구의 높이는 최대이고, 그 때의 높이는

$$\int_0^{10}t\,dt+\int_{10}^{12}\Big(6t-\frac{1}{2}t^2\Big)dt=\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_0^{10}+\Big[3t^2-\frac{1}{6}t^3\Big]_{10}^{12}$$

$$=50+\frac{32}{3}=\frac{182}{3}\text{(m)}$$

ㄷ. 출발한 지 15분 후의 열기구의 높이는

$$\int_0^{10}t\,dt+\int_{10}^{15}\Big(6t-\frac{1}{2}t^2\Big)dt=\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_0^{10}+\Big[3t^2-\frac{1}{6}t^3\Big]_{10}^{15}$$

$$=50+\Big(-\frac{125}{6}\Big)=\frac{175}{6}\text{(m)}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄷ. 출발한 지 15분 후의 열기구의 높이는

$$\int_0^{12}v(t)\,dt+\int_{12}^{15}v(t)\,dt=\frac{182}{3}+\int_{12}^{15}\Big(6t-\frac{1}{2}t^2\Big)dt\ (\because \text{ㄴ})$$

$$=\frac{182}{3}+\Big[3t^2-\frac{1}{6}t^3\Big]_{12}^{15}$$

$$=\frac{182}{3}+\Big(-\frac{63}{2}\Big)=\frac{175}{6}\text{(m)}$$

1082 답 ③

물이 멈추는 순간의 속도는 0이므로 $v(t)=0$에서

$3t-t^2=0$, $t(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because 0<t\le 3$)

이때 수도관의 단면의 넓이는

$\pi\times 2^2=4\pi$

따라서 3초 동안 흘러나온 물의 양은

$$4\pi\times\int_0^3|3t-t^2|\,dt=4\pi\int_0^3(3t-t^2)\,dt$$

$$=4\pi\Big[\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{3}t^3\Big]_0^3$$

$$=4\pi\times\frac{9}{2}=18\pi$$

1083 답 ⑤

열차가 정지하는 순간의 속도는 0 m/s이므로

$24-6t=0$ $\therefore t=4$

즉, 열차가 급제동을 걸고 정지할 때까지 달린 거리는

$$\int_0^4|24-6t|\,dt=\int_0^4(24-6t)\,dt$$

$$=\Big[24t-3t^2\Big]_0^4=48\text{(m)}$$

따라서 구하는 x의 값의 범위는 $x\ge 48$이다.

1084 답 18초

P 지점의 위치를 0이라 할 때, 자동차 B가 P 지점을 지난 지 t초 후 두 자동차 A, B의 위치를 각각 $x_A(t)$, $x_B(t)$라 하면

$$x_A(t)=36+\int_0^t 18\,ds=36+18t$$

(자동차 A는 자동차 B보다 2초 먼저 P 지점을 지났고, 2초 동안 위치의 변화량은 36 m이다.)

$$x_B(t)=\int_0^t(2s+2)\,ds$$

$$=\Big[s^2+2s\Big]_0^t=t^2+2t$$

두 자동차 A, B가 만나는 시각을 $t=a$라 하면 시각 $t=a$에서 두 자동차의 위치가 같아야 한다.

즉, $36+18a=a^2+2a$이므로

$a^2-16a-36=0$, $(a+2)(a-18)=0$

$\therefore a=18$ ($\because a>0$)

따라서 자동차 B가 P 지점을 지난 지 18초 후에 두 자동차가 만난다.

1085 답 ⑤

시각 $t=3$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3 v(t)\,dt=\int_0^1 v(t)\,dt+\int_1^3 v(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times2\times1=2$$

1086 답 ②

시각 $t=1$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^6 |v(t)|\,dt=\int_1^2 |v(t)|\,dt+\int_2^4 |v(t)|\,dt+\int_4^6 |v(t)|\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times2+\frac{1}{2}\times2\times2+\frac{1}{2}\times2\times2$$
$$=5$$

1087 답 ③

$v(t)=0$이고 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 점 P가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=2$이고, 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=6$이다.

따라서 구하는 거리는

$$\int_2^6 |v(t)|\,dt=\frac{1}{2}\times(1+4)\times2=5$$

1088 답 8

$$\int_0^2 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\times2\times2=2$$

$$\int_2^4 v(t)\,dt=-\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)=-2$$

$$\int_4^7 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\times(1+3)\times2=4$$

$$\int_7^8 v(t)\,dt=-\left(\frac{1}{2}\times1\times2\right)=-1$$

즉, 점 P는 시각 $t=7$에서 원점에서 가장 멀리 떨어져 있으므로

$a=7$ ····· ⓘ

따라서 구하는 거리는

$$\int_0^7 |v(t)|\,dt=\int_0^2 |v(t)|\,dt+\int_2^4 |v(t)|\,dt+\int_4^7 |v(t)|\,dt$$
$$=2+2+4=8 \quad \cdots\cdots \text{ⓘⓘ}$$

채점 기준	
ⓘ a의 값 구하기	50 %
ⓘⓘ 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리 구하기	50 %

1089 답 ③

ㄱ. 시각 $t=3$에서 $t=5$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$f(5)-f(3)=\int_3^5 v(t)\,dt$$
$$=\int_3^4 v(t)\,dt+\int_4^5 v(t)\,dt$$
$$=-\left(\frac{1}{2}\times1\times2\right)+\frac{1}{2}\times1\times2$$
$$=-1+1=0$$

$\therefore f(3)=f(5)$

ㄴ. $f(t)=\int_0^t v(s)\,ds$의 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(t)=v(t)$

이때 $v(1)=v(5)=2$이므로

$f'(1)=f'(5)$

ㄷ. $\int_0^2 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\times2\times2=2$

$\int_2^4 v(t)\,dt=-\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)=-2$

$\int_4^7 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\times(1+3)\times2=4$

즉, 점 P의 위치가 0이 되는 순간의 시각은 $t=4$이므로 1번 존재한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

1090 답 6

시각 $t=2$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^2 v(t)\,dt=8$$

이때 시각 $t=3$에서 점 P의 위치가 6이므로

시각 $t=2$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은 $6-8=-2$

$$\therefore \int_2^3 v(t)\,dt=-2$$

따라서 시각 $t=3$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_3^5 |v(t)|\,dt=\int_3^2 |v(t)|\,dt+\int_2^5 |v(t)|\,dt$$
$$=-\int_2^3 |v(t)|\,dt+\int_2^5 |v(t)|\,dt$$
$$=-|-2|+8=6$$

1091 답 ⑤

$v(t)=0$이고 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 점 P가 원점을 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=a$이다.

즉, $0+\int_0^a v(t)\,dt=7$이므로

$$\int_0^a v(t)\,dt=7$$

점 P의 시각 $t=c$에서의 위치가 4이므로

$$0+\int_0^c v(t)\,dt=4 \qquad \therefore \int_0^c v(t)\,dt=4$$

이때 $\int_0^b v(t)\,dt=\int_b^c v(t)\,dt$ ← 시각 $t=b$에서 $t=c$까지 점 P의 위치의 변화량

$$=\int_0^c v(t)\,dt-\int_0^b v(t)\,dt$$

즉, $2\int_0^b v(t)\,dt=\int_0^c v(t)\,dt$이므로

$$2\int_0^b v(t)\,dt=4 \qquad \therefore \int_0^b v(t)\,dt=2$$

따라서 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_a^b |v(t)|\,dt=-\int_a^b v(t)\,dt$$ ← 시각 $t=a$에서 $t=b$까지 점 P의 위치의 변화량

$$=-\left\{\int_0^b v(t)\,dt-\int_0^a v(t)\,dt\right\}$$
$$=-(2-7)=5$$

1092 답 5

시각 $t=1$에서 $t=8$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^8 v(t)\,dt=-5-3=-8$$

이때 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량과 시각 $t=5$에서 $t=8$까지 점 P의 위치의 변화량은 각각 0이므로

$$\begin{aligned}\int_1^8 v(t)\,dt&=\int_1^3 v(t)\,dt+\int_3^5 v(t)\,dt+\int_5^8 v(t)\,dt\\&=0-2\times a+0=-2a\end{aligned}$$

즉, $-2a=-8$이므로 $a=4$

따라서 시각 $t=12$에서 점 P의 위치는 시각 $t=8$에서 점 P의 위치에 시각 $t=8$에서 $t=12$까지 점 P의 위치의 변화량을 더한 것과 같으므로

$$\begin{aligned}-5+\int_8^{12} v(t)\,dt&=-5+\frac{1}{2}\times(1+4)\times 4\\&=-5+10=5\end{aligned}$$

1093 답 6

$0\le t\le 4$에서 $v_{\mathrm{P}}(t)\ge 0$, $v_{\mathrm{Q}}(t)\ge 0$이므로 두 점 P, Q는 같은 방향으로 움직이고, $4\le t\le 8$에서 $v_{\mathrm{P}}(t)\le 0$, $v_{\mathrm{Q}}(t)\ge 0$이므로 두 점 P, Q는 서로 반대 방향으로 움직인다.

즉, 두 점 P, Q가 가장 멀리 떨어져 있는 순간의 시각은 $t=8$이다.

이때 시각 $t=8$에서 점 P의 위치는

$$\begin{aligned}0+\int_0^8 v_{\mathrm{P}}(t)\,dt&=\int_0^4 v_{\mathrm{P}}(t)\,dt+\int_4^8 v_{\mathrm{P}}(t)\,dt\\&=\frac{1}{2}\times 4\times 2-\left(\frac{1}{2}\times 4\times 1\right)\\&=4-2=2\end{aligned}$$

시각 $t=8$에서 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^8 v_{\mathrm{Q}}(t)=8\times 1=8$$

따라서 구하는 두 점 P, Q 사이의 거리는

$|8-2|=6$

1094 답 ④

ㄱ. 시각 $t=3$에서 점 P의 위치는 $\int_2^3 v(t)\,dt=-\int_0^2 v(t)\,dt$이므로

$$\begin{aligned}0+\int_0^3 v(t)\,dt&=\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^3 v(t)\,dt\\&=\int_0^2 v(t)\,dt-\int_0^2 v(t)\,dt=0\end{aligned}$$

즉, 시각 $t=3$에서 점 P는 원점에 있다.

ㄴ. 점 P는 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 양의 방향으로 움직이다가 시각 $t=2$에서 운동 방향을 바꾸어 시각 $t=2$에서 $t=3$까지 음의 방향으로 움직여 시각 $t=3$에서 원점으로 돌아온다.

즉, 시각 $t=2$에서 점 P와 원점 사이의 거리가 최대이다.

ㄷ. 시각 t에서 점 P의 속력은 $|v(t)|$이다.

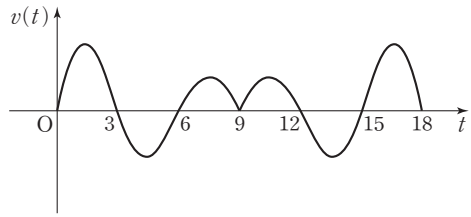
$t=3$일 때 $|v(t)|$의 값이 가장 크므로 시각 $t=3$에서 점 P의 속력이 가장 크다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

1095 답 ⑤

속도 $v(t)$가 $v(9-t)=v(9+t)$를 만족시키므로 속도 $v(t)$의 그래프는 직선 $t=9$에 대하여 대칭이다.

$0\le t\le 18$에서의 속도 $v(t)$의 그래프는 그림과 같다.



ㄱ. $v(t)=0$이고 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 $0<t<18$에서 점 P는 출발한 후 시각 $t=3$, $t=6$, $t=12$, $t=15$에서 운동 방향을 바꾼다.

즉, $0<t<18$에서 점 P는 운동 방향을 4번 바꾼다.

ㄴ. $S(3)=6$이므로 시각 $t=3$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3 v(t)\,dt=6$$

$S(6)=2$이므로 시각 $t=6$에서 점 P의 위치는

$$0+\int_0^6 v(t)\,dt=2$$

시각 $t=3$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned}\int_3^6 v(t)\,dt&=\int_0^6 v(t)\,dt-\int_0^3 v(t)\,dt\\&=S(6)-S(3)\\&=2-6=-4\end{aligned}$$

즉, $0<t<3$에서 점 P는 원점을 출발하여 양의 방향으로 6만큼 이동하고, $3<t<6$에서 점 P는 음의 방향으로 4만큼 이동하므로 $0<t<6$에서 점 P는 원점을 지나지 않는다.

ㄷ. 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^3 |v(t)|\,dt&=\int_0^3 v(t)\,dt\\&=S(3)=6\end{aligned}$$

이때 시각 $t=6$에서 $t=9$까지 점 P의 위치의 변화량과 시각 $t=9$에서 $t=12$까지 점 P의 위치의 변화량은 같으므로

$$\int_6^9 v(t)\,dt=\int_9^{12} v(t)\,dt$$

즉, 시각 $t=6$에서 $t=12$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_6^{12} |v(t)|\,dt&=\int_6^{12} v(t)\,dt\\&=\int_6^9 v(t)\,dt+\int_9^{12} v(t)\,dt\\&=2\int_6^9 v(t)\,dt\\&=2\left\{\int_0^9 v(t)\,dt-\int_0^6 v(t)\,dt\right\}\\&=2\{S(9)-S(6)\}\\&=2(5-2)=6\end{aligned}$$

즉, 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리와 시각 $t=6$에서 $t=12$까지 점 P가 움직인 거리는 서로 같다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

최고수준 도전 기출 253쪽

1096 답 ③

전략 주어진 그래프를 이용하여 $f'(t)$의 식을 구한 후 $f'(t)$와 $f'(0)$의 부호가 반대인 t의 값을 찾는다.

주어진 그래프에서 $f'(t)=a(t-1)(t-3)\ (a>0)$이라 하면

$f'(0)=3$이므로

$3a=3 \quad \therefore a=1$

$\therefore f'(t)=(t-1)(t-3)$

$f'(0)>0$이고, $1\le t\le 3$에서 $f'(t)\le 0$이므로 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P는 출발할 때의 운동 방향과 반대 방향으로 움직인다.

따라서 구하는 거리는

$$\int_1^3 |f'(t)|\,dt=\int_1^3 \{-(t-1)(t-3)\}\,dt$$

$$=\int_1^3 (-t^2+4t-3)\,dt \longrightarrow \frac{|-1|}{6}\times(3-1)^3=\frac{4}{3}$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3=\frac{4}{3}$$

1097 답 ⑤

전략 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 Q의 운동 방향이 바뀌지 않는 경우와 바뀌는 경우로 m의 값의 범위를 나눈 후, 두 점 P, Q가 움직인 거리가 같도록 하는 m의 값을 구한다.

$t\ge 0$에서 $3t^2+1>0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

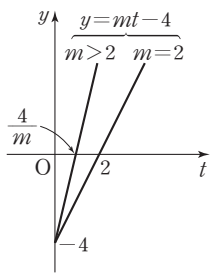
$$\int_0^2 |v_1(t)|\,dt=\int_0^2 (3t^2+1)\,dt$$

$$=\left[t^3+t\right]_0^2=10$$

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v_2(t)|\,dt=\int_0^2 |mt-4|\,dt$$

이때 직선 $y=mt-4$는 기울기가 m, y절편이 -4이고, $m=2$일 때 점 $(2,\ 0)$을 지난다.



(i) $m\le 2$일 때, → $0\le t\le 2$에서 점 Q의 운동 방향이 바뀌지 않는다.

$0\le t\le 2$에서 $mt-4\le 0$이므로

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v_2(t)|\,dt=\int_0^2 (-mt+4)\,dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}mt^2+4t\right]_0^2$$

$$=-2m+8$$

두 점 P, Q가 움직인 거리가 같으므로

$-2m+8=10 \quad \therefore m=-1$

(ii) $m>2$일 때, → $0\le t\le 2$에서 점 Q의 운동 방향이 바뀐다.

$mt-4=0$에서 $t=\frac{4}{m}$

$0\le t\le \frac{4}{m}$에서 $mt-4\le 0$이고, $\frac{4}{m}\le t\le 2$에서 $mt-4\ge 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |v_2(t)|\,dt=\int_0^{\frac{4}{m}} (-mt+4)\,dt+\int_{\frac{4}{m}}^2 (mt-4)\,dt$$

$$=\left[-\frac{1}{2}mt^2+4t\right]_0^{\frac{4}{m}}+\left[\frac{1}{2}mt^2-4t\right]_{\frac{4}{m}}^2$$

$$=2m+\frac{16}{m}-8$$

두 점 P, Q가 움직인 거리가 같으므로

$2m+\frac{16}{m}-8=10,\ m^2-9m+8=0$

$(m-1)(m-8)=0 \quad \therefore m=8\ (\because m>2)$

(i), (ii)에서 $m=-1$ 또는 $m=8$

따라서 구하는 모든 m의 값의 합은

$-1+8=7$

1098 답 ⑤

전략 그림에서 함수의 그래프와 t축 사이의 넓이가 의미하는 것이 무엇인지 생각한다.

ㄱ. 시각 $t=a$에서 물체 A의 높이는

$0+\int_0^a f(t)\,dt$

시각 $t=a$에서 물체 B의 높이는

$0+\int_0^a g(t)\,dt$

이때 주어진 그래프에서 $\int_0^a f(t)\,dt>\int_0^a g(t)\,dt$이므로

$t=a$일 때, 물체 A는 물체 B보다 높은 위치에 있다.

ㄴ. 시각 $t=x$에서 두 물체 A, B의 높이의 차를 $h(x)$라 하면

$$h(x)=\left\{0+\int_0^x f(t)\,dt\right\}-\left\{0+\int_0^x g(t)\,dt\right\}$$

$$=\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x g(t)\,dt$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$h'(x)=f(x)-g(x)$

$0\le x\le c$에서 $h'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구하면

$f(b)=g(b)$이므로 $f(b)-g(b)=0 \quad \therefore x=b$

$0\le x\le c$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	b	…	c
$h'(x)$		+	0	−	
$h(x)$	0	↗	극대	↘	0

함수 $h(x)$는 $x=b$에서 극대이면서 최대이다.

즉, $t=b$일 때, 물체 A와 물체 B의 높이의 차가 최대이다.

ㄷ. 시각 $t=c$에서 물체 A의 높이는

$0+\int_0^c f(t)\,dt$

시각 $t=c$에서 물체 B의 높이는

$0+\int_0^c g(t)\,dt$

이때 $\int_0^c f(t)\,dt=\int_0^c g(t)\,dt$이므로

$t=c$일 때, 물체 A와 물체 B는 같은 높이에 있다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

MEMO