기출 PICK

정답과 해설

대수

01 지수

난이도별 필수 기출 6~19쪽

0001 답 −6

81의 네제곱근을 x라 하면 $x^4=81$

$x^4-81=0$, $(x^2+9)(x^2-9)=0$

$\therefore\ x=\pm 3i$ 또는 $x=\pm 3$

이때 실수인 것은 ± 3이므로

$a=3$ 또는 $a=-3$

-27의 세제곱근을 y라 하면 $y^3=-27$

$y^3+27=0$, $(y+3)(y^2-3y+9)=0$

$\therefore\ y=-3$ 또는 $y=\dfrac{3\pm 3\sqrt{3}i}{2}$

이때 실수인 것은 -3이므로 $b=-3$

따라서 $a+b$의 최솟값은

$-3+(-3)=-6$

✓ 공통수학1 다시보기

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이때 $D=b^2-4ac$라 하면

① $D>0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 실근

② $D=0 \Longleftrightarrow$ 중근

③ $D<0 \Longleftrightarrow$ 서로 다른 두 허근

0002 답 −2

-8의 세제곱근을 x라 하면 $x^3=-8$

$x^3+8=0$, $(x+2)(x^2-2x+4)=0$

따라서 $\alpha=-2$이고, β, γ는 이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\beta\gamma=4$

$\therefore\ \dfrac{\beta\gamma}{\alpha}=\dfrac{4}{-2}=-2$

참고 이차방정식 $x^2-2x+4=0$의 두 근은 $1\pm\sqrt{3}i$이므로

$\beta\gamma=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)=1-3i^2=1+3=4$

✓ 공통수학1 다시보기

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

0003 답 4

$n=3$일 때, $2n^2-9n=-9<0$이고 n은 홀수이므로 $f(3)=1$

$n=4$일 때, $2n^2-9n=-4<0$이고 n은 짝수이므로 $f(4)=0$

$n=5$일 때, $2n^2-9n=5>0$이고 n은 홀수이므로 $f(5)=1$

$n=6$일 때, $2n^2-9n=18>0$이고 n은 짝수이므로 $f(6)=2$

$\therefore\ f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$

0004 답 ④

① 64의 세제곱근을 x라 하면

$x^3=64$, $x^3-64=0$

$(x-4)(x^2+4x+16)=0$

즉, 64의 세제곱근 중 실수인 것은 4뿐이다.

② 9의 제곱근 중 실수인 것은 -3, 3의 2개이다.

③ $-\sqrt{4}$, 즉 -2의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-2}$이다.

④ n이 홀수일 때,

음의 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$의 1개이다.

⑤ n이 짝수일 때,

양의 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$의 2개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0005 답 ②

모든 실수 x에 대하여 $\sqrt[7]{-x^2+4ax-16a}$가 음수가 되려면

$-x^2+4ax-16a<0$

즉, $x^2-4ax+16a>0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2-4ax+16a=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4a^2-16a<0$, $4a(a-4)<0$ $\quad\therefore\ 0<a<4$

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은

$1+2+3=6$

✓ 공통수학1 다시보기

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 이차부등식이 성립할 조건은 다음과 같다.

(1) $ax^2+bx+c>0$

➡ $a>0$, $D<0$

(2) $ax^2+bx+c\geq 0$

➡ $a>0$, $D\leq 0$

(3) $ax^2+bx+c<0$

➡ $a<0$, $D<0$

(4) $ax^2+bx+c\leq 0$

➡ $a<0$, $D\leq 0$

0006 답 ④

ㄱ. 4의 2026제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[2026]{4}$, $-\sqrt[2026]{4}$의 2개,

4의 2027제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[2027]{4}$의 1개,

-4의 2027제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[2027]{-4}$의 1개이다.

즉, $f(4,\ 2026)=2$, $f(4,\ 2027)=f(-4,\ 2027)=1$이므로

$f(4,\ 2026)=f(4,\ 2027)+f(-4,\ 2027)$

ㄴ. $2n+1$은 홀수, $2n$은 짝수이므로

$a>0$일 때,

$f(a,\ 2n+1)+f(a^2,\ 2n)=1+2=3$

$a=0$일 때,

$f(a,\ 2n+1)+f(a^2,\ 2n)=1+1=2$

$a<0$일 때,

$f(a,\ 2n+1)+f(a^2,\ 2n)=1+2=3$

ㄷ. $f(\sqrt{3}, 4)+f(\sqrt[3]{-5}, 7)+5f(-\sqrt[4]{2}, 6)$
$=2+1+5\times0=3$
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0007 답 30

음의 실수가 존재하려면
$-n^2+10n-24<0$이고 n은 홀수이거나
$-n^2+10n-24>0$이고 n은 짝수이어야 한다.
(i) $-n^2+10n-24<0$일 때,
$n^2-10n+24>0$, $(n-4)(n-6)>0$
$\therefore\ n<4$ 또는 $n>6$
이때 $2\le n\le12$이므로
$2\le n<4$ 또는 $6<n\le12$
따라서 홀수 n의 값은 3, 7, 9, 11 ····· ⓘ
(ii) $-n^2+10n-24>0$일 때,
$n^2-10n+24<0$, $(n-4)(n-6)<0$
$\therefore\ 4<n<6$
이때 $2\le n\le12$이므로
$4<n<6$
따라서 짝수 n의 값은 없다. ····· ⓘⓘ
(i), (ii)에서 모든 n의 값의 합은
$3+7+9+11=30$ ····· ⓘⓘⓘ

참고 2 이상의 자연수 n에 대하여 0의 n제곱근은 항상 0이다.

채점 기준	
ⓘ $-n^2+10n-24<0$이고 홀수인 n의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ $-n^2+10n-24>0$이고 짝수인 n의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 모든 n의 값의 합 구하기	20 %

0008 답 ③

(i) $n(n-6)$의 세제곱근 중 실수인 것은
$n(n-6)$의 값에 관계없이 1개이므로
$f(n)=1$
(ii) $n(n-6)$의 네제곱근 중 실수인 것은
① $n(n-6)>0$일 때,
$\sqrt[4]{n(n-6)}$, $-\sqrt[4]{n(n-6)}$의 2개이다.
② $n(n-6)=0$일 때,
0의 1개이다.
③ $n(n-6)<0$일 때,
없다.
①, ②, ③에서
$$g(n)=\begin{cases}0 & (n(n-6)<0)\\ 1 & (n(n-6)=0)\\ 2 & (n(n-6)>0)\end{cases}$$
(i), (ii)에서 $f(n)>g(n)$을 만족시키려면 $g(n)=0$이어야 하므로
$n(n-6)<0$
$\therefore\ 0<n<6$
따라서 모든 자연수 n의 값의 합은
$1+2+3+4+5=15$

0009 답 ⑤

(i) $m=2$일 때,
$A=\{2\}$, $B=\{-3, -1, 0, 1, 3\}$이므로
$C=\{0, -1, 1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$
$\therefore\ n(C)=5$
(ii) $m=3$일 때,
$A=\{2, 3\}$, $B=\{-3, -1, 0, 1, 3\}$이므로
$C=\{0, -1, 1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{-3}, \sqrt[3]{3}\}$
$\therefore\ n(C)=7$
(iii) $m=4$일 때,
$A=\{2, 3, 4\}$, $B=\{-3, -1, 0, 1, 3\}$이므로
$C=\{0, -1, 1, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{-3}, \sqrt[3]{3}, -\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3}\}$
$\therefore\ n(C)=9$
⋮
따라서 2 이상의 자연수 m에 대하여 $n(C)=2m+1$이므로
$n(C)=201$을 만족시키는 m의 값은
$2m+1=201$ $\therefore\ m=100$

0010 답 ⑤

$\sqrt[5]{2}\times\sqrt[5]{16}-\sqrt[4]{16}+\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[5]{2}\times\sqrt[5]{2^4}-\sqrt[4]{2^4}+\sqrt[6]{2^6}$
$=\sqrt[5]{2^5}-2+2=2$

0011 답 ③

$$\frac{\sqrt[4]{324}}{\sqrt{\sqrt{16}}}+\sqrt[3]{-64}=\frac{\sqrt[4]{2^2\times3^4}}{\sqrt[4]{2^4}}+\sqrt[3]{(-4)^3}$$
$$=\frac{\sqrt[4]{2^2}\times\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt{2}}+(-4)=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-4$$
$=3-4=-1$

0012 답 ②

$\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[4]{3}$, $\sqrt[6]{5}$에서 3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로
$\sqrt[3]{2}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[12]{16}$
$\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{3^3}=\sqrt[12]{27}$
$\sqrt[6]{5}=\sqrt[12]{5^2}=\sqrt[12]{25}$
이때 $16<25<27$이므로
$\sqrt[3]{2}<\sqrt[6]{5}<\sqrt[4]{3}$

0013 답 ③

$$(a^2)^4\times(\sqrt[4]{b})^{12}\times\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\right)^{15}=a^8\times\sqrt[4]{b^{12}}\times\frac{1}{\sqrt[3]{a^{15}}}$$
$$=a^8\times b^3\times\frac{1}{a^5}$$
$=a^3b^3=(ab)^3$
따라서 $(ab)^3=27=3^3$이므로 $ab=3$

0014 답 1

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}}\times\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}}\times\sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}}}=\frac{\sqrt[4]{\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}}\times\frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt[3]{\sqrt{x}}}\times\frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[4]{\sqrt[3]{x}}}$$
$$=\frac{\sqrt[8]{x}}{\sqrt[12]{x}}\times\frac{\sqrt[12]{x}}{\sqrt[6]{x}}\times\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[8]{x}}=1$$

0015 답 ②

$\sqrt[6]{a^4b^2}\times\sqrt[3]{a^2b^4}\div\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}=\sqrt[6]{a^4b^2}\times\sqrt[6]{a^4b^8}\div\sqrt[6]{a^2b}$

$=\sqrt[6]{\dfrac{a^4b^2\times a^4b^8}{a^2b}}$

$=\sqrt[6]{a^6b^9}=\sqrt[6]{a^6}\times\sqrt[6]{b^9}=ab\sqrt{b^3}$

0016 답 ④

x에 대한 이차방정식 $x^2-\sqrt[3]{81}\,x+a=0$의 두 근이 $\sqrt[3]{3}$과 b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sqrt[3]{3}+b=\sqrt[3]{81}$, $\sqrt[3]{3}b=a$

$b=\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3^4}-\sqrt[3]{3}=\sqrt[3]{3^3\times3}-\sqrt[3]{3}=3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3}$

$a=\sqrt[3]{3}b=\sqrt[3]{3}\times2\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3^2}$

$\therefore\ ab=2\sqrt[3]{3^2}\times2\sqrt[3]{3}=4\sqrt[3]{3^3}=4\times3=12$

0017 답 $\frac{1}{8}$

넓이가 $\sqrt{\sqrt[n]{64}}$인 정사각형의 한 변의 길이가 $f(n)$이므로

$f(n)=\sqrt{\sqrt[n]{64}}=\sqrt[4n]{2^6}=\sqrt[2n]{2^3}$

$\therefore\ \{f(3)\}^6=(\sqrt[6]{2^3})^6=2^3$ …… ⓘ

부피가 512^n인 정육면체의 한 모서리의 길이가 $g(n)$이므로

$g(n)=\sqrt[3]{512^n}=\sqrt[3]{2^{9n}}=2^{3n}$

$\therefore\ g(2)=2^6$ …… ⓘⓘ

$\therefore\ \dfrac{\{f(3)\}^6}{g(2)}=\dfrac{2^3}{2^6}=\dfrac{1}{8}$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\{f(3)\}^6$의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ $g(2)$의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $\frac{\{f(3)\}^6}{g(2)}$의 값 구하기	20 %

0018 답 ②

$\sqrt[3]{4\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\sqrt{4^2\times5}}=\sqrt[6]{80}$

$\sqrt{2\sqrt[3]{3}}=\sqrt{\sqrt[3]{2^3\times3}}=\sqrt[6]{24}$

$\sqrt{3\sqrt[3]{2}}=\sqrt{\sqrt[3]{3^3\times2}}=\sqrt[6]{54}$

이때 $24<54<80$이므로 $\sqrt{2\sqrt[3]{3}}<\sqrt{3\sqrt[3]{2}}<\sqrt[3]{4\sqrt{5}}$

따라서 가장 큰 수는 $a=\sqrt[3]{4\sqrt{5}}=\sqrt[6]{80}$이고 $2^6<80<3^6$에서 $2<\sqrt[6]{80}<3$이므로 a보다 작은 자연수는 1, 2의 2개이다.

0019 답 ⑤

(ⅰ) $A-B=(\sqrt[3]{2}+2\sqrt{3})-(2\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})$

$=-\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}=-\sqrt[6]{2^2}+\sqrt[6]{3^3}$

$=-\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{27}>0$

$\therefore\ B<A$

(ⅱ) $B-C=(2\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})-(\sqrt{3}+2\sqrt[7]{4})$

$=2(\sqrt[3]{2}-\sqrt[7]{4})=2(\sqrt[21]{2^7}-\sqrt[21]{4^3})$

$=2(\sqrt[21]{128}-\sqrt[21]{64})>0$

$\therefore\ C<B$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $C<B<A$

0020 답 ③

ㄱ. $f(3,2)=\sqrt[3]{2}$, $f(9,8)=\sqrt[9]{8}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2^3}}=\sqrt[3]{2}$

$\therefore\ f(3,2)=f(9,8)$

ㄴ. 두 양수 x, y에 대하여

$x<y$이면 $\sqrt[n]{x}<\sqrt[n]{y}$이므로

$f(n,x)<f(n,y)$

ㄷ. [반례] $a=16$, $p=4$, $q=2$일 때,

$f(4,16)=\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$, $f(2,16)=\sqrt{16}=4$이므로

$f(4,16)<f(2,16)$이지만 $4>2$이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0021 답 20

(ⅰ) $\sqrt{2^{b-1}\times7^a}$이 자연수가 되려면 2와 7은 서로소이므로

$b-1$과 a가 모두 0 또는 2의 배수이어야 한다.

즉, a는 짝수이고 b는 홀수이다. ($\because$ a, b는 자연수) …… ⓘ

(ⅱ) $\sqrt[3]{2^{a-1}\times7^{b-2}}$이 자연수가 되려면 2와 7은 서로소이므로

$a-1$과 $b-2$가 모두 0 또는 3의 배수이어야 한다.

즉, $a=3m+1$, $b=3n+2$ (단, m, n은 음이 아닌 정수이다.)

…… ⓘⓘ

(ⅰ), (ⅱ)를 동시에 만족시키는 a의 최솟값은 $m=1$일 때 4, b의 최솟값은 $n=1$일 때 5이다.

따라서 ab의 최솟값은 $4\times5=20$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\sqrt{2^{b-1}\times7^a}$이 자연수가 되도록 하는 a, b의 조건 구하기	40 %
ⓘⓘ $\sqrt[3]{2^{a-1}\times7^{b-2}}$이 자연수가 되도록 하는 a, b의 조건 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ ab의 최솟값 구하기	20 %

0022 답 ⑤

점 Q_n은 점 P_n을 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점이므로 점 Q_n의 y좌표는 점 P_n의 y좌표와 같다.

따라서 $a_n=3n+1$이므로

$a_2=7$, $a_9=28$

함수 $f(x)$의 역함수를 구하면

$y=x^2(x\ge0)$에서 $x=\sqrt{y}$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\sqrt{x}$

즉, $f^{-1}(x)=\sqrt{x}\,(x\ge0)$ ← 함수 $y=x^2$의 치역이 $\{y\,|\,y\ge0\}$이므로 역함수의 정의역은 $\{x\,|\,x\ge0\}$이다.

$\therefore\ f^{-1}(a_2)\cdot f^{-1}(a_9)=f^{-1}(7)\cdot f^{-1}(28)$

$=\sqrt{7}\times\sqrt{28}=\sqrt{7\times28}$

$=\sqrt{7^2\times2^2}=\sqrt{14^2}=14$

다른 풀이

점 Q_n은 점 P_n을 지나고 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점이므로 점 Q_n의 y좌표는 점 P_n의 y좌표와 같다.

따라서 $a_n=3n+1$이므로

$a_2=7$, $a_9=28$

$f^{-1}(a_2)=m$(m은 상수)이라 하면 $f(m)=a_2$이므로

$m^2=7$ $\quad\therefore\ m=\sqrt{7}$ ($\because$ $m\ge0$)

또 $f^{-1}(a_9)=l$(l은 상수)이라 하면 $f(l)=a_9$이므로

$l^2=28$ $\quad\therefore\ l=\sqrt{28}$ ($\because$ $l\ge0$)

$\therefore\ f^{-1}(a_2)\cdot f^{-1}(a_9)=\sqrt{7}\times\sqrt{28}=\sqrt{7\times28}$
$=\sqrt{7^2\times2^2}=\sqrt{14^2}=14$

☑ 공통수학2 다시보기

함수 $y=f(x)$가 일대일대응일 때, 역함수 $y=f^{-1}(x)$는 다음과 같은 순서로 구한다.
(1) $y=f(x)$를 x에 대하여 풀어 $x=f^{-1}(y)$로 나타낸다.
(2) $x=f^{-1}(y)$에서 x와 y를 서로 바꾸어 $y=f^{-1}(x)$로 나타낸다.

0023 답 ⑤
$(a^{-5}b^3)^{-3}\div(a^2b^{-2})^5=a^{15}b^{-9}\div a^{10}b^{-10}$
$=a^{15-10}b^{-9-(-10)}$
$=a^5b$

0024 답 ④
$a^{\pi+3}\div a^{\pi-3}=a^{\pi+3-(\pi-3)}=a^6$

0025 답 ⑤
$\sqrt[4]{a}=2$에서 $a=2^4$
$\sqrt[3]{b}=3$에서 $b=3^3$
$\therefore\ \sqrt[6]{ab^2}=a^{\frac{1}{6}}\times b^{\frac{1}{3}}=(2^4)^{\frac{1}{6}}\times(3^3)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\times3$
따라서 $p=\frac{2}{3}$, $q=1$이므로
$p+q=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$

0026 답 ⑤
$a=27^2=(3^3)^2=3^6$이므로
$81^7=(3^4)^7=3^{28}=(3^6)^{\frac{14}{3}}=a^{\frac{14}{3}}$

0027 답 ⑤
$\left(\frac{5^{\sqrt{3}}}{5}\right)^{\sqrt{3}+1}=(5^{\sqrt{3}-1})^{\sqrt{3}+1}=5^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$
$=5^{3-1}=5^2=25$

0028 답 ③
$\sqrt{\frac{3^{12}+27^{12}}{3^6+27^{10}}}=\sqrt{\frac{3^{12}+(3^3)^{12}}{3^6+(3^3)^{10}}}=\sqrt{\frac{3^{12}+3^{36}}{3^6+3^{30}}}$
$=\sqrt{\frac{3^{12}(1+3^{24})}{3^6(1+3^{24})}}=\sqrt{3^6}$
$=3^{\frac{6}{2}}=3^3$
$\therefore\ n=3$

0029 답 ⑤
$\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{3}}\right\}^{-\frac{3}{2}}\times\left\{\left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{2}{3}}\right\}^{\frac{3}{4}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\times\left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$
$=4^2\times\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$
$=16\times\frac{5}{4}=20$

0030 답 ①
$a=5^2$, $b=3^4$이므로
$45^6=(5\times3^2)^6=5^6\times3^{12}=(5^2)^3\times(3^4)^3=a^3b^3$

0031 답 ⑤
$\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a}}}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a}}}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{\sqrt[4]{a}}}$
$=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[4]{\sqrt[4]{a}}\times\sqrt[4]{\sqrt[4]{\sqrt[4]{a}}}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[16]{a}\times\sqrt[64]{a}$
$=a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{16}}\times a^{\frac{1}{64}}=a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}}=a^{\frac{21}{64}}$
$\therefore\ k=\frac{21}{64}$

다른 풀이
$\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a\sqrt[4]{a}}}=\{a\times(a\times a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{4}}=\{a\times(a^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{4}}$
$=(a\times a^{\frac{5}{16}})^{\frac{1}{4}}=(a^{\frac{21}{16}})^{\frac{1}{4}}=a^{\frac{21}{64}}$
$\therefore\ k=\frac{21}{64}$

0032 답 ②
$\frac{1}{2^{-2}+1}+\frac{1}{2^{-1}+1}+\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}$
$=\frac{2^2}{1+2^2}+\frac{2}{1+2}+\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2^2+1}$
$=\frac{2^2+1}{2^2+1}+\frac{2+1}{2+1}$
$=1+1=2$

0033 답 ①
$a=\sqrt[3]{4}$에서 $a^3=4$
$b=\sqrt[4]{3}$에서 $b^4=3$
$\therefore\ 12^{\frac{1}{12}}=(4\times3)^{\frac{1}{12}}=4^{\frac{1}{12}}\times3^{\frac{1}{12}}$
$=(a^3)^{\frac{1}{12}}(b^4)^{\frac{1}{12}}=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}}$

0034 답 ②
$5^x=\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$이므로
$5^{2x}+5^{-2x}=(5^x)^2+(5^x)^{-2}$
$=(3^{\frac{1}{2}})^2+(3^{\frac{1}{2}})^{-2}$
$=3+3^{-1}=3+\frac{1}{3}$
$=\frac{10}{3}$

0035 답 ①
$\sqrt{\frac{\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt[6]{a^2}}}\div\sqrt[3]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a^5}}}\div\sqrt{\frac{a^3}{\sqrt{a}}}$
$=\frac{\sqrt[8]{a^5}}{\sqrt[12]{a^2}}\div\frac{\sqrt[6]{a}}{\sqrt[12]{a^5}}\div\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{a}}$
$=a^{\frac{5}{8}-\frac{2}{12}}\div a^{\frac{1}{6}-\frac{5}{12}}\div a^{\frac{3}{2}-\frac{1}{4}}$
$=a^{\frac{5}{8}-\frac{2}{12}-\left(\frac{1}{6}-\frac{5}{12}\right)-\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{4}\right)}=a^{-\frac{13}{24}}$
$\therefore\ k=-\frac{13}{24}$

0036 답 ①

$\sqrt[4]{a\sqrt{a\sqrt{a^3}}}=\sqrt[4]{a}\times\sqrt[8]{a}\times\sqrt[16]{a^3}=a^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{1}{8}}\times a^{\frac{3}{16}}$

$=a^{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{3}{16}}=a^{\frac{9}{16}}$

$\sqrt[8]{a\sqrt{a^n}}=\sqrt[8]{a}\times\sqrt[16]{a^n}=a^{\frac{1}{8}}\times a^{\frac{n}{16}}$

$=a^{\frac{1}{8}+\frac{n}{16}}=a^{\frac{n+2}{16}}$

따라서 $\frac{9}{16}=\frac{n+2}{16}$이므로

$n+2=9 \quad \therefore n=7$

0037 답 1020

이차방정식 $x^2-4x-1=0$의 두 실근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-1$ ····· ⓘ

$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=4^2-4\times(-1)=20$이므로

$\beta-\alpha=2\sqrt{5}$ ($\because \alpha<\beta$) ····· ⓘⓘ

$\therefore \left(\frac{2^\beta}{2^\alpha}\right)^{\sqrt{5}}-\left(\frac{1}{4^\alpha}\right)^\beta=(2^{\beta-\alpha})^{\sqrt{5}}-2^{-2\alpha\beta}$

$=(2^{2\sqrt{5}})^{\sqrt{5}}-2^{-2\times(-1)}=2^{10}-2^2$

$=1024-4=1020$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 각각 구하기	30 %
ⓘⓘ $\beta-\alpha$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ $\left(\frac{2^\beta}{2^\alpha}\right)^{\sqrt{5}}-\left(\frac{1}{4^\alpha}\right)^\beta$의 값 구하기	40 %

0038 답 ④

$\left(\frac{1}{1024}\right)^{\frac{1}{n}}$, 즉 $2^{-\frac{10}{n}}$이 자연수가 되려면 $-\frac{10}{n}$이 자연수이어야 한다.

따라서 정수 n의 값은 -10, -5, -2, -1이므로 구하는 곱은

$(-10)\times(-5)\times(-2)\times(-1)=100$

0039 답 ⑤

$a^4=3$, $b^5=5$, $c^6=7$에서

$a=3^{\frac{1}{4}}$, $b=5^{\frac{1}{5}}$, $c=7^{\frac{1}{6}}$

$\therefore (abc)^n=(3^{\frac{1}{4}}\times5^{\frac{1}{5}}\times7^{\frac{1}{6}})^n=3^{\frac{n}{4}}\times5^{\frac{n}{5}}\times7^{\frac{n}{6}}$

$3^{\frac{n}{4}}\times5^{\frac{n}{5}}\times7^{\frac{n}{6}}$이 자연수가 되려면 n은 4, 5, 6의 공배수이어야 한다.

따라서 300 이하의 자연수 n은 60, 120, 180, 240, 300의 5개이다.

0040 답 ④

m이 $1\le m\le4$인 자연수이므로 $\sqrt{n^m}$, 즉 $n^{\frac{m}{2}}$이 자연수가 되려면

(i) $m=1$, 3일 때,

n은 제곱수이어야 하고 $1\le n\le10$이므로 자연수 n의 값은

1^2, 2^2, 3^2

따라서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$2\times3=6$

(ii) $m=2$, 4일 때,

$n^{\frac{m}{2}}$은 n의 값에 관계없이 자연수가 된다.

이때 n은 $1\le n\le10$인 자연수이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$2\times10=20$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$6+20=26$

0041 답 ①

$\frac{x^{-1}+x^{-3}+x^{-5}+x^{-7}+x^{-9}}{x+x^3+x^5+x^7+x^9}$

$=\frac{x^{-10}(x^9+x^7+x^5+x^3+x)}{x+x^3+x^5+x^7+x^9}$

$=x^{-10}=(\sqrt[5]{2+\sqrt{3}})^{-10}=(2+\sqrt{3})^{-2}$

$=\frac{1}{(2+\sqrt{3})^2}=\frac{1}{7+4\sqrt{3}}$

$=\frac{7-4\sqrt{3}}{(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}$

$=7-4\sqrt{3}$

0042 답 ⑤

$\sqrt[4]{2\sqrt{8}}$이 자연수 N의 n제곱근이라 하면

$N=(\sqrt[4]{2\sqrt{8}})^n$

이때 $\sqrt[4]{2\sqrt{8}}=\sqrt[4]{\sqrt{32}}=\sqrt[8]{2^5}=2^{\frac{5}{8}}$이므로

$N=2^{\frac{5n}{8}}$

따라서 n은 8의 배수이어야 하고 $3\le n\le180$이므로 n은 8, 16, 24, ..., 176의 22개이다.

0043 답 ③

(i) $a=4$일 때,

$(\sqrt[n]{4})^3=4^{\frac{3}{n}}=(2^2)^{\frac{3}{n}}=2^{\frac{6}{n}}$이 자연수가 되려면 $\frac{6}{n}$이 자연수이어야 하므로 n은 6의 양의 약수이어야 한다.

즉, 2 이상의 자연수 n의 값은 2, 3, 6이므로 n의 최댓값은 6이다.

$\therefore f(4)=6$

(ii) $a=27$일 때,

$(\sqrt[n]{27})^3=27^{\frac{3}{n}}=(3^3)^{\frac{3}{n}}=3^{\frac{9}{n}}$이 자연수가 되려면 $\frac{9}{n}$가 자연수이어야 하므로 n은 9의 양의 약수이어야 한다.

즉, 2 이상의 자연수 n의 값은 3, 9이므로 n의 최댓값은 9이다.

$\therefore f(27)=9$

(i), (ii)에서

$f(4)+f(27)=6+9=15$

0044 답 ④

$4^x+4^{1-x}=(2^2)^x+(2^2)^{1-x}$

$=(2^x)^2+(2^{1-x})^2$

$=(2^x+2^{1-x})^2-2\times2^x\times2^{1-x}$

$=6^2-2\times2$

$=32$

0045 답 ③

$4^x=12$에서 $4=12^{\frac{1}{x}}$ ····· ㉠

$3^y=12$에서 $3=12^{\frac{1}{y}}$ ····· ㉡

㉠×㉡을 하면

$4\times3=12^{\frac{1}{x}}\times12^{\frac{1}{y}}$

$12=12^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

0046 답 7

$a^{-1}\times(-b)^{-1}=-2$에서

$\frac{1}{a}\times\left(-\frac{1}{b}\right)=-2,\ -\frac{1}{ab}=-2$

$\therefore ab=\frac{1}{2}$ ····· ⅰ

$a^{-1}+b^{-1}=6$에서

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=6,\ \frac{a+b}{ab}=6$

$\therefore a+b=6ab=6\times\frac{1}{2}=3$ ····· ⅱ

$\therefore (a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a-b)$

$=\{(a^{\frac{1}{2}})^2-(b^{\frac{1}{2}})^2\}(a-b)$

$=(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$

$=3^2-4\times\frac{1}{2}=7$ ····· ⅲ

채점 기준	
ⅰ ab의 값 구하기	30 %
ⅱ $a+b$의 값 구하기	30 %
ⅲ $(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})(a-b)$의 값 구하기	40 %

0047 답 ①

$2^{x+y}=A,\ 2^{x-y}=B$로 놓으면

$(2^{x+y}+2^{x-y})^2-(2^{x+y}-2^{x-y})^2$

$=(A+B)^2-(A-B)^2$

$=(A^2+2AB+B^2)-(A^2-2AB+B^2)$

$=4AB=4\times2^{x+y}\times2^{x-y}=4\times2^{2x}$

$=2^2\times2^{2x}=2^{2x+2}$

0048 답 ⑤

$x=5^{\frac{1}{3}}-5^{-\frac{1}{3}}$이므로

$x^3=(5^{\frac{1}{3}}-5^{-\frac{1}{3}})^3$

$=5-5^{-1}-3\times(5^{\frac{1}{3}}\times5^{-\frac{1}{3}})\times(5^{\frac{1}{3}}-5^{-\frac{1}{3}})$

$=5-\frac{1}{5}-3\times1\times x$

$=\frac{24}{5}-3x$

$\therefore x^3+3x=\frac{24}{5}$

$\therefore 5x^3+15x=5(x^3+3x)=5\times\frac{24}{5}=24$

0049 답 ②

$(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}})^2=x+x^{-1}-2=11-2=9$

이때 $0<x<1$이므로

$0<x^{\frac{1}{2}}<1,\ x^{-\frac{1}{2}}>1$

즉, $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}<0$이므로

$x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=-3$

0050 답 ②

$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}$

$=\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}$

$=\frac{2+1}{2-1}=3$

0051 답 ②

$\frac{1}{1-2^{\frac{1}{8}}}+\frac{1}{1+2^{\frac{1}{8}}}+\frac{2}{1+2^{\frac{1}{4}}}+\frac{4}{1+2^{\frac{1}{2}}}$

$=\frac{(1+2^{\frac{1}{8}})+(1-2^{\frac{1}{8}})}{(1-2^{\frac{1}{8}})(1+2^{\frac{1}{8}})}+\frac{2}{1+2^{\frac{1}{4}}}+\frac{4}{1+2^{\frac{1}{2}}}$

$=\frac{2}{1-2^{\frac{1}{4}}}+\frac{2}{1+2^{\frac{1}{4}}}+\frac{4}{1+2^{\frac{1}{2}}}$

$=\frac{2(1+2^{\frac{1}{4}})+2(1-2^{\frac{1}{4}})}{(1-2^{\frac{1}{4}})(1+2^{\frac{1}{4}})}+\frac{4}{1+2^{\frac{1}{2}}}$

$=\frac{4}{1-2^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{1+2^{\frac{1}{2}}}$

$=\frac{4(1+2^{\frac{1}{2}})+4(1-2^{\frac{1}{2}})}{(1-2^{\frac{1}{2}})(1+2^{\frac{1}{2}})}$

$=\frac{8}{1-2}$

$=-8$

0052 답 ④

$x-\frac{8}{x}=\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)^3+3\left(\sqrt[3]{x}\times\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)\left(\sqrt[3]{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)$

$=2^3+3\times2\times2$

$=8+12=20$

0053 답 $8\sqrt{5}$

$(x-x^{-1})^2=(x+x^{-1})^2-4=3^2-4=5$ ····· ⅰ

이때 $x>1$이므로

$0<x^{-1}<1$

즉, $x-x^{-1}>0$이므로 ····· ⅱ

$x-x^{-1}=\sqrt{5}$ ····· ⅲ

$\therefore x^3-x^{-3}=(x-x^{-1})^3+3(x\times x^{-1})(x-x^{-1})$

$=(\sqrt{5})^3+3\times1\times\sqrt{5}$

$=5\sqrt{5}+3\sqrt{5}=8\sqrt{5}$ ····· ⅳ

채점 기준	
ⓘ $(x-x^{-1})^2$의 값 구하기	20 %
ⓘⓘ $x-x^{-1}$의 값의 부호 판단하기	20 %
ⓘⓘⓘ $x-x^{-1}$의 값 구하기	30 %
ⓘⓥ x^3-x^{-3}의 값 구하기	30 %

0054 답 ①

$6^x=3$에서 $6=3^{\frac{1}{x}}$ ····· ㉠

$54^y=27$에서 $54=27^{\frac{1}{y}}=(3^3)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{3}{y}}$ ····· ㉡

㉠÷㉡을 하면

$\frac{6}{54}=3^{\frac{1}{x}}\div 3^{\frac{3}{y}}$, $3^{-2}=3^{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}}$

$\therefore \frac{1}{x}-\frac{3}{y}=-2$

0055 답 ⑤

$(3^a)^{b+c}\times(3^b)^{c+a}\times(3^c)^{a+b}=\frac{1}{81}$에서

$3^{ab+ac}\times 3^{bc+ba}\times 3^{ca+cb}=3^{-4}$

$3^{2(ab+bc+ca)}=3^{-4}$ $\therefore ab+bc+ca=-2$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=(\sqrt{15})^2-2\times(-2)=19$

0056 답 ⑤

$\frac{2^x-2^{-x}}{8^x-8^{-x}}=\frac{2^x-2^{-x}}{2^{3x}-2^{-3x}}$

$=\frac{2^x(2^x-2^{-x})}{2^x(2^{3x}-2^{-3x})}=\frac{2^{2x}-1}{2^{4x}-2^{-2x}}$

$=\frac{4^x-1}{4^{2x}-4^{-x}}=\frac{6-1}{6^2-\frac{1}{6}}$

$=\frac{6^2-6}{6^3-1}=\frac{30}{215}=\frac{6}{43}$

따라서 $p=43$, $q=6$이므로

$p+q=43+6=49$

0057 답 ③

$\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{3}{5}$에서

$\frac{a^x(a^x-a^{-x})}{a^x(a^x+a^{-x})}=\frac{3}{5}$, $\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}=\frac{3}{5}$

$5a^{2x}-5=3a^{2x}+3$, $2a^{2x}=8$ $\therefore a^{2x}=4$

$\therefore a^{4x}=(a^{2x})^2=4^2=16$

0058 답 ②

$\frac{3^{3x}-3^{-x}}{3^x-3^{-x}}=\frac{3^x(3^{3x}-3^{-x})}{3^x(3^x-3^{-x})}$

$=\frac{3^{4x}-1}{3^{2x}-1}=\frac{(3^{2x}+1)(3^{2x}-1)}{3^{2x}-1}$

$=3^{2x}+1$ ····· ㉠

이때 $3^x-3^{-x+1}=0$에서

$3^x(3^x-3^{-x+1})=0$, $3^{2x}-3=0$ $\therefore 3^{2x}=3$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 식의 값은

$3+1=4$

0059 답 ④

$15^x=8$에서 $15^x=2^3$ $\therefore 15=2^{\frac{3}{x}}$ ····· ㉠

$a^y=2$에서 $a=2^{\frac{1}{y}}$ ····· ㉡

㉠×㉡을 하면

$15a=2^{\frac{3}{x}}\times 2^{\frac{1}{y}}=2^{\frac{3}{x}+\frac{1}{y}}$

이때 $\frac{3}{x}+\frac{1}{y}=2$이므로

$15a=2^2=4$ $\therefore a=\frac{4}{15}$

0060 답 ①

$(ab)^x=2$에서 $ab=2^{\frac{1}{x}}$ ····· ㉠

$(bc)^y=2^3$에서 $bc=2^{\frac{3}{y}}$ ····· ㉡

$(ca)^z=2^2$에서 $ca=2^{\frac{2}{z}}$ ····· ㉢

㉠÷㉡×㉢을 하면

$ab\div bc\times ca=2^{\frac{1}{x}}\div 2^{\frac{3}{y}}\times 2^{\frac{2}{z}}$

$\therefore 2^{\frac{1}{x}-\frac{3}{y}+\frac{2}{z}}=\frac{ab\times ca}{bc}=a^2$

0061 답 ③

㈏에서 $3^x=5^y=6^z=k$이므로

$3^x=k$에서 $3=k^{\frac{1}{x}}$ ····· ㉠

$5^y=k$에서 $5=k^{\frac{1}{y}}$ ····· ㉡

$6^z=k$에서 $6=k^{\frac{1}{z}}$ ····· ㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$3\times 5\times 6=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\times k^{\frac{1}{z}}$

$\therefore k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=90$

이때 ㈎에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$이므로

$k^2=90$ $\therefore k=3\sqrt{10}$ ($\because k>0$)

0062 답 ②

$3^x=7^y=21^z=k(k>0)$로 놓으면

$3^x=k$에서 $3=k^{\frac{1}{x}}$ ····· ㉠

$7^y=k$에서 $7=k^{\frac{1}{y}}$ ····· ㉡

$21^z=k$에서 $21=k^{\frac{1}{z}}$ ····· ㉢

㉠×㉡을 하면

$3\times 7=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}$, $k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=21$

$\therefore k^2=21$

㉢에서 $k^{\frac{1}{z}}=21$이므로 $k^{\frac{1}{z}}=k^2$

$\frac{1}{z}=2$

$\therefore z=\frac{1}{2}$

0063 답 17

$2^{-a}+2^{-b}=\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}=\frac{2^a+2^b}{2^a\times 2^b}$

$=\frac{2^a+2^b}{2^{a+b}}=\frac{9}{4}$

이때 $2^a+2^b=2$이므로

$\frac{2}{2^{a+b}}=\frac{9}{4}$ $\therefore 2^{a+b}=2\times\frac{4}{9}=\frac{8}{9}$

따라서 $p=9$, $q=8$이므로

$p+q=9+8=17$

다른 풀이

$2^{-a}+2^{-b}=\frac{9}{4}$의 양변에 2^{a+b}을 곱하면

$(2^{-a}+2^{-b})\times 2^{a+b}=\frac{9}{4}\times 2^{a+b}$

$2^b+2^a=\frac{9}{4}\times 2^{a+b}$ $\therefore 2^{a+b}=\frac{4}{9}(2^a+2^b)$

이때 $2^a+2^b=2$이므로

$2^{a+b}=\frac{4}{9}\times 2=\frac{8}{9}$

따라서 $p=9$, $q=8$이므로

$p+q=9+8=17$

0064 답 0

$2^x=5^y=\left(\frac{1}{10}\right)^z=k(k>0)$로 놓으면 $xyz\neq 0$이므로 $k\neq 1$

$2^x=k$에서 $2=k^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$5^y=k$에서 $5=k^{\frac{1}{y}}$ …… ㉡

$\left(\frac{1}{10}\right)^z=k$에서 $\frac{1}{10}=k^{\frac{1}{z}}$ …… ㉢ …… i

㉠×㉡×㉢을 하면

$2\times 5\times\frac{1}{10}=k^{\frac{1}{x}}\times k^{\frac{1}{y}}\times k^{\frac{1}{z}}$ $\therefore k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=1$ …… ii

이때 $k\neq 1$이므로 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$ …… iii

채점 기준

i 2, 5, $\frac{1}{10}$을 각각 k에 대한 식으로 나타내기	40 %
ii $k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$의 값 구하기	30 %
iii $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$의 값 구하기	30 %

0065 답 ③

$a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 $2ab=bc+2ca$의 양변을 abc로 나누면

$\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}$

$3^a=5^b=d^c=k(k>0)$로 놓으면

$3^a=k$에서 $3=k^{\frac{1}{a}}$

$5^b=k$에서 $5=k^{\frac{1}{b}}$

$d^c=k$에서 $d=k^{\frac{1}{c}}$

$\therefore d^2=(k^{\frac{1}{c}})^2=k^{\frac{2}{c}}=k^{\frac{1}{a}+\frac{2}{b}}=k^{\frac{1}{a}}(k^{\frac{1}{b}})^2=3\times 5^2=75$

0066 답 ①

$81^x=3$에서 $81=3^{\frac{1}{x}}$ …… ㉠

$6^y=9$에서 $6=9^{\frac{1}{y}}=(3^2)^{\frac{1}{y}}=3^{\frac{2}{y}}$ …… ㉡

$a^z=\frac{1}{9}$에서 $a=\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{z}}=(3^{-2})^{\frac{1}{z}}=(3^{-\frac{1}{z}})^2$

$\therefore a^{\frac{1}{2}}=3^{-\frac{1}{z}}$ …… ㉢

㉠×㉡×㉢을 하면

$81\times 6\times a^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}}$

이때 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{1}{z}=3$이므로 $a^{\frac{1}{2}}=\frac{3^3}{81\times 6}=\frac{1}{18}$

$\therefore a=\left(\frac{1}{18}\right)^2=\frac{1}{324}$

0067 답 ⑤

$8^a=81^b=x^c=k(k>0)$로 놓으면

$8^a=k$에서 $8=k^{\frac{1}{a}}$

$81^b=k$에서 $81=k^{\frac{1}{b}}$

$x^c=k$에서 $x=k^{\frac{1}{c}}$

$\therefore x^{12}=(k^{\frac{1}{c}})^{12}=k^{\frac{12}{c}}=k^{\frac{8}{a}+\frac{6}{b}}=(k^{\frac{1}{a}})^8(k^{\frac{1}{b}})^6$

$=8^8\times 81^6=2^{24}\times 3^{24}=(2^2\times 3^2)^{12}=36^{12}$

따라서 양수 x의 값은 36이다.

0068 답 ③

$\frac{x^2+x}{x^{-1}+1}-\frac{x^{-2}+x^{-1}}{x+1}=\frac{x^2(1+x^{-1})}{x^{-1}+1}-\frac{x^{-2}(1+x)}{x+1}$

$=x^2-x^{-2}$

$=(x+x^{-1})(x-x^{-1})$ …… ㉠

$\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=1$의 양변을 제곱하면

$x+\frac{1}{x}-2=1$ $\therefore x+x^{-1}=3$ …… ㉡

$\therefore (x-x^{-1})^2=(x+x^{-1})^2-4=3^2-4=5$

그런데 $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}>0$에서 $x>1$이므로 $x-x^{-1}>0$

$\therefore x-x^{-1}=\sqrt{5}$ …… ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면 구하는 식의 값은

$3\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

0069 답 2배

빵 12개를 데우는 데 걸리는 시간은

$0.5\times 12^{\frac{1}{2}}$(분)

빵 3개를 데우는 데 걸리는 시간은

$0.5\times 3^{\frac{1}{2}}$(분)

따라서 빵 12개를 데우는 데 걸리는 시간은 빵 3개를 데우는 데 걸리는 시간의

$\frac{0.5\times 12^{\frac{1}{2}}}{0.5\times 3^{\frac{1}{2}}}=4^{\frac{1}{2}}=2$(배)

0070 답 ③

현재부터 20년 후의 산림 면적은

$S_{20}=S_0\times0.97^{20}$, $0.97^{20}=\dfrac{S_{20}}{S_0}$

$\therefore\ 0.97=\left(\dfrac{S_{20}}{S_0}\right)^{\frac{1}{20}}$

따라서 현재부터 30년 후의 산림 면적은

$S_0\times0.97^{30}=S_0\times\left(\dfrac{S_{20}}{S_0}\right)^{\frac{30}{20}}=S_0\times\dfrac{S_{20}}{S_0}\times\left(\dfrac{S_{20}}{S_0}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=S_{20}\times\sqrt{\dfrac{S_{20}}{S_0}}$

0071 답 $2^{\frac{1}{4}}$배

라듐 -226의 처음 양을 M_0이라 하면

처음으로부터 500년 후의 라듐 -226의 양은 $M_0\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{500}{1600}}$

처음으로부터 900년 후의 라듐 -226의 양은 $M_0\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{900}{1600}}$

따라서 처음으로부터 500년 후의 라듐 -226의 양은 처음으로부터 900년 후의 라듐 -226의 양의

$\dfrac{M_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{500}{1600}}}{M_0\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{900}{1600}}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{500}{1600}-\frac{900}{1600}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{400}{1600}}=2^{\frac{1}{4}}$(배)

0072 답 ⑤

20년 후의 예상 자산이 초기 자본의 5배가 되므로

$5w_0=\dfrac{w_0}{3}10^{20a}(2+10^{20a})$

$10^{20a}(2+10^{20a})=15$

이때 $10^{20a}=A\ (A>0)$로 놓으면

$A(2+A)=15$, $A^2+2A-15=0$

$(A+5)(A-3)=0$ $\therefore\ A=3\ (\because\ A>0)$

$\therefore\ 10^{20a}=3$

40년 후의 예상 자산이 초기 자본의 k배가 되므로

$kw_0=\dfrac{w_0}{3}10^{40a}(2+10^{40a})$

$\therefore\ k=\dfrac{1}{3}\times3^2\times(2+3^2)=33$

0073 답 ③

A지역에서 $H_1=12$, $V_1=2$, $H_2=36$, $V_2=8$이므로

$8=2\times\left(\dfrac{36}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}}$ $\therefore\ 4=3^{\frac{2}{2-k}}$ ····· ㉠

B지역에서 $H_1=10$, $V_1=a$, $H_2=90$, $V_2=b$이므로

$b=a\times\left(\dfrac{90}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}}=a\times9^{\frac{2}{2-k}}=a\times(3^2)^{\frac{2}{2-k}}$

$=a\times(3^{\frac{2}{2-k}})^2$ ····· ㉡

따라서 ㉠, ㉡에서

$\dfrac{b}{a}=(3^{\frac{2}{2-k}})^2=4^2=16$

최고수준 도전 기출 20~21쪽

0074 답 ①

전략 ㈎에서 a의 값의 부호를 찾고, ㈏에서 n이 짝수일 때와 홀수일 때로 나누어 식을 간단히 한다.

㈎에서 n의 값에 관계없이 $a>0$

㈏에서 $\sqrt[n]{(-1)^n}=\begin{cases}1 & (n\text{이 }2\text{ 이상인 짝수})\\ -1 & (n\text{이 }2\text{ 이상인 홀수})\end{cases}$ 이므로

(i) n이 2 이상인 짝수일 때, ㈏에서 $\sqrt[n+1]{(a-n)^{n-1}}=-3$

① $n=2$일 때, $\sqrt[3]{a-2}=-3$

$a-2=(-3)^3=-27$

이때 $a=-25<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $n=4$일 때, $\sqrt[5]{(a-4)^3}=-3$

$a-4=(-3)^{\frac{5}{3}}$

이를 만족시키는 양의 정수 a는 존재하지 않는다.

③ $n=6$일 때, $\sqrt[7]{(a-6)^5}=-3$

$a-6=(-3)^{\frac{7}{5}}$

이를 만족시키는 양의 정수 a는 존재하지 않는다.

(ii) n이 2 이상인 홀수일 때, ㈏에서 $\sqrt[n+1]{(a-n)^{n-1}}=3$

① $n=3$일 때, $\sqrt[4]{(a-3)^2}=3$

$(a-3)^2=3^4$, $a^2-6a-72=0$

$(a+6)(a-12)=0$

$\therefore\ a=12\ (\because\ a>0)$

② $n=5$일 때, $\sqrt[6]{(a-5)^4}=3$

$a-5=3^{\frac{6}{4}}=3^{\frac{3}{2}}$

이를 만족시키는 양의 정수 a는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 순서쌍 $(n,\ a)$는 $(3,\ 12)$의 1개이다.

0075 답 2

전략 피타고라스 정리와 닮음인 삼각형, 거듭제곱근의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=(\sqrt[4]{2})^2+(\sqrt[4]{8})^2=\sqrt{2}+\sqrt{8}=3\sqrt{2}=\sqrt{18}$

이므로

$\overline{AC}=\sqrt{\sqrt{18}}=\sqrt[4]{18}\ (\because\ \overline{AC}>0)$

또 삼각형 ABC의 넓이에서 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BH}$이므로

$\overline{BH}=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{8}}{\sqrt[4]{18}}=\sqrt[4]{\dfrac{8}{9}}$

두 삼각형 ABC, AHB는 AA 닮음이므로 $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$

$\therefore\ \overline{AH}=\dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}}=\dfrac{(\sqrt[4]{2})^2}{\sqrt[4]{18}}=\dfrac{\sqrt[4]{2^2}}{\sqrt[4]{18}}=\sqrt[4]{\dfrac{2}{9}}$

㈎에서 삼각형 ABD는 이등변삼각형이므로

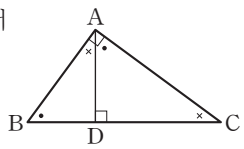
$a=\triangle ABD=2\triangle ABH$

$=2\times\left(\dfrac{1}{2}\times\sqrt[4]{\dfrac{2}{9}}\times\sqrt[4]{\dfrac{8}{9}}\right)=\sqrt[4]{\dfrac{2}{9}\times\dfrac{8}{9}}=\sqrt[4]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^4}=\dfrac{2}{3}$

$\therefore\ 3a=3\times\dfrac{2}{3}=2$

중2 다시보기

∠A=90°인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$일 때,
△ABC∽△DBA∽△DAC (AA 닮음)



0076 답 11

전략 양수, 0, 음수의 네제곱근과 세제곱근의 개수를 이용하여 집합 X의 원소의 조건을 파악한 후, 원소의 합의 최댓값을 구한다.

집합 A에서 $a^4=x$를 만족시키는 실수 a의 값은
x가 양수일 때 2개, x가 0일 때 1개, x가 음수일 때 0개
이때 $n(A)=9$이므로 집합 X는 0과 양수 4개를 원소로 가져야 한다. …… ㉠
집합 B에서 $b^3=x$를 만족시키는 실수 b의 값은 x의 값에 관계없이 1개이고, $n(B)=7$이므로 집합 X는 7개의 원소를 가져야 한다. …… ㉡
따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족시키려면 집합 X는 0, 양수 4개, 음수 2개를 원소로 가져야 한다.
이때 모든 원소의 합이 최대가 되도록 하는 집합 X는
$\{-2, -1, 0, 2, 3, 4, 5\}$이므로 구하는 최댓값은
$-2+(-1)+0+2+3+4+5=11$

0077 답 ⑤

전략 거듭제곱근을 지수를 사용하여 나타내고, 주어진 수가 각각 유리수, 자연수가 되기 위한 a, b의 조건을 찾는다.

(i) $\sqrt[3]{\frac{3^{b+2}}{2^a}}$, 즉 $\frac{3^{\frac{b+2}{3}}}{2^{\frac{a}{3}}}$이 유리수이고 2, 3은 서로소이므로 $\frac{a}{3}$, $\frac{b+2}{3}$가 각각 정수이어야 한다.

a는 자연수이므로 $\frac{a}{3}$가 정수가 되려면 a는 3의 배수이어야 한다.

따라서 a의 값은 3, 6, 9, 12, …

b는 자연수이므로 $\frac{b+2}{3}$가 정수가 되려면 $b=3k-2$(k는 자연수)이어야 한다.

따라서 b의 값은

1, 4, 7, 10, …

(ii) $\sqrt{\frac{2^a\times5^b}{8}}$, 즉 $2^{\frac{a-3}{2}}\times5^{\frac{b}{2}}$이 자연수이고 2, 5는 서로소이므로 $\frac{a-3}{2}$, $\frac{b}{2}$가 각각 음이 아닌 정수이어야 한다.

a는 자연수이므로 $\frac{a-3}{2}$이 음이 아닌 정수가 되려면 $a=2l+3$ (l은 음이 아닌 정수)이어야 한다.

따라서 a의 값은

3, 5, 7, 9, …

b는 자연수이므로 $\frac{b}{2}$가 음이 아닌 정수가 되려면 b는 2의 배수이어야 한다.

따라서 b의 값은 2, 4, 6, 8, …

(i), (ii)를 동시에 만족시키는 a의 값은 3, 9, 15, 21, …이고, b의 값은 4, 10, 16, 22, …이다.

따라서 a의 최솟값은 3, b의 최솟값은 4이므로 ab의 최솟값은
$3\times4=12$

0078 답 ③

전략 거듭제곱근을 지수를 사용하여 나타내고, m, n 사이의 관계식을 찾는다.

(가)에서 $(\sqrt[4]{a})^m=b$

$\therefore b=a^{\frac{m}{4}}$ …… ㉠

(나)에서 $(\sqrt[3]{b})^n=c$

$\therefore c=b^{\frac{n}{3}}$ …… ㉡

(다)에서 $c^5=a^{15}$

$\therefore c=a^3$ …… ㉢

㉠을 ㉡에 대입하면

$c=(a^{\frac{m}{4}})^{\frac{n}{3}}=a^{\frac{mn}{12}}$

이를 ㉢에 대입하면

$a^{\frac{mn}{12}}=a^3$

즉, $\frac{mn}{12}=3$이므로

$mn=36$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n)은
$(2, 18)$, $(3, 12)$, $(4, 9)$, $(6, 6)$, $(9, 4)$, $(12, 3)$, $(18, 2)$의 7개이다.

0079 답 ①

전략 n이 홀수일 때와 짝수일 때로 나누어 $f(x)$를 구한 후, 최댓값이 자연수가 되기 위한 n의 값을 구한다.

(가)에서 방정식 $x^n-128=0$은 중근을 가질 수 없으므로 두 방정식 $x^n-128=0$, $f(x)=0$은 각각 서로 다른 두 실근을 가져야 하고, 두 방정식의 실근은 서로 같아야 한다.

(i) n이 홀수일 때,

방정식 $x^n-128=0$, 즉 $x^n=128$의 실근은

$x=\sqrt[n]{128}$

이때 방정식 $x^n-128=0$의 실근이 1개이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) n이 짝수일 때,

방정식 $x^n-128=0$, 즉 $x^n=128$의 실근은

$x=2^{\frac{7}{n}}$ 또는 $x=-2^{\frac{7}{n}}$

이때 방정식 $x^n-128=0$의 실근과 이차방정식 $f(x)=0$의 실근이 서로 같아야 하므로

$f(x)=-(x+2^{\frac{7}{n}})(x-2^{\frac{7}{n}})=-x^2+2^{\frac{14}{n}}$

함수 $f(x)$는 $x=0$일 때 최댓값이 $2^{\frac{14}{n}}$이고 (나)에서 $2^{\frac{14}{n}}$은 자연수이므로 n은 14의 양의 약수이어야 한다.

즉, n의 값은 2, 14 ($\because$ n은 짝수)

(i), (ii)에서 모든 자연수 n의 값의 합은
$2+14=16$

0080 답 ⑤

전략 네제곱근 중 실수인 것의 곱을 이용하여 $f(n)$의 값을 구한 후 이차함수의 그래프를 이용한다.

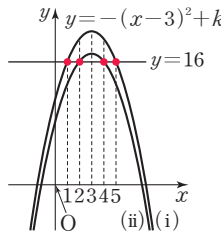
$\sqrt{2^{f(n)}}$의 네제곱근 중 실수인 것의 곱이 -16이므로 네제곱근은 -4, 4이다.

즉, $\sqrt[4]{\sqrt{2^{f(n)}}}=4$이므로

$\sqrt{2^{f(n)}}=4^4$, $2^{\frac{f(n)}{2}}=2^8$

$\frac{f(n)}{2}=8$ $\therefore f(n)=16$

이때 이차함수 $f(x)=-(x-3)^2+k$의 그래프의 대칭축은 직선 $x=3$이므로 $f(n)=16$을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2이려면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(1, 16)$ 또는 점 $(2, 16)$을 지나야 한다.



(i) $f(1)=16$일 때,

$-(1-3)^2+k=16$

$\therefore k=20$

(ii) $f(2)=16$일 때,

$-(2-3)^2+k=16$

$\therefore k=17$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$20+17=37$

0081 답 ③

전략 주어진 조건을 각각 관계식에 대입하여 B_1, B_2를 식으로 나타낸 후 $\frac{B_2}{B_1}$의 값을 구한다.

$I=I_0$, $r=r_1$, $x=x_1$, $B=B_1$을 주어진 관계식에 대입하면

$$B_1=\frac{kI_0{r_1}^2}{2({x_1}^2+{r_1}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$I=I_0$, $r=3r_1$, $x=3x_1$, $B=B_2$를 주어진 관계식에 대입하면

$$B_2=\frac{kI_0(3r_1)^2}{2\{(3x_1)^2+(3r_1)^2\}^{\frac{3}{2}}}=\frac{9kI_0{r_1}^2}{2(3^2{x_1}^2+3^2{r_1}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{9kI_0{r_1}^2}{2\times(3^2)^{\frac{3}{2}}({x_1}^2+{r_1}^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{9kI_0{r_1}^2}{2\times3^3({x_1}^2+{r_1}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{kI_0{r_1}^2}{6({x_1}^2+{r_1}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \frac{B_2}{B_1}=\frac{\frac{kI_0{r_1}^2}{6({x_1}^2+{r_1}^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{kI_0{r_1}^2}{2({x_1}^2+{r_1}^2)^{\frac{3}{2}}}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

02 로그

난이도별 필수 기출 24~37쪽

0082 답 ④

$\log_a 4=2$에서 $a^2=4$

이때 밑의 조건에서 $a>0$, $a\neq1$이므로

$a=2$

$\log_3 b=-1$에서

$b=3^{-1}=\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{2}{\frac{1}{3}}=6$

0083 답 ①

$x=\log_2(2+\sqrt{3})$에서 $2^x=2+\sqrt{3}$

$$\therefore 2^x+2^{-x}=2^x+\frac{1}{2^x}=(2+\sqrt{3})+\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$

$$=(2+\sqrt{3})+\frac{2-\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$$

$$=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$$

0084 답 ①

$\log_9 4=x$에서 $9^x=4$ $\therefore 3^{2x}=4$

$\frac{27^x+27^{-x}}{3^x+3^{-x}}$의 분모, 분자에 각각 3^x을 곱하면

$$\frac{27^x+27^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\frac{3^x(27^x+27^{-x})}{3^x(3^x+3^{-x})}=\frac{3^x(3^{3x}+3^{-3x})}{3^x(3^x+3^{-x})}$$

$$=\frac{3^{4x}+3^{-2x}}{3^{2x}+1}=\frac{(3^{2x})^2+\frac{1}{3^{2x}}}{3^{2x}+1}$$

$$=\frac{4^2+\frac{1}{4}}{4+1}=\frac{13}{4}$$

0085 답 ②

$\log_5\{\log_2(\log_3 n)\}=0$에서

$\log_2(\log_3 n)=5^0=1$

$\log_3 n=2^1=2$

$\therefore n=3^2=9$

0086 답 ②

밑의 조건에서 $a-2>0$, $a-2\neq1$

$\therefore a>2$, $a\neq3$ ····· ㉠

진수의 조건에서 $-a^2+3a+18>0$

$a^2-3a-18<0$, $(a+3)(a-6)<0$

$\therefore -3<a<6$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은

$2<a<3$ 또는 $3<a<6$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$4+5=9$

0087 답 1

$\log_{x+2}x^2$이 정의되려면

밑의 조건에서 $x+2>0$, $x+2\neq 1$

$\therefore x>-2$, $x\neq -1$ ····· ㉠

진수의 조건에서 $x^2>0$

$\therefore x\neq 0$ ····· ㉡ ····· ⓘ

$\log_{3-x}|x-3|$이 정의되려면

밑의 조건에서 $3-x>0$, $3-x\neq 1$

$\therefore x<3$, $x\neq 2$ ····· ㉢

진수의 조건에서 $|x-3|>0$

$\therefore x\neq 3$ ····· ㉣ ····· ⓘⓘ

㉠~㉣의 공통부분은

$-2<x<-1$ 또는 $-1<x<0$ 또는 $0<x<2$ 또는 $2<x<3$

따라서 구하는 정수 x의 값은 1이다. ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\log_{x+2}x^2$이 정의되도록 하는 x의 값의 범위 구하기	40%
ⓘⓘ $\log_{3-x}\|x-3\|$이 정의되도록 하는 x의 값의 범위 구하기	40%
ⓘⓘⓘ 정수 x의 값 구하기	20%

0088 답 ②

밑의 조건에서 $a>0$, $a\neq 1$ ····· ㉠

진수의 조건에서

모든 실수 x에 대하여 $ax^2-ax+1>0$이어야 한다.

이차방정식 $ax^2-ax+1=0$의 판별식을 D라 하면 $a>0$이고

$D=a^2-4a<0$이므로

$a(a-4)<0$ $\therefore 0<a<4$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은

$0<a<1$ 또는 $1<a<4$

따라서 정수 a는 2, 3의 2개이다.

0089 답 ⑤

밑의 조건에서

$|a-n|>0$이므로 $a\neq n$ ····· ㉠

$|a-n|\neq 1$이므로 $a\neq n\pm 1$ ····· ㉡

진수의 조건에서

모든 실수 x에 대하여 $x^2+ax+2a>0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-8a<0$이므로

$a(a-8)<0$

$\therefore 0<a<8$ ····· ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분은

$a\neq n-1$, $a\neq n$, $a\neq n+1$, $0<a<8$

(ⅰ) $n=2$일 때, $a\neq 1$, $a\neq 2$, $a\neq 3$, $0<a<8$인 정수 a는

4, 5, 6, 7의 4개이므로

$f(2)=4$

(ⅱ) $n=4$일 때, $a\neq 3$, $a\neq 4$, $a\neq 5$, $0<a<8$인 정수 a는

1, 2, 6, 7의 4개이므로

$f(4)=4$

(ⅲ) $n=6$일 때, $a\neq 5$, $a\neq 6$, $a\neq 7$, $0<a<8$인 정수 a는

1, 2, 3, 4의 4개이므로

$f(6)=4$

(ⅳ) $n=8$일 때, $a\neq 7$, $a\neq 8$, $a\neq 9$, $0<a<8$인 정수 a는

1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이므로

$f(8)=6$

(ⅰ)~(ⅳ)에서

$f(2)+f(4)+f(6)+f(8)=4+4+4+6=18$

0090 답 ①

$2\log_3\sqrt{6}-\log_3 2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log_3 2$

$=\log_3(\sqrt{6})^2-\log_3 2\sqrt{2}+\log_3 2^{\frac{1}{2}}$

$=\log_3 6-\log_3 2\sqrt{2}+\log_3\sqrt{2}$

$=\log_3\frac{6\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

$=\log_3 3=1$

0091 답 ②

$\log_4 a+\log_4 2b+\log_4 4c=1$에서

$\log_4(a\times 2b\times 4c)=1$

$\log_4 8abc=1$

따라서 $8abc=4$이므로

$abc=\frac{1}{2}$

0092 답 ②

이차방정식 $x^2-32x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=32$, $\alpha\beta=2$

$\therefore \log_4(\alpha+\beta)-3\log_4\alpha\beta=\log_4 32-3\log_4 2$

$=\log_4 32-\log_4 2^3$

$=\log_4\frac{32}{8}=\log_4 4=1$

0093 답 ①

두 점 $(1, \log_2 3)$, $(3, \log_2 12)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{\log_2 12-\log_2 3}{3-1}=\frac{\log_2\frac{12}{3}}{2}=\frac{\log_2 4}{2}=\frac{\log_2 2^2}{2}=\frac{2}{2}=1$

0094 답 ①

$\log_2(2x+y)=2$에서 $2x+y=2^2=4$

$\log_2 x+\log_2 y=1$에서 $\log_2 xy=1$ $\therefore xy=2$

$\therefore 4x^2+y^2=(2x+y)^2-4xy=4^2-4\times 2=8$

다른 풀이

$\log_2(2x+y)=2$에서 $2x+y=2^2=4$

$\log_2 x+\log_2 y=1$에서 $\log_2 xy=1$ $\therefore xy=2$

$2x+y=4$, $xy=2$를 연립하여 풀면 $x=1$, $y=2$

$\therefore 4x^2+y^2=4\times 1^2+2^2=8$

0095 답 ②

$\log_7\sqrt{2.5}=\log_7 2.5^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_7 2.5=\frac{1}{2}\log_7\frac{5}{2}$

$=\frac{1}{2}(\log_7 5-\log_7 2)=\frac{1}{2}(b-a)$

0096 답 5

(가)에서

$\log_2(ab\times bc\times ca)=10$, $\log_2(abc)^2=10$

$\therefore (abc)^2=2^{10}=(2^5)^2$

이때 $abc>0$이므로

$abc=2^5$ …… ㉠ …… i

(나)에서

$a=2^{\frac{1}{x}}$, $b=2^{\frac{2}{y}}$, $c=2^{\frac{3}{z}}$ …… ㉡ …… ii

㉡을 ㉠에 대입하면

$2^{\frac{1}{x}}\times 2^{\frac{2}{y}}\times 2^{\frac{3}{z}}=2^5$, $2^{\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}}=2^5$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}=5$ …… iii

채점 기준	
i abc의 값 구하기	30 %
ii a, b, c를 각각 x, y, z에 대한 식으로 나타내기	30 %
iii $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}$의 값 구하기	40 %

0097 답 ③

$\log_2\left(1+\frac{1}{2}\right)+\log_2\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_2\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

$=\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\cdots+\log_2\frac{n+2}{n+1}$

$=\log_2\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n+2}{n+1}\right)$

$=\log_2\frac{n+2}{2}$

즉, $\log_2\frac{n+2}{2}=3$이므로 $\frac{n+2}{2}=2^3$, $n+2=16$

$\therefore n=14$

0098 답 ②

$f(x)=\log_a\sqrt{1+\frac{2}{x}}$

$=\log_a\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{2}\log_a\left(1+\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{2}\log_a\frac{x+2}{x}$

이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(7)$

$=\frac{1}{2}\log_a\frac{3}{1}+\frac{1}{2}\log_a\frac{4}{2}+\frac{1}{2}\log_a\frac{5}{3}+\cdots+\frac{1}{2}\log_a\frac{9}{7}$

$=\frac{1}{2}\log_a\left(\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{9}{7}\right)$

$=\frac{1}{2}\log_a\frac{8\times 9}{1\times 2}=\frac{1}{2}\log_a 36$

즉, $\frac{1}{2}\log_a 36=1$이므로 $\log_a 36=2$, $a^2=36$

이때 $a>0$이므로 $a=6$

0099 답 ⑤

$\log_a(b+c)+\log_a(b-c)=2$에서

$\log_a(b+c)(b-c)=2$

$\log_a(b^2-c^2)=2$

따라서 $a^2=b^2-c^2$, 즉 $a^2+c^2=b^2$이므로 삼각형 ABC는 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

0100 답 ④

$2(\log_2 a+\log_2 b)=2\log_2 ab$,

$2\log_2 5+\log_2 3^2=2\log_2 5+2\log_2 3$

$=2\log_2(5\times 3)$

$=2\log_2 15$

즉, $2\log_2 ab=2\log_2 15$이므로

$ab=15$

따라서 두 자연수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(1, 15)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$, $(15, 1)$의 4개이다.

0101 답 ③

$x^2-6xy-18y^2=0$에서

$x^2-6xy+9y^2=27y^2$

$(x-3y)^2=(3\sqrt{3}y)^2$

이때 $x>3y$, $y>0$이므로

$x-3y=3\sqrt{3}y$

$\therefore \log_3(x-3y)-\log_3 y=\log_3\frac{x-3y}{y}=\log_3\frac{3\sqrt{3}y}{y}$

$=\log_3 3\sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{3}{2}}$

$=\frac{3}{2}$

0102 답 33

$2048=2^{11}$의 양의 약수는 작은 수부터 차례대로

$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=2^2$, …, $a_{11}=2^{10}$, $a_{12}=2^{11}$이므로 …… i

$a_1a_{12}=a_2a_{11}=a_3a_{10}=a_4a_9=a_5a_8=a_6a_7=2^{11}$

$\therefore \log_4 a_1+\log_4 a_2+\log_4 a_3+\cdots+\log_4 a_{12}$

$=\log_4(a_1\times a_2\times a_3\times\cdots\times a_{12})$

$=\log_4(a_1a_{12}\times a_2a_{11}\times\cdots\times a_6a_7)$

$=\log_4(2^{11})^6=\log_4(2^2)^{33}$

$=\log_4 4^{33}$

$=33$ …… ii

채점 기준	
i a_1, a_2, a_3, …, a_{12} 모두 구하기	50 %
ii $\log_4 a_1+\log_4 a_2+\log_4 a_3+\cdots+\log_4 a_{12}$의 값 구하기	50 %

✓ 중1 다시보기

자연수 A가 $A=a^mb^n$ (a, b는 서로 다른 소수, m, n은 자연수)으로 소인수분해될 때,

(1) A의 양의 약수: (a^m의 양의 약수)×(b^n의 양의 약수)

(2) A의 양의 약수의 개수: $(m+1)(n+1)$

0103 답 ③

$$\log_2 96-\frac{1}{\log_{12}2}=\log_2 96-\log_2 12$$
$$=\log_2\frac{96}{12}$$
$$=\log_2 8=\log_2 2^3$$
$$=3$$

0104 답 ⑤

$$5^{1-\log_5 3}\times 3^{\log_3 6-\log_3 2}=5^{\log_5 5-\log_5 3}\times 3^{\log_3\frac{6}{2}}$$
$$=5^{\log_5\frac{5}{3}}\times 3^{\log_3 3}$$
$$=\frac{5}{3}\times 3=5$$

0105 답 ③

$$\log_2 7\times\log_3 12\times\log_7 3-\frac{2}{\log_3 4}$$
$$=\log_2 7\times\frac{\log_2 12}{\log_2 3}\times\frac{\log_2 3}{\log_2 7}-2\log_4 3$$
$$=\log_2 12-2\log_{2^2}3$$
$$=\log_2 12-\log_2 3$$
$$=\log_2\frac{12}{3}=\log_2 4$$
$$=\log_2 2^2=2$$

0106 답 ④

$$\frac{1}{\log_3 x}+\frac{1}{\log_5 x}+\frac{1}{\log_7 x}=\log_x 3+\log_x 5+\log_x 7$$
$$=\log_x(3\times 5\times 7)$$
$$=\log_x 105$$

즉, $\log_x 105=\frac{1}{\log_a x}$이므로

$\log_x 105=\log_x a$

$\therefore a=105$

0107 답 ④

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}=\frac{-\log_3 5}{\log_2 5}$$
$$=\frac{-\frac{1}{\log_5 3}}{\frac{1}{\log_5 2}}=-\frac{\log_5 2}{\log_5 3}$$
$$=-\log_3 2$$

0108 답 ④

$$2^x\times 3^{\frac{2}{x}}=2^{\log_{\sqrt{3}}3}\times 3^{\frac{2}{\log_{\sqrt{3}}3}}$$
$$=3^{\log_{\sqrt{3}}2}\times 3^{2\log_3\sqrt{2}}$$
$$=3^{\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{2})^2}\times 3^{\log_3(\sqrt{2})^2}$$
$$=3^2\times(\sqrt{2})^2$$
$$=9\times 2=18$$

0109 답 ④

$\log_a 3=4$에서 $\log_3 a=\frac{1}{4}$

$\log_b 9=-2$에서 $\log_b 3^2=-2$

$2\log_b 3=-2$, $\log_b 3=-1$

$\therefore \log_3 b=-1$

$$\therefore \log_a 81b=\frac{\log_3 81b}{\log_3 a}=\frac{\log_3 81+\log_3 b}{\log_3 a}$$
$$=\frac{\log_3 3^4+\log_3 b}{\log_3 a}=\frac{4+(-1)}{\frac{1}{4}}=12$$

0110 답 ④

이차방정식 $x^2-x\log_2 12-3=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\log_2 12$, $\alpha\beta=-3$

$$\therefore 2^{(\alpha+1)(\beta+1)}=2^{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}$$
$$=2^{-3+\log_2 12+1}$$
$$=2^{\log_2 12-2}=2^{\log_2 12-\log_2 4}$$
$$=2^{\log_2\frac{12}{4}}=2^{\log_2 3}=3$$

0111 답 ③

$$\log_{12}15=\frac{\log_3 15}{\log_3 12}=\frac{\log_3(3\times 5)}{\log_3(2^2\times 3)}$$
$$=\frac{\log_3 3+\log_3 5}{\log_3 2^2+\log_3 3}=\frac{1+\log_3 5}{2\log_3 2+1}$$
$$=\frac{b+1}{2a+1}$$

0112 답 $2a+b-2$

$5^a=2$에서 $a=\log_5 2$ …… ⓘ

$5^b=\frac{1}{3}$에서 $b=\log_5\frac{1}{3}=-\log_5 3$ …… ⓘⓘ

$$\therefore \log_{0.2}\frac{75}{4}=\frac{\log_5\frac{75}{4}}{\log_5 0.2}=\frac{\log_5 75-\log_5 4}{\log_5\frac{1}{5}}$$
$$=\frac{\log_5(3\times 5^2)-\log_5 2^2}{-1}$$
$$=-\log_5 3-2+2\log_5 2$$
$$=2a+b-2$$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ b의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ $\log_{0.2}\frac{75}{4}$를 a, b에 대한 식으로 나타내기	40 %

0113 답 ㄴ

ㄱ. $\log_4 2+\log_5 25=\log_{2^2}2+\log_5 5^2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

ㄴ. $7^{\log_7 6-\log_7 2}=7^{\log_7\frac{6}{2}}=7^{\log_7 3}=3$

ㄷ. $\log_{\sqrt{2}}(\log_{\sqrt{3}}3)=\log_{\sqrt{2}}(\log_{3^{\frac{1}{2}}}3)=\log_{\sqrt{2}}2$
$=\log_{2^{\frac{1}{2}}}2=2$

따라서 보기에서 가장 큰 수는 ㄴ이다.

0114 답 ⑤

$\log_{3^2}3=\frac{1}{2}$

두 점 $(1, \log_9 3)$, $(4, \log_3 a)$를 지나는 직선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=\frac{\log_3 a-\frac{1}{2}}{4-1}(x-1)$$

이 직선이 원점을 지나므로 $-\frac{1}{2}=\frac{\log_3 a-\frac{1}{2}}{3}\times(-1)$

$\frac{3}{2}=\log_3 a-\frac{1}{2}$, $\log_3 a=2$ $\therefore$ $a=3^2=9$

다른 풀이

두 점 $(1, \log_9 3)$, $(4, \log_3 a)$를 각각 A, B라 하고 원점을 O라 하면 (직선 OA의 기울기)=(직선 OB의 기울기)이므로

직선 OA의 기울기는 $\frac{\log_9 3}{1}=\log_{3^2}3=\frac{1}{2}$

직선 OB의 기울기는 $\frac{\log_3 a}{4}$

즉, $\frac{1}{2}=\frac{\log_3 a}{4}$이므로 $\log_3 a=2$ $\therefore$ $a=3^2=9$

☑ 공통수학2 다시보기

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 지나는 직선의 방정식은

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \text{ (단, } x_1\neq x_2)$$

0115 답 ④

$\log_a b=x$, $\log_c a=y$로 놓으면 로그의 정의에 따라

$a^x=b$, $c^y=a$

$\therefore$ $b=a^x=(c^y)^x=c^{\boxed{(가)\ xy}}$

로그의 정의에 따라

$xy=\log_c \boxed{(나)\ b}$

$\therefore$ $\log_a b\times\log_c a=\log_c b$

$\log_c a\neq 0$이므로 양변을 $\log_c a$로 나누면

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

0116 답 ③

이차방정식 $x^2-6x+6=0$의 두 근이 $\log_3\alpha$, $\log_3\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_3\alpha+\log_3\beta=6$, $\log_3\alpha\times\log_3\beta=6$

$$\therefore \log_\alpha\beta+\log_\beta\alpha=\frac{\log_3\beta}{\log_3\alpha}+\frac{\log_3\alpha}{\log_3\beta}=\frac{(\log_3\beta)^2+(\log_3\alpha)^2}{\log_3\alpha\times\log_3\beta}$$
$$=\frac{(\log_3\alpha+\log_3\beta)^2-2\log_3\alpha\times\log_3\beta}{\log_3\alpha\times\log_3\beta}$$
$$=\frac{6^2-2\times6}{6}=4$$

0117 답 ②

$$\log_b a+\log_b c+\log_c a=\frac{\log_c a}{\log_c b}+\frac{1}{\log_c b}+\log_c a$$
$$=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}}+\frac{1}{\frac{4}{5}}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}+\frac{5}{4}+\frac{2}{3}=\frac{11}{4}$$

0118 답 ②

$b^{\log_2 a}=27$에서 $a^{\log_2 b}=27$

$a=3^p$, $\log_2 b=q$를 대입하면

$3^{pq}=27$, $3^{pq}=3^3$

$\therefore$ $pq=3$

0119 답 6

$x:y:z=4:2:3$이므로

$x=4k$, $y=2k$, $z=3k$($k>0$)라 하면 …… ⓘ

$2\log_2 x-3\log_2 y+\log_2 z$

$=2\log_2 4k-3\log_2 2k+\log_2 3k$

$=\log_2(4k)^2-\log_2(2k)^3+\log_2 3k$

$=\log_2\frac{16k^2\times3k}{8k^3}=\log_2 6$

$\therefore$ $2^{2\log_2 x-3\log_2 y+\log_2 z}=2^{\log_2 6}=6$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ x, y, z를 한 문자에 대하여 나타내기	50 %
ⓘⓘ $2^{2\log_2 x-3\log_2 y+\log_2 z}$의 값 구하기	50 %

0120 답 ①

$\frac{\log_a c}{\log_b c}=\frac{1}{2}$에서 $\frac{\log_c b}{\log_c a}=\frac{1}{2}$, $\log_a b=\frac{1}{2}$

$\therefore$ $b=a^{\frac{1}{2}}$ …… ㉠

$\frac{\log_c a}{\log_b a}=\frac{1}{3}$에서 $\frac{\log_a b}{\log_a c}=\frac{1}{3}$, $\log_c b=\frac{1}{3}$

$\therefore$ $b=c^{\frac{1}{3}}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=b^2$, $c=b^3$이고 세 자연수 a, b, c는 각각 1보다 크고 10보다 작으므로 $b=2$, $a=4$, $c=8$

$\therefore$ $a+b+c=4+2+8=14$

0121 답 ⑤

$\log_a b=\log_b a$에서 $\log_a b=\frac{1}{\log_a b}$, $(\log_a b)^2=1$

$\therefore$ $\log_a b=1$ 또는 $\log_a b=-1$ $\therefore$ $b=a$ 또는 $b=\frac{1}{a}$

이때 $a\neq b$이므로 $b=\frac{1}{a}$

$a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(a+1)(b+9)=(a+1)\left(\frac{1}{a}+9\right)=1+9a+\frac{1}{a}+9$$
$$=9a+\frac{1}{a}+10\geq2\sqrt{9a\times\frac{1}{a}}+10$$
$$=2\times3+10=16$$
$$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{1}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$$

따라서 $(a+1)(b+9)$의 최솟값은 16이다.

☑ 공통수학2 다시보기

$a>0$, $b>0$일 때,

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab} \text{ (단, 등호는 } a=b\text{일 때 성립한다.)}$$

0122 답 ⑤

$\log_a c : \log_b c = 4 : 3$에서

$4\log_b c = 3\log_a c$

$\dfrac{4}{\log_c b} = \dfrac{3}{\log_c a}$

$4\log_c a = 3\log_c b$

$\log_c a^4 = \log_c b^3$

따라서 $a^4 = b^3$이므로

$b = a^{\frac{4}{3}}$

$\therefore \log_a b - \log_b a = \log_a a^{\frac{4}{3}} - \log_{a^{\frac{4}{3}}} a$

$= \dfrac{4}{3} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{7}{12}$

0123 답 ②

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{0+3a+(-\log_3 2)}{3}, \dfrac{-\log_3 2+\log_3 5+a}{3}\right)$

무게중심의 y좌표가 $\log_{27} 5 = \log_{3^3} 5 = \dfrac{\log_3 5}{3}$이므로

$\dfrac{-\log_3 2+\log_3 5+a}{3} = \dfrac{\log_3 5}{3}$

$-\log_3 2+\log_3 5+a = \log_3 5$

$\therefore a = \log_3 2$ ····· ㉠

무게중심의 x좌표가 b이므로

$b = \dfrac{0+3a+(-\log_3 2)}{3}$

$3b = 3a - \log_3 2$

㉠을 대입하면

$3b = 3\log_3 2 - \log_3 2 = 2\log_3 2$

$\therefore 3^{a+3b} = 3^{\log_3 2 + 2\log_3 2} = 3^{3\log_3 2}$

$= 3^{\log_3 2^3} = 2^3 = 8$

✓ 공통수학2 다시보기

좌표평면 위의 세 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

0124 답 ⑤

$\dfrac{a}{b} = 4$의 양변에 2를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_2 \dfrac{a}{b} = \log_2 4$

$\therefore \log_2 a - \log_2 b = 2$

$b^{\log_2 a} = 2^{\frac{1}{2}}$의 양변에 2를 밑으로 하는 로그를 취하면

$\log_2 b^{\log_2 a} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \log_2 a \times \log_2 b = \dfrac{1}{2}$

$\therefore (\log_2 a)^2 + (\log_2 b)^2 = (\log_2 a - \log_2 b)^2 + 2(\log_2 a \times \log_2 b)$

$= 2^2 + 2 \times \dfrac{1}{2} = 5$

0125 답 ④

$A \cap B = B$에서 $B \subset A$이므로 B의 원소는 모두 A의 원소이다.

즉, $1 \in A$이므로

$-\log_3 a + 2\log_3 b = 1$, $\log_3 a^{-1} + \log_3 b^2 = 1$

$\log_3 \dfrac{b^2}{a} = 1$, $\dfrac{b^2}{a} = 3$, $b^2 = 3a$ $\therefore a = \dfrac{b^2}{3}$

따라서 $\log_b a = \log_b \dfrac{b^2}{3} = 2 - \log_b 3$이므로

$B = \{1, 2-\log_b 3\}$

즉, $2-\log_b 3 \in A$이다.

(i) $2-\log_b 3 = 2$일 때,

$\log_b 3 = 0$이므로 조건을 만족시키는 b의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $2-\log_b 3 = 3$일 때,

$\log_b 3 = -1$에서 $b^{-1} = 3$이므로 $b = \dfrac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $b = \dfrac{1}{3}$이므로 $a = \dfrac{b^2}{3} = \dfrac{1}{27}$

$\therefore \dfrac{b}{a} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{27}} = 9$

0126 답 ④

(가)에서

$\log_5 (2a \times 10b \times 2c) = 9$

$\log_5 40abc = 9$ $\therefore 40abc = 5^9$

따라서 $8ab = \dfrac{5^8}{c}$, $8bc = \dfrac{5^8}{a}$, $8ca = \dfrac{5^8}{b}$이므로

$\log_a 8bc + \log_b 8ca + \log_c 8ab$

$= \log_a \dfrac{5^8}{a} + \log_b \dfrac{5^8}{b} + \log_c \dfrac{5^8}{c}$

$= \log_a 5^8 + \log_b 5^8 + \log_c 5^8 - 3$

$= 8(\log_a 5 + \log_b 5 + \log_c 5) - 3$

$= 8 \times \dfrac{11}{4} - 3$ ($\because$ (나))

$= 19$

0127 답 ②

$\log_a b = \alpha$, $\log_b c = \beta$, $\log_c a = \gamma$라 하자.

(가)에서

$\dfrac{1}{\log_a b} + \dfrac{1}{\log_b c} + \dfrac{1}{\log_c a} = 4$

$\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma} = 4$

$\therefore \dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = 4$

이때 $\alpha\beta\gamma = \log_a b \times \log_b c \times \log_c a = \log_a b \times \dfrac{\log_a c}{\log_a b} \times \dfrac{1}{\log_a c} = 1$

이므로

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 4$

(나)에서

$2(\log_a b + \log_b c + \log_c a) = 8$

$2(\alpha+\beta+\gamma) = 8$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma = 4$

$\therefore\ (\log_a b)^2+(\log_b c)^2+(\log_c a)^2$
$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$
$=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$
$=4^2-2\times4=8$

0128 답 ⑤

$\log_2\frac{n}{3}=m$(m은 자연수)으로 놓으면

$\frac{n}{3}=2^m$

$\therefore\ n=3\times2^m$

이때 n은 50 이하의 자연수이므로 n의 값은

$3\times2,\ 3\times2^2,\ 3\times2^3,\ 3\times2^4$

따라서 모든 n의 값의 합은

$6+12+24+48=90$

0129 답 130

$7\log_n 2=m$(m은 자연수)으로 놓으면

$\log_n 2=\frac{m}{7}$이므로 $n^{\frac{m}{7}}=2$

$\therefore\ n=2^{\frac{7}{m}}$ …… ⓘ

이때 n은 2 이상의 자연수이므로 $\frac{7}{m}$이 자연수이어야 한다.

즉, m은 7의 양의 약수이므로 m의 값은 1, 7 …… ⓘⓘ

(ⅰ) $m=1$일 때, $n=2^7=128$

(ⅱ) $m=7$일 때, $n=2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 n의 값의 합은

$128+2=130$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ n을 자연수 m에 대하여 나타내기	30 %
ⓘⓘ m의 값 모두 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 모든 n의 값의 합 구하기	40 %

0130 답 ④

$\log_n 4\times\log_2 27=\log_n 2^2\times\log_2 3^3$
$=2\log_n 2\times3\log_2 3$
$=6\times\frac{\log_2 3}{\log_2 n}=6\log_n 3$
$=\frac{6}{\log_3 n}$

이때 n은 2 이상의 자연수이므로 $\frac{6}{\log_3 n}$이 자연수가 되려면 $\log_3 n$이 6의 양의 약수이어야 한다.

즉, $\log_3 n$의 값은 1, 2, 3, 6이므로 n의 값은

$3,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^6$

따라서 모든 n의 값의 곱은

$3\times3^2\times3^3\times3^6=3^{1+2+3+6}=3^{12}$

0131 답 426

$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=m$($m$은 정수)이라 하면

$4\log_{2^6}\left(\frac{3}{4n+16}\right)=m$

$\frac{2}{3}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)=m$

$\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)=\frac{3}{2}m$

따라서 $\frac{3}{4n+16}=2^{\frac{3}{2}m}$이므로

$4n+16=3\times2^{-\frac{3}{2}m}$

$\therefore\ n=3\times2^{-\frac{3}{2}m-2}-4$

이때 n이 자연수이려면 $-\frac{3}{2}m-2$가 자연수이어야 하므로

$m=2l$(l은 음의 정수) 꼴이어야 한다.

$m=-2$일 때, $n=3\times2^{3-2}-4=2$

$m=-4$일 때, $n=3\times2^{6-2}-4=44$

$m=-6$일 때, $n=3\times2^{9-2}-4=380$

$m=-8$일 때, $n=3\times2^{12-2}-4=3068$

⋮

따라서 1000 이하의 자연수 n의 값은 2, 44, 380이므로 그 합은

$2+44+380=426$

0132 답 ①

$\log_9 3n^2-\frac{1}{3}\log_3\sqrt{n}=\log_{3^2}3n^2-\frac{1}{3}\log_3 n^{\frac{1}{2}}$
$=\frac{1}{2}\log_3 3n^2-\frac{1}{6}\log_3 n$
$=\frac{1}{2}(\log_3 3+\log_3 n^2)-\frac{1}{6}\log_3 n$
$=\frac{1}{2}\left(1+2\log_3 n-\frac{1}{3}\log_3 n\right)$
$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{3}\log_3 n\right)$

$\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{3}\log_3 n\right)=m$($m$은 자연수, $1\le m\le60$)으로 놓으면

$\frac{5}{3}\log_3 n=2m-1$

$\log_3 n=\frac{3}{5}(2m-1)$

$\therefore\ n=3^{\frac{3}{5}(2m-1)}$

이때 n이 자연수가 되려면 $2m-1$은 5의 배수이어야 하고

$1\le m\le60$에서 $1\le2m-1\le119$이므로 $2m-1$의 값은

5, 15, 25, …, 115 ($\because$ m은 자연수)

따라서 구하는 자연수 n의 개수는 12이다.

0133 답 ⑤

$\frac{2}{3}+\log_{\sqrt{3}}a=\frac{2}{3}+\log_{3^{\frac{1}{2}}}a=\frac{2}{3}+2\log_3 a$

$\frac{2}{3}+2\log_3 a=m$(m은 자연수)으로 놓으면

$1<\log_3 a<\frac{5}{2}$에서

$2<2\log_3 a<5,\ \frac{8}{3}<\frac{2}{3}+2\log_3 a<\frac{17}{3}$

$\therefore\ \frac{8}{3}<m<\frac{17}{3}$

이를 만족시키는 자연수 m의 값은 3, 4, 5이므로

(ⅰ) $m=3$일 때,

$\frac{2}{3}+2\log_3 a=3$, $\log_3 a=\frac{7}{6}$ $\therefore a=3^{\frac{7}{6}}$

(ⅱ) $m=4$일 때,

$\frac{2}{3}+2\log_3 a=4$, $\log_3 a=\frac{10}{6}$ $\therefore a=3^{\frac{10}{6}}$

(ⅲ) $m=5$일 때,

$\frac{2}{3}+2\log_3 a=5$, $\log_3 a=\frac{13}{6}$ $\therefore a=3^{\frac{13}{6}}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 모든 a의 값의 곱은

$3^{\frac{7}{6}}\times 3^{\frac{10}{6}}\times 3^{\frac{13}{6}}=3^{\frac{7}{6}+\frac{10}{6}+\frac{13}{6}}=3^5$

0134 답 ⑤

(ⅰ) $\log_2(-x_1^2+a)=n$(n은 자연수)으로 놓으면

$-x_1^2+a=2^n$

$x_1^2=a-2^n$

이때 x_1의 개수는 $a-2^n>0$일 때 2, $a-2^n=0$일 때 1, $a-2^n<0$일 때 0이다.

따라서 x_1의 개수가 6이려면 n의 값이 1, 2, 3일 때 각각 실근을 2개씩 갖고, $n=4$일 때 실근을 갖지 않아야 하므로

$a-2^3>0$, $a-2^4<0$ $\therefore 8<a<16$

(ⅱ) $\log_3(-2x_2^2+b)=m$(m은 자연수)으로 놓으면

$-2x_2^2+b=3^m$

$x_2^2=\frac{b-3^m}{2}$

이때 x_2의 개수는 $\frac{b-3^m}{2}>0$일 때 2, $\frac{b-3^m}{2}=0$일 때 1, $\frac{b-3^m}{2}<0$일 때 0이다.

따라서 x_2의 개수가 6이려면 m의 값이 1, 2, 3일 때 각각 실근을 2개씩 갖고, $m=4$일 때 실근을 갖지 않아야 하므로

$\frac{b-3^3}{2}>0$, $\frac{b-3^4}{2}<0$

$\therefore 27<b<81$

(ⅰ), (ⅱ)에서 ab의 최솟값은 $a=9$, $b=28$일 때이므로

$9\times 28=252$

0135 답 ③

$\log\sqrt[3]{34.5^2}=\frac{2}{3}\log 34.5$

$=\frac{2}{3}\log(10\times 3.45)$

$=\frac{2}{3}(1+\log 3.45)$

$=\frac{2}{3}(1+0.5378)$

$=1.0252$

0136 답 ④

$\log x=2.7093=2+0.7093$

$=\log 10^2+\log 5.12=\log 512$

$\therefore x=512$

0137 답 ⑤

$\log 5+\log 108=\log\frac{10}{2}+\log(2^2\times 3^3)$

$=(\log 10-\log 2)+(\log 2^2+\log 3^3)$

$=1-\log 2+2\log 2+3\log 3$

$=1+\log 2+3\log 3$

$=1+0.3010+3\times 0.4771$

$=2.7323$

0138 답 7.48

$\log\sqrt{x}=0.84$에서 $\log x^{\frac{1}{2}}=0.84$

$\frac{1}{2}\log x=0.84$

$\therefore \log x=1.68$

$\therefore \log 1000x^3-\log\sqrt[3]{x}$

$=\log 10^3+\log x^3-\log x^{\frac{1}{3}}$

$=3+3\log x-\frac{1}{3}\log x$

$=3+\frac{8}{3}\log x=3+\frac{8}{3}\times 1.68$

$=7.48$

0139 답 ④

$10^a=2$, $10^b=3$에서 $\log 2=a$, $\log 3=b$

$\therefore \log 120=\log(2^2\times 3\times 10)=\log 2^2+\log 3+\log 10$

$=2\log 2+\log 3+1=2a+b+1$

0140 답 ②

$\log x=-1.9101$

$=-2+0.0899=\log 10^{-2}+\log 1.23$

$=\log(10^{-2}\times 1.23)=\log 0.0123$

$\therefore x=0.0123$

0141 답 ④

$\log\frac{100x}{y^2}=\log 100x-\log y^2=\log(10^2\times x)-\log y^2$

$=2+\log x-2\log y=2+\frac{4}{5}-2\times\frac{3}{2}$

$=-1+0.8$

따라서 $\log\frac{100x}{y^2}$의 정수 부분은 -1, 소수 부분은 0.8이므로

$a=-1$, $b=0.8$

$\therefore 5a^2b=5\times(-1)^2\times 0.8=4$

0142 답 ②

$\log 1=0$, $\log 10=1$, $\log 100=2$이므로

$[\log 1]=[\log 2]=\cdots=[\log 9]=0$

$[\log 10]=[\log 11]=\cdots=[\log 99]=1$

$[\log 100]=2$

$\therefore [\log 1]+[\log 2]+[\log 3]+\cdots+[\log 100]$

$=0\times 9+1\times 90+2=92$

0143 답 ③

$\log x$의 정수 부분이 1이므로

$1 \le \log x < 2$ ····· ㉠

한편 $\log x^2$의 소수 부분과 $\log \sqrt{x}$의 소수 부분의 합이 1이므로

$\log x^2$과 $\log \sqrt{x}$의 합은 정수이다.

$\log x^2 + \log \sqrt{x} = 2\log x + \frac{1}{2}\log x = \frac{5}{2}\log x$

㉠에서 $\frac{5}{2} \le \frac{5}{2}\log x < 5$이므로 정수인 $\frac{5}{2}\log x$의 값은 3, 4이다.

즉, $\log x$의 값은 $\frac{6}{5}$, $\frac{8}{5}$이므로

$x = 10^{\frac{6}{5}}$, $x = 10^{\frac{8}{5}}$

따라서 모든 실수 x의 값의 곱은

$k = 10^{\frac{6}{5}} \times 10^{\frac{8}{5}} = 10^{\frac{6}{5}+\frac{8}{5}} = 10^{\frac{14}{5}}$

$\therefore \log k = \log 10^{\frac{14}{5}} = \frac{14}{5}$

0144 답 $x^2-104x+400=0$

$\log 800 = \log (10^2 \times 8) = 2 + \log 8$이므로 $\log 800$의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\log 8$이다.

즉, $a=2$, $b = \log 8 = \log 2^3 = 3\log 2$이므로 ····· ⓘ

$2^a = 2^2 = 4$ ····· ⓘⓘ

또 $\frac{6}{b} = \frac{6}{3\log 2} = 2\log_2 10$에서

$2^{\frac{6}{b}} = 2^{2\log_2 10} = 2^{\log_2 10^2} = 10^2 = 100$ ····· ⓘⓘⓘ

따라서 x^2의 계수가 1이고 4, 100을 두 근으로 하는 이차방정식은

$x^2 - 104x + 400 = 0$ ····· ⓘⓥ

채점 기준

ⓘ a, b의 값 각각 구하기	30 %
ⓘⓘ 2^a의 값 구하기	20 %
ⓘⓘⓘ $2^{\frac{6}{b}}$의 값 구하기	20 %
ⓘⓥ 2^a, $2^{\frac{6}{b}}$을 두 근으로 하는 이차방정식 구하기	30 %

0145 답 ①

㈎에서 $3 \le \log x < 4$ ····· ㉠

㈏에서 좌변과 우변이 각각 $\log x^2$과 $\log \frac{1}{x^2}$의 소수 부분이고,

서로 같으므로 $\log x^2$과 $\log \frac{1}{x^2}$의 차는 정수이다.

$\log x^2 - \log \frac{1}{x^2} = 2\log x - (-2\log x) = 4\log x$

㉠에서 $12 \le 4\log x < 16$이므로 정수인 $4\log x$의 값은 12, 13, 14, 15이다.

즉, $\log x$의 값은 $\frac{12}{4}$, $\frac{13}{4}$, $\frac{14}{4}$, $\frac{15}{4}$이므로

$x = 10^{\frac{12}{4}}$, $x = 10^{\frac{13}{4}}$, $x = 10^{\frac{14}{4}}$, $x = 10^{\frac{15}{4}}$

따라서 모든 실수 x의 값의 곱은

$10^{\frac{12}{4}} \times 10^{\frac{13}{4}} \times 10^{\frac{14}{4}} \times 10^{\frac{15}{4}} = 10^{\frac{12}{4}+\frac{13}{4}+\frac{14}{4}+\frac{15}{4}}$

$= 10^{\frac{27}{2}}$

0146 답 ①

$f(3n+1) = f(n) + 1$을 만족시키려면 $3n+1$의 자릿수가 n의 자릿수보다 1만큼 커야 한다.

(ⅰ) n이 한 자리 자연수, 즉 $1 \le n < 10$일 때,

$3n+1$은 두 자리 자연수이어야 하므로

$10 \le 3n+1 < 100$

즉, $3 \le n < 33$이므로 자연수 n은 3, 4, 5, …, 9의 7개이다.

(ⅱ) n이 두 자리 자연수, 즉 $10 \le n < 100$일 때,

$3n+1$은 세 자리 자연수이어야 하므로

$100 \le 3n+1 < 1000$

즉, $33 \le n < 333$이므로 자연수 n은 33, 34, 35, …, 99의 67개이다.

(ⅲ) $n=100$일 때,

$3n+1=301$로 n과 $3n+1$이 모두 세 자리 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 자연수 n의 개수는

$7+67=74$

0147 답 ②

$[\log 3n]$, $[\log 4n]$은 음이 아닌 정수이므로

$[\log 3n] + [\log 4n] = 2$에서

$[\log 3n]=0$, $[\log 4n]=2$ 또는 $[\log 3n]=[\log 4n]=1$

(ⅰ) $[\log 3n]=0$, $[\log 4n]=2$일 때,

$[\log 3n]=0$에서

$1 \le 3n < 10$

$\therefore \frac{1}{3} \le n < \frac{10}{3}$

$\frac{1}{3} \le n < \frac{10}{3}$에서 $[\log 4n]=2$를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $[\log 3n]=[\log 4n]=1$일 때,

$[\log 3n]=[\log 4n]=1$에서

$10 \le 3n < 100$, $10 \le 4n < 100$이므로

$\frac{10}{3} \le n < \frac{100}{3}$, $\frac{5}{2} \le n < 25$

$\therefore \frac{10}{3} \le n < 25$

(ⅰ), (ⅱ)에서 n의 값의 범위는

$\frac{10}{3} \le n < 25$

따라서 자연수 n의 최댓값은 24, 최솟값은 4이므로 구하는 합은

$24+4=28$

0148 답 ④

높이가 a m인 지진 해일의 규모는

$\log_9 a$ ····· ㉠

높이가 4 m인 지진 해일의 규모는

$\log_9 4 = \log_9 2^2 = 2\log_9 2$ ····· ㉡

㉠이 ㉡의 1.5배이므로

$\log_9 a = 1.5 \times 2\log_9 2 = 3\log_9 2 = \log_9 2^3$

$\therefore a = 2^3 = 8$

0149 답 100배

겉보기 등급이 1등급인 별의 밝기를 F_1이라 하면

$1=-2.5\log F_1+C$ …… ㉠

겉보기 등급이 6등급인 별의 밝기를 F_2라 하면

$6=-2.5\log F_2+C$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$-5=-2.5(\log F_1-\log F_2)$, $\log\dfrac{F_1}{F_2}=2$

$\therefore \dfrac{F_1}{F_2}=10^2=100$

따라서 겉보기 등급이 1등급인 별의 밝기는 6등급인 별의 밝기의 100배이다.

0150 답 ③

밝기가 10000 lx인 빛이 유리판을 한 장 통과할 때마다 밝기는 5 %씩 감소하므로 10장 통과했을 때의 밝기는

10000×0.95^{10} (lx)

0.95^{10}에 상용로그를 취하면

$\log 0.95^{10}=10\log 0.95=10\log(10^{-1}\times9.5)$

$=10(\log 10^{-1}+\log 9.5)=10(-1+0.9777)$

$=-0.223=-1+0.777$

이때 $\log 5.984=0.7770$이므로

$\log 0.95^{10}=-1+0.7770=\log 10^{-1}+\log 5.984$

$=\log(10^{-1}\times5.984)=\log 0.5984$

$\therefore 0.95^{10}=0.5984$

따라서 구하는 빛의 밝기는

$10000\times0.95^{10}=10000\times0.5984=5984$ (lx)

0151 답 ③

원본 사진 A에서 $P=P_A$, $E=E_A$이므로

$P_A=20\log 255-10\log E_A$

원본 사진 B에서 $P=P_B$, $E=E_B=100E_A$이므로

$P_B=20\log 255-10\log E_B$

$=20\log 255-10\log 100E_A$

$\therefore P_A-P_B=-10\log E_A+10\log 100E_A$

$=10\log\dfrac{100E_A}{E_A}=10\log 100$

$=10\log 10^2=20$

0152 답 ②

A 나무에서 $D=20$, $R=R_A$, $L=L_A$이므로

$L_A^{\,2}=100\times20^2\times\log_3 R_A$ …… ㉠

B 나무에서 $D=30$, $R=R_B$, $L=L_B$이므로

$L_B^{\,2}=100\times30^2\times\log_3 R_B$ …… ㉡

$L_A=400$을 ㉠에 대입하면

$400^2=100\times20^2\times\log_3 R_A$

$\log_3 R_A=4$ $\therefore R_A=3^4=81$

$\dfrac{R_A}{R_B}=27$에서 $R_B=\dfrac{81}{27}=3$

이를 ㉡에 대입하면 $L_B^{\,2}=100\times30^2\times\log_3 3=300^2$

$\therefore L_B=300$ ($\because L_B>0$)

0153 답 8.8

상품의 처음 가격을 A원이라 하면 20일 후의 상품 가격은

$A\times0.9^{10}\times1.1^{10}=0.99^{10}A$ (원) …… ⓘ

0.99^{10}에 상용로그를 취하면

$\log 0.99^{10}=10\log 0.99$

$=10\log(10^{-1}\times9.9)$

$=10(\log 10^{-1}+\log 9.9)$

$=10(-1+0.996)$

$=-0.04=-1+0.96$

이때 $\log 9.12=0.960$이므로

$\log 0.99^{10}=-1+0.960$

$=\log 10^{-1}+\log 9.12$

$=\log(10^{-1}\times9.12)$

$=\log 0.912$

$\therefore 0.99^{10}=0.912$

즉, 20일 후의 상품 가격은 $0.912A$원이다. …… ⓘⓘ

따라서 $A-0.912A=0.088A$이므로 20일 후의 상품 가격은 처음 가격보다 8.8 % 저렴하다.

$\therefore k=8.8$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 상품의 처음 가격과 20일 후의 가격의 관계식 구하기	40 %
ⓘⓘ 20일 후의 상품 가격 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ k의 값 구하기	20 %

최고수준 도전 기출 38~39쪽

0154 답 ②

전략 밑의 조건과 진수의 조건을 이용하여 두 정수 x, y의 조건을 찾는다.

밑의 조건에서 $x-3>0$, $x-3\neq1$이므로

$x>3$, $x\neq4$

따라서 정수 x의 값은 5, 6, 7, …

한편 진수의 조건에서 $8-|x|-|y|>0$이므로

$|x|+|y|<8$

(i) $x=5$일 때,

$|y|<3$이므로 정수 y는 0, ±1, ±2의 5개이다.

(ii) $x=6$일 때,

$|y|<2$이므로 정수 y는 0, ±1의 3개이다.

(iii) $x=7$일 때,

$|y|<1$이므로 정수 y는 0의 1개이다.

(iv) $x\geq8$일 때,

$|x|+|y|<8$을 만족시키는 정수 y의 값은 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서 순서쌍 (x, y)의 개수는

$5+3+1=9$

0155 답 ③

전략 두 직선 AB, CD의 방정식을 각각 구하고, 주어진 y절편과 로그의 성질을 이용하여 a, b 사이의 관계식을 찾는다.

직선 AB의 방정식은

$$y-\log_2 a=\frac{\log_2 b-\log_2 a}{b-a}(x-a)$$

이 직선의 y절편이 0이므로 $x=0$, $y=0$을 대입하여 정리하면

$$\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}=\log_2 a \quad \cdots\cdots ㉠$$

직선 CD의 방정식은

$$y-\log_2 b=\frac{\log_2 a-\log_2 b}{b-a}(x-a)$$

이 직선의 y절편이 3이므로 $x=0$, $y=3$을 대입하여 정리하면

$$\log_2 b+\frac{a(\log_2 b-\log_2 a)}{b-a}=3 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$\log_2 a+\log_2 b=3$

$\log_2 ab=3$

$\therefore ab=2^3=8$

이때 네 점 A, B, C, D의 y좌표인 $\log_2 a$, $\log_2 b$가 모두 정수가 되게 하는 $1<a<b$인 a, b의 값은

$a=2$, $b=4$

$\therefore a+b=6$

0156 답 ②

전략 $x\in A\cap B$이면 $x\in A$, $x\in B$이므로 x가 두 집합 A, B의 원소가 되기 위한 조건을 찾고, 각 경우의 k의 값의 범위를 구한다.

집합 C의 원소 x는 $x\in A\cap B$인 자연수이므로

(i) $x\in A$일 때,

$x=\sqrt{a}$, $x^2=a$

그런데 $1\le a\le k$이므로

$1\le x^2\le k$

(ii) $x\in B$일 때,

$x=\log_{\sqrt{5}} b$, $(\sqrt{5})^x=b$

그런데 $1\le b\le k$이므로

$1\le 5^{\frac{x}{2}}\le k$

이때 $b=5^{\frac{x}{2}}$이 자연수가 되려면 x는 2의 배수이어야 한다.

(i), (ii)를 모두 만족시키는 x, x^2, $5^{\frac{x}{2}}$과 그에 따른 자연수 k의 값의 범위를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	x^2	$5^{\frac{x}{2}}$	k의 값의 범위
2	4	5	$k\ge 5$
4	16	$5^2=25$	$k\ge 25$
6	36	$5^3=125$	$k\ge 125$
8	64	$5^4=625$	$k\ge 625$
⋮	⋮	⋮	⋮

즉, $n(C)=3$이려면 $C=\{2, 4, 6\}$이어야 하므로 $125\le k<625$이어야 한다.

따라서 모든 자연수 k의 개수는

$625-125=500$

0157 답 ⑤

전략 로그의 진수의 조건과 $y=-x^2+ax+9$의 그래프를 이용하여 a의 값을 구한다.

$f(x)=-x^2+ax+9$라 하면 진수의 조건에서

$f(x)>0$

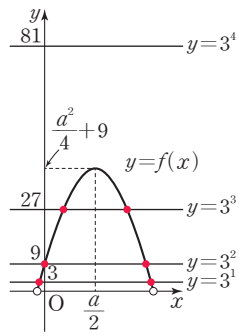
$\log_3 f(x)=n$(n은 자연수)이라 하면

$f(x)=3^n$

즉, $\log_3 f(x)$의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=3^n$의 교점의 개수와 같다.

$$f(x)=-x^2+ax+9$$
$$=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}+9$$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $f(x)>0$이고 꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4}+9\right)$인 위로 볼록한 모양이다.



이때 $\log_3 f(x)$의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 x의 개수가 6이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같이 세 직선 $y=3^1$, $y=3^2$, $y=3^3$과 각각 두 점에서 만나고 직선 $y=3^4$과는 만나지 않아야 한다.

즉, $3^3<\frac{a^2}{4}+9<3^4$이므로

$18<\frac{a^2}{4}<72$

$72<a^2<288$

이때 a는 자연수이므로 모든 자연수 a의 값은

9, 10, 11, ..., 16

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은

$9+10+11+12+13+14+15+16=100$

0158 답 9

전략 주어진 로그의 값을 k로 놓고, 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $a+b$와 ab를 n, k에 대한 식으로 나타낸 후 $(b-a)^2$을 n, k에 대한 식으로 나타낸다.

(가)에서

$\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)=k$($k=1, 2, 3$)

로 놓으면

$na-a^2=nb-b^2=2^k$

이때 a, b는 이차방정식 $nx-x^2=2^k$, 즉 $x^2-nx+2^k=0$의 서로 다른 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=n$, $ab=2^k$

$\therefore (b-a)^2=(a+b)^2-4ab$

$=n^2-4\times 2^k$

$=n^2-2^{k+2}$

(나)의 $0<b-a\le\frac{n}{2}$에서 $0<(b-a)^2\le\frac{n^2}{4}$이므로

$0<n^2-2^{k+2}\le\frac{n^2}{4}$

$0<n^2-2^{k+2}$에서 $2^{k+2}<n^2$

$n^2-2^{k+2}\le\frac{n^2}{4}$에서

$\frac{3}{4}n^2\le 2^{k+2}$, $n^2\le\frac{2^{k+4}}{3}$

$\therefore\ 2^{k+2}<n^2\le\frac{2^{k+4}}{3}$

(i) $k=1$일 때,

$2^{k+2}<n^2\le\frac{2^{k+4}}{3}$에서

$8<n^2\le\frac{32}{3}=10.\cdots$

이를 만족시키는 자연수 n의 값은 3이다.

(ii) $k=2$일 때,

$2^{k+2}<n^2\le\frac{2^{k+4}}{3}$에서

$16<n^2\le\frac{64}{3}=21.\cdots$

이를 만족시키는 자연수 n의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $k=3$일 때,

$2^{k+2}<n^2\le\frac{2^{k+4}}{3}$에서

$32<n^2\le\frac{128}{3}=42.\cdots$

이를 만족시키는 자연수 n의 값은 6이다.

(i), (ii), (iii)에서 모든 자연수 n의 값의 합은

$3+6=9$

0159 답 ①

전략 m, n이 각각 홀수, 짝수인 경우로 나누어 m, n의 조건을 각각 구한다.

(i) m, n이 모두 홀수일 때,

$f(mn)=\log_3 mn$, $f(m)=\log_3 m$, $f(n)=\log_3 n$이므로

$f(mn)=f(m)+f(n)$에서

$\log_3 mn=\log_3 m+\log_3 n$

이 등식은 모든 자연수 m, n에 대하여 성립한다.

이때 20 이하의 자연수 중에서 홀수는 10개이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$10\times 10=100$

(ii) m이 홀수, n이 짝수일 때,

$f(mn)=\log_2 mn$, $f(m)=\log_3 m$, $f(n)=\log_2 n$이므로

$f(mn)=f(m)+f(n)$에서

$\log_2 mn=\log_3 m+\log_2 n$

$\log_2 m+\log_2 n=\log_3 m+\log_2 n$

$\therefore\ \log_2 m=\log_3 m$

이 등식은 $m=1$일 때 성립한다.

이때 20 이하의 자연수 중에서 짝수는 10개이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$1\times 10=10$

(iii) m이 짝수, n이 홀수일 때,

(ii)에서 m, n을 서로 바꾸어 생각하면 되므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$10\times 1=10$

(iv) m, n이 모두 짝수일 때,

$f(mn)=\log_2 mn$, $f(m)=\log_2 m$, $f(n)=\log_2 n$이므로

$f(mn)=f(m)+f(n)$에서

$\log_2 mn=\log_2 m+\log_2 n$

이 등식은 모든 자연수 m, n에 대하여 성립한다.

이때 20 이하의 자연수 중에서 짝수는 10개이므로 순서쌍 (m, n)의 개수는

$10\times 10=100$

(i)~(iv)에서 순서쌍 (m, n)의 개수는

$100+10+10+100=220$

0160 답 ⑤

전략 주어진 조건을 관계식에 대입하여 a의 값을 구한다.

$x=R^{\frac{27}{23}}$, $v=\frac{1}{2}v_c$를 주어진 식에 대입하면

$\frac{v_c}{\frac{1}{2}v_c}=1-k\log\frac{R^{\frac{27}{23}}}{R}$이므로

$2=1-k\log R^{\frac{4}{23}}$

$1=-\frac{4}{23}k\log R$

$\therefore\ k\log R=-\frac{23}{4}$ ····· ㉠

$x=R^a$, $v=\frac{1}{3}v_c$를 주어진 식에 대입하면

$\frac{v_c}{\frac{1}{3}v_c}=1-k\log\frac{R^a}{R}$이므로

$3=1-k\log R^{a-1}$

$2=-(a-1)k\log R$

$a-1=-\frac{2}{k\log R}$

$\therefore\ a=1-\frac{2}{k\log R}$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$a=1-2\times\left(-\frac{4}{23}\right)=1+\frac{8}{23}=\frac{31}{23}$

03 지수함수

난이도별 필수 기출 42~60쪽

0161 답 ④

$f(-2)=m$에서 $3^{-2}=m$

$f(5)=n$에서 $3^5=n$

$f(p)=m^3n^4$에서 $3^p=(3^{-2})^3(3^5)^4=3^{-6}3^{20}=3^{14}$

$\therefore p=14$

0162 답 ⑤

① 함수 $y=2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

② x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

③ 정의역은 실수 전체의 집합이다.

④ 치역은 $\{y|y>3\}$이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

0163 답 36

$f(0)=4$에서 $a^n=4$

$f(1)=12$에서 $a^{m+n}=12$

$a^ma^n=12$, $4a^m=12$ $\therefore a^m=3$

$\therefore f(2)=a^{2m+n}=(a^m)^2a^n=3^2\times4=36$

0164 답 ③

함수 $y=\frac{1}{5}\times5^{2x}-2=5^{2x-1}-2=5^{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}-2=25^{x-\frac{1}{2}}-2$의 그래프는 함수 $y=25^x$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $m=\frac{1}{2}$, $n=-2$이므로

$m+n=\frac{1}{2}+(-2)=-\frac{3}{2}$

0165 답 ②

$f(-2)=25$에서 $a^{-2}=25$, $a^2=\frac{1}{25}$

$\therefore a=\frac{1}{5}$ ($\because a>0$)

$\therefore f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

ㄱ. 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$은 일대일함수이다.

ㄴ. $f(2)=\left(\frac{1}{5}\right)^2=\frac{1}{25}$, $f(3)=\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$

$\therefore f(2)>f(3)$

ㄷ. 그래프는 점 $\left(1, \frac{1}{5}\right)$을 지난다.

ㄹ. $f(p+q)=\left(\frac{1}{5}\right)^{p+q}=\left(\frac{1}{5}\right)^p\left(\frac{1}{5}\right)^q=f(p)f(q)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

0166 답 $a<-5$ 또는 $a>1$

함수 $y=(a^2+4a-4)^x$에서 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가하려면 $a^2+4a-4>1$이어야 하므로

$a^2+4a-5>0$

$(a+5)(a-1)>0$

$\therefore a<-5$ 또는 $a>1$

0167 답 ②

$f(x)=2^{2-x}-n+3$이라 하면

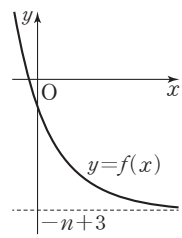
$f(x)=2^{2-x}-n+3=2^{-(x-2)}-n+3=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}-n+3$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 $-n+3$만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 $f(0)\le0$이어야 하므로

$4-n+3\le0$ $\therefore n\ge7$

따라서 정수 n의 최솟값은 7이다.



0168 답 $A<B<C$

$A=\sqrt[n+1]{a^n}=a^{\frac{n}{n+1}}$, $B=\sqrt[n+2]{a^{n+1}}=a^{\frac{n+1}{n+2}}$, $C=\sqrt[n+3]{a^{n+2}}=a^{\frac{n+2}{n+3}}$

에서 각각의 지수는

$\frac{n}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$, $\frac{n+1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2}$, $\frac{n+2}{n+3}=1-\frac{1}{n+3}$

이므로 → $\frac{1}{n+1}>\frac{1}{n+2}>\frac{1}{n+3}$ 이므로 $1-\frac{1}{n+1}<1-\frac{1}{n+2}<1-\frac{1}{n+3}$

$\frac{n}{n+1}<\frac{n+1}{n+2}<\frac{n+2}{n+3}$

$a>1$이므로

$a^{\frac{n}{n+1}}<a^{\frac{n+1}{n+2}}<a^{\frac{n+2}{n+3}}$

$\therefore A<B<C$

0169 답 ⑤

ㄱ. $y=\left(\frac{1}{9}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$이므로 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄴ. $y=9\times\left(\frac{1}{3}\right)^x=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$이므로 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y=-3^x=-\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$이므로 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㄹ. $y=5\times3^x=3^{\log_35}\times3^x=3^{x+\log_35}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x-\log_35}$이므로 그래프는 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 x축의 방향으로 $-\log_35$만큼 평행이동한 것이다.

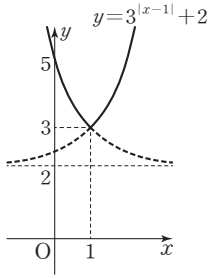
따라서 보기에서 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프와 겹쳐지는 함수는 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

0170 답 ①

$x \geq 1$이면 $y=3^{x-1}+2$, $x<1$이면 $y=3^{-(x-1)}+2=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}+2$

따라서 함수 $y=3^{|x-1|}+2$의 그래프는 그림과 같으므로 직선 $y=k$가 그래프와 만나지 않으려면

$k<3$



0171 답 ②

세 수의 밑을 $\frac{1}{2}$로 나타내면

$A=8^{-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$, $B=\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$, $C=\left(\frac{1}{4}\right)^{x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}$

$0<x<1$일 때

(i) $3x>2x$

(ii) $2x-x^2=x(2-x)>0$이므로 $2x>x^2$

(i), (ii)에서 $3x>2x>x^2$이므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}<\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2}$ $\therefore A<C<B$

0172 답 ②

$f(x)=\frac{1}{8}\times 2^{n-x}$, $g(x)=2^x+3$이라 하면

$f(x)=\frac{1}{8}\times 2^{n-x}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{x-n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-n+3}$

$f(0)=\left(\frac{1}{2}\right)^{-n+3}$, $g(0)=4$이고,

두 곡선이 제1사분면에서 만나려면

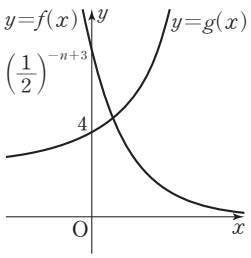
$f(0)>g(0)$이어야 하므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{-n+3}>4$, $2^{n-3}>2^2$

밑이 1보다 크므로

$n-3>2$ $\therefore n>5$

따라서 자연수 n의 최솟값은 6이다.



0173 답 ③

$x<0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 위쪽에 있으므로 $a<b$ ← $x=-1$이면 $a^{-1}>b^{-1}$ $\therefore a<b$

ㄱ. $a>1$이면 $b>a>1$이므로 $b>1$이다.

ㄴ. [반례] $a=\frac{1}{2}$, $b=2$

ㄷ. $0<b<1$이면 $0<a<b<1$이므로 $ab<1$이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0174 답 ①

ㄱ. $0<a<b<1$, $x>0$이면 $a^x<b^x<1$이다.

ㄴ. $x=-k(k>0)$라 하면

$x<0$일 때, $a^x<b^x$에서 $a^{-k}<b^{-k}$, $\frac{1}{a^k}<\frac{1}{b^k}$

즉, $a^k>b^k$이므로 $a>b$ $\therefore a^{\frac{1}{x}}<b^{\frac{1}{x}}$

ㄷ. $\frac{a^xb^y}{a^yb^x}=a^{x-y}\times b^{y-x}=a^{-(y-x)}\times b^{y-x}=\left(\frac{b}{a}\right)^{y-x}$

$0<a<b$에서 $\frac{b}{a}>1$이고, $x<y$에서 $y-x>0$이므로

$\frac{a^xb^y}{a^yb^x}=\left(\frac{b}{a}\right)^{y-x}>1$ $\therefore a^xb^y>a^yb^x$

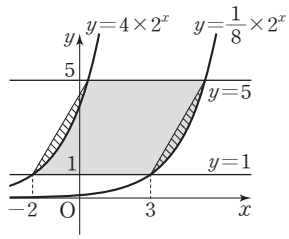
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

0175 답 ③

$y=4\times 2^x=2^{x+2}$, $y=\frac{1}{8}\times 2^x=2^{x-3}$이므로 함수 $y=\frac{1}{8}\times 2^x$의 그래프는 $y=4\times 2^x$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 둘러싸인 도형의 넓이는 그림과 같이 한 밑변의 길이가 5이고, 높이가 $5-1=4$인 평행사변형의 넓이와 같으므로

$5\times 4=20$



0176 답 ④

ㄱ. $y=2^x$의 밑이 1보다 크므로 $0<x_1<x_2$이면 $2^{x_1}<2^{x_2}$

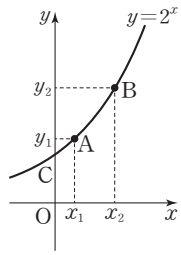
ㄴ. 원점을 O라 하면 그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에

(직선 OB의 기울기)<(직선 OA의 기울기)

를 만족시키는 두 점 A, B가 존재한다.

이때 $\frac{y_2}{x_2}<\frac{y_1}{x_1}$이므로

$x_1y_2<x_2y_1$ ($\because 0<x_1<x_2$)



ㄷ. 곡선 $y=2^x$과 y축의 교점을 C라 하면 C(0, 1)이고

(직선 AC의 기울기)<(직선 BC의 기울기)이므로

$\frac{y_1-1}{x_1}<\frac{y_2-1}{x_2}$, $x_2(y_1-1)<x_1(y_2-1)$ ($\because 0<x_1<x_2$)

$x_2y_1-x_2<x_1y_2-x_1$ $\therefore x_2y_1-x_1y_2<x_2-x_1$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0177 답 $24\sqrt{2}$

두 점 A, B의 좌표는 (k, a^k), (k, a^{-k})이고 두 점 C, D의 좌표는 $(2k, a^{2k})$, $(2k, a^{-2k})$이다.

선분 AB의 중점의 y좌표가 3이므로

$\frac{a^k+a^{-k}}{2}=3$ $\therefore a^k+a^{-k}=6$

이때 $a^k>a^{-k}$, 즉 $a^k-a^{-k}>0$이므로

$a^k-a^{-k}=\sqrt{(a^k-a^{-k})^2}=\sqrt{(a^k+a^{-k})^2-4}=\sqrt{6^2-4}=4\sqrt{2}$ ← $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$

따라서 선분 CD의 길이는

$a^{2k}-a^{-2k}=(a^k)^2-(a^{-k})^2=(a^k+a^{-k})(a^k-a^{-k})$

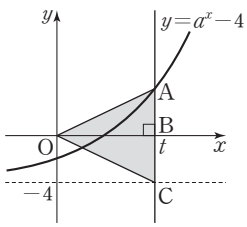
$=6\times 4\sqrt{2}=24\sqrt{2}$

✓ 공통수학2 다시보기

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

0178 답 ①

점 A의 x좌표를 $t(t>0)$라 하면



$A(t,\ a^t-4)$, $B(t,\ 0)$

곡선 $y=a^x-4$의 점근선의 방정식은

$y=-4$이므로 $C(t,\ -4)$

이때 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$a^t-4=4$ $\therefore\ a^t=8$ ····· ㉠

삼각형 AOC의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{OB}=16$, $\frac{1}{2}\times2\overline{BC}\times\overline{OB}=16$

$\frac{1}{2}\times(2\times4)\times\overline{OB}=16$ $\therefore\ \overline{OB}=4$

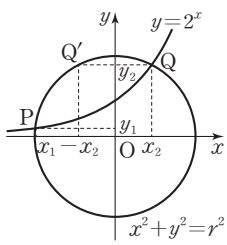
즉, $t=4$이므로 ㉠에 대입하면

$a^4=8$ $\therefore\ a=8^{\frac{1}{4}}=(2^3)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{3}{4}}$

$\therefore\ a\overline{OB}=2^{\frac{3}{4}}\times4=2^{\frac{3}{4}}\times2^2=2^{\frac{11}{4}}$

0179 답 ③

ㄱ. 함수 $y=2^x$의 그래프는 y축보다 위에 있고, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하므로 함수 $y=2^x$의 그래프와 원 $x^2+y^2=r^2(r>1)$은 제2사분면과 제1사분면에서 만난다.



이때 두 점 $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$에서 $x_1<x_2$이므로 $x_1<0$, $x_2>0$

점 Q와 y축에 대하여 대칭인 점을 $Q'(-x_2,\ y_2)$라 하면 점 Q′의 x좌표는 점 P의 x좌표보다 크므로

$x_1<-x_2<0$ $\therefore\ x_1+x_2<0$

ㄴ. $x_1^2+y_1^2=r^2$, $x_2^2+y_2^2=r^2$이므로

$x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2=2r^2$

$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2>0$이므로

$x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2-2(x_1x_2+y_1y_2)>0$

$2r^2-2(x_1x_2+y_1y_2)>0$

$\therefore\ x_1x_2+y_1y_2<r^2$

ㄷ. 두 점 $P(x_1,\ y_1)$, $Q(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 기울기는 1보다 작으므로

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<1$, $y_2-y_1<x_2-x_1$ ($\because\ x_2-x_1>0$)

$\therefore\ x_1-y_1<x_2-y_2$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0180 답 36

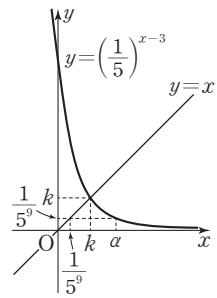
곡선 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y=x$가 만나는 점의 x좌표가 k이므로

$k=\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3}$, $k=\frac{5^3}{5^k}$, $k\times5^k=5^3$

$\left(\frac{1}{k\times5^k}\right)^3=\left(\frac{1}{5^3}\right)^3$ $\therefore\ \frac{1}{k^3\times5^{3k}}=\frac{1}{5^9}$

곡선 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$은 점 $(1,\ 25)$를 지나고 직선 $y=x$는 점 $(1,\ 1)$을 지나므로 $k>1$

이때 $\frac{1}{5^9}<1<k$이고 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$은 모든 실수 x에 대하여 감소하므로 그림과 같이 $f(\alpha)=\frac{1}{5^9}$인 실수 $\alpha(\alpha>k)$가 존재한다.



$f(\alpha)=\frac{1}{5^9}$에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\alpha-3}=\frac{1}{5^9}$

$\alpha-3=9$이므로 $\alpha=12$

$\therefore\ f(12)=\frac{1}{5^9}$

따라서 $f(f(x))=3x$에서

$f\left(\frac{1}{k^3\times5^{3k}}\right)=f\left(\frac{1}{5^9}\right)=f(f(12))=3\times12=36$

다른 풀이

$x>k$인 모든 실수 x에 대하여 $f(f(x))=3x$이므로

$f\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}\right)=3x$

$x>k$일 때 $0<\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}<k$이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}=t(0<t<k)$라 하면

$x-3=\log_{\frac{1}{5}}t$, $x=-\log_5t+3$

$\therefore\ f(t)=3(-\log_5t+3)=-3\log_5t+9$

즉, $0<x<k$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=-3\log_5x+9$

따라서 $0<\frac{1}{5^9}<k$이므로

$f\left(\frac{1}{k^3\times5^{3k}}\right)=f\left(\frac{1}{5^9}\right)=-3\log_55^{-9}+9=27+9=36$

0181 답 ②

함수 $y=2^{x-a}+b$의 그래프의 점근선이 직선 $y=1$이므로

$b=1$

함수 $y=2^{x-a}+1$의 그래프가 점 $(0,\ 3)$을 지나므로

$3=2^{-a}+1$, $2^{-a}=2$

즉, $-a=1$이므로 $a=-1$

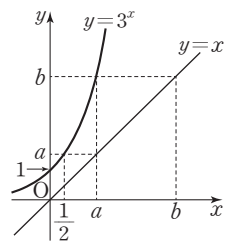
$\therefore\ a+b=-1+1=0$

0182 답 ④

$a=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$이므로

$b=3^a=3^{\sqrt{3}}$

$\therefore\ b^a=(3^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}}=3^3=27$



0183 답 ②

선분 AC의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 정사각형 ABCD의 한 변의 길이는 2이다.

$A(a,\ 2)$라 하면 $B(a+2,\ k\times3^{a+2})$

이때 점 A는 함수 $y=3^x$의 그래프 위의 점이므로

$3^a=2$

두 점 A, B의 y좌표는 같으므로

$k\times3^{a+2}=2$

$\therefore\ k=\dfrac{2}{3^{a+2}}=\dfrac{2}{3^a\times3^2}=\dfrac{2}{2\times9}=\dfrac{1}{9}$

0184 답 ⑤

점 C의 x좌표를 $a\,(a>0)$라 하면 점 C는 함수 $y=2^x$의 그래프 위의 점이므로 $C(a,\ 2^a)$

이때 삼각형 BOA는 직각이등변삼각형이므로 삼각형 BDC도 직각이등변삼각형이다.

$\overline{CD}=\overline{BD}=a$이므로 삼각형 BDC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}a^2$

즉, $\dfrac{1}{2}a^2=8$이므로 $a^2=16$

$\therefore\ a=4\ (\because\ a>0)$ $\therefore\ C(4,\ 16)$

한편 점 C가 직선 $y=-x+p$ 위의 점이므로

$16=-4+p$ $\therefore\ p=20$

$\therefore\ A(20,\ 0)$

따라서 삼각형 OAC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{OA}\times(\text{점 C의 }y\text{좌표})=\dfrac{1}{2}\times20\times16=160$

0185 답 ③

점 C의 x좌표를 a라 하면 $C(a,\ 9^a)$

점 C의 y좌표는 점 $A(k,\ 3^k)$의 y좌표와 같으므로

$9^a=3^k$, $3^{2a}=3^k$

즉, $2a=k$이므로 $a=\dfrac{k}{2}$

$\therefore\ C\left(\dfrac{k}{2},\ 3^k\right)$

점 D의 x좌표를 b라 하면 $D(b,\ 3^b)$

점 D의 y좌표는 점 $B(k,\ 9^k)$의 y좌표와 같으므로

$3^b=9^k$, $3^b=3^{2k}$ $\therefore\ b=2k$

$\therefore\ D(2k,\ 9^k)$

$\therefore\ \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BD}}=\dfrac{k-\frac{k}{2}}{2k-k}=\dfrac{\frac{k}{2}}{k}=\dfrac{1}{2}$

0186 답 ②

함수 $y=2^{x-2}$의 그래프는 함수 $y=2^{x+1}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

$\overline{AB}=3$

선분 AC는 y축에 평행하므로 두 점 A, C의 x좌표를 a라 하면

$A(a,\ 2^{a+1})$, $C(a,\ 2^{a-2})$

$\overline{AC}=\overline{AB}=3$이므로

$2^{a+1}-2^{a-2}=3$, $2^{a-2}(2^3-1)=3$

$2^{a-2}\times7=3$

$\therefore\ 2^{a-2}=\dfrac{3}{7}$

따라서 점 C의 y좌표는 $\dfrac{3}{7}$이다.

0187 답 ⑤

두 곡선 $f(x)=a^{-x}$과 $h(x)=a^x$은 y축에 대하여 대칭이고, $h(2)=2$이므로

$h(2)=f(-2)=2$ $\therefore\ P(-2,\ 2)$

$\overline{PQ}:\overline{QR}=2:1$에서

점 Q는 선분 PR를 $2:1$로 내분하는 점이므로 점 Q의 x좌표는

$\dfrac{2\times2+1\times(-2)}{2+1}=\dfrac{2}{3}$ $\therefore\ Q\left(\dfrac{2}{3},\ 2\right)$

점 $Q\left(\dfrac{2}{3},\ 2\right)$가 곡선 $g(x)=b^x$ 위에 있으므로

$b^{\frac{2}{3}}=2$ $\therefore\ b=2^{\frac{3}{2}}$

따라서 $g(x)=(2^{\frac{3}{2}})^x$이므로

$g(4)=(2^{\frac{3}{2}})^4=2^6=64$

다른 풀이

점 P의 좌표를 다음과 같이 구할 수도 있다.

$h(2)=2$에서 $a^2=2$ $\therefore\ a=\sqrt{2}\ (\because\ a>1)$

$f(x)=(\sqrt{2})^{-x}=2^{-\frac{1}{2}x}$이고, $P(p,\ 2)$라 하면 점 P가 곡선 $f(x)=2^{-\frac{1}{2}x}$ 위에 있으므로 $2^{-\frac{1}{2}p}=2$

즉, $-\dfrac{1}{2}p=1$이므로 $p=-2$

$\therefore\ P(-2,\ 2)$

0188 답 22

두 곡선 $y=n^x$, $y=3^x$이 직선 $x=1$과 만나는 점이 각각 A, B이므로 $A(1,\ n)$, $B(1,\ 3)$

두 곡선 $y=n^x$, $y=3^x$이 직선 $x=2$와 만나는 점이 각각 C, D이므로 $C(2,\ n^2)$, $D(2,\ 9)$ …… ⓘ

사다리꼴 ABDC의 넓이가 22 이하이려면

$\dfrac{1}{2}\times\{(n-3)+(n^2-9)\}\times1\le22$

$n^2+n-12\le44$, $n^2+n-56\le0$

$(n+8)(n-7)\le0$

$\therefore\ -8\le n\le7$ …… ⓘⓘ

따라서 4 이상의 모든 자연수 n의 값의 합은

$4+5+6+7=22$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 네 점 A, B, C, D의 좌표 각각 구하기	40 %
ⓘⓘ n의 값의 범위 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ 4 이상의 모든 자연수 n의 값의 합 구하기	10 %

0189 답 ③

함수 $y=8^x$의 그래프가 직선 $y=a$와 만나는 점이 A이므로

$8^x=a$에서 $x=\log_8 a$ $\therefore\ A(\log_8 a,\ a)$

함수 $y=4^x$의 그래프가 직선 $y=a$와 만나는 점이 C이므로

$4^x=a$에서 $x=\log_4 a$ $\therefore\ C(\log_4 a,\ a)$

같은 방법으로 하면 $B(\log_8 b,\ b)$, $D(\log_4 b,\ b)$

점 B에서 직선 $y=a$에 내린 수선의 발이 E이므로 $E(\log_8 b,\ a)$

삼각형 AEB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{EA}\times\overline{EB}=\frac{1}{2}\times(\log_8 a-\log_8 b)\times(a-b)$$
$$=\frac{1}{2}\times\log_{2^3}\frac{a}{b}\times(a-b)$$
$$=\frac{1}{6}\times\log_2\frac{a}{b}\times(a-b)$$

즉, $\frac{1}{6}\times\log_2\frac{a}{b}\times(a-b)=20$이므로

$\log_2\frac{a}{b}\times(a-b)=120$

점 C에서 직선 $y=b$에 내린 수선의 발이 F이므로 $F(\log_4 a,\ b)$

따라서 삼각형 CDF의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{DF}\times\overline{CF}=\frac{1}{2}\times(\log_4 a-\log_4 b)\times(a-b)$$
$$=\frac{1}{2}\times\log_{2^2}\frac{a}{b}\times(a-b)$$
$$=\frac{1}{4}\times\log_2\frac{a}{b}\times(a-b)$$
$$=\frac{1}{4}\times120=30$$

0190 답 20

점 A의 x좌표가 k이므로 $A(k,\ 2^k)$

$\overline{AB}$는 x축과 평행하므로 점 B의 y좌표는 점 A의 y좌표와 같다.

즉, 점 B의 y좌표는 2^k이므로 점 B의 x좌표를 b라 하면

$7\times\left(\frac{1}{2}\right)^b=2^k$에서 $2^b=7\times2^{-k}$

$\therefore\ b=\log_2(7\times2^{-k})=\log_2 7+\log_2 2^{-k}=\log_2 7-k$

$\therefore\ B(\log_2 7-k,\ 2^k)$

$\overline{AB}=k-(\log_2 7-k)=2k-\log_2 7$이므로

$10<\overline{AB}<50$에서

$10<2k-\log_2 7<50$

$10+\log_2 7<2k<50+\log_2 7$

$\therefore\ 5+\frac{\log_2 7}{2}<k<25+\frac{\log_2 7}{2}$

한편 $2=\log_2 4<\log_2 7<\log_2 8=3$에서 $1<\frac{\log_2 7}{2}<1.5$이므로

$6.\cdots<k<26.\cdots$

따라서 자연수 k는 7, 8, 9, …, 26의 20개이다.

0191 답 ②

곡선 $y=2^{x-1}+1$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 곡선이다. 그러므로 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A, B를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점을 각각 A′, B′이라 하면 두 점 A′, B′은 곡선 $y=2^{x-1}+1$ 위에 있다.

또 두 직선 AA′, BB′의 기울기가 모두 1이므로 두 점 A′, B′은 모두 직선 l 위에 있다.

즉, 두 점 A′, B′은 각각 점 C, 점 D와 일치하므로

$\overline{AC}=\overline{BD}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

점 B가 선분 AD를 3 : 1로 내분하므로 $\overline{AB}:\overline{BD}=3:1$에서

$\overline{AB}=3\overline{BD}=3\sqrt{2}$

점 B의 좌표를 $(k,\ 2^k)$이라 하면 점 A의 좌표는 $(k-3,\ 2^k-3)$이고, 점 A는 곡선 $y=2^x$ 위에 있으므로

$2^k-3=2^{k-3}$, $2^k-3=\frac{1}{8}\times2^k$

$\frac{7}{8}\times2^k=3$, $2^k=\frac{24}{7}$

$\therefore\ k=\log_2\frac{24}{7}$

따라서 점 B의 x좌표는 $\log_2\frac{24}{7}$이다.

0192 답 ①

함수 $y=2^{x-1}+k$의 밑이 1보다 크므로 $-3\le x\le4$일 때 이 함수는 $x=4$에서 최댓값 2^3+k를 갖는다.

즉, $2^3+k=6$이므로

$8+k=6$ $\quad\therefore\ k=-2$

0193 답 ⑤

함수 $y=5^{a-x}=\left(\frac{1}{5}\right)^{x-a}$의 밑이 1보다 작으므로 $2\le x\le5$일 때 이 함수는 $x=2$에서 최댓값 5^{a-2}을 갖는다.

즉, $5^{a-2}=5$이므로

$a-2=1$ $\quad\therefore\ a=3$

함수 $y=5^{3-x}$은 $x=5$에서 최솟값 5^{-2}을 가지므로

$m=5^{-2}=\frac{1}{25}$

$\therefore\ \frac{a}{m}=3\times25=75$

0194 답 ③

함수 $y=3^{2x}\times2^{-3x}-1=\left(\frac{9}{8}\right)^x-1$의 밑이 1보다 크므로

$-2\le x\le-1$일 때 이 함수는 $x=-1$에서 최댓값 $\left(\frac{9}{8}\right)^{-1}-1$을 갖는다.

따라서 $a=-1$, $M=\left(\frac{9}{8}\right)^{-1}-1=\frac{8}{9}-1=-\frac{1}{9}$이므로

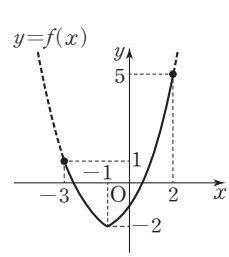
$a+M=-1+\left(-\frac{1}{9}\right)=-\frac{10}{9}$

0195 답 ⑤

$f(x)=2^{|x+1|}-3$

$$=\begin{cases}2^{x+1}-3 & (x\ge-1)\\ 2^{-x-1}-3 & (x<-1)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$-3\le x\le2$일 때 함수 $f(x)=2^{|x+1|}-3$은

$x=2$일 때 최대이고 최댓값은 $f(2)=2^3-3=5$

$x=-1$일 때 최소이고 최솟값은 $f(-1)=2^0-3=-2$

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$5+(-2)=3$

0196 답 $\frac{1}{128}$

$f(x)=x^2+2x$라 하면 $f(x)=(x+1)^2-1$

$-4\le x\le 1$일 때 함수 $y=f(x)$는 $x=-4$에서 최댓값 $f(-4)=8$, $x=-1$에서 최솟값 $f(-1)=-1$을 가지므로

$-1\le f(x)\le 8$

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$의 밑이 1보다 작으므로 $-1\le f(x)\le 8$일 때 이 함수는 $f(x)=-1$에서 최댓값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $f(x)=8$에서 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{8}$을 갖는다.

따라서 $M=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$, $m=\left(\frac{1}{2}\right)^{8}$이므로

$Mm=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=\frac{1}{128}$

☑ 공통수학1 다시보기

$\alpha\le x\le\beta$일 때, 이차함수 $f(x)=a(x-p)^2+q$의 최댓값과 최솟값은

① 꼭짓점의 x좌표 p가 $\alpha\le x\le\beta$에 포함될 때,

➡ $f(\alpha)$, $f(p)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

② 꼭짓점의 x좌표 p가 $\alpha\le x\le\beta$에 포함되지 않을 때,

➡ $f(\alpha)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

0197 답 ②

(i) $\frac{2}{a}>1$, 즉 $0<a<2$인 경우

함수 $y=\left(\frac{2}{a}\right)^{x}$의 밑이 1보다 크므로 $-1\le x\le 3$일 때 이 함수는 $x=3$에서 최댓값 $\left(\frac{2}{a}\right)^{3}$을 갖는다.

즉, $\left(\frac{2}{a}\right)^{3}=8$이므로 $\frac{2}{a}=2$ $\therefore a=1$

(ii) $\frac{2}{a}=1$, 즉 $a=2$인 경우

$y=1$이므로 최댓값은 8이 될 수 없다.

(iii) $0<\frac{2}{a}<1$, 즉 $a>2$인 경우

함수 $y=\left(\frac{2}{a}\right)^{x}$의 밑이 1보다 작으므로 $-1\le x\le 3$일 때 이 함수는 $x=-1$에서 최댓값 $\left(\frac{2}{a}\right)^{-1}$을 갖는다.

즉, $\left(\frac{2}{a}\right)^{-1}=8$이므로 $\frac{a}{2}=8$ $\therefore a=16$

(i), (ii), (iii)에서 모든 양수 a의 값의 합은

$1+16=17$

0198 답 ③

$f(x)=-x^2+4x+4$라 하면 $f(x)=-(x-2)^2+8$

$1\le x\le 4$일 때 함수 $y=f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 8, $x=4$에서 최솟값 4를 가지므로

$4\le f(x)\le 8$

함수 $y=a^{f(x)}$의 밑이 1보다 작으므로 $4\le f(x)\le 8$일 때 이 함수는 $f(x)=8$에서 최솟값 a^8을 갖는다.

즉, $a^8=\frac{1}{4}$이므로 $a=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{8}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$

따라서 함수 $y=a^{f(x)}$은 $f(x)=4$에서 최댓값 a^4을 가지므로

$a^4=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}\right\}^4=\frac{1}{2}$

0199 답 ③

$f(x)=|x-4|+1$이라 하면 $f(x)=\begin{cases}x-3 & (x\ge 4)\\ -x+5 & (x<4)\end{cases}$

$1\le x\le 6$일 때 함수 $y=f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 4, $x=4$에서 최솟값 1을 가지므로 $1\le f(x)\le 4$

(i) $a>1$인 경우

함수 $y=a^{f(x)}$의 밑이 1보다 크므로 $1\le f(x)\le 4$일 때 이 함수는 $f(x)=4$에서 최댓값 a^4을 가져야 한다.

즉, $a^4=\frac{1}{5}$이므로 이 조건을 만족시키는 a의 값은 없다.

(ii) $a=1$인 경우

$y=1$이므로 최댓값은 $\frac{1}{5}$이 될 수 없다.

(iii) $0<a<1$인 경우

함수 $y=a^{f(x)}$의 밑이 1보다 작으므로 $1\le f(x)\le 4$일 때 이 함수는 $f(x)=1$에서 최댓값 a를 갖는다.

즉, $a=\frac{1}{5}$이므로 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)}$은 $f(x)=4$에서 최솟값 $\left(\frac{1}{5}\right)^{4}$을 가진다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 최솟값은 $\frac{1}{5^4}$

0200 답 ①

$y=4^x-2^{x+m}+n=(2^x)^2-2^m\times 2^x+n$

$2^x=t(t>0)$로 놓으면 주어진 함수는

$y=t^2-2^mt+n=(t-2^{m-1})^2-4^{m-1}+n$

즉, $t>0$일 때 이 함수는 $t=2^{m-1}$에서 최솟값 $-4^{m-1}+n$을 갖는다.

$x=3$에서 최솟값을 가지므로 $t=2^3=2^{m-1}$에서

$3=m-1$ $\therefore m=4$

최솟값이 -52이므로

$-4^{4-1}+n=-52$, $-64+n=-52$ $\therefore n=12$

$\therefore m+n=4+12=16$

0201 답 19

$2^x+2^{-x}=t$로 놓으면 $2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^x+2^{-x}\ge 2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립한다.)

이때 $2^{2x}+2^{-2x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$이므로 주어진 함수는

$y=(t^2-2)+6t+5=t^2+6t+3=(t+3)^2-6$

따라서 $t\ge 2$일 때 함수 $y=(t+3)^2-6$은 $t=2$에서 최솟값 19를 갖는다.

0202 답 ③

$3\times2^{k+x}>0$, $27\times2^{k-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=3\times2^{k+x}+27\times2^{k-x}\geq2\sqrt{3\times2^{k+x}\times27\times2^{k-x}}$

$=2\sqrt{3^4\times2^{2k}}=18\times2^k$

(단, 등호는 $2^x=3$일 때 성립한다.)

따라서 주어진 함수의 최솟값이 144이므로

$18\times2^k=144$, $2^k=8=2^3$ $\therefore k=3$

0203 답 ④

$y=\dfrac{7\times9^x-8\times3^x+1}{9^x}=7-8\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\right\}^2$

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=t(t>0)$로 놓으면 $-2\leq x\leq0$에서

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^0\leq\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\leq\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$ $\therefore 1\leq t\leq9$

이때 주어진 함수는 $y=7-8t+t^2=(t-4)^2-9$

즉, $1\leq t\leq9$일 때 함수 $y=(t-4)^2-9$는 $t=9$에서 최댓값 16을 갖고, $t=4$에서 최솟값 -9를 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $16+(-9)=7$

0204 답 ③

두 함수 $f(x)=3^x$, $g(x)=3^{2-x}+a$의 그래프가 만나는 점의 x좌표가 2이므로 $f(2)=g(2)$에서

$3^2=3^0+a$, $9=1+a$ $\therefore a=8$

$\therefore f(x)g(x)=3^x\times(3^{2-x}+8)=8\times3^x+9$

따라서 함수 $f(x)g(x)=8\times3^x+9$의 밑이 1보다 크므로 $1\leq x\leq3$일 때 이 함수는 $x=1$에서 최솟값을 갖고, 그 최솟값은

$f(1)g(1)=8\times3+9=33$

0205 답 240

$y=2^x-\sqrt{2^{x+4}}+1=2^x-2^{\frac{x}{2}+2}+1=(2^{\frac{x}{2}})^2-4\times2^{\frac{x}{2}}+1$

$2^{\frac{x}{2}}=t(t>0)$로 놓으면 $-6\leq x\leq6$에서

$2^{-3}\leq2^{\frac{x}{2}}\leq2^3$ $\therefore \dfrac{1}{8}\leq t\leq8$

이때 주어진 함수는 $y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$

즉, $\dfrac{1}{8}\leq t\leq8$일 때 함수 $y=(t-2)^2-3$은 $t=2$, 즉 $x=2$에서 최솟값 -3을 갖고, $t=8$, 즉 $x=6$에서 최댓값 33을 갖는다.

따라서 $p=2$, $m=-3$, $q=6$, $M=33$이므로

$(p+q)(m+M)=8\times30=240$

0206 답 ④

$f(x)=x^2-6x+3=(x-3)^2-6$이므로 $1\leq x\leq4$일 때 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최솟값 -6, $x=1$에서 최댓값 -2를 갖는다.

$\therefore -6\leq f(x)\leq-2$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=a^{f(x)}$에서

(i) $0<a<1$인 경우

$y=a^{f(x)}$은 밑이 1보다 작으므로 $-6\leq f(x)\leq-2$일 때 이 함수는 $f(x)=-6$에서 최댓값 a^{-6}을 갖는다.

즉, $a^{-6}=27$이므로 $a^6=\dfrac{1}{27}$

$\therefore a=\left(\dfrac{1}{27}\right)^{\frac{1}{6}}=\left\{\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\right\}^{\frac{1}{6}}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ($\because a>0$)

즉, 함수 $y=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{f(x)}$은 $f(x)=-2$에서 최솟값을 가지므로

$m=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^{-2}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{3}}\right)^2=3$

(ii) $a>1$인 경우

$y=a^{f(x)}$은 밑이 1보다 크므로 $-6\leq f(x)\leq-2$일 때 이 함수는 $f(x)=-2$에서 최댓값 a^{-2}을 갖는다.

즉, $a^{-2}=27$이므로 $a^2=\dfrac{1}{27}$

$\therefore a=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ 또는 $a=-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

그런데 $a>1$이므로 조건을 만족시키는 a의 값은 없다.

(i), (ii)에서 $m=3$

0207 답 75

$36^x=6^{2x}>0$, $6^y>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$36^x+6^y\geq2\sqrt{36^x\times6^y}=2\sqrt{6^{2x}\times6^y}=2\sqrt{6^{2x+y}}$

(단, 등호는 $2x=y$일 때 성립한다.) …… ⓘ

이때 $2x+y=4$이므로

$2\sqrt{6^{2x+y}}=2\sqrt{6^4}=2\times6^2=72$

$2x=y$이면 $2x+y=4$에서

$y+y=4$, $2y=4$ $\therefore y=2$

$2x=2$이므로 $x=1$

따라서 36^x+6^y은 $x=1$, $y=2$에서 최솟값 72를 가지므로

$a=1$, $b=2$, $c=72$ …… ⓘⓘ

$\therefore a+b+c=1+2+72=75$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 부등식 세우기	50 %
ⓘⓘ a, b, c의 값 각각 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $a+b+c$의 값 구하기	10 %

0208 답 ④

ㄱ. $f(x)-g(x)=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}-\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}=a^{-x}$

이때 $a>1$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값은 감소하지만

$0<a<1$이면 x의 값이 증가할 때 y의 값도 증가한다.

ㄴ. $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}=\dfrac{\frac{a^x-a^{-x}}{2}}{\frac{a^x+a^{-x}}{2}}=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\dfrac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}$

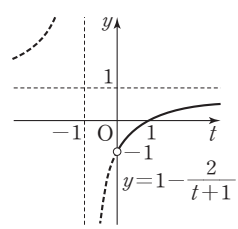
$=\dfrac{(a^{2x}+1)-2}{a^{2x}+1}=1-\dfrac{2}{a^{2x}+1}$

$a^{2x}=t(t>0)$로 놓으면

$y=1-\dfrac{2}{t+1}$

이 함수의 그래프는 그림과 같으므로

치역은 $\{y\mid-1<y<1\}$이다.



ㄷ. $a^x>0$, $a^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$f(x)=\frac{a^x+a^{-x}}{2}\geq\sqrt{a^x\times a^{-x}}=1$

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립한다.)

즉, 함수 $y=\{f(x)\}^2+6f(x)+10=\{f(x)+3\}^2+1$은 $f(x)=1$에서 최솟값을 갖고, 그 최솟값은

$(1+3)^2+1=17$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0209 답 ⑤

$\left(\frac{1}{8}\right)^{2-x}=2^{x+4}$에서 $2^{3x-6}=2^{x+4}$

즉, $3x-6=x+4$이므로

$2x=10$ $\therefore x=5$

0210 답 $x=-\frac{2}{3}$

$a=\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1}=a$에서 $5^{-2x-1}=5^{\frac{1}{3}}$

즉, $-2x-1=\frac{1}{3}$이므로

$-2x=\frac{4}{3}$ $\therefore x=-\frac{2}{3}$

0211 답 3

$9^x-8\times3^{x+1}-81=0$에서 $(3^x)^2-24\times3^x-81=0$

$3^x=t(t>0)$로 놓으면

$t^2-24t-81=0$, $(t+3)(t-27)=0$ $\therefore t=27$ ($\because t>0$)

따라서 $3^x=27=3^3$이므로 $x=3$

0212 답 8

$\frac{4^{x^2-1}}{2^{x+1}}=8$에서 $\frac{2^{2x^2-2}}{2^{x+1}}=2^3$, $2^{2x^2-x-3}=2^3$

즉, $2x^2-x-3=3$이므로

$2x^2-x-6=0$, $(2x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$

$\alpha>\beta$이므로 $\alpha=2$, $\beta=-\frac{3}{2}$

$\therefore \alpha-4\beta=2-4\times\left(-\frac{3}{2}\right)=8$

0213 답 ⑤

$\begin{cases}2^{x+1}+3^{y-1}=9\\2^{x+3}-3^{y+2}=5\end{cases}$에서 $\begin{cases}2\times2^x+\frac{1}{3}\times3^y=9\\8\times2^x-9\times3^y=5\end{cases}$

$2^x=X$, $3^y=Y(X>0, Y>0)$로 놓으면

$\begin{cases}2X+\frac{1}{3}Y=9\\8X-9Y=5\end{cases}$

이 연립방정식을 풀면 $X=4$, $Y=3$

즉, $2^x=4$, $3^y=3$이므로 $x=2$, $y=1$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=4+1=5$

0214 답 ⑤

$a^{2x}-a^x=42$에서 $(a^x)^2-a^x-42=0$

$a^x=t(t>0)$로 놓으면

$t^2-t-42=0$, $(t+6)(t-7)=0$

$\therefore t=7$ ($\because t>0$)

즉, $a^x=7$에서 방정식의 해가 $x=\frac{1}{2}$이므로

$a^{\frac{1}{2}}=7$ $\therefore a=7^2=49$

0215 답 ⑤

$3^x-3^{1-x}=4$에서 $3^x-\frac{3}{3^x}=4$

$3^x=t(t>0)$로 놓으면

$t-\frac{3}{t}=4$, $t^2-4t-3=0$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$t=2+\sqrt{7}$ ($\because t>0$)

즉, $3^a=2+\sqrt{7}$이므로

$9^a=(3^a)^2=(2+\sqrt{7})^2=11+4\sqrt{7}$

따라서 $p=11$, $q=4$이므로

$p+q=11+4=15$

0216 답 ②

$4^x-6\times2^{x-1}=4-k$에서 $(2^x)^2-3\times2^x+k-4=0$

$2^x=t(t>0)$로 놓으면

$t^2-3t+k-4=0$ ····· ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$D=9-4(k-4)>0$

$-4k+25>0$ $\therefore k<\frac{25}{4}$

(ii) 이차방정식 ㉠의 두 근의 합은 3으로 0보다 크다.

(iii) 이차방정식 ㉠의 두 근의 곱은 0보다 커야 하므로

$k-4>0$ $\therefore k>4$

(i), (ii), (iii)에서 $4<k<\frac{25}{4}$

따라서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은

$5+6=11$

✓ 공통수학1 다시보기

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근을 α, β, 판별식을 D라 하면

① 두 근이 모두 양수

➡ $D\geq0$, $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$

② 두 근이 모두 음수

➡ $D\geq0$, $\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$

③ 두 근이 서로 다른 부호

➡ $\alpha\beta<0$

0217 답 ④

$(x+3)^{x^2-3x}=(2x+4)^{x^2-3x}$에서

(i) 밑이 같은 경우

$x+3=2x+4$

$\therefore x=-1$

(ii) 지수가 0인 경우

$x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=3$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

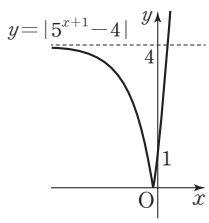
$-1+0+3=2$

0218 답 ④

$|5^{x+1}-4|=n$이 오직 1개의 실근만을 가지려면 함수 $y=|5^{x+1}-4|$의 그래프와 직선 $y=n$의 교점이 1개이어야 한다.

함수 $y=|5^{x+1}-4|$의 그래프는 함수 $y=5^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 후 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

즉, 함수 $y=|5^{x+1}-4|$의 그래프는 그림과 같으므로



$n=0$ 또는 $n\geq 4$

따라서 10보다 작은 정수 n은 0, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 7개이다.

0219 답 ⑤

$9^x-2(k-1)3^x+k^2-11=0$에서

$(3^x)^2-2(k-1)3^x+k^2-11=0$

$3^x=t(t>0)$로 놓으면

$t^2-2(k-1)t+k^2-11=0$ ····· ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 양의 실근을 가지려면 $t>1$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

↳ $x>0$일 때, $t=3^x>1$

$f(t)=t^2-2(k-1)t+k^2-11$이라 할 때,

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-k+1)^2-(k^2-11)>0$

$-2k+12>0$

$\therefore k<6$

(ii) 함수 $y=f(t)$의 그래프의 축의 방정식이 $t=k-1$이므로

$k-1>1$

$\therefore k>2$

(iii) $f(1)>0$이므로

$1-2(k-1)+k^2-11>0$

$k^2-2k-8>0$

$(k+2)(k-4)>0$

$\therefore k<-2$ 또는 $k>4$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 상수 k의 값의 범위는

$4<k<6$

공통수학1 다시보기

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a>0)$의 판별식을 D, $f(x)=ax^2+bx+c$라 할 때, 상수 p, $q(p<q)$에 대하여

① 두 근이 모두 p보다 클 때,

➡ $D\geq 0$, $-\frac{b}{2a}>p$, $f(p)>0$

② 두 근이 모두 q보다 작을 때,

➡ $D\geq 0$, $-\frac{b}{2a}<q$, $f(q)>0$

③ 두 근 사이에 p가 있을 때,

➡ $f(p)<0$

④ 두 근이 모두 p, q 사이에 있을 때,

➡ $D\geq 0$, $p<-\frac{b}{2a}<q$, $f(p)>0$, $f(q)>0$

0220 답 ②

$(x-1)^{x^2+12}=(x-1)^{7x}$에서 $x>1$이므로

(i) 밑이 1인 경우

$x-1=1$ $\therefore x=2$

(ii) 지수가 같은 경우

$x^2+12=7x$, $x^2-7x+12=0$

$(x-3)(x-4)=0$ $\therefore x=3$ 또는 $x=4$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 실근의 곱은

$2\times 3\times 4=24$

0221 답 ①

$4^{2x}+a\times 4^{x+1}+15-4a=0$에서

$(4^x)^2+4a\times 4^x+15-4a=0$

$4^x=t(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2+4at+15-4a=0$ ····· ㉠

주어진 방정식의 두 실근을 m, $2m(m\neq 0)$이라 하면 방정식 ㉠의 두 실근은 4^m, 4^{2m}이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$4^m+4^{2m}=-4a$, $4^m\times 4^{2m}=15-4a$

$4^m=k(k>0)$로 놓으면

$k+k^2=-4a$ ····· ㉡

$k^3=15-4a$ ····· ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면

$k^3=15+k+k^2$, $k^3-k^2-k-15=0$

	1	−1	−1	−15
3		3	6	15
	1	2	5	0

$(k-3)(k^2+2k+5)=0$ $\therefore k=3$ ($\because k^2+2k+5>0$)

이를 ㉡에 대입하면

$3+3^2=-4a$ $\therefore a=-3$

0222 답 4

$A(k, 4^k)$, $B(k, 2^{k+1})$이므로 $\overline{AB}=4^k-2^{k+1}$이고

선분 AB의 길이가 224이므로 → $2^{k+1}-4^k=224$를 만족시키는 실수 k의 값은 존재하지 않는다.

$4^k-2^{k+1}=224$, $(2^k)^2-2\times 2^k-224=0$

$2^k=t(t>0)$로 놓으면

$t^2-2t-224=0$, $(t+14)(t-16)=0$ $\therefore t=16$ ($\because t>0$)

따라서 $2^k=16=2^4$이므로 $k=4$

0223 답 ⑤

$y=2^x+1$에 $x=0$을 대입하면

$2^0+1=2$ $\therefore$ A$(0, 2)$

$y=-2^{x-1}+7$에 $x=0$을 대입하면

$-2^{-1}+7=\frac{13}{2}$ $\therefore$ B$\left(0, \frac{13}{2}\right)$

두 곡선 $f(x)=2^x+1$, $g(x)=-2^{x-1}+7$이 만나는 점 C의 x좌표는 $2^x+1=-2^{x-1}+7$에서

$2^x+\frac{1}{2}\times 2^x=6$, $\frac{3}{2}\times 2^x=6$, $2^x=2^2$

양변의 밑이 같으므로 $x=2$

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times$(점 C의 x좌표)$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{13}{2}-2\right)\times 2=\frac{9}{2}$

0224 답 ①

두 점 A, B를 지나고 y축과 평행한 직선을 $x=k$라 하면

A$(k, 2^k)$, B$(k, -4^{k-2})$

직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 C라 하면 삼각형 AOB는 $\overline{OA}=\overline{OB}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{AC}=\overline{BC}$

즉, $2^k=4^{k-2}$이므로 $2^k=2^{2k-4}$

양변의 밑이 같으므로

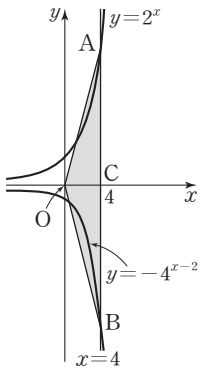
$k=2k-4$ $\therefore k=4$

$\therefore$ A$(4, 16)$, B$(4, -16)$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OC}=\frac{1}{2}\times\{16-(-16)\}\times 4$

$=64$



0225 답 $a\geq 2$

$4^x+4^{-x}-a=2^{1+x}+2^{1-x}-4$에서

$(2^x)^2+(2^{-x})^2-a=2\times 2^x+2\times 2^{-x}-4$

$(2^x+2^{-x})^2-2-a=2(2^x+2^{-x})-4$

$(2^x+2^{-x})^2-2(2^x+2^{-x})+2-a=0$ ····· ㉠

이때 $2^x+2^{-x}=t$로 놓으면

$2^x>0$, $2^{-x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t=2^x+2^{-x}\geq 2\sqrt{2^x\times 2^{-x}}=2$ (단, 등호는 $x=0$일 때 성립한다.)

즉, 방정식 ㉠이 적어도 하나의 실근을 가지려면 $t\geq 2$일 때

$t^2-2t+2-a=0$이 적어도 하나의 실근을 가져야 한다.

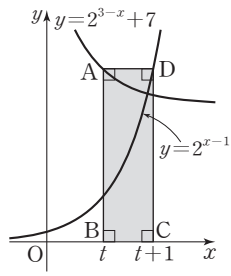
$f(t)=t^2-2t+2-a$라 하면 $f(t)=(t-1)^2+1-a$

함수 $y=f(t)$의 그래프에서 축의 방정식은 $t=1$이므로 $t\geq 2$에서 방정식 $f(t)=0$이 적어도 하나의 실근을 가지려면 $f(2)\leq 0$이어야 한다.

$f(2)=2-a\leq 0$ $\therefore a\geq 2$

0226 답 ③

A$(t, 2^{3-t}+7)$, D$(t+1, 2^t)$이고 사각형 ABCD가 직사각형이므로 두 점 A, D의 y좌표는 같다.



즉, $2^{3-t}+7=2^t$에서 $\frac{8}{2^t}+7=2^t$

$(2^t)^2-7\times 2^t-8=0$

$2^t=k(k>0)$로 놓으면

$k^2-7k-8=0$, $(k+1)(k-8)=0$

$\therefore k=8$ ($\because k>0$)

$k=2^t$이므로 $2^t=8$, $2^t=2^3$

양변의 밑이 같으므로 $t=3$

$\therefore$ A$(3, 8)$, D$(4, 8)$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\overline{BC}\times\overline{AB}=1\times 8=8$

($\overline{AB}$: 점 A의 y좌표)

0227 답 ⑤

점 (p, q)가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(p)=q$에서

$\frac{3^p}{3^p+3}=q$

점 $(2a-p, a-q)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$f(2a-p)=a-q$에서

$\frac{3^{2a-p}}{3^{2a-p}+3}=a-\boxed{(가)\ \frac{3^p}{3^p+3}}$ ····· ㉠

㉠은 실수 p의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$p=0$일 때, $\frac{3^{2a}}{3^{2a}+3}=a-\frac{1}{4}$ ····· ㉡

$p=1$일 때, $\frac{3^{2a-1}}{3^{2a-1}+3}=a-\frac{1}{2}$에서

$\frac{3^{2a}}{3^{2a}+\boxed{(나)\ 9}}=a-\frac{1}{2}$ ····· ㉢

㉡−㉢을 하면

$\frac{3^{2a}}{3^{2a}+3}-\frac{3^{2a}}{3^{2a}+9}=a-\frac{1}{4}-\left(a-\frac{1}{2}\right)$

$\frac{3^{2a}(3^{2a}+9)-3^{2a}(3^{2a}+3)}{(3^{2a}+3)(3^{2a}+9)}=\frac{1}{4}$, $\frac{6\times 3^{2a}}{(3^{2a}+3)(3^{2a}+9)}=\frac{1}{4}$

$\therefore (3^{2a}+3)(3^{2a}+\boxed{(나)\ 9})=24\times 3^{2a}$

$3^{2a}=t(t>0)$로 놓으면

$(t+3)(t+9)=24t$, $t^2-12t+27=0$

$(t-3)(t-9)=0$ $\therefore t=3$ 또는 $t=9$

$t=3^{2a}$이므로 $3^{2a}=3$ 또는 $3^{2a}=9=3^2$

양변의 밑이 같으므로 $2a=1$ 또는 $2a=2$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\boxed{(다)\ 1}$

이때 ㉢에서 좌변이 양수이므로 $a>\frac{1}{2}$

$\therefore a=\boxed{(다)\ 1}$

따라서 $g(p)=\frac{3^p}{3^p+3}$, $m=9$, $n=1$이므로

$(m-n)\times g(2)=8\times\frac{3}{4}=6$

0228 답 ①

$4^{2x}<\frac{1}{16}$에서 $2^{4x}<2^{-4}$

밑이 1보다 크므로

$4x<-4$

$\therefore\ x<-1$

0229 답 ④

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x}>\left(\frac{1}{9}\right)^{x+2}$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x}>\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+4}$

밑이 1보다 작으므로

$x^2-x<2x+4,\ x^2-3x-4<0$

$(x+1)(x-4)<0$

$\therefore\ -1<x<4$

0230 답 ②

$\frac{64}{8^x}\geq 4^{x-5}$에서 $2^{6-3x}\geq 2^{2x-10}$

밑이 1보다 크므로

$6-3x\geq 2x-10,\ -5x\geq -16$

$\therefore\ x\leq\frac{16}{5}$

따라서 구하는 모든 자연수 x의 값의 합은

$1+2+3=6$

0231 답 ③

$3^{2x+1}-28\times 3^x+9<0$에서 $3\times(3^x)^2-28\times 3^x+9<0$

$3^x=t(t>0)$로 놓으면

$3t^2-28t+9<0,\ (3t-1)(t-9)<0$

$\therefore\ \frac{1}{3}<t<9$

$t=3^x$이므로

$\frac{1}{3}<3^x<9,\ 3^{-1}<3^x<3^2$

밑이 1보다 크므로

$-1<x<2$

따라서 $\alpha=-1,\ \beta=2$이므로

$3^{\beta-\alpha}=3^{2-(-1)}=3^3=27$

0232 답 $2<x\leq 3$

(i) $3^{2x-1}>(\sqrt{27})^x$에서 $3^{2x-1}>3^{\frac{3}{2}x}$

밑이 1보다 크므로

$2x-1>\frac{3}{2}x$

$\therefore\ x>2$

(ii) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x^2-2x+2}\geq\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1}$에서 밑이 1보다 작으므로

$x^2-2x+2\leq 2x-1,\ x^2-4x+3\leq 0$

$(x-1)(x-3)\leq 0$

$\therefore\ 1\leq x\leq 3$

(i), (ii)에서 구하는 연립부등식의 해는

$2<x\leq 3$

0233 답 ④

(i) $3^x-9\geq 0,\ \frac{1}{2^x}-8\geq 0$일 때,

$3^x-9\geq 0$에서 $3^x\geq 3^2$

밑이 1보다 크므로 $x\geq 2$ ····· ㉠

$\frac{1}{2^x}-8\geq 0$에서 $2^{-x}\geq 2^3$

밑이 1보다 크므로 $-x\geq 3$

$\therefore\ x\leq -3$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 존재하지 않는다.

(ii) $3^x-9\leq 0,\ \frac{1}{2^x}-8\leq 0$일 때,

$3^x-9\leq 0$에서 $3^x\leq 3^2$

밑이 1보다 크므로 $x\leq 2$ ····· ㉢

$\frac{1}{2^x}-8\leq 0$에서 $2^{-x}\leq 2^3$

밑이 1보다 크므로 $-x\leq 3$

$\therefore\ x\geq -3$ ····· ㉣

㉢, ㉣의 공통부분은

$-3\leq x\leq 2$

(i), (ii)에서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1, 2의 6개이다.

0234 답 ①

(i) $0<x<1$일 때,

밑이 1보다 작으므로 $7x-6<5x$

$\therefore\ x<3$

이때 $0<x<1$이므로 $0<x<1$

(ii) $x=1$일 때,

$1>1$이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x>1$일 때,

밑이 1보다 크므로 $7x-6>5x$

$\therefore\ x>3$

이때 $x>1$이므로 $x>3$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$0<x<1$ 또는 $x>3$

따라서 $a=0,\ b=1,\ c=3$이므로

$a+b+c=4$

0235 답 5

$4^{x+1}+3\times 2^{x+3}-k+5\geq 0$에서

$4\times(2^x)^2+24\times 2^x-k+5\geq 0$

$2^x=t(t>0)$로 놓으면

$4t^2+24t-k+5\geq 0$

$\therefore\ 4(t+3)^2-k-31\geq 0$ ····· ㉠

$f(t)=4(t+3)^2-k-31$이라 하면 함수 $y=f(t)$의 그래프에서 축의 방정식은 $t=-3$이므로 부등식 ㉠이 $t>0$인 모든 실수 t에 대하여 성립하려면 $f(0)\geq 0$이어야 한다.

$f(0)=-k+5\geq 0$ $\therefore\ k\leq 5$

따라서 실수 k의 최댓값은 5이다.

0236 답 ①

$25^{kx} \le \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2}$에서 $5^{2kx} \le 5^{-x^2}$

밑이 1보다 크므로 $2kx \le -x^2$

$x^2+2kx \le 0$, $x(x+2k) \le 0$

k는 양수이므로 $-2k \le x \le 0$

이때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 7이므로

$-7 < -2k \le -6$ $\therefore$ $3 \le k < \frac{7}{2}$

0237 답 ④

$A=\{x \mid 5^{|x-3|} \le 5^a\}$에서 밑이 1보다 크므로 $|x-3| \le a$

$-a \le x-3 \le a$ $\therefore$ $-a+3 \le x \le a+3$

$B=\left\{x \middle| \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2} > \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+3}\right\}$에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2} > \left(\frac{1}{3}\right)^{4x+6}$

밑이 1보다 작으므로 $2x^2 < 4x+6$

$x^2-2x-3<0$, $(x+1)(x-3)<0$ $\therefore$ $-1<x<3$

$A \cap B=B$에서 $B \subset A$이므로

$-a+3 \le -1$이고 $a+3 \ge 3$ $\therefore$ $a \ge 4$

따라서 구하는 양수 a의 최솟값은 4이다.

공통수학2 다시보기

$B \subset A$이면 $A \cup B=A$, $A \cap B=B$

0238 답 17

$(3^{x+2}-1)(3^{x-p}-1) \le 0$에서 $3^{-2} \times 3^p > 0$이므로 양변에 $3^{-2} \times 3^p$을 곱하면

$3^{-2} \times 3^p \times (3^{x+2}-1)(3^{x-p}-1) \le 0$

$3^{-2} \times (3^{x+2}-1) \times 3^p \times (3^{x-p}-1) \le 0$

$(3^x-3^{-2})(3^x-3^p) \le 0$ ····· ㉠

p는 자연수이므로 $3^p > 3^{-2}$

즉, ㉠에서 $3^{-2} \le 3^x \le 3^p$

밑이 1보다 크므로 $-2 \le x \le p$

따라서 $-2 \le x \le p$를 만족시키는 정수 x는 -2, -1, 0, …, p의 $(p+3)$개이므로

$p+3=20$ $\therefore$ $p=17$

0239 답 ②

$3^{|x|}+\frac{81}{3^{|x|}} \le 30$에서 $(3^{|x|})^2-30 \times 3^{|x|}+81 \le 0$

$3^{|x|}=t(t \ge 1)$로 놓으면

$t^2-30t+81 \le 0$, $(t-3)(t-27) \le 0$

$\therefore$ $3 \le t \le 27$

$t=3^{|x|}$이므로

$3 \le 3^{|x|} \le 27$, $3 \le 3^{|x|} \le 3^3$

밑이 1보다 크므로 $1 \le |x| \le 3$

$\therefore$ $-3 \le x \le -1$ 또는 $1 \le x \le 3$

따라서 정수 x는 -3, -2, -1, 1, 2, 3의 6개이다.

0240 답 10

일차함수 $y=f(x)$의 그래프의 기울기를 $a(a>0)$라 하면 그래프는 점 $(-4, 0)$을 지나므로 $f(x)=a(x+4)$

$5^{f(x)} > 25$에서 $5^{a(x+4)} > 5^2$

밑이 1보다 크므로 $a(x+4)>2$

$a>0$이므로 $x+4>\frac{2}{a}$ $\therefore$ $x>\frac{2}{a}-4$

이때 주어진 부등식의 해가 $x>-3$이므로

$\frac{2}{a}-4=-3$, $\frac{2}{a}=1$ $\therefore$ $a=2$

따라서 $f(x)=2(x+4)$이므로

$f(1)=2 \times 5=10$

다른 풀이

$f(x)=a(x+4)$에서 a의 값을 다음과 같이 구할 수도 있다.

부등식 $5^{f(x)} > 25$에서 $5^{f(x)} > 5^2$

밑이 1보다 크므로 $f(x)>2$

$f(x)>2$의 해가 $x>-3$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(-3, 2)$를 지나야 한다. 즉, $f(-3)=2$이므로

$a(-3+4)=2$ $\therefore$ $a=2$

0241 답 ②

$4^{f(x)}-2^{2+f(x)}-32<0$에서 $\{2^{f(x)}\}^2-4 \times 2^{f(x)}-32<0$

$2^{f(x)}=t(t>0)$로 놓으면

$t^2-4t-32<0$, $(t+4)(t-8)<0$

$\therefore$ $0<t<8$ ($\because$ $t>0$)

$t=2^{f(x)}$이므로

$0<2^{f(x)}<8$, $2^{f(x)}<2^3$ ($\because$ $2^{f(x)}>0$)

밑이 1보다 크므로 $f(x)<3$

$f(x)=x^2+3x-1$이므로

$x^2+3x-1<3$, $x^2+3x-4<0$

$(x+4)(x-1)<0$ $\therefore$ $-4<x<1$

따라서 정수 x는 -3, -2, -1, 0의 4개이다.

0242 답 10

$3^{f(x)} > \left(\frac{1}{9}\right)^{g(x)}$에서 $3^{f(x)} > 3^{-2g(x)}$

밑이 1보다 크므로 $f(x) > -2g(x)$

이때 $f(x)=x(x-2)$이고, $g(x)=m(x-2)(m<0)$라 하면

$x(x-2) > -2m(x-2)$, $(x-2)(x+2m)>0$

이 부등식을 만족시키는 10보다 작은 자연수 x의 개수가 5이므로

부등식의 해는 $x<2$ 또는 $x>-2m$

$x<-2m$ 또는 $x>2$이면 10보다 작은 자연수 x의 개수가 5보다 크다.

$x<2$인 자연수 x는 1의 1개이고, $x>-2m$인 자연수 x가 4개이어야 하므로 6, 7, 8, 9이어야 한다.

즉, $5 \le -2m < 6$이므로 $-3 < m \le -\frac{5}{2}$

$g(-2)=-4m$에서

$10 \le -4m < 12$ $\therefore$ $10 \le g(-2) < 12$

따라서 $g(-2)$의 최솟값은 10이다.

0243 답 33

$4^x-(n+8)2^x+8n<0$에서

$(2^x)^2-(n+8)2^x+8n<0$

$2^x=t(t>0)$로 놓으면

$t^2-(n+8)t+8n<0$ $\therefore (t-n)(t-8)<0$ ····· ⓘ

(i) $n>8$일 때, $8<t<n$

$t=2^x$이므로 $8<2^x<n$, $2^3<2^x<n$

정수 x가 2개이려면 $x=4$, 5이므로

$2^5<n\le 2^6$ $\therefore 32<n\le 64$

즉, 정수 n의 개수는 $64-32=32$

(ii) $n=8$일 때, $(t-8)^2<0$의 해는 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $n<8$일 때, $n<t<8$

$t=2^x$이므로 $n<2^x<8$, $n<2^x<2^3$

정수 x가 2개이려면 $x=1$, 2이므로

$2^0\le n<2^1$ $\therefore 1\le n<2$

즉, 정수 n은 1의 1개이다. ····· ⓘⓘ

(i), (ii), (iii)에서 정수 n의 개수는

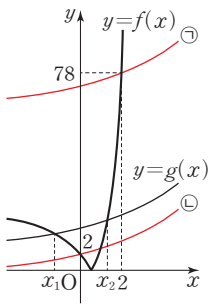
$32+1=33$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 2^x으로 치환하여 부등식을 간단히 하기	30 %
ⓘⓘ n의 값의 범위에 따라 정수 n의 개수 구하기	60 %
ⓘⓘⓘ 정수 n의 개수 구하기	10 %

0244 답 ②

$f(x)=|9^x-3|$, $g(x)=2^{x+k}$이라 하자.

$f(2)=|9^2-3|=78$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 두 점의 x좌표 x_1, x_2에 대하여 그림과 같이 곡선 $y=g(x)$가 ㉠보다 위쪽에 위치하면 $x_2>2$가 되고, ㉡보다 아래쪽에 위치하면 $x_1>0$이 된다.



따라서 $x_1<0$, $0<x_2<2$를 만족시키려면 곡선 $y=g(x)$가 ㉠과 ㉡ 사이에 있어야 한다.

즉, $g(0)>f(0)$, $g(2)<f(2)$이어야 한다.

(i) $g(0)>f(0)$일 때,

$g(0)>2$에서 $2^k>2$

밑이 1보다 크므로 $k>1$

(ii) $g(2)<f(2)$일 때,

$g(2)<78$에서 $2^{2+k}<78$

$4\times 2^k<78$, $2^k<19.5$

이때 k는 자연수이고 $2^4<19.5<2^5$이므로

$2^k<2^5$

밑이 1보다 크므로 $k<5$

(i), (ii)에서 $1<k<5$

따라서 모든 자연수 k의 값의 합은

$2+3+4=9$

0245 답 ②

$a=100$일 때의 원리합계는

$a\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{8}}=100\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{8}}$

즉, $100\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{8}}=225$이므로

$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{8}}=\frac{9}{4}$, $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{8}}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

양변의 밑이 같으므로

$\frac{t}{8}=2$ $\therefore t=16$

따라서 원리합계가 225만 원이 되는 것은 16년 후이다.

0246 답 ③

n년 후의 중고 가격이 81000원 이하가 된다고 하면

$256000\times\left(1-\frac{25}{100}\right)^n\le 81000$

$\left(1-\frac{25}{100}\right)^n\le\frac{81}{256}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^n\le\left(\frac{3}{4}\right)^4$

밑이 1보다 작으므로 $n\ge 4$

따라서 중고 가격이 81000원 이하가 되는 것은 구매한 지 4년 후부터이다.

0247 답 ③

n번 작동 후의 수분 함량이 1 % 이하가 된다고 하면

$60\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\le 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n\le\frac{1}{60}$

이때 n은 자연수이고 $\left(\frac{1}{2}\right)^6<\frac{1}{60}<\left(\frac{1}{2}\right)^5$이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^5$

밑이 1보다 작으므로 $n>5$

따라서 수분 함량이 1 % 이하가 되려면 건조기를 6번 이상 작동해야 한다.

0248 답 ②

$T_s=20$, $T_0=60$이고, $t=a$일 때 $T=40$이므로

$40=20+(60-20)K^{-a}$

$20=40K^{-a}$ $\therefore K^{-a}=\frac{1}{2}$ ····· ㉠

$t=a+20$일 때 $T=25$이므로

$25=20+(60-20)K^{-a-20}$, $5=40K^{-a-20}$

$K^{-a-20}=\frac{1}{8}$, $K^{-a}\times K^{-20}=\frac{1}{8}$

$\frac{1}{2}\times K^{-20}=\frac{1}{8}$ ($\because$ ㉠) $\therefore K^{-20}=\frac{1}{4}$ ····· ㉡

㉡에서 $K=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{20}}=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{20}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{10}}$

$K=\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{10}}$을 ㉠에 대입하면

$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{10}}\right\}^{-a}=\frac{1}{2}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{a}{10}}=\frac{1}{2}$

양변의 밑이 같으므로

$\frac{a}{10}=1$ $\therefore a=10$

다른 풀이

㉠, ㉡에서 a의 값을 구할 때, ㉠의 양변을 제곱하면

$K^{-2a}=\frac{1}{4}$

즉, $K^{-2a}=K^{-20}$($\because$ ㉡)이고, 양변의 밑이 같으므로

$-2a=-20 \quad \therefore a=10$

최고수준 도전 기출 61~63쪽

0249 답 ②

전략 A의 밑을 B, C와 같은 형태로 변형하여 대소를 비교한다.

$A=(\sqrt{6})^{\sqrt{2}}=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$, $B=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$

$C=(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$

A, B에서 $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}<(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}$이므로 $A<B$

A, C에서 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}<(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$이므로 $A<C$

B, C에서 $B>0$, $C>0$이고

$\frac{B}{C}=\frac{(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{3}}}{(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}\times(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}}=\frac{(\sqrt{3})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}{(\sqrt{2})^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}}>1$

이므로 $C<B$ → $\frac{3}{2}>1$, $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}>0$이므로 $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}}>1$

$\therefore A<C<B$

0250 답 ④

전략 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 밑이 1보다 큰지 작은지를 파악하여 옳은 것을 찾는다.

ㄱ. $0<a<1$이므로 $f(2)<f(1)$에서 $f(2)-f(1)<0$

$b>1$이므로 $g(2)>g(1)$에서 $g(2)-g(1)>0$

$\therefore \{f(2)-f(1)\}\{g(2)-g(1)\}<0$

ㄴ. $f(b)=a^b$, $g(b)=b^b$이므로 $0<a<b<1$이면 $a^b<b^b$

$\therefore f(b)<g(b)$

ㄷ. $ab=1$이면

$f(a)=a^a$, $g(-b)=b^{-b}=(a^{-1})^{-b}=a^b$

$a>1$일 때, $0<b<1$이므로 $a^a>a^b$

$0<a<1$일 때, $b>1$이므로 $a^a>a^b$

$\therefore f(a)>g(-b)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0251 답 ④

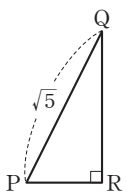
전략 두 점 P, Q의 x좌표의 차와 y좌표의 차를 각각 구하고, 두 점이 각각 주어진 곡선 위의 점임을 이용하여 k의 값을 구한다.

그림과 같이 $\angle R=90°$인 직각삼각형 PQR가 되도록 점 R를 잡으면 직선 PQ의 기울기가 2이므로

$\overline{QR}=2\overline{PR}$

$\overline{PR}^2+\overline{QR}^2=\overline{PQ}^2$이므로

$\overline{PR}^2+4\overline{PR}^2=5$, $\overline{PR}^2=1 \quad \therefore \overline{PR}=1$



$\overline{QR}=2$이므로 $P(a, b)$라 하면 $Q(a+1, b+2)$

점 $P(a, b)$는 곡선 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+3}+1$ 위의 점이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^{a+3}+1=b \quad \cdots\cdots$ ㉠

점 $Q(a+1, b+2)$는 곡선 $y=\left(\frac{2}{3}\right)^{x+1}+\frac{8}{3}$ 위의 점이므로

$\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}+\frac{2}{3}=b \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠$-$㉡$\times\frac{2}{3}$를 하면

$\frac{5}{9}=\frac{b}{3} \quad \therefore b=\frac{5}{3}$

이를 ㉡에 대입하면

$\left(\frac{2}{3}\right)^{a+2}=1 \quad \therefore a=-2$

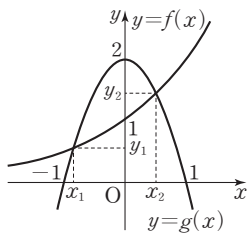
점 $P\left(-2, \frac{5}{3}\right)$는 직선 $y=2x+k$ 위의 점이므로

$\frac{5}{3}=-4+k \quad \therefore k=\frac{17}{3}$

0252 답 ⑤

전략 두 곡선 $y=2^x$, $y=-2x^2+2$가 만나는 두 점을 기준으로 범위를 나누어 어느 곡선이 더 위쪽에 있는지 확인한다.

$f(x)=2^x$, $g(x)=-2x^2+2$라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 그림과 같다.



ㄱ. 그림에서

$0<x<x_2$일 때 $f(x)<g(x)$,

$x_2<x<1$일 때 $f(x)>g(x)$이다.

$f(x)=2^x$에서 $x=\frac{1}{2}$일 때,

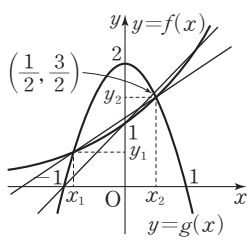
$f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$g(x)=-2x^2+2$에서 $x=\frac{1}{2}$일 때,

$g\left(\frac{1}{2}\right)=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+2=\frac{3}{2}$

따라서 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}<\frac{3}{2}=g\left(\frac{1}{2}\right)$이므로 $x_2>\frac{1}{2}$

ㄴ. 그림에서 곡선 $y=g(x)$는 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$을 지나고, 두 점 $(-1, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$을 지나는 직선의 기울기는 1이므로 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)를 이은 직선의 기울기는 1보다 작다.



$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}<1 \quad \therefore y_2-y_1<x_2-x_1$

ㄷ. ㄱ과 같은 방법으로 생각하면

$-1<x<x_1$일 때 $f(x)>g(x)$이고, $x_1<x<0$일 때 $f(x)<g(x)$이다.

$f(x)=2^x$에서 $x=-\frac{1}{2}$일 때,

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$g(x)=-2x^2+2$에서 $x=-\frac{1}{2}$일 때,

$g\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2=\frac{3}{2}$

이때 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{3}{2}=g\left(-\frac{1}{2}\right)$이므로 $x_1<-\frac{1}{2}$

즉, $-1<x_1<-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}<x_2<1$이므로

$-\frac{1}{2}<x_1+x_2<\frac{1}{2}$ ····· ㉠

한편 두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)가 곡선 $y=g(x)$ 위에 있으므로

$y_2-y_1=(-2x_2^2+2)-(-2x_1^2+2)=2x_1^2-2x_2^2$

$=2(x_1-x_2)(x_1+x_2)$

이때 $y_2-y_1>0$에서 $2(x_1-x_2)(x_1+x_2)>0$이고 $x_1-x_2<0$이므로

$x_1+x_2<0$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{1}{2}<x_1+x_2<0$ ····· ㉢

두 점 (x_1, y_1), (x_2, y_2)가 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로

$y_1y_2=2^{x_1}\times2^{x_2}=2^{x_1+x_2}$

㉢에서 $2^{-\frac{1}{2}}<2^{x_1+x_2}<2^0$이므로

$\frac{\sqrt{2}}{2}<y_1y_2<1$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

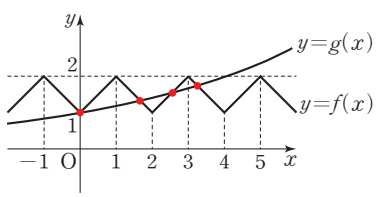
0253 답 ④

전략 함수 $f(x)$는 주기가 2인 주기함수임을 이용하여 그래프를 그린다.

함수 $f(x)$는 (가)에서 주기가 2인 함수이고, (나)에서 $1\le f(x)\le2$이다.

함수 $g(x)=2^{\frac{x}{n}}$의 그래프는 점 $(0, 1)$을 지나고, $x<0$일 때 $g(x)<1$, $x>0$일 때 $g(x)>1$이다.

즉, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 개수가 4가 되려면 그림과 같이 $g(3)<2$, $g(5)>2$이어야 한다.



$g(3)=2^{\frac{3}{n}}<2$, $g(5)=2^{\frac{5}{n}}>2$에서 밑이 1보다 크므로

$\frac{3}{n}<1$, $\frac{5}{n}>1$ $\therefore 3<n<5$

따라서 자연수 n의 값은 4이다.

0254 답 24

전략 $x<4$일 때와 $x>4$일 때로 나누어 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그린다.

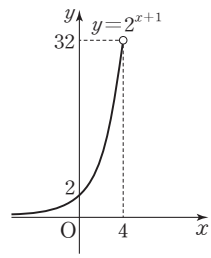
$x<4$일 때, $g(x)=f(x)+2^x-\{f(x)-2^x\}=2^{x+1}$

$x>4$일 때, $g(x)=f(x)+2^x+\{f(x)-2^x\}=2f(x)$

$\therefore g(x)=\begin{cases}2^{x+1} & (x<4)\\ 2f(x) & (x>4)\end{cases}$

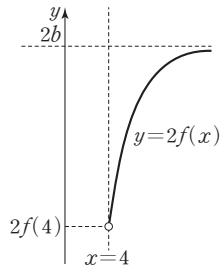
(i) $x<4$일 때,

함수 $y=2^{x+1}$의 그래프는 직선 $y=0$을 점근선으로 가지므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.

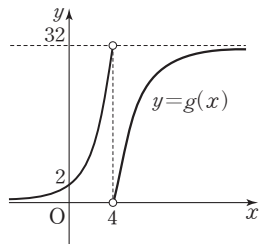


(ii) $x>4$일 때,

함수 $y=2f(x)$, 즉 $y=-2^{-x+a+1}+2b$의 그래프는 직선 $y=2b$를 점근선으로 가지므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수가 0 또는 2이려면 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



즉, $2b=32$, $2f(4)=0$이어야 한다.

$2b=32$에서 $b=16$

$2f(4)=0$에서 $-2^{-3+a}+2b=0$

$-2^{-3+a}+32=0$, $2^{a-3}=2^5$

$a-3=5$ $\therefore a=8$

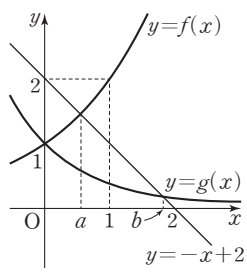
$\therefore g(x)=\begin{cases}2^{x+1} & (x<4)\\ -2^{-x+9}+32 & (x>4)\end{cases}$

$\therefore g(6)=-2^3+32=24$

0255 답 ⑤

전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=-x+2$를 그리고, a, b의 위치를 파악한다.

두 함수 $f(x)=2^x$, $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프와 직선 $y=-x+2$는 그림과 같다.



ㄱ. $\frac{f(a)+f(b)}{2}=\frac{2^a+2^b}{2}$,

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=2^{\frac{a+b}{2}}$이다.

$b>a>0$에서 $2^b>2^a>0$이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2^a+2^b>2\sqrt{2^a\times2^b}=2\sqrt{2^{a+b}}$

↳ $2^a\neq2^b$이므로 등호는 성립하지 않는다.

$\frac{2^a+2^b}{2}>2^{\frac{a+b}{2}}$ $\therefore \frac{f(a)+f(b)}{2}>f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

ㄴ. 그림에서 $b>1$

즉, $2^b>2$이므로

$b\times2^b>2$

ㄷ. $h(x)=-x+2$라 하면

$0<x<a$일 때 $h(x)>f(x)$, $a<x<2$일 때 $h(x)<f(x)$이고

$h\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$에서

$\frac{3}{2}-\sqrt{2}=\frac{\sqrt{9}}{2}-\frac{\sqrt{8}}{2}>0$이므로

$h\left(\frac{1}{2}\right)>f\left(\frac{1}{2}\right)$ $\therefore a>\frac{1}{2}$

$0<x<b$일 때 $h(x)>g(x)$, $b<x<2$일 때 $h(x)<g(x)$이고

$h\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $g\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{9}$에서

$\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{9}=\frac{\sqrt{81}}{18}-\frac{\sqrt{12}}{18}>0$이므로

$h\left(\frac{3}{2}\right)>g\left(\frac{3}{2}\right)$ $\therefore b>\frac{3}{2}$

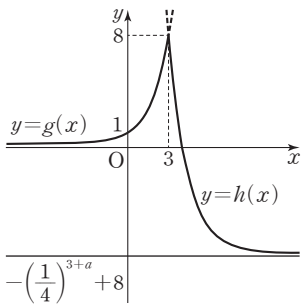
$\therefore a+b>2$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0256 답 ③

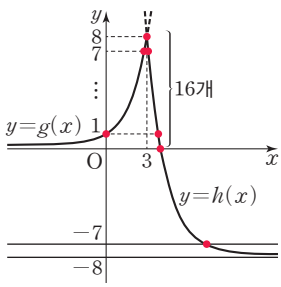
전략 곡선 $y=f(x)$를 그린 후 주어진 조건을 만족시키기 위한 점근선의 위치를 파악한다.

$g(x)=2^x$, $h(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+a}-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이라 하면 곡선 $y=g(x)$의 점근선은 직선 $y=0$, 곡선 $y=h(x)$의 점근선은 직선 $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8$이고, $f(3)=8$이므로 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 중에서 y좌표가 음이 아닌 정수인 점의 개수가 16이므로 y좌표가 정수인 점의 개수가 23이려면 y좌표가 음의 정수인 점의 개수는 7이어야 한다.

따라서 곡선 $y=h(x)$의 점근선이 그림과 같이 직선 $y=-8$이거나 직선 $y=-8$과 직선 $y=-7$ 사이에 있어야 하므로



$-8\le-\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}+8<-7$

$15<\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}\le16$

이때 $4<15$이므로

$4<\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}\le16$, $\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}<\left(\frac{1}{4}\right)^{3+a}\le\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

밑이 1보다 작으므로

$-2\le3+a<-1$ $\therefore -5\le a<-4$

따라서 정수 a의 값은 -5이다.

0257 답 ④

전략 주어진 부등식에서 $f(x)$, $g(x)$에 대한 관계를 파악한다.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\ge\left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$

밑이 1보다 작으므로 $f(x)g(x)\le3g(x)$

$f(x)g(x)-3g(x)\le0$, $g(x)\{f(x)-3\}\le0$

$\therefore g(x)\ge0$, $f(x)\le3$ 또는 $g(x)\le0$, $f(x)\ge3$

(i) $g(x)\ge0$, $f(x)\le3$일 때,

부등식 $g(x)\ge0$의 해는 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\ge3$ ····· ㉠

또 부등식 $f(x)\le3$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=3$과 만나거나 직선 $y=3$보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$1\le x\le5$ ····· ㉡

즉, ㉠, ㉡의 공통부분은 $3\le x\le5$

(ii) $g(x)\le0$, $f(x)\ge3$일 때,

부등식 $g(x)\le0$의 해는 함수 $y=g(x)$의 그래프가 x축과 만나거나 x축보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\le3$ ····· ㉢

또 부등식 $f(x)\ge3$의 해는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=3$과 만나거나 직선 $y=3$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로

$x\le1$ 또는 $x\ge5$ ····· ㉣

즉, ㉢, ㉣의 공통부분은 $x\le1$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x\le1$ 또는 $3\le x\le5$

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은

$1+3+4+5=13$

0258 답 ③

전략 $7^{f(x)}=X$로 놓고 주어진 방정식을 이차방정식 꼴로 바꾸어 실근을 찾는다.

$7^{f(x)}=X(X\ge1)$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-(7^{n+4}+7^n)X+7^{2n+4}=0$

$(X-7^{n+4})(X-7^n)=0$

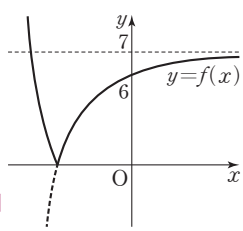
$\therefore X=7^{n+4}$ 또는 $X=7^n$

$X=7^{f(x)}$이므로

$f(x)=n+4$ 또는 $f(x)=n$

함수 $f(x)=|-2^{-x}+7|$의 그래프는 함수 $y=2^x$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 7만큼 평행이동한 다음 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

즉, 함수 $f(x)=|-2^{-x}+7|$의 그래프는 그림과 같으므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 정수 n은 0, 3, 4, 5, 6의 5개이다.



$n=0$이면 $f(x)=4$ 또는 $f(x)=0$

$f(x)=4$에서 실근이 2개, $f(x)=0$에서 실근이 1개이다.

0259 답 ④

전략 주어진 조건을 관계식에 대입하여 10^{20k}의 값을 구한다.

$t=20$일 때 $A=6A_0$이므로

$6A_0=\frac{A_0}{2}10^{20k}(1+10^{20k})$

$(10^{20k})^2+10^{20k}-12=0$

$10^{20k}=X\,(X>0)$로 놓으면

$X^2+X-12=0$

$(X+4)(X-3)=0$

$\therefore X=3\ (\because X>0)$

$X=10^{20k}$이므로 $10^{20k}=3$

$X=40$일 때의 기대 자산은

$$\frac{A_0}{2}10^{40k}(1+10^{40k})=\frac{A_0}{2}(10^{20k})^2\{1+(10^{20k})^2\}$$
$$=\frac{A_0}{2}\times3^2\times(1+3^2)$$
$$=45A_0$$

따라서 40년이 지난 시점에서의 기대 자산은 초기 자산의 45배이다.

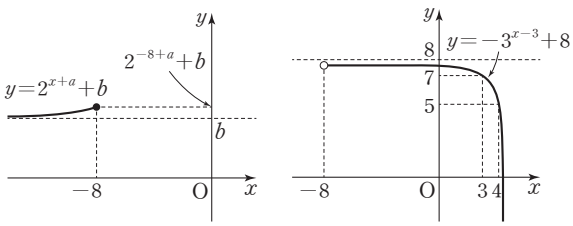
0260 답 ②

전략 $x>-8$에서 집합 $\{f(x)\,|\,-8<x\le k\}$의 원소 중 정수인 것을 찾고, 이를 이용하여 $x\le-8$에서 함수 $f(x)$의 값의 범위를 구한다.

함수 $y=2^{x+a}+b$의 그래프의 점근선은 직선 $y=b$

함수 $y=-3^{x-3}+8$의 그래프의 점근선은 직선 $y=8$이고 그래프는 두 점 $(3,\,7)$, $(4,\,5)$를 지난다.

즉, 두 함수 $y=2^{x+a}+b\,(x\le-8)$, $y=-3^{x-3}+8\,(x>-8)$의 그래프는 그림과 같다.



$x>-8$에서 $3\le k<4$인 실수 k에 대하여 집합

$\{f(x)\,|\,-8<x\le k\}$의 원소 중 정수인 것은 7뿐이거나 6, 7이다.

즉, 주어진 조건을 만족시키려면 $x\le-8$에서 함수 $f(x)$의 값 중 정수인 것은 6뿐이어야 한다.

이때 b는 자연수이므로

$b=5$

$6\le f(-8)<7$에서

$6\le2^{-8+a}+5<7$

$1\le2^{-8+a}<2$

밑이 1보다 크므로

$0\le-8+a<1$

$\therefore 8\le a<9$

이때 a는 자연수이므로

$a=8$

$\therefore a+b=8+5=13$

04 로그함수

난이도별 필수 기출 66~85쪽

0261 답 ①

$f(2)=3$에서 $\log_a4+1=3$

$\log_a4=2$, $a^2=4$

이때 $a>0$이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=\log_2(x+2)+1$이므로

$f(6)=\log_28+1=3+1=4$

0262 답 ④

① 정의역은 양의 실수 전체의 집합이다.

② $f(2)=\log_{\frac{1}{2}}2=-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $(2,\,-1)$을 지난다.

③ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이 y축이므로 y축과 만나지 않는다.

⑤ $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x=-\log_2x$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=\log_2x$의 그래프와 x축에 대하여 대칭이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

0263 답 ③

$a=f(4)=\log_24$, $b=f(6)=\log_26$이므로

$f(k)=\frac{a+b}{3}$에서

$$\log_2k=\frac{\log_24+\log_26}{3}=\frac{\log_224}{3}=\log_224^{\frac{1}{3}}$$
$$=\log_2\sqrt[3]{24}=\log_2\sqrt[3]{2^3\times3}=\log_22\sqrt[3]{3}$$

$\therefore k=2\sqrt[3]{3}$

0264 답 ②

$A=\log_{49}195=\log_{7^2}195=\log_7\sqrt{195}$

$B=2\log_74=\log_74^2=\log_716$

$C=\frac{1}{2}\log_{\sqrt{7}}15=\log_{(\sqrt{7})^2}15=\log_715$

이때 $\sqrt{195}<15<16$이고 밑이 1보다 크므로

$\sqrt{195}<15$ → $\sqrt{195}<\sqrt{225}$

$\log_7\sqrt{195}<\log_715<\log_716$

$\therefore A<C<B$

0265 답 ②

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{a+(a+2)}{2},\,\frac{(a+2)+(a-2)}{2}\right)$ $\therefore (a+1,\,a)$

점 $(a+1,\,a)$가 곡선 $y=\log_3(x+4)+a-2$ 위에 있으므로

$a=\log_3(a+5)+a-2$, $\log_3(a+5)=2$

$a+5=3^2$ $\therefore a=4$

0266 답 ①

함수 $f(x)=\log_5(x-a)+b$의 그래프의 점근선이 직선 $x=a$이므로 $a=4$

$f(x)=\log_5(x-4)+b$이므로 $f(29)=7$에서

$\log_5 25+b=7,\ 2+b=7 \quad \therefore b=5$

$\therefore a+b=4+5=9$

0267 답 ⑤

$(p, q)\in A$이므로 $q=\log_a p$

ㄱ. $\log_a ap=1+\log_a p=1+q\neq aq$

$\therefore (ap, aq)\notin A$

ㄴ. $\log_a p^8=8\log_a p=8q$

$\therefore (p^8, 8q)\in A$

ㄷ. $\log_a \frac{1}{p}=\log_a p^{-1}=-\log_a p=-q$

$\therefore \left(\frac{1}{p}, -q\right)\in A$

ㄹ. $\log_a \frac{p}{9}=\log_a p-\log_a 9=\log_a p-\log_a 3^2=q-2\log_a 3$

$\therefore \left(\frac{p}{9}, q-2\log_a 3\right)\in A$

따라서 보기에서 A의 원소인 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

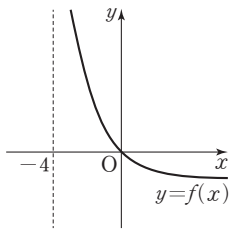
0268 답 -1

함수 $y=-\log_2 x+3$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면

$y=-\log_2(x+4)+k+3$ ····· ⓘ

$f(x)=-\log_2(x+4)+k+3$이라 할 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 $f(0)\le 0$이어야 한다. ····· ⓘⓘ



즉, $-\log_2 4+k+3\le 0$이므로

$k+1\le 0 \quad \therefore k\le -1$

따라서 실수 k의 최댓값은 -1이다. ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 평행이동한 함수 구하기	30 %
ⓘⓘ 제1사분면을 지나지 않기 위한 조건 파악하기	50 %
ⓘⓘⓘ k의 최댓값 구하기	20 %

0269 답 ⑤

ㄱ. 함수 $y=3^{2x-2}$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄴ. 함수 $y=\log_3 9x=\log_3 x+2$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. 함수 $y=3\left(\frac{1}{3}\right)^x=3^{-(x-1)}$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 후 y축에 대하여 대칭이동한 다음 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. 함수 $y=2\log_3\sqrt{x-1}=\log_3(x-1)$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㅁ. 함수 $y=\log_3\frac{1}{x}+\log_2 3=-\log_3 x+\log_2 3$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 $\log_2 3$만큼 평행이동한 것이다.

ㅂ. $x>0$에서 함수 $y=\log_9 x^2+1=\log_{3^2} x^2+1=\log_3 x+1$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 보기에서 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 함수 $y=\log_3 x$의 그래프와 겹쳐지는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ, ㅂ의 5개이다.

0270 답 ⑤

함수 $y=\log_3(x-a)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=a$이므로

$\mathrm{A}\left(a, \log_3\frac{a}{9}\right),\ \mathrm{B}\left(a, \log_{\frac{1}{3}} a\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}}=\left|\log_3\frac{a}{9}-\log_{\frac{1}{3}} a\right|=|\log_3 a-\log_3 9+\log_3 a|$

$=|2\log_3 a-2|=2|\log_3 a-1|$

즉, $2|\log_3 a-1|=2$이므로

$\log_3 a-1=1$ 또는 $\log_3 a-1=-1$

(ⅰ) $\log_3 a-1=1$일 때,

$\log_3 a=2 \quad \therefore a=3^2=9$

(ⅱ) $\log_3 a-1=-1$일 때,

$\log_3 a=0 \quad \therefore a=1$

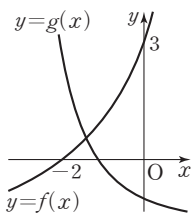
그런데 $a>3$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=9$

0271 답 ③

$f(x)=2^{x+2}-1,\ g(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+k)$라 하자.

$f(-2)=0,\ f(0)=3$이므로 두 곡선이 제2사분면에서 만나려면 $g(-2)>0,\ g(0)<3$이어야 한다.



$g(-2)>0$에서 $\log_{\frac{1}{2}}(-2+k)>0$

$\log_{\frac{1}{2}}(-2+k)>\log_{\frac{1}{2}} 1$

밑이 1보다 작으므로

$-2+k<1 \quad \therefore k<3$

$g(0)<3$에서 $\log_{\frac{1}{2}} k<3$

$\log_{\frac{1}{2}} k<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^3$

밑이 1보다 작으므로

$k>\left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \therefore k>\frac{1}{8}$

따라서 실수 k의 값의 범위는 $\frac{1}{8}<k<3$이다.

0272 답 ④

ㄱ. $f(a+1)=\log_2(a+1),\ f(a+2)=\log_2(a+2)$

이때 $a+1<a+2$이고 밑이 1보다 크므로

$\log_2(a+1)<\log_2(a+2)$

$\therefore f(a+1)<f(a+2)$

ㄴ. [반례] $a=2$일 때, $f(a+2)=f(4)=\log_2 4=2$,
$g(a+3)=g(5)=\log_3 5$에서 $\log_3 5<\log_3 9=2$이므로
$f(a+2)>g(a+3)$

ㄷ. $f\left(\frac{1}{a+1}\right)-f\left(\frac{1}{a+2}\right)=\log_2\frac{1}{a+1}-\log_2\frac{1}{a+2}$
$=\log_2\frac{a+2}{a+1}$

$g\left(\frac{1}{a+1}\right)-g\left(\frac{1}{a+2}\right)=\log_3\frac{1}{a+1}-\log_3\frac{1}{a+2}$
$=\log_3\frac{a+2}{a+1}$

이때 $\frac{a+2}{a+1}=1+\frac{1}{a+1}>1$이므로

$\log_2\frac{a+2}{a+1}>\log_3\frac{a+2}{a+1}$ → $x>1$일 때, 함수 $y=\log_2 x$의 그래프는 함수 $y=\log_3 x$의 그래프보다 위쪽에 있다.

즉, $f\left(\frac{1}{a+1}\right)-f\left(\frac{1}{a+2}\right)>g\left(\frac{1}{a+1}\right)-g\left(\frac{1}{a+2}\right)$이므로

$f\left(\frac{1}{a+1}\right)+g\left(\frac{1}{a+2}\right)>f\left(\frac{1}{a+2}\right)+g\left(\frac{1}{a+1}\right)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0273 답 ③

선분 PQ가 원 C의 지름이므로 선분 PQ의 중점은 원의 중심 $\left(\frac{17}{8}, 0\right)$과 같다.

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 p, q $(p<q)$라 하면

$\mathrm{P}(p, \log_a p)$, $\mathrm{Q}(q, \log_a q)$

선분 PQ의 중점의 좌표는 $\left(\frac{p+q}{2}, \frac{\log_a p+\log_a q}{2}\right)$이므로

$\frac{p+q}{2}=\frac{17}{8}$에서 $p+q=\frac{17}{4}$ ····· ㉠

$\frac{\log_a p+\log_a q}{2}=0$에서

$\log_a pq=0$ ∴ $pq=1$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 p, q는 이차방정식 $t^2-\frac{17}{4}t+1=0$의 두 근이므로

$t^2-\frac{17}{4}t+1=0$에서 $4t^2-17t+4=0$

$(4t-1)(t-4)=0$ ∴ $t=\frac{1}{4}$ 또는 $t=4$

$p<q$이므로 $p=\frac{1}{4}$, $q=4$

점 $\mathrm{Q}(4, \log_a 4)$는 원 C 위의 점이므로

$\left(4-\frac{17}{8}\right)^2+(\log_a 4)^2=\frac{289}{64}$

$\frac{225}{64}+(\log_a 4)^2=\frac{289}{64}$

$(\log_a 4)^2=1$, $\log_a 4=1$ $(\because a>1)$

∴ $a=4$

0274 답 ⑤

$0<\log_a b<1<\log_a c$에서 $\log_a 1<\log_a b<\log_a a<\log_a c$이고 밑이 1보다 크므로 $1<b<a<c$

ㄱ. $b<a$

ㄴ. $\frac{1}{a}>\frac{1}{c}$이고 밑이 1보다 크므로 $\log\frac{1}{a}>\log\frac{1}{c}$

ㄷ. $\log_b c=\frac{\log_a c}{\log_a b}$이고 $\log_a c>\log_a b$이므로

$\frac{\log_a c}{\log_a b}>1$ ∴ $\log_b c>1$

ㄹ. $c^{\log_a b}=b^{\log_a c}$이고 $\log_a c>1$, $b>1$이므로

$b^{\log_a c}>b$ ∴ $c^{\log_a b}>b$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

0275 답 ④

(가)에서 $\alpha\beta<0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축의 교점이 원의 내부에 있어야 하므로

$-5<f(0)<5$

$-5<\log_2 k-4<5$, $-1<\log_2 k<9$

$\log_2 2^{-1}<\log_2 k<\log_2 2^9$이고 밑이 1보다 크므로

$2^{-1}<k<2^9$ ∴ $\frac{1}{2}<k<512$ ····· ㉠

(나)에서 $f(\alpha)f(\beta)<0$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점이 원의 내부에 있어야 한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$0=\log_2(x+k)-4$, $\log_2(x+k)=4$

$x+k=2^4$ ∴ $x=16-k$

즉, $-5<16-k<5$이므로

$11<k<21$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $11<k<21$

따라서 자연수 k는 12, 13, …, 20의 9개이다.

0276 답 ②

$\mathrm{A}(k, \log_2 k)$, $\mathrm{B}(k, -\log_2(8-k))$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=2$에서

$|\log_2 k-\{-\log_2(8-k)\}|=2$

$|\log_2 k+\log_2(8-k)|=2$

$|\log_2 k(8-k)|=2$

∴ $\log_2 k(8-k)=2$ 또는 $\log_2 k(8-k)=-2$

(i) $\log_2 k(8-k)=2$일 때,

$k(8-k)=2^2$이므로 $k^2-8k+4=0$ ····· ㉠

∴ $k=4\pm 2\sqrt{3}$

(ii) $\log_2 k(8-k)=-2$일 때,

$k(8-k)=2^{-2}$이므로 $k^2-8k+\frac{1}{4}=0$ ····· ㉡

$4k^2-32k+1=0$ ∴ $k=\frac{8\pm 3\sqrt{7}}{2}$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 곱은

$(4+2\sqrt{3})\times(4-2\sqrt{3})\times\frac{8+3\sqrt{7}}{2}\times\frac{8-3\sqrt{7}}{2}$

$=(16-12)\times\frac{64-63}{4}$

$=4\times\frac{1}{4}=1$

다른 풀이

(i)의 ㉠에서 두 실근의 곱은 4, (ii)의 ㉡에서 두 실근의 곱은 $\frac{1}{4}$이다.

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은 $4\times\frac{1}{4}=1$

0277 답 ⑤

$f(x)=\log_2(3x-a)+5$, $g(x)=|2^{-x+3}-a|$라 하자.

함수 $f(x)=\log_2(3x-a)+5$의 그래프와 직선 $x=4$가 한 점에서 만나므로 $f(4)$의 값이 존재해야 한다. 즉,

$f(4)=\log_2(12-a)+5$

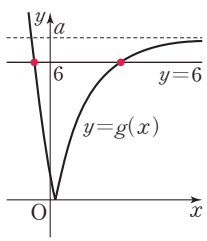
진수의 조건에서

$12-a>0$

$\therefore a<12$ ····· ㉠

a가 자연수이므로 함수

$g(x)=|2^{-x+3}-a|=\left|\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}-a\right|$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=6$이 서로 다른 두 점에서 만나려면

$a>6$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $6<a<12$

따라서 구하는 모든 자연수 a의 값의 합은

$7+8+9+10+11=45$

0278 답 ②

함수 $y=\log_2(x+a)+b$의 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-a$이므로

$-a=-2$ $\therefore a=2$

함수 $y=\log_2(x+2)+b$의 그래프가 원점을 지나므로

$0=\log_2 2+b$ $\therefore b=-1$

$\therefore a+b=2+(-1)=1$

0279 답 (4, 1)

점 A의 y좌표가 1이므로 x좌표는

$1=\log_3 x$에서 $x=3$

$\therefore$ A(3, 1)

정사각형의 한 변의 길이가 1이므로 점 D의 x좌표는

$3+1=4$

$\therefore$ D(4, 1)

0280 답 ①

점 (b, a)가 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점이므로

$a=\log_2 b$

점 (d, c)가 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점이므로

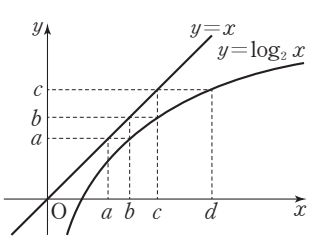
$c=\log_2 d$

$d=2b$이므로

$c=\log_2 2b=1+\log_2 b=1+a$

$\therefore a-c=-1$

$\therefore 4^{a-c}=4^{-1}=\frac{1}{4}$



0281 답 ④

$A(k_1, \log_2 k_1)$, $B\left(k_1, \log_2\frac{8}{k_1}\right)$, $C(k_2, \log_2 k_2)$, $D\left(k_2, \log_2\frac{8}{k_2}\right)$

이고 $\overline{AB}=\overline{CD}=2$이다.

$\overline{AB}=2$에서

$\log_2\frac{8}{k_1}-\log_2 k_1=2$

$\log_2\frac{8}{k_1^2}=2$, $\frac{8}{k_1^2}=2^2$

$k_1^2=2$ $\therefore k_1=\sqrt{2}$ ($\because k_1>0$)

$\overline{CD}=2$에서

$\log_2 k_2-\log_2\frac{8}{k_2}=2$

$\log_2\frac{k_2^2}{8}=2$, $\frac{k_2^2}{8}=2^2$

$k_2^2=32$ $\therefore k_2=4\sqrt{2}$ ($\because k_2>0$)

따라서 $\overline{AD}=k_2-k_1=3\sqrt{2}$이므로 직사각형 ABCD의 넓이는

$3\sqrt{2}\times 2=6\sqrt{2}$

0282 답 ②

$A(k, \log_2 k)$, $B(k, \log_a k)$이고 점 C의 y좌표는 $\log_a k$이므로

$\triangle ACB : \triangle BCD=2:1$에서

$\overline{AB} : \log_a k=2:1$, $(\log_2 k-\log_a k) : \log_a k=2:1$

$\overline{AB}$: 삼각형 BCD의 높이

$2\log_a k=\log_2 k-\log_a k$, $\log_a k=\frac{1}{3}\log_2 k$

$\log_a k=\log_{2^3} k$, $\log_a k=\log_8 k$

$\therefore a=8$ ($\because k\neq 1$)

0283 답 ①

점 A_1의 x좌표를 구하면

$1=\log_a x$ $\therefore x=a$

$\therefore A_1(a, 1)$

점 B_1의 x좌표를 구하면

$1=\log_b x$ $\therefore x=b$

$\therefore B_1(b, 1)$

이때 선분 A_1B_1의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+b}{2}, 1\right)$이므로 주어진 조건에서

$\frac{a+b}{2}=5$ $\therefore a+b=10$

$\overline{A_1B_1}=1$이므로 $b-a=1$

점 A_2의 x좌표를 구하면

$2=\log_a x$ $\therefore x=a^2$

$\therefore A_2(a^2, 2)$

점 B_2의 x좌표를 구하면

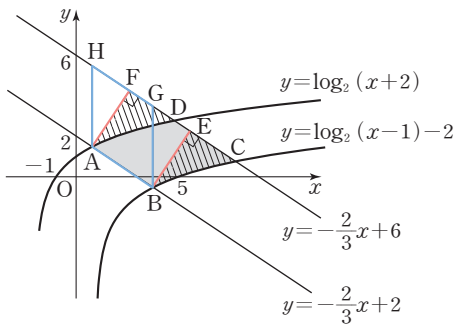
$2=\log_b x$ $\therefore x=b^2$

$\therefore B_2(b^2, 2)$

$\therefore \overline{A_2B_2}=b^2-a^2=(b+a)(b-a)$

$=10\times 1=10$

0284 답 ③



곡선 $y=\log_2(x-1)-2$는 곡선 $y=\log_2(x+2)$를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다. …… ㉠

또 직선 $y=-\frac{2}{3}x+6$은 직선 $y=-\frac{2}{3}x+2$를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다. …… ㉡

두 직선의 기울기가 $-\frac{2}{3}$이므로 곡선 $y=\log_2(x+2)$를 곡선 $y=\log_2(x-1)-2$로 평행이동할 때, 곡선 $y=\log_2(x+2)$ 위의 두 점 A, D는 곡선 $y=\log_2(x-1)-2$ 위의 두 점 B, C로 각각 평행이동된다.

따라서 그래프에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 같으므로 구하는 넓이는 사각형 ABEF의 넓이와 같고, 그 넓이는 평행사변형 ABGH의 넓이와 같다.

㉡에서 y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$\overline{AH}=4$

㉠에서 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로

(점 B의 x좌표)−(점 A의 x좌표)$=3$

따라서 구하는 넓이는

$4\times3=12$

0285 답 70

$P(a, \log_{\frac{1}{9}}a)$, $Q(a, \log_3 a)$이므로

$\overline{PQ}=\log_{\frac{1}{9}}a-\log_3 a=\log_{3^{-2}}a-\log_3 a$

$=-\frac{1}{2}\log_3 a-\log_3 a=-\frac{3}{2}\log_3 a$

$R(b, \log_{\frac{1}{9}}b)$, $S(b, \log_3 b)$이므로

$\overline{SR}=\log_3 b-\log_{\frac{1}{9}}b=\log_3 b-\log_{3^{-2}}b$

$=\log_3 b+\frac{1}{2}\log_3 b=\frac{3}{2}\log_3 b$

㈎에서 $\overline{PQ}=2\overline{SR}$이므로

$-\frac{3}{2}\log_3 a=3\log_3 b$, $-\frac{1}{2}\log_3 a=\log_3 b$

$\log_3 a=-2\log_3 b$, $\log_3 a=\log_3\frac{1}{b^2}$

$\therefore a=\frac{1}{b^2}$ …… ㉠

선분 PR의 중점의 x좌표는 $\frac{a+b}{2}$이므로 ㈏에서

$\frac{a+b}{2}=\frac{9}{8}$ $\therefore a+b=\frac{9}{4}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\frac{1}{b^2}+b=\frac{9}{4}$

$4b^3-9b^2+4=0$, $(b-2)(4b^2-b-2)=0$ ⟵2 | 4 −9 0 4 / 8 −2 −4 / 4 −1 −2 0

$\therefore b=2$ 또는 $b=\frac{1\pm\sqrt{33}}{8}$

이때 $b>1$이므로 $b=2$

이를 ㉠에 대입하면 $a=\frac{1}{4}$

$\therefore 40(b-a)=40\times\left(2-\frac{1}{4}\right)=40\times\frac{7}{4}=70$

0286 답 ③

곡선 $y=a^x$을 직선 $y=x$에 대칭이동한 곡선은 함수 $y=a^x$의 역함수의 그래프이고, 이 곡선이 점 (4, 2)를 지나므로 곡선 $y=a^x$은 점 (2, 4)를 지난다.

따라서 $4=a^2$이므로 $a=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2$

다른 풀이

곡선 $y=a^x$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 $y=\log_a x$

곡선 $y=\log_a x$가 점 (4, 2)를 지나므로

$2=\log_a 4$, $a^2=4$ $\therefore a=2$ ($\because a>0$)

0287 답 ②

두 함수 $y=f(x)$, $y=\log_6(x+a)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 서로 역함수 관계이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 (1, 4)를 지나므로 함수 $y=\log_6(x+a)$의 그래프는 점 (4, 1)을 지난다.

즉, $1=\log_6(4+a)$이므로 $4+a=6$ $\therefore a=2$

0288 답 ③

함수 $y=\log_a x+b(a>1)$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\log_a x+b$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

이때 두 교점의 x좌표가 각각 2, 8이므로 함수 $y=\log_a x+b$의 그래프는 두 점 (2, 2), (8, 8)을 지난다.

$2=\log_a 2+b$에서 $\log_a 2=2-b$ …… ㉠

$8=\log_a 8+b$에서 $8=3\log_a 2+b$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$8=3(2-b)+b$, $8=6-2b$ $\therefore b=-1$

$b=-1$을 ㉠에 대입하면

$\log_a 2=3$ $\therefore a^3=2$

$\therefore a^3b=2\times(-1)=-2$

0289 답 2

$y=\log_2(x-3)+2$에서 $y-2=\log_2(x-3)$

$x-3=2^{y-2}$ $\therefore x=2^{y-2}+3$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2^{x-2}+3$

이 그래프를 x축의 방향으로 a만큼 평행이동하면

$y=2^{x-a-2}+3$

이 식이 $y=2^{x-1}+b$와 일치하므로 $a=-1$, $b=3$

$\therefore a+b=-1+3=2$

0290 답 ③

$y=2^{-2x}=\left(\frac{1}{4}\right)^x$이므로 두 함수 $y=2^{-2x}$, $y=\log_{\frac{1}{4}}x$는 서로 역함수 관계이다.

함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$의 그래프가 점 $\left(\frac{3}{2}, a\right)$를 지나므로

$a=\log_{\frac{1}{4}}\frac{3}{2}=-\log_4\frac{3}{2}=\log_4\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}=\log_4\frac{2}{3}$

$\therefore 4^a=\frac{2}{3}$

함수 $y=\log_{\frac{1}{4}}x$의 그래프가 점 $\left(\frac{3}{2}, a\right)$를 지나므로 함수 $y=2^{-2x}$의 그래프는 점 $\left(a, \frac{3}{2}\right)$을 지난다. 즉, $b=\frac{3}{2}$

$\therefore 4^{a-1}\times b=\frac{1}{4}\times 4^a\times b=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{4}$

0291 답 ⑤

$y=\log_2(x-k)+1$에서

$y-1=\log_2(x-k)$

$x-k=2^{y-1}$, $x=2^{y-1}+k$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2^{x-1}+k$

함수 $y=2^{x-1}+k$의 그래프를 y축의 방향으로 k^2만큼 평행이동시키면 $g(x)=2^{x-1}+k^2+k$

곡선 $y=f(x)$의 점근선은 직선 $x=k$이고, 곡선 $y=g(x)$의 점근선은 직선 $y=k^2+k$이므로 두 점근선의 교점의 좌표는

(k, k^2+k)

이 점이 직선 $y=4x$ 위에 있으므로

$k^2+k=4k$, $k^2-3k=0$

$k(k-3)=0$ $\therefore k=3\ (\because k>0)$

0292 답 ①

함수 $y=\log_2\left(x-\frac{2}{3}\right)+k$의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\log_2\left(x-\frac{2}{3}\right)+k$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

이때 두 교점 A, B의 x좌표가 각각 a, b이므로 함수

$y=\log_2\left(x-\frac{2}{3}\right)+k$의 그래프는 두 점 (a, a), (b, b)를 지난다.

$a=\log_2\left(a-\frac{2}{3}\right)+k$ ····· ㉠

$b=\log_2\left(b-\frac{2}{3}\right)+k$ ····· ㉡

㉡−㉠을 하면

$b-a=\log_2\left(b-\frac{2}{3}\right)-\log_2\left(a-\frac{2}{3}\right)$

$a<b$라 할 때, 선분 AB를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이가 2이므로

$b-a=2$ ····· ㉢

즉, $\log_2\left(b-\frac{2}{3}\right)-\log_2\left(a-\frac{2}{3}\right)=2$이므로

$\log_2\frac{b-\frac{2}{3}}{a-\frac{2}{3}}=2$, $\frac{b-\frac{2}{3}}{a-\frac{2}{3}}=2^2$

$b-\frac{2}{3}=4\left(a-\frac{2}{3}\right)$ $\therefore b-4a=-2$ ····· ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면 $a=\frac{4}{3}$, $b=\frac{10}{3}$

$\therefore ab=\frac{4}{3}\times\frac{10}{3}=\frac{40}{9}$

0293 답 $\sqrt{2}$

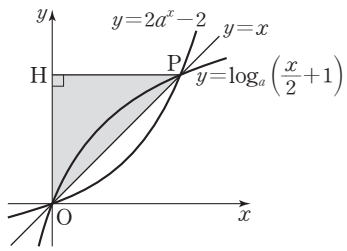
$y=\log_a\left(\frac{x}{2}+1\right)$에서 $a^y=\frac{x}{2}+1$, $x=2a^y-2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2a^x-2$

즉, 두 함수 $y=2a^x-2$, $y=\log_a\left(\frac{x}{2}+1\right)$은 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이므로 점 P의 좌표를 $(k, k)(k>0)$라 하자.

삼각형 OPH의 넓이가 2이므로



$\frac{1}{2}\times\overline{OH}\times\overline{PH}=2$

$\frac{1}{2}\times k\times k=2$, $k^2=4$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$ $\therefore$ P(2, 2)

따라서 점 P(2, 2)가 곡선 $y=2a^x-2$ 위에 있으므로

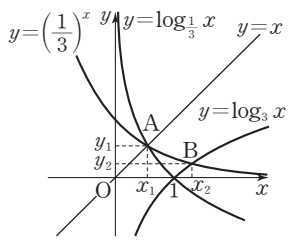
$2=2a^2-2$, $a^2=2$

$\therefore a=\sqrt{2}\ (\because a>1)$

0294 답 ③

두 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\log_{\frac{1}{3}}x$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프의 교점은 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점과 같다.

따라서 세 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y=\log_{\frac{1}{3}}x$, $y=\log_3 x$의 그래프와 두 점 A, B는 그림과 같으므로



$0<x_1<1<x_2$, $0<y_2<y_1$

ㄱ. 점 $A(x_1, y_1)$이 직선 $y=x$ 위에 있으므로 $x_1=y_1$

ㄴ. $\frac{y_1}{x_1}$은 직선 OA의 기울기와 같으므로 $\frac{y_1}{x_1}=1$

$\frac{y_2}{x_2}$는 직선 OB의 기울기와 같으므로 $\frac{y_2}{x_2}<1$

즉, $\frac{y_2}{x_2}<\frac{y_1}{x_1}$ $\therefore x_1y_2<x_2y_1$

ㄷ. $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$이라 하면 $f(1)=\frac{1}{3}$이고 함수 $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프는 x의 값이 증가할수록 y의 값은 감소하므로 $x_2>1$에서

$f(x_2)<f(1)$ $\therefore y_2<\frac{1}{3}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0295 답 5

$y=\log_2(x+a)+b$에서 $y-b=\log_2(x+a)$

$x+a=2^{y-b}$, $x=2^{y-b}-a$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2^{x-b}-a$

즉, 두 함수 $f(x)=\log_2(x+a)+b$, $g(x)=2^{x-b}-a$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 A(7, 1)이므로

B(1, 7) ····· ⓘ

삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

$\overline{AC}\times(7-1)\times\frac{1}{2}=24$에서 $\overline{AC}=8$

$\therefore$ C(−1, 1) ····· ⓘⓘ

두 점 B(1, 7), C(−1, 1)은 함수 $g(x)=2^{x-b}-a$의 그래프 위의 점이므로

$7=2^{1-b}-a$ ····· ㉠

$1=2^{-1-b}-a$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면

$2^{1-b}-2^{-1-b}=6$, $2^{-1-b}(2^2-1)=6$

$2^{-1-b}=2$, $-1-b=1$

$\therefore b=-2$

$b=-2$를 ㉠에 대입하면

$7=2^3-a$ $\therefore a=1$ ····· ⓘⓘⓘ

$\therefore a^2+b^2=1+(-2)^2=5$ ····· ⓘⓥ

채점 기준

ⓘ 점 B의 좌표 구하기	20 %
ⓘⓘ 점 C의 좌표 구하기	20 %
ⓘⓘⓘ a, b의 값 각각 구하기	40 %
ⓘⓥ a^2+b^2의 값 구하기	20 %

0296 답 ①

$y=2^{x-1}$에서

$x-1=\log_2 y$, $x=\log_2 y+1$

x와 y를 서로 바꾸면

$y=\log_2 x+1$

함수 $y=\log_2 x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 −6만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동시키면 함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치하므로

$g(x)=\log_2(x+6)+a+1$

A(p, 2)라 하면 점 A가 함수 $f(x)=2^{x-1}$의 그래프 위에 있으므로

$2=2^{p-1}$에서 $p-1=1$ $\therefore p=2$

$\therefore$ A(2, 2)

B(q, 2)라 하면 선분 AB를 1 : 3으로 내분하는 점의 x좌표가 4이므로

$\frac{1\times q+3\times 2}{1+3}=4$, $q+6=16$

$\therefore q=10$

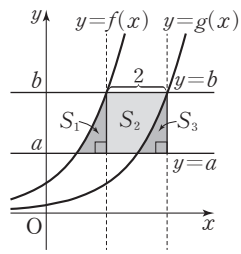
즉, B(10, 2)가 함수 $g(x)=\log_2(x+6)+a+1$의 그래프 위에 있으므로

$2=\log_2 16+a+1$

$\therefore a=-3$

0297 답 ①

두 곡선 $f(x)=2^x$, $g(x)=2^{x-2}$과 두 직선 $y=a$, $y=b$는 그림과 같다.



세 영역의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 두 직선 $y=a$, $y=b$로 둘러싸인 부분의 넓이는 S_1+S_2이다.

이때 곡선 $g(x)=2^{x-2}$은 곡선 $f(x)=2^x$을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로

$S_1=S_3$

㈎에서 $S_1+S_2=S_3+S_2=2\times(b-a)=6$

$\therefore b-a=3$ ····· ㉠

㈏에서 $f^{-1}(a)=p$, $g^{-1}(b)=q$라 하면 $f(p)=a$, $g(q)=b$이므로 $2^p=a$, $2^{q-2}=b$

$2^p=a$에서 $p=\log_2 a$

$2^{q-2}=b$에서 $q-2=\log_2 b$

$\therefore q=2+\log_2 b=2\log_2 2+\log_2 b$

$=\log_2 4+\log_2 b=\log_2 4b$

㈏에서 $g^{-1}(b)-f^{-1}(a)=\log_2 6$이므로

$q-p=\log_2 6$

$\log_2 4b-\log_2 a=\log_2 6$, $\log_2\frac{4b}{a}=\log_2 6$

$\frac{4b}{a}=6$, $6a=4b$

$\therefore 3a=2b$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=6$, $b=9$

$\therefore a+b=15$

다른 풀이

㈏에서 $f^{-1}(x)$, $g^{-1}(x)$를 직접 구하여 계산할 수도 있다.

$y=2^x$에서 $\log_2 y=x$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_2 x$

$\therefore f^{-1}(x)=\log_2 x$

$y=2^{x-2}$에서 $\log_2 y=x-2$

$\therefore x=\log_2 y+2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_2 x+2$

$\therefore g^{-1}(x)=\log_2 x+2$

$g^{-1}(b)-f^{-1}(a)=\log_2 6$이므로

$\log_2 b+2-\log_2 a=\log_2 6$

$\log_2\frac{4b}{a}=\log_2 6$

$\frac{4b}{a}=6$, $6a=4b$

$\therefore 3a=2b$ ····· ㉡

0298 답 ⑤

두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 직선 $y=-x+k$도 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 두 점 A와 B, 두 점 D와 C는 각각 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\overline{DA}=\overline{BC}$이므로 $\overline{DA}=\overline{AB}=\overline{BC}$이다.

ㄱ. $\triangle OBD=\triangle OAB\times 2=6\times 2=12$

ㄴ. $\triangle OCD=\triangle OAB\times 3=6\times 3=18$이고 $C(k,\ 0)$, $D(0,\ k)$이므로

$\triangle OCD=\frac{1}{2}k^2=18$, $k^2=36$

$\therefore\ k=6\ (\because\ k>1)$

ㄷ. 두 점 A, B는 선분 DC를 삼등분하는 점이므로 $A(2,\ 4)$, $B(4,\ 2)$이다.

즉, 직선 OB의 기울기는 $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0299 답 ②

$A_n(a_n,\ 2^{a_n})$, $B_n(b_n,\ 2^{b_n})$ $(a_n<b_n)$이라 하면 (가)에서

$\frac{2^{b_n}-2^{a_n}}{b_n-a_n}=2$

$\therefore\ 2^{b_n}-2^{a_n}=2(b_n-a_n)$ ····· ㉠

또 (나)에서

$\sqrt{(b_n-a_n)^2+(2^{b_n}-2^{a_n})^2}=\sqrt{5}n$

$\therefore\ (b_n-a_n)^2+(2^{b_n}-2^{a_n})^2=5n^2$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(b_n-a_n)^2+4(b_n-a_n)^2=5n^2$

$(b_n-a_n)^2=n^2$

$a_n<b_n$이므로 $b_n-a_n=n$

$\therefore\ a_n=b_n-n$ ····· ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$2^{b_n}-2^{b_n-n}=2n$, $2^{b_n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2n$

$\therefore\ 2^{b_n}=2n\times\frac{2^n}{2^n-1}$

한편 두 함수 $y=2^x$, $y=\log_2 x$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

즉, 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점은 점 A_n과 점 B_n을 각각 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이다.

따라서 x_n은 두 점 A_n, B_n의 y좌표 중에서 큰 값, 즉 점 B_n의 y좌표와 같으므로

$x_n=2^{b_n}=2n\times\frac{2^n}{2^n-1}$

$\therefore\ x_1+x_2=4+\frac{16}{3}=\frac{28}{3}$

0300 답 192

곡선 $y=a^{x-1}$은 곡선 $y=a^x$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 곡선 $y=\log_a(x-1)$은 곡선 $y=\log_a x$를 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$는 서로 역함수 관계이므로 두 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

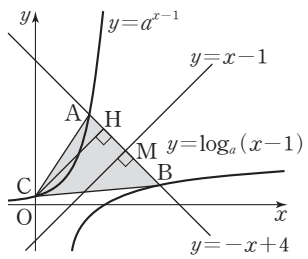
따라서 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=\log_a(x-1)$은 직선 $y=x-1$에 대하여 대칭이다.

두 직선 $y=x-1$, $y=-x+4$의 교점을 M이라 하고 점 M의 x좌표를 구하면

$x-1=-x+4$, $2x=5$

$\therefore\ x=\frac{5}{2}$

$\therefore\ M\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$



이때 두 직선 $y=x-1$, $y=-x+4$는 서로 수직이므로 점 M은 선분 AB의 중점이다.

$\therefore\ \overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}=\sqrt{2}$

점 A는 직선 $y=-x+4$ 위에 있으므로 $A(k,\ -k+4)\left(0<k<\frac{5}{2}\right)$라 하자.

$\overline{AM}^2=2$이므로

$\left(k-\frac{5}{2}\right)^2+\left(-k+\frac{5}{2}\right)^2=2$

$2\left(k-\frac{5}{2}\right)^2=2$, $\left(k-\frac{5}{2}\right)^2=1$

$k-\frac{5}{2}=-1$ 또는 $k-\frac{5}{2}=1$

$\therefore\ k=\frac{3}{2}\ \left(\because\ 0<k<\frac{5}{2}\right)$

즉, 점 $A\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$가 곡선 $y=a^{x-1}$ 위에 있으므로

$\frac{5}{2}=a^{\frac{1}{2}}$ $\therefore\ a=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$

점 C는 곡선 $y=\left(\frac{25}{4}\right)^{x-1}$이 y축과 만나는 점이므로

$C\left(0,\ \frac{4}{25}\right)$

이때 점 C에서 직선 $y=-x+4$에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 CH의 길이는 점 C와 직선 $y=-x+4$, 즉 $x+y-4=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{CH}=\frac{\left|\frac{4}{25}-4\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{96}{25\sqrt{2}}=\frac{48\sqrt{2}}{25}$

$\therefore\ S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CH}$

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\frac{48\sqrt{2}}{25}=\frac{96}{25}$

$\therefore\ 50\times S=50\times\frac{96}{25}=192$

0301 답 ①

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-a)+3$의 밑이 1보다 작으므로

$2\le x\le 5$일 때 이 함수는 $x=2$에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}}(2-a)+3$을 갖는다.

즉, $\log_{\frac{1}{2}}(2-a)+3=3$이므로

$\log_{\frac{1}{2}}(2-a)=0$, $2-a=1$

$\therefore\ a=1$

0302 답 $\frac{3}{2}$

$f(x)=x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}$라 하면

$f(x)=\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{9}$

$-\frac{4}{3}\le x\le\frac{11}{3}$일 때 함수 $y=f(x)$는 $x=-\frac{1}{3}$에서 최솟값 $\frac{4}{9}$,

$x=\frac{11}{3}$에서 최댓값 $\frac{148}{9}$을 가지므로

$\frac{4}{9}\le f(x)\le\frac{148}{9}$

함수 $y=\log_a f(x)$의 밑이 1보다 크므로 $\frac{4}{9}\le f(x)\le\frac{148}{9}$일 때

이 함수는 $f(x)=\frac{4}{9}$에서 최솟값 $\log_a\frac{4}{9}$를 갖는다.

즉, $\log_a\frac{4}{9}=-2$이므로 $a^{-2}=\frac{4}{9}$

$\therefore a=\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}$

0303 답 ④

$f(x)=(\log_2 x)^2-\log_2 x^4+6=(\log_2 x)^2-4\log_2 x+6$

$=(\log_2 x-2)^2+2$

함수 $f(x)$는 $\log_2 x=2$, 즉 $x=4$일 때 최솟값 2를 가지므로 ($\log_2 x=2$ → $x=2^2=4$)

$a=4$, $m=2$

$\therefore m+a=2+4=6$

0304 답 ②

$(g\circ f)(x)=-2(\log_2 x+a)+5=-2\log_2 x-2a+5$

함수 $(g\circ f)(x)=-2\log_2 x-2a+5$의 밑이 1보다 크므로

$1\le x\le 8$일 때 이 함수는 $x=1$에서 최댓값 $-2a+5$, $x=8$에서 최

솟값 $-2a-1$을 갖는다.

즉, $-2a+5=9$이므로 $-2a=4$

$\therefore a=-2$

따라서 구하는 최솟값은

$-2a-1=-2\times(-2)-1=3$

0305 답 ①

함수 $(f\circ g)(x)=\log_{\frac{1}{3}}(2^x+1)$은 밑이 1보다 작으므로

$1\le x\le\log_2 26$일 때 이 함수는 $x=1$에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}}3=-1$,

$x=\log_2 26$에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{3}}(2^{\log_2 26}+1)=\log_{\frac{1}{3}}27=-3$을 갖는다.

따라서 $M=-1$, $m=-3$이므로

$M-m=-1-(-3)=2$

0306 답 ②

$y=\log_2(x+1)+\log_2(7-x)=\log_2(-x^2+6x+7)$이므로

$f(x)=-x^2+6x+7$이라 하면 $f(x)=-(x-3)^2+16$

$1\le x\le 4$일 때 함수 $y=f(x)$는 $x=1$일 때 최솟값 12, $x=3$일 때

최댓값 16을 가지므로

$12\le f(x)\le 16$

함수 $y=\log_2 f(x)$의 밑이 1보다 크므로 $12\le f(x)\le 16$일 때 이

함수는 $f(x)=16$에서 최댓값 $\log_2 16=4$, $f(x)=12$에서 최솟값

$\log_2 12=\log_2(2^2\times 3)=2+\log_2 3$을 갖는다.

따라서 $M=4$, $m=2+\log_2 3$이므로

$M-m=4-(2+\log_2 3)=2-\log_2 3$

0307 답 $2\sqrt{5}$

$y=\log_9 x^2+\log_x 243=\log_{3^2} x^2+\log_x 3^5$

$=\log_3 x+5\log_x 3$

이때 $x>1$에서 $\log_3 x>0$, $\log_x 3>0$이므로 산술평균과 기하평균

의 관계에 의하여

$\log_3 x+5\log_x 3\ge 2\sqrt{\log_3 x\times 5\log_x 3}=2\sqrt{5}$

(단, 등호는 $\log_3 x=\sqrt{5}$일 때 성립한다.)

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{5}$이다.

0308 답 ④

$(\log_a b^2)^2+(\log_b\sqrt{a})^2=(2\log_a b)^2+\left(\frac{1}{2}\log_b a\right)^2$

$=4(\log_a b)^2+\frac{1}{4(\log_a b)^2}$

이때 $a>1$, $b>1$에서 $\log_a b>0$, $(\log_a b)^2>0$이므로 산술평균과

기하평균의 관계에 의하여

$4(\log_a b)^2+\frac{1}{4(\log_a b)^2}\ge 2\sqrt{4(\log_a b)^2\times\frac{1}{4(\log_a b)^2}}=2$

(단, 등호는 $\log_a b=\frac{1}{2}$일 때 성립한다.)

따라서 구하는 최솟값은 2이다.

0309 답 ③

$y=(\log_2 x)(\log_{\frac{1}{2}} x)+\log_2 x^2+10$

$=-(\log_2 x)^2+2\log_2 x+10$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $1\le x\le 8$에서

$\log_2 1\le\log_2 x\le\log_2 8$ $\therefore 0\le t\le 3$

주어진 함수는

$y=-t^2+2t+10=-(t-1)^2+11$

$0\le t\le 3$일 때 함수 $y=-(t-1)^2+11$은 $t=1$에서 최댓값 11,

$t=3$에서 최솟값 7을 가지므로

$M=11$, $m=7$

$t=1$에서 $\log_2 x=1$이므로 $x=2$ $\therefore a=2$

$t=3$에서 $\log_2 x=3$이므로 $x=8$ $\therefore b=8$

$\therefore aM+bm=2\times 11+8\times 7=78$

0310 답 ①

$2^{\log_3 x}=t\,(t>0)$로 놓으면 $1\le x\le 27$에서

$\log_3 1\le\log_3 x\le\log_3 27$, $0\le\log_3 x\le 3$

$2^0\le 2^{\log_3 x}\le 2^3$ $\therefore 1\le t\le 8$

주어진 함수는

$y=t^2-6t+14=(t-3)^2+5$

$1 \le t \le 8$일 때 함수 $y=(t-3)^2+5$는
$t=8$에서 최댓값 30, $t=3$에서 최솟값 5를 갖는다.
따라서 $M=30$, $m=5$이므로
$M+m=30+5=35$

0311 답 ①

삼각형 ABC에서 $\angle A=90^\circ$이므로

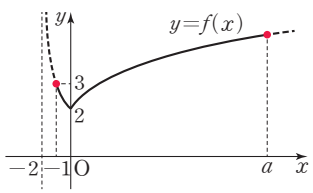
$$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times 2\log_2 x\times\log_4\frac{16}{x}$$
$$=\log_2 x\times(\log_4 16-\log_4 x)=\log_2 x\times\left(2-\frac{1}{2}\log_2 x\right)$$
$$=-\frac{1}{2}(\log_2 x)^2+2\log_2 x$$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $1<x<16$에서
$\log_2 1<\log_2 x<\log_2 16$
$\therefore\ 0<t<4$
$S(x)$는
$-\frac{1}{2}t^2+2t=-\frac{1}{2}(t-2)^2+2$

$0<t<4$일 때 함수 $y=-\frac{1}{2}(t-2)^2+2$는 $t=2$에서 최댓값 2를 가지므로 $M=2$
$t=2$에서 $\log_2 x=2$이므로
$x=2^2=4$ $\therefore\ a=4$
$\therefore\ a+M=4+2=6$

0312 답 ⑤

$f(0)=|\log_2 2-1|+2=2$, $f(-1)=|\log_2 1-1|+2=3$이므로
$-1\le x\le a$일 때 함수 $f(x)=|\log_2(x+2)-1|+2$의 그래프는 그림과 같다.



정의역이 $\{x\,|\,-1\le x\le a\}$, 치역이 $\{y\,|\,b\le y\le 5\}$이므로
$f(a)=5$, $f(0)=b$
$f(0)=b$에서 $b=2$
$f(a)=5$에서
$|\log_2(a+2)-1|+2=5$, $|\log_2(a+2)-1|=3$
$\log_2(a+2)-1=-3$ 또는 $\log_2(a+2)-1=3$
(i) $\log_2(a+2)=-2$에서 $a+2=2^{-2}$ $\therefore\ a=-\frac{7}{4}$
이때 $a>-1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.
(ii) $\log_2(a+2)=4$에서 $a+2=2^4$ $\therefore\ a=14$
(i), (ii)에서 $a=14$
$\therefore\ a+b=14+2=16$

0313 답 ④

진수의 조건에서 $x-1>0$, $x+8>0$
$\therefore\ x>1$ ····· ㉠
밑이 같으므로
$4(x-1)=x+8$, $4x-4=x+8$
$3x=12$ $\therefore\ x=4$
이때 ㉠에 의하여 $x=4$

0314 답 ②

$3^{2x}=2^{6-2x}$의 양변에 상용로그를 취하면
$\log 3^{2x}=\log 2^{6-2x}$, $2x\log 3=(6-2x)\log 2$
$(\log 3+\log 2)x=3\log 2$
$\therefore\ x=\frac{3\log 2}{\log 3+\log 2}=\frac{\log 2^3}{\log 6}=\frac{\log 8}{\log 6}=\log_6 8$

0315 답 ④

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2+kt-8=0$
주어진 방정식의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha\beta=4$
이차방정식 $t^2+kt-8=0$의 두 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\log_2\alpha+\log_2\beta=-k$
$\therefore\ k=-\log_2\alpha\beta=-\log_2 4=-2$

0316 답 ⑤

$\log_a 16=\frac{\log_2 16}{\log_2 a}=\frac{4}{\log_2 a}$이므로 $\log_2 a+\log_a 16=5$에서
$\log_2 a+\frac{4}{\log_2 a}=5$, $\log_2 a+\frac{4}{\log_2 a}-5=0$
$\therefore\ (\log_2 a)^2-5\log_2 a+4=0$
$\log_2 a=t$로 놓으면 $a>2$에서 $t>1$이고
$t^2-5t+4=0$, $(t-1)(t-4)=0$
$\therefore\ t=4\ (\because\ t>1)$
$t=\log_2 a$이므로 $\log_2 a=4$
$\therefore\ a=2^4=16$
한편 $\log_2 a\times\log_a 16=k$이므로
$\log_2 a\times\frac{4}{\log_2 a}=k$ $\therefore\ k=4$
$\therefore\ a+k=16+4=20$

0317 답 ③

(가)에서 $b=\frac{32}{a}$이므로 $\log_2 a\times\log_2 b=4$에 대입하면
$\log_2 a\times\log_2\frac{32}{a}=4$, $\log_2 a(\log_2 32-\log_2 a)=4$
$\therefore\ (\log_2 a)^2-5\log_2 a+4=0$
$\log_2 a=t$로 놓으면
$t^2-5t+4=0$, $(t-1)(t-4)=0$
$\therefore\ t=1$ 또는 $t=4$
$t=\log_2 a$이므로 $\log_2 a=1$ 또는 $\log_2 a=4$
$\therefore\ a=2$ 또는 $a=2^4$
$a=2$일 때 $b=16$이고, $a=2^4$일 때 $b=2$
이때 $a<b$이므로 $a=2$, $b=16$
$\therefore\ \log_2\frac{b}{a}=\log_2\frac{16}{2}=\log_2 8=3$

다른 풀이

㈎의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 ab=\log_2 32$

$\therefore \log_2 a+\log_2 b=5$

㈏에서 $\log_2 a\times\log_2 b=4$이므로 두 수 $\log_2 a$, $\log_2 b$는 이차방정식 $t^2-5t+4=0$의 두 근이다.

$t^2-5t+4=0$에서 $(t-1)(t-4)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=4$

$a<b$이므로 $\log_2 a=1$ 또는 $\log_2 b=4$

$\therefore a=2,\ b=2^4=16$

$\therefore \log_2 \frac{b}{a}=\log_2 \frac{16}{2}=\log_2 8=3$

0318 답 100

진수의 조건에서 $x>0$ ····· ㉠

$x^{\log 3}=3^{\log x}$이므로 $3^{\log x}\times x^{\log 3}-4\times 3^{\log x}-45=0$에서

$(3^{\log x})^2-4\times 3^{\log x}-45=0$

$3^{\log x}=t\ (t>0)$로 놓으면

$t^2-4t-45=0,\ (t+5)(t-9)=0$

$\therefore t=9\ (\because t>0)$

$t=3^{\log x}$이므로

$3^{\log x}=9,\ 3^{\log x}=3^2$

$\log x=2$ $\therefore x=100$

이때 ㉠에 의하여 $x=100$

0319 답 ②

밑과 진수의 조건에서 $x>0,\ x\neq 1$ ····· ㉠

$x^{\log_2 \frac{x}{8}}=\left(\frac{x}{8}\right)^{\log_x 2}$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 \frac{x}{8}}=\log_2 \left(\frac{x}{8}\right)^{\log_x 2}$

$\log_2 \frac{x}{8}\times\log_2 x=\log_x 2\times\log_2 \frac{x}{8}$

$(\log_2 x-\log_2 8)\log_2 x=\frac{1}{\log_2 x}(\log_2 x-\log_2 8)$

$(\log_2 x)^3-3(\log_2 x)^2-\log_2 x+3=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^3-3t^2-t+3=0$

	1	−3	−1	3
1		1	−2	−3
	1	−2	−3	0

$(t-1)(t^2-2t-3)=0$

$(t+1)(t-1)(t-3)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$ 또는 $t=3$

$t=\log_2 x$이므로

$\log_2 x=-1$ 또는 $\log_2 x=1$ 또는 $\log_2 x=3$

$\therefore x=2^{-1}=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$ 또는 $x=2^3=8$

이때 ㉠에 의하여

$x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$ 또는 $x=8$

따라서 구하는 모든 실근의 합은

$\frac{1}{2}+2+8=\frac{21}{2}$

0320 답 ④

밑과 진수의 조건에서

$x^2-2x+1>0$ ($x\neq 1$), $x^2-2x+1\neq 1$ ($x\neq 0$이고 $x\neq 2$), $4-x>0$ ($x<4$)

$\therefore x<4$이고 $x\neq 0$이고 $x\neq 1$이고 $x\neq 2$ ····· ㉠

(i) 밑이 같은 경우

$x^2-2x+1=9,\ x^2-2x-8=0$

$(x+2)(x-4)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

이때 ㉠에 의하여 $x=-2$

(ii) 진수가 1인 경우

$4-x=1$ $\therefore x=3$

이때 ㉠에 의하여 $x=3$

(i), (ii)에서 구하는 모든 실근의 합은

$-2+3=1$

0321 답 ②

진수의 조건에서 $x>0$ ····· ㉠

$x^{\log_5 x}=\frac{125}{x^2}$의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$\log_5 x^{\log_5 x}=\log_5 \frac{125}{x^2}$

$(\log_5 x)^2=\log_5 125-\log_5 x^2$

$(\log_5 x)^2+2\log_5 x-3=0$

$\log_5 x=t$로 놓으면

$t^2+2t-3=0,\ (t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

$t=\log_5 x$이므로 $\log_5 x=-3$ 또는 $\log_5 x=1$

$\therefore x=5^{-3}=\frac{1}{125}$ 또는 $x=5$

이때 ㉠에 의하여 $x=\frac{1}{125}$ 또는 $x=5$

따라서 구하는 모든 실근의 곱은

$\frac{1}{125}\times 5=\frac{1}{25}$

0322 답 ①

$(\log_2 x)^2-\log_2 x^4-5=0$에서 $(\log_2 x)^2-4\log_2 x-5=0$

$\log_2 x=t$로 놓으면

$t^2-4t-5=0$

이 이차방정식의 두 근은 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2 \alpha+\log_2 \beta=4$, $\log_2 \alpha\times\log_2 \beta=-5$

$\therefore \log_\alpha \beta^2+\log_\beta \alpha^2=2(\log_\alpha \beta+\log_\beta \alpha)$

$=2\left(\frac{\log_2 \beta}{\log_2 \alpha}+\frac{\log_2 \alpha}{\log_2 \beta}\right)$

$=2\times\frac{(\log_2 \beta)^2+(\log_2 \alpha)^2}{\log_2 \alpha\log_2 \beta}$

$=2\times\frac{(\log_2 \alpha+\log_2 \beta)^2-2\log_2 \alpha\log_2 \beta}{\log_2 \alpha\log_2 \beta}$

$=2\times\frac{4^2-2\times(-5)}{-5}=-\frac{52}{5}$

0323 답 ②

진수의 조건에서 $x-1>0$, $y>0$

$\therefore x>1$, $y>0$ ····· ㉠

$\log_2(x-1)-\log_2 y=2$에서

$\log_2(x-1)=\log_2 y+2$, $\log_2(x-1)=\log_2 y+\log_2 4$

$\log_2(x-1)=\log_2 4y$

$x-1=4y$ $\therefore x=4y+1$ ····· ㉡

㉡을 $2^x-2\times 4^y=24$에 대입하면

$2^{4y+1}-2\times 4^y=24$, $2^{4y}-2^{2y}=12$

$(2^{2y})^2-2^{2y}-12=0$

$2^{2y}=t\,(t>0)$로 놓으면

$t^2-t-12=0$, $(t+3)(t-4)=0$

$\therefore t=4\,(\because t>0)$

$t=2^{2y}$이므로 $4=2^{2y}$

$2^2=2^{2y}$, $2=2y$ $\therefore y=1$

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x=5$

이때 ㉠에 의하여 $\alpha=5$, $\beta=1$이므로

$10\alpha\beta=10\times 5\times 1=50$

0324 답 ⑤

$(\log_2 x)^2-k\times\log_2 x+15=0$에서

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2-kt+15=0$

이 이차방정식의 두 근은 $\log_2\alpha$, $\log_2\beta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=k$, $\log_2\alpha\times\log_2\beta=15$

$\beta=\alpha^3$이므로 $\log_2\alpha+\log_2\alpha^3=k$에서

$k=4\log_2\alpha$ ····· ㉠

$\log_2\alpha\times\log_2\alpha^3=15$에서

$3(\log_2\alpha)^2=15$ $\therefore \log_2\alpha=\sqrt{5}\ (\because \alpha>1)$

$\log_2\alpha=\sqrt{5}$를 ㉠에 대입하면

$k=4\sqrt{5}$

$\therefore \log_2\alpha+k=\sqrt{5}+4\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

0325 답 239

진수의 조건에서 $x>0$, $y>0$ ····· ㉠

두 수 $\log_3 x$, $\log_2 y$는 이차방정식 $t^2-7t+10=0$의 두 근이다.

$t^2-7t+10=0$에서

$(t-2)(t-5)=0$ $\therefore t=2$ 또는 $t=5$

즉, $\log_3 x=2$, $\log_2 y=5$ 또는 $\log_3 x=5$, $\log_2 y=2$이므로

$x=3^2=9$, $y=2^5=32$ 또는 $x=3^5=243$, $y=2^2=4$

이때 ㉠에 의하여 $x=9$, $y=32$ 또는 $x=243$, $y=4$

따라서 $\alpha>\beta$에서 $\alpha=243$, $\beta=4$이므로

$\alpha-\beta=243-4=239$

0326 답 ⑤

$\log_3 x^2+\log_3 y^2=\log_3(x+y+8)^2$에서

$\log_3 x^2y^2=\log_3(x+y+8)^2$

밑이 같으므로

$x^2y^2=(x+y+8)^2$

이때 x, y는 양의 정수이므로

$xy=x+y+8$ $\therefore (x-1)(y-1)=9$

(i) $x-1=1$, $y-1=9$일 때,

$x=2$, $y=10$이므로 $2x+y=14$

(ii) $x-1=3$, $y-1=3$일 때,

$x=4$, $y=4$이므로 $2x+y=12$

(iii) $x-1=9$, $y-1=1$일 때,

$x=10$, $y=2$이므로 $2x+y=22$

(i), (ii), (iii)에서 $2x+y$의 최댓값은 22이다.

0327 답 $k>8$

$(\log_2 x)^2-(k-2)\log_2 x+k+1=0$ ····· ㉠

㉠에서 $\log_2 x=t$라 하면

$t^2-(k-2)t+k+1=0$ ····· ㉡ ····· ⓘ

방정식 ㉠의 서로 다른 두 근이 모두 1보다 크려면 이차방정식 ㉡의 서로 다른 두 근이 모두 0보다 커야 한다. ····· ⓘⓘ

$f(t)=t^2-(k-2)t+k+1$이라 하자.

(i) 이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면

$D=(k-2)^2-4(k+1)>0$

$k^2-8k>0$, $k(k-8)>0$

$\therefore k<0$ 또는 $k>8$

(ii) 함수 $y=f(t)$의 그래프의 축의 방정식이 $t=\dfrac{k-2}{2}$이고

$\dfrac{k-2}{2}>0$이어야 하므로 $k>2$

(iii) $f(0)>0$이어야 하므로

$k+1>0$ $\therefore k>-1$

(i), (ii), (iii)에서

$k>8$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $\log_2 x=t$로 놓고 방정식 간단히 나타내기	20 %
ⓘⓘ 서로 다른 두 실근을 가지는 조건 파악하기	30 %
ⓘⓘⓘ k의 값의 범위 구하기	50 %

0328 답 ①

두 곡선 $y=\log_a(x+3)$, $y=\log_a(-x+3)$이 만나는 점 A의 x좌표는 $\log_a(x+3)=\log_a(-x+3)$에서 밑이 같으므로

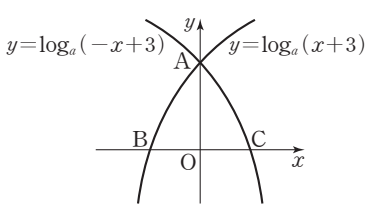
$x+3=-x+3$

$\therefore x=0$

$y=\log_a(x+3)$에 $x=0$을 대입하면

$y=\log_a 3$

$\therefore$ A$(0, \log_a 3)$



곡선 $y=\log_a(x+3)$이 x축과 만나는 점 B의 x좌표는

$0=\log_a(x+3)$에서

$x+3=1$ $\therefore x=-2$ $\therefore$ B$(-2, 0)$

곡선 $y=\log_a(-x+3)$이 x축과 만나는 점 C의 x좌표는

$0=\log_a(-x+3)$에서

$-x+3=1$ $\therefore x=2$ $\therefore$ C$(2, 0)$

삼각형 ABC가 정삼각형이고 $\overline{BC}=2-(-2)=4$이므로

$\overline{OA}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 4=2\sqrt{3}$

즉, $\log_a 3=2\sqrt{3}$

$a^{2\sqrt{3}}=3 \quad \therefore a=3^{\frac{1}{2\sqrt{3}}}=3^{\frac{\sqrt{3}}{6}}$

0329 답 ⑤

진수의 조건에서 $x+5>0$, $-x>0$

$\therefore -5<x<0$ ····· ㉠

$y=-\log_n(-x)+1$에서

$y=\log_n\left(-\frac{1}{x}\right)+\log_n n=\log_n\left(-\frac{n}{x}\right)$

두 곡선 $y=\log_n(x+5)$, $y=-\log_n(-x)+1$이 만나는 점의 x좌표는 $\log_n(x+5)=\log_n\left(-\frac{n}{x}\right)$에서 밑이 같으므로

$x+5=-\frac{n}{x} \quad \therefore x^2+5x+n=0$ ····· ㉡

따라서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 이차방정식 ㉡이 ㉠의 범위에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 ㉡의 서로 다른 두 실근이 모두 -5와 0 사이에 있어야 한다.

$f(x)=x^2+5x+n$이라 하자.

(i) 이차방정식 ㉡의 판별식을 D라 하면

$D=5^2-4n>0 \quad \therefore n<\frac{25}{4}$

(ii) 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-\frac{5}{2}$이므로

$-5<-\frac{5}{2}<0$을 만족시킨다.

(iii) $f(-5)>0$이어야 하므로 $n>0$

(iv) $f(0)>0$이어야 하므로 $n>0$

(i)~(iv)에서 $0<n<\frac{25}{4}$

이를 만족시키는 2 이상인 자연수 n은 2, 3, 4, 5, 6이므로

구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$2+3+4+5+6=20$

0330 답 ①

진수의 조건에서 $2x-8>0$, $x-2>0$

$\therefore x>4$ ····· ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(2x-8)\geq\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$에서 밑이 1보다 작으므로

$2x-8\leq x-2 \quad \therefore x\leq 6$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $4<x\leq 6$

따라서 자연수 x는 5, 6의 2개이다.

0331 답 ⑤

진수의 조건에서 $x+3>0$, $x-3>0$

$\therefore x>3$ ····· ㉠

$\log_2(x+3)+\log_2(x-3)\leq 4$에서

$\log_2(x+3)(x-3)\leq\log_2 2^4$

밑이 1보다 크므로

$(x+3)(x-3)\leq 2^4$, $x^2-9\leq 16$

$x^2-25\leq 0$, $(x+5)(x-5)\leq 0$

$\therefore -5\leq x\leq 5$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $3<x\leq 5$

따라서 정수 x는 4, 5이므로 구하는 모든 정수 x의 값의 합은

$4+5=9$

0332 답 ①

진수의 조건에서 $x+5>0$, $2-x>0$

$\therefore -5<x<2$ ····· ㉠

$\log_3(x+5)-\log_3(2-x)>1$에서

$\log_3\frac{x+5}{2-x}>\log_3 3$

밑이 1보다 크므로 $\frac{x+5}{2-x}>3$

진수의 조건에서 $2-x>0$이므로 $x+5>3(2-x)$

$x+5>6-3x$, $4x>1$

$\therefore x>\frac{1}{4}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $\frac{1}{4}<x<2$

따라서 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=2$이므로

$\alpha+\beta=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$

0333 답 ②

$(\log_{\frac{1}{4}}x)^2+a\log_{\frac{1}{4}}x+b<0$에서 $\log_{\frac{1}{4}}x=t$로 놓으면

$t^2+at+b<0$ ····· ㉠

주어진 부등식의 해가 $\frac{1}{4}<x<64$이므로

$\log_{\frac{1}{4}}64<\log_{\frac{1}{4}}x<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}$

$\therefore -3<t<1$

t^2의 계수가 1이고 해가 $-3<t<1$인 이차부등식은

$(t+3)(t-1)<0 \quad \therefore t^2+2t-3<0$

이 부등식이 ㉠과 일치하므로 $a=2$, $b=-3$

$\therefore a+b=2+(-3)=-1$

0334 답 ②

진수의 조건에서 $\frac{x^2-1}{3}>0$, $x^2>1$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>1$ ····· ㉠

$2<\log_2\frac{x^2-1}{3}<5$에서

$\log_2 2^2<\log_2\frac{x^2-1}{3}<\log_2 2^5$

밑이 1보다 크므로

$4<\frac{x^2-1}{3}<32$, $12<x^2-1<96$

$\therefore 13<x^2<97$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 정수 x는 ± 4, ± 5, ± 6, ± 7, ± 8, ± 9의 12개이다.

0335 답 $\frac{1}{2}<a<16$

이차방정식 $x^2-2x\log_2 a+4+3\log_2 a=0$이 실근을 갖지 않아야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-\log_2 a)^2-(4+3\log_2 a)<0$

$\therefore (\log_2 a)^2-3\log_2 a-4<0$ …… ⓘ

$\log_2 a=t$로 놓으면

$t^2-3t-4<0$, $(t+1)(t-4)<0$

$\therefore -1<t<4$ …… ⓘⓘ

$t=\log_2 a$이므로 $-1<\log_2 a<4$에서

$\log_2 2^{-1}<\log_2 a<\log_2 2^4$

밑이 1보다 크므로

$\frac{1}{2}<a<16$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 주어진 조건을 이용하여 로그부등식 세우기	40 %
ⓘⓘ $\log_2 a=t$로 놓고 t에 대한 부등식 풀기	40 %
ⓘⓘⓘ 양수 a의 값의 범위 구하기	20 %

0336 답 ③

진수의 조건에서 $|x-2|>0$

$\therefore x\neq 2$ …… ㉠

$|x-2|^2=(x-2)^2$이므로

$2\log_2|x-2|\le 2-\log_2\frac{1}{4}$에서

$\log_2|x-2|^2\le\log_2 4-\log_2\frac{1}{4}$

$\log_2(x-2)^2\le\log_2 16$

밑이 1보다 크므로

$(x-2)^2\le 16$, $x^2-4x-12\le 0$

$(x+2)(x-6)\le 0$ $\therefore -2\le x\le 6$

이때 ㉠에 의하여

$-2\le x<2$ 또는 $2<x\le 6$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 6의 8개이다.

0337 답 ④

진수의 조건에서 $x-1>0$, $\frac{1}{2}x+k>0$

$\therefore x>1$ …… ㉠

$x>-2k$에서 $k>0$이므로 $x>$(음수)

$\log_4(x-1)\le\log_4\left(\frac{1}{2}x+k\right)$에서 밑이 1보다 크므로

$x-1\le\frac{1}{2}x+k$, $\frac{1}{2}x\le k+1$

$\therefore x\le 2k+2$ …… ㉡

k는 양수이므로 ㉠, ㉡의 공통부분은 $1<x\le 2k+2$

이 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 4이므로

$5\le 2k+2<6$, $3\le 2k<4$

$\therefore \frac{3}{2}\le k<2$

따라서 양수 k의 최솟값은 $\frac{3}{2}$이다.

0338 답 ④

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$|a-\log_2 x|\le 1$에서

$-1\le a-\log_2 x\le 1$, $-1\le\log_2 x-a\le 1$

$a-1\le\log_2 x\le a+1$, $\log_2 2^{a-1}\le\log_2 x\le\log_2 2^{a+1}$

밑이 1보다 크므로 $2^{a-1}\le x\le 2^{a+1}$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $2^{a-1}\le x\le 2^{a+1}$

x의 최댓값과 최솟값의 차가 27이므로

$2^{a+1}-2^{a-1}=27$, $2^a\left(2-\frac{1}{2}\right)=27$

$\therefore 2^a=27\times\frac{2}{3}=18$

0339 답 ③

진수의 조건에서 $x>0$ …… ㉠

$x^{\log_2 4x}<4x$의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$\log_2 x^{\log_2 4x}<\log_2 4x$

$(\log_2 4+\log_2 x)\log_2 x<\log_2 4+\log_2 x$

$\therefore (\log_2 x)^2+\log_2 x-2<0$

$\log_2 x=t$로 놓으면 $t^2+t-2<0$

$(t+2)(t-1)<0$ $\therefore -2<t<1$

$t=\log_2 x$이므로 $-2<\log_2 x<1$에서

$\log_2 2^{-2}<\log_2 x<\log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{4}<x<2$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $\frac{1}{4}<x<2$

따라서 $\alpha=\frac{1}{4}$, $\beta=2$이므로 $\alpha\beta=\frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2}$

0340 답 ⑤

진수의 조건에서 $x>0$, $\log_4 x>0$, $\log_{81}(\log_4 x)>0$

$\log_4 x>\log_4 1$에서

밑이 1보다 크므로 $x>1$

또 $\log_{81}(\log_4 x)>\log_{81}1$에서

밑이 1보다 크므로 $\log_4 x>1$

$\log_4 x>\log_4 4$

밑이 1보다 크므로 $x>4$

즉, 진수의 조건에서 $x>4$ …… ㉠

$\log_2\{\log_{81}(\log_4 x)\}\le -2$에서

$\log_2\{\log_{81}(\log_4 x)\}\le\log_2\frac{1}{4}$

밑이 1보다 크므로 $\log_{81}(\log_4 x)\le\frac{1}{4}$

$\log_{81}(\log_4 x)\le\log_{81}81^{\frac{1}{4}}$, $\log_{81}(\log_4 x)\le\log_{81}3$

밑이 1보다 크므로 $\log_4 x\le 3$

$\log_4 x\le\log_4 4^3$, $\log_4 x\le\log_4 64$

밑이 1보다 크므로 $x\le 64$ …… ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $4<x\le 64$

따라서 정수 x의 최댓값은 64, 최솟값은 5이므로 구하는 합은

$64+5=69$

0341 답 $-3\sqrt{3}<k<3\sqrt{3}$

$(x-6)^{\log_3(x-6)}>\frac{k^2}{27}$에서

(i) $k=0$일 때,

$(x-6)^{\log_3(x-6)}>0$

이때 $x>6$에서 주어진 부등식은 항상 성립하므로 $k=0$

(ii) $k\neq0$일 때,

$(x-6)^{\log_3(x-6)}>\frac{k^2}{27}$의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3(x-6)^{\log_3(x-6)}>\log_3\frac{k^2}{27}$

$\{\log_3(x-6)\}^2>\log_3k^2-\log_327$

$\therefore \{\log_3(x-6)\}^2-\log_3k^2+3>0$

$\log_3(x-6)=t$로 놓으면

$t^2-\log_3k^2+3>0$ ····· ㉠

$f(t)=t^2-\log_3k^2+3$이라 하면 ㉠이 모든 실수 t에 대하여 성립해야 한다.

$f(t)$의 최솟값이 $-\log_3k^2+3$이므로 $-\log_3k^2+3>0$

$\log_3k^2<3$, $\log_3k^2<\log_33^3$

밑이 1보다 크므로

$k^2<3^3$, $k^2<27$ $\therefore -3\sqrt{3}<k<3\sqrt{3}$ $(k\neq0)$

(i), (ii)에서 $-3\sqrt{3}<k<3\sqrt{3}$

0342 답 ④

(i) $\log_2a-2=0$, 즉 $a=4$일 때,

$1>0$이므로 부등식이 항상 성립한다.

(ii) $\log_2a-2\neq0$일 때,

$(\log_2a-2)x^2-2(\log_2a-2)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\log_2a-2>0$, $D<0$이어야 한다.

$\log_2a-2>0$에서 $\log_2a>\log_22^2$

밑이 1보다 크므로

$a>2^2$ $\therefore a>4$ ····· ㉠

$D<0$에서 $\frac{D}{4}=(\log_2a-2)^2-(\log_2a-2)<0$

$(\log_2a)^2-5\log_2a+6<0$

$(\log_2a-2)(\log_2a-3)<0$

$2<\log_2a<3$

$\log_22^2<\log_2a<\log_22^3$

밑이 1보다 크므로

$2^2<a<2^3$ $\therefore 4<a<8$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $4<a<8$

(i), (ii)에서 $4\leq a<8$이므로 정수 a는 4, 5, 6, 7의 4개이다.

0343 답 ⑤

진수의 조건에서 $x>0$, $x+4>0$

$\therefore x>0$ ····· ㉠

$\log_nx+\log_n(x+4)\leq1$에서

$\log_nx(x+4)\leq\log_nn$

밑이 1보다 크므로

$x(x+4)\leq n$, $x^2+4x\leq n$

이때 $f(x)=x^2+4x$라 하면

$f(1)=1+4=5$

$f(2)=2^2+8=12$

$f(3)=3^2+12=21$

⋮

주어진 부등식과 ㉠을 만족시키는 자연수 x의 개수가 2이므로

$12\leq n<21$

따라서 자연수 n의 개수는

$21-12=9$

0344 답 15

진수의 조건에서 $f(x)>0$, $x-1>0$

$f(x)>0$에서 $0<x<7$

$x-1>0$에서 $x>1$

$\therefore 1<x<7$ ····· ㉠

$\log_3f(x)+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)\leq0$에서

$\log_3f(x)+\log_{3^{-1}}(x-1)\leq0$

$\log_3f(x)-\log_3(x-1)\leq0$

$\therefore \log_3f(x)\leq\log_3(x-1)$

밑이 1보다 크므로 $f(x)\leq x-1$ ····· ㉡

이를 만족시키는 x의 값의 범위는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=x-1$과 만나거나 아래쪽에 있는 부분이므로 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$4\leq x<7$

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은

$4+5+6=15$

0345 답 ③

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2}\geq\left(\frac{3}{2}\right)^{2-5x}$에서

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2+2}\geq\left(\frac{2}{3}\right)^{5x-2}$

밑이 1보다 작으므로 $x^2+2\leq5x-2$

$x^2-5x+4\leq0$, $(x-1)(x-4)\leq0$

$\therefore 1\leq x\leq4$

$\therefore A=\{x\mid1\leq x\leq4\}$

$\log_3x$의 진수의 조건에서 $x>0$

$(\log_3x)^2-2k\log_3x+k^2-4\leq0$에서 $\log_3x=t$로 놓으면

$t^2-2kt+k^2-4\leq0$, $(t-k-2)(t-k+2)\leq0$

$\therefore k-2\leq t\leq k+2$

$t=\log_3x$이므로 $k-2\leq\log_3x\leq k+2$에서

$\log_33^{k-2}\leq\log_3x\leq\log_33^{k+2}$

밑이 1보다 크므로 $3^{k-2}\leq x\leq3^{k+2}$

$\therefore B=\{x\mid3^{k-2}\leq x\leq3^{k+2}\}$

$A\cap B\neq\varnothing$이고 k는 정수이므로

$3^{k-2}\leq4$에서 $k\leq3$

$3^{k+2}\geq1$에서 $k\geq-2$

따라서 $-2\leq k\leq3$이므로 모든 정수 k의 값의 합은

$-2+(-1)+0+1+2+3=3$

0346 답 ⑤

$(g\circ f)(n)=g(f(n))=\log_{\frac{1}{2}}(n^2-10n+26)$

이때 $n^2-10n+26=(n-5)^2+1>0$이므로 진수의 조건을 항상 만족시킨다.

주어진 부등식의 진수의 조건에서 $(g\circ f)(n)+5>0$

$\therefore (g\circ f)(n)>-5$ ····· ㉠

주어진 부등식에서

$\log_2\{(g\circ f)(n)+5\}\le\log_2 2^k$

밑이 1보다 크므로 $(g\circ f)(n)+5\le 2^k$

$\therefore (g\circ f)(n)\le 2^k-5$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $-5<(g\circ f)(n)\le 2^k-5$

$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}<\log_{\frac{1}{2}}(n^2-10n+26)\le\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-5}$

밑이 1보다 작으므로

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-5}\le n^2-10n+26<\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2^k-5}\le (n-5)^2+1<32$

$k=1$일 때, $8\le(n-5)^2+1<32$에서 부등식을 만족시키는 자연수 n은 1, 2, 8, 9, 10의 5개이므로 $h(1)=5$

$k=2$일 때, $2\le(n-5)^2+1<32$에서 부등식을 만족시키는 자연수 n은 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10의 9개이므로 $h(2)=9$

$\therefore h(1)+h(2)=5+9=14$

0347 답 ④

$2^x=t\,(t>0)$로 놓으면 주어진 방정식은

$t^2-2(\log_2 a-1)t+5+\log_2 a=0$ ····· ㉠

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(\log_2 a-1)^2-(5+\log_2 a)>0$

$(\log_2 a)^2-3\log_2 a-4>0$

$(\log_2 a+1)(\log_2 a-4)>0$

$\therefore \log_2 a<-1$ 또는 $\log_2 a>4$

$\log_2 a<\log_2 2^{-1}$ 또는 $\log_2 a>\log_2 2^4$

밑이 1보다 크므로 $a<\frac{1}{2}$ 또는 $a>16$

(ii) ㉠에서 두 근의 합이 0보다 커야 하므로

$2(\log_2 a-1)>0$, $\log_2 a-1>0$

$\log_2 a>1$, $\log_2 a>\log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $a>2$

(iii) ㉠에서 두 근의 곱이 0보다 커야 하므로

$5+\log_2 a>0$, $\log_2 a>-5$

$\log_2 a>\log_2 2^{-5}$, $\log_2 a>\log_2\frac{1}{32}$

밑이 1보다 크므로 $a>\frac{1}{32}$

(i), (ii), (iii)에서 $a>16$

따라서 100 이하의 자연수 a의 개수는

$100-16=84$

0348 답 ③

배양을 시작한 지 2시간 후 배양액의 박테리아 수가 60이므로

$\log(100-60)=\log 80-2k$

$2k=\log 80-\log 40=\log 2$ $\therefore k=\frac{1}{2}\log 2$

배양을 시작한 지 4시간 후 배양액의 박테리아 수를 M이라 하면

$\log(100-M)=\log 80-4k$

$=\log 80-4\times\frac{1}{2}\log 2$

$=\log 80-2\log 2$

$=\log 80-\log 4=\log 20$

즉, $100-M=20$이므로 $M=80$

0349 답 243

유기 화합물의 농도가 9 ppm일 때 유해성 지수는 10이므로

$10=c\log_2 9+m$, $10=c\log_2 3^2+m$

$\therefore m=10-2c\log_2 3$ ····· ㉠

유기 화합물의 농도가 27 ppm일 때 유해성 지수는 12이므로

$12=c\log_2 27+m$, $12=c\log_2 3^3+m$

$\therefore m=12-3c\log_2 3$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$10-2c\log_2 3=12-3c\log_2 3$

$c\log_2 3=2$ $\therefore c=\frac{2}{\log_2 3}$

$c=\frac{2}{\log_2 3}$를 ㉠에 대입하면

$m=10-2\times\frac{2}{\log_2 3}\times\log_2 3=6$

즉, $D=\frac{2}{\log_2 3}\times\log_2 k+6$이므로 유해성 지수가 16일 때의 농도 x는

$16=\frac{2}{\log_2 3}\times\log_2 x+6$, $\frac{\log_2 x}{\log_2 3}=5$

$\log_2 x=\log_2 3^5$ $\therefore x=3^5=243$

0350 답 ①

매년 a %씩 일정하게 증가하므로 초기 매출액을 A라 하면 15년 후의 매출액은

$A\left(1+\frac{a}{100}\right)^{15}=8A$

$\left(1+\frac{a}{100}\right)^{15}=8$

양변에 상용로그를 취하면

$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)^{15}=\log 8$, $15\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=3\log 2$

$15\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=3\times 0.3$, $\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=0.06$

이때 $\log 1.15=0.06$이므로

$\log\left(1+\frac{a}{100}\right)=\log 1.15$

$1+\frac{a}{100}=1.15$, $\frac{a}{100}=0.15$

$\therefore a=15$

0351 답 160

$t=a$일 때, $Q_a=\frac{1}{4}Q_0$이므로 $\log Q_a-\log Q_0=ak$에서

$\log\frac{1}{4}Q_0-\log Q_0=ak$

$\therefore \log\frac{1}{4}=ak$ ····· ㉠

$t=b$일 때, $Q_b=\frac{1}{10}Q_0$이므로 $\log Q_b-\log Q_0=bk$에서

$\log\frac{1}{10}Q_0-\log Q_0=bk$

$\therefore \log\frac{1}{10}=bk$ ····· ㉡

$t=2a+b$일 때, $Q_{2a+b}=\frac{Q_0}{p}$이므로

$\log Q_{2a+b}-\log Q_0=(2a+b)k$에서

$\log\frac{Q_0}{p}-\log Q_0=(2a+b)k$

$\log\frac{1}{p}=2ak+bk$

㉠, ㉡을 대입하면

$\log\frac{1}{p}=2\log\frac{1}{4}+\log\frac{1}{10}$, $\log\frac{1}{p}=\log\frac{1}{160}$

$\frac{1}{p}=\frac{1}{160}$ $\therefore p=160$

0352 답 ②

특허 출원 건수를 44건 이상 달성하려면

$12+8\log_3(2a+1)\geq 44$, $8\log_3(2a+1)\geq 32$

$\log_3(2a+1)\geq 4$, $\log_3(2a+1)\geq\log_3 3^4$

밑이 1보다 크므로

$2a+1\geq 3^4$, $2a\geq 80$ $\therefore a\geq 40$

따라서 최소 금액은 40억 원이다.

0353 답 13세대 후

유전자 소실률이 0.1인 어떤 식물의 유전자 빈도가 처음으로 최초 유전자 빈도의 $\frac{1}{3}$보다 작아지려면

$p_0(1-0.1)^t<\frac{1}{3}p_0$, $(1-0.1)^t<\frac{1}{3}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log(1-0.1)^t<\log\frac{1}{3}$, $t\log\frac{9}{10}<\log 3^{-1}$

$t(2\log 3-1)<-\log 3$, $t(2\times 0.48-1)<-0.48$

$-0.04t<-0.48$ $\therefore t>12$

따라서 13세대 후부터이다.

0354 답 ②

올해 자기 자본을 $a\,(a>0)$라 하면 올해 부채는 ak이고, 5년 후의 자기 자본과 부채는 각각 $a(1+0.4)^5$, $ak(1-0.2)^5$이므로

$a(1+0.4)^5>ak(1-0.2)^5$

$1.4^5>k\times 0.8^5$ $\therefore k<\left(\frac{7}{4}\right)^5$

양변에 상용로그를 취하면

$\log k<\log\left(\frac{7}{4}\right)^5$, $\log k<5(\log 7-\log 4)$

$\log k<5(\log 7-2\log 2)$, $\log k<5(0.85-2\times 0.30)$

$\log k<1.25$

이때 $\log 1.78=0.25$이므로

$1.25=1+0.25=\log 10+\log 1.78=\log 17.8$

즉, $\log k<\log 17.8$이고 밑이 1보다 크므로

$k<17.8$

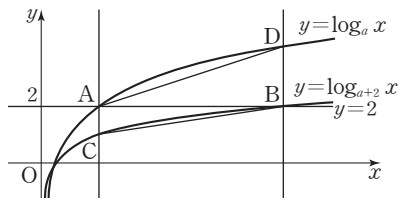
따라서 자연수 k의 최댓값은 17이다.

최고수준 도전 기출 86~87쪽

0355 답 ⑤

전략 주어진 조건을 그래프로 나타내고, 각 점이 곡선 위에 있음을 이용하여 각 점의 좌표를 a로 나타낸다.

두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_{a+2}x$와 직선 $y=2$, 네 점 A, B, C, D를 좌표평면에 나타내면 그림과 같다.



ㄱ. $A(p, 2)$라 하면 점 A가 곡선 $y=\log_a x$ 위에 있으므로

$\log_a p=2$ $\therefore p=a^2$

ㄴ. ㄱ에서 $A(a^2, 2)$이므로

$C(a^2, \log_{a+2}a^2)$

이때 $\overline{AC}=1$이면

$2-\log_{a+2}a^2=1$, $\log_{a+2}a^2=1$

$a^2=a+2$, $a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$ $\therefore a=2\ (\because a>1)$

ㄷ. $B(q, 2)$라 하면 점 B가 곡선 $y=\log_{a+2}x$ 위에 있으므로

$\log_{a+2}q=2$ $\therefore q=(a+2)^2$

즉, $B((a+2)^2, 2)$

$D((a+2)^2, \log_a(a+2)^2)$

ㄱ, ㄴ에서 $A(a^2, 2)$, $C(a^2, \log_{a+2}a^2)$

$$\therefore \frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{DB}}{\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}}=\frac{\overline{DB}}{\overline{AC}}=\frac{\log_a(a+2)^2-2}{2-\log_{a+2}a^2}$$

$$=\frac{2\log_a(a+2)-2}{2-2\log_{a+2}a}=\frac{\log_a(a+2)-1}{1-\log_{a+2}a}$$

$$=\frac{\log_a(a+2)-1}{1-\frac{1}{\log_a(a+2)}}$$

$$=\frac{\log_a(a+2)\times\{\log_a(a+2)-1\}}{\log_a(a+2)-1}$$

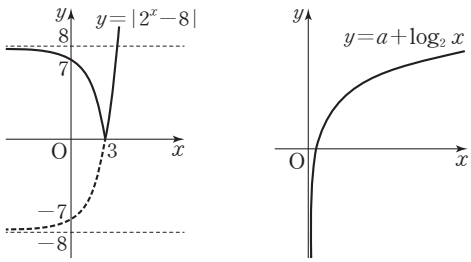
$$=\log_a(a+2)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0356 답 ②

전략 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이어야 함을 이용한다.

두 함수 $y=|2^x-8|$, $y=a+\log_2 x$의 그래프는 그림과 같다.



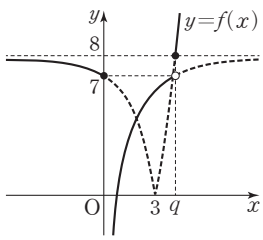
함수 $y=|2^x-8|$의 치역은 $\{y|y\geq 0\}$이고, 함수 $y=a+\log_2 x$의 치역은 실수 전체의 집합이므로 함수 $f(x)$의 치역이 실수 전체의 집합이 되려면 $p\leq 0$이어야 한다. ····· ㉠

또 함수 $y=a+\log_2 x$의 정의역은 $\{x|x>0\}$이고, 함수 $y=|2^x-8|$의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 함수 $f(x)$의 정의역이 실수 전체의 집합이 되려면 $p\geq 0$이어야 한다. ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $p=0$

$x\leq 0$일 때 $y=|2^x-8|$에서 $7\leq y<8$이고, 함수 $f(x)$가 일대일대응이어야 하므로 $x>0$일 때 $y<7$ 또는 $y\geq 8$이어야 한다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



즉, $0<x<q$일 때 $y<7$이고, $x\geq q$일 때 $y\geq 8$이므로

$a+\log_2 q=7$, $|2^q-8|=8$

$|2^q-8|=8$에서

$2^q-8=-8$ 또는 $2^q-8=8$

$2^q=0$ 또는 $2^q=16$ $\therefore q=4$ ($\because 2^q\neq 0$)

$q=4$를 $a+\log_2 q=7$에 대입하면

$a+\log_2 4=7$ $\therefore a=5$

따라서 $0<x<4$일 때 $f(x)=5+\log_2 x$이므로

$f(q-2)=f(2)=5+\log_2 2=6$

0357 답 ③

전략 직선 l_n이 x축, y축과 만나는 점의 좌표를 구한 후, 상용로그를 이용하여 자연수 n의 최솟값을 구한다.

직선 l_n이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하자.

점 A가 직선 l_n 위에 있으므로

$x=3\left(\frac{3}{4}\right)^n$ $\therefore \mathrm{A}\left(3\left(\frac{3}{4}\right)^n, 0\right)$

점 B가 직선 l_n 위에 있으므로

$y=4\left(\frac{3}{4}\right)^n$ $\therefore \mathrm{B}\left(0, 4\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

직선 l_n과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\times 3\left(\frac{3}{4}\right)^n\times 4\left(\frac{3}{4}\right)^n=6\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{1}{10}$ 이하가 되어야 하므로

$6\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}\leq\frac{1}{10}$

양변에 상용로그를 취하면

$\log 6\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}\leq\log\frac{1}{10}$, $\log 6+\log\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}\leq\log 10^{-1}$

$(\log 2+\log 3)+2n(\log 3-\log 2^2)\leq -1$

$2n(\log 3-2\log 2)\leq -1-(\log 2+\log 3)$

$2n(0.48-2\times 0.30)\leq -1-(0.30+0.48)$

$-0.24n\leq -1.78$ $\therefore n\geq\frac{1.78}{0.24}=7.4\cdots$

따라서 자연수 n의 최솟값은 8이다.

0358 답 40

전략 두 점 A, B의 x좌표 사이의 관계식을 구한다.

두 곡선 $y=\log_2(x+5a)$, $y=-\log_2(-x)$가 만나는 점의 x좌표는 $\log_2(x+5a)=-\log_2(-x)$에서

$\log_2(x+5a)=\log_2\left(-\frac{1}{x}\right)$

밑이 같으므로 $x+5a=-\frac{1}{x}$

$\therefore x^2+5ax+1=0$ ····· ㉠

$\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ $(x_1<x_2)$라 하면 두 점 A, B의 x좌표 x_1, x_2는 이차방정식 ㉠의 서로 다른 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=-5a$, $x_1x_2=1$

두 점 A, B가 곡선 $y=-\log_2(-x)$ 위에 있으므로

$y_1=-\log_2(-x_1)$, $y_2=-\log_2(-x_2)$

$\therefore y_1+y_2=-\log_2(-x_1)-\log_2(-x_2)$

$=-\log_2 x_1x_2=-\log_2 1=0$

선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ $\therefore \left(-\frac{5}{2}a, 0\right)$

이 점이 직선 $4x-3y+5=0$ 위에 있으므로

$-10a+5=0$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$x^2+\frac{5}{2}x+1=0$, $2x^2+5x+2=0$

$(2x+1)(x+2)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=-\frac{1}{2}$

$y=-\log_2(-x)$에 대입하면

$y=-1$ 또는 $y=1$

즉, $\mathrm{A}(-2, -1)$, $\mathrm{B}\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$이므로

$k=\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}+2\right)^2+(1+1)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$

$\therefore 16k=16\times\frac{5}{2}=40$

0359 답 ④

전략 두 곡선 $y=\log_2(x+2)$, $y=2^x-2$가 서로 역함수 관계임을 이용하여 두 점 A, B 사이의 관계를 파악한다.

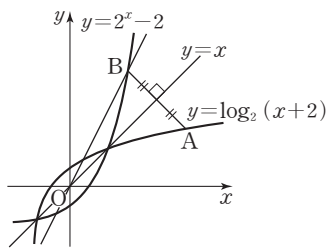
$y=\log_2(x+2)$에서 $x+2=2^y$, $x=2^y-2$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=2^x-2$

두 곡선 $y=\log_2(x+2)$, $y=2^x-2$는 서로 역함수 관계이므로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 $A(a, b)$는 곡선 $y=\log_2(x+2)$ 위의 점이고, 점 $B(c, d)$는 곡선 $y=2^x-2$ 위의 점이다.

또 A'은 점 $A(a, b)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점이므로 곡선 $y=2^x-2$ 위의 점이다.



이때 그림과 같이 직선 OB와 곡선 $y=2^x-2$가 만나는 제1사분면 위의 점은 B뿐이므로 $A'=B$

$\therefore B(b, a)$

점 $A(a, b)$는 곡선 $y=\log_2(x+2)$ 위의 점이므로

$b=\log_2(a+2)$

$\therefore 2^b=a+2$ ····· ㉠

선분 AB의 중점의 좌표가 $\left(\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$이므로

$\frac{a+b}{2}=\frac{9}{2}$ $\therefore a+b=9$

$b=9-a$를 ㉠에 대입하면

$2^{9-a}=a+2$

a는 자연수이므로 a에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하여 구하면

$a=6$ → $1\le a\le 5$일 때 $2^{9-a}\ge 16$, $a+2\le 7$

$b=9-a$이므로 $a\ge 7$일 때 $2^{9-a}\le 4$, $a+2\ge 9$

$b=9-6=3$

$\therefore ab=6\times 3=18$

0360 답 ④

전략 n, k에 대한 부등식을 세운 후 조건을 만족시키는 k의 값의 합을 구한다.

진수의 조건에서

$\sqrt{-n^2+10n+75}>0$, $75-kn>0$

$\sqrt{-n^2+10n+75}>0$에서

$-n^2+10n+75>0$, $n^2-10n-75<0$

$(n+5)(n-15)<0$ $\therefore -5<n<15$

이때 n이 자연수이므로 $1\le n\le 14$ ····· ㉠

$75-kn>0$에서 $n<\frac{75}{k}$ ($\because k>0$)

이때 n이 자연수이므로 $1\le n<\frac{75}{k}$ ····· ㉡

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)>0$에서

$\frac{1}{2}\log_2(-n^2+10n+75)>\frac{1}{2}\log_2(75-kn)$

$\log_2(-n^2+10n+75)>\log_2(75-kn)$

밑이 1보다 크므로 $-n^2+10n+75>75-kn$

$n^2-(k+10)n<0$, $n(n-k-10)<0$

$\therefore 0<n<k+10$

이때 n, k는 자연수이므로

$1\le n\le k+9$ ····· ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 자연수 n의 개수는 12가 되어야 한다.

(i) $1\le k\le 5$일 때,

$k+9\le 14<\frac{75}{k}$이므로 ㉠, ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 n의 값의 범위는 $1\le n\le k+9$

이때 자연수 n의 개수가 12가 되려면 $k+9=12$이어야 하므로 $k=3$

(ii) $k\ge 6$일 때,

$\frac{75}{k}<14\le k+9$이므로 ㉠, ㉡, ㉢을 모두 만족시키는 n의 값의 범위는 $1\le n<\frac{75}{k}$

이때 자연수 n의 개수가 12가 되려면 $12<\frac{75}{k}\le 13$이어야 하므로 $k=6$

(i), (ii)에서 구하는 자연수 k의 값의 합은

$3+6=9$

0361 답 ⑤

전략 x, y가 자연수임을 이용하여 집합 S의 원소 (x, y)를 모두 구하고, 이 원소에 대하여 부등식 $x+y\le k$가 항상 성립하는 정수 k의 최솟값을 찾는다.

$|\log_2 x-2|+\log_2 y\le 1$에서

$|\log_2 x-\log_2 4|+\log_2 y\le 1$

$\left|\log_2\frac{x}{4}\right|+\log_2 y\le 1$, $\log_2 y\le 1-\left|\log_2\frac{x}{4}\right|$

$y\le 2^{1-\left|\log_2\frac{x}{4}\right|}$

x, y는 자연수이므로

→ 자연수 x에 대하여 $\log_2\frac{x}{4}$=(정수)이려면 x는 2의 거듭제곱 꼴이어야 한다.

(i) $x=2^0$, 즉 $x=1$일 때,

$y\le 2^{1-\left|\log_2\frac{1}{4}\right|}$이므로 $y\le 2^{-1}$, $y\le\frac{1}{2}$

이를 만족시키는 자연수 y는 없다.

(ii) $x=2^1$, 즉 $x=2$일 때,

$y\le 2^{1-\left|\log_2\frac{2}{4}\right|}$이므로 $y\le 2^0$, $y\le 1$ $\therefore y=1$

(iii) $x=2^2$, 즉 $x=4$일 때,

$y\le 2^{1-\left|\log_2\frac{4}{4}\right|}$이므로 $y\le 2^1$, $y\le 2$ $\therefore y=1$, $y=2$

(iv) $x=2^3$, 즉 $x=8$일 때,

$y\le 2^{1-\left|\log_2\frac{8}{4}\right|}$이므로 $y\le 2^0$, $y\le 1$ $\therefore y=1$

(v) $x=2^4$, 즉 $x=16$일 때,

$y\le 2^{1-\left|\log_2\frac{16}{4}\right|}$이므로 $y\le 2^{-1}$, $y\le\frac{1}{2}$

이를 만족시키는 자연수 y는 없다.

(vi) $x>16$일 때,

$y\le 2^{1-\left|\log_2\frac{x}{4}\right|}<\frac{1}{2}$이므로 이를 만족시키는 자연수 y는 없다.

(i)~(vi)에서 $S=\{(2, 1), (4, 1), (4, 2), (8, 1)\}$

집합 S에 속하는 임의의 원소 (x, y)에 대하여 부등식 $y\le -x+k$가 항상 성립해야 하므로

$y\le -x+k$에서 $k\ge x+y$

$(2, 1)$일 때, $x+y=3$이므로 $k\ge 3$

$(4, 1)$일 때, $x+y=5$이므로 $k\ge 5$

$(4, 2)$일 때, $x+y=6$이므로 $k\ge 6$

$(8, 1)$일 때, $x+y=9$이므로 $k\ge 9$

즉, $k\ge 9$일 때 부등식 $y\le -x+k$가 항상 성립한다.

따라서 구하는 정수 k의 최솟값은 9이다.

0362 답 7

전략 α를 m, n에 대한 식으로 나타낸 후 $2\le\alpha\le 4$를 만족시키는 $1<m<n<10$인 두 자연수 m, n을 찾는다.

두 함수 $y=m^{x+1}$, $y=n^x$의 그래프가 만나는 점의 x좌표가 α이므로

$m^{\alpha+1}=n^\alpha$

양변에 상용로그를 취하면

$(\alpha+1)\log m=\alpha\log n$

$\alpha(\log n-\log m)=\log m$ $\quad\therefore\ \alpha=\dfrac{\log m}{\log n-\log m}$

$2\le\alpha\le 4$이므로 $2\le\dfrac{\log m}{\log n-\log m}\le 4$

이때 $m<n$에서 $\log n-\log m>0$이므로

$2(\log n-\log m)\le\log m\le 4(\log n-\log m)$

$2(\log n-\log m)\le\log m$에서

$2\log n\le 3\log m$, $\log n^2\le\log m^3$

밑이 1보다 크므로 $n^2\le m^3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\log m\le 4(\log n-\log m)$에서

$4\log n\ge 5\log m$, $\log n^4\ge\log m^5$

밑이 1보다 크므로 $n^4\ge m^5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

두 자연수 m, n에 대하여 $1<m<n<10$이므로 ㉠, ㉡에서

(i) $m=2$일 때,

$n^2\le 8$, $n^4\ge 32$

이를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $m=3$일 때,

$n^2\le 27$, $n^4\ge 243$

$4^2=16$, $4^4=256$, $5^2=25$, $5^4=625$이므로 자연수 n은 4, 5

(iii) $m=4$일 때,

$n^2\le 64$, $n^4\ge 1024$

$6^2=36$, $6^4=1296$, $7^2=49$, $7^4=2401$, $8^2=64$, $8^4=4096$이므로 자연수 n은 6, 7, 8

(iv) $m=5$일 때,

$n^2\le 125$, $n^4\ge 3125$

$8^2=64$, $8^4=4096$, $9^2=81$, $9^4=6561$이므로 자연수 n은 8, 9

(v) $m\ge 6$일 때,

$n^2\le 216$, $n^4\ge 7776$

이를 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(i)~(v)에 의하여 순서쌍 (m, n)은 $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 6)$, $(4, 7)$, $(4, 8)$, $(5, 8)$, $(5, 9)$의 7개이다.

05 삼각함수

난이도별 필수 기출 90~105쪽

0363 답 ④

① $-750^\circ=360^\circ\times(-3)+330^\circ$ ➡ 제4사분면의 각

② $-600^\circ=360^\circ\times(-2)+120^\circ$ ➡ 제2사분면의 각

③ $400^\circ=360^\circ\times 1+40^\circ$ ➡ 제1사분면의 각

④ $920^\circ=360^\circ\times 2+200^\circ$ ➡ 제3사분면의 각

⑤ $1190^\circ=360^\circ\times 3+110^\circ$ ➡ 제2사분면의 각

따라서 각을 나타내는 동경이 제3사분면에 있는 것은 ④이다.

0364 답 ③

① $-690^\circ=360^\circ\times(-2)+30^\circ$

② $-330^\circ=360^\circ\times(-1)+30^\circ$

③ $420^\circ=360^\circ\times 1+60^\circ$

④ $1110^\circ=360^\circ\times 3+30^\circ$

⑤ $1470^\circ=360^\circ\times 4+30^\circ$

따라서 각을 나타내는 동경이 나머지 넷과 다른 것은 ③이다.

0365 답 ⑤

$-140^\circ=360^\circ\times(-1)+220^\circ$이므로 동경 OP가 나타내는 일반각은 $360^\circ\times n+220^\circ$이다. (단, n은 정수이다.)

0366 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{180^\circ}{\pi}=90^\circ$

ㄴ. $-\dfrac{8}{5}\pi=2\pi\times(-1)+\dfrac{2}{5}\pi$이므로 $-\dfrac{8}{5}\pi$는 제1사분면의 각이다.

ㄷ. $\dfrac{13}{6}\pi=2\pi\times 1+\dfrac{\pi}{6}$, $-\dfrac{11}{6}\pi=2\pi\times(-1)+\dfrac{\pi}{6}$이므로 $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{13}{6}\pi$, $-\dfrac{11}{6}\pi$를 나타내는 동경은 모두 일치한다.

ㄹ. $-120^\circ=-120\times\dfrac{\pi}{180}=-\dfrac{2}{3}\pi$이고

$-\dfrac{2}{3}\pi=2\pi\times(-1)+\dfrac{4}{3}\pi$이므로 -120°를 나타내는 동경이 나타내는 일반각은 $2n\pi+\dfrac{4}{3}\pi$이다. (단, n은 정수이다.)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

0367 답 ⑤

원 한 바퀴가 나타내는 각도는 2π이므로

점 한 칸이 나타내는 각도는 $\dfrac{2\pi}{24}=\dfrac{\pi}{12}=15^\circ$

① 동경 OA: $\dfrac{\pi}{12}\times 3=\dfrac{\pi}{4}$

② 동경 OB: $15^\circ\times 7=105^\circ$

③ 동경 OC: $\dfrac{\pi}{12}\times 14=\dfrac{7}{6}\pi$

④ 동경 OD: $15^\circ\times 17=255^\circ$

⑤ 동경 OE: $15^\circ\times 19=285^\circ$

따라서 동경이 나타내는 각의 크기로 옳지 않은 것은 ⑤이다.

0368 답 ⑤

2θ가 제1사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+0^\circ<2\theta<360^\circ\times n+90^\circ$ (단, n은 정수이다.)

$\therefore\ 180^\circ\times n+0^\circ<\theta<180^\circ\times n+45^\circ$

(i) $n=2m$(m은 정수)일 때,

$360^\circ\times m+0^\circ<\theta<360^\circ\times m+45^\circ$

(ii) $n=2m+1$(m은 정수)일 때,

$360^\circ\times m+180^\circ<\theta<360^\circ\times m+225^\circ$

(i), (ii)에서 각 θ를 나타내는 동경이 속하는 모든 영역을 좌표평면 위에 나타낸 것은 ⑤이다.

0369 답 ②

θ가 제3사분면의 각이므로

$360^\circ\times n+180^\circ<\theta<360^\circ\times n+270^\circ$ (단, n은 정수이다.)

$\therefore\ 120^\circ\times n+60^\circ<\dfrac{\theta}{3}<120^\circ\times n+90^\circ$

(i) $n=3m$(m은 정수)일 때,

$360^\circ\times m+60^\circ<\dfrac{\theta}{3}<360^\circ\times m+90^\circ$

따라서 $\dfrac{\theta}{3}$는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3m+1$(m은 정수)일 때,

$360^\circ\times m+180^\circ<\dfrac{\theta}{3}<360^\circ\times m+210^\circ$

따라서 $\dfrac{\theta}{3}$는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3m+2$(m은 정수)일 때,

$360^\circ\times m+300^\circ<\dfrac{\theta}{3}<360^\circ\times m+330^\circ$

따라서 $\dfrac{\theta}{3}$는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii), (iii)에서 각 $\dfrac{\theta}{3}$를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제2사분면이다.

0370 답 $\dfrac{4}{5}\pi$

각 4θ를 나타내는 동경과 각 9θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$9\theta-4\theta=(2n+1)\pi$ (단, n은 정수이다.)

$5\theta=(2n+1)\pi$ $\therefore\ \theta=\dfrac{2n+1}{5}\pi$ ····· ㉠ ····· ⓘ

$0<\theta<\pi$에서 $0<\dfrac{2n+1}{5}\pi<\pi$

$0<2n+1<5,\ -1<2n<4$ $\therefore\ -\dfrac{1}{2}<n<2$

이때 n은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$ ····· ⓘⓘ

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=\dfrac{\pi}{5}$ 또는 $\theta=\dfrac{3}{5}\pi$

따라서 모든 각 θ의 크기의 합은 $\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{3}{5}\pi=\dfrac{4}{5}\pi$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ θ를 정수 n에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘ n의 값 모두 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 모든 각 θ의 크기의 합 구하기	30 %

0371 답 ③

각 $\dfrac{\pi}{3}$를 나타내는 동경과 각 4θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$4\theta-\dfrac{\pi}{3}=2n\pi$ (단, n은 정수이다.)

$4\theta=2n\pi+\dfrac{\pi}{3}$ $\therefore\ \theta=\dfrac{n}{2}\pi+\dfrac{\pi}{12}$ ····· ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\dfrac{n}{2}\pi+\dfrac{\pi}{12}<\pi$

$-\dfrac{\pi}{12}<\dfrac{n}{2}\pi<\dfrac{11}{12}\pi$

$\therefore\ -\dfrac{1}{6}<n<\dfrac{11}{6}$

이때 n은 정수이므로

$n=0$ 또는 $n=1$

이를 ㉠에 대입하면

$\theta=\dfrac{\pi}{12}$ 또는 $\theta=\dfrac{7}{12}\pi$

그런데 $\theta\neq\dfrac{\pi}{12}$이므로 $\theta=\dfrac{7}{12}\pi$

0372 답 ③

각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭이므로

$\theta+6\theta=2n\pi$ (단, n은 정수이다.)

$7\theta=2n\pi$ $\therefore\ \theta=\dfrac{2n}{7}\pi$ ····· ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\dfrac{2n}{7}\pi<\pi$

$\therefore\ 0<n<\dfrac{7}{2}$

이때 n은 정수이므로

$n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$

이를 ㉠에 대입하면

$\theta=\dfrac{2}{7}\pi$ 또는 $\theta=\dfrac{4}{7}\pi$ 또는 $\theta=\dfrac{6}{7}\pi$

따라서 각 θ의 개수는 3이다.

0373 답 ③

각 θ를 나타내는 동경과 각 2θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+2\theta=(2n+1)\pi$ (단, n은 정수이다.)

$3\theta=(2n+1)\pi$ $\therefore\ \theta=\dfrac{2n+1}{3}\pi$ ····· ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\dfrac{2n+1}{3}\pi<\pi$

$0<2n+1<3,\ -1<2n<2$

$\therefore\ -\dfrac{1}{2}<n<1$

이때 n은 정수이므로

$n=0$

이를 ㉠에 대입하면

$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore\ \cos\theta=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

0374 답 ④

각 θ를 나타내는 동경과 각 11θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$11\theta-\theta=360^\circ\times n$ (단, n은 정수이다.)

$10\theta=360^\circ\times n$ $\therefore\ \theta=36^\circ\times n$

$0^\circ<\theta<200^\circ$에서 $0^\circ<36^\circ\times n<200^\circ$

$\therefore\ 0<n<\frac{50}{9}$

이때 n은 정수이므로

$n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$ 또는 $n=4$ 또는 $n=5$

각 θ의 크기의 최댓값은 $n=5$일 때이므로

$36^\circ\times5=180^\circ$

각 θ의 크기의 최솟값은 $n=1$일 때이므로

$36^\circ\times1=36^\circ$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 차는

$180^\circ-36^\circ=144^\circ$

0375 답 ⑤

(i) 각 θ를 나타내는 동경과 각 3θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭이므로

$\theta+3\theta=(2n+1)\pi$ (단, n은 정수이다.)

$4\theta=(2n+1)\pi$

$\therefore\ \theta=\frac{2n+1}{4}\pi$ ····· ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{2n+1}{4}\pi<\pi$

$0<2n+1<4$

$-1<2n<3$

$\therefore\ -\frac{1}{2}<n<\frac{3}{2}$

이때 n은 정수이므로

$n=0$ 또는 $n=1$

이를 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{4}$ 또는 $\theta=\frac{3}{4}\pi$

(ii) 각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\theta+5\theta=2m\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, m은 정수이다.)

$6\theta=2m\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \theta=\frac{m}{3}\pi+\frac{\pi}{12}$ ····· ㉡

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{m}{3}\pi+\frac{\pi}{12}<\pi$

$-\frac{\pi}{12}<\frac{m}{3}\pi<\frac{11}{12}\pi$

$\therefore\ -\frac{1}{4}<m<\frac{11}{4}$

이때 m은 정수이므로

$m=0$ 또는 $m=1$ 또는 $m=2$

이를 ㉡에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{12}$ 또는 $\theta=\frac{5}{12}\pi$ 또는 $\theta=\frac{3}{4}\pi$

(i), (ii)에서 각 θ의 크기는 $\theta=\frac{3}{4}\pi$

0376 답 7π

(i) 두 동경이 일치할 때,

$5\theta-\theta=2n\pi$ (단, n은 정수이다.)

$4\theta=2n\pi$ $\therefore\ \theta=\frac{n}{2}\pi$ ····· ㉠

$0<\theta<2\pi$에서 $0<\frac{n}{2}\pi<2\pi$ $\therefore\ 0<n<4$

이때 n은 정수이므로

$n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$

이를 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{2}$ 또는 $\theta=\pi$ 또는 $\theta=\frac{3}{2}\pi$ ····· ⓘ

(ii) 두 동경이 원점에 대하여 대칭일 때,

$5\theta-\theta=(2m+1)\pi$ (단, m은 정수이다.)

$4\theta=(2m+1)\pi$ $\therefore\ \theta=\frac{2m+1}{4}\pi$ ····· ㉡

$0<\theta<2\pi$에서 $0<\frac{2m+1}{4}\pi<2\pi$

$0<2m+1<8$, $-1<2m<7$ $\therefore\ -\frac{1}{2}<m<\frac{7}{2}$

이때 m은 정수이므로

$m=0$ 또는 $m=1$ 또는 $m=2$ 또는 $m=3$

이를 ㉡에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{4}$ 또는 $\theta=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $\theta=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\theta=\frac{7}{4}\pi$ ····· ⓘⓘ

(i), (ii)에서 모든 각 θ의 크기의 합은

$\left(\frac{\pi}{2}+\pi+\frac{3}{2}\pi\right)+\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\pi+\frac{5}{4}\pi+\frac{7}{4}\pi\right)=7\pi$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 두 동경이 일치할 때, θ의 값 모두 구하기	40 %
ⓘⓘ 두 동경이 원점에 대하여 대칭일 때, θ의 값 모두 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 모든 각 θ의 크기의 합 구하기	20 %

0377 답 ⑤

각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 서로 수직이면 두 동경이 이루는 각의 크기의 차는 $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ 또는 $2n\pi-\frac{\pi}{2}$이므로

$n\pi+\frac{\pi}{2}$ 꼴이다. (단, n은 정수이다.)

$6\theta-\theta=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$, $5\theta=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$

$\therefore\ \theta=\frac{1}{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$ ····· ㉠

$0<\theta<\pi$에서 $0<\frac{1}{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi<\pi$

$0<n+\frac{1}{2}<5$

$\therefore\ -\frac{1}{2}<n<\frac{9}{2}$

이때 n은 정수이므로

$n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$ 또는 $n=4$

이를 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{10}$ 또는 $\theta=\frac{3}{10}\pi$ 또는 $\theta=\frac{5}{10}\pi$ 또는 $\theta=\frac{7}{10}\pi$ 또는 $\theta=\frac{9}{10}\pi$

따라서 모든 각 θ의 크기의 합은

$\frac{\pi}{10}+\frac{3}{10}\pi+\frac{5}{10}\pi+\frac{7}{10}\pi+\frac{9}{10}\pi=\frac{5}{2}\pi$

0378 답 ②

부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 호의 길이가 2π, 넓이가 $\frac{5}{2}\pi$이므로

$\frac{1}{2}\times r\times 2\pi=\frac{5}{2}\pi \quad \therefore r=\frac{5}{2}$

또 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 호의 길이가 2π이므로

$\frac{5}{2}\times\theta=2\pi \quad \therefore \theta=\frac{4}{5}\pi$

0379 답 2

반지름의 길이가 r인 원의 넓이는

πr^2 …… ⓘ

반지름의 길이가 $2r$이고 호의 길이가 2π인 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2r\times 2\pi=2\pi r$ …… ⓘⓘ

원의 넓이와 부채꼴의 넓이가 같으므로

$\pi r^2=2\pi r,\ r^2-2r=0$

$r(r-2)=0$

$\therefore r=2\ (\because r>0)$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 원의 넓이 구하기	20 %
ⓘⓘ 부채꼴의 넓이 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ r의 값 구하기	30 %

0380 답 ③

둘레의 길이가 12이고 넓이가 8인 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면

$2r+l=12$ …… ㉠

$\frac{1}{2}rl=8$ …… ㉡

㉠에서 $l=12-2r$를 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{2}r(12-2r)=8,\ 12r-2r^2=16$

$r^2-6r+8=0,\ (r-2)(r-4)=0$

$\therefore r=2$ 또는 $r=4$

따라서 두 부채꼴의 반지름의 길이의 합은

$2+4=6$

0381 답 ④

색칠한 도형의 둘레의 길이가 24이므로

$4\theta+10\theta+(10-4)\times 2=24$

$14\theta=12$

$\therefore \theta=\frac{6}{7}$

0382 답 ⑤

구하는 각의 크기를 θ라 하면 반지름의 길이가 r이고 사람이 걸은 거리는 $6r$이므로

$r\theta=6r$

$\therefore \theta=6=6\times\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{1080^\circ}{\pi}$

0383 답 ③

두 부채꼴의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면

호의 길이는 각각 $2r_1$, $2r_2$이므로

$2r_1+2r_2=14,\ \frac{1}{2}\times r_1\times 2r_1+\frac{1}{2}\times r_2\times 2r_2=35$

$\therefore r_1+r_2=7,\ r_1^2+r_2^2=35$

따라서 두 부채꼴의 반지름의 길이의 곱은

$r_1r_2=\frac{1}{2}\{(r_1+r_2)^2-(r_1^2+r_2^2)\}=\frac{1}{2}\times(7^2-35)=7$

0384 답 ⑤

색칠한 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 중심각의 크기가

$2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi$이고 넓이가 30π이므로

$\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{5}{3}\pi=30\pi,\ \frac{5}{6}\pi r^2=30\pi$

$r^2=36 \quad \therefore r=6\ (\because r>0)$

따라서 색칠한 부채꼴의 둘레의 길이는

$6\times\frac{5}{3}\pi+2\times 6=10\pi+12$

0385 답 ③

반지름의 길이를 20 % 늘인 부채꼴의 중심각의 크기를 θ'이라 하면

두 부채꼴의 넓이는 같으므로

$\frac{1}{2}\times r^2\times\theta=\frac{1}{2}\times(1.2r)^2\times\theta'$

$\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}\times\frac{36}{25}r^2\times\theta' \quad \therefore \theta'=\frac{25}{36}\theta$

따라서 중심각의 크기는 처음의 $\frac{25}{36}$배이다.

0386 답 ④

부채꼴 OAB의 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$이고 넓이가 4π이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}^2\times\frac{\pi}{2}=4\pi,\ \overline{\mathrm{OA}}^2=16 \quad \therefore \overline{\mathrm{OA}}=4\ (\because \overline{\mathrm{OA}}>0)$

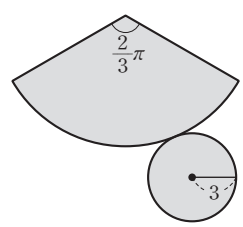
따라서 $\overline{\mathrm{OA_6}}=4\times\frac{6}{20}=\frac{6}{5}$, $\overline{\mathrm{OA_{19}}}=4\times\frac{19}{20}=\frac{19}{5}$이므로

호 $\mathrm{A_6B_6}$의 길이와 호 $\mathrm{A_{19}B_{19}}$의 길이의 합은

$\frac{6}{5}\times\frac{\pi}{2}+\frac{19}{5}\times\frac{\pi}{2}=\frac{5}{2}\pi$

0387 답 36π

원뿔의 전개도는 그림과 같다.



옆면인 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로 호의 길이는

$2\pi\times 3=6\pi$ …… ⓘ

옆면인 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 부채꼴의 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$이므로 $r\times\frac{2}{3}\pi=6\pi \quad \therefore r=9$ …… ⓘⓘ

즉, 옆면인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 9\times 6\pi=27\pi$

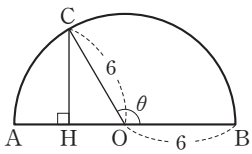
또 밑면인 원의 넓이는 $\pi\times 3^2=9\pi$

따라서 원뿔의 겉넓이는 $27\pi+9\pi=36\pi$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 옆면인 부채꼴의 호의 길이 구하기	40 %
ⓘⓘ 옆면인 부채꼴의 반지름의 길이 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 원뿔의 겉넓이 구하기	20 %

0388 답 27

그림과 같이 반원의 중심을 O라 하면 반원의 지름인 선분 AB의 길이가 12이므로



$\overline{OB}=\overline{OC}=6$

이때 $\angle COB=\theta$라 하면 호 BC의 길이가 4π이므로

$6\times\theta=4\pi \quad \therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$

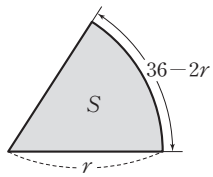
$\angle AOC=\pi-\theta=\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$이므로 직각삼각형 CHO에서

$\overline{CH}=6\times\sin\frac{\pi}{3}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

$\therefore \overline{CH}^2=(3\sqrt{3})^2=27$

0389 답 ②

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면 $l=36-2r$이므로



$S=\frac{1}{2}r(36-2r)$

$=-r^2+18r=-(r-9)^2+81$

즉, S는 $r=9$일 때, 최댓값이 81이다.

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면

$\frac{1}{2}\times9^2\times\theta=81 \quad \therefore \theta=2$

따라서 중심각의 크기는 2이다.

0390 답 ②

두 부채꼴 A, B의 반지름의 길이의 비가 3 : 4이므로 반지름의 길이를 각각 $3r$, $4r(r>0)$라 하면 넓이의 비는

$\frac{1}{2}\times(3r)^2\times\theta_A:\frac{1}{2}\times(4r)^2\times\theta_B=9:8$

$\frac{9}{2}r^2\theta_A:8r^2\theta_B=9:8,\ 36r^2\theta_A=72r^2\theta_B$

$\theta_A=2\theta_B \quad \therefore \frac{\theta_B}{\theta_A}=\frac{1}{2}$

0391 답 ②

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 부채꼴의 넓이가 16이므로

$\frac{1}{2}rl=16 \quad \therefore l=\frac{32}{r}$

부채꼴의 둘레의 길이는

$l+2r=\frac{32}{r}+2r$

이때 $\frac{32}{r}>0$, $2r>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\frac{32}{r}+2r\geq2\sqrt{\frac{32}{r}\times2r}=16$ (단, 등호는 $r=4$일 때 성립한다.)

따라서 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 16이다.

0392 답 $\frac{1}{2}$

$\overline{AB}=l$, $\overline{BO}=r$라 하면 원뿔의 전개도에서 옆면인 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이 $2\pi r$와 같으므로 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times l\times2\pi r=\pi rl$ …… ⓘ

이때 옆면의 넓이는 밑면의 넓이의 2배이므로

$\pi rl=2\times\pi r^2 \quad \therefore l=2r$ …… ⓘⓘ

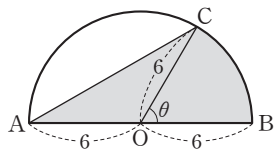
삼각형 ABO는 직각삼각형이므로

$\cos\theta=\frac{\overline{BO}}{\overline{AB}}=\frac{r}{2r}=\frac{1}{2}$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 옆면인 부채꼴의 넓이 구하기	30 %
ⓘⓘ 선분 AB의 길이를 밑면의 반지름의 길이로 나타내기	40 %
ⓘⓘⓘ $\cos\theta$의 값 구하기	30 %

0393 답 ③

그림과 같이 반원의 중심을 O라 하면 반원의 지름인 선분 AB의 길이가 12이므로



$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=6$

이때 $\angle COB=\theta$라 하면 호 CB의 길이가 2π이므로

$6\times\theta=2\pi$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$

부채꼴 OBC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times6^2\times\frac{\pi}{3}=6\pi$

점 C에서 선분 OB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CH}=6\sin\frac{\pi}{3}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$

즉, 삼각형 AOC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{CH}=\frac{1}{2}\times6\times3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

따라서 구하는 넓이는

$6\pi+9\sqrt{3}$

0394 답 ⑤

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r라 하면 호의 길이가 6π, 넓이가 72π이므로

$\frac{1}{2}\times r\times6\pi=72\pi$

$\therefore r=24$

부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 θ라 하면 호의 길이가 6π이므로

$24\times\theta=6\pi$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}$

직각삼각형 OBC에서

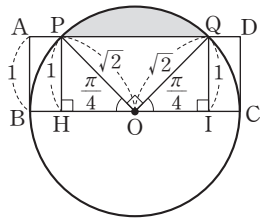
$\overline{OC}=\overline{OB}\cos\frac{\pi}{4}=24\times\frac{\sqrt{2}}{2}=12\sqrt{2}$

따라서 호 CD의 길이는

$12\sqrt{2}\times\frac{\pi}{4}=3\sqrt{2}\pi$

0395 답 ①

그림과 같이 원의 중심을 O, 두 점 P, Q에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면



$\overline{PH}=\overline{QI}=1$, $\overline{PO}=\overline{QO}=\sqrt{2}$

$\therefore \angle POH=\angle QOI=\frac{\pi}{4}$

$\therefore \angle POQ=\pi-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$

따라서 색칠한 부분의 넓이는 부채꼴 POQ의 넓이에서 직각삼각형 POQ의 넓이를 뺀 것이므로

$\left\{\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\frac{\pi}{2}\right\}-\left\{\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\right\}=\frac{\pi}{2}-1$

0396 답 $\frac{\pi}{5}$

$\overline{OA}=\overline{OB}=2r(r>0)$라 하자.

세 호 OA, AB, OB로 둘러싸인 도형의 둘레의 길이는

$\left(\frac{1}{2}\times2\pi r\right)\times2+(2r\times\theta)=2\pi r+2r\theta$

즉, $2\pi r+2r\theta=12\pi$이므로

$r(\pi+\theta)=6\pi$

$\therefore r=\frac{6\pi}{\pi+\theta}$ ····· ㉠

세 호 OA, AB, OB로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\left(\frac{1}{2}\times\pi r^2\right)\times2+\left\{\frac{1}{2}\times(2r)^2\times\theta\right\}=\pi r^2+2r^2\theta$

즉, $\pi r^2+2r^2\theta=35\pi$이므로

$r^2(\pi+2\theta)=35\pi$

$\therefore r^2=\frac{35\pi}{\pi+2\theta}$

㉠을 대입하면 $\left(\frac{6\pi}{\pi+\theta}\right)^2=\frac{35\pi}{\pi+2\theta}$

$36\pi(\pi+2\theta)=35(\pi^2+2\pi\theta+\theta^2)$

$36\pi^2+72\pi\theta=35\pi^2+70\pi\theta+35\theta^2$

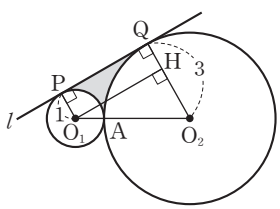
$35\theta^2-2\pi\theta-\pi^2=0$, $(7\theta+\pi)(5\theta-\pi)=0$

$\therefore 5\theta=\pi$ ($\because \theta>0$)

$\therefore \theta=\frac{\pi}{5}$

0397 답 $6\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$

그림과 같이 점 O_1에서 선분 QO_2에 내린 수선의 발을 H라 하자.



직각삼각형 O_1O_2H에서

$\overline{O_1O_2}=\overline{O_1A}+\overline{AO_2}=1+3=4$,

$\overline{O_2H}=\overline{O_2Q}-\overline{HQ}=\overline{O_2Q}-\overline{O_1P}$

$=3-1=2$

이므로

$\overline{O_1H}=\sqrt{\overline{O_1O_2}^2-\overline{O_2H}^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$

$\therefore \angle HO_1O_2=\frac{\pi}{6}$, $\angle HO_2O_1=\frac{\pi}{3}$

즉, 부채꼴 O_1PA의 중심각의 크기는 $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2}{3}\pi$,

부채꼴 O_2QA의 중심각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

직선 l과 두 원으로 둘러싸인 도형의 둘레의 길이는

$2\sqrt{3}+\left(1\times\frac{2}{3}\pi\right)+\left(3\times\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}+\frac{5}{3}\pi$

직선 l과 두 원으로 둘러싸인 도형의 넓이는 사다리꼴 PO_1O_2Q에서 두 부채꼴의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\frac{1}{2}\times(1+3)\times2\sqrt{3}-\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{\pi}{3}\right)$

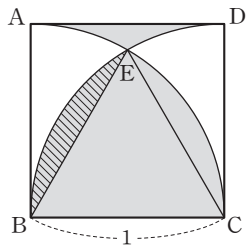
$=4\sqrt{3}-\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3}{2}\pi\right)=4\sqrt{3}-\frac{11}{6}\pi$

따라서 구하는 합은

$\left(2\sqrt{3}+\frac{5}{3}\pi\right)+\left(4\sqrt{3}-\frac{11}{6}\pi\right)=6\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}$

0398 답 $1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$

그림과 같이 두 호 AC, BD의 교점을 E라 하면



$\overline{BE}=\overline{CE}=\overline{BC}=1$

즉, 삼각형 EBC는 정삼각형이므로

$\angle EBC=\angle ECB=\frac{\pi}{3}$,

$\angle ABE=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

빗금 친 부분의 넓이는 부채꼴 CBE의 넓이에서 정삼각형 EBC의 넓이를 뺀 것과 같으므로

(빗금 친 부분의 넓이)$=\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{3}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times1^2\right)$

$=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$

따라서 색칠하지 않은 부분의 넓이는 부채꼴 BAE의 넓이에서 빗금 친 부분의 넓이를 뺀 후, 2배 한 것과 같으므로

(색칠하지 않은 부분의 넓이)

$=2\left\{\left(\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{6}\right)-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\}$

$=2\left(\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ (색칠한 부분의 넓이)

=(정사각형 ABCD의 넓이)−(색칠하지 않은 부분의 넓이)

$=1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}$

✓ 중3 다시보기

한 변의 길이가 a인 정삼각형의

(1) 높이: $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ (2) 넓이: $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

0399 답 ③

둘레의 길이가 $2n$인 부채꼴의 반지름의 길이를 r, 넓이를 S라 하면 부채꼴의 호의 길이는 $2n-2r$이므로

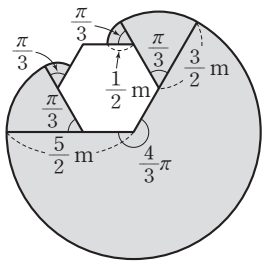
$S=\frac{1}{2}\times r\times(2n-2r)=nr-r^2=-\left(r-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{n^2}{4}$

이때 S는 $r=\frac{n}{2}$일 때 최댓값이 $\frac{n^2}{4}$이므로 $f(n)=\frac{n^2}{4}$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=\frac{1^2}{4}+\frac{2^2}{4}+\frac{3^2}{4}+\frac{4^2}{4}=\frac{15}{2}$

0400 답 $5\pi\ \mathrm{m}^2$

정육각형의 한 내각의 크기는 $\frac{2}{3}\pi$이므로 염소가 최대로 움직일 수 있는 영역의 넓이는 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같다.



즉, 반지름의 길이가 $\frac{5}{2}$ m이고 중심각의 크기가 $\frac{4}{3}\pi$인 부채꼴 1개, 반지름의 길이가 $\frac{3}{2}$ m이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 2개, 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$ m이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$인 부채꼴 2개의 넓이의 합과 같으므로

$$\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}\right)^2\times\frac{4}{3}\pi\right\}+2\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}\right)^2\times\frac{\pi}{3}\right\}+2\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$=\frac{25}{6}\pi+\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{12}$$

$$=5\pi\,(\mathrm{m}^2)$$

✓ 중1 다시보기

(1) 정n각형의 한 내각의 크기

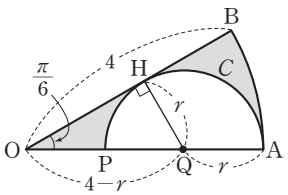
➡ $\frac{(\text{정}n\text{각형의 내각의 크기의 합})}{n}=\frac{180^\circ\times(n-2)}{n}$

(2) 정n각형의 한 외각의 크기

➡ $\frac{(\text{정}n\text{각형의 외각의 크기의 합})}{n}=\frac{360^\circ}{n}$

0401 답 ④

그림과 같이 반원 C의 중심을 Q, 선분 OB와 반원 C의 접점을 H, 반원 C의 반지름의 길이를 r라 하자.



$\overline{OA}=4$, $\overline{QH}=\overline{QA}=r$이므로

$\overline{OQ}=4-r$

이때 $\angle OHQ=\frac{\pi}{2}$이므로 직각삼각형 QOH에서

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\overline{QH}}{\overline{OQ}}=\frac{r}{4-r}$$

$$\frac{1}{2}=\frac{r}{4-r}$$

$$2r=4-r$$

$$3r=4$$

$$\therefore r=\frac{4}{3}$$

부채꼴 OAB의 넓이 S_1은

$$S_1=\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{\pi}{6}=\frac{4}{3}\pi$$

반지름의 길이가 $\frac{4}{3}$인 반원 C의 넓이 S_2는

$$S_2=\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{8}{9}\pi$$

$$\therefore S_1-S_2=\frac{4}{3}\pi-\frac{8}{9}\pi=\frac{4}{9}\pi$$

0402 답 ③

$\overline{OP}=\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$이므로

$\sin\theta=\frac{-8}{10}=-\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, $\tan\theta=\frac{-8}{6}=-\frac{4}{3}$

$$\therefore 5\sin\theta+5\cos\theta-3\tan\theta$$

$$=5\times\left(-\frac{4}{5}\right)+5\times\frac{3}{5}-3\times\left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$=-4+3+4=3$$

0403 답 ⑤

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$일 때, θ는 제3사분면의 각이므로

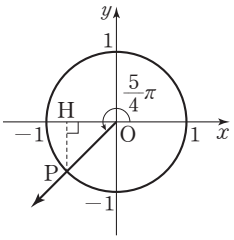
$\tan\theta>0$, $\cos\theta<0$이고 $\cos\theta-\tan\theta<0$

$$\therefore \sqrt{\tan^2\theta}+\sqrt{(\cos\theta-\tan\theta)^2}=\tan\theta-(\cos\theta-\tan\theta)$$

$$=2\tan\theta-\cos\theta$$

0404 답 ①

그림과 같이 $\frac{5}{4}\pi$를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{OP}=1$, $\angle POH=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\overline{OH}=\overline{OP}\times\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\overline{PH}=\overline{OP}\times\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이므로

$\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan\theta=1$

$$\therefore \sqrt{2}\sin\theta+2\cos\theta+\tan\theta$$

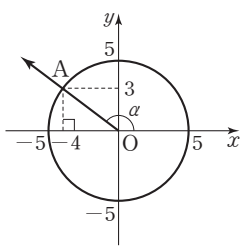
$$=\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+1$$

$$=-1-\sqrt{2}+1=-\sqrt{2}$$

0405 답 ①

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원이 두 동경 OP, OQ와 만나는 점을 각각 A, B라 하자.

점 P가 제2사분면 위에 있고



$\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\sqrt{5^2-3^2}=4$이므로 점 A의 좌표는

$(-4,\ 3)$

삼각함수의 정의에 의하여

$\cos\alpha=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5}$

점 Q가 점 P와 원점에 대하여 대칭이므로 점 B의 좌표는

$(4,\ -3)$

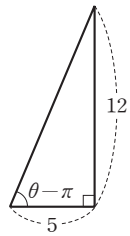
삼각함수의 정의에 의하여

$\tan\beta=\frac{-3}{4}=-\frac{3}{4}$

$$\therefore 5(\cos\alpha\times\tan\beta)=5\times\left\{\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left(-\frac{3}{4}\right)\right\}=3$$

0406 답 ①

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\tan\theta=\frac{12}{5}$이므로 그림과 같은 직각삼각형을 생각할 수 있다.



이 직각삼각형의 빗변의 길이는 $\sqrt{5^2+12^2}=13$이므로

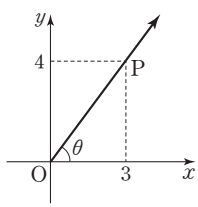
$\sin\theta=-\frac{12}{13}$, $\cos\theta=-\frac{5}{13}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{12}{13}+\left(-\frac{5}{13}\right)=-\frac{17}{13}$

0407 답 −1

$4x-3y=0$에서 $y=\frac{4}{3}x$ $\therefore \tan\theta=\frac{4}{3}$ …… ⓘ

$0<\theta<\pi$에서 점 P의 좌표를 $(3, 4)$라 하고 동경 OP를 좌표평면 위에 나타내면 그림과 같다.



따라서 $\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로

$\sin\theta=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{3}{5}$ …… ⓘⓘ

$\therefore \cos\theta-2\sin\theta=\frac{3}{5}-2\times\frac{4}{5}=-1$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\tan\theta$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값 각각 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ $\cos\theta-2\sin\theta$의 값 구하기	20 %

0408 답 ⑤

(ⅰ) $\sin\theta\tan\theta>0$일 때,

$\sin\theta>0$, $\tan\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\tan\theta<0$

따라서 θ는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ⅱ) $\cos\theta\tan\theta<0$일 때,

$\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$

따라서 θ는 제4사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 θ는 제4사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$, $\tan\theta<0$

ㄱ. $\sin\theta+\tan\theta<0$

ㄴ. $\cos\theta-\tan\theta>0$

ㄷ. $\cos\theta-\sin\theta>0$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0409 답 ⑤

$\cos\theta<0$, $\frac{\tan\theta}{\cos\theta}<0$에서

$\tan\theta>0$

따라서 $\tan\theta>0$, $\cos\theta<0$를 동시에 만족시키는 θ는 제3사분면의 각이므로

$\sin\theta<0$, $\cos\theta<0$

$\therefore |\sin\theta|-\sqrt{\cos^2\theta}+\sin\theta+\cos\theta$

$=-\sin\theta-(-\cos\theta)+\sin\theta+\cos\theta$

$=2\cos\theta$

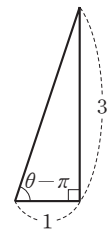
0410 답 ①

$\tan\theta-\frac{6}{\tan\theta}=1$의 양변에 $\tan\theta$를 곱하여 정리하면

$\tan^2\theta-\tan\theta-6=0$, $(\tan\theta+2)(\tan\theta-3)=0$

$\therefore \tan\theta=3\left(\because \pi<\theta<\frac{3}{2}\pi\right)$

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$에서 $\tan\theta=3$이므로 그림과 같은 직각삼각형을 생각할 수 있다.



이 직각삼각형의 빗변의 길이는 $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$이므로

$\sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$,

$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}+\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

0411 답 ②

$\sin\theta\cos\theta\neq0$이고 $\frac{\sqrt{\sin\theta}}{\sqrt{\cos\theta}}=-\sqrt{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$

따라서 θ는 제2사분면의 각이다.

✓ 공통수학1 다시보기

0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$ ➡ $a<0$, $b<0$

(2) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$ ➡ $a>0$, $b<0$

0412 답 $\frac{12}{5}\pi$

$\sin\theta\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\cos\theta>0$

따라서 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다. …… ⓘ

각 θ를 나타내는 동경과 각 6θ를 나타내는 동경이 일치하므로

$6\theta-\theta=2n\pi$ (단, n은 정수이다.)

$5\theta=2n\pi$ $\therefore \theta=\frac{2n}{5}\pi$ …… ㉠ …… ⓘⓘ

(ⅰ) θ가 제2사분면의 각일 때,

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<\frac{2n}{5}\pi<\pi$

$\therefore \frac{5}{4}<n<\frac{5}{2}$

이때 n은 정수이므로 $n=2$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{4}{5}\pi$

(ⅱ) θ가 제4사분면의 각일 때,

$\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$에서 $\frac{3}{2}\pi<\frac{2n}{5}\pi<2\pi$

$\therefore \frac{15}{4}<n<5$

이때 n은 정수이므로 $n=4$

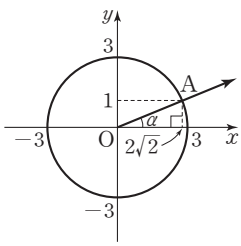
이를 ㉠에 대입하면 $\theta=\frac{8}{5}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 각 θ의 크기의 합은 $\frac{4}{5}\pi+\frac{8}{5}\pi=\frac{12}{5}\pi$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ θ가 제몇 사분면의 각인지 구하기	20 %
ⓘⓘ θ를 정수 n에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘⓘ 모든 각 θ의 크기의 합 구하기	50 %

0413 답 80

원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원이 세 동경 OP, OQ, OR와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자.



점 P가 제1사분면 위에 있고 $\sin\alpha=\frac{1}{3}$,

$\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$이므로 점 A의 좌표는

$(2\sqrt{2},\ 1)$

점 Q가 점 P와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 B의 좌표는

$(1,\ 2\sqrt{2})$

삼각함수의 정의에 의하여

$\sin\beta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

또 점 R는 점 Q를 원점에 대하여 대칭이동한 점이므로 점 C의 좌표는 $(-1,\ -2\sqrt{2})$

삼각함수의 정의에 의하여

$\tan\gamma=\frac{-2\sqrt{2}}{-1}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ 9(\sin^2\beta+\tan^2\gamma)=9\left(\frac{8}{9}+8\right)$

$=9\times\frac{80}{9}=80$

0414 답 $-\sqrt{2}$

점 A의 y좌표는 $x^2+y^2=2$에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^2+y^2=2,\ y^2=1$

$\therefore\ y=1\ (\because\ y>0)$

즉, 점 A의 좌표는

$(-1,\ 1)$

이때 $\overline{OA}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이므로

$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$

점 B의 y좌표는 $x^2+y^2=5$에 $x=-1$을 대입하면

$(-1)^2+y^2=5,\ y^2=4$

$\therefore\ y=2\ (\because\ y>0)$

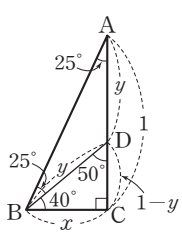
즉, 점 B의 좌표는 $(-1,\ 2)$이므로

$\tan\beta=-2$

$\therefore\ \sin\alpha\times\tan\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}\times(-2)=-\sqrt{2}$

0415 답 ①

그림과 같이 $\angle DBC=40°$인 선분 AC 위의 점 D를 잡는다.



$\overline{AD}=y$라 하면 삼각형 ABD는

$\angle BAD=\angle ABD=25°$인 이등변삼각형이므로

$\overline{BD}=y$

따라서 직각삼각형 BCD에서

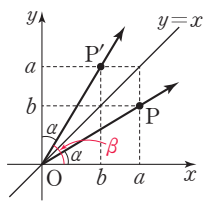
$x^2+(1-y)^2=y^2,\ x^2+1-2y+y^2=y^2$

$2y=x^2+1\qquad\therefore\ y=\frac{x^2+1}{2}$

$\therefore\ \sin 40°=\frac{1-y}{y}=\frac{1-\frac{x^2+1}{2}}{\frac{x^2+1}{2}}=\frac{2-(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1-x^2}{x^2+1}$

0416 답 ③

그림과 같이 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 두 점 $P(a,\ b)$, $P'(b,\ a)$에 대하여 두 동경 OP, OP′이 나타내는 각을 각각 α, β라 하면 $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,



$\cos\beta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$이므로

$\sin\alpha=\cos\beta$

즉, 두 동경 OP, OP′에 대하여 $\sin\alpha=\cos\beta$를 만족시키면 두 동경은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

이때 두 각 θ, 9θ가 모두 제1사분면의 각이고 $\sin\theta=\cos 9\theta$이므로 두 각 θ, 9θ를 나타내는 동경은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\theta+9\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, n은 정수이다.)

$10\theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ \theta=\frac{n}{5}\pi+\frac{\pi}{20}\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서

$0<\frac{n}{5}\pi+\frac{\pi}{20}<\frac{\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{20}<\frac{n}{5}\pi<\frac{9}{20}\pi$

$\therefore\ -\frac{1}{4}<n<\frac{9}{4}$

이때 n은 정수이므로

$n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$

이를 ㉠에 대입하면

$\theta=\frac{\pi}{20}$ 또는 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 또는 $\theta=\frac{9}{20}\pi$

따라서 모든 각 θ의 크기의 합은

$\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{4}+\frac{9}{20}\pi=\frac{3}{4}\pi$

0417 답 ④

직각삼각형 OQB에서

$\tan\theta=\frac{\overline{BQ}}{\overline{OQ}}$

$\overline{OA}=1$이므로 직각삼각형 OAP에서

$\tan\theta=\frac{\overline{PA}}{\overline{OA}}=\overline{PA}$

$\overline{OQ}=3\overline{PA}\times\overline{BQ}$에서 $\frac{\overline{BQ}}{\overline{OQ}}\times\overline{PA}=\frac{1}{3}$이므로

$\tan\theta\times\tan\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \tan^2\theta=\frac{1}{3}$

0418 답 ③

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+(1-\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$$
$$=\frac{\sin^2\theta+1-2\cos\theta+\cos^2\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$$
$$=\frac{2-2\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$$
$$=\frac{2(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta}$$
$$=\frac{2}{\sin\theta}$$

0419 답 ①

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$이므로

$$\frac{\tan\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{7}{16}}=-\frac{12}{7}$$

0420 답 ④

진수의 조건에서

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$

$\frac{1}{2}\log_2\sin\theta-\log_4\cos\theta=\frac{3}{4}$에서

$\frac{1}{2}\log_2\sin\theta-\frac{1}{2}\log_2\cos\theta=\frac{3}{4}$

$\log_2\sin\theta-\log_2\cos\theta=\frac{3}{2}$

$\log_2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{3}{2}$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$ ····· ㉠

$\therefore \sin\theta=2\sqrt{2}\cos\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$(2\sqrt{2}\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1$

$9\cos^2\theta=1$

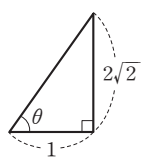
$\cos^2\theta=\frac{1}{9}$

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{3}$ ($\because \cos\theta>0$)

다른 풀이

㉠에서 $\tan\theta=2\sqrt{2}$

$\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$에서 $\tan\theta>0$이므로 그림과 같은 직각삼각형을 생각할 수 있다.



이 직각삼각형의 빗변의 길이는 $\sqrt{1^2+(2\sqrt{2})^2}=3$이므로

$\cos\theta=\frac{1}{3}$

0421 답 ⑤

$\cos\theta=x$, $\sin\theta=y$이고

$x^2+y^2=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$이므로

$(x-y)^2=(x^2+y^2)-2xy$

$=1-2\sin\theta\cos\theta$

0422 답 ③

$\cos\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\cos\theta+(1-\sin^2\theta)=1$

$\therefore \cos\theta=\sin^2\theta$

$\therefore 3\sin^2\theta+3\sin^4\theta=3\cos\theta+3\cos^2\theta$

$=3(\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=3\times1=3$

0423 답 ⑤

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta+1}+\sin\theta\cos\theta\tan\theta+(1+\cos\theta)^2$$
$$=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta+1}+\sin\theta\cos\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+1+2\cos\theta+\cos^2\theta$$
$$=\frac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{\cos\theta+1}+\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\cos\theta+1$$
$$=1-\cos\theta+1+2\cos\theta+1$$
$$=3+\cos\theta$$

즉, $3+\cos\theta=\frac{5}{2}$이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$

$\therefore \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$\sin\theta>0$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

0424 답 $-\frac{3}{20}$

$2\theta^2-7\pi\theta+6\pi^2<0$에서

$(2\theta-3\pi)(\theta-2\pi)<0$

$\therefore \frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ ····· ⓘ

한편 $\cos\theta=\frac{4}{5}$이므로

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

이때 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로

$\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\sqrt{\frac{9}{25}}=-\frac{3}{5}$ ····· ⓘⓘ

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$ ····· ⓘⓘⓘ

$\therefore \tan\theta-\sin\theta=-\frac{3}{4}-\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{3}{20}$ ····· ⓘⓥ

채점 기준

ⓘ θ의 값의 범위 구하기	20%
ⓘⓘ $\sin\theta$의 값 구하기	30%
ⓘⓘⓘ $\tan\theta$의 값 구하기	30%
ⓘⓥ $\tan\theta-\sin\theta$의 값 구하기	20%

0425 답 ①

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{3}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore \frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$

0426 답 ①

이차방정식 $x^2-x+k=0$의 두 근이 $\sin\theta+\cos\theta$, $\sin\theta-\cos\theta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\sin\theta+\cos\theta)+(\sin\theta-\cos\theta)=1$ ····· ㉠

$(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=k$ ····· ㉡

㉠에서 $2\sin\theta=1$ $\therefore \sin\theta=\frac{1}{2}$

㉡에서

$k=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin\theta-\cos\theta)=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

$=\sin^2\theta-(1-\sin^2\theta)=2\sin^2\theta-1$

$=2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-1=-\frac{1}{2}$

0427 답 ③

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\therefore \sin^3\theta+\cos^3\theta$

$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\times\left(-\frac{3}{8}\right)\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{8}+\frac{9}{16}=\frac{11}{16}$

☑ 공통수학1 다시보기

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$,
$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

0428 답 ②

$x=\sin t+1$에서 $\sin t=x-1$ ····· ㉠

$y=\cos t-\frac{1}{2}$에서 $\cos t=y+\frac{1}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$에 대입하면

$(x-1)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$

따라서 점 (x, y)가 나타내는 도형은 중심이 점 $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$이고 반지름의 길이가 1인 원이므로 그 넓이는

$\pi\times1^2=\pi$

0429 답 ②

$\frac{1}{1-\cos\theta}+\frac{1}{1+\cos\theta}=18$에서

$\frac{(1+\cos\theta)+(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}=18$

$\frac{2}{1-\cos^2\theta}=18$

$\frac{2}{\sin^2\theta}=18$

$\therefore \sin^2\theta=\frac{1}{9}$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\sqrt{\frac{1}{9}}=-\frac{1}{3}$

0430 답 ③

$\sin\theta+\cos\theta=-\frac{\sqrt{5}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{5}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{5}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{8}$

$\therefore \tan^2\theta+\frac{1}{\tan^2\theta}=\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)^2-2\times\tan\theta\times\frac{1}{\tan\theta}$

$=\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2-2$

$=\left(\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}\right)^2-2$

$=\left(\frac{1}{\frac{1}{8}}\right)^2-2$

$=64-2=62$

0431 답 ⑤

$\sin\theta\tan\theta+\cos\theta=3$에서

$\sin\theta\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\cos\theta=3$

$\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}+\cos\theta=3$

양변에 $\cos\theta$를 곱하면

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=3\cos\theta$

$1=3\cos\theta$

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore \sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$

이때 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\sqrt{\frac{8}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}}=-2\sqrt{2}$

$\therefore \sin\theta-\tan\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}-(-2\sqrt{2})=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

0432 답 11

$\sin\theta=\sqrt{2}\cos\theta$를 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$(\sqrt{2}\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1$

$3\cos^2\theta=1$

$\therefore \cos^2\theta=\frac{1}{3}$ …… ⓘ

$\therefore \sin^2\theta=1-\cos^2\theta=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ …… ⓘⓘ

이차방정식 $ax^2-9x+b=0$의 두 근이 $\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=\frac{9}{a}$, $\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{b}{a}$이므로

$1=\frac{9}{a}$, $\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{b}{a}$

$\therefore a=9$, $b=2$

$\therefore a+b=9+2=11$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\cos^2\theta$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ $\sin^2\theta$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ $a+b$의 값 구하기	40 %

0433 답 ④

$\sin\theta+\cos\theta=1$ …… ㉠

㉠의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1$

$1+2\sin\theta\cos\theta=1$

$\sin\theta\cos\theta=0$

$\therefore \sin\theta=0$ 또는 $\cos\theta=0$

이를 ㉠에 대입하면

$\sin\theta=0$, $\cos\theta=1$ 또는 $\sin\theta=1$, $\cos\theta=0$

$\therefore \sin^{2050}\theta+\cos^{2050}\theta=1$

0434 답 $3x^2+8x+3=0$

이차방정식 $6x^2-3x+k=0$의 두 근이 $\sin\theta$, $\cos\theta$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$

양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

이때

$\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\frac{1}{-\frac{3}{8}}=-\frac{8}{3}$

$\tan\theta\times\frac{1}{\tan\theta}=1$

따라서 $\tan\theta$, $\frac{1}{\tan\theta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3\left(x^2+\frac{8}{3}x+1\right)=0$ $\therefore 3x^2+8x+3=0$

0435 답 $-6\sin\theta$

$\sqrt{9-18\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{9+18\sin\theta\cos\theta}$

$=3\sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}-3\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta}$

$=3\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sin\theta\cos\theta}$

$-3\sqrt{\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta}$

$=3\sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}-3\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2}$ …… ⓘ

$=-3(\sin\theta-\cos\theta)-3(\sin\theta+\cos\theta)$ ($\because 0<\sin\theta<\cos\theta$)

$=-6\sin\theta$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 근호 안의 식을 완전제곱식 꼴로 나타내기	60 %
ⓘⓘ 주어진 식을 간단히 하기	40 %

0436 답 ②

$\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\tan\theta}=1$에서 $\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}=1$

$\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta}=1$

$\frac{\sin^2\theta\cos\theta+\cos\theta(1-\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$

$\frac{\cos\theta(\sin^2\theta+1-2\cos\theta+\cos^2\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$

$\frac{\cos\theta(2-2\cos\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$

$\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta}=1$

$\therefore 2\cos\theta=\sin\theta$ …… ㉠

양변을 제곱하면

$4\cos^2\theta=\sin^2\theta$, $4\cos^2\theta=1-\cos^2\theta$

$5\cos^2\theta=1$ $\therefore \cos^2\theta=\frac{1}{5}$

㉠에서 $\sin\theta$와 $\cos\theta$의 부호가 같고 $\pi<\theta<2\pi$이므로

$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$

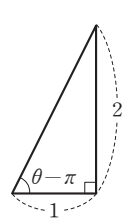
따라서 $\cos\theta<0$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{\frac{1}{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

다른 풀이

㉠에서 $\tan\theta=2$

$\tan\theta>0$이므로 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이고 그림과 같은 직각삼각형을 생각할 수 있다.



이 직각삼각형의 빗변의 길이는

$\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$이므로

$\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

0437 답 ①

$\sin^2\alpha=\frac{\overline{OA}^2}{\overline{OP}^2}=\cos^2\beta$이므로

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\tan^2\beta=16$에서

$\cos^2\beta+\sin^2\beta+\tan^2\beta=16$

$1+\tan^2\beta=16$, $\tan^2\beta=15$

$\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}=15$ $\therefore \sin^2\beta=15\cos^2\beta$

이를 $\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$에 대입하면 $15\cos^2\beta+\cos^2\beta=1$

$16\cos^2\beta=1$ $\therefore \cos^2\beta=\frac{1}{16}$

이때 $0<\beta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\beta>0$

$\therefore \cos\beta=\sqrt{\frac{1}{16}}=\frac{1}{4}$

$\therefore \overline{OA}=\overline{OP}\times\cos\beta=1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

다른 풀이

점 P의 좌표를 $P(a, b)(a>0, b>0)$라 하면

$\overline{OA}=a$, $\overline{PA}=b$, $\overline{OP}=1$이므로

$\sin\alpha=a$, $\sin\beta=b$, $\tan\beta=\frac{b}{a}$

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\tan^2\beta=16$에서 $a^2+b^2+\frac{b^2}{a^2}=16$

이때 $a^2+b^2=1$이므로

$1+\frac{b^2}{a^2}=16$, $\frac{b^2}{a^2}=15$ $\therefore b^2=15a^2$

이를 $a^2+b^2=1$에 대입하면

$a^2+15a^2=1$, $16a^2=1$, $a^2=\frac{1}{16}$

$\therefore a=\frac{1}{4}$ ($\because a>0$)

따라서 선분 OA의 길이는 $\frac{1}{4}$이다.

0438 답 ②

$\sin\theta+\cos\theta=\sin\theta\cos\theta$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=(\sin\theta\cos\theta)^2$

$(\sin\theta\cos\theta)^2-2\sin\theta\cos\theta-1=0$

$\sin\theta\cos\theta=x(-1\le x\le 1)$로 놓으면 $x^2-2x-1=0$이므로

$x=1-\sqrt{2}$ ($\because -1\le x\le 1$)

$\therefore \sin\theta\cos\theta=1-\sqrt{2}$

$\therefore \tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

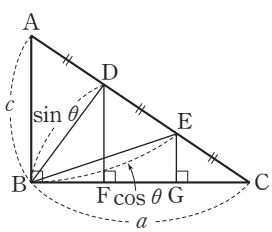
$=\frac{1}{1-\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}=-1-\sqrt{2}$

0439 답 ③

그림과 같이 두 점 D, E에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 각각 F, G라 하고 $\overline{BC}=a$, $\overline{AB}=c$라 하면

$\overline{BF}=\frac{a}{3}$, $\overline{BG}=\frac{2}{3}a$,

$\overline{DF}=\frac{2}{3}c$, $\overline{EG}=\frac{c}{3}$



두 직각삼각형 BFD, BGE에서

$\sin^2\theta=\overline{BD}^2=\overline{BF}^2+\overline{DF}^2=\left(\frac{a}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}c\right)^2=\frac{a^2+4c^2}{9}$,

$\cos^2\theta=\overline{BE}^2=\overline{BG}^2+\overline{EG}^2=\left(\frac{2}{3}a\right)^2+\left(\frac{c}{3}\right)^2=\frac{4a^2+c^2}{9}$

이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$\frac{a^2+4c^2}{9}+\frac{4a^2+c^2}{9}=1$, $\frac{5a^2+5c^2}{9}=1$

$\therefore a^2+c^2=\frac{9}{5}$

따라서 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}^2=a^2+c^2=\frac{9}{5}$이므로

$\overline{AC}=\sqrt{\frac{9}{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ ($\because \overline{AC}>0$)

0440 답 ③

삼각형 ABP에서 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$

이므로

$\sin\theta=\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{PB}}{2}$

$\therefore \overline{PB}=2\sin\theta$

$\therefore \overline{BQ}=\overline{PQ}-\overline{PB}=3-2\sin\theta$

직각삼각형 ABP에서 $\angle PBA=\frac{\pi}{2}-\theta$

점 Q에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle HBQ=\angle PBA=\frac{\pi}{2}-\theta$ ($\because$ 맞꼭지각)

$\therefore \angle BQH=\theta$

즉, 점 Q의 x좌표는

$\overline{OB}+\overline{BH}=1+\overline{BQ}\times\sin\theta$

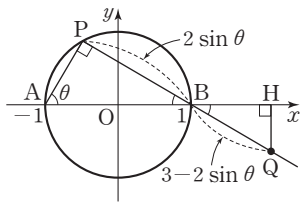
$=1+(3-2\sin\theta)\sin\theta$

$=1+3\sin\theta-2\sin^2\theta$

$=-2\left(\sin\theta-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{17}{8}$

따라서 $\sin\theta=\frac{3}{4}$일 때 최대이므로

$\sin^2\theta=\frac{9}{16}$



최고수준 도전 기출 106~107쪽

0441 답 ④

전략 각 조건을 만족시키는 $\frac{n}{3}\pi$, $\frac{n}{11}\pi$의 범위를 각각 구한다.

(i) $\frac{n}{3}\pi$가 제4사분면의 각일 때,

$2k\pi+\frac{3}{2}\pi<\frac{n}{3}\pi<2k\pi+2\pi$ (단, k는 정수이다.)

$6k+\frac{9}{2}<n<6k+6$

이때 자연수 n의 값은

$6k+5$

따라서 자연수 n은 $k=0$일 때 최솟값이 $m=5$이다.

→ k가 0보다 작으면 n이 자연수가 아니다.

(ii) $\frac{n}{11}\pi$가 제2사분면의 각일 때,

$2s\pi+\frac{\pi}{2}<\frac{n}{11}\pi<2s\pi+\pi$ (단, s는 정수이다.)

$22s+\frac{11}{2}<n<22s+11$

이때 자연수 n의 값은

$22s+6,\ 22s+7,\ \cdots,\ 22s+10$

따라서 자연수 n은 $s=4$일 때 최댓값이 $M=98$이다.

s가 4보다 크면 n이 100보다 크다.

(i), (ii)에서 $m+M=5+98=103$

0442 답 ①

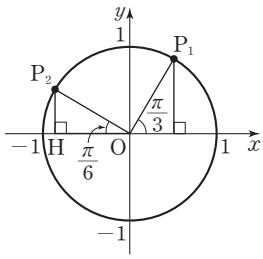
전략 점의 대칭이동을 이용하여 각 점의 좌표를 구해 규칙을 찾는다.

P_1: 점 P_1은 제1사분면 위의 점이고 $P_1\left(\cos\frac{\pi}{3},\ \sin\frac{\pi}{3}\right)$이므로 반직선 OP_1이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

P_2: 점 P_1이 제1사분면 위의 점이므로 (가)에서 반직선 OP_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는

$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5}{6}\pi$

따라서 x축의 음의 방향과 이루는 각의 크기는 $\pi-\frac{5}{6}\pi=\frac{\pi}{6}$이고 점 P_2에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$\overline{HO}=\overline{P_2O}\times\cos\frac{\pi}{6}=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\overline{P_2H}=\overline{P_2O}\times\sin\frac{\pi}{6}=1\times\frac{1}{2}$이므로

$P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

P_3: 점 P_2가 제2사분면 위의 점이므로 (나)에서

$P_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

P_4: 점 P_3이 제3사분면 위의 점이므로 (다)에서

$P_4\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

P_5: 점 P_4가 제4사분면 위의 점이므로 (나)에서

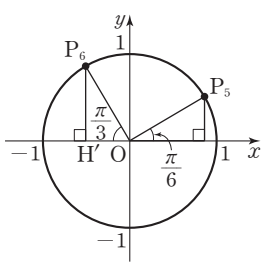
$P_5\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

점 P_5는 제1사분면 위의 점이고 $P_5\left(\cos\frac{\pi}{6},\ \sin\frac{\pi}{6}\right)$이므로 반직선 OP_5가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.

P_6: 점 P_5가 제1사분면 위의 점이므로 (가)에서 반직선 OP_6이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는

$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\pi$

따라서 x축의 음의 방향과 이루는 각의 크기는 $\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}$이고 점 P_6에서 x축에 내린 수선의 발을 H′이라 하면



$\overline{H'O}=\overline{P_6O}\times\cos\frac{\pi}{3}=1\times\frac{1}{2}$,

$\overline{P_6H'}=\overline{P_6O}\times\sin\frac{\pi}{3}=1\times\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$P_6\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

P_7: 점 P_6이 제2사분면 위의 점이므로 (나)에서

$P_7\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

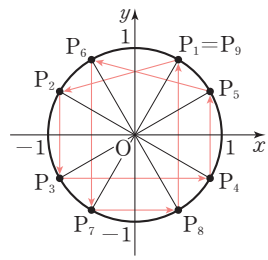
P_8: 점 P_7이 제3사분면 위의 점이므로 (다)에서

$P_8\left(\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

P_9: 점 P_8이 제4사분면 위의 점이므로 (나)에서

$P_9\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

점 P_9의 좌표는 점 P_1의 좌표와 같으므로 점 P_{8n+k}(n은 정수, $k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 8$)의 좌표는 점 P_k의 좌표와 같다.



$2007=8\times250+7$이므로 점 P_{2007}의 좌표는 점 P_7의 좌표와 같다.

$\therefore P_{2007}\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

✓ 공통수학2 다시보기

점 $(x,\ y)$를 대칭이동한 점의 좌표는 다음과 같다.

(1) x축에 대하여 대칭이동: $(x,\ -y)$

(2) y축에 대하여 대칭이동: $(-x,\ y)$

(3) 원점에 대하여 대칭이동: $(-x,\ -y)$

(4) 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동: $(y,\ x)$

0443 답 ②

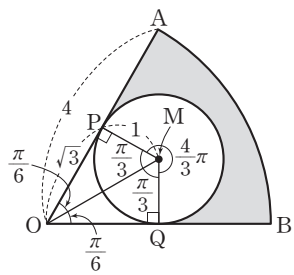
전략 넓이를 구할 수 있는 부채꼴, 직각삼각형으로 영역을 구분하여 푼다.

$l=4\times\frac{\pi}{3}=\frac{4}{3}\pi$이므로 $\frac{3}{2}l=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\pi=2\pi$

원의 반지름의 길이를 r라 하면

$2\pi r=2\pi$ $\therefore r=1$

그림과 같이 원의 중심을 M이라 하면 이 점은 $\angle AOB$의 이등분선 위에 있으므로



$\angle MOP=\angle MOQ=\frac{\pi}{6}$

이때 $\angle OPM=\angle OQM=\frac{\pi}{2}$이므로 $\angle OMP=\angle OMQ=\frac{\pi}{3}$

두 직각삼각형 OPM, OQM에서

$\overline{OP}=\overline{OQ}=1\times\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

따라서 색칠한 부분의 넓이는 부채꼴 OAB의 넓이에서 두 직각삼각형 OPM, OQM의 넓이와 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{4}{3}\pi$인 부채꼴의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$\frac{1}{2}\times4^2\times\frac{\pi}{3}-\left\{2\times\left(\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1\right)+\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{4}{3}\pi\right\}$

$=\frac{8}{3}\pi-\left(\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\right)=2\pi-\sqrt{3}$

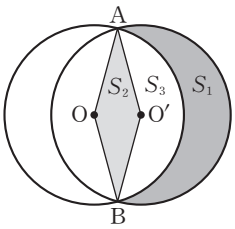
0444 답 ④

전략 S_1과 S_2 사이의 영역의 넓이를 S_3이라 하고 부채꼴의 넓이를 이용한다.

$\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{O'A}=\overline{O'B}=3$에서

□AOBO′은 마름모이므로

$\angle AO'B=\angle AOB=\frac{5}{6}\pi$



S_1과 S_2 사이의 영역의 넓이를 S_3이라 하면 원 O'에서 중심각의 크기가

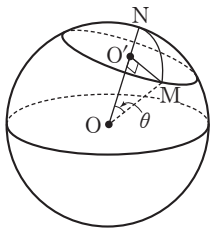
$2\pi-\frac{5}{6}\pi=\frac{7}{6}\pi$인 부채꼴 AO′B의 넓이는 S_1+S_3이고, 원 O에서 중심각의 크기가 $\frac{5}{6}\pi$인 부채꼴 AOB의 넓이는 S_2+S_3이므로

$$S_1-S_2=(S_1+S_3)-(S_2+S_3)$$
$$=\left(\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{7}{6}\pi\right)-\left(\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{5}{6}\pi\right)$$
$$=\frac{3}{2}\pi$$

0445 답 30

전략 구의 중심을 O, 실의 나머지 한 끝 점을 M이라 하고 호 NM의 길이가 5π임을 이용하여 중심각의 크기를 구한다.

구의 중심을 O, 실의 나머지 한 끝 점을 M이라 하면



$\overline{OM}=30$

부채꼴 ONM의 중심각의 크기를 θ라 하면

$30\times\theta=5\pi$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{6}$

이때 점 M이 나타내는 도형은 원이므로 원의 중심을 O′이라 하면

$\overline{OO'}\perp\overline{MO'}$이므로 직각삼각형 O′OM에서

$\overline{O'M}=\overline{OM}\times\sin\frac{\pi}{6}=30\times\frac{1}{2}=15$

따라서 점 M이 나타내는 도형은 반지름의 길이가 15인 원이므로

$l=2\pi\times15=30\pi$

$\therefore\ \frac{l}{\pi}=\frac{30\pi}{\pi}=30$

0446 답 ①

전략 음수의 제곱근의 성질을 이용하여 $\sin\theta$, $\cos\theta$의 부호를 파악한 후 식의 값을 계산한다.

$\frac{\sqrt{\cos\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}=-\sqrt{\frac{1}{\tan\theta}}=-\sqrt{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$ ($\sin\theta\neq0$이고 $\cos\theta\neq0$)

이므로

$\cos\theta>0$, $\sin\theta<0$ ····· ㉠

주어진 식을 정리하면

$\sin\theta-\cos\theta+\cos^2\theta\sin\theta-\sin^2\theta\cos\theta$

$=\sin\theta-\cos\theta-\sin\theta\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)$

$=(\sin\theta-\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$ ····· ㉡

이때 $\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$ $\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\therefore\ (\sin\theta-\cos\theta)^2=(\sin\theta+\cos\theta)^2-4\sin\theta\cos\theta$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\times\left(-\frac{3}{8}\right)=\frac{7}{4}$

이때 ㉠에서 $\sin\theta-\cos\theta<0$이므로

$\sin\theta-\cos\theta=-\sqrt{\frac{7}{4}}=-\frac{\sqrt{7}}{2}$

따라서 ㉡에서

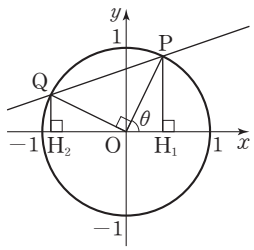
$(\sin\theta-\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=-\frac{\sqrt{7}}{2}\times\left\{1-\left(-\frac{3}{8}\right)\right\}=-\frac{\sqrt{7}}{2}\times\frac{11}{8}=-\frac{11\sqrt{7}}{16}$

0447 답 ③

전략 점 Q의 좌표를 θ에 대하여 나타낸 후 삼각함수 사이의 관계를 이용한다.

두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 하면



△POH_1≡△OQH_2(RHA 합동)이다.

P($\cos\theta$, $\sin\theta$)에서

$\overline{OH_1}=\overline{QH_2}=\cos\theta$

$\overline{PH_1}=\overline{OH_2}=\sin\theta$

$\therefore$ Q($-\sin\theta$, $\cos\theta$)

직선 PQ의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로

$\frac{\cos\theta-\sin\theta}{-\sin\theta-\cos\theta}=\frac{1}{3}$

$3\cos\theta-3\sin\theta=-\sin\theta-\cos\theta$

$\therefore\ \sin\theta=2\cos\theta$ ····· ㉠

이를 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$에 대입하면

$\cos^2\theta+4\cos^2\theta=1$

$5\cos^2\theta=1$, $\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

$\therefore\ \cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$ ($\because\ \cos\theta>0$)

이를 ㉠에 대입하면

$\sin\theta=2\cos\theta=2\times\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

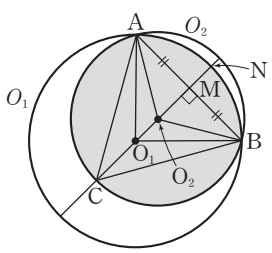
따라서 점 P의 x좌표와 y좌표의 합은

$\cos\theta+\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

0448 답 13

전략 두 원의 중심을 연결한 직선을 긋고, 두 원의 공통부분을 이루는 부채꼴과 삼각형의 넓이를 구한다.

두 원 O_1, O_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 할 때, 직선 O_1O_2가 선분 AB와 만나는 점을 M, 직선 O_1O_2가 원 O_1과 만나는 두 점 중에서 점 M에 가까운 점을 N이라 하면



$\overline{O_1A}=6$

$\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=3\sqrt{2}$

직각삼각형 AO_1M에서

$\overline{O_1M}=\sqrt{6^2-(3\sqrt{2})^2}=3\sqrt{2}$

즉, $\overline{AM}=\overline{O_1M}$이므로 삼각형 AO_1M은 직각이등변삼각형이다.

$\therefore \angle AO_1M=\frac{\pi}{4}$

따라서 부채꼴 AO_1N의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{9}{2}\pi$

원 O_2는 정삼각형 ACB의 외접원이므로

$\angle AO_2C=2\angle ABC=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore \angle AO_2M=\pi-\angle AO_2C=\frac{\pi}{3}$

직각삼각형 AO_2M에서 $\overline{AO_2}\sin\frac{\pi}{3}=\overline{AM}$이므로

$\overline{AO_2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{2}$

$\therefore \overline{AO_2}=2\sqrt{6}$

따라서 원 O_2에서 점 B를 포함하지 않는 부채꼴 AO_2C의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2\sqrt{6})^2\times\frac{2}{3}\pi=8\pi$

직각삼각형 AO_2M에서

$\overline{O_2M}=\overline{AO_2}\cos\frac{\pi}{3}=2\sqrt{6}\times\frac{1}{2}=\sqrt{6}$

또 $\overline{O_1O_2}=\overline{O_1M}-\overline{O_2M}=3\sqrt{2}-\sqrt{6}$이므로

삼각형 AO_1O_2의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{O_1O_2}\times\overline{AM}=\frac{1}{2}\times(3\sqrt{2}-\sqrt{6})\times 3\sqrt{2}$

$=9-3\sqrt{3}$

따라서 원 O_1과 원 O_2의 공통부분의 넓이는

$2\{(\text{부채꼴 } AO_1N\text{의 넓이})+(\text{부채꼴 } AO_2C\text{의 넓이})-\triangle AO_1O_2\}$

$=2\left\{\frac{9}{2}\pi+8\pi-(9-3\sqrt{3})\right\}$

$=-18+6\sqrt{3}+25\pi$

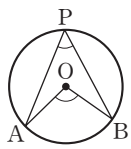
따라서 $p=-18$, $q=6$, $r=25$이므로

$p+q+r=13$

중3 다시보기

원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.

➡$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$



06 삼각함수의 그래프

난이도별 필수 기출 110~125쪽

0449 답 ③

함수 $f(x)$의 주기가 3이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x+3)=f(x)$

$\therefore f(20)=f(17)=f(14)=\cdots=f(2)=4$

0450 답 ⑤

모든 실수 x에 대하여 $f(x+6)=f(x+8)$이므로 이 식의 양변에 x 대신 $x-6$을 대입하면

$f(x)=f(x+2)$

$p\times(\text{자연수})=2$를 만족시키는 양수 p는 함수 $f(x)$의 주기가 될 수 있다.

① $\frac{1}{3}\times 6=2$ ② $\frac{1}{2}\times 4=2$ ③ $1\times 2=2$

④ $2\times 1=2$ ⑤ $4\times\frac{1}{2}=2$

따라서 $f(x)$의 주기가 될 수 없는 것은 ⑤이다.

0451 답 1

함수 $f(x)$의 주기가 p이므로 모든 실수 x에 대하여

$f(x+p)=f(x)$

$\therefore f(p)=f(0)=\sin 0+\cos 0+\tan 0=0+1+0=1$

0452 답 2

모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x-1)$이므로 이 식의 양변에 x 대신 $x+1$을 대입하면

$f(x+2)=f(x)$ …… ⓘ

$f(3002)=f(3000)=f(2098)=\cdots=f(0)=0$,

$f(3003)=f(3001)=f(2099)=\cdots=f(1)=1$ …… ⓘⓘ

$\therefore f(3000)+f(3001)+f(3002)+f(3003)$

$=0+1+0+1=2$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 조건 식 정리하기	30 %
ⓘⓘ $f(3000)$, $f(3001)$, $f(3002)$, $f(3003)$의 값 각각 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ $f(3000)+f(3001)+f(3002)+f(3003)$의 값 구하기	20 %

0453 답 ①

(가), (나)에서 함수 $f(x)$는 주기가 4인 주기함수이므로

$f\left(\frac{21}{2}\right)=f\left(\frac{13}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

0454 답 ③

함수 $y=\tan\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)$의 주기는 $\frac{\pi}{|\pi|}=1$

0455 답 ①

주기가 4π이고 $a>0$이므로

$\frac{2\pi}{a}=4\pi \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

즉, $f(x)=\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$이므로 $f(\pi)=\cos\pi=-1$

0456 답 ②

최댓값이 2이고 $a>0$이므로 $a=2$

주기가 2이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2b}}=2$

$4b=2 \quad \therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore ab=2\times\frac{1}{2}=1$

0457 답 ③

모든 실수 x에 대하여 $f(x+3)=f(x)$이므로 $p\times$(자연수)$=3$을 만족시키는 양수 p는 함수 $f(x)$의 주기가 될 수 있다.

① 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{|2|}=\pi$이므로

$\pi\times\frac{3}{\pi}=3$

② 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{|\pi|}=2$이므로

$2\times\frac{3}{2}=3$

③ 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{|4\pi|}=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times6=3$

④ 함수의 주기는 $\frac{\pi}{\left|\frac{\pi}{4}\right|}=4$이므로

$4\times\frac{3}{4}=3$

⑤ 함수의 주기는 $\frac{\pi}{|3|}=\frac{\pi}{3}$이므로

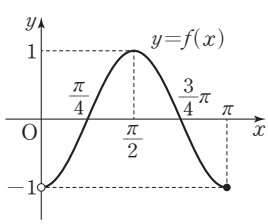
$\frac{\pi}{3}\times\frac{9}{\pi}=3$

따라서 구하는 함수는 ③이다.

0458 답 ②

함수 $f(x)=-\cos 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{|2|}=\pi$이고 그 그래프는 함수 $y=\cos 2x$의 그래프를 x축에 대칭이동한 것이다.

즉, $0<x\le\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 $x=\frac{\pi}{2}$에서 최댓값 1, $x=\pi$에서 최솟값 -1을 갖는다.



$\therefore a=\frac{\pi}{2}, b=\pi$

따라서 두 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, $(\pi, -1)$을 지나는 직선의 기울기는

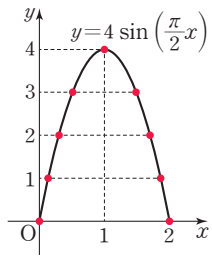
$\frac{-1-1}{\pi-\frac{\pi}{2}}=\frac{-2}{\frac{\pi}{2}}=-\frac{4}{\pi}$

0459 답 9

함수 $y=4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$의 최댓값은 4, 최솟값은 -4,

주기는 $\frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{2}\right|}=4$이다.

따라서 $0\le x\le2$에서 곡선 $y=4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$는 그림과 같으므로 곡선 위의 점 중 y좌표가 정수인 점의 개수는 9이다.

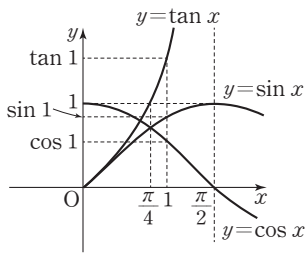


0460 답 ③

세 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$의 그래프는 그림과 같다.

이때 $\frac{\pi}{4}<1<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos 1<\sin 1<\tan 1$



0461 답 −2

주기가 $\frac{\pi}{2}$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2} \quad \therefore b=4$ …… ⓘ

최댓값이 4이고 $a>0$이므로

$a+c=4 \quad \therefore c=4-a$ …… ⓘⓘ

즉, $f(x)=a\cos(4x-\pi)+4-a$이고 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{5}{2}$이므로

$a\cos\frac{\pi}{3}+4-a=\frac{5}{2}$

$\frac{a}{2}+4-a=\frac{5}{2}$

$-\frac{a}{2}=-\frac{3}{2}$

$\therefore a=3$

$\therefore c=4-3=1$ …… ⓘⓘⓘ

따라서 $f(x)$의 최솟값은

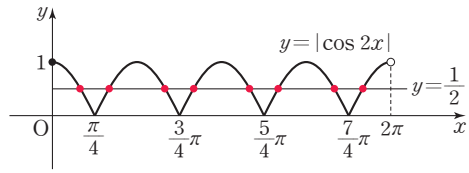
$-a+c=-3+1=-2$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ 주기를 이용하여 b의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ 최댓값을 이용하여 a, c의 관계식 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ a, c의 값 각각 구하기	20 %
ⓘⓥ $f(x)$의 최솟값 구하기	20 %

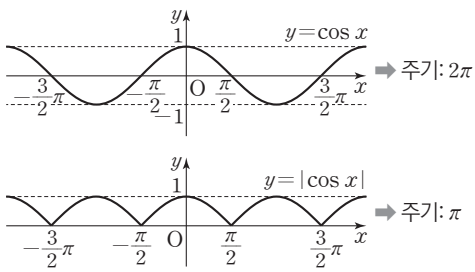
0462 답 ③

함수 $y=\cos 2x$의 주기는 $\frac{2\pi}{|2|}=\pi$이고 $y=|\cos 2x|$의 그래프는 함수 $y=\cos 2x$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=|\cos 2x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 그림과 같으므로 교점의 개수는 8이다.



참고 $y=\cos x$의 그래프와 $y=|\cos x|$의 그래프



0463 답 ④

함수 $y=\log(4x-\pi)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=\frac{\pi}{4}$

함수 $y=\tan\left(kx+\frac{\pi}{5}\right)$의 그래프의 점근선의 방정식은

$kx+\frac{\pi}{5}=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)에서 $kx=n\pi+\frac{3}{10}\pi$

$\therefore x=\frac{n}{k}\pi+\frac{3}{10k}\pi$

이때 이 점근선 중 하나가 $x=\frac{\pi}{4}$와 일치해야 하므로

$\frac{\pi}{4}=\frac{n}{k}\pi+\frac{3}{10k}\pi$

$\frac{k}{4}=n+\frac{3}{10}$ $\therefore k=4n+\frac{6}{5}$

이때 $k>0$이므로 k의 최솟값은 $n=0$일 때 $\frac{6}{5}$이다.

0464 답 ④

$b>0$이므로 (가)에서 $\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$ $\therefore b=2$

(나)에서 $y=a\tan\left\{2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}-1=a\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-1$

즉, $c=-\frac{\pi}{2}$, $d=-1$ ($\because -\pi<c<0$)

$f(x)=a\tan\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-1$이므로 (다)에서

$0=a\tan\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}\right)-1$, $a\tan\frac{\pi}{6}=1$, $\frac{a}{\sqrt{3}}=1$ $\therefore a=\sqrt{3}$

$\therefore abcd=\sqrt{3}\times2\times\left(-\frac{\pi}{2}\right)\times(-1)=\sqrt{3}\pi$

0465 답 ⑤

함수 $y=k\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+k^2-20$의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 (함수의 최댓값)≤0이어야 하므로

$|k|+k^2-20\le0$, $|k|^2+|k|-20\le0$

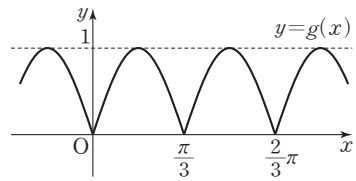
$(|k|+5)(|k|-4)\le0$ $\therefore |k|\le4$ ($\because |k|+5>0$)

따라서 $-4\le k\le4$이므로 k는 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4의 9개이다.

0466 답 ②

$a>0$이므로 함수 $f(x)=\cos(ax)+1$의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$이다.

함수 $y=\sin3x$의 주기는 $\frac{2\pi}{3}$이고, $g(x)=|\sin3x|$의 그래프는 $y=\sin3x$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다. → $y=\sin3x$의 주기가 $\frac{2\pi}{3}$이므로 $y=|\sin3x|$의 주기는 $\frac{2\pi}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$



따라서 함수 $g(x)=|\sin3x|$의 주기는 $\frac{\pi}{3}$이다.

이때 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 주기가 서로 같으므로

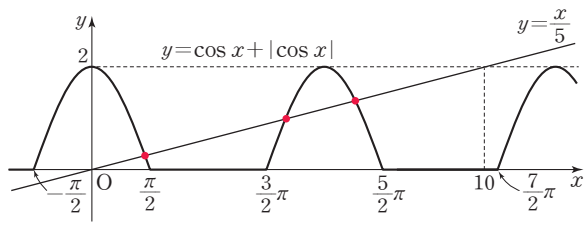
$\frac{2\pi}{a}=\frac{\pi}{3}$ $\therefore a=6$

0467 답 ③

$y=\cos x+|\cos x|=\begin{cases}2\cos x & (\cos x\ge0)\\ 0 & (\cos x<0)\end{cases}$

이때 ..., $-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi\le x\le\frac{5}{2}\pi$, ...에서 $\cos x\ge0$이고 직선 $y=\frac{x}{5}$는 두 점 $(0,0)$, $(10,2)$를 지나므로

함수 $y=\cos x+|\cos x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{5}$는 그림과 같다.

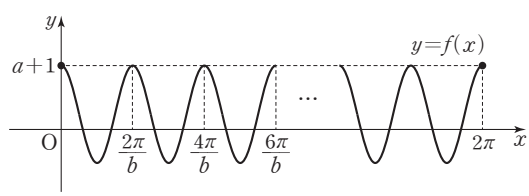


따라서 교점의 개수는 3이다.

0468 답 ①

a, b는 자연수이므로 $f(x)=a\cos bx+1$의 최댓값은 $a+1$, 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이다.

따라서 $0\le x\le2\pi$에서 함수 $f(x)=a\cos bx+1$의 그래프는 그림과 같으므로 $x=0$, $\frac{2\pi}{b}$, $\frac{4\pi}{b}$, $\frac{6\pi}{b}$, ..., 2π에서 최댓값 $a+1$을 갖는다.



이때 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{2}$에서 최댓값 10을 가지므로

$\frac{2\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$일 때 $b=4$

$\frac{4\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$일 때 $b=8$

$\frac{6\pi}{b}=\frac{\pi}{2}$일 때 $b=12$

⋮

$a+1=10$에서 $a=9$

따라서 $a+b$의 최솟값은

$9+4=13$

0469 답 ④

함수 $y=f(x)$의 주기가 2π이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}\times\frac{1}{2}=2\pi$ $\therefore b=\frac{1}{2}$

최댓값이 8이고 $a>0$이므로

$a+c=8$ $\therefore c=8-a$

즉, $f(x)=a\left|\cos\frac{x}{2}\right|+8-a$이고 $f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=7$이므로

$a\left|\cos\frac{\pi}{3}\right|+8-a=7$

$\frac{a}{2}+8-a=7$ $\therefore a=2$

$\therefore c=8-2=6$

$\therefore abc=2\times\frac{1}{2}\times6=6$

0470 답 0

함수 $y=a\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+12-a^2$의 그래프가 제4사분면을 지나지 않으려면 (함수의 최솟값)≥0이어야 하므로 …… ⓘ

$-|a|+12-a^2\geq0$, $|a|^2+|a|-12\leq0$

$(|a|+4)(|a|-3)\leq0$

$|a|\leq3$ ($\because$ $|a|+4>0$)

$\therefore -3\leq a\leq3$ …… ⓘⓘ

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3=0$ …… ⓘⓘⓘ

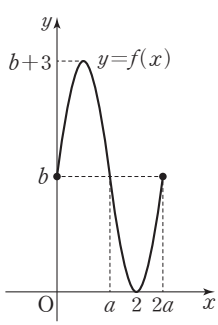
채점 기준	
ⓘ 함수의 그래프가 제4사분면을 지나지 않도록 하는 조건 파악하기	30%
ⓘⓘ 함수의 그래프가 제4사분면을 지나지 않도록 하는 a의 값의 범위 구하기	50%
ⓘⓘⓘ 모든 정수 a의 값의 합 구하기	20%

0471 답 ②

$a>0$이므로 함수 $f(x)=3\sin\frac{\pi x}{a}+b$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{a}}=2a$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=3\sin\frac{\pi x}{a}$의 그래프를 y축의 방향으로 b ($b>0$)만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 오직 한 점 (2, 0)에서 만나므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 0을 갖는다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$0\leq x\leq2a$에서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}a$일 때 최솟값이 0이므로

$\frac{3}{2}a=2$ $\therefore a=\frac{4}{3}$

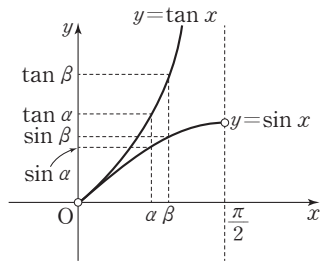
따라서 $f(x)=3\sin\frac{3}{4}\pi x+b$이므로 $f(2)=0$에서

$3\sin\frac{3}{2}\pi+b=0$, $-3+b=0$ $\therefore b=3$

$\therefore a+b=\frac{4}{3}+3=\frac{13}{3}$

0472 답 $A>B>C$

$0<x<\frac{\pi}{2}$일 때, 두 함수 $y=\sin x$, $y=\tan x$의 그래프는 그림과 같다.



원점과 점 $(\alpha, \tan\alpha)$를 지나는 직선의 기울기는 원점과 점 $(\beta, \tan\beta)$를 지나는 직선의 기울기보다 작으므로

$\frac{\tan\alpha}{\alpha}<\frac{\tan\beta}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}<\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$

$\therefore A>B$

또 원점과 점 $(\alpha, \sin\alpha)$를 지나는 직선의 기울기는 원점과 점 $(\beta, \sin\beta)$를 지나는 직선의 기울기보다 크므로

$\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}>\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

$\therefore B>C$

$\therefore A>B>C$

0473 답 $A>B$

$A-B=(x\cos y+y\cos x)-(x\sin x+y\sin y)$

$=x(\cos y-\sin x)+y(\cos x-\sin y)$

$0<x<\frac{\pi}{4}$, $0<y<\frac{\pi}{4}$인 모든 x, y에 대하여

$\cos y>\sin x$, $\cos x>\sin y$이므로

$\cos y-\sin x>0$, $\cos x-\sin y>0$

따라서 $x(\cos y-\sin x)+y(\cos x-\sin y)>0$이므로

$A-B>0$ $\therefore A>B$

0474 답 ③

주기가 6이고 $a>0$이므로

$\frac{2\pi}{a\pi}=6$ $\therefore a=\frac{1}{3}$

(가)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(10-x)=f(x)$이므로 x 대신 $x+5$를 대입하면 $f(5-x)=f(5+x)$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=5$에 대하여 대칭이다. …… ㉠

이때 함수 $f(x)=3\cos\left(\frac{1}{3}\pi x-b\pi\right)+c$이고, 함수 $y=\cos x$의 그래프는 직선 $x=n\pi$ (n은 정수)에 대하여 대칭이므로 함수 $y=3\cos\left(\frac{1}{3}\pi x-b\pi\right)+c$의 그래프는 직선 $\frac{1}{3}\pi x-b\pi=n\pi$, 즉 $x=3(b+n)$에 대하여 대칭이다. …… ㉡

㉠, ㉡에서 $5=3(b+n)$ $\therefore b=\frac{5}{3}-n$

이때 $b>0$이므로 b는 $n=1$일 때 최솟값이 $\frac{2}{3}$이다.

(나)에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 -1 이상이어야 하므로

$-3+c\geq -1 \quad \therefore c\geq 2$

따라서 $a+b+c$의 최솟값은

$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+2=3$

참고 코사인 함수의 그래프에서 대칭축은 최대 또는 최소인 점을 지나므로 함수 $f(x)=3\cos\left(\frac{1}{3}\pi x-b\pi\right)+c$는 $x=5$에서 최대 또는 최소이어야 한다.

즉, $x=5$일 때 각의 크기인 $\frac{5}{3}\pi-b\pi$가 $n\pi$(n은 정수) 꼴이어야 하므로

$\frac{5}{3}\pi-b\pi=n\pi$

$\therefore b=\frac{5}{3}-n$

0475 답 ③

$-1\leq\sin 2x\leq 1$이므로

$f(x)=\sin 2x+2.5+(\sin 2x-2.5)=2\sin 2x$

따라서 함수 $y=f(x)$의 주기는 $\frac{2\pi}{|2|}=\pi$이므로

$p=\pi$

$\therefore f\left(\frac{p}{12}\right)+f\left(\frac{p}{4}\right)+f\left(\frac{p}{2}\right)+f(p)$

$=f\left(\frac{\pi}{12}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f(\pi)$

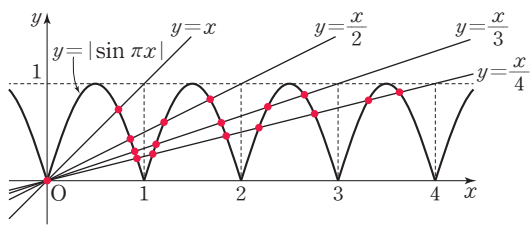
$=2\sin\frac{\pi}{6}+2\sin\frac{\pi}{2}+2\sin\pi+2\sin 2\pi$

$=1+2+0+0=3$

0476 답 ⑤

함수 $y=\sin\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{|\pi|}=2$이고 $y=|\sin\pi x|$의 그래프는 $y=\sin\pi x$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

직선 $y=\frac{x}{n}$는 두 점 $(0, 0)$, $(n, 1)$을 지나므로 함수 $y=|\sin\pi x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{n}$($n=1, 2, 3, 4$)는 그림과 같다.



(i) 함수 $y=|\sin\pi x|$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점의 개수는

$f(1)=2$

(ii) 함수 $y=|\sin\pi x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{2}$의 교점의 개수는

$f(2)=4$

(iii) 함수 $y=|\sin\pi x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{3}$의 교점의 개수는

$f(3)=6$

(iv) 함수 $y=|\sin\pi x|$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{4}$의 교점의 개수는

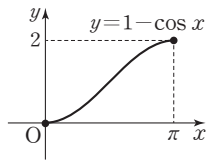
$f(4)=8$

(i)~(iv)에서

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=2+4+6+8=20$

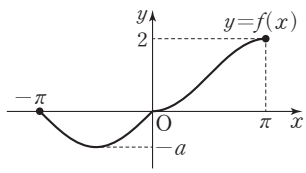
0477 답 ③

$0\leq x\leq\pi$에서 함수 $y=1-\cos x$의 그래프는 그림과 같다.



(i) $a>0$일 때,

$-\pi\leq x\leq\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



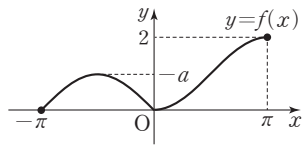
따라서 $M=2$, $m=-a$이므로 $M-m=4$에서

$2-(-a)=4$

$\therefore a=2$

(ii) $-2\leq a<0$일 때,

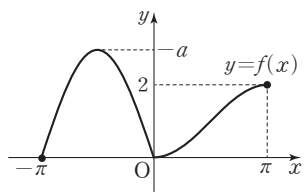
$-\pi\leq x\leq\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $M=2$, $m=0$이므로 $M-m=4$를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a<-2$일 때,

$-\pi\leq x\leq\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $M=-a$, $m=0$이므로 $M-m=4$에서

$-a=4$

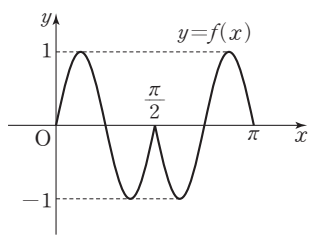
$\therefore a=-4$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 a의 값의 곱은

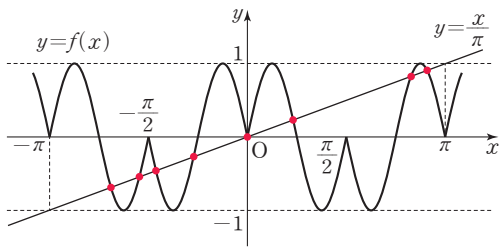
$2\times(-4)=-8$

0478 답 ⑤

(나), (다)에서 두 함수 $y=\sin 4x$, $y=-\sin 4x$의 주기가 모두 $\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$이므로 $0\leq x\leq\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



직선 $y=\frac{x}{\pi}$는 두 점 $(-\pi, -1)$, $(\pi, 1)$을 지나고 (가)에서 $f(x+\pi)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{\pi}$는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{\pi}$가 만나는 점의 개수는 8이다.

0479 답 ①

주어진 그래프에서 함수 $y=\tan\left(ax-\frac{\pi}{2}\right)$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

이때 주어진 함수의 주기는 각각 다음과 같다.

① $\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=4\pi$ ③ $\frac{2\pi}{|2|}=\pi$

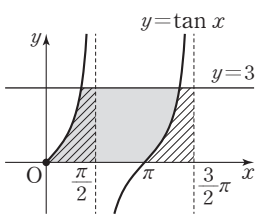
④ $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=4\pi$ ⑤ $\frac{\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=2\pi$

따라서 구하는 함수는 ①이다.

0480 답 ⑤

그림과 같이 빗금 친 두 부분의 넓이는 서로 같으므로 함수 $y=\tan x$의 그래프와 x축 및 직선 $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\left(\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)\times 3=3\pi$



0481 답 ④

주어진 그래프에서 두 함수 $y=a\sin bx$, $y=2\tan cx$의 주기가 모두 2π이고 $b>0$, $c>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=2\pi$, $\frac{\pi}{c}=2\pi$

$\therefore b=1$, $c=\frac{1}{2}$

함수 $y=2\tan\frac{x}{2}$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{2}, d\right)$를 지나므로

$d=2\tan\frac{\pi}{4}=2$

함수 $y=a\sin x$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$를 지나므로

$2=a\sin\frac{\pi}{2}=a$

$\therefore a=2$

$\therefore abcd=2\times 1\times\frac{1}{2}\times 2=2$

0482 답 ③

함수 $y=-\sin\frac{\pi}{8}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{8}\right|}=16$이고, 주어진 함수의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 0, 8이므로 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

즉, 점 A의 x좌표는

$4-\frac{1}{2}\overline{AD}=4-\frac{1}{2}\times 4=2$

이때 선분 AB의 길이는 점 B의 y좌표의 절댓값과 같으므로

$\overline{AB}=\left|-\sin\left(\frac{\pi}{8}\times 2\right)\right|=\left|-\sin\frac{\pi}{4}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는

$4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

0483 답 ②

함수 $f(x)=a\cos bx$라 하자.

두 점 A, B의 x좌표가 각각 1, 5이므로 함수 $f(x)=a\cos bx$의 그래프는 직선 $x=\frac{1+5}{2}=3$에 대하여 대칭이다.

즉, 함수 $f(x)=a\cos bx$의 주기는 $3\times 2=6$이고 $b>0$이므로

$\frac{2\pi}{b}=6$ $\therefore b=\frac{\pi}{3}$

$\therefore f(x)=a\cos\frac{\pi}{3}x$

이때 직사각형의 넓이가 4이므로 $(5-1)\times f(1)=4$에서

$f(1)=1$

$a\cos\frac{\pi}{3}=a\times\frac{1}{2}=1$ $\therefore a=2$

0484 답 ④

주어진 그래프에서 함수의 주기가 $\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\pi$이고 $a>0$이므로

$\frac{2\pi}{a}=\pi$ $\therefore a=2$

주어진 함수는 $y=\cos 2(x+b)+1$이고 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$를 지나므로 $2=\cos 2\left(\frac{\pi}{3}+b\right)+1$

즉, $\cos 2\left(\frac{\pi}{3}+b\right)=1$

이때 $0<b<\pi$에서 $\frac{2}{3}\pi<2\left(\frac{\pi}{3}+b\right)<\frac{8}{3}\pi$이므로

$2\left(\frac{\pi}{3}+b\right)=2\pi$, $\frac{\pi}{3}+b=\pi$

$\therefore b=\frac{2}{3}\pi$

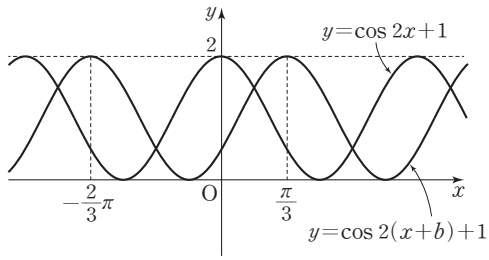
$\therefore \frac{b}{a}=\frac{\frac{2}{3}\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$

다른 풀이

주어진 그래프에서 함수의 주기가 $\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=\pi$이고 $a>0$이므로

$\frac{2\pi}{a}=\pi$ $\therefore a=2$

그림과 같이 함수 $y=\cos 2(x+b)+1$의 그래프는 함수 $y=\cos 2x+1$의 그래프를 x축의 방향으로 $-b=-\frac{2}{3}\pi$만큼 평행이동시킨 것이다. ($\because 0<b<\pi$)



$\therefore b=\frac{2}{3}\pi$ $\therefore \frac{b}{a}=\frac{\frac{2}{3}\pi}{2}=\frac{\pi}{3}$

0485 답 ②

주어진 그래프에서 함수의 주기가 $9-1=8$이고 $a>0$이므로

$\frac{2\pi}{a}=8$

$\therefore a=\frac{\pi}{4}$

주어진 함수는 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x+b\right)$이고 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나므로

$0=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+b\right)$

즉, $\sin\left(\frac{\pi}{4}+b\right)=0$

이때 $-\pi<b<0$에서 $-\frac{3}{4}\pi<\frac{\pi}{4}+b<\frac{\pi}{4}$이므로

$\frac{\pi}{4}+b=0$ $\therefore b=-\frac{\pi}{4}$

따라서 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$이므로

$f(0)=2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}$

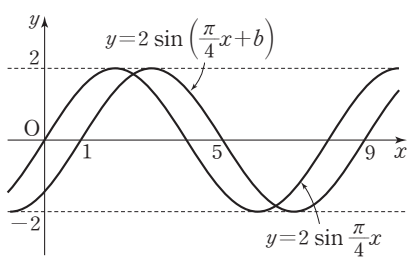
다른 풀이

주어진 그래프에서 함수의 주기가 $9-1=8$이고 $a>0$이므로

$\frac{2\pi}{a}=8$

$\therefore a=\frac{\pi}{4}$

그림과 같이 함수 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x+b\right)=2\sin\left\{\frac{\pi}{4}\left(x+\frac{4b}{\pi}\right)\right\}$의 그래프는 함수 $y=2\sin\frac{\pi}{4}x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{4b}{\pi}=1$만큼 평행이동시킨 것이다. ($\because -\pi<b<0$)



$\therefore b=-\frac{\pi}{4}$

따라서 $f(x)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{4}\right)$이므로

$f(0)=2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\sqrt{2}$

0486 답 $\frac{\pi}{2}$

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2이고 $a<0$이므로

$a=-2$ ····· ⓘ

또 주어진 그래프에서 함수의 주기가 $2\times\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\pi$이고 $b>0$이므로 $\frac{2\pi}{b}=\pi$ $\therefore b=2$ ····· ⓘⓘ

따라서 $y=-2\sin(2x-c)$이고 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로

$2=-2\sin(-c)$

즉, $\sin(-c)=-1$

이때 $c>0$인 c의 최솟값은 $\frac{\pi}{2}$이므로 $a+b+c$의 최솟값은

$-2+2+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 최댓값, 최솟값을 이용하여 a의 값 구하기	30%
ⓘⓘ 주기를 이용하여 b의 값 구하기	30%
ⓘⓘⓘ $a+b+c$의 최솟값 구하기	40%

0487 답 ③

$a>0$이므로 함수 $y=a\sin\frac{a}{2}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{a}{2}}=\frac{4}{a}\pi$이고 점 A의 x좌표는

$\frac{1}{2}\times\frac{4}{a}\pi=\frac{2}{a}\pi$

이때 점 B의 y좌표는 정삼각형 OAB의 높이와 같으므로

$\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{a}\pi=\frac{\sqrt{3}}{a}\pi$

이는 함수 $y=a\sin\frac{a}{2}x$의 최댓값 a와 같으므로

$a=\frac{\sqrt{3}}{a}\pi$ $\therefore a^2=\sqrt{3}\pi$

0488 답 ④

정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로 선분 AD의 중점의 좌표는 $(0, 1)$이고 $B(-1, -1)$, $C(1, -1)$이다.

함수 $y=2\sin(ax-b)-1$의 최댓값은 1, 최솟값은 -3이고, 최댓값과 최솟값의 평균 $\frac{1+(-3)}{2}=-1$은 두 점 B, C의 y좌표와 같다.

즉, 선분 BC의 길이는 함수 $y=2\sin(ax-b)-1$의 주기의 $\frac{1}{2}$이므로

$2=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{a}$ ($\because a>0$) $\therefore a=\frac{\pi}{2}$

함수 $y=2\sin\left(\frac{\pi}{2}x-b\right)-1$의 그래프가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$1=2\sin(-b)-1$ $\therefore \sin(-b)=1$

$b>0$이므로 $\sin b=-1$에서 양수 b의 최솟값은 $\frac{3}{2}\pi$이다.

따라서 $a+b$의 최솟값은

$\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi=2\pi$

0489 답 48

$k>0$이므로 함수 $y=\sin\frac{k}{2}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{k}{2}}=\frac{4}{k}\pi$이다.

두 점 A, B는 직선 $x=\frac{\pi}{k}$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\pi}{k}$ $\therefore\ \alpha+\beta=\frac{2}{k}\pi$

두 점 C, D는 직선 $x=\frac{3}{k}\pi$에 대하여 대칭이므로

$\frac{\gamma+\delta}{2}=\frac{3}{k}\pi$ $\therefore\ \gamma+\delta=\frac{6}{k}\pi$

$\therefore\ \cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=\cos\left(\frac{2}{k}\pi+\frac{6}{k}\pi\right)=\cos\frac{8}{k}\pi$

즉, $\cos\frac{8}{k}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 양수 k가 최대이면 $\frac{8}{k}\pi$는 최소이므로

$\frac{8}{k}\pi=\frac{\pi}{6}$

따라서 양수 k의 최댓값은 48이다.

0490 답 2

곡선 $y=a\sin b\pi x$가 직선 $y=a$와 만나는 점의 x좌표는

$a\sin b\pi x=a$에서

$\sin b\pi x=1$, $b\pi x=\frac{\pi}{2}$ $\left(\because\ 0\le x\le\frac{2}{b}\right)$

$\therefore\ x=\frac{1}{2b}$ $\therefore\ \mathrm{A}\left(\frac{1}{2b},\ a\right)$

곡선 $y=a\sin b\pi x$가 직선 $y=-a$와 만나는 점의 x좌표는

$a\sin b\pi x=-a$에서

$\sin b\pi x=-1$, $b\pi x=\frac{3}{2}\pi$ $\left(\because\ 0\le x\le\frac{2}{b}\right)$

$\therefore\ x=\frac{3}{2b}$ $\therefore\ \mathrm{B}\left(\frac{3}{2b},\ -a\right)$

직선 AB와 x축이 만나는 점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(\frac{1}{b},\ 0\right)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OAM}+\triangle\mathrm{OBM}$

$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{b}\times a\right)+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{b}\times a\right)=\frac{a}{b}$

즉, $\frac{a}{b}=3$이므로 $a=3b$ ····· ㉠

직선 OA의 기울기와 직선 OB의 기울기의 곱이 $-\frac{3}{4}$이므로

$\frac{a}{\frac{1}{2b}}\times\frac{-a}{\frac{3}{2b}}=-\frac{3}{4}$, $-\frac{4a^2b^2}{3}=-\frac{3}{4}$

$16a^2b^2=9$ $\therefore\ 4ab=3\ (\because\ a>0,\ b>0)$

이 식에 ㉠을 대입하면

$4\times3b\times b=3$, $12b^2=3$

$b^2=\frac{1}{4}$ $\therefore\ b=\frac{1}{2}\ (\because\ b>0)$

이를 ㉠에 대입하면 $a=\frac{3}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$

0491 답 ①

주어진 그래프에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 2이고 $p>0$이므로 $p=2$

또 주어진 그래프에서 함수 $f(x)$의 주기는 $4\times\left(\frac{11}{12}\pi-\frac{2}{3}\pi\right)=\pi$

이고 $q>0$이므로

$\frac{2\pi}{q}=\pi$ $\therefore\ q=2$

$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{5}{6}\pi\right)$이므로

$\frac{2}{3}f(2x)=\frac{4}{3}\sin\left(4x-\frac{5}{6}\pi\right)$ ····· ㉠

㉠에서 x축의 방향으로 평행이동하면 최댓값과 주기는 변하지 않는다.

따라서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $\frac{4}{3}$, 주기는 $\frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2}$이므로

$a=\frac{4}{3}$, $b=\frac{\pi}{2}$

$\therefore\ abpq=\frac{4}{3}\times\frac{\pi}{2}\times2\times2=\frac{8}{3}\pi$

0492 답 ①

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta=-\frac{1}{2}$이므로

$\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\cos\theta}=-2$

0493 답 ④

$\sin\left(-\frac{7}{6}\pi\right)=-\sin\frac{7}{6}\pi=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$\cos\frac{11}{3}\pi=\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\tan\frac{3}{4}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\frac{\pi}{4}=-1$

$\therefore\ \sin\left(-\frac{7}{6}\pi\right)+\cos\frac{11}{3}\pi-\tan\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-(-1)=2$

0494 답 ⑤

$\cos(-\theta)=\frac{1}{5}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$에서 $\cos\theta=\frac{1}{5}\sin\theta$

$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta}{\frac{1}{5}\sin\theta}=5$

0495 답 ①

$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\frac{12}{13}$이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}\ (\because\ \cos\theta<0)$

$\therefore\ \tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}=-\frac{12}{5}$

0496 답 ②

$\cos(\theta-\pi)=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\frac{4}{5}$에서 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$

이때 $\cos\theta<0$, $\tan\theta>0$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

따라서 $\sin\theta<0$이므로

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$

0497 답 ①

$\sin(\pi+\theta)>0$에서 $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$이므로

$\sin\theta<0$

한편 $3\sin\theta-\cos\theta=0$에서 $\cos\theta=3\sin\theta$ ····· ㉠

이를 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$\sin^2\theta+(3\sin\theta)^2=1$, $10\sin^2\theta=1$, $\sin^2\theta=\frac{1}{10}$

$\therefore \sin\theta=-\sqrt{\frac{1}{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$ ($\because \sin\theta<0$)

이를 ㉠에 대입하면

$\cos\theta=3\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

0498 답 ①

직선 $4x+3y=0$의 기울기는 $-\frac{4}{3}$이므로

$a=-3t$, $b=4t$ ($t>0$)로 놓으면

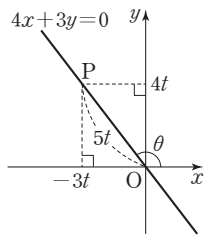
$\overline{OP}=\sqrt{(-3t)^2+(4t)^2}=5t$

$\sin\theta=\frac{4t}{5t}=\frac{4}{5}$, $\cos\theta=\frac{-3t}{5t}=-\frac{3}{5}$

이므로

$\sin(\pi-\theta)-\cos(\pi+\theta)=\sin\theta+\cos\theta$

$=\frac{4}{5}-\frac{3}{5}=\frac{1}{5}$



0499 답 ④

θ는 제2사분면의 각이므로

$\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$, $\tan\theta<0$

$|\tan\theta|=2$이므로 $\tan\theta=-2$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-2$ $\therefore \sin\theta=-2\cos\theta$ ····· ㉠

이를 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에 대입하면

$(-2\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1$, $5\cos^2\theta=1$, $\cos^2\theta=\frac{1}{5}$

$\therefore \cos\theta=-\sqrt{\frac{1}{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ($\because \cos\theta<0$)

이를 ㉠에 대입하면

$\sin\theta=-2\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 구하는 값은

$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}-\cos(5\pi-\theta)\sin\left(\frac{7}{2}\pi+\theta\right)$

$=\frac{\sin\theta(1-\cos\theta)-\sin\theta(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$-\cos(4\pi+\pi-\theta)\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{1-\cos^2\theta}-\cos(\pi-\theta)\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\frac{-2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}+\cos\theta\left\{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right\}$

$=\frac{-2\cos\theta}{\sin\theta}-\cos^2\theta=\frac{-2\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}-\frac{1}{5}$

$=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

0500 답 ⑤

$A+B+C=\pi$이므로

ㄱ. $-\cos(B+C)=-\cos(\pi-A)=\cos A$이므로

$\cos A=-\cos(B+C)$

ㄴ. $\cos\frac{B+C}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}$이므로

$\sin\frac{A}{2}=\cos\frac{B+C}{2}$

ㄷ. $\tan\frac{B+C}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}$이므로

$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B+C}{2}=1$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0501 답 ③

$\cos^2\frac{\pi}{16}=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{7}{16}\pi\right)=\sin^2\frac{7}{16}\pi$,

$\cos^2\frac{3}{16}\pi=\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5}{16}\pi\right)=\sin^2\frac{5}{16}\pi$

이므로

$\cos^2\frac{\pi}{16}+\cos^2\frac{3}{16}\pi+\cos^2\frac{5}{16}\pi+\cos^2\frac{7}{16}\pi$

$=\sin^2\frac{7}{16}\pi+\sin^2\frac{5}{16}\pi+\cos^2\frac{5}{16}\pi+\cos^2\frac{7}{16}\pi$

$=\left(\sin^2\frac{7}{16}\pi+\cos^2\frac{7}{16}\pi\right)+\left(\sin^2\frac{5}{16}\pi+\cos^2\frac{5}{16}\pi\right)$

$=1+1=2$

0502 답 ⑤

$\sin^2\beta=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos^2\alpha$이므로

$\tan^2\alpha\sin^2\beta=\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\times\cos^2\alpha=\sin^2\alpha=\overline{PH}^2$

즉, $\overline{PH}^2=\frac{1}{2}$이므로

$\overline{PH}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because \overline{PH}>0$)

0503 답 $-\frac{4}{5}$

원의 지름에 대한 원주각의 크기는 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이다. ····· ⓘ

직각삼각형 ABP에서

$\alpha+\beta=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$, $\overline{AB}=\sqrt{4^2+3^2}=5$ ····· ⓘⓘ

$\therefore \cos(5\alpha+6\beta)=\cos\{5(\alpha+\beta)+\beta\}=\cos\left(\frac{5}{2}\pi+\beta\right)$

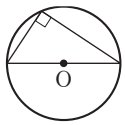
$=\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\beta\right)$

$=-\sin\beta=-\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=-\frac{4}{5}$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\angle APB$의 크기 구하기	30 %
ⓘⓘ 각 $\alpha+\beta$의 크기, 선분 AB의 길이 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ $\cos(5\alpha+6\beta)$의 값 구하기	40 %

중3 다시보기

원의 지름에 대한 원주각의 크기는 90°이다.



0504 답 ⑤

$h(1)=f(1)+g(1)=2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}$

$=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3+3=6$

$h(2)=f(2)+g(2)=2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\tan\frac{2}{3}\pi$

$=2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}+\sqrt{3}\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}$

$=\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\sqrt{3}-3$

$h(3)=f(3)+g(3)=2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{2}+\sqrt{3}\tan\pi=0+0=0$

$h(4)=f(4)+g(4)=2\sqrt{3}\cos\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}\tan\frac{4}{3}\pi$

$=2\sqrt{3}\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\sqrt{3}\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$=-2\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3}$

$=-2\sqrt{3}\times\frac{1}{2}+\sqrt{3}\times\sqrt{3}=-\sqrt{3}+3$

$\therefore\ h(1)+h(2)+h(3)+h(4)$

$=6+(\sqrt{3}-3)+0+(-\sqrt{3}+3)=6$

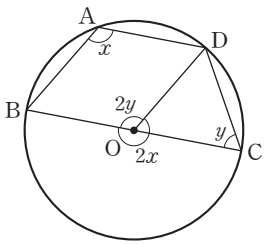
0505 답 ①

$\angle BAD=x$, $\angle BCD=y$라 하자.

그림과 같이 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로

$2x+2y=2\pi$, $x+y=\pi$

$\therefore\ x=\pi-y$



원의 지름에 대한 원주각의 크기는 $\angle BDC=\frac{\pi}{2}$이므로 직각삼각형 BCD에서

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

$\therefore\ \sin A=\sin x=\sin(\pi-y)=\sin y=\frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}=\frac{12}{13}$

0506 답 ④

$\cos^2 1°=\cos^2(90°-89°)=\sin^2 89°$

$\cos^2 3°=\cos^2(90°-87°)=\sin^2 87°$

$\vdots$

$\cos^2 43°=\cos^2(90°-47°)=\sin^2 47°$

이므로

$\cos^2 1°+\cos^2 3°+\cdots+\cos^2 87°+\cos^2 89°$

$=\sin^2 89°+\sin^2 87°+\cdots+\cos^2 87°+\cos^2 89°$

$=(\sin^2 89°+\cos^2 89°)+(\sin^2 87°+\cos^2 87°)$

$+\cdots+(\sin^2 47°+\cos^2 47°)+\cos^2 45°$

$=1\times 22+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=22+\frac{1}{2}=\frac{45}{2}$

0507 답 ②

$10\theta=2\pi$이므로

$5\theta=\pi$, $6\theta=\pi+\theta$, $7\theta=\pi+2\theta$, $8\theta=\pi+3\theta$, $9\theta=\pi+4\theta$

$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin 9\theta$

$=\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\sin 4\theta+\sin\pi$

$+\sin(\pi+\theta)+\sin(\pi+2\theta)+\sin(\pi+3\theta)+\sin(\pi+4\theta)$

$=\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\sin 4\theta+0$

$-\sin\theta-\sin 2\theta-\sin 3\theta-\sin 4\theta$

$=0$

$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 9\theta$

$=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+\cos\pi$

$+\cos(\pi+\theta)+\cos(\pi+2\theta)+\cos(\pi+3\theta)+\cos(\pi+4\theta)$

$=\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cos 4\theta+(-1)$

$-\cos\theta-\cos 2\theta-\cos 3\theta-\cos 4\theta$

$=-1$

$\therefore$ (구하는 식의 값)$=0+(-1)=-1$

0508 답 ②

$f(\sin x)=\cos 6x$에서 x 대신 $\frac{\pi}{2}-x$를 대입하면

$f\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)=\cos 6\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

$\therefore\ f(\cos x)=\cos(3\pi-6x)$

$=\cos(2\pi+\pi-6x)$

$=\cos(\pi-6x)$

$=-\cos 6x$

0509 답 ⑤

$2\sin\alpha\cos\beta+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\delta\right)$

$=2\sin\alpha\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\pi\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha+\frac{3}{2}\pi\right)$

$=-2\sin^2\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\alpha$

$=-2\sin^2\alpha+\sin^2\alpha$

$=-\sin^2\alpha$

즉, $-\sin^2\alpha=-\frac{3}{4}$이므로

$\sin^2\alpha=\frac{3}{4}$

0510 답 $\frac{3}{2}$

$f(1)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$f(2)=\sin\frac{\pi}{2}=1$

$f(3)=\sin\frac{5}{6}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

$f(4)=\sin\frac{7}{6}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$

$f(5)=\sin\frac{3}{2}\pi=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi}{2}=-1$

$f(6)=\sin\frac{11}{6}\pi=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{1}{2}$ ····· ⓘ

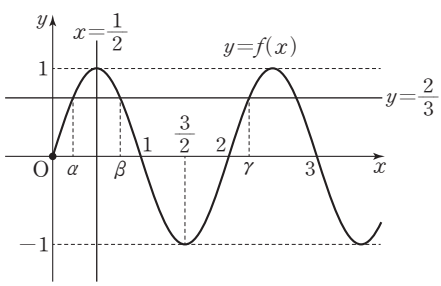
이때 $\sin(2k\pi+\theta)=\sin\theta$ (k는 정수)이므로 $f(n)$은
$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값이 차례대로 반복된다. …… ⅱ

$100=6\times16+4$이므로
$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$
$=\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}\right)\times16+\left(\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$
$=0+\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$ …… ⅲ

채점 기준	
ⅰ $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값 각각 구하기	40 %
ⅱ 함숫값의 규칙 파악하기	40 %
ⅲ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$의 값 구하기	20 %

0511 답 ①

함수 $f(x)=\sin\pi x$의 주기는 $\frac{2\pi}{|\pi|}=2$이므로 …… ㉠
$\gamma=\alpha+2$ …… ㉡
함수 $y=\sin\pi x$의 그래프는 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이므로
$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}$에서 $\alpha+\beta=1$ …… ㉢



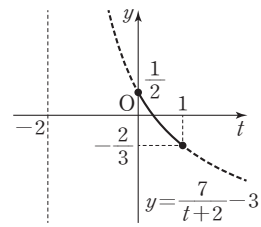
$f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-1$ ($\because$ ㉢)
$f(-\alpha+2\gamma)=f(-\alpha+2(\alpha+2))$ ($\because$ ㉡)
$=f(\alpha+4)$
$=f(\alpha)$ ($\because$ ㉠)
$=\frac{2}{3}$
$\therefore f\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)+f(-\alpha+2\gamma)=-1+\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$

0512 답 ⑤

$y=\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)+\sin x+5$
$=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin x+5$
$=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sin x+5$
$=\sin x+\sin x+5$
$=2\sin x+5$
이때 $-1\le\sin x\le1$이므로
$3\le2\sin x+5\le7$
따라서 $M=7$, $m=3$이므로
$M+m=7+3=10$

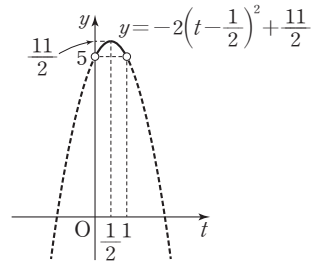
0513 답 ①

$\tan x=t$로 놓으면 $0\le t\le1$이고
$y=\frac{1-3t}{t+2}=\frac{-3(t+2)+7}{t+2}=\frac{7}{t+2}-3$
이 함수의 그래프는 그림과 같으므로
$t=0$일 때 최댓값이 $M=\frac{1}{2}$,
$t=1$일 때 최솟값이 $m=-\frac{2}{3}$이다.
$\therefore Mm=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{2}{3}\right)=-\frac{1}{3}$



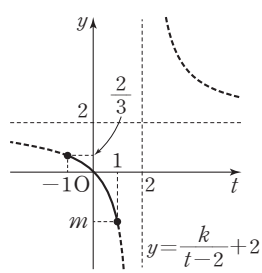
0514 답 ③

$y=2\cos^2x+2\sin x+3$
$=2(1-\sin^2x)+2\sin x+3$
$=-2\sin^2x+2\sin x+5$
$\sin x=t$로 놓으면 $0<t<1$이고
$y=-2t^2+2t+5=-2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{2}$
이 함수의 그래프는 그림과 같으므로 $t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값이 $b=\frac{11}{2}$이다.
즉, $\sin a=\frac{1}{2}$이므로
$a=\frac{\pi}{6}$ $\left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$
$\therefore ab=\frac{\pi}{6}\times\frac{11}{2}=\frac{11}{12}\pi$



0515 답 ②

$y=\frac{2\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)+k-4}{\sin(\pi-x)-2}$
$=\frac{2\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}+x\right)+k-4}{\sin x-2}$
$=\frac{-2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+k-4}{\sin x-2}$
$=\frac{2\sin x+k-4}{\sin x-2}$
$=\frac{2(\sin x-2)+k}{\sin x-2}=\frac{k}{\sin x-2}+2$
$\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고
$y=\frac{k}{t-2}+2$
이 함수의 그래프는 그림과 같다.



$t=-1$일 때 최댓값이 $\frac{2}{3}$이므로

$\frac{k}{-1-2}+2=\frac{2}{3}$ $\therefore k=4$

$t=1$일 때 최솟값이 m이므로

$\frac{4}{1-2}+2=m$ $\therefore m=-2$

$\therefore m-k=-2-4=-6$

0516 답 ④

$g(x)=\sqrt{3}\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$에서

$x+\frac{\pi}{6}=t$로 놓으면 $\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{\pi}{3}$이고

$g(x)=\sqrt{3}\tan t$

이 함수는 $t=\frac{\pi}{3}$일 때 최댓값이 3, $t=\frac{\pi}{6}$일 때 최솟값이 1이다.

따라서 함수 $f(g(x))$는 $g(x)=1$일 때 최댓값이 $-\log_3 1=0$,

$g(x)=3$일 때 최솟값이 $-\log_3 3=-1$이므로 구하는 합은

$0+(-1)=-1$

0517 답 ⑤

$y=a^2\cos x+(a+4)\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+b$

$=a^2\cos x+(a+4)\cos x+b$

$=(a^2+a+4)\cos x+b$

이때 $a^2+a+4>0$이고 $-1\le\cos x\le1$이므로

$-a^2-a-4+b\le y\le a^2+a+4+b$

최댓값이 5이므로

$a^2+a+4+b=5$ ····· ㉠

최솟값이 -7이므로

$-a^2-a-4+b=-7$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면 $2b=-2$

$\therefore b=-1$

이를 ㉠에 대입하면

$a^2+a+4-1=5$

$a^2+a-2=0$

$(a+2)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

$\therefore ab=1\times(-1)=-1$

0518 답 ①

$\sin x=t$로 놓으면 $0<t<1$이고

$y=\frac{8t^2+2}{t}=8t+\frac{2}{t}$

이때 $8t>0$, $\frac{2}{t}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y\ge2\sqrt{8t\times\frac{2}{t}}=8$ $\left(\text{단, 등호는 } 8t=\frac{2}{t}, \text{ 즉 } t=\frac{1}{2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $t=\frac{1}{2}$일 때 최솟값을 가지므로

$\sin\alpha=\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha=\frac{\pi}{6}$ $\left(\because 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$

0519 답 ①

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $\cos x\neq0$이므로

$y=\frac{2\cos x+\sin x}{2\cos x-\sin x}=\frac{2+\frac{\sin x}{\cos x}}{2-\frac{\sin x}{\cos x}}$

$=\frac{2+\tan x}{2-\tan x}=\frac{-(2-\tan x)+4}{2-\tan x}$

$=\frac{4}{2-\tan x}-1$

$\tan x=t$로 놓으면 $0\le t\le1$이고

$y=\frac{4}{2-t}-1$

이 함수의 그래프는 그림과 같으므로

$t=1$일 때 최댓값이 3,

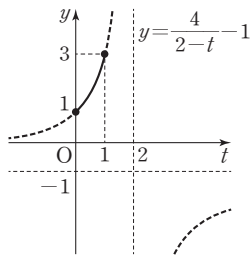
$t=0$일 때 최솟값이 1이다.

따라서 주어진 함수의 치역은

$\{y\,|\,1\le y\le3\}$이므로

$a=1$, $b=3$

$\therefore a+b=1+3=4$



0520 답 ③

$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$

$=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{2}\right)+k$

$x-\frac{3}{4}\pi=\alpha$로 놓으면

$y=\cos^2\alpha-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+k$

$=(1-\sin^2\alpha)+\sin\alpha+k$

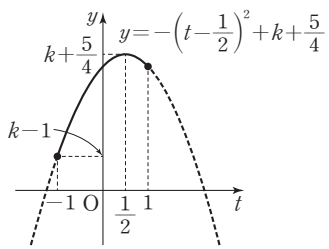
$=-\sin^2\alpha+\sin\alpha+k+1$

$\sin\alpha=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=-t^2+t+k+1$

$=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{5}{4}$

이 함수의 그래프는 그림과 같다.



$t=\frac{1}{2}$일 때 최댓값이 3이므로

$k+\frac{5}{4}=3$

$\therefore k=\frac{7}{4}$

$t=-1$일 때 최솟값이 m이므로

$m=\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}$

$\therefore k+m=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$

0521 답 ⑤

$y=\sin^2 x+2k\cos x+3k-1$

$=(1-\cos^2 x)+2k\cos x+3k-1$

$=-\cos^2 x+2k\cos x+3k$

$\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2+2kt+3k=-(t-k)^2+k^2+3k$

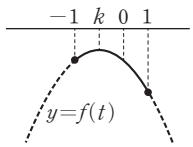
$f(t)=-(t-k)^2+k^2+3k$로 놓으면

(i) $k<0$일 때,

$f(t)$의 최솟값은 $f(1)$이므로

$5k-1=-6$

$\therefore k=-1$



→ $k\le -1$일 때도 $f(t)$의 최솟값은 $f(1)$이다.

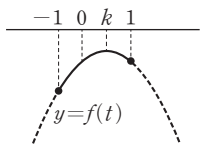
(ii) $k\ge 0$일 때,

$f(t)$의 최솟값은 $f(-1)$이므로

$k-1=-6$

$\therefore k=-5$

그런데 $k=-5$는 $k\ge 0$을 만족시키지 않는다.



→ $k\ge 1$일 때도 $f(t)$의 최솟값은 $f(-1)$이다.

(i), (ii)에서 $k=-1$이고 $f(t)$는 $t=1$, 즉 $\cos x=1$일 때 최솟값을 가지므로 $x=0$ ($\because 0\le x<2\pi$)

$\therefore \alpha=0$

$\therefore \alpha+k=0+(-1)=-1$

최고수준 도전 기출 126~127쪽

0522 답 ④

전략 $\overline{P_1H_1}^2$, $\overline{P_2H_2}^2$, …을 각각 삼각함수를 이용하여 나타낸 후 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 부등식을 간단히 한다.

$\overline{OP_1}=\overline{OP_2}=\overline{OP_3}=\cdots=\overline{OP_{2n-1}}=1$

$\angle P_1OB=\frac{\pi}{2n}$이므로 $\overline{P_1H_1}^2=\sin^2\frac{\pi}{2n}$

$\angle P_2OB=\frac{2\pi}{2n}$이므로 $\overline{P_2H_2}^2=\sin^2\frac{2\pi}{2n}$

⋮

$\angle P_{n-1}OB=\frac{(n-1)\pi}{2n}$이므로

$\overline{P_{n-1}H_{n-1}}^2=\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}$

$\angle P_nOB=\frac{n\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}$이므로

$\overline{P_nH_n}^2=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$

$\angle P_{n+1}OB=\frac{(n+1)\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}$이므로

$\overline{P_{n+1}H_{n+1}}^2=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)=\cos^2\frac{\pi}{2n}$

$\angle P_{n+2}OB=\frac{(n+2)\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2n}$이므로

$\overline{P_{n+2}H_{n+2}}^2=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{2n}\right)=\cos^2\frac{2\pi}{2n}$

⋮

$\angle P_{2n-1}OB=\frac{(2n-1)\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}+\frac{(n-1)\pi}{2n}$이므로

$\overline{P_{2n-1}H_{2n-1}}^2=\sin^2\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{(n-1)\pi}{2n}\right\}=\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n}$

$\therefore \overline{P_1H_1}^2+\overline{P_2H_2}^2+\cdots+\overline{P_{2n-1}H_{2n-1}}^2$

$=\sin^2\frac{\pi}{2n}+\sin^2\frac{2\pi}{2n}+\cdots+\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}+1$

$+\cos^2\frac{\pi}{2n}+\cos^2\frac{2\pi}{2n}+\cdots+\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n}$

$=\left(\sin^2\frac{\pi}{2n}+\cos^2\frac{\pi}{2n}\right)+\left(\sin^2\frac{2\pi}{2n}+\cos^2\frac{2\pi}{2n}\right)$

$+\cdots+\left\{\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}+\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n}\right\}+1$

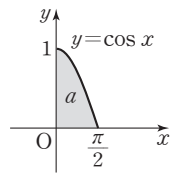
$=1\times(n-1)+1=n$

따라서 주어진 부등식은 $n\ge 120$이므로 구하는 최솟값은 120이다.

0523 답 ⑤

전략 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 대칭성을 이용한다.

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 x축, y축으로 둘러싸인 부분은 그림의 색칠한 부분과 같다.

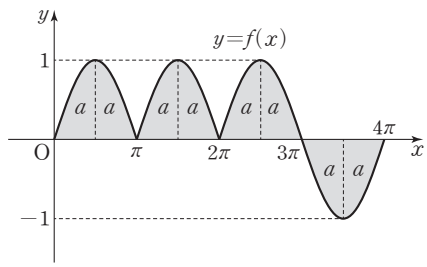


(나)에서 $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$

이므로

$f(x)=\begin{cases}|\sin x| & (0\le x<2\pi)\\ \sin x & (2\pi\le x\le 4\pi)\end{cases}$

즉, $0\le x\le 4\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분은 그림의 색칠한 부분과 같고, 그 넓이는 $8a$이다.



따라서 구하는 넓이는

$2\times 8a+4a=20a$ ($\because$ (가))

0524 답 ④

전략 두 삼각형 OCB, OAD가 직각삼각형임을 이용하여 $\overline{BC}$, $\overline{OD}$를 삼각함수를 이용하여 나타낸다.

직각삼각형 OCB에서 $\angle BOC=\pi-\theta$이므로

$\overline{BC}=\overline{OB}\times\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta=-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

직선 AD는 점 A에서의 접선이므로 두 직선 OA, AD는 서로 수직이다.

따라서 직각삼각형 OAD에서

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OD}}=\dfrac{1}{\overline{OD}}$

$\therefore \overline{OD}=-\dfrac{1}{\cos\theta}$

삼각형 OCD의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{OD}\times\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times\left(-\dfrac{1}{\cos\theta}\right)\times\left(-\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$

$=\dfrac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}$

부채꼴 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times1^2\times(\pi-\theta)=\dfrac{\pi-\theta}{2}$

따라서 어두운 부분의 넓이는

$\dfrac{\sin\theta}{2\cos^2\theta}-\dfrac{\pi-\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}-\pi+\theta\right)$

다른 풀이

선분 OD의 길이를 다음과 같이 구할 수도 있다.

원 위의 점 $A(\cos\theta, \sin\theta)$에서의 접선의 방정식은

$x\cos\theta+y\sin\theta=1$이므로 $y=0$을 대입하면 점 D의 x좌표는

$x=\dfrac{1}{\cos\theta}$

$\therefore \overline{OD}=-\dfrac{1}{\cos\theta}$

공통수학2 다시보기

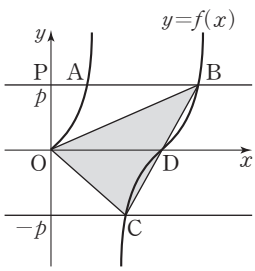
원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=r^2$

0525 답 ③

전략 선분 AB의 길이는 함수 $f(x)$의 주기와 같음을 이용한다.

그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 D라 하자.



함수 $f(x)=\tan\dfrac{x}{k}$의 주기는

$\dfrac{\pi}{\frac{1}{k}}=k\pi$이므로

$\overline{AB}=\overline{OD}=k\pi$

$\overline{AB}=3\overline{PA}$이므로 $\overline{PA}=\dfrac{1}{3}\overline{AB}=\dfrac{k}{3}\pi$

점 A의 좌표는 $\left(\dfrac{k}{3}\pi, p\right)$이고 점 A는 함수 $y=\tan\dfrac{x}{k}$의 그래프 위의 점이므로

$p=\tan\left(\dfrac{1}{k}\times\dfrac{k}{3}\pi\right)=\tan\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

$\therefore \triangle OCB=\triangle ODB+\triangle OCD$

$=\dfrac{1}{2}\times k\pi\times\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\times k\pi\times\sqrt{3}$

$=\sqrt{3}k\pi$

즉, $\sqrt{3}k\pi=\dfrac{5\pi}{3}$이므로

$k=\dfrac{5}{3\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}$

$\therefore k+p=\dfrac{5\sqrt{3}}{9}+\sqrt{3}=\dfrac{14\sqrt{3}}{9}$

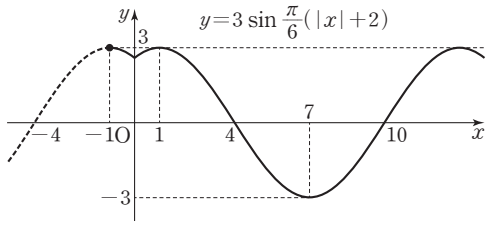
0526 답 ①

전략 주어진 함수의 그래프를 그려 $f(n)$의 값을 구한 후 $g(n)$의 값의 범위를 구한다.

함수 $y=3\sin\dfrac{\pi}{6}(x+2)$는 최댓값이 3, 최솟값이 -3이고 주기는

$\dfrac{2\pi}{\left|\frac{\pi}{6}\right|}=12$이다.

따라서 $x\geq-1$일 때, 함수 $y=3\sin\dfrac{\pi}{6}(|x|+2)$의 그래프는 그림과 같다.



$-1\leq x\leq n$일 때 함수의 최댓값은 n의 값에 관계없이 항상 $f(n)=f(-1)=3$이다.

$3<f(n)-g(n)<6$에서 $3<3-g(n)<6$

$\therefore -3<g(n)<0$

따라서 조건을 만족시키는 n의 값의 범위는 $4<n<7$이므로 자연수 n의 최댓값은 6이다.

0527 답 ②

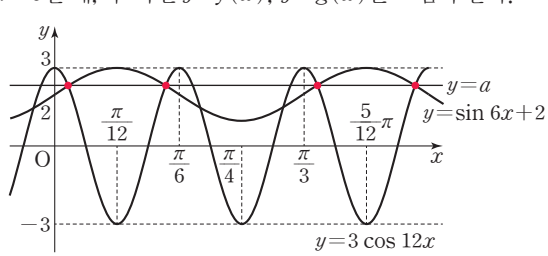
전략 $\{x|f(x)=a\}\subset\{x|g(x)=a\}$의 의미를 파악하고 사인함수와 코사인함수의 그래프의 대칭성을 이용한다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표 a에 대하여 $\{x|f(x)=a\}\subset\{x|g(x)=a\}$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 교점이 반드시 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=a$의 교점이어야 한다.

이때 함수 $f(x)=\sin kx+2$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{k}$, 최댓값은 3, 최솟값은 1이고, 함수 $g(x)=3\cos12x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{12}=\dfrac{\pi}{6}$, 최댓값은 3, 최솟값은 -3이다.

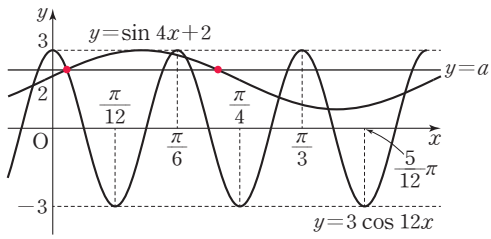
k의 값을 임의로 대입하여 조건을 만족시키는지 알아보자.

(i) $k=6$일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 그림과 같다.



이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 교점이 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=a$의 교점에 포함되므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $k=4$일 때, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 그림과 같다.



이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 y좌표 a에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$의 교점이 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=a$의 교점에 포함되지 않는 경우가 있으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 곡선 $y=f(x)$의 대칭축이 $y=g(x)$의 대칭축에 포함되어야 조건이 성립함을 알 수 있다.

곡선 $f(x)=\sin kx+2$의 주기가 $\frac{2\pi}{k}$이므로 대칭축 중 제1사분면을 지나면서 y축에 가장 가까운 대칭축의 방정식은 사인함수의 그래프의 대칭성에 의하여 $x=\frac{2\pi}{k}\times\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2k}$이다.

또 곡선 $g(x)=3\cos 12x$의 주기는 $\frac{\pi}{6}$이므로 대칭축의 방정식은 코사인함수의 그래프의 대칭성에 의하여 $x=\frac{n}{12}\pi$(n은 정수)이다.

이때 $x=\frac{\pi}{2k}$가 $x=\frac{n}{12}\pi$(n은 정수) 중 하나와 같아야 하므로

$\frac{\pi}{2k}=\frac{n}{12}\pi$ $\therefore k=\frac{6}{n}$

따라서 k는 자연수이므로 조건을 만족시키는 k의 값은 1, 2, 3, 6의 4개이다.

07 삼각방정식과 삼각부등식

난이도별 필수 기출

129~141쪽

0528 답 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$

$\tan^2 x-(\sqrt{3}+1)\tan x+\sqrt{3}=0$에서

$(\tan x-1)(\tan x-\sqrt{3})=0$

$\therefore \tan x=1$ 또는 $\tan x=\sqrt{3}$

이때 $0\le x<\pi$이므로

$\tan x=1$에서 $x=\frac{\pi}{4}$

$\tan x=\sqrt{3}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$

따라서 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$

0529 답 ①

$2x=t$로 놓으면 $0\le x\le\pi$에서 $0\le t\le 2\pi$이고

$\sin t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore t=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $t=\frac{7}{4}\pi$

즉, $2x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $2x=\frac{7}{4}\pi$이므로

$x=\frac{5}{8}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{8}\pi$

따라서 주어진 방정식의 두 근의 차는

$\frac{7}{8}\pi-\frac{5}{8}\pi=\frac{\pi}{4}$

0530 답 7

$\cos^2 x-\sin x=1$에서 $(1-\sin^2 x)-\sin x=1$

$\sin^2 x+\sin x=0$, $\sin x(\sin x+1)=0$

$\therefore \sin x=-1$ 또는 $\sin x=0$

이때 $0<x<2\pi$이므로

$\sin x=-1$에서 $x=\frac{3}{2}\pi$

$\sin x=0$에서 $x=\pi$

주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$\frac{3}{2}\pi+\pi=\frac{5}{2}\pi$

따라서 $p=2$, $q=5$이므로

$p+q=2+5=7$

0531 답 ④

함수 $y=4\sin\frac{\pi}{6}x$의 그래프와 직선 $y=2$가 만나는 점의 x좌표는 방정식 $4\sin\frac{\pi}{6}x=2$, 즉 $\sin\frac{\pi}{6}x=\frac{1}{2}$의 실근과 같다.

$\frac{\pi}{6}x=t$로 놓으면 $0\le x\le 6$에서 $0\le t\le\pi$이고

$\sin t=\frac{1}{2}$ $\therefore t=\frac{\pi}{6}$ 또는 $t=\frac{5}{6}\pi$

즉, $\frac{\pi}{6}x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{\pi}{6}x=\frac{5}{6}\pi$이므로

$x=1$ 또는 $x=5$

따라서 함수 $y=4\sin\frac{\pi}{6}x$의 그래프와 직선 $y=2$가 만나는 두 점 사이의 거리는

$5-1=4$

0532 답 ①

$(\sin x+\cos x)^2-1=\sqrt{3}\sin x$에서

$\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-1=\sqrt{3}\sin x$

$1+2\sin x\cos x-1=\sqrt{3}\sin x$

$\sin x(2\cos x-\sqrt{3})=0$

$\therefore \sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

이때 $0\le x\le\pi$이므로

$\sin x=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\pi$

$\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{6}$

따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$0+\pi+\frac{\pi}{6}=\frac{7}{6}\pi$

0533 답 ②

두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$의 그래프가 만나는 점의 x좌표는 방정식 $\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$의 실근과 같다.

$\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$에서 $\sin x=-\sin x+1$

$2\sin x=1 \quad \therefore \sin x=\frac{1}{2}$

이때 $0\le x<2\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

따라서 두 함수의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표의 합은

$\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\pi$

0534 답 ④

$2\sin x(2\cos x-1)=2\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}$에서

$2\sin x(2\cos x-1)-\sqrt{3}(2\cos x-1)=0$

$(2\sin x-\sqrt{3})(2\cos x-1)=0$

$\therefore \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

이때 $0\le x<2\pi$이므로

$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

$\cos x=\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi=\frac{8}{3}\pi$

따라서 $a=3$, $b=8$이므로

$a+b=3+8=11$

0535 답 ④

$\pi\cos x=t$로 놓으면 $0\le x\le2\pi$에서 $-\pi\le t\le\pi$이고

$\sin t=0$

$\therefore t=-\pi$ 또는 $t=0$ 또는 $t=\pi$

즉, $\pi\cos x=-\pi$ 또는 $\pi\cos x=0$ 또는 $\pi\cos x=\pi$이므로

$\cos x=-1$ 또는 $\cos x=0$ 또는 $\cos x=1$

이때 $0\le x\le2\pi$이므로

$\cos x=-1$에서 $x=\pi$

$\cos x=0$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

$\cos x=1$에서 $x=0$ 또는 $x=2\pi$

따라서 주어진 방정식의 모든 실근의 합은

$\pi+\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi+0+2\pi=5\pi$

0536 답 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{3}\pi$

$6\sin^2 x-5\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2=0$에서

$6(1-\cos^2 x)-5\cos x-2=0$

$6\cos^2 x+5\cos x-4=0$

$(3\cos x+4)(2\cos x-1)=0$

$\therefore \cos x=\frac{1}{2}$ ($\because -1\le\cos x\le1$)

이때 $0\le x<3\pi$이므로 주어진 방정식의 해는

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{3}\pi$

0537 답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$4\cos^2 A-4\sin A=1$에서

$4(1-\sin^2 A)-4\sin A=1$ …… i

$4\sin^2 A+4\sin A-3=0$

$(2\sin A+3)(2\sin A-1)=0$

$\therefore \sin A=\frac{1}{2}$ ($\because -1\le\sin A\le1$)

이때 $0<A<\frac{\pi}{2}$이므로

$A=\frac{\pi}{6}$ …… ii

삼각형의 세 내각의 크기의 합은 π이므로

$\cos(B+C)=\cos(\pi-A)$

$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=-\cos\frac{\pi}{6}$

$=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ …… iii

채점 기준	
i 주어진 등식을 $\sin A$에 대한 식으로 나타내기	30 %
ii A의 값 구하기	30 %
iii $\cos(B+C)$의 값 구하기	40 %

0538 답 ③

곡선 $y=2\cos ax$와 직선 $y=1$이 만나는 점의 x좌표는 방정식 $2\cos ax=1$, 즉 $\cos ax=\frac{1}{2}$의 실근과 같다.

$ax=t$로 놓으면 $0\le x\le\frac{2\pi}{a}$에서 $0\le t\le 2\pi$이고

$\cos t=\frac{1}{2}$ $\therefore t=\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\frac{5}{3}\pi$

즉, $ax=\frac{\pi}{3}$ 또는 $ax=\frac{5}{3}\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3a}$ 또는 $x=\frac{5}{3a}\pi$ $\therefore \mathrm{A}\left(\frac{\pi}{3a},\ 1\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{5}{3a}\pi,\ 1\right)$

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{8}{3}$이므로 $\frac{5}{3a}\pi-\frac{\pi}{3a}=\frac{8}{3}$

$\frac{4}{3a}\pi=\frac{8}{3}$, $8a=4\pi$ $\therefore a=\frac{\pi}{2}$

0539 답 $-\frac{1}{4}$

$0<x<\pi$에서 $g(x)=\sin x$, $g(f^{-1}(x))=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$f^{-1}(x)=\frac{\pi}{3}$ 또는 $f^{-1}(x)=\frac{2}{3}\pi$ …… ⓘ

$f(x)=\cos x$이므로 역함수의 정의에 의하여

(i) $f^{-1}(x)=\frac{\pi}{3}$일 때, $x=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

(ii) $f^{-1}(x)=\frac{2}{3}\pi$일 때, $x=\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $\alpha\beta$의 값은 $\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f^{-1}(x)$의 값 모두 구하기	50 %
ⓘⓘ $\alpha\beta$의 값 구하기	50 %

0540 답 36

$f(g(x))=g(x)$에서 $g(x)=t(-1\le t\le 1)$로 놓으면

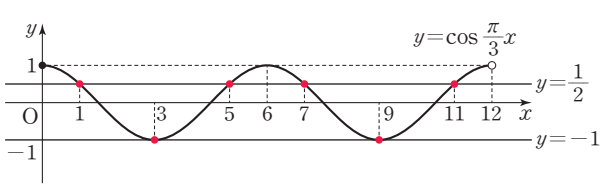
$f(t)=t$이므로 $2t^2+2t-1=t$, $2t^2+t-1=0$

$(t+1)(2t-1)=0$ $\therefore t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

즉, $g(x)=-1$ 또는 $g(x)=\frac{1}{2}$이므로

$\cos\frac{\pi}{3}x=-1$ 또는 $\cos\frac{\pi}{3}x=\frac{1}{2}$

$0\le x<12$에서 함수 $y=\cos\frac{\pi}{3}x$의 그래프와 두 직선 $y=-1$, $y=\frac{1}{2}$은 그림과 같다.



$\cos\frac{\pi}{3}x=-1$에서 $x=3$ 또는 $x=9$

$\cos\frac{\pi}{3}x=\frac{1}{2}$에서 $x=1$ 또는 $x=5$ 또는 $x=7$ 또는 $x=11$

따라서 주어진 방정식을 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합은

$3+9+1+5+7+11=36$

0541 답 ④

$\log_{\sin x}\cos x+\log_{\cos x}\tan x=1$에서

$\log_{\sin x}\cos x+\log_{\cos x}\frac{\sin x}{\cos x}=1$

$\log_{\sin x}\cos x+\log_{\cos x}\sin x-1=1$

$\frac{1}{\log_{\cos x}\sin x}+\log_{\cos x}\sin x-2=0$

양변에 $\log_{\cos x}\sin x$를 곱하여 정리하면

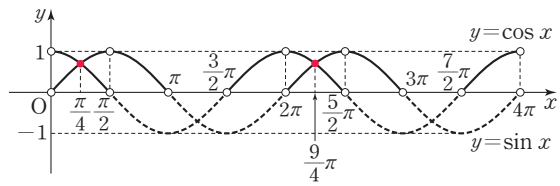
$(\log_{\cos x}\sin x)^2-2\log_{\cos x}\sin x+1=0$

$(\log_{\cos x}\sin x-1)^2=0$

$\log_{\cos x}\sin x=1$

$\therefore \sin x=\cos x$

$0<x<4\pi$에서 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 교점의 x좌표는 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{9}{4}\pi$이므로 주어진 방정식의 두 근의 차는

$\frac{9}{4}\pi-\frac{\pi}{4}=2\pi$

0542 답 55

$\cos^2 3x=1$에서 $\cos 3x=-1$ 또는 $\cos 3x=1$이므로

$3x=k\pi$ (단, k는 정수이다.)

$\therefore x=\frac{k}{3}\pi$

$0<x<\frac{n}{4}\pi$에서 $0<k<\frac{3}{4}n$

이때 주어진 방정식의 실근의 개수는 위 부등식을 만족시키는 정수 k의 개수와 같다.

방정식의 실근의 개수가 $f(n)=20$이므로

$20<\frac{3}{4}n\le 21$

$\therefore \frac{80}{3}<n\le 28$

따라서 $f(n)=20$을 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합은

$27+28=55$

0543 답 2

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근과 같으므로

$a\sin\pi x=a\cos\pi x$

$\frac{\sin\pi x}{\cos\pi x}=1$

$\therefore \tan\pi x=1$

$0\le x\le 3$에서 $0\le\pi x\le 3\pi$이므로

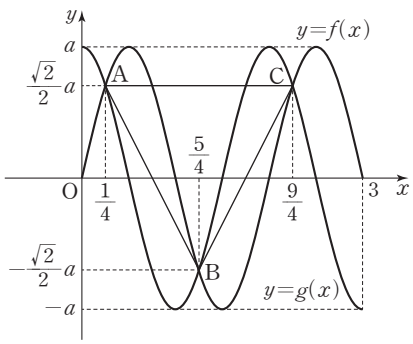
$\pi x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $\pi x=\frac{5}{4}\pi$ 또는 $\pi x=\frac{9}{4}\pi$

$\therefore x=\frac{1}{4}$ 또는 $x=\frac{5}{4}$ 또는 $x=\frac{9}{4}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 세 점의 좌표는

$\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $\left(\frac{5}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $\left(\frac{9}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$

그림과 같이 $A\left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $B\left(\frac{5}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $C\left(\frac{9}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$라 하자.



삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\{2\times(\text{점 A의 } y\text{좌표})\}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{4}\right)\times\left(2\times\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$

$=\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}a=\sqrt{2}a$

즉, $\sqrt{2}a=2$이므로 $a=\sqrt{2}$

$\therefore a^2=(\sqrt{2})^2=2$

0544 답 ③

$f(2\cos x)=2$에서 $2\cos x=t$로 놓으면 $0\le x<2\pi$에서

$-2\le t\le2$이고 $f(t)=2$

$-2\le x\le2$인 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 $f(x)=2$인 x좌표는

-1, 1이므로 $t=-1$ 또는 $t=1$

즉, $2\cos x=-1$ 또는 $2\cos x=1$이므로

$\cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

이때 $0\le x<2\pi$이므로

(i) $\cos x=-\frac{1}{2}$일 때, 실근은 $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{4}{3}\pi$의 2개

(ii) $\cos x=\frac{1}{2}$일 때, 실근은 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi$의 2개

(i), (ii)에서 방정식 $f(2\cos x)=2$의 실근의 개수는

$2+2=4$

0545 답 ④

$\sin(x-y)\cos(x+y)=0$이므로

$\sin(x-y)=0$ 또는 $\cos(x+y)=0$

(i) $\sin(x-y)=0$일 때,

$x-y=n\pi$ (단, n은 정수이다.)

$\therefore y=x-n\pi$

(ii) $\cos(x+y)=0$일 때,

$x+y=m\pi+\frac{\pi}{2}$ (단, m은 정수이다.)

$\therefore y=-x+m\pi+\frac{\pi}{2}$

(i), (ii)에서 점 $P(x, y)$가 나타내는 도형을 좌표평면 위에 나타낸 것은 ④이다.

0546 답 ③

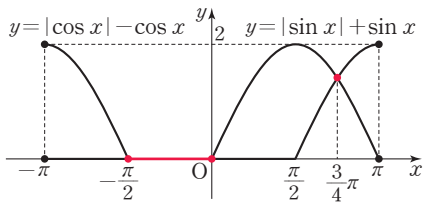
$|\sin x|+\sin x=\begin{cases}2\sin x & (\sin x\ge0)\\ 0 & (\sin x<0)\end{cases}$

$|\cos x|-\cos x=\begin{cases}0 & (\cos x\ge0)\\ -2\cos x & (\cos x<0)\end{cases}$

$-\pi\le x\le\pi$에서 $0\le x\le\pi$일 때 $\sin x\ge0$,

$-\pi\le x<-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}<x\le\pi$일 때 $\cos x<0$이므로 두 함수

$y=|\sin x|+\sin x$, $y=|\cos x|-\cos x$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 주어진 방정식의 해는

$-\frac{\pi}{2}\le x\le0$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

0547 답 24

곡선 $y=4\sin\frac{x-\pi}{4}$와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표는 방정식

$4\sin\frac{x-\pi}{4}=2$, 즉 $\sin\frac{x-\pi}{4}=\frac{1}{2}$의 실근과 같다.

$\frac{x-\pi}{4}=t$로 놓으면 $0\le x\le10\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}\le t\le\frac{9}{4}\pi$이고

$\sin t=\frac{1}{2}$

$\therefore t=\frac{\pi}{6}$ 또는 $t=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $t=\frac{13}{6}\pi$

즉, $\frac{x-\pi}{4}=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{x-\pi}{4}=\frac{5}{6}\pi$ 또는 $\frac{x-\pi}{4}=\frac{13}{6}\pi$이므로

$x=\frac{5}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{13}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{29}{3}\pi$

따라서 만나는 세 점의 좌표는

$\left(\frac{5}{3}\pi, 2\right)$, $\left(\frac{13}{3}\pi, 2\right)$, $\left(\frac{29}{3}\pi, 2\right)$

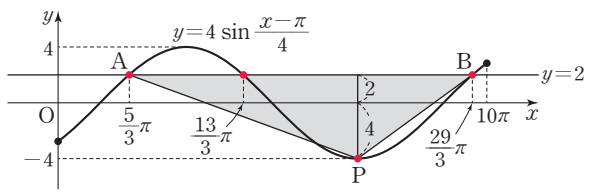
함수 $y=4\sin\frac{x-\pi}{4}$의 치역이 $\{y|-4\le y\le4\}$이므로 점 P와 직선 $y=2$ 사이의 거리를 h라 하면 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times h$

이때 $\overline{AB}$의 최댓값은

$\frac{29}{3}\pi-\frac{5}{3}\pi=8\pi$

h의 최댓값은 $2-(-4)=6$



따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

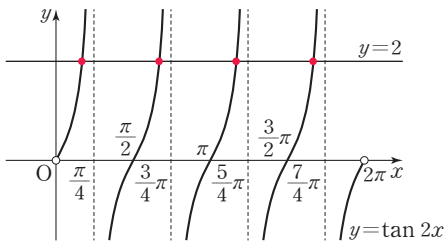
$\frac{1}{2}\times8\pi\times6=24\pi$

$\therefore k=24$

0548 답 ③

$0<x<2\pi$에서 방정식 $\tan 2x=2$의 실근은 함수 $y=\tan 2x$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표와 같다.

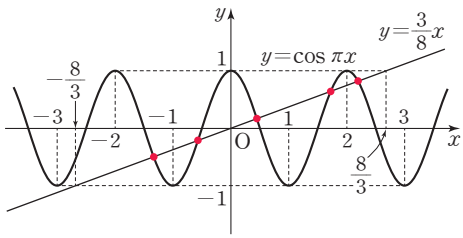
그림과 같이 함수 $y=\tan 2x$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 개수는 4이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



0549 답 ①

방정식 $\cos \pi x-\frac{3}{8}x=0$, 즉 $\cos \pi x=\frac{3}{8}x$의 실근은 함수 $y=\cos \pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{8}x$의 교점의 x좌표와 같다.

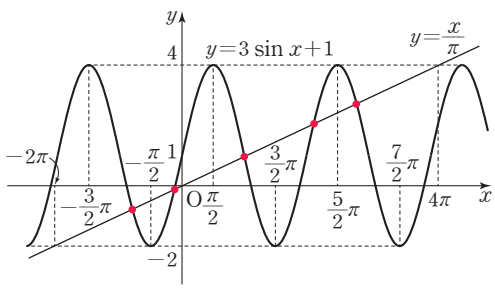
그림과 같이 함수 $y=\cos \pi x$의 그래프와 직선 $y=\frac{3}{8}x$의 교점의 개수는 5이므로 주어진 방정식을 만족시키는 모든 실수 x의 개수는 5이다.



0550 답 ④

방정식 $3\sin x+1=\frac{x}{\pi}$의 실근은 함수 $y=3\sin x+1$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{\pi}$의 교점의 x좌표와 같다.

그림과 같이 함수 $y=3\sin x+1$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{\pi}$의 교점의 개수는 5이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.



0551 답 0

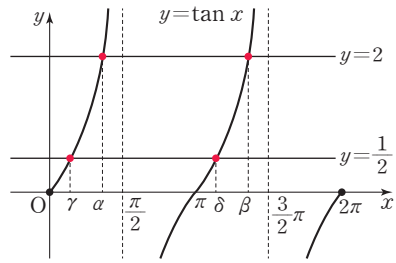
$0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $\tan x=2$의 실근은 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표와 같다.

두 교점의 x좌표가 각각 α, β이므로 $\alpha<\beta$라 하면 $\beta=\pi+\alpha$

또 방정식 $\tan x=\frac{1}{2}$의 실근은 함수 $y=\tan x$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표와 같다.

두 교점의 x좌표가 각각 γ, δ이므로 $\gamma<\delta$라 하면

$\delta=\pi+\gamma$ …… ⓘ



이때 $\tan \alpha=2$, $\tan \gamma=\frac{1}{2}$이므로

$\tan \alpha=\frac{1}{\tan \gamma}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)$에서 $\alpha=\frac{\pi}{2}-\gamma$

$\therefore \alpha+\gamma=\frac{\pi}{2}$ …… ㉠

$\therefore \beta+\delta=(\pi+\alpha)+(\pi+\gamma)=2\pi+(\alpha+\gamma)=\frac{5}{2}\pi$ …… ㉡

…… ⓘⓘ

㉠, ㉡에서 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\frac{\pi}{2}+\frac{5}{2}\pi=3\pi$

$\therefore \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=\sin 3\pi=0$ …… ⓘⓘⓘ

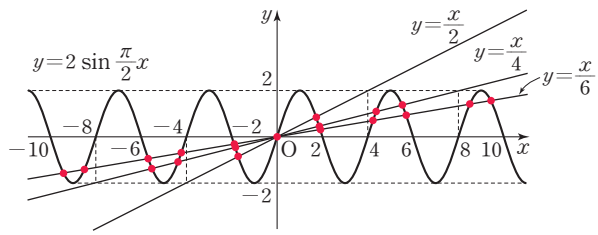
채점 기준

ⓘ β, δ를 각각 α, γ에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘ $\alpha+\gamma$, $\beta+\delta$의 값 각각 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$의 값 구하기	30 %

0552 답 ③

방정식 $2\sin \frac{\pi}{2}x=\frac{x}{2n}$의 실근은 함수 $y=2\sin \frac{\pi}{2}x$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{2n}$의 교점의 x좌표와 같다.

함수 $y=2\sin \frac{\pi}{2}x$의 그래프와 $n=1, 2, 3, \cdots$일 때 직선 $y=\frac{x}{2n}$는 그림과 같다.



(i) $n=1$일 때, 함수 $y=2\sin \frac{\pi}{2}x$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{2}$의 교점의 개수는 3

(ii) $n=2$일 때, 함수 $y=2\sin \frac{\pi}{2}x$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{4}$의 교점의 개수는 $3+4=7$

(iii) $n=3$일 때, 함수 $y=2\sin \frac{\pi}{2}x$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{6}$의 교점의 개수는 $3+4+4=11$

⋮

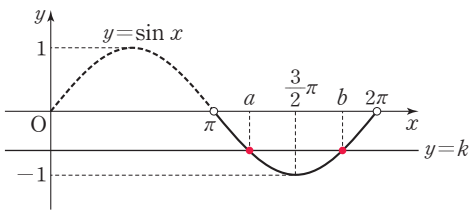
따라서 함수 $y=2\sin \frac{\pi}{2}x$의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{2n}$의 교점의 개수는 $3+4(n-1)=4n-1$이므로

$4n-1=19$ $\therefore n=5$

0553 답 ④

$\sin a=\sin b=k$(k는 상수)라 하면 a, b는 $\pi<x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표와 같다.

그림과 같이 함수 $y=\sin x$의 그래프는 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이므로 $\frac{a+b}{2}=\frac{3}{2}\pi$ $\therefore a+b=3\pi$

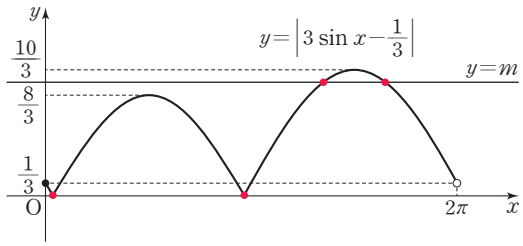


$\therefore \sin(a+b)-\cos(a+b)=\sin 3\pi-\cos 3\pi$
$=0-(-1)=1$

0554 답 ③

$0\le x<2\pi$에서 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=\left|3\sin x-\frac{1}{3}\right|$의 그래프와 직선 $y=m$이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

함수 $y=\left|3\sin x-\frac{1}{3}\right|$의 그래프는 함수 $y=3\sin x-\frac{1}{3}$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이므로 그림과 같이 $m=0$ 또는 $\frac{8}{3}<m<\frac{10}{3}$이어야 한다.



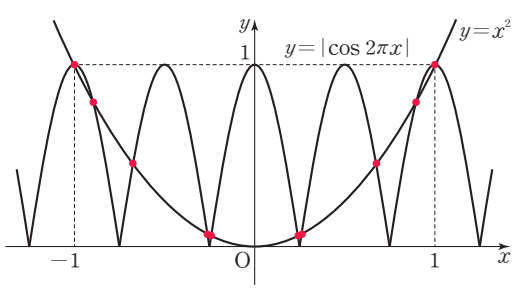
따라서 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 정수 m의 값의 합은 $0+3=3$

0555 답 ④

방정식 $|\cos 2\pi x|=x^2$의 실근은 두 함수 $y=|\cos 2\pi x|$, $y=x^2$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

함수 $y=|\cos 2\pi x|$의 그래프는 함수 $y=\cos 2\pi x$의 그래프에서 $y<0$인 부분을 x축에 대하여 대칭이동한 것이다.

그림과 같이 두 함수 $y=|\cos 2\pi x|$, $y=x^2$의 그래프의 교점의 개수는 10이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 10이다.



0556 답 ②

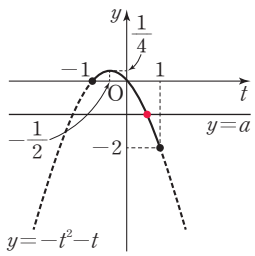
$\cos^2 x-\sin x-(a+1)=0$에서
$(1-\sin^2 x)-\sin x-(a+1)=0$
$\therefore a=-\sin^2 x-\sin x$

이 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y=-\sin^2 x-\sin x$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점이 존재해야 한다.

$y=-\sin^2 x-\sin x$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le 1$이고

$y=-t^2-t=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$

따라서 그림과 같이 주어진 방정식이 실근을 갖기 위한 실수 a의 값의 범위는 $-2\le a\le\frac{1}{4}$



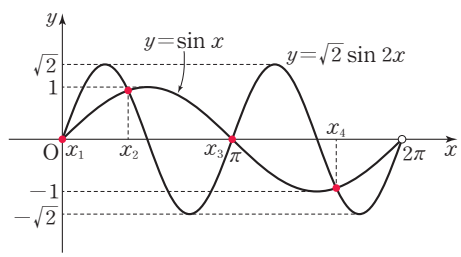
0557 답 ④

$\sqrt{2}\sin 2x-\sin x=0$에서 $\sqrt{2}\sin 2x=\sin x$

$0\le x<2\pi$에서 방정식 $\sqrt{2}\sin 2x=\sin x$의 실근은 두 함수 $y=\sqrt{2}\sin 2x$, $y=\sin x$ 그래프의 교점의 x좌표와 같다.

그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 두 함수 $y=\sqrt{2}\sin 2x$, $y=\sin x$의 그래프의 교점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 x_1, x_2, x_3, x_4라 하면 두 점 x_1, x_3은 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이고, x_2, x_4는 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

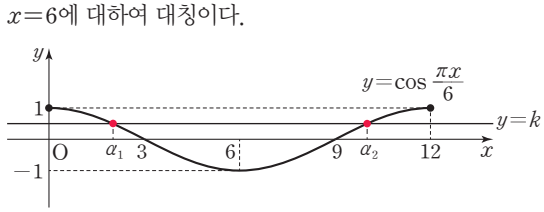
$\frac{x_1+x_3}{2}=\frac{\pi}{2}$, $\frac{x_2+x_4}{2}=\pi$ $\therefore x_1+x_3=\pi$, $x_2+x_4=2\pi$



따라서 주어진 방정식의 모든 근의 합은
$x_1+x_2+x_3+x_4=\pi+2\pi=3\pi$

0558 답 ③

함수 $f(x)=\cos\frac{\pi x}{6}$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$이므로 $0\le x\le 12$에서 곡선 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$($-1<k<1$)가 만나는 두 점은 직선 $x=6$에 대하여 대칭이다.



$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}=6$에서 $\alpha_1+\alpha_2=12$ ····· ㉠

$\alpha_1<\alpha_2$라 하면 $|\alpha_1-\alpha_2|=8$에서 $\alpha_1-\alpha_2=-8$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha_1=2$, $\alpha_2=10$

$f(\alpha_1)=k$에서 $f(2)=k$이므로

$k=\cos\frac{2\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ → $\alpha_1>\alpha_2$인 경우에도 같은 방법으로 하면 $\alpha_1=10$, $\alpha_2=2$, $k=\frac{1}{2}$이다.

$-3\cos\frac{\pi x}{6}-1=\frac{1}{2}$에서 $-3\cos\frac{\pi x}{6}=\frac{3}{2}$

$\therefore \cos\frac{\pi x}{6}=-\frac{1}{2}$

$\frac{\pi x}{6}=t$로 놓으면 $0\le x\le 12$에서 $0\le t\le 2\pi$이고

$\cos t=-\frac{1}{2}$ $\quad\therefore t=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $t=\frac{4}{3}\pi$

즉, $\frac{\pi x}{6}=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{\pi x}{6}=\frac{4}{3}\pi$이므로 $x=4$ 또는 $x=8$

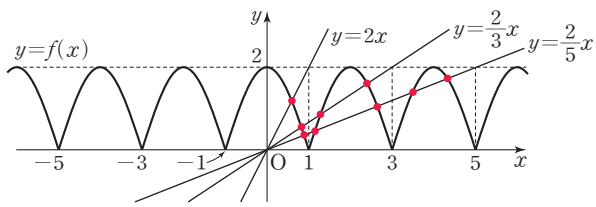
따라서 $\beta_1=4$, $\beta_2=8$ 또는 $\beta_1=8$, $\beta_2=4$이므로

$|\beta_1-\beta_2|=4$

0559 답 ②

㈐에서 방정식 $(2n-1)f(x)=2x$, 즉 $f(x)=\frac{2}{2n-1}x$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{2n-1}x$의 교점의 x좌표와 같다.

㈎, ㈏에서 함수 $f(x)$는 주기가 2이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $n=1, 2, 3, \cdots$일 때 직선 $y=\frac{2}{2n-1}x$는 그림과 같다.



(i) $n=1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x$의 교점의 개수는 1

(ii) $n=2$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3}x$의 교점의 개수는 $1+2=3$

(iii) $n=3$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{5}x$의 교점의 개수는 $1+2+2=5$

⋮

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{2n-1}x$의 교점의 개수는 $1+2(n-1)=2n-1$이므로

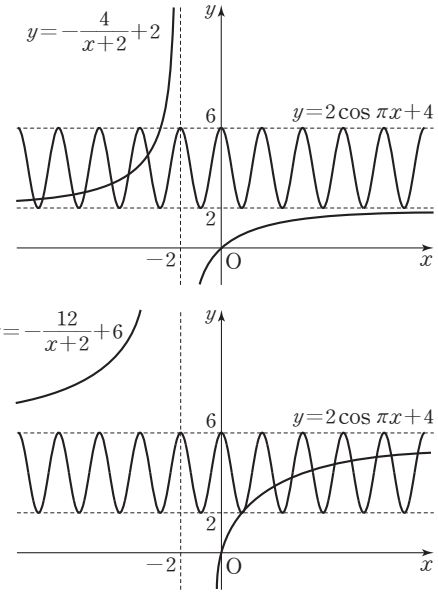
$2n-1=51$ $\quad\therefore n=26$

0560 답 ③

함수 $y=2\cos\pi x+4$는 주기가 $\frac{2\pi}{\pi}=2$이고, 최댓값이 6, 최솟값이 2이므로 치역은 $\{y\,|\,2\le y\le 6\}$이다. 즉, 이 함수의 그래프는 y의 값이 2와 6 사이에서 주기적으로 계속 반복된다.

한편 유리함수 $y=-\frac{2a}{x+2}+a$의 그래프의 점근선은 $x=-2$, $y=a$이므로 두 그래프의 교점이 무수히 많으려면 점근선 $y=a$가 함수 $y=2\cos\pi x+4$의 치역의 범위 내에 위치해야 한다.

$a=2$일 때 $y=-\frac{4}{x+2}+2$, $a=6$일 때 $y=-\frac{12}{x+2}+6$이고, 그래프는 다음과 같다.



즉, 주어진 방정식의 해가 무수히 많도록 하는 a의 값의 범위는

$2\le a\le 6$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$2+3+4+5+6=20$

✓ 공통수학2 다시보기

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q\,(k\ne 0)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=p$, $y=q$

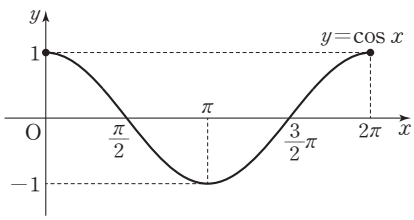
0561 답 ②

$2\sin^2 x-3\cos x=k$에서

$2(1-\cos^2 x)-3\cos x=k$

$2\cos^2 x+3\cos x+k-2=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

한편 $0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프는 그림과 같다.



상수 $a\,(-1\le a\le 1)$에 대하여 $0\le x\le 2\pi$에서 곡선 $y=\cos x$와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 $a=-1$일 때 1이고, $-1<a\le 1$일 때 2이다.

따라서 $0\le x\le 2\pi$일 때, 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면 $\cos x=-1$, 즉 $x=\pi$가 이 방정식의 한 실근이어야 한다.

$x=\pi$를 ㉠에 대입하면

$2\times(-1)^2+3\times(-1)+k-2=0$

$2-3+k-2=0$

$\therefore k=3$

$k=3$을 ㉠에 대입하면

$2\cos^2 x+3\cos x+1=0$

$(\cos x+1)(2\cos x+1)=0$

$\therefore \cos x=-1$ 또는 $\cos x=-\frac{1}{2}$

$\therefore x=\pi$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

따라서 세 실근 중 가장 큰 실근은 $\frac{4}{3}\pi$이므로

$\alpha=\frac{4}{3}\pi$

$\therefore k\times\alpha=3\times\frac{4}{3}\pi=4\pi$

0562 답 ⑤

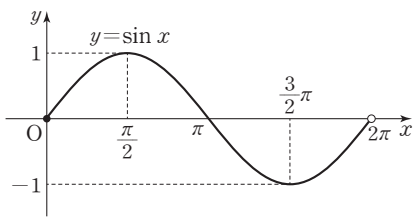
$\left|4\sin x-\frac{k}{2}\right|=1$에서

$4\sin x-\frac{k}{2}=-1$ 또는 $4\sin x-\frac{k}{2}=1$

$\therefore \sin x=\frac{k-2}{8}$ 또는 $\sin x=\frac{k+2}{8}$

$k\ge 0$이므로 $\frac{k+2}{8}>\frac{k-2}{8}\ge -\frac{1}{4}$ ····· ㉠

한편 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\sin x$의 그래프는 그림과 같다.



상수 $a(-1\le a\le 1)$에 대하여 $0\le x<2\pi$에서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=a$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 $a=-1$ 또는 $a=1$일 때 1이고, $-1<a<1$일 때 2이다.

ㄱ. $k=1$일 때, $0\le x<2\pi$에서 $\sin x=-\frac{1}{8}$ 또는 $\sin x=\frac{3}{8}$의 실근의 개수는 $2+2=4$

ㄴ. $f(k)=0$, 즉 $0\le x<2\pi$에서 $\sin x=\frac{k-2}{8}$ 또는 $\sin x=\frac{k+2}{8}$의 서로 다른 실근의 개수가 0이려면

$\frac{k-2}{8}>1$ ($\because$ ㉠) $\therefore k>10$

즉, 음이 아닌 정수 k의 최솟값은 11이다.

ㄷ. $f(k)=1$, 즉 $0\le x<2\pi$에서 $\sin x=\frac{k-2}{8}$ 또는 $\sin x=\frac{k+2}{8}$의 서로 다른 실근의 개수가 1이려면

$\frac{k-2}{8}=1$ ($\because$ ㉠) $\therefore k=10$

즉, k의 값은 1개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0563 답 4

$m\sin nx=-2\sin nx+3$에서 $(m+2)\sin nx=3$

$\therefore \sin nx=\frac{3}{m+2}$ ····· ㉠

이때 n은 자연수이므로 함수 $y=\sin nx$의 주기는 $\frac{2\pi}{n}$이고

$0\le x<2\pi$에서 한 주기가 n번 반복된다.

또 m은 자연수이므로

$0<\frac{3}{m+2}\le 1$ ····· ⓘ

(i) $m=1$일 때,

㉠에서 $\sin nx=1$이므로 한 주기마다 실근은 1개이다.

따라서 실근의 개수는 n

(ii) $m\ge 2$일 때,

㉠에서 한 주기마다 실근은 2개이다.

따라서 실근의 개수는 $2n$ ····· ⓘⓘ

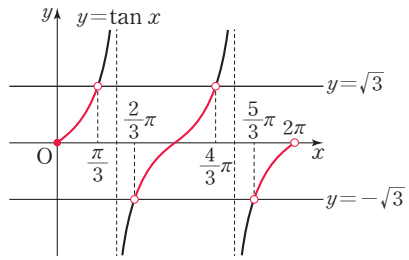
(i), (ii)에서 n이 짝수일 때 m의 최솟값은 1, n이 홀수일 때 m의 최솟값은 2이므로

$f(1)f(2)f(3)f(4)=2\times 1\times 2\times 1=4$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 방정식의 실근이 존재하기 위한 m의 값의 범위 구하기	30 %
ⓘⓘ m의 값에 따른 실근의 개수 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $f(1)f(2)f(3)f(4)$의 값 구하기	30 %

0564 답 ③

$0\le x<2\pi$에서 부등식 $-\sqrt{3}<\tan x<\sqrt{3}$의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=-\sqrt{3}$보다 위쪽에 있고 직선 $y=\sqrt{3}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.



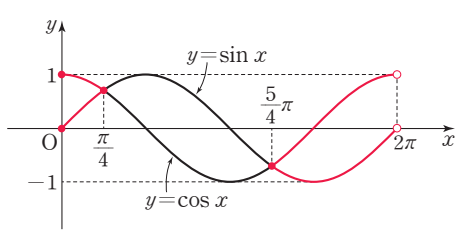
따라서 주어진 부등식의 해는

$0\le x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{2}{3}\pi<x<\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi<x<2\pi$

이므로 조건을 만족시키는 x의 값은 ③이다.

0565 답 $0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi\le x<2\pi$

$0\le x<2\pi$에서 부등식 $\cos x\ge\sin x$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 함수 $y=\sin x$의 그래프와 만나거나 함수 $y=\sin x$의 그래프보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.



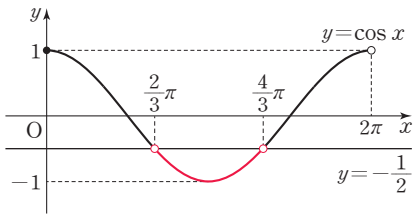
따라서 주어진 부등식의 해는

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5}{4}\pi\le x<2\pi$

0566 답 ②

$2\cos x+1<0$에서 $\cos x<-\frac{1}{2}$

$0\le x<2\pi$에서 부등식 $\cos x<-\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.



따라서 주어진 부등식의 해는 $\frac{2}{3}\pi<x<\frac{4}{3}\pi$이므로

$\alpha=\frac{2}{3}\pi$, $\beta=\frac{4}{3}\pi$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{4}{3}\pi-\frac{2}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi$

0567 답 $\frac{7}{6}\pi<x<\frac{5}{4}\pi$

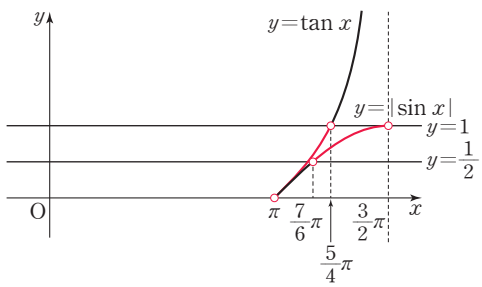
$\pi<x<\frac{3}{2}\pi$에서

(i) 부등식 $|\sin x|>\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=|\sin x|$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.

$\therefore \frac{7}{6}\pi<x<\frac{3}{2}\pi$

(ii) 부등식 $\tan x<1$의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=1$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.

$\therefore \pi<x<\frac{5}{4}\pi$



(i), (ii)에서 주어진 연립부등식의 해는

$\frac{7}{6}\pi<x<\frac{5}{4}\pi$

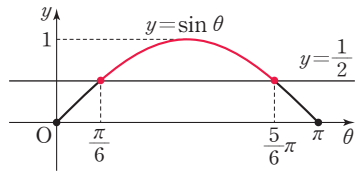
0568 답 ⑤

이차방정식 $x^2-2x+2\sin\theta=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-2\sin\theta\le 0$

$\therefore \sin\theta\ge\frac{1}{2}$

$0\le\theta\le\pi$에서 부등식 $\sin\theta\ge\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\sin\theta$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나거나 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 위쪽에 있는 θ의 값의 범위와 같다.



따라서 주어진 부등식의 해는 $\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{5}{6}\pi$이므로 θ의 최댓값은

$\frac{5}{6}\pi$

0569 답 $0<x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $3<x<\pi$

부등식 $(2^x-8)\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)<0$에서

(i) $2^x-8>0$, $\cos x-\frac{1}{2}<0$일 때,

$2^x-8>0$에서

$2^x>8$, $2^x>2^3$

밑이 1보다 크므로 $x>3$

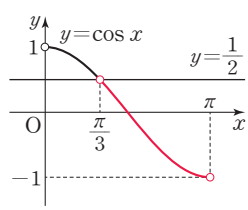
이때 $0<x<\pi$이므로

$3<x<\pi$ ····· ㉠

$\cos x-\frac{1}{2}<0$에서

$\cos x<\frac{1}{2}$

$0<x<\pi$에서 부등식 $\cos x<\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같으므로



$\frac{\pi}{3}<x<\pi$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $3<x<\pi$

(ii) $2^x-8<0$, $\cos x-\frac{1}{2}>0$일 때,

$2^x-8<0$에서

$2^x<8$, $2^x<2^3$

밑이 1보다 크므로 $x<3$

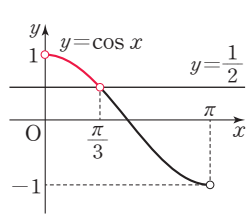
이때 $0<x<\pi$이므로

$0<x<3$ ····· ㉢

$\cos x-\frac{1}{2}>0$에서

$\cos x>\frac{1}{2}$

$0<x<\pi$에서 부등식 $\cos x>\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위와 같으므로



$0<x<\frac{\pi}{3}$ ····· ㉣

㉢, ㉣에서 $0<x<\frac{\pi}{3}$

(i), (ii)에서 주어진 부등식을 만족시키는 x의 값의 범위는

$0<x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $3<x<\pi$

0570 답 $0<x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\pi<x<\frac{4}{3}\pi$

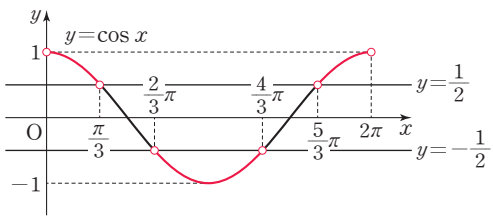
부등식 $4\cos^2 x-1>0$에서

$(2\cos x+1)(2\cos x-1)>0$

$2\cos x<-1$ 또는 $2\cos x>1$

$\therefore \cos x<-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x>\frac{1}{2}$

$0<x<2\pi$에서 부등식 $\cos x<-\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이고, 부등식 $\cos x>\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.



부등식 $4\cos^2 x-1>0$의 해는

$0<x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{2}{3}\pi<x<\frac{4}{3}\pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi<x<2\pi$ ····· ⓘ

또 부등식 $\sin x\cos x>0$에서

$\sin x>0$, $\cos x>0$ 또는 $\sin x<0$, $\cos x<0$

즉, x는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이므로

$0<x<\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi<x<\frac{3}{2}\pi$ ····· ⓘⓘ

따라서 주어진 두 부등식을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는

$0<x<\frac{\pi}{3}$ 또는 $\pi<x<\frac{4}{3}\pi$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 부등식 $4\cos^2 x-1>0$을 만족시키는 x의 값의 범위 구하기	40%
ⓘⓘ 부등식 $\sin x\cos x>0$을 만족시키는 x의 값의 범위 구하기	30%
ⓘⓘⓘ 두 부등식을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위 구하기	30%

0571 답 ④

(가)에서

$10^1\le n<10^2$, $10\le n<100$

(나)에서 $\cos n\pi$에 대하여

n이 짝수이면 $\cos n\pi=1$

n이 홀수이면 $\cos n\pi=-1$

즉, $\cos n\pi<-\frac{1}{2}$을 만족시키는 n은 홀수이다.

따라서 (가), (나)를 모두 만족시키는 자연수 n은 11, 13, 15, …, 99의 45개이다.

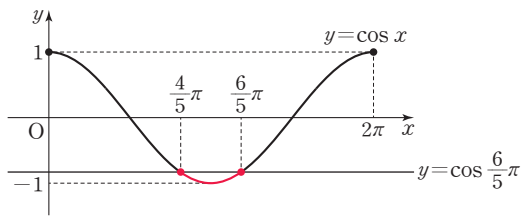
0572 답 ①

함수 $y=\cos x$의 그래프는 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

$0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $\cos x=\cos\frac{6}{5}\pi$의 해는

$x=\frac{4}{5}\pi$ 또는 $x=\frac{6}{5}\pi$

$0\le x\le 2\pi$에서 부등식 $\cos x\le\cos\frac{6}{5}\pi$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\cos\frac{6}{5}\pi$와 만나거나 직선 $y=\cos\frac{6}{5}\pi$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.



따라서 주어진 부등식의 해는 $\frac{4}{5}\pi\le x\le\frac{6}{5}\pi$이므로

$\frac{2}{3}\pi\le\frac{5}{6}x\le\pi$

즉, $\tan\frac{5}{6}x$는 최댓값이 $M=\tan\pi=0$, 최솟값이

$m=\tan\frac{2}{3}\pi=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$이므로

$M+m=0+(-\sqrt{3})=-\sqrt{3}$

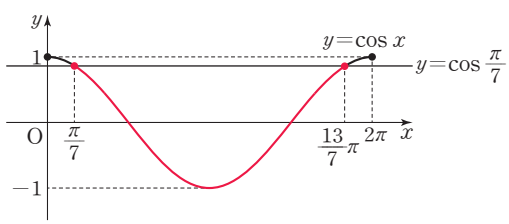
0573 답 ⑤

$\sin\frac{5}{14}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{\pi}{7}$이고 함수 $y=\cos x$의 그래프는 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로

$0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $\cos x=\sin\frac{5}{14}\pi$, 즉 $\cos x=\cos\frac{\pi}{7}$의 해는

$x=\frac{\pi}{7}$ 또는 $x=\frac{13}{7}\pi$

$0\le x\le 2\pi$에서 부등식 $\cos x\le\sin\frac{5}{14}\pi$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=\cos\frac{\pi}{7}$와 만나거나 직선 $y=\cos\frac{\pi}{7}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.



따라서 주어진 부등식의 해는 $\frac{\pi}{7}\le x\le\frac{13}{7}\pi$이므로

$\alpha=\frac{\pi}{7}$, $\beta=\frac{13}{7}\pi$

$\therefore \beta-\alpha=\frac{13}{7}\pi-\frac{\pi}{7}=\frac{12}{7}\pi$

0574 답 π

이차방정식 $3x^2+(4\cos\theta)x+2\sin\theta=0$의 판별식을 D라 하면

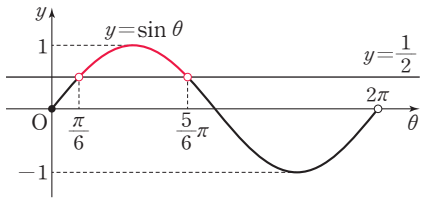
$\frac{D}{4}=4\cos^2\theta-6\sin\theta<0$

$2\cos^2\theta-3\sin\theta<0$, $2(1-\sin^2\theta)-3\sin\theta<0$

$2\sin^2\theta+3\sin\theta-2>0$, $(\sin\theta+2)(2\sin\theta-1)>0$

$\therefore \sin\theta>\frac{1}{2}$ ($\because \sin\theta+2>0$) ····· ⓘ

$0 \le \theta < 2\pi$에서 부등식 $\sin\theta > \frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\sin\theta$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 위쪽에 있는 θ의 값의 범위와 같다.



따라서 θ의 값의 범위는 $\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$이므로

$\alpha=\frac{\pi}{6}$, $\beta=\frac{5}{6}\pi$ …… ii

$\therefore \alpha+\beta=\frac{\pi}{6}+\frac{5}{6}\pi=\pi$ …… iii

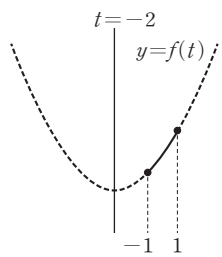
채점 기준	
i 판별식을 이용하여 $\sin\theta$의 값의 범위 구하기	40 %
ii α, β의 값 각각 구하기	50 %
iii $\alpha+\beta$의 값 구하기	10 %

0575 답 ⑤

$\sin x=t$로 놓으면 $-1 \le t \le 1$이고

$t^2+4t+a-6 \ge 0$

$f(t)=t^2+4t+a-6=(t+2)^2+a-10$으로 놓으면 $-1 \le t \le 1$에서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 그림과 같으므로 $f(t) \ge 0$이 성립하려면 $f(-1) \ge 0$이어야 한다.



따라서 $f(-1)=a-9 \ge 0$이므로

$a \ge 9$

0576 답 ③

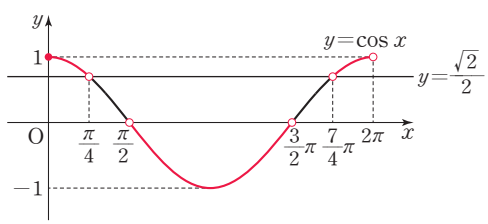
$\sqrt{2}\cos^4 x - \cos^3 x > 0$에서 $\cos^3 x(\sqrt{2}\cos x - 1) > 0$

이때 $\cos^2 x \ge 0$이므로 $\cos x \ne 0$이고

$\cos x(\sqrt{2}\cos x - 1) > 0$

$\therefore \cos x < 0$ 또는 $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

$0 \le x < 2\pi$에서 $\cos x < 0$ 또는 $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=0$보다 아래쪽에 있거나 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$보다 위쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.



따라서 주어진 부등식의 해는

$0 \le x < \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$ 또는 $\frac{7}{4}\pi < x < 2\pi$

이므로 해가 될 수 없는 것은 ③이다.

0577 답 3

$\cos x + |\cos x| - a < 0$에서

$\cos x + |\cos x| < a$

$f(x)=\cos x+|\cos x|$라 하면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)<a$가 성립해야 하므로 a는 $f(x)$의 최댓값보다 커야 한다.

$f(x)=\begin{cases} 2\cos x & (\cos x \ge 0) \\ 0 & (\cos x < 0) \end{cases}$에서 $f(x)$의 최댓값은 2이므로

$a > 2$

따라서 주어진 부등식이 성립하도록 하는 자연수 a의 최솟값은 3이다.

0578 답 ①

이차방정식 $x^2-(2\cos\theta)x-3\sin^2\theta-5\cos\theta+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\cos^2\theta-(-3\sin^2\theta-5\cos\theta+5) \ge 0$

$\cos^2\theta+3\sin^2\theta+5\cos\theta-5 \ge 0$

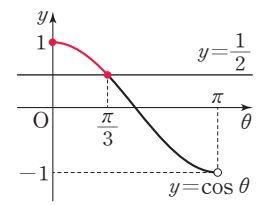
$\cos^2\theta+3(1-\cos^2\theta)+5\cos\theta-5 \ge 0$

$2\cos^2\theta-5\cos\theta+2 \le 0$

$(2\cos\theta-1)(\cos\theta-2) \le 0$

$\therefore \cos\theta \ge \frac{1}{2}$ ($\because \cos\theta-2<0$)

$0 \le \theta < \pi$에서 부등식 $\cos\theta \ge \frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\cos\theta$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나거나 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 위쪽에 있는 θ의 값의 범위와 같다.



따라서 θ의 값의 범위는 $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$이므로

$\alpha=0$, $\beta=\frac{\pi}{3}$

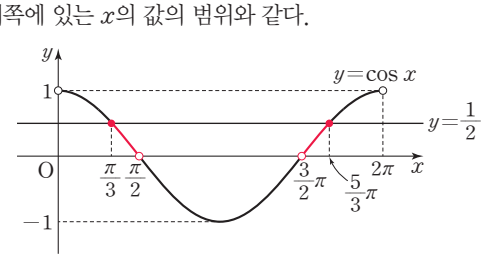
$\therefore 3\beta-\alpha=3\times\frac{\pi}{3}-0=\pi$

0579 답 ③

(가)에서 진수 조건에서 $\cos x > 0$

$\log_2\cos x \le -1$에서 $\cos x \le \frac{1}{2}$

$0 < x < 2\pi$에서 $0 < \cos x \le \frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=0$보다 위쪽에 있고 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나거나 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.



$\therefore \frac{\pi}{3} \le x < \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{3}{2}\pi < x \le \frac{5}{3}\pi$ …… ㉠

(나)에서 $x^2 \ge 2\pi x - \frac{5}{9}\pi^2$, $x^2-2\pi x+\frac{5}{9}\pi^2 \ge 0$

$\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\left(x-\frac{5}{3}\pi\right) \ge 0$ $\therefore x \le \frac{\pi}{3}$ 또는 $x \ge \frac{5}{3}\pi$ …… ㉡

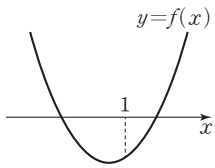
㉠, ㉡에서 $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은

$\frac{\pi}{3}+\frac{5}{3}\pi=2\pi$

0580 답 ①

$f(x)=x^2+2x\cos\theta-1$이라 하면 방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 1이 있어야 하므로

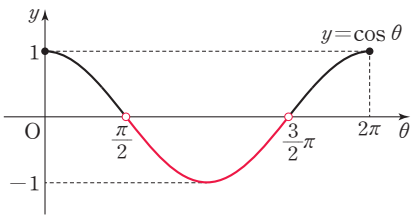


$f(1)<0$

$1+2\cos\theta-1<0$, $2\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta<0$

$0\le\theta\le2\pi$에서 부등식 $\cos\theta<0$의 해는 함수 $y=\cos\theta$의 그래프가 직선 $y=0$보다 아래쪽에 있는 θ의 값의 범위와 같다.



따라서 θ의 값의 범위는

$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{2}\pi$

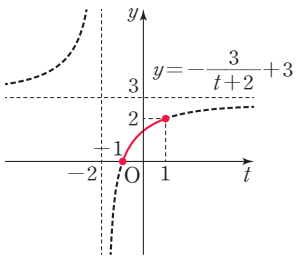
0581 답 ③

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)\le g(x_2)$이므로

(함수 $f(x)$의 최댓값)$\le$(함수 $g(x)$의 최솟값) ····· ㉠

$f(x)$에서 $\sin x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=\frac{3t+3}{t+2}=\frac{3(t+2)-3}{t+2}=-\frac{3}{t+2}+3$



즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은 2이다.

한편 $g(x)=x^2-2ax+a+8=(x-a)^2-a^2+a+8$이므로 함수 $g(x)$의 최솟값은 $-a^2+a+8$이다.

㉠에서 $2\le-a^2+a+8$이므로

$a^2-a-6\le0$, $(a+2)(a-3)\le0$

$\therefore -2\le a\le3$

0582 답 ②

$g(x)=\cos^2x-4\cos x$에서 $\cos x=t$로 놓으면 $-1\le t\le1$이고

$y=t^2-4t=(t-2)^2-4$

이 함수는 $t=-1$일 때 최댓값이 5, $t=1$일 때 최솟값이 -3이므로

$-3\le g(x)\le5$

$g(x)=s$로 놓으면

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(s)=s^2-6s+3a$

$=(s-3)^2+3a-9$

이 함수는 $-3\le s\le5$에서 $s=3$일 때 최솟값이 $3a-9$이다.

즉, $(f\circ g)(x)\ge0$에서 $3a-9\ge0$ $\therefore a\ge3$

따라서 a의 최솟값은 3이다.

0583 답 ④

x에 대한 이차방정식 $x^2+x\cos\theta+\tan^2\theta-1=0$이 양의 실근과 음의 실근을 모두 가지려면 두 근의 곱이 음수이어야 한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

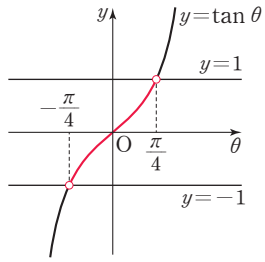
→ 두 근의 부호가 서로 다르면 판별식 $D>0$은 항상 성립한다.

$\tan^2\theta-1<0$

$(\tan\theta+1)(\tan\theta-1)<0$

$\therefore -1<\tan\theta<1$

$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 부등식 $-1<\tan\theta<1$의 해는 함수 $y=\tan\theta$의 그래프가 직선 $y=-1$보다 위쪽에 있고 직선 $y=1$보다 아래쪽에 있는 θ의 값의 범위와 같다.



따라서 θ의 값의 범위는 $-\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{4}$이므로

$\alpha=-\frac{\pi}{4}$, $\beta=\frac{\pi}{4}$ $\therefore \beta-\alpha=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$

0584 답 ②

이차방정식 $x^2-2\sqrt{2}x\sin\theta+3\cos\theta=0$의 근이 모두 양수이므로 두 근의 합과 곱이 모두 양수이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은

$2\sqrt{2}\sin\theta>0$ $\therefore \sin\theta>0$ ····· ㉠

두 근의 곱은

$3\cos\theta>0$ $\therefore \cos\theta>0$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 θ는 제1사분면의 각이다.

또 이차방정식 $x^2-2\sqrt{2}x\sin\theta+3\cos\theta=0$의 판별식을 D라 하면

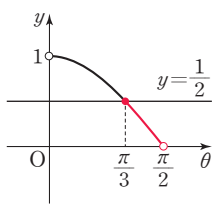
$\frac{D}{4}=2\sin^2\theta-3\cos\theta\ge0$에서

$2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta\ge0$

$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2\le0$, $(\cos\theta+2)(2\cos\theta-1)\le0$

$\therefore \cos\theta\le\frac{1}{2}$ ($\because \cos\theta+2>0$)

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 부등식 $\cos\theta\le\frac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\cos\theta$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$과 만나거나 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 θ의 값의 범위와 같다.



따라서 θ의 값의 범위는 $\frac{\pi}{3}\le\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 θ의 최솟값은 $\frac{\pi}{3}$

0585 답 ④

$\sin^2 \frac{\pi}{12}x \geq \frac{1}{2}$에서

$\sin \frac{\pi}{12}x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $\sin \frac{\pi}{12}x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ····· ㉠

함수 $y=\sin \frac{\pi}{12}x$의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}}=24$이므로

$0 \leq x < 24$에서 ㉠을 만족시키는 x의 값의 범위는

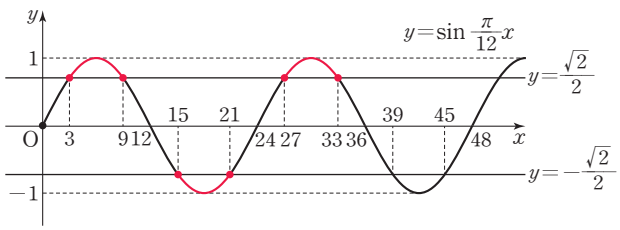
$\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{12}x \leq \frac{3}{4}\pi$ 또는 $\frac{5}{4}\pi \leq \frac{\pi}{12}x \leq \frac{7}{4}\pi$

$\therefore 3 \leq x \leq 9$ 또는 $15 \leq x \leq 21$

이때 자연수 x의 개수는

$7+7=14$

즉, $f(n)=21$이 되려면 그림과 같이 $24+3 \leq x \leq 24+9$인 자연수 7개는 더 포함하고, $24+15 \leq x \leq 24+21$인 자연수는 포함하지 않아야 한다.



$0 \leq x \leq \frac{n}{2}$에서 $33 \leq \frac{n}{2} < 39$

$\therefore 66 \leq n < 78$

따라서 자연수 n의 최댓값은 77이다.

0586 답 ③

점 P의 좌표를 $P(t, \cos t)$라 하면 점 Q는 선분 AP의 중점이므로

$Q\left(\frac{\pi+t}{2}, \frac{1+\cos t}{2}\right)$

$x=\frac{\pi+t}{2}$, $y=\frac{1+\cos t}{2}$라 하면 $t=2x-\pi$이므로 y에 대입하면

$y=\frac{1+\cos(2x-\pi)}{2}=\frac{1+\cos(\pi-2x)}{2}=\frac{1-\cos 2x}{2}$

$g(x)=\frac{1-\cos 2x}{2}$이므로 부등식 $f(x)g(x)<0$에서

$\cos x \times \frac{1-\cos 2x}{2} < 0$

$\cos x(1-\cos 2x) < 0$

이때 $1-\cos 2x \geq 0$이므로

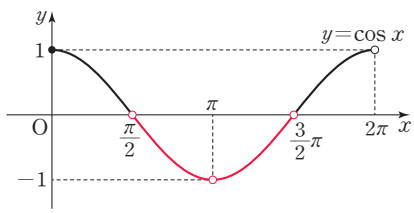
$\cos x < 0$, $x \neq k\pi$ (단, k는 정수이다.)

($1-\cos 2x \neq 0$)

(i) $0 \leq x < 2\pi$에서 $\cos x < 0$, $x \neq k\pi$의 해는

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 또는 $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$

즉, 자연수 x는 2, 3, 4의 3개이다.



(ii) $2\pi \leq x < 4\pi$에서 $\cos x < 0$, $x \neq k\pi$의 해는

$\frac{5}{2}\pi < x < 3\pi$ 또는 $3\pi < x < \frac{7}{2}\pi$

즉, 자연수 x는 8, 9, 10의 3개이다.

(i), (ii)에서 부등식 $f(x)g(x)<0$을 만족시키는 10 이하의 자연수 x의 개수는

$3+3=6$

✓ 공통수학2 다시보기

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는

$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

0587 답 $\frac{\pi}{6}$

$3v_1=4v_2$, 즉 $\frac{v_1}{v_2}=\frac{4}{3}$이므로

$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}$에서 $\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{4}{3}$

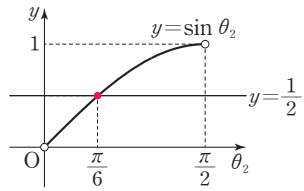
$\therefore \sin\theta_1=\frac{4}{3}\sin\theta_2$

이를 $\sin\theta_1=\frac{2}{3}$에 대입하면

$\frac{4}{3}\sin\theta_2=\frac{2}{3}$ $\therefore \sin\theta_2=\frac{1}{2}$

따라서 $0<\theta_2<\frac{\pi}{2}$에서 방정식 $\sin\theta_2=\frac{1}{2}$의 해는

$\theta_2=\frac{\pi}{6}$



0588 답 ①

조류 발전기는 $f(x)$의 값이 $\sqrt{3}$ 이상일 때 작동하므로 $f(x) \geq \sqrt{3}$에서

$2\cos \frac{\pi}{12}x \geq \sqrt{3}$

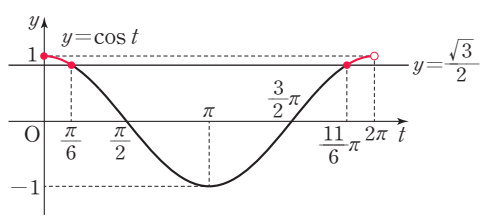
$\therefore \cos \frac{\pi}{12}x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{\pi}{12}x=t$로 놓으면 $0 \leq x < 24$에서 $0 \leq t < 2\pi$이고

$\cos t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 $0 \leq t < 2\pi$에서 부등식 $\cos t \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$의 해는

$0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{11}{6}\pi \leq t < 2\pi$



즉, $0 \leq \frac{\pi}{12}x \leq \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{11}{6}\pi \leq \frac{\pi}{12}x < 2\pi$이므로

$0 \leq x \leq 2$ 또는 $22 \leq x < 24$

따라서 하루 중 조류 발전기가 작동하는 시간은 4시간이다.

0589 답 ①

골프공의 처음 속력이 30 m/s이고 수평 이동 거리가 45 m 이상이므로

$d=\frac{30^2\times\sin 2\theta}{10}\geq 45$

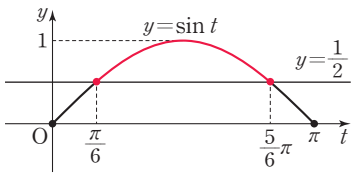
$90\sin 2\theta\geq 45$

$\therefore \sin 2\theta\geq\frac{1}{2}$

$2\theta=t$로 놓으면 $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$에서 $0\leq t\leq\pi$이고

$\sin t\geq\frac{1}{2}$

따라서 $0\leq t\leq\pi$에서 부등식 $\sin t\geq\frac{1}{2}$의 해는



$\frac{\pi}{6}\leq t\leq\frac{5}{6}\pi$

즉, $\frac{\pi}{6}\leq 2\theta\leq\frac{5}{6}\pi$이므로

$\frac{\pi}{12}\leq\theta\leq\frac{5}{12}\pi$

따라서 θ의 최솟값은 $\frac{\pi}{12}$이다.

0590 답 6시간

해수면의 높이가 7 m 이상일 때만 여객선을 댈 수 있으므로

$h(x)\geq 7$에서

$5+2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}x\geq 7$

$\therefore \sin\frac{\pi}{3}x\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$ …… ⓘ

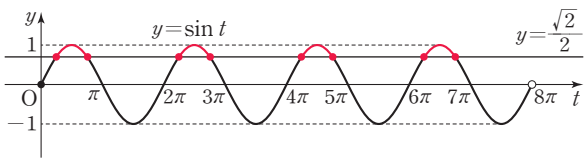
$\frac{\pi}{3}x=t$로 놓으면 $0\leq x<24$에서 $0\leq t<8\pi$이고

$\sin t\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $0\leq t<8\pi$에서 부등식 $\sin t\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$의 해는

$\frac{\pi}{4}\leq t\leq\frac{3}{4}\pi$ 또는 $\frac{9}{4}\pi\leq t\leq\frac{11}{4}\pi$ 또는 $\frac{17}{4}\pi\leq t\leq\frac{19}{4}\pi$ 또는

$\frac{25}{4}\pi\leq t\leq\frac{27}{4}\pi$



$\frac{\pi}{4}\leq t\leq\frac{3}{4}\pi$에서 $\frac{\pi}{4}\leq\frac{\pi}{3}x\leq\frac{3}{4}\pi$

$\therefore \frac{3}{4}\leq x\leq\frac{9}{4}$

따라서 하루 중 여객선을 댈 수 있는 시간은

$\left(\frac{9}{4}-\frac{3}{4}\right)\times 4=6$(시간) …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 문제 조건에 맞는 부등식 세우기	40 %
ⓘⓘ 여객선을 댈 수 있는 시간 구하기	60 %

최고수준 도전 기출 142~143쪽

0591 답 ④

전략 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표를 구한다.

$\left|4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2\right|=2$에서

$4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2=2$ 또는 $4\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)+2=-2$

$\therefore \sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)=0$ 또는 $\sin\left(ax-\frac{\pi}{3}\right)=-1$

$ax-\frac{\pi}{3}=t$로 놓으면 $0\leq x<\frac{4}{a}\pi$에서 $-\frac{\pi}{3}\leq t<\frac{11}{3}\pi$이고

$\sin t=0$ 또는 $\sin t=-1$

(ⅰ) $\sin t=0$일 때,

$t=0$ 또는 $t=\pi$ 또는 $t=2\pi$ 또는 $t=3\pi$

즉, $ax-\frac{\pi}{3}=0$ 또는 $ax-\frac{\pi}{3}=\pi$ 또는 $ax-\frac{\pi}{3}=2\pi$

또는 $ax-\frac{\pi}{3}=3\pi$이므로

$x=\frac{\pi}{3a}$ 또는 $x=\frac{4}{3a}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{3a}\pi$ 또는 $x=\frac{10}{3a}\pi$

(ⅱ) $\sin t=-1$일 때,

$t=\frac{3}{2}\pi$ 또는 $t=\frac{7}{2}\pi$

즉, $ax-\frac{\pi}{3}=\frac{3}{2}\pi$ 또는 $ax-\frac{\pi}{3}=\frac{7}{2}\pi$이므로

$x=\frac{11}{6a}\pi$ 또는 $x=\frac{23}{6a}\pi$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$x=\frac{\pi}{3a}$ 또는 $x=\frac{4}{3a}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{6a}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{3a}\pi$

또는 $x=\frac{10}{3a}\pi$ 또는 $x=\frac{23}{6a}\pi$

$\therefore n=6$

또 6개의 점의 x좌표의 합이 39이므로

$\frac{\pi}{3a}+\frac{4}{3a}\pi+\frac{11}{6a}\pi+\frac{7}{3a}\pi+\frac{10}{3a}\pi+\frac{23}{6a}\pi=39$

$\frac{13}{a}\pi=39$

$\therefore a=\frac{\pi}{3}$

$\therefore n\times a=6\times\frac{\pi}{3}=2\pi$

0592 답 32

전략 삼각함수의 성질을 이용하여 주어진 부등식을 정리한 후, 조건을 만족시키는 모든 자연수 x의 값을 구한다.

$f(2+x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\frac{\pi}{4}x$,

$f(2-x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)=\cos\frac{\pi}{4}x$

이므로 주어진 부등식은

$\cos^2\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{4}$

즉, $-\frac{1}{2}<\cos\frac{\pi}{4}x<\frac{1}{2}$ …… ㉠

$0<x<16$에서 $0<\frac{\pi}{4}x<4\pi$이므로 ㉠에서

$\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{4}x<\frac{2}{3}\pi$ 또는 $\frac{4}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{5}{3}\pi$ 또는 $\frac{7}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{8}{3}\pi$

또는 $\frac{10}{3}\pi<\frac{\pi}{4}x<\frac{11}{3}\pi$이다.

즉, $\frac{4}{3}<x<\frac{8}{3}$ 또는 $\frac{16}{3}<x<\frac{20}{3}$ 또는 $\frac{28}{3}<x<\frac{32}{3}$

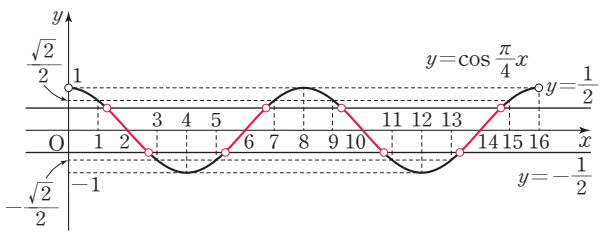
또는 $\frac{40}{3}<x<\frac{44}{3}$

따라서 자연수 x의 값은 2, 6, 10, 14이므로 모든 자연수 x의 값의 합은

$2+6+10+14=32$

다른 풀이

부등식 ㉠의 해는 함수 $y=\cos\frac{\pi}{4}x$의 그래프가 직선 $y=-\frac{1}{2}$보다 위쪽에 있고 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위와 같다.



따라서 자연수 x의 값은 2, 6, 10, 14이므로 모든 자연수 x의 값의 합은

$2+6+10+14=32$

0593 답 ⑤

전략 방정식 $\sin x=\cos x$를 만족시키는 θ의 값의 범위를 구한 후 삼각함수의 성질을 이용하여 식을 간단히 하여 푼다.

$0\le x\le\theta$일 때, 방정식 $\sin x=\cos x$를 만족시키는 해는

$\frac{\pi}{4}$, $\pi+\frac{\pi}{4}$, $2\pi+\frac{\pi}{4}$, $3\pi+\frac{\pi}{4}$, $4\pi+\frac{\pi}{4}$, …

이때 해가 4개이려면

$3\pi+\frac{\pi}{4}\le\theta<4\pi+\frac{\pi}{4}$ $\quad\therefore\ \frac{13}{4}\pi\le\theta<\frac{17}{4}\pi$

$f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta$, $g(\theta)=\sin\theta-\cos\theta$이므로

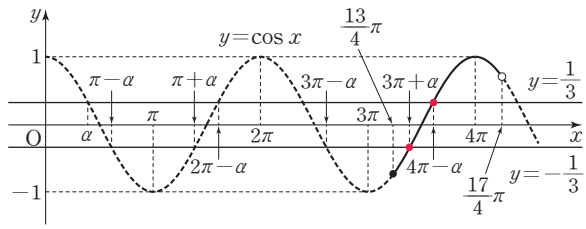
$$\frac{g(\theta)+1}{f(\theta)-1}+\frac{f(\theta)-1}{g(\theta)+1}$$
$$=\frac{\sin\theta-\cos\theta+1}{\sin\theta+\cos\theta-1}+\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta-\cos\theta+1}$$
$$=\frac{(\sin\theta-\cos\theta+1)^2+(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{(\sin\theta+\cos\theta-1)(\sin\theta-\cos\theta+1)}$$
$$=\frac{\{\sin\theta-(\cos\theta-1)\}^2+\{\sin\theta+(\cos\theta-1)\}^2}{\{\sin\theta+(\cos\theta-1)\}\{\sin\theta-(\cos\theta-1)\}}$$
$$=\frac{2\sin^2\theta+2(\cos\theta-1)^2}{\sin^2\theta-(\cos\theta-1)^2}$$
$$=\frac{2\sin^2\theta+2(\cos^2\theta-2\cos\theta+1)}{(1-\cos^2\theta)-(\cos^2\theta-2\cos\theta+1)}$$
$$=\frac{2-4\cos\theta+2}{-2\cos^2\theta+2\cos\theta}=\frac{4(1-\cos\theta)}{2\cos\theta(1-\cos\theta)}$$
$$=\frac{2}{\cos\theta}$$

따라서 $\left|\frac{g(\theta)+1}{f(\theta)-1}+\frac{f(\theta)-1}{g(\theta)+1}\right|=6$에서

$\left|\frac{2}{\cos\theta}\right|=6$

$|\cos\theta|=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \cos\theta=-\frac{1}{3}$ 또는 $\cos\theta=\frac{1}{3}$



이때 $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$에서 $\cos\theta=\frac{1}{3}$을 만족시키는 θ의 값을 α라 하면

$\pi\le\theta\le2\pi$에서 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$, $\cos\theta=\frac{1}{3}$을 만족시키는 θ의 값은 각각 $\pi+\alpha$, $2\pi-\alpha$

$\frac{13}{4}\pi\le\theta<\frac{17}{4}\pi$에서 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$, $\cos\theta=\frac{1}{3}$을 만족시키는 θ의 값은 각각 $3\pi+\alpha$, $4\pi-\alpha$

따라서 구하는 모든 θ의 값의 합은

$(3\pi+\alpha)+(4\pi-\alpha)=7\pi$

0594 답 ②

전략 그래프의 한 주기에서 만나는 점의 개수를 구한 후, n의 값의 범위를 구한다.

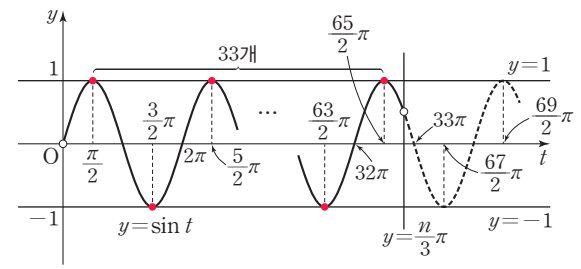
$4x=t$로 놓으면 $0<x<\frac{n}{12}\pi$에서 $0<t<\frac{n}{3}\pi$이고 방정식은

$\sin^2t-1=0$

$(\sin t+1)(\sin t-1)=0$

$\therefore\ \sin t=-1$ 또는 $\sin t=1$

즉, $f(n)=33$이 되려면 $0<t<\frac{n}{3}\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 두 직선 $y=-1$, $y=1$이 만나는 점의 개수가 33이어야 한다.



이때 $0<t\le2\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 두 직선 $y=-1$, $y=1$이 만나는 점의 개수가 2이므로 $0<t\le32\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 두 직선 $y=-1$, $y=1$이 만나는 점의 개수는 32이다.

따라서 $0<t<\frac{n}{3}\pi$에서 함수 $y=\sin t$의 그래프와 두 직선 $y=-1$, $y=1$이 만나는 점의 개수가 33이려면

$\frac{65}{2}\pi<\frac{n}{3}\pi\le\frac{67}{2}\pi$

$\therefore\ 97.5<n\le100.5$

따라서 자연수 n의 값은 98, 99, 100이므로 모든 n의 값의 합은

$98+99+100=297$

0595 답 ⑤

전략 두 점 A, B의 좌표를 a, b를 이용하여 나타낸 후 삼각형의 넓이와 직선의 기울기를 이용하여 a, b에 대한 식을 세운다.

$a\cos b\pi x=\frac{a}{2}$에서 $\cos b\pi x=\frac{1}{2}$

$b\pi x=t$로 놓으면 $0\le x\le\frac{2}{b}$에서 $0\le t\le 2\pi$이고

$\cos t=\frac{1}{2}$ $\therefore t=\frac{\pi}{3}$ 또는 $t=\frac{5}{3}\pi$

즉, $b\pi x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $b\pi x=\frac{5}{3}\pi$이므로

$x=\frac{1}{3b}$ 또는 $x=\frac{5}{3b}$ $\therefore \mathrm{A}\left(\frac{1}{3b},\frac{a}{2}\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{5}{3b},\frac{a}{2}\right)$

삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{4}{5}$이므로

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{3b}-\frac{1}{3b}\right)\times\frac{a}{2}=\frac{4}{5},\ \frac{a}{3b}=\frac{4}{5}$

$\therefore a=\frac{12}{5}b$ ····· ㉠

두 직선 OA, OB의 기울기의 곱이 $\frac{5}{4}$이므로

$\frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{3b}}\times\frac{\frac{a}{2}}{\frac{5}{3b}}=\frac{5}{4},\ \frac{9a^2b^2}{20}=\frac{5}{4},\ a^2b^2=\frac{25}{9}$

$\therefore ab=\frac{5}{3}$ ($\because a>0, b>0$) ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{12}{5}b^2=\frac{5}{3},\ b^2=\frac{25}{36}$ $\therefore b=\frac{5}{6}$ ($\because b>0$)

이를 ㉠에 대입하면

$a=\frac{12}{5}\times\frac{5}{6}=2$

$\therefore a-b=2-\frac{5}{6}=\frac{7}{6}$

0596 답 ③

전략 $\cos\theta=x$로 놓고 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$을 이용하여 주어진 방정식을 x에 대한 방정식으로 나타낸다.

$\frac{3}{2}\pi\le\theta\le 2\pi$에서 $\sin\theta\le 0$이고 $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$이므로

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$\cos\theta=x$로 놓으면 $\frac{3}{2}\pi\le\theta\le 2\pi$에서 $0\le x\le 1$이고

$\sin\theta=-\sqrt{1-x^2}$이므로 $\sin\theta-k\cos\theta-k+1=0$에 대입하면

$-\sqrt{1-x^2}-kx-k+1=0$

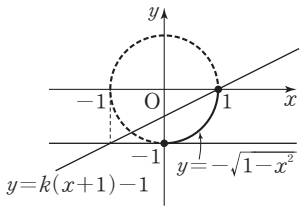
$-\sqrt{1-x^2}=k(x+1)-1$

주어진 방정식이 해를 가지려면 $0\le x\le 1$에서 곡선 $y=-\sqrt{1-x^2}$과 직선 $y=k(x+1)-1$의 교점이 존재해야 한다.

한편 $y=-\sqrt{1-x^2}$의 양변을 제곱하면

$y^2=1-x^2$ $\therefore x^2+y^2=1(0\le x\le 1)$

즉, 함수 $y=-\sqrt{1-x^2}$의 그래프는 $0\le x\le 1$, $y\le 0$에서 원 $x^2+y^2=1$과 같으므로 직선 $y=k(x+1)-1$의 기울기 k는 이 직선이 점 $(1, 0)$을 지날 때 최댓값이 $\frac{1}{2}$, 점 $(0, -1)$을 지날 때 최솟값이 0이다.



따라서 $0\le k\le\frac{1}{2}$이므로 $a=0$, $b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

0597 답 15

전략 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그리고 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(t)$의 교점의 개수가 3이 되도록 하는 $f(t)$의 값을 구한다.

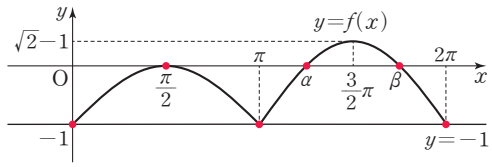
$0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $f(x)=f(t)$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(t)$의 교점의 x좌표와 같다.

함수 $y=f(x)$의 그래프는

$0\le x\le\pi$일 때, 직선 $x=\frac{\pi}{2}$에 대하여 대칭이고,

$\pi\le x\le 2\pi$일 때, 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이다.

교점의 개수가 3이 되려면 그림과 같이 $f(t)=-1$ 또는 $f(t)=0$이어야 한다.



(i) $f(t)=-1$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$t=0$ 또는 $t=\pi$ 또는 $t=2\pi$

(ii) $f(t)=0$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$t=\frac{\pi}{2}$ 또는 $t=\alpha$ 또는 $t=\beta$라 하면

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2}\pi$ $\therefore \alpha+\beta=3\pi$

(i), (ii)에서 모든 t의 값의 합은

$(0+\pi+2\pi)+\left(\frac{\pi}{2}+3\pi\right)=\frac{13}{2}\pi$

따라서 $p=2$, $q=13$이므로

$p+q=2+13=15$

08 사인법칙과 코사인법칙

난이도별 필수 기출 146~167쪽

0598 답 ⑤

삼각형 ABC에서 $C=180°-(30°+30°)=120°$이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{\sin 30°}=\frac{10}{\sin 120°}$ $\therefore a=10\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}$

0599 답 ②

삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이가 4이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{a}{2\times4}+\frac{b}{2\times4}+\frac{c}{2\times4}=\frac{7}{4}$, $\frac{a+b+c}{8}=\frac{7}{4}$

$\therefore a+b+c=14$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 14이다.

0600 답 ④

$A+B+C=\pi$이므로

$\sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$

이를 $\sin(A+C)\sin B=\frac{3}{4}$에 대입하면 $\sin^2 B=\frac{3}{4}$

이때 $0<B<\pi$이므로 $\sin B>0$ $\therefore \sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$

삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이가 2이므로 사인법칙에 의하여

$b=2\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

0601 답 ④

삼각형 ABC에서 $\angle CBA=180°-150°=30°$,

$\angle BAC=180°-(30°+105°)=45°$이므로 사인법칙에 의하여

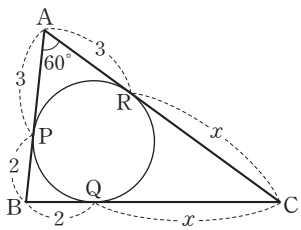
$\frac{\overline{BC}}{\sin 45°}=\frac{5}{\sin 30°}$ $\therefore \overline{BC}=5\times2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$

0602 답 ③

삼각형 ABC에 내접하는 원이 두 선분 BC, AC와 만나는 점을 각각 Q, R라 하면

$\overline{AP}=\overline{AR}$, $\overline{BP}=\overline{BQ}$, $\overline{CQ}=\overline{CR}$

점 P가 선분 AB를 3 : 2로 내분하므로 $\overline{AP}=3$, $\overline{BP}=2$



$\overline{CQ}=\overline{CR}=x$라 하면 삼각형 ABC에서

$\overline{BC}=2+x$, $\overline{AC}=3+x$이므로 코사인법칙에 의하여

$(2+x)^2=5^2+(3+x)^2-2\times5\times(3+x)\times\cos 60°$

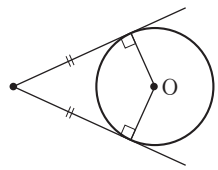
$4+4x+x^2=25+9+6x+x^2-5(3+x)$

$3x=15$ $\therefore x=5$

$\therefore \overline{AC}=3+x=3+5=8$

중2 다시보기

원 밖의 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 서로 같다.



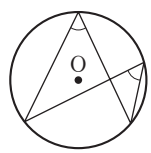
0603 답 ②

$\angle BAC=\angle BDC=60°$이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{2}}{\sin 45°}=\frac{\overline{BC}}{\sin 60°}$ $\therefore \overline{BC}=\sqrt{2}\times\frac{2}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

중3 다시보기

원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.



0604 답 12 sin 1

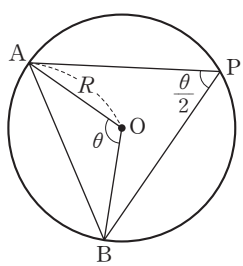
원의 반지름의 길이를 R라 하면 넓이가 36π이므로

$\pi R^2=36\pi$, $R^2=36$

$\therefore R=6$ ($\because R>0$) …… ⓘ

이때 호 AB의 길이는 반지름의 길이의 2배이므로

$R\theta=2R$ $\therefore \theta=2$ …… ⓘⓘ



호 AB 위의 점이 아닌 원 위의 점을 P라 하자.

원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이므로

$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{\theta}{2}=\frac{2}{2}=1$ …… ⓘⓘⓘ

따라서 삼각형 ABP에서 사인법칙에 의하여

$\overline{AB}=2\times6\times\sin 1=12\sin 1$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ 원의 반지름의 길이 구하기	20%
ⓘⓘ θ의 크기 구하기	20%
ⓘⓘⓘ 원주각의 크기 구하기	30%
ⓘⓥ 선분 AB의 길이 구하기	30%

0605 답 ⑤

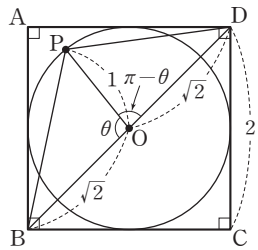
직각삼각형 BCD에서

$\overline{BD}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$

$\therefore \overline{BO}=\overline{DO}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\sqrt{2}$

이때 원 O의 지름은 2이므로

$\overline{PO}=\frac{1}{2}\times2=1$



$\angle POB=\theta(0\le\theta\le\pi)$라 하면 $\angle POD=\pi-\theta$

삼각형 OPB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PB}^2=1^2+(\sqrt{2})^2-2\times1\times\sqrt{2}\cos\theta$

$=1+2-2\sqrt{2}\cos\theta=3-2\sqrt{2}\cos\theta$

삼각형 OPD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PD}^2=1^2+(\sqrt{2})^2-2\times1\times\sqrt{2}\cos(\pi-\theta)$

$=1+2+2\sqrt{2}\cos\theta=3+2\sqrt{2}\cos\theta$

$\therefore \overline{PB}^2+2\overline{PD}^2=3-2\sqrt{2}\cos\theta+2(3+2\sqrt{2}\cos\theta)$

$=9+2\sqrt{2}\cos\theta$

이때 $-1\le\cos\theta\le1$이므로 $\overline{PB}^2+2\overline{PD}^2$은 $\cos\theta=1$, 즉 $\theta=0$일 때 최댓값이 $9+2\sqrt{2}$이다.

0606 답 $\sqrt{41}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{9^2+8^2-7^2}{2\times9\times8}=\dfrac{2}{3}$

점 D는 선분 AB를 1 : 2로 내분하므로

$\overline{AD}=\dfrac{\overline{AB}}{1+2}=\dfrac{9}{3}=3$

따라서 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CD}^2=3^2+8^2-2\times3\times8\times\dfrac{2}{3}=41$

$\therefore \overline{CD}=\sqrt{41}\ (\because \overline{CD}>0)$

0607 답 41

$\overline{AD}=\overline{AB}=6$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{6^2+6^2-(\sqrt{15})^2}{2\times6\times6}=\dfrac{19}{24}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=6^2+10^2-2\times6\times10\times\dfrac{19}{24}=41$

$\therefore k^2=\overline{BC}^2=41$

0608 답 ④

두 원 C_1, C_2에 내접하는 두 삼각형에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{3}{\sin60^\circ}=2R_1$, $\dfrac{3}{\sin30^\circ}=2R_2$

$\therefore R_1=3\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}$, $R_2=3\times2\times\dfrac{1}{2}=3$

$\therefore R_1^2R_2^2=(\sqrt{3})^2\times3^2=27$

0609 답 ④

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}=\dfrac{3}{\sin30^\circ}$ $\therefore \overline{AB}=3\times2\times\sin C=6\sin C$

이때 $0^\circ<C<150^\circ$이므로 $0<\sin C\le1$

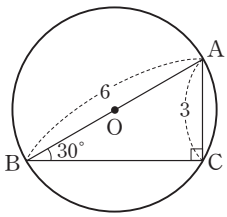
따라서 선분 AB의 길이는

$\sin C=1$, 즉 $C=90^\circ$일 때 최댓값이 6이다.

참고 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\dfrac{3}{\sin30^\circ}=2R$ $\therefore R=3$

따라서 선분 AB가 삼각형 ABC의 외접원의 지름일 때 최댓값이 6이다.



0610 답 ⑤

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{10^2+10^2-5^2}{2\times10\times10}=\dfrac{7}{8}$

$\overline{AD}=x$, $\overline{AE}=y$라 하면 삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DE}^2=x^2+y^2-2xy\cos\theta$

$=x^2+y^2-2\times50\times\dfrac{7}{8}\ (\because \overline{AD}\times\overline{AE}=50)$

$=x^2+y^2-\dfrac{175}{2}$

이때 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\ge2\sqrt{x^2y^2}$

$=2\sqrt{50^2}=100$ (단, 등호는 $x=y=5\sqrt{2}$일 때 성립한다.)

$\overline{DE}^2=x^2+y^2-\dfrac{175}{2}\ge100-\dfrac{175}{2}=\dfrac{25}{2}$이므로

$\overline{DE}\ge\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\ (\because \overline{DE}>0)$

따라서 선분 DE의 길이의 최솟값은 $\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$이다.

0611 답 ④

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\overline{BC}=2\times7\sqrt{3}\times\sin\dfrac{\pi}{3}=14\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=21$

$\overline{AB}:\overline{AC}=3:1$이므로 $\overline{AB}=3k$, $\overline{AC}=k(k>0)$라 하면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$21^2=(3k)^2+k^2-2\times3k\times k\times\cos\dfrac{\pi}{3}$

$441=7k^2$, $k^2=63$

$\therefore k=3\sqrt{7}\ (\because k>0)$

$\therefore \overline{AC}=k=3\sqrt{7}$

0612 답 ②

부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$\widehat{AB}:\widehat{BC}:\widehat{CA}=3:4:5$

$=\angle AOB:\angle BOC:\angle COA$

이때 $\angle AOB+\angle BOC+\angle COA=360^\circ$이므로

$\angle BOC=360^\circ\times\dfrac{4}{3+4+5}=120^\circ$

$\angle BAC=\dfrac{1}{2}\angle BOC=\dfrac{1}{2}\times120^\circ=60^\circ$이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{BC}}{\sin60^\circ}=2R$

$\therefore \overline{BC}=2\times2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

0613 답 ②

삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{5}$이므로 사인법칙에 의하여

$\sin C=\dfrac{10}{2\times 3\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

이때 $0<C<\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^2}=\dfrac{2}{3}$ ····· ㉠

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$10^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$a^2+b^2=100+2ab\cos C$

이를 $\dfrac{a^2+b^2-ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$에 대입하면

$\dfrac{100+ab\cos C}{ab}=\dfrac{4}{3}$

$\dfrac{100+\frac{2}{3}ab}{ab}=\dfrac{4}{3}$ ($\because$ ㉠)

$300+2ab=4ab$

$2ab=300$

$\therefore ab=150$

0614 답 36

$\angle ACB=\theta$라 하면

$\angle CBD=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\overline{AB}=2\times 3\times\sin\theta$

$=6\sin\theta$ ····· ⓘ

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\overline{CD}=2\times 3\times\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=6\cos\theta$ ····· ⓘⓘ

$\therefore \overline{AB}^2+\overline{CD}^2=(6\sin\theta)^2+(6\cos\theta)^2$

$=36(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$=36$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 선분 AB의 길이를 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘ 선분 CD의 길이를 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘⓘ $\overline{AB}^2+\overline{CD}^2$의 값 구하기	20 %

0615 답 7

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 외접원의 넓이가 56π이므로

$\pi R^2=56\pi$, $R^2=56$

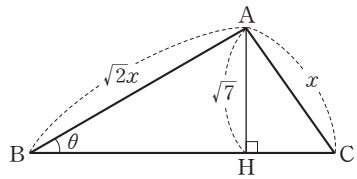
$\therefore R=2\sqrt{14}$ ($\because R>0$)

$\overline{AB}:\overline{AC}=\sqrt{2}:1$에서

$\overline{AB}=\sqrt{2}x$, $\overline{AC}=x(x>0)$라 하자.

$\angle ABC=\theta$라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\sin\theta=\dfrac{x}{2R}=\dfrac{x}{2\times 2\sqrt{14}}=\dfrac{x}{4\sqrt{14}}$ ····· ㉠



$\overline{AH}=\sqrt{7}$이므로 직각삼각형 ABH에서

$\sin\theta=\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}x}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $\dfrac{x}{4\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}x}$

$x^2=28$ $\therefore x=2\sqrt{7}$ ($\because x>0$)

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{2}x=\sqrt{2}\times 2\sqrt{7}=2\sqrt{14}$

따라서 직각삼각형 ABH에서

$\overline{BH}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{AH}^2}=\sqrt{(2\sqrt{14})^2-(\sqrt{7})^2}=7$

0616 답 ②

$\angle DCG=\theta(0<\theta<\pi)$이고 $\angle BCD=\angle ECG=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$\angle BCE=\pi-\theta$

삼각형 DCG에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{DG}^2=2^2+3^2-2\times 2\times 3\times\cos\theta$

$=13-12\cos\theta$

삼각형 BCE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BE}^2=2^2+3^2-2\times 2\times 3\times\cos(\pi-\theta)$

$=13+12\cos\theta$

$\therefore \overline{DG}\times\overline{BE}=\sqrt{13-12\cos\theta}\times\sqrt{13+12\cos\theta}$

$=\sqrt{13^2-(12\cos\theta)^2}$

$=\sqrt{13^2-12^2(1-\sin^2\theta)}$

$=\sqrt{13^2-12^2\left\{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right\}}$

$=\sqrt{13^2-12^2\times\dfrac{2}{3}}=\sqrt{73}$

0617 답 12

$\angle BPC=\theta$라 할 때, $\overline{PB}:\overline{PC}:\overline{BC}=7:5:\sqrt{14}$이므로 삼각형 BPC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{7^2+5^2-(\sqrt{14})^2}{2\times 7\times 5}=\dfrac{6}{7}$

$\overline{PB}:\overline{PC}=7:5$에서 $\overline{PB}=7k$, $\overline{PC}=5k(k>0)$,

$\overline{AB}:\overline{CD}=1:3$에서 $\overline{AB}=l$, $\overline{CD}=3l(l>0)$이라 하자.

원에 내접하는 사각형의 성질에 의하여 $\angle PBC=\angle PDA$

또 $\angle P$는 공통이므로 삼각형 BPC와 삼각형 DPA는 서로 닮음이다.

따라서 $\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{PD}:\overline{PA}$이고,

$\overline{PA}=\overline{PB}+\overline{AB}=7k+l$, $\overline{PD}=\overline{PC}+\overline{CD}=5k+3l$이므로

$7k:5k=(5k+3l):(7k+l)$

$7k(7k+l)=5k(5k+3l)$

$49k+7l=25k+15l$ ($\because k\neq 0$)

$24k=8l$ $\therefore l=\boxed{\text{가}\ 3}\times k$

따라서 $\overline{PA}=7k+l=7k+3k=10k$이므로 삼각형 BPC와 삼각형 DPA의 닮음비는

$\overline{PC}:\overline{PA}=5k:10k=1:$ (나) 2

$\therefore \overline{BC}=\frac{1}{\text{(나) } 2}\times\overline{AD}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{13}=2\sqrt{13}$

한편 $\cos\theta=\frac{6}{7}$이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{6}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{7}$

따라서 삼각형 BPC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin\theta}=2R$

$\therefore R=\frac{1}{2}\times2\sqrt{13}\times\frac{7}{\sqrt{13}}=$ (다) 7

따라서 $p=3$, $q=2$, $r=7$이므로

$p+q+r=3+2+7=12$

0618 답 $6\sqrt{3}$

호 CD에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로

$\angle CAD=\angle CBD=15^\circ$

$\therefore \angle BAD=45^\circ+15^\circ=60^\circ$ …… ⓘ

또 호 AD에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로

$\angle ABD=\angle ACD=75^\circ$

$\therefore \angle ABC=75^\circ+15^\circ=90^\circ$ …… ⓘⓘ

따라서 선분 AC는 원의 지름이므로 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $R=\frac{\overline{AC}}{2}=\frac{12}{2}=6$ …… ⓘⓘⓘ

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\overline{BD}=2\times6\times\sin60^\circ=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$ …… ⓘⓥ

채점 기준

ⓘ ∠BAD의 크기 구하기	20 %
ⓘⓘ ∠ABC의 크기 구하기	20 %
ⓘⓘⓘ 외접원의 반지름의 길이 구하기	30 %
ⓘⓥ 선분 BD의 길이 구하기	30 %

0619 답 ③

$\overline{AC}=a(a>3)$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$2^2=a^2+3^2-2\times a\times3\times\frac{7}{8}$

$a^2-\frac{21}{4}a+5=0$, $4a^2-21a+20=0$

$(4a-5)(a-4)=0$ $\therefore a=4$ ($\because a>3$)

즉, $\overline{AC}=4$이므로 $\overline{AM}=\overline{MC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=2$

삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BM}^2=2^2+3^2-2\times2\times3\times\frac{7}{8}=\frac{5}{2}$

$\therefore \overline{BM}=\frac{\sqrt{10}}{2}$ ($\because \overline{BM}>0$)

호 AB에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로 $\angle ADB=\angle BCA$

또 $\angle AMD=\angle BMC$이므로 삼각형 AMD와 삼각형 BMC는 서로 닮음이다.

따라서 $\overline{AM}:\overline{MD}=\overline{BM}:\overline{MC}$이므로

$2:\overline{MD}=\frac{\sqrt{10}}{2}:2$, $\frac{\sqrt{10}}{2}\overline{MD}=4$

$\therefore \overline{MD}=4\times\frac{2}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

0620 답 ②

크기가 가장 큰 각은 길이가 7인 변과 마주보는 각이므로 코사인법칙에 의하여 $\cos\theta=\frac{4^2+6^2-7^2}{2\times4\times6}=\frac{1}{16}$

0621 답 ④

$\frac{a+b}{4}=\frac{b+c}{5}=\frac{c+a}{6}=k(k>0)$라 하면

$a+b=4k$, $b+c=5k$, $c+a=6k$ …… ㉠

세 식을 변끼리 더하면

$2a+2b+2c=15k$ $\therefore a+b+c=\frac{15}{2}k$ …… ㉡

㉡에서 ㉠의 식을 각각 빼면 $a=\frac{5}{2}k$, $b=\frac{3}{2}k$, $c=\frac{7}{2}k$

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c=\frac{5}{2}k:\frac{3}{2}k:\frac{7}{2}k=5:3:7$

0622 답 ④

$(a-b)^2=c^2-3ab$에서 $a^2-2ab+b^2=c^2-3ab$

$\therefore a^2+b^2-c^2=-ab$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-ab}{2ab}=-\frac{1}{2}$

이때 $0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=120^\circ$

0623 답 ④

선분 BC가 원의 지름이므로

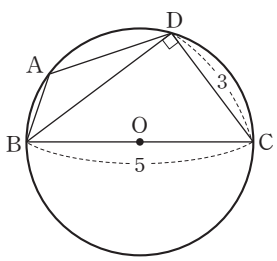
$\angle BDC=90^\circ$

즉, 직각삼각형 BCD에서

$\overline{BD}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$R=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{5}{2}$



따라서 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{4}{2\times\frac{5}{2}}=\frac{4}{5}$

다른 풀이

$\angle DCB=\theta$라 하면 $\angle BAD=\pi-\theta$

선분 BC가 원의 지름이므로 $\angle BDC=\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 BCD에서 $\cos\theta=\frac{3}{5}$

삼각형 ABD에서

$\sin A=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

0624 답 ②

$a-2b+c=0$ ····· ㉠

$3a+b-2c=0$ ····· ㉡

$2\times$㉠$+$㉡을 하면

$5a-3b=0$

$\therefore\ b=\frac{5}{3}a$

㉠$+2\times$㉡을 하면

$7a-3c=0$

$\therefore\ c=\frac{7}{3}a$

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\sin A:\sin B:\sin C=a:b:c$

$=a:\frac{5}{3}a:\frac{7}{3}a$

$=3:5:7$

0625 답 $\frac{2}{3}\pi$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

$=6:10:14$

$=3:5:7$ ····· ⓘ

삼각형 ABC의 세 내각 중 크기가 가장 큰 각은 C이다.

$a=3k$, $b=5k$, $c=7k\ (k>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\times3k\times5k}=-\frac{1}{2}$ ····· ⓘⓘ

이때 $0<C<\pi$이므로

$C=\frac{2}{3}\pi$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $a:b:c$의 비 구하기	30 %
ⓘⓘ $\cos C$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 크기가 가장 큰 각의 크기 구하기	40 %

0626 답 ④

$13a^2=13b^2-10bc+13c^2$에서

$13b^2+13c^2-13a^2=10bc$

$\therefore\ b^2+c^2-a^2=\frac{10bc}{13}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\frac{10bc}{13}}{2bc}=\frac{5}{13}$

이때 $0<A<\pi$이므로

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$

$\therefore\ \tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}=\frac{12}{5}$

0627 답 ③

㈎에서 사인법칙에 의하여

$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=\sin C:\sin A:\sin B=5:3:4$

$\sin C=5k$, $\sin A=3k$, $\sin B=4k\ (k>0)$라 하자.

이를 ㈏의 식에 대입하면

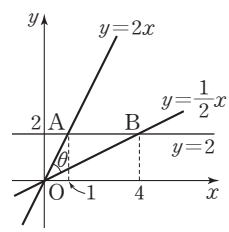
$2\times5k-3k-4k=2a$, $3k=2a$ $\therefore\ k=\frac{2}{3}a$

$\therefore\ \sin A+\sin B+\sin C=3k+4k+5k=12k$

$=12\times\frac{2}{3}a=8a$

0628 답 ③

그림과 같이 두 직선 $y=2x$, $y=\frac{1}{2}x$와 직선 $y=2$의 교점을 각각 A, B라 하면



A$(1,\ 2)$, B$(4,\ 2)$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$,

$\overline{OB}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$,

$\overline{AB}=4-1=3$

삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta=\frac{(\sqrt{5})^2+(2\sqrt{5})^2-3^2}{2\times\sqrt{5}\times2\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$

이때 θ는 예각이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

0629 답 ④

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$b^2=(\sqrt{3}+1)^2+2^2-2\times(\sqrt{3}+1)\times2\times\cos30^\circ$

$=3+2\sqrt{3}+1+4-2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)=2$

$\therefore\ b=\sqrt{2}\ (\because\ b>0)$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\sqrt{2}}{\sin30^\circ}=\frac{2}{\sin C}$

$\therefore\ \sin C=2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0^\circ<C<180^\circ$이므로 $C=45^\circ$ 또는 $C=135^\circ$

이때 $B=30^\circ$이므로

$C=45^\circ$, $A=105^\circ$ 또는 $C=135^\circ$, $A=15^\circ$

그런데 $c<a$에서 $C<A$이므로

$C=45^\circ$, $A=105^\circ$

0630 답 ⑤

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 $a\sin B=b\sin C$에 대입하면

$a\times\frac{b}{2R}=b\times\frac{c}{2R}$

$\therefore\ a=c$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다.

0631 답 ②

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 $c\sin C=a\sin A+b\sin B$에 대입하면

$c\times\frac{c}{2R}=a\times\frac{a}{2R}+b\times\frac{b}{2R}$ $\therefore c^2=a^2+b^2$

따라서 삼각형 ABC는 $C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

0632 답 ③

$2\sqrt{3}\sin A=2\sin B=\sqrt{3}\sin C=k(k>0)$라 하면

$\sin A=\frac{k}{2\sqrt{3}}$, $\sin B=\frac{k}{2}$, $\sin C=\frac{k}{\sqrt{3}}$이므로

$\sin A:\sin B:\sin C=\frac{k}{2\sqrt{3}}:\frac{k}{2}:\frac{k}{\sqrt{3}}=1:\sqrt{3}:2$

따라서 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$a:b:c=1:\sqrt{3}:2$

이때 $c^2=a^2+b^2$이 성립하므로 삼각형 ABC는 $C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

0633 답 ⑤

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$ ····· ㉠

또 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 $\sin A=2\sin B\cos C$에 대입하면

$\frac{a}{2R}=2\times\frac{b}{2R}\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$a^2=a^2+b^2-c^2$, $b^2=c^2$ $\therefore b=c$ ($\because b>0$, $c>0$)

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이다.

0634 답 $B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형

$\cos^2 A-\cos^2 B+\cos^2 C=1$에서

$(1-\sin^2 A)-(1-\sin^2 B)+(1-\sin^2 C)=1$

$\sin^2 B=\sin^2 A+\sin^2 C$ ····· ㉠

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{b}{2R}\right)^2=\left(\frac{a}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2$ $\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

0635 답 $a=c$인 이등변삼각형

$A+B+C=\pi$이므로 $a\sin^2(B+C)=c\sin^2(A+B)$에서

$a\sin^2(\pi-A)=c\sin^2(\pi-C)$

$a\sin^2 A=c\sin^2 C$ ····· ㉠ ····· ⓘ

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 ㉠에 대입하면

$a\times\left(\frac{a}{2R}\right)^2=c\times\left(\frac{c}{2R}\right)^2$ $\therefore a^3=c^3$ ····· ⓘⓘ

이때 $a>0$, $c>0$이므로 $a=c$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$인 이등변삼각형이다. ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $A+B+C=\pi$를 이용하여 주어진 식 변형하기	30 %
ⓘⓘ 사인법칙을 이용하여 a와 c의 관계식 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 구하기	40 %

0636 답 $a=b$인 직각이등변삼각형

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

이를 (가)의 식에 대입하면

$c\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-a\times\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=b$

$b^2+c^2-a^2-(a^2+b^2-c^2)=2b^2$

$a^2+b^2=c^2$ $\therefore C=\frac{\pi}{2}$ ····· ㉠

(나)에서 $b^2+c^2-a^2=\sqrt{2}bc$이므로

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{2}bc}{2bc}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0<A<\frac{\pi}{2}$이므로 $A=\frac{\pi}{4}$

$\therefore B=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$

$\therefore a=b$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 삼각형 ABC는 $a=b$인 직각이등변삼각형이다.

0637 답 ⑤

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

이를 $a\cos A=b\cos B$에 대입하면

$a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$

$c^2(a^2-b^2)-(a^4-b^4)=0$

$c^2(a^2-b^2)-(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$

$(c^2-a^2-b^2)(a+b)(a-b)=0$

$\therefore a^2+b^2=c^2$ 또는 $a=b$ ($\because a>0$, $b>0$)

따라서 보기에서 삼각형 ABC의 모양이 될 수 있는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

0638 답 ③

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\sin^2 A+(\cos B-\cos C)(\cos B+\cos C)$

$=\sin^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C$

$=\sin^2 A+(1-\sin^2 B)-(1-\sin^2 C)$

$=\sin^2 A-\sin^2 B+\sin^2 C=0$ ····· ㉠

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$

이를 ㉠에 대입하면

$\left(\frac{a}{2R}\right)^2-\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2=0$

$\therefore b^2=a^2+c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $B=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

0639 답 ②

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times3\times\sin 45^\circ$

$=3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3$

0640 답 ⑤

$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$ ($\because 0<A<\pi$)

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A=\frac{1}{2}\times6\times10\times\frac{4}{5}=24$

0641 답 ④

직각삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$

이를 $\frac{\sin B}{\sin A}=3$에 대입하면

$\frac{\frac{b}{2R}}{\frac{a}{2R}}=3$, $\frac{b}{a}=3$

$\therefore b=3a$

직각삼각형 ABC에서 $a^2+b^2=c^2$이므로

$a^2+(3a)^2=4^2$, $10a^2=16$

$\therefore a^2=\frac{8}{5}$

따라서 직각삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times a\times3a=\frac{3}{2}a^2=\frac{3}{2}\times\frac{8}{5}=\frac{12}{5}$

다른 풀이

a, b의 관계식을 다음과 같이 구할 수도 있다.

직각삼각형의 빗변의 길이가 $c=4$이므로

$\sin A=\frac{a}{4}$, $\sin B=\frac{b}{4}$

이를 $\frac{\sin B}{\sin A}=3$에 대입하면

$\frac{\frac{b}{4}}{\frac{a}{4}}=3$, $\frac{b}{a}=3$

$\therefore b=3a$

0642 답 ⑤

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$3^2=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ$

$9=a^2+b^2-ab$

$9=(a+b)^2-3ab$

$9=6^2-3ab$ $\therefore ab=9$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times9\times\sin 60^\circ=\frac{9}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$

0643 답 $12\sqrt{5}$

$\overline{BD}=\sqrt{(\sqrt{33})^2+4^2}=7$

$\overline{BG}=\sqrt{(\sqrt{33})^2+(4\sqrt{3})^2}=9$

$\overline{DG}=\sqrt{4^2+(4\sqrt{3})^2}=8$

삼각형 BDG에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle DBG)=\frac{7^2+9^2-8^2}{2\times7\times9}=\frac{11}{21}$

$\therefore \sin(\angle DBG)=\sqrt{1-\left(\frac{11}{21}\right)^2}=\frac{8\sqrt{5}}{21}$ ($\because 0<\angle DBG<\pi$)

따라서 삼각형 BDG의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{BG}\times\sin(\angle DBG)=\frac{1}{2}\times7\times9\times\frac{8\sqrt{5}}{21}=12\sqrt{5}$

다른 풀이

$\overline{BD}=7$, $\overline{BG}=9$, $\overline{DG}=8$에서 삼각형 BDG의 넓이를 다음과 같이 구할 수도 있다.

헤론의 공식에 의하여

$s=\frac{7+9+8}{2}=12$

따라서 삼각형 BDG의 넓이는

$\sqrt{12(12-7)(12-9)(12-8)}=12\sqrt{5}$

0644 답 ②

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}ac\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{4}ac$

이때 $a>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+c\geq2\sqrt{ac}$ (단, 등호는 $a=c$일 때 성립한다.)

즉, $20\geq2\sqrt{ac}$이므로 $\sqrt{ac}\leq10$, $ac\leq100$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}ac\leq25\sqrt{3}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 $25\sqrt{3}$이다.

0645 답 ③

$3^2+4^2=5^2$이므로 삼각형 ABC는 직각삼각형이다.

이때 $\angle BAC=\theta$라 하면

$\sin\theta=\frac{4}{5}$

따라서 색칠한 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AB}\times\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}\times5\times3\times\sin\theta=\frac{15}{2}\times\frac{4}{5}=6$

0646 답 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

(나)에서 $a=c+4$이므로 코사인법칙에 의하여

$(c+4)^2=5^2+c^2-2\times5\times c\times\cos 120^\circ$

$c^2+8c+16=25+c^2+5c$, $3c=9$

$\therefore c=3$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times5\times3\times\sin 120^\circ=\frac{15}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$

0647 답 ⑤

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 외접원의 넓이가 9π이므로

$\pi R^2=9\pi$, $R^2=9$ $\therefore R=3\ (\because R>0)$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$

(가)에서 $3\sin A=2\sin B$이므로

$3\times\frac{a}{2R}=2\times\frac{b}{2R}$ $\therefore b=\frac{3}{2}a$ ····· ㉠

(나)에서 $\cos B=\cos C$이므로

$B=C\ (\because 0<B<\pi,\ 0<C<\pi)$

$\therefore b=c$ ····· ㉡

$a=2k(k>0)$라 하면 ㉠, ㉡에서 $b=c=3k$이므로 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos A=\frac{(3k)^2+(3k)^2-(2k)^2}{2\times3k\times3k}=\frac{7}{9}$

$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{9}\ (\because 0<A<\pi)$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$a=2R\sin A=2\times3\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$

$\therefore b=c=\frac{3}{2}a=\frac{3}{2}\times\frac{8\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times4\sqrt{2}\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{64\sqrt{2}}{9}$

다른 풀이

$R=3$이고, ㉠, ㉡에서 $a=2k$, $b=3k$, $c=3k(k>0)$라 하자.

삼각형 ABC는 $b=c$인 이등변삼각형이므로 꼭짓점 A에서 밑변 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=k$

직각삼각형 ABM에서

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{(3k)^2-k^2}=2\sqrt{2}k$

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\overline{AM}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}k\times2k=2\sqrt{2}k^2$

한편 $S=\frac{abc}{4R}$이므로

$S=\frac{2k\times3k\times3k}{4\times3}=\frac{3}{2}k^3$

즉, $2\sqrt{2}k^2=\frac{3}{2}k^3$이므로 $k=2\sqrt{2}\times\frac{2}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\ (\because k>0)$

$\therefore S=2\sqrt{2}\times\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2=\frac{64\sqrt{2}}{9}$

0648 답 $12+4\sqrt{3}$

부채꼴의 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

$\overset{\frown}{AB}:\overset{\frown}{BC}:\overset{\frown}{CA}=5:4:3$

$=\angle AOB:\angle BOC:\angle COA$ ····· ⓘ

이때 $\angle AOB+\angle BOC+\angle COA=360^\circ$이므로

$\angle AOB=360^\circ\times\frac{5}{5+4+3}=150^\circ$,

$\angle BOC=360^\circ\times\frac{4}{5+4+3}=120^\circ$,

$\angle COA=360^\circ\times\frac{3}{5+4+3}=90^\circ$ ····· ⓘⓘ

$\therefore$ (삼각형 ABC의 넓이)

=(삼각형 AOB의 넓이)+(삼각형 BOC의 넓이)+(삼각형 COA의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin 150^\circ+\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin 120^\circ+\frac{1}{2}\times4\times4\times\sin 90^\circ$

$=8\times\frac{1}{2}+8\times\frac{\sqrt{3}}{2}+8\times1$

$=12+4\sqrt{3}$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $\angle AOB:\angle BOC:\angle COA$의 비 구하기	30 %
ⓘⓘ $\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COA$의 크기 각각 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 삼각형 ABC의 넓이 구하기	40 %

0649 답 ②

삼각형 OAB에서 $\overline{OA}=\overline{OB}=x$라 하면

$\angle AOB=\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$

삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$4^2=x^2+x^2-2x^2\cos\frac{\pi}{4}$

$16=(2-\sqrt{2})x^2$

$x^2=\frac{16}{2-\sqrt{2}}$

$x^2=\frac{16(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}$

$\therefore x^2=8(2+\sqrt{2})$

$\angle AOD=3\times\angle AOB=\frac{3}{4}\pi$이므로 삼각형 OAD의 넓이는

$\frac{1}{2}x^2\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{1}{2}\times8(2+\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=4+4\sqrt{2}$

0650 답 $\frac{5}{2}$

$\triangle ALN=\frac{1}{2}\times\overline{AL}\times\overline{AN}\times\sin A$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\overline{AB}\times\frac{1}{3}\overline{CA}\times\sin A$

$=\frac{2}{9}\left(\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\sin A\right)$

($\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CA}\times\sin A$ → $\triangle ABC$)

$=\frac{2}{9}\times9$

$=2$

$$\triangle BML=\frac{1}{2}\times\overline{BL}\times\overline{BM}\times\sin B$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\overline{AB}\times\frac{1}{2}\overline{BC}\times\sin B$$
$$=\frac{1}{6}\left(\underbrace{\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\sin B}_{\triangle ABC}\right)$$
$$=\frac{1}{6}\times 9=\frac{3}{2}$$
$$\triangle CNM=\frac{1}{2}\times\overline{CM}\times\overline{CN}\times\sin C$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\overline{BC}\times\frac{2}{3}\overline{CA}\times\sin C$$
$$=\frac{1}{3}\left(\underbrace{\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CA}\times\sin C}_{\triangle ABC}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times 9=3$$

따라서 삼각형 LMN의 넓이는

$$9-\left(2+\frac{3}{2}+3\right)=\frac{5}{2}$$

0651 답 3

두 삼각형 ABD, CDE의 넓이의 차는 두 삼각형 ABC, BCE의 넓이의 차와 같다.

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\sin A=\frac{\sqrt{10}}{2\times\frac{5\sqrt{10}}{6}}=\frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}\left(\because 0<A<\frac{\pi}{2}\right)$$

$\overline{AB}=\overline{AC}=x$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{10})^2=x^2+x^2-2\times x\times x\times\cos A$$

$$10=2x^2-2x^2\times\frac{4}{5},\ \frac{2}{5}x^2=10$$

$$x^2=25 \qquad \therefore x=5\ (\because x>0)$$

$$\therefore \overline{AB}=\overline{AC}=5$$

즉, 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A=\frac{1}{2}\times 5\times 5\times\frac{3}{5}=\frac{15}{2}$$

한편 한 호에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로 $A=E$

$\overline{CE}=y$라 하면 삼각형 BCE에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{10})^2=5^2+y^2-2\times 5\times y\times\cos E$$

$$10=25+y^2-10y\times\frac{4}{5}$$

$$y^2-8y+15=0,\ (y-3)(y-5)=0$$

$$\therefore y=3\ (\because \overline{AB}>\overline{CE})$$

따라서 삼각형 BCE의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{BE}\times\overline{CE}\times\sin E=\frac{1}{2}\times 5\times 3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{2}$$

$$\therefore |\triangle ABD-\triangle CDE|=|\triangle ABC-\triangle BCE|=\frac{15}{2}-\frac{9}{2}=3$$

0652 답 ①

원 C의 반지름의 길이를 R라 하면 원 C의 넓이가 $\frac{49}{3}\pi$이므로

$$\pi R^2=\frac{49}{3}\pi,\ R^2=\frac{49}{3}$$

$$\therefore R=\frac{7\sqrt{3}}{3}\ (\because R>0)$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}=2R\sin\frac{\pi}{3}=2\times\frac{7\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7$$

$\overline{AC}=a$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$7^2=a^2+3^2-2\times a\times 3\times\cos\frac{\pi}{3}$$

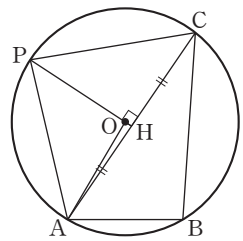
$$a^2-3a-40=0,\ (a+5)(a-8)=0$$

$$\therefore a=8\ (\because a>0)$$

$$\therefore \overline{AC}=8$$

삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되려면 점 P는 선분 AC의 수직이등분선과 원 C의 두 교점 중 직선 AC로부터 멀리 떨어져 있는 점이어야 한다.

그림과 같이 원 C의 중심을 O, 점 P에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 PH는 점 O를 지난다.



$\overline{AH}=\overline{CH}=4$이고 직각삼각형 AHO에서

$$\overline{OH}=\sqrt{\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}\right)^2-4^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \overline{PH}=\overline{OP}+\overline{OH}$$
$$=\frac{7\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{8\sqrt{3}}{3}$$

따라서 삼각형 PAC의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2}\times 8\times\frac{8\sqrt{3}}{3}=\frac{32\sqrt{3}}{3}$$

0653 답 ③

두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 A와 점 C, 점 B와 점 D는 각각 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

또 호 AB에 대한 원주각의 크기가 $\angle ACB=\frac{\pi}{12}$이므로 중심각의 크기는 $\angle AOB=\frac{\pi}{12}\times 2=\frac{\pi}{6}$

$$\therefore \angle COD=\angle AOB=\frac{\pi}{6}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이 S는

$$S=\triangle AOB+\triangle BOC-\triangle AOC$$
$$=\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\times 1\times 1\times\sin\left(\frac{\pi}{6}\times 2+\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

한편 $\overline{OA}=1$, $\angle AOB=\frac{\pi}{6}$에서 $\overline{OA}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,

$\overline{OA}\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 $A\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

점 A는 함수 $y=a^x$의 그래프 위의 점이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=a^{-\frac{1}{2}} \qquad \therefore a=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}=\frac{4}{3}$$

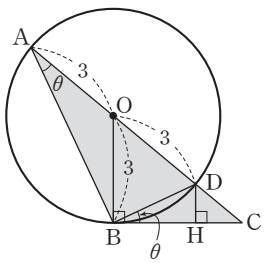
$$\therefore aS=\frac{4}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

0654 답 $\frac{32\sqrt{2}}{7}$

선분 OC와 원이 만나는 점을 D, 점 D에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\angle OAB=\theta$라 하면 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의하여

$\angle DBC=\theta$



직각삼각형 ABD에서

$\overline{BD}=\overline{AD}\sin\theta=6\times\frac{1}{3}=2$,

$\overline{AB}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$

직각삼각형 BHD에서

$\overline{DH}=\overline{BD}\sin\theta=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

이때 두 직각삼각형 CHD, CBO는 닮음이므로 $\overline{CD}=x$라 하면

$x:(x+3)=\frac{2}{3}:3$, $9x=2x+6$

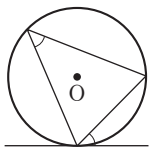
$\therefore x=\frac{6}{7}$

따라서 $\overline{AC}=6+\frac{6}{7}=\frac{48}{7}$이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AB}\times\sin\theta=\frac{1}{2}\times\frac{48}{7}\times4\sqrt{2}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{32\sqrt{2}}{7}$$

중3 다시보기

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는 그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.



0655 답 $\frac{1}{8}$

삼각형 ABC의 넓이가 $3\sqrt{7}$이므로

$\frac{1}{2}\times2\times8\times\sin\theta=3\sqrt{7}$

$\therefore \sin\theta=\frac{3\sqrt{7}}{8}$

$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}\ \left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{7}}{8}\right)^2}=\frac{1}{8}$$

0656 답 ③

삼각형 ABC의 넓이가 $9\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}ac\sin60^\circ=9\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}ac=9\sqrt{3}$

$\therefore ac=36$

이때 $a>0$, $c>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$a+c\geq2\sqrt{ac}=2\sqrt{36}=12$ (단, 등호는 $a=c=6$일 때 성립한다.)

따라서 $a+c$의 최솟값은 12이다.

0657 답 ③

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A=\frac{1}{2}\times\frac{80}{100}\overline{AB}\times\frac{100+k}{100}\overline{AC}\times\sin A$

$1=\frac{100+k}{125}$

$\therefore k=25$

0658 답 4π

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\sin A+\sin B+\sin C=\frac{a}{2\times5}+\frac{b}{2\times5}+\frac{c}{2\times5}$$
$$=\frac{a+b+c}{10}=\frac{12}{5}$$

$\therefore a+b+c=24$ …… ⓘ

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면 삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

$\frac{1}{2}r(a+b+c)=24$

$\frac{1}{2}r\times24=24$

$\therefore r=2$ …… ⓘⓘ

따라서 내접원의 반지름의 길이가 2이므로 넓이는

$\pi r^2=4\pi$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $a+b+c$의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ 내접원의 반지름의 길이 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 내접원의 넓이 구하기	20 %

0659 답 32

(가)에서 사인법칙에 의하여

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=4:5:7$

$a=4k$, $b=5k$, $c=7k\ (k>0)$라 하면 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{(4k)^2+(7k)^2-(5k)^2}{2\times4k\times7k}=\frac{5}{7}$

$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2B}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{7}\ (\because 0<B<\pi)$

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4k\times7k\times\sin B=14k^2\times\frac{2\sqrt{6}}{7}=4\sqrt{6}k^2$

(나)에서 $4\sqrt{6}k^2=16\sqrt{6}$이므로

$k^2=4$

$\therefore k=2\ (\because k>0)$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$4k+5k+7k=16k=16\times2=32$

다른 풀이

$a=4k$, $b=5k$, $c=7k\ (k>0)$에서 삼각형 ABC의 넓이를 다음과 같이 구할 수도 있다.

헤론의 공식에 의하여

$s=\frac{4k+5k+7k}{2}=8k$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\sqrt{8k(8k-4k)(8k-5k)(8k-7k)}=4\sqrt{6}k^2$

0660 답 ④

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{OP}=\frac{3}{4}r$, $\overline{OQ}=\frac{1}{3}r$

삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}r\times\frac{1}{3}r\times\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{16}r^2=4\sqrt{3}$, $r^2=64$

$\therefore r=8\ (\because r>0)$

따라서 부채꼴의 호 AB의 길이는

$8\times\frac{\pi}{3}=\frac{8}{3}\pi$

0661 답 ④

$\triangle ABC=2\triangle APQ$이므로 $\overline{AP}=x$, $\overline{AQ}=y$라 하면

$\frac{1}{2}\times10\times8\times\sin60^\circ=2\left(\frac{1}{2}xy\sin60^\circ\right)$

$\therefore xy=40$

삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PQ}^2=x^2+y^2-2xy\cos60^\circ$

$\quad=x^2+y^2-xy$

이때 $x^2>0$, $y^2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x^2+y^2\ge2\sqrt{x^2y^2}=2xy$ (단, 등호는 $x=y=2\sqrt{10}$일 때 성립한다.)

즉, $\overline{PQ}^2=x^2+y^2-xy\ge xy=40$이므로

$\overline{PQ}\ge2\sqrt{10}\ (\because\overline{PQ}>0)$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{10}$이다.

0662 답 ②

삼각형 ABC에서 선분 AC의 중점이 M이므로 두 삼각형 ABM, BCM의 넓이는 서로 같다.

$\frac{1}{2}\times8\times\overline{BM}\times\sin\alpha=\frac{1}{2}\times10\times\overline{BM}\times\sin\beta$

$\therefore\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

0663 답 $\frac{3}{8}$

$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC$이므로

$\frac{1}{2}\times3\times2\times\sin30^\circ=\frac{1}{2}\times2\times\overline{PM}+\frac{1}{2}\times3\times\overline{PN}$

$\therefore2\overline{PM}+3\overline{PN}=3$

이때 $2\overline{PM}>0$, $3\overline{PN}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$2\overline{PM}+3\overline{PN}\ge2\sqrt{2\overline{PM}\times3\overline{PN}}$

$3\ge2\sqrt{6\overline{PM}\times\overline{PN}}$

$9\ge24\overline{PM}\times\overline{PN}$

$\therefore\overline{PM}\times\overline{PN}\le\frac{3}{8}$

$\left(\text{단, 등호는 }2\overline{PM}=3\overline{PN}\text{, 즉 }\overline{PM}=\frac{3}{4}\text{, }\overline{PN}=\frac{1}{2}\text{일 때 성립한다.}\right)$

따라서 $\overline{PM}\times\overline{PN}$의 최댓값은 $\frac{3}{8}$이다.

0664 답 ⑤

$A+B+C=\pi$이므로

$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C$,

$\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$,

$\cos(A+C)=\cos(\pi-B)=-\cos B$

㈏의 식에 대입하면

$\sin C-\sin A\cos B=0$

삼각형 ABC에서 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$\frac{c}{2R}-\frac{a}{2R}\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=0$

$2c^2-(c^2+a^2-b^2)=0\quad\therefore b^2+c^2=a^2$

따라서 삼각형 ABC는 $A=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.

㈐에서

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+2\tan B+\tan(\pi-C)=0\left(\because A=\frac{\pi}{2}\right)$

$\tan\frac{\pi}{4}+2\tan B-\tan C=0$, $1+2\tan B-\tan\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=0$

$1+2\tan B-\frac{1}{\tan B}=0$, $2\tan^2B+\tan B-1=0$

$(\tan B+1)(2\tan B-1)=0$

$\therefore\tan B=\frac{1}{2}\left(\because0<B<\frac{\pi}{2}\right)$

즉, 직각삼각형 ABC에서 $\frac{b}{c}=\frac{1}{2}$이므로 $c=2b$ ····· ㉠

㈎에서 삼각형 ABC의 넓이는 8이므로

$\frac{1}{2}bc=8\quad\therefore bc=16$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $b^2=8$, $c^2=32$

$\therefore a^2=b^2+c^2=8+32=40$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 직각삼각형의 빗변은 외접원의 지름이므로

$a=2R\quad\therefore R=\frac{a}{2}$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$\pi R^2=\pi\times\left(\frac{a}{2}\right)^2=\pi\times\frac{40}{4}=10\pi$

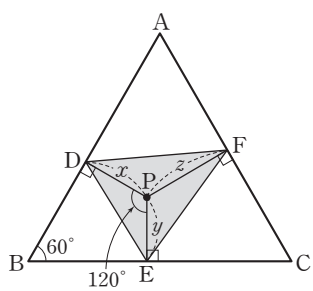
0665 답 ①

$\triangle ABC=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCA$이므로

$\overline{DP}=x$, $\overline{EP}=y$, $\overline{FP}=z$라 하면

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times8^2=\frac{1}{2}\times8\times x+\frac{1}{2}\times8\times y+\frac{1}{2}\times8\times z$

$\therefore x+y+z=4\sqrt{3}$ ····· ㉠



사각형의 내각의 크기의 합은 360°이므로 사각형 BEPD에서

$\angle DPE=360^\circ-(90^\circ+90^\circ+60^\circ)=120^\circ$

같은 방법으로

$\angle EPF=\angle FPD=120^\circ$

따라서 삼각형 DEF의 넓이는

$\triangle PDE+\triangle PEF+\triangle PFD$

$=\frac{1}{2}xy\sin 120^\circ+\frac{1}{2}yz\sin 120^\circ+\frac{1}{2}zx\sin 120^\circ$

$=\frac{1}{2}(xy+yz+zx)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=2\sqrt{3}$

$\therefore xy+yz+zx=8$ ····· ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=(4\sqrt{3})^2-2\times 8$

$=32$

$\therefore \overline{DP}^2+\overline{EP}^2+\overline{FP}^2=32$

0666 답 ③

$\overline{BC}=2\sqrt{5}$, $\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{10}$에서 $\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=\overline{BC}^2$이므로 삼각형 OBC는 $\overline{OB}=\overline{OC}$인 직각이등변삼각형이다.

$\therefore \angle BOC=\frac{\pi}{2}$

$\angle AOB=\alpha$, $\angle AOC=\beta$라 하면

$S_1=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\alpha=5\sin\alpha$,

$S_2=\frac{1}{2}\times(\sqrt{10})^2\times\sin\beta=5\sin\beta$

$3S_1=4S_2$이므로

$3\times 5\sin\alpha=4\times 5\sin\beta$

$\therefore \sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\beta$

이때 $\alpha+\beta=2\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$이므로 $\beta=\frac{3}{2}\pi-\alpha$

$\therefore \sin\alpha=\frac{4}{3}\sin\left(\frac{3}{2}\pi-\alpha\right)=\frac{4}{3}\sin\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$=-\frac{4}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=-\frac{4}{3}\cos\alpha$ ····· ㉠

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$에 대입하면

$\frac{16}{9}\cos^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

$\therefore \cos^2\alpha=\frac{9}{25}$

$\sin\alpha>0$이므로 ㉠에서

$\cos\alpha<0$

$\therefore \cos\alpha=-\frac{3}{5}$

삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=32$

$\therefore \overline{AB}=4\sqrt{2}$ ($\because \overline{AB}>0$)

0667 답 ⑤

평행사변형 ABCD의 넓이는

$3\times 4\times\sin 60^\circ=12\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

0668 답 $\frac{5}{6}\pi$

평행사변형 ABCD의 넓이가 35이므로

$10\times 7\times\sin C=35$ $\therefore \sin C=\frac{1}{2}$ ····· ⓘ

이때 $C=\pi-B$이고 $0<B<\frac{\pi}{2}$이므로

$\frac{\pi}{2}<C<\pi$ ····· ⓘⓘ

$\therefore C=\frac{5}{6}\pi$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 평행사변형의 넓이를 이용하여 $\sin C$의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ C의 값의 범위 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ C의 값 구하기	20 %

0669 답 ④

사각형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 12\times 10\times\sin 135^\circ=60\times\frac{\sqrt{2}}{2}=30\sqrt{2}$

0670 답 4

등변사다리꼴에서 두 대각선의 길이는 서로 같다.

한 대각선의 길이를 a라 하면 넓이가 $4\sqrt{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times a^2\times\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$, $a^2=16$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$)

0671 답 ①

사각형의 넓이가 $2\sqrt{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times p\times q\times\sin 45^\circ=2\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}pq=2\sqrt{2}$ $\therefore pq=8$

$\therefore p^3+q^3=(p+q)^3-3pq(p+q)=6^3-3\times 8\times 6=72$

0672 답 ④

$\overline{AC}=x$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$x^2=2^2+6^2-2\times 2\times 6\times\cos 120^\circ$

$=4+36-24\times\left(-\frac{1}{2}\right)=52$

$\therefore x=2\sqrt{13}$ ($\because x>0$)

$\overline{CD}=y$라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{13})^2=6^2+y^2-2\times 6\times y\times\cos 60^\circ$

$52=36+y^2-12y\times\frac{1}{2}$, $y^2-6y-16=0$

$(y+2)(y-8)=0$ $\therefore y=8$ ($\because y>0$)

$\therefore \square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\times 6\times 2\times\sin 120^\circ+\frac{1}{2}\times 6\times 8\times\sin 60^\circ$

$=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}+24\times\frac{\sqrt{3}}{2}=15\sqrt{3}$

0673 답 ⑤

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=\frac{\overline{AB}}{\tan 30^\circ}=\frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=6\sqrt{3}$

$\therefore \square ABCD=\frac{1}{2}\times 6\sqrt{3}\times 10\times\sin 60^\circ=30\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=45$

0674 답 $2\sqrt{30}$

사각형 ABCD는 원에 내접하므로 $D=\pi-B$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=5^2+3^2-2\times5\times3\times\cos B$

$=34-30\cos B$ ····· ㉠

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=2^2+4^2-2\times2\times4\times\cos(\pi-B)$

$=20+16\cos B$ ····· ㉡ ····· i

㉠, ㉡에서 $34-30\cos B=20+16\cos B$이므로

$\cos B=\frac{7}{23}$ ····· ii

$\therefore \sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{7}{23}\right)^2}=\frac{4\sqrt{30}}{23}$

$\left(\because 0<B<\frac{\pi}{2}\right)$ ····· iii

$\therefore \square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

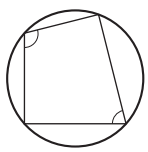
$=\frac{1}{2}\times5\times3\times\sin B+\frac{1}{2}\times2\times4\times\underbrace{\sin(\pi-B)}_{\to\sin B}$

$=\frac{15}{2}\times\frac{4\sqrt{30}}{23}+4\times\frac{4\sqrt{30}}{23}=2\sqrt{30}$ ····· iv

채점 기준	
i 코사인법칙을 이용하여 $\overline{AC}^2$을 두 식으로 나타내기	40 %
ii $\cos B$의 값 구하기	30 %
iii $\sin B$의 값 구하기	20 %
iv 사각형 ABCD의 넓이 구하기	10 %

중3 다시보기

원에 내접하는 사각형에서 마주 보는 두 각의 크기의 합은 $180°$이다.



0675 답 $6\sqrt{2}$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos D=\frac{3^2+4^2-(\sqrt{17})^2}{2\times3\times4}=\frac{1}{3}$ ····· ㉠

사각형 ABCD는 원에 내접하므로 $B=\pi-D$

$\overline{BC}=x$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{17})^2=x^2+2^2-2\times x\times2\times\cos(\pi-D)$

$17=x^2+4+4x\times\cos D$

$17=x^2+4+\frac{4}{3}x,\ 3x^2+4x-39=0$

$(3x+13)(x-3)=0$ $\therefore x=3\ (\because x>0)$

㉠에서 $0<D<\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin D=\sqrt{1-\cos^2 D}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

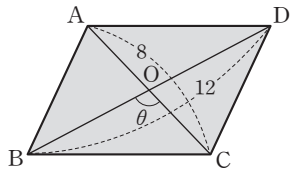
$\therefore \square ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

$=\frac{1}{2}\times3\times2\times\underbrace{\sin(\pi-D)}_{\to\sin D}+\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin D$

$=3\times\frac{2\sqrt{2}}{3}+6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=6\sqrt{2}$

0676 답 ④

그림과 같이 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O, $\angle BOC=\theta$라 하면 $\overline{AB}<\overline{BC}$이므로



$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ ····· ㉠

평행사변형 ABCD의 넓이가 $32\sqrt{2}$이므로

$\frac{1}{2}\times8\times12\times\sin\theta=32\sqrt{2}$

$\therefore \sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=-\frac{1}{3}\ (\because$ ㉠)

삼각형 OBC에서

$\overline{OB}=\frac{1}{2}\times12=6$,

$\overline{OC}=\frac{1}{2}\times8=4$

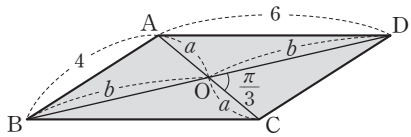
따라서 삼각형 OBC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=6^2+4^2-2\times6\times4\times\cos\theta$

$=36+16-48\times\left(-\frac{1}{3}\right)=68$

0677 답 $10\sqrt{3}$

그림과 같이 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점을 O라 하고, $\overline{AC}=2a$, $\overline{BD}=2b$라 하자.



삼각형 ABO에서 코사인법칙에 의하여

$4^2=a^2+b^2-2ab\cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore 16=a^2+b^2-ab$ ····· ㉠

삼각형 AOD에서 코사인법칙에 의하여

$6^2=a^2+b^2-2ab\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore 36=a^2+b^2+ab$ ····· ㉡

㉡−㉠을 하면

$20=2ab$

$\therefore ab=10$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2a\times2b\times\sin\frac{\pi}{3}=2\times10\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$

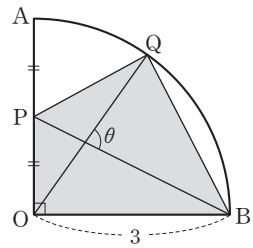
0678 답 $\frac{9\sqrt{5}}{4}$

점 P는 선분 AO의 중점이므로

$\overline{OP}=\frac{3}{2}$

직각삼각형 POB에서

$\overline{PB}=\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$



사각형 POBQ의 두 대각선 PB, OQ가 이루는 각 중 크지 않은 각의 크기를 θ, 사각형 POBQ의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{PB}\times\overline{OQ}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{5}}{2}\times3\times\sin\theta$

$=\frac{9\sqrt{5}}{4}\sin\theta$

따라서 사각형 POBQ의 넓이의 최댓값은 $\theta=\frac{\pi}{2}$일 때 $\frac{9\sqrt{5}}{4}$이다.

다른 풀이

□POBQ=△POB+△PBQ이므로 사각형 POBQ의 넓이가 최대가 되려면 점 Q는 $\overline{PB}\perp\overline{OQ}$를 만족시키는 점이어야 한다.

두 직선 OB, OP를 각각 x축, y축, 점 O를 원점이라 하고, $\overline{PB}\perp\overline{OQ}$일 때 두 직선 PB, OQ가 만나는 점을 M이라 하자.

$B(3,\,0)$, $P\left(0,\,\frac{3}{2}\right)$이므로

$\overline{PB}=\sqrt{(-3)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$

직선 BP의 방정식은 $y=\frac{\frac{3}{2}-0}{0-3}(x-3)$

$\therefore\ x+2y-3=0$

이 직선과 원점 O 사이의 거리는

$\overline{OM}=\frac{|-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ \overline{QM}=\overline{OQ}-\overline{OM}=3-\frac{3}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ □POBQ=△POB+△PBQ

$=\frac{1}{2}\times3\times\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{5}}{2}\times\left(3-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$

$=\frac{9\sqrt{5}}{4}$

0679 답 ⑤

ㄱ. $\angle CBA=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$이므로 직각삼각형 ABC에서 (반원에 대한 원주각)

$\cos\theta=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$

$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}\ \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$=\sqrt{1-\left(\frac{3}{7}\right)^2}$

$=\frac{2\sqrt{10}}{7}$ ····· ㉠

ㄴ. 사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$\angle ADC=\pi-\theta$

㉠에서 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{10}}{7}$이므로 직각삼각형 ABC에서

$\overline{AC}=\overline{AB}\sin\theta=14\times\frac{2\sqrt{10}}{7}=4\sqrt{10}$

$\overline{CD}=7$일 때, $\overline{AD}=a\,(a>0)$라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2=a^2+7^2-2\times a\times7\times\cos(\pi-\theta)$ ($\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$)

$160=a^2+49-14a\times\left(-\frac{3}{7}\right)$

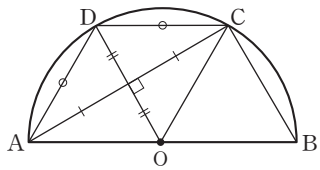
$a^2+6a-111=0$

$\therefore\ a=-3+2\sqrt{30}\ (\because\ a>0)$

$\therefore\ \overline{AD}=-3+2\sqrt{30}$

ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이가 최대가 되려면 삼각형 ACD의 넓이가 최대가 되어야 하므로 점 D는 선분 AC의 수직이등분선이 호 AC와 만나는 점이어야 한다.

그림과 같이 반원의 중심을 O라 하면 △AOD=△COD이므로 $\overline{AD}=\overline{CD}$



$\overline{AD}=b\,(b>0)$라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(4\sqrt{10})^2=b^2+b^2-2\times b\times b\times\cos(\pi-\theta)$

$160=2b^2-2b^2\times\left(-\frac{3}{7}\right),\ \frac{20}{7}b^2=160$

$b^2=56\quad\therefore\ b=2\sqrt{14}\ (\because\ b>0)$

$\therefore\ \overline{AD}=2\sqrt{14}$

$\therefore$ □ABCD=△ACD+△ABC

$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{14}\times2\sqrt{14}\times\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\times4\sqrt{10}\times6$ ($\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$)

$=28\times\frac{2\sqrt{10}}{7}+12\sqrt{10}$

$=8\sqrt{10}+12\sqrt{10}=20\sqrt{10}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0680 답 $3+\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{CD}=x$라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{6})^2=x^2+(\sqrt{3}+1)^2-2\times x\times(\sqrt{3}+1)\times\cos60^\circ$

$6=x^2+3+1+2\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)x$

$x^2-(\sqrt{3}+1)x+2(\sqrt{3}-1)=0$

$(x-2)\{x-(\sqrt{3}-1)\}=0$

$\therefore\ x=2\ (\because\ \overline{CD}>1)$

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{2}{\sin(\angle CAD)}=\frac{\sqrt{6}}{\sin60^\circ}$

$\sin(\angle CAD)=2\times\frac{1}{\sqrt{6}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \sin(\angle CAD)=45^\circ\ (\because\ 0^\circ<\angle CAD<105^\circ)$

따라서 $\angle BAC=105^\circ-45^\circ=60^\circ$이므로 사각형 ABCD의 넓이는

□ABCD=△ABC+△ACD

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{6}\times\sin60^\circ+\frac{1}{2}\times\sqrt{6}\times(\sqrt{3}+1)\times\sin45^\circ$

$=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=3+\frac{\sqrt{3}}{2}$

0681 답 22

$\overline{OP}=k_1$, $\overline{OQ}=k_2$라 하자.

삼각형 OAP에서 코사인법칙에 의하여

$2^2=k_1^2+(2\sqrt{15})^2-2\times k_1\times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$

삼각형 OAQ에서 코사인법칙에 의하여

$2^2=k_2^2+(2\sqrt{15})^2-2\times k_2\times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$

즉, 두 실수 k_1, k_2는 이차방정식

$2^2=x^2+(2\sqrt{15})^2-2\times x\times 2\sqrt{15}\times\frac{\sqrt{15}}{4}$의 서로 다른 두 실근이다.

이차방정식을 정리하면

$x^2-15x+56=0$

$(x-7)(x-8)=0$

$\therefore x=7$ 또는 $x=8$

㈎에서 $k_1>k_2$이므로

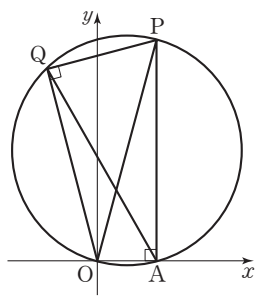
$k_1=8$, $k_2=7$

$\therefore \overline{OP}=8$, $\overline{OQ}=7$

$0<\angle OPA<\pi$, $0<\angle OQA<\pi$이므로

㈏의 $\cos(\angle OPA)=\cos(\angle OQA)$에서 $\angle OPA=\angle OQA$

또 두 점 P, Q는 직선 OA를 기준으로 같은 쪽에 있으므로 네 점 O, A, P, Q는 한 원 위에 있다.



한편 삼각형 OAP에서

$\overline{OP}=8$, $\overline{AP}=2\sqrt{15}$, $\overline{OA}=2$이므로

$\overline{OP}^2=\overline{OA}^2+\overline{AP}^2$

즉, 삼각형 OAP는 $\angle OAP=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이고, 반원의 원주각은 $\frac{\pi}{2}$이므로 선분 OP는 네 점 O, A, P, Q를 지나는 원의 지름이다.

따라서 $\angle OQP=\frac{\pi}{2}$이므로 직각삼각형 OPQ에서

$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2}=\sqrt{8^2-7^2}=\sqrt{15}$

사각형 OAPQ의 넓이는 두 직각삼각형 OAP, OPQ의 넓이의 합과 같으므로

$\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{15}+\frac{1}{2}\times 7\times\sqrt{15}=\frac{11}{2}\sqrt{15}$

따라서 $p=2$, $q=11$이므로

$p\times q=2\times 11=22$

0682 답 $8\sqrt{6}$ m

삼각형 PAB에서

$P=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$

삼각형 PAB에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BP}}{\sin 45^\circ}=\frac{24}{\sin 60^\circ}$

$\therefore \overline{BP}=24\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{6}$

따라서 두 지점 B, P 사이의 거리는 $8\sqrt{6}$ m이다.

0683 답 2800π m^2

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{BC}^2=80^2+100^2-2\times 80\times 100\times\cos 60^\circ$

$=6400+10000-16000\times\frac{1}{2}=8400$ …… ⓘ

$\therefore \overline{BC}=20\sqrt{21}$ ($\because \overline{BC}>0$) …… ⓘⓘ

원의 반지름의 길이를 R m라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{20\sqrt{21}}{\sin 60^\circ}=2R$

$\therefore R=20\sqrt{21}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}=20\sqrt{7}$ …… ⓘⓘⓘ

따라서 호수의 넓이는

$\pi R^2=\pi\times(20\sqrt{7})^2=2800\pi$ (m^2) …… ⓘⓥ

채점 기준

ⓘ 코사인법칙을 이용하여 $\overline{BC}^2$의 값 구하기	40%
ⓘⓘ $\overline{BC}$의 길이 구하기	10%
ⓘⓘⓘ 사인법칙을 이용하여 원의 반지름의 길이 구하기	40%
ⓘⓥ 호수의 넓이 구하기	10%

0684 답 $\frac{10\sqrt{57}}{3}$ m

사각형 ABCD는 원에 내접하므로 $D=\pi-B$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=50^2+30^2-2\times 50\times 30\times\cos B$

$=3400-3000\cos B$ …… ㉠

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=30^2+20^2-2\times 30\times 20\times\cos(\pi-B)$

$=1300+1200\cos B$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $3400-3000\cos B=1300+1200\cos B$이므로

$\cos B=\frac{1}{2}$ …… ㉢

이때 $0^\circ<B<180^\circ$이므로 $B=60^\circ$

㉢을 ㉠에 대입하면 $\overline{AC}^2=3400-3000\times\frac{1}{2}=1900$

$\therefore \overline{AC}=10\sqrt{19}$ ($\because \overline{AC}>0$)

원 모양 공원의 반지름의 길이를 R m라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여 $\frac{10\sqrt{19}}{\sin 60^\circ}=2R$

$\therefore R=10\sqrt{19}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}=\frac{10\sqrt{57}}{3}$

따라서 공원의 반지름의 길이는 $\frac{10\sqrt{57}}{3}$ m이다.

0685 답 $30\sqrt{2}$ m

삼각형 ABQ에서 $\angle AQB=180^\circ-(45^\circ+75^\circ)=60^\circ$

삼각형 ABQ에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BQ}}{\sin 45^\circ}=\frac{90}{\sin 60^\circ}$

$\therefore \overline{BQ}=90\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=30\sqrt{6}$

삼각형 PBQ에서 $\angle PQB=90^\circ$이므로

$\overline{PQ}=\overline{BQ}\times\tan 30^\circ=30\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=30\sqrt{2}$

따라서 나무의 높이는 $30\sqrt{2}$ m이다.

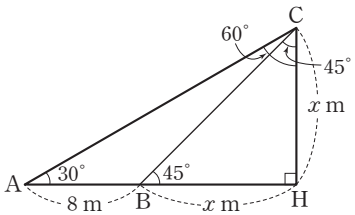
0686 답 $(4\sqrt{3}+5.5)$ m

그림과 같이 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.

삼각형 CAH에서 $\angle ACH=180^\circ-(30^\circ+90^\circ)=60^\circ$

또 삼각형 CBH에서 $\angle BCH=180^\circ-(45^\circ+90^\circ)=45^\circ$ …… ⓘ

이때 삼각형 CBH는 직각이등변삼각형이므로 $\overline{BH}=\overline{CH}=x$ m라 하자.



삼각형 CAH에서 사인법칙에 의하여

$\frac{x}{\sin 30^\circ}=\frac{8+x}{\sin 60^\circ}$, $x\sin 60^\circ=(8+x)\sin 30^\circ$

$\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{8+x}{2}$, $(\sqrt{3}-1)x=8$

$\therefore x=\frac{8}{\sqrt{3}-1}=\frac{8(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=4\sqrt{3}+4$ …… ⓘⓘ

관찰자의 눈의 높이는 지면으로부터 1.5 m이므로 드론과 지면 사이의 거리는

$(4\sqrt{3}+4)+1.5=4\sqrt{3}+5.5$ (m) …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\angle ACH$, $\angle BCH$의 크기 각각 구하기	30 %
ⓘⓘ 사인법칙을 이용하여 선분 CH의 길이 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 드론과 지면 사이의 거리 구하기	30 %

0687 답 $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ cm

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\cos B=\frac{5^2+3^2-7^2}{2\times5\times3}=-\frac{1}{2}$ $\therefore B=\frac{2}{3}\pi$ ($\because 0<B<\pi$)

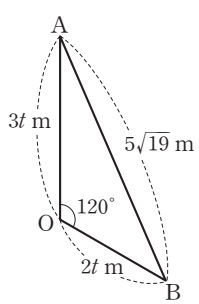
원 모양 접시의 반지름의 길이를 R cm라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$2R=\frac{7}{\sin\frac{2}{3}\pi}=\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{14\sqrt{3}}{3}$

따라서 접시의 지름은 $\frac{14\sqrt{3}}{3}$ cm이다.

0688 답 ④

그림과 같이 두 학생 A, B가 점 O에서 출발한 후 t초 동안 움직인 거리는 각각 $3t$ m, $2t$ m이다.



삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$(5\sqrt{19})^2=(3t)^2+(2t)^2$

$-2\times3t\times2t\times\cos 120^\circ$

$475=9t^2+4t^2-12t^2\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$19t^2=475$, $t^2=25$

$\therefore t=5$ ($\because t>0$)

따라서 출발한 지 5초 후이다.

0689 답 10 km

$\overline{PC}=x$ km라 하면

직각삼각형 PAC에서 $\overline{AC}=\frac{x}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}x$

직각삼각형 PBC에서 $\overline{BC}=\frac{x}{\tan 45^\circ}=x$

삼각형 ABC에서 $\angle ABC=180^\circ-60^\circ=120^\circ$이므로 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{3}x)^2=10^2+x^2-2\times10\times x\times\cos 120^\circ$

$3x^2=100+x^2-20x\times\left(-\frac{1}{2}\right)$, $x^2-5x-50=0$

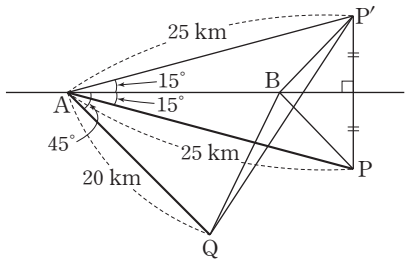
$(x+5)(x-10)=0$ $\therefore x=10$ ($\because x>0$)

따라서 발사대 C에서 로켓 P까지의 높이는 10 km이다.

0690 답 $5\sqrt{21}$ km

그림과 같이 점 P를 직선 AB에 대하여 대칭이동한 점을 P′이라 하면

$\overline{BP'}=\overline{BP}$, $\overline{AP'}=\overline{AP}=25$, $\angle P'AB=\angle PAB=15^\circ$



창고 B에서 두 공장 P, Q까지의 거리의 합은

$\overline{BP}+\overline{BQ}=\overline{BP'}+\overline{BQ}\ge\overline{P'Q}$

삼각형 AQP′에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{P'Q}^2=20^2+25^2-2\times20\times25\times\cos(45^\circ+15^\circ)$

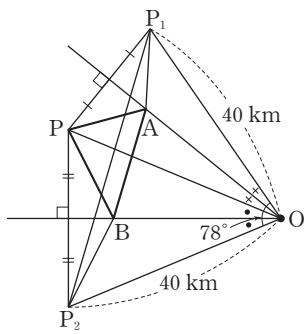
$=400+625-1000\times\frac{1}{2}=525$

$\therefore \overline{P'Q}=5\sqrt{21}$ ($\because \overline{P'Q}>0$)

따라서 거리의 합의 최솟값은 $5\sqrt{21}$ km이다.

0691 답 $16\sqrt{10}$ km

그림과 같이 점 P를 직선 OA, OB에 대하여 대칭이동한 점을 각각 P_1, P_2라 하면



$\overline{PA}=\overline{P_1A}$, $\overline{PB}=\overline{P_2B}$,

$\overline{OP_1}=\overline{OP_2}=\overline{OP}=40$,

$\angle P_1OP_2=2\times39^\circ=78^\circ$이고

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{AB}$

$=\overline{P_1A}+\overline{P_2B}+\overline{AB}\ge\overline{P_1P_2}$

삼각형 OP_1P_2에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{P_1P_2}^2=40^2+40^2-2\times40\times40\times\cos 78^\circ$

$=1600+1600-3200\times\sin 12^\circ$ ($\cos(90^\circ-12^\circ)$)

$=3200-3200\times0.2=2560$

$\therefore \overline{P_1P_2}=16\sqrt{10}$ ($\because \overline{P_1P_2}>0$)

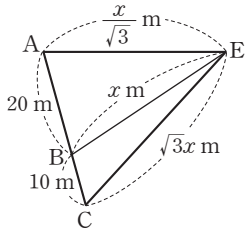
따라서 구하는 최솟값은 $16\sqrt{10}$ km이다.

0692 답 ③

타워와 지면이 만나는 지점을 E라 하고 $\overline{DE}=x$ m라 하면

$\overline{AE}=\dfrac{x}{\tan 60^\circ}=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, $\overline{BE}=\dfrac{x}{\tan 45^\circ}=x$,

$\overline{CE}=\dfrac{x}{\tan 30^\circ}=\sqrt{3}x$



$\angle ABE=\theta$라 하면 삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

$\left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2=20^2+x^2-2\times 20\times x\times\cos\theta$

$\dfrac{x^2}{3}=400+x^2-40x\cos\theta$ ····· ㉠

삼각형 BCE에서 코사인법칙에 의하여

$(\sqrt{3}x)^2=10^2+x^2-2\times 10\times x\times\cos(180^\circ-\theta)$

$3x^2=100+x^2+20x\cos\theta$ ····· ㉡

㉠+㉡×2를 하면

$\dfrac{19}{3}x^2=600+3x^2$

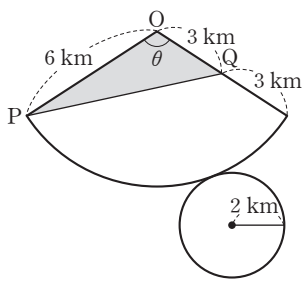
$x^2=180$

$\therefore x=6\sqrt{5}$ ($\because x>0$)

따라서 타워의 높이는 $6\sqrt{5}$ m이다.

0693 답 ③

원뿔의 전개도는 그림과 같다.



옆면인 부채꼴의 중심각의 크기를 θ라 하면 밑면인 원의 반지름의 길이가 2 km이므로 부채꼴의 호의 길이는

$6\theta=2\times\pi\times 2$

$\therefore \theta=\dfrac{2}{3}\pi$

등산로의 최단 거리는 그림에서 선분 PQ의 길이와 같으므로 삼각형 OPQ에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PQ}^2=6^2+3^2-2\times 6\times 3\times\cos\dfrac{2}{3}\pi$

$=36+9-36\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=63$

$\therefore \overline{PQ}=3\sqrt{7}$ ($\because \overline{PQ}>0$)

따라서 등산로의 최단 거리는 $3\sqrt{7}$ km이다.

최고수준 도전 기출 168~169쪽

0694 답 120

전략 $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$, 사인법칙, 코사인법칙을 이용하여 주어진 식을 변형한다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$, $\sin B=\dfrac{b}{2R}$, $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

코사인법칙에 의하여

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$,

$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$\tan A:\tan B:\tan C=5:3:27$이므로

$\dfrac{\sin A}{\cos A}:\dfrac{\sin B}{\cos B}:\dfrac{\sin C}{\cos C}$

$=\dfrac{\frac{a}{2R}}{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}:\dfrac{\frac{b}{2R}}{\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}:\dfrac{\frac{c}{2R}}{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$

$=\dfrac{1}{b^2+c^2-a^2}:\dfrac{1}{c^2+a^2-b^2}:\dfrac{1}{a^2+b^2-c^2}$

$=5:3:27$

$\therefore (b^2+c^2-a^2):(a^2+c^2-b^2):(a^2+b^2-c^2)$

$=\dfrac{1}{5}:\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{27}=27:45:5$

이때

$b^2+c^2-a^2=27k$ ····· ㉠

$a^2+c^2-b^2=45k$ ····· ㉡

$a^2+b^2-c^2=5k$ ····· ㉢

라 하고 세 식을 변끼리 더하면 $a^2+b^2+c^2=77k$

이 식에서 ㉠, ㉡, ㉢을 각각 빼서 정리하면

$a^2=25k$, $b^2=16k$, $c^2=36k$

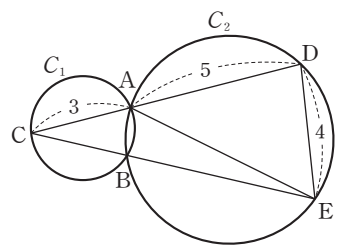
$a^2:b^2:c^2=25:16:36$이고 a, b, c는 서로소인 자연수이므로

$a:b:c=5:4:6$

$\therefore abc=5\times 4\times 6=120$

0695 답 ④

전략 원에 내접하는 사각형의 성질과 사인법칙을 이용하여 선분 AE의 길이를 구한 후 코사인법칙을 이용한다.



사각형 ABED가 원 C_2에 내접하므로

$\angle ABC=\angle ADE$

삼각형 ACB에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)}=2r_1 \quad \therefore r_1=\frac{3}{2\sin(\angle ABC)}$

삼각형 AED에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AE}}{\sin(\angle ADE)}=2r_2 \quad \therefore r_2=\frac{\overline{AE}}{2\sin(\angle ADE)}$

이때 $\angle ABC=\angle ADE$에서 $\sin(\angle ABC)=\sin(\angle ADE)$이고,

$r_1:r_2=1:2$이므로

$3:\overline{AE}=1:2 \quad \therefore \overline{AE}=6$

삼각형 AED에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle ADE)=\frac{5^2+4^2-6^2}{2\times5\times4}=\frac{1}{8}$

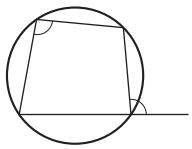
삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{CE}^2=8^2+4^2-2\times8\times4\times\frac{1}{8}=72$

$\therefore \overline{CE}=6\sqrt{2}\ (\because \overline{CE}>0)$

중3 다시보기

원에 내접하는 사각형에서 한 외각의 크기는 그와 이웃하는 내각의 대각의 크기와 같다.

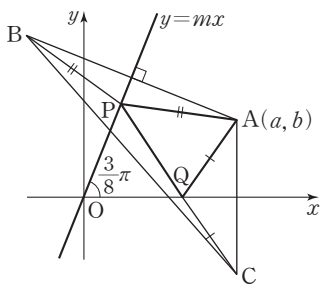


0696 답 ②

전략 점 A를 직선 $y=mx$, x축에 대하여 각각 대칭이동시켜 삼각형의 둘레의 길이의 최솟값을 구한다.

점 A를 직선 $y=mx$에 대하여 대칭이동시킨 점을 B, x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 C라 하자.

$\overline{AP}=\overline{BP}$, $\overline{AQ}=\overline{CQ}$이므로 삼각형 APQ의 둘레의 길이의 최솟값 k는 $\overline{BC}$와 같다.



$\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OA}=\sqrt{a^2+b^2}$, $\angle BOC=2\times\frac{3}{8}\pi=\frac{3}{4}\pi$이므로

삼각형 BOC에서 코사인법칙에 의하여

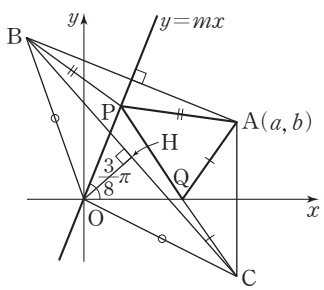
$\overline{BC}^2=(\sqrt{a^2+b^2})^2+(\sqrt{a^2+b^2})^2$

$-2\times\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{a^2+b^2}\times\cos\frac{3}{4}\pi$

$=(2+\sqrt{2})(a^2+b^2)$

삼각형 BOC는 이등변삼각형이므로 점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle BOH=\angle COH=\frac{3}{8}\pi$이므로 직각삼각형 BOH에서



$\sin\frac{3}{8}\pi=\frac{\overline{BH}}{\overline{OB}}=\frac{\frac{k}{2}}{\overline{OA}}$,

$\frac{k}{6}=\frac{k}{2\overline{OA}}$

$\therefore \overline{OA}=3$

따라서 $\overline{OA}=\sqrt{a^2+b^2}=3$이므로

$k^2=\overline{BC}^2=(2+\sqrt{2})(a^2+b^2)$

$=(2+\sqrt{2})\times3^2=18+9\sqrt{2}$

0697 답 ①

전략 사인법칙을 이용하여 두 선분 DE, CD의 길이를 구한 후 선분 AD의 길이를 구하고, 코사인법칙을 이용한다.

$\angle DAE=\alpha$, $\angle EDA=\beta$라 하면

$\sin\alpha:\sin\beta=1:3 \quad \therefore \sin\beta=3\sin\alpha$

삼각형 AED에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{DE}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{AE}}{\sin\beta}$, $\frac{\overline{DE}}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{3\sin\alpha}$

$\therefore \overline{DE}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin(\angle DBC)=\sin\alpha$, $\sin(\angle BDC)=\sin(\pi-\beta)=\sin\beta$

이므로 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{CD}}{\sin\alpha}=\frac{\overline{BC}}{\sin\beta}$, $\frac{\overline{CD}}{\sin\alpha}=\frac{6}{3\sin\alpha}$

$\therefore \overline{CD}=2$

$\overline{AD}:\overline{CD}=4:3$이므로

$\overline{AD}:2=4:3$, $3\overline{AD}=8 \quad \therefore \overline{AD}=\frac{8}{3}$

삼각형 AED에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\beta=\frac{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2-(\sqrt{5})^2}{2\times\frac{8}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{3}}=\frac{\frac{24}{9}}{\frac{16\sqrt{5}}{9}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}$

$\therefore \sin(\angle BDC)=\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2}=\frac{\sqrt{55}}{10}$

삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BDC)}=2R$

$\therefore R=6\times\frac{10}{\sqrt{55}}\times\frac{1}{2}=\frac{6\sqrt{55}}{11}$

따라서 삼각형 BCD의 외접원의 넓이는

$\pi\times\left(\frac{6\sqrt{55}}{11}\right)^2=\frac{180}{11}\pi$

0698 답 18

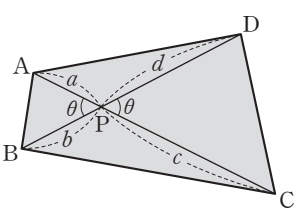
전략 $\angle APB=\angle DPC=\theta$로 놓은 후, 두 삼각형 ABP, PCD의 넓이를 이용하여 $\sin\theta$의 값을 두 식으로 나타내어 비교한다.

그림과 같이

$\angle APB=\angle DPC=\theta$,

$\overline{PA}=a$, $\overline{PB}=b$, $\overline{PC}=c$,

$\overline{PD}=d$라 하자.



두 삼각형 ABP, PCD의 넓이가 각각 2, 8이므로

$\frac{1}{2}ab\sin\theta=2$에서

$\sin\theta=\frac{4}{ab}\ (\because ab\neq0)$ ……㉠

$\frac{1}{2}cd\sin\theta=8$에서

$\sin\theta=\frac{16}{cd}$ ($\because cd\neq0$) ····· ㉡

한편

$\triangle PBC=\frac{1}{2}bc\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}bc\sin\theta$,

$\triangle PDA=\frac{1}{2}da\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}da\sin\theta$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$\square ABCD=\triangle PAB+\triangle PBC+\triangle PCD+\triangle PDA$

$=2+\frac{1}{2}bc\sin\theta+8+\frac{1}{2}da\sin\theta$

$=2+\frac{1}{2}bc\times\frac{4}{ab}+8+\frac{1}{2}da\times\frac{16}{cd}$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=10+\frac{2c}{a}+\frac{8a}{c}$

이때 $\frac{2c}{a}>0$, $\frac{8a}{c}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$\square ABCD=10+\frac{2c}{a}+\frac{8a}{c}\geq10+2\sqrt{\frac{2c}{a}\times\frac{8a}{c}}=18$

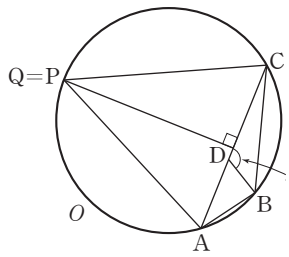
(단, 등호는 $c=2a$일 때 성립한다.)

따라서 $\square ABCD$의 넓이의 최솟값은 18이다.

0699 답 ②

전략 삼각형 PAC의 높이가 최대가 될 때의 점 P의 위치를 찾아 선분 AC의 길이를 구한 후, 두 선분 AB, BC의 길이를 구한다.

점 P가 점 B를 지나지 않는 호 AC와 선분 AC의 수직이등분선의 교점일 때, 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되므로 이때의 점 P가 점 Q이다.



$\cos(\angle ABC)=-\frac{5}{8}$이므로

$\cos(\angle CQA)=\cos(\pi-\angle ABC)=-\cos(\angle ABC)=\frac{5}{8}$

삼각형 QAC는 $\overline{QA}=\overline{QC}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{QC}=\overline{QA}=6\sqrt{10}$

즉, 삼각형 QAC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=(6\sqrt{10})^2+(6\sqrt{10})^2-2\times6\sqrt{10}\times6\sqrt{10}\times\frac{5}{8}$

$=360+360-450$

$=270$ ····· ㉠

한편 $\overline{AB}=a$ ($a>0$)라 하면 $\overline{BC}=2\overline{AB}=2a$

즉, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=a^2+(2a)^2-2\times a\times2a\times\left(-\frac{5}{8}\right)$

$=a^2+4a^2+\frac{5}{2}a^2$

$=\frac{15}{2}a^2$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{15}{2}a^2=270$이므로

$a^2=36$ $\therefore a=6$ ($\because a>0$)

$\therefore \overline{BC}=2a=2\times6=12$

이때 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2R$이므로 $\frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R$

$\therefore R=4\sqrt{3}$

따라서 구하는 외접원의 반지름의 길이는 $4\sqrt{3}$이다.

0700 답 63

전략 S_1, S_2를 이용하여 두 선분 AD, BC의 길이의 비를 구한 후, $\cos\alpha$를 이용하여 선분 AD의 길이를 구한다.

호 BD에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로

$\angle BAD=\angle BCD=\theta$, $\overline{AD}=a$, $\overline{CB}=b$라 하면

$S_1=\triangle ABD=\frac{1}{2}\times6\times a\times\sin\theta=3a\sin\theta$,

$S_2=\triangle CBD=\frac{1}{2}\times b\times4\times\sin\theta=2b\sin\theta$

$S_1:S_2=9:5$이므로 $3a\sin\theta:2b\sin\theta=9:5$

$3a:2b=9:5$ $\therefore a:b=6:5$

호 AC에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로

$\angle ADC=\angle ABC=\alpha$

$a=6k$, $b=5k$($k>0$)라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=6^2+(5k)^2-2\times6\times5k\times\cos\alpha$

$=25k^2-45k+36$ ····· ㉠

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=(6k)^2+4^2-2\times6k\times4\times\cos\alpha$

$=36k^2-36k+16$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$25k^2-45k+36=36k^2-36k+16$

$11k^2+9k-20=0$, $(11k+20)(k-1)=0$

$\therefore k=1$ ($\because k>0$)

$\therefore \overline{AD}=6$

따라서 삼각형 ADC의 넓이 S는

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{DC}\times\sin\alpha$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{DC}\times\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$=\frac{1}{2}\times6\times4\times\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=3\sqrt{7}$

$\therefore S^2=(3\sqrt{7})^2=63$

09 등차수열

난이도별 필수 기출 172~188쪽

0701 답 ③

주어진 수열의 제n항은 $\frac{n+1}{n}$이므로 제8항은 $\frac{9}{8}$이다.

0702 답 ④

주어진 수열의 첫째항은 $\sin\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$,

제5항은 $\sin\frac{5}{3}\pi+\cos\frac{5}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$이므로 구하는 합은

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)=1$

0703 답 ⑤

$a_n+b_n=(n+1)+(n-4)=2n-3$이므로

$a_4+b_4=8-3=5$

0704 답 ④

주어진 수열의 제n항은 $n(n+1)$이므로 제6항은 $6\times7=42$,

제10항은 $10\times11=110$이다.

따라서 구하는 합은 $42+110=152$

0705 답 ①

$a_5=72$이므로

$75+k=72$ $\therefore k=-3$

따라서 $a_n=3n^2-3$이므로 $a_3=27-3=24$

0706 답 ③

ㄱ. 수열 $\left\{\frac{1}{3n+1}\right\}$의 제6항은 $\frac{1}{18+1}=\frac{1}{19}$

ㄴ. 수열 $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{4}{25}$, …의 제n항은 $\frac{n}{(n+1)^2}$이므로 제6항은 $\frac{6}{49}$이다.

ㄷ. 수열 -1, 1, -1, 1, …의 홀수 번째 항은 -1, 짝수 번째 항은 1이므로 제8항과 제9항의 합은 $1+(-1)=0$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0707 답 ③

[1단계]의 공의 개수는 1, [2단계]에서 추가되는 공의 개수는 1+2, [3단계]에서 추가되는 공의 개수는 1+2+3이다. 즉,

$a_1=1$, $a_2=a_1+(1+2)=1+3=4$,

$a_3=a_2+(1+2+3)=4+6=10$,

$a_4=a_3+(1+2+3+4)=10+10=20$,

$a_5=a_4+(1+2+3+4+5)=20+15=35$,

$a_6=a_5+(1+2+3+4+5+6)=35+21=56$

$\therefore a_4+a_6=20+56=76$

0708 답 344

두 집합 A, B의 원소를 각각 작은 것부터 차례로 나열하여 생각하자.

집합 A의 원소 중에서 n이 짝수, 즉 $n=2k$(k는 자연수)일 때 $2n^2=2(2k)^2=8k^2$이고 k^2은 자연수이므로 집합 B의 원소와 중복된다.

따라서 집합 $A\cup B$의 원소는 집합 A의 홀수 번째 원소와 집합 B의 모든 원소로 이루어져 있다.

집합 A의 13번째 원소인 $2\times13^2=338$ 이하에서 집합 A의 홀수 번째 원소는 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13번째의 7개이다.

338 이하에서 $8\times42=336$이므로 집합 B의 원소의 개수는 42이다.

집합 $A\cup B$의 원소 중에서 338 이하인 원소의 개수는

$7+42=49$이므로 $a_{48}=336$, $a_{49}=338$

(a_{48}: 집합 B의 42번째 원소, a_{49}: 집합 A의 13번째 원소)

이때 a_{50}은 집합 B의 43번째 $8\times43=344$와 집합 A의 15번째 원소 $2\times15^2=450$ 중에서 작은 수이다.

$\therefore a_{50}=344$

0709 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_1=5$, $a_9=21$이므로

$5+8d=21$ $\therefore d=2$

$\therefore a_{15}=5+14\times2=33$

0710 답 ③

주어진 등차수열의 첫째항이 -5, 공차가 $-1-(-5)=4$이므로

제20항은 $-5+19\times4=71$

0711 답 ④

세 수 2, a, 8이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a=2+8$ $\therefore a=5$

세 수 5, 8, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$16=5+b$ $\therefore b=11$

$\therefore ab=5\times11=55$

0712 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_9-a_4=15$에서 $(a+8d)-(a+3d)=15$

$5d=15$ $\therefore d=3$

$a_2+a_7=25$에서 $(a+3)+(a+6\times3)=25$

$2a+21=25$ $\therefore a=2$

따라서 $a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$이므로

$a_k=3k-1=89$ $\therefore k=30$

0713 답 ②

세 수 b, 8, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$16=b+c$

세 수 a, 8, d가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$16=a+d$

$\therefore \frac{b+c}{4}+\frac{a+d}{2}=\frac{16}{4}+\frac{16}{2}=12$

0714 답 41

주어진 수열의 첫째항이 7, 제$(m+2)$항이 91이므로 공차를 d라 하면

$91=7+(m+1)\times d$ $\therefore d=\dfrac{84}{m+1}$ …… ⓘ

m의 최댓값은 d가 최소일 때이고, 공차 d는 1이 아닌 자연수이므로 $d=2$

따라서 $m+1=42$이므로 $m=41$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 공차를 m에 대한 식으로 나타내기	50 %
ⓘⓘ m의 최댓값 구하기	50 %

0715 답 ②

주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 12, 제6항이 -8이므로

$-8=12+5d$ $\therefore d=-4$

여섯 개의 수는 12, 8, 4, 0, -4, -8이므로

$x=8$, $y=4$, $z=0$, $w=-4$

$\therefore x-y+z-w=8-4+0-(-4)=8$

0716 답 ②

세 수를 $a-d$, a, $a+d$라 하면

$(a-d)+a+(a+d)=15$ …… ㉠

$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=93$ …… ㉡

㉠에서 $3a=15$ $\therefore a=5$

이를 ㉡에 대입하면

$(5-d)^2+5^2+(5+d)^2=93$

$75+2d^2=93$, $d^2=9$

$\therefore d=-3$ 또는 $d=3$

따라서 세 수는 2, 5, 8이므로 세 수의 곱은

$2\times5\times8=80$

0717 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4=a_2+2d$이므로

$a_2=\log_3 2$, $a_4=\log_3 18=\log_3(3^2\times2)=2+\log_3 2$에서

$2+\log_3 2=\log_3 2+2d$ $\therefore d=1$

$a_8=a_2+6d$이므로 $k+\log_3 2=\log_3 2+6$

$\therefore k=6$

0718 답 ①

$a_n=45+(n-1)\times(-4)=-4n+49$

$a_n<10$에서 $-4n+49<10$ $\therefore n>9.75$

따라서 처음으로 10보다 작아지는 항은 제10항이다.

0719 답 ③

주어진 수열의 첫째항이 7, 공차가 5이고 제$(n+2)$항이 82이므로

$82=7+(n+1)\times5$, $5n+5=75$

$\therefore n=14$

0720 답 ①

등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b라 하면

$b_n=b+(n-1)\times4=4n-4+b$

$b_8=25$에서

$28+b=25$ $\therefore b=-3$

$\therefore b_n=4n-7$

$a_n+b_n=3n+1$이므로

$a_n+4n-7=3n+1$

$\therefore a_n=-n+8$

$\therefore a_3=-3+8=5$

0721 답 123

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_7+a_8+a_9=(a_1+6d)+(a_2+6d)+(a_3+6d)$

$=(a_1+a_2+a_3)+18d$

즉, $69=15+18d$이므로

$18d=54$ $\therefore d=3$

$\therefore a_{13}+a_{14}+a_{15}=(a_7+6d)+(a_8+6d)+(a_9+6d)$

$=(a_7+a_8+a_9)+18d$

$=69+18\times3=123$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1+a_2+a_3=15$에서

$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)=15$

$3a_1+3d=15$ $\therefore a_1+d=5$ …… ㉠

$a_7+a_8+a_9=69$에서

$(a_1+6d)+(a_1+7d)+(a_1+8d)=69$

$3a_1+21d=69$ $\therefore a_1+7d=23$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a_1=2$, $d=3$

따라서 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공차가 3이므로

$a_{13}+a_{14}+a_{15}=(2+12\times3)+(2+13\times3)+(2+14\times3)$

$=38+41+44=123$

0722 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 $a_{20}=32$에서

$a+19\times6=32$ $\therefore a=-82$

$a_n=-82+(n-1)\times6=6n-88$이므로 $|a_n|=0$에서

$|6n-88|=0$ $\therefore n=14.66\cdots$

이때 $|a_{14}|=4$, $|a_{15}|=2$이므로 $|a_n|$의 값이 최소가 되는 자연수 n의 값은 15이다.

0723 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4+a_5+a_6=42$에서

$(a_1+3d)+(a_2+3d)+(a_3+3d)=42$

$(a_1+a_2+a_3)+9d=42$, $15+9d=42$

$\therefore d=3$

$a_1+a_2+a_3=15$에서

$a_1+(a_1+3)+(a_1+2\times3)=15$

$3a_1+9=15$ $\therefore a_1=2$

$a_n=2+(n-1)\times3=3n-1$이므로 $a_n>100$에서

$3n-1>100$ $\therefore n>\frac{101}{3}=33.66\cdots$

따라서 처음으로 100보다 커지는 항은 제34항이다.

0724 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 $|a_4-2|=|a_8-4|$에서

$|(a+3\times3)-2|=|(a+7\times3)-4|$

$|a+7|=|a+17|$

이때 $a+7<a+17$이므로 $a+7=-(a+17)$

$2a=-24$ $\therefore a=-12$

$a_n=-12+(n-1)\times3=3n-15$이므로 $a_n>100$에서

$3n-15>100$, $3n>115$

$\therefore n>\frac{115}{3}=38.33\cdots$

따라서 자연수 n의 최솟값은 39이다.

0725 답 ③

$2^x=t(t>0)$라 하면 세 수 2, $\log_2(t-1)$, $\log_2(t+2)$가 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

이때 진수의 조건에서 $t-1>0$, $t+2>0$ $\therefore t>1$

세 수가 등차수열을 이루므로 $2\log_2(t-1)=2+\log_2(t+2)$에서

$\log_2(t-1)^2=\log_2 4+\log_2(t+2)$

$\log_2(t-1)^2=\log_2 4(t+2)$

$(t-1)^2=4(t+2)$, $t^2-2t+1=4t+8$

$t^2-6t-7=0$, $(t+1)(t-7)=0$

$\therefore t=7$ ($\because t>1$)

$t=2^x$이므로 $2^x=7$에서

$x=\log_2 7$

0726 답 ②

$|a_4|-a_6=0$에서 $a_6=|a_4|$

$\therefore a_6=a_4$ 또는 $a_6=-a_4$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

(i) $a_6=a_4$일 때,

$d=0$이므로 $a_6=a_4=a_1=-18$

이때 $a_6\neq|a_4|$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_6=-a_4$일 때,

$-18+5d=-(-18+3d)$이므로

$8d=36$ $\therefore d=\frac{9}{2}$

(i), (ii)에서 $d=\frac{9}{2}$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -18, 공차가 $\frac{9}{2}$이므로

$a_{11}=-18+10\times\frac{9}{2}=27$

0727 답 ③

(나)에서 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 각각 -2, 5이므로

$a_n=2b_1+(n-1)\times(-2)=-2n+2b_1+2$

$b_n=b_1+(n-1)\times5=5n+b_1-5$

(가)에서 $a_5=b_5$이므로

$-10+2b_1+2=25+b_1-5$ $\therefore b_1=28$

따라서 $a_n=-2n+58$, $b_n=5n+23$이므로

$3a_3+2b_3=3(-6+58)+2(15+23)$

$=156+76=232$

0728 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

(가)에서 $a_3+a_9=0$이므로

$(a+2d)+(a+8d)=0$

$2a=-10d$ $\therefore a=-5d$ …… ㉠

(나)에서 $|a_2|=|a_5|+6$이므로

$|a+d|=|a+4d|+6$

㉠을 대입하면

$|-4d|=|-d|+6$

이때 $d>0$이므로

$4d=d+6$ $\therefore d=2$

이를 ㉠에 대입하면 $a=-10$

$\therefore a_{12}=-10+11\times2=12$

0729 답 100

주어진 등차수열의 공차를 d라 하면 첫째항이 -5, 제21항이 55이므로

$-5+20d=55$ $\therefore d=3$ …… ⓘ

148은 $21+2m+1=2m+22$, 즉 제$(2m+22)$항이므로

$-5+(2m+21)\times3=148$

$2m+21=51$ $\therefore m=15$ …… ⓘⓘ

따라서 b_m은 $21+15=36$, 즉 제36항이므로

$b_m=-5+35\times3=100$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 공차 구하기	30 %
ⓘⓘ m의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ b_m의 값 구하기	30 %

0730 답 ①

주어진 등차수열을 $\{a_n\}$이라 하면 첫째항이 1, 공차가 4이므로

$a_n=1+(n-1)\times4=4n-3$

첫 번째 시행 후의 수열은 a_2, a_4, a_6, a_8, …이므로 $\{a_{2n}\}$

두 번째 시행 후의 수열은 a_2, a_6, a_{10}, a_{14}, …이므로 $\{a_{4n-2}\}$

세 번째 시행 후의 수열은 a_6, a_{14}, a_{22}, a_{30}, …이므로 $\{a_{8n-2}\}$

네 번째 시행 후의 수열은 a_6, a_{22}, a_{38}, a_{54}, …이므로 $\{a_{16n-10}\}$

따라서 네 번째 시행 후 남은 수열의 제4항은

$a_{16\times4-10}=a_{54}=4\times54-3=213$

0731 답 ⑤

세 실수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2b=a+c$ ····· ㉠

㈎에서 $\frac{2^a\times 2^c}{2^b}=64$이므로 $2^{a+c-b}=2^6$

$\therefore a+c-b=6$

㉠을 대입하면

$2b-b=6$ $\therefore b=6$

$\therefore a+c=12$ ····· ㉡

㈏에서 $a+ac+c=28$이므로 ㉡을 대입하면

$12+ac=28$ $\therefore ac=16$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+c)^2-2ac+b^2$

$=144-32+36$

$=148$

0732 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, l이라 하자.

$a_5-b_5=a_6-b_7=0$에서

$a_6-a_5=b_7-b_5$ $\therefore d=2l$

또 $a_6-b_7=0$에서 $a_6=b_7$

이때 $d=0$이면 $a_6=a_7=27$이므로 $b_7=a_6=27$

이는 $b_7\le 24$를 만족시키지 않으므로 $d\neq 0$

즉, $d=2l$에서 d와 l은 모두 자연수이므로 d는 2의 배수이다.

····· ㉠

$a_7=27$에서 $a_1+6d=27$ $\therefore a_1=27-6d$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로

$a_1=27-6d>0$ $\therefore d=2$ 또는 $d=4$ ($\because$ ㉠)

(ⅰ) $d=2$일 때,

$a_1=27-6\times 2=15$이므로

$b_7=a_6=a_1+5d=15+5\times 2=25$

이는 $b_7\le 24$를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $d=4$일 때,

$a_1=27-6\times 4=3$이므로

$b_7=a_6=a_1+5d=3+5\times 4=23$

이는 $b_7\le 24$를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $d=4$

$\therefore l=\frac{1}{2}d=\frac{1}{2}\times 4=2$

$\therefore b_1-a_1=(b_5-4l)-(a_5-4d)$

$=(b_5-a_5)+4(d-l)$

$=0+4\times 2=8$

0733 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공차가 4이므로

$a_n=3+(n-1)\times 4=4n-1$

등차수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 5, 공차가 9이므로

$b_n=5+(n-1)\times 9=9n-4$

이때 $\{b_n\}$의 항 중에서 $\{a_n\}$에 포함되는 항을 찾는다.

즉, $\{b_n\}$의 항 중에서 4로 나누었을 때 나머지가 3인 항을 찾는다.

(ⅰ) $n=4k$(k는 자연수)일 때,

$b_{4k}=9(4k)-4=4(9k-1)$

따라서 4로 나누어떨어지므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $n=4k-1$(k는 자연수)일 때,

$b_{4k-1}=9(4k-1)-4=4(9k-4)+3$

따라서 4로 나누었을 때 나머지가 3이다.

$\therefore c_k=9(4k-1)-4=36k-13$

(ⅲ) $n=4k-2$(k는 자연수)일 때,

$b_{4k-2}=9(4k-2)-4=4(9k-6)+2$

따라서 4로 나누었을 때 나머지가 2이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $n=4k-3$(k는 자연수)일 때,

$b_{4k-3}=9(4k-3)-4=4(9k-8)+1$

따라서 4로 나누었을 때 나머지가 1이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 $c_n=36n-13$

$c_n>1500$에서 $36n-13>1500$

$\therefore n>\frac{1513}{36}=42.02\cdots$

따라서 처음으로 1500보다 커지는 항은 제43항이다.

참고 등차수열 $\{a_n\}$의 공차는 4, 등차수열 $\{b_n\}$의 공차는 9이므로 두 등차수열에 공통으로 포함되는 수를 나열한 수열 $\{c_n\}$은 등차수열이고 공차는 4와 9의 최소공배수인 36이다.

0734 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

㈏에서 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=-115$이므로

$(a_5-4d)+(a_5-2d)+a_5+(a_5+2d)+(a_5+4d)=-115$

$5a_5=-115$ $\therefore a_5=-23$ ····· ㉠

㈐에서 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항 중에서 100 이하인 항의 개수가 15이므로 공차는 양수이고, $a_{15}\le 100$, $a_{16}>100$이어야 한다.

$a_{15}\le 100$에서 $a_5+10d\le 100$

$10d\le 123$ ($\because$ ㉠)

$\therefore d\le\frac{123}{10}=12.3$

$a_{16}>100$에서 $a_5+11d>100$

$11d>123$ ($\because$ ㉠)

$\therefore d>\frac{123}{11}=11.18\cdots$

㈎에서 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 정수이므로 공차도 정수이다.

$\therefore d=12$ ($\because 11.18\cdots<d\le 12.3$)

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 다섯째항은 -23, 공차는 12이므로

$a_{15}=-23+10\times 12=97$

0735 답 ③

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $p=5+8=13$, 공차가 $q=8$인 등차수열이므로

$a_n=13+(n-1)\times 8=8n+5$

$\therefore a_{p+q}=a_{21}=8\times 21+5=173$

0736 답 ①

세 수 2, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\alpha=2+\beta$ ····· ㉠

이차방정식 $x^2-nx+3(n-3)=0$에서

$(x-3)(x-n+3)=0$ $\therefore$ $x=3$ 또는 $x=n-3$ ($3\neq n-3$)

(i) $3<n-3$, 즉 $n>6$일 때,

$\alpha<\beta$이므로 $\alpha=3$, $\beta=n-3$

이를 ㉠에 대입하면

$6=2+(n-3)$ $\therefore$ $n=7$

(ii) $n-3<3$, 즉 $n<6$일 때,

$\alpha<\beta$이므로 $\alpha=n-3$, $\beta=3$

이를 ㉠에 대입하면

$2(n-3)=2+3$ $\therefore$ $n=\frac{11}{2}$

그런데 n은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $n=7$

다른 풀이

세 수 2, α, β가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\alpha=2+\beta$ $\therefore$ $2\alpha-\beta=2$ ····· ㉡

이차방정식 $x^2-nx+3(n-3)=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=n$ ····· ㉢

$\alpha\beta=3(n-3)$ ····· ㉣

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$\alpha=\frac{n+2}{3}$, $\beta=\frac{2n-2}{3}$

이를 ㉣에 대입하면

$\frac{n+2}{3}\times\frac{2n-2}{3}=3(n-3)$

$2n^2-25n+77=0$, $(2n-11)(n-7)=0$

$\therefore$ $n=\frac{11}{2}$ 또는 $n=7$

이때 n은 자연수이므로 $n=7$

0737 답 ⑤

세 변의 길이를 $a-2$, a, $a+2$라 하면 삼각형의 가장 긴 변의 길이는 나머지 두 변의 길이의 합보다 작으므로

$a+2<a+(a-2)$ $\therefore$ $a>4$ ····· ㉠

직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의하여

$(a+2)^2=a^2+(a-2)^2$

$a^2+4a+4=2a^2-4a+4$

$a^2-8a=0$, $a(a-8)=0$ $\therefore$ $a=8$ ($\because$ ㉠)

따라서 세 변의 길이는 6, 8, 10이므로 (빗변의 길이) 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times6\times8=24$

0738 답 ①

삼차방정식의 세 실근을 $a-d$, a, $a+d$라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a-d)+a+(a+d)=12$

$3a=12$ $\therefore$ $a=4$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 4이므로 방정식에 $x=4$를 대입하면

$64-192+4k-28=0$, $4k=156$

$\therefore$ $k=39$

✓ 공통수학1 다시보기

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$

0739 답 ③

4개의 내각의 크기를 a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$ ($d\geq0$)라 하면 사각형의 내각의 크기의 합은 360°이므로

$a+(a+d)+(a+2d)+(a+3d)=360°$

$4a+6d=360°$ $\therefore$ $2a+3d=180°$ ····· ㉠

가장 큰 내각의 크기가 가장 작은 내각의 크기의 2배이므로

$a+3d=2a$ $\therefore$ $a=3d$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=60°$, $d=20°$

따라서 공차는 20°이다.

0740 답 ①

다항식 $f(x)$를 $x-1$, $x-2$, $x-5$로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여 각각

$f(1)=1+a+2=a+3$, $f(2)=4+2a+2=2a+6$,

$f(5)=25+5a+2=5a+27$

세 수 $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2f(2)=f(1)+f(5)$

$2(2a+6)=(a+3)+(5a+27)$

$4a+12=6a+30$

$\therefore$ $a=-9$

✓ 공통수학1 다시보기

다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면

➡ $R=f(a)$

0741 답 ①

이차방정식 $24x^2-10x+1=0$의 두 근이 a_2, a_4이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a_2+a_4=\frac{10}{24}$, $a_2a_4=\frac{1}{24}$

$\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$, $\frac{1}{a_4}$이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\frac{2}{a_3}=\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_4}$에서

$\frac{2}{a_3}=\frac{a_2+a_4}{a_2a_4}$, $\frac{2}{a_3}=\frac{\frac{10}{24}}{\frac{1}{24}}$

$\frac{2}{a_3}=10$ $\therefore$ $a_3=\frac{1}{5}$

0742 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_5=3a_1$에서

$a_1+4d=3a_1$ $\therefore a_1=2d$

다섯 개의 반원 C_1, C_2, C_3, C_4, C_5의 지름은 각각 a_1, a_1+d, a_1+2d, a_1+3d, a_1+4d이므로 $a_1=2d$를 각각 대입하면

$2d$, $3d$, $4d$, $5d$, $6d$

반원 C의 지름의 길이가 40이므로

$2d+3d+4d+5d+6d=40$, $20d=40$

$\therefore d=2$

따라서 두 반원 C_3, C_5의 지름은 각각 8, 12이므로 구하는 넓이의 합은

$\frac{1}{2}\times\pi\times4^2+\frac{1}{2}\times\pi\times6^2=26\pi$

0743 답 73

주어진 사각형은 사다리꼴이므로

$S(t)=\frac{1}{2}\times\{f(t)+f(t+2)\}\times2=f(t)+f(t+2)$에서

$S(2)=\log_2 2+\log_2 4=\log_2 8$, $S(4)=\log_2 4+\log_2 6=\log_2 24$,

$S(a)=\log_2 a+\log_2(a+2)=\log_2 a(a+2)$

$S(2)$, $S(4)$, $S(a)$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S(4)=S(2)+S(a)$에서

$2\log_2 24=\log_2 8+\log_2 a(a+2)$, $\log_2 24^2=\log_2 8a(a+2)$

$\log_2 576=\log_2 8a(a+2)$

즉, $576=8a(a+2)$이므로 $a(a+2)=72$

$a^2+2a-72=0$ $\therefore a=-1\pm\sqrt{73}$

그런데 $a>1$이므로 $a=-1+\sqrt{73}$

$\therefore n=73$

0744 답 ③

함수 $y=|x^2-16|$의 그래프가 직선 $y=k$와 만나는 점의 x좌표는

$|x^2-16|=k$에서 $x^2-16=k$ 또는 $x^2-16=-k$

$x^2=16+k$ 또는 $x^2=16-k$

$\therefore x=\pm\sqrt{16+k}$ 또는 $x=\pm\sqrt{16-k}$

이때 $a_1<a_2<a_3<a_4$이므로

$a_1=-\sqrt{16+k}$, $a_2=-\sqrt{16-k}$, $a_3=\sqrt{16-k}$, $a_4=\sqrt{16+k}$

세 수 $-\sqrt{16+k}$, $-\sqrt{16-k}$, $\sqrt{16-k}$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$-2\sqrt{16-k}=-\sqrt{16+k}+\sqrt{16-k}$

$\sqrt{16+k}=3\sqrt{16-k}$

양변을 제곱하면 $16+k=9(16-k)$

$16+k=144-9k$ $\therefore 10k=128$

다른 풀이

네 수 a_1, a_2, a_3, a_4가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$a_1=a-3d$, $a_2=a-d$, $a_3=a+d$, $a_4=a+3d$라 하자.

함수 $y=|x^2-16|$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로

$a_2=-a_3$

즉, $a-d=-(a+d)$이므로 $a=0$

$\therefore a_1=-3d$, $a_2=-d$, $a_3=d$, $a_4=3d$

a_3은 함수 $y=-x^2+16$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표이므로

$k=-d^2+16$ $\therefore d^2=16-k$ ····· ㉠

a_4는 함수 $y=x^2-16$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표이므로

$k=(3d)^2-16$ $\therefore k=9d^2-16$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $k=9(16-k)-16$

$k=128-9k$ $\therefore 10k=128$

0745 답 ②

첫째항이 -6, 공차가 4이므로 첫째항부터 제7항까지의 합은

$\frac{7\{2\times(-6)+6\times4\}}{2}=42$

다른 풀이

$a_7=-6+6\times4=18$이므로 첫째항부터 제7항까지의 합은

$\frac{7(-6+18)}{2}=42$

0746 답 ①

$a_1=7$, $a_{11}=33$이므로 첫째항부터 제11항까지의 합은

$\frac{11(7+33)}{2}=220$

0747 답 ⑤

첫째항이 4, 끝항이 16, 항수가 10인 등차수열의 합은

$\frac{10(4+16)}{2}=100$

따라서 $4+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8+16=100$이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_8=80$

0748 답 ④

$S_n=\frac{n\{2\times50+(n-1)\times(-4)\}}{2}=-2n(n-26)$이므로

$-2n(n-26)<0$에서 $n(n-26)>0$

이때 n은 자연수이므로 $n>26$

따라서 자연수 n의 최솟값은 27이다.

0749 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4=-a_8$에서

$15+3d=-(15+7d)$

$10d=-30$ $\therefore d=-3$

따라서 첫째항부터 제10항까지의 합은

$\frac{10\{2\times15+9\times(-3)\}}{2}=15$

0750 답 ④

첫째항이 2, 끝항이 20, 항수가 $(k+2)$인 등차수열의 합이 110이므로

$\frac{(k+2)(2+20)}{2}=110$, $k+2=10$ $\therefore k=8$

제10항이 20이므로 등차수열의 공차를 d라 하면

$2+9d=20$, $9d=18$

$\therefore d=2$

따라서 a_2는 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열의 제3항이므로

$a_2=2+2\times2=6$

0751 답 -10

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d\neq0)$라 하면

$S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$

$=(a_3-2d)+(a_3-d)+a_3+(a_3+d)+(a_3+2d)$

$=5a_3$

즉, $5a_3=25$이므로 $a_3=5$ …… ⓘ

$a_2=5-d$, $a_4=5+d$, $a_5=5+2d$이므로 $a_2^2+a_3^2=a_4^2+a_5^2$에서

$(5-d)^2+5^2=(5+d)^2+(5+2d)^2$

$d^2-10d+50=5d^2+30d+50$

$d^2+10d=0$, $d(d+10)=0$

이때 $d\neq0$이므로 $d=-10$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a_3의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ 공차 구하기	60 %

0752 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_{10}=100$이므로

$\frac{10\{2a+9d\}}{2}=100$ $\therefore 2a+9d=20$ …… ㉠

$S_{20}-S_{10}=300$에서 $S_{20}=400$이므로

$\frac{20\{2a+19d\}}{2}=400$ $\therefore 2a+19d=40$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $d=2$

따라서 $a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}$은 첫째항이 $a+d=3$, 끝항이 $a+19d=39$, 항수가 10인 등차수열의 합이므로

$\frac{10(3+39)}{2}=210$

0753 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{50}-a_{48}=2d$

즉, $2d=-4$이므로 $d=-2$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\frac{n\{2\times20+(n-1)\times(-2)\}}{2}$

$=-n^2+21n$

$\therefore a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}$

$=S_{20}-S_{10}$

$=(-400+420)-(-100+210)$

$=20-110$

$=-90$

0754 답 ②

첫째항이 35, 공차가 -4이므로

$a_n=35+(n-1)\times(-4)=-4n+39$

$-4n+39<0$에서 $n>\frac{39}{4}=9.75$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 제10항부터 음수이므로 첫째항부터 제9항까지의 합이 최대이다.

이때 $a_9=-4\times9+39=3$이므로 S_n의 최댓값은

$S_9=\frac{9(35+3)}{2}=171$

따라서 $n=9$일 때 최댓값이 171이므로 구하는 합은

$9+171=180$

0755 답 ④

첫째항이 12, 끝항이 -20, 항수가 $(n+2)$인 등차수열의 합은

$\frac{(n+2)\{12+(-20)\}}{2}=-4n-8$

$12+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+(-20)=-4n-8$이므로

$12+(-52)+(-20)=-4n-8$

$4n=52$ $\therefore n=13$

0756 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$S_4=\frac{4\{2\times(-30)+3d\}}{2}=-120+6d$

$S_9=\frac{9\{2\times(-30)+8d\}}{2}=-270+36d$

$S_4=S_9$에서

$-120+6d=-270+36d$

$30d=150$ $\therefore d=5$

$\therefore a_n=-30+(n-1)\times5=5n-35$

$5n-35>0$에서 $n>7$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 제8항부터 양수이다.

이때 $a_6=5\times6-35=-5$, $a_7=5\times7-35=0$이므로 S_n의 최솟값은 $S_6=S_7$이다.

따라서 구하는 최솟값은

$S_6=S_7=\frac{7(-30+0)}{2}=-105$

0757 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_5=40$에서 $\frac{5(2a+4d)}{2}=40$

$\therefore a+2d=8$ …… ㉠

$S_{10}=155$에서 $\frac{10(2a+9d)}{2}=155$

$\therefore 2a+9d=31$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=3$

따라서 첫째항부터 제20항까지의 합은

$S_{20}=\frac{20\{2\times2+19\times3\}}{2}=610$

0758 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

㈎에서 $S_4=a_7$이므로

$\frac{4(2a+3d)}{2}=a+6d$

$4a+6d=a+6d$ $\therefore a=0$

㈏에서 $S_6=a_{10}+14$이므로

$\frac{6(2\times0+5d)}{2}=(0+9d)+14$

$15d=9d+14$ $\therefore d=\frac{7}{3}$

$\therefore S_{10}=\frac{10\left(2\times0+9\times\frac{7}{3}\right)}{2}=105$

0759 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a>0)$라 하면 $a_k=31$에서

$a+(k-1)\times3=31$

$\therefore a=34-3k$ ····· ㉠

$S_{k+10}=650$에서

$\frac{(k+10)\{2\times(34-3k)+(k+9)\times3\}}{2}=650$

$(k+10)(-3k+95)=1300$, $3k^2-65k+350=0$

$(3k-35)(k-10)=0$ $\therefore k=\frac{35}{3}$ 또는 $k=10$

그런데 k는 자연수이므로 $k=10$

$k=10$을 ㉠에 대입하면

$a=34-30=4$

$\therefore S_k=S_{10}=\frac{10\{2\times4+9\times3\}}{2}=175$

0760 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_3=-6$, $a_9=30$에서

$a+2d=-6$, $a+8d=30$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-18$, $d=6$

$\therefore a_n=-18+(n-1)\times6=6n-24$

$6n-24>0$에서 $n>4$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$은 제5항부터 양수이다.

이때 $a_1=6\times1-24=-18$, $a_4=6\times4-24=0$,

$a_5=6\times5-24=6$, $a_{10}=6\times10-24=36$

$\therefore |a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{10}|$

$=-(a_1+a_2+a_3)+(a_5+a_6+\cdots+a_{10})$

$=-\frac{3(-18-6)}{2}+\frac{6(6+36)}{2}$

$=36+126=162$

0761 답 ④

㈎, ㈏에서

$a_1+a_2+a_3=15$, $a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=75$이므로

$(a_1+a_n)+\underbrace{(a_2+a_{n-1})}_{\to(a_1+d)+(a_n-d)=a_1+a_n}+(a_3+a_{n-2})=15+75$

$3(a_1+a_n)=90$ $\therefore a_1+a_n=30$

㈐에서 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=210$이므로

$\frac{n(a_1+a_n)}{2}=210$, $\frac{n\times30}{2}=210$ $\therefore n=14$

참고 등차수열 $\{a_n\}$에서

$a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\cdots$

0762 답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 공차가 d이므로

$a_5=a+4d$ ····· ㉠

㈏에서 $\frac{8(2a+7d)}{2}=\frac{68}{3}$이므로

$2a+7d=\frac{17}{3}$, $2(a+4d)-d=\frac{17}{3}$

$2a_5-d=\frac{17}{3}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore a_5=\frac{1}{2}d+\frac{17}{6}$ ····· ㉡

한편 $0<d<1$이므로

$0<\frac{1}{2}d<\frac{1}{2}$, $\frac{17}{6}<\frac{1}{2}d+\frac{17}{6}<\frac{10}{3}$

즉, $\frac{17}{6}<a_5<\frac{10}{3}$ ($\because$ ㉡)이고 a_5는 자연수이므로

$a_5=3$

이를 ㉡에 대입하면

$3=\frac{1}{2}d+\frac{17}{6}$ $\therefore d=\frac{1}{3}$

$a_5=3$, $d=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$3=a+4\times\frac{1}{3}$ $\therefore a=\frac{5}{3}$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $\frac{5}{3}$, 공차가 $\frac{1}{3}$이므로

$a_{16}=\frac{5}{3}+15\times\frac{1}{3}=\frac{20}{3}$

0763 답 9

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{17}$

$=\underbrace{(a_1+a_{17})}_{\to(a_9-8d)+(a_9+8d)=2a_9}+(a_3+a_{15})+(a_5+a_{13})+(a_7+a_{11})+a_9$

$=2a_9+2a_9+2a_9+2a_9+a_9=9a_9$

즉, $9a_9=81$이므로 $a_9=9$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_9=9$에서

$a_1+8d=9$ ····· ㉠

5 이상의 자연수 n에 대하여 $T_n=S_n+32$, 즉 $S_n-T_n=-32$에서

S_n-T_n의 값이 일정하므로 $n\geq5$일 때 $a_n\geq0$이다.

따라서 음수인 항은 a_1, a_2, a_3, a_4이다.

$a_k<0$일 때 $|a_k|=-a_k$이므로 $S_n-T_n=-32$에서

$2(a_1+a_2+a_3+a_4)=-32$ $\therefore a_1+a_2+a_3+a_4=-16$

$a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+(a_1+3d)=-16$

$4a_1+6d=-16$ $\therefore 2a_1+3d=-8$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1=-7$, $d=2$

$\therefore S_9=\frac{9\{2\times(-7)+8\times2\}}{2}=9$

0764 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 $d\,(d>0)$라 하자.

공차가 양수이고 (나)에서 S_n의 최솟값은 S_4이므로

$a_1<a_2<a_3<a_4<0<a_5$

$\rightarrow a_4=0$이면 $S_4=S_3+a_4=S_3$이다.

(가)에서 $|S_4|=-S_4=48$이므로 $S_4=-48$

$$\frac{4\{a+(a+3d)\}}{2}=-48$$

$\therefore\ 2a+3d=-24$ ····· ㉠

또 $S_{10}>S_4$이므로 $|S_{10}|=60$에서 $S_{10}=60$

$$\frac{10\{a+(a+9d)\}}{2}=60$$

$\therefore\ 2a+9d=12$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-21,\ d=6$

$\therefore\ a_3+a_4+a_5+\cdots+a_9$

$=S_9-S_2$

$$=\frac{9\{2\times(-21)+8\times6\}}{2}-\frac{2\{-21+(-15)\}}{2}$$

$=27-(-36)=63$

0765 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 $a_3=42$에서

$a+2d=42$

$\therefore\ a=42-2d$

(가)에서 $a_{k-3}+a_{k-1}=-24$이므로

$\{42-2d+(k-4)d\}+\{42-2d+(k-2)d\}=-24$

$\therefore\ (k-5)d=-54$ ····· ㉠

(나)에서 $S_k=k^2$이므로

$$\frac{k\{2\times(42-2d)+(k-1)d\}}{2}=k^2$$

$k\{84+(k-5)d\}=2k^2$

$k>0$이므로 $84+(k-5)d=2k$

$(k-5)d=2k-84$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$2k-84=-54,\ 2k=30$

$\therefore\ k=15$

다른 풀이

$a_{k-3},\ a_{k-2},\ a_{k-1}$은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a_{k-2}=a_{k-3}+a_{k-1}$

(가)에서 $a_{k-3}+a_{k-1}=-24$이므로

$2a_{k-2}=-24$

$\therefore\ a_{k-2}=-12$

$a_3=42,\ a_{k-2}=-12$이고, $a_1+a_k=a_3+a_{k-2}$이므로

$$S_k=\frac{k(a_1+a_k)}{2}=\frac{k(a_3+a_{k-2})}{2}$$

$$=\frac{k\{42+(-12)\}}{2}=15k$$

(나)에서 $S_k=k^2$이므로

$k^2=15k,\ k(k-15)=0$

$\therefore\ k=15\ (\because\ k>0)$

0766 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면 (가)에서 $S_5=S_{10}$이므로

$$\frac{5\{a+(a+4d)\}}{2}=\frac{10\{a+(a+9d)\}}{2}$$

$2a+4d=4a+18d$

$\therefore\ a=-7d$ ····· ㉠

(가)에서 $S_7<S_6$이므로

$a_7=S_7-S_6<0,\ a_8=a+7d=0\ (\because$ ㉠)

즉, $d>0$이므로 $a<0\ (\because$ ㉠)

$S_n=\frac{n\{2\times(-7d)+(n-1)d\}}{2}=\frac{dn(n-15)}{2}$이므로

$S_k=\frac{dk(k-15)}{2},\ S_{2k}=\frac{2dk(2k-15)}{2}$

(i) $S_k=S_{2k}$일 때,

$$\frac{dk(k-15)}{2}=\frac{2dk(2k-15)}{2}$$

$k-15=2(2k-15)\ (\because\ dk>0)$

$\therefore\ k=5$

이때 $k>8$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $S_k=-S_{2k}$일 때,

$$\frac{dk(k-15)}{2}=-\frac{2dk(2k-15)}{2}$$

$k-15=-2(2k-15)\ (\because\ dk>0)$

$\therefore\ k=9$

(i), (ii)에서 $k=9$

$|S_9|=144$에서 $\left|\frac{9d(9-15)}{2}\right|=144$

$|-27d|=144,\ 27d=144\ (\because\ d>0)$

$\therefore\ d=\frac{16}{3}$

이를 ㉠에 대입하면

$a=-7\times\frac{16}{3}=-\frac{112}{3}$

$\therefore\ a_{14}=-\frac{112}{3}+13\times\frac{16}{3}=32$

0767 답 ②

두 자리의 자연수 중에서 6으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

14, 20, 26, …, 98

이때 $98=14+14\times6$에서 구하는 총합은 첫째항이 14, 끝항이 98, 항수가 15인 등차수열의 합이므로

$$\frac{15(14+98)}{2}=840$$

0768 답 ③

20일 동안 적립한 포인트의 합은 첫째항이 1000, 공차가 300이므로

$$\frac{20\{2\times1000+19\times300\}}{2}=10\times7700=77000$$

따라서 20일 후 이 계정에 들어 있는 포인트 총액은

$1200+77000=78200$(원)

0769 답 ④

각 응시자가 받는 점수는 등차수열을 이루므로 1등의 점수를 a, 공차를 $d(d<0)$라 하자.

8명의 점수의 합이 240점이므로

$\frac{8(2a+7d)}{2}=240 \quad \therefore 2a+7d=60 \quad \cdots\cdots ㉠$

1등부터 6등까지 점수의 합이 216점이므로

$\frac{6(2a+5d)}{2}=216 \quad \therefore 2a+5d=72 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=51$, $d=-6$

따라서 1등의 점수는 51점이다.

0770 답 ⑤

첫째항이 120, 공차가 5인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합은

$\frac{n\{2\times120+(n-1)\times5\}}{2}=\frac{n(5n+235)}{2}$

n각형의 내각의 크기의 합은 $180^\circ\times(n-2)$이므로

$\frac{n(5n+235)}{2}=180(n-2)$에서

$n^2-25n+144=0$, $(n-9)(n-16)=0$

$\therefore n=9$ 또는 $n=16$

$n=16$일 때, $120+15\times5=195>180$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore n=9$

0771 답 ④

두 곡선 $y=x^2+ax+b$, $y=x^2$ 사이에 y축과 평행하게 그은 선분의 길이를 $f(x)$라 하면

$f(x)=x^2+ax+b-x^2=ax+b$

이때 $f(x)$는 x에 대한 일차식이므로 같은 간격의 x좌표에 대하여 각각의 선분의 길이는 등차수열을 이룬다.

따라서 $l_1+l_2+l_3+\cdots+l_{10}$의 값은 첫째항이 5, 끝항이 23, 항수가 10인 등차수열의 합과 같으므로

$\frac{10(5+23)}{2}=140$

0772 답 ①

10 이상 100 이하의 자연수 중에서 3의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, …, 99 (30개) $\cdots\cdots ㉠$

10 이상 100 이하의 자연수 중에서 4의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, …, 100 (23개) $\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 공통인 항은

12, 24, 36, …, 96 → 8개 $\cdots\cdots ㉢$

㉠, ㉡을 작은 것부터 차례로 나열하면 (30+23−8=45(개))

12, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 27, …, 100 $\cdots\cdots ㉣$

㉣에서 짝수 번째 항은 15, 18, 21, 27, 30, …, 99이고,

홀수 번째 항은 12, 16, 20, 24, 28, …, 100, 즉 ㉡과 같다.

이때 짝수 번째 항들의 총합은 (㉣의 총합)−(㉡의 총합)이고,

㉣의 총합은 (㉠의 총합)+(㉡의 총합)−(㉢의 총합)이므로

구하는 짝수 번째 항들의 총합은

(㉠의 총합)−(㉢의 총합)

㉠에서 $99=12+(30-1)\times3$이므로 ㉠의 총합은 첫째항이 12, 끝항이 99, 항수가 30인 등차수열의 합이다.

$\frac{30(12+99)}{2}=1665$

또 ㉢에서 $96=12+(8-1)\times12$이므로 ㉢의 총합은 첫째항이 12, 끝항이 96, 항수가 8인 등차수열의 합이다.

$\frac{8(12+96)}{2}=432$

따라서 구하는 짝수 번째 항들의 총합은

$1665-432=1233$

0773 답 ⑤

$\overline{PQ}$는 함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=4nx-4n^2+2n$ 사이에 y축과 평행하게 그은 선분이므로

$\overline{PQ}=(4nx-4n^2+2n)-x^2$

$=-(x-2n)^2+2n$

즉, $f(n)=2n$이다.

따라서 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(12)$의 값은 첫째항이 2, 끝항이 24, 항수가 12인 등차수열의 합과 같으므로

$\frac{12(2+24)}{2}=156$

0774 답 ③

$S_n=\frac{n}{n+2}$에서

$a_6=S_6-S_5=\frac{6}{8}-\frac{5}{7}=\frac{1}{28}$

다른 풀이

$S_n=\frac{n}{n+2}$에서 $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{n+2}-\frac{n-1}{n+1}=\frac{2}{(n+1)(n+2)}$

$\therefore a_6=\frac{2}{7\times8}=\frac{1}{28}$

0775 답 ②

$S_n=2n^2-3n+4$에서

$a_1=S_1=3$

$a_4=S_4-S_3=24-13=11$

$\therefore a_1+a_4=3+11=14$

0776 답 ①

$S_n=2n^2+kn$, $T_n=-n^2+15n$에서

$a_5=S_5-S_4=(50+5k)-(32+4k)=18+k$

$b_5=T_5-T_4=50-44=6$

이때 $a_5=b_5$이므로

$18+k=6 \quad \therefore k=-12$

0777 답 ②

$S_n=2n^2-5n$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=-3$ ····· ㉠

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2n^2-5n)-\{2(n-1)^2-5(n-1)\}$

$=4n-7$ ····· ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=4n-7$

$a_n>200$에서 $4n-7>200$ $\therefore n>\frac{207}{4}=51.75$

따라서 자연수 n의 최솟값은 52이다.

0778 답 ⑤

이차함수 $y=f(x)$의 x절편이 0, 6이므로

$f(x)=ax(x-6)(a<0)$이라 하자.

$S_n=2f(n)$에서 $S_n=2an(n-6)$이므로

$a_1=S_1=2a\times 1\times(-5)=-10a$

$a_6=S_6-S_5=0-2a\times 5\times(-1)=10a$

$\therefore \frac{a_6}{a_1}=\frac{10a}{-10a}=-1$

0779 답 ②

$S_n=2n^2+3n$에서 $a_1=S_1=5$

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2+3n)-\{2(n-1)^2+3(n-1)\}=4n+1$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 5, 공차가 4인 등차수열이다.

$\therefore a_1d=5\times 4=20$

다른 풀이

$S_n=2n^2+3n$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $2+3$, 공차가 2×2인 등차수열이므로 $a_1d=5\times 4=20$

0780 답 4

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 10, 공차가 d이므로

$a_{10}-a_8=(a_8+2d)-a_8=2d$

$S_{10}-S_8=a_9+a_{10}=(10+8d)+(10+9d)$

$=20+17d$

$\frac{S_{10}-S_8}{a_{10}-a_8}=11$에서 $\frac{20+17d}{2d}=11$

$20+17d=22d$ $\therefore d=4$

0781 답 13

$S_{k+2}-S_k=a_{k+1}+a_{k+2}$에서 $S_k=-24$, $S_{k+2}=-16$이므로

$a_{k+1}+a_{k+2}=-16-(-24)=8$ ····· ⓘ

공차가 2이므로

$(a_1+2k)+\{a_1+2(k+1)\}=8$

$a_1+2k=3$ $\therefore a_1=3-2k$ ····· ㉠

한편 $S_k=-24$에서 $\frac{k\{2a_1+(k-1)\times 2\}}{2}=-24$

$\therefore k(a_1+k-1)=-24$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$k(3-2k+k-1)=-24$, $k^2-2k-24=0$

$(k+4)(k-6)=0$ $\therefore k=6$ ($\because k>0$) ····· ⓘⓘ

이를 ㉠에 대입하면 $a_1=3-12=-9$ ····· ⓘⓘⓘ

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 -9, 공차가 2이고 $k=6$이므로

$a_{2k}=a_{12}=-9+11\times 2=13$ ····· ⓘⓥ

채점 기준

ⓘ $S_{k+2}-S_k$를 $a_{k+1}+a_{k+2}$로 나타내기	20 %
ⓘⓘ k의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ a_1의 값 구하기	20 %
ⓘⓥ a_{2k}의 값 구하기	20 %

0782 답 ⑤

$S_n=3n^2-2n+2$에서

ㄱ. $a_1+a_2+a_3=S_3=23$

ㄴ. $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=3n^2-2n+2-\{3(n-1)^2-2(n-1)+2\}$

$=6n-5$

ㄷ. ㄴ에서 $a_{2n}=12n-5$

$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}$의 값은 첫째항이 $12-5=7$, 끝항이 $12\times 5-5=55$, 항수가 5인 등차수열의 합과 같으므로

$\frac{5(7+55)}{2}=155$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0783 답 ④

$S_{2n+1}-S_{2n}=a_{2n+1}$이므로 $a_{2n+1}=6n-2$

$a_5=6\times 2-2=10$, $a_7=6\times 3-2=16$이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_7-a_5=2d$에서

$16-10=2d$ $\therefore d=3$

$\therefore a_7+a_{12}=a_7+(a_7+5d)=2a_7+5d$

$=2\times 16+5\times 3=32+15=47$

0784 답 ③

$S_n=n^2-8n$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=-7$ ····· ㉠

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(n^2-8n)-\{(n-1)^2-8(n-1)\}$

$=2n-9$ ····· ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=2n-9$

$1\leq a_n\leq 51$에서 $1\leq 2n-9\leq 51$

$10\leq 2n\leq 60$ $\therefore 5\leq n\leq 30$

따라서 구하는 자연수 n의 개수는

$30-5+1=26$

0785 답 ④

$S_n=an^2+bn$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=a+b$ ····· ㉠

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(an^2+bn)-\{a(n-1)^2+b(n-1)\}$

$=2an-a+b$ ····· ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=2an-a+b$

공차가 6이므로 $2a=6$ → 일반항이 $a_n=pn+q$ 꼴인 등차수열의 공차는 p이다.

$\therefore a=3$

이때 $S_n=3n^2+bn$, $a_n=6n-3+b$이고, $S_4=a_{11}$이므로

$48+4b=63+b$, $3b=15$

$\therefore b=5$

따라서 $a_n=6n+2$이므로

$a_{12}=6\times 12+2=74$

다른 풀이

$S_4=a_{11}$에서

$a_1+a_2+a_3+a_4=a_{11}$

등차수열의 공차를 d라 하면

$(a_{12}-11d)+(a_{12}-10d)+(a_{12}-9d)+(a_{12}-8d)=a_{12}-d$

$\therefore a_{12}=\frac{37}{3}d=\frac{37}{3}\times 6=74$

0786 답 ⑤

$S_n=3n^2+2n$에서

(i) $n=1$일 때, $a_1=S_1=5$ ····· ㉠

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(3n^2+2n)-\{3(n-1)^2+2(n-1)\}$

$=6n-1$ ····· ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=6n-1$

$a_{2k-1}=6(2k-1)-1=12k-7$이므로 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}$의 값은 첫째항이 5, 공차가 12, 항수가 k인 등차수열의 합과 같다.

$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2k-1}=715$에서

$\frac{k\{2\times 5+(k-1)\times 12\}}{2}=715$

$6k^2-k-715=0$, $(6k+65)(k-11)=0$

이때 k는 자연수이므로 $k=11$

0787 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 $k(k>0)$이므로

$a_n=k+(n-1)k=nk$

수열 $\{b_n\}$의 일반항은 첫째항이 $a_1=k$, 공차가 $2k$, 항수가 n인 등차수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 n으로 나눈 것과 같으므로

$b_n=\frac{\frac{n\{2k+(n-1)\times 2k\}}{2}}{n}=nk$

$S_n=a_nb_n$이므로

$S_n=(nk)\times(nk)=n^2k^2$

(i) $n=1$일 때,

$c_1=S_1=k^2$ ····· ㉠

(ii) $n=2$일 때,

$c_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2k^2-(n-1)^2k^2$

$=(2n-1)k^2$ ····· ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$c_n=(2n-1)k^2$

$c_4-c_1=54$이므로

$7k^2-k^2=54$, $k^2=9$

$\therefore k=-3$ 또는 $k=3$

이때 $k>0$이므로

$k=3$

즉, $c_n=9(2n-1)=18n-9$이므로

$c_5=81$

$\therefore k+c_5=3+81=84$

0788 답 ③

$S_nT_n=9n^2(n^2-1)=9n^2(n+1)(n-1)$

ㄱ. $S_n=3n^2+3n=3n(n+1)$이면

$T_n=3n(n-1)=3n^2-3n$

(i) $n=1$일 때, $b_1=0$ ····· ㉠

(ii) $n\geq 2$일 때,

$b_n=T_n-T_{n-1}$

$=(3n^2-3n)-\{3(n-1)^2-3(n-1)\}$

$=6n-6$ ····· ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$b_n=6n-6$

ㄴ. $a_n=3n$이면 $a_1=3$이므로

$S_n=\frac{n(3+3n)}{2}=\frac{3}{2}n(n+1)$

$\therefore T_n=6n(n-1)=6n^2-6n$

(i) $n=1$일 때, $b_1=0$ ····· ㉢

(ii) $n\geq 2$일 때,

$b_n=T_n-T_{n-1}$

$=(6n^2-6n)-\{6(n-1)^2-6(n-1)\}$

$=12n-12$ ····· ㉣

이때 ㉢은 ㉣에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$b_n=12n-12$

ㄷ. 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 각각 d_1, d_2이므로 S_n에서 n^2의 계수는 $\frac{d_1}{2}$, T_n에서 n^2의 계수는 $\frac{d_2}{2}$이다.

S_nT_n의 n^4의 계수는 9이므로

$\frac{d_1}{2}\times\frac{d_2}{2}=9$

$\therefore d_1d_2=36$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

등차수열의 합이 pn^2+qn 꼴이면 첫째항이 $p+q$, 공차가 $2p$이다.

최고수준 도전 기출 189~191쪽

0789 답 ①

전략 등차중항의 성질을 이용하여 식을 세운 후, $4xz^3+25y^2$을 k에 대한 식으로 나타낸다.

세 실수 α, β, γ가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2\beta=\alpha+\gamma$ ····· ㉠

$x^{\frac{1}{\alpha}}=y^{-\frac{1}{\beta}}=z^{\frac{3}{\gamma}}=k$이므로

$x=k^{\alpha}$, $y=k^{-\beta}$, $z=k^{\frac{\gamma}{3}}$

$\therefore 4xz^3+25y^2=4\times k^{\alpha}\times(k^{\frac{\gamma}{3}})^3+25\times(k^{-\beta})^2$

$=4k^{\alpha+\gamma}+25k^{-2\beta}$

$=4k^{2\beta}+25k^{-2\beta}$ ($\because$ ㉠)

$4k^{2\beta}>0$, $25k^{-2\beta}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$4k^{2\beta}+25k^{-2\beta}\geq 2\sqrt{4k^{2\beta}\times 25k^{-2\beta}}=20$

(단, 등호는 $4k^{2\beta}=25k^{-2\beta}$일 때 성립한다.)

따라서 구하는 최솟값은 20이다.

0790 답 $\sqrt{2}$

전략 두 점 A, B의 좌표를 먼저 구한 후 등차중항과 내분을 이용하여 점 Q의 좌표를 구한다.

직선 AP의 기울기를 $m(m<0)$이라 하면 직선 AP의 방정식은

$y-0=m(x-6)$

$\therefore mx-y-6m=0$

원의 중심 O에서 이 직선까지의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|-6m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{12}$

$|-6m|=\sqrt{12(m^2+1)}$

양변을 제곱하면

$36m^2=12(m^2+1)$

$24m^2=12$, $m^2=\frac{1}{2}$

$\therefore m=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ ($\because m<0$)

직선 AP의 방정식은 $x+\sqrt{2}y-6=0$이므로

$\mathrm{A}(0,\ 3\sqrt{2})$

점 B는 점 A와 x축에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{B}(0,\ -3\sqrt{2})$

두 삼각형 OQA, OPQ의 밑변을 각각 $\overline{\mathrm{AQ}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}$로 생각하면 두 삼각형의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 길이의 비와 같다.

즉, $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}$

$\triangle\mathrm{OAP}=\triangle\mathrm{OQA}+\triangle\mathrm{OPQ}$이므로

$S_1+S_2=\frac{1}{2}\times 6\times 3\sqrt{2}=9\sqrt{2}$

$\therefore S_2=9\sqrt{2}-S_1$

$S_3=\triangle\mathrm{OBP}=\triangle\mathrm{OAP}=9\sqrt{2}$

S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S_2=S_1+S_3$

$2(9\sqrt{2}-S_1)=S_1+9\sqrt{2}$, $3S_1=9\sqrt{2}$

$\therefore S_1=3\sqrt{2}$

$S_2=9\sqrt{2}-3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$이므로

$\frac{S_1}{S_2}=\frac{\overline{\mathrm{AQ}}}{\overline{\mathrm{PQ}}}=\frac{1}{2}$

즉, 점 Q는 선분 AP를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$\mathrm{Q}\left(\frac{1\times 6+2\times 0}{1+2},\ \frac{1\times 0+2\times 3\sqrt{2}}{1+2}\right)$

$\therefore \mathrm{Q}(2,\ 2\sqrt{2})$

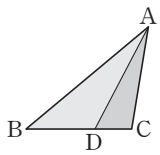
점 Q는 직선 $y=kx$ 위의 점이므로

$2\sqrt{2}=2k$ $\therefore k=\sqrt{2}$

✓ 중2 다시보기

높이가 같은 두 삼각형의 넓이의 비는 두 삼각형의 밑변의 길이의 비와 같다.

➡ $\triangle\mathrm{ABD} : \triangle\mathrm{ADC}=\overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{DC}}$



0791 답 ⑤

전략 두 집합의 원소를 비교하여 $n(A\cap B)=3$을 만족시키는 경우를 확인한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d\neq 0)$라 하면 집합 B의 원소

a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, a_4+a_5, a_5+a_6은

$-4+d$, $-4+3d$, $-4+5d$, $-4+7d$, $-4+9d$이고,

이 순서대로 공차가 $2d$인 등차수열을 이룬다.

두 집합 A, B의 원소를 수직선 위의 점으로 생각하면 집합 A의 원소는 각 점들의 간격이 d이고, 집합 B의 원소는 각 점들의 간격이 $2d$이다. 이때 $n(A\cap B)=3$이므로 공통인 점이 3개가 생기려면 그 3개의 점은 a_1, a_3, a_5이어야 한다.

(i) $a_1=a_1+a_2$, $a_3=a_2+a_3$, $a_5=a_3+a_4$일 때,

$a_1=a_1+a_2$에서 $a_2=0$이므로

$-2+d=0$ $\therefore d=2$

이때 $A=\{-2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6\}$, $B=\{-2,\ 2,\ 6,\ 10,\ 14\}$에서

$A\cap B=\{-2,\ 2,\ 6\}$이므로 조건을 만족시킨다.

$\therefore a_{16}=-2+15\times 2=28$

(ii) $a_1=a_2+a_3$, $a_3=a_3+a_4$, $a_5=a_4+a_5$일 때,

$a_3=a_3+a_4$에서 $a_4=0$이므로

$-2+3d=0$ $\therefore d=\frac{2}{3}$

이때 $A=\left\{-2,\ -\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3},\ 0,\ \frac{2}{3}\right\}$,

$B=\left\{-\frac{10}{3},\ -2,\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ 2\right\}$에서

$A\cap B=\left\{-2,\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right\}$이므로 조건을 만족시킨다.

$\therefore a_{16}=-2+15\times\frac{2}{3}=8$

(iii) $a_1=a_3+a_4$, $a_3=a_4+a_5$, $a_5=a_5+a_6$일 때,

$a_5=a_5+a_6$에서 $a_6=0$이므로

$-2+5d=0 \quad \therefore d=\frac{2}{5}$

이때 $A=\left\{-2, -\frac{8}{5}, -\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right\}$,

$B=\left\{-\frac{18}{5}, -\frac{14}{5}, -2, -\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right\}$에서

$A\cap B=\left\{-2, -\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}\right\}$이므로 조건을 만족시킨다.

$\therefore a_{16}=-2+15\times\frac{2}{5}=4$

(i), (ii), (iii)에서

$a_{16}=28$ 또는 $a_{16}=8$ 또는 $a_{16}=4$

따라서 a_{16}의 값의 합은

$28+8+4=40$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d\neq0)$라 하면

$a_n=-2+(n-1)\times d=dn-(d+2)$

이때 집합 B의 원소를 $b_n=a_n+a_{n+1}(n=1, 2, 3, 4, 5)$이라 하면

$b_n=\{dn-(d+2)\}+\{d(n+1)-(d+2)\}$

$=2dn-(d+4)$

수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이므로 $n(A\cap B)=3$이 되려면

$A\cap B=\{a_1, a_3, a_5\}=\{b_k, b_{k+1}, b_{k+2}\}(k=1, 2, 3)$이어야 한다.

$a_1=b_k$에서

$-2=2dk-(d+4)$

$d(2k-1)=2$

$\therefore d=\frac{2}{2k-1}$

$a_{16}=-2+15d=-2+\frac{30}{2k-1}$

$k=1$일 때, $a_{16}=28$

$k=2$일 때, $a_{16}=8$

$k=3$일 때, $a_{16}=4$

따라서 a_{16}의 값의 합은

$28+8+4=40$

참고 $k=1$일 때 $d=2$, $k=2$일 때 $d=\frac{2}{3}$, $k=3$일 때 $d=\frac{2}{5}$이고, 각 경우에 $n(A\cap B)=3$이 성립한다.

0792 답 ④

전략 닮음인 세 삼각형에서 닮음비를 구하고, 등차중항을 이용하여 넓이에 대한 식을 세운다.

$\angle CAB=\theta$라 하자.

$\triangle ACB\backsim\triangle ABD\backsim\triangle BCD$(AA 닮음)이고

$\overline{AD}=\overline{AB}\cos\theta$, $\overline{BD}=\overline{AB}\sin\theta$이므로

세 삼각형의 닮음비는 $1:\cos\theta:\sin\theta$

이때 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면 두 삼각형 ABD, BCD의 넓이는 각각 $S\cos^2\theta$, $S\sin^2\theta$이다.

세 삼각형 ABC, ABD, BCD의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2S\cos^2\theta=S+S\sin^2\theta$

$2\cos^2\theta=1+\sin^2\theta$

$2(1-\sin^2\theta)=1+\sin^2\theta$

$3\sin^2\theta=1 \quad \therefore \sin^2\theta=\frac{1}{3}$

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$이므로

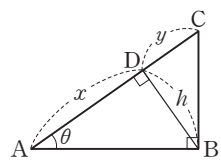
$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\therefore \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

다른 풀이

세 삼각형 ABC, ABD, BCD의 넓이가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$\triangle ABC+\triangle BCD=2\triangle ABD$



이때 세 선분 AD, CD, BD의 길이를 각각 x, y, h라 하면

$\frac{1}{2}(x+y)h+\frac{1}{2}yh=2\times\frac{1}{2}xh$

$x+y+y=2x$ ($\because h\neq0$)

$\therefore x=2y$

삼각형의 닮음의 성질에 의하여

$\overline{AB}^2=x(x+y)=2y\times3y=6y^2$,

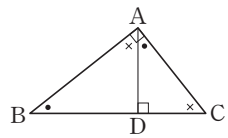
$\overline{BC}^2=y(y+x)=y\times3y=3y^2$

이므로 $\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{3y^2}{6y^2}=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

✓ 중2 다시보기

$\angle A=90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$일 때



(1) $\triangle ABC\backsim\triangle DBA$(AA 닮음)이므로

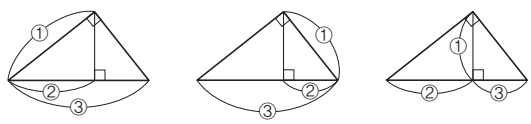
$\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{BC}:\overline{BA}$ ➡ $\overline{AB}^2=\overline{BD}\times\overline{BC}$

(2) $\triangle ABC\backsim\triangle DAC$(AA 닮음)이므로

$\overline{AC}:\overline{DC}=\overline{BC}:\overline{AC}$ ➡ $\overline{AC}^2=\overline{CD}\times\overline{BC}$

(3) $\triangle DBA\backsim\triangle DAC$(AA 닮음)이므로

$\overline{DB}:\overline{DA}=\overline{AD}:\overline{CD}$ ➡ $\overline{AD}^2=\overline{DB}\times\overline{CD}$

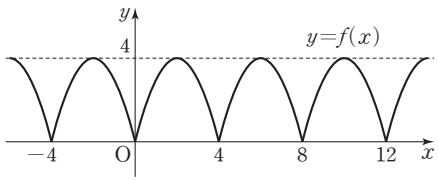


➡ $①^2=②\times③$

0793 답 85

전략 함수 $y=f(x)$의 그래프를 그린 후, $f(f(x))=f(x)$에서 $f(x)=t$로 놓고 방정식의 실근을 구한다.

$0\le x<4$일 때 $f(x)=-x^2+4x$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $f(f(x))=f(x)$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$f(t)=t$, $-t^2+4t=t$

$t^2-3t=0$, $t(t-3)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=3$

즉, $f(x)=0$ 또는 $f(x)=3$이므로 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 실근을 구하는 것은 방정식 $f(x)\times(f(x)-3)=0$의 실근을 구하는 것과 같다.

$f(x)=0$에서

$-x^2+4x=0$, $x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$ $\therefore x=0$ ($\because 0\le x<4$)

$f(x)=3$에서 $-x^2+4x=3$, $x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$0\le x<4$일 때, 방정식 $f(x)\times(f(x)-3)=0$의 모든 실근은 0, ㉮ 1, 3이므로

$a_1=0$, $a_2=$ ㉮ 1, $a_3=3$

이다. 또한 모든 실수 x에 대하여 $f(x+4)=f(x)$이므로

$a_4=0+4=4$, $a_5=1+4=5$, $a_6=3+4=7$,

$a_7=0+2\times4=8$, $a_8=1+2\times4=9$, $a_9=3+2\times4=11$,

⋮

즉, 세 수열 $\{a_{3n-2}\}$, $\{a_{3n-1}\}$, $\{a_{3n}\}$은 첫째항이 각각 0, ㉮ 1, 3이고 공차가 모두 ㉯ 4인 등차수열이다.

$\therefore a_{3n-2}=0+(n-1)\times4=4n-4$,

$a_{3n-1}=1+(n-1)\times4=4n-3$,

$a_{3n}=3+(n-1)\times4=4n-1$

따라서 $a_{20}=25$, $a_{21}=27$, $a_{22}=28$이므로

$a_{20}+a_{21}+a_{22}=25+27+28=$ ㉰ 80이다.

따라서 $p=1$, $q=4$, $r=80$이므로

$p+q+r=85$

0794 답 273

전략 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차에 대한 식을 세우고, 같은 값을 갖는 S_n의 규칙을 찾는다.

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a(a\ne0)$, 공차를 d라 하면

$S_9=S_{18}$에서

$\frac{9(2a+8d)}{2}=\frac{18(2a+17d)}{2}$

$2a+8d=4a+34d$

$2a=-26d$ $\therefore a=-13d$

$S_n=\frac{n\{2\times(-13d)+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n(n-27)$

이므로

$S_1=S_{26}=-13d$, $S_2=S_{25}=-25d$, $S_3=S_{24}=-36d$, …,

$S_{13}=S_{14}=-91d$

$S_{27}=0$, $S_{28}=14d$, $S_{29}=29d$, …

이때 집합 T_n에서 등차수열의 합이 같은 경우에는 집합의 같은 원소가 중복되므로

$T_{13}=T_{14}=T_{15}=\cdots=T_{26}=\{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{13}\}$

따라서 집합 T_n의 원소의 개수가 13이 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$13+14+15+\cdots+26=\frac{14(13+26)}{2}=273$

첫째항이 13, 끝항이 26, 항수가 14인 등차수열의 합이다.

다른 풀이

$S_9=S_{18}$에서 $S_{18}-S_9=0$이므로

$a_{10}+a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{18}=0$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$(a_{14}-4d)+(a_{14}-3d)+(a_{14}-2d)+(a_{14}-d)+a_{14}$

$+(a_{14}+d)+(a_{14}+2d)+(a_{14}+3d)+(a_{14}+4d)=0$

$9a_{14}=0$ $\therefore a_{14}=0$

$a_1+13d=0$에서 $a_1\ne0$이므로 $d\ne0$이다.

$a_{14}=0$에서 $S_{13}=S_{14}$이고 $a_{13}=a_{14}-d$, $a_{15}=a_{14}+d$이므로

$S_{12}=S_{13}-a_{13}=S_{13}-(a_{14}-d)=S_{13}+d$

$S_{15}=S_{14}+a_{15}=S_{13}+(a_{14}+d)=S_{13}+d$

또 $a_{12}=a_{14}-2d$, $a_{16}=a_{14}+2d$이므로

$S_{11}=S_{12}-a_{12}=(S_{13}+d)-(a_{14}-2d)=S_{13}+3d$

$S_{16}=S_{15}+a_{16}=(S_{13}+d)+(a_{14}+2d)=S_{13}+3d$

⋮

즉, $S_{13}=S_{14}$, $S_{12}=S_{15}$, $S_{11}=S_{16}$, …이므로

26 이하의 자연수 k에 대하여 $S_k=S_{27-k}$

$13\le n\le26$이면 $T_n=\{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{13}\}$

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$13+14+15+\cdots+26=\frac{14(13+26)}{2}=273$

0795 답 8

전략 주어진 조건을 이용하여 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 구한다.

$a_1=b_1=2$

㈎에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_1+a_3=6$, $a_1a_3=k$

$2+a_3=6$, $2a_3=k$ $\therefore a_3=4$, $k=8$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d_1이라 하면

$a_3=4$에서 $2+2d_1=4$ $\therefore d_1=1$

$\therefore a_n=2+(n-1)\times1=n+1$

㈏에서 $b_3=a_2+b_1=3+2=5$이므로 등차수열 $\{b_n\}$의 공차를 d_2라 하면

$2+2d_2=5$ $\therefore d_2=\frac{3}{2}$

$S_m=\dfrac{m\{2\times2+(m-1)\times1\}}{2}=\dfrac{m(m+3)}{2}$,

$T_m=\dfrac{m\left\{2\times2+(m-1)\times\dfrac{3}{2}\right\}}{2}=\dfrac{m(3m+5)}{4}$

이므로 $|T_m-S_m|\le2k$에서

$\left|\dfrac{m(3m+5)}{4}-\dfrac{m(m+3)}{2}\right|\le2\times8$

$\left|\dfrac{m^2-m}{4}\right|\le16$

이때 m은 자연수이므로

$\rightarrow m(m-1)\ge0$

$\dfrac{m^2-m}{4}\le16$, $m(m-1)\le64$

따라서 자연수 m은 1, 2, 3, …, 8의 8개이다.

0796 답 252

전략 $A_{4n+1}-A_n$에 $n=7$을 대입하여 S_7의 규칙을 찾는다.

S_n은 $A_{4n+1}-A_n$의 모든 원소의 합이므로 S_7은 $A_{29}-A_7$의 모든 원소의 합이다.

이때 집합 A_n은 첫째항이 5이고 제$(n+2)$항이 13인 등차수열의 제$(n+2)$항까지의 수를 원소로 갖는다.

공차를 d_n이라 하면

$13=5+(n+1)\times d_n$ $\quad\therefore d_n=\dfrac{8}{n+1}$

집합 A_{29}는 첫째항이 5, 공차가 $d_{29}=\dfrac{8}{29+1}=\dfrac{4}{15}$인 등차수열의 제31항까지의 수를 원소로 갖는다. 즉,

$A_{29}=\left\{5,\ 5+\dfrac{4}{15},\ 5+2\times\dfrac{4}{15},\ 5+3\times\dfrac{4}{15},\right.$

$\left.\cdots,\ 5+29\times\dfrac{4}{15},\ 13\right\}$

집합 A_7은 첫째항이 5, 공차가 $d_7=\dfrac{8}{7+1}=1$인 등차수열의 제9항까지의 수를 원소로 갖는다. 즉,

$A_7=\{5,\ 6,\ 7,\ \cdots,\ 13\}$

이때 집합 $(A_7\cap A_{29})$의 원소는 $5+\dfrac{4}{15}\times k=$(정수) 꼴이므로

$k=0$일 때 5, $k=15$일 때 9, $k=30$일 때 13이다.

따라서 S_7은 집합 A_{29}의 모든 원소의 합에서 $5+9+13$의 값을 뺀 것과 같으므로

$S_7=\dfrac{31(5+13)}{2}-(5+9+13)$

$=279-27=252$

0797 답 21

전략 S_n을 n에 대한 식으로 나타낸 후 n의 값의 변화에 따라 T_n의 값이 어떻게 변화하는지 파악한다.

$a_1=40>0$이고, (나)에서 $|S_{15}|>|S_{16}|$이므로

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $d<0$

$a_1>0$, $d<0$이고 (가)에서 $|S_6|=|S_{15}|$이므로 $S_6>0$, $S_{15}>0$이면 $|S_{15}|>|S_{16}|$을 만족시키는 n, d의 값이 존재할 수 있지만,

$S_6>0>S_{15}$이면 $|S_{15}|<|S_{16}|$이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, $S_6>0$, $S_{15}>0$이므로 $S_6=S_{15}$

$\dfrac{6(80+5d)}{2}=\dfrac{15(80+14d)}{2}$

$\therefore d=-4$

$\therefore S_n=\dfrac{n\{80+(n-1)\times(-4)\}}{2}$

$=-2n(n-21)$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$n<21$일 때 $S_n>0$에서 $T_n=S_n$이므로 n의 값이 커질수록 T_n의 값은 작아진다.

$n=21$일 때 $S_{21}=0$이므로 $T_{21}=0$

$n>21$일 때 $S_n<0$에서 $T_n=-S_n$이므로 n의 값이 커질수록 T_n의 값은 커진다.

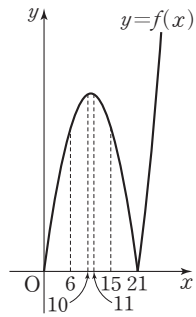
따라서 $T_n<T_{n+1}$을 만족시키는 10 이상의 자연수 n의 최솟값은 21이다.

참고 ㉠에서

$S_n=-2n(n-21)=-2n^2+42n$

$=-2\left(n-\dfrac{21}{2}\right)^2+\dfrac{441}{2}$

$f(x)=\left|-2\left(x-\dfrac{21}{2}\right)^2+\dfrac{441}{2}\right|$이라 하면 $x\ge0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



0798 답 ⑤

전략 제n행의 왼쪽 끝에 적힌 수의 규칙을 찾고, 등차수열의 합을 이용하여 제n행의 모든 수의 합을 구한다.

제n행의 왼쪽 끝에 적힌 수를 l_n이라 하면

$l_n=200-2-4-\cdots-(2n-2)$

$=200-2\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}$

$=200-2\times\dfrac{(n-1)\{1+(n-1)\}}{2}$

$\rightarrow$ 첫째항이 1, 끝항이 $n-1$, 항수가 $n-1$인 등차수열의 합

$=200-n^2+n$

제n행에 적힌 모든 수의 합 a_n은 첫째항이 $200-n^2+n$, 공차가 -2, 항수가 n인 등차수열의 합과 같으므로

$a_n=\dfrac{n\{2\times(200-n^2+n)+(n-1)\times(-2)\}}{2}$

$=n(201-n^2)$

$\therefore a_{10}-a_{11}=1010-880=130$

다른 풀이

각 행에 있는 수를

200, 198, 196, 194, 192, …

와 같이 순서대로 나열한 수열을 $\{b_n\}$이라 하면 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 200이고 공차가 -2인 등차수열이다.

제1행부터 제9행까지의 수의 개수는

$1+2+3+\cdots+9=45$

제10행의 왼쪽 끝에 적힌 수는 수열 $\{b_n\}$의 제46항이므로

$b_{46}=200+45\times(-2)=110$

따라서 $a_{10}=110+108+106+\cdots+92=\frac{10(110+92)}{2}=1010$,

$a_{11}=90+88+86+\cdots+70=\frac{11(90+70)}{2}=880$이므로

$a_{10}-a_{11}=1010-880=130$

0799 답 20

전략 (가)에서 공차 d가 될 수 있는 각 자연수에 대하여 (나)를 만족시키는 자연수 l이 존재하는지 확인한다.

(가)에서 공차 d는 4 또는 5이다.

(i) $d=4$일 때,

$S_n=\frac{n\{2\times(-18)+(n-1)\times4\}}{2}$

$=2n^2-20n$

$=2n(n-10)$

(나)에서 $|S_l|=|S_{l+2}|$이므로

① $S_l=-S_{l+2}$일 때,

$2l(l-10)=-2(l+2)(l-8)$

$l^2-8l-8=0$ → $f(t)=t^2-8t-8$이라 하면 $f(8)=-8$, $f(9)=1$

이를 만족시키는 자연수 l은 존재하지 않는다.

② $S_l=S_{l+2}$일 때,

$2l(l-10)=2(l+2)(l-8)$

$4l=16$

$\therefore l=4$

(ii) $d=5$일 때,

$S_n=\frac{n\{2\times(-18)+(n-1)\times5\}}{2}$

$=\frac{n(5n-41)}{2}$

(나)에서 $|S_l|=|S_{l+2}|$이므로

① $S_l=-S_{l+2}$일 때,

$\frac{l(5l-41)}{2}=-\frac{(l+2)(5l-31)}{2}$

$5l^2-41l=-5l^2+21l+62$

$5l^2-31l-31=0$ → $f(t)=5t^2-31t-31$이라 하면 $f(7)=-3$, $f(8)=41$

이를 만족시키는 자연수 l은 존재하지 않는다.

② $S_l=S_{l+2}$일 때,

$\frac{l(5l-41)}{2}=\frac{(l+2)(5l-31)}{2}$

$5l^2-41l=5l^2-21l-62$

$10l-31=0$

이를 만족시키는 자연수 l은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에 의하여

$d=4$, $l=4$

$|S_l|=|S_{l+2}|=|S_m|=48$이므로 $|S_m|=48$에서

$|2m(m-10)|=48$

$|m(m-10)|=24$

이때 m은 $m>l+2=6$인 자연수이므로

$m=12$

$\therefore d+l+m=4+4+12=20$

10 등비수열

난이도별 필수 기출 193~208쪽

0800 답 ③

주어진 등비수열의 첫째항을 a라 하면 제3항이 4이므로

$a\times(\sqrt{2})^2=4$, $2a=4$

$\therefore a=2$

0801 답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r(r>0)$라 하면

$a_2a_4=1$에서 $ar\times ar^3=1$

$\therefore a^2r^4=1$ ····· ㉠

$a_5=9$에서

$ar^4=9$ ····· ㉡

㉠÷㉡을 하면 $a=\frac{1}{9}$

$a=\frac{1}{9}$을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{9}r^4=9$, $r^4=81$

$\therefore r=3$ ($\because r>0$)

0802 답 ②

세 양수 6, a, 54가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a^2=6\times54=324$ $\therefore a=18$ ($\because a>0$)

0803 답 ③

주어진 등비수열의 제n항은 $3\times2^{n-1}$

$3\times2^{n-1}>100$에서 $2^{n-1}>\frac{100}{3}=33.33\cdots$

이때 $2^5=32$, $2^6=64$이므로

$n-1\geq6$ $\therefore n\geq7$

따라서 처음으로 100보다 커지는 항은 제7항이다.

0804 답 ①

세 수 x, 10, 16이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$20=x+16$ $\therefore x=4$

세 수 4, y, 16이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$y^2=4\times16$, $y^2=64$ $\therefore y=-8$ ($\because y<0$)

$\therefore x+y=4+(-8)=-4$

0805 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2+a_3+a_4=15$에서

$ar+ar^2+ar^3=15$

$\therefore ar(1+r+r^2)=15$ ····· ㉠

$a_6+a_7+a_8=60$에서

$ar^5+ar^6+ar^7=60$

$\therefore ar^5(1+r+r^2)=60$ ····· ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^4=4$ ····· ㉢

$\therefore a_{10}+a_{11}+a_{12}=ar^9+ar^{10}+ar^{11}=ar^9(1+r+r^2)$

$=ar(1+r+r^2)\times r^8=15\times(r^4)^2$ ($\because$ ㉠)

$=15\times4^2$ ($\because$ ㉢)

$=240$

0806 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_{14}=27$에서 $ar^{13}=27$ ····· ㉠

$\therefore \log_3 a_8+\log_3 a_{13}+\log_3 a_{21}$

$=\log_3 a_8a_{13}a_{21}=\log_3(ar^7\times ar^{12}\times ar^{20})$

$=\log_3 a^3r^{39}=\log_3(ar^{13})^3$

$=\log_3 27^3$ ($\because$ ㉠)

$=\log_3 3^9=9$

0807 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a(a>0)$, 공비를 $r(r>0)$라 하면

$a_3=6a_1+a_2$에서 $ar^2=6a+ar$

$a(r^2-r-6)=0$, $a(r+2)(r-3)=0$

$\therefore r=3$ ($\because a>0$, $r>0$)

$\therefore \dfrac{a_6}{a_4}=r^2=3^2=9$

0808 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 $d(d\neq0)$라 하면

$a_2=a+d$, $a_5=a+4d$, $a_{11}=a+10d$

세 수 a_2, a_5, a_{11}이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(a+4d)^2=(a+d)(a+10d)$

$a^2+8ad+16d^2=a^2+11ad+10d^2$

$6d^2-3ad=0$, $3d(2d-a)=0$

$\therefore a=2d$ ($\because d\neq0$)

$\therefore \dfrac{a_6}{a_3}=\dfrac{a+5d}{a+2d}=\dfrac{7d}{4d}=\dfrac{7}{4}$

0809 답 ③

주어진 등비수열의 공비를 $r(r>0)$라 하면 첫째항이 625, 제7항이 81이므로

$625r^6=81$, $r^6=\dfrac{81}{625}=\left(\dfrac{3}{5}\right)^4$ $\therefore r=\left(\dfrac{3}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$ ($\because r>0$)

$\therefore a_3=625\times r^3=625\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=225$

다른 풀이

세 수 625, a_3, 81이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_3^2=625\times81=(25\times9)^2$

$r>0$에서 $a_3>0$이므로 $a_3=225$

0810 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\dfrac{a_5}{a_1}=\dfrac{a_6}{a_2}=\dfrac{a_7}{a_3}=\cdots=\dfrac{a_{13}}{a_9}=\cdots=\dfrac{a_{19}}{a_{15}}=r^4$

$\dfrac{a_5}{a_1}+\dfrac{a_6}{a_2}+\dfrac{a_7}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_{19}}{a_{15}}=240$에서

$15\times r^4=240$ $\therefore r^4=16$

$\therefore \dfrac{a_{17}}{a_9}=r^8=(r^4)^2=(16)^2=256$

0811 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비가 모두 $k(k>0)$이므로

$a_3(k^2+2)=4a_5$에서 $a_3(k^2+2)=4a_3\times k^2$

$k>0$에서 $a_3>0$이므로 양변을 a_3으로 나누면

$k^2+2=4k^2$, $k^2=\dfrac{2}{3}$

$\therefore k=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ ($\because k>0$)

$\therefore a_3=k\times k^2=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2\sqrt{6}}{9}$

0812 답 ②

$a_1a_5a_9=216$에서 $a_1a_9=a_5^2$이므로

$a_5^3=216$ $\therefore a_5=6$

$a_5+a_9=18$에서

$a_9=18-a_5=18-6=12$

$a_5<a_9$이고 모든 항이 양수이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>1)$라 하자.

$a_9=12$에서 $a_5\times r^4=12$

$6\times r^4=12$, $r^4=2$

$\therefore r^2=\sqrt{2}$ ($\because r>1$)

$\therefore a_7=a_5\times r^2=6\sqrt{2}$

0813 답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$라 하면 $a_3^2=a_6$에서

$(a_1r^2)^2=a_1r^5$, $a_1^2r^4=a_1r^5$

$a_1>0$, $r>0$이므로 양변을 a_1r^4으로 나누면

$a_1=r$

$a_2-3a_1=4$에서 $a_1r-3a_1=4$

$r^2-3r-4=0$, $(r+1)(r-4)=0$

$\therefore r=4$ ($\because r>0$)

따라서 $a_n=4^n$이므로

$\log_2 a_8=\log_2 4^8=\log_2 2^{16}=16$

0814 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a(a>0)$, 공비를 $r(r>0)$라 하면

$a_2=2$, $a_4=18$에서

$ar=2$ ····· ㉠

$ar^3=18$ ····· ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^2=9$ $\therefore r=3$ ($\because r>0$)

이를 ㉠에 대입하면 $3a=2$ $\therefore a=\frac{2}{3}$

$\therefore a_n=\frac{2}{3}\times 3^{n-1}=2\times 3^{n-2}$

$2\times 3^{n-2}>500000$에서 $3^{n-2}>250000$

양변에 상용로그를 취하면

$(n-2)\log 3>\log 250000$

$(n-2)\log 3>\log\frac{1000000}{4}$, $(n-2)\log 3>6-2\log 2$

$(n-2)\times 0.48>6-2\times 0.3$

$n-2>11.25$ $\therefore n>13.25$

따라서 처음으로 500000보다 커지는 항은 제14항이다.

0815 답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 400, 공비가 $\frac{1}{2}$이므로

$a_n=400\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$T_n=a_1a_2a_3\cdots a_n$은 $a_n\geq 1$을 만족시키는 최댓값 n에서 최댓값을 갖는다.

→ 1보다 작은 수를 곱하면 처음보다 작아진다.

$400\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\geq 1$에서 $2^n\leq 800$

$2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로 $n\leq 9$

따라서 T_n은 $n=9$에서 최댓값을 가지므로 $k=9$

0816 답 ①

세 수 a^n, $2^6\times 5^4$, b^n이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$(2^6\times 5^4)^2=a^nb^n$ $\therefore (ab)^n=(2^3\times 5^2)^4$

이때 $ab=1$, 즉 $a=1$, $b=1$이면 세 수가 등비수열을 이룰 수 없으므로 $ab>1$이다.

따라서 ab의 최솟값은 n의 값이 최대일 때이므로

ab의 최솟값은 $n=4$일 때

$2^3\times 5^2=8\times 25=200$

0817 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$a_7-3a_6=120$에서 $a_5r^2-3a_5r=120$

$a_5=12$이므로 $12r^2-36r=120$

$r^2-3r-10=0$, $(r+2)(r-5)=0$

$\therefore r=-2$ 또는 $r=5$

이때 $a_1a_2<0$에서 $r<0$이므로 $r=-2$

$\therefore a_8+a_9=a_5r^3+a_5r^4=a_5r^3(1+r)$

$=12\times(-8)\times(-1)=96$

0818 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 4, 등비수열 b_n의 공비가 2이므로

$a_3=b_3$에서 $a_1+2\times 4=b_1\times 2^2$

$a_1+8=4b_1$ $\therefore a_1=4(b_1-2)$ …… ㉠

$a_5=b_5$에서 $a_1+4\times 4=b_1\times 2^4$

$a_1+16=16b_1$ $a_1=16(b_1-1)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$4(b_1-2)=16(b_1-1)$, $b_1-2=4b_1-4$

$3b_1=2$ $\therefore b_1=\frac{2}{3}$

이를 ㉠에 대입하면 $a_1=4\left(\frac{2}{3}-2\right)=-\frac{16}{3}$

$\therefore b_1-a_1=\frac{2}{3}-\left(-\frac{16}{3}\right)=6$

0819 답 ⑤

ㄱ. 세 양수 x, y, z가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2y=x+z$ …… ㉠

세 양수 a, y, b가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2y=a+b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $x+z=a+b$

ㄴ. 세 양수 p, q, r가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$q^2=pr$ …… ㉢

세 양수 a, q, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$q^2=ab$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $pr=ab$

ㄷ. $a>0$, $b>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$y=\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}=\sqrt{pr}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

즉, $y\geq\sqrt{pr}$이므로 $y^2\geq pr$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0820 답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하자.

㈎에서 $a_7=b_7$이므로 $a_6+d=b_6r$

$a_6=b_6=9$이므로

$9+d=9r$ $\therefore r=1+\frac{d}{9}$ …… ㉠

이때 r는 자연수이므로 d는 9의 배수이어야 한다.

㈏에서 $94<a_{11}<109$이고, $a_{11}=a_6+5d=9+5d$이므로

$94<9+5d<109$, $85<5d<100$

$\therefore 17<d<20$

이때 d는 9의 배수이므로 $d=18$

이를 ㉠에 대입하면 $r=1+\frac{18}{9}=3$

$\therefore a_7+b_8=(a_6+d)+b_6r^2$

$=27+81=108$

0821 답 36

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r(r>1)$라 하면

㈎에서 $a_2a_4a_6=64$이므로

$ar\times ar^3\times ar^5=64$, $a^3r^9=64$

$(ar^3)^3=4^3$ $\therefore ar^3=4$ …… ㉠ …… ⓘ

㈏에서 $\frac{a_3+a_7}{a_5}=\frac{10}{3}$이므로

$\frac{ar^2+ar^6}{ar^4}=\frac{10}{3}$ $\therefore \frac{1}{r^2}+r^2=\frac{10}{3}$

$r^2=X$로 놓으면 $\frac{1}{X}+X=\frac{10}{3}$에서

$3X^2-10X+3=0$, $(3X-1)(X-3)=0$

$\therefore X=\frac{1}{3}$ 또는 $X=3$

$X=r^2$이므로

$r^2=\frac{1}{3}$ 또는 $r^2=3$

이때 공비가 1보다 크므로 $r^2>1$

$\therefore r^2=3$ ····· ㉡ ····· ii

$\therefore a_8=ar^7=ar^3\times r^4$

$=4\times 3^2$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=36$ ····· iii

채점 기준	
i (가)를 첫째항과 공비에 대한 식으로 나타내기	30 %
ii 공비 r에 대하여 r^2의 값 구하기	50 %
iii a_8의 값 구하기	20 %

0822 답 ①

$a_2+a_9=a_5+a_6$이므로

→ 공차를 d라 하면 $2a_1+9d$

$a_5+a_6=20$

$a_5=b_5$, $a_6=b_6$이므로

$b_5+b_6=20$ ····· ㉠

$b_3b_8=b_5b_6$이므로

→ 공비를 r라 하면 $b_1^2r^9$

$b_5b_6=64$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 b_5, b_6은 이차방정식 $t^2-20t+64=0$의 두 근과 같다.

$t^2-20t+64=0$에서

$(t-4)(t-16)=0$

$\therefore t=4$ 또는 $t=16$

등비수열 $\{b_n\}$의 공비가 1보다 작으므로 $b_5>b_6$에서

$b_5=16$, $b_6=4$

$\therefore a_5=16$, $a_6=4$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$d=a_6-a_5=4-16=-12$

$\therefore a_1=a_5-4d=16-4\times(-12)=64$

0823 답 124

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2^{15}, 공비가 $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$이므로

$a_n=2^{15}\times\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{n-1}=2^{15}\times 2^{\frac{1}{3}(1-n)}=2^{\frac{46-n}{3}}$

이때 등비수열 $\{a_n\}$의 정수인 항은 $2^{\frac{46-n}{3}}$의 지수 $\frac{46-n}{3}$이 음이 아닌 정수일 때이다. ····· i

$46-n=3k$(k는 음이 아닌 정수, n은 자연수)이므로

$n=46-3k>0$

$\therefore 0\le k<\frac{46}{3}=15.33\cdots$

이를 만족시키는 순서쌍 (k, n)은 $(0, 46)$, $(1, 43)$, $(2, 40)$, …, $(15, 1)$이므로 $x=16$ ····· ii

$a_1=2^{15}$, $a_4=2^{14}$, $a_7=2^{13}$, …, $a_{43}=2^1$, $a_{46}=2^0$이므로

$y=a_1\times a_4\times a_7\times\cdots\times a_{43}\times a_{46}$

$=2^{15}\times 2^{14}\times 2^{13}\times\cdots\times 2^1\times 2^0$

$=2^{15+14+13+\cdots+1+0}$

$=2^{\frac{16(15+0)}{2}}=2^{120}$ ····· iii

$\therefore \log_2 xy=\log_2(16\times 2^{120})$

$=\log_2(2^4\times 2^{120})$

$=\log_2 2^{124}=124$ ····· iv

채점 기준	
i 정수인 항이 되기 위한 조건 파악하기	40 %
ii x의 값 구하기	20 %
iii y의 값 구하기	20 %
iv $\log_2 xy$의 값 구하기	20 %

0824 답 117

모든 항이 자연수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차는 자연수이다.

첫째항이 a_1이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=a_1+(n-1)d$

(나)에서 세 항 a_2, a_k, a_{3k-1}이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$a_k^2=a_2a_{3k-1}$에서

$\{a_1+(k-1)d\}^2=(a_1+d)\{a_1+(3k-2)d\}$

$a_1^2+2(k-1)a_1d+(k-1)^2d^2=a_1^2+(3k-1)a_1d+(3k-2)d^2$

$(k^2-5k+3)d^2=(k+1)a_1d$

$d>0$이므로 양변을 d로 나누면

$(k^2-5k+3)d=(k+1)a_1$ ····· ㉠

$k+1\ge 4$이므로 (가)의 $a_1\le d$에서 양변에 $k+1$을 곱하면

$(k+1)a_1\le(k+1)d$

$(k^2-5k+3)d\le(k+1)d$ ($\because$ ㉠)

$d>0$이므로 양변을 d로 나누면

$k^2-5k+3\le k+1$, $k^2-6k+2\le 0$

$(k-3+\sqrt{7})(k-3-\sqrt{7})\le 0$

$\therefore 3-\sqrt{7}\le k\le 3+\sqrt{7}$

이때 $k\ge 3$에서 $3\le k\le 3+\sqrt{7}$이므로 자연수 k의 값은 3, 4, 5이다.

㉠에서 $a_1>0$, $d>0$, $k+1>0$이므로 $k^2-5k+3>0$이어야 한다.

$\therefore k=5$

$k=5$를 ㉠에 대입하면

$3d=6a_1$

$\therefore d=2a_1$

즉, $a_{16}=a_1+15d=31a_1$이므로 $90\le a_{16}\le 100$에서

$90\le 31a_1\le 100$, $\frac{90}{31}\le a_1\le\frac{100}{31}$

a_1은 자연수이므로

$a_1=3$

$\therefore d=2a_1=6$

$\therefore a_{20}=a_1+19d=3+19\times 6=117$

0825 답 14

(가)에서 $b^2=ac$ $\therefore c=\frac{b^2}{a}$ ····· ㉠

(나)에서 $\frac{6}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, $\frac{6}{c}=\frac{a+b}{ab}$

$\therefore c=\frac{6ab}{a+b}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{b^2}{a}=\frac{6ab}{a+b}$, $ab^2+b^3=6a^2b$

$b>0$이므로 양변을 b로 나누면

$ab+b^2=6a^2$, $6a^2-ab-b^2=0$

$(2a-b)(3a+b)=0$ $\therefore b=2a$ ($\because a>0$, $b>0$)

이를 ㉠에 대입하면 $c=\frac{(2a)^2}{a}=4a$

$\therefore f(x)=ax^2+2ax+4a=a(x+1)^2+3a$

$-2\le x\le -1$에서 $f(x)$의 최솟값은 $f(-1)$이다.

(다)에서 $f(-1)=6$이므로

$3a=6$ $\therefore a=2$

따라서 $a=2$, $b=4$, $c=8$이므로

$a+b+c=14$

0826 답 ③

1회 시행 후 남아 있는 정사각형의 개수는 8

2회 시행 후 남아 있는 정사각형의 개수는 8^2

⋮

n회 시행 후 남아 있는 정사각형의 개수는 8^n

따라서 10회 시행 후 남아 있는 정사각형의 개수는

$8^{10}=(2^3)^{10}=2^{30}$

$\therefore p=30$

0827 답 ①

방정식 $2\sin x-\sqrt{3}=0$, 즉 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$의 두 근은

$x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

공비가 1보다 크므로 $a_1=\frac{\pi}{3}$, $a_3=\frac{2}{3}\pi$

공비를 $r(r>1)$라 하면 $a_3=a_1r^2$에서

$\frac{2}{3}\pi=\frac{\pi}{3}\times r^2$ $\therefore r^2=2$

$\therefore a_5=a_3r^2=\frac{2}{3}\pi\times 2=\frac{4}{3}\pi$

0828 답 13.44 g

1번 통과 후 남아 있는 중금속의 양은 20×0.8(g)

2번 통과 후 남아 있는 중금속의 양은 20×0.8^2(g)

⋮

n번 통과 후 남아 있는 중금속의 양은 20×0.8^n(g)

5번 통과 후 남아 있는 중금속의 양은

$20\times 0.8^5=20\times 0.328=6.56$(g)

따라서 필터에 의해 걸러진 중금속의 양은

$20-6.56=13.44$(g)

0829 답 ③

$A(k, 3\sqrt{k})$, $B(k, \sqrt{k})$, $C(k, 0)$이므로

$\overline{BC}=\sqrt{k}$, $\overline{OC}=k$, $\overline{AC}=3\sqrt{k}$

$\overline{BC}$, $\overline{OC}$, $\overline{AC}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$k^2=\sqrt{k}\times 3\sqrt{k}$, $k^2-3k=0$

$k(k-3)=0$ $\therefore k=3$ ($\because k>0$)

0830 답 ⑤

삼차방정식 $x^3-7x^2+kx-8=0$의 세 근을 a, ar, ar^2이라 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$a\times ar\times ar^2=8$, $(ar)^3=8$ $\therefore ar=2$

한 근이 2이므로 $x=2$를 대입하면

$8-28+2k-8=0$ $\therefore k=14$

0831 답 ③

처음 정삼각형의 둘레의 길이는 $6\times 3=18$

1회 시행 후 도형의 둘레의 길이는

$\left(6\times\frac{1}{3}\right)\times(3\times 4)=18\times\frac{4}{3}$

→ 새로 생긴 도형의 (한 변의 길이) × (개수)

2회 시행 후 도형의 둘레의 길이는

$\left(6\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times(3\times 4\times 4)=18\times\left(\frac{4}{3}\right)^2$

⋮

n회 시행 후 도형의 둘레의 길이는 $18\times\left(\frac{4}{3}\right)^n$

4회 시행 후 도형의 둘레의 길이 k는

$k=18\times\left(\frac{4}{3}\right)^4=18\times\frac{256}{81}=\frac{512}{9}$

$\therefore \frac{9}{8}k=\frac{9}{8}\times\frac{512}{9}=64$

0832 답 ④

첫날 읽은 페이지 수를 a라 하고, 매일 전날에 비해 r배씩 독서량을 늘렸다고 하면 7일째 읽은 페이지 수는 첫날의 8배이므로

$ar^6=8a$, $r^6=8$ $\therefore r=8^{\frac{1}{6}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}}$

n일째 읽은 페이지 수가 첫날 읽은 페이지 수의 4배라고 하면

$a(2^{\frac{1}{2}})^{n-1}=4a$, $2^{\frac{n-1}{2}}=2^2$

$\frac{n-1}{2}=2$ $\therefore n=5$

따라서 첫날 읽은 페이지 수의 4배를 읽은 날은 5일째이다.

0833 답 ④

정사각형에 원이 내접할 때, 원의 지름의 길이는 정사각형의 한 변의 길이와 같다.

한편 원에 정사각형이 내접할 때, 원의 지름의 길이는 정사각형의 대각선의 길이와 같다. 이때 원의 지름의 길이가 l이면 정사각형의 한 변의 길이는 $\frac{l}{\sqrt{2}}$이다.

→ 정사각형의 한 변의 길이를 a라 하면 대각선의 길이는 $\sqrt{2}a$이므로 $l=\sqrt{2}a$에서 $a=\frac{l}{\sqrt{2}}$

1회 시행에서 그려지는 원은 한 변의 길이가 2인 정사각형에 내접하므로 이 원의 지름의 길이는 2이다.

2회 시행에서 새로 그려지는 정사각형은 지름의 길이가 2인 원에 내접하므로 이 정사각형의 한 변의 길이는 $2\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

즉, 2회 시행에서 그려지는 원의 지름의 길이는 $2\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

⋮

n회 시행에서 그려지는 원의 지름의 길이는 $2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$

6회 시행에서 그려지는 원의 지름의 길이는

$2\times\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{5}=2\times\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

따라서 6회 시행에서 그려지는 원의 넓이는

$\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{1}{2}\right)^{2}=\frac{\pi}{32}$

$\therefore a=\frac{1}{32}$

참고 각 시행에서 원의 넓이는 π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{8}$, …이므로 첫째항이 π, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열로 나타낼 수 있다.

0834 답 ④

$\overline{OP}$, $\overline{OQ}$는 원 C_1의 반지름이므로 $\overline{OP}=\overline{OQ}=1$

원 C_2의 반지름의 길이가 r이므로 $\overline{OR}=1+r$

$\therefore \overline{QR}=\overline{OQ}+\overline{OR}=1+(1+r)=2+r$

$\overline{OP}$, $\overline{OR}$, $\overline{QR}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$\overline{OR}^2=\overline{OP}\times\overline{QR}$

$(1+r)^2=1\times(2+r)$, $1+2r+r^2=2+r$

$r^2+r-1=0$ $\therefore r=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ($\because 0<r<\sqrt{2}$)

0835 답 ②

(나)에서 직선 $y=-3a_nx+4a_n^2$과 곡선 $y=x^2$이 만나는 점의 x좌표는 $-3a_nx+4a_n^2=x^2$에서

$x^2+3a_nx-4a_n^2=0$, $(x+4a_n)(x-a_n)=0$

$\therefore x=-4a_n$ 또는 $x=a_n$

$\therefore \mathrm{P}_{n+1}(-4a_n, 16a_n^2)$

두 점 P_n, P_{n+1}의 x좌표가 각각 a_n, $-4a_n$이고, $a_1=3$이므로

$a_n=3\times(-4)^{n-1}$

삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$에서

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}=\sqrt{(-4a_n-a_n)^2+(16a_n^2-a_n^2)^2}$

$=|5a_n|\sqrt{1+9a_n^2}$

밑변을 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이라 하면 높이 h는 원점 O와 직선 $y=-3a_nx+4a_n^2$, 즉 $3a_nx+y-4a_n^2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$h=\frac{|-4a_n^2|}{\sqrt{9a_n^2+1}}$

삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이 S_n은

$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}\times h=\frac{1}{2}\times|5a_n|\sqrt{1+9a_n^2}\times\frac{|-4a_n^2|}{\sqrt{9a_n^2+1}}$

$=10|a_n^3|$

$\therefore S_3=10|a_3^3|=10|\{3\times(-4)^2\}^3|=10\times3^3\times(-4)^6$

$=2\times5\times3^3\times2^{12}=135\times2^{13}$

$\therefore k=135$

0836 답 ③

주어진 등비수열은 첫째항이 3, 공비가 $\frac{6}{3}=2$이므로

$S_n=\frac{3(2^n-1)}{2-1}=3(2^n-1)$

$S_k=765$에서 $3(2^k-1)=765$

$2^k-1=255$, $2^k=256$

$2^k=2^8$ $\therefore k=8$

0837 답 ④

$S_n=3\times5^n-3$이므로

$a_3=S_3-S_2=(3\times5^3-3)-(3\times5^2-3)=372-72=300$

0838 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_2=12$, $a_5=-96$에서

$ar=12$ ····· ㉠

$ar^4=-96$ ····· ㉡

㉡÷㉠을 하면 $r^3=-8$ $\therefore r=-2$

이를 ㉠에 대입하면 $-2a=12$ $\therefore a=-6$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -6, 공비가 -2이므로

첫째항부터 제8항까지의 합은

$\frac{-6\{1-(-2)^8\}}{1-(-2)}=\frac{-6\times(-255)}{3}=510$

0839 답 ③

$S_n=3\times2^n+k$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=6+k$ ····· ㉠

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(3\times2^n+k)-(3\times2^{n-1}+k)$

$=3\times2^{n-1}$ ····· ㉡

이 수열이 첫째항부터 등비수열이 되려면 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 ㉠이 같아야 하므로

$3=6+k$ $\therefore k=-3$

0840 답 ④

등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r($r\neq1$)라 하면

첫째항부터 제3항까지의 합이 7이므로

$\frac{a(r^3-1)}{r-1}=7$ ····· ㉠

첫째항부터 제6항까지의 합이 63이므로

$\frac{a(r^6-1)}{r-1}=63$

$\therefore \frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=63$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $7(r^3+1)=63$

$r^3+1=9 \quad \therefore r^3=8$

따라서 첫째항부터 제9항까지의 합은

$$\frac{a(r^9-1)}{r-1}=\frac{a(r^3-1)(r^6+r^3+1)}{r-1}$$
$$=7\times(8^2+8+1)$$
$$=511$$

0841 답 ①

등비수열 a_1, a_3, a_5, a_7, a_9의 공비는 r^2이므로

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=4$에서 $\frac{a_1\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1}=4$

$\therefore \frac{a_1(r^{10}-1)}{(r+1)(r-1)}=4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

등비수열 a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}의 첫째항은 a_1r, 공비는 r^2이므로

$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=12$에서 $\frac{a_1r\{(r^2)^5-1\}}{r^2-1}=12$

$\therefore \frac{a_1r(r^{10}-1)}{(r+1)(r-1)}=12 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$4r=12 \quad \therefore r=3$

$\therefore r+S_{10}=3+(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})$
$=3+\{(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)+(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})\}$
$=3+(4+12)=19$

다른 풀이

$a_2=a_1r$, $a_4=a_3r$, $a_6=a_5r$, $a_8=a_7r$, $a_{10}=a_9r$이므로

$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=12$에서

$r(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)=12$

$r\times4=12 \quad \therefore r=3$

$\therefore r+S_{10}=3+(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10})$
$=3+\{(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)+(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})\}$
$=3+(4+12)=19$

0842 답 ①

$a_n=2\times(-3)^{n-1}$이므로 $b_n=3a_n-a_{n+1}$이라 하면

$b_n=3\times2\times(-3)^{n-1}-2\times(-3)^n$
$=6\times(-3)^{n-1}-2\times(-3)\times(-3)^{n-1}$
$=12\times(-3)^{n-1}$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 12, 공비가 -3인 등비수열이므로 첫째항부터 제4항까지의 합은

$$\frac{12\{1-(-3)^4\}}{1-(-3)}=\frac{12\times(-80)}{4}=-240$$

0843 답 ④

ㄱ. $a_n=3^{n-1}$에서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항은 1, 공비는 3이므로

$S_n=\frac{1\times(3^n-1)}{3-1}=\frac{3^n-1}{2}$

$\therefore 2S_n-3a_n=2\times\frac{3^n-1}{2}-3\times3^{n-1}$
$=3^n-1-3^n=-1$

ㄴ. $\log_3a_n=\log_33^{n-1}=n-1$이므로 수열 $\{\log_3a_n\}$은 첫째항이 0, 공차가 1인 등차수열이다.

ㄷ. $a_{n+1}-a_n=3^n-3^{n-1}=2\times3^{n-1}$이므로 수열 $\{a_{n+1}-a_n\}$은 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0844 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_1=2$이므로 $a_3=6$에서

$2+2d=6 \quad \therefore d=2$

$\therefore a_n=2+(n-1)\times2=2n$

$(\sqrt{5})^{a_n}=(\sqrt{5})^{2n}=5^n=5\times5^{n-1}$이므로 수열 $\{(\sqrt{5})^{a_n}\}$은 첫째항이 5, 공비가 5인 등비수열이다.

따라서 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{5(5^{10}-1)}{5-1}=\frac{5}{4}(5^{10}-1)$$

0845 답 ②

$\log_3(S_n+k)=n$에서 $S_n+k=3^n$

$\therefore S_n=3^n-k$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=3-k \quad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=(3^n-k)-(3^{n-1}-k)$
$=2\times3^{n-1} \quad \cdots\cdots$ ㉡

이때 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 ㉠이 같아야 하므로

$2=3-k \quad \therefore k=1$

따라서 $a_n=2\times3^{n-1}$이므로

$k(a_1+a_5)=1\times(2+162)=164$

0846 답 ①

모든 항이 양수이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0, r\neq1)$라 하자.

$a_1=2$이므로 $S_3=14$에서 $\frac{2(r^3-1)}{r-1}=14$

$\frac{2(r-1)(r^2+r+1)}{r-1}=14$, $r^2+r+1=7$ ($\because r\neq1$)

$r^2+r-6=0$, $(r+3)(r-2)=0$

$\therefore r=2$ ($\because r>0$)

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\frac{1}{a_5}+\frac{1}{a_6}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\times2}+\frac{1}{2\times2^2}+\frac{1}{2\times2^3}+\frac{1}{2\times2^4}+\frac{1}{2\times2^5}$$

→ 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$, 항수가 6인 등비수열의 합

$$=\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$$

따라서 $k=\frac{63}{64}$이므로

$128k=128\times\frac{63}{64}=126$

0847 답 ②

첫째항이 $a(a>0)$이고 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은
$a_n=ar^{n-1}$
$3a=2S_2+S_3$에서
$3a=2(a+ar)+(a+ar+ar^2)$
$3a=3a+3ar+ar^2$, $ar^2+3ar=0$
$a>0$이므로 양변을 a로 나누면
$r^2+3r=0$, $r(r+3)=0$
$\therefore r=-3$ 또는 $r=0$
(i) $r=-3$일 때,
$r^2=729a^2$에서 $9=729a^2$
$a^2=\frac{1}{81}$ $\therefore a=\frac{1}{9}$ ($\because a>0$)
(ii) $r=0$일 때,
$r^2=729a^2$에서 $a=0$
이것은 $a>0$인 조건을 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{9}$, $r=-3$
$\therefore a_4=\frac{1}{9}\times(-3)^3=-3$

0848 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r(r\neq1)$라 하면
$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=4$에서
$\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}=4$ ····· ㉠
수열 a_{11}, a_{12}, a_{13}, …, a_{20}의 첫째항은 ar^{10}, 공비는 r이므로
$a_{11}+a_{12}+a_{13}+\cdots+a_{20}=12$에서
$\frac{ar^{10}(r^{10}-1)}{r-1}=12$ ····· ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$4r^{10}=12$ $\therefore r^{10}=3$
이를 ㉠에 대입하면
$\frac{a(3-1)}{r-1}=4$ $\therefore \frac{a}{r-1}=2$
$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{30}=\frac{a(r^{30}-1)}{r-1}=\frac{a\{(r^{10})^3-1\}}{r-1}$
$=2\times26=52$

0849 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r\neq1)$라 하면 $a_1=2$이므로
$\frac{S_8}{S_4}=5a_5-44$에서
$\frac{\frac{2(r^8-1)}{r-1}}{\frac{2(r^4-1)}{r-1}}=5(2\times r^4)-44$, $\frac{r^8-1}{r^4-1}=10r^4-44$
$\frac{(r^4+1)(r^4-1)}{r^4-1}=10r^4-44$, $r^4+1=10r^4-44$
$\therefore r^4=5$
$\therefore a_9=2\times r^8=2\times(r^4)^2$
$=2\times5^2=50$

0850 답 ④

모든 항이 양수이므로 공비를 $r(r>0)$라 하면
$S_3-S_2=3$에서 $a_3=3$
$S_7-S_6=48$에서 $a_7=48$
$a_7=a_3r^4$이므로 $48=3\times r^4$
$r^4=16$ $\therefore r=2$ ($\because r>0$)
$\therefore a_4a_6=a_3r\times a_3r^3=a_3^2r^4=3^2\times2^4=144$

0851 답 ⑤

등비수열 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, …은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$이므로
$S_n=\frac{1\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$
$|S_n-1.5|<0.001$에서
$\left|\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-1.5\right|<0.001$
$\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n<0.001$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<0.002$
양변에 상용로그를 취하면
$\log\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}<\log0.002$, $\log3^{1-n}<\log\frac{2}{1000}$
$(1-n)\log3<\log2-3$, $n\log3>3-\log2+\log3$
$\therefore n>\frac{3-\log2}{\log3}+1=\frac{3-0.3}{0.48}+1=6.625$
따라서 자연수 n의 최솟값은 7이다.

0852 답 ③

$a_n=3\times2^{n-1}$이므로
$b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=3\times2^{n-1}+3\times2^n+3\times2^{n+1}$
$=3\times2^{n-1}(1+2+2^2)=21\times2^{n-1}$
수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 21, 공비가 2인 등비수열이므로 첫째항부터 제8항까지의 합은
$\frac{21(2^8-1)}{2-1}=21(2^8-1)$
따라서 $p=21$, $q=8$이므로
$pq=168$

0853 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0, r\neq1)$라 하면 $\frac{S_9}{S_3}=13$이므로
$\frac{\frac{a_1(r^9-1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^3-1)}{r-1}}=13$, $\frac{\frac{a_1(r^3-1)(r^6+r^3+1)}{r-1}}{\frac{a_1(r^3-1)}{r-1}}=13$
$r^6+r^3+1=13$, $r^6+r^3-12=0$
$(r^3+4)(r^3-3)=0$ $\therefore r^3=3$ ($\because r>0$)
$\therefore \frac{a_8+a_{17}}{a_2+a_5}=\frac{a_1r^7+a_1r^{16}}{a_1r+a_1r^4}=\frac{a_1r^7(1+r^9)}{a_1r(1+r^3)}$
$=\frac{r^6(1+r^9)}{1+r^3}=\frac{9(1+27)}{1+3}=63$

0854 답 ③

ㄱ. $S_n=2\times3^n+3$에서

$n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2\times3^n+3)-(2\times3^{n-1}+3)$

$=4\times3^{n-1}$

ㄴ. ㄱ에서 $a_{2n}=4\times3^{2n-1}=4\times3\times3^{2(n-1)}=12\times9^{n-1}$이므로 수열 $\{a_{2n}\}$은 공비가 9인 등비수열이다.

ㄷ. 수열 a_2, a_4, a_6, a_8, a_{10}은 첫째항이 12, 공비가 9인 등비수열이므로

$2(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})$

$=2\times\dfrac{12(9^5-1)}{9-1}=3(9^5-1)$

$=3(3^{10}-1)=3^{11}-3$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0855 답 3

$S_n=2^n-1$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2-1=1$ ····· ㉠

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)$

$=2^{n-1}$ ····· ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=2^{n-1}$ $\therefore a_4=2^3=8$

$T_n=-n^2+kn$에서 $b_1=T_1=-1+k$

$a_4=b_1$이므로

$8=-1+k$ $\therefore k=9$

$T_n=-n^2+9n$에서

(iii) $n=1$일 때,

$b_1=T_1=-1+9=8$ ····· ㉢

(iv) $n\geq2$일 때,

$b_n=T_n-T_{n-1}$

$=(-n^2+9n)-\{-(n-1)^2+9(n-1)\}$

$=(-n^2+9n)-(-n^2+11n-10)$

$=-2n+10$ ····· ㉣

이때 ㉢은 ㉣에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$b_n=-2n+10$

$a_p=b_q$에서 $2^{p-1}=-2q+10$

p, q는 자연수이므로 이 등식을 만족시키는 순서쌍 (p, q)는 $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 1)$의 3개이다.

0856 답 ②

모든 항이 양수이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$라 하면

$a_1a_2=a_{10}$에서 $a_1\times a_1r=a_1r^9$

$a_1>0$이므로 양변을 a_1r로 나누면

$\therefore a_1=r^8$ ····· ㉠

$a_1+a_9=20$에서 $a_1+a_1r^8=20$

㉠을 대입하면 $a_1+a_1^2=20$

$a_1^2+a_1-20=0$, $(a_1+5)(a_1-4)=0$

$\therefore a_1=4$ ($\because a_1>0$)

$a_1=4$를 ㉠에 대입하면

$r^8=4$ $\therefore r^4=2$ ($\because r>0$)

$\therefore (a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)(a_1-a_3+a_5-a_7+a_9)$

첫째항이 a_1, 공비가 r^2, 항수가 5인 등비수열의 합 / 첫째항이 a_1, 공비가 $-r^2$, 항수가 5인 등비수열의 합

$=\dfrac{4\{1-(r^2)^5\}}{1-r^2}\times\dfrac{4\{1-(-r^2)^5\}}{1-(-r^2)}$

$=\dfrac{4(1-r^{10})}{1-r^2}\times\dfrac{4(1+r^{10})}{1+r^2}$

$=\dfrac{16(1-r^{20})}{1-r^4}=\dfrac{16\{1-(r^4)^5\}}{1-r^4}$

$=\dfrac{16(1-2^5)}{1-2}=16\times31$

$=496$

0857 답 54

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r\neq1)$라 하면 $a_1=2$이므로

(가)에서

$\dfrac{2(r^{10}-1)}{r-1}-\dfrac{2(r^2-1)}{r-1}=3\times\dfrac{2(r^8-1)}{r-1}$ ····· ⓘ

양변에 $\dfrac{r-1}{2}$을 곱하면

$(r^{10}-1)-(r^2-1)=3(r^8-1)$

$r^{10}-r^2=3(r^8-1)$, $r^2(r^8-1)-3(r^8-1)=0$

$(r^2-3)(r^8-1)=0$

$\therefore r^2=3$ 또는 $r^8=1$

(나)에서

$S_{10}-S_8=a_9+a_{10}=2r^8+2r^9=2r^8(r+1)<0$

즉, $r<-1$이므로

$r^2=3$에서 $r=-\sqrt{3}$ ····· ⓘⓘ

$\therefore a_7=2\times(-\sqrt{3})^6=2\times27=54$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ (가)를 공비 r에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘ r의 값 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ a_7의 값 구하기	20 %

0858 답 9

$S_{n+3}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}$이므로 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}=13\times3^{n-1}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$ar^n+ar^{n+1}+ar^{n+2}=13\times3^{n-1}$

$\therefore ar^n(1+r+r^2)=13\times3^{n-1}$ ····· ㉠

㉠에 $n=1$을 대입하면

$ar(1+r+r^2)=13$ ····· ㉡

㉠에 $n=2$를 대입하면

$ar^2(1+r+r^2)=39$ ····· ㉢

㉢÷㉡을 하면 $r=3$

$r=3$을 ㉡에 대입하면 $3a(1+3+3^2)=13$

$39a=13 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 3이므로

$a_4=\frac{1}{3}\times 3^3=9$

0859 답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a(a>0)$, 공비를 $r(r>1)$라 하면

$S_{20}=33S_{10}$에서

$\frac{a(r^{20}-1)}{r-1}=33\times\frac{a(r^{10}-1)}{r-1}$, $r^{20}-1=33(r^{10}-1)$

$(r^{10}+1)(r^{10}-1)=33(r^{10}-1)$

$r^{10}=32$ ($\because r>1$에서 $r^{10}>1$)

$\therefore r=32^{\frac{1}{10}}=(2^5)^{\frac{1}{10}}=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$$\frac{S_{3m}}{S_m}=\frac{\frac{a\{(\sqrt{2})^{3m}-1\}}{\sqrt{2}-1}}{\frac{a\{(\sqrt{2})^{m}-1\}}{\sqrt{2}-1}}=\frac{(\sqrt{2})^{3m}-1}{(\sqrt{2})^{m}-1}$$

$$=\frac{\{(\sqrt{2})^{m}-1\}\{(\sqrt{2})^{2m}+(\sqrt{2})^{m}+1\}}{(\sqrt{2})^{m}-1}$$

$=(\sqrt{2})^{2m}+(\sqrt{2})^{m}+1=2^m+2^{\frac{m}{2}}+1$

이므로 $\frac{S_{3m}}{S_m}$이 정수가 되려면 m은 2의 배수이어야 한다.

따라서 두 자리의 자연수 m은 10, 12, 14, …, 98의 45개이다.

0860 답 ①

주어진 수열은

$3=\frac{1}{3}(10-1)$, $33=\frac{1}{3}(10^2-1)$, $333=\frac{1}{3}(10^3-1)$, …이므로

첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{1}{3}(10-1)+\frac{1}{3}(10^2-1)+\frac{1}{3}(10^3-1)+\cdots+\frac{1}{3}(10^n-1)$$

$$=\frac{1}{3}\{\underbrace{(10+10^2+10^3+\cdots+10^n)}_{\text{첫째항이 10, 공비가 10, 항수가 } n\text{인 등비수열의 합}}-n\}$$

$$=\frac{1}{3}\left\{\frac{10(10^n-1)}{10-1}-n\right\}=\frac{1}{3}\times\frac{10^{n+1}-10-9n}{9}$$

$$=\frac{10^{n+1}-10-9n}{27}$$

$$\therefore 27S_{20}+180=27\times\frac{10^{21}-10-180}{27}+180$$

$$=10^{21}-10-180+180$$

$$=10^{21}-10=10(10^{20}-1)$$

따라서 $a=10$, $b=1$이므로

$a+b=11$

0861 답 ⑤

㈎에서 수열 $\{a_{2n-1}\}$의 첫째항이 $a_1=2$, 공차가 4이므로

$a_{2n-1}=2+(n-1)\times 4=4n-2$ …… ㉠

㈏에서 수열 $\{S_{2n-1}\}$의 첫째항이 $S_1=a_1=2$, 공비가 3이므로

$S_{2n-1}=2\times 3^{n-1}$ …… ㉡

㉡에 $n=5$를 대입하면 $S_9=2\times 3^4=162$

㉡에 $n=6$을 대입하면 $S_{11}=2\times 3^5=486$

$S_{11}-S_9=a_{10}+a_{11}$이므로

$a_{10}+a_{11}=486-162=324$ …… ㉢

㉠에 $n=6$을 대입하면

$a_{11}=4\times 6-2=22$

$\therefore a_{10}=324-22=302$ ($\because$ ㉢)

0862 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 4, 공비가 2이므로

$a_n=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$

$$\therefore \frac{1}{a_n}=\frac{1}{2^{n+1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_7}=\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{128}\right)$$

$$=\frac{127}{256}$$

$k\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_7}\right)=k\times\frac{127}{256}=k\times\frac{127}{2^8}$이 자연수가 되도록 하는 1000 이하의 자연수 k는 2^8, 2×2^8, 3×2^8이다.

따라서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은

$2^8+2\times 2^8+3\times 2^8=2^8(1+2+3)$

$=1536$

0863 답 ③

연이율이 4 %이고 1년마다 복리로 매년 초에 200만 원씩 5년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$\underbrace{200(1+0.04)+200(1+0.04)^2+\cdots+200(1+0.04)^5}_{\text{첫째항이 } 200(1+0.04),\ \text{공비가 } (1+0.04),\ \text{항수가 5인 등비수열의 합}}$$

$$=\frac{200(1+0.04)\{(1+0.04)^5-1\}}{(1+0.04)-1}$$

$$=\frac{200\times 1.04\times(1.22-1)}{0.04}$$

$=1144$(만 원)

0864 답 ④

$800=2^5\times 5^2$이므로 800의 모든 양의 약수의 합은

$$\underbrace{(1+2+2^2+\cdots+2^5)}_{\text{첫째항이 1, 공비가 2, 항수가 6인 등비수열의 합}}(1+5+5^2)$$

$$=\frac{1\times(2^6-1)}{2-1}\times 31$$

$=63\times 31=1953$

참고 자연수 N이 $N=p^a\times q^b$(p, q는 서로 다른 소수, a, b는 자연수)일 때, N의 모든 양의 약수의 총합은

$$1\times 1+1\times q+1\times q^2+\cdots+1\times q^b+p\times 1+p\times q+p\times q^2+\cdots+p\times q^b$$
$$+p^2\times 1+p^2\times q+p^2\times q^2+\cdots+p^2\times q^b$$
$$\vdots$$
$$+p^a\times 1+p^a\times q+p^a\times q^2+\cdots+p^a\times q^b$$

$=(1+p+p^2+\cdots+p^a)(1+q+q^2+\cdots+q^b)$

0865 답 $\frac{1}{16}$배

2001년 탄소 배출량을 a만 톤이라 하고, 매년 탄소 배출량이 전년도 탄소 배출량의 $r(0<r<1)$배로 감소했다고 하자.

2001년부터 2020년까지 총 탄소 배출량이 50만 톤이므로

$\frac{a(1-r^{20})}{1-r}=50$ ····· ㉠

2001년부터 2011년까지 총 탄소 배출량은 $50-10=40$(만 톤)이므로

$\frac{a(1-r^{10})}{1-r}=40$

㉠에서 $\frac{a(1-r^{10})(1+r^{10})}{1-r}=50$이므로

$40(1+r^{10})=50$, $1+r^{10}=\frac{5}{4}$ $\therefore r^{10}=\frac{1}{4}$

2021년의 탄소 배출량은

$ar^{20}=a(r^{10})^2=\frac{a}{16}$ (만 톤)

따라서 2021년 탄소 배출량은 2001년 탄소 배출량의 $\frac{1}{16}$배이다.

0866 답 ④

연이율이 10 %이고 1년마다 복리로 매년 말에 500만 원씩 10년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$500+500(1+0.1)+\cdots+500(1+0.1)^9$ → 첫째항이 500, 공비가 $(1+0.1)$, 항수가 10인 등비수열의 합

$=\frac{500\{(1+0.1)^{10}-1\}}{(1+0.1)-1}$

$=\frac{500(2.6-1)}{0.1}$

$=8000$(만 원)

0867 답 ①

연이율이 5 %이고 1년마다 복리로 매년 초에 a만 원씩 5년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$a(1+0.05)+a(1+0.05)^2+\cdots+a(1+0.05)^5$ → 첫째항이 $a(1+0.05)$, 공비가 $(1+0.05)$, 항수가 5인 등비수열의 합

$=\frac{a(1+0.05)\{(1+0.05)^5-1\}}{(1+0.05)-1}$

$=\frac{a\times1.05\times(1.28-1)}{0.05}$

$=5.88a$(만 원)

즉, $5.88a=2646$이므로 $a=450$

따라서 매년 초에 450만 원씩 적립해야 한다.

0868 답 ④

첫 주에 4 km를 달리고, 매주 전주보다 5 %씩 늘려 달리므로 n번째 일요일까지 달린 거리의 총합은

$4+4(1+0.05)+4(1+0.05)^2+\cdots+4(1+0.05)^{n-1}$ → 첫째항이 4, 공비가 $(1+0.05)$, 항수가 n인 등비수열의 합

$=\frac{4\{(1+0.05)^n-1\}}{(1+0.05)-1}$

$=\frac{4(1.05^n-1)}{0.05}$

$\frac{4(1.05^n-1)}{0.05}\geq200$에서 $1.05^n-1\geq2.5$

$1.05^n\geq3.5$

양변에 상용로그를 취하면

$\log1.05^n\geq\log3.5$, $n\log1.05\geq\log3.5$

$n\times0.02\geq0.54$ $\therefore n\geq27$

따라서 처음으로 200 km 이상이 되는 날은 27번째 일요일이다.

0869 답 ③

직각삼각형 P_1OP_2에서 $\angle P_1OP_2=\frac{\pi}{3}$이므로

$\overline{P_1P_2}=\overline{OP_1}\sin\frac{\pi}{3}=32\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=48$

직각삼각형 $P_1P_2P_3$에서 $\angle P_3P_1P_2=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{P_2P_3}=\overline{P_1P_2}\sin\frac{\pi}{6}=48\times\frac{1}{2}=24$

직각삼각형 $P_2P_3P_4$에서 $\angle P_4P_2P_3=\frac{\pi}{6}$이므로

$\overline{P_3P_4}=\overline{P_2P_3}\sin\frac{\pi}{6}=24\times\frac{1}{2}=12$

⋮

따라서 수열 $\{\overline{P_nP_{n+1}}\}$은 첫째항이 48, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots+\overline{P_8P_9}=\frac{48\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{765}{8}$

0870 답 ②

㈎에서 네 번째 줄에 있는 수는 공비가 2인 등비수열이다.

㈏에서 네 번째 줄의 네 번째 칸에 들어갈 수는 $4\times2=8$

이때 등비수열의 첫째항을 a라 하면 제4항이 8이므로

$a\times2^3=8$ $\therefore a=1$

따라서 네 번째 줄에 있는 모든 수의 합은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로

$\frac{1\times(2^7-1)}{2-1}=127$

0871 답 1940

정사각형 A_n의 둘레의 길이를 l_n이라 하면

$l_1=4\times1$

$l_2=4\times\left(1+2\times\frac{1}{3}\right)=4\times1+4\times2\times\frac{1}{3}$

$l_3=4\times\left\{1+2\times\frac{1}{3}+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}=4\times1+4\times2\times\frac{1}{3}+4\times2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$

⋮

$l_6=4\times\left\{1+2\times\frac{1}{3}+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\right\}$

$=4+\underbrace{4\times2\times\frac{1}{3}+4\times2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cdots+4\times2\times\left(\frac{1}{3}\right)^5}$

→ 첫째항이 $4\times2\times\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$, 항수가 5인 등비수열의 합

$=4+\frac{4\times2\times\frac{1}{3}\times\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right\}}{1-\frac{1}{3}}=4+4\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right\}$

$=4+4\times\frac{242}{243}=\frac{1940}{243}$

따라서 $k=\frac{1940}{243}$이므로 $243k=1940$

0872 답 14

한 변의 길이가 4인 정삼각형의 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2=4\sqrt{3}$

첫 번째 시행에서 색칠한 정삼각형의 넓이는

$4\sqrt{3}\times\frac{1}{4}$

두 번째 시행에서 색칠한 정삼각형의 넓이는

$4\sqrt{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\left(4\sqrt{3}\times\frac{1}{4}\right)\times\frac{3}{4}$

↳ 첫 번째 시행 후 색칠되지 않은 정삼각형의 넓이

세 번째 시행에서 색칠한 정삼각형의 넓이는

$4\sqrt{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}=\left(4\sqrt{3}\times\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$

↳ 두 번째 시행 후 색칠되지 않은 정삼각형의 넓이

$\vdots$

열 번째 시행에서 색칠한 정삼각형의 넓이는

$4\sqrt{3}\times\left(\frac{3}{4}\right)^9\times\frac{1}{4}=\left(4\sqrt{3}\times\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)^9$

즉, 10회 시행까지 색칠한 모든 정삼각형의 넓이의 합은

$4\sqrt{3}\times\frac{1}{4}+\left(4\sqrt{3}\times\frac{1}{4}\right)\times\frac{3}{4}+\cdots+\left(4\sqrt{3}\times\frac{1}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)^9$

↳ 첫째항이 $4\sqrt{3}\times\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{3}{4}$, 항수가 10인 등비수열의 합

$=\frac{4\sqrt{3}\times\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{3}{4}}=4\sqrt{3}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}$

따라서 $a=4$, $b=10$이므로

$a+b=14$

0873 답 $\frac{5}{3}$

월이율이 0.5 %이고, 지아는 1개월마다 복리로 매월 말에 20만 원씩 24개월 동안 적립하므로 지아가 적립한 적립금의 24개월째 말의 원리합계는

$20+20(1+0.005)+20(1+0.005)^2+\cdots+20(1+0.005)^{23}$

↳ 첫째항이 20, 공비가 $(1+0.005)$, 항수가 24인 등비수열의 합

$=\frac{20\{(1+0.005)^{24}-1\}}{(1+0.005)-1}$

$=\frac{20(1.15-1)}{0.005}=600$(만 원) …… ⓘ

민재는 1개월마다 복리로 매월 말에 30만 원씩 12개월 동안 적립하므로 민재가 적립한 적립금의 12개월째 말의 원리합계는

$30+30(1+0.005)+30(1+0.005)^2+\cdots+30(1+0.005)^{11}$

↳ 첫째항이 30, 공비가 $(1+0.005)$, 항수가 12인 등비수열의 합

$=\frac{30\{(1+0.005)^{12}-1\}}{(1+0.005)-1}$

$=\frac{30(1.06-1)}{0.005}=360$(만 원) …… ⓘⓘ

따라서 지아의 원리합계는 민재의 원리합계의 $\frac{600}{360}=\frac{5}{3}$배이므로

$k=\frac{5}{3}$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 지아가 24개월째 말에 받는 금액 구하기	40 %
ⓘⓘ 민재가 12개월째 말에 받는 금액 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ k의 값 구하기	20 %

0874 답 ②

(가), (나)에서 입사 10년 차까지의 연봉의 총합은

$A+A(1+0.05)+A(1+0.05)^2+\cdots+A(1+0.05)^9$

↳ 첫째항이 A, 공비가 $(1+0.05)$, 항수가 10인 등비수열의 합

$=\frac{A\{(1+0.05)^{10}-1\}}{(1+0.05)-1}=20A(1.05^{10}-1)$

$=20A(1.05^9\times 1.05-1)=20A(1.55\times 1.05-1)$

$=12.55A$

입사 10년 차의 연봉은 $A(1+0.05)^9=1.55A$이므로

(다)에서 입사 11년 차의 연봉은

$1.55A\times 0.8=1.24A$

입사 11년 차부터 20년 차까지의 연봉의 합은

$1.24A\times 10=12.4A$

따라서 20년 동안 근무하면서 받는 연봉의 총합은

$12.55A+12.4A=24.95A$

0875 답 108

첫 번째 얻은 정삼각형의 외접원의 반지름의 길이는

$12\sqrt{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$

두 번째 얻은 정삼각형의 외접원의 반지름의 길이는

$\left(12\sqrt{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\left(12\sqrt{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{3}$

세 번째 얻은 정삼각형의 외접원의 반지름의 길이는

$\left(12\sqrt{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\left(12\sqrt{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$\vdots$

n번째 얻은 정삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면

$r_n=\left(12\sqrt{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=2\sqrt{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

n번째 얻은 정삼각형의 한 변의 길이를 x_n이라 하면

$x_n=\sqrt{3}r_n=\sqrt{3}\times\left\{2\sqrt{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}=6\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

↳ 이유는 [참고]에 설명함.

$\therefore\ S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}x_n^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left\{6\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}^2$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 36\times\left(\frac{2}{3}\right)^{2n-2}=9\sqrt{3}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$

즉, $\{S_n\}$은 첫째항이 $9\sqrt{3}$, 공비가 $\frac{4}{9}$인 등비수열이므로

$S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{10}=\frac{9\sqrt{3}\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{4}{9}}$

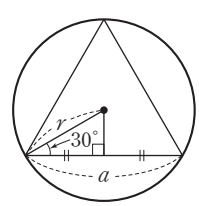
$=\frac{81\sqrt{3}}{5}\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^{10}\right\}$

따라서 $a=\frac{81\sqrt{3}}{5}$, $b=\frac{4}{9}$이므로

$5\sqrt{3}ab=5\sqrt{3}\times\frac{81\sqrt{3}}{5}\times\frac{4}{9}=108$

참고 반지름의 길이가 r인 원에 한 변의 길이가 a인 정삼각형이 내접할 때, 정삼각형의 중심(외심)은 원의 중심과 일치하므로 원의 중심에서 정삼각형의 한 변에 수선을 내리면

$a=2\times r\cos 30^\circ$ $\therefore\ a=\sqrt{3}r$



0876 답 ③

$12^{10}=(2^2\times3)^{10}=2^{20}\times3^{10}$이므로 12^{10}의 양의 약수는

$2^m\times3^n$(m, n은 $0\le m\le20$, $0\le n\le10$인 정수) 꼴이다.

2×3^3으로 나누어떨어지려면 $m\ge1$, $n\ge3$이어야 하고, 그중에서

2×3^6으로 나누어떨어지지 않으려면 $n<6$이어야 한다.

따라서 $1\le m\le20$이고 $3\le n\le5$이므로 그 수들의 합은

$(\underbrace{2+2^2+2^3+\cdots+2^{20}}_{\text{첫째항이 2, 공비가 2, 항수가 20인 등비수열의 합}})(3^3+3^4+3^5)$

$=\dfrac{2(2^{20}-1)}{2-1}\times(27+81+243)$

$=2(2^{20}-1)\times351=702(2^{20}-1)$

$\therefore a=702$

0877 답 ②

처음 종이의 둘레의 길이는 $4\times1=4$

각 시행 후 종이의 둘레의 길이는 그 시행에서 오려낸 정사각형의 둘레의 길이의 합만큼 늘어난다.

첫 번째 시행에서 오려낸 부분은 한 변의 길이가 $\frac{1}{3}$인 정사각형 1개이므로 그 둘레의 길이는 $4\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

두 번째 시행에서 오려낸 부분은 한 변의 길이가 $\left(\frac{1}{3}\right)^2$인 정사각형 8개이므로 그 둘레의 길이는 $8\times\left\{4\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}=\frac{4}{3}\times\frac{8}{3}$

세 번째 시행에서 오려낸 부분은 한 변의 길이가 $\left(\frac{1}{3}\right)^3$인 정사각형 8^2개이므로 그 둘레의 길이는 $8^2\times\left\{4\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}=\frac{4}{3}\times\left(\frac{8}{3}\right)^2$

⋮

n번째 시행에서 오려낸 부분의 둘레의 길이는

$8^{n-1}\times\left\{4\times\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\frac{4}{3}\times\left(\frac{8}{3}\right)^{n-1}$

10회 시행 후 종이의 둘레의 길이는

$4+\underbrace{\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\times\frac{8}{3}+\frac{4}{3}\times\left(\frac{8}{3}\right)^2+\cdots+\frac{4}{3}\times\left(\frac{8}{3}\right)^9}_{\text{첫째항이 }\frac{4}{3}\text{, 공비가 }\frac{8}{3}\text{, 항수가 10인 등비수열의 합}}$

$=4+\dfrac{\frac{4}{3}\left\{\left(\frac{8}{3}\right)^{10}-1\right\}}{\frac{8}{3}-1}=4+\frac{4}{5}\left\{\left(\frac{8}{3}\right)^{10}-1\right\}=\frac{4}{5}\left\{\left(\frac{8}{3}\right)^{10}+4\right\}$

따라서 $a=\frac{4}{5}$, $b=4$이므로 $ab=\frac{16}{5}$

최고수준 도전 기출 209~211쪽

0878 답 −3

전략 $x=n+\alpha$(n은 자연수, $0<\alpha<1$)라 하고 등비중항을 이용하여 α를 n에 대한 식으로 나타낸다.

x가 양의 정수이면 $x-[x]=0$, $[x]=x$, $x+[x]=2x$는 이 순서대로 등비수열을 이루지 않는다.

또 $0\le x<1$이면 $[x]=0$이므로 $x-[x]=x$, $[x]=0$, $x+[x]=x$는 이 순서대로 등비수열을 이루지 않는다.

즉, $x=n+\alpha$(n은 자연수, $0<\alpha<1$)라 하면 $[x]=n$에서

$x-[x]=\alpha$, $[x]=n$, $x+[x]=2n+\alpha$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$n^2=\alpha(2n+\alpha)$, $\alpha^2+2n\alpha-n^2=0$ → α에 대한 이차방정식에서 근의 공식에 의해 $\alpha=(\sqrt{2}-1)n$

$\therefore\ \alpha=(\sqrt{2}-1)n$ ($\because\ 0<\alpha<1$)

$0<\alpha<1$에서 $0<(\sqrt{2}-1)n<1$

$0<n<\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ $\therefore\ 0<n<\sqrt{2}+1$

n은 자연수이므로 $n=1$ 또는 $n=2$

$\alpha=(\sqrt{2}-1)n$이므로 $n=1$일 때 $\alpha=\sqrt{2}-1$,

$n=2$일 때 $\alpha=2(\sqrt{2}-1)$이다.

이때 $x-[x]=\alpha$이므로 모든 $x-[x]$의 값의 합은

$\sqrt{2}-1+2(\sqrt{2}-1)=-3+3\sqrt{2}$

$\therefore\ k=-3$

0879 답 ②

전략 주어진 등비수열의 공비를 n에 대한 식으로 나타낸다.

3, a_1, a_2, a_3, …, a_n, 9의 공비를 r_n이라 하면

$3\times r_n^{n+1}=9$, $r_n^{n+1}=3$ $\therefore\ r_n=3^{\frac{1}{n+1}}$

ㄱ. $r_{2n-1}=3^{\frac{1}{(2n-1)+1}}=3^{\frac{1}{2n}}$이므로 집합 A_{2n-1}의 원소 중 $(n+1)$번째로 작은 수는

$3\times(3^{\frac{1}{2n}})^n=3\sqrt{3}$ $\therefore\ 3\sqrt{3}\in A_{2n-1}$

ㄴ. 집합 A_n의 원소는

$3\times(3^{\frac{1}{n+1}})^m=3^{1+\frac{m}{n+1}}$($m=0, 1, 2, \ldots, n+1$) 꼴이고

집합 A_{2n+1}의 원소는

$3^{1+\frac{s}{2n+2}}=3^{1+\frac{s}{2(n+1)}}$($s=0, 1, 2, \ldots, 2n+2$) 꼴이므로

$s=2m$일 때 집합 A_n의 원소와 중복된다.

$\therefore\ A_n\subset A_{2n+1}$

ㄷ. 집합 $A_{2n+1}-A_n$의 원소는 ㄴ에 의하여

$s=2k-1$($k=1, 2, 3, \ldots, n+1$)인 경우이다.

즉, $3^{1+\frac{2k-1}{2n+2}}$($k=1, 2, \ldots, n+1$) 꼴이므로 모든 원소의 곱 P_n은

$P_n=3^{(n+1)+\frac{1}{2n+2}\{1+3+5+\cdots+(2n+1)\}}$ → 첫째항이 1, 끝항이 $2n+1$, 항수가 $n+1$인 등차수열의 합

$=3^{(n+1)+\frac{1}{2n+2}\times\frac{(n+1)(2n+2)}{2}}$

$=3^{\frac{3}{2}(n+1)}$

$\therefore\ \log_3P_2P_5=\log_3(3^{\frac{9}{2}}\times3^9)$

$=\dfrac{9}{2}+9=\dfrac{27}{2}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0880 답 11

전략 등비중항을 이용하여 a_k를 식으로 나타내고, 공차가 자연수이어야 함을 이용한다.

㈎에서 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 정수이고, 공차가 양수이므로 공차는 자연수이다.

등차수열 a_n의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_n=a+(n-1)d$
(나)에서 a_9, a_7, a_k가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$a_7^2=a_9\times a_k$에서
$\{a_k+(7-k)d\}^2=\{a_k+(9-k)d\}\times a_k$
$a_k^2+2a_k(7-k)d+(7-k)^2d^2=a_k^2+a_k(9-k)d$
$a_k(k-5)d=(7-k)^2d^2$
$d>0$이므로 양변을 d로 나누면
$a_k(k-5)=(7-k)^2d$
$\therefore a_k=\dfrac{(7-k)^2d}{k-5}$ (k는 $k\neq5$, $k<7$인 자연수, d는 자연수)
$a_k^2=324=18^2$에서 $a_k=-18$ 또는 $a_k=18$
(i) $1\le k\le4$일 때,
$a_k=\dfrac{(7-k)^2d}{k-5}<0$이므로 $a_k=-18$
즉, $\dfrac{(7-k)^2d}{k-5}=-18$을 만족시키는 순서쌍 (k, d)는
$(1, 2)$, $(4, 2)$
(ii) $k=6$일 때,
$a_k=\dfrac{(7-k)^2d}{k-5}>0$이므로 $a_k=18$
즉, $\dfrac{(7-k)^2d}{k-5}=18$에서 $k=6$이면 $d=18$
(i), (ii)에서 $a_k^2=324$를 만족시키는 자연수 k의 값은
1, 4, 6
따라서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은
$1+4+6=11$

0881 답 ④

전략 a, b, c, d가 등비수열을 이루면 d, c, b, a도 등비수열이 됨을 이용한다.

등비수열 a, b, c, d의 공비가 r이면 d, c, b, a는 공비가 $\dfrac{1}{r}$인 등비수열이고, 이때 네 수의 합은 서로 같다.
따라서 $r>1$인 경우와 $r<1$인 경우 중 하나만 구하면 되므로 $r>1$인 경우에 대하여 구해 보자.
주어진 네 수가 이루는 등비수열의 공비를 $\dfrac{q}{p}$(p와 q는 서로소인 자연수, $p<q$)라 하자.
이때 네 수는 a, $\dfrac{aq}{p}$, $\dfrac{aq^2}{p^2}$, $\dfrac{aq^3}{p^3}$이고 두 자리의 자연수이므로 $a=kp^3$(k는 자연수)이라 하면 네 수는 kp^3, kp^2q, kpq^2, kq^3이고,
$10\le kp^3<kq^3\le99$이다. ····· ㉠
(i) $q=2$일 때, ㉠을 만족시키는 $p=1$뿐이므로 공비는 2이다.
$kp^3=k$이므로 네 수는 k, $2k$, $4k$, $8k$
$10\le k<8k\le99$이므로 가능한 k의 값은 10, 11, 12이다.
① $k=10$일 때, 네 수는 10, 20, 40, 80이므로 그 합은
$10+20+40+80=150$
② $k=11$일 때, 네 수는 11, 22, 44, 88이므로 그 합은
$11+22+44+88=165$
③ $k=12$일 때, 네 수는 12, 24, 48, 96이므로 그 합은
$12+24+48+96=180$
(ii) $q=3$일 때, ㉠을 만족시키는 $p=2$뿐이므로 공비는 $\dfrac{3}{2}$이다.
$kp^3=8k$이므로 네 수는 $8k$, $12k$, $18k$, $27k$
$10\le8k<27k\le99$이므로 가능한 k의 값은 2, 3이다.
① $k=2$일 때, 네 수는 16, 24, 36, 54이므로 그 합은
$16+24+36+54=130$
② $k=3$일 때, 네 수는 24, 36, 54, 81이므로 그 합은
$24+36+54+81=195$
(iii) $q=4$일 때, ㉠을 만족시키는 $p=3$뿐이므로 공비는 $\dfrac{4}{3}$이다.
$kp^3=27k$이므로 네 수는 $27k$, $36k$, $48k$, $64k$
$10\le27k<64k\le99$이므로 가능한 k의 값은 1이다.
$k=1$일 때, 네 수는 27, 36, 48, 64이므로 그 합은
$27+36+48+64=175$
(iv) p, q가 그 외의 값일 때는 서로 다른 두 자리의 자연수인 a, b, c, d가 존재하지 않는다.
(i)~(iv)에서
$A=\{130, 150, 165, 175, 180, 195\}$
따라서 구하는 집합 A의 모든 원소의 합은
$130+150+165+175+180+195=995$

0882 답 11

전략 (가), (나)에서 a_n, b_n을 n, p에 대한 식으로 나타낸다.

$a_1=b_1$에서 b_1은 수열 $\{a_n\}$의 항이 되므로 $n\ge2$일 때 수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 수열 $\{a_n\}$의 항이 되어야 한다.
수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 6, 공차가 p이므로
$a_n=6+(n-1)p$
수열 $\{b_n\}$의 첫째항이 6, 공비가 p이므로
$b_n=6\times p^{n-1}=6p^{n-1}$
수열 $\{b_n\}$의 모든 항이 수열 $\{a_n\}$의 항이 되려면 모든 자연수 n에 대하여 $6p^{n-1}=6+(m-1)p$인 자연수 m이 존재해야 한다.
$(m-1)p=6p^{n-1}-6$, $m-1=6p^{n-2}-\dfrac{6}{p}$
$\therefore m=6p^{n-2}-\dfrac{6}{p}+1$
이때 m과 p^{n-2}($n\ge2$)은 모두 자연수이므로 $\dfrac{6}{p}$도 자연수이어야 한다.
즉, p는 1보다 큰 6의 약수이므로
$p=2$ 또는 $p=3$ 또는 $p=6$
따라서 모든 자연수 p의 합은
$2+3+6=11$

0883 답 47

전략 등차중항을 이용하여 r에 대한 관계식을 구하고, a_{11}이 자연수이고 a_1이 10000보다 작은 자연수라는 조건을 만족시키는 자연수 k의 값을 구한다.

(나)에서 $5a_{k-1}=2a_1+\dfrac{9}{8}a_{2k-3}$
등비수열 $\{a_n\}$의 공비가 r($r>0$)이므로
$5a_1r^{k-2}=2a_1+\dfrac{9}{8}a_1r^{2k-4}$

$a_1>0$이므로 양변을 a_1으로 나누면

$5r^{k-2}=2+\frac{9}{8}r^{2k-4}$, $9(r^{k-2})^2-40r^{k-2}+16=0$

$(9r^{k-2}-4)(r^{k-2}-4)=0$ $\therefore r^{k-2}=\frac{4}{9}$ 또는 $r^{k-2}=4$

즉, $r=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{k-2}}$ 또는 $r=2^{\frac{2}{k-2}}$

$k\geq 3$, $0<r<1$이므로 $r=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2}{k-2}}$

$\therefore a_{11}=a_1r^{10}=a_1\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{20}{k-2}}$

a_{11}이 자연수가 되려면 $k-2$가 20의 약수이어야 한다.

20의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20이므로

$k=3, 4, 6, 7, 12, 22$

k의 값에 따른 a_1의 값은 각각 3^{20}, 3^{10}, 3^5, 3^4, 3^2, 3의 배수이다.

그런데 a_1은 10000보다 작으므로 가능한 k의 값은

$\rightarrow 3^8<10000<3^9$

6, 7, 12, 22

따라서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은

$6+7+12+22=47$

0884 답 ③

전략 주어진 부등식을 이용하여 공비 r의 값의 범위를 구한다.

ㄱ. $a_3a_6<0$에서

$a_1r^2\times a_1r^5=a_1^2r^7<0$ $\therefore r<0$ ($\because a_1>0$) ····· ㉠

$|a_2+a_3|<|a_3+a_4|$에서

$|a_1r+a_1r^2|<|a_1r^2+a_1r^3|$, $|a_1r(1+r)|<|a_1r^2(1+r)|$

$a_1|r||1+r|<a_1|r|^2|1+r|$

양변을 $a_1|1+r|$로 나누면

$|r|<|r|^2$, $|r|^2-|r|>0$

$|r|(|r|-1)>0$, $|r|>1$ $\therefore r<-1$ ($\because$ ㉠)

ㄴ. [반례] $n=1$일 때,

$a_1+a_2+a_3=a_1+a_1r+a_1r^2=a_1(1+r+r^2)$

$1+r+r^2=\left(r+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이고 $a_1>0$이므로

$a_1+a_2+a_3>0$

ㄷ. $a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n-1}=a_n\frac{r^n-1}{r-1}$

ㄱ에서 $r<-1$이므로 $r-1<0$이다.

(i) n이 홀수일 때,

$a_n=a_1r^{n-1}>0$

n이 홀수이므로 $r^n<0$에서 $r^n-1<0$

따라서 $a_n\frac{r^n-1}{r-1}>0$

(ii) n이 짝수일 때,

$a_n=a_1r^{n-1}<0$

n이 짝수이고 $|r|>1$이므로 $r^n>1$에서 $r^n-1>0$

따라서 $a_n\frac{r^n-1}{r-1}>0$

(i), (ii)에서 모든 자연수 n에 대하여

$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n-1}>0$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0885 답 8

전략 ㈎에서 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 먼저 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r<0)$라 하면

㈎에서 $a_1+a_2+a_3+a_4=5(a_1+a_2)$이므로

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}r+\frac{1}{3}r^2+\frac{1}{3}r^3=5\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}r\right)$

$1+r+r^2+r^3=5(1+r)$

$r^3+r^2-4r-4=0$ → 2 | 1 1 −4 −4 / 2 6 4 / 1 3 2 0

$(r-2)(r^2+3r+2)=0$

$(r-2)(r+2)(r+1)=0$

$\therefore r=-2$ 또는 $r=-1$ ($\because r<0$)

(i) $r=-2$인 경우

$S_n=\frac{\frac{1}{3}\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{1-(-2)^n}{9}$

$a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=-\frac{2}{3}$, $a_3=\frac{4}{3}$이므로

$-\frac{85}{7}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)=-\frac{85}{7}\left(\frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}\right)=-\frac{85}{3}$

즉, $\frac{1-(-2)^n}{9}=-\frac{85}{3}$이므로

$1-(-2)^n=-255$, $(-2)^n=256$

$2^n=2^8$ $\therefore n=8$

(ii) $r=-1$인 경우

$S_n=\frac{\frac{1}{3}\{1-(-1)^n\}}{1-(-1)}=\frac{1}{6}\{1-(-1)^n\}$ ····· ㉠

$a_1=\frac{1}{3}$, $a_2=-\frac{1}{3}$, $a_3=\frac{1}{3}$이므로

$-\frac{85}{7}(a_1^2+a_2^2+a_3^2)=-\frac{85}{7}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)=-\frac{85}{21}$

그런데 ㉠에서 S_n이 가질 수 있는 값은 $\frac{1}{3}$ 또는 0이므로 이를 만족시키는 n의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 자연수 n의 값은 8이다.

0886 답 ②

전략 정삼각형 $A_nB_nC_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 할 때, a_1과 a_2 사이의 관계를 찾는다.

정삼각형 $A_nB_nC_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하면

$a_1=18(3-\sqrt{3})$

삼각형 $A_1A_2C_2$에서 $\overline{A_1A_2}=\frac{2}{3}a_1$, $\overline{A_1C_2}=\frac{1}{3}a_1$, $\overline{A_2C_2}=a_2$,

$\angle C_2A_1A_2=60°$이므로 코사인법칙에 의하여

$a_2^2=\left(\frac{2}{3}a_1\right)^2+\left(\frac{1}{3}a_1\right)^2-2\times\frac{2}{3}a_1\times\frac{1}{3}a_1\times\cos 60°$

$=\frac{4}{9}a_1^2+\frac{1}{9}a_1^2-\frac{2}{9}a_1^2=\frac{1}{3}a_1^2$

$\therefore a_2=\frac{\sqrt{3}}{3}a_1$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $18(3-\sqrt{3})$, 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$인 등비수열이므로

$a_n=18(3-\sqrt{3})\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore l_n=3a_n=54(3-\sqrt{3})\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{n-1}$

$$\therefore\ l_1+l_2+l_3+\cdots+l_6=\frac{54(3-\sqrt{3})\times\left\{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^6\right\}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$=162\times\frac{26}{27}=156$$

0887 답 ③

전략 1년 후의 중고차의 가격이 1년 후의 적립금의 원리합계와 같아야 함을 이용하여 식을 세운다.

현재 가격이 1000만 원인 중고차의 가격이 매달 1 %씩 하락하므로 1년 후의 가격은

$1000(1-0.01)^{12}=1000\times0.99^{12}$

$=1000\times0.89=890$(만 원)

월이율이 0.5 %이고 1개월마다 복리로 매달 초에 A원씩 12개월 동안 적립하므로 적립금의 원리합계는

$A(1+0.005)+A(1+0.005)^2+\cdots+A(1+0.005)^{12}$ → 첫째항이 $A(1+0.005)$, 공비가 $(1+0.005)$, 항수가 12인 등비수열의 합

$=\frac{A(1+0.005)\{(1+0.005)^{12}-1\}}{(1+0.005)-1}$

$=\frac{A\times1.005\times(1.06-1)}{0.005}$

$=12.06A$(원)

즉, $12.06A=8900000$이므로 $A=737976.78\cdots$

따라서 천의 자리에서 반올림하면 A의 최솟값은 74만 원이다.

0888 답 ④

전략 부채꼴 $O_nA_nB_n$의 반지름의 길이를 r_n이라 할 때, r_1과 r_2 사이의 관계를 찾는다.

부채꼴 $O_nA_nB_n$의 반지름의 길이를 r_n, 넓이를 S_n이라 하면

$r_1=\overline{O_1A_1}=1$

삼각형 $O_1A_2O_2$에서 $\angle O_2O_1A_2=\frac{\pi}{3}$, $\angle O_1A_2O_2=\frac{\pi}{4}$이므로

$\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{\overline{O_1O_2}}{\sin\frac{\pi}{4}}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{O_2A_2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times1$

$\therefore\ \overline{O_2A_2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore\ r_2=\frac{\sqrt{6}}{2}r_1$

수열 $\{r_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{\sqrt{6}}{2}$인 등비수열이므로

$r_n=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ S_n=\frac{1}{2}r_n^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}\times\left\{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^{n-1}\right\}^2\times\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\pi}{8}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

그림 R_5에 색칠되어 있는 부분의 넓이는

$S_1+S_2+S_3+S_4+S_5$

$=\frac{\frac{\pi}{8}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^5-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{243}{32}-1\right)=\frac{211}{128}\pi$

따라서 $k=\frac{211}{128}$이므로 $128k=211$

11 여러 가지 수열의 합

난이도별 필수 기출 214~235쪽

0889 답 ④

① $\sum_{k=1}^{31}a_{k+1}=a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{32}$

② $\sum_{k=1}^{16}a_{2k}=a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{32}$

③ $\sum_{k=1}^{32}a_{2k-1}=a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{63}$

④ $\sum_{k=1}^{16}(a_{2k-1}+a_{2k})=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{31}+a_{32})$

⑤ $\sum_{k=1}^{16}(a_k+a_{k+15})=(a_1+a_{16})+(a_2+a_{17})+\cdots+(a_{16}+a_{31})$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{31})+a_{16}$

따라서 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{32}$와 항상 같은 것은 ④이다.

0890 답 ①

$\sum_{k=1}^{10}(3a_k-2b_k)=3\sum_{k=1}^{10}a_k-2\sum_{k=1}^{10}b_k=3\times7-2\times8$

$=21-16=5$

0891 답 ②

$\sum_{k=1}^{8}(a_k+3)^2=\sum_{k=1}^{8}\{(a_k)^2+6a_k+9\}=\sum_{k=1}^{8}(a_k)^2+6\sum_{k=1}^{8}a_k+\sum_{k=1}^{8}9$

$=98+6\times4+9\times8=98+24+72$

$=194$

0892 답 ⑤

① $\sum_{k=1}^{n-1}(3k+2)=5+8+11+\cdots+(3n-1)$

② $\sum_{k=1}^{n}(3k+2)=5+8+11+\cdots+(3n+2)$

③ $\sum_{k=1}^{n+1}(3k+2)=5+8+11+\cdots+(3n+5)$

④ $\sum_{k=1}^{n}(3k-1)=2+5+8+\cdots+(3n-1)$

⑤ $\sum_{k=1}^{n+1}(3k-1)=2+5+8+\cdots+(3n+2)$

따라서 $2+5+8+\cdots+(3n+2)$를 바르게 나타낸 것은 ⑤이다.

0893 답 ⑤

ㄱ. $\sum_{k=1}^{5}(-2)^k=-2+4-8+16-32$

ㄴ. $\sum_{k=1}^{7}(5k-1)=4+9+14+\cdots+34$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{7}k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2$

$\sum_{k=4}^{10}(k-3)^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+7^2$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{7}k^2=\sum_{k=4}^{10}(k-3)^2$

ㄹ. $\sum_{k=1}^{20} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+a_{21-k}) = (a_1+a_{20})+(a_2+a_{19})+\cdots+(a_{10}+a_{11})$

$= a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}$

$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{10}(a_k+a_{21-k})$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

0894 답 ③

$\sum_{k=3}^{9} ca_k = \sum_{k=3}^{9} c+18$에서 $c\sum_{k=3}^{9} a_k = \sum_{k=3}^{9} c+18$

제3항부터 제9항까지 c가 7개

$10c = 7c+18$, $3c = 18$

$\therefore c = 6$

0895 답 ④

$\sum_{k=2}^{23} a_{k+1} - \sum_{m=3}^{24} a_{m-1}$

$= (a_3+a_4+a_5+\cdots+a_{24}) - (a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{23})$

$= a_{24} - a_2 = 19-6 = 13$

0896 답 ①

$\sum_{k=1}^{12} a_k = \sum_{k=1}^{6}(a_{2k-1}+a_{2k}) = 6^2-2\times 6$

$= 36-12 = 24$

0897 답 ①

$\sum_{k=11}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_k$

$= \sum_{k=1}^{10}(a_{2k}+a_{2k-1}) - \sum_{k=1}^{5}(a_{2k}+a_{2k-1})$

$= 3\times 10^2 - 3\times 5^2$

$= 300-75 = 225$

0898 답 ②

ㄴ. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k = -a_1+a_2-a_3+\cdots+(-1)^n a_n$

$(-1)^n \sum_{k=1}^{n} a_k = \begin{cases} -a_1-a_2-a_3-\cdots-a_n & (n\text{이 홀수}) \\ a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n & (n\text{이 짝수}) \end{cases}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k \neq (-1)^n \sum_{k=1}^{n} a_k$

ㄹ. $\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2 = (a_1)^2+(a_2)^2+(a_3)^2+\cdots+(a_n)^2$

$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)^2$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}(a_k)^2 \neq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2$

ㅁ. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}$

$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k} = \frac{1}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}$

$\therefore \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k} \neq \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0899 답 ①

$\sum_{k=3}^{13} a_{2k-1} - \sum_{m=4}^{14} a_{2m+1}$

$= (a_5+a_7+a_9+\cdots+a_{25}) - (a_9+a_{11}+a_{13}+\cdots+a_{29})$

$= a_5+a_7-a_{27}-a_{29}$ ····· ㉠

$a_{31-2n} - a_{2n+3} = 66$이므로

$a_{29}-a_5 = a_{27}-a_7 = 66$

($a_{29}-a_5$: $n=1$, $a_{27}-a_7$: $n=2$)

㉠에서

$a_5+a_7-a_{27}-a_{29}$

$= -(a_{29}-a_5) - (a_{27}-a_7)$

$= -66-66$

$= -132$

0900 답 ③

$\sum_{k=1}^{25}(a_{2k}+a_{2k-1}) = 60$에서

$\sum_{k=1}^{50} a_k = 60$

$\therefore \sum_{k=1}^{50}(3a_k-2) = 3\sum_{k=1}^{50} a_k - \sum_{k=1}^{50} 2 = 3\times 60 - 2\times 50$

$= 180-100 = 80$

0901 답 12

$\sum_{k=1}^{6}(6k-3)a_k - \sum_{k=1}^{5}(6k-3)a_k = 33a_6$이므로

$(4\times 6^3+3\times 6^2-6) - (4\times 5^3+3\times 5^2-5) = 33a_6$

$966-570 = 33a_6$

$\therefore a_6 = 12$

0902 답 ③

$\sum_{k=1}^{10}(3k)^2 + \sum_{k=2}^{11}(3k-4)^2 + \sum_{k=3}^{12}(3k-8)^2$

$= (3^2+6^2+9^2+\cdots+30^2) + (2^2+5^2+8^2+\cdots+29^2)$

$+ (1^2+4^2+7^2+\cdots+28^2)$

$= 1^2+2^2+3^2+\cdots+30^2$

$= \sum_{k=1}^{30} k^2$

참고 $\sum_{k=2}^{11}(3k-4)^2 = \sum_{k=1}^{10}(3k-1)^2$, $\sum_{k=3}^{12}(3k-8)^2 = \sum_{k=1}^{10}(3k-2)^2$이므로

(주어진 식) $= \sum_{k=1}^{10}\{(3k)^2+(3k-1)^2+(3k-2)^2\} = \sum_{k=1}^{30} k^2$

0903 답 ④

ㄱ. $\sum_{k=1}^{2n} a_k = a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n}$

$\sum_{k=1}^{n} a_{2k} = a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{2n}$

$\therefore \sum_{k=1}^{2n} a_k \neq \sum_{k=1}^{n} a_{2k}$

ㄴ. $S_{2n}-S_n = \sum_{k=1}^{2n} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k$

$= (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n}) - (a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)$

$= a_{n+1}+a_{n+2}+a_{n+3}+\cdots+a_{2n}$

$= \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$

ㄷ. $\sum_{k=1}^{n}(a_{3k-2}+a_{3k-1}+a_{3k})$

$=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+\cdots+(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})$

$=\sum_{k=1}^{3n}a_k=S_{3n}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0904 답 2

$\sum_{k=3}^{16}a_{k+1}=a_4+a_5+a_6+\cdots+a_{17}$이고

$\sum_{k=1}^{17}(a_k+a_{k+3})$

$=\sum_{k=1}^{17}a_k+\sum_{k=1}^{17}a_{k+3}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{17})+(a_4+a_5+a_6+\cdots+a_{20})$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20})+(a_4+a_5+a_6+\cdots+a_{17})$

$=\sum_{k=1}^{20}a_k+\sum_{k=3}^{16}a_{k+1}$

$\therefore \sum_{k=3}^{16}a_{k+1}=\sum_{k=1}^{17}(a_k+a_{k+3})-\sum_{k=1}^{20}a_k$

$=8-6=2$

0905 답 ③

$\sum_{k=1}^{30}a_k=\alpha$, $\sum_{k=1}^{30}b_k=\beta$라 하면

$\sum_{k=1}^{30}(2a_k+b_k)=18$에서 $2\sum_{k=1}^{30}a_k+\sum_{k=1}^{30}b_k=18$

$\therefore 2\alpha+\beta=18$ ····· ㉠

$\sum_{k=1}^{30}(-a_k+3b_k)=5$에서 $-\sum_{k=1}^{30}a_k+3\sum_{k=1}^{30}b_k=5$

$\therefore -\alpha+3\beta=5$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=7$, $\beta=4$

따라서 $\sum_{k=1}^{30}a_k=7$, $\sum_{k=1}^{30}b_k=4$이므로

$\sum_{k=1}^{30}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{30}a_k-\sum_{k=1}^{30}b_k=7-4=3$

0906 답 17

$\sum_{k=1}^{5}(a_k-1)^2=18$에서 $\sum_{k=1}^{5}\{(a_k)^2-2a_k+1\}=18$

$\sum_{k=1}^{5}(a_k)^2-2\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}1=18$, $\sum_{k=1}^{5}(a_k)^2-2\sum_{k=1}^{5}a_k+1\times5=18$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}(a_k)^2-2\sum_{k=1}^{5}a_k-13=0$ ····· ㉠

$\sum_{k=1}^{5}a_k(a_k-1)=15$에서 $\sum_{k=1}^{5}\{(a_k)^2-a_k\}=15$

$\sum_{k=1}^{5}(a_k)^2-\sum_{k=1}^{5}a_k=15$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}(a_k)^2-\sum_{k=1}^{5}a_k-15=0$ ····· ㉡ ····· ⓘ

㉡−㉠을 하면

$\sum_{k=1}^{5}a_k-2=0$ $\therefore \sum_{k=1}^{5}a_k=2$ ····· ⓘⓘ

$\sum_{k=1}^{5}a_k=2$를 ㉡에 대입하면

$\sum_{k=1}^{5}(a_k)^2-2-15=0$ $\therefore \sum_{k=1}^{5}(a_k)^2=17$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ Σ의 성질을 이용하여 식 정리하기	40 %
ⓘⓘ $\sum_{k=1}^{5}a_k$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ $\sum_{k=1}^{5}(a_k)^2$의 값 구하기	30 %

0907 답 17

$\sum_{k=1}^{9}a_k+\sum_{k=1}^{10}2a_k=76$에서 $\sum_{k=1}^{9}a_k+2\sum_{k=1}^{10}a_k=76$ ····· ㉠

$\sum_{k=1}^{9}3a_k-\sum_{k=1}^{10}a_k=11$에서 $3\sum_{k=1}^{9}a_k-\sum_{k=1}^{10}a_k=11$ ····· ㉡

㉠+㉡×2를 하면

$7\sum_{k=1}^{9}a_k=98$ $\therefore \sum_{k=1}^{9}a_k=14$

㉠에서 $\sum_{k=1}^{9}a_k+2\left(\sum_{k=1}^{9}a_k+a_{10}\right)=76$

$3\sum_{k=1}^{9}a_k+2a_{10}=76$

$\sum_{k=1}^{9}a_k=14$를 대입하면

$3\times14+2a_{10}=76$

$2a_{10}=34$ $\therefore a_{10}=17$

다른 풀이

$\sum_{k=1}^{9}a_k+\sum_{k=1}^{10}2a_k=76$에서

$\sum_{k=1}^{9}a_k+2\left(\sum_{k=1}^{9}a_k+a_{10}\right)=76$, $3\sum_{k=1}^{9}a_k+2a_{10}=76$

$\therefore \sum_{k=1}^{9}a_k=-\frac{2}{3}a_{10}+\frac{76}{3}$ ····· ㉠

$\sum_{k=1}^{9}3a_k-\sum_{k=1}^{10}a_k=11$에서

$3\sum_{k=1}^{9}a_k-\left(\sum_{k=1}^{9}a_k+a_{10}\right)=11$, $2\sum_{k=1}^{9}a_k-a_{10}=11$

$\therefore \sum_{k=1}^{9}a_k=\frac{1}{2}a_{10}+\frac{11}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$-\frac{2}{3}a_{10}+\frac{76}{3}=\frac{1}{2}a_{10}+\frac{11}{2}$, $\frac{7}{6}a_{10}=\frac{119}{6}$

$\therefore a_{10}=17$

0908 답 124

$\sum_{k=1}^{29}(3a_{k+1}-b_k)=210$에서

$3\sum_{k=1}^{29}a_{k+1}-\sum_{k=1}^{29}b_k=210$ ····· ㉠

$\sum_{k=1}^{29}(2a_{k+1}+b_k)=390$에서

$2\sum_{k=1}^{29}a_{k+1}+\sum_{k=1}^{29}b_k=390$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면

$5\sum_{k=1}^{29}a_{k+1}=600$

$\therefore \sum_{k=1}^{29}a_{k+1}=120$

$\therefore \sum_{k=1}^{30}a_k=a_1+\sum_{k=1}^{29}a_{k+1}=4+120=124$

0909 답 ④

$$S_n=\sum_{k=1}^{n+2}(k^2+1)-\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n+2}k^2+\sum_{k=1}^{n+2}1-\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n+2}k^2-\sum_{k=1}^{n}k^2\right)+\sum_{k=1}^{n+2}1$$

$$=\{(n+1)^2+(n+2)^2\}+(n+2)$$

$$=2n^2+7n+7$$

$$\therefore \sum_{k=6}^{10}a_k=S_{10}-S_5$$

$$=(2\times10^2+7\times10+7)-(2\times5^2+7\times5+7)$$

$$=277-92=185$$

0910 답 ⑤

$$\sum_{k=1}^{10}k(a_k-a_{k+1})$$

$$=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+3(a_3-a_4)$$

$$+\cdots+9(a_9-a_{10})+10(a_{10}-a_{11})$$

$$=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}-10a_{11}$$

$$=\sum_{k=1}^{10}a_k-10\times7=14$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}a_k=84$$

0911 답 ④

$$\sum_{k=1}^{4n}a_k=(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)$$

$$+\cdots+(a_{4n-3}+a_{4n-2}+a_{4n-1}+a_{4n})$$

$$=\{20+20+20+(-59)\}+\{20+20+20+(-59)\}$$

$$+\cdots+\{20+20+20+(-59)\}$$

$$=1+1+\cdots+1=n$$

자연수 m에 대하여 $a_{4m-3}=a_{4m-2}=a_{4m-1}=20$, $a_{4m}=-59$이므로

(i) $n=4m-3$일 때,

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{4m-3}a_k=\sum_{k=1}^{4(m-1)}a_k+a_{4m-3}$$

$$=(m-1)+20=m+19$$

즉, $m+19=4m-3$이므로

$3m=22$ $\therefore m=\frac{22}{3}$

이는 m이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=4m-2$일 때,

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{4m-2}a_k=\sum_{k=1}^{4(m-1)}+a_{4m-3}+a_{4m-2}$$

$$=(m-1)+20+20=m+39$$

즉, $m+39=4m-2$이므로

$3m=41$ $\therefore m=\frac{41}{3}$

이는 m이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $n=4m-1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{4m-1}a_k=\sum_{k=1}^{4(m-1)}+a_{4m-3}+a_{4m-2}+a_{4m-1}$$

$$=(m-1)+20+20+20=m+59$$

즉, $m+59=4m-1$이므로

$3m=60$ $\therefore m=20$

$\therefore n=4\times20-1=79$

(iv) $n=4m$일 때,

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{4m}a_k=m$$

즉, $m=4m$이므로 $m=0$

이는 m이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 구하는 자연수 n의 값은 79이다.

0912 답 ①

$$\sum_{k=1}^{10}k(k-1)=\sum_{k=1}^{10}(k^2-k)=\sum_{k=1}^{10}k^2-\sum_{k=1}^{10}k$$

$$=\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}$$

$$=385-55=330$$

0913 답 ③

$$\sum_{k=1}^{8}(3k^2-k+2)-\sum_{k=1}^{8}(k^2+2k-3)$$

$$=\sum_{k=1}^{8}\{(3k^2-k+2)-(k^2+2k-3)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{8}(2k^2-3k+5)$$

$$=2\sum_{k=1}^{8}k^2-3\sum_{k=1}^{8}k+\sum_{k=1}^{8}5$$

$$=2\times\frac{8\times9\times17}{6}-3\times\frac{8\times9}{2}+5\times8$$

$$=408-108+40=340$$

0914 답 ③

$$11^2+12^2+13^2+\cdots+20^2$$

$$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+20^2)-(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)$$

$$=\sum_{k=1}^{20}k^2-\sum_{k=1}^{10}k^2$$

$$=\frac{20\times21\times41}{6}-\frac{10\times11\times21}{6}$$

$$=2870-385=2485$$

다른 풀이

$$11^2+12^2+13^2+\cdots+20^2$$

$$=\sum_{k=1}^{10}(k+10)^2=\sum_{k=1}^{10}(k^2+20k+100)$$

$$=\sum_{k=1}^{10}k^2+20\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}100$$

$$=\frac{10\times11\times21}{6}+20\times\frac{10\times11}{2}+100\times10$$

$$=385+1100+1000=2485$$

0915 답 ③

$$\sum_{k=1}^{20}(2a_k-b_k+k)=2\sum_{k=1}^{20}a_k-\sum_{k=1}^{20}b_k+\sum_{k=1}^{20}k$$

$$=2\times30-10+\frac{20\times21}{2}$$

$$=60-10+210=260$$

0916 답 ⑤

$\sum_{k=1}^{10}(k^2+2k+a)=545$에서

$\sum_{k=1}^{10}k^2+2\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}a$

$=\frac{10\times11\times21}{6}+2\times\frac{10\times11}{2}+a\times10$

$=10a+495=545$

$10a=50 \quad \therefore a=5$

0917 답 ①

수열 1×2, 2×5, 3×8, …, 9×26의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=n(3n-1)=3n^2-n$

$\therefore 1\times2+2\times5+3\times8+\cdots+9\times26$

$=\sum_{k=1}^{9}(3k^2-k)=3\sum_{k=1}^{9}k^2-\sum_{k=1}^{9}k$

$=3\times\frac{9\times10\times19}{6}-\frac{9\times10}{2}$

$=855-45=810$

0918 답 ④

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=(2n-1)(21-n)=-2n^2+43n-21$

따라서 구하는 합은

$\sum_{k=1}^{20}(-2k^2+43k-21)$

$=-2\sum_{k=1}^{20}k^2+43\sum_{k=1}^{20}k-\sum_{k=1}^{20}21$

$=-2\times\frac{20\times21\times41}{6}+43\times\frac{20\times21}{2}-21\times20$

$=-5740+9030-420=2870$

0919 답 ④

$\sum_{n=1}^{5}\left(\sum_{k=1}^{n}kn\right)=\sum_{n=1}^{5}\left(n\sum_{k=1}^{n}k\right)=\sum_{n=1}^{5}\left\{n\times\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=\sum_{n=1}^{5}\frac{n^3+n^2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}n^3+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{5}n^2$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5\times6}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{5\times6\times11}{6}$

$=\frac{225}{2}+\frac{55}{2}=140$

0920 답 ②

$\sum_{n=1}^{6}\left\{\sum_{m=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{m}l\right)\right\}$

$=\sum_{n=1}^{6}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{m(m+1)}{2}\right)=\sum_{n=1}^{6}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{m^2+m}{2}\right)$

$=\sum_{n=1}^{6}\left(\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}m^2+\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}m\right)$

$=\sum_{n=1}^{6}\left\{\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

$=\sum_{n=1}^{6}\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6}+\frac{1}{2}\right)\right\}$

$=\sum_{n=1}^{6}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)\right\}=\sum_{n=1}^{6}\left\{\frac{1}{6}(n^3+3n^2+2n)\right\}$

$=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{6}n^3+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{6}n^2+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{6}n$

$=\frac{1}{6}\times\left(\frac{6\times7}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{6\times7\times13}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{6\times7}{2}$

$=\frac{147}{2}+\frac{91}{2}+7=126$

0921 답 9

$\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{m=1}^{k}(k-m)\right\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=1}^{k}k-\sum_{m=1}^{k}m\right)=\sum_{k=1}^{n}\left\{k\times k-\frac{k(k+1)}{2}\right\}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2-k}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k$

$=\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{1}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{1}{2}n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6}-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)$ …… ⓘ

$\frac{1}{6}(n-1)n(n+1)=120$이므로

$(n-1)n(n+1)=720$, $(n-1)n(n+1)=8\times9\times10$

$\therefore n=9$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{m=1}^{k}(k-m)\right\}$을 n에 대한 식으로 나타내기	80 %
ⓘⓘ n의 값 구하기	20 %

0922 답 ④

$f(x)=\sum_{k=1}^{10}(k+x)^2=\sum_{k=1}^{10}(k^2+2kx+x^2)$

$=\sum_{k=1}^{10}k^2+2x\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}x^2$

$=\frac{10\times11\times21}{6}+2x\times\frac{10\times11}{2}+10x^2$

$=10x^2+110x+385$

$=10\left(x+\frac{11}{2}\right)^2+\frac{165}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=-\frac{11}{2}$에서 최솟값 $\frac{165}{2}$를 가지므로

$a=-\frac{11}{2}$, $b=\frac{165}{2}$

$\therefore 2a+4b=2\times\left(-\frac{11}{2}\right)+4\times\frac{165}{2}$

$=-11+330=319$

0923 답 ⑤

$\sum_{k=3}^{16}(-1)^k(k+1)^2$

$=-4^2+5^2-6^2+\cdots-16^2+17^2$

$=(5^2+7^2+9^2+\cdots+17^2)-(4^2+6^2+8^2+\cdots+16^2)$

$=\sum_{n=1}^{7}(2n+3)^2-\sum_{n=1}^{7}(2n+2)^2$

$=\sum_{n=1}^{7}\{(2n+3)^2-(2n+2)^2\}$

$=\sum_{n=1}^{7}\{(4n^2+12n+9)-(4n^2+8n+4)\}$

$=\sum_{n=1}^{7}(4n+5)=4\sum_{n=1}^{7}n+\sum_{n=1}^{7}5$

$=4\times\frac{7\times8}{2}+5\times7$

$=112+35=147$

0924 답 ②

$\sum_{k=2}^{10}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3}{1+2+3+\cdots+k}$

$=\sum_{k=2}^{10}\frac{\left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2}{\frac{k(k+1)}{2}}=\sum_{k=2}^{10}\frac{k(k+1)}{2}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{k(k+1)}{2}-\frac{1\times2}{2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}k-1$

$=\frac{1}{2}\times\frac{10\times11\times21}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{10\times11}{2}-1$

$=\frac{385}{2}+\frac{55}{2}-1=219$

0925 답 ②

$\sum_{k=3}^{n+6}2(k+3)=\sum_{k=1}^{n+6}2(k+3)-\sum_{k=1}^{2}2(k+3)$

$=2\sum_{k=1}^{n+6}k+\sum_{k=1}^{n+6}6-(2\times4+2\times5)$

$=2\times\frac{(n+6)(n+7)}{2}+6(n+6)-18$

$=(n^2+13n+42)+(6n+36)-18$

$=n^2+19n+60$

따라서 $a=1$, $b=19$, $c=60$이므로

$a-2b+c=1-2\times19+60=23$

0926 답 ③

$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$

$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$

이므로

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{9}k^2(k+1)=\sum_{k=1}^{9}(k^3+k^2)$

$=\sum_{k=1}^{9}k^3+\sum_{k=1}^{9}k^2=\left(\frac{9\times10}{2}\right)^2+\frac{9\times10\times19}{6}$

$=2025+285=2310$

0927 답 ①

$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$이므로

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{8}\frac{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}}{k}$

$=\sum_{k=1}^{8}\frac{2k^2+3k+1}{6}$

$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{8}k^2+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}k+\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{6}$

$=\frac{1}{3}\times\frac{8\times9\times17}{6}+\frac{1}{2}\times\frac{8\times9}{2}+\frac{1}{6}\times8$

$=68+18+\frac{4}{3}=\frac{262}{3}$

0928 답 ②

$1\times n+3\times(n-1)+5\times(n-2)+\cdots+(2n-1)\times1$

$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\{n-(k-1)\}$

$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(n-k+1)$

$=\sum_{k=1}^{n}\{-2k^2+(2n+3)k-(n+1)\}$

$=-2\sum_{k=1}^{n}k^2+(2n+3)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}(n+1)$

$=-2\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(2n+3)\times\frac{n(n+1)}{2}$

$-(n+1)\times n$

$=\frac{n(n+1)}{6}\{-2(2n+1)+3(2n+3)-6\}$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

0929 답 ①

$3x^2-x+4$를 $x-n$으로 나누었을 때의 나머지 a_n은 나머지 정리에 의하여

$a_n=3n^2-n+4$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{9}(a_k-2k^2+3k)$

$=\sum_{k=1}^{9}\{(3k^2-k+4)-2k^2+3k\}$

$=\sum_{k=1}^{9}(k^2+2k+4)$

$=\sum_{k=1}^{9}k^2+2\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}4$

$=\frac{9\times10\times19}{6}+2\times\frac{9\times10}{2}+4\times9$

$=285+90+36$

$=411$

0930 답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=1$

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-3}{1}=-3$이므로

$\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\beta}\right)+\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)\left(1+\frac{2}{\beta}\right)+\left(1+\frac{3}{\alpha}\right)\left(1+\frac{3}{\beta}\right)$

$+\cdots+\left(1+\frac{10}{\alpha}\right)\left(1+\frac{10}{\beta}\right)$

$=\sum_{k=1}^{10}\left(1+\frac{k}{\alpha}\right)\left(1+\frac{k}{\beta}\right)$

$=\sum_{k=1}^{10}\left\{1+k\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{k^2}{\alpha\beta}\right\}$

$=\sum_{k=1}^{10}(1-3k+k^2)$

$=\sum_{k=1}^{10}1-3\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}k^2$

$=1\times10-3\times\frac{10\times11}{2}+\frac{10\times11\times21}{6}$

$=10-165+385$

$=230$

0931 답 ⑤

주어진 수열은 1, 2(1+2), 3(1+2+3), 4(1+2+3+4), …이므로

$$a_n=n\sum_{k=1}^{n}k=n\times\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^3+n^2}{2}$$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}\frac{k^3+k^2}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}k^3+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{8}k^2$$

$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{8\times9}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{8\times9\times17}{6}$$

$$=648+102=750$$

0932 답 44100

$$\sum_{k=1}^{20}k^2+\sum_{k=2}^{20}k^2+\sum_{k=3}^{20}k^2+\cdots+\sum_{k=20}^{20}k^2$$

$$=(1^2+2^2+3^2+\cdots+19^2+20^2)+(2^2+3^2+\cdots+19^2+20^2)$$

$$+(3^2+4^2+\cdots+20^2)+\cdots+20^2$$

$$=1^2\times1+2^2\times2+3^2\times3+\cdots+20^2\times20$$

$$=1^3+2^3+3^3+\cdots+20^3$$

$$=\sum_{k=1}^{20}k^3=\left(\frac{20\times21}{2}\right)^2$$

$$=44100$$

0933 답 ④

자연수 k에 대하여

$n=2k-1$일 때, $a_n=a_{2k-1}=\dfrac{\{(2k-1)+1\}^2}{2}=2k^2$

$n=2k$일 때, $a_n=a_{2k}=\dfrac{(2k)^2}{4}-2k-1=k^2-2k-1$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{k=1}^{5}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{5}\{2k^2+(k^2-2k-1)\}$$

$$=\sum_{k=1}^{5}(3k^2-2k-1)=3\sum_{k=1}^{5}k^2-2\sum_{k=1}^{5}k-\sum_{k=1}^{5}1$$

$$=3\times\frac{5\times6\times11}{6}-2\times\frac{5\times6}{2}-1\times5$$

$$=165-30-5=130$$

0934 답 ①

$3a_n+n=p$에서 → $3a_1+1=p$, $3a_2+2=p$, …, $+)3a_{15}+15=p$

$3(a_1+a_2+\cdots+a_{15})+(1+2+\cdots+15)=15p$

$$3\sum_{k=1}^{15}a_k+\sum_{k=1}^{15}k=\sum_{k=1}^{15}p$$

$$3p+\frac{15\times16}{2}=15p$$

$12p=120$ $\therefore p=10$

$3a_n+n=p$에 $p=10$을 대입하면 $\therefore 3\sum_{k=1}^{15}a_k+\sum_{k=1}^{15}k=\sum_{k=1}^{15}p$

$3a_n+n=10$ $\therefore a_n=\dfrac{1}{3}(10-n)$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{30}a_k=\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{3}(10-k)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{30}10-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{30}k$$

$$=\frac{1}{3}\times10\times30-\frac{1}{3}\times\frac{30\times31}{2}$$

$$=100-155=-55$$

0935 답 ③

$$1\times n^2+2\times(n-1)^2+3\times(n-2)^2+\cdots+n\times1^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\{n-(k-1)\}^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k\{k-(n+1)\}^2 \rightarrow a^2=(-a)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\{k^3-2(n+1)k^2+(n+1)^2k\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^3-2(n+1)\sum_{k=1}^{n}k^2+(n+1)^2\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2-2(n+1)\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$+(n+1)^2\times\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n(n+1)^2(2n+1)}{3}+\frac{n(n+1)^3}{2}$$

$$=n(n+1)^2\left(\frac{n}{4}-\frac{2n+1}{3}+\frac{n+1}{2}\right)$$

$$=\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$$

0936 답 ③

$a_{10}=5+9\times3=32$, $a_{20}=5+19\times3=62$이고 제10항부터 제20항까지의 항의 개수는 11이다.

$$\therefore\ \sum_{k=10}^{20}a_k=\frac{11(32+62)}{2}=517$$

다른 풀이

$a_n=5+(n-1)\times3=3n+2$이므로

$$\sum_{k=10}^{20}a_k=\sum_{k=1}^{20}a_k-\sum_{k=1}^{9}a_k$$

$$=\sum_{k=1}^{20}(3k+2)-\sum_{k=1}^{9}(3k+2)$$

$$=3\sum_{k=1}^{20}k+\sum_{k=1}^{20}2-\left(3\sum_{k=1}^{9}k+\sum_{k=1}^{9}2\right)$$

$$=3\times\frac{20\times21}{2}+2\times20-\left(3\times\frac{9\times10}{2}+2\times9\right)$$

$$=630+40-(135+18)=517$$

0937 답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(r>0)$라 하면

$\dfrac{a_7}{a_3}=r^4=16$ $\therefore r=2\ (\because r>0)$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{8}a_k=\frac{\frac{1}{5}(2^8-1)}{2-1}=\frac{1}{5}\times255=51$$

0938 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_{15}=-17$에서

$25+14d=-17$, $14d=-42$

$\therefore d=-3$

$a_n=25+(n-1)\times(-3)=-3n+28$이므로 → $-3n+28>0$, $n<\dfrac{28}{3}=9.33\cdots$

$$|a_n|=\begin{cases}a_n & (n\le9)\\ -a_n & (n\ge10)\end{cases}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{30}|a_k|=\sum_{k=1}^{9}a_k+\sum_{k=10}^{30}(-a_k)$$
$$=\frac{9(a_1+a_9)}{2}-\frac{21(a_{10}+a_{30})}{2}$$
$$=\frac{9(25+1)}{2}-\frac{21\{(-2)+(-62)\}}{2}$$
$$=117-(-672)=789$$

0939 답 210

첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\frac{n\{2\times3+(n-1)\times4\}}{2}=n(2n+1)$ …… ⓘ

$b_n=\frac{S_n}{2n+1}$에서 $b_n=\frac{n(2n+1)}{2n+1}=n$ …… ⓘⓘ

$\therefore \sum_{k=1}^{20}b_k=\sum_{k=1}^{20}k=\frac{20\times21}{2}=210$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ S_n 구하기	40%
ⓘⓘ b_n 구하기	20%
ⓘⓘⓘ $\sum_{k=1}^{20}b_k$의 값 구하기	40%

0940 답 ①

$a_n=-3+(n-1)\times2=2n-5$이므로 $b_n=2^{a_n}=2^{2n-5}$

$\therefore \sum_{k=2}^{6}b_k=\sum_{k=2}^{6}2^{2k-5}=\frac{1}{2}+2+2^3+2^5+2^7$

$=\frac{\frac{1}{2}(4^5-1)}{4-1}=\frac{341}{2}$

(첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 4, 항수가 5인 등비수열의 합)

따라서 $p=2$, $q=341$이므로 $q-p=339$

0941 답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 $a_5=a_2r^3$에서

$6=3r^3$, $r^3=2$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_{6k-1}+a_{6k+2})$

$=a_5+a_8+a_{11}+a_{14}+\cdots+a_{59}+a_{62}$ → 첫째항이 a_5, 공비가 r^3, 항수가 20인 등비수열의 합

$=\frac{a_5\{(r^3)^{20}-1\}}{r^3-1}=\frac{6(2^{20}-1)}{2-1}$

$=6(2^{20}-1)$

0942 답 7

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 a, 공비가 2이므로

$\sum_{k=1}^{n}a_k=45$에서 $\frac{a(2^n-1)}{2-1}=45$

$\therefore a(2^n-1)=45$ …… ㉠

수열 $\{(a_n)^2\}$은 첫째항이 a^2, 공비가 $2^2=4$인 등비수열이므로

$\sum_{k=1}^{n}(a_k)^2=765$에서 $\frac{a^2(4^n-1)}{4-1}=765$

$a^2\{(2^n)^2-1\}=2295$

$\therefore a^2(2^n+1)(2^n-1)=2295$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $45a(2^n+1)=2295$

$\therefore a(2^n+1)=51$ …… ㉢

㉢−㉠을 하면

$2a=6$ $\therefore a=3$

$a=3$을 ㉠에 대입하면

$3(2^n-1)=45$, $2^n-1=15$

$2^n=16$ $\therefore n=4$

$\therefore a+n=7$

0943 답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=a_1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(ⅰ) $n=2k-1$(k는 자연수)일 때,

$a_1<0$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}>0$에서 $a_n<0$이므로

$|a_{2k-1}|+a_{2k-1}=-a_{2k-1}+a_{2k-1}=0$

(ⅱ) $n=2k$(k는 자연수)일 때,

$a_1<0$, $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}<0$에서 $a_n>0$이므로

$|a_{2k}|+a_{2k}=a_{2k}+a_{2k}=2a_{2k}$

수열 $\{a_{2n}\}$은 a_2, a_4, a_6, …이므로 첫째항이 $a_2=-\frac{1}{2}a_1$, 공비가 $\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

$\therefore \sum_{k=1}^{8}(|a_k|+a_k)=\sum_{k=1}^{4}(|a_{2k-1}|+a_{2k-1})+\sum_{k=1}^{4}(|a_{2k}|+a_{2k})$

$=\sum_{k=1}^{4}2a_{2k}=2\times\frac{-\frac{1}{2}a_1\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^4\right\}}{1-\frac{1}{4}}$

$=-\frac{85}{64}a_1$

따라서 $-\frac{85}{64}a_1=\frac{765}{64}$이므로 $a_1=-9$

0944 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a(a>0)$, 공비를 $r(r>0)$라 하자.

$r=1$이라 가정하면 $a_n=a$

(가)에서 $\sum_{k=1}^{4}a=45$

$4a=45$ $\therefore a=\frac{45}{4}$ …… ㉠

(나)에서 $\sum_{k=1}^{6}a=189$

$6a=189$ $\therefore a=\frac{63}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 a의 값이 다르므로 $r\neq1$

(가)에서 $\frac{a(r^4-1)}{r-1}=45$ …… ㉢

(나)에서

$\sum_{k=1}^{6}\frac{a_2\times a_5}{a_k}=(a_2\times a_5)\sum_{k=1}^{6}\frac{1}{a_k}$ → 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{a}$, 공비가 $\frac{1}{r}$인 등비수열이다.

$=ar\times ar^4\times\frac{\frac{1}{a}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^6\right\}}{1-\frac{1}{r}}$

$=a^2r^5\times\frac{r^6-1}{ar^5(r-1)}=\frac{a(r^6-1)}{r-1}$

$\therefore \dfrac{a(r^6-1)}{r-1}=189$ ····· ㉣

㉣÷㉢을 하면

$\dfrac{r^6-1}{r^4-1}=\dfrac{21}{5}$, $\dfrac{(r^2-1)(r^4+r^2+1)}{(r^2-1)(r^2+1)}=\dfrac{21}{5}$

$\dfrac{r^4+r^2+1}{r^2+1}=\dfrac{21}{5}$, $5r^4+5r^2+5=21r^2+21$

$5r^4-16r^2-16=0$, $(5r^2+4)(r^2-4)=0$

$\therefore r=2$ ($\because r>0$)

$r=2$를 ㉡에 대입하면

$\dfrac{a(2^4-1)}{2-1}=45$, $15a=45$ $\therefore a=3$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 3, 공비가 2이므로

$a_3=3\times2^2=12$

0945 답 ②

$2a_3=a_2+a_4$, $2a_3=0$ $\therefore a_3=0$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=-2d$, $a_2=-d$, $a_3=0$, $a_4=d$, $a_5=2d$, $a_6=3d$

$|a_k|+a_k=\begin{cases}0 & (a_k\le0)\\ 2a_k & (a_k>0)\end{cases}$

(i) $d<0$일 때,

$a_1>0$, $a_2>0$, $a_4<0$, $a_5<0$, $a_6<0$이므로

$\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=42$에서 $2(a_1+a_2)=42$

$2\{(-2d)+(-d)\}=42$ $\therefore d=-7$

(ii) $d=0$일 때,

$a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=0$, $a_4=0$, $a_5=0$, $a_6=0$이고, 이는

$\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=42$를 만족시키지 않는다.

(iii) $d>0$일 때,

$a_1<0$, $a_2<0$, $a_4>0$, $a_5>0$, $a_6>0$이므로

$\sum_{k=1}^{6}(|a_k|+a_k)=42$에서 $2(a_4+a_5+a_6)=42$

$2(d+2d+3d)=42$ $\therefore d=\dfrac{7}{2}$

이는 공차가 정수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $d=-7$

$\therefore \sum_{k=1}^{6}a_k=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$

$=(-2d)+(-d)+0+d+2d+3d$

$=3d=3\times(-7)=-21$

0946 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a($a>0$), 공비를 r($r>0$)라 하면

$a_2=1$에서 $ar=1$ ····· ㉠

$\sum_{k=1}^{6}(-1)^kS_k=21$에서 $-S_1+S_2-S_3+S_4-S_5+S_6=21$

$(S_2-S_1)+(S_4-S_3)+(S_6-S_5)=21$

$\therefore a_2+a_4+a_6=21$

이때 $a_4=a_2r^2=r^2$, $a_6=a_2r^4=r^4$이므로

$1+r^2+r^4=21$, $r^4+r^2-20=0$

$(r^2+5)(r^2-4)=0$

$(r^2+5)(r+2)(r-2)=0$

$\therefore r=2$ ($\because r>0$)

$r=2$를 ㉠에 대입하면

$2a=1$ $\therefore a=\dfrac{1}{2}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $\dfrac{1}{2}$, 공비가 2이므로

$S_n=\dfrac{\frac{1}{2}(2^n-1)}{2-1}=\dfrac{1}{2}(2^n-1)$

$\therefore S_3+S_8=\dfrac{7}{2}+\dfrac{255}{2}=131$

0947 답 29

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r($r\ne1$, r는 정수)라 하면

$a_n=3r^{n-1}$

등차수열 $\{b_n\}$의 공차를 d(d는 음의 정수)라 하면

$b_n=b_1+(n-1)d$

㈎에서 $a_2=3r$, $a_3=3r^2$이므로

$3<3r+3r^2<9$, $1<r+r^2<3$

이를 만족시키는 1이 아닌 정수 r는 $r=-2$이다.

㈏에서

$\sum_{k=1}^{5}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k=\dfrac{3\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)}+\sum_{k=1}^{5}b_k$

$=33+\sum_{k=1}^{5}b_k=28$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}b_k=-5$ ····· ㉠

㈐에서

$\sum_{k=1}^{5}(a_k+|b_k|)=\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}|b_k|$

$=33+\sum_{k=1}^{5}|b_k|=58$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}|b_k|=25$ ····· ㉡

㉠에서 $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=-5$이므로

$(b_3-2d)+(b_3-d)+b_3+(b_3+d)+(b_3+2d)=-5$

$5b_3=-5$ $\therefore b_3=-1$

$d=-1$이면 $b_1=1$, $b_2=0$, $b_3=-1$, $b_4=-2$, $b_5=-3$이고

$\sum_{k=1}^{5}b_k=-5$, $\sum_{k=1}^{5}|b_k|=7$이므로 ㉡을 만족시키지 않는다.

즉, $d<-1$이므로

$b_1>0$, $b_2>0$, $b_3<0$, $b_4<0$, $b_5<0$

㉡에서 $|b_1|+|b_2|+|b_3|+|b_4|+|b_5|=25$이므로

$b_1+b_2-b_3-b_4-b_5=25$

$(b_3-2d)+(b_3-d)-b_3-(b_3+d)-(b_3+2d)=25$

$-b_3-6d=25$, $-(-1)-6d=25$

$6d=-24$ $\therefore d=-4$

$b_3=-1$에서

$b_1+2\times(-4)=-1$ $\therefore b_1=7$

따라서 등차수열 $\{b_n\}$의 첫째항이 7, 공차가 -4이므로

$|b_{10}|=|7+9\times(-4)|=29$

0948 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 3, 즉 양수이고 (가)에서

$a_5 \times a_7 < 0$이므로

$a_5 < 0$, $a_7 > 0$

따라서 $n \le 5$일 때 $a_n < 0$, $n \ge 7$일 때 $a_n > 0$이다.

(나)에서

$|a_7| + |a_8| + |a_9| + |a_{10}| + |a_{11}| + |a_{12}|$

$= 6 + |a_2| + |a_4| + |a_6| + |a_8| + |a_{10}| + |a_{12}|$

$a_7 + a_9 + a_{11} = 6 - a_2 - a_4 + |a_6|$

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하면 공차가 3이므로

$(a+18) + (a+24) + (a+30)$

$= 6 - (a+3) - (a+9) + |a+15|$

$\therefore |a+15| = 5a + 78$ ····· ㉠

(i) $a + 15 \ge 0$, 즉 $a \ge -15$일 때,

㉠에서 $a + 15 = 5a + 78$

$-4a = 63$ $\therefore a = -\frac{63}{4}$

이는 $a \ge -15$라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a + 15 < 0$, 즉 $a < -15$일 때,

㉠에서 $-(a+15) = 5a + 78$

$-6a = 93$ $\therefore a = -\frac{31}{2}$

(i), (ii)에서 $a = -\frac{31}{2}$

따라서 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 $-\frac{31}{2}$, 공차가 3이므로

$a_{10} = -\frac{31}{2} + 9 \times 3 = \frac{23}{2}$

0949 답 ④

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = 2^{n+1} - 1$

(i) $n = 1$일 때,

$a_1 = S_1 = 2^2 - 1 = 3$ ····· ㉠

(ii) $n \ge 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (2^{n+1} - 1) - (2^n - 1)$

$= 2^n(2-1) = 2^n$ ····· ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n = 1$을 대입한 값과 같지 않으므로

$a_1 = 3$, $a_n = 2^n (n \ge 2)$

0950 답 ①

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + 5n$

(i) $n = 1$일 때,

$a_1 = S_1 = 1^2 + 5 \times 1 = 6$ ····· ㉠

(ii) $n \ge 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 + 5n) - \{(n-1)^2 + 5(n-1)\}$

$= 2n + 4$ ····· ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n = 1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n = 2n + 4$

$\therefore \sum_{k=1}^{6} k a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{6} k\{2(2k-1) + 4\}$

$= \sum_{k=1}^{6} (4k^2 + 2k) = 4\sum_{k=1}^{6} k^2 + 2\sum_{k=1}^{6} k$

$= 4 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} + 2 \times \frac{6 \times 7}{2}$

$= 364 + 42 = 406$

0951 답 ②

수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 2^n + 2$

(i) $n = 1$일 때,

$\frac{1}{a_1} = S_1 = 2^1 + 2 = 4$ ····· ㉠

(ii) $n \ge 2$일 때,

$\frac{1}{a_n} = S_n - S_{n-1}$

$= (2^n + 2) - (2^{n-1} + 2)$

$= 2^{n-1}(2-1) = 2^{n-1}$ ····· ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n = 1$을 대입한 값과 같지 않으므로

$\frac{1}{a_1} = 4$, $\frac{1}{a_n} = 2^{n-1} (n \ge 2)$

즉, $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n \ge 2)$이므로

$\sum_{k=1}^{7} a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{7} a_k = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^6}\right)$

$= \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}}{1 - \frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{4} + \frac{63}{64} = \frac{79}{64}$

따라서 $p = 64$, $q = 79$이므로

$p + q = 143$

0952 답 ③

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 - n$

(i) $n = 1$일 때,

$a_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0$ ····· ㉠

(ii) $n \ge 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (n^2 - n) - \{(n-1)^2 - (n-1)\}$

$= 2n - 2$ ····· ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n = 1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n = 2n - 2$

$\therefore \sum_{k=1}^{5} 2^{a_k} = \sum_{k=1}^{5} 2^{2n-2} = \sum_{k=1}^{5} 4^{n-1}$ → 수열 $\{4^{n-1}\}$은 첫째항이 1, 공비가 4인 등비수열이다.

$= \frac{1 \times (4^5 - 1)}{4 - 1} = 341$

0953 답 ①

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_{k+1}}=\frac{1}{2}n^2$이라 하면

(i) $n=1$일 때,

$\frac{a_1}{b_2}=S_1=\frac{1}{2}$ ····· ㉠

$\frac{2}{b_2}=\frac{1}{2}$이므로 $b_2=4$

등차수열 $\{b_n\}$의 공차는 $b_2-b_1=4-2=2$이므로

$b_{n+1}=2+\{(n+1)-1\}\times 2=2n+2$

(ii) $n\geq 2$일 때,

$\frac{a_n}{b_{n+1}}=S_n-S_{n-1}$

$=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}(n-1)^2$

$=n-\frac{1}{2}$ ····· ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$\frac{a_n}{b_{n+1}}=n-\frac{1}{2}$

즉, $\frac{a_n}{2n+2}=n-\frac{1}{2}$이므로

$a_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)(2n+2)=2n^2+n-1$

$\therefore \sum_{k=1}^{8}a_k=\sum_{k=1}^{8}(2k^2+k-1)=2\sum_{k=1}^{8}k^2+\sum_{k=1}^{8}k-\sum_{k=1}^{8}1$

$=2\times\frac{8\times 9\times 17}{6}+\frac{8\times 9}{2}-1\times 8$

$=408+36-8=436$

0954 답 ③

모든 항이 자연수이므로 공차는 자연수이다.

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k\times b_k}=\frac{n}{8n+4}$이라 하면

(i) $n=1$일 때,

$\frac{1}{a_1\times b_1}=S_1=\frac{1}{12}$ ····· ㉠

(ii) $n\geq 2$일 때,

$\frac{1}{a_n\times b_n}=S_n-S_{n-1}$

$=\frac{n}{8n+4}-\frac{n-1}{8(n-1)+4}=\frac{n}{8n+4}-\frac{n-1}{8n-4}$

$=\frac{n(2n-1)-(n-1)(2n+1)}{4(2n+1)(2n-1)}$

$=\frac{1}{4(2n+1)(2n-1)}$ ····· ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$\frac{1}{a_n\times b_n}=\frac{1}{4(2n+1)(2n-1)}$

$\therefore a_n\times b_n=4(2n+1)(2n-1)$ ····· ㉢

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 같으므로 공차를 d(d는 자연수)라 하면

$a_n=a_1+(n-1)d=dn+a_1-d$

$b_n=b_1+(n-1)d=dn+b_1-d$

$\therefore a_n\times b_n=(dn+a_1-d)(dn+b_1-d)$ ····· ㉣

㉢, ㉣의 우변의 이차항의 계수를 비교하면

$d^2=16$ $\therefore d=4$ ($\because d>0$)

a_n, b_n은 일차항의 계수가 4이므로 ㉢에서

$a_n=4n+2$, $b_n=4n-2$ 또는 $a_n=4n-2$, $b_n=4n+2$

따라서 $a_n+b_n=8n$이므로

$\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{10}8k=8\sum_{k=1}^{10}k=8\times\frac{10\times 11}{2}=440$

0955 답 130

2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-\sum_{k=1}^{n}a_k$

$=\frac{2}{3}a_{n+1}+\frac{1}{6}(n+1)^2-\frac{1}{6}(n+1)+10$

$-\left(\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10\right)$

$=\frac{2}{3}(a_{n+1}-a_n)+\boxed{(가)\ \frac{1}{3}n}$

이고, 이 식을 정리하면

$2a_n+a_{n+1}=3\times\boxed{(가)\ \frac{1}{3}n}$ ····· ㉠

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}n^2-\frac{1}{6}n+10\ (n\geq 2)$의 양변에 $n=2$를 대입하면

$\sum_{k=1}^{2}a_k=\frac{2}{3}a_2+\frac{1}{6}\times 2^2-\frac{1}{6}\times 2+10$

$a_1+a_2=\frac{2}{3}a_2+\frac{31}{3}$

이때 $a_1=7$이므로 $7+a_2=\frac{2}{3}a_2+\frac{31}{3}$

$\frac{1}{3}a_2=\frac{10}{3}$ $\therefore a_2=\boxed{(나)\ 10}$ ····· ㉡

㉠과 ㉡에 의하여

$\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=1}^{5}a_{2k+1}$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12})+(a_3+a_5+a_7+a_9+a_{11})$

$=a_1+a_2+(2a_3+2a_5+2a_7+2a_9+2a_{11})$

$+(a_4+a_6+a_8+a_{10}+a_{12})$

$=a_1+a_2+\sum_{k=1}^{5}(2a_{2k+1}+a_{2k+2})$ ⟶ ㉠에서 $2a_n+a_{n+1}=n$이므로 $2a_{2k+1}+a_{2k+2}=2k+1$

$=a_1+a_2+\sum_{k=1}^{5}(2k+1)=a_1+a_2+2\sum_{k=1}^{5}k+\sum_{k=1}^{5}1$

$=7+10+2\times\frac{5\times 6}{2}+1\times 5=\boxed{(다)\ 52}$

따라서 $f(n)=\frac{1}{3}n$, $p=10$, $q=52$이므로

$\frac{p\times q}{f(12)}=\frac{10\times 52}{4}=130$

0956 답 ①

$\sum_{k=2}^{99}\frac{1}{k(k+1)}$

$=\sum_{k=2}^{99}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{100}=\frac{49}{100}$

0957 답 ②

$$\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{24}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$

$$=\sum_{k=1}^{24}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{25}-\sqrt{24})$$

$$=-1+\sqrt{25}=-1+5=4$$

0958 답 ①

$$\sum_{k=1}^{63}\log_2\frac{k+1}{k}$$

$$=\log_2\frac{2}{1}+\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\cdots+\log_2\frac{64}{63}$$

$$=\log_2\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{64}{63}\right)$$

$$=\log_2 64=\log_2 2^6=6$$

0959 답 ③

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\cdots+\frac{1}{90}$$

$$=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{9\times10}$$

$$=\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k(k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$

$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$$

따라서 $p=10$, $q=9$이므로

$p+q=19$

0960 답 ④

수열 $\frac{4}{1+\sqrt{3}}$, $\frac{4}{\sqrt{2}+2}$, $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$, $\frac{4}{2+\sqrt{6}}$, …의 제k항을 a_k라 하면

$$a_k=\frac{4}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$$

첫째항부터 제48항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{48}\frac{4}{\sqrt{k}+\sqrt{k+2}}$$

$$=\sum_{k=1}^{48}\frac{4(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})}$$

$$=\sum_{k=1}^{48}2(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})$$

$$=2\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})$$

$$+\cdots+(\sqrt{49}-\sqrt{47})+(\sqrt{50}-\sqrt{48})\}$$

$$=2(-1-\sqrt{2}+\sqrt{49}+\sqrt{50})$$

$$=2(6+4\sqrt{2})=12+8\sqrt{2}$$

따라서 $a=12$, $b=8$이므로

$a-b=4$

0961 답 ⑤

$$\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k+2}-\sum_{k=1}^{8}\frac{k-2}{k^2+2k}$$

$$=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{k-2}{k^2+2k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{8}\left\{\frac{k}{k(k+2)}-\frac{k-2}{k(k+2)}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{8}\frac{2}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{10}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{9}-\frac{1}{10}=\frac{58}{45}$$

따라서 $p=45$, $q=58$이므로

$p+q=103$

0962 답 38

$$\sum_{k=1}^{80}\log_3\sqrt{3-\frac{3}{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{80}\log_3\sqrt{\frac{3(k+1)-3}{k+1}}=\sum_{k=1}^{80}\log_3\sqrt{\frac{3k}{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{80}\log_3\left(\frac{3k}{k+1}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{80}\log_3\left(\frac{3k}{k+1}\right)$$ …… ⓘ

$$=\frac{1}{2}\left(\log_3\frac{3\times1}{2}+\log_3\frac{3\times2}{3}+\log_3\frac{3\times3}{4}+\cdots+\log_3\frac{3\times80}{81}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\log_3\left\{\left(\frac{3\times1}{2}\right)\times\left(\frac{3\times2}{3}\right)\times\left(\frac{3\times3}{4}\right)\times\cdots\times\left(\frac{3\times80}{81}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\log_3\left\{\left(3\times\frac{1}{2}\right)\times\left(3\times\frac{2}{3}\right)\times\left(3\times\frac{3}{4}\right)\times\cdots\times\left(3\times\frac{80}{81}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\log_3\frac{3^{80}}{81}=\frac{1}{2}\log_3\frac{3^{80}}{3^4}$$ …… ⓘⓘ

$$=\frac{1}{2}\log_3 3^{76}$$

$$=\frac{1}{2}\times76=38$$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 로그의 진수 부분 간단히 하기	40 %
ⓘⓘ 약분의 규칙 찾아 간단히 나타내기	30 %
ⓘⓘⓘ 식의 값 구하기	30 %

0963 답 ①

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\frac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\frac{1}{8\times9\times10}$$

$$=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\left(\frac{1}{3\times4}-\frac{1}{4\times5}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{8\times9}-\frac{1}{9\times10}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{9\times10}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{90}\right)=\frac{11}{45}$$

0964 답 ③

$$\sum_{k=1}^{16}\frac{1}{\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}}}$$

$$=\sum_{k=1}^{16}\frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}}{(\sqrt{a_k}+\sqrt{a_{k+1}})(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}})}$$

$$=\sum_{k=1}^{16}\frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}}{a_k-a_{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{16}\frac{\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}}}{-d}\ (\because\ a_{k+1}-a_k=d)$$

$$=-\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{16}(\sqrt{a_k}-\sqrt{a_{k+1}})$$

$$=-\frac{1}{d}(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})+(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3})+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4})$$
$$+\cdots+(\sqrt{a_{16}}-\sqrt{a_{17}})$$

$$=-\frac{1}{d}(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_{17}})$$

$$=-\frac{1}{d}(\sqrt{16}-\sqrt{16+16d})$$

$$=-\frac{1}{d}(4-4\sqrt{1+d})$$

즉, $-\frac{1}{d}(4-4\sqrt{1+d})=1$에서

$4-4\sqrt{1+d}=-d$, $4+d=4\sqrt{1+d}$

양변을 제곱하면

$16+8d+d^2=16(1+d)$

$d^2-8d=0$, $d(d-8)=0$

$\therefore\ d=8\ (\because\ d>0)$

0965 답 ②

수열 1, $\frac{1}{1+2}$, $\frac{1}{1+2+3}$, $\frac{1}{1+2+3+4}$, …의 제k항을 a_k라 하면

$$a_k=\frac{1}{\sum_{i=1}^{k}i}=\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\frac{2}{k(k+1)}=2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

따라서 이 수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$$

0966 답 ①

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{-2}$$

$$=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})$$

$$=-\frac{1}{2}\{(1-\sqrt{3})+(\sqrt{3}-\sqrt{5})+(\sqrt{5}-\sqrt{7})$$
$$+\cdots+(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1})\}$$

$$=-\frac{1}{2}(1-\sqrt{2n+1})$$

즉, $-\frac{1}{2}(1-\sqrt{2n+1})=5$이므로

$1-\sqrt{2n+1}=-10$, $\sqrt{2n+1}=11$

양변을 제곱하면

$2n+1=121$ $\therefore\ n=60$

0967 답 17

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=n^2$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1$ …… ㉠

(ii) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=n^2-(n-1)^2$

$=2n-1$ …… ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=2n-1$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{n}{2n+1}$$

즉, $\frac{n}{2n+1}=\frac{17}{35}$이므로

$35n=17(2n+1)$ $\therefore\ n=17$

0968 답 67

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=-\frac{1}{n}$, $\alpha_n\beta_n=\frac{-n(n+2)}{n}=-(n+2)$

$$\therefore\ \sum_{k=1}^{5}\left(\frac{1}{\alpha_k}+\frac{1}{\beta_k}\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{\alpha_k+\beta_k}{\alpha_k\beta_k}=\sum_{k=1}^{5}\frac{-\frac{1}{k}}{-(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{k(k+2)}$$

$$=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)=\frac{25}{42}$$

따라서 $p=42$, $q=25$이므로

$p+q=67$

0969 답 22

$$\sum_{k=1}^{143}\frac{24}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$$
$$=\sum_{k=1}^{143}\frac{24}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}$$
$$=\sum_{k=1}^{143}\frac{24(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$
$$=\sum_{k=1}^{143}\frac{24(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}}$$
$$=24\sum_{k=1}^{143}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$
$$=24\left\{\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{143}}-\frac{1}{\sqrt{144}}\right)\right\}$$
$$=24\left(1-\frac{1}{\sqrt{144}}\right)=24\left(1-\frac{1}{12}\right)=22$$

0970 답 ⑤

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{ka_k}=n^2+3n$이라 하면

(i) $n=1$일 때,

$\frac{2}{a_1}=S_1=4$ ····· ㉠

(ii) $n\geq 2$일 때,

$\frac{2}{na_n}=S_n-S_{n-1}$
$=(n^2+3n)-\{(n-1)^2+3(n-1)\}$
$=2(n+1)$ ····· ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$\frac{2}{na_n}=2(n+1)$

$\therefore a_n=\frac{1}{n(n+1)}$

$\sum_{k=1}^{50}a_k=\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$
$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{50}-\frac{1}{51}\right)$
$=1-\frac{1}{51}=\frac{50}{51}$

따라서 $p=51$, $q=50$이므로

$2p-q=102-50=52$

0971 답 ④

$S_n=a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2=2n^2-n$이라 하면

(i) $n=1$일 때,

$a_1^2=S_1=1$ ····· ㉠

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n^2=S_n-S_{n-1}$
$=(2n^2-n)-\{2(n-1)^2-(n-1)\}$
$=4n-3$ ····· ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n^2=4n-3$

수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로

$a_n=\sqrt{4n-3}$

$\therefore \sum_{k=1}^{30}\frac{1}{a_k+a_{k+1}}$
$=\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{\sqrt{4k-3}+\sqrt{4k+1}}$
$=\sum_{k=1}^{30}\frac{\sqrt{4k-3}-\sqrt{4k+1}}{(\sqrt{4k-3}+\sqrt{4k+1})(\sqrt{4k-3}-\sqrt{4k+1})}$
$=\sum_{k=1}^{30}\frac{\sqrt{4k-3}-\sqrt{4k+1}}{-4}$
$=-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{30}(\sqrt{4k-3}-\sqrt{4k+1})$
$=-\frac{1}{4}\{(1-\sqrt{5})+(\sqrt{5}-\sqrt{9})+(\sqrt{9}-\sqrt{13})+\cdots+(\sqrt{117}-\sqrt{121})\}$
$=-\frac{1}{4}(1-\sqrt{121})=-\frac{1}{4}(1-11)=\frac{5}{2}$

0972 답 5

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\log_2(n^2+n)$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=\log_2 2=1$ ····· ㉠

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$
$=\log_2(n^2+n)-\log_2\{(n-1)^2+(n-1)\}$
$=\log_2(n^2+n)-\log_2(n^2-n)$
$=\log_2\frac{n^2+n}{n^2-n}=\log_2\frac{n+1}{n-1}$ ····· ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같지 않으므로

$a_1=1$, $a_n=\log_2\frac{n+1}{n-1}(n\geq 2)$

$\therefore \sum_{k=1}^{31}a_{2k+1}=\sum_{k=1}^{31}\log_2\frac{2k+2}{2k}$
$=\sum_{k=1}^{31}\log_2\frac{k+1}{k}$
$=\log_2\frac{2}{1}+\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\cdots+\log_2\frac{32}{31}$
$=\log_2\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{32}{31}\right)$
$=\log_2 32=\log_2 2^5=5$

0973 답 50

$\sum_{k=2}^{n}\log\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$
$=\sum_{k=2}^{n}\log\frac{k^2-1}{k^2}=\sum_{k=2}^{n}\log\left(\frac{k-1}{k}\times\frac{k+1}{k}\right)$
$=\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)+\cdots+\log\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)$
$=\log\left\{\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)\times\cdots\times\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)\right\}$
$=\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}\right)=\log\frac{n+1}{2n}$

즉, $\log\frac{n+1}{2n}=\log 51-2=\log\frac{51}{100}$이므로

$\frac{n+1}{2n}=\frac{51}{100}$, $102n=100(n+1)$

$2n=100$ $\therefore n=50$

0974 답 401

$f(x)=x^2+x-\frac{1}{2}$이므로 $f(n)<k<f(n)+1$에서

$n^2+n-\frac{1}{2}<k<n^2+n+\frac{1}{2}$

이 부등식을 만족시키는 정수 k는 n^2+n이므로

$a_n=n^2+n=n(n+1)$

$\therefore \sum_{n=1}^{200}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{200}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{200}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{200}-\frac{1}{201}\right)$

$=1-\frac{1}{201}=\frac{200}{201}$

따라서 $p=201$, $q=200$이므로 $p+q=401$

0975 답 ③

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=pn^2+qn$

(i) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=p+q$ ····· ㉠

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=(pn^2+qn)-\{p(n-1)^2+q(n-1)\}$

$=2pn-p+q$ ····· ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=2pn-p+q$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 $2p$인 등차수열이므로

$a_n=1+(n-1)\times 2p=2pn-2p+1$

$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_ka_{k+1}}$

$=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$=\frac{1}{2p}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{10}}-\frac{1}{a_{11}}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{11}}\right)=\frac{1}{2p}\left(1-\frac{1}{20p+1}\right)$

$=\frac{10}{20p+1}$

즉, $\frac{10}{20p+1}=\frac{10}{31}$이므로

$20p+1=31$ $\therefore p=\frac{3}{2}$

따라서 $a_n=3n-2$이므로 $a_{20}=60-2=58$

0976 답 5

$x^2-4nx+4n^2-1=0$에서 $(x-2n)^2-1^2=0$

$(x-2n+1)(x-2n-1)=0$

$\therefore x=2n-1$ 또는 $x=2n+1$

따라서 $a_k=2k-1$, $\beta_k=2k+1$ 또는 $a_k=2k+1$, $\beta_k=2k-1$이므로

$\sum_{k=1}^{60}\frac{1}{\sqrt{\alpha_k}+\sqrt{\beta_k}}=\sum_{k=1}^{60}\frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$

$=\sum_{k=1}^{60}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}$

$=\sum_{k=1}^{60}\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{2}$

$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{60}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})\}$

$+\cdots+(\sqrt{121}-\sqrt{119})\}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{121}-1)=\frac{1}{2}(11-1)=5$

0977 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d\neq 0)$라 하면 $|a_6|=a_8$에서

$|a_6|=a_6+2d$

이때 $a_6\geq 0$이면 $a_6=a_6+2d$이므로 $d=0$이 되어 조건을 만족시키지 않는다. 즉, $a_6<0$이므로 $-a_6=a_6+2d$에서 $a_6=-d$

$-d<0$이므로 $d>0$

$a_6=-d$에서 $a_1+5d=-d$ $\therefore a_1=-6d$

$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_5}-\frac{1}{a_6}\right)\right\}$

$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_6}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{-6d}-\frac{1}{-d}\right)=\frac{5}{6d^2}$

즉, $\frac{5}{6d^2}=\frac{5}{96}$이므로 $6d^2=96$

$d^2=16$ $\therefore d=4$ ($\because d>0$)

따라서 등차수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 -24, 공차가 4이므로

$\sum_{k=1}^{25}a_k=\frac{25\{2\times(-24)+24\times 4\}}{2}=600$

0978 답 7

$A=\{1+\sqrt{5}, \sqrt{2}+\sqrt{6}, \sqrt{3}+\sqrt{7}, \sqrt{4}+\sqrt{8}, \cdots\}$이므로

$\sqrt{2l}+\sqrt{2m}$ 꼴인 원소를 작은 것부터 차례로 나열하면

$\sqrt{2}+\sqrt{6}, \sqrt{4}+\sqrt{8}, \sqrt{6}+\sqrt{10}, \sqrt{8}+\sqrt{12}, \cdots$

$\therefore a_n=\sqrt{2n}+\sqrt{2n+4}$

$\therefore \sum_{k=1}^{48}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{48}\frac{1}{\sqrt{2k}+\sqrt{2k+4}}$

$=\sum_{k=1}^{48}\frac{\sqrt{2k}-\sqrt{2k+4}}{(\sqrt{2k}+\sqrt{2k+4})(\sqrt{2k}-\sqrt{2k+4})}$

$=\sum_{k=1}^{48}\frac{\sqrt{2k}-\sqrt{2k+4}}{-4}=-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{48}(\sqrt{2k}-\sqrt{2k+4})$

$=-\frac{1}{4}\{(\sqrt{2}-\sqrt{6})+(\sqrt{4}-\sqrt{8})+(\sqrt{6}-\sqrt{10})$

$+\cdots+(\sqrt{94}-\sqrt{98})+(\sqrt{96}-\sqrt{100})\}$

$=-\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{98}-\sqrt{100})=2+\frac{3}{2}\sqrt{2}$

따라서 $p=2$, $q=\frac{3}{2}$이므로

$2(p+q)=2\left(2+\frac{3}{2}\right)=7$

0979 답 ②

1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, …을 3으로 나눈 나머지는 각각 1, 1, 0, 1, 1, 0, …이므로

$$\sum_{k=1}^{32} a_k=(1+1+0)+(1+1+0)+\cdots+(1+1+0)+(1+1)$$
$$=10(1+1+0)+(1+1)=22$$

참고 자연수 k에 대하여

(i) $n=3k-2$일 때,

$n^2=(3k-2)^2=9k^2-12k+4=3(3k^2-4k+1)+1$

(ii) $n=3k-1$일 때,

$n^2=(3k-1)^2=9k^2-6k+1=3(3k^2-2k)+1$

(iii) $n=3k$일 때,

$n^2=(3k)^2=9k^2=3\times 3k^2$

(i), (ii), (iii)에서 자연수 n^2을 3으로 나눈 나머지는 1, 1, 0이 반복됨을 알 수 있다.

0980 답 ①

$S=\sum_{k=1}^{7}(2k-1)2^k$이라 하면

$S=1\times 2^1+3\times 2^2+5\times 2^3+\cdots+13\times 2^7$ …… ㉠

$2S=1\times 2^2+3\times 2^3+5\times 2^4+\cdots+13\times 2^8$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$-S=1\times 2^1+2\times 2^2+2\times 2^3+\cdots+2\times 2^7-13\times 2^8$

$=2+\dfrac{2^3(2^6-1)}{2-1}-13\times 2^8$

$=2+504-3328=-2822$

$\therefore S=\sum_{k=1}^{7}(2k-1)2^k=2822$

0981 답 ②

$a_n=\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}+\theta\right)$라 하면 자연수 k에 대하여

$n=4k-3$일 때, $a_n=a_{4k-3}=\sin\left(\dfrac{4k-3}{2}\pi+\theta\right)=\cos\theta$,

$n=4k-2$일 때, $a_n=a_{4k-2}=\sin\left(\dfrac{4k-2}{2}\pi+\theta\right)=-\sin\theta$,

$n=4k-1$일 때, $a_n=a_{4k-1}=\sin\left(\dfrac{4k-1}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta$,

$n=4k$일 때, $a_n=a_{4k}=\sin\left(\dfrac{4k}{2}\pi+\theta\right)=\sin\theta$이므로

$\sum_{k=1}^{50}\sin\left(\dfrac{k\pi}{2}+\theta\right)$

$=\sum_{k=1}^{12}(a_{4k-3}+a_{4k-2}+a_{4k-1}+a_{4k})+a_{49}+a_{50}$

$=12\{\cos\theta+(-\sin\theta)+(-\cos\theta)+\sin\theta\}+\cos\theta+(-\sin\theta)$

$=\cos\theta-\sin\theta$

이때 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서

$\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

$\therefore \sum_{k=1}^{50}\sin\left(\dfrac{k\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta-\sin\theta$

$=\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}=-\dfrac{1}{5}$

0982 답 ③

㈎에서 a_1, a_2, a_3, …, a_{100}의 값은 각각 −1, 0, 2 중에서 하나이므로 −1의 개수를 x, 2의 개수를 y라 하자.

㈏에서 $\sum_{k=1}^{100}a_k=10$이므로

$-1\times x+2\times y=10$

$\therefore -x+2y=10$ …… ㉠

㈐에서 $\sum_{k=1}^{100}(a_k)^2=110$이므로

$(-1)^2\times x+2^2\times y=110$

$\therefore x+4y=110$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=30$, $y=20$

$\therefore \sum_{k=1}^{100}|a_k|=|-1|\times 30+2\times 20=70$

0983 답 247

2^{n-1}의 모든 양의 약수는 1, 2, 2^2, 2^3, …, 2^{n-1}이므로

$a_n=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}$

$=\dfrac{1\times(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

$\therefore \sum_{k=1}^{7}a_k=\sum_{k=1}^{7}(2^k-1)=\sum_{k=1}^{7}2^k-\sum_{k=1}^{7}1$

$=\dfrac{2(2^7-1)}{2-1}-1\times 7$

$=254-7=247$

0984 답 ③

선분 OA를 2^n : 1로 내분하는 점 P_n의 좌표는

$\left(\dfrac{2^n\times 1+1\times 0}{2^n+1},\ 0\right)$ $\therefore \left(\dfrac{2^n}{2^n+1},\ 0\right)$

이때 점 P_n은 x축 위의 점이고, $l_n=\overline{OP_n}$이므로

$l_n=\dfrac{2^n}{2^n+1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{10}\dfrac{1}{l_n}=\sum_{n=1}^{10}\dfrac{2^n+1}{2^n}=\sum_{n=1}^{10}\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)$

$=\sum_{n=1}^{10}1+\sum_{n=1}^{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$=1\times 10+\dfrac{\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}\right\}}{1-\dfrac{1}{2}}$

$=10+1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}=11-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$

0985 답 1222

표를 채운 수는 1이 1개, 2가 3개, 3이 5개, 4가 7개, …, 12가 23개이므로 모든 수의 합은

$1\times 1+2\times 3+3\times 5+4\times 7+\cdots+12\times 23$

$=\sum_{k=1}^{12}k(2k-1)=\sum_{k=1}^{12}(2k^2-k)$

$=2\sum_{k=1}^{12}k^2-\sum_{k=1}^{12}k$

$=2\times\dfrac{12\times 13\times 25}{6}-\dfrac{12\times 13}{2}$

$=1300-78=1222$

0986 답 ④

$a_n=(4n-3)\times 5^n$이므로 $S=\sum_{k=1}^{10}a_k$라 하면

$S=1\times 5+5\times 5^2+9\times 5^3+\cdots+37\times 5^{10}$ ····· ㉠

$5S=1\times 5^2+5\times 5^3+9\times 5^4+\cdots+37\times 5^{11}$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면

$-4S=1\times 5+4\times 5^2+4\times 5^3+\cdots+4\times 5^{10}-37\times 5^{11}$

$=1\times 5+4\times\frac{5^2(5^9-1)}{5-1}-37\times 5^{11}$

$=-36\times 5^{11}-20$

$\therefore S=\sum_{k=1}^{10}a_k=9\times 5^{11}+5$

따라서 $A=9$, $B=5$이므로

$A+B=14$

0987 답 ⑤

자연수 m에 대하여

(i) $n=2m-1$일 때,

n행에 나열되는 수들의 합 a_n은

$a_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$

$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-1\times n$

$=n^2$

$\therefore a_{2m-1}=(2m-1)^2=4m^2-4m+1$

(ii) $n=2m$일 때,

n행에 나열되는 수들의 합 a_n은

$a_n=\sum_{k=1}^{n}2k=2\sum_{k=1}^{n}k$

$=2\times\frac{n(n+1)}{2}$

$=n^2+n$

$\therefore a_{2m}=(2m)^2+2m=4m^2+2m$

$\therefore \sum_{k=1}^{18}a_k=\sum_{m=1}^{9}(a_{2m-1}+a_{2m})$

$=\sum_{m=1}^{9}\{(4m^2-4m+1)+(4m^2+2m)\}$

$=\sum_{m=1}^{9}(8m^2-2m+1)$

$=8\sum_{m=1}^{9}m^2-2\sum_{m=1}^{9}m+\sum_{m=1}^{9}1$

$=8\times\frac{9\times 10\times 19}{6}-2\times\frac{9\times 10}{2}+1\times 9$

$=2280-90+9=2199$

0988 답 ④

점 $P_n(3n, 0)$이므로 $\overline{OP_n}=3n$

$\overline{OQ_n}$은 원의 반지름의 길이와 같으므로 $\overline{OQ_n}=\sqrt{n}$

직각삼각형 OP_nQ_n에서

$\overline{P_nQ_n}^2=\overline{OP_n}^2-\overline{OQ_n}^2$

$=(3n)^2-(\sqrt{n})^2$

$=9n^2-n$

$\therefore \sum_{k=1}^{5}\overline{P_kQ_k}^2=\sum_{k=1}^{5}(9k^2-k)$

$=9\sum_{k=1}^{5}k^2-\sum_{k=1}^{5}k$

$=9\times\frac{5\times 6\times 11}{6}-\frac{5\times 6}{2}$

$=495-15=480$

0989 답 ①

곡선 $y=x^2-n$과 직선 $y=-\frac{2}{n}x+2$가 만나는 두 점의 x좌표는

$x^2-n=-\frac{2}{n}x+2$에서

$x^2+\frac{2}{n}x-n-2=0$

이 이차방정식의 두 근이 a_n, b_n이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n+b_n=-\frac{2}{n}$, $a_nb_n=-n-2$

$\therefore \sum_{k=3}^{11}\left(\frac{1}{a_k}+\frac{1}{b_k}\right)$

$=\sum_{k=3}^{11}\frac{a_k+b_k}{a_kb_k}=\sum_{k=3}^{11}\frac{-\frac{2}{k}}{-k-2}$

$=\sum_{k=3}^{11}\frac{2}{k(k+2)}=\sum_{k=3}^{11}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$

$+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{13}\right)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{13}=\frac{11}{26}$

0990 답 8

[1단계]에서 남은 종이의 넓이는 $x^2\times\frac{3}{4}$

[2단계]에서 남은 종이의 넓이는 $x^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^2$

⋮

[n단계]에서 남은 종이의 넓이는 $x^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^n$

즉, $a_n=x^2\left(\frac{3}{4}\right)^n$이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}x^2\left(\frac{3}{4}\right)^k=x^2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^k$

$=x^2\times\frac{\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{3}{4}}=3x^2\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}$

따라서 $3x^2\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}=192\left\{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}\right\}$이므로

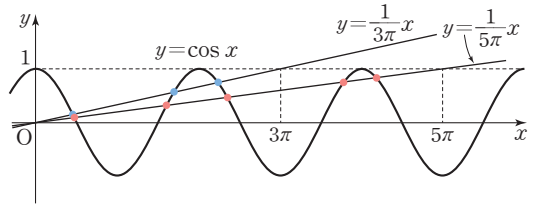
$3x^2=192$, $x^2=64$

$\therefore x=8$ ($\because x>0$)

0991 답 ②

방정식 $\cos x=\frac{1}{(2n+1)\pi}x$의 양의 실근의 개수는 $x>0$에서 두 함수 $y=\cos x$, $y=\frac{1}{(2n+1)\pi}x$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

그림과 같이 $n=1$일 때 두 함수 $y=\cos x$, $y=\frac{1}{3\pi}x$의 그래프의 교점의 개수는 3이고, $n=2$일 때 두 함수 $y=\cos x$, $y=\frac{1}{5\pi}x$의 그래프의 교점의 개수는 5이다.



즉, n의 값이 1만큼 커질수록 교점의 개수는 2개씩 늘어나므로

$a_n=3+(n-1)\times2=2n+1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{15}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$
$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{31}-\frac{1}{33}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{33}\right)=\frac{5}{33}$$

0992 답 ⑤

$f(1)=1$이므로 $f(x+1)=f(x)$에서

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=1$

즉, k의 값이 1, 4, 9, 16일 때, $f(\sqrt{k})=1$이고,

k의 값이 1, 4, 9, 16이 아닐 때, $f(\sqrt{k})=3$이다.

$$\sum_{k=1}^{20}\frac{k\times f(\sqrt{k})}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{20}kf(\sqrt{k})$$
$$=\frac{1}{3}\{f(\sqrt{1})+2f(\sqrt{2})+3f(\sqrt{3})+\cdots+20f(\sqrt{20})\}$$
$$=\frac{1}{3}[(1+4+9+16)\times1$$
$$+\{(1+2+3+\cdots+20)-(1+4+9+16)\}\times3]$$
$$=\frac{1}{3}\left\{30+\left(\frac{20\times21}{2}-30\right)\times3\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\times570=190$$

0993 답 10

점 P_1은 원점이므로 $\overline{P_1P_n}=n(n-1)$에서 점 P_n의 x좌표는 $n(n-1)$, 점 P_{n+1}의 x좌표는 $n(n+1)$이다.

선분 P_nP_{n+1}의 중점의 x좌표는

$$\frac{n(n-1)+n(n+1)}{2}=n^2$$

점 Q_n의 x좌표는 n^2이고, y좌표는 $y=\sqrt{an^2}=n\sqrt{a}$이다.

$\overline{P_nP_{n+1}}=n(n+1)-n(n-1)=2n$이므로

$S_n=\frac{1}{2}\times2n\times n\sqrt{a}=n^2\sqrt{a}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5}S_k=\sum_{k=1}^{5}k^2\sqrt{a}=\sqrt{a}\sum_{k=1}^{5}k^2=\sqrt{a}\times\frac{5\times6\times11}{6}=55\sqrt{a}$$

즉, $55\sqrt{a}>165$이므로

$\sqrt{a}>3$ $\therefore a>9$

따라서 자연수 a의 최솟값은 10이다.

0994 답 ④

직선 $y=n$이 함수 $y=(x+3)^2(x\geq-3)$과 만나는 점의 x좌표는 $(x+3)^2=n$에서

$x=\sqrt{n}-3$

$\therefore a_n=\sqrt{n}-3$

a_n의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 다음과 같다.

	$a_n>0$	$a_n=0$	$a_n<0$
n이 짝수	2	1	0
n이 홀수	1	1	1

(i) $2\leq n\leq8$일 때, $a_n<0$이므로

$n=2, 4, 6, 8$이면 $f(n)=0$

$n=3, 5, 7$이면 $f(n)=1$

(ii) $n=9$일 때, $a_n=0$이므로

$f(n)=1$

(iii) $10\leq n\leq30$일 때, $a_n>0$이므로

$n=10, 12, 14, \ldots, 30$이면 $f(n)=2$

$n=11, 13, 15, \ldots, 29$이면 $f(n)=1$

(i), (ii), (iii)에서

$$\sum_{k=2}^{30}f(k)=\{f(2)+f(4)+f(6)+f(8)\}+\{f(3)+f(5)+f(7)\}$$
$$+f(9)+\{f(10)+f(12)+f(14)+\cdots+f(30)\}$$
$$+\{f(11)+f(13)+f(15)+\cdots+f(29)\}$$
$$=4\times0+3\times1+1+11\times2+10\times1$$
$$=0+3+1+22+10=36$$

0995 답 ③

함수 $y=a^x-1(a>1)$의 그래프와 직선 $y=n$이 만나는 점 A_n의 x좌표는 $a^x-1=n$에서

$a^x=n+1$ $\therefore x=\log_a(n+1)$

$\therefore A_n(\log_a(n+1), n)$

함수 $y=a^x-1(a>1)$의 그래프와 직선 $y=n+1$이 만나는 점 A_{n+1}의 x좌표는 $a^x-1=n+1$에서

$a^x=n+2$ $\therefore x=\log_a(n+2)$

$\therefore A_{n+1}(\log_a(n+2), n+1)$

선분 A_nA_{n+1}을 대각선으로 하는 직사각형의 가로의 길이는

$\log_a(n+2)-\log_a(n+1)=\log_a\frac{n+2}{n+1}$, 세로의 길이는 1이므로

$S_n=\log_a\frac{n+2}{n+1}$

$$\therefore \sum_{k=1}^{62}S_k=\sum_{k=1}^{62}\log_a\frac{k+2}{k+1}$$
$$=\log_a\frac{3}{2}+\log_a\frac{4}{3}+\log_a\frac{5}{4}+\cdots+\log_a\frac{64}{63}$$
$$=\log_a\left(\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{64}{63}\right)$$
$$=\log_a32$$

즉, $\log_a32=\frac{10}{3}$이므로

$a^{\frac{10}{3}}=32$

$\therefore a=(2^5)^{\frac{3}{10}}=2^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}$

0996 답 ③

$x=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$에서 $x^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=i$, $x^3=i\times\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{i-1}{\sqrt{2}}$,

$x^4=i^2=-1$, …이므로 k가 4의 배수일 때 x^k은 실수가 된다.

따라서 자연수 n에 대하여

$1\le n\le 3$일 때 $f(n)=0$, $4\le n\le 7$일 때 $f(n)=1$,

$8\le n\le 11$일 때 $f(n)=2$, $12\le n\le 15$일 때 $f(n)=3$,

$16\le n\le 19$일 때 $f(n)=4$, $n=20$일 때 $f(n)=5$

$\therefore \sum_{n=1}^{20} f(n)=3\times 0+4\times 1+4\times 2+4\times 3+4\times 4+1\times 5$

$=0+4+8+12+16+5=45$

0997 답 ③

(i) $m=2, 3, 5, 6, 7$일 때,

m의 소인수의 지수가 모두 1이므로 $\sqrt[n]{m^{12}}=m^{\frac{12}{n}}$이 정수가 되려면 $\frac{12}{n}$가 자연수이어야 한다.

즉, n은 12의 약수이어야 하므로 n의 값은

2, 3, 4, 6, 12

$\therefore f(2)=f(3)=f(5)=f(6)=f(7)=5$

(ii) $m=4, 9$일 때,

$\sqrt[n]{4^{12}}=4^{\frac{12}{n}}=2^{\frac{24}{n}}$, $\sqrt[n]{9^{12}}=9^{\frac{12}{n}}=3^{\frac{24}{n}}$이 정수가 되려면 $\frac{24}{n}$가 자연수이어야 한다.

즉, n은 24의 약수이어야 하므로 n의 값은

2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

$\therefore f(4)=f(9)=7$

(iii) $m=8$일 때,

$\sqrt[n]{8^{12}}=8^{\frac{12}{n}}=2^{\frac{36}{n}}$이 정수가 되려면 $\frac{36}{n}$이 자연수이어야 한다.

즉, n은 36의 약수이어야 하므로 n의 값은

2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

$\therefore f(8)=8$

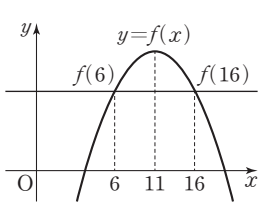
(i), (ii), (iii)에서

$\sum_{m=2}^{9} f(m)=\{f(2)+f(3)+f(5)+f(6)+f(7)\}+\{f(4)+f(9)\}+f(8)$

$=5\times 5+2\times 7+8=47$

0998 답 8

이차함수 $f(x)$의 이차항의 계수가 음수이므로 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록한 포물선이고, $f(6)=f(16)$이므로 그래프의 개형은 그림과 같다.



$f(n)=\sum_{k=1}^{n} a_k$이므로

$a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{16}<0$에서

$a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_{16}$

$=(a_1+a_2+\cdots+a_{16})-(a_1+a_2+\cdots+a_{m-1})$

$=f(16)-f(m-1)$

즉, $f(16)-f(m-1)<0$이므로 $f(16)<f(m-1)$

이때 $6<m-1<16$이므로 $7<m<17$

주어진 조건에서 $m<16$이므로 $7<m<16$

따라서 자연수 m의 최솟값은 8이다.

최고수준 도전 기출 236~237쪽

0999 답 ①

전략 주어진 방정식을 만족시키는 a_n을 모두 찾은 후, 모든 항이 정수가 되도록 하는 a_n을 n의 값에 따라 나누어 구한다.

$3a_n^2+7na_n-6n^2=0$에서

$(a_n+3n)(3a_n-2n)=0$ $\therefore a_n=-3n$ 또는 $a_n=\frac{2}{3}n$

이때 $-3n$과 $\frac{2}{3}n$ 중에서 n이 3의 배수가 아니면 $-3n$만 정수이고, n이 3의 배수이면 $-3n$과 $\frac{2}{3}n$ 둘 다 정수이다.

따라서 자연수 k에 대하여

$$a_n=\begin{cases} -9k+6 & (n=3k-2) \\ -9k+3 & (n=3k-1) \\ -9k \text{ 또는 } 2k & (n=3k) \end{cases}$$

$\sum_{n=1}^{60} a_n=\sum_{k=1}^{20} a_{3k-2}+\sum_{k=1}^{20} a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{20} a_{3k}$이고 자연수 k에 대하여

$-9k<0$, $2k>0$이므로

$M=\sum_{k=1}^{20} a_{3k-2}+\sum_{k=1}^{20} a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{20} 2k$

$m=\sum_{k=1}^{20} a_{3k-2}+\sum_{k=1}^{20} a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{20} (-9k)$

$\therefore M-m=\left(\sum_{k=1}^{20} a_{3k-2}+\sum_{k=1}^{20} a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{20} 2k\right)-\left\{\sum_{k=1}^{20} a_{3k-2}+\sum_{k=1}^{20} a_{3k-1}+\sum_{k=1}^{20} (-9k)\right\}$

$=\sum_{k=1}^{20} 2k-\sum_{k=1}^{20} (-9k)=\sum_{k=1}^{20} \{2k-(-9k)\}$

$=\sum_{k=1}^{20} 11k=11\sum_{k=1}^{20} k$

$=11\times\frac{20\times 21}{2}=2310$

1000 답 15

전략 일반항 a_n을 $a_n=n(n+1)(n+2)$로 놓는 것보다 $a_n=(n-1)n(n+1)$로 놓는 것이 계산이 더 편리함을 이용한다.

수열 $1\times 2\times 3$, $2\times 3\times 4$, $3\times 4\times 5$, …의 첫째항부터 제k항까지의 합은 수열 $0\times 1\times 2$, $1\times 2\times 3$, $2\times 3\times 4$, $3\times 4\times 5$, …의 첫째항부터 제$(k+1)$항까지의 합과 같다.

$\sum_{n=1}^{k+1} (n-1)n(n+1)=\sum_{n=1}^{k+1} (n^3-n)=\sum_{n=1}^{k+1} n^3-\sum_{n=1}^{k+1} n$

$=\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2-\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}-1\right\}$

즉, $\frac{(k+1)(k+2)}{2}\left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}-1\right\}=135\times136$이므로

$\frac{(k+1)(k+2)}{2}=136$

$(k+1)(k+2)=272=16\times17$

k는 자연수이므로 $k+1=16$

$\therefore k=15$

1001 답 ④

전략 등차수열의 합의 공식을 이용하여 S_n을 구한 후 그 그래프를 그린다.

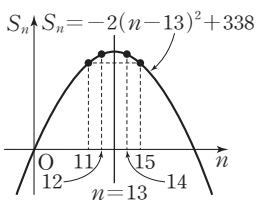
주어진 등차수열의 첫째항이 50, 공차가 -4이므로

$S_n=\frac{n\{2\times50+(n-1)\times(-4)\}}{2}$

$=-2n^2+52n$

$=-2(n-13)^2+338$

S_n을 n에 대한 이차함수라 생각하면 그림과 같이 S_n의 값은 $n=13$일 때 최대이고 그래프는 직선 $n=13$에 대하여 대칭이다.



이때 $\sum_{k=m}^{m+4}S_k=S_m+S_{m+1}+S_{m+2}+S_{m+3}+S_{m+4}$에서 S_{m+2}가 S_{13}일 때 $\sum_{k=m}^{m+4}S_k$의 값이 최대이므로

$m+2=13$ $\therefore m=11$

다른 풀이

$\sum_{k=m}^{m+4}S_k=S_m+S_{m+1}+S_{m+2}+S_{m+3}+S_{m+4}$이므로 S_{m+2}가 최대일 때, $\sum_{k=m}^{m+4}S_k$의 값은 최대가 된다.

첫째항이 50, 공차가 -4인 등차수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n=50+(n-1)\times(-4)=-4n+54$

공차가 0보다 작으므로 $a_n\geq0$을 만족시키는 n이 최대일 때, S_n도 최대가 된다.

$a_n\geq0$에서 $-4n+54\geq0$, $4n\leq54$

$\therefore n\leq\frac{54}{4}=13.5$

즉, 최댓값이 S_{13}이므로

$m+2=13$ $\therefore m=11$

1002 답 840

전략 좌표평면 위에 두 점 A_n, B를 지나는 직선을 그린 후 y의 값이 0, 1, 2, 3, 4일 때, 각각 x좌표가 정수인 점의 개수를 구한다.

두 점 $A_n(4n, 0)$, $B(0, 4)$를 지나는 직선의 방정식은

$y=\frac{4}{-4n}(x-4n)$ $\therefore y=-\frac{1}{n}x+4$

$y=4$일 때, $x=0$

$y=3$일 때, $3=-\frac{1}{n}x+4$

$\frac{1}{n}x=1$ $\therefore x=n$

$y=2$일 때, $2=-\frac{1}{n}x+4$

$\frac{1}{n}x=2$ $\therefore x=2n$

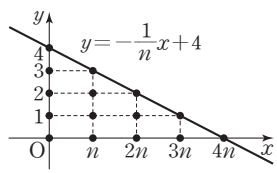
$y=1$일 때, $1=-\frac{1}{n}x+4$

$\frac{1}{n}x=3$ $\therefore x=3n$

$y=0$일 때, $0=-\frac{1}{n}x+4$

$\frac{1}{n}x=4$ $\therefore x=4n$

즉, x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는



$x=0$일 때, 5개

$1\leq x\leq n$일 때, 4개

$n+1\leq x\leq2n$일 때, 3개

$2n+1\leq x\leq3n$일 때, 2개

$3n+1\leq x\leq4n$일 때, 1개

따라서 $f(n)=5+4n+3n+2n+n=10n+5$이므로

$\sum_{k=1}^{12}f(k)=\sum_{k=1}^{12}(10k+5)=10\sum_{k=1}^{12}k+\sum_{k=1}^{12}5$

$=10\times\frac{12\times13}{2}+5\times12$

$=780+60$

$=840$

1003 답 ②

전략 b_{2n-1}, b_{2n}을 각각 구한 후 주어진 조건을 이용하여 a_n을 구하고 $\sum_{k=1}^{11}b_k=\sum_{k=1}^{6}b_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5}b_{2k}$임을 이용한다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$b_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$에서

$b_{2n-1}=\sum_{k=1}^{2n-1}(-1)^{k+1}a_k$

$=a_1+(-a_2+a_3)+(-a_4+a_5)+\cdots+(-a_{2n-2}+a_{2n-1})$

$=a_1+(n-1)d=a_n$ ····· ㉠

$b_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k+1}a_k$

$=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})$

$=n\times(-d)=-nd$ ····· ㉡

$b_2=-2$이므로 ㉡에 $n=1$을 대입하면

$-2=-d$ $\therefore d=2$

㉡에서 $b_{2n}=-2n$

㉠에서 $b_3=a_2$, $b_7=a_4$이므로

$b_3+b_7=0$에서 $a_2+a_4=0$

이때 a_3은 a_2, a_4의 등차중항이므로

$2a_3=a_2+a_4$, $2a_3=0$ $\therefore a_3=0$

즉, $a_3=a_1+2\times2=0$이므로

$a_1=-4$

$a_n=-4+(n-1)\times2=2n-6$이므로

$b_{2n-1}=2n-6$

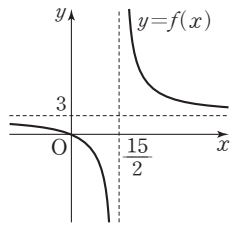
$$\therefore \sum_{k=1}^{11} b_k=\sum_{k=1}^{6} b_{2k-1}+\sum_{k=1}^{5} b_{2k}=\sum_{k=1}^{6}(2k-6)+\sum_{k=1}^{5}(-2k)$$
$$=2\sum_{k=1}^{6}k-\sum_{k=1}^{6}6-2\sum_{k=1}^{5}k$$
$$=2\times\frac{6\times7}{2}-6\times6-2\times\frac{5\times6}{2}$$
$$=42-36-30=-24$$

1004 답 16

전략 유리함수 $y=\frac{a}{x-p}+q$의 그래프는 점 (p, q)에 대하여 대칭임을 이용하여 합이 일정한 두 함숫값의 합을 구한다.

$f(x)=\frac{6x}{2x-15}=3+\frac{45}{2x-15}$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프는 점 $\left(\frac{15}{2}, 3\right)$에 대하여 대칭이므로 $\frac{a+b}{2}=\frac{15}{2}$, $\frac{f(a)+f(b)}{2}=3$

$f(7)+f(8)=6$, $f(6)+f(9)=6$,

$f(5)+f(10)=6$, $f(4)+f(11)=6$,

$f(3)+f(12)=6$, $f(2)+f(13)=6$, $f(1)+f(14)=6$

$a_n=f(n)$이므로

$$\sum_{n=1}^{14}a_n=\{f(1)+f(14)\}+\{f(2)+f(13)\}+\cdots+\{f(7)+f(8)\}$$
$$=6\times7=42$$

$a_{15}=f(15)=3+\frac{45}{2\times15-15}=6$이므로

$$\sum_{n=1}^{15}a_n=42+6=48$$

$a_{16}=f(16)=3+\frac{45}{2\times16-15}=5+\frac{11}{17}$이므로

$$\sum_{n=1}^{16}a_n=53+\frac{11}{17}<55$$

$a_{17}=f(17)=3+\frac{45}{2\times17-15}=5+\frac{7}{19}$이므로

$$\sum_{n=1}^{17}a_n=58+\frac{11}{17}+\frac{7}{19}>55$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{16}a_n<55<\sum_{n=1}^{17}a_n$$

따라서 자연수 m의 최댓값은 16이다.

1005 답 ⑤

전략 15와 서로소인 수는 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수임을 이용한다.

$15=3\times5$이므로 수열 $\{a_n\}$은 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수를 작은 수부터 나열한 것이다.

이때 1부터 $15n$까지의 자연수 중에서 3의 배수는 $5n$개, 5의 배수는 $3n$개, 15의 배수는 n개이므로 수열 $\{a_n\}$의 개수는

$15n-(5n+3n-n)=8n$

$8n=32$이므로 $n=4$

즉, 1부터 60까지의 자연수 중에서 3의 배수는 20개, 5의 배수는 12개, 15의 배수는 4개이고, 수열 $\{a_n\}$의 항에 해당하는 수의 개수는 32개이다.

따라서 $\sum_{k=1}^{32}a_k$의 값은 1부터 60까지의 자연수의 합에서 3의 배수 또는 5의 배수의 합을 뺀 것과 같으므로

$$\sum_{k=1}^{32}a_k=\sum_{k=1}^{60}k-\left(\sum_{k=1}^{20}3k+\sum_{k=1}^{12}5k-\sum_{k=1}^{4}15k\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{60}k-\left(3\sum_{k=1}^{20}k+5\sum_{k=1}^{12}k-15\sum_{k=1}^{4}k\right)$$
$$=\frac{60\times61}{2}-\left(3\times\frac{20\times21}{2}+5\times\frac{12\times13}{2}-15\times\frac{4\times5}{2}\right)$$
$$=1830-(630+390-150)$$
$$=1830-870=960$$

다른 풀이

$1\le k\le15$에서 수열 $\{a_n\}$의 항을 나열하면

1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14

$$\therefore \sum_{k=1}^{8}a_k=1+2+4+7+8+11+13+14=60$$

k가 15와 서로소이면 $15+k$, $30+k$, $45+k$도 15와 서로소이므로

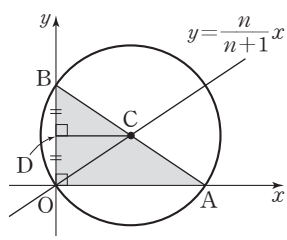
$$\sum_{k=1}^{32}a_k=\sum_{k=1}^{8}a_k+\sum_{k=9}^{16}a_k+\sum_{k=17}^{24}a_k+\sum_{k=25}^{32}a_k$$
$$=\sum_{k=1}^{8}a_k+\sum_{k=1}^{8}(15+a_k)+\sum_{k=1}^{8}(30+a_k)+\sum_{k=1}^{8}(45+a_k)$$
$$=4\sum_{k=1}^{8}a_k+15\times8+30\times8+45\times8$$
$$=4\times60+120+240+360=960$$

1006 답 ①

전략 원의 중심의 좌표를 이용하여 선분 OA의 길이를 구한다.

$\angle BOA=\frac{\pi}{2}$이므로 $\overline{AB}$는 원의 지름이고, 원의 중심이 직선 $y=\frac{n}{n+1}x$ 위에 있으므로 원의 중심은 $\overline{AB}$와 직선 $y=\frac{n}{n+1}x$의 교점이다.

한편 원의 중심을 C라 하고 그림과 같이 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 D라 하면 삼각형 CBO는 $\overline{CB}=\overline{CO}$인 이등변삼각형이므로 선분 CD는 선분 BO를 수직이등분한다.



$$\therefore \overline{OD}=\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{OB}=n$$

즉, 점 C의 y좌표가 n이므로 x좌표는 $n=\frac{n}{n+1}x$에서

$x=n+1$ $\quad\therefore \overline{DC}=n+1$

$\triangle BDC\sim\triangle BOA$(AA닮음)이므로 $\overline{BD}:\overline{DC}=\overline{BO}:\overline{OA}$에서

$n:n+1=2n:\overline{OA}$, $n\overline{OA}=2n(n+1)$

$\therefore \overline{OA}=2(n+1)$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$S_n=\frac{1}{2}\times2(n+1)\times2n=2n(n+1)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2n(n+1)}=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{5}{11}$$

12 수학적 귀납법

난이도별 필수 기출 240~259쪽

1007 답 ②

$a_{n+1}=a_n-4$에서 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -4인 등차수열이다.
따라서 $a_1=200$이므로
$a_{15}=200+14\times(-4)$
$=144$

1008 답 ③

$a_{n+1}=3a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 3인 등비수열이다.
$a_1=4$이므로 $a_n=4\times3^{n-1}$
$a_k=972$에서
$4\times3^{k-1}=972$
$3^{k-1}=243$, $3^{k-1}=3^5$
$k-1=5$ $\therefore k=6$

1009 답 ⑤

${a_{n+1}}^2=a_{n+2}a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.
공비를 r라 하면 $a_1=3$이므로
$a_n=3\times r^{n-1}$
$\log_3 a_4=2$에서 $a_4=3^2$
$3r^3=9$ $\therefore r^3=3$
$\therefore a_{10}=3r^9=3\times(r^3)^3$
$=3\times3^3=81$

1010 답 ②

$a_{n+1}=a_n+(-1)^n$의 n에 1, 2, 3, …, 49를 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$a_2=a_1+(-1)$
$a_3=a_2+1$
$a_4=a_3+(-1)$
⋮
$+)\ a_{50}=a_{49}+(-1)$
$a_{50}=a_1-1=3-1=2$

다른 풀이

$a_{n+1}=a_n+(-1)^n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면
$a_2=a_1+(-1)=3-1=2$
$a_3=a_2+(-1)^2=2+1=3$
$a_4=a_3+(-1)^3=3-1=2$
⋮
즉, 수열 $\{a_n\}$은 2개의 수 3, 2가 이 순서대로 반복하여 나타난다.
따라서 $50=25\times2$이므로
$a_{50}=2$

1011 답 ⑤

$(n+1)a_{n+1}=2na_n$, 즉 $a_{n+1}=2\times\frac{n}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, 7을 차례로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$a_2=2\times\frac{1}{2}a_1$
$a_3=2\times\frac{2}{3}a_2$
$a_4=2\times\frac{3}{4}a_3$
⋮
$\times)\ a_8=2\times\frac{7}{8}a_7$
$a_8=2^7\times\frac{1}{8}a_1=16$

다른 풀이

$(n+1)a_{n+1}=2na_n$, 즉 $a_{n+1}=\frac{2n}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면
$a_2=\frac{2}{2}a_1=\frac{2}{2}\times1=\frac{2}{2}$
$a_3=\frac{4}{3}a_2=\frac{4}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{2^2}{3}$
$a_4=\frac{6}{4}a_3=\frac{6}{4}\times\frac{2^2}{3}=\frac{2^3}{4}$
⋮
따라서 $a_n=\frac{2^{n-1}}{n}$이므로
$a_8=\frac{2^7}{8}=16$

1012 답 23

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$에서 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다. …… ⓘ
첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_3=1$에서 $a+2d=1$ …… ㉠
$a_7=21$에서 $a+6d=21$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=-9$, $d=5$
$\therefore a_n=-9+(n-1)\times5=5n-14$ …… ⓘⓘ
$a_n>100$에서 $5n-14>100$
$5n>114$ $\therefore n>22.8$
따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 23이다. …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 수열 $\{a_n\}$ 파악하기	20 %
ⓘⓘ a_n 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ n의 최솟값 구하기	30 %

1013 답 ②

$a_{n+1}=\sqrt{a_na_{n+2}}$의 양변을 제곱하면 $(a_{n+1})^2=a_na_{n+2}$
즉, 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로 공비를 r라 하면
$\frac{a_{11}}{a_2}=\frac{50}{2\sqrt{5}}$에서 $r^9=5\sqrt{5}$
$\therefore r=(5^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{9}}=5^{\frac{1}{6}}$ …… ㉠

$\therefore \dfrac{a_5}{a_2}\times\dfrac{a_9}{a_4}\times\dfrac{a_{13}}{a_6}\times\cdots\times\dfrac{a_{41}}{a_{20}}$

$=r^3\times r^5\times r^7\times\cdots\times r^{21}$

$=r^{3+5+7+\cdots+21}$ → 첫째항이 3, 끝항이 21, 항수가 10인 등차수열의 합

$=r^{\frac{10(3+21)}{2}}$

$=r^{120}=(5^{\frac{1}{6}})^{120}$ ($\because$ ㉠)

$=5^{20}$

1014 답 ①

㈏에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로 공비를 r라 하면 ㈎에서

$a_1\times a_1r^{19}=81$ $\therefore a_1^2r^{19}=81$ ……㉠

$\therefore X=a_1a_2a_3\cdots a_{20}=a_1\times a_1r\times a_1r^2\times\cdots\times a_1r^{19}$

$=a_1^{20}r^{1+2+3+\cdots+19}=a_1^{20}r^{\frac{19\times20}{2}}=a_1^{20}r^{190}$

$\therefore \log_3 X=\log_3 a_1^{20}r^{190}=\log_3(a_1^2r^{19})^{10}$

$=\log_3 81^{10}=\log_3(3^4)^{10}$ ($\because$ ㉠)

$=\log_3 3^{40}=40$

다른 풀이

㈏에서 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이므로

$a_1a_{20}=a_2a_{19}=a_3a_{18}=\cdots=a_{10}a_{11}=81$

$X=81^{10}=3^{40}$ $\therefore \log_3 X=\log_3 3^{40}=40$

1015 답 ④

$a_{n+1}=a_n+4n$의 n에 1, 2, 3, …, 8을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$a_2=a_1+4\times1$

$a_3=a_2+4\times2$

$a_4=a_3+4\times3$

⋮

$+)\ a_9=a_8+4\times8$

$a_9=a_1+\sum_{k=1}^{8}4k=2+4\times\dfrac{8\times9}{2}$

$=2+144=146$

1016 답 6

$a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n+1}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$a_2=\dfrac{3}{2}a_1$

$a_3=\dfrac{4}{3}a_2$

$a_4=\dfrac{5}{4}a_3$

⋮

$\times)\ a_n=\dfrac{n+1}{n}a_{n-1}$

$a_n=\dfrac{n+1}{2}a_1=\dfrac{3(n+1)}{2}$

$\therefore a_{11}-a_7=18-12=6$

1017 답 ②

$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$, 즉 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$a_2=a_1+1-\dfrac{1}{2}$

$a_3=a_2+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}$

$a_4=a_3+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$

⋮

$+)\ a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$

$a_n=a_1+1-\dfrac{1}{n}$

$a_6=3$에서

$a_1+1-\dfrac{1}{6}=3$

$\therefore a_1=\dfrac{13}{6}$

1018 답 ②

$a_n-a_{n-1}=3^{n-1}$, 즉 $a_n=a_{n-1}+3^{n-1}$의 n에 2, 3, 4, …, n을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$a_2=a_1+3$

$a_3=a_2+3^2$

$a_4=a_3+3^3$

⋮

$+)\ a_n=a_{n-1}+3^{n-1}$

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}3^k=2+\dfrac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}=\dfrac{3^n+1}{2}$

$a_k=365$에서 $\dfrac{3^k+1}{2}=365$

$3^k=729$, $3^k=3^6$

$\therefore k=6$

1019 답 ③

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=5^n$, 즉 $a_{n+1}=5^na_n$의 n에 1, 2, 3, …, 10을 차례로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$a_2=5a_1$

$a_3=5^2a_2$

$a_4=5^3a_3$

⋮

$\times)\ a_{11}=5^{10}a_{10}$

$a_{11}=a_1\times5\times5^2\times5^3\times\cdots\times5^{10}=5^{1+2+3+\cdots+10}$

$=5^{\frac{10\times11}{2}}=5^{55}$

$\therefore \log_{25}a_{11}=\log_{5^2}5^{55}=\dfrac{55}{2}$

1020 답 3

$a_{n+1}=a_n+\log_2\dfrac{n+1}{n}$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$a_2=a_1+\log_2\frac{2}{1}$

$a_3=a_2+\log_2\frac{3}{2}$

$a_4=a_3+\log_2\frac{4}{3}$

⋮

$+)\ a_n=a_{n-1}+\log_2\frac{n}{n-1}$

$a_n=a_1+\log_2\frac{2}{1}+\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\cdots+\log_2\frac{n}{n-1}$

$=0+\log_2\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}\right)$

$=\log_2 n$

$\therefore\ a_{32}-a_4=\log_2 32-\log_2 4=\log_2\frac{32}{4}$

$=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

1021 답 480

$a_{n+1}=a_n+f(n)$의 n에 1, 2, 3, …, 20을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$a_2=a_1+f(1)$

$a_3=a_2+f(2)$

$a_4=a_3+f(3)$

⋮

$+)\ a_{21}=a_{20}+f(20)$

$a_{21}=a_1+\sum_{k=1}^{20}f(k)=7+\sum_{k=1}^{20}f(k)$

$\therefore\ a_{21}=7+(20^2+4\times20-7)=480$

1022 답 20

$1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}$이므로

$a_{n+1}=\frac{n(n+2)}{(n+1)(n+1)}a_n$의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$a_2=\frac{1\times3}{2\times2}a_1$

$a_3=\frac{2\times4}{3\times3}a_2$

$a_4=\frac{3\times5}{4\times4}a_3$

⋮

$\times)\ a_n=\frac{(n-1)(n+1)}{n\times n}a_{n-1}$

$a_n=a_1\times\frac{1\times3}{2\times2}\times\frac{2\times4}{3\times3}\times\frac{3\times5}{4\times4}\times\cdots\times\frac{(n-1)(n+1)}{n\times n}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{4n}$

$a_k=\frac{21}{80}$에서 $\frac{k+1}{4k}=\frac{21}{80}$

$80(k+1)=84k,\ 4k=80\qquad\therefore\ k=20$

1023 답 ②

(나)에서 $a_{n+1}-a_n+3=0$ 또는 $a_{n+1}-2a_n=0$이므로

$a_{n+1}=a_n-3$ 또는 $a_{n+1}=2a_n$

(i) $a_2=a_1-3$일 때,

① $a_3=a_2-3$일 때,

$a_3=(a_1-3)-3=a_1-6$이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

② $a_3=2a_2$일 때,

$a_3=2(a_1-3)=2a_1-6$

이때 (가)에서 $a_1=a_3$이므로

$a_3=2a_3-6\qquad\therefore\ a_3=6$

ⓐ $a_4=a_3-3$일 때, $a_4=6-3=3$

ⓑ $a_4=2a_3$일 때, $a_4=2\times6=12$

(ii) $a_2=2a_1$일 때,

① $a_3=a_2-3$일 때,

$a_3=2a_1-3$

이때 (가)에서 $a_1=a_3$이므로

$a_3=2a_3-3\qquad\therefore\ a_3=3$

ⓐ $a_4=a_3-3$일 때, $a_4=3-3=0$

ⓑ $a_4=2a_3$일 때, $a_4=2\times3=6$

② $a_3=2a_2$일 때,

$a_3=2\times2a_1=4a_1$

이때 (가)에서 $a_1=a_3$이므로

$a_3=4a_3\qquad\therefore\ a_3=0$

ⓐ $a_4=a_3-3$일 때, $a_4=0-3=-3$

ⓑ $a_4=2a_3$일 때, $a_4=2\times0=0$

(i), (ii)에서

$a_4=-3$ 또는 $a_4=0$ 또는 $a_4=3$ 또는 $a_4=6$ 또는 $a_4=12$

따라서 a_4의 최댓값은 12이다.

1024 답 ③

$a_{n+1}=2n^2a_n-1$의 n에 1, 2를 차례로 대입하면

$a_2=2\times1^2\times a_1-1=2\times2-1=3$

$a_3=2\times2^2\times a_2-1=8\times3-1=23$

1025 답 ②

$a_{n+1}=\frac{k}{a_n+3}$의 n에 1, 2를 차례로 대입하면

$a_2=\frac{k}{a_1+3}=\frac{k}{2+3}=\frac{k}{5}$

$a_3=\frac{k}{a_2+3}=\frac{k}{\frac{k}{5}+3}=\frac{5k}{k+15}$

즉, $\frac{5k}{k+15}=\frac{5}{6}$이므로 $30k=5k+75$

$25k=75\qquad\therefore\ k=3$

1026 답 ④

주어진 조건의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_1=1\le1$이므로 $a_2=3^{a_1}=3^1=3$

$a_2>1$이므로 $a_3=\log_{a_2}\sqrt{3}=\log_3\sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

$a_3<1$이므로 $a_4=3^{a_3}=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

$a_4>1$이므로 $a_5=\log_{a_4}\sqrt{3}=\log_{\sqrt{3}}\sqrt{3}=1$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 4개의 수 1, 3, $\frac{1}{2}$, $\sqrt{3}$이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

이때 $20=5\times4$, $21=5\times4+1$이므로

$a_{20}\times a_{21}=\sqrt{3}\times1=\sqrt{3}$

1027 답 ①

주어진 조건의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_1=14$는 정수이므로 $a_2=7-\frac{14}{a_1}=7-\frac{14}{14}=6$

a_2는 정수이므로 $a_3=7-\frac{14}{a_2}=7-\frac{14}{6}=\frac{14}{3}$

a_3은 정수가 아니므로 $a_4=-3a_3+12=-3\times\frac{14}{3}+12=-2$

a_4는 정수이므로 $a_5=7-\frac{14}{a_4}=7-\frac{14}{-2}=14$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 4개의 수 14, 6, $\frac{14}{3}$, -2가 이 순서대로 반복하여 나타난다.

이때 $10=2\times4+2$, $16=4\times4$이므로

$a_{10}+a_{16}=6+(-2)=4$

1028 답 ⑤

주어진 조건의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_1=3$은 홀수이므로 $a_2=\frac{a_1+7}{2}=\frac{3+7}{2}=5$

a_2는 홀수이므로 $a_3=\frac{a_2+7}{2}=\frac{5+7}{2}=6$

a_3은 짝수이므로 $a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{6}{2}=3$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 3개의 수 3, 5, 6이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

따라서 $10=3\times3+1$이므로

$\sum_{k=1}^{10}a_k=3\times(3+5+6)+3=42+3=45$

1029 답 66

주어진 조건의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_3=a_2-a_1=2-4=-2$

$a_4=a_3-a_2=-2-2=-4$

$a_5=a_4-a_3=-4-(-2)=-2$

$a_6=a_5-a_4=-2-(-4)=2$

$a_7=a_6-a_5=2-(-2)=4$

$a_8=a_7-a_6=4-2=2$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 6개의 수 4, 2, -2, -4, -2, 2가 이 순서대로 반복하여 나타난다. …… ⓘ

이때 $|a_k|=2$를 만족시키는 항은 항의 값이 -2 또는 2일 때이므로 제6항까지 a_2, a_3, a_5, a_6의 4개이다. …… ⓘⓘ

따라서 $100=16\times6+4$이므로 구하는 자연수 k의 개수는

$16\times4+2=66$ …… ⓘⓘⓘ

(a_{98}, a_{99})

채점 기준	
ⓘ 수열 $\{a_n\}$의 규칙 파악하기	60 %
ⓘⓘ $\lvert a_k\rvert=2\,(k\le6)$를 만족시키는 항의 개수 구하기	20 %
ⓘⓘⓘ 자연수 k의 개수 구하기	20 %

1030 답 ②

주어진 조건의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=-\frac{1}{2}(a_1^2-3a_1)+4=-\frac{1}{2}(3^2-3\times3)+4=4$

$a_3=-\frac{1}{2}(a_2^2-3a_2)+4=-\frac{1}{2}(4^2-3\times4)+4=2$

$a_4=-\frac{1}{2}(a_3^2-3a_3)+4=-\frac{1}{2}(2^2-3\times2)+4=5$

$a_5=-\frac{1}{2}(a_4^2-3a_4)+4=-\frac{1}{2}(5^2-3\times5)+4=-1$

$a_6=-\frac{1}{2}(a_5^2-3a_5)+4=-\frac{1}{2}\{(-1)^2-3\times(-1)\}+4=2$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 $n\ge3$일 때, 3개의 수 2, 5, -1이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

이때 $34=2+3\times10+2$, $36=2+3\times11+1$이므로

$a_{34}+a_{36}=5+2=7$

1031 답 ④

이차방정식 $a_nx^2-a_{n+1}x+a_n=0$이 모든 자연수 n에 대하여 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=(-a_{n+1})^2-4a_n^2=0$, $(a_{n+1}+2a_n)(a_{n+1}-2a_n)=0$

$\therefore\ a_{n+1}=-2a_n$ 또는 $a_{n+1}=2a_n$

이때 수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 1이므로

$|a_2|=2, |a_3|=4, |a_4|=8, |a_5|=16, |a_6|=32$

즉, a_6의 최댓값은 32, 최솟값은 -32이므로 구하는 차는

$32-(-32)=64$

1032 답 511

$a_{n+1}=S_n+n+1\ (n=1, 2, 3, \dots)$ …… ㉠

㉠에서 $n\ge2$일 때 $a_n=S_{n-1}+n$이므로

$a_{n+1}-a_n=(S_n+n+1)-(S_{n-1}+n)$

$a_{n+1}-a_n=S_n-S_{n-1}+1$, $a_{n+1}-a_n=a_n+1$

$\therefore\ a_{n+1}=2a_n+1\ (n\ge2)$ …… ㉡

그런데 ㉠에 $n=1$을 대입하면

$a_2=S_1+1+1=1+1+1=3$ ($\because\ S_1=a_1=1$)

㉡에 $n=1$을 대입하면

$a_2=2a_1+1=2\times1+1=3$

즉, ㉡은 $n=1$일 때도 성립하므로 ㉡의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=2a_1+1=2\times1+1=3=2^2-1$

$a_3=2a_2+1=2\times3+1=7=2^3-1$

$a_4=2a_3+1=2\times7+1=15=2^4-1$

⋮

따라서 $a_n=2^n-1$이므로

$a_9=2^9-1=511$

1033 답 ②

$a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1}\times n$, 즉 $a_{n+1}=-a_n+(-1)^{n+1}\times n$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_2=-a_1+(-1)^2\times 1=-5+1=-4$

$a_3=-a_2+(-1)^3\times 2=4-2=2$

$a_4=-a_3+(-1)^4\times 3=-2+3=1$

$a_5=-a_4+(-1)^5\times 4=-1-4=-5$

$a_6=-a_5+(-1)^6\times 5=5+5=10$

이때 $a_6>a_1=5$이므로 $a_k>a_1$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

1034 답 62

$6S_n=(a_n+1)(a_n+2)-12=a_n^2+3a_n-10$ …… ㉠

㉠에서 $n\geq 2$일 때 $6S_{n-1}=a_{n-1}^2+3a_{n-1}-10$이므로

$6S_n-6S_{n-1}=(a_n^2+3a_n-10)-(a_{n-1}^2+3a_{n-1}-10)$

$6a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+3a_n-3a_{n-1}$

$a_n^2-a_{n-1}^2-3a_n-3a_{n-1}=0$

$(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})-3(a_n+a_{n-1})=0$

$(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1}-3)=0$

$\therefore a_n=-a_{n-1}$ 또는 $a_n=a_{n-1}+3$

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로

$a_n=a_{n-1}+3\ (n\geq 2)$ …… ㉡

$S_1=a_1$이므로 ㉠에 $n=1$을 대입하면

$6a_1=a_1^2+3a_1-10$, $a_1^2-3a_1-10=0$

$(a_1+2)(a_1-5)=0$ $\therefore a_1=5\ (\because a_1>0)$

㉡에 의하여 수열 $\{a_n\}$은 공차가 3인 등차수열이므로

$a_{20}=5+19\times 3=62$

1035 답 19900

$a_n+a_{n+1}=n^3$의 n에 1, 3, 5, …, 19를 차례로 대입하면

$a_1+a_2=1^3$

$a_3+a_4=3^3$

$a_5+a_6=5^3$

⋮

$a_{19}+a_{20}=19^3$

$\therefore \sum_{i=1}^{20} a_i=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{19}+a_{20})$

$=(1^3+2^3+3^3+\cdots+20^3)-(2^3+4^3+6^3+\cdots+20^3)$

$=\sum_{k=1}^{20}k^3-\sum_{k=1}^{10}(2k)^3=\sum_{k=1}^{20}k^3-8\sum_{k=1}^{10}k^3$

$=\left(\frac{20\times 21}{2}\right)^2-8\times\left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2$

$=44100-24200=19900$

1036 답 ②

$a_{n+1}=2a_n-3$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$a_2=2a_1-3=2\times 1-3=-1$

$a_3=2a_2-3=2\times(-1)-3=-5$

$a_4=2a_3-3=2\times(-5)-3=-13$

$a_5=2a_4-3=2\times(-13)-3=-29$

$a_6=2a_5-3=2\times(-29)-3=-61$

$b_{n+1}=b_n+n^2$의 n에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$b_2=b_1+1^2=1+1^2=2$

$b_3=b_2+2^2=2+2^2=6$

$b_4=b_3+3^2=6+3^2=15$

$b_5=b_4+4^2=15+4^2=31$

$b_6=b_5+5^2=31+5^2=56$

$\therefore c_5+c_6=(a_5+b_5)+(a_6-b_6)$

$=(-29+31)+(-61-56)$

$=2+(-117)=-115$

1037 답 ③

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}ka_k$에서

(i) $n=1$일 때,

$a_2=a_1=3$ …… ㉠

(ii) $n\geq 2$일 때,

$a_{n+1}-a_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}ka_k=na_n$

$\therefore a_{n+1}=(n+1)a_n$ …… ㉡

이때 ㉠은 ㉡에 $n=1$을 대입한 값과 같지 않으므로

$a_1=a_2=3$, $a_{n+1}=(n+1)a_n\ (n\geq 2)$

$a_{n+1}=(n+1)a_n$에 $n=40$을 대입하면

$a_{41}=41a_{40}$

이때 $a_{40}>0$이므로 $\frac{a_{41}}{a_{40}}=41$

$\therefore a_2+\frac{a_{41}}{a_{40}}=3+41=44$

1038 답 ⑤

ㄱ. $a_{n+1}=\frac{q}{p}a_n+\frac{r-2}{p}$이므로 $r=2$이면 $a_{n+1}=\frac{q}{p}a_n$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\frac{q}{p}$인 등비수열이다.

ㄴ. $p=q$이면 $a_{n+1}=a_n+\frac{r-2}{p}$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3, 공차가 $\frac{r-2}{p}$인 등차수열이므로

$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n\left\{2\times 3+(n-1)\times\frac{r-2}{p}\right\}}{2}$

$=\frac{n\{6p+(n-1)(r-2)\}}{2p}$

ㄷ. $r=3p-3q+2$이면 $r-2=pa_{n+1}-qa_n$에서

$3p-3q=pa_{n+1}-qa_n$

$pa_{n+1}=qa_n+3(p-q)$

위의 식의 n에 1, 2, …를 차례로 대입하면

$pa_2=qa_1+3(p-q)=3q+3(p-q)=3p$ $\therefore a_2=3$

$pa_3=qa_2+3(p-q)=3q+3(p-q)=3p$ $\therefore a_3=3$

⋮

$\therefore a_n=3$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

1039 답 16

$a_n \geq 0$이면 $a_{n+1}=a_n-2$, 즉 $a_{n+1}-a_n=-2$에서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 10, 공차가 -2인 등차수열이므로

$a_n=10+(n-1)\times(-2)=-2n+12$

$a_n \geq 0$에서 $-2n+12 \geq 0$

$\therefore n \leq 6$

이때 $a_6=0$이므로

$a_7=|a_6|-2=0-2=-2$

$a_8=|a_7|-2=2-2=0$

$a_9=|a_8|-2=0-2=-2$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 $n \geq 7$일 때 2개의 수 -2, 0이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k &= \sum_{k=1}^{6} a_k + \sum_{k=7}^{20} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{6} (-2k+12) + 7\times(-2+0) \\ &= -2\sum_{k=1}^{6} k + 12\times 6 - 14 \\ &= -2\times\frac{6\times 7}{2} + 72 - 14 \\ &= -42+58=16\end{aligned}$$

1040 답 6

㈎의 식의 n에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_3=a_1-2$

$a_4=a_2+2$

$a_5=a_3-2=(a_1-2)-2=a_1-4$

$a_6=a_4+2=(a_2+2)+2=a_2+4$

㈏에 의하여 수열 $\{a_n\}$은 6개의 수가 반복하여 나타나므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{6} a_k &= a_1+a_2+(a_1-2)+(a_2+2)+(a_1-4)+(a_2+4) \\ &= 3(a_1+a_2)\end{aligned}$$

이때 $50=8\times 6+2$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{50} a_k &= 8\sum_{k=1}^{6} a_k + a_{49} + a_{50} = 8\sum_{k=1}^{6} a_k + a_1 + a_2 \\ &= 24(a_1+a_2)+a_1+a_2 = 25(a_1+a_2)\end{aligned}$$

따라서 $25(a_1+a_2)=150$이므로

$a_1+a_2=6$

1041 답 149

a_3은 $a_1+a_2=2+3=5$를 4로 나눈 나머지이므로 $a_3=1$

a_4는 $a_2+a_3=3+1=4$를 4로 나눈 나머지이므로 $a_4=0$

a_5는 $a_3+a_4=1+0=1$을 4로 나눈 나머지이므로 $a_5=1$

a_6은 $a_4+a_5=0+1=1$을 4로 나눈 나머지이므로 $a_6=1$

a_7은 $a_5+a_6=1+1=2$를 4로 나눈 나머지이므로 $a_7=2$

a_8은 $a_6+a_7=1+2=3$을 4로 나눈 나머지이므로 $a_8=3$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 6개의 수 2, 3, 1, 0, 1, 1이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

$\sum_{k=1}^{m} a_k=199$에서 $\sum_{k=1}^{6} a_k=2+3+1+0+1+1=8$,

$199=24\times 8+7$, $\sum_{k=1}^{5} a_k=7$이므로

$\sum_{k=1}^{m} a_k=24\sum_{k=1}^{6} a_k+\sum_{k=1}^{5} a_k=199$

따라서 항의 개수는

$m=24\times 6+5=149$

1042 답 256

$a_1=3$, $a_2=9$이므로

$S_1=a_1=3$, $S_2=a_1+a_2=3+9=12$

$n \geq 2$일 때 $a_{n+1}S_n=a_nS_{n+1}$에서

$(S_{n+1}-S_n)S_n=(S_n-S_{n-1})S_{n+1}$

$S_{n+1}S_n-S_n^{\,2}=S_nS_{n+1}-S_{n-1}S_{n+1}$

$S_n^{\,2}=S_{n-1}S_{n+1}\ (n \geq 2)$

즉, 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $S_1=3$, 공비가 $\frac{S_2}{S_1}=4$인 등비수열이므로 일반항 S_n은

$S_n=3\times 4^{n-1}$

따라서 $S_5=3\times 4^4$이므로

$\frac{S_5}{3}=256$

1043 답 242

$a_{10}=2$, $a_{2n}=a_n-1$, $a_{2n+1}=2a_n+1$이므로

$a_{10}=a_5-1=2 \quad \therefore a_5=3$

$a_5=2a_2+1=3 \quad \therefore a_2=1$

$a_2=a_1-1=1 \quad \therefore a_1=2$

$\therefore a_3=2a_1+1=2\times 2+1=5$

$a_{2n}+a_{2n+1}=(a_n-1)+(2a_n+1)=3a_n$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{31} a_k &= a_1+\sum_{k=1}^{15}(a_{2k}+a_{2k+1}) = a_1+3\sum_{k=1}^{15} a_k \\ &= a_1+3\left\{a_1+\sum_{k=1}^{7}(a_{2k}+a_{2k+1})\right\} \\ &= 4a_1+3\sum_{k=1}^{7}(a_{2k}+a_{2k+1}) = 4a_1+3\sum_{k=1}^{7} 3a_k \\ &= 4a_1+9\left\{a_1+\sum_{k=1}^{3}(a_{2k}+a_{2k+1})\right\} \\ &= 13a_1+9\sum_{k=1}^{3} 3a_k = 13a_1+27\sum_{k=1}^{3} a_k \\ &= 13\times 2+27(2+1+5)=242\end{aligned}$$

1044 답 ③

$\begin{cases} a_{n+1}=4a_n+3b_n & \cdots\cdots ㉠ \\ b_{n+1}=3a_n+4b_n & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 이라 하고, ㉠+㉡을 하면

$a_{n+1}+b_{n+1}=7(a_n+b_n)$

즉, 수열 $\{a_n+b_n\}$은 첫째항이 $a_1+b_1=3+1=4$, 공비가 7인 등비수열이므로

$a_n+b_n=4\times 7^{n-1}$ $\cdots\cdots ㉢$

㉠에서

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 4a_n+3b_n = a_n+3(a_n+b_n) \\ &= a_n+12\times 7^{n-1}\ (\because ㉢)\end{aligned}$$

㉠−㉡을 하면

$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$

이 식이 모든 자연수 n에 대하여 성립하므로 a_n-b_n의 값은 일정하고 $a_n-b_n=a_1-b_1=3-1=2$

$\therefore a_n-b_n=2$ ····· ㉢

㉣+㉢을 하면 $2a_n=4\times7^{n-1}+2$

즉, $a_n=2\times7^{n-1}+1$이므로

$a_8=2\times7^7+1$

1045 답 ①

$a_{n+2}=(a_{n+1})^2-(a_n)^2$의 n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입하면

$a_3=(a_2)^2-(a_1)^2=1^2-1^2=0$

$a_4=(a_3)^2-(a_2)^2=0^2-1^2=-1$

$a_5=(a_4)^2-(a_3)^2=(-1)^2-0^2=1$

$a_6=(a_5)^2-(a_4)^2=1^2-(-1)^2=0$

$a_7=(a_6)^2-(a_5)^2=0^2-1^2=-1$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 $n\geq2$일 때, 3개의 수 1, 0, −1이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

$b_{n+1}=a_n-b_n+n$의 n에 1, 2, 3, …, 19를 차례로 대입하면

$b_2=a_1-b_1+1$

$b_3=a_2-b_2+2=a_2-(a_1-b_1+1)+2$

$=a_2-a_1+b_1+1$

$b_4=a_3-b_3+3=a_3-(a_2-a_1+b_1+1)+3$

$=a_3-a_2+a_1-b_1+2$

$b_5=a_4-b_4+4=a_4-(a_3-a_2+a_1-b_1+2)+4$

$=a_4-a_3+a_2-a_1+b_1+2$

$b_6=a_5-b_5+5=a_5-(a_4-a_3+a_2-a_1+b_1+2)+5$

$=a_5-a_4+a_3-a_2+a_1-b_1+3$

⋮

$b_{20}=a_{19}-a_{18}+\cdots+a_3-a_2+a_1-b_1+10$

$=\sum_{k=1}^{19}a_k-2\sum_{k=1}^{9}a_{2k}-b_1+10$

$=1+6(1+0-1)-2\times3(1-1+0)-k+10$

$=11-k$

$b_{20}=14$이므로

$14=11-k$ $\therefore k=-3$

1046 답 $a_{n+1}=2a_n$, $a_3=48$

$a_1=\frac{1}{2}\times6\times4=12$

n일이 지난 후에 살아 있는 박테리아 수가 a_n이면 하루에 절반이 죽고, 나머지는 각각 4마리로 분열하므로 $(n+1)$일이 지난 후에 살아 있는 박테리아 수 a_{n+1}은

$a_{n+1}=\frac{1}{2}\times a_n\times4=2a_n(n=1, 2, 3, \ldots)$

위의 식의 n에 1, 2를 차례로 대입하면

$a_2=2a_1=2\times12=24$

$\therefore a_3=2a_2=2\times24=48$

1047 답 ④

a_1은 1회 시행 후 수조에 들어 있는 물의 양이므로

$a_1=\frac{1}{2}\times20+8=18$

물 a_n L의 절반을 버리고 다시 8 L의 물을 채워 넣었을 때 수조에 들어 있는 물의 양이 a_{n+1} L이므로

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+8(n=1, 2, 3, \ldots)$

따라서 $p=\frac{1}{2}$, $q=8$이므로

$a_1+pq=18+\frac{1}{2}\times8=22$

1048 답 ②

n명의 학생이 서로 한 번씩 총 a_n회 악수를 했을 때, 1명의 학생이 새로 오면 n회의 악수를 더 하게 되므로

$a_{n+1}=a_n+n(n\geq2)$

1049 답 ④

n회 반복한 후 나누어지는 정삼각형 조각의 개수 a_n에서 가운데 정삼각형 조각의 각 변의 중점을 꼭짓점으로 하는 정삼각형을 그려 선을 따라 자르면 그 가운데 정삼각형 조각 1개는 더 작은 정삼각형 조각 4개로 나누어진다.

즉, 정삼각형 조각의 개수는 3개씩 늘어나므로

$a_{n+1}=a_n+3$

수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=4+(n-1)\times3=3n+1$

$\therefore a_7=3\times7+1=22$

1050 답 ④

n개의 직선에 1개의 직선을 추가하면 이 직선은 기존의 n개의 직선과 각각 한 번씩 만나므로 $(n+1)$개의 새로운 영역이 생긴다.

즉, $(n+1)$개의 직선에 의하여 나누어지는 영역은 n개의 직선에 의하여 나누어지는 영역보다 $(n+1)$개가 많으므로

$a_{n+1}=a_n+n+1$

$a_3=7$이므로

$a_4=a_3+3+1=7+3+1=11$

$a_5=a_4+4+1=11+4+1=16$

$a_6=a_5+5+1=16+5+1=22$

$\therefore a_7=a_6+6+1=22+6+1=29$

1051 답 ⑤

주어진 그림에서

$a_1=4=2\times2$

$a_2=a_1+2\times3$

$a_3=a_2+2\times4$

⋮

$\therefore a_{n+1}=a_n+2(n+2)(n=1, 2, 3, \ldots)$

따라서 $f(n)=2(n+2)$이므로

$f(10)=24$

1052 답 ②

$P_n(x_n, y_n)$이므로 $Q_n(x_n, 0)$

선분 P_nQ_n을 3 : 1로 내분하는 점은

$R_n\left(x_n, \frac{3\times0+1\times y_n}{3+1}\right)$ $\therefore R_n\left(x_n, \frac{y_n}{4}\right)$

점 R_n을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식은 $y=\frac{y_n}{4}$

이 직선이 곡선 $y=x^2$과 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표는

$\frac{y_n}{4}=x^2$, $x=\frac{\sqrt{y_n}}{2}$ ($\because x>0$)

$\therefore x_{n+1}=\frac{\sqrt{y_n}}{2}$ ····· ㉠

점 $P_n(x_n, y_n)$은 곡선 $y=x^2$ 위의 점이므로 $y_n=x_n^2$

이것을 ㉠에 대입하면

$x_{n+1}=\frac{x_n}{2}$ ($\because x_n>0$)

1053 답 ④

n칸의 계단을 오를 때, 마지막에 1칸 또는 2칸 또는 5칸을 올라가야 한다.

마지막에 1칸을 오르는 경우, 그 직전에 $(n-1)$칸의 계단까지 올라야 하므로 그 방법의 수는 a_{n-1}

마지막에 2칸을 오르는 경우, 그 직전에 $(n-2)$칸의 계단까지 올라야 하므로 그 방법의 수는 a_{n-2}

마지막에 5칸을 오르는 경우, 그 직전에 $(n-5)$칸의 계단까지 올라야 하므로 그 방법의 수는 a_{n-5}

따라서 n칸의 계단을 오르는 방법의 수 a_n은

$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-5}(n\geq6)$

$\therefore k=5$

5칸의 계단을 오르는 방법의 수는

a_1부터 a_5까지 차례로 구하면

$a_1=1$

$a_2=2$

$a_3=a_1+a_2=1+2=3$

$a_4=a_2+a_3=2+3=5$

$a_5=a_3+a_4+1=3+5+1=9$

└ 5칸을 1번에 오르는 경우

$\therefore a_k-k=a_5-5=9-5=4$

1054 답 ③

주어진 그림에서

$a_1=1$

$a_2=a_1+6$

$a_3=a_2+12$

⋮

즉, $a_{n+1}=a_n+6n$이므로 $f(n)=6n$

$b_1=6$

$b_2=b_1+12$

$b_3=b_2+12$

⋮

즉, $b_{n+1}=b_n+12$이므로 $b_n=6+(n-1)\times12=12n-6$

$\therefore g(n)=12n-6$

$\therefore f(14)-g(7)=84-78=6$

1055 답 165

$a_1=3$

$a_2=a_1+6=a_1+3\times2$

$a_3=a_2+9=a_2+3\times3$

⋮

$\therefore a_{n+1}=a_n+3(n+1)$

$a_{n+1}=a_n+3(n+1)$의 n에 1, 2, 3, …, 9를 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$a_2=a_1+3\times2$

$a_3=a_2+3\times3$

$a_4=a_3+3\times4$

⋮

$+)\ a_{10}=a_9+3\times10$

$a_{10}=a_1+3\times2+3\times3+\cdots+3\times10$

$=3\times1+3\times2+3\times3+\cdots+3\times10$

$=\sum_{k=1}^{10}3k=3\times\frac{10\times11}{2}=165$

1056 답 $\frac{19}{5}$

각 시행에서 소금물 40 g을 덜어내고 다시 40 g을 넣으므로 전체 소금물의 양은 100 g으로 일정하다.

n회 시행 후 그릇에는 농도가 a_n %인 소금물 100 g이 들어 있다.

$(n+1)$회 시행에서 농도가 a_n %인 소금물 100 g 중 40 g을 덜어내고 농도가 8 %인 소금물 40 g을 다시 넣어 농도가 a_{n+1} %인 소금물 100 g이 되므로 소금의 양을 이용하여 식을 세우면

$(100-40)\times\frac{a_n}{100}+40\times\frac{8}{100}=100\times\frac{a_{n+1}}{100}$

$\therefore a_{n+1}=\frac{3}{5}a_n+\frac{16}{5}$

따라서 $p=\frac{3}{5}$, $q=\frac{16}{5}$이므로 $p+q=\frac{19}{5}$

1057 답 (1, 1)

$x_1=2$, $y_1=1$이므로

$(x_2, y_2)=(x_1, (y_1-1)^2)=(2, 0)$

$(x_3, y_3)=((x_2-1)^2, y_2)=(1, 0)$

$(x_4, y_4)=(x_3, (y_3-1)^2)=(1, 1)$

$(x_5, y_5)=((x_4-1)^2, y_4)=(0, 1)$

$(x_6, y_6)=(x_5, (y_5-1)^2)=(0, 0)$

$(x_7, y_7)=((x_6-1)^2, y_6)=(1, 0)$

⋮

즉, 순서쌍 (x_n, y_n)은 $n\geq3$일 때, 4개의 순서쌍 (1, 0), (1, 1), (0, 1), (0, 0)이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

따라서 $2052=2+4\times512+2$이므로

$(x_{2052}, y_{2052})=(x_4, y_4)=(1, 1)$

1058 답 ①

(가)에서 $P_1(1, 1)$이므로 $\overline{OP_1}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

점 Q는 한 번에 $\sqrt{2}$만큼 이동하므로 점 Q가 원점에서 점 P_1로 갈 때 이동하는 횟수는 1이다.

(나)에서

$x_{n+1}-x_n=n+1$, $y_{n+1}-y_n=(-1)^n\times(n+1)$

$\therefore \overline{P_nP_{n+1}}=\sqrt{(x_{n+1}-x_n)^2+(y_{n+1}-y_n)^2}$

$=\sqrt{(n+1)^2+\{(-1)^n\times(n+1)\}^2}$

$=\sqrt{2(n+1)^2}=\sqrt{2}(n+1)$

점 Q가 한 번에 $\sqrt{2}$만큼 이동하므로 점 Q가 점 P_n에서 점 P_{n+1}로 갈 때 이동하는 횟수는 $n+1$이다.

즉, 점 Q가 원점에서 출발하여 점 P_n에 도착할 때까지 이동하는 횟수는

$1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

이때 $\dfrac{10\times11}{2}=55$이므로 점 Q가 원점에서 출발하여 55번 이동하여 도착한 점은 점 P_{10}이다.

점 P_{10}의 y좌표는 y_{10}이므로 $y_{n+1}=y_n+(-1)^n\times(n+1)$의 n에 1, 2, 3, ..., 9를 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$y_2=y_1+(-1)\times2$

$y_3=y_2+(-1)^2\times3$

$y_4=y_3+(-1)^3\times4$

$\vdots$

$+)\ y_{10}=y_9+(-1)^9\times10$

$y_{10}=y_1+(-2+3-4+\cdots-10)$

$=1+(-2+3)+(-4+5)+(-6+7)+(-8+9)-10$

$=1+4-10=-5$

따라서 구하는 점 Q의 y좌표는 -5이다.

다른 풀이

점 P_{10}의 y좌표인 y_{10}을 구할 때, 주어진 관계식과 그림에서 수열 $\{y_n\}$은 1, −1, 2, −2, 3, −3, ...이므로

$y_{2k-1}=k$, $y_{2k}=-k$ (k는 자연수)

$\therefore y_{10}=-5$

1059 답 ①

점 $A(64, 2^{64})$에서 점 P_1의 y좌표는 2^{64}이므로 x좌표는

$16^x=2^{64}$, $2^{4x}=2^{64}$

$4x=64$ $\therefore x=16$ $\therefore P_1(16, 2^{64})$

점 Q_1의 x좌표는 점 P_1의 x좌표와 같으므로 $x_1=16$

점 Q_n의 x좌표는 x_n이므로 y좌표는

$y=2^{x_n}$ $\therefore Q_n(x_n, 2^{x_n})$

점 P_{n+1}의 x좌표는 점 $Q_{n+1}(x_{n+1}, 2^{x_{n+1}})$의 x좌표와 같으므로 점 P_{n+1}의 y좌표는

$y=16^{x_{n+1}}$ $\therefore P_{n+1}(x_{n+1}, 16^{x_{n+1}})$

이때 점 P_{n+1}의 y좌표는 점 Q_n의 y좌표와 같으므로

$16^{x_{n+1}}=2^{x_n}$, $2^{4x_{n+1}}=2^{x_n}$

$4x_{n+1}=x_n$ $\therefore x_{n+1}=\dfrac{1}{4}x_n$

수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 16, 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이므로

$x_n=16\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}=2^{6-2n}$

$x_n<\dfrac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되려면

$x_6<\dfrac{1}{k}\le x_5$

이때 $x_6=\dfrac{1}{64}$, $x_5=\dfrac{1}{16}$이므로

$\dfrac{1}{64}<\dfrac{1}{k}\le\dfrac{1}{16}$ $\therefore 16\le k<64$

따라서 자연수 k의 개수는

$64-16=48$

다른 풀이

x_n을 구할 때,

점 $A(64, 2^{64})$에서 점 P_1의 y좌표는 2^{64}이므로 x좌표는

$16^x=2^{64}$, $2^{4x}=2^{64}$

$4x=64$ $\therefore x=16$ $\therefore P_1(16, 2^{64})$

점 Q_1의 x좌표는 16이므로 y좌표는

$y=2^{16}$ $\therefore Q_1(16, 2^{16})$

점 P_2의 y좌표는 2^{16}이므로 x좌표는

$16^x=2^{16}$, $2^{4x}=2^{16}$

$4x=16$ $\therefore x=4$ $\therefore P_2(4, 2^{16})$

점 Q_2의 x좌표는 4이므로 y좌표는

$y=2^4$ $\therefore Q_2(4, 2^4)$

점 P_3의 y좌표는 2^4이므로 x좌표는

$16^x=2^4$, $2^{4x}=2^4$

$4x=4$ $\therefore x=1$ $\therefore P_3(1, 2^4)$

점 Q_3의 x좌표는 1이므로 y좌표는

$y=2^1$ $\therefore Q_3(1, 2)$

$\vdots$

즉, 수열 $\{x_n\}$은 16, 4, 1, ...이므로 첫째항이 16, 공비가 $\dfrac{1}{4}$인 등비수열이다.

$\therefore x_n=16\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}=2^{6-2n}$

1060 답 ⑤

(i) $n=1$일 때,

$4^1-1=3$은 3의 배수이다.

(ii) $n=k$일 때, 4^n-1이 3의 배수라고 가정하면

$4^k-1=3m$ (m은 자연수)이므로

$4^k=3m+1$

$n=k+1$일 때,

$4^{k+1}-1=\boxed{(가)\ 4}\times4^k-1$

$=4\times(3m+1)-1$

$=12m+3=\boxed{(나)\ 3}(4m+1)$

이므로 $n=k+1$일 때도 4^n-1은 3의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 4^n-1은 3의 배수이다.

따라서 구하는 수의 합은

$4+3=7$

1061 답 1

(i) $n=1$일 때, (좌변)=(우변)=$\boxed{(가)\ 5}$이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$1+2\times2+3\times2^2+\cdots+(k+1)\times2^k=\boxed{(나)\ k\times2^{k+1}+1}$

양변에 $\boxed{(다)\ (k+2)\times2^{k+1}}$을/를 더하면

$1+2\times2+3\times2^2+\cdots+(k+1)\times2^k+\boxed{(다)\ (k+2)\times2^{k+1}}$

$=\boxed{(나)\ k\times2^{k+1}+1}+\boxed{(다)\ (k+2)\times2^{k+1}}$

$=(2k+2)\times2^{k+1}+1=(k+1)\times2^{k+2}+1$

따라서 $n=k+1$일 때도 (★)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

따라서 $a=5$, $f(k)=k\times2^{k+1}+1$, $g(k)=(k+2)\times2^{k+1}$이므로

$\dfrac{f(2)-g(1)}{a}=\dfrac{17-12}{5}=1$

1062 답 ⑤

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\dfrac{1}{1}=1$, (우변)$=\dfrac{1+1}{2}=1$

이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}\le\dfrac{k+1}{2}$

양변에 $\dfrac{1}{k+1}$을 더하면

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}\le\dfrac{k+1}{2}+\dfrac{1}{k+1}$

이때

$\dfrac{k+2}{2}-\left(\dfrac{k+1}{2}+\dfrac{1}{k+1}\right)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{k+1}=\dfrac{\boxed{(가)\ k-1}}{2(k+1)}\ge0$

즉, $\dfrac{k+1}{2}+\dfrac{1}{k+1}\le\dfrac{k+2}{2}$이므로

$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+1}\le\boxed{(나)\ \dfrac{k+2}{2}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 (★)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

따라서 $f(k)=k-1$, $g(k)=\dfrac{k+2}{2}$이므로

$f(2)+g(6)=1+4=5$

1063 답 ③

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=a_1=3$, (우변)$=2^1+\dfrac{1}{1}=3$

이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$a_k=2^k+\dfrac{1}{k}$이므로

$ka_{k+1}=2ka_k-\dfrac{k+2}{k+1}=2k\left(2^k+\dfrac{1}{k}\right)-\dfrac{k+2}{k+1}$

$=\boxed{(가)\ k2^{k+1}+2}-\dfrac{k+2}{k+1}$

$=k2^{k+1}+\dfrac{2(k+1)-(k+2)}{k+1}$

$=k2^{k+1}+\boxed{(나)\ \dfrac{k}{k+1}}$

따라서 $a_{k+1}=2^{k+1}+\dfrac{1}{k+1}$이므로

$n=k+1$일 때도 (★)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

따라서 $f(k)=k2^{k+1}+2$, $g(k)=\dfrac{k}{k+1}$이므로

$f(1)g(5)=6\times\dfrac{5}{6}=5$

1064 답 ④

(i) $n=1$일 때, (좌변)=3, (우변)=3이므로 (∗)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (∗)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$

이다.

$n=m+1$일 때,

$\sum_{k=1}^{m+1}a_k=\sum_{k=1}^{m}a_k+a_{m+1}$

$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$

$+\{2^{2(m+1)}-1\}\times2^{(m+1)m}+m\times2^{-(m+1)}$

$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times2^{-m}$

$+(2^{2m+2}-1)\times\boxed{(가)\ 2^{m(m+1)}}+m\times2^{-m-1}$

$=2^{m(m+1)}\times2^{2m+2}+\{-(m+1)+m\times2^{-1}\}\times2^{-m}$

$=\boxed{(가)\ 2^{m(m+1)}}\times\boxed{(나)\ 2^{2m+2}}-\dfrac{m+2}{2}\times2^{-m}$

$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times2^{-(m+1)}$

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times2^{-n}$

이다.

따라서 $f(m)=2^{m(m+1)}$, $g(m)=2^{2m+2}$이므로

$\dfrac{g(7)}{f(3)}=\dfrac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16$

1065 답 ③

(i) $n=1$일 때,

$a_5=a_4+a_3=(a_3+a_2)+(a_2+a_1)$

$=a_3+2a_2+a_1=(a_2+a_1)+2a_2+a_1$

$=3a_2+2a_1=5$

이므로 (★)은 참이다.

(ii) $n=k$일 때, (★)이 참이라고 가정하면

$a_{5k}=5m$(m은 자연수)이므로

$n=k+1$일 때,

$a_{5(k+1)}=a_{5k+4}+a_{5k+3}=a_{5k+3}+2a_{5k+2}+a_{5k+1}$

$=3a_{5k+2}+2a_{5k+1}=\boxed{(가)\ 5}a_{5k+1}+\boxed{(나)\ 3}a_{5k}$

$=5a_{5k+1}+3\times5m$

$=\boxed{(가)\ 5}(a_{5k+1}+\boxed{(다)\ 3m})$

따라서 $n=k+1$일 때도 a_{5n}은 5의 배수이므로 (★)은 참이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (★)은 참이다.

따라서 $a=5$, $b=3$, $f(m)=3m$이므로

$f(a+b)=f(8)=24$

1066 답 ②

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=1\times1=1$, (우변)$=\dfrac{1\times2\times3}{6}=1$

이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$1\times k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+k\times1=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}$

$n=k+1$일 때,

$1\times(k+1)+2k+3(k-1)+\cdots+k\times2+(k+1)\times1$

$=(1\times k+1)+\{2(k-1)+2\}+\{3(k-2)+3\}$

$+\cdots+(k\times1+k)+k+1$

$=1\times k+2(k-1)+3(k-2)+\cdots+k\times1$

$+1+2+3+\cdots+k+(k+1)$

$=\dfrac{k(k+1)(k+2)}{6}+\boxed{(\text{가})\ \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}}$

$=\boxed{(\text{나})\ \dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}}$

따라서 $n=k+1$일 때도 (★)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

따라서 $f(k)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$, $g(k)=\dfrac{(k+1)(k+2)(k+3)}{6}$

이므로

$g(f(2))=g(6)=84$

1067 답 ⑤

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=2S_1-S_1=S_1=a_1=1$, (우변)$=1$

이므로 (*)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$(m+1)S_m-\sum\limits_{k=1}^{m}S_k=\sum\limits_{k=1}^{m}k^3$이다.

$n=m+1$일 때 (*)이 성립함을 보이자.

$(m+2)S_{m+1}-\sum\limits_{k=1}^{m+1}S_k$

$=(m+2)S_{m+1}-\left(\sum\limits_{k=1}^{m}S_k+S_{m+1}\right)$

$=(m+2-1)S_{m+1}-\sum\limits_{k=1}^{m}S_k$

$=\boxed{(\text{가})\ (m+1)}S_{m+1}-\sum\limits_{k=1}^{m}S_k$

$=(m+1)(S_m+a_{m+1})-\sum\limits_{k=1}^{m}S_k$

$=(m+1)S_m+(m+1)a_{m+1}-\sum\limits_{k=1}^{m}S_k$

$=\boxed{(\text{가})\ (m+1)}S_m+\boxed{(\text{나})\ (m+1)^3}-\sum\limits_{k=1}^{m}S_k$

$=\sum\limits_{k=1}^{m}k^3+(m+1)^3$

$=\sum\limits_{k=1}^{m+1}k^3$

따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 주어진 식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

따라서 $f(m)=m+1$, $g(m)=(m+1)^3$이므로

$f(2)+g(1)=3+8=11$

1068 답 ②

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}\ge2-\dfrac{1}{\sqrt{k}}$

양변에 $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$을 더하면

$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\ge2-\dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$

이때 $4k\ge k+1$에서 $\sqrt{4k}\ge\sqrt{k+1}$이므로 $2\sqrt{k}-\sqrt{k+1}\ge0$

따라서

$\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\right)-\left(\boxed{(\text{가})\ 2-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}}\right)$

$=\dfrac{2}{\sqrt{k+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{k}}=\dfrac{\boxed{(\text{나})\ 2\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}}{\sqrt{k(k+1)}}\ge0$

즉, $2-\dfrac{1}{\sqrt{k}}+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\ge2-\dfrac{2}{\sqrt{k+1}}$에서

$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}\ge2-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$

이므로 $n=k+1$일 때도 (★)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

따라서 $f(k)=2-\dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$, $g(k)=2\sqrt{k}-\sqrt{k+1}$이므로

$\dfrac{g(3)}{f(8)}=\dfrac{2\sqrt{3}-2}{\frac{5}{3}}=\dfrac{6}{5}(\sqrt{3}-1)$

1069 답 ③

(i) $n=1$일 때, $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{\sqrt{4}}$이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{6}\times\cdots\times\dfrac{2k-1}{2k}\le\dfrac{1}{\sqrt{3k+1}}$

양변에 $\dfrac{2k+1}{2k+2}$을 곱하면

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{6}\times\cdots\times\dfrac{2k-1}{2k}\times\dfrac{2k+1}{2k+2}$

$\le\dfrac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\dfrac{2k+1}{2k+2}=\dfrac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\dfrac{1}{\frac{2k+2}{2k+1}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\dfrac{1}{1+\boxed{(\text{가})\ \dfrac{1}{2k+1}}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{\left(1+\boxed{(\text{가})\ \dfrac{1}{2k+1}}\right)^2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3k+1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{2}{2k+1}+\left(\dfrac{1}{2k+1}\right)^2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\cdot\left(\boxed{(\text{가})\ \dfrac{1}{2k+1}}\right)+(3k+1)\cdot\left(\boxed{(\text{가})\ \dfrac{1}{2k+1}}\right)^2}}$

$<\dfrac{1}{\sqrt{3k+1+2(3k+1)\cdot\left(\boxed{(\text{가})\ \dfrac{1}{2k+1}}\right)+\boxed{(\text{나})\ 2k+1}\cdot\left(\boxed{(\text{가})\ \dfrac{1}{2k+1}}\right)^2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{3k+1+\dfrac{2(3k+1)+1}{2k+1}}}=\dfrac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}}$

III. 수열

따라서 $n=k+1$일 때도 (★)이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

따라서 $f(k)=\frac{1}{2k+1}$, $g(k)=2k+1$이므로

$f(4)\times g(13)=\frac{1}{9}\times 27=3$

1070 답 $\frac{1}{4}$

$a_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}$이라 할 때, $a_n>1$임을 보인다.

(i) $n=1$일 때,

$a_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$ [(가) $\frac{13}{12}$] >1

이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $a_k>1$이 성립한다고 가정하면

$a_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{3k+1}>1$

$n=k+1$일 때,

$a_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{3k+4}$

$=a_k+\left(\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+3}+\frac{1}{3k+4}\right)-$ [(나) $\frac{1}{k+1}$]

이때 $(3k+2)(3k+4)<(3k+3)^2$이므로 → $9k^2+18k+8<9k^2+18k+9$

$\frac{1}{3k+2}+\frac{1}{3k+4}=\frac{6k+6}{(3k+2)(3k+4)}$

$>\frac{2(3k+3)}{(3k+3)^2}=$ [(다) $\frac{2}{3k+3}$]

따라서

$a_{k+1}>a_k+\left(\frac{1}{3k+3}+\right.$ [(다) $\frac{2}{3k+3}$] $\left.\right)-$ [(나) $\frac{1}{k+1}$] $=a_k>1$

따라서 $n=k+1$일 때도 (★)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

따라서 $a=\frac{13}{12}$, $f(k)=\frac{1}{k+1}$, $g(k)=\frac{2}{3k+3}$이므로

$af(12)+g(3)=\frac{13}{12}\times\frac{1}{13}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$

1071 답 ①

(i) $n=$ [(가) 2]일 때, $2^3-2=6$은 3의 배수이다.

(ii) $n=k(k\geq 2)$일 때, k^3-k가 3의 배수라고 가정하면

$(k+1)^3-(k+1)=(k^3+3k^2+3k+1)-(k+1)$

$=k^3+3k^2+2k$

$=$ [(나) k^3-k] $+3(k^2+k)$

이때 [(나) k^3-k], $3(k^2+k)$는 모두 3의 배수이다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상의 자연수 n에 대하여 n^3-n은 3의 배수이다.

따라서 $a=2$, $f(k)=k^3-k$이므로

$\frac{f(2)}{a}=\frac{6}{2}=3$

1072 답 ①

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=(1+h)^2=1+2h+h^2$, (우변)$=$ [(가) $1+2h$]

이므로 (★)이 성립한다. → $h^2>0$

(ii) $n=k(k\geq 2)$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$(1+h)^k>1+kh$

양변에 $1+h$를 곱하면

$(1+h)^{k+1}>(1+kh)(1+h)$

$=1+(k+1)h+kh^2$ → $kh^2>0$

$>1+($ [(나) $k+1$] $)h$

따라서 $f(h)=1+2h$, $g(k)=k+1$이므로

$f(-1)g(1)=(-1)\times 2=-2$

1073 답 ③

(i) $n=2$일 때, (좌변)$=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}=$ [(가) $\frac{5}{4}$],

(우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq 2)$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$

양변에 [(나) $\frac{1}{(k+1)^2}$]을/를 더하면

$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(k+1)^2}$

$<2-\frac{1}{k}+$ [(나) $\frac{1}{(k+1)^2}$]

$=2-\frac{(k+1)^2-k}{k(k+1)^2}=2-\frac{k^2+k+1}{k(k+1)^2}$

$<2-\frac{k^2+k}{k(k+1)^2}$

$=2-\frac{$ [(다) $k(k+1)$] $}{k(k+1)^2}=2-\frac{1}{k+1}$

따라서 $n=k+1$일 때도 (★)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq 2$인 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

따라서 $a=\frac{5}{4}$, $f(k)=\frac{1}{(k+1)^2}$, $g(k)=k(k+1)$이므로

$a-f(1)+g(1)=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}+2=3$

1074 답 ②

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=a_1=1$,

(우변)$=2(a_2-1)=2\times\left(\frac{3}{2}-1\right)=1\left(\because\ a_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\right)$

에서 (좌변)$=$(우변)$=$ [(가) 1]이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq 2)$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{k-1}=k(a_k-1)$

양변에 a_k를 더하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k=k(a_k-1)+a_k$

$=$ [(나) $(k+1)a_k-k$]

이때 $a_{k+1}=a_k+\frac{1}{k+1}$에서 $a_k=a_{k+1}-$ [(다) $\frac{1}{k+1}$] 이므로

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_k=(k+1)\left(a_{k+1}-\frac{1}{k+1}\right)-k$

$=(k+1)a_{k+1}-1-k$

$=(k+1)(a_{k+1}-1)$

따라서 $n=k+1$일 때도 (★)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상의 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

따라서 $a=1$, $f(k)=(k+1)a_k-k$, $g(k)=\frac{1}{k+1}$이므로

$\{a+f(2)\}g(3)=\left(1+\frac{5}{2}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{7}{8}$

1075 답 ①

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=$ $\boxed{(가)\ \frac{7}{12}}$,

(우변)$=\frac{13}{24}$

이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq2)$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}>\frac{13}{24}$

$n=k+1$일 때,

$\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\frac{1}{k+4}+\cdots+\frac{1}{2k+2}$

$=\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)$

$+\frac{1}{2k+1}+\boxed{(나)\ \frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}}$

이때

$\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}=\frac{2(k+1)+2k+1-2(2k+1)}{2(2k+1)(k+1)}$

$=\boxed{(다)\ \frac{1}{2(2k+1)(k+1)}}>0$

이므로 $n=k+1$일 때도 (★)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상의 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

따라서 $a=\frac{7}{12}$, $f(k)=\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$,

$g(k)=\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$이므로

$a+f(5)+g(2)=\frac{7}{12}+\left(-\frac{1}{12}\right)+\frac{1}{30}=\frac{8}{15}$

1076 답 ②

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{12}$,

(우변)$=\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$

이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq2)$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)$

양변에 $\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}=$ $\boxed{(가)\ \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}}$을/를

더하면

$\sum_{i=1}^{k+1}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i}\right)<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(가)\ \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}}$

한편 $\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(가)\ \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}}$에서

$2(2k+1)>4k$이므로

$\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(가)\ \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}}$

$=\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{2(2k+1)(k+1)}$

$<\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\boxed{(나)\ \frac{1}{4k(k+1)}}$

$=\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\frac{1}{4}\left(3-\frac{1}{k+1}\right)$

따라서 $n=k+1$일 때도 (★)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 $n\geq2$인 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

따라서 $f(k)=\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$, $g(k)=\frac{1}{4k(k+1)}$이므로

$\frac{g(2)}{f(3)}=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{56}}=\frac{7}{3}$

1077 답 ③

(i) $n=3$일 때, $A_3=\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$이므로

$a_3=\frac{2+3+3}{3}=\frac{8}{3}$이고 $\frac{2\times3+2}{3}=\frac{8}{3}$이다.

그러므로 $a_n=\frac{2n+2}{3}$가 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq3)$일 때, $a_k=\frac{2k+2}{3}$가 성립한다고 가정하자.

$n=k+1$일 때,

$A_{k+1}=A_k\cup\{(1, k+1), (2, k+1), \ldots, (k, k+1)\}$

집합 A_k의 원소의 개수는 k 이하의 자연수 중에서 서로 다른 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_kC_2=\boxed{(가)\ \frac{k(k-1)}{2}}$

$a_k=\frac{2k+2}{3}$이고 집합 A_k의 원소의 개수가 $\boxed{(가)\ \frac{k(k-1)}{2}}$이므로 집합 A_n의 모든 원소 (p, q)에 대하여 q의 값의 총합은

$\frac{k(k-1)}{2}\times\frac{2k+2}{3}$

집합 $\{(1, k+1), (2, k+1), \ldots, (k, k+1)\}$에서 모든 원소 (p, q)에 대하여 q의 값은 $k+1$이 k개이므로 총합은

$k(k+1)$

$\therefore a_{k+1}=\frac{\boxed{(가)\ \frac{k(k-1)}{2}}\times\frac{2k+2}{3}+\boxed{(나)\ k(k+1)}}{{}_{k+1}C_2}$

$=\frac{\frac{k(k-1)(k+1)}{3}+k(k+1)}{\frac{k(k+1)}{2}}$

$=\frac{2k+4}{3}=\frac{2(k+1)+2}{3}$

따라서 $n=k+1$일 때도 $a_n=\frac{2n+2}{3}$가 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 3 이상의 자연수 n에 대하여

$a_n=\frac{2n+2}{3}$이다.

따라서 $f(k)=\frac{k(k-1)}{2}$, $g(k)=k(k+1)$이므로

$f(10)+g(9)=45+90=135$

최고수준 도전 기출 260~261쪽

1078 답 ④

전략 (가), (나)에 $n=1, 2, 3, 4$를 적당히 대입하여 a_n의 값을 구한다.

(가), (나)에 각각 $n=1$을 대입하면

$a_2=a_2\times a_1+2$ ····· ㉠

$a_3=a_2\times a_1-1$

두 식을 변끼리 빼면

$a_2-a_3=3$

$\therefore a_3=a_2-3$ ····· ㉡

(가)에 $n=2$를 대입하면

$a_4=a_2\times a_2+2=a_2^2+2$ ····· ㉢

(나)에 $n=3$을 대입하면

$a_7=a_2\times a_3-1=a_2\times(a_2-3)-1$ ($\because$ ㉡)

$=a_2^2-3a_2-1$

이때 $a_4-a_7=15$이므로

$(a_2^2+2)-(a_2^2-3a_2-1)=15,\ 3a_2+3=15$

$3a_2=12$ $\therefore a_2=4$

$a_2=4$를 ㉠에 대입하면

$4=4\times a_1+2$ $\therefore a_1=\frac{1}{2}$

$a_2=4$를 ㉢에 대입하면

$a_4=4^2+2=18$

(가)에 $n=4$를 대입하면

$a_8=a_2\times a_4+2=4\times 18+2=74$

$\therefore \frac{a_8}{a_1}=\frac{74}{\frac{1}{2}}=148$

1079 답 ④

전략 a_5, a_4, a_3, a_2, a_1의 값을 차례로 구한다. 이때 n이 a_n의 약수인 경우와 약수가 아닌 경우로 나누어 구한다.

5가 a_5의 약수이면 $a_6=\frac{a_5}{5}$이므로

$2=\frac{a_5}{5}$ $\therefore a_5=10$

5가 a_5의 약수가 아니면 $a_6=3a_5+1$이므로

$2=3a_5+1$ $\therefore a_5=\frac{1}{3}$

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 $a_5=10$

(i) 4가 a_4의 약수일 때,

$a_5=\frac{a_4}{4}$이므로 $10=\frac{a_4}{4}$ $\therefore a_4=40$

① 3이 a_3의 약수일 때,

$a_4=\frac{a_3}{3}$이므로 $40=\frac{a_3}{3}$ $\therefore a_3=120$

ⓐ 2가 a_2의 약수일 때,

$a_3=\frac{a_2}{2}$이므로 $120=\frac{a_2}{2}$ $\therefore a_2=240$

이때 1은 모든 수의 약수이므로

$a_2=a_1=240$

ⓑ 2가 a_2의 약수가 아닐 때,

$a_3=3a_2+1$이므로 $120=3a_2+1$ $\therefore a_2=\frac{119}{3}$

이는 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

② 3이 a_3의 약수가 아닐 때,

$a_4=3a_3+1$이므로 $40=3a_3+1$ $\therefore a_3=13$

ⓐ 2가 a_2의 약수일 때,

$a_3=\frac{a_2}{2}$이므로 $13=\frac{a_2}{2}$ $\therefore a_2=26$

$\therefore a_1=a_2=26$

ⓑ 2가 a_2의 약수가 아닐 때,

$a_3=3a_2+1$이므로 $13=3a_2+1$ $\therefore a_2=4$

이는 2가 a_2의 약수가 아니라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) 4가 a_4의 약수가 아닐 때,

$a_5=3a_4+1$이므로 $10=3a_4+1$ $\therefore a_4=3$

① 3이 a_3의 약수일 때,

$a_4=\frac{a_3}{3}$이므로 $3=\frac{a_3}{3}$ $\therefore a_3=9$

ⓐ 2가 a_2의 약수일 때,

$a_3=\frac{a_2}{2}$이므로 $9=\frac{a_2}{2}$ $\therefore a_2=18$

$\therefore a_1=a_2=18$

ⓑ 2가 a_2의 약수가 아닐 때,

$a_3=3a_2+1$이므로 $9=3a_2+1$ $\therefore a_2=\frac{8}{3}$

이는 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

② 3이 a_3의 약수가 아닐 때,

$a_4=3a_3+1$이므로 $3=3a_3+1$ $\therefore a_3=\frac{2}{3}$

이는 모든 항이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a_1=240$ 또는 $a_1=26$ 또는 $a_1=18$

따라서 모든 a_1의 값의 합은

$240+26+18=284$

1080 답 ①

전략 수열 $\{a_n\}$의 규칙을 찾고, a_n의 값이 음수인 경우와 양수인 경우로 나누어 각 항의 값을 구한다.

$a_4+a_5=10$에서 $a_5=10-a_4$

$a_4\le 0$일 때, $a_5=-a_4+6$에서

$10-a_4=-a_4+6$이므로 등식이 성립하지 않는다.

즉, $a_4>0$이므로 $a_5=a_4-4$에서

$10-a_4=a_4-4,\ 2a_4=14$

$\therefore a_4=7$

$\therefore a_5=10-a_4=10-7=3$

$a_5>0$이므로

$a_6=a_5-4=3-4=-1$

$a_6\le 0$이므로

$a_7=-a_6+6=-(-1)+6=7$

수열 $\{a_n\}$은 $n\ge 4$일 때 3개의 수 7, 3, -1이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

$a_{n+1}=\begin{cases}-a_n+6 & (a_n\le 0)\\ a_n-4 & (a_n>0)\end{cases}$에서 $a_n=\begin{cases}-a_{n+1}+6 & (a_n\le 0)\\ a_{n+1}+4 & (a_n>0)\end{cases}$

$a_4=7$이므로

$a_3=-a_4+6=-7+6=-1$ 또는 $a_3=a_4+4=7+4=11$

(i) $a_3=-1$일 때,

$a_2=-a_3+6=-(-1)+6=7>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a_2=a_3+4=-1+4=3$

$a_1=-a_2+6=-3+6=3>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a_1=a_2+4=3+4=7$

즉, $a_1=7$, $a_2=3$, $a_3=-1$이므로

$a_1+a_2+a_3=9$

(ii) $a_3=11$일 때,

$a_2=-a_3+6=-11+6=-5$ 또는 $a_2=a_3+4=11+4=15$

① $a_2=-5$일 때,

$a_1=-a_2+6=-(-5)+6=11>0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a_1=a_2+4=-5+4=-1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $a_2=15$일 때,

$a_1=-a_2+6=-15+6=-9$

$a_1=a_2+4=15+4=19$

즉, $a_1=19$, $a_2=15$, $a_3=11$ 또는 $a_1=-9$, $a_2=15$, $a_3=11$이므로

$a_1+a_2+a_3=45$ 또는 $a_1+a_2+a_3=17$

(i), (ii)에서 $a_1+a_2+a_3$의 최댓값은 45, 최솟값은 9이므로

$\sum_{k=1}^{15}a_k$의 최댓값은

$45+\sum_{k=4}^{15}a_k=45+4(7+3-1)=81$

$\sum_{k=1}^{15}a_k$의 최솟값은

$9+\sum_{k=4}^{15}a_k=9+4(7+3-1)=45$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$81+45=126$

1081 답 ③

전략 홀수 번째 항과 그 다음 짝수 번째 항을 두 개씩 묶어 합의 규칙을 찾는다.

(가), (나)에서

n이 홀수일 때 $n=2i-1$(i는 자연수)이라 하면

$b_{2i-1}=(-1)^{2i-1}\times a_{2i-1}+2=-2i+2$ ····· ㉠

n이 짝수일 때 $n=2i$(i는 자연수)라 하면

$b_{2i}=(-1)^{2i}\times a_{2i}+2=2i+2$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $b_{2i-1}+b_{2i}=4$이므로

$\sum_{i=1}^{2n}b_i=\sum_{i=1}^{n}(b_{2i-1}+b_{2i})=\sum_{i=1}^{n}4=4n$

$\sum_{i=1}^{2n-1}b_i=\sum_{i=1}^{2n}b_i-b_{2n}=4n-(2n+2)=2n-2$

한편 $4n>120$, $2n-2>120$의 공통부분은

$n>61$

$n=61$일 때, $\sum_{i=1}^{121}b_i=120$, $\sum_{i=1}^{122}b_i=244$

$n=62$일 때, $\sum_{i=1}^{123}b_i=122$, $\sum_{i=1}^{124}b_i=248$

즉, $\sum_{i=1}^{k}b_i>120$, $\sum_{i=1}^{k-1}b_i>120$을 만족시키는 자연수 k의 값의 범위는

$k\ge 123$이다.

따라서 자연수 k의 최솟값은 123이다.

1082 답 255

전략 점 A_n에서 점 B_n까지 갈 때 반드시 지나는 지점을 생각한 후 최단거리로 가는 경로의 수를 구하여 규칙을 찾는다.

[그림 1]의 점 A_1에서 점 B_1까지 최단거리로 가는 경로의 수는

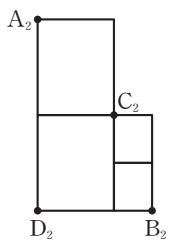
$a_1=\frac{3!}{2!}=3$

[그림 2]에서 C_2, D_2 지점을 표시하면 점 A_2에서 점 B_2까지 최단거리로 가는 경로는

$A_2\to C_2\to B_2$ 또는 $A_2\to D_2\to B_2$

$A_2\to C_2$로 가는 방법이 2가지, $C_2\to B_2$로 가는 방법이 a_1가지이므로 $A_2\to C_2\to B_2$를 따라 최단거리로 가는 경로의 수는

$2\times a_1$



$A_2\to D_2\to B_2$를 따라 최단거리로 가는 경로의 수는

1

$\therefore a_2=2\times a_1+1$

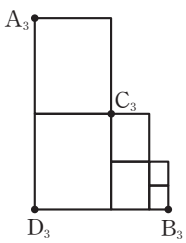
[그림 3]에서 C_3, D_3 지점을 표시하면 점 A_3에서 점 B_3까지 최단거리로 가는 경로는

$A_3\to C_3\to B_3$ 또는 $A_3\to D_3\to B_3$

$A_3\to C_3$으로 가는 방법이 2가지, $C_3\to B_3$으로 가는 방법이 a_2가지이므로

$A_3\to C_3\to B_3$을 따라 최단거리로 가는 경로의 수는

$2\times a_2$



$A_3\to D_3\to B_3$을 따라 최단거리로 가는 경로의 수는

1

$\therefore a_3=2\times a_2+1$

⋮

이와 같은 방법으로 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하면

$a_{n+1}=2a_n+1$

$a_{n+1}=2a_n+1$의 n에 1, 2, 3, ..., 6을 차례로 대입하면

$a_2=2a_1+1=2\times 3+1=7$,

$a_3=2a_2+1=2\times 7+1=15$,

$a_4=2a_3+1=2\times 15+1=31$,

$a_5=2a_4+1=2\times 31+1=63$,

$a_6=2a_5+1=2\times 63+1=127$

$\therefore a_7=2a_6+1=2\times 127+1=255$

다른 풀이

[그림 1]의 점 A_1에서 점 B_1까지 최단거리로 가는 경로의 수는

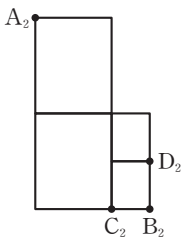
$a_1=\frac{3!}{2!}=3$

[그림 2]에서 C_2, D_2 지점을 표시하면 점 A_2에서 점 B_2까지 최단거리로 가는 경로는

$A_2 \to C_2 \to B_2$ 또는 $A_2 \to D_2 \to B_2$

$A_2 \to C_2 \to B_2$를 따라 최단거리로 가는 경로의 수는

a_1



$A_2 \to D_2 \to B_2$를 따라 최단거리로 가는 경로의 수는

$2\times2=2^2$

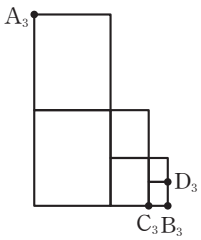
$\therefore\ a_2=a_1+2^2$

[그림 3]에서 C_3, D_3 지점을 표시하면 점 A_3에서 점 B_3까지 최단거리로 가는 경로는

$A_3 \to C_3 \to B_3$ 또는 $A_3 \to D_3 \to B_3$

$A_3 \to C_3 \to B_3$을 따라 최단거리로 가는 경로의 수는

a_2



$A_3 \to D_3 \to B_3$을 따라 최단거리로 가는 경로의 수는

$2\times2\times2=2^3$

$\therefore\ a_3=a_2+2^3$

$\vdots$

이와 같은 방법으로 a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하면

$a_{n+1}=a_n+2^{n+1}$

$a_{n+1}=a_n+2^{n+1}$의 n에 1, 2, 3, …, 6을 차례로 대입하면

$a_2=a_1+2^2=3+4=7$,

$a_3=a_2+2^3=7+8=15$,

$a_4=a_3+2^4=15+16=31$,

$a_5=a_4+2^5=31+32=63$,

$a_6=a_5+2^6=63+64=127$

$\therefore\ a_7=a_6+2^7=127+128$

$=255$

1083 답 ③

전략 주어진 등식에 $n=k$를 대입하여 얻은 식을 적당히 변형하여 $n=k+1$을 대입한 식이 되도록 만든다.

(i) $n=2$일 때, $S_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$이므로

(좌변)$=\frac{S_2}{1\times2}=\frac{\frac{3}{2}}{2}=\frac{3}{4}$,

(우변)$=2+1-\frac{2+1}{2}S_2=3-\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$

에서 (좌변)=(우변)$=\boxed{(가)\ \frac{3}{4}}$이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=k(k\geq2)$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\sum_{i=2}^{k}\frac{S_i}{(i-1)i}=k+1-\frac{k+1}{k}S_k$

$n=k+1$일 때,

$\sum_{i=2}^{k+1}\frac{S_i}{(i-1)i}=\sum_{i=2}^{k}\frac{S_i}{(i-1)i}+\frac{S_{k+1}}{\{(k+1)-1\}(k+1)}$

$=\sum_{i=2}^{k}\frac{S_i}{(i-1)i}+\frac{S_{k+1}}{\boxed{(나)\ k(k+1)}}$

$=k+1-\frac{k+1}{k}S_k+\frac{S_{k+1}}{\boxed{(나)\ k(k+1)}}$

이때 $S_{k+1}=S_k+\frac{k}{k+1}$에서 $S_k=S_{k+1}-\frac{k}{k+1}$이므로

$k+1-\frac{k+1}{k}S_k+\frac{S_{k+1}}{k(k+1)}$

$=k+1-\frac{k+1}{k}\left(S_{k+1}-\frac{k}{k+1}\right)+\frac{S_{k+1}}{k(k+1)}$

$=k+1-\frac{k+1}{k}S_{k+1}+1+\frac{S_{k+1}}{k(k+1)}$

$=k+2-\left(\frac{k+1}{k}-\frac{1}{k(k+1)}\right)S_{k+1}$

$=k+2-\frac{(k+1)^2-1}{k(k+1)}S_{k+1}=k+2-\boxed{(다)\ \frac{k+2}{k+1}}S_{k+1}$

이므로 $n=k+1$일 때도 (★)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상의 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

따라서 $a=\frac{3}{4}$, $f(k)=k(k+1)$, $g(k)=\frac{k+2}{k+1}$이므로

$4a-f(1)+g(0)=3-2+2=3$

MEMO

MEMO