유형 만렙

# 정답과 해설

## 미적분 Ⅱ

# 01 / 수열의 극한

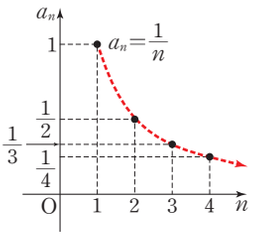
## A 개념 확인 8~11쪽

**0001** 답 수렴, 0

주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면

$a_n=\frac{1}{n}$

오른쪽 그림에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

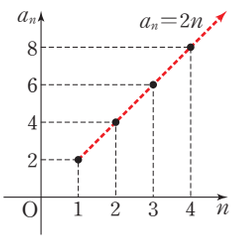



**0002** 답 발산

주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면

$a_n=2n$

오른쪽 그림에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값도 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

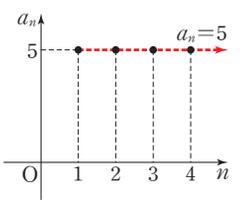



**0003** 답 수렴, 5

주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면

$a_n=5$

오른쪽 그림에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값은 5이므로 주어진 수열은 5에 수렴한다.

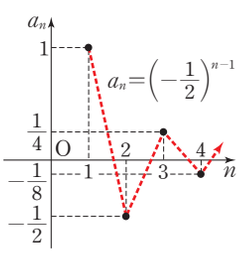



**0004** 답 수렴, 0

주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면

$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

오른쪽 그림에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

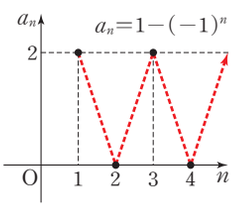



**0005** 답 발산

주어진 수열의 일반항을 $a_n$이라 하면

$a_n=1-(-1)^n$

오른쪽 그림에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $a_n$의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.




**0006** 답 발산

$7-3n$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$4, 1, -2, -5, \cdots$

따라서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $7-3n$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 수열 $\{7-3n\}$은 음의 무한대로 발산한다.

**0007** 답 발산

$\frac{n^2}{2}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$\frac{1}{2}, 2, \frac{9}{2}, 8, \cdots$

따라서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $\frac{n^2}{2}$의 값도 한없이 커지므로 수열 $\left\{\frac{n^2}{2}\right\}$은 양의 무한대로 발산한다.

**0008** 답 수렴, 0

$\frac{3}{2n-1}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$3, 1, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \cdots$

따라서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $\frac{3}{2n-1}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{3}{2n-1}\right\}$은 0에 수렴한다.

**0009** 답 발산

$4+2^n$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$6, 8, 12, 20, \cdots$

따라서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $4+2^n$의 값도 한없이 커지므로 수열 $\{4+2^n\}$은 양의 무한대로 발산한다.

**0010** 답 수렴, 0

$\sin n\pi$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$0, 0, 0, 0, \cdots$

따라서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $\sin n\pi$의 값은 0이므로 수열 $\{\sin n\pi\}$는 0에 수렴한다.

**0011** 답 $-3$

$\lim_{n\to\infty}(-a_n)=-\lim_{n\to\infty}a_n=-3$

**0012** 답 2

$\lim_{n\to\infty}(b_n+3)=\lim_{n\to\infty}b_n+\lim_{n\to\infty}3=-1+3=2$

**0013** 답 5

$\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)=2\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$
$=2\times3+(-1)=5$

**0014** 답 9

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-3b_n)=2\lim_{n\to\infty}a_n-3\lim_{n\to\infty}b_n$
$=2\times3-3\times(-1)=9$

**0015** 답 $-6$

$\lim_{n\to\infty}2a_nb_n=2\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n$
$=2\times3\times(-1)=-6$

**0016** 답 $-5$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n}{3b_n}=\frac{5\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{3\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{5\times3}{3\times(-1)}=-5$$

**0017** 답 1

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1-3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1-0=1$$

**0018** 답 0

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}\right)=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0-0=0$$

**0019** 답 2

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\left(\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(\lim_{n\to\infty}2-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)$$
$$=(1+0)(2-0)=2$$

**0020** 답 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}6-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{6-0}{3+0}=2$$

**0021** 답 수렴, $\frac{1}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}$$

따라서 수열 $\left\{\frac{n}{3n-1}\right\}$은 $\frac{1}{3}$에 수렴한다.

**0022** 답 수렴, 1

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-5n+2}{n^2+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{3}{n^2}}=1$$

따라서 수열 $\left\{\frac{n^2-5n+2}{n^2+3}\right\}$는 1에 수렴한다.

**0023** 답 발산

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n+5}{2n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1+\frac{5}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\infty$$

따라서 수열 $\left\{\frac{n^2+n+5}{2n+1}\right\}$는 발산한다.

**0024** 답 수렴, 0

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{4n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{4+\frac{5}{n^2}}=0$$

따라서 수열 $\left\{\frac{2n-1}{4n^2+5}\right\}$은 0에 수렴한다.

**0025** 답 발산

$$\lim_{n\to\infty}(1+n-n^2)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}-1\right)=-\infty$$

따라서 수열 $\{1+n-n^2\}$은 발산한다.

**0026** 답 발산

$$\lim_{n\to\infty}(4n^2-5n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(4-\frac{5}{n}\right)=\infty$$

따라서 수열 $\{4n^2-5n\}$은 발산한다.

**0027** 답 수렴, 0

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=0$$

따라서 수열 $\{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\}$은 0에 수렴한다.

**0028** 답 수렴, 0

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{2}{n}}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=0$$

따라서 수열 $\{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\}$은 0에 수렴한다.

**0029** 답 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n}}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n}}=2$$

따라서 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$

**0030** 답 수렴, 0

등비수열 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$에서 공비가 $-\frac{1}{2}$이고 $-1<-\frac{1}{2}<1$이므로

이 수열은 수렴하고, 극한값은

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$

**0031** 답 수렴, 0

등비수열 $\{0.2^n\}$에서 공비가 0.2이고 $-1<0.2<1$이므로 이 수열은 수렴하고, 극한값은 $\lim_{n\to\infty} 0.2^n=0$

**0032** 답 발산

등비수열 $\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^n\right\}$에서 공비가 $\frac{4}{3}$이고 $\frac{4}{3}>1$이므로 이 수열은 발산한다.

**0033** 답 수렴, 0

등비수열 $\left\{\frac{2^n}{5^{n+1}}\right\}$에서 공비가 $\frac{2}{5}$이고 $-1<\frac{2}{5}<1$이므로 이 수열은 수렴하고, 극한값은 $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{5^{n+1}}=0$

**0034** 답 수렴, 0

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}=0$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}\right\}$은 0에 수렴한다.

**0035** 답 수렴, 1

$\lim_{n\to\infty}\frac{6^n+3^n}{6^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1}=1$

따라서 수열 $\left\{\frac{6^n+3^n}{6^n}\right\}$은 1에 수렴한다.

**0036** 답 발산

$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n}{4^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\infty$

따라서 수열 $\left\{\frac{5^n}{4^n-2^n}\right\}$은 발산한다.

**0037** 답 $-\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$

공비가 $2x$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<2x\le1$

$\therefore\ -\frac{1}{2}<x\le\frac{1}{2}$

**0038** 답 $-3\le x<3$

공비가 $-\frac{x}{3}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<-\frac{x}{3}\le1$

$\therefore\ -3\le x<3$

**0039** 답 $0<x\le\frac{1}{2}$

공비가 $4x-1$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<4x-1\le1$

$0<4x\le2$ $\quad\therefore\ 0<x\le\frac{1}{2}$

## B 유형 완성 12~23쪽

**0040** 답 ⑤

① $4n-6$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$-2, 2, 6, 10, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $4n-6$의 값도 한없이 커지므로 수열 $\{4n-6\}$은 양의 무한대로 발산한다.

② $3-n^2$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$2, -1, -6, -13, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $3-n^2$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 수열 $\{3-n^2\}$은 음의 무한대로 발산한다.

③ $\frac{(-1)^n}{3}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $\frac{(-1)^n}{3}$의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 수열 $\left\{\frac{(-1)^n}{3}\right\}$은 발산(진동)한다.

④ $(-2)^{n-1}\times\frac{1}{n+1}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, 1, -\frac{8}{5}, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $(-2)^{n-1}\times\frac{1}{n+1}$의 절댓값은 한없이 커지고 그 부호는 양과 음이 교대로 나타나므로 수열 $\left\{(-2)^{n-1}\times\frac{1}{n+1}\right\}$은 발산(진동)한다.

⑤ $-1+\frac{(-1)^n}{n}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$-2, -\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $-1+\frac{(-1)^n}{n}$의 값은 $-1$에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{-1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$은 $-1$에 수렴한다.

따라서 수렴하는 수열은 ⑤이다.

**0041** 답 ㄹ

ㄱ. $\frac{2n+1}{n}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{9}{4}, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $\frac{2n+1}{n}$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{2n+1}{n}\right\}$은 2에 수렴한다.

ㄴ. $\frac{1}{n^2}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $\frac{1}{n^2}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$은 0에 수렴한다.

ㄷ. $\frac{1}{4^n}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \frac{1}{64}, \frac{1}{256}, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $\frac{1}{4^n}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{1}{4^n}\right\}$은 0에 수렴한다.

ㄹ. $\sin\frac{2n-1}{2}\pi$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$1, -1, 1, -1, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $\sin\frac{2n-1}{2}\pi$의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 수열 $\left\{\sin\frac{2n-1}{2}\pi\right\}$는 발산(진동)한다.

따라서 보기에서 발산하는 수열인 것은 ㄹ이다.

## 0042 답 ⑤

ㄱ. $a_{2n+1}=(-1)^{2n+1}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$-1, -1, -1, -1, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $(-1)^{2n+1}$의 값은 $-1$이므로 수열 $\{a_{2n+1}\}$은 $-1$에 수렴한다.

ㄴ. $\frac{a_{2n}}{\log 2n}=\frac{(-1)^{2n}}{\log 2n}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$\frac{1}{\log 2}, \frac{1}{\log 4}, \frac{1}{\log 6}, \frac{1}{\log 8}, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $\frac{(-1)^{2n}}{\log 2n}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{a_{2n}}{\log 2n}\right\}$은 0에 수렴한다.

ㄷ. $a_{3n}\cos n\pi=(-1)^{3n}\cos n\pi$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$1, 1, 1, 1, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $(-1)^{3n}\cos n\pi$의 값은 1이므로 수열 $\{a_{3n}\cos n\pi\}$는 1에 수렴한다.

따라서 보기에서 수렴하는 수열인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

## 0043 답 ③

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하자.

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=4$에서 $\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=4$

$\therefore \alpha+\beta=4$

$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=2$에서 $\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n=2$

$\therefore \alpha\beta=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=\lim_{n\to\infty} a_n^2+\lim_{n\to\infty} b_n^2$$
$$=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$$
$$=4^2-2\times 2=12$$

다른 풀이

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)-2\lim_{n\to\infty} a_nb_n$$
$$=4\times 4-2\times 2=12$$

## 0044 답 $-\frac{1}{5}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_nb_n+1}{3a_n-5b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n+1}{3\lim_{n\to\infty} a_n-5\lim_{n\to\infty} b_n}$$
$$=\frac{5\times(-1)+1}{3\times 5-5\times(-1)}=-\frac{1}{5}$$

## 0045 답 ⑤

$\lim_{n\to\infty}(2a_n+1)=2$에서 $2\lim_{n\to\infty} a_n+1=2$ $\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\frac{1}{2}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2b_n}{3a_n-1}=\frac{2\lim_{n\to\infty} b_n}{3\lim_{n\to\infty} a_n-1}=\frac{2\lim_{n\to\infty} b_n}{3\times\frac{1}{2}-1}=4\lim_{n\to\infty} b_n$$

따라서 $4\lim_{n\to\infty} b_n=5$이므로 $\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{5}{4}$

## 0046 답 $-6$

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하자.

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=1$에서 $\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=1$

$\therefore \alpha+\beta=1$ …… ㉠

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=5$에서 $\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=5$

$\therefore \alpha-\beta=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=3$, $\beta=-2$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n=\alpha\beta=-6$

다른 풀이

$$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\{(a_n+b_n)^2-(a_n-b_n)^2\}$$
$$=\frac{1}{4}\{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)$$
$$-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\times\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)\}$$
$$=\frac{1}{4}(1\times 1-5\times 5)=-6$$

## 0047 답 12

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ ($\alpha$는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-2}{3a_{n+1}+4}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n-2}{3\lim_{n\to\infty} a_{n+1}+4}=\frac{\alpha-2}{3\alpha+4}$$

즉, $\frac{\alpha-2}{3\alpha+4}=\frac{1}{4}$이므로 $4\alpha-8=3\alpha+4$

$\therefore \alpha=12$ $\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\alpha=12$

## 0048 답 ①

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ ($\alpha$는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\alpha$

$a_{n+1}=\sqrt{a_n+12}$에서 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n+12}$이므로

$\alpha=\sqrt{\alpha+12}$, $\alpha^2=\alpha+12$

$\alpha^2-\alpha-12=0$, $(\alpha+3)(\alpha-4)=0$ $\therefore \alpha=-3$ 또는 $\alpha=4$

그런데 $\alpha=\sqrt{\alpha+12}>0$이므로 $\alpha=4$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\alpha=4$

## 0049 답 3

이차방정식 $x^2-a_nx+a_{n+1}+8=0$이 중근을 가지므로 이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$D=(-a_n)^2-4(a_{n+1}+8)=0$

$\therefore a_n^2-4a_{n+1}-32=0$ …… ㉠ …… ❶

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ($\alpha$는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

㉠에서 $\lim_{n\to\infty}(a_n^2-4a_{n+1}-32)=0$

$\alpha^2-4\alpha-32=0$, $(\alpha+4)(\alpha-8)=0$

$\therefore \alpha=-4$ 또는 $\alpha=8$

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $\alpha=8$ …… ❷

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n+1}=\sqrt{\alpha+1}=\sqrt{8+1}=3$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 주어진 이차방정식이 중근을 가질 조건 구하기 | 30 % |
| ❷ $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값 구하기 | 50 % |
| ❸ $\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n+1}$의 값 구하기 | 20 % |

## 0050 답 ③

① $\lim_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+n}{3n^2-3n+10}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{6+\frac{1}{n}}{3-\frac{3}{n}+\frac{10}{n^2}}=2$

② $\lim_{n\to\infty}\dfrac{(3n-2)^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{9n^2-12n+4}{n^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{9-\frac{12}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=9$

③ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{7n^2+1}{(n+1)(2n+3)-n^2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{7n^2+1}{n^2+5n+3}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{7+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{5}{n}+\frac{3}{n^2}}=7$

④ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+2n}+3n}{2n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+3}{2}=2$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{4n-1}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{4-\frac{1}{n}}}=\dfrac{1}{3}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

## 0051 답 $\frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{5n+2}}{\sqrt{20n-3}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{5+\frac{2}{n}}}{\sqrt{20-\frac{3}{n}}}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}=\dfrac{1}{2}$

## 0052 답 $\frac{3}{2}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=3n^2+2n-1$, $\alpha_n\beta_n=2n^2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\alpha_n}+\dfrac{1}{\beta_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n-1}{2n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{2}=\dfrac{3}{2}$

## 0053 답 ②

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{5n^2+n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{n(5n+1)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{10n+2}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{10+\frac{2}{n}}=\dfrac{1}{10}$

## 0054 답 $\frac{1}{2}$

$\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$

$=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1+\dfrac{1}{4}\right)$

$\times\cdots\times\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{4}\times\cdots\times\dfrac{n-1}{n}\times\dfrac{n+1}{n}=\dfrac{n+1}{2n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{2n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{2}=\dfrac{1}{2}$

## 0055 답 $\frac{2}{3}$

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}(4k+3)$

$=4\times\dfrac{n(n+1)}{2}+3n$

$=2n^2+5n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{3n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+5n}{3n^2-1}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{5}{n}}{3-\frac{1}{n^2}}=\dfrac{2}{3}$

## 0056 답 ②

$\log_2 a_n+\log_2 a_{n+1}+\log_2 a_{n+2}=2$에서

$\log_2 a_n a_{n+1}a_{n+2}=2$ $\therefore a_n a_{n+1}a_{n+2}=4$

이때 $a_1=2$, $a_2=3$이므로

$a_3=\dfrac{2}{3}$, $a_4=2$, $a_5=3$, $a_6=\dfrac{2}{3}$, …

즉, 수열 $\{a_n\}$은 2, 3, $\frac{2}{3}$가 이 순서대로 반복되므로

$\sum_{k=1}^{n}a_{3k}=\dfrac{2}{3}n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_{3k}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2}{3}n}{n}=\dfrac{2}{3}$

## 0057 답 $-4$

$a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+2}{2n-3}=\infty$ (또는 $-\infty$)이므로 $a=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+2}{2n-3}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{bn+2}{2n-3}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{b+\frac{2}{n}}{2-\frac{3}{n}}=\dfrac{b}{2}$

따라서 $\frac{b}{2}=-2$이므로 $b=-4$

$\therefore a+b=0+(-4)=-4$

## 0058 답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+2)(2n+1)}{an^2+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+15n+6}{an^2+3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{15}{n}+\frac{6}{n^2}}{a+\frac{3}{n}}=\frac{6}{a}$$

따라서 $\frac{6}{a}=2$이므로 $a=3$

## 0059 답 ④

$a\neq0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2-6n-1}}{an^2+n}=0$이므로 $a=0$

$$\therefore b=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2-6n-1}}{an^2+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2-6n-1}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9-\frac{6}{n}-\frac{1}{n^2}}}{1}=3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^2+12n-3}{\sqrt{b^2n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{12n-3}{\sqrt{9n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12-\frac{3}{n}}{\sqrt{9+\frac{1}{n^2}}}=4$$

## 0060 답 $\frac{3}{2}$

(i) $a\neq0$, $b=0$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{bn^2-3n+1}{an^2+2n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n+1}{an^2+2n-5}=0$$

(ii) $a=0$, $b\neq0$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{bn^2-3n+1}{an^2+2n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{bn^2-3n+1}{2n-5}=\infty\ (\text{또는}\ -\infty)$$

(iii) $a=0$, $b=0$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{bn^2-3n+1}{an^2+2n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n+1}{2n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{-3+\frac{1}{n}}{2-\frac{5}{n}}=-\frac{3}{2}$$

(i), (ii), (iii)에서 $a\neq0$, $b\neq0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{bn^2-3n+1}{an^2+2n-5}=\lim_{n\to\infty}\frac{b-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{a+\frac{2}{n}-\frac{5}{n^2}}=\frac{b}{a}\quad\cdots\cdots\ ❶$$

따라서 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3an+b}{4bn-a}=\lim_{n\to\infty}\frac{3a+\frac{b}{n}}{4b-\frac{a}{n}}=\frac{3a}{4b}=\frac{3}{4}\times2=\frac{3}{2}\quad\cdots\cdots\ ❷$$

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ $\lim_{n\to\infty}\frac{bn^2-3n+1}{an^2+2n-5}$의 값을 $a$, $b$에 대한 식으로 나타내기 | 60 % |
| ❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{3an+b}{4bn-a}$의 값 구하기 | 40 % |

## 0061 답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{4n+1}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n+1}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n})(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n})}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n+1}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{n}}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

## 0062 답 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2}-n}{n-\sqrt{n^2-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2}-n)(\sqrt{n^2+2}+n)(n+\sqrt{n^2-1})}{(n-\sqrt{n^2-1})(n+\sqrt{n^2-1})(\sqrt{n^2+2}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+\sqrt{n^2-1})}{\sqrt{n^2+2}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1}=2$$

## 0063 답 ④

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$$

$$2+4+6+\cdots+2n=\sum_{k=1}^{n}2k=2\times\frac{n(n+1)}{2}=n^2+n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\{\sqrt{1+3+5+\cdots+(2n-1)}-\sqrt{2+4+6+\cdots+2n}\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+n})=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2+n})(n+\sqrt{n^2+n})}{n+\sqrt{n^2+n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+\sqrt{n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=-\frac{1}{2}$$

## 0064 답 1

$$S_n=\frac{n\{2\times3+(n-1)\times2\}}{2}=\frac{n(2n+4)}{2}=n^2+2n$$이므로

$$S_{n+1}=(n+1)^2+2(n+1)=n^2+4n+3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+3}-\sqrt{n^2+2n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+4n+3}-\sqrt{n^2+2n})(\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2+2n})}{\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2+2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{\sqrt{n^2+4n+3}+\sqrt{n^2+2n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}=1$$

## 0065 답 $\frac{5}{6}$

$(3n)^2<9n^2+5n+1<(3n+1)^2$이므로

$3n<\sqrt{9n^2+5n+1}<3n+1$

$\therefore a_n=\sqrt{9n^2+5n+1}-3n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n^2+5n+1}-3n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{9n^2+5n+1}-3n)(\sqrt{9n^2+5n+1}+3n)}{\sqrt{9n^2+5n+1}+3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{\sqrt{9n^2+5n+1}+3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{n}}{\sqrt{9+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}+3}=\frac{5}{6}$$

## 0066 답 ⑤

$a\le 0$이면 $\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+n}-(an+b)\}=\infty$이므로 $a>0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\{\sqrt{n^2+n}-(an+b)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{\sqrt{n^2+n}-(an+b)\}\{\sqrt{n^2+n}+(an+b)\}}{\sqrt{n^2+n}+(an+b)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n^2+(1-2ab)n-b^2}{\sqrt{n^2+n}+an+b}$$

이때 $1-a^2\neq 0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$1-a^2=0 \quad \therefore a=1\ (\because a>0)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{(1-a^2)n^2+(1-2ab)n-b^2}{\sqrt{n^2+n}+an+b}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-2b)n-b^2}{\sqrt{n^2+n}+n+b}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-2b)-\frac{b^2}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1+\frac{b}{n}}$$
$$=\frac{1-2b}{2}$$

따라서 $\frac{1-2b}{2}=\frac{3}{2}$이므로 $1-2b=3 \quad \therefore b=-1$

$\therefore a-b=1-(-1)=2$

## 0067 답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+kn}+n}{(\sqrt{n^2+kn}-n)(\sqrt{n^2+kn}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+kn}+n}{kn}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{k}{n}}+1}{k}=\frac{2}{k}$$

따라서 $\frac{2}{k}=3$이므로 $k=\frac{2}{3}$

## 0068 답 4

㈎에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{an^2-bn-3}{2n^2+7}=\lim_{n\to\infty}\frac{a-\frac{b}{n}-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{7}{n^2}}=\frac{a}{2}$

따라서 $\frac{a}{2}=4$이므로 $a=8$

㈏에서

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{an+b}-\sqrt{an-b})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{8n+b}-\sqrt{8n-b})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{8n+b}-\sqrt{8n-b})(\sqrt{8n+b}+\sqrt{8n-b})}{\sqrt{8n+b}+\sqrt{8n-b}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2b\sqrt{n}}{\sqrt{8n+b}+\sqrt{8n-b}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2b}{\sqrt{8+\frac{b}{n}}+\sqrt{8-\frac{b}{n}}}=\frac{b}{2\sqrt{2}}$$

따라서 $\frac{b}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$이므로 $b=4$

$\therefore a-b=8-4=4$

## 0069 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^b}{\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^b(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n})}{(\sqrt{n^4+4n}-\sqrt{n^4+n})(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^b(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n})}{3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an^{b-1}(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n})}{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$(b-1)+2=0 \quad \therefore b=-1$

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an^{-2}(\sqrt{n^4+4n}+\sqrt{n^4+n})}{3}=\lim_{n\to\infty}\frac{a\left(\sqrt{1+\frac{4}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}\right)}{3}$$
$$=\frac{2}{3}a$$

따라서 $\frac{2}{3}a=6$이므로 $a=9$

$\therefore a+b=9+(-1)=8$

## 0070 답 2

$\frac{a_n+2}{3a_n+10}=b_n$으로 놓으면 $a_n+2=3a_nb_n+10b_n$

$(1-3b_n)a_n=10b_n-2 \quad \therefore a_n=\frac{10b_n-2}{1-3b_n}$

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{1}{4}$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{10b_n-2}{1-3b_n}=\frac{10\times\frac{1}{4}-2}{1-3\times\frac{1}{4}}=2$$

## 0071 답 ③

$\frac{(2n+3)a_n}{n^2}=b_n$으로 놓으면 $(2n+3)a_n=n^2b_n$

$\therefore a_n=\frac{n^2b_n}{2n+3}$

이때 $\lim_{n\to\infty} b_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{3n^2+1}\times\frac{n^2b_n}{2n+3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{\left(3+\frac{1}{n^2}\right)\left(2+\frac{3}{n}\right)}=\frac{3}{3\times 2}=\frac{1}{2}$$

## 0072 답 $\frac{3}{10}$

$(2n+1)a_n=c_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{c_n}{2n+1}$ …… ⓘ

$(n^2-1)b_n=d_n$으로 놓으면 $b_n=\frac{d_n}{n^2-1}$ …… ⓘⓘ

이때 $\lim_{n\to\infty}c_n=3$, $\lim_{n\to\infty}d_n=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(n+2)b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{c_n}{2n+1}}{(n+2)\times\frac{d_n}{n^2-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{2n^2+5n+2}\times\frac{c_n}{d_n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{2n^2+5n+2}\times\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$ …… ⓘⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ $(2n+1)a_n=c_n$으로 놓고 $a_n$을 $c_n$에 대한 식으로 나타내기 | 20 % |
| ⓘⓘ $(n^2-1)b_n=d_n$으로 놓고 $b_n$을 $d_n$에 대한 식으로 나타내기 | 20 % |
| ⓘⓘⓘ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{(n+2)b_n}$의 값 구하기 | 60 % |

## 0073 답 $\frac{16}{7}$

$2a_n-5b_n=c_n$으로 놓으면 $-5b_n=c_n-2a_n$

$\therefore b_n=\frac{2a_n-c_n}{5}$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}c_n=3$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3b_n}{a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3\times\frac{2a_n-c_n}{5}}{a_n+\frac{2a_n-c_n}{5}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16a_n-3c_n}{7a_n-c_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16-3\times\frac{c_n}{a_n}}{7-\frac{c_n}{a_n}}=\frac{16}{7}$$

**다른 풀이**

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이고 $\lim_{n\to\infty}(2a_n-5b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\left(2-\frac{5b_n}{a_n}\right)=3$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{5b_n}{a_n}\right)=0$ $\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\frac{2}{5}$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+3b_n}{a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3b_n}{a_n}}{1+\frac{b_n}{a_n}}$$
$$=\frac{2+3\times\frac{2}{5}}{1+\frac{2}{5}}=\frac{16}{7}$$

## 0074 답 $\frac{15}{8}$

$a_n+3b_n=c_n$으로 놓으면

$3b_n=c_n-a_n$ $\therefore b_n=\frac{c_n-a_n}{3}$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}c_n=4$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n-3b_n+1}{3a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n-(c_n-a_n)+1}{3a_n+\frac{c_n-a_n}{3}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{15a_n-3c_n+3}{8a_n+c_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{15-\frac{3c_n}{a_n}+\frac{3}{a_n}}{8+\frac{c_n}{a_n}}$$
$$=\frac{15}{8}$$

**다른 풀이**

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이고 $\lim_{n\to\infty}(a_n+3b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\left(1+\frac{3b_n}{a_n}\right)=4$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3b_n}{a_n}\right)=0$ $\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=-\frac{1}{3}$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n-3b_n+1}{3a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{3b_n}{a_n}+\frac{1}{a_n}}{3+\frac{b_n}{a_n}}$$
$$=\frac{4-3\times\left(-\frac{1}{3}\right)}{3+\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{15}{8}$$

## 0075 답 1

$\sqrt{4n^4+4}<(2n+1)a_n<\sqrt{4n^4+3n^2+2}$에서

$\frac{\sqrt{4n^4+4}}{n(2n+1)}<\frac{a_n}{n}<\frac{\sqrt{4n^4+3n^2+2}}{n(2n+1)}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^4+4}}{n(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^4+3n^2+2}}{n(2n+1)}=1$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$

## 0076 답 ③

$\sqrt{9n^2-5}+2n<a_n<5n+1$에서

$\frac{\sqrt{9n^2-5}+2n}{n}<\frac{a_n}{n}<\frac{5n+1}{n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2-5}+2n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{n}=5$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=5$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+2)^2}{na_n+5n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a_n}{n}+\frac{2}{n}\right)^2}{\frac{a_n}{n}+5-\frac{2}{n^2}}=\frac{5^2}{5+5}=\frac{5}{2}$$

## 0077 답 ③

$-1\le\sin\frac{n}{2}\pi\le1$이므로 $-\frac{2}{n+3}\le\frac{2}{n+3}\sin\frac{n}{2}\pi\le\frac{2}{n+3}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{n+3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+3}=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+3}\sin\frac{n}{2}\pi=0$

## 0078 답 $\frac{1}{2}$

$n<a_n<n+1$에서 $\sum_{k=1}^{n}k<\sum_{k=1}^{n}a_k<\sum_{k=1}^{n}(k+1)$

$\frac{n(n+1)}{2}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{n(n+1)}{2}+n$

$\frac{n^2+n}{2}<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{n^2+3n}{2}$

$\therefore \frac{n^2+n}{2n^2}<\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n^2}<\frac{n^2+3n}{2n^2}$ …… ❶

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n}{2n^2}=\frac{1}{2}$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n^2}=\frac{1}{2}$ …… ❷

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ $\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n^2}$에 대한 부등식 세우기 | 60 % |
| ❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n^2}$의 값 구하기 | 40 % |

## 0079 답 ①

곡선 $y=x^2-(n+1)x+a_n$이 $x$축과 만나므로 이차방정식 $x^2-(n+1)x+a_n=0$의 판별식을 $D_1$이라 하면

$D_1=(n+1)^2-4a_n\geq 0$

$\therefore a_n\leq\frac{(n+1)^2}{4}$ …… ㉠

곡선 $y=x^2-nx+a_n$이 $x$축과 만나지 않으므로 이차방정식 $x^2-nx+a_n=0$의 판별식을 $D_2$라 하면

$D_2=n^2-4a_n<0$

$\therefore a_n>\frac{n^2}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{n^2}{4}<a_n\leq\frac{(n+1)^2}{4}$

$\therefore \frac{1}{4}<\frac{a_n}{n^2}\leq\frac{(n+1)^2}{4n^2}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{4n^2}=\frac{1}{4}$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\frac{1}{4}$

## 0080 답 ①

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=-\alpha$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n{}^2=\lim_{n\to\infty}b_n{}^2=\alpha^2$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}a_n=\beta$ ($\beta$는 실수)라 하면 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=|\beta|$이므로 수열 $\{|a_n|\}$도 수렴한다.

ㄷ. [반례] $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$이면 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모두 발산(진동)하지만 수열 $\{a_n+b_n\}$은 0으로 수렴한다.

ㄹ. [반례] $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$이지만 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이므로 수열 $\{b_n\}$은 발산한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

참고 ㄹ. $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$의 조건이 있어야 성립하는 명제이다.

## 0081 답 ③

① [반례] $a_n=n$, $b_n=-n^2$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=-\infty$이지만 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0$

② [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, 0, …
$\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, 1, …
이면 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$, $\lim_{n\to\infty}b_n\neq 0$이다.

③ $a_n<b_n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n\leq\lim_{n\to\infty}b_n$이므로 $\alpha\leq\beta$

④ [반례] $a_n=(-1)^n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=-1$이므로 두 수열 $\{a_{2n}\}$, $\{a_{2n-1}\}$은 모두 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.

⑤ [반례] $a_n=n-\frac{1}{n}$, $b_n=n+\frac{1}{n}$, $c_n=n$이면 $a_n<c_n<b_n$이고 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$이지만 $\lim_{n\to\infty}c_n=\infty$이므로 수열 $\{c_n\}$은 발산한다.

따라서 옳은 것은 ③이다.

## 0082 답 $\frac{1}{2}$

곡선 $y=x^2+3x$와 직선 $y=x+n$이 만나는 두 점의 $x$좌표는 $x^2+3x=x+n$에서

$x^2+2x-n=0$ $\therefore x=-1\pm\sqrt{n+1}$

따라서 $\mathrm{P}_n(-1-\sqrt{n+1},\ -1-\sqrt{n+1}+n)$, $\mathrm{Q}_n(-1+\sqrt{n+1},\ -1+\sqrt{n+1}+n)$이므로

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\sqrt{(2\sqrt{n+1})^2+(2\sqrt{n+1})^2}$
$=\sqrt{4(n+1)+4(n+1)}=\sqrt{8n+8}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+3}}{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{8n+8}}=\frac{1}{2}$

## 0083 답 ①

$f(n)=\sqrt{(2n-1)^2+2^2}=\sqrt{4n^2-4n+5}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\{f(n)-2n\}$
$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2-4n+5}-2n)$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2-4n+5}-2n)(\sqrt{4n^2-4n+5}+2n)}{\sqrt{4n^2-4n+5}+2n}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{-4n+5}{\sqrt{4n^2-4n+5}+2n}=-1$

## 0084 답 ⑤

$y=nx$를 $x^2+y^2=4$에 대입하면 $x^2+(nx)^2=4$, $x^2=\frac{4}{n^2+1}$

$\therefore x=-\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}$ 또는 $x=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}$

그런데 점 $\mathrm{P}_n$은 제1사분면 위의 점이므로

$\mathrm{P}_n\left(\frac{2}{\sqrt{n^2+1}},\ \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}\right)$, $\mathrm{Q}_n\left(\frac{2}{\sqrt{n^2+1}},\ 0\right)$

따라서 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{OQ}_n$의 넓이 $S_n$은

$S_n=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}_n}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{n^2+1}}\times\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}=\frac{2n}{n^2+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}nS_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+1}=2$

## 0085 답 3

직각삼각형 $ABC_n$에서

$\overline{BC_n}=n$, $\overline{AC_n}=\sqrt{n^2+36}$

또 삼각형 $AE_nD_1$과 삼각형 $AC_nD_n$이 서로 닮음이므로

$\overline{AD_1}:\overline{AD_n}=\overline{D_1E_n}:\overline{D_nC_n}$에서

$1:n=\overline{D_1E_n}:6$ $\quad\therefore\ \overline{D_1E_n}=\dfrac{6}{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{AC_n}-\overline{BC_n}}{\overline{D_1E_n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+36}-n}{\frac{6}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+36}-n)}{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+36}-n)(\sqrt{n^2+36}+n)}{6(\sqrt{n^2+36}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{\sqrt{n^2+36}+n}$$

$=3$

## 0086 답 2

$a_1=4$, $a_2=4+8$, $a_3=4+8+12$, …에서

$$a_n=4+8+12+\cdots+4n=\sum_{k=1}^{n}4k$$

$$=4\times\frac{n(n+1)}{2}=2n^2+2n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+2n}{n^2}=2$$

## 0087 답 $\frac{2}{3}$

$P_n\left(\alpha_n,\ \dfrac{\alpha_n}{n}+1\right)$, $Q_n\left(\beta_n,\ \dfrac{\beta_n}{n}+1\right)$이라 하면 $\alpha_n$, $\beta_n$은 이차방정식

$x^2-\left(3+\dfrac{1}{n}\right)x+\dfrac{3}{n}=\dfrac{1}{n}x+1$, 즉 $x^2-\left(3+\dfrac{2}{n}\right)x+\dfrac{3}{n}-1=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n+\beta_n=3+\frac{2}{n}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

삼각형 $OP_nQ_n$의 무게중심의 $y$좌표 $a_n$은

$$a_n=\frac{1}{3}\left\{0+\left(\frac{\alpha_n}{n}+1\right)+\left(\frac{\beta_n}{n}+1\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha_n+\beta_n}{n}+2\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{3+\frac{2}{n}}{n}+2\right)\ (\because\ ㉠)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+2\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}+2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times2=\frac{2}{3}$$

## 0088 답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+2}-3^{n+1}}{4^{n-1}+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times4^n-3\times3^n}{\frac{1}{4}\times4^n+3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{1}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^n}=16$$

## 0089 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

ㄱ. 등비수열 $\{0.5^n\}$은 공비가 0.5이고, $-1<0.5<1$이므로 0에 수렴한다.

따라서 수열 $\{1+0.5^n\}$은 1에 수렴한다.

ㄴ. 등비수열 $\left\{\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n\right\}$은 공비가 $-\dfrac{1}{5}$이고, $-1<-\dfrac{1}{5}<1$이므로 0에 수렴한다.

따라서 수열 $\left\{3+\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n\right\}$은 3에 수렴한다.

ㄷ. 등비수열 $\left\{\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^n\right\}$은 공비가 $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$이고, $\dfrac{3}{\sqrt{5}}>1$이므로 발산한다.

따라서 수열 $\left\{\left(\dfrac{3}{\sqrt{5}}\right)^n-2\right\}$는 발산한다.

ㄹ. $7^{-n}=\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$에서 공비가 $\dfrac{1}{7}$이고, $-1<\dfrac{1}{7}<1$이므로 등비수열 $\{7^{-n}\}$은 0에 수렴한다.

$4^{-n}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$에서 공비가 $\dfrac{1}{4}$이고, $-1<\dfrac{1}{4}<1$이므로 등비수열 $\{4^{-n}\}$은 0에 수렴한다.

따라서 수열 $\{7^{-n}-4^{-n}\}$은 0에 수렴한다.

따라서 보기에서 수렴하는 수열인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

## 0090 답 ③

$x^2-6x+4=0$에서 $x=3\pm\sqrt{5}$

$a=3-\sqrt{5}$, $b=3+\sqrt{5}$라 하면

$0<\dfrac{a}{b}<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}{\frac{1}{a}\times\left(\frac{a}{b}\right)^n+\frac{1}{b}}$$

$$=b=3+\sqrt{5}$$

## 0091 답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+6+6^2+\cdots+6^n}{1+8+8^2+\cdots+8^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6^{n+1}-1}{6-1}}{\frac{8^{n+1}-1}{8-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{7(6^{n+1}-1)}{5(8^{n+1}-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{7\left\{6\times\left(\frac{3}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right\}}{5\left\{8-\left(\frac{1}{8}\right)^n\right\}}=0$$

## 0092 답 $\frac{2}{5}$

$S_n=\dfrac{a_1(3^n-1)}{3-1}=\dfrac{a_1(3^n-1)}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^{n+1}}{a_1(3^n-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{a_1\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}$$

$$=\frac{6}{a_1}$$

따라서 $\dfrac{6}{a_1}=15$이므로 $a_1=\dfrac{2}{5}$

## 0093 답 ①

$10^n=2^n\times5^n$이므로

$a_n=(1+2+2^2+\cdots+2^n)(1+5+5^2+\cdots+5^n)$

$=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}\times\frac{5^{n+1}-1}{5-1}=\frac{1}{4}(2^{n+1}-1)(5^{n+1}-1)$

$=\frac{1}{4}(10^{n+1}-5^{n+1}-2^{n+1}+1)$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{10^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{10^{n+1}-5^{n+1}-2^{n+1}+1}{4\times10^{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{10-5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\times\left(\frac{1}{5}\right)^n+\left(\frac{1}{10}\right)^n}{4\times10}$

$=\frac{1}{4}$

## 0094 답 4

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ($\alpha$는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\times a_n-3^{n+1}}{3^n\times a_n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n-3\times\left(\frac{3}{5}\right)^n}{\left(\frac{3}{5}\right)^n\times a_n+1}=5\alpha$

따라서 $5\alpha=20$이므로 $\alpha=4$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha=4$

## 0095 답 ⑤

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ($\alpha$는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{7^n\times a_n+4^{2n+1}}{4^{2n}\times a_n+7^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{7}{16}\right)^n\times a_n+4}{a_n+7\times\left(\frac{7}{16}\right)^n}=\frac{4}{\alpha}$

따라서 $\frac{4}{\alpha}=\frac{1}{2}$이므로 $\alpha=8$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha=8$

## 0096 답 5

공비가 $\frac{4x-x^2}{5}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{4x-x^2}{5}\le1$, $-5<4x-x^2\le5$

(i) $-5<4x-x^2$에서 $x^2-4x-5<0$

$(x+1)(x-5)<0$ $\therefore -1<x<5$

(ii) $4x-x^2\le5$에서 $x^2-4x+5\ge0$

이때 $x^2-4x+5=(x-2)^2+1>0$이므로 항상 성립한다.

(i), (ii)에서 $-1<x<5$

따라서 정수 $x$는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

## 0097 답 $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<\pi$

공비가 $2\sin x$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<2\sin x\le1$, $-\frac{1}{2}<\sin x\le\frac{1}{2}$

이때 $0\le x<\pi$이므로

$0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi\le x<\pi$

## 0098 답 ④

첫째항이 $(x-2)(\log_2x-2)$, 공비가 $\log_2x-2$이므로 주어진 수열이 수렴하려면

$(x-2)(\log_2x-2)=0$ 또는 $-1<\log_2x-2\le1$

$\therefore x=2$ 또는 $1<\log_2x\le3$

이때 $1<\log_2x\le3$에서 $\log_22<\log_2x\le\log_28$

$\therefore 2<x\le8$

따라서 $2\le x\le8$이므로 정수 $x$는 2, 3, 4, ..., 8의 7개이다.

## 0099 답 14

(i) 등비수열 $\left\{\left(\frac{x-1}{4}\right)^n\right\}$의 공비가 $\frac{x-1}{4}$이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{x-1}{4}\le1$ $\therefore -3<x\le5$ ····· ❶

(ii) 등비수열 $\{(-1+\log_3x)^n\}$의 공비가 $-1+\log_3x$이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$-1<-1+\log_3x\le1$, $0<\log_3x\le2$

$\log_31<\log_3x\le\log_39$ $\therefore 1<x\le9$ ····· ❷

(i), (ii)에서 $1<x\le5$

따라서 모든 정수 $x$의 값의 합은 $2+3+4+5=14$ ····· ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $\left\{\left(\frac{x-1}{4}\right)^n\right\}$이 수렴하는 조건 구하기 | 40 % |
| ❷ $\{(-1+\log_3x)^n\}$이 수렴하는 조건 구하기 | 40 % |
| ❸ 정수 $x$의 값의 합 구하기 | 20 % |

## 0100 답 ㄴ, ㄷ

등비수열 $\{r^n\}$이 수렴하므로 $-1<r\le1$ ····· ㉠

ㄱ. 공비가 $-r$이고 ㉠에서 $-1\le-r<1$

이때 $-r=-1$, 즉 $r=1$이면 수열 $\{(-r)^n\}$은 수렴하지 않는다.

ㄴ. 공비가 $\frac{r+1}{3}$이고 ㉠에서 $0<r+1\le2$

$\therefore 0<\frac{r+1}{3}\le\frac{2}{3}$

즉, 수열 $\left\{\left(\frac{r+1}{3}\right)^n\right\}$은 수렴한다.

ㄷ. 공비가 $r^2$이고 ㉠에서 $0\le r^2\le1$

즉, 수열 $\{r^{2n}\}$은 수렴한다.

ㄹ. 공비가 $\frac{1}{r}$이고 ㉠에서 $\frac{1}{r}<-1$ 또는 $\frac{1}{r}\ge1$

즉, 수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$은 $\frac{1}{r}=1$일 때만 수렴한다.

따라서 보기에서 항상 수렴하는 수열인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

## 0101 답 ⑤

(i) $0<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}+r+3}{r^n+2}=\frac{r+3}{2}$

따라서 $\frac{r+3}{2}=\frac{7}{4}$이므로 $2r+6=7$ $\therefore r=\frac{1}{2}$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} r^{n+1}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}+r+3}{r^n+2}=\frac{1+1+3}{1+2}=\frac{5}{3}\neq\frac{7}{4}$$

(iii) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}+r+3}{r^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{r+\frac{r}{r^n}+\frac{3}{r^n}}{1+\frac{2}{r^n}}=r=\frac{7}{4}$$

(i), (ii), (iii)에서 $r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=\frac{7}{4}$이므로 구하는 합은

$\frac{1}{2}+\frac{7}{4}=\frac{9}{4}$

## 0102 답 ③

ㄱ. $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-r-2}{r^n+1}=-r-2$$

ㄴ. $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-r-2}{r^n+1}=\frac{1-1-2}{1+1}=-1$$

ㄷ. $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-r-2}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{r}{r^n}-\frac{2}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}=1$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

## 0103 답 9

(i) $|r|<5$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{5}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-5^n}{r^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{r}{5}\right)^n-1}{\left(\frac{r}{5}\right)^n+1}=-1$$

(ii) $r=5$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-5^n}{r^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-5^n}{5^n+5^n}=0\neq-1$$

(iii) $|r|>5$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{r}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-5^n}{r^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{5}{r}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{r}\right)^n}=1\neq-1$$

(i), (ii), (iii)에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{r^n-5^n}{r^n+5^n}=-1$을 만족시키는 $r$의 값의 범위는

$|r|<5$

따라서 정수 $r$는 $-4$, $-3$, $-2$, …, $4$의 9개이다.

## 0104 답 $\frac{7}{4}$

$$f(-2)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3\times(-2)-(-2)^{n-1}}{2+(-2)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-5-\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-2)^n}{2+(-2)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1}=\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3\times\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{2+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2+\left(\frac{1}{3}\right)^n}=1$$

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3\times1-1^{n-1}}{2+1^n}=\frac{1+3-1}{2+1}=1$$

$$f\left(\frac{4}{3}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3\times\frac{4}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}{2+\left(\frac{4}{3}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{3}{4}\times\left(\frac{4}{3}\right)^n}{2+\left(\frac{4}{3}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5\times\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{3}{4}}{2\times\left(\frac{3}{4}\right)^n+1}=-\frac{3}{4}$$

$$\therefore f(-2)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f(1)+f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}+1+1+\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{7}{4}$$

다른 풀이

(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{n-1}=\lim_{n\to\infty} x^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3x-x^{n-1}}{2+x^n}=\frac{1+3x}{2}$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{n-1}=\lim_{n\to\infty} x^n=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3x-x^{n-1}}{2+x^n}=\frac{1+3-1}{2+1}=1$$

(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+3x-x^{n-1}}{2+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^n}+\frac{3x}{x^n}-\frac{1}{x}}{\frac{2}{x^n}+1}=-\frac{1}{x}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(-2)+f\left(\frac{1}{3}\right)+f(1)+f\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{2}+1+1+\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{7}{4}$$

## 0105 답 ③

(i) $-1<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-2}{x^n+1}=-2$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^n=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-2}{x^n+1}=\frac{1-2}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

(iii) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-2}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=1$$

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)=\begin{cases}-2 & (-1<x<1)\\ -\frac{1}{2} & (x=1)\\ 1 & (x>1)\end{cases}$ 이므로 $y=f(x)$의 그래프는 ③이다.

## 0106 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^{2n}=\lim_{n\to\infty} x^{2n-1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+x^{2n-1}}{3+x^{2n}}=\frac{1}{3}x^2$$

ㄴ. $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+x^{2n-1}}{3+x^{2n}}=\frac{1+(-1)}{3+1}=0$$

$x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n-1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+x^{2n-1}}{3+x^{2n}}=\frac{1+1}{3+1}=\frac{1}{2}$$

ㄷ. $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2+x^{2n-1}}{3+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^{2n}}+\frac{1}{x}}{\frac{3}{x^{2n}}+1}=\frac{1}{x}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 0107 답 −33

(i) $x=1, 2, 3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-x^{n+1}}{4^n+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-x\times\left(\frac{x}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{x}{4}\right)^n}=4 \quad \cdots\cdots \text{ⓘ}$$

(ii) $x=4$일 때,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-4^{n+1}}{4^n+4^n}=0 \quad \cdots\cdots \text{ⓘⓘ}$$

(iii) $x=5, 6, 7, \cdots, 10$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{x}\right)^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-x^{n+1}}{4^n+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times\left(\frac{4}{x}\right)^n-x}{\left(\frac{4}{x}\right)^n+1}=-x \quad \cdots\cdots \text{ⓘⓘⓘ}$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{10}f(x)=f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$$
$$=4\times3+0-(5+6+7+\cdots+10)=-33 \quad \cdots\cdots \text{ⓘⓥ}$$

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ $x=1, 2, 3$일 때, $f(x)$ 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘ $x=4$일 때, $f(x)$ 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘⓘ $x=5, 6, 7, \cdots, 10$일 때, $f(x)$ 구하기 | 30 % |
| ⓘⓥ $\sum_{x=1}^{10}f(x)$의 값 구하기 | 10 % |

## 0108 답 ④

(i) $\left|\frac{x}{2}\right|<1$, 즉 $-2<x<2$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}=-1$$

$f(k)=k$에서 $f(k)=-1$ $\therefore k=-1$

(ii) $\frac{x}{2}=-1$, 즉 $x=-2$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}=\frac{-3-1}{1+1}=-2$$

$f(k)=k$에서 $f(k)=-2$ $\therefore k=-2$

(iii) $\frac{x}{2}=1$, 즉 $x=2$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}=\frac{3-1}{1+1}=1$$

이는 $f(k)=k$를 만족시키지 않는다.

(iv) $\left|\frac{x}{2}\right|>1$, 즉 $x<-2$ 또는 $x>2$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}-1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}x-\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}=\frac{3}{2}x$$

이는 $f(k)=k$를 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서 $f(k)=k$를 만족시키는 실수 $k$의 값은 $-2$, $-1$이므로 구하는 합은

$-2+(-1)=-3$

## 0109 답 4

$\mathrm{P}_n(4^n, 2^n)$, $\mathrm{P}_{n+1}(4^{n+1}, 2^{n+1})$이므로

$$l_n=\sqrt{(4^{n+1}-4^n)^2+(2^{n+1}-2^n)^2}$$
$$=\sqrt{(3\times4^n)^2+(2^n)^2}$$
$$=\sqrt{9\times16^n+4^n}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_{n+1}}{l_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9\times16^{n+1}+4^{n+1}}}{\sqrt{9\times16^n+4^n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{9\times16^{n+1}+4^{n+1}}{9\times16^n+4^n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{9\times16+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{9+\left(\frac{1}{4}\right)^n}}$$
$$=\sqrt{16}=4$$

## 0110 답 ②

$2x+y=4^n$, $x-2y=2^n$을 연립하여 풀면

$x=\frac{1}{5}(2\times4^n+2^n)$, $y=\frac{1}{5}(4^n-2^{n+1})$

즉, 두 직선 $2x+y=4^n$, $x-2y=2^n$이 만나는 점의 좌표는

$\left(\frac{1}{5}(2\times4^n+2^n), \frac{1}{5}(4^n-2^{n+1})\right)$

따라서 $a_n=\frac{1}{5}(2\times4^n+2^n)$, $b_n=\frac{1}{5}(4^n-2^{n+1})$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5}(4^n-2^{n+1})}{\frac{1}{5}(2\times4^n+2^n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4^n-2^{n+1}}{2\times4^n+2^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{1}{2}$$

**0111** 답 3

$\log_2 x=n$에서 $x=2^n$, $\log_3 x-1=n$에서 $x=3^{n+1}$이므로

$A_n(2^n,\ n)$, $B_n(3^{n+1},\ n)$

$\therefore\ \overline{A_nB_n}=3^{n+1}-2^n$, $\overline{A_nC_n}=n$

따라서 사각형 $A_nC_nD_nB_n$의 넓이 $S_n$은

$S_n=n(3^{n+1}-2^n)$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(3^{n+2}-2^{n+1})}{n(3^{n+1}-2^n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+2}-2^{n+1}}{3^{n+1}-2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\times\lim_{n\to\infty}\frac{9-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}{3-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=1\times 3=3$$

## AB 유형 점검 24~26쪽

**0112** 답 ⑤

① $n$의 값이 한없이 커질 때, $10-3n$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 수열 $\{10-3n\}$은 음의 무한대로 발산한다.

② $n$의 값이 한없이 커질 때, $2\times(-1)^n$의 값은 $-2$와 2가 번갈아 나오므로 수열 $\{2\times(-1)^n\}$은 발산(진동)한다.

③ $n$의 값이 한없이 커질 때, $\frac{n^2-1}{3n+2}$의 값도 한없이 커지므로 수열 $\left\{\frac{n^2-1}{3n+2}\right\}$은 양의 무한대로 발산한다.

④ $n$의 값이 한없이 커질 때, $\frac{n}{\sqrt{n}+1}$의 값도 한없이 커지므로 수열 $\left\{\frac{n}{\sqrt{n}+1}\right\}$은 양의 무한대로 발산한다.

⑤ $n$의 값이 한없이 커질 때, $\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{1}{n}-\frac{5}{n^2}\right\}$는 0에 수렴한다.

따라서 수렴하는 수열은 ⑤이다.

**0113** 답 5

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하자.

$\lim_{n\to\infty}(a_n+2b_n)=7$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}b_n=7$

$\therefore\ \alpha+2\beta=7$ ····· ㉠

$\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=4$에서 $2\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=4$

$\therefore\ 2\alpha-\beta=4$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=3$, $\beta=2$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$$

$$=\alpha+\beta=5$$

**0114** 답 ③

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$($\alpha$는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+2}=\alpha$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{8a_{n+2}+7}{3a_n+1}=\frac{8\lim_{n\to\infty}a_{n+2}+7}{3\lim_{n\to\infty}a_n+1}=\frac{8\alpha+7}{3\alpha+1}$$

즉, $\frac{8\alpha+7}{3\alpha+1}=3$이므로 $8\alpha+7=9\alpha+3$

$\therefore\ \alpha=4$ $\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha=4$

**0115** 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+n}{2n^2-n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}=\frac{5}{2}$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+5)}{n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n}{n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{5}{n}}{1-\frac{2}{n^2}}=1$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{3}=\frac{1}{3}$

ㄹ. $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{4n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{2}{3}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

**0116** 답 4

$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$

$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1)$

$=4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-4\times\frac{n(n+1)}{2}+n$

$=\frac{4n^3-n}{3}$

$1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)$

$=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$

$=\frac{n^3+3n^2+2n}{3}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2}{1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+n(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4n^3-n}{3}}{\frac{n^3+3n^2+2n}{3}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3-n}{n^3+3n^2+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}=4$$

## 0117 답 9

$a\neq0$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+4}{an^2-bn-3}=0$이므로 $a=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+4}{an^2-bn-3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+4}{-bn-3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\frac{4}{n}}{-b-\frac{3}{n}}=-\dfrac{3}{b}$

따라서 $-\dfrac{3}{b}=\dfrac{1}{3}$이므로 $b=-9$

$\therefore a-b=0-(-9)=9$

## 0118 답 ⑤

① $\lim\limits_{n\to\infty}(3n-\sqrt{9n^2+n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(3n-\sqrt{9n^2+n})(3n+\sqrt{9n^2+n})}{3n+\sqrt{9n^2+n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n}{3n+\sqrt{9n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-1}{3+\sqrt{9+\frac{1}{n}}}=-\dfrac{1}{6}$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}(\sqrt{n+4}-\sqrt{n})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+1}=2$

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n-\sqrt{n^2+6n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt{n^2+6n}}{(n-\sqrt{n^2+6n})(n+\sqrt{n^2+6n})}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+\sqrt{n^2+6n}}{-6n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{1+\frac{6}{n}}}{-6}=-\dfrac{1}{3}$

④ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}+n}{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}+n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)=2$

⑤ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n+5}-\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{2(\sqrt{n+5}+\sqrt{n})}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1\right)}{2\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1\right)}=\dfrac{5}{2}$

따라서 극한값이 가장 큰 것은 ⑤이다.

## 0119 답 ④

$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{an^2+n}-\sqrt{an^2-an})(\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an})}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a+1)n}{\sqrt{an^2+n}+\sqrt{an^2-an}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a+1}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+\sqrt{a-\frac{a}{n}}}=\dfrac{a+1}{2\sqrt{a}}$

따라서 $\dfrac{a+1}{2\sqrt{a}}=\dfrac{5}{4}$이므로 $2(a+1)=5\sqrt{a}$

양변을 제곱하면 $4a^2+8a+4=25a$

$4a^2-17a+4=0$

$(4a-1)(a-4)=0$ $\therefore a=\dfrac{1}{4}$ 또는 $a=4$

따라서 모든 양수 $a$의 값의 합은 $\dfrac{1}{4}+4=\dfrac{17}{4}$

## 0120 답 ⑤

$\dfrac{a_n+2}{2}=b_n$으로 놓으면 $a_n+2=2b_n$

$\therefore a_n=2b_n-2$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=6$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{na_n+1}{a_n+2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(2b_n-2)+1}{2b_n-2+2n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2b_n-2+\frac{1}{n}}{\frac{2b_n}{n}-\frac{2}{n}+2}$

$=\dfrac{2\times6-2}{2}=5$

## 0121 답 −2

$a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=a_n-c_n$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=2$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_n}{a_n}=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+b_n}{a_n-2b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n+(a_n-c_n)}{a_n-2(a_n-c_n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2a_n-c_n}{-a_n+2c_n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-\frac{c_n}{a_n}}{-1+\frac{2c_n}{a_n}}=-2$

## 0122 답 3

$\sqrt{9n^2-n}<(n+1)a_n<\sqrt{9n^2+2n}$에서

$\dfrac{\sqrt{9n^2-n}}{n+1}<a_n<\dfrac{\sqrt{9n^2+2n}}{n+1}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2-n}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{9n^2+2n}}{n+1}=3$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=3$

## 0123 답 ㄱ, ㄹ

ㄱ. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=a$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{a_n}=0$

즉, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{b_n}{a_n}\right)=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}=1$

ㄴ. [반례] $a_n=b_n=(-1)^n$이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=1$이므로 수열 $\{a_nb_n\}$이 수렴하지만 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모두 발산(진동)한다.

ㄷ. [반례] $a_n=(-1)^n$이면 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=1$이므로 수열 $\{|a_n|\}$은 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$은 발산(진동)한다.

ㄹ. $|a_n|<|b_n|$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이면 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=0$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

## 0124 답 ①

$2a_n+b_n=3^n$, $a_n+2b_n=2^n$을 연립하여 풀면

$a_n=\frac{1}{3}(2\times3^n-2^n)$, $b_n=\frac{1}{3}(2^{n+1}-3^n)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}(2\times3^n-2^n)}{\frac{1}{3}(2^{n+1}-3^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times3^n-2^n}{2\times2^n-3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}=-2$$

## 0125 답 6

첫째항이 5이고 공비가 $r$인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n$은

$a_n=5\times r^{n-1}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합 $S_n$은

$S_n=\frac{5(r^n-1)}{r-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\times r^{n-1}}{\frac{5(r^n-1)}{r-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n-1}(r-1)}{r^n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{r}}{1-\left(\frac{1}{r}\right)^n}=1-\frac{1}{r}$$

따라서 $1-\frac{1}{r}=\frac{5}{6}$이므로 $r=6$

## 0126 답 3

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$($\alpha$는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6\times5^n+4^{n+1}\times a_n}{5^n\times a_n-4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+4\times\left(\frac{4}{5}\right)^n\times a_n}{a_n-\left(\frac{4}{5}\right)^n}=\frac{6}{\alpha}$$

따라서 $\frac{6}{\alpha}=2$이므로 $\alpha=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha=3$

## 0127 답 $-2<x\le-\frac{2}{3}$

(i) 수열 $\left\{(x-1)\left(\frac{x}{2}\right)^n\right\}$의 첫째항이 $(x-1)\times\frac{x}{2}$, 공비가 $\frac{x}{2}$이므로 이 수열이 수렴하려면

$(x-1)\times\frac{x}{2}=0$ 또는 $-1<\frac{x}{2}\le1$

$(x-1)\times\frac{x}{2}=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$ ····· ㉠

$-1<\frac{x}{2}\le1$에서 $-2<x\le2$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $-2<x\le2$

(ii) 등비수열 $\left\{\left(\frac{3x-2}{4}\right)^n\right\}$의 공비가 $\frac{3x-2}{4}$이므로 이 등비수열이 수렴하려면 $-1<\frac{3x-2}{4}\le1$

$-4<3x-2\le4$, $-2<3x\le6$

$\therefore -\frac{2}{3}<x\le2$

(i), (ii)에서 두 수열 중 어느 하나만 수렴하도록 하는 실수 $x$의 값의 범위는 $-2<x\le-\frac{2}{3}$

## 0128 답 8

(i) $\left|\frac{r}{4}\right|<1$, 즉 $-4<r<4$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{4}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{4}\right)^{2n+1}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\left(\frac{r}{4}\right)^{2n+1}}{1+\left(\frac{r}{4}\right)^{2n}}=2$$

(ii) $\frac{r}{4}=-1$, 즉 $r=-4$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{4}\right)^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{4}\right)^{2n+1}=-1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\left(\frac{r}{4}\right)^{2n+1}}{1+\left(\frac{r}{4}\right)^{2n}}=\frac{2+(-1)}{1+1}=\frac{1}{2}\ne2$$

(iii) $\frac{r}{4}=1$, 즉 $r=4$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{4}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{4}\right)^{2n+1}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\left(\frac{r}{4}\right)^{2n+1}}{1+\left(\frac{r}{4}\right)^{2n}}=\frac{2+1}{1+1}=\frac{3}{2}\ne2$$

(iv) $\left|\frac{r}{4}\right|>1$, 즉 $r<-4$ 또는 $r>4$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{r}\right)^{2n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\left(\frac{r}{4}\right)^{2n+1}}{1+\left(\frac{r}{4}\right)^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{4}{r}\right)^{2n}+\frac{r}{4}}{\left(\frac{4}{r}\right)^{2n}+1}=\frac{r}{4}$$

따라서 $\frac{r}{4}=2$이므로 $r=8$

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 $r$의 값의 범위는

$-4<r<4$ 또는 $r=8$

따라서 정수 $r$는 $-3$, $-2$, $-1$, ..., 3, 8의 8개이다.

## 0129 답 $-\frac{11}{3}$

$$f(-2)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^{2n+1}-2}{(-2)^{2n}+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{-2-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}}{1+3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}}=-2$$

$$f(-1)=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{2n+1}-2}{(-1)^{2n}+3}=\frac{-1-2}{1+3}=-\frac{3}{4}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}-2}{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}+3}=-\frac{2}{3}$$

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2n+1}-2}{1^{2n}+3}=\frac{1-2}{1+3}=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ f(-2)+f(-1)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)$$

$$=-2+\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{11}{3}$$

다른 풀이

(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-2}{x^{2n}+3}=-\frac{2}{3}$$

(ii) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-2}{x^{2n}+3}=\frac{-1-2}{1+3}=-\frac{3}{4}$$

(iii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-2}{x^{2n}+3}=\frac{1-2}{1+3}=-\frac{1}{4}$$

(iv) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}-2}{x^{2n}+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{x-\frac{2}{x^{2n}}}{1+\frac{3}{x^{2n}}}=x$$

(i)~(iv)에서

$$f(-2)+f(-1)+f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)$$

$$=-2+\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{11}{3}$$

## 0130 답 1

$A_n(n,\ 2^n)$, $B_n(n,\ 3^n)$이므로 삼각형 $OA_nC$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times1\times n=\frac{n}{2}$$

삼각형 $A_nB_nC$의 넓이 $T_n$은

$$T_n=\frac{1}{2}\times(3^n-2^n)\times n$$

$$=\frac{n}{2}(3^n-2^n)$$

사각형 $OA_nB_nC$의 넓이 $S_n$은 삼각형 $OA_nC$의 넓이와 삼각형 $A_nB_nC$의 넓이의 합과 같으므로

$$S_n=\frac{n}{2}+\frac{n}{2}(3^n-2^n)$$

$$=\frac{n}{2}(1+3^n-2^n)$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{2}(3^n-2^n)}{\frac{n}{2}(1+3^n-2^n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{1+3^n-2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$$

## 0131 답 4

$n\geq2$일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=2n^2-3n-\{2(n-1)^2-3(n-1)\}=4n-5 \quad \cdots\cdots \text{❶}$$

따라서 $a_{2n}=4\times2n-5=8n-5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n-5}{2n-5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{5}{n}}{2-\frac{5}{n}}=4 \quad \cdots\cdots \text{❷}$$

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $a_n$ 구하기 | 40 % |
| ❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_n-2n}$의 값 구하기 | 60 % |

## 0132 답 6

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+an^2+bn}{a_n+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2a_n}{n}+an+b}{\frac{a_n}{n}+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an+b+2}{4} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$

$a\neq0$이면 ㉠은 발산하므로 $a=0$ ····· ❶

따라서 ㉠에서 $\frac{b+2}{4}=2$이므로 $b=6$ ····· ❷

$\therefore\ b-a=6-0=6$ ····· ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $a$의 값 구하기 | 40 % |
| ❷ $b$의 값 구하기 | 40 % |
| ❸ $b-a$의 값 구하기 | 20 % |

## 0133 답 3

$y=\frac{2n}{n+2}x$에서 $x=\frac{n+2}{2n}y$

이를 $x+y=3$에 대입하면

$$\frac{n+2}{2n}y+y=3$$

$$\frac{3n+2}{2n}y=3 \qquad \therefore\ y=\frac{6n}{3n+2} \quad \cdots\cdots \text{❶}$$

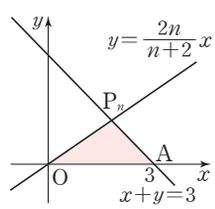
따라서 점 $P_n$의 $y$좌표가 $\frac{6n}{3n+2}$이고

$A(3,\ 0)$이므로

$$S_n=\frac{1}{2}\times3\times\frac{6n}{3n+2}=\frac{9n}{3n+2} \quad \cdots\cdots \text{❷}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{9n}{3n+2}$$

$$=3 \quad \cdots\cdots \text{❸}$$




| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 점 $P_n$의 $y$좌표 구하기 | 40 % |
| ❷ $S_n$ 구하기 | 40 % |
| ❸ $\lim_{n\to\infty}S_n$의 값 구하기 | 20 % |

## 실력 향상 27쪽

### 0134 답 ①

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{an^2+bn}-bn)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{an^2+bn}-bn)(\sqrt{an^2+bn}+bn)}{\sqrt{an^2+bn}+bn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n^2+bn}{\sqrt{an^2+bn}+bn} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(bn-1)^2}{(b+6)n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(b-\frac{1}{n}\right)^2}{b+6+\frac{1}{n^2}}=\frac{b^2}{b+6} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-b^2)n^2+bn}{\sqrt{an^2+bn}+bn}=\frac{b^2}{b+6} \quad \cdots\cdots ㉢$$

이때 $a-b^2\neq0$이면 ㉠은 발산하므로

$a-b^2=0 \quad \therefore a=b^2$ ……㉣

㉣을 ㉢의 좌변에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{bn}{\sqrt{b^2n^2+bn}+bn}=\lim_{n\to\infty}\frac{b}{\sqrt{b^2+\frac{b}{n}}+b}=\frac{1}{2}$$

즉, $\frac{b^2}{b+6}=\frac{1}{2}$이므로

$2b^2=b+6$

$2b^2-b-6=0,\ (2b+3)(b-2)=0$

$\therefore b=-\frac{3}{2}$ 또는 $b=2$

그런데 $b>0$이므로 $b=2$

이를 ㉣에 대입하면

$a=4$

$\therefore a+b=4+2=6$

### 0135 답 $\frac{21}{4}$

㈐에서 $a_1+a_2+a_3=1+4+9=14$

㈏에서

$a_4+a_5+a_6=3(a_1+a_2+a_3)=3\times14$

$a_7+a_8+a_9=3(a_4+a_5+a_6)=3^2\times14$

$\vdots$

$\therefore a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}=3^{n-1}\times14$

$$\therefore \sum_{k=1}^{3n}a_k=(a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6)+\cdots+(a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n})$$

$$=14+3\times14+3^2\times14+\cdots+3^{n-1}\times14$$

$$=\frac{14(3^n-1)}{3-1}=7(3^n-1)$$

이때 $a_2=4,\ a_5=3\times4,\ a_8=3^2\times4,\ \cdots,\ a_{3n-1}=3^{n-1}\times4$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{3n-1}}\sum_{k=1}^{3n}a_k=\lim_{n\to\infty}\frac{7(3^n-1)}{4\times3^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{7\times3^n-7}{\frac{4}{3}\times3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{7-7\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{4}{3}}=\frac{21}{4}$$

### 0136 답 $-\frac{1}{2}$

(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{x^{2n}+1}=0$$

(ii) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1,\ \lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{x^{2n}+1}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

(iii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+1}=1$이므로

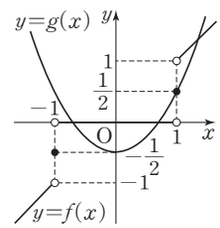
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{x^{2n}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(iv) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+1}}{x^{2n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=x$$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점이 4개이려면 $y=g(x)$의 그래프가 점 $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나야 한다.

따라서 $\frac{1}{2}=1^2+k$이므로 $k=-\frac{1}{2}$




### 0137 답 ②

(i) $0<x<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+3}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+3}+ax^2+bx}{x^n+1}=ax^2+bx$$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^n=\lim_{n\to\infty}x^{n+3}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+3}+ax^2+bx}{x^n+1}=\frac{1+a+b}{1+1}=\frac{a+b+1}{2}$$

(iii) $x>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+3}+ax^2+bx}{x^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^3+\frac{ax^2}{x^n}+\frac{bx}{x^n}}{1+\frac{1}{x^n}}=x^3$$

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx & (0<x<1)\\ \frac{a+b+1}{2} & (x=1)\\ x^3 & (x>1)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 모든 양의 실수 $x$에서 미분가능하면 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$$\lim_{x\to1+}x^3=\lim_{x\to1-}(ax^2+bx)=\frac{a+b+1}{2}$$

$1=a+b=\frac{a+b+1}{2} \quad \therefore a+b=1$ ……㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}2ax+b & (0<x<1)\\ 3x^2 & (x>1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to1+}f'(x)=\lim_{x\to1-}f'(x)$

$\lim_{x\to1+}3x^2=\lim_{x\to1-}(2ax+b) \quad \therefore 2a+b=3$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2,\ b=-1$

$\therefore a^2-b^2=4-1=3$

# 02 / 급수

## A 개념 확인 28~31쪽

**0138** 답 $\frac{1}{4}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-2n+1}{4n^2+3} = \frac{1}{4}$$

**0139** 답 0

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-1}{n^3+1} = 0$$

**0140** 답 $\sqrt{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{6n^4-5n^3+2n^2-2}}{\sqrt{3n^4+n^2-2}} = \sqrt{2}$$

**0141** 답 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{1+\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\} = 1$$

**0142** 답 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{5-\left(\frac{5}{7}\right)^n\right\} = 5$$

**0143** 답 발산

주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2k = 2\times\frac{n(n+1)}{2} = n^2+n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (n^2+n) = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

**0144** 답 발산

주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 3 = 3n$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 3n = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

**0145** 답 수렴, $\frac{1}{2}$

주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{1}{2}$이다.

**0146** 답 수렴, $\frac{5}{6}$

주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right) = \frac{5}{6}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{5}{6}$이다.

**0147** 답 수렴, 1

주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+1}{k}-\frac{k+2}{k+1}\right)$$
$$= \left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$= 2-\frac{n+2}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(2-\frac{n+2}{n+1}\right) = 2-1 = 1$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

**0148** 답 발산

주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$
$$= (\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$
$$= \sqrt{n+1}-1$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-1) = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

**0149** 답 풀이 참조

주어진 급수의 제$n$항을 $a_n$이라 하면

$a_n = 3n+2$

이때 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (3n+2) = \infty \neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

**0150** 답 풀이 참조

주어진 급수의 제$n$항을 $a_n$이라 하면

$a_n=2^{n-1}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}2^{n-1}=\infty\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

**0151** 답 풀이 참조

주어진 급수의 제$n$항을 $a_n$이라 하면

$a_n=\dfrac{3n}{5n+1}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{5n+1}=\dfrac{3}{5}\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

**0152** 답 풀이 참조

주어진 급수의 제$n$항을 $a_n$이라 하면

$a_n=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}=1\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

**0153** 답 $-6$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}3a_n=3\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=3\times(-2)=-6$

**0154** 답 2

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{2}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\dfrac{1}{2}\times4=2$

**0155** 답 0

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2a_n+b_n)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=2\times(-2)+4=0$

**0156** 답 22

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(4b_n-3a_n)=4\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n-3\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=4\times4-3\times(-2)=22$

**0157** 답 $-2$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{2}-\dfrac{b_n}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n-\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\dfrac{1}{2}\times(-2)-\dfrac{1}{4}\times4=-2$

**0158** 답 수렴, $\dfrac{5}{4}$

주어진 급수에서 공비가 $\dfrac{1}{5}$이고 $-1<\dfrac{1}{5}<1$이므로 이 급수는 수렴하고, 그 합은

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{5}}=\dfrac{5}{4}$

**0159** 답 발산

주어진 급수에서 공비가 $-\dfrac{3}{2}$이고 $-\dfrac{3}{2}<-1$이므로 이 급수는 발산한다.

**0160** 답 수렴, $\dfrac{1}{9}$

주어진 급수에서 공비가 0.1이고 $-1<0.1<1$이므로 이 급수는 수렴하고, 그 합은

$0.1+0.01+0.001+0.0001+\cdots=\dfrac{0.1}{1-0.1}=\dfrac{1}{9}$

**0161** 답 발산

주어진 급수에서 공비가 $\sqrt{3}$이고 $1<\sqrt{3}$이므로 이 급수는 발산한다.

**0162** 답 4

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}=\dfrac{1}{1-\frac{3}{4}}=4$

**0163** 답 $-\dfrac{2}{7}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{n}=\dfrac{-\frac{2}{5}}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)}=-\dfrac{2}{7}$

**0164** 답 3

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}2\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\dfrac{2}{1-\frac{1}{3}}=3$

**0165** 답 $\dfrac{8}{3}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\dfrac{4}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\dfrac{8}{3}$

**0166** 답 $-1<x<1$

공비가 $x$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$-1<x<1$

**0167** 답 $-3<x<3$

첫째항이 $\dfrac{x}{3}$, 공비가 $-\dfrac{x}{3}$이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$\dfrac{x}{3}=0$ 또는 $-1<-\dfrac{x}{3}<1$

$\therefore\ -3<x<3$

**0168** 답 $1<x<3$

공비가 $x-2$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$-1<x-2<1$ $\quad\therefore\ 1<x<3$

**0169** 답 $-\dfrac{2}{3}<x<0$

공비가 $3x+1$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$-1<3x+1<1,\ -2<3x<0$

$\therefore\ -\dfrac{2}{3}<x<0$

## B 유형 완성 32~43쪽

### 0170 답 ①

주어진 급수의 제$n$항을 $a_n$이라 하면

$$a_n=\frac{3}{1+2+3+\cdots+n+(n+1)}=\frac{3}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$$

$$=\frac{6}{(n+1)(n+2)}=6\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

이때 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}6\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=6\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$=6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)$$

따라서 주어진 급수의 합은

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=3$$

### 0171 답 $\frac{3}{2}$

주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sqrt{n^2+3n}-n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+3n}-n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}{\sqrt{n^2+3n}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3n}+n}=\frac{3}{2}$$

### 0172 답 5

주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)$$

$$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)$$

$$=a_{n+1}-a_1$$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}a_n=8$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_1)$$

$$=\lim_{n\to\infty}a_{n+1}-\lim_{n\to\infty}3=8-3=5$$

### 0173 답 $\frac{2}{3}$

$$S_n=\frac{n\{2\times3+(n-1)\times3\}}{2}=\frac{3n(n+1)}{2}$$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2}{3}$$

### 0174 답 $\frac{11}{6}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n+\beta_n=\frac{3}{n(n+3)}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n+\beta_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

$$=\frac{11}{6}$$

### 0175 답 3

다항식 $a_nx^2-a_n-6$을 $x-2n$으로 나누었을 때의 나머지가 0이므로

$$4n^2a_n-a_n-6=0 \quad \cdots\cdots \text{ⓘ}$$

$$(4n^2-1)a_n=6$$

$$(2n-1)(2n+1)a_n=6 \qquad \therefore a_n=\frac{6}{(2n-1)(2n+1)} \quad \cdots\cdots \text{ⓘⓘ}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(2n-1)(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}3\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}3\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}3\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=3 \quad \cdots\cdots \text{ⓘⓘⓘ}$$

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ 나머지 정리를 이용하여 $a_n$에 대한 식 세우기 | 30 % |
| ⓘⓘ $a_n$ 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘⓘ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 합 구하기 | 40 % |

### 0176 답 ③

$a_n=1+(n-1)d$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{a_n}-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{a_k}-\frac{k+1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{2}{a_2}\right)+\left(\frac{2}{a_2}-\frac{3}{a_3}\right)+\left(\frac{3}{a_3}-\frac{4}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{a_n}-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n+1}{dn+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{d}$$

따라서 $1-\frac{1}{d}=\frac{2}{3}$이므로

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{3} \qquad \therefore d=3$$

## 0177 답 ②

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k(k+2)}{(k+1)^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k}{k+1}\times\frac{k+2}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)+\cdots+\log\left(\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n}{n+1}\times\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{n+2}{2(n+1)}=\log\frac{1}{2}=\log 2^{-1}=-\log 2$$

## 0178 답 −2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log_2 a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log_2 a_k$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_2(a_1a_2a_3\times\cdots\times a_n)=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n+1}{4n-3}$$
$$=\log_2\frac{1}{4}=\log_2 2^{-2}=-2$$

## 0179 답 ④

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\log_{n+1}4-\log_{n+2}4)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\log_{k+1}4-\log_{k+2}4)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\log_4(k+1)}-\frac{1}{\log_4(k+2)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{\log_4 2}-\frac{1}{\log_4 3}\right)+\left(\frac{1}{\log_4 3}-\frac{1}{\log_4 4}\right)+\left(\frac{1}{\log_4 4}-\frac{1}{\log_4 5}\right)+\cdots+\left\{\frac{1}{\log_4(n+1)}-\frac{1}{\log_4(n+2)}\right\}\right]$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{\log_4 2}-\frac{1}{\log_4(n+2)}\right\}$$
$$=\frac{1}{\log_4 2}=\log_2 4=\log_2 2^2=2$$

## 0180 답 ㄴ, ㄹ

주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하자.

ㄱ. $S_{2n-1}=1+(-2+2)+(-3+3)+\cdots+(-n+n)=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$

$S_{2n}=(1-2)+(2-3)+(3-4)+\cdots+\{n-(n+1)\}=-n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n}=-\infty$

즉, $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$

즉, 주어진 급수는 $\frac{1}{2}$에 수렴한다.

ㄷ. $S_{2n-1}=\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(-\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\frac{1}{2}$

$S_{2n}=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

즉, $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄹ. $S_{2n-1}=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$

$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right\}$

$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=1$

즉, $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 1에 수렴한다.

따라서 보기에서 수렴하는 급수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

## 0181 답 ①

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$S_{2n-1}=1+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n-1}\right)=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$

$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{2n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$

즉, $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 1에 수렴한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 제$n$항까지의 부분합을 $T_n$이라 하면

$T_n=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{2n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$

즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 1에 수렴한다.

따라서 옳은 것은 ①이다.

## 0182 답 ④

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n^2}{1+2+3+\cdots+n}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n^2}{1+2+3+\cdots+n}\right)=0$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{1+2+3+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{n(n+1)}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$

이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=2$

## 0183 답 $\frac{5}{3}$

$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(3a_n-2)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+6}{3a_n+2}=\frac{\frac{2}{3}+6}{3\times\frac{2}{3}+2}=\frac{5}{3}$

## 0184 답 $-1$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이고, $\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{2}{3}$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-9S_n+2}{2a_n+6S_n}=\frac{3\times0-9\times\frac{2}{3}+2}{2\times0+6\times\frac{2}{3}}=-1$

## 0185 답 ③

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{4^n}-3\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{4^n}-3\right)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4^n}=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-3^{n+1}}{4^{n+1}+2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{4^n}-3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{4+\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{3}{4}$

## 0186 답 $\frac{1}{5}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5a_n-1}{3a_n+2}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n-1}{3a_n+2}=0$ …… ❶

$\frac{5a_n-1}{3a_n+2}=b_n$으로 놓으면 $5a_n-1=(3a_n+2)b_n$

$(5-3b_n)a_n=2b_n+1 \quad \therefore a_n=\frac{2b_n+1}{5-3b_n}$ …… ❷

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n+1}{5-3b_n}=\frac{2\times0+1}{5-3\times0}=\frac{1}{5}$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n-1}{3a_n+2}$의 값 구하기 | 30 % |
| ❷ $a_n$을 새로운 수열 $b_n$에 대하여 정리하기 | 30 % |
| ❸ $\lim_{n\to\infty}a_n$의 값 구하기 | 40 % |

## 0187 답 $-4$

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=24 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}S_n=24$

또 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}a_{2n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}+10a_{2n}}{a_n-6}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_{2n}+9a_{2n}}{a_n-6}$

$=\frac{24+9\times0}{0-6}=-4$

## 0188 답 1

$\sum_{n=1}^{\infty}na_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}=0$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(a_n-a_{n+1})$의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$S_n=2(a_1-a_2)+3(a_2-a_3)+4(a_3-a_4)+\cdots+(n+1)(a_n-a_{n+1})$

$=2a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n-(n+1)a_{n+1}$

$=a_1+\sum_{k=1}^{n}a_k-(n+1)a_{n+1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(a_n-a_{n+1})=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{a_1+\sum_{k=1}^{n}a_k-(n+1)a_{n+1}\right\}$

$=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}$

$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-0=1$

## 0189 답 ④

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n}=3\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{n}$은 발산한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+4)(n+5)}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+4}-\frac{1}{k+5}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{n+5}\right)=\frac{1}{5}$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n+1}{2n+5}=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1\neq0$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\log_2\frac{n+1}{2n+5}$은 발산한다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{\sqrt{k}}-\frac{2}{\sqrt{k+1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(2-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{2}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{2}{\sqrt{n+1}}\right)=2$

따라서 보기에서 수렴하는 급수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

## 0190 답 ⑤

① $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$

$>\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=\infty$

즉, 주어진 급수는 발산한다.

② $\frac{1}{3}+\frac{2}{7}+\frac{3}{11}+\frac{4}{15}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n-1}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n-1}=\frac{1}{4}\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

③ $2+\frac{5}{4}+\frac{10}{9}+\frac{17}{16}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n^2}=1\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

④ $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{4}}+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$

이때 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=\infty\neq0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

⑤ $\frac{1}{1^2+3}+\frac{1}{2^2+6}+\frac{1}{3^2+9}+\frac{1}{4^2+12}+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+3)}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{11}{6}=\frac{11}{18}$

따라서 수렴하는 급수는 ⑤이다.

## 0191 답 −9

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n)=13$에서 $2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+3\sum_{n=1}^{\infty}b_n=13$

$\therefore 2\alpha+3\beta=13$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(4a_n-b_n)=5$에서 $4\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=5$

$\therefore 4\alpha-\beta=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=2$, $\beta=3$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-5b_n)=3\sum_{n=1}^{\infty}a_n-5\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=3\times2-5\times3=-9$

## 0192 답 ④

$4a_n-3b_n=c_n$으로 놓으면 $3b_n=4a_n-c_n$ $\therefore b_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}c_n$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=6$, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=30$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}c_n\right)=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}c_n$

$=\frac{4}{3}\times6-\frac{1}{3}\times30=-2$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-5b_n)=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n-5\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=2\times6-5\times(-2)=22$

## 0193 답 4

$\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}\log a_nb_n=2$에서 $\sum_{n=1}^{\infty}(\log a_n+\log b_n)=2$

$\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n+\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=2$ $\therefore \alpha+\beta=2$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{a_n^2}{b_n^3}=9$에서 $\sum_{n=1}^{\infty}(2\log a_n-3\log b_n)=9$

$2\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n-3\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=9$ $\therefore 2\alpha-3\beta=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=3$, $\beta=-1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\log a_n-\log b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n-\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n$

$=\alpha-\beta=4$

## 0194 답 ③

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n=0$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ ($\alpha$는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=\alpha-0=\alpha$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_n+2b_n)+2(2a_n-b_n)}{5}$

$=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)+\frac{2}{5}\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)=\frac{1}{5}\alpha+\frac{2}{5}\beta$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(a_n+2b_n)-(2a_n-b_n)}{5}$

$=\frac{2}{5}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)-\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-b_n)=\frac{2}{5}\alpha-\frac{1}{5}\beta$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 모두 수렴한다.

ㄹ. [반례] $a_n=\frac{1}{n(n+1)}$, $b_n=n^2$이면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 1에 수렴하고, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이지만

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}=1\neq0$이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

## 0195 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-1)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=1$

즉, $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.

ㄷ. [반례] $\{a_n\}$: $1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \cdots$이라 하고 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$S_{2n-1}=1$, $S_{2n}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} S_{2n}=1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 1에 수렴한다.

$\{a_n{}^2\}$: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \cdots$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2=\infty$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$은 발산한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

## 0196 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-2)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+2)=0$, $\lim_{n\to\infty}(b_n-2)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=-2$, $\lim_{n\to\infty} b_n=2$

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n=-2\times2=-4$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n=-2\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n+2)+(b_n-2)\}$

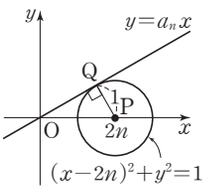
$=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2)+\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-2)$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 수렴한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

## 0197 답 ②

원의 중심을 P라 하면 P$(2n, 0)$이고, 원과 직선이 만나는 점을 Q라 하면 원의 반지름의 길이는 1이므로 $\overline{PQ}=1$




$\therefore \overline{OQ}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{PQ}^2}=\sqrt{(2n)^2-1^2}$

$=\sqrt{4n^2-1}$

$a_n=\tan(\angle POQ)=\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}$이므로 $a_n{}^2=\frac{1}{4n^2-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$

## 0198 답 $\frac{1}{2}$

직선 $(n+1)x+ny=1$에서 $y=0$일 때 $x=\frac{1}{n+1}$이고, $x=0$일 때 $y=\frac{1}{n}$이므로 주어진 직선의 $x$절편은 $\frac{1}{n+1}$, $y$절편은 $\frac{1}{n}$이다.

따라서 $S_n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{n+1}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{2n(n+1)}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}$

## 0199 답 ⑤

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}+(-3)^{n+1}}{12^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n+(-3)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}+(-3)\times\frac{-\frac{1}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}$

$=\frac{1}{10}+\frac{3}{5}=\frac{7}{10}$

## 0200 답 ②

$a_1=9$, $a_2=1$, $a_3=9$, $a_4=1$, $a_5=9$, $a_6=1$, $\cdots$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n}=\frac{a_1}{5}+\frac{a_2}{5^2}+\frac{a_3}{5^3}+\frac{a_4}{5^4}+\frac{a_5}{5^5}+\frac{a_6}{5^6}+\cdots$

$=\frac{9}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{9}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\frac{9}{5^5}+\frac{1}{5^6}+\cdots$

$=\left(\frac{9}{5}+\frac{9}{5^3}+\frac{9}{5^5}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{5^6}+\cdots\right)$

$=\frac{\frac{9}{5}}{1-\frac{1}{25}}+\frac{\frac{1}{25}}{1-\frac{1}{25}}=\frac{15}{8}+\frac{1}{24}=\frac{23}{12}$

## 0201 답 $\frac{13}{10}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cos n\pi+\left(\frac{1}{3}\right)^n\sin\frac{n}{2}\pi\right\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cos n\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\sin\frac{n}{2}\pi$

$=\left\{-\frac{1}{2}\cos\pi+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cos2\pi+\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cos3\pi+\cdots\right\}$

$+\left\{\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\sin\pi+\left(\frac{1}{3}\right)^3\sin\frac{3}{2}\pi+\cdots\right\}$

$=\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\right\}+\left\{\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{1}{3}\right)^5-\cdots\right\}$

$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)}=1+\frac{3}{10}=\frac{13}{10}$

## 0202 답 $\frac{4}{9}$

$\log_2(S_n+1)=2n$에서 $S_n+1=2^{2n}$

$\therefore S_n=2^{2n}-1$ …… ❶

(i) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=2^{2n}-1-(2^{2n-2}-1)$

$=2^{2n}-2^{2n-2}=3\times4^{n-1}$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3$ ····· ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$a_n=3\times4^{n-1}$ ····· ❷

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3\times4^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{9}$ ····· ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $S_n$ 구하기 | 20 % |
| ❷ $a_n$ 구하기 | 40 % |
| ❸ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 합 구하기 | 40 % |

## 0203 답 ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=-\frac{2\sqrt{5}}{2^n}$, $\alpha_n\beta_n=\frac{1}{2^{2n}}$

$(\alpha_n-\beta_n)^2=(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n=\frac{20}{2^{2n}}-\frac{4}{2^{2n}}=\frac{16}{2^{2n}}$이므로

$|\alpha_n-\beta_n|=\frac{4}{2^n}=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n-\beta_n|=4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=4\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=4$

## 0204 답 $\frac{1}{6}$

주어진 방정식에서

(i) $n=2k$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)일 때,

$x^n=(-3)^{2k-1}=-3^{2k-1}<0$

이때 $n$은 짝수이므로 실근의 개수는 0이다.

$\therefore a_{2k}=0$

(ii) $n=2k+1$ ($k=1, 2, 3, \cdots$)일 때,

$x^n=(-3)^{2k}=3^{2k}>0$

이때 $n$은 홀수이므로 실근의 개수는 1이다.

$\therefore a_{2k+1}=1$

(i), (ii)에서 $a_n=\begin{cases}0 & (n=2k)\\ 1 & (n=2k+1)\end{cases}$ (단, $k=1, 2, 3, \cdots$)

$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_2}{2^2}+\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_4}{2^4}+\frac{a_5}{2^5}+\cdots$

$=\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^7}+\cdots$

$=\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{6}$

**대수 다시보기**

실수 $a$와 2 이상인 자연수 $n$에 대하여 방정식 $x^n=a$의 실근의 개수는 다음과 같다.

| | $a>0$ | $a=0$ | $a<0$ |
|---|---|---|---|
| $n$이 홀수 | 1 | 1 | 1 |
| $n$이 짝수 | 2 | 1 | 0 |

## 0205 답 $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sqrt{2}$에서 $\frac{a_1}{1-r}=\sqrt{2}$

$\therefore a_1=\sqrt{2}(1-r)$ ····· ㉠

수열 $\{a_n^2\}$의 첫째항은 $a_1^2$, 공비는 $r^2$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{2}$에서 $\frac{a_1^2}{1-r^2}=\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{a_1^2}{(1+r)(1-r)}=\frac{1}{2}$

㉠을 대입하면

$\frac{2(1-r)^2}{(1+r)(1-r)}=\frac{1}{2}$, $\frac{2(1-r)}{1+r}=\frac{1}{2}$

$4(1-r)=1+r$, $5r=3$ $\therefore r=\frac{3}{5}$

이를 ㉠에 대입하면 $a_1=\frac{2\sqrt{2}}{5}$

## 0206 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$에서 $\frac{\frac{1}{2}}{1-r}=2$

$2(1-r)=\frac{1}{2}$ $\therefore r=\frac{3}{4}$

따라서 $a_n=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$이므로

$a_{2n}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{2n-1}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{9}{16}\right)^n$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{16}\right)^n=\frac{2}{3}\times\frac{\frac{9}{16}}{1-\frac{9}{16}}=\frac{6}{7}$

## 0207 답 $\frac{\pi}{6}$

$0<x<\frac{\pi}{4}$에서 $0<\tan x<1$이므로

$0<\tan^2x<1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(\tan^2x)^{n-1}=\frac{1}{1-\tan^2x}$

즉, $\frac{1}{1-\tan^2x}=\frac{3}{2}$이므로

$3-3\tan^2x=2$, $\tan^2x=\frac{1}{3}$

이때 $0<\tan x<1$이므로

$\tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\therefore x=\frac{\pi}{6}\left(\because 0<x<\frac{\pi}{4}\right)$

## 0208 답 ④

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+(-x)^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{x}{4}\right)^n$

$=\frac{\frac{x}{4}}{1-\frac{x}{4}}+\frac{-\frac{x}{4}}{1-\left(-\frac{x}{4}\right)}$

$=\frac{x}{4-x}-\frac{x}{4+x}=\frac{2x^2}{16-x^2}$

즉, $\frac{2x^2}{16-x^2}=\frac{2}{3}$이므로 $3x^2=16-x^2$

$4x^2=16$, $x^2=4$ $\therefore x=2$ ($\because 0<x<4$)

## 0209 답 16

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r$ ($0<r<1$)라 하면

$a_1+a_2=20$에서 $a_1+a_1r=20$ $\therefore a_1=\frac{20}{1+r}$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+2}=\frac{4}{3}$에서 $a_1r^2+a_1r^3+a_1r^4+\cdots=\frac{4}{3}$

$\therefore \frac{a_1r^2}{1-r}=\frac{4}{3}$

㉠을 대입하면 $\frac{20r^2}{(1+r)(1-r)}=\frac{4}{3}$

$15r^2=1-r^2$, $r^2=\frac{1}{16}$ $\therefore r=\frac{1}{4}$ ($\because 0<r<1$)

이를 ㉠에 대입하면 $a_1=16$

## 0210 답 ④

첫째항이 $(x+2)\times\frac{x-2}{4}$, 공비가 $\frac{x-2}{4}$이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$(x+2)\times\frac{x-2}{4}=0$ 또는 $-1<\frac{x-2}{4}<1$

(i) $(x+2)\times\frac{x-2}{4}=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

(ii) $-1<\frac{x-2}{4}<1$에서 $-2<x<6$

(i), (ii)에서 $-2\le x<6$

따라서 정수 $x$는 $-2$, $-1$, 0, …, 5의 8개이다.

## 0211 답 $\frac{1}{2}<x<1$

(i) 수열 $\{(x-2)(4x-3)^n\}$의 첫째항이 $(x-2)(4x-3)$, 공비가 $4x-3$이므로 이 수열이 수렴하려면

$(x-2)(4x-3)=0$ 또는 $-1<4x-3\le1$

$(x-2)(4x-3)=0$에서 $x=\frac{3}{4}$ 또는 $x=2$ …… ㉠

$-1<4x-3\le1$에서 $\frac{1}{2}<x\le1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{2}<x\le1$ 또는 $x=2$ …… ❶

(ii) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x^2+x-1)^n$의 공비가 $x^2+x-1$이므로 이 등비급수가 수렴하려면 $-1<x^2+x-1<1$

$-1<x^2+x-1$에서 $x(x+1)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>0$ …… ㉢

$x^2+x-1<1$에서 $(x+2)(x-1)<0$

$\therefore -2<x<1$ …… ㉣

㉢, ㉣에서 $-2<x<-1$ 또는 $0<x<1$ …… ❷

(i), (ii)에서 $\frac{1}{2}<x<1$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 수열 $\{(x-2)(4x-3)^n\}$이 수렴하는 조건 구하기 | 40 % |
| ❷ 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x^2+x-1)^n$이 수렴하는 조건 구하기 | 40 % |
| ❸ $x$의 값의 범위 구하기 | 20 % |

## 0212 답 ②

공비가 $2\log_9(x+2)$이므로 주어진 등비급수가 수렴하려면

$-1<2\log_9(x+2)<1$

$-\frac{1}{2}<\log_9(x+2)<\frac{1}{2}$, $\log_9 9^{-\frac{1}{2}}<\log_9(x+2)<\log_9 9^{\frac{1}{2}}$

$9^{-\frac{1}{2}}<x+2<9^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}<x+2<3$

$\therefore -\frac{5}{3}<x<1$

따라서 정수 $x$의 값은 $-1$, 0이므로 구하는 합은

$-1+0=-1$

## 0213 답 ④

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$이 수렴하므로

$-1<r<1$ …… ㉠

① $\sum_{n=1}^{\infty}r^{n+2}$은 공비가 $r$인 등비급수이므로 수렴한다.

② $\sum_{n=1}^{\infty}r^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(r^2)^n$은 공비가 $r^2$인 등비급수이고 ㉠에서 $0\le r^2<1$이므로 수렴한다.

③ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r+2}{3}\right)^n$은 공비가 $\frac{r+2}{3}$인 등비급수이고 ㉠에서 $\frac{1}{3}<\frac{r+2}{3}<1$이므로 수렴한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}+1\right)^n$은 공비가 $\frac{r}{2}+1$인 등비급수이고 ㉠에서 $\frac{1}{2}<\frac{r}{2}+1<\frac{3}{2}$이므로 항상 수렴한다고 할 수 없다.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$은 공비가 $-r$인 등비급수이고 ㉠에서 $-1<-r<1$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\{r^n+(-r)^n\}=\sum_{n=1}^{\infty}r^n+\sum_{n=1}^{\infty}(-r)^n$

따라서 주어진 급수는 수렴한다.

따라서 항상 수렴하는 급수가 아닌 것은 ④이다.

## 0214 답 ㄱ, ㄴ

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항을 각각 $a$, $b$, 공비를 각각 $r_1$, $r_2$라 하면

$a_n=ar_1^{n-1}$, $b_n=br_2^{n-1}$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $-1<r_1<1$

$a_{2n}=ar_1^{2n-1}=ar_1\times(r_1^2)^{n-1}$은 공비가 $r_1^2$이고 $0\le r_1^2<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $-1<r_1<1$, $-1<r_2<1$

$a_nb_n=ab(r_1r_2)^{n-1}$은 공비가 $r_1r_2$이고 $-1<r_1r_2<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$도 수렴한다.

ㄷ. [반례] $a_n=-2^n$, $b_n=2^n$이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산하지만 $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

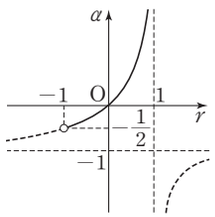
## 0215 답 ①

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하므로 $-1<r<1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} r^n=\frac{r}{1-r}=-\frac{1}{r-1}-1$

$-1<r<1$에서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 $\alpha$로 수렴한다고 하면

$\alpha=-\frac{1}{r-1}-1\ (-1<r<1)$이고, 그 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로




$\alpha>-\frac{1}{2}$

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$의 합이 될 수 없는 것은 ①이다.

## 0216 답 $\frac{19}{45}$

$0.4\dot{2}=0.4222\cdots=0.4+0.02+0.002+0.0002+\cdots$

$=\frac{4}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\frac{2}{10000}+\cdots$

$=\frac{4}{10}+\frac{\frac{2}{100}}{1-\frac{1}{10}}$

$=\frac{4}{10}+\frac{2}{90}=\frac{19}{45}$

## 0217 답 ②

$a_1=0.0\dot{4}=\frac{4}{90}=\frac{2}{45}$, $a_3=0.0\dot{1}=\frac{1}{90}$이므로 공비를 $r$라 하면

$\frac{2}{45}r^2=\frac{1}{90}$, $r^2=\frac{1}{4}$

$\therefore r=\frac{1}{2}\ (\because r>0)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\frac{\frac{2}{45}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{4}{45}$

## 0218 답 ②

$0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, $0.\dot{2}1\dot{6}=\frac{216}{999}=\frac{8}{37}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=0.\dot{2}1\dot{6}$에서 $\frac{a_1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{8}{37}$

$\frac{3}{2}a_1=\frac{8}{37}$ $\therefore a_1=\frac{16}{111}=0.\dot{1}4\dot{4}$

## 0219 답 $\left(\frac{16}{25}, \frac{12}{25}\right)$

점 $P_n$이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 $(x, y)$라 하면

$x=\overline{OP_1}-\overline{P_2P_3}+\overline{P_4P_5}-\overline{P_6P_7}+\cdots$

$=1-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^4-\left(\frac{3}{4}\right)^6+\cdots$

$=\frac{1}{1-\left\{-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}}=\frac{16}{25}$

$y=\overline{P_1P_2}-\overline{P_3P_4}+\overline{P_5P_6}-\overline{P_7P_8}+\cdots$

$=\frac{3}{4}-\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^5-\left(\frac{3}{4}\right)^7+\cdots$

$=\frac{\frac{3}{4}}{1-\left\{-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right\}}=\frac{12}{25}$

따라서 점 $P_n$이 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\frac{16}{25}, \frac{12}{25}\right)$이다.

## 0220 답 $\sqrt{2}$

원 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$에 접하고 기울기가 $-1$인 직선의 방정식은

$y=-x\pm\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\sqrt{(-1)^2+1}$

$\therefore y=-x\pm\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ …… ❶

이때 제1사분면을 지나는 직선의 방정식은

$y=-x+\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore a_n=\sqrt{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$ …… ❷

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sqrt{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$=\sqrt{2}\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 접선의 방정식 구하기 | 40 % |
| ❷ $a_n$ 구하기 | 30 % |
| ❸ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 합 구하기 | 30 % |

**공통수학2 다시보기**

원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 $m$인 접선의 방정식

➡ $y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$

## 0221 답 $\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{10}\right)$

점 $P_n$이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 $(x, y)$라 하면

$x=\overline{OP_1}\cos 45^\circ+\overline{P_1P_2}\cos 45^\circ+\overline{P_2P_3}\cos 45^\circ+\cdots$

$=3\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2}{3}\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\cdots$

$=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{9\sqrt{2}}{2}$

$y=\overline{OP_1}\sin 45^\circ-\overline{P_1P_2}\sin 45^\circ+\overline{P_2P_3}\sin 45^\circ-\cdots$

$=3\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{3}\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\cdots$

$=\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{9\sqrt{2}}{10}$

따라서 점 $P_n$이 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\frac{9\sqrt{2}}{2}, \frac{9\sqrt{2}}{10}\right)$이다.

## 0222 답 $\frac{5}{7}$

점 $P_n$이 한없이 가까워지는 점의 $y$좌표는

$\overline{OP_1}-\overline{P_1P_2}\cos 60^\circ-\overline{P_2P_3}\cos 60^\circ+\overline{P_3P_4}$

$-\overline{P_4P_5}\cos 60^\circ-\overline{P_5P_6}\cos 60^\circ+\overline{P_6P_7}-\cdots$

$=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}$

$-\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^6-\cdots$

$=\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots\right\}-\frac{1}{4}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots\right\}$

$-\frac{1}{8}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots\right\}$

$=\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^6+\cdots\right\}$

$=\frac{5}{8}\times\frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{5}{7}$

## 0223 답 $32(\sqrt{2}+1)$

$\overline{A_1B}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 8=4$이고 삼각형 $A_1BB_1$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{A_1B_1}=\sqrt{2}\,\overline{A_1B}=4\sqrt{2}$

$\therefore l_1=4\overline{A_1B_1}=4\times 4\sqrt{2}=16\sqrt{2}$

$\overline{A_2B_1}=\frac{1}{2}\overline{A_1B_1}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$이고 삼각형 $A_2B_1B_2$는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{A_2B_2}=\sqrt{2}\,\overline{A_1B_1}=\sqrt{2}\times 2\sqrt{2}=4$

$\therefore l_2=4\overline{A_2B_2}=4\times 4=16$

$\overline{A_3B_2}=\frac{1}{2}\overline{A_2B_2}=\frac{1}{2}\times 4=2$이고 삼각형 $A_3B_2B_3$은 직각이등변삼각형이므로

$\overline{A_3B_3}=\sqrt{2}\,\overline{A_3B_2}=2\sqrt{2}$

$\therefore l_3=4\overline{A_3B_3}=4\times 2\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

$\vdots$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n=16\sqrt{2}+16+8\sqrt{2}+\cdots=\frac{16\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=32(\sqrt{2}+1)$

## 0224 답 $18(2+\sqrt{3})$

삼각형 $AB_1C_1$에서 $l_1=3\times 3=9$

$\triangle AB_1C_1\backsim\triangle AB_2C_2$이고 닮음비는 $\overline{AB_1}:\overline{AB_2}=2:\sqrt{3}$이므로

$3:\overline{AB_2}=2:\sqrt{3}$ $\quad\therefore \overline{AB_2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

즉, 삼각형 $AB_2C_2$에서 $l_2=3\times\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

$\triangle AB_2C_2\backsim\triangle AB_3C_3$이고 닮음비는 $\overline{AB_2}:\overline{AB_3}=2:\sqrt{3}$이므로

$\frac{3\sqrt{3}}{2}:\overline{AB_3}=2:\sqrt{3}$ $\quad\therefore \overline{AB_3}=\frac{9}{4}$

즉, 삼각형 $AB_3C_3$에서 $l_3=3\times\frac{9}{4}=\frac{27}{4}$

$\vdots$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n=9+\frac{9\sqrt{3}}{2}+\frac{27}{4}+\cdots$

$=\frac{9}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=18(2+\sqrt{3})$

## 0225 답 ③

$\overline{A_1A_2}=6$이므로 $l_1=\left(\frac{1}{2}\times 6\right)\times\pi=3\pi$

$\overline{A_2A_3}=\frac{3}{4}\overline{A_1A_2}=\frac{3}{4}\times 6=\frac{9}{2}$이므로

$l_2=\left(\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\right)\times\pi=\frac{9}{4}\pi$

$\overline{A_3A_4}=\frac{3}{4}\overline{A_2A_3}=\frac{3}{4}\times\frac{9}{2}=\frac{27}{8}$이므로

$l_3=\left(\frac{1}{2}\times\frac{27}{8}\right)\times\pi=\frac{27}{16}\pi$

$\vdots$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n=3\pi+\frac{9}{4}\pi+\frac{27}{16}\pi+\cdots=\frac{3\pi}{1-\frac{3}{4}}=12\pi$

## 0226 답 ④

삼각형 $OP_1P_2$에서 $\overline{OP_1}=1$, $\angle P_2OP_1=\angle OP_1P_2=45^\circ$이므로

$\overline{P_1P_2}=\overline{OP_1}\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

삼각형 $OP_2P_3$에서 $\overline{OP_2}=\overline{P_1P_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\angle OP_2P_3=45^\circ$이므로

$\overline{P_2P_3}=\overline{OP_2}\cos 45^\circ=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

삼각형 $OP_3P_4$에서 $\overline{OP_3}=\overline{P_2P_3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$, $\angle OP_3P_4=45^\circ$이므로

$\overline{P_3P_4}=\overline{OP_3}\cos 45^\circ=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$

$\vdots$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\overline{P_nP_{n+1}}=\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\overline{P_3P_4}+\cdots$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3+\cdots$

$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}+1$

## 0227 답 12

$n$번째 얻은 정사각형의 넓이를 $S_n$이라 하면

$S_1=\overline{A_1B_1}^2=\left(\frac{1}{2}\overline{AC}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\times 6\right)^2=9$

$S_2=\overline{A_2B_2}^2=\left(\frac{1}{2}\overline{A_1B_1}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\times 3\right)^2=\frac{9}{4}$

$S_3=\overline{A_3B_3}^2=\left(\frac{1}{2}\overline{A_2B_2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{16}$

$\vdots$

따라서 구하는 합은

$S_1+S_2+S_3+\cdots=9+\frac{9}{4}+\frac{9}{16}+\cdots=\frac{9}{1-\frac{1}{4}}=12$

## 0228 답 ④

원 $C_n$의 반지름의 길이를 $r_n$이라 하면

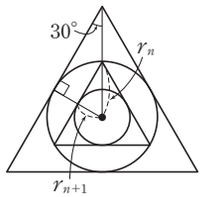
$r_1=\frac{1}{2}\times 2\times\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 원 $C_1$의 넓이는 $\pi\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{\pi}{3}$

오른쪽 그림에서

$r_n : r_{n+1}=2 : 1$

즉, 두 원 $C_n$, $C_{n+1}$은 닮음이고, 닮음비는 $2 : 1$이므로 넓이의 비는 $4 : 1$이다.




따라서 구하는 합은 첫째항이 $\frac{\pi}{3}$, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비급수의 합이므로

$$\frac{\frac{\pi}{3}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{9}\pi$$

## 0229 답 $\frac{1}{2}$

삼각형 ABC의 한 변의 길이를 $a$라 하면 넓이가 1이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=1$ …… ㉠

또 $\overline{AB}$, $\overline{CA}$를 $2 : 1$로 각각 내분하는 점 $A_1$, $C_1$에 대하여

$\overline{AA_1}=\frac{2}{3}a$, $\overline{AC_1}=\frac{1}{3}a$이므로

$$\begin{aligned}\triangle A_1B_1C_1&=\triangle ABC-3\triangle AA_1C_1\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-3\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}a\times\frac{1}{3}a\times\sin 60^\circ\right)\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{6}a^2\\&=\frac{\sqrt{3}}{12}a^2=\frac{1}{3}\ (\because \text{㉠})\end{aligned}$$ …… ❶

두 정삼각형 ABC, $A_1B_1C_1$은 닮음이고 넓이의 비는 $3 : 1$이므로 두 정삼각형 $A_nB_nC_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$의 넓이의 비도 $3 : 1$이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$ …… ❷

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 삼각형 $A_1B_1C_1$의 넓이 구하기 | 50 % |
| ❷ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 합 구하기 | 50 % |

## 0230 답 ⑤

오른쪽 그림에서 $S_1=\pi\times12^2\times\frac{60}{360}=24\pi$

선분 $B_1B_2$를 그으면 삼각형 $B_1B_2C_2$에서

$\overline{B_1C_2} : \overline{B_2C_2}=\sqrt{3} : 1$이므로

$12 : \overline{B_2C_2}=\sqrt{3} : 1$ $\therefore \overline{B_2C_2}=4\sqrt{3}$

$\therefore S_2=\pi\times(4\sqrt{3})^2\times\frac{60}{360}=8\pi$

선분 $B_2B_3$을 그으면 삼각형 $B_2B_3C_3$에서

$\overline{B_2C_3} : \overline{B_3C_3}=\sqrt{3} : 1$이므로

$4\sqrt{3} : \overline{B_3C_3}=\sqrt{3} : 1$ $\therefore \overline{B_3C_3}=4$

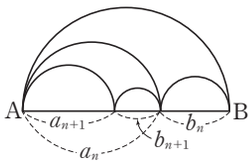
$\therefore S_3=\pi\times4^2\times\frac{60}{360}=\frac{8}{3}\pi$

⋮

$\therefore S_1+S_2+S_3+\cdots=24\pi+8\pi+\frac{8}{3}\pi+\cdots=\frac{24\pi}{1-\frac{1}{3}}=36\pi$

## 0231 답 $\frac{9}{2}\pi$

$n$번째 얻은 큰 반원과 작은 반원의 지름의 길이를 각각 $a_n$, $b_n$이라 하고 넓이를 각각 $A_n$, $B_n$이라 하면




$a_1=6\times\frac{2}{3}=4$이므로

$A_1=\frac{1}{2}\times\pi\times2^2=2\pi$

$b_1=6-4=2$이므로 $B_1=\frac{1}{2}\times\pi\times1^2=\frac{\pi}{2}$

이때 $a_n : a_{n+1}=1 : \frac{2}{3}$이므로 $A_n : A_{n+1}=1 : \frac{4}{9}$이고,

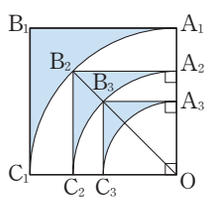
$b_n : b_{n+1}=1 : \frac{2}{3}$이므로 $B_n : B_{n+1}=1 : \frac{4}{9}$

따라서 두 수열 $\{A_n\}$, $\{B_n\}$은 첫째항이 각각 $A_1=2\pi$, $B_1=\frac{\pi}{2}$이고 공비가 모두 $\frac{4}{9}$인 등비수열이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}S_n&=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\\&=\frac{2\pi}{1-\frac{4}{9}}+\frac{\frac{\pi}{2}}{1-\frac{4}{9}}=\frac{18}{5}\pi+\frac{9}{10}\pi=\frac{9}{2}\pi\end{aligned}$$

## 0232 답 ④

오른쪽 그림에서




$S_1=4^2-\frac{1}{4}\times\pi\times4^2=16-4\pi$

삼각형 $OA_2B_2$는 $\angle OA_2B_2=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{OB_2} : \overline{OA_2}=\sqrt{2} : 1$

$4 : \overline{OA_2}=\sqrt{2} : 1$ $\therefore \overline{OA_2}=2\sqrt{2}$

$\therefore S_2=(2\sqrt{2})^2-\frac{1}{4}\times\pi\times(2\sqrt{2})^2=8-2\pi$

삼각형 $OA_3B_3$은 $\angle OA_3B_3=90^\circ$인 직각이등변삼각형이므로

$\overline{OB_3} : \overline{OA_3}=\sqrt{2} : 1$

$2\sqrt{2} : \overline{OA_3}=\sqrt{2} : 1$ $\therefore \overline{OA_3}=2$

$\therefore S_3=2^2-\frac{1}{4}\times\pi\times2^2=4-\pi$

⋮

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{16-4\pi}{1-\frac{1}{2}}=32-8\pi$

## 0233 답 750 kg

$n$번째 수거하여 재생산되는 종이의 양을 $a_n$ kg이라 하면

$a_1=500\times0.8\times0.75=500\times\frac{3}{5}$

$a_2=a_1\times0.8\times0.75=500\times\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$a_3=a_2\times0.8\times0.75=500\times\left(\frac{3}{5}\right)^3$

⋮

따라서 재생산되는 종이의 양의 합은

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=500\times\frac{3}{5}+500\times\left(\frac{3}{5}\right)^2+500\times\left(\frac{3}{5}\right)^3+\cdots$$

$$=\frac{500\times\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}=750(\text{kg})$$

## 0234 답 ②

추가 멈출 때까지 움직인 거리는

$$16+16\times\frac{3}{4}+16\times\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots=\frac{16}{1-\frac{3}{4}}=64(\text{cm})$$

## 0235 답 $\frac{110}{3}$억 원

기금을 운용하여 $n$번째 지급하는 장학금을 $a_n$억 원이라 하면

$a_1=20\times1.1\times0.2=\frac{22}{5}$

$a_2=(20\times1.1\times0.8)\times1.1\times0.2$ (장학금을 지급하고 남은 금액)

$=(20\times1.1\times0.2)\times1.1\times0.8$

$=\frac{22}{5}\times\frac{22}{25}$

$a_3=(20\times1.1\times0.8\times1.1\times0.8)\times1.1\times0.2$

$=(20\times1.1\times0.2)\times(1.1\times0.8)^2$

$=\frac{22}{5}\times\left(\frac{22}{25}\right)^2$

$\vdots$

따라서 해마다 지급하는 장학금의 총액은

$$a_1+a_2+a_3+\cdots=\frac{22}{5}+\frac{22}{5}\times\frac{22}{25}+\frac{22}{5}\times\left(\frac{22}{25}\right)^2+\cdots$$

$$=\frac{\frac{22}{5}}{1-\frac{22}{25}}=\frac{110}{3}(\text{억 원})$$

# AB 유형 점검 44~46쪽

## 0236 답 ②

$S_n=2n^2+n$에서

(i) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2+n)-\{2(n-1)^2+(n-1)\}$

$=4n-1$

(ii) $n=1$일 때, $a_1=S_1=3$

$\therefore a_n=4n-1$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n-1)(4n+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{12}$$

## 0237 답 $-1$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\log_2\frac{n^2-1}{n^2}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\log_2\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\log_2\left(\frac{k-1}{k}\times\frac{k+1}{k}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)+\log_2\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)+\log_2\left(\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\right)+\cdots+\log_2\left(\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n+1}{2n}=\log_2\frac{1}{2}=\log_2 2^{-1}=-1$$

## 0238 답 ④

주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하자.

① $S_{2n-1}=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}\right)$

$=\frac{1}{2}$

$\therefore\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\frac{1}{2}$

$S_{2n}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}$

$\therefore\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{1}{2}$

즉, 주어진 급수는 $\frac{1}{2}$에 수렴한다.

② $S_n=\frac{1}{2}+0+0+\cdots+0=\frac{1}{2}$이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$

즉, 주어진 급수는 $\frac{1}{2}$에 수렴한다.

③ $S_n=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$

$=\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}$

$\therefore\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{3}$

즉, 주어진 급수는 $\frac{1}{3}$에 수렴한다.

④ $S_{2n-1}=\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\right)+\cdots+\left(-\frac{2n-1}{2n}+\frac{2n-1}{2n}\right)=\frac{1}{2}$

$\therefore\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\frac{1}{2}$

$S_{2n}=\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)+\left(\frac{5}{6}-\frac{7}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{2n-1}{2n}-\frac{2n+1}{2n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{2n+1}{2n+2}$

$\therefore\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{2n+1}{2n+2}\right)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

즉, $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

⑤ $S_n=\frac{1}{2}-0-0-\cdots-0=\frac{1}{2}$이므로 $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$

즉, 주어진 급수는 $\frac{1}{2}$에 수렴한다.

따라서 발산하는 급수는 ④이다.

## 0239 답 ③

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right)=0$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{2n^2+1}=\frac{3}{2}$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n)=\lim_{n\to\infty}a_n(a_n+2)$

$=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}(a_n+2)$

$=\frac{3}{2}\times\left(\frac{3}{2}+2\right)=\frac{21}{4}$

## 0240 답 ①

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{1-n^2}{n^2+1}=-1\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-n^2}{n^2+1}$은 발산한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n-3}=\frac{1}{4}\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n-3}$은 발산한다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2})$

$=\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})$

$+\cdots+(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})\}$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+3}-\sqrt{3})=\infty$

따라서 보기에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하는 것은 ㄴ이다.

## 0241 답 ③

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty}|a_n|=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$이다.

ㄴ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 1, 1, 1, ..., $\{b_n\}$: $-1$, $-1$, $-1$, $-1$, ...이면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 발산하지만 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$은 0에 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\}$

$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$도 모두 수렴한다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

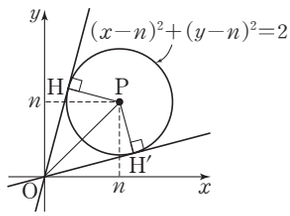
## 0242 답 $\frac{3}{4}$

원의 중심을 P라 하면 P$(n, n)$이므로 $\overline{OP}=\sqrt{2}n$

이때 $\overline{PH}=\overline{PH'}=\sqrt{2}$이므로

$\overline{OH}=\overline{OH'}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{PH'}^2}$

$=\sqrt{2n^2-2}$




따라서 $a_n=2\sqrt{2n^2-2}$이므로

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{8}{a_n^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{8}{(2\sqrt{2n^2-2})^2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$

$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)(n+1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$

## 0243 답 ③

$\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\frac{a_3}{3^3}+\frac{a_4}{3^4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5\times3^n}=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$=\frac{1}{5}\times\frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=-\frac{1}{20}$

## 0244 답 ②

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하자.

수열 $\{a_{2n-1}\}$의 첫째항은 $a$, 공비는 $r^2$이고, 수열 $\{a_{2n}\}$의 첫째항은 $ar$, 공비는 $r^2$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})=3$에서 $\frac{a}{1-r^2}-\frac{ar}{1-r^2}=3$

$\frac{a(1-r)}{(1-r)(1+r)}=3$, $\frac{a}{1+r}=3$ $\therefore a=3(1+r)$ ····· ㉠

수열 $\{a_n^2\}$의 첫째항은 $a^2$, 공비는 $r^2$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=6$에서 $\frac{a^2}{1-r^2}=6$

$\therefore \frac{a^2}{(1+r)(1-r)}=6$

㉠을 대입하면 $\frac{9(1+r)^2}{(1+r)(1-r)}=6$

$\frac{9(1+r)}{1-r}=6$, $3(1+r)=2(1-r)$

$5r=-1$ $\therefore r=-\frac{1}{5}$

이를 ㉠에 대입하면 $a=\frac{12}{5}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{12}{5}}{1-\left(-\frac{1}{5}\right)}=2$

## 0245 답 $1 \le x < 3$

(i) 등비수열 $\{(1-\log_2 x)^n\}$의 공비가 $1-\log_2 x$이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$-1 < 1-\log_2 x \le 1$, $0 \le \log_2 x < 2$ $\therefore 1 \le x < 4$

(ii) 등비급수 $1+\frac{x}{3}+\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{x}{3}\right)^3+\cdots$의 공비가 $\frac{x}{3}$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$-1 < \frac{x}{3} < 1$ $\therefore -3 < x < 3$

(i), (ii)에서 $1 \le x < 3$

## 0246 답 ㄱ, ㄹ

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$이 수렴하므로 $-1 < r < 1$ …… ㉠

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-1}$은 공비가 $r^2$인 등비급수이고 ㉠에서 $0 \le r^2 < 1$이므로 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\right)^n$ $(r \ne 0)$은 공비가 $\frac{1}{r}$인 등비급수이고 ㉠에서 $\frac{1}{r} < -1$ 또는 $\frac{1}{r} > 1$이므로 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{2}-1\right)^n$은 공비가 $\frac{r}{2}-1$인 등비급수이고 ㉠에서

$-\frac{3}{2} < \frac{r}{2}-1 < -\frac{1}{2}$이므로 항상 수렴한다고 할 수 없다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r-1}{2}\right)^n$은 공비가 $\frac{r-1}{2}$인 등비급수이고 ㉠에서

$-1 < \frac{r-1}{2} < 0$이므로 수렴한다.

따라서 보기에서 항상 수렴하는 급수인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

## 0247 답 ①

$0.\dot{0}\dot{2} = 0.020202\cdots$이므로

$a_1=0$, $a_2=2$, $a_3=0$, $a_4=2$, $a_5=0$, $a_6=2$, …

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{5^n} = \frac{2}{5^2}+\frac{2}{5^4}+\frac{2}{5^6}+\cdots = \frac{\frac{2}{25}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{1}{12}$$

## 0248 답 $\frac{63}{64}$

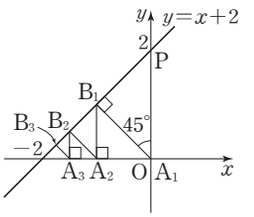
$$a = \overline{OP_1}\cos 30^\circ - \overline{P_1P_2}\cos 30^\circ + \overline{P_2P_3}\cos 30^\circ - \overline{P_3P_4}\cos 30^\circ + \cdots$$
$$= 1\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \cdots$$
$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$b = \overline{OP_1}\sin 30^\circ + \overline{P_1P_2}\sin 30^\circ + \overline{P_2P_3}\sin 30^\circ + \overline{P_3P_4}\sin 30^\circ + \cdots$$
$$= 1\times\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)^3\times\frac{1}{2} + \cdots$$
$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore a^2+b^2 = \frac{27}{64}+\frac{9}{16} = \frac{63}{64}$$

## 0249 답 $2\sqrt{2}$

직선 $y=x+2$와 $y$축의 교점을 P라 하면 $\angle PA_1B_1 = 45^\circ$이므로




$\overline{A_1B_1} = \overline{PA_1}\cos 45^\circ = 2\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$\angle A_1B_1A_2 = 45^\circ$이므로

$\overline{B_1A_2} = \overline{A_1B_1}\cos 45^\circ = \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

$\angle B_1A_2B_2 = 45^\circ$이므로

$\overline{A_2B_2} = \overline{B_1A_2}\cos 45^\circ = 1\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle A_2B_2A_3 = 45^\circ$이므로

$\overline{B_2A_3} = \overline{A_2B_2}\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$

$\angle B_2A_3B_3 = 45^\circ$이므로

$\overline{A_3B_3} = \overline{B_2A_3}\cos 45^\circ = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

⋮

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\overline{A_nB_n} = \overline{A_1B_1}+\overline{A_2B_2}+\overline{A_3B_3}+\cdots$$
$$= \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}+\cdots$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

## 0250 답 ③

삼각형 $A_1B_1D_1$의 넓이 $S_1$은

$S_1 = \frac{1}{2}\times 4\times 4 = 8$

두 삼각형 $A_nB_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}D_{n+1}$은 닮음이고 닮음비가 2 : 1이므로 넓이의 비는 4 : 1이다.

따라서 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 8, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{8}{1-\frac{1}{4}} = \frac{32}{3}$$

## 0251 답 96 m

땅에 떨어질 때마다 공이 움직인 거리는

$32$, $\left(32\times\frac{1}{2}\right)\times 2$, $\left\{32\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times 2$, …

따라서 공이 정지할 때까지 움직인 거리는

$$32+2\left\{32\times\frac{1}{2}+32\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+32\times\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\right\}$$
$$= 32+64\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots\right\}$$
$$= 32+64\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 96(\text{m})$$

## 0252 답 1

$$(a_1-1)+\left(\frac{a_2}{2}-1\right)+\left(\frac{a_3}{3}-1\right)+\left(\frac{a_4}{4}-1\right)+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-1\right)$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-1\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-1\right)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=1$ …… ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3a_n}{4n+a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+3\times\frac{a_n}{n}}{4+\frac{a_n}{n}}=\frac{2+3\times1}{4+1}=1 \quad \cdots\cdots \text{ii}$$

| 채점 기준 | |
|---|---|
| i $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$의 값 구하기 | 50 % |
| ii $\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3a_n}{4n+a_n}$의 값 구하기 | 50 % |

## 0253 답 9

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)=11$에서 $3\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=11$

$\therefore 3\alpha-2\beta=11 \quad \cdots\cdots ㉠$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3b_n)=-1$에서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n-3\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-1$

$\therefore \alpha-3\beta=-1 \quad \cdots\cdots ㉡$

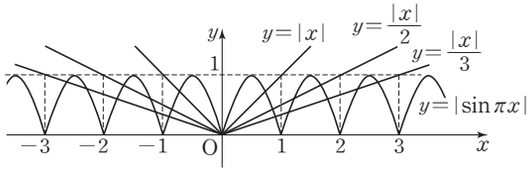
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=5$, $\beta=2$ …… i

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=5+2\times2=9 \quad \cdots\cdots \text{ii}$$

| 채점 기준 | |
|---|---|
| i 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 합 구하기 | 70 % |
| ii 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)$의 합 구하기 | 30 % |

## 0254 답 $\frac{1}{4}$

함수 $y=|\sin\pi x|$의 그래프와 함수 $y=|x|$, $y=\frac{|x|}{2}$, $y=\frac{|x|}{3}$, …의 그래프는 다음 그림과 같다.




…… i

즉, $a_1=3$, $a_2=7$, $a_3=11$, …이므로

$a_n=4n-1$ …… ii

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{a_na_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{(4n-1)(4n+3)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k+3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{15}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n+3}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4n+3}\right)=\frac{1}{4} \quad \cdots\cdots \text{iii}$$

| 채점 기준 | |
|---|---|
| i 두 함수 $y=\lvert\sin\pi x\rvert$, $y=\frac{\lvert x\rvert}{n}$의 그래프 그리기 | 40 % |
| ii $a_n$ 구하기 | 30 % |
| iii 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{a_na_{n+1}}$의 합 구하기 | 30 % |

# 실력 향상 47쪽

## 0255 답 $\frac{21}{2}$

$a_1=4$이고, $a_1+2a_2=7$이므로 $a_2=\frac{3}{2}$

수열 $\{na_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하면

$S_n=3n+1$

$n\geq2$일 때,

$na_n=S_n-S_{n-1}=(3n+1)-\{3(n-1)+1\}=3$

$\therefore a_n=\frac{3}{n}$ (단, $n\geq2$)

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}=a_1a_2+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{3}{n}\times\frac{3}{n+1}\right)$$
$$=a_1a_2+\sum_{n=2}^{\infty}9\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=a_1a_2+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}9\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=a_1a_2+\lim_{n\to\infty}9\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=a_1a_2+\lim_{n\to\infty}9\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=4\times\frac{3}{2}+\frac{9}{2}=\frac{21}{2}$$

## 0256 답 ③

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n^2+2n+4}{n^2+2n}\right)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{n^2+2n+4}{n^2+2n}\right)=0$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+4}{n^2+2n}=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left\{4a_n+\sum_{k=1}^{n}(a_k-1)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}4a_n+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-1)=\lim_{n\to\infty}4a_n+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-1)$$
$$=\lim_{n\to\infty}4a_n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n^2+2n+4}{n^2+2n}+\frac{n^2+2n+4}{n^2+2n}-1\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}4a_n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n^2+2n+4}{n^2+2n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}4a_n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n^2+2n+4}{n^2+2n}\right)+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}4a_n+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{n^2+2n+4}{n^2+2n}\right)+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=4\times1+2+\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=6+\lim_{n\to\infty}2\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=6+2\times\frac{3}{2}=9$$

## 0257 답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d$ ($d>0$), 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 $r$라 하면 $a_1=b_1=1$이므로

$a_2=a_1+d=1+d$, $b_2=b_1r=1\times r=r$

$a_2b_2=1$에서 $(1+d)r=1$ $\therefore r=\frac{1}{1+d}$

이때 $1+d>1$이므로 $0<r<1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{1}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{1+d}}=\frac{1+d}{d}$ ····· ㉠

$a_n=a_1+(n-1)d=dn+1-d$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(dn+1-d)=\infty$

따라서 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=0$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_{k+1}-a_k}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\\&=\frac{1}{d}\times 1=\frac{1}{d}\end{aligned}$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}}+b_n\right)=2$에서 $\frac{1}{d}+\frac{1+d}{d}=2$ ($\because$ ㉠)

$2+d=2d$ $\therefore d=2$

따라서 ㉠에서 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{1+d}{d}=\frac{3}{2}$

## 0258 답 $\frac{11+7\sqrt{3}}{32}$

정사각형 $A_n$의 한 변의 길이를 $a_n$이라 하면

$a_1=1$, $S_1=1$

정삼각형 $B_n$의 한 변의 길이도 $a_n$이므로

$a_1=1$, $T_1=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$

오른쪽 그림에서

$\left(\frac{a_n}{2}-\frac{a_{n+1}}{2}\right):a_{n+1}=1:\sqrt{3}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{2}a_n-\frac{\sqrt{3}}{2}a_{n+1}=a_{n+1}$

$(2+\sqrt{3})a_{n+1}=\sqrt{3}a_n$

$\therefore a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}a_n=(2\sqrt{3}-3)a_n$

따라서 $a_n:a_{n+1}=1:(2\sqrt{3}-3)$이므로

$S_n:S_{n+1}=T_n:T_{n+1}=1:(2\sqrt{3}-3)^2=1:(21-12\sqrt{3})$

$\therefore S_{n+1}=(21-12\sqrt{3})S_n$, $T_{n+1}=(21-12\sqrt{3})T_n$

따라서 수열 $\{S_n\}$과 $\{T_n\}$은 첫째항이 각각 $S_1=1$, $T_1=\frac{\sqrt{3}}{4}$이고 공비가 모두 $(21-12\sqrt{3})$인 등비수열이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(S_n-T_n)&=\sum_{n=1}^{\infty}S_n-\sum_{n=1}^{\infty}T_n\\&=\frac{1}{1-(21-12\sqrt{3})}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-(21-12\sqrt{3})}\\&=\frac{11+7\sqrt{3}}{32}\end{aligned}$$

# 03 / 지수함수와 로그함수의 미분

## A 개념 확인 50~51쪽

## 0259 답 ∞

## 0260 답 0

## 0261 답 2

$\lim_{x\to 0}(7^x+5^x)=1+1=2$

## 0262 답 ∞

## 0263 답 ∞

## 0264 답 2

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\log_4(x^2+6x)&=\log_4\lim_{x\to 2}(x^2+6x)\\&=\log_4 16=\log_4 4^2=2\end{aligned}$$

## 0265 답 $e^3$

$\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{4x}}=\lim_{x\to 0}\{(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\}^3=e^3$

## 0266 답 $e^{\frac{1}{2}}$

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$

## 0267 답 $e^{\frac{2}{3}}$

$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{\left(1+\frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}\right\}^{\frac{2}{3}}=e^{\frac{2}{3}}$

## 0268 답 $\frac{1}{e}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x&=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-1}\\&=e^{-1}=\frac{1}{e}\end{aligned}$$

## 0269 답 2

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times 2\\&=1\times 2=2\end{aligned}$$

**0270** 답 $\frac{5}{3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x}-1}{5x}\times\frac{5}{3}$$
$$=1\times\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$$

**0271** 답 $\frac{7}{5\ln 3}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_3(1+7x)}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_3(1+7x)}{7x}\times\frac{7}{5}$$
$$=\frac{1}{\ln 3}\times\frac{7}{5}=\frac{7}{5\ln 3}$$

**0272** 답 $\ln\sqrt{6}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{6^x-1}{2x}=\frac{1}{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{6^x-1}{x}$$
$$=\frac{1}{2}\ln 6=\ln\sqrt{6}$$

**0273** 답 $y'=4e^x$

**0274** 답 $y'=5\ln 7\times 7^x$

**0275** 답 $y'=5^{x+2}\ln 5$

$y=5^{x+2}=5^2\times 5^x$이므로

$y'=5^2\times 5^x\ln 5=5^{x+2}\ln 5$

**0276** 답 $y'=(x+1)e^{x+1}$

$y=xe^{x+1}=exe^x$이므로

$y'=e\times e^x+ex\times e^x$

$=e^{x+1}+xe^{x+1}=(x+1)e^{x+1}$

**0277** 답 $y'=\frac{1}{x}$

$y=\ln 3x=\ln 3+\ln x$이므로

$y'=\frac{1}{x}$

**0278** 답 $y'=\frac{1}{x\ln 4}$

$y=\log_4 16x=\log_4 16+\log_4 x$이므로

$y'=\frac{1}{x\ln 4}$

**0279** 답 $y'=2\ln x+2-\frac{1}{x}$

$y'=2\times\ln x+(2x-1)\times\frac{1}{x}=2\ln x+2-\frac{1}{x}$

**0280** 답 $y'=\frac{2\log_2 x}{x\ln 2}$

$y=(\log_2 x)^2=\log_2 x\times\log_2 x$이므로

$y'=\frac{1}{x\ln 2}\times\log_2 x+\log_2 x\times\frac{1}{x\ln 2}=\frac{2\log_2 x}{x\ln 2}$

## B 유형 완성 52~61쪽

**0281** 답 ④

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8^{x+1}+6^x}{8^x-6^{x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\left(\frac{3}{4}\right)^x}{1-6\times\left(\frac{3}{4}\right)^x}=\frac{8+0}{1-0}=8$$

**0282** 답 ③

$$\lim_{x\to\infty}(5^x-4^x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left[5^x\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}5\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}$$
$$=5\times 1=5$$

**0283** 답 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a\times 9^x+1}{9^{x-1}-2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a+\left(\frac{1}{9}\right)^x}{\frac{1}{9}-\left(\frac{2}{9}\right)^x}=\frac{a+0}{\frac{1}{9}-0}=9a$$

따라서 $9a=18$이므로 $a=2$

**0284** 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

ㄱ. $\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}-4^x}{5^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{2}{5}\right)^x-\left(\frac{4}{5}\right)^x}{1}=0$

ㄴ. $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고, $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3^x}{2^x-3^{-x}}=\lim_{t\to\infty}\frac{3^{-t}}{2^{-t}-3^t}=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{9}\right)^t}{\left(\frac{1}{6}\right)^t-1}=0$$

ㄷ. $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to 0-$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{4^{\frac{1}{x}}-1}=\lim_{t\to 0-}\frac{1}{4^t-1}=-\infty$$

ㄹ. $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x\to 0+$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to 0+}\frac{7^{\frac{1}{x}}}{7^{\frac{1}{x}}-7^{-\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{7^t}{7^t-7^{-t}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{49}\right)^t}=1$$

따라서 보기에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

**0285** 답 ⑤

$$\lim_{x\to 2}(\log_2|x^3-8|-\log_2|3x-6|)$$
$$=\lim_{x\to 2}\log_2\left|\frac{x^3-8}{3x-6}\right|$$
$$=\lim_{x\to 2}\log_2\left|\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{3(x-2)}\right|$$
$$=\lim_{x\to 2}\log_2\left|\frac{x^2+2x+4}{3}\right|$$
$$=\log_2\lim_{x\to 2}\left|\frac{x^2+2x+4}{3}\right|$$
$$=\log_2 4=\log_2 2^2=2$$

## 0286 답 $-1$

$$\lim_{x\to\infty}(\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{4x^2+x}-\log_{\frac{1}{2}}x)=\lim_{x\to\infty}\log_{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x}$$
$$=\log_{\frac{1}{2}}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+x}}{x}$$
$$=\log_{\frac{1}{2}}2=\log_{2^{-1}}2=-1$$

## 0287 답 27

$$\lim_{x\to\infty}\{\log_3(ax+2)-\log_3(3x+1)\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{ax+2}{3x+1}=\log_3\lim_{x\to\infty}\frac{ax+2}{3x+1}$$
$$=\log_3\frac{a}{3}\quad\cdots\cdots\ \text{ⓘ}$$

따라서 $\log_3\frac{a}{3}=2$이므로

$$\frac{a}{3}=3^2=9\qquad\therefore\ a=27\quad\cdots\cdots\ \text{ⓘⓘ}$$

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ 주어진 식의 좌변 정리하기 | 50 % |
| ⓘⓘ $a$의 값 구하기 | 50 % |

## 0288 답 ③

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\log_2(8^x+3^x)=\lim_{x\to\infty}\log_2(8^x+3^x)^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log_2\left[8^x\left\{1+\left(\frac{3}{8}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\log_2 8\left\{1+\left(\frac{3}{8}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}$$
$$=\log_2\lim_{x\to\infty}8\left\{1+\left(\frac{3}{8}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}$$
$$=\log_2(8\times1)=\log_2 2^3=3$$

## 0289 답 $e$

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3x}\right)\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right\}^{6x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{6x}\times\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{6x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left\{\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{-3x}\right\}^{-2}\times\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^3\right]$$
$$=e^{-2}\times e^3=e$$

## 0290 답 ③

$$\lim_{x\to0}\{(1+x)(1-x)\}^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1+x)^{\frac{2}{x}}\times(1-x)^{\frac{2}{x}}\}$$
$$=\lim_{x\to0}[\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^2\times\{(1-x)^{-\frac{1}{x}}\}^{-2}]$$
$$=e^2\times e^{-2}=1$$

## 0291 답 $e^2$

$x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고, $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{2}{x-1}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^2=e^2$$

## 0292 답 ①

$-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고, $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{3x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{a}{t}\right)^{-3t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{a}{t}\right)^{\frac{t}{a}}\right\}^{-3a}=e^{-3a}$$

따라서 $e^{-3a}=e^{-9}$이므로

$-3a=-9\qquad\therefore\ a=3$

## 0293 답 ④

$$\lim_{x\to\infty}f(2x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-1}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x}\right)^{-2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{-2x}=e$$

다른 풀이

$$\lim_{x\to\infty}f(2x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x}{2x-1}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)^{2x}$$

$\frac{1}{2x-1}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{2t}+\frac{1}{2}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{2x-1}\right)^{2x}=\lim_{t\to0+}(1+t)^{\frac{1}{t}+1}$$
$$=\lim_{t\to0+}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\times(1+t)\}$$
$$=e\times1=e$$

## 0294 답 $e^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4n}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{n+1}{n}\times\frac{n+2}{n+1}\times\frac{n+3}{n+2}\times\cdots\times\frac{4n+1}{4n}=\frac{4n+1}{4n}$$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{n+2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{4n}\right)\right\}^{2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n+1}{4n}\right)^{2n}=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{4n}\right)^{4n}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$$

## 0295 답 ②

ㄱ. $x-2=t$로 놓으면 $x=2+t$이고, $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to2}(x-1)^{\frac{1}{2-x}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{-\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}$$
$$=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=e$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}$$
$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-1}}$$
$$=\frac{e}{e^{-1}}=e^2$$

ㄹ. $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고, $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=e$$

따라서 보기에서 극한값이 $e$인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

## 0296 답 ⑤

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+6x)}{2x^2+3x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+6x)}{6x}\times\frac{6}{2x+3}\right\}$$
$$=1\times2=2$$

## 0297 답 ③

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)(1+2x)(1+3x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1+2x)+\ln(1+3x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times2+\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times3\right\}$$
$$=1+1\times2+1\times3=6$$

## 0298 답 $\frac{7}{8}$

$$\lim_{x\to0}\frac{ax}{\ln(1+4x)}=\lim_{x\to0}\frac{4x}{\ln(1+4x)}\times\frac{a}{4}$$
$$=1\times\frac{a}{4}=\frac{a}{4}$$

따라서 $\frac{a}{4}=2$이므로 $a=8$

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+7x)}{\ln(1+ax)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+7x)}{\ln(1+8x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+7x)}{7x}\times\frac{8x}{\ln(1+8x)}\times\frac{7}{8}\right\}$$
$$=1\times1\times\frac{7}{8}=\frac{7}{8}$$

## 0299 답 ④

$y=e^{\frac{x}{5}}-1$이라 하면

$e^{\frac{x}{5}}=1+y$, $\frac{x}{5}=\ln(1+y)$ $\therefore x=5\ln(1+y)$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=5\ln(1+x)$

따라서 $g(x)=5\ln(1+x)$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{5\ln(1+x)}{x}=5\times1=5$$

## 0300 답 2

$$\lim_{x\to\infty}x\{\ln(x+2)-\ln x\}=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x+2}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=\lim_{t\to0+}\frac{1}{t}\ln(1+2t)$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\ln(1+2t)}{2t}\times2$$
$$=1\times2=2$$

다른 풀이

$$\lim_{x\to\infty}x\{\ln(x+2)-\ln x\}=\lim_{x\to\infty}x\ln\frac{x+2}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left\{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^{2}$$
$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right\}^{2}$$
$$=\ln e^{2}=2$$

## 0301 답 $\frac{3}{4}$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{\ln(1+4x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{4x}{\ln(1+4x)}\times\frac{3}{4}\right\}$$
$$=1\times1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

## 0302 답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{12x}{e^{5x}-e^{-x}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^{5x}-e^{-x}}{12x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{e^{5x}-1-e^{-x}+1}{12x}}$$
$$=\frac{1}{\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{12x}-\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{12x}}$$
$$=\frac{1}{\lim_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{5x}\times\frac{5}{12}+\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{-x}\times\frac{1}{12}}$$
$$=\frac{1}{1\times\frac{5}{12}+1\times\frac{1}{12}}=2$$

## 0303 답 7

(가)에서

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+6x)}{ax}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+6x)}{6x}\times\frac{6}{a}\right\}$$
$$=1\times\frac{6}{a}=\frac{6}{a}$$

즉, $\frac{6}{a}=b$이므로 $ab=6$ …… ㉠

(나)에서

$$\lim_{x\to0}\frac{bx}{e^{ax}-1}=\lim_{x\to0}\left(\frac{ax}{e^{ax}-1}\times\frac{b}{a}\right)$$
$$=1\times\frac{b}{a}=\frac{b}{a}$$

즉, $\frac{b}{a}=\frac{1}{6}$이므로 $a=6b$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $6b^2=6$

$b^2=1$ $\therefore b=1$ ($\because b>0$)

이를 ㉡에 대입하면 $a=6$

$\therefore a+b=6+1=7$

## 0304 답 $-3$

$x-2=t$로 놓으면 $x=2+t$이고, $x\to 2$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{e^{2-x}-(x-1)^2}{x-2}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{-t}-(t+1)^2}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^{-t}-(t^2+2t+1)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{e^{-t}-1}{t}-(t+2)\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{e^{-t}-1}{-t}\times(-1)\right\}-\lim_{t\to 0}(t+2)$$
$$=1\times(-1)-2=-3$$

## 0305 답 3

$\ln(1+3x)\le f(x)\le e^{3x}-1$에서

(i) $x>0$일 때,

$\dfrac{\ln(1+3x)}{x}\le\dfrac{f(x)}{x}\le\dfrac{e^{3x}-1}{x}$

이때

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}\times 3=1\times 3=3$,

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{e^{3x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\times 3=1\times 3=3$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)}{x}=3$ …… ❶

(ii) $-\dfrac{1}{3}<x<0$일 때,

$\dfrac{e^{3x}-1}{x}\le\dfrac{f(x)}{x}\le\dfrac{\ln(1+3x)}{x}$

이때

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{e^{3x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\times 3=1\times 3=3$,

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\ln(1+3x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{\ln(1+3x)}{3x}\times 3=1\times 3=3$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)}{x}=3$ …… ❷

(i), (ii)에서 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)}{x}=3$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=3$ …… ❸

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)}{x}$의 값 구하기 | 40 % |
| ❷ $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)}{x}$의 값 구하기 | 40 % |
| ❸ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$의 값 구하기 | 20 % |

## 0306 답 ①

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_4(1+4x)}{\log_3(1-2x)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\log_4(1+4x)}{4x}\times\frac{-2x}{\log_3(1-2x)}\times(-2)\right\}$$
$$=\frac{1}{\ln 4}\times\ln 3\times(-2)$$
$$=-\frac{\ln 3}{\ln 2}$$

## 0307 답 ⑤

$x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고, $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{\log_3(4x-3)}{x-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\log_3(1+4t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\log_3(1+4t)}{4t}\times 4=\frac{4}{\ln 3}$$

## 0308 답 $-\dfrac{2}{\ln 3}$

$\dfrac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\dfrac{1}{t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x\log_9\left(1-\frac{4}{x}\right)=\lim_{t\to 0+}\frac{1}{t}\log_9(1-4t)$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\log_9(1-4t)}{-4t}\times(-4)$$
$$=\frac{1}{\ln 9}\times(-4)=-\frac{2}{\ln 3}$$

## 0309 답 ④

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-2^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-2^{-x}+1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{2^{-x}-1}{-x}=1+\ln 2$$

## 0310 답 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{(9^x-1)\log_3(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{9^x-1}{x}\times\frac{\log_3(1+x)}{x}\right\}$$
$$=\ln 9\times\frac{1}{\ln 3}=2$$

## 0311 답 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{(a+4)^x-a^x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(a+4)^x-1-a^x+1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(a+4)^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$$
$$=\ln(a+4)-\ln a=\ln\frac{a+4}{a}$$

따라서 $\ln\dfrac{a+4}{a}=\ln 3$이므로

$\dfrac{a+4}{a}=3$, $a+4=3a$ $\quad\therefore a=2$

## 0312 답 ②

$$\lim_{x\to -2}\frac{2^{x+2}-1}{x^2-4}=\lim_{x\to -2}\frac{2^{x+2}-1}{(x+2)(x-2)}$$

$x+2=t$로 놓으면 $x=-2+t$이고, $x\to -2$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to -2}\frac{2^{x+2}-1}{(x+2)(x-2)}=\lim_{t\to 0}\left(\frac{2^t-1}{t}\times\frac{1}{t-4}\right)$$
$$=\ln 2\times\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{\ln 2}{4}$$

## 0313 답 ⑤

$$\lim_{x\to 0}\frac{6^x-3^x-2^x+1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)(3^x-1)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x-1}{x}\times\frac{3^x-1}{x}\right)=\ln 2\times\ln 3$$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로 $a-b=-1$

## 0314 답 ①

$x\to0$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로
(분모)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}(ax+b)=0 \quad \therefore b=0$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{ax}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{1}{a}$$
$$=1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$$

따라서 $\frac{1}{a}=\frac{1}{3}$이므로 $a=3$

$\therefore a+b=3+0=3$

## 0315 답 45

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}(\sqrt{ax+b}-3)=0$

$\sqrt{b}-3=0 \quad \therefore b=9$ …… ❶

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+9}-3}{\ln(1+9x)}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{ax+9}-3)(\sqrt{ax+9}+3)}{\ln(1+9x)\times(\sqrt{ax+9}+3)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{ax}{\ln(1+9x)\times(\sqrt{ax+9}+3)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{9x}{\ln(1+9x)}\times\frac{a}{9(\sqrt{ax+9}+3)}\right\}$$
$$=1\times\frac{a}{54}=\frac{a}{54}$$

따라서 $\frac{a}{54}=1$이므로 $a=54$ …… ❷

$\therefore a-b=54-9=45$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $b$의 값 구하기 | 30 % |
| ❷ $a$의 값 구하기 | 50 % |
| ❸ $a-b$의 값 구하기 | 20 % |

## 0316 답 ①

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}(2^{ax+b}-8)=0$

$2^b-8=0 \quad \therefore b=3$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{2^{ax+3}-8}{2^{3x}-1}=\lim_{x\to0}\frac{8(2^{ax}-1)}{2^{3x}-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{2^{ax}-1}{ax}\times\frac{3x}{2^{3x}-1}\times\frac{8}{3}a\right)$$
$$=\ln2\times\frac{1}{\ln2}\times\frac{8}{3}a=\frac{8}{3}a$$

따라서 $\frac{8}{3}a=16$이므로 $a=6$

$\therefore a+b=6+3=9$

## 0317 답 ③

$x\to0$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로
(분모)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}(e^{bx+c}-1)=0$

$e^c-1=0 \quad \therefore c=0$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+ax)}{e^{bx}-1}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+ax)}{ax}\times\frac{bx}{e^{bx}-1}\times\frac{a}{b}\right\}$$
$$=1\times1\times\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

따라서 $\frac{a}{b}=3$이므로 $\frac{a+c}{b}=\frac{a}{b}=3$

## 0318 답 ④

$x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to-1}(e^{x+1}-a)=0$

$1-a=0 \quad \therefore a=1$

$x+1=t$로 놓으면 $x=t-1$이고, $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$$b=\lim_{x\to-1}\frac{e^{x+1}-1}{x^3+1}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{(t-1)^3+1}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t^3-3t^2+3t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{e^t-1}{t}\times\frac{1}{t^2-3t+3}\right)$$
$$=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

$\therefore a+b=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

## 0319 답 7

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}\ln\{1+f(x)\}=0$

$\ln\{1+f(0)\}=0,\ 1+f(0)=1$

$\therefore f(0)=0$

$f(x)=x^2+ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면 $f(0)=0$이므로 $b=0$

즉, $f(x)=x^2+ax$를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2+ax)}{3x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+x^2+ax)}{x^2+ax}\times\frac{x^2+ax}{3x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+x^2+ax)}{x^2+ax}\times\frac{x+a}{3}\right\}$$
$$=1\times\frac{a}{3}=\frac{a}{3}$$

즉, $\frac{a}{3}=2$이므로 $a=6$

따라서 $f(x)=x^2+6x$이므로

$f(1)=1+6=7$

## 0320 답 ⑤

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to0+}\frac{e^{ax}-b}{x}=5$ …… ㉠

$x \to 0+$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$에서

$\lim_{x\to 0+}(e^{ax}-b)=0,\ 1-b=0 \qquad \therefore\ b=1$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^{ax}-1}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{e^{ax}-1}{ax}\times a$$
$$=1\times a=a$$

따라서 $a=5$이므로 $ab=5\times 1=5$

## 0321 답 9

함수 $f(x)$가 구간 $\left(-\frac{1}{3},\ \infty\right)$에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0}f(x)=f(0) \qquad \therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{ax}{\ln(1+3x)}=3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\ln(1+3x)}\times\frac{a}{3}$$
$$=1\times\frac{a}{3}=\frac{a}{3}$$

따라서 $\frac{a}{3}=3$이므로 $a=9$

## 0322 답 ②

$x\neq -1$일 때, $f(x)=\frac{e^{x+1}-a}{2x+2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to -1}f(x)=f(-1)$

$\therefore\ f(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{e^{x+1}-a}{2x+2}$ ····· ㉠

$x\to -1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$에서

$\lim_{x\to -1}(e^{x+1}-a)=0,\ 1-a=0 \qquad \therefore\ a=1$

이를 ㉠에 대입하면

$f(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{e^{x+1}-1}{2x+2}$

$x+1=t$로 놓으면 $x=t-1$이고, $x\to -1$일 때 $t\to 0$이므로

$$f(-1)=\lim_{x\to -1}\frac{e^{x+1}-1}{2x+2}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{e^{t}-1}{t}\times\frac{1}{2}$$
$$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$\therefore\ a\times f(-1)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

## 0323 답 −1

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2+}f(x)=\lim_{x\to 2-}f(x)=f(2)$

$\therefore\ \lim_{x\to 2+}\frac{\ln(2x-3)}{e^{x-2}-1}=\lim_{x\to 2-}(ax^2+x+4)=4a+6$

$x-2=t$로 놓으면 $x=2+t$이고, $x\to 2+$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{\ln(2x-3)}{e^{x-2}-1}=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(1+2t)}{e^{t}-1}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{\ln(1+2t)}{2t}\times\frac{t}{e^{t}-1}\times 2\right\}$$
$$=1\times 1\times 2=2$$

따라서 $4a+6=2$이므로 $a=-1$

## 0324 답 $\frac{1}{\ln 2}$

점 P의 좌표를 $(t,\ 2^{t}-1)\ (t>0)$이라 하면

$\overline{OQ}=2^{t}-1,\ \overline{PQ}=t$

이때 점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t\to 0+$이므로 구하는 극한값은

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}=\lim_{t\to 0+}\frac{t}{2^{t}-1}=\frac{1}{\ln 2}$$

## 0325 답 $2\ln 2$

$A(0,\ 2^{-t}),\ B(0,\ 2^{t})$이므로

$f(t)=2^{t}-2^{-t}$ ····· ❶

두 곡선의 교점 C의 $x$좌표를 구하면

$2^{x-t}=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-t}=2^{-x+t}$

$x-t=-x+t,\ x=t$

$\therefore\ g(t)=t$ ····· ❷

$$\therefore\ \lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{g(t)}=\lim_{t\to 0+}\frac{2^{t}-2^{-t}}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2^{t}-1-2^{-t}+1}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{2^{t}-1}{t}+\lim_{t\to 0+}\frac{2^{-t}-1}{-t}$$
$$=\ln 2+\ln 2=2\ln 2$$ ····· ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $f(t)$ 구하기 | 30 % |
| ❷ $g(t)$ 구하기 | 30 % |
| ❸ $\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{g(t)}$의 값 구하기 | 40 % |

## 0326 답 ②

점 A의 $x$좌표를 구하면 $e^{x^2}-1=t$

$e^{x^2}=1+t \qquad \therefore\ x=\sqrt{\ln(1+t)}\ (\because\ x\geq 0)$

또 점 B의 $x$좌표를 구하면 $e^{x^2}-1=5t$

$e^{x^2}=1+5t \qquad \therefore\ x=\sqrt{\ln(1+5t)}\ (\because\ x\geq 0)$

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$H(\sqrt{\ln(1+5t)},\ t)$

$\therefore\ \overline{AH}=\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}$

$$\therefore\ S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}$$
$$=\frac{1}{2}\times 5t\times\{\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}\}$$
$$=\frac{5}{2}t\{\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}\}$$

$$\therefore\ \lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}=\lim_{t\to 0+}\frac{\frac{5}{2}t\{\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}\}}{t\sqrt{t}}$$
$$=\frac{5}{2}\left\{\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{\ln(1+5t)}}{\sqrt{t}}-\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{\ln(1+t)}}{\sqrt{t}}\right\}$$
$$=\frac{5}{2}\left\{\lim_{t\to 0+}\sqrt{5\times\frac{\ln(1+5t)}{5t}}-\lim_{t\to 0+}\sqrt{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right\}$$
$$=\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$$

## 0327 답 ②

$S_1(t)=\frac{1}{2}\times(e-1)\times\ln t$, $S_2(t)=\frac{1}{2}\times1\times(t-1)$이므로

$\frac{S_1(t)}{S_2(t)}=\frac{(e-1)\ln t}{t-1}$

$\therefore \lim_{t\to1+}\frac{S_1(t)}{S_2(t)}=\lim_{t\to1+}\frac{(e-1)\ln t}{t-1}$

$t-1=s$로 놓으면 $t=1+s$이고, $t\to1+$일 때 $s\to0+$이므로

$\lim_{t\to1+}\frac{(e-1)\ln t}{t-1}=\lim_{s\to0+}\left\{(e-1)\times\frac{\ln(1+s)}{s}\right\}$

$=(e-1)\times1=e-1$

## 0328 답 $\frac{1}{3}\ln10$

두 점 A(1, 0), B($t$, $3\log t$)를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{3\log t}{t-1}$

선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+t}{2},\ \frac{3}{2}\log t\right)$

따라서 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$y=-\frac{t-1}{3\log t}\left(x-\frac{1+t}{2}\right)+\frac{3}{2}\log t$

이 직선이 $y$축과 만나는 점의 $y$좌표 $f(t)$는

$f(t)=-\frac{t-1}{3\log t}\times\left(-\frac{1+t}{2}\right)+\frac{3}{2}\log t$

$=\frac{t-1}{\log t}\times\frac{1+t}{6}+\frac{3}{2}\log t$

$\therefore \lim_{t\to1+}f(t)=\lim_{t\to1+}\left(\frac{t-1}{\log t}\times\frac{1+t}{6}+\frac{3}{2}\log t\right)$

$t-1=s$로 놓으면 $t=1+s$이고, $t\to1+$일 때 $s\to0+$이므로

$\lim_{t\to1+}f(t)=\lim_{s\to0+}\left\{\frac{s}{\log(1+s)}\times\frac{2+s}{6}+\frac{3}{2}\log(1+s)\right\}$

$=\ln10\times\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}\ln10$

## 0329 답 ①

$f'(x)=8xe^x+(4x^2+1)e^x=(4x^2+8x+1)e^x$

$\therefore f'(0)=1$

## 0330 답 3

$f'(x)=3^x\ln3\times(2x+1)+3^x\times2$

$\therefore f'(1)=9\ln3+6$

따라서 $a=9$, $b=6$이므로 $\frac{2a}{b}=\frac{18}{6}=3$

## 0331 답 ④

$f(x)=2^{x+1}=2\times2^x$이므로

$f'(x)=2\times2^x\ln2=2^{x+1}\ln2$

따라서 점 (1, 4)에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=2^2\times\ln2=4\ln2$

## 0332 답 ④

$f'(x)=e^x+(x+a)e^x+b=(x+a+1)e^x+b$

$f(0)=5$에서 $a=5$

$f'(0)=2$에서 $a+1+b=2$

$6+b=2$ $\therefore b=-4$

$\therefore a-b=5-(-4)=9$

## 0333 답 $7+\frac{2}{\ln2}$

$f'(x)=2x+\frac{3}{x}$에서 $f'(3)=7$

$g'(x)=2\log_2x+2x\times\frac{1}{x\ln2}=2\log_2x+\frac{2}{\ln2}$에서

$g'(1)=\frac{2}{\ln2}$

$\therefore f'(3)+g'(1)=7+\frac{2}{\ln2}$

## 0334 답 ⑤

$f(x)=x^2\log_32x=x^2(\log_32+\log_3x)$이므로

$f'(x)=2x(\log_32+\log_3x)+x^2\times\frac{1}{x\ln3}=2x\log_32x+\frac{x}{\ln3}$

$\therefore f'(1)=2\log_32+\frac{1}{\ln3}=\log_34+\log_3e=\log_34e$

$\therefore a=4e$

## 0335 답 $\frac{e-1}{5}$

함수 $f(x)=\ln5x$는 닫힌구간 $\left[\frac{1}{5},\ \frac{e}{5}\right]$에서 연속이고 열린구간 $\left(\frac{1}{5},\ \frac{e}{5}\right)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f\left(\frac{e}{5}\right)-f\left(\frac{1}{5}\right)}{\frac{e}{5}-\frac{1}{5}}=f'(c)$인 $c$가 열린구간 $\left(\frac{1}{5},\ \frac{e}{5}\right)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f\left(\frac{e}{5}\right)=\ln e=1$, $f\left(\frac{1}{5}\right)=\ln1=0$이고

$f(x)=\ln5x=\ln x+\ln5$에서 $f'(x)=\frac{1}{x}$이므로

$\frac{1-0}{\frac{e}{5}-\frac{1}{5}}=\frac{1}{c}$ $\therefore c=\frac{e-1}{5}$

**미적분 I 다시보기**

**평균값 정리**

함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 $(a, b)$에서 미분가능할 때,

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

인 $c$가 열린구간 $(a, b)$에 적어도 하나 존재한다.

## 0336 답 $18e$

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2+\lim_{h\to0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=2f'(1)+f'(1)=3f'(1)$ ····· ㉠

이때

$f'(x)=e^x(2\ln x+x^3)+e^x\left(\frac{2}{x}+3x^2\right)$

$=e^x\left(2\ln x+x^3+3x^2+\frac{2}{x}\right)$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$3f'(1)=3\times e(1+3+2)=18e$

## 0337 답 $16+\frac{4}{\ln 2}$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=f'(4)$ …… ㉠

이때

$f'(x)=2x\log_2 x+x^2\times\frac{1}{x\ln 2}=2x\log_2 x+\frac{x}{\ln 2}$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$f'(4)=16+\frac{4}{\ln 2}$

## 0338 답 ⑤

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\}$

$=f'(1)\times 2=2f'(1)$ …… ㉠

이때

$f'(x)=5^x\ln 5\times(x+2)+5^x=5^x(x\ln 5+2\ln 5+1)$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$2f'(1)=2\times 5(\ln 5+2\ln 5+1)=10(3\ln 5+1)$

## 0339 답 ①

$F(x)=f(x)g(x)$라 하면

$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\{f(1-h)g(1-h)-f(1)g(1)\}$

$=-\lim_{h\to 0}\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}$

$=-F'(1)=-\{f'(1)g(1)+f(1)g'(1)\}$ …… ㉠

이때

$f'(x)=-\frac{1}{x}$, $g'(x)=\frac{1}{e^4}\times e^x=e^{x-4}$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$-\{f'(1)g(1)+f(1)g'(1)\}=-(-e^{-3}+4e^{-3})=-3e^{-3}$

## 0340 답 ④

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+}(e^x+b)=\lim_{x\to 0-}(ax+5)=f(0)$

$1+b=5$ $\therefore b=4$

또 $f'(0)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}a & (x<0)\\ e^x & (x>0)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to 0+}e^x=\lim_{x\to 0-}a$ $\therefore a=1$

$\therefore a+b=1+4=5$

## 0341 답 $2e$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}b\ln x=\lim_{x\to 1-}(e^x+a)=f(1)$

$0=e+a$ $\therefore a=-e$ …… ❶

또 $f'(1)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}e^x & (x<1)\\ \frac{b}{x} & (x>1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to 1+}\frac{b}{x}=\lim_{x\to 1-}e^x$ $\therefore b=e$ …… ❷

$\therefore b-a=e-(-e)=2e$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $a$의 값 구하기 | 40 % |
| ❷ $b$의 값 구하기 | 40 % |
| ❸ $b-a$의 값 구하기 | 20 % |

## 0342 답 ①

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 미분가능하면 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 1+}(2x+3\ln x)=\lim_{x\to 1-}(ax^2+bx)=f(1)$

$\therefore a+b=2$ …… ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}2ax+b & (x<1)\\ 2+\frac{3}{x} & (x>1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to 1+}\left(2+\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to 1-}(2ax+b)$

$\therefore 2a+b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-1$ $\therefore ab=-3$

# AB 유형 점검 62~64쪽

## 0343 답 ④

$\alpha=\lim_{x\to\infty}\frac{5^{x+1}-3^{x+1}}{5^x+3^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5-3\times\left(\frac{3}{5}\right)^x}{1+\left(\frac{3}{5}\right)^x}=\frac{5-0}{1+0}=5$

$\beta=\lim_{x\to\infty}(9^x-7^x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to\infty}\left[9^x\left\{1-\left(\frac{7}{9}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{2x}}$

$=\lim_{x\to\infty}\left[3^{2x}\left\{1-\left(\frac{7}{9}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{2x}}$

$=\lim_{x\to\infty}3\left\{1-\left(\frac{7}{9}\right)^x\right\}^{\frac{1}{2x}}=3\times 1=3$

$\therefore \alpha\beta=5\times 3=15$

## 0344 답 ④

$\lim_{x\to\infty}\{\log_2(4x+1)-\log_2(x^2+2)+\log_2(2x-1)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{(4x+1)(2x-1)}{x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{8x^2-2x-1}{x^2+2}$

$=\log_2\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2-2x-1}{x^2+2}$

$=\log_2 8=\log_2 2^3=3$

## 0345 답 5

$\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}=\lim_{x\to 0}\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^{ab}=e^{ab}$

따라서 $e^{ab}=e^5$이므로 $ab=5$

## 0346 답 ③

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)\left(1-\frac{1}{3x}\right)\left(1+\frac{1}{4x}\right)\right\}^{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x}\times\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{x}\times\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left\{\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{2x}\right\}^{\frac{1}{2}}\times\left\{\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{-3x}\right\}^{-\frac{1}{3}}\times\left\{\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{4x}\right\}^{\frac{1}{4}}\right]$$
$$=e^{\frac{1}{2}}\times e^{-\frac{1}{3}}\times e^{\frac{1}{4}}=e^{\frac{5}{12}}$$

따라서 $e^{\frac{5}{12}}=e^{a}$이므로 $a=\frac{5}{12}$

## 0347 답 ④

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)\times(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)\times(\sqrt{x+4}+2)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}\times(\sqrt{x+4}+2)\right\}$$
$$=1\times4=4$$

## 0348 답 23

$$a=\lim_{x\to0}\frac{e^{8x}-1}{3x^2+2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{8x}-1}{8x}\times\frac{8x}{3x^2+2x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{8x}-1}{8x}\times\frac{8}{3x+2}\right)$$
$$=1\times4=4$$
$$b=\lim_{x\to0}\frac{e^{9x}-1}{\ln(1+3x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^{9x}-1}{9x}\times\frac{3x}{\ln(1+3x)}\times3\right\}$$
$$=1\times1\times3=3$$
$\therefore\ 2a+5b=2\times4+5\times3=23$

## 0349 답 3

$$\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1+6x)}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\log_2(1+6x)}{6x}\times\frac{2x}{\ln(1+2x)}\times3\right\}$$
$$=\frac{1}{\ln2}\times1\times3=\frac{3}{\ln2}$$

따라서 $\frac{3}{\ln2}=\frac{a}{\ln2}$이므로 $a=3$

## 0350 답 ④

$$\lim_{x\to0}\frac{2^x+3^x+4^x-3}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(2^x-1)+(3^x-1)+(4^x-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{x}$$
$$=\ln2+\ln3+\ln4=\ln24$$

## 0351 답 ①

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}(a^x+b)=0$

$1+b=0 \qquad \therefore\ b=-1$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{a^x-1}{x}\times\frac{2x}{\ln(1+2x)}\times\frac{1}{2}\right\}$$
$$=\ln a\times1\times\frac{1}{2}=\frac{\ln a}{2}$$

따라서 $\frac{\ln a}{2}=\ln4$이므로 $a=16$

$\therefore\ a+b=16+(-1)=15$

## 0352 답 2

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$$\therefore\ \lim_{x\to0}\frac{e^{3x}+a}{x}=b \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}(e^{3x}+a)=0,\ 1+a=0 \qquad \therefore\ a=-1$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times3=1\times3=3 \qquad \therefore\ b=3$$

$\therefore\ a+b=-1+3=2$

## 0353 답 ③

$\mathrm{Q}(f(t),\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}$에서

$\sqrt{\{f(t)\}^2+(-1)^2}=\sqrt{\{f(t)-t\}^2+(-5^t)^2}$

$\{f(t)\}^2+1=\{f(t)\}^2-2tf(t)+t^2+5^{2t}$

$2tf(t)=t^2+5^{2t}-1$

$$\therefore\ f(t)=\frac{t^2+5^{2t}-1}{2t}$$

$$\therefore\ \lim_{t\to0}f(t)=\lim_{t\to0}\frac{t^2+5^{2t}-1}{2t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{t}{2}+\frac{5^{2t}-1}{2t}\right)$$
$$=\ln5$$

## 0354 답 $e$

함수 $y=|1-\ln x|$의 그래프가 직선 $y=t$와 만나는 점의 $x$좌표를 구하면

$|1-\ln x|=t,\ 1-\ln x=\pm t$

$\ln x=1-t$ 또는 $\ln x=1+t$

$\therefore\ x=e^{1-t}$ 또는 $x=e^{1+t}$

따라서 $\mathrm{P}(e^{1-t},\ t)$, $\mathrm{Q}(e^{1+t},\ t)$이므로

$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times t=\frac{1}{2}\times(e^{1+t}-e^{1-t})\times t$

$$\therefore\ \lim_{t\to0+}\frac{S(t)}{t^2}=\lim_{t\to0+}\frac{e^{1+t}-e^{1-t}}{2t}$$
$$=\frac{e}{2}\lim_{t\to0+}\frac{e^{t}-e^{-t}}{t}$$
$$=\frac{e}{2}\lim_{t\to0+}\frac{e^{t}-1-e^{-t}+1}{t}$$
$$=\frac{e}{2}\left(\lim_{t\to0+}\frac{e^{t}-1}{t}+\lim_{t\to0+}\frac{e^{-t}-1}{-t}\right)$$
$$=\frac{e}{2}(1+1)=e$$

## 0355 답 ①

$f'(x)=(e^x+3)(x^2-e^x)+(e^x+3x)(2x-e^x)$

$\therefore f'(0)=4\times(-1)+1\times(-1)=-5$

## 0356 답 5

$f'(x)=2axe^x+(ax^2+b)e^x=(ax^2+2ax+b)e^x$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(0, 2)$를 지나므로 $f(0)=2$에서

$b=2$

또 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 $11e$이므로

$f'(1)=11e$에서

$(a+2a+2)e=11e$

$3a+2=11 \quad \therefore a=3$

$\therefore a+b=3+2=5$

## 0357 답 ③

$f(x)=\log_5\frac{1}{x}-\log_{25}\frac{1}{x}=-\log_5 x+\log_{25}x$이므로

$f'(x)=-\frac{1}{x\ln 5}+\frac{1}{x\ln 25}$

$=-\frac{1}{x\ln 5}+\frac{1}{2x\ln 5}=-\frac{1}{2x\ln 5}$

$\therefore f'\left(\frac{1}{\ln 5}\right)=-\frac{1}{2}$

## 0358 답 ③

$x\to e$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to e}\{f(x)-g(x)\}=0$, $f(e)-g(e)=0 \quad \therefore f(e)=g(e)$

즉, $a^e=2\log_b e$이므로

$\frac{2}{\ln b}=a^e \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $f'(x)=a^x\ln a$, $g'(x)=\frac{2}{x\ln b}$이므로

$\lim_{x\to e}\frac{f(x)-g(x)}{x-e}$

$=\lim_{x\to e}\frac{\{f(x)-f(e)\}-\{g(x)-g(e)\}}{x-e}$ ($\because f(e)=g(e)$)

$=\lim_{x\to e}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}-\lim_{x\to e}\frac{g(x)-g(e)}{x-e}$

$=f'(e)-g'(e)$

$=a^e\ln a-\frac{2}{e\ln b}$

㉠을 대입하면

$a^e\ln a-\frac{a^e}{e}=0$, $\ln a=\frac{1}{e}$ ($\because a^e\neq 0$)

$\therefore a=e^{\frac{1}{e}}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{2}{\ln b}=e$, $\ln b=\frac{2}{e} \quad \therefore b=e^{\frac{2}{e}}$

$\therefore a\times b=e^{\frac{1}{e}}\times e^{\frac{2}{e}}=e^{\frac{3}{e}}$

## 0359 답 4

$y=\frac{1}{2}\ln(x+3)$이라 하면

$\ln(x+3)=2y$, $x+3=e^{2y}$

$\therefore x=e^{2y}-3$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=e^{2x}-3$

$\therefore g(x)=e^{2x}-3 \quad \cdots\cdots$ ❶

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{g(x)+2}{f(x-2)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\frac{1}{2}\ln(1+x)}$

$=2\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{x}{\ln(1+x)}\times 2\right\}$

$=2(1\times 1\times 2)=4 \quad \cdots\cdots$ ❷

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ $g(x)$ 구하기 | 40 % |
| ❷ $\lim_{x\to 0}\frac{g(x)+2}{f(x-2)}$의 값 구하기 | 60 % |

## 0360 답 2

$x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to 1}\{f(x)-1\}=0 \quad \therefore f(1)=1$

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)=4$

$f(1)=1$에서 $b=1 \quad \cdots\cdots$ ❶

따라서 $f(x)=a\ln x+x$이므로

$f'(x)=\frac{a}{x}+1$

$f'(1)=4$에서

$a+1=4 \quad \therefore a=3 \quad \cdots\cdots$ ❷

$\therefore a-b=3-1=2 \quad \cdots\cdots$ ❸

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ $b$의 값 구하기 | 40 % |
| ❷ $a$의 값 구하기 | 40 % |
| ❸ $a-b$의 값 구하기 | 20 % |

## 0361 답 $e$

함수 $f(x)$가 모든 양수 $x$에서 미분가능하면 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 1+}be^{x-1}=\lim_{x\to 1-}\ln ax=f(1)$

$\therefore b=\ln a \quad \cdots\cdots$ ㉠ $\cdots\cdots$ ❶

또 $f'(1)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & (0<x<1)\\ be^{x-1} & (x>1)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to 1+}be^{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{1}{x} \quad \therefore b=1$

이를 ㉠에 대입하면

$\ln a=1 \quad \therefore a=e \quad \cdots\cdots$ ❷

$\therefore ab=e \quad \cdots\cdots$ ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $a$, $b$ 사이의 관계식 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ $a$, $b$의 값 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ $ab$의 값 구하기 | 20 % |

## 실력 향상 65쪽

### 0362 답 ②

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left\{f(x)\ln\left(1+\frac{1}{4x}\right)\right\}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left\{f\left(\frac{1}{t}\right)\ln\left(1+\frac{1}{4}t\right)\right\}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left\{f\left(\frac{1}{t}\right)\times\frac{1}{4}t\times\frac{\ln\left(1+\frac{1}{4}t\right)}{\frac{1}{4}t}\right\}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{1}{4}tf\left(\frac{1}{t}\right)$$

즉, $\lim_{t\to0+}\frac{1}{4}tf\left(\frac{1}{t}\right)=3$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{4x}=3$$
$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=12$$
$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{f(x)}{x}\times\frac{x}{x-2}\right\}$$
$$=12\times1=12$$

### 0363 답 2

$f(x+y)=\frac{f(x)}{e^y}+\frac{f(y)}{e^x}$에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)$$
$$\therefore\ f(0)=0$$
$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\frac{f(x)}{e^h}+\frac{f(h)}{e^x}-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left[\frac{1}{h}\times\left\{\frac{f(x)}{e^h}(1-e^h)+\frac{f(h)}{e^x}\right\}\right]$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(x)}{e^h}\times\left(-\frac{e^h-1}{h}\right)\right\}+\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{h}\times\frac{1}{e^x}$$
$$=f(x)\times(-1)+\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\times\frac{1}{e^x}$$
$$=-f(x)+f'(0)\times\frac{1}{e^x}$$
$$=-f(x)+\frac{4}{e^x}$$

따라서 $g(x)=f'(x)+f(x)=\frac{4}{e^x}$이므로

$$g(\ln2)=\frac{4}{e^{\ln2}}=2$$

### 0364 답 ②

점 P의 좌표를 $(t,\ \ln(1+t))\ (t>0)$라 하면

$$\triangle OQP=\frac{1}{2}t\ln(1+t)$$

$\overline{OR}=\overline{OP}=\sqrt{t^2+\{\ln(1+t)\}^2}$이므로

$$\triangle OPR=\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+\{\ln(1+t)\}^2}$$

따라서 점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t\to0+$이므로 구하는 극한값은

$$\lim_{t\to0+}\frac{\triangle OPR}{\triangle OQP}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{2}t\sqrt{t^2+\{\ln(1+t)\}^2}}{\frac{1}{2}t\ln(1+t)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{\sqrt{t^2+\{\ln(1+t)\}^2}}{t}}{\frac{\ln(1+t)}{t}}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+\left\{\frac{\ln(1+t)}{t}\right\}^2}}{\frac{\ln(1+t)}{t}}$$
$$=\frac{\sqrt{1+1^2}}{1}=\sqrt{2}$$

### 0365 답 5

㈎에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$에서

$$\lim_{x\to1}g(x)=0\qquad\therefore\ g(1)=0$$

이때 $g(1)=ef(1)$이므로

$$f(1)=0$$

또 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=0$이므로

$$g'(1)=0$$

이때 $g'(x)=f'(x)e^x+f(x)e^x$에서

$$g'(1)=f'(1)\times e+f(1)\times e$$
$$=ef'(1)\ (\because\ f(1)=0)$$

$g'(1)=0$이므로 $f'(1)=0$

즉, $f(1)=f'(1)=0$이므로

$$f(x)=a(x-1)^2\ (\text{단, } a\neq0)\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

㈏에서

$$\lim_{x\to0}\frac{g(2x)-f(2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(2x)e^{2x}-f(2x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(2x)(e^{2x}-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}f(2x)\times\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2\right)$$
$$=f(0)\times1\times2=2f(0)$$

즉, $2f(0)=10$이므로

$$f(0)=5$$

$x=0$을 ㉠에 대입하면

$$f(0)=a\qquad\therefore\ a=5$$

따라서 $f(x)=5(x-1)^2$이므로

$$f(2)=5$$

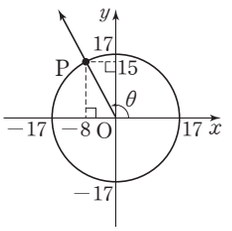
# 04 / 삼각함수의 미분

## A 개념 확인 66~69쪽

**0366** 답 $\frac{17}{15}$

$\overline{OP}=\sqrt{(-8)^2+15^2}=17$이므로

$\csc\theta=\frac{17}{15}$




**0367** 답 $-\frac{17}{8}$

**0368** 답 $-\frac{8}{15}$

**0369** 답 $\sqrt{2}$

$\csc 45^\circ=\frac{1}{\sin 45^\circ}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$

**0370** 답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\sec\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

**0371** 답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cot\frac{5}{3}\pi=\frac{1}{\tan\frac{5}{3}\pi}=\frac{1}{-\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

**0372** 답 $\frac{13}{12}$

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$\sec^2\theta=1+\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{169}{144}$

이때 $\theta$가 제1사분면의 각이므로 $\sec\theta>0$

$\therefore \sec\theta=\sqrt{\frac{169}{144}}=\frac{13}{12}$

**0373** 답 $-\frac{25}{7}$

$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$이므로

$\csc^2\theta=1+\left(\frac{24}{7}\right)^2=\frac{625}{49}$

이때 $\theta$가 제3사분면의 각이므로 $\csc\theta<0$

$\therefore \csc\theta=-\sqrt{\frac{625}{49}}=-\frac{25}{7}$

**0374** 답 $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)$

$=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

**0375** 답 $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cos 165^\circ=-\cos 15^\circ$

$=-\cos(45^\circ-30^\circ)$

$=-(\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ)$

$=-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\right)$

$=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

**0376** 답 $2+\sqrt{3}$

$\tan\frac{5}{12}\pi=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\times\tan\frac{\pi}{6}}=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}$

$=\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$

**0377** 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 15^\circ\cos 45^\circ+\cos 15^\circ\sin 45^\circ$

$=\sin(15^\circ+45^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

**0378** 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 80^\circ\cos 35^\circ+\sin 80^\circ\sin 35^\circ$

$=\cos(80^\circ-35^\circ)=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

**0379** 답 1

$\frac{\tan 80^\circ-\tan 35^\circ}{1+\tan 80^\circ\tan 35^\circ}=\tan(80^\circ-35^\circ)$

$=\tan 45^\circ=1$

**0380** 답 $-\frac{120}{169}$

$\theta$가 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=-\frac{5}{13}$

$\therefore \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$=2\times\frac{12}{13}\times\left(-\frac{5}{13}\right)=-\frac{120}{169}$

**0381** 답 $-\frac{119}{169}$

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=\left(-\frac{5}{13}\right)^2-\left(\frac{12}{13}\right)^2=-\frac{119}{169}$

**0382** 답 $\frac{120}{119}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}=-\frac{12}{5}$

$\therefore\ \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times\left(-\frac{12}{5}\right)}{1-\left(-\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{120}{119}$

다른 풀이

$\tan 2\theta=\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\frac{-\frac{120}{169}}{-\frac{119}{169}}=\frac{120}{119}$

**0383** 답 0

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}5\sin 3x=5\sin\pi=0$

**0384** 답 6

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(5-\cos 2x)=5-\cos\pi=5+1=6$

**0385** 답 $\sqrt{3}$

$\lim\limits_{x\to\pi}(2\sin x+\sqrt{3})=2\sin\pi+\sqrt{3}=\sqrt{3}$

**0386** 답 2

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}2\sin x$

$=2\sin\frac{\pi}{2}=2$

**0387** 답 $\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{1+\cos 0}=\frac{1}{2}$

**0388** 답 6

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\times 6=1\times 6=6$

**0389** 답 $\frac{4}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\times\frac{4}{3}=1\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$

**0390** 답 $\frac{1}{5}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}\times\frac{1}{5}=1\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}$

**0391** 답 $\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{1}{3}$

$=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

**0392** 답 $\frac{5}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{\tan 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x}{\tan 3x}\times\frac{5}{3}=1\times\frac{5}{3}=\frac{5}{3}$

**0393** 답 $\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{4x}{\tan 4x}\times\frac{1}{2}\right)$

$=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

**0394** 답 $\frac{1}{4}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 3x+\tan 5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\frac{\sin 3x}{x}+\frac{\tan 5x}{x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{\frac{\sin 3x}{3x}\times 3+\frac{\tan 5x}{5x}\times 5}$

$=\frac{2}{1\times 3+1\times 5}=\frac{1}{4}$

**0395** 답 $y'=x+\cos x$

**0396** 답 $y'=\frac{1}{x}-\sin x$

**0397** 답 $y'=3\cos x+5\sin x$

**0398** 답 $y'=\cos x-x\sin x$

$y'=1\times\cos x+x\times(-\sin x)=\cos x-x\sin x$

**0399** 답 $y'=e^x(\sin x+\cos x)$

$y'=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$

**0400** 답 $y'=\cos^2 x-\sin^2 x$

$y'=\cos x\cos x+\sin x(-\sin x)$

$=\cos^2 x-\sin^2 x$

## B 유형 완성 70~81쪽

### 0401 답 $\frac{5\sqrt{2}}{4}$

$\theta$가 제3사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$\therefore \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \sec\theta+\cot\theta=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$=-\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}}$

$=-\frac{3\sqrt{2}}{4}+2\sqrt{2}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$

### 0402 답 $\frac{8}{15}$

$\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{4}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{16}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16}$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{15}{32}$

$\therefore \sec\theta-\csc\theta=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{15}{32}}=\frac{8}{15}$

### 0403 답 ④

(i) $\sin\theta\sec\theta<0$일 때,

$\sin\theta>0$, $\sec\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\sec\theta>0$

따라서 $\theta$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\csc\theta\cot\theta>0$일 때,

$\csc\theta>0$, $\cot\theta>0$ 또는 $\csc\theta<0$, $\cot\theta<0$

따라서 $\theta$는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\theta$는 제4사분면의 각이다.

### 0404 답 $\frac{\sqrt{15}}{3}$

$\tan\theta+\cot\theta=3$에서

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=3$, $\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=3$

$\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=3$ $\therefore \sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}$

$\therefore (\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$=1+2\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

$\therefore |\sin\theta+\cos\theta|=\frac{\sqrt{15}}{3}$

### 0405 답 ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\csc\theta+\sec\theta=k$ …… ㉠

$\csc\theta\sec\theta=-3$ …… ㉡

㉠에서 $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}=k$ …… ㉢

㉡에서 $\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}=-3$, $\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{3}$

이를 ㉢에 대입하면

$-3(\sin\theta+\cos\theta)=k$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{k}{3}$

양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{k^2}{9}$

$1-\frac{2}{3}=\frac{k^2}{9}$, $k^2=3$ $\therefore k=\sqrt{3}$ ($\because k>0$)

### 0406 답 ④

$\frac{\tan\theta}{1+\sec\theta}+\frac{1+\sec\theta}{\tan\theta}=\frac{\tan^2\theta+(1+\sec\theta)^2}{(1+\sec\theta)\tan\theta}$

$=\frac{\tan^2\theta+1+2\sec\theta+\sec^2\theta}{(1+\sec\theta)\tan\theta}$

$=\frac{\sec^2\theta+2\sec\theta+\sec^2\theta}{(1+\sec\theta)\tan\theta}$

$=\frac{2\sec\theta(1+\sec\theta)}{(1+\sec\theta)\tan\theta}$

$=\frac{2\sec\theta}{\tan\theta}=\frac{2}{\sin\theta}$

$=2\csc\theta$

### 0407 답 3

$\frac{1-\tan^2\theta}{\sec^2\theta}=\frac{1}{3}$에서 $\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1}{3}$

$3-3\tan^2\theta=1+\tan^2\theta$ $\therefore \tan^2\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore \csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+\frac{1}{\tan^2\theta}=1+2=3$

### 0408 답 ②

ㄱ. $(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta)=\cos^2\theta\sec^2\theta$

$=\cos^2\theta\times\frac{1}{\cos^2\theta}=1$

ㄴ. $(1+\cot\theta)^2+(1-\cot\theta)^2$

$=1+2\cot\theta+\cot^2\theta+1-2\cot\theta+\cot^2\theta$

$=2+2\cot^2\theta=2(1+\cot^2\theta)$

$=2\csc^2\theta$

ㄷ. $\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}=\frac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$=\frac{2}{1-\sin^2\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta}$

$=2\sec^2\theta$

ㄹ. $\frac{\sec\theta}{\csc\theta-\cot\theta}+\frac{\sec\theta}{\csc\theta+\cot\theta}$

$=\frac{\sec\theta(\csc\theta+\cot\theta)+\sec\theta(\csc\theta-\cot\theta)}{(\csc\theta-\cot\theta)(\csc\theta+\cot\theta)}$

$=\frac{2\sec\theta\csc\theta}{\csc^2\theta-\cot^2\theta}=\frac{2\sec\theta\csc\theta}{(1+\cot^2\theta)-\cot^2\theta}$

$=2\sec\theta\csc\theta$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 0409 답 $\frac{33}{65}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha>0$

$\therefore \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$

$\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$이므로 $\sin\beta<0$

$\therefore \sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{12}{13}\times\frac{4}{5}+\frac{5}{13}\times\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{33}{65}$

## 0410 답 ⑤

$\frac{\sin 145^\circ\cos 25^\circ-\cos 145^\circ\sin 25^\circ}{\cos 55^\circ\cos 10^\circ+\sin 55^\circ\sin 10^\circ}=\frac{\sin(145^\circ-25^\circ)}{\cos(55^\circ-10^\circ)}$

$=\frac{\sin 120^\circ}{\cos 45^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

## 0411 답 ②

$2\cos\alpha=3\sin\alpha$에서

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{3}$ $\therefore \tan\alpha=\frac{2}{3}$

$\tan(\alpha+\beta)=1$에서

$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$, $\frac{\frac{2}{3}+\tan\beta}{1-\frac{2}{3}\tan\beta}=1$

$\frac{2}{3}+\tan\beta=1-\frac{2}{3}\tan\beta$

$\therefore \tan\beta=\frac{1}{5}$

## 0412 답 $-\frac{3}{8}$

$\sin\alpha+\cos\beta=1$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=1$ …… ㉠

$\cos\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{4}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2+2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)=\frac{5}{4}$

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=-\frac{3}{8}$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{8}$

## 0413 답 $\frac{1}{17}$

$\sin(\alpha+\beta)=\frac{3}{4}$에서

$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{4}$ …… ㉠

$\sin(\alpha-\beta)=\frac{2}{3}$에서

$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{2}{3}$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\sin\alpha\cos\beta=\frac{17}{12}$ $\therefore \sin\alpha\cos\beta=\frac{17}{24}$ …… ⓘ

㉠−㉡을 하면

$2\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{12}$ $\therefore \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{24}$ …… ⓘⓘ

$\therefore \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}=\frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta}=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{17}{24}}=\frac{1}{17}$ …… ⓘⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ $\sin\alpha\cos\beta$의 값 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ $\cos\alpha\sin\beta$의 값 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ $\frac{\tan\beta}{\tan\alpha}$의 값 구하기 | 20 % |

## 0414 답 $\frac{\pi}{4}$

$g\left(\frac{1}{4}\right)=\alpha$, $g\left(\frac{3}{5}\right)=\beta$라 하면 $g(x)$는 $f(x)$의 역함수이므로

$f(\alpha)=\frac{1}{4}$, $f(\beta)=\frac{3}{5}$ $\therefore \tan\alpha=\frac{1}{4}$, $\tan\beta=\frac{3}{5}$

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}}=1$

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\alpha+\beta<\pi$이므로

$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

$\therefore g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{5}\right)=\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

## 0415 답 ②

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{4}$

$2\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{4}$

$\therefore \sin 2\theta=-\frac{3}{4}$

## 0416 답 $\frac{5}{12}$

$3\sin\theta-2\cos\theta=0$에서 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{3}$

따라서 $\tan\theta=\frac{2}{3}$이므로

$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2\times\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{9}}=\frac{12}{5}$

$\therefore \cot 2\theta=\frac{1}{\tan 2\theta}=\frac{5}{12}$

## 0417 답 $\frac{7}{5}$

$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+2^2=5$이므로

$\cos^2\theta=\frac{1}{\sec^2\theta}=\frac{1}{5}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\theta>0$, $\sin\theta>0$

$\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore \sin 2\theta-\cos 2\theta=2\sin\theta\cos\theta-(2\cos^2\theta-1)$

$=2\times\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}-\left(2\times\frac{1}{5}-1\right)$

$=\frac{4}{5}-\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{7}{5}$

## 0418 답 2

$f(x)=8\sin x+2\cos 2x+k$

$=8\sin x+2(1-2\sin^2 x)+k$

$=-4\sin^2 x+8\sin x+2+k$

$=-4(\sin x-1)^2+6+k$ …… ❶

이때 $-1\le\sin x\le 1$이므로 함수 $f(x)$는 $\sin x=1$일 때 최댓값 $6+k$를 갖는다. …… ❷

따라서 $6+k=8$이므로 $k=2$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $f(x)$를 $a(x-p)^2+q$ 꼴로 나타내기 | 40 % |
| ❷ $f(x)$의 최댓값 구하기 | 40 % |
| ❸ $k$의 값 구하기 | 20 % |

## 0419 답 ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=-2$, $\tan\alpha\tan\beta=-5$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-2}{1-(-5)}=-\frac{1}{3}$

$\therefore \sec^2(\alpha+\beta)=1+\tan^2(\alpha+\beta)=1+\left(-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$

## 0420 답 2

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=4$, $\tan\alpha\tan\beta=a$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{4}{1-a}$

따라서 $\frac{4}{1-a}=-4$이므로

$a-1=1$ $\therefore a=2$

## 0421 답 ③

두 직선 $y=x+3$, $y=-2x+6$이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면

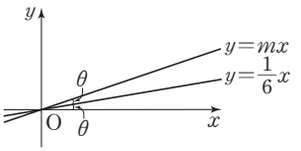
$\tan\alpha=1$, $\tan\beta=-2$

$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{1-(-2)}{1+1\times(-2)}\right|=3$

## 0422 답 $\frac{12}{35}$

직선 $y=\frac{1}{6}x$가 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta$라 하면




$\tan\theta=\frac{1}{6}$

직선 $y=mx$가 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $2\theta$이므로

$m=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$=\frac{2\times\frac{1}{6}}{1-\left(\frac{1}{6}\right)^2}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{35}{36}}=\frac{12}{35}$

## 0423 답 ②

두 직선 $ax-y+2=0$, $2x+y-2=0$, 즉 $y=ax+2$, $y=-2x+2$가 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면

$\tan\alpha=a$, $\tan\beta=-2$

따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기를 $\theta$라 하면

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{a+2}{1-2a}\right|$

이때 두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$\left|\frac{a+2}{1-2a}\right|=\tan\frac{\pi}{4}=1$

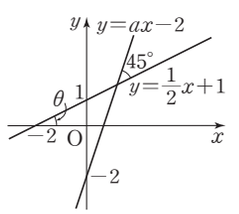
$a+2=1-2a$ 또는 $a+2=-1+2a$

$\therefore a=-\frac{1}{3}$ 또는 $a=3$

이때 $a>0$이므로 $a=3$

## 0424 답 3

직선 $y=\frac{1}{2}x+1$이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta$라 하면



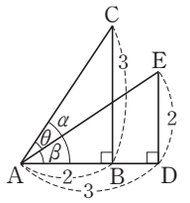

$\tan\theta=\frac{1}{2}$

직선 $y=ax-2$가 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\theta+45°$이므로

$a=\tan(\theta+45°)=\frac{\tan\theta+\tan 45°}{1-\tan\theta\tan 45°}=\frac{\frac{1}{2}+1}{1-\frac{1}{2}\times 1}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3$

## 0425 답 $\frac{12}{5}$

$\angle CAB=\alpha$, $\angle EAD=\beta$라 하면




$\tan\alpha=\frac{3}{2}$, $\tan\beta=\frac{2}{3}$

이때 $\theta=\alpha-\beta$이므로

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

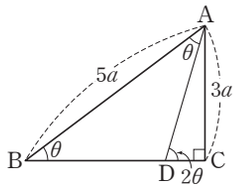
$=\frac{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}{1+\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{2}=\frac{5}{12}$

$\therefore \cot\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{12}{5}$

## 0426 답 $\dfrac{7}{25}$

$\angle ABD=\theta$, $\overline{AB}=5a$, $\overline{AC}=3a\,(a>0)$

라 하면




$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$

이때 $\angle ABD=\angle BAD=\theta$에서

$\angle ADC=2\theta$

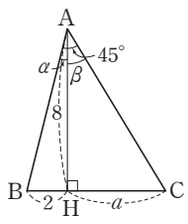
$\therefore \cos(\angle ADC)=\cos 2\theta$

$=1-2\sin^2\theta$

$=1-2\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{7}{25}$

## 0427 답 $\dfrac{24}{5}$

$\angle BAH=\alpha$, $\angle CAH=\beta$, $\overline{CH}=a$라 하면




$\tan\alpha=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$, $\tan\beta=\dfrac{a}{8}$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{a}{8}}{1-\frac{1}{4}\times\frac{a}{8}}$

$=\dfrac{8+4a}{32-a}$ …… ❶

이때 $\alpha+\beta=45°$에서 $\tan(\alpha+\beta)=\tan 45°=1$이므로

$\dfrac{8+4a}{32-a}=1$, $8+4a=32-a$ $\therefore a=\overline{CH}=\dfrac{24}{5}$ …… ❷

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $\tan(\angle BAC)$를 $\overline{CH}$에 대한 식으로 나타내기 | 60 % |
| ❷ $\overline{CH}$의 길이 구하기 | 40 % |

## 0428 답 ④

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\angle C=\angle B=\beta$

삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합은 $\pi$이므로

$\alpha+2\beta=\pi$ …… ㉠

이때 $\alpha+\beta=\pi-\beta$이므로

$\tan(\alpha+\beta)=\tan(\pi-\beta)=-\tan\beta$

따라서 $-\tan\beta=-\dfrac{3}{2}$이므로

$\tan\beta=\dfrac{3}{2}$

또 ㉠에서 $\alpha=\pi-2\beta$이므로

$\tan\alpha=\tan(\pi-2\beta)=-\tan 2\beta$

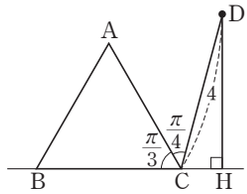
$=-\dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=-\dfrac{2\times\frac{3}{2}}{1-\left(\frac{3}{2}\right)^2}$

$=-\dfrac{3}{-\frac{5}{4}}=\dfrac{12}{5}$

## 0429 답 ⑤

삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\angle ACB=\dfrac{\pi}{3}$




점 D에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\angle DCH=\pi-\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\therefore \overline{DH}=\overline{CD}\sin(\angle DCH)$

$=4\sin\left\{\pi-\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

$=4\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=4\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

## 0430 답 $\dfrac{\sqrt{55}}{8}$

$\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=2\left(\dfrac{1}{2}\sin\theta-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta\right)$

$=2\left(\sin\theta\cos\dfrac{\pi}{3}-\cos\theta\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

즉, $2\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{4}$이므로 $\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{8}$

이때 $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $-\dfrac{\pi}{3}<\theta-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{6}$이므로

$\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)>0$

$\therefore \cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sqrt{1-\sin^2\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{8}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{55}}{8}$

## 0431 답 $8\sqrt{7}$

$y=4\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+4\sqrt{3}\sin x+3$

$=4\left(\cos x\cos\dfrac{\pi}{3}+\sin x\sin\dfrac{\pi}{3}\right)+4\sqrt{3}\sin x+3$

$=4\left(\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)+4\sqrt{3}\sin x+3$

$=2\cos x+6\sqrt{3}\sin x+3$

$=4\sqrt{7}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{7}}\cos x+\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\sin x\right)+3$

$=4\sqrt{7}\sin(x+\alpha)+3$ $\left(\text{단, }\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{7}},\ \cos\alpha=\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right)$

이때 $-1\le\sin(x+\alpha)\le 1$이므로

$-4\sqrt{7}+3\le 4\sqrt{7}\sin(x+\alpha)+3\le 4\sqrt{7}+3$

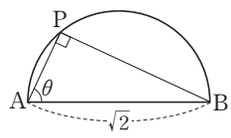
따라서 $M=4\sqrt{7}+3$, $m=-4\sqrt{7}+3$이므로

$M-m=8\sqrt{7}$

## 0432 답 2

$\angle APB=90°$이므로

$\angle PAB=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면




$\overline{AP}=\sqrt{2}\cos\theta$, $\overline{BP}=\sqrt{2}\sin\theta$

$$\therefore \overline{AP}+\overline{BP}=\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta$$
$$=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)$$
$$=2\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta\right)$$
$$=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 $\frac{\pi}{4}<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3}{4}\pi$이므로

$\frac{\sqrt{2}}{2}<\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\le 1$ $\therefore \sqrt{2}<2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\le 2$

따라서 구하는 최댓값은 2이다.

## 0433 답 $2\sqrt{2}$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan^2x-1}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{\sin^2x}{\cos^2x}-1}{\sin x-\cos x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2x-\cos^2x}{\cos^2x(\sin x-\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}{\cos^2x(\sin x-\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{\cos^2x}$$
$$=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$
$$=2\sqrt{2}$$

## 0434 답 ③

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x-2\cos x}{\cos^2x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x-2\cos x}{1-\sin^2x}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos x(\sin x-1)}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\cos x}{1+\sin x}$$
$$=\frac{-2\times 0}{1+1}$$
$$=0$$

## 0435 답 4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\csc x-\cot x}{a\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}}{a\sin x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{a\sin^2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{a(1-\cos^2x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{a(1+\cos x)(1-\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{a(1+\cos x)}$$
$$=\frac{1}{a(1+1)}$$
$$=\frac{1}{2a}$$

따라서 $\frac{1}{2a}=\frac{1}{8}$이므로 $a=4$

## 0436 답 4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^3+3x^2+4x)}{3x^3+2x^2+x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin(2x^3+3x^2+4x)}{2x^3+3x^2+4x}\times\frac{2x^2+3x+4}{3x^2+2x+1}\right\}$$
$$=1\times 4=4$$

## 0437 답 ④

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin 2x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin 3x}+\frac{\sin 2x}{\sin 3x}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{1}{3}+\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{3x}{\sin 3x}\times\frac{2}{3}\right)$$
$$=1\times\frac{1}{3}+1\times 1\times\frac{2}{3}=1$$

## 0438 답 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(g(x))}{g(f(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)}{g(4x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4\sin x}{\sin 4x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\times\frac{4x}{\sin 4x}\right)$$
$$=1\times 1=1$$

## 0439 답 ③

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{\sin 4x}}=\lim_{x\to 0}\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^{\frac{2x}{\sin 4x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^{\frac{4x}{\sin 4x}\times\frac{1}{2}}$$
$$=e^{\frac{1}{2}}$$

## 0440 답 ④

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{\ln(1+8x)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\tan 4x}{4x}\times\frac{8x}{\ln(1+8x)}\times\frac{1}{2}\right\}$$
$$=1\times 1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

## 0441 답 ②

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan x-\tan 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 2x}{x}}{\frac{\tan x}{x}-\frac{\tan 3x}{x}}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 2x}{2x}\times 2}{\frac{\tan x}{x}-\frac{\tan 3x}{3x}\times 3}$$
$$=\frac{1\times 2}{1-1\times 3}=-1$$

## 0442 답 ②

$x\to 0$일 때, $\sin 2x\to 0$, $\tan 5x\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\sin 2x)}{\sin(\tan 5x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\tan(\sin 2x)}{\sin 2x}\times\frac{\tan 5x}{\sin(\tan 5x)}\times\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{5x}{\tan 5x}\times\frac{2}{5}\right\}$$
$$=1\times 1\times 1\times 1\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}$$

## 0443 답 2

$x\to0$일 때, $6x^2+2x\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{6\tan^2x+2\tan x}{k\tan(6x^2+2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\tan x(3\tan x+1)}{k\tan(6x^2+2x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan x}{x}\times\frac{6x^2+2x}{\tan(6x^2+2x)}\times\frac{2(3\tan x+1)}{k(6x+2)}\right\}$$
$$=1\times1\times\frac{1}{k}=\frac{1}{k}$$

따라서 $\frac{1}{k}=\frac{1}{2}$이므로 $k=2$

## 0444 답 ①

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{4x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{4x\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{4x\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{4x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{4(1+\cos x)}\right\}$$
$$=1\times\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

## 0445 답 4

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos kx}{\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos kx)(1+\cos kx)}{\sin^2x(1+\cos kx)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2kx}{\sin^2x(1+\cos kx)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin kx}{kx}\right)^2\times\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\times\frac{k^2}{1+\cos kx}\right\}$$
$$=1^2\times1^2\times\frac{k^2}{2}=\frac{k^2}{2}$$

따라서 $\frac{k^2}{2}=8$이므로 $k^2=16$

$\therefore k=4\ (\because k>0)$

## 0446 답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\tan x-\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x^3}{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3\cos x}{\sin x(1-\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3\cos x(1+\cos x)}{\sin x(1-\cos x)(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x^3\cos x(1+\cos x)}{\sin^3x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^3\times\cos x(1+\cos x)\right\}$$
$$=1^3\times2=2$$

## 0447 답 1

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\sin\left(\tan\frac{1}{x}\right)\csc\frac{1}{x}=\lim_{t\to0+}\sin(\tan t)\csc t$$
$$=\lim_{t\to0+}\left\{\sin(\tan t)\times\frac{1}{\sin t}\right\}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\sin(\tan t)}{\tan t}\times\frac{t}{\sin t}\times\frac{\tan t}{t}\right\}$$
$$=1\times1\times1=1$$

## 0448 답 ④

$x-2=t$로 놓으면 $x=2+t$이고, $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{\sin\pi x}=\lim_{t\to0}\frac{(2+t)^2-4}{\sin\pi(2+t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t^2+4t}{\sin(2\pi+\pi t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t(t+4)}{\sin\pi t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\pi t}{\sin\pi t}\times\frac{t+4}{\pi}\right)=1\times\frac{4}{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

## 0449 답 $-\frac{1}{2}$

$x-\pi=t$로 놓으면 $x=\pi+t$이고, $x\to\pi$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)\sin x}=\lim_{t\to0}\frac{1+\cos(\pi+t)}{t\sin(\pi+t)}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t}{-t\sin t}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{(1-\cos t)(1+\cos t)}{-t\sin t(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin^2t}{-t\sin t(1+\cos t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{-t(1+\cos t)}$$
$$=-\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\times\frac{1}{1+\cos t}\right)$$
$$=-1\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

## 0450 답 9

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}2x^2\left(1-\cos\frac{3}{x}\right)=\lim_{t\to0+}\frac{2}{t^2}(1-\cos3t)$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{2(1-\cos3t)(1+\cos3t)}{t^2(1+\cos3t)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{2\sin^23t}{t^2(1+\cos3t)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left\{\left(\frac{\sin3t}{3t}\right)^2\times\frac{18}{1+\cos3t}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{18}{2}=9$$

## 0451 답 ①

$\frac{1}{2x^2+1}=t$로 놓으면 $x^2=\frac{1-t}{2t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}x^2\sin\frac{1}{2x^2+1}=\lim_{t\to0+}\left(\frac{1-t}{2t}\times\sin t\right)$$
$$=\lim_{t\to0+}\left(\frac{1-t}{2}\times\frac{\sin t}{t}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$$

## 0452 답 ②

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}(3-5\cos x+a)=0$

$-2+a=0 \quad \therefore a=2$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{5-5\cos x}{bx\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{5(1-\cos x)(1+\cos x)}{bx\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{5\sin^2 x}{bx\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{5\sin x}{bx(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin x}{x}\times\frac{5}{b(1+\cos x)}\right\}$$
$$=1\times\frac{5}{2b}=\frac{5}{2b}$$

따라서 $\frac{5}{2b}=\frac{5}{2}$이므로 $b=1$

$\therefore a+b=2+1=3$

## 0453 답 ②

$x\to0$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}\ln(a+2x)=0$

$\ln a=0 \quad \therefore a=1$

이를 주어진 식에 대입하면

$$b=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{2x}{\ln(1+2x)}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{2}\right\}$$
$$=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$\therefore ab=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

## 0454 답 $\frac{1}{4}$

$x\to a$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to a}(3^x-1)=0$

$3^a-1=0 \quad \therefore a=0$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{4\tan x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{3^x-1}{x}\times\frac{x}{\tan x}\times\frac{1}{4}\right)$$
$$=\ln3\times1\times\frac{1}{4}=\frac{\ln3}{4}$$

따라서 $\frac{\ln3}{4}=b\ln3$이므로 $b=\frac{1}{4}$

$\therefore b-a=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$

## 0455 답 9

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}(\sqrt{ax+b}-1)=0$

$\sqrt{b}-1=0 \quad \therefore b=1$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+1}-1}{\sin4x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{ax+1}-1)(\sqrt{ax+1}+1)}{\sin4x(\sqrt{ax+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{ax}{\sin4x(\sqrt{ax+1}+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{4x}{\sin4x}\times\frac{a}{4(\sqrt{ax+1}+1)}\right\}$$
$$=1\times\frac{a}{8}=\frac{a}{8}$$

따라서 $\frac{a}{8}=1$이므로 $a=8$

$\therefore a+b=8+1=9$

## 0456 답 $2\pi$

$f(x)=ax+b\,(a\neq0,\ a,\ b$는 상수)라 하면

$\lim_{x\to-\pi}\frac{\sin(x+\pi)}{ax+b}=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x\to-\pi$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모)$\to0$에서

$\lim_{x\to-\pi}(ax+b)=0,\ -a\pi+b=0$

$\therefore b=a\pi \quad \cdots\cdots$ ㉡

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-\pi}\frac{\sin(x+\pi)}{ax+a\pi}=\lim_{x\to-\pi}\frac{\sin(x+\pi)}{a(x+\pi)}$$

$x+\pi=t$로 놓으면 $x=t-\pi$이고, $x\to-\pi$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to-\pi}\frac{\sin(x+\pi)}{a(x+\pi)}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{at}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\times\frac{1}{a}=1\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$$

즉, $\frac{1}{a}=1$이므로 $a=1$

이를 ㉡에 대입하면 $b=\pi$

따라서 $f(x)=x+\pi$이므로

$f(\pi)=\pi+\pi=2\pi$

## 0457 답 ④

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$

$\lim_{x\to-1-}\frac{\tan2(x+1)}{x+1}=k$

$x+1=t$로 놓으면 $x=t-1$이고, $x\to-1-$일 때 $t\to0-$이므로

$$k=\lim_{x\to-1-}\frac{\tan2(x+1)}{x+1}=\lim_{t\to0-}\frac{\tan2t}{t}$$
$$=\lim_{t\to0-}\frac{\tan2t}{2t}\times2=1\times2=2$$

## 0458 답 5

함수 $f(x)$가 구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0) \quad \therefore \lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-b}{\sin x}=5 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}(e^{ax}-b)=0,\ 1-b=0 \quad \therefore b=1 \quad \cdots\cdots$ ❶

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{ax}-1}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{ax}-1}{ax}\times\frac{x}{\sin x}\times a\right)$$
$$=1\times1\times a=a$$

$\therefore\ a=5$ …… ⓘⓘ

$\therefore\ ab=5\times1=5$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $b$의 값 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ $a$의 값 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ $ab$의 값 구하기 | 20 % |

## 0459 답 $\frac{45}{2}$

$x\neq0$일 때, $f(x)=\frac{a-5\cos3x}{x^2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$ $\therefore\ f(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{a-5\cos3x}{x^2}$ …… ㉠

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim\limits_{x\to0}(a-5\cos3x)=0$

$a-5=0$ $\therefore\ a=5$

이를 ㉠에 대입하면

$$f(0)=\lim_{x\to0}\frac{5-5\cos3x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{5(1-\cos3x)(1+\cos3x)}{x^2(1+\cos3x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{5\sin^2 3x}{x^2(1+\cos3x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin3x}{3x}\right)^2\times\frac{45}{1+\cos3x}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{45}{2}=\frac{45}{2}$$

## 0460 답 6

삼각형 ABC에서 $\overline{AC}=6\sin\theta$

이때 $\angle HAC=\angle ABC$이므로 삼각형 AHC에서

$\overline{CH}=\overline{AC}\sin\theta=6\sin^2\theta$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{CH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{6\sin^2\theta}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times6$$
$$=1^2\times6=6$$

## 0461 답 ②

원 $x^2+y^2=9$의 반지름의 길이가 3이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times3^2\times\theta=\frac{9}{2}\theta$

$\angle BOC=\pi-2\theta$이므로

$T(\theta)=\frac{1}{2}\times3\times3\times\sin(\pi-2\theta)=\frac{9}{2}\sin2\theta$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{T(\theta)}{S(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{9}{2}\sin2\theta}{\frac{9}{2}\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times2$$
$$=1\times2=2$$

다른 풀이

원 $x^2+y^2=9$의 반지름의 길이가 3이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times3^2\times\theta=\frac{9}{2}\theta$

이때 $B\left(3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),\ 3\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$,

$C\left(3\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right),\ -3\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)$, 즉 $B(3\sin\theta,\ 3\cos\theta)$

$C(3\sin\theta,\ -3\cos\theta)$이므로

$T(\theta)=\frac{1}{2}\times\{3\cos\theta-(-3\cos\theta)\}\times3\sin\theta=9\sin\theta\cos\theta$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{T(\theta)}{S(\theta)}=\lim_{\theta\to0+}\frac{9\sin\theta\cos\theta}{\frac{9}{2}\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times2\cos\theta\right)$$
$$=1\times2=2$$

## 0462 답 $2+\sqrt{2}$

삼각형 OHP에서 $\overline{OP}=1$이므로 $\overline{OH}=\cos\theta$

$\therefore\ \overline{HA}=\overline{OA}-\overline{OH}=1-\cos\theta$ …… ⓘ

삼각형 AQH가 직각이등변삼각형이므로

$\overline{QH}=\overline{HA}=1-\cos\theta$, $\overline{AQ}=\sqrt{2}\overline{HA}=\sqrt{2}(1-\cos\theta)$

$\therefore\ L(\theta)=\overline{QH}+\overline{HA}+\overline{AQ}$

$=(1-\cos\theta)+(1-\cos\theta)+\sqrt{2}(1-\cos\theta)$

$=(2+\sqrt{2})(1-\cos\theta)$ …… ⓘⓘ

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{2L(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2(2+\sqrt{2})(1-\cos\theta)}{\theta^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2(2+\sqrt{2})(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2(2+\sqrt{2})\sin^2\theta}{\theta^2(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\frac{2(2+\sqrt{2})}{1+\cos\theta}\right\}$$
$$=1^2\times(2+\sqrt{2})=2+\sqrt{2}$$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $\overline{HA}$의 길이를 $\theta$에 대한 식으로 나타내기 | 20 % |
| ⓘⓘ $L(\theta)$ 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘⓘ $\lim\limits_{\theta\to0+}\frac{2L(\theta)}{\theta^2}$의 값 구하기 | 50 % |

## 0463 답 ③

$\overline{OP}=\overline{OA}=1$이므로 $\angle OPA=\angle OAP=\theta$

이때 $\angle POC=2\theta$이므로

삼각형 POC에서 $\angle OCP=\pi-3\theta$

삼각형 POC에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{OC}}{\sin\theta}=\frac{\overline{OP}}{\sin(\pi-3\theta)}$

$\frac{\overline{OC}}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin3\theta}$ $\therefore\ \overline{OC}=\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$

$\therefore\ \overline{AC}=\overline{AO}+\overline{OC}=1+\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}$

또 $\angle APB=\frac{\pi}{2}$이므로 삼각형 PAB에서

$\overline{AP}=\overline{AB}\cos\theta=2\cos\theta$

$\therefore\ S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{AP}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}\right)\times2\cos\theta\sin\theta$

$=\left(1+\frac{\sin\theta}{\sin3\theta}\right)\sin\theta\cos\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\frac{\left(1+\frac{\sin\theta}{\sin 3\theta}\right)\sin\theta\cos\theta}{\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to 0+}\left\{\left(1+\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{3\theta}{\sin 3\theta}\times\frac{1}{3}\right)\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\cos\theta\right\}$$
$$=\left(1+1\times 1\times\frac{1}{3}\right)\times 1\times 1=\frac{4}{3}$$

## 0464 답 0

$f'(x)=e^x(\sin x-\cos x)+e^x(\cos x+\sin x)$
$=2e^x\sin x$
$\therefore f'(\pi)=0$

## 0465 답 ④

$f'(x)=\cos x-\sin x$
$f'(a)=0$에서 $\cos a-\sin a=0$ $\therefore \sin a=\cos a$
$\therefore a=\frac{\pi}{4}$ 또는 $a=\frac{5}{4}\pi$ ($\because 0\le a\le 2\pi$)
따라서 모든 $a$의 값의 합은 $\frac{\pi}{4}+\frac{5}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi$

## 0466 답 2

$f'(x)=a\sin x+ax\cos x-\frac{\pi}{2}\sin x+b$
$f(\pi)=\frac{\pi}{2}$에서
$-\frac{\pi}{2}+b\pi=\frac{\pi}{2}$ $\therefore b=1$
$f'(\pi)=\pi+1$에서
$-a\pi+1=\pi+1$ $\therefore a=-1$
$\therefore b-a=1-(-1)=2$

## 0467 답 −3

$\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi-h)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)+f(\pi)-f(\pi-h)}{h}$
$=\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi+2h)-f(\pi)}{2h}\times 2+\lim_{h\to 0}\frac{f(\pi-h)-f(\pi)}{-h}$
$=2f'(\pi)+f'(\pi)=3f'(\pi)$ …… ㉠
이때 $f'(x)=\cos x-x\sin x$이므로 구하는 극한값은 ㉠에서
$3f'(\pi)=3\times(-1)=-3$

## 0468 답 ②

$x\to\frac{\pi}{2}$일 때 (분모)→0이고 극한값이 존재하므로 (분자)→0에서
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\{f(x)-1\}=0$ $\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$
$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$
$f'(x)=a\cos x-b\sin x$
$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$에서 $a=1$
$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=3$에서 $-b=3$ $\therefore b=-3$
따라서 $f(x)=\sin x-3\cos x$이므로
$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=-\sqrt{2}$

## 0469 답 $-\frac{1}{2}$

$f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x\sin(x+h)-x\sin x}{2h}$
$=\frac{x}{2}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$
$=\frac{x}{2}(\sin x)'=\frac{x}{2}\cos x$
따라서 $f'(x)=\frac{1}{2}\cos x-\frac{x}{2}\sin x$이므로
$f'(\pi)=-\frac{1}{2}$

## 0470 답 ①

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 미분가능하면 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.
$\lim_{x\to 0+}(3+bx\cos x)=\lim_{x\to 0-}(a+5\sin x)=f(0)$
$\therefore a=3$
또 $f'(0)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}5\cos x & (x<0)\\ b\cos x-bx\sin x & (x>0)\end{cases}$에서
$\lim_{x\to 0+}(b\cos x-bx\sin x)=\lim_{x\to 0-}5\cos x$
$\therefore b=5$
$\therefore b-a=5-3=2$

## 0471 답 $e$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 0+}(b\sin x+\cos x)=\lim_{x\to 0-}ae^{x-1}=f(0)$
$1=\frac{a}{e}$ $\therefore a=e$
또 $f'(0)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}e^x & (x<0)\\ b\cos x-\sin x & (x>0)\end{cases}$에서
$\lim_{x\to 0+}(b\cos x-\sin x)=\lim_{x\to 0-}e^x$
$\therefore b=1$
$\therefore ab=e\times 1=e$

## 0472 답 10

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 미분가능하면 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.
$\lim_{x\to 1+}(-3\ln x)=\lim_{x\to 1-}(ax^3+bx^2+cx)=f(1)$
$\therefore a+b+c=0$ …… ㉠

또 $f'(0)$, $f'(1)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases} 4\cos x & (x<0) \\ 3ax^2+2bx+c & (0<x<1) \\ -\dfrac{3}{x} & (x>1) \end{cases}$$에서

$\lim\limits_{x\to 0+}(3ax^2+2bx+c)=\lim\limits_{x\to 0-}4\cos x$

$\therefore c=4$ ····· ㉡

$\lim\limits_{x\to 1+}\left(-\dfrac{3}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 1-}(3ax^2+2bx+c)$

$\therefore 3a+2b+c=-3$ ····· ㉢

㉡을 ㉠, ㉢에 대입하여 정리하면

$a+b=-4$, $3a+2b=-7$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-5$

$\therefore a-b+c=1-(-5)+4=10$

## AB 유형 점검 82~84쪽

### 0473 답 ②

$\theta$가 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$\therefore \sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=-\dfrac{4}{5}$

$\therefore \csc\theta+\cot\theta=\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

$=\dfrac{1+\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\dfrac{\frac{8}{5}}{-\frac{4}{5}}=-2$

### 0474 답 ①

$(\tan\theta+\cot\theta)^2-(\sin\theta+\csc\theta)^2-(\cos\theta+\sec\theta)^2$

$=(\tan^2\theta+2+\cot^2\theta)-(\sin^2\theta+2+\csc^2\theta)$

$-(\cos^2\theta+2+\sec^2\theta)$

$=(\tan^2\theta-\sec^2\theta)+(\cot^2\theta-\csc^2\theta)-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-2$

$=-1-1-1-2=-5$

### 0475 답 $-\dfrac{3}{2}$

$\dfrac{1}{1+\cos\theta}+\dfrac{1}{1-\cos\theta}=\dfrac{1-\cos\theta+1+\cos\theta}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$

$=\dfrac{2}{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2}{\sin^2\theta}$

$=2\csc^2\theta$

즉, $2\csc^2\theta=\dfrac{5}{2}$이므로 $\csc^2\theta=\dfrac{5}{4}$

이때 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\cot\theta<0$

$\therefore \cot\theta=-\sqrt{\csc^2\theta-1}=-\sqrt{\dfrac{5}{4}-1}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore \tan\theta-\cot\theta=\dfrac{1}{\cot\theta}-\cot\theta=-2-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$

### 0476 답 $-\dfrac{5}{8}$

$\sin\alpha-\sin\beta=\dfrac{1}{2}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\dfrac{1}{4}$ ····· ㉠

$\cos\alpha+\cos\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\dfrac{1}{2}$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면

$2+2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\dfrac{3}{4}$

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{5}{8}$

$\therefore \cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{5}{8}$

### 0477 답 ③

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{1}{3}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1}{3}$, $2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \sin 2\theta=\dfrac{2}{3}$

$\therefore \cos^2 2\theta=1-\sin^2 2\theta=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

### 0478 답 ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=-a$, $\tan\alpha\tan\beta=\dfrac{a}{2}$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-\dfrac{a}{1-\frac{a}{2}}$

이때 $\tan(\alpha+\beta)=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$이므로

$-\dfrac{a}{1-\frac{a}{2}}=1$, $-a=1-\dfrac{a}{2}$ $\therefore a=-2$

### 0479 답 $\dfrac{34}{15}$

두 직선 $x-y-2=0$, $ax-y+2=0$, 즉 $y=x-2$, $y=ax+2$가 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면

$\tan\alpha=1$, $\tan\beta=a$

$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|$

$=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\left|\dfrac{1-a}{1+a}\right|$

이때 $\tan\theta=\dfrac{1}{4}$이므로

$\left|\dfrac{1-a}{1+a}\right|=\dfrac{1}{4}$

$4-4a=1+a$ 또는 $4-4a=-1-a$

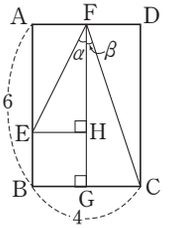
$\therefore a=\dfrac{3}{5}$ 또는 $a=\dfrac{5}{3}$

따라서 모든 $a$의 값의 합은

$\frac{3}{5}+\frac{5}{3}=\frac{34}{15}$

## 0480 답 1

점 F에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 G, 점 E에서 선분 FG에 내린 수선의 발을 H라 하자.




삼각형 FEH에서 $\angle EFH=\alpha$라 하면

$\overline{EH}=\frac{1}{2}\overline{BC}=2$, $\overline{FH}=\frac{2}{3}\overline{AB}=4$이므로

$\tan\alpha=\frac{\overline{EH}}{\overline{FH}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

삼각형 FGC에서 $\angle GFC=\beta$라 하면

$\overline{GC}=\frac{1}{2}\overline{BC}=2$, $\overline{FG}=6$이므로

$\tan\beta=\frac{\overline{GC}}{\overline{FG}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore \tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$

## 0481 답 −18

$y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+3\cos x+1$

$=2\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)+3\cos x+1$

$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)+3\cos x+1$

$=\sqrt{3}\sin x+4\cos x+1$

$=\sqrt{19}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\sin x+\frac{4}{\sqrt{19}}\cos x\right)+1$

$=\sqrt{19}\sin(x+\alpha)+1$ $\left(\text{단, } \sin\alpha=\frac{4}{\sqrt{19}},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\right)$

이때 $-1\le\sin(x+\alpha)\le1$이므로

$-\sqrt{19}+1\le\sqrt{19}\sin(x+\alpha)+1\le\sqrt{19}+1$

따라서 $M=\sqrt{19}+1$, $m=-\sqrt{19}+1$이므로

$Mm=-18$

## 0482 답 ②

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$

$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}$

$=\frac{0}{1+1}=0$

## 0483 답 ④

$\lim_{x\to0}\frac{\sec x-\cos x}{2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{2x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{2x^2\cos x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{2x^2\cos x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{2\cos x}\right\}$

$=1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

## 0484 답 ②

$x\to0$일 때, $x^2-2x\to0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{\sin f(x)}{f(\tan x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2-2x)}{\tan^2 x-2\tan x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2-2x)}{\tan x(\tan x-2)}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(x^2-2x)}{x^2-2x}\times\frac{x}{\tan x}\times\frac{x-2}{\tan x-2}\right\}$

$=1\times1\times\frac{-2}{-2}=1$

## 0485 답 $-\frac{7}{2}$

$\lim_{x\to0}\frac{2\cos^2 x+3\cos x-5}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(2\cos x+5)(\cos x-1)}{x^2}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(2\cos x+5)(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2(\cos x+1)}$

$=\lim_{x\to0}\left\{-\frac{\sin^2 x(2\cos x+5)}{x^2(\cos x+1)}\right\}$

$=-\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{2\cos x+5}{\cos x+1}\right\}$

$=-1^2\times\frac{7}{2}=-\frac{7}{2}$

## 0486 답 ④

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2}\left(\sin\frac{1}{x}+\tan\frac{3}{x}\right)=\lim_{t\to0+}\frac{1}{2t}(\sin t+\tan3t)$

$=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}+\lim_{t\to0+}\frac{\tan3t}{3t}\times3\right)$

$=\frac{1}{2}(1+1\times3)=2$

## 0487 답 −2

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}(\cos x-b)=0$

$1-b=0$ $\quad\therefore b=1$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{ax\sin x-x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{(ax\sin x-x^2)(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2 x}{(ax\sin x-x^2)(\cos x+1)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{-\sin^2 x}{x^2}\times\frac{x^2}{ax\sin x-x^2}\times\frac{1}{\cos x+1}\right)$$

$$=-\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{\frac{a\sin x}{x}-1}\times\frac{1}{\cos x+1}\right\}$$

$$=-1^2\times\frac{1}{a-1}\times\frac{1}{2}=-\frac{1}{2(a-1)}$$

따라서 $-\frac{1}{2(a-1)}=\frac{1}{4}$이므로 $a=-1$

$\therefore a-b=-1-1=-2$

## 0488 답 4

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{\sin 3x-5e^x+a}{2x}=b$ …… ㉠

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}(\sin 3x-5e^x+a)=0$

$-5+a=0$ $\therefore a=5$

이를 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x-5e^x+5}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin 3x}{2x}-\frac{5(e^x-1)}{2x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{3}{2}-\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{5}{2}$$

$$=1\times\frac{3}{2}-1\times\frac{5}{2}=-1$$

$\therefore a+b=5+(-1)=4$

## 0489 답 6

$f'(x)=a\cos x\cos x-a\sin x\sin x$

$=a(\cos^2 x-\sin^2 x)$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{6},\sqrt{3}+2\right)$를 지나므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}+2$에서

$\frac{\sqrt{3}}{4}a+b=\sqrt{3}+2$

$\therefore b=\sqrt{3}+2-\frac{\sqrt{3}}{4}a$ …… ㉠

또 점 $\left(\frac{\pi}{6},\sqrt{3}+2\right)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2$에서

$a\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\right)=2$ $\therefore a=4$

이를 ㉠에 대입하면 $b=2$

$\therefore a+b=6$

## 0490 답 ②

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-2h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-2h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-2h}\times(-2)$$

$$=-2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$ …… ㉠

이때 $f'(x)=2x\sin x+x^2\cos x$이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$-2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-2\pi$

## 0491 답 $\frac{1}{2}$

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\alpha>0$

$\therefore \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{3}$ …… ❶

$$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{14}}{6}$$ …… ❷

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{6}$이므로

$a+b=\frac{1}{2}$ …… ❸

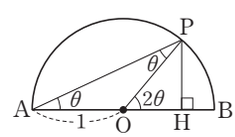
| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $\sin\alpha$의 값 구하기 | 30 % |
| ❷ $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$의 값 구하기 | 50 % |
| ❸ $a+b$의 값 구하기 | 20 % |

## 0492 답 2

$\overline{OP}$를 그으면 $\overline{OP}=\overline{OA}=1$이므로

$\angle OPA=\angle OAP=\theta$

따라서 $\angle POH=2\theta$이므로




삼각형 POH에서

$\overline{OH}=\overline{OP}\cos 2\theta=\cos 2\theta$

$\therefore \overline{BH}=\overline{OB}-\overline{OH}=1-\cos 2\theta$ …… ❶

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{BH}}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos 2\theta}{\theta^2}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{(1-\cos 2\theta)(1+\cos 2\theta)}{\theta^2(1+\cos 2\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin^2 2\theta}{\theta^2(1+\cos 2\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin 2\theta}{2\theta}\right)^2\times\frac{4}{1+\cos 2\theta}\right\}$$

$$=1^2\times\frac{4}{2}=2$$ …… ❷

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $\overline{BH}$의 길이를 $\theta$에 대한 식으로 나타내기 | 40 % |
| ❷ $\lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{BH}}{\theta^2}$의 값 구하기 | 60 % |

## 0493 답 $2\pi-2$

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 미분가능하면 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to0+}(2x+b)\cos x=\lim_{x\to0-}a\sin x=f(0)$

$\therefore b=0$ …… ❶

또 $f'(0)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}a\cos x & (x<0)\\ 2\cos x-2x\sin x & (x>0)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to0+}(2\cos x-2x\sin x)=\lim_{x\to0-}a\cos x$

$\therefore a=2$ …… ❷

따라서 $f(x)=\begin{cases}2\sin x & (x<0)\\ 2x\cos x & (x\geq0)\end{cases}$이므로

$f\left(-\frac{\pi}{2}\right)-f(\pi)=-2-(-2\pi)=2\pi-2$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $b$의 값 구하기 | 40 % |
| ❷ $a$의 값 구하기 | 40 % |
| ❸ $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)-f(\pi)$의 값 구하기 | 20 % |

## 실력 향상 85쪽

## 0494 답 ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=10$, $\tan\alpha\tan\beta=-4$

$\therefore \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{10}{1-(-4)}=2$

$\sec^2(\alpha+\beta)=1+\tan^2(\alpha+\beta)=1+2^2=5$이므로

$\cos^2(\alpha+\beta)=\frac{1}{\sec^2(\alpha+\beta)}=\frac{1}{5}$

$\therefore \cos^2(\alpha+\beta)-\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\sin^2(\alpha+\beta)$

$=\cos^2(\alpha+\beta)\left\{1-\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}+\frac{1}{2}\times\frac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\cos^2(\alpha+\beta)}\right\}$

$=\cos^2(\alpha+\beta)\left\{1-\tan(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\tan^2(\alpha+\beta)\right\}$

$=\frac{1}{5}\left(1-2+\frac{1}{2}\times2^2\right)=\frac{1}{5}$

## 0495 답 18

$\overline{BD}=\overline{CD}$이므로 삼각형 BCD는 이등변삼각형이다.

즉, $\angle DCB=\angle CBD=\alpha$이므로 삼각형 ABC에서

$\frac{2}{3}\pi+\alpha+(\alpha+\beta)=\pi$

$\therefore \beta=\pi-\left(2\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\pi}{3}-2\alpha$

$\cos^2\alpha=\frac{7+\sqrt{21}}{14}$이므로

$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\frac{7+\sqrt{21}}{14}-1=\frac{\sqrt{21}}{7}$

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$에서 $0<2\alpha<\pi$이므로 $\sin2\alpha>0$

$\therefore \sin2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2}=\frac{2\sqrt{7}}{7}$

$\therefore \tan2\alpha=\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}=\frac{\frac{2\sqrt{7}}{7}}{\frac{\sqrt{21}}{7}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\therefore 54\sqrt{3}\times\tan\beta=54\sqrt{3}\times\tan\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)$

$=54\sqrt{3}\times\frac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan2\alpha}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan2\alpha}$

$=54\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1+\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

$=54\sqrt{3}\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{3}=18$

## 0496 답 8

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x^3}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)(1+\cos x^3)}{(1-\cos x^3)(1+\cos x^3)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)(1+\cos x^3)}{\sin^2 x^3}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{x^3}{\sin x^3}\right)^2\times(1+\cos x^3)\times\frac{f(x)}{x^6}\right\}$

$=1^2\times2\times\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^6}=2\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^6}$

즉, $2\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^6}=4$이므로 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^6}=2$

따라서 $p=6$, $q=2$이므로 $p+q=8$

## 0497 답 60

$\overline{AB}=2$이므로 직각삼각형 ABG에서

$\overline{BG}=\overline{AB}\tan\theta=2\tan\theta$

$\therefore \triangle ABG=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BG}$

$=\frac{1}{2}\times2\times2\tan\theta=2\tan\theta$

부채꼴 ADF의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{AD}^2\times\theta=\frac{1}{2}\times1^2\times\theta=\frac{\theta}{2}$

$\therefore f(\theta)=\triangle ABG-(\text{부채꼴 ADF의 넓이})=2\tan\theta-\frac{\theta}{2}$

호 DE의 삼등분점 중 점 D에 가까운 점이 F이므로

$\angle EAF=2\angle FAD=2\theta$

$\therefore g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AF}^2\times2\theta=\frac{1}{2}\times1^2\times2\theta=\theta$

$\therefore 40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}=40\times\lim_{\theta\to0+}\frac{2\tan\theta-\frac{\theta}{2}}{\theta}$

$=40\times\lim_{\theta\to0+}\left(2\times\frac{\tan\theta}{\theta}-\frac{1}{2}\right)$

$=40\left(2\times1-\frac{1}{2}\right)=60$

# 05 / 여러 가지 미분법

## A 개념 확인 86~89쪽

**0498** 답 $y'=-\frac{1}{(x-1)^2}$

$y'=-\frac{(x-1)'}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$

**0499** 답 $y'=-\frac{e^x}{(e^x+2)^2}$

$y'=-\frac{(e^x+2)'}{(e^x+2)^2}=-\frac{e^x}{(e^x+2)^2}$

**0500** 답 $y'=\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$

$y'=-\frac{(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}=-\frac{-\sin x}{(1+\cos x)^2}=\frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$

**0501** 답 $y'=\frac{4}{(x+1)^2}$

$y'=\frac{(x-3)'(x+1)-(x-3)(x+1)'}{(x+1)^2}$

$=\frac{x+1-(x-3)}{(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2}$

**0502** 답 $y'=\frac{(x^2-2x+4)e^x}{(x^2+4)^2}$

$y'=\frac{(e^x)'(x^2+4)-e^x(x^2+4)'}{(x^2+4)^2}$

$=\frac{e^x(x^2+4)-e^x\times 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{(x^2-2x+4)e^x}{(x^2+4)^2}$

**0503** 답 $y'=\frac{2\ln x-2}{(\ln x)^2}$

$y'=\frac{(2x)'\ln x-2x(\ln x)'}{(\ln x)^2}$

$=\frac{2\ln x-2x\times\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{2\ln x-2}{(\ln x)^2}$

**0504** 답 $y'=-\frac{12}{x^5}$

$y=\frac{3}{x^4}=3x^{-4}$이므로

$y'=-12x^{-5}=-\frac{12}{x^5}$

**0505** 답 $y'=2x-\frac{9}{x^4}$

$y=\frac{x^5+3}{x^3}=x^2+3x^{-3}$이므로

$y'=2x-9x^{-4}=2x-\frac{9}{x^4}$

**0506** 답 $y'=3\sec^2 x+\csc x\cot x$

**0507** 답 $y'=\sec x\tan x-2\csc^2 x$

**0508** 답 $y'=x(2\cot x-x\csc^2 x)$

$y'=(x^2)'\cot x+x^2(\cot x)'$

$=2x\cot x-x^2\csc^2 x=x(2\cot x-x\csc^2 x)$

**0509** 답 $y'=\sec x(\tan^2 x+\sec^2 x)$

$y'=(\sec x)'\tan x+\sec x(\tan x)'$

$=\sec x\tan^2 x+\sec^3 x=\sec x(\tan^2 x+\sec^2 x)$

**0510** 답 $y'=9(3x-1)^2$

$y'=3(3x-1)^2(3x-1)'=9(3x-1)^2$

**0511** 답 $y'=40x(4x^2+5)^4$

$y'=5(4x^2+5)^4(4x^2+5)'=40x(4x^2+5)^4$

**0512** 답 $y'=2xe^{x^2+2}$

$y'=e^{x^2+2}(x^2+2)'=2xe^{x^2+2}$

**0513** 답 $y'=3x^2 7^{x^3}\ln 7$

$y'=7^{x^3}\ln 7\times(x^3)'=3x^2 7^{x^3}\ln 7$

**0514** 답 $y'=\frac{2x}{x^2-3}$

$y'=\frac{(3-x^2)'}{3-x^2}=\frac{2x}{x^2-3}$

**0515** 답 $y'=\frac{2}{(2x+5)\ln 3}$

$y'=\frac{(2x+5)'}{(2x+5)\ln 3}=\frac{2}{(2x+5)\ln 3}$

**0516** 답 $y'=(4x^3-2)\cos(x^4-2x)$

$y'=\cos(x^4-2x)\times(x^4-2x)'=(4x^3-2)\cos(x^4-2x)$

**0517** 답 $y'=-3\cos^2 x\sin x$

$y'=3\cos^2 x\times(\cos x)'=-3\cos^2 x\sin x$

**0518** 답 $y'=\frac{6x}{3x^2-2}$

$y'=\frac{(3x^2-2)'}{3x^2-2}=\frac{6x}{3x^2-2}$

**0519** 답 $y'=\frac{3x^2}{(x^3+5)\ln 5}$

$y'=\frac{(x^3+5)'}{(x^3+5)\ln 5}=\frac{3x^2}{(x^3+5)\ln 5}$

**0520** 답 $y'=\frac{5}{2}x\sqrt{x}$

$y=x^2\sqrt{x}=x^{\frac{5}{2}}$이므로

$y'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}$

**0521** 답 $y'=2ex^{2e-1}$

**0522** 답 $\frac{dy}{dx}=-6(t+1)^2(3t+1)$

$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{(t+1)^2}$, $\frac{dy}{dt}=6(3t+1)$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{6(3t+1)}{-\frac{1}{(t+1)^2}}=-6(t+1)^2(3t+1)$

**0523** 답 $\frac{dy}{dx}=4(t+1)\sqrt{t-2}$

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t-2}}$, $\frac{dy}{dt}=2t+2$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t+2}{\frac{1}{2\sqrt{t-2}}}=4(t+1)\sqrt{t-2}$

**0524** 답 $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{t+3}}{2}$

$\frac{dx}{dt}=4e^t$, $\frac{dy}{dt}=2e^{2t+3}$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2e^{2t+3}}{4e^t}=\frac{e^{t+3}}{2}$

**0525** 답 $\frac{dy}{dx}=3\cot t$

$\frac{dx}{dt}=-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-3\cos t$이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3\cos t}{-\sin t}=3\cot t$

**0526** 답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y+1}$ (단, $y\neq-1$)

주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$2x+2(y+1)\frac{dy}{dx}=0$

$2(y+1)\frac{dy}{dx}=-2x$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y+1}$ (단, $y\neq-1$)

**0527** 답 $\frac{dy}{dx}=\frac{6x^2-y}{x-3}$

주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$6x^2+3\frac{dy}{dx}-y-x\frac{dy}{dx}=0$

$(x-3)\frac{dy}{dx}=6x^2-y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{6x^2-y}{x-3}$

**0528** 답 $\frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x+1}{4y}$ (단, $y\neq0$)

주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$\cos x+1+4y\frac{dy}{dx}=0$

$4y\frac{dy}{dx}=-\cos x-1$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\cos x+1}{4y}$ (단, $y\neq0$)

**0529** 답 $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+1}{e^y}$

주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$3x^2+1-e^y\frac{dy}{dx}=0$

$e^y\frac{dy}{dx}=3x^2+1$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+1}{e^y}$

**0530** 답 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{3y^2+2}$

주어진 식의 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=3y^2+2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2+2}$

**0531** 답 $\frac{dy}{dx}=\frac{(y+3)^2}{3}$

주어진 식의 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\frac{y+3-y}{(y+3)^2}=\frac{3}{(y+3)^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{(y+3)^2}{3}$

**0532** 답 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2e^{2y}-2}$

주어진 식의 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=2e^{2y}-2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{2e^{2y}-2}$

**0533** 답 $\frac{dy}{dx}=-\csc y$

주어진 식의 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=-\sin y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{-\sin y}=-\csc y$

**0534** 답 $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{y^2+4}}{y}$

주어진 식의 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{\sqrt{y^2+4}}{y}$

**0535** 답 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{5y^4}$

$y=\sqrt[5]{x-1}$에서 $x-1=y^5$ $\therefore x=y^5+1$

양변을 $y$에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=5y^4$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{5y^4}$

**0536** 답 1

$f^{-1}(4)=a$라 하면 $f(a)=4$이므로

$a^3+3=4$, $a^3-1=0$

$(a-1)(a^2+a+1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a^2+a+1>0$)

$\therefore f^{-1}(4)=1$

**0537** 답 $\frac{1}{3}$

$f'(x)=3x^2$이고 $f^{-1}(4)=1$이므로

$(f^{-1})'(4)=\frac{1}{f'(f^{-1}(4))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}$

## 유형 완성 90~97쪽

**0538** 답 ②

$f'(x)=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x\times\cos x}{(1+\sin x)^2}$

$=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$

$=\frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}=-\frac{1}{1+\sin x}$

$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}$

**0539** 답 $-\frac{4}{25}$

$f'(x)=-\frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}$

$\therefore f'(1)=-\frac{2+2}{(1+2+2)^2}=-\frac{4}{25}$

**0540** 답 ①

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$

$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$ …… ㉠

이때

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times e^{x-1}-(\ln x+2)e^{x-1}}{(e^{x-1})^2}$

$=\frac{1-x\ln x-2x}{xe^{x-1}}$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$2f'(2)=2\times\frac{1-2\ln 2-4}{2e}=-\frac{3+2\ln 2}{e}$

**0541** 답 ④

$f'(x)=\frac{x^2+x+4-x(2x+1)}{(x^2+x+4)^2}$

$=-\frac{x^2-4}{(x^2+x+4)^2}=-\frac{(x+2)(x-2)}{(x^2+x+4)^2}$

$f'(x)>0$에서

$(x+2)(x-2)<0$

$\therefore -2<x<2$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=2$이므로

$\beta-\alpha=4$

**0542** 답 2

$f'(x)=\frac{(2ax+b)(x-2)-(ax^2+bx)}{(x-2)^2}=\frac{ax^2-4ax-2b}{(x-2)^2}$

$f'(0)=-1$에서

$\frac{-2b}{4}=-1$ $\therefore b=2$ …… ❶

$f'(x)=\frac{ax^2-4ax-4}{(x-2)^2}$이므로 $f'(1)=2$에서

$-3a-4=2$ $\therefore a=-2$ …… ❷

따라서 $f'(x)=\frac{-2x^2+8x-4}{(x-2)^2}$이므로

$f'(3)=-18+24-4=2$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $b$의 값 구하기 | 30 % |
| ❷ $a$의 값 구하기 | 30 % |
| ❸ $f'(3)$의 값 구하기 | 40 % |

## 0543 답 ④

$$g'(x)=\frac{f'(x)\times 2x-\{f(x)-3\}\times 2}{4x^2}=\frac{xf'(x)-f(x)+3}{2x^2}$$

$$\therefore\ g'(1)=\frac{f'(1)-f(1)+3}{2}$$

$$=\frac{3+3}{2}=3$$

## 0544 답 −110

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$$

$$=f'(1)+f'(1)=2f'(1)\qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots+\frac{1}{x^{10}}$$

$$=x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+\cdots+x^{-10}$$

이므로

$$f'(x)=-x^{-2}-2x^{-3}-3x^{-4}-\cdots-10x^{-11}$$

따라서 구하는 극한값은 ㉠에서

$$2f'(1)=2\times\{-(1+2+3+\cdots+10)\}$$

$$=2\times\left(-\frac{10\times 11}{2}\right)=-110$$

## 0545 답 −6

$$f(x)=\frac{2x^4+3x+2}{x^2}=2x^2+3x^{-1}+2x^{-2}$$이므로

$$f'(x)=4x-3x^{-2}-4x^{-3}=4x-\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^3}$$

$$\therefore\ f'(-1)+f'(1)=(-4-3+4)+(4-3-4)=-6$$

## 0546 답 ⑤

$f(0)=0$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)}{2h}\times 2$$

$$=2f'(0)\qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $f'(x)=2e^x\tan x+(2e^x-1)\sec^2 x$이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$$2f'(0)=2\times 1=2$$

## 0547 답 ②

$$f'(x)=-\csc x\cot x\times\cot x+(2+\csc x)(-\csc^2 x)$$

$$=-\csc x(\cot^2 x+2\csc x+\csc^2 x)$$

$$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-2\times(3+4+4)=-22$$

## 0548 답 $\frac{5}{4}\pi$

$$f'(x)=\frac{\sec^2 x\times\sec x-(1+\tan x)\times\sec x\tan x}{\sec^2 x}$$

$$=\frac{\sec^2 x-\tan x-\tan^2 x}{\sec x}$$

$$=\frac{1-\tan x}{\sec x}\quad ◀\ 1+\tan^2 x=\sec^2 x$$

$f'(a)=0$에서

$1-\tan a=0$, $\tan a=1$

$$\therefore\ a=\frac{5}{4}\pi\ \left(\because\ \frac{\pi}{2}<a<\frac{3}{2}\pi\right)$$

## 0549 답 −12

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=4$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to 1}\{f(x)-2\}=0$ $\quad\therefore\ f(1)=2$

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=f'(1)=4$$

또 $\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{x-2}=-3$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to 2}\{g(x)-1\}=0$ $\quad\therefore\ g(2)=1$

$$\therefore\ \lim_{x\to 2}\frac{g(x)-1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$=g'(2)=-3$$

이때 $y=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서 $y'=g'(f(x))f'(x)$이므로 $x=1$에서의 미분계수는

$$g'(f(1))f'(1)=g'(2)f'(1)$$

$$=-3\times 4=-12$$

## 0550 답 5

$f'(g(x))g'(x)=-6x+4$이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f'(g(-1))g'(-1)=10$

$f'(1)g'(-1)=10$, $2g'(-1)=10$

$\therefore\ g'(-1)=5$

## 0551 답 2

$\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-1}{x+3}=-2$에서 $x\to -3$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to -3}\{f(x)-1\}=0$ $\quad\therefore\ f(-3)=1$

$$\therefore\ \lim_{x\to -3}\frac{f(x)-1}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{f(x)-f(-3)}{x+3}$$

$$=f'(-3)=-2$$

$h(x)=f(g(x))$라 하면

$h(1)=f(g(1))=f(-3)=1$

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(g(x))-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}$$
$$=h'(1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$, $g'(x)=\frac{2}{x}-3$이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$$h'(1)=f'(g(1))g'(1)$$
$$=f'(-3)g'(1)$$
$$=-2\times(-1)=2$$

## 0552 답 $-6$

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

$h'(0)=12$에서

$g'(f(0))f'(0)=12$, $g'(1)f'(0)=12$ $\cdots\cdots ㉠$

이때

$$f'(x)=\frac{-\sin x\times(x+1)^2-\cos x\times 2(x+1)}{(x+1)^4}$$
$$=-\frac{(x+1)\sin x+2\cos x}{(x+1)^3}$$

이므로

$f'(0)=-2$

이를 ㉠에 대입하면

$g'(1)\times(-2)=12$

$\therefore g'(1)=-6$

## 0553 답 ②

$f(x)+f\left(\frac{1}{2}\sin x\right)=\sin x$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)+f'\left(\frac{1}{2}\sin x\right)\times\frac{1}{2}\cos x=\cos x$ $\cdots\cdots ㉠$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)+f'(0)\times\frac{1}{2}=1$

$\therefore f'(0)=\frac{2}{3}$ $\cdots\cdots ㉡$

㉠의 양변에 $x=\pi$를 대입하면

$f'(\pi)+f'(0)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

$f'(\pi)+\frac{2}{3}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$ ($\because$ ㉡)

$\therefore f'(\pi)=-\frac{2}{3}$

## 0554 답 ③

$f(0)=1$이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(0) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$f'(x)=5(x^3+x+1)^4(x^3+x+1)'$

$=5(x^3+x+1)^4(3x^2+1)$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$f'(0)=5\times 1\times 1=5$

## 0555 답 ④

$$f'(x)=3\left(\frac{4x+a}{x+1}\right)^2\left(\frac{4x+a}{x+1}\right)'$$
$$=3\left(\frac{4x+a}{x+1}\right)^2\times\frac{4(x+1)-(4x+a)}{(x+1)^2}$$
$$=\frac{3(4x+a)^2(4-a)}{(x+1)^4}$$

$f'(0)=0$에서

$3a^2(4-a)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

## 0556 답 $-2$

$g(x)=f(2x-3)$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$g'(x)=2f'(2x-3)$

양변에 $x=2$를 대입하면

$g'(2)=2f'(1)$ $\cdots\cdots ㉠$

이때

$$f'(x)=2\times\frac{x+1}{x^2+1}\times\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)'$$
$$=2\times\frac{x+1}{x^2+1}\times\frac{x^2+1-(x+1)\times 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=-\frac{2(x+1)(x^2+2x-1)}{(x^2+1)^3}$$

이므로 구하는 값은 ㉠에서

$g'(2)=2f'(1)=2\times(-1)=-2$

## 0557 답 $-1$

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로 양변에 $x=2\pi$를 대입하면

$h'(2\pi)=f'(g(2\pi))g'(2\pi)=f'(0)g'(2\pi)$ $\cdots\cdots ㉠$

이때 $f'(x)=2e^x$, $g'(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$이므로 구하는 값은 ㉠에서

$h'(2\pi)=f'(0)g'(2\pi)=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$

**다른 풀이**

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$h(x)=2e^{\sin\frac{x}{2}}$

$h'(x)=2e^{\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}\right)'=e^{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}$

$\therefore h'(2\pi)=1\times(-1)=-1$

## 0558 답 ①

$$f'(x)=\sec\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)\times\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)'$$
$$=\pi\sec\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\pi x+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\therefore f'(1)=\pi\sec\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\pi\left(-\sec\frac{\pi}{3}\right)\tan\frac{\pi}{3}$$
$$=\pi\times(-2)\times\sqrt{3}=-2\sqrt{3}\pi$$

◀ $\sec(\pi+a)=\frac{1}{\cos(\pi+a)}=-\frac{1}{\cos a}=-\sec a$

## 0559 답 ①

$f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$

$=\dfrac{1}{2}\{\ln(1-\sin x)-\ln(1+\sin x)\}$

$\therefore f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-\cos x}{1-\sin x}-\dfrac{\cos x}{1+\sin x}\right)$

$=\dfrac{-\cos x(1+\sin x)-\cos x(1-\sin x)}{2(1-\sin^2 x)}$

$=\dfrac{-2\cos x}{2\cos^2 x}$

$=-\sec x$

따라서 $x=\dfrac{\pi}{4}$에서의 미분계수는

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$

## 0560 답 $3e^6$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0+}e^{ax+b}=\lim\limits_{x\to 0-}(x^2+3x+1)=f(0)$에서

$e^b=1 \quad \therefore b=0$ …… ❶

또 $f'(0)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}2x+3 & (x<0)\\ ae^{ax} & (x>0)\end{cases}$에서

$\lim\limits_{x\to 0+}ae^{ax}=\lim\limits_{x\to 0-}(2x+3)$

$\therefore a=3$ …… ❷

따라서 $f'(x)=\begin{cases}2x+3 & (x<0)\\ 3e^{3x} & (x>0)\end{cases}$이므로

$f'(2)=3e^6$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $b$의 값 구하기 | 40 % |
| ❷ $a$의 값 구하기 | 40 % |
| ❸ $f'(2)$의 값 구하기 | 20 % |

## 0561 답 ③

$f(x)=\log_2(2^x+2^{2x}+2^{3x}+\cdots+2^{9x})$이라 하면

$f(0)=\log_2 9$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\log_2\dfrac{2^x+2^{2x}+2^{3x}+\cdots+2^{9x}}{9}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\{\log_2(2^x+2^{2x}+2^{3x}+\cdots+2^{9x})-\log_2 9\}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$ …… ㉠

이때

$f'(x)=\dfrac{(2^x+2^{2x}+2^{3x}+\cdots+2^{9x})'}{(2^x+2^{2x}+2^{3x}+\cdots+2^{9x})\ln 2}$

$=\dfrac{2^x\ln 2+2^{2x}\ln 2\times 2+2^{3x}\ln 2\times 3+\cdots+2^{9x}\ln 2\times 9}{(2^x+2^{2x}+2^{3x}+\cdots+2^{9x})\ln 2}$

$=\dfrac{2^x+2^{2x}\times 2+2^{3x}\times 3+\cdots+2^{9x}\times 9}{2^x+2^{2x}+2^{3x}+\cdots+2^{9x}}$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$f'(0)=\dfrac{1+2+3+\cdots+9}{9}=\dfrac{1}{9}\times\dfrac{9\times 10}{2}=5$

## 0562 답 $2x-1$

$(f\circ g)(0)=1$에서 $f(g(0))=1$이고, $g(0)=1$이므로

$f(1)=1$ …… ㉠

또 $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$(f\circ g)'(0)=f'(g(0))g'(0)=f'(1)g'(0)$

이때 $g'(x)=2^{\tan x}\ln 2\times\sec^2 x$이므로

$g'(0)=\ln 2$

$(f\circ g)'(0)=\ln 4$에서 $f'(1)\times\ln 2=\ln 4$

$\therefore f'(1)=\dfrac{\ln 4}{\ln 2}=2$ …… ㉡

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$($a$, $b$는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=a+b \quad \therefore a+b=1\ (\because$ ㉠) …… ㉣

㉢의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=a \quad \therefore a=2\ (\because$ ㉡)

이를 ㉣에 대입하여 풀면 $b=-1$

따라서 구하는 나머지는 $2x-1$이다.

## 0563 답 ⑤

$f'(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

$\therefore f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$

## 0564 답 $-\dfrac{3}{4}$

$f'(x)=\dfrac{3\times 4}{(4x+2)\ln 5}=\dfrac{6}{(2x+1)\ln 5}$

$f'(a)=-\dfrac{12}{\ln 5}$에서 $\dfrac{6}{(2a+1)\ln 5}=-\dfrac{12}{\ln 5}$

$4a+2=-1 \quad \therefore a=-\dfrac{3}{4}$

## 0565 답 ②

$f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$이므로

$f'(n)=\dfrac{2n+1}{n^2+n}$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{f'(n)}{2n+1}$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=1$

## 0566 답 ④

$x>0$, $f(x)>0$이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^{\sin x}$

$=\sin x\ln x$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}$

$\therefore f'(x)=f(x)\times\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$

$=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\dfrac{\sin x}{x}\right)$

$\therefore f'(\pi)=1\times(-\ln\pi)=-\ln\pi$

## 0567 답 ②

주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=\ln\left|\dfrac{(x+1)^3}{x^2(x-3)}\right|$

$=3\ln|x+1|-2\ln|x|-\ln|x-3|$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x-3}$

$\therefore f'(x)=f(x)\times\left(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

$=\dfrac{(x+1)^3}{x^2(x-3)}\times\left(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x-3}\right)$

$\therefore f'(2)=-\dfrac{27}{4}\times(1-1+1)=-\dfrac{27}{4}$

## 0568 답 6

$x>0$, $f(x)>0$이므로 $f(x)=x^{2x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln x^{2x}$

$=2x\ln x$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=2\ln x+2x\times\dfrac{1}{x}=2(\ln x+1)$

$\therefore f'(x)=f(x)\times2(\ln x+1)=2x^{2x}(\ln x+1)$

$\therefore f'(1)=2\times1=2$ …… ❶

또 $g'(x)=2\ln x+2x\times\dfrac{1}{x}=2\ln x+2$이므로

$g'(e)=2+2=4$ …… ❷

$\therefore f'(1)+g'(e)=2+4=6$ …… ❸

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ $f'(1)$의 값 구하기 | 50 % |
| ❷ $g'(e)$의 값 구하기 | 40 % |
| ❸ $f'(1)+g'(e)$의 값 구하기 | 10 % |

## 0569 답 ④

$f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}=(x-1)(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$f'(x)=(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}+(x-1)\left\{-\dfrac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\times2x\right\}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{x(x-1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$\therefore f'(1)=\dfrac{2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

## 0570 답 $\dfrac{128}{3}$

$f(x)=(x-\sqrt{x^2+2})^4=\{x-(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\}^4$이므로

$f'(x)=4\{x-(x^2+2)^{\frac{1}{2}}\}^3\left\{1-\dfrac{1}{2}(x^2+2)^{-\frac{1}{2}}\times2x\right\}$

$=4(x-\sqrt{x^2+2})^3\left(1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right)$

$a=f'(2)=4(2-\sqrt{6})^3\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$

$b=f'(-2)=4(-2-\sqrt{6})^3\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$

$\therefore ab=4(2-\sqrt{6})^3\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)\times4(-2-\sqrt{6})^3\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$

$=16\{(2-\sqrt{6})(-2-\sqrt{6})\}^3\left(1-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)$

$=16\times2^3\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{128}{3}$

## 0571 답 3

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\sin x+k}}=(2\sin x+k)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$f'(x)=-\dfrac{1}{2}(2\sin x+k)^{-\frac{3}{2}}\times2\cos x$

$=-\dfrac{\cos x}{(2\sin x+k)\sqrt{2\sin x+k}}$

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{16}$에서

$-\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(1+k)\sqrt{1+k}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{16}$

$(1+k)\sqrt{1+k}=8$, $(1+k)^3=64$

$1+k=4$ $\therefore k=3$

## 0572 답 $\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-4t(1+t^2)-(2-2t^2)\times2t}{(1+t^2)^2}=-\dfrac{8t}{(1+t^2)^2}$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{4(1+t^2)-4t\times2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{-4t^2+4}{(1+t^2)^2}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{\frac{-4t^2+4}{(1+t^2)^2}}{-\frac{8t}{(1+t^2)^2}}=\dfrac{t^2-1}{2t}$ (단, $t\neq0$)

따라서 $t=2$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은 $\dfrac{4-1}{4}=\dfrac{3}{4}$

## 0573 답 ③

$\dfrac{dx}{dt}=2te^t+(t^2+1)e^t=(t^2+2t+1)e^t=(t+1)^2e^t$

$\dfrac{dy}{dt}=2e^{2t+1}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{2e^{2t+1}}{(t+1)^2e^t}=\dfrac{2e^{t+1}}{(t+1)^2}$ (단, $t\neq-1$)

따라서 $t=0$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 $2e$이다.

## 0574 답 $\frac{2}{3}$

$\frac{dx}{dt}=t^2+t+1$, $\frac{dy}{dt}=a\cos(t-1)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\cos(t-1)}{t^2+t+1}$

$t=1$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값이 $\frac{2}{9}$이므로

$\frac{a}{3}=\frac{2}{9}$ $\therefore a=\frac{2}{3}$

## 0575 답 $\frac{2}{3}$

$\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4-h)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)+f(4)-f(4-h)}{2h}$

$=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}+\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(4-h)-f(4)}{-h}$

$=\frac{1}{2}f'(4)+\frac{1}{2}f'(4)=f'(4)$ …… ㉠ …… ❶

$\frac{dx}{dt}=3$, $\frac{dy}{dt}=2t$이므로

$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{3}$ …… ❷

$x=3t+1=4$에서 $t=1$이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$f'(4)=\frac{2}{3}$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 극한값을 미분계수로 나타내기 | 30 % |
| ❷ $f'(x)$ 구하기 | 40 % |
| ❸ 극한값 구하기 | 30 % |

## 0576 답 ⑤

$\frac{dx}{dt}=\cos t+\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-3\sin t+\cos t$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3\sin t+\cos t}{\cos t+\sin t}$ (단, $\cos t+\sin t\neq0$)

접선의 기울기가 3일 때 $t$의 값을 $\alpha\,(0<\alpha<\pi)$라 하면

$\frac{-3\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=3$

$-3\sin\alpha+\cos\alpha=3\cos\alpha+3\sin\alpha$

$\therefore \cos\alpha=-3\sin\alpha$ …… ㉠

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$이므로 ㉠을 대입하면

$\sin^2\alpha+9\sin^2\alpha=1$, $\sin^2\alpha=\frac{1}{10}$

$0<\alpha<\pi$에서 $\sin\alpha>0$이므로

$\sin\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}$

이를 ㉠에 대입하면

$\cos\alpha=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$t=a$인 접점의 좌표가 $(a, b)$이므로

$a=\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10}-\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)=\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$b=3\cos\alpha+\sin\alpha=-\frac{9\sqrt{10}}{10}+\frac{\sqrt{10}}{10}=-\frac{4\sqrt{10}}{5}$

$\therefore a+b=-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

## 0577 답 $\frac{11}{3}$

주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$3x^2-y^2-2xy\frac{dy}{dx}+\frac{dy}{dx}=0$

$(2xy-1)\frac{dy}{dx}=3x^2-y^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y^2}{2xy-1}$ (단, $2xy-1\neq0$)

따라서 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{12-1}{4-1}=\frac{11}{3}$

## 0578 답 ①

주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$\frac{\pi}{2}=\frac{dy}{dx}+y\cos xy+x\cos xy\frac{dy}{dx}$

$(1+x\cos xy)\frac{dy}{dx}=\frac{\pi}{2}-y\cos xy$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\pi}{2}-y\cos xy}{1+x\cos xy}$ (단, $1+x\cos xy\neq0$)

따라서 점 $(2, \pi)$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\frac{\frac{\pi}{2}-\pi}{1+2}=-\frac{\pi}{6}$

## 0579 답 10

주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$6x+10y\frac{dy}{dx}+ay+ax\frac{dy}{dx}-2=0$

$(ax+10y)\frac{dy}{dx}=-6x-ay+2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-6x-ay+2}{ax+10y}$ (단, $ax+10y\neq0$) …… ❶

점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로

$\frac{-a-4}{a+10}=-\frac{1}{2}$

$2a+8=a+10$ $\therefore a=2$ …… ❷

또 점 $(1, 1)$이 곡선 $3x^2+5y^2+2xy-2x+b=0$ 위의 점이므로

$8+b=0$ $\therefore b=-8$ …… ❸

$\therefore a-b=2-(-8)=10$ …… ❹

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $\frac{dy}{dx}$ 구하기 | 30 % |
| ❷ $a$의 값 구하기 | 30 % |
| ❸ $b$의 값 구하기 | 30 % |
| ❹ $a-b$의 값 구하기 | 10 % |

## 0580 답 3

$(x^2+1)y^3=-x^2+2x+1$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$2xy^3+(x^2+1)\times 3y^2\dfrac{dy}{dx}=-2x+2$

$3y^2(x^2+1)\dfrac{dy}{dx}=-2x+2-2xy^3$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x+2-2xy^3}{3y^2(x^2+1)}$ (단, $y\neq 0$)

$\dfrac{dy}{dx}>0$이려면

$-2x+2-2xy^3>0$

이때 $y^3=\dfrac{-x^2+2x+1}{x^2+1}$이므로

$-2x+2-2x\times\dfrac{-x^2+2x+1}{x^2+1}>0$

$(-2x+2)(x^2+1)-2x(-x^2+2x+1)>0$

$-2x^2-4x+2>0,\ x^2+2x-1<0$

$\therefore -1-\sqrt{2}<x<-1+\sqrt{2}$

따라서 정수 $x$는 $-2$, $-1$, $0$의 3개이다.

## 0581 답 1

주어진 식의 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{2}{e^y+e^{-y}}$

$x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$에서 $x=0$일 때 $0=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$

$e^y-e^{-y}=0,\ e^y=e^{-y}\qquad \therefore y=0$

따라서 $x=0$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$\dfrac{2}{1+1}=1$

## 0582 답 ③

주어진 식의 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{4y}{2\sqrt{2y^2+3}}=\dfrac{2y}{\sqrt{2y^2+3}}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{\sqrt{2y^2+3}}{2y}$

따라서 $y=\sqrt{3}$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

## 0583 답 $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

주어진 식의 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=\sqrt{3}\sec^2 y$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}\sec^2 y}=\dfrac{\sqrt{3}\cos^2 y}{3}$

$x=\sqrt{3}\tan y$에서 $x=3$일 때 $3=\sqrt{3}\tan y$

$\tan y=\sqrt{3}\qquad \therefore y=\dfrac{\pi}{3}\left(\because -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$

따라서 $x=3$인 점에서의 접선의 기울기는

$\dfrac{\sqrt{3}}{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$

## 0584 답 ①

$g(\ln 8)=a$라 하면 $f(a)=\ln 8$이므로

$\ln(a^3+a-2)=\ln 8$

$a^3+a-2=8,\ a^3+a-10=0$

$(a-2)(a^2+2a+5)=0$

$\therefore a=2\ (\because a^2+2a+5>0)$

$\therefore g(\ln 8)=2$

이때 $f'(x)=\dfrac{3x^2+1}{x^3+x-2}$이므로

$g'(\ln 8)=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{\dfrac{13}{8}}=\dfrac{8}{13}$

## 0585 답 5

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{g(x)+2}{x-3}=\dfrac{1}{5}$에서 $x\to 3$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim\limits_{x\to 3}\{g(x)+2\}=0\qquad \therefore g(3)=-2$

$\therefore f(-2)=3$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{g(x)+2}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{g(x)-g(3)}{x-3}=g'(3)=\dfrac{1}{5}$이므로

$f'(-2)=\dfrac{1}{g'(3)}=5$

## 0586 답 $\dfrac{11}{4}$

$F(x)=f(x)g(x)$라 하면 $F(-1)=f(-1)g(-1)$

$g(-1)=a$라 하면 $f(a)=-1$이므로

$a^3+a-3=-1,\ a^3+a-2=0$

$(a-1)(a^2+a+2)=0\qquad \therefore a=1\ (\because a^2+a+2>0)$

$\therefore g(-1)=1$

즉, $F(-1)=f(-1)g(-1)=-5\times 1=-5$이므로

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)g(x)+5}{x+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{F(x)-F(-1)}{x+1}$

$=F'(-1)\qquad \cdots\cdots$ ㉠

$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$F'(-1)=f'(-1)g(-1)+f(-1)g'(-1)$

이때 $f'(x)=3x^2+1$이므로 $f'(-1)=f'(1)=4$

$\therefore g'(-1)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{4}$

따라서 구하는 극한값은 ㉠에서

$F'(-1)=4\times 1+(-5)\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{11}{4}$

## AB 유형 점검 98~100쪽

### 0587 답 ③

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h}\times3$$
$$=f'(1)+3f'(1)=4f'(1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$$f'(x)=\frac{e^x(x-2)-e^x}{(x-2)^2}=\frac{(x-3)e^x}{(x-2)^2}$$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$4f'(1)=4\times(-2e)=-8e$

### 0588 답 ③

$$f(x)=\frac{2x^3+x^2+2x+3}{x}=2x^2+x+2+\frac{3}{x}$$
$$=2x^2+x+2+3x^{-1}$$

이므로

$$f'(x)=4x+1-3x^{-2}=4x+1-\frac{3}{x^2}$$

점 $(1, a)$가 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(1)=a$에서

$a=8$

점 $(1, 8)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이므로

$b=f'(1)=2$

$\therefore ab=8\times2=16$

### 0589 답 1

$$f'(x)=\frac{\csc^2x}{(a+\cot x)^2}$$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$에서

$\frac{2}{(a+1)^2}=\frac{1}{2}$, $(a+1)^2=4$

$a^2+2a-3=0$, $(a+3)(a-1)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a>0$)

### 0590 답 ③

$f(g(x))=f(x)g(x)-3x^2+2x+2$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-6x+2$

양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(g(1))g'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)-4$

$\therefore f'(2)g'(1)=2f'(1)+5g'(1)-4 \quad \cdots\cdots ㉠$

이때 $f'(x)=2x+3$이므로

$f'(1)=5$, $f'(2)=7$

이를 ㉠에 대입하면

$7g'(1)=10+5g'(1)-4$

$2g'(1)=6 \quad \therefore g'(1)=3$

### 0591 답 ②

$$f'(x)=3\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^2\times\frac{2x+1-2(x+1)}{(2x+1)^2}$$
$$=-\frac{3(x+1)^2}{(2x+1)^4}$$

$\therefore f'(0)=-3$

### 0592 답 ⑤

$h(x)=g(f(x))$라 하면 $h(x)=4^{\cos^2x}$이므로

$h\left(\frac{\pi}{3}\right)=4^{\frac{1}{4}}=\sqrt{2}$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{g(f(x))-\sqrt{2}}{\frac{\pi}{3}-x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\left\{-\frac{h(x)-h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}}\right\}$$
$$=-h'\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$h'(x)=4^{\cos^2x}\ln4\times2\cos x\times(-\sin x)$
$=-2\times4^{\cos^2x}\ln4\times\cos x\sin x$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$-h'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\left(-2\times\sqrt{2}\times2\ln2\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{6}\ln2$

### 0593 답 $\frac{\pi}{12}$

$$f'(x)=\frac{\sec^2x}{\tan x}=\frac{\frac{1}{\cos^2x}}{\frac{\sin x}{\cos x}}$$
$$=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin2x}$$ ◀ $\sin2x=2\sin x\cos x$

$f'(a)=4$에서

$\frac{2}{\sin2a}=4$, $\sin2a=\frac{1}{2}$

이때 $0<a<\frac{\pi}{4}$에서 $0<2a<\frac{\pi}{2}$이므로

$2a=\frac{\pi}{6} \quad \therefore a=\frac{\pi}{12}$

### 0594 답 ④

$$f'(x)=\frac{e^{2x}+2(x+1)e^{2x}}{(x+1)e^{2x}\ln5}=\frac{2x+3}{(x+1)\ln5}$$

$\therefore f'(-2)=\frac{1}{\ln5}$

### 0595 답 −4

주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=\ln|x-1|+2\ln|x+2|-4\ln|x+1|$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}-\frac{4}{x+1}$$

$$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}-\frac{4}{x+1}\right)$$
$$=-1+1-4=-4$$

## 0596 답 ①

$f(e)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)-1}{x-e}=\lim\limits_{x\to e}\dfrac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)$ ····· ㉠

$x>0$, $f(x)>0$이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln(\ln x)^x$

$=x\ln(\ln x)$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\ln(\ln x)+x\times\dfrac{1}{\ln x}\times\dfrac{1}{x}=\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}$

$\therefore f'(x)=f(x)\times\left\{\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}\right\}$

$=(\ln x)^x\left\{\ln(\ln x)+\dfrac{1}{\ln x}\right\}$

따라서 구하는 극한값은 ㉠에서

$f'(e)=1$

## 0597 답 $-\dfrac{2}{3}$

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}=(2x-1)^{-\frac{1}{3}}$이므로

$f'(x)=-\dfrac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{4}{3}}\times 2$

$=-\dfrac{2}{3(2x-1)\sqrt[3]{2x-1}}$

따라서 $g(x)=-\dfrac{2}{3(2x-1)}$이므로

$g(1)=-\dfrac{2}{3}$

## 0598 답 ②

$\dfrac{dx}{d\theta}=\sin\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta}=1-\cos\theta$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$ (단, $\sin\theta\neq 0$)

따라서 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$에서의 $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$\dfrac{1-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

## 0599 답 ②

점 $(2, 3)$이 곡선 $e^{3x}+ae^{2y}+2e^6=0$ 위의 점이므로

$e^6+ae^6+2e^6=0$

$(3+a)e^6=0$ $\therefore a=-3$

$e^{3x}-3e^{2y}+2e^6=0$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$3e^{3x}-6e^{2y}\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{e^{3x}}{2e^{2y}}$

따라서 점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기는

$b=\dfrac{e^6}{2e^6}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore a+b=-3+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{5}{2}$

## 0600 답 $\dfrac{3}{4}$

주어진 식의 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{4(y^2+3)-4y\times 2y}{(y^2+3)^2}=\dfrac{-4y^2+12}{(y^2+3)^2}$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\frac{dx}{dy}}=\dfrac{(y^2+3)^2}{-4y^2+12}$

따라서 $y=0$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{3}{4}$이다.

## 0601 답 ③

$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=a$라 하면 $f(a)=\dfrac{1}{2}$이므로

$\sin a=\dfrac{1}{2}$ $\therefore a=\dfrac{\pi}{6}\left(\because -\dfrac{\pi}{2}<a<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\pi}{6}$

이때 $f'(x)=\cos x$이므로

$g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

또 $g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=b$라 하면 $f(b)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로

$\sin b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore b=\dfrac{\pi}{3}\left(\because -\dfrac{\pi}{2}<b<\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore g\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore g'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$

$\therefore g'\left(\dfrac{1}{2}\right)g'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\times 2=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

## 0602 답 $\dfrac{1}{2}$

㈎에서 $f(-x)=-f(x)$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$-f'(-x)=-f'(x)$ $\therefore f'(-x)=f'(x)$ ····· ㉠

㈏에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to 0$에서

$\lim\limits_{x\to 1}\{f(x)-3\}=0$ $\therefore f(1)=3$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-3}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$

$f(-1)=-f(1)=-3$이므로 $g(-3)=-1$이고

$f'(-1)=f'(1)=2$ ($\because$ ㉠)

$\therefore g'(-3)=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{2}$

## 0603 답 6

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{h(x)-3}{x-2}=10$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim\limits_{x\to 2}\{h(x)-3\}=0$ $\therefore h(2)=3$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{h(x)-3}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{h(x)-h(2)}{x-2}=h'(2)=10$ ····· ❶

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$

$h(2)=f(g(2))=f(3)$이므로 $h(2)=3$에서 $f(3)=3$

$h'(2)=f'(g(2))g'(2)=5f'(3)$이므로 $h'(2)=10$에서

$5f'(3)=10 \quad \therefore f'(3)=2$ …… ⅱ

$\therefore f(3)f'(3)=3\times2=6$ …… ⅲ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⅰ $h(2)$, $h'(2)$의 값 구하기 | 40 % |
| ⅱ $f(3)$, $f'(3)$의 값 구하기 | 50 % |
| ⅲ $f(3)f'(3)$의 값 구하기 | 10 % |

## 0604 답 3

주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$4x+4y+4x\dfrac{dy}{dx}+3y^2\dfrac{dy}{dx}=0$

$(4x+3y^2)\dfrac{dy}{dx}=-4x-4y$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4x+4y}{4x+3y^2}$ (단, $4x+3y^2\neq0$) …… ⅰ

이때 점 $(1, a)$에서의 접선이 $x$축에 평행하므로 점 $(1, a)$에서

$\dfrac{dy}{dx}=0$

즉, $-\dfrac{4+4a}{4+3a^2}=0$이므로

$4+4a=0 \quad \therefore a=-1$ …… ⅱ

점 $(1, -1)$이 곡선 $2x^2+4xy+y^3=k$ 위의 점이므로

$k=-3$ …… ⅲ

$\therefore ak=-1\times(-3)=3$ …… ⅳ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⅰ $\dfrac{dy}{dx}$ 구하기 | 40 % |
| ⅱ $a$의 값 구하기 | 30 % |
| ⅲ $k$의 값 구하기 | 20 % |
| ⅳ $ak$의 값 구하기 | 10 % |

## 0605 답 5

$(h\circ g)'(4)=1$에서

$h'(g(4))g'(4)=h'(-1)g'(4)=1$ …… ㉠

$g(4)=-1$이므로

$f(-1)=4$

$\therefore f'(-1)=-3+\dfrac{\{f(-1)\}^2}{2}=-3+8=5$ …… ⅰ

$\therefore g'(4)=\dfrac{1}{f'(-1)}=\dfrac{1}{5}$ …… ⅱ

따라서 ㉠에서

$\dfrac{1}{5}h'(-1)=1$

$\therefore h'(-1)=5$ …… ⅲ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⅰ $f'(-1)$의 값 구하기 | 30 % |
| ⅱ $g'(4)$의 값 구하기 | 40 % |
| ⅲ $h'(-1)$의 값 구하기 | 30 % |

# 실력 향상 101쪽

## 0606 답 ②

$f(0)=3$이므로 $f(x)=ax^2+bx+3$ ($a$, $b$는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$$g'(x)=\frac{e^{f(x)}f'(x)(x-1)-e^{f(x)}}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{e^{f(x)}(2ax+b)(x-1)-e^{f(x)}}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{e^{f(x)}\{(2ax+b)(x-1)-1\}}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{e^{f(x)}\{2ax^2+(-2a+b)x-b-1\}}{(x-1)^2}$$

이때 $e^{f(x)}>0$이고, 방정식 $g'(x)=0$의 해가 $x=-1$ 또는 $x=3$이므로 이차방정식 $2ax^2+(-2a+b)x-b-1=0$의 해가 $x=-1$ 또는 $x=3$이다.

$x=-1$일 때, $2a+2a-b-b-1=0$

$\therefore 4a-2b=1$ …… ㉠

$x=3$일 때, $18a-6a+3b-b-1=0$

$\therefore 12a+2b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\dfrac{1}{8}$, $b=-\dfrac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{8}x^2-\dfrac{1}{4}x+3$이므로

$f(4)=2-1+3=4$

## 0607 답 ②

$\dfrac{dx}{dt}=4e^{4t}(1+\sin^2\pi t)+e^{4t}\times2\sin\pi t\times\pi\cos\pi t$

$=e^{4t}(4+4\sin^2\pi t+2\pi\sin\pi t\cos\pi t)$

$=e^{4t}(4+4\sin^2\pi t+\pi\sin2\pi t)$ ◀ $\sin2\pi t=2\sin\pi t\cos\pi t$

$\dfrac{dy}{dt}=4e^{4t}(1-3\cos^2\pi t)+e^{4t}\times(-6\cos\pi t)\times(-\pi\sin\pi t)$

$=e^{4t}(4-12\cos^2\pi t+6\pi\cos\pi t\sin\pi t)$

$=e^{4t}(4-12\cos^2\pi t+3\pi\sin2\pi t)$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}$$
$$=\frac{e^{4t}(4-12\cos^2\pi t+3\pi\sin2\pi t)}{e^{4t}(4+4\sin^2\pi t+\pi\sin2\pi t)}$$
$$=\frac{4(1-3\cos^2\pi t)+3\pi\sin2\pi t}{4(1+\sin^2\pi t)+\pi\sin2\pi t} \quad \text{…… ㉠}$$

곡선 $C$와 직선 $y=3x-5e$가 만날 때의 $t$의 값을 구하면

$e^{4t}(1-3\cos^2\pi t)=3e^{4t}(1+\sin^2\pi t)-5e$

$2e^{4t}+3e^{4t}(\sin^2\pi t+\cos^2\pi t)-5e=0$

$2e^{4t}+3e^{4t}-5e=0$ ◀ $\sin^2\pi t+\cos^2\pi t=1$

$5e^{4t}=5e$, $4t=1$

$\therefore t=\dfrac{1}{4}$

따라서 점 P에서의 접선의 기울기는 $t=\frac{1}{4}$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값과 같으므로 ㉠에서

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+3\pi}{4\times\frac{3}{2}+\pi}=\frac{3\pi-2}{\pi+6}$$

**0608** 답 ①

$h(x)=f(x^3+x)$, $g(1)=a$라 하면 $h(x)$는 함수 $g(x)$의 역함수이므로

$h(a)=1$

즉, $f(a^3+a)=1$이므로 $f(2)=1$에서

$a^3+a=2$, $a^3+a-2=0$

$(a-1)(a^2+a+2)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a^2+a+2>0$)

$\therefore g(1)=1$

이때 $h'(x)=(3x^2+1)f'(x^3+x)$이므로

$g'(1)=\frac{1}{h'(1)}=\frac{1}{4f'(2)}$ ····· ㉠

$f'(2)=8g'(1)-1$에 ㉠을 대입하면

$f'(2)=\frac{2}{f'(2)}-1$

$\{f'(2)\}^2=2-f'(2)$

$\{f'(2)\}^2+f'(2)-2=0$

$\{f'(2)+2\}\{f'(2)-1\}=0$

$\therefore f'(2)=1$ ($\because f'(x)>0$)

따라서 ㉠에서

$g'(1)=\frac{1}{4f'(2)}=\frac{1}{4}$

$\therefore g(1)+g'(1)=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$

**0609** 답 ②

$g(a)=b$라 하면

$f'(g(a))=f'(b)=\frac{1}{g'(a)}=8$

$f'(x)=3e^{3x}-6e^{2x}+4e^x$이므로

$f'(b)=3e^{3b}-6e^{2b}+4e^b$

즉, $3e^{3b}-6e^{2b}+4e^b=8$이므로 $e^b=t$로 놓으면

$3t^3-6t^2+4t=8$

$3t^3-6t^2+4t-8=0$

$(t-2)(3t^2+4)=0$

$\therefore t=2$ ($\because 3t^2+4>0$)

즉, $e^b=2$이므로

$b=\ln 2$

따라서 $g(a)=\ln 2$이므로

$a=f(\ln 2)$

$=e^{3\ln 2}-3e^{2\ln 2}+4e^{\ln 2}$

$=8-3\times4+4\times2=4$

$\therefore a+f'(g(a))=4+8=12$

# 06 / 도함수의 활용(1)

## A 개념 확인 102~105쪽

**0610** 답 $y=-x+3$

$f(x)=\frac{1}{x-1}$이라 하면

$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$

점 (2, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-1$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=-(x-2)$ $\therefore y=-x+3$

**0611** 답 $y=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$

$f(x)=\sqrt{x}$라 하면

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

점 (9, 3)에서의 접선의 기울기는 $f'(9)=\frac{1}{6}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-3=\frac{1}{6}(x-9)$ $\therefore y=\frac{1}{6}x+\frac{3}{2}$

**0612** 답 $y=ex$

$f(x)=e^x$이라 하면

$f'(x)=e^x$

점 (1, $e$)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=e$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-e=e(x-1)$ $\therefore y=ex$

**0613** 답 $y=\frac{1}{e^2}x+1$

$f(x)=\ln x$라 하면

$f'(x)=\frac{1}{x}$

점 ($e^2$, 2)에서의 접선의 기울기는 $f'(e^2)=\frac{1}{e^2}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-2=\frac{1}{e^2}(x-e^2)$ $\therefore y=\frac{1}{e^2}x+1$

**0614** 답 $y=\frac{1}{2}x$

$f(x)=\sqrt{x-1}$이라 하면

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

접점의 좌표를 ($t$, $\sqrt{t-1}$)이라 하면 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 $f'(t)=\frac{1}{2}$에서

$\frac{1}{2\sqrt{t-1}}=\frac{1}{2}$, $\sqrt{t-1}=1$

$t-1=1$ $\therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 (2, 1)이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{2}(x-2)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x$

## 0615 답 $y=3ex-1$

$f(x)=e^{3x}-1$이라 하면

$f'(x)=3e^{3x}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{3t}-1)$이라 하면 기울기가 $3e$이므로 $f'(t)=3e$에서

$3e^{3t}=3e,\ 3t=1$

$\therefore\ t=\frac{1}{3}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{1}{3},\ e-1\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-(e-1)=3e\left(x-\frac{1}{3}\right)$ $\therefore\ y=3ex-1$

## 0616 답 $y=-x+\frac{\pi}{2}$

$f(x)=\cos x$라 하면

$f'(x)=-\sin x$

접점의 좌표를 $(t,\ \cos t)$라 하면 기울기가 $-1$이므로 $f'(t)=-1$에서

$-\sin t=-1,\ \sin t=1$

$\therefore\ t=\frac{\pi}{2}\ (\because\ 0<x<2\pi)$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{2},\ 0\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore\ y=-x+\frac{\pi}{2}$

## 0617 답 $y=-3x+6$

$f(x)=\frac{3}{x}$이라 하면

$f'(x)=-\frac{3}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{3}{t}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-\frac{3}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{3}{t}=-\frac{3}{t^2}(x-t)$

$\therefore\ y=-\frac{3}{t^2}x+\frac{6}{t}$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$0=-\frac{6}{t^2}+\frac{6}{t}$

$t-1=0$ $\therefore\ t=1$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-3x+6$

## 0618 답 $y=-ex$

$f(x)=e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=-e^{-x}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$y-e^{-t}=-e^{-t}(x-t)$

$\therefore\ y=-e^{-t}x+(t+1)e^{-t}$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=(t+1)e^{-t}$

$t+1=0\ (\because\ e^{-t}>0)$ $\therefore\ t=-1$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-ex$

## 0619 답 $y=3x-1$

$f(x)=\ln 3x$라 하면

$f'(x)=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t,\ \ln 3t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은

$y-\ln 3t=\frac{1}{t}(x-t)$

$\therefore\ y=\frac{1}{t}x+\ln 3t-1$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ -1)$을 지나므로

$-1=\ln 3t-1,\ \ln 3t=0$

$3t=1$ $\therefore\ t=\frac{1}{3}$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=3x-1$

## 0620 답 (1) $\frac{dy}{dx}=-\cot t$ (2) $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(1) $\frac{dx}{dt}=-\sin t,\ \frac{dy}{dt}=\cos t$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{-\sin t}=-\cot t$

(2) $t=\frac{\pi}{3}$일 때, $x=\frac{1}{2},\ y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $t=\frac{\pi}{3}$일 때, $\frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $t=\frac{\pi}{3}$에 대응하는 점 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$ $\therefore\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{2\sqrt{3}}{3}$

## 0621 답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x-4y}$ (단, $x-4y\neq 0$) (2) 2 (3) $y=2x-2$

(1) 주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$2x-y-x\frac{dy}{dx}+4y\frac{dy}{dx}=0$

$(x-4y)\frac{dy}{dx}=2x-y$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{2x-y}{x-4y}$ (단, $x-4y\neq 0$)

(2) 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=\frac{2-0}{1-0}=2$

(3) 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 방정식은

$y=2(x-1)$ $\therefore\ y=2x-2$

**0622** 답 $y''=12x^2-18x+10$

$y'=4x^3-9x^2+10x$이므로

$y''=12x^2-18x+10$

**0623** 답 $y''=\dfrac{2}{(x+1)^3}$

$y'=-\dfrac{1}{(x+1)^2}$이므로

$y''=\dfrac{2(x+1)}{(x+1)^4}=\dfrac{2}{(x+1)^3}$

**0624** 답 $y''=-\dfrac{1}{4(x+4)\sqrt{x+4}}$

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}=\dfrac{1}{2}(x+4)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$y''=-\dfrac{1}{4}(x+4)^{-\frac{3}{2}}=-\dfrac{1}{4(x+4)\sqrt{x+4}}$

**0625** 답 $y''=9e^{3x-1}$

$y'=3e^{3x-1}$이므로

$y''=9e^{3x-1}$

**0626** 답 $y''=-\dfrac{3}{x^2}$

$y'=\dfrac{3}{x}$이므로

$y''=-\dfrac{3}{x^2}$

**0627** 답 $y''=-4\cos 2x$

$y'=-2\sin 2x$이므로

$y''=-4\cos 2x$

**0628** 답 구간 $(-\infty, 0]$에서 증가, 구간 $[0, \infty)$에서 감소

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$이라 하면 $f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$에서 증가하고, 구간 $[0, \infty)$에서 감소한다.

**0629** 답 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소, 구간 $[-1, \infty)$에서 증가

$f(x)=\sqrt{x^2+2x+4}$라 하면

$f'(x)=\dfrac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+4}}=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$

$f'(x)=0$에서 $x+1=0$ $\therefore x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $\sqrt{3}$ | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고, 구간 $[-1, \infty)$에서 증가한다.

**0630** 답 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소, 구간 $[-1, \infty)$에서 증가

$f(x)=xe^x$이라 하면

$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x+1=0$ ($\because e^x>0$) $\therefore x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-\frac{1}{e}$ | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소하고, 구간 $[-1, \infty)$에서 증가한다.

**0631** 답 구간 $(-\infty, 0]$에서 감소, 구간 $[0, \infty)$에서 증가

$f(x)=\ln(x^2+3)$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+3}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $\ln 3$ | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$에서 감소하고, 구간 $[0, \infty)$에서 증가한다.

**0632** 답 극댓값: $\dfrac{1}{4}$, 극솟값: $-\dfrac{1}{4}$

$f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$라 하면

$f'(x)=\dfrac{x^2+4-x\times 2x}{(x^2+4)^2}=\dfrac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$

$=-\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$

$f'(x)=0$에서 $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-\frac{1}{4}$<br>극소 | ↗ | $\frac{1}{4}$<br>극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(2)=\dfrac{1}{4}$, 극솟값은 $f(-2)=-\dfrac{1}{4}$이다.

## 0633 답 극솟값: $\sqrt{5}$

$f(x)=\sqrt{x^2+5}$라 하면

$f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+5}}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $\sqrt{5}$ 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(0)=\sqrt{5}$이다.

## 0634 답 극솟값: $e$

$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$이라 하면 $x\neq0$이고

$f'(x)=\dfrac{e^x\times x-e^x}{x^2}=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x-1=0$ ($\because$ $e^x>0$)

$\therefore$ $x=1$

$x\neq0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↘ | $e$ 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(1)=e$ 이다.

## 0635 답 극댓값: 2, 극솟값: $-2$

$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$라 하면

$f'(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{3}\cos x-\sin x=0$

$\sqrt{3}\cos x=\sin x$, $\tan x=\sqrt{3}$

$\therefore$ $x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$ ($\because$ $0<x<2\pi$)

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\dfrac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\dfrac{4}{3}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | 2 극대 | ↘ | $-2$ 극소 | ↗ | |

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2$, 극솟값은 $f\left(\dfrac{4}{3}\pi\right)=-2$이다.

## 0636 답 극댓값: 112, 극솟값: $-13$

$f(x)=2x^3+9x^2-24x$라 하면

$f'(x)=6x^2+18x-24$

$f''(x)=12x+18$

$f'(x)=0$에서

$6x^2+18x-24=0$, $6(x+4)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-4$ 또는 $x=1$

$\therefore$ $f''(-4)=-30<0$, $f''(1)=30>0$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-4)=112$, 극솟값은 $f(1)=-13$이다.

## 0637 답 극댓값: $-2$, 극솟값: 2

$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$이라 하면

$f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$

$f''(x)=\dfrac{2x}{x^4}=\dfrac{2}{x^3}$

$f'(x)=0$에서

$1-\dfrac{1}{x^2}=0$, $x^2-1=0$, $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=1$

$\therefore$ $f''(-1)=-2<0$, $f''(1)=2>0$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=-2$, 극솟값은 $f(1)=2$이다.

## 0638 답 극솟값: $-\dfrac{1}{e}$

$f(x)=x\ln x$라 하면

$f'(x)=\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=\ln x+1$

$f''(x)=\dfrac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서

$\ln x+1=0$, $\ln x=-1$

$\therefore$ $x=\dfrac{1}{e}$

$\therefore$ $f''\left(\dfrac{1}{e}\right)=e>0$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=-\dfrac{1}{e}$이다.

## 0639 답 극댓값: $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, 극솟값: $\dfrac{5}{12}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$f(x)=\dfrac{1}{2}x+\cos x$라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{2}-\sin x$

$f''(x)=-\cos x$

$f'(x)=0$에서

$\dfrac{1}{2}-\sin x=0$, $\sin x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ $x=\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $x=\dfrac{5}{6}\pi$ ($\because$ $0<x<2\pi$)

$\therefore$ $f''\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0$, $f''\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}>0$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

극솟값은 $f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)=\dfrac{5}{12}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

## B 유형 완성 106~115쪽

**0640** 답 $2e$

$f(x)=x\ln x-3x$라 하면

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-3=\ln x-2$

$x=e$인 점에서의 접선의 기울기는 $f'(e)=-1$

이때 $f(e)=-2e$이므로 점 $(e,\ -2e)$에서의 접선의 방정식은

$y+2e=-(x-e)$ $\therefore y=-x-e$

이 직선이 점 $(a,\ -3e)$를 지나므로

$-3e=-a-e$ $\therefore a=2e$

**0641** 답 3

$f(x)=\frac{1-x}{1+x^2}$라 하면

$f'(x)=\frac{-(1+x^2)-(1-x)\times2x}{(1+x^2)^2}=\frac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$

점 $(-1,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=\frac{1}{2}$

이 점에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-2$이므로 직선의 방정식은

$y-1=-2(x+1)$ $\therefore 2x+y+1=0$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로 $a+b=3$

**0642** 답 ①

$f(x)=(x-1)e^x$이라 하면

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=e$이므로 접선의 방정식은

$y=e(x-1)$ $\therefore y=ex-e$

따라서 이 접선의 $x$절편은 1, $y$절편은 $-e$이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times e=\frac{e}{2}$

**0643** 답 ④

$g(x)=\cos x$라 하면 $g'(x)=-\sin x$

점 $(t,\ \cos t)$에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=-\sin t$이므로 접선의 방정식은

$y-\cos t=-\sin t(x-t)$ $\therefore y=-x\sin t+t\sin t+\cos t$

$y=0$을 대입하면 $-x\sin t+t\sin t+\cos t=0$에서

$x\sin t=t\sin t+\cos t$

$\therefore x=t+\cot t$ ($\because \sin t\neq0$)

따라서 접선의 $x$절편은 $t+\cot t$, 즉 $f(t)=t+\cot t$이므로

$$\lim_{t\to0+}tf(t)=\lim_{t\to0+}t(t+\cot t)=\lim_{t\to0+}t\left(t+\frac{1}{\tan t}\right)$$
$$=\lim_{t\to0+}\left(t^2+\frac{t}{\tan t}\right)=0+1=1$$

**0644** 답 ①

$f(x)=\sqrt{2x+5}$라 하면

$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+5}}=\frac{1}{\sqrt{2x+5}}$

접점의 좌표를 $(t,\ \sqrt{2t+5})$라 하면 접선의 기울기가 1이므로

$f'(t)=1$에서

$\frac{1}{\sqrt{2t+5}}=1$, $\sqrt{2t+5}=1$

$2t+5=1$ $\therefore t=-2$

즉, 접점의 좌표는 $(-2,\ 1)$이므로 접선의 방정식은

$y-1=x+2$ $\therefore y=x+3$

따라서 구하는 $x$절편은 $-3$이다.

**0645** 답 ③

$f(x)=e^{2x}-2$라 하면 $f'(x)=2e^{2x}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{2t}-2)$라 하면 직선 $x+2y-5=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$에 수직인 직선의 기울기는 2이므로 $f'(t)=2$에서

$2e^{2t}=2$, $e^{2t}=1$ $\therefore t=0$

따라서 접점의 좌표는 $(0,\ -1)$이므로 접선의 방정식은

$y+1=2x$ $\therefore y=2x-1$

이 직선이 점 $(3,\ k)$를 지나므로 $k=5$

**0646** 답 ⑤

$f(x)=\sin2x$라 하면 $f'(x)=2\cos2x$

접점의 좌표를 $(t,\ \sin2t)$라 하면 접선의 기울기가 $\tan45^\circ=1$이므로 $f'(t)=1$에서

$2\cos2t=1$, $\cos2t=\frac{1}{2}$

$0<t<\frac{\pi}{2}$에서 $0<2t<\pi$이므로

$2t=\frac{\pi}{3}$ $\therefore t=\frac{\pi}{6}$

즉, 접점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{\sqrt{3}}{2}=x-\frac{\pi}{6}$ $\therefore y=x+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$

따라서 구하는 $y$절편은 $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}$이다.

**0647** 답 ③

곡선 $y=\ln\frac{x}{3}$ 위를 움직이는 점 P와 직선 $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$ 사이의 거리가 최소일 때는 점 P에서의 접선이 직선 $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$과 평행할 때이다.

$f(x)=\ln\frac{x}{3}$라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

$\mathrm{P}\left(t,\ \ln\frac{t}{3}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{3}$이므로

$f'(t)=\frac{1}{3}$에서

$\frac{1}{t}=\frac{1}{3}$ $\therefore t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(3,\ 0)$이고, 구하는 최솟값은 점 $(3,\ 0)$과 직선 $y=\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}$, 즉 $x-3y+7=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\frac{|3+7|}{\sqrt{1^2+(-3)^2}}=\sqrt{10}$

## 0648 답 1

$f(x)=\frac{a}{x^2+1}-1$이라 하면 $f'(x)=-\frac{2ax}{(x^2+1)^2}$

곡선 $y=f(x)$가 $x$축에 접하므로 접점의 좌표를 $(t, 0)$이라 하면

$f(t)=0$에서

$\frac{a}{t^2+1}-1=0$ …… ㉠

또 점 $(t, 0)$에서의 접선의 기울기가 0이므로 $f'(t)=0$에서

$-\frac{2at}{(t^2+1)^2}=0$ …… ❶

이때 $a=0$이면 ㉠에서 $-1=0$이므로 성립하지 않는다.

$\therefore t=0$ …… ❷

이를 ㉠에 대입하면

$a-1=0$ $\therefore a=1$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 곡선과 $x$축의 접점의 좌표를 $(t, 0)$이라 할 때, $a$와 $t$ 사이의 관계식 구하기 | 50 % |
| ❷ $t$의 값 구하기 | 30 % |
| ❸ $a$의 값 구하기 | 20 % |

## 0649 답 ③

$f(x)=\sqrt{x}+3$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t}+3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}$이므로 접선의 방정식은

$y-(\sqrt{t}+3)=\frac{1}{2\sqrt{t}}(x-t)$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(-1, 3)$을 지나므로

$3-(\sqrt{t}+3)=\frac{1}{2\sqrt{t}}(-1-t)$

$2t=1+t$ $\therefore t=1$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y-4=\frac{1}{2}(x-1)$ $\therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$

이 직선이 점 $(a, 5)$를 지나므로

$5=\frac{1}{2}a+\frac{7}{2}$ $\therefore a=3$

## 0650 답 $\frac{2}{3}$

$f(x)=\frac{2x+7}{x+2}$이라 하면

$f'(x)=\frac{2(x+2)-(2x+7)}{(x+2)^2}=-\frac{3}{(x+2)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{2t+7}{t+2}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-\frac{3}{(t+2)^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{2t+7}{t+2}=-\frac{3}{(t+2)^2}(x-t)$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$-\frac{2t+7}{t+2}=-\frac{3}{(t+2)^2}(-2-t)$

$2t+7=-3$ $\therefore t=-5$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{3}(x+5)$ $\therefore y=-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}$

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$이므로 삼각형 POQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

## 0651 답 ①

$f(x)=\ln x$라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t, \ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은

$y-\ln t=\frac{1}{t}(x-t)$ …… ㉠

직선 ㉠이 원점을 지나므로

$-\ln t=\frac{1}{t}\times(-t)$

$\ln t=1$ $\therefore t=e$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{e}(x-e)$ $\therefore y=\frac{1}{e}x$

이 직선이 곡선 $y=x^2+k$에 접하므로

$x^2+k=\frac{1}{e}x$ $\therefore x^2-\frac{1}{e}x+k=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=\left(-\frac{1}{e}\right)^2-4k=0$

$4k=\frac{1}{e^2}$ $\therefore k=\frac{1}{4e^2}$

## 0652 답 $e^4$

$f(x)=xe^{2x}+1$이라 하면

$f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}=(2x+1)e^{2x}$

접점의 좌표를 $(t, te^{2t}+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=(2t+1)e^{2t}$이므로 접선의 방정식은

$y-(te^{2t}+1)=(2t+1)e^{2t}(x-t)$

이 직선이 점 $(2, 1)$을 지나므로

$1-(te^{2t}+1)=(2t+1)e^{2t}(2-t)$

$t=2t^2-3t-2$ ($\because e^{2t}>0$)

$\therefore t^2-2t-1=0$

이 이차방정식의 두 근을 $\alpha$, $\beta$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

이때 접선의 기울기는 각각 $(2\alpha+1)e^{2\alpha}$, $(2\beta+1)e^{2\beta}$이므로

$m_1m_2=(2\alpha+1)e^{2\alpha}\times(2\beta+1)e^{2\beta}$

$=(2\alpha+1)(2\beta+1)e^{2\alpha+2\beta}$

$=\{4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1\}e^{2(\alpha+\beta)}$

$=\{4\times(-1)+2\times 2+1\}e^{2\times 2}=e^4$

## 0653 답 ④

$f(x)=(x-3)e^x$이라 하면

$f'(x)=e^x+(x-3)e^x=(x-2)e^x$

접점의 좌표를 $(t,\ (t-3)e^t)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(t-2)e^t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t-3)e^t=(t-2)e^t(x-t)$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$-(t-3)e^t=(t-2)e^t(a-t)$

$t-3=t^2-(a+2)t+2a\ (\because\ e^t>0)$

$\therefore\ t^2-(a+3)t+2a+3=0$ ····· ㉠

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=(x-3)e^x$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$D=\{-(a+3)\}^2-4(2a+3)>0$

$a^2-2a-3>0,\ (a+1)(a-3)>0$

$\therefore\ a<-1$ 또는 $a>3$

따라서 자연수 $a$의 최솟값은 4이다.

## 0654 답 2

$f(x)=\dfrac{x-2}{x}$라 하면 $f'(x)=\dfrac{x-(x-2)}{x^2}=\dfrac{2}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{t-2}{t}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\dfrac{2}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\dfrac{t-2}{t}=\dfrac{2}{t^2}(x-t)$

이 직선이 점 $(3,\ 3)$을 지나므로

$3-\dfrac{t-2}{t}=\dfrac{2}{t^2}(3-t)$

$3t^2-t^2+2t=6-2t$

$t^2+2t-3=0,\ (t+3)(t-1)=0$

$\therefore\ t=-3$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 개수가 2이므로 점 $(3,\ 3)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다.

## 0655 답 ④

$f(x)=xe^{ax}$이라 하면 $f'(x)=e^{ax}+axe^{ax}=(ax+1)e^{ax}$

접점의 좌표를 $(t,\ te^{at})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(at+1)e^{at}$이므로 접선의 방정식은

$y-te^{at}=(at+1)e^{at}(x-t)$

이 직선이 점 $(2,\ 0)$을 지나므로

$-te^{at}=(at+1)e^{at}(2-t)$

$t=at^2+(-2a+1)t-2\ (\because\ e^{at}>0)$

$\therefore\ at^2-2at-2=0$ ····· ㉠

점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=xe^{ax}$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=(-a)^2-(-2a)=0,\ a(a+2)=0$

$\therefore\ a=-2\ (\because\ a\neq0)$

## 0656 답 ③

$f(x)=ax^2+e^{x-1}$, $g(x)=2\ln x+b$라 하면

$f'(x)=2ax+e^{x-1}$, $g'(x)=\dfrac{2}{x}$

두 곡선이 $x=1$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(1)=g(1)$에서 $a+1=b$ ····· ㉠

$f'(1)=g'(1)$에서 $2a+1=2$ $\therefore\ a=\dfrac{1}{2}$

이를 ㉠에 대입하면 $b=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ a+b=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}=2$

## 0657 답 ③

$f(x)=\ln 4x$, $g(x)=8x^2+a$라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=16x$

두 곡선의 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $\ln 4t=8t^2+a$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $\dfrac{1}{t}=16t$

$t^2=\dfrac{1}{16}$ $\therefore\ t=\dfrac{1}{4}\ (\because\ t>0)$

이를 ㉠에 대입하면

$0=\dfrac{1}{2}+a$ $\therefore\ a=-\dfrac{1}{2}$

## 0658 답 ③

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2(1+t^2)-2t\times2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}$

$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)\times2t}{(1+t^2)^2}=\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{\dfrac{-4t}{(1+t^2)^2}}{\dfrac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}}=\dfrac{2t}{t^2-1}$ (단, $t\neq\pm1$)

$t=2$일 때 $x=\dfrac{4}{5}$, $y=-\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{4}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y+\dfrac{3}{5}=\dfrac{4}{3}\left(x-\dfrac{4}{5}\right)$ $\therefore\ y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{5}{3}$

따라서 $a=\dfrac{4}{3}$, $b=-\dfrac{5}{3}$이므로 $a-b=3$

## 0659 답 $y=-4x+1$

$\dfrac{dx}{dt}=2t-4$, $\dfrac{dy}{dt}=3t^2-k$

$\therefore\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{3t^2-k}{2t-4}$ (단, $t\neq2$) ····· ⓘ

$t=1$일 때 $\dfrac{dy}{dx}=-4$이므로

$\dfrac{3-k}{-2}=-4$, $3-k=8$ $\therefore\ k=-5$ ····· ⓘⓘ

따라서 $t=1$일 때 $x=-1$, $y=5$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-5=-4(x+1)$ $\therefore\ y=-4x+1$ ····· ⓘⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ $\dfrac{dy}{dx}$ 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘ $k$의 값 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘⓘ 접선의 방정식 구하기 | 40 % |

## 0660 답 10

$\frac{dx}{d\theta}=2\sec^2\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=4\sec\theta\tan\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{4\sec\theta\tan\theta}{2\sec^2\theta}=\frac{2\tan\theta}{\sec\theta}=\frac{2\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}}=2\sin\theta$

이때 $2\tan\theta=2\sqrt{3}$, $4\sec\theta=8$에서

$\tan\theta=\sqrt{3}$, $\sec\theta=2$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{3}$이므로 점 $(2\sqrt{3}, 8)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$이고 이 직선의 방정식은

$y-8=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2\sqrt{3})$ $\therefore y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+10$

따라서 구하는 $y$절편은 10이다.

## 0661 답 $\frac{8\sqrt{34}}{15}$

$\frac{dx}{dt}=e^t+e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=e^t-e^{-t}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$

$t=\ln 2$일 때 $x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{5}{2}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{5}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{5}{2}=\frac{3}{5}\left(x-\frac{3}{2}\right)$ $\therefore y=\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$

따라서 이 접선의 $x$절편은 $-\frac{8}{3}$, $y$절편은 $\frac{8}{5}$이므로 구하는 길이는

$\sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{5}\right)^2}=\frac{8\sqrt{34}}{15}$

## 0662 답 ⑤

주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$2x+\sin y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0$

$(x+\sin y)\frac{dy}{dx}=-2x-y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+\sin y}$ (단, $x+\sin y\neq 0$)

점 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{\pi}{2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}x$ $\therefore y=-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{2}$

이 직선이 점 $(-3, a)$를 지나므로

$a=\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{2}=2\pi$

## 0663 답 ④

주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$y+x\frac{dy}{dx}+e^y\frac{dy}{dx}=0$, $(x+e^y)\frac{dy}{dx}=-y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+e^y}$ (단, $x+e^y\neq 0$)

점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{e}$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{e}x$ $\therefore y=-\frac{1}{e}x+1$

따라서 구하는 $x$절편은 $e$이다.

## 0664 답 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$2x+2y+2x\frac{dy}{dx}-3y^2\frac{dy}{dx}=0$

$(2x-3y^2)\frac{dy}{dx}=-2x-2y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+2y}{2x-3y^2}$ (단, $2x-3y^2\neq 0$)

점 $(2, -1)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{4-2}{4-3}=-2$이므로 접선의 방정식은

$y+1=-2(x-2)$ $\therefore 2x+y-3=0$

따라서 이 직선과 원점 사이의 거리는

$\frac{|-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}$

## 0665 답 24

주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\times\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ (단, $x\neq 0$) …… ❶

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=4$에 $x=9$를 대입하면

$3+\sqrt{y}=4$ $\therefore y=1$

즉, 점 $(9, 1)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{3}(x-9)$

$\therefore y=-\frac{1}{3}x+4$ …… ❷

따라서 이 접선의 $x$절편은 12, $y$절편은 4이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 12\times 4=24$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $\frac{dy}{dx}$ 구하기 | 30 % |
| ❷ 접선의 방정식 구하기 | 40 % |
| ❸ 도형의 넓이 구하기 | 30 % |

## 0666 답 ③

$g\left(\frac{1}{2}\right)=k$라 하면 $f(k)=\frac{1}{2}$이므로

$\cos k=\frac{1}{2}$ $\therefore k=\frac{\pi}{3}$ $(\because 0<k<\pi)$

이때 $f'(x)=-\sin x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

즉, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{\pi}{3}=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}x+\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 구하는 $y$절편은 $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}$이다.

## 0667 답 ①

$g(0)=k$라 하면 $f(k)=0$이므로

$\ln(3k-2)=0$, $3k-2=1$ $\therefore k=1$

이때 $f'(x)=\frac{3}{3x-2}$이므로 $f'(1)=3$

$\therefore g'(0)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{3}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=\frac{1}{3}x$ $\therefore y=\frac{1}{3}x+1$

## 0668 답 ③

$f'(x)=e^{ax+2}+x\times ae^{ax+2}=(ax+1)e^{ax+2}$

$f''(x)=ae^{ax+2}+(ax+1)\times ae^{ax+2}=a(ax+2)e^{ax+2}$

$f''(0)=30e^2$에서

$2ae^2=30e^2$ $\therefore a=15$

## 0669 답 ①

$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}=(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$

$f''(x)=-\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{3}{2}}\times 2=-\frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$

$\therefore f''(0)=-1$

## 0670 답 $-\frac{5}{4}$

$f'(x)=\sqrt{2}\cos x+\csc^2 x$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=3$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f'(x)-3}{4x-\pi}=\frac{1}{4}\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f'(x)-f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{4}f''\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$f''(x)=-\sqrt{2}\sin x+2\csc x\times(-\csc x\cot x)$

$=-\sqrt{2}\sin x-2\csc^2 x\cot x$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$\frac{1}{4}f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}\times(-5)=-\frac{5}{4}$

## 0671 답 ⑤

$y'=2e^{2x}\cos x-e^{2x}\sin x=e^{2x}(2\cos x-\sin x)$

$y''=2e^{2x}(2\cos x-\sin x)+e^{2x}(-2\sin x-\cos x)$

$=e^{2x}(3\cos x-4\sin x)$

$y''-ay'-by=0$에서

$e^{2x}(3\cos x-4\sin x)-ae^{2x}(2\cos x-\sin x)-be^{2x}\cos x=0$

$e^{2x}>0$이므로

$(-2a-b+3)\cos x+(a-4)\sin x=0$

이 등식이 $x$의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$-2a-b+3=0$, $a-4=0$

따라서 $a=4$, $b=-5$이므로

$a-b=9$

## 0672 답 0

$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$=-\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $1$ | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -1]$, $[1, \infty)$에서 감소하고, 구간 $[-1, 1]$에서 증가하므로

$a=-1$, $b=1$

$\therefore a+b=0$

## 0673 답 ⑤

$f(x)=3x-\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=3-\frac{1}{x}$

$f'(x)=0$에서

$3-\frac{1}{x}=0$ $\therefore x=\frac{1}{3}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $1+\ln 3$ | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{1}{3}\right]$에서 감소하므로 감소하는 구간에 속하는 $x$의 값이 아닌 것은 ⑤이다.

## 0674 답 ②

$f(x)=x+\sqrt{16-x^2}$에서 $0<x\leq 4$이고

$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{16-x^2}}=1-\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}$

$f'(x)=0$에서

$1-\frac{x}{\sqrt{16-x^2}}=0$, $\sqrt{16-x^2}=x$

$16-x^2=x^2$, $x^2=8$

$\therefore x=2\sqrt{2}$ ($\because x>0$)

$0<x\le4$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $2\sqrt{2}$ | … | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | ↗ | $4\sqrt{2}$ | ↘ | |

따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 구간은 $(0,\ 2\sqrt{2}]$이므로 이 구간에 속하는 모든 정수 $x$의 값의 합은

$1+2=3$

## 0675 답 2

$f'(x)=\dfrac{4x}{2x^2+a}+1=\dfrac{2x^2+4x+a}{2x^2+a}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 $x$에서 $f'(x)\ge0$이어야 하므로

$2x^2+4x+a\ge0$ ($\because$ $2x^2+a>0$)

이차방정식 $2x^2+4x+a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=4-2a\le0$ $\quad\therefore$ $a\ge2$

따라서 $a$의 최솟값은 2이다.

## 0676 답 ①

$f'(x)=a+2\sin2x$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 $x$에서 $f'(x)\le0$이어야 한다.

이때 $-1\le\sin2x\le1$이므로

$-2\le2\sin2x\le2$

$\therefore$ $a-2\le a+2\sin2x\le a+2$

즉, $a-2\le f'(x)\le a+2$에서 $a+2\le0$이어야 하므로

$a\le-2$

## 0677 답 ④

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+2}-k=\dfrac{-kx^2+2x-2k}{x^2+2}$

$x_1<x_2$인 임의의 두 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$를 만족시키려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 $x$에서 $f'(x)\le0$이어야 하므로

$-kx^2+2x-2k\le0$ ($\because$ $x^2+2>0$) …… ㉠

(i) $k=0$일 때, $2x\le0$이므로 부등식 ㉠이 모든 실수 $x$에서 성립하는 것은 아니다.

(ii) $k\ne0$일 때, 이차부등식 ㉠이 모든 실수 $x$에서 성립하려면 $k>0$이어야 하고, 이차방정식 $-kx^2+2x-2k=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-2k^2\le0$

$k^2-\dfrac{1}{2}\ge0$, $\left(k+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(k-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\ge0$

$\therefore$ $k\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because$ $k>0$)

(i), (ii)에서 $k\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $k$의 최솟값은 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

## 0678 답 4

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+5)e^x$

$\quad=\{x^2+(a+2)x+a+5\}e^x$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$가 일대일대응이어야 하고 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 $x$에서 $f'(x)\ge0$이어야 하므로

$x^2+(a+2)x+a+5\ge0$ ($\because$ $e^x>0$)

이차방정식 $x^2+(a+2)x+a+5=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(a+2)^2-4(a+5)\le0$

$a^2-16\le0$, $(a+4)(a-4)\le0$

$\therefore$ $-4\le a\le4$

따라서 $a$의 최댓값은 4이다.

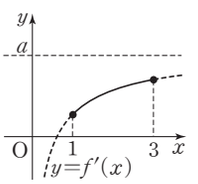
## 0679 답 ⑤

$f'(x)=a-\dfrac{2}{x}$

함수 $f(x)$가 구간 $[1,\ 3]$에서 증가하려면 $1\le x\le3$에서 $f'(x)\ge0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$f'(1)\ge0$

$a-2\ge0$ $\quad\therefore$ $a\ge2$




## 0680 답 3

$f'(x)=a-3\cos x$

함수 $f(x)$가 구간 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$에서 증가하려면 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

이때 $0\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 $0\le\cos x\le1$이므로

$-3\le-3\cos x\le0$

$\therefore$ $a-3\le a-3\cos x\le a$

즉, $a-3\le f'(x)\le a$에서

$a-3\ge0$ $\quad\therefore$ $a\ge3$

따라서 $a$의 최솟값은 3이다.

## 0681 답 9

$f'(x)=\dfrac{a^2}{x}-4$

함수 $f(x)$가 구간 $[4,\ \infty)$에서 감소하려면 $x\ge4$에서 $f'(x)\le0$이어야 한다. …… ❶

(i) $a=0$일 때,

$-4<0$이므로 $f'(x)\le0$은 모든 실수 $x$에서 성립한다.

(ii) $a\ne0$일 때,

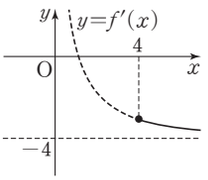
오른쪽 그림에서 $f'(4)\le0$이어야 하므로

$\dfrac{a^2}{4}-4\le0$, $a^2-16\le0$

$(a+4)(a-4)\le0$ $\quad\therefore$ $-4\le a\le4$

그런데 $a\ne0$이므로

$-4\le a<0$ 또는 $0<a\le4$



(i), (ii)에서 $-4 \le a \le 4$ ····· ⓘⓘ

따라서 정수 $a$는 $-4$, $-3$, $-2$, …, $4$의 9개이다. ····· ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $f(x)$가 구간 $[4, \infty)$에서 감소하도록 하는 조건 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘ 조건을 만족시키는 $a$의 값의 범위 구하기 | 50 % |
| ⓘⓘⓘ 정수 $a$의 개수 구하기 | 20 % |

## 0682 답 $2\pi$

$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ ($\because$ $x>0$)

$\therefore$ $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because$ $0<x<2\pi$)

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $\frac{\pi}{2}$ | … | $\frac{3}{2}\pi$ | … | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{\pi}{2}$<br>극대 | ↘ | $-\frac{3}{2}\pi$<br>극소 | ↗ | |

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, 극솟값은

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-\frac{3}{2}\pi$이므로

$M=\frac{\pi}{2}$, $m=-\frac{3}{2}\pi$

$\therefore$ $M-m=2\pi$

다른 풀이

$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ ($\because$ $x>0$)

$\therefore$ $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because$ $0<x<2\pi$)

$f''(x)=\cos x-x\sin x$이므로

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}<0$, $f''\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{3}{2}\pi>0$

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, 극솟값은

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-\frac{3}{2}\pi$이므로

$M=\frac{\pi}{2}$, $m=-\frac{3}{2}\pi$

$\therefore$ $M-m=2\pi$

## 0683 답 ④

$f(x)=x\ln x-3x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}-3=\ln x-2$

$f'(x)=0$에서

$\ln x-2=0$, $\ln x=2$ $\therefore$ $x=e^2$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $e^2$ | … |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↘ | $-e^2$<br>극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^2$에서 극솟값을 가지므로

$a=e^2$

## 0684 답 ①

$f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x-7)e^x$

$=(x^2-9)e^x=(x+3)(x-3)e^x$

$f'(x)=0$에서 $(x+3)(x-3)=0$ ($\because$ $e^x>0$)

$\therefore$ $x=-3$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | … | $-3$ | … | 3 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | $\frac{8}{e^3}$<br>극대 | ↘ | $-4e^3$<br>극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-3)=\frac{8}{e^3}$, 극솟값은

$f(3)=-4e^3$이므로

$a=\frac{8}{e^3}$, $b=-4e^3$

$\therefore$ $a\times b=-32$

## 0685 답 $3\sqrt{2}$

$f(x)=x+\sqrt{4-x^2}$에서 $0<x\le 2$이고

$f'(x)=1-\frac{2x}{2\sqrt{4-x^2}}=1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$f'(x)=0$에서

$1-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}=0$, $\sqrt{4-x^2}=x$

$4-x^2=x^2$, $x^2=2$

$\therefore$ $x=\sqrt{2}$ ($\because$ $x>0$)

$0<x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $\sqrt{2}$ | … | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | ↗ | $2\sqrt{2}$<br>극대 | ↘ | |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\sqrt{2}$에서 극댓값 $2\sqrt{2}$를 가지므로

$a=\sqrt{2}$, $b=2\sqrt{2}$

$\therefore$ $a+b=3\sqrt{2}$

## 0686 답 ③

$f(x)=\frac{x^2-6x+10}{x-3}$에서 $x\ne 3$이고

$f'(x)=\frac{(2x-6)(x-3)-(x^2-6x+10)}{(x-3)^2}=\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$

$=\frac{(x-2)(x-4)}{(x-3)^2}$

$f'(x)=0$에서 $(x-2)(x-4)=0$

$\therefore$ $x=2$ 또는 $x=4$

$x\neq3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ | 4 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | $-2$<br>극대 | ↘ | | ↘ | 2<br>극소 | ↗ |

따라서 $A(2,\ -2)$, $B(4,\ 2)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(4-2)^2+\{2-(-2)\}^2}=2\sqrt{5}$

## 0687 답 ①

$\frac{dx}{d\theta}=1-\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-\sin\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-\sin\theta}{1-\cos\theta}$

$\frac{dy}{dx}=0$에서 $\sin\theta=0$

$\therefore \theta=\pi$ ($\because 0<\theta<2\pi$)

또 $0<\theta<\pi$일 때 $\frac{dy}{dx}<0$, $\pi<\theta<2\pi$일 때 $\frac{dy}{dx}>0$이므로 주어진 함수는 $\theta=\pi$에서 극솟값을 갖는다.

따라서 구하는 극솟값은

$1+\cos\pi=0$

## 0688 답 $\frac{\sqrt{e}}{e-1}$

$f'(x)=\cos(\pi\ln x)\times\frac{\pi}{x}=\frac{\pi\cos(\pi\ln x)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\cos(\pi\ln x)=0$

$\pi\ln x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, ... ($\because x>1$)

$\ln x=\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, ...

$\therefore x=e^{\frac{1}{2}}$, $e^{\frac{3}{2}}$, $e^{\frac{5}{2}}$, ...

$x>1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 1 | $\cdots$ | $e^{\frac{1}{2}}$ | $\cdots$ | $e^{\frac{3}{2}}$ | $\cdots$ | $e^{\frac{5}{2}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ |

함수 $f(x)$가 극값을 갖는 $x$의 값을 작은 수부터 차례대로 나열하면 $e^{\frac{1}{2}}$, $e^{\frac{3}{2}}$, $e^{\frac{5}{2}}$, ...이므로

$a_1=e^{\frac{1}{2}}$, $a_2=e^{\frac{3}{2}}$, $a_3=e^{\frac{5}{2}}$, ...

따라서 $a_n=e^{\frac{2n-1}{2}}=e^{n-\frac{1}{2}}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{2}-n}=\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{\sqrt{e}}{e-1}$

## 0689 답 5

$f'(x)=\frac{a(x^2+3)-(ax+b)\times2x}{(x^2+3)^2}=\frac{-ax^2-2bx+3a}{(x^2+3)^2}$

$x=-2$에서 극솟값 $-1$을 가지므로

$f'(-2)=0$, $f(-2)=-1$

$f'(-2)=0$에서 $\frac{-a+4b}{49}=0$ $\therefore a-4b=0$ ..... ㉠

$f(-2)=-1$에서

$\frac{-2a+b}{7}=-1$ $\therefore 2a-b=7$ ..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=4$, $b=1$

$\therefore a+b=5$

## 0690 답 $\frac{3}{e}$

$f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax+a)e^{-x}$

$=\{-x^2+(2-a)x\}e^{-x}$

$x=1$에서 극댓값 $b$를 가지므로

$f'(1)=0$, $f(1)=b$

$f'(1)=0$에서 $\frac{1-a}{e}=0$ $\therefore a=1$ ..... ⓘ

$f(1)=b$에서 $b=\frac{1+2a}{e}=\frac{3}{e}$ ..... ⓘⓘ

$\therefore \frac{b}{a}=\frac{3}{e}$ ..... ⓘⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ $a$의 값 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ $b$의 값 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ $\frac{b}{a}$의 값 구하기 | 20 % |

## 0691 답 2

$f'(x)=a\cos x-b\sin x$

$x=\frac{4}{3}\pi$에서 극솟값 $-2$를 가지므로

$f'\left(\frac{4}{3}\pi\right)=0$, $f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=-2$

$f'\left(\frac{4}{3}\pi\right)=0$에서 $-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b=0$

$\therefore a-\sqrt{3}b=0$ ..... ㉠

$f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=-2$에서 $-\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}b=-2$

$\therefore \sqrt{3}a+b=4$ ..... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\sqrt{3}$, $b=1$

$\therefore f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$, $f'(x)=\sqrt{3}\cos x-\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{3}\cos x-\sin x=0$

$\sqrt{3}\cos x=\sin x$, $\tan x=\sqrt{3}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\frac{4}{3}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | 2<br>극대 | ↘ | $-2$<br>극소 | ↗ | |

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2$이다.

## 0692 답 ③

$f'(x)=2ax+b+\frac{1}{x}$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{1}{2}$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $f'(1)=0$

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$에서 $a+b+2=0$

$\therefore a+b=-2$ ····· ㉠

$f'(1)=0$에서 $2a+b+1=0$

$\therefore 2a+b=-1$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=-3$

즉, $g(x)=\sin x+\cos x+x$이므로

$g'(x)=\cos x-\sin x+1$

$g'(x)=0$에서 $\cos x-\sin x+1=0$

$\cos x=\sin x-1$

양변을 각각 제곱하면

$\cos^2 x=(\sin x-1)^2$, $1-\sin^2 x=\sin^2 x-2\sin x+1$

$2\sin^2 x-2\sin x=0$, $2\sin x(\sin x-1)=0$

$\sin x=0$ 또는 $\sin x=1$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

$0<x<2\pi$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $\frac{\pi}{2}$ | … | $\pi$ | … | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $g(x)$ | | ↗ | $1+\frac{\pi}{2}$ 극대 | ↘ | $-1+\pi$ 극소 | ↗ | |

따라서 함수 $g(x)$의 극솟값은 $g(\pi)=-1+\pi$이다.

## 0693 답 $a<-6$ 또는 $a>6$

$f(x)=\frac{3x+a}{x^2-4}$에서 $x^2\neq 4$, 즉 $x\neq\pm 2$이고

$f'(x)=\frac{3(x^2-4)-(3x+a)\times 2x}{(x^2-4)^2}=-\frac{3x^2+2ax+12}{(x^2-4)^2}$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식

$3x^2+2ax+12=0$이 $x\neq\pm 2$인 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$12-4a+12\neq 0$, $12+4a+12\neq 0$

$\therefore a\neq\pm 6$

이차방정식 $3x^2+2ax+12=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-36>0$, $(a+6)(a-6)>0$

$\therefore a<-6$ 또는 $a>6$

## 0694 답 ④

$f'(x)=3e^{2x^2}+(3x-a)e^{2x^2}\times 4x=(12x^2-4ax+3)e^{2x^2}$

이때 $e^{2x^2}>0$이므로 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $12x^2-4ax+3=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-36\leq 0$

$4(a+3)(a-3)\leq 0$ $\therefore -3\leq a\leq 3$

따라서 정수 $a$는 $-3$, $-2$, $-1$, 0, 1, 2, 3의 7개이다.

## 0695 답 ②

$f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{4x}{2x^2+n}=\frac{2x^2-16x+n}{4(2x^2+n)}$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $2x^2-16x+n=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=64-2n>0$ $\therefore n<32$

따라서 자연수 $n$의 최댓값은 31이다.

## 0696 답 ③

$f(x)=x-3\ln x-\frac{a}{x}$에서 $x>0$이고

$f'(x)=1-\frac{3}{x}+\frac{a}{x^2}=\frac{x^2-3x+a}{x^2}$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $x^2-3x+a=0$이 $x>0$인 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2-3x+a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=9-4a>0$ $\therefore a<\frac{9}{4}$

(ii) (두 근의 합)$=3>0$

(iii) (두 근의 곱)$=a>0$

(i), (ii), (iii)에서 $0<a<\frac{9}{4}$

따라서 모든 정수 $a$의 값의 합은

$1+2=3$

## 0697 답 ①

$f'(x)=a+\cos x$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 $x$에서 $f'(x)\leq 0$ 또는 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이때 $-1\leq\cos x\leq 1$이므로

$a-1\leq a+\cos x\leq a+1$

즉, $a-1\leq f'(x)\leq a+1$에서 $a+1\leq 0$ 또는 $a-1\geq 0$이어야 하므로

$a\leq -1$ 또는 $a\geq 1$

따라서 자연수 $a$의 최솟값은 1이다.

## 0698 답 ④

$f'(x)=(3x^2-6x-6)e^x+(x^3-3x^2-6x+a)e^x$

$=(x^3-12x+a-6)e^x$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $x^3-12x+a-6=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$g(x)=x^3-12x+a-6$이라 하면

$g'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $g(x)$는 $x=-2$, $x=2$에서 극값을 가지므로

$g(-2)g(2)<0$, $(a+10)(a-22)<0$

$\therefore -10<a<22$

따라서 정수 $a$의 최댓값은 21이다.

참고 삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 가질 때,
(극댓값)×(극솟값)<0이면 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

## 0699 답 6

$f'(x)=2\cos 2x+2\sin x+a$

$=2(1-2\sin^2 x)+2\sin x+a$ → $\cos 2x=1-2\sin^2 x$

$=-4\sin^2 x+2\sin x+a+2$

$=-\left(2\sin x-\frac{1}{2}\right)^2+a+\frac{9}{4}$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 $f'(x)=0$이 실근을 갖고, 이 실근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

이때 $-1\le\sin x\le 1$이므로 $-2\le 2\sin x\le 2$에서 함수 $f'(x)$는 $2\sin x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $a+\frac{9}{4}$를 갖고, $2\sin x=-2$일 때 최솟값 $a-4$를 갖는다.

즉, $\left(a+\frac{9}{4}\right)(a-4)<0$이어야 하므로

$-\frac{9}{4}<a<4$

따라서 정수 $a$는 $-2$, $-1$, 0, 1, 2, 3의 6개이다.

# AB 유형 점검 116~118쪽

## 0700 답 ④

$f(x)=\sqrt{x^2+5}$라 하면

$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+5}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+5}}$

점 $(-2, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=-\frac{2}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y-3=-\frac{2}{3}(x+2)$ $\therefore y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

따라서 $a=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{5}{3}$이므로

$a+b=1$

## 0701 답 16

$f(x)=\frac{x-1}{x+3}$이라 하면

$f'(x)=\frac{(x+3)-(x-1)}{(x+3)^2}=\frac{4}{(x+3)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{t-1}{t+3}\right)$이라 하면 접선의 기울기가 4이므로

$f'(t)=4$에서

$\frac{4}{(t+3)^2}=4$, $(t+3)^2=1$

$t^2+6t+8=0$, $(t+4)(t+2)=0$ $\therefore t=-4$ 또는 $t=-2$

즉, 접점의 좌표는 $(-4, 5)$ 또는 $(-2, -3)$이므로 접선의 방정식은

$y-5=4(x+4)$ 또는 $y+3=4(x+2)$

$\therefore y=4x+21$ 또는 $y=4x+5$

이때 $a>b$이므로 $a=21$, $b=5$

$\therefore a-b=16$

## 0702 답 ④

곡선 $y=e^{|x|}$은 $y$축에 대하여 대칭이므로 원점에서 그은 두 접선도 $y$축에 대하여 대칭이다.

$x>0$일 때 $y=e^x$이므로 $y'=e^x$

접점의 좌표를 $(t, e^t)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $e^t$이므로 접선의 방정식은

$y-e^t=e^t(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-e^t=e^t\times(-t)$ $\therefore t=1$ ($\because e^t>0$)

따라서 $x>0$일 때 접선의 기울기는 $e$이므로 $x<0$일 때 접선의 기울기는 $-e$이다.

두 접선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면

$\tan\alpha=e$, $\tan\beta=-e$

$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{e-(-e)}{1+e\times(-e)}\right|=\frac{2e}{e^2-1}$

## 0703 답 ③

$f(x)=\frac{1}{x^2+1}$이라 하면

$f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{t^2+1}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{t^2+1}=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}(x-t)$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$-\frac{1}{t^2+1}=-\frac{2t}{(t^2+1)^2}(a-t)$

$\therefore 3t^2-2at+1=0$ …… ㉠

점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=\frac{1}{x^2+1}$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-3>0$, $(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})>0$

$\therefore a<-\sqrt{3}$ 또는 $a>\sqrt{3}$

따라서 $a$의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

## 0704 답 $\frac{1}{2}$

$f(x)=2\cos^2 x+k$, $g(x)=2\cos x$라 하면

$f'(x)=-4\cos x\sin x$, $g'(x)=-2\sin x$

두 곡선의 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $2\cos^2 t+k=2\cos t$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $-4\cos t\sin t=-2\sin t$

$\therefore \cos t=\frac{1}{2}$ ($\because \sin t\neq 0$)

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{2}+k=1$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

## 0705 답 ④

$\frac{dx}{d\theta}=-2\sqrt{3}\sin\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=2\cos\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{2\cos\theta}{-2\sqrt{3}\sin\theta}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\cot\theta$

접선의 기울기가 $-1$이므로 $-\frac{1}{\sqrt{3}}\cot\theta=-1$에서

$\cot\theta=\sqrt{3}$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{6}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\theta=\frac{\pi}{6}$일 때 $x=3$, $y=1$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-(x-3)$

$\therefore y=-x+4$

따라서 A(4, 0), B(0, 4)이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$

## 0706 답 3

주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$6x+10y\frac{dy}{dx}+2y+2x\frac{dy}{dx}=0$

$2(x+5y)\frac{dy}{dx}=-2(3x+y)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{3x+y}{x+5y}$ (단, $x+5y\neq 0$)

점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는

$-\frac{3+1}{1+5}=-\frac{2}{3}$

이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{3}{2}$이므로 점 (4, 3)을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{3}{2}(x-4)$

$\therefore y=\frac{3}{2}x-3$

따라서 A(2, 0), B(0, $-3$)이므로 삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times 3=3$

## 0707 답 ①

$g(-2)=k$라 하면 $f(k)=-2$이므로

$k^3+2k+1=-2$, $k^3+2k+3=0$

$(k+1)(k^2-k+3)=0$

$\therefore k=-1$ ($\because k^2-k+3>0$)

이때 $f'(x)=3x^2+2$이므로 $f'(-1)=5$

$\therefore g'(-2)=\frac{1}{f'(-1)}=\frac{1}{5}$

즉, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 ($-2$, $-1$)에서의 접선의 방정식은

$y+1=\frac{1}{5}(x+2)$

$\therefore y=\frac{1}{5}x-\frac{3}{5}$

이 직선이 점 ($4a$, $a$)를 지나므로

$a=\frac{4}{5}a-\frac{3}{5}$, $\frac{1}{5}a=-\frac{3}{5}$ $\therefore a=-3$

## 0708 답 1

$f'(x)=a+b\ln x+x\times\frac{b}{x}=a+b+b\ln x$

$f''(x)=\frac{b}{x}$

$f'(1)=5$에서 $a+b=5$ …… ㉠

$f''(2)=1$에서

$\frac{b}{2}=1$ $\therefore b=2$

이를 ㉠에 대입하여 풀면

$a=3$

$\therefore a-b=3-2=1$

## 0709 답 ⑤

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}$

$=-x(x-2)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x(x-2)=0$ ($\because e^{-x}>0$)

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | … | 0 | … | 2 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↘ | 0 | ↗ | $\frac{4}{e^2}$ | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 $x$의 값의 범위가 $0\le x\le 2$이므로

$a=0$, $b=2$

$\therefore a+b=2$

## 0710 답 ①

$f'(x)=k+2+4\cos 4x$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 $x$에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이때 $-1\le\cos 4x\le 1$이므로

$-4\le 4\cos 4x\le 4$

$\therefore k-2\le k+2+4\cos 4x\le k+6$

즉, $k-2\le f'(x)\le k+6$에서 $k+6\le 0$이어야 하므로

$k\le -6$

따라서 정수 $k$의 최댓값은 $-6$이다.

## 0711 답 1

$f'(x)=\dfrac{(2x+2)(x^2+1)-(x^2+2x+a)\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{-2x^2-2(a-1)x+2}{(x^2+1)^2}$

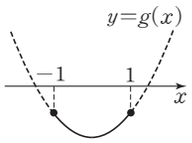
함수 $f(x)$가 구간 $[-1, 1]$에서 증가하려면 $-1\le x\le 1$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$-2x^2-2(a-1)x+2\ge 0$

$\therefore x^2+(a-1)x-1\le 0$

$g(x)=x^2+(a-1)x-1$이라 하면

$-1\le x\le 1$에서 $g(x)\le 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서




$g(-1)\le 0$, $g(1)\le 0$

$g(-1)\le 0$에서

$1-(a-1)-1\le 0$

$\therefore a\ge 1$ ····· ㉠

$g(1)\le 0$에서

$1+(a-1)-1\le 0$

$\therefore a\le 1$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$a=1$

## 0712 답 ①

$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$

$=2e^x\cos x$

$f'(x)=0$에서

$\cos x=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | ··· | $\frac{\pi}{2}$ | ··· | $\frac{3}{2}\pi$ | ··· | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | $e^{\frac{\pi}{2}}$ 극대 | ↘ | $-e^{\frac{3}{2}\pi}$ 극소 | ↗ | |

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=-e^{\frac{3}{2}\pi}$

## 0713 답 ①

$f(x)=x(\ln x)^2$에서 $x>0$이고

$f'(x)=(\ln x)^2+x\times 2\ln x\times\dfrac{1}{x}$

$=(\ln x+2)\ln x$

$f'(x)=0$에서

$\ln x=-2$ 또는 $\ln x=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{e^2}$ 또는 $x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | ··· | $\frac{1}{e^2}$ | ··· | 1 | ··· |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{4}{e^2}$ 극대 | ↘ | 0 극소 | ↗ |

ㄱ. $x=\dfrac{1}{e^2}$에서 극댓값을 갖고 $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(1)=0$이다.

ㄷ. 구간 $\left[\dfrac{1}{e^2}, 1\right]$에서 감소한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

## 0714 답 ②

$f'(x)=(2x+k)e^x+(x^2+kx+5)e^x$

$=\{x^2+(k+2)x+k+5\}e^x$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $x^2+(k+2)x+k+5=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$D=(k+2)^2-4(k+5)>0$

$k^2-16>0$, $(k+4)(k-4)>0$

$\therefore k<-4$ 또는 $k>4$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=4$이므로 $\alpha\beta=-16$

## 0715 답 $-1\le a\le 1$

$f'(x)=1-a\sin x$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 $x$에서 $f'(x)\le 0$ 또는 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이때 $-1\le\sin x\le 1$이므로

$-|a|\le a\sin x\le |a|$

$\therefore 1-|a|\le 1-a\sin x\le 1+|a|$

즉, $1-|a|\le f'(x)\le 1+|a|$에서 $1+|a|>0$이므로 $1-|a|\ge 0$이어야 한다.

$1-|a|\ge 0$에서 $|a|\le 1$

$\therefore -1\le a\le 1$

## 0716 답 $-\dfrac{e}{2}$

$f(x)=2e^x$이라 하면

$f'(x)=2e^x$

점 $(1, 2e)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2e$이므로 접선의 방정식은

$y-2e=2e(x-1)$ $\therefore y=2ex$ ····· ❶

이 직선이 곡선 $y=\dfrac{k}{x+1}$에 접하므로 $\dfrac{k}{x+1}=2ex$에서

$k=2ex^2+2ex$ $\therefore 2ex^2+2ex-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\dfrac{D}{4}=e^2+2ek=0$

$2ek=-e^2$ $\therefore k=-\dfrac{e}{2}$ ····· ❷

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ 접선의 방정식 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ $k$의 값 구하기 | 60 % |

## 0717 답 $\ln 3$

$f(x)=\ln(x+2)$, $g(x)=a-3\ln x$라 하면

$f'(x)=\frac{1}{x+2}$, $g'(x)=-\frac{3}{x}$

점 P의 $x$좌표를 $t$라 하면 $f(t)=g(t)$에서

$\ln(t+2)=a-3\ln t$

$\therefore a=\ln(t+2)+3\ln t$ …… ㉠ …… ⓘ

점 P에서 두 곡선의 접선이 서로 수직이므로 $f'(t)g'(t)=-1$에서

$\frac{1}{t+2}\times\left(-\frac{3}{t}\right)=-1$

$t^2+2t-3=0$, $(t+3)(t-1)=0$

$\therefore t=1$ ($\because t>0$) …… ⓘⓘ

이를 ㉠에 대입하면

$a=\ln 3$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $a$를 점 P의 $x$좌표 $t$에 대한 식으로 나타내기 | 40 % |
| ⓘⓘ $t$의 값 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ $a$의 값 구하기 | 20 % |

## 0718 답 4

$f'(x)=\frac{(2x+a)(x+1)-(x^2+ax+b)}{(x+1)^2}$

$=\frac{x^2+2x+a-b}{(x+1)^2}$ …… ⓘ

$x=1$에서 극솟값 $-2$를 가지므로

$f'(1)=0$, $f(1)=-2$

$f'(1)=0$에서

$\frac{3+a-b}{4}=0$ $\therefore a-b=-3$ …… ㉠

$f(1)=-2$에서

$\frac{1+a+b}{2}=-2$ $\therefore a+b=-5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=-1$ …… ⓘⓘ

$\therefore ab=4$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $f'(x)$ 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘ $a$, $b$의 값 구하기 | 60 % |
| ⓘⓘⓘ $ab$의 값 구하기 | 10 % |

## C 실력 향상 119쪽

## 0719 답 $-\frac{5}{4}$

$f(x)=a+\cos^2 x$, $g(x)=-\sin x$라 하면

$f'(x)=-2\cos x\sin x$, $g'(x)=-\cos x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 서로 접한다고 하면

$f(t)=g(t)$에서 $a+\cos^2 t=-\sin t$

$a+1-\sin^2 t=-\sin t$

$\therefore a=\sin^2 t-\sin t-1$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $-2\cos t\sin t=-\cos t$

$\cos t(1-2\sin t)=0$

$\therefore \cos t=0$ 또는 $\sin t=\frac{1}{2}$

(i) $\cos t=0$일 때,

$\sin t=-1$ 또는 $\sin t=1$이므로 이를 각각 ㉠에 대입하면

$a=1$ 또는 $a=-1$

(ii) $\sin t=\frac{1}{2}$일 때,

$\sin t=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $a=-\frac{5}{4}$

(i), (ii)에서 모든 $a$의 값의 합은

$1+(-1)+\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{5}{4}$

## 0720 답 8

$(f\circ g)(x)=x+\ln(x^2+1)$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1+\frac{2x}{x^2+1}$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(g(0))g'(0)=1$

$f'(3)g'(0)=1$, $\frac{1}{2}f'(3)=1$

$\therefore f'(3)=2$

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f''(g(x))\{g'(x)\}^2+f'(g(x))g''(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\times 2x}{(x^2+1)^2}$

$=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

위의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f''(g(0))\{g'(0)\}^2+f'(g(0))g''(0)=2$

$\frac{1}{4}f''(3)-f'(3)=2$, $\frac{1}{4}f''(3)-2=2$

$\therefore f''(3)=16$

한편 $f'(g(0))=f'(3)=2$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{f'(g(x))-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(g(x))-f'(g(0))}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{f'(g(x))-f'(g(0))}{g(x)-g(0)}\times\frac{g(x)-g(0)}{x}\right\}$

$=f''(g(0))g'(0)$

$=f''(3)\times\frac{1}{2}$

$=16\times\frac{1}{2}=8$

## 0721 답 ①

$f(x)=\frac{\cos x}{e^{2x}}=e^{-2x}\cos x$이므로

$f'(x)=-2e^{-2x}\cos x-e^{-2x}\sin x$

$=-e^{-2x}(2\cos x+\sin x)$

$f''(x)=2e^{-2x}(2\cos x+\sin x)-e^{-2x}(-2\sin x+\cos x)$
$=e^{-2x}(3\cos x+4\sin x)$
함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극댓값을 가지므로
$f'(k)=0$, $f''(k)<0$
$f'(k)=0$에서
$-e^{-2k}(2\cos k+\sin k)=0$
$2\cos k+\sin k=0$ ($\because$ $e^{-2k}>0$)
$\therefore \sin k=-2\cos k$ ····· ㉠
$f''(k)<0$에서
$e^{-2k}(3\cos k+4\sin k)<0$
$\therefore 3\cos k+4\sin k<0$ ($\because$ $e^{-2k}>0$) ····· ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$3\cos k-8\cos k<0$, $-5\cos k<0$
$\therefore \cos k>0$
㉠에 의하여 $\sin k<0$, $\cos k>0$이므로
$\frac{3}{2}\pi<k<2\pi$ ($\because$ $0<k<2\pi$)
㉠의 양변을 $\cos k$로 나누면
$\frac{\sin k}{\cos k}=-2$
$\therefore \tan k=-2$
이때 $\sec^2 k=1+\tan^2 k=1+(-2)^2=5$이므로
$\sec k=\sqrt{5}$ $\left(\because \frac{3}{2}\pi<k<2\pi\right)$
$\therefore \cos k=\frac{1}{\sec k}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

## 0722 답 ⑤

$g'(x)=\frac{f'(x)e^{f(x)}-\{f(x)+k\}f'(x)e^{f(x)}}{\{e^{f(x)}\}^2}$
$=\frac{f'(x)\{1-k-f(x)\}}{e^{f(x)}}$
함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극대이므로
$g'(3)=0$
즉, $\frac{f'(3)\{1-k-f(3)\}}{e^{f(3)}}=0$이므로
$f'(3)\{1-k-f(3)\}=0$
$\therefore f'(3)=0$ 또는 $f(3)=1-k$
이때 함수 $f(x)$가 이차함수이므로 $f'(3)=0$이면 $k\neq0$인 실수 $k$에 대하여 $f(3)\neq f(3-2k)$가 되어 주어진 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 $f'(3)\neq0$이므로
$f(3)=1-k$
$g(3)=e$에서
$\frac{f(3)+k}{e^{f(3)}}=e$, $\frac{1}{e^{1-k}}=e$
$k-1=1$ $\therefore k=2$
$f(3-2k)=f(3)$에서 $f(-1)=f(3)$이고 $f(3)=1-k=-1$이므로
$f(-1)=-1$
$\therefore f(x)=(x+1)(x-3)-1$
$=x^2-2x-4$
$\therefore g(k)=g(2)=\frac{f(2)+2}{e^{f(2)}}=\frac{-4+2}{e^{-4}}=-2e^4$

# 07 / 도함수의 활용(2)

## A 개념 확인 120~123쪽

## 0723 답 구간 $(-\infty, 2)$에서 위로 볼록, 구간 $(2, \infty)$에서 아래로 볼록

$f(x)=x^3-6x^2+1$이라 하면
$f'(x)=3x^2-12x$
$f''(x)=6x-12=6(x-2)$
$f''(x)=0$에서 $x=2$
$x<2$에서 $f''(x)<0$
$x>2$에서 $f''(x)>0$
따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, 2)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(2, \infty)$에서 아래로 볼록하다.

## 0724 답 구간 $(-\infty, -6)$, $(2, \infty)$에서 위로 볼록, 구간 $(-6, 2)$에서 아래로 볼록

$f(x)=-\frac{1}{4}x^4-2x^3+18x^2$이라 하면
$f'(x)=-x^3-6x^2+36x$
$f''(x)=-3x^2-12x+36=-3(x^2+4x-12)$
$=-3(x+6)(x-2)$
$f''(x)=0$에서 $x=-6$ 또는 $x=2$
$x<-6$ 또는 $x>2$에서 $f''(x)<0$
$-6<x<2$에서 $f''(x)>0$
따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, -6)$, $(2, \infty)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(-6, 2)$에서 아래로 볼록하다.

## 0725 답 구간 $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$에서 위로 볼록, 구간 $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$에서 아래로 볼록

$f(x)=-\frac{1}{x^2+4}$이라 하면
$f'(x)=\frac{2x}{(x^2+4)^2}$
$f''(x)=\frac{2(x^2+4)^2-2x\times2(x^2+4)\times2x}{(x^2+4)^4}$
$=-\frac{2(3x^2-4)}{(x^2+4)^3}$
$f''(x)=0$에서 $3x^2-4=0$, $x^2=\frac{4}{3}$
$\therefore x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$
$x<-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x>\frac{2\sqrt{3}}{3}$에서 $f''(x)<0$
$-\frac{2\sqrt{3}}{3}<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$에서 $f''(x)>0$
따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(-\infty, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$에서 위로 볼록하고, 구간 $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$에서 아래로 볼록하다.

**0726** 답 구간 $(0, \infty)$에서 위로 볼록

$f(x)=x+\ln x$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=1+\frac{1}{x}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}$

$x>0$에서 $f''(x)<0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 위로 볼록하다.

**0727** 답 구간 $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$에서 위로 볼록,
구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 아래로 볼록

$f(x)=-\cos x$라 하면

$f'(x)=\sin x$, $f''(x)=\cos x$

$f''(x)=0$에서 $x=-\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ ($\because -\pi<x<\pi$)

$-\pi<x<-\frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$에서 $f''(x)<0$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f''(x)>0$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$에서 위로 볼록하고, 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$에서 아래로 볼록하다.

**0728** 답 $(3, -9)$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+3x$라 하면

$f'(x)=x^2-6x+3$

$f''(x)=2x-6=2(x-3)$

$f''(x)=0$에서 $x=3$

$x<3$에서 $f''(x)<0$

$x>3$에서 $f''(x)>0$

따라서 $x=3$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(3, -9)$이다.

**0729** 답 $(0, 0)$, $(1, -1)$

$f(x)=x^4-2x^3$이라 하면

$f'(x)=4x^3-6x^2$

$f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$

$f''(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

$x<0$ 또는 $x>1$에서 $f''(x)>0$

$0<x<1$에서 $f''(x)<0$

따라서 $x=0$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(0, 0)$, $(1, -1)$이다.

**0730** 답 $(-2, 0)$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{x}$라 하면 $x\neq0$이고

$f'(x)=x-\frac{4}{x^2}$

$f''(x)=1+\frac{8}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3}=\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^3}$

$f''(x)=0$에서 $x+2=0$ ($\because x^2-2x+4>0$) $\therefore x=-2$

$x<-2$에서 $f''(x)>0$

$-2<x<0$에서 $f''(x)<0$

따라서 $x=-2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-2, 0)$이다.

**0731** 답 $(1, 0)$

$f(x)=(x+1)\ln x$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=\ln x+(x+1)\times\frac{1}{x}=\ln x+1+\frac{1}{x}$

$f''(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$

$f''(x)=0$에서 $x-1=0$ $\therefore x=1$

$0<x<1$에서 $f''(x)<0$

$x>1$에서 $f''(x)>0$

따라서 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(1, 0)$이다.

**0732** 답 $(\pi, \pi)$

$f(x)=x+2\sin x$라 하면

$f'(x)=1+2\cos x$, $f''(x)=-2\sin x$

$f''(x)=0$에서 $\sin x=0$ $\therefore x=\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

$0<x<\pi$에서 $f''(x)<0$

$\pi<x<2\pi$에서 $f''(x)>0$

따라서 $x=\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(\pi, \pi)$이다.

**0733** 답 (가) $y$축 (나) $6x$ (다) $y=1$

**0734** 답 풀이 참조

함수 $f(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$f'(x)=(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x-1)e^{-x}=-(x^2-3)e^{-x}$

$f''(x)=-2xe^{-x}+(x^2-3)e^{-x}$

$=(x^2-2x-3)e^{-x}=(x+1)(x-3)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x^2-3=0$ ($\because e^{-x}>0$)

$\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$

$f''(x)=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$ ($\because e^{-x}>0$)

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

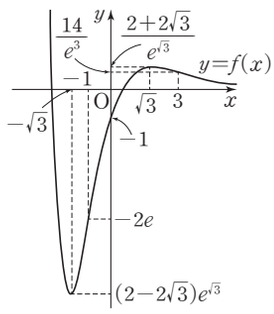
함수 $f(x)$의 증가와 감소, 위로 볼록과 아래로 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-\sqrt{3}$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $\sqrt{3}$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $(2-2\sqrt{3})e^{\sqrt{3}}$ 극소 | ↗ | $-2e$ 변곡점 | ↗ | $\frac{2+2\sqrt{3}}{e^{\sqrt{3}}}$ 극대 | ↘ | $\frac{14}{e^3}$ 변곡점 | ↘ |

이때 $f(0)=-1$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$,

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 함수

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



## 0735 답 풀이 참조

함수 $f(x)$의 정의역은 $x>0$인 실수 전체의 집합이다.

$$f'(x)=2x-10+\frac{8}{x}=\frac{2x^2-10x+8}{x}$$
$$=\frac{2(x-1)(x-4)}{x}$$
$$f''(x)=2-\frac{8}{x^2}=\frac{2x^2-8}{x^2}$$
$$=\frac{2(x+2)(x-2)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

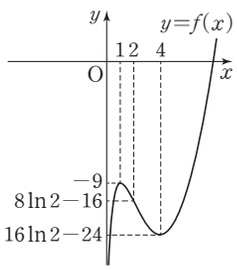
$f''(x)=0$에서 $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 위로 볼록과 아래로 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 4 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | − | − | 0 | + |
| $f''(x)$ | | − | − | − | 0 | + | + | + |
| $f(x)$ | | ↗ | $-9$<br>극대 | ↘ | $8\ln 2-16$<br>변곡점 | ↘ | $16\ln 2-24$<br>극소 | ↗ |

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




## 0736 답 최댓값: $\frac{17}{4}$, 최솟값: 2

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}=\frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

$f'(x)=0$에서 $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=1$ $\left(\because \frac{1}{2}\le x\le 4\right)$

구간 $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | $\frac{5}{2}$ | ↘ | 2<br>극소 | ↗ | $\frac{17}{4}$ |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(4)=\frac{17}{4}$, 최솟값은 $f(1)=2$이다.

## 0737 답 최댓값: $\frac{1}{8}$, 최솟값: $-\frac{1}{4}$

$$f'(x)=\frac{x^2+8-(x-1)\times 2x}{(x^2+8)^2}=\frac{-x^2+2x+8}{(x^2+8)^2}$$
$$=-\frac{(x+2)(x-4)}{(x^2+8)^2}$$

$f'(x)=0$에서 $(x+2)(x-4)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=4$

구간 $[-3, 5]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-3$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | 4 | $\cdots$ | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | $-\frac{4}{17}$ | ↘ | $-\frac{1}{4}$<br>극소 | ↗ | $\frac{1}{8}$<br>극대 | ↘ | $\frac{4}{33}$ |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(4)=\frac{1}{8}$, 최솟값은 $f(-2)=-\frac{1}{4}$이다.

## 0738 답 최댓값: 0, 최솟값: $-2e^2$

$$f'(x)=-xe^{-x}+\frac{1}{2}x^2e^{-x}$$
$$=\frac{1}{2}x(x-2)e^{-x}$$

$f'(x)=0$에서 $x(x-2)=0$ ($\because e^{-x}>0$)

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[-2, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-2e^2$ | ↗ | 0<br>극대 | ↘ | $-\frac{2}{e^2}$<br>극소 | ↗ | $-\frac{9}{2e^3}$ |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)=0$, 최솟값은 $f(-2)=-2e^2$이다.

## 0739 답 최댓값: $\frac{e}{2}$, 최솟값: 0

$$f'(x)=2x-2x\ln x-x^2\times\frac{1}{x}$$
$$=x(1-2\ln x)$$

$f'(x)=0$에서 $1-2\ln x=0$ ($\because 1\le x\le e$)

$\ln x=\frac{1}{2}$ $\therefore x=e^{\frac{1}{2}}$

구간 $[1, e]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 1 | $\cdots$ | $e^{\frac{1}{2}}$ | $\cdots$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | 1 | ↗ | $\frac{e}{2}$<br>극대 | ↘ | 0 |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(e^{\frac{1}{2}})=\frac{e}{2}$, 최솟값은 $f(e)=0$이다.

## 0740 답 최댓값: $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$, 최솟값: 0

$$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x=e^x(\cos x-\sin x)$$

$f'(x)=0$에서 $\cos x-\sin x=0$ ($\because e^x>0$)

$\cos x=\sin x$ $\therefore x=\frac{\pi}{4}$ $\left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

구간 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | 1 | ↗ | $\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ 극대 | ↘ | 0 |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$, 최솟값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$이다.

## 0741 답 1

$f(x)=x+\frac{2}{\sqrt{x}}-3$이라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=1-\frac{1}{\sqrt{x^3}}$

$f'(x)=0$에서

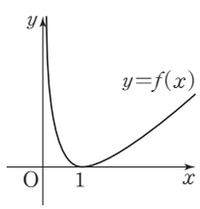
$1-\frac{1}{\sqrt{x^3}}=0 \quad \therefore x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↘ | 0 극소 | ↗ |

이때 $\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 접하므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.




## 0742 답 2

$f(x)=9\ln x-\frac{1}{2}x^2$이라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{9}{x}-x=\frac{9-x^2}{x}$

$=-\frac{(x+3)(x-3)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=3$ ($\because x>0$)

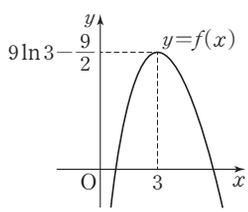
$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − |
| $f(x)$ | | ↗ | $9\ln 3-\frac{9}{2}$ 극대 | ↘ |

이때 $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.




## 0743 답 1

$x=\cos 2x$에서 $x-\cos 2x=0$

$f(x)=x-\cos 2x$라 하면

$f'(x)=1+2\sin 2x$

$f'(x)=0$에서 $1+2\sin 2x=0$, $\sin 2x=-\frac{1}{2}$

이때 $0\le x\le\pi$에서 $0\le 2x\le 2\pi$이므로

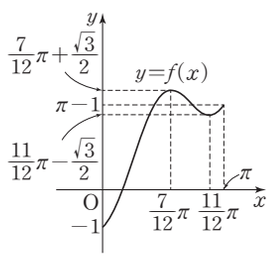
$2x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $2x=\frac{11}{6}\pi$

$\therefore x=\frac{7}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$

$0\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{7}{12}\pi$ | $\cdots$ | $\frac{11}{12}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | −1 | ↗ | $\frac{7}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 극대 | ↘ | $\frac{11}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 극소 | ↗ | $\pi-1$ |

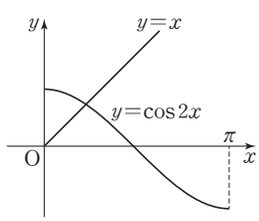
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x$축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.




**다른 풀이**

방정식 $x=\cos 2x$ $(0\le x\le\pi)$의 서로 다른 실근의 개수는 $0\le x\le\pi$에서 두 함수 $y=x$, $y=\cos 2x$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

따라서 두 함수 $y=x$, $y=\cos 2x$의 그래프는 $0\le x\le\pi$에서 오른쪽 그림과 같이 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.




## 0744 답 2

$-x+e=e^{-x}$에서 $e^{-x}+x-e=0$

$f(x)=e^{-x}+x-e$라 하면

$f'(x)=-e^{-x}+1$

$f'(x)=0$에서 $-e^{-x}+1=0$

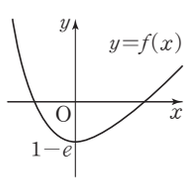
$e^{-x}=1 \quad \therefore x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | $1-e$ 극소 | ↗ |

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

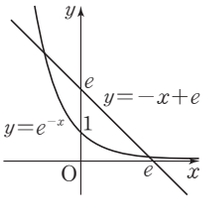
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $x$축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



다른 풀이

방정식 $-x+e=e^{-x}$의 서로 다른 실근의 개수는 두 함수 $y=-x+e$, $y=e^{-x}$의 그래프의 교점의 개수와 같다.

따라서 두 함수 $y=-x+e$, $y=e^{-x}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.




## 0745 답 풀이 참조

$e^x>x-2$에서 $e^x-x+2>0$

$f(x)=e^x-x+2$라 하면

$f'(x)=e^x-1$

$f'(x)=0$에서 $e^x-1=0$ $\therefore x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | 3<br>극소 | ↗ |

함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(0)=3$이므로 모든 실수 $x$에서

$f(x)=e^x-x+2>0$

$\therefore e^x>x-2$

따라서 모든 실수 $x$에서 부등식 $e^x>x-2$가 성립한다.

## 0746 답 풀이 참조

$x^2+\ln x\geq -1$에서 $x^2+\ln x+1\geq 0$

$f(x)=x^2+\ln x+1$이라 하면

$f'(x)=2x+\dfrac{1}{x}$

이때 $1\leq x\leq e$에서 $f'(x)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $1\leq x\leq e$에서 증가한다.

그런데 $f(1)=2$이므로 $1\leq x\leq e$에서

$f(x)\geq 0$, 즉 $x^2+\ln x+1\geq 0$

따라서 $1\leq x\leq e$일 때, 부등식 $x^2+\ln x\geq -1$이 성립한다.

## 0747 답 속도: $\dfrac{1}{2}+2e^4$, 가속도: $-\dfrac{1}{4}+4e^4$

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면

$v=f'(t)=\dfrac{1}{t}+2e^{2t}$

$a=f''(t)=-\dfrac{1}{t^2}+4e^{2t}$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도는 $\dfrac{1}{2}+2e^4$, 가속도는 $-\dfrac{1}{4}+4e^4$이다.

## 0748 답 속도: $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 가속도: $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면

$v=f'(t)=t+\cos t$

$a=f''(t)=1-\sin t$

따라서 $t=\dfrac{\pi}{4}$에서의 점 P의 속도는 $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 가속도는 $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

## 0749 답 속도: (3, 3), 속력: $3\sqrt{2}$, 가속도: (0, 2), 가속도의 크기: 2

$\dfrac{dx}{dt}=3$, $\dfrac{dy}{dt}=2t-1$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$(3,\ 2t-1)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도는 $(3,\ 3)$

$t=2$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$

또 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=0$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=2$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 가속도는 $(0,\ 2)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 $(0,\ 2)$

$t=2$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{0^2+2^2}=2$

## 0750 답 속도: $\left(1,\ -\dfrac{1}{e}\right)$, 속력: $\sqrt{1+\dfrac{1}{e^2}}$, 가속도: $\left(1,\ \dfrac{1}{e}\right)$, 가속도의 크기: $\sqrt{1+\dfrac{1}{e^2}}$

$\dfrac{dx}{dt}=e^{t-1}$, $\dfrac{dy}{dt}=-e^{-t}$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$(e^{t-1},\ -e^{-t})$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도는 $\left(1,\ -\dfrac{1}{e}\right)$

$t=1$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{1^2+\left(-\dfrac{1}{e}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{e^2}}$

또 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=e^{t-1}$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=e^{-t}$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 가속도는

$(e^{t-1},\ e^{-t})$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는 $\left(1,\ \dfrac{1}{e}\right)$

$t=1$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{1^2+\left(\dfrac{1}{e}\right)^2}=\sqrt{1+\dfrac{1}{e^2}}$

## 0751 답 속도: (0, −2), 속력: 2, 가속도: (−4, 0), 가속도의 크기: 4

$\dfrac{dx}{dt}=2\sin 2t$, $\dfrac{dy}{dt}=2\cos 2t$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$(2\sin 2t,\ 2\cos 2t)$

따라서 $t=\dfrac{\pi}{2}$에서의 점 P의 속도는 $(0,\ -2)$

$t=\dfrac{\pi}{2}$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{0^2+(-2)^2}=2$

또 $\dfrac{d^2x}{dt^2}=4\cos 2t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-4\sin 2t$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 가속도는

$(4\cos 2t,\ -4\sin 2t)$

따라서 $t=\dfrac{\pi}{2}$에서의 점 P의 가속도는 $(-4,\ 0)$

$t=\dfrac{\pi}{2}$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{(-4)^2+0^2}=4$

## B 유형 완성 124~133쪽

### 0752 답 $\frac{\pi}{2}$

$f(x)=\sin^2 x$라 하면

$f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$, $f''(x)=2\cos 2x$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로

$2\cos 2x<0$, $\cos 2x<0$

이때 $0<x<\pi$에서 $0<2x<2\pi$이므로

$\frac{\pi}{2}<2x<\frac{3}{2}\pi$ $\therefore$ $\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$

따라서 $a=\frac{\pi}{4}$, $b=\frac{3}{4}\pi$이므로 $b-a=\frac{\pi}{2}$

### 0753 답 2

$f(x)=x^4-24x^2+5x+3$이라 하면

$f'(x)=4x^3-48x+5$

$f''(x)=12x^2-48=12(x^2-4)=12(x+2)(x-2)$

곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로

$12(x+2)(x-2)>0$ $\therefore$ $x<-2$ 또는 $x>2$

이때 $x>a$에서 아래로 볼록하므로

$a\geq 2$

따라서 $a$의 최솟값은 2이다.

### 0754 답 ③

$f(x)=(ax^2-4)e^x$이라 하면

$f'(x)=2axe^x+(ax^2-4)e^x=(ax^2+2ax-4)e^x$

$f''(x)=(2ax+2a)e^x+(ax^2+2ax-4)e^x$

$=(ax^2+4ax+2a-4)e^x$

곡선 $y=f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 위로 볼록하려면 모든 실수 $x$에서 $f''(x)\leq 0$이어야 하므로

$ax^2+4ax+2a-4\leq 0$ ($\because$ $e^x>0$) ····· ㉠

(i) $a=0$일 때,

$-4\leq 0$이므로 부등식 ㉠이 모든 실수 $x$에서 성립한다.

(ii) $a\neq 0$일 때,

이차부등식 ㉠이 모든 실수 $x$에서 성립하려면 $a<0$이어야 하고,

이차방정식 $ax^2+4ax+2a-4=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-a(2a-4)\leq 0$

$2a^2+4a\leq 0$, $a(a+2)\leq 0$

$\therefore$ $-2\leq a<0$ ($\because$ $a<0$)

(i), (ii)에서 $-2\leq a\leq 0$

따라서 정수 $a$는 $-2$, $-1$, 0의 3개이다.

### 0755 답 ④

$f'(x)=\frac{4x}{2x^2+8}=\frac{2x}{x^2+4}$

$f''(x)=\frac{2(x^2+4)-2x\times 2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-2x^2+8}{(x^2+4)^2}$

$=-\frac{2(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로

$-2(x+2)(x-2)>0$, $(x+2)(x-2)<0$

$\therefore$ $-2<x<2$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $(-2, 2)$에서 아래로 볼록하므로

$-2\leq a\leq 1$

이때 정수 $a$는 $-2$, $-1$, 0, 1이므로

$f'(-2)=-\frac{1}{2}$, $f'(-1)=-\frac{2}{5}$, $f'(0)=0$, $f'(1)=\frac{2}{5}$

따라서 $f'(a)$의 최댓값은 $\frac{2}{5}$, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$이므로 그 합은

$\frac{2}{5}+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{10}$

### 0756 답 $\frac{\pi}{3}$

$f(x)=1+\sin 3x$라 하면

$f'(x)=3\cos 3x$

$f''(x)=-9\sin 3x$

$f''(x)=0$에서 $\sin 3x=0$

이때 $\frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$에서 $\frac{\pi}{2}<3x<\frac{5}{2}\pi$이므로

$3x=\pi$ 또는 $3x=2\pi$

$\therefore$ $x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi<x<\frac{5}{6}\pi$에서 $f''(x)<0$

$\frac{\pi}{3}<x<\frac{2}{3}\pi$에서 $f''(x)>0$

즉, $x=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{2}{3}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$, $\left(\frac{2}{3}\pi, 1\right)$이다.

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

### 0757 답 ③

$f(x)=2x^2+\ln x$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=4x+\frac{1}{x}$, $f''(x)=4-\frac{1}{x^2}$

$f''(x)=0$에서

$4-\frac{1}{x^2}=0$, $x^2=\frac{1}{4}$ $\therefore$ $x=\frac{1}{2}$ ($\because$ $x>0$)

$0<x<\frac{1}{2}$에서 $f''(x)<0$

$x>\frac{1}{2}$에서 $f''(x)>0$

즉, $x=\frac{1}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 $x$좌표는 $\frac{1}{2}$이다.

따라서 변곡점에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=2+2=4$

## 0758 답 $\frac{1}{4}$

$f(x)=\frac{1}{x^2+3}$이라 하면

$f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+3)^2}$

$f''(x)=-\frac{2(x^2+3)^2-2x\times2(x^2+3)\times2x}{(x^2+3)^4}=\frac{6x^2-6}{(x^2+3)^3}$

$=\frac{6(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$ …… ⓘ

$f''(x)=0$에서 $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

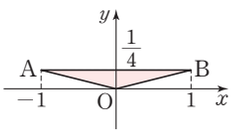
$x<-1$, $x>1$에서 $f''(x)>0$

$-1<x<1$에서 $f''(x)<0$

즉, $x=-1$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 두 변곡점의 좌표는 $\left(-1,\ \frac{1}{4}\right)$, $\left(1,\ \frac{1}{4}\right)$이다. …… ⓘⓘ

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ …… ⓘⓘⓘ




| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ 주어진 곡선의 식을 $f(x)$라 할 때, $f''(x)$ 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ 두 변곡점의 좌표 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ 삼각형 OAB의 넓이 구하기 | 20 % |

## 0759 답 ④

$f(x)=e^{-x}\cos x$라 하면

$f'(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x=-e^{-x}(\sin x+\cos x)$

$f''(x)=e^{-x}(\sin x+\cos x)-e^{-x}(\cos x-\sin x)$

$=2e^{-x}\sin x$

$f''(x)=0$에서 $\sin x=0$ ($\because e^{-x}>0$)

$\therefore x=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$ ($\because x>0$)

이때 $x=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \cdots$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 $x$좌표는

$x_1=\pi,\ x_2=2\pi,\ x_3=3\pi,\ x_4=4\pi,\ \cdots$

또 변곡점의 $y$좌표는

$y_1=-e^{-\pi},\ y_2=e^{-2\pi},\ y_3=-e^{-3\pi},\ y_4=e^{-4\pi},\ \cdots$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}y_{2n}=y_2+y_4+y_6+\cdots=e^{-2\pi}+e^{-4\pi}+e^{-6\pi}+\cdots$

$=\frac{e^{-2\pi}}{1-e^{-2\pi}}=\frac{1}{e^{2\pi}-1}$

## 0760 답 $\frac{1}{2}$

$f'(x)=a\cos x-\sin x+b$

$f''(x)=-a\sin x-\cos x$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극대이므로 $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$에서

$\frac{\sqrt{3}}{2}a-\frac{1}{2}+b=0$ $\therefore \sqrt{3}a+2b=1$ …… ㉠

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 $x$좌표가 $\frac{\pi}{2}$이므로 $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$에서

$-a=0$ $\therefore a=0$

이를 ㉠에 대입하면 $2b=1$ $\therefore b=\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

## 0761 답 ④

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f''(x)=6x+2a$

$x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(1)=4$에서

$3+2a+b=4$ $\therefore 2a+b=1$ …… ㉠

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표가 $(-1,\ 12)$이므로

$f''(-1)=0$, $f(-1)=12$

$f''(-1)=0$에서 $-6+2a=0$ $\therefore a=3$

이를 ㉠에 대입하면 $6+b=1$ $\therefore b=-5$

$f(-1)=12$에서 $-1+a-b+c=12$

$-1+3-(-5)+c=12$ $\therefore c=5$

$\therefore a+b+c=3+(-5)+5=3$

## 0762 답 $-4$

$f(x)=(x^2+ax+b)e^x$이라 하면

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+b)e^x$

$=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$

$f''(x)=(2x+a+2)e^x+\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$

$=\{x^2+(a+4)x+2a+b+2\}e^x$

점 $(-2,\ 10e^{-2})$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로 $f(-2)=10e^{-2}$에서

$(4-2a+b)e^{-2}=10e^{-2}$

$\therefore 2a-b=-6$ …… ㉠

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 $x$좌표가 $-2$이므로 $f''(-2)=0$에서

$\{4-2(a+4)+2a+b+2\}e^{-2}=0$

$b-2=0$ $\therefore b=2$

이를 ㉠에 대입하면 $2a-2=-6$ $\therefore a=-2$

$\therefore ab=-2\times2=-4$

## 0763 답 $\frac{e}{2}$

$f(x)=(\ln ax)^2$이라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=2\ln ax\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln ax}{x}$

$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2(1-\ln ax)}{x^2}$ …… ⓘ

$f''(x)=0$에서 $1-\ln ax=0$

$\ln ax=1$, $ax=e$ $\therefore x=\frac{e}{a}$

$0<x<\frac{e}{a}$에서 $f''(x)>0$, $x>\frac{e}{a}$에서 $f''(x)<0$

즉, $x=\frac{e}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$\left(\frac{e}{a},\ 1\right)$이다. …… ⓘⓘ

이때 변곡점이 직선 $y=2x-3$ 위에 있으므로

$1=\frac{2e}{a}-3$, $\frac{2e}{a}=4$ $\therefore a=\frac{e}{2}$ …… ⓘⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ 주어진 곡선의 식을 $f(x)$라 할 때, $f''(x)$ 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ $a$를 이용하여 변곡점의 좌표 나타내기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ $a$의 값 구하기 | 20 % |

## 0764 답 ③

$f(x)=ax^2+6\sin x+3$이라 하면

$f'(x)=2ax+6\cos x$, $f''(x)=2a-6\sin x$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서

$2a-6\sin x=0$ $\therefore \sin x=\frac{a}{3}$

이때 $-1\le\sin x\le1$이므로 이 방정식이 실근을 가지려면

$-1\le\frac{a}{3}\le1$ $\therefore -3\le a\le3$

$a=-3$일 때, $f''(x)=-6-6\sin x\le0$

$a=3$일 때, $f''(x)=6-6\sin x\ge0$

즉, $a=-3$, $a=3$일 때 $f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 될 수 없다.

따라서 $a$의 값의 범위는 $-3<a<3$이므로 정수 $a$는 $-2$, $-1$, 0, 1, 2의 5개이다.

## 0765 답 ⑤

$f'(x)$, $f''(x)$의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ | $b$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | $c$ | $\cdots$ | $d$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ | $f$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ |

ㄱ. 구간 $(d, f)$에서 $f'(x)<0$이므로 함수 $f(x)$는 이 구간에서 감소한다.

ㄴ. $x=d$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 $+$에서 $-$로 바뀌므로 함수 $f(x)$가 극대가 되는 $x$의 값은 1개이다.

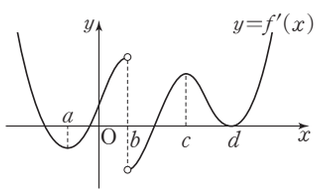
ㄷ. $x=b$, $x=0$, $x=c$, $x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 4개이다.

ㄹ. 구간 $(c, e)$에서 $f''(x)<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 이 구간에서 위로 볼록하다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

## 0766 답 3

아래 그림과 같이 $a$, $b$, $c$, $d$를 정하고 $f''(x)$의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.




| $x$ | $\cdots$ | $a$ | $\cdots$ | $b$ | $\cdots$ | $c$ | $\cdots$ | $d$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ |

$x=a$, $x=c$, $x=d$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 3개이다.

## 0767 답 점 C, 점 F

여섯 개의 점 A, B, C, D, E, F의 $x$좌표를 각각 $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$라 하고 $f'(x)$, $f''(x)$의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $f''(x)$ | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ |

따라서 $f'(x)f''(x)>0$을 만족시키는 점은 점 C, 점 F이다.

## 0768 답 ④

$f'(x)=\frac{2(x^2+1)-2x\times2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$=-\frac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=\frac{-4x(x^2+1)^2-(-2x^2+2)\times2(x^2+1)\times2x}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$

$f'(x)=0$에서 $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

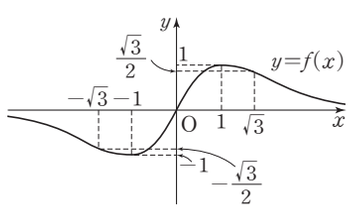
$f''(x)=0$에서 $x(x^2-3)=0$

$\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=\sqrt{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 위로 볼록과 아래로 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-\sqrt{3}$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $\sqrt{3}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ |
| $f''(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | ↘ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 변곡점 | ↗ | $-1$ 극소 | ↗ | 0 변곡점 | ↗ | 1 극대 | ↘ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 변곡점 | ↗ |

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.




ㄱ. $x=1$에서 극대이다.

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 점 $\left(-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, 점 $(0, 0)$, 점 $\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$의 3개이다.

ㄷ. 모든 실수 $x$에서

$f(-x)=\frac{-2x}{(-x)^2+1}=-\frac{2x}{x^2+1}=-f(x)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄹ. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

## 0769 답 ㄱ, ㄷ

$f'(x)=-e^x+(1-x)e^x=-xe^x$

$f''(x)=-e^x-xe^x=-(x+1)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because e^x>0$)

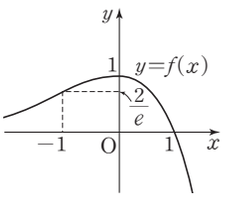
$f''(x)=0$에서 $x+1=0$ $\therefore x=-1$ ($\because e^x>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 위로 볼록과 아래로 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | + | + | 0 | − |
| $f''(x)$ | + | 0 | − | − | − |
| $f(x)$ | ↗ | $\frac{2}{e}$ 변곡점 | ↗ | 1 극대 | ↘ |

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




ㄱ. 치역은 $\{y|y\le1\}$이다.

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점의 좌표는 $\left(-1, \frac{2}{e}\right)$이다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 $x$축이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 0770 답 ⑤

$f'(x)=-e^{-x}\cos x-e^{-x}\sin x$

$=-e^{-x}(\cos x+\sin x)$

$f''(x)=e^{-x}(\cos x+\sin x)-e^{-x}(-\sin x+\cos x)$

$=2e^{-x}\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x+\sin x=0$ ($\because e^{-x}>0$)

$\cos x=-\sin x$ $\therefore x=-\frac{\pi}{4}$ $\left(\because -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x)=0$에서 $\sin x=0$ ($\because e^{-x}>0$)

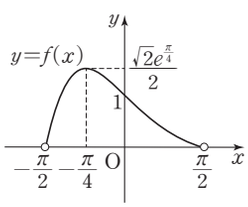
$\therefore x=0$ $\left(\because -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 위로 볼록과 아래로 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | − | − | |
| $f''(x)$ | | − | − | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{2}$ 극대 | ↘ | 1 변곡점 | ↘ | |

이때 $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}-} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+} f(x)=0$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




③ 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 위로 볼록하다.

⑤ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 점 $(0, 1)$의 1개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

## 0771 답 $\frac{9}{8}$

$f'(x)=\frac{x^2+x+2-(x-1)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2}=\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+x+2)^2}$

$=-\frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+x+2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ ($\because -2\le x\le2$)

구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | $-\frac{3}{4}$ | ↘ | $-1$ 극소 | ↗ | $\frac{1}{8}$ |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)=\frac{1}{8}$, 최솟값은 $f(-1)=-1$이므로 구하는 차는

$\frac{1}{8}-(-1)=\frac{9}{8}$

## 0772 답 ⑤

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

구간 $[-3, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-3$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | $\ln10$ | ↘ | 0 극소 | ↗ | $\ln2$ |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-3)=\ln10$이다.

## 0773 답 ②

$f'(x)=2xe^{-x}-(x^2-3)e^{-x}=-(x^2-2x-3)e^{-x}$

$=-(x+1)(x-3)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $(x+1)(x-3)=0$ ($\because e^{-x}>0$)

$\therefore x=3$ ($\because 1\le x\le4$)

구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 1 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | $-\frac{2}{e}$ | ↗ | $\frac{6}{e^3}$ 극대 | ↘ | $\frac{13}{e^4}$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때 최댓값을 갖고, $x=1$일 때 최솟값을 가지므로

$\alpha=3$, $\beta=1$ $\therefore \alpha+\beta=4$

## 0774 답 $6\sqrt{2}$

$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{6-x}$에서 $0\le x\le 6$이고

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{2\sqrt{6-x}}=\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{6-x}}$ …… ⓘ

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{6-x}-\sqrt{x}=0$

$\sqrt{6-x}=\sqrt{x}$, $6-x=x$ $\therefore x=3$

$0\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | 3 | … | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | $\sqrt{6}$ | ↗ | $2\sqrt{3}$ 극대 | ↘ | $\sqrt{6}$ |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(3)=2\sqrt{3}$, 최솟값은 $f(0)=f(6)=\sqrt{6}$이므로

$M=2\sqrt{3}$, $m=\sqrt{6}$ …… ⓘⓘ

$\therefore Mm=6\sqrt{2}$ …… ⓘⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ $f'(x)$ 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘ $M$, $m$의 값 구하기 | 60 % |
| ⓘⓘⓘ $Mm$의 값 구하기 | 10 % |

## 0775 답 $3\sqrt{3}$

$f'(x)=2\cos x(1+\cos x)+2\sin x\times(-\sin x)$

$=2\cos x+2\cos^2 x-2\sin^2 x$

$=2\cos x+2\cos^2 x-2(1-\cos^2 x)$

$=4\cos^2 x+2\cos x-2$

$=2(2\cos x-1)(\cos x+1)$

$f'(x)=0$에서

$\cos x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $\cos x=-1$

$\therefore x=-\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\pi}{3}$ $\left(\because -\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$

$-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | … | $-\frac{\pi}{3}$ | … | $\frac{\pi}{3}$ | … | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | $-2$ | ↘ | $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 극소 | ↗ | $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 극대 | ↘ | 2 |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, 최솟값은

$f\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$이므로

$M=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, $m=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

$\therefore M-m=3\sqrt{3}$

## 0776 답 $100e^{-5}$

$f(x)=(\ln x)^3+6(\ln x)^2-\ln x^{15}$

$=(\ln x)^3+6(\ln x)^2-15\ln x$

$\ln x=t$로 놓으면 $e^{-6}\le x\le e^2$에서

$\ln e^{-6}\le\ln x\le\ln e^2$ $\therefore -6\le t\le 2$

주어진 함수 $f(x)$를 $t$에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=t^3+6t^2-15t$

$\therefore g'(t)=3t^2+12t-15=3(t+5)(t-1)$

$g'(t)=0$에서 $t=-5$ 또는 $t=1$

$-6\le t\le 2$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | $-6$ | … | $-5$ | … | 1 | … | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $g(t)$ | 90 | ↗ | 100 극대 | ↘ | $-8$ 극소 | ↗ | 2 |

따라서 함수 $g(t)$는 $t=-5$에서 최댓값 100을 가지므로 함수 $f(x)$는 $\ln x=-5$, 즉 $x=e^{-5}$에서 최댓값 100을 갖는다.

$\therefore a=e^{-5}$, $b=100$

$\therefore ab=100e^{-5}$

## 0777 답 ①

$f'(x)=ae^{-x}-axe^{-x}=a(1-x)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서

$1-x=0$ ($\because e^{-x}>0$) $\therefore x=1$

$a>0$이므로 구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-1$ | … | 1 | … | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | $-ae$ | ↗ | $\frac{a}{e}$ 극대 | ↘ | $\frac{2a}{e^2}$ |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)=\dfrac{a}{e}$, 최솟값은 $f(-1)=-ae$이고 그 곱이 $-4$이므로

$\dfrac{a}{e}\times(-ae)=-4$, $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

## 0778 답 $2\sqrt{2}$

$f(x)=\ln ax-4x^2$에서 $a>0$이므로 $x>0$이고

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-8x=-\dfrac{8x^2-1}{x}$

$f'(x)=0$에서

$8x^2-1=0$, $x^2=\dfrac{1}{8}$ $\therefore x=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ | … |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − |
| $f(x)$ | | ↗ | $\ln\frac{a}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}$ 극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)=\ln\frac{a}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}$이므로

$\ln\frac{a}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$, $\ln\frac{a}{2\sqrt{2}}=0$

$\frac{a}{2\sqrt{2}}=1$ $\therefore a=2\sqrt{2}$

## 0779 답 $\pi$

$f'(x)=2\sin x+2x\cos x-2\sin x=2x\cos x$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $\frac{\pi}{2}$ | … | $\frac{3}{2}\pi$ | … | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | $a+2$ | ↗ | $a+\pi$ 극대 | ↘ | $a-3\pi$ 극소 | ↗ | $a+2$ |

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a+\pi$이므로

$a+\pi=5\pi$ $\therefore a=4\pi$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=4\pi-3\pi=\pi$

## 0780 답 $\frac{1}{e}$

점 D의 좌표를 $\left(t, \frac{1}{2}e^{-t}\right)$ $(t>0)$이라 하면

$\overline{AD}=2t$, $\overline{CD}=\frac{1}{2}e^{-t}$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=2t\times\frac{1}{2}e^{-t}=te^{-t}$

$\therefore S'(t)=e^{-t}-te^{-t}=(1-t)e^{-t}$

$S'(t)=0$에서

$1-t=0$ ($\because e^{-t}>0$) $\therefore t=1$

$t>0$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | 0 | … | 1 | … |
|---|---|---|---|---|
| $S'(t)$ | | + | 0 | − |
| $S(t)$ | | ↗ | $\frac{1}{e}$ 극대 | ↘ |

따라서 직사각형 ABCD의 넓이 $S(t)$의 최댓값은

$S(1)=\frac{1}{e}$

## 0781 답 ②

1 kg에 $x$만 원인 상품 $\sqrt{30-x}$ kg을 팔아서 생기는 이익을 $f(x)$만 원이라 하면

$f(x)=x\sqrt{30-x}-3\sqrt{30-x}$

$=(x-3)\sqrt{30-x}$

$f'(x)=\sqrt{30-x}-\frac{x-3}{2\sqrt{30-x}}=\frac{2(30-x)-(x-3)}{2\sqrt{30-x}}$

$=-\frac{3(x-21)}{2\sqrt{30-x}}$

$f'(x)=0$에서 $x-21=0$ $\therefore x=21$

$0<x<30$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | 21 | … | 30 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | ↗ | 54 극대 | ↘ | |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(21)=54$이므로 구하는 최대 이익은 54만 원이다.

## 0782 답 ②

$f(x)=3e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=-3e^{-x}$

점 $(t, 3e^{-t})$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-3e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$y-3e^{-t}=-3e^{-t}(x-t)$ $\therefore y=-3e^{-t}x+3(t+1)e^{-t}$

즉, 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $P(t+1, 0)$, $Q(0, 3(t+1)e^{-t})$이므로 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times(t+1)\times3(t+1)e^{-t}=\frac{3}{2}(t+1)^2e^{-t}$

$\therefore S'(t)=3(t+1)e^{-t}-\frac{3}{2}(t+1)^2e^{-t}$

$=-\frac{3}{2}(t+1)(t-1)e^{-t}$

$S'(t)=0$에서 $(t+1)(t-1)=0$ ($\because e^{-t}>0$)

$\therefore t=1$ ($\because t>0$)

$t>0$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

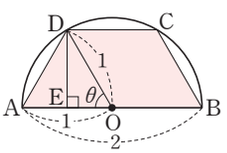
| $t$ | 0 | … | 1 | … |
|---|---|---|---|---|
| $S'(t)$ | | + | 0 | − |
| $S(t)$ | | ↗ | $\frac{6}{e}$ 극대 | ↘ |

따라서 삼각형 OPQ의 넓이 $S(t)$의 최댓값은

$S(1)=\frac{6}{e}$

## 0783 답 $\frac{1}{3}$

점 D에서 선분 AO에 내린 수선의 발을 E라 하자.




$\triangle ODE$에서 $\overline{DE}=\sin\theta$, $\overline{OE}=\cos\theta$

$\therefore \overline{CD}=2\overline{OE}=2\cos\theta$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times(2\cos\theta+2)\times\sin\theta=(\cos\theta+1)\sin\theta$ …… ❶

$\therefore S'(\theta)=-\sin^2\theta+(\cos\theta+1)\cos\theta$

$=-(1-\cos^2\theta)+\cos^2\theta+\cos\theta$

$=2\cos^2\theta+\cos\theta-1$

$=(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)$ …… ❷

$S'(\theta)=0$에서 $(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)=0$

$\cos x=-1$ 또는 $\cos\theta=\frac{1}{2}$ $\quad\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}\left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $S(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $\theta$ | 0 | … | $\frac{\pi}{3}$ | … | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(\theta)$ | | + | 0 | − | |
| $S(\theta)$ | | ↗ | $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 극대 | ↘ | |

따라서 사다리꼴 ABCD의 넓이 $S(\theta)$는 $\theta=\frac{\pi}{3}$일 때 최대이므로

$k=\frac{1}{3}$ …… ⓘⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ 사다리꼴 ABCD의 넓이를 함수 $S(\theta)$로 나타내기 | 40 % |
| ⓘⓘ $S'(\theta)$ 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘⓘ $k$의 값 구하기 | 30 % |

## 0784 답 ③

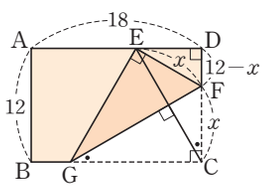
오른쪽 그림과 같이

$\overline{CF}=\overline{EF}=x\ (0<x\le12)$라 하면

$\overline{DF}=12-x$

△DEF에서

$\overline{DE}=\sqrt{x^2-(12-x)^2}=2\sqrt{6(x-6)}$




한편 $\overline{CE}$를 그으면 △DEC와 △CFG에서

$\angle EDC=\angle FCG=90°$, $\angle ECD=\angle FGC$이므로

↳ $\angle ECD=90°-\angle ECG=\angle FGC$

△DEC∽△CFG (AA 닮음)

즉, $\overline{DC}:\overline{CG}=\overline{DE}:\overline{CF}$에서

$12:\overline{CG}=2\sqrt{6(x-6)}:x$

$\therefore\ \overline{CG}=\frac{12x}{2\sqrt{6(x-6)}}=\frac{\sqrt{6}x}{\sqrt{x-6}}\ (6<x\le12)$

삼각형 EGF의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{EF}\times\overline{EG}=\frac{1}{2}\times\overline{CF}\times\overline{CG}$

$=\frac{1}{2}\times x\times\frac{\sqrt{6}x}{\sqrt{x-6}}=\frac{\sqrt{6}x^2}{2\sqrt{x-6}}$

$\therefore\ S'(x)=\frac{2\sqrt{6}x\times2\sqrt{x-6}-\sqrt{6}x^2\times\frac{1}{\sqrt{x-6}}}{4(x-6)}$

$=\frac{9x(x-8)}{2(x-6)\sqrt{6(x-6)}}$

$S'(x)=0$에서 $x(x-8)=0$

$\therefore\ x=8\ (\because\ 6<x\le12)$

$6<x\le12$에서 함수 $S(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 6 | … | 8 | … | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(x)$ | | − | 0 | + | |
| $S(x)$ | | ↘ | $32\sqrt{3}$ 극소 | ↗ | 72 |

따라서 삼각형 EGF의 넓이 $S(x)$의 최솟값은

$S(8)=32\sqrt{3}$

## 0785 답 ④

$f(x)=x^2e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=x(2-x)e^{-x}$

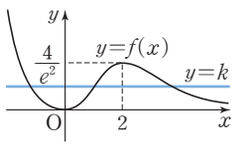
$f'(x)=0$에서 $x(2-x)=0\ (\because\ e^{-x}>0)$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | … | 0 | … | 2 | … |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↘ | 0 극소 | ↗ | $\frac{4}{e^2}$ 극대 | ↘ |

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$0<k<\frac{4}{e^2}$

## 0786 답 ③

$\ln x+\frac{1}{x}-a=0$에서 $\ln x+\frac{1}{x}=a$

$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$이라 하면 $x>0$이고

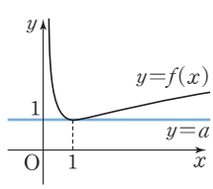
$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x-1=0$ $\quad\therefore\ x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | 1 | … |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↘ | 1 극소 | ↗ |

이때 $\lim_{x\to0+}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




주어진 방정식이 오직 한 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=a$가 한 점에서 만나야 하므로

$a=1$

## 0787 답 $-\frac{\pi}{2}<k\le-1$

$x\sin x+\cos x+k=0$에서 $x\sin x+\cos x=-k$

$f(x)=x\sin x+\cos x$라 하면

$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $x\cos x=0$

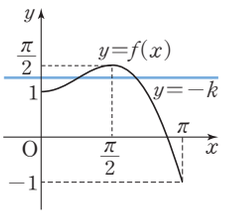
$x=0$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0\le x\le\pi$) …… ❶

$0\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $\frac{\pi}{2}$ | … | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | 1 | ↗ | $\frac{\pi}{2}$ 극대 | ↘ | $-1$ |

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

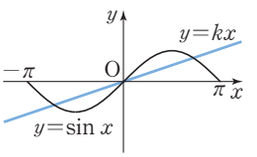
$1\le -k<\frac{\pi}{2}$ $\therefore -\frac{\pi}{2}<k\le -1$ …… ❷

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ $f(x)=x\sin x+\cos x$라 하고 $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값 구하기 | 50 % |
| ❷ $k$의 값의 범위 구하기 | 50 % |

## 0788 답 ③

$-\pi\le x\le\pi$에서 방정식 $\sin x=kx$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.




$f(x)=\sin x$라 하면

$f'(x)=\cos x$ $\therefore f'(0)=1$

즉, 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=x$

$-\pi\le x\le\pi$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 $k$의 값의 범위는

$0\le k<1$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=1$이므로 $\alpha+\beta=1$

## 0789 답 ⑤

$2\sqrt{x+1}=x+k$에서 $2\sqrt{x+1}-x=k$

$f(x)=2\sqrt{x+1}-x$라 하면 $x\ge -1$이고

$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1$

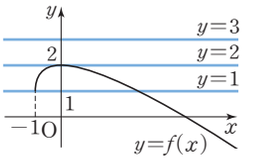
$f'(x)=0$에서 $\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1=0$

$\sqrt{x+1}=1$ $\therefore x=0$

$x\ge -1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-1$ | … | 0 | … |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − |
| $f(x)$ | 1 | ↗ | 2 극대 | ↘ |

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




즉, 방정식 $2\sqrt{x+1}-x=k$의 실근의 개수는

$k<1$, $k=2$일 때 1, $1\le k<2$일 때 2, $k>2$일 때 0

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

**다른 풀이**

방정식 $2\sqrt{x+1}=x+k$의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y=2\sqrt{x+1}$과 직선 $y=x+k$의 교점의 개수와 같다.

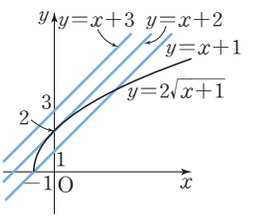
$f(x)=2\sqrt{x+1}$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$

직선 $y=x+k$의 기울기가 1이므로 $f'(x)=1$에서 $x=0$

이때 곡선 $y=2\sqrt{x+1}$ 위의 점 $(0, 2)$에서의 접선의 방정식은

$y=x+2$

즉, 오른쪽 그림과 같이 방정식 $2\sqrt{x+1}=x+k$의 실근의 개수는




$k=1$일 때 2, $k=2$일 때 1, $k=3$일 때 0

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

## 0790 답 ②

$f(x)=x^2-5x+2\ln x$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=2x-5+\frac{2}{x}=\frac{2x^2-5x+2}{x}=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$

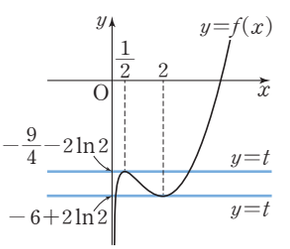
$f'(x)=0$에서 $(2x-1)(x-2)=0$ $\therefore x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $\frac{1}{2}$ | … | 2 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↗ | $-\frac{9}{4}-2\ln 2$ 극대 | ↘ | $-6+2\ln 2$ 극소 | ↗ |

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$이므로 $x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$의 실근의 개수는 곡선 $y=x^2-5x+2\ln x$와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 2이려면

$t=-\frac{9}{4}-2\ln 2$ 또는 $t=-6+2\ln 2$

따라서 모든 실수 $t$의 값의 합은

$\left(-\frac{9}{4}-2\ln 2\right)+(-6+2\ln 2)=-\frac{33}{4}$

## 0791 답 $k<3\ln 2$

$2x>\ln(e^x-2)+k$에서 $2x-\ln(e^x-2)-k>0$

$f(x)=2x-\ln(e^x-2)-k$라 하면

$f'(x)=2-\dfrac{e^x}{e^x-2}$

$f'(x)=0$에서 $2-\dfrac{e^x}{e^x-2}=0$, $e^x=2e^x-4$

$e^x=4$ $\therefore x=\ln 4$

$x>\ln 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\ln 2$ | $\cdots$ | $\ln 4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $3\ln 2-k$<br>극소 | ↗ |

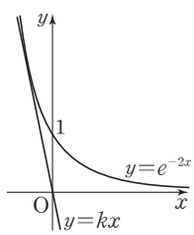
따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(\ln 4)=3\ln 2-k$이므로 $x>\ln 2$에서 $f(x)>0$이 성립하려면

$3\ln 2-k>0$

$\therefore k<3\ln 2$

## 0792 답 ①

모든 실수 $x$에서 부등식 $e^{-2x}\geq kx$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=e^{-2x}$이 직선 $y=kx$보다 위쪽에 있거나 곡선과 직선이 접해야 한다.




$f(x)=e^{-2x}$, $g(x)=kx$라 하면

$f'(x)=-2e^{-2x}$, $g'(x)=k$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $e^{-2t}=kt$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $-2e^{-2t}=k$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $e^{-2t}=-2te^{-2t}$

$\therefore t=-\dfrac{1}{2}$ ($\because e^{-2t}>0$)

이를 ㉡에 대입하면 $k=-2e$

즉, 주어진 부등식이 성립하려면

$-2e\leq k\leq 0$

따라서 $k$의 최솟값은 $-2e$이다.

## 0793 답 ③

$(\ln x)^2-6\ln x\geq k$에서 $(\ln x)^2-6\ln x-k\geq 0$

$f(x)=(\ln x)^2-6\ln x-k$라 하면

$f'(x)=2\ln x\times\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x}=\dfrac{2(\ln x-3)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x-3=0$, $\ln x=3$ $\therefore x=e^3$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $e^3$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $-9-k$<br>극소 | ↗ |

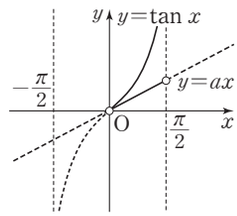
따라서 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(e^3)=-9-k$이므로 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$-9-k\geq 0$ $\therefore k\leq -9$

따라서 $k$의 최댓값은 $-9$이다.

## 0794 답 1

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 부등식 $\tan x>ax$가 성립하려면 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=\tan x$가 직선 $y=ax$보다 위쪽에 있어야 한다.




$f(x)=\tan x$라 하면

$f'(x)=\sec^2 x$

직선 $y=ax$가 원점을 지나는 직선이고 $f'(0)=1$이므로 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$에서 주어진 부등식이 성립하려면 $a\leq 1$

따라서 $a$의 최댓값은 1이다.

## 0795 답 ④

$ae^{-x}\leq\sqrt{2-x^2}\leq be^{-x}$에서 $e^{-x}>0$이므로

$a\leq e^x\sqrt{2-x^2}\leq b$ …… ㉠

$f(x)=e^x\sqrt{2-x^2}$이라 하면 $-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$이고

$f'(x)=e^x\sqrt{2-x^2}+e^x\times\dfrac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}$

$=-\dfrac{(x+2)(x-1)e^x}{\sqrt{2-x^2}}$

$f'(x)=0$에서

$(x+2)(x-1)=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=1$ ($\because -\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$)

$-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-\sqrt{2}$ | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(x)$ | 0 | ↗ | $e$<br>극대 | ↘ | 0 |

$-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2}$에서 $0\leq f(x)\leq e$, 즉 $0\leq e^x\sqrt{2-x^2}\leq e$이므로 ㉠에서 $a\leq 0$, $b\geq e$

따라서 $b-a$의 최솟값은 $e-0=e$

## 0796 답 ②

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$, 가속도를 $a$라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=p+\dfrac{q}{t}$, $a=\dfrac{dv}{dt}=-\dfrac{q}{t^2}$

$t=3$에서의 점 P의 속도가 5이므로

$p+\dfrac{q}{3}=5$ …… ㉠

$t=3$에서의 점 P의 가속도가 1이므로

$-\dfrac{q}{9}=1$ $\therefore q=-9$

이를 ㉠에 대입하면 $p-3=5$ $\therefore p=8$

$\therefore p+q=8+(-9)=-1$

## 0797 답 $2\sqrt{3}$

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$라 하면

$v=f'(t)=a\pi\cos\left(\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$t=2$에서의 점 P의 속도가 $2\pi$이므로

$a\pi\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=2\pi$

$\frac{a}{2}\pi=2\pi$ $\therefore a=4$

따라서 $f(t)=4\sin\left(\pi t+\frac{\pi}{3}\right)$이므로 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$f(2)=4\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}$

## 0798 답 $2e^2$

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=e^{2t}+2(t+k)e^{2t}=(2t+2k+1)e^{2t}$

$t=1$에서 점 P가 운동 방향을 바꾸고, 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$(2k+3)e^2=0$ $\therefore k=-\frac{3}{2}$ …… ⓘ

즉, $v=(2t-2)e^{2t}$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 가속도를 $a$라 하면

$a=\frac{dv}{dt}=2e^{2t}+2(2t-2)e^{2t}=(4t-2)e^{2t}$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는 $2e^2$이다. …… ⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $k$의 값 구하기 | 60 % |
| ⓘⓘ $t=1$에서의 점 P의 가속도 구하기 | 40 % |

## 0799 답 2

두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P$, $v_Q$라 하면

$v_P=\frac{dx_P}{dt}=2t-a$, $v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=e^t+(t-3)e^t=(t-2)e^t$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호가 서로 반대이므로 $v_Pv_Q<0$에서

$(2t-a)(t-2)e^t<0$, $(2t-a)(t-2)<0$ ($\because e^t>0$)

$\therefore \frac{a}{2}<t<2$ ($\because a<4$)

따라서 $\frac{a}{2}=1$이므로 $a=2$

## 0800 답 ⑤

$\frac{dx}{dt}=2\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-\sin t$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$(2\cos t, -\sin t)$

따라서 $t=\frac{\pi}{3}$에서의 점 P의 속도는 $\left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이므로 구하는 속력은

$\sqrt{1^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

## 0801 답 ③

$\frac{dx}{dt}=2t-5$, $\frac{dy}{dt}=t$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$(2t-5, t)$

시각 $t$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(2t-5)^2+t^2}=\sqrt{5(t-2)^2+5}$

따라서 점 P의 속력은 $t=2$일 때 최솟값 $\sqrt{5}$를 갖는다.

## 0802 답 ②

$\frac{dx}{dt}=2at-1$, $\frac{dy}{dt}=2\sqrt{t}$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$(2at-1, 2\sqrt{t})$

따라서 $t=4$에서의 점 P의 속도는 $(8a-1, 4)$이고, 이때의 속력이 5이므로

$\sqrt{(8a-1)^2+4^2}=5$, $64a^2-16a+17=25$

$64a^2-16a-8=0$, $(4a+1)(2a-1)=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because a>0$)

## 0803 답 16 m/s

자동차가 관찰자의 정면을 통과한 순간부터 $t$초 동안 이동한 거리를 $x$ m, $t$초 후 관찰자와 자동차 사이의 거리를 $y$ m라 하면

$x^2+30^2=y^2$ …… ㉠

각 항을 $t$에 대하여 미분하면

$2x\frac{dx}{dt}=2y\frac{dy}{dt}$ …… ㉡

자동차의 속도가 20 m/s이므로 $\frac{dx}{dt}=20$이고 $t=2$일 때 $x=40$이다.

$x=40$을 ㉠에 대입하면

$y^2=40^2+30^2=50^2$ $\therefore y=50$ ($\because y>0$)

$x=40$, $y=50$, $\frac{dx}{dt}=20$을 ㉡에 대입하면

$80\times20=100\times\frac{dy}{dt}$ $\therefore \frac{dy}{dt}=16$

따라서 구하는 속도는 16 m/s이다.

## 0804 답 ②

$\frac{dx}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=3+\frac{1}{t^2}$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$\left(1-\frac{1}{t^2}, 3+\frac{1}{t^2}\right)$

점 P의 속력이 4이므로

$\sqrt{\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2+\left(3+\frac{1}{t^2}\right)^2}=4$, $\frac{2}{t^4}+\frac{4}{t^2}+10=16$

$\frac{3t^4-2t^2-1}{t^4}=0$, $(3t^2+1)(t+1)(t-1)=0$

$\therefore t=1$ ($\because t>0$)

$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2}{t^3}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{2}{t^3}$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 가속도는

$\left(\frac{2}{t^3}, -\frac{2}{t^3}\right)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는 $(2, -2)$이므로 구하는 가속도의 크기는

$\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$

## 0805 답 $3\sqrt{2}e^6$

$\frac{dx}{dt}=2+e^{3t}$, $\frac{dy}{dt}=2-e^{3t}$이므로

$\frac{d^2x}{dt^2}=3e^{3t}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-3e^{3t}$

즉, 시각 $t$에서의 점 P의 가속도는 $(3e^{3t}, -3e^{3t})$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 $(3e^6,\ -3e^6)$이므로 구하는 가속도의 크기는

$\sqrt{(3e^6)^2+(-3e^6)^2}=3\sqrt{2}e^6$

## 0806 답 4

$\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=\frac{k}{t}$이므로

$\frac{d^2x}{dt^2}=2$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{k}{t^2}$

즉, 시각 $t$에서의 점 P의 가속도는 $\left(2,\ -\frac{k}{t^2}\right)$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는 $(2,\ -k)$이고, 이때의 가속도의 크기가 $2\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{2^2+(-k)^2}=2\sqrt{5}$, $4+k^2=20$

$k^2=16$ $\therefore k=4\ (\because k>0)$

## 0807 답 ⑤

$\frac{dx}{dt}=4\cos 2t$, $\frac{dy}{dt}=-8\sin 2t$이므로

$\frac{d^2x}{dt^2}=-8\sin 2t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-16\cos 2t$

즉, 시각 $t$에서의 점 P의 가속도는

$(-8\sin 2t,\ -16\cos 2t)$

$y=2$일 때, $4\cos 2t=2$에서 $\cos 2t=\frac{1}{2}$

$0\le t\le\frac{\pi}{2}$에서 $0\le 2t\le\pi$이므로

$2t=\frac{\pi}{3}$ $\therefore t=\frac{\pi}{6}$

따라서 $t=\frac{\pi}{6}$에서의 점 P의 가속도는 $(-4\sqrt{3},\ -8)$이므로 구하는 가속도의 크기는

$\sqrt{(-4\sqrt{3})^2+(-8)^2}=4\sqrt{7}$

## 0808 답 ③

ㄱ. $t=2\pi$에서의 점 P의 위치는

$(\cos 2\pi,\ 2\pi-\sin 2\pi)$ $\therefore (1,\ 2\pi)$

ㄴ. $\frac{dx}{dt}=-\sin t$, $\frac{dy}{dt}=1-\cos t$

시각 $t$에서의 점 P의 속도는 $(-\sin t,\ 1-\cos t)$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(-\sin t)^2+(1-\cos t)^2}=\sqrt{\sin^2 t+1-2\cos t+\cos^2 t}$

$=\sqrt{2-2\cos t}$

이때 $-1\le\cos t\le 1$이므로 $-2\le -2\cos t\le 2$

$0\le 2-2\cos t\le 4$ $\therefore 0\le\sqrt{2-2\cos t}\le 2$

즉, 점 P의 속력의 최댓값은 2이다.

ㄷ. $\frac{d^2x}{dt^2}=-\cos t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=\sin t$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 가속도는 $(-\cos t,\ \sin t)$

시각 $t$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{(-\cos t)^2+\sin^2 t}=1$

즉, 가속도의 크기는 항상 1로 일정하다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 0809 답 (0, 2)

$\frac{dx}{dt}=e^t-e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=e^t+e^{-t}$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$(e^t-e^{-t},\ e^t+e^{-t})$

$\frac{d^2x}{dt^2}=e^t+e^{-t}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=e^t-e^{-t}$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 가속도는

$(e^t+e^{-t},\ e^t-e^{-t})$ …… ❶

시각 $t$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{(e^t+e^{-t})^2+(e^t-e^{-t})^2}=\sqrt{2(e^{2t}+e^{-2t})}$ …… ❷

$e^{2t}>0$, $e^{-2t}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$e^{2t}+e^{-2t}\ge 2\sqrt{e^{2t}\times e^{-2t}}=2$

(단, 등호는 $e^{2t}=e^{-2t}$, 즉 $t=0$일 때 성립)

따라서 $t=0$일 때, 점 P의 가속도의 크기가 최소이므로 구하는 속도는

$(0,\ 2)$ …… ❸

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ 시각 $t$에서의 점 P의 가속도 구하기 | 30 % |
| ❷ 시각 $t$에서의 점 P의 가속도의 크기 구하기 | 30 % |
| ❸ 점 P의 가속도의 크기가 최소일 때, 점 P의 속도 구하기 | 40 % |

**공통수학 2 다시보기**

산술평균과 기하평균의 관계

➡ $a>0$, $b>0$일 때, $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$일 때 성립)

# AB 유형 점검 134~136쪽

## 0810 답 ③

$f(x)=(2+\ln x)^2-a\ln x$라 하면

$f'(x)=\frac{2(2+\ln x)}{x}-\frac{a}{x}=\frac{2\ln x-a+4}{x}$

$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-(2\ln x-a+4)}{x^2}=\frac{-2\ln x+a-2}{x^2}$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로

$-2\ln x+a-2<0$

$\ln x>\frac{a}{2}-1$ $\therefore x>e^{\frac{a}{2}-1}$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(e^{\frac{a}{2}-1},\ \infty)$에서 위로 볼록하므로

$e^{\frac{a}{2}-1}\le e$, $\frac{a}{2}-1\le 1$ $\therefore a\le 4$

따라서 $a$의 최댓값은 4이다.

## 0811 답 ②

$f'(x)=6\cos 2x+4$, $f''(x)=-12\sin 2x$

$f''(x)=0$에서

$\sin 2x=0$ $\therefore x=\frac{\pi}{2}\ (\because 0<x<\pi)$

이때 $x<\frac{\pi}{2}$에서 $f''(x)<0$, $x>\frac{\pi}{2}$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$에서 위로 볼록하고, 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$에서 아래로 볼록하다.

즉, $x=\frac{\pi}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$

따라서 $a=\frac{\pi}{2}$, $b=2\pi$이므로

$\frac{b}{a}=4$

## 0812 답 $\frac{1}{\sqrt{e}}$

$f'(x)=-n\cos^{n-1}x\sin x$

$f''(x)=n(n-1)\cos^{n-2}x\sin^2x-n\cos^{n-1}x\cos x$

$=n\cos^{n-2}x\{(n-1)\sin^2x-\cos^2x\}$

$=n\cos^{n-2}x(n\sin^2x-1)$

변곡점의 좌표가 $(a_n, b_n)$이므로

$f''(a_n)=0$, $f(a_n)=b_n$

$f''(a_n)=0$에서

$n\sin^2a_n=1$ ($\because \cos x>0$) $\therefore \sin^2a_n=\frac{1}{n}$ …… ㉠

$f(a_n)=b_n$에서

$b_n=\cos^n a_n=(\sqrt{1-\sin^2a_n})^n=\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^n$ ($\because$ ㉠)

$\therefore \lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-\frac{1}{2}}$

$=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

## 0813 답 4

$f(x)=2x^2+2a\cos x+x$라 하면

$f'(x)=4x-2a\sin x+1$, $f''(x)=4-2a\cos x$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 근을 갖는 경우에는 그 근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

$f''(x)=0$에서 $4-2a\cos x=0$ $\therefore \cos x=\frac{2}{a}$ …… ㉠

(i) 방정식 ㉠이 실근을 갖지 않으려면 $-1\le\cos x\le1$이므로

$\left|\frac{2}{a}\right|>1$, $|a|<2$

$\therefore -2<a<0$ 또는 $0<a<2$ ($\because a\neq0$)

(ii) $a=-2$일 때, $f''(x)=4+4\cos x\ge0$

$a=2$일 때, $f''(x)=4-4\cos x\ge0$

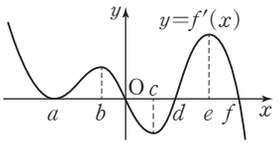
즉, $a=-2$, $a=2$일 때, $f''(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가질 수 없다.

(i), (ii)에서 $a$의 값의 범위는 $-2\le a<0$ 또는 $0<a\le2$

따라서 정수 $a$는 $-2$, $-1$, 1, 2의 4개이다.

## 0814 답 7

오른쪽 그림과 같이 $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$를 정하고 $f'(x)$, $f''(x)$의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.




| $x$ | … | $a$ | … | $b$ | … | 0 | … | $c$ | … | $d$ | … | $e$ | … | $f$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | + | + | + | 0 | − | − | − | 0 | + | + | + | 0 | − |
| $f''(x)$ | − | 0 | + | 0 | − | − | − | 0 | + | + | + | 0 | − | − | − |

$x=0$, $x=d$, $x=f$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 극값을 갖는 $x$의 값의 개수는 3이다. $\therefore m=3$

$x=a$, $x=b$, $x=c$, $x=e$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 4이다. $\therefore n=4$

$\therefore m+n=3+4=7$

## 0815 답 ⑤

$f'(x)=\frac{4x}{2x^2+1}$

$f''(x)=\frac{4(2x^2+1)-4x\times4x}{(2x^2+1)^2}=-\frac{4(2x^2-1)}{(2x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

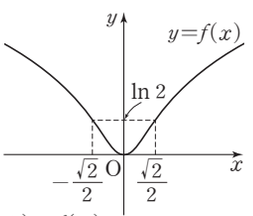
$f''(x)=0$에서 $2x^2-1=0$

$x^2=\frac{1}{2}$ $\therefore x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | … | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | … | 0 | … | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | − | − | 0 | + | + | + |
| $f''(x)$ | − | 0 | + | + | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↘ | $\ln2$ 변곡점 | ↘ | 0 극소 | ↗ | $\ln2$ 변곡점 | ↗ |

이때 $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




② 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(0)=0$

③ 모든 실수 $x$에서

$f(-x)=\ln\{2(-x)^2+1\}=\ln(2x^2+1)=f(x)$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이다.

④ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 점 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \ln2\right)$, 점 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \ln2\right)$의 2개이다.

⑤ 구간 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$에서 $f''(x)>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

## 0816 답 $4\log_32$

$f(x)=\log_3(x+5)+\log_9(7-x)$에서 $-5<x<7$이고

$f'(x)=\frac{1}{(x+5)\ln3}-\frac{1}{(7-x)\ln9}$

$=\frac{1}{(x+5)\ln3}+\frac{1}{2(x-7)\ln3}=\frac{3x-9}{2(x+5)(x-7)\ln3}$

$f'(x)=0$에서 $3x-9=0$ $\therefore x=3$

$-5<x<7$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-5$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $4\log_3 2$ 극대 | ↘ | |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(3)=4\log_3 2$이다.

다른 풀이

$f(x)=\log_3(x+5)+\log_9(7-x)=\log_9(x+5)^2+\log_9(7-x)$
$=\log_9(x+5)^2(7-x)$

이므로 $g(x)=(x+5)^2(7-x)$라 하면 $g(x)$가 최대일 때 $f(x)$도 최대이다.

$g'(x)=2(x+5)(7-x)-(x+5)^2=-3(x+5)(x-3)$

$g'(x)=0$에서

$(x+5)(x-3)=0$ $\therefore x=3$ ($\because -5<x<7$)

$-5<x<7$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-5$ | $\cdots$ | $3$ | $\cdots$ | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | ↗ | $256$ 극대 | ↘ | |

따라서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $g(3)=256$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값은

$\log_9 256=4\log_3 2$

## 0817 답 ④

$f'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

구간 $[0, 2\pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $1$ | ↗ | $\frac{\pi}{2}$ 극대 | ↘ | $-\frac{3}{2}\pi$ 극소 | ↗ | $1$ |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$, 최솟값은

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=-\frac{3}{2}\pi$이므로

$M=\frac{\pi}{2}$, $m=-\frac{3}{2}\pi$ $\therefore M-m=2\pi$

## 0818 답 ③

$f(x)=x\sqrt{a-x^2}$에서 $-\sqrt{a}\le x\le\sqrt{a}$이고

$f'(x)=\sqrt{a-x^2}+x\times\frac{-2x}{2\sqrt{a-x^2}}=-\frac{2x^2-a}{\sqrt{a-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $2x^2-a=0$

$x^2=\frac{a}{2}$ $\therefore x=-\sqrt{\frac{a}{2}}$ 또는 $x=\sqrt{\frac{a}{2}}$

$-\sqrt{a}\le x\le\sqrt{a}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-\sqrt{a}$ | $\cdots$ | $-\sqrt{\frac{a}{2}}$ | $\cdots$ | $\sqrt{\frac{a}{2}}$ | $\cdots$ | $\sqrt{a}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $0$ | ↘ | $-\frac{a}{2}$ 극소 | ↗ | $\frac{a}{2}$ 극대 | ↘ | $0$ |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)=\frac{a}{2}$, 최솟값은

$f\left(-\sqrt{\frac{a}{2}}\right)=-\frac{a}{2}$이므로

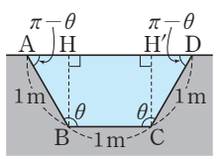
$M=\frac{a}{2}$, $m=-\frac{a}{2}$

이때 $M-m=8$이므로

$\frac{a}{2}-\left(-\frac{a}{2}\right)=8$ $\therefore a=8$

## 0819 답 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

오른쪽 그림과 같이 두 점 B, C에서 $\overline{AD}$에 내린 수선의 발을 각각 H, H′이라 하면




$\angle BAH=\angle CDH'=\pi-\theta$

$\overline{AH}=\overline{DH'}=\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

이므로

$\overline{AD}=2\times(-\cos\theta)+1=1-2\cos\theta$

$\overline{BH}=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

이때 사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times(1-2\cos\theta+1)\times\sin\theta=(1-\cos\theta)\sin\theta$

$\therefore S'(\theta)=\sin^2\theta+(1-\cos\theta)\cos\theta$
$=1-\cos^2\theta+\cos\theta-\cos^2\theta$
$=-2\cos^2\theta+\cos\theta+1$
$=-(2\cos\theta+1)(\cos\theta-1)$

$S'(\theta)=0$에서

$\cos\theta=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos\theta=1$

$\therefore \theta=\frac{2}{3}\pi$ $\left(\because \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$에서 함수 $S(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $\theta$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{2}{3}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(\theta)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $S(\theta)$ | | ↗ | $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 극대 | ↘ | |

따라서 함수 $S(\theta)$의 최댓값은 $S\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$이므로 수로의 단면의 넓이의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$이다.

## 0820 답 ④

$f(x)=g(x)$에서 $e^x=k\sin x$

$\therefore \dfrac{\sin x}{e^x}=\dfrac{1}{k}$

이 방정식의 양의 실근의 개수는 $x>0$에서 함수 $y=\dfrac{\sin x}{e^x}$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{k}$의 교점의 개수와 같다.

$h(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$라 하면

$h'(x)=\dfrac{\cos x\times e^x-\sin x\times e^x}{e^{2x}}=\dfrac{\cos x-\sin x}{e^x}$

$h'(x)=0$에서

$\cos x-\sin x=0$ ($\because e^x>0$)

$\cos x=\sin x$

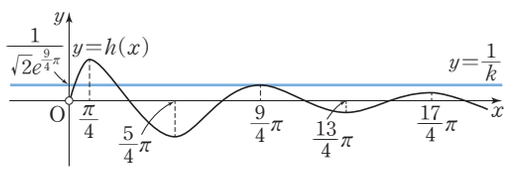
$\therefore x=\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5}{4}\pi, \dfrac{9}{4}\pi, \dfrac{13}{4}\pi, \dfrac{17}{4}\pi, \cdots$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\dfrac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\dfrac{5}{4}\pi$ | $\cdots$ | $\dfrac{9}{4}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | 0 |
| $h(x)$ | | ↗ | $\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}$ 극대 | ↘ | $-\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{5}{4}\pi}}$ 극소 | ↗ | $\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$ 극대 |

| $x$ | $\cdots$ | $\dfrac{13}{4}\pi$ | $\cdots$ | $\dfrac{17}{4}\pi$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | − | 0 | + | 0 | − |
| $h(x)$ | ↘ | $-\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{13}{4}\pi}}$ 극소 | ↗ | $\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{17}{4}\pi}}$ 극대 | ↘ |

즉, $x>0$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.




따라서 $x>0$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{1}{k}$의 교점의 개수가 3이려면 직선 $y=\dfrac{1}{k}$이 $x=\dfrac{9}{4}\pi$에서 함수 $y=h(x)$의 그래프에 접해야 하므로

$\dfrac{1}{k}=\dfrac{1}{\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}}$ $\therefore k=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$

## 0821 답 ②

$f(x)=(x-1)e^x$이라 하면

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because e^x>0$)

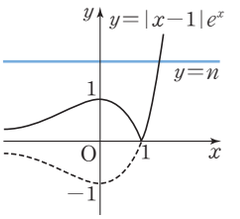
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | $-1$ 극소 | ↗ |

이때 $f(1)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수

$y=|x-1|e^x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 함수 $y=|x-1|e^x$의 그래프와 직선 $y=n$의 교점의 개수는 $n=1$일 때 2, $n\geq2$일 때 1이므로

$a_n=\begin{cases}2 & (n=1)\\ 1 & (n\geq2)\end{cases}$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{20}a_n=2+1\times19=21$

## 0822 답 ③

$f(x)\leq g(x)$에서 $-x\cos x\leq k-\sin x$

$-x\cos x+\sin x\leq k$

$h(x)=-x\cos x+\sin x$라 하면

$h'(x)=-\cos x+x\sin x+\cos x=x\sin x$

$h'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $\sin x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ ($\because 0\leq x\leq2\pi$)

$0\leq x\leq2\pi$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | 0 | + | 0 | − | 0 |
| $h(x)$ | 0 | ↗ | $\pi$ 극대 | ↘ | $-2\pi$ |

즉, $0\leq x\leq2\pi$에서 함수 $h(x)$의 최댓값은 $h(\pi)=\pi$이므로

$0\leq x\leq2\pi$에서 $h(x)\leq k$가 성립하려면

$\pi\leq k$

따라서 $k$의 최솟값은 $\pi$이다.

## 0823 답 ①

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=(2t-1)e^t+(t^2-t-1)e^t=(t^2+t-2)e^t$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$(t^2+t-2)e^t=0$, $t^2+t-2=0$ ($\because e^t>0$)

$(t+2)(t-1)=0$ $\therefore t=1$ ($\because t>0$)

이때 $t=1$의 좌우에서 속도의 부호가 바뀌므로 $t=1$일 때 점 P가 운동 방향을 바꾼다.

## 0824 답 $(4-2\ln2,\ 4-6\ln2)$

$\dfrac{dx}{dt}=2e^t-2$, $\dfrac{dy}{dt}=2e^t-6$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$(2e^t-2,\ 2e^t-6)$

시각 $t$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(2e^t-2)^2+(2e^t-6)^2}=\sqrt{8(e^t-2)^2+8}$

따라서 점 P의 속력은 $e^t=2$, 즉 $t=\ln 2$일 때 최소이므로 이때의 점 P의 위치는

$(4-2\ln 2,\ 4-6\ln 2)$

## 0825 답 5

$f(x)=ax^2+bx+2-\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=2ax+b-\dfrac{1}{x}$

$f''(x)=2a+\dfrac{1}{x^2}$

함수 $f(x)$가 $x=\dfrac{1}{4}$에서 극소이므로 $f'\left(\dfrac{1}{4}\right)=0$에서

$\dfrac{a}{2}+b-4=0$

$\therefore\ a+2b=8$ ····· ㉠

변곡점의 $x$좌표가 $\dfrac{1}{2}$이므로 $f''\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$에서

$2a+4=0$ $\therefore\ a=-2$

이를 ㉠에 대입하면

$-2+2b=8$ $\therefore\ b=5$ ····· ❶

$f(x)=-2x^2+5x+2-\ln x$이므로

$f'(x)=-4x+5-\dfrac{1}{x}$

$=\dfrac{-4x^2+5x-1}{x}$

$=-\dfrac{(4x-1)(x-1)}{x}$

$f'(x)=0$에서

$(4x-1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=\dfrac{1}{4}$ 또는 $x=1$ ····· ❷

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $\frac{1}{4}$ | … | 1 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − |
| $f(x)$ | | ↘ | $\frac{25}{8}+2\ln 2$ 극소 | ↗ | 5 극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(1)=5$이다. ····· ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $a$, $b$의 값 구하기 | 40 % |
| ❷ $f'(x)=0$을 만족시키는 $x$의 값 구하기 | 40 % |
| ❸ $f(x)$의 극댓값 구하기 | 20 % |

## 0826 답 $k\le 1$

$\cos x>k-x^2$에서 $\cos x+x^2-k>0$

$f(x)=\cos x+x^2-k$라 하면

$f'(x)=-\sin x+2x$

$f''(x)=-\cos x+2$

$x>0$일 때 $f''(x)>0$이므로 $x>0$에서 함수 $f'(x)$는 증가하고

$f'(0)=0$이므로

$f'(x)>0$

즉, $x>0$에서 함수 $f(x)$는 증가한다. ····· ❶

따라서 $f(x)>0$이 성립하려면 $f(0)\ge 0$이어야 하므로

$1-k\ge 0$ $\therefore\ k\le 1$ ····· ❷

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $f(x)=\cos x+x^2-k$라 하고 $x>0$에서 함수 $f(x)$가 증가함을 파악하기 | 70 % |
| ❷ $k$의 값의 범위 구하기 | 30 % |

## 0827 답 $2e$

$\dfrac{dx}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)$

$\dfrac{dy}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t)$

이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$(e^t(\cos t-\sin t),\ e^t(\sin t+\cos t))$

시각 $t$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{\{e^t(\cos t-\sin t)\}^2+\{e^t(\sin t+\cos t)\}^2}$

$=e^t\sqrt{2(\sin^2 t+\cos^2 t)}$

$=\sqrt{2}e^t$

점 P의 속력이 $\sqrt{2}e$이므로

$\sqrt{2}e^t=\sqrt{2}e$ $\therefore\ t=1$ ····· ❶

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=e^t(\cos t-\sin t)+e^t(-\sin t-\cos t)=-2e^t\sin t$

$\dfrac{d^2y}{dt^2}=e^t(\sin t+\cos t)+e^t(\cos t-\sin t)=2e^t\cos t$

이므로 시각 $t$에서의 점 P의 가속도는

$(-2e^t\sin t,\ 2e^t\cos t)$

시각 $t$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{(-2e^t\sin t)^2+(2e^t\cos t)^2}=\sqrt{4e^{2t}}=2e^t$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도의 크기는 $2e$이다. ····· ❷

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 점 P의 속력이 $\sqrt{2}e$일 때의 시각 구하기 | 50 % |
| ❷ 점 P의 속력이 $\sqrt{2}e$일 때의 가속도의 크기 구하기 | 50 % |

## 실력 향상 137쪽

## 0828 답 $\dfrac{4}{3}$

$f(x)=\sin 2x+kx^3$이라 하면

$f'(x)=2\cos 2x+3kx^2$

$f''(x)=-4\sin 2x+6kx$

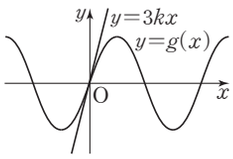
곡선 $y=f(x)$가 오직 하나의 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$의 실근은 1개이고, 그 근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서

$-4\sin 2x+6kx=0$ $\therefore\ 2\sin 2x=3kx$

이 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 $g(x)=2\sin 2x$라 할 때, 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=3kx$는 오직 한 점에서 만나야 한다.

곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=3kx$가 오직 한 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같이 $x=0$에서만 만나야 하고, $x=0$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌려면 곡선 $y=g(x)$ 위의 원점에서의 접선의 기울기가 $3k$ 이하이어야 한다.




$g'(x)=4\cos 2x$이므로 원점에서의 접선의 기울기는

$g'(0)=4$

즉, $4\le 3k$이어야 하므로 $k\ge\frac{4}{3}$

따라서 $k$의 최솟값은 $\frac{4}{3}$이다.

## 0829 답 $-\frac{1}{3}$

$\sin x=u\ (-1\le u\le 1)$로 놓고 함수 $g(x)$를 $u$에 대한 함수 $h(u)$로 나타내면

$h(u)=u^2-4u+1=(u-2)^2-3$

함수 $h(u)$는 $u=1$일 때 최솟값 $-2$, $u=-1$일 때 최댓값 6을 가지므로

$-2\le h(u)\le 6$

$(f\circ g)(x)$, 즉 $(f\circ h)(u)=f(h(u))$에서 $h(u)=t$로 놓으면

$-2\le t\le 6$이고 $f(t)=\frac{2t}{t^2+3}$이므로

$f'(t)=\frac{2(t^2+3)-2t\times 2t}{(t^2+3)^2}=-\frac{2(t^2-3)}{(t^2+3)^2}$

$f'(t)=0$에서

$t^2-3=0$ $\therefore t=-\sqrt{3}$ 또는 $t=\sqrt{3}$

$-2\le t\le 6$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | $-2$ | $\cdots$ | $-\sqrt{3}$ | $\cdots$ | $\sqrt{3}$ | $\cdots$ | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(t)$ | $-\frac{4}{7}$ | ↘ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 극소 | ↗ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 극대 | ↘ | $\frac{4}{13}$ |

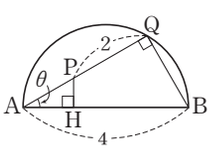
따라서 함수 $(f\circ g)(x)=f(t)$의 최댓값은 $f(\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{3}$, 최솟값은 $f(-\sqrt{3})=-\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$M=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $m=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\therefore Mm=-\frac{1}{3}$

## 0830 답 $\frac{1+\sqrt{33}}{8}$

오른쪽 그림과 같이 선분 BQ를 그으면 삼각형 ABQ는 $\angle AQB=90°$인 직각삼각형이므로




$\overline{AQ}=4\cos\theta$

$\therefore \overline{AP}=\overline{AQ}-\overline{PQ}=4\cos\theta-2$

직각삼각형 PAH에서

$\overline{PH}=\overline{AP}\sin\theta=(4\cos\theta-2)\sin\theta=2\sin\theta(2\cos\theta-1)$

$f(\theta)=2\sin\theta(2\cos\theta-1)$이라 하면

$f'(\theta)=2\cos\theta(2\cos\theta-1)+2\sin\theta(-2\sin\theta)$

$=4\cos^2\theta-2\cos\theta-4\sin^2\theta$

$=4\cos^2\theta-2\cos\theta-4(1-\cos^2\theta)$

$=8\cos^2\theta-2\cos\theta-4$

$f'(\theta)=0$에서

$4\cos^2\theta-\cos\theta-2=0$

$\therefore \cos\theta=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$ $\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{3}\right)$

$0<\theta<\frac{\pi}{3}$에서 $\cos\theta=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$을 만족시키는 $\theta$의 값을 $\theta_1$이라 하고, 함수 $f(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $\theta$ | 0 | $\cdots$ | $\theta_1$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(\theta)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $f(\theta)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |

즉, 함수 $f(\theta)$는 $\theta=\theta_1$일 때 최대이다.

따라서 선분 PH의 길이가 최대가 될 때, $\cos\theta$의 값은

$\cos\theta=\frac{1+\sqrt{33}}{8}$

## 0831 답 3

두 곡선 $y=\sin x-\cos x$, $y=te^{-x}$의 서로 다른 교점의 개수는 방정식 $\sin x-\cos x=te^{-x}$의 실근의 개수와 같다.

$\sin x-\cos x=te^{-x}$에서 $e^{-x}>0$이므로

$e^x(\sin x-\cos x)=t$

$g(x)=e^x(\sin x-\cos x)$라 하면

$g'(x)=e^x(\sin x-\cos x)+e^x(\cos x+\sin x)$

$=2e^x\sin x$

$g'(x)=0$에서

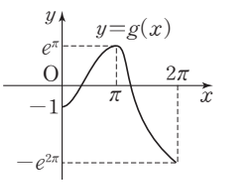
$\sin x=0$ $(\because e^x>0)$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$ $(\because 0\le x\le 2\pi)$

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 |
| $g(x)$ | $-1$ | ↗ | $e^\pi$ 극대 | ↘ | $-e^{2\pi}$ |

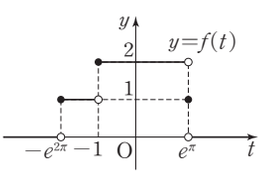
즉, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




주어진 두 곡선의 서로 다른 교점의 개수 $f(t)$는 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=t$의 교점의 개수와 같으므로

$$f(t)=\begin{cases}0 & (t<-e^{2\pi}\text{ 또는 }t>e^\pi)\\ 1 & (-e^{2\pi}\le t<-1\text{ 또는 }t=e^\pi)\\ 2 & (-1\le t<e^\pi)\end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(t)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 불연속인 $t$의 값은 $-e^{2\pi}$, $-1$, $e^\pi$의 3개이다.



# 08 / 여러 가지 함수의 적분

## A 개념 확인 140~141쪽

**0832** 답 $-\frac{1}{4x^4}+C$

$\int \frac{1}{x^5}dx=\int x^{-5}dx=-\frac{1}{4}x^{-4}+C=-\frac{1}{4x^4}+C$

**0833** 답 $\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C$

$\int x^2\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{5}{2}}dx=\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C=\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}+C$

**0834** 답 $6\ln|x|+C$

**0835** 답 $3e^x+C$

**0836** 답 $\frac{7^x}{\ln 7}+C$

**0837** 답 $-4\cos x+3\sin x+C$

**0838** 답 $\sin x+\cot x+C$

**0839** 답 $\tan x-\sec x+C$

$\int \sec x(\sec x-\tan x)\,dx=\int(\sec x^2-\sec x\tan x)\,dx$

$=\tan x-\sec x+C$

**0840** 답 $-\csc x-\cot x+C$

$\int \csc x(\cot x+\csc x)\,dx=\int(\csc x\cot x+\csc^2 x)\,dx$

$=-\csc x-\cot x+C$

**0841** 답 $\frac{93}{5}$

$\int_1^8 \sqrt[3]{x^2}\,dx=\int_1^8 x^{\frac{2}{3}}dx=\left[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_1^8$

$=\frac{96}{5}-\frac{3}{5}=\frac{93}{5}$

**0842** 답 $e$

$\int_0^{\ln 2} e^{x+1}dx=e\int_0^{\ln 2}e^x dx$

$=e\left[e^x\right]_0^{\ln 2}$

$=e(2-1)=e$

**0843** 답 1

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-0=1$

**0844** 답 $2\ln 3$

$\int_1^3\frac{1-x}{x}dx+\int_1^3\frac{1+x}{x}dx=\int_1^3\left(\frac{1-x}{x}+\frac{1+x}{x}\right)dx$

$=\int_1^3\frac{2}{x}dx=\left[2\ln|x|\right]_1^3$

$=2\ln 3-0=2\ln 3$

**0845** 답 $\frac{6}{e^3}$

$\int_0^{\ln 3}(2e^{x-3}+1)\,dx+\int_{\ln 3}^0(-e^{x-3}+1)\,dx$

$=\int_0^{\ln 3}(2e^{x-3}+1)\,dx-\int_0^{\ln 3}(-e^{x-3}+1)\,dx$

$=\int_0^{\ln 3}\{2e^{x-3}+1-(-e^{x-3}+1)\}\,dx$

$=\int_0^{\ln 3}3e^{x-3}dx=\frac{3}{e^3}\int_0^{\ln 3}e^x dx$

$=\frac{3}{e^3}\left[e^x\right]_0^{\ln 3}=\frac{3}{e^3}(3-1)=\frac{6}{e^3}$

**0846** 답 $\frac{3}{8}\pi^2-1$

$\int_{-\pi}^0(\sin x-x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^0(-\sin x+x)\,dx$

$=\int_{-\pi}^0(\sin x-x)\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\sin x+x)\,dx$

$=\int_{-\pi}^0(\sin x-x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-x)\,dx$

$=\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-x)\,dx$

$=\left[-\cos x-\frac{1}{2}x^2\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(0-\frac{\pi^2}{8}\right)-\left(1-\frac{\pi^2}{2}\right)=\frac{3}{8}\pi^2-1$

**0847** 답 $2(e^4-1)$

$f(x)=e^{|x|}$이라 하면

$f(-x)=e^{|-x|}=e^{|x|}=f(x)$

$\therefore \int_{-4}^4 e^{|x|}dx=2\int_0^4 e^{|x|}dx=2\int_0^4 e^x dx$

$=2\left[e^x\right]_0^4=2(e^4-1)$

**0848** 답 1

$f(x)=\sin x$, $g(x)=\cos x$라 하면

$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$

$g(-x)=\cos(-x)=\cos x=g(x)$

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(\sin x+\cos x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\sin x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx$

$=0+2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx$

$=2\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=2\left(\frac{1}{2}-0\right)=1$

## B 유형 완성 142~147쪽

### 0849 답 2

$f(x)=\int\frac{(x-1)(x-2)}{x^2}dx=\int\frac{x^2-3x+2}{x^2}dx$

$=\int\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx=\int\left(1-\frac{3}{x}+2x^{-2}\right)dx$

$=x-3\ln|x|-2x^{-1}+C$

$=x-3\ln|x|-\frac{2}{x}+C$

$f(e)=e-\frac{2}{e}$에서

$e-3-\frac{2}{e}+C=e-\frac{2}{e}$ $\therefore C=3$

따라서 $f(x)=x-3\ln|x|-\frac{2}{x}+3$이므로

$f(1)=1-2+3=2$

### 0850 답 $f(x)=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+x^2+\frac{1}{4}$

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(\sqrt[3]{x}+2x)\,dx=\int(x^{\frac{1}{3}}+2x)\,dx$

$=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+x^2+C$

$=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+x^2+C$

$f(1)=2$에서 $\frac{3}{4}+1+C=2$ $\therefore C=\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+x^2+\frac{1}{4}$

### 0851 답 ③

$F(x)=\int f(x)\,dx$

$=\int\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx=\int\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}dx$

$=\int(\sqrt{x}-1)\,dx=\int(x^{\frac{1}{2}}-1)\,dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-x+C$

$\therefore F(9)-F(4)=(18-9+C)-\left(\frac{16}{3}-4+C\right)=\frac{23}{3}$

### 0852 답 ④

$F(x)=xf(x)-\frac{1+x\ln x}{x}$에서

$F(x)=xf(x)-\frac{1}{x}-\ln x$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}$

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx=\int(x^{-2}-x^{-3})\,dx$

$=-x^{-1}+\frac{1}{2}x^{-2}+C=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C$

$f(1)=0$에서 $-1+\frac{1}{2}+C=0$ $\therefore C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2}$이므로

$f\left(\frac{1}{2}\right)=-2+2+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

### 0853 답 $e^2-4$

$f(x)=\int\frac{e^{2x}-9}{e^x+3}dx=\int\frac{(e^x+3)(e^x-3)}{e^x+3}dx$

$=\int(e^x-3)\,dx=e^x-3x+C$

$f(0)=3$에서 $1+C=3$ $\therefore C=2$

따라서 $f(x)=e^x-3x+2$이므로

$f(2)=e^2-6+2=e^2-4$

### 0854 답 $e^{x+2}+C$

$y=\ln x-2$라 하면

$y+2=\ln x$, $x=e^{y+2}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=e^{x+2}$

따라서 $g(x)=e^{x+2}$이므로

$\int g(x)\,dx=\int e^{x+2}dx=e^2\int e^x\,dx=e^2\times e^x+C=e^{x+2}+C$

### 0855 답 $\frac{1}{4\ln 2}-2$

$\lim_{h\to0}\frac{F(-1+2h)-F(-1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{F(-1+2h)-F(-1)}{2h}\times2$

$=2F'(-1)=2f(-1)$ …… ㉠

…… ❶

$f(x)=\int\frac{8^x+1}{2^x+1}dx=\int\frac{(2^x+1)(4^x-2^x+1)}{2^x+1}dx$

$=\int(4^x-2^x+1)\,dx=\frac{4^x}{\ln4}-\frac{2^x}{\ln2}+x+C$

$=\frac{4^x}{2\ln2}-\frac{2^x}{\ln2}+x+C$ …… ❷

$f(0)=0$에서

$\frac{1}{2\ln2}-\frac{1}{\ln2}+C=0$ $\therefore C=\frac{1}{2\ln2}$

$\therefore f(x)=\frac{4^x}{2\ln2}-\frac{2^x}{\ln2}+x+\frac{1}{2\ln2}$ …… ❸

따라서 구하는 극한값은 ㉠에서

$2f(-1)=2\left(\frac{1}{8\ln2}-\frac{1}{2\ln2}-1+\frac{1}{2\ln2}\right)=\frac{1}{4\ln2}-2$ …… ❹

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 극한값을 미분계수로 나타내기 | 20 % |
| ❷ 부정적분을 이용하여 $f(x)$의 식 세우기 | 40 % |
| ❸ $f(x)$ 구하기 | 30 % |
| ❹ 극한값 구하기 | 10 % |

## 0856 답 $\frac{1}{e}+\frac{5}{2}$

$x<0$일 때, $f(x)=\int(e^x-3)\,dx=e^x-3x+C_1$

$x>0$일 때, $f(x)=\int(x+2e)\,dx=\frac{1}{2}x^2+2ex+C_2$

$f(1)=2e+1$에서 $\frac{1}{2}+2e+C_2=2e+1$ $\therefore C_2=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\begin{cases} e^x-3x+C_1 & (x<0) \\ \frac{1}{2}x^2+2ex+\frac{1}{2} & (x>0) \end{cases}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$에서

$\lim_{x\to0+}\left(\frac{1}{2}x^2+2ex+\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to0-}(e^x-3x+C_1)$

$\frac{1}{2}=1+C_1$ $\therefore C_1=-\frac{1}{2}$

따라서 $x<0$일 때, $f(x)=e^x-3x-\frac{1}{2}$이므로

$f(-1)=\frac{1}{e}+3-\frac{1}{2}=\frac{1}{e}+\frac{5}{2}$

## 0857 답 ②

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 2^{x+1}dx=2\int 2^x\,dx$

$=2\times\frac{2^x}{\ln 2}+C=\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+C$

$f(1)=\frac{4}{\ln 2}$에서 $\frac{4}{\ln 2}+C=\frac{4}{\ln 2}$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{2^{x+1}}{\ln 2}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2}{2^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\ln 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$=\frac{\frac{\ln 2}{4}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\ln 2}{2}$

## 0858 답 $\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{\cos^2x}{1+\sin x}dx$

$=\int\frac{1-\sin^2x}{1+\sin x}dx=\int\frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x}dx$

$=\int(1-\sin x)\,dx$

$=x+\cos x+C$

$f(0)=1$에서 $1+C=1$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=x+\cos x$이므로

$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}$

## 0859 답 $\tan x-\cot x+C$

$\int(\tan x+\cot x)^2dx=\int(\tan^2x+2+\cot^2x)\,dx$

$=\int\{(\sec^2x-1)+2+(\csc^2x-1)\}\,dx$

$=\int(\sec^2x+\csc^2x)\,dx$

$=\tan x-\cot x+C$

## 0860 답 $\pi-2$

$f'(x)=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$

$=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$

$=\int(1+\sin x)\,dx$

$=x-\cos x+C$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ -4)$를 지나므로

$f(0)=-4$에서

$-1+C=-4$ $\therefore C=-3$

따라서 $f(x)=x-\cos x-3$이므로

$f(\pi)=\pi-(-1)-3=\pi-2$

## 0861 답 ②

$f(x)=\int\frac{1}{1+\cos x}dx$

$=\int\frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}dx$

$=\int\frac{1-\cos x}{1-\cos^2x}dx$

$=\int\frac{1-\cos x}{\sin^2x}dx$

$=\int\left(\frac{1}{\sin^2x}-\frac{\cos x}{\sin x}\times\frac{1}{\sin x}\right)dx$

$=\int(\csc^2x-\cot x\csc x)\,dx$

$=-\cot x+\csc x+C$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}+C\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}+C\right)$

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

## 0862 답 4

$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=f'(x)+f'(x)=2f'(x)$

즉, $2f'(x)=\frac{4}{\cos 2x+1}$이므로

$f'(x)=\frac{2}{\cos 2x+1}$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{2}{\cos 2x+1}dx$

$=\int\frac{2}{(2\cos^2x-1)+1}dx$

$=\int\sec^2x\,dx=\tan x+C$

$f(0)=3$에서 $C=3$

따라서 $f(x)=\tan x+3$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1+3=4$

## 0863 답 ④

$$\int_1^9 \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x}dx=\int_1^9 \frac{x+4\sqrt{x}+4}{x}dx=\int_1^9 \left(1+\frac{4}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x}\right)dx$$
$$=\int_1^9 \left(1+4x^{-\frac{1}{2}}+\frac{4}{x}\right)dx$$
$$=\left[x+8x^{\frac{1}{2}}+4\ln|x|\right]_1^9$$
$$=(9+24+4\ln 9)-(1+8)$$
$$=8\ln 3+24$$

## 0864 답 9

$$\int_1^2 \frac{x^2+2x}{x^2}dx+4\int_1^2 \frac{2x-1}{x^2}dx=\int_1^2 \frac{x^2+10x-4}{x^2}dx$$
$$=\int_1^2 \left(1+\frac{10}{x}-4x^{-2}\right)dx$$
$$=\left[x+10\ln|x|+4x^{-1}\right]_1^2$$
$$=(2+10\ln 2+2)-(1+4)$$
$$=10\ln 2-1$$

따라서 $a=10$, $b=-1$이므로

$a+b=9$

## 0865 답 3

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)\,dx$$
$$=\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^3 f(x)\,dx+\int_3^4 f(x)\,dx+\cdots+\int_n^{n+1} f(x)\,dx$$
$$=\int_1^{n+1} f(x)\,dx$$
$$=\int_1^{n+1}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)dx=\int_1^{n+1}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+1\right)dx$$
$$=\left[x^{\frac{1}{2}}+x\right]_1^{n+1}$$
$$=(\sqrt{n+1}+n+1)-(1+1)=\sqrt{n+1}+n-1 \quad \cdots\cdots \text{ⓘ}$$

즉, $\sqrt{n+1}+n-1=4$이므로

$\sqrt{n+1}=5-n$ ····· ㉠

양변을 제곱하면

$n+1=(5-n)^2$, $n^2-11n+24=0$

$(n-3)(n-8)=0$ $\therefore n=3$ 또는 $n=8$

이때 ㉠에서 $n=8$이면 우변이 음수가 되어 등식이 성립하지 않으므로 구하는 자연수 $n$의 값은 3이다. ····· ⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)\,dx$를 $n$에 대한 식으로 나타내기 | 60 % |
| ⓘⓘ $n$의 값 구하기 | 40 % |

## 0866 답 ③

$F(x)=xf(x)$라 하면 $F'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로

$$F(x)=\int\{f(x)+xf'(x)\}\,dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{4}{x^2}\right)dx=\int(x^{-\frac{1}{2}}-4x^{-2})\,dx$$
$$=2x^{\frac{1}{2}}+4x^{-1}+C=2\sqrt{x}+\frac{4}{x}+C$$

$F(1)=f(1)=6$에서

$6+C=6$ $\therefore C=0$

따라서 $F(x)=2\sqrt{x}+\frac{4}{x}$이므로

$xf(x)=2\sqrt{x}+\frac{4}{x}$ $\therefore f(x)=\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x^2}$

$$\therefore \int_1^4 f(x)\,dx=\int_1^4\left(\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x^2}\right)dx=\int_1^4(2x^{-\frac{1}{2}}+4x^{-2})\,dx$$
$$=\left[4x^{\frac{1}{2}}-4x^{-1}\right]_1^4$$
$$=(8-1)-(4-4)=7$$

## 0867 답 ④

$$\int_0^{\ln 3}\frac{(e^x+1)^2-(e^x+1)}{e^x}dx=\int_0^{\ln 3}\frac{e^{2x}+e^x}{e^x}dx$$
$$=\int_0^{\ln 3}(e^x+1)\,dx$$
$$=\left[e^x+x\right]_0^{\ln 3}$$
$$=(3+\ln 3)-1=2+\ln 3$$

## 0868 답 ①

$$\int_0^1\sqrt{4^x-2^{x+1}+1}\,dx=\int_0^1\sqrt{(2^x-1)^2}\,dx$$
$$=\int_0^1(2^x-1)\,dx$$
$$=\left[\frac{2^x}{\ln 2}-x\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{2}{\ln 2}-1\right)-\frac{1}{\ln 2}=\frac{1}{\ln 2}-1$$

## 0869 답 −1

$$\int_0^{\ln 2}\frac{e^x-1}{e^{-x}-1}dx=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x(e^x-1)}{e^x(e^{-x}-1)}dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}\frac{-e^x(1-e^x)}{1-e^x}dx$$
$$=\int_0^{\ln 2}(-e^x)\,dx$$
$$=\left[-e^x\right]_0^{\ln 2}$$
$$=-2-(-1)=-1$$

## 0870 답 33

$$\int_0^1(3^x+2^x)(9^x-6^x+4^x)\,dx$$
$$=\int_0^1(3^x+2^x)(3^{2x}-3^x\times 2^x+2^{2x})\,dx$$
$$=\int_0^1(27^x+8^x)\,dx$$
$$=\left[\frac{27^x}{\ln 27}+\frac{8^x}{\ln 8}\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{27}{\ln 27}+\frac{8}{\ln 8}\right)-\left(\frac{1}{\ln 27}+\frac{1}{\ln 8}\right)$$
$$=\frac{26}{\ln 27}+\frac{7}{\ln 8}=\frac{26}{3\ln 3}+\frac{7}{3\ln 2}$$

따라서 $a=26$, $b=7$이므로

$a+b=33$

## 0871 답 $-2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x-1}{\sin^2 x-1}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x-1}{-\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}} (-1+\sec^2 x)\,dx$$
$$=\Big[-x+\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}$$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=-\frac{1}{6}$이므로

$$\frac{a}{b}=-2$$

## 0872 답 ①

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x-1}{\sin x+\cos x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 x-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin x+\cos x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\cos x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}{\sin x+\cos x}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x-\sin x)\,dx$$
$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1=\sqrt{2}-1$$

## 0873 답 $2\sqrt{3}$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\csc^4 x}{1+\cot^2 x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\csc^4 x}{\csc^2 x}\,dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 3\csc^2 x\,dx=\Big[-3\cot x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=-\sqrt{3}-(-3\sqrt{3})=2\sqrt{3}$$

## 0874 답 $\frac{3}{8}\pi$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{a} \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{a} \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{a} \left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{a} (\sec^2 x+\csc^2 x)\,dx$$
$$=\Big[\tan x-\cot x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{a}$$
$$=(\tan a-\cot a)-(1-1)=\tan a-\cot a$$
$$=\frac{\sin a}{\cos a}-\frac{\cos a}{\sin a}=\frac{\sin^2 a-\cos^2 a}{\sin a\cos a}$$
$$=\frac{-\cos 2a}{\frac{1}{2}\sin 2a}=-2\cot 2a \quad \cdots\cdots \text{ⓘ}$$

즉, $-2\cot 2a=2$이므로 $\cot 2a=-1$

$2a=\frac{3}{4}\pi$ $\left(\because \frac{\pi}{4}<a<\frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore a=\frac{3}{8}\pi$ ····· ⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $\int_{\frac{\pi}{4}}^{a} \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$를 $a$에 대한 식으로 나타내기 | 70 % |
| ⓘⓘ $a$의 값 구하기 | 30 % |

## 0875 답 $9+12\sqrt{3}-\frac{1}{e}$

$$\int_{-1}^{3} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0} (e^x-1)\,dx+\int_0^3 (x^2+6\sqrt{x})\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0} (e^x-1)\,dx+\int_0^3 (x^2+6x^{\frac{1}{2}})\,dx$$
$$=\Big[e^x-x\Big]_{-1}^{0}+\Big[\frac{1}{3}x^3+4x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^3$$
$$=\left\{1-\left(\frac{1}{e}+1\right)\right\}+(9+12\sqrt{3})=9+12\sqrt{3}-\frac{1}{e}$$

## 0876 답 $\frac{1}{\ln 2}+4$

$|2^x-4|=\begin{cases} 4-2^x & (x\le 2) \\ 2^x-4 & (x\ge 2) \end{cases}$이므로

$$\int_0^3 |2^x-4|\,dx$$
$$=\int_0^2 (4-2^x)\,dx+\int_2^3 (2^x-4)\,dx$$
$$=\Big[4x-\frac{2^x}{\ln 2}\Big]_0^2+\Big[\frac{2^x}{\ln 2}-4x\Big]_2^3$$
$$=\left\{\left(8-\frac{4}{\ln 2}\right)-\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{8}{\ln 2}-12\right)-\left(\frac{4}{\ln 2}-8\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{\ln 2}+4$$

## 0877 답 ②

$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서

$|\cos x-\sin x|=\begin{cases} \cos x-\sin x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin x-\cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos x-\sin x|\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x-\sin x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x-\cos x)\,dx$$
$$=\Big[\sin x+\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1\right\}+\left\{-1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$
$$=2\sqrt{2}-2$$

## 0878 답 ⑤

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+} f(x)=\lim_{x\to 0-} f(x)=f(0)$에서

$\lim_{x\to 0+} (-3^x+k)=\lim_{x\to 0-} \cos x$

$-1+k=1$ $\therefore k=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases} \cos x & (x<0) \\ -3^x+2 & (x\ge 0) \end{cases}$이므로

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{3} f(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos x\,dx+\int_0^3 (-3^x+2)\,dx$$
$$=\Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\Big[-\frac{3^x}{\ln 3}+2x\Big]_0^3$$
$$=-(-1)+\left\{\left(-\frac{27}{\ln 3}+6\right)-\left(-\frac{1}{\ln 3}\right)\right\}$$
$$=7-\frac{26}{\ln 3}$$

## 0879 답 ③

$0\le a\le 2$에서 $|5^x-5^a|=\begin{cases}5^a-5^x & (0\le x\le a)\\ 5^x-5^a & (a\le x\le 2)\end{cases}$이므로

$f(a)$

$=\int_0^2 |5^x-5^a|\,dx$

$=\int_0^a (5^a-5^x)\,dx+\int_a^2 (5^x-5^a)\,dx$

$=\left[5^a x-\frac{5^x}{\ln 5}\right]_0^a+\left[\frac{5^x}{\ln 5}-5^a x\right]_a^2$

$=\left\{\left(5^a a-\frac{5^a}{\ln 5}\right)-\left(-\frac{1}{\ln 5}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{25}{\ln 5}-2\times 5^a\right)-\left(\frac{5^a}{\ln 5}-5^a a\right)\right\}$

$=2\times 5^a(a-1)-\frac{2\times 5^a}{\ln 5}+\frac{26}{\ln 5}$

$\therefore f'(a)=2\times 5^a\ln 5(a-1)+2\times 5^a-2\times 5^a$

$=2\ln 5\times 5^a(a-1)$

$f'(a)=0$에서 $a-1=0$ ($\because 5^a>0$) $\quad\therefore a=1$

$0\le a\le 2$에서 함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $a$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(a)$ | $-2+\frac{24}{\ln 5}$ | ↘ | $\frac{16}{\ln 5}$ 극소 | ↗ | $50-\frac{24}{\ln 5}$ |

따라서 함수 $f(a)$의 극솟값은 $f(1)=\frac{16}{\ln 5}$이다.

## 0880 답 ⑤

$f(x)=x\cos x+\tan x$, $g(x)=\sec^2 x$라 하면

$f(-x)=-x\cos(-x)+\tan(-x)=-x\cos x-\tan x$

$=-(x\cos x+\tan x)=-f(x)$

$g(-x)=\sec^2(-x)=\sec^2 x=g(x)$

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x\cos x+\tan x+\sec^2 x)\,dx$

$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x\cos x+\tan x)\,dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx$

$=0+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx=2\left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=2\times 1=2$

## 0881 답 12

$\int_{-\pi}^{\pi} (\sin x-x+3)f(x)\,dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\sin x-xf(x)+3f(x)\}\,dx$

$g(x)=f(x)\sin x-xf(x)$라 하면 모든 실수 $x$에서

$f(-x)=f(x)$이므로

$g(-x)=f(-x)\sin(-x)-(-x)f(-x)$

$=-f(x)\sin x+xf(x)=-g(x)$

$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x-x+3)f(x)\,dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\sin x-xf(x)\}\,dx+\int_{-\pi}^{\pi} 3f(x)\,dx$

$=0+2\int_0^{\pi} 3f(x)\,dx=6\int_0^{\pi} f(x)\,dx$

$=6\times 2=12$

## 0882 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

ㄱ. $f(-x)=-f(x)$에서 $f(x)+f(-x)=0$

$\therefore \int_{-1}^{1} \frac{f(x)+f(-x)}{2}\,dx=0$

ㄴ. $g(x)=f(x)\cos x$라 하면

$g(-x)=f(-x)\cos(-x)=-f(x)\cos x=-g(x)$

$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx=0$

ㄷ. $h(x)=(2^x-2^{-x})f(x)$라 하면

$h(-x)=(2^{-x}-2^x)f(-x)=(2^x-2^{-x})f(x)=h(x)$

$\therefore \int_{-2}^{2} (2^x-2^{-x})f(x)\,dx=2\int_0^2 (2^x-2^{-x})f(x)\,dx\neq 0$

ㄹ. $r(x)=\sin f(x)$라 하면

$r(-x)=\sin f(-x)=\sin\{-f(x)\}=-\sin f(x)=-r(x)$

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin f(x)\,dx=0$

따라서 보기에서 정적분의 값이 항상 0인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

## 0883 답 16

$y=|\sin x|$는 주기가 $\pi$인 주기함수이므로

$\int_0^{\pi} |\sin x|\,dx=\int_{\pi}^{2\pi} |\sin x|\,dx=\int_{2\pi}^{3\pi} |\sin x|\,dx$

$=\cdots=\int_{7\pi}^{8\pi} |\sin x|\,dx$

$\therefore \int_0^{8\pi} |\sin x|\,dx=8\int_0^{\pi} |\sin x|\,dx=8\int_0^{\pi} \sin x\,dx$

$=8\left[-\cos x\right]_0^{\pi}=8(1+1)=16$

## 0884 답 4

$y=|2\cos x|$는 주기가 $\pi$인 주기함수이므로

$\int_k^{k+\pi} |2\cos x|\,dx=\int_0^{\pi} |2\cos x|\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-2\cos x)\,dx$

$=\left[2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-2\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$

$=2+2=4$

## 0885 답 6

(가)에서 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이므로

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} f(x)\,dx=\int_{\frac{7}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} f(x)\,dx$

(나)에서 $f(-x)=\sec^2(-x)=\sec^2 x=f(x)$이므로

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx+\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} f(x)\,dx+\int_{\frac{7}{4}\pi}^{\frac{9}{4}\pi} f(x)\,dx$

$=3\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx=6\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$

$=6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx=6\left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$=6\times 1=6$

## AB 유형 점검 148~150쪽

**0886** 답 ④

$f(x)=\int\frac{5x-2\sqrt{x}}{x}dx=\int(5-2x^{-\frac{1}{2}})dx$

$=5x-4x^{\frac{1}{2}}+C=5x-4\sqrt{x}+C$

$f(1)=3$에서 $5-4+C=3$ $\therefore C=2$

따라서 $f(x)=5x-4\sqrt{x}+2$이므로

$f(4)=20-8+2=14$

**0887** 답 $-\ln 3$

$\int\frac{27^x-1}{9^x+3^x+1}dx=\int\frac{(3^x-1)(9^x+3^x+1)}{9^x+3^x+1}dx$

$=\int(3^x-1)dx=\frac{3^x}{\ln 3}-x+C$

따라서 $a=\ln 3$, $b=-1$이므로

$ab=-\ln 3$

**0888** 답 ②

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2k$에서 $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$에서

$\lim_{x\to 0}f(x)=0$ $\therefore f(0)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$

즉, $f'(0)=2k$이므로

$e+k=2k$ $\therefore k=e$

$f'(x)=e^{x+1}+e$이므로

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(e^{x+1}+e)dx=e^{x+1}+ex+C$

$f(0)=0$에서 $e+C=0$ $\therefore C=-e$

따라서 $f(x)=e^{x+1}+ex-e$이므로

$f(-1)=1-e-e=1-2e$

$\therefore k+f(-1)=e+(1-2e)=1-e$

**0889** 답 ③

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\tan^2 x\,dx$

$=\int(\sec^2 x-1)dx=\tan x-x+C$

$f(0)=\pi$에서 $C=\pi$

따라서 $f(x)=\tan x-x+\pi$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\pi}{4}+\pi=1+\frac{3}{4}\pi$

**0890** 답 ④

$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(\cos^4\frac{x}{2}-\sin^4\frac{x}{2}\right)dx$

$=\int\left(\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)dx$

$=\int\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)dx=\int\cos x\,dx$

$=\sin x+C$

$f(a)=f(0)$에서 $\sin a+C=C$

$\sin a=0$ $\therefore a=\pi$ ($\because 0<a<2\pi$)

**0891** 답 $\frac{16}{5}$

$\int_0^3 f(x)dx-\int_4^3 f(x)dx+\int_4^1 f(x)dx$

$=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^4 f(x)dx-\int_1^4 f(x)dx$

$=\int_0^4 f(x)dx-\int_1^4 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$

$=\int_0^1 3\sqrt{x}(x+1)dx=3\int_0^1(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}})dx$

$=3\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=3\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{5}$

**0892** 답 ④

$\int_0^1(ae^x+bx^3)dx=\left[ae^x+\frac{b}{4}x^4\right]_0^1=ae+\frac{b}{4}-a$

따라서 $ae+\frac{b}{4}-a=2e-\frac{3}{4}$이므로

$a=2$, $\frac{b}{4}-a=-\frac{3}{4}$

즉, $\frac{b}{4}-2=-\frac{3}{4}$이므로 $b=5$

$\therefore a^2+b^2=2^2+5^2=29$

**0893** 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan 2x\tan x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\times\tan x}dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\tan^2 x}{2\tan^2 x}dx$

$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\cot^2 x-1)dx$

$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\csc^2 x-1-1)dx$

$=\frac{1}{2}\left[-\cot x-2x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{2}{3}\pi\right)-\left(-\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\pi}{6}$

**0894** 답 ④

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin x+1}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^0\frac{1}{\sin x-1}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin x+1}dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\sin x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{1+\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}\right)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x+1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{1-\sin^2 x}dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{2}{\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\sec^2 x\,dx$

$=\left[2\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=2$

## 0895 답 ④

$\frac{3}{4}\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi$에서

$|\sin x|+|\cos x| = \begin{cases} \sin x-\cos x & \left(\frac{3}{4}\pi \le x \le \pi\right) \\ -\sin x-\cos x & \left(\pi \le x \le \frac{5}{4}\pi\right) \end{cases}$이므로

$\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(|\sin x|+|\cos x|)\,dx$

$=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}(\sin x-\cos x)\,dx+\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(-\sin x-\cos x)\,dx$

$=\Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}+\Big[\cos x-\sin x\Big]_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}$

$=\left\{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}+\left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-(-1)\right\}=2$

## 0896 답 1

$S(n)=\int_0^n f(x)\,dx=\int_0^1(-\sqrt{x}+e+1)\,dx+\int_1^n e^x\,dx$

$=\int_0^1(-x^{\frac{1}{2}}+e+1)\,dx+\int_1^n e^x\,dx$

$=\Big[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+(e+1)x\Big]_0^1+\Big[e^x\Big]_1^n$

$=\left(-\frac{2}{3}+e+1\right)+(e^n-e)=\frac{1}{3}+e^n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{S(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n}{\frac{1}{3}+e^n}=1$

## 0897 답 ⑤

$f(x)=x^2\tan x$, $g(x)=2\sec^2 x$라 하면

$f(-x)=(-x)^2\tan(-x)=-x^2\tan x=-f(x)$

$g(-x)=2\sec^2(-x)=2\sec^2 x=g(x)$

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(x^2\tan x+2\sec^2 x)\,dx$

$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}x^2\tan x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}2\sec^2 x\,dx$

$=0+2\int_0^{\frac{\pi}{3}}2\sec^2 x\,dx=2\Big[2\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=2\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

## 0898 답 2

$f(x)=x^3\cos x-\sin x$, $g(x)=a\cos x$라 하면

$f(-x)=(-x)^3\cos(-x)-\sin(-x)=-x^3\cos x+\sin x$

$=-(x^3\cos x-\sin x)=-f(x)$

$g(-x)=a\cos(-x)=a\cos x=g(x)$

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(x^3\cos x-\sin x+a\cos x)\,dx$

$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(x^3\cos x-\sin x)\,dx+\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}a\cos x\,dx$

$=0+2\int_0^{\frac{\pi}{6}}a\cos x\,dx=2\Big[a\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$=2\times\frac{1}{2}a=a$

$\therefore a=2$

## 0899 답 $12-4\sqrt{3}$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}3\sin x\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{3}\cos x\,dx$

$=\Big[-3\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}+\Big[\sqrt{3}\sin x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}+3\right)+\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3-\sqrt{3}$

이때 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$에서 함수 $f(x)$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이다.

따라서

$\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)\,dx$

이므로

$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx$

$=4(3-\sqrt{3})=12-4\sqrt{3}$

## 0900 답 $\frac{7}{2}\pi$

㈎에서

$f(-x)=\cos(-x)=\cos x=f(x)$

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx$

$=2\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=2$ …… ㉠

㈏에서 함수 $f(x)$의 주기는 $\pi$이므로

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}f(x)\,dx=\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi}f(x)\,dx=\cdots$

이때 ㉠에 의하여 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=1$, $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=2$이고

$\int_0^a f(x)\,dx=7=1+6=1+3\times 2$이므로

$\int_0^a f(x)\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}f(x)\,dx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi}f(x)\,dx+\int_{\frac{5}{2}\pi}^{\frac{7}{2}\pi}f(x)\,dx$

$=\int_0^{\frac{7}{2}\pi}f(x)\,dx$

$\therefore a=\frac{7}{2}\pi$

## 0901 답 $-\frac{29}{3}$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(\sqrt{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}-5\right)dx$

$=\int(x^{\frac{1}{2}}+6x^{-\frac{1}{2}}-5)\,dx$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+12x^{\frac{1}{2}}-5x+C$

$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+12\sqrt{x}-5x+C$ …… ❶

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}-5=0$

$x-5\sqrt{x}+6=0$, $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)=0$

$\sqrt{x}=2$ 또는 $\sqrt{x}=3$ $\therefore x=4$ 또는 $x=9$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | 4 | … | 9 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{28}{3}+C$ 극대 | ↘ | $9+C$ 극소 | ↗ |

즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(4)=\frac{28}{3}+C$, 극솟값은 $f(9)=9+C$이다.

이때 함수 $f(x)$의 극솟값이 $-10$이므로

$9+C=-10 \quad \therefore C=-19$ …… ⓘⓘ

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$\frac{28}{3}-19=-\frac{29}{3}$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $f'(x)$의 부정적분 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ 적분상수의 값 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ $f(x)$의 극댓값 구하기 | 20 % |

## 0902 답 $\frac{3}{2\ln 2}-1$

$3f'(x)+g'(x)=2^x$, $3f'(x)-g'(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$을 연립하여 정리하면

$f'(x)=\frac{1}{6}\left\{2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}$, $g'(x)=\frac{1}{2}\left\{2^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}$ …… ⓘ

$f(x)=\int\frac{1}{6}\left\{2^x+\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}dx=\frac{1}{6}\left(\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{1}{2^x\ln 2}\right)+C_1$

$f(0)=-1$에서

$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}\right)+C_1=-1 \quad \therefore C_1=-1$

$\therefore f(x)=\frac{1}{6}\left(\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{1}{2^x\ln 2}\right)-1$ …… ⓘⓘ

$g(x)=\int\frac{1}{2}\left\{2^x-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{1}{2^x\ln 2}\right)+C_2$

$g(0)=\frac{1}{\ln 2}$에서

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 2}\right)+C_2=\frac{1}{\ln 2} \quad \therefore C_2=0$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2^x}{\ln 2}+\frac{1}{2^x\ln 2}\right)$ …… ⓘⓘⓘ

$\therefore f(1)+g(1)=\left\{\frac{1}{6}\left(\frac{2}{\ln 2}-\frac{1}{2\ln 2}\right)-1\right\}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\ln 2}+\frac{1}{2\ln 2}\right)$

$=\frac{3}{2\ln 2}-1$ …… ⓘⓥ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $f'(x), g'(x)$ 구하기 | 20 % |
| ⓘⓘ $f(x)$ 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘⓘ $g(x)$ 구하기 | 30 % |
| ⓘⓥ $f(1)+g(1)$의 값 구하기 | 20 % |

## 0903 답 $F(x)=\tan x-\sec x+\sqrt{2}$

함수 $f(x)$는 첫째항이 1이고 공비가 $-\sin x$인 무한등비급수이다.

이때 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 $-1<\sin x<1$이므로

$f(x)=1-\sin x+\sin^2 x-\sin^3 x+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-\sin x)^{n-1}$

$=\frac{1}{1-(-\sin x)}=\frac{1}{1+\sin x}$ …… ⓘ

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int\frac{1}{1+\sin x}dx$

$=\int\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$

$=\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$

$=\int(\sec^2 x-\sec x\tan x)\,dx$

$=\tan x-\sec x+C$ …… ⓘⓘ

함수 $y=F(x)$의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$을 지나므로 $F\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$에서

$1-\sqrt{2}+C=1 \quad \therefore C=\sqrt{2}$

$\therefore F(x)=\tan x-\sec x+\sqrt{2}$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $f(x)$의 식 정리하기 | 30 % |
| ⓘⓘ $f(x)$의 부정적분 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ $F(x)$ 구하기 | 30 % |

## 실력 향상 151쪽

## 0904 답 ②

$x>0$일 때,

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(2-\frac{3}{x^2}\right)dx$

$=\int(2-3x^{-2})\,dx=2x+\frac{3}{x}+C_1$

$f(1)=5$에서 $2+3+C_1=5 \quad \therefore C_1=0$

$\therefore f(x)=2x+\frac{3}{x}$

(가)에서 $x<0$인 모든 실수 $x$에서

$g'(x)=f'(-x)=2-\frac{3}{x^2}$

$\therefore g(x)=\int g'(x)\,dx=\int\left(2-\frac{3}{x^2}\right)dx$

$=\int(2-3x^{-2})\,dx=2x+\frac{3}{x}+C_2 \ (x<0)$

(나)에서 $f(2)+g(-2)=9$이므로

$\left(4+\frac{3}{2}\right)+\left(-4-\frac{3}{2}+C_2\right)=9 \quad \therefore C_2=9$

따라서 $g(x)=2x+\frac{3}{x}+9 \ (x<0)$이므로

$g(-3)=-6-1+9=2$

## 0905 답 $\ln 2$

$x^2f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x+x^2$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x$ 대신 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}$

양변에 $x^2$을 곱하면

$f\left(\frac{1}{x}\right)+2x^2f(x)=3x+1$ ····· ㉡

$2\times$㉡$-$㉠을 하면

$3x^2f(x)=-x^2+3x+2$ $\therefore f(x)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{x}+\frac{2}{3x^2}$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^2 f(x)\,dx&=\int_1^2\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{x}+\frac{2}{3x^2}\right)dx\\&=\int_1^2\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{x}+\frac{2}{3}x^{-2}\right)dx\\&=\left[-\frac{1}{3}x+\ln|x|-\frac{2}{3x}\right]_1^2\\&=\left(-\frac{2}{3}+\ln 2-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)\\&=\ln 2\end{aligned}$$

## 0906 답 4

(i) $0\le x<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}x^n=0$이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3x^n+4x-1}{x^{n+1}+1}=4x-1$

(ii) $x=1$일 때,

$f(1)=\frac{6}{2}=3$

(iii) $x>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$이므로 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x^{n-1}}-\frac{1}{x^n}}{x+\frac{1}{x^n}}=\frac{3}{x}$

(i), (ii), (iii)에서

$$\begin{aligned}\int_0^e f(x)\,dx&=\int_0^1(4x-1)\,dx+\int_1^e\frac{3}{x}\,dx\\&=\left[2x^2-x\right]_0^1+\left[3\ln|x|\right]_1^e\\&=(2-1)+3=4\end{aligned}$$

## 0907 답 33

$\int_{-3}^1(4+\sin x)f(x)\,dx$

$=4\int_{-3}^1 f(x)\,dx+\int_{-3}^1 f(x)\sin x\,dx$ ····· ㉠

$f(-x)=f(x)$이고 (가)에서 $\int_0^1 f(x)\,dx=2$, $\int_1^3 f(x)\,dx=5$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^1 f(x)\,dx&=\int_{-3}^{-1}f(x)\,dx+\int_{-1}^1 f(x)\,dx\\&=\int_1^3 f(x)\,dx+2\int_0^1 f(x)\,dx\\&=5+4=9\end{aligned}$$ ····· ㉡

$g(x)=f(x)\sin x$라 하면

$g(-x)=f(-x)\sin(-x)=-f(x)\sin x=-g(x)$

(나)에서 $\int_1^3 f(x)\sin x\,dx=3$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^1 f(x)\sin x\,dx&=\int_{-3}^3 f(x)\sin x\,dx-\int_1^3 f(x)\sin x\,dx\\&=\int_{-3}^3 g(x)\,dx-\int_1^3 f(x)\sin x\,dx\\&=0-3=-3\end{aligned}$$ ····· ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$\int_{-3}^1(4+\sin x)f(x)\,dx=4\times 9-3=33$

# 09 / 치환적분법과 부분적분법

## A 개념 확인 152~155쪽

## 0908 답 $\frac{1}{36}(6x-1)^6+C$

$6x-1=t$로 놓으면 $6=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\begin{aligned}\int(6x-1)^5\,dx&=\int t^5\times\frac{1}{6}\,dt=\frac{1}{6}\int t^5\,dt\\&=\frac{1}{36}t^6+C\\&=\frac{1}{36}(6x-1)^6+C\end{aligned}$$

## 0909 답 $-\frac{1}{7}\cos(7x+2)+C$

$7x+2=t$로 놓으면 $7=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\begin{aligned}\int\sin(7x+2)\,dx&=\int\sin t\times\frac{1}{7}\,dt=\frac{1}{7}\int\sin t\,dt\\&=-\frac{1}{7}\cos t+C\\&=-\frac{1}{7}\cos(7x+2)+C\end{aligned}$$

## 0910 답 $\frac{1}{8}(x^4+4)^8+C$

$x^4+4=t$로 놓으면 $4x^3=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\begin{aligned}\int 4x^3(x^4+4)^7\,dx&=\int t^7\,dt=\frac{1}{8}t^8+C\\&=\frac{1}{8}(x^4+4)^8+C\end{aligned}$$

## 0911 답 $e^{x^2}+C$

$x^2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int 2xe^{x^2}\,dx=\int e^t\,dt=e^t+C=e^{x^2}+C$

## 0912 답 $\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$

## 0913 답 $-\frac{1}{4}\cos^4 x+C$

$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\begin{aligned}\int\sin x\cos^3 x\,dx&=\int t^3\times(-1)\,dt=-\int t^3\,dt\\&=-\frac{1}{4}t^4+C\\&=-\frac{1}{4}\cos^4 x+C\end{aligned}$$

**0914** 답 $\ln|x^2+5x+2|+C$

$(x^2+5x+2)'=2x+5$이므로

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x+2}dx=\int \frac{(x^2+5x+2)'}{x^2+5x+2}dx$$
$$=\ln|x^2+5x+2|+C$$

**0915** 답 $\ln|\tan x|+C$

$(\tan x)'=\sec^2 x$이므로

$$\int \frac{\sec^2 x}{\tan x}dx=\int \frac{(\tan x)'}{\tan x}dx$$
$$=\ln|\tan x|+C$$

**0916** 답 $3x+5\ln|x-2|+C$

$\frac{3x-1}{x-2}=3+\frac{5}{x-2}$이므로

$$\int \frac{3x-1}{x-2}dx=\int \left(3+\frac{5}{x-2}\right)dx$$
$$=3x+5\ln|x-2|+C$$

**0917** 답 $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$

$\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$이므로

$$\int \frac{1}{x(x+1)}dx=\int \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\ln|x|-\ln|x+1|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C$$

**0918** 답 $\frac{33}{5}$

$x^2-3=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$

$x=1$일 때 $t=-2$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^2 2x(x^2-3)^4dx=\int_{-2}^1 t^4dt=\left[\frac{1}{5}t^5\right]_{-2}^1$$
$$=\frac{1}{5}-\left(-\frac{32}{5}\right)=\frac{33}{5}$$

**0919** 답 $\frac{38}{3}$

$x+6=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$

$x=-2$일 때 $t=4$, $x=3$일 때 $t=9$이므로

$$\int_{-2}^3 \sqrt{x+6}\,dx=\int_4^9 \sqrt{t}\,dt=\int_4^9 t^{\frac{1}{2}}dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_4^9$$
$$=18-\frac{16}{3}=\frac{38}{3}$$

**0920** 답 $e^3-1$

$3x^2=t$로 놓으면 $6x=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=3$이므로

$$\int_0^1 6xe^{3x^2}dx=\int_0^3 e^t dt=\left[e^t\right]_0^3$$
$$=e^3-1$$

**0921** 답 $\ln 2$

$1-\cos x=t$로 놓으면 $\sin x=\frac{dt}{dx}$

$x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1-\cos x}dx=\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{t}dt=\left[\ln|t|\right]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2$$

**0922** 답 (가) $\cos\theta$ (나) $\cos 2\theta$ (다) $\frac{1}{2}\sin 2\theta$ (라) $\frac{\pi}{4}$

**0923** 답 $\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$

$f(x)=x$, $g'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$$\therefore \int xe^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\int \frac{1}{2}e^{2x}dx$$
$$=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$$

**0924** 답 $\frac{3}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2+C$

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=3x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{3}{2}x^2$

$$\therefore \int 3x\ln x\,dx=\frac{3}{2}x^2\ln x-\int \frac{3}{2}x\,dx$$
$$=\frac{3}{2}x^2\ln x-\frac{3}{4}x^2+C$$

**0925** 답 $(x+5)\sin x+\cos x+C$

$f(x)=x+5$, $g'(x)=\cos x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\sin x$

$$\therefore \int (x+5)\cos x\,dx=(x+5)\sin x-\int \sin x\,dx$$
$$=(x+5)\sin x+\cos x+C$$

**0926** 답 $-\frac{1}{2}x\cos 4x+\frac{1}{8}\sin 4x+C$

$f(x)=2x$, $g'(x)=\sin 4x$로 놓으면

$f'(x)=2$, $g(x)=-\frac{1}{4}\cos 4x$

$$\therefore \int 2x\sin 4x\,dx=-\frac{1}{2}x\cos 4x-\int \left(-\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx$$
$$=-\frac{1}{2}x\cos 4x+\frac{1}{8}\sin 4x+C$$

**0927** 답 $-\frac{6}{e^4}+2$

$f(x)=x+1$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-e^{-x}$

$$\therefore \int_0^4 (x+1)e^{-x}dx=\left[-(x+1)e^{-x}\right]_0^4-\int_0^4 (-e^{-x})dx$$
$$=-5e^{-4}+1-\left[e^{-x}\right]_0^4$$
$$=-5e^{-4}+1-(e^{-4}-1)=-\frac{6}{e^4}+2$$

**0928** 답 $e^2+1$

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=1$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x$

$\therefore \int_1^{e^2} \ln x\,dx=\left[x\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2} dx$

$=2e^2-\left[x\right]_1^{e^2}$

$=2e^2-(e^2-1)=e^2+1$

**0929** 답 8

$f(x)=2x+6$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=2$, $g(x)=-\cos x$

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x+6)\sin x\,dx$

$=\left[-(2x+6)\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2\cos x)\,dx$

$=6-\left[-2\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=6-(-2)=8$

**0930** 답 $\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}$

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=x^2$으로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{1}{3}x^3$

$\therefore \int_1^e x^2\ln x\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{1}{3}x^2\,dx$

$=\frac{1}{3}e^3-\left[\frac{1}{9}x^3\right]_1^e$

$=\frac{1}{3}e^3-\left(\frac{1}{9}e^3-\frac{1}{9}\right)=\frac{2}{9}e^3+\frac{1}{9}$

**0931** 답 $x^2e^x$

**0932** 답 $x\cos x$

**0933** 답 $\ln\frac{x+1}{x}$

$\frac{d}{dx}\int_x^{x+1} \ln 2t\,dt=\ln 2(x+1)-\ln 2x$

$=\ln\frac{x+1}{x}$

**0934** 답 $(x+1)\sin(x+3)-(x-2)\sin x$

**0935** 답 $f(x)=4e^{4x}+1$

주어진 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=4e^{4x}+1$

**0936** 답 $f(x)=\frac{1}{x}-2$

주어진 식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{1}{x}-2$

**0937** 답 $\ln 2$

$f(t)=\ln(4t-2)$라 하고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x \ln(4t-2)\,dt=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt$

$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}$

$=F'(1)=f(1)=\ln 2$

**0938** 답 $\frac{\pi^2}{4}$

$f(t)=t^2\sin t$라 하고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}} t^2\sin t\,dt=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}} f(t)\,dt$

$=\lim_{x\to 0}\frac{F\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x}$

$=F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$

## B 유형 완성 156~167쪽

**0939** 답 7

$x^2+4=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int x\sqrt{x^2+4}\,dx=\int \sqrt{t}\times\frac{1}{2}dt=\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt$

$=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}t\sqrt{t}+C=\frac{1}{3}(x^2+4)\sqrt{x^2+4}+C$

$f(0)=\frac{2}{3}$에서 $\frac{8}{3}+C=\frac{2}{3}$ $\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+4)\sqrt{x^2+4}-2$이므로

$f(\sqrt{5})=\frac{1}{3}\times 9\times 3-2=7$

다른 풀이

$\sqrt{x^2+4}=t$로 놓고 양변을 제곱하면 $x^2+4=t^2$이므로 $2x=2t\frac{dt}{dx}$

$\therefore f(x)=\int x\sqrt{x^2+4}\,dx=\int t\times t\,dt=\int t^2\,dt$

$=\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}(x^2+4)\sqrt{x^2+4}+C$

$f(0)=\frac{2}{3}$에서 $\frac{8}{3}+C=\frac{2}{3}$ $\therefore C=-2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}(x^2+4)\sqrt{x^2+4}-2$이므로

$f(\sqrt{5})=\frac{1}{3}\times 9\times 3-2=7$

**0940** 답 ①

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, y)$에서의 접선의 기울기가 $2\sin\frac{x}{2}$이므로

$f'(x)=2\sin\frac{x}{2}$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 2\sin\frac{x}{2}\,dx$

$=-4\cos\frac{x}{2}+C$

$\therefore f(\pi)-f(2\pi)=C-(4+C)=-4$

## 0941 답 41

$x^3-2=t$로 놓으면 $3x^2=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int x^2(x^3-2)^5\,dx=\int t^5\times\frac{1}{3}\,dt$

$=\frac{1}{18}t^6+C=\frac{1}{18}(x^3-2)^6+C$

$f(1)=\frac{5}{9}$에서 $\frac{1}{18}+C=\frac{5}{9}$ $\therefore C=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{18}(x^3-2)^6+\frac{1}{2}$

따라서 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(-1)=\frac{1}{18}\times(-3)^6+\frac{1}{2}=41$

## 0942 답 $-2$

$f'(x)=\frac{1}{(2x-7)^2}$

$2x-7=t$로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{1}{(2x-7)^2}\,dx$

$=\int\frac{1}{t^2}\times\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int t^{-2}\,dt$

$=-\frac{1}{2}t^{-1}+C=-\frac{1}{2t}+C$

$=-\frac{1}{2(2x-7)}+C$

$f(3)=-1$에서 $\frac{1}{2}+C=-1$ $\therefore C=-\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2(2x-7)}-\frac{3}{2}$이므로

$f(4)=-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-2$

## 0943 답 ⑤

$x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이고 $1=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int\frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx=\int\frac{t+1}{\sqrt{t}}\,dt=\int(t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}})\,dt$

$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+2\sqrt{t}+C$

$=\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-1}+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $\left(1,\frac{1}{3}\right)$을 지나므로

$f(1)=\frac{1}{3}$에서 $C=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-1}+\frac{1}{3}$이므로

$f(2)=\frac{2}{3}+2+\frac{1}{3}=3$

다른 풀이

$\sqrt{x-1}=t$로 놓고 양변을 제곱하면 $x-1=t^2$이므로

$1=2t\frac{dt}{dx}$

$\therefore f(x)=\int\frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx=\int\frac{t^2+1}{t}\times 2t\,dt=2\int(t^2+1)\,dt$

$=2\left(\frac{1}{3}t^3+t\right)+C=\frac{2}{3}t^3+2t+C$

$=\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-1}+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $\left(1,\frac{1}{3}\right)$을 지나므로

$f(1)=\frac{1}{3}$에서 $C=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1}+2\sqrt{x-1}+\frac{1}{3}$이므로

$f(2)=\frac{2}{3}+2+\frac{1}{3}=3$

## 0944 답 ④

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=6$에서 $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$에서

$\lim_{x\to 0}\{f(x)-2\}=0$ $\therefore f(0)=2$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$

즉, $f'(0)=6$이므로 $3a=6$ $\therefore a=2$

따라서 $f'(x)=6e^{3x}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 6e^{3x}\,dx=2e^{3x}+C$

$f(0)=2$에서 $2+C=2$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=2e^{3x}$이므로

$f'(1)-f(1)=6e^3-2e^3=4e^3$

## 0945 답 8

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int\frac{3(\ln x)^2}{x}\,dx=\int 3t^2\,dt$

$=t^3+C=(\ln x)^3+C$

$f(e)=1$에서 $1+C=1$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=(\ln x)^3$이므로

$f(e^2)=2^3=8$

## 0946 답 $f(x)=(e^x-2)^5$

$e^x-2=t$로 놓으면 $e^x=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 5e^x(e^x-2)^4\,dx=5\int t^4\,dt$

$=t^5+C=(e^x-2)^5+C$

$f(0)=-1$에서 $-1+C=-1$ $\therefore C=0$

$\therefore f(x)=(e^x-2)^5$

## 0947 답 $\frac{4}{3}$

$\ln 2x+1=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$F(x)=\int\frac{\sqrt{\ln 2x+1}}{x}dx=\int\sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{2}{3}(\ln 2x+1)\sqrt{\ln 2x+1}+C$$

$F\left(\frac{1}{2}\right)=2$에서 $\frac{2}{3}+C=2$ $\quad\therefore C=\frac{4}{3}$

따라서 $F(x)=\frac{2}{3}(\ln 2x+1)\sqrt{\ln 2x+1}+\frac{4}{3}$이므로

$F\left(\frac{1}{2e}\right)=\frac{4}{3}$

## 0948 답 $5\sqrt{2}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, y)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$이므로 $f'(x)=\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}$

$e^x+1=t$로 놓으면 $e^x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$$
$$=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C$$
$$=2\sqrt{e^x+1}+C \quad\cdots\cdots ❶$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 3\sqrt{2})$를 지나므로 $f(0)=3\sqrt{2}$에서

$2\sqrt{2}+C=3\sqrt{2}$ $\quad\therefore C=\sqrt{2}$

따라서 $f(x)=2\sqrt{e^x+1}+\sqrt{2}$이므로 $\quad\cdots\cdots ❷$

$f(\ln 7)=2\sqrt{7+1}+\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ $\quad\cdots\cdots ❸$

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $f'(x)$의 부정적분 구하기 | 50 % |
| ❷ $f(x)$ 구하기 | 30 % |
| ❸ $f(\ln 7)$의 값 구하기 | 20 % |

## 0949 답 ④

$f'(x)=\frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1}$

$\ln(x^2+1)=t$로 놓으면 $\frac{2x}{x^2+1}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{x\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx$$
$$=\int t\times\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{4}t^2+C$$
$$=\frac{1}{4}\{\ln(x^2+1)\}^2+C$$

$f(0)=\frac{3}{4}$에서 $C=\frac{3}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}\{\ln(x^2+1)\}^2+\frac{3}{4}$이므로

$f(\sqrt{e-1})=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1$

## 0950 답 $\frac{3}{2}$

주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=f(x)+\ln x+1-3$

$xf'(x)=\ln x-2$

$\therefore f'(x)=\frac{\ln x-2}{x}$

$\ln x-2=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\frac{\ln x-2}{x}dx=\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}(\ln x-2)^2+C$$

$f(1)=3$에서 $2+C=3$ $\quad\therefore C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x-2)^2+1$이므로

$f(e)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

## 0951 답 $\frac{1}{2}$

$$\int\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx=\int\frac{\sin x\times\sin^2 x}{1-\cos x}dx$$
$$=\int\frac{\sin x(1-\cos^2 x)}{1-\cos x}dx$$
$$=\int\frac{\sin x(1+\cos x)(1-\cos x)}{1-\cos x}dx$$
$$=\int\sin x(1+\cos x)\,dx$$

$1+\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int\sin x(1+\cos x)\,dx=\int t\times(-1)\,dt=-\frac{1}{2}t^2+C$$
$$=-\frac{1}{2}(1+\cos x)^2+C$$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$, $b=1$이므로 $a+b=\frac{1}{2}$

## 0952 답 3

$\cot x=t$로 놓으면 $-\csc^2 x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\csc^2 x\cot^3 x\,dx=\int t^3\times(-1)\,dt$$
$$=-\frac{1}{4}t^4+C=-\frac{1}{4}\cot^4 x+C$$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$에서 $-\frac{9}{4}+C=1$ $\quad\therefore C=\frac{13}{4}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{4}\cot^4 x+\frac{13}{4}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{4}+\frac{13}{4}=3$

## 0953 답 ①

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\cos x\cos 2x\,dx$$
$$=\int\cos x(1-2\sin^2 x)\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\displaystyle\int \cos x(1-2\sin^2 x)\,dx=\int (1-2t^2)\,dt$

$=-\dfrac{2}{3}t^3+t+C=-\dfrac{2}{3}\sin^3 x+\sin x+C$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$에서 $-\dfrac{2}{3}+1+C=1$ $\quad\therefore C=\dfrac{2}{3}$

따라서 $f(x)=-\dfrac{2}{3}\sin^3 x+\sin x+\dfrac{2}{3}$이므로

$f(\pi)=\dfrac{2}{3}$

## 0954 답 ③

$\displaystyle\int \frac{3x^2-6x}{x^3-3x^2+5}\,dx=\int \frac{(x^3-3x^2+5)'}{x^3-3x^2+5}\,dx$

$=\ln|x^3-3x^2+5|+C$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+5$이므로

$f(1)=1-3+5=3$

## 0955 답 $2\ln 2$

$F(x)=\displaystyle\int \frac{\cos x}{3-\sin x}\,dx=-\int \frac{(3-\sin x)'}{3-\sin x}\,dx$

$=-\ln(3-\sin x)+C$ ($\because 3-\sin x>0$)

$F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3\ln 2$에서 $-\ln 2+C=3\ln 2$ $\quad\therefore C=4\ln 2$

따라서 $F(x)=-\ln(3-\sin x)+4\ln 2$이므로

$F\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=-\ln 4+4\ln 2=2\ln 2$

## 0956 답 ④

$f(x)=\displaystyle\int \frac{5e^{4x}-x}{e^{4x}+3}\,dx+\int \frac{3e^{4x}+x}{e^{4x}+3}\,dx$

$=\displaystyle\int \frac{8e^{4x}}{e^{4x}+3}\,dx=2\int \frac{(e^{4x}+3)'}{e^{4x}+3}\,dx$

$=2\ln(e^{4x}+3)+C$ ($\because e^{4x}+3>0$)

$f(0)=0$에서 $2\ln 4+C=0$ $\quad\therefore C=-2\ln 4$

따라서 $f(x)=2\ln(e^{4x}+3)-2\ln 4$이므로

$f(\ln 3)=2\ln(e^{\ln 81}+3)-2\ln 4=2\ln 84-2\ln 4=2\ln 21$

## 0957 답 3

$f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,dx=\int \frac{x-1}{x^2-2x-2}\,dx$

$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{(x^2-2x-2)'}{x^2-2x-2}\,dx$

$=\dfrac{1}{2}\ln|x^2-2x-2|+C$

$f(1)=\dfrac{\ln 3}{2}$에서 $\dfrac{\ln 3}{2}+C=\dfrac{\ln 3}{2}$ $\quad\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln|x^2-2x-2|$이므로 $f(x)=0$에서

$\dfrac{1}{2}\ln|x^2-2x-2|=0$ $\quad\therefore |x^2-2x-2|=1$

(i) $x^2-2x-2=1$일 때,

$x^2-2x-3=0$, $(x+1)(x-3)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

(ii) $x^2-2x-2=-1$일 때,

$x^2-2x-1=0$

$\therefore x=1-\sqrt{2}$ 또는 $x=1+\sqrt{2}$

따라서 구하는 자연수 $x$의 값은 3이다.

## 0958 답 32

$\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\int 3\,dx$이므로

$\ln f(x)=3x+C$ ($\because f(x)>0$)

$\therefore f(x)=e^{3x+C}$ ····· ❶

$f(0)=4$에서 $e^C=4$ $\quad\therefore C=\ln 4$

따라서 $f(x)=e^{3x+\ln 4}$이므로 ····· ❷

$f(\ln 2)=e^{3\ln 2+\ln 4}=e^{\ln 32}=32$ ····· ❸

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분을 이용하여 $f(x)$의 식 세우기 | 60 % |
| ❷ $f(x)$ 구하기 | 30 % |
| ❸ $f(\ln 2)$의 값 구하기 | 10 % |

## 0959 답 ③

$f(x)=\displaystyle\int \frac{2x^2+3x+2}{x+1}\,dx=\int \frac{(2x+1)(x+1)+1}{x+1}\,dx$

$=\displaystyle\int\left(2x+1+\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=x^2+x+\ln|x+1|+C$

$f(0)=1$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=x^2+x+\ln|x+1|+1$이므로

$f(1)=\ln 2+3$

## 0960 답 ⑤

$\displaystyle\int \frac{1-2x}{x+4}\,dx=\int\left(-2+\frac{9}{x+4}\right)dx$

$=-2x+9\ln|x+4|+C$

따라서 $p=-2$, $q=9$, $r=4$이므로 $p+q+r=11$

## 0961 답 $-2+4\ln 3$

$y=\dfrac{3x-1}{x+1}$이라 하면 $y(x+1)=3x-1$

$x(3-y)=y+1$ $\quad\therefore x=\dfrac{y+1}{3-y}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=\dfrac{x+1}{3-x}$이므로

$g(x)=\dfrac{x+1}{3-x}$

$\therefore h(x)=\displaystyle\int g(x)\,dx=\int \frac{x+1}{3-x}\,dx$

$=\displaystyle\int\left(-1+\frac{4}{3-x}\right)dx$

$=-x-4\ln|3-x|+C$

$\therefore h(2)-h(0)=(-2+C)-(-4\ln 3+C)=-2+4\ln 3$

## 0962 답 ⑤

$$f(x)=\int\frac{2x+5}{x^2+3x}dx-\int\frac{2x+2}{x^2+3x}dx$$
$$=\int\left(\frac{2x+5}{x^2+3x}-\frac{2x+2}{x^2+3x}\right)dx$$
$$=\int\frac{3}{x^2+3x}dx=\int\frac{3}{x(x+3)}dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=\ln|x|-\ln|x+3|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+C$$

$f(1)=\ln 2$에서

$\ln\frac{1}{4}+C=\ln 2$ $\quad\therefore C=3\ln 2$

따라서 $f(x)=\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+3\ln 2$이므로

$f(3)=\ln\left|\frac{1}{2}\right|+3\ln 2=-\ln 2+3\ln 2=2\ln 2$

## 0963 답 $-2\ln 3$

$\frac{x}{x^2-5x+6}=\frac{x}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}$ ($A$, $B$는 상수)로 놓으면

$\frac{x}{(x-2)(x-3)}=\frac{(A+B)x-(3A+2B)}{(x-2)(x-3)}$

위의 식은 $x$에 대한 항등식이므로

$A+B=1$, $3A+2B=0$

두 식을 연립하여 풀면 $A=-2$, $B=3$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int\frac{x}{x^2-5x+6}dx$$
$$=\int\left(-\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}\right)dx$$
$$=-2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+C$$

$f(1)=-3\ln 2$에서

$3\ln 2+C=-3\ln 2$ $\quad\therefore C=-6\ln 2$

따라서 $f(x)=-2\ln|x-2|+3\ln|x-3|-6\ln 2$이므로

$f(-1)=-2\ln 3+3\ln 4-6\ln 2=-2\ln 3$

## 0964 답 8

$$f(x)=\int\frac{9}{9x^2-3x-2}dx=\int\frac{9}{(3x-2)(3x+1)}dx$$
$$=3\int\left(\frac{1}{3x-2}-\frac{1}{3x+1}\right)dx$$
$$=\ln|3x-2|-\ln|3x+1|+C=\ln\left|\frac{3x-2}{3x+1}\right|+C$$

$f(1)=-\ln 4$에서 $\ln\frac{1}{4}+C=-\ln 4$ $\quad\therefore C=0$

$\therefore f(x)=\ln\left|\frac{3x-2}{3x+1}\right|$ ····· ❶

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left|\frac{3k-2}{3k+1}\right|$$
$$=\ln\frac{1}{4}+\ln\frac{4}{7}+\ln\frac{7}{10}+\cdots+\ln\frac{3n-2}{3n+1}$$
$$=\ln\left(\frac{1}{4}\times\frac{4}{7}\times\frac{7}{10}\times\cdots\times\frac{3n-2}{3n+1}\right)$$
$$=\ln\frac{1}{3n+1}=-\ln(3n+1)$$ ····· ❷

따라서 $-\ln(3n+1)=-2\ln 5$이므로

$3n+1=5^2=25$

$\therefore n=8$ ····· ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $f(x)$ 구하기 | 40 % |
| ❷ $\sum_{k=1}^{n}f(k)$를 $n$에 대한 식으로 나타내기 | 40 % |
| ❸ $n$의 값 구하기 | 20 % |

## 0965 답 $\frac{1}{2}\ln 10$

$x^2+2x+2=t$로 놓으면 $2x+2=\frac{dt}{dx}$이고

$x=-1$일 때 $t=1$, $x=2$일 때 $t=10$이므로

$$\int_{-1}^{2}\frac{x+1}{x^2+2x+2}dx=\int_{1}^{10}\frac{1}{t}\times\frac{1}{2}dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}\ln t\right]_1^{10}=\frac{1}{2}\ln 10$$

다른 풀이

$$\int_{-1}^{2}\frac{x+1}{x^2+2x+2}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}\frac{(x^2+2x+2)'}{x^2+2x+2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\ln(x^2+2x+2)\Big]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{1}{2}\ln 10$$

## 0966 답 $2\sqrt{2}$

$f(x)=t$로 놓으면 $f'(x)=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=f(0)=2$, $x=2$일 때 $t=f(2)=8$이므로

$$\int_0^2\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=\int_2^8\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int_2^8t^{-\frac{1}{2}}dt=\Big[2t^{\frac{1}{2}}\Big]_2^8$$
$$=4\sqrt{2}-2\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

다른 풀이

$\sqrt{f(x)}=t$로 놓고 양변을 제곱하면 $f(x)=t^2$이므로

$f'(x)=2t\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=\sqrt{f(0)}=\sqrt{2}$, $x=2$일 때 $t=\sqrt{f(2)}=2\sqrt{2}$이므로

$$\int_0^2\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx=\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\frac{1}{t}\times2t\,dt=2\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}dt=2\Big[t\Big]_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}$$
$$=2(2\sqrt{2}-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$$

## 0967 답 ②

$4-x^2=t$로 놓으면 $-2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=4$, $x=2$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^2xe^{4-x^2}dx=\int_4^0e^t\times\left(-\frac{1}{2}\right)dt=\frac{1}{2}\int_0^4e^t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\Big[e^t\Big]_0^4=\frac{1}{2}(e^4-1)$$

## 0968 답 ②

$$\int_0^a \frac{2}{x^2+4x+3}dx=\int_0^a \frac{2}{(x+3)(x+1)}dx$$
$$=\int_0^a \left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=\Big[\ln|x+1|-\ln|x+3|\Big]_0^a$$
$$=\ln(a+1)-\ln(a+3)+\ln 3\ (\because a>0)$$
$$=\ln\frac{3(a+1)}{a+3}$$

즉, $\ln\frac{3(a+1)}{a+3}=\ln 2$에서

$\frac{3(a+1)}{a+3}=2$

$3a+3=2a+6$ $\therefore a=3$

## 0969 답 $\frac{23}{21}$

$\sqrt{2x-1}=t$로 놓고 양변을 제곱하면 $2x-1=t^2$이므로

$2=2t\frac{dt}{dx}$이고

$x=\frac{1}{2}$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 5x^2\sqrt{2x-1}\,dx=\int_0^1 5\left(\frac{t^2+1}{2}\right)^2 t^2\,dt$$
$$=\frac{5}{4}\int_0^1 (t^2+1)^2t^2\,dt$$
$$=\frac{5}{4}\int_0^1 (t^6+2t^4+t^2)\,dt$$
$$=\frac{5}{4}\left[\frac{1}{7}t^7+\frac{2}{5}t^5+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$
$$=\frac{5}{4}\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{23}{21}$$

## 0970 답 ②

$\ln x+2=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=2$, $x=e^2$일 때 $t=4$이므로

$$\int_1^{e^2} \frac{2}{x(\ln x+2)^3}dx=\int_2^4 \frac{2}{t^3}dt=2\int_2^4 t^{-3}dt$$
$$=2\left[-\frac{1}{2}t^{-2}\right]_2^4$$
$$=2\left\{-\frac{1}{32}-\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}=\frac{3}{16}$$

## 0971 답 $\frac{2}{3}$

$e^x-1=t$로 놓으면 $e^x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\ln 2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\ln 2} e^x\sqrt{e^x-1}\,dx=\int_0^1 \sqrt{t}\,dt=\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}$$

## 0972 답 ③

$$\int_1^e \left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\ln x\,dx-\int_1^e \frac{2}{x^2}\ln x\,dx$$
$$=\int_1^e \left\{\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\ln x-\frac{2}{x^2}\ln x\right\}dx$$
$$=\int_1^e \frac{3}{x}\ln x\,dx$$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^e \left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\ln x\,dx-\int_1^e \frac{2}{x^2}\ln x\,dx=\int_1^e \frac{3}{x}\ln x\,dx=\int_0^1 3t\,dt$$
$$=\left[\frac{3}{2}t^2\right]_0^1=\frac{3}{2}$$

## 0973 답 ⑤

$$\int_{\ln 2}^{\ln a} \frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}dx=\int_{\ln 2}^{\ln a} \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$$

$e^{2x}+1=t$로 놓으면 $2e^{2x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=\ln 2$일 때 $t=5$, $x=\ln a$일 때 $t=a^2+1$이므로

$$\int_{\ln 2}^{\ln a} \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx=\int_5^{a^2+1} \frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_5^{a^2+1}$$
$$=\ln(a^2+1)-\ln 5$$
$$=\ln\frac{a^2+1}{5}\ (\because a^2+1>0)$$

즉, $\ln\frac{a^2+1}{5}=\ln 13$에서

$\frac{a^2+1}{5}=13$, $a^2=64$ $\therefore a=8\ (\because a>2)$

다른 풀이

$$\int_{\ln 2}^{\ln a} \frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}dx=\int_{\ln 2}^{\ln a} \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}dx$$
$$=\int_{\ln 2}^{\ln a} \frac{(e^{2x}+1)'}{e^{2x}+1}dx$$
$$=\Big[\ln(e^{2x}+1)\Big]_{\ln 2}^{\ln a}\ (\because e^{2x}+1>0)$$
$$=\ln(a^2+1)-\ln 5=\ln\frac{a^2+1}{5}$$

즉, $\ln\frac{a^2+1}{5}=\ln 13$에서

$\frac{a^2+1}{5}=13$, $a^2=64$ $\therefore a=8\ (\because a>2)$

## 0974 답 $\frac{1}{3}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx$$

이때 $\sin 2x=t$로 놓으면 $2\cos 2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx=\int_0^1 (1-t^2)\times\frac{1}{2}dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

## 0975 답 $e-\frac{1}{e}$

$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\pi$일 때 $t=-1$이므로

$$\int_0^{\pi} f(\cos x)\sin x\,dx=\int_1^{-1} f(t)\times(-1)\,dt=\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$$
$$=\int_{-1}^{1} e^t\,dt=\left[e^t\right]_{-1}^{1}=e-\frac{1}{e}$$

## 0976 답 ②

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x(1+\tan x)}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}\,dx$$

$1+\tan x=t$로 놓으면 $\sec^2 x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=2$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}\,dx=\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$$
$$=\left[\ln|t|\right]_1^2=\ln 2$$

## 0977 답 $\frac{5}{12}$

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\cos x\,dx=\int_0^1 t^n\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$$

따라서 $a_n=\frac{1}{n+1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{10} a_n a_{n+1}=\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$$

## 0978 답 ①

$x=4\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=4\sec^2\theta$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=4$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^4 \frac{1}{x^2+16}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{16\tan^2\theta+16}\times 4\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4\sec^2\theta}{16\sec^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$
$$=\frac{1}{4}\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{4}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{16}$$

## 0979 답 1

$x=5\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=5\cos\theta$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=5$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25-25\sin^2\theta}\times 5\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25\cos^2\theta}\times 5\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 25\cos^2\theta\,d\theta\ (\because\ \cos\theta\ge 0)$$
$$=\frac{25}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta \rightarrow \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$
$$=\frac{25}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{25}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{25}{4}\pi$$

따라서 $a=\frac{25}{4}\pi$이므로 $\tan a=\tan\frac{25}{4}\pi=\tan\frac{\pi}{4}=1$

## 0980 답 ④

$x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=a\sec^2\theta$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=a$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^a \frac{1}{a^2+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2+a^2\tan^2\theta}\times a\sec^2\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta=\frac{1}{a}\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{1}{a}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4a}$$

따라서 $\frac{\pi}{4a}=\frac{\pi}{8}$이므로 $a=2$

## 0981 답 $f(x)=2x\sin x+2\cos x+\pi$

$u(x)=2x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=\sin x$

$$\therefore\ f(x)=\int 2x\cos x\,dx=2x\sin x-\int 2\sin x\,dx$$
$$=2x\sin x+2\cos x+C$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\pi$에서 $\pi+C=2\pi$ $\quad\therefore\ C=\pi$

$\therefore\ f(x)=2x\sin x+2\cos x+\pi$

## 0982 답 $\frac{e^2}{4}$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{2}x^2$

$$\therefore\ f(x)=\int f'(x)\,dx=\int x\ln x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\int\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$$
$$=\frac{1}{4}x^2(2\ln x-1)+C$$

$f(1)=-\frac{1}{4}$에서 $-\frac{1}{4}+C=-\frac{1}{4}$ $\quad\therefore\ C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^2(2\ln x-1)$이므로 $f(e)=\frac{e^2}{4}$

## 0983 답 ③

주어진 등식의 양변을 미분하면

$f'(x)=(2x+a)e^x$

$f'(2)=0$에서 $(4+a)e^2=0$ $\therefore a=-4$

$u(x)=2x-4$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$

$\therefore f(x)=\int(2x-4)e^x\,dx=(2x-4)e^x-\int 2e^x\,dx$

$=(2x-4)e^x-2e^x+C=(2x-6)e^x+C$

$f(0)=0$에서 $-6+C=0$ $\therefore C=6$

따라서 $f(x)=(2x-6)e^x+6$이므로

$f(\ln 2)=(2\ln 2-6)\times 2+6=4\ln 2-6$

$\therefore a+f(\ln 2)=-4+(4\ln 2-6)=4\ln 2-10$

## 0984 답 1

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, y)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}(\ln x)^2$이므로

$f'(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$

$g(x)=(\ln x)^2$, $h'(x)=\frac{1}{2}$로 놓으면

$g'(x)=\frac{2\ln x}{x}$, $h(x)=\frac{1}{2}x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{1}{2}(\ln x)^2dx$

$=\frac{1}{2}x(\ln x)^2-\int\ln x\,dx$ …… ㉠

$\int\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$

$\therefore \int\ln x\,dx=x\ln x-\int dx$

$=x\ln x-x+C_1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=\frac{1}{2}x(\ln x)^2-(x\ln x-x+C_1)$

$=\frac{1}{2}x(\ln x)^2-x\ln x+x+C$ …… ⓘ

따라서 $f(1)=1+C$, $f(e^2)=e^2+C$이므로 두 점 $(1, f(1))$, $(e^2, f(e^2))$을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{f(e^2)-f(1)}{e^2-1}=\frac{(e^2+C)-(1+C)}{e^2-1}=\frac{e^2-1}{e^2-1}=1$ …… ⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $f'(x)$의 부정적분 구하기 | 60 % |
| ⓘⓘ 두 점 $(1, f(1))$, $(e^2, f(e^2))$을 지나는 직선의 기울기 구하기 | 40 % |

## 0985 답 $-3\pi$

주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=f(x)+2x\cos x-x^2\sin x$

$xf'(x)=2x\cos x-x^2\sin x$

따라서 $f'(x)=2\cos x-x\sin x$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2\cos x-x\sin x)\,dx$

$=\int 2\cos x\,dx-\int x\sin x\,dx$

$=2\sin x-\int x\sin x\,dx$ …… ㉠

$\int x\sin x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$

$\therefore \int x\sin x\,dx=-x\cos x-\int(-\cos x)\,dx$

$=-x\cos x+\sin x+C_1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=2\sin x+x\cos x-\sin x+C$

$=x\cos x+\sin x+C$

$f(2\pi)=0$에서 $2\pi+C=0$ $\therefore C=-2\pi$

따라서 $f(x)=x\cos x+\sin x-2\pi$이므로

$f(\pi)=-\pi-2\pi=-3\pi$

## 0986 답 2

$h(x)=\sin x$, $i'(x)=e^x$으로 놓으면

$h'(x)=\cos x$, $i(x)=e^x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int e^x\sin x\,dx$

$=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$ …… ㉠

$\int e^x\cos x\,dx$에서 $u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=e^x$

$\therefore \int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx$

$=e^x\cos x+f(x)+C_1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=e^x\sin x-\{e^x\cos x+f(x)+C_1\}$

$=e^x(\sin x-\cos x)-f(x)-C_1$

$2f(x)=e^x(\sin x-\cos x)-C_1$

$\therefore f(x)=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)$이므로 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{e^x}{4}$에서

$g(x)=\frac{4f(x)}{e^x}=\frac{2e^x(\sin x-\cos x)}{e^x}=2(\sin x-\cos x)$

$\therefore g(\pi)=2\times 1=2$

## 0987 답 ③

$f(x)=x-1$, $g'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$

$\therefore \int_0^3(x-1)e^{2x}\,dx=\left[\frac{1}{2}(x-1)e^{2x}\right]_0^3-\int_0^3\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$

$=e^6+\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^3$

$=e^6+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{4}e^6-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}e^6+\frac{3}{4}$

## 0988 답 ②

$f(x)=\begin{cases}1 & (x\le 0)\\ 1-x & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx$

$=\int_{-\pi}^{0}\sin x\,dx+\int_{0}^{\pi}(1-x)\sin x\,dx$

$=\int_{-\pi}^{0}\sin x\,dx+\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx-\int_{0}^{\pi}x\sin x\,dx$

$=\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\,dx-\int_{0}^{\pi}x\sin x\,dx$ → 곡선 $y=\sin x$는 원점에 대하여 대칭

$=-\int_{0}^{\pi}x\sin x\,dx$ …… ㉠

$\int_{0}^{\pi}x\sin x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$

$\therefore \int_{0}^{\pi}x\sin x\,dx=\Big[-x\cos x\Big]_{0}^{\pi}+\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx$

$=\pi+\Big[\sin x\Big]_{0}^{\pi}=\pi$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin x\,dx=-\pi$

## 0989 답 ④

$f(x)=x(x-1)=x^2-x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=2x-1$, $g(x)=e^x$

$\therefore \int_{-1}^{1}x(x-1)e^x\,dx=\int_{-1}^{1}(x^2-x)e^x\,dx$

$=\Big[(x^2-x)e^x\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}(2x-1)e^x\,dx$

$=-\frac{2}{e}-\int_{-1}^{1}(2x-1)e^x\,dx$ …… ㉠

$\int_{-1}^{1}(2x-1)e^x\,dx$에서 $u(x)=2x-1$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$

$\therefore \int_{-1}^{1}(2x-1)e^x\,dx=\Big[(2x-1)e^x\Big]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}2e^x\,dx$

$=e+\frac{3}{e}-\Big[2e^x\Big]_{-1}^{1}$

$=e+\frac{3}{e}-\Big(2e-\frac{2}{e}\Big)=-e+\frac{5}{e}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int_{-1}^{1}x(x-1)e^x\,dx=-\frac{2}{e}-\Big(-e+\frac{5}{e}\Big)=e-\frac{7}{e}$

따라서 $a=1$, $b=-7$이므로 $a-b=8$

## 0990 답 $e^2+e-3$

$\int_{1}^{e^2}f(x)\,dx-\int_{e}^{e^2}f(x)\,dx=\int_{1}^{e^2}f(x)\,dx+\int_{e^2}^{e}f(x)\,dx$

$=\int_{1}^{e}f(x)\,dx$

$=\int_{1}^{e}(4x+1)(\ln x)^2\,dx$

이때 $g(x)=(\ln x)^2$, $h'(x)=4x+1$로 놓으면

$g'(x)=\frac{2\ln x}{x}$, $h(x)=2x^2+x$

$\therefore \int_{1}^{e}(4x+1)(\ln x)^2\,dx$

$=\Big[(2x^2+x)(\ln x)^2\Big]_{1}^{e}-\int_{1}^{e}2(2x+1)\ln x\,dx$

$=2e^2+e-2\int_{1}^{e}(2x+1)\ln x\,dx$ …… ㉠

$\int_{1}^{e}(2x+1)\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=2x+1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x^2+x$

$\therefore \int_{1}^{e}(2x+1)\ln x\,dx=\Big[(x^2+x)\ln x\Big]_{1}^{e}-\int_{1}^{e}(x+1)\,dx$

$=e^2+e-\Big[\frac{1}{2}x^2+x\Big]_{1}^{e}$

$=e^2+e-\Big\{\Big(\frac{1}{2}e^2+e\Big)-\Big(\frac{1}{2}+1\Big)\Big\}$

$=\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int_{1}^{e}(4x+1)(\ln x)^2\,dx=2e^2+e-2\Big(\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{2}\Big)=e^2+e-3$

## 0991 답 $\frac{2}{3}$

$\int_{0}^{1}f(x)g'(x)\,dx$

$=\Big[f(x)g(x)\Big]_{0}^{1}-\int_{0}^{1}f'(x)g(x)\,dx$

$=\{f(1)g(1)-f(0)g(0)\}-\int_{0}^{1}\frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx$

$=f(1)-\int_{0}^{1}\frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx$ ($\because$ $g(1)=1$, $g(0)=0$) …… ㉠

$\int_{0}^{1}\frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx$에서 $1+x^3=t$로 놓으면 $3x^2=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=2$이므로

$\int_{0}^{1}\frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,dx=\int_{1}^{2}\frac{1}{t^2}\times\frac{1}{3}\,dt=\frac{1}{3}\Big[-\frac{1}{t}\Big]_{1}^{2}$

$=\frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}+1\Big)=\frac{1}{6}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $\int_{0}^{1}f(x)g'(x)\,dx=f(1)-\frac{1}{6}$

따라서 $f(1)-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$이므로 $f(1)=\frac{2}{3}$

## 0992 답 ③

$\int_{0}^{1}f(t)\,dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면 $f(x)=4e^x-k$이므로

$\int_{0}^{1}f(t)\,dt=\int_{0}^{1}(4e^t-k)\,dt=\Big[4e^t-kt\Big]_{0}^{1}=4e-k-4$

즉, $4e-k-4=k$이므로 $k=2e-2$

따라서 $f(x)=4e^x-2e+2$이므로

$f(\ln 2)=8-2e+2=10-2e$

## 0993 답 $f(x)=\sin x-1$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos t\,dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면 $f(x)=\sin x+2k$이므로

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos t\,dt=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+2k)\cos t\,dt$

$=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\,dt+2k\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$

$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt+2k\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$

$=\frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2}\cos 2t\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+2k\Big[\sin t\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Big)+2k=\frac{1}{2}+2k$

즉, $\frac{1}{2}+2k=k$이므로 $k=-\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\sin x-1$

## 0994 답 20

$\int_1^3 f'(t)\,dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면 $f(x)=x+\frac{1}{x}+k$이므로

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$\therefore \int_1^3 f'(t)\,dt=\int_1^3\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt=\left[t+\frac{1}{t}\right]_1^3$

$=\left(3+\frac{1}{3}\right)-(1+1)=\frac{4}{3}$

$\therefore k=\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=x+\frac{1}{x}+\frac{4}{3}$이므로

$\int_1^3 f(x)\,dx=\int_1^3\left(x+\frac{1}{x}+\frac{4}{3}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{2}x^2+\ln|x|+\frac{4}{3}x\right]_1^3$

$=\left(\frac{9}{2}+\ln 3+4\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}\right)=\frac{20}{3}+\ln 3$

즉, $a=\frac{20}{3}$, $b=3$이므로 $ab=20$

## 0995 답 1

주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=\ln x+1+xf(x)$ …… ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=0$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=1+f(1)=1$

## 0996 답 ②

주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=\sin x+x\cos x+k$

주어진 등식의 양변에 $x=\pi$를 대입하면

$0=k\pi-\pi$ $\therefore k=1$

따라서 $f(x)=\sin x+x\cos x+1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+1=2$

## 0997 답 ②

주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=-1+k$ $\therefore k=1$

따라서 $g(x)=(x-1)e^x+1$이므로

$\int_0^1\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_0^1[xe^x-\{(x-1)e^x+1\}]\,dx$

$=\int_0^1(e^x-1)\,dx$

$=\left[e^x-x\right]_0^1$

$=(e-1)-1=e-2$

## 0998 답 $3e^2-e$

주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2xe^x+x^2e^x+f(x)$

$xf'(x)=x(x+2)e^x$

$\therefore f'(x)=(x+2)e^x$ …… ⓘ

이때 $u(x)=x+2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(x+2)e^x\,dx$

$=(x+2)e^x-\int e^x\,dx$

$=(x+2)e^x-e^x+C$

$=(x+1)e^x+C$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=e$

즉, $2e+C=e$이므로

$C=-e$

따라서 $f(x)=(x+1)e^x-e$이므로 …… ⓘⓘ

$f(2)=3e^2-e$ …… ⓘⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ $f'(x)$ 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘ $f(x)$ 구하기 | 60 % |
| ⓘⓘⓘ $f(2)$의 값 구하기 | 10 % |

## 0999 답 $\pi$

$\int_0^x(x-t)f(t)\,dt=ax\cos x-x$에서

$x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt=ax\cos x-x$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=a\cos x-ax\sin x-1$

$\therefore \int_0^x f(t)\,dt=a\cos x-ax\sin x-1$ …… ㉠

양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=-a\sin x-a(\sin x+x\cos x)=-2a\sin x-ax\cos x$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=a-1$ $\therefore a=1$

따라서 $f(x)=-2\sin x-x\cos x$이므로

$f(\pi)=\pi$

## 1000 답 ⑤

$\int_1^x(x+t)f(t)\,dt=e^x(\ln x+1)-e$에서

$x\int_1^x f(t)\,dt+\int_1^x tf(t)\,dt=e^x(\ln x+1)-e$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)+xf(x)=e^x(\ln x+1)+\frac{e^x}{x}$

$\therefore \int_1^x f(t)\,dt+2xf(x)=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}+1\right)$

양변에 $x=1$을 대입하면

$2f(1)=2e$ $\therefore f(1)=e$

## 1001 답 3

$\int_1^x (x-t)f(t)\,dt = x^2\ln x + ax + b$에서

$x\int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x tf(t)\,dt = x^2\ln x + ax + b$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt + xf(x) - xf(x) = 2x\ln x + x + a$

$\therefore \int_1^x f(t)\,dt = 2x\ln x + x + a$ …… ㉠

양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면

$f(x) = 2\ln x + 2 + 1 = 2\ln x + 3$

$\therefore f(e) = 2 + 3 = 5$ …… ⓘ

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0 = 1 + a \quad \therefore a = -1$ …… ⓘⓘ

한편 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0 = a + b \quad \therefore b = 1$ …… ⓘⓘⓘ

$\therefore a - b + f(e) = -1 - 1 + 5 = 3$ …… ⓘⓥ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ $f(e)$의 값 구하기 | 50 % |
| ⓘⓘ $a$의 값 구하기 | 20 % |
| ⓘⓘⓘ $b$의 값 구하기 | 20 % |
| ⓘⓥ $a-b+f(e)$의 값 구하기 | 10 % |

## 1002 답 ②

$\int_0^x (t-x)f'(t)\,dt = e^{2x} + ae^x + 1$에서

$\int_0^x tf'(t)\,dt - x\int_0^x f'(t)\,dt = e^{2x} + ae^x + 1$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$xf'(x) - \left\{\int_0^x f'(t)\,dt + xf'(x)\right\} = 2e^{2x} + ae^x$

$\therefore \int_0^x f'(t)\,dt = -2e^{2x} - ae^x$

$\int_0^x f'(t)\,dt = \Big[f(t)\Big]_0^x = f(x) - f(0)$이므로

$f(x) - f(0) = -2e^{2x} - ae^x$

$\therefore f(x) = -2e^{2x} - ae^x + \frac{2}{e^4} \left(\because f(0) = \frac{2}{e^4}\right)$

한편 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0 = 1 + a + 1 \quad \therefore a = -2$

따라서 $f(x) = -2e^{2x} + 2e^x + \frac{2}{e^4}$이므로

$f(a) = f(-2) = -\frac{2}{e^4} + \frac{2}{e^2} + \frac{2}{e^4} = \frac{2}{e^2}$

## 1003 답 ⑤

주어진 함수 $f(x)$를 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x) = \cos 2x - \sin x = 1 - 2\sin^2 x - \sin x$

$\quad = -(\sin x + 1)(2\sin x - 1)$

$f'(x) = 0$에서 $(\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$

$\sin x = -1$ 또는 $\sin x = \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi \ (\because 0 < x < \pi)$

$0 < x < \pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $\frac{\pi}{6}$ | … | $\frac{5}{6}\pi$ | … | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | |

함수 $f(x)$는 $x = \frac{\pi}{6}$에서 극대이므로 극댓값은

$M = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2t - \sin t)\,dt$

$\quad = \left[\frac{1}{2}\sin 2t + \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$\quad = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = \frac{3\sqrt{3}}{4} - 1$

함수 $f(x)$는 $x = \frac{5}{6}\pi$에서 극소이므로 극솟값은

$m = f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \int_0^{\frac{5}{6}\pi} (\cos 2t - \sin t)\,dt$

$\quad = \left[\frac{1}{2}\sin 2t + \cos t\right]_0^{\frac{5}{6}\pi}$

$\quad = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1 = -\frac{3\sqrt{3}}{4} - 1$

$\therefore M - m = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4} - 1\right) - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4} - 1\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

## 1004 답 ③

주어진 함수 $f(x)$를 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x) = \frac{4 - x^2}{x}$

$f'(x) = 0$에서 $4 - x^2 = 0$

$x^2 = 4 \quad \therefore x = 2 \ (\because x > 0)$

$x > 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | 2 | … |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 극댓값은

$f(2) = \int_1^2 \frac{4 - t^2}{t}\,dt = \int_1^2 \left(\frac{4}{t} - t\right)dt$

$\quad = \left[4\ln|t| - \frac{1}{2}t^2\right]_1^2$

$\quad = (4\ln 2 - 2) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 4\ln 2 - \frac{3}{2}$

## 1005 답 $\frac{1}{4}$

주어진 함수 $f(x)$를 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x) = (2x+1)e^{x^2+x}$

$f'(x) = 0$에서 $2x + 1 = 0 \ (\because e^{x^2+x} > 0)$

$\therefore x = -\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | … | $-\frac{1}{2}$ | … |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$에서 극소이므로 극솟값은

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\int_0^{-\frac{1}{2}}(2t+1)e^{t^2+t}\,dt=-\int_{-\frac{1}{2}}^0(2t+1)e^{t^2+t}\,dt$

이때 $t^2+t=k$로 놓으면 $\frac{dk}{dt}=2t+1$이고

$t=-\frac{1}{2}$일 때 $k=-\frac{1}{4}$, $t=0$일 때 $k=0$이므로

$f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\int_{-\frac{1}{2}}^0(2t+1)e^{t^2+t}\,dt$

$=-\int_{-\frac{1}{4}}^0 e^k\,dk=-\left[e^k\right]_{-\frac{1}{4}}^0$

$=-(1-e^{-\frac{1}{4}})=e^{-\frac{1}{4}}-1$

따라서 $a=-\frac{1}{4}$, $b=-1$이므로 $ab=\frac{1}{4}$

## 1006 답 ①

주어진 함수 $f(x)$를 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=\sin x(2\cos x-1)$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{3}\ \left(\because\ 0<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin t\,(2\cos t-1)\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin t\cos t-\sin t)\,dt$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sin 2t-\sin t)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2t+\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{4}$

## 1007 답 $\frac{7}{4}-4\ln 2$

주어진 함수 $f(x)$를 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+1)\ln x$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ $(\because\ x>0)$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=\int_2^1(t+1)\ln t\,dt=-\int_1^2(t+1)\ln t\,dt$

이때 $u(t)=\ln t$, $v'(t)=t+1$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=\frac{1}{2}t^2+t$

$\therefore\ f(1)=-\int_1^2(t+1)\ln t\,dt$

$=-\left[\left(\frac{1}{2}t^2+t\right)\ln t\right]_1^2+\int_1^2\frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}t^2+t\right)dt$

$=-4\ln 2+\left[\frac{1}{4}t^2+t\right]_1^2$

$=-4\ln 2+\left\{(1+2)-\left(\frac{1}{4}+1\right)\right\}$

$=\frac{7}{4}-4\ln 2$

## 1008 답 ⑤

주어진 함수 $f(x)$를 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=\left(x+1+\frac{12}{x+1}\right)-\left(x+\frac{12}{x}\right)$

$=1+\frac{12}{x+1}-\frac{12}{x}=\frac{(x+4)(x-3)}{x(x+1)}$

$f'(x)=0$에서 $(x+4)(x-3)=0$ $\therefore\ x=3\ (\because\ x>0)$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(3)=\int_3^4\left(t+\frac{12}{t}\right)dt=\left[\frac{1}{2}t^2+12\ln|t|\right]_3^4$

$=(8+12\ln 4)-\left(\frac{9}{2}+12\ln 3\right)$

$=\frac{7}{2}+12\ln\frac{4}{3}$

## 1009 답 ⑤

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{e-h}^{e+2h}f(t)\,dt$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(e+2h)-F(e-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(e+2h)-F(e)+F(e)-F(e-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{F(e+2h)-F(e)}{2h}\times 2+\lim_{h\to 0}\frac{F(e-h)-F(e)}{-h}$

$=2F'(e)+F'(e)=3F'(e)=3f(e)$

$=3\times\frac{e(1+e)}{3e^2}=\frac{e+1}{e}$

## 1010 답 $4e^2$

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}f(t)\,dt=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times(x+1)$

$=2F'(1)=2f(1)$

$=2\times 2e^2=4e^2$

## 1011 답 8

$f(t)=t\cos t+a$라 하고 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}}(t\cos t+a)\,dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{2x}\int_{\frac{\pi}{2}}^{x+\frac{\pi}{2}}f(t)\,dt$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{F\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{F\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x}$$

$$=\frac{1}{2}F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=4$이므로 $a=8$

## AB 유형 점검 168~170쪽

## 1012 답 ④

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{t}+4e^{2t}$이므로

$f'(t)=\frac{1}{t}+4e^{2t}$

$\therefore f(t)=\int\left(\frac{1}{t}+4e^{2t}\right)dt$

$=\ln t+2e^{2t}+C\ (\because t>0)$

$f(1)=2e^2+1$에서

$2e^2+C=2e^2+1 \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(t)=\ln t+2e^{2t}+1$이므로

$f(e)=1+2e^{2e}+1=2e^{2e}+2$

## 1013 답 ③

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2+2x-8)\,dx$

$=x^3+x^2-8x+C_1$

$f(0)=-12$에서 $C_1=-12$

$\therefore f(x)=x^3+x^2-8x-12$

이때 $f(x)=t$로 놓으면 $f'(x)=\frac{dt}{dx}$이므로

$g(x)=\int f(x)f'(x)\,dx$

$=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C_2$

$=\frac{1}{2}(x^3+x^2-8x-12)^2+C_2$

$g(3)=0$에서 $C_2=0$

$\therefore g(x)=\frac{1}{2}(x^3+x^2-8x-12)^2$

$=\frac{1}{2}\{(x+2)^2(x-3)\}^2$

따라서 곡선 $y=g(x)$가 $x$축과 만나는 두 점의 좌표는 $(-2,\ 0)$, $(3,\ 0)$이므로 선분 AB의 길이는 5이다.

## 1014 답 $e^4$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{1}{x\sqrt{\ln x}}dx$

$=\int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int t^{-\frac{1}{2}}dt$

$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C=2\sqrt{\ln x}+C$

$f(e)=1$에서 $2+C=1 \qquad \therefore C=-1$

따라서 $f(x)=2\sqrt{\ln x}-1$이므로 $f(x)=3$에서

$2\sqrt{\ln x}-1=3,\ \sqrt{\ln x}=2$

$\ln x=4 \qquad \therefore x=e^4$

## 1015 답 3

$\pi\tan x=t$로 놓으면 $\pi\sec^2 x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int\frac{\pi\sin(\pi\tan x)}{\cos^2 x}dx=\int\pi\sec^2 x\sin(\pi\tan x)\,dx$$

$$=\int\sin t\,dt=-\cos t+C$$

$$=-\cos(\pi\tan x)+C$$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$에서

$\lim_{x\to0}\{-\cos(\pi\tan x)+C\}=1$

$-1+C=1 \qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=-\cos(\pi\tan x)+2$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-(-1)+2=3$

## 1016 답 $h(x)=\ln|x^2+2x-\cos x|+3$

$h(x)=2f(x)+g(x)$

$=2\int\frac{x+1}{x^2+2x-\cos x}dx+\int\frac{\sin x}{x^2+2x-\cos x}dx$

$=\int\frac{2x+2+\sin x}{x^2+2x-\cos x}dx=\int\frac{(x^2+2x-\cos x)'}{x^2+2x-\cos x}dx$

$=\ln|x^2+2x-\cos x|+C$

$h(0)=3$에서 $C=3$

$\therefore h(x)=\ln|x^2+2x-\cos x|+3$

## 1017 답 ④

$\frac{3x+2}{x^2-4}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-2}$ ($A$, $B$는 상수)로 놓으면

$\frac{3x+2}{(x+2)(x-2)}=\frac{(A+B)x+(-2A+2B)}{(x+2)(x-2)}$

위의 식은 $x$에 대한 항등식이므로

$A+B=3,\ -2A+2B=2$

두 식을 연립하여 풀면 $A=1,\ B=2$

$\therefore f(x)=\int\frac{3x+2}{x^2-4}dx=\int\left(\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-2}\right)dx$

$=\ln|x+2|+2\ln|x-2|+C$

$f(3)=0$에서 $\ln5+C=0 \qquad \therefore C=-\ln5$

따라서 $f(x)=\ln|x+2|+2\ln|x-2|-\ln5$이므로

$f(-3)=2\ln5-\ln5=\ln5$

## 1018 답 $\frac{42}{5}$

$x+1=t$로 놓으면 $x=t-1$이고 $1=\frac{dt}{dx}$

$x=0$일 때 $t=1$, $x=3$일 때 $t=4$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{x^2-x+3}{\sqrt{x+1}}dx&=\int_1^4 \frac{(t-1)^2-(t-1)+3}{\sqrt{t}}dt\\&=\int_1^4 \frac{t^2-3t+5}{\sqrt{t}}dt\\&=\int_1^4 (t^{\frac{3}{2}}-3t^{\frac{1}{2}}+5t^{-\frac{1}{2}})\,dt\\&=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-2t^{\frac{3}{2}}+10t^{\frac{1}{2}}\right]_1^4\\&=\frac{84}{5}-\frac{42}{5}=\frac{42}{5}\end{aligned}$$

## 1019 답 ②

$x^2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=-1$일 때 $t=1$, $x=0$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=4$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 e^{x^2}f(x)\,dx&=\int_{-1}^0(-xe^{x^2})\,dx+\int_0^2 2xe^{x^2}dx\\&=\int_1^0\left(-e^t\times\frac{1}{2}\right)dt+\int_0^4 e^t\,dt\\&=\frac{1}{2}\int_0^1 e^t\,dt+\int_0^4 e^t\,dt\\&=\frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^1+\left[e^t\right]_0^4\\&=\frac{1}{2}(e-1)+(e^4-1)\\&=e^4+\frac{1}{2}e-\frac{3}{2}\end{aligned}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$이므로 $a+b=-1$

## 1020 답 ⑤

$\ln x-1=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=-1$, $x=e$일 때 $t=0$이므로

$$\begin{aligned}a_n&=\int_1^e \frac{(\ln x-1)^n}{x}dx\\&=\int_{-1}^0 t^n\,dt=\left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}\right]_{-1}^0\\&=-\frac{1}{n+1}\times(-1)^{n+1}=\frac{(-1)^n}{n+1}\end{aligned}$$

따라서 $a_na_{n+2}=\frac{(-1)^n}{n+1}\times\frac{(-1)^{n+2}}{n+3}=\frac{1}{(n+1)(n+3)}$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+2}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+3)}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{12}\end{aligned}$$

## 1021 답 ④

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x(1-\sin^2 x)}\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x\cos^2 x}\,dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cos x\,dx\ (\because\ \cos x\ge 0)\end{aligned}$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $t=1$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin x}\cos x\,dx\\&=\int_0^1\sqrt{t}\,dt=\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}dt\\&=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

## 1022 답 $\frac{\pi}{6}$

$x=6\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=6\cos\theta$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=3$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^3\frac{1}{\sqrt{36-x^2}}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{36-36\sin^2\theta}}\times 6\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{36\cos^2\theta}}\times 6\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{6\cos\theta}{6\cos\theta}d\theta\ (\because\ \cos\theta>0)\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

## 1023 답 ②

$g(x)=\cos 2x$, $h'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$g'(x)=-2\sin 2x$, $h(x)=-e^{-x}$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(x)&=\int e^{-x}\cos 2x\,dx\\&=-e^{-x}\cos 2x-2\int e^{-x}\sin 2x\,dx\qquad\cdots\cdots\ ㉠\end{aligned}$$

$\int e^{-x}\sin 2x\,dx$에서 $u(x)=\sin 2x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=2\cos 2x$, $v(x)=-e^{-x}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \int e^{-x}\sin 2x\,dx&=-e^{-x}\sin 2x+2\int e^{-x}\cos 2x\,dx\\&=-e^{-x}\sin 2x+2f(x)+C_1\qquad\cdots\cdots\ ㉡\end{aligned}$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}f(x)&=-e^{-x}\cos 2x-2(-e^{-x}\sin 2x+2f(x)+C_1)\\&=-e^{-x}\cos 2x+2e^{-x}\sin 2x-4f(x)-2C_1\end{aligned}$$

$5f(x)=e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)-2C_1$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{5}e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)+C$

$f(0)=-\frac{1}{5}$에서 $-\frac{1}{5}+C=-\frac{1}{5}$ $\quad\therefore\ C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}e^{-x}(2\sin 2x-\cos 2x)$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{5}e^{-\frac{\pi}{4}}\times 2=\frac{2}{5}e^{-\frac{\pi}{4}}$

## 1024 답 1

$$\int_0^1 (e^x-3ax)^2\,dx=\int_0^1 (e^{2x}-6axe^x+9a^2x^2)\,dx$$
$$=\int_0^1 (e^{2x}+9a^2x^2)\,dx-6a\int_0^1 xe^x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+3a^2x^3\right]_0^1-6a\int_0^1 xe^x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}e^2+3a^2-\frac{1}{2}-6a\int_0^1 xe^x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^1 xe^x\,dx$에서 $f(x)=x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$

$$\therefore \int_0^1 xe^x\,dx=\left[xe^x\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$$
$$=e-\left[e^x\right]_0^1=e-(e-1)=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 (e^x-3ax)^2\,dx=\frac{1}{2}e^2+3a^2-\frac{1}{2}-6a$$
$$=3(a-1)^2+\frac{1}{2}e^2-\frac{7}{2}$$

따라서 주어진 정적분의 값이 최소가 되도록 하는 상수 $a$의 값은

$a=1$

## 1025 답 $-\frac{4}{3}$

$\int_1^4 f(t)\,dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면

$f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}+k=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+k$이므로

$$\int_1^4 f(t)\,dt=\int_1^4 \left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}+k\right)dt$$
$$=\int_1^4 (t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}}+k)\,dt$$
$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+kt\right]_1^4$$
$$=\left(\frac{16}{3}+4+4k\right)-\left(\frac{2}{3}+2+k\right)=3k+\frac{20}{3}$$

즉, $3k+\frac{20}{3}=k$이므로

$2k=-\frac{20}{3}$ $\therefore k=-\frac{10}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}}-\frac{10}{3}$이므로

$f(1)=-\frac{4}{3}$

## 1026 답 ④

주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=e^x-f'(x)e^x$, $(e^x+1)f'(x)=e^x$

$\therefore f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$$
$$=\int \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}\,dx$$
$$=\ln(e^x+1)+C \ (\because e^x+1>0)$$

한편 주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=1$

즉, $\ln 2+C=1$이므로 $C=1-\ln 2$

따라서 $f(x)=\ln(e^x+1)+1-\ln 2$이므로

$f(1)=\ln(e+1)+1-\ln 2=\ln\frac{e(e+1)}{2}$

$\therefore e^{f(1)}=\frac{e(e+1)}{2}$

## 1027 답 $-6$

$f(x)=\int_{\frac{1}{e^2}}^{x}\frac{3\ln t}{t}\,dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{3\ln x}{x}$

$f'(x)=0$에서 $\ln x=0$ $\therefore x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 극솟값은

$f(1)=\int_{\frac{1}{e^2}}^{1}\frac{3\ln t}{t}\,dt$

이때 $\ln t=k$로 놓으면 $\frac{1}{t}=\frac{dk}{dt}$이고

$t=\frac{1}{e^2}$일 때 $k=-2$, $t=1$일 때 $k=0$이므로

$$f(1)=\int_{\frac{1}{e^2}}^{1}\frac{3\ln t}{t}\,dt=\int_{-2}^{0}3k\,dk=\left[\frac{3}{2}k^2\right]_{-2}^{0}=-6$$

## 1028 답 $e+\frac{1}{e}$

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{1-h}^{1+h}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)+F(1)-F(1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{F(1+h)-F(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{F(1-h)-F(1)}{-h}$$
$$=F'(1)+F'(1)=2F'(1)=2f(1)$$
$$=2\times\frac{e+e^{-1}}{2}=e+\frac{1}{e}$$

## 1029 답 $-2$

$$f(x)=\int\frac{2x^2-5x+1}{x-3}\,dx=\int\frac{(2x+1)(x-3)+4}{x-3}\,dx$$
$$=\int\left(2x+1+\frac{4}{x-3}\right)dx$$
$$=x^2+x+4\ln|x-3|+C \quad \cdots\cdots ❶$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(4, 12)$를 지나므로 $f(4)=12$에서

$16+4+C=12$ $\therefore C=-8$

$\therefore f(x)=x^2+x+4\ln|x-3|-8$ $\cdots\cdots$ ❷

또 곡선 $y=f(x)$가 점 $(2, k)$를 지나므로 $f(2)=k$에서

$k=4+2-8=-2$ $\cdots\cdots$ ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ 부정적분을 이용하여 $f(x)$의 식 세우기 | 50 % |
| ⓘⓘ $f(x)$ 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘⓘ $k$의 값 구하기 | 20 % |

## 1030 답 9

$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x (x-t)f(t)\,dt+3x$에서

$\int_0^x f(t)\,dt=x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt+3x$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)+3$

$\therefore \int_0^x f(t)\,dt=f(x)-3$ …… ㉠

양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면 $f(x)=f'(x)$, $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1$

따라서 $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)}dx=\int dx$이므로

$\ln f(x)=x+C$ ($\because$ $f(x)>0$)

$\therefore f(x)=e^{x+C}$ …… ⓘ

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=f(0)-3$ $\therefore f(0)=3$

즉, $e^C=3$이므로 $C=\ln 3$

따라서 $f(x)=e^{x+\ln 3}$이므로 …… ⓘⓘ

$f(\ln 3)=e^{2\ln 3}=9$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$의 부정적분을 이용하여 $f(x)$의 식 세우기 | 60 % |
| ⓘⓘ $f(x)$ 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘⓘ $f(\ln 3)$의 값 구하기 | 10 % |

## 1031 답 $\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2e^4}$

$f(x)=\int_0^x (t-2)e^{t^2-4t}\,dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-2)e^{x^2-4x}$

$f'(x)=0$에서 $x=2$ ($\because$ $e^{x^2-4x}>0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | … | 2 | … |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로

$a=2$ …… ⓘ

$\therefore b=f(2)=\int_0^2 (t-2)e^{t^2-4t}\,dt$

이때 $t^2-4t=u$로 놓으면 $2t-4=\dfrac{du}{dt}$이고

$t=0$일 때 $u=0$, $t=2$일 때 $u=-4$이므로

$b=\int_0^2 (t-2)e^{t^2-4t}\,dt=\dfrac{1}{2}\int_0^{-4} e^u\,du$

$=\dfrac{1}{2}\left[e^u\right]_0^{-4}=\dfrac{1}{2e^4}-\dfrac{1}{2}$ …… ⓘⓘ

$\therefore a+b=2+\dfrac{1}{2e^4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2e^4}$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $a$의 값 구하기 | 50 % |
| ⓘⓘ $b$의 값 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ $a+b$의 값 구하기 | 10 % |

## 실력 향상 171쪽

## 1032 답 $\dfrac{1}{2}\ln 3$

$f(x)=\int \csc x\,dx=\int \dfrac{1}{\sin x}dx=\int \dfrac{\sin x}{\sin^2 x}dx$

$=\int \dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx$

$\cos x=t$ ($-1<t<1$)로 놓으면 $-\sin x=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int \dfrac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx=\int \dfrac{1}{1-t^2}\times(-1)\,dt=\int \dfrac{1}{t^2-1}dt$

$=\int \dfrac{1}{(t-1)(t+1)}dt=\dfrac{1}{2}\int\left(\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t+1}\right)dt$

$=\dfrac{1}{2}\{\ln(1-t)-\ln(t+1)\}+C$ ($\because$ $t-1<0$)

$=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-t}{1+t}+C=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}+C$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\ln 3$에서 $C=\ln 3$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}+\ln 3$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}+\ln 3=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1}{3}+\ln 3=\dfrac{1}{2}\ln 3$

## 1033 답 ③

$g(x)=\ln x$, $h'(x)=1$로 놓으면

$g'(x)=\dfrac{1}{x}$, $h(x)=x$이므로

$I_1=\int_1^e \ln x\,dx=\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e dx$

$=e-\left[x\right]_1^e=e-(e-1)=1$

2 이상의 자연수 $n$에 대하여 $u(x)=(\ln x)^n$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\dfrac{n(\ln x)^{n-1}}{x}$, $v(x)=x$이므로

$I_n=\int_1^e (\ln x)^n dx$

$=\left[x(\ln x)^n\right]_1^e-\int_1^e n(\ln x)^{n-1}dx$

$=e-n\int_1^e (\ln x)^{n-1}dx$

$=e-nI_{n-1}$

따라서 $e-nI_{n-1}=a+f(n)\times I_{n-1}$이므로

$a=e$, $f(n)=-n$

$\therefore 3I_1+a+f(4)=3+e+(-4)=e-1$

**1034** 답 5

$\int_1^2 xg(x)\,dx$에서 $u(x)=g(x)$, $v'(x)=x$로 놓으면

$u'(x)=g'(x)$, $v(x)=\frac{1}{2}x^2$

$\therefore \int_1^2 xg(x)dx=\left[\frac{1}{2}x^2g(x)\right]_1^2-\int_1^2 \frac{1}{2}x^2g'(x)\,dx$

$=2g(2)-\frac{1}{2}g(1)-\int_1^2 \frac{1}{2}x^2g'(x)\,dx$

$=8-\frac{1}{2}g(1)-\int_1^2 \frac{1}{2}x^2g'(x)\,dx$ …… ㉠

㈎에서 $g(x)=\int_1^x \frac{f(t^2)}{t}dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$g'(x)=\frac{f(x^2)}{x}$ …… ㉡

$g(x)=\int_1^x \frac{f(t^2)}{t}dt$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$g(1)=0$ …… ㉢

㉠에 ㉡, ㉢을 대입하면

$\int_1^2 xg(x)\,dx=8-\int_1^2 \frac{1}{2}xf(x^2)\,dx$

이때 $\int_1^2 \frac{1}{2}xf(x^2)\,dx$에서 $x^2=k$로 놓으면 $2x=\frac{dk}{dx}$이고

$x=1$일 때 $k=1$, $x=2$일 때 $k=4$이므로

$\int_1^2 \frac{1}{2}xf(x^2)\,dx=\int_1^4 \frac{1}{2}f(k)\times\frac{1}{2}dk=\frac{1}{4}\int_1^4 f(k)\,dk$

$=\frac{1}{4}\times 12=3$ ($\because$ ㈏)

㉠에서 $\int_1^2 xg(x)\,dx=8-3=5$

**1035** 답 ①

함수 $g'(t)$의 부정적분은 $g(t)$이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{e-h}^{e+h} g'(t)\,dt$

$=\lim_{h\to 0}\frac{g(e+h)-g(e-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{g(e+h)-g(e)+g(e)-g(e-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{g(e+h)-g(e)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(e-h)-g(e)}{-h}$

$=g'(e)+g'(e)=2g'(e)$

$f(x)=x^{\ln x}$의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=(\ln x)^2$ ($\because$ $f(x)>0$)

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2\ln x}{x}$, $f'(x)=\frac{2\ln x}{x}\times f(x)$

$\therefore f'(x)=\frac{2\ln x}{x}\times x^{\ln x}$

한편 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이고 $f(e)=e$이므로

$g'(e)=\frac{1}{f'(e)}$

따라서 $f'(e)=\frac{2}{e}\times e=2$이므로

$g'(e)=\frac{1}{f'(e)}=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{e-h}^{e+h} g'(t)\,dt=2g'(e)=2\times\frac{1}{2}=1$

# 10 / 정적분의 활용

## A 개념 확인

172~175쪽

**1036** 답 ㈎ $\frac{1}{n}$ ㈏ $k^3$ ㈐ $\frac{2}{n}$ ㈑ $\frac{1}{4}$

**1037** 답 $\frac{81}{4}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3k}{n}\right)^3\times\frac{3}{n}=\int_0^3 x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^3=\frac{81}{4}$

**1038** 답 $\frac{5}{2}$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}=\int_2^3 x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_2^3=\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$

**1039** 답 $e^2-1$

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{2k}{n}}\times\frac{2}{n}=\int_0^2 e^x\,dx=\left[e^x\right]_0^2=e^2-1$

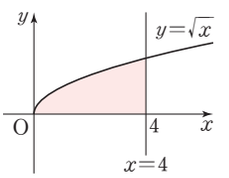
**1040** 답 2

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}\times\frac{\pi}{n}=\int_0^\pi \sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^\pi=1-(-1)=2$

**1041** 답 $\frac{16}{3}$

$0\le x\le 4$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 도형의 넓이는

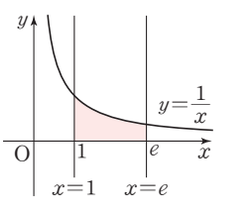
$\int_0^4 \sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4=\frac{16}{3}$




**1042** 답 1

$1\le x\le e$에서 $y>0$이므로 구하는 도형의 넓이는

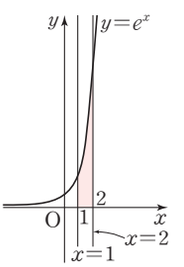
$\int_1^e \frac{1}{x}dx=\left[\ln|x|\right]_1^e=1$




**1043** 답 $e^2-e$

$1\le x\le 2$에서 $y>0$이므로 구하는 도형의 넓이는

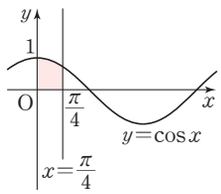
$\int_1^2 e^x\,dx=\left[e^x\right]_1^2=e^2-e$



## 1044 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$0\le x\le\frac{\pi}{4}$에서 $y>0$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$



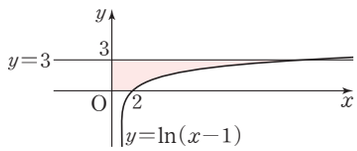

## 1045 답 $e^3+2$

$y=\ln(x-1)$을 $x$에 대하여 풀면

$x-1=e^y$ $\therefore x=e^y+1$

$0\le y\le3$에서 $x>0$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^3(e^y+1)\,dy=\left[e^y+y\right]_0^3=(e^3+3)-1=e^3+2$$



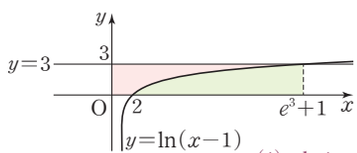

다른 풀이

$y=0$에서 $\ln(x-1)=0$

$x-1=1$ $\therefore x=2$

$y=3$에서 $\ln(x-1)=3$

$x-1=e^3$ $\therefore x=e^3+1$




$2\le x\le e^3+1$에서 $y\ge0$이므로 구하는 도형의 넓이는

$u(t)=\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면 $u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=t$

$$(e^3+1)\times3-\int_2^{e^3+1}\ln(x-1)\,dx=3e^3+3-\int_1^{e^3}\ln t\,dt$$

$$=3e^3+3-\left(\left[t\ln t\right]_1^{e^3}-\int_1^{e^3}dt\right)$$

$$=3e^3+3-3e^3+\left[t\right]_1^{e^3}$$

$$=3+e^3-1=e^3+2$$

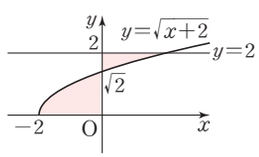
## 1046 답 $\frac{8\sqrt{2}-4}{3}$

곡선 $y=\sqrt{x+2}$와 $y$축의 교점의 $y$좌표는

$y=\sqrt{2}$

$y=\sqrt{x+2}$를 $x$에 대하여 풀면

$x+2=y^2$ $\therefore x=y^2-2$




$0\le y\le\sqrt{2}$에서 $x\le0$, $\sqrt{2}\le y\le2$에서 $x\ge0$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^{\sqrt{2}}\{-(y^2-2)\}\,dy+\int_{\sqrt{2}}^2(y^2-2)\,dy$$

$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+2y\right]_0^{\sqrt{2}}+\left[\frac{1}{3}y^3-2y\right]_{\sqrt{2}}^2$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}+\left(-\frac{4}{3}+\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{8\sqrt{2}-4}{3}$$

## 1047 답 $6-8\ln2$

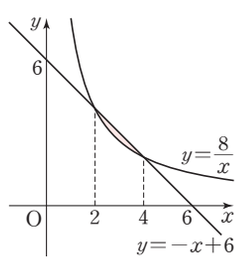
곡선 $y=\frac{8}{x}$과 직선 $y=-x+6$의 교점의 $x$좌표는

$\frac{8}{x}=-x+6$에서

$x^2-6x+8=0$

$(x-2)(x-4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$




$2\le x\le4$에서 $\frac{8}{x}\le-x+6$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_2^4\left(-x+6-\frac{8}{x}\right)dx=\left[-\frac{1}{2}x^2+6x-8\ln x\right]_2^4$$

$$=(16-8\ln4)-(10-8\ln2)$$

$$=6-8\ln2$$

## 1048 답 $\frac{1}{3}$

두 곡선 $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$의 교점의 $x$좌표는

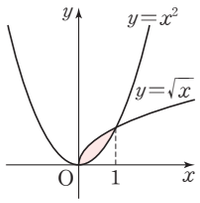
$\sqrt{x}=x^2$에서 $x^4-x=0$

$x(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ ($\because x^2+x+1>0$)

$0\le x\le1$에서 $\sqrt{x}\ge x^2$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}$$




## 1049 답 9

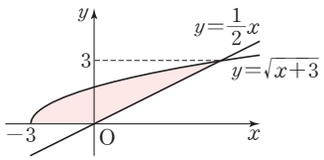
$y=\sqrt{x+3}$을 $x$에 대하여 풀면

$y^2=x+3$

$\therefore x=y^2-3\,(y\ge0)$

$y=\frac{1}{2}x$를 $x$에 대하여 풀면

$x=2y$




곡선 $x=y^2-3$과 직선 $x=2y$의 교점의 $y$좌표는

$y^2-3=2y$에서

$y^2-2y-3=0$, $(y+1)(y-3)=0$

$\therefore y=3$ ($\because y\ge0$)

$0\le y\le3$에서 $y^2-3\le2y$이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^3\{2y-(y^2-3)\}\,dy=\int_0^3(-y^2+2y+3)\,dy$$

$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+y^2+3y\right]_0^3=9$$

## 1050 답 $\frac{20}{3}\text{cm}^3$

구하는 물의 부피는

$$\int_0^2(x^2+2x)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2=\frac{20}{3}(\text{cm}^3)$$

## 1051 답 $4+\frac{\pi^2}{2}$

구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\pi}(2\sin x+x)\,dx=\left[-2\cos x+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi}$$

$$=\left(2+\frac{\pi^2}{2}\right)-(-2)=4+\frac{\pi^2}{2}$$

## 1052 답 $\frac{2}{3}t\sqrt{t}-t$

시각 $t$에서의 점 P의 위치는

$$\int_0^t(\sqrt{s}-1)\,ds=\left[\frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}}-s\right]_0^t=\frac{2}{3}t\sqrt{t}-t$$

## 1053 답 9

점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^9 (\sqrt{t}-1)\,dt=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-t\right]_0^9=9$$

## 1054 답 2

$\sqrt{t}-1=0$에서 $t=1$

따라서 $0\le t\le 1$일 때 $v(t)\le 0$, $1\le t\le 4$일 때 $v(t)\ge 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^4 |\sqrt{t}-1|\,dt&=\int_0^1 (-\sqrt{t}+1)\,dt+\int_1^4 (\sqrt{t}-1)\,dt\\&=\left[-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+t\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}-t\right]_1^4\\&=\frac{1}{3}+\left\{\frac{4}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}=2\end{aligned}$$

## 1055 답 $\sin t-\frac{1}{2}t$

시각 $t$에서의 점 P의 위치는

$$\int_0^t \left(\cos s-\frac{1}{2}\right)ds=\left[\sin s-\frac{1}{2}s\right]_0^t=\sin t-\frac{1}{2}t$$

## 1056 답 $-\frac{\pi}{2}$

점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^{\pi} \left(\cos t-\frac{1}{2}\right)dt=\left[\sin t-\frac{1}{2}t\right]_0^{\pi}=-\frac{\pi}{2}$$

## 1057 답 $-1+\sqrt{3}-\frac{\pi}{12}$

$\cos t-\frac{1}{2}=0$에서 $t=\frac{\pi}{3}$ $\left(\because\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $0\le t\le\frac{\pi}{3}$일 때 $v(t)\ge 0$, $\frac{\pi}{3}\le t\le\frac{\pi}{2}$일 때 $v(t)\le 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\cos t-\frac{1}{2}\right|dt&=\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\cos t-\frac{1}{2}\right)dt+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-\cos t+\frac{1}{2}\right)dt\\&=\left[\sin t-\frac{1}{2}t\right]_0^{\frac{\pi}{3}}+\left[-\sin t+\frac{1}{2}t\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\\&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\left(-\frac{2-\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\\&=-1+\sqrt{3}-\frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

## 1058 답 $3\sqrt{2}$

$\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=-2t$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^2 \sqrt{(2t)^2+(-2t)^2}\,dt=\int_1^2 2\sqrt{2}t\,dt=\left[\sqrt{2}t^2\right]_1^2=3\sqrt{2}$$

## 1059 답 $2e^4-2e^2$

$\frac{dx}{dt}=2e^{2t}$, $\frac{dy}{dt}=2\sqrt{3}e^{2t}$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^2 \sqrt{(2e^{2t})^2+(2\sqrt{3}e^{2t})^2}\,dt=\int_1^2 4e^{2t}\,dt=\left[2e^{2t}\right]_1^2=2e^4-2e^2$$

## 1060 답 $\frac{3}{2}+\ln 2$

$\frac{dx}{dt}=t-\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=2$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2^2}\,dt&=\int_1^2 \left(t+\frac{1}{t}\right)dt\\&=\left[\frac{1}{2}t^2+\ln t\right]_1^2=\frac{3}{2}+\ln 2\end{aligned}$$

## 1061 답 3

$\frac{dx}{dt}=3\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-3\sin t$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^2 \sqrt{(3\cos x)^2+(-3\sin x)^2}\,dt=\int_1^2 3\,dt=\left[3t\right]_1^2=3$$

## 1062 답 27

$\frac{dx}{dt}=2\sqrt{5}t$, $\frac{dy}{dt}=4t$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^3 \sqrt{(2\sqrt{5}t)^2+(4t)^2}\,dt=\int_0^3 6t\,dt=\left[3t^2\right]_0^3=27$$

## 1063 답 $\pi$

$\frac{dx}{dt}=\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\sin t$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt=\int_0^{\pi} dt=\left[t\right]_0^{\pi}=\pi$$

## 1064 답 $\frac{4\sqrt{2}-2}{3}$

$f(x)=\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}$이라 하면

$f'(x)=-\sqrt{1-x}$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+(-\sqrt{1-x})^2}\,dx&=\int_0^1 \sqrt{2-x}\,dx\\&=\left[-\frac{2}{3}(2-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1\\&=-\frac{2}{3}-\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{4\sqrt{2}-2}{3}\end{aligned}$$

## 1065 답 $\frac{21}{16}$

$f(x)=\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2x^2}$이라 하면

$f'(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{x^3}$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_1^2 \sqrt{1+\left(\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{x^3}\right)^2}\,dx&=\int_1^2 \left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{x^3}\right)dx\\&=\left[\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{2x^2}\right]_1^2\\&=\frac{7}{8}-\left(-\frac{7}{16}\right)=\frac{21}{16}\end{aligned}$$

## B 유형 완성 176~185쪽

### 1066 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{3k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{3k}{n}\right)\times\frac{3}{n}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\int_1^4 f(x)\,dx=\frac{1}{3}\int_1^4(ax-3\sqrt{x})\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{a}{2}x^2-2x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$
$$=\frac{1}{3}\left\{(8a-16)-\left(\frac{a}{2}-2\right)\right\}$$
$$=\frac{5}{2}a-\frac{14}{3}$$

따라서 $\frac{5}{2}a-\frac{14}{3}=\frac{16}{3}$이므로

$a=4$

### 1067 답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\left(2+\frac{k}{n}\right)^5=\int_2^3 x^5\,dx \ \rightarrow 2+\frac{k}{n}=x$$
$$=\int_0^1(x+2)^5\,dx \ \rightarrow \frac{k}{n}=x$$
$$=\int_7^8(x-5)^5\,dx \ \rightarrow x\text{축의 방향으로 7만큼 평행이동}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

### 1068 답 24

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{8}{n}f\left(2+\frac{6k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{6k}{n}\right)\times\frac{6}{n}\times\frac{8}{6}$$
$$=\frac{4}{3}\int_2^8 f(x)\,dx$$
$$=\frac{4}{3}\times 18=24$$

### 1069 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(2n-k)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}-2\right)^2}\times\frac{1}{n}$$
$$=\int_{-2}^{-1}\frac{x+2}{x^2}\,dx=\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx$$
$$=\left[\ln|x|-\frac{2}{x}\right]_{-2}^{-1}$$
$$=2-(\ln 2+1)=1-\ln 2$$

### 1070 답 $2\ln 2-1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}$$
$$=\int_1^2\ln x\,dx \ \rightarrow u(x)=\ln x,\ v'(x)=1\text{로 놓으면 } u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=x$$
$$=\left[x\ln x\right]_1^2-\int_1^2 dx$$
$$=2\ln 2-\left[x\right]_1^2=2\ln 2-1$$

### 1071 답 $\frac{\ln 2}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3+1^3}+\frac{2^2}{n^3+2^3}+\frac{3^2}{n^3+3^3}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n^3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3+k^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}\times\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\frac{x^2}{1+x^3}dx=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{(1+x^3)'}{1+x^3}dx$$
$$=\frac{1}{3}\left[\ln|1+x^3|\right]_0^1=\frac{\ln 2}{3}$$

### 1072 답 $\frac{1}{\pi}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left\{f\left(\frac{\pi}{n}\right)+2f\left(\frac{2\pi}{n}\right)+3f\left(\frac{3\pi}{n}\right)+\cdots+nf\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}kf\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\times\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1 xf(\pi x)\,dx=\int_0^1 x\sin\pi x\,dx \ \rightarrow u(x)=x,\ v'(x)=\sin\pi x\text{로 놓으면}$$
$$=\left[-\frac{x}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1\cos\pi x\,dx \quad u'(x)=1,\ v(x)=-\frac{1}{\pi}\cos\pi x$$
$$=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x\right]_0^1=\frac{1}{\pi}$$

### 1073 답 $\frac{5}{3}$

점 $A_k$의 좌표는 $\left(\frac{k}{n},\ 0\right)$이므로 점 $B_k$의 좌표는

$\left(\frac{k}{n},\ 2\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right)$

따라서 $\overline{A_kB_k}=2\left(\frac{k}{n}\right)^2+1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\overline{A_kB_k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{2\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{2\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right\}\times\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1(2x^2+1)\,dx=\left[\frac{2}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{5}{3}$$

### 1074 답 8

$\overline{AB}=2$에서 $\overline{AB_k}=\frac{2k}{n}$

이때 $\triangle AB_1C_1$, $\triangle AB_2C_2$, $\triangle AB_3C_3$, ..., $\triangle ABC$는 모두 서로 닮음이고 $\overline{AB}=\overline{BC}$이므로

$\overline{B_kC_k}=\overline{AB_k}=\frac{2k}{n}$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{B_kC_k}^3=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2k}{n}\right)^3\times\frac{2}{n}\times 2$$
$$=2\int_0^2 x^3\,dx=2\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=8$$

### 1075 답 ②

$x_k=1+\frac{2-1}{n}k=1+\frac{k}{n}$이므로

$\frac{e^{x_k}}{2}=\frac{e^{1+\frac{k}{n}}}{2}$

네 점 $(1, 0)$, $(x_k, 0)$, $\left(x_k, \frac{e^{x_k}}{2}\right)$, $\left(1, \frac{e}{2}\right)$를 꼭짓점으로 하는 사각형은 윗변의 길이가 $\frac{e}{2}$, 아랫변의 길이가 $\frac{e^{x_k}}{2}$이고 높이가 $x_k-1$인 사다리꼴이므로

$$S_k=\frac{1}{2}\times\left\{\frac{e}{2}+\frac{e^{x_k}}{2}\right\}\times(x_k-1)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{e+e^{1+\frac{k}{n}}}{2}\times\frac{k}{n}=\frac{e+e^{1+\frac{k}{n}}}{4}\times\frac{k}{n}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{e+e^{1+\frac{k}{n}}}{4}\times\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{4}x(e+e^{1+x})\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\int_0^1 ex\,dx+\frac{1}{4}\int_0^1 xe^{x+1}\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{e}{2}x^2\right]_0^1+\frac{1}{4}\left(\left[xe^{x+1}\right]_0^1-\int_0^1 e^{x+1}dx\right)$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{e}{2}+\frac{1}{4}\left(e^2-\left[e^{x+1}\right]_0^1\right)$$
$$=\frac{e}{8}+\frac{1}{4}\{e^2-(e^2-e)\}=\frac{3}{8}e$$

$u(x)=x,\ v'(x)=e^{x+1}$으로 놓으면 $u'(x)=1,\ v(x)=e^{x+1}$

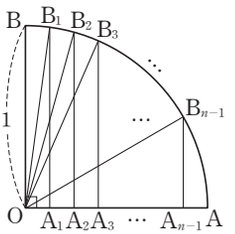
## 1076 답 $\frac{4}{3}$

$\overline{OA}=1$에서 $\overline{OA_k}=\frac{k}{n}$

$\overline{OB_k}$는 부채꼴 OAB의 반지름이므로 $\overline{OB_k}=1$

$\triangle OA_kB_k$는 $\angle OA_kB_k=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이므로

$$\overline{A_kB_k}^2=\overline{OB_k}^2-\overline{OA_k}^2=1-\left(\frac{k}{n}\right)^2$$ ····· ❶




$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{A_kB_k}^2=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}\times\frac{1}{n}\times 2$$
$$=2\int_0^1(1-x^2)\,dx$$
$$=2\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{4}{3}$$ ····· ❷

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ $\overline{A_kB_k}^2$을 $k$에 대한 식으로 나타내기 | 40 % |
| ❷ $\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{A_kB_k}^2$의 값 구하기 | 60 % |

## 1077 답 $\frac{18}{\pi}$

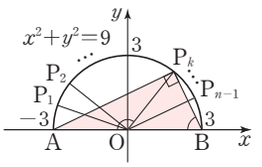
오른쪽 그림에서

$\angle AOP_k=\frac{k\pi}{n}$이므로

$\angle ABP_k=\frac{k\pi}{2n}$

직각삼각형 $ABP_k$에서

$\overline{AP_k}=6\sin\frac{k\pi}{2n}$, $\overline{BP_k}=6\cos\frac{k\pi}{2n}$이므로




$$S_k=\frac{1}{2}\times\overline{AP_k}\times\overline{BP_k}=\frac{1}{2}\times 6\sin\frac{k\pi}{2n}\times 6\cos\frac{k\pi}{2n}$$
$$=18\sin\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{k\pi}{2n}=9\sin\frac{k\pi}{n}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}9\sin\frac{k\pi}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\times\frac{\pi}{n}\times\frac{9}{\pi}$$
$$=\frac{9}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{9}{\pi}\left[-\cos x\right]_0^{\pi}$$
$$=\frac{9}{\pi}\{1-(-1)\}=\frac{18}{\pi}$$

**참고** 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 그 호에 대한 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$이다.

## 1078 답 $e+\frac{1}{e^2}-1$

구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{0}(e^{-x}-1)\,dx+\int_0^2\{-(e^{-x}-1)\}\,dx$$
$$=\left[-e^{-x}-x\right]_{-1}^{0}+\left[e^{-x}+x\right]_0^2$$
$$=(-1+e-1)+\left(\frac{1}{e^2}+2-1\right)=e+\frac{1}{e^2}-1$$

## 1079 답 ②

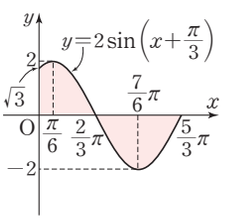
$$\int_0^4(\sqrt{x}+a)\,dx=\int_0^4(x^{\frac{1}{2}}+a)\,dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+ax\right]_0^4=\frac{16}{3}+4a$$

따라서 $\frac{16}{3}+4a=6$이므로 $a=\frac{1}{6}$

## 1080 답 7

곡선 $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0$에서

$x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ $\left(\because\ 0\le x\le\frac{5}{3}\pi\right)$



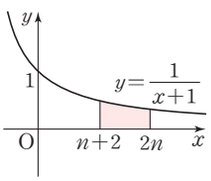

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)dx+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi}\left\{-2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right\}dx$$
$$=\left[-2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\left[2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{5}{3}\pi}$$
$$=(2+1)+(2+2)=7$$

## 1081 답 $\ln 2$

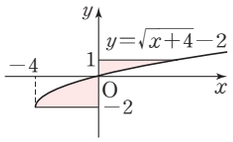
$$S_n=\int_{n+2}^{2n}\frac{1}{x+1}dx$$
$$=\left[\ln|x+1|\right]_{n+2}^{2n}$$
$$=\ln(2n+1)-\ln(n+3)\ (\because\ n>2)$$
$$=\ln\frac{2n+1}{n+3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2n+1}{n+3}=\ln 2$$



## 1082 답 $\frac{23}{3}$

곡선 $y=\sqrt{x+4}-2$와 $y$축의 교점의 $y$좌표는 $y=0$




$y=\sqrt{x+4}-2$를 $x$에 대하여 풀면

$y+2=\sqrt{x+4}$, $(y+2)^2=x+4$

$\therefore x=y^2+4y\ (y\geq -2)$

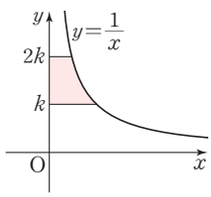
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^{0}\{-(y^2+4y)\}\,dy+\int_{0}^{1}(y^2+4y)\,dy$$

$$=\left[-\frac{1}{3}y^3-2y^2\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{3}y^3+2y^2\right]_{0}^{1}=\frac{16}{3}+\frac{7}{3}=\frac{23}{3}$$

## 1083 답 ①

$y=\frac{1}{x}$을 $x$에 대하여 풀면 $x=\frac{1}{y}$



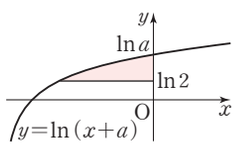

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{k}^{2k}\frac{1}{y}\,dy=\Big[\ln|y|\Big]_{k}^{2k}$$

$$=\ln 2k-\ln k=\ln 2$$

## 1084 답 $2e$

곡선 $y=\ln(x+a)$와 $y$축의 교점의 $y$좌표는 $y=\ln a$




$y=\ln(x+a)$를 $x$에 대하여 풀면

$x+a=e^y$ $\therefore x=e^y-a$

곡선 $x=e^y-a$와 $y$축 및 직선 $y=\ln 2$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{\ln 2}^{\ln a}\{-(e^y-a)\}\,dy=\Big[-e^y+ay\Big]_{\ln 2}^{\ln a}$$

$$=(-a+a\ln a)-(-2+a\ln 2)$$

$$=a\ln\frac{a}{2}-a+2$$

따라서 $a\ln\frac{a}{2}-a+2=2$이므로

$a\left(\ln\frac{a}{2}-1\right)=0$, $\ln\frac{a}{2}=1$ ($\because a>2$)

$\frac{a}{2}=e$ $\therefore a=2e$

## 1085 답 ②

곡선 $y=\frac{2x}{x^2+2}$와 직선 $y=\frac{1}{3}x$의 교점의 $x$좌표는

$\frac{2x}{x^2+2}=\frac{1}{3}x$에서 $6x=x^3+2x$

$x^3-4x=0$, $x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^{0}\left(\frac{1}{3}x-\frac{2x}{x^2+2}\right)dx+\int_{0}^{2}\left(\frac{2x}{x^2+2}-\frac{1}{3}x\right)dx$$

$$=\int_{-2}^{0}\left\{\frac{1}{3}x-\frac{(x^2+2)'}{x^2+2}\right\}dx+\int_{0}^{2}\left\{\frac{(x^2+2)'}{x^2+2}-\frac{1}{3}x\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{6}x^2-\ln|x^2+2|\right]_{-2}^{0}+\left[\ln|x^2+2|-\frac{1}{6}x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\left(-\ln 2-\frac{2}{3}+\ln 6\right)+\left(\ln 6-\frac{2}{3}-\ln 2\right)$$

$$=2\ln 3-\frac{4}{3}$$

즉, $2\ln 3-\frac{4}{3}=a\ln 3+b$이므로

$a=2$, $b=-\frac{4}{3}$ $\therefore a+b=\frac{2}{3}$

## 1086 답 $\frac{9}{2}$

$y=x-3$을 $x$에 대하여 풀면 $x=y+3$

곡선 $x=y^2+1$과 직선 $x=y+3$의 교점의 $y$좌표는

$y^2+1=y+3$에서 $y^2-y-2=0$

$(y+1)(y-2)=0$ $\therefore y=-1$ 또는 $y=2$ …… ❶

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^{2}\{(y+3)-(y^2+1)\}\,dy=\int_{-1}^{2}(-y^2+y+2)\,dy$$

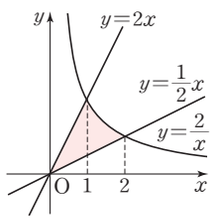
$$=\left[-\frac{1}{3}y^3+\frac{1}{2}y^2+2y\right]_{-1}^{2}$$

$$=\frac{10}{3}+\frac{7}{6}=\frac{9}{2}$$ …… ❷

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 곡선과 직선의 교점의 $y$좌표 구하기 | 50 % |
| ❷ 도형의 넓이 구하기 | 50 % |

## 1087 답 ③

곡선 $y=\frac{2}{x}\ (x>0)$와 직선 $y=2x$의 교점의 $x$좌표는 $\frac{2}{x}=2x$에서




$x^2=1$ $\therefore x=1$ ($\because x>0$)

또 곡선 $y=\frac{2}{x}\ (x>0)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$의 교점의 $x$좌표는 $\frac{2}{x}=\frac{1}{2}x$에서

$x^2=4$ $\therefore x=2$ ($\because x>0$)

따라서 곡선 $y=\frac{2}{x}\ (x>0)$와 두 직선 $y=2x$, $y=\frac{1}{2}x$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{0}^{1}\left(2x-\frac{1}{2}x\right)dx+\int_{1}^{2}\left(\frac{2}{x}-\frac{1}{2}x\right)dx=\left[\frac{3}{4}x^2\right]_{0}^{1}+\left[2\ln x-\frac{1}{4}x^2\right]_{1}^{2}$$

$$=\frac{3}{4}+\left(2\ln 2-1+\frac{1}{4}\right)$$

$$=2\ln 2$$

즉, $\ln a=2\ln 2=\ln 4$이므로 $a=4$

## 1088 답 $\frac{\pi^2}{2}-\pi$

곡선 $y=x\sin x$와 직선 $y=-x+\pi$의 교점의 $x$좌표를 $k\ (0<k<\pi)$라 하면

$S_1-S_2$

$$=\int_{0}^{k}(-x+\pi-x\sin x)\,dx-\int_{k}^{\pi}\{x\sin x-(-x+\pi)\}\,dx$$

$$=\int_{0}^{k}(-x+\pi-x\sin x)\,dx+\int_{k}^{\pi}(-x+\pi-x\sin x)\,dx$$

$$=\int_{0}^{\pi}(-x+\pi-x\sin x)\,dx$$ → $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$

$$=\left[-\frac{1}{2}x^2+\pi x\right]_{0}^{\pi}-\left(\left[-x\cos x\right]_{0}^{\pi}+\int_{0}^{\pi}\cos x\,dx\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{2}-\left(\pi+\Big[\sin x\Big]_{0}^{\pi}\right)=\frac{\pi^2}{2}-\pi$$

## 1089 답 $2e^2+2$

두 곡선 $y=\ln x$, $y=\ln\frac{1}{x}$의 교점의 $x$좌표는 $\ln x=\ln\frac{1}{x}$에서

$\ln x=-\ln x$, $2\ln x=0$ $\therefore x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_1^{e^2}\left(\ln x-\ln\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^{e^2}2\ln x\,dx$ ← $u(x)=\ln x$, $v'(x)=2$로 놓으면 $u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=2x$

$=\left[2x\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}2\,dx$

$=4e^2-\left[2x\right]_1^{e^2}=4e^2-(2e^2-2)=2e^2+2$

## 1090 답 8

$y=\sqrt{2x}$를 $x$에 대하여 풀면

$2x=y^2$

$\therefore x=\frac{1}{2}y^2$ $(y\ge0)$

$y=\sqrt{4x-16}$을 $x$에 대하여 풀면

$4x-16=y^2$, $4x=y^2+16$

$\therefore x=\frac{1}{4}y^2+4$ $(y\ge0)$

두 곡선 $x=\frac{1}{2}y^2$, $x=\frac{1}{4}y^2+4$의 교점의 $y$좌표는

$\frac{1}{2}y^2=\frac{1}{4}y^2+4$에서 $\frac{1}{4}y^2=4$ $\therefore y=4$ ($\because y\ge0$)

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_2^4\left(\frac{1}{4}y^2+4-\frac{1}{2}y^2\right)dy+\int_4^6\left\{\frac{1}{2}y^2-\left(\frac{1}{4}y^2+4\right)\right\}dy$

$=\int_2^4\left(-\frac{1}{4}y^2+4\right)dy+\int_4^6\left(\frac{1}{4}y^2-4\right)dy$

$=\left[-\frac{1}{12}y^3+4y\right]_2^4+\left[\frac{1}{12}y^3-4y\right]_4^6$

$=\left(\frac{32}{3}-\frac{22}{3}\right)+\left(-6+\frac{32}{3}\right)=8$

## 1091 답 $4\sqrt{2}$

$y=\frac{1}{x}$을 $x$에 대하여 풀면

$x=\frac{1}{y}$

$y=-\frac{1}{x}$을 $x$에 대하여 풀면

$x=-\frac{1}{y}$

$S_1=\int_1^4\left\{\frac{1}{y}-\left(-\frac{1}{y}\right)\right\}dy$

$=\int_1^4\frac{2}{y}dy=\left[2\ln|y|\right]_1^4=2\ln4$

$S_2=\int_4^a\left\{\frac{1}{y}-\left(-\frac{1}{y}\right)\right\}dy$

$=\int_4^a\frac{2}{y}dy=\left[2\ln|y|\right]_4^a=2\ln a-2\ln4$ ($\because a>4$)

$S_2=\frac{1}{4}S_1$에서 $2\ln a-2\ln4=\frac{1}{2}\ln4$

$\ln a=\frac{5}{4}\ln4$ $\therefore a=4^{\frac{5}{4}}=4\sqrt{2}$

## 1092 답 ⑤

두 곡선 $y=\sqrt{2}\sin x$, $y=\sin2x$의 교점의 $x$좌표는 $\sqrt{2}\sin x=\sin2x$에서

$\sqrt{2}\sin x=2\sin x\cos x$

$\sin x(2\cos x-\sqrt{2})=0$

$\sin x=0$ 또는 $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\pi$ ($\because 0\le x\le\pi$)

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin2x-\sqrt{2}\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(\sqrt{2}\sin x-\sin2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}\cos2x+\sqrt{2}\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-\sqrt{2}\cos x+\frac{1}{2}\cos2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}$

$=\left\{1-\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)\right\}+\left\{\sqrt{2}+\frac{1}{2}-(-1)\right\}=3$

## 1093 답 $\frac{1}{\ln2}-1$

두 곡선 $y=2^x$, $y=-2^x+2^n$의 교점의 $x$좌표는

$2^x=-2^x+2^n$에서 $2^{x+1}=2^n$

$x+1=n$ $\therefore x=n-1$ …… ❶

두 곡선 $y=2^x$, $y=-2^x+2^n$과 직선 $x=n$으로 둘러싸인 도형의 넓이 $S_n$은

$S_n=\int_{n-1}^{n}\{2^x-(-2^x+2^n)\}dx$

$=\int_{n-1}^{n}(2^{x+1}-2^n)dx$

$=\left[\frac{2^{x+1}}{\ln2}-2^nx\right]_{n-1}^{n}=\left(\frac{2^{n+1}}{\ln2}-2^n\times n\right)-\left\{\frac{2^n}{\ln2}-2^n(n-1)\right\}$

$=\frac{2^n}{\ln2}-2^n=\left(\frac{1}{\ln2}-1\right)2^n$ …… ❷

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{2^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{\ln2}-1\right)2^n}{2^n-1}=\frac{1}{\ln2}-1$ …… ❸

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ 두 곡선 $y=2^x$, $y=-2^x+2^n$의 교점의 $x$좌표 구하기 | 20 % |
| ❷ $S_n$ 구하기 | 60 % |
| ❸ $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{2^n-1}$의 값 구하기 | 20 % |

## 1094 답 $\frac{1}{3}$

$y=\sqrt{1-x}$에서 $y'=-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}$

점 $(0, 1)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 접선의 방정식은

$y-1=-\frac{1}{2}x$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x+1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times1-\int_0^1\sqrt{1-x}\,dx$

$=1-\left[-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

다른 풀이

점 $(0, 1)$에서 그은 곡선 $y=\sqrt{1-x}$의 접선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}x+1$

$y=\sqrt{1-x}$를 $x$에 대하여 풀면

$y^2=1-x \quad \therefore x=1-y^2\ (y\geq 0)$

$y=-\frac{1}{2}x+1$을 $x$에 대하여 풀면

$y-1=-\frac{1}{2}x \quad \therefore x=-2y+2$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^1 \{(-2y+2)-(1-y^2)\}\,dy=\int_0^1 (y^2-2y+1)\,dy$$
$$=\left[\frac{1}{3}y^3-y^2+y\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

## 1095 답 ②

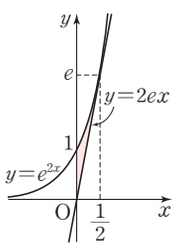
$y=e^{2x}$에서 $y'=2e^{2x}$

점 $\left(\frac{1}{2}, e\right)$에서의 접선의 기울기는 $2e$이므로 접선의 방정식은

$y-e=2e\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad \therefore y=2ex$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(e^{2x}-2ex)\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-ex^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{e}{2}-\frac{e}{4}-\frac{1}{2}=\frac{e-2}{4}$$




## 1096 답 $\frac{1}{8}$

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$라 하면 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{\ln t}{t}\right)(t>0)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=\frac{1-\ln t}{t^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{\ln t}{t}=\frac{1-\ln t}{t^2}(x-t)$

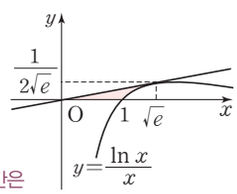
$\therefore y=\frac{1-\ln t}{t^2}x+\frac{2\ln t-1}{t}$

이 직선이 원점을 지나므로 $2\ln t-1=0$

$\ln t=\frac{1}{2} \quad \therefore t=\sqrt{e}$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\sqrt{e}\times\frac{1}{2\sqrt{e}}-\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x}\,dx$$
$$=\frac{1}{4}-\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\ln x}{x}\,dx$$ → $\ln x=s$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{ds}{dx}$이고, 적분 구간은 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$이다.
$$=\frac{1}{4}-\int_0^{\frac{1}{2}} s\,ds$$
$$=\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{2}s^2\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$




## 1097 답 $\frac{1}{10}$

점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-2=x-1 \quad \therefore y=x+1$

$f(x)=\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

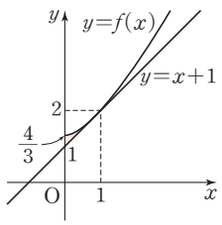
곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 2)$를 지나므로 $f(1)=2$에서

$\frac{2}{3}+C=2 \quad \therefore C=\frac{4}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{4}{3}$이므로

구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^1\left\{\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{4}{3}-(x+1)\right\}dx$$
$$=\int_0^1\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x+\frac{1}{3}\right)dx$$
$$=\left[\frac{4}{15}x^{\frac{5}{2}}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x\right]_0^1$$
$$=\frac{4}{15}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$$




## 1098 답 $\frac{2}{\pi}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2\left(\sin\frac{\pi}{2}x-ax\right)dx=0$$
$$\left[-\frac{2}{\pi}\cos\frac{\pi}{2}x-\frac{a}{2}x^2\right]_0^2=0$$
$$\frac{4}{\pi}-2a=0 \quad \therefore a=\frac{2}{\pi}$$

## 1099 답 ③

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

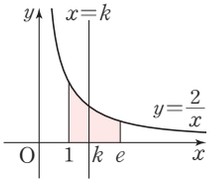
$$\int_0^4(\sqrt{x}-a)\,dx=0$$
$$\int_0^4(x^{\frac{1}{2}}-a)\,dx=0$$
$$\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-ax\right]_0^4=0$$
$$\frac{16}{3}-4a=0 \quad \therefore a=\frac{4}{3}$$

## 1100 답 2

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^k\{xe^x-(e^x+1)\}\,dx=0$$
$$\int_0^k\{(x-1)e^x-1\}\,dx=0$$ → $u(x)=x-1$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=e^x$
$$\left\{\left[(x-1)e^x\right]_0^k-\int_0^k e^x\,dx\right\}-\left[x\right]_0^k=0$$
$$(k-1)e^k+1-\left[e^x\right]_0^k-k=0$$
$$(k-2)e^k-k+2=0$$
$$(k-2)(e^k-1)=0 \quad \therefore k=2\ \left(\because k>\frac{3}{2}\right)$$

## 1101 답 $\sqrt{e}$




곡선 $y=\frac{2}{x}$와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=e$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면

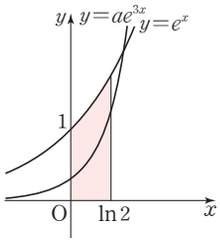
$S_1=\int_1^e \frac{2}{x}dx=\left[2\ln|x|\right]_1^e=2$

곡선 $y=\frac{2}{x}$와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=k$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

$S_2=\int_1^k \frac{2}{x}dx=\left[2\ln|x|\right]_1^k=2\ln k$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로 $2\ln k=1$, $\ln k=\frac{1}{2}$ $\therefore k=\sqrt{e}$

## 1102 답 ⑤




곡선 $y=e^x$과 $x$축, $y$축 및 직선 $x=\ln 2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면

$S_1=\int_0^{\ln 2} e^x dx=\left[e^x\right]_0^{\ln 2}=2-1=1$

곡선 $y=ae^{3x}$과 $x$축, $y$축 및 직선 $x=\ln 2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

$S_2=\int_0^{\ln 2} ae^{3x}dx=\left[\frac{a}{3}e^{3x}\right]_0^{\ln 2}$

$=\frac{8}{3}a-\frac{a}{3}=\frac{7}{3}a$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로 $\frac{7}{3}a=\frac{1}{2}$ $\therefore a=\frac{3}{14}$

## 1103 답 $2-\sqrt{2}$

두 곡선 $y=2\sin x\cos x$, $y=a\sin x$의 교점의 $x$좌표를 $k$라 하면

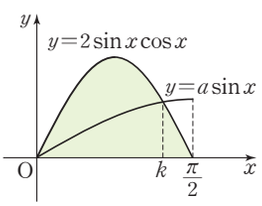
$2\sin k\cos k=a\sin k$에서

$2\cos k=a$ ($\because \sin k\neq 0$) $\therefore \cos k=\frac{a}{2}$ …… ㉠

곡선 $y=2\sin x\cos x$와 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면

$S_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$




곡선 $y=2\sin x\cos x$와 곡선 $y=a\sin x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

$S_2=\int_0^k (2\sin x\cos x-a\sin x)\,dx$

$=\int_0^k (\sin 2x-a\sin x)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+a\cos x\right]_0^k$

$=\left(-\frac{1}{2}\cos 2k+a\cos k\right)-\left(-\frac{1}{2}+a\right)$

$=-\frac{1}{2}(2\cos^2 k-1)+a\cos k-a+\frac{1}{2}$

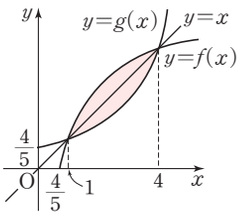
$=-\cos^2 k+a\cos k-a+1=-\left(\frac{a}{2}\right)^2+a\times\frac{a}{2}-a+1$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{a^2}{4}-a+1$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$\frac{a^2}{4}-a+1=\frac{1}{2}$, $a^2-4a+2=0$ $\therefore a=2-\sqrt{2}$ ($\because 0<a<\sqrt{2}$)

## 1104 답 $\frac{9}{5}$




두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는 $\sqrt{5x-4}=x$에서

$5x-4=x^2$, $x^2-5x+4=0$

$(x-1)(x-4)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=4$

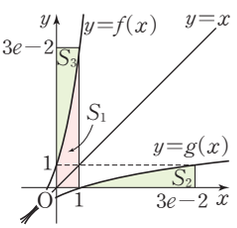
따라서 구하는 도형의 넓이는

$2\int_1^4 (\sqrt{5x-4}-x)\,dx=2\int_1^4 \{(5x-4)^{\frac{1}{2}}-x\}\,dx$

$=2\left[\frac{2}{15}(5x-4)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_1^4$

$=2\left(\frac{8}{15}+\frac{11}{30}\right)=\frac{9}{5}$

## 1105 답 ①




두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $f(0)=1$, $f(1)=3e-2$이므로 $g(1)=0$, $g(3e-2)=1$이다.

오른쪽 그림에서

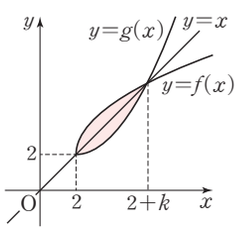
($S_2$의 넓이)=($S_3$의 넓이)

$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^{3e-2} g(x)\,dx=(S_1\text{의 넓이})+(S_2\text{의 넓이})$

$=(S_1\text{의 넓이})+(S_3\text{의 넓이})$

$=1\times(3e-2)=3e-2$

## 1106 답 4




두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는 $\sqrt{k(x-2)}+2=x$에서 $\sqrt{k(x-2)}=x-2$

$k(x-2)=(x-2)^2$, $(x-2)(x-2-k)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=2+k$ …… ⓘ

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\int_2^{2+k}\{f(x)-g(x)\}\,dx=2\int_2^{2+k}\{\sqrt{k(x-2)}+2-x\}\,dx$

$x-2=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$이고, 적분 구간은 $[0, k]$이다.

$=2\int_0^k (\sqrt{kt}-t)\,dt$

$=2\int_0^k (\sqrt{k}\,t^{\frac{1}{2}}-t)\,dt$

$=2\left[\frac{2}{3}\sqrt{k}\,t^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}t^2\right]_0^k$

$=2\times\frac{1}{6}k^2=\frac{1}{3}k^2$ …… ⓘⓘ

즉, $\frac{1}{3}k^2=\frac{16}{3}$이므로 $k^2=16$

$\therefore k=4\ (\because\ k>0)$ ····· ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘ 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $k$에 대한 식으로 나타내기 | 50 % |
| ⓘⓘⓘ $k$의 값 구하기 | 20 % |

## 1107 답 ④

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$이므로

$g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$, $g(\sqrt{3})=\frac{\pi}{3}$이다.

오른쪽 그림에서

($S_2$의 넓이)=($S_3$의 넓이)

따라서 구하는 값은

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)\,dx+\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}}g(x)\,dx=(S_1\text{의 넓이})+(S_2\text{의 넓이})$$
$$=(S_1\text{의 넓이})+(S_3\text{의 넓이})$$
$$=\frac{\pi}{3}\times\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$=\frac{5\sqrt{3}}{18}\pi$$

## 1108 답 ⑤

밑면으로부터 높이가 $x$인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\left(\sqrt{\frac{2x+3}{x+1}}\right)^2=\frac{2x+3}{x+1}$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^2 S(x)\,dx=\int_0^2\frac{2x+3}{x+1}\,dx=\int_0^2\left(2+\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\Big[2x+\ln(x+1)\Big]_0^2=\ln 3+4$$

## 1109 답 4

물의 높이가 $x$cm일 때의 수면의 넓이가 $(e^{-x}+x)\,\text{cm}^2$이므로 물의 높이가 $a$cm일 때의 물의 부피는

$$\int_0^a(e^{-x}+x)\,dx=\Big[-e^{-x}+\frac{1}{2}x^2\Big]_0^a=-\frac{1}{e^a}+\frac{1}{2}a^2+1(\text{cm}^3)$$

따라서 $-\frac{1}{e^a}+\frac{1}{2}a^2+1=-\frac{1}{e^4}+9$이므로 $a=4$

## 1110 답 ③

물의 높이가 $x\,\text{cm}\,(0\le x\le 3)$일 때의 수면의 넓이를 $S(x)\,\text{cm}^2$라 하면

$S(x)=\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\sin\frac{\pi}{4}x}\right)^2=\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}x$

따라서 구하는 물의 부피는

$$\int_0^2 S(x)\,dx=\int_0^2\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{4}x\,dx=\Big[-2\cos\frac{\pi}{4}x\Big]_0^2=2(\text{cm}^3)$$

## 1111 답 $\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 $x$축 위의 점 $\text{P}(x,\,0)\,(0\le x\le\pi)$을 지나는 $x$축에 수직인 직선이 곡선 $y=\sqrt{2\sin x}$와 만나는 점을 Q라 하면

$\text{Q}(x,\,\sqrt{2\sin x})$

$\overline{\text{PQ}}=\sqrt{2\sin x}$를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2\sin x})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^\pi S(x)\,dx=\int_0^\pi\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\,dx=\Big[-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\Big]_0^\pi=\sqrt{3}$$

## 1112 답 ②

오른쪽 그림과 같이 $x$축 위의 점 $\text{P}(x,\,0)\,(0\le x\le\ln 3)$을 지나고 $x$축에 수직인 직선이 곡선 $y=2\sqrt{e^x+2}$와 만나는 점을 Q라 하면

$\text{Q}(x,\,2\sqrt{e^x+2})$

$\overline{\text{PQ}}=2\sqrt{e^x+2}$를 지름으로 하는 반원의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{\pi}{2}(\sqrt{e^x+2})^2=\frac{\pi}{2}(e^x+2)$

따라서 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\ln 3}S(x)\,dx=\int_0^{\ln 3}\frac{\pi}{2}(e^x+2)\,dx=\frac{\pi}{2}\Big[e^x+2x\Big]_0^{\ln 3}$$
$$=\frac{\pi}{2}(2+2\ln 3)=\pi(1+\ln 3)$$

즉, $a=1$, $b=3$이므로 $a+b=4$

## 1113 답 ③

오른쪽 그림과 같이 $x$축 위의 점 $\text{P}(x,\,0)\,(1\le x\le 2)$을 지나고 $x$축에 수직인 직선이 곡선 $y=\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}$와 만나는 점을 Q라 하면

$\text{Q}\left(x,\,\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}\right)$

$\overline{\text{PQ}}=\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\left(\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}\right)^2=\frac{kx}{2x^2+1}$

즉, 입체도형의 부피는

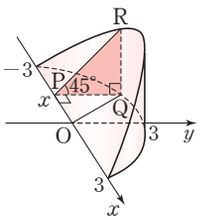
$$\int_1^2\frac{kx}{2x^2+1}\,dx=\frac{k}{4}\int_1^2\frac{4x}{2x^2+1}\,dx\ \rightarrow (2x^2+1)'=4x$$
$$=\frac{k}{4}\int_1^2\frac{(2x^2+1)'}{2x^2+1}\,dx=\frac{k}{4}\Big[\ln(2x^2+1)\Big]_1^2$$
$$=\frac{k}{4}(\ln 9-\ln 3)=\frac{k}{4}\ln 3$$

따라서 $\frac{k}{4}\ln 3=2\ln 3$이므로

$\frac{k}{4}=2$ $\quad\therefore k=8$

## 1114 답 18

오른쪽 그림과 같이 구하는 입체도형의 밑면의 중심을 원점, 지름을 $x$축으로 정하자.




이때 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)\ (-3\le x\le 3)$을 지나고 $x$축에 수직인 평면으로 자른 단면을 △PQR라 하면

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{9-x^2}$

△PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{1}{2}(\sqrt{9-x^2})^2=\frac{1}{2}(9-x^2)$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$\int_{-3}^{3}S(x)\,dx=\int_{-3}^{3}\frac{1}{2}(9-x^2)\,dx=\frac{1}{2}\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{3}=18$

## 1115 답 ④

$\sin 2\pi t=0$에서 $t=0$ 또는 $t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=1$ $(\because\ 0\le t\le 1)$

따라서 $0\le t\le\frac{1}{2}$일 때 $v(t)\ge 0$, $\frac{1}{2}\le t\le 1$일 때 $v(t)\le 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^1|2\pi\sin 2\pi t|\,dt&=\int_0^{\frac{1}{2}}2\pi\sin 2\pi t\,dt-\int_{\frac{1}{2}}^1 2\pi\sin 2\pi t\,dt\\&=\left[-\cos 2\pi t\right]_0^{\frac{1}{2}}-\left[-\cos 2\pi t\right]_{\frac{1}{2}}^1\\&=1+1-(-1-1)=4\end{aligned}$$

## 1116 답 $e^2+1$

시각 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$0+\int_0^2 te^t\,dt=\left[te^t\right]_0^2-\int_0^2 e^t\,dt$ → $u(t)=t$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면 $u'(t)=1$, $v(t)=e^t$

$=2e^2-\left[e^t\right]_0^2=2e^2-(e^2-1)=e^2+1$

## 1117 답 ③

$v(t)=0$에서 $\cos t-\cos 2t=0$, $\cos t-(2\cos^2 t-1)=0$

$2\cos^2 t-\cos t-1=0$, $(2\cos t+1)(\cos t-1)=0$

$\cos t=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos t=1$

$\therefore\ t=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $t=\frac{4}{3}\pi$ 또는 $t=2\pi$ 또는 … $(\because\ t>0)$

즉, 점 P가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은

$t=\frac{2}{3}\pi$

따라서 $0\le t\le\frac{2}{3}\pi$에서 $v(t)\ge 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=\frac{2}{3}\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\cos t-\cos 2t)\,dt=\left[\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{2}{3}\pi}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

## 1118 답 16

시각 $t$에서의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_{\mathrm{P}}$, $x_{\mathrm{Q}}$라 하면

$x_{\mathrm{P}}=0+\int_0^t 2s\,ds=\left[s^2\right]_0^t=t^2$

$x_{\mathrm{Q}}=0+\int_0^t\left(\frac{3}{2}\sqrt{s}+s\right)ds=\left[s^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}s^2\right]_0^t=t\sqrt{t}+\frac{1}{2}t^2$ …… ❶

두 점 P, Q가 동시에 출발한 후 다시 만나려면 $x_{\mathrm{P}}=x_{\mathrm{Q}}$이어야 하므로

$t^2=t\sqrt{t}+\frac{1}{2}t^2$, $t\sqrt{t}\left(1-\frac{\sqrt{t}}{2}\right)=0$

$1-\frac{\sqrt{t}}{2}=0$ $(\because\ t>0)$ $\therefore\ t=4$ …… ❷

따라서 두 점 P, Q가 처음으로 다시 만나는 시각은 $t=4$이므로 그 때의 위치는

$4^2=16$ …… ❸

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ 시각 $t$에서의 두 점 P, Q의 위치 구하기 | 40 % |
| ❷ 두 점 P, Q가 동시에 출발한 후 다시 만나는 $t$의 값 구하기 | 40 % |
| ❸ 두 점 P, Q가 동시에 출발한 후 처음으로 다시 만날 때의 위치 구하기 | 20 % |

## 1119 답 $5\pi$

$\frac{dx}{dt}=3\cos t+4\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-3\sin t+4\cos t$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=\pi$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^{\pi}\sqrt{(3\cos t+4\sin t)^2+(-3\sin t+4\cos t)^2}\,dt$

$=\int_0^{\pi}\sqrt{25\cos^2 t+25\sin^2 t}\,dt$

$=\int_0^{\pi}5\,dt=\left[5t\right]_0^{\pi}=5\pi$

## 1120 답 ②

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{\sqrt{t}}{2}$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_1^a\sqrt{\left(\frac{1}{4}t-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{t}}{2}\right)^2}\,dt&=\int_1^a\sqrt{\frac{1}{16}t^2+\frac{1}{8}t+\frac{1}{16}}\,dt\\&=\int_1^a\sqrt{\frac{1}{16}(t+1)^2}\,dt\\&=\frac{1}{4}\int_1^a(t+1)\,dt\\&=\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}t^2+t\right]_1^a=\frac{1}{8}a^2+\frac{1}{4}a-\frac{3}{8}\end{aligned}$$

즉, $\frac{1}{8}a^2+\frac{1}{4}a-\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$이므로 $a^2+2a-8=0$

$(a+4)(a-2)=0$ $\therefore\ a=2$ $(\because\ a>1)$

## 1121 답 3

$\frac{dx}{dt}=6\sin^2 t\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-6\cos^2 t\sin t$

시각 $t$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(6\sin^2 t\cos t)^2+(-6\cos^2 t\sin t)^2}$

$=\sqrt{36\sin^4 t\cos^2 t+36\cos^4 t\sin^2 t}$

$=\sqrt{36\sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t+\cos^2 t)}$

$=|6\sin t\cos t|=|3\sin 2t|$

이때 점 P가 출발한 후 속력이 처음으로 0이 되는 시각은

$|3\sin 2t|=0$에서

$\sin 2t=0$, $2t=\pi$ $\therefore\ t=\frac{\pi}{2}$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|3\sin 2t|\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin 2t\,dt$$
$$=\left[-\frac{3}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$$

## 1122 답 ①

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 $x$좌표를 $\alpha$, $\beta$라 하면 $\alpha$, $\beta$는 이차방정식 $x^2-t^2x+\frac{\ln t}{8}=0$의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=t^2$

이때 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$가 만나는 서로 다른 두 점의 중점 P의 $x$좌표는

$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{t^2}{2}$

점 P는 직선 $y=t^2x-\frac{\ln t}{8}$ 위의 점이므로 $y$좌표는

$y=t^2\times\frac{t^2}{2}-\frac{\ln t}{8}=\frac{t^4}{2}-\frac{\ln t}{8}$

따라서 점 P의 위치 $(x, y)$는 $x=\frac{t^2}{2}$, $y=\frac{t^4}{2}-\frac{\ln t}{8}$이므로

$\frac{dx}{dt}=t$, $\frac{dy}{dt}=2t^3-\frac{1}{8t}$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=e$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^e\sqrt{t^2+\left(2t^3-\frac{1}{8t}\right)^2}\,dt=\int_1^e\sqrt{4t^6+\frac{t^2}{2}+\frac{1}{64t^2}}\,dt$$
$$=\int_1^e\sqrt{\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)^2}\,dt$$
$$=\int_1^e\left(2t^3+\frac{1}{8t}\right)dt$$
$$=\left[\frac{t^4}{2}+\frac{\ln t}{8}\right]_1^e$$
$$=\left(\frac{e^4}{2}+\frac{1}{8}\right)-\frac{1}{2}=\frac{e^4}{2}-\frac{3}{8}$$

## 1123 답 $\frac{53}{6}$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4x}$이라 하면 $f'(x)=x^2-\frac{1}{4x^2}$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_1^3\sqrt{1+\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx=\int_1^3\sqrt{x^4+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x^4}}\,dx$$
$$=\int_1^3\sqrt{\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^3\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4x}\right]_1^3=\frac{107}{12}-\frac{1}{12}=\frac{53}{6}$$

## 1124 답 $\frac{80}{9}$

$\frac{dx}{dt}=2e^{2t}-2e^{-2t}$, $\frac{dy}{dt}=4$

따라서 $0\le t\le\ln 3$에서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\ln 3}\sqrt{(2e^{2t}-2e^{-2t})^2+16}\,dt=\int_0^{\ln 3}\sqrt{4e^{4t}+8+4e^{-4t}}\,dt$$
$$=\int_0^{\ln 3}\sqrt{(2e^{2t}+2e^{-2t})^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\ln 3}(2e^{2t}+2e^{-2t})\,dt$$
$$=\left[e^{2t}-e^{-2t}\right]_0^{\ln 3}=\frac{80}{9}$$

## 1125 답 ②

$\frac{dx}{dt}=2t$, $\frac{dy}{dt}=t^2$

따라서 $0\le t\le 2$에서 구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^2\sqrt{(2t)^2+(t^2)^2}\,dt=\int_0^2\sqrt{t^4+4t^2}\,dt$$
$$=\int_0^2 t\sqrt{t^2+4}\,dt$$

$t^2+4=u$로 놓으면 $2t=\frac{du}{dt}$이고, 적분 구간은 $[4, 8]$이다.

$$=\frac{1}{2}\int_4^8\sqrt{u}\,du=\frac{1}{2}\int_4^8 u^{\frac{1}{2}}\,du$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_4^8=\frac{16\sqrt{2}-8}{3}$$

## 1126 답 ⑤

$f(x)=\frac{1}{16}x^2-2\ln x$라 하면 $f'(x)=\frac{1}{8}x-\frac{2}{x}$

따라서 $1\le x\le a$에서 곡선의 길이는

$$\int_1^a\sqrt{1+\left(\frac{1}{8}x-\frac{2}{x}\right)^2}\,dx=\int_1^a\sqrt{\frac{1}{64}x^2+\frac{1}{2}+\frac{4}{x^2}}\,dx$$
$$=\int_1^a\sqrt{\left(\frac{1}{8}x+\frac{2}{x}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_1^a\left(\frac{1}{8}x+\frac{2}{x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{16}x^2+2\ln|x|\right]_1^a$$
$$=\frac{1}{16}a^2+2\ln a-\frac{1}{16}$$

즉, $\frac{1}{16}a^2+2\ln a-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}+4\ln 2$이므로

$\frac{1}{16}a^2-\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$, $2\ln a=4\ln 2$

$\therefore a=4$

## AB 유형 점검 186~188쪽

## 1127 답 $\frac{13}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{3n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{3n}\right)\times\frac{1}{3n}\times 3$$
$$=3\int_0^{\frac{1}{3}}f(x)\,dx=3\int_0^{\frac{1}{3}}\left(\sin\pi x+\frac{a}{\pi}\right)dx$$
$$=3\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x+\frac{a}{\pi}x\right]_0^{\frac{1}{3}}$$
$$=3\left\{\left(-\frac{1}{2\pi}+\frac{a}{3\pi}\right)-\left(-\frac{1}{\pi}\right)\right\}$$
$$=\frac{3+2a}{2\pi}$$

따라서 $\frac{3+2a}{2\pi}=\frac{8}{\pi}$이므로

$3+2a=16 \quad \therefore a=\frac{13}{2}$

## 1128 답 ③

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2+2kn}{k^3+3k^2n+n^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2+2\left(\frac{k}{n}\right)}{\left(\frac{k}{n}\right)^3+3\left(\frac{k}{n}\right)^2+1}\times\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{x^2+2x}{x^3+3x^2+1}dx \quad \rightarrow (x^3+3x^2+1)'=3x^2+6x$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{(x^3+3x^2+1)'}{x^3+3x^2+1}dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big[\ln|x^3+3x^2+1|\Big]_0^1=\frac{\ln 5}{3}$$

## 1129 답 ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k}}{n\sqrt{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1=\frac{2}{3}$$

## 1130 답 $\frac{62}{15}$

$x_k=1+\frac{4-1}{n}k=1+\frac{3k}{n}$이므로

$2\sqrt{x_k}=2\sqrt{1+\frac{3k}{n}}$

$\therefore S_k=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3k}{n}\right)\times 2\sqrt{1+\frac{3k}{n}}=\left(1+\frac{3k}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{3k}{n}\right)^{\frac{3}{2}}\times\frac{3}{n}$$

$$=\frac{1}{3}\int_1^4 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{3}\Big[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big]_1^4$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{64}{5}-\frac{2}{5}\right)=\frac{62}{15}$$

## 1131 답 ③

구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^2(-e^x+e^2)\,dx+\int_2^4(e^x-e^2)\,dx$$

$$=\Big[-e^x+e^2x\Big]_0^2+\Big[e^x-e^2x\Big]_2^4$$

$$=\{e^2-(-1)\}+\{(e^4-4e^2)-(-e^2)\}=e^4-2e^2+1$$

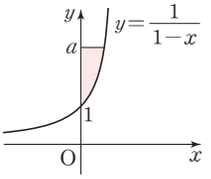
## 1132 답 3

곡선 $y=\frac{1}{1-x}$과 $y$축의 교점의 $y$좌표는

$y=1$

$y=\frac{1}{1-x}$을 $x$에 대하여 풀면

$1-x=\frac{1}{y} \quad \therefore x=1-\frac{1}{y}$




따라서 곡선 $x=1-\frac{1}{y}$과 $y$축 및 직선 $y=a$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_1^a\left(1-\frac{1}{y}\right)dy=\Big[y-\ln|y|\Big]_1^a$$

$$=a-1-\ln a \ (\because a>1)$$

즉, $a-1-\ln a=2-\ln 3$이므로

$a=3$

## 1133 답 ①

점 A의 $y$좌표가 1이므로 $x$좌표는

$1=\frac{3}{x-1}$에서 $x=4 \quad \therefore$ A(4, 1)

점 B의 $y$좌표가 3이므로 $x$좌표는

$3=\frac{3}{x-1}$에서 $x=2 \quad \therefore$ B(2, 3)

따라서 직선 AB의 방정식은

$y-1=\frac{3-1}{2-4}(x-4) \quad \therefore y=-x+5$

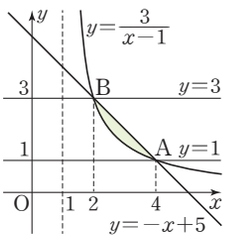
따라서 구하는 넓이는

$$\int_2^4\left\{(-x+5)-\frac{3}{x-1}\right\}dx$$

$$=\Big[-\frac{1}{2}x^2+5x-3\ln|x-1|\Big]_2^4$$

$$=(12-3\ln 3)-8$$

$$=4-3\ln 3$$




## 1134 답 ⑤

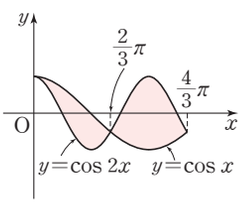
두 곡선 $y=\cos x$, $y=\cos 2x$의 교점의 $x$좌표는 $\cos x=\cos 2x$에서

$\cos x=2\cos^2 x-1$

$2\cos^2 x-\cos x-1=0$

$(2\cos x+1)(\cos x-1)=0$

$\cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=1$




$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi \ \left(\because 0\le x\le\frac{4}{3}\pi\right)$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^{\frac{2}{3}\pi}(\cos x-\cos 2x)\,dx+\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}(\cos 2x-\cos x)\,dx$$

$$=\Big[\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{2}{3}\pi}+\Big[\frac{1}{2}\sin 2x-\sin x\Big]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\sqrt{3}}{4}$$

## 1135 답 $\frac{2}{e-1}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^{e-1}\{2\ln(x+1)-k\}\,dx=0$$

$$\int_0^{e-1}2\ln(x+1)\,dx-\int_0^{e-1}k\,dx=0$$ ↳ $x+1=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$이고, 적분 구간은 $[1, e]$이다.

$$\int_1^e 2\ln t\,dt-\int_0^{e-1}k\,dx=0$$ ——→ $u(t)=\ln t$, $v'(t)=2$로 놓으면 $u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=2t$

$$\Big[2t\ln t\Big]_1^e-\int_1^e 2\,dt-\Big[kx\Big]_0^{e-1}=0$$

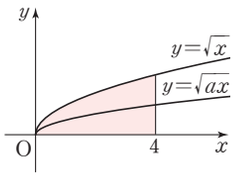
$2e-\left[2t\right]_1^e-k(e-1)=0$

$2e-(2e-2)-k(e-1)=0$

$k(e-1)=2 \qquad \therefore\ k=\dfrac{2}{e-1}$

## 1136 답 ②

곡선 $y=\sqrt{x}$와 $x$축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면




$S_1=\displaystyle\int_0^4 \sqrt{x}\,dx=\int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$=\left[\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$

$=\dfrac{16}{3} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

곡선 $y=\sqrt{ax}$와 $x$축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

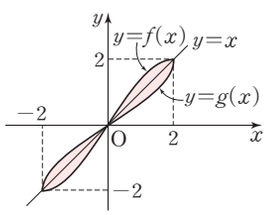
$S_2=\displaystyle\int_0^4 \sqrt{ax}\,dx=\sqrt{a}\int_0^4 \sqrt{x}\,dx=\frac{16}{3}\sqrt{a}$ ($\because$ ㉠)

이때 $S_2=\dfrac{1}{2}S_1$이므로

$\dfrac{16}{3}\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{16}{3},\ \sqrt{a}=\dfrac{1}{2} \qquad \therefore\ a=\dfrac{1}{4}$

## 1137 답 ②

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.




곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는 오른쪽 그림에서

$x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$ ($\because\ -2\le x\le 2$)

따라서 구하는 도형의 넓이는

$2\left\{\displaystyle\int_{-2}^{0}\left(x-2\sin\frac{\pi}{4}x\right)dx+\int_0^2\left(2\sin\frac{\pi}{4}x-x\right)dx\right\}$

$=2\left(\left[\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{8}{\pi}\cos\dfrac{\pi}{4}x\right]_{-2}^{0}+\left[-\dfrac{8}{\pi}\cos\dfrac{\pi}{4}x-\dfrac{1}{2}x^2\right]_0^2\right)$

$=2\left\{\left(\dfrac{8}{\pi}-2\right)+\left(-2+\dfrac{8}{\pi}\right)\right\}=\dfrac{32}{\pi}-8$

## 1138 답 8

물의 높이가 $x$cm일 때의 수면의 넓이를 $S(x)$cm$^2$라 하면

$S(x)=(\sqrt{xe^x+1})^2=xe^x+1$

따라서 물통의 부피는

$\displaystyle\int_0^4 S(x)\,dx=\int_0^4(xe^x+1)\,dx$ → $u(x)=x,\ v'(x)=e^x$으로 놓으면 $u'(x)=1,\ v(x)=e^x$

$=\left[xe^x\right]_0^4-\displaystyle\int_0^4 e^x\,dx+\left[x\right]_0^4$

$=4e^4-\left[e^x\right]_0^4+4$

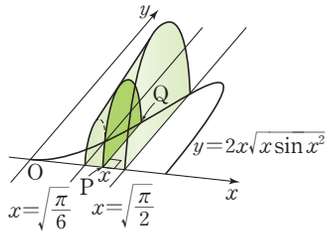
$=3e^4+5(\text{cm}^3)$

즉, $ae^4+b=3e^4+5$이므로 $a=3,\ b=5$

$\therefore\ a+b=8$

## 1139 답 ③

다음 그림과 같이 $x$축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{6}}\le x\le\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)$를 지나고 $x$축에 수직인 직선이 곡선 $y=2x\sqrt{x\sin x^2}$과 만나는 점을 Q라 하면 $\mathrm{Q}(x,\ 2x\sqrt{x\sin x^2})$




$\overline{\mathrm{PQ}}=2x\sqrt{x\sin x^2}$을 지름으로 하는 반원의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\pi(x\sqrt{x\sin x^2})^2=\dfrac{\pi}{2}x^3\sin x^2$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$\displaystyle\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{\pi}{2}x^3\sin x^2\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{4}t\sin t\,dt$ → $u(t)=t,\ v'(t)=\sin t$로 놓으면 $u'(t)=1,\ v(t)=-\cos t$

($x^2=t$로 놓으면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$이고, 적분 구간은 $\left[\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$이다.)

$=\left[-\dfrac{\pi}{4}t\cos t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}+\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi}{4}\cos t\,dt$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{48}\pi^2+\left[\dfrac{\pi}{4}\sin t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{48}+\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{8}\right)=\dfrac{\sqrt{3}\pi^2+6\pi}{48}$

## 1140 답 4

$t=a\,(0<a<10)$에서의 점 P의 위치는

$0+\displaystyle\int_0^a \pi\cos\frac{\pi}{2}t\,dt=\left[2\sin\frac{\pi}{2}t\right]_0^a=2\sin\frac{a\pi}{2}$

점 P가 원점을 지나려면 $2\sin\dfrac{a\pi}{2}=0$에서 $\sin\dfrac{a\pi}{2}=0$

$\therefore\ a=2$ 또는 $a=4$ 또는 $a=6$ 또는 $a=8$ ($\because\ 0<a<10$)

따라서 점 P는 원점을 4회 지난다.

## 1141 답 $\dfrac{25}{9}$

$f(x)=\ln(1-x^2)$이라 하면 $f'(x)=\dfrac{-2x}{1-x^2}$

따라서 $-\dfrac{1}{4}\le x\le\dfrac{1}{4}$에서 곡선의 길이는

$\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\,dx=\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}\sqrt{\left(\frac{x^2+1}{1-x^2}\right)^2}\,dx$

$=\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}\frac{x^2+1}{1-x^2}\,dx$

$=\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}\left(-1+\frac{2}{1-x^2}\right)dx$

$=-\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}dx-\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}\frac{2}{x^2-1}\,dx$

$=-\left[x\right]_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}-\displaystyle\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=-\dfrac{1}{2}-\left[\ln|x-1|-\ln|x+1|\right]_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}}$

$=-\dfrac{1}{2}-\left(\ln\dfrac{3}{5}-\ln\dfrac{5}{3}\right)$

$=-\dfrac{1}{2}-\ln\dfrac{9}{25}$

따라서 $k=-\frac{1}{2}-\ln\frac{9}{25}$이므로

$e^{k+\frac{1}{2}}=e^{-\ln\frac{9}{25}}=\frac{25}{9}$

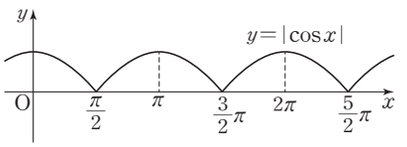
## 1142 답 1

$S_n=\int_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos x\right|dx=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}|\cos x|\,dx$

이때 곡선 $y=|\cos x|$와 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $\cos x=0$에서

$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{2}\pi$ 또는 …

따라서 $y=|\cos x|$는 다음 그림과 같이 주기가 $\pi$인 주기함수이다.




즉,

$\int_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}|\cos x|\,dx=\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}|\cos x|\,dx$

$=\int_{2\pi}^{\frac{5}{2}\pi}|\cos x|\,dx=\cdots$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

이므로

$S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}|\cos x|\,dx=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ …… ❶

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$ …… ❷

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $S_n$ 구하기 | 70 % |
| ❷ 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 합 구하기 | 30 % |

다른 풀이

$S_n=\int_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos x\right|dx=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}|\cos x|\,dx$

(i) $n$이 홀수일 때,

구간 $\left[n\pi,\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$에서 $\cos x\le 0$이므로

$S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}(-\cos x)\,dx$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[-\sin x\right]_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(ii) $n$이 짝수일 때,

구간 $\left[n\pi,\ \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$에서 $\cos x\ge 0$이므로

$S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\int_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\cos x\,dx$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left[\sin x\right]_{n\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(i), (ii)에 의하여 $S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$

## 1143 답 $\frac{e}{2}-\frac{3}{2e}$

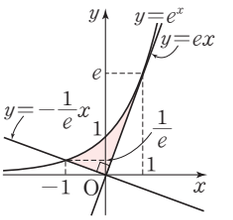
$y=e^x$에서 $y'=e^x$

점 $(1,\ e)$에서의 접선의 기울기는 $e$이므로 접선의 방정식은

$y-e=e(x-1)$ $\quad\therefore\ y=ex$ …… ❶

이 접선과 수직이고 점 $\left(-1,\ \frac{1}{e}\right)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}(x+1)$ $\quad\therefore\ y=-\frac{1}{e}x$ …… ❷




따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_{-1}^{0}\left\{e^x-\left(-\frac{1}{e}x\right)\right\}dx+\int_0^1(e^x-ex)\,dx$

$=\left[e^x+\frac{1}{2e}x^2\right]_{-1}^{0}+\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1$

$=\left(1-\frac{3}{2e}\right)+\left(\frac{e}{2}-1\right)$

$=\frac{e}{2}-\frac{3}{2e}$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 접선의 방정식 구하기 | 30 % |
| ❷ 접선에 수직인 직선의 방정식 구하기 | 30 % |
| ❸ 도형의 넓이 구하기 | 40 % |

## 1144 답 11

$\frac{dx}{dt}=e^t(\cos t-\sin t)$, $\frac{dy}{dt}=e^t(\sin t+\cos t)$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=\ln 6$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^{\ln 6}\sqrt{\{e^t(\cos t-\sin t)\}^2+\{e^t(\sin t+\cos t)\}^2}\,dt$

$=\int_0^{\ln 6}\sqrt{2e^{2t}(\cos^2 t+\sin^2 t)}\,dt=\sqrt{2}\int_0^{\ln 6}e^t\,dt$

$=\sqrt{2}\left[e^t\right]_0^{\ln 6}=\sqrt{2}(6-1)=5\sqrt{2}$ …… ❶

시각 $t=\ln 6$에서 $t=\ln a$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_{\ln 6}^{\ln a}\sqrt{\{e^t(\cos t-\sin t)\}^2+\{e^t(\sin t+\cos t)\}^2}\,dt$

$=\sqrt{2}\left[e^t\right]_{\ln 6}^{\ln a}=\sqrt{2}(a-6)$ …… ❷

따라서 $\sqrt{2}(a-6)=5\sqrt{2}$이므로 $a-6=5$

$\therefore\ a=11$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 시각 $t=0$에서 $t=\ln 6$까지 점 P가 움직인 거리 구하기 | 40 % |
| ❷ 시각 $t=\ln 6$에서 $t=\ln a$까지 점 P가 움직인 거리 구하기 | 40 % |
| ❸ $a$의 값 구하기 | 20 % |

## 실력 향상 189쪽

### 1145 답 $\frac{8}{\pi}$

$\angle \mathrm{AOP}_k=\frac{\pi}{2}\times\frac{k}{n}=\frac{k\pi}{2n}$이므로

$\angle \mathrm{BOP}_k=\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2n}$

직각삼각형 $\mathrm{OQ}_k\mathrm{B}$에서

$\overline{\mathrm{OQ}_k}=\overline{\mathrm{OB}}\cos(\angle \mathrm{BOP}_k)$

$=4\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2n}\right)$

$=4\sin\frac{k\pi}{2n}$

이므로

$S_k=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\overline{\mathrm{OQ}_k}\times\sin(\angle \mathrm{BOP}_k)$

$=\frac{1}{2}\times4\times4\sin\frac{k\pi}{2n}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{k\pi}{2n}\right)$

$=8\sin\frac{k\pi}{2n}\cos\frac{k\pi}{2n}$

$=4\sin\frac{k\pi}{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}4\sin\frac{k\pi}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}4\sin\frac{k\pi}{n}\times\frac{\pi}{n}$

$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx$

$=\frac{4}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$

$=\frac{4}{\pi}(1+1)=\frac{8}{\pi}$

### 1146 답 ①

$u(x)=3x-1$, $v'(x)=f'(x)$로 놓으면 $u'(x)=3$, $v(x)=f(x)$

$\int_0^2(3x-1)f'(x)\,dx=\Big[(3x-1)f(x)\Big]_0^2-\int_0^2 3f(x)\,dx$

$=5f(2)+f(0)-3\int_0^2 f(x)\,dx$

$=5\times5-3-3\int_0^2 f(x)\,dx$

$=22-3\int_0^2 f(x)\,dx$ ····· ㉠

이때 $B=A+4$이므로

$\int_0^2 f(x)\,dx=-A+B=4$

이를 ㉠에 대입하면

$\int_0^2(3x-1)f'(x)\,dx=22-3\times4=10$

### 1147 답 $1-\frac{3}{2\sqrt{e}}$

$f'(x)=4e^{-2x^2}-16x^2e^{-2x^2}$

$=4e^{-2x^2}(1-4x^2)$

$f'(x)=0$에서 $1-4x^2=0$ ($\because e^{-2x^2}>0$)

$x^2=\frac{1}{4}$ $\therefore x=\frac{1}{2}$ ($\because x\ge0$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | ··· | $\frac{1}{2}$ | ··· |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − |
| $f(x)$ | ↗ | 극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극대이다.

$\therefore a=\frac{1}{2}$

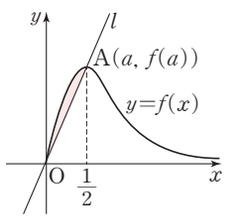
$f(a)=f\left(\frac{1}{2}\right)=2e^{-\frac{1}{2}}$이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{1}{2},\ 2e^{-\frac{1}{2}}\right)$

직선 $l$의 기울기가 $\frac{2e^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}=4e^{-\frac{1}{2}}$이므로 직선 $l$의 방정식은

$y=4e^{-\frac{1}{2}}x$

따라서 곡선 $y=f(x)$ ($x\ge0$)와 직선 $l$로 둘러싸인 도형의 넓이는




$\int_0^{\frac{1}{2}}(4xe^{-2x^2}-4e^{-\frac{1}{2}}x)\,dx$

$=\int_0^{\frac{1}{2}}4xe^{-2x^2}\,dx-\int_0^{\frac{1}{2}}4e^{-\frac{1}{2}}x\,dx$

$=\int_0^{-\frac{1}{2}}(-e^t)\,dt-\Big[2e^{-\frac{1}{2}}x^2\Big]_0^{\frac{1}{2}}$

$=\int_{-\frac{1}{2}}^{0}e^t\,dt-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}=\Big[e^t\Big]_{-\frac{1}{2}}^{0}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

$=1-e^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{3}{2\sqrt{e}}$

$-2x^2=t$로 놓으면 $-4x=\frac{dt}{dx}$이고, 적분 구간은 $\left[0,\ -\frac{1}{2}\right]$이다.

### 1148 답 ①

$y=\frac{1}{2}(|e^x-1|-e^{|x|}+1)$

$=\begin{cases}\frac{1}{2}(-e^x-e^{-x}+2) & (-\ln4\le x<0)\\ 0 & (0\le x\le1)\end{cases}$

$y=\frac{1}{2}(-e^x-e^{-x}+2)$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}(-e^x+e^{-x})$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$\int_{-\ln4}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$=\int_{-\ln4}^{0}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx+\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$

$=\int_{-\ln4}^{0}\sqrt{1+\left\{\frac{1}{2}(-e^x+e^{-x})\right\}^2}\,dx+\int_0^1 dx$

$=\int_{-\ln4}^{0}\sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})}\,dx+\Big[x\Big]_0^1$

$=\int_{-\ln4}^{0}\sqrt{\frac{1}{4}(e^x+e^{-x})^2}\,dx+1$

$=\frac{1}{2}\int_{-\ln4}^{0}(e^x+e^{-x})\,dx+1$

$=\frac{1}{2}\Big[e^x-e^{-x}\Big]_{-\ln4}^{0}+1$

$=\frac{1}{2}\times\frac{15}{4}+1=\frac{23}{8}$

# 01 / 수열의 극한

2~7쪽

## 중단원 기출 문제 1회

**1** 답 ③

① $5n-2$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$3, 8, 13, 18, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $5n-2$의 값도 한없이 커지므로 수열 $\{5n-2\}$는 양의 무한대로 발산한다.

② $\frac{n+1}{3}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$\frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $\frac{n+1}{3}$의 값도 한없이 커지므로 수열 $\left\{\frac{n+1}{3}\right\}$은 양의 무한대로 발산한다.

③ $4-\frac{1}{n}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$3, \frac{7}{2}, \frac{11}{3}, \frac{15}{4}, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $4-\frac{1}{n}$의 값은 4에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{4-\frac{1}{n}\right\}$은 4에 수렴한다.

④ $(-1)^n\times\frac{n}{5}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $(-1)^n\times\frac{n}{5}$의 절댓값은 한없이 커지고 그 부호는 양과 음이 교대로 나타나므로 수열 $\left\{(-1)^n\times\frac{n}{5}\right\}$은 발산(진동)한다.

⑤ $\log\frac{1}{n}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$0, -\log 2, -\log 3, -\log 4, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $\log\frac{1}{n}$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로 수열 $\left\{\log\frac{1}{n}\right\}$은 음의 무한대로 발산한다.

따라서 수렴하는 수열은 ③이다.

**2** 답 $-2$

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{2}{n}\right)=5$

$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{2+\frac{4}{n(n+2)}\right\}=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n(a_n-3b_n)=\lim_{n\to\infty}b_n\times(\lim_{n\to\infty}a_n-3\lim_{n\to\infty}b_n)$

$=2\times(5-3\times2)=-2$

**3** 답 ③

수열 $\{a_n\}$이 0이 아닌 실수에 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha\,(\alpha\neq0)$라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$\frac{1}{a_{n+1}}=4-4a_n$에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(4-4a_n)$이므로

$\frac{1}{\alpha}=4-4\alpha,\ 4\alpha^2-4\alpha+1=0$

$(2\alpha-1)^2=0 \quad \therefore \alpha=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha=\frac{1}{2}$

**4** 답 4

$a_n+a_{n+1}=2n^2+3n \quad \cdots\cdots ㉠$

$a_{n+1}+a_{n+2}=2(n+1)^2+3(n+1) \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡−㉠을 하면

$a_{n+2}-a_n=4n+5$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+2}-a_n}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{5}{n}}{1+\frac{3}{n}}=4$

**5** 답 1

$\lim_{n\to\infty}\{\log_4(2n+1)+\log_4(2n-1)-\log_4(n^2+3n-2)\}$

$=\lim_{n\to\infty}\log_4\frac{(2n+1)(2n-1)}{n^2+3n-2}=\lim_{n\to\infty}\log_4\frac{4n^2-1}{n^2+3n-2}$

$=\lim_{n\to\infty}\log_4\frac{4-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}=\log_4 4=1$

**6** 답 ③

$\lim_{n\to\infty}\frac{an+3}{bn-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+\frac{3}{n}}{b-\frac{1}{n}}=\frac{a}{b}$이므로

$\frac{a}{b}=\frac{2}{5} \quad \therefore 5a=2b \quad \cdots\cdots ㉠$

$\lim_{n\to\infty}\frac{(a+b)n^2+n}{n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{a+b+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n^2}}=a+b$이므로

$a+b=\frac{7}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{4} \quad \therefore ab=\frac{5}{8}$

**7** 답 ④

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+5n}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+5n}-n)(\sqrt{n^2+5n}+n)}{\sqrt{n^2+5n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{\sqrt{n^2+5n}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1}=\frac{5}{2}$

## 8 답 4

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{an^2+bn}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{an^2+bn}}{(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{an^2+bn})(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{an^2+bn})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{an^2+bn}}{(1-a)n^2+(1-b)n}$$

이때 $1-a\neq0$이면 극한값이 0이므로

$1-a=0 \quad \therefore a=1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{an^2+bn}}{(1-a)n^2+(1-b)n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+bn}}{(1-b)n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{b}{n}}}{1-b}$$

$$=\frac{2}{1-b}$$

따라서 $\frac{2}{1-b}=\frac{1}{2}$이므로 $b=-3$

$\therefore a-b=1-(-3)=4$

## 9 답 ①

$\frac{a_n}{2n}=b_n$으로 놓으면 $a_n=2nb_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n^2+3n}-a_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(2nb_n)^2+3n}-2nb_n\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2b_n^2+3n}-2nb_n)(\sqrt{4n^2b_n^2+3n}+2nb_n)}{\sqrt{4n^2b_n^2+3n}+2nb_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{4n^2b_n^2+3n}+2nb_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{4b_n^2+\frac{3}{n}}+2b_n}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{4\times3^2}+2\times3}=\frac{1}{4}$$

## 10 답 30

$2a_n-b_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=2a_n-c_n$

이때 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}c_n=5$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8a_n^2}{b_n}-\frac{b_n^2}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{8a_n^3-b_n^3}{a_nb_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2a_n-b_n)(4a_n^2+2a_nb_n+b_n^2)}{a_nb_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)\left(\frac{4a_n}{b_n}+2+\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}c_n\left(\frac{4a_n}{2a_n-c_n}+2+\frac{2a_n-c_n}{a_n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}c_n\left(\frac{4}{2-\frac{c_n}{a_n}}+2+2-\frac{c_n}{a_n}\right)$$

$$=5(2+2+2)=30$$

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이고 $\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\left(2-\frac{b_n}{a_n}\right)=5$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{b_n}{a_n}\right)=0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{8a_n^2}{b_n}-\frac{b_n^2}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{8a_n^3-b_n^3}{a_nb_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2a_n-b_n)(4a_n^2+2a_nb_n+b_n^2)}{a_nb_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2a_n-b_n)\left(\frac{4a_n}{b_n}+2+\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$$=5\times\left(4\times\frac{1}{2}+2+2\right)=30$$

## 11 답 $\frac{1}{3}$

$(a_n-n^2)(a_n-n^2+n)<0$에서 $n^2-n<a_n<n^2$

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)<S_n<\sum_{k=1}^{n}k^2$$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}<S_n<\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{n^3-n}{3}<S_n<\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$\therefore \frac{n^3-n}{3n^3}<\frac{S_n}{n^3}<\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3-n}{3n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}=\frac{1}{3}$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}=\frac{1}{3}$

## 12 답 3

㈎에서 $\lim_{n\to\infty}\left(14-\frac{2}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(14+\frac{2}{n}\right)=14$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}(2a_n+b_n)=14$

㈏에서 $\lim_{n\to\infty}\left(4-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{1}{n^2}\right)=4$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=4$

$2a_n+b_n=c_n$, $a_n-b_n=d_n$으로 놓으면

$a_n=\frac{c_n+d_n}{3}$, $b_n=\frac{c_n-2d_n}{3}$

이때 $\lim_{n\to\infty}c_n=14$, $\lim_{n\to\infty}d_n=4$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{c_n+d_n}{3}}{\frac{c_n-2d_n}{3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n+d_n}{c_n-2d_n}$$

$$=\frac{14+4}{14-2\times4}=3$$

## 13 답 ⑤

① [반례] $\{a_n\}$: 1, −1, 1, −1, …이면

$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$: 1, −1, 1, −1, …이므로 수열 $\{a_n\}$이 발산(진동)하지만 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$도 발산(진동)한다.

② [반례] $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이지만 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$이므로 수열 $\{a_nb_n\}$은 수렴한다.

③ [반례] $a_n=n$, $b_n=2n$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$이지만 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{2}$이므로 수열 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$은 수렴한다.

④ [반례] $a_n=n$, $a_n+b_n=\frac{1}{n}$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$,

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$이지만 $\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-n\right)=-\infty$

즉, 수열 $\{b_n\}$은 발산한다.

⑤ 두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_nb_n\}$이 각각 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^2+b_n^2)=\lim_{n\to\infty}\{(a_n+b_n)^2-2a_nb_n\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)^2-\lim_{n\to\infty}2a_nb_n$$
$$=\alpha^2-2\beta$$

즉, 수열 $\{a_n^2+b_n^2\}$은 수렴한다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

## 14 답 2

$f(x)=\frac{4nx-5}{x-2n}$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2n$, $y=4n$이므로

$a_n=2n$, $b_n=4n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(3n)}{a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{12n^2-5}{n}}{2n+4n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12n^2-5}{6n^2}=2$$

**공통수학2 다시보기**

유리함수 $y=\frac{ax+b}{cx+d}$의 그래프의 점근선의 방정식

➡ $x=-\frac{d}{c}$, $y=\frac{a}{c}$

## 15 답 ⑤

나머지 정리에 의하여 $a_n=4\times3^{n+1}-6$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times3^{n+1}-6}{3^n+2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{12-6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1+2\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}=12$$

**공통수학1 다시보기**

나머지 정리

다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 $R$라 하면

➡ $R=f(a)$

## 16 답 3

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ ($\alpha$는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n+1}+2^n\times a_n}{2^{n+1}+7^n\times a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7+\left(\frac{2}{7}\right)^n\times a_n}{2\times\left(\frac{2}{7}\right)^n+a_n}=\frac{7}{\alpha}$$

따라서 $\frac{7}{\alpha}=\frac{7}{3}$이므로 $\alpha=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\alpha=3$

## 17 답 ③

공비가 $\log_a x-b$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\log_a x-b\le1$, $b-1<\log_a x\le b+1$

$\log_a a^{b-1}<\log_a x\le\log_a a^{b+1}$

이때 $\frac{1}{16}\le x<\frac{1}{4}$에서 부등호의 방향이 반대이므로 $0<a<1$

$\therefore a^{b+1}\le x<a^{b-1}$

$\therefore a^{b+1}=\frac{1}{16}$, $a^{b-1}=\frac{1}{4}$

각 변끼리 나누면 $a^2=\frac{1}{4}$ $\quad\therefore a=\frac{1}{2}$ ($\because 0<a<1$)

$\left(\frac{1}{2}\right)^{b+1}=\frac{1}{16}$에서 $b+1=4$ $\quad\therefore b=3$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}+3=\frac{7}{2}$

## 18 답 −3

(i) $|r|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n-4}{r^n+1}=-4$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n-4}{r^n+1}=\frac{2-4}{1+1}=-1$

(iii) $|r|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{2r^n-4}{r^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{4}{r^n}}{1+\frac{1}{r^n}}=2$

따라서 $a=-4$, $b=-1$, $c=2$이므로

$a+b+c=-3$

## 19 답 3

(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^n=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{2+x^n}=\frac{1}{2}$

(ii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} x^n=1$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{2+x^n}=\frac{1-1}{2+1}=0$

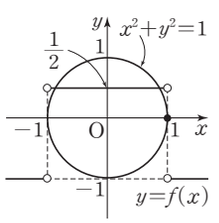
(iii) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^n}=0$이므로

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{2+x^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x^n}-1}{\frac{2}{x^n}+1}=-1$

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (|x|<1)\\ 0 & (x=1)\\ -1 & (|x|>1)\end{cases}$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 원 $x^2+y^2=1$의 교점의 개수는 3이다.



## 20 답 ④

원 $x^2+y^2=4^n+9$ 위의 점 $A_n(2^n, 3)$에서의 접선의 방정식은

$2^n x+3y=4^n+9$

$x=0$을 대입하면 $3y=4^n+9$

$\therefore y=\frac{4^n+9}{3}$ $\therefore B_n\left(0, \frac{4^n+9}{3}\right)$

$\therefore S_n=\frac{1}{2}\times\frac{4^n+9}{3}\times 2^n=\frac{8^n+9\times 2^n}{6}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{8^{n+1}+9\times 2^{n+1}}{6}}{\frac{8^n+9\times 2^n}{6}}=\lim_{n\to\infty}\frac{8^{n+1}+9\times 2^{n+1}}{8^n+9\times 2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8+18\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1+9\times\left(\frac{1}{4}\right)^n}=8$$

**공통수학2 다시보기**

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식

➡ $x_1x+y_1y=r^2$

# 중단원 기출 문제 2회

## 1 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\frac{4}{3n^2-1}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$2, \frac{4}{11}, \frac{2}{13}, \frac{4}{47}, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $\frac{4}{3n^2-1}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 수열 $\left\{\frac{4}{3n^2-1}\right\}$는 0에 수렴한다.

ㄴ. $\sqrt{n^3+4}$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$\sqrt{5}, 2\sqrt{3}, \sqrt{31}, 2\sqrt{17}, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $\sqrt{n^3+4}$의 값도 한없이 커지므로 수열 $\{\sqrt{n^3+4}\}$는 양의 무한대로 발산한다.

ㄷ. $\left|\cos\frac{n}{2}\pi\right|$에 $n=1, 2, 3, 4, \cdots$를 차례대로 대입하면

$0, 1, 0, 1, \cdots$

즉, $n$의 값이 한없이 커질 때, $\left|\cos\frac{n}{2}\pi\right|$의 값은 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 수열 $\left\{\left|\cos\frac{n}{2}\pi\right|\right\}$는 발산(진동)한다.

ㄹ. 수열 $2+\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{8}, 2+\frac{1}{16}, \cdots$, 즉 $\frac{5}{2}, \frac{9}{4}, \frac{17}{8}, \frac{33}{16}, \cdots$에서 $n$의 값이 한없이 커질 때, $2+\frac{1}{2^n}$의 값은 2에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 2에 수렴한다.

따라서 보기에서 발산하는 수열인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

## 2 답 40

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하자.

$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=4$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=4$ $\therefore \alpha-\beta=4$

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=-2$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=-2$

$\therefore \alpha\beta=-2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n^3-b_n^3)=\lim_{n\to\infty}a_n^3-\lim_{n\to\infty}b_n^3$$
$$=\alpha^3-\beta^3$$
$$=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$$
$$=4^3+3\times(-2)\times 4=40$$

**다른 풀이**

$$\lim_{n\to\infty}(a_n^3-b_n^3)=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-b_n)^3+3a_nb_n(a_n-b_n)\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)^3+3\lim_{n\to\infty}a_nb_n\times\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$$
$$=4^3+3\times(-2)\times 4=40$$

## 3 답 ④

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$($\alpha$는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty}a_{3n}=\lim_{n\to\infty}a_{3n+1}=\alpha$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-3a_n+2}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}a_{3n}\times\lim_{n\to\infty}a_{3n+1}$에서

$\frac{-3\alpha+2}{2}=\alpha\times\alpha$

$2\alpha^2+3\alpha-2=0$

$(\alpha+2)(2\alpha-1)=0$ $\therefore \alpha=-2$ 또는 $\alpha=\frac{1}{2}$

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로

$\alpha=\frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\alpha=\frac{1}{2}$

## 4 답 ④

$a_p+a_q+a_r=a_{p+q+r}$에서 $p=q=1$, $r=n$ ($n$은 자연수)이면

$2a_1+a_n=a_{n+2}$ $\therefore a_{n+2}=a_n+20$

$\therefore a_3=a_1+20=30$, $a_5=a_3+20=50$, $\cdots$

이때 $p=q=2$, $r=1$이면 $a_2+a_2+a_1=a_5$이므로

$2a_2+10=50$ $\therefore a_2=20$

$\therefore a_4=a_2+20=40$, $a_6=a_4+20=60$, $\cdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 10, 공차가 10인 등차수열이므로

$a_n=10n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{10n^2}{2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{10}{2+\frac{1}{n^2}}=5$$

## 5 답 ④

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)+(3n+4)+(3n+6)+\cdots+(3n+2n)}{2+4+6+\cdots+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n\{(3n+2)+(3n+2n)\}}{2}}{\frac{n(2+2n)}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n+2}{2n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{2}{n}}{2+\frac{2}{n}}=4$$

## 6 답 12

(ⅰ) $a\neq 0$, $b=0$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^4+bn^3+cn^2}{3n^2-2}=\infty$ (또는 $-\infty$)

(ⅱ) $a=0$, $b\neq 0$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^4+bn^3+cn^2}{3n^2-2}=\infty$ (또는 $-\infty$)

(ⅲ) $a\neq 0$, $b\neq 0$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{an^4+bn^3+cn^2}{3n^2-2}=\infty$ (또는 $-\infty$)

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a=0$, $b=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{an^4+bn^3+cn^2}{3n^2-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{cn^2}{3n^2-2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{c}{3-\frac{2}{n^2}}$$
$$=\frac{c}{3}$$

따라서 $\frac{c}{3}=4$이므로 $c=12$

$\therefore a+b+c=0+0+12=12$

## 7 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1}=3$$

## 8 답 30

$b\geq 0$이면 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{an^2+4n}+bn}=0$이므로 $b<0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{an^2+4n}+bn}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an^2+4n}-bn}{(\sqrt{an^2+4n}+bn)(\sqrt{an^2+4n}-bn)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an^2+4n}-bn}{(a-b^2)n^2+4n}$$

이때 $a-b^2\neq 0$이면 극한값이 0이므로

$a-b^2=0$ $\quad\therefore a=b^2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{an^2+4n}-bn}{(a-b^2)n^2+4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{b^2n^2+4n}-bn}{4n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{b^2+\frac{4}{n}}-b}{4}=\frac{(-b)-b}{4}\ (\because b<0)$$
$$=-\frac{b}{2}$$

따라서 $-\frac{b}{2}=3$이므로 $b=-6$

이를 ㉠에 대입하면 $a=(-6)^2=36$

$\therefore a+b=36+(-6)=30$

## 9 답 4

$k\geq 0$이면 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이므로 $k<0$

$a_n=\sqrt{(2n+3)(2n+5)}+kn$
$=\sqrt{4n^2+16n+15}+kn$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{4n^2+16n+15}+kn)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{4n^2+16n+15}+kn)(\sqrt{4n^2+16n+15}-kn)}{\sqrt{4n^2+16n+15}-kn}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(4-k^2)n^2+16n+15}{\sqrt{4n^2+16n+15}-kn}$$

이때 $4-k^2\neq 0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$4-k^2=0$ $\quad\therefore k=-2$ ($\because k<0$)

$$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(4-k^2)n^2+16n+15}{\sqrt{4n^2+16n+15}-kn}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16n+15}{\sqrt{4n^2+16n+15}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{16+\frac{15}{n}}{\sqrt{4+\frac{16}{n}+\frac{15}{n^2}}+2}=4$$

## 10 답 3

$\frac{a_n}{n^2}=c_n$으로 놓으면 $a_n=n^2c_n$

$nb_n=d_n$으로 놓으면 $b_n=\frac{d_n}{n}$

이때 $\lim_{n\to\infty}c_n=3$, $\lim_{n\to\infty}d_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)a_n}{n^4b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)n^2c_n}{n^4\times\frac{d_n}{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n^3+n^2)c_n}{n^3d_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\times\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}$$
$$=2\times\frac{3}{2}=3$$

## 11 답 ④

$4a_n-3b_n=c_n$으로 놓으면 $4a_n=3b_n+c_n$

$\therefore a_n=\frac{3b_n+c_n}{4}$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}c_n=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2b_n}{2a_n-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3b_n+c_n}{4}+2b_n}{\frac{2(3b_n+c_n)}{4}-b_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{11b_n+c_n}{2b_n+2c_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{11+\frac{c_n}{b_n}}{2+\frac{2c_n}{b_n}}=\frac{11}{2}$$

다른 풀이

$\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$이고 $\lim_{n\to\infty}(4a_n-3b_n)=\lim_{n\to\infty} b_n\left(\frac{4a_n}{b_n}-3\right)=2$이므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4a_n}{b_n}-3\right)=0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{3}{4}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2b_n}{2a_n-b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{b_n}+2}{\frac{2a_n}{b_n}-1}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}+2}{2\times\frac{3}{4}-1}=\frac{11}{2}$$

## 12 답 4

$2+3\log_2 n<\log_2 a_n<2+3\log_2(n+1)$에서

$\log_2 2^2+\log_2 n^3<\log_2 a_n<\log_2 2^2+\log_2(n+1)^3$

$\log_2 4n^3<\log_2 a_n<\log_2 4(n+1)^3$

$4n^3<a_n<4(n+1)^3$

각 변을 $n^3$으로 나누면

$4<\frac{a_n}{n^3}<\frac{4(n+1)^3}{n^3}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)^3}{n^3}=4$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=4$

## 13 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n-b_n\}$이 각각 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}$

$=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$

$=\alpha-\beta$

따라서 수열 $\{b_n\}$도 수렴한다.

ㄴ. [반례] $a_n=n+2$, $b_n=n+1$이면 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이고 $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$

이지만 $a_n-b_n=1$이므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=1$

ㄷ. $a_n<b_n$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n\le\lim_{n\to\infty} b_n$

이때 $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이므로 $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 14 답 2

정육면체의 한 면의 넓이가 $1^2=1$이므로

$S_1=6$, $S_2=6+4\times5$, $S_3=6+4\times5+4\times7$, …

즉, $n\ge2$일 때,

$S_n=6+\sum_{k=1}^{n-1}4(2k+3)$

$=6+\sum_{k=1}^{n-1}(8k+12)$

$=6+8\times\frac{n(n-1)}{2}+12(n-1)$

$=4n^2+8n-6$

정육면체 1개의 부피가 $1^3=1$이므로

$V_1=1$, $V_2=1+5$, $V_3=1+5+9$, …

$V_n=\sum_{k=1}^{n}(4k-3)=4\times\frac{n(n+1)}{2}-3n=2n^2-n$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+8n-6}{2n^2-n}=2$

## 15 답 ④

$3\times4^n-3^n<(2^{n+1}+4^{n-1})a_n<2^n+3\times4^n$에서

$\frac{3\times4^n-3^n}{2^{n+1}+4^{n-1}}<a_n<\frac{2^n+3\times4^n}{2^{n+1}+4^{n-1}}$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3\times4^n-3^n}{2^{n+1}+4^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4}}=12,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3\times4^n}{2^{n+1}+4^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n+3}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{4}}=12$$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty} a_n=12$

## 16 답 $\frac{3}{4}$

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\times S_n+2^n}{S_n+4\times3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\times\frac{n}{n+1}+2^n}{\frac{n}{n+1}+4\times3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\frac{n}{n+1}+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{n}{(n+1)3^n}+4}=\frac{3}{4}$$

## 17 답 3

공비가 $\frac{2x-1}{3}$이므로 주어진 등비수열이 수렴하려면

$-1<\frac{2x-1}{3}\le1$, $-3<2x-1\le3$

$-2<2x\le4 \quad \therefore -1<x\le2$

따라서 정수 $x$의 값은 0, 1, 2이므로 구하는 합은

$0+1+2=3$

## 18 답 ⑤

(i) $-1<r<1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} r^{n+2}=0$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+2r+1}{r^{n+2}+8}=\frac{2r+1}{8}$

따라서 $\frac{2r+1}{8}=\frac{1}{4}$이므로

$2r+1=2 \quad \therefore r=\frac{1}{2}$

(ii) $r=1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n=\lim_{n\to\infty} r^{n+2}=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+2r+1}{r^{n+2}+8}=\frac{1+2+1}{1+8}=\frac{4}{9}\ne\frac{1}{4}$

(iii) $r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+2r+1}{r^{n+2}+8}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2r}{r^n}+\frac{1}{r^n}}{r^2+\frac{8}{r^n}}=\frac{1}{r^2}$$

따라서 $\frac{1}{r^2}=\frac{1}{4}$이므로

$r^2=4$ $\therefore r=2\ (\because r>1)$

(i), (ii), (iii)에서 $r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=2$이므로 구하는 합은

$\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

## 19 답 ④

(i) $x=1, 2, 3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{x}\right)^{n+1}}{\left(\frac{4}{x}\right)^n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{x}}{1+3\times\left(\frac{x}{4}\right)^n}=\frac{4}{x}$$

(ii) $x=4$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{x}\right)^n=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{x}\right)^{n+1}}{\left(\frac{4}{x}\right)^n+3}=\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$$

(iii) $x=5, 6, 7, 8$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{x}\right)^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{x}\right)^{n+1}}{\left(\frac{4}{x}\right)^n+3}=0$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{8}xf(x)=f(1)+2f(2)+3f(3)+\cdots+8f(8)$$
$$=1\times4+2\times2+3\times\frac{4}{3}+4\times\frac{1}{4}=13$$

## 20 답 2

직선 $y=g(x)$는 원점과 점 $(6, 6)$을 지나므로 $g(x)=x$

$f(4)=8$, $g(4)=4$이므로

$$h(4)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(4)\}^{n+1}+\{g(4)\}^{n+1}}{\{f(4)\}^n+\{g(4)\}^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8^{n+1}+4^{n+1}}{8^n+4^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8+4\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=8$$

$f(6)=6$, $g(6)=6$이므로

$$h(6)=\lim_{n\to\infty}\frac{\{f(6)\}^{n+1}+\{g(6)\}^{n+1}}{\{f(6)\}^n+\{g(6)\}^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}+6^{n+1}}{6^n+6^n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6(6^n+6^n)}{6^n+6^n}=6$$

$\therefore h(4)-h(6)=8-6=2$

# 02 / 급수 8~13쪽

## 중단원 기출 문제 1회

## 1 답 $\frac{9}{4}$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3(n+1)}{n(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n(n+2)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{3}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

## 2 답 ②

$a_n=n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\log_3\left(1-\frac{2}{a_n}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log_3\left\{1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right\}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log_3\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log_3\frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log_3\frac{1\times4}{2\times3}+\log_3\frac{2\times5}{3\times4}+\log_3\frac{3\times6}{4\times5}\right.$$
$$\left.+\cdots+\log_3\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_3\left\{\frac{1\times4}{2\times3}\times\frac{2\times5}{3\times4}\times\frac{3\times6}{4\times5}\times\cdots\times\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{n+3}{3(n+1)}=\log_3\frac{1}{3}=\log_3 3^{-1}=-1$$

## 3 답 ㄴ

주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

ㄱ. $S_{2n-1}=2+(-2+2)+(-2+2)+\cdots+(-2+2)=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=2$

$S_{2n}=(2-2)+(2-2)+(2-2)+\cdots+(2-2)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$

즉, $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄴ. $S_{2n-1}=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=1$

$S_{2n}=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

즉, $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 1에 수렴한다.

ㄷ. $S_{2n-1}=1+(-2+3)+(-4+5)+\cdots+\{-(2n-2)+(2n-1)\}$
$=n$
$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\lim_{n\to\infty} n=\infty$
$S_{2n}=(1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots+\{(2n-1)-2n\}=-n$
$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n}=\lim_{n\to\infty}(-n)=-\infty$
즉, $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty} S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

따라서 보기에서 수렴하는 급수인 것은 ㄴ이다.

## 4 답 7

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}+a_n\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{n+1}+a_n\right)=0$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{n+1}=2$이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=-2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(3-2a_n)=3-2\times(-2)=7$

## 5 답 ①

$(a_1-1)+\left(\frac{a_2}{2}-\frac{5}{2}\right)+\left(\frac{a_3}{3}-3\right)+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{4n-3}{n}\right)$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{4n-3}{n}\right)$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{4n-3}{n}\right)=0$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{4n-3}{n}=4$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=4$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{5a_n-6n}{a_n+3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5\times\frac{a_n}{n}-6}{\frac{a_n}{n}+3}=\frac{5\times4-6}{4+3}=2$

## 6 답 ㄴ, ㄹ

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n-1}$은 발산한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$
$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)\right\}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)=\frac{1}{6}$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$
$=\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$
$=\lim_{n\to\infty}(-1+\sqrt{n+1})=\infty$ (발산)

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$
$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)(k+2)}$
$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log\frac{2\times4}{3\times3}+\log\frac{3\times5}{4\times4}+\log\frac{4\times6}{5\times5}+\cdots+\log\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+2)}\right\}$
$=\lim_{n\to\infty}\log\left\{\frac{2\times4}{3\times3}\times\frac{3\times5}{4\times4}\times\frac{4\times6}{5\times5}\times\cdots\times\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)(n+2)}\right\}$
$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2(n+3)}{3(n+2)}=\log\frac{2}{3}$

따라서 보기에서 수렴하는 급수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

## 7 답 ①

$3a_n-\frac{b_n}{2}=c_n$으로 놓으면 $\frac{b_n}{2}=3a_n-c_n$

$\therefore b_n=6a_n-2c_n$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{5}{2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=7$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(6a_n-2c_n)=6\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}c_n$
$=6\times\frac{5}{2}-2\times7=1$

## 8 답 ⑤

① $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=0$
$\therefore \lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}\times a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}\times\lim_{n\to\infty}a_n=0\times0=0$

② $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로
$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ $\therefore \lim_{n\to\infty}a_{n+1}=0$
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$ ($S$는 실수)라 하면
$\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k-a_1+a_{n+1}\right)$
$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-a_1+\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=S-a_1$
즉, $\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$도 수렴한다.

③ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$
$=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+(a_3-b_3)+\cdots<0$
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n<\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

④ 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2b_n)$이 수렴하므로
$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-2b_n)=0$
$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2(a_n+b_n)+(a_n-2b_n)}{3}=0$,
$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+b_n)-(a_n-2b_n)}{3}=0$
$\therefore \lim_{n\to\infty}(3a_n+2b_n)=3\lim_{n\to\infty}a_n+2\lim_{n\to\infty}b_n=0$

⑤ [반례] $\{a_n\}$: $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$이면
$a_{2n-1}=-1$, $a_{2n}=1$이므로
$a_{2n-1}+a_{2n}=-1+1=0$
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=0$
이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면
$S_{2n-1}=-1+(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)=-1$
$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=-1$
$S_{2n}=(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots+(-1+1)=0$
$\therefore \lim_{n\to\infty}S_{2n}=0$
따라서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 발산한다.
즉, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$은 수렴하지만 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$은 수렴하지 않는다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

## 9 답 2

$P_n\left(n,\ \frac{3}{n+2}\right)$이므로 $\overline{OR_n}=n$, $\overline{OQ_n}=\frac{3}{n+2}$

$\therefore\ \square P_nQ_nOR_n=n\times\frac{3}{n+2}=\frac{3n}{n+2}$

$P_{n+1}\left(n+1,\ \frac{3}{n+3}\right)$이므로

$\overline{OR_{n+1}}=n+1$, $\overline{OQ_{n+1}}=\frac{3}{n+3}$

$\therefore\ \square P_{n+1}Q_{n+1}OR_{n+1}=(n+1)\times\frac{3}{n+3}=\frac{3n+3}{n+3}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}S_n&=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{3n+3}{n+3}-\frac{3n}{n+2}\right|\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{6}{(n+2)(n+3)}\right|\\&=\sum_{n=1}^{\infty}6\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\left(\because\ \frac{6}{(n+2)(n+3)}>0\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}6\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}6\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\right.\\&\qquad\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}\\&=\lim_{n\to\infty}6\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)=2\end{aligned}$$

## 10 답 ④

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}-5^n}{10^{n-1}}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\times4^n}{\frac{1}{10}\times10^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{\frac{1}{10}\times10^n}\\&=20\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n-10\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\\&=20\times\frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}-10\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\\&=\frac{40}{3}-10=\frac{10}{3}\end{aligned}$$

## 11 답 $\frac{45}{8}$

$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로 $a_n^{\,2}=\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}^2=\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{\,2}+3a_n)&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\,2}+3\sum_{n=1}^{\infty}a_n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1}+3\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\&=\frac{1}{1-\frac{1}{9}}+3\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\\&=\frac{9}{8}+\frac{9}{2}=\frac{45}{8}\end{aligned}$$

## 12 답 $\frac{16}{7}$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$에서 $\frac{a_1}{1-r}=1$ $\quad\therefore\ a_1=1-r$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

등비수열 $\{a_n^{\,2}\}$의 첫째항은 $a_1^{\,2}$, 공비는 $r^2$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\,2}=2$에서 $\frac{a_1^{\,2}}{1-r^2}=2$ $\quad\therefore\ \frac{a_1^{\,2}}{(1+r)(1-r)}=2$

㉠을 대입하면

$\frac{(1-r)^2}{(1+r)(1-r)}=2$, $\frac{1-r}{1+r}=2$ $(\because\ -1<r<1)$

$2(1+r)=1-r$, $3r=-1$ $\quad\therefore\ r=-\frac{1}{3}$

이를 ㉠에 대입하면 $a_1=\frac{4}{3}$

따라서 등비수열 $\{a_n^{\,3}\}$의 첫째항은 $a_1^{\,3}=\frac{64}{27}$, 공비는 $r^3=-\frac{1}{27}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\,3}=\frac{\frac{64}{27}}{1-\left(-\frac{1}{27}\right)}=\frac{16}{7}$$

## 13 답 $\frac{9}{4}$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r$, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 $s$라 하면 두 수열의 첫째항이 모두 2이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=5$에서

$\frac{2}{1-r}=5$, $5(1-r)=2$ $\quad\therefore\ r=\frac{3}{5}$

$\therefore\ a_n=2\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=3$에서

$\frac{2}{1-s}=3$, $3(1-s)=2$ $\quad\therefore\ s=\frac{1}{3}$

$\therefore\ b_n=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\cdots&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{2\times\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{9}\right)^{n-1}\\&=\frac{1}{1-\frac{5}{9}}=\frac{9}{4}\end{aligned}$$

## 14 답 5

(i) 등비수열 $\{(\log_2x-2)^n\}$이 수렴하려면

$-1<\log_2x-2\le1$

$1<\log_2x\le3$

$\log_22<\log_2x\le\log_22^3$

$\therefore\ 2<x\le8$

(ii) 등비급수 $1+\frac{x-5}{3}+\left(\frac{x-5}{3}\right)^2+\left(\frac{x-5}{3}\right)^3+\cdots$이 수렴하려면

$-1<\frac{x-5}{3}<1$

$-3<x-5<3$ $\quad\therefore\ 2<x<8$

(i), (ii)에서 $2<x<8$

따라서 정수 $x$는 3, 4, 5, 6, 7의 5개이다.

## 15 답 ⑤

$a_n=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$, $b_n=3\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

① $3a_n=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}3a_n$은 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비급수이고,

$-1<\frac{1}{3}<1$이므로 주어진 급수는 수렴한다.

② $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

즉, 주어진 급수도 수렴한다.

③ $a_nb_n=2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times3\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=6\times\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$

은 공비가 $\frac{1}{12}$인 등비급수이고, $-1<\frac{1}{12}<1$이므로 주어진 급수

는 수렴한다.

④ $b_n^{\,2}=\left\{3\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}^2=9\times\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^{\,2}$은 공비가 $\frac{1}{16}$

인 등비급수이고, $-1<\frac{1}{16}<1$이므로 주어진 급수는 수렴한다.

⑤ $\frac{a_n}{b_n}=\frac{2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{3\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$은 공비가 $\frac{4}{3}$인

등비급수이고, $\frac{4}{3}>1$이므로 주어진 급수는 발산한다.

따라서 수렴하는 급수가 아닌 것은 ⑤이다.

## 16 답 $\frac{1}{6}$

$0.1\dot{6}=0.1666\cdots=0.1+0.06+0.006+0.0006+\cdots$

$=\frac{1}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+\frac{6}{10000}+\cdots$

$=\frac{1}{10}+\frac{\frac{6}{100}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=\frac{1}{6}$

## 17 답 ③

선분 $OA_1$의 기울기가 $\frac{3}{4}$이므로 $\frac{1}{x_1}=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore\ x_1=\frac{4}{3}$

선분 $A_nA_{n+1}$의 기울기를 $a_n$이라 하면 선분 $A_1A_2$의 기울기는

$a_1=\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}=1$

선분 $A_2A_3$의 기울기는 $a_2=\left(\frac{4}{3}\right)^2\times\frac{3}{4}$

선분 $A_3A_4$의 기울기는 $a_3=\left(\frac{4}{3}\right)^3\times\frac{3}{4}$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{4}{3}$인 등비수열이므로

$a_n=\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$

이때 $A_n(x_n,\ n)$, $A_{n+1}(x_{n+1},\ n+1)$이므로

$a_n=\frac{n+1-n}{x_{n+1}-x_n}=\frac{1}{x_{n+1}-x_n}$ $\quad\cdots\cdots$㉠

$x_n=x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})$

$=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{a_k}$ ($\because$ ㉠)

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left\{x_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}\right\}$

$=x_1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$

$=\frac{4}{3}+\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=\frac{16}{3}$

## 18 답 6

$\overline{B_1B_2}=\frac{2}{3}\overline{AB_1}=\frac{2}{3}\times3=2$

$\overline{B_2B_3}=\frac{2}{3}\overline{B_1B_2}=\frac{2}{3}\times2$

$\overline{B_3B_4}=\frac{2}{3}\overline{B_2B_3}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times2$

⋮

$\therefore\ \overline{B_1B_2}+\overline{B_2B_3}+\overline{B_3B_4}+\cdots=2+\frac{2}{3}\times2+\left(\frac{2}{3}\right)^2\times2+\cdots$

$=\frac{2}{1-\frac{2}{3}}=6$

## 19 답 $\frac{1}{4}$

정사각형 $T_1$의 한 변의 길이가 $r$이므로

$S_1=r^2$

정사각형 $T_2$의 한 변의 길이가 $(1-r)\times r$이므로

$S_2=\{(1-r)\times r\}^2=r^2(1-r)^2$

정사각형 $T_3$의 한 변의 길이가 $(1-r)^2\times r$이므로

$S_3=\{(1-r)^2\times r\}^2=r^2(1-r)^4$

⋮

즉, 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $r^2$, 공비가 $(1-r)^2$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{r^2}{1-(1-r)^2}=\frac{r}{2-r}$

따라서 $\frac{r}{2-r}=\frac{1}{7}$이므로 $7r=2-r$

$\therefore\ r=\frac{1}{4}$

## 20 답 60 mg

한 번에 복용하는 약의 양을 $a$ mg이라 하면 처음 약을 복용하고 24시간 후 약을 다시 복용했을 때, 체내에 남아 있는 약의 양은

$a+\frac{1}{2}a$

48시간 후 약을 다시 복용했을 때, 체내에 남아 있는 약의 양은

$a+\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{2}a\right)=a+\frac{1}{2}a+\left(\frac{1}{2}\right)^2a$

이와 같은 방법으로 $24n$시간 후 약을 다시 복용했을 때, 체내에 남아 있는 약의 양은

$a+\frac{1}{2}a+\left(\frac{1}{2}\right)^2a+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^na$

이 약을 장기간 복용할 때, 체내에 남아 있는 약의 양은

$\frac{a}{1-\frac{1}{2}}=2a$

즉, $2a\le120$이어야 하므로 $a\le60$

따라서 매회 최대로 복용할 수 있는 약의 양은 60 mg이다.

## 중단원 기출 문제 2회

**1** 답 5

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n(2n-1)}{2n^2+n+1}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{10n^2-5n}{2n^2+n+1} = 5$$

**2** 답 ①

주어진 급수의 제$n$항을 $a_n$이라 하면

$$a_n = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$$

이때 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\times\frac{3}{2} = \frac{3}{4}$$

**3** 답 ⑤

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log_{2n+1}\sqrt{3} - \log_{2n+3}\sqrt{3})$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(2n+1)} - \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(2n+3)}\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left\{\frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(2k+1)} - \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(2k+3)}\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{\log_{\sqrt{3}}3} - \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}5}\right) + \left(\frac{1}{\log_{\sqrt{3}}5} - \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}7}\right) + \cdots + \left\{\frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(2n+1)} - \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(2n+3)}\right\}\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left\{\frac{1}{\log_{\sqrt{3}}3} - \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}(2n+3)}\right\}$$
$$= \frac{1}{\log_{\sqrt{3}}3} = \frac{1}{\log_{3^{\frac{1}{2}}}3} = \frac{1}{2}$$

**4** 답 ④

주어진 급수의 제$n$항까지의 부분합을 $S_n$이라 하면

$$S_{2n-1} = a_1 + (-a_2+a_2) + (-a_3+a_3) + \cdots + (-a_n+a_n) = a_1$$
$$S_{2n} = (a_1-a_2) + (a_2-a_3) + (a_3-a_4) + \cdots + (a_n-a_{n+1})$$
$$= a_1 - a_{n+1}$$

주어진 급수가 수렴하려면 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = a_1$이어야 한다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} (a_1 - a_{n+1}) = a_1$에서 $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$, 즉 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이어야 한다.

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2}$

ㄴ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{n} = 1$

ㄹ. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{2}{n}\right) = 0$

따라서 주어진 급수가 수렴하도록 하는 수열인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

**5** 답 ②

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-a_n}{n}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} \frac{3n-a_n}{n} = 0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{a_n}{n}\right) = 0 \qquad \therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 3$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{na_n}{n^2+{a_n}^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a_n}{n}}{1+\left(\frac{a_n}{n}\right)^2} = \frac{3}{1+3^2} = \frac{3}{10}$$

**6** 답 $-\frac{6}{5}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n^2} - \alpha\right)$가 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{n^2} - \alpha\right) = 0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2} = \alpha$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2}{2-5a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{\frac{2}{n^2} - 5\times\frac{a_n}{n^2}} = \frac{3}{0-5\times\alpha} = -\frac{3}{5\alpha}$$

따라서 $-\frac{3}{5\alpha} = \frac{1}{2}$이므로 $\alpha = -\frac{6}{5}$

**7** 답 ④

① $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{8}}+\cdots$
$> 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$
$> 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$
$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots = \infty$
따라서 주어진 급수는 발산한다.

② $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$
이때 $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

③ $\log\frac{2}{5}+\log\frac{3}{7}+\log\frac{4}{9}+\log\frac{5}{11}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{n+1}{2n+3}$
이때 $\lim_{n\to\infty} \log\frac{n+1}{2n+3} = \log\frac{1}{2} \neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

④ $\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{7\times9}+\cdots$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$
$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}$

⑤ $\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{7}}+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})$

$+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(-1+\sqrt{2n+1})=\infty$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

따라서 수렴하는 것은 ④이다.

## 8 답 ④

$\sum_{k=1}^{n}a_k=S_n$, $\sum_{k=1}^{n}a_{k+1}=T_n$이라 하면 $T_n=S_n-a_1+a_{n+1}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ $\therefore \lim_{n\to\infty}a_{n+1}=0$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-a_1+a_{n+1})=6-a_1$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n-a_{n+1})=10$에서 $2\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}=10$

$2\times6-(6-a_1)=10$, $6+a_1=10$ $\therefore a_1=4$

## 9 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$과 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, $\lim_{n\to\infty}b_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_nb_n=\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=0$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\beta$ ($\alpha$, $\beta$는 실수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\alpha-\beta$

이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$은 수렴한다.

ㄷ. [반례] $\{a_n\}$: 1, 0, 1, 0, 1, ..., $\{b_n\}$: 0, 1, 0, 1, 0, ...

이면 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=0$으로 수렴하고 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq0$이지만 $\lim_{n\to\infty}b_n\neq0$이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

## 10 답 $\frac{3}{20}$

직선 $x-5y+10=0$, 즉 $y=\frac{1}{5}x+2$에서 $x$좌표와 $y$좌표가 모두 자연수이려면 $x$좌표가 5의 배수이어야 한다.

즉, $x=5n$ ($n$은 자연수)이라 하면 $y=n+2$이므로

$a_n=5n$, $b_n=n+2$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{10}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{20}$

## 11 답 ①

수열 $\{5^na_n\}$의 첫째항부터 제$n$항까지의 합을 $S_n$이라 하면

$S_n=2^n-1$

(i) $n\geq2$일 때,

$5^na_n=S_n-S_{n-1}$

$=2^n-1-(2^{n-1}-1)=2^{n-1}$ …… ㉠

(ii) $n=1$일 때, $5a_1=S_1=1$ …… ㉡

이때 ㉡은 ㉠에 $n=1$을 대입한 값과 같으므로

$5^na_n=2^{n-1}$ $\therefore a_n=\frac{2^{n-1}}{5^n}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}=\frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}$

## 12 답 1

$2+\frac{2}{3}x+\frac{2}{9}x^2+\frac{2}{27}x^3+\cdots=\frac{2}{1-\frac{x}{3}}=\frac{6}{3-x}$

따라서 $\frac{6}{3-x}=3$이므로

$2=3-x$ $\therefore x=1$

## 13 답 $\frac{3}{4}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a$, 공비를 $r$라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

㈎에서 $\frac{b_n}{a_n}=3$이므로 $b_n=3a_n=3ar^{n-1}$

$\therefore a_nb_n=ar^{n-1}\times3ar^{n-1}=3a^2(r^2)^{n-1}$

즉, 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 $3a^2$, 공비가 $r^2$인 등비수열이다.

이때 ㈏에서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=12$이므로 $\frac{3a^2}{1-r^2}=12$

$\therefore a^2=4(1-r^2)$ …… ㉠

$a_2b_2=3$에서 $3a^2r^2=3$

$\therefore a^2r^2=1$

㉠을 대입하면

$4(1-r^2)r^2=1$, $4r^4-4r^2+1=0$

$(2r^2-1)^2=0$ $\therefore r^2=\frac{1}{2}$

이를 ㉠에 대입하면 $a^2=2$

따라서 $a_nb_n=6\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_4b_4=6\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{4}$

## 14 답 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $3<x<5$

첫째항이 $(2x-1)(x-4)$, 공비가 $x-4$이므로 주어진 급수가 수렴하려면

$(2x-1)(x-4)=0$ 또는 $-1<x-4<1$

(i) $(2x-1)(x-4)=0$에서 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=4$

(ii) $-1<x-4<1$에서 $3<x<5$

(i), (ii)에서 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $3<x<5$

## 15 답 ②

$\sum_{n=1}^{\infty} a^n$이 수렴하므로 $-1<a<1$ ····· ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty} b^{n-1}$이 수렴하므로 $-1<b<1$ ····· ㉡

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}(a+b)^n$은 공비가 $a+b$인 등비급수이고 ㉠, ㉡에서
$-2<a+b<2$이므로 주어진 급수는 항상 수렴한다고 할 수 없다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}(ab)^n$은 공비가 $ab$인 등비급수이고 ㉠, ㉡에서
$-1<ab<1$이므로 주어진 급수는 항상 수렴한다.

ㄷ. [반례] $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$이면 $\frac{a}{b}=2$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n$은 공비가 $\frac{a}{b}$인 등비급수이므로 주어진 급수는 발산한다.

따라서 보기에서 항상 수렴하는 급수인 것은 ㄴ이다.

## 16 답 ④

$0.\dot{7}\dot{2}=0.727272\cdots$이므로

$a_1=7$, $a_2=2$, $a_3=7$, $a_4=2$, $a_5=7$, $a_6=2$, …

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{4^n}=\frac{a_1}{4}+\frac{a_2}{4^2}+\frac{a_3}{4^3}+\frac{a_4}{4^4}+\frac{a_5}{4^5}+\frac{a_6}{4^6}+\cdots$$
$$=\frac{7}{4}+\frac{2}{4^2}+\frac{7}{4^3}+\frac{2}{4^4}+\frac{7}{4^5}+\frac{2}{4^6}+\cdots$$
$$=\left(\frac{7}{4}+\frac{7}{4^3}+\frac{7}{4^5}+\cdots\right)+\left(\frac{2}{4^2}+\frac{2}{4^4}+\frac{2}{4^6}+\cdots\right)$$
$$=\frac{\frac{7}{4}}{1-\frac{1}{16}}+\frac{\frac{2}{16}}{1-\frac{1}{16}}$$
$$=\frac{28}{15}+\frac{2}{15}=2$$

## 17 답 $4(2+\sqrt{2})$

정삼각형 $OA_1B_1$의 넓이가 $4\sqrt{3}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{OA_1}^2=4\sqrt{3}$ $\therefore \overline{OA_1}=4$

정삼각형 $A_1A_2B_2$의 넓이가 $2\sqrt{3}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{A_1A_2}^2=2\sqrt{3}$ $\therefore \overline{A_1A_2}=2\sqrt{2}$

정삼각형 $A_2A_3B_3$의 넓이가 $\sqrt{3}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{A_2A_3}^2=\sqrt{3}$ $\therefore \overline{A_2A_3}=2$

⋮

$$\therefore \lim_{n\to\infty} x_n=\overline{OA_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\cdots$$
$$=4+2\sqrt{2}+2+\cdots$$
$$=\frac{4}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=4(2+\sqrt{2})$$

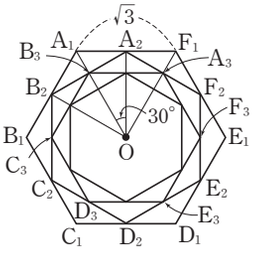
## 18 답 $12(3+2\sqrt{3})$

정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$에서

$l_1=6\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$의 무게중심을 O라 하면 삼각형 $A_1OF_1$은 정삼각형이므로

$\overline{A_1O}=\sqrt{3}$, $\angle A_1OA_2=30^\circ$




$\therefore \overline{A_2O}=\sqrt{3}\cos 30^\circ=\frac{3}{2}$

삼각형 $A_2OB_2$는 정삼각형이므로 $\overline{A_2B_2}=\overline{A_2O}=\frac{3}{2}$

$\therefore l_2=6\times\frac{3}{2}=9$

$\overline{A_2O}=\frac{3}{2}$, $\angle A_2OA_3=30^\circ$이므로

$\overline{A_3O}=\frac{3}{2}\cos 30^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

삼각형 $A_3OB_3$은 정삼각형이므로 $\overline{A_3B_3}=\overline{A_3O}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

$\therefore l_3=6\times\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

⋮

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n=6\sqrt{3}+9+\frac{9\sqrt{3}}{2}+\cdots$$
$$=\frac{6\sqrt{3}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}=12(3+2\sqrt{3})$$

## 19 답 $\frac{8\sqrt{3}}{5}$

[$n$단계]에서 새로 그려진 삼각형의 한 변의 길이를 $a_n$이라 하면

$a_1=\frac{2}{3}$, $a_2=\frac{2}{3^2}$, $a_3=\frac{2}{3^3}$, …, $a_n=\frac{2}{3^n}$

또 [$n$단계]의 도형의 변의 개수를 $b_n$이라 하면

$b_1=3\times 4$, $b_2=3\times 4^2$, $b_3=3\times 4^3$, …, $b_n=3\times 4^n$

이때 [$n$단계]에서 새로 그려진 삼각형의 개수는 [$(n-1)$단계]의 도형의 변의 개수와 같으므로 [$n$단계]에서 새로 그려진 삼각형의 넓이는

$\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{2}{3^n}\right)^2\right\}\times(3\times 4^{n-1})=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}$$
$$=\sqrt{3}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-\frac{4}{9}}$$
$$=\sqrt{3}+\frac{3\sqrt{3}}{5}=\frac{8\sqrt{3}}{5}$$

## 20 답 10000시간

처음 무선 이어폰의 배터리를 사용할 수 있는 시간은 25시간이고 $n$번째 완전히 재충전한 후 무선 이어폰을 사용할 수 있는 시간을 $a_n$이라 하면

$a_1=25\times\left(1-\frac{1}{400}\right)=25\times\frac{399}{400}$

$a_2=25\times\left(1-\frac{1}{400}\right)^2=25\times\left(\frac{399}{400}\right)^2$

$a_3=25\times\left(1-\frac{1}{400}\right)^3=25\times\left(\frac{399}{400}\right)^3$

⋮

따라서 무선 이어폰을 사용할 수 있는 시간의 총합은

$25+25\times\frac{399}{400}+25\times\left(\frac{399}{400}\right)^2+25\times\left(\frac{399}{400}\right)^3+\cdots$

$$=\frac{25}{1-\frac{399}{400}}=10000(\text{시간})$$

# 03 / 지수함수와 로그함수의 미분 14~19쪽

## 중단원 기출 문제 1회

**1** 답 ②

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x+2^{x+2}}{5^{x+1}-2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+2^2\times\left(\frac{2}{5}\right)^x}{5-\left(\frac{2}{5}\right)^x}$$
$$=\frac{1+0}{5-0}=\frac{1}{5}$$

**2** 답 ③

①, ②, ④, ⑤ $-\infty$

③ $\infty$

따라서 극한이 다른 하나는 ③이다.

**3** 답 15

$$\lim_{x\to1-}\{\log_3(x^2+ax+b)-\log_3(x^2-4x+3)\}$$
$$=\lim_{x\to1-}\log_3\frac{x^2+ax+b}{x^2-4x+3}$$
$$=\log_3\lim_{x\to1-}\frac{x^2+ax+b}{x^2-4x+3}$$

즉, $\log_3\lim_{x\to1-}\frac{x^2+ax+b}{x^2-4x+3}=1$이므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{x^2+ax+b}{x^2-4x+3}=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to1-$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to1-}(x^2+ax+b)=0$

$1+a+b=0 \quad \therefore b=-a-1 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1-}\frac{x^2+ax+(-a-1)}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to1-}\frac{(x-1)(x+a+1)}{(x-1)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{x+a+1}{x-3}$$
$$=-\frac{a+2}{2}$$

따라서 $-\frac{a+2}{2}=3$이므로

$a+2=-6 \quad \therefore a=-8$

이를 ㉡에 대입하면 $b=7$

$\therefore b-a=7-(-8)=15$

**4** 답 ④

$$\lim_{x\to0}(1+2x+x^2)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}\{(1+x)^2\}^{\frac{2}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{4}{x}}=e^4$$

다른 풀이

$$\lim_{x\to0}(1+2x+x^2)^{\frac{2}{x}}=\lim_{x\to0}[\{(1+2x+x^2)^{\frac{1}{2x+x^2}}\}^{2x+x^2}]^{\frac{2}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\{(1+2x+x^2)^{\frac{1}{2x+x^2}}\}^{4+2x}$$
$$=e^4$$

**5** 답 $-\frac{1}{4}$

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2x}\right)\left(1+\frac{1}{4x}\right)\right\}^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x\times\left(1+\frac{1}{4x}\right)^x\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left\{\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{-2x}\right\}^{-\frac{1}{2}}\times\left\{\left(1+\frac{1}{4x}\right)^{4x}\right\}^{\frac{1}{4}}\right]$$
$$=e^{-\frac{1}{2}}\times e^{\frac{1}{4}}=e^{-\frac{1}{4}}$$

$\therefore a=-\frac{1}{4}$

**6** 답 4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)}{(4x+1)\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8}{(4x+1)\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)}$$

$\frac{1}{2x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{2t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8}{(4x+1)\ln\left(1+\frac{1}{2x}\right)}=\lim_{t\to0+}\frac{8}{\left(\frac{2}{t}+1\right)\ln(1+t)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{8t}{(2+t)\ln(1+t)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{t}{\ln(1+t)}\times\frac{8}{t+2}\right\}$$
$$=1\times4=4$$

**7** 답 $\frac{1}{3}$

$$a=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)+\ln(1-3x)}{-x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln\{(1+3x)(1-3x)\}}{-x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-9x^2)}{-x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-9x^2)}{-9x^2}\times9$$
$$=1\times9=9$$

$$\therefore\lim_{x\to0}\frac{3x}{e^{ax}-1}=\lim_{x\to0}\frac{3x}{e^{9x}-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{9x}{e^{9x}-1}\times\frac{1}{3}$$
$$=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

**8** 답 ④

$$f(n)=\lim_{x\to0}\frac{e^{2nx}-e^x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{2nx}-1-e^x+1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{2nx}-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{2nx}-1}{2nx}\times2n-\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$$
$$=1\times2n-1=2n-1$$

$$\therefore\sum_{k=1}^{10}f(k)=\sum_{k=1}^{10}(2k-1)=2\times\frac{10\times11}{2}-10=100$$

## 9 답 $\ln 2$

(가)에서

$a=\lim_{x\to\infty} x\{\ln(x+1)-\ln x\}$

$=\lim_{x\to\infty} x\ln\frac{x+1}{x}$

$=\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to 0+$이므로

$a=\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$

(나)에서

$b=\lim_{x\to\infty} x\{\log_2(x+1)-\log_2 x\}$

$=\lim_{x\to\infty} x\log_2\frac{x+1}{x}$

$=\lim_{x\to\infty} x\log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to 0+$이므로

$b=\lim_{x\to\infty} x\log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to 0+}\frac{\log_2(1+t)}{t}=\frac{1}{\ln 2}$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{1}{\frac{1}{\ln 2}}=\ln 2$

## 10 답 $(\ln 6)^2$

$\lim_{x\to 0}\frac{6^{5x}-1}{\log_6(1+5x)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{6^{5x}-1}{5x}\times\frac{5x}{\log_6(1+5x)}\right\}$

$=\ln 6\times\ln 6=(\ln 6)^2$

## 11 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2+2x}-1}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2+2x}-1}{x^2+2x}\times\frac{x^2+2x}{x}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{x^2+2x}-1}{x^2+2x}\times(x+2)\right\}$

$=1\times 2=2$

ㄴ. $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{3^x-1}{x}\times\frac{x}{e^x-1}\times\frac{e^x-1}{f(x)}\right\}$

$=\ln 3\times 1\times 2=2\ln 3$

ㄷ. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\{1+f(x)\}}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\{1+f(x)\}}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x}\right]$

$=1\times 3=3$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 12 답 ⑤

$x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to 0}(e^{6x}-ae^{3x}+1)=0$

$2-a=0 \quad \therefore a=2$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{6x}-2e^{3x}+1}{x\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{3x}-1)^2}{x\ln(1+2x)}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{e^{3x}-1}{3x}\right)^2\times\frac{2x}{\ln(1+2x)}\times\frac{9}{2}\right\}$

$=1^2\times 1\times\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$

$\therefore b=\frac{9}{2}$

$\therefore a+b=2+\frac{9}{2}=\frac{13}{2}$

## 13 답 1

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-a}{2x^2}=b \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to 0}(e^x+e^{-x}-a)=0$

$2-a=0 \quad \therefore a=2$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+1-2e^x}{2x^2e^x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^2}{2x^2e^x}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{1}{2e^x}\times\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2\right\}$

$=\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{1}{2}$

따라서 $b=\frac{1}{2}$이므로 $ab=2\times\frac{1}{2}=1$

## 14 답 1

$P(t, e^t)$, $Q(t, e^{-t})$이므로

$S(t)=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times t=\frac{1}{2}\times(e^t-e^{-t})\times t$

$\therefore \lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t^2}=\lim_{t\to 0+}\frac{e^t-e^{-t}}{2t}=\lim_{t\to 0+}\frac{e^t-1-e^{-t}+1}{2t}$

$=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0+}\frac{e^t-1}{t}+\lim_{t\to 0+}\frac{e^{-t}-1}{-t}\right)$

$=\frac{1}{2}(1+1)=1$

## 15 답 ①

$A(1, 0)$, $B(a-1, 0)$, $C\left(\frac{a}{2}, \log_3\frac{a}{2}\right)$이므로

$f(a)=\frac{\log_3\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}-1}=\frac{2\log_3\frac{a}{2}}{a-2}$, $g(a)=\frac{\log_3\frac{a}{2}}{1-\frac{a}{2}}=\frac{2\log_3\frac{a}{2}}{2-a}$

따라서 $f(a)-g(a)=\frac{2\log_3\frac{a}{2}}{a-2}-\frac{2\log_3\frac{a}{2}}{2-a}=\frac{4\log_3\frac{a}{2}}{a-2}$이므로

$\lim_{a\to 2+}\{f(a)-g(a)\}=\lim_{a\to 2+}\frac{4\log_3\frac{a}{2}}{a-2}$

$a-2=t$로 놓으면 $a=2+t$이고, $a\to 2+$일 때 $t\to 0+$이므로

$\lim_{a\to 2+}\frac{4\log_3\frac{a}{2}}{a-2}=\lim_{t\to 0+}\frac{4\log_3\frac{2+t}{2}}{t}=4\lim_{t\to 0+}\frac{\log_3\left(1+\frac{t}{2}\right)}{t}$

$=4\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{\log_3\left(1+\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}\times\frac{1}{2}\right\}$

$=4\times\frac{1}{\ln 3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{\ln 3}$

## 16 답 1

$f(x)=3^{x+a}=3^a\times 3^x$이므로

$f'(x)=3^a\times 3^x\ln 3=3^{x+a}\ln 3$

점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 기울기가 $27\ln 3$이므로

$f'(2)=27\ln 3$에서

$3^{2+a}\ln 3=27\ln 3$

$2+a=3 \quad \therefore\ a=1$

## 17 답 5

$f'(x)=ae^x+(ax+b)e^x=(ax+a+b)e^x$

$f(1)=e$에서 $(a+b)e=e$

$\therefore\ a+b=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)=4e$에서 $(2a+b)e=4e$

$\therefore\ 2a+b=4 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=-2$

$\therefore\ a-b=5$

## 18 답 $-\frac{3}{2\ln 2}$

$x\to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$에서

$\lim_{x\to 2}\{f(x)+4\}=0 \quad \therefore\ f(2)=-4$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=\frac{1}{2\ln 2}$

$g(x)=f(x)\log_2 x$에서

$g'(x)=f'(x)\log_2 x+\frac{f(x)}{x\ln 2}$이므로

$g'(2)=f'(2)\times 1+\frac{f(2)}{2\ln 2}$

$=\frac{1}{2\ln 2}-\frac{4}{2\ln 2}$

$=-\frac{3}{2\ln 2}$

## 19 답 ⑤

$a_n=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}$

$=f'(1)+f'(1)$

$=2f'(1) \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $f'(x)=2nx^{2n-1}e^x+x^{2n}e^x$이므로 ㉠에서

$a_n=2f'(1)=2(2en+e)=4en+2e$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4en+2e}{n}=4e$

## 20 답 ④

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}\ln bx=\lim_{x\to 1-}(ax+1)=f(1)$

$\therefore\ \ln b=a+1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 $f'(1)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases} a & (x<1) \\ \frac{1}{x} & (x>1) \end{cases}$에서

$\lim_{x\to 1+}\frac{1}{x}=\lim_{x\to 1-}a \quad \therefore\ a=1$

이를 ㉠에 대입하면

$\ln b=2 \quad \therefore\ b=e^2$

$\therefore\ ab=e^2$

# 중단원 기출 문제 2회

## 1 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to 1}(2^{x-1}+3)=1+3=4$

ㄴ. $\lim_{x\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x-2\right\}=0-2=-2$

ㄷ. $\lim_{x\to\infty}\frac{4^x}{2^x}=\lim_{x\to\infty}2^x=\infty$

ㄹ. $\lim_{x\to-\infty}3^x=0$

따라서 보기에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

## 2 답 ④

$\lim_{x\to 1}(\log_4|x^2+4x-5|-\log_4|x^2+x-2|)$

$=\lim_{x\to 1}\log_4\left|\frac{x^2+4x-5}{x^2+x-2}\right|$

$=\lim_{x\to 1}\log_4\left|\frac{(x+5)(x-1)}{(x+2)(x-1)}\right|$

$=\lim_{x\to 1}\log_4\left|\frac{x+5}{x+2}\right|$

$=\log_4\lim_{x\to 1}\left|\frac{x+5}{x+2}\right|$

$=\log_4 2=\log_{2^2}2=\frac{1}{2}$

## 3 답 1

$\lim_{x\to 0}\{\log_3(8^x-1)-\log_3(2^x-1)\}$

$=\lim_{x\to 0}\log_3\frac{8^x-1}{2^x-1}$

$=\lim_{x\to 0}\log_3\frac{(2^x-1)(4^x+2^x+1)}{2^x-1}$

$=\lim_{x\to 0}\log_3(4^x+2^x+1)$

$=\log_3\lim_{x\to 0}(4^x+2^x+1)$

$=\log_3 3=1$

**4** 답 ④

$\lim_{x\to0}(1+2x)^{\frac{3}{x}}+\lim_{x\to0}(1-3x)^{\frac{1}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^6+\lim_{x\to0}\{(1-3x)^{-\frac{1}{3x}}\}^{-3}$

$=e^6+e^{-3}=e^6+\frac{1}{e^3}$

**5** 답 3

$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{a}{x}}{1+\frac{a}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{a}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{a}{x}\right)^x}$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left\{\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-\frac{x}{a}}\right\}^{-a}}{\left\{\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^{a}}$

$=\frac{e^{-a}}{e^a}=\frac{1}{e^{2a}}$

따라서 $\frac{1}{e^{2a}}=\frac{1}{e^6}$이므로

$2a=6 \quad \therefore a=3$

**6** 답 1

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)+2x}{x^2+5x}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+3x)}{x^2+5x}+\frac{2x}{x^2+5x}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{3}{x+5}\right\}+\lim_{x\to0}\frac{2}{x+5}$

$=1\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=1$

**7** 답 ⑤

$x<0$에서 $0<\frac{1}{1-x}<1$이므로

$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\ln(1-3x)}{(1-x)^n}=\ln(1-3x)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x}\right)^n$

$=\frac{\ln(1-3x)}{1-\frac{1}{1-x}}=\frac{(x-1)\ln(1-3x)}{x}$

$\therefore \lim_{x\to0-}S(x)=\lim_{x\to0-}\frac{(x-1)\ln(1-3x)}{x}$

$=\lim_{x\to0-}\left\{\frac{\ln(1-3x)}{-3x}\times(-3)\times(x-1)\right\}$

$=1\times(-3)\times(-1)=3$

**8** 답 2

$\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{f(x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^x-1}{f(x)}\times\frac{x}{e^x-1}\times\frac{e^{4x}-1}{4x}\times4\right\}$

$=\frac{1}{2}\times1\times1\times4=2$

**9** 답 $\frac{1}{\ln2}$

$5x+2x^2=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to0}\frac{\log_2(1+5x+2x^2)}{5x+2x^2}=\lim_{t\to0}\frac{\log_2(1+t)}{t}=\frac{1}{\ln2}$

**10** 답 ⑤

$x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이고, $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{2^x+4^x-6}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{2^{t+1}+4^{t+1}-6}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{2^{t+1}-2+4^{t+1}-4}{t}$

$=\lim_{t\to0}\frac{2^t-1}{t}\times2+\lim_{t\to0}\frac{4^t-1}{t}\times4$

$=2\ln2+4\ln4$

$=2\ln2+8\ln2=10\ln2$

**11** 답 16

(가)에서

$a=\lim_{x\to0}\frac{e^{f(x)}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x^3}-1}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{x^3}-1}{x^3}\times x^2\right)$

$=1\times0=0$

(나)에서

$b=\lim_{x\to0}\frac{4^x-1}{g(x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^x-1}{g(x)}\times\frac{x}{e^x-1}\times\frac{4^x-1}{x}\right\}$

$=2\times1\times\ln4=2\ln4=4\ln2$

$\therefore e^{a+b}=e^{4\ln2}=e^{\ln16}=16$

**12** 답 ②

$x\to0$일 때 (분자) $\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모) $\to0$에서

$\lim_{x\to0}(e^{ax}+b)=0$

$1+b=0 \quad \therefore b=-1$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+4x)}{e^{ax}-1}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+4x)}{4x}\times\frac{ax}{e^{ax}-1}\times\frac{4}{a}\right\}$

$=1\times1\times\frac{4}{a}=\frac{4}{a}$

따라서 $\frac{4}{a}=2$이므로 $a=2$

$\therefore ab=2\times(-1)=-2$

**13** 답 −3

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$

$\therefore \lim_{x\to0-}\frac{e^{2x}-e^{a+1}}{ax}=b \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x\to0-$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to0$에서

$\lim_{x\to0-}(e^{2x}-e^{a+1})=0$

$1-e^{a+1}=0 \quad \therefore a=-1$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to0-}\frac{e^{2x}-1}{-x}=\lim_{x\to0-}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times(-2)=1\times(-2)=-2$

따라서 $b=-2$이므로

$a+b=-1+(-2)=-3$

## 14 답 ①

함수 $f(x)g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2} f(x)g(x)=f(2)g(2)$

$\therefore \lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{\ln(x^2-4x+5)}=0$ ····· ㉠

$x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)=0$

즉, $f(x)=(x-2)(x^2+ax+b)$ ($a$, $b$는 상수)라 하면 ㉠에서

$\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+ax+b)}{\ln(x^2-4x+5)}=0$

$\lim_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}}{\dfrac{\ln(x^2-4x+5)}{(x-2)^2}}=0$

이때 $\lim_{x\to 2}\dfrac{\ln(x^2-4x+5)}{(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\dfrac{\ln\{1+(x-2)^2\}}{(x-2)^2}=1$이므로

$\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax+b}{x-2}=0$ ····· ㉡

$x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to 2}(x^2+ax+b)=0$

$4+2a+b=0$ $\therefore b=-2a-4$ ····· ㉢

이를 ㉡에 대입하면 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=0$

$\lim_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}=0$, $\lim_{x\to 2}(x+a+2)=0$

$a+4=0$ $\therefore a=-4$

이를 ㉢에 대입하면 $b=4$

따라서 $f(x)=(x-2)(x^2-4x+4)=(x-2)^3$이므로

$f(0)=-8$

## 15 답 4

점 A의 좌표를 $(t, \ln(1+4t))$ $(t>0)$라 하면

$\overline{OH}=t$, $\overline{AH}=\ln(1+4t)$

이때 점 A가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t\to 0+$이므로

$\lim_{t\to 0+}\dfrac{\overline{AH}}{\overline{OH}}=\lim_{t\to 0+}\dfrac{\ln(1+4t)}{t}$

$=\lim_{t\to 0+}\dfrac{\ln(1+4t)}{4t}\times 4=1\times 4=4$

## 16 답 2

$S_1(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times t=\dfrac{1}{2}t$

$S_2(t)=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times(e^t-1)=\dfrac{1}{2}\times 2\times(e^t-1)=e^t-1$

$\therefore \lim_{t\to 0+}\dfrac{S_2(t)}{S_1(t)}=\lim_{t\to 0+}\dfrac{e^t-1}{\frac{1}{2}t}$

$=\lim_{t\to 0+}\left(\dfrac{e^t-1}{t}\times 2\right)$

$=1\times 2=2$

## 17 답 ②

$f'(x)=(3x^2-4)e^x+(x^3-4x+4)e^x$

$=(x^3+3x^2-4x)e^x$

$f'(a)=0$에서 $(a^3+3a^2-4a)e^a=0$

$a^3+3a^2-4a=0$ ($\because e^a>0$)

$a(a+4)(a-1)=0$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=0$ 또는 $a=1$

따라서 모든 $a$의 값의 합은

$-4+0+1=-3$

## 18 답 ②

$f'(x)=2ax\ln x+ax^2\times\dfrac{1}{x}=2ax\ln x+ax$

$f'(e)=6e$에서

$3ae=6e$ $\therefore a=2$

## 19 답 ②

$\dfrac{1}{n}=h$로 놓으면 $n=\dfrac{1}{h}$이고, $n\to\infty$일 때 $h\to 0+$이므로

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{3}\left\{f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-f\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right\}$

$=\lim_{h\to 0+}\dfrac{1}{3h}\{f(1+h)-f(1-h)\}$

$=\dfrac{1}{3}\lim_{h\to 0+}\dfrac{f(1+h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}$

$=\dfrac{1}{3}\left\{\lim_{h\to 0+}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}+\lim_{h\to 0+}\dfrac{f(1-h)-f(1)}{-h}\right\}$

$=\dfrac{2}{3}f'(1)$ ····· ㉠

이때 $f'(x)=3^x\ln 3\times\log_3 x+\dfrac{3^x}{x\ln 3}$이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$\dfrac{2}{3}f'(1)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{\ln 3}=\dfrac{2}{\ln 3}$

## 20 답 2

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 미분가능하면 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to 0+}(3^x-3)=\lim_{x\to 0-}(axe^x+bx+c)=f(0)$

$\therefore c=-2$

또 $f'(0)$, $f'(1)$이 존재하므로

$f'(x)=\begin{cases} a(x+1)e^x+b & (x<0) \\ 3^x\ln 3 & (0<x<1) \\ b\ln x+b & (x>1) \end{cases}$에서

$\lim_{x\to 0+}3^x\ln 3=\lim_{x\to 0-}\{a(x+1)e^x+b\}$

$\therefore a+b=\ln 3$ ····· ㉠

$\lim_{x\to 1+}(b\ln x+b)=\lim_{x\to 1-}3^x\ln 3$

$\therefore b=3\ln 3$

이를 ㉠에 대입하면 $a=-2\ln 3$

$\therefore 3a+2b-c=3\times(-2\ln 3)+2\times 3\ln 3-(-2)=2$

# 04 / 삼각함수의 미분

20~25쪽

## 중단원 기출 문제 1회

**1** 답 1

$\csc\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=2$, $\cot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4}}=1$, $\sec\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}=2$

이므로

$\csc^2\frac{\pi}{6}+\cot^2\frac{\pi}{4}-\sec^2\frac{\pi}{3}=4+1-4=1$

**2** 답 ②

(i) $\sin\theta\sec\theta<0$일 때,

$\sin\theta>0$, $\sec\theta<0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\sec\theta>0$

따라서 $\theta$는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\sec\theta\tan\theta>0$일 때,

$\sec\theta>0$, $\tan\theta>0$ 또는 $\sec\theta<0$, $\tan\theta<0$

따라서 $\theta$는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 $\theta$는 제2사분면의 각이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{1+\cot^2\theta}\sqrt{\sec^2\theta-1}&=\sqrt{\csc^2\theta}\sqrt{\tan^2\theta}\\&=|\csc\theta|\times|\tan\theta|\\&=\csc\theta\times(-\tan\theta)=-\sec\theta\end{aligned}$$

**3** 답 ④

$\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{\pi}{4}=1$이므로

$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$

$\tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta$

$$\begin{aligned}\therefore\ (1+\tan\alpha)(1+\tan\beta)&=1+\tan\alpha+\tan\beta+\tan\alpha\tan\beta\\&=1+(1-\tan\alpha\tan\beta)+\tan\alpha\tan\beta\\&=2\end{aligned}$$

**4** 답 ①

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\sin\theta>0$

$\therefore\ \sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

$\therefore\ \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{3}{5}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{24}{25}$

**5** 답 ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=5$, $\tan\alpha\tan\beta=2$

$\therefore\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{5}{1-2}=-5$

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $0<\alpha+\beta<\pi$이고

$\tan(\alpha+\beta)<0$이므로

$\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$

$\sec^2(\alpha+\beta)=1+\tan^2(\alpha+\beta)=1+(-5)^2=26$이므로

$\cos^2(\alpha+\beta)=\frac{1}{26}$

$\therefore\ \sin^2(\alpha+\beta)=1-\cos^2(\alpha+\beta)=1-\frac{1}{26}=\frac{25}{26}$

$\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\sqrt{\frac{25}{26}}=\frac{5\sqrt{26}}{26}$ ($\because\ \sin(\alpha+\beta)>0$)

$\therefore\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\sin(\alpha+\beta)=\frac{5\sqrt{26}}{26}$

**6** 답 1

세 직선 $y=\frac{2}{3}x$, $y=5x$, $y=mx$가 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$, $\gamma$라 하면

$\tan\alpha=\frac{2}{3}$, $\tan\beta=5$, $\tan\gamma=m$

$0<m<5$이므로 두 직선 $y=5x$, $y=mx$가 이루는 예각의 크기는 $\beta-\gamma$

따라서 $\tan\alpha=\tan(\beta-\gamma)$이므로

$\frac{2}{3}=\frac{\tan\beta-\tan\gamma}{1+\tan\beta\tan\gamma}$

$\frac{2}{3}=\frac{5-m}{1+5m}$

$2+10m=15-3m$ $\therefore\ m=1$

**7** 답 ③

$\overline{CD}=a$, $\overline{DE}=b$라 하면 직각삼각형 EDC에서

$a^2+b^2=5$ …… ㉠

$\overline{AD}=3\overline{DE}=3b$이므로 직각삼각형 ADC에서 $a^2+(3b)^2=13$

$\therefore\ a^2+9b^2=13$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=2$, $b=1$ ($\because\ a>0$, $b>0$)

이때 $\overline{AD}=3$이므로 직각삼각형 ABD에서

$\overline{BD}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$\therefore\ \sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$

$\overline{DE}=1$, $\overline{CD}=2$이므로 직각삼각형 EDC에서

$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\begin{aligned}\therefore\ \cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\&=\frac{4}{5}\times\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{11\sqrt{5}}{25}\end{aligned}$$

**8** 답 ③

$$\begin{aligned}y&=-\sin x-\sqrt{3}\cos x\\&=2\left(-\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\\&=2\left(\sin x\cos\frac{2}{3}\pi-\cos x\sin\frac{2}{3}\pi\right)\\&=2\sin\left(x-\frac{2}{3}\pi\right)\end{aligned}$$

따라서 함수 $y=-\sin x-\sqrt{3}\cos x$의 그래프는 함수 $y=2\sin x$의 그래프를 $x$축의 방향으로 $\frac{2}{3}\pi$만큼 평행이동한 것이므로

$a=2,\ b=\frac{2}{3}\pi$

$\therefore\ ab=\frac{4}{3}\pi$

## 9 답 ①

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{1-\frac{\sin x}{\cos x}}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}$$
$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x(\sin x-\cos x)}{\cos x-\sin x}$$
$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\cos x$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

## 10 답 $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{\sin 4x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{4x}{\sin 4x}\times\frac{1}{2}\right)$$
$$=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

## 11 답 $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\sin x)}{\sin 2f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin^2x}{\sin 6x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{6x^2}{\sin 6x^2}\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{2}\right\}$$
$$=1\times1^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

## 12 답 ②

$$\lim_{x\to0}\frac{8^x-1}{a\tan 3x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{8^x-1}{x}\times\frac{3x}{\tan 3x}\times\frac{1}{3a}\right)$$
$$=\ln 8\times1\times\frac{1}{3a}=\frac{1}{a}\ln 2$$

따라서 $\frac{1}{a}\ln 2=\ln\sqrt{2}$이므로

$\frac{1}{a}\ln 2=\frac{1}{2}\ln 2$

$\therefore\ a=2$

## 13 답 ③

$$f(n)=\lim_{x\to0}\frac{nx^2}{1-\cos nx}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{nx^2(1+\cos nx)}{(1-\cos nx)(1+\cos nx)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{nx^2(1+\cos nx)}{\sin^2 nx}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{nx}{\sin nx}\right)^2\times\frac{1+\cos nx}{n}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{2}{n}=\frac{2}{n}$$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{12}\frac{2}{f(n)}=\sum_{n=1}^{12}n$

$=\frac{12\times13}{2}=78$

## 14 답 $\frac{1}{8}$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\tan\frac{1}{2x}\csc\frac{4}{x}=\lim_{t\to0+}\tan\frac{t}{2}\csc 4t$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\tan\frac{t}{2}}{\sin 4t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left(\frac{\tan\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\times\frac{4t}{\sin 4t}\times\frac{1}{8}\right)$$
$$=1\times1\times\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

## 15 답 ④

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}(a-b\cos x)=0$

$a-b=0\qquad\therefore\ b=a\qquad\cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{a-a\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{a(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{a\sin^2x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{a}{1+\cos x}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{a}{2}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=2$이므로 $a=4$

이를 ㉠에 대입하면 $b=4$

$\therefore\ ab=16$

## 16 답 ⑤

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$

$\lim_{x\to0+}(e^x+3x+a)=\lim_{x\to0-}\frac{1-\cos 3x}{x^2}\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{x\to0+}(e^x+3x+a)=1+a$

$$\lim_{x\to0-}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\lim_{x\to0-}\frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{x^2(1+\cos 3x)}$$
$$=\lim_{x\to0-}\left(\frac{\sin^2 3x}{x^2}\times\frac{1}{1+\cos 3x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0-}\left\{\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2\times\frac{9}{1+\cos 3x}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$$

따라서 ㉠에서

$1+a=\frac{9}{2}\qquad\therefore\ a=\frac{7}{2}$

## 17 답 ②

삼각형 OHB에서 $\overline{OH}=3\cos\theta$, $\overline{BH}=3\sin\theta$

$\overline{AH}=\overline{OA}-\overline{OH}=3-3\cos\theta=3(1-\cos\theta)$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{BH}=\frac{9}{2}(1-\cos\theta)\sin\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3}=\lim_{\theta\to0+}\frac{9(1-\cos\theta)\sin\theta}{2\theta^3}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{9(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)\sin\theta}{2\theta^3(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{9\sin^3\theta}{2\theta^3(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\times\frac{9}{2(1+\cos\theta)}\right\}$$
$$=1^3\times\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$$

## 18 답 ④

$f(x)=a\sin x+2\cos x$라 하면

$f'(x)=a\cos x-2\sin x$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=b$에서 $\frac{\sqrt{2}}{2}a+\sqrt{2}=b$ ····· ㉠

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}$에서 $\frac{\sqrt{2}}{2}a-\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

$\therefore a=6$

이를 ㉠에 대입하면

$b=3\sqrt{2}+\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

$\therefore ab=6\times4\sqrt{2}=24\sqrt{2}$

## 19 답 ②

$f(\pi)=e^{\pi}(-1+1)=0$이므로

$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=f'(\pi)$ ····· ㉠

이때

$f'(x)=e^x(4\sin x+\cos x+1)+e^x(4\cos x-\sin x)$

$=e^x(3\sin x+5\cos x+1)$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$f'(\pi)=e^{\pi}(-5+1)=-4e^{\pi}$

## 20 답 ①

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 미분가능하면 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다.

$\lim_{x\to0+}(b\sin x+3)=\lim_{x\to0-}(e^x+a)=f(0)$

$3=1+a$ $\therefore a=2$

또 $f'(0)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}e^x & (x<0)\\ b\cos x & (x>0)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to0+}b\cos x=\lim_{x\to0-}e^x$ $\therefore b=1$

$\therefore a+b=2+1=3$

# 중단원 기출 문제 2회

## 1 답 $-\frac{1}{12}$

$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{5}{3}$이므로 $\sin\theta=\frac{3}{5}$

$\theta$가 제2사분면의 각이므로 $\cos\theta<0$

$$\therefore \cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$$

$$\therefore \cot\theta-\sec\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{1}{\cos\theta}=\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}-\left(-\frac{5}{4}\right)=-\frac{1}{12}$$

## 2 답 ⑤

$$\frac{\csc\theta}{\sec\theta-\tan\theta}+\frac{\csc\theta}{\sec\theta+\tan\theta}$$
$$=\frac{\csc\theta(\sec\theta+\tan\theta)+\csc\theta(\sec\theta-\tan\theta)}{(\sec\theta-\tan\theta)(\sec\theta+\tan\theta)}$$
$$=\frac{\csc\theta\sec\theta+\csc\theta\tan\theta+\csc\theta\sec\theta-\csc\theta\tan\theta}{\sec^2\theta-\tan^2\theta}$$
$$=\frac{2\csc\theta\sec\theta}{(1+\tan^2\theta)-\tan^2\theta}=2\csc\theta\sec\theta$$

## 3 답 ③

$$\cot50^\circ+\tan25^\circ=\frac{\cos50^\circ}{\sin50^\circ}+\frac{\sin25^\circ}{\cos25^\circ}$$
$$=\frac{\cos50^\circ\cos25^\circ+\sin50^\circ\sin25^\circ}{\sin50^\circ\cos25^\circ}$$
$$=\frac{\cos(50^\circ-25^\circ)}{\sin50^\circ\cos25^\circ}=\frac{\cos25^\circ}{\sin50^\circ\cos25^\circ}$$
$$=\frac{1}{\sin50^\circ}=\csc50^\circ$$

## 4 답 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

$(\tan\alpha+2)(\tan\beta-2)=-5$에서

$\tan\alpha\tan\beta-2(\tan\alpha-\tan\beta)=-1$

$1+\tan\alpha\tan\beta=2(\tan\alpha-\tan\beta)$

이때 $\tan\alpha>0$, $\tan\beta>0$에서 $1+\tan\alpha\tan\beta>0$이므로

$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1}{2}$

$\therefore \tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$에서 $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$이고,

$\tan(\alpha-\beta)>0$이므로 $0<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$

$\sec^2(\alpha-\beta)=1+\tan^2(\alpha-\beta)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$이므로

$\cos^2(\alpha-\beta)=\frac{4}{5}$

$\therefore \cos(\alpha-\beta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$$\therefore \cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha-\beta)=\cos(\alpha-\beta)\left\{1+\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}\right\}$$
$$=\cos(\alpha-\beta)\{1+\tan(\alpha-\beta)\}$$
$$=\frac{2\sqrt{5}}{5}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{5}}{5}$$

## 5 답 ④

$\tan 2x=-\frac{3}{4}$에서 $\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=-\frac{3}{4}$

$3\tan^2 x-8\tan x-3=0$, $(3\tan x+1)(\tan x-3)=0$

$\therefore \tan x=-\frac{1}{3}\left(\because \frac{\pi}{2}<x<\pi\right)$

$\therefore \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin x}{\cos x}}=\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$

$=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}=2$

## 6 답 ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\tan\alpha+\tan\beta=6a$, $\tan\alpha\tan\beta=a^2+10$

이때 $\tan(\alpha+\beta)=\tan\frac{3}{4}\pi=-1$이므로

$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=-1$, $\frac{6a}{1-(a^2+10)}=-1$

$a^2-6a+9=0$, $(a-3)^2=0$

$\therefore a=3$

## 7 답 $\frac{\pi}{4}$

두 직선 $x-2y+1=0$, $3x-y-2=0$, 즉 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$, $y=3x-2$가 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 $\alpha$, $\beta$라 하면

$\tan\alpha=\frac{1}{2}$, $\tan\beta=3$

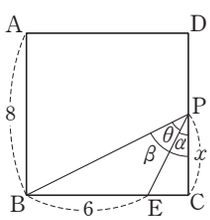
두 직선이 이루는 예각의 크기를 $\theta$라 하면

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}-3}{1+\frac{1}{2}\times 3}\right|=1$

$\therefore \theta=\frac{\pi}{4}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

## 8 답 $\frac{3}{4}$

$\overline{CE}=2$이고, $\angle CPE=\alpha$, $\angle CPB=\beta$, $\overline{CP}=x$라 하면




$\tan\alpha=\frac{2}{x}$, $\tan\beta=\frac{8}{x}$

$\theta=\beta-\alpha$이므로

$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$=\frac{\frac{8}{x}-\frac{2}{x}}{1+\frac{8}{x}\times\frac{2}{x}}=\frac{6x}{x^2+16}=\frac{6}{x+\frac{16}{x}}$

이때 $x>0$, $\frac{16}{x}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$x+\frac{16}{x}\geq 2\sqrt{x\times\frac{16}{x}}=8\left(\text{단, 등호는 } x=\frac{16}{x}, \text{ 즉 } x=4\text{일 때 성립}\right)$

따라서 구하는 최댓값은 $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

## 9 답 3

$y=\sqrt{3}a\sin x+a\cos x-2$

$=2a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)-2$

$=2a\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)-2$

$=2a\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2$

이때 $a>0$이고 $-1\leq\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\leq 1$이므로

$-2a-2\leq 2a\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-2\leq 2a-2$

따라서 최댓값이 $2a-2$이므로

$2a-2=4$ $\therefore a=3$

## 10 답 ①

$\lim_{x\to\pi}\left(\sec x-\frac{\sin x}{\cot x}\right)=\lim_{x\to\pi}\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\frac{\cos x}{\sin x}}\right)$

$=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}$

$=\lim_{x\to\pi}\frac{\cos^2 x}{\cos x}$

$=\lim_{x\to\pi}\cos x$

$=\cos\pi=-1$

## 11 답 ③

$x\to 0$일 때, $\sin 6x\to 0$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin(\sin 6x)}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin 6x}{\sin(\sin 6x)}\times\frac{\sin 4x}{4x}\times\frac{6x}{\sin 6x}\times\frac{2}{3}\right\}$

$=1\times 1\times 1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

## 12 답 $\frac{1}{6}$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\tan 6x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{6x}{\tan 6x}\times\frac{f(x)}{e^{4x}-1}\times\frac{e^{4x}-1}{4x}\times\frac{2}{3}\right\}$

$=1\times\frac{1}{4}\times 1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$

## 13 답 8

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 2x}{\cos^3 x-\cos^2 x-\cos x+1}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 2x}{(\cos x-1)(\cos^2 x-1)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 2x}{\sin^2 x(1-\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 2x(1+\cos x)}{\sin^2 x(1-\cos x)(1+\cos x)}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin^2 2x(1+\cos x)}{\sin^4 x}$

$=\lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{x}{\sin x}\right)^4\times\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\times(1+\cos x)\times 4\right\}$

$=1^4\times 1^2\times 2\times 4=8$

## 14 답 ③

$x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고, $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{t\to0}f(1+t)$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\tan\{\pi(1+t)\}}{(1+t)^2-1}=\lim_{t\to0}\frac{\tan\pi t}{t^2+2t}$$

$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\tan\pi t}{\pi t}\times\frac{\pi}{t+2}\right)=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

## 15 답 3

$x\to0$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모)$\to0$에서

$$\lim_{x\to0}(x\sin ax+b)=0 \qquad \therefore\ b=0$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin ax}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\sin ax\,(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x\sin ax\,(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{ax}{\sin ax}\times\frac{1}{a(1+\cos x)}\right\}$$

$$=1^2\times1\times\frac{1}{2a}=\frac{1}{2a}$$

따라서 $\frac{1}{2a}=\frac{1}{6}$이므로 $a=3$

$\therefore\ a+b=3+0=3$

## 16 답 ⑤

$f(x)=ax^2+bx+c$ ($a\neq0$, $a$, $b$, $c$는 상수)라 하면

$$g(x)=\begin{cases}ax^2+bx+c & (x\le0)\\ \dfrac{ax^2+bx+c-x\sin x-2}{x^2} & (x>0)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0-}g(x)=g(0)$$

$$\therefore\ \lim_{x\to0+}\frac{ax^2+bx+c-x\sin x-2}{x^2}=c \qquad \cdots\cdots\ ㉠$$

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$$\lim_{x\to0+}(ax^2+bx+c-x\sin x-2)=0$$

$$c-2=0 \qquad \therefore\ c=2$$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0+}\frac{ax^2+bx-x\sin x}{x^2}=\lim_{x\to0+}\frac{ax+b-\sin x}{x}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to0+}\frac{ax+b-\sin x}{x}=2 \qquad \cdots\cdots\ ㉡$$

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$$\lim_{x\to0+}(ax+b-\sin x)=0 \qquad \therefore\ b=0$$

이를 ㉡의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0+}\frac{ax-\sin x}{x}=\lim_{x\to0+}a-\lim_{x\to0+}\frac{\sin x}{x}=a-1$$

즉, $a-1=2$이므로 $a=3$

따라서 $f(x)=3x^2+2$이므로

$f(2)=12+2=14$

## 17 답 $\frac{1}{4}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\theta}=\frac{\overline{AC}}{\sin4\theta} \qquad \therefore\ \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\sin\theta}{\sin4\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to0+}\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\lim_{\theta\to0+}\frac{\sin\theta}{\sin4\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{4\theta}{\sin4\theta}\times\frac{1}{4}\right)$$

$$=1\times1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

## 18 답 ②

$$y'=2x\cos x-x^2\sin x-\cos x$$

$$=(2x-1)\cos x-x^2\sin x$$

## 19 답 ⑤

$f'(x)=-\sin x$

$$A=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{6}+h\right)-\left(\frac{\pi}{6}\right)}{h}$$

$$=f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$B=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$$

$$=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$$

$$C=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{2}{3}\pi+h\right)-f\left(\frac{2}{3}\pi-h\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{2}{3}\pi+h\right)-f\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{2}{3}\pi-h\right)-f\left(\frac{2}{3}\pi\right)}{-h}$$

$$=f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)+f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=2f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=2\times\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right)=-\sqrt3$$

$\therefore\ C<B<A$

## 20 답 $8e^3-5$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+}(x+b)e^x=\lim_{x\to0-}(a\cos x+6\sin x)=f(0)$$

$\therefore\ a=b$ ····· ㉠

또 $f'(0)$이 존재하므로

$$f'(x)=\begin{cases}-a\sin x+6\cos x & (x<0)\\ (x+b+1)e^x & (x>0)\end{cases}$$에서

$$\lim_{x\to0+}(x+b+1)e^x=\lim_{x\to0-}(-a\sin x+6\cos x)$$

$b+1=6$ $\qquad \therefore\ b=5$

이를 ㉠에 대입하면 $a=5$

따라서 $f(x)=\begin{cases}5\cos x+6\sin x & (x<0)\\ (x+5)e^x & (x\ge0)\end{cases}$이므로

$f(-\pi)+f(3)=8e^3-5$

# 05 / 여러 가지 미분법

26~31쪽

## 중단원 기출 문제 1회

**1** 답 ①

$f'(x)=-\dfrac{3}{(3x-1)^2}$

$\therefore f'\left(\dfrac{2}{3}\right)=-\dfrac{3}{(2-1)^2}=-3$

**2** 답 4

$g'(x)=\dfrac{(2x+2)f(x)-(x^2+2x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$이므로

$g'(2)=\dfrac{6f(2)-8f'(2)}{\{f(2)\}^2}$

$2=\dfrac{6f(2)-8\times(-1)}{\{f(2)\}^2}$, $\{f(2)\}^2=3f(2)+4$

$\{f(2)\}^2-3f(2)-4=0$, $\{f(2)+1\}\{f(2)-4\}=0$

$\therefore f(2)=4$ ($\because f(x)>0$)

**3** 답 ③

$f'(x)=\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)-e^x(\cos x+\sin x)}{(\sin x-\cos x)^2}$

$=-\dfrac{2e^x\cos x}{(\sin x-\cos x)^2}$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

따라서 모든 $x$의 값의 합은

$\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{3}{2}\pi=2\pi$

**4** 답 ②

$f(x)=\dfrac{(x-2)(x^2+2)}{x^2}=\dfrac{x^3-2x^2+2x-4}{x^2}$

$=x-2+2x^{-1}-4x^{-2}$

이므로

$f'(x)=1-2x^{-2}+8x^{-3}=1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}$

$\therefore f'(2)=1-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{3}{2}$

**5** 답 2

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0+}(2e^{-x}+bx)=\lim\limits_{x\to 0-}(\sec x+a)=f(0)$

$2=1+a$ $\therefore a=1$

또 $f'(0)$이 존재하므로 $f'(x)=\begin{cases}\sec x\tan x & (x<0)\\ -2e^{-x}+b & (x>0)\end{cases}$에서

$\lim\limits_{x\to 0+}(-2e^{-x}+b)=\lim\limits_{x\to 0-}\sec x\tan x$

$-2+b=0$ $\therefore b=2$

$\therefore ab=1\times 2=2$

**6** 답 −2

$h(x)=f(g(x))$라 하면

$h(2)=f(g(2))=f(3)=-1$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(g(x))+1}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{h(x)-h(2)}{x-2}$

$=h'(2)$ …… ㉠

이때 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$h'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(3)g'(2)$

$=1\times(-2)=-2$

**7** 답 3

$f(\tan x+x-1)=x^3-3x^2+9x+4$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(\tan x+x-1)(\tan x+x-1)'=3x^2-6x+9$

$(\sec^2 x+1)f'(\tan x+x-1)=3x^2-6x+9$

$\therefore f'(\tan x+x-1)=\dfrac{3x^2-6x+9}{\sec^2 x+1}$ ($\because \sec^2 x+1>0$) …… ㉠

방정식 $\tan x+x-1=0$의 해를 $\alpha$($\alpha$는 실수)라 하면

$\tan\alpha+\alpha-1=0$

$\therefore \tan\alpha=1-\alpha$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=\alpha$를 대입하면

$f'(0)=\dfrac{3\alpha^2-6\alpha+9}{\sec^2\alpha+1}=\dfrac{3\alpha^2-6\alpha+9}{(1+\tan^2\alpha)+1}$

$=\dfrac{3\alpha^2-6\alpha+9}{2+\tan^2\alpha}=\dfrac{3\alpha^2-6\alpha+9}{2+(1-\alpha)^2}$ ($\because$ ㉡)

$=\dfrac{3(\alpha^2-2\alpha+3)}{\alpha^2-2\alpha+3}=3$

**8** 답 30

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2-h)-f(2)}{-h}$

$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)$ …… ㉠

이때

$f'(x)=5(3x-5)^4\times 3=15(3x-5)^4$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$2f'(2)=2\times 15=30$

**9** 답 −1

$f'(x)=2\sec^2 2x$

$g'(x)=\dfrac{x^2+1-x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

따라서 $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로

$h'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=g'\left(f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=g'(\sqrt{3})f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=-\dfrac{1}{8}\times 8=-1$

## 10 답 ①

$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)\right\}$에서 $\frac{1}{n}=t$로 놓으면 $n\to\infty$일 때 $t\to 0+$이고, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)\right\}=\lim_{t\to 0+}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+2t\right)}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{f\left(\frac{\pi}{4}+2t\right)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2t}\times 2$$
$$=2f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때

$f'(x)=\frac{-\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{2}\cos x}=-\tan x$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$2f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\times(-1)=-2$

## 11 답 ⑤

$f'(x)=\frac{2x}{(x^2-5)\ln 2}$

따라서 $x=3$에서의 미분계수는

$f'(3)=\frac{6}{4\ln 2}=\frac{3}{2\ln 2}$

## 12 답 $-\frac{1}{\pi^2}$

$x>0$, $f(x)>0$이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\cos x\ln x$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x}$

$\therefore f'(x)=f(x)\times\left(-\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)$
$=x^{\cos x}\left(-\sin x\ln x+\frac{\cos x}{x}\right)$

$\therefore f'(\pi)=\pi^{-1}\times\left(-\frac{1}{\pi}\right)=-\frac{1}{\pi^2}$

## 13 답 ①

$f(x)>0$이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=\ln(e^x+1)+\ln(e^{3x}+1)+\ln(e^{5x}+1)+\ln(e^{7x}+1)$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}+\frac{5e^{5x}}{e^{5x}+1}+\frac{7e^{7x}}{e^{7x}+1}$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{f(x)}$
$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{e^x+1}+\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+1}+\frac{5e^{5x}}{e^{5x}+1}+\frac{7e^{7x}}{e^{7x}+1}\right)$
$=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2}+\frac{7}{2}=8$

## 14 답 ③

$f(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2+3}}=(x-2)(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$f'(x)=(x^2+3)^{-\frac{1}{2}}+(x-2)\left\{-\frac{1}{2}(x^2+3)^{-\frac{3}{2}}\times 2x\right\}$
$=\frac{1}{\sqrt{x^2+3}}-\frac{x(x-2)}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$
$=\frac{2x+3}{(x^2+3)\sqrt{x^2+3}}$

$\therefore f'(0)=\frac{3}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

## 15 답 $\frac{3}{5}$

$\frac{dx}{dt}=1+\frac{1}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{1}{t^2}}{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{t^2-1}{t^2+1}$

따라서 $t=2$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\frac{4-1}{4+1}=\frac{3}{5}$

## 16 답 5

$\frac{dx}{dt}=-4\sin t$, $\frac{dy}{dt}=3\cos t$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\cos t}{-4\sin t}=-\frac{3}{4}\cot t$

이때 $\frac{dy}{dx}=-1$일 때의 $t$의 값을 $\alpha\,(0<\alpha<\pi)$라 하면

$-\frac{3}{4}\cot\alpha=-1$, $\cot\alpha=\frac{4}{3}$ $\therefore \tan\alpha=\frac{3}{4}$

$0<\alpha<\pi$에서 $\sec\alpha>0$이므로

$\sec\alpha=\sqrt{1+\tan^2\alpha}$
$=\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\frac{5}{4}$

$\therefore \cos\alpha=\frac{4}{5}$

$0<\alpha<\pi$에서 $\sin\alpha>0$이므로

$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$
$=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}$

따라서 $a=4\times\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$, $b=3\times\frac{3}{5}=\frac{9}{5}$이므로

$a+b=5$

## 17 답 $-4$

주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}+2axy+ax^2\frac{dy}{dx}=0$

$(ax^2+3y^2)\frac{dy}{dx}=-3x^2-2axy$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{3x^2+2axy}{ax^2+3y^2}$ (단, $ax^2+3y^2\neq 0$)

점 $(-1, 2)$에서의 접선의 기울기가 $-\frac{5}{3}$이므로

$-\frac{3-4a}{a+12}=-\frac{5}{3}$, $9-12a=5a+60$

$17a=-51$ $\therefore a=-3$

또 점 $(-1, 2)$가 곡선 $x^3+y^3-3x^2y+b=0$ 위의 점이므로

$1+b=0$ $\therefore b=-1$

$\therefore a+b=-3+(-1)=-4$

## 18 답 $-\frac{1}{8}$

주어진 식의 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\frac{2y(y-3)-y^2}{(y-3)^2}=\frac{y^2-6y}{(y-3)^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{(y-3)^2}{y^2-6y}$

따라서 점 $(-4, 2)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{1}{4-12}=-\frac{1}{8}$

## 19 답 ③

$g(\ln 3)=a$라 하면 $f(a)=\ln 3$이므로

$\ln(e^{3a}+2)=\ln 3$, $e^{3a}+2=3$

$e^{3a}=1$ $\therefore a=0$

$\therefore g(\ln 3)=0$

이때 $f'(x)=\frac{3e^{3x}}{e^{3x}+2}$이므로

$g'(\ln 3)=\frac{1}{f'(0)}=1$

## 20 답 ①

$f(x)+f(2-x)=6$의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)+f(2)=6$, $8+f(2)=6$ $\therefore f(2)=-2$

$\therefore g(-2)=2$

$\therefore f'(2)=\frac{1}{g'(-2)}=-2$

$f(x)+f(2-x)=6$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)-f'(2-x)=0$

양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)-f'(2)=0$, $f'(0)+2=0$

$\therefore f'(0)=-2$

# 중단원 기출 문제 2회

## 1 답 2

$f'(x)=\frac{3(x^2+1)-(3x-4)\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-3x^2+8x+3}{(x^2+1)^2}$

$\therefore f'(1)=\frac{8}{4}=2$

## 2 답 ④

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$

$=f'(1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}f'(1)$

즉, $\frac{1}{2}f'(1)=-1$이므로 $f'(1)=-2$

$f'(x)=\frac{(2ax-3)(x-2)-(ax^2-3x+2)}{(x-2)^2}$

$=\frac{ax^2-4ax+4}{(x-2)^2}$

$f'(1)=-2$에서

$-3a+4=-2$ $\therefore a=2$

## 3 답 ④

$g'(x)=\frac{\{f'(x)\cos x-f(x)\sin x\}\times e^x-f(x)\cos x\times e^x}{e^{2x}}$

$=\frac{f'(x)\cos x-f(x)(\sin x+\cos x)}{e^x}$

$\therefore g'(\pi)=\frac{-f'(\pi)+f(\pi)}{e^\pi}$ ····· ㉠

한편 $g'(\pi)=-e^\pi g(\pi)$이고, $g(\pi)=\frac{-f(\pi)}{e^\pi}$이므로

$g'(\pi)=-e^\pi\times\frac{-f(\pi)}{e^\pi}=f(\pi)$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{-f'(\pi)+f(\pi)}{e^\pi}=f(\pi)$, $-f'(\pi)+f(\pi)=e^\pi f(\pi)$

$\therefore f'(\pi)=(1-e^\pi)f(\pi)$

$\therefore k=1-e^\pi$

## 4 답 −15

$f(x)=\frac{x^4+x^3+x^2+x+1}{x^5}$

$=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}$

$=x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+x^{-4}+x^{-5}$

이므로

$f'(x)=-x^{-2}-2x^{-3}-3x^{-4}-4x^{-5}-5x^{-6}$

$=-\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^4}-\frac{4}{x^5}-\frac{5}{x^6}$

$\therefore f'(1)=-1-2-3-4-5=-15$

## 5 답 ③

$f'(x)=\sec x\tan x+\sec^2 x=\sec x(\tan x+\sec x)$

$=\frac{1}{\cos x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{1}{\cos x}\right)=\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}$

$=\frac{1+\sin x}{1-\sin^2 x}=\frac{1+\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$

$=\frac{1}{1-\sin x}$

$f'(\alpha)=5$에서 $\frac{1}{1-\sin\alpha}=5$

$5-5\sin\alpha=1$ $\therefore \sin\alpha=\frac{4}{5}$

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$

$\therefore \sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{5}{3}$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}$

$\therefore f(\alpha)=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}=3$

## 6 답 15

$\lim_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x}=3$에서 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}\{f(x)+1\}=0 \quad \therefore f(0)=-1$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{f(x)+1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=3$

또 $\lim_{x\to-1}\frac{g(x)-1}{x+1}=5$에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to-1}\{g(x)-1\}=0 \quad \therefore g(-1)=1$

$\therefore \lim_{x\to-1}\frac{g(x)-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=g'(-1)=5$

이때 $y=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서 $y'=g'(f(x))f'(x)$이므로 $x=0$에서의 미분계수는

$g'(f(0))f'(0)=g'(-1)f'(0)=5\times3=15$

## 7 답 5

$(g\circ f)'(x)=\{g(f(x))\}'=g'(f(x))f'(x)$이므로

$(g\circ f)'(1)=g'(f(1))f'(1)=g'(2)f'(1)$

이때 $g'(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}$이므로

$g'(2)=1$

$(g\circ f)'(1)=\frac{3}{2}$에서 $f'(1)=\frac{3}{2}$

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$ ($a$, $b$는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=a+b \quad \therefore a+b=2 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)=a \quad \therefore a=\frac{3}{2}$

이를 ㉡에 대입하면 $\frac{3}{2}+b=2 \quad \therefore b=\frac{1}{2}$

따라서 $R(x)=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}$이므로

$R(3)=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=5$

## 8 답 7

$f'(x)=(x-a)^2+2x(x-a)$

$x=2$에서의 미분계수가 5이므로 $f'(2)=5$에서

$(2-a)^2+4(2-a)=5$

$a^2-8a+7=0$, $(a-1)(a-7)=0$

$\therefore a=7$ ($\because a>2$)

## 9 답 $2e$

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))$에서

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=f'\left(g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)g'\left(\frac{\pi}{4}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)g'\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $f'(x)=2e^{2x}$, $g'(x)=2\sin x\cos x$이므로 구하는 값은 ㉠에서

$h'\left(\frac{\pi}{4}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)g'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$=2e\times1=2e$

## 10 답 $-\frac{2}{e}$

$f(1)=0$이므로

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=e^2$

$f'(x)=e^{3x+a}+3(x-1)e^{3x+a}=(3x-2)e^{3x+a}$

$f'(1)=e^2$에서

$e^{3+a}=e^2$, $3+a=2 \quad \therefore a=-1$

따라서 $f'(x)=(3x-2)e^{3x-1}$이므로

$f'(0)=-2e^{-1}=-\frac{2}{e}$

## 11 답 ①

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2+\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times2$

$=2f'(1)+2f'(1)=4f'(1) \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $f'(x)=-\frac{\frac{2}{2x-1}}{(2+\ln|2x-1|)^2}$이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$4f'(1)=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$

## 12 답 ⑤

주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|f(x)|=2\ln|x^3+2|-\ln|2x+1|-4\ln|3x+2|$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{6x^2}{x^3+2}-\frac{2}{2x+1}-\frac{12}{3x+2}$

$\therefore \frac{f'(-1)}{f(-1)}=6+2+12=20$

## 13 답 ①

$f(x)=(x+2)\sqrt{2x^2+1}=(x+2)(2x^2+1)^{\frac{1}{2}}$이므로

$f'(x)=(2x^2+1)^{\frac{1}{2}}+(x+2)\left\{\frac{1}{2}(2x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\times 4x\right\}$

$=\sqrt{2x^2+1}+\frac{2x(x+2)}{\sqrt{2x^2+1}}=\frac{4x^2+4x+1}{\sqrt{2x^2+1}}$

$\therefore f'(-1)=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

## 14 답 $\frac{2}{3}$

$\frac{dx}{dt}=6t$, $\frac{dy}{dt}=2\sin 2t$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\sin 2t}{6t}=\frac{\sin 2t}{3t}$ (단, $t\neq 0$)

$\therefore \lim_{t\to 0}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{3t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{2t}\times\frac{2}{3}$

$=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

## 15 답 ②

$\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta+\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\sec\theta\tan\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$

$=\frac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^2\theta+\cos\theta}$

이때 $\sec\theta=2$에서 $\theta=\frac{\pi}{3}$ $\left(\because 0\le\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 점 $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, 2\right)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{2\sqrt{3}}{4+\frac{1}{2}}=\frac{4\sqrt{3}}{9}$

## 16 답 4

점 $(a, 1)$이 곡선 $x\ln y+\frac{x^2}{y}=4$ 위의 점이므로

$a^2=4$ $\therefore a=2$ $(\because a>0)$

주어진 식의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$\ln y+\frac{x}{y}\times\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{y}-\frac{x^2}{y^2}\times\frac{dy}{dx}=0$

$\left(\frac{x}{y}-\frac{x^2}{y^2}\right)\frac{dy}{dx}=-\ln y-\frac{2x}{y}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{\ln y+\frac{2x}{y}}{\frac{x}{y}-\frac{x^2}{y^2}}$ $\left(\text{단, } \frac{x}{y}-\frac{x^2}{y^2}\neq 0\right)$

따라서 점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는

$b=-\frac{4}{2-4}=2$

$\therefore ab=2\times 2=4$

## 17 답 ④

주어진 식의 양변을 $y$에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=3y^2+4y+4$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{3y^2+4y+4}$

주어진 식에 $x=4$를 대입하면

$4=y^3+2y^2+4y+7$, $y^3+2y^2+4y+3=0$

$(y+1)(y^2+y+3)=0$

$\therefore y=-1$ $(\because y^2+y+3>0)$

따라서 $x=4$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\frac{1}{3-4+4}=\frac{1}{3}$

## 18 답 ①

$(g\circ f)(x)=x$이므로 $g(x)=f^{-1}(x)$

$g(2)=a$라 하면 $f(a)=2$이므로

$4\sin^2 a=2$, $\sin^2 a=\frac{1}{2}$

$\sin a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $\sin a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore a=\frac{\pi}{4}$ $\left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$ $\therefore g(2)=\frac{\pi}{4}$

이때 $f'(x)=8\sin x\cos x$이므로

$g'(2)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{1}{8\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{4}$

## 19 답 4

$f(3)=5$이므로 $g(5)=3$

$\therefore g'(5)=\frac{1}{f'(3)}=\frac{4}{3}$

$\therefore g(5)g'(5)=3\times\frac{4}{3}=4$

## 20 답 $-\frac{2}{3\ln 2}$

$\frac{9-2x}{4}=\frac{3}{4}$에서 $9-2x=3$ $\therefore x=3$

$g\left(\frac{9-2x}{4}\right)=f^{-1}(x)$의 양변에 $x=3$을 대입하면

$g\left(\frac{3}{4}\right)=f^{-1}(3)=0$

$g\left(\frac{9-2x}{4}\right)=f^{-1}(x)$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$g'\left(\frac{9-2x}{4}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

양변에 $x=3$을 대입하면

$-\frac{1}{2}g'\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{f'(f^{-1}(3))}=\frac{1}{f'(0)}$

$f'(x)=2x\times 2^x+(x^2+3)2^x\ln 2=2^{x+1}x+(x^2+3)2^x\ln 2$

$f'(0)=3\ln 2$이므로 $-\frac{1}{2}g'\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{3\ln 2}$

$\therefore g'\left(\frac{3}{4}\right)=-\frac{2}{3\ln 2}$

# 06 / 도함수의 활용(1)

32~37쪽

## 중단원 기출 문제 1회

**1** 답 ①

$f(x)=x^2e^{1-x}+1$이라 하면

$f'(x)=2xe^{1-x}-x^2e^{1-x}=x(2-x)e^{1-x}$

점 (1, 2)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 접선의 방정식은

$y-2=x-1$ $\therefore y=x+1$

따라서 $a=1$, $b=1$이므로

$a+b=2$

**2** 답 $\frac{1}{\ln 5}$

$f(x)=5^x$이라 하면 $f'(x)=5^x\ln 5$

점 P의 좌표를 $(t, 5^t)$이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=5^t\ln 5$이므로 접선의 방정식은

$y-5^t=5^t\ln 5(x-t)$

$\therefore y=5^t\ln 5\times x-5^t\ln 5\times t+5^t$

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(t-\frac{1}{\ln 5}, 0\right)$, 점 H의 좌표는 $(t, 0)$이므로

선분 QH의 길이는

$\left|t-\left(t-\frac{1}{\ln 5}\right)\right|=\frac{1}{\ln 5}$

**3** 답 ④

$f(x)=\ln(x+2)$라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x+2}$

접점의 좌표를 $(t, \ln(t+2))$라 하면 접선의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로

$f'(t)=\frac{1}{2}$에서

$\frac{1}{t+2}=\frac{1}{2}$ $\therefore t=0$

즉, 접점의 좌표는 $(0, \ln 2)$이므로 접선의 방정식은

$y-\ln 2=\frac{1}{2}x$ $\therefore y=\frac{1}{2}x+\ln 2$

따라서 이 직선의 $x$절편은 $-2\ln 2$, $y$절편은 $\ln 2$이므로 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\ln 2\times\ln 2=(\ln 2)^2$

**4** 답 ③

$f(x)=2\tan x$라 하면 $f'(x)=2\sec^2 x$

접점의 좌표를 $(t, 2\tan t)$라 하면 직선 $y=-\frac{1}{4}x-3$에 수직인 직선의 기울기는 4이므로 $f'(t)=4$에서

$2\sec^2 t=4$, $\sec t=\sqrt{2}$ ($\because \sec t>0$)

$\therefore t=-\frac{\pi}{4}$ 또는 $t=\frac{\pi}{4}$ $\left(\because -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)$

$t=-\frac{\pi}{4}$일 때의 접점의 좌표는 $\left(-\frac{\pi}{4}, -2\right)$이므로 접선의 방정식은

$y+2=4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ $\therefore y=4x+\pi-2$

$\therefore$ P$(0, \pi-2)$

$t=\frac{\pi}{4}$일 때의 접점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$이므로 접선의 방정식은

$y-2=4\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ $\therefore y=4x-\pi+2$

$\therefore$ Q$(0, -\pi+2)$

따라서 선분 PQ의 길이는

$\pi-2-(-\pi+2)=2\pi-4$

**5** 답 ⑤

$f(x)=2x\ln x$라 하면

$f'(x)=2\ln x+2x\times\frac{1}{x}=2\ln x+2$

접점의 좌표를 $(t, 2t\ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=2\ln t+2$이므로 접선의 방정식은

$y-2t\ln t=(2\ln t+2)(x-t)$ …… ㉠

직선 ㉠이 점 $(0, -2)$를 지나므로

$-2-2t\ln t=(2\ln t+2)\times(-t)$

$2=2t$ $\therefore t=1$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=2x-2$

이 직선이 점 $(a, 4)$를 지나므로

$4=2a-2$ $\therefore a=3$

**6** 답 $\frac{4}{5}$

$f(x)=\frac{x}{x-1}$라 하면

$f'(x)=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{t}{t-1}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-\frac{1}{(t-1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{t}{t-1}=-\frac{1}{(t-1)^2}(x-t)$

이 직선이 점 $(4, 0)$을 지나므로

$-\frac{t}{t-1}=-\frac{1}{(t-1)^2}(4-t)$

$t(t-1)=4-t$, $t^2-4=0$

$(t+2)(t-2)=0$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

$t=-2$에서의 접선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\alpha$라 하면

$\tan\alpha=f'(-2)=-\frac{1}{9}$

$t=2$에서의 접선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\beta$라 하면

$\tan\beta=f'(2)=-1$

$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{-\frac{1}{9}-(-1)}{1+\left(-\frac{1}{9}\right)\times(-1)}\right|=\frac{4}{5}$

## 7 답 35

$f(x)=3xe^{-x}$이라 하면

$f'(x)=3e^{-x}-3xe^{-x}$

$=3(1-x)e^{-x}$

접점의 좌표를 $(t,\ 3te^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=3(1-t)e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$y-3te^{-t}=3(1-t)e^{-t}(x-t)$

이 직선이 점 $(k,\ 0)$을 지나므로

$-3te^{-t}=3(1-t)e^{-t}(k-t)$

$\therefore\ t^2-kt+k=0\ (\because\ e^{-t}>0)$ ····· ㉠

점 $(k,\ 0)$에서 곡선 $y=3xe^{-x}$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$D=k^2-4k>0,\ k(k-4)>0$

$\therefore\ k<0$ 또는 $k>4$

이때 $k$가 9 이하의 자연수이므로 $4<k\le 9$에서 모든 $k$의 값의 합은

$5+6+7+8+9=35$

## 8 답 3

$f(x)=3\cos^2 x-\frac{3}{4},\ g(x)=a(\sin x+1)$이라 하면

$f'(x)=-6\cos x\sin x,\ g'(x)=a\cos x$

두 곡선의 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $3\cos^2 t-\frac{3}{4}=a(\sin t+1)$

$12\cos^2 t-3=4a(\sin t+1)$

$12(1-\sin^2 t)-3=4a(\sin t+1)$

$12\sin^2 t+4a\sin t+4a-9=0$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $-6\cos t\sin t=a\cos t$

$\cos t(a+6\sin t)=0$

$\therefore\ \cos t=0$ 또는 $\sin t=-\frac{a}{6}$

(i) $\cos t=0$일 때,

$t=\frac{\pi}{2}$ 또는 $t=\frac{3}{2}\pi\ (\because\ 0<t<2\pi)$

$t=\frac{\pi}{2}$일 때, ㉠에서 $12+4a+4a-9=0$

$8a=-3$ $\therefore\ a=-\frac{3}{8}$

$t=\frac{3}{2}\pi$일 때, ㉠에서 $12-4a+4a-9=0$

$3=0$이므로 모순이다.

(ii) $\sin t=-\frac{a}{6}$일 때,

㉠에서 $\frac{a^2}{3}-\frac{2a^2}{3}+4a-9=0$

$a^2-12a+27=0,\ (a-3)(a-9)=0$

$\therefore\ a=3$ 또는 $a=9$

$a=3$이면 $\sin t=-\frac{1}{2}$이므로 성립한다.

$a=9$이면 $\sin t=-\frac{3}{2}$이므로 성립하지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 양수 $a$의 값은 3이다.

## 9 답 ③

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}},\ \frac{dy}{dt}=2t-6$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-6}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=4\sqrt{t}(t-3)$

$t=4$일 때 $x=3,\ y=-8,\ \frac{dy}{dx}=8$이므로 접선의 방정식은

$y+8=8(x-3)$ $\therefore\ y=8x-32$

이 직선이 점 $(a,\ 8)$을 지나므로

$8=8a-32$ $\therefore\ a=5$

## 10 답 3

$x^2+axy+3y^2=b$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$2x+ay+ax\frac{dy}{dx}+6y\frac{dy}{dx}=0$

$(ax+6y)\frac{dy}{dx}=-2x-ay$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+ay}{ax+6y}$ (단, $ax+6y\ne 0$)

점 $(-1,\ 0)$에서의 접선의 기울기가 $-\frac{2}{3}$이므로

$-\frac{2}{a}=-\frac{2}{3}$ $\therefore\ a=3$

점 $(-1,\ 0)$은 곡선 $x^2+3xy+3y^2=b$ 위의 점이므로

$b=1$

$\therefore\ ab=3\times 1=3$

## 11 답 6

$g(2)=k$라 하면 $f(k)=2$이므로

$k^3+2k-1=2,\ k^3+2k-3=0$

$(k-1)(k^2+k+3)=0$

$\therefore\ k=1\ (\because\ k^2+k+3>0)$

이때 $f'(x)=3x^2+2$이므로

$f'(1)=5$

$\therefore\ g'(2)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{5}$

곡선 $y=g(x)$ 위의 $x=2$인 점, 즉 점 $(2,\ 1)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 $-5$이므로 직선의 방정식은

$y-1=-5(x-2)$ $\therefore\ y=-5x+11$

따라서 $a=-5,\ b=11$이므로

$a+b=6$

## 12 답 ⑤

$\lim_{h\to 0}\frac{f'(e+h)-f'(e-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(e+h)-f'(e)+f'(e)-f'(e-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f'(e+h)-f'(e)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f'(e-h)-f'(e)}{-h}$

$=f''(e)+f''(e)=2f''(e)$ ····· ㉠

이때

$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x+x$,

$f''(x)=2\ln x+2x\times\frac{1}{x}+1=2\ln x+3$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$2f''(e)=2\times5=10$

## 13 답 ①

$f'(x)=2xe^x+(x^2-8)e^x=(x^2+2x-8)e^x$

$=(x+4)(x-2)e^x$

$f'(x)=0$에서 $(x+4)(x-2)=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=-4$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-4$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | ↗ | $\frac{8}{e^4}$ | ↘ | $-4e^2$ | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 $[-4,\ 2]$이므로

$a=-4,\ b=2$

$\therefore ab=-8$

## 14 답 4

$f'(x)=-x+4-\frac{a}{x}=-\frac{x^2-4x+a}{x}$

$x_1<x_2$인 임의의 두 양의 실수 $x_1$, $x_2$에 대하여 $f(x_1)>f(x_2)$를 만족시키려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 $x$에서 $f'(x)\le0$이어야 하므로

$-\frac{x^2-4x+a}{x}\le0$

$\therefore x^2-4x+a\ge0$ ($\because x>0$)

이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=4-a\le0$ $\therefore a\ge4$

따라서 $a$의 최솟값은 4이다.

## 15 답 ④

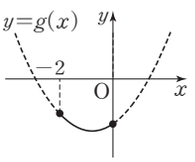
$f'(x)=-2xe^{2x}+2(a-x^2)e^{2x}$

$=-2(x^2+x-a)e^{2x}$

함수 $f(x)$가 구간 $[-2,\ 0]$에서 증가하려면 $-2\le x\le0$에서 $f'(x)\ge0$이어야 하므로 $-2\le x\le0$에서

$x^2+x-a\le0$ ($\because e^{2x}>0$)

$g(x)=x^2+x-a$라 하면 $-2\le x\le0$에서 $g(x)\le0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서




$g(-2)\le0,\ g(0)\le0$

$g(-2)\le0$에서 $2-a\le0$

$\therefore a\ge2$ ····· ㉠

$g(0)\le0$에서 $-a\le0$ $\therefore a\ge0$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $a\ge2$

따라서 $a$의 최솟값은 2이다.

## 16 답 ④

$\frac{dx}{dt}=2-\sqrt{3}\cos t$, $\frac{dy}{dt}=1-2\sin t$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-2\sin t}{2-\sqrt{3}\cos t}$

$\frac{dy}{dx}=0$에서 $\frac{1-2\sin t}{2-\sqrt{3}\cos t}=0$

$1-2\sin t=0$, $\sin t=\frac{1}{2}$ $\therefore t=\frac{\pi}{6}$ $\left(\because 0<t<\frac{\pi}{2}\right)$

$0<t<\frac{\pi}{6}$일 때 $\frac{dy}{dx}>0$, $\frac{\pi}{6}<t<\frac{\pi}{2}$일 때 $\frac{dy}{dx}<0$이므로 주어진 함수는 $t=\frac{\pi}{6}$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 구하는 극댓값은 $\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

## 17 답 1

$f(x)=n\ln x+\frac{n+1}{x}-n$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{n}{x}-\frac{n+1}{x^2}=\frac{nx-n-1}{x^2}$

$f'(x)=0$에서

$nx-n-1=0$ $\therefore x=\frac{n+1}{n}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{n+1}{n}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | ↘ | $n\ln\frac{n+1}{n}$ 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$a_n=f\left(\frac{n+1}{n}\right)=n\ln\frac{n+1}{n}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}n\ln\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1$

## 18 답 $\frac{7}{2}$

$f'(x)=a+\frac{1}{2\sqrt{x+b}}$

$x=-2$에서 극댓값 2를 가지므로

$f'(-2)=0$, $f(-2)=2$

$f'(-2)=0$에서 $a+\frac{1}{2\sqrt{-2+b}}=0$ ····· ㉠

$f(-2)=2$에서 $-2a+\sqrt{-2+b}=2$

$\therefore \sqrt{-2+b}=2a+2$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$a+\frac{1}{4a+4}=0$, $4a^2+4a+1=0$

$(2a+1)^2=0$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$

이를 ㉡에 대입하면

$\sqrt{-2+b}=1$, $-2+b=1$ $\therefore b=3$

$\therefore b-a=3-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}$

**19** 답 ③

$f'(x)=a-\frac{8x}{x^2+1}=\frac{ax^2-8x+a}{x^2+1}$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $ax^2-8x+a=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=16-a^2\le 0,\ (a+4)(a-4)\ge 0$

$\therefore\ a\ge 4\ (\because\ a>0)$

따라서 양수 $a$의 최솟값은 4이다.

**20** 답 ④

$f'(x)=(3x^2-6x+3)e^x+(x^3-3x^2+3x+a)e^x$

$=(x^3-3x+a+3)e^x$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $x^3-3x+a+3=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$g(x)=x^3-3x+a+3$이라 하면

$g'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$g'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$g(x)$는 $x=-1$, $x=1$에서 극값을 가지므로

$g(-1)g(1)<0,\ (a+5)(a+1)<0$

$\therefore\ -5<a<-1$

따라서 모든 정수 $a$의 값의 합은

$-4+(-3)+(-2)=-9$

## 중단원 기출 문제 2회

**1** 답 $-1$

$f(x)=\ln(x-2)+1$이라 하면 $f'(x)=\frac{1}{x-2}$

점 $(3,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=1$이므로 접선의 방정식은

$y-1=x-3\qquad\therefore\ y=x-2$

이 직선이 점 $(a,\ -3)$을 지나므로

$-3=a-2\qquad\therefore\ a=-1$

**2** 답 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$f(x)=\frac{2x+6}{x+1}$이라 하면

$f'(x)=\frac{2(x+1)-(2x+6)}{(x+1)^2}=-\frac{4}{(x+1)^2}$

점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$이므로 접선의 방정식은

$y-4=-(x-1)\qquad\therefore\ x+y-5=0$

따라서 이 직선과 원점 사이의 거리는

$\frac{|-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$

**3** 답 4

$f(x)=ke^{x-1}$이라 하면 $f'(x)=ke^{x-1}$

접점의 $y$좌표가 $\alpha$이고 직선 $y=2x$가 이 접점을 지나므로 접점의 좌표는 $\left(\frac{\alpha}{2},\ \alpha\right)$이다.

점 $\left(\frac{\alpha}{2},\ \alpha\right)$가 곡선 $y=ke^{x-1}$ 위의 점이므로 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\alpha$에서

$ke^{\frac{\alpha}{2}-1}=\alpha\qquad\cdots\cdots$ ㉠

또 점 $\left(\frac{\alpha}{2},\ \alpha\right)$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'\left(\frac{\alpha}{2}\right)=2$에서

$ke^{\frac{\alpha}{2}-1}=2\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $\alpha=2$, $k=2$

$\therefore\ k+\alpha=4$

**4** 답 ③

$f(x)=x-\ln x$라 하면 $f'(x)=1-\frac{1}{x}$

점 $(0,\ 1+\ln 3)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t-\ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=1-\frac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은

$y-(t-\ln t)=\left(1-\frac{1}{t}\right)(x-t)$

이 직선이 점 $(0,\ 1+\ln 3)$을 지나므로

$1+\ln 3-(t-\ln t)=\left(1-\frac{1}{t}\right)\times(-t)$

$\ln t=-\ln 3\qquad\therefore\ t=\frac{1}{3}$

즉, 점 $(0,\ 1+\ln 3)$에서 그은 접선의 기울기는 $f'\left(\frac{1}{3}\right)=-2$이므로

점 $(a,\ 1)$에서 그은 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다.

점 $(a,\ 1)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(s,\ s-\ln s)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기 $f'(s)=\frac{1}{2}$에서

$1-\frac{1}{s}=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ s=2$

즉, 접점의 좌표는 $(2,\ 2-\ln 2)$이므로 접선의 방정식은

$y-(2-\ln 2)=\frac{1}{2}(x-2)\qquad\therefore\ y=\frac{1}{2}x+1-\ln 2$

이 직선이 점 $(a,\ 1)$을 지나므로

$1=\frac{1}{2}a+1-\ln 2$

$\frac{1}{2}a=\ln 2\qquad\therefore\ a=2\ln 2$

**5** 답 ②

$f(x)=\frac{1}{2x+1}$이라 하면 $f'(x)=-\frac{2}{(2x+1)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{1}{2t+1}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-\frac{2}{(2t+1)^2}$이므로 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{2t+1}=-\frac{2}{(2t+1)^2}(x-t)\qquad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 점 $(-2, 0)$을 지나므로

$-\frac{1}{2t+1}=-\frac{2}{(2t+1)^2}(-2-t)$

$2t+1=-2t-4,\ 4t=-5 \qquad \therefore\ t=-\frac{5}{4}$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y+\frac{2}{3}=-\frac{8}{9}\left(x+\frac{5}{4}\right) \qquad \therefore\ y=-\frac{8}{9}x-\frac{16}{9}$

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(0,\ -\frac{16}{9}\right)$이므로 삼각형 POQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times\frac{16}{9}=\frac{16}{9}$

## 6 답 3

$f(x)=(2x+1)e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=2e^{-x}-(2x+1)e^{-x}=(1-2x)e^{-x}$

접점의 좌표를 $(t,\ (2t+1)e^{-t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=(1-2t)e^{-t}$이므로 접선의 방정식은

$y-(2t+1)e^{-t}=(1-2t)e^{-t}(x-t)$

이 직선이 점 $(a,\ 0)$을 지나므로

$-(2t+1)e^{-t}=(1-2t)e^{-t}(a-t)$

$2t+1=-2t^2+(1+2a)t-a\ (\because\ e^{-t}>0)$

$\therefore\ 2t^2+(1-2a)t+a+1=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=(2x+1)e^{-x}$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 ㉠의 판별식을 $D$라 하면

$D=(1-2a)^2-4\times 2(a+1)=0$

$\therefore\ 4a^2-12a-7=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 $a$의 값의 합은

$\frac{12}{4}=3$

## 7 답 ③

$f(x)=e^{x+1},\ g(x)=\sqrt{ax+b}$라 하면

$f'(x)=e^{x+1},\ g'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$

두 곡선이 $x=-1$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(-1)=g(-1)$에서 $1=\sqrt{-a+b} \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(-1)=g'(-1)$에서 $1=\frac{a}{2\sqrt{-a+b}} \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$1=\frac{a}{2} \qquad \therefore\ a=2$

이를 ㉠에 대입하면

$1=\sqrt{-2+b},\ 1=-2+b \qquad \therefore\ b=3$

$\therefore\ a+b=2+3=5$

## 8 답 ①

$\frac{dx}{dt}=24\sin^2 t\cos t,\ \frac{dy}{dt}=-24\cos^2 t\sin t$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-24\cos^2 t\sin t}{24\sin^2 t\cos t}=-\frac{\cos t}{\sin t}$

곡선 위의 임의의 점 $(8\sin^3\alpha,\ 8\cos^3\alpha)$에서의 접선의 기울기는

$-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$이므로 접선의 방정식은

$y-8\cos^3\alpha=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}(x-8\sin^3\alpha)$

$y=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}x+8\cos\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$\therefore\ y=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}x+8\cos\alpha$

따라서 점 P의 좌표는 $(8\sin\alpha,\ 0)$, 점 Q의 좌표는 $(0,\ 8\cos\alpha)$이므로 선분 PQ의 길이는

$\sqrt{(-8\sin\alpha)^2+(8\cos\alpha)^2}=\sqrt{64(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}=8$

## 9 답 ⑤

$y^3=\ln(5-x^2)+3xy+5$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$3y^2\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{5-x^2}+3y+3x\frac{dy}{dx}$

$(3y^2-3x)\frac{dy}{dx}=\frac{-2x+15y-3x^2y}{5-x^2}$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{-2x+15y-3x^2y}{3(y^2-x)(5-x^2)}$ (단, $y^2\neq x$)

점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{-4-15+12}{-3}=\frac{7}{3}$

즉, 점 $(2,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$y+1=\frac{7}{3}(x-2)$

$\therefore\ y=\frac{7}{3}x-\frac{17}{3}$

따라서 $a=\frac{7}{3},\ b=-\frac{17}{3}$이므로

$a-b=8$

## 10 답 6

$ax^2+by^2=5$의 각 항을 $x$에 대하여 미분하면

$2ax+2by\frac{dy}{dx}=0$

$2by\frac{dy}{dx}=-2ax$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{ax}{by}$ (단, $y\neq 0$)

점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{a}{b}$

즉, 점 $(1,\ -1)$에서의 접선의 방정식은

$y+1=\frac{a}{b}(x-1)$

$\therefore\ y=\frac{a}{b}x-\frac{a}{b}-1$

이 직선이 원 $(x+1)^2+(y+4)^2=9$의 넓이를 이등분하므로 원의 중심 $(-1,\ -4)$를 지난다.

즉, $-4=-\frac{a}{b}-\frac{a}{b}-1$에서

$2a-3b=0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

점 $(1,\ -1)$이 곡선 $ax^2+by^2=5$ 위의 점이므로

$a+b=5 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=3,\ b=2$

$\therefore\ ab=6$

## 11 답 $\frac{\pi}{4}-1$

$g(\sqrt{2})=k$라 하면 $f(k)=\sqrt{2}$이므로

$2\sin k=\sqrt{2}$, $\sin k=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore k=\frac{\pi}{4}\left(\because -\frac{\pi}{2}<k<\frac{\pi}{2}\right)$

이때 $f'(x)=2\cos x$이므로 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

$\therefore g'(\sqrt{2})=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

즉, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\sqrt{2})$ $\therefore y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\pi}{4}-1$

따라서 구하는 $y$절편은 $\frac{\pi}{4}-1$이다.

## 12 답 $\frac{5}{2}$

$\lim_{x\to 1}\frac{f'(f(x))-3}{x-1}=5$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to 1}\{f'(f(x))-3\}=0$ $\therefore f'(f(1))=3$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f'(f(x))-3}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{x-1}$

$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f'(f(x))-f'(f(1))}{f(x)-f(1)}\times\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right\}$

$=f''(f(1))f'(1)$

$=f''(3)\times 2=2f''(3)$

따라서 $2f''(3)=5$이므로 $f''(3)=\frac{5}{2}$

## 13 답 ⑤

$f'(x)=\frac{2\cos x}{\sin x+2}-\cos x=\frac{2\cos x-\sin x\cos x-2\cos x}{\sin x+2}$

$=-\frac{\sin x\cos x}{\sin x+2}=-\frac{\sin 2x}{2(\sin x+2)}$ → $\sin 2x=2\sin x\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\sin 2x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ $(\because 0<x<2\pi)$

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $\frac{\pi}{2}$ | … | $\pi$ | … | $\frac{3}{2}\pi$ | … | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↘ | $2\ln 3-1$ | ↗ | $2\ln 2$ | ↘ | 1 | ↗ | |

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$에서 증가하므로 증가하는 구간에 속하는 $x$의 값은 ⑤이다.

## 14 답 ①

$f'(x)=(2x-a)e^{-x}-(x^2-ax+2)e^{-x}$

$=\{-x^2+(a+2)x-a-2\}e^{-x}$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 $x$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로

$-x^2+(a+2)x-a-2\le 0$ $(\because e^{-x}>0)$

$\therefore x^2-(a+2)x+a+2\ge 0$

이차방정식 $x^2-(a+2)x+a+2=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=(a+2)^2-4(a+2)\le 0$

$a^2-4\le 0$, $(a+2)(a-2)\le 0$

$\therefore -2\le a\le 2$

따라서 정수 $a$는 $-2$, $-1$, 0, 1, 2의 5개이다.

## 15 답 ⑤

$f'(x)=2ax-6+\frac{1}{x}=\frac{2ax^2-6x+1}{x}$

함수 $f(x)$가 구간 $(0, \infty)$에서 증가하려면 $x>0$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$2ax^2-6x+1\ge 0$

즉, $a\ge 0$이어야 하고 이차방정식 $2ax^2-6x+1=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=9-2a\le 0$ $\therefore a\ge\frac{9}{2}$

따라서 $a$의 최솟값은 $\frac{9}{2}$이다.

## 16 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{8-x}$에서 $x-2\ge 0$, $8-x\ge 0$이므로

$2\le x\le 8$

즉, 함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x|2\le x\le 8\}$이다.

ㄴ. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}-\frac{1}{2\sqrt{8-x}}$

$f'(x)=0$에서

$\frac{1}{2\sqrt{x-2}}-\frac{1}{2\sqrt{8-x}}=0$

$\sqrt{8-x}=\sqrt{x-2}$, $8-x=x-2$

$2x=10$ $\therefore x=5$

$2\le x\le 8$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 2 | … | 5 | … | 8 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | ↗ | $2\sqrt{3}$ 극대 | ↘ | |

즉, 함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(5)=2\sqrt{3}$이다.

ㄷ. 구간 $[2, 5]$에서 증가한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 17 답 ⑤

$f'(x)=e^x(\sin x-\cos x)+e^x(\cos x+\sin x)$

$=2e^x\sin x$

$f'(x)=0$에서

$\sin x=0$ $(\because e^x>0)$

$\therefore x=\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \cdots$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $\pi$ | … | $2\pi$ | … | $3\pi$ | … | $4\pi$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ |

즉, 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖는 $x$의 값을 작은 수부터 차례대로 나열하면

$2\pi$, $4\pi$, $6\pi$, $8\pi$, …

따라서 $a_1=2\pi$, $a_2=4\pi$, $a_3=6\pi$, $a_4=8\pi$이므로

$a_1+a_2+a_3+a_4=20\pi$

## 18 답 ④

$$f'(x)=\frac{(8x+2)(x^2+1)-(4x^2+2x+a)\times 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-2x^2+(8-2a)x+2}{(x^2+1)^2}$$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 $b$를 가지므로

$f'(1)=0$, $f(1)=b$

$f'(1)=0$에서 $\frac{8-2a}{4}=0$ $\quad\therefore a=4$

$f(1)=b$에서 $b=\frac{6+a}{2}=5$

$\therefore a+b=4+5=9$

## 19 답 ④

$f(x)=\frac{a}{x}-2x+a\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=-\frac{a}{x^2}-2+\frac{a}{x}=-\frac{2x^2-ax+a}{x^2}$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $2x^2-ax+a=0$이 $x>0$인 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $2x^2-ax+a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$D=a^2-8a>0$, $a(a-8)>0$

$\therefore a<0$ 또는 $a>8$

(ii) (두 근의 합)$=\frac{a}{2}>0$ $\quad\therefore a>0$

(iii) (두 근의 곱)$=\frac{a}{2}>0$ $\quad\therefore a>0$

(i), (ii), (iii)에서 $a>8$

따라서 정수 $a$의 최솟값은 9이다.

## 20 답 ①

$f'(x)=k-4\sin x$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 $x$에서 $f'(x)\le 0$ 또는 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

이때 $-1\le\sin x\le 1$이므로

$-4\le -4\sin x\le 4$

$\therefore k-4\le k-4\sin x\le k+4$

즉, $k-4\le f'(x)\le k+4$에서 $k+4\le 0$ 또는 $k-4\ge 0$이어야 하므로 $k\le -4$ 또는 $k\ge 4$

따라서 $\alpha=-4$, $\beta=4$이므로

$\alpha\beta=-16$

# 07 / 도함수의 활용(2) 38~43쪽

## 중단원 기출 문제 1회

## 1 답 ③

$f(x)=x^2+4\sin x$라 하면

$f'(x)=2x+4\cos x$, $f''(x)=2-4\sin x$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$이어야 하므로

$2-4\sin x<0$, $\sin x>\frac{1}{2}$

$\therefore \frac{\pi}{6}<x<\frac{5}{6}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

따라서 곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록한 구간은 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right)$이다.

## 2 답 ㄴ, ㄷ

임의의 서로 다른 두 실수 $a$, $b$에 대하여

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{f(a)+f(b)}{2}$를 만족시키려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로 $f''(x)>0$이어야 한다.

ㄱ. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, $f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$이므로 $x>0$에서 $f''(x)<0$

ㄴ. $f'(x)=2x-3$, $f''(x)=2$이므로 모든 실수 $x$에서 $f''(x)>0$

ㄷ. $f'(x)=-e^{-x}$, $f''(x)=e^{-x}$이므로 모든 실수 $x$에서 $f''(x)>0$

ㄹ. $f'(x)=\frac{1}{x\ln 2}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2\ln 2}$이므로 $x>0$에서 $f''(x)<0$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

## 3 답 2

$f(x)=x^4-6x^2+3x$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x+3$

$f''(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$

$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x<-1$, $x>1$에서 $f''(x)>0$

$-1<x<1$에서 $f''(x)<0$

따라서 $x=-1$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 2이다.

## 4 답 $\frac{\sqrt{37}}{3}\pi$

$f'(x)=-12\sin 3x+6$, $f''(x)=-36\cos 3x$

$f''(x)=0$에서 $\cos 3x=0$

$0<x<\frac{2}{3}\pi$에서 $0<3x<2\pi$이므로

$3x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $3x=\frac{3}{2}\pi$

$\therefore x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

$0<x<\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}<x<\frac{2}{3}\pi$에서 $f''(x)<0$

$\frac{\pi}{6}<x<\frac{\pi}{2}$에서 $f''(x)>0$

즉, $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 두 변곡점 A, B의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{6}, \pi\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 3\pi\right)$이다.

$\therefore \overline{AB}=\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)^2+(3\pi-\pi)^2}=\frac{\sqrt{37}}{3}\pi$

## 5 답 18

$f'(x)=2x+a+\frac{b}{x}$, $f''(x)=2-\frac{b}{x^2}$

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 극값을 가지므로 $f'(4)=0$에서

$8+a+\frac{b}{4}=0$ $\therefore 4a+b=-32$ …… ㉠

또 변곡점의 $x$좌표가 2이므로 $f''(2)=0$에서

$2-\frac{b}{4}=0$ $\therefore b=8$

이를 ㉠에 대입하면 $4a+8=-32$ $\therefore a=-10$

$\therefore b-a=8-(-10)=18$

## 6 답 ⑤

$f'(x)$, $f''(x)$의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | … | $a$ | … | 0 | … | $b$ | … | $c$ | … | $d$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | − | − | − | 0 | + | + | + | 0 | + |
| $f''(x)$ | + | 0 | − | 0 | + | + | + | 0 | − | 0 | + |

ㄱ. $x=b$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 $x$의 값은 1개이다.

ㄴ. $x=a$, $x=0$, $x=c$, $x=d$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 4개이다.

ㄷ. 구간 $(0, c)$에서 $f''(x)>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

## 7 답 ④

$f(x)=\frac{\ln x}{x}$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\times x^2-(1-\ln x)\times 2x}{x^4}$

$=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $1-\ln x=0$

$\ln x=1$ $\therefore x=e$

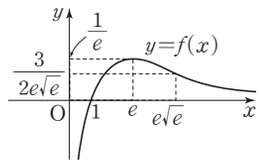
$f''(x)=0$에서 $2\ln x-3=0$

$\ln x=\frac{3}{2}$ $\therefore x=e\sqrt{e}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $e$ | … | $e\sqrt{e}$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | − | − |
| $f''(x)$ | | − | − | − | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{1}{e}$ 극대 | ↘ | $\frac{3}{2e\sqrt{e}}$ 변곡점 | ↘ |

이때 $f(1)=0$, $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




① 함수 $y=f(x)$의 극댓값은 $f(e)=\frac{1}{e}$이다.

③ 함수 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 점 $\left(e\sqrt{e}, \frac{3}{2e\sqrt{e}}\right)$의 1개이다.

④ 구간 $(0, e\sqrt{e})$에서 $f''(x)<0$이고 구간 $(e\sqrt{e}, \infty)$에서 $f''(x)>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 구간 $(0, e\sqrt{e})$에서 위로 볼록하고 구간 $(e\sqrt{e}, \infty)$에서 아래로 볼록하다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

## 8 답 ③

$f(x)=x+\sqrt{1-x^2}$에서 $0<x\le 1$이고

$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $1-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0$, $\sqrt{1-x^2}=x$

$1-x^2=x^2$, $x^2=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because 0<x\le 1$)

$0<x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | … | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | ↗ | $\sqrt{2}$ 극대 | ↘ | 1 |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 최댓값 $\sqrt{2}$를 가지므로

$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $M=\sqrt{2}$

$\therefore aM=1$

## 9 답 21

$f'(x)=\frac{n}{\sqrt{x}}-1$

$f'(x)=0$에서 $\frac{n}{\sqrt{x}}-1=0$

$\sqrt{x}=n$ $\therefore x=n^2$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $n^2$ | … |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − |
| $f(x)$ | | ↗ | $n^2$ 극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=n^2$에서 최댓값 $n^2$을 가지므로

$g(n)=n^2$

$\therefore \sum_{n=1}^{6}\frac{g(n)}{n}=\sum_{n=1}^{6}\frac{n^2}{n}=\sum_{n=1}^{6}n=\frac{6\times 7}{2}=21$

## 10 답 ②

$f'(x)=e^x+(x-1)e^x=xe^x$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because e^x>0$)

$-1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\frac{2}{e}+a$ | ↘ | $-1+a$ 극소 | ↗ | $e^2+a$ |

함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)=e^2+a$, 최솟값은 $f(0)=-1+a$이므로

$M=e^2+a$, $m=-1+a$

따라서 $M+m=e^2+3$에서

$(e^2+a)+(-1+a)=e^2+3$

$2a-1=3 \quad \therefore a=2$

## 11 답 $\frac{2}{e^2}$

$f(x)=-\ln x$라 하면

$f'(x)=-\frac{1}{x}$

점 $\mathrm{P}(t, -\ln t)$에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-\frac{1}{t}$이므로 접선의 방정식은

$y+\ln t=-\frac{1}{t}(x-t) \quad \therefore y=-\frac{1}{t}x+1-\ln t$

$\mathrm{A}(t, 0)$, $\mathrm{B}(t-t\ln t, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=(t-t\ln t)-t=-t\ln t$

삼각형 PAB의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{1}{2}\times(-t\ln t)\times(-\ln t)=\frac{t}{2}(\ln t)^2$

$S'(t)=\frac{1}{2}(\ln t)^2+\frac{t}{2}\times 2\ln t\times\frac{1}{t}=\ln t\left(\frac{1}{2}\ln t+1\right)$

$S'(t)=0$에서 $\ln t=0$ 또는 $\frac{1}{2}\ln t+1=0$

$\ln t=0$ 또는 $\ln t=-2$

$\therefore t=\frac{1}{e^2}$ ($\because 0<t<1$)

$0<t<1$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{e^2}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $S(t)$ | | ↗ | $\frac{2}{e^2}$ 극대 | ↘ | |

따라서 삼각형 PAB의 넓이 $S(t)$의 최댓값은 $S\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{2}{e^2}$이다.

## 12 답 $k<\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$ 또는 $k>-\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$

$f(x)=\tan x-4x$라 하면

$f'(x)=\sec^2 x-4$

$f'(x)=0$에서 $\sec^2 x-4=0$, $\cos^2 x=\frac{1}{4}$

$\cos x=-\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=-\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$ $\left(\because -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

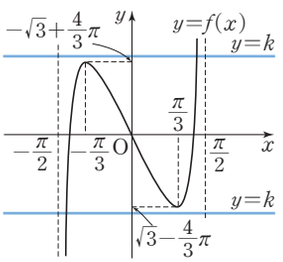
$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $-\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$ 극대 | ↘ | $\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$ 극소 | ↗ | |

이때 $f(0)=0$, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}+}f(x)=-\infty$이므로 함수

$y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




따라서 주어진 방정식이 오직 한 개의 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 오직 한 개의 점에서 만나야 하므로

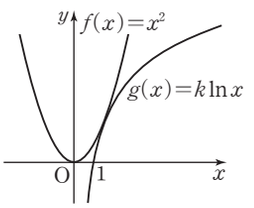
$k<\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$ 또는 $k>-\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$

## 13 답 $k>2e$

방정식 $x^2=k\ln x$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=x^2$과 곡선 $y=k\ln x$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x^2$, $g(x)=k\ln x$라 하면

$f'(x)=2x$, $g'(x)=\frac{k}{x}$




두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 $x$좌표를 $t$ ($t>0$)라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $t^2=k\ln t$ …… ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서

$2t=\frac{k}{t} \quad \therefore k=2t^2$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$t^2=2t^2\ln t$, $\ln t=\frac{1}{2} \quad \therefore t=\sqrt{e}$

이를 ㉡에 대입하면 $k=2e$

따라서 $k=2e$이면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 한 점에서 만나므로 방정식 $x^2=k\ln x$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 양수 $k$의 값의 범위는 $k>2e$

## 14 답 ②

$f(x)=x+\frac{4}{x}-k$라 하면

$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $4-k$<br>극소 | $\nearrow$ |

따라서 $x>0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(2)=4-k$이므로

$f(x)\geq 0$이 성립하려면

$4-k\geq 0$ $\therefore k\leq 4$

따라서 $k$의 최댓값은 4이다.

## 15 답 1

임의의 두 실수 $x_1$, $x_2$ ($x_1>0$)에 대하여 부등식 $f(x_1)\geq g(x_2)$가 성립하려면 $f(x)$의 최솟값이 $g(x)$의 최댓값보다 크거나 같아야 한다.

$f'(x)=2x-\frac{2}{x}=\frac{2x^2-2}{x}=\frac{2(x+1)(x-1)}{x}$

$f'(x)=0$에서 $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=1$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | 1<br>극소 | $\nearrow$ |

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(1)=1$이고 $g(x)=-e^x+k<k$이므로

$k\leq 1$

따라서 실수 $k$의 최댓값은 1이다.

## 16 답 ②

시각 $t$에서의 점 P의 속도를 $v$라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=(-2t+8)e^t+(-t^2+8t-16)e^t$

$=-(t^2-6t+8)e^t=-(t-2)(t-4)e^t$

$t=a$에서의 점 P의 속력을 0이라 하면

$|-(a-2)(a-4)e^a|=0$

$(a-2)(a-4)=0$ ($\because e^a>0$)

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

따라서 점 P의 속력이 처음으로 0이 되는 시각은 2이다.

## 17 답 $\pi$

$\frac{dx}{dt}=\cos t-(\cos t-t\sin t)=t\sin t$

$\frac{dy}{dt}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$

이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$(t\sin t,\ t\cos t)$

따라서 시각 $t=\pi$에서의 점 P의 속도는 $(0,\ -\pi)$이므로 시각 $t=\pi$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{0^2+(-\pi)^2}=\pi$

## 18 답 ①

$\frac{dx}{dt}=3$, $\frac{dy}{dt}=2t-3$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$(3,\ 2t-3)$

시각 $t$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{3^2+(2t-3)^2}=\sqrt{(2t-3)^2+9}$

따라서 점 P의 속력은 $t=\frac{3}{2}$일 때 최소이고 최솟값 3을 가지므로

$a=\frac{3}{2}$, $b=3$ $\therefore b-a=\frac{3}{2}$

## 19 답 5

$\frac{dx}{dt}=5\sin 5t$, $\frac{dy}{dt}=\cos 5t$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$(5\sin 5t,\ \cos 5t)$

시각 $t$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(5\sin 5t)^2+(\cos 5t)^2}=\sqrt{25\sin^2 5t+\cos^2 5t}$

$=\sqrt{25(1-\cos^2 5t)+\cos^2 5t}$

$=\sqrt{25-24\cos^2 5t}$

즉, 점 P의 속력은 $\cos^2 5t=0$일 때 최대이다.

$\frac{d^2x}{dt^2}=25\cos 5t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-5\sin 5t$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 가속도는 $(25\cos 5t,\ -5\sin 5t)$

시각 $t$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{(25\cos 5t)^2+(-5\sin 5t)^2}=\sqrt{625\cos^2 5t+25\sin^2 5t}$

$=\sqrt{600\cos^2 5t+25(\cos^2 5t+\sin^2 5t)}$

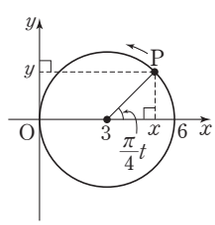
$=\sqrt{600\cos^2 5t+25}$

따라서 점 P의 속력이 최대일 때, 즉 $\cos^2 5t=0$인 시각 $t$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{600\times 0+25}=5$

## 20 답 8초 후

점 P가 8초 동안 1회전 하므로 매초 $\frac{\pi}{4}$만큼 회전한다.




$t$초 후의 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=3+3\cos\frac{\pi}{4}t$, $y=3\sin\frac{\pi}{4}t$

$\frac{dx}{dt}=-\frac{3}{4}\pi\sin\frac{\pi}{4}t$, $\frac{dy}{dt}=\frac{3}{4}\pi\cos\frac{\pi}{4}t$

이므로

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{3}{16}\pi^2\cos\frac{\pi}{4}t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{3}{16}\pi^2\sin\frac{\pi}{4}t$

시각 $t$에서의 점 P의 가속도는

$\left(-\frac{3}{16}\pi^2\cos\frac{\pi}{4}t,\ -\frac{3}{16}\pi^2\sin\frac{\pi}{4}t\right)$

점 P의 가속도가 $\left(-\frac{3}{16}\pi^2,\ 0\right)$이 될 때,

$-\frac{3}{16}\pi^2\cos\frac{\pi}{4}t=-\frac{3}{16}\pi^2$, $-\frac{3}{16}\pi^2\sin\frac{\pi}{4}t=0$

$\cos\frac{\pi}{4}t=1$, $\sin\frac{\pi}{4}t=0$

$\therefore t=8$ 또는 $t=16$ 또는 $t=24$ 또는 ...

따라서 점 P의 가속도가 처음으로 $\left(-\frac{3}{16}\pi^2,\ 0\right)$이 되는 것은 출발한 지 8초 후이다.

## 중단원 기출 문제 2회

**1** 답 ②

$f(x)=2x\ln x-x^2$이라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=2\ln x+2x\times\frac{1}{x}-2x=2\ln x+2-2x$

$f''(x)=\frac{2}{x}-2$

곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로

$\frac{2}{x}-2>0$, $x<1$ $\therefore 0<x<1$

따라서 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록한 구간은 $(0, 1)$이므로 이 구간에 속하는 것은 ②이다.

**2** 답 3

$f(x)=x^4-2ax^3+3ax^2-11$이라 하면

$f'(x)=4x^3-6ax^2+6ax$

$f''(x)=12x^2-12ax+6a=6(2x^2-2ax+a)$

곡선 $y=f(x)$가 구간 $(1, 2)$에서 위로 볼록하려면 $1<x<2$에서 $f''(x)\le0$이어야 한다.

$f''(1)\le0$에서 $6(2-a)\le0$ $\therefore a\ge2$ …… ㉠

$f''(2)\le0$에서 $6(8-3a)\le0$ $\therefore a\ge\frac{8}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a\ge\frac{8}{3}$

따라서 정수 $a$의 최솟값은 3이다.

**3** 답 $\frac{25}{2}e$

$f(x)=(x-1)e^{4-x}$이라 하면

$f'(x)=e^{4-x}-(x-1)e^{4-x}=(2-x)e^{4-x}$

$f''(x)=-e^{4-x}-(2-x)e^{4-x}=(x-3)e^{4-x}$

$f''(x)=0$에서 $x-3=0$ ($\because e^{4-x}>0$)

$\therefore x=3$

$x<3$에서 $f''(x)<0$, $x>3$에서 $f''(x)>0$

즉, $x=3$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(3, 2e)$이다.

변곡점에서의 접선의 기울기가 $f'(3)=-e$이므로 접선의 방정식은

$y-2e=-e(x-3)$ $\therefore y=-ex+5e$

따라서 $A(5, 0)$, $B(0, 5e)$이므로 삼각형 OAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times5e=\frac{25}{2}e$

**4** 답 ①

$f(x)=ax^2+\frac{4}{x}-8\ln x$라 하면

$f'(x)=2ax-\frac{4}{x^2}-\frac{8}{x}$

$f''(x)=2a+\frac{8}{x^3}+\frac{8}{x^2}$

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 $x$좌표를 $t$라 하면 $f''(t)=0$에서

$2a+\frac{8}{t^3}+\frac{8}{t^2}=0$ $\therefore a=-\frac{4}{t^3}-\frac{4}{t^2}$ …… ㉠

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 $y$좌표가 $-4$이므로

$-4=at^2+\frac{4}{t}-8\ln t$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-4=t^2\left(-\frac{4}{t^3}-\frac{4}{t^2}\right)+\frac{4}{t}-8\ln t$

$\ln t=0$ $\therefore t=1$

이를 ㉠에 대입하면

$a=-4-4=-8$

**5** 답 55

$f'(x)=10x+a\cos x$

$f''(x)=10-a\sin x$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖지 않거나 $f''(x)=0$의 실근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않아야 한다.

즉, 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=\frac{10}{a}$이 만나지 않거나 직선 $y=\frac{10}{a}$이 곡선 $y=\sin x$의 접선이어야 한다.

$f''(x)=0$에서

$10-a\sin x=0$ $\therefore \sin x=\frac{10}{a}$

$-1\le\sin x\le1$이므로

$\frac{10}{a}\ge1$ $\therefore a\le10$ ($\because a>0$)

따라서 자연수 $a$는 1, 2, 3, …, 10이므로 구하는 합은

$1+2+3+\cdots+10=\frac{10\times11}{2}=55$

**6** 답 ③

구간 $[a, f]$에서 $f''(x)$의 부호를 조사하면 다음과 같다.

| $x$ | $a$ | … | $b$ | … | $c$ | … | $d$ | … | $e$ | … | $f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | − | − | 0 | + | + | + | 0 | − | 0 | + | + |

곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$이어야 하므로 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록한 구간은 $(b, d)$, $(e, f)$이다.

**7** 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

$f'(x)=-2xe^{-x^2}$

$f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=2(2x^2-1)e^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ ($\because e^{-x^2}>0$)

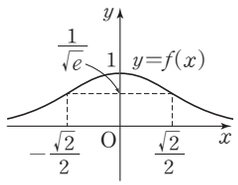
$f''(x)=0$에서 $2x^2-1=0$ ($\because e^{-x^2}>0$)

$\therefore x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소, 오목과 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | … | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | … | 0 | … | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | + | + | 0 | − | − | − |
| $f''(x)$ | + | 0 | − | − | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ 변곡점 | ↱ | 1 극대 | ↘ | $\frac{1}{\sqrt{e}}$ 변곡점 | ↳ |

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 치역은 $\{y|0<y\le1\}$이다.

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프의 변곡점은 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$의 2개이다.

ㄷ. 모든 실수 $x$에서 $f(-x)=e^{-(-x)^2}=e^{-x^2}=f(x)$이므로 $y=f(x)$의 그래프는 $y$축에 대하여 대칭이다.

ㄹ. 구간 $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$에서 $f''(x)<0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 이 구간에서 위로 볼록하다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

## 8 답 ④

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

$-1\le x\le\sqrt{3}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $\ln2+2$ | ↘ | $2$<br>극소 | ↗ | $2\ln2+2$ |

함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(\sqrt{3})=2\ln2+2$, 최솟값은 $f(0)=2$이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$(2\ln2+2)+2=4+2\ln2$

따라서 $p=4$, $q=2$이므로 $p+q=6$

## 9 답 ②

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+1)e^x$

$=\{x^2+(a+2)x+a+1\}e^x$

$f'(2)=0$에서 $3(a+3)e^2=0$

$\therefore a=-3$

$\therefore f(x)=(x^2-3x+1)e^x$,

$f'(x)=(x^2-x-2)e^x=(x+1)(x-2)e^x$

$f'(x)=0$에서

$(x+1)(x-2)=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

$-2\le x\le2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $f(x)$ | $\frac{11}{e^2}$ | ↗ | $\frac{5}{e}$<br>극대 | ↘ | $-e^2$ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값을 가지므로 $b=-1$

$\therefore a+b=-3+(-1)=-4$

## 10 답 $\frac{1}{2}$

$f'(x)=-\frac{2ax}{(x^2+3)^2}$

$f''(x)=-\frac{2a(x^2+3)^2-2ax\times2(x^2+3)\times2x}{(x^2+3)^4}$

$=\frac{6a(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$

$f''(x)=0$에서 $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f'(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f'(x)$ | ↗ | $\frac{a}{8}$<br>극대 | ↘ | $-\frac{a}{8}$<br>극소 | ↗ |

함수 $f'(x)$의 극댓값은 $f'(-1)=\frac{a}{8}$이고,

$\lim_{x\to\infty} f'(x)=-\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{(x^2+3)^2}=0$이므로 함수 $f'(x)$의 최댓값은 $f'(-1)=\frac{a}{8}$이다.

따라서 $\frac{a}{8}=\frac{1}{16}$이므로 $a=\frac{1}{2}$

## 11 답 2

점 A의 좌표를 $(t, \sqrt{t+3})(-3<t<0)$이라 하면

$\overline{AC}=-t$, $\overline{AB}=\sqrt{t+3}$

직사각형 ABOC의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=-t\sqrt{t+3}$

$S'(t)=-\sqrt{t+3}-t\times\frac{1}{2\sqrt{t+3}}=-\frac{3(t+2)}{2\sqrt{t+3}}$

$S'(t)=0$에서 $t+2=0$ $\therefore t=-2$

$-3<t<0$에서 함수 $S(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $t$ | $-3$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $S'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $S(t)$ | | ↗ | $2$<br>극대 | ↘ | |

따라서 직사각형 ABOC의 넓이 $S(t)$의 최댓값은 $S(-2)=2$이다.

## 12 답 ③

$x+\frac{32}{x^2}-k=0$에서 $x+\frac{32}{x^2}=k$

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2 이상이 되려면 곡선 $y=x+\frac{32}{x^2}$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 개 이상의 점에서 만나야 한다.

$f(x)=x+\frac{32}{x^2}$라 하면 $x\neq0$이고

$f'(x)=1-\frac{64}{x^3}=\frac{x^3-64}{x^3}$

$=\frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{x^3}$

$f'(x)=0$에서

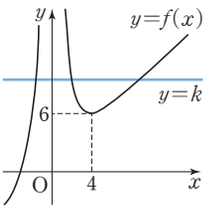
$x-4=0$ ($\because x^2+4x+16>0$)

$\therefore x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 0 | $\cdots$ | 4 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | | ↘ | 6<br>극소 | ↗ |

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to0+} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to0-} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




즉, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 서로 다른 실근의 개수가 2 이상이 되려면

$k\geq6$

따라서 $k$의 최솟값은 6이다.

## 13 답 ㄷ

방정식 $e^{2x}=ax$의 실근의 개수는 곡선 $y=e^{2x}$과 직선 $y=ax$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=e^{2x}$, $g(x)=ax$라 하면

$f'(x)=2e^{2x}$, $g'(x)=a$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$가 접할 때의 접점의 $x$좌표를 $t$라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $e^{2t}=at$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $2e^{2t}=a$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2at=a$, $a(2t-1)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

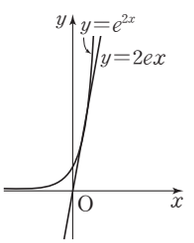
이때 ㉡에서 $a\neq0$

$t=\frac{1}{2}$을 ㉡에 대입하면 $a=2e$

ㄱ. $a>2e$이면 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

ㄴ. $0\leq a<2e$이면 서로 다른 실근의 개수는 0이다.

ㄷ. $a<0$ 또는 $a=2e$이면 서로 다른 실근의 개수는 1이다.




따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

## 14 답 ①

$f(x)=e^{x-3}-x+a$라 하면

$f'(x)=e^{x-3}-1$

$f'(x)=0$에서 $e^{x-3}-1=0$

$e^{x-3}=1$ $\therefore x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | 3 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | − | 0 | + |
| $f(x)$ | ↘ | $a-2$<br>극소 | ↗ |

함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(3)=a-2$이므로 모든 실수 $x$에서 $f(x)\geq0$이 성립하려면

$a-2\geq0$ $\therefore a\geq2$

따라서 $a$의 최솟값은 2이다.

## 15 답 $k\geq\frac{\pi}{2}$

$k-\cos x\geq x\sin x$에서

$k\geq x\sin x+\cos x$

이 부등식이 성립하려면 곡선 $y=x\sin x+\cos x$가 직선 $y=k$보다 아래쪽에 있거나 곡선과 직선이 접해야 한다.

$f(x)=x\sin x+\cos x$라 하면

$f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0\leq x\leq2\pi$)

$0\leq x\leq2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 0 | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | 1 | ↗ | $\frac{\pi}{2}$<br>극대 | ↘ | $-\frac{3}{2}\pi$<br>극소 | ↗ | 1 |

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값이 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$이므로 부등식 $k\geq f(x)$가 성립하려면

$k\geq\frac{\pi}{2}$

## 16 답 4

시각 $t$에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$f'(t)=t+\frac{2}{t}$, $g'(t)=k-\frac{2}{t}$

$f'(t)=g'(t)$에서

$t+\frac{2}{t}=k-\frac{2}{t}$ $\therefore t+\frac{4}{t}=k$

두 점 P, Q의 속도가 같은 시각이 한 번뿐이려면 $t>0$에서 위의 방정식이 오직 하나의 실근을 가져야 하므로 함수 $y=t+\frac{4}{t}$의 그래프와 직선 $y=k$가 접해야 한다.

이때 $t>0$, $\frac{4}{t}>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t+\frac{4}{t}\geq2\sqrt{t\times\frac{4}{t}}=4$ $\left(\text{단, 등호는 } t=\frac{4}{t}, \text{ 즉 } t=2\text{일 때 성립}\right)$

따라서 $t=2$일 때 함수 $y=t+\frac{4}{t}$의 그래프와 직선 $y=k$가 접하므로

$k=2+2=4$

**17** 답 ②

$\frac{dx}{dt}=6$, $\frac{dy}{dt}=6-6t$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$(6, 6-6t)$

점 P의 속력이 $6\sqrt{5}$이므로

$\sqrt{6^2+(6-6t)^2}=6\sqrt{5}$, $t^2-2t-3=0$

$(t+1)(t-3)=0$ $\therefore t=3$ ($\because t>0$)

**18** 답 $\sqrt{34}$

$\frac{dx}{dt}=2\sqrt{t}$, $\frac{dy}{dt}=t-3$이므로 시각 $t$에서의 점 P의 속도는

$(2\sqrt{t}, t-3)$

시각 $t$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(2\sqrt{t})^2+(t-3)^2}=\sqrt{t^2-2t+9}=\sqrt{(t-1)^2+8}$

즉, 점 P의 속력은 $t=1$일 때 최소이므로 $t=1$에서의 점 P의 좌표는

$(3, 5)$

따라서 점 P와 원점 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$

**19** 답 ②

$\frac{dx}{dt}=t^2-4t$, $\frac{dy}{dt}=-\frac{8}{t^2}-2t$이므로

$\frac{d^2x}{dt^2}=2t-4$, $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{16}{t^3}-2$

시각 $t$에서의 점 P의 가속도는

$\left(2t-4, \frac{16}{t^3}-2\right)$

시각 $t$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{(2t-4)^2+\left(\frac{16}{t^3}-2\right)^2}=2\sqrt{(t-2)^2+\left(\frac{8}{t^3}-1\right)^2}$

점 P의 가속도의 크기가 0이므로

$2\sqrt{(t-2)^2+\left(\frac{8}{t^3}-1\right)^2}=0$

$(t-2)^2+\left(\frac{8-t^3}{t^3}\right)^2=0$

$(t-2)^2+\frac{\{(t-2)(t^2+2t+4)\}^2}{t^6}=0$

$\therefore t=2$ ($\because t^2+2t+4>0$)

**20** 답 4

$\frac{dx}{dt}=a\cos t-2$, $\frac{dy}{dt}=-a\sin t+3t$이므로

$\frac{d^2x}{dt^2}=-a\sin t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-a\cos t+3$

시각 $t$에서의 점 P의 가속도는

$(-a\sin t, -a\cos t+3)$

따라서 $t=\frac{\pi}{2}$에서의 점 P의 가속도는 $(-a, 3)$이고, 이때의 가속도의 크기가 5이므로

$\sqrt{(-a)^2+3^2}=5$, $a^2+9=25$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

# 08 / 여러 가지 함수의 적분 44~49쪽

## 중단원 기출 문제 1회

**1** 답 $F(x)=2x\sqrt{x}-x^2+4x-2$

$F(x)=\int f(x)\,dx$

$=\int(3\sqrt{x}-2x+4)\,dx=\int(3x^{\frac{1}{2}}-2x+4)\,dx$

$=2x^{\frac{3}{2}}-x^2+4x+C=2x\sqrt{x}-x^2+4x+C$

$F(1)=3$에서

$2-1+4+C=3$ $\therefore C=-2$

$\therefore F(x)=2x\sqrt{x}-x^2+4x-2$

**2** 답 ①

$f(x)=\int\frac{\sqrt[3]{x}+1}{3x}dx=\int\left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{3x}\right)dx$

$=x^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}\ln|x|+C=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3}\ln|x|+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 3)$을 지나므로 $f(1)=3$에서

$1+C=3$ $\therefore C=2$

따라서 $f(x)=\sqrt[3]{x}+\frac{1}{3}\ln|x|+2$이므로

$f(-8)=-2+\frac{1}{3}\ln 8+2=\ln 2$

**3** 답 ③

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(4^{x+1}-2^x)\,dx=\int(4\times4^x-2^x)\,dx$

$=\frac{4\times4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}+C=\frac{2\times4^x-2^x}{\ln 2}+C$

$f(0)=-\frac{5}{\ln 2}$에서

$\frac{1}{\ln 2}+C=-\frac{5}{\ln 2}$ $\therefore C=-\frac{6}{\ln 2}$

즉, $f(x)=\frac{2\times4^x-2^x-6}{\ln 2}$이므로 방정식 $f(x)=0$의 해는

$\frac{2\times4^x-2^x-6}{\ln 2}=0$, $2\times4^x-2^x-6=0$

$2^x=t$로 놓으면 $2t^2-t-6=0$

$(2t+3)(t-2)=0$ $\therefore t=2$ ($\because t>0$)

따라서 $2^x=2$이므로 $x=1$

**4** 답 $e^4$

$f'(x)=e^{x+3}+2x$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(e^{x+3}+2x)\,dx=\int(e^3\times e^x+2x)\,dx$

$=e^3\times e^x+x^2+C=e^{x+3}+x^2+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(-3, 9)$를 지나므로 $f(-3)=9$에서
$1+9+C=9 \quad \therefore C=-1$
따라서 $f(x)=e^{x+3}+x^2-1$이므로
$f(1)=e^4+1-1=e^4$

## 5 답 $e^2+11$

$f'(x)=\dfrac{e^{2x}+3e^x+2}{e^x+1}=\dfrac{(e^x+1)(e^x+2)}{e^x+1}=e^x+2$이므로
$f(x)=\int(e^x+2)\,dx=e^x+2x+C_1$
$f(0)=5$에서
$1+C_1=5 \quad \therefore C_1=4$
따라서 $f(x)=e^x+2x+4$이므로
$F(x)=\int f(x)\,dx$
$=\int(e^x+2x+4)\,dx$
$=e^x+x^2+4x+C_2$
$\therefore F(2)-F(0)=(e^2+4+8+C_2)-(1+C_2)$
$=e^2+11$

## 6 답 ①

$\displaystyle\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}dx$
$\displaystyle=\int\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$
$\displaystyle=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{1}{\cos x}\right)dx$
$=\int(\sec^2 x-\tan x\sec x)\,dx$
$=\tan x-\sec x+C$
따라서 $a=1$, $b=-1$이므로
$ab=-1$

## 7 답 6

$f(x)+g(x)=\int\sin x\,dx=-\cos x+C_1 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$f(x)-g(x)=\int\cos x\,dx=\sin x+C_2 \quad \cdots\cdots$ ㉡
$f(0)=1$, $g(0)=1$이므로 ㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면
$f(0)+g(0)=-1+C_1$
$2=-1+C_1 \quad \therefore C_1=3$
$\therefore f(x)+g(x)=-\cos x+3 \quad \cdots\cdots$ ㉢
㉡의 양변에 $x=0$을 대입하면
$f(0)-g(0)=C_2 \quad \therefore C_2=0$
$\therefore f(x)-g(x)=\sin x \quad \cdots\cdots$ ㉣
㉢, ㉣을 연립하여 정리하면
$f(x)=\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{3}{2}$
$g(x)=-\dfrac{1}{2}\sin x-\dfrac{1}{2}\cos x+\dfrac{3}{2}$
$\therefore f(\pi)+2g(\pi)=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\right)+2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\right)=6$

## 8 답 ②

$\displaystyle\int_1^2\frac{x^2-1}{x^2+x}dx=\int_1^2\frac{(x+1)(x-1)}{x(x+1)}dx$
$\displaystyle=\int_1^2\frac{x-1}{x}dx=\int_1^2\left(1-\frac{1}{x}\right)dx$
$\displaystyle=\Big[x-\ln|x|\Big]_1^2$
$=(2-\ln 2)-1=1-\ln 2$

## 9 답 $\dfrac{12}{5}$

$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1(x\sqrt{x}+3ax)\,dx=\int_0^1(x^{\frac{3}{2}}+3ax)\,dx$
$\displaystyle=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{3}{2}ax^2\right]_0^1$
$\displaystyle=\frac{2}{5}+\frac{3}{2}a$
이때 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=4$에서
$\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{2}a=4 \quad \therefore a=\dfrac{12}{5}$

## 10 답 ③

$a_n=\displaystyle\int_0^n 4^x\ln 4\,dx=\Big[4^x\Big]_0^n=4^n-1$
$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$

## 11 답 $e^2+1$

$\displaystyle\int_0^2\frac{e^{2x}}{e^x-x}dx+\int_2^0\frac{t^2}{e^t-t}dt$
$\displaystyle=\int_0^2\frac{e^{2x}}{e^x-x}dx-\int_0^2\frac{x^2}{e^x-x}dx$
$\displaystyle=\int_0^2\frac{e^{2x}-x^2}{e^x-x}dx=\int_0^2\frac{(e^x+x)(e^x-x)}{e^x-x}dx$
$\displaystyle=\int_0^2(e^x+x)\,dx$
$\displaystyle=\left[e^x+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$
$=(e^2+2)-1=e^2+1$

## 12 답 ①

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2x}{\cos x+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-(2\cos^2 x-1)}{\cos x+1}dx$
$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(1-\cos^2 x)}{\cos x+1}dx$
$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2(1+\cos x)(1-\cos x)}{\cos x+1}dx$
$\displaystyle=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\,dx$
$\displaystyle=2\Big[x-\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$
$\displaystyle=2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)=\pi-2$

## 13 답 3

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\tan^2x+1)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(k-3\sec^2t)\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\tan^2x+1)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}(k-3\sec^2x)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\tan^2x+1+k-3\sec^2x)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{2(\sec^2x-1)+1+k-3\sec^2x\}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(k-1-\sec^2x)\,dx$$
$$=\left[(k-1)x-\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{(k-1)\pi}{4}-1$$

따라서 $\frac{(k-1)\pi}{4}-1=\frac{\pi}{2}-1$이므로

$\frac{k-1}{4}=\frac{1}{2}$ $\therefore k=3$

## 14 답 8

$0\le x\le\pi$에서 $\sin x\ge0$이고, $\sin x$의 최댓값은 $x=\frac{\pi}{2}$에서 1이므로 함수 $f(x)=a\sin x$의 최댓값은 $a>0$일 때 $a$, $a\le0$일 때 0이다.

이때 함수 $f(x)$의 최댓값이 4이므로 $a=4$

따라서 $f(x)=4\sin x$이므로

$f'(x)=4\cos x$

$$\therefore\int_0^{\pi}|f'(x)|\,dx=\int_0^{\pi}|4\cos x|\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-4\cos x)\,dx$$
$$=\left[4\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-4\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=4+4=8$$

## 15 답 3

$$\int_0^k f(x)\,dx=\int_0^1\sqrt{x}\,dx+\int_1^k\frac{3x-2}{x}\,dx$$
$$=\int_0^1x^{\frac{1}{2}}\,dx+\int_1^k\left(3-\frac{2}{x}\right)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\left[3x-2\ln x\right]_1^k$$
$$=\frac{2}{3}+\{(3k-2\ln k)-3\}$$
$$=\frac{9k-7}{3}-2\ln k$$

따라서 $\frac{9k-7}{3}-2\ln k=\frac{20}{3}-\ln9$이므로

$\frac{9k-7}{3}=\frac{20}{3}$, $2\ln k=\ln9$

$\therefore k=3$

## 16 답 ①

$f(x)=x^3e^{|x|}$이라 하면

$f(-x)=(-x)^3e^{|-x|}=-x^3e^{|x|}=-f(x)$

$$\therefore\int_{-2}^{2}x^3e^{|x|}\,dx=0$$

## 17 답 20

$(2-\sin x)g(x)=2g(x)-g(x)\sin x$에서

$h(x)=-g(x)\sin x$라 하면

$2g(-x)=2\{f(-x)+f(x)\}=2g(x)$,

$h(-x)=-g(-x)\sin(-x)=g(x)\sin x$
$=-\{-g(x)\sin x\}=-h(x)$

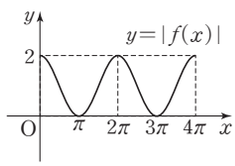
$$\therefore\int_{-3}^{3}(2-\sin x)g(x)\,dx=\int_{-3}^{3}2g(x)\,dx+\int_{-3}^{3}h(x)\,dx$$
$$=2\int_{-3}^{0}2g(x)\,dx+0=4\int_{-3}^{0}g(x)\,dx$$
$$=4\left\{\int_{-3}^{5}g(x)\,dx-\int_0^5g(x)\,dx\right\}$$
$$=4(17-12)=20$$

## 18 답 $2\pi$

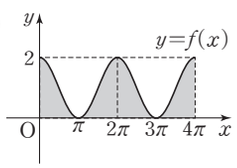
㈎에서 $\int_0^x|f(t)|\,dt=x+\sin x$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$|f(x)|=1+\cos x$

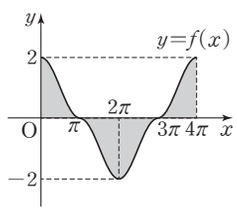
$0\le x\le4\pi$에서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, ㈏에서 $f(0)=2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 있는 경우는 다음과 같다.



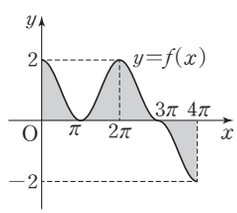

(i)



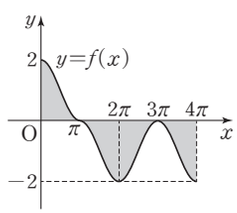

(ii)




(iii)




(iv)




각각의 경우에 대하여 $\int_0^{4\pi}f(x)\,dx$의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) $\int_0^{4\pi}f(x)\,dx=\int_0^{4\pi}(1+\cos x)\,dx=\left[x+\sin x\right]_0^{4\pi}=4\pi$

(ii) $\int_0^{4\pi}f(x)\,dx=0$

(iii) $\int_0^{4\pi}f(x)\,dx=\int_0^{2\pi}(1+\cos x)\,dx=\left[x+\sin x\right]_0^{2\pi}=2\pi$

(iv) $\int_0^{4\pi}f(x)\,dx=\int_{2\pi}^{4\pi}(-1-\cos x)\,dx=\left[-x-\sin x\right]_{2\pi}^{4\pi}=-2\pi$

(i)~(iv)에서 $\int_0^{4\pi}f(x)\,dx$의 최댓값은 $4\pi$, 최솟값은 $-2\pi$이므로

$M=4\pi$, $m=-2\pi$ $\therefore M+m=2\pi$

## 19 답 24

함수 $y=|3\cos x|$는 주기가 $\pi$인 주기함수이므로

$$\int_0^{\pi}|3\cos x|\,dx=\int_{\pi}^{2\pi}|3\cos x|\,dx=\int_{2\pi}^{3\pi}|3\cos x|\,dx$$
$$=\int_{3\pi}^{4\pi}|3\cos x|\,dx$$

$$\therefore \int_0^{4\pi}|3\cos x|\,dx=\int_0^{\pi}|3\cos x|\,dx+\int_{\pi}^{2\pi}|3\cos x|\,dx+\int_{2\pi}^{3\pi}|3\cos x|\,dx+\int_{3\pi}^{4\pi}|3\cos x|\,dx$$
$$=4\int_0^{\pi}|3\cos x|\,dx$$
$$=4\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-3\cos x)\,dx\right\}$$
$$=4\left(\left[3\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-3\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$$
$$=4(3+3)=24$$

## 20 답 ⑤

$f(x+3)=f(x)$에서 함수 $f(x)$의 주기는 3이므로

$$\int_{1021}^{1029}f(x)\,dx=\int_1^9 f(x)\,dx$$
$$=\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^6 f(x)\,dx+\int_6^9 f(x)\,dx$$
$$=\int_1^3 f(x)\,dx+\int_0^3 f(x)\,dx+\int_0^3 f(x)\,dx$$
$$=2\int_0^1 f(x)\,dx+3\int_1^3 f(x)\,dx$$
$$=2\int_0^1(-6\sqrt{x}+1)\,dx+3\int_1^3\left(-\frac{9}{x}+4\right)dx$$
$$=2\int_0^1(-6x^{\frac{1}{2}}+1)\,dx+3\int_1^3\left(-\frac{9}{x}+4\right)dx$$
$$=2\left[-4x^{\frac{3}{2}}+x\right]_0^1+3\left[-9\ln|x|+4x\right]_1^3$$
$$=2\times(-3)+3(-9\ln 3+8)=-27\ln 3+18$$

# 중단원 기출 문제 2회

## 1 답 $f(x)=x-4\sqrt{x}+\ln|x|+4$

$$f(x)=\int\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}dx=\int\frac{x-2\sqrt{x}+1}{x}dx$$
$$=\int\left(1-2x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=x-4x^{\frac{1}{2}}+\ln|x|+C=x-4\sqrt{x}+\ln|x|+C$$

$f(1)=1$에서 $1-4+C=1$ $\therefore C=4$

$\therefore f(x)=x-4\sqrt{x}+\ln|x|+4$

## 2 답 12

(i) $x<1$일 때,

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-5)\,dx=x^3-5x+C_1$$

(ii) $x>1$일 때,

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{2}{x^2}dx=\int 2x^{-2}dx$$
$$=-2x^{-1}+C_2=-\frac{2}{x}+C_2$$

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases}x^3-5x+C_1 & (x<1)\\ -\dfrac{2}{x}+C_2 & (x>1)\end{cases}$

이때 $f(2)=5$에서

$-1+C_2=5$ $\therefore C_2=6$

함수 $f(x)$가 모든 실수 $x$에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)$에서

$\lim_{x\to 1+}\left(-\frac{2}{x}+6\right)=\lim_{x\to 1-}(x^3-5x+C_1)$

$4=-4+C_1$ $\therefore C_1=8$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^3-5x+8 & (x<1)\\ -\dfrac{2}{x}+6 & (x\geq 1)\end{cases}$이므로

$f(-1)=-1+5+8=12$

## 3 답 $\frac{1}{2\ln 3}$

$$f(x)=\int 3^x(3^x-2)\,dx=\int(9^x-2\times 3^x)\,dx$$
$$=\frac{9^x}{\ln 9}-\frac{2\times 3^x}{\ln 3}+C=\frac{9^x}{2\ln 3}-\frac{2\times 3^x}{\ln 3}+C$$

$f(0)=\frac{3}{2\ln 3}$에서

$\frac{1}{2\ln 3}-\frac{2}{\ln 3}+C=\frac{3}{2\ln 3}$ $\therefore C=\frac{3}{\ln 3}$

따라서 $f(x)=\frac{9^x}{2\ln 3}-\frac{2\times 3^x}{\ln 3}+\frac{3}{\ln 3}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{9^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{9^n}{2\ln 3}-\frac{2\times 3^n}{\ln 3}+\frac{3}{\ln 3}}{9^n+2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9^n-4\times 3^n+6}{2\ln 3(9^n+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-4\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+6\times\left(\frac{1}{9}\right)^n}{2\ln 3\left\{1+2\times\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}}$$
$$=\frac{1}{2\ln 3}$$

## 4 답 $e^e-1$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$이므로

$f'(x)=e^x+\frac{2}{x}$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(e^x+\frac{2}{x}\right)dx$$
$$=e^x+2\ln|x|+C$$

$f(1)=e-3$에서 $e+C=e-3$ $\therefore C=-3$

따라서 $f(x)=e^x+2\ln|x|-3$이므로

$f(e)=e^e+2-3=e^e-1$

## 5 답 $\ln 10$

$y=\log x+2$라 하면

$y-2=\log x$, $x=10^{y-2}$

$x$와 $y$를 서로 바꾸면 $y=10^{x-2}$

따라서 $g(x)=10^{x-2}$이므로

$$\int g(x)\,dx=\int 10^{x-2}dx=\frac{1}{100}\int 10^x dx$$
$$=\frac{1}{100}\times\frac{10^x}{\ln 10}+C=\frac{10^{x-2}}{\ln 10}+C$$

$\therefore a=\ln 10$

## 6 답 ②

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int 3\tan^2 x\,dx=\int 3(\sec^2 x-1)\,dx$

$=3\tan x-3x+C$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=4-\frac{3}{4}\pi$에서

$3-\frac{3}{4}\pi+C=4-\frac{3}{4}\pi \quad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=3\tan x-3x+1$이므로

$f(\pi)=1-3\pi$

## 7 답 0

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(\sin x-\sqrt{3}\cos x)\,dx$

$=-\cos x-\sqrt{3}\sin x+C$

$f'(x)=0$에서 $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$

양변에 $\frac{1}{2}$을 곱하면

$\sin x\times\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=0,\ \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $\frac{\pi}{3}$ | … | $\frac{4}{3}\pi$ | … | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |
| $f(x)$ | | ↘ | $C-2$ 극소 | ↗ | $C+2$ 극대 | ↘ | |

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f\left(\frac{4}{3}\pi\right)=C+2$, 극솟값은 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=C-2$이다.

이때 함수 $f(x)$의 극댓값이 4이므로

$C+2=4 \quad \therefore C=2$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$C-2=2-2=0$

## 8 답 ①

$f(x+h)-f(x-h)=h\tan^2 x$에서 $h>0$이므로

$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=\tan^2 x$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=f'(x)+f'(x)=2f'(x)$

즉, $2f'(x)=\tan^2 x$이므로

$f'(x)=\frac{1}{2}\tan^2 x$

따라서

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{1}{2}\tan^2 x\,dx$

$=\frac{1}{2}\int(\sec^2 x-1)\,dx=\frac{1}{2}\tan x-\frac{1}{2}x+C$

이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}-\frac{\pi}{8}+C\right)-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8}+C\right)=1-\frac{\pi}{4}$

## 9 답 $\frac{484}{5}$

$\int_1^6 x\sqrt{x}\,dx+\int_3^9 x\sqrt{x}\,dx-\int_3^6 x\sqrt{x}\,dx$

$=\int_1^6 x\sqrt{x}\,dx-\int_3^6 x\sqrt{x}\,dx+\int_3^9 x\sqrt{x}\,dx$

$=\int_1^3 x\sqrt{x}\,dx+\int_3^9 x\sqrt{x}\,dx=\int_1^9 x\sqrt{x}\,dx$

$=\int_1^9 x^{\frac{3}{2}}\,dx=\left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_1^9$

$=\frac{2}{5}\times 243-\frac{2}{5}=\frac{484}{5}$

## 10 답 4

$\int_1^a\frac{1}{\sqrt{x}}\left(1-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx=\int_1^a\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{4}{x}\right)dx$

$=\int_1^a\left(x^{-\frac{1}{2}}-\frac{4}{x}\right)dx$

$=\left[2x^{\frac{1}{2}}-4\ln|x|\right]_1^a$

$=(2a^{\frac{1}{2}}-4\ln a)-2$

$=2\sqrt{a}-2-4\ln a$

따라서 $2\sqrt{a}-2-4\ln a=2-8\ln 2$이므로

$2\sqrt{a}-2=2,\ 4\ln a=8\ln 2 \quad \therefore a=4$

## 11 답 2

$\int_0^2 5^x k\,dx=\left[\frac{5^x k}{\ln 5}\right]_0^2=\frac{25k}{\ln 5}-\frac{k}{\ln 5}=\frac{24k}{\ln 5}$

따라서 $\frac{24k}{\ln 5}=\frac{48}{\ln 5}$이므로 $k=2$

## 12 답 ②

$\int_0^3(e^{\frac{x}{3}}-1)(e^{\frac{2}{3}x}+e^{\frac{x}{3}}+1)\,dx=\int_0^3(e^x-1)\,dx$

$=\left[e^x-x\right]_0^3$

$=(e^3-3)-1=e^3-4$

## 13 답 $2-\frac{\pi}{4}$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^4 x-\tan^4 x)\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x+\tan^2 x)\underbrace{(\sec^2 x-\tan^2 x)}_{\sec^2 x-\tan^2 x=1}\,dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\{\sec^2 x+(\sec^2 x-1)\}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2\sec^2 x-1)\,dx$

$=\left[2\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=2-\frac{\pi}{4}$

## 14 답 $\frac{\pi}{2}-1$

$F(x)=xf(x)-(x\cos x-\sin x)$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-(\cos x-x\sin x-\cos x)$

$xf'(x)=-x\sin x$

$\therefore f'(x)=-\sin x$

$\therefore f(x)=\int(-\sin x)\,dx=\cos x+C$

$f(\pi)=0$에서

$-1+C=0 \quad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=\cos x+1$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\cos x+1)\,dx$$
$$=\left[\sin x+x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=\pi-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}-1$$

## 15 답 ③

$$|2e^x-3|=\begin{cases} -2e^x+3 & \left(x\le \ln\frac{3}{2}\right) \\ 2e^x-3 & \left(x\ge \ln\frac{3}{2}\right) \end{cases}$$이므로

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2}|2e^x-3|\,dx$$
$$=\int_{-\ln 2}^{\ln\frac{3}{2}}(-2e^x+3)\,dx+\int_{\ln\frac{3}{2}}^{\ln 2}(2e^x-3)\,dx$$
$$=\left[-2e^x+3x\right]_{-\ln 2}^{\ln\frac{3}{2}}+\left[2e^x-3x\right]_{\ln\frac{3}{2}}^{\ln 2}$$
$$=\left\{\left(-3+3\ln\frac{3}{2}\right)-(-1-3\ln 2)\right\}+\left\{(4-3\ln 2)-\left(3-3\ln\frac{3}{2}\right)\right\}$$
$$=6\ln\frac{3}{2}-1$$

## 16 답 ④

$$\int_{-1}^{e} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1} e^{x-1}dx+\int_{1}^{e}\frac{2}{x}dx$$
$$=\frac{1}{e}\int_{-1}^{1} e^x dx+\int_{1}^{e}\frac{2}{x}dx$$
$$=\frac{1}{e}\left[e^x\right]_{-1}^{1}+\left[2\ln x\right]_{1}^{e}$$
$$=\left(1-\frac{1}{e^2}\right)+2$$
$$=3-\frac{1}{e^2}$$

## 17 답 6

$f(x)=5x^4+3\sqrt{|x|}$, $g(x)=-4x^3$이라 하면

$f(-x)=5(-x)^4+3\sqrt{|-x|}$
$=5x^4+3\sqrt{|x|}=f(x)$

$g(-x)=-4(-x)^3=4x^3$
$=-(-4x^3)=-g(x)$

$$\therefore \int_{-1}^{0}(5x^4-4x^3+3\sqrt{|x|})\,dx-\int_{1}^{0}(5x^4-4x^3+3\sqrt{|x|})\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(5x^4-4x^3+3\sqrt{|x|})\,dx+\int_{0}^{1}(5x^4-4x^3+3\sqrt{|x|})\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(5x^4-4x^3+3\sqrt{|x|})\,dx$$
$$=\int_{-1}^{1}(5x^4+3\sqrt{|x|})\,dx+\int_{-1}^{1}(-4x^3)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(5x^4+3\sqrt{x})\,dx+0=2\int_{0}^{1}(5x^4+3x^{\frac{1}{2}})\,dx$$
$$=2\left[x^5+2x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1}$$
$$=2\times 3=6$$

## 18 답 ④

$f(-x)=-x\sin(-x)=x\sin x=f(x)$이므로

$$\int_{-3}^{2} f(x)\,dx=\int_{-3}^{3} f(x)\,dx-\int_{2}^{3} f(x)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{3} f(x)\,dx-\int_{2}^{3} f(x)\,dx$$
$$=2A-B$$

## 19 답 0

$f(x)=\sin x$라 하면 함수 $f(x)$는 주기가 $2\pi$인 주기함수이므로

$$\int_{k\pi}^{(k+8)\pi}\sin x\,dx$$
$$=\int_{0}^{8\pi}\sin x\,dx$$
$$=\int_{0}^{2\pi}\sin x\,dx+\int_{2\pi}^{4\pi}\sin x\,dx+\int_{4\pi}^{6\pi}\sin x\,dx+\int_{6\pi}^{8\pi}\sin x\,dx$$
$$=4\int_{0}^{2\pi}\sin x\,dx$$
$$=4\left[-\cos x\right]_{0}^{2\pi}$$
$$=4\{-1-(-1)\}=0$$

## 20 답 ②

$f(x+2)=f(x)$에서 함수 $f(x)$의 주기는 2이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{1}^{3} f(x)\,dx=\int_{3}^{5} f(x)\,dx=\cdots$$

$-1\le x\le 1$에서 $f(-x)=e^{|-x|}=e^{|x|}=f(x)$이므로

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=2\int_{0}^{1} e^{|x|}\,dx=2\int_{0}^{1} e^x\,dx$$
$$=2\left[e^x\right]_{0}^{1}=2(e-1)$$

따라서 $\int_{-2}^{k} f(x)\,dx=15(e-1)=(e-1)+7\times 2(e-1)$이므로

$$\int_{-2}^{k} f(x)\,dx=\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx+\left\{\int_{-1}^{1} f(x)\,dx+\int_{1}^{3} f(x)\,dx+\cdots+\int_{11}^{13} f(x)\,dx\right\}$$
$$=\int_{-2}^{13} f(x)\,dx$$

$\therefore k=13$

# 09 / 치환적분법과 부분적분법 50~55쪽

## 중단원 기출 문제 1회

**1** 답 10

$x^2-4x+2=t$로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=2x-4$이므로

$$\int(2x-4)(x^2-4x+2)^4dx=\int t^4dt=\frac{1}{5}t^5+C$$
$$=\frac{1}{5}(x^2-4x+2)^5+C$$

따라서 $a=5$, $b=5$이므로 $a+b=10$

**2** 답 ②

$2x+1=t$로 놓으면 $x=\frac{t-1}{2}$이고 $2=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int\frac{2x-1}{\sqrt{2x+1}}dx=\int\frac{t-2}{\sqrt{t}}\times\frac{1}{2}dt$$
$$=\int\left(\frac{1}{2}\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt=\int\left(\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\right)dt$$
$$=\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+C=\frac{1}{3}t\sqrt{t}-2\sqrt{t}+C$$
$$=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}-2\sqrt{2x+1}+C$$
$$=\frac{1}{3}(2x-5)\sqrt{2x+1}+C$$

$f\left(\frac{5}{2}\right)=0$에서 $C=0$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}(2x-5)\sqrt{2x+1}$

한편 $f(x)=\int\frac{2x-1}{\sqrt{2x+1}}dx$에서 $x>-\frac{1}{2}$이고

양변을 $x$에 대하여 미분하면 $f'(x)=\frac{2x-1}{\sqrt{2x+1}}$

$f'(x)=0$에서 $2x-1=0$ $\therefore x=\frac{1}{2}$

$x>-\frac{1}{2}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $-\frac{1}{2}$ | … | $\frac{1}{2}$ | … |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↘ | $-\frac{4\sqrt{2}}{3}$ 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{4\sqrt{2}}{3}$

다른 풀이

$\sqrt{2x+1}=t$로 놓고 양변을 제곱하면 $2x+1=t^2$이므로

$2=2t\frac{dt}{dx}$

$$\therefore f(x)=\int\frac{t^2-2}{t}\times t\,dt=\int(t^2-2)\,dt=\frac{1}{3}t^3-2t+C$$
$$=\frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1}-2\sqrt{2x+1}+C$$
$$=\frac{1}{3}(2x-5)\sqrt{2x+1}+C$$

**3** 답 14

$e^x-1=t$로 놓으면 $e^x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int(-3e^x\sqrt{e^x-1})\,dx$$
$$=\int(-3\sqrt{t})\,dt=-3\int t^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=-2t^{\frac{3}{2}}+C=-2(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=-2(e^x-1)\sqrt{e^x-1}+C$$

$f(0)=16$에서 $C=16$

따라서 $f(x)=-2(e^x-1)\sqrt{e^x-1}+16$이므로

$f(\ln 2)=-2(2-1)\sqrt{2-1}+16=14$

다른 풀이

$\sqrt{e^x-1}=t$로 놓고 양변을 제곱하면 $e^x-1=t^2$이므로

$e^x=2t\frac{dt}{dx}$

$$\therefore f(x)=\int(-3e^x\sqrt{e^x-1})\,dx=\int(-3t)\times2t\,dt$$
$$=\int(-6t^2)\,dt=-2t^3+C$$
$$=-2(e^x-1)\sqrt{e^x-1}+C$$

**4** 답 4

$1+\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int(1+\sin x)^3\cos x\,dx=\int t^3dt$$
$$=\frac{1}{4}t^4+C=\frac{1}{4}(1+\sin x)^4+C$$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $\left(\pi,\frac{1}{4}\right)$을 지나므로

$f(\pi)=\frac{1}{4}$에서 $\frac{1}{4}+C=\frac{1}{4}$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(1+\sin x)^4$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프가

점 $\left(\frac{\pi}{2},a\right)$를 지나므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a$에서

$a=\frac{1}{4}\times2^4=4$

**5** 답 ④

$f'(x)=f(x)$에서 $\frac{f'(x)}{f(x)}=1$이므로

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int dx$

$\ln f(x)=x+C$ ($\because f(x)>0$)

따라서 $f(x)=e^{x+C}$이므로

$\frac{f(2)}{f(1)}=\frac{e^{2+C}}{e^{1+C}}=e$

**6** 답 $2\ln 2+2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x,y)$에서의 접선의 기울기가

$\frac{x^2+2x+2}{x+2}$이므로

$f'(x)=\frac{x^2+2x+2}{x+2}=x+\frac{2}{x+2}$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(x+\frac{2}{x+2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+2\ln(x+2)+C$ ($\because x>-2$)

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로 $f(0)=0$에서

$2\ln 2+C=0$ $\therefore C=-2\ln 2$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2\ln(x+2)-2\ln 2$이므로

$f(2)=2+2\ln 4-2\ln 2=2\ln 2+2$

## 7 답 ②

$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$이므로

$\int\frac{1}{x^2-1}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\frac{1}{2}(\ln|x-1|-\ln|x+1|)+C$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$

## 8 답 ⑤

$x-2=t$로 놓으면 $x=t+2$이고 $1=\frac{dt}{dx}$

$x=2$일 때 $t=0$, $x=3$일 때 $t=1$이므로

$\int_2^3(x+1)\sqrt{x-2}\,dx=\int_0^1(t+3)\sqrt{t}\,dt=\int_0^1(t^{\frac{3}{2}}+3t^{\frac{1}{2}})\,dt$

$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+2t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$=\frac{2}{5}+2=\frac{12}{5}$

따라서 $p=5$, $q=12$이므로

$p+q=17$

## 9 답 ⑤

$\int_1^2\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2-1}dx-\int_2^1\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{x^2-1}dx$

$=\int_1^2\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{x^2-1}dx+\int_1^2\left(x-\frac{1}{2}\right)e^{x^2-1}dx$

$=\int_1^2\left(x+\frac{1}{2}+x-\frac{1}{2}\right)e^{x^2-1}dx$

$=\int_1^2 2xe^{x^2-1}dx$

이때 $x^2-1=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=2$일 때 $t=3$이므로

$\int_1^2 2xe^{x^2-1}dx=\int_0^3 e^t\,dt$

$=\left[e^t\right]_0^3=e^3-1$

## 10 답 $\frac{3}{4}$

주어진 식의 좌변에서 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=e^2$일 때 $t=2$이므로

$\int_1^{e^2}\frac{a(\ln x)^2+1}{x}dx=\int_0^2(at^2+1)\,dt$

$=\left[\frac{1}{3}at^3+t\right]_0^2$

$=\frac{8}{3}a+2$

주어진 식의 우변에서 $1-\cos x=s$로 놓으면 $\sin x=\frac{ds}{dx}$이고

$x=0$일 때 $s=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $s=1$이므로

$12\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^2\sin x\,dx=12\int_0^1 s^2\,ds$

$=12\left[\frac{1}{3}s^3\right]_0^1$

$=12\times\frac{1}{3}=4$

따라서 $\frac{8}{3}a+2=4$이므로 $a=\frac{3}{4}$

## 11 답 $\frac{1}{2}$

$x=3\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=3\sec^2\theta$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=3\sqrt{3}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$이므로

$\int_0^{3\sqrt{3}}\frac{1}{x^2+9}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{9\tan^2\theta+9}\times 3\sec^2\theta\,d\theta$

$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{3\sec^2\theta}{9\sec^2\theta}d\theta$

$=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta$

$=\frac{1}{3}\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\pi}{9}$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{9}$이므로

$\cos 3\alpha=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

## 12 답 ④

$g(x)=-x^2+2x+5$, $h'(x)=e^x$으로 놓으면

$g'(x)=-2x+2$, $h(x)=e^x$

$\therefore\int(-x^2+2x+5)e^x\,dx$

$=(-x^2+2x+5)e^x+\int(2x-2)e^x\,dx$ ····· ㉠

$\int(2x-2)e^x\,dx$에서 $u(x)=2x-2$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=2$, $v(x)=e^x$

$\therefore\int(2x-2)e^x\,dx=(2x-2)e^x-\int 2e^x\,dx$

$=(2x-2)e^x-2e^x+C_1$

$=(2x-4)e^x+C_1$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int(-x^2+2x+5)e^x\,dx=(-x^2+2x+5)e^x+(2x-4)e^x+C_1$

$=(-x^2+4x+1)e^x+C$

따라서 $f(x)=-x^2+4x+1$이므로

$f(1)=-1+4+1=4$

## 13 답 0

㈎의 식을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+2x\ln x+x-2x$

$xf'(x)=-2x\ln x+x$

$\therefore f'(x)=-2\ln x+1$ ····· ㉠

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-2\ln x+1)\,dx$

$u(x)=-2\ln x+1$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=-\frac{2}{x}$, $v(x)=x$

$\therefore f(x)=\int(-2\ln x+1)\,dx$

$=x(-2\ln x+1)-\int(-2)\,dx$

$=-2x\ln x+x+2x+C$

$=-2x\ln x+3x+C$

이때 ㈏에서 $f(1)=3f'(1)$이고 ㉠에서 $f'(1)=1$이므로

$f(1)=3$

즉, $3+C=3$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=-2x\ln x+3x$이므로

$F(x)=-2x^2\ln x+3x^2+x^2\ln x-x^2=-x^2\ln x+2x^2$

$\therefore F(e^2)=-2e^4+2e^4=0$

## 14 답 ③

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)$

$=\int_1^2 xe^x\,dx+\int_2^3 xe^x\,dx+\int_3^4 xe^x\,dx+\cdots+\int_n^{n+1} xe^x\,dx$

$=\int_1^{n+1} xe^x\,dx$

$u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n)=\int_1^{n+1} xe^x\,dx$

$=\left[xe^x\right]_1^{n+1}-\int_1^{n+1} e^x\,dx$

$=(n+1)e^{n+1}-e-\left[e^x\right]_1^{n+1}$

$=(n+1)e^{n+1}-e-(e^{n+1}-e)$

$=ne^{n+1}$

$\therefore \frac{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(6)}{f(1)+f(2)+f(3)}=\frac{6e^7}{3e^4}=2e^3$

## 15 답 $f(x)=e^x+x-e^2-1$

$\int_0^2 f(t)\,dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면 $f(x)=e^x+x+k$이므로

$\int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2(e^t+t+k)\,dt=\left[e^t+\frac{1}{2}t^2+kt\right]_0^2$

$=(e^2+2+2k)-1=e^2+2k+1$

즉, $e^2+2k+1=k$이므로 $k=-e^2-1$

$\therefore f(x)=e^x+x-e^2-1$

## 16 답 $\frac{\ln 2}{2}$

주어진 등식의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)=2^x\ln 2+xf'(x)$

$\therefore f(x)=2^x\ln 2$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=1+a$ $\therefore a=-1$

$\therefore f(-1)=\frac{\ln 2}{2}$

## 17 답 −1

$\int_1^x(x-t)f(t)\,dt=x\ln x+ax+1$에서

$x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt=x\ln x+ax+1$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=\ln x+1+a$

$\therefore \int_1^x f(t)\,dt=\ln x+1+a$

양변을 다시 $x$에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{1}{x}$ $\therefore f(1)=1$

한편 주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a+1$ $\therefore a=-1$

$\therefore a\times f(1)=-1\times 1=-1$

## 18 답 12

$g(x)=\int_0^x(x-t)f(t)\,dt$에서

$g(x)=x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$g'(x)=\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)$

$=\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x 2\cos\pi t\,dt$

$=\left[\frac{2}{\pi}\sin\pi t\right]_0^x$

$=\frac{2}{\pi}\sin\pi x$

$g'(x)=0$에서 $\sin\pi x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$ 또는 …

$x\geq 0$에서 함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | 1 | … | 2 | … | 3 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | 0 | − |
| $g(x)$ | 0 | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ |

따라서 함수 $g(x)$는 $x=2$, $x=4$, $x=6$, …에서 극소를 갖는다.

즉, $a_n=2n$이므로 $a_6=12$

## 19 답 ①

$f(x)=\int_0^x\frac{3t-3}{t^2-2t+3}\,dt$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{3x-3}{x^2-2x+3}$

$f'(x)=0$에서 $3x-3=0$ $\therefore x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | 1 | … |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(1)=\int_0^1 \frac{3t-3}{t^2-2t+3}dt$

$t^2-2t+3=u$로 놓으면 $2t-2=\frac{du}{dt}$이고

$t=0$일 때 $u=3$, $t=1$일 때 $u=2$이므로

$\int_0^1 \frac{3t-3}{t^2-2t+3}dt=\int_3^2 \frac{3}{2u}du=\frac{3}{2}\left[\ln|u|\right]_3^2$

$=\frac{3}{2}(\ln 2-\ln 3)=\frac{3}{2}\ln\frac{2}{3}$

## 20 답 ⑤

$f(t)=\left|\frac{t}{\pi}\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$라 하고 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{h\to0}\frac{1}{2h}\int_{\pi-h}^{\pi+3h}\left|\frac{t}{\pi}\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|dt$

$=\lim_{h\to0}\frac{1}{2h}\int_{\pi-h}^{\pi+3h}f(t)\,dt=\lim_{h\to0}\frac{F(\pi+3h)-F(\pi-h)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(\pi+3h)-F(\pi)+F(\pi)-F(\pi-h)}{2h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{F(\pi+3h)-F(\pi)}{3h}\times\frac{3}{2}+\lim_{h\to0}\frac{F(\pi-h)-F(\pi)}{-h}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{2}F'(\pi)+\frac{1}{2}F'(\pi)=2F'(\pi)$

$=2f(\pi)=2\left|\tan\frac{3}{4}\pi\right|=2$

# 중단원 기출 문제 2회

## 1 답 $\sqrt{3}$

$ax+3=t$로 놓으면 $a=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int(ax+3)^8dx=\int t^8\times\frac{1}{a}dt$

$=\frac{1}{9a}t^9+C=\frac{1}{9a}(ax+3)^9+C$

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 9이므로

$\frac{1}{9a}\times a^9=9$, $a^8=81=(\sqrt{3})^8$ $\therefore a=\sqrt{3}$ ($\because a>0$)

## 2 답 ②

$x^3+6x=t$로 놓으면 $3x^2+6=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int(x^2+2)e^{x^3+6x}dx=\int e^t\times\frac{1}{3}dt$

$=\frac{1}{3}e^t+C=\frac{1}{3}e^{x^3+6x}+C$

$f(0)=2$에서 $\frac{1}{3}+C=2$ $\therefore C=\frac{5}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}e^{x^3+6x}+\frac{5}{3}$이므로 $f(1)=\frac{1}{3}e^7+\frac{5}{3}$

## 3 답 9

㈎에서

$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=f'(x)+f'(x)=2f'(x)$

즉, $2f'(x)=\frac{4\ln x+6}{x}$이므로

$f'(x)=\frac{2\ln x+3}{x}$

이때 $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{2\ln x+3}{x}dx=\int(2t+3)\,dt$

$=t^2+3t+C=(\ln x)^2+3\ln x+C$

㈏에서 $C=5$

따라서 $f(x)=(\ln x)^2+3\ln x+5$이므로

$f(e)=1+3+5=9$

## 4 답 ⑤

$f(x)=\int 2\sin 4x\cos^2 2x\,dx+\int 4\sin^3 2x\cos 2x\,dx$

$=\int(2\sin 4x\cos^2 2x+2\sin^2 2x\sin 4x)\,dx$

$=\int 2\sin 4x(\cos^2 2x+\sin^2 2x)\,dx$

$=\int 2\sin 4x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 4x+C$

$f(\pi)=\frac{1}{2}$에서 $-\frac{1}{2}+C=\frac{1}{2}$ $\therefore C=1$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}\cos 4x+1$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

## 5 답 10

$f(x)=\int\frac{4^x\ln 2+x}{4^x+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{4^x\ln 4+2x}{4^x+x^2}dx$

$=\frac{1}{2}\int\frac{(4^x+x^2)'}{4^x+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(4^x+x^2)+C$ ($\because 4^x+x^2>0$)

$f(0)=\frac{\ln 5}{2}$에서 $C=\frac{\ln 5}{2}$

즉, $f(x)=\frac{1}{2}\ln(4^x+x^2)+\frac{\ln 5}{2}$이므로

$f(-1)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{4}+1\right)+\frac{\ln 5}{2}=\ln\frac{5}{2}$

따라서 $p=2$, $q=5$이므로 $pq=10$

## 6 답 $3\ln 2$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(-\frac{3x}{x+1}\right)dx$

$=\int\left(-3+\frac{3}{x+1}\right)dx=-3x+3\ln|x+1|+C$

$f(0)=3$에서 $C=3$

따라서 $f(x)=-3x+3\ln|x+1|+3$이므로
$f(1)=-3+3\ln 2+3=3\ln 2$

## 7 답 9

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{6}{x^2-9}dx$
$=\int\frac{6}{(x-3)(x+3)}dx=\int\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+3}\right)dx$
$=\ln|x-3|-\ln|x+3|+C=\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+C$
방정식 $f(x)=0$의 한 근이 1이므로 $f(1)=0$에서
$\ln\frac{2}{4}+C=0 \quad \therefore C=\ln 2$
$\therefore f(x)=\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|+\ln 2=\ln 2\left|\frac{x-3}{x+3}\right|$
$f(x)=0$에서 $\ln 2\left|\frac{x-3}{x+3}\right|=0$, $2\left|\frac{x-3}{x+3}\right|=1$
$\frac{x-3}{x+3}=-\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{x-3}{x+3}=\frac{1}{2}$
$2x-6=-x-3$ 또는 $2x-6=x+3$
$\therefore x=1$ 또는 $x=9$
따라서 나머지 한 근은 9이다.

## 8 답 4

$x^3+8=t$로 놓으면 $3x^2=\frac{dt}{dx}$이고
$x=0$일 때 $t=8$, $x=a$일 때 $t=a^3+8$이므로
$\int_0^a\frac{3x^2}{x^3+8}dx=\int_8^{a^3+8}\frac{1}{t}dt=\Big[\ln|t|\Big]_8^{a^3+8}$
$=\ln(a^3+8)-\ln 8\ (\because a^3+8>0)$
$=\ln\left(\frac{a^3}{8}+1\right)$
따라서 $\ln\left(\frac{a^3}{8}+1\right)=2\ln 3$이므로 $\ln\left(\frac{a^3}{8}+1\right)=\ln 9$
$\frac{a^3}{8}+1=9$, $a^3=64 \quad \therefore a=4$

다른 풀이

$\int_0^a\frac{3x^2}{x^3+8}dx=\int_0^a\frac{(x^3+8)'}{x^3+8}dx=\Big[\ln|x^3+8|\Big]_0^a$
$=\ln(a^3+8)-\ln 8\ (\because a^3+8>0)$
$=\ln\left(\frac{a^3}{8}+1\right)$
따라서 $\ln\left(\frac{a^3}{8}+1\right)=2\ln 3$이므로 $a=4$

## 9 답 $\frac{20}{3}$

$\ln x+1=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고
$x=1$일 때 $t=1$, $x=e^3$일 때 $t=4$이므로
$\int_1^{e^3}\left(\frac{\sqrt{\ln x+1}}{x}+\frac{1}{x\sqrt{\ln x+1}}\right)dx$
$=\int_1^{e^3}\left(\sqrt{\ln x+1}+\frac{1}{\sqrt{\ln x+1}}\right)\times\frac{1}{x}dx$
$=\int_1^4\left(\sqrt{t}+\frac{1}{\sqrt{t}}\right)dt=\int_1^4(t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}})\,dt$
$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}\right]_1^4=\left(\frac{16}{3}+4\right)-\left(\frac{2}{3}+2\right)=\frac{20}{3}$

## 10 답 ③

$\{f(x)+f(-x)\}'=f'(x)-f'(-x)$이므로
$f(x)+f(-x)=\int\{f'(x)-f'(-x)\}\,dx$
$=\int 3\cos 2x\sin x\,dx\ (\because$ (나))
$=\int 3(2\cos^2x-1)\sin x\,dx$
$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$이므로
$f(x)+f(-x)=\int 3(2\cos^2x-1)\sin x\,dx$
$=\int(-6t^2+3)\,dt=-2t^3+3t+C$
$=-2\cos^3x+3\cos x+C \quad \cdots\cdots$ ㉠
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면
$f(0)+f(0)=-2+3+C$, $2f(0)=C+1$
$\therefore f(0)=\frac{C+1}{2}$
(가)에서 $f(0)=\frac{1}{2}$이므로 $\frac{C+1}{2}=\frac{1}{2} \quad \therefore C=0$
$\therefore f(x)+f(-x)=-2\cos^3x+3\cos x$
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx$
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}f(x)\,dx$에서 $x=-s$로 놓으면 $1=-\frac{ds}{dx}$이고
$x=-\frac{\pi}{2}$일 때 $s=\frac{\pi}{2}$, $x=0$일 때 $s=0$이므로
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(-s)\,ds+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx$
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(-x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx$
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{f(x)+f(-x)\}\,dx$
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2\cos^3x+3\cos x)\,dx$
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2\cos^2x+3)\cos x\,dx$
$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin^2x+1)\cos x\,dx$
$\sin x=u$로 놓으면 $\cos x=\frac{du}{dx}$이고
$x=0$일 때 $u=0$, $x=\frac{\pi}{2}$일 때 $u=1$이므로
$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin^2x+1)\cos x\,dx$
$=\int_0^1(2u^2+1)\,du$
$=\left[\frac{2}{3}u^3+u\right]_0^1=\frac{5}{3}$

## 11 답 $1+\frac{\pi}{2}$

$x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$이고
$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=\sqrt{2}$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\times 2\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{4\cos^2\theta}\times 2\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\cos^2\theta\,d\theta\ (\because\ \cos\theta>0)$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta+1)\,d\theta=2\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=2\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1+\frac{\pi}{2}$$

## 12 답 ③

(i) $x<0$일 때,

$f(x)=\int e^x\,dx=e^x+C_1$

(ii) $x>0$일 때,

$u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$

$\therefore\ f(x)=\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx$

$=x\sin x+\cos x+C_2$

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$

$1+C_2=1+C_1\qquad\therefore\ C_1=C_2$

이때 $f(\pi)=1$이므로 $-1+C_2=1$

$\therefore\ C_1=2$, $C_2=2$

따라서 $f(x)=\begin{cases}e^x+2 & (x\le 0)\\ x\sin x+\cos x+2 & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$f(0)+f(-\ln 2)=(1+2)+\left(\frac{1}{2}+2\right)=\frac{11}{2}$

## 13 답 $-\frac{1}{4}$

$f(x)=\cos x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=-\sin x$, $g(x)=e^x$

$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=\left[e^x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx$

$=-1+\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx$에서 $u(x)=\sin x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=\cos x$, $v(x)=e^x$

$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\sin x\,dx=\left[e^x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx$

$=e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=-1+e^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx$

$2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=e^{\frac{\pi}{2}}-1$

$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}e^x\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}$

따라서 $a=\frac{1}{2}$, $b=-\frac{1}{2}$이므로 $ab=-\frac{1}{4}$

## 14 답 $\frac{1}{e}$

$u(x)=x^n$, $v'(x)=\frac{1}{e^x}=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=nx^{n-1}$, $v(x)=-e^{-x}$

$\therefore\ I_n=\int_0^1\frac{x^n}{e^x}dx$

$=\left[-x^ne^{-x}\right]_0^1-\int_0^1(-nx^{n-1}e^{-x})\,dx$

$=-\frac{1}{e}+n\int_0^1x^{n-1}e^{-x}\,dx$

$=-\frac{1}{e}+nI_{n-1}$

따라서 $nI_{n-1}-I_n=\frac{1}{e}$이므로

$6I_5-I_6=\frac{1}{e}$

## 15 답 $-\frac{e^2+1}{3}$

$f(x)=\ln x-\int_1^{e^2}\frac{f(t)}{x}dt=\ln x-\frac{1}{x}\int_1^{e^2}f(t)\,dt$

$\int_1^{e^2}f(t)\,dt=k$ ($k$는 상수)로 놓으면 $f(x)=\ln x-\frac{k}{x}$이므로

$\int_1^{e^2}f(t)\,dt=\int_1^{e^2}\left(\ln t-\frac{k}{t}\right)dt=\int_1^{e^2}\ln t\,dt-k\int_1^{e^2}\frac{1}{t}dt$

$\int_1^{e^2}\ln t\,dt$에서 $u(t)=\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=t$

$\therefore\ \int_1^{e^2}\ln t\,dt-k\int_1^{e^2}\frac{1}{t}dt=\left[t\ln t\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}dt-k\left[\ln|t|\right]_1^{e^2}$

$=2e^2-\left[t\right]_1^{e^2}-2k$

$=2e^2-(e^2-1)-2k=e^2+1-2k$

즉, $e^2+1-2k=k$이므로

$3k=e^2+1\qquad\therefore\ k=\frac{e^2+1}{3}$

따라서 $f(x)=\ln x-\frac{e^2+1}{3x}$이므로

$f(1)=-\frac{e^2+1}{3}$

## 16 답 1

$f(x)=\int_0^x\frac{2}{t^2+4}dt\qquad\cdots\cdots$ ㉠

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{2}{x^2+4}$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

$\int_0^a\frac{e^{f(x)}}{x^2+4}dx$에서 $f(x)=u$로 놓으면 $f'(x)=\frac{du}{dx}$, 즉

$\frac{du}{dx}=\frac{2}{x^2+4}$이고

$x=0$일 때 $u=f(0)=0$, $x=a$일 때 $u=f(a)=\ln 3$이므로

$\int_0^a\frac{e^{f(x)}}{x^2+4}dx=\int_0^{\ln 3}\frac{1}{2}e^u\,du=\left[\frac{1}{2}e^u\right]_0^{\ln 3}$

$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$

## 17 답 ②

$x-t=u$로 놓으면 $-1=\dfrac{du}{dt}$

$t=0$일 때 $u=x$, $t=x$일 때 $u=0$이므로

$$F(x)=\int_0^x tf(x-t)\,dt$$
$$=\int_x^0 (x-u)f(u)\times(-1)\,du$$
$$=\int_0^x (x-u)f(u)\,du$$
$$=x\int_0^x f(u)\,du-\int_0^x uf(u)\,du$$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$F'(x)=\int_0^x f(u)\,du+xf(x)-xf(x)$$
$$=\int_0^x f(u)\,du=\int_0^x \frac{2u}{u^2+1}du$$
$$=\int_0^x \frac{(u^2+1)'}{u^2+1}du$$
$$=\Big[\ln|u^2+1|\Big]_0^x$$
$$=\ln(x^2+1)\ (\because\ x^2+1>0)$$

$F'(a)=\ln 5$에서

$\ln(a^2+1)=\ln 5$, $a^2+1=5$

$a^2=4$ $\quad\therefore\ a=2\ (\because\ a>0)$

## 18 답 294

$f(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{n^2-(\ln t)^2}{t}dt$에서 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f'(x)=\dfrac{n^2-(\ln x)^2}{x}$

$f'(x)=0$에서 $n^2-(\ln x)^2=0$

$(n+\ln x)(n-\ln x)=0$, $\ln x=-n$ 또는 $\ln x=n$

$\therefore\ x=e^{-n}$ 또는 $x=e^n$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $e^{-n}$ | … | $e^n$ | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^n$에서 극대이므로 극댓값은

$f(e^n)=\displaystyle\int_1^{e^n}\frac{n^2-(\ln t)^2}{t}dt$

$\ln t=u$로 놓으면 $\dfrac{1}{t}=\dfrac{du}{dt}$이고

$t=1$일 때 $u=0$, $t=e^n$일 때 $u=n$이므로

$$f(e^n)=\int_1^{e^n}\frac{n^2-(\ln t)^2}{t}dt$$
$$=\int_0^n (n^2-u^2)\,du$$
$$=\Big[n^2u-\frac{1}{3}u^3\Big]_0^n$$
$$=n^3-\frac{n^3}{3}=\frac{2}{3}n^3$$

즉, $g(n)=\dfrac{2}{3}n^3$이므로

$$\sum_{n=1}^{6}g(n)=\sum_{n=1}^{6}\frac{2}{3}n^3=\frac{2}{3}\sum_{n=1}^{6}n^3=\frac{2}{3}\times\left(\frac{6\times7}{2}\right)^2=294$$

## 19 답 $\dfrac{2e^2}{e^2+1}$

$0<x<2$이므로

$$f(x)=\int_x^{x+2}|2-t|e^{2-t}dt$$
$$=\int_x^2(2-t)e^{2-t}dt-\int_2^{x+2}(2-t)e^{2-t}dt$$

$\displaystyle\int(2-t)e^{2-t}dt$에서 $u(t)=2-t$, $v'(t)=e^{2-t}$으로 놓으면

$u'(t)=-1$, $v(t)=-e^{2-t}$이므로

$$\int(2-t)e^{2-t}dt=-(2-t)e^{2-t}-\int e^{2-t}dt$$
$$=(t-2)e^{2-t}+e^{2-t}+C$$
$$=(t-1)e^{2-t}+C$$

$$\therefore\ f(x)=\int_x^2(2-t)e^{2-t}dt-\int_2^{x+2}(2-t)e^{2-t}dt$$
$$=\Big[(t-1)e^{2-t}\Big]_x^2-\Big[(t-1)e^{2-t}\Big]_2^{x+2}$$
$$=\{1-(x-1)e^{2-x}\}-\{(x+1)e^{-x}-1\}$$
$$=(1-x)e^{2-x}-(x+1)e^{-x}+2$$

양변을 $x$에 대하여 미분하면

$$f'(x)=-e^{2-x}-(1-x)e^{2-x}-e^{-x}+(x+1)e^{-x}$$
$$=(x-2)e^{2-x}+xe^{-x}$$
$$=\{(e^2+1)x-2e^2\}e^{-x}$$

$f'(x)=0$에서

$(e^2+1)x-2e^2=0\ (\because\ e^{-x}>0)$

$\therefore\ x=\dfrac{2e^2}{e^2+1}$

$0<x<2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | 0 | … | $\frac{2e^2}{e^2+1}$ | … | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↘ | 극소 | ↗ | |

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{2e^2}{e^2+1}$에서 극소이면서 최소이므로

$a=\dfrac{2e^2}{e^2+1}$

## 20 답 ②

$f(t)=e^{2t}(\sin t-\cos t)$라 하고 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to2\pi}\frac{1}{x^2-4\pi^2}\int_{2\pi}^{x}e^{2t}(\sin t-\cos t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to2\pi}\frac{1}{x^2-4\pi^2}\int_{2\pi}^{x}f(t)\,dt$$
$$=\lim_{x\to2\pi}\frac{F(x)-F(2\pi)}{x^2-4\pi^2}$$
$$=\lim_{x\to2\pi}\frac{F(x)-F(2\pi)}{x-2\pi}\times\frac{1}{x+2\pi}$$
$$=\frac{1}{4\pi}F'(2\pi)$$
$$=\frac{1}{4\pi}f(2\pi)$$
$$=-\frac{e^{4\pi}}{4\pi}$$

# 10 / 정적분의 활용

56~61쪽

## 중단원 기출 문제 1회

**1** 답 $\frac{10}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(2+\frac{3k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(2+\frac{3k}{n}\right)\times\frac{3}{n}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\int_{2}^{5}\sin x\,dx$$

따라서 $a=\frac{1}{3}$, $b=2$, $c=5$이므로 $abc=\frac{10}{3}$

**2** 답 $4-9\ln 2$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}f\left(\frac{k}{n}\right)\times\frac{1}{n}$$
$$=\int_{0}^{1}\frac{4x-5}{1+x}dx=\int_{0}^{1}\left(4-\frac{9}{x+1}\right)dx$$
$$=\Big[4x-9\ln|x+1|\Big]_{0}^{1}$$
$$=4-9\ln 2$$

**3** 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(\frac{n+2}{n}\right)^2+\left(\frac{n+4}{n}\right)^2+\left(\frac{n+6}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{3n}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\left(1+\frac{4}{n}\right)^2+\left(1+\frac{6}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{2n}{n}\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^2\times\frac{2}{n}$$
$$=\frac{1}{2}\int_{1}^{3}x^2dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{1}^{3}$$
$$=\frac{1}{2}\left(9-\frac{1}{3}\right)=\frac{13}{3}$$

**4** 답 $\frac{5}{6}$

점 $P_k$가 $\overline{AB}$를 $k:(n-k)$로 내분하므로

$\overline{AP_k}=\frac{k}{n}$

삼각형 $OAP_k$에서

$$\overline{OP_k}^2=\overline{OA}^2+\overline{AP_k}^2-2\overline{OA}\times\overline{AP_k}\cos 60^\circ$$
$$=1+\left(\frac{k}{n}\right)^2-2\times1\times\frac{k}{n}\times\frac{1}{2}$$
$$=\left(\frac{k}{n}\right)^2-\frac{k}{n}+1$$

따라서 $l_k=\left(\frac{k}{n}\right)^2-\frac{k}{n}+1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}l_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2-\frac{k}{n}+1\right\}\times\frac{1}{n}$$
$$=\int_{0}^{1}(x^2-x+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x\right]_{0}^{1}=\frac{5}{6}$$

**5** 답 3

곡선 $y=f(x)$와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이가 7이므로

$$\int_{0}^{2}f(x)\,dx=7 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\therefore\ \int_{0}^{2}xf'(x)\,dx=\Big[xf(x)\Big]_{0}^{2}-\int_{0}^{2}f(x)\,dx$$ → $u(x)=x$, $v'(x)=f'(x)$로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=f(x)$

$$=2f(2)-7\ (\because\ ㉠)$$
$$=2\times5-7=3$$

**6** 답 ②

곡선 $y=(x-1)e^x$과 $x$축의 교점의 $x$좌표는 $(x-1)e^x=0$에서

$x-1=0\ (\because\ e^x>0)$ $\therefore\ x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^{\frac{3}{2}}|(x-1)e^x|\,dx$$ → $u(x)=x-1$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=e^x$

$$=\int_{-2}^{1}\{-(x-1)e^x\}\,dx+\int_{1}^{\frac{3}{2}}(x-1)e^x\,dx$$
$$=-\left(\Big[(x-1)e^x\Big]_{-2}^{1}-\int_{-2}^{1}e^x\,dx\right)+\Big[(x-1)e^x\Big]_{1}^{\frac{3}{2}}-\int_{1}^{\frac{3}{2}}e^x\,dx$$
$$=-3e^{-2}+\Big[e^x\Big]_{-2}^{1}+\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}-\Big[e^x\Big]_{1}^{\frac{3}{2}}$$
$$=-3e^{-2}+(e-e^{-2})+\frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}}-(e^{\frac{3}{2}}-e)$$
$$=2e-\frac{1}{2}e\sqrt{e}-\frac{4}{e^2}$$

**7** 답 $e^4$

$y=\frac{3}{x}$을 $x$에 대하여 풀면 $x=\frac{3}{y}$

곡선 $y=\frac{3}{x}$과 $y$축 및 두 직선 $y=e$, $y=k$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{e}^{k}\frac{3}{y}dy=\Big[3\ln|y|\Big]_{e}^{k}=3\ln k-3\ (\because\ k>e)$$

따라서 $3\ln k-3=9$이므로

$\ln k=4$ $\therefore\ k=e^4$

**8** 답 $\frac{1}{3}$

곡선 $y=2\sqrt{x}$와 직선 $y=2x$의 교점의 $x$좌표는 $2\sqrt{x}=2x$에서

$4x=4x^2$, $4x(x-1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

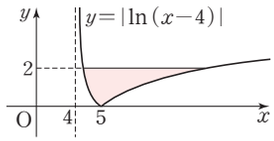
$$\int_{0}^{1}(2\sqrt{x}-2x)\,dx=\int_{0}^{1}(2x^{\frac{1}{2}}-2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2\right]_{0}^{1}=\frac{1}{3}$$

## 9 답 ③

곡선 $y=\ln(x-4)$와 $x$축의 교점의 $x$좌표는

$\ln(x-4)=0$에서

$x-4=1 \quad \therefore x=5$




$4<x\le5$에서 $y=|\ln(x-4)|=-\ln(x-4)$이므로 $x$에 대하여 풀면

$x-4=e^{-y} \quad \therefore x=e^{-y}+4$

$x\ge5$에서 $y=|\ln(x-4)|=\ln(x-4)$이므로 $x$에 대하여 풀면

$x-4=e^{y} \quad \therefore x=e^{y}+4$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^2\{e^y+4-(e^{-y}+4)\}\,dy=\int_0^2(e^y-e^{-y})\,dy$$
$$=\left[e^y+e^{-y}\right]_0^2$$
$$=(e^2+e^{-2})-2$$
$$=e^2+\frac{1}{e^2}-2$$

## 10 답 1

자연수 $n$에 대하여 $\frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n+1}$이므로

$$S_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\frac{1}{2n-1}\sin x-\frac{1}{2n+1}\sin x\right|dx$$
$$=\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,dx$$
$$=\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx\ (\because \sin x\ge0)$$
$$=\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\times\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=1$$

## 11 답 ①

$f(x)=ke^{x-1}$이라 하면 $f'(x)=ke^{x-1}$

$g(x)=2x$라 하면 $g'(x)=2$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 접점의 좌표를 $(t,\ ke^{t-1})$이라 하면

$f'(t)=g'(t)$에서 $ke^{t-1}=2$ ····· ㉠

점 $(t,\ ke^{t-1})$은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 교점이므로

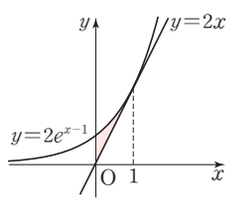
$f(t)=g(t)$에서 $ke^{t-1}=2t$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$t=1,\ k=2$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^1(2e^{x-1}-2x)\,dx=\left[2e^{x-1}-x^2\right]_0^1$$
$$=1-\frac{2}{e}$$




## 12 답 ②

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^k(4\sqrt{x}-2x)\,dx=0$$

$$\left[\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2\right]_0^k=0$$

$$\frac{8}{3}k\sqrt{k}-k^2=0,\ k\sqrt{k}\left(\frac{8}{3}-\sqrt{k}\right)=0$$

$\sqrt{k}=\frac{8}{3}\ (\because k>4) \quad \therefore k=\frac{64}{9}$

## 13 답 12

곡선 $y=\sec^2x$와 $x$축 및 두 직선 $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{3}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면

$$S_1=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sec^2x\,dx=\left[\tan x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$x$축 및 세 직선 $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{\pi}{3}$, $y=\frac{\sqrt{k}}{\pi}$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

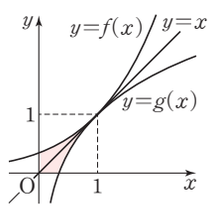
$$S_2=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\times\frac{\sqrt{k}}{\pi}=\frac{\sqrt{k}}{6}$$

이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$\frac{\sqrt{k}}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \sqrt{k}=2\sqrt{3} \quad \therefore k=12$

## 14 답 $1-\frac{2}{e}$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $x=1$에서 서로 접하므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 $x=1$에서 서로 접한다.




즉, $f(1)=1$에서

$ke=1 \quad \therefore k=\frac{1}{e}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{e}e^x=e^{x-1}$

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 $x$축 및 $y$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 $y$축 및 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로 구하는 도형의 넓이는

$$2\int_0^1\{f(x)-x\}\,dx=2\int_0^1(e^{x-1}-x)\,dx$$
$$=2\left[e^{x-1}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$
$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{e}\right)=1-\frac{2}{e}$$

## 15 답 $\pi-\frac{\pi^2}{4}$

밑면으로부터 높이가 $x$인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\pi\tan^2x$

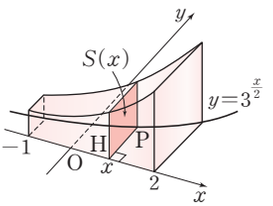
따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} S(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi\tan^2 x\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x-1)\,dx$$
$$=\pi\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\pi-\frac{\pi^2}{4}$$

## 16 답 $\frac{26}{3\ln 3}$

$\mathrm{P}(x,\ 3^{\frac{x}{2}})$, $\mathrm{H}(x,\ 0)\ (-1\le x\le 2)$

이므로 $\overline{\mathrm{PH}}=3^{\frac{x}{2}}$을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면




$S(x)=(3^{\frac{x}{2}})^2=3^x$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_{-1}^{2} S(x)\,dx=\int_{-1}^{2} 3^x\,dx=\Big[\frac{3^x}{\ln 3}\Big]_{-1}^{2}$$
$$=\frac{26}{3\ln 3}$$

## 17 답 $\frac{e}{2}-1$

곡선 $y=\frac{\ln x}{x}$와 $x$축 및 직선 PQ, 즉 직선 $x=t\ (1\le t\le e)$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\int_1^t \frac{\ln x}{x}\,dx$$ ← $\ln x=s$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{ds}{dx}$이고, 적분 구간은 $[0,\ \ln t]$이다.

$$=\int_0^{\ln t} s\,ds=\Big[\frac{1}{2}s^2\Big]_0^{\ln t}$$
$$=\frac{1}{2}(\ln t)^2$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^e S(t)\,dt=\frac{1}{2}\int_1^e (\ln t)^2\,dt$$ ← $g(t)=(\ln t)^2$, $h'(t)=1$로 놓으면 $g'(t)=\frac{2\ln t}{t}$, $h(t)=t$

$$=\frac{1}{2}\Big\{\Big[t(\ln t)^2\Big]_1^e-\int_1^e 2\ln t\,dt\Big\}$$
$$=\frac{e}{2}-\int_1^e \ln t\,dt$$ ← $u(t)=\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면 $u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=t$

$$=\frac{e}{2}-\Big(\Big[t\ln t\Big]_1^e-\int_1^e dt\Big)$$
$$=\frac{e}{2}-e+\Big[t\Big]_1^e=\frac{e}{2}-1$$

## 18 답 ⑤

시각 $t=a\ (a>0)$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^a (3t^2-4t)\,dt=\Big[t^3-2t^2\Big]_0^a=a^3-2a^2$$

점 P가 원점에서 출발한 후 다시 원점으로 돌아오면 점 P의 위치는 0이므로 $a^3-2a^2=0$에서

$a^2(a-2)=0$ $\quad\therefore a=2\ (\because a>0)$

$3t^2-4t=0$에서 $t(3t-4)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=\frac{4}{3}$

따라서 $0\le t\le\frac{4}{3}$일 때 $v(t)\le 0$, $\frac{4}{3}\le t\le 2$일 때 $v(t)\ge 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 |3t^2-4t|\,dt=\int_0^{\frac{4}{3}} (-3t^2+4t)\,dt+\int_{\frac{4}{3}}^2 (3t^2-4t)\,dt$$
$$=\Big[-t^3+2t^2\Big]_0^{\frac{4}{3}}+\Big[t^3-2t^2\Big]_{\frac{4}{3}}^2$$
$$=\frac{32}{27}+\frac{32}{27}$$
$$=\frac{64}{27}$$

## 19 답 $\frac{7}{4}$

$\frac{dx}{dt}=e^{2t}-a$, $\frac{dy}{dt}=2\sqrt{a}e^t$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2 \sqrt{(e^{2t}-a)^2+(2\sqrt{a}e^t)^2}\,dt=\int_0^2 \sqrt{e^{4t}+2ae^{2t}+a^2}\,dt$$
$$=\int_0^2 \sqrt{(e^{2t}+a)^2}\,dt$$
$$=\int_0^2 (e^{2t}+a)\,dt$$
$$=\Big[\frac{1}{2}e^{2t}+at\Big]_0^2$$
$$=\frac{e^4}{2}+2a-\frac{1}{2}$$

즉, $\frac{e^4}{2}+2a-\frac{1}{2}=\frac{e^4}{2}+3$이므로

$2a=\frac{7}{2}$ $\quad\therefore a=\frac{7}{4}$

## 20 답 ①

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\Big\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\Big\}$$
$$=f'(x)+f'(x)=2f'(x)$$

즉, $2f'(x)=2\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$이므로

$f'(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{4\sqrt{x}}$

따라서 $1\le x\le 4$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는

$$\int_1^4 \sqrt{1+\Big(\sqrt{x}-\frac{1}{4\sqrt{x}}\Big)^2}\,dx=\int_1^4 \sqrt{x+\frac{1}{2}+\frac{1}{16x}}\,dx$$
$$=\int_1^4 \sqrt{\Big(\sqrt{x}+\frac{1}{4\sqrt{x}}\Big)^2}\,dx$$
$$=\int_1^4 \Big(\sqrt{x}+\frac{1}{4\sqrt{x}}\Big)\,dx$$
$$=\int_1^4 \Big(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}x^{-\frac{1}{2}}\Big)\,dx$$
$$=\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}\Big]_1^4$$
$$=\frac{19}{3}-\frac{7}{6}=\frac{31}{6}$$

## 중단원 기출 문제 2회

**1** 답 ②

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(n+k)-f(n)}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(n+k)^2-n^2}{n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2nk+k^2}{n^3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2k}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}\times\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1(2x+x^2)\,dx$$
$$=\left[x^2+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{4}{3}$$

**2** 답 3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{3n}+\sin\frac{2\pi}{3n}+\sin\frac{3\pi}{3n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{3n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}6\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{3n}\times\frac{\pi}{3n}$$
$$=6\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx$$
$$=6\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=6\left\{-\frac{1}{2}-(-1)\right\}$$
$$=6\times\frac{1}{2}=3$$

**3** 답 ②

B$(n+k,\ 0)$이므로 A$(n+k,\ 2(n+k))$

즉, $\overline{AB}=2(n+k)$이므로

$f(k)=2\times2(n+k)=4(n+k)$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4(n+k)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}$$
$$=\frac{1}{4}\int_1^2\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[\ln|x|\right]_1^2$$
$$=\frac{\ln 2}{4}$$

**4** 답 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

구하는 도형의 넓이는

$$\int_1^{e^2}\frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx=\int_0^2 t^{\frac{1}{2}}\,dt$$ ← $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고, 적분 구간은 $[0,\ 2]$이다.

$$=\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$

**5** 답 $\frac{3}{2}$

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{|\cos nx|}{n+2}\,dx$$ ← $nx=t$로 놓으면 $n=\frac{dt}{dx}$이고, 적분 구간은 $[0,\ \pi]$이다.

$$=\int_0^{\pi}\frac{|\cos t|}{n(n+2)}\,dt$$ → $0\le t\le\frac{\pi}{2}$에서 $\cos t\ge0$, $\frac{\pi}{2}\le t\le\pi$에서 $\cos t\le0$

$$=\frac{1}{n(n+2)}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-\cos t)\,dt\right\}$$
$$=\frac{1}{n(n+2)}\left(\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$$
$$=\frac{1}{n(n+2)}(1+1)$$
$$=\frac{2}{n(n+2)}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{3}{2}$$

**6** 답 ③

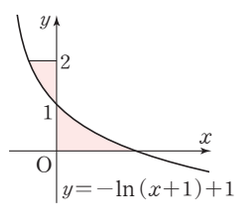
$y=-\ln(x+1)+1$을 $x$에 대하여 풀면

$\ln(x+1)=1-y$, $x+1=e^{1-y}$

$\therefore\ x=e^{1-y}-1$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^1(e^{1-y}-1)\,dy+\int_1^2\{-(e^{1-y}-1)\}\,dy$$
$$=\left[-e^{1-y}-y\right]_0^1+\left[e^{1-y}+y\right]_1^2$$
$$=e+\frac{1}{e}-2$$




**7** 답 $\frac{1}{2}\ln3-\frac{1}{6}$

곡선 $y=\frac{1}{2x+1}\left(x>-\frac{1}{2}\right)$과 직선 $y=\frac{1}{3}x$의 교점의 $x$좌표는

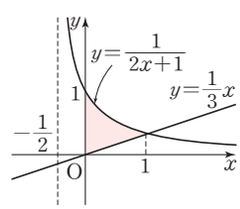
$\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{3}x$에서 $2x^2+x-3=0$

$(2x+3)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1\ \left(\because\ x>-\frac{1}{2}\right)$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^1\left(\frac{1}{2x+1}-\frac{1}{3}x\right)dx=\left[\frac{1}{2}\ln|2x+1|-\frac{1}{6}x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}\ln3-\frac{1}{6}$$



## 8 답 12

$y=3x^2$을 $x$에 대하여 풀면

$\frac{1}{3}y=x^2 \quad \therefore x=\sqrt{\frac{y}{3}}$

$y=\frac{3}{x}$을 $x$에 대하여 풀면 $x=\frac{3}{y}$

두 곡선 $x=\sqrt{\frac{y}{3}}$, $x=\frac{3}{y}$의 교점의 $y$좌표는

$\sqrt{\frac{y}{3}}=\frac{3}{y}$에서 $\frac{y}{3}=\frac{9}{y^2}$

$y^3=27 \quad \therefore y=3$

따라서 두 곡선 $y=3x^2$, $y=\frac{3}{x}$과 직선 $y=k$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_3^k\left(\sqrt{\frac{y}{3}}-\frac{3}{y}\right)dy=\int_3^k\left\{\left(\frac{y}{3}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{y}\right\}dy$$
$$=\left[\frac{2}{3\sqrt{3}}y^{\frac{3}{2}}-3\ln|y|\right]_3^k$$
$$=\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}k\sqrt{k}-3\ln k\right)-(2-3\ln 3)$$
$$=\frac{2}{3\sqrt{3}}k\sqrt{k}-2-3\ln\frac{k}{3}$$

즉, $\frac{2}{3\sqrt{3}}k\sqrt{k}-2-3\ln\frac{k}{3}=14-6\ln 2$이므로

$3\ln\frac{k}{3}=6\ln 2$ → $\frac{2}{3\sqrt{3}}k\sqrt{k}-2=14$, $k\sqrt{k}=24\sqrt{3}$ $\quad \therefore k=12$

$\frac{k}{3}=4 \quad \therefore k=12$

## 9 답 ④

$y=\frac{1}{x}$을 $x$에 대하여 풀면 $x=\frac{1}{y}$

$y=-\frac{2}{x}$를 $x$에 대하여 풀면 $x=-\frac{2}{y}$

따라서 두 곡선 $y=\frac{1}{x}$, $y=-\frac{2}{x}$와 두 직선 $y=1$, $y=k$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_1^k\left\{\frac{1}{y}-\left(-\frac{2}{y}\right)\right\}dy=3\int_1^k\frac{1}{y}dy$$
$$=3\Big[\ln|y|\Big]_1^k=3\ln k \ (\because k>1)$$

즉, $3\ln k=6$이므로

$\ln k=2 \quad \therefore k=e^2$

## 10 답 $\sqrt{3}$

$y=\sqrt{x-3}$에서 $y'=\frac{1}{2\sqrt{x-3}}$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t-3})$ $(t>3)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2\sqrt{t-3}}$이므로 접선의 방정식은

$y-\sqrt{t-3}=\frac{1}{2\sqrt{t-3}}(x-t) \quad \therefore y=\frac{1}{2\sqrt{t-3}}x+\frac{t-6}{2\sqrt{t-3}}$

이 직선이 원점을 지나므로

$0=\frac{t-6}{2\sqrt{t-3}}$, $t-6=0 \quad \therefore t=6$

즉, 점 $(6, \sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은 $y=\frac{1}{2\sqrt{3}}x$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6\times\sqrt{3}-\int_3^6\sqrt{x-3}\,dx$

$=3\sqrt{3}-\int_0^3\sqrt{t}\,dt$ → $x-3=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$이고, 적분 구간은 $[0, 3]$이다.

$=3\sqrt{3}-\int_0^3 t^{\frac{1}{2}}dt$

$=3\sqrt{3}-\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^3$

$=3\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}$

다른 풀이

원점에서 그은 곡선 $y=\sqrt{x-3}$의 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2\sqrt{3}}x$

한편, $y=\sqrt{x-3}$을 $x$에 대하여 풀면

$y^2=x-3 \quad \therefore x=y^2+3$

$y=\frac{1}{2\sqrt{3}}x$를 $x$에 대하여 풀면 $x=2\sqrt{3}y$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^{\sqrt{3}}(y^2+3-2\sqrt{3}y)\,dy=\left[\frac{1}{3}y^3+3y-\sqrt{3}y^2\right]_0^{\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{3}+3\sqrt{3}-3\sqrt{3}=\sqrt{3}$$

## 11 답 $3\pi^2$

$y=x\sin x$에서 $y'=\sin x+x\cos x$

접점의 좌표를 $(t, t\sin t)$ $(t>0)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $\sin t+t\cos t$이므로 접선의 방정식은

$y-t\sin t=(\sin t+t\cos t)(x-t)$

$\therefore y=(\sin t+t\cos t)x-t^2\cos t \quad \cdots\cdots$ ㉠

이 직선이 원점을 지나므로 $0=-t^2\cos t$에서

$t^2\cos t=0$, $\cos t=0$ $(\because t>0)$

$\therefore t=\frac{\pi}{2}$ 또는 $t=\frac{3}{2}\pi$ 또는 $t=\frac{5}{2}\pi$ 또는 …

이때 곡선 $y=x\sin x$의 접선 $y=mx$에서 $m>0$

즉, $\sin t+t\cos t>0$이므로

$t=\frac{\pi}{2}$ 또는 $t=\frac{5}{2}\pi$ 또는 …

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=x$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}(x-x\sin x)\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}x\sin x\,dx$ → $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$

$=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}-\left(\left[-x\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}\cos x\,dx\right)$

$=\left(\frac{25}{8}\pi^2-\frac{\pi^2}{8}\right)-\left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{5}{2}\pi}=3\pi^2$

## 12 답 ②

$y=e^{-2x}$과 $y=\sqrt{e}$의 교점의 좌표는 $e^{-2x}=\sqrt{e}$에서

$e^{-2x}=e^{\frac{1}{2}}$, $-2x=\frac{1}{2} \quad \therefore x=-\frac{1}{4}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$\int_{-\frac{1}{4}}^{0}(\sqrt{e}-e^{-2x})\,dx-\int_0^k e^{-2x}dx=0$

$$\left[\sqrt{e}x+\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{-\frac{1}{4}}^{0}-\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{0}^{k}=0$$

$$\frac{1}{2}-\left(-\frac{\sqrt{e}}{4}+\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}\right)-\left(-\frac{1}{2}e^{-2k}+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$-\frac{\sqrt{e}}{4}+\frac{1}{2}e^{-2k}=0$$

$$\frac{\sqrt{e}}{4}=\frac{1}{2}e^{-2k},\ e^{-2k}=\frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$-2k=\ln\frac{\sqrt{e}}{2} \qquad \therefore\ k=-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{e}}{2}$$

## 13 답 $e-1$

곡선 $y=e^x$과 $y$축 및 직선 $y=e$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_1$이라 하면

$$S_1=\int_0^1(e-e^x)\,dx=\left[ex-e^x\right]_0^1=1$$

직선 $l$과 $y$축 및 직선 $y=e$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S_2$라 하면

$$S_2=\frac{1}{2}\times1\times(e-k)=\frac{e-k}{2}$$

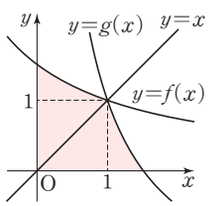
이때 $S_2=\frac{1}{2}S_1$이므로

$$\frac{e-k}{2}=\frac{1}{2},\ e-k=1 \qquad \therefore\ k=e-1$$

## 14 답 $6\ln\frac{3}{2}-1$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 및 $x$축, $y$축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 $x$축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 $x$좌표는 $\frac{3}{x+2}=x$에서




$x^2+2x-3=0$, $(x+3)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1\ (\because\ x>-2)$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$2\int_0^1\{f(x)-x\}\,dx=2\int_0^1\left(\frac{3}{x+2}-x\right)dx$$

$$=2\left[3\ln|x+2|-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1$$

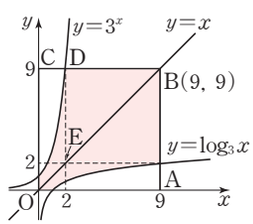
$$=2\left\{\left(3\ln3-\frac{1}{2}\right)-3\ln2\right\}=6\ln\frac{3}{2}-1$$

## 15 답 ②

곡선 $y=3^x$이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하면 $3^x=9$에서 $x=2$이므로

D(2, 9)

점 D를 지나고 $y$축에 평행한 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점을 E라 하면 점 E의 $x$좌표가 2이므로




E(2, 2)

두 곡선 $y=3^x$, $y=\log_3x$는 역함수 관계이고 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=3^x$과 $y$축 및 직선 $y=9$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=\log_3x$와 $x$축 및 직선 $x=9$로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

따라서 구하는 부분의 넓이는 곡선 $y=3^x$과 $y$축 및 두 직선 $y=x$, $y=9$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같으므로

$$2\left\{\int_0^2(3^x-x)\,dx+(\triangle\text{BDE의 넓이})\right\}$$

$$=2\left\{\left[\frac{3^x}{\ln3}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^2+\frac{1}{2}\times7\times7\right\}$$

$$=2\left\{\left(\frac{9}{\ln3}-2\right)-\frac{1}{\ln3}\right\}+49=\frac{16}{\ln3}+45$$

다른 풀이

구하는 부분의 넓이는 정사각형 OABC의 넓이에서 곡선 $y=3^x$과 $y$축 및 직선 $y=9$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배를 뺀 것과 같으므로

$$9^2-2\int_0^2(9-3^x)\,dx=81-2\left[9x-\frac{3^x}{\ln3}\right]_0^2$$

$$=81-2\left(18-\frac{9}{\ln3}+\frac{1}{\ln3}\right)=\frac{16}{\ln3}+45$$

## 16 답 $e^4-1$

입체도형을 밑면으로부터 높이가 $x$인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면 단면의 가로의 길이와 세로의 길이의 비가 2 : 1이므로

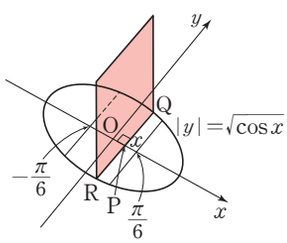
$$S(x)=e^{\frac{x}{4}}\times\frac{1}{2}e^{\frac{x}{4}}=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_0^8S(x)\,dx=\int_0^8\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\,dx=\left[e^{\frac{x}{2}}\right]_0^8=e^4-1$$

## 17 답 4

오른쪽 그림과 같이 $x$축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)\left(-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}\right)$을 지나고 $x$축에 수직인 직선이 곡선 $|y|=\sqrt{\cos x}$와 만나는 두 점을 각각 Q, R라 하면




$\overline{\mathrm{QR}}=2\sqrt{\cos x}$

$\overline{\mathrm{QR}}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=(2\sqrt{\cos x})^2=4\cos x$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}S(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}4\cos x\,dx$$

$$=8\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,dx \rightarrow y=\cos x\text{는 }y\text{축에 대하여 대칭}$$

$$=8\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$=8\times\frac{1}{2}=4$$

## 18 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $v(t)=0$에서 $t-5\sqrt{t}+6=0$

$\sqrt{t}=k$로 놓으면 $k^2-5k+6=0$

$(k-2)(k-3)=0$ $\therefore\ k=2$ 또는 $k=3$

즉, $\sqrt{t}=2$ 또는 $\sqrt{t}=3$이므로 $t=4$ 또는 $t=9$

따라서 $t=4$, $t=9$에서 $v(t)$의 부호가 바뀌므로 점 P는 $t=4$, $t=9$에서 운동 방향을 두 번 바꾼다.

ㄴ. 처음 위치가 0이므로 점 P의 시각 $t$에서의 위치를 $x(t)$라 하면

$x(t)=0+\int_0^t (s-5\sqrt{s}+6)\,ds=\int_0^t (s-5s^{\frac{1}{2}}+6)\,ds$

$=\left[\frac{1}{2}s^2-\frac{10}{3}s^{\frac{3}{2}}+6s\right]_0^t$

$=\frac{1}{2}t^2-\frac{10}{3}t^{\frac{3}{2}}+6t=\frac{1}{2}t^2-\frac{10}{3}t\sqrt{t}+6t$

$x(t)=0$에서

$\frac{1}{2}t^2-\frac{10}{3}t\sqrt{t}+6t=0$, $t(3t-20\sqrt{t}+36)=0$

$\sqrt{t}=k$로 놓으면 $k^2(3k^2-20k+36)=0$

$\therefore\ k=0\ (\because\ 3k^2-20k+36>0)$

즉, $\sqrt{t}=0$이므로 $t=0$

따라서 출발 이후 점 P의 위치는 항상 $x(t)>0$이므로

$0<t<10$에서 점 P는 원점을 통과하지 않는다.

ㄷ. $0\le t\le 4$에서 $v(t)\ge 0$이므로 점 P가 원점을 출발하여 4초 동안 움직인 거리는

$\int_0^4 |v(t)|\,dt=x(4)\ (\because\ x(t)>0)$

$=8-\frac{80}{3}+24=\frac{16}{3}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 19 답 ③

$\frac{dx}{dt}=2$, $\frac{dy}{dt}=\frac{t}{2}-\frac{2}{t}$이므로 점 P의 시각 $t$에서의 속력은

$\sqrt{2^2+\left(\frac{t}{2}-\frac{2}{t}\right)^2}=\sqrt{\frac{t^2}{4}+2+\frac{4}{t^2}}$

$=\sqrt{\left(\frac{t}{2}+\frac{2}{t}\right)^2}=\frac{t}{2}+\frac{2}{t}$

점 P의 속력이 $\frac{5}{2}$가 될 때의 시각 $t$는

$\frac{t}{2}+\frac{2}{t}=\frac{5}{2}$, $t^2-5t+4=0$

$(t-1)(t-4)=0$ $\quad\therefore\ t=1$ 또는 $t=4$

따라서 점 P가 시각 $t=1$에서 움직인 이후 다시 속력이 $\frac{5}{2}$가 될 때의 시각은 $t=4$이므로 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_1^4\left(\frac{t}{2}+\frac{2}{t}\right)dt=\left[\frac{t^2}{4}+2\ln t\right]_1^4$

$=(4+2\ln 4)-\frac{1}{4}$

$=\frac{15}{4}+4\ln 2$

## 20 답 ③

$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$에서 $y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

따라서 $0\le x\le 4$에서 곡선 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$의 길이는

$\int_0^4\sqrt{1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx=\int_0^4\sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}\,dx$

$=\int_0^4\sqrt{\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2}\,dx$

$=\int_0^4\frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$

$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^4=\frac{e^4-e^{-4}}{2}$