개념 루트

정답과 해설

미적분 Ⅱ

정답과 해설

Ⅰ. 수열의 극한

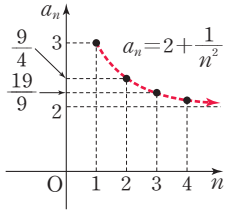
01 수열의 극한

유제 13쪽

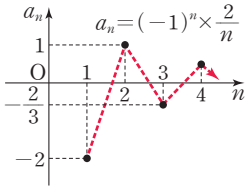
001 (1) 수렴, 2 (2) 수렴, 0 (3) 발산 (4) 발산 (5) 발산 (6) 발산

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하고 a_n의 값의 변화를 그래프로 나타낸 후 수열의 수렴, 발산을 판정한다.

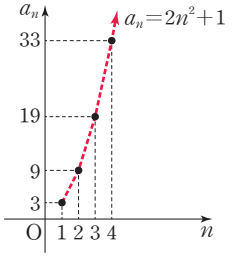
(1) 오른쪽 그림과 같이 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 2에 한없이 가까워진다.
따라서 주어진 수열은 수렴하고, 극한값은 2이다.



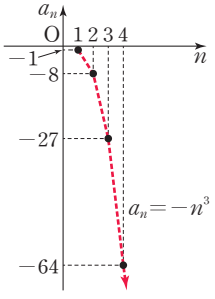
(2) 오른쪽 그림과 같이 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 0에 한없이 가까워진다.
따라서 주어진 수열은 수렴하고, 극한값은 0이다.



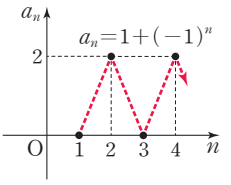
(3) 오른쪽 그림과 같이 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값도 한없이 커진다.
따라서 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.



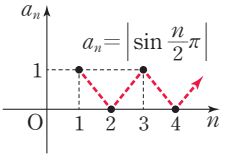
(4) 오른쪽 그림과 같이 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.
따라서 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.



(5) 오른쪽 그림과 같이 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 어느 일정한 값에 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다.
따라서 주어진 수열은 발산(진동)한다.



(6) 오른쪽 그림과 같이 n의 값이 한없이 커질 때, a_n의 값은 어느 일정한 값에 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다.
따라서 주어진 수열은 발산(진동)한다.



002 ㄱ, ㄴ

ㄱ. 수열 8, 8, 8, 8, …은 n의 값이 한없이 커질 때, 8에 수렴한다.

ㄴ. 수열 $\left\{\frac{4}{n+1}\right\}$의 첫째항부터 차례대로 항을 나열하면

$2, \frac{4}{3}, 1, \frac{4}{5}, \cdots$

즉, n의 값이 한없이 커질 때, $\frac{4}{n+1}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

ㄷ. 수열 $\{\log 2n\}$의 첫째항부터 차례대로 항을 나열하면

$\log 2, \log 4, \log 6, \log 8, \cdots$

즉, n의 값이 한없이 커질 때, $\log 2n$의 값도 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

ㄹ. 수열 $\left\{\frac{n}{2}-\frac{1}{n}\right\}$의 첫째항부터 차례대로 항을 나열하면

$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6}, \frac{7}{4}, \cdots$

즉, n의 값이 한없이 커질 때, $\frac{n}{2}-\frac{1}{n}$의 값도 한없이 커지므로 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

따라서 보기에서 수렴하는 수열인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

003 답 ⑤

① 수열 $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \cdots$에서 n의 값이 한없이 커질 때, $\frac{1}{\sqrt{n}}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

② 수열 $1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{7}, \cdots$에서 n의 값이 한없이 커질 때, $\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

③ 수열 $\left\{\frac{3n-1}{n}\right\}$의 첫째항부터 차례대로 항을 나열하면

$2, \frac{5}{2}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \cdots$

즉, n의 값이 한없이 커질 때, $\frac{3n-1}{n}$의 값은 3에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 3에 수렴한다.

④ 수열 $\left\{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$의 첫째항부터 차례대로 항을 나열하면

$\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}, \frac{17}{16}, \cdots$

즉, n의 값이 한없이 커질 때, $1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 1에 수렴한다.

⑤ 수열 $\{(-1)^{n+1}\times 3\}$의 첫째항부터 차례대로 항을 나열하면

$3, -3, 3, -3, \cdots$

즉, n의 값이 한없이 커질 때, $(-1)^{n+1}\times 3$의 값은 어느 일정한 값에 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

따라서 발산하는 수열은 ⑤이다.

개념 확인 17쪽

004 답 (1) **−10** (2) **−3** (3) **−1** (4) **20** (5) **10** (6) **−2**

(1) $\lim_{n\to\infty}(-2a_n)=-2\lim_{n\to\infty}a_n=-2\times 5=-10$

(2) $\lim_{n\to\infty}(b_n-1)=\lim_{n\to\infty}b_n-\lim_{n\to\infty}1=-2-1=-3$

(3) $\lim_{n\to\infty}(a_n+3b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+3\lim_{n\to\infty}b_n$
$=5+3\times(-2)=-1$

(4) $\lim_{n\to\infty}(2a_n-5b_n)=2\lim_{n\to\infty}a_n-5\lim_{n\to\infty}b_n$
$=2\times 5-5\times(-2)=20$

(5) $\lim_{n\to\infty}(-a_nb_n)=-\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n$
$=-5\times(-2)=10$

(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3}{2b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}3}{2\lim_{n\to\infty}b_n}$
$=\frac{5+3}{2\times(-2)}=-2$

005 답 (1) **4** (2) **0** (3) **1** (4) **0** (5) **2** (6) **4**

(1) $\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{3}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}4+3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=4+0=4$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n}-\frac{3}{n^2}\right)=4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$
$=0-0=0$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$
$=\lim_{n\to\infty}1-2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}$
$=1-0+0=1$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(5+\frac{6}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\times\left(\lim_{n\to\infty}5+6\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)$
$=0\times(5+0)=0$

(5) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{n}-1\right)\left(\frac{2}{n^2}-2\right)$
$=\left(5\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim_{n\to\infty}1\right)\left(2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}-\lim_{n\to\infty}2\right)$
$=(0-1)(0-2)=2$

(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}8-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{8-0}{2+0}=4$

006 답 **6**

$\lim_{n\to\infty}\frac{6n-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}6-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$
$=\frac{6-0}{1+0}=6$

$\lim_{n\to\infty}\frac{6n+1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{\lim_{n\to\infty}6+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$
$=\frac{6+0}{1+0}=6$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=6$

007 답 −3

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)라 하자.

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=-4$에서

$\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=-4$

$\therefore\ \alpha+\beta=-4$ ····· ㉠

$\lim_{n\to\infty}(a_n^{\,2}-b_n^{\,2})=12$에서

$\lim_{n\to\infty} a_n^{\,2}-\lim_{n\to\infty} b_n^{\,2}=12$

$\alpha^2-\beta^2=12$ $\therefore\ (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=12$

㉠을 대입하면

$-4(\alpha-\beta)=12$ $\therefore\ \alpha-\beta=-3$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n$

$=\alpha-\beta=-3$

| 다른 풀이 |

두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n^{\,2}-b_n^{\,2}\}$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n-b_n)(a_n+b_n)}{a_n+b_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{\,2}-b_n^{\,2}}{a_n+b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty}(a_n^{\,2}-b_n^{\,2})}{\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)}$$

$$=\frac{12}{-4}=-3$$

008 답 18

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(a_n+3)=6$에서

$\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} 3=6$ $\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n=3$

수열 $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}(b_n-2)=3$에서

$\lim_{n\to\infty} b_n-\lim_{n\to\infty} 2=3$ $\therefore\ \lim_{n\to\infty} b_n=5$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+3b_n}{2a_n-b_n}=\frac{\lim_{n\to\infty} a_n+3\lim_{n\to\infty} b_n}{2\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n}$$

$$=\frac{3+3\times5}{2\times3-5}=18$$

009 답 −4

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\beta$ (α, β는 실수)라 하자.

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=3$에서

$\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n=3$

$\therefore\ \alpha+\beta=3$ ····· ㉠

$\lim_{n\to\infty}(4a_n-b_n)=-8$에서

$4\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} b_n=-8$

$\therefore\ 4\alpha-\beta=-8$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\alpha=-1$, $\beta=4$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} a_n\times\lim_{n\to\infty} b_n$

$=\alpha\beta=-4$

010 답 2

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하자.

$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-4}{6-a_n}=\frac{1}{2}$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-4}{6-a_n}=\frac{3\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty} 4}{\lim_{n\to\infty} 6-\lim_{n\to\infty} a_n}=\frac{3\alpha-4}{6-\alpha}$$

즉, $\frac{3\alpha-4}{6-\alpha}=\frac{1}{2}$이므로 $6\alpha-8=6-\alpha$

$7\alpha=14$ $\therefore\ \alpha=2$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty} a_n=\alpha=2$

011 답 (1) 수렴, 3 (2) 수렴, $\frac{4}{3}$ (3) 발산 (4) 수렴, 0 (5) 수렴, $\frac{1}{2}$ (6) 수렴, $\frac{1}{4}$

(1) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+5}{2n^2-3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{5}{n^2}}{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}$$

$$=\frac{6+0}{2-0+0}$$

$$=3$$

따라서 수열 $\left\{\frac{6n^2+5}{2n^2-3n+2}\right\}$는 3에 수렴한다.

(2) 식을 전개한 후 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(4n-2)}{(n+2)(6n-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2-2}{6n^2+11n-2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{2}{n^2}}{6+\frac{11}{n}-\frac{2}{n^2}}$$

$$=\frac{8-0}{6+0-0}$$

$$=\frac{4}{3}$$

따라서 수열 $\left\{\frac{(2n+1)(4n-2)}{(n+2)(6n-1)}\right\}$는 $\frac{4}{3}$에 수렴한다.

(3) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n-1}{n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1-\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}}$$
$$=\infty$$

따라서 수열 $\left\{\frac{n^2+n-1}{n+5}\right\}$은 발산한다.

(4) 식을 전개한 후 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{(1-n)^3+n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{1-3n+3n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n}+3}$$
$$=\frac{0-0}{0-0+3}$$
$$=0$$

따라서 수열 $\left\{\frac{2n-1}{(1-n)^3+n^3}\right\}$은 0에 수렴한다.

(5) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 $\sqrt{n}$으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$$
$$=\frac{\sqrt{1-0}}{\sqrt{1+0}+1}$$
$$=\frac{1}{2}$$

따라서 수열 $\left\{\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right\}$은 $\frac{1}{2}$에 수렴한다.

(6) 식을 전개한 후 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{4n(n+1)}+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{\sqrt{4n^2+4n}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{\sqrt{4+\frac{4}{n}}+2}$$
$$=\frac{1+0}{\sqrt{4+0}+2}$$
$$=\frac{1}{4}$$

따라서 수열 $\left\{\frac{n+2}{\sqrt{4n(n+1)}+2n}\right\}$는 $\frac{1}{4}$에 수렴한다.

012 ㄱ, ㄹ

ㄱ. 좌변의 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+3n}{4n^2-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{4-\frac{2}{n}}$$
$$=\frac{2+0}{4-0}=\frac{1}{2}$$

ㄴ. 좌변의 식을 전개한 후 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^3으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3+3n-5}{(2n+1)(n^2+3)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^3+3n-5}{2n^3+n^2+6n+3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{3}{n^2}-\frac{5}{n^3}}{2+\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}+\frac{3}{n^3}}$$
$$=\frac{8+0-0}{2+0+0+0}=4$$

ㄷ. 좌변의 식을 전개한 후 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^3으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n^2-1)(n^2+1)}{2n(n^2+3n-4)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^4-1}{2n^3+6n^2-8n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n-\frac{1}{n^3}}{2+\frac{6}{n}-\frac{8}{n^2}}$$
$$=\infty$$

ㄹ. 좌변의 분모, 분자를 분모의 최고차항인 $\sqrt{n^4}$, 즉 n^2으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^4+2n^2+1}+2n^2}{\sqrt{n^4-1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}+2}{\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}}$$
$$=\frac{\sqrt{1+0+0}+2}{\sqrt{1-0}}=3$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

013 ①

첫째항이 1이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=1+(n-1)\times 2=2n-1$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{3+\frac{1}{n}}$$
$$=\frac{2-0}{3+0}=\frac{2}{3}$$

014 (1) 8 (2) $\frac{3}{4}$

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n}{1+2+3+\cdots+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+3n}{\frac{n(n+1)}{2}}$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n^2+6n}{n^2+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{6}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$
$$=\frac{8+0}{1+0}=8$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)}$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}{n\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2(n+1)^2}{4}}{\frac{n^2(n+1)(2n+1)}{6}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{4n+2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{3}{n}}{4+\frac{2}{n}}$$
$$=\frac{3+0}{4+0}=\frac{3}{4}$$

015 (1) $\frac{1}{12}$ (2) $\frac{3}{4}$

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)}{6n+3}$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}}{6n+3}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2}}{6n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{12n+6}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{12+\frac{6}{n}}=\frac{1+0}{12+0}=\frac{1}{12}$$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{6^2}\right)\cdots\left\{1-\frac{1}{(n+3)^2}\right\}$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4^2-1}{4^2}\times\frac{5^2-1}{5^2}\times\frac{6^2-1}{6^2}\times\cdots\times\frac{(n+3)^2-1}{(n+3)^2}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(4-1)(4+1)}{4^2}\times\frac{(5-1)(5+1)}{5^2}\times\frac{(6-1)(6+1)}{6^2}\times\cdots\times\frac{(n+3-1)(n+3+1)}{(n+3)^2}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3\times5}{4\times4}\times\frac{4\times6}{5\times5}\times\frac{5\times7}{6\times6}\times\cdots\times\frac{(n+2)(n+4)}{(n+3)(n+3)}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+4)}{4(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+12}{4n+12}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{12}{n}}{4+\frac{12}{n}}=\frac{3+0}{4+0}=\frac{3}{4}$$

016 $\frac{3}{2}$

첫째항이 2이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합은
$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{n\{2\times2+(n-1)\times3\}}{2}$$
$$=\frac{3n^2+n}{2}$$
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{2}$$
$$=\frac{3+0}{2}=\frac{3}{2}$$

017 2

$\lim_{n\to\infty}\{\log_3(3n-1)+\log_3(3n+1)-2\log_3(n+1)\}$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{(3n-1)(3n+1)}{(n+1)^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{9n^2-1}{n^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{9-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$$
$$=\log_3\frac{9-0}{1+0+0}=\log_3 9=\log_3 3^2=2$$

018 답 4

주어진 식의 좌변의 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{an+2b+\frac{8}{n}}{2+\frac{4}{n}}=-4 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$a\neq 0$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$a=0$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2b+\frac{8}{n}}{2+\frac{4}{n}}=\frac{2b+0}{2+0}=b$$

따라서 $b=-4$이므로

$a-b=0-(-4)=4$

019 답 9

$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+2)(n-2)}{an^2-n+1}=\frac{1}{3}$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-4n-4}{an^2-n+1}=\frac{1}{3}$

좌변의 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{4}{n}-\frac{4}{n^2}}{a-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{3-0-0}{a-0+0}=\frac{3}{a}$$

따라서 $\frac{3}{a}=\frac{1}{3}$이므로 $a=9$

020 답 13

주어진 식의 좌변의 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a-1)n+b+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=6 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$a-1\neq 0$, 즉 $a\neq 1$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$a=1$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{b+0-0}{2-0+0}=\frac{b}{2}$$

따라서 $\frac{b}{2}=6$이므로

$b=12$

$\therefore a+b=1+12=13$

021 답 $\frac{2}{3}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2-3n-1}}{an^2+n}=b \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 좌변의 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{4}{n^2}-\frac{3}{n^3}-\frac{1}{n^4}}}{a+\frac{1}{n}}=b$$

$a\neq 0$이면 $b=0$이므로

$a=0$

이를 ㉠에 대입하면

$$b=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2-3n-1}}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{3}{n}-\frac{1}{n^2}}}{1}$$

$$=\frac{\sqrt{4-0-0}}{1}$$

$=2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{b^4n^2-5n+2}}{an^2+6n-4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2-5n+2}}{6n-4}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16-\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}}}{6-\frac{4}{n}}$$

$$=\frac{\sqrt{16-0+0}}{6-0}$$

$=\frac{2}{3}$

022 답 (1) 발산 (2) 발산 (3) 수렴, $-\frac{1}{2}$ (4) 수렴, 4 (5) 수렴, 4 (6) 수렴, 2

(1) 최고차항인 n^3으로 묶으면

$$\lim_{n\to\infty}(n^3-6n^2)=\lim_{n\to\infty}n^3\left(1-\frac{6}{n}\right)=\infty$$

따라서 수열 $\{n^3-6n^2\}$은 발산한다.

(2) 최고차항인 n^4으로 묶으면

$$\lim_{n\to\infty}(1+2n-n^4)=\lim_{n\to\infty}n^4\left(\frac{1}{n^4}+\frac{2}{n^3}-1\right)$$
$$=-\infty$$

따라서 수열 $\{1+2n-n^4\}$은 발산한다.

(3) 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+n})(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+n})}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2-n}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}-1}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$$
$$=\frac{0-1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=-\frac{1}{2}$$

따라서 수열 $\{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+n}\}$은 $-\frac{1}{2}$에 수렴한다.

(4) 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-8n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-\sqrt{n^2-8n})(n+\sqrt{n^2-8n})}{n+\sqrt{n^2-8n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8n}{n+\sqrt{n^2-8n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{1+\sqrt{1-\frac{8}{n}}}$$
$$=\frac{8}{1+\sqrt{1-0}}=4$$

따라서 수열 $\{n-\sqrt{n^2-8n}\}$은 4에 수렴한다.

(5) 분모를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{n^2+3n}-n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6(\sqrt{n^2+3n}+n)}{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6(\sqrt{n^2+3n}+n)}{3n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}{1}$$
$$=\frac{2(\sqrt{1+0}+1)}{1}$$
$$=4$$

따라서 수열 $\left\{\frac{6}{\sqrt{n^2+3n}-n}\right\}$은 4에 수렴한다.

(6) 분모, 분자를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2})}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+4}+\sqrt{n+2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$$
$$=\frac{2(\sqrt{1+0}+1)}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}$$
$$=2$$

따라서 수열 $\left\{\frac{\sqrt{n+4}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}\right\}$는 2에 수렴한다.

023 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_4=a_1+3d$에서

$a_1=1$, $a_4=10$이므로

$10=1+3d$ $\quad\therefore d=3$

$\therefore a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2})(\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-2})}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{3n+1}+\sqrt{3n-2}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{3+\frac{1}{n}}+\sqrt{3-\frac{2}{n}}}$$
$$=\frac{3}{\sqrt{3+0}+\sqrt{3-0}}$$
$$=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

024 $\frac{1}{2}$

$\sqrt{4n^2}<\sqrt{4n^2+2}<\sqrt{4n^2+4n+1}$이므로

$\sqrt{(2n)^2}<\sqrt{4n^2+2}<\sqrt{(2n+1)^2}$

$\therefore 2n<\sqrt{4n^2+2}<2n+1$

따라서 $\sqrt{4n^2+2}$의 정수 부분이 $2n$이므로

$a_n=2n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} n(\sqrt{4n^2+2}-a_n)$$
$$=\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{4n^2+2}-2n)$$
$$=\lim_{n\to\infty} \frac{n(\sqrt{4n^2+2}-2n)(\sqrt{4n^2+2}+2n)}{\sqrt{4n^2+2}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{4n^2+2}+2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{4+\frac{2}{n^2}}+2}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{4+0}+2}=\frac{1}{2}$$

025 답 4

주어진 식의 좌변의 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{an^2+bn}-n)$$
$$=\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{an^2+bn}-n)(\sqrt{an^2+bn}+n)}{\sqrt{an^2+bn}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty} \frac{(a-1)n^2+bn}{\sqrt{an^2+bn}+n}$$
$$=\lim_{n\to\infty} \frac{(a-1)n+b}{\sqrt{a+\frac{b}{n}}+1} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$a-1\neq 0$, 즉 $a\neq 1$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$a=1$

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b}{\sqrt{1+\frac{b}{n}}+1}=\frac{b}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{b}{2}$$

따라서 $\frac{b}{2}=2$이므로 $b=4$

$\therefore ab=1\times 4=4$

026 답 5

주어진 식의 좌변의 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2-n})$$
$$=\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2-n})(\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2-n})}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty} \frac{(a+1)n}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2-n}}$$
$$=\lim_{n\to\infty} \frac{a+1}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$$
$$=\frac{a+1}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=\frac{a+1}{2}$$

따라서 $\frac{a+1}{2}=3$이므로 $a=5$

027 답 8

주어진 식의 좌변의 분모를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^2+an}-2n+a}$$
$$=\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+an}+2n-a}{(\sqrt{4n^2+an}-2n+a)(\sqrt{4n^2+an}+2n-a)}$$
$$=\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4n^2+an}+2n-a}{5an-a^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{a}{n}}+2-\frac{a}{n}}{5a-\frac{a^2}{n}}$$
$$=\frac{\sqrt{4+0}+2-0}{5a-0}=\frac{4}{5a}$$

따라서 $\frac{4}{5a}=\frac{1}{10}$이므로 $a=8$

028 답 12

주어진 식의 좌변의 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{n\to\infty} (\sqrt{an^2+3n}-bn)$$
$$=\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{an^2+3n}-bn)(\sqrt{an^2+3n}+bn)}{\sqrt{an^2+3n}+bn}$$
$$=\lim_{n\to\infty} \frac{(a-b^2)n^2+3n}{\sqrt{an^2+3n}+bn}$$
$$=\lim_{n\to\infty} \frac{(a-b^2)n+3}{\sqrt{a+\frac{3}{n}}+b} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$a-b^2\neq 0$, 즉 $a\neq b^2$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$a=b^2$ $\cdots\cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{\sqrt{b^2+\frac{3}{n}}+b}=\frac{3}{\sqrt{b^2+0}+b}=\frac{3}{2b} \ (\because b>0)$$

따라서 $\frac{3}{2b}=\frac{1}{2}$이므로 $b=3$

이를 ㉡에 대입하면 $a=9$

$\therefore a+b=9+3=12$

029 답 $\frac{2}{7}$

$\frac{5-a_n}{2a_n+1}=b_n$으로 놓으면 $5-a_n=b_n(2a_n+1)$

$$\therefore a_n=\frac{5-b_n}{2b_n+1}$$

$\lim_{n\to\infty} b_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} \frac{5-b_n}{2b_n+1}=\frac{5-3}{2\times 3+1}=\frac{2}{7}$$

030 답 $-\frac{5}{3}$

$2a_n-3b_n=c_n$으로 놓으면

$3b_n=2a_n-c_n \quad \therefore\ b_n=\frac{2a_n-c_n}{3}$

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} c_n=3$이므로

$\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{a_n}=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n+b_n}{a_n-3b_n}=\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+\frac{2a_n-c_n}{3}}{a_n-(2a_n-c_n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{5a_n-c_n}{-3a_n+3c_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{c_n}{a_n}}{-3+\frac{3c_n}{a_n}}$$

$$=\frac{5-0}{-3+0}=-\frac{5}{3}$$

| 다른 풀이 |

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$이고

$\lim_{n\to\infty} (2a_n-3b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n\left(2-\frac{3b_n}{a_n}\right)=3$이므로

$\lim_{n\to\infty} \left(2-\frac{3b_n}{a_n}\right)=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}=\frac{2}{3}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{a_n+b_n}{a_n-3b_n}=\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{b_n}{a_n}}{1-\frac{3b_n}{a_n}}$$

$$=\frac{1+\frac{2}{3}}{1-3\times\frac{2}{3}}=-\frac{5}{3}$$

031 답 ⑤

$3a_n-5n=b_n$으로 놓으면

$3a_n=b_n+5n \quad \therefore\ a_n=\frac{b_n+5n}{3}$

$\lim_{n\to\infty} b_n=2$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)a_n}{4n^2}=\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{4n^2}\times\frac{b_n+5n}{3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(b_n+5n)}{12n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{b_n}{n}+5\right)}{12}$$

$$=\frac{(2+0)(0+5)}{12}=\frac{5}{6}$$

032 답 $\frac{16}{3}$

$(n^2+3n)a_n=c_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{c_n}{n^2+3n}$

$(2n-1)b_n=d_n$으로 놓으면 $b_n=\frac{d_n}{2n-1}$

$\lim_{n\to\infty} c_n=4$, $\lim_{n\to\infty} d_n=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+6)a_n}{b_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+6}{\frac{d_n}{2n-1}}\times\frac{c_n}{n^2+3n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty} \left\{\frac{2(n+3)(2n-1)}{d_n}\times\frac{c_n}{n(n+3)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{2(2n-1)c_n}{nd_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{2\left(2-\frac{1}{n}\right)c_n}{d_n}$$

$$=\frac{2(2-0)\times4}{3}=\frac{16}{3}$$

033 답 $\frac{1}{2}$

$n^2+n<a_n<n^2+3n$의 각 변을 $2n^2+n$으로 나누면

$\frac{n^2+n}{2n^2+n}<\frac{a_n}{2n^2+n}<\frac{n^2+3n}{2n^2+n}$

이때 $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{2n^2+n}=\frac{1}{2}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n}{2n^2+n}=\frac{1}{2}$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2n^2+n}=\frac{1}{2}$

034 답 0

모든 자연수 n에 대하여 $-1\le\cos n\theta\le1$

각 변을 n^2+1로 나누면

$-\frac{1}{n^2+1}\le\frac{\cos n\theta}{n^2+1}\le\frac{1}{n^2+1}$

이때 $\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n^2+1}\right)=0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1}=0$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos n\theta}{n^2+1}=0$

035 답 4

$\sqrt{16n^2+n}<(n+2)a_n<\sqrt{16n^2+3n+2}$의 각 변을

$n+2$로 나누면

$\frac{\sqrt{16n^2+n}}{n+2}<a_n<\frac{\sqrt{16n^2+3n+2}}{n+2}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2+n}}{n+2}=4$, $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{16n^2+3n+2}}{n+2}=4$

이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=4$

036 답 2

첫째항이 4이고 공차가 5인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=4+(n-1)\times5=5n-1$

$10n+1<a_nb_n<10n+4$에서

$10n+1<(5n-1)b_n<10n+4$

각 변을 $5n-1$로 나누면

$\frac{10n+1}{5n-1}<b_n<\frac{10n+4}{5n-1}$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{10n+1}{5n-1}=2$, $\lim_{n\to\infty}\frac{10n+4}{5n-1}=2$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}b_n=2$

037 답 2

곡선 $y=x^2+x$와 직선 $y=-x+n$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2+x=-x+n$, $x^2+2x-n=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{1+n}$

이때 두 교점은 직선 $y=-x+n$ 위의 점이므로 교점의 좌표는 각각

$(-1+\sqrt{n+1},\ 1+n-\sqrt{n+1})$,

$(-1-\sqrt{n+1},\ 1+n+\sqrt{n+1})$

$\therefore l_n=\sqrt{(2\sqrt{n+1})^2+(-2\sqrt{n+1})^2}$

$=\sqrt{4(n+1)+4(n+1)}=\sqrt{8n+8}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{l_n}{\sqrt{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{8n+8}}{\sqrt{2n-1}}=2$

038 답 $\frac{\sqrt{3}}{6}$

점 $(0,\ 2n)$을 지나고 원 $x^2+y^2=n^2$에 접하는 직선의 방정식을 $y=kx+2n$(k는 상수)이라 하면

$a_n=-\frac{2}{k}n$

이때 $a_n>0$이므로 $k<0$($\because$ n은 자연수)

직선 $y=kx+2n$, 즉 $kx-y+2n=0$이 원 $x^2+y^2=n^2$에 접하므로

$\frac{|2n|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=n$

양변을 제곱하면

$\frac{4n^2}{k^2+1}=n^2$, $k^2=3$ $\quad\therefore k=-\sqrt{3}$ ($\because$ $k<0$)

따라서 $a_n=\frac{2}{\sqrt{3}}n=\frac{2\sqrt{3}}{3}n$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}n}{4n+1}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

| 다른 풀이 |

접선의 방정식을 $y=kx+2n$(k는 상수)이라 하면

$a_n=-\frac{2}{k}n$

이때 $a_n>0$이므로 $k<0$

직선 $y=kx+2n$이 원 $x^2+y^2=n^2$에 접하므로 이차방정식 $x^2+(kx+2n)^2=n^2$, 즉

$(k^2+1)x^2+4knx+3n^2=0$이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4k^2n^2-3n^2(k^2+1)=0$

$k^2n^2-3n^2=0$, $n^2(k^2-3)=0$

$k^2=3$ ($\because$ $n>0$) $\quad\therefore k=-\sqrt{3}$ ($\because$ $k<0$)

따라서 $a_n=\frac{2}{\sqrt{3}}n=\frac{2\sqrt{3}}{3}n$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{4n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}n}{4n+1}=\frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

039 답 $\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}_n(n,\ \sqrt{n+2})$, $\mathrm{P}_{n+1}(n+1,\ \sqrt{n+3})$이므로

$a_n=\frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}}{(n+1)-n}=\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n$

$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2})}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+2}}=\frac{1}{2}$

040 답 $\frac{1}{32}$

$y=x^2$에서 $y'=2x$

곡선 $y=x^2$에 접하고 기울기가 $\frac{1}{n}$인 접선의 접점의 좌표를 $(t,\ t^2)$이라 하면

$2t=\frac{1}{n}$ $\quad\therefore t=\frac{1}{2n}$

기울기가 $\frac{1}{n}$이고 접점의 좌표가 (t, t^2), 즉

$\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{4n^2}\right)$인 접선의 방정식은

$y-\frac{1}{4n^2}=\frac{1}{n}\left(x-\frac{1}{2n}\right)$

$\therefore y=\frac{1}{n}x-\frac{1}{4n^2}$

따라서 $P_n\left(\frac{1}{4n}, 0\right)$, $Q_n\left(0, -\frac{1}{4n^2}\right)$이므로

$S_n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4n}\times\frac{1}{4n^2}=\frac{1}{32n^3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(n^3+1)S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+1}{32n^3}=\frac{1}{32}$

연습문제 36~38쪽

041 ④

① 수열 2, 2, 2, 2, …는 n의 값이 한없이 커질 때, 2에 수렴한다.

② 수열 $\frac{4}{3}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{28}{27}$, $\frac{82}{81}$, …에서 n의 값이 한없이 커질 때, $1+\frac{1}{3^n}$의 값은 1에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 1에 수렴한다.

③ 수열 $\left\{\frac{6}{2n-1}\right\}$의 첫째항부터 차례대로 항을 나열하면

6, 2, $\frac{6}{5}$, $\frac{6}{7}$, …

즉, n의 값이 한없이 커질 때, $\frac{6}{2n-1}$의 값은 0에 한없이 가까워지므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

④ 수열 $\{1+(-2)^n\}$의 첫째항부터 차례대로 항을 나열하면

-1, 5, -7, 17, …

즉, n의 값이 한없이 커질 때, $1+(-2)^n$의 값은 어느 일정한 값에 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않으므로 주어진 수열은 발산(진동)한다.

⑤ 수열 $\{\tan n\pi\}$의 첫째항부터 차례대로 항을 나열하면

0, 0, 0, 0, …

즉, n의 값이 한없이 커질 때, $\tan n\pi$의 값은 0이므로 주어진 수열은 0에 수렴한다.

따라서 수렴과 발산이 나머지 넷과 다른 수열은 ④이다.

042 7

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)라 하자.

$\lim_{n\to\infty}(3a_n-b_n)=1$에서

$3\lim_{n\to\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}b_n=1$

$3\alpha-\beta=1$ $\quad\therefore \beta=3\alpha-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{n\to\infty}a_nb_n=10$에서

$\lim_{n\to\infty}a_n\times\lim_{n\to\infty}b_n=10$

$\therefore \alpha\beta=10$

㉠을 대입하면 $\alpha(3\alpha-1)=10$

$3\alpha^2-\alpha-10=0$, $(3\alpha+5)(\alpha-2)=0$

$\therefore \alpha=-\frac{5}{3}$ 또는 $\alpha=2$

그런데 $a_n>0$에서 $\alpha\geq0$이므로 $\alpha=2$

이를 ㉠에 대입하면 $\beta=5$

$\therefore \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$

$=\alpha+\beta=2+5=7$

043 4

$S_n=n^2$에서

(i) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$

(ii) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=1^2=1$

(i), (ii)에서 $a_n=2n-1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_na_{n+1}}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{n^2}=4$

044 $\frac{4}{25}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{an}{bn-2}=\frac{a}{b}$

따라서 $\frac{a}{b}=\frac{1}{4}$이므로 $b=4a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\lim_{n\to\infty}\frac{(a+b)n^2+n-2}{n^2+3}=a+b$

따라서 $a+b=1$이므로 ㉠을 대입하면

$5a=1$ $\quad\therefore a=\frac{1}{5}$

이를 ㉠에 대입하면 $b=\frac{4}{5}$

$\therefore ab=\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{25}$

045 ③

$$\lim_{n\to\infty} 2n(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1})$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{2n(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty} \frac{6n}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\frac{6}{1+1}=3$$

046 5

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$($\alpha$는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} a_{2n}=\alpha$$

$$2\lim_{n\to\infty} a_{n+1}-\lim_{n\to\infty} a_{2n}+3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{5}+1\right)=11$$에서

$$2\lim_{n\to\infty} a_{n+1}-\lim_{n\to\infty} a_{2n}+\frac{3}{5}\lim_{n\to\infty} a_n+3\lim_{n\to\infty} 1$$

$$=2\alpha-\alpha+\frac{3}{5}\alpha+3=\frac{8}{5}\alpha+3$$

즉, $\frac{8}{5}\alpha+3=11$이므로 $\frac{8}{5}\alpha=8$ $\quad\therefore\ \alpha=5$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\alpha=5$$

047 ⑤

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(10n+1)b_n}{a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n^2+1)b_n}{(n+1)a_n}\times\frac{(n+1)(10n+1)}{n^2+1}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(n^2+1)b_n}{(n+1)a_n}\times\frac{10n^2+11n+1}{n^2+1}\right\}$$

$$=\frac{7}{2}\times 10=35$$

048 $\frac{1}{8}$

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

$$=\log_2 3+\log_2\frac{4}{2}+\log_2\frac{5}{3}+\cdots+\log_2\frac{n+2}{n}$$

$$=\log_2\left(3\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{n+2}{n}\right)$$

$$=\log_2\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$=\log_2\frac{n^2+3n+2}{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2^{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}}{4n^2-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\log_2\frac{n^2+3n+2}{2}}}{4n^2-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+3n+2}{2}}{4n^2-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n+2}{8n^2-2}=\frac{1}{8}$$

049 ②

$x^2+2nx-3n=0$에서

$$x=-n\pm\sqrt{n^2+3n}$$

$$\therefore a_n=-n+\sqrt{n^2+3n}\ (\because a_n>0)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{(\sqrt{n^2+3n}-n)(\sqrt{n^2+3n}+n)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+n}{3n}$$

$$=\frac{1+1}{3}=\frac{2}{3}$$

050 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n+2)(3n-2)}-kn\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{3n^2+4n-4}-kn)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{3n^2+4n-4}-kn)(\sqrt{3n^2+4n-4}+kn)}{\sqrt{3n^2+4n-4}+kn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(3-k^2)n^2+4n-4}{\sqrt{3n^2+4n-4}+kn}$$

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$($\alpha$는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3-k^2)n^2+4n-4}{\sqrt{3n^2+4n-4}+kn}=\alpha \quad \cdots\cdots ㉠$$

$3-k^2\neq 0$, 즉 $k^2\neq 3$이면 극한값이 존재하지 않으므로

$k^2=3$ $\quad\therefore\ k=\pm\sqrt{3}$

그런데 $k>0$이므로 $k=\sqrt{3}$

이를 ㉠에 대입하면

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-4}{\sqrt{3n^2+4n-4}+\sqrt{3}n}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\alpha=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

051 ②

$\frac{na_n}{n^2+3}=b_n$으로 놓으면

$a_n=\frac{(n^2+3)b_n}{n}$ ..... ㉠

$\lim_{n\to\infty} b_n=1$이므로

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_n{}^2+n}-a_n)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{a_n{}^2+n}-a_n)(\sqrt{a_n{}^2+n}+a_n)}{\sqrt{a_n{}^2+n}+a_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{a_n{}^2+n}+a_n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\left\{\frac{(n^2+3)b_n}{n}\right\}^2+n}+\frac{(n^2+3)b_n}{n}}$

$(\because$ ㉠$)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\sqrt{(n^2+3)^2b_n{}^2+n^3}+(n^2+3)b_n}$

$=\frac{1}{\sqrt{1\times1}+1\times1}$

$=\frac{1}{2}$

052 ▣ $\frac{1}{3}$

$(a_n-n^2)(a_n-n^2-n)<0$에서

$n^2<a_n<n^2+n$ ▸▸▸▸▸▸ ❶

n에 1, 2, 3, ..., n을 차례대로 대입하여 각 변끼리 더하면

$1^2<a_1<1^2+1$

$2^2<a_2<2^2+2$

$3^2<a_3<3^2+3$

$\vdots$

$+)\ n^2<a_n<n^2+n$

$\sum_{k=1}^{n}k^2<a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$

$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}<S_n$

$<\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}$

$\frac{2n^3+3n^2+n}{6}<S_n<\frac{n^3+3n^2+2n}{3}$

각 변을 n^3으로 나누면

$\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}<\frac{S_n}{n^3}<\frac{n^3+3n^2+2n}{3n^3}$ ▸▸▸▸▸▸ ❷

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3}=\frac{1}{3}$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3n^2+2n}{3n^3}=\frac{1}{3}$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}=\frac{1}{3}$ ▸▸▸▸▸▸ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	a_n에 대한 부등식 세우기	20 %
❷	$\frac{S_n}{n^3}$에 대한 부등식 세우기	50 %
❸	$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}$의 값 구하기	30 %

053 ▣ ④

ㄱ. $\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\{a_n-(a_n-b_n)\}$

$=\lim_{n\to\infty} a_n-\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)$

$=\alpha-0=\alpha$

ㄴ. [반례] $a_n=n^2$, $b_n=\frac{1}{n}$이면

$\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$이지만

$\lim_{n\to\infty} a_nb_n=\lim_{n\to\infty} n=\infty$

ㄷ. 두 수열 $\{a_n+b_n\}$, $\{a_n-b_n\}$이 모두 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\alpha$, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\beta$

(α, β는 실수)라 하면

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)\}$

$=\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)\}$

$=\frac{\alpha-\beta}{2}$

즉, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$도 모두 수렴한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

054 ▣ 2

$a_1=1$, $a_2=1+3$, $a_3=1+3+5$, $a_4=1+3+5+7$, ...이므로

$a_n=1+3+5+7+\cdots+(2n-1)$

$=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-n=n^2$

$b_1=3=1+2$, $b_2=1+2+3$, $b_3=1+2+3+4$,
$b_4=1+2+3+4+5$, …이므로
$b_n=1+2+3+4+\cdots+(n+1)$
$=\sum_{k=1}^{n+1}k=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2}$
$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\frac{n^2+3n+2}{2}}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n^2+3n+2}=2$

055 답 6

| 접근 방법 | $p=1, 2, 3, \cdots$을 대입하여 극한을 조사한 후 자연수인 극한값을 갖는 경우를 찾는다.

(i) $p=1$일 때,
$q=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+n+4}{n^3+n+1}=0$
그런데 q는 자연수이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $p=2$일 때,
$q=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+n+4}{n^3+n^2+1}=4$

(iii) $p\geq3$일 때,
$q=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^{p+1}+n+4}{n^p+n^3+1}=\infty$
그런데 q는 자연수이어야 하므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $p=2$, $q=4$
$\therefore p+q=6$

056 답 $\frac{1}{4}$

$b_n-a_n=c_n$으로 놓으면 $b_n=a_n+c_n$
$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty}c_n=4$이므로
$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{a_n}=0$
$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-a_nb_n+b_n^2}{(a_n+b_n)^2}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-a_n(a_n+c_n)+(a_n+c_n)^2}{(a_n+a_n+c_n)^2}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2+a_nc_n+c_n^2}{4a_n^2+4a_nc_n+c_n^2}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{c_n}{a_n}+\left(\frac{c_n}{a_n}\right)^2}{4+\frac{4c_n}{a_n}+\left(\frac{c_n}{a_n}\right)^2}=\frac{1}{4}$

| 다른 풀이 |
$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$이고
$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}a_n\left(\frac{b_n}{a_n}-1\right)=4$이므로
$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{a_n}-1\right)=0$ $\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=1$
$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2-a_nb_n+b_n^2}{(a_n+b_n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{b_n}{a_n}+\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2}{\left(1+\frac{b_n}{a_n}\right)^2}$
$=\frac{1-1+1}{(1+1)^2}=\frac{1}{4}$

057 답 $\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$

| 접근 방법 | 두 변의 길이와 끼인각의 크기가 주어졌으므로 코사인법칙을 이용하여 변 BC의 길이를 구하고, 삼각형의 넓이를 이용하여 a_n을 구한다.

코사인법칙에 의하여
$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\cos\frac{\pi}{3}$
$=(\sqrt{2n+1})^2+(\sqrt{n+3})^2$
$-2\sqrt{2n+1}\times\sqrt{n+3}\times\frac{1}{2}$
$=3n+4-\sqrt{2n^2+7n+3}$
삼각형 ABC에서
$\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{BC}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\sin\frac{\pi}{3}$이므로
$\overline{AH}=\frac{\sqrt{3}\,\overline{AB}\times\overline{AC}}{2\overline{BC}}$
$\therefore a_n^2=\overline{AH}^2=\frac{3\overline{AB}^2\times\overline{AC}^2}{4\overline{BC}^2}$
$=\frac{3(\sqrt{2n+1})^2(\sqrt{n+3})^2}{4(3n+4-\sqrt{2n^2+7n+3})}$
$=\frac{3(2n^2+7n+3)}{4(3n+4-\sqrt{2n^2+7n+3})}$
$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{4a_n^2}{3n}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{3}\times\frac{3(2n^2+7n+3)}{4(3n+4-\sqrt{2n^2+7n+3})}}{n}$
$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+7n+3}{3n^2+4n-n\sqrt{2n^2+7n+3}}$
$=\frac{2}{3-\sqrt{2}}=\frac{2(3+\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2})}=\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$

02 등비수열의 극한

개념 확인 41쪽

058 답 (1) **발산** (2) **수렴, 0** (3) **수렴, 0** (4) **수렴, 0** (5) **발산** (6) **수렴, 0**

(1) 등비수열 $\{(\sqrt{3})^n\}$에서 공비가 $\sqrt{3}$이고 $\sqrt{3}>1$이므로 이 수열은 발산한다.

(2) 등비수열 $\{0.9^n\}$에서 공비가 0.9이고 $-1<0.9<1$이므로 이 수열은 수렴하고, 극한값은 $\lim_{n\to\infty} 0.9^n=0$

(3) 등비수열 $\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$에서 공비가 $\frac{2}{3}$이고 $-1<\frac{2}{3}<1$이므로 이 수열은 수렴하고, 극한값은 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

(4) 등비수열 $\left\{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right\}$에서 공비가 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$이고 $-1<-\frac{\sqrt{2}}{2}<1$이므로 이 수열은 수렴하고, 극한값은 $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n=0$

(5) 등비수열 $\left\{\frac{3^{2n}}{8^n}\right\}$, 즉 $\left\{\left(\frac{9}{8}\right)^n\right\}$에서 공비가 $\frac{9}{8}$이고 $\frac{9}{8}>1$이므로 이 수열은 발산한다.

(6) 등비수열 $\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^{-n}\right\}$, 즉 $\left\{\left(\frac{4}{5}\right)^n\right\}$에서 공비가 $\frac{4}{5}$이고 $-1<\frac{4}{5}<1$이므로 이 수열은 수렴하고, 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$$

059 답 (1) **수렴, 0** (2) **발산** (3) **수렴, 0** (4) **발산**

(1) 분모, 분자를 3^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}$$

$$=\frac{0}{0+1}=0$$

따라서 수열 $\left\{\frac{2^n}{2^n+3^n}\right\}$은 수렴하고, 극한값은 0이다.

(2) 분모, 분자를 3^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{3^n-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\infty$$

따라서 수열 $\left\{\frac{4^n}{3^n-2^n}\right\}$은 발산한다.

(3) 분모, 분자를 5^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}$$

$$=\frac{0+0}{0+1}=0$$

따라서 수열 $\left\{\frac{3^n+4^n}{2^n+5^n}\right\}$은 수렴하고, 극한값은 0이다.

(4) 분모, 분자를 7^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n-9^n}{7^n-4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n-\left(\frac{9}{7}\right)^n}{1-\left(\frac{4}{7}\right)^n}=-\infty$$

따라서 수열 $\left\{\frac{5^n-9^n}{7^n-4^n}\right\}$은 발산한다.

060 답 (1) $-2<x\le 2$ (2) $-\frac{1}{3}\le x<\frac{1}{3}$ (3) $1<x\le 2$ (4) $-1<x\le\frac{1}{3}$

(1) 공비가 $\frac{x}{2}$이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$-1<\frac{x}{2}\le 1$$

$$\therefore\ -2<x\le 2$$

(2) 공비가 $-3x$이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$-1<-3x\le 1$$

$$\therefore\ -\frac{1}{3}\le x<\frac{1}{3}$$

(3) 공비가 $2x-3$이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$-1<2x-3\le 1$$

$$2<2x\le 4$$

$$\therefore\ 1<x\le 2$$

(4) 공비가 $\frac{3x+1}{2}$이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$-1<\frac{3x+1}{2}\le 1,\ -2<3x+1\le 2$$

$$-3<3x\le 1$$

$$\therefore\ -1<x\le\frac{1}{3}$$

061 답 (1) 수렴, $\frac{1}{8}$ (2) 수렴, 0 (3) 발산

(1) 분모, 분자를 2^{4n}, 즉 16^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7^{n-1}+4^{2n}}{2^{4n+3}-3^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{7}\times7^n+16^n}{8\times16^n-3\times9^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{7}\times\left(\frac{7}{16}\right)^n+1}{8-3\times\left(\frac{9}{16}\right)^n}$$

$$=\frac{\frac{1}{7}\times0+1}{8-3\times0}=\frac{1}{8}$$

따라서 수열 $\left\{\frac{7^{n-1}+4^{2n}}{2^{4n+3}-3^{2n+1}}\right\}$은 $\frac{1}{8}$에 수렴한다.

(2) 분모, 분자를 $(-9)^n$으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-3)^{n+3}+2^{3n-1}}{3^{n-2}+(-9)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-27\times(-3)^n+\frac{1}{2}\times8^n}{\frac{1}{9}\times3^n+(-9)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-27\times\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{8}{9}\right)^n}{\frac{1}{9}\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n+1}$$

$$=\frac{-27\times0+\frac{1}{2}\times0}{\frac{1}{9}\times0+1}=0$$

따라서 수열 $\left\{\frac{(-3)^{n+3}+2^{3n-1}}{3^{n-2}+(-9)^n}\right\}$은 0에 수렴한다.

(3) 3^n으로 묶으면

$$\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{8})^n+3^n\}=\lim_{n\to\infty}3^n\left\{\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right)^n+1\right\}=\infty$$

따라서 수열 $\{(\sqrt{8})^n+3^n\}$은 발산한다.

062 답 9

분자의 식을 전개한 후 분모, 분자를 3^{3n}, 즉 27^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3^n+1)(9^n-3^n+1)}{3^{3n-2}-3^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{27^n+1}{\frac{1}{9}\times27^n-3\times9^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\left(\frac{1}{27}\right)^n}{\frac{1}{9}-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{1+0}{\frac{1}{9}-3\times0}=9$$

063 답 수렴, 0

수열 $\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{2n-1}{2}\pi\right\}$의 첫째항부터 차례대로 항을 나열하면

$$-\frac{1}{2},\ -\frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ -\frac{1}{16},\ \cdots$$

즉, 주어진 수열은 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

이때 $-1<\frac{1}{2}<1$이므로 이 수열은 수렴하고, 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{2n-1}{2}\pi=0$$

064 답 4

주어진 식의 좌변의 분모, 분자를 $(-3)^n$으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times(-3)^{n+1}+3\times2^n}{2^{n+1}+(-3)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3a\times(-3)^n+3\times2^n}{2\times2^n+(-3)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3a+3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{2\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n+1}$$

$$=\frac{-3a+3\times0}{2\times0+1}$$

$$=-3a$$

따라서 $-3a=-12$이므로 $a=4$

065 답 20

$$1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}=\frac{5^n-1}{5-1}=\frac{1}{4}(5^n-1)$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n-1}+5^{n+1}}{1+5+5^2+\cdots+5^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\times4^n+5\times5^n}{\frac{1}{4}(5^n-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times4^n+20\times5^n}{5^n-1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\left(\frac{4}{5}\right)^n+20}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

$$=\frac{2\times0+20}{1-0}=20$$

066 답 2

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$($\alpha$는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6^{n+1}+4^n\times a_n}{4^{n+1}+6^n\times a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6\times 6^n+4^n\times a_n}{4\times 4^n+6^n\times a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\left(\frac{2}{3}\right)^n\times a_n}{4\times\left(\frac{2}{3}\right)^n+a_n}$$

$$=\frac{6+0\times\alpha}{4\times 0+\alpha}=\frac{6}{\alpha}$$

따라서 $\frac{6}{\alpha}=3$이므로 $\alpha=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\alpha=2$

067 답 $\frac{2}{3}$

첫째항이 1이고 공비가 3인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$a_n=3^{n-1}$

또 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$S_n=\frac{3^n-1}{3-1}=\frac{1}{2}(3^n-1)$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n-1}}{\frac{1}{2}(3^n-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 3^n}{3\times 3^n-3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3-3\times\left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{2}{3-3\times 0}=\frac{2}{3}$$

068 답 4

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$($\alpha$는 실수)라 하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\times a_n+2^{3n-1}}{2^{3n}\times a_n+5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\times a_n+\frac{1}{2}\times 8^n}{8^n\times a_n+5\times 5^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{5}{8}\right)^n\times a_n+\frac{1}{2}}{a_n+5\times\left(\frac{5}{8}\right)^n}$$

$$=\frac{0\times\alpha+\frac{1}{2}}{\alpha+5\times 0}=\frac{1}{2\alpha}$$

따라서 $\frac{1}{2\alpha}=\frac{1}{8}$이므로 $\alpha=4$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n=\alpha=4$

069 답 (1) $1-\sqrt{2}\le x<1$ 또는 $1<x\le 1+\sqrt{2}$ (2) $-6\le x<-4$ 또는 $0<x\le 2$

(1) 등비수열 $\{(x^2-2x)^n\}$이 수렴하려면

$-1<x^2-2x\le 1$

(i) $x^2-2x>-1$에서

$x^2-2x+1>0$ $\therefore (x-1)^2>0$

따라서 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 성립한다.

(ii) $x^2-2x\le 1$에서

$x^2-2x-1\le 0$ $\therefore 1-\sqrt{2}\le x\le 1+\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $1-\sqrt{2}\le x<1$ 또는 $1<x\le 1+\sqrt{2}$

(2) 등비수열 $\left\{\left(\frac{x^2+4x-6}{6}\right)^n\right\}$이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2+4x-6}{6}\le 1$

$\therefore -6<x^2+4x-6\le 6$

(i) $x^2+4x-6>-6$에서

$x^2+4x>0$, $x(x+4)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>0$

(ii) $x^2+4x-6\le 6$에서

$x^2+4x-12\le 0$, $(x+6)(x-2)\le 0$

$\therefore -6\le x\le 2$

(i), (ii)에서 $-6\le x<-4$ 또는 $0<x\le 2$

070 답 (1) $-3<x\le 1$ 또는 $x=2$ (2) $-1\le x\le 0$ 또는 $1<x\le 2$

(1) 수열 $\left\{(x-2)\left(\frac{x+1}{2}\right)^n\right\}$이 수렴하려면

$(x-2)\left(\frac{x+1}{2}\right)=0$ 또는 $-1<\frac{x+1}{2}\le 1$

$x=2$ 또는 $-2<x+1\le 2$

$\therefore -3<x\le 1$ 또는 $x=2$

(2) 수열 $\{x(x^2-x-1)^n\}$이 수렴하려면

$x(x^2-x-1)=0$ 또는 $-1<x^2-x-1\le 1$

$\therefore x=0$ 또는 $-1<x^2-x-1\le 1$ ····· ㉠

(i) $x^2-x-1>-1$에서

$x^2-x>0$, $x(x-1)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>1$

(ii) $x^2-x-1\le 1$에서

$x^2-x-2\le 0$, $(x+1)(x-2)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 2$

(i), (ii)에서 $-1\le x<0$ 또는 $1<x\le 2$

따라서 ㉠에서 구하는 x의 값의 범위는

$-1\le x\le 0$ 또는 $1<x\le 2$

071 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$이 수렴하려면

$-1<\dfrac{x^2-4x}{5}\le 1$

$\therefore\ -5<x^2-4x\le 5$

(i) $x^2-4x>-5$에서

$x^2-4x+5>0$

$\therefore\ (x-2)^2+1>0$

따라서 모든 실수 x에서 성립한다.

(ii) $x^2-4x\le 5$에서

$x^2-4x-5\le 0,\ (x+1)(x-5)\le 0$

$\therefore\ -1\le x\le 5$

(i), (ii)에서 $-1\le x\le 5$

따라서 정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$의 7개이다.

072 답 129

수열 $\{(x-3)(\log_2 x-3)^n\}$이 수렴하려면

$(x-3)(\log_2 x-3)=0$ 또는 $-1<\log_2 x-3\le 1$

$x=3$ 또는 $2<\log_2 x\le 4$

$x=3$ 또는 $\log_2 4<\log_2 x\le \log_2 16$

$\therefore\ x=3$ 또는 $4<x\le 16$

따라서 정수 x의 값은 3, 5, 6, 7, …, 16이므로 구하는 합은

$3+\dfrac{12(5+16)}{2}=3+126=129$

073 답 $|r|<1$일 때 0, $|r|=1$일 때 $\frac{1}{2}$, $|r|>1$일 때 1

(i) $|r|<1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} r^{2n}=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n}}{1+r^{2n}}=\dfrac{0}{1+0}=0$

(ii) $r=-1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} r^{2n}=1$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n}}{1+r^{2n}}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

(iii) $r=1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} r^{2n}=1$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n}}{1+r^{2n}}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$

(iv) $|r|>1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{r^{2n}}=0$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r^{2n}}{1+r^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{r^{2n}}+1}=\dfrac{1}{0+1}=1$

(i)~(iv)에서

$|r|<1$일 때 0, $|r|=1$일 때 $\dfrac{1}{2}$, $|r|>1$일 때 1

074 답 $\frac{41}{6}$

(i) $|x|<1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n+1}=0$이므로

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+x^{2n}+1}{x^{2n}+2}=\dfrac{0+0+1}{0+2}=\dfrac{1}{2}$

(ii) $x=-1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=1,\ \lim\limits_{n\to\infty} x^{2n+1}=-1$이므로

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+x^{2n}+1}{x^{2n}+2}=\dfrac{-1+1+1}{1+2}=\dfrac{1}{3}$

(iii) $x=1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n+1}=1$이므로

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+x^{2n}+1}{x^{2n}+2}=\dfrac{1+1+1}{1+2}=1$

(iv) $|x|>1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^{2n}}=0$이므로

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n+1}+x^{2n}+1}{x^{2n}+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+1+\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{2}{x^{2n}}}$

$=\dfrac{x+1+0}{1+0}=x+1$

(i)~(iv)에서

$f(-1)+f\left(\dfrac{1}{4}\right)+f(1)+f(4)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}+1+5$

$=\dfrac{41}{6}$

| 다른 풀이 |

$f(-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^{2n+1}+(-1)^{2n}+1}{(-1)^{2n}+2}$

$=\dfrac{-1+1+1}{1+2}=\dfrac{1}{3}$

$f\left(\dfrac{1}{4}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n+1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}+1}{\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}+2}$

$=\dfrac{0+0+1}{0+2}=\dfrac{1}{2}$

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1^{2n+1}+1^{2n}+1}{1^{2n}+2}=\frac{1+1+1}{1+2}=1$$

$$f(4)=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{2n+1}+4^{2n}+1}{4^{2n}+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\times16^n+16^n+1}{16^n+2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{4+1+\left(\frac{1}{16}\right)^n}{1+2\times\left(\frac{1}{16}\right)^n}=\frac{4+1+0}{1+2\times0}=5$$

$$\therefore\ f(-1)+f\left(\frac{1}{4}\right)+f(1)+f(4)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1+5$$

$$=\frac{41}{6}$$

075 ⓑ $\frac{7}{3}$

(i) $0<r<1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-r^n+1}{r^n+2}=\frac{0-0+1}{0+2}=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{3}$$

(ii) $r=1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}r^n=\lim_{n\to\infty}r^{n+1}=1$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-r^n+1}{r^n+2}=\frac{1-1+1}{1+2}=\frac{1}{3}$$

(iii) $r>1$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}-r^n+1}{r^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{r-1+\frac{1}{r^n}}{1+\frac{2}{r^n}}$$

$$=\frac{r-1+0}{1+0}=r-1$$

따라서 $r-1=\frac{1}{3}$에서 $r=\frac{4}{3}$

(i), (ii), (iii)에서 $r=1$ 또는 $r=\frac{4}{3}$이므로 구하는 합은

$$1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$$

076 ⓑ ③

(i) $0<\frac{x}{5}<1$, 즉 $0<x<5$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{5}\right)^{n+1}+2x}{\left(\frac{x}{5}\right)^n+1}=\frac{0+2x}{0+1}=2x$$

$f(k)=5$에서 $2k=5$ $\therefore\ k=\frac{5}{2}$

(ii) $\frac{x}{5}=1$, 즉 $x=5$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{5}\right)^n=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{5}\right)^{n+1}+2x}{\left(\frac{x}{5}\right)^n+1}$$

$$=\frac{1+2\times5}{1+1}=\frac{11}{2}\neq5$$

(iii) $\frac{x}{5}>1$, 즉 $x>5$일 때,

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5}{x}\right)^n=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{x}{5}\right)^{n+1}+2x}{\left(\frac{x}{5}\right)^n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{5}+2x\times\left(\frac{5}{x}\right)^n}{1+\left(\frac{5}{x}\right)^n}$$

$$=\frac{\frac{x}{5}+2x\times0}{1+0}=\frac{x}{5}$$

$f(k)=5$에서

$\frac{k}{5}=5$ $\therefore\ k=25$

(i), (ii), (iii)에서 $k=\frac{5}{2}$ 또는 $k=25$이므로 구하는 합은

$$\frac{5}{2}+25=\frac{55}{2}$$

연습문제 50~52쪽

077 ⓑ ②

ㄱ. 수열 $\left\{\frac{(-1)^n}{5^n}\right\}$에서 공비가 $-\frac{1}{5}$이고

$-1<-\frac{1}{5}<1$이므로 이 수열은 수렴한다.

ㄴ. 수열 $\{(\sqrt{5}-1)^n\}$에서 공비가 $\sqrt{5}-1$이고

$\sqrt{5}-1>1$이므로 이 수열은 발산한다.

ㄷ. 수열 $\{6^n\times2^{-n}\}$, 즉 $\{3^n\}$에서 공비가 3이고 $3>1$

이므로 이 수열은 발산한다.

ㄹ. 수열 $\left\{\frac{3^{n+1}}{4^n+1}\right\}$에서 분모, 분자를 4^n으로 각각 나

누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}}{4^n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{4}\right)^n}=0$$

즉, 이 수열은 수렴한다.

따라서 보기에서 수렴하는 수열인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

078 답 3

주어진 식의 좌변의 분모, 분자를 5^n으로 각각 나누면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n-1}-2^n}{a\times5^n+2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{5}-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{a+2\times\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{1}{5a}$$

따라서 $\frac{1}{5a}=\frac{1}{15}$이므로 $a=3$

079 답 4

$4^{n+1}-3^n<(2^{n+1}+4^n)a_n<4^{n+1}+3^n$의 각 변을

$2^{n+1}+4^n$으로 나누면

$$\frac{4^{n+1}-3^n}{2^{n+1}+4^n}<a_n<\frac{4^{n+1}+3^n}{2^{n+1}+4^n}$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-3^n}{2^{n+1}+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}=4$,

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+3^n}{2^{n+1}+4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\times\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}=4$이므로 수열

의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{n\to\infty}a_n=4$

080 답 9

$$1+9+9^2+\cdots+9^n=\frac{9^{n+1}-1}{9-1}=\frac{1}{8}(9^{n+1}-1)$$

$$1+9+9^2+\cdots+9^{n-1}=\frac{9^n-1}{9-1}=\frac{1}{8}(9^n-1)$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{1+9+9^2+\cdots+9^n}{1+9+9^2+\cdots+9^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{8}(9^{n+1}-1)}{\frac{1}{8}(9^n-1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9-\left(\frac{1}{9}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n}=9$$

081 답 1

등비수열 $\{(x-1)^n\}$이 수렴하려면

$-1<x-1\le1$ $\therefore 0<x\le2$ ····· ㉠

등비수열 $\left\{\frac{(2x+1)^n}{3^{n+1}}\right\}$, 즉 $\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{2x+1}{3}\right)^n\right\}$이 수렴

하려면

$-1<\frac{2x+1}{3}\le1$, $-3<2x+1\le3$

$-4<2x\le2$ $\therefore -2<x\le1$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $0<x\le1$

따라서 $a=0$, $b=1$이므로 $a+b=1$

082 답 ①

$r>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{r^n}=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-r^n}{1+r^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{r^n}-1}{\frac{1}{r^n}+1}=-1$$

083 답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$a_n=ar^{n-1}$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{ar^{n-1}+1}{3^n+\frac{1}{2}\times4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{r}\times\left(\frac{r}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2a}{r}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{4}\right)^n$$ ····· ㉠

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}$의 값이 존재하고 0이 아니므로

$\frac{r}{4}=1$ $\therefore r=4$

따라서 ㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{3^n+2^{2n-1}}=\frac{2a}{r}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r}{4}\right)^n=\frac{a}{2}$$

즉, $\frac{a}{2}=3$이므로 $a=6$

따라서 $a_n=6\times4^{n-1}$이므로 $a_2=6\times4=24$

084 답 1

$a_n+b_n=2\times3^n$에서 $b_n=2\times3^n-a_n$ ····· ㉠

이를 $a_nb_n=9^n-4^n$에 대입하면

$a_n(2\times3^n-a_n)=9^n-4^n$

$a_n^2-2\times3^na_n+(3^n-2^n)(3^n+2^n)=0$

$\{a_n-(3^n-2^n)\}\{a_n-(3^n+2^n)\}=0$

$\therefore a_n=3^n-2^n$ 또는 $a_n=3^n+2^n$ ▸▸▸▸▸▸ ❶

$a_n=3^n-2^n$이면 ㉠에서 $b_n=3^n+2^n$

$a_n=3^n+2^n$이면 ㉠에서 $b_n=3^n-2^n$

그런데 $a_n<b_n$이므로

$a_n=3^n-2^n$, $b_n=3^n+2^n$ ▸▸▸▸▸▸ ❷

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}=1$ ▸▸▸▸▸▸ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	모든 a_n 구하기	40 %
❷	a_n, b_n 구하기	30 %
❸	$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$의 값 구하기	30 %

085 답 $\sqrt{2}$

$0<a<b$에서 $0<\dfrac{a}{b}<1$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=0$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n+3b^n}{a^{n+1}+2b^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n+3}{a\times\left(\dfrac{a}{b}\right)^n+2b}=\dfrac{3}{2b}$

따라서 $\dfrac{3}{2b}=a$이므로 $ab=\dfrac{3}{2}$ ····· ㉠

또 $0<a<b$에서 $0<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{n-1}+\left(\dfrac{1}{b}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{1}{a}\right)^{n-2}-4\times\left(\dfrac{1}{b}\right)^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a+\dfrac{1}{b}\times\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}{a^2-4\times\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}$

$=\dfrac{1}{a}$

따라서 $\dfrac{1}{a}=\dfrac{3}{b}$이므로 $b=3a$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$3a^2=\dfrac{3}{2}$, $a^2=\dfrac{1}{2}$ $\therefore a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ($\because a>0$)

이를 ㉡에 대입하면 $b=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore b-a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

086 답 ④

$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{3\sqrt{3}}=3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}$,

$\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}=3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{4}}\times3^{\frac{1}{8}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}$, …이므로

$a_n=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$

$\therefore \log_9 a_n=\log_{3^2}3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\log_9 a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\dfrac{1}{2}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}=\dfrac{1}{2}$

087 답 $\dfrac{15}{8}$

$15^n=3^n\times5^n$이므로 15^n의 약수의 총합 $p(n)$은

$p(n)=(1+3+3^2+\cdots+3^n)(1+5+5^2+\cdots+5^n)$

$=\dfrac{3^{n+1}-1}{3-1}\times\dfrac{5^{n+1}-1}{5-1}$

$=\dfrac{1}{8}(15^{n+1}-5^{n+1}-3^{n+1}+1)$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p(n)}{15^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{8}(15^{n+1}-5^{n+1}-3^{n+1}+1)}{15^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{15-5\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-3\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^n+\left(\dfrac{1}{15}\right)^n}{8}$

$=\dfrac{15}{8}$

088 답 7

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (α는 실수)라 하면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{2n+1}\times a_n-16^{n+1}}{16^n\times a_{n+1}+11^{n-1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4\times16^n\times a_n-16\times16^n}{16^n\times a_{n+1}+\dfrac{1}{11}\times11^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4a_n-16}{a_{n+1}+\dfrac{1}{11}\times\left(\dfrac{11}{16}\right)^n}=\dfrac{4\alpha-16}{\alpha}$

따라서 $\dfrac{4\alpha-16}{\alpha}=\dfrac{12}{7}$이므로

$7\alpha-28=3\alpha$

$4\alpha=28$ $\therefore \alpha=7$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha=7$

089 답 ④

$a_n=\dfrac{(k^2+9)^n+30^n}{(10k)^n}=\left(\dfrac{k^2+9}{10k}\right)^n+\left(\dfrac{3}{k}\right)^n$에서 k가 자연수이므로

$\dfrac{k^2+9}{10k}>0,\ \dfrac{3}{k}>0$

이때 수열 $\{a_n\}$이 수렴하려면 두 등비수열 $\left\{\left(\dfrac{k^2+9}{10k}\right)^n\right\},\ \left\{\left(\dfrac{3}{k}\right)^n\right\}$이 모두 수렴해야 하므로

$\dfrac{k^2+9}{10k}\le 1,\ \dfrac{3}{k}\le 1$

(i) $\dfrac{k^2+9}{10k}\le 1$에서

$k^2+9\le 10k,\ k^2-10k+9\le 0$

$(k-1)(k-9)\le 0 \quad \therefore\ 1\le k\le 9$

(ii) $\dfrac{3}{k}\le 1$에서 $k\ge 3$

(i), (ii)에서 $3\le k\le 9$

따라서 자연수 k는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 7개이다.

090 답 ㄴ, ㄷ

등비수열 $\{r^n\}$의 공비가 r이고 이 등비수열이 수렴하므로

$-1<r\le 1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

ㄱ. 공비는 $r+1$이고 ㉠에서 $0<r+1\le 2$

즉, 등비수열 $\{(r+1)^n\}$은 $1<r+1\le 2$이면 수렴하지 않는다.

ㄴ. 공비는 $\dfrac{r}{2}$이고 ㉠에서 $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{r}{2}\le\dfrac{1}{2}$

즉, 등비수열 $\left\{\left(\dfrac{r}{2}\right)^n\right\}$은 항상 수렴한다.

ㄷ. 공비는 $\dfrac{r-2}{4}$이고 ㉠에서 $-3<r-2\le -1$

$\therefore\ -\dfrac{3}{4}<\dfrac{r-2}{4}\le -\dfrac{1}{4}$

즉, 등비수열 $\left\{\left(\dfrac{r-2}{4}\right)^n\right\}$은 항상 수렴한다.

따라서 보기에서 항상 수렴하는 수열인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

091 답 ④

ㄱ. $x<-1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0$이므로

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-2}{x^n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x-\dfrac{2}{x^n}}{1+\dfrac{1}{x^n}}=x$

ㄴ. $|x|<1$일 때,

$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\lim\limits_{n\to\infty}x^{n+1}=0$이므로

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{n+1}-2}{x^n+1}=-2\ne\dfrac{1}{x}$

ㄷ. $f(1)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^{n+1}-2}{1^n+1}=\dfrac{1-2}{1+1}=-\dfrac{1}{2}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

092 답 $\dfrac{1}{3}$

원 $(x-1)^2+y^2=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$과 직선 $3a_nx-2^ny=0$이 접하므로

$\dfrac{|3a_n|}{\sqrt{(3a_n)^2+(-2^n)^2}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

양변을 제곱하면

$\dfrac{9a_n^{\,2}}{9a_n^{\,2}+4^n}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

$9a_n^{\,2}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n(9a_n^{\,2}+4^n),\ 9\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}a_n^{\,2}=1$

$a_n^{\,2}=\dfrac{1}{9\left\{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\right\}}$

$\therefore\ a_n=\dfrac{1}{3\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}}\ (\because\ a_n>0)$

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}}=\dfrac{1}{3}$

093 답 $-\dfrac{1}{3}$

| 접근 방법 | 주어진 부등식의 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입한 후 변끼리 곱하여 a_n에 대한 부등식을 세운다.

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\le\dfrac{99}{100}$에서 n에 1, 2, 3, …, $n-1$을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$\dfrac{a_2}{a_1}\times\dfrac{a_3}{a_2}\times\dfrac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\le\left(\dfrac{99}{100}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \dfrac{a_n}{a_1}\le\left(\dfrac{99}{100}\right)^{n-1}$

$a_n>0$이므로 $0<a_n\le a_1\left(\dfrac{99}{100}\right)^{n-1}$

이때 $\lim\limits_{n\to\infty}a_1\left(\dfrac{99}{100}\right)^{n-1}=0$이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{na_n+n+2}{(n+1)a_n-3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1+\frac{2}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)a_n-3}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

094 답 18

| 접근 방법 | a, b의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 극한값을 구한다.

(i) $1<a<3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{3}\right)^n=0$이므로

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a\times\left(\frac{a}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{a}{3}\right)^n}=\frac{1}{3}$$

이는 $1<a<3$을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=3$일 때,

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3^{n+1}}{3^{n+1}+3^n}=1\neq 3$$

(iii) $a>3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{a}\right)^n=0$이므로

$$a=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{a}\right)^n+a}{3\times\left(\frac{3}{a}\right)^n+1}=a$$

(i), (ii), (iii)에서 $a>3$ ····· ㉠

(iv) $a>b$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+b\times\left(\frac{b}{a}\right)^n}{a+\left(\frac{b}{a}\right)^n}=\frac{1}{a}\neq\frac{9}{a}$$

(v) $a=b$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+a^{n+1}}{a^{n+1}+a^n}=1$$

즉, $1=\frac{9}{a}$이므로 $a=9$, $b=9$

이는 ㉠을 만족시킨다.

(vi) $a<b$일 때, $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n+b}{a\times\left(\frac{a}{b}\right)^n+1}=b$$

즉, $b=\frac{9}{a}$이므로 $ab=9$

그런데 ㉠에서 $a>3$이므로 $a<b$를 만족시키지 않는다.

(iv), (v), (vi)에서 $a=9$, $b=9$

$\therefore a+b=18$

095 답 ④

| 접근 방법 | x의 값의 범위에 따라 경우를 나누어 함수 $f(x)$를 구한 후 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속임을 이용한다.

(i) $|x|<1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+3}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+3}+ax+b}{x^{2n}+1}=ax+b$$

(ii) $x=-1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=1$, $\lim_{n\to\infty}x^{2n+3}=-1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+3}+ax+b}{x^{2n}+1}$$

$$=\frac{-1-a+b}{1+1}=\frac{-a+b-1}{2}$$

(iii) $x=1$일 때, $\lim_{n\to\infty}x^{2n}=\lim_{n\to\infty}x^{2n+3}=1$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+3}+ax+b}{x^{2n}+1}$$

$$=\frac{1+a+b}{1+1}=\frac{a+b+1}{2}$$

(iv) $|x|>1$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x^{2n-1}}=0$이므로

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n+3}+ax+b}{x^{2n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^3+\frac{a}{x^{2n-1}}+\frac{b}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}}=x^3$$

(i)~(iv)에서 $f(x)=\begin{cases} ax+b & (|x|<1)\\ \frac{-a+b-1}{2} & (x=-1)\\ \frac{a+b+1}{2} & (x=1)\\ x^3 & (|x|>1)\end{cases}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$

$\lim_{x\to-1+}(ax+b)=\lim_{x\to-1-}x^3=\frac{-a+b-1}{2}$

$-a+b=-1=\frac{-a+b-1}{2}$

$\therefore b-a=-1$ ····· ㉠

또 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$

$\lim_{x\to1+}x^3=\lim_{x\to1-}(ax+b)=\frac{a+b+1}{2}$

$1=a+b=\frac{a+b+1}{2}$

$\therefore a+b=1$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$

$\therefore 2a+b=2\times1+0=2$

01 급수

개념 확인 57쪽

096 답 (1) 3 (2) 2

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n-1}{n+2} = 3$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left\{2+\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} = 2$

097 답 (1) 발산 (2) 수렴, $\frac{3}{2}$ (3) 발산 (4) 수렴, $\frac{1}{3}$

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

(1) $S_n = \sum_{k=1}^{n} 4k = 4\times\frac{n(n+1)}{2} = 2n^2+2n$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (2n^2+2n) = \infty$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(2) $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$= \left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$

$+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$= 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$= \frac{3}{2}$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{3}{2}$이다.

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+1})$

$= (\sqrt{4}-\sqrt{2})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{6}-\sqrt{4})$

$+\cdots+(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})+(\sqrt{n+3}-\sqrt{n+1})$

$= \sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}-\sqrt{2}-\sqrt{3})$

$= \infty$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(4) $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2}-\frac{1}{3k+1}\right)$

$= \frac{1}{3}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right\}$

$= \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)$

$= \frac{1}{3}\times 1 = \frac{1}{3}$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{1}{3}$이다.

098 답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) $2+6+10+\cdots+(4n-2)+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(4n-2)$

에서

$\lim_{n\to\infty}(4n-2) = \infty$

즉, $\lim_{n\to\infty}(4n-2) \neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} = 1 \neq 0$이므로 주어진 급수는 발산한다.

099 답 (1) -19 (2) -13

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(7a_n+2b_n) = 7\sum_{n=1}^{\infty}a_n + 2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$= 7\times(-3)+2\times 1 = -19$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-4b_n) = 3\sum_{n=1}^{\infty}a_n - 4\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$= 3\times(-3)-4\times 1 = -13$

유제 59~67쪽

100 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

(1) $S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{3}{9k^2+3k-2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{3}{(3k-1)(3k+2)}$

$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3k-1}-\frac{1}{3k+2}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)$

$+\cdots+\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right)$

$= \frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{9n^2+3n-2} = \lim_{n\to\infty} S_n$

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$

$= \frac{1}{2}$

(2) $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\lim_{n\to\infty}S_n$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

101 (1) 2 (2) $\frac{3}{2}$

주어진 급수의 제n항을 a_n, 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

(1) $a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

$=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}k}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$

$=\frac{2}{n(n+1)}$

이므로

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$

$\therefore 1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\cdots$

$=\lim_{n\to\infty}S_n$

$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2\times 1=2$

(2) $a_n=\frac{2}{3+5+7+\cdots+(2n+1)}$

$=\frac{2}{\sum_{k=1}^{n}(2k+1)}=\frac{2}{2\times\frac{n(n+1)}{2}+n}$

$=\frac{2}{n(n+2)}$

이므로

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

$\therefore \frac{2}{3}+\frac{2}{3+5}+\frac{2}{3+5+7}+\frac{2}{3+5+7+9}+\cdots$

$=\lim_{n\to\infty}S_n$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{2}$

102 $\frac{1}{3}$

$S_n=\frac{1+4+9+\cdots+n^2}{n^3+3n+1}=\frac{\sum_{k=1}^{n}k^2}{n^3+3n+1}$

$=\frac{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3+3n+1}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3+18n+6}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3+18n+6}=\frac{1}{3}$

103 ②

첫째항이 각각 4, 7이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 일반항 a_n, b_n은

$a_n=4+(n-1)\times 3=3n+1$

$b_n=7+(n-1)\times 3=3n+4$

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_kb_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k+1}-\frac{1}{3k+4}\right)$

$=\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{13}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)\right\}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}\right)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3n+4}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

104 답 1

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_3\left\{1+\frac{2}{k(k+3)}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\log_3\frac{k^2+3k+2}{k(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\log_3\frac{(k+1)(k+2)}{k(k+3)}$$

$$=\log_3\frac{2\times3}{1\times4}+\log_3\frac{3\times4}{2\times5}+\log_3\frac{4\times5}{3\times6}$$
$$+\cdots+\log_3\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$$

$$=\log_3\left\{\frac{2\times3}{1\times4}\times\frac{3\times4}{2\times5}\times\frac{4\times5}{3\times6}\right.$$
$$\left.\times\cdots\times\frac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}\right\}$$

$$=\log_3\frac{3(n+1)}{n+3}$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\log_3\left\{1+\frac{2}{n(n+3)}\right\}=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_3\frac{3(n+1)}{n+3}$$
$$=\log_3 3=1$$

105 답 발산

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

(i) $S_{2n-1}=2+\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)+\left(-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right)$
$$+\cdots+\left(-\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n}\right)$$
$$=2$$
$$\therefore\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}=2$$

(ii) $S_{2n}=\left(2-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{4}\right)$
$$+\cdots+\left(\frac{n+1}{n}-\frac{n+2}{n+1}\right)$$
$$=2-\frac{n+2}{n+1}$$
$$\therefore\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{n+1}\right)=2-1=1$$

(i), (ii)에서 $\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty}S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

106 답 $\frac{1}{2}$

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log_4 a_k$$
$$=\log_4 a_1+\log_4 a_2+\log_4 a_3+\cdots+\log_4 a_n$$
$$=\log_4(a_1a_2a_3\times\cdots\times a_n)=\log_4\frac{2n-1}{n+2}$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\log_4 a_n=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\log_4\frac{2n-1}{n+2}$$
$$=\log_4 2=\log_{2^2}2=\frac{1}{2}$$

107 답 수렴, $\frac{1}{2}$

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}$$

$$\therefore\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{1}{2}$이다.

108 답 $-\frac{1}{2}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4a_n+2}{2a_n+3}$가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4a_n+2}{2a_n+3}=0$$

$\frac{4a_n+2}{2a_n+3}=b_n$으로 놓으면

$$4a_n+2=(2a_n+3)b_n$$
$$(4-2b_n)a_n=3b_n-2$$
$$\therefore a_n=\frac{3b_n-2}{4-2b_n}$$

$\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3b_n-2}{4-2b_n}=\frac{3\times0-2}{4-2\times0}=-\frac{1}{2}$$

109 답 7

$\lim_{n\to\infty}(a_n-4)=0$에서 $\lim_{n\to\infty}a_n=4$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-3)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-3)=0$$
$$\therefore\lim_{n\to\infty}b_n=3$$
$$\therefore\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}b_n$$
$$=4+3=7$$

110 ③

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-4n}{n}$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4n}{n}=0$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-4\right)=0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=4$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{5n+a_n}{3n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{a_n}{n}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{5+4}{3}=3$

111 10

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{5^n}-2\right)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{5^n}-2\right)=0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{5^n}=2$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4^{n+1}}{5^{n-1}+4^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-4\times4^n}{\frac{1}{5}\times5^n+\frac{1}{4}\times4^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{5^n}-4\times\left(\frac{4}{5}\right)^n}{\frac{1}{5}+\frac{1}{4}\times\left(\frac{4}{5}\right)^n}$

$=\frac{2}{\frac{1}{5}}=10$

112 5

$4a_n+b_n=c_n$으로 놓으면 $a_n=\frac{c_n-b_n}{4}$

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=4$, $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=8$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c_n-b_n}{4}+b_n\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3b_n+c_n}{4}$

$=\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}b_n+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}c_n$

$=\frac{3}{4}\times4+\frac{1}{4}\times8=5$

113 −7

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 모두 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\alpha$,

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2b_n)=8$에서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n=8$

$\therefore \alpha+2\beta=8 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또 $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-2a_n)=9$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n-2\sum_{n=1}^{\infty}a_n=9$

$\therefore \beta-2\alpha=9 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=-2$, $\beta=5$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=\alpha-\beta=-2-5=-7$

114 7

$a_n-2=c_n$으로 놓으면

$a_n=c_n+2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$3a_n-2b_n=d_n$으로 놓으면

$b_n=\frac{3a_n-d_n}{2}$

$=\frac{3(c_n+2)-d_n}{2}$ ($\because$ ㉠)

$=\frac{3c_n-d_n+6}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=6$, $\sum_{n=1}^{\infty}d_n=4$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-3)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3c_n-d_n+6}{2}-3\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3c_n-d_n}{2}$

$=\frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}c_n-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}d_n$

$=\frac{3}{2}\times6-\frac{1}{2}\times4=7$

115 −8

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n$이 모두 수렴하므로

$\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n=\alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}\log a_nb_n=4$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}(\log a_n+\log b_n)=4$

$\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n+\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=4$

$\therefore \alpha+\beta=4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{a_n^{\,2}}{b_n}=14$에서

$\sum_{n=1}^{\infty}(2\log a_n-\log b_n)=14$

$2\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n-\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n=14$

$\therefore 2\alpha-\beta=14 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $\alpha=6$, $\beta=-2$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{b_n}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\log b_n-\log a_n)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log b_n-\sum_{n=1}^{\infty}\log a_n$$
$$=\beta-\alpha=-2-6=-8$$

116 ㉮ $\frac{1}{3}$

직선 $x-3y+3=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+1$에서 x좌표와 y좌표가 모두 자연수이려면 x좌표가 3의 배수이어야 하므로

$x=3n$(단, n은 자연수)

$\therefore a_n=3n$

또 $x=3n$을 $y=\frac{1}{3}x+1$에 대입하면 $y=n+1$이므로

$b_n=n+1$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_nb_n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n(n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times1=\frac{1}{3}$$

117 ㉮ $\frac{3}{8}$

$nx+(n+2)y=1$에 $y=0$을 대입하면

$nx=1$ $\quad\therefore x=\frac{1}{n}$

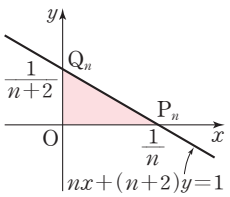
$\therefore \mathrm{P}_n\left(\frac{1}{n},\ 0\right)$

또 $nx+(n+2)y=1$에 $x=0$을 대입하면

$(n+2)y=1$ $\quad\therefore y=\frac{1}{n+2}$

$\therefore \mathrm{Q}_n\left(0,\ \frac{1}{n+2}\right)$

삼각형 $\mathrm{OP}_n\mathrm{Q}_n$의 넓이 S_n은

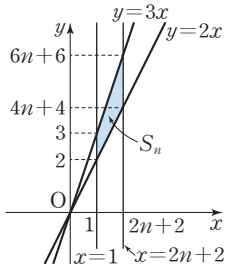


$$S_n=\frac{1}{2}\times\frac{1}{n}\times\frac{1}{n+2}$$
$$=\frac{1}{2n(n+2)}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(n+2)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{8}$$

118 ㉮ $\frac{1}{3}$

오른쪽 그림과 같이 네 직선 $x=1$, $x=2n+2$, $y=2x$, $y=3x$로 둘러싸인 도형은 평행한 두 변의 길이가 각각 1, $2n+2$이고 높이가 $2n+1$인 사다리꼴이므로



$$S_n=\frac{1}{2}\times(1+2n+2)\times(2n+1)$$
$$=\frac{(2n+1)(2n+3)}{2}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{S_n}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)(2n+3)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+3}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right)=\frac{1}{3}$$

119 답 $\frac{3}{16}$

$x^2+y^2=n^2$에 $x=1$을 대입하면

$1+y^2=n^2$

$y^2=n^2-1$ $\quad\therefore y=\pm\sqrt{n^2-1}$

이때 $P_n(1, -\sqrt{n^2-1})$, $Q_n(1, \sqrt{n^2-1})$이라 하면

$a_n=\overline{PQ}=\sqrt{n^2-1}-(-\sqrt{n^2-1})=2\sqrt{n^2-1}$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4(n^2-1)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4(n-1)(n+1)}$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{16}$$

연습문제 68~70쪽

120 답 $\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\frac{1}{9^2-1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+4n}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n(n+1)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times1=\frac{1}{4}$$

121 답 $\log 2$

$$\log\left(1+\frac{1}{1\times3}\right)+\log\left(1+\frac{1}{2\times4}\right)$$
$$+\log\left(1+\frac{1}{3\times5}\right)+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log\left\{1+\frac{1}{n(n+2)}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n(n+2)+1}{n(n+2)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{(k+1)(k+1)}{k(k+2)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\log\frac{2\times2}{1\times3}+\log\frac{3\times3}{2\times4}+\log\frac{4\times4}{3\times5}\right.$$
$$\left.+\cdots+\log\frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\left\{\frac{2\times2}{1\times3}\times\frac{3\times3}{2\times4}\times\frac{4\times4}{3\times5}\right.$$
$$\left.\times\cdots\times\frac{(n+1)(n+1)}{n(n+2)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log\frac{2(n+1)}{n+2}$$

$$=\log 2$$

122 답 ②

급수

$$(a_1-2)+\left(\frac{a_2}{2}-4\right)+\left(\frac{a_3}{3}-6\right)+\left(\frac{a_4}{4}-8\right)+\cdots,$$

즉 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2n\right)$이 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-2n\right)=0$$

$\frac{a_n}{n}-2n=b_n$으로 놓으면

$\frac{a_n}{n}=b_n+2n$

$\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n+2n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b_n}{n}+2\right)=2$$

123 답 ①

ㄱ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{1+2n}=\frac{1}{2}\neq0$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{1+2n}$은 발산한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{3}$

즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$은 $\frac{1}{3}$에 수렴한다.

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1\neq 0$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$은 발산한다.

ㄹ. $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n-3)(n+3)}=\infty$

즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{(n-3)(n+3)}\neq 0$이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{(n-3)(n+3)}$은 발산한다.

따라서 보기에서 수렴하는 급수인 것은 ㄴ이다.

124 답 4

$\sum_{n=1}^{\infty}2a_n=10$에서

$2\sum_{n=1}^{\infty}a_n=10 \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=5$

$a_n-b_n=c_n$으로 놓으면

$b_n=a_n-c_n$

$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=1$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-c_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}c_n$

$=5-1=4$

125 답 1

$(4n^2-1)x^2-4nx+1=0$에서

$\{(2n-1)x-1\}\{(2n+1)x-1\}=0$

$\therefore x=\frac{1}{2n-1}$ 또는 $x=\frac{1}{2n+1}$

이때 $\alpha_n>\beta_n$이므로

$\alpha_n=\frac{1}{2n-1}$, $\beta_n=\frac{1}{2n+1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n-\beta_n)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=1$

126 답 ③

$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})$

$=\lim_{n\to\infty}\{(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+3(a_3-a_4)+\cdots+n(a_n-a_{n+1})\}$

$=\lim_{n\to\infty}\{(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)-na_{n+1}\}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k-\lim_{n\to\infty}na_{n+1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\lim_{n\to\infty}(n-1)a_n$ ◀ $\lim_{n\to\infty}na_{n+1}=\lim_{n\to\infty}(n-1)a_n$

$=5-\lim_{n\to\infty}\left\{(2n-1)a_n\times\frac{n-1}{2n-1}\right\}$

$=5-4\times\frac{1}{2}=3$

127 답 12

등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 d이므로

$a_{n+1}-a_n=d$, $a_{n+1}=a_1+nd$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{a_na_{n+1}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_1+nd}\right)=\frac{1}{a_1}$ ▸▸▸▸▸▸ ❶

따라서 $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{6}$이므로

$a_1=6$

$a_6=16$에서 $a_1+5d=16$

$6+5d=16$

$\therefore d=2$ ▸▸▸▸▸▸ ❷

$\therefore a_4=a_1+3d$

$=6+3\times2=12$ ▸▸▸▸▸▸ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{a_n a_{n+1}}$의 합을 a_1에 대한 식으로 나타내기	50 %
❷	a_1, d의 값 구하기	40 %
❸	a_4의 값 구하기	10 %

128 ㄱ

주어진 급수의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하자.

ㄱ. $S_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{4}{5}\right)$

$+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{n+1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

즉, 주어진 급수는 $-\frac{1}{2}$에 수렴한다.

ㄴ. (i) $S_{2n-1}=1+(-1+1)+(-1+1)$

$+\cdots+(-1+1)$

$=1$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=1$

(ii) $S_{2n}=(1-1)+(1-1)+(1-1)$

$+\cdots+(1-1)$

$=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n}=0$

(i), (ii)에서 $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}\neq\lim_{n\to\infty} S_{2n}$이므로 주어진 급수는 발산한다.

ㄷ. (i) $S_{2n-1}=2+(-4+6)+(-8+10)$

$+\cdots+\{(-4n+4)-(-4n+2)\}$

$=2+2+2+\cdots+2$

$=2n$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=\infty$

(ii) $S_{2n}=(2-4)+(6-8)+(10-12)$

$+\cdots+\{(4n-2)-4n\}$

$=(-2)+(-2)+(-2)+\cdots+(-2)$

$=-2n$

$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n}=-\infty$

(i), (ii)에서 주어진 급수는 발산한다.

따라서 보기에서 수렴하는 급수인 것은 ㄱ이다.

129 ④

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty} a_{n+1}=0$

또 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k=\lim_{n\to\infty} S_n=3$이므로

$\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=\lim_{n\to\infty} S_{n+1}=3$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2S_{n-1}+3a_n-1}{S_{n+1}+2a_{n+1}+2}=\frac{2\times3+3\times0-1}{3+2\times0+2}$

$=1$

130 ④

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a-3n}{n}+\frac{an+6}{n+a}\right)=0$

$-3+a=0 \quad \therefore a=3$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3-3n}{n}+\frac{3n+6}{n+3}\right)$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-3n^2-6n+9+3n^2+6n}{n(n+3)}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{n(n+3)}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}3\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)$

$=3\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+3}\right)$

$=3\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\right.$

$+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n+1}\right)$

$\left.+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right)\right\}$

$=3\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right.$

$\left.-\frac{1}{n+3}\right)$

$=3\times\frac{11}{6}=\frac{11}{2}$

따라서 $S=\frac{11}{2}$이므로

$a+S=3+\frac{11}{2}=\frac{17}{2}$

131 답 4

$\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n$, $\sum_{k=1}^{n} a_{k+1}=T_n$이라 하면

$T_n=S_n-a_1+a_{n+1}$

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n=3$이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n=3$이고

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} a_{n+1}=0$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}=\lim_{n\to\infty} T_n$

$=\lim_{n\to\infty}(S_n-a_1+a_{n+1})$

$=\lim_{n\to\infty} S_n+\lim_{n\to\infty} a_{n+1}-a_1$

$=3-a_1$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+2a_{n+1})=1$에서

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n+2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}=1$

$3+2(3-a_1)=1$

$9-2a_1=1 \quad \therefore a_1=4$

132 답 ㄴ

ㄱ. [반례] $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$이면

$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$

이지만

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

$=\lim_{n\to\infty}\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

$+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\}$

$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=\infty$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

ㄴ. $a_n-4b_n=c_n$으로 놓으면 $a_n=4b_n+c_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\beta$, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n=\gamma$($\beta$, γ는 실수)라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(4b_n+c_n)=4\sum_{n=1}^{\infty} b_n+\sum_{n=1}^{\infty} c_n$

$=4\beta+\gamma$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 수렴한다.

ㄷ. [반례] $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^{n+1}$이면

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=0$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

133 답 ②

점 P_n의 x좌표를 α_n, 점 Q_n의 x좌표를 β_n이라 하면 α_n, β_n은 이차방정식 $x^2-2nx-2n=x+1$, 즉 $x^2-(2n+1)x-(2n+1)=0$의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=2n+1$, $\alpha_n\beta_n=-(2n+1)$

선분 P_nQ_n을 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이는 $|\alpha_n-\beta_n|$이므로

$a_n=|\alpha_n-\beta_n|^2$

$=(\alpha_n+\beta_n)^2-4\alpha_n\beta_n$

$=(2n+1)^2+4(2n+1)$

$=(2n+1)(2n+5)$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+5)}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+5}\right)$

$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+5}\right)$

$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{11}\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+3}\right)+\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+5}\right)\right\}$

$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{8}{15}$

$=\frac{2}{15}$

134 답 ③

| 접근 방법 | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}$을 부분분수를 이용하여 변형한 후 $a_n=pn-3$을 대입하여 p의 값을 구한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n+1}-a_{2n-1}}\left(\frac{1}{a_{2n-1}}-\frac{1}{a_{2n+1}}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2p}\left(\frac{1}{a_{2n-1}}-\frac{1}{a_{2n+1}}\right)$$ ◀ $a_{2n+1}-a_{2n-1}$ $=p(2n+1)-3-\{p(2n-1)-3\}$ $=2p$

$$=\frac{1}{2p}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{2k-1}}-\frac{1}{a_{2k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2p}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_5}\right)+\left(\frac{1}{a_5}-\frac{1}{a_7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{2n-1}}-\frac{1}{a_{2n+1}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2p}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{2n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{2p}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p-3}-\frac{1}{2pn+p-3}\right)$$

$$=\frac{1}{2p(p-3)}$$

따라서 $\frac{1}{2p(p-3)}=\frac{1}{20}$이므로

$p(p-3)=10$

$p^2-3p-10=0$, $(p+2)(p-5)=0$

$\therefore p=5$ ($\because p>1$)

따라서 $a_n=5n-3$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+2}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{n+2}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$

$$=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+2}}\right)$$ ◀ $a_{n+2}-a_n$ $=5(n+2)-3-(5n-3)=10$

$$=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_4}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_{n+2}}\right)$$

$$=\frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{7}-\frac{1}{5n+2}-\frac{1}{5n+7}\right)$$

$$=\frac{1}{10}\times\frac{9}{14}=\frac{9}{140}$$

135 12

| 접근 방법 | $a_n-2=b_n$으로 놓고 구하는 식에 대입하여 식을 변형한다.

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-2)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(a_n-2)=0$

$a_n-2=b_n$으로 놓으면

$a_n=b_n+2$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=5$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-4n+2\sum_{k=1}^{n}a_k\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{b_n+2-4n+2\sum_{k=1}^{n}(b_k+2)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+2-4n+2\sum_{k=1}^{n}b_k+4n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+2+2\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$$

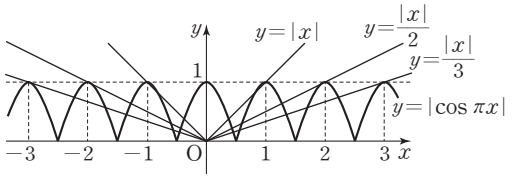
$$=\lim_{n\to\infty}(b_n+2)+2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

$=2+2\times5=12$

136 $\frac{1}{24}$

| 접근 방법 | $y=|\cos\pi x|$의 그래프와 $y=|x|$, $y=\frac{|x|}{2}$, $y=\frac{|x|}{3}$의 그래프를 그려 a_1, a_2, a_3의 값을 구한다.

함수 $y=|\cos\pi x|$의 그래프와 함수 $y=|x|$, $y=\frac{|x|}{2}$, $y=\frac{|x|}{3}$, …의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $a_1=6$, $a_2=6+4=10$, $a_3=10+4=14$, …이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 6이고 공차가 4인 등차수열이다.

$\therefore a_n=6+(n-1)\times4=4n+2$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+2)(4n+6)}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+6}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k+2}-\frac{1}{4k+6}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{14}\right)+\left(\frac{1}{14}-\frac{1}{18}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+6}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4n+6}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$$

02 등비급수

개념 확인 73쪽

137 답 (1) 발산 (2) 수렴, $\frac{5}{2}$ (3) 수렴, $\frac{2}{9}$ (4) 수렴, $\frac{3}{5}$

(1) 등비급수 $1+1+1+1+\cdots$에서 공비가 1이므로 이 급수는 발산한다.

(2) 등비급수 $1+\frac{3}{5}+\frac{9}{25}+\frac{27}{125}+\cdots$에서 공비가 $\frac{3}{5}$이고 $-1<\frac{3}{5}<1$이므로 이 급수는 수렴한다.

따라서 첫째항이 1, 공비가 $\frac{3}{5}$인 등비급수의 합은

$$\frac{1}{1-\frac{3}{5}}=\frac{5}{2}$$

(3) 등비급수 $0.2+0.02+0.002+0.0002+\cdots$에서 공비가 0.1이고 $-1<0.1<1$이므로 이 급수는 수렴한다.

따라서 첫째항이 0.2, 공비가 0.1인 등비급수의 합은

$$\frac{0.2}{1-0.1}=\frac{2}{9}$$

(4) 등비급수 $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\frac{8}{27}+\cdots$에서 공비가 $-\frac{2}{3}$이고 $-1<-\frac{2}{3}<1$이므로 이 급수는 수렴한다.

따라서 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{2}{3}$인 등비급수의 합은

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{3}{5}$$

138 답 (1) 수렴, $\frac{4}{5}$ (2) 발산 (3) 발산 (4) 수렴, $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(1) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$에서 공비가 $-\frac{1}{4}$이고 $-1<-\frac{1}{4}<1$이므로 이 급수는 수렴한다.

따라서 첫째항이 1, 공비가 $-\frac{1}{4}$인 등비급수의 합은

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{4}{5}$$

(2) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}$에서 공비가 $\frac{7}{6}$이고 $\frac{7}{6}>1$이므로 이 급수는 발산한다.

(3) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}6\times(-1)^{n-1}$에서 공비가 -1이므로 이 급수는 발산한다.

(4) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\sqrt{2})^{n-1}$에서 공비가 $1-\sqrt{2}$이고 $-1<1-\sqrt{2}<1$이므로 이 급수는 수렴한다.

따라서 첫째항이 1, 공비가 $1-\sqrt{2}$인 등비급수의 합은

$$\frac{1}{1-(1-\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

139 답 (1) $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$ (2) $-2<x<2$ (3) $0<x<2$ (4) $-1<x<2$

(1) 공비가 $3x$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1<3x<1 \quad \therefore -\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$$

(2) 공비가 $-\frac{x}{2}$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1<-\frac{x}{2}<1 \quad \therefore -2<x<2$$

(3) 공비가 $x-1$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1<x-1<1 \quad \therefore 0<x<2$$

(4) 공비가 $\frac{2x-1}{3}$이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1<\frac{2x-1}{3}<1$$

$$-3<2x-1<3,\ -2<2x<4$$

$$\therefore -1<x<2$$

유제 75~89쪽

140 답 (1) $-\frac{27}{11}$ (2) $-\frac{44}{5}$ (3) $-\frac{1}{10}$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n-(-4)^n}{(-6)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5}{6}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$$=\frac{-\frac{5}{6}}{1-\left(-\frac{5}{6}\right)}-\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=-\frac{5}{11}-2$$

$$=-\frac{27}{11}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(5^{n-1}-3^{2n})\left(\frac{1}{10}\right)^n$

$=\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n$

$=\frac{1}{5}\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{9}{10}}$

$=\frac{1}{5}\times1-9=-\frac{44}{5}$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\cos\frac{n}{2}\pi$

$=\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cos\pi+\left(\frac{1}{3}\right)^3\cos\frac{3}{2}\pi$

$+\left(\frac{1}{3}\right)^4\cos2\pi+\left(\frac{1}{3}\right)^5\cos\frac{5}{2}\pi$

$+\left(\frac{1}{3}\right)^6\cos3\pi+\cdots$

$=0-\left(\frac{1}{3}\right)^2+0+\left(\frac{1}{3}\right)^4+0-\left(\frac{1}{3}\right)^6+\cdots$

$=\frac{-\frac{1}{9}}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)}=-\frac{1}{10}$

141 답 $\frac{9}{7}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+4+4^2+\cdots+4^n}{8^n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{4^{n+1}-1}{4-1}}{8^n}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\times4^n-1}{3\times8^n}$

$=\frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n$

$=\frac{4}{3}\times\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\times\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{8}}$

$=\frac{4}{3}\times1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}=\frac{9}{7}$

142 답 $\frac{1}{6}$

(i) $n\geq2$일 때,

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2^{n+1}-2-(2^n-2)$

$=2\times2^n-2^n=2^n$

(ii) $n=1$일 때,

$a_1=S_1=2^2-2=2$

(i), (ii)에서 $a_n=2^n$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n2^{n+1}}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

143 답 $\frac{26}{9}$

나머지 정리에 의하여

$a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n+2}+\left(\frac{2}{3}\right)^n=\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^2+1\right\}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$=\frac{13}{9}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{13}{9}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$=\frac{13}{9}\times\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}$

$=\frac{13}{9}\times2=\frac{26}{9}$

144 답 6

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(-1<r<1)$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=9$에서 $\frac{a}{1-r}=9$

$\therefore\ a=9(1-r)$ ····· ㉠

$a_n=ar^{n-1}$이므로

$a_n^{\,2}=(ar^{n-1})^2=a^2(r^2)^{n-1}$

즉, 수열 $\{a_n^{\,2}\}$은 첫째항이 a^2, 공비가 r^2인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\,2}=\frac{81}{2}$에서 $\frac{a^2}{1-r^2}=\frac{81}{2}$

$\therefore\ \frac{a^2}{(1-r)(1+r)}=\frac{81}{2}$

㉠을 대입하면

$\frac{81(1-r)^2}{(1-r)(1+r)}=\frac{81}{2}$

$\frac{1-r}{1+r}=\frac{1}{2}$

$2-2r=1+r$ $\quad\therefore\ r=\frac{1}{3}$

이를 ㉠에 대입하면

$a=9\left(1-\frac{1}{3}\right)=6$

145 답 $-\frac{2}{3}$

$1+\frac{1-x}{2}+\left(\frac{1-x}{2}\right)^2+\left(\frac{1-x}{2}\right)^3+\cdots$

$=\frac{1}{1-\frac{1-x}{2}}=\frac{2}{x+1}$

따라서 $\frac{2}{x+1}=6$이므로

$x+1=\frac{1}{3}$ $\therefore x=-\frac{2}{3}$

146 답 $\frac{\pi}{6}$

$\cos^2\theta+\cos^2\theta\sin\theta+\cos^2\theta\sin^2\theta$

$+\cos^2\theta\sin^3\theta+\cdots$

$=\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}=\frac{1-\sin^2\theta}{1-\sin\theta}$

$=\frac{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}{1-\sin\theta}=1+\sin\theta$

따라서 $1+\sin\theta=\frac{3}{2}$이므로

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ $\therefore \theta=\frac{\pi}{6}\left(\because -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

147 답 $\frac{5}{2}$

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\,(-1<r<1)$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3$에서 $\frac{a}{1-r}=3$

$\therefore a=3(1-r)$ ····· ㉠

$a_n=ar^{n-1}$이므로

$a_{2n}=ar^{2n-1}=ar(r^2)^{n-1}$

즉, 수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 ar, 공비가 r^2인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\frac{3}{5}$에서 $\frac{ar}{1-r^2}=\frac{3}{5}$

$\therefore \frac{ar}{(1-r)(1+r)}=\frac{3}{5}$

㉠을 대입하면

$\frac{3r(1-r)}{(1-r)(1+r)}=\frac{3}{5}$

$\frac{r}{1+r}=\frac{1}{5}$, $5r=1+r$ $\therefore r=\frac{1}{4}$

이를 ㉠에 대입하면

$a=3\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{4}$

$\therefore a+r=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

148 답 (1) $-3<x<-1$ 또는 $3<x<5$

(2) $-3<x<-2$ 또는 $-1<x<0$

(1) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2-2x-9}{6}\right)^n$이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2-2x-9}{6}<1$

$\therefore -6<x^2-2x-9<6$

(i) $x^2-2x-9>-6$에서

$x^2-2x-3>0$

$(x+1)(x-3)>0$

$\therefore x<-1$ 또는 $x>3$

(ii) $x^2-2x-9<6$에서

$x^2-2x-15<0$

$(x+3)(x-5)<0$

$\therefore -3<x<5$

(i), (ii)에서 $-3<x<-1$ 또는 $3<x<5$

(2) 등비급수 $1+(x^2+3x+1)+(x^2+3x+1)^2$

$+(x^2+3x+1)^3+\cdots$이 수렴하려면

$-1<x^2+3x+1<1$

(i) $x^2+3x+1>-1$에서

$x^2+3x+2>0$

$(x+2)(x+1)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>-1$

(ii) $x^2+3x+1<1$에서

$x^2+3x<0$

$x(x+3)<0$

$\therefore -3<x<0$

(i), (ii)에서 $-3<x<-2$ 또는 $-1<x<0$

149 답 (1) $-2<x<4$ 또는 $x=5$

(2) $-\sqrt{5}<x<-\sqrt{3}$ 또는 $x=1$ 또는 $\sqrt{3}<x<\sqrt{5}$

(1) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(x-5)\left(\frac{x-1}{3}\right)^n$이 수렴하려면

$(x-5)\left(\frac{x-1}{3}\right)=0$ 또는 $-1<\frac{x-1}{3}<1$

$x=5$ 또는 $-3<x-1<3$

$\therefore -2<x<4$ 또는 $x=5$

(2) 급수 $x-1+(x-1)(x^2-4)+(x-1)(x^2-4)^2$

$+(x-1)(x^2-4)^3+\cdots$이 수렴하려면

$x-1=0$ 또는 $-1<x^2-4<1$

$\therefore x=1$ 또는 $3<x^2<5$ ····· ㉠

(i) $x^2>3$에서 $x<-\sqrt{3}$ 또는 $x>\sqrt{3}$

(ii) $x^2<5$에서 $-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$

(i), (ii)에서 $-\sqrt{5}<x<-\sqrt{3}$ 또는 $\sqrt{3}<x<\sqrt{5}$

따라서 ㉠에서 구하는 x의 값의 범위는

$-\sqrt{5}<x<-\sqrt{3}$ 또는 $x=1$ 또는 $\sqrt{3}<x<\sqrt{5}$

150 답 11

급수 $\log_2 x-3+(\log_2 x-3)^2+(\log_2 x-3)^3$

$+(\log_2 x-3)^4+\cdots$이 수렴하려면

$-1<\log_2 x-3<1$

$2<\log_2 x<4$

$\log_2 2^2<\log_2 x<\log_2 2^4$

$\therefore\ 4<x<16$

따라서 자연수 x는 5, 6, 7, …, 15의 11개이다.

151 답 $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}\sin x)^n$이 수렴하려면

$-1<\sqrt{2}\sin x<1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}<\sin x<\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ -\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}\left(\because\ -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

152 답 (1) $\frac{62}{99}$ (2) $\frac{770}{333}$

(1) $0.\dot{6}\dot{2}=0.626262\cdots$

$=0.62+0.0062+0.000062+\cdots$

$=\frac{62}{100}+\frac{62}{10000}+\frac{62}{1000000}+\cdots$

$=\frac{\frac{62}{100}}{1-\frac{1}{100}}$

$=\frac{62}{99}$

(2) $2.3\dot{1}\dot{2}$

$=2.312312312\cdots$

$=2+0.312+0.000312+0.000000312+\cdots$

$=2+\frac{312}{1000}+\frac{312}{1000000}+\frac{312}{1000000000}+\cdots$

$=2+\frac{\frac{312}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}$

$=2+\frac{104}{333}=\frac{770}{333}$

153 답 356

$1.1\dot{5}\dot{7}=1.1575757\cdots$

$=1.1+0.057+0.00057+0.0000057+\cdots$

$=\frac{11}{10}+\frac{57}{1000}+\frac{57}{100000}+\frac{57}{10000000}+\cdots$

$=\frac{11}{10}+\frac{\frac{57}{1000}}{1-\frac{1}{100}}$

$=\frac{11}{10}+\frac{19}{330}=\frac{191}{165}$

따라서 $p=165$, $q=191$이므로

$p+q=356$

154 답 2

첫째항이 $1.\dot{3}=\frac{13-1}{9}=\frac{4}{3}$, 공비가 $0.\dot{3}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{3}}=2$

155 답 $\frac{10}{11}$

$0.\dot{4}=\frac{4}{9}$, $1.\dot{6}\dot{3}=\frac{163-1}{99}=\frac{18}{11}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1.\dot{6}\dot{3}$에서

$\frac{a_1}{1-\frac{4}{9}}=\frac{18}{11}$

$\frac{9}{5}a_1=\frac{18}{11}\qquad\therefore\ a_1=\frac{10}{11}$

156 답 $\left(\frac{25}{41},\ \frac{20}{41}\right)$

점 P_n의 x좌표를 x_n이라 하면

$x_1=\overline{OP_1}=1$, $x_2=x_1$, $x_3=x_1-\overline{P_2P_3}=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2$,

$x_4=x_3$, $x_5=x_3+\overline{P_4P_5}=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^4$, …

점 P_n의 x좌표가 한없이 가까워지는 점의 x좌표는 $\lim_{n\to\infty}x_n$이므로

$\lim_{n\to\infty}x_n=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^4-\left(\frac{4}{5}\right)^6+\cdots$

$=\frac{1}{1-\left(-\frac{16}{25}\right)}=\frac{25}{41}$

점 P_n의 y좌표를 y_n이라 하면

$y_1=0$, $y_2=\overline{P_1P_2}=\frac{4}{5}$, $y_3=y_2$,

$y_4=y_2-\overline{P_3P_4}=\frac{4}{5}-\left(\frac{4}{5}\right)^3$, $y_5=y_4$, …

점 P_n의 y좌표가 한없이 가까워지는 점의 y좌표는 $\lim_{n\to\infty} y_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\frac{4}{5}-\left(\frac{4}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{5}\right)^5-\left(\frac{4}{5}\right)^7+\cdots$$
$$=\frac{\frac{4}{5}}{1-\left(-\frac{16}{25}\right)}$$
$$=\frac{20}{41}$$

따라서 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\frac{25}{41}, \frac{20}{41}\right)$

157 $\frac{4}{7}$

점 P_n의 x좌표를 x_n이라 하면

$x_1=\overline{OP_1}=1$, $x_2=x_1$, $x_3=x_1+\overline{P_2P_3}=1+\left(\frac{3}{4}\right)^2$,

$x_4=x_3$, $x_5=x_3+\overline{P_4P_5}=1+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^4$, …

점 P_n의 x좌표가 한없이 가까워지는 점의 x좌표는 $\lim_{n\to\infty} x_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty} x_n=1+\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^4+\left(\frac{3}{4}\right)^6+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\frac{9}{16}}$$
$$=\frac{16}{7}$$

점 P_n의 y좌표를 y_n이라 하면

$y_1=0$, $y_2=\overline{P_1P_2}=\frac{3}{4}$, $y_3=y_2$,

$y_4=y_2+\overline{P_3P_4}=\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^3$, $y_5=y_4$, …

점 P_n의 y좌표가 한없이 가까워지는 점의 y좌표는 $\lim_{n\to\infty} y_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^3+\left(\frac{3}{4}\right)^5+\left(\frac{3}{4}\right)^7+\cdots$$
$$=\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}}$$
$$=\frac{12}{7}$$

따라서 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\frac{16}{7}, \frac{12}{7}\right)$이므로

$a=\frac{16}{7}$, $b=\frac{12}{7}$

$\therefore a-b=\frac{4}{7}$

158 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$

점 P_n의 x좌표를 x_n이라 하면

$x_1=\overline{OP_1}\cos 30^\circ=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

$x_2=x_1-\overline{P_1P_2}\cos 30^\circ=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_3=x_2+\overline{P_2P_3}\cos 30^\circ$
$=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}$
⋮

점 P_n의 x좌표가 한없이 가까워지는 점의 x좌표는 $\lim_{n\to\infty} x_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\sqrt{3}-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\sqrt{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\sqrt{3}+\cdots$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

점 P_n의 y좌표를 y_n이라 하면

$y_1=\overline{OP_1}\sin 30^\circ=2\times\frac{1}{2}=1$

$y_2=y_1+\overline{P_1P_2}\sin 30^\circ=1+\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2}$

$y_3=y_2+\overline{P_2P_3}\sin 30^\circ$
$=1+\frac{1}{2}\times 2\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2\times\frac{1}{2}$
⋮

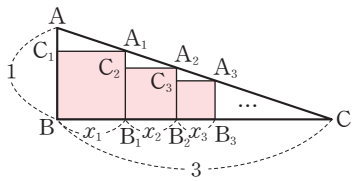
점 P_n의 y좌표가 한없이 가까워지는 점의 y좌표는 $\lim_{n\to\infty} y_n$이므로

$$\lim_{n\to\infty} y_n=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots$$
$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

따라서 점 P_n이 한없이 가까워지는 점의 좌표는 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2\right)$

159 12

다음 그림과 같이 각 정사각형의 한 변의 길이를 각각 x_1, x_2, x_3, …이라 하자.



두 삼각형 ABC, A_1B_1C는 닮음이므로

$\overline{AB} : \overline{A_1B_1} = \overline{BC} : \overline{B_1C}$

$1 : x_1 = 3 : (3-x_1)$

$3x_1 = 3 - x_1$

$4x_1 = 3 \quad \therefore x_1 = \frac{3}{4}$

$\therefore l_1 = 4x_1 = 4 \times \frac{3}{4} = 3$

두 삼각형 ABC, A_2B_2C는 닮음이므로

$\overline{AB} : \overline{A_2B_2} = \overline{BC} : \overline{B_2C}$

$1 : x_2 = 3 : (3-x_1-x_2)$

$3x_2 = 3 - \frac{3}{4} - x_2$

$4x_2 = \frac{9}{4} \quad \therefore x_2 = \frac{9}{16}$

$\therefore l_2 = 4x_2 = 4 \times \frac{9}{16} = \frac{9}{4}$

두 삼각형 ABC, A_3B_3C는 닮음이므로

$\overline{AB} : \overline{A_3B_3} = \overline{BC} : \overline{B_3C}$

$1 : x_3 = 3 : (3-x_1-x_2-x_3)$

$3x_3 = 3 - \frac{3}{4} - \frac{9}{16} - x_3$

$4x_3 = \frac{27}{16} \quad \therefore x_3 = \frac{27}{64}$

$\therefore l_3 = 4x_3 = 4 \times \frac{27}{64} = \frac{27}{16}$

⋮

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n = 3 + \frac{9}{4} + \frac{27}{16} + \cdots$

$= \frac{3}{1-\frac{3}{4}} = 12$

160 $\sqrt{2}$

직각이등변삼각형 ABC에서 $\angle CAB = 45°$이므로

$\overline{BC} = \overline{AC}\sin 45° = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

삼각형의 중점연결정리에 의하여 삼각형 ABC에서

$\overline{B_1C_1} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

└ 삼각형 ABC의 두 변 AB, AC의 중점을 각각 D, E라 할 때 $\overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{BC} /\!/ \overline{DE}$

같은 방법으로 하면 삼각형 AB_1C_1에서

$\overline{B_2C_2} = \frac{1}{2}\overline{B_1C_1} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

삼각형 AB_2C_2에서

$\overline{B_3C_3} = \frac{1}{2}\overline{B_2C_2} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$

⋮

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B_nC_n} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} + \cdots$

$= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

| 다른 풀이 |

직각이등변삼각형 ABC에서 $\angle CAB = 45°$이므로

$\overline{BC} = \overline{AC}\sin 45°$

$= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

두 삼각형 ABC, AB_1C_1은 닮음이고 닮음비는 $1 : \frac{1}{2}$이므로

$\overline{B_1C_1} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

두 삼각형 AB_nC_n, $AB_{n+1}C_{n+1}$은 닮음이고 닮음비는 $1 : \frac{1}{2}$이므로

$\overline{B_{n+1}C_{n+1}} = \frac{1}{2}\overline{B_nC_n}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \overline{B_nC_n} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$

161 $2\sqrt{2}\pi$

점 M_n이 선분 A_nB_n의 중점이고, 두 점 A_{n+1}, B_{n+1}이 각각 두 선분 OA_n, OB_n의 중점이므로 삼각형 $A_{n+1}M_nB_{n+1}$은 직각이등변삼각형이다.

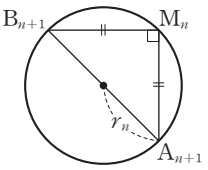
삼각형 OA_1B_1에서

$\overline{A_1B_1} = \sqrt{\overline{OA_1}^2 + \overline{OB_1}^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

삼각형의 중점연결정리에 의하여

$\overline{A_2B_2} = \frac{1}{2}\overline{A_1B_1} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 직각이등변삼각형 $A_{n+1}M_nB_{n+1}$의 외접원의 반지름의 길이를 r_n이라 하면



$r_1=\frac{1}{2}\overline{A_2B_2}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore a_1=2\pi r_1=\sqrt{2}\pi$

두 삼각형 $A_{n+1}M_nB_{n+1}$, $A_{n+2}M_{n+1}B_{n+2}$는 닮음이고 닮음비는 $1:\frac{1}{2}$이므로 $r_{n+1}=\frac{1}{2}r_n$ $\therefore a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\sqrt{2}\pi}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{2}\pi$

162 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

삼각형의 중점연결정리에 의하여

$\overline{A_1B_1}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, $\overline{B_1C_1}=\frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{A_1C_1}=\frac{1}{2}\overline{AC}$

$\overline{A_2B_2}=\frac{1}{2}\overline{A_1B_1}$, $\overline{B_2C_2}=\frac{1}{2}\overline{B_1C_1}$, $\overline{A_2C_2}=\frac{1}{2}\overline{A_1C_1}$

$\vdots$

$\overline{A_{n+1}B_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{A_nB_n}$, $\overline{B_{n+1}C_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{B_nC_n}$,

$\overline{A_{n+1}C_{n+1}}=\frac{1}{2}\overline{A_nC_n}$

즉, 두 삼각형 $A_nB_nC_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$은 닮음이고 닮음비는 $1:\frac{1}{2}$이므로 넓이의 비는

$1^2:\left(\frac{1}{2}\right)^2=1:\frac{1}{4}$이다.

이때 삼각형 $A_nB_nC_n$의 넓이를 S_n이라 하면

$S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$

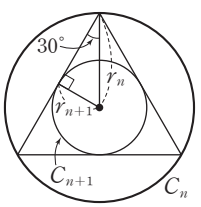
$S_1=\frac{1}{4}\times\triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}$

따라서 새로 만든 모든 삼각형의 넓이의 합은

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

163 답 $\frac{16}{3}\pi$

오른쪽 그림과 같이 원 C_n의 반지름의 길이를 r_n이라 하면



$r_1=2$

$r_{n+1}=r_n\sin 30^\circ=\frac{1}{2}r_n$

즉, 두 원 C_n, C_{n+1}은 닮음이고 닮음비는 $1:\frac{1}{2}$이므로 넓이의 비는 $1^2:\left(\frac{1}{2}\right)^2=1:\frac{1}{4}$이다.

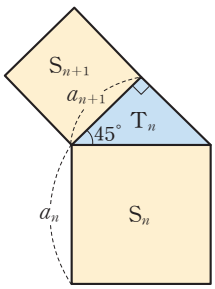
이때 원 C_n의 넓이를 S_n이라 하면

$S_{n+1}=\frac{1}{4}S_n$, $S_1=\pi r_1^2=4\pi$

따라서 모든 원의 넓이의 합은 $\frac{4\pi}{1-\frac{1}{4}}=\frac{16}{3}\pi$

164 답 40

오른쪽 그림과 같이 정사각형 S_n의 한 변의 길이를 a_n이라 하면



$a_1=4$

$a_{n+1}=a_n\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}a_n$

$\therefore a_n=4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

이때 정사각형 S_n의 넓이를 S_n이라 하면

$S_n=a_n^2=\left\{4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right\}^2=16\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}16\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{16}{1-\frac{1}{2}}=32$

한편 직각이등변삼각형 T_n의 빗변이 아닌 한 변의 길이는 a_{n+1}이므로 직각이등변삼각형 T_n의 넓이를 T_n이라 하면

$T_n=\frac{1}{2}\times a_{n+1}^2=\frac{1}{2}\times\left\{4\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right\}^2=8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}T_n=\sum_{n=1}^{\infty}8\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{4}{1-\frac{1}{2}}=8$

따라서 모든 정사각형과 직각이등변삼각형의 넓이의 합은

$\sum_{n=1}^{\infty}S_n+\sum_{n=1}^{\infty}T_n=32+8=40$

연습문제 90~92쪽

165 답 2

$\log_2 2+\log_2\sqrt{2}+\log_2\sqrt[4]{2}+\log_2\sqrt[8]{2}+\cdots$

$=\log_2 2+\log_2 2^{\frac{1}{2}}+\log_2 2^{\frac{1}{4}}+\log_2 2^{\frac{1}{8}}+\cdots$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

166 ③

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{2}{3}\right)^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{9}\right)^n$$

$$=\frac{-\frac{2}{9}}{1-\left(-\frac{2}{9}\right)}$$

$$=-\frac{2}{11}$$

167 $\frac{48}{5}$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(-1<r<1)$라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4$에서 $\frac{3}{1-r}=4$

$4-4r=3$ $\quad\therefore\ r=\frac{1}{4}$

따라서 수열 $\{a_n^{\,2}\}$은 첫째항이 $3^2=9$, 공비가 $\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\,2}=\frac{9}{1-\frac{1}{16}}=\frac{48}{5}$$

168 3

등비급수 $1+\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{9}+\frac{x^6}{27}+\cdots$이 수렴하려면

$-1<\frac{x^2}{3}<1$

$0\le x^2<3\ (\because\ x^2\ge0)$

$\therefore\ -\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다.

169 $\frac{119}{90}$

$1.3\dot{2}=1.3222\cdots$

$=1.3+0.02+0.002+0.0002+\cdots$

$=\frac{13}{10}+\frac{2}{100}+\frac{2}{1000}+\frac{2}{10000}+\cdots$

$=\frac{13}{10}+\frac{\frac{2}{100}}{1-\frac{1}{10}}$

$=\frac{13}{10}+\frac{1}{45}$

$=\frac{119}{90}$

170 $\frac{4}{3}$

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

$a_1+a_2+a_3=\frac{7}{2}$에서

$a_1+a_1r+a_1r^2=\frac{7}{2}$

$\therefore\ a_1(1+r+r^2)=\frac{7}{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $a_2+a_3+a_4=\frac{7}{4}$에서

$a_1r+a_1r^2+a_1r^3=\frac{7}{4}$

$\therefore\ a_1r(1+r+r^2)=\frac{7}{4}$

㉠을 대입하면

$\frac{7}{2}r=\frac{7}{4}$ $\quad\therefore\ r=\frac{1}{2}$

이를 ㉠에 대입하면

$a_1\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{2}$

$\frac{7}{4}a_1=\frac{7}{2}$ $\quad\therefore\ a_1=2$

즉, 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{2}$이므로 수열 $\{a_n^{\,2}\}$은 첫째항이 $2^2=4$, 공비가 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n(a_n-1)=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{\,2}-a_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\,2}-\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

$$=\frac{4}{1-\frac{1}{4}}-\frac{2}{1-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{16}{3}-4=\frac{4}{3}$$

171 ③

이차방정식 $6x^2-5x+1=0$에서

$(3x-1)(2x-1)=0$

$\therefore\ x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$

즉, $|\alpha|<1$, $|\beta|<1$이므로 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n$은 수렴하고

$\alpha+\beta=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$, $\alpha\beta=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta^n-\alpha^n}{\beta-\alpha}=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\beta^n-\sum_{n=1}^{\infty}\alpha^n\right)$$
$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\left(\frac{\beta}{1-\beta}-\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)$$
$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\times\frac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)(1-\beta)}$$
$$=\frac{1}{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$
$$=\frac{1}{1-\frac{5}{6}+\frac{1}{6}}=3$$

172 ④

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 $r\,(r>0)$라 하면
$a_n=ar^{n-1}$
이때 $a_2=3$에서
$ar=3$ ····· ㉠
$a_na_{n+2}=ar^{n-1}\times ar^{n+1}=a^2r^{2n}$이므로
수열 $\{a_na_{n+2}\}$는 첫째항이 $a^2r^2=(ar)^2=9$, 공비가 r^2인 등비수열이다.
$\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+2}=12$에서
$$\frac{9}{1-r^2}=12$$
$4-4r^2=3$, $4r^2=1$
$r^2=\frac{1}{4}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$ $(\because r>0)$
이를 ㉠에 대입하면
$\frac{1}{2}a=3$ $\therefore a=6$
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{6}{1-\frac{1}{2}}=12$$

173 $-\frac{16}{3}$

두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비가 같으므로 공비를 $r\,(-1<r<1)$라 하면
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-2$에서 $\frac{a_1}{1-r}=-2$ ····· ㉠
$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=8$에서 $\frac{b_1}{1-r}=8$ ····· ㉡
㉠+㉡을 하면
$$\frac{a_1+b_1}{1-r}=6$$
$$\frac{3}{1-r}=6\,(\because a_1+b_1=3)$$
$2-2r=1$ $\therefore r=\frac{1}{2}$
이를 ㉠에 대입하면
$$\frac{a_1}{1-\frac{1}{2}}=-2 \qquad \therefore a_1=-1$$
$$\therefore a_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$a_1+b_1=3$에서
$-1+b_1=3$ $\therefore b_1=4$
$$\therefore b_n=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
즉, $a_nb_n=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times4\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-4\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
이므로 수열 $\{a_nb_n\}$은 첫째항이 -4, 공비가 $\frac{1}{4}$인 등비수열이다.
$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\frac{-4}{1-\frac{1}{4}}=-\frac{16}{3}$$

174 -1

등비수열 $\left\{\left(\frac{x+1}{2}\right)^n\right\}$이 수렴하려면
$$-1<\frac{x+1}{2}\le1$$
$$-2<x+1\le2$$
$\therefore -3<x\le1$ ····· ㉠ ▸▸▸▸▸▸ ❶
등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2-2x}{3}\right)^n$이 수렴하려면
$$-1<\frac{x^2-2x}{3}<1$$
$$-3<x^2-2x<3$$
(i) $x^2-2x>-3$에서
$x^2-2x+3>0$
$(x-1)^2+2>0$
따라서 모든 실수 x에서 성립한다.
(ii) $x^2-2x<3$에서
$x^2-2x-3<0$, $(x+1)(x-3)<0$
$\therefore -1<x<3$
(i), (ii)에서 $-1<x<3$ ····· ㉡ ▸▸▸▸▸▸ ❷
따라서 ㉠, ㉡에서 주어진 등비수열과 등비급수 중 어느 하나만 수렴하도록 하는 x의 값의 범위는
$-3<x\le-1$ 또는 $1<x<3$ ▸▸▸▸▸▸ ❸
따라서 정수 x의 값은 -2, -1, 2이므로 그 합은
$-2+(-1)+2=-1$ ▸▸▸▸▸▸ ❹

단계	채점 기준	비율
❶	등비수열 $\left\{\left(\frac{x+1}{2}\right)^n\right\}$이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위 구하기	30 %
❷	등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2-2x}{3}\right)^n$이 수렴하도록 하는 x의 값의 범위 구하기	40 %
❸	$\left\{\left(\frac{x+1}{2}\right)^n\right\}$과 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2-2x}{3}\right)^n$ 중 어느 하나만 수렴하도록 하는 x의 값의 범위 구하기	20 %
❹	모든 정수 x의 값의 합 구하기	10 %

175 ㄱ, ㄴ

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $-1<r<1$

수열 $\{a_n^3\}$은 첫째항이 a^3, 공비가 r^3인 등비수열이고 $-1<r^3<1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^3$도 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 발산하므로 $r\le -1$ 또는 $r\ge 1$

수열 $\{a_{2n}\}$은 첫째항이 ar, 공비가 r^2인 등비수열이고 $r^2\ge 1$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}$도 발산한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-1}{2}=-\frac{1}{2}\neq 0$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-1}{2}$은 발산한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

176 $\frac{5}{3}$

$\frac{13}{99}=0.\dot1\dot3=0.131313\cdots$이므로

$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=1,\ a_4=3,\ \cdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{3}{2^6}+\cdots$$
$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\cdots\right)+\left(\frac{3}{2^2}+\frac{3}{2^4}+\frac{3}{2^6}+\cdots\right)$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}$$

177 4

정삼각형 $A_1A_2B_1$의 넓이가 $\sqrt{3}$이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{A_1A_2}^2=\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{A_1A_2}=2$$

정삼각형 $A_2A_3B_2$의 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{4}$이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{A_2A_3}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore \overline{A_2A_3}=1$$

정삼각형 $A_3A_4B_3$의 넓이가 $\frac{\sqrt{3}}{16}$이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{A_3A_4}^2=\frac{\sqrt{3}}{16}$$

$$\therefore \overline{A_3A_4}=\frac{1}{2}$$

$\vdots$

따라서 $\overline{A_{n+1}A_{n+2}}=\frac{1}{2}\overline{A_nA_{n+1}}$이므로

$$x_1=\frac{1}{2}\overline{A_1A_2}=\frac{1}{2}\times 2=1$$

$$x_2=\overline{A_1A_2}+\frac{1}{2}\overline{A_2A_3}$$
$$=2+\frac{1}{2}\times 1=2+\frac{1}{2}$$

$$x_3=\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\frac{1}{2}\overline{A_3A_4}$$
$$=(2+1)+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=(2+1)+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$\vdots$

따라서 $n\ge 2$일 때

$$x_n=\overline{A_1A_n}+\frac{1}{2}\overline{A_nA_{n+1}}$$
$$=\left(2+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-3}}\right)+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(2+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-3}}\right)+\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$$
$$=\frac{2}{1-\frac{1}{2}}+0=4$$

178 ③

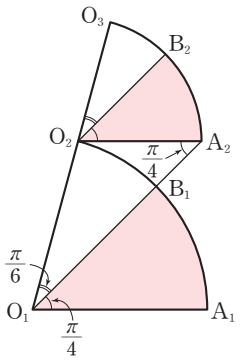
부채꼴 $O_1A_1B_1$의 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$이므로

$$S_1=\frac{1}{2}\times 1^2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$$

$\overline{O_1A_1} /\!/ \overline{O_2A_2}$이므로

$\angle O_1A_2O_2 = \angle A_1O_1B_1$

$= \frac{\pi}{4}$



삼각형 $O_1A_2O_2$에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{O_2A_2}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{\overline{O_1O_2}}{\sin\frac{\pi}{4}}$

$\therefore \overline{O_2A_2} = \frac{\overline{O_1O_2}\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

두 부채꼴 $O_1A_1B_1$, $O_2A_2B_2$는 닮음이고 닮음비는 $1 : \frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 넓이의 비는 $1^2 : \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 : \frac{1}{2}$이다.

즉, 두 부채꼴 $O_nA_nB_n$, $O_{n+1}A_{n+1}B_{n+1}$의 넓이의 비가 $1 : \frac{1}{2}$이므로 그림 R_n에 새로 색칠한 부분과 그림 R_{n+1}에 새로 색칠한 부분의 넓이의 비도 $1 : \frac{1}{2}$이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$은 첫째항이 $\frac{\pi}{8}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비급수의 합이므로

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$

179 ①

| 접근 방법 | 두 수열 $\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{a_{2n}}\right\}$이 수렴함을 이용하여 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비를 각각 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\,(a>0)$, 공비를 $r\,(r>0)$라 하면 수열 $\left\{\frac{a_n}{3^n}\right\}$은 첫째항이 $\frac{a}{3}$, 공비가 $\frac{r}{3}$인 등비수열이다.

이때 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$이 수렴하므로

$-1 < \frac{r}{3} < 1$

$\therefore 0 < r < 3\,(\because r>0)$ ····· ㉠

또 수열 $\left\{\frac{1}{a_{2n}}\right\}$은 첫째항이 $\frac{1}{ar}$, 공비가 $\frac{1}{r^2}$인 등비수열이다.

이때 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}}$이 수렴하므로

$-1 < \frac{1}{r^2} < 1$, $r^2 > 1\,(\because r^2>0)$

$\therefore r > 1\,(\because r>0)$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $1 < r < 3$

등비수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로

$r = 2$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n} = \frac{\frac{a}{3}}{1-\frac{2}{3}} = a$

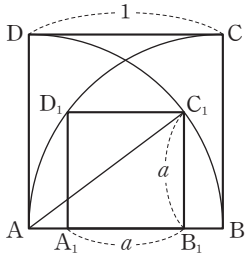
따라서 $a=4$이므로

$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{2n}} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{6}$

180 6

| 접근 방법 | 선분 AC_1을 그어서 직각삼각형 AB_1C_1을 만들고, 각 변의 길이를 이용하여 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변의 길이를 a라 하면



$\overline{AA_1} = \frac{1-a}{2}$

이때 $\overline{AC_1}=1$이므로 직각삼각형 AB_1C_1에서

$\overline{AB_1}^2 + \overline{B_1C_1}^2 = \overline{AC_1}^2$

$\left(\frac{1-a}{2}+a\right)^2 + a^2 = 1^2$

$\frac{a^2+2a+1}{4} + a^2 = 1$, $5a^2+2a-3=0$

$(a+1)(5a-3)=0$ $\quad\therefore a = \frac{3}{5}\ (\because a>0)$

$\therefore l_1 = 4a = 4\times\frac{3}{5} = \frac{12}{5}$

두 정사각형 ABCD, $A_1B_1C_1D_1$은 닮음이고 닮음비는 $1 : \frac{3}{5}$이므로 두 정사각형 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$도 닮음이고 닮음비는 $1 : \frac{3}{5}$이다.

따라서 $l_{n+1} = \frac{3}{5}l_n$이므로

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{\frac{12}{5}}{1-\frac{3}{5}} = 6$

Ⅱ. 미분법

01 지수함수와 로그함수의 미분

개념 확인 95쪽

181 답 (1) $\frac{1}{7}$ (2) ∞ (3) ∞ (4) 3 (5) ∞ (6) ∞

(1) $\lim_{x\to-1} 7^x = 7^{-1} = \frac{1}{7}$

(3) $\lim_{x\to-\infty} \frac{7^x}{8^x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^x = \infty$

(4) $\lim_{x\to8} \log_2 x = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

유제 97~99쪽

182 답 (1) -1 (2) -1 (3) -6

(1) 분모, 분자를 5^x으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5^x}{4^x-5^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^x-1} = \frac{1}{0-1} = -1$$

(2) 분모, 분자에 3^x을 각각 곱하면

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{9^x-1}{9^x+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

(3) 6^x으로 묶으면

$$\lim_{x\to\infty} (4^x-6^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \left[6^x\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} 6\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\right\}^{\frac{1}{x}}$$
$$= 6(0-1) = -6$$

| 다른 풀이 |

(2) $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고, $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}} = \lim_{t\to\infty} \frac{3^{-t}-3^t}{3^{-t}+3^t}$$

분모, 분자를 3^t으로 각각 나누면

$$\lim_{t\to\infty} \frac{3^{-t}-3^t}{3^{-t}+3^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{9}\right)^t-1}{\left(\frac{1}{9}\right)^t+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

183 답 (1) 0 (2) -1 (3) 9

(1) 분모, 분자를 8^x으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty} \frac{6^x}{4^x+8^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\left(\frac{1}{2}\right)^x+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

(2) 분모, 분자에 7^x을 각각 곱하면

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{7^{-x}}{7^x-7^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{49^x-1} = \frac{1}{0-1} = -1$$

(3) 9^x으로 묶으면

$$\lim_{x\to\infty} (9^x-4^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \left[9^x\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^x\right\}\right]^{\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x\to\infty} 9\left\{1-\left(\frac{4}{9}\right)^x\right\}^{\frac{1}{x}}$$
$$= 9(1-0) = 9$$

| 다른 풀이 |

(2) $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고, $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{7^{-x}}{7^x-7^{-x}} = \lim_{t\to\infty} \frac{7^t}{7^{-t}-7^t}$$

분모, 분자를 7^t으로 각각 나누면

$$\lim_{t\to\infty} \frac{7^t}{7^{-t}-7^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{49}\right)^t-1} = \frac{1}{0-1} = -1$$

184 답 $\frac{1}{2}$

분모, 분자를 4^x으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^{2x}-3^x}{2^{2x+1}-3^{x+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4^x-3^x}{2\times4^x-3\times3^x}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^x}{2-3\times\left(\frac{3}{4}\right)^x}$$
$$= \frac{1-0}{2-3\times0} = \frac{1}{2}$$

185 답 3

주어진 식의 좌변의 분모, 분자를 5^x으로 각각 나누면

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a\times5^{x+1}-2}{5^{x-1}+3^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5a\times5^x-2}{\frac{1}{5}\times5^x+3^x}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5a-2\times\left(\frac{1}{5}\right)^x}{\frac{1}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^x}$$
$$= \frac{5a-2\times0}{\frac{1}{5}+0} = 25a$$

따라서 $25a=75$이므로 $a=3$

186 답 (1) 1 (2) $\frac{1}{2}$

(1) $\lim_{x\to\infty}\{\log_2(2x+1)-\log_2 x\}=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{2x+1}{x}$

$=\log_2\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}$

$=\log_2 2=1$

(2) $\lim_{x\to3+}\{\log_4(x^2-4x+3)-\log_4(x-3)\}$

$=\lim_{x\to3+}\log_4\frac{x^2-4x+3}{x-3}$

$=\lim_{x\to3+}\log_4\frac{(x-1)(x-3)}{(x-3)}$

$=\lim_{x\to3+}\log_4(x-1)$

$=\log_4\lim_{x\to3+}(x-1)$

$=\log_4 2=\log_{2^2}2=\frac{1}{2}$

187 답 (1) 1 (2) $\log_5 3$

(1) $\lim_{x\to\infty}(\log_3\sqrt{9x^2+1}-\log_3 x)$

$=\lim_{x\to\infty}\log_3\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}$

$=\log_3\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x}$

$=\log_3 3=1$

(2) $\lim_{x\to1+}\{\log_5(x^3-1)-\log_5(x-1)\}$

$=\lim_{x\to1+}\log_5\frac{x^3-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\log_5\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\log_5(x^2+x+1)$

$=\log_5\lim_{x\to1+}(x^2+x+1)$

$=\log_5 3$

188 답 $\log_3 2$

$\lim_{x\to2+}\{\log_3(x+6)-\log_3(x^2-4)+\log_3(x-2)\}$

$=\lim_{x\to2+}\log_3\frac{(x+6)(x-2)}{x^2-4}$

$=\lim_{x\to2+}\log_3\frac{(x+6)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$=\lim_{x\to2+}\log_3\frac{x+6}{x+2}=\log_3\lim_{x\to2+}\frac{x+6}{x+2}$

$=\log_3 2$

189 답 $\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to\infty}\{\log_2(8x+3)-\log_2(ax-2)\}$

$=\lim_{x\to\infty}\log_2\frac{8x+3}{ax-2}$

$=\log_2\lim_{x\to\infty}\frac{8x+3}{ax-2}$

$=\log_2\frac{8}{a}$

따라서 $\log_2\frac{8}{a}=4$이므로

$\frac{8}{a}=2^4=16 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

개념 확인 103쪽

190 답 (1) $e^{\frac{1}{2}}$ (2) e^2 (3) e^5 (4) e^3

(1) $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to0}\{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$

(2) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right\}^2=e^2$

(3) $\lim_{x\to0}(1+6x)^{\frac{5}{6x}}=\lim_{x\to0}\{(1+6x)^{\frac{1}{6x}}\}^5=e^5$

(4) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{7x}\right)^{21x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{7x}\right)^{7x}\right\}^3=e^3$

191 답 (1) 1 (2) 1 (3) $\frac{2}{9}$ (4) $\frac{3}{4}$ (5) $\frac{1}{\ln 7}$ (6) $\ln 5$

(3) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{9x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\times\frac{2}{9}$

$=1\times\frac{2}{9}=\frac{2}{9}$

(4) $\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{4x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{3}{4}$

$=1\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$

유제 105~113쪽

192 답 (1) $\frac{1}{e^3}$ (2) $e^{\frac{1}{3}}$ (3) $e^{\frac{1}{2}}$

(1) $\lim_{x\to0}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\frac{6}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{1+\left(-\frac{x}{2}\right)\right\}^{\frac{6}{x}}$

$=\lim_{x\to0}\left[\left\{1+\left(-\frac{x}{2}\right)\right\}^{-\frac{2}{x}}\right]^{-3}$

$=e^{-3}=\frac{1}{e^3}$

(2) $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고, $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{-x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{3t}\right)^{t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3t}\right)^{3t}\right\}^{\frac{1}{3}}$$
$$=e^{\frac{1}{3}}$$

(3) $x-2=t$로 놓으면 $x=2+t$이고, $x\to2$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to2}(x-1)^{\frac{1}{2x-4}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{2t}}$$
$$=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=e^{\frac{1}{2}}$$

193 답 (1) $e^{\frac{2}{5}}$ (2) e^4 (3) e^2

(1) $\lim_{x\to0}\left(1+\frac{2}{5}x\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\left\{\left(1+\frac{2}{5}x\right)^{\frac{5}{2x}}\right\}^{\frac{2}{5}}=e^{\frac{2}{5}}$

(2) $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고, $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{2x}=\lim_{t\to\infty}\left(1-\frac{2}{t}\right)^{-2t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left\{1+\left(-\frac{2}{t}\right)\right\}^{-2t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\left[\left\{1+\left(-\frac{2}{t}\right)\right\}^{-\frac{t}{2}}\right]^4$$
$$=e^4$$

(3) $x-4=t$로 놓으면 $x=4+t$이고 $x\to4$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to4}(x-3)^{\frac{2}{x-4}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{2}{t}}$$
$$=\lim_{t\to0}\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^2=e^2$$

194 답 -4

$$\lim_{x\to0}(1+ax)^{\frac{1}{2x}}=\lim_{x\to0}\{(1+ax)^{\frac{1}{ax}}\}^{\frac{a}{2}}$$
$$=e^{\frac{a}{2}}$$

따라서 $e^{\frac{a}{2}}=\frac{1}{e^2}=e^{-2}$이므로

$\frac{a}{2}=-2 \quad \therefore a=-4$

195 답 $\frac{1}{e^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^x$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$
$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$
$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right\}^{-1}}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}$$
$$=\frac{e^{-1}}{e}=\frac{1}{e^2}$$

| 다른 풀이 |

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x$$

$\frac{2}{x+1}=t$로 놓으면 $x=\frac{2}{t}-1$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^x=\lim_{t\to0+}(1-t)^{\frac{2}{t}-1}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left\{(1-t)^{\frac{2}{t}}\times\frac{1}{1-t}\right\}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left[\{(1-t)^{-\frac{1}{t}}\}^{-2}\times\frac{1}{1-t}\right]$$
$$=e^{-2}\times1=\frac{1}{e^2}$$

196 답 (1) 3 (2) $\frac{5}{3}$ (3) $\frac{1}{4}$

(1) $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{e^x-1}$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{x}{e^x-1}\times3\right\}$$
$$=1\times1\times3=3$$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-e^{-x}}{3x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1-e^{-x}+1}{3x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{3x}-\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{3x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{4x}\times\frac{4}{3}+\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{-x}\times\frac{1}{3}$$
$$=1\times\frac{4}{3}+1\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$$

(3) $x-2=t$로 놓으면 $x=2+t$이고, $x\to 2$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{x^2-4}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{(2+t)^2-4}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t^2+4t}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{\ln(1+t)}{t}\times\frac{1}{t+4}\right\}$$
$$=1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

| 다른 풀이 |

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{4x}-e^{-x}}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}(e^{5x}-1)}{3x}$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{-x}}{3}\times\frac{e^{5x}-1}{5x}\times 5\right)$$
$$=\frac{1}{3}\times 1\times 5=\frac{5}{3}$$

197 답 (1) 6 (2) $\frac{5}{4}$ (3) 1

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{\frac{x}{3}}{\ln\left(1+\frac{x}{3}\right)}\times 6\right\}$$
$$=1\times 1\times 6=6$$

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}+e^{3x}-2}{4x}$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1+e^{3x}-1}{4x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{4x}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{4x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{2x}\times\frac{1}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{3}{4}$$
$$=1\times\frac{1}{2}+1\times\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$$

(3) $x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고, $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{e^{x-1}-1}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^2-(1+t)}{e^t-1}$$
$$=\lim_{t\to 0}\frac{t^2+t}{e^t-1}$$
$$=\lim_{t\to 0}\left\{\frac{t}{e^t-1}\times(t+1)\right\}$$
$$=1\times 1=1$$

198 답 $\frac{1}{6}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+9}-3}{\ln(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)}{\ln(x+1)\times(\sqrt{x+9}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(x+1)\times(\sqrt{x+9}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{x}{\ln(1+x)}\times\frac{1}{\sqrt{x+9}+3}\right\}$$
$$=1\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$$

199 답 6

$$\lim_{x\to\infty}ax\{\ln(x+b)-\ln x\}=\lim_{x\to\infty}ax\ln\frac{x+b}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}ax\ln\left(1+\frac{b}{x}\right)$$

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to 0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}ax\ln\left(1+\frac{b}{x}\right)=\lim_{t\to 0+}\frac{a}{t}\ln(1+bt)$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\ln(1+bt)}{bt}\times ab$$
$$=1\times ab=ab$$

$\therefore ab=6$

| 다른 풀이 |

$$\lim_{x\to\infty}ax\{\ln(x+b)-\ln x\}=\lim_{x\to\infty}ax\ln\frac{x+b}{x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}ax\ln\left(1+\frac{b}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{b}{x}\right)^{ax}$$
$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{ax}$$
$$=\ln\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{b}{x}\right)^{\frac{x}{b}}\right\}^{ab}$$
$$=\ln e^{ab}=ab$$

$\therefore ab=6$

200 답 (1) $\frac{5}{3\ln 2}$ (2) $\ln 3$ (3) $\frac{2}{\ln 5}$

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+5x)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(1+5x)}{5x}\times\frac{5}{3}$
$$=\frac{1}{\ln 2}\times\frac{5}{3}=\frac{5}{3\ln 2}$$

(2) $\lim_{x\to0}\dfrac{9^x-3^x}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{9^x-1-3^x+1}{x}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{9^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\dfrac{3^x-1}{x}$

$=\ln 9-\ln 3$

$=\ln 3$

(3) $x-3=t$로 놓으면 $x=3+t$이고, $x\to3$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to3}\dfrac{\log_5(2x-5)}{x-3}=\lim_{t\to0}\dfrac{\log_5(1+2t)}{t}$

$=\lim_{t\to0}\dfrac{\log_5(1+2t)}{2t}\times2$

$=\dfrac{1}{\ln 5}\times2$

$=\dfrac{2}{\ln 5}$

| 다른 풀이 |

(2) $\lim_{x\to0}\dfrac{9^x-3^x}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{3^x(3^x-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(3^x\times\dfrac{3^x-1}{x}\right)$

$=1\times\ln 3$

$=\ln 3$

201 (1) $\dfrac{4}{\ln 3}$ (2) $\ln 5+1$ (3) $\dfrac{1}{4\ln 7}$

(1) $\lim_{x\to0}\dfrac{\log_3(1+4x)}{x^2+x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\dfrac{\log_3(1+4x)}{4x}\times\dfrac{4}{x+1}\right\}$

$=\dfrac{1}{\ln 3}\times4$

$=\dfrac{4}{\ln 3}$

(2) $\lim_{x\to0}\dfrac{5^x-e^{-x}}{x}=\lim_{x\to0}\dfrac{5^x-1-e^{-x}+1}{x}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{5^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\dfrac{e^{-x}-1}{-x}$

$=\ln 5+1$

(3) $x+1=t$로 놓으면 $x=-1+t$이고, $x\to-1$일 때 $t\to0$이므로

$\lim_{x\to-1}\dfrac{\log_7(x+2)}{4x+4}=\lim_{t\to0}\dfrac{\log_7(1+t)}{4t}$

$=\lim_{t\to0}\dfrac{\log_7(1+t)}{t}\times\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{\ln 7}\times\dfrac{1}{4}$

$=\dfrac{1}{4\ln 7}$

202 $-\dfrac{3}{\ln 3}$

$\lim_{x\to0}\dfrac{\log_3(1+3x)+\log_3(1-3x)}{3x^2}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{\log_3(1+3x)(1-3x)}{3x^2}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{\log_3(1-9x^2)}{-9x^2}\times(-3)$

$=\dfrac{1}{\ln 3}\times(-3)=-\dfrac{3}{\ln 3}$

203 $\dfrac{e}{5}$

$\lim_{x\to0}\dfrac{a^x+x\ln 5-1}{3x}=\lim_{x\to0}\left(\dfrac{a^x-1}{x}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{\ln 5}{3}\right)$

$=\dfrac{\ln a}{3}+\dfrac{\ln 5}{3}$

$=\dfrac{\ln a+\ln 5}{3}=\dfrac{\ln 5a}{3}$

따라서 $\dfrac{\ln 5a}{3}=\dfrac{1}{3}$이므로

$\ln 5a=1$, $5a=e$ $\therefore a=\dfrac{e}{5}$

204 (1) $a=2$, $b=1$ (2) $a=10$, $b=0$

(1) $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}\ln(ax+b)=0$

$\ln b=0$ $\therefore b=1$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(ax+1)}{e^{2x}-1}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\dfrac{\ln(1+ax)}{ax}\times\dfrac{2x}{e^{2x}-1}\times\dfrac{a}{2}\right\}$

$=1\times1\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{a}{2}$

따라서 $\dfrac{a}{2}=1$이므로 $a=2$

(2) $x\to0$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}(5x+b)=0$ $\therefore b=0$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-1}{5x}=\lim_{x\to0}\dfrac{e^{ax}-1}{ax}\times\dfrac{a}{5}$

$=1\times\dfrac{a}{5}=\dfrac{a}{5}$

따라서 $\dfrac{a}{5}=2$이므로 $a=10$

205 답 $\frac{1}{4}$

$x\to0$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}\ln(a+4x)=0$

$\ln a=0 \quad \therefore a=1$

$\therefore b=\lim_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+4x)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{4x}{\ln(1+4x)}\times\frac{1}{4}$

$=1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

$\therefore ab=1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

206 답 8

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}(\sqrt{ax+b}-2)=0$

$\sqrt{b}-2=0 \quad \therefore b=4$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{ax+4}-2}{e^x-1}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{ax+4}-2)(\sqrt{ax+4}+2)}{(e^x-1)(\sqrt{ax+4}+2)}$

$=\lim_{x\to0}\frac{ax}{(e^x-1)(\sqrt{ax+4}+2)}$

$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{e^x-1}\times\frac{a}{\sqrt{ax+4}+2}\right)$

$=1\times\frac{a}{4}=\frac{a}{4}$

따라서 $\frac{a}{4}=1$이므로 $a=4$

$\therefore a+b=4+4=8$

207 답 $-\frac{1}{\ln 2}$

$x\to1$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$에서

$\lim_{x\to1}(e^{x+a}-1)=0$

$e^{1+a}-1=0,\ 1+a=0 \quad \therefore a=-1$

$\therefore b=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{e^{x-1}-1}$

이때 $x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고, $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$b=\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{e^{x-1}-1}$

$=\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^2-1}{e^t-1}=\lim_{t\to0}\frac{t(t+2)}{e^t-1}$

$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{t}{e^t-1}\times(t+2)\right\}$

$=1\times2=2$

$\therefore \lim_{x\to0}\frac{ax}{b^x-1}=\lim_{x\to0}\left(-\frac{x}{2^x-1}\right)=-\frac{1}{\ln 2}$

208 답 $a=12,\ b=1$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$이므로

$\lim_{x\to0+}\frac{x^2+ax}{\ln(b+6x)}=2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$x\to0+$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$에서

$\lim_{x\to0+}\ln(b+6x)=0$

$\ln b=0 \quad \therefore b=1$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$\lim_{x\to0+}\frac{x^2+ax}{\ln(1+6x)}=\lim_{x\to0+}\left\{\frac{6x}{\ln(1+6x)}\times\frac{x+a}{6}\right\}$

$=1\times\frac{a}{6}=\frac{a}{6}$

따라서 $\frac{a}{6}=2$이므로 $a=12$

209 답 $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}$

$\mathrm{P}(\log_3 t,\ t)$, $\mathrm{Q}(\log_2 t,\ t)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\log_2 t-\log_3 t$, $\overline{\mathrm{RS}}=t-1$

$\therefore \lim_{t\to1+}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{RS}}}=\lim_{t\to1+}\frac{\log_2 t-\log_3 t}{t-1}$

$t-1=s$로 놓으면 $t=1+s$이고, $t\to1+$일 때 $s\to0+$이므로

$\lim_{t\to1+}\frac{\log_2 t-\log_3 t}{t-1}$

$=\lim_{s\to0+}\frac{\log_2(1+s)-\log_3(1+s)}{s}$

$=\lim_{s\to0+}\left\{\frac{\log_2(1+s)}{s}-\frac{\log_3(1+s)}{s}\right\}$

$=\lim_{s\to0+}\frac{\log_2(1+s)}{s}-\lim_{s\to0+}\frac{\log_3(1+s)}{s}$

$=\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}$

210 답 $\frac{1}{2}$

$x\neq1$일 때, $f(x)=\frac{e^{ax-2}-1}{4x-4}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$에서

$f(1)=\lim_{x\to1}\frac{e^{ax-2}-1}{4x-4}$ ····· ㉠

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to1}(e^{ax-2}-1)=0$

$e^{a-2}-1=0$, $a-2=0$ $\therefore a=2$

이를 ㉠에 대입하면

$f(1)=\lim_{x\to1}\frac{e^{2x-2}-1}{4x-4}$

$x-1=t$로 놓으면 $x=t+1$이고, $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\begin{aligned}f(1)&=\lim_{x\to1}\frac{e^{2x-2}-1}{4x-4}\\&=\lim_{t\to0}\frac{e^{2t}-1}{4t}\\&=\lim_{t\to0}\frac{e^{2t}-1}{2t}\times\frac{1}{2}\\&=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

211 답 8

$C(t,\ln(1+2t))$, $D(3t,\ln(1+6t))$이므로

$f(t)=\frac{1}{2}t\ln(1+2t)$

$g(t)=\frac{1}{2}\{\ln(1+2t)+\ln(1+6t)\}\times(3t-t)$

$=t\ln(1+2t)+t\ln(1+6t)$

$\therefore\lim_{t\to0+}\frac{g(t)}{f(t)}$

$$\begin{aligned}&=\lim_{t\to0+}\frac{t\ln(1+2t)+t\ln(1+6t)}{\frac{1}{2}t\ln(1+2t)}\\&=2\lim_{t\to0+}\frac{\ln(1+2t)+\ln(1+6t)}{\ln(1+2t)}\\&=2\lim_{t\to0+}\left\{1+\frac{\ln(1+6t)}{\ln(1+2t)}\right\}\\&=2\lim_{t\to0+}\left\{1+\frac{\ln(1+6t)}{6t}\times\frac{2t}{\ln(1+2t)}\times3\right\}\\&=2(1+1\times1\times3)=8\end{aligned}$$

개념 확인 115쪽

212 답 (1) $y'=e^{x-1}$ (2) $y'=1+e^x$ (3) $y'=2\ln5\times5^x$ (4) $y'=3^{x-2}\ln3$

(1) $y=e^{x-1}=\frac{1}{e}\times e^x$이므로

$y'=\frac{1}{e}\times(e^x)'=\frac{1}{e}\times e^x=e^{x-1}$

(2) $y'=(x)'+(e^x)'=1+e^x$

(3) $y'=2\times(5^x)'=2\times5^x\ln5=2\ln5\times5^x$

(4) $y=3^{x-2}=\frac{1}{3^2}\times3^x$이므로

$y'=\frac{1}{3^2}\times(3^x)'=\frac{1}{3^2}\times3^x\ln3=3^{x-2}\ln3$

213 답 (1) $y'=\frac{1}{x}$ (2) $y'=2^x\ln2+\frac{1}{x}$ (3) $y'=\frac{1}{x\ln10}$ (4) $y'=2x+\frac{1}{x\ln5}$

(1) $y=\ln2x=\ln2+\ln x$이므로

$y'=(\ln2)'+(\ln x)'=\frac{1}{x}$

(2) $y'=(2^x)'+(\ln x)'=2^x\ln2+\frac{1}{x}$

(3) $y=\log7x=\log7+\log x$이므로

$y'=(\log7)'+(\log x)'=\frac{1}{x\ln10}$

(4) $y'=(x^2)'+(\log_5x)'=2x+\frac{1}{x\ln5}$

유제 117~121쪽

214 답 (1) $y'=\frac{1}{5}e^x+5^{x+3}\ln5$ (2) $y'=-2^{-x}\ln2+9^{x+1}\ln9$ (3) $y'=1-xe^x$ (4) $y'=6^x\{(2x-1)\ln6+2\}$

(1) $y=e^{x-\ln5}+5^{x+3}$

$=\frac{1}{e^{\ln5}}\times e^x+5^3\times5^x$

$=\frac{1}{5}\times e^x+5^3\times5^x$

이므로

$y'=\frac{1}{5}\times(e^x)'+5^3\times(5^x)'$

$=\frac{1}{5}e^x+5^3\times5^x\ln5$

$=\frac{1}{5}e^x+5^{x+3}\ln5$

(2) $y'=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}'+9\times(9^x)'$

$=\left(\frac{1}{2}\right)^x\ln\frac{1}{2}+9\times9^x\ln9$

$=-2^{-x}\ln2+9^{x+1}\ln9$

(3) $y'=(-x+1)'(e^x-1)+(-x+1)(e^x-1)'$

$=-(e^x-1)+(-x+1)e^x$

$=1-xe^x$

(4) $y'=(6^x)'(2x-1)+6^x(2x-1)'$

$=6^x\ln6\times(2x-1)+6^x\times2$

$=6^x\{(2x-1)\ln6+2\}$

215 답 $3\ln3+1$

$f'(x)=(x)'e^x+x(e^x)'+3(3^x)'$

$=e^x+xe^x+3\times3^x\ln3$

$=(x+1)e^x+3^{x+1}\ln3$

$\therefore f'(0)=3\ln3+1$

216 답 $4\ln2+1$

$f'(x)=\frac{1}{e^2}(e^x)'+(2^x)'$

$=\frac{1}{e^2}\times e^x+2^x\ln2$

$=e^{x-2}+2^x\ln2$

점 $(2, 5)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)$이므로

$f'(2)=4\ln2+1$

217 답 4

$f'(x)=(a^x)'(x^3+1)+a^x(x^3+1)'$

$=a^x\ln a\times(x^3+1)+a^x\times3x^2$

$=a^x\{(x^3+1)\ln a+3x^2\}$

$f'(-1)=\frac{3}{4}$에서 $3a^{-1}=\frac{3}{4}$

$\therefore a=4$

218 답 (1) $y'=3\ln3x-\frac{1}{x}+3$

(2) $y'=2x\log_3x+\frac{x}{\ln3}-\frac{1}{x\ln3}$

(3) $y'=2^x\left(\ln2\times\log x+\frac{1}{x\ln10}\right)$

(1) $y'=(3x-1)'(\ln3+\ln x)$

$+(3x-1)(\ln3+\ln x)'$

$=3(\ln3+\ln x)+(3x-1)\times\frac{1}{x}$

$=3\ln3x-\frac{1}{x}+3$

(2) $y'=(x^2-1)'\log_3x+(x^2-1)(\log_3x)'$

$=2x\log_3x+(x^2-1)\times\frac{1}{x\ln3}$

$=2x\log_3x+\frac{x}{\ln3}-\frac{1}{x\ln3}$

(3) $y'=(2^x)'\log x+2^x(\log x)'$

$=2^x\ln2\times\log x+2^x\times\frac{1}{x\ln10}$

$=2^x\left(\ln2\times\log x+\frac{1}{x\ln10}\right)$

219 답 1

$f'(x)=(x^2)'-\frac{1}{e}\{(e^x)'\ln x+e^x(\ln x)'\}$

$=2x-\frac{1}{e}\left(e^x\ln x+e^x\times\frac{1}{x}\right)$

$=2x-e^{x-1}\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$

$\therefore f'(1)=2\times1-1=1$

220 답 1

$f'(x)=(x^3)'\log_2x+x^3(\log_2x)'$

$=3x^2\log_2x+x^3\times\frac{1}{x\ln2}$

$=x^2\left(3\log_2x+\frac{1}{\ln2}\right)$

$f'(1)=\frac{a}{\ln2}$에서 $\frac{1}{\ln2}=\frac{a}{\ln2}$

$\therefore a=1$

221 답 e

$f'(x)=(2x+a)'\ln x+(2x+a)(\ln x)'$

$=2\ln x+(2x+a)\times\frac{1}{x}$

$=2\ln x+\frac{a}{x}+2$

$f'(e)=5$에서 $\frac{a}{e}+4=5$

$\therefore a=e$

222 답 $3\ln3$

$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)+f(0)-f(-2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(-2h)-f(0)}{-2h}\times2$

$=f'(0)+2f'(0)=3f'(0)$ ····· ㉠

이때

$f'(x)=3^x\ln 3\times(x^2+1)+3^x\times 2x$

$=3^x\{(x^2+1)\ln 3+2x\}$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$3f'(0)=3\ln 3$

223 $a=1,\ b=-1$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$에서

$\lim_{x\to 0+}(e^x+bx)=\lim_{x\to 0-}(x^2+a)=a$

$\therefore a=1$

$f'(x)=\begin{cases}2x & (x<0)\\ e^x+b & (x>0)\end{cases}$이고 미분계수 $f'(0)$이 존재하므로 $\lim_{x\to 0+}f'(x)=\lim_{x\to 0-}f'(x)$에서

$\lim_{x\to 0+}(e^x+b)=\lim_{x\to 0-}2x$

$1+b=0 \qquad \therefore b=-1$

224 $3+2\ln 2$

$f(1)=2$이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때 $f'(x)=\frac{3}{x}+2^x\ln 2$이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$f'(1)=3+2\ln 2$

225 e

함수 $f(x)$가 모든 양수 x에서 미분가능하면 $x=1$에서 미분가능하고 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$에서

$\lim_{x\to 1+}(xe^x+b)=\lim_{x\to 1-}a\ln x=e+b$

$e+b=0 \qquad \therefore b=-e$

$f'(x)=\begin{cases}\frac{a}{x} & (0<x<1)\\ (1+x)e^x & (x>1)\end{cases}$이고 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로 $\lim_{x\to 1+}f'(x)=\lim_{x\to 1-}f'(x)$에서

$\lim_{x\to 1+}(1+x)e^x=\lim_{x\to 1-}\frac{a}{x}$

$\therefore a=2e$

$\therefore a+b=2e+(-e)=e$

연습문제 122~124쪽

226 1

$\lim_{x\to 0}\{\log_2(9^x-1)-\log_2(3^x-1)\}$

$=\lim_{x\to 0}\log_2\frac{9^x-1}{3^x-1}$

$=\lim_{x\to 0}\log_2\frac{(3^x+1)(3^x-1)}{3^x-1}$

$=\lim_{x\to 0}\log_2(3^x+1)=\log_2\lim_{x\to 0}(3^x+1)$

$=\log_2 2=1$

227 ④

① $\lim_{x\to 0}(1-x)^{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\{1+(-x)\}^{-\frac{1}{x}}=e$

② $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+3x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

③ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$

④ $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+4}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x}\right)^{-x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{-x}$

$=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right\}^{-4}$

$=e^{-4}=\frac{1}{e^4}$

⑤ $-x=t$로 놓으면 $x=-t$이고, $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t=e$

따라서 극한값이 e가 아닌 것은 ④이다.

228 3

$y=\ln\left(\frac{x}{3}+1\right)$이라 하면

$e^y=\frac{x}{3}+1,\ \frac{x}{3}=e^y-1 \qquad \therefore x=3(e^y-1)$

x와 y를 서로 바꾸면 $y=3(e^x-1)$

따라서 $g(x)=3(e^x-1)$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3(e^x-1)}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\times 3$

$=1\times 3=3$

229 ②

$x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고, $x\to 1$일 때 $t\to 0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{3^{x-1}-1}{x^2-1}=\lim_{t\to0}\frac{3^t-1}{(1+t)^2-1}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{3^t-1}{t(t+2)}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{3^t-1}{t}\times\frac{1}{t+2}\right)$$
$$=\ln3\times\frac{1}{2}=\frac{\ln3}{2}$$

230 답 1

$x\to0$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로
(분자)$\to$0에서
$\lim_{x\to0}(6^x-a)=0$
$1-a=0 \quad \therefore a=1$
이를 주어진 식의 좌변에 대입하면
$$\lim_{x\to0}\frac{6^x-1}{\ln(1+bx)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{6^x-1}{x}\times\frac{bx}{\ln(1+bx)}\times\frac{1}{b}\right\}$$
$$=\ln6\times1\times\frac{1}{b}=\frac{\ln6}{b}$$
따라서 $\frac{\ln6}{b}=\frac{\ln6}{2}$이므로 $b=2$
$\therefore b-a=2-1=1$

231 답 $e+6$

$$f'(x)=6^x\ln6\times\ln x+6^x\times\frac{1}{x}+e^x$$
$$=6^x\left(\ln6\times\ln x+\frac{1}{x}\right)+e^x$$
$\therefore f'(1)=e+6$

232 답 $2e^5+\frac{1}{\ln5}$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$
$$=f'(2)+f'(2)=2f'(2) \quad \cdots\cdots ㉠$$
이때
$f(x)=e^{x+3}+\log_5ex=e^3\times e^x+\log_5x+\log_5e$
이므로
$$f'(x)=e^3\times e^x+\frac{1}{x\ln5}=e^{x+3}+\frac{1}{x\ln5}$$
따라서 구하는 극한값은 ㉠에서
$$2f'(2)=2\left(e^5+\frac{1}{2\ln5}\right)=2e^5+\frac{1}{\ln5}$$

233 답 ①

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고, $x\to0+$일 때 $t\to\infty$,
$x\to0-$일 때 $t\to-\infty$이므로
$$\lim_{x\to0+}\frac{4^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}}{4^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{4^t-2^t}{4^t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^t}{1}=1$$
$$\lim_{x\to0-}(2^{\frac{2}{x}}+2^{\frac{1}{x}})=\lim_{t\to-\infty}(2^{2t}+2^t)$$
$$=\lim_{t\to-\infty}(4^t+2^t)=0$$
$$\therefore \lim_{x\to0+}\frac{4^{\frac{1}{x}}-2^{\frac{1}{x}}}{4^{\frac{1}{x}}}+\lim_{x\to0-}(2^{\frac{2}{x}}+2^{\frac{1}{x}})=1+0=1$$

234 답 ③

$$\lim_{x\to0}\{(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)(1+5x)\}^{\frac{1}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\{(1+x)^{\frac{1}{x}}(1+2x)^{\frac{1}{x}}(1+3x)^{\frac{1}{x}}(1+4x)^{\frac{1}{x}}\times(1+5x)^{\frac{1}{x}}\}$$
$$=\lim_{x\to0}[(1+x)^{\frac{1}{x}}\times\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^2\times\{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\}^3\times\{(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\}^4\times\{(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\}^5]$$
$$=e\times e^2\times e^3\times e^4\times e^5$$
$$=e^{1+2+3+4+5}=e^{15}$$

235 답 $e^{\frac{1}{2}}$

$$S_n=\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\frac{n}{2n+1}$$ ▸▸▸▸▸▸ ❶

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2S_n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n}\right)^n$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\right\}^{\frac{1}{2}}$$
$$=e^{\frac{1}{2}} \quad \blacktriangleright\blacktriangleright\blacktriangleright\blacktriangleright\blacktriangleright\blacktriangleright \ ❷$$

단계	채점 기준	비율
❶	S_n 정리하기	50 %
❷	$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2S_n}\right)^n$의 값 구하기	50 %

236 답 -2

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-5x)}{f(x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1-5x)}{-5x}\times\frac{e^{3x}-1}{f(x)}\times\frac{3x}{e^{3x}-1}\times\left(-\frac{5}{3}\right)\right\}$$
$$=1\times\frac{6}{5}\times1\times\left(-\frac{5}{3}\right)=-2$$

237 답 ②

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로 $\lim_{x\to\infty}x^a\ln\left(b+\frac{2}{x^2}\right)=2$에서

$$\lim_{t\to0+}\frac{\ln(b+2t^2)}{t^a}=2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$t\to0+$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0에서

$\lim_{t\to0+}\ln(b+2t^2)=0$

$\ln b=0 \quad \therefore b=1$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{t\to0+}\frac{\ln(1+2t^2)}{t^a}=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\ln(1+2t^2)}{2t^2}\times\frac{2t^2}{t^a}\right\}$$
$$=1\times\lim_{t\to0+}2t^{2-a}$$
$$=\lim_{t\to0+}2t^{2-a}$$

따라서 $\lim_{t\to0+}2t^{2-a}=2$이므로 $a=2$

$\therefore ab=2\times1=2$

238 답 $-\ln3$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$에서

$$\lim_{x\to0}\frac{3^x-a\ln(1+x)+b}{x}=0 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to0$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0에서

$\lim_{x\to0}\{3^x-a\ln(1+x)+b\}=0$

$1+b=0 \quad \therefore b=-1$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{3^x-a\ln(1+x)-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}-\lim_{x\to0}\frac{a\ln(1+x)}{x}$$
$$=\ln3-a\times1=\ln3-a$$

따라서 $\ln3-a=0$이므로

$a=\ln3$

$\therefore ab=\ln3\times(-1)=-\ln3$

239 답 5

$H(t,\ 0)$, $Q\left(t,\ \frac{1}{3}t\right)$이므로

$$S_1(t)=\frac{1}{2}\times t\times\left\{(e^{2t}-1)-\frac{1}{3}t\right\}$$
$$=\frac{1}{2}t\left(e^{2t}-1-\frac{1}{3}t\right)$$
$$S_2(t)=\frac{1}{2}\times t\times\frac{1}{3}t=\frac{1}{6}t^2$$
$$\therefore \lim_{t\to0+}\frac{S_1(t)}{S_2(t)}=\lim_{t\to0+}\frac{\frac{1}{2}t\left(e^{2t}-1-\frac{1}{3}t\right)}{\frac{1}{6}t^2}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{3e^{2t}-3-t}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left(\frac{e^{2t}-1}{2t}\times6-1\right)$$
$$=1\times6-1=5$$

240 답 22

$$f'(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x-5)e^x$$
$$=(x^2+4x-3)e^x$$

$f'(x)=0$에서

$x^2+4x-3=0$ ($\because e^x>0$)

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-4$, $\alpha\beta=-3$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-4)^2-2\times(-3)=22$

241 ▣ 1

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$\lim_{x\to1+}(\ln x+b)=\lim_{x\to1-}ae^{x-1}=b$

$\therefore\ a=b$ ····· ㉠

$f'(x)=\begin{cases}ae^{x-1} & (x<1)\\ \dfrac{1}{x} & (x>1)\end{cases}$ 이고 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로 $\lim_{x\to1+}f'(x)=\lim_{x\to1-}f'(x)$에서

$\lim_{x\to1+}\dfrac{1}{x}=\lim_{x\to1-}ae^{x-1}$

$\therefore\ a=1$

이를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore\ ab=1\times1=1$

242 ▣ ②

| 접근 방법 | $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$을 이용할 수 있도록 주어진 식에서 분자의 $-n$을 n개의 -1의 합으로 생각한다.

a_n

$=\lim_{x\to0}\dfrac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}-n}{x}$

$=\lim_{x\to0}\dfrac{(e^x-1)+(e^{2x}-1)+(e^{3x}-1)+\cdots+(e^{nx}-1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}+\dfrac{e^{2x}-1}{x}+\dfrac{e^{3x}-1}{x}+\cdots+\dfrac{e^{nx}-1}{x}\right)$

$=\lim_{x\to0}\left(\dfrac{e^x-1}{x}+\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\times2+\dfrac{e^{3x}-1}{3x}\times3\right.$

$\left.+\cdots+\dfrac{e^{nx}-1}{nx}\times n\right)$

$=1+2+3+\cdots+n$

$=\dfrac{n(n+1)}{2}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n(n+1)}$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}2\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}2\left\{\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)\right.$

$\left.+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)=2$

243 ▣ $\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

| 접근 방법 | 점 P의 좌표를 $(t,\ \ln(1+3t))$라 하고, 점 P에서 원에 접하는 직선의 방정식을 세운다.

점 P의 좌표를 $(t,\ \ln(1+3t))\ (t>0)$라 하면

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+\{\ln(1+3t)\}^2}$

중심이 원점 O이고 선분 OP를 반지름으로 하는 원의 방정식은

$x^2+y^2=t^2+\{\ln(1+3t)\}^2$

이때 점 $P(t,\ \ln(1+3t))$에서 이 원에 접하는 접선의 방정식은

$tx+y\ln(1+3t)=t^2+\{\ln(1+3t)\}^2$

└ 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=r^2$임을 이용하여 구한다.

$y=0$을 대입하면

$tx=t^2+\{\ln(1+3t)\}^2$

$\therefore\ x=t+\dfrac{\{\ln(1+3t)\}^2}{t}$

즉, $Q\left(t+\dfrac{\{\ln(1+3t)\}^2}{t},\ 0\right)$이므로

$\overline{PQ}=\sqrt{\dfrac{\{\ln(1+3t)\}^4}{t^2}+\{\ln(1+3t)\}^2}$

$=\dfrac{\ln(1+3t)\sqrt{\{\ln(1+3t)\}^2+t^2}}{t}$

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $t\to0+$이므로 구하는 극한값은

$\lim_{t\to0+}\dfrac{\overline{OQ}}{\overline{PQ}}=\lim_{t\to0+}\dfrac{t+\dfrac{\{\ln(1+3t)\}^2}{t}}{\dfrac{\ln(1+3t)\sqrt{\{\ln(1+3t)\}^2+t^2}}{t}}$

$=\lim_{t\to0+}\dfrac{t^2+\{\ln(1+3t)\}^2}{\ln(1+3t)\sqrt{\{\ln(1+3t)\}^2+t^2}}$

$=\lim_{t\to0+}\dfrac{\sqrt{t^2+\{\ln(1+3t)\}^2}}{\ln(1+3t)}$

$=\lim_{t\to0+}\sqrt{\left\{\dfrac{t}{\ln(1+3t)}\right\}^2+1}$

$=\lim_{t\to0+}\sqrt{\left\{\dfrac{3t}{\ln(1+3t)}\right\}^2\times\dfrac{1}{9}+1}$

$=\sqrt{1^2\times\dfrac{1}{9}+1}$

$=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$

01 삼각함수의 덧셈정리

개념 확인 129쪽

244 답 (1) $\frac{5}{4}$ (2) $\frac{5}{3}$ (3) $\frac{3}{4}$

$\overline{OP}=\sqrt{3^2+4^2}=5$이므로

(1) $\csc\theta=\frac{5}{4}$

(2) $\sec\theta=\frac{5}{3}$

(3) $\cot\theta=\frac{3}{4}$

245 답 (1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (3) 1
(4) $-\sqrt{2}$ (5) 2 (6) $-\sqrt{3}$

(1) $\csc 60^\circ=\frac{1}{\sin 60^\circ}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(2) $\sec(-30^\circ)=\frac{1}{\cos(-30^\circ)}=\frac{1}{\cos 30^\circ}$
$=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(3) $\cot 45^\circ=\frac{1}{\tan 45^\circ}=1$

(4) $\csc\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{\sin\frac{\pi}{4}}$
$=-\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-\sqrt{2}$

(5) $\sec\frac{\pi}{3}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

(6) $\cot\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{1}{\tan\frac{\pi}{6}}$
$=-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=-\sqrt{3}$

246 답 (1) 제2사분면 (2) 제4사분면

(1) $\csc\theta>0$인 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각
$\sec\theta<0$인 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각
따라서 주어진 조건을 만족시키는 θ는 제2사분면의 각이다.

(2) $\csc\theta<0$인 θ는 제3사분면 또는 제4사분면의 각
$\cot\theta<0$인 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각
따라서 주어진 조건을 만족시키는 θ는 제4사분면의 각이다.

247 답 (1) -2 (2) $\frac{5}{4}$ (3) 5

(1) $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$

(2) $\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

(3) $\csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+(-2)^2=5$

유제 131~133쪽

248 답 $\frac{1}{3}$

$\overline{OP}=\sqrt{(-8)^2+6^2}=10$이므로

$\sec\theta=-\frac{10}{8}=-\frac{5}{4}$, $\cot\theta=-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}$

$\therefore(\sec\theta+1)\cot\theta=\left(-\frac{1}{4}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{3}$

249 답 제1사분면

(i) $\sin\theta\sec\theta>0$에서
$\sin\theta>0$, $\sec\theta>0$ 또는 $\sin\theta<0$, $\sec\theta<0$
$\sin\theta>0$, $\sec\theta>0$일 때, θ는 제1사분면의 각이다.
$\sin\theta<0$, $\sec\theta<0$일 때, θ는 제3사분면의 각이다.
따라서 $\sin\theta\sec\theta>0$을 만족시키는 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\cos\theta\cot\theta>0$에서
$\cos\theta>0$, $\cot\theta>0$ 또는 $\cos\theta<0$, $\cot\theta<0$
$\cos\theta>0$, $\cot\theta>0$일 때, θ는 제1사분면의 각이다.
$\cos\theta<0$, $\cot\theta<0$일 때, θ는 제2사분면의 각이다.
따라서 $\cos\theta\cot\theta>0$을 만족시키는 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제1사분면의 각이다.

250 답 $\sqrt{6}$

$\overline{OP}=\sqrt{1^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$이므로

$\csc\alpha=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

점 $P(1,\sqrt{2})$를 원점에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(-1,-\sqrt{2})$이므로

$\overline{OQ}=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}$

$\therefore \csc\beta=-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{6}}{2}$

$\therefore \csc\alpha-\csc\beta=\frac{\sqrt{6}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)=\sqrt{6}$

251 답 제3사분면

(i) $\frac{\sec\theta}{\csc\theta}>0$에서

$\sec\theta>0$, $\csc\theta>0$ 또는 $\sec\theta<0$, $\csc\theta<0$

$\sec\theta>0$, $\csc\theta>0$일 때, θ는 제1사분면의 각이다.

$\sec\theta<0$, $\csc\theta<0$일 때, θ는 제3사분면의 각이다.

따라서 $\frac{\sec\theta}{\csc\theta}>0$을 만족시키는 θ는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\frac{\cot\theta}{\sin\theta}<0$에서

$\cot\theta>0$, $\sin\theta<0$ 또는 $\cot\theta<0$, $\sin\theta>0$

$\cot\theta>0$, $\sin\theta<0$일 때, θ는 제3사분면의 각이다.

$\cot\theta<0$, $\sin\theta>0$일 때, θ는 제2사분면의 각이다.

따라서 $\frac{\cot\theta}{\sin\theta}<0$을 만족시키는 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제3사분면의 각이다.

252 답 $\frac{27}{20}$

$\csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+\left(-\frac{12}{5}\right)^2=\frac{169}{25}$

이때 θ가 제2사분면의 각이므로 $\csc\theta>0$

$\therefore \csc\theta=\sqrt{\frac{169}{25}}=\frac{13}{5}$

또 $\tan\theta=\frac{1}{\cot\theta}=-\frac{5}{12}$이므로

$\csc\theta+3\tan\theta=\frac{13}{5}+3\times\left(-\frac{5}{12}\right)=\frac{27}{20}$

253 답 $\frac{5}{3}$

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로 $\frac{\tan^2\theta+6}{\sec^2\theta}=3$에서

$\frac{\tan^2\theta+6}{1+\tan^2\theta}=3$

$\tan^2\theta+6=3+3\tan^2\theta \quad \therefore \tan^2\theta=\frac{3}{2}$

또 $\cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$이므로 $\cot^2\theta=\frac{2}{3}$

$\therefore \csc^2\theta=1+\cot^2\theta=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

254 답 $-\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}=-\frac{3}{2}$이므로 $1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$에서

$\cot^2\theta=\csc^2\theta-1=\left(-\frac{3}{2}\right)^2-1=\frac{5}{4}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로 $\cot\theta<0$

$\therefore \cot\theta=-\sqrt{\frac{5}{4}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

| 다른 풀이 |

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

이때 θ가 제4사분면의 각이므로 $\cos\theta>0$

$\therefore \cos\theta=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$

255 답 $4-2\sqrt{2}$

$\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=\sqrt{2}-1$에서

$1-\tan\theta=(\sqrt{2}-1)(1+\tan\theta)$

$1-\tan\theta=\sqrt{2}-1+(\sqrt{2}-1)\tan\theta$

$\sqrt{2}\tan\theta=2-\sqrt{2}$

$\therefore \tan\theta=\sqrt{2}-1$

$\therefore \sec^2\theta=1+\tan^2\theta$

$=1+(\sqrt{2}-1)^2=4-2\sqrt{2}$

개념 확인 137쪽

256 답 (1) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (3) $-2-\sqrt{3}$ (4) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (5) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ (6) $2-\sqrt{3}$

(1) $\sin 75^\circ=\sin(30^\circ+45^\circ)$

$=\sin 30^\circ\cos 45^\circ+\cos 30^\circ\sin 45^\circ$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(2) $\cos 15^\circ=\cos(45^\circ-30^\circ)$

$=\cos 45^\circ\cos 30^\circ+\sin 45^\circ\sin 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(3) $\tan 105^\circ=\tan(45^\circ+60^\circ)$

$=\frac{\tan 45^\circ+\tan 60^\circ}{1-\tan 45^\circ\tan 60^\circ}$

$=\frac{1+\sqrt{3}}{1-1\times\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$

(4) $\sin\frac{7}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(5) $\cos\frac{5}{12}\pi=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(6) $\tan\frac{\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$

$=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+1\times\frac{\sqrt{3}}{3}}=2-\sqrt{3}$

257 답 (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (5) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (6) $\sqrt{3}$

(1) $\sin 20^\circ\cos 40^\circ+\cos 20^\circ\sin 40^\circ$

$=\sin(20^\circ+40^\circ)$

$=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin 55^\circ\cos 10^\circ-\cos 55^\circ\sin 10^\circ$

$=\sin(55^\circ-10^\circ)$

$=\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\cos 10^\circ\cos 35^\circ-\sin 10^\circ\sin 35^\circ$

$=\cos(10^\circ+35^\circ)$

$=\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\cos 42^\circ\cos 12^\circ+\sin 42^\circ\sin 12^\circ$

$=\cos(42^\circ-12^\circ)$

$=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$

(5) $\frac{\tan 10^\circ+\tan 20^\circ}{1-\tan 10^\circ\tan 20^\circ}=\tan(10^\circ+20^\circ)$

$=\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(6) $\frac{\tan 65^\circ-\tan 5^\circ}{1+\tan 65^\circ\tan 5^\circ}=\tan(65^\circ-5^\circ)$

$=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

유제 139~146쪽

258 답 (1) $-\frac{63}{65}$ (2) $-\frac{56}{65}$ (3) $-\frac{63}{16}$

$\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$이므로 $\cos\alpha<0$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$에서

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}$

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=\frac{3}{4}$

$0<\beta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\sin\beta>0$

$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$에서

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$

$\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}}=\frac{12}{5}$

(1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$=\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{5}{13}+\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{12}{13}$

$=-\frac{63}{65}$

(2) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$=\left(-\frac{4}{5}\right)\times\frac{5}{13}+\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{12}{13}$

$=-\frac{56}{65}$

(3) $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{12}{5}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{12}{5}}=-\dfrac{63}{16}$

259 답 (1) $\dfrac{-3+8\sqrt{2}}{15}$ (2) $\dfrac{-4+6\sqrt{2}}{15}$ (3) $\dfrac{54-25\sqrt{2}}{28}$

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$이므로 $\cos\alpha<0$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$에서

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$이므로 $\sin\beta>0$

$\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$에서

$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

$\tan\beta=\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}=\dfrac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\dfrac{4}{3}$

(1) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$=\frac{1}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right)-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\frac{4}{5}$

$=\dfrac{-3+8\sqrt{2}}{15}$

(2) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right)-\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}$

$=\dfrac{-4+6\sqrt{2}}{15}$

(3) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{-\frac{\sqrt{2}}{4}-\left(-\frac{4}{3}\right)}{1+\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\times\left(-\frac{4}{3}\right)}$

$=\dfrac{54-25\sqrt{2}}{28}$

260 답 $\dfrac{1}{12}$

$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{4}$에서

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{4}$

$\cos\alpha\cos\beta-\frac{1}{3}=-\frac{1}{4}$

$\therefore\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{12}$

261 답 $-\dfrac{1}{18}$

$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\dfrac{1}{9}$ ····· ㉠

$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{4}{3}$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\dfrac{16}{9}$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면

$2+2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=\dfrac{17}{9}$

$2+2\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{17}{9}$

$\therefore\ \cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{1}{18}$

262 답 (1) $-\dfrac{4}{5}$ (2) $\dfrac{3}{5}$ (3) $-\dfrac{4}{3}$

$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로 $\sin\theta<0$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$에서

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\frac{\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=-\dfrac{1}{2}$

(1) $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

$=2\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=-\frac{4}{5}$

(2) $\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

$=\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2-\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=\frac{3}{5}$

(3) $\tan2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

$=\dfrac{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{4}{3}$

| 다른 풀이 |

(3) $\tan 2\theta=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\dfrac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\dfrac{4}{3}$

263 $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$이므로

$1-2\sin^2\theta=-\dfrac{1}{4}$, $\sin^2\theta=\dfrac{5}{8}$

이때 $\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3}{4}\pi$이므로 $\sin\theta>0$

$\therefore \sin\theta=\sqrt{\dfrac{5}{8}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

264 $-\dfrac{24}{7}$

$3\sin\theta-4\cos\theta=0$에서

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{4}{3}$ $\therefore \tan\theta=\dfrac{4}{3}$

$\therefore \tan 2\theta=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\times\frac{4}{3}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2}=-\dfrac{24}{7}$

265 $\dfrac{45}{49}$

$\cos\theta-\sin\theta=\dfrac{2}{7}$의 양변을 제곱하면

$\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta=\dfrac{4}{49}$

$1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4}{49}$

$2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{45}{49}$

$\therefore \sin 2\theta=\dfrac{45}{49}$

266 $\dfrac{11}{7}$

두 직선 $y=\dfrac{1}{4}x+2$, $y=3x-1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=\dfrac{1}{4}$, $\tan\beta=3$

$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\dfrac{\frac{1}{4}-3}{1+\frac{1}{4}\times 3}\right|=\dfrac{11}{7}$

267 $\dfrac{\pi}{4}$

두 직선 $3x-y-4=0$, $x-2y+2=0$, 즉 $y=3x-4$, $y=\dfrac{1}{2}x+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=3$, $\tan\beta=\dfrac{1}{2}$

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\dfrac{3-\frac{1}{2}}{1+3\times\frac{1}{2}}\right|=1$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}\left(\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

268 $\dfrac{1}{2}$

두 직선 $y=-x+3$, $y=2x-5$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=-1$, $\tan\beta=2$

$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\dfrac{-1-2}{1+(-1)\times 2}\right|=3$

$\therefore \tan\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}$

$=\dfrac{3-1}{1+3\times 1}=\dfrac{1}{2}$

269 $-\dfrac{8}{3}$

두 직선 $y=-\dfrac{1}{2}x+3$, $y=ax+1$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=-\dfrac{1}{2}$, $\tan\beta=a$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 45°이므로

$|\tan(\alpha-\beta)|=\tan 45^\circ=1$

$\left|\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|=1$

$\left|\dfrac{-\frac{1}{2}-a}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\times a}\right|=1$

$\left|\frac{2a+1}{a-2}\right|=1$

$2a+1=a-2$ 또는 $2a+1=-a+2$

$\therefore a=-3$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

따라서 모든 a의 값의 합은

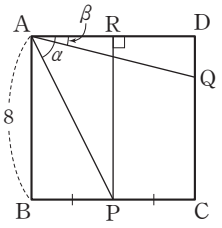
$-3+\frac{1}{3}=-\frac{8}{3}$

270 $\frac{7}{6}$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 변 AD에 내린 수선의 발을 R라 하고,

$\angle PAR=\alpha$라 하면 직각삼각형 PAR에서

$\overline{AR}=4$, $\overline{PR}=8$



$\therefore \tan\alpha=\frac{\overline{PR}}{\overline{AR}}=\frac{8}{4}=2$

$\angle QAD=\beta$라 하면 직각삼각형 QAD에서

$\overline{AD}=8$, $\overline{QD}=8\times\frac{1}{4}=2$

$\therefore \tan\beta=\frac{\overline{QD}}{\overline{AD}}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

이때 $\theta=\alpha-\beta$이므로

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

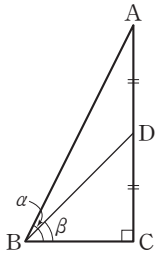
$=\frac{2-\frac{1}{4}}{1+2\times\frac{1}{4}}=\frac{7}{6}$

271 $\frac{1}{3}$

오른쪽 그림과 같이 $\angle ABC=\alpha$라 하면 직각삼각형 ABC에서

$\tan\alpha=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{2\overline{BC}}{\overline{BC}}=2$

$\angle DBC=\beta$라 하면 직각삼각형 DBC에서



$\tan\beta=\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}}=\frac{\frac{1}{2}\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BC}}=1$

이때 $\theta=\alpha-\beta$이므로

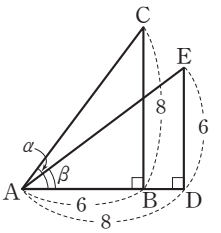
$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{2-1}{1+2\times1}=\frac{1}{3}$

272 $\frac{24}{25}$

오른쪽 그림과 같이

$\angle CAB=\alpha$라 하면 직각삼각형 ABC에서



$\tan\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$

$\angle EAD=\beta$라 하면 직각삼각형 ADE에서

$\tan\beta=\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

이때 $\theta=\alpha-\beta$이므로

$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{4}}{1+\frac{4}{3}\times\frac{3}{4}}=\frac{7}{24}$

이때 θ는 예각이므로 $\sec\theta>0$

$\therefore \sec\theta=\sqrt{1+\tan^2\theta}=\sqrt{1+\left(\frac{7}{24}\right)^2}=\frac{25}{24}$

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{\sec\theta}=\frac{24}{25}$

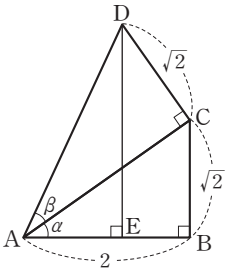
273 $2-\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\overline{AC}=\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{6}$

$\overline{AD}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이

$\angle CAB=\alpha$라 하면 직각삼각형 ABC에서



$\sin\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos\alpha=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\angle DAC=\beta$라 하면 직각삼각형 ACD에서

$\sin\beta=\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

$\cos\beta=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}}=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 삼각형 AED에서

$\overline{AE}=\overline{AD}\cos(\alpha+\beta)$

$=\overline{AD}(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

$=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{1}{2}\right)=2-\frac{\sqrt{6}}{3}$

274 답 (1) $y=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

(2) 최댓값: $\sqrt{2}$, 최솟값: $-\sqrt{2}$

(1) $y=\sin\theta+\cos\theta$

$=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta+\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta\right)$

$=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$

(2) $-1\le\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\le1$이므로

$-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\le\sqrt{2}$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $\sqrt{2}$, 최솟값은 $-\sqrt{2}$이다.

연습문제 147~149쪽

275 답 제2사분면

(i) $\csc\theta\tan\theta<0$에서

$\csc\theta>0$, $\tan\theta<0$ 또는 $\csc\theta<0$, $\tan\theta>0$

$\csc\theta>0$, $\tan\theta<0$일 때, θ는 제2사분면의 각이다.

$\csc\theta<0$, $\tan\theta>0$일 때, θ는 제3사분면의 각이다.

따라서 $\csc\theta\tan\theta<0$을 만족시키는 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\sec\theta\cot\theta>0$에서

$\sec\theta>0$, $\cot\theta>0$ 또는 $\sec\theta<0$, $\cot\theta<0$

$\sec\theta>0$, $\cot\theta>0$일 때, θ는 제1사분면의 각이다.

$\sec\theta<0$, $\cot\theta<0$일 때, θ는 제2사분면의 각이다.

따라서 $\sec\theta\cot\theta>0$을 만족시키는 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제2사분면의 각이다.

| 다른 풀이 |

(i) $\csc\theta\tan\theta<0$에서 $\frac{1}{\sin\theta}\times\frac{\sin\theta}{\cos\theta}<0$

$\therefore\sec\theta<0$

이를 만족시키는 θ는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\sec\theta\cot\theta>0$에서 $\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{\cos\theta}{\sin\theta}>0$

$\therefore\csc\theta>0$

이를 만족시키는 θ는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ는 제2사분면의 각이다.

276 답 ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\sin\theta\cos\theta=-\frac{3}{8}$

$\therefore\sec\theta+\csc\theta=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{1}{\sin\theta}$

$=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta\sin\theta}$

$=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}}=-\frac{4}{3}$

277 답 $\frac{156}{25}$

$\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=\frac{4}{9}$에서

$9-9\cos\theta=4+4\cos\theta$ $\therefore\cos\theta=\frac{5}{13}$

$\therefore\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{13}{5}$

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$에서

$\tan^2\theta=\sec^2\theta-1=\left(\frac{13}{5}\right)^2-1=\frac{144}{25}$

이때 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $\tan\theta>0$

$\therefore\tan\theta=\sqrt{\frac{144}{25}}=\frac{12}{5}$

$\therefore\sec\theta\tan\theta=\frac{13}{5}\times\frac{12}{5}=\frac{156}{25}$

278 답 -8

$(\tan\theta+2\cot\theta)^2-(\sin\theta+2\csc\theta)^2$

$-(\cos\theta+\sec\theta)^2$

$=\tan^2\theta+4\tan\theta\cot\theta+4\cot^2\theta$

$-(\sin^2\theta+4\sin\theta\csc\theta+4\csc^2\theta)$

$-(\cos^2\theta+2\cos\theta\sec\theta+\sec^2\theta)$

$=\tan^2\theta+4+4\cot^2\theta-\sin^2\theta-4-4\csc^2\theta$

$-\cos^2\theta-2-\sec^2\theta$

$=(\tan^2\theta-\sec^2\theta)-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$+4(\cot^2\theta-\csc^2\theta)-2$

$=-1-1-4-2=-8$

279 답 ②

$\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$에서

$\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1}{2}$

$\frac{3-\tan\beta}{1+3\tan\beta}=\frac{1}{2}$

$6-2\tan\beta=1+3\tan\beta$

$\therefore \tan\beta=1$

280 답 ③

$A=\cos 80^\circ\cos 20^\circ+\sin 80^\circ\sin 20^\circ$

$=\cos(80^\circ-20^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

$B=\sin 75^\circ\cos 75^\circ=\frac{1}{2}\times 2\sin 75^\circ\cos 75^\circ$

$=\frac{1}{2}\sin 150^\circ=\frac{1}{2}\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\therefore A+B=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

281 답 $\frac{3}{4}$

$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$이므로

$(1-\tan\theta)\tan 2\theta=\frac{6}{7}$에서

$(1-\tan\theta)\times\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{6}{7}$

$(1-\tan\theta)\times\frac{2\tan\theta}{(1-\tan\theta)(1+\tan\theta)}=\frac{6}{7}$

$\frac{2\tan\theta}{1+\tan\theta}=\frac{6}{7}$

$7\tan\theta=3+3\tan\theta$

$\therefore \tan\theta=\frac{3}{4}$

282 답 $\sqrt{5}+2\sqrt{15}$

$\overline{OP}=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$이므로

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\therefore 10\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

$=10\left(\sin\theta\cos\frac{\pi}{3}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$=10\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$=\sqrt{5}+2\sqrt{15}$

283 답 ①

$2\sin\alpha-\cos\beta=\frac{4}{3}$의 양변을 제곱하면

$4\sin^2\alpha-4\sin\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{16}{9}$ ····· ㉠

$2\cos\alpha+\sin\beta=\frac{5}{3}$의 양변을 제곱하면

$4\cos^2\alpha+4\cos\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{25}{9}$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면

$5-4(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=\frac{41}{9}$

$5-4\sin(\alpha-\beta)=\frac{41}{9}$

$4\sin(\alpha-\beta)=\frac{4}{9}$

$\therefore \sin(\alpha-\beta)=\frac{1}{9}$

284 답 ②

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{2}{3}$의 양변을 제곱하면

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{4}{9}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{4}{9}$, $2\sin\theta\cos\theta=-\frac{5}{9}$

$\therefore \sin 2\theta=-\frac{5}{9}$

$\therefore \cos 4\theta=1-2\sin^2 2\theta$

$=1-2\times\left(-\frac{5}{9}\right)^2=\frac{31}{81}$

$\therefore \sin 2\theta+\cos 4\theta=-\frac{5}{9}+\frac{31}{81}=-\frac{14}{81}$

285 답 8

$f(x)=\cos 2x+4\cos x-3$

$=(2\cos^2 x-1)+4\cos x-3$

$=2\cos^2 x+4\cos x-4$

$=2(\cos x+1)^2-6$

이때 $-1\le\cos x\le 1$이므로 함수 $f(x)$는

$\cos x=-1$일 때 최솟값 -6, $\cos x=1$일 때 최댓값 2를 갖는다.

따라서 $M=2$, $m=-6$이므로

$M-m=8$

286 $\frac{3}{2}$

직선 $y=\frac{1}{5}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라 하면

$\tan\theta=\frac{1}{5}$

직선 $y=mx$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\theta+45°$이므로

$$m=\tan(\theta+45°)=\frac{\tan\theta+\tan 45°}{1-\tan\theta\tan 45°}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}+1}{1-\frac{1}{5}\times 1}=\frac{3}{2}$$

287 6

두 직선 $y=3x$, $y=\frac{1}{3}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=3$, $\tan\beta=\frac{1}{3}$

$\angle POQ=\theta$라 하면 $\theta=\alpha-\beta$이므로

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{3-\frac{1}{3}}{1+3\times\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}$$

이때 삼각형 OPQ에서 $\tan\theta=\frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}$이므로

$\frac{8}{\overline{OQ}}=\frac{4}{3}$

$\therefore \overline{OQ}=6$

288 $\frac{63}{65}$

$A+B+C=\pi$이므로

$$\sin A=\sin(\pi-B-C)$$
$$=\sin(B+C)$$
$$=\sin B\cos C+\cos B\sin C \quad \cdots\cdots ㉠$$

$0<\angle B<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos B>0$

$\sin^2 B+\cos^2 B=1$에서

$\cos B=\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$

$0<\angle C<\frac{\pi}{2}$이므로 $\cos C>0$

$\sin^2 C+\cos^2 C=1$에서

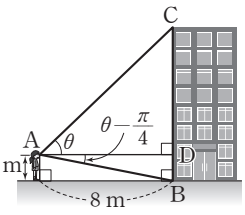
$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$

따라서 ㉠에서

$\sin A=\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}=\frac{63}{65}$

289 13.6 m

학생의 눈이 있는 지점을 A, 보이는 건물의 밑부분과 꼭대기를 각각 B, C라 하고 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면



$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{1.6}{8}=\frac{1}{5}$

이때

$$\tan\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}$$

이므로

$\frac{\tan\theta-1}{1+\tan\theta}=\frac{1}{5}$

$5\tan\theta-5=1+\tan\theta$

$\therefore \tan\theta=\frac{3}{2}$ ▸▸▸▸▸▸ ❶

$\therefore \overline{CD}=\overline{AD}\tan\theta=8\times\frac{3}{2}=12$ ▸▸▸▸▸▸ ❷

따라서 건물의 높이는

$\overline{BD}+\overline{CD}=1.6+12=13.6\,(\mathrm{m})$ ▸▸▸▸▸▸ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	$\tan\theta$의 값 구하기	50 %
❷	$\overline{CD}$의 길이 구하기	30 %
❸	건물의 높이 구하기	20 %

290 −1

| 접근 방법 | $\csc^2 x=1+\cot^2 x$를 이용하여 주어진 함수식을 $y=a(\cot x-p)^2+q$ 꼴로 변형한다.

$y=4k\cot x+1+\dfrac{1}{\sin^2 x}=4k\cot x+1+\csc^2 x$

$=4k\cot x+1+(1+\cot^2 x)$

$=\cot^2 x+4k\cot x+2$

$=(\cot x+2k)^2-4k^2+2$

이때 $0<x\le\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cot x\ge 0$이므로 $\cot x=-2k$

일 때 최솟값 $-4k^2+2$를 갖는다.

즉, $-4k^2+2=-2$이므로

$k^2=1$ $\therefore k=-1$ 또는 $k=1$

그런데 $\cot x\ge 0$에서 $-2k\ge 0$이므로 $k\le 0$

$\therefore k=-1$

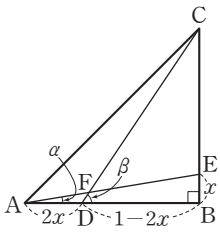
291 ④

| 접근 방법 | ∠CFE와 ∠AFD가 서로 맞꼭지각임을 이용하여 ∠CFE를 두 각의 합 또는 차로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이

$\angle EAB=\alpha$,

$\overline{BE}=x\left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)$라 하면



$\tan\alpha=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AB}}=x$

$\angle CDB=\beta$라 하면 $\overline{AD}=2x$, $\overline{DB}=1-2x$이므로

$\tan\beta=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{DB}}=\dfrac{1}{1-2x}$ ····· ㉠

이때 $\angle CFE=\angle AFD$이고 삼각형 ADF에서

$\angle AFD=\beta-\alpha$이므로

$\tan(\angle CFE)=\tan(\angle AFD)=\tan(\beta-\alpha)$

$=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{1-2x}-x}{1+\dfrac{1}{1-2x}\times x}$

$=\dfrac{1-x(1-2x)}{(1-2x)+x}=\dfrac{2x^2-x+1}{1-x}$

즉, $\dfrac{2x^2-x+1}{1-x}=\dfrac{16}{15}$이므로

$15(2x^2-x+1)=16(1-x)$

$30x^2+x-1=0$, $(5x+1)(6x-1)=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{6}$ $\left(\because 0<x<\dfrac{1}{2}\right)$

따라서 ㉠에서

$\tan(\angle CDB)=\tan\beta=\dfrac{1}{1-2\times\dfrac{1}{6}}=\dfrac{3}{2}$

02 삼각함수의 미분

개념 확인 153쪽

292 (1) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $2\sqrt{3}$ (3) -2 (4) 0

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\sin x=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{6}}4\cos x=4\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}\pi}2\tan x=2\tan\dfrac{3}{4}\pi$

$=2\times(-1)=-2$

(4) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\tan x}{\cos x}=\dfrac{\tan\pi}{\cos\pi}=\dfrac{0}{-1}=0$

293 (1) 1 (2) 1 (3) 5 (4) $\dfrac{1}{6}$ (5) $\dfrac{1}{2}$ (6) $\dfrac{3}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{5x}\times 5$

$=1\times 5=5$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{6x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}\times\dfrac{1}{6}$

$=1\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{4x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 2x}{2x}\times\dfrac{1}{2}$

$=1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 3x}{3x}\times\dfrac{3}{2}$

$=1\times\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$

294 (1) $y'=2+3\cos x$ (2) $y'=-\sin x-2\cos x$ (3) $y'=e^x-\sin x$

(1) $y'=(2x)'+3(\sin x)'$

$=2+3\cos x$

(2) $y'=(\cos x)'-2(\sin x)'$

$=-\sin x-2\cos x$

(3) $y'=(e^x)'+(\cos x)'$
$=e^x-\sin x$

유제 155~167쪽

295 답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}$
$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$
$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin x}$
$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{1+\cot x}$
$=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{1+\frac{\cos x}{\sin x}}$
$=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}$
$=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}}\sin x$
$=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

296 답 4

$\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{\cos x-\cos^2 x}$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2(1-\cos^2 x)}{\cos x(1-\cos x)}$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2(1+\cos x)(1-\cos x)}{\cos x(1-\cos x)}$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2(1+\cos x)}{\cos x}$
$=\frac{2(1+1)}{1}=4$

297 답 2

$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-\cos 2x}{\sin^2 x}=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1-(1-2\sin^2 x)}{\sin^2 x}$
$=\lim\limits_{x\to\pi}\frac{2\sin^2 x}{\sin^2 x}$
$=\lim\limits_{x\to\pi}2=2$

298 답 $\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\csc x-1)\sec^2 x$
$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x}-1}{\cos^2 x}=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\sin x\cos^2 x}$
$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\sin x(1-\sin^2 x)}$
$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\sin x(1+\sin x)(1-\sin x)}$
$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x(1+\sin x)}$
$=\frac{1}{1\times(1+1)}=\frac{1}{2}$

299 답 (1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{5}{4}$ (3) 3
(4) $\frac{3}{2}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) $\frac{3}{2}$

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{2x}{\tan 2x}\times\frac{3}{2}\right)$
$=1\times1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 5x}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan 5x}{5x}\times\frac{4x}{\sin 4x}\times\frac{5}{4}\right)$
$=1\times1\times\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 2x+\tan x}{x}$
$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan 2x}{x}+\frac{\tan x}{x}\right)$
$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 2x}{2x}\times2+\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$
$=1\times2+1=3$

(4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 4x+2x}{\sin 4x}$
$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan 4x}{\sin 4x}+\frac{2x}{\sin 4x}\right)$
$=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan 4x}{4x}\times\frac{4x}{\sin 4x}\right)+\lim\limits_{x\to0}\frac{4x}{\sin 4x}\times\frac{1}{2}$
$=1\times1+1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

(5) $x\to0$일 때, $\sin x\to0$이므로
$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(\sin x)}{2x}$
$=\lim\limits_{x\to0}\left\{\frac{\tan(\sin x)}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}\times\frac{1}{2}\right\}$
$=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(6) $x\to0$일 때, $\sin 3x\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin 3x)}{\sin 2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(\sin 3x)}{\sin 3x}\times\frac{2x}{\sin 2x}\times\frac{\sin 3x}{3x}\times\frac{3}{2}\right\}$$
$$=1\times1\times1\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

300 답 2

$x\to0$일 때, $(3x^2+2x)\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(3x^2+2x)}{2x^2+x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan(3x^2+2x)}{3x^2+2x}\times\frac{3x^2+2x}{2x^2+x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan(3x^2+2x)}{3x^2+2x}\times\frac{3x+2}{2x+1}\right\}$$
$$=1\times2=2$$

301 답 1

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin f(x)}{f(\sin x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin 2x^2}{2\sin^2 x}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin 2x^2}{2x^2}\times\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\right\}$$
$$=1\times1^2=1$$

302 답 (1) $\frac{1}{4}$ (2) 8

(1) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\tan 2x}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\tan 2x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x\tan 2x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\tan 2x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{2x}{\tan 2x}\times\frac{1}{2(1+\cos x)}\right\}$$
$$=1^2\times1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

(2) $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 4x}{x^2}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos 4x)(1+\cos 4x)}{x^2(1+\cos 4x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 4x}{x^2(1+\cos 4x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 4x}{x^2(1+\cos 4x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin 4x}{4x}\right)^2\times\frac{16}{1+\cos 4x}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{16}{2}=8$$

303 답 (1) -1 (2) 4

(1) $x-\pi=t$로 놓으면 $x=\pi+t$이고, $x\to\pi$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\pi-x}{\tan(\pi+x)}=\lim_{t\to0}\frac{-t}{\tan(2\pi+t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(-\frac{t}{\tan t}\right)=-1$$

(2) $\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}(4x+2)\sin\frac{1}{x}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left(\frac{4}{t}+2\right)\sin t$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}\times4+\lim_{t\to0+}2\sin t$$
$$=1\times4+0=4$$

304 답 1

$$\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^2\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-2\sin x\cos x}{x^2\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2-2\cos x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos^2 x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{2}{1+\cos x}\right\}$$
$$=1^2\times\frac{2}{2}=1$$

305 답 $\frac{1}{4}$

$x-\frac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x=\frac{\pi}{2}+t$이고, $x\to\frac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cos x}{(2x-\pi)^2}=\lim_{t\to0}\frac{-t\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{(2t)^2}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t\sin t}{4t^2}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\times\frac{1}{4}$$
$$=1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

306 답 $a=-3,\ b=-\frac{1}{2}$

$x\to0$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0에서

$\lim_{x\to0}(3\cos x+a)=0$

$3+a=0 \quad \therefore a=-3$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{3\cos x-3}{bx\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-3(1-\cos x)}{bx\sin x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-3(1-\cos x)(1+\cos x)}{bx\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-3(1-\cos^2 x)}{bx\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-3\sin^2 x}{bx\sin x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin x}{x}\times\frac{-3}{b(1+\cos x)}\right\}$$
$$=1\times\left(-\frac{3}{2b}\right)=-\frac{3}{2b}$$

따라서 $-\frac{3}{2b}=3$이므로 $b=-\frac{1}{2}$

307 답 $a=1,\ b=\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이면

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$이므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(a+x)}{\tan bx}=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to0+$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0에서

$\lim_{x\to0+}\ln(a+x)=0$

$\ln a=0 \quad \therefore a=1$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0+}\frac{\ln(1+x)}{\tan bx}$$
$$=\lim_{x\to0+}\left\{\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{bx}{\tan bx}\times\frac{1}{b}\right\}$$
$$=1\times1\times\frac{1}{b}=\frac{1}{b}$$

따라서 $\frac{1}{b}=3$이므로 $b=\frac{1}{3}$

308 답 8

$x\to0$일 때 (분자)$\to$0이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to$0에서

$\lim_{x\to0}(\sqrt{ax+b}-4)=0$

$\sqrt{b}=4 \quad \therefore b=16$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 6x}{\sqrt{ax+16}-4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan 6x(\sqrt{ax+16}+4)}{(\sqrt{ax+16}-4)(\sqrt{ax+16}+4)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan 6x(\sqrt{ax+16}+4)}{ax}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan 6x}{6x}\times(\sqrt{ax+16}+4)\times\frac{6}{a}\right\}$$
$$=1\times8\times\frac{6}{a}=\frac{48}{a}$$

따라서 $\frac{48}{a}=2$이므로 $a=24$

$\therefore a-b=24-16=8$

309 답 $2e^3$

$x\neq3$일 때, $f(x)=\frac{e^x\sin(2x-a)}{x-3}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=3$에서 연속이므로 $\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$에서

$$f(3)=\lim_{x\to3}\frac{e^x\sin(2x-a)}{x-3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

$x\to3$일 때 (분모)$\to$0이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to$0에서

$\lim_{x\to3}e^x\sin(2x-a)=0$

$e^3\sin(6-a)=0$

$\sin(6-a)=0$

$\therefore a=6$ ($\because a$는 정수)

이를 ㉠에 대입하면

$f(3)=\lim_{x\to3}\dfrac{e^x\sin(2x-6)}{x-3}$

$x-3=t$로 놓으면 $x=t+3$이고, $x\to3$일 때 $t\to0$이므로

$$\begin{aligned}f(3)&=\lim_{x\to3}\frac{e^x\sin(2x-6)}{x-3}\\&=\lim_{t\to0}\frac{e^{t+3}\sin2t}{t}\\&=\lim_{t\to0}\left(e^{t+3}\times\frac{\sin2t}{2t}\times2\right)\\&=e^3\times1\times2=2e^3\end{aligned}$$

310 $\frac{1}{4}$

직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC}=2\cos\theta$

직각삼각형 BCH에서

$\overline{BH}=\overline{BC}\sin\theta=2\cos\theta\sin\theta$

$$\begin{aligned}&\therefore\lim_{\theta\to0+}\frac{2-\overline{BC}}{\overline{BH}^2}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{2-2\cos\theta}{(2\cos\theta\sin\theta)^2}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{2-2\cos\theta}{4\cos^2\theta\sin^2\theta}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{2\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{1-\cos\theta}{2\cos^2\theta(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}\\&=\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{2\cos^2\theta(1+\cos\theta)}\\&=\frac{1}{2\times2}=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

311 1

오른쪽 그림에서

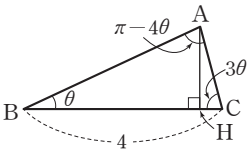
$\angle BAC=\pi-4\theta$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{4}{\sin(\pi-4\theta)}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin\theta}$

$\dfrac{4}{\sin4\theta}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin\theta}$

$\therefore\overline{AC}=\dfrac{4\sin\theta}{\sin4\theta}$



삼각형 AHC에서

$\overline{CH}=\overline{AC}\cos3\theta$

$=\dfrac{4\sin\theta\cos3\theta}{\sin4\theta}$

$$\begin{aligned}\therefore\lim_{\theta\to0+}\overline{CH}&=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\sin\theta\cos3\theta}{\sin4\theta}\\&=\lim_{\theta\to0+}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{4\theta}{\sin4\theta}\times\cos3\theta\right)\\&=1\times1\times1=1\end{aligned}$$

312 $\sqrt{2}+1$

$P(t,\sin t)\ (0<t<\pi)$이므로

$\overline{OP}=\sqrt{t^2+\sin^2t}$

또 $Q(t,0)$에서 $\overline{OQ}=t$, $\overline{PQ}=\sin t$

$\overline{PR}=\overline{PQ}=\sin t$이므로

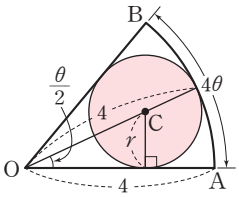
$\overline{OR}=\overline{OP}-\overline{PR}=\sqrt{t^2+\sin^2t}-\sin t$

$$\begin{aligned}&\therefore\lim_{t\to0+}\frac{\overline{OQ}}{\overline{OR}}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{t}{\sqrt{t^2+\sin^2t}-\sin t}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{t(\sqrt{t^2+\sin^2t}+\sin t)}{(\sqrt{t^2+\sin^2t}-\sin t)(\sqrt{t^2+\sin^2t}+\sin t)}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{t^2+\sin^2t}+\sin t}{t}\\&=\lim_{t\to0+}\sqrt{1+\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2}+\lim_{t\to0+}\frac{\sin t}{t}\\&=\sqrt{1+1^2}+1\\&=\sqrt{2}+1\end{aligned}$$

313 4π

부채꼴 OAB의 중심각의 크기가 θ이므로 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 C라 하면

$\angle COA=\dfrac{\theta}{2}$



이때 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $\overline{OC}=4-r$이므로

$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{r}{4-r}$

$(4-r)\sin\dfrac{\theta}{2}=r$

$\therefore\ r=\dfrac{4\sin\dfrac{\theta}{2}}{1+\sin\dfrac{\theta}{2}}$

따라서 $S(\theta)=\pi r^2=\dfrac{16\pi\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$이므로

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\frac{16\pi\sin^2\dfrac{\theta}{2}}{\theta^2\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\left(\frac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\dfrac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{16\pi}{4\left(1+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}\right\}$$
$$=1^2\times4\pi=4\pi$$

314 (1) $y'=x^2(3\cos x-x\sin x)$ (2) $y'=\cos x(2\sin x+3)$ (3) $y'=3^x(\ln3\times\cos x-\sin x)$

(1) $y'=(x^3)'\cos x+x^3(\cos x)'$
$=3x^2\cos x-x^3\sin x$
$=x^2(3\cos x-x\sin x)$

(2) $y'=(\sin x)'(\sin x+3)+\sin x(\sin x+3)'$
$=\cos x(\sin x+3)+\sin x\cos x$
$=\cos x(2\sin x+3)$

(3) $y'=(3^x)'\cos x+3^x(\cos x)'$
$=3^x\ln3\times\cos x-3^x\sin x$
$=3^x(\ln3\times\cos x-\sin x)$

315 -1

$f'(x)=(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'$
$=\cos^2x-\sin^2x$
$\therefore\ f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-1$

316 -1

$f'(x)=a(\sin x)'+(x)'\cos x+x(\cos x)'$
$=a\cos x+\cos x-x\sin x$
$=(a+1)\cos x-x\sin x$

$f'(\pi)=0$에서
$-(a+1)=0\qquad\therefore\ a=-1$

317 -1

$f'(x)=a(\sin x)'+b(\cos x)'+(2)'$
$=a\cos x-b\sin x$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$에서
$a+2=3\qquad\therefore\ a=1$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$에서
$-b=1\qquad\therefore\ b=-1$

$\therefore\ ab=1\times(-1)=-1$

318 8

$$\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}+h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{\pi}{2}-h\right)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-h}$$
$$=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=2f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

이때
$f'(x)=\sin x+x\cos x+3\sin x$
$=4\sin x+x\cos x$
이므로 구하는 극한값은 ㉠에서
$2f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2\times4=8$

319 $a=1,\ b=-3$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속
이므로 $\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$에서
$\lim_{x\to0+}(b\sin x+\cos x)=\lim_{x\to0-}(x^2-3x+a)=1$
$\therefore\ a=1$

$f'(x)=\begin{cases}2x-3 & (x<0)\\ b\cos x-\sin x & (x>0)\end{cases}$이고 미분계수

$f'(0)$이 존재하므로 $\lim_{x\to0+}f'(x)=\lim_{x\to0-}f'(x)$에서

$\lim_{x\to0+}(b\cos x-\sin x)=\lim_{x\to0-}(2x-3)$

$\therefore b=-3$

320 $-\frac{e^{\pi}}{2\pi}$

$f(\pi)=-e^{\pi}$이므로

$$\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+e^{\pi}}{x^2-\pi^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{(x-\pi)(x+\pi)}$$
$$=\lim_{x\to\pi}\left\{\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}\times\frac{1}{x+\pi}\right\}$$
$$=\frac{f'(\pi)}{2\pi}\quad\cdots\cdots\text{㉠}$$

이때

$f'(x)=e^x\cos x-e^x\sin x$

$=e^x(\cos x-\sin x)$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$\frac{f'(\pi)}{2\pi}=-\frac{e^{\pi}}{2\pi}$

321 $-\frac{4}{\pi}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면

$x=\frac{\pi}{2}$에서 미분가능하고 $x=\frac{\pi}{2}$에서 연속이므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)$에서

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}bx\sin x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}(a\cos x+1)=\frac{\pi}{2}b$

$\frac{\pi}{2}b=1\qquad\therefore b=\frac{2}{\pi}$

$f'(x)=\begin{cases}-a\sin x & \left(x<\frac{\pi}{2}\right)\\ \frac{2}{\pi}\sin x+\frac{2}{\pi}x\cos x & \left(x>\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$이고 미분계수

수 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$가 존재하므로

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}f'(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}f'(x)$에서

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+}\left(\frac{2}{\pi}\sin x+\frac{2}{\pi}x\cos x\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-}(-a\sin x)$

$\frac{2}{\pi}=-a\qquad\therefore a=-\frac{2}{\pi}$

$\therefore a-b=-\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}=-\frac{4}{\pi}$

연습문제

322 ⑤

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x+\sin x}{\cos 2x}$$
$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x+\sin x}{\cos^2x-\sin^2x}$$
$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x+\sin x}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}$$
$$=\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos x-\sin x}$$
$$=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

323 $-\frac{8}{3}$

(가)에서

$$a=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{x+\tan5x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{x}}{1+\frac{\tan5x}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2}{1+\frac{\tan5x}{5x}\times5}=\frac{1\times2}{1+1\times5}=\frac{1}{3}$$

(나)에서

$$b=\lim_{x\to0}\frac{\tan3x}{\ln(1-x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan3x}{3x}\times\frac{-x}{\ln(1-x)}\times(-3)\right\}$$
$$=1\times1\times(-3)=-3$$

$\therefore a+b=\frac{1}{3}+(-3)=-\frac{8}{3}$

324 ④

$x-1=t$로 놓으면 $x=1+t$이고, $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{1-x^2}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{t\to0}\frac{1-(t+1)^2}{\cos\frac{\pi}{2}(1+t)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{-t^2-2t}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}t\right)}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{t(t+2)}{\sin\frac{\pi}{2}t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left\{\frac{\frac{\pi}{2}t}{\sin\frac{\pi}{2}t}\times\frac{2}{\pi}(t+2)\right\}$$
$$=1\times\frac{4}{\pi}=\frac{4}{\pi}$$

325 답 $\frac{1}{2}$

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로
(분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}(a-\cos x)=0$

$a-1=0 \quad \therefore a=1$

이를 주어진 식에 대입하면

$$b=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\tan x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x\tan x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x\tan x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\tan x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{x}{\tan x}\times\frac{1}{1+\cos x}\right\}$$
$$=1^2\times1\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

$\therefore a-b=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

326 답 $\ln2-2$

$$f'(x)=2^x\ln2\times(\cos x-2\sin x)+2^x(-\sin x-2\cos x)$$
$$=2^x\{(\ln2-2)\cos x-(2\ln2+1)\sin x\}$$

$\therefore f'(0)=\ln2-2$

327 답 ③

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{e^{4x}-1}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{\sin3x}\times\frac{\sin3x}{3x}\times\frac{4x}{e^{4x}-1}\times\frac{3}{4}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times1\times\frac{3}{4}$$
$$=\frac{3}{8}$$

328 답 6

$f(n)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3x}{\sin x+\sin2x+\sin3x+\cdots+\sin nx}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{3}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin2x}{x}+\frac{\sin3x}{x}+\cdots+\frac{\sin nx}{x}}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{3}{\frac{\sin x}{x}+\frac{\sin2x}{2x}\times2+\frac{\sin3x}{3x}\times3+\cdots+\frac{\sin nx}{nx}\times n}$$
$$=\frac{3}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{3}{\frac{n(n+1)}{2}}$$
$$=\frac{6}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n(n+1)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}6\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}6\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}6\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}6\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=6\times1=6$$

329 답 $-\frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos2x-\cos x}{x\tan x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(2\cos^2x-1)-\cos x}{x\tan x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{2\cos^2x-\cos x-1}{x\tan x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(2\cos x+1)(\cos x-1)}{x\tan x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(2\cos x+1)(\cos x-1)(\cos x+1)}{x\tan x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(2\cos x+1)(\cos^2x-1)}{x\tan x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2x(2\cos x+1)}{x\tan x(\cos x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{x}{\tan x}\times\frac{2\cos x+1}{\cos x+1}\right\}$$
$$=-1^2\times1\times\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$$

330 답 1

$\frac{1}{x}=t$로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$이고, $x\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\left\{x\tan\left(\sin\frac{1}{x}\right)\cos\frac{1}{x}\right\}$$

$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{1}{t}\tan(\sin t)\cos t\right\}$$

$t\to0+$일 때, $\sin t\to0+$이므로

$$\lim_{t\to0+}\left\{\frac{1}{t}\tan(\sin t)\cos t\right\}$$

$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{\tan(\sin t)}{\sin t}\times\frac{\sin t}{t}\times\cos t\right\}$$

$=1\times1\times1=1$

331 답 $-\frac{1}{8}$

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}(\sqrt{3x+a}+b)=0$

$\sqrt{a}+b=0$

$\therefore b=-\sqrt{a}$ ····· ㉠ ▸▸▸▸▸▸ ❶

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{3x+a}-\sqrt{a}}{\sin4x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{3x+a}-\sqrt{a})(\sqrt{3x+a}+\sqrt{a})}{\sin4x(\sqrt{3x+a}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3x}{\sin4x(\sqrt{3x+a}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{4x}{\sin4x}\times\frac{3}{4(\sqrt{3x+a}+\sqrt{a})}\right\}$$

$=1\times\frac{3}{8\sqrt{a}}=\frac{3}{8\sqrt{a}}$

따라서 $\frac{3}{8\sqrt{a}}=\frac{3}{4}$이므로

$\sqrt{a}=\frac{1}{2}$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

이를 ㉠에 대입하면

$b=-\frac{1}{2}$ ▸▸▸▸▸▸ ❷

$\therefore ab=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{8}$ ▸▸▸▸▸▸ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	a, b 사이의 관계식 구하기	30 %
❷	a, b의 값 구하기	50 %
❸	ab의 값 구하기	20 %

332 답 ⑤

$e^{2x}-1=0$에서 $x=0$

$x\neq0$일 때, $f(x)=\frac{a-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$에서

$$f(0)=\lim_{x\to0}\frac{a-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}\qquad\cdots\cdots\text{㉡}$$

$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to0}\left(a-4\cos\frac{\pi}{2}x\right)=0$

$a-4=0$ $\therefore a=4$

이를 ㉡에 대입하면

$f(0)$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4-4\cos\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\left(1-\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{(e^{2x}-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\left(1-\cos\frac{\pi}{2}x\right)\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}{(e^{2x}-1)^2\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\left(1-\cos^2\frac{\pi}{2}x\right)}{(e^{2x}-1)^2\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2\frac{\pi}{2}x}{(e^{2x}-1)^2\left(1+\cos\frac{\pi}{2}x\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}x}\right)^2\times\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right)^2\times\frac{\frac{\pi^2}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{2}x}\right\}$$

$=1^2\times1^2\times\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{8}$

$\therefore a\times f(0)=4\times\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{2}$

333 답 4

직각삼각형 OHC에서

$\overline{OH}=\cos\theta$, $\overline{CH}=\sin\theta$

이때 $\overline{AH}=1-\cos\theta$이므로

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{AH}\times\overline{CH}=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\sin\theta$

$$\therefore \lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3}{S(\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3}{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\sin\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\theta^3(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\theta^3(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos^2\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\theta^3(1+\cos\theta)}{\sin^3\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{2\times\left(\frac{\theta}{\sin\theta}\right)^3\times(1+\cos\theta)\right\}$$
$$=2\times1^3\times2=4$$

334 ▣ 2π

$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)$
$=2e^x\cos x$
$f'(x)=0$에서 $\cos x=0$ ($\because e^x>0$)
$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0\le x\le2\pi$)
따라서 모든 실근의 합은
$\frac{\pi}{2}+\frac{3}{2}\pi=2\pi$

335 ▣ 3

$\frac{1}{n}=t$로 놓으면 $n=\frac{1}{t}$이고, $n\to\infty$일 때 $t\to0+$이므로
$$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(\frac{3}{n}\right)-f(0)\right\}=\lim_{t\to0+}\frac{f(3t)-f(0)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{f(3t)-f(0)}{3t}\times3$$
$$=3f'(0)\quad\cdots\cdots\text{㉠}$$
이때
$f'(x)=\cos^2x+(1+\sin x)(-\sin x)$
$=\cos^2x-\sin^2x-\sin x$
이므로 구하는 극한값은 ㉠에서
$3f'(0)=3\times1=3$

336 ▣ ③

함수 $f(x)$가 $x=\pi$에서 미분가능하면 $x=\pi$에서 연속이므로 $\lim_{x\to\pi+}f(x)=\lim_{x\to\pi-}f(x)=f(\pi)$에서
$\lim_{x\to\pi+}bx^2=\lim_{x\to\pi-}(a\sin x+2\pi)=b\pi^2$
$b\pi^2=2\pi\quad\therefore b=\frac{2}{\pi}$

$f'(x)=\begin{cases}a\cos x & (x<\pi)\\ \frac{4}{\pi}x & (x>\pi)\end{cases}$이고 미분계수 $f'(\pi)$가 존재하므로 $\lim_{x\to\pi+}f'(x)=\lim_{x\to\pi-}f'(x)$에서
$\lim_{x\to\pi+}\frac{4}{\pi}x=\lim_{x\to\pi-}a\cos x$
$4=-a\quad\therefore a=-4$
$\therefore \frac{a}{b}=\frac{-4}{\frac{2}{\pi}}=-2\pi$

337 ▣ $\frac{3}{4}$

| 접근 방법 | 두 점 A, P가 원 위에 있으므로 $\overline{CA}=\overline{CP}$임을 이용하여 식을 세운다.

점 P의 좌표를 $(t,\ \cos2t)$, 원의 중심 C의 좌표를 $(0,\ c)$라 하면 $\overline{CA}=\overline{CP}$이므로
$1-c=\sqrt{t^2+(\cos2t-c)^2}$
양변을 제곱하면
$1-2c+c^2=t^2+\cos^22t-2c\cos2t+c^2$
$2c(\cos2t-1)=t^2+\cos^22t-1$
$\therefore c=\frac{t^2+\cos^22t-1}{2(\cos2t-1)}$ (단, $\cos2t\ne1$)
점 P가 점 A에 한없이 가까워질 때, 즉 $t\to0+$일 때 원의 중심 C$(0,\ c)$는 점 $(0,\ a)$에 가까워지므로
$$a=\lim_{t\to0+}c$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{t^2+\cos^22t-1}{2(\cos2t-1)}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left\{\frac{t^2}{2(\cos2t-1)}+\frac{(\cos2t+1)(\cos2t-1)}{2(\cos2t-1)}\right\}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{t^2(\cos2t+1)}{2(\cos2t-1)(\cos2t+1)}+\lim_{t\to0+}\frac{\cos2t+1}{2}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{t^2(\cos2t+1)}{2(\cos^22t-1)}+1$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{t^2(\cos2t+1)}{-2\sin^22t}+1$$
$$=\lim_{t\to0+}\left\{-\left(\frac{2t}{\sin2t}\right)^2\times\frac{\cos2t+1}{8}\right\}+1$$
$$=-1^2\times\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$$

338 답 6

| 접근 방법 | 주어진 식을 삼각함수의 극한과 미분계수의 정의를 이용할 수 있도록 변형한 후 극한값을 구한다.

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\pi+\tan^2x)-f(\pi)}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(\pi+\tan^2x)-f(\pi)}{\tan^2x}\times\frac{\tan^2x}{1-\cos x}\right\}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(\pi+\tan^2x)-f(\pi)}{\tan^2x}\times\frac{\tan^2x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\right\}$$

$x\to0$일 때, $\tan^2x\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f(\pi+\tan^2x)-f(\pi)}{\tan^2x}=f'(\pi)$$

$$\therefore\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(\pi+\tan^2x)-f(\pi)}{\tan^2x}\times\frac{\tan^2x(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\right\}$$

$$=f'(\pi)\times\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x(1+\cos x)}{1-\cos^2x}$$

$$=f'(\pi)\times\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x(1+\cos x)}{\sin^2x}$$

$$=f'(\pi)\times\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2\times\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\times(1+\cos x)\right\}$$

$$=f'(\pi)\times1^2\times1^2\times2$$

$$=2f'(\pi)\quad\cdots\cdots\text{㉠}$$

이때 $f'(x)=3(\cos^2x-\sin^2x)$이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$2f'(\pi)=2\times3=6$

01 여러 가지 미분법 (1)

개념 확인 173쪽

339 답 (1) $y'=-\frac{3}{(3x+2)^2}$ (2) $y'=\frac{x^2(4x-3)}{(2x-1)^2}$

(1) $y'=-\frac{(3x+2)'}{(3x+2)^2}=-\frac{3}{(3x+2)^2}$

(2) $y'=\frac{(x^3)'(2x-1)-x^3(2x-1)'}{(2x-1)^2}$

$$=\frac{3x^2(2x-1)-x^3\times2}{(2x-1)^2}$$

$$=\frac{4x^3-3x^2}{(2x-1)^2}=\frac{x^2(4x-3)}{(2x-1)^2}$$

340 답 (1) $y'=-6x^{-3}$ (2) $y'=-\frac{2}{x^5}$

(1) $y'=3(x^{-2})'=3\times(-2x^{-2-1})=-6x^{-3}$

(2) $y=\frac{1}{2x^4}=\frac{1}{2}x^{-4}$이므로

$$y'=\frac{1}{2}(x^{-4})'=\frac{1}{2}\times(-4x^{-4-1})$$

$$=-2x^{-5}=-\frac{2}{x^5}$$

341 답 (1) $y'=\sec x(\sec x-2\tan x)$ (2) $y'=-\csc x(2\cot x+3\csc x)$

(1) $y'=(\tan x)'-2(\sec x)'$

$$=\sec^2x-2\sec x\tan x$$

$$=\sec x(\sec x-2\tan x)$$

(2) $y'=2(\csc x)'+3(\cot x)'$

$$=-2\csc x\cot x-3\csc^2x$$

$$=-\csc x(2\cot x+3\csc x)$$

유제 175~179쪽

342 답 (1) $y'=-\frac{8x}{(4x^2-1)^2}$ (2) $y'=-\frac{x(x^3-12x+2)}{(x^2-4)^2}$ (3) $y'=-\frac{(x-1)e^x+1}{(e^x-1)^2}$ (4) $y'=-\frac{2x\ln2-2-\ln2}{2^x}$

(5) $y'=\dfrac{1-\ln x}{3x^2}$

(6) $y'=\dfrac{\cos x+\sin x+1}{(1+\cos x)^2}$

(1) $y'=-\dfrac{(4x^2-1)'}{(4x^2-1)^2}=-\dfrac{8x}{(4x^2-1)^2}$

(2) $y'=\dfrac{(1-x^3)'(x^2-4)-(1-x^3)(x^2-4)'}{(x^2-4)^2}$

$=\dfrac{-3x^2(x^2-4)-(1-x^3)\times 2x}{(x^2-4)^2}$

$=\dfrac{-x^4+12x^2-2x}{(x^2-4)^2}$

$=-\dfrac{x(x^3-12x+2)}{(x^2-4)^2}$

(3) $y'=\dfrac{(x)'(e^x-1)-x(e^x-1)'}{(e^x-1)^2}$

$=\dfrac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2}=-\dfrac{(x-1)e^x+1}{(e^x-1)^2}$

(4) $y'=\dfrac{(2x-1)'2^x-(2x-1)(2^x)'}{(2^x)^2}$

$=\dfrac{2\times 2^x-(2x-1)\times 2^x\ln 2}{2^{2x}}$

$=-\dfrac{2x\ln 2-2-\ln 2}{2^x}$

(5) $y'=\dfrac{(\ln x)'\times 3x-\ln x(3x)'}{(3x)^2}$

$=\dfrac{\frac{1}{x}\times 3x-\ln x\times 3}{9x^2}=\dfrac{1-\ln x}{3x^2}$

(6) y'

$=\dfrac{(1+\sin x)'(1+\cos x)-(1+\sin x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{\cos x(1+\cos x)-(1+\sin x)(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{\cos x+\cos^2 x+\sin x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$

$=\dfrac{\cos x+\sin x+1}{(1+\cos x)^2}$ ◀ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

343 답 8

$f'(x)$

$=\dfrac{(3x^2-1)'(x^2+x-1)-(3x^2-1)(x^2+x-1)'}{(x^2+x-1)^2}$

$=\dfrac{6x(x^2+x-1)-(3x^2-1)(2x+1)}{(x^2+x-1)^2}$

$=\dfrac{3x^2-4x+1}{(x^2+x-1)^2}$

$\therefore f'(-1)=\dfrac{3+4+1}{(1-1-1)^2}=8$

344 답 $-\dfrac{4}{9}$

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(2h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)+f(0)-f(2h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(0)}{2h}\times 2$

$=f'(0)-2f'(0)$

$=-f'(0)$ ····· ㉠

이때

$f'(x)=\dfrac{(e^x)'(3-\sin x)-e^x(3-\sin x)'}{(3-\sin x)^2}$

$=\dfrac{e^x(3-\sin x)-e^x(-\cos x)}{(3-\sin x)^2}$

$=\dfrac{e^x(3-\sin x+\cos x)}{(3-\sin x)^2}$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$-f'(0)=-\dfrac{3+1}{3^2}=-\dfrac{4}{9}$

345 답 (1) $y'=3x^2-\dfrac{2}{x^2}$

(2) $y'=4x+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{10}{x^3}$

(1) $y=\dfrac{x^4+3x+2}{x}=x^3+3+\dfrac{2}{x}$

$=x^3+3+2x^{-1}$

이므로

$y'=(x^3)'+(3)'+2(x^{-1})'$

$=3x^2+2\times(-x^{-1-1})$

$=3x^2-2x^{-2}$

$=3x^2-\dfrac{2}{x^2}$

(2) $y=\dfrac{2x^6-x^3+5x^2}{x^4}=2x^2-\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^2}$

$=2x^2-x^{-1}+5x^{-2}$

이므로

$y'=2(x^2)'-(x^{-1})'+5(x^{-2})'$

$=2\times 2x-(-x^{-1-1})+5\times(-2x^{-2-1})$

$=4x+x^{-2}-10x^{-3}$

$=4x+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{10}{x^3}$

346 답 **11**

$f(x)=\dfrac{x^5+12x-8}{x^2}=x^3+\dfrac{12}{x}-\dfrac{8}{x^2}$

$=x^3+12x^{-1}-8x^{-2}$

이므로

$f'(x)=3x^2-12x^{-2}+16x^{-3}=3x^2-\dfrac{12}{x^2}+\dfrac{16}{x^3}$

$\therefore\ f'(2)=12-\dfrac{12}{4}+\dfrac{16}{8}=11$

347 답 **7**

$f(-1)=\dfrac{-2\times(1-1+1)}{-1}=2$이므로

$\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-2}{x+1}=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

$=f'(-1)$ ····· ㉠

이때

$f(x)=\dfrac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^5}=\dfrac{x^3-1}{x^5}$

$=\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^5}=x^{-2}-x^{-5}$

이므로

$f'(x)=-2x^{-3}+5x^{-6}=-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{5}{x^6}$

따라서 구하는 극한값은 ㉠에서

$f'(-1)=2+5=7$

348 답 **−21**

$f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\cdots+\dfrac{1}{x^6}$

$=x^{-1}+x^{-2}+x^{-3}+\cdots+x^{-6}$

이므로

$f'(x)=-x^{-2}-2x^{-3}-3x^{-4}-\cdots-6x^{-7}$

$=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{3}{x^4}-\cdots-\dfrac{6}{x^7}$

$\therefore\ f'(1)=-1-2-3-\cdots-6$

$=-(1+2+3+\cdots+6)$

$=-\sum\limits_{n=1}^{6}n$

$=-\dfrac{6\times7}{2}=-21$

349 답 (1) $y'=\tan x+x\sec^2 x$

(2) $y'=\sec^2 x-\csc^2 x$

(3) $y'=\dfrac{\csc x}{1-\csc x}$

(1) $y'=(x)'\tan x+x(\tan x)'$

$=\tan x+x\sec^2 x$

(2) $y'=(\sec x)'\csc x+\sec x(\csc x)'$

$=\sec x\tan x\times\csc x$

$+\sec x(-\csc x\cot x)$

$=\dfrac{1}{\cos x}\times\dfrac{\sin x}{\cos x}\times\dfrac{1}{\sin x}$

$-\dfrac{1}{\cos x}\times\dfrac{1}{\sin x}\times\dfrac{\cos x}{\sin x}$

$=\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

$=\sec^2 x-\csc^2 x$

(3) $y'=\dfrac{(\cot x)'(1-\csc x)-\cot x(1-\csc x)'}{(1-\csc x)^2}$

$=\dfrac{-\csc^2 x(1-\csc x)-\cot x\times\csc x\cot x}{(1-\csc x)^2}$

$=\dfrac{\csc x(\csc^2 x-\csc x-\cot^2 x)}{(1-\csc x)^2}$

$=\dfrac{\csc x(1-\csc x)}{(1-\csc x)^2}$ ◀ $1+\cot^2 x=\csc^2 x$

$=\dfrac{\csc x}{1-\csc x}$

350 답 **2**

$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)+f(0)-f(-h)}{h}$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}+\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(-h)-f(0)}{-h}$

$=f'(0)+f'(0)=2f'(0)$ ····· ㉠

이때

$f'(x)=(e^x)'\tan x+e^x(\tan x)'$

$=e^x\tan x+e^x\sec^2 x$

$=e^x(\tan x+\sec^2 x)$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$2f'(0)=2\times1=2$

351 답 $-\dfrac{1}{2}$

$f'(x)=\dfrac{(x)'(\cos x+\sec x)-x(\cos x+\sec x)'}{(\cos x+\sec x)^2}$

$=\dfrac{\cos x+\sec x-x(-\sin x+\sec x\tan x)}{(\cos x+\sec x)^2}$

$\therefore\ f'(\pi)=\dfrac{-1-1}{(-1-1)^2}=-\dfrac{1}{2}$

352 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$f'(x)=3\sec^2 x-a\csc x\cot x$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$에서

$4-2\sqrt{3}a=1 \quad \therefore a=\frac{\sqrt{3}}{2}$

개념 확인 183쪽

353 답 (1) $y'=8(2x+3)^3$

(2) $y'=2(x^3-e^x+1)(3x^2-e^x)$

(3) $y'=\frac{3(\ln x+1)^2}{x}$

(4) $y'=6(\sin x+\cos x)^5(\cos x-\sin x)$

(1) $y'=4(2x+3)^{4-1}(2x+3)'$

$=4(2x+3)^3\times 2=8(2x+3)^3$

(2) $y'=2(x^3-e^x+1)^{2-1}(x^3-e^x+1)'$

$=2(x^3-e^x+1)(3x^2-e^x)$

(3) $y'=3(\ln x+1)^{3-1}(\ln x+1)'=\frac{3(\ln x+1)^2}{x}$

(4) $y=6(\sin x+\cos x)^{6-1}(\sin x+\cos x)'$

$=6(\sin x+\cos x)^5(\cos x-\sin x)$

354 답 (1) $y'=2e^{2x+7}$ (2) $y'=3^{9x+3}\ln 3$

(3) $y'=\frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}$

(4) $y'=\frac{4}{(4x+7)\ln 2}$

(1) $y'=e^{2x+7}(2x+7)'=2e^{2x+7}$

(2) $y'=3^{9x+1}\ln 3\times(9x+1)'$

$=3^{9x+1}\ln 3\times 9=3^{9x+3}\ln 3$

(3) $y'=\frac{(x^3+2x+1)'}{x^3+2x+1}=\frac{3x^2+2}{x^3+2x+1}$

(4) $y'=\frac{(4x+7)'}{(4x+7)\ln 2}=\frac{4}{(4x+7)\ln 2}$

355 답 (1) $y'=3\sec(3x+5)\tan(3x+5)$

(2) $y'=\csc^2(2-x)$

(3) $y'=-4\csc(4x-4)\cot(4x-4)$

(4) $y'=-2x\sin x^2$

(5) $y'=(6x-1)\sec^2(3x^2-x+3)$

(6) $y'=-\cos(\cos x)\sin x$

(1) $y'=\sec(3x+5)\tan(3x+5)\times(3x+5)'$

$=3\sec(3x+5)\tan(3x+5)$

(2) $y'=-\csc^2(2-x)\times(2-x)'=\csc^2(2-x)$

(3) $y'=-\csc(4x-4)\cot(4x-4)\times(4x-4)'$

$=-4\csc(4x-4)\cot(4x-4)$

(4) $y'=-\sin x^2\times(x^2)'=-2x\sin x^2$

(5) $y'=\sec^2(3x^2-x+3)\times(3x^2-x+3)'$

$=(6x-1)\sec^2(3x^2-x+3)$

(6) $y'=\cos(\cos x)\times(\cos x)'$

$=-\cos(\cos x)\sin x$

유제 185~187쪽

356 답 -2

$f'(g(x))g'(x)=12x^2-2x$이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f'(g(-1))g'(-1)=14$

$f'(2)g'(-1)=14,\ -7g'(-1)=14$

$\therefore g'(-1)=-2$

357 답 -18

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로 양변에 $x=0$을 대입하면

$h'(0)=g'(f(0))f'(0)$ ····· ㉠

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-4}{x}=6$에서 $x\to 0$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to 0}\{f(x)-4\}=0 \quad \therefore f(0)=4$

$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-4}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$=f'(0)=6$

또 $\lim_{x\to 4}\frac{g(x)}{x-4}=-3$에서 $x\to 4$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{x\to 4}g(x)=0 \quad \therefore g(4)=0$

$\therefore \lim_{x\to 4}\frac{g(x)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{g(x)-g(4)}{x-4}$

$=g'(4)=-3$

따라서 구하는 값은 ㉠에서

$h'(0)=g'(f(0))f'(0)=g'(4)f'(0)$

$=-3\times 6=-18$

358 답 2

$f'(g(x))g'(x)=8x^3-2x$이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$f'(g(1))g'(1)=6$

$f'(1)g'(1)=6$ ····· ㉠

이때 $f'(x)=3x^2$이므로

$f'(1)=3$

이를 ㉠에 대입하면

$3g'(1)=6$ $\therefore g'(1)=2$

359 답 48

$\lim_{x\to4}\frac{f(x)+2}{x-4}=8$에서 $x\to4$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to4}\{f(x)+2\}=0$ $\therefore f(4)=-2$

$\therefore \lim_{x\to4}\frac{f(x)+2}{x-4}=\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$

$=f'(4)=8$

$h(x)=f(g(x))$라 하면

$h(2)=f(g(2))=f(4)=-2$

$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(g(x))+2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}$

$=h'(2)$ ····· ㉠

이때 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$h'(2)=f'(g(2))g'(2)$

$=f'(4)g'(2)$

$=8\times6=48$

360 답 (1) $y'=\frac{30(3x-4)^2}{(x+2)^4}$ (2) $y'=e^{\tan x}\sec^2 x$ (3) $y'=\frac{2^{\ln x}\ln 2}{x}$ (4) $y'=-2\tan x$ (5) $y'=-6x\sec(1-3x^2)\tan(1-3x^2)$ (6) $y'=21\sin^2(7x+2)\cos(7x+2)$

(1) $y'=3\left(\frac{3x-4}{x+2}\right)^2\left(\frac{3x-4}{x+2}\right)'$

$=3\left(\frac{3x-4}{x+2}\right)^2$

$\times\frac{(3x-4)'(x+2)-(3x-4)(x+2)'}{(x+2)^2}$

$=3\left(\frac{3x-4}{x+2}\right)^2\times\frac{3(x+2)-(3x-4)}{(x+2)^2}$

$=3\left(\frac{3x-4}{x+2}\right)^2\times\frac{10}{(x+2)^2}=\frac{30(3x-4)^2}{(x+2)^4}$

(2) $y'=e^{\tan x}(\tan x)'=e^{\tan x}\sec^2 x$

(3) $y'=2^{\ln x}\ln 2\times(\ln x)'$

$=\frac{2^{\ln x}\ln 2}{x}$

(4) $y'=\frac{(\cos^2 x)'}{\cos^2 x}$

$=\frac{2\cos x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$=-\frac{2\sin x}{\cos x}=-2\tan x$

(5) $y'=\sec(1-3x^2)\tan(1-3x^2)\times(1-3x^2)'$

$=-6x\sec(1-3x^2)\tan(1-3x^2)$

(6) $y'=3\sin^2(7x+2)\{\sin(7x+2)\}'$

$=3\sin^2(7x+2)\cos(7x+2)\times(7x+2)'$

$=21\sin^2(7x+2)\cos(7x+2)$

361 답 63

$f'(x)=2(e^{2x}+2e^{-2x})(e^{2x}+2e^{-2x})'$

$=2(e^{2x}+2e^{-2x})(2e^{2x}-4e^{-2x})$

$=4(e^{2x}+2e^{-2x})(e^{2x}-2e^{-2x})$

$=4(e^{4x}-4e^{-4x})$

$\therefore f'(\ln 2)=4\times\left(16-\frac{1}{4}\right)=63$

362 답 $\frac{15}{8}$

$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$에서

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$h'(1)=g'(f(1))f'(1)=g'\left(\frac{1}{2}\right)f'(1)$ ····· ㉠

이때

$f'(x)=\frac{(2x-1)'(x+1)-(2x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}$

$=\frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2}$

$=\frac{3}{(x+1)^2}$

$g'(x)=2(x^2+1)(x^2+1)'$

$=4x(x^2+1)$

이므로 구하는 값은 ㉠에서

$h'(1)=g'\left(\frac{1}{2}\right)f'(1)$

$=\frac{5}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{15}{8}$

개념 확인 189쪽

363 답 (1) $y'=\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$ (2) $y'=-\dfrac{\sqrt{5}}{x^{\sqrt{5}+1}}$

(1) $y=\sqrt[5]{x^2}=x^{\frac{2}{5}}$이므로

$y'=\dfrac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1}=\dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}}=\dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

(2) $y=\dfrac{1}{x^{\sqrt{5}}}=x^{-\sqrt{5}}$이므로

$y'=-\sqrt{5}x^{-\sqrt{5}-1}=-\dfrac{\sqrt{5}}{x^{\sqrt{5}+1}}$

유제 191~195쪽

364 답 (1) $y'=\dfrac{6x+1}{3x^2+x}$ (2) $y'=\tan x$

(3) $y'=\dfrac{10}{2x-5}$ (4) $y'=\dfrac{3x^2+3}{(x^3+3x)\ln 4}$

(5) $y'=\dfrac{2\sec^2 2x}{\tan 2x\ln 10}$

(6) $y'=x\left\{2\log_7|-x^3+2x|+\dfrac{3x^2-2}{(x^2-2)\ln 7}\right\}$

(1) $y'=\dfrac{(3x^2+x)'}{3x^2+x}=\dfrac{6x+1}{3x^2+x}$

(2) $y'=\dfrac{(\sec x)'}{\sec x}=\dfrac{\sec x\tan x}{\sec x}=\tan x$

(3) $y'=\dfrac{\{(2x-5)^5\}'}{(2x-5)^5}=\dfrac{5(2x-5)^4(2x-5)'}{(2x-5)^5}$

$=\dfrac{10}{2x-5}$

(4) $y'=\dfrac{(x^3+3x)'}{(x^3+3x)\ln 4}=\dfrac{3x^2+3}{(x^3+3x)\ln 4}$

(5) $y'=\dfrac{(\tan 2x)'}{\tan 2x\ln 10}=\dfrac{\sec^2 2x\times(2x)'}{\tan 2x\ln 10}$

$=\dfrac{2\sec^2 2x}{\tan 2x\ln 10}$

(6) $y'=2x\log_7|-x^3+2x|+x^2\times\dfrac{(-x^3+2x)'}{(-x^3+2x)\ln 7}$

$=2x\log_7|-x^3+2x|+\dfrac{x(-3x^2+2)}{(-x^2+2)\ln 7}$

$=x\left\{2\log_7|-x^3+2x|+\dfrac{3x^2-2}{(x^2-2)\ln 7}\right\}$

| 다른 풀이 |

(3) $y=\ln|2x-5|^5=5\ln|2x-5|$이므로

$y'=\dfrac{5(2x-5)'}{2x-5}=\dfrac{10}{2x-5}$

365 답 $-\dfrac{1}{9}$

$f'(x)=\dfrac{(5^x-2)'}{(5^x-2)\ln 5}=\dfrac{5^x\ln 5}{(5^x-2)\ln 5}=\dfrac{5^x}{5^x-2}$

$\therefore f'(-1)=\dfrac{\frac{1}{5}}{-\frac{9}{5}}=-\dfrac{1}{9}$

366 답 1

$f'(x)=\dfrac{(ax+4)'}{ax+4}=\dfrac{a}{ax+4}$

$f'(-2)=\dfrac{1}{2}$에서

$\dfrac{a}{-2a+4}=\dfrac{1}{2}$, $2a=-2a+4$

$\therefore a=1$

367 답 (1) $y'=x^{\tan x}\left(\sec^2 x\ln x+\dfrac{\tan x}{x}\right)$

(2) $y'=\dfrac{x^2(5x-3)}{(x+1)^5}$

(1) $x>0$, $y>0$이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln y=\ln x^{\tan x}$

$=\tan x\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{y'}{y}=(\tan x)'\ln x+\tan x(\ln x)'$

$=\sec^2 x\ln x+\dfrac{\tan x}{x}$

$\therefore y'=y\times\left(\sec^2 x\ln x+\dfrac{\tan x}{x}\right)$

$=x^{\tan x}\left(\sec^2 x\ln x+\dfrac{\tan x}{x}\right)$

(2) 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$\ln|y|=\ln\left|\dfrac{x^3(x-1)}{(x+1)^4}\right|$

$=3\ln|x|+\ln|x-1|-4\ln|x+1|$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{y'}{y}=\dfrac{3}{x}+\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{4}{x+1}=\dfrac{5x-3}{x(x+1)(x-1)}$

$\therefore y'=y\times\dfrac{5x-3}{x(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{x^3(x-1)}{(x+1)^4}\times\dfrac{5x-3}{x(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{x^2(5x-3)}{(x+1)^5}$

368 답 **0**

주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln|f(x)|=\ln\left|\frac{(x+2)^2}{(x+1)(x+5)}\right|$$
$$=2\ln|x+2|-\ln|x+1|-\ln|x+5|$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+5}$$

$$\therefore\ \frac{f'(1)}{f(1)}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=0$$

369 답 **24**

$x>0$, $f(x)>0$이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\ln x^x$$
$$=x\ln x$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=(x)'\ln x+x(\ln x)'$$
$$=\ln x+1$$

$$\therefore\ f'(x)=f(x)\times(\ln x+1)=x^x(\ln x+1)$$

$$\therefore\ f'(3)=3^3(\ln 3+1)=27(\ln 3+1)$$

따라서 $a=27$, $b=3$이므로 $a-b=24$

370 답 **-2**

$f(x)>0$이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$
$$=\frac{1}{2}\{\ln(1+\cos x)-\ln(1-\cos x)\}$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x}-\frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x}-\frac{\sin x}{1-\cos x}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{-\sin x(1-\cos x)-\sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x}$$
$$=-\frac{\sin x}{\sin^2 x}=-\csc x$$

$$\therefore\ f'(x)=f(x)\times(-\csc x)$$
$$=-\csc x\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$$

$$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{2}{\sqrt{3}}\times\sqrt{3}=-2$$

371 답 (1) $y'=2\sqrt{2}x^{2\sqrt{2}-1}+ex^{e-1}$

(2) $y'=-\dfrac{1}{\sqrt[5]{(5x-1)^6}}$

(3) $y'=\dfrac{5x^2+16x+1}{2\sqrt{x+4}}$

(4) $y'=\dfrac{18x^2+6x}{(4x+1)\sqrt{4x+1}}$

(5) $y'=\dfrac{\sec x\tan x+2}{3\sqrt[3]{(\sec x+2x)^2}}$

(6) $y'=\dfrac{\cos\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+3}}$

(1) $y'=(x^{2\sqrt{2}})'+(x^e)'$
$=2\sqrt{2}x^{2\sqrt{2}-1}+ex^{e-1}$

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{5x-1}}=(5x-1)^{-\frac{1}{5}}$이므로

$y'=\{(5x-1)^{-\frac{1}{5}}\}'$
$=-\dfrac{1}{5}(5x-1)^{-\frac{1}{5}-1}(5x-1)'$
$=-\dfrac{1}{5}(5x-1)^{-\frac{6}{5}}\times 5=-\dfrac{1}{\sqrt[5]{(5x-1)^6}}$

(3) $y=(x^2+1)\sqrt{x+4}=(x^2+1)(x+4)^{\frac{1}{2}}$이므로

$y'=(x^2+1)'(x+4)^{\frac{1}{2}}+(x^2+1)\{(x+4)^{\frac{1}{2}}\}'$
$=2x(x+4)^{\frac{1}{2}}$
$\quad+(x^2+1)\times\dfrac{1}{2}(x+4)^{\frac{1}{2}-1}(x+4)'$
$=2x(x+4)^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2}(x^2+1)(x+4)^{-\frac{1}{2}}$
$=2x\sqrt{x+4}+\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x+4}}$
$=\dfrac{5x^2+16x+1}{2\sqrt{x+4}}$

(4) $y=\dfrac{3x^2}{\sqrt{4x+1}}=3x^2(4x+1)^{-\frac{1}{2}}$이므로

$y'=3(x^2)'(4x+1)^{-\frac{1}{2}}+3x^2\{(4x+1)^{-\frac{1}{2}}\}'$
$=6x(4x+1)^{-\frac{1}{2}}$
$\quad+3x^2\times\left\{-\dfrac{1}{2}(4x+1)^{-\frac{1}{2}-1}\right\}(4x+1)'$
$=6x(4x+1)^{-\frac{1}{2}}-\dfrac{3}{2}x^2(4x+1)^{-\frac{3}{2}}\times 4$
$=\dfrac{6x}{\sqrt{4x+1}}-\dfrac{6x^2}{(4x+1)\sqrt{4x+1}}$
$=\dfrac{18x^2+6x}{(4x+1)\sqrt{4x+1}}$

(5) $y=\sqrt[3]{\sec x+2x}=(\sec x+2x)^{\frac{1}{3}}$이므로

$$y'=\{(\sec x+2x)^{\frac{1}{3}}\}'$$
$$=\frac{1}{3}(\sec x+2x)^{\frac{1}{3}-1}(\sec x+2x)'$$
$$=\frac{1}{3}(\sec x+2x)^{-\frac{2}{3}}\times(\sec x\tan x+2)$$
$$=\frac{\sec x\tan x+2}{3\sqrt[3]{(\sec x+2x)^2}}$$

(6) $y=\sin\sqrt{x+3}=\sin(x+3)^{\frac{1}{2}}$이므로

$$y'=\cos(x+3)^{\frac{1}{2}}\times\{(x+3)^{\frac{1}{2}}\}'$$
$$=\cos(x+3)^{\frac{1}{2}}\times\frac{1}{2}(x+3)^{\frac{1}{2}-1}(x+3)'$$
$$=\frac{1}{2}\cos(x+3)^{\frac{1}{2}}\times(x+3)^{-\frac{1}{2}}=\frac{\cos\sqrt{x+3}}{2\sqrt{x+3}}$$

372 답 $\frac{4}{3}$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(2-h)-f(2)}{-h}$$
$$=f'(2)+f'(2)=2f'(2)\quad\cdots\cdots\text{㉠}$$

이때 $f(x)=\sqrt[3]{x^4-2x^3+8}=(x^4-2x^3+8)^{\frac{1}{3}}$이므로

$$f'(x)=\frac{1}{3}(x^4-2x^3+8)^{\frac{1}{3}-1}(x^4-2x^3+8)'$$
$$=\frac{1}{3}(x^4-2x^3+8)^{-\frac{2}{3}}\times(4x^3-6x^2)$$
$$=\frac{4x^3-6x^2}{3\sqrt[3]{(x^4-2x^3+8)^2}}$$

따라서 구하는 극한값은 ㉠에서

$$2f'(2)=2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

373 답 3

$f(x)=\sqrt{ax^3+3}=(ax^3+3)^{\frac{1}{2}}$이므로

$$f'(x)=\frac{1}{2}(ax^3+3)^{\frac{1}{2}-1}(ax^3+3)'$$
$$=\frac{1}{2}(ax^3+3)^{-\frac{1}{2}}\times3ax^2=\frac{3ax^2}{2\sqrt{ax^3+3}}$$

$f'(1)=3$에서 $\frac{3a}{2\sqrt{a+3}}=3$

$a=2\sqrt{a+3}$, $a^2=4a+12$, $a^2-4a-12=0$

$(a+2)(a-6)=0$ $\therefore a=6\ (\because a>0)$

따라서 $f(x)=\sqrt{6x^3+3}$이므로 $f(1)=3$

연습문제 196~198쪽

374 답 ④

$$f'(x)=\frac{(\log_3x)'x^2-\log_3x(x^2)'}{(x^2)^2}$$
$$=\frac{\frac{1}{x\ln3}\times x^2-\log_3x\times2x}{x^4}$$
$$=\frac{\frac{1}{\ln3}-2\log_3x}{x^3}$$

$\therefore f'(1)=\frac{1}{\ln3}$

375 답 12

$f(x)=\frac{4x^5-7x^2+1}{x^3}=4x^2-7x^{-1}+x^{-3}$이므로

$f'(x)=8x+7x^{-2}-3x^{-4}=8x+\frac{7}{x^2}-\frac{3}{x^4}$

따라서 점 $(1,-2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)$이므로 $f'(1)=8+7-3=12$

376 답 ④

$$f'(x)=(e^x)'\sec x+e^x(\sec x)'$$
$$=e^x\sec x+e^x\sec x\tan x$$
$$=e^x\sec x(1+\tan x)$$

$\therefore f'(-\pi)f'(\pi)=-e^{-\pi}\times(-e^{\pi})=1$

377 답 ④

$$y'=3\{1+2f(x)\}^2\{1+2f(x)\}'$$
$$=6\{1+2f(x)\}^2f'(x)$$

따라서 $x=1$에서의 미분계수는

$6\{1+2f(1)\}^2f'(1)=6\times(-1)^2\times2=12$

378 답 ③

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'(\sqrt{2})g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$\cdots\cdots$ ㉠

이때

$f'(x)=5(3-x^2)^4(3-x^2)'=-10x(3-x^2)^4$

$$g'(x)=-\csc\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}\times\left(\frac{x}{2}\right)'$$
$$=-\frac{1}{2}\csc\frac{x}{2}\cot\frac{x}{2}$$

이므로 구하는 값은 ㉠에서

$$h'\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'(\sqrt{2})g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=-10\sqrt{2}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=10$$

379 답 **10**

$f'(x)=\dfrac{(x^3+a)'}{x^3+a}=\dfrac{3x^2}{x^3+a}$

$f'(-1)=\dfrac{1}{3}$에서 $\dfrac{3}{-1+a}=\dfrac{1}{3}$

$-1+a=9 \quad \therefore a=10$

380 답 $\dfrac{3}{2}$

$f(x)>0$이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x)=\ln\sqrt{\frac{(2+3x^2)^5}{(1+x^2)^3}}$$
$$=\frac{1}{2}\{5\ln(2+3x^2)-3\ln(1+x^2)\}$$
$$=\frac{5}{2}\ln(2+3x^2)-\frac{3}{2}\ln(1+x^2)$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{5}{2}\times\frac{(2+3x^2)'}{2+3x^2}-\frac{3}{2}\times\frac{(1+x^2)'}{1+x^2}$$
$$=\frac{15x}{2+3x^2}-\frac{3x}{1+x^2}$$

$\therefore \dfrac{f'(1)}{f(1)}=3-\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}$

381 답 ⑤

$f(1)=\sqrt{2}$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-\sqrt{2}}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$
$$=f'(1) \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $f(x)=\sqrt{x^3+x}=(x^3+x)^{\frac{1}{2}}$이므로

$f'(x)=\dfrac{1}{2}(x^3+x)^{\frac{1}{2}-1}(x^3+x)'$

$=\dfrac{1}{2}(x^3+x)^{-\frac{1}{2}}(3x^2+1)$

$=\dfrac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x}}$

따라서 구하는 극한값은 ㉠에서

$f'(1)=\dfrac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

382 답 -8

$$f'(x)=\frac{(ax^2+2)'(bx-1)-(ax^2+2)(bx-1)'}{(bx-1)^2}$$
$$=\frac{2ax(bx-1)-(ax^2+2)\times b}{(bx-1)^2}$$
$$=\frac{abx^2-2ax-2b}{(bx-1)^2}$$

$f'(0)=-8$에서

$-2b=-8 \quad \therefore b=4$

$f'(x)=\dfrac{4ax^2-2ax-8}{(4x-1)^2}$이므로 $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=2$에서

$\dfrac{2a-8}{9}=2,\ 2a-8=18 \quad \therefore a=13$

따라서 $f'(x)=\dfrac{52x^2-26x-8}{(4x-1)^2}$이므로

$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=13-13-8=-8$

383 답 $-\dfrac{1}{5}$

$$f(x)=a\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}+\cdots+\frac{10}{x^{10}}\right)$$
$$=a(x^{-1}+2x^{-2}+3x^{-3}+\cdots+10x^{-10})$$

이므로

$f'(x)=a(-x^{-2}-2^2x^{-3}-3^2x^{-4}-\cdots-10^2x^{-11})$ ▸▸▸▸▸▸ ❶

$f'(1)=77$에서

$a\times(-1-2^2-3^2-\cdots-10^2)=77$

$-a\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2)=77$

$-a\times\dfrac{10\times11\times21}{6}=77$

$\therefore a=-\dfrac{1}{5}$ ▸▸▸▸▸▸ ❷

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$ 구하기	50 %
❷	a의 값 구하기	50 %

384 답 ②

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$이므로

$h'(2)=f'(g(2))g'(2) \quad \cdots\cdots ㉠$

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-4}{x-2}=12$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$에서

$\lim\limits_{x\to2}\{g(x)-4\}=0 \quad \therefore g(2)=4$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{g(x)-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$
$$=g'(2)=12$$

또 $f'(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+2}$이므로 구하는 값은 ㉠에서

$h'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(4)g'(2)$

$=\dfrac{1}{2}\times12=6$

385 답 15

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f'(2x+7)$

$=2\times\dfrac{3x+a}{x+2}\times\left(\dfrac{3x+a}{x+2}\right)'$

$=2\times\dfrac{3x+a}{x+2}$

$\quad\times\dfrac{(3x+a)'(x+2)-(3x+a)(x+2)'}{(x+2)^2}$

$=2\times\dfrac{3x+a}{x+2}\times\dfrac{3(x+2)-(3x+a)}{(x+2)^2}$

$=\dfrac{2(3x+a)(6-a)}{(x+2)^3}$

$\therefore\ f'(2x+7)=\dfrac{(3x+a)(6-a)}{(x+2)^3}$

$2x+7=1$에서 $x=-3$이므로 이를 위의 식에 대입하면

$f'(1)=-(-9+a)(6-a)=a^2-15a+54$

$f'(1)=4$에서 $a^2-15a+54=4$

$a^2-15a+50=0,\ (a-5)(a-10)=0$

$\therefore\ a=5$ 또는 $a=10$

따라서 구하는 모든 정수 a의 값의 합은

$5+10=15$

386 답 ⑤

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하면 $x=0$에서 연속이므로 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0-}f(x)=f(0)$에서

$\lim\limits_{x\to0+}\{b+\ln(3x+1)\}=\lim\limits_{x\to0-}(e^{2ax}+\cos\pi x+3)$

$\therefore\ b=5$

$f'(x)=\begin{cases}2ae^{2ax}-\pi\sin\pi x & (x<0)\\ \dfrac{3}{3x+1} & (x>0)\end{cases}$이고 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to0+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0-}f'(x)$에서

$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{3}{3x+1}=\lim\limits_{x\to0-}(2ae^{2ax}-\pi\sin\pi x)$

$3=2a\qquad\therefore\ a=\dfrac{3}{2}$

$\therefore\ 4ab=4\times\dfrac{3}{2}\times5=30$

387 답 $\dfrac{3}{2}$

$f'(x)=\dfrac{2x}{x^2-1}$이므로

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f'(n)}{n}$

$=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n}{n(n^2-1)}$

$=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{(n-1)(n+1)}$

$=\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)\right.$

$\qquad\left.+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-2}-\dfrac{1}{n}\right)+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)=\dfrac{3}{2}$

388 답 ③

$x>0,\ f(x)>0$이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$\ln f(x)=a\cos x\ln x$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=a(\cos x)'\ln x+a\cos x(\ln x)'$

$\qquad=-a\sin x\ln x+\dfrac{a\cos x}{x}$

$\therefore\ f'(x)=f(x)\times\left(-a\sin x\ln x+\dfrac{a\cos x}{x}\right)$

$\qquad=x^{a\cos x}\left(-a\sin x\ln x+\dfrac{a\cos x}{x}\right)$

$\qquad=-ax^{a\cos x}\left(\sin x\ln x-\dfrac{\cos x}{x}\right)$

이때 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\ln\dfrac{\pi}{2}$에서

$-a\ln\dfrac{\pi}{2}=\ln\dfrac{\pi}{2}\qquad\therefore\ a=-1$

따라서 $f'(x)=x^{-\cos x}\left(\sin x\ln x-\dfrac{\cos x}{x}\right)$이므로

$f'(2\pi)=\dfrac{1}{2\pi}\times\left(-\dfrac{1}{2\pi}\right)=-\dfrac{1}{4\pi^2}$

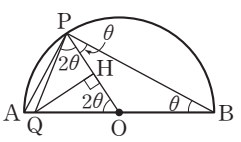
389 답 ①

| 접근 방법 | $\angle$OPQ와 크기가 같은 각을 찾아 $\overline{AQ}$, $\overline{BQ}$의 길이를 θ에 대하여 나타낸 후 $f(\theta)$를 구한다.

$\triangle$OBP에서 $\overline{OB}=\overline{OP}$이므로

$\angle OBP=\angle OPB=\theta$

$\therefore\ \angle POQ=2\theta$



즉, △OPQ는 $\overline{OQ}=\overline{PQ}$인 이등변삼각형이므로 점 Q에서 $\overline{OP}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\frac{1}{2}\overline{OP}=\frac{1}{2}\times 2=1$

△OHQ에서 $\overline{OQ}=\frac{1}{\cos 2\theta}$이므로

$\overline{AQ}=\overline{OA}-\overline{OQ}=2-\frac{1}{\cos 2\theta}$

$\overline{BQ}=\overline{OB}+\overline{OQ}=2+\frac{1}{\cos 2\theta}$

$\therefore f(\theta)=\overline{AQ}\times\overline{BQ}$

$=\left(2-\frac{1}{\cos 2\theta}\right)\left(2+\frac{1}{\cos 2\theta}\right)$

$=4-\frac{1}{\cos^2 2\theta}=4-\sec^2 2\theta$

따라서

$f'(\theta)=-2\sec 2\theta\times\sec 2\theta\tan 2\theta\times(2\theta)'$

$=-4\sec^2 2\theta\tan 2\theta$

이므로

$f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=-4\times 2\times 1=-8$

390 답 ①

| 접근 방법 | $f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})$이라 하고 주어진 식의 좌변을 미분계수로 나타낸 후 $f'(0)$을 n에 대한 식으로 나타낸다.

$f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})$이라 하면

$f(0)=\ln n$이므로

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}{n}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}$

$=f'(0)$

이때 $f'(x)=\frac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}$이므로

$f'(0)=\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}$

$=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}=\frac{n+1}{2}$

따라서 $\frac{n+1}{2}=9$이므로

$n+1=18 \quad \therefore n=17$

02 여러 가지 미분법 (2)

유제

201쪽

391 답 (1) $\frac{dy}{dx}=t^2-t+1$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{4}t^2+t$

(3) $\frac{dy}{dx}=2\sin t$

(1) $\frac{dx}{dt}=4t+4$, $\frac{dy}{dt}=4t^3+4$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t^3+4}{4t+4}$

$=\frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}$

$=t^2-t+1$

(2) $\frac{dx}{dt}=\frac{3(3t+2)-3(3t-2)}{(3t+2)^2}=\frac{12}{(3t+2)^2}$

$\frac{dy}{dt}=\frac{6t(3t+2)-3\times 3t^2}{(3t+2)^2}=\frac{9t^2+12t}{(3t+2)^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{9t^2+12t}{(3t+2)^2}}{\frac{12}{(3t+2)^2}}=\frac{3}{4}t^2+t$

(3) $\frac{dx}{dt}=2\sec^2 t$, $\frac{dy}{dt}=4\sec t\tan t$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4\sec t\tan t}{2\sec^2 t}=\frac{2\tan t}{\sec t}$

$=\frac{\frac{2\sin t}{\cos t}}{\frac{1}{\cos t}}=2\sin t$

392 답 -6

$x=\sqrt{t^2+5}=(t^2+5)^{\frac{1}{2}}$이므로

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}(t^2+5)^{-\frac{1}{2}}\times 2t=\frac{t}{\sqrt{t^2+5}}$

$\frac{dy}{dt}=-2t$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2t}{\frac{t}{\sqrt{t^2+5}}}=-2\sqrt{t^2+5}$

따라서 $t=2$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $-2\times 3=-6$

393 답 3

$\frac{dx}{dt}=-4\cos^3 t\sin t$, $\frac{dy}{dt}=4\sin^3 t\cos t$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4\sin^3 t\cos t}{-4\cos^3 t\sin t}$

$=-\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}=-\tan^2 t$

즉, $t=\frac{\pi}{6}$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=-\frac{1}{3}$

따라서 이 접선과 수직인 직선의 기울기는 3이다.

394 답 $\frac{1}{3}$

$\frac{dx}{dt}=\frac{3t^2+2}{t^3+2t+1}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{1}{t}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{t}}{\frac{3t^2+2}{t^3+2t+1}}=\frac{t^3+2t+1}{3t^3+2t}$

$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to\infty}\frac{t^3+2t+1}{3t^3+2t}=\frac{1}{3}$

개념 확인 203쪽

395 답 (1) $2x^4-y+1=0$

(2) $xy+2x-y^2=0$

유제 205~210쪽

396 답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{2y-3}\left(\text{단, } y\neq\frac{3}{2}\right)$

(2) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x-4}{y-3}$ (단, $y\neq3$)

(3) $\frac{dy}{dx}=-\frac{2xy-5}{x^2+1}$

(1) $x^3-y^2+3y=8$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-2y\frac{dy}{dx}+3\frac{dy}{dx}=0$

$(2y-3)\frac{dy}{dx}=3x^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{2y-3}\left(\text{단, } y\neq\frac{3}{2}\right)$

(2) $(x-4)^2+(y-3)^2=4$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2(x-4)+2(y-3)\frac{dy}{dx}=0$

$2(y-3)\frac{dy}{dx}=-2(x-4)$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{x-4}{y-3}$ (단, $y\neq3$)

(3) $x^2y-5x+y=3$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2xy+x^2\frac{dy}{dx}-5+\frac{dy}{dx}=0$

$(x^2+1)\frac{dy}{dx}=-2xy+5$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2xy-5}{x^2+1}$

397 답 $\frac{2}{3}$

$e^{x+y}+x+y^2=7$에서 $e^x\times e^y+x+y^2=7$이므로 각 항을 x에 대하여 미분하면

$e^x\times e^y+e^x\times e^y\frac{dy}{dx}+1+2y\frac{dy}{dx}=0$

$(e^{x+y}+2y)\frac{dy}{dx}=-e^{x+y}-1$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{e^{x+y}+1}{e^{x+y}+2y}$ (단, $e^{x+y}+2y\neq0$)

따라서 점 $(2,\ -2)$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$-\frac{1+1}{1-4}=\frac{2}{3}$

398 답 $3e$

$x^2+y\ln x-2y=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2x+\frac{y}{x}+\ln x\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}=0$

$(2-\ln x)\frac{dy}{dx}=\frac{2x^2+y}{x}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x^2+y}{x(2-\ln x)}$

따라서 점 $(e,\ e^2)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{dy}{dx}=\frac{2e^2+e^2}{e}=3e$

399 답 -2

$x^3-y^3+axy+b=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$3x^2-3y^2\frac{dy}{dx}+ay+ax\frac{dy}{dx}=0$

$(3y^2-ax)\frac{dy}{dx}=3x^2+ay$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+ay}{3y^2-ax}$ (단, $3y^2-ax\neq0$)

점 $(1, 0)$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값이 3이므로

$\frac{3}{-a}=3 \quad \therefore a=-1$

또 점 $(1, 0)$이 곡선 $x^3-y^3-xy+b=0$ 위의 점이므로

$1+b=0 \quad \therefore b=-1$

$\therefore a+b=-1+(-1)=-2$

400 답 (1) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4y-1}$

(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y^2}{y^2+3}$

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4y^3}$

(1) $x=2y^2-y+5$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=4y-1$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{4y-1}$

(2) $x=\frac{y^2-3}{2y}$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\frac{4y^2-2(y^2-3)}{(2y)^2}$

$=\frac{2y^2+6}{4y^2}=\frac{y^2+3}{2y^2}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{2y^2}{y^2+3}$

(3) $y=\sqrt[4]{x-3}$의 양변을 네제곱하면

$y^4=x-3 \quad \therefore x=y^4+3$

양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=4y^3$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{4y^3}$

401 답 2

$x=\sin y$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\cos y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=\sec y$

따라서 $y=\frac{\pi}{3}$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은 2이다.

402 답 $\frac{2}{5}$

$x=y\sqrt{y+2}$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\sqrt{y+2}+\frac{y}{2\sqrt{y+2}}$

$=\frac{3y+4}{2\sqrt{y+2}}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{2\sqrt{y+2}}{3y+4}$

따라서 $y=2$인 점에서의 접선의 기울기는

$\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

403 답 1

$x=\ln(e^{2y}+1)$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\frac{2e^{2y}}{e^{2y}+1}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{e^{2y}+1}{2e^{2y}}$

$x=\ln(e^{2y}+1)$에서 $x=\ln 2$일 때

$\ln 2=\ln(e^{2y}+1)$

$2=e^{2y}+1, \ e^{2y}=1$

$\therefore y=0$

따라서 $x=\ln 2$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$\frac{1+1}{2}=1$

404 답 3

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-3}{x+1}=\frac{1}{4}$에서 $x\to -1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$에서

$\lim_{x\to -1}\{f(x)-3\}=0 \quad \therefore f(-1)=3$

$\therefore g(3)=-1$

$\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-3}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$

$=f'(-1)=\frac{1}{4}$

이므로

$g'(3)=\frac{1}{f'(g(3))}=\frac{1}{f'(-1)}=4$

$\therefore g(3)+g'(3)=-1+4=3$

405 답 $\frac{1}{5}$

$g(2)=a$라 하면 $f(a)=2$이므로

$a^3+2a-1=2$, $a^3+2a-3=0$

$(a-1)(a^2+a+3)=0$

$\therefore a=1$ ($\because a^2+a+3>0$)

따라서 $g(2)=1$이고 $f'(x)=3x^2+2$이므로

$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{5}$$

406 답 1

$$\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)+g(1)-g(1-h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}$$

$=g'(1)+g'(1)=2g'(1)$ ····· ㉠

이때 $g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$2\sin^2 a=1$, $\sin^2 a=\frac{1}{2}$

$\sin a=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $\sin a=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore a=\frac{\pi}{4}\left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $g(1)=\frac{\pi}{4}$이고 $f'(x)=4\sin x\cos x$이므로

구하는 극한값은 ㉠에서

$$2g'(1)=\frac{2}{f'(g(1))}=\frac{2}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=1$$

407 답 2

$g(a)=b$라 하면 $f(b)=a$이므로

$\ln(e^b-1)=a$, $e^b-1=e^a$

$\therefore e^b=e^a+1$ ····· ㉠

$f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$이므로

$$g'(a)=\frac{1}{f'(g(a))}=\frac{1}{f'(b)}$$

$$=\frac{e^b-1}{e^b}=\frac{e^a}{e^a+1}\ (\because \text{㉠})$$

$$\therefore \frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{g'(a)}=\frac{e^a-1}{e^a}+\frac{e^a+1}{e^a}$$

$=2$

408 답 풀이 참조

방법 1 $u=x-2$로 놓으면 $y=\sqrt[4]{u}=u^{\frac{1}{4}}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\times\frac{du}{dx}=\frac{1}{4}u^{-\frac{3}{4}}\times1$$

$$=\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}}$$

방법 2 $y=\sqrt[4]{x-2}$의 양변을 네제곱하여 음함수 표현 $f(x, y)=0$ 꼴로 나타내면

$x-y^4-2=0$

각 항을 x에 대하여 미분하면

$1-4y^3\frac{dy}{dx}=0$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{4y^3}=\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}}$$

방법 3 $y=\sqrt[4]{x-2}$의 양변을 네제곱하여 $x=g(y)$ 꼴로 나타내면

$x=y^4+2$

양변을 y에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy}=4y^3=4\sqrt[4]{(x-2)^3}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=\frac{1}{4\sqrt[4]{(x-2)^3}}$$

따라서 세 가지 방법으로 구한 $\frac{dy}{dx}$는 서로 같다.

연습문제 211~212쪽

409 답 −3

$\frac{dx}{dt}=3t^2-2t-1$, $\frac{dy}{dt}=12t^2-36t+24$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{12t^2-36t+24}{3t^2-2t-1}$$

$$=\frac{12(t-1)(t-2)}{(3t+1)(t-1)}=\frac{12(t-2)}{3t+1}$$

$$\therefore \lim_{t\to1}\frac{dy}{dx}=\lim_{t\to1}\frac{12(t-2)}{3t+1}=-3$$

410 답 ①

$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}+3$, $\frac{dy}{dt}=2e^{2t}+a$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2e^{2t}+a}{-e^{-t}+3}$$

$t=0$일 때의 $\frac{dy}{dx}$의 값이 -1이므로

$\frac{2+a}{-1+3}=-1,\ 2+a=-2$

$\therefore\ a=-4$

411 ③

$(3x-2y)^2+y^2=5$를 전개하여 정리하면

$9x^2-12xy+5y^2-5=0$

각 항을 x에 대하여 미분하면

$18x-12y-12x\frac{dy}{dx}+10y\frac{dy}{dx}=0$

$(12x-10y)\frac{dy}{dx}=18x-12y$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{9x-6y}{6x-5y}$ (단, $6x-5y\neq0$)

따라서 $a=6,\ b=-5,\ c=9$이므로

$a+b+c=10$

412 16

$x=\frac{2y+1}{y+1}$의 양변을 y에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dy}=\frac{2(y+1)-(2y+1)}{(y+1)^2}=\frac{1}{(y+1)^2}$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}=(y+1)^2$

따라서 $y=3$에서의 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $4^2=16$

413 2

$\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)+g(1)-g(1-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$

$+\lim_{h\to0}\frac{g(1-3h)-g(1)}{-3h}\times3$

$=g'(1)+3g'(1)=4g'(1)$ ····· ㉠ ▸▸▸▸▸▸ ❶

이때 $g(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이므로

$e^{1-a^2}=1,\ 1-a^2=0$

$a^2=1$ $\therefore\ a=-1\ (\because\ a<0)$

$\therefore\ g(1)=-1$ ▸▸▸▸▸▸ ❷

한편 $f'(x)=-2xe^{1-x^2}$이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$4g'(1)=\frac{4}{f'(g(1))}=\frac{4}{f'(-1)}$

$=\frac{4}{2}=2$ ▸▸▸▸▸▸ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	극한값을 미분계수로 나타내기	30 %
❷	$g(1)$의 값 구하기	40 %
❸	극한값 구하기	30 %

414 ④

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2},\ \frac{dy}{dt}=-2t^2+4t+8$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-2t^2+4t+8}{\frac{1}{2}}$

$=-4t^2+8t+16=-4(t-1)^2+20$

따라서 $\frac{dy}{dx}$는 $t=1$에서 최댓값을 가지므로

$a=1$

415 −1

$\frac{dx}{dt}=-2\sin t,\ \frac{dy}{dt}=2\cos2t$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\cos2t}{-2\sin t}$

$=-\frac{1-2\sin^2t}{\sin t}$ ◀ $\cos2t=1-2\sin^2t$

$=2\sin t-\frac{1}{\sin t}$ ····· ㉠

$2\cos t=\sqrt{3}$에서 $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin2t=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 $2\sin t\cos t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$2\sin t\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\therefore\ \sin t=\frac{1}{2}$

따라서 점 $\left(\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 ㉠에서

$2\sin t-\frac{1}{\sin t}=2\times\frac{1}{2}-2=-1$

416 ③

$axy+3y^2+\ln y=-3$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$ay+ax\frac{dy}{dx}+6y\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{ay}{ax+6y+\dfrac{1}{y}}$

$=-\dfrac{ay^2}{axy+6y^2+1}$ (단, $axy+6y^2+1\neq 0$)

점 $(b, 1)$에서의 접선의 기울기가 6이므로

$-\dfrac{a}{ab+7}=6$ ····· ㉠

또 점 $(b, 1)$이 곡선 $axy+3y^2+\ln y=-3$ 위의 점이므로

$ab+3=-3$ $\therefore ab=-6$ ····· ㉡

이를 ㉠에 대입하면 $-a=6$ $\therefore a=-6$

이를 ㉡에 대입하면 $-6b=-6$ $\therefore b=1$

$\therefore a-b=-6-1=-7$

417 ▣ 8

$x^2+y^2+xy-6x-2=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2x+2y\dfrac{dy}{dx}+y+x\dfrac{dy}{dx}-6=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{2x+y-6}{x+2y}$ (단, $x+2y\neq 0$)

$\dfrac{dy}{dx}=1$에서 $-\dfrac{2x+y-6}{x+2y}=1$

$2x+y-6=-x-2y$

$3y=-3x+6$

$\therefore y=-x+2$

이를 주어진 곡선의 방정식에 대입하면

$x^2+(-x+2)^2+x(-x+2)-6x-2=0$

$\therefore x^2-8x+2=0$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 서로 다른 두 점의 x좌표의 합은 8이다.

418 ▣ $-\dfrac{1}{9}$

곡선 $y=g(x)$가 점 $(5, 2)$를 지나므로

$g(5)=2$

즉, $f(2)=5$이므로

$6+a=5$ $\therefore a=-1$

이때 $f'(x)=3x^2-2x+1$이므로

$b=g'(5)=\dfrac{1}{f'(g(5))}$

$=\dfrac{1}{f'(2)}=\dfrac{1}{9}$

$\therefore ab=-1\times\dfrac{1}{9}=-\dfrac{1}{9}$

419 ▣ ④

| 접근 방법 | 주어진 식과 주어진 식을 x에 대하여 미분한 식에 각각 $x=0$을 대입하여 $f'(0)$의 값을 구한 후 역함수의 미분법을 이용한다.

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f'(x)e^{2f(x)}-f'(2x)e^{f(2x)}\times 2-6e^{3x}=0$

$\therefore f'(x)e^{2f(x)}-f'(2x)e^{f(2x)}-3e^{3x}=0$

양변에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)e^{2f(0)}-f'(0)e^{f(0)}-3=0$

$\therefore f'(0)\{e^{2f(0)}-e^{f(0)}\}=3$ ····· ㉠

또 주어진 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$e^{2f(0)}-e^{f(0)}-2=0$

$\therefore e^{2f(0)}-e^{f(0)}=2$

이를 ㉠에 대입하면

$2f'(0)=3$ $\therefore f'(0)=\dfrac{3}{2}$

$\therefore g'(f(0))=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{2}{3}$

420 ▣ $\dfrac{1}{12}$

| 접근 방법 | 먼저 $f(1)$, $f'(1)$의 값을 구한 후 $h(x)=f(3x)$로 놓고 $h(x)=5$를 만족시키는 x의 값을 찾아 역함수의 미분법을 이용한다.

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=4$에서 $x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$에서

$\lim\limits_{x\to 1}\{f(x)-5\}=0$

$\therefore f(1)=5$ ····· ㉠

$\therefore \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-5}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=f'(1)=4$

이때 $h(x)=f(3x)$, $g(5)=a$라 하면 $h(x)$는 함수 $g(x)$의 역함수이므로

$h(a)=5$

즉, $f(3a)=5$이므로 ㉠에서 $3a=1$

$\therefore a=\dfrac{1}{3}$

따라서 $g(5)=\dfrac{1}{3}$이고 $h'(x)=3f'(3x)$이므로

$g'(5)=\dfrac{1}{h'(g(5))}=\dfrac{1}{h'\left(\frac{1}{3}\right)}$

$=\dfrac{1}{3f'(1)}=\dfrac{1}{12}$

01 접선의 방정식

개념 확인 217쪽

421 답 $y=-3x+6$

$\frac{dx}{dt}=3t^2-4$, $\frac{dy}{dt}=3$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3}{3t^2-4}$$

$t=-1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$\frac{3}{3-4}=-3$

$t=-1$에 대응하는 점의 x좌표와 y좌표는

$x=-1+4=3$, $y=-3$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y+3=-3(x-3)$

$\therefore y=-3x+6$

422 답 (가) $4xy$ (나) $\frac{x-y^2}{2xy+1}$ (다) $\frac{1}{5}$ (라) $\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}$

$x^2-2xy^2-2y=-2$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2x-2y^2-\boxed{\text{(가) } 4xy}\times\frac{dy}{dx}-2\frac{dy}{dx}=0$

$(4xy+2)\frac{dy}{dx}=2x-2y^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2x-2y^2}{4xy+2}=\boxed{\text{(나) } \frac{x-y^2}{2xy+1}}$

(단, $2xy+1\neq0$)

점 $(2, 1)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{2-1}{4+1}=\boxed{\text{(다) } \frac{1}{5}}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=\boxed{\text{(다) } \frac{1}{5}}\times(x-2)$ $\therefore y=\boxed{\text{(라) } \frac{1}{5}x+\frac{3}{5}}$

유제 219~229쪽

423 답 (1) $y=-\frac{5}{2}x-4$ (2) $y=\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}$

(1) $f(x)=\frac{x^2-2}{x+4}$라 하면

$$f'(x)=\frac{2x(x+4)-(x^2-2)}{(x+4)^2}=\frac{x^2+8x+2}{(x+4)^2}$$

점 $(-2, 1)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=\frac{4-16+2}{4}=-\frac{5}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-1=-\frac{5}{2}(x+2)$

$\therefore y=-\frac{5}{2}x-4$

(2) $f(x)=\sqrt{3}\sin^2 x$라 하면

$f'(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x$

점 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$\therefore y=\frac{3}{2}x-\frac{\pi}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}$

424 답 $\frac{9}{8}e$

$f(x)=xe^{3x-2}$이라 하면

$f'(x)=e^{3x-2}+3xe^{3x-2}=(3x+1)e^{3x-2}$

점 $(1, e)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4e$

즉, 점 $(1, e)$에서의 접선의 방정식은

$y-e=4e(x-1)$ $\therefore y=4ex-3e$

따라서 이 직선의 x절편은 $\frac{3}{4}$, y절편은 $-3e$이므로

구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times3e=\frac{9}{8}e$

425 답 $-6e^2$

$y=\ln\frac{x^2}{4}=2\ln|x|-\ln4$이므로

$f(x)=2\ln|x|-\ln4$라 하면

$f'(x)=\frac{2}{x}$

x좌표가 $2e^2$인 점에서의 접선의 기울기는

$f'(2e^2)=\frac{1}{e^2}$

이때 $f(2e^2)=4$이므로 점 $(2e^2, 4)$에서의 접선의 방정식은

$y-4=\frac{1}{e^2}(x-2e^2)$ $\therefore y=\frac{1}{e^2}x+2$

이 직선이 점 $(a, -4)$를 지나므로

$-4=\frac{a}{e^2}+2$ $\therefore a=-6e^2$

426 답 $y=3x-12$

$f(x)=-\sqrt{2x+3}$이라 하면

$f'(x)=-\dfrac{2}{2\sqrt{2x+3}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$

점 $(3,\ -3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(3)=-\dfrac{1}{3}$

따라서 점 $(3,\ -3)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 3이므로 구하는 직선의 방정식은

$y+3=3(x-3)$ $\therefore\ y=3x-12$

427 답 $y=2x+4$

$f(x)=e^{2x+3}$이라 하면 $f'(x)=2e^{2x+3}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{2t+3})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(t)=2$에서

$2e^{2t+3}=2,\ e^{2t+3}=1$

$2t+3=0$ $\therefore\ t=-\dfrac{3}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(-\dfrac{3}{2},\ 1\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)$ $\therefore\ y=2x+4$

428 답 $y=5x-1$

$f(x)=\ln 5x$라 하면 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

접점의 좌표를 $(t,\ \ln 5t)$라 하면 직선 $y=5x+2$에 평행한 직선의 기울기는 5이므로 $f'(t)=5$에서

$\dfrac{1}{t}=5$ $\therefore\ t=\dfrac{1}{5}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{5},\ 0\right)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y=5\left(x-\dfrac{1}{5}\right)$ $\therefore\ y=5x-1$

429 답 $\dfrac{\pi}{2}$

직선 $y=-3x$를 y축의 방향으로 a만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=-3x+a$

$f(x)=\cos 3x$라 하면 $f'(x)=-3\sin 3x$

접점의 좌표를 $(t,\ \cos 3t)$라 하면 접선의 기울기가 -3이므로 $f'(t)=-3$에서

$-3\sin 3t=-3,\ \sin 3t=1$

$0\le t\le\dfrac{\pi}{3}$에서 $0\le 3t\le\pi$이므로

$3t=\dfrac{\pi}{2}$ $\therefore\ t=\dfrac{\pi}{6}$

따라서 접점의 좌표는 $\left(\dfrac{\pi}{6},\ 0\right)$이므로 접선의 방정식은

$y=-3\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ $\therefore\ y=-3x+\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{\pi}{2}$

430 답 $y=-\dfrac{1}{2}x-3$

$f(x)=\dfrac{x+8}{x}$이라 하면

$f'(x)=\dfrac{x-(x+8)}{x^2}=-\dfrac{8}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \dfrac{t+8}{t}\right)$이라 하면 직선 $6x-3y-8=0$, 즉 $y=2x-\dfrac{8}{3}$에 수직인 직선의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이므로 $f'(t)=-\dfrac{1}{2}$에서

$-\dfrac{8}{t^2}=-\dfrac{1}{2},\ t^2=16$

$\therefore\ t=-4\ (\because\ t<0)$

따라서 접점의 좌표는 $(-4,\ -1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y+1=-\dfrac{1}{2}(x+4)$ $\therefore\ y=-\dfrac{1}{2}x-3$

431 답 (1) $y=3x-4$ (2) $y=\dfrac{3}{e}x$

(1) $f(x)=x\sqrt{x}$라 하면

$f'(x)=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

접점의 좌표를 $(t,\ t\sqrt{t})$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\dfrac{3}{2}\sqrt{t}$

따라서 점 $(t,\ t\sqrt{t})$에서의 접선의 방정식은

$y-t\sqrt{t}=\dfrac{3}{2}\sqrt{t}\,(x-t)$ ····· ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ -4)$를 지나므로

$-4-t\sqrt{t}=\dfrac{3}{2}\sqrt{t}\times(-t)$

$t\sqrt{t}=8,\ t^3=64=4^3$

$\therefore\ t=4$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y-8=3(x-4)$ $\therefore\ y=3x-4$

(2) $y=\ln x^3=3\ln x$이므로 $f(x)=3\ln x$라 하면

$f'(x)=\frac{3}{x}$

접점의 좌표를 $(t,\ 3\ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{3}{t}$

따라서 점 $(t,\ 3\ln t)$에서의 접선의 방정식은

$y-3\ln t=\frac{3}{t}(x-t)$ ····· ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$-3\ln t=\frac{3}{t}\times(-t),\ \ln t=1$

$\therefore\ t=e$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y-3=\frac{3}{e}(x-e)$

$\therefore\ y=\frac{3}{e}x$

432 답 $-\frac{1}{3}$

$f(x)=\frac{x}{x+3}$라 하면

$f'(x)=\frac{x+3-x}{(x+3)^2}=\frac{3}{(x+3)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{t}{t+3}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=\frac{3}{(t+3)^2}$

즉, 점 $\left(t,\ \frac{t}{t+3}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{t}{t+3}=\frac{3}{(t+3)^2}(x-t)$ ····· ㉠

직선 ㉠이 점 $(1,\ 1)$을 지나므로

$1-\frac{t}{t+3}=\frac{3}{(t+3)^2}(1-t)$

$(t+3)^2-t(t+3)=3(1-t)$

$6t=-6$

$\therefore\ t=-1$

이를 ㉠에 대입하면 이 접선의 방정식은

$y+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}(x+1)$

$\therefore\ y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$

따라서 구하는 x절편은 $-\frac{1}{3}$이다.

433 답 12

$f(x)=e^{-6x+5}$이라 하면

$f'(x)=-6e^{-6x+5}$

접점의 좌표를 $(t,\ e^{-6t+5})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-6e^{-6t+5}$

따라서 점 $(t,\ e^{-6t+5})$에서의 접선의 방정식은

$y-e^{-6t+5}=-6e^{-6t+5}(x-t)$ ····· ㉠

직선 ㉠이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$-e^{-6t+5}=-6e^{-6t+5}(1-t)$

$1=6(1-t)\ (\because\ e^{-6t+5}>0)$

$6t=5$ $\therefore\ t=\frac{5}{6}$

이를 ㉠에 대입하면 이 접선의 방정식은

$y-1=-6\left(x-\frac{5}{6}\right)$ $\therefore\ y=-6x+6$

이 직선이 점 $(-1,\ a)$를 지나므로

$a=6+6=12$

434 답 $\frac{4\sqrt{e}}{e}$

$f(x)=(2x+1)e^x$이라 하면

$f'(x)=2e^x+(2x+1)e^x=(2x+3)e^x$

접점의 좌표를 $(t,\ (2t+1)e^t)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=(2t+3)e^t$

따라서 점 $(t,\ (2t+1)e^t)$에서의 접선의 방정식은

$y-(2t+1)e^t=(2t+3)e^t(x-t)$

이 직선이 원점을 지나므로

$-(2t+1)e^t=(2t+3)e^t\times(-t)$

$2t+1=2t^2+3t\ (\because\ e^t>0)$

$2t^2+t-1=0,\ (t+1)(2t-1)=0$

$\therefore\ t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 두 접선의 기울기의 곱은

$f'(-1)f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{e}\times4\sqrt{e}=\frac{4\sqrt{e}}{e}$

435 답 $a<-3$ 또는 $a>-1$

$f(x)=(x+1)e^{2x}$이라 하면

$f'(x)=e^{2x}+2(x+1)e^{2x}=(2x+3)e^{2x}$

접점의 좌표를 $(t,\ (t+1)e^{2t})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=(2t+3)e^{2t}$

즉, 점 $(t, (t+1)e^{2t})$에서의 접선의 방정식은
$y-(t+1)e^{2t}=(2t+3)e^{2t}(x-t)$
이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로
$-(t+1)e^{2t}=(2t+3)e^{2t}(a-t)$
$t+1=2t^2+(3-2a)t-3a\ (\because e^{2t}>0)$
$\therefore\ 2t^2+2(1-a)t-3a-1=0$ ····· ㉠
점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=(x+1)e^{2x}$에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
따라서 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(1-a)^2-2(-3a-1)>0$
$a^2+4a+3>0,\ (a+3)(a+1)>0$
$\therefore\ a<-3$ 또는 $a>-1$

436 답 4

$f(x)=\frac{a}{x},\ g(x)=-x^2+3x$라 하면
$f'(x)=-\frac{a}{x^2},\ g'(x)=-2x+3$
두 곡선의 접점의 x좌표를 t라 하면
$f(t)=g(t)$에서 $\frac{a}{t}=-t^2+3t$
$\therefore\ a=-t^3+3t^2$ ····· ㉠
$f'(t)=g'(t)$에서 $-\frac{a}{t^2}=-2t+3$
$\therefore\ a=2t^3-3t^2$ ····· ㉡
㉠, ㉡에서 $-t^3+3t^2=2t^3-3t^2$
$t^3-2t^2=0,\ t^2(t-2)=0$
$\therefore\ t=2\ (\because\ t\neq 0)$
이를 ㉠에 대입하면 $a=4$

437 답 1

$f(x)=e^{-2x^2}$이라 하면
$f'(x)=-4xe^{-2x^2}$
접점의 좌표를 (t, e^{-2t^2})이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
$f'(t)=-4te^{-2t^2}$
즉, 점 (t, e^{-2t^2})에서의 접선의 방정식은
$y-e^{-2t^2}=-4te^{-2t^2}(x-t)$
이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로
$-e^{-2t^2}=-4te^{-2t^2}(a-t)$
$1=-4t^2+4at\ (\because\ e^{-2t^2}>0)$
$\therefore\ 4t^2-4at+1=0$ ····· ㉠
점 $(a, 0)$에서 곡선 $y=e^{-2x^2}$에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 이차방정식 ㉠이 중근을 가져야 한다.
따라서 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=4a^2-4=0$
$4(a+1)(a-1)=0$
$\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$

438 답 $y=2x-1$

$f(x)=e^{2x-2},\ g(x)=\sqrt{4x-3}$이라 하면
$f'(x)=2e^{2x-2}$
$g'(x)=\frac{4}{2\sqrt{4x-3}}=\frac{2}{\sqrt{4x-3}}$
두 곡선의 접점의 x좌표를 t라 하면
$f(t)=g(t)$에서 $e^{2t-2}=\sqrt{4t-3}$ ····· ㉠
$f'(t)=g'(t)$에서 $2e^{2t-2}=\frac{2}{\sqrt{4t-3}}$
$\therefore\ e^{2t-2}=\frac{1}{\sqrt{4t-3}}$ ····· ㉡
㉠, ㉡에서
$\sqrt{4t-3}=\frac{1}{\sqrt{4t-3}}$
$4t-3=1$ $\therefore\ t=1$
따라서 두 곡선의 접점의 좌표는 $(1, 1)$이고, 접선의 기울기는 2이므로 구하는 접선의 방정식은
$y-1=2(x-1)$
$\therefore\ y=2x-1$

439 답 $y=-2x+2$

$\frac{dx}{dt}=-\frac{2}{(t+1)^2}$
$\frac{dy}{dt}=\frac{t-(t-1)}{t^2}=\frac{1}{t^2}$
$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{t^2}}{-\frac{2}{(t+1)^2}}$
$=-\frac{(t+1)^2}{2t^2}$
$t=1$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 -2
$t=1$에 대응하는 점의 x좌표와 y좌표는
$x=1,\ y=0$
따라서 구하는 접선의 방정식은
$y=-2(x-1)$
$\therefore\ y=-2x+2$

440 답 $y=2x-\sqrt{3}$

$\frac{dx}{d\theta}=-\csc\theta\cot\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=-\csc^2\theta$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{-\csc^2\theta}{-\csc\theta\cot\theta}$

$=\frac{\csc\theta}{\cot\theta}=\frac{\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}=\sec\theta$

$\csc\theta=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\cot\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서

$\theta=\frac{\pi}{3}\left(\because 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\theta=\frac{\pi}{3}$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 2

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{\sqrt{3}}{3}=2\left(x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ $\therefore y=2x-\sqrt{3}$

441 답 5

$\frac{dx}{dt}=e^t-2e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=2e^{2t}-3e^{-t}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2e^{2t}-3e^{-t}}{e^t-2e^{-t}}$

$=\frac{2e^{3t}-3}{e^{2t}-2}\left(\text{단, } t\neq\frac{\ln 2}{2}\right)$

$t=0$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 1

$t=0$에 대응하는 점의 x좌표와 y좌표는

$x=3$, $y=4$

따라서 점 $(3, 4)$에서의 접선의 방정식은

$y-4=x-3$ $\therefore y=x+1$

이 직선이 점 $(a, 6)$을 지나므로

$6=a+1$ $\therefore a=5$

442 답 $y=-4x+12$

$\frac{dx}{dt}=-\frac{4}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=2t$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t}{-\frac{4}{t^2}}=-\frac{t^3}{2}$

접선의 기울기가 -4이므로 $-\frac{t^3}{2}=-4$

$t^3-8=0$, $(t-2)(t^2+2t+4)=0$

$\therefore t=2(\because t^2+2t+4>0)$

$t=2$에 대응하는 점의 x좌표와 y좌표는 $x=2$, $y=4$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-4=-4(x-2)$ $\therefore y=-4x+12$

443 답 $y=-\frac{2}{5}x-\frac{6}{5}$

$3x^2-xy^2+y^3=-4$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$6x-y^2-2xy\frac{dy}{dx}+3y^2\frac{dy}{dx}=0$

$(2xy-3y^2)\frac{dy}{dx}=6x-y^2$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{6x-y^2}{2xy-3y^2}$ (단, $2xy-3y^2\neq0$)

점 $(2, -2)$에서의 접선의 기울기는

$\frac{12-4}{-8-12}=-\frac{2}{5}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y+2=-\frac{2}{5}(x-2)$ $\therefore y=-\frac{2}{5}x-\frac{6}{5}$

444 답 $\frac{\pi}{8}$

$x\cos y+2y=\frac{\pi}{4}$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$\cos y-x\sin y\frac{dy}{dx}+2\times\frac{dy}{dx}=0$

$(x\sin y-2)\frac{dy}{dx}=\cos y$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\cos y}{x\sin y-2}$ (단, $x\sin y-2\neq0$)

점 $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$y=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ $\therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{8}$

따라서 구하는 y절편은 $\frac{\pi}{8}$이다.

445 답 3

$x^2y+\ln y-1=0$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2xy+x^2\frac{dy}{dx}+\frac{1}{y}\times\frac{dy}{dx}=0$, $\left(x^2+\frac{1}{y}\right)\frac{dy}{dx}=-2xy$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-\frac{2xy}{x^2+\frac{1}{y}}$

점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $-\frac{2}{1+1}=-1$이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$y-1=-(x-1)$ $\therefore y=-x+2$

이 직선이 점 $(-1, a)$를 지나므로

$a=1+2=3$

446 답 2

$e^{x-1}+e^{y}=2e$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$e^{x-1}+e^{y}\dfrac{dy}{dx}=0$

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{e^{x-1}}{e^{y}}=-e^{x-y-1}$

점 (a, b)에서의 접선의 기울기가 -1이므로

$-e^{a-b-1}=-1$, $a-b-1=0$

$\therefore b=a-1$ ····· ㉠

점 (a, b)는 직선 $y=-x+3$ 위의 점이므로

$b=-a+3$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$a-1=-a+3$, $2a=4$ $\therefore a=2$

이를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$\therefore ab=2\times1=2$

연습문제 230~231쪽

447 답 ①

$f(x)=\sin x-\cos x$라 하면

$f'(x)=\cos x+\sin x$

점 $\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$에서의 접선의 기울기는

$f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

따라서 점 $\left(\dfrac{\pi}{4}, 0\right)$에서의 접선의 방정식은

$y=\sqrt{2}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\therefore y=\sqrt{2}x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$

따라서 구하는 y절편은 $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$이다.

448 답 ⑤

$f(x)=-x+x\ln x$라 하면

$f'(x)=-1+\ln x+1=\ln x$

접점의 좌표를 $(t, -t+t\ln t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(t)=1$에서

$\ln t=1$ $\therefore t=e$

즉, 접점의 좌표는 $(e, 0)$이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$y=x-e$

따라서 직선 위의 점인 것은 ⑤이다.

449 답 $2e^2$

$g(x)=e^{\sqrt{x}}$ $(x>0)$이라 하면

$g'(x)=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

접점의 좌표를 $(t, e^{\sqrt{t}})$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$g'(t)=\dfrac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}$

즉, 점 $(t, e^{\sqrt{t}})$에서의 접선의 방정식은

$y-e^{\sqrt{t}}=\dfrac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}(x-t)$ ····· ㉠

직선 ㉠이 원점을 지나므로

$-e^{\sqrt{t}}=\dfrac{e^{\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\times(-t)$

$1=\dfrac{\sqrt{t}}{2}$ $(\because e^{\sqrt{t}}>0)$

$\sqrt{t}=2$ $\therefore t=4$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y-e^2=\dfrac{e^2}{4}(x-4)$

$\therefore y=\dfrac{e^2}{4}x$

따라서 $f(x)=\dfrac{e^2}{4}x$이므로

$f(8)=\dfrac{e^2}{4}\times8=2e^2$

450 답 ②

곡선 $y=3-2\sin x$가 y축과 만나는 점의 좌표는

$(0, 3)$

$f(x)=3-2\sin x$라 하면

$f'(x)=-2\cos x$

점 $(0, 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=-2$

따라서 점 $(0, 3)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이므로 이 직선의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2}x+3$

이 직선이 점 $(a, 2a)$를 지나므로

$2a=\dfrac{1}{2}a+3$, $\dfrac{3}{2}a=3$

$\therefore a=2$

451 답 2

$f(x)=\frac{x}{x-1}$라 하면

$f'(x)=\frac{x-1-x}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t,\ \frac{t}{t-1}\right)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-\frac{1}{(t-1)^2}$

따라서 점 $\left(t,\ \frac{t}{t-1}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{t}{t-1}=-\frac{1}{(t-1)^2}(x-t)$

이 직선이 점 $(-5,\ 2)$를 지나므로

$2-\frac{t}{t-1}=-\frac{1}{(t-1)^2}(-5-t)$

$2(t-1)^2-t(t-1)=t+5$

$\therefore\ t^2-4t-3=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(-3)=7>0$

따라서 이 이차방정식이 1이 아닌 서로 다른 두 실근을 가지므로 점 $(-5,\ 2)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그을 수 있는 접선의 개수는 2이다.

452 답 ⑤

$f(x)=\frac{x^2+2}{2x+1}$, $g(x)=ae^x+b$라 하면

$f'(x)=\frac{2x(2x+1)-2(x^2+2)}{(2x+1)^2}=\frac{2x^2+2x-4}{(2x+1)^2}$

$g'(x)=ae^x$

두 곡선이 $x=0$인 점에서 공통인 접선을 가지므로

$f(0)=g(0)$에서 $a+b=2$ ····· ㉠

$f'(0)=g'(0)$에서 $a=-4$

이를 ㉠에 대입하면

$-4+b=2$ $\therefore\ b=6$

$\therefore\ b-a=6-(-4)=10$

453 답 14

$\frac{dx}{dt}=-6t+2$, $\frac{dy}{dt}=4t-1$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{4t-1}{-6t+2}\left(\text{단, } t\neq\frac{1}{3}\right)$

점 $(4,\ b)$에서의 접선의 기울기가 $-\frac{3}{4}$이므로

$\frac{4t-1}{-6t+2}=-\frac{3}{4}$

$16t-4=18t-6$, $2t=2$

$\therefore\ t=1$

$t=1$에 대응하는 점의 좌표가 $(4,\ b)$이므로

$-1+a=4$, $b=3$

$\therefore\ a=5$, $b=3$

따라서 점 $(4,\ 3)$이 직선 $y=-\frac{3}{4}x+c$ 위의 점이므로

$3=-3+c$ $\therefore\ c=6$

$\therefore\ a+b+c=5+3+6=14$

454 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$2xe^{y-1}+y^2=1$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2e^{y-1}+2xe^{y-1}\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}=0$

$2(xe^{y-1}+y)\frac{dy}{dx}=-2e^{y-1}$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{e^{y-1}}{xe^{y-1}+y}$ (단, $xe^{y-1}+y\neq0$) ▸▸▸▸▸▸ ❶

점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 기울기는 -1

즉, 점 $(0,\ 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=-x$

$\therefore\ x+y-1=0$ ▸▸▸▸▸▸ ❷

따라서 직선 $x+y-1=0$과 원점 사이의 거리는

$\frac{|-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ▸▸▸▸▸▸ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	$\frac{dy}{dx}$ 구하기	40 %
❷	접선의 방정식 구하기	30 %
❸	접선과 원점 사이의 거리 구하기	30 %

455 답 ②

$x^2+xy+2y^2=8$의 각 항을 x에 대하여 미분하면

$2x+y+x\frac{dy}{dx}+4y\frac{dy}{dx}=0$

$(x+4y)\frac{dy}{dx}=-2x-y$

$\therefore\ \frac{dy}{dx}=-\frac{2x+y}{x+4y}$ (단, $x+4y\neq0$)

점 (2, 1)에서의 접선의 기울기는

$-\frac{4+1}{2+4}=-\frac{5}{6}$

즉, 점 (2, 1)에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$\frac{6}{5}$이므로 직선 l의 방정식은

$y-6=\frac{6}{5}(x-1)$

$\therefore y=\frac{6}{5}x+\frac{24}{5}$

따라서 이 직선의 x절편은 -4, y절편은 $\frac{24}{5}$이므로

구하는 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 4\times\frac{24}{5}=\frac{48}{5}$

456 $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$

$g(1)=k$라 하면 $f(k)=1$이므로

$\tan 2k=1$

$-\frac{\pi}{4}<k<\frac{\pi}{4}$에서 $-\frac{\pi}{2}<2k<\frac{\pi}{2}$이므로

$2k=\frac{\pi}{4}$ $\therefore k=\frac{\pi}{8}$

$\therefore g(1)=\frac{\pi}{8}$

이때 $f'(x)=2\sec^2 2x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=4$

$\therefore g'(1)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{1}{4}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\left(1, \frac{\pi}{8}\right)$에서의 접선의

기울기가 $\frac{1}{4}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-\frac{\pi}{8}=\frac{1}{4}(x-1)$

$\therefore y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}$

457 ②

| 접근 방법 | 두 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β로 놓고 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 $\tan\theta$의 값을 구한다.

$f(x)=\frac{2x-1}{x-1}$이라 하면

$f'(x)=\frac{2(x-1)-(2x-1)}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$

접점의 좌표를 $\left(t, \frac{2t-1}{t-1}\right)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t)=-\frac{1}{(t-1)^2}$

따라서 점 $\left(t, \frac{2t-1}{t-1}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{2t-1}{t-1}=-\frac{1}{(t-1)^2}(x-t)$

이 직선이 점 (0, 5)를 지나므로

$5-\frac{2t-1}{t-1}=-\frac{1}{(t-1)^2}\times(-t)$

$5(t-1)^2-(2t-1)(t-1)=t$

$3t^2-8t+4=0$

$(3t-2)(t-2)=0$

$\therefore t=\frac{2}{3}$ 또는 $t=2$

이때 두 접선의 기울기는 $f'\left(\frac{2}{3}\right)$, $f'(2)$이므로 두 접선이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면

$\tan\alpha=f'\left(\frac{2}{3}\right)=-9$, $\tan\beta=f'(2)=-1$

$\therefore \tan\theta=|\tan(\alpha-\beta)|=\left|\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right|$

$=\left|\frac{-9-(-1)}{1+(-9)\times(-1)}\right|=\frac{4}{5}$

458 $\frac{1}{2}$

| 접근 방법 | 두 함수 $y=e^{x-2a}$, $y=\ln x+2a$가 서로 역함수 관계임을 이용하여 접점의 x좌표를 구한 후 a의 값을 구한다.

두 함수 $y=e^{x-2a}$, $y=\ln x+2a$는 증가하고, 서로 역함수 관계이다.

즉, 두 곡선이 한 점에서 접하면 두 곡선은 모두 직선 $y=x$와 접한다.

$f(x)=e^{x-2a}$, $g(x)=x$라 하면

$f'(x)=e^{x-2a}$, $g'(x)=1$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=g(x)$의 접점의 x좌표를 t라 하면

$f(t)=g(t)$에서 $e^{t-2a}=t$ ····· ㉠

$f'(t)=g'(t)$에서 $e^{t-2a}=1$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $t=1$

이를 ㉡에 대입하면

$e^{1-2a}=1$

$1-2a=0$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

02 함수의 극대와 극소

개념 확인 235쪽

459 답 (1) $y''=6x+4$ (2) $y''=12x^2-12x$

(1) $y'=3x^2+4x$이므로

$y''=6x+4$

(2) $y'=4x^3-6x^2+4$이므로

$y''=12x^2-12x$

460 답 (가) 2 (나) 12 (다) $2+\frac{32}{x^3}$ (라) 2 (마) 12

방법 1 도함수 이용하기

$f(x)=x^2+\frac{16}{x}=x^2+16x^{-1}$에서 $x\neq0$이고

$f'(x)=2x-16x^{-2}=2x-\frac{16}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $2x-\frac{16}{x^2}=0$

$x^3-8=0$, $(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=$ [(가) 2] ($\because x^2+2x+4>0$)

$x\neq0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	0	…	[(가) 2]	…
$f'(x)$	−		−	0	+
$f(x)$	↘		↘	[(나) 12]	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=$ [(가) 2]에서 극솟값 [(나) 12]를 갖는다.

방법 2 이계도함수 이용하기

$f(x)=x^2+\frac{16}{x}=x^2+16x^{-1}$에서 $x\neq0$이고

$f'(x)=2x-16x^{-2}=2x-\frac{16}{x^2}$

$f''(x)=2+32x^{-3}=$ [(다) $2+\frac{32}{x^3}$]

$f'(x)=0$에서 $2x-\frac{16}{x^2}=0$

$x^3-8=0$, $(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=$ [(라) 2] ($\because x^2+2x+4>0$)

이때 $f''($[(라) 2]$)>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=$ [(라) 2]에서 극솟값 $f(2)=$ [(마) 12]를 갖는다.

유제 237~247쪽

461 답 (1) $y''=48x^2+72x+10$

(2) $y''=\frac{32}{(4x-5)^3}$

(3) $y''=\frac{3}{4\sqrt{x}}$

(4) $y''=-\frac{2}{x^2\ln2}$

(5) $y''=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}$

(6) $y''=8(2x+1)e^{4x-1}$

(1) $y'=2(2x^2+3x-1)(4x+3)$이므로

$y''=2(4x+3)(4x+3)+2(2x^2+3x-1)\times4$

$=48x^2+72x+10$

(2) $y'=-\frac{4}{(4x-5)^2}$이므로

$y''=\frac{4\times2(4x-5)\times4}{(4x-5)^4}$

$=\frac{32}{(4x-5)^3}$

(3) $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$이므로

$y''=\frac{3}{2}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3}{4\sqrt{x}}$

(4) $y=\log_2x^2=2\log_2|x|$이므로

$y'=\frac{2}{x\ln2}$

$\therefore y''=-\frac{2}{x^2\ln2}$

(5) $y'=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$이므로

$y''=\frac{1}{2}\times2\sec\frac{x}{2}\times\tan\frac{x}{2}\sec\frac{x}{2}\times\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\tan\frac{x}{2}$

(6) $y'=e^{4x-1}+4xe^{4x-1}=(4x+1)e^{4x-1}$이므로

$y''=4e^{4x-1}+4(4x+1)e^{4x-1}$

$=8(2x+1)e^{4x-1}$

462 답 $\frac{4}{e}$

$f'(x)=(\ln x)^2+x\times2\ln x\times\frac{1}{x}$

$=(\ln x)^2+2\ln x$

$f''(x)=2\ln x\times\frac{1}{x}+\frac{2}{x}=\frac{2\ln x+2}{x}$

$\therefore f''(e)=\frac{4}{e}$

463 답 $\frac{1}{4}$

$f'(x)=\frac{(2x+a)(x-1)-(x^2+ax+b)}{(x-1)^2}$

$=\frac{x^2-2x-a-b}{(x-1)^2}$

$f''(x)$

$=\frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-a-b)\times 2(x-1)}{(x-1)^4}$

$=\frac{2a+2b+2}{(x-1)^3}$

$f''(2)=6$에서 $2a+2b+2=6$

$\therefore a+b=2$

따라서 $f'(x)=\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$이므로

$f'(-1)=\frac{1+2-2}{4}=\frac{1}{4}$

464 답 (1) 구간 $(-\infty, 0]$, $[2, \infty)$에서 증가, 구간 $[0, 1)$, $(1, 2]$에서 감소 (2) 구간 $[0, \infty)$에서 증가, 구간 $(-\infty, 0]$에서 감소 (3) 구간 $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$에서 증가, 구간 $\left(0, \frac{1}{e}\right]$에서 감소 (4) 구간 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right]$에서 증가, 구간 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right)$에서 감소

(1) $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$에서 $x\neq 1$이고

$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}$

$=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x(x-2)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

$x\neq 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f(x)$	↗	0	↘		↘	4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$, $[2, \infty)$에서 증가하고, 구간 $[0, 1)$, $(1, 2]$에서 감소한다.

(2) $f'(x)=1-e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $1-e^{-x}=0$, $e^{-x}=1$ $\therefore x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	1	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[0, \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 0]$에서 감소한다.

(3) $f(x)=x\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=\ln x+1$

$f'(x)=0$에서 $\ln x+1=0$

$\ln x=-1$ $\therefore x=\frac{1}{e}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left[\frac{1}{e}, \infty\right)$에서 증가하고, 구간 $\left(0, \frac{1}{e}\right]$에서 감소한다.

(4) $f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\frac{1}{2}-\cos x=0$, $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$		↘	$\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$\frac{5}{6}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right]$에서 증가하고, 구간 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$, $\left[\frac{5}{3}\pi, 2\pi\right)$에서 감소한다.

465 답 4

$f'(x)=(2x-2)e^x+(x^2-2x-2)e^x$

$=(x^2-4)e^x=(x+2)(x-2)e^x$

$f'(x)=0$에서 $(x+2)(x-2)=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\frac{6}{e^2}$	↘	$-2e^2$	↗

따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 $[-2, 2]$이므로

$\alpha=-2$, $\beta=2$

$\therefore \beta-\alpha=4$

466 ■ 2

$f(x)=x+\sqrt{10-x^2}$에서

$10-x^2\geq 0$, $x^2\leq 10$

$\therefore 0<x\leq\sqrt{10}$ ($\because x>0$)

$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{10-x^2}}=1-\frac{x}{\sqrt{10-x^2}}$

$f'(x)=0$에서

$1-\frac{x}{\sqrt{10-x^2}}=0$, $x=\sqrt{10-x^2}$

$x^2=10-x^2$, $x^2=5$

$\therefore x=\sqrt{5}$ ($\because x>0$)

$0<x\leq\sqrt{10}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\sqrt{5}$	$\cdots$	$\sqrt{10}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	$2\sqrt{5}$	↘	

따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 구간은 $(0, \sqrt{5}]$이므로 구하는 정수 x는 1, 2의 2개이다.

467 ■ $a\geq 1$

$f'(x)=2xe^x+(x^2+a)e^x=(x^2+2x+a)e^x$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가하려면 모든 실수 x에서 $f'(x)\geq 0$이어야 하므로

$(x^2+2x+a)e^x\geq 0$

$\therefore x^2+2x+a\geq 0$ ($\because e^x>0$)

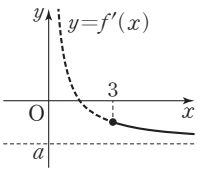
따라서 이차방정식 $x^2+2x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-a\leq 0$ $\therefore a\geq 1$

468 ■ $a\leq -1$

$f'(x)=a+\frac{3}{x}$

함수 $f(x)$가 구간 $[3, \infty)$에서 감소하려면 $x\geq 3$에서 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로 오른쪽 그림에서



$f'(3)\leq 0$

$a+1\leq 0$ $\therefore a\leq -1$

469 ■ $\frac{1}{4}$

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+a}-2=\frac{-2(x^2-x+a)}{x^2+a}$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에서 $f'(x)\leq 0$이어야 하므로

$-2(x^2-x+a)\leq 0$ ($\because x^2+a>0$)

$\therefore x^2-x+a\geq 0$

즉, 이차방정식 $x^2-x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4a\leq 0$ $\therefore a\geq\frac{1}{4}$

따라서 실수 a의 최솟값은 $\frac{1}{4}$이다.

470 ■ $a\geq 2$

$f'(x)=a-2\cos 2x$

함수 $f(x)$가 구간 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$에서 증가하려면

$0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$에서 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이때 $0\leq 2x\leq\frac{\pi}{2}$에서 $0\leq\cos 2x\leq 1$이므로

$-2\leq -2\cos 2x\leq 0$

$\therefore a-2\leq a-2\cos 2x\leq a$

따라서 $a-2\leq f'(x)\leq a$에서 $a-2\geq 0$이어야 하므로

$a\geq 2$

471 ■ (1) 극댓값: $\frac{1}{2}$, 극솟값: $-\frac{1}{2}$

(2) 극댓값: 0

(3) 극댓값: $\frac{1}{e^2}$, 극솟값: 0

(4) 극솟값: $-\sqrt{2}$

(1) $f'(x)=\frac{x^2+1-x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$=-\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$ 극소	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $\frac{1}{2}$, $x=-1$에서 극솟값 $-\frac{1}{2}$을 갖는다.

(2) $f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{x-1}}-1=\frac{1}{\sqrt{x-1}}-1$

$f'(x)=0$에서 $\frac{1}{\sqrt{x-1}}-1=0$

$\sqrt{x-1}=1$, $x-1=1$ $\therefore x=2$

$x>1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	0 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 0을 갖는다.

(3) $f'(x)=2xe^{2x}+2x^2e^{2x}=2x(x+1)e^{2x}$

$f'(x)=0$에서 $2x(x+1)=0$ ($\because e^{2x}>0$)

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{1}{e^2}$ 극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $\frac{1}{e^2}$, $x=0$에서 극솟값 0을 갖는다.

(4) $f'(x)=\cos x-\sin x$

$f'(x)=0$에서

$\cos x-\sin x=0$, $\cos x=\sin x$

$\therefore x=\frac{5}{4}\pi$ ($\because \pi<x<2\pi$)

$\pi<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	π	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-\sqrt{2}$ 극소	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{4}\pi$에서 극솟값 $-\sqrt{2}$를 갖는다.

| 다른 풀이 |

(1) $f'(x)=\frac{x^2+1-x\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $-x^2+1=0$

$(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

$f''(x)$

$=\frac{-2x(x^2+1)^2-(-x^2+1)\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$

$=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$

이므로

$f''(-1)=\frac{1}{2}>0$, $f''(1)=-\frac{1}{2}<0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이고 $x=-1$에서 극소이므로 극댓값은 $f(1)=\frac{1}{2}$, 극솟값은 $f(-1)=-\frac{1}{2}$이다.

(2) $f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{x-1}}-1=\frac{1}{\sqrt{x-1}}-1$

$f'(x)=0$에서 $\frac{1}{\sqrt{x-1}}-1=0$

$\sqrt{x-1}=1$, $x-1=1$

$\therefore x=2$

$f''(x)=-\frac{1}{2(x-1)\sqrt{x-1}}$이므로

$f''(2)=-\frac{1}{2}<0$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 극댓값은 $f(2)=0$이다.

(3) $f'(x)=2xe^{2x}+2x^2e^{2x}=(2x^2+2x)e^{2x}$

$f'(x)=0$에서 $2x^2+2x=0$ ($\because e^{2x}>0$)

$x(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

$f''(x)=(4x+2)e^{2x}+2(2x^2+2x)e^{2x}$
$=(4x^2+8x+2)e^{2x}$
이므로
$f''(-1)=-\frac{2}{e^2}<0$, $f''(0)=2>0$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이고 $x=0$에서 극소이므로 극댓값은 $f(-1)=\frac{1}{e^2}$, 극솟값은 $f(0)=0$이다.

(4) $f'(x)=\cos x-\sin x$
$f'(x)=0$에서 $\cos x-\sin x=0$
$\cos x=\sin x$ $\therefore x=\frac{5}{4}\pi$ ($\because \pi<x<2\pi$)
$f''(x)=-\sin x-\cos x$이므로
$f''\left(\frac{5}{4}\pi\right)=\sqrt{2}>0$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{4}\pi$에서 극소이므로 극솟값은 $f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=-\sqrt{2}$이다.

472 ⓑ -8

$f(x)=x+\frac{4}{x}$에서 $x\neq0$이고
$f'(x)=1-\frac{4}{x^2}$
$f'(x)=0$에서 $1-\frac{4}{x^2}=0$, $x^2-4=0$
$(x+2)(x-2)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=2$
$x\neq0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-4 극대	↘		↘	4 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 -4, $x=2$에서 극솟값 4를 가지므로
$a=-4$, $b=4$ $\therefore a-b=-8$

473 ⓑ 4

$f(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}$에서 $x>0$이고
$f'(x)=\frac{2\ln x\times\frac{1}{x}\times x-(\ln x)^2}{x^2}$
$=\frac{2\ln x-(\ln x)^2}{x^2}=\frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}$
$f'(x)=0$에서 $\ln x(2-\ln x)=0$
$\ln x=0$ 또는 $\ln x=2$ $\therefore x=1$ 또는 $x=e^2$
$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		↘	0 극소	↗	$\frac{4}{e^2}$ 극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e^2$에서 극댓값 $\frac{4}{e^2}$를 가지므로
$a=e^2$, $b=\frac{4}{e^2}$
$\therefore ab=4$

474 ⓑ -4

$f'(x)=-\frac{2a}{x^3}-1$
$x=2$에서 극댓값을 가지므로
$f'(2)=0$
$-\frac{a}{4}-1=0$ $\therefore a=-4$

475 ⓑ $\frac{3}{e}$

$f'(x)=(2x+a)e^{-x}-(x^2+ax+b)e^{-x}$
$=\{-x^2+(2-a)x+a-b\}e^{-x}$
$x=0$에서 극솟값 1을 가지므로
$f'(0)=0$, $f(0)=1$
$f'(0)=0$에서 $a-b=0$ ····· ㉠
$f(0)=1$에서 $b=1$
이를 ㉠에 대입하면
$a-1=0$ $\therefore a=1$
$\therefore f(x)=(x^2+x+1)e^{-x}$, $f'(x)=(-x^2+x)e^{-x}$
$f'(x)=0$에서 $-x^2+x=0$ ($\because e^{-x}>0$)
$x(x-1)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	1 극소	↗	$\frac{3}{e}$ 극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 $\frac{3}{e}$을 갖는다.

476 답 -1

$f'(x)=e^{ax+b}+axe^{ax+b}=(ax+1)e^{ax+b}$

$x=-1$에서 극솟값 $-\frac{1}{e^2}$을 가지므로

$f'(-1)=0,\ f(-1)=-\frac{1}{e^2}$

$f'(-1)=0$에서

$(-a+1)e^{-a+b}=0,\ -a+1=0$

$\therefore\ a=1$

$f(x)=xe^{x+b}$이므로 $f(-1)=-\frac{1}{e^2}$에서

$-e^{-1+b}=-\frac{1}{e^2},\ e^{-1+b}=e^{-2}$

$-1+b=-2 \quad \therefore\ b=-1$

$\therefore\ ab=1\times(-1)=-1$

477 답 6

$f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-2}$에서 $x\neq2$이고

$f'(x)=\frac{(2x+a)(x-2)-(x^2+ax+b)}{(x-2)^2}$

$=\frac{x^2-4x-2a-b}{(x-2)^2}$

$x=0$에서 극댓값 -2를 가지므로

$f'(0)=0,\ f(0)=-2$

$f'(0)=0$에서

$-\frac{2a+b}{4}=0 \quad \therefore\ 2a+b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(0)=-2$에서

$-\frac{b}{2}=-2 \quad \therefore\ b=4$

이를 ㉠에 대입하면

$2a+4=0 \quad \therefore\ a=-2$

$\therefore\ f(x)=\frac{x^2-2x+4}{x-2},\ f'(x)=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x^2-4x=0$

$x(x-4)=0 \quad \therefore\ x=0$ 또는 $x=4$

$x\neq2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f(x)$	↗	-2 극대	↘		↘	6 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극솟값 6을 갖는다.

478 답 $a<1$

$f'(x)=2xe^x+(x^2+a)e^x=(x^2+2x+a)e^x$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

이때 $e^x>0$이므로 이차방정식 $x^2+2x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-a>0 \quad \therefore\ a<1$

479 답 $a\leq-\frac{1}{2}$ 또는 $a\geq\frac{1}{2}$

$f'(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+a$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x에서 $f'(x)\leq0$ 또는 $f'(x)\geq0$이어야 한다.

이때 $-1\leq\cos\frac{x}{2}\leq1$이므로

$-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\leq\frac{1}{2}$

$\therefore\ -\frac{1}{2}+a\leq\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+a\leq\frac{1}{2}+a$

따라서 $-\frac{1}{2}+a\leq f'(a)\leq\frac{1}{2}+a$에서

$\frac{1}{2}+a\leq0$ 또는 $-\frac{1}{2}+a\geq0$이어야 하므로

$a\leq-\frac{1}{2}$ 또는 $a\geq\frac{1}{2}$

480 답 $a\geq\sqrt{2}$

$f'(x)=a+\frac{4x}{x^2+2}=\frac{ax^2+4x+2a}{x^2+2}$

함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $ax^2+4x+2a=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-2a^2\leq0,\ a^2\geq2 \quad \therefore\ a\geq\sqrt{2}\ (\because\ a>0)$

481 답 6

$f'(x)=a-2+4\sin x\cos x$

$=a-2+2\sin2x$ ◀ $\sin2x=2\sin x\cos x$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

이때 $-1\leq\sin2x\leq1$이므로

$-2\leq2\sin2x\leq2$

$\therefore\ a-4\le a-2+2\sin 2x\le a$

즉, $a-4\le f'(x)\le a$에서 $a-4<0<a$이어야 하므로

$0<a<4$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은 $1+2+3=6$

연습문제 248~250쪽

482 ②

$f'(x)=2x\sin \pi x+\pi x^2\cos \pi x$

$f''(x)=2\sin \pi x+2\pi x\cos \pi x+2\pi x\cos \pi x-\pi^2x^2\sin \pi x$

$=(2-\pi^2x^2)\sin \pi x+4\pi x\cos \pi x$

$\therefore\ f''\left(\frac{1}{2}\right)=2-\frac{\pi^2}{4}$

483 -3

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(1)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{x-1}$

$=f''(1)$ ····· ㉠

이때

$f''(x)=\dfrac{-\frac{1}{x}\times x^2-(1-\ln x)\times 2x}{x^4}$

$=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$

이므로 구하는 극한값은 ㉠에서

$f''(1)=-3$

484 ①

$f(x)=\sqrt{x+14}+2\sqrt{1-x}$에서 $-14\le x\le 1$이고

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+14}}+\dfrac{-2}{2\sqrt{1-x}}$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{x+14}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

$f'(x)=0$에서 $\dfrac{1}{2\sqrt{x+14}}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=0$

$\sqrt{1-x}=2\sqrt{x+14}$, $1-x=4x+56$

$5x=-55$ $\therefore\ x=-11$

$-14\le x\le 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-14	···	-11	···	1
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$5\sqrt{3}$	↘	

따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 구간은 $[-14,\ -11]$이므로 이 구간에 속하는 x의 값은 ①이다.

485 -2

$f'(x)=-2\sin x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에서 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

이때 $-1\le\sin x\le 1$이므로 $-2\le -2\sin x\le 2$

$\therefore\ a-2\le -2\sin x+a\le a+2$

즉, $a-2\le f'(x)\le a+2$에서 $a+2\le 0$이어야 하므로

$a\le -2$

따라서 실수 a의 최댓값은 -2이다.

486 $-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$

$f'(x)=e^{x^2}+2x(x+a)e^{x^2}=(2x^2+2ax+1)e^{x^2}$

$x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)<f(x_2)$를 만족시키려면 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$(2x^2+2ax+1)e^{x^2}\ge 0$

$\therefore\ 2x^2+2ax+1\ge 0$ ($\because\ e^{x^2}>0$)

따라서 이차방정식 $2x^2+2ax+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=a^2-2\le 0$

$a^2\le 2$ $\therefore\ -\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$

487 ④

$f'(x)=\dfrac{(2x-2)(x^2+2)-(x^2-2x+1)\times 2x}{(x^2+2)^2}$

$=\dfrac{2x^2+2x-4}{(x^2+2)^2}=\dfrac{2(x+2)(x-1)}{(x^2+2)^2}$

$f'(x)=0$에서 $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	-2	···	1	···
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{3}{2}$ 극대	↘	0 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고, $x=1$에서 극소이므로

$\alpha=-2,\ \beta=1 \quad \therefore\ \beta-\alpha=3$

488 ①

$f(x)=x\sqrt{4-x^2}$에서 $-2\le x\le 2$이고

$f'(x)=\sqrt{4-x^2}-\dfrac{2x^2}{2\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $4-2x^2=0,\ x^2=2$

$\therefore\ x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

$-2\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	-2 극소	↗	2 극대	↘	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-\sqrt{2}$에서 극솟값 -2를 갖는다.

489 $\sqrt{3}$

$f'(x)=a\cos x-b\sin x$

$x=\dfrac{\pi}{6}$에서 극댓값 2를 가지므로

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0,\ f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2$

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=0$에서 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a-\dfrac{b}{2}=0$

$\therefore\ \sqrt{3}a-b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=2$에서 $\dfrac{a}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=2$

$\therefore\ a+\sqrt{3}b=4 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=\sqrt{3}$

따라서 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$이므로

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

490 ①

$f'(x)=e^x\sin 2x+2e^x\cos 2x$

$\quad=e^x(\sin 2x+2\cos 2x)$

$f''(x)$

$=e^x(\sin 2x+2\cos 2x)+e^x(2\cos 2x-4\sin 2x)$

$=e^x(4\cos 2x-3\sin 2x)$

$f''(x)=af(x)+bf'(x)$에서

$e^x(4\cos 2x-3\sin 2x)$

$=ae^x\sin 2x+be^x(\sin 2x+2\cos 2x)$

$e^x>0$이므로

$4\cos 2x-3\sin 2x$

$=(a+b)\sin 2x+2b\cos 2x$

이는 x에 대한 항등식이므로

$a+b=-3,\ 2b=4$

$\therefore\ a=-5,\ b=2$

$\therefore\ a-b=-7$

491 2

$f'(x)=2x-2a+\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2-2ax+a}{x}$

함수 $f(x)$가 구간 $(0,\ \infty)$에서 증가하려면 $x>0$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로

$2x^2-2ax+a\ge 0$

$g(x)=2x^2-2ax+a$라 하면

$g(x)=2\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{2}+a$

이때 $a>0$이므로 함수 $g(x)$는 $x=\dfrac{a}{2}$에서 최솟값

$-\dfrac{a^2}{2}+a$를 갖는다.

즉, $-\dfrac{a^2}{2}+a\ge 0$이므로

$a^2-2a\le 0,\ a(a-2)\le 0$

$\therefore\ 0<a\le 2\ (\because\ a>0)$

따라서 양수 a의 최댓값은 2이다.

492 ②

$f'(x)=\sqrt{3}-2\sin x$

$f'(x)=0$에서

$\sqrt{3}-2\sin x=0,\ \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\dfrac{2}{3}\pi\ (\because\ 0<x<2\pi)$

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi+1$ 극대	↘	$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi-1$ 극소	↗	

ㄷ. 극댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+1$이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

493 답 -4

$f(x)=\frac{x^2+a}{\sqrt{x+2}}$에서 $x>-2$이고

$$f'(x)=\frac{2x\sqrt{x+2}-(x^2+a)\times\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}$$

$$=\frac{3x^2+8x-a}{2(x+2)\sqrt{x+2}}$$

$x=-1$에서 극값을 가지므로

$f'(-1)=0$

$\frac{-5-a}{2}=0 \quad \therefore a=-5$ ▸▸▸▸▸▸ ❶

$\therefore f(x)=\frac{x^2-5}{\sqrt{x+2}}$,

$$f'(x)=\frac{3x^2+8x+5}{2(x+2)\sqrt{x+2}}$$

$$=\frac{(3x+5)(x+1)}{2(x+2)\sqrt{x+2}}$$

$f'(x)=0$에서 $(3x+5)(x+1)=0$

$\therefore x=-\frac{5}{3}$ 또는 $x=-1$ ▸▸▸▸▸▸ ❷

$x>-2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	$-\frac{5}{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		↗	$-\frac{20\sqrt{3}}{9}$ 극대	↘	-4 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극솟값 -4를 갖는다. ▸▸▸▸▸▸ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값 구하기	30 %
❷	$f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값 구하기	40 %
❸	$f(x)$의 극솟값 구하기	30 %

494 답 $-\frac{\pi}{2}$

$f'(x)$

$=-e^{-x}(\sin x-\cos x)+e^{-x}(\cos x+\sin x)$

$=2e^{-x}\cos x$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=0\ (\because e^{-x}>0)$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi\ (\because 0<x<2\pi)$

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$e^{-\frac{\pi}{2}}-a$ 극대	↘	$-e^{-\frac{3}{2}\pi}-a$ 극소	↗	

이때 함수 $f(x)$의 극댓값이 0이므로

$e^{-\frac{\pi}{2}}-a=0 \quad \therefore a=e^{-\frac{\pi}{2}}$

$\therefore \ln a=-\frac{\pi}{2}$

495 답 ②

$f(x)=x-\frac{a}{x}-5\ln x$에서 $x>0$이고

$f'(x)=1+\frac{a}{x^2}-\frac{5}{x}=\frac{x^2-5x+a}{x^2}$

함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $x^2-5x+a=0$이 $x>0$에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2-5x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=25-4a>0 \quad \therefore a<\frac{25}{4}$

(ii) (두 근의 합)$=5>0$

(iii) (두 근의 곱)$=a>0$

(i), (ii), (iii)에서 $0<a<\frac{25}{4}$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, ..., 6의 6개이다.

496 답 34

$f'(x)=a+8\cos 2x-16\sin x$

$=a+8(1-2\sin^2 x)-16\sin x$

$=-16\sin^2 x-16\sin x+a+8$

$=-16\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)^2+a+12$

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 방정식 $f'(x)=0$이 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

이때 $-1\le\sin x\le 1$이므로 함수 $f'(x)$는

$\sin x=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $a+12$, $\sin x=1$일 때 최솟값 $a-24$를 갖는다.

즉, $a-24\le f'(x)\le a+12$에서 $a-24<0<a+12$이어야 하므로

$-12<a<24$

따라서 정수 a의 최댓값은 23, 최솟값은 -11이므로 구하는 차는

$23-(-11)=34$

497 답 6

| 접근 방법 | $1\le x\le 2$에서 $f'(x)\le 0$을 만족시키는 a의 값의 범위를 구한다.

$f(x)=x^2-8x-\dfrac{a}{x}$에서 $x\neq 0$이고

$f'(x)=2x-8+\dfrac{a}{x^2}=\dfrac{2x^3-8x^2+a}{x^2}$

함수 $f(x)$가 구간 $[1, 2]$에서 감소하려면 $1\le x\le 2$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로 $1\le x\le 2$에서

$2x^3-8x^2+a\le 0$ ····· ㉠

$g(x)=2x^3-8x^2+a$라 하면

$g'(x)=6x^2-16x=2x(3x-8)$

$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\dfrac{8}{3}$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	0	···	$\frac{8}{3}$	···
$g'(x)$	+	0	−	0	+
$g(x)$	↗	a	↘	$-\frac{512}{27}+a$	↗

즉, 함수 $g(x)$는 구간 $\left[0, \dfrac{8}{3}\right]$에서 감소하므로 구간 $[1, 2]$에서 감소한다.

이때 ㉠을 만족시키려면 $g(1)\le 0$이어야 하므로

$-6+a\le 0$ $\therefore a\le 6$

따라서 실수 a의 최댓값은 6이다.

498 답 5

| 접근 방법 | 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 증가함수이거나 감소함수이어야 함을 이용하여 a의 값의 범위를 구한다.

$f'(x)=(4x-6)e^{2x}+2(2x^2-6x+a)e^{2x}$

$=2(2x^2-4x+a-3)e^{2x}$

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 모든 실수 x에서 $f'(x)\le 0$ 또는 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

(i) $f'(x)\le 0$일 때,

$e^{2x}>0$이므로 $2x^2-4x+a-3\le 0$

이때 모든 실수 x에서 이를 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $f'(x)\ge 0$일 때,

$e^{2x}>0$이므로 $2x^2-4x+a-3\ge 0$

이차방정식 $2x^2-4x+a-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=4-2(a-3)\le 0$

$10-2a\le 0$ $\therefore a\ge 5$

(i), (ii)에서 $a\ge 5$

따라서 실수 a의 최솟값은 5이다.

499 답 ③

| 접근 방법 | $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구한 후 수열 $\{a_n\}$에 대한 규칙을 찾는다.

$f'(x)=\dfrac{-\sin(\ln x)\times\frac{1}{x}\times x-\cos(\ln x)}{x^2}$

$=-\dfrac{\sin(\ln x)+\cos(\ln x)}{x^2}$

$f'(x)=0$에서

$\sin(\ln x)+\cos(\ln x)=0$

$\sin(\ln x)=-\cos(\ln x)$, $\tan(\ln x)=-1$

$\ln x=\dfrac{3}{4}\pi, \dfrac{7}{4}\pi, \dfrac{11}{4}\pi, \dfrac{15}{4}\pi, \cdots$ ($\because \ln x>0$)

$\therefore x=e^{\frac{3}{4}\pi}, e^{\frac{7}{4}\pi}, e^{\frac{11}{4}\pi}, e^{\frac{15}{4}\pi}, \cdots$

$x>1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	···	$e^{\frac{3}{4}\pi}$	···	$e^{\frac{7}{4}\pi}$	···	$e^{\frac{11}{4}\pi}$	···	$e^{\frac{15}{4}\pi}$	···
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	0	−
$f(x)$		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$가 극솟값을 갖는 x의 값을 작은 수부터 차례대로 나열하면 $e^{\frac{3}{4}\pi}, e^{\frac{11}{4}\pi}, e^{\frac{19}{4}\pi}, e^{\frac{27}{4}\pi}, \cdots$

즉, 수열 $\{\ln a_n\}$은 $\dfrac{3}{4}\pi, \dfrac{11}{4}\pi, \dfrac{19}{4}\pi, \dfrac{27}{4}\pi, \cdots$이므로

$\ln a_n=2n\pi-\dfrac{5}{4}\pi$

$\therefore \ln(a_1\times a_3\times a_5\times a_7)$

$=\ln a_1+\ln a_3+\ln a_5+\ln a_7$

$=\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{19}{4}\pi+\dfrac{35}{4}\pi+\dfrac{51}{4}\pi=27\pi$

01 곡선의 볼록과 함수의 그래프

개념 확인 253쪽

500 답 (1) 구간 $(-\infty, 1)$에서 위로 볼록,
구간 $(1, \infty)$에서 아래로 볼록,
변곡점의 좌표: $(1, -12)$
(2) 구간 $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$에서 아래로 볼록, 구간 $(-1, 1)$에서 위로 볼록,
변곡점의 좌표: $(-1, -5)$, $(1, -5)$

(1) $f(x)=x^3-3x^2-9x-1$이라 하면
$f'(x)=3x^2-6x-9$
$f''(x)=6x-6=6(x-1)$
$f''(x)=0$에서 $x=1$
이때 $x<1$에서 $f''(x)<0$, $x>1$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, 1)$에서 위로 볼록하고, 구간 $(1, \infty)$에서 아래로 볼록하다.
따라서 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(1, -12)$이다.

(2) $f(x)=x^4-6x^2$이라 하면
$f'(x)=4x^3-12x$
$f''(x)=12x^2-12=12(x+1)(x-1)$
$f''(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$
이때 $x<-1$, $x>1$에서 $f''(x)>0$, $-1<x<1$에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$에서 아래로 볼록하고, 구간 $(-1, 1)$에서 위로 볼록하다.
따라서 $x=-1$, $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-1, -5)$, $(1, -5)$이다.

유제 255~267쪽

501 답 (1) 구간 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$에서 아래로 볼록,
구간 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$에서 위로 볼록,
변곡점의 좌표: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{2}\right)$
(2) 구간 $(-\infty, 2)$에서 아래로 볼록,
구간 $(2, \infty)$에서 위로 볼록,
변곡점의 좌표: $\left(2, -\frac{2}{e^2}\right)$
(3) 구간 $(0, 2)$에서 아래로 볼록,
구간 $(2, \infty)$에서 위로 볼록,
변곡점의 좌표: $\left(2, \ln 2+\frac{1}{2}\right)$
(4) 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$에서 위로 볼록,
구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$에서 아래로 볼록,
변곡점의 좌표: $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$

(1) $f(x)=\frac{2}{x^2+1}$라 하면
$f'(x)=-\frac{4x}{(x^2+1)^2}$
$f''(x)=-\frac{4(x^2+1)^2-4x\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$
$=\frac{4(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$
$f''(x)=0$에서
$3x^2-1=0$, $x^2=\frac{1}{3}$
$\therefore x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$
이때 $x<-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x>\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 $f''(x)>0$,
$-\frac{\sqrt{3}}{3}<x<\frac{\sqrt{3}}{3}$에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty\right)$에서 아래로 볼록하고, 구간 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$에서 위로 볼록하다.
따라서 $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{2}\right)$이다.

(2) $f(x)=-xe^{-x}$이라 하면
$f'(x)=-e^{-x}+xe^{-x}=(x-1)e^{-x}$
$f''(x)=e^{-x}-(x-1)e^{-x}$
$=(2-x)e^{-x}$
$f''(x)=0$에서
$2-x=0$ ($\because e^{-x}>0$)
$\therefore x=2$

이때 $x<2$에서 $f''(x)>0$, $x>2$에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(-\infty, 2)$에서 아래로 볼록하고, 구간 $(2, \infty)$에서 위로 볼록하다.

따라서 $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(2, -\frac{2}{e^2}\right)$이다.

(3) $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$이라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$

$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}=-\frac{x-2}{x^3}$

$f''(x)=0$에서

$x-2=0$ $\therefore x=2$

이때 $0<x<2$에서 $f''(x)>0$, $x>2$에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(0, 2)$에서 아래로 볼록하고, 구간 $(2, \infty)$에서 위로 볼록하다.

따라서 $x=2$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(2, \ln 2+\frac{1}{2}\right)$이다.

(4) $f(x)=x+3\cos x$라 하면

$f'(x)=1-3\sin x$

$f''(x)=-3\cos x$

$f''(x)=0$에서 $\cos x=0$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ ($\because 0<x<2\pi$)

이때 $0<x<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi<x<2\pi$에서 $f''(x)<0$,

$\frac{\pi}{2}<x<\frac{3}{2}\pi$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$에서 위로 볼록하고, 구간 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$에서 아래로 볼록하다.

따라서 $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$이다.

502 답 -5

$f(x)=\ln(x^2+5)$라 하면

$f'(x)=\frac{2x}{x^2+5}$

$f''(x)=\frac{2(x^2+5)-2x\times 2x}{(x^2+5)^2}=-\frac{2(x^2-5)}{(x^2+5)^2}$

곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$에서

$-2(x^2-5)>0$, $x^2-5<0$

$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})<0$

$\therefore -\sqrt{5}<x<\sqrt{5}$

따라서 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록한 구간은 $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$이므로

$a=-\sqrt{5}$, $b=\sqrt{5}$

$\therefore ab=-5$

503 답 1

$f(x)=x^2+\frac{1}{x-2}$이라 하면 $x\neq 2$이고

$f'(x)=2x-\frac{1}{(x-2)^2}$

$f''(x)=2+\frac{2}{(x-2)^3}=\frac{2\{(x-2)^3+1\}}{(x-2)^3}$

$=\frac{2(x^3-6x^2+12x-7)}{(x-2)^3}$

$=\frac{2(x-1)(x^2-5x+7)}{(x-2)^3}$

$f''(x)=0$에서

$(x-1)(x^2-5x+7)=0$

$\therefore x=1$ ($\because x^2-5x+7>0$)

이때 $0<x<1$에서 $f''(x)>0$, $1<x<2$에서 $f''(x)<0$이므로 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.

따라서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(1, 0)$이므로

$a=1$, $b=0$ $\therefore a+b=1$

504 답 $\frac{11}{2}$

$f'(x)=2ax+b+\frac{6}{x}$

$f''(x)=2a-\frac{6}{x^2}$

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극소이므로 $f'(3)=0$에서

$6a+b+2=0$ $\therefore 6a+b=-2$ ····· ㉠

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표가 $\sqrt{6}$이므로

$f''(\sqrt{6})=0$에서

$2a-1=0$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

이를 ㉠에 대입하면

$3+b=-2$ $\therefore b=-5$

$\therefore a-b=\frac{1}{2}-(-5)=\frac{11}{2}$

505 답 $-4<a<4$

$f(x)=\frac{1}{2}ax^2+4\cos x+2x$라 하면

$f'(x)=ax-4\sin x+2$

$f''(x)=a-4\cos x$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$이 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌어야 한다.

$f''(x)=0$에서

$a-4\cos x=0 \quad \therefore \cos x=\frac{a}{4}$

이때 $-1\le\cos x\le1$이므로 실근을 가지려면

$-1\le\frac{a}{4}\le1 \quad \therefore -4\le a\le4$

$a=-4$일 때,

$f''(x)=-4-4\cos x\le0$ ◀ $-8\le-4-4\cos x\le0$

$a=4$일 때,

$f''(x)=4-4\cos x\ge0$ ◀ $0\le4-4\cos x\le8$

즉, $a=-4$ 또는 $a=4$이면 $f''(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 존재하지 않는다.

따라서 a의 값의 범위는

$-4<a<4$

506 답 $\frac{\pi^2}{9}$

$f(x)=a\sin x+x^2-2$라 하면

$f'(x)=a\cos x+2x$

$f''(x)=-a\sin x+2$

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 x좌표가 $\frac{\pi}{6}$이므로

$f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=0$에서

$-\frac{a}{2}+2=0 \quad \therefore a=4$

따라서 $f(x)=4\sin x+x^2-2$이므로

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2+\frac{\pi^2}{36}-2=\frac{\pi^2}{36} \quad \therefore b=\frac{\pi^2}{36}$

$\therefore ab=4\times\frac{\pi^2}{36}=\frac{\pi^2}{9}$

507 답 $a\ge\frac{3}{2}$

$f(x)=x^4-2x^3+ax^2$이라 하면

$f'(x)=4x^3-6x^2+2ax$

$f''(x)=12x^2-12x+2a$

$=2(6x^2-6x+a)$

곡선 $y=f(x)$가 변곡점을 갖지 않으려면 모든 실수 x에서 $f''(x)\ge0$이어야 하므로

$6x^2-6x+a\ge0$

따라서 이차방정식 $6x^2-6x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-6a\le0$

$6a\ge9 \quad \therefore a\ge\frac{3}{2}$

508 답 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) (i) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0)=-1$이므로 그래프는 점 $(0,\ -1)$을 지난다.

(iii) $f'(x)=2xe^{-x^2}$

$f''(x)=2e^{-x^2}+2x\times xe^{-x^2}\times(-2)$

$=-2(2x^2-1)e^{-x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0\ (\because e^{-x^2}>0)$

$f''(x)=0$에서 $2x^2-1=0\ (\because e^{-x^2}>0)$

$x^2=\frac{1}{2} \quad \therefore x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

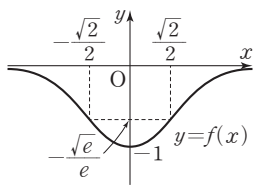
함수 $f(x)$의 증가와 감소, 위로 볼록과 아래로 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	$-\frac{\sqrt{e}}{e}$ 변곡점	↘	-1 극소	↗	$-\frac{\sqrt{e}}{e}$ 변곡점	↗

(iv) $\lim_{x\to\infty}(-e^{-x^2})=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{e^{x^2}}\right)=0$,

$\lim_{x\to-\infty}(-e^{-x^2})=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{e^{x^2}}\right)=0$이므로 점근선은 x축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) (i) 정의역은 $x>0$인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(1)=1$이므로 그래프는 점 $(1,\ 1)$을 지난다.

(iii) $f'(x)=2x+\frac{1}{x}$

$f''(x)=2-\frac{1}{x^2}$

$f''(x)=0$에서

$2-\frac{1}{x^2}=0,\ x^2=\frac{1}{2}$

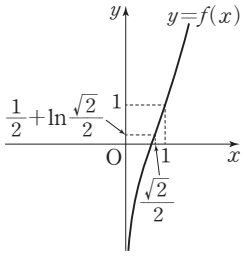
$\therefore\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because\ x>0)$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 위로 볼록과 아래로 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		+	+	+
$f''(x)$		−	0	+
$f(x)$		↗	$\frac{1}{2}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}$ 변곡점	↗

(iv) $\lim_{x\to 0+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로 점근선은 y축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



509 (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조

(1) (i) 정의역은 $x\neq 2$인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0)=0$이므로 그래프는 원점을 지난다.

(iii) $f'(x)=\frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$

$=\frac{x(x-4)}{(x-2)^2}$

$f''(x)$

$=\frac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x)\times 2(x-2)}{(x-2)^4}$

$=\frac{8}{(x-2)^3}$

$f'(x)=0$에서

$x(x-4)=0$ $\quad\therefore\ x=0$ 또는 $x=4$

$x\neq 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 위로 볼록과 아래로 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−		−	0	+
$f''(x)$	−	−	−		+	+	+
$f(x)$	↗	0 극대	↘		↘	8 극소	↗

(iv) $f(x)=\frac{x^2}{x-2}=x+\frac{2x}{x-2}$에서

$\lim_{x\to 2+}\left(x+\frac{2x}{x-2}\right)=\infty$

$\lim_{x\to 2-}\left(x+\frac{2x}{x-2}\right)=-\infty$

$\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{2x}{x-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x+2+\frac{4}{x-2}\right)$

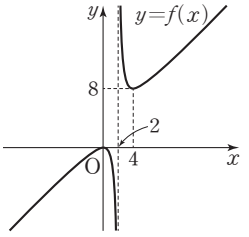
$=\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{2x}{x-2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\frac{4}{x-2}\right)$

$=\infty$

즉, 점근선은 직선 $x=2$이다.

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) $f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$

$f''(x)=2\cos 2x$

$f'(x)=0$에서 $\sin 2x=0$

이때 $0\le x\le\pi$에서 $0\le 2x\le 2\pi$이므로

$2x=0$ 또는 $2x=\pi$ 또는 $2x=2\pi$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\pi$

$f''(x)=0$에서 $\cos 2x=0$

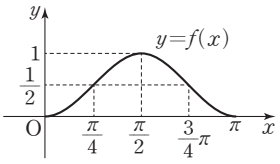
$2x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $2x=\frac{3}{2}\pi\ (\because\ 0\le 2x\le 2\pi)$

$\therefore\ x=\frac{\pi}{4}$ 또는 $x=\frac{3}{4}\pi$

$0\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소, 위로 볼록과 아래로 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	+	+	+	0	−	−	−	0
$f''(x)$		+	0	−	−	−	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$ 변곡점	↗	1 극대	↘	$\frac{1}{2}$ 변곡점	↘	0

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



510 답 (1) **최댓값: 5, 최솟값: 3**

(2) **최댓값: $\sqrt{2}$, 최솟값: $-\sqrt{2}$**

(3) **최댓값: $\frac{1}{e}$, 최솟값: $-e$**

(4) **최댓값: $\frac{7}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$,**

최솟값: $\frac{11}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) $f'(x)=1-\frac{8}{x^3}$

$f'(x)=0$에서 $1-\frac{8}{x^3}=0$

$x^3-8=0$, $(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ ($\because x^2+2x+4>0$)

구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	↘	3 극소	↗	$\frac{17}{4}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 5, $x=2$에서 최솟값 3을 갖는다.

(2) $f'(x)=\sqrt{4-2x^2}+x\times\frac{-4x}{2\sqrt{4-2x^2}}$

$=\sqrt{4-2x^2}-\frac{2x^2}{\sqrt{4-2x^2}}$

$=\frac{4-4x^2}{\sqrt{4-2x^2}}=-\frac{4(x+1)(x-1)}{\sqrt{4-2x^2}}$

$f'(x)=0$에서 $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

구간 $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\sqrt{2}$ 극소	↗	$\sqrt{2}$ 극대	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 $\sqrt{2}$, $x=-1$에서 최솟값 $-\sqrt{2}$를 갖는다.

(3) $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $1-\ln x=0$

$\ln x=1$ $\therefore x=e$

구간 $\left[\frac{1}{e}, e^3\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e	$\cdots$	e^3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-e$	↗	$\frac{1}{e}$ 극대	↘	$\frac{3}{e^3}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 최댓값 $\frac{1}{e}$, $x=\frac{1}{e}$에서 최솟값 $-e$를 갖는다.

(4) $f'(x)=1+2\sin 2x$

$f'(x)=0$에서 $1+2\sin 2x=0$

$\sin 2x=-\frac{1}{2}$

이때 $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$에서 $\pi\le 2x\le 2\pi$이므로

$2x=\frac{7}{6}\pi$ 또는 $2x=\frac{11}{6}\pi$

$\therefore x=\frac{7}{12}\pi$ 또는 $x=\frac{11}{12}\pi$

구간 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{7}{12}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{12}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{\pi}{2}+1$	↗	$\frac{7}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$ 극대	↘	$\frac{11}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 극소	↗	$\pi-1$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{7}{12}\pi$에서 최댓값 $\frac{7}{12}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x=\frac{11}{12}\pi$에서 최솟값 $\frac{11}{12}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$을 갖는다.

511 답 **1**

$f'(x)=2-\ln x-x\times\frac{1}{x}=1-\ln x$

$f'(x)=0$에서 $1-\ln x=0$

$\ln x=1$ $\therefore x=e$

구간 $[1, e^2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	2	↗	e 극대	↘	0

따라서 함수 $f(x)$는 $x=e$에서 최댓값 e를 가지므로

$a=e$, $b=e$ $\therefore \dfrac{b}{a}=1$

512 e

$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=-x(x-2)e^{-x}$

$f'(x)=0$에서 $x(x-2)=0$ ($\because e^{-x}>0$)

$\therefore x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[-1, e]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	e
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	e	↘	0 극소	↗	$\dfrac{4}{e^2}$ 극대	↘	$\dfrac{e^2}{e^e}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 e, $x=0$에서 최솟값 0을 가지므로

$M=e$, $m=0$ $\therefore M+m=e$

513 3

$f'(x)=-2a\sin 2x+\sqrt{2}a=-a(2\sin 2x-\sqrt{2})$

$f'(x)=0$에서

$2\sin 2x-\sqrt{2}=0$, $\sin 2x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이때 $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}$에서 $0\le 2x\le\dfrac{\pi}{2}$이므로

$2x=\dfrac{\pi}{4}$ $\therefore x=\dfrac{\pi}{8}$

$a>0$이므로 구간 $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{8}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	a	↗	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}a+\dfrac{\sqrt{2}}{8}a\pi$ 극대	↘	$\dfrac{\sqrt{2}a}{4}\pi$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 a를 가지므로

$a=3$

514 $\dfrac{2}{e^4}$

$f(x)=3x+x\ln x+a$에서 $x>0$이고

$f'(x)=3+\ln x+x\times\dfrac{1}{x}=4+\ln x$

$f'(x)=0$에서

$4+\ln x=0$ $\therefore x=\dfrac{1}{e^4}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{e^4}$	$\cdots$
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	$a-\dfrac{1}{e^4}$ 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{1}{e^4}$에서 최솟값 $a-\dfrac{1}{e^4}$을 가지므로

$a-\dfrac{1}{e^4}=\dfrac{1}{e^4}$ $\therefore a=\dfrac{2}{e^4}$

515 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

$f'(x)=\cos x+\cos^2 x-\sin^2 x$

$=\cos x+\cos^2 x-(1-\cos^2 x)$

$=2\cos^2 x+\cos x-1$

$=(\cos x+1)(2\cos x-1)$

$f'(x)=0$에서

$\cos x=-1$ 또는 $\cos x=\dfrac{1}{2}$

$\therefore x=\dfrac{\pi}{3}$ 또는 $x=\pi$ 또는 $x=\dfrac{5}{3}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	
$f(x)$	a	↗	$a+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ 극대	↘	a	↘	$a-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ 극소	↗	a

함수 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{3}$에서 최댓값 $a+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$을 가지므로

$a+\dfrac{3\sqrt{3}}{4}=\dfrac{9\sqrt{3}}{4}$ $\therefore a=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{3}\pi$에서 최솟값 $a-\frac{3\sqrt{3}}{4}$을 가지므로 구하는 최솟값은

$$a-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

516 $\frac{9}{2}$

$$f'(x)=2x+\frac{-2x}{10-x^2}$$
$$=\frac{-2x^3+18x}{10-x^2}=\frac{2x(x+3)(x-3)}{x^2-10}$$

$f'(x)=0$에서

$x(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=0$ 또는 $x=3$

구간 $[-3, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$9-a$	↘	$\ln 10-a$ 극소	↗	$9-a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$, $x=3$에서 최댓값 $9-a$, $x=0$에서 최솟값 $\ln 10-a$를 갖는다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 $\ln 10$이므로

$(9-a)+(\ln 10-a)=\ln 10$

$2a=9 \quad \therefore a=\frac{9}{2}$

517 $\frac{2}{e}$

점 B의 x좌표를 $a\,(0<a<1)$라 하면

$\mathrm{B}\left(a, \ln\frac{1}{a}\right)$

즉, $\mathrm{A}(a, \ln a)$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\ln\frac{1}{a}-\ln a=-2\ln a$, $\overline{\mathrm{BC}}=a$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=-2\ln a\times a=-2a\ln a$

$\therefore S'(a)=-2\ln a-2a\times\frac{1}{a}$

$=-2(\ln a+1)$

$S'(a)=0$에서

$\ln a+1=0$, $\ln a=-1$

$\therefore a=\frac{1}{e}$

$0<a<1$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$\frac{2}{e}$ 극대	↘	

따라서 직사각형 ABCD의 넓이 $S(a)$의 최댓값은

$S\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}$이다.

518 $2\sqrt{2}$

점 P의 x좌표를 $a\,(-6<a<0)$라 하면

$\mathrm{P}(a, \sqrt{a+6})$

즉, $\mathrm{Q}(a, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{a+6}$, $\overline{\mathrm{OQ}}=-a$

삼각형 OPQ는 $\angle\mathrm{Q}=90^\circ$인 직각삼각형이므로 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}\times(-a)\times\sqrt{a+6}$

$=-\frac{1}{2}a\sqrt{a+6}$

$\therefore S'(a)=-\frac{1}{2}\sqrt{a+6}-\frac{1}{2}\times\frac{a}{2\sqrt{a+6}}$

$=-\frac{3(a+4)}{4\sqrt{a+6}}$

$S'(a)=0$에서

$a+4=0 \quad \therefore a=-4$

$-6<a<0$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	-6	$\cdots$	-4	$\cdots$	0
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$2\sqrt{2}$ 극대	↘	

따라서 삼각형 OPQ의 넓이 $S(a)$의 최댓값은

$S(-4)=2\sqrt{2}$이다.

519 6

점 D의 x좌표를 $a\,(a>0)$라 하면

$\mathrm{D}\left(a, \frac{4}{a^2+1}\right)$

$\overline{\mathrm{AD}}=2a$이므로 $\overline{\mathrm{BC}}=2\overline{\mathrm{AD}}=4a$

사다리꼴 ABCD의 높이가 $\frac{4}{a^2+1}$이므로 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}\times(2a+4a)\times\frac{4}{a^2+1}=\frac{12a}{a^2+1}$

$\therefore S'(a)=\frac{12(a^2+1)-12a\times2a}{(a^2+1)^2}=\frac{-12a^2+12}{(a^2+1)^2}$

$=-\frac{12(a+1)(a-1)}{(a^2+1)^2}$

$S'(a)=0$에서

$(a+1)(a-1)=0$ $\therefore a=1\ (\because a>0)$

$a>0$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	…	1	…
$S'(a)$		+	0	−
$S(a)$		↗	6 극대	↘

따라서 사다리꼴 ABCD의 넓이 $S(a)$의 최댓값은 $S(1)=6$이다.

520 $\frac{\pi}{3}$

점 D의 x좌표를 $a\left(0<a<\frac{\pi}{2}\right)$라 하면

$D(a,\ 4\cos a)$

즉, $A(-a,\ 4\cos a)$이므로

$\overline{AD}=2a$, $\overline{DC}=4\cos a$

직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $f(a)$라 하면

$f(a)=2(2a+4\cos a)$

$\therefore f'(a)=2(2-4\sin a)=4(1-2\sin a)$

$f'(a)=0$에서 $1-2\sin a=0$

$\sin a=\frac{1}{2}$ $\therefore a=\frac{\pi}{6}\ \left(\because 0<a<\frac{\pi}{2}\right)$

$0<a<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$f'(a)$		+	0	−	
$f(a)$		↗	극대	↘	

따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이 $f(a)$는 $a=\frac{\pi}{6}$일 때 최대이므로 이때의 선분 BC의 길이는

$2a=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$

연습문제 268~270쪽

521 ①

$f(x)=\ln x+3x^2+2x$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{1}{x}+6x+2$

$f''(x)=-\frac{1}{x^2}+6=\frac{6x^2-1}{x^2}$

곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하려면 $f''(x)>0$에서

$6x^2-1>0$, $x^2>\frac{1}{6}$

$\therefore x>\frac{\sqrt{6}}{6}\ (\because x>0)$

따라서 곡선 $y=f(x)$는 구간 $\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\ \infty\right)$에서 아래로 볼록하므로

$a\geq\frac{\sqrt{6}}{6}$

즉, a의 최솟값은 $\frac{\sqrt{6}}{6}$이다.

522 $2\sqrt{2}$

$f(x)=\frac{1}{x^2+6}$이라 하면

$f'(x)=-\frac{2x}{(x^2+6)^2}$

$f''(x)=-\frac{2(x^2+6)^2-2x\times2(x^2+6)\times2x}{(x^2+6)^4}$

$=\frac{6(x^2-2)}{(x^2+6)^3}$

$f''(x)=0$에서

$x^2-2=0$ $\therefore x=-\sqrt{2}$ 또는 $x=\sqrt{2}$

이때 $x<-\sqrt{2}$, $x>\sqrt{2}$에서 $f''(x)>0$,

$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$에서 $f''(x)<0$이므로 $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.

따라서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는

$\left(-\sqrt{2},\ \frac{1}{8}\right)$, $\left(\sqrt{2},\ \frac{1}{8}\right)$이므로 두 변곡점 사이의 거리는

$\sqrt{2}-(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

523 3

$f(x)=-x^3+ax^2+bx-2$라 하면

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

$f''(x)=-6x+2a$

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표가 $(1,\ 1)$이므로

$f''(1)=0$, $f(1)=1$

$f''(1)=0$에서 $-6+2a=0$ $\therefore a=3$

$f(1)=1$에서 $-1+a+b-2=1$

$a+b=4$ $\therefore b=1$

$\therefore ab=3\times1=3$

524 답 $3e$

$f(x)=\left(\ln\frac{1}{ax}\right)^2=(-\ln ax)^2=(\ln ax)^2$이라 하면

$f'(x)=2\ln ax\times\frac{1}{x}=\frac{2\ln ax}{x}$

$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2(1-\ln ax)}{x^2}$

$f''(x)=0$에서

$1-\ln ax=0$, $ax=e$ $\therefore x=\frac{e}{a}$

이때 $x<\frac{e}{a}$에서 $f''(x)>0$, $x>\frac{e}{a}$에서 $f''(x)<0$

이므로 $x=\frac{e}{a}$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.

따라서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $\left(\frac{e}{a},\ 1\right)$이고

이 점이 직선 $y=3x$ 위에 있으므로

$1=3\times\frac{e}{a}$ $\therefore a=3e$

525 답 ④

$f'(x)=1+\cos x\geq0$

따라서 $0\leq x\leq2\pi$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 최솟값은 $f(0)=0$, 최댓값은 $f(2\pi)=2\pi$

즉, 구하는 합은

$2\pi+0=2\pi$

526 답 $3\sqrt{3}$

$f(x)=x\sqrt{ax-x^2}$에서 $ax-x^2\geq0$이어야 하므로

$x(x-a)\leq0$ $\therefore 0\leq x\leq a\ (\because a>0)$

$f'(x)=\sqrt{ax-x^2}+\frac{x(a-2x)}{2\sqrt{ax-x^2}}$

$=\frac{2ax-2x^2+ax-2x^2}{2\sqrt{ax-x^2}}$

$=-\frac{x(4x-3a)}{2\sqrt{ax-x^2}}$ ▸▸▸▸▸▸ ❶

$f'(x)=0$에서

$x(4x-3a)=0$ $\therefore x=\frac{3}{4}a\ (\because 0<x<a)$

$0\leq x\leq a$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{3}{4}a$	$\cdots$	a
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{16}a^2$ 극대	↘	0

함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{4}a$에서 최대이므로

$\frac{3}{4}a=\frac{3}{2}$ $\therefore a=2$ ▸▸▸▸▸▸ ❷

이때 함수 $f(x)$의 최댓값은

$b=\frac{3\sqrt{3}}{16}\times2^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ▸▸▸▸▸▸ ❸

$\therefore 2ab=2\times2\times\frac{3\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}$ ▸▸▸▸▸▸ ❹

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$ 구하기	30 %
❷	a의 값 구하기	30 %
❸	b의 값 구하기	30 %
❹	$2ab$의 값 구하기	10 %

527 답 2

$f(x)=(1+\ln x)^2-a\ln x$라 하면

$f'(x)=2(1+\ln x)\times\frac{1}{x}-\frac{a}{x}$

$=\frac{2-a+2\ln x}{x}$

$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-(2-a+2\ln x)}{x^2}$

$=\frac{a-2\ln x}{x^2}$

곡선 $y=f(x)$가 위로 볼록하려면 $f''(x)<0$에서

$a-2\ln x<0$, $\ln x>\frac{a}{2}$

$\therefore x>e^{\frac{a}{2}}$

즉, 곡선 $y=f(x)$는 구간 $(e^{\frac{a}{2}},\ \infty)$에서 위로 볼록하므로

$e^{\frac{a}{2}}\leq e$

$\frac{a}{2}\leq1$ $\therefore a\leq2$

따라서 양수 a의 최댓값은 2이다.

528 답 ①

$f(x)=xe^{-2x}$이라 하면

$f'(x)=e^{-2x}-2xe^{-2x}=(1-2x)e^{-2x}$

$f''(x)=-2e^{-2x}-2(1-2x)e^{-2x}=4(x-1)e^{-2x}$

$f''(x)=0$에서

$x-1=0\ (\because e^{-2x}>0)$ $\therefore x=1$

이때 $x<1$에서 $f''(x)<0$, $x>1$에서 $f''(x)>0$이므로 $x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀐다.

따라서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점 A의 좌표는

$(1, e^{-2})$

$f'(1)=-e^{-2}$이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$y-e^{-2}=-e^{-2}(x-1)$ $\therefore y=-e^{-2}x+2e^{-2}$

즉, x절편이 2이므로 B(2, 0)

따라서 삼각형 OAB는 밑변의 길이가 2이고 높이가 e^{-2}인 삼각형이므로 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times e^{-2}=e^{-2}$

529 답 **0**

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$라 하면

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f''(x)=6ax+2b$

$x=1$인 점에서의 접선의 기울기가 10이므로

$f'(1)=10$에서 $3a+2b+c=10$ ····· ㉠

곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표가 $(-2, 26)$이므로

$f''(-2)=0$, $f(-2)=26$

$f''(-2)=0$에서 $-12a+2b=0$

$\therefore b=6a$ ····· ㉡

$f(-2)=26$에서 $-8a+4b-2c=26$

$\therefore -4a+2b-c=13$ ····· ㉢

㉠+㉢을 하면 $-a+4b=23$ ····· ㉣

㉡, ㉣을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=6$

이를 ㉠에 대입하면

$3+12+c=10$ $\therefore c=-5$

$\therefore a-b-c=1-6-(-5)=0$

530 답 **1**

$f(x)=(x^2+a)e^x$이라 하면

$f'(x)=2xe^x+(x^2+a)e^x=(x^2+2x+a)e^x$

$f''(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x+a)e^x$

$=(x^2+4x+2+a)e^x$

$f''(x)=0$에서

$x^2+4x+2+a=0\ (\because e^x>0)$

곡선 $y=f(x)$의 변곡점이 2개이려면 이차방정식 $x^2+4x+2+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(2+a)>0$ $\therefore a<2$

따라서 정수 a의 최댓값은 1이다.

531 답 ②

$f'(x)=\frac{5(x^2+4)-5x\times2x}{(x^2+4)^2}=\frac{-5x^2+20}{(x^2+4)^2}$

$=-\frac{5(x+2)(x-2)}{(x^2+4)^2}$

$f''(x)$

$=\frac{-10x(x^2+4)^2-(-5x^2+20)\times2(x^2+4)\times2x}{(x^2+4)^4}$

$=\frac{10x^3-120x}{(x^2+4)^3}=\frac{10x(x^2-12)}{(x^2+4)^3}$

$f'(x)=0$에서

$(x+2)(x-2)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=2$

$f''(x)=0$에서

$x(x^2-12)=0$

$\therefore x=-2\sqrt{3}$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2\sqrt{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	···	$-2\sqrt{3}$	···	-2	···	0
$f'(x)$	−	−	−	0	+	+
$f''(x)$	−	0	+	+	+	0
$f(x)$	↘	$-\frac{5\sqrt{3}}{8}$ 변곡점	↘	$-\frac{5}{4}$ 극소	↗	0 변곡점

x	···	2	···	$2\sqrt{3}$	···
$f'(x)$	+	0	−	−	−
$f''(x)$	−	−	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{5}{4}$ 극대	↘	$\frac{5\sqrt{3}}{8}$ 변곡점	↘

ㄱ. 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값을 갖는다.

ㄴ. $f(-x)=\frac{-5x}{(-x)^2+4}=-\frac{5x}{x^2+4}=-f(x)$

이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $0<x<2\sqrt{3}$에서 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

ㄹ. $x=-2\sqrt{3}$, $x=0$, $x=2\sqrt{3}$의 각각의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 3개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

532 답 $3\ln 3-2$

$f'(x)=a\cos x-b\sin x+1$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{7}{6}\pi$에서 극값을 가지므로

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, $f'\left(\frac{7}{6}\pi\right)=0$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$에서

$-b+1=0$ $\quad\therefore b=1$

$f'\left(\frac{7}{6}\pi\right)=0$에서

$-\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b+1=0$

$\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{3}{2}$ $\quad\therefore a=\sqrt{3}$

즉, $g(x)=3x+1-e^x$이므로

$g'(x)=3-e^x$

$g'(x)=0$에서

$3-e^x=0$, $e^x=3$ $\quad\therefore x=\ln 3$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\ln 3$	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	−
$g(x)$	↗	$3\ln 3-2$ 극대	↘

따라서 함수 $g(x)$는 $x=\ln 3$에서 최댓값 $3\ln 3-2$를 갖는다.

533 답 ㄴ, ㄷ

구간 (a, f)에서 $f''(x)$의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	a	$\cdots$	b	$\cdots$	d	$\cdots$	0	$\cdots$	e	$\cdots$	f
$f''(x)$		−	0	+	0	−	0	+	0	−	

ㄱ. 구간 (b, d), $(0, e)$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

ㄴ. $x=b$, $x=d$, $x=0$, $x=e$의 좌우에서 각각 $f''(x)$의 부호가 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점은 4개이다.

ㄷ. 구간 (a, f)에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	a	$\cdots$	c	$\cdots$	0	$\cdots$	f
$f'(x)$		−	0	+	0	+	
$f(x)$		↘	극소	↗		↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=c$일 때 최소이므로 최솟값은 $f(c)$이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

534 답 -1

$f'(x)=\frac{a(x^2+x+2)-(ax+b)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2}$

$=\frac{-ax^2-2bx+2a-b}{(x^2+x+2)^2}$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{x^2+x+2}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{x^2+x+2}=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극대이면서 최대이다.

즉, $f'(3)=0$에서

$\frac{-9a-6b+2a-b}{14^2}=0$ $\quad\therefore a+b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(3)=\frac{1}{7}$에서

$\frac{3a+b}{14}=\frac{1}{7}$ $\quad\therefore 3a+b=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

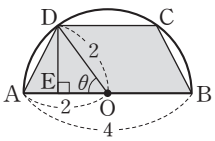
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$

$\therefore ab=-1$

535 답 $3\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이

$\angle AOD=\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$



라 하고, 점 D에서 선분 AO에 내린 수선의 발을 E라 하자.

$\overline{OD}=\overline{OA}=2$이므로 직각삼각형 ODE에서

$\overline{DE}=2\sin\theta$, $\overline{OE}=2\cos\theta$

$\therefore \overline{CD}=2\overline{OE}=4\cos\theta$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$S(\theta)=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{DE}$

$=\frac{1}{2}(4+4\cos\theta)\times 2\sin\theta$

$=4(1+\cos\theta)\sin\theta$

$$\begin{aligned}S'(\theta)&=-4\sin^2\theta+4(1+\cos\theta)\cos\theta\\&=-4\sin^2\theta+4\cos\theta+4\cos^2\theta\\&=-4(1-\cos^2\theta)+4\cos\theta+4\cos^2\theta\\&=8\cos^2\theta+4\cos\theta-4\\&=4(2\cos^2\theta+\cos\theta-1)\\&=4(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)\end{aligned}$$

$S'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=-1$ 또는 $\cos\theta=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=\frac{\pi}{3}\ \left(\because\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$에서 함수 $S(\theta)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		+	0	−	
$S(\theta)$		↗	$3\sqrt{3}$ 극대	↘	

따라서 사다리꼴 ABCD의 넓이 $S(\theta)$의 최댓값은

$S\left(\frac{\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$이다.

536 $\frac{\sqrt{e}}{2}$

| 접근 방법 | $\frac{1}{2}\cos x+1=t$로 놓고 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내어 최댓값과 최솟값을 구한다.

$\frac{1}{2}\cos x+1=t$로 놓으면 $-1\le\cos x\le1$에서

$-\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\cos x\le\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\le\frac{1}{2}\cos x+1\le\frac{3}{2}\qquad\therefore\ \frac{1}{2}\le t\le\frac{3}{2}$

주어진 함수 $f(x)$를 t에 대한 함수 $g(t)$로 나타내면

$g(t)=\frac{2e^t}{2t}=\frac{e^t}{t}$ ◀ $\cos x+2=2t$

$\therefore\ g'(t)=\frac{te^t-e^t}{t^2}=\frac{(t-1)e^t}{t^2}$

$g'(t)=0$에서 $t-1=0\ (\because\ e^t>0)$

$\therefore\ t=1$

$\frac{1}{2}\le t\le\frac{3}{2}$에서 함수 $g(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\frac{1}{2}$	…	1	…	$\frac{3}{2}$
$g'(t)$		−	0	+	
$g(t)$	$2\sqrt{e}$	↘	e 극소	↗	$\frac{2}{3}e\sqrt{e}$

따라서 함수 $g(t)$는 $t=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $2\sqrt{e}$, $t=1$에서 최솟값 e를 가지므로

$M=2\sqrt{e},\ m=e\qquad\therefore\ \frac{m}{M}=\frac{\sqrt{e}}{2}$

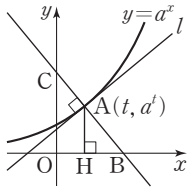
537 ②

| 접근 방법 | 점 A에서의 접선에 수직인 직선의 방정식을 이용하여 $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$를 t에 대한 식으로 나타낸다.

$y=a^x$에서 $y'=a^x\ln a$이므로 점 $A(t,\ a^t)$에서의 접선 l의 기울기는

$a^t\ln a$

즉, 점 $A(t,\ a^t)$을 지나고 직선 l에 수직인 직선의 방정식은



$y-a^t=-\frac{1}{a^t\ln a}(x-t)$

점 B의 y좌표는 0이므로

$-a^t=-\frac{1}{a^t\ln a}(x-t)$

$a^{2t}\ln a=x-t\qquad\therefore\ x=t+a^{2t}\ln a$

$\therefore$ B$(t+a^{2t}\ln a,\ 0)$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}/\!/\overline{CO}$이므로

$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{OH}}{\overline{HB}}=\frac{t}{(t+a^{2t}\ln a)-t}=\frac{t}{a^{2t}\ln a}$

$f(t)=\frac{t}{a^{2t}\ln a}$라 하면

$f'(t)=\frac{a^{2t}\ln a-2ta^{2t}(\ln a)^2}{(a^{2t}\ln a)^2}=\frac{1-2t\ln a}{a^{2t}\ln a}$

$f'(t)=0$에서

$1-2t\ln a=0\qquad\therefore\ t=\frac{1}{2\ln a}$

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	…	$\frac{1}{2\ln a}$	…
$f'(t)$		+	0	−
$f(t)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(t)$는 $t=\frac{1}{2\ln a}$에서 최대이므로

$\frac{1}{2\ln a}=1,\ \ln a=\frac{1}{2}$

$\therefore\ a=\sqrt{e}$

02 방정식, 부등식에의 활용과 속도, 가속도

유제 275~279쪽

538 답 (1) 2 (2) 1

(1) $f(x)=\ln x-x+2$라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{1}{x}-1$

$f'(x)=0$에서

$\frac{1}{x}-1=0 \quad \therefore x=1$

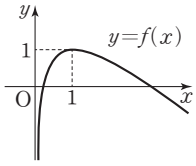
$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	⋯	1	⋯
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	1 극대	↘

이때 $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

(2) $x=\sin x$에서 $x-\sin x=0$

$f(x)=x-\sin x$라 하면

$f'(x)=1-\cos x$

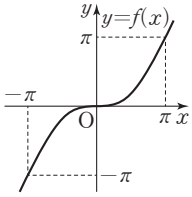
$-1\le\cos x\le 1$이므로 $0\le 1-\cos x\le 2$

즉, $f'(x)\ge 0$이므로 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 증가한다.

이때 $f(0)=0$,

$f(-\pi)=-\pi$, $f(\pi)=\pi$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

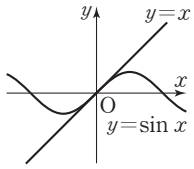
| 다른 풀이 |

(2) 방정식 $x=\sin x$의 서로 다른 실근의 개수는 직선 $y=x$와 곡선 $y=\sin x$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=\sin x$라 하면 $f'(x)=\cos x$

$f'(0)=1$이므로 $x=0$에서 접선의 기울기는 1이다.

즉, $x=0$에서 함수 $y=f(x)$의 접선의 방정식은 $y=x$이므로 직선 $y=x$와 곡선 $y=\sin x$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 한 점에서 만난다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

539 답 3

$f(x)=3x^2e^x-1$이라 하면

$f'(x)=6xe^x+3x^2e^x=3x(x+2)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x(x+2)=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

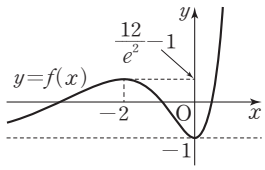
x	⋯	−2	⋯	0	⋯
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{12}{e^2}-1$ 극대	↘	−1 극소	↗

이때 $f(0)=-1$,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-1$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

540 답 2

$h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-2+\frac{1}{2x^2}$이라 하면

$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}=\frac{x^2-1}{x^3}$

$=\frac{(x+1)(x-1)}{x^3}$

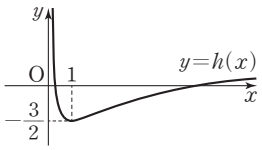
$h'(x)=0$에서

$(x+1)(x-1)=0 \quad \therefore x=1 (\because x>0)$

$x>0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	$-\frac{3}{2}$ 극소	$\nearrow$

이때 $\lim_{x\to 0+} h(x)=\infty$,
$\lim_{x\to\infty} h(x)=\infty$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



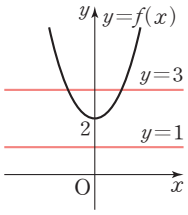
따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

541 2

$f(x)=e^x+e^{-x}$이라 하면
$f'(x)=e^x-e^{-x}$
$f'(x)=0$에서
$e^x-e^{-x}=0$, $e^{2x}=1$ $\therefore x=0$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	2 극소	$\nearrow$

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$,
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=1$과는 만나지 않고, 직선 $y=3$과는 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $e^x+e^{-x}=1$의 서로 다른 실근의 개수는 0이고, 방정식 $e^x+e^{-x}=3$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
따라서 $a=0$, $b=2$이므로 $a+b=2$

542 $k>e$

$x>0$에서 방정식 $\frac{e^x}{x}=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 $x>0$일 때, 함수 $y=\frac{e^x}{x}$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

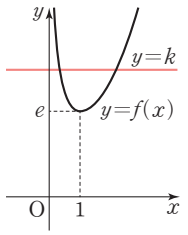
$f(x)=\frac{e^x}{x}$ $(x>0)$이라 하면

$f'(x)=\frac{e^x\times x-e^x}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서
$x-1=0$ ($\because e^x>0$) $\therefore x=1$
$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	e 극소	$\nearrow$

이때 $\lim_{x\to 0+} f(x)=\infty$,
$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



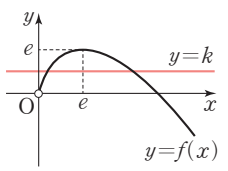
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 교점이 2개가 되도록 직선 $y=k$를 그으면 구하는 k의 값의 범위는
$k>e$

543 $0<k<e$

$2x-x\ln x-k=0$에서 $2x-x\ln x=k$이므로 이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=2x-x\ln x$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
$f(x)=2x-x\ln x$라 하면 $x>0$이고
$f'(x)=2-\ln x-x\times\frac{1}{x}=1-\ln x$
$f'(x)=0$에서
$1-\ln x=0$, $\ln x=1$ $\therefore x=e$
$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	e 극대	$\searrow$

이때 $\lim_{x\to 0+} f(x)=0$,
$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 교점이 2개가 되도록 직선 $y=k$를 그으면 구하는 k의 값의 범위는
$0<k<e$

544 답 1

$e^{-x}=k-x$에서 $e^{-x}+x=k$이므로 이 방정식이 오직 한 실근을 가지려면 함수 $y=e^{-x}+x$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 한다.

$f(x)=e^{-x}+x$라 하면

$f'(x)=-e^{-x}+1$

$f'(x)=0$에서

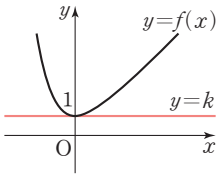
$-e^{-x}+1=0$, $e^{-x}=1$ $\therefore x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	1 극소	↗

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 교점이 1개가 되도록 직선 $y=k$를 그으면

$k=1$

545 답 $k<-2$일 때 1, $-2\le k<-\frac{3}{2}$일 때 2, $k=-\frac{3}{2}$일 때 1, $k>-\frac{3}{2}$일 때 0

$\sqrt{2x-4}-k=x$에서 $\sqrt{2x-4}-x=k$

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=\sqrt{2x-4}-x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=\sqrt{2x-4}-x$라 하면 $x\ge2$이고

$f'(x)=\frac{2}{2\sqrt{2x-4}}-1=\frac{1}{\sqrt{2x-4}}-1$

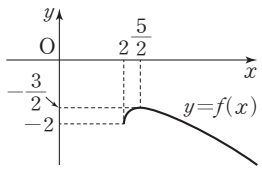
$f'(x)=0$에서 $\frac{1}{\sqrt{2x-4}}-1=0$

$\sqrt{2x-4}=1$, $2x-4=1$ $\therefore x=\frac{5}{2}$

$x>2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	2	$\cdots$	$\frac{5}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	-2	↗	$-\frac{3}{2}$ 극대	↘

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 방정식 $\sqrt{2x-4}-k=x$의 서로 다른 실근의 개수는

$k<-2$일 때 1,

$-2\le k<-\frac{3}{2}$일 때 2,

$k=-\frac{3}{2}$일 때 1,

$k>-\frac{3}{2}$일 때 0

546 답 $k\le\ln2$

$\ln(x^2+2x+3)\ge k$에서 $\ln(x^2+2x+3)-k\ge0$

$f(x)=\ln(x^2+2x+3)-k$라 하면

$f'(x)=\frac{2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{2(x+1)}{x^2+2x+3}$

$f'(x)=0$에서

$x+1=0$ $\therefore x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$\ln2-k$ 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $\ln2-k$이므로

$f(x)\ge0$이 성립하려면

$\ln2-k\ge0$ $\therefore k\le\ln2$

547 답 $k\le1$

$e^x+\sin x>k$에서 $e^x+\sin x-k>0$

$f(x)=e^x+\sin x-k$라 하면

$f'(x)=e^x+\cos x$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $e^x>0$, $\cos x>0$이므로

$f'(x)>0$

즉, 함수 $f(x)$는 $0<x<\frac{\pi}{2}$에서 증가한다.

따라서 $0<x<\frac{\pi}{2}$일 때, $f(x)>0$이 성립하려면

$f(0)\ge0$이어야 하므로

$1-k\ge0$ $\therefore k\le1$

548 답 -7

$3x>2\sqrt{x+2}+k$에서 $3x-2\sqrt{x+2}-k>0$

$f(x)=3x-2\sqrt{x+2}-k$라 하면

$f'(x)=3-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

$f'(x)=0$에서

$3-\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}=0$, $\sqrt{x+2}=\dfrac{1}{3}$

$x+2=\dfrac{1}{9}$ $\therefore x=-\dfrac{17}{9}$

$x>-2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	$-\frac{17}{9}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{19}{3}-k$ 극소	↗

즉, 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\dfrac{19}{3}-k$이므로 $x>-2$일 때, $f(x)>0$이 성립하려면

$-\dfrac{19}{3}-k>0$ $\therefore k<-\dfrac{19}{3}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -7이다.

549 답 $\dfrac{4}{e}$

$\ln 4x\le kx$에서 $\ln 4x-kx\le 0$

$f(x)=\ln 4x-kx$라 하면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}-k$

$f'(x)=0$에서 $\dfrac{1}{x}-k=0$ $\therefore x=\dfrac{1}{k}$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{k}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\ln\frac{4}{k}-1$ 극대	↘

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\ln\dfrac{4}{k}-1$이므로 $x>0$일 때, $f(x)\le 0$이 성립하려면

$\ln\dfrac{4}{k}-1\le 0$, $\dfrac{4}{k}\le e$ $\therefore k\ge\dfrac{4}{e}$

따라서 k의 최솟값은 $\dfrac{4}{e}$이다.

개념 확인 281쪽

550 답 (1) $(7, -1)$ (2) $5\sqrt{2}$ (3) $(6, -6)$ (4) $6\sqrt{2}$

$\dfrac{dx}{dt}=6t+1$, $\dfrac{dy}{dt}=-3t^2+2$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도는

$(6t+1, -3t^2+2)$

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=6$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-6t$이므로 시각 t에서의 점 P의 가속도는

$(6, -6t)$

(1) $t=1$에서의 점 P의 속도는 $(7, -1)$

(2) $t=1$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{7^2+(-1)^2}=5\sqrt{2}$

(3) $t=1$에서의 점 P의 가속도는 $(6, -6)$

(4) $t=1$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{6^2+(-6)^2}=6\sqrt{2}$

유제 283~285쪽

551 답 (1) $3e^2$ (2) $4e^2$

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=e^t+te^t=(t+1)e^t$

$a=\dfrac{dv}{dt}=e^t+(t+1)e^t=(t+2)e^t$

(1) $t=2$에서의 점 P의 속도는 $3e^2$

(2) $t=2$에서의 점 P의 가속도는 $4e^2$

552 답 5

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=1+2ke^{2t}$, $a=\dfrac{dv}{dt}=4ke^{2t}$

$t=0$에서의 가속도가 8이므로

$4k=8$ $\therefore k=2$

따라서 $v=1+4e^{2t}$이므로 $t=0$에서의 점 P의 속도는 5이다.

553 답 6

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3pt^2+\dfrac{q}{t}$, $a=\dfrac{dv}{dt}=6pt-\dfrac{q}{t^2}$

$t=1$에서의 속도가 9이므로

$3p+q=9$ ····· ㉠

$t=1$에서의 가속도가 9이므로

$6p-q=9$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=2$, $q=3$

$\therefore pq=6$

554 답 $-2\sqrt{3}$

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=1+2\sin 2t$

$a=\dfrac{dv}{dt}=4\cos 2t$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$에서

$1+2\sin 2t=0$, $\sin 2t=-\dfrac{1}{2}$

$0<t<\dfrac{3}{4}\pi$에서 $0<2t<\dfrac{3}{2}\pi$이므로

$2t=\dfrac{7}{6}\pi$ $\therefore t=\dfrac{7}{12}\pi$

따라서 $t=\dfrac{7}{12}\pi$에서의 점 P의 가속도는

$4\cos\dfrac{7}{6}\pi=4\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2\sqrt{3}$

555 답 (1) 속도: $(\pi+1, 0)$, 속력: $\pi+1$ (2) 가속도: $(2, -1)$, 가속도의 크기: $\sqrt{5}$

(1) $\dfrac{dx}{dt}=2t+\sin t$, $\dfrac{dy}{dt}=\cos t$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도는

$(2t+\sin t, \cos t)$

따라서 $t=\dfrac{\pi}{2}$에서의 점 P의 속도는

$(\pi+1, 0)$

$t=\dfrac{\pi}{2}$에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(\pi+1)^2+0^2}=\pi+1$

(2) $\dfrac{d^2x}{dt^2}=2+\cos t$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=-\sin t$이므로 시각 t에서의 점 P의 가속도는

$(2+\cos t, -\sin t)$

따라서 $t=\dfrac{\pi}{2}$에서의 점 P의 가속도는

$(2, -1)$

$t=\dfrac{\pi}{2}$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

556 답 4

$\dfrac{dx}{dt}=3\cos 3t$, $\dfrac{dy}{dt}=2+3\sin 3t$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도는 $(3\cos 3t, 2+3\sin 3t)$

시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(3\cos 3t)^2+(2+3\sin 3t)^2}$

$=\sqrt{9\cos^2 3t+4+12\sin 3t+9\sin^2 3t}$

$=\sqrt{12\sin 3t+9(\sin^2 3t+\cos^2 3t)+4}$

$=\sqrt{12\sin 3t+13}$

이때 $-1\le\sin 3t\le 1$에서

$1\le 12\sin 3t+13\le 25$

$\therefore 1\le\sqrt{12\sin 3t+13}\le 5$

따라서 $M=5$, $m=1$이므로

$M-m=4$

557 답 (4, 6)

$\dfrac{dx}{dt}=4t$, $\dfrac{dy}{dt}=t^2-4$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도는 $(4t, t^2-4)$

점 P의 속력이 13이려면

$\sqrt{(4t)^2+(t^2-4)^2}=13$, $t^4+8t^2-153=0$

$(t+3)(t-3)(t^2+17)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=4$, $\dfrac{d^2y}{dt^2}=2t$이므로 시각 t에서의 점 P의 가속도는 $(4, 2t)$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 가속도는 $(4, 6)$

558 답 $\dfrac{7}{2}$

$\dfrac{dx}{dt}=-2e^{-2t-1}$

$\dfrac{dy}{dt}=e^{-2t-1}-2(t-k)e^{-2t-1}$

$=(1-2t+2k)e^{-2t-1}$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속도는

$(-2e^{-2t-1}, (1-2t+2k)e^{-2t-1})$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도는

$(-2e^{-5}, (2k-3)e^{-5})$이고, 이때의 속력이 $2\sqrt{5}e^{-5}$이므로

$\sqrt{(-2e^{-5})^2+\{(2k-3)e^{-5}\}^2}=2\sqrt{5}e^{-5}$

$4e^{-10}+(2k-3)^2e^{-10}=20e^{-10}$

$4k^2-12k-7=0$, $(2k+1)(2k-7)=0$

$\therefore k=\dfrac{7}{2}$ ($\because k>0$)

연습문제 286~288쪽

559 답 2

$(x^2+2x-2)e^x=-1$에서

$(x^2+2x-2)e^x+1=0$

$f(x)=(x^2+2x-2)e^x+1$이라 하면

$f'(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x-2)e^x$

$=(x^2+4x)e^x=x(x+4)e^x$

$f'(x)=0$에서

$x(x+4)=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=-4$ 또는 $x=0$

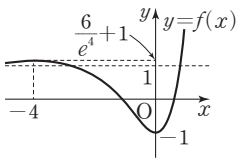
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-4	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{6}{e^4}+1$ 극대	↘	-1 극소	↗

이때 $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=1$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

560 답 ③

방정식 $\frac{4x}{x^2+1}=k$가 오직 한 실근을 가지려면 함수 $y=\frac{4x}{x^2+1}$의 그래프와 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\frac{4x}{x^2+1}$라 하면

$f'(x)=\frac{4(x^2+1)-8x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-4x^2+4}{(x^2+1)^2}$

$=-\frac{4(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서

$(x+1)(x-1)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=1$

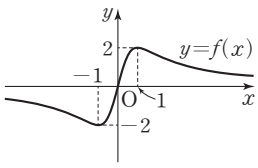
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	-2 극소	↗	2 극대	↘

이때 $f(0)=0$,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$,

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 교점이 1개가 되도록 직선 $y=k$를 그으면 정수 k는 -2, 0, 2의 3개이다.

561 답 $\frac{1}{2}$

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=\frac{10}{\pi}\cos\pi t$

$v=0$에서 $\cos\pi t=0$

$\therefore t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=\frac{3}{2}$ 또는 $t=\frac{5}{2}$ 또는 …

따라서 점 P의 속도가 처음으로 0이 되는 시각은 $\frac{1}{2}$이다.

562 답 $-2e^6$

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-e^t-te^t+ke^t$

$=-(t-k+1)e^t$

$a=\frac{dv}{dt}=-e^t-(t-k+1)e^t$

$=-(t-k+2)e^t$ ▸▸▸▸▸▸ ❶

$t=3$에서의 점 P의 속도가 $2e^3$이므로

$-(4-k)e^3=2e^3$

$k-4=2$ $\therefore k=6$ ▸▸▸▸▸▸ ❷

따라서 $a=-(t-4)e^t$이므로 $t=6$에서의 가속도는

$-2e^6$ ▸▸▸▸▸▸ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	시각 t에서의 점 P의 속도, 가속도 구하기	40 %
❷	k의 값 구하기	40 %
❸	시각 $t=k$에서의 가속도 구하기	20 %

563 답 ④

$\frac{dx}{dt}=\sin kt+kt\cos kt-2\sin kt$

$=kt\cos kt-\sin kt$

$\dfrac{dy}{dt}=\cos kt-kt\sin kt-2\cos kt$

$=-kt\sin kt-\cos kt$

이므로

$\dfrac{d^2x}{dt^2}=k\cos kt-k^2t\sin kt-k\cos kt$

$=-k^2t\sin kt$

$\dfrac{d^2y}{dt^2}=-k\sin kt-k^2t\cos kt+k\sin kt$

$=-k^2t\cos kt$

즉, 시각 t에서의 점 P의 가속도는

$(-k^2t\sin kt,\ -k^2t\cos kt)$

따라서 시각 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$(-2k^2\sin 2k,\ -2k^2\cos 2k)$

이고, 이때의 가속도의 크기는

$\sqrt{(-2k^2\sin 2k)^2+(-2k^2\cos 2k)^2}$

$=\sqrt{4k^4(\sin^2 2k+\cos^2 2k)}$

$=2k^2$

따라서 $2k^2=8$이므로

$k^2=4$ $\therefore k=2\ (\because k>0)$

564 ■ 4

$f(x)=3\ln x+\ln(12-x)$라 하면 $0<x<12$이고

$f'(x)=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{12-x}=\dfrac{36-4x}{x(12-x)}$

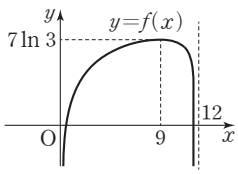
$f'(x)=0$에서

$36-4x=0$ $\therefore x=9$

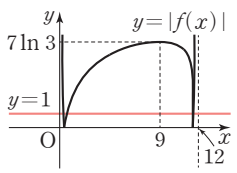
$0<x<12$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	9	…	12
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	$7\ln 3$ 극대	↘	

이때 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 12-}f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=1$은 오른쪽 그림과 같이 서로 다른 네 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



565 ■ ④

$2\sqrt{3x+1}=3x+k$에서 $2\sqrt{3x+1}-3x=k$

$f(x)=2\sqrt{3x+1}-3x$라 하면 $x\geq-\dfrac{1}{3}$이고

$f'(x)=\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}}-3$

$f'(x)=0$에서

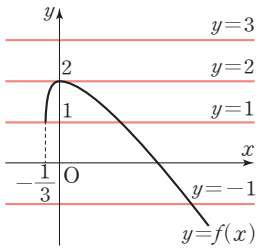
$\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}}-3=0$, $\sqrt{3x+1}=1$

$3x+1=1$ $\therefore x=0$

$x\geq-\dfrac{1}{3}$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-\frac{1}{3}$	…	0	…
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$	1	↗	2 극대	↘

이때 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



ㄱ. $k=-1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 1이므로 오직 한 실근을 갖는다.

ㄴ. $k=1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 2이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $k=2$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 1이므로 오직 한 실근을 갖는다.

ㄹ. $k=3$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 없으므로 실근은 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

566 ■ 14

$\ln x-x=n-16$에서 $\ln x-x+16=n$이므로 이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=\ln x-x+16$의 그래프와 직선 $y=n$이 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=\ln x-x+16$이라 하면 $x>0$이고

$f'(x)=\frac{1}{x}-1=-\frac{x-1}{x}$

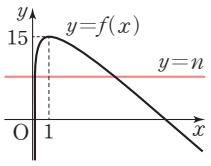
$f'(x)=0$에서 $x-1=0$ $\therefore x=1$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	15 극대	↘

이때 $\lim_{x\to 0+} f(x)=-\infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 교점이 2개가 되도록 직선 $y=n$을 그으면

$n<15$

따라서 구하는 자연수 n의 개수는 1, 2, 3, …, 14의 14이다.

567 6

$f(x)=\sin^2 x+2\sin x-3k+15$라 하면

$f'(x)=2\sin x\cos x+2\cos x$

$=2\cos x(\sin x+1)$

$f'(x)=0$에서

$\cos x=0$ 또는 $\sin x=-1$

$\therefore x=\frac{\pi}{2}$ ($\because 0\le x\le\pi$)

$0\le x\le\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$-3k+15$	↗	$-3k+18$ 극대	↘	$-3k+15$

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은 $-3k+18$이므로

$0\le x\le\pi$일 때, $f(x)\le 0$이 성립하려면

$-3k+18\le 0$ $\therefore k\ge 6$

따라서 k의 최솟값은 6이다.

568 $k\le-\frac{1}{3e}$

$x\ge ke^{-3x}$에서 $xe^{3x}\ge k$

$f(x)=xe^{3x}$이라 하면

$f'(x)=e^{3x}+3xe^{3x}=(3x+1)e^{3x}$

$f'(x)=0$에서

$3x+1=0$ ($\because e^{3x}>0$) $\therefore x=-\frac{1}{3}$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{3e}$ 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-\frac{1}{3e}$이므로

$f(x)\ge k$가 성립하려면

$k\le-\frac{1}{3e}$

569 ①

$ax\le\ln x+1\le\beta x$에서

$a\le\frac{\ln x+1}{x}\le\beta\left(\because \frac{1}{e}\le x\le e\right)$

$f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$이라 하면

$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times x-(\ln x+1)}{x^2}=-\frac{\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서

$\ln x=0$ $\therefore x=1$

$\frac{1}{e}\le x\le e$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1	$\cdots$	e
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	1 극대	↘	$\frac{2}{e}$

즉, 함수 $f(x)$의 최댓값은 1, 최솟값은 0이므로

$0\le\frac{\ln x+1}{x}\le 1$

따라서 $a\le 0$, $\beta\ge 1$이므로 $\beta-a$의 최솟값은

$1-0=1$

570 $0<t<\frac{\pi}{4}$

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$f'(t)=\sqrt{2}\cos t-1$, $g'(t)=-2\sin t$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이려면 속도의 부호가 서로 반대이어야 하므로 $f'(t)g'(t)<0$에서

$(\sqrt{2}\cos t-1)(-2\sin t)<0$

$0<t<\pi$에서 $-2\sin t<0$이므로

$\sqrt{2}\cos t-1>0$

$\cos t>\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore 0<t<\frac{\pi}{4}\ (\because 0<t<\pi)$

571 ②

$\frac{dx}{dt}=2+\frac{6}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=1-\frac{6}{t^2}$이므로

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{12}{t^3}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{12}{t^3}$

즉, 시각 t에서의 점 P의 가속도는 $\left(-\frac{12}{t^3}, \frac{12}{t^3}\right)$

점 P의 위치가 $(1, 5)$이려면

$2t-\frac{6}{t}=1$에서

$2t^2-t-6=0$, $(2t+3)(t-2)=0$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는 $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$이므로 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

572 (0, 2)

$\frac{dx}{dt}=2t-4$, $\frac{dy}{dt}=2$이므로 시각 t에서의 점 P의 속도는

$(2t-4, 2)$

시각 t에서의 점 P의 속력은

$\sqrt{(2t-4)^2+2^2}=\sqrt{4(t-2)^2+4}$

따라서 점 P의 속력은 $t=2$일 때 최솟값 2를 가지므로 이때의 점 P의 속도는 $(0, 2)$

573 $k\le\frac{1}{e}$ 또는 $k\ge e$

| 접근 방법 | 직선 $y=kx$가 두 곡선 $y=\ln x$, $y=e^x$과 각각 접할 때의 k의 값을 구한 후 적어도 한 곡선과 만나는 k의 값의 범위를 구한다.

두 방정식 $\ln x=kx$, $e^x=kx$ 중 적어도 하나가 실근을 가지려면 직선 $y=kx$는 두 곡선 $y=\ln x$, $y=e^x$ 중 적어도 하나와 만나야 한다.

(i) 직선 $y=kx$가 곡선 $y=\ln x$와 만나는 경우

$y=\ln x$에서 $y'=\frac{1}{x}$

직선 $y=kx$가 곡선 $y=\ln x$와 접할 때의 접점의 좌표를 $(t, \ln t)$라 하면

$kt=\ln t$ $\therefore k=\frac{\ln t}{t}$ ····· ㉠

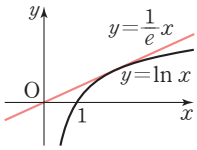
이때 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}$이므로

$k=\frac{1}{t}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{\ln t}{t}=\frac{1}{t}$, $\ln t=1$ $\therefore t=e$

이를 ㉡에 대입하면 $k=\frac{1}{e}$

따라서 직선 $y=kx$가 곡선 $y=\ln x$와 만나도록 하는 k의 값의 범위는 $k\le\frac{1}{e}$



(ii) 직선 $y=kx$가 곡선 $y=e^x$과 만나는 경우

$y=e^x$에서 $y'=e^x$

직선 $y=kx$가 곡선 $y=e^x$과 접할 때의 접점의 좌표를 (t, e^t)이라 하면

$kt=e^t$ $\therefore k=\frac{e^t}{t}$ ····· ㉢

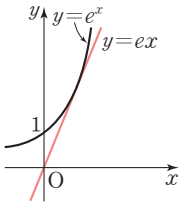
이때 접선의 기울기는 e^t이므로

$k=e^t$ ····· ㉣

㉢, ㉣에서 $\frac{e^t}{t}=e^t$ $\therefore t=1$

이를 ㉣에 대입하면 $k=e$

따라서 직선 $y=kx$가 곡선 $y=e^x$과 만나도록 하는 k의 값의 범위는 $k\ge e$



(i), (ii)에서 k의 값의 범위는

$k\le\frac{1}{e}$ 또는 $k\ge e$

574 ③

| 접근 방법 | 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 경우가 한 번뿐이려면 $t>0$에서 방정식 $f'(t)=g'(t)$가 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

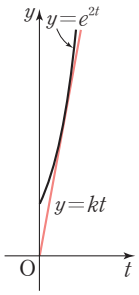
시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$f'(t)=2e^{2t}$, $g'(t)=2kt$

$f'(t)=g'(t)$에서

$2e^{2t}=2kt$ $\therefore e^{2t}=kt$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각이 한 번뿐이려면 $t>0$에서 방정식 $e^{2t}=kt$가 오직 하나의 실근을 가져야 하므로 함수 $y=e^{2t}$, 즉 $y=f(t)$의 그래프와 직선 $y=kt$가 오른쪽 그림과 같이 접해야 한다.



$h(t)=kt$라 하면

$h'(t)=k$

접점의 t좌표를 $a\,(a>0)$라 하면

$f(a)=h(a)$에서 $e^{2a}=ka$ ····· ㉠

$f'(a)=h'(a)$에서 $2e^{2a}=k$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$2ka=k$ $\therefore a=\frac{1}{2}\,(\because k\neq 0)$

이를 ㉡에 대입하면

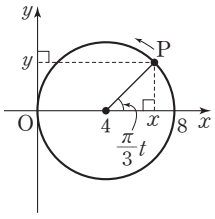
$k=2e$

575 $\frac{4}{9}\pi^2$

| 접근 방법 | 매초 움직이는 각의 크기를 파악한 후 점 P의 좌표를 시각 t에 대한 식으로 나타낸다.

점 P가 6초 동안 1회전 하므로 매초 $\frac{\pi}{3}$만큼 회전한다.

즉, t초 동안 $\frac{\pi}{3}t$만큼 회전하므로 t초 후의 점 P의 좌표를 (x, y)라 하면



$x=4+4\cos\frac{\pi}{3}t$, $y=4\sin\frac{\pi}{3}t$

$\frac{dx}{dt}=-\frac{4}{3}\pi\sin\frac{\pi}{3}t$, $\frac{dy}{dt}=\frac{4}{3}\pi\cos\frac{\pi}{3}t$이므로

$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{4}{9}\pi^2\cos\frac{\pi}{3}t$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{4}{9}\pi^2\sin\frac{\pi}{3}t$

즉, 시각 t에서의 점 P의 가속도는

$\left(-\frac{4}{9}\pi^2\cos\frac{\pi}{3}t,\ -\frac{4}{9}\pi^2\sin\frac{\pi}{3}t\right)$

따라서 $t=12$에서의 점 P의 가속도는 $\left(-\frac{4}{9}\pi^2,\ 0\right)$이므로 구하는 가속도의 크기는

$\sqrt{\left(-\frac{4}{9}\pi^2\right)^2+0^2}=\frac{4}{9}\pi^2$

Ⅲ. 적분법

01 여러 가지 함수의 적분

개념 확인 293쪽

576 (1) $-\frac{1}{x}+C$ (2) $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$ (3) $-2\ln|x|+C$

(1) $\int\frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx$

$=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$

$=-x^{-1}+C=-\frac{1}{x}+C$

(2) $\int\sqrt[3]{x^2}\,dx=\int x^{\frac{2}{3}}dx$

$=\frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1}+C$

$=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+C=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$

(3) $\int\left(-\frac{2}{x}\right)dx=-2\int\frac{1}{x}dx=-2\ln|x|+C$

577 (1) $2e^x+C$ (2) $\frac{3^{x+1}}{\ln 3}+C$ (3) $-e^x+\frac{4^x}{\ln 4}+C$

(1) $\int 2e^x dx=2\int e^x dx=2e^x+C$

(2) $\int 3^{x+1}dx=3\int 3^x dx=3\times\frac{3^x}{\ln 3}+C=\frac{3^{x+1}}{\ln 3}+C$

(3) $\int(-e^x+4^x)\,dx=-\int e^x dx+\int 4^x dx$

$=-e^x+\frac{4^x}{\ln 4}+C$

578 (1) $3x+5\sin x+C$ (2) $-\cos x+4\tan x+C$ (3) $-2\csc x+C$

(1) $\int(3+5\cos x)\,dx=\int 3dx+5\int\cos x\,dx$

$=3x+5\sin x+C$

(2) $\int(\sin x+4\sec^2 x)\,dx$

$=\int\sin x\,dx+4\int\sec^2 x\,dx$

$=-\cos x+4\tan x+C$

(3) $\int 2\csc x\cot x\,dx=2\int \csc x\cot x\,dx$

$=-2\csc x+C$

유제 295~299쪽

579 답 (1) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-4x+8\sqrt{x}+C$

(2) $\frac{1}{2}x^2+x-6\ln|x|+\frac{6}{x}+C$

(3) $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}-\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+x+C$

(4) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x^2+C$

(1) $\int \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}}dx$

$=\int \frac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}}dx=\int (x^{\frac{1}{2}}-4+4x^{-\frac{1}{2}})\,dx$

$=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}-4x+4\times\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}+C$

$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-4x+8x^{\frac{1}{2}}+C$

$=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-4x+8\sqrt{x}+C$

(2) $\int \frac{(x+1)(x^2-6)}{x^2}dx$

$=\int \frac{x^3+x^2-6x-6}{x^2}dx$

$=\int \left(x+1-\frac{6}{x}-6x^{-2}\right)dx$

$=\frac{1}{2}x^2+x-6\ln|x|-6\times\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C$

$=\frac{1}{2}x^2+x-6\ln|x|+6x^{-1}+C$

$=\frac{1}{2}x^2+x-6\ln|x|+\frac{6}{x}+C$

(3) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

$=\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)}{\sqrt[3]{x}+1}dx$

$=\int (\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1)\,dx=\int (x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1)\,dx$

$=\frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1}-\frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{\frac{1}{3}+1}+x+C$

$=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}+x+C$

$=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}-\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+x+C$

(4) $\int \frac{x^2-4x}{\sqrt{x}+2}dx$

$=\int \frac{x(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2}dx$

$=\int x(\sqrt{x}-2)\,dx=\int (x\sqrt{x}-2x)\,dx$

$=\int (x^{\frac{3}{2}}-2x)\,dx$

$=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}-x^2+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-x^2+C$

$=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-x^2+C$

580 답 $2\ln 2+\frac{27}{8}$

$F(x)$

$=\int f(x)\,dx=\int \frac{x^3-1}{x^4-x^3}dx$

$=\int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3(x-1)}dx$

$=\int \frac{x^2+x+1}{x^3}dx=\int \left(\frac{1}{x}+x^{-2}+x^{-3}\right)dx$

$=\ln|x|+\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+\frac{1}{-3+1}x^{-3+1}+C$

$=\ln|x|-x^{-1}-\frac{1}{2}x^{-2}+C$

$=\ln|x|-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+C$

$\therefore F(2)-F\left(\frac{1}{2}\right)$

$=\left(\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+C\right)-\left(\ln\frac{1}{2}-2-2+C\right)$

$=2\ln 2+\frac{27}{8}$

581 답 $27-12\ln 4$

$f(x)=\int \left(x-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)\left(x+\frac{4}{\sqrt{x}}\right)dx$

$=\int \left(x^2+\sqrt{x}-\frac{12}{x}\right)dx$

$=\int \left(x^2+x^{\frac{1}{2}}-\frac{12}{x}\right)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}-12\ln|x|+C$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-12\ln|x|+C$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-12\ln|x|+C$

$f(1)=\frac{4}{3}$에서 $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+C=\frac{4}{3}$ $\quad\therefore C=\frac{1}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{3}x\sqrt{x}-12\ln|x|+\frac{1}{3}$이므로

$f(4)=\frac{64}{3}+\frac{16}{3}-12\ln 4+\frac{1}{3}=27-12\ln 4$

582 답 (1) $-\frac{2}{x}-e^{x-2}+C$

(2) $\frac{9^x}{\ln 9}-\frac{4\times 3^x}{\ln 3}+4x+C$

(3) $\frac{1}{2}x^2+e^x+C$

(4) $\frac{5^x}{\ln 5}-\frac{2^x}{\ln 2}+C$

(1) $\int\frac{2-x^2e^{x-2}}{x^2}dx=\int(2x^{-2}-e^{x-2})\,dx$

$=\int\left(2x^{-2}-\frac{e^x}{e^2}\right)dx$

$=\frac{2}{-2+1}x^{-2+1}-\frac{e^x}{e^2}+C$

$=-2x^{-1}-e^{x-2}+C$

$=-\frac{2}{x}-e^{x-2}+C$

(2) $\int(3^x-2)^2dx=\int(9^x-4\times 3^x+4)\,dx$

$=\frac{9^x}{\ln 9}-\frac{4\times 3^x}{\ln 3}+4x+C$

(3) $\int\frac{x^3+e^{3x}}{x^2-xe^x+e^{2x}}dx$

$=\int\frac{(x+e^x)(x^2-xe^x+e^{2x})}{x^2-xe^x+e^{2x}}dx$

$=\int(x+e^x)\,dx=\frac{1}{2}x^2+e^x+C$

(4) $\int\frac{25^x-4^x}{5^x+2^x}dx=\int\frac{(5^x+2^x)(5^x-2^x)}{5^x+2^x}dx$

$=\int(5^x-2^x)\,dx$

$=\frac{5^x}{\ln 5}-\frac{2^x}{\ln 2}+C$

583 답 $4e^x+C$

$\int(e^x+1)^2dx-\int(e^x-1)^2dx$

$=\int(e^{2x}+2e^x+1)\,dx-\int(e^{2x}-2e^x+1)\,dx$

$=\int\{(e^{2x}+2e^x+1)-(e^{2x}-2e^x+1)\}\,dx$

$=\int 4e^x\,dx=4e^x+C$

584 답 $2\ln 2$

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{4-e^{2x}}{2+e^x}dx$

$=\int\frac{(2+e^x)(2-e^x)}{2+e^x}dx$

$=\int(2-e^x)\,dx$

$=2x-e^x+C$

$f(0)=1$에서

$-1+C=1$ $\quad\therefore C=2$

따라서 $f(x)=2x-e^x+2$이므로

$f(\ln 2)=2\ln 2-e^{\ln 2}+2=2\ln 2$

585 답 (1) $4x-4\cos x+C$

(2) $-\cot x+3x+C$

(3) $x-\cos x+C$

(4) $\frac{3}{2}\tan x+C$

(1) $\int\frac{4\cos^2 x}{1-\sin x}dx$

$=\int\frac{4(1-\sin^2 x)}{1-\sin x}dx$

$=\int\frac{4(1+\sin x)(1-\sin x)}{1-\sin x}dx$

$=\int 4(1+\sin x)\,dx=\int(4+4\sin x)\,dx$

$=4x-4\cos x+C$

(2) $\int(\cot^2 x+4)\,dx=\int\{(\csc^2 x-1)+4\}\,dx$

$=\int(\csc^2 x+3)\,dx$

$=-\cot x+3x+C$

(3) $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$

$=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx$

$=\int(1+\sin x)\,dx$

$=x-\cos x+C$

(4) $\int\frac{3}{1+\cos 2x}dx=\int\frac{3}{1+(2\cos^2 x-1)}dx$

$=\int\frac{3}{2\cos^2 x}dx$

$=\frac{3}{2}\int\sec^2 x\,dx$

$=\frac{3}{2}\tan x+C$

586 답 $f(x)=\sec x+1$

$$f(x)=\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{1}{\cos x}\right)dx$$
$$=\int \tan x\sec x\,dx=\sec x+C$$

$f(0)=2$에서 $1+C=2$ $\quad\therefore C=1$

$\therefore f(x)=\sec x+1$

587 답 $1+\frac{\pi}{4}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $\cos^2\frac{x}{2}$이므로 $f'(x)=\cos^2\frac{x}{2}$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx$$
$$=\int\frac{\cos x+1}{2}dx \quad \blacktriangleleft\ 2\cos^2\frac{x}{2}=\cos x+1$$
$$=\int\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x+C$$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$을 지나므로

$f(0)=\frac{1}{2}$에서 $C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}=1+\frac{\pi}{4}$

개념 확인 301쪽

588 답 (1) 5 (2) $\frac{3}{4}$ (3) 2 (4) $\frac{30}{\ln 6}$ (5) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ (6) $\sqrt{3}$

(1) $\int_e^{e^2}\frac{5}{x}dx=5\int_e^{e^2}\frac{1}{x}dx=5\Big[\ln|x|\Big]_e^{e^2}$
$=5(2-1)=5$

(2) $\int_0^1\sqrt[3]{x}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}dx=\Big[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big]_0^1=\frac{3}{4}$

(3) $\int_0^{\ln 3}e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^{\ln 3}=3-1=2$

(4) $\int_1^2 6^x dx=\Big[\frac{6^x}{\ln 6}\Big]_1^2=\frac{36}{\ln 6}-\frac{6}{\ln 6}=\frac{30}{\ln 6}$

(5) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$
$=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^2 x\,dx=\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\sqrt{3}-0=\sqrt{3}$

589 답 (1) 0 (2) $2\sqrt{2}$

(1) $f(x)=4\sin x$라 하면

$f(-x)=4\sin(-x)=-4\sin x=-f(x)$

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}4\sin x\,dx=0$

(2) $f(x)=2\cos x$라 하면

$f(-x)=2\cos(-x)=2\cos x=f(x)$

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2\cos x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos x\,dx$$
$$=2\Big[2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=2(\sqrt{2}-0)=2\sqrt{2}$$

유제 303~309쪽

590 답 (1) $4\ln 2+\frac{3}{4}$ (2) $\frac{58}{5}$

(1) $\int_2^4\frac{4x+3}{x^2}dx=\int_2^4\left(\frac{4}{x}+3x^{-2}\right)dx$
$=\Big[4\ln|x|-3x^{-1}\Big]_2^4$
$=\left(4\ln 4-\frac{3}{4}\right)-\left(4\ln 2-\frac{3}{2}\right)$
$4\ln 4=8\ln 2$
$=4\ln 2+\frac{3}{4}$

(2) $\int_1^8(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt[3]{x}-1)\,dx$
$=\int_1^8(\sqrt[3]{x^2}-1)\,dx=\int_1^8(x^{\frac{2}{3}}-1)\,dx$
$=\Big[\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}-x\Big]_1^8=\left(\frac{96}{5}-8\right)-\left(\frac{3}{5}-1\right)=\frac{58}{5}$

591 답 (1) 28 (2) $\frac{424}{3}$

(1) $\int_1^4\frac{9x-1}{3\sqrt{x}+1}dx+\int_1^4\frac{9x-1}{3\sqrt{x}-1}dx$
$=\int_1^4\frac{(3\sqrt{x}+1)(3\sqrt{x}-1)}{3\sqrt{x}+1}dx$
$+\int_1^4\frac{(3\sqrt{x}+1)(3\sqrt{x}-1)}{3\sqrt{x}-1}dx$
$=\int_1^4(3\sqrt{x}-1)\,dx+\int_1^4(3\sqrt{x}+1)\,dx$
$=\int_1^4\{(3\sqrt{x}-1)+(3\sqrt{x}+1)\}\,dx$
$=\int_1^4 6\sqrt{x}\,dx=\int_1^4 6x^{\frac{1}{2}}dx$
$=\Big[4x^{\frac{3}{2}}\Big]_1^4=32-4=28$

(2) $\int_0^9 (\sqrt{x}+2)^2 dx - \int_0^1 (\sqrt{x}+2)^2 dx$

$= \int_0^9 (\sqrt{x}+2)^2 dx + \int_1^0 (\sqrt{x}+2)^2 dx$

$= \int_1^9 (\sqrt{x}+2)^2 dx$

$= \int_1^9 (x+4\sqrt{x}+4)\, dx$

$= \int_1^9 (x+4x^{\frac{1}{2}}+4)\, dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x \right]_1^9$

$= \left(\frac{81}{2} + 72 + 36 \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{8}{3} + 4 \right) = \frac{424}{3}$

592 $12\ln 2 + 6$

$\int_1^2 \frac{(x+2)^3}{x^3} dx - \int_1^2 \frac{(t-2)^3}{t^3} dt$

$= \int_1^2 \frac{(x+2)^3}{x^3} dx - \int_1^2 \frac{(x-2)^3}{x^3} dx$

$= \int_1^2 \left\{ \frac{(x+2)^3}{x^3} - \frac{(x-2)^3}{x^3} \right\} dx$

$= \int_1^2 \frac{(x^3+6x^2+12x+8) - (x^3-6x^2+12x-8)}{x^3} dx$

$= \int_1^2 \frac{12x^2+16}{x^3} dx$

$= \int_1^2 \left(\frac{12}{x} + 16x^{-3} \right) dx$

$= \left[12\ln|x| - 8x^{-2} \right]_1^2$

$= (12\ln 2 - 2) - (-8) = 12\ln 2 + 6$

593 3

$\int_0^4 f(x)\, dx = \int_0^4 5\sqrt{x}(x+a)\, dx$

$= \int_0^4 (5x\sqrt{x} + 5a\sqrt{x})\, dx$

$= \int_0^4 (5x^{\frac{3}{2}} + 5ax^{\frac{1}{2}})\, dx$

$= \left[2x^{\frac{5}{2}} + \frac{10}{3}ax^{\frac{3}{2}} \right]_0^4$

$= 64 + \frac{80}{3}a$

$\int_0^4 f(x)\, dx = 144$에서

$64 + \frac{80}{3}a = 144$

$\frac{80}{3}a = 80 \qquad \therefore a = 3$

594 (1) $\frac{7}{\ln 2} + 3$ (2) $2 - \ln 2$

(1) $\int_0^3 \frac{8^x+1}{4^x-2^x+1} dx$

$= \int_0^3 \frac{(2^x+1)(4^x-2^x+1)}{4^x-2^x+1} dx$

$= \int_0^3 (2^x+1)\, dx$

$= \left[\frac{2^x}{\ln 2} + x \right]_0^3$

$= \left(\frac{8}{\ln 2} + 3 \right) - \frac{1}{\ln 2} = \frac{7}{\ln 2} + 3$

(2) $\int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^{\frac{x}{2}}+1)(e^{\frac{x}{2}}-1)\, dx$

$= \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^x - 1)\, dx$

$= \left[e^x - x \right]_{\ln 2}^{\ln 4}$

$= (4 - \ln 4) - (2 - \ln 2)$

$= 2 - \ln 2$

595 (1) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (2) $\frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3}\pi$

(1) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan x + \cot x)^2 dx$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan^2 x + 2 + \cot^2 x)\, dx$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \{ (\sec^2 x - 1) + 2 + (\csc^2 x - 1) \}\, dx$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x + \csc^2 x)\, dx$

$= \left[\tan x - \cot x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - (1 - 1) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(2) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + 4\sin^2 x}{1 - \cos^2 x} dx$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + 4\sin^2 x}{\sin^2 x} dx$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\csc^2 x + 4)\, dx$

$= \left[-\cot x + 4x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3}\pi \right) - \left(-\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi \right)$

$= \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2}{3}\pi$

596 답 e^2+1

$$\int_0^{\ln 5}\sqrt{e^{2x}+2e^x+1}\,dx-\int_2^{\ln 5}\sqrt{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 5}\sqrt{e^{2x}+2e^x+1}\,dx+\int_{\ln 5}^{2}\sqrt{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$$
$$=\int_0^{2}\sqrt{e^{2x}+2e^x+1}\,dx$$
$$=\int_0^{2}\sqrt{(e^x+1)^2}\,dx=\int_0^{2}(e^x+1)\,dx$$
$$=\Big[e^x+x\Big]_0^2$$
$$=(e^2+2)-1=e^2+1$$

597 답 $2\pi+4$

$$\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx+\int_0^{\pi}(\sin x+1)^2\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}\{\cos^2 x+(\sin x+1)^2\}\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}(\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x+1)\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}(2+2\sin x)\,dx$$
$$=\Big[2x-2\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=(2\pi+2)-(-2)=2\pi+4$$

598 답 $6-\frac{1}{e}-2e$

$0\le x\le 1$일 때 $f(x)=e^{x-1}$이고, $1\le x\le e$일 때
$f(x)=\frac{3}{x}-2$이므로

$$\int_0^e f(x)\,dx=\int_0^1 e^{x-1}dx+\int_1^e\Big(\frac{3}{x}-2\Big)dx$$
$$=\frac{1}{e}\int_0^1 e^x\,dx+\int_1^e\Big(\frac{3}{x}-2\Big)dx$$
$$=\frac{1}{e}\Big[e^x\Big]_0^1+\Big[3\ln|x|-2x\Big]_1^e$$
$$=\frac{1}{e}(e-1)+\{(3-2e)-(-2)\}$$
$$=6-\frac{1}{e}-2e$$

599 답 $\frac{1}{e}+e-2$

$e^{x-2}-1=0$에서 $x-2=0$ $\quad\therefore x=2$

즉, $|e^{x-2}-1|=\begin{cases}-e^{x-2}+1 & (x\le 2)\\ e^{x-2}-1 & (x\ge 2)\end{cases}$이므로

$1\le x\le 2$일 때 $|e^{x-2}-1|=-e^{x-2}+1$이고,
$2\le x\le 3$일 때 $|e^{x-2}-1|=e^{x-2}-1$이다.

$$\therefore\int_1^3|e^{x-2}-1|\,dx$$
$$=\int_1^2(-e^{x-2}+1)\,dx+\int_2^3(e^{x-2}-1)\,dx$$
$$=\int_1^2\Big(-\frac{e^x}{e^2}+1\Big)dx+\int_2^3\Big(\frac{e^x}{e^2}-1\Big)dx$$
$$=\Big[-\frac{e^x}{e^2}+x\Big]_1^2+\Big[\frac{e^x}{e^2}-x\Big]_2^3$$
$$=\Big\{(-1+2)-\Big(-\frac{1}{e}+1\Big)\Big\}$$
$$+\{(e-3)-(1-2)\}$$
$$=\frac{1}{e}+e-2$$

600 답 $\frac{19}{2}$

$-2\le x\le 0$일 때 $f(x)=2^x+1$이고, $0\le x\le 4$일 때
$f(x)=x-\sqrt{x}+2$이므로

$$\int_{-2}^4 f(x)\,dx$$
$$=\int_{-2}^0(2^x+1)\,dx+\int_0^4(x-\sqrt{x}+2)\,dx$$
$$=\int_{-2}^0(2^x+1)\,dx+\int_0^4(x-x^{\frac{1}{2}}+2)\,dx$$
$$=\Big[\frac{2^x}{\ln 2}+x\Big]_{-2}^0+\Big[\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x\Big]_0^4$$
$$=\Big\{\frac{1}{\ln 2}-\Big(\frac{1}{4\ln 2}-2\Big)\Big\}+\Big(8-\frac{16}{3}+8\Big)$$
$$=\frac{3}{4\ln 2}+\frac{38}{3}$$

따라서 $a=\frac{3}{4}$, $b=\frac{38}{3}$이므로

$$ab=\frac{19}{2}$$

601 답 2

$\sin x-\sqrt{3}\cos x=0$에서
$\sin x=\sqrt{3}\cos x$, $\tan x=\sqrt{3}$
$\therefore x=\frac{\pi}{3}\ \left(\because 0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$
즉,
$|\sin x-\sqrt{3}\cos x|$

$$=\begin{cases}-\sin x+\sqrt{3}\cos x & \left(0\le x\le\frac{\pi}{3}\right)\\ \sin x-\sqrt{3}\cos x & \left(\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

이다.

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x-\sqrt{3}\cos x|\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}} (-\sin x+\sqrt{3}\cos x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x-\sqrt{3}\cos x)\,dx$$
$$=\Big[\cos x+\sqrt{3}\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} + \Big[-\cos x-\sqrt{3}\sin x\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\Big\{\Big(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\Big)-1\Big\}+\Big\{-\sqrt{3}-\Big(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\Big)\Big\}$$
$$=3-\sqrt{3}$$

따라서 $a=3$, $b=-1$이므로

$a+b=2$

602 답 (1) -2 (2) $2\sqrt{3}$

(1) $f(x)=x\tan^2 x$, $g(x)=2\cos x$라 하면

$f(-x)=-x\tan^2(-x)$
$=-x\tan^2 x=-f(x)$

$g(-x)=2\cos(-x)=2\cos x=g(x)$

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (x\tan^2 x-2\cos x)\,dx$
$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} x\tan^2 x\,dx-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 2\cos x\,dx$
$=0-2\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos x\,dx$
$=-2\Big[2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}$
$=-2\times 1=-2$

(2) $f(x)=2x+x^2\sin x$, $g(x)=\sec^2 x$라 하면

$f(-x)=2\times(-x)+(-x)^2\sin(-x)$
$=-2x-x^2\sin x$
$=-(2x+x^2\sin x)=-f(x)$

$g(-x)=\sec^2(-x)=\sec^2 x=g(x)$

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2x+\sec^2 x+x^2\sin x)\,dx$
$=\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (2x+x^2\sin x)\,dx+\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\,dx$
$=0+2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x\,dx$
$=2\Big[\tan x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$
$=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

603 답 12

함수 $y=|\cos x|$의 주기가 π이므로

$$\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx=\int_{\pi}^{2\pi} |\cos x|\,dx=\int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x|\,dx$$
$$=\cdots=\int_{5\pi}^{6\pi} |\cos x|\,dx$$

$$\therefore \int_0^{6\pi} |\cos x|\,dx$$
$$=\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx+\int_{\pi}^{2\pi} |\cos x|\,dx + \int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x|\,dx+\cdots+\int_{5\pi}^{6\pi} |\cos x|\,dx$$
$$=6\int_0^{\pi} |\cos x|\,dx$$
$$=6\Big\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\,dx\Big\}$$
$$=6\Big(\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\Big[-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\Big)$$
$$=6(1+1)=12$$

604 답 $6-\frac{3}{2}\pi$

$f(x)=(x^3+3)\tan^2 x=x^3\tan^2 x+3\tan^2 x$에서

$g(x)=x^3\tan^2 x$, $h(x)=3\tan^2 x$라 하면

$g(-x)=(-x)^3\tan^2(-x)$
$=-x^3\tan^2 x=-g(x)$

$h(-x)=3\tan^2(-x)=3\tan^2 x=h(x)$

$$\therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (x^3\tan^2 x+3\tan^2 x)\,dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x^3\tan^2 x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 3\tan^2 x\,dx$$
$$=0+2\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\tan^2 x\,dx$$
$$=6\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\,dx$$
$$=6\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x-1)\,dx$$
$$=6\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=6\Big(1-\frac{\pi}{4}\Big)=6-\frac{3}{2}\pi$$

605 답 6

함수 $y=|3\sin x|$의 주기가 π이므로

$$\int_a^{a+\pi}|3\sin x|\,dx=\int_0^{\pi}|3\sin x|\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}3\sin x\,dx$$
$$=\Big[-3\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=3-(-3)=6$$

연습문제 310~312쪽

606 답 ④

$$f(x)=\int\frac{\sqrt[3]{x}+2}{x}\,dx$$
$$=\int\left(x^{-\frac{2}{3}}+\frac{2}{x}\right)dx$$
$$=3x^{\frac{1}{3}}+2\ln|x|+C$$
$$=3\sqrt[3]{x}+2\ln|x|+C$$

$f(1)=-3$에서

$3+C=-3 \quad \therefore C=-6$

따라서 $f(x)=3\sqrt[3]{x}+2\ln|x|-6$이므로

$f(8)=6+2\ln 8-6=6\ln 2$

607 답 e^3

$f'(x)=\dfrac{e^{3x+2}-e^2}{e^{2x}+e^x+1}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int\frac{e^{3x+2}-e^2}{e^{2x}+e^x+1}\,dx$$
$$=\int\frac{e^2(e^{3x}-1)}{e^{2x}+e^x+1}\,dx$$
$$=\int\frac{e^2(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^{2x}+e^x+1}\,dx$$
$$=e^2\int(e^x-1)\,dx$$
$$=e^2(e^x-x)+C$$
$$=e^{x+2}-e^2x+C$$

이때 곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 2e^2)$을 지나므로

$f(0)=2e^2$에서

$e^2+C=2e^2 \quad \therefore C=e^2$

$\therefore f(x)=e^{x+2}-e^2x+e^2$

따라서 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ a)$를 지나므로

$f(1)=a$에서

$a=e^3-e^2+e^2=e^3$

608 답 $f(x)=-\cos x+3$

$f'(x)=\dfrac{\sin x}{(1+\tan^2 x)\cos^2 x}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int\frac{\sin x}{(1+\tan^2 x)\cos^2 x}\,dx$$
$$=\int\frac{\sin x}{\sec^2 x\cos^2 x}\,dx$$
$$=\int\sin x\,dx$$
$$=-\cos x+C$$

$f(\pi)=4$에서

$1+C=4 \quad \therefore C=3$

$\therefore f(x)=-\cos x+3$

609 답 $\dfrac{64}{3}$

$$\int_1^3 f(x)\,dx-\int_2^3 f(x)\,dx+\int_2^9 f(x)\,dx$$
$$=\int_1^3 f(x)\,dx+\int_3^2 f(x)\,dx+\int_2^9 f(x)\,dx$$
$$=\int_1^2 f(x)\,dx+\int_2^9 f(x)\,dx$$
$$=\int_1^9 f(x)\,dx$$
$$=\int_1^9\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$
$$=\int_1^9\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x^{\frac{1}{2}}\right]_1^9$$
$$=(18+6)-\left(\frac{2}{3}+2\right)$$
$$=\frac{64}{3}$$

610 ③

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\tan x}{\tan 2x \sin^2 x}\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\tan x}{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\times \sin^2 x}\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan^2 x}{\sin^2 x}\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (\csc^2 x-\sec^2 x)\,dx$$

$$=\Big[-\cot x-\tan x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=(-1-1)-\left(-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$=\frac{4\sqrt{3}}{3}-2$$

611 ③

$9^x-3^x=0$에서 $3^{2x}-3^x=0$

$3^x\neq 0$이므로 $3^x-1=0$ $\quad\therefore x=0$

따라서 $|9^x-3^x|=\begin{cases}-9^x+3^x & (x\le 0)\\ 9^x-3^x & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$$\int_{-1}^{1} |9^x-3^x|\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0} (-9^x+3^x)\,dx+\int_{0}^{1} (9^x-3^x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{9^x}{\ln 9}+\frac{3^x}{\ln 3}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{9^x}{\ln 9}-\frac{3^x}{\ln 3}\right]_{0}^{1}$$

$$=\left\{\left(-\frac{1}{\ln 9}+\frac{1}{\ln 3}\right)-\left(-\frac{1}{9\ln 9}+\frac{1}{3\ln 3}\right)\right\}$$

$$+\left\{\left(\frac{9}{\ln 9}-\frac{3}{\ln 3}\right)-\left(\frac{1}{\ln 9}-\frac{1}{\ln 3}\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{9\ln 3}+\frac{2}{\ln 3}=\frac{20}{9\ln 3}$$

612 2

$F(x)=xf(x)+\ln x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+\frac{1}{x}$$

$$xf'(x)=-\frac{1}{x}$$

$$\therefore f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$

$$=\int\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int(-x^{-2})\,dx$$

$$=\frac{1}{x}+C$$

이므로 $f(2)=\frac{3}{2}$에서

$$\frac{1}{2}+C=\frac{3}{2} \quad\therefore C=1$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{x}+1$이므로

$f(1)=1+1=2$

613 $6-\ln 3$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$에서 $x\to 0$일 때 (분모) $\to 0$이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$에서

$\lim_{x\to 0} f(x)=0$ $\quad\therefore f(0)=0$

또 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$이므로

$f'(0)=2$에서

$3+a=2$ $\quad\therefore a=-1$ ▸▸▸▸▸▸ ❶

즉, $f'(x)=3e^x-1$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3e^x-1)\,dx$$

$$=3e^x-x+C$$

$f(0)=0$에서

$3+C=0$ $\quad\therefore C=-3$

따라서 $f(x)=3e^x-x-3$이므로 ▸▸▸▸▸▸ ❷

$f(\ln 3)=9-\ln 3-3=6-\ln 3$ ▸▸▸▸▸▸ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	a의 값 구하기	30 %
❷	$f(x)$ 구하기	50 %
❸	$f(\ln 3)$의 값 구하기	20 %

614 ⑤

$$f(x)=\int\left(2\sin^2\frac{x}{2}+1\right)dx$$

$$=\int(1-\cos x+1)\,dx$$

$$=\int(2-\cos x)\,dx$$

$$=2x-\sin x+C$$

$f'(x)=2\sin^2\frac{x}{2}+1$이므로 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{3}f'(\pi)$에서

$\pi-1+C=\frac{1}{3}\times 3 \quad \therefore C=2-\pi$

따라서 $f(x)=2x-\sin x+2-\pi$이므로

$f(\pi)=2\pi+2-\pi=\pi+2$

615 ④

$f'(x)+g'(x)=-2\sin x+3 \quad \cdots\cdots ㉠$

$f'(x)-g'(x)=2\cos x+1 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠+㉡을 하면 $2f'(x)=-2\sin x+2\cos x+4$

$\therefore f'(x)=-\sin x+\cos x+2$

㉠−㉡을 하면 $2g'(x)=-2\sin x-2\cos x+2$

$\therefore g'(x)=-\sin x-\cos x+1$

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(-\sin x+\cos x+2)\,dx$

$=\cos x+\sin x+2x+C_1$

이므로 $f(0)=2$에서

$1+C_1=2 \quad \therefore C_1=1$

$\therefore f(x)=\cos x+\sin x+2x+1$

$g(x)=\int g'(x)\,dx$

$=\int(-\sin x-\cos x+1)\,dx$

$=\cos x-\sin x+x+C_2$

이므로 $g(0)=1$에서

$1+C_2=1 \quad \therefore C_2=0$

$\therefore g(x)=\cos x-\sin x+x$

$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right)-2g\left(\frac{\pi}{2}\right)=(1+\pi+1)-2\left(-1+\frac{\pi}{2}\right)$

$=4$

616 ②

$a_n=\int_n^{n+1}2^x\,dx=\left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_n^{n+1}$

$=\frac{2^{n+1}}{\ln 2}-\frac{2^n}{\ln 2}=\frac{2^n}{\ln 2}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+1}{4a_n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+1}{4\times\frac{2^n}{\ln 2}+3}$

$=\frac{2}{\frac{4}{\ln 2}}=\frac{\ln 2}{2}$

617 $\frac{4\sqrt{3}}{3}-2$

$f(x)=1-\cos x+\cos^2 x-\cos^3 x+\cdots$

$=\sum_{n=1}^{\infty}(-\cos x)^{n-1}$

$=\frac{1}{1+\cos x}\ (\because -1<-\cos x<1)$

$\therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}f(x)\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{1+\cos x}\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos x}{(1+\cos x)(1-\cos x)}\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}\,dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos x}{\sin x}\times\frac{1}{\sin x}\right)dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(\csc^2 x-\cot x\csc x)\,dx$

$=\left[-\cot x+\csc x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$

$=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)-(-\sqrt{3}+2)=\frac{4\sqrt{3}}{3}-2$

618 $5-\frac{3}{e^2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1-}f(x)=f(1)$에서

$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{2}{x^2}+a\right)=\lim_{x\to 1-}3e^{x-1}$

$2+a=3 \quad \therefore a=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}3e^{x-1} & (x<1)\\ \frac{2}{x^2}+1 & (x\geq 1)\end{cases}$이므로

$\int_{-1}^{2}f(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}3e^{x-1}\,dx+\int_{1}^{2}\left(\frac{2}{x^2}+1\right)dx$

$=\frac{3}{e}\int_{-1}^{1}e^x\,dx+\int_{1}^{2}(2x^{-2}+1)\,dx$

$=\frac{3}{e}\left[e^x\right]_{-1}^{1}+\left[-2x^{-1}+x\right]_{1}^{2}$

$=\frac{3}{e}\left(e-\frac{1}{e}\right)+\{(-1+2)-(-2+1)\}$

$=5-\frac{3}{e^2}$

619 $\frac{3}{4}$

$2-\frac{1}{x}=0$에서

$\frac{1}{x}=2 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$

즉, $\left|2-\frac{1}{x}\right|=\begin{cases}-2+\frac{1}{x} & \left(0<x\le\frac{1}{2}\right)\\ 2-\frac{1}{x} & \left(x<0 \text{ 또는 } x\ge\frac{1}{2}\right)\end{cases}$이므로

$\int_{\frac{1}{3}}^{a}\left|2-\frac{1}{x}\right|dx$

$=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\left(-2+\frac{1}{x}\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{a}\left(2-\frac{1}{x}\right)dx\left(\because a>\frac{1}{2}\right)$

$=\left[-2x+\ln|x|\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}+\left[2x-\ln|x|\right]_{\frac{1}{2}}^{a}$

$=\left\{\left(-1+\ln\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{2}{3}+\ln\frac{1}{3}\right)\right\}$

$+\left\{(2a-\ln a)-\left(1-\ln\frac{1}{2}\right)\right\}$

$=2a-\frac{4}{3}+\ln\frac{3}{4a}$

$\int_{\frac{1}{3}}^{a}\left|2-\frac{1}{x}\right|dx=\frac{1}{6}$에서

$2a-\frac{4}{3}+\ln\frac{3}{4a}=\frac{1}{6}$

이때 a가 유리수이므로

$2a-\frac{4}{3}=\frac{1}{6}$, $\ln\frac{3}{4a}=0$

$\therefore a=\frac{3}{4}$

620 ④

$f(x)=2\sin x$, $g(x)=a\sec^2 x-1$이라 하면

$f(-x)=2\sin(-x)$

$=-2\sin x=-f(x)$

$g(-x)=a\sec^2(-x)-1$

$=a\sec^2 x-1=g(x)$

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(2\sin x+a\sec^2 x-1)\,dx$

$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}2\sin x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(a\sec^2 x-1)\,dx$

$=0+2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(a\sec^2 x-1)\,dx$

$=2\left[a\tan x-x\right]_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

$=2\left(a-\frac{\pi}{4}\right)=2a-\frac{\pi}{2}$

$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(2\sin x+a\sec^2 x-1)\,dx=\frac{3}{2}\pi$에서

$2a-\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\pi$

$2a=2\pi \quad \therefore a=\pi$

621 $\frac{20}{3}$

(가)에서

$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{1}^{3}f(x)\,dx=\int_{3}^{5}f(x)\,dx$

$=\int_{5}^{7}f(x)\,dx=\cdots$

(나)에서 $f(-x)=\sqrt{|-x|}=\sqrt{|x|}=f(x)$이므로

$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=2\int_{0}^{1}f(x)\,dx$

$\therefore \int_{-2}^{8}f(x)\,dx$

$=\int_{-2}^{-1}f(x)\,dx+\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{3}f(x)\,dx$

$+\int_{3}^{5}f(x)\,dx+\int_{5}^{7}f(x)\,dx+\int_{7}^{8}f(x)\,dx$

$=\int_{0}^{1}f(x)\,dx+4\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_{-1}^{0}f(x)\,dx$

$=5\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=10\int_{0}^{1}f(x)\,dx$

$=10\int_{0}^{1}\sqrt{|x|}\,dx=10\int_{0}^{1}\sqrt{x}\,dx$

$=10\int_{0}^{1}x^{\frac{1}{2}}\,dx$

$=10\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_{0}^{1}=\frac{20}{3}$

622 0

| 접근 방법 | 함수 $f(x)$를 구하고, $f'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 구한 후 극댓값이 $2\sqrt{2}$임을 이용하여 극솟값을 구한다.

$f(x)=\int f'(x)$

$=\int(\sin x+\cos x)\,dx$

$=-\cos x+\sin x+C$

$f'(x)=0$에서

$\sin x+\cos x=0$

$\sin x=-\cos x$, $\tan x=-1$

$\therefore x=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\frac{7}{4}\pi\ (\because 0<x<2\pi)$

$0<x<2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	$\frac{3}{4}\pi$	…	$\frac{7}{4}\pi$	…	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	$\sqrt{2}+C$ 극대	↘	$-\sqrt{2}+C$ 극소	↗	

즉, 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{4}\pi$에서 극댓값 $\sqrt{2}+C$,

$x=\frac{7}{4}\pi$에서 극솟값 $-\sqrt{2}+C$를 갖는다.

이때 함수 $f(x)$의 극댓값이 $2\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{2}+C=2\sqrt{2}$ $\therefore C=\sqrt{2}$

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은

$-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$

623 답 $\frac{1}{2}$

| 접근 방법 | x의 값의 범위에 따라 적분 구간을 나누어 정적분의 값을 함수 $f(a)$로 설정하고 $f'(a)=0$이 되는 a의 값을 구한다.

$e^x-e^a=0$에서 $e^x=e^a$ $\therefore x=a$

즉, $|e^x-e^a|=\begin{cases}-e^x+e^a & (x\le a)\\ e^x-e^a & (x\ge a)\end{cases}$이므로

$\int_0^1 |e^x-e^a|\,dx$

$=\int_0^a(-e^x+e^a)\,dx+\int_a^1(e^x-e^a)\,dx$ ($\because 0\le a\le 1$)

$=\left[-e^x+e^ax\right]_0^a+\left[e^x-e^ax\right]_a^1$

$=\{(-e^a+ae^a)-(-1)\}+\{(e-e^a)-(e^a-ae^a)\}$

$=(2a-3)e^a+1+e$

$f(a)=(2a-3)e^a+1+e$라 하면

$f'(a)=2e^a+(2a-3)e^a=(2a-1)e^a$

$f'(a)=0$에서

$2a-1=0$ ($\because e^a>0$) $\therefore a=\frac{1}{2}$

$0\le a\le 1$에서 함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	…	$\frac{1}{2}$	…	1
$f'(a)$		−	0	+	
$f(a)$	$e-2$	↘	$1+e-2\sqrt{e}$ 극소	↗	1

따라서 함수 $f(a)$는 $a=\frac{1}{2}$에서 최소이다.

01 치환적분법

개념 확인 317쪽

624 답 ②

$x^2=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면 $2x=\frac{dt}{dx}$

$\therefore \int xf(x^2)\,dx=\int f(t)\times\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int f(t)\,dt$

$=\frac{1}{2}F(t)+C=\frac{1}{2}F(x^2)+C$

625 답 (가) 2 (나) $\frac{1}{2}$ (다) $-\cos t$ (라) $-\frac{1}{2}$ (마) 2

유제 319~327쪽

626 답 (1) $-\frac{1}{10}(-2x+3)^5+C$

(2) $\frac{2}{3}(x^3+x^2-1)^6+C$

(3) $\sqrt{4x-1}+C$

(4) $2(x^2-5)\sqrt{x^2-5}+C$

(5) $\frac{2}{15}(3x+2)(x-1)\sqrt{1-x}+C$

(6) $\frac{2}{3}(x+5)\sqrt{x+2}+C$

(1) $-2x+3=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$-2=\frac{dt}{dx}$

$\therefore \int(-2x+3)^4\,dx=\int t^4\times\left(-\frac{1}{2}\right)dt$

$=-\frac{1}{2}\int t^4\,dt$

$=-\frac{1}{10}t^5+C$

$=-\frac{1}{10}(-2x+3)^5+C$

(2) $x^3+x^2-1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+2x=\frac{dt}{dx}$

$\therefore \int(12x^2+8x)(x^3+x^2-1)^5\,dx$

$=\int 4(3x^2+2x)(x^3+x^2-1)^5\,dx$

$=\int t^5\times 4\,dt=4\int t^5\,dt$

$=\frac{2}{3}t^6+C=\frac{2}{3}(x^3+x^2-1)^6+C$

(3) $4x-1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$4=\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore \displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{4x-1}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{t}}\times\frac{1}{2}\,dt$

$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$

$=t^{\frac{1}{2}}+C=\sqrt{t}+C$

$=\sqrt{4x-1}+C$

(4) $x^2-5=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x=\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore \displaystyle\int 6x\sqrt{x^2-5}\,dx=\int \sqrt{t}\times 3\,dt$

$=3\displaystyle\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$

$=2t^{\frac{3}{2}}+C=2t\sqrt{t}+C$

$=2(x^2-5)\sqrt{x^2-5}+C$

(5) $1-x=t$로 놓으면 $x=1-t$

양변을 x에 대하여 미분하면

$1=-\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore \displaystyle\int x\sqrt{1-x}\,dx$

$=\displaystyle\int (1-t)\sqrt{t}\times(-1)\,dt$

$=\displaystyle\int (t\sqrt{t}-\sqrt{t}\,)\,dt=\int (t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}})\,dt$

$=\dfrac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\dfrac{2}{5}t^2\sqrt{t}-\dfrac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

$=\dfrac{2}{5}(1-x)^2\sqrt{1-x}-\dfrac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}+C$

$=\dfrac{2}{15}(3x+2)(x-1)\sqrt{1-x}+C$

(6) $x+2=t$로 놓으면 $x=t-2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $1=\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore \displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x+2}}\,dx$

$=\displaystyle\int \frac{t+1}{\sqrt{t}}\,dt=\int (t^{\frac{1}{2}}+t^{-\frac{1}{2}})\,dt$

$=\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+2t^{\frac{1}{2}}+C=\dfrac{2}{3}t\sqrt{t}+2\sqrt{t}+C$

$=\dfrac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+2}+C$

$=\dfrac{2}{3}(x+5)\sqrt{x+2}+C$

| 다른 풀이 |

(1) $\displaystyle\int (-2x+3)^4\,dx$

$=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{5}(-2x+3)^5+C$

$=-\dfrac{1}{10}(-2x+3)^5+C$

(3) $\sqrt{4x-1}=t$로 놓고 양변을 제곱하면 $4x-1=t^2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $4=2t\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore \displaystyle\int \frac{2}{\sqrt{4x-1}}\,dx=\int \frac{1}{t}\times t\,dt=\int dt$

$=t+C$

$=\sqrt{4x-1}+C$

(4) $\sqrt{x^2-5}=t$로 놓고 양변을 제곱하면 $x^2-5=t^2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $2x=2t\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore \displaystyle\int 6x\sqrt{x^2-5}\,dx=\int t\times 6t\,dt=6\int t^2\,dt$

$=2t^3+C$

$=2(x^2-5)\sqrt{x^2-5}+C$

(5) $\sqrt{1-x}=t$로 놓고 양변을 제곱하면

$1-x=t^2$에서 $x=1-t^2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $1=-2t\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore \displaystyle\int x\sqrt{1-x}\,dx$

$=\displaystyle\int (1-t^2)t\times(-2t)\,dt=\int (2t^4-2t^2)\,dt$

$=\dfrac{2}{5}t^5-\dfrac{2}{3}t^3+C$

$=\dfrac{2}{5}(1-x)^2\sqrt{1-x}-\dfrac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}+C$

$=\dfrac{2}{15}(3x+2)(x-1)\sqrt{1-x}+C$

(6) $\sqrt{x+2}=t$로 놓고 양변을 제곱하면

$x+2=t^2$에서 $x=t^2-2$

양변을 x에 대하여 미분하면 $1=2t\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore \displaystyle\int \frac{x+3}{\sqrt{x+2}}\,dx$

$=\displaystyle\int \frac{t^2+1}{t}\times 2t\,dt=\int (2t^2+2)\,dt$

$=\dfrac{2}{3}t^3+2t+C$

$=\dfrac{2}{3}(x+2)\sqrt{x+2}+2\sqrt{x+2}+C$

$=\dfrac{2}{3}(x+5)\sqrt{x+2}+C$

627 답 $3\sqrt{5}$

$x^3+6x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^2+6=\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore f(x)=\displaystyle\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x}}\,dx$

$=\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{t}}\times\frac{1}{3}\,dt=\frac{1}{3}\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$

$=\dfrac{2}{3}t^{\frac{1}{2}}+C=\dfrac{2}{3}\sqrt{t}+C$

$=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3+6x}+C$

$f(2)=\dfrac{7\sqrt{5}}{3}$에서 $\dfrac{4\sqrt{5}}{3}+C=\dfrac{7\sqrt{5}}{3}$ $\therefore C=\sqrt{5}$

따라서 $f(x)=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3+6x}+\sqrt{5}$이므로

$f(3)=2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$

628 답 $f(x)=\dfrac{1}{3}(2-x)^6-\dfrac{3}{5}(2-x)^5+\dfrac{1}{15}$

$2-x=t$로 놓으면 $x=2-t$

양변을 x에 대하여 미분하면 $1=-\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore f(x)=\displaystyle\int f'(x)\,dx$

$=\displaystyle\int (2x-1)(2-x)^4\,dx$

$=\displaystyle\int \{2(2-t)-1\}t^4\times(-1)\,dt$

$=\displaystyle\int (2t^5-3t^4)\,dt$

$=\dfrac{1}{3}t^6-\dfrac{3}{5}t^5+C$

$=\dfrac{1}{3}(2-x)^6-\dfrac{3}{5}(2-x)^5+C$

$f(3)=1$에서 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{3}{5}+C=1$ $\therefore C=\dfrac{1}{15}$

$\therefore f(x)=\dfrac{1}{3}(2-x)^6-\dfrac{3}{5}(2-x)^5+\dfrac{1}{15}$

629 답 (1) $\dfrac{1}{6}(2e^{3x}+1)^6+C$

(2) $-\dfrac{2}{3}(e^{-x}+1)\sqrt{e^{-x}+1}+C$

(3) $2\sqrt{e^x+2}+C$

(4) $\dfrac{\ln 10}{4}(\log x)^4+C$

(5) $\dfrac{2}{3}(\ln x+4)\sqrt{\ln x+4}+C$

(6) $\{\ln(x^2+x)\}^2+C$

(1) $2e^{3x}+1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$6e^{3x}=\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore \displaystyle\int 6e^{3x}(2e^{3x}+1)^5\,dx=\int t^5\,dt$

$=\dfrac{1}{6}t^6+C$

$=\dfrac{1}{6}(2e^{3x}+1)^6+C$

(2) $e^{-x}+1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$-e^{-x}=\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore \displaystyle\int e^{-x}\sqrt{e^{-x}+1}\,dx$

$=\displaystyle\int \sqrt{t}\times(-1)\,dt=-\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$

$=-\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=-\dfrac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

$=-\dfrac{2}{3}(e^{-x}+1)\sqrt{e^{-x}+1}+C$

(3) $e^x+2=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$e^x=\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore \displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}}\,dx=\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=\int t^{-\frac{1}{2}}\,dt$

$=2t^{\frac{1}{2}}+C=2\sqrt{t}+C$

$=2\sqrt{e^x+2}+C$

(4) $\log x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{1}{x\ln 10}=\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore \displaystyle\int \frac{(\log x)^3}{x}\,dx=\int t^3\times\ln 10\,dt$

$=\ln 10\displaystyle\int t^3\,dt$

$=\dfrac{\ln 10}{4}t^4+C$

$=\dfrac{\ln 10}{4}(\log x)^4+C$

(5) $\ln x+4=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore \displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x+4}}{x}\,dx$

$=\displaystyle\int \sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$

$=\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\dfrac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

$=\dfrac{2}{3}(\ln x+4)\sqrt{\ln x+4}+C$

(6) $\ln(x^2+x)=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{2x+1}{x^2+x}=\frac{dt}{dx}$$

$$\therefore \int \frac{4x+2}{x^2+x}\ln(x^2+x)\,dx$$

$$=\int t\times 2\,dt=2\int t\,dt$$

$$=t^2+C=\{\ln(x^2+x)\}^2+C$$

630 $\frac{6}{5}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $e^x(1-e^x)^4$이므로

$f'(x)=e^x(1-e^x)^4$

$1-e^x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$-e^x=\frac{dt}{dx}$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int e^x(1-e^x)^4\,dx$$

$$=\int t^4\times(-1)\,dt=-\int t^4\,dt$$

$$=-\frac{1}{5}t^5+C$$

$$=-\frac{1}{5}(1-e^x)^5+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 1)$을 지나므로 $f(0)=1$에서

$C=1$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{5}(1-e^x)^5+1$이므로

$$f(\ln 2)=\frac{1}{5}+1=\frac{6}{5}$$

631 5

$\ln(x+3)=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{x+3}=\frac{dt}{dx}$$

$$\therefore f(x)=\int \frac{\ln(x+3)}{x+3}\,dx$$

$$=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C$$

$$=\frac{1}{2}\{\ln(x+3)\}^2+C$$

$f(e-3)=1$에서 $\frac{1}{2}+C=1$ $\quad\therefore C=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\{\ln(x+3)\}^2+\frac{1}{2}$이므로

$$f(e^3-3)=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=5$$

632 (1) $\frac{1}{3}\sin^3 2x+C$

(2) $\frac{1}{6}\sin^6 x+\frac{1}{4}\sin^4 x+\sin x+C$

(3) $-\frac{1}{4}(5+\cos x)^4+C$

(4) $\frac{2}{3}(\tan x+2)\sqrt{\tan x+2}+C$

(5) $-\cot x-\frac{1}{3}\cot^3 x+C$

(6) $-\frac{1}{2}(1-\sin x)^2+C$

(1) $\sin 2x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2\cos 2x=\frac{dt}{dx}$$

$$\therefore \int 2\cos 2x\sin^2 2x\,dx=\int t^2\,dt$$

$$=\frac{1}{3}t^3+C$$

$$=\frac{1}{3}\sin^3 2x+C$$

(2) $\sin x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\cos x=\frac{dt}{dx}$$

$$\therefore \int \cos x(\sin^5 x+\sin^3 x+1)\,dx$$

$$=\int (t^5+t^3+1)\,dt$$

$$=\frac{1}{6}t^6+\frac{1}{4}t^4+t+C$$

$$=\frac{1}{6}\sin^6 x+\frac{1}{4}\sin^4 x+\sin x+C$$

(3) $5+\cos x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$-\sin x=\frac{dt}{dx}$$

$$\therefore \int \sin x(5+\cos x)^3\,dx$$

$$=\int t^3\times(-1)\,dt=-\int t^3\,dt$$

$$=-\frac{1}{4}t^4+C=-\frac{1}{4}(5+\cos x)^4+C$$

(4) $\tan x+2=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\sec^2 x=\frac{dt}{dx}$$

$$\therefore \int \sec^2 x\sqrt{\tan x+2}\,dx$$

$$=\int \sqrt{t}\,dt=\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$=\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C$$

$$=\frac{2}{3}(\tan x+2)\sqrt{\tan x+2}+C$$

(5) $\int \csc^4 x\,dx=\int \csc^2 x \csc^2 x\,dx$

$=\int (1+\cot^2 x)\csc^2 x\,dx$

$\cot x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$-\csc^2 x=\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore \int \csc^4 x\,dx=\int (1+\cot^2 x)\csc^2 x\,dx$

$=\int (1+t^2)\times(-1)\,dt$

$=-\int (1+t^2)\,dt$

$=-t-\dfrac{1}{3}t^3+C$

$=-\cot x-\dfrac{1}{3}\cot^3 x+C$

(6) $\int \dfrac{\cos^3 x}{1+\sin x}\,dx$

$=\int \dfrac{\cos^2 x\cos x}{1+\sin x}\,dx$

$=\int \dfrac{(1-\sin^2 x)\cos x}{1+\sin x}\,dx$

$=\int \dfrac{(1+\sin x)(1-\sin x)\cos x}{1+\sin x}\,dx$

$=\int (1-\sin x)\cos x\,dx$

$1-\sin x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$-\cos x=\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore \int \dfrac{\cos^3 x}{1+\sin x}\,dx=\int (1-\sin x)\cos x\,dx$

$=\int t\times(-1)\,dt=-\int t\,dt$

$=-\dfrac{1}{2}t^2+C$

$=-\dfrac{1}{2}(1-\sin x)^2+C$

633 $\frac{3}{2}$

$\tan x+1=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$\sec^2 x=\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore F(x)=\int f(x)\,dx=\int \dfrac{3\sec^2 x}{(\tan x+1)^2}\,dx$

$=\int \dfrac{1}{t^2}\times 3\,dt=3\int t^{-2}\,dt$

$=-\dfrac{3}{t}+C=-\dfrac{3}{\tan x+1}+C$

따라서 $F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{3}{2}+C$, $f(0)=-3+C$이므로

$F\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-F(0)=\left(-\dfrac{3}{2}+C\right)-(-3+C)=\dfrac{3}{2}$

634 $f(x)=-\frac{2}{3}\cos x\sqrt{\cos x}+3$

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\,dx$

$=\int \sqrt{\cos x(1-\cos^2 x)}\,dx$

$=\int \sqrt{\cos x\sin^2 x}\,dx$

$=\int \sin x\sqrt{\cos x}\,dx$ ($\because \sin x\geq 0$)

$\cos x=t$로 놓고 양변을 x에 대하여 미분하면

$-\sin x=\dfrac{dt}{dx}$

$\therefore f(x)=\int \sin x\sqrt{\cos x}\,dx$

$=\int \sqrt{t}\times(-1)\,dt=-\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$

$=-\dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C$

$=-\dfrac{2}{3}t\sqrt{t}+C$

$=-\dfrac{2}{3}\cos x\sqrt{\cos x}+C$

$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3$에서 $C=3$

$\therefore f(x)=-\dfrac{2}{3}\cos x\sqrt{\cos x}+3$

635 (1) $2\ln|x^3-3x+9|+C$ (2) $-\ln(e^x+e^{-x})+C$ (3) $\ln|3^x+x^3|+C$ (4) $\ln|\ln 2x|+C$ (5) $-3\ln(\cos x+4)+C$ (6) $\ln|\sin x|+C$

(1) $(x^3-3x+9)'=3x^2-3$이므로

$\int \dfrac{6x^2-6}{x^3-3x+9}\,dx=2\int \dfrac{3x^2-3}{x^3-3x+9}\,dx$

$=2\int \dfrac{(x^3-3x+9)'}{x^3-3x+9}\,dx$

$=2\ln|x^3-3x+9|+C$

(2) $(e^x+e^{-x})'=e^x-e^{-x}$이므로

$$\int \frac{e^{-x}-e^x}{e^x+e^{-x}}dx=-\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$$
$$=-\int \frac{(e^x+e^{-x})'}{e^x+e^{-x}}dx$$
$$=-\ln(e^x+e^{-x})+C$$
$$(\because\ e^x+e^{-x}>0)$$

(3) $(3^x+x^3)'=3^x\ln 3+3x^2$이므로

$$\int \frac{3^x\ln 3+3x^2}{3^x+x^3}dx=\int \frac{(3^x+x^3)'}{3^x+x^3}dx$$
$$=\ln|3^x+x^3|+C$$

(4) $(\ln 2x)'=\frac{1}{x}$이므로

$$\int \frac{1}{x\ln 2x}dx=\int \frac{(\ln 2x)'}{\ln 2x}dx$$
$$=\ln|\ln 2x|+C$$

(5) $(\cos x+4)'=-\sin x$이므로

$$\int \frac{3\sin x}{\cos x+4}dx=-3\int \frac{-\sin x}{\cos x+4}dx$$
$$=-3\int \frac{(\cos x+4)'}{\cos x+4}dx$$
$$=-3\ln(\cos x+4)+C$$
$$(\because\ \cos x+4>0)$$

(6) $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$이고 $(\sin x)'=\cos x$이므로

$$\int \cot x\,dx=\int \frac{\cos x}{\sin x}dx$$
$$=\int \frac{(\sin x)'}{\sin x}dx$$
$$=\ln|\sin x|+C$$

636 **4 ln 3**

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $\frac{4x}{x^2+2}$이므로

$f'(x)=\frac{4x}{x^2+2}$

$(x^2+2)'=2x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{4x}{x^2+2}dx$$
$$=2\int \frac{2x}{x^2+2}dx=2\int \frac{(x^2+2)'}{x^2+2}dx$$
$$=2\ln(x^2+2)+C\ (\because\ x^2+2>0)$$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로 $f(0)=0$에서

$2\ln 2+C=0 \quad \therefore\ C=-2\ln 2$

따라서 $f(x)=2\ln(x^2+2)-2\ln 2$이므로

$f(4)=2\ln 18-2\ln 2=4\ln 3$

637 **0**

$\frac{1}{\sin^2 x}=\csc^2 x$이고 $(1+\cot x)'=-\csc^2 x$이므로

$$f(x)=\int \frac{1}{(1+\cot x)\sin^2 x}dx$$
$$=\int \frac{\csc^2 x}{1+\cot x}dx$$
$$=-\int \frac{-\csc^2 x}{1+\cot x}dx$$
$$=-\int \frac{(1+\cot x)'}{1+\cot x}dx$$
$$=-\ln|1+\cot x|+C$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln 2$에서 $C=\ln 2$

따라서 $f(x)=-\ln|1+\cot x|+\ln 2$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\ln 2+\ln 2=0$

638 (1) $3x-8\ln|x+2|+C$

(2) $\frac{1}{2}x^2+x+6\ln|x-2|+C$

(3) $\ln\left|\frac{x+3}{x+4}\right|+C$

(4) $\ln\left|\frac{x-6}{x+1}\right|+C$

(5) $4\ln|x-4|+5\ln|x+5|+C$

(6) $3\ln|x+1|-5\ln|x+2|+C$

(1) 분자를 분모로 나누어 식을 변형하면

$$\frac{3x-2}{x+2}=\frac{3(x+2)-8}{x+2}$$
$$=3-\frac{8}{x+2}$$
$$\therefore \int \frac{3x-2}{x+2}dx=\int\left(3-\frac{8}{x+2}\right)dx$$
$$=3x-8\ln|x+2|+C$$

(2) 분자를 분모로 나누어 식을 변형하면

$$\frac{x^2-x+4}{x-2}=\frac{(x+1)(x-2)+6}{x-2}$$
$$=x+1+\frac{6}{x-2}$$
$$\therefore \int \frac{x^2-x+4}{x-2}dx$$
$$=\int\left(x+1+\frac{6}{x-2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+x+6\ln|x-2|+C$$

(3) $\frac{1}{(x+3)(x+4)}=\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}$

$$\therefore \int \frac{1}{(x+3)(x+4)}dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)dx$$
$$=\ln|x+3|-\ln|x+4|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x+3}{x+4}\right|+C$$

(4) 분모가 인수분해되므로 식을 변형하면
$$\frac{7}{x^2-5x-6}=\frac{7}{(x+1)(x-6)}$$
$$=\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x+1}$$
$$\therefore \int \frac{7}{x^2-5x-6}dx$$
$$=\int\left(\frac{1}{x-6}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$=\ln|x-6|-\ln|x+1|+C$$
$$=\ln\left|\frac{x-6}{x+1}\right|+C$$

(5) $\frac{9x}{(x+5)(x-4)}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{x+5}$
(A, B는 상수)로 놓으면
$$\frac{9x}{(x+5)(x-4)}=\frac{(A+B)x+(5A-4B)}{(x+5)(x-4)}$$
이 식은 x에 대한 항등식이므로
$A+B=9$, $5A-4B=0$
두 식을 연립하여 풀면
$A=4$, $B=5$
$$\therefore \int \frac{9x}{(x+5)(x-4)}dx$$
$$=\int\left(\frac{4}{x-4}+\frac{5}{x+5}\right)dx$$
$$=4\ln|x-4|+5\ln|x+5|+C$$

(6) 분모를 인수분해하면
$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$이므로
$\frac{-2x+1}{x^2+3x+2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}$ (A, B는 상수)로 놓으면
$$\frac{-2x+1}{(x+1)(x+2)}=\frac{(A+B)x+(2A+B)}{(x+1)(x+2)}$$
이 식은 x에 대한 항등식이므로
$A+B=-2$, $2A+B=1$
두 식을 연립하여 풀면 $A=3$, $B=-5$
$$\therefore \int \frac{-2x+1}{x^2+3x+2}dx$$
$$=\int\left(\frac{3}{x+1}-\frac{5}{x+2}\right)dx$$
$$=3\ln|x+1|-5\ln|x+2|+C$$

639 답 -1

분자를 분모로 나누어 식을 변형하면
$$\frac{1-x}{x-3}=\frac{-(x-3)-2}{x-3}=-1-\frac{2}{x-3}$$
$$\therefore f(x)=\int\frac{1-x}{x-3}dx$$
$$=\int\left(-1-\frac{2}{x-3}\right)dx$$
$$=-x-2\ln|x-3|+C$$
$f(2)=1$에서 $-2+C=1$ $\therefore C=3$
따라서 $f(x)=-x-2\ln|x-3|+3$이므로
$f(4)=-4+3=-1$

640 답 220

주어진 식의 좌변의 분모를 인수분해하면
$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$이므로
$\frac{x-9}{x^2+2x-3}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$ (A, B는 상수)로 놓으면
$$\frac{x-9}{(x+3)(x-1)}=\frac{(A+B)x+(3A-B)}{(x+3)(x-1)}$$
이 식은 x에 대한 항등식이므로
$A+B=1$, $3A-B=-9$
두 식을 연립하여 풀면 $A=-2$, $B=3$
$$\therefore \int \frac{x-9}{x^2+2x-3}dx$$
$$=\int\left(-\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+3}\right)dx$$
$$=-2\ln|x-1|+3\ln|x+3|+C$$
$$=\ln\frac{|x+3|^3}{(x-1)^2}+C$$
따라서 $f(x)=(x-1)^2$, $g(x)=(x+3)^3$이므로
$f(3)+g(3)=4+216=220$

개념 확인 329쪽

641 답 (1) $\frac{43}{7}$ (2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^4}$

(1) $$\int_0^1(3x-1)^6dx=\left[\frac{1}{3}\times\frac{1}{7}(3x-1)^7\right]_0^1$$
$$=\frac{128}{21}-\left(-\frac{1}{21}\right)=\frac{43}{7}$$

(2) $$\int_0^2 e^{2x-4}dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x-4}\right]_0^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e^4}$$

642 답 (가) $2\cos\theta$ (나) $4\cos^2\theta$ (다) $\frac{1}{2}\sin 2\theta$ (라) π

$x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=\boxed{(가)\ 2\cos\theta}$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=2$일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$이므로

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\sin^2\theta}\times\boxed{(가)\ 2\cos\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}\times 2\cos\theta\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\boxed{(나)\ 4\cos^2\theta}}\times\boxed{(가)\ 2\cos\theta}\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\theta\,d\theta\ (\because\ 0\le\cos\theta\le 1)$$

이때 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$에서 $\cos^2\theta=\frac{\cos 2\theta+1}{2}$

이므로

$$\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}4\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta+1)\,d\theta$$
$$=2\left[\boxed{(다)\ \frac{1}{2}\sin 2\theta}+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=\boxed{(라)\ \pi}$$

유제 331~333쪽

643 답 (1) $\frac{1}{27}$ (2) 8 (3) $-\frac{13}{\ln 3}$ (4) $\frac{(\ln 4)^2}{2}$ (5) 2 (6) $\frac{2}{3}$

(1) $x^3+3x+2=t$로 놓으면 $3x^2+3=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=2$, $x=1$일 때 $t=6$이므로

$$\int_0^1\frac{x^2+1}{(x^3+3x+2)^3}\,dx=\int_2^6\frac{1}{t^3}\times\frac{1}{3}\,dt$$
$$=\frac{1}{3}\int_2^6 t^{-3}\,dt$$
$$=\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}t^{-2}\right]_2^6$$
$$=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{72}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{27}$$

(2) $x+3=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=4$, $x=6$일 때 $t=9$이므로

$$\int_1^6\frac{4}{\sqrt{x+3}}\,dx=\int_4^9\frac{1}{\sqrt{t}}\times 4\,dt$$
$$=4\int_4^9 t^{-\frac{1}{2}}\,dt$$
$$=4\left[2t^{\frac{1}{2}}\right]_4^9$$
$$=4(6-4)$$
$$=8$$

(3) $x^2-2x=t$로 놓으면 $2x-2=\frac{dt}{dx}$이고

$x=-1$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=0$이므로

$$\int_{-1}^2(x-1)3^{x^2-2x}\,dx=\int_3^0 3^t\times\frac{1}{2}\,dt$$
$$=-\frac{1}{2}\int_0^3 3^t\,dt$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{3^t}{\ln 3}\right]_0^3$$
$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{27}{\ln 3}-\frac{1}{\ln 3}\right)$$
$$=-\frac{13}{\ln 3}$$

(4) $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=0$, $x=4$일 때 $t=\ln 4$이므로

$$\int_1^4\ln x^{\frac{1}{x}}\,dx=\int_1^4\frac{\ln x}{x}\,dx$$
$$=\int_0^{\ln 4}t\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\ln 4}$$
$$=\frac{(\ln 4)^2}{2}$$

(5) $\cot x=t$로 놓으면 $-\csc^2 x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=\frac{\pi}{6}$일 때 $t=\sqrt{3}$, $x=\frac{\pi}{4}$일 때 $t=1$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\csc^2 x\cot^3 x\,dx=\int_{\sqrt{3}}^1 t^3\times(-1)\,dt$$
$$=\int_1^{\sqrt{3}}t^3\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4\right]_1^{\sqrt{3}}$$
$$=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\sin x\,dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

$\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t=0$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 x\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx\\&=\int_1^0(1-t^2)\times(-1)\,dt\\&=\int_0^1(1-t^2)\,dt\\&=\left[t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^1=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

644 ④

$\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=t$로 놓으면 $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=\dfrac{\pi}{4}$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{3}{4}\pi$일 때 $t=1$이므로

$$\begin{aligned}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)e^{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx&=\int_0^1 e^t\,dt\\&=\left[e^t\right]_0^1\\&=e-1\end{aligned}$$

645 $\ln 2$

$$\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{(1+\sin x)^2}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+\sin x\cos x}{(1+\sin x)^2}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}dx\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\sin x)'}{1+\sin x}dx\\&=\left[\ln(1+\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\ (\because\ 1+\sin x>0)\\&=\ln 2\end{aligned}$$

646 4π

$x=4\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{dx}{d\theta}=4\cos\theta$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=4$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16-16\sin^2\theta}\times 4\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16(1-\sin^2\theta)}\times 4\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16\cos^2\theta}\times 4\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}16\cos^2\theta\,d\theta\ (\because\ \cos\theta\ge 0)\\&=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta+1)\,d\theta\\&=8\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=8\times\frac{\pi}{2}=4\pi\end{aligned}$$

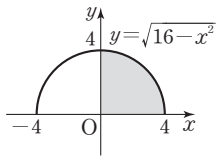
| 다른 풀이 |

$y=\sqrt{16-x^2}$이라 하면

$y^2=16-x^2$

$\therefore\ x^2+y^2=16$ (단, $y\ge 0$)

따라서 $\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx$의 값은 오른쪽 그림과 같이 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원의 넓이의 $\dfrac{1}{4}$과 같으므로



$$\int_0^4\sqrt{16-x^2}\,dx=\frac{1}{4}\times\pi\times 4^2=4\pi$$

647 $\dfrac{\pi}{12}$

$x=3\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{dx}{d\theta}=3\sec^2\theta$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=3$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^3\frac{1}{x^2+9}dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3\sec^2\theta}{9\tan^2\theta+9}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3\sec^2\theta}{9(\tan^2\theta+1)}d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{3\sec^2\theta}{9\sec^2\theta}d\theta\\&=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\\&=\frac{1}{3}\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\\&=\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}\end{aligned}$$

648 답 $\frac{1}{6}$

$x=2\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{6}$이므로

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta}}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos\theta}{2\cos\theta}d\theta\ (\because\cos\theta>0)$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta$$
$$=\left[\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{6}$$

따라서 $\frac{\pi}{6}=a\pi$이므로

$a=\frac{1}{6}$

649 답 1

$x=\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\sec^2\theta$이고

$x=-1$일 때 $\theta=-\frac{\pi}{4}$, $x=1$일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$이므로

$$\int_{-1}^1\frac{1}{x^2+1}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta+1}d\theta$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\theta$$
$$=\left[\theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}-\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$$

따라서 $\alpha=\frac{\pi}{2}$이므로

$\sin\alpha=\sin\frac{\pi}{2}=1$

연습문제 334~335쪽

650 답 $5\sqrt{3}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $\frac{4x}{\sqrt{x^2+3}}$이므로

$f'(x)=\frac{4x}{\sqrt{x^2+3}}$

$x^2+3=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int\frac{4x}{\sqrt{x^2+3}}dx$$
$$=\int\frac{1}{\sqrt{t}}\times2\,dt=2\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$=4t^{\frac{1}{2}}+C=4\sqrt{t}+C$$
$$=4\sqrt{x^2+3}+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, \sqrt{3})$을 지나므로 $f(0)=\sqrt{3}$에서

$4\sqrt{3}+C=\sqrt{3}$ $\quad\therefore C=-3\sqrt{3}$

$\therefore f(x)=4\sqrt{x^2+3}-3\sqrt{3}$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(3, a)$를 지나므로 $f(3)=a$에서

$a=8\sqrt{3}-3\sqrt{3}=5\sqrt{3}$

651 답 $\frac{1}{4}$

$$f(x)=\int(1-\cos^2x)\sin2x\,dx$$
$$=\int\sin^2x\times2\sin x\cos x\,dx$$
$$=2\int\sin^3x\cos x\,dx$$

$\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=2\int\sin^3x\cos x\,dx$$
$$=2\int t^3dt=\frac{1}{2}t^4+C$$
$$=\frac{1}{2}\sin^4x+C$$

$f(0)=-\frac{1}{32}$에서 $C=-\frac{1}{32}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\sin^4x-\frac{1}{32}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{9}{32}-\frac{1}{32}=\frac{1}{4}$

652 답 $4\ln2$

$$f'(x)=\frac{6}{x^2-x-2}=\frac{6}{(x+1)(x-2)}$$
$$=2\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=2\int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=2(\ln|x-2|-\ln|x+1|)+C$

$=2\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$

$f(3)=\ln 4$에서

$2\ln\frac{1}{4}+C=\ln 4 \qquad \therefore C=3\ln 4$

따라서 $f(x)=2\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+3\ln 4$이므로

$f(5)=2\ln\frac{1}{2}+3\ln 4=-2\ln 2+6\ln 2=4\ln 2$

653 답 24

$e^x=t$로 놓으면 $e^x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=\ln 2$일 때 $t=2$, $x=\ln 4$일 때 $t=4$이므로

$\int_{\ln 2}^{\ln 4}e^x f'(e^x)\,dx=\int_2^4 f'(t)\,dt$

$=\Big[f(t)\Big]_2^4=\Big[2t^2+3\Big]_2^4$

$=35-11=24$

654 답 ④

$ax-2=t$로 놓으면 $a=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int(ax-2)^7\,dx$

$=\int t^7\times\frac{1}{a}\,dt=\frac{1}{a}\int t^7\,dt$

$=\frac{1}{8a}t^8+C=\frac{1}{8a}(ax-2)^8+C$

이때 최고차항의 계수가 $\sqrt{2}$이므로

$\frac{a^7}{8}=\sqrt{2}$, $a^7=8\sqrt{2}=2^{\frac{7}{2}}$

$\therefore a=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

| 다른 풀이 |

$f(x)=\int(ax-2)^7\,dx$

$=\frac{1}{a}\times\frac{1}{8}(ax-2)^8+C$

$=\frac{1}{8a}(ax-2)^8+C$

이때 최고차항의 계수가 $\sqrt{2}$이므로

$\frac{a^7}{8}=\sqrt{2}$, $a^7=8\sqrt{2}=2^{\frac{7}{2}}$

$\therefore a=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

655 답 e^2

$xf'(x)=\frac{1}{(\ln x)^2}$에서 $f'(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$

$\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx$

$=\int\frac{1}{t^2}\,dt=\int t^{-2}\,dt$

$=-\frac{1}{t}+C=-\frac{1}{\ln x}+C$

$f(e)=0$에서 $-1+C=0 \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{\ln x}+1$이므로 $f(a)=\frac{1}{2}$에서

$-\frac{1}{\ln a}+1=\frac{1}{2}$, $\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{2}$

$\ln a=2 \qquad \therefore a=e^2$

656 답 $\frac{3}{2}$

$f'(x)=\tan x+\tan^2 x+\tan^3 x$

$=(\tan x+\tan^3 x)+\tan^2 x$

$=\tan x(1+\tan^2 x)+\tan^2 x$

$=\tan x\sec^2 x+\sec^2 x-1$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int(\tan x\sec^2 x+\sec^2 x-1)\,dx$

$=\int\tan x\sec^2 x\,dx+\int(\sec^2 x-1)\,dx$

$\int\tan x\sec^2 x\,dx$에서 $\tan x=t$로 놓으면

$\sec^2 x=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int\tan x\sec^2 x\,dx=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C_1$

$=\frac{1}{2}\tan^2 x+C_1$

$\therefore f(x)=\int\tan x\sec^2 x\,dx+\int(\sec^2 x-1)\,dx$

$=\frac{1}{2}\tan^2 x+C_1+\tan x-x+C_2$

$=\frac{1}{2}\tan^2 x+\tan x-x+C$

$f(0)=\frac{\pi}{4}$에서 $C=\frac{\pi}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\tan^2 x+\tan x-x+\frac{\pi}{4}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+1-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}$

657 ④

$f'(x)=\dfrac{1}{1-e^{-x}}=\dfrac{e^x}{e^x-1}$이고 $(e^x-1)'=e^x$이므로

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)\,dx\\&=\int\frac{e^x}{e^x-1}\,dx\\&=\int\frac{(e^x-1)'}{e^x-1}\,dx\\&=\ln|e^x-1|+C\end{aligned}$$

따라서 $f(3)=\ln(e^3-1)+C$,

$f(1)=\ln(e-1)+C$이므로

$$\begin{aligned}f(3)-f(1)&=\ln(e^3-1)+C-\{\ln(e-1)+C\}\\&=\ln\frac{e^3-1}{e-1}\\&=\ln\frac{(e-1)(e^2+e+1)}{e-1}\\&=\ln(e^2+e+1)\end{aligned}$$

658 $-\ln 5$

$F(x)=xf(x)-\ln(x+1)$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-\frac{1}{x+1}$$

$$xf'(x)=\frac{1}{x+1}$$

$$\therefore\ f'(x)=\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\qquad\text{▸▸▸▸▸▸ ❶}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(x)&=\int f'(x)\,dx\\&=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx\\&=\ln|x|-\ln|x+1|+C\\&=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+C\end{aligned}$$

$f(1)=-3\ln 2$에서

$$\ln\frac{1}{2}+C=-3\ln 2\qquad\therefore\ C=-2\ln 2$$

따라서 $f(x)=\ln\left|\dfrac{x}{x+1}\right|-2\ln 2$이므로 ▸▸▸▸▸▸ ❷

$$f(4)=\ln\frac{4}{5}-2\ln 2=-\ln 5\qquad\text{▸▸▸▸▸▸ ❸}$$

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$ 구하기	40 %
❷	$f(x)$ 구하기	40 %
❸	$f(4)$의 값 구하기	20 %

659 $\dfrac{2\sqrt{2}-1}{3}$

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{x^4-x^2}\,dx&=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{x^2(x^2-1)}\,dx\\&=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}x\sqrt{x^2-1}\,dx\end{aligned}$$

$x^2-1=t$로 놓으면 $2x=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=\sqrt{2}$일 때 $t=1$, $x=\sqrt{3}$일 때 $t=2$이므로

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{x^4-x^2}\,dx&=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}x\sqrt{x^2-1}\,dx\\&=\int_1^2\sqrt{t}\times\frac{1}{2}\,dt=\frac{1}{2}\int_1^2 t^{\frac{1}{2}}\,dt\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}\right)=\frac{2\sqrt{2}-1}{3}\end{aligned}$$

660 1

$x=a\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\right)$로 놓으면

$\dfrac{dx}{d\theta}=a\cos\theta$이고

$x=0$일 때 $\theta=0$, $x=a$일 때 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\times a\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}\times a\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\theta}\times a\cos\theta\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2\theta\,d\theta\ (\because\ \cos\theta\ge 0)\\&=\frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos 2\theta+1)\,d\theta\\&=\frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\frac{a^2}{2}\times\frac{\pi}{2}=\frac{a^2}{4}\pi\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{a^2}{4}\pi=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$a^2=1\qquad\therefore\ a=1\ (\because\ a>0)$

661 $2\ln 10$

| 접근 방법 | (가)의 식의 양변을 x에 대하여 각각 적분하여 $\{f(x)\}^2$의 식을 구한다.

(가)에서

$$\int f(x)f'(x)\,dx=\int\frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx$$

$\int f(x)f'(x)\,dx$에서 $f(x)=t$로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$\int f(x)f'(x)\,dx=\int t\,dt=\dfrac{1}{2}t^2+C_1$

$=\dfrac{1}{2}\{f(x)\}^2+C_1$

$\int \dfrac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx$에서 $(x^2+4x+5)'=2x+4$이므로

$\int \dfrac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx=\int \dfrac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}\,dx$

$=\ln(x^2+4x+5)+C_2$

$(\because\ x^2+4x+5>0)$

즉, $\dfrac{1}{2}\{f(x)\}^2+C_1=\ln(x^2+4x+5)+C_2$이므로

$\dfrac{1}{2}\{f(x)\}^2=\ln(x^2+4x+5)+C_2-C_1$

$\therefore\ \{f(x)\}^2=2\ln(x^2+4x+5)+C$

위의 식의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$\{f(-2)\}^2=C$

(나)에서 $f(-2)=0$이므로 $C=0$

따라서 $\{f(x)\}^2=2\ln(x^2+4x+5)$이므로

$\{f(1)\}^2=2\ln 10$

662 답 $\dfrac{5\ln 2}{6}$

| 접근 방법 | (가)에서 a_n의 값이 항상 일정함을 확인한 후 (나)를 이용하여 a_1의 값을 구한다.

(가)에서 $f(x)=f(x+3)$이므로

$\int_1^2 f(x)\,dx=\int_4^5 f(x)\,dx=\int_7^8 f(x)\,dx=\cdots$

$\therefore\ a_1=a_2=a_3=\cdots$ ····· ㉠

(나)에 의하여

$a_1=\int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2 \dfrac{1}{x(2+\log_2 x)^3}\,dx$

$2+\log_2 x=t$로 놓으면 $\dfrac{1}{x\ln 2}=\dfrac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=3$이므로

$a_1=\int_1^2 \dfrac{1}{x(2+\log_2 x)^3}\,dx$

$=\int_2^3 \dfrac{1}{t^3}\times\ln 2\,dt=\ln 2\int_2^3 t^{-3}\,dt$

$=\ln 2\left[-\dfrac{1}{2}t^{-2}\right]_2^3=\ln 2\left(-\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{5\ln 2}{72}$

$\therefore\ \sum_{n=1}^{12}a_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{12}=12a_1\ (\because$ ㉠)

$=12\times\dfrac{5\ln 2}{72}=\dfrac{5\ln 2}{6}$

02 부분적분법

개념 확인 337쪽

663 답 (가) e^x (나) $2xe^x$ (다) $2e^x(x-1)$

664 답 (가) $\dfrac{1}{x}$ (나) $\dfrac{1}{4}x^2$ (다) $\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}$

$f(x)=\ln x$, $g'(x)=x$로 놓으면

$f'(x)=\boxed{\text{(가) } \dfrac{1}{x}}$, $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2$이므로

$\int_1^e x\ln x\,dx=\left[\dfrac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e \boxed{\text{(가) } \dfrac{1}{x}}\times\dfrac{1}{2}x^2\,dx$

$=\left[\dfrac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e \dfrac{1}{2}x\,dx$

$=\dfrac{e^2}{2}-\left[\boxed{\text{(나) } \dfrac{1}{4}x^2}\right]_1^e$

$=\dfrac{e^2}{2}-\left(\dfrac{e^2}{4}-\dfrac{1}{4}\right)=\boxed{\text{(다) } \dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}}$

유제 339~343쪽

665 답 (1) $-(x-1)e^{-x}+C$

(2) $\dfrac{1}{4}x^4\ln x-\dfrac{1}{16}x^4+C$

(3) $-\dfrac{1}{x}\ln x-\dfrac{1}{x}+C$

(4) $-\dfrac{1}{2}x\cos 2x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$

(1) $f(x)=x-2$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-e^{-x}$이므로

$\int (x-2)e^{-x}\,dx$

$=(x-2)\times(-e^{-x})-\int(-e^{-x})\,dx$

$=-(x-2)e^{-x}+\int e^{-x}\,dx$

$=-(x-2)e^{-x}-e^{-x}+C$

$=-(x-1)e^{-x}+C$

(2) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=x^3$으로 놓으면

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{4}x^4$이므로

$$\int x^3\ln x\,dx=\ln x\times\frac{1}{4}x^4-\int\frac{1}{x}\times\frac{1}{4}x^4\,dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{4}\int x^3\,dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4\ln x-\frac{1}{16}x^4+C$$

(3) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=\frac{1}{x^2}$로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=-\frac{1}{x}$이므로

$$\int\frac{\ln x}{x^2}\,dx=\ln x\times\left(-\frac{1}{x}\right)-\int\frac{1}{x}\times\left(-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{x}\ln x+\int\frac{1}{x^2}\,dx$$
$$=-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}+C$$

(4) $f(x)=x$, $g'(x)=\sin 2x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$이므로

$$\int x\sin 2x\,dx$$
$$=x\times\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)-\int\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$
$$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

666 $\frac{2}{3}e^3+\frac{e^2}{2}$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=3x^2+2x$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x^3+x^2$이므로

$$f(x)=\int(3x^2+2x)\ln x\,dx$$
$$=\ln x\times(x^3+x^2)-\int\frac{1}{x}\times(x^3+x^2)\,dx$$
$$=(x^3+x^2)\ln x-\int(x^2+x)\,dx$$
$$=(x^3+x^2)\ln x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+C$$

$f(1)=-\frac{5}{6}$에서

$-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+C=-\frac{5}{6}$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=(x^3+x^2)\ln x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$이므로

$$f(e)=e^3+e^2-\frac{e^3}{3}-\frac{e^2}{2}$$
$$=\frac{2}{3}e^3+\frac{e^2}{2}$$

667 4

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $x\sqrt{e^x}$이므로

$f'(x)=x\sqrt{e^x}=xe^{\frac{x}{2}}$

$u(x)=x$, $v'(x)=e^{\frac{x}{2}}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=2e^{\frac{x}{2}}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int xe^{\frac{x}{2}}\,dx$$
$$=x\times 2e^{\frac{x}{2}}-\int 2e^{\frac{x}{2}}\,dx$$
$$=2x\sqrt{e^x}-2\int e^{\frac{x}{2}}\,dx$$
$$=2x\sqrt{e^x}-4e^{\frac{x}{2}}+C=2x\sqrt{e^x}-4\sqrt{e^x}+C$$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로 $f(0)=0$에서

$-4+C=0$ $\therefore C=4$

따라서 $f(x)=2x\sqrt{e^x}-4\sqrt{e^x}+4$이므로

$f(2)=4\sqrt{e^2}-4\sqrt{e^2}+4=4$

668 (1) $2x^2(\ln x)^2-2x^2\ln x+x^2+C$ (2) $-\frac{1}{5}e^{-x}(\sin 2x+2\cos 2x)+C$

(1) $f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=4x$로 놓으면

$f'(x)=\frac{2\ln x}{x}$, $g(x)=2x^2$이므로

$$\int 4x(\ln x)^2\,dx$$
$$=(\ln x)^2\times 2x^2-\int\frac{2\ln x}{x}\times 2x^2\,dx$$
$$=2x^2(\ln x)^2-4\int x\ln x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int x\ln x\,dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$$\int x\ln x\,dx=\ln x\times\frac{1}{2}x^2-\int\frac{1}{x}\times\frac{1}{2}x^2\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}\int x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int 4x(\ln x)^2\,dx$$
$$=2x^2(\ln x)^2-4\left(\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C_1\right)$$
$$=2x^2(\ln x)^2-2x^2\ln x+x^2+C$$

(2) $f(x)=\sin 2x$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=2\cos 2x$, $g(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int e^{-x}\sin 2x\,dx$$

$$=\sin 2x\times(-e^{-x})-\int 2\cos 2x\times(-e^{-x})\,dx$$

$$=-e^{-x}\sin 2x+2\int e^{-x}\cos 2x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int e^{-x}\cos 2x\,dx$에서

$u(x)=\cos 2x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=-2\sin 2x$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int e^{-x}\cos 2x\,dx$$

$$=\cos 2x\times(-e^{-x})-\int(-2\sin 2x)\times(-e^{-x})\,dx$$

$$=-e^{-x}\cos 2x-2\int e^{-x}\sin 2x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^{-x}\sin 2x\,dx$$

$$=-e^{-x}\sin 2x+2\left(-e^{-x}\cos 2x-2\int e^{-x}\sin 2x\,dx\right)$$

$$5\int e^{-x}\sin 2x\,dx=-e^{-x}\sin 2x-2e^{-x}\cos 2x$$

$$\therefore \int e^{-x}\sin 2x\,dx=-\frac{1}{5}e^{-x}(\sin 2x+2\cos 2x)+C$$

669 답 -2π

$g(x)=x^2+2$, $h'(x)=\cos x$로 놓으면

$g'(x)=2x$, $h(x)=\sin x$이므로

$$f(x)=\int(x^2+2)\cos x\,dx$$

$$=(x^2+2)\sin x-\int 2x\times\sin x\,dx$$

$$=(x^2+2)\sin x-2\int x\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int x\sin x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$\int x\sin x\,dx=x\times(-\cos x)-\int(-\cos x)\,dx$$

$$=-x\cos x+\int\cos x\,dx$$

$$=-x\cos x+\sin x+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=(x^2+2)\sin x-2(-x\cos x+\sin x+C_1)$$

$$=x^2\sin x+2x\cos x+C$$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}$에서 $\frac{\pi^2}{4}+C=\frac{\pi^2}{4}$ $\therefore C=0$

따라서 $f(x)=x^2\sin x+2x\cos x$이므로

$f(\pi)=-2\pi$

670 답 $-2e+2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $(x^2-3)e^x$이므로

$f'(x)=(x^2-3)e^x$

$g(x)=x^2-3$, $h'(x)=e^x$으로 놓으면

$g'(x)=2x$, $h(x)=e^x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(x^2-3)e^x\,dx$$

$$=(x^2-3)e^x-\int 2x\times e^x\,dx$$

$$=(x^2-3)e^x-2\int xe^x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int xe^x\,dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$$\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx$$

$$=xe^x-e^x+C_1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$f(x)=(x^2-3)e^x-2(xe^x-e^x+C_1)$$

$$=(x^2-2x-1)e^x+C$$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 1)$을 지나므로 $f(0)=1$에서

$-1+C=1$ $\therefore C=2$

$\therefore f(x)=(x^2-2x-1)e^x+2$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, a)$를 지나므로 $f(1)=a$에서

$a=-2e+2$

671 답 $f(x)=\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x-\cos x)+1$

$g(x)=\sin x$, $h'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$g'(x)=\cos x$, $h(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$이므로

$$\int e^{2x}\sin x\,dx=\sin x\times\frac{1}{2}e^{2x}-\int\cos x\times\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\int e^{2x}\cos x\,dx$$

$\cdots\cdots ㉠$

$\int e^{2x}\cos x\,dx$에서

$u(x)=\cos x$, $v'(x)=e^{2x}$으로 놓으면

$u'(x)=-\sin x$, $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$이므로

$$\int e^{2x}\cos x\,dx$$

$$=\cos x\times\frac{1}{2}e^{2x}-\int(-\sin x)\times\frac{1}{2}e^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\cos x+\frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x\,dx \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int e^{2x}\sin x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\cos x+\frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x\,dx\right)$$

$$\frac{5}{4}\int e^{2x}\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin x-\frac{1}{4}e^{2x}\cos x$$

$$\therefore \int e^{2x}\sin x\,dx=\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x-\cos x)+C$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)=\int e^{2x}\sin x\,dx$$

$$=\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x-\cos x)+C$$

$f(0)=\frac{4}{5}$에서 $-\frac{1}{5}+C=\frac{4}{5}$ $\therefore C=1$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{5}e^{2x}(2\sin x-\cos x)+1$$

672 답 (1) $\frac{5}{3}e^6+\frac{1}{3}$ (2) $2e^2$

(1) $f(x)=\ln x$, $g'(x)=3x^2$으로 놓으면

$f'(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x^3$이므로

$$\int_1^{e^2}3x^2\ln x\,dx=\left[x^3\ln x\right]_1^{e^2}-\int_1^{e^2}\frac{1}{x}\times x^3dx$$

$$=2e^6-\int_1^{e^2}x^2dx$$

$$=2e^6-\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^{e^2}$$

$$=2e^6-\left(\frac{e^6}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3}e^6+\frac{1}{3}$$

(2) $f(x)=x+1$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로

$$\int_0^2(x+1)e^x dx=\left[(x+1)e^x\right]_0^2-\int_0^2 e^x dx$$

$$=3e^2-1-\left[e^x\right]_0^2$$

$$=3e^2-1-(e^2-1)=2e^2$$

673 답 (1) $-\frac{\pi}{4}$ (2) $2-\frac{5}{e}$

(1) $f(x)=x^2-1$, $g'(x)=\cos 2x$로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2-1)\cos 2x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}(x^2-1)\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\times\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$$

$$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2x\,dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2x\,dx$에서

$u(x)=x$, $v'(x)=\sin 2x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\frac{1}{2}\cos 2x$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2x\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{2}x\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2-1)\cos 2x\,dx=-\frac{\pi}{4}$$

(2) $f(x)=x^2$, $g'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$f'(x)=2x$, $g(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int_0^1 x^2e^{-x}dx=\left[-x^2e^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 2x\times(-e^{-x})\,dx$$

$$=-\frac{1}{e}+2\int_0^1 xe^{-x}dx \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^1 xe^{-x}dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$$\int_0^1 xe^{-x}dx=\left[-xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1(-e^{-x})\,dx$$

$$=-\frac{1}{e}+\int_0^1 e^{-x}dx$$

$$=-\frac{1}{e}+\left[-e^{-x}\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{e}+\left\{-\frac{1}{e}-(-1)\right\}$$

$$=-\frac{2}{e}+1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\int_0^1 x^2e^{-x}dx=-\frac{1}{e}+2\left(-\frac{2}{e}+1\right)=2-\frac{5}{e}$$

674 답 ②

$\int_0^{\pi} x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx=\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$에서

$f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=-\cos x$이므로

$\int_0^{\pi} x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$

$=\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

$=\left[-x\cos x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx$

$=\pi+\int_0^{\pi}\cos x\,dx$

$=\pi+\left[\sin x\right]_0^{\pi}=\pi$

675 답 $\frac{1}{2e^{\pi}}$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} f(x)\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$ ····· ㉠

$g(x)=\cos x$, $h'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$g'(x)=-\sin x$, $h(x)=-e^{-x}$이므로

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$

$=\left[-e^{-x}\cos x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}(-\sin x)\times(-e^{-x})\,dx$

$=e^{-\pi}+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$ ····· ㉡

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$에서

$u(x)=\sin x$, $v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=\cos x$, $v(x)=-e^{-x}$이므로

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^{-x}\sin x\,dx$

$=\left[-e^{-x}\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\cos x\times(-e^{-x})\,dx$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$ ····· ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx$

$=e^{-\pi}+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx\right)$

$2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx=e^{-\pi}$

$\therefore\ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx=\frac{1}{2e^{\pi}}$

따라서 ㉠에서

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,dx$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} e^{-x}\cos x\,dx=\frac{1}{2e^{\pi}}$

개념 확인 345쪽

676 답 (1) xe^{-x} (2) $\ln\frac{x}{x-1}$

(1) $\frac{d}{dx}\int_1^x te^{-t}\,dt=xe^{-x}$

(2) $\frac{d}{dx}\int_x^{x+1}\ln(t-1)\,dt=\ln x-\ln(x-1)$

$=\ln\frac{x}{x-1}$

677 답 (1) $f(x)=\cos x-x\sin x$

(2) $f(x)=e^{-x}(-\sin 2x+2\cos 2x)$

(1) $\int_0^x f(t)\,dt=x\cos x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\cos x-x\sin x$

(2) $\int_2^x f(t)\,dt=e^{-x}\sin 2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=-e^{-x}\sin 2x+2e^{-x}\cos 2x$

$=e^{-x}(-\sin 2x+2\cos 2x)$

유제 347~353쪽

678 답 $f(x)=\sin\pi x+\frac{3}{4\pi}$

$\int_0^{\frac{1}{3}} f(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=\sin\pi x+k$

$$\therefore \int_0^{\frac{1}{3}} f(t)\,dt=\int_0^{\frac{1}{3}} (\sin \pi t+k)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi t+kt\right]_0^{\frac{1}{3}}$$
$$=-\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{3}k-\left(-\frac{1}{\pi}\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{3}k$$

즉, $\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{3}k=k$이므로

$\frac{2}{3}k=\frac{1}{2\pi}$ $\therefore k=\frac{3}{4\pi}$

$\therefore f(x)=\sin \pi x+\frac{3}{4\pi}$

679 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-2-2\ln 2$

$\int_1^2 tf(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+k$

$$\therefore \int_1^2 tf(t)\,dt=\int_1^2 t\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}+k\right)dt$$
$$=\int_1^2 \left(1+\frac{1}{t}+kt\right)dt$$
$$=\left[t+\ln|t|+\frac{k}{2}t^2\right]_1^2$$
$$=(2+\ln 2+2k)-\left(1+\frac{k}{2}\right)$$
$$=1+\ln 2+\frac{3}{2}k$$

즉, $1+\ln 2+\frac{3}{2}k=k$이므로

$\frac{k}{2}=-1-\ln 2$ $\therefore k=-2-2\ln 2$

$\therefore f(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-2-2\ln 2$

680 e^6+e^2-1

$\int_0^1 f'(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=e^{2x}+k$

$\therefore f'(x)=2e^{2x}$

$$\therefore \int_0^1 f'(t)\,dt=\int_0^1 2e^{2t}\,dt$$
$$=\left[e^{2t}\right]_0^1=e^2-1$$

즉, $k=e^2-1$이므로

$f(x)=e^{2x}+e^2-1$

$\therefore f(3)=e^6+e^2-1$

| 다른 풀이 |

$\int_0^1 f'(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=e^{2x}+k$

이때

$$\int_0^1 f'(t)\,dt=\left[f(t)\right]_0^1=f(1)-f(0)$$
$$=(e^2+k)-(1+k)=e^2-1$$

이므로 $k=e^2-1$

따라서 $f(x)=e^{2x}+e^2-1$이므로

$f(3)=e^6+e^2-1$

681 $\frac{10}{7}\ln 2$

$\int_2^5 \frac{f(t)}{t^2}\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=\frac{2x^2}{x^2-1}+k$

$$\therefore \int_2^5 \frac{f(t)}{t^2}\,dt=\int_2^5 \frac{1}{t^2}\left(\frac{2t^2}{t^2-1}+k\right)dt$$
$$=\int_2^5 \left(\frac{2}{t^2-1}+\frac{k}{t^2}\right)dt$$
$$=\int_2^5 \left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}+\frac{k}{t^2}\right)dt$$
$$=\left[\ln|t-1|-\ln|t+1|-\frac{k}{t}\right]_2^5$$
$$=\left(\ln 4-\ln 6-\frac{k}{5}\right)-\left(-\ln 3-\frac{k}{2}\right)$$
$$=\ln 2+\frac{3}{10}k$$

즉, $\ln 2+\frac{3}{10}k=k$이므로

$\frac{7}{10}k=\ln 2$ $\therefore k=\frac{10}{7}\ln 2$

$$\therefore \int_2^5 \frac{f(x)}{x^2}\,dx=\int_2^5 \frac{f(t)}{t^2}\,dt$$
$$=k=\frac{10}{7}\ln 2$$

682 $f(x)=-4e^x-\sin x+1$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=ae^x-\sin x+1$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$\int_0^0 f(t)\,dt=a+1+3$

$0=a+4 \quad \therefore\ a=-4$

$\therefore\ f(x)=-4e^x-\sin x+1$

683 $f(x)=e^{x-1}-\frac{2}{3x^3}-\frac{4}{3}$

주어진 등식에서

$x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt=e^{x-1}+\frac{a}{x}-\frac{2}{3}x^2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=e^{x-1}-\frac{a}{x^2}-\frac{4}{3}x$

$\therefore\ \int_1^x f(t)\,dt=e^{x-1}-\frac{a}{x^2}-\frac{4}{3}x \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e^{x-1}+\frac{2a}{x^3}-\frac{4}{3}$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)\,dt=1-a-\frac{4}{3}$

$0=-a-\frac{1}{3} \quad \therefore\ a=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ f(x)=e^{x-1}-\frac{2}{3x^3}-\frac{4}{3}$

684 -2

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)=2x-\frac{a}{2\sqrt{x}}$

$\therefore\ f(x)=2-\frac{a}{2x\sqrt{x}}$

주어진 등식의 양변에 $x=4$를 대입하면

$\int_4^4 tf(t)\,dt=16-a\sqrt{4}$

$0=16-2a \quad \therefore\ a=8$

따라서 $f(x)=2-\frac{8}{2x\sqrt{x}}=2-\frac{4}{x\sqrt{x}}$이므로

$f(1)=2-4=-2$

685 -2

주어진 등식에서

$x\int_1^x f(t)\,dt-\int_1^x tf(t)\,dt=x\ln x+ax^2+bx$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_1^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=\ln x+1+2ax+b$

$\therefore\ \int_1^x f(t)\,dt=\ln x+2ax+b+1 \quad \cdots\cdots ㉠$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=\frac{1}{x}+2a$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 (x-t)f(t)\,dt=a+b$

$\therefore\ a+b=0 \quad \cdots\cdots ㉡$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\int_1^1 f(t)\,dt=2a+b+1$

$\therefore\ 2a+b=-1 \quad \cdots\cdots ㉢$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=1$

$\therefore\ a-b=-2$

686 $-2\ln 3$

주어진 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=\frac{4x}{x^2+2}$

$f'(x)=0$에서 $4x=0 \quad \therefore\ x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(0)=\int_2^0 \frac{4t}{t^2+2}\,dt=-\int_0^2 \frac{4t}{t^2+2}\,dt$

$t^2+2=u$로 놓으면 $2t=\frac{du}{dt}$이고

$t=0$일 때 $u=2$, $t=2$일 때 $u=6$이므로

$f(0)=-\int_0^2 \frac{4t}{t^2+2}\,dt=-\int_2^6 \frac{2}{u}\,du$

$=-\left[2\ln|u|\right]_2^6$

$=-(2\ln 6-2\ln 2)=-2\ln 3$

687 $\frac{5}{6}$

주어진 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(\sqrt{x}+2)(1-\sqrt{x})$

$f'(x)=0$에서 $1-\sqrt{x}=0$ ($\because\ \sqrt{x}+2>0$)

$\therefore\ x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		+	0	−
$f(x)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로 극댓값은

$$f(1)=\int_0^1(\sqrt{t}+2)(1-\sqrt{t})\,dt$$
$$=\int_0^1(-t-\sqrt{t}+2)\,dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}t^2-\frac{2}{3}t\sqrt{t}+2t\right]_0^1=\frac{5}{6}$$

688 ■ $3-e^2$

주어진 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x-2)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x-2=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$$f(2)=\int_0^2(t-2)e^t\,dt$$

이때 $u(t)=t-2$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=e^t$이므로

$$f(2)=\int_0^2(t-2)e^t\,dt$$
$$=\left[(t-2)e^t\right]_0^2-\int_0^2e^t\,dt$$
$$=2-\left[e^t\right]_0^2$$
$$=2-(e^2-1)=3-e^2$$

689 ■ -2π

주어진 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2\cos x-1$

$f'(x)=0$에서 $\cos x=\frac{1}{2}$

$\therefore x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$ ($\because 0\le x\le 2\pi$)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{3}$에서 극대, $x=\frac{5}{3}\pi$에서 극소이다.

$$f(x)=\int_0^x(2\cos t-1)\,dt$$
$$=\left[2\sin t-t\right]_0^x$$
$$=2\sin x-x$$

이므로

$f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$,

$f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=-\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$, $f(2\pi)=-2\pi$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$,

최솟값은 $f\left(\frac{5}{3}\pi\right)=-\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi$이므로 그 합은

$\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}+\left(-\sqrt{3}-\frac{5}{3}\pi\right)=-2\pi$

690 ■ 31

$f(t)=3^t+4$라 하고 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\int_3^x(3^t+4)\,dt=\lim_{x\to3}\frac{1}{x-3}\left[F(t)\right]_3^x$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{F(x)-F(3)}{x-3}$$
$$=F'(3)=f(3)$$
$$=27+4=31$$

691 ■ 1

$f(t)=(\ln t)^2$이라 하고 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_e^{x+e}(\ln t)^2\,dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left[F(t)\right]_e^{x+e}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x+e)-F(e)}{x}$$
$$=F'(e)=f(e)$$
$$=1$$

692 답 -1

$f(t)=t^2\cos\frac{\pi}{2}t$라 하고 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x t^2\cos\frac{\pi}{2}t\,dt$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\Big[F(t)\Big]_2^x$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)$$
$$=\frac{1}{4}\times(-4)=-1$$

693 답 6

$f(t)=t(\sin t+a)$라 하고 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{3x}\int_\pi^{x+\pi} t(\sin t+a)\,dt$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{3x}\Big[F(t)\Big]_\pi^{x+\pi}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x+\pi)-F(\pi)}{3x}$$
$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{F(x+\pi)-F(\pi)}{x}$$
$$=\frac{1}{3}F'(\pi)=\frac{1}{3}f(\pi)$$
$$=\frac{1}{3}a\pi$$

따라서 $\frac{1}{3}a\pi=2\pi$이므로

$a=6$

연습문제 354~356쪽

694 답 ②

$u(x)=x$, $v'(x)=\sec^2x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\tan x$이므로

$$f(x)=\int x\sec^2x\,dx$$
$$=x\tan x-\int\tan x\,dx$$
$$=x\tan x-\int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx \quad \blacktriangleleft\ (\cos x)'=-\sin x$$
$$=x\tan x+\ln|\cos x|+C$$

$f(0)=-\frac{\pi}{4}$에서 $C=-\frac{\pi}{4}$

따라서 $f(x)=x\tan x+\ln|\cos x|-\frac{\pi}{4}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}+\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}=-\frac{1}{2}\ln2$$

695 답 $-\frac{1}{e^2-3}$

$\int_1^e tf(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$$f(x)=\frac{\ln x}{x^2}+k$$
$$\therefore\int_1^e tf(t)\,dt=\int_1^e\left(\frac{\ln t}{t}+kt\right)dt$$
$$=\int_1^e\frac{\ln t}{t}\,dt+\int_1^e kt\,dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\ln t=u$로 놓으면 $\frac{1}{t}=\frac{du}{dt}$이고

$t=1$일 때 $u=0$, $t=e$일 때 $u=1$이므로 ㉠에서

$$\int_1^e tf(t)\,dt=\int_1^e\frac{\ln t}{t}\,dt+\int_1^e kt\,dt$$
$$=\int_0^1 u\,du+\int_1^e kt\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}u^2\right]_0^1+\left[\frac{k}{2}t^2\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{k}{2}e^2-\frac{k}{2}$$

즉, $\frac{1}{2}+\frac{k}{2}e^2-\frac{k}{2}=k$이므로

$$\frac{e^2-3}{2}k=-\frac{1}{2}\qquad\therefore k=-\frac{1}{e^2-3}$$

따라서 $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}-\frac{1}{e^2-3}$이므로

$$f(1)=-\frac{1}{e^2-3}$$

696 답 $-\frac{2}{3}$

주어진 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=2a(\cos x+\sin x)(\sin x-\cos x)+b$$
$$=2a(\sin^2x-\cos^2x)+b$$

$f(0)=2$에서 $-2a+b=2$ ····· ㉠

주어진 식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=a+b$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=-\frac{2}{3}$, $b=\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=-\frac{4}{3}(\sin^2 x-\cos^2 x)+\frac{2}{3}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}=-\frac{2}{3}$

697 답 1

주어진 등식에서

$x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt=e^x(-\cos x+1)$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)$

$=e^x(-\cos x+1)+e^x\sin x$

$\therefore \int_0^x f(t)\,dt=e^x(-\cos x+\sin x+1)$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=e^x(-\cos x+\sin x+1)+e^x(\sin x+\cos x)$

$=e^x(2\sin x+1)$

$\therefore f(0)=1$

698 답 $-\frac{16}{5}$

주어진 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x(\sqrt{x}-2)$

$f'(x)=0$에서

$\sqrt{x}-2=0\ (\because x>0)$

$\therefore x=4$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	4	…
$f'(x)$		−	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$f(4)=\int_0^4 t(\sqrt{t}-2)\,dt$

$=\int_0^4 (t^{\frac{3}{2}}-2t)\,dt$

$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-t^2\right]_0^4$

$=-\frac{16}{5}$

699 답 ④

함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^{x^2} f(t)\,dt$

$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\left[F(t)\right]_1^{x^2}$

$=\lim_{x\to1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times(x+1)$

$=2F'(1)=2f(1)=2(3+1)=8$

700 답 1

(i) $x<0$일 때,

$u(x)=x+1$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\{(x+1)e^x-1\}\,dx$

$=\int(x+1)e^x\,dx-\int dx$

$=(x+1)e^x-\int e^x\,dx-x$

$=(x+1)e^x-e^x-x+C_1=xe^x-x+C_1$

(ii) $x>0$일 때,

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\sin x\,dx$

$=-\cos x+C_2$

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases} xe^x-x+C_1 & (x<0) \\ -\cos x+C_2 & (x>0) \end{cases}$

▸▸▸▸▸▸ ❶

$f(-1)=-\frac{1}{e}$에서

$-\frac{1}{e}+1+C_1=-\frac{1}{e}\qquad\therefore C_1=-1$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$에서

$\lim_{x\to0+}(-\cos x+C_2)=\lim_{x\to0-}(xe^x-x-1)$

$-1+C_2=-1\qquad\therefore C_2=0$

따라서 $f(x)=\begin{cases} xe^x-x-1 & (x\le0) \\ -\cos x & (x\ge0) \end{cases}$이므로

▸▸▸▸▸▸ ❷

$f(\pi)=1$ ▸▸▸▸▸▸ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	$f'(x)$의 부정적분 구하기	40 %
❷	$f(x)$ 구하기	40 %
❸	$f(\pi)$의 값 구하기	20 %

701 답 $\frac{1}{2}$

$f(x)+xf'(x)=x\cos 2x$에서

$\{xf(x)\}'=x\cos 2x$이므로

$\int\{xf(x)\}'dx=\int x\cos 2x\,dx$

$\therefore\ xf(x)=\int x\cos 2x\,dx$

$u(x)=x,\ v'(x)=\cos 2x$로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$이므로

$xf(x)=\frac{1}{2}x\sin 2x-\int\frac{1}{2}\sin 2x\,dx$

$=\frac{1}{2}x\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x+C$

$\therefore\ f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4x}\cos 2x+\frac{C}{x}$

$f(\pi)=\frac{1}{4\pi}$에서

$\frac{1}{4\pi}+\frac{C}{\pi}=\frac{1}{4\pi}\qquad\therefore\ C=0$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4x}\cos 2x$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

702 답 $\frac{e^3}{27}$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$

$=f'(x)+f'(x)=2f'(x)$

즉, $2f'(x)=(x\ln x)^2$이므로

$f'(x)=\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2$

$g(x)=(\ln x)^2,\ h'(x)=\frac{1}{2}x^2$으로 놓으면

$g'(x)=\frac{2\ln x}{x},\ h(x)=\frac{1}{6}x^3$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx$

$=\int\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2dx$

$=\frac{1}{6}x^3(\ln x)^2-\frac{1}{3}\int x^2\ln x\,dx\qquad\cdots\cdots$ ㉠

$\int x^2\ln x\,dx$에서

$u(x)=\ln x,\ v'(x)=x^2$으로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=\frac{1}{3}x^3$이므로

$\int x^2\ln x\,dx=\frac{1}{3}x^3\ln x-\int\frac{1}{3}x^2dx$

$=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C_1\qquad\cdots\cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$f(x)=\frac{1}{6}x^3(\ln x)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C_1\right)$

$=\frac{1}{6}x^3(\ln x)^2-\frac{1}{9}x^3\ln x+\frac{1}{27}x^3+C$

$f(1)=\frac{1}{27}-\frac{e^3}{18}$에서

$\frac{1}{27}+C=\frac{1}{27}-\frac{e^3}{18}\qquad\therefore\ C=-\frac{e^3}{18}$

따라서

$f(x)=\frac{1}{6}x^3(\ln x)^2-\frac{1}{9}x^3\ln x+\frac{1}{27}x^3-\frac{e^3}{18}$

이므로

$f(e)=\frac{e^3}{6}-\frac{e^3}{9}+\frac{e^3}{27}-\frac{e^3}{18}=\frac{e^3}{27}$

703 답 $e^2-\frac{3}{e^2}+2$

$f(x)=|x|=\begin{cases}-x & (x\le 0)\\ x & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$\int_{-2}^{2}e^{-x}f(x)\,dx=\int_{-2}^{0}(-xe^{-x})\,dx+\int_{0}^{2}xe^{-x}dx$

$=-\int_{-2}^{0}xe^{-x}dx+\int_{0}^{2}xe^{-x}dx$

$u(x)=x,\ v'(x)=e^{-x}$으로 놓으면

$u'(x)=1,\ v(x)=-e^{-x}$이므로

$\int_{-2}^{2}e^{-x}f(x)\,dx$

$=-\left\{\left[-xe^{-x}\right]_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}(-e^{-x})\,dx\right\}$

$+\left\{\left[-xe^{-x}\right]_{0}^{2}-\int_{0}^{2}(-e^{-x})\,dx\right\}$

$=-\left(-2e^2-\left[e^{-x}\right]_{-2}^{0}\right)+\left(-\frac{2}{e^2}-\left[e^{-x}\right]_{0}^{2}\right)$

$=-(-2e^2-1+e^2)+\left(-\frac{2}{e^2}-\frac{1}{e^2}+1\right)$

$=e^2-\frac{3}{e^2}+2$

704 ③

$\overline{OQ}=t$, $\overline{QP}=2\ln(t+1)$이므로 직사각형 OQPR의 넓이는

$f(t)=\overline{OQ}\times\overline{QP}=2t\ln(t+1)$

$u(t)=\ln(t+1)$, $v'(t)=2t$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t+1}$, $v(t)=t^2$이므로

$$\int_1^3 f(t)\,dt=\int_1^3 2t\ln(t+1)\,dt$$
$$=\left[t^2\ln(t+1)\right]_1^3-\int_1^3\frac{t^2}{t+1}\,dt$$
$$=9\ln4-\ln2-\int_1^3\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$$
$$=17\ln2-\left[\frac{1}{2}t^2-t+\ln|t+1|\right]_1^3$$
$$=17\ln2-\left\{\frac{3}{2}+\ln4-\left(-\frac{1}{2}+\ln2\right)\right\}$$
$$=-2+16\ln2$$

705 $\frac{\pi}{2}$

$x^2=t$로 놓으면 $2x=\frac{dt}{dx}$이고

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\sqrt{\pi}$일 때 $t=\pi$이므로

$$\int_0^{\sqrt{\pi}}x^3\sin x^2\,dx=\int_0^{\sqrt{\pi}}x^2\sin x^2\times x\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}t\sin t\times\frac{1}{2}\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}t\sin t\,dt$$

$u(t)=t$, $v'(t)=\sin t$로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=-\cos t$이므로

$$\int_0^{\sqrt{\pi}}x^3\sin x^2\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}t\sin t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left[-t\cos t\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos t)\,dt\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\pi-\left[-\sin t\right]_0^{\pi}\right)=\frac{\pi}{2}$$

706 $-e^2+\frac{1}{2}$

$$f(x)=e^x+\frac{1}{2}+\int_0^2 xf(t)\,dt$$
$$=e^x+\frac{1}{2}+x\int_0^2 f(t)\,dt$$

$\int_0^2 f(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면

$f(x)=e^x+\frac{1}{2}+kx$

$$\therefore\ \int_0^2 f(t)\,dt=\int_0^2\left(e^t+\frac{1}{2}+kt\right)dt$$
$$=\left[e^t+\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}kt^2\right]_0^2$$
$$=(e^2+1+2k)-1=e^2+2k$$

즉, $e^2+2k=k$이므로 $k=-e^2$

따라서 $f(x)=e^x+\frac{1}{2}-e^2x$이므로

$f(2)=e^2+\frac{1}{2}-2e^2=-e^2+\frac{1}{2}$

707 $\frac{110}{3}$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)=2x\sqrt{x+1}+\frac{x^2}{2\sqrt{x+1}}+f(x)$$

$$xf'(x)=2x\sqrt{x+1}+\frac{x^2}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\therefore\ f'(x)=2\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}$$

$x+1=t$로 놓으면 $x=t-1$이고 $1=\frac{dt}{dx}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int\left(2\sqrt{x+1}+\frac{x}{2\sqrt{x+1}}\right)dx$$
$$=\int\left(2\sqrt{t}+\frac{t-1}{2\sqrt{t}}\right)dt$$
$$=\int\left(\frac{5}{2}t^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right)dt$$
$$=\frac{5}{3}t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{1}{2}}+C$$
$$=\frac{5}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}+C$$

주어진 등식의 양변에 $x=3$을 대입하면

$3f(3)=9\sqrt{4}+\int_3^3 f(t)\,dt$

$3f(3)=18$ $\quad\therefore\ f(3)=6$

즉, $\frac{40}{3}-2+C=6$이므로 $C=-\frac{16}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{5}{3}(x+1)\sqrt{x+1}-\sqrt{x+1}-\frac{16}{3}$이므로

$f(8)=45-3-\frac{16}{3}=\frac{110}{3}$

708 ③

주어진 등식에서

$$\int_0^x f(t)\,dt=2x+x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x tf(t)\,dt$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=2+\int_0^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)$$

$$\therefore\ f(x)=2+\int_0^x f(t)\,dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=f(x)$

$$\therefore\ \frac{f'(x)}{f(x)}=1$$

따라서 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int dx$이므로

$\ln f(x)=x+C\ (\because\ f(x)>0)$

$\therefore\ f(x)=e^{x+C}$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=2$

즉, $e^C=2$이므로

$C=\ln 2$

따라서 $f(x)=e^{x+\ln 2}$이므로

$f(\ln 2)=e^{\ln 4}=4$

709 $-2e^2+2$

주어진 함수 $f(x)$를 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x^2-a)e^x$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극댓값을 가지므로

$f'(-2)=0$

즉, $(4-a)e^{-2}=0$이므로

$a=4$

$\therefore\ f'(x)=(x^2-4)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x^2-4=0\ (\because\ e^x>0)$

$(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$$f(2)=\int_0^2 (t^2-4)e^t\,dt$$

$g(t)=t^2-4$, $h'(t)=e^t$으로 놓으면

$g'(t)=2t$, $h(t)=e^t$이므로

$$f(2)=\int_0^2 (t^2-4)e^t\,dt$$

$$=\Big[(t^2-4)e^t\Big]_0^2-\int_0^2 2te^t\,dt$$

$$=4-2\int_0^2 te^t\,dt \quad \cdots\cdots ㉠$$

$\int_0^2 te^t\,dt$에서 $u(t)=t$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=e^t$이므로

$$\int_0^2 te^t\,dt=\Big[te^t\Big]_0^2-\int_0^2 e^t\,dt$$

$$=2e^2-\Big[e^t\Big]_0^2$$

$$=2e^2-(e^2-1)$$

$$=e^2+1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

따라서 ㉡을 ㉠에 대입하면

$f(2)=4-2(e^2+1)=-2e^2+2$

710 ④

| 접근 방법 | 부분적분법을 이용하여 $\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$의 값을 구한 후 치환적분법을 이용하여 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx$의 값을 구한다.

$$\int_1^2 (x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx$$에서

$u(x)=x-1$, $v'(x)=f'\left(\frac{x}{2}\right)$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=2f\left(\frac{x}{2}\right)$이므로

$$\int_1^2 (x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\Big[2(x-1)f\left(\frac{x}{2}\right)\Big]_1^2-\int_1^2 2f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=2f(1)-2\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=8-2\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

즉, $8-2\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=2$이므로

$$2\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=6$$

$$\therefore\ \int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=3$$

$\frac{x}{2}=t$로 놓으면 $\frac{1}{2}=\frac{dt}{dx}$이고

$x=1$일 때 $t=\frac{1}{2}$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\times 2\,dt$$
$$=2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt$$

따라서 $2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt=3$이므로

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt=\frac{3}{2}$$

$$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)\,dt$$
$$=\frac{3}{2}$$

711 답 $\frac{4}{e^6}+\frac{1}{e^3}$

| 접근 방법 | $x-t=u$로 놓고 식을 변형한 후 양변을 x에 대하여 미분하여 $f(x)$를 구한다.

$\int_0^x tf(x-t)\,dt$에서 $x-t=u$로 놓으면

$t=x-u$이고 $1=-\frac{du}{dt}$

$t=0$일 때 $u=x$, $t=x$일 때 $u=0$이므로

$$\int_0^x tf(x-t)\,dt=-\int_x^0 (x-u)f(u)\,du$$
$$=\int_0^x (x-u)f(u)\,du$$

즉, $\int_0^x (x-u)f(u)\,du=e^{2x}+e^x+ax-2$이므로

$$x\int_0^x f(u)\,du-\int_0^x uf(u)\,du=e^{2x}+e^x+ax-2$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(u)\,du+xf(x)-xf(x)=2e^{2x}+e^x+a$$

$$\therefore \int_0^x f(u)\,du=2e^{2x}+e^x+a \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4e^{2x}+e^x$

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=2+1+a$

$\therefore a=-3$

$\therefore f(a)=f(-3)=\frac{4}{e^6}+\frac{1}{e^3}$

01 정적분의 활용 (1)

개념 확인 361쪽

712 답 (가) $(1+3x)^2$ (나) 3 (다) $(1+x)^2$ (라) 4 (마) x^2

방법 1 $\frac{k}{n}$를 x로 바꾸는 경우

$\frac{k}{n}$를 x, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타내면 적분 구간은 $[0, 1]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{3k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1 \boxed{(가)\ (1+3x)^2}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}(1+3x)^3\right]_0^1=7$$

방법 2 $\frac{3k}{n}$를 x로 바꾸는 경우

$\frac{3k}{n}$를 x, $\frac{3}{n}$을 dx로 나타내면 적분 구간은 $[0, 3]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{3k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{3k}{n}\right)^2\times\frac{3}{n}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^{\boxed{나}\ 3}\boxed{(다)\ (1+x)^2}\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}(1+x)^3\right]_0^3=7$$

방법 3 $1+\frac{3k}{n}$를 x로 바꾸는 경우

$1+\frac{3k}{n}$를 x, $\frac{3}{n}$을 dx로 나타내면 적분 구간은 $[1, 4]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{3k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(1+\frac{3k}{n}\right)^2\times\frac{3}{n}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{3}\int_1^{\boxed{라}\ 4}\boxed{(마)\ x^2}\,dx=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4=7$$

713 답 (1) 4 (2) $\frac{28}{3}$

(1) $\frac{2k}{n}$를 x, $\frac{2}{n}$를 dx로 나타내면 적분 구간은 $[0, 2]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\left(\frac{2k}{n}\right)^3\times\frac{2}{n}=\int_0^2 x^3\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=4$$

(2) $2+\frac{2k}{n}$를 x, $\frac{2}{n}$를 dx로 나타내면 적분 구간은 $[2, 4]$이므로

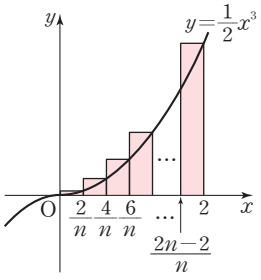
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{2k}{n}\right)^2\times\frac{1}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(2+\frac{2k}{n}\right)^2\times\frac{2}{n}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\int_2^4 x^2\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^4$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{56}{3}$$
$$=\frac{28}{3}$$

유제 363~379쪽

714 답 2

오른쪽 그림과 같이 구간 $[0, 2]$를 n등분하면 각 구간의 오른쪽 끝 점의 x좌표는 차례대로

$\frac{2}{n}$, $\frac{4}{n}$, $\frac{6}{n}$, …, $\frac{2n}{n}(=2)$



이에 대응하는 y의 값은 각각

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{n}\right)^3$, $\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{n}\right)^3$, $\frac{1}{2}\times\left(\frac{6}{n}\right)^3$, …, $\frac{1}{2}\times\left(\frac{2n}{n}\right)^3$

이때 색칠한 각 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{2}{n}$이므로 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면

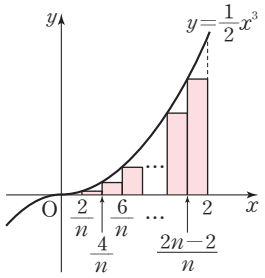
$$S_n=\frac{2}{n}\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{n}\right)^3\right\}+\frac{2}{n}\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{n}\right)^3\right\}$$
$$+\frac{2}{n}\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{6}{n}\right)^3\right\}$$
$$+\cdots+\frac{2}{n}\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{2n}{n}\right)^3\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{n}\right)^4\times(1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3)$$
$$=\frac{8}{n^4}\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$
$$=2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=2$$

| 다른 풀이 |

오른쪽 그림과 같이 구간 $[0, 2]$를 n등분하여 각 구간의 길이를 가로의 길이로 하고, 각 구간의 왼쪽 끝 점에서의 함숫값을 세로의 길이로 하는 n개의 직사각형의 넓이의 합을 T_n이라 하면



$$T_n=\frac{2}{n}\times 0+\frac{2}{n}\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{n}\right)^3\right\}$$
$$+\frac{2}{n}\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{4}{n}\right)^3\right\}$$
$$+\cdots+\frac{2}{n}\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{2n-2}{n}\right)^3\right\}$$
$$=\frac{8}{n^4}\{1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3\}$$
$$=\frac{8}{n^4}\left\{\frac{(n-1)n}{2}\right\}^2$$
$$=2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$

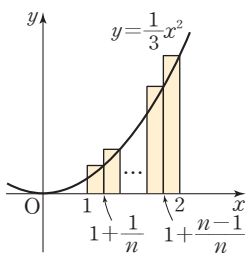
따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}T_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}2\left(1-\frac{1}{n}\right)^2=2$$

715 답 $\frac{7}{9}$

오른쪽 그림과 같이 구간 $[1, 2]$를 n등분하면 각 구간의 오른쪽 끝 점의 x좌표는 차례대로

$1+\frac{1}{n}$, $1+\frac{2}{n}$, $1+\frac{3}{n}$, …, $1+\frac{n}{n}(=2)$



이에 대응하는 y의 값은 각각

$\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, $\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{2}{n}\right)^2$, $\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{3}{n}\right)^2$, …, $\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{n}{n}\right)^2$

이때 색칠한 각 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{1}{n}$이므로

직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{1}{n}\times\left\{\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right\}+\frac{1}{n}\times\left\{\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\right\}+\frac{1}{n}\times\left\{\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{3}{n}\right)^2\right\}+\cdots+\frac{1}{n}\times\left\{\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{3n}\left\{\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1^2}{n^2}\right)+\left(1+\frac{2\times2}{n}+\frac{2^2}{n^2}\right)+\left(1+\frac{2\times3}{n}+\frac{3^2}{n^2}\right)+\cdots+\left(1+\frac{2n}{n}+\frac{n^2}{n^2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3n}\left\{n+\frac{2}{n}(1+2+3+\cdots+n)+\frac{1}{n^2}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)\right\}$$

$$=\frac{1}{3n}\left\{n+\frac{2}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$

$$=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}\right)+\frac{1}{18}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}\right)+\frac{1}{18}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}$$

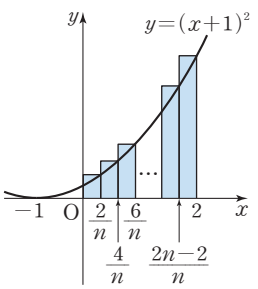
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$$

$$=\frac{7}{9}$$

716 $\frac{26}{3}$

오른쪽 그림과 같이 구간 $[0, 2]$를 n등분하면 각 구간의 오른쪽 끝 점의 x좌표는 차례대로

$\frac{2}{n}$, $\frac{4}{n}$, $\frac{6}{n}$, ..., $\frac{2n}{n}(=2)$



이에 대응하는 y의 값은 각각

$\left(\frac{2}{n}+1\right)^2$, $\left(\frac{4}{n}+1\right)^2$, $\left(\frac{6}{n}+1\right)^2$, ..., $\left(\frac{2n}{n}+1\right)^2$

이때 색칠한 각 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{2}{n}$이므로

직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{2}{n}\times\left(\frac{2}{n}+1\right)^2+\frac{2}{n}\times\left(\frac{4}{n}+1\right)^2+\frac{2}{n}\times\left(\frac{6}{n}+1\right)^2+\cdots+\frac{2}{n}\times\left(\frac{2n}{n}+1\right)^2$$

$$=\frac{2}{n}\left[\left(\frac{2^2}{n^2}+\frac{2\times2}{n}+1\right)+\left(\frac{4^2}{n^2}+\frac{2\times4}{n}+1\right)+\left(\frac{6^2}{n^2}+\frac{2\times6}{n}+1\right)+\cdots+\left\{\frac{(2n)^2}{n^2}+\frac{2\times2n}{n}+1\right\}\right]$$

$$=\frac{2}{n}\left\{\frac{4}{n^2}(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)+\frac{4}{n}(1+2+3+\cdots+n)+n\right\}$$

$$=\frac{2}{n}\left\{\frac{4}{n^2}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{4}{n}\times\frac{n(n+1)}{2}+n\right\}$$

$$=\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+4\left(1+\frac{1}{n}\right)+2$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+4\left(1+\frac{1}{n}\right)+2\right\}$$

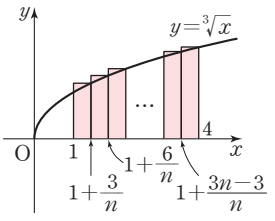
$$=\frac{8}{3}+4+2$$

$$=\frac{26}{3}$$

717 ⑤

오른쪽 그림과 같이 구간 $[1, 4]$를 n등분하면 각 구간의 오른쪽 끝 점의 x좌표는 차례대로

$1+\frac{3}{n}$, $1+\frac{6}{n}$, $1+\frac{9}{n}$, ..., $1+\frac{3n}{n}(=4)$



이에 대응하는 y의 값은 각각

$\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}$, $\sqrt[3]{1+\frac{6}{n}}$, $\sqrt[3]{1+\frac{9}{n}}$, ..., $\sqrt[3]{1+\frac{3n}{n}}$

이때 색칠한 각 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{3}{n}$이므로 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{3}{n}\times\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}+\frac{3}{n}\times\sqrt[3]{1+\frac{6}{n}}+\frac{3}{n}\times\sqrt[3]{1+\frac{9}{n}}+\cdots+\frac{3}{n}\times\sqrt[3]{1+\frac{3n}{n}}$$

$$=\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{1+\frac{3k}{n}}$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt[3]{1+\frac{3k}{n}}$$

718 답 (1) $\frac{1}{2}(e^4-1)$ (2) -2

(1) $\frac{4k}{n}$를 x, $\frac{4}{n}$를 dx로 나타내면 적분 구간은 $[0, 4]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{4k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{4k}{n}}\times\frac{4}{n}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^4 e^x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[e^x\Big]_0^4=\frac{1}{2}(e^4-1)$$

(2) $\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}$를 x, $\frac{\pi}{n}$를 dx로 나타내면 적분 구간은 $\Big[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\Big]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)\times\frac{\pi}{n}$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\cos x\,dx$$

$$=\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}=-1-1=-2$$

| 다른 풀이 |

(1) $\frac{k}{n}$를 x, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타내면 적분 구간은 $[0, 1]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{4k}{n}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{4k}{n}}\times\frac{1}{n}\times2$$

$$=2\int_0^1 e^{4x}\,dx$$

$$=2\Big[\frac{1}{4}e^{4x}\Big]_0^1=\frac{1}{2}(e^4-1)$$

(2) $\frac{k\pi}{n}$를 x, $\frac{\pi}{n}$를 dx로 나타내면 적분 구간은 $[0, \pi]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)\times\frac{\pi}{n}$$

$$=\int_0^{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)dx$$

$$=\Big[\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\Big]_0^{\pi}$$

$$=-1-1=-2$$

719 답 (1) $\frac{121}{5}$ (2) $\frac{4}{\pi}-1$

(1) 주어진 식을 $\sum$를 이용하여 나타내면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\{(n+2)^4+(n+4)^4+(n+6)^4+\cdots+(n+2n)^4\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}(n+2k)^4$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n+2k}{n}\right)^4\times\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4\times\frac{1}{n}$$

이때 $1+\frac{2k}{n}$를 x, $\frac{2}{n}$를 dx로 나타내면 적분 구간은 $[1, 3]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^5}\{(n+2)^4+(n+4)^4+(n+6)^4+\cdots+(n+2n)^4\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4\times\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{2k}{n}\right)^4\times\frac{2}{n}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3 x^4\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{5}x^5\Big]_1^3$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{243}{5}-\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{121}{5}$$

(2) 주어진 식을 $\sum$를 이용하여 나타내면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\tan^2\frac{\pi}{4n}+\tan^2\frac{2\pi}{4n}+\tan^2\frac{3\pi}{4n}+\cdots+\tan^2\frac{n\pi}{4n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\tan^2\frac{k\pi}{4n}\times\frac{1}{n}$$

이때 $\frac{k\pi}{4n}$를 x, $\frac{\pi}{4n}$를 dx로 나타내면 적분 구간은 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\tan^2\frac{\pi}{4n}+\tan^2\frac{2\pi}{4n}+\tan^2\frac{3\pi}{4n}+\cdots+\tan^2\frac{n\pi}{4n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tan^2\frac{k\pi}{4n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\tan^2\frac{k\pi}{4n}\times\frac{\pi}{4n}\times\frac{4}{\pi}$$

$$=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\,dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)\,dx$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{\pi}-1$$

720 ①

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3n}{3n+k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}}\times\frac{1}{n}$$

이때 $3+\frac{k}{n}$를 x, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타내면 적분 구간은 $[3, 4]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3n}{3n+k}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}}\times\frac{1}{n}$$

$$=\int_3^4\sqrt{\frac{3}{x}}\,dx$$

$$=\sqrt{3}\int_3^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$=\sqrt{3}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_3^4$$

$$=\sqrt{3}(4-2\sqrt{3})$$

$$=4\sqrt{3}-6$$

721 $1-\ln 2$

주어진 식을 $\sum$를 이용하여 나타내면

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+2n}+\frac{3}{n^2+3n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+kn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}$$

이때 $\frac{k}{n}$를 x, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타내면 적분 구간은 $[0, 1]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n}+\frac{2}{n^2+2n}+\frac{3}{n^2+3n}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{1+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{x}{1+x}\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx$$

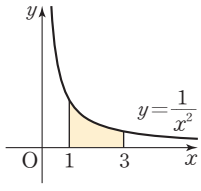
$$=\left[x-\ln|1+x|\right]_0^1=1-\ln 2$$

722 (1) $\frac{2}{3}$ (2) 4

(1) $1\le x\le 3$에서 $y>0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_1^3\frac{1}{x^2}\,dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^3$$

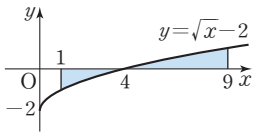
$$=-\frac{1}{3}-(-1)=\frac{2}{3}$$



(2) 곡선 $y=\sqrt{x}-2$와 x축의 교점의 x좌표는

$\sqrt{x}-2=0$에서

$\sqrt{x}=2$ $\quad\therefore x=4$



$1\le x\le 4$에서 $y\le 0$이고, $4\le x\le 9$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_1^4\{-(\sqrt{x}-2)\}\,dx+\int_4^9(\sqrt{x}-2)\,dx$$

$$=\int_1^4(-x^{\frac{1}{2}}+2)\,dx+\int_4^9(x^{\frac{1}{2}}-2)\,dx$$

$$=\left[-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x\right]_1^4+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-2x\right]_4^9$$

$$=\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{3}\right)+\left\{-\left(-\frac{8}{3}\right)\right\}=4$$

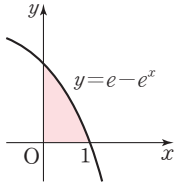
723 1

곡선 $y=e-e^x$과 x축의 교점의 x좌표는 $e-e^x=0$에서

$e^x=e$ $\quad\therefore x=1$

$0\le x\le 1$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1(e-e^x)\,dx=\left[ex-e^x\right]_0^1=1$$



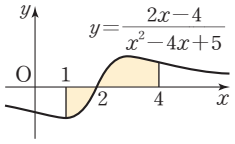
724 답 ln 10

곡선 $y=\dfrac{2x-4}{x^2-4x+5}$와 x축의 교점의 x좌표는

$\dfrac{2x-4}{x^2-4x+5}=0$에서

$2x-4=0$

$\therefore x=2$



$1\le x\le 2$에서 $y\le 0$이고, $2\le x\le 4$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_1^2\left(-\frac{2x-4}{x^2-4x+5}\right)dx+\int_2^4\frac{2x-4}{x^2-4x+5}\,dx$$

$$=\int_1^2\left\{-\frac{(x^2-4x+5)'}{x^2-4x+5}\right\}dx+\int_2^4\frac{(x^2-4x+5)'}{x^2-4x+5}\,dx$$

$$=\Big[-\ln|x^2-4x+5|\Big]_1^2+\Big[\ln|x^2-4x+5|\Big]_2^4$$

$$=-(-\ln 2)+\ln 5$$

$$=\ln 10$$

725 답 −5

곡선 $y=\sqrt{2x-a}$와 x축의 교점의 x좌표는

$\sqrt{2x-a}=0$에서

$2x-a=0$ $\quad\therefore x=\dfrac{a}{2}$

$a<0$이므로 $\dfrac{a}{2}\le x\le 2$에서 $y\ge 0$이고, 곡선 $y=\sqrt{2x-a}$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{\frac{a}{2}}^2\sqrt{2x-a}\,dx$$

◀ $2x-a=t$로 놓으면 $2=\dfrac{dt}{dx}$이고, 적분 구간은 $[0,\ 4-a]$이다.

$$=\frac{1}{2}\int_0^{4-a}\sqrt{t}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{4-a}t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^{4-a}$$

$$=\frac{1}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}}$$

즉, $\dfrac{1}{3}(4-a)^{\frac{3}{2}}=9$이므로

$(4-a)^{\frac{3}{2}}=3^3$

$4-a=9$ $\quad\therefore a=-5$

726 답 (1) $\dfrac{50}{3}$ (2) $e^2+\dfrac{1}{e^4}$

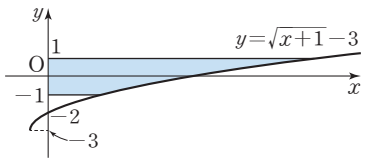
(1) $y=\sqrt{x+1}-3$을 x에 대하여 풀면

$y+3=\sqrt{x+1}$

$(y+3)^2=x+1$

$\therefore x=(y+3)^2-1$

$=y^2+6y+8$ $(y\ge -3)$



곡선 $x=y^2+6y+8$과 y축의 교점의 y좌표는

$y^2+6y+8=0$에서

$(y+4)(y+2)=0$

$\therefore y=-2$ ($\because y\ge -3$)

$-1\le y\le 1$에서 $x>0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^1(y^2+6y+8)\,dy$$

$$=\left[\frac{1}{3}y^3+3y^2+8y\right]_{-1}^1$$

$$=\frac{34}{3}-\left(-\frac{16}{3}\right)$$

$$=\frac{50}{3}$$

(2) $y=-\ln(x+1)+1$

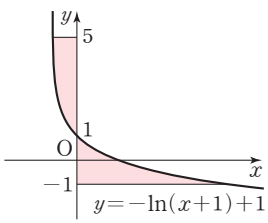
을 x에 대하여 풀면

$y-1=-\ln(x+1)$

$-y+1=\ln(x+1)$

$e^{-y+1}=x+1$

$\therefore x=e^{-y+1}-1$



곡선 $x=e^{-y+1}-1$과 y축의 교점의 y좌표는

$e^{-y+1}-1=0$에서

$e^{-y+1}=1$

$-y+1=0$ $\quad\therefore y=1$

$-1\le y\le 1$에서 $x\ge 0$이고, $1\le y\le 5$에서 $x\le 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^1(e^{-y+1}-1)\,dy+\int_1^5\{-(e^{-y+1}-1)\}\,dy$$

$$=\Big[-e^{-y+1}-y\Big]_{-1}^1+\Big[e^{-y+1}+y\Big]_1^5$$

$$=\{-2-(-e^2+1)\}+\left(\frac{1}{e^4}+5-2\right)$$

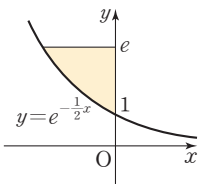
$$=e^2+\frac{1}{e^4}$$

727 답 2

$y=e^{-\frac{1}{2}x}$을 x에 대하여 풀면

$\ln y=-\frac{1}{2}x$

$\therefore x=-2\ln y$



곡선 $x=-2\ln y$와 y축의 교점의 y좌표는 $-2\ln y=0$에서

$y=1$

$1\le y\le e$에서 $x\le 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_1^e 2\ln y\,dy$ ◀ $u(y)=\ln y$, $v'(y)=2$로 놓으면 $u'(y)=\frac{1}{y}$, $v(y)=2y$

$=\left[2y\ln y\right]_1^e-\int_1^e 2\,dy$

$=2e-\left[2y\right]_1^e$

$=2e-(2e-2)$

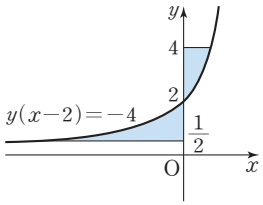
$=2$

728 답 17

$y(x-2)=-4$를 x에 대하여 풀면

$x-2=-\frac{4}{y}$

$\therefore x=-\frac{4}{y}+2$



곡선 $x=-\frac{4}{y}+2$와 y축의 교점의 y좌표는

$-\frac{4}{y}+2=0$에서

$\frac{4}{y}=2$ $\therefore y=2$

$\frac{1}{2}\le y\le 2$에서 $x\le 0$이고, $2\le y\le 4$에서 $x\ge 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_{\frac{1}{2}}^2\left\{-\left(-\frac{4}{y}+2\right)\right\}dy+\int_2^4\left(-\frac{4}{y}+2\right)dy$

$=\left[4\ln|y|-2y\right]_{\frac{1}{2}}^2+\left[-4\ln|y|+2y\right]_2^4$

$=\{(4\ln 2-4)-(-4\ln 2-1)\}$

$\quad+\{(-4\ln 4+8)-(-4\ln 2+4)\}$

$=1+4\ln 2=1+\ln 16$

즉, $1+\ln 16=a+\ln b$이므로

$a=1$, $b=16$

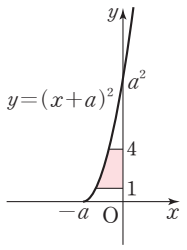
$\therefore a+b=17$

729 답 3

$y=(x+a)^2\,(x\ge -a)$을 x에 대하여 풀면

$\sqrt{y}=x+a$

$\therefore x=\sqrt{y}-a$



곡선 $x=\sqrt{y}-a$와 y축의 교점의 y좌표는 $\sqrt{y}-a=0$에서

$y=a^2$

이때 $a^2>4$이고 $1\le y\le 4$에서 $x<0$이므로 곡선 $x=\sqrt{y}-a$와 y축 및 두 직선 $y=1$, $y=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\int_1^4(-\sqrt{y}+a)\,dy$

$=\int_1^4(a-y^{\frac{1}{2}})\,dy$

$=\left[ay-\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$

$=\left(4a-\frac{16}{3}\right)-\left(a-\frac{2}{3}\right)=3a-\frac{14}{3}$

따라서 $3a-\frac{14}{3}=\frac{13}{3}$이므로

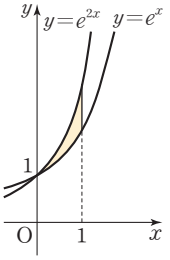
$a=3$

730 답 (1) $\frac{e^2}{2}-e+\frac{1}{2}$ (2) $2\ln\frac{9}{8}$ (3) $4-\ln 2$ (4) 12

(1) 두 곡선 $y=e^x$, $y=e^{2x}$의 교점의 x좌표는 $e^x=e^{2x}$에서

$x=2x$ $\therefore x=0$

$0\le x\le 1$에서 $e^{2x}\ge e^x$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$S=\int_0^1(e^{2x}-e^x)\,dx$

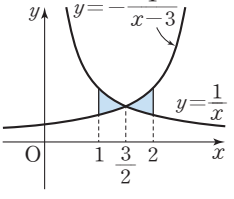
$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-e^x\right]_0^1$

$=\left(\frac{e^2}{2}-e\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2}{2}-e+\frac{1}{2}$

(2) 두 곡선 $y=\frac{1}{x}$, $y=-\frac{1}{x-3}$의 교점의 x좌표는

$\frac{1}{x}=-\frac{1}{x-3}$에서

$x-3=-x$



$2x=3 \quad \therefore x=\frac{3}{2}$

$1\le x\le\frac{3}{2}$에서 $\frac{1}{x}\ge-\frac{1}{x-3}$이고, $\frac{3}{2}\le x\le 2$에서 $\frac{1}{x}\le-\frac{1}{x-3}$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_1^{\frac{3}{2}}\left\{\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{x-3}\right)\right\}dx+\int_{\frac{3}{2}}^{2}\left(-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x}\right)dx$$

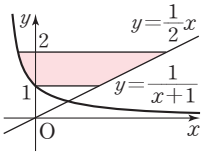
$$=\Big[\ln|x|+\ln|x-3|\Big]_1^{\frac{3}{2}}+\Big[-\ln|x-3|-\ln|x|\Big]_{\frac{3}{2}}^{2}$$

$$=\left(2\ln\frac{3}{2}-\ln 2\right)+\left\{-\ln 2-\left(-2\ln\frac{3}{2}\right)\right\}$$

$$=4\ln\frac{3}{2}-2\ln 2$$

$$=2\ln\frac{9}{8}$$

(3) $y=\frac{1}{x+1}$을 x에 대하여 풀면



$x+1=\frac{1}{y}$

$\therefore x=\frac{1}{y}-1$

$y=\frac{1}{2}x$를 x에 대하여 풀면

$x=2y$

$1\le y\le 2$에서 $2y>\frac{1}{y}-1$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

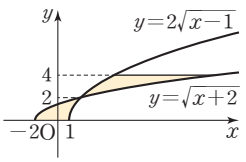
$$S=\int_1^2\left\{2y-\left(\frac{1}{y}-1\right)\right\}dy$$

$$=\Big[y^2-\ln|y|+y\Big]_1^2$$

$$=(6-\ln 2)-2$$

$$=4-\ln 2$$

(4) $y=\sqrt{x+2}$를 x에 대하여 풀면



$y^2=x+2$

$\therefore x=y^2-2\ (y\ge 0)$

$y=2\sqrt{x-1}$을 x에 대하여 풀면

$y^2=4(x-1),\ \frac{y^2}{4}=x-1$

$\therefore x=\frac{1}{4}y^2+1\ (y\ge 0)$

두 곡선 $x=y^2-2$, $x=\frac{1}{4}y^2+1$의 교점의 y좌표는 $y^2-2=\frac{1}{4}y^2+1$에서

$\frac{3}{4}y^2=3,\ y^2=4$

$\therefore y=2\ (\because y\ge 0)$

$0\le y\le 2$에서 $y^2-2\le\frac{1}{4}y^2+1$이고, $2\le y\le 4$에서 $y^2-2\ge\frac{1}{4}y^2+1$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^2\left\{\frac{1}{4}y^2+1-(y^2-2)\right\}dy+\int_2^4\left\{y^2-2-\left(\frac{1}{4}y^2+1\right)\right\}dy$$

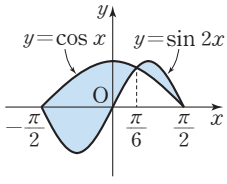
$$=\int_0^2\left(-\frac{3}{4}y^2+3\right)dy+\int_2^4\left(\frac{3}{4}y^2-3\right)dy$$

$$=\Big[-\frac{1}{4}y^3+3y\Big]_0^2+\Big[\frac{1}{4}y^3-3y\Big]_2^4$$

$$=4+\{4-(-4)\}=12$$

731 답 $\frac{5}{2}$

두 곡선 $y=\sin 2x$, $y=\cos x$의 교점의 x좌표는 $\sin 2x=\cos x$에서



$2\sin x\cos x=\cos x$

$(2\sin x-1)\cos x=0$

$\sin x=\frac{1}{2}$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=-\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}\ \left(\because -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$

$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{6}$에서 $\sin 2x\le\cos x$이고, $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $\sin 2x\ge\cos x$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}(\cos x-\sin 2x)\,dx+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\cos x)\,dx$$

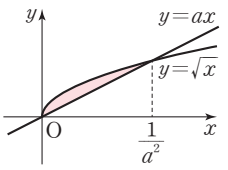
$$=\Big[\sin x+\frac{1}{2}\cos 2x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}}+\Big[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left\{\frac{3}{4}-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}+\left\{-\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{4}\right)\right\}$$

$$=\frac{5}{2}$$

732 답 $\frac{1}{2}$

곡선 $y=\sqrt{x}$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는



$\sqrt{x}=ax$에서 $x=a^2x^2$

$x(a^2x-1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\frac{1}{a^2}$

$0\le x\le\frac{1}{a^2}$에서 $\sqrt{x}\ge ax$이므로 곡선 $y=\sqrt{x}$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^{\frac{1}{a^2}}(\sqrt{x}-ax)\,dx=\int_0^{\frac{1}{a^2}}(x^{\frac{1}{2}}-ax)\,dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{a}{2}x^2\right]_0^{\frac{1}{a^2}}=\frac{2}{3a^3}-\frac{1}{2a^3}=\frac{1}{6a^3}$$

따라서 $\frac{1}{6a^3}=\frac{4}{3}$이므로

$a^3=\frac{1}{8}$ $\therefore\ a=\frac{1}{2}$ ($\because\ a>0$)

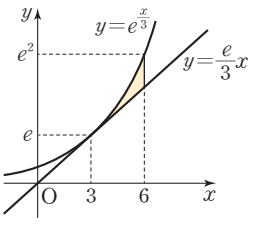
733 답 $3e^2-\frac{15}{2}e$

$y=e^{\frac{x}{3}}$에서 $y'=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}$

점 $(3,\ e)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{e}{3}$이므로 접선의 방정식은

$y-e=\frac{e}{3}(x-3)$ $\therefore\ y=\frac{e}{3}x$

$3\le x\le 6$에서 $e^{\frac{x}{3}}\ge\frac{e}{3}x$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_3^6\left(e^{\frac{x}{3}}-\frac{e}{3}x\right)dx$$

$$=\left[3e^{\frac{x}{3}}-\frac{e}{6}x^2\right]_3^6$$

$$=(3e^2-6e)-\frac{3}{2}e=3e^2-\frac{15}{2}e$$

734 답 $\frac{16}{3}$

$y=2\sqrt{x-4}$에서 $y'=\frac{1}{\sqrt{x-4}}$

접점의 좌표를 $(a,\ 2\sqrt{a-4})$라 하면 접선의 기울기는 $\frac{1}{\sqrt{a-4}}$이므로 접선의 방정식은

$y-2\sqrt{a-4}=\frac{1}{\sqrt{a-4}}(x-a)$

$\therefore\ y=\frac{1}{\sqrt{a-4}}x+\frac{a-8}{\sqrt{a-4}}$

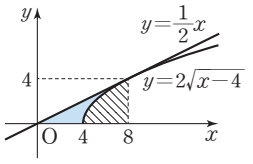
이 직선이 원점을 지나므로

$0=\frac{a-8}{\sqrt{a-4}}$, $a-8=0$ $\therefore\ a=8$

즉, 점 $(8,\ 4)$에서의 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^8\frac{1}{2}x\,dx-\int_4^8 2\sqrt{x-4}\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_0^8-\left[\frac{4}{3}(x-4)^{\frac{3}{2}}\right]_4^8$$

$$=16-\frac{32}{3}=\frac{16}{3}$$

| 다른 풀이 |

원점에서 곡선 $y=2\sqrt{x-4}$에 그은 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x$

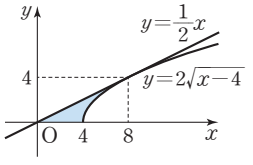
한편 $y=2\sqrt{x-4}$를 x에 대하여 풀면

$y^2=4x-16$, $4x=y^2+16$

$\therefore\ x=\frac{1}{4}y^2+4\ (y\ge 0)$

$y=\frac{1}{2}x$를 x에 대하여 풀면 $x=2y$

$0\le y\le 4$에서 $\frac{1}{4}y^2+4\ge 2y$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^4\left(\frac{1}{4}y^2+4-2y\right)dy$$

$$=\left[\frac{1}{12}y^3+4y-y^2\right]_0^4=\frac{16}{3}$$

735 답 $\frac{e}{2}-1$

$y=e^x+3$에서 $y'=e^x$

접점의 좌표를 $(a,\ e^a+3)$이라 하면 접선의 기울기는 e^a이다.

즉, $e^a=e$이므로 $a=1$

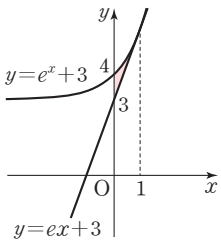
따라서 점 $(1,\ e+3)$에서의 접선의 방정식은

$y-(e+3)=e(x-1)$ $\therefore\ y=ex+3$

$0 \le x \le 1$에서

$e^x+3 \ge ex+3$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1 \{e^x+3-(ex+3)\}\,dx$$
$$=\int_0^1 (e^x-ex)\,dx$$
$$=\left[e^x-\frac{e}{2}x^2\right]_0^1=\frac{e}{2}-1$$



736 $2\ln 2-1$

$y=\frac{2}{x}$에서 $y'=-\frac{2}{x^2}$

접점의 좌표를 $\left(a, \frac{2}{a}\right)$라 하면 접선의 기울기는 $-\frac{2}{a^2}$이다.

즉, $-\frac{2}{a^2}=-2$이므로

$a^2=1$ $\therefore a=1\ (\because a>0)$

따라서 점 $(1, 2)$에서의 접선의 방정식은

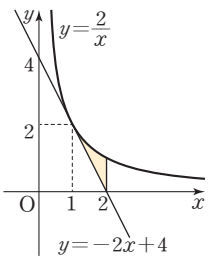
$y-2=-2(x-1)$ $\therefore y=-2x+4$

$1 \le x \le 2$에서

$\frac{2}{x} \ge -2x+4$이므로

구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_1^2 \left\{\frac{2}{x}-(-2x+4)\right\}dx$$
$$=\left[2\ln x+x^2-4x\right]_1^2$$
$$=(2\ln 2-4)-(-3)$$
$$=2\ln 2-1$$



737 $\frac{9}{2}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^k (-\sqrt{2x}+2)\,dx=0,\ \int_0^k (-\sqrt{2}x^{\frac{1}{2}}+2)\,dx=0$$
$$\left[-\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x\right]_0^k=0$$
$$-\frac{2\sqrt{2}}{3}k\sqrt{k}+2k=0,\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}k\left(\sqrt{k}-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

이때 $k>2$이므로

$\sqrt{k}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\therefore k=\frac{9}{2}$

738 e

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_{\frac{1}{e}}^{a} \frac{2\ln x}{x}\,dx=0$$

◀ $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고, 적분 구간은 $[-1, \ln a]$이다.

$$\int_{-1}^{\ln a} 2t\,dt=0$$
$$\left[t^2\right]_{-1}^{\ln a}=0$$

$(\ln a)^2-1=0$, $(\ln a+1)(\ln a-1)=0$

이때 $a>1$에서 $\ln a>0$이므로

$\ln a=1$ $\therefore a=e$

739 $\frac{2}{\pi}$

$A=B$이므로

$$\int_0^2 \left(\cos\frac{\pi}{4}x-kx\right)dx=0$$
$$\left[\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{4}x-\frac{k}{2}x^2\right]_0^2=0$$

$\frac{4}{\pi}-2k=0$ $\therefore k=\frac{2}{\pi}$

740 $\frac{1}{e}$

$A=B$이므로

$$\int_0^1 (ke^x-e^{-x})\,dx=0$$
$$\left[ke^x+e^{-x}\right]_0^1=0$$
$$\left(ke+\frac{1}{e}\right)-(k+1)=0$$

$k(e-1)=1-\frac{1}{e}$ $\therefore k=\frac{1}{e}$

741 27

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

$3\sqrt{x-1}+1=x$에서

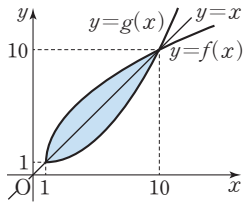
$3\sqrt{x-1}=x-1$

$9(x-1)=(x-1)^2$

$x^2-11x+10=0$

$(x-1)(x-10)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=10$



$1 \le x \le 10$에서 $3\sqrt{x-1}+1 \ge x$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=2\int_1^{10}(3\sqrt{x-1}+1-x)\,dx$$
$$=2\int_1^{10}\{3(x-1)^{\frac{1}{2}}+1-x\}\,dx$$
$$=2\left[2(x-1)^{\frac{3}{2}}+x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^{10}$$
$$=2\left(14-\frac{1}{2}\right)=27$$

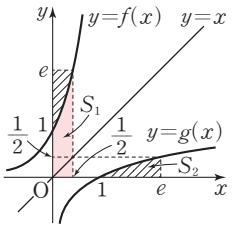
742 $\frac{e}{2}$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $f(0)=1$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=e$이므로

$g(1)=0$, $g(e)=\frac{1}{2}$이다.

$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx=S_1$,

$\int_1^{e} g(x)\,dx=S_2$라 하면 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx+\int_1^{e} g(x)\,dx=S_1+S_2$$
$$=\frac{1}{2}\times e=\frac{e}{2}$$

743 $15-8\ln 4$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는

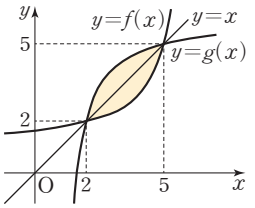
$-\frac{4}{x-6}+1=x$에서

$-\frac{4}{x-6}=x-1$

$x^2-7x+10=0$

$(x-2)(x-5)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=5$



$2 \le x \le 5$에서 $x \ge -\frac{4}{x-6}+1$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

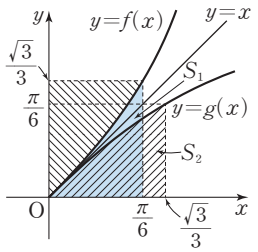
$$S=2\int_2^5\left\{x-\left(-\frac{4}{x-6}+1\right)\right\}dx$$
$$=2\int_2^5\left(x+\frac{4}{x-6}-1\right)dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^2+4\ln|x-6|-x\right]_2^5$$
$$=2\left(\frac{15}{2}-4\ln 4\right)=15-8\ln 4$$

744 $\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고 $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로 $g(0)=0$, $g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$이다.

$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx=S_1$,

$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} g(x)\,dx=S_2$라 하면 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로



$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx+\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} g(x)\,dx=S_1+S_2$$
$$=\frac{\pi}{6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$$

| 참고 | $f'(x)=\sec^2 x$이므로 $f'(0)=1$

즉, 점 $(0, 0)$에서의 곡선 $y=f(x)$의 접선의 방정식은 $y=x$

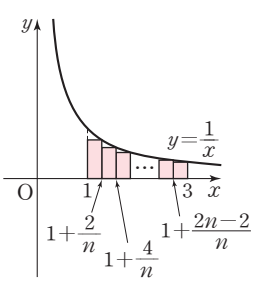
이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $x=0$에서 서로 접한다.

연습문제 380~382쪽

745 ⑤

오른쪽 그림과 같이 구간 $[1, 3]$을 n등분하면 각 구간의 오른쪽 끝 점의 x좌표는 차례대로

$1+\frac{2}{n}$, $1+\frac{4}{n}$, $1+\frac{6}{n}$, …, $1+\frac{2n}{n}(=3)$



이에 대응하는 y의 값은 각각

$\frac{n}{n+2}$, $\frac{n}{n+4}$, $\frac{n}{n+6}$, …, $\frac{n}{n+2n}$

이때 색칠한 각 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{2}{n}$이므로

직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{2}{n}\times\frac{n}{n+2}+\frac{2}{n}\times\frac{n}{n+4}+\frac{2}{n}\times\frac{n}{n+6}+\cdots+\frac{2}{n}\times\frac{n}{n+2n}$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+2k}$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+2k}$$

746 ①

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}$$

이때 $2+\frac{k}{n}$를 x, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타내면 적분 구간은

$[2, 3]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\frac{k}{n}}\times\frac{1}{n}$$

$$=\int_2^3\frac{1}{x}dx=\Big[\ln|x|\Big]_2^3$$

$$=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

747 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

주어진 식을 $\sum$를 이용하여 나타내면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\{f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(2n)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{6}+\cdots+\sqrt{2n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{2k}{n}}\times\frac{2}{n}\times\frac{1}{2}$$

이때 $\frac{2k}{n}$를 x, $\frac{2}{n}$를 dx로 나타내면 적분 구간은

$[0, 2]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}\{f(2)+f(4)+f(6)+\cdots+f(2n)\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{2k}{n}}\times\frac{2}{n}\times\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{x}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_0^2=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

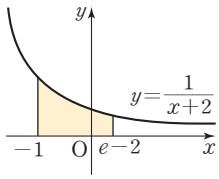
748 $\frac{3}{2}$

$-1\le x\le e-2$에서 $y>0$

이므로

$$S_1=\int_{-1}^{e-2}\frac{1}{x+2}dx$$

$$=\Big[\ln|x+2|\Big]_{-1}^{e-2}=1$$



한편 $y=\frac{1}{x+2}$을 x에 대하여 풀면

$$x+2=\frac{1}{y}$$

$$\therefore x=\frac{1}{y}-2$$

곡선 $x=\frac{1}{y}-2$와 y축의 교점의 y좌표는

$$\frac{1}{y}-2=0 \qquad \therefore y=\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{4}\le y\le\frac{1}{2}$에서 $x\ge 0$이고,

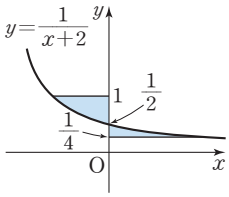
$\frac{1}{2}\le y\le 1$에서 $x\le 0$이므로

$$S_2=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{1}{y}-2\Big)dy+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\Big(-\frac{1}{y}+2\Big)dy$$

$$=\Big[\ln|y|-2y\Big]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}+\Big[-\ln|y|+2y\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\Big\{(-\ln 2-1)-\Big(-\ln 4-\frac{1}{2}\Big)\Big\}+\{2-(\ln 2+1)\}$$

$$=\frac{1}{2}$$



$$\therefore S_1+S_2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

749 $\frac{11}{8\ln 2}$

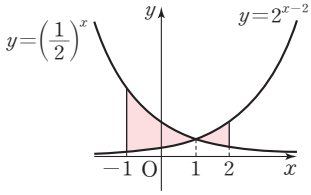
두 곡선 $y=2^{x-2}$, $y=\Big(\frac{1}{2}\Big)^x$의 교점의 x좌표는

$2^{x-2}=\Big(\frac{1}{2}\Big)^x$에서

$2^{x-2}=2^{-x}$

$x-2=-x$

$2x=2 \qquad \therefore x=1$



$-1\le x\le 1$에서 $2^{x-2}\le\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $1\le x\le 2$에서

$2^{x-2}\ge\left(\frac{1}{2}\right)^x$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{1}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x-2^{x-2}\right\}dx+\int_{1}^{2}\left\{2^{x-2}-\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(2^{-x}-2^{x-2})\,dx+\int_{1}^{2}(2^{x-2}-2^{-x})\,dx$$

$$=\left[-\frac{2^{-x}}{\ln 2}-\frac{2^{x-2}}{\ln 2}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{2^{x-2}}{\ln 2}+\frac{2^{-x}}{\ln 2}\right]_{1}^{2}$$

$$=\left(-\frac{1}{\ln 2}+\frac{17}{8\ln 2}\right)+\left(\frac{5}{4\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}\right)$$

$$=\frac{11}{8\ln 2}$$

750 $\frac{e^2}{2}+\frac{3}{2}$

$A=B$이므로

$$\int_0^1\{e^{2x}-(-4x+k)\}\,dx=0$$

$$\left[\frac{1}{2}e^{2x}+2x^2-kx\right]_0^1=0$$

$$\left(\frac{e^2}{2}+2-k\right)-\frac{1}{2}=0$$

$$\therefore\ k=\frac{e^2}{2}+\frac{3}{2}$$

751 2

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{k}{2n}\right)$에서 $2+\frac{k}{2n}$를 x, $\frac{1}{2n}$을 dx로 나타내면 적분 구간은 $\left[2,\ \frac{5}{2}\right]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{k}{2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(2+\frac{k}{2n}\right)\times\frac{1}{2n}\times 2$$

$$=2\int_2^{\frac{5}{2}}f(x)\,dx$$

$$=2\int_2^{\frac{5}{2}}\left(\cos\pi x+\frac{a}{\pi}\right)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi x+\frac{a}{\pi}x\right]_2^{\frac{5}{2}}$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{\pi}+\frac{5a}{2\pi}\right)-\frac{2a}{\pi}\right\}$$

$$=\frac{2+a}{\pi}$$

즉, $\frac{2+a}{\pi}=\frac{4}{\pi}$이므로

$2+a=4$ $\quad\therefore\ a=2$

752 ㄴ, ㄷ, ㄹ

주어진 식을 $\sum$를 이용하여 나타내면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)^4+(3n+2)^4+\cdots+(3n+n)^4}{n^5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(3+\frac{1}{n}\right)^4+\left(3+\frac{2}{n}\right)^4+\cdots+\left(3+\frac{n}{n}\right)^4\right\}\times\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{k}{n}\right)^4\times\frac{1}{n}\qquad\cdots\cdots\ ㉠$$

㉠에서 $3+\frac{k}{n}$를 x, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타내면 적분 구간은 $[3,\ 4]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{k}{n}\right)^4\times\frac{1}{n}=\int_3^4x^4\,dx\ (ㄴ)\qquad\cdots\cdots\ ㉡$$

㉠에서 $\frac{k}{n}$를 x, $\frac{1}{n}$을 dx로 나타내면 적분 구간은 $[0,\ 1]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3+\frac{k}{n}\right)^4\times\frac{1}{n}=\int_0^1(x+3)^4\,dx\ (ㄷ)$$

㉡에서 $x+3=t$로 놓으면 $1=\frac{dt}{dx}$이고

$x=3$일 때 $t=6$, $x=4$일 때 $t=7$이므로

$$\int_3^4x^4\,dx=\int_6^7(t-3)^4\,dt$$

$$=\int_6^7(x-3)^4\,dx\ (ㄹ)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

753 $\frac{(\ln 3)^2}{4}$

주어진 식을 $\sum$를 이용하여 나타내면

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2}\ln\frac{n+2}{n}+\frac{1}{n+4}\ln\frac{n+4}{n}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n+6}\ln\frac{n+6}{n}+\cdots+\frac{1}{3n}\ln\frac{3n}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+2k}\ln\frac{n+2k}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{2k}{n}}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)\times\frac{2}{n}\times\frac{1}{2}$$

이때 $1+\frac{2k}{n}$를 x, $\frac{2}{n}$를 dx로 나타내면 적분 구간은 $[1,\ 3]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2}\ln\frac{n+2}{n}+\frac{1}{n+4}\ln\frac{n+4}{n}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n+6}\ln\frac{n+6}{n}+\cdots+\frac{1}{3n}\ln\frac{3n}{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{2k}{n}}\ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)\times\frac{2}{n}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}\int_0^{\ln 3}t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\ln 3}=\frac{(\ln 3)^2}{4}$$

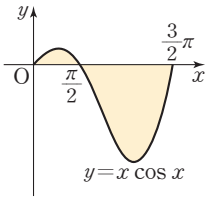
◀ $\ln x=t$로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이고, 적분 구간은 $[0,\ln 3]$이다.

754 답 $\frac{5}{2}\pi-1$

곡선 $y=x\cos x$ $\left(0\le x\le\frac{3}{2}\pi\right)$와 x축의 교점의 x좌표는 $x\cos x=0$에서

$x=0$ 또는 $\cos x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$ $\left(\because 0\le x\le\frac{3}{2}\pi\right)$



$0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 $y\ge 0$, $\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{3}{2}\pi$에서 $y\le 0$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

[$u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$로 놓으면 $u'(x)=1$, $v(x)=\sin x$]

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}(-x\cos x)\,dx$$
$$=\left[x\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$
$$-\left(\left[x\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\sin x\,dx\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}+\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left(-\frac{3}{2}\pi-\frac{\pi}{2}\right)+\left[-\cos x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}$$
$$=\frac{\pi}{2}-1+2\pi=\frac{5}{2}\pi-1$$

755 답 ③

곡선 $y=\ln\frac{1}{2}x$와 x축의 교점의 x좌표는

$\ln\frac{1}{2}x=0$에서 $\frac{1}{2}x=1$ $\therefore x=2$

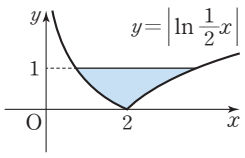
$0<x\le 2$에서 $y=-\ln\frac{1}{2}x$이므로 x에 대하여 풀면

$-y=\ln\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}x=e^{-y}$ $\therefore x=2e^{-y}$

$x\ge 2$에서 $y=\ln\frac{1}{2}x$이므로 x에 대하여 풀면

$e^y=\frac{1}{2}x$ $\therefore x=2e^y$

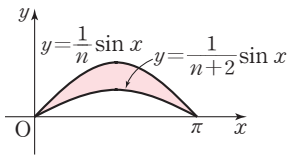
$0\le y\le 1$에서 $2e^y\ge 2e^{-y}$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$$S=\int_0^1(2e^y-2e^{-y})\,dy$$
$$=\left[2e^y+2e^{-y}\right]_0^1=2e+\frac{2}{e}-4$$

756 답 3

두 곡선 $y=\frac{1}{n}\sin x$, $y=\frac{1}{n+2}\sin x$의 교점의 x좌표는



$\frac{1}{n}\sin x=\frac{1}{n+2}\sin x$에서 $\sin x=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\pi$ $(\because 0\le x\le\pi)$ ▸▸▸▸▸▸ ❶

$0\le x\le\pi$에서 $\frac{1}{n}\sin x\ge\frac{1}{n+2}\sin x$이므로

$$S_n=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin x-\frac{1}{n+2}\sin x\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{n}\cos x+\frac{1}{n+2}\cos x\right]_0^{\pi}$$
$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)-\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$$ ▸▸▸▸▸▸ ❷

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}S_n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\right.$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$
$$\left.+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$
$$=2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=2\times\frac{3}{2}=3$$ ▸▸▸▸▸▸ ❸

단계	채점 기준	비율
❶	두 곡선 $y=\frac{1}{n}\sin x$, $y=\frac{1}{n+2}\sin x$의 교점의 x좌표 구하기	30 %
❷	S_n 구하기	40 %
❸	급수 $\sum_{n=1}^{\infty}S_n$의 합 구하기	30 %

757 e^2-2e

$y=k\ln x$에서 $y'=\dfrac{k}{x}$

접점의 좌표를 $(a,\ k\ln a)$라 하면 접선의 기울기는 $\dfrac{k}{a}$이다.

즉, $\dfrac{k}{a}=2$이므로

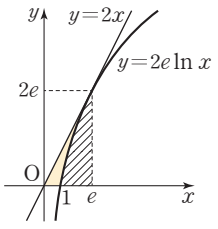
$a=\dfrac{k}{2}$

이때 점 $\left(\dfrac{k}{2},\ k\ln\dfrac{k}{2}\right)$가 직선 $y=2x$ 위의 점이므로

$k\ln\dfrac{k}{2}=k,\ \ln\dfrac{k}{2}=1$

$\dfrac{k}{2}=e \quad \therefore\ k=2e$

따라서 접점의 좌표가 $(e,\ 2e)$이므로 구하는 넓이를 S라 하면



$S=\displaystyle\int_0^e 2x\,dx-\int_1^e 2e\ln x\,dx$

$=\Big[x^2\Big]_0^e-2e\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$ ◀ $u(x)=\ln x,\ v'(x)=1$로 놓으면

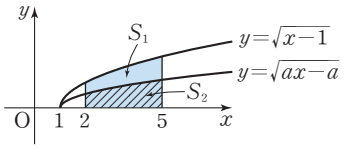
$=e^2-2e\left(\Big[x\ln x\Big]_1^e-\displaystyle\int_1^e dx\right)$ $u'(x)=\dfrac{1}{x},\ v(x)=x$

$=e^2-2e^2+2e\Big[x\Big]_1^e$

$=-e^2+2e(e-1)$

$=e^2-2e$

758 $\dfrac{1}{4}$



곡선 $y=\sqrt{x-1}$과 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\displaystyle\int_2^5\sqrt{x-1}\,dx$

$=\displaystyle\int_2^5(x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$=\left[\dfrac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5$

$=\dfrac{16}{3}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{14}{3}$

곡선 $y=\sqrt{ax-a}$와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=5$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\displaystyle\int_2^5\sqrt{ax-a}\,dx=\int_2^5(ax-a)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$=\left[\dfrac{2}{3a}(ax-a)^{\frac{3}{2}}\right]_2^5$

$=\dfrac{16}{3}\sqrt{a}-\dfrac{2}{3}\sqrt{a}=\dfrac{14}{3}\sqrt{a}$

이때 $S_2=\dfrac{1}{2}S_1$이므로

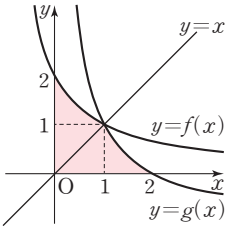
$\dfrac{14}{3}\sqrt{a}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{14}{3}$

$\sqrt{a}=\dfrac{1}{2} \quad \therefore\ a=\dfrac{1}{4}$

759 ④

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 및 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$ 및 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는



$\dfrac{2}{x+1}=x$에서

$x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=1\ (\because\ x>-1)$

$0\le x\le 1$에서 $\dfrac{2}{x+1}\ge x$이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=2\displaystyle\int_0^1\left(\frac{2}{x+1}-x\right)dx$

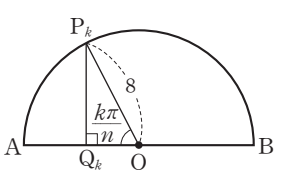
$=2\left[2\ln|x+1|-\dfrac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$=2\left(2\ln 2-\dfrac{1}{2}\right)=4\ln 2-1$

760 ③

| 접근 방법 | 보조선을 그어 $\overline{P_kQ_k}$의 길이를 구한 후 급수의 합을 정적분으로 나타낸다.

$\angle P_kOQ_k=\dfrac{k\pi}{n}$이므로



$\overline{P_kQ_k}$

$=\overline{OP_k}\sin(\angle P_kOQ_k)$

$=8\sin\dfrac{k\pi}{n}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{P_kQ_k}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}8\sin\frac{k\pi}{n}$$

$\frac{k\pi}{n}$를 x, $\frac{\pi}{n}$를 dx로 나타내면 적분 구간은 $[0,\ \pi]$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}8\sin\frac{k\pi}{n}$$
$$=8\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\times\frac{\pi}{n}\times\frac{1}{\pi}$$
$$=\frac{8}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=\frac{8}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}$$
$$=\frac{8}{\pi}\{1-(-1)\}=\frac{16}{\pi}$$

761 답 96

| 접근 방법 | 함수 $f(x)$의 최댓값을 이용하여 a에 대한 식을 구한 후 구하는 넓이를 a에 대하여 나타내어 그 값을 구한다.

$f(x)=\int_0^x(a-t)e^t\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(a-x)e^x=-(x-a)e^x$

$f'(x)=0$에서 $x-a=0$ ($\because e^x>0$)

$\therefore x=a$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이면서 최대이므로 최댓값은

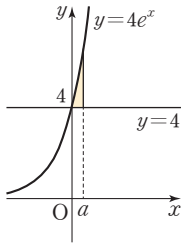
$$f(a)=\int_0^a(a-t)e^t\,dt$$ ◀ $u(t)=a-t$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면 $u'(t)=-1$, $v(t)=e^t$
$$=\Big[(a-t)e^t\Big]_0^a-\int_0^a(-e^t)\,dt$$
$$=-a+\Big[e^t\Big]_0^a=-a+e^a-1$$

즉, $-a+e^a-1=24$이므로

$e^a-a=25$ ····· ㉠

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^a(4e^x-4)\,dx$$
$$=\Big[4e^x-4x\Big]_0^a$$
$$=4(e^a-a)-4$$
$$=4\times25-4=96\ (\because\ ㉠)$$



02 정적분의 활용 (2)

유제 385~395쪽

762 답 $\frac{14}{3}$ cm³

물의 높이가 x cm일 때의 수면의 넓이가 $\sqrt{x+1}$ cm²이므로 물의 높이가 3 cm일 때의 물의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^3\sqrt{x+1}\,dx=\Big[\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^3$$
$$=\frac{16}{3}-\frac{2}{3}=\frac{14}{3}(\text{cm}^3)$$

763 답 1 cm³

입체도형을 밑면으로부터 높이가 x cm인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ cm²라 하면

$S(x)=(2\sqrt{\sin 2x})^2=4\sin 2x$

따라서 이 입체도형의 높이가 $\frac{\pi}{6}$ cm이므로 이 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{6}}S(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}4\sin 2x\,dx$$
$$=\Big[-2\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=-1-(-2)=1(\text{cm}^3)$$

764 답 $(e-1)\pi$ cm³

물의 높이가 x cm일 때의 수면의 넓이를 $S(x)$ cm²라 하면

$S(x)=\pi(\sqrt{e^{\sin x}\cos x})^2=\pi e^{\sin x}\cos x$

물의 높이가 $\frac{\pi}{2}$ cm일 때의 물의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}}S(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi e^{\sin x}\cos x\,dx$$
$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{\sin x}\cos x\,dx$$ ◀ $\sin x=t$로 놓으면 $\cos x=\frac{dt}{dx}$이고, 적분 구간은 $[0,\ 1]$이다.
$$=\pi\int_0^1e^t\,dt$$
$$=\pi\Big[e^t\Big]_0^1=(e-1)\pi(\text{cm}^3)$$

765 답 4

입체도형을 밑면으로부터 높이가 x인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{1}{2}\Big(2-\frac{x}{3}\Big)^2=2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{18}x^2$$

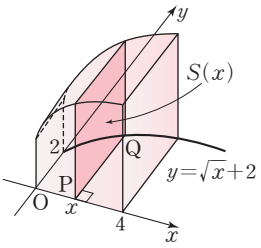
따라서 이 입체도형의 높이가 6이므로 이 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^6 S(x)\,dx=\int_0^6\left(2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{18}x^2\right)dx$$
$$=\left[2x-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{54}x^3\right]_0^6=4$$

| 참고 | 반지름의 길이가 r, 호의 길이가 l인 부채꼴의 넓이를 S라 하면 $S=\frac{1}{2}rl$

766 $\frac{136}{3}$

다음 그림과 같이 x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\,0)(0\le x\le 4)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\sqrt{x}+2$와 만나는 점을 Q라 하면 $\mathrm{Q}(x,\,\sqrt{x}+2)$



$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{x}+2$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=(\sqrt{x}+2)^2=x+4\sqrt{x}+4$

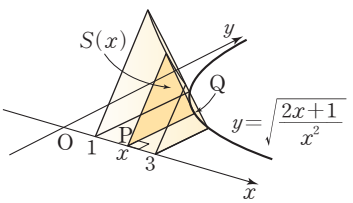
따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^4 S(x)\,dx=\int_0^4(x+4\sqrt{x}+4)\,dx$$
$$=\int_0^4(x+4x^{\frac{1}{2}}+4)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+4x\right]_0^4=\frac{136}{3}$$

767 $\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3+\frac{\sqrt{3}}{6}$

다음 그림과 같이 x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\,0)(1\le x\le 3)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\sqrt{\frac{2x+1}{x^2}}$과 만나는 점을 Q라 하면

$\mathrm{Q}\left(x,\,\sqrt{\frac{2x+1}{x^2}}\right)$



$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\frac{2x+1}{x^2}}$을 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{\frac{2x+1}{x^2}}\right)^2=\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{4x^2}$

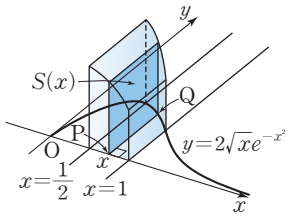
따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_1^3 S(x)\,dx=\int_1^3\frac{\sqrt{3}(2x+1)}{4x^2}\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^3\left(\frac{2}{x}+x^{-2}\right)dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[2\ln x-\frac{1}{x}\right]_1^3\ (\because\ x>0)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{\left(2\ln 3-\frac{1}{3}\right)-(-1)\right\}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\ln 3+\frac{\sqrt{3}}{6}$$

768 ④

다음 그림과 같이 x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\,0)\left(\frac{1}{2}\le x\le 1\right)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=2\sqrt{x}e^{-x^2}$과 만나는 점을 Q라 하면

$\mathrm{Q}(x,\,2\sqrt{x}e^{-x^2})$



$\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{x}e^{-x^2}$을 한 변의 길이로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=(2\sqrt{x}e^{-x^2})^2=4xe^{-2x^2}$

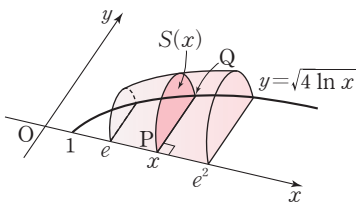
따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_{\frac{1}{2}}^1 S(x)\,dx$$
$$=\int_{\frac{1}{2}}^1 4xe^{-2x^2}\,dx$$ ◀ $-2x^2=t$로 놓으면 $-4x=\frac{dt}{dx}$이고, 적분 구간은 $\left[-\frac{1}{2},\,-2\right]$이다.
$$=-\int_{-\frac{1}{2}}^{-2}e^t\,dt$$
$$=\int_{-2}^{-\frac{1}{2}}e^t\,dt$$
$$=\left[e^t\right]_{-2}^{-\frac{1}{2}}$$
$$=e^{-\frac{1}{2}}-e^{-2}$$

769 답 $\frac{e^2}{2}\pi$

다음 그림과 같이 x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)(e\le x\le e^2)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\sqrt{4\ln x}$와 만나는 점을 Q라 하면

$\mathrm{Q}(x,\ \sqrt{4\ln x})$



$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{4\ln x}$를 지름으로 하는 반원의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\sqrt{4\ln x}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}\ln x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_e^{e^2}S(x)\,dx=\int_e^{e^2}\frac{\pi}{2}\ln x\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_e^{e^2}\ln x\,dx \quad \blacktriangleleft\ u(x)=\ln x,\ v'(x)=1\text{로 놓으면 } u'(x)=\frac{1}{x},\ v(x)=x$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\left[x\ln x\right]_e^{e^2}-\int_e^{e^2}dx\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(2e^2-e-\left[x\right]_e^{e^2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\{2e^2-e-(e^2-e)\}$$

$$=\frac{e^2}{2}\pi$$

770 답 (1) $\frac{4}{3}$ (2) $-\frac{40}{3}$ (3) 4

(1) 시각 $t=1$에서의 점 P의 위치를 x라 하면

$$x=0+\int_0^1(2-\sqrt{t}\,)\,dt$$

$$=\left[2t-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$=\frac{4}{3}$$

(2) 시각 $t=4$에서 $t=16$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_4^{16}(2-\sqrt{t}\,)\,dt=\left[2t-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_4^{16}$$

$$=-\frac{32}{3}-\frac{8}{3}=-\frac{40}{3}$$

(3) $2-\sqrt{t}=0$에서

$\sqrt{t}=2$ $\quad\therefore\ t=4$

따라서 $1\le t\le 4$일 때 $v(t)\ge 0$, $4\le t\le 9$일 때 $v(t)\le 0$이므로 시각 $t=1$에서 $t=9$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^9|2-\sqrt{t}\,|\,dt$$

$$=\int_1^4(2-\sqrt{t}\,)\,dt+\int_4^9\{-(2-\sqrt{t}\,)\}\,dt$$

$$=\left[2t-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^4+\left[-2t+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_4^9$$

$$=\left(\frac{8}{3}-\frac{4}{3}\right)+\frac{8}{3}=4$$

771 답 −12

시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량 a는

$$a=\int_0^4(2^{t-2}-1)\,dt$$

$$=\left[\frac{2^{t-2}}{\ln 2}-t\right]_0^4$$

$$=\left(\frac{4}{\ln 2}-4\right)-\frac{1}{4\ln 2}=\frac{15}{4\ln 2}-4$$

$2^{t-2}-1=0$에서 $2^{t-2}=1$

$t-2=0$ $\quad\therefore\ t=2$

따라서 $0\le t\le 2$일 때 $v(t)\le 0$, $2\le t\le 4$일 때 $v(t)\ge 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리 b는

$$b=\int_0^4|2^{t-2}-1|\,dt$$

$$=\int_0^2(-2^{t-2}+1)\,dt+\int_2^4(2^{t-2}-1)\,dt$$

$$=\left[-\frac{2^{t-2}}{\ln 2}+t\right]_0^2+\left[\frac{2^{t-2}}{\ln 2}-t\right]_2^4$$

$$=\left\{\left(-\frac{1}{\ln 2}+2\right)-\left(-\frac{1}{4\ln 2}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{4}{\ln 2}-4\right)-\left(\frac{1}{\ln 2}-2\right)\right\}$$

$$=\frac{9}{4\ln 2}$$

$$\therefore\ 3a-5b=3\left(\frac{15}{4\ln 2}-4\right)-\frac{45}{4\ln 2}=-12$$

772 답 $4\ln\frac{4}{3}$

$\frac{4t-2}{t^2-t+1}=0$에서

$4t-2=0$ $\quad\therefore\ t=\frac{1}{2}$

따라서 $0\le t\le\frac{1}{2}$일 때 $v(t)\le 0$, $\frac{1}{2}\le t\le 1$일 때 $v(t)\ge 0$이므로 시각 $t=0$에서 $t=1$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^1\left|\frac{4t-2}{t^2-t+1}\right|dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{4t-2}{t^2-t+1}\right)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{4t-2}{t^2-t+1}dt$$
$$=-2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{(t^2-t+1)'}{t^2-t+1}dt+2\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{(t^2-t+1)'}{t^2-t+1}dt$$
$$=-2\Big[\ln(t^2-t+1)\Big]_0^{\frac{1}{2}}+2\Big[\ln(t^2-t+1)\Big]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$=-2\ln\frac{3}{4}+2\Big(-\ln\frac{3}{4}\Big)=-4\ln\frac{3}{4}=4\ln\frac{4}{3}$$

($(t^2-t+1)'=2t-1$, $\because t^2-t+1>0$)

773 답 4

운동 방향이 바뀌는 시각에서의 속도는 0이므로

$v(t)=0$에서 $\sin\frac{t}{2}=0$

$\frac{t}{2}=0$ 또는 $\frac{t}{2}=\pi$ 또는 $\frac{t}{2}=2\pi$ 또는 ...

$\therefore t=0$ 또는 $t=2\pi$ 또는 $t=4\pi$ 또는 ...

즉, 점 P가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꾸는 시각은

$t=2\pi$

따라서 $0\le t\le 2\pi$일 때 $v(t)\ge 0$이므로 점 P가 출발한 후 처음으로 운동 방향을 바꿀 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt$$
$$=\Big[-2\cos\frac{t}{2}\Big]_0^{2\pi}=2-(-2)=4$$

774 답 (1) $\frac{3}{2}$ (2) $\sqrt{2}$

(1) x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=e^t-e^{-t}$, $\frac{dy}{dt}=2$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=\ln 2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{(e^t-e^{-t})^2+2^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^{2t}+2+e^{-2t}}\,dt=\int_0^{\ln 2}\sqrt{(e^t+e^{-t})^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\ln 2}(e^t+e^{-t})\,dt=\Big[e^t-e^{-t}\Big]_0^{\ln 2}=\frac{3}{2}$$

(2) x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=4\sin t\cos t$, $\frac{dy}{dt}=-4\cos t\sin t$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{4}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{(4\sin t\cos t)^2+(-4\cos t\sin t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{32\sin^2 t\cos^2 t}\,dt$$
$$=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin t\cos t\,dt$$ ◀ $2\sin t\cos t=\sin 2t$
$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin 2t\,dt$$
$$=2\sqrt{2}\Big[-\frac{1}{2}\cos 2t\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=2\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\sqrt{2}$$

775 답 1

x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{t}-1$, $\frac{dy}{dt}=\frac{2}{\sqrt{t}}$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리 s_1은

$$s_1=\int_1^2\sqrt{\Big(\frac{1}{t}-1\Big)^2+\Big(\frac{2}{\sqrt{t}}\Big)^2}\,dt$$
$$=\int_1^2\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}+1}\,dt$$
$$=\int_1^2\sqrt{\Big(\frac{1}{t}+1\Big)^2}\,dt$$
$$=\int_1^2\Big(\frac{1}{t}+1\Big)dt=\Big[\ln t+t\Big]_1^2\ (\because t>0)$$
$$=(\ln 2+2)-1=\ln 2+1$$

시각 $t=2$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리 s_2는

$$s_2=\int_2^4\sqrt{\Big(\frac{1}{t}-1\Big)^2+\Big(\frac{2}{\sqrt{t}}\Big)^2}\,dt$$
$$=\int_2^4\Big(\frac{1}{t}+1\Big)dt=\Big[\ln t+t\Big]_2^4$$
$$=(\ln 4+4)-(\ln 2+2)=\ln 2+2$$

$\therefore s_2-s_1=(\ln 2+2)-(\ln 2+1)=1$

776 답 $2\pi-2$

x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=4(-\sin t+\cos t)$, $\frac{dy}{dt}=2\sin 2t$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\{4(-\sin t+\cos t)\}^2+(2\sin 2t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16(\underbrace{\sin^2 t+\cos^2 t}_{=1})-32\underbrace{\sin t\cos t}_{2\sin t\cos t=\sin 2t}+4\sin^2 2t}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16-16\sin 2t+4\sin^2 2t}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(4-2\sin 2t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4-2\sin 2t)\,dt$$
$$=\left[4t+\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=(2\pi-1)-1=2\pi-2$$

| 다른 풀이 |

x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=4(-\sin t+\cos t)$$
$$\frac{dy}{dt}=2\sin 2t=4\sin t\cos t$$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=\frac{\pi}{2}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\{4(-\sin t+\cos t)\}^2+(4\sin t\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16(\sin^2 t+\cos^2 t)-32\sin t\cos t+16\sin^2 t\cos^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{16-32\sin t\cos t+16\sin^2 t\cos^2 t}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(4-4\sin t\cos t)^2}\,dt$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4-4\sin t\cos t)\,dt \quad \blacktriangleleft\ 2\sin t\cos t=\sin 2t$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4-2\sin 2t)\,dt$$
$$=\left[4t+\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=2\pi-2$$

777 답 3

x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=t^2-1,\ \frac{dy}{dt}=2t$$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^a\sqrt{(t^2-1)^2+(2t)^2}\,dt=\int_0^a\sqrt{t^4+2t^2+1}\,dt$$
$$=\int_0^a\sqrt{(t^2+1)^2}\,dt$$
$$=\int_0^a(t^2+1)\,dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{3}a^3+a$$

즉, $\frac{1}{3}a^3+a=12$이므로

$a^3+3a-36=0$, $(a-3)(a^2+3a+12)=0$

$\therefore a=3$ ($\because a^2+3a+12>0$)

778 답 (1) 10 (2) e^3+11

(1) x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=3t^2-3,\ \frac{dy}{dt}=6t$$

따라서 $1\le t\le 2$에서 곡선의 길이는

$$\int_1^2\sqrt{(3t^2-3)^2+(6t)^2}\,dt$$
$$=\int_1^2\sqrt{9t^4+18t^2+9}\,dt$$
$$=\int_1^2\sqrt{(3t^2+3)^2}\,dt$$
$$=\int_1^2(3t^2+3)\,dt$$
$$=\left[t^3+3t\right]_1^2$$
$$=14-4=10$$

(2) x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=e^t-4,\ \frac{dy}{dt}=4e^{\frac{t}{2}}$$

따라서 $0\le t\le 3$에서 곡선의 길이는

$$\int_0^3\sqrt{(e^t-4)^2+(4e^{\frac{t}{2}})^2}\,dt$$
$$=\int_0^3\sqrt{e^{2t}+8e^t+16}\,dt$$
$$=\int_0^3\sqrt{(e^t+4)^2}\,dt$$
$$=\int_0^3(e^t+4)\,dt$$
$$=\left[e^t+4t\right]_0^3$$
$$=(e^3+12)-1=e^3+11$$

779 답 (1) $\frac{13}{12}$ (2) $\frac{3}{4}$

(1) y를 x에 대하여 미분하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{x^2}$

따라서 $1\le x\le 2$에서 곡선의 길이는

$$\int_1^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^2\sqrt{\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{2}+\frac{1}{x^4}}\,dx$$

$$=\int_1^2\sqrt{\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2}\,dx=\int_1^2\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{x}\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{12}-1\right)=\frac{13}{12}$$

(2) y를 x에 대하여 미분하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}$

따라서 $0\le x\le \ln 2$에서 곡선의 길이는

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}e^{2x}-e^{-2x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\frac{1}{16}e^{4x}+\frac{1}{2}+e^{-4x}}\,dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}\left(\frac{1}{4}e^{2x}+e^{-2x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{8}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^{\ln 2}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$$

780 답 6

y를 x에 대하여 미분하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2-1}$

따라서 $2\le x\le 5$에서 곡선의 길이는

$$\int_2^5\sqrt{1+\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_2^5\sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{(x^2-1)^2}}\,dx=\int_2^5\sqrt{\frac{(x^2+1)^2}{(x^2-1)^2}}\,dx$$

$$=\int_2^5\frac{x^2+1}{x^2-1}\,dx\ (\because\ x^2-1>0)$$

$$=\int_2^5\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)dx$$

$$=\int_2^5\left(1+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\left[x+\ln|x-1|-\ln|x+1|\right]_2^5$$

$$=(5+\ln 4-\ln 6)-(2-\ln 3)=3+\ln 2$$

즉, $a+\ln b=3+\ln 2$이므로

$a=3,\ b=2$ $\quad\therefore\ ab=6$

781 답 2

x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{t}},\ \frac{dy}{dt}=t-\frac{1}{4t^2}$$

따라서 $1\le t\le a$에서 곡선의 길이는

$$\int_1^a\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2+\left(t-\frac{1}{4t^2}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_1^a\sqrt{t^2+\frac{1}{2t}+\frac{1}{16t^4}}\,dt$$

$$=\int_1^a\sqrt{\left(t+\frac{1}{4t^2}\right)^2}\,dt=\int_1^a\left(t+\frac{1}{4t^2}\right)dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{4t}\right]_1^a$$

$$=\left(\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4a}\right)-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4a}-\frac{1}{4}$$

즉, $\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{4a}-\frac{1}{4}=\frac{13}{8}$이므로

$4a^3-2-2a=13a$, $4a^3-15a-2=0$

$(a-2)(4a^2+8a+1)=0$ $\quad\therefore\ a=2$ ($\because$ a는 정수)

연습문제 396~398쪽

782 답 ②

입체도형을 밑면으로부터 높이가 x인 지점에서 밑면과 평행한 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\tan x)^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\tan^2 x$$

따라서 이 입체도형의 높이가 $\frac{\pi}{3}$이므로 이 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{3}}S(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sqrt{3}}{4}\tan^2 x\,dx$$

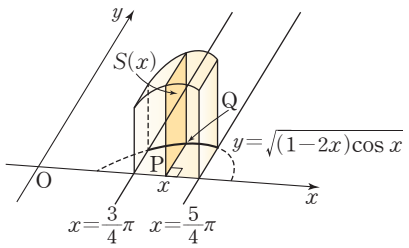
$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 x-1)\,dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\tan x-x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{3}}{12}\pi$$

783 답 ③

다음 그림과 같이 x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)\left(\frac{3}{4}\pi\le x\le\frac{5}{4}\pi\right)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\sqrt{(1-2x)\cos x}$와 만나는 점을 Q라 하면

$\mathrm{Q}(x,\ \sqrt{(1-2x)\cos x})$



$\overline{PQ}=\sqrt{(1-2x)\cos x}$를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\{\sqrt{(1-2x)\cos x}\}^2=(1-2x)\cos x$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}S(x)\,dx$$

$u(x)=1-2x,\ v'(x)=\cos x$로 놓으면 $u'(x)=-2,\ v(x)=\sin x$

$$=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(1-2x)\cos x\,dx$$

$$=\Big[(1-2x)\sin x\Big]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}-\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}(-2\sin x)\,dx$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(1-\frac{5}{2}\pi\Big)-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(1-\frac{3}{2}\pi\Big)-\Big[2\cos x\Big]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}$$

$$=2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}-\{-\sqrt{2}-(-\sqrt{2})\}$$

$$=2\sqrt{2}\pi-\sqrt{2}$$

784 $2e^5+2e^2-2e$

$(2-t)e^t=0$에서 $2-t=0$ ($\because e^t>0$)

$\therefore t=2$

따라서 $1\le t\le 2$일 때 $v(t)\ge 0$, $2\le t\le 5$일 때 $v(t)\le 0$이므로 시각 $t=1$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^5|(2-t)e^t|\,dt$$

$f(t)=2-t,\ g'(t)=e^t$으로 놓으면 $f'(t)=-1,\ g(t)=e^t$

$$=\int_1^2(2-t)e^t\,dt+\int_2^5\{-(2-t)e^t\}\,dt$$

$$=\Big[(2-t)e^t\Big]_1^2-\int_1^2(-e^t)\,dt-\Big\{\Big[(2-t)e^t\Big]_2^5-\int_2^5(-e^t)\,dt\Big\}$$

$$=-e+\Big[e^t\Big]_1^2-\Big(-3e^5+\Big[e^t\Big]_2^5\Big)$$

$$=-e+(e^2-e)+3e^5-(e^5-e^2)$$

$$=2e^5+2e^2-2e$$

785 ⑤

x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=2\sqrt{6}\,e^t,\ \frac{dy}{dt}=3-2e^{2t}$$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=\ln 2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{(2\sqrt{6}\,e^t)^2+(3-2e^{2t})^2}\,dt$$

$$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{4e^{4t}+12e^{2t}+9}\,dt$$

$$=\int_0^{\ln 2}\sqrt{(2e^{2t}+3)^2}\,dt=\int_0^{\ln 2}(2e^{2t}+3)\,dt$$

$$=\Big[e^{2t}+3t\Big]_0^{\ln 2}$$

$$=(4+3\ln 2)-1=3+3\ln 2$$

786 $\frac{10}{3}$

y를 x에 대하여 미분하면

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

따라서 $1\le x\le 4$에서 곡선의 길이는

$$\int_1^4\sqrt{1+\Big(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big)^2}\,dx$$

$$=\int_1^4\sqrt{\frac{x}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4x}}\,dx$$

$$=\int_1^4\sqrt{\Big(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big)^2}\,dx$$

$$=\int_1^4\Big(\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big)dx$$

$$=\Big[\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}\Big]_1^4$$

$$=\frac{14}{3}-\frac{4}{3}=\frac{10}{3}$$

787 4 cm

그릇에 담긴 물의 부피가 $\ln\frac{31}{3}$ cm^{3}일 때의 물의 높이를 a cm라 하면 물의 부피는

$$\int_0^a\frac{2x+3}{x^2+3x+3}dx=\int_0^a\frac{(x^2+3x+3)'}{x^2+3x+3}dx$$

$$=\Big[\ln|x^2+3x+3|\Big]_0^a$$

$$=\ln(a^2+3a+3)-\ln 3$$

($\because a^2+3a+3>0$)

$$=\ln\frac{a^2+3a+3}{3}(\text{cm}^3)$$

즉, $\ln\frac{a^2+3a+3}{3}=\ln\frac{31}{3}$이므로

$\frac{a^2+3a+3}{3}=\frac{31}{3}$

$a^2+3a-28=0$, $(a+7)(a-4)=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

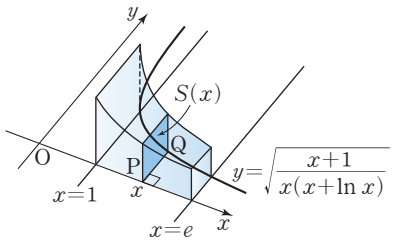
따라서 이 그릇에 담긴 물의 높이는 4 cm이다.

788 ①

다음 그림과 같이 x축 위의 점 $\mathrm{P}(x, 0)$ $(1\le x\le e)$을 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선

$y=\sqrt{\frac{x+1}{x(x+\ln x)}}$과 만나는 점을 Q라 하면

$\mathrm{Q}\left(x, \sqrt{\frac{x+1}{x(x+\ln x)}}\right)$



$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\frac{x+1}{x(x+\ln x)}}$을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\left\{\sqrt{\frac{x+1}{x(x+\ln x)}}\right\}^2=\frac{x+1}{x(x+\ln x)}$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$V=\int_1^e S(x)\,dx$

$=\int_1^e \frac{x+1}{x(x+\ln x)}\,dx$

$=\int_1^e \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x+\ln x}\,dx$ ◀ $(x+\ln x)'=1+\frac{1}{x}$

$=\int_1^e \frac{(x+\ln x)'}{x+\ln x}\,dx$

$=\left[\ln|x+\ln x|\right]_1^e=\ln(e+1)$

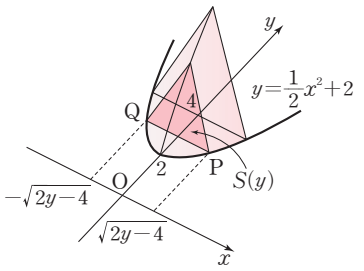
789 $4\sqrt{3}$

$y=\frac{1}{2}x^2+2$를 x에 대하여 풀면

$y-2=\frac{1}{2}x^2$, $2y-4=x^2$

$\therefore x=\pm\sqrt{2y-4}$

다음 그림과 같이 곡선 $y=\frac{1}{2}x^2+2$ 위의 두 점 P, Q를 $\mathrm{P}(\sqrt{2y-4}, y)$, $\mathrm{Q}(-\sqrt{2y-4}, y)$ $(2\le y\le 4)$라 하면



$\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{2y-4}$를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(y)$라 하면

$S(y)=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(2\sqrt{2y-4})^2$

$=\sqrt{3}(2y-4)=2\sqrt{3}(y-2)$ ▸▸▸▸▸▸ ❶

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$V=\int_2^4 S(y)\,dy$

$=\int_2^4 2\sqrt{3}(y-2)\,dy$

$=2\sqrt{3}\int_2^4 (y-2)\,dy$

$=2\sqrt{3}\left[\frac{1}{2}y^2-2y\right]_2^4$

$=2\sqrt{3}\times 2=4\sqrt{3}$ ▸▸▸▸▸▸ ❷

단계	채점 기준	비율
❶	단면의 넓이 구하기	60 %
❷	입체도형의 부피 구하기	40 %

790 ②

두 점 P, Q가 원점을 출발한 후 다시 만나는 시각을 a라 하면 시각 $t=a$에서의 두 점 P, Q의 위치가 서로 같아야 한다.

시각 $t=a$에서의 점 P의 위치를 x_1이라 하면

$x_1=\int_0^a \cos\pi t\,dt=\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^a$

$=\frac{1}{\pi}\sin a\pi$

시각 $t=a$에서의 점 Q의 위치를 x_2라 하면

$x_2=\int_0^a 2\cos 2\pi t\,dt=\left[\frac{1}{\pi}\sin 2\pi t\right]_0^a$

$=\frac{1}{\pi}\sin 2a\pi$

이때 $x_1=x_2$이므로

$\frac{1}{\pi}\sin a\pi=\frac{1}{\pi}\sin 2a\pi$

$\sin a\pi=2\sin a\pi\cos a\pi$

$\sin a\pi(2\cos a\pi-1)=0$

$\sin a\pi=0$ 또는 $\cos a\pi=\frac{1}{2}$

$\therefore a=0$ 또는 $a=\frac{1}{3}$ 또는 $a=1$ 또는 $a=\frac{5}{3}$ 또는 $a=2$ 또는 …

따라서 두 점 P, Q가 원점을 출발한 후 처음으로 다시 만나는 시각은

$t=\frac{1}{3}$

791 ■ $\frac{5}{3}$

시각 $t=1$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_1^5\sqrt{\left(\frac{\cos t}{t^2+t}\right)^2+\left(\frac{\sin t}{t^2+t}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_1^5\sqrt{\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{(t^2+t)^2}}\,dt$$

$$=\int_1^5\sqrt{\frac{1}{(t^2+t)^2}}\,dt$$

$$=\int_1^5\frac{1}{t^2+t}\,dt$$

$$=\int_1^5\frac{1}{t(t+1)}\,dt$$

$$=\int_1^5\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\Big[\ln|t|-\ln|t+1|\Big]_1^5$$

$$=(\ln 5-\ln 6)-(-\ln 2)$$

$$=\ln\frac{5}{3}$$

따라서 $a=\ln\frac{5}{3}$이므로

$e^a=e^{\ln\frac{5}{3}}=\frac{5}{3}$

792 ■ $\frac{9}{4}$

x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=\frac{2}{t}$, $\frac{dy}{dt}=1-\frac{1}{t^2}$

시각 t에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{2}{t^2}+\frac{1}{t^4}}$$

$$=\sqrt{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2}=1+\frac{1}{t^2}$$

시각 $t=a$에서의 점 P의 속력이 $\frac{5}{4}$이므로

$1+\frac{1}{a^2}=\frac{5}{4}$, $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{4}$

$a^2=4$ $\quad\therefore a=2$ ($\because 0<a<4$)

따라서 시각 $t=2$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_2^4\sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2+\left(1-\frac{1}{t^2}\right)^2}=\int_2^4\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\left[t-\frac{1}{t}\right]_2^4$$

$$=\frac{15}{4}-\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$$

793 ■ $\frac{e^2}{16}+\frac{31}{16}$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x-3h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-3h)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$+\lim_{h\to0}\frac{f(x-3h)-f(x)}{-3h}\times3$$

$=f'(x)+3f'(x)=4f'(x)$

즉, $4f'(x)=\frac{1}{2}x-\frac{8}{x}$이므로

$f'(x)=\frac{1}{8}x-\frac{2}{x}$

따라서 $1\le x\le e$에서 곡선의 길이는

$$\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{1}{8}x-\frac{2}{x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^e\sqrt{\frac{1}{64}x^2+\frac{1}{2}+\frac{4}{x^2}}\,dx$$

$$=\int_1^e\sqrt{\left(\frac{1}{8}x+\frac{2}{x}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_1^e\left(\frac{1}{8}x+\frac{2}{x}\right)dx$$

$$=\left[\frac{1}{16}x^2+2\ln|x|\right]_1^e$$

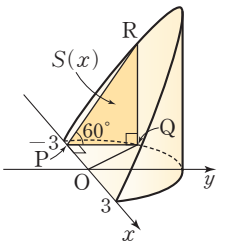
$$=\left(\frac{e^2}{16}+2\right)-\frac{1}{16}$$

$$=\frac{e^2}{16}+\frac{31}{16}$$

794 ④

| 접근 방법 | 주어진 원기둥의 밑면을 좌표평면에 나타낸 후 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점 O, 밑면의 지름을 포함하는 직선을 x축으로 정하자.



x축 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)\ (-3\le x\le 3)$을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면을 삼각형 PQR라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OP}}^2}=\sqrt{9-x^2}$

$\overline{\mathrm{RQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}\tan 60^\circ=\sqrt{3(9-x^2)}$

삼각형 PQR의 넓이를 $S(x)$라 하면

$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{RQ}}=\frac{\sqrt{3}}{2}(9-x^2)$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_{-3}^{3}S(x)\,dx$$
$$=\int_{-3}^{3}\frac{\sqrt{3}}{2}(9-x^2)\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-3}^{3}(9-x^2)\,dx$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[9x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\{18-(-18)\}$$
$$=18\sqrt{3}$$

795 ②

| 접근 방법 | 산술평균과 기하평균의 관계를 이용하여 점 P의 속력이 최소가 되는 a의 값을 구한다.

x, y를 각각 t에 대하여 미분하면

$\frac{dx}{dt}=4\sqrt{5},\ \frac{dy}{dt}=2(t+2)-\frac{10}{t+2}$

시각 t에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{(4\sqrt{5})^2+\left\{2(t+2)-\frac{10}{t+2}\right\}^2}$$
$$=\sqrt{4(t+2)^2+40+\frac{100}{(t+2)^2}}$$
$$=\sqrt{\left\{2(t+2)+\frac{10}{t+2}\right\}^2}$$
$$=2(t+2)+\frac{10}{t+2}$$

이때 $t+2>0$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2(t+2)+\frac{10}{t+2}\ge 2\sqrt{2(t+2)\times\frac{10}{t+2}}$$
$$=2\sqrt{20}=4\sqrt{5}$$

$2(t+2)=\frac{10}{t+2}$일 때 등호가 성립하므로

$(t+2)^2=5$

$t^2+4t-1=0$

$\therefore\ t=-2+\sqrt{5}\ (\because\ t>0)$

즉, 시각 $t=-2+\sqrt{5}$에서 점 P의 속력이 최소이므로

$a=-2+\sqrt{5}$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=-2+\sqrt{5}$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^{-2+\sqrt{5}}\sqrt{(4\sqrt{5})^2+\left\{2(t+2)-\frac{10}{t+2}\right\}^2}\,dt$$
$$=\int_0^{-2+\sqrt{5}}\left\{2(t+2)+\frac{10}{t+2}\right\}dt$$
$$=\left[(t+2)^2+10\ln|t+2|\right]_0^{-2+\sqrt{5}}$$
$$=(5+5\ln 5)-(4+10\ln 2)$$
$$=1+5\ln\frac{5}{4}$$

796 11

| 접근 방법 | (나)의 식을 변형하여 $\{f'(x)\}^2$과 같은 식을 찾은 후 이를 대입하여 곡선의 길이를 구한다.

(나)에서

$\{f(x)\}^2-\{f'(x)\}^2=2f(x)$

$\therefore\ \{f'(x)\}^2=\{f(x)\}^2-2f(x)$ ····· ㉠

이때 $0\le x\le 3$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이는

$$\int_0^3\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$
$$=\int_0^3\sqrt{1+\{f(x)\}^2-2f(x)}\,dx\ (\because\ ㉠)$$
$$=\int_0^3\sqrt{\{f(x)-1\}^2}\,dx$$
$$=\int_0^3\{f(x)-1\}\,dx\ (\because\ (가))$$

즉, $\int_0^3\{f(x)-1\}\,dx=8$이므로

$$\int_0^3 f(x)\,dx-\int_0^3 dx=8$$
$$\therefore\ \int_0^3 f(x)\,dx=\int_0^3 dx+8$$
$$=\left[x\right]_0^3+8=3+8=11$$