기출 PICK

정답과 해설

공통수학1

01 다항식의 연산

난이도별 필수 기출 6~21쪽

0001 답 ①

$2A-\{C+3(B-A)\}$
$=2A-C-3B+3A$
$=5A-3B-C$
$=5(3x^2-2x+1)-3(x^2+x-1)-(-3x+5)$
$=15x^2-10x+5-3x^2-3x+3+3x-5$
$=12x^2-10x+3$
이므로 x의 계수는 -10이다.

0002 답 ③

$A+2X=B$에서 $2X=B-A$
$\therefore X=\frac{1}{2}(B-A)$
$=\frac{1}{2}\{(3x^2-5y^2)-(x^2-2xy+y^2)\}$
$=\frac{1}{2}(2x^2+2xy-6y^2)=x^2+xy-3y^2$

0003 답 ⑤

$\langle x+2y-1,\ 3x-4y+1\rangle=3(x+2y-1)-(3x-4y+1)+2$
$=3x+6y-3-3x+4y-1+2$
$=10y-2$

0004 답 6

$A+B=2x^3-x^2+4x+6$ ····· ㉠
$B+C=x^3-2x$ ····· ㉡
$C+A=3x^3-x^2$ ····· ㉢
㉠+㉡+㉢을 하면 $2(A+B+C)=6x^3-2x^2+2x+6$
$\therefore A+B+C=3x^3-x^2+x+3$
즉, $f(x)=3x^3-x^2+x+3$이므로
$f(1)=3-1+1+3=6$

0005 답 $-3x^2-3x+9$

$A+B=-x^2-x+4$ ····· ㉠
$2A-B=4x^2+4x-7$ ····· ㉡
㉠+㉡을 하면 $3A=3x^2+3x-3$
$\therefore A=x^2+x-1$ ····· ⓘ
이를 ㉠에 대입하면
$(x^2+x-1)+B=-x^2-x+4$
$\therefore B=-x^2-x+4-(x^2+x-1)$
$=-2x^2-2x+5$ ····· ⓘⓘ
$\therefore A+2B=(x^2+x-1)+2(-2x^2-2x+5)$
$=x^2+x-1-4x^2-4x+10$
$=-3x^2-3x+9$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 다항식 A 구하기	40%
ⓘⓘ 다항식 B 구하기	40%
ⓘⓘⓘ $A+2B$ 계산하기	20%

0006 답 ④

$3A-B=x^2-9xy+7y^2$ ····· ㉠
$A-B=-x^2+5xy-y^2$ ····· ㉡
㉠−㉡을 하면 $2A=2x^2-14xy+8y^2$
$\therefore A=x^2-7xy+4y^2$
이를 ㉡에 대입하면
$(x^2-7xy+4y^2)-B=-x^2+5xy-y^2$
$\therefore B=(x^2-7xy+4y^2)-(-x^2+5xy-y^2)$
$=2x^2-12xy+5y^2$
이때 $X-A=B$에서 $X=A+B$이므로
$X=(x^2-7xy+4y^2)+(2x^2-12xy+5y^2)$
$=3x^2-19xy+9y^2$

0007 답 ④

어떤 식을 A라 하면
$2x^3-x^2+3+A=x^3-2x^2+x+5$이므로
$A=x^3-2x^2+x+5-(2x^3-x^2+3)$
$=-x^3-x^2+x+2$
따라서 바르게 계산하면
$2x^3-x^2+3-A=2x^3-x^2+3-(-x^3-x^2+x+2)$
$=3x^3-x+1$

0008 답 ②

$D=(-2x^2)+(2x+1)+(x^3+x^2)$
$=x^3-x^2+2x+1$
$A=D$이므로
$Q(x)+(x^3+1)+(-2x^2)=x^3-x^2+2x+1$
$\therefore Q(x)=x^3-x^2+2x+1-(x^3-2x^2+1)=x^2+2x$
$C=D$이므로
$(x^2+1)+P(x)+(x^3+x^2)=x^3-x^2+2x+1$
$\therefore P(x)=x^3-x^2+2x+1-(x^3+2x^2+1)=-3x^2+2x$
$\therefore P(x)+Q(x)=(-3x^2+2x)+(x^2+2x)$
$=-2x^2+4x$

다른 풀이

$D=(-2x^2)+(2x+1)+(x^3+x^2)$
$=x^3-x^2+2x+1$
$A=D,\ C=D$이므로
$Q(x)+(x^3+1)+(-2x^2)=x^3-x^2+2x+1$ ····· ㉠
$(x^2+1)+P(x)+(x^3+x^2)=x^3-x^2+2x+1$ ····· ㉡
㉠+㉡을 하면
$P(x)+Q(x)+2x^3+2=2x^3-2x^2+4x+2$
$\therefore P(x)+Q(x)=-2x^2+4x$

0009 답 4

$2x^2-3x+5$	㉠	$6x^2-x+3$
	㉡	
	$3x^2-4x+6$	A

위의 표에서 가로에 놓인 세 다항식의 합이 $15x^2+6$이므로
$(2x^2-3x+5)+㉠+(6x^2-x+3)=15x^2+6$
$\therefore$ ㉠$=15x^2+6-(2x^2-3x+5)-(6x^2-x+3)$
$=7x^2+4x-2$
세로에 놓인 세 다항식의 합이 $15x^2+6$이므로
$(7x^2+4x-2)+㉡+(3x^2-4x+6)=15x^2+6$
$\therefore$ ㉡$=15x^2+6-(7x^2+4x-2)-(3x^2-4x+6)$
$=5x^2+2$
대각선에 놓인 세 다항식의 합이 $15x^2+6$이므로
$(2x^2-3x+5)+(5x^2+2)+A=15x^2+6$
$\therefore$ $A=15x^2+6-(2x^2-3x+5)-(5x^2+2)$
$=8x^2+3x-1$
따라서 $f(x)=8x^2+3x-1$이므로
$f(-1)=8-3-1=4$

0010 답 ④

$(2x^2-3x+1)(-x+3)$의 전개식에서 x^2항은
$2x^2\times3+(-3x)\times(-x)=6x^2+3x^2$
$=9x^2$
따라서 x^2의 계수는 9이다.

0011 답 6

$(4x-y-3z)^2=(4x-y-3z)(4x-y-3z)$의 전개식에서 yz항은
$(-y)\times(-3z)+(-3z)\times(-y)=3yz+3yz$
$=6yz$
따라서 yz의 계수는 6이다.

0012 답 ④

③ $(a+b-c)(a-b+c)=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$
$=a^2-(b-c)^2$
$=a^2-b^2-c^2+2bc$
④ $(x-y-z)^2=x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$
따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0013 답 ⑤

ㄴ. $(3x-1)(9x^2+3x+1)=(3x)^3-1^3=27x^3-1$
ㄷ. $(a+b-1)(a^2+b^2-ab+a+b+1)$
$=\{a+b+(-1)\}$
$\times\{a^2+b^2+(-1)^2-a\times b-b\times(-1)-(-1)\times a\}$
$=a^3+b^3+(-1)^3-3\times a\times b\times(-1)$
$=a^3+b^3+3ab-1$
ㄹ. $(4x^2+2xy+y^2)(4x^2-2xy+y^2)$
$=\{(2x)^2+2x\times y+y^2\}\{(2x)^2-2x\times y+y^2\}$
$=(2x)^4+(2x)^2\times y^2+y^4$
$=16x^4+4x^2y^2+y^4$
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

0014 답 ②

$A-C=(3x^2-2xy+y^2)-(3x^2+2xy-y^2)$
$=-4xy+2y^2$
이므로
$AB-BC=(A-C)B$
$=(-4xy+2y^2)(x^2+xy-2y^2)$
$=-4x^3y-4x^2y^2+8xy^3+2x^2y^2+2xy^3-4y^4$
$=-4x^3y-2x^2y^2+10xy^3-4y^4$

0015 답 ②

$(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^3+b^3)(a^6+b^6)$
$=(a^3-b^3)(a^3+b^3)(a^6+b^6)$
$=(a^6-b^6)(a^6+b^6)$
$=a^{12}-b^{12}$

0016 답 ①

주어진 다항식의 전개식에서 x항은
$3x\times(-2a)+(-1)\times(-ax)=-6ax+ax=-5ax$
따라서 $-5a=15$이므로
$a=-3$

0017 답 3

$(x+a)^3+x(x-4)=(x^3+3ax^2+3a^2x+a^3)+x^2-4x$
$=x^3+(3a+1)x^2+(3a^2-4)x+a^3$
이때 x^2의 계수가 10이므로
$3a+1=10$ $\therefore$ $a=3$

0018 답 $2x^3+8x+42$

밑면의 모양이 사다리꼴이므로 사각기둥의 밑넓이는
$\frac{1}{2}\times\{(x-3)+x\}\times4=4x-6$ …… i
사각기둥의 옆넓이는
$\{(x-3)+5+x+4\}\times(x^2-3x+9)$
$=2(x+3)(x^2-3x+9)$
$=2(x^3+27)$
$=2x^3+54$ …… ii
따라서 사각기둥의 겉넓이는
$(4x-6)\times2+(2x^3+54)=8x-12+2x^3+54$
$=2x^3+8x+42$ …… iii

채점 기준	
ⓘ 사각기둥의 밑넓이 구하기	30 %
ⓘⓘ 사각기둥의 옆넓이 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ 사각기둥의 겉넓이 구하기	20 %

0019 답 ⑤

$(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
$=\{(x-2)(x^2+2x+4)\}\{(x+2)(x^2-2x+4)\}$
$=(x^3-2^3)(x^3+2^3)$
$=x^6-2^6$
$=69-64=5$

다른 풀이

$(x-2)(x+2)(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)$
$=\{(x-2)(x+2)\}\{(x^2+2x+4)(x^2-2x+4)\}$
$=(x^2-4)(x^4+4x^2+16)$
$=x^6-4^3$
$=69-64=5$

0020 답 ②

$(3x^2+2xy+y^2)(x^2-2xy+2y^2)$의 전개식에서 x^2y^2항은
$3x^2\times 2y^2+2xy\times(-2xy)+y^2\times x^2=6x^2y^2-4x^2y^2+x^2y^2$
$=3x^2y^2$
$\therefore a=3$
$(2x^4-5x^3+2x^2+x-3)^2$, 즉
$(2x^4-5x^3+2x^2+x-3)(2x^4-5x^3+2x^2+x-3)$의 전개식에서 x^4항은
$2x^4\times(-3)+(-5x^3)\times x+2x^2\times 2x^2+x\times(-5x^3)+(-3)\times 2x^4$
$=-6x^4-5x^4+4x^4-5x^4-6x^4$
$=-18x^4$
$\therefore b=-18$
$\therefore \dfrac{b}{a}=\dfrac{-18}{3}=-6$

0021 답 2

$(2x^3-x^2+x-a)^2$, 즉 $(2x^3-x^2+x-a)(2x^3-x^2+x-a)$의 전개식에서 x^2항은
$(-x^2)\times(-a)+x\times x+(-a)\times(-x^2)=(2a+1)x^2$ …… ⓘ
x^4항은
$2x^3\times x+(-x^2)\times(-x^2)+x\times 2x^3=5x^4$ …… ⓘⓘ
x^2의 계수와 x^4의 계수가 같으므로
$2a+1=5$, $2a=4$ $\therefore a=2$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ x^2항 구하기	40 %
ⓘⓘ x^4항 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ a의 값 구하기	20 %

0022 답 ②

$(x-1)(x-2)(x+4)(x+5)$
$=\{(x-1)(x+4)\}\{(x-2)(x+5)\}$
$=(x^2+3x-4)(x^2+3x-10)$
$x^2+3x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X-4)(X-10)=X^2-14X+40$
$=(x^2+3x)^2-14(x^2+3x)+40$
$=x^4+6x^3+9x^2-14x^2-42x+40$
$=x^4+6x^3-5x^2-42x+40$

0023 답 ⑤

$\langle A, B\rangle=A^2-AB+B^2=(A-B)^2+AB$이므로
$\langle x^2+x+1, x^2-x\rangle=(2x+1)^2+(x^2+x+1)(x^2-x)$
$=(2x+1)^2+x(x-1)(x^2+x+1)$
$=(2x+1)^2+x(x^3-1)$
$=(4x^2+4x+1)+(x^4-x)$
$=x^4+4x^2+3x+1$

0024 답 ③

$(x^3-2x^2-2x+1)(x^3-2x^2+2x+1)$
$=(x^3-2x^2+1)^2-(2x)^2$
$=(x^6+4x^4+1-4x^5-4x^2+2x^3)-4x^2$
$=x^6-4x^5+4x^4+2x^3-8x^2+1$

0025 답 ③

$(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)$의 전개식에서 x^4항은 $x+1$, $x-2$, $x+3$, $x-4$, $x+5$ 중 4개의 일차식에서 x를, 나머지 1개의 일차식에서 상수항을 뽑아 곱하면 되므로
$x^4-2x^4+3x^4-4x^4+5x^4=3x^4$
따라서 x^4의 계수는 3이다.

0026 답 12

$(1+x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})^2$, 즉
$(1+x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})(1+x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})$의 전개식에서 x^4항은
$1\times 4x^4+x\times 3x^3+2x^2\times 2x^2+3x^3\times x+4x^4\times 1$
$=4x^4+3x^4+4x^4+3x^4+4x^4=18x^4$
$\therefore a=18$ …… ⓘ
x^5항은
$1\times 5x^5+x\times 4x^4+2x^2\times 3x^3+3x^3\times 2x^2+4x^4\times x+5x^5\times 1$
$=5x^5+4x^5+6x^5+6x^5+4x^5+5x^5=30x^5$
$\therefore b=30$ …… ⓘⓘ
$\therefore b-a=30-18=12$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ b의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $b-a$의 값 구하기	20 %

0027 답 4

$(3+2a)^3=A$, $(3-2a)^3=B$로 놓으면

$\{(3+2a)^3+(3-2a)^3\}^2-\{(3+2a)^3-(3-2a)^3\}^2$

$=(A+B)^2-(A-B)^2$

$=(A^2+2AB+B^2)-(A^2-2AB+B^2)=4AB$

$=4(3+2a)^3(3-2a)^3=4(9-4a^2)^3$

$=4\times(9-4\times2)^3$ ($\because$ $a=\sqrt{2}$)

$=4$

0028 답 ①

$x+y+z=3$에서

$x+y=3-z$, $y+z=3-x$, $z+x=3-y$

$\therefore$ $(x+y)(y+z)(z+x)$

$=(3-z)(3-x)(3-y)$

$=3^3-(x+y+z)\times3^2+(xy+yz+zx)\times3-xyz$

$=27-3\times9+(-1)\times3-(-2)=-1$

0029 답 ⑤

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^4$

$=(1+x+x^2+x^3+x^4)\times(1+x+x^2+x^3+x^4)$

$\times(1+x+x^2+x^3+x^4)\times(1+x+x^2+x^3+x^4)$

위의 전개식에서 x^2항은

$x^2\times1\times1\times1+1\times x^2\times1\times1+1\times1\times x^2\times1+1\times1\times1\times x^2$

$+x\times x\times1\times1+x\times1\times x\times1+x\times1\times1\times x$

$+1\times x\times x\times1+1\times x\times1\times x+1\times1\times x\times x$

$=10x^2$

따라서 x^2의 계수는 10이다.

다른 풀이

구하는 것이 x^2의 계수이므로 $(1+x+x^2+x^3+x^4)^4$에서 x^3, x^4은 고려하지 않아도 된다.

즉, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^4$의 전개식에서 x^2의 계수는 $(1+x+x^2)^4$의 전개식에서 x^2의 계수와 같다.

$(1+x+x^2)^4$

$=(1+x+x^2)^2(1+x+x^2)^2$

$=(1+2x+3x^2+2x^3+x^4)(1+2x+3x^2+2x^3+x^4)$

위의 전개식에서 x^2항은

$1\times3x^2+2x\times2x+3x^2\times1=10x^2$

따라서 x^2의 계수는 10이다.

0030 답 ①

㈎에서 $(6-x)(6-y)(6-z)=0$이므로

$216-(x+y+z)\times36+(xy+yz+zx)\times6-xyz=0$ ····· ㉠

㈏에서 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{6}$이므로

$\frac{xy+yz+zx}{xyz}=\frac{1}{6}$

$\therefore$ $xyz=6(xy+yz+zx)$

이를 ㉠에 대입하면 $216-(x+y+z)\times36=0$

$\therefore$ $x+y+z=6$

0031 답 ③

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$=2^3+3\times\frac{1}{3}\times2=10$

0032 답 ②

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서

$10=2^3-3ab\times2$, $6ab=-2$

$\therefore$ $ab=-\frac{1}{3}$

0033 답 ③

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$2=0-2(ab+bc+ca)$ $\therefore$ $ab+bc+ca=-1$

0034 답 20

$x^3-\frac{8}{x^3}=\left(x-\frac{2}{x}\right)^3+3\times x\times\frac{2}{x}\times\left(x-\frac{2}{x}\right)$

$=2^3+6\times2=20$

0035 답 ②

$\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=\frac{x^3+y^3}{xy}=\frac{(x+y)^3-3xy(x+y)}{xy}$

$=\frac{(\sqrt{2})^3-3\times(-2)\times\sqrt{2}}{-2}$

$=\frac{2\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{-2}=-4\sqrt{2}$

0036 답 ⑤

$a^2+4b^2+c^2=(a-2b+c)^2-2(-2ab-2bc+ca)$

$=(a-2b+c)^2+2(2ab+2bc-ca)$

$=10^2+2\times20=140$

0037 답 44

$(x-1)^3+(y-1)^3$

$=x^3-3x^2+3x-1+y^3-3y^2+3y-1$

$=x^3+y^3-3(x^2+y^2)+3(x+y)-2$

$=(x+y)^3-3xy(x+y)-3\{(x+y)^2-2xy\}+3(x+y)-2$

$=4^3-3\times(-3)\times4-3\times\{4^2-2\times(-3)\}+3\times4-2$

$=44$

0038 답 16

$x+y=(1+\sqrt{2})+(1-\sqrt{2})=2$

$xy=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})=-1$ ····· ⓘ

$\therefore$ $x^3+y^3-x^2y-xy^2=x^3+y^3-xy(x+y)$

$=(x+y)^3-3xy(x+y)-xy(x+y)$

$=(x+y)^3-4xy(x+y)$

$=2^3-4\times(-1)\times2=16$ ····· ⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $x+y$, xy의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ $x^3+y^3-x^2y-xy^2$의 값 구하기	60 %

0039 답 ②

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=(-2)^2-2\times(-6)=16$

$\therefore x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-2\times(xy)^2$

$=16^2-2\times(-6)^2=184$

0040 답 ①

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$에서

$28=4^3+3xy\times4,\ -12xy=36$

$\therefore xy=-3$

$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy=4^2+4\times(-3)=4$이므로

$|x+y|=2$

0041 답 ②

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=3^2-2=7$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)=3^3-3\times3=18$

$\therefore 3x^3-x^2+2x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}$

$=3\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=3\times18-7+2\times3=53$

0042 답 ④

$x>1$이므로 $x^2-4x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-4+\frac{1}{x}=0 \quad \therefore x+\frac{1}{x}=4$

$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4=4^2-4=12$

그런데 $x>1$이므로 $x-\frac{1}{x}>0$

$\therefore x-\frac{1}{x}=2\sqrt{3}$

$\therefore x^3-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$

$=(2\sqrt{3})^3+3\times2\sqrt{3}$

$=30\sqrt{3}$

0043 답 162

$a^2+ab+b^2=33$ ····· ㉠

$a^2-ab+b^2=27$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면

$2ab=6 \quad \therefore ab=3$

이를 ㉠에 대입하면

$a^2+3+b^2=33 \quad \therefore a^2+b^2=30$

$\therefore (a+b)^2=a^2+b^2+2ab=30+2\times3=36$

그런데 $a>0,\ b>0$이므로 $a+b=6$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=6^3-3\times3\times6=162$

0044 답 ②

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$에서

$10=1^3-3xy\times1 \quad \therefore xy=-3$

$\therefore x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$=1^2-2\times(-3)=7$

$(x^3+y^3)(x^2+y^2)=x^5+x^3y^2+x^2y^3+y^5$

$=x^5+y^5+x^2y^2(x+y)$

이므로

$x^5+y^5=(x^3+y^3)(x^2+y^2)-x^2y^2(x+y)$

$=10\times7-(-3)^2\times1=61$

0045 답 8

$a+b+c=0$에서 $a+b=-c,\ b+c=-a,\ c+a=-b$이므로

$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$

$=\frac{1}{-c}+\frac{1}{-a}+\frac{1}{-b}$

$=-\frac{ab+bc+ca}{abc}$ ····· ㉠ ····· ⓘ

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$16=0-2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=-8$ ····· ⓘⓘ

따라서 $abc=1,\ ab+bc+ca=-8$을 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=-\frac{-8}{1}=8$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$을 변형하기	40 %
ⓘⓘ $ab+bc+ca$의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$의 값 구하기	20 %

0046 답 ⑤

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서

$19=5^2-2(xy+yz+zx) \quad \therefore xy+yz+zx=3$

$x+y+z=5$에서 $x+y=5-z,\ y+z=5-x,\ z+x=5-y$이므로

$(x+y)(y+z)(z+x)$

$=(5-z)(5-x)(5-y)$

$=5^3-(x+y+z)\times5^2+(xy+yz+zx)\times5-xyz$

$=125-5\times25+3\times5-(-5)=20$

0047 답 ①

$a-b=2,\ b-c=3$을 변끼리 더하면

$a-c=5 \quad \therefore c-a=-5$

$\therefore a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=\frac{1}{2}\{2^2+3^2+(-5)^2\}=19$

0048 답 56

$\left(3x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x-\frac{3}{x}\right)^2=140$에서

$9x^2+6+\frac{1}{x^2}+x^2-6+\frac{9}{x^2}=140$

$10x^2+\frac{10}{x^2}=140$ $\therefore x^2+\frac{1}{x^2}=14$

$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$

$=14+2=16$

그런데 $x>0$이므로 $x+\frac{1}{x}=4$

$\therefore x+x^3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=4+4^3-3\times4=56$

0049 답 ②

$2a+b=4b(2a+c)$, $a+3b+c=4bc$, $3c+a=8ca$를 변끼리 모두 더하면

$4(a+b+c)=8(ab+bc+ca)$

$a+b+c=2(ab+bc+ca)$

이때 $a+b+c=5$이므로

$2(ab+bc+ca)=5$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=5^2-5=20$

0050 답 ④

$x^2+y^2=(x-y)^2+2xy$에서

$6=(2\sqrt{2})^2+2xy$ $\therefore xy=-1$

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(2\sqrt{2})^3+3\times(-1)\times2\sqrt{2}=10\sqrt{2}$,

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=6^2-2\times(-1)^2=34$

이므로

$(x^3-y^3)(x^4+y^4)=x^7+x^3y^4-x^4y^3-y^7$

$=x^7-y^7-x^3y^3(x-y)$

$\therefore x^7-y^7=(x^3-y^3)(x^4+y^4)+x^3y^3(x-y)$

$=10\sqrt{2}\times34+(-1)^3\times2\sqrt{2}=338\sqrt{2}$

0051 답 ②

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$에서

$11=3^2-2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=-1$

$(xy+yz+zx)^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$에서

$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$

$=(-1)^2-2\times(-2)\times3=13$

$\therefore x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

$=11^2-2\times13=95$

0052 답 ③

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$에서

$5=1^2-2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=-2$

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$에서

$\frac{ab+bc+ca}{abc}=2$

$\frac{-2}{abc}=2$ $\therefore abc=-1$

$(ab+bc+ca)^2=a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)$에서

$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$

$=(-2)^2-2\times(-1)\times1=6$

$\therefore \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2}$

$=\frac{6}{(-1)^2}=6$

0053 답 ③

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2$에서 $\frac{xy+yz+zx}{xyz}=2$

$\frac{xy+yz+zx}{9}=2$ $\therefore xy+yz+zx=18$

이때 $x+y+z=k$ (k는 상수)라 하면

$x+y=k-z$, $y+z=k-x$, $z+x=k-y$이므로

$(x+y)(y+z)(z+x)$

$=(k-z)(k-x)(k-y)$

$=k^3-(x+y+z)k^2+(xy+yz+zx)k-xyz$

$=k^3-k\times k^2+18k-9$

$=18k-9$

즉, $18k-9=135$이므로

$k=8$

따라서 $x+y+z=8$이므로

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$

$=8^2-2\times18=28$

0054 답 ②

$m+n=(ax+by)+(bx+ay)=(a+b)x+(a+b)y$

$=x+y=-3$

$mn=(ax+by)(bx+ay)$

$=abx^2+a^2xy+b^2xy+aby^2$

$=ab(x^2+y^2)+(a^2+b^2)xy$

이때 $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=1^2-2\times(-1)=3$,

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=(-3)^2-2\times1=7$이므로

$mn=ab(x^2+y^2)+(a^2+b^2)xy$

$=(-1)\times7+3\times1$

$=-4$

$\therefore m^3+n^3=(m+n)^3-3mn(m+n)$

$=(-3)^3-3\times(-4)\times(-3)$

$=-63$

다른 풀이

m^3+n^3

$=(ax+by)^3+(bx+ay)^3$

$=a^3x^3+3a^2bx^2y+3ab^2xy^2+b^3y^3$

$\quad +b^3x^3+3ab^2x^2y+3a^2bxy^2+a^3y^3$

$=(a^3+b^3)x^3+3ab(a+b)x^2y+3ab(a+b)xy^2+(a^3+b^3)y^3$

$=(a^3+b^3)(x^3+y^3)+3ab(a+b)(x+y)xy$

이때

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$\quad =1^3-3\times(-1)\times1=4,$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$\quad =(-3)^3-3\times1\times(-3)$

$\quad =-18$

이므로

$m^3+n^3=(a^3+b^3)(x^3+y^3)+3ab(a+b)(x+y)xy$

$\quad =4\times(-18)+3\times(-1)\times1\times(-3)\times1$

$\quad =-63$

0055 답 $4\sqrt{6}$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)^2+4=(-2\sqrt{3})^2+4=16$

그런데 $x^2>0$이므로

$x^2+\frac{1}{x^2}=4$ …… ⓘ

$\therefore \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=4+2=6$

그런데 $x>0$이므로

$x+\frac{1}{x}=\sqrt{6}$ …… ⓘⓘ

$\therefore \frac{x^6+x^4+x^2+1}{x^3}=x^3+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}$

$=\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-2\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=(\sqrt{6})^3-2\times\sqrt{6}=4\sqrt{6}$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $x^2+\frac{1}{x^2}$의 값 구하기	20 %
ⓘⓘ $x+\frac{1}{x}$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ $\frac{x^6+x^4+x^2+1}{x^3}$의 값 구하기	50 %

0056 답 ①

$98(10004+200)-102(10004-200)$

$=(100-2)(10000+200+4)-(100+2)(10000-200+4)$

$=(100^3-2^3)-(100^3+2^3)$

$=-8-8=-16$

0057 답 ③

$2\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)$

$=3\times\frac{2}{3}\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)$

$=3\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)$

$=3\times\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)$

$=3\times\left(1-\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)$

$=3\times\left(1-\frac{1}{3^8}\right)\left(1+\frac{1}{3^8}\right)$

$=3\times\left(1-\frac{1}{3^{16}}\right)=3-\frac{1}{3^{15}}$

따라서 $a=3$, $b=15$이므로 $b-a=12$

0058 답 0

$405=a$, $\sqrt{404}=b$로 놓으면

$(405+\sqrt{404})^3+(405-\sqrt{404})^3$

$=(a+b)^3+(a-b)^3$

$=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)+(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$

$=2a^3+6ab^2=2a(a^2+3b^2)$

$=2\times405\times(405^2+3\times404)$

이때 $2\times405=810$이므로 주어진 식을 계산한 수의 일의 자리의 숫자는 0이다.

0059 답 108

$\overline{AC}=a$, $\overline{BC}=b$라 하면 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=2\sqrt{6}$이므로

$a^2+b^2=(2\sqrt{6})^2=24$

삼각형 ABC의 넓이가 3이므로

$\frac{1}{2}ab=3 \quad \therefore ab=6$

$\therefore (a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$\quad =24+2\times6=36$

그런데 $a>0$, $b>0$이므로 $a+b=6$

$\therefore \overline{AC}^3+\overline{BC}^3=a^3+b^3$

$\quad =(a+b)^3-3ab(a+b)$

$\quad =6^3-3\times6\times6=108$

0060 답 14

직사각형 ODCE에서 $\overline{DE}=\overline{OC}=8$

$\overline{OD}=a$, $\overline{OE}=b$라 하면

직사각형 ODCE의 대각선의 길이가 8이므로

$\sqrt{a^2+b^2}=8 \quad \therefore a^2+b^2=64$

또 직사각형 ODCE의 넓이가 18이므로

$ab=18$

$\therefore (a+b)^2=a^2+b^2+2ab=64+2\times18=100$

그런데 $a>0$, $b>0$이므로 $a+b=10$

$\therefore \overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EB}=(8-a)+8+(8-b)$

$\quad =24-(a+b)$

$\quad =24-10=14$

0061 답 ②

$a>0$, $b>0$이므로 한 면의 넓이가 각각 a^2, b^2인 두 정육면체의 한 모서리의 길이는 각각 a, b이다.

두 정육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 36이므로

$12a+12b=36$ $\therefore a+b=3$

$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$에서

$5=3^2-2ab$ $\therefore ab=2$

따라서 두 정육면체의 부피의 합은

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=3^3-3\times2\times3=9$

0062 답 46

$\overline{OA}=\overline{OD}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$라 하면

㈏에서 $a+b+c=17$

세 삼각형 OAB, OBC, OCD에서

$\overline{AB}^2=a^2+b^2$, $\overline{BC}^2=b^2+c^2$, $\overline{CD}^2=c^2+a^2$이므로

㈐에서 $(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)=210$

$2(a^2+b^2+c^2)=210$

$\therefore a^2+b^2+c^2=105$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$17^2=105+2(ab+bc+ca)$

$\therefore ab+bc+ca=92$

따라서 세 삼각형 OAB, OBC, OCD의 넓이의 합은

$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}ca=\frac{1}{2}(ab+bc+ca)$

$=\frac{1}{2}\times92=46$

0063 답 ②

$\overline{BC}=a$, $\overline{CD}=b$, $\overline{CG}=c$라 하면 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합이 28이므로

$4a+4b+4c=28$ $\therefore a+b+c=7$

대각선 AG의 길이가 5이므로

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=5$ $\therefore a^2+b^2+c^2=25$

이때 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$이므로

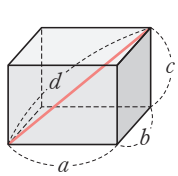
구하는 직육면체의 겉넓이는

$2(ab+bc+ca)=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)$

$=7^2-25=24$

✓ 중2 다시보기

오른쪽 그림과 같이 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 a, b, c인 직육면체에 대하여 다음이 성립한다.



① 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)$

② 겉넓이는 $2(ab+bc+ca)$

③ 대각선의 길이 d에 대하여 $d^2=a^2+b^2+c^2$

0064 답 36

㈐에서 $2(ab+bc+ca)=66$이므로

$ab+bc+ca=33$ …… ⓘ

㈎, ㈏에서

$(a+b)(b+c)(c+a)$

$=(10-c)(10-a)(10-b)$

$=10^3-(a+b+c)\times10^2+(ab+bc+ca)\times10-abc$

$=10^3-10\times10^2+33\times10-abc$

$=330-abc$ …… ⓘⓘ

즉, $330-abc=294$이므로

$abc=36$

따라서 직육면체의 부피는 36이다. …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $ab+bc+ca$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ $(a+b)(b+c)(c+a)$를 변형하기	40 %
ⓘⓘⓘ 직육면체의 부피 구하기	30 %

0065 답 60

$\overline{BC}=a$, $\overline{CD}=b$, $\overline{CG}=c$라 하면 직육면체의 겉넓이가 148이므로

$2(ab+bc+ca)=148$

$\therefore ab+bc+ca=74$ …… ㉠

삼각형 BGD의 세 변의 길이의 제곱의 합이 154이므로

$\overline{BD}^2+\overline{DG}^2+\overline{BG}^2=154$에서

$(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)=154$

$2(a^2+b^2+c^2)=154$

$\therefore a^2+b^2+c^2=77$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$=77+2\times74=225$

그런데 $a+b+c>0$이므로

$a+b+c=15$

따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은

$4(a+b+c)=4\times15=60$

0066 답 ②

처음 직육면체의 밑면의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 a, b, c라 하면 한 모퉁이에서 한 모서리의 길이가 1인 정육면체 모양을 잘라 낸 입체도형의 겉넓이가 94이므로

$2(ab+bc+ca)=94$

$\therefore ab+bc+ca=47$

모든 모서리의 길이의 합이 54이므로

$4(a+b+c)+6=54$, $4(a+b+c)=48$

$\therefore a+b+c=12$

$\therefore a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=12^2-2\times47=50$

따라서 처음 직육면체 모양의 나무토막의 대각선의 길이는

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

참고 잘랐을 때 생기는 세 단면과 직육면체의 세 면에서 잘라 낸 부분의 넓이가 같으므로 잘라 낸 입체도형의 겉넓이는 원래 직육면체의 겉넓이와 같다.
또한 잘랐을 때 생기는 9개의 모서리 중 3개의 모서리가 직육면체의 세 모서리에서 잘라 낸 부분의 길이와 같으므로 잘라 낸 입체도형의 모든 모서리의 길이의 합은 원래 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합보다 6만큼 더 크다.

0067 답 200

$\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$, $\overline{OC}=c$라 하면

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$

$=(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2)+(\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)+(\overline{OC}^2+\overline{OA}^2)$

$=(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)$

$=2(a^2+b^2+c^2)$

㈎에서 $a+b+c=16$

㈏에서 $\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}ca=39$

$\therefore ab+bc+ca=78$

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=16^2-2\times78=100$

이므로

$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=2(a^2+b^2+c^2)=2\times100=200$

0068 답 ④

$100=a$로 놓으면

$99^3+101^3=(a-1)^3+(a+1)^3$

$=(a^3-3a^2+3a-1)+(a^3+3a^2+3a+1)$

$=2a^3+6a=2\times100^3+6\times100=2000600$

따라서 구하는 각 자리의 숫자의 합은 $2+6=8$

0069 답 ③

주어진 등식의 좌변을 변형하면

$11\times101\times10001\times100000001$

$=(10+1)(100+1)(10000+1)(100000000+1)$

$=\frac{1}{10-1}(10-1)(10+1)(10^2+1)(10^4+1)(10^8+1)$

$=\frac{1}{10-1}(10^2-1)(10^2+1)(10^4+1)(10^8+1)$

$=\frac{1}{10-1}(10^4-1)(10^4+1)(10^8+1)$

$=\frac{1}{10-1}(10^8-1)(10^8+1)$

$=\frac{1}{10-1}(10^{16}-1)$

$=\frac{1}{9}(10^{16}-1)$

따라서 $m=9$, $n=16$이므로 $m+n=25$

0070 답 148

$\overline{AB}=a$, $\overline{BC}=b$, $\overline{BF}=c$라 하면

모서리의 길이의 합 l_1, l_2는

$l_1=3a+3b+3c+\overline{AC}+\overline{CF}+\overline{FA}$,

$l_2=a+b+c+\overline{AC}+\overline{CF}+\overline{FA}$

$l_1-l_2=28$에서

$2(a+b+c)=28$ $\therefore a+b+c=14$

겉넓이 S_1, S_2는

$S_1=ab+bc+ca+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}ca+$(삼각형 AFC의 넓이)

$S_2=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}bc+\frac{1}{2}ca+$(삼각형 AFC의 넓이)

$S_1-S_2=61$에서

$ab+bc+ca=61$

$\therefore \overline{AC}^2+\overline{CF}^2+\overline{FA}^2=(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)$

$=2(a^2+b^2+c^2)$

$=2\{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\}$

$=2\times(14^2-2\times61)$

$=148$

0071 답 ③

삼각형 ABC가 $\angle A=90°$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$에서

$x^2+y^2=10$ ····· ㉠

$\triangle ABC\backsim\triangle APS$ (AA 닮음)이고, 닮음비는

$\overline{BC}:\overline{PS}=\sqrt{10}:\frac{2\sqrt{10}}{7}=7:2$이므로

$\overline{AP}=\frac{2}{7}x$, $\overline{AS}=\frac{2}{7}y$

또 $\triangle APS\backsim\triangle RSC$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AP}:\overline{RS}=\overline{PS}:\overline{SC}$에서

$\frac{2}{7}x:\frac{2\sqrt{10}}{7}=\frac{2\sqrt{10}}{7}:\left(y-\frac{2}{7}y\right)$

$2x:2\sqrt{10}=2\sqrt{10}:5y$, $10xy=40$

$\therefore xy=4$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=10-2\times4=2$

그런데 $x>y$이므로 $x-y=\sqrt{2}$

$\therefore x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(\sqrt{2})^3+3\times4\times\sqrt{2}=14\sqrt{2}$

참고 △APS와 △RSC에서

$\angle PAS=\angle SRC=90°$이고,

$\angle PSA=90°-\angle CSR=\angle SCR$이므로

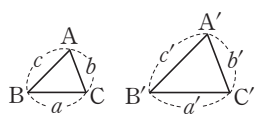
$\triangle APS\backsim\triangle RSC$ (AA 닮음)

☑ 중2 다시보기

두 삼각형은 다음의 각 경우에 서로 닮음이다.

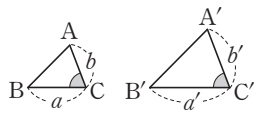
(1) 세 쌍의 대응변의 길이의 비가 같을 때 (SSS 닮음)

➡ $a:a'=b:b'=c:c'$



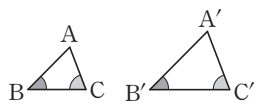
(2) 두 쌍의 대응변의 길이의 비가 같고 그 끼인각의 크기가 같을 때 (SAS 닮음)

➡ $a:a'=b:b'$, $\angle C=\angle C'$



(3) 두 쌍의 대응각의 크기가 각각 같을 때 (AA 닮음)

➡ $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$



0072 답 2

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2+x-2 \\ \hline 2x-1 & 4x^3\qquad -5x+3 \\ & 4x^3-2x^2 \\ \hline & \quad 2x^2-5x \\ & \quad 2x^2-x \\ \hline & \qquad -4x+3 \\ & \qquad -4x+2 \\ \hline & \qquad\qquad 1 \end{array}$$

따라서 $a=2$, $b=2$, $c=3$, $d=1$이므로

$a-b+c-d=2$

0073 답 4

x^3+2x^2-5x-8을 $x-2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & 2 & -5 & -8 \\ & & 2 & 8 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & -2 \end{array}$$

따라서 $a=2$, $b=4$, $c=-2$이므로

$a+b+c=4$

0074 답 ③

$2x^3+x^2-3x-5$를 $x+2$로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2-3x+3 \\ \hline x+2 & 2x^3+x^2-3x-5 \\ & 2x^3+4x^2 \\ \hline & \quad -3x^2-3x \\ & \quad -3x^2-6x \\ \hline & \qquad 3x-5 \\ & \qquad 3x+6 \\ \hline & \qquad\qquad -11 \end{array}$$

따라서 몫은 $2x^2-3x+3$, 나머지는 -11이다.

다른 풀이

$2x^3+x^2-3x-5$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

$$\begin{array}{c|cccc} -2 & 2 & 1 & -3 & -5 \\ & & -4 & 6 & -6 \\ \hline & 2 & -3 & 3 & -11 \end{array}$$

따라서 몫은 $2x^2-3x+3$, 나머지는 -11이다.

0075 답 ④

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{3} & 3 & -7 & 5 & 1 \\ & & \boxed{1} & \boxed{-2} & \boxed{1} \\ \hline & 3 & \boxed{-6} & \boxed{3} & 2 \end{array}$$

$3x^3-7x^2+5x+1=\left(x-\frac{1}{3}\right)(\boxed{\text{(가) } 3x^2-6x+3})+2$

$=(3x-1)(\boxed{\text{(나) } x^2-2x+1})+2$

$f(x)=3x^2-6x+3$, $g(x)=x^2-2x+1$이므로

$f(2)=12-12+3=3$, $g(2)=4-4+1=1$

$\therefore f(2)+g(2)=4$

0076 답 9

$2x^3-x^2+x+3$을 $x+1$로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2-3x+4 \\ \hline x+1 & 2x^3-x^2+x+3 \\ & 2x^3+2x^2 \\ \hline & \quad -3x^2+x \\ & \quad -3x^2-3x \\ \hline & \qquad 4x+3 \\ & \qquad 4x+4 \\ \hline & \qquad\qquad -1 \end{array}$$

따라서 $Q(x)=2x^2-3x+4$이므로

$Q(-1)=2+3+4=9$

0077 답 ③

$3x^3-4x^2+4x+2=P(x)(3x^2-x+3)+5$이므로

$3x^3-4x^2+4x-3=P(x)(3x^2-x+3)$

$\therefore P(x)=(3x^3-4x^2+4x-3)\div(3x^2-x+3)$

$$\begin{array}{r|l} & x-1 \\ \hline 3x^2-x+3 & 3x^3-4x^2+4x-3 \\ & 3x^3-x^2+3x \\ \hline & \quad -3x^2+x-3 \\ & \quad -3x^2+x-3 \\ \hline & \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$\therefore P(x)=x-1$

0078 답 ④

$P(x)-2x^2=(x^4+2x^3-x^2+5)-2x^2$

$=x^4+2x^3-3x^2+5$

이 식을 $Q(x)=x^2-x+1$로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & x^2+3x-1 \\ \hline x^2-x+1 & x^4+2x^3-3x^2\qquad +5 \\ & x^4-x^3+x^2 \\ \hline & \quad 3x^3-4x^2 \\ & \quad 3x^3-3x^2+3x \\ \hline & \qquad -x^2-3x+5 \\ & \qquad -x^2+x-1 \\ \hline & \qquad\qquad -4x+6 \end{array}$$

따라서 나머지가 $-4x+6$이므로

$a=6$

0079 답 ④

$P(x)=(x^2+3)(3x+1)+x+5$

$=3x^3+x^2+10x+8$

$3x^3+x^2+10x+8$을 $x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r} 3x^2+4x+14 \\ x-1\,\overline{)\,3x^3+x^2+10x+8} \\ 3x^3-3x^2 \\ \hline 4x^2+10x \\ 4x^2-4x \\ \hline 14x+8 \\ 14x-14 \\ \hline 22 \end{array}$$

따라서 몫은 $3x^2+4x+14$이다.

다른 풀이

$P(x)=3x^3+x^2+10x+8$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 조립제법을 이용하여 구하면

1	3	1	10	8
		3	4	14
	3	4	14	22

따라서 몫은 $3x^2+4x+14$, 나머지는 22이다.

0080 답 4

$P(x)$를 $3x-6$으로 나누었을 때의 몫이 $Q_1(x)$, 나머지가 R_1이므로

$P(x)=(3x-6)Q_1(x)+R_1$

$=(x-2)\times 3Q_1(x)+R_1$ …… ⓘ

따라서 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫 $Q_2(x)$와 나머지 R_2는

$Q_2(x)=3Q_1(x)$, $R_2=R_1$ …… ⓘⓘ

$\therefore \dfrac{Q_2(x)}{Q_1(x)}+\dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{3Q_1(x)}{Q_1(x)}+\dfrac{R_1}{R_1}$

$=3+1=4$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $P(x)$에 대한 식을 변형하기	30 %
ⓘⓘ $Q_2(x)$, R_2를 $Q_1(x)$, R_1로 나타내기	50 %
ⓘⓘⓘ $\dfrac{Q_2(x)}{Q_1(x)}+\dfrac{R_2}{R_1}$의 값 구하기	20 %

0081 답 ④

$A=(2x^2-x+1)(x+2)+3x-5$

$=2x^3+3x^2+2x-3$

$2x^3+3x^2+2x-3$을 x^2+1로 나누면

$$\begin{array}{r} 2x+3 \\ x^2+1\,\overline{)\,2x^3+3x^2+2x-3} \\ 2x^3+2x \\ \hline 3x^2-3 \\ 3x^2+3 \\ \hline -6 \end{array}$$

$\therefore A=2x^3+3x^2+2x-3$, $R=-6$

0082 답 ①

x^3+4x^2+ax-5를 x^2-x+b로 나누면

$$\begin{array}{r} x+5 \\ x^2-x+b\,\overline{)\,x^3+4x^2+ax-5} \\ x^3-x^2+bx \\ \hline 5x^2+(a-b)x-5 \\ 5x^2-5x+5b \\ \hline (a-b+5)x-5-5b \end{array}$$

나누어떨어지려면 $a-b+5=0$, $-5-5b=0$이어야 하므로

$a=-6$, $b=-1$ $\therefore a+b=-7$

0083 답 ④

x^3+x^2+ax+b를 $(x-1)^2$, 즉 x^2-2x+1로 나누면

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x^2-2x+1\,\overline{)\,x^3+x^2+ax+b} \\ x^3-2x^2+x \\ \hline 3x^2+(a-1)x+b \\ 3x^2-6x+3 \\ \hline (a+5)x+b-3 \end{array}$$

나누어떨어지려면 $a+5=0$, $b-3=0$이어야 하므로

$a=-5$, $b=3$ $\therefore ab=-15$

$Q(x)=x+3$이므로

$Q(ab)=Q(-15)=-15+3=-12$

0084 답 30

$x^4+5x^3-3x^2-40x+4$를 x^2-2x-2로 나누면

$$\begin{array}{r} x^2+7x+13 \\ x^2-2x-2\,\overline{)\,x^4+5x^3-3x^2-40x+4} \\ x^4-2x^3-2x^2 \\ \hline 7x^3-x^2-40x \\ 7x^3-14x^2-14x \\ \hline 13x^2-26x+4 \\ 13x^2-26x-26 \\ \hline 30 \end{array}$$

$\therefore x^4+5x^3-3x^2-40x+4=(x^2-2x-2)(x^2+7x+13)+30$

$=30$ ($\because x^2-2x-2=0$)

0085 답 ⑤

$f(x)$를 $3x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$f(x)=(3x-1)Q(x)+R$

$\therefore 3f(x)=3(3x-1)Q(x)+3R$

$=9\left(x-\dfrac{1}{3}\right)Q(x)+3R$

$=\left(x-\dfrac{1}{3}\right)\times 9Q(x)+3R$

따라서 구하는 몫은 $9Q(x)$, 나머지는 $3R$이다.

0086 답 ③

$2x+1$로 나누었으므로 $m=-\dfrac{1}{2}$

$c=m\times 2=\left(-\frac{1}{2}\right)\times 2=-1$

$a+c=-6$이므로 $a=-6-(-1)=-5$

$d=m\times(-6)=\left(-\frac{1}{2}\right)\times(-6)=3$

$b+(-2)=-3$이므로 $b=-1$

$\therefore P(x)=2x^3-5x^2+x-1$

ㄱ. $P(1)=2-5+1-1=-3$

ㄴ. $P(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)(2x^2-6x+4)-3$

$=(2x+1)(x^2-3x+2)-3$

따라서 몫은 x^2-3x+2이다.

ㄷ. 나머지는 -3이고 $P\left(-\frac{1}{2}\right)=-3$과 같다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0087 답 ⑤

$P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$P(x)=(x-a)Q(x)+R$

$\therefore xP(x)=x(x-a)Q(x)+Rx$

$=x(x-a)Q(x)+R(x-a)+aR$

$=(x-a)\{xQ(x)+R\}+aR$

따라서 구하는 몫은 $xQ(x)+R$이다.

0088 답 ⑤

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$f(x)=(x-2)Q(x)+R$

$\therefore (x+1)f(x)=(x+1)(x-2)Q(x)+R(x+1)$

$=(x+1)(x-2)Q(x)+R(x-2)+3R$

$=(x-2)\{(x+1)Q(x)+R\}+3R$

따라서 구하는 몫은 $(x+1)Q(x)+R$, 나머지는 $3R$이다.

0089 답 ⑤

$f(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$f(x)=(2x-1)Q(x)+R$

$f(x+1)=(2x+1)Q(x+1)+R$

$\therefore xf(x+1)=x(2x+1)Q(x+1)+Rx$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\times 2xQ(x+1)+R\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{R}{2}$

$=\left(x+\frac{1}{2}\right)\{2xQ(x+1)+R\}-\frac{R}{2}$

따라서 구하는 몫은 $2xQ(x+1)+R$, 나머지는 $-\frac{R}{2}$이다.

0090 답 ⑤

$x^4+x^3+x^2+x+1=X$로 놓으면

$(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)^2-(x^4+x^3+x^2+x+1)^2$

$=(x^5+X)^2-X^2$

$=x^{10}+2x^5X$

$=x^{10}+2x^5(x^4+x^3+x^2+x+1)$

$=x^{10}+2x^9+2x^8+2x^7+2x^6+2x^5$

$=x^6(x^4+2x^3+2x^2+2x+2)+2x^5$

따라서 구하는 나머지는 $2x^5$이다.

0091 답 ②

$x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$에서 $2x-1=\sqrt{3}$

양변을 제곱하면

$4x^2-4x+1=3 \quad \therefore 2x^2-2x-1=0$

이때 $2x^4-8x^3+11x^2-5x+5$를 $2x^2-2x-1$로 나누면

$$\begin{array}{r} x^2-3x+3 \\ 2x^2-2x-1\overline{)\,2x^4-8x^3+11x^2-5x+5} \\ 2x^4-2x^3-x^2 \\ \hline -6x^3+12x^2-5x \\ -6x^3+6x^2+3x \\ \hline 6x^2-8x+5 \\ 6x^2-6x-3 \\ \hline -2x+8 \end{array}$$

$\therefore 2x^4-8x^3+11x^2-5x+5$

$=(2x^2-2x-1)(x^2-3x+3)-2x+8$

$=-2x+8\ (\because 2x^2-2x-1=0)$

$=-2\times\frac{1+\sqrt{3}}{2}+8=7-\sqrt{3}$

0092 답 ③

$P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$P(x)=(x-1)Q(x)+R$

$\therefore x^2P(x)=x^2(x-1)Q(x)+x^2R$

$=x^2(x-1)Q(x)+(x-1)(x+1)R+R$

$=(x-1)\{x^2Q(x)+(x+1)R\}+R$

따라서 구하는 몫은 $x^2Q(x)+(x+1)R$이다.

0093 답 ①

$f(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$f(x)=(x^2+1)Q(x)+x+1$이므로

$\{f(x)\}^2$

$=(x^2+1)^2\{Q(x)\}^2+2(x^2+1)(x+1)Q(x)+(x+1)^2$

$=(x^2+1)[(x^2+1)\{Q(x)\}^2+2(x+1)Q(x)]+x^2+2x+1$

$=(x^2+1)[(x^2+1)\{Q(x)\}^2+2(x+1)Q(x)]+(x^2+1)+2x$

$=(x^2+1)[(x^2+1)\{Q(x)\}^2+2(x+1)Q(x)+1]+2x$

따라서 $R(x)=2x$이므로 $R(3)=6$

최고수준 도전 기출 22~23쪽

0094 답 ③

전략 (나)에 $n=1, 2, 3, 4$를 대입하여 $f_5(x)$를 구한 후 x항이 나오는 부분만 계산한다.

$f_{n+1}(x)=f_n(x+n)$에 $n=1, 2, 3, 4$를 차례대로 대입하면

$f_2(x)=f_1(x+1)=2(x+1)^3-5(x+1)^2+10$

$f_3(x)=f_2(x+2)=2(x+3)^3-5(x+3)^2+10$

$f_4(x)=f_3(x+3)=2(x+6)^3-5(x+6)^2+10$
$f_5(x)=f_4(x+4)=2(x+10)^3-5(x+10)^2+10$
이때 $f_5(x)$의 전개식에서 x항은
$2\times3x\times10^2-5\times2x\times10=600x-100x=500x$
따라서 x의 계수는 500이다.

0095 답 ②

전략 $f(x)$에 대한 등식을 세운 후 x에 $x+3$을 대입하여 $f(x+3)$을 구한 다음 $(2x+7)(x+5)$를 포함한 식으로 변형하여 나머지를 구한다.

$f(x)$를 $(2x+1)(x+2)(x-1)$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $2x^2+6x-5$이므로
$f(x)=(2x+1)(x+2)(x-1)Q(x)+2x^2+6x-5$
$\therefore f(x+3)$
$=(2x+7)(x+5)(x+2)Q(x+3)+2(x+3)^2+6(x+3)-5$
$=(2x+7)(x+5)(x+2)Q(x+3)+2x^2+18x+31$
$=(2x+7)(x+5)(x+2)Q(x+3)+(2x+7)(x+5)+x-4$
$=(2x+7)(x+5)\{(x+2)Q(x+3)+1\}+x-4$
따라서 구하는 나머지는 $x-4$이다.

0096 답 3

전략 $P(x)$를 $Q(x)$와 R로 나타낸 후 $6Q(x)+3$을 포함한 항으로 변형한다. 이때 $6Q(x)+3$이 x에 대한 이차식임을 이용하여 몫과 나머지를 구한다.

삼차다항식 $P(x)$를 $3x+6$으로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로
$P(x)=(3x+6)Q(x)+R$
$=\left(\frac{1}{2}x+1\right)6Q(x)+R$
$=\left(\frac{1}{2}x+1\right)6Q(x)+3\left(\frac{1}{2}x+1\right)-3\left(\frac{1}{2}x+1\right)+R$
$=\{6Q(x)+3\}\left(\frac{1}{2}x+1\right)-\frac{3}{2}x-3+R$

따라서 $P(x)$를 $6Q(x)+3$으로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{2}x+1$,
나머지는 $-\frac{3}{2}x-3+R$이므로
$h(x)-R=\left\{\left(\frac{1}{2}x+1\right)+\left(-\frac{3}{2}x-3+R\right)\right\}-R$
$=-x-2$
$\therefore h(-5)-R=5-2=3$

0097 답 ④

전략 x^2의 계수를 a, b, c에 대한 식으로 나타낸 후 곱셈 공식의 변형을 이용하여 a, b, c의 값을 구하기 쉬운 꼴로 변형한다.

$(a^2x^2+bx-1)(b^2x^2+cx-1)(c^2x^2+ax-1)$의 전개식에서 x^2항은
$a^2x^2\times(-1)\times(-1)+(-1)\times b^2x^2\times(-1)$
$+(-1)\times(-1)\times c^2x^2+bx\times cx\times(-1)+bx\times(-1)\times ax$
$+(-1)\times cx\times ax$
$=(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)x^2$
이때 x^2의 계수가 4이므로
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=4$
$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=8$
$\therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=8$ ····· ㉠
㉠을 만족시키는 $(a-b)^2$, $(b-c)^2$, $(c-a)^2$의 값이 될 수 있는 수는 0, 1, 4이고, 이때 세 수의 합이 8이 되는 경우는 0+4+4뿐이므로 ㉠을 만족시키는 a, b, c의 값은 세 수 중 두 수는 같고, 서로 다른 두 수의 차가 2이다.
$a\geq b\geq c$라 하면 5 이하의 세 자연수 a, b, c는
5, 5, 3 또는 5, 3, 3 또는 4, 4, 2 또는 4, 2, 2 또는
3, 3, 1 또는 3, 1, 1
따라서 $a+b+c$의 값이 될 수 있는 수는 13, 11, 10, 8, 7, 5이므로 $a+b+c$의 최댓값은 13이다.

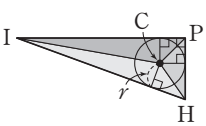
0098 답 ②

전략 $\overline{PH}=a$, $\overline{PI}=b$로 놓고 내접원과 직각삼각형의 넓이 사이의 관계를 이용하여 a, b에 대한 식을 세운 후 곱셈 공식의 변형을 이용한다.

직사각형 OHPI에서 $\overline{HI}=\overline{OP}=4$
$\overline{PH}=a$, $\overline{PI}=b$라 하면 직사각형 OHPI의 대각선의 길이가 4이므로
$\sqrt{a^2+b^2}=4$ $\therefore a^2+b^2=16$ ····· ㉠
삼각형 PIH에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면
삼각형 PIH의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{PH}\times\overline{PI}=\frac{1}{2}\times r\times(\overline{PH}+\overline{PI}+\overline{HI})$
$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}r(a+b+4)$ $\therefore ab=r(a+b+4)$ ····· ㉡
이때 삼각형 PIH에 내접하는 원의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$이므로
$\pi r^2=\frac{\pi}{4}$, $r^2=\frac{1}{4}$ $\therefore r=\frac{1}{2}$ ($\because r>0$)
이를 ㉡에 대입하면 $ab=\frac{1}{2}(a+b+4)$
$\therefore a+b=2ab-4$ ····· ㉢
㉢의 양변을 제곱하면
$a^2+2ab+b^2=4a^2b^2-16ab+16$
㉠을 대입하면 $16+2ab=4a^2b^2-16ab+16$
$4a^2b^2-18ab=0$, $2ab(2ab-9)=0$
$\therefore ab=\frac{9}{2}$ ($\because a>0$, $b>0$)
이를 ㉢에 대입하면 $a+b=2\times\frac{9}{2}-4=5$
$\therefore \overline{PH}^3+\overline{PI}^3=a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
$=5^3-3\times\frac{9}{2}\times5=\frac{115}{2}$

✓ 중2 다시보기

삼각형 PIH에 내접하는 원의 중심을 C라 하면 삼각형 PIH의 넓이는 세 삼각형 CHP, CPI, CIH의 넓이의 합과 같으므로



$\triangle PIH=\frac{1}{2}\times r\times(\overline{PH}+\overline{PI}+\overline{HI})$

0099 답 216

전략 정사각형 A, B, C가 아닌 직사각형 6개의 넓이의 합을 a, b, c에 대한 식으로 나타낸 후 관계식을 구하고, 곱셈 공식의 변형을 이용하여 a, b, c에 대한 식의 값을 구한다.

$a+b+c=108$ ····· ㉠

세 정사각형 A, B, C의 넓이가 각각 a, b, c이므로 한 변의 길이가 각각 $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$이다.

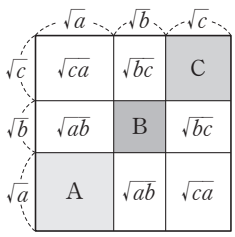
오른쪽 그림에서 정사각형 A, B, C가 아닌 직사각형 6개의 넓이의 합은

$2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$

$=324-(a+b+c)$

$=324-108$

$=216$



$\therefore \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}=108$ ····· ㉡

이때 ㉠, ㉡에서

$a+b+c=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$

$2a+2b+2c=2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ca}$

$(a-2\sqrt{ab}+b)+(b-2\sqrt{bc}+c)+(c-2\sqrt{ca}+a)=0$

$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{b}-\sqrt{c})^2+(\sqrt{c}-\sqrt{a})^2=0$

$\therefore \sqrt{a}=\sqrt{b}=\sqrt{c}$

이때 양수 a, b, c에 대하여 $a=b=c$이므로 ㉠에서

$3a=108$

$\therefore a=b=c=36$

$\therefore \sqrt{abc}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}$

$=6^3=216$

0100 답 ④

전략 직각삼각형의 닮음을 이용하여 x의 값을 구한 후 그 값이 0이 되는 이차식으로 $3x^3-5x^2+4x+7$을 나누었을 때의 나머지를 이용하여 식의 값을 구한다.

삼각형 ABC의 넓이가 $\frac{4}{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times1=\frac{4}{3}$ $\therefore \overline{AB}=\frac{8}{3}$

$\triangle ACH\backsim\triangle CBH$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AH}:\overline{CH}=\overline{CH}:\overline{BH}$에서

$\left(\frac{8}{3}-x\right):1=1:x$

$\frac{8}{3}x-x^2=1$

$3x^2-8x+3=0$ $\therefore x=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$

이때 $0<x<1$이므로 $x=\frac{4-\sqrt{7}}{3}$

$3x^3-5x^2+4x+7$을 $3x^2-8x+3$으로 나누면

$$\begin{array}{r} x+1 \\ 3x^2-8x+3\overline{)\,3x^3-5x^2+4x+7} \\ \underline{3x^3-8x^2+3x} \\ 3x^2+x+7 \\ \underline{3x^2-8x+3} \\ 9x+4 \end{array}$$

$\therefore 3x^3-5x^2+4x+7=(3x^2-8x+3)(x+1)+9x+4$

$=9x+4$ ($\because 3x^2-8x+3=0$)

$=9\times\frac{4-\sqrt{7}}{3}+4$

$=16-3\sqrt{7}$

✓ 중3 다시보기

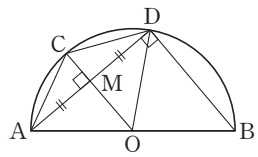
이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq0$)의 근은

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (단, $b^2-4ac\geq0$)

0101 답 ④

전략 원주각의 성질과 직각삼각형의 성질을 이용하여 a에 대한 방정식을 구한 후 $a-\frac{1}{a}$의 값을 이용하여 $a^3-\frac{1}{a^3}$의 값을 구한다.

선분 AB의 중점을 O라 하고 오른쪽 그림과 같이 $\overline{OC}$, $\overline{OD}$를 그으면



$\triangle AOC$와 $\triangle DOC$에서

$\overline{AC}=\overline{DC}$, $\overline{OA}=\overline{OD}$, $\overline{OC}$는 공통

즉, $\triangle AOC\equiv\triangle DOC$ (SSS 합동)이므로

$\angle ACO=\angle DCO$

$\overline{AD}$를 그어 $\overline{OC}$와 만나는 점을 M이라 하면

$\overline{CM}$이 $\angle ACD$의 이등분선이고

삼각형 CAD가 $\overline{CA}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{AM}=\overline{DM}$, $\angle AMC=90^\circ$

이때 $\angle ADB=90^\circ$이므로

$\triangle AOM\backsim\triangle ABD$ (AA 닮음)이고

닮음비는 $\overline{AO}:\overline{AB}=a:2a=1:2$이다.

따라서 $\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times8=4$이므로

$\overline{CM}=\overline{OC}-\overline{OM}=a-4$

직각삼각형 AMC에서 $\overline{AM}^2=\overline{AC}^2-\overline{CM}^2$이고,

직각삼각형 AOM에서 $\overline{AM}^2=\overline{AO}^2-\overline{OM}^2$이므로

$\overline{AC}^2-\overline{CM}^2=\overline{AO}^2-\overline{OM}^2$에서

$(a-1)^2-(a-4)^2=a^2-4^2$

$a^2-6a-1=0$

이 식의 양변을 a로 나누면

$a-6-\frac{1}{a}=0$ $\therefore a-\frac{1}{a}=6$

$\therefore a^3-\frac{1}{a^3}=\left(a-\frac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\frac{1}{a}\right)$

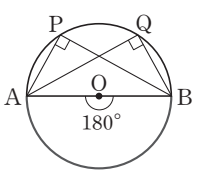
$=6^3+3\times6=234$

✓ 중3 다시보기

반원에 대한 원주각의 크기는 90°이다.

➡ $\overline{AB}$가 원의 지름이면

$\angle APB=\angle AQB=90^\circ$



02 항등식과 나머지 정리

난이도별 필수 기출 25~38쪽

0102 답 ⑤

ㄱ. $x^2-2x+1=0$

ㄴ. $x^2-2x-3=x^2-2x$에서 $-3=0$이므로 성립하지 않는 등식이다.

ㄷ. $x^2=x^2$ (항등식)

ㄹ. $2x^2-3x-5=2x^2-3x-5$ (항등식)

따라서 보기에서 항등식인 것은 ㄷ, ㄹ이다.

0103 답 ③

주어진 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$2x^2+ax+b=2x^2+x+3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=1$, $b=3$

$\therefore ab=3$

0104 답 5

주어진 등식의 양변의 x^2의 계수를 비교하면 $2=a$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$8=2c$ $\therefore c=4$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$2=-2b$ $\therefore b=-1$

$\therefore a+b+c=2+(-1)+4=5$

0105 답 13

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$6=6a$ $\therefore a=1$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$12=-2b$ $\therefore b=-6$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$18=3c$ $\therefore c=6$

$\therefore a-b+c=1-(-6)+6=13$

0106 답 6

주어진 등식의 좌변을 x, y에 대하여 정리하면

$(a+b)x+(a-2b)y+c=4x+y+2$ …… ⓘ

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+b=4$, $a-2b=1$, $c=2$

$a+b=4$, $a-2b=1$을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=1$ …… ⓘⓘ

$\therefore abc=3\times1\times2=6$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 등식의 좌변을 x, y에 대하여 정리하기	20%
ⓘⓘ a, b, c의 값 구하기	60%
ⓘⓘⓘ abc의 값 구하기	20%

0107 답 ②

$(3x-4)^5(x^3-4x^2+3x-1)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{23}x^{23}$

(a_0, a_1, …, a_{23}은 상수)

이라 하고 양변에 $x=1$을 대입하면

$(-1)^5\times(-1)^6=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{23}$

$\therefore a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{23}=-1$

따라서 상수항을 포함한 모든 계수의 합은 -1이다.

참고 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$에 대하여

① $f(x)$의 상수항 ➡ $f(0)=a_0$

② $f(x)$의 상수항을 포함한 모든 계수의 합 ➡ $f(1)=a_0+a_1+\cdots+a_n$

0108 답 ②

주어진 방정식에 $x=1$을 대입하면

$1+k(2p-3)-(p^2-2)k+q+2=0$

$(-p^2+2p-1)k+q+3=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$-p^2+2p-1=0$, $q+3=0$

$-p^2+2p-1=0$에서 $p^2-2p+1=0$

$(p-1)^2=0$ $\therefore p=1$

$q+3=0$에서 $q=-3$

$\therefore p+q=1+(-3)=-2$

0109 답 5

$x+y=1$에서 $y=1-x$이므로 주어진 등식에 대입하면

$2ax+a(1-x)-3=(1-b)x+b(1-x)$

$(a+2b-1)x+a-b-3=0$ …… ⓘ

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a+2b-1=0$, $a-b-3=0$

두 식을 연립하여 풀면

$a=\frac{7}{3}$, $b=-\frac{2}{3}$ …… ⓘⓘ

$\therefore a^2-b^2=\frac{49}{9}-\frac{4}{9}=5$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 주어진 등식을 x에 대하여 정리하기	20%
ⓘⓘ a, b의 값 구하기	60%
ⓘⓘⓘ a^2-b^2의 값 구하기	20%

0110 답 ⑤

$y=x^2+ax-2a$에서

$(x-2)a+x^2-y=0$

이 등식이 a에 대한 항등식이므로

$x-2=0$, $x^2-y=0$

따라서 $x=2$, $y=x^2=4$이므로 점 P의 좌표는 $(2, 4)$이다.

0111 답 ①

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-5+a+1=-1$ $\therefore a=2$

따라서 $x^3-5x^2+2x+1=(x-1)Q(x)-1$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$8-20+4+1=Q(2)-1$ $\therefore Q(2)=-6$

$\therefore Q(a)=Q(2)=-6$

0112 답 ⑤

$(x*a)+(y*b)=(y*2)+\{(-1)*4\}$에서

$(x+a+ax)+(y+b+by)=(y+2+2y)+(-1+4-4)$

$(a+1)x+(b-2)y+a+b-1=0$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a+1=0$, $b-2=0$, $a+b-1=0$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$b-a=3$

0113 답 ②

주어진 등식의 좌변을 변형하면

$(x+1)(x-3)P(x)+ax+b=2x^3-5x^2-2x-2$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-a+b=-7$ ····· ㉡

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$3a+b=1$ ····· ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-5$

$\therefore ab=-10$

0114 답 ⑤

$x^4+ax^3-bx^2$을 x^2+x-3으로 나누었을 때의 몫을 x^2+cx+d (c, d는 상수)라 하면

$x^4+ax^3-bx^2$

$=(x^2+x-3)(x^2+cx+d)+2x+3$

$=x^4+(c+1)x^3+(c+d-3)x^2+(-3c+d+2)x-3d+3$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=c+1$, $-b=c+d-3$, $-3c+d+2=0$, $-3d+3=0$

$-3d+3=0$에서 $d=1$

$-3c+d+2=0$에서 $-3c+1+2=0$

$\therefore c=1$

$-b=c+d-3$에서 $-b=1+1-3$

$\therefore b=1$

$a=c+1$에서 $a=1+1=2$

$\therefore a+b=2+1=3$

0115 답 ④

주어진 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을 대입하면

$(1-2-1)^{20}=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{39}+a_{40}$

$\therefore a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{39}+a_{40}=2^{20}$ ····· ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$(1+2-1)^{20}=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{39}+a_{40}$

$\therefore a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{39}+a_{40}=2^{20}$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면 $2(a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{40})=2\times2^{20}$

$\therefore a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{40}=2^{20}$

0116 답 ①

$\frac{ax-by+2}{2x+y-1}=k$ (k는 상수)라 하면

$ax-by+2=k(2x+y-1)$

$(a-2k)x-(b+k)y+2+k=0$

이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$a-2k=0$, $b+k=0$, $2+k=0$

따라서 $k=-2$, $a=-4$, $b=2$이므로

$ab=-8$

0117 답 ③

오른쪽 조립제법에서

x^3-2x^2-4x+6

$=(x-2)(x^2-4)-2$

$=(x-2)\{(x-2)(x+2)\}-2$

$=(x-2)^2(x+2)-2$

$=(x-2)^2\{(x-2)+4\}-2$

$=(x-2)^3+4(x-2)^2-2$

2	1	−2	−4	6
		2	0	−8
2	1	0	−4	−2
		2	4	
2	1	2	0	
		2		
	1	4		

따라서 $a=1$, $b=4$, $c=0$, $d=-2$이므로

$a+b-c-d=7$

0118 답 ④

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$(1+1-3)^5=a_0$ $\therefore a_0=-1$

주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면

$(-3)^5=a_{10}-a_9+\cdots-a_1+a_0$

$\therefore a_{10}-a_9+\cdots-a_1+a_0=-3^5$ ····· ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$(4+2-3)^5=a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0$

$\therefore a_{10}+a_9+\cdots+a_1+a_0=3^5$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면

$2(a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0)=0$

따라서 $a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2+a_0=0$이므로

$a_{10}+a_8+a_6+a_4+a_2=-a_0=-(-1)=1$

0119 답 13

$P_1(x)=x-1$, $P_2(x)=(x-1)(x-2)$,

$P_3(x)=(x-1)(x-2)(x-3)$이므로 주어진 등식은

$2x^3-4x^2+3$

$=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3)$

····· ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면 $2-4+3=a$

$\therefore a=1$

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $16-16+3=a+b$

$3=1+b$ $\therefore b=2$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면 $54-36+3=a+2b+2c$

$21=1+4+2c$ $\therefore c=8$

㉠에서 양변의 x^3의 계수를 비교하면 $d=2$

$\therefore a+b+c+d=1+2+8+2=13$

0120 답 98

$$\begin{array}{c|cccc} \frac{1}{2} & 64 & -32 & -4 & 7 \\ & & 32 & 0 & -2 \\ \hline \frac{1}{2} & 64 & 0 & -4 & 5 \\ & & 32 & 16 & \\ \hline \frac{1}{2} & 64 & 32 & 12 & \\ & & 32 & & \\ \hline & 64 & 64 & & \end{array}$$

위의 조립제법에서

$64x^3-32x^2-4x+7$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)(64x^2-4)+5$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)(64x+32)+12\right\}+5$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(64x+32)+12\left(x-\frac{1}{2}\right)+5$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left\{64\left(x-\frac{1}{2}\right)+64\right\}+12\left(x-\frac{1}{2}\right)+5$

$=64\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+64\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+12\left(x-\frac{1}{2}\right)+5$

$=8(2x-1)^3+16(2x-1)^2+6(2x-1)+5$

따라서 $a=8$, $b=16$, $c=6$, $d=5$이므로

$ab-cd=128-30=98$

0121 답 ①

주어진 등식의 양변에 $x=\frac{1}{2}$을 대입하면

$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)^5=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_9}{2^9}+\frac{a_{10}}{2^{10}}$

$\therefore a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_9}{2^9}+\frac{a_{10}}{2^{10}}=1$ ····· ㉠

주어진 등식의 양변에 $x=-\frac{1}{2}$을 대입하면

$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+1\right)^5=a_0-\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}-\cdots-\frac{a_9}{2^9}+\frac{a_{10}}{2^{10}}$

$\therefore a_0-\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}-\cdots-\frac{a_9}{2^9}+\frac{a_{10}}{2^{10}}=32$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면

$2\left(\frac{a_1}{2}+\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_5}{2^5}+\frac{a_7}{2^7}+\frac{a_9}{2^9}\right)=-31$

$\therefore \frac{a_1}{2}+\frac{a_3}{2^3}+\frac{a_5}{2^5}+\frac{a_7}{2^7}+\frac{a_9}{2^9}=-\frac{31}{2}$

0122 답 ⑤

$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로 (나)에서 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나눈 몫은 x의 계수가 1인 일차식이다.

따라서 $f(x)=(x-2)^2(x+a)+2(x-2)$ (a는 상수)라 하고 양변에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=4a-4$

(가)에서 $4a-4=0$ $\therefore a=1$

$f(x)=(x-2)^2(x+1)+2(x-2)$

$=(x-2)\{(x-2)(x+1)+2\}$

$=(x-2)(x^2-x)$

$=(x-1)\{x(x-2)\}$

따라서 $Q(x)=x(x-2)$이므로

$Q(5)=5\times3=15$

0123 답 (1) 2 (2) −3

(1) $f(x^2)$을 $f(x)$로 나누었을 때의 몫이 x^2+2x-1이고 나머지가 $8x-6$이므로

$f(x^2)=f(x)(x^2+2x-1)+8x-6$ ····· ㉠

$f(x)$의 차수를 n이라 하면 좌변의 차수는 $2n$, 우변의 차수는 $n+2$이므로 $2n=n+2$에서 $n=2$

따라서 $f(x)$의 차수는 2이다. ····· ⓘ

(2) $f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하고 이를 ㉠에 대입하면

$ax^4+bx^2+c=(ax^2+bx+c)(x^2+2x-1)+8x-6$

$=ax^4+(2a+b)x^3+(-a+2b+c)x^2$

$+(-b+2c+8)x-c-6$ ····· ㉡

㉡이 x에 대한 항등식이므로 양변의 상수항을 비교하면

$c=-c-6$에서 $2c=-6$ $\therefore c=-3$

㉡의 양변의 x의 계수를 비교하면

$0=-b+2c+8$에서 $0=-b-6+8$ $\therefore b=2$

㉡의 양변의 x^3의 계수를 비교하면

$0=2a+b$에서 $0=2a+2$ $\therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-x^2+2x-3$이므로 ····· ⓘⓘ

$f(2)=-4+4-3=-3$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(x)$의 차수 구하기	30%
ⓘⓘ $f(x)$ 구하기	60%
ⓘⓘⓘ $f(2)$의 값 구하기	10%

0124 답 10

(나)에서 $f(0)=-1$이고, $f(x)$는 이차식이므로

$f(x)=ax^2+bx-1$ (a, b는 상수, $a\neq0$)이라 하면

$f(x^2)=ax^4+bx^2-1$이다.

(가)에서 $f(x^2)$이 $f(x)$로 나누어떨어지므로 몫을 x^2+cx+d (c, d는 상수)라 하면

$ax^4+bx^2-1=(ax^2+bx-1)(x^2+cx+d)$

$=ax^4+(ac+b)x^3+(ad+bc-1)x^2+(bd-c)x-d$ ····· ㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로 양변의 상수항을 비교하면

$-1=-d$ $\therefore d=1$

㉠의 양변의 x의 계수를 비교하면

$0=bd-c$에서 $0=b-c$ $\therefore b=c$

㉠의 양변의 x^3의 계수를 비교하면

$0=ac+b$에서 $ab+b=0$, $b(a+1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $b=0$

(i) $a=-1$일 때,

㉠의 양변의 x^2의 계수를 비교하면

$b=ad+bc-1$에서 $a=-1$, $b=c$, $d=1$이므로

$b=-1+b^2-1$, $b^2-b-2=0$

$(b+1)(b-2)=0$ $\therefore b=-1$ 또는 $b=2$

따라서 $f(x)=-x^2-x-1$ 또는 $f(x)=-x^2+2x-1$이므로

$f(2)=-7$ 또는 $f(2)=-1$

(ii) $b=0$일 때,

㉠의 양변의 x^2의 계수를 비교하면

$b=ad+bc-1$에서 $b=c=0$, $d=1$이므로

$0=a-1$ $\therefore a=1$

따라서 $f(x)=x^2-1$이므로 $f(2)=3$

(i), (ii)에서 $f(2)$의 최댓값은 3, 최솟값은 -7이므로 그 차는

$3-(-7)=10$

0125 답 4

$f(x)=x^3+ax^2-7$이라 하자.

나머지 정리에 의하여 $f(2)=17$이므로

$8+4a-7=17$, $4a=16$ $\therefore a=4$

0126 답 ⑤

$f(x)=x^3+ax^2+12$라 하자.

나머지 정리에 의하여 $f(2)=2a-8$이므로

$8+4a+12=2a-8$, $2a=-28$ $\therefore a=-14$

0127 답 ②

$f(x)=x^3+mx^2+nx+1$이라 하자.

나머지 정리에 의하여 $f(-1)=5$, $f(2)=3$이므로

$f(-1)=5$에서 $-1+m-n+1=5$

$\therefore m-n=5$ ····· ㉠

$f(2)=3$에서 $8+4m+2n+1=3$

$\therefore 2m+n=-3$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=\frac{2}{3}$, $n=-\frac{13}{3}$

$\therefore 3(m+n)=3\left(\frac{2}{3}-\frac{13}{3}\right)=-11$

0128 답 ③

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 3이므로

$f(2)=3$

$g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -2이므로

$g(2)=-2$

따라서 $2f(x)-3g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$2f(2)-3g(2)=2\times3-3\times(-2)=12$

0129 답 ①

$P(x)=(x+3)\{f(x)-2\}$라 하자.

$P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지가 16이므로 $P(1)=16$

즉, $4\{f(1)-2\}=16$이므로 $f(1)-2=4$

$\therefore f(1)=6$

따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 6이다.

0130 답 ②

$\{f(x)\}^2+\{g(x)\}^2=(2x^2-x+1)h(x)$의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\{f(1)\}^2+\{g(1)\}^2=2h(1)$ ····· ㉠

$f(x)=2x^3-5x^2+3x-2$에서

$f(1)=2-5+3-2=-2$

$g(x)=2x^3-7x^2+4x-3$에서

$g(1)=2-7+4-3=-4$

이를 ㉠에 대입하면

$(-2)^2+(-4)^2=2h(1)$ $\therefore h(1)=10$

따라서 $h(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 10이다.

0131 답 ②

나머지 정리에 의하여

$f\left(\frac{1}{2}\right)+3g\left(\frac{1}{2}\right)=7$, $2f\left(\frac{1}{2}\right)+g\left(\frac{1}{2}\right)=4$

두 식을 연립하여 풀면 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=2$

따라서 $g\left(x-\frac{3}{2}\right)$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$g\left(2-\frac{3}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=2$

0132 답 ⑤

$f(x)$를 $x-a$, $x+a$로 나누었을 때의 나머지가 각각 R_1, R_2이므로

$f(a)=R_1$, $f(-a)=R_2$

$R_1+R_2=4$에서 $f(a)+f(-a)=4$

$(a^3+a^2+2a+1)+(-a^3+a^2-2a+1)=4$

$2(a^2+1)=4$, $a^2+1=2$ $\therefore a^2=1$

따라서 $f(x)$를 $x-a^2$, 즉 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(1)=1+1+2+1=5$

0133 답 ④

$P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 5이므로

$P(x)=(x+1)Q(x)+5$ ····· ㉠

$Q(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 -2이므로

$Q(-2)=-2$

$P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 $P(-2)$이므로

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$P(-2)=(-2+1)\times Q(-2)+5$

$=(-1)\times(-2)+5=7$

0134 답 ④

나머지 정리에 의하여

$f(4)+g(4)=2$, $f(4)g(4)=-5$

따라서 $\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$을 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$\{f(4)\}^3+\{g(4)\}^3=\{f(4)+g(4)\}^3-3f(4)g(4)\{f(4)+g(4)\}$

$=2^3-3\times(-5)\times2=38$

0135 답 ③

$f(x)=x^5+ax^2+(a+1)x+2$라 하자.

나머지 정리에 의하여 $f(1)=6$이므로

$1+a+a+1+2=6,\ 2a=2 \quad \therefore a=1$

따라서 $x^5+x^2+2x+2=(x-1)Q(x)+6$이므로

양변에 $x=2$를 대입하면

$32+4+4+2=Q(2)+6$

$\therefore Q(2)=36$

$\therefore a+Q(2)=1+36=37$

0136 답 ②

㈎에서 나머지 정리에 의하여 $P(1)=1$

㈏에서 나머지 정리에 의하여

$2P(2)=2 \quad \therefore P(2)=1$

$P(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차다항식이므로

$P(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(1)=1$에서 $1+a+b=1$

$\therefore a+b=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$P(2)=1$에서 $4+2a+b=1$

$\therefore 2a+b=-3 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=3$

따라서 $P(x)=x^2-3x+3$이므로

$P(4)=16-12+3=7$

다른 풀이

㈎, ㈏에서 나머지 정리에 의하여

$P(1)=1,\ 2P(2)=2$, 즉 $P(1)=P(2)=1$이고

$P(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차다항식이므로

$P(x)-1=(x-1)(x-2)$

$\therefore P(x)=(x-1)(x-2)+1$

$\therefore P(4)=3\times2+1=7$

0137 답 9

x^3-2x^2+ax+5를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 R이므로

$x^3-2x^2+ax+5=(x-2)Q(x)+R$

양변에 $x=2$를 대입하면

$8-8+2a+5=R \quad \therefore R=2a+5 \quad \cdots\cdots$ ⓘ

$\therefore x^3-2x^2+ax+5=(x-2)Q(x)+2a+5 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$Q(x)$의 상수항을 포함한 모든 계수의 합이 3이므로

$Q(1)=3$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-2+a+5=-Q(1)+2a+5$

$a+4=-3+2a+5 \quad \therefore a=2 \quad \cdots\cdots$ ⓘⓘ

$\therefore R=2a+5=2\times2+5=9 \quad \cdots\cdots$ ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 나머지 R를 a에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘ a의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ R의 값 구하기	20 %

0138 답 ①

$P(x)=x^{10}$이라 하면 $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여

$P(2)=2^{10}$

즉, x^{10}을 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이고 나머지가 2^{10}이므로

$x^{10}=(x-2)Q(x)+2^{10}$

양변에 $x=4$를 대입하면 $4^{10}=2Q(4)+2^{10}$

$2^{20}=2Q(4)+2^{10},\ 2Q(4)=2^{20}-2^{10}$

$\therefore Q(4)=2^{19}-2^9$

따라서 $Q(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 $2^{19}-2^9$이다.

0139 답 ③

㈎에서 $f(x)-g(x)=a(x-1)^2$ (a는 상수, $a\neq0$) $\quad \cdots\cdots$ ㉠

이라 하면 ㈏에서 나머지 정리에 의하여 $f(2)=2$, $g(2)=5$이므로

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)-g(2)=a \quad \therefore a=2-5=-3$

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면 $h(x)=-3(x-1)^2$

따라서 $h(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$h(-1)=-3\times(-2)^2=-12$

✓ 중3 다시보기

① 두 근이 α, β이고 x^2의 계수가 a ($a\neq0$)인 이차방정식
➡ $a(x-\alpha)(x-\beta)=0$

② 중근이 α이고 x^2의 계수가 a ($a\neq0$)인 이차방정식
➡ $a(x-\alpha)^2=0$

0140 답 ⑤

㈎에서 $g(x)=x^2f(x)$를 ㈏에 대입하면

$x^2f(x)+(3x^2+4x)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$

$(4x^2+4x)f(x)=x^3+ax^2+2x+b$

$\therefore 4x(x+1)f(x)=x^3+ax^2+2x+b \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $0=b$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-1+a-2+b \quad \therefore a=3$

$a=3$, $b=0$을 ㉠에 대입하면

$4x(x+1)f(x)=x^3+3x^2+2x$

$4(x+1)f(x)=x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

$4f(x)=x+2 \quad \therefore f(x)=\frac{1}{4}(x+2)$

㈎에서 $g(x)=x^2f(x)=\frac{1}{4}x^2(x+2)$이므로

$g(4)=\frac{1}{4}\times4^2\times6=24$

따라서 $g(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지는 24이다.

0141 답 91

$(x-2)P(x)-x^2$을 $P(x)-x$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$, 나머지가 $P(x)-3x$이므로

$(x-2)P(x)-x^2=\{P(x)-x\}Q(x)+P(x)-3x \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때 나머지 $P(x)-3x$의 차수는 $P(x)-x$의 차수보다 낮아야 한다.

$P(x)$의 차수가 1이 아니면 $P(x)-3x$와 $P(x)-x$의 차수가 같아지므로 $P(x)$의 차수는 1이고, 최고차항은 $3x$이다.

따라서 $P(x)=3x+a$ (a는 상수)라 하고 ㉠에 대입하면

$(x-2)(3x+a)-x^2=(2x+a)Q(x)+a$

$(2x+a)Q(x)=2x^2+(a-6)x-3a$

$=(2x+a)(x-3)$

$\therefore Q(x)=x-3$

$P(x)$를 $Q(x)=x-3$으로 나눈 나머지가 10이므로

$P(3)=10$

이때 $P(x)=3x+a$이므로 $9+a=10$ $\therefore a=1$

따라서 $P(x)=3x+1$이므로

$P(30)=3\times30+1=91$

0142 답 7

x^3+2를 $(x+1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $ax+b$이므로

$x^3+2=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면

$-a+b=1$, $2a+b=10$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=4$

$\therefore a+b=7$

0143 답 0

나머지 정리에 의하여

$P(1)=3$, $P(-2)=6$

$P(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2+x-2)Q(x)+ax+b$

$=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=1$, $x=-2$를 각각 대입하면

$P(1)=a+b$, $P(-2)=-2a+b$

$\therefore a+b=3$, $-2a+b=6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=4$

따라서 $R(x)=-x+4$이므로

$R(4)=-4+4=0$

0144 답 ①

$f(2x+3)$을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$f(2\times(-1)+3)=f(1)$

$f(x)$를 $3x^2-2x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $2x-5$이므로

$f(x)=(3x^2-2x-1)Q(x)+2x-5$

$=(3x+1)(x-1)Q(x)+2x-5$

양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=-3$

따라서 구하는 나머지는 -3이다.

0145 답 ④

$x^{10}+x^8+x^5+x^2$을 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$x^{10}+x^8+x^5+x^2=(x^3-x)Q(x)+ax^2+bx+c$

$=x(x+1)(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $c=0$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1+1-1+1=a-b+c$ $\therefore a-b=2$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+1+1+1=a+b+c$ $\therefore a+b=4$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=1$

따라서 구하는 나머지는 $3x^2+x$이다.

0146 답 ③

나머지 정리에 의하여 $f(-2)=1$, $f(2)=5$

$x^2f(x)$를 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^2f(x)=(x^2-4)Q(x)+ax+b$

$=(x+2)(x-2)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$4f(-2)=-2a+b$ $\therefore -2a+b=4$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$4f(2)=2a+b$ $\therefore 2a+b=20$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=12$

따라서 $R(x)=4x+12$이므로

$R(-1)=-4+12=8$

0147 답 ①

나머지 정리에 의하여

$f(-1)=2$, $g(-1)=3$, $f(3)=1$, $g(3)=-2$

$f(x)g(x)$를 x^2-2x-3으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)g(x)=(x^2-2x-3)Q(x)+ax+b$

$=(x+1)(x-3)Q(x)+ax+b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)g(-1)=-a+b$

$2\times3=-a+b$ $\therefore -a+b=6$ …… ㉡

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$f(3)g(3)=3a+b$

$1\times(-2)=3a+b$ $\therefore 3a+b=-2$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=4$

따라서 구하는 나머지는 $-2x+4$이다.

0148 답 (1) 3, 3 (2) 3

(1) $P(x)$를 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 $3x$이므로

$P(x)=(x^2-4x+3)Q_1(x)+3x$

$=(x-1)(x-3)Q_1(x)+3x$

양변에 $x=1$을 대입하면 $P(1)=3$ …… ⓘ

$P(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지가 $6x-9$이므로

$P(x)=(x^2-5x+6)Q_2(x)+6x-9$

$=(x-2)(x-3)Q_2(x)+6x-9$

양변에 $x=2$를 대입하면 $P(2)=3$ …… ii

(2) $P(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$P(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$

$=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ …… ㉠ …… iii

㉠의 양변에 $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$P(1)=a+b$, $P(2)=2a+b$

$\therefore a+b=3$, $2a+b=3$

두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=3$

따라서 구하는 나머지는 3이다. …… iv

채점 기준	
i $P(1)$의 값 구하기	20 %
ii $P(2)$의 값 구하기	20 %
iii 구하는 나머지를 $ax+b$로 놓고 식 세우기	20 %
iv 나머지 구하기	40 %

0149 답 21

$2f(x)-3g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는

$2f(-2)-3g(-2)$ …… ㉠ …… i

$f(x)$를 x^3+8로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 x^2+x+1이므로

$f(x)=(x^3+8)Q_1(x)+x^2+x+1$

양변에 $x=-2$를 대입하면 $x^3+8=0$이므로

$f(-2)=4-2+1=3$ …… ii

$g(x)$를 x^2-x-6으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지가 $2x-1$이므로

$g(x)=(x^2-x-6)Q_2(x)+2x-1$

$=(x+2)(x-3)Q_2(x)+2x-1$

양변에 $x=-2$를 대입하면

$g(-2)=-4-1=-5$ …… iii

$f(-2)=3$, $g(-2)=-5$를 ㉠에 대입하면 구하는 나머지는

$2f(-2)-3g(-2)=2\times3-3\times(-5)=21$ …… iv

채점 기준	
i 나머지를 $f(-2)$, $g(-2)$에 대한 식으로 나타내기	20 %
ii $f(-2)$의 값 구하기	30 %
iii $g(-2)$의 값 구하기	30 %
iv 나머지 구하기	20 %

0150 답 ③

$P(x)$를 $x(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 $2x-3$이므로

$P(x)=x(x-1)Q_1(x)+2x-3$

양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면

$P(0)=-3$, $P(1)=-1$

또 $P(x)$를 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지가 $x-2$이므로

$P(x)=(x-1)(x+1)Q_2(x)+x-2$

양변에 $x=-1$을 대입하면 $P(-1)=-3$

$P(x)$를 $x(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=x(x-1)(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$

양변에 $x=0$, $x=1$, $x=-1$을 각각 대입하면

$P(0)=c$, $P(1)=a+b+c$, $P(-1)=a-b+c$

$\therefore c=-3$, $a+b+c=-1$, $a-b+c=-3$

$a+b=2$, $a-b=0$을 연립하여 풀면

$a=1$, $b=1$

따라서 구하는 나머지는 x^2+x-3이다.

다른 풀이

$P(x)$를 $x(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c(a, b, c는 상수)라 하면

$P(x)=x(x-1)(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$ …… ㉠

$P(x)$를 $x(x-1)$로 나누었을 때의 나머지가 $2x-3$이므로 ㉠에서 ax^2+bx+c를 $x(x-1)$로 나누었을 때의 나머지도 $2x-3$이다.

$\therefore ax^2+bx+c=ax(x-1)+2x-3$

이를 ㉠에 대입하면

$P(x)=x(x-1)(x+1)Q(x)+ax(x-1)+2x-3$ …… ㉡

한편 $P(x)$를 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q'(x)$라 하면 나머지가 $x-2$이므로

$P(x)=(x-1)(x+1)Q'(x)+x-2$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)=-3$

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)=2a-5$

즉, $-3=2a-5$이므로 $a=1$

따라서 구하는 나머지는

$x(x-1)+2x-3=x^2+x-3$

0151 답 ③

$1-f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 $-2x$이므로

$1-f(x)=(x^2-3x+2)Q_1(x)-2x$

$=(x-1)(x-2)Q_1(x)-2x$ …… ㉠

$x+f(x)$를 x^2+3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지가 1이므로

$x+f(x)=(x^2+3x+2)Q_2(x)+1$

$=(x+1)(x+2)Q_2(x)+1$ …… ㉡

$f(x)$를 x^2-x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-x-2)Q(x)+ax+b$

$=(x+1)(x-2)Q(x)+ax+b$ …… ㉢

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$1-f(2)=-4$ $\therefore f(2)=5$

㉡의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$-1+f(-1)=1 \quad \therefore f(-1)=2$

㉢의 양변에 $x=2$, $x=-1$을 각각 대입하면

$f(2)=2a+b$, $f(-1)=-a+b$

$\therefore 2a+b=5$, $-a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$

따라서 $R(x)=x+3$이므로

$R(1)=1+3=4$

0152 답 3

$f(x)$를 $(x-2)^2(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$를 ax^2+bx+c (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x)=(x-2)^2(x-1)Q(x)+ax^2+bx+c \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $3x-3$이므로 ㉠에서 ax^2+bx+c를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지도 $3x-3$이다.

$\therefore ax^2+bx+c=a(x-2)^2+3x-3$

이를 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x-2)^2(x-1)Q(x)+a(x-2)^2+3x-3$

나머지 정리에 의하여 $f(1)=2$이므로 위의 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=a \quad \therefore a=2$

따라서 $R(x)=2(x-2)^2+3x-3$이므로

$R(2)=6-3=3$

0153 답 2

$f(x)$를 $x-5$로 나누었을 때의 나머지가 2이므로 $f(5)=2$

$f(3+x)=f(3-x)$가 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(5)=f(1) \quad \therefore f(1)=2 \quad \cdots\cdots$ ⓘ

$f(x)$를 $(x-1)(x-5)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x-1)(x-5)Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots$ ⓘⓘ

위의 등식의 양변에 $x=1$, $x=5$를 각각 대입하면

$f(1)=a+b$, $f(5)=5a+b$

$\therefore a+b=2$, $5a+b=2 \quad \cdots\cdots$ ⓘⓘⓘ

두 식을 연립하여 풀면 $a=0$, $b=2$

따라서 구하는 나머지는 2이다. $\cdots\cdots$ ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ $f(1)$, $f(5)$의 값 구하기	30%
ⓘⓘ 나머지를 $ax+b$로 놓고 식 세우기	20%
ⓘⓘⓘ $f(1)$, $f(5)$의 값을 이용하여 식 세우기	30%
ⓘⓥ 나머지 구하기	20%

0154 답 ①

㈏의 식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(1)=f(0)$

㈎에서 $f(0)=4$이므로 $f(1)=4$

㈏의 식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(2)=f(1)-2=4-2=2$

$f(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+ax+b$

$\quad =(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$

양변에 $x=1$, $x=2$를 각각 대입하면

$f(1)=a+b$, $f(2)=2a+b$

$\therefore a+b=4$, $2a+b=2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=6$

따라서 구하는 나머지는 $-2x+6$이다.

0155 답 ⑤

$P(x)-2$는 삼차다항식이므로 ㈎에서 x^2-x-1로 나누었을 때의 몫은 일차식이다. 이때의 몫을 $ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면

$P(x)-2=(x^2-x-1)(ax+b) \quad \cdots\cdots$ ㉠

㈏에서 $P(x+1)$을 x^2-4로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$P(x+1)=(x^2-4)Q(x)-3$

$\quad =(x+2)(x-2)Q(x)-3$

양변에 $x=-2$, $x=2$를 각각 대입하면

$P(-1)=-3$, $P(3)=-3$

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$P(-1)-2=-a+b$

$-5=-a+b \quad \therefore a-b=5 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$P(3)-2=5(3a+b)$

$-5=5(3a+b) \quad \therefore 3a+b=-1 \quad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$

이를 ㉠에 대입하면

$P(x)-2=(x^2-x-1)(x-4)$

따라서 $P(x)=(x^2-x-1)(x-4)+2$이므로

$P(1)=(-1)\times(-3)+2=5$

따라서 구하는 나머지는 5이다.

0156 답 ④

$f(x)$를 $(x+1)^3(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $R(x)$이므로

$f(x)=(x+1)^3(x-2)Q(x)+R(x) \quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(x)$를 $(x+1)^3$으로 나누었을 때의 나머지가 $2x^2-2x+5$이므로 ㉠에서 $R(x)$를 $(x+1)^3$으로 나누었을 때의 나머지도 $2x^2-2x+5$이다.

$\therefore R(x)=a(x+1)^3+2x^2-2x+5$ (a는 상수)

이를 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x+1)^3(x-2)Q(x)+a(x+1)^3+2x^2-2x+5$

나머지 정리에 의하여 $f(2)=-18$이므로 위의 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=27a+8-4+5$

$-18=27a+9 \quad \therefore a=-1$

따라서 $R(x)=-(x+1)^3+2x^2-2x+5$이므로

$R(0)=-1+5=4$

0157 답 74

(가)에서 $f(x)$를 $g(x)$로 나누었을 때의 나머지가 $g(x)-2x^2$이므로 $g(x)$의 최고차항은 $2x^2$이다.

따라서 $g(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$f(x)=g(x)\{g(x)-2x^2\}+g(x)-2x^2$

$=(2x^2+ax+b)(ax+b)+ax+b$

이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$2a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$

$\therefore f(x)=\left(2x^2+\frac{1}{2}x+b\right)\left(\frac{1}{2}x+b\right)+\frac{1}{2}x+b$ ····· ㉠

(나)에서 나머지 정리에 의하여 $f(1)=-\frac{9}{4}$이므로

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=\left(2+\frac{1}{2}+b\right)\left(\frac{1}{2}+b\right)+\frac{1}{2}+b$에서

$b^2+4b+\frac{7}{4}=-\frac{9}{4}$, $b^2+4b+4=0$

$(b+2)^2=0 \quad \therefore b=-2$

따라서 $f(x)=\left(2x^2+\frac{1}{2}x-2\right)\left(\frac{1}{2}x-2\right)+\frac{1}{2}x-2$이므로

$f(6)=(72+3-2)\times(3-2)+3-2=74$

0158 답 ②

다항식 $(4x+2)^{10}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 하면

$(4x+2)^{10}=xQ(x)+R$

양변에 $x=0$을 대입하면

$R=2^{10}=$ (가) 1024

등식 $(4x+2)^{10}=xQ(x)+$ (가) 1024 에 $x=505$를 대입하면

$2022^{10}=505\times Q(505)+$ (가) 1024

나머지는 505보다 작은 수이므로

$2022^{10}=505\times Q(505)+$ (가) 1024

$=505\times Q(505)+505\times 2+14$

$=505\times\{Q(505)+$ (나) 2 $\}+$ (다) 14 이다.

따라서 2022^{10}을 505로 나누었을 때의 나머지는 (다) 14 이다.

$a=1024$, $b=2$, $c=14$이므로

$a+b+c=1040$

0159 답 ⑤

$2024=x$로 놓으면 $2024^4+2024^2+1=x^4+x^2+1$이고,

$2022=x-2$이다.

x^4+x^2+1을 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^4+x^2+1=(x-2)Q(x)+R$

양변에 $x=2$를 대입하면

$R=16+4+1=21$

$\therefore x^4+x^2+1=(x-2)Q(x)+21$

양변에 $x=2024$를 대입하면

$2024^4+2024^2+1=2022Q(2024)+21$

따라서 구하는 나머지는 21이다.

0160 답 ⑤

$10=x$로 놓으면 $10^{21}+10^{19}+10^{17}+10^{15}=x^{21}+x^{19}+x^{17}+x^{15}$이고, $11=x+1$이다.

$x^{21}+x^{19}+x^{17}+x^{15}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$x^{21}+x^{19}+x^{17}+x^{15}=(x+1)Q(x)+R$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$R=-1-1-1-1=-4$

$\therefore x^{21}+x^{19}+x^{17}+x^{15}=(x+1)Q(x)-4$

양변에 $x=10$을 대입하면

$10^{21}+10^{19}+10^{17}+10^{15}=11Q(10)-4$

$=11\{Q(10)-1\}+7$

따라서 구하는 나머지는 7이다.

0161 답 ⑤

주어진 식을 변형하면

$2^{2002}+2^{2001}+2^{2000}=(2^5)^{400}\times 2^2+(2^5)^{400}\times 2+(2^5)^{400}$

$2^5=x$로 놓으면 $2^{2002}+2^{2001}+2^{2000}=4x^{400}+2x^{400}+x^{400}$이고,

$31=2^5-1=x-1$이다.

$4x^{400}+2x^{400}+x^{400}$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$4x^{400}+2x^{400}+x^{400}=(x-1)Q(x)+R$

양변에 $x=1$을 대입하면 $R=4+2+1=7$

$\therefore 4x^{400}+2x^{400}+x^{400}=(x-1)Q(x)+7$

양변에 $x=2^5$을 대입하면

$4\times 2^{2000}+2\times 2^{2000}+2^{2000}=31Q(32)+7$

$\therefore 2^{2002}+2^{2001}+2^{2000}=31Q(32)+7$

따라서 구하는 나머지는 7이다.

0162 답 ④

$f(x)=x^3-2x^2-8x+a$라 하자.

$f(x)$가 $x-3$으로 나누어떨어지므로 $f(3)=0$

$27-18-24+a=0 \quad \therefore a=15$

0163 답 13

$f(x)=x^3+ax+b$라 하자.

$f(x)$가 x^2-3x+2, 즉 $(x-1)(x-2)$로 나누어떨어지므로

$f(1)=0$, $f(2)=0$

$f(1)=0$에서 $1+a+b=0$

$\therefore a+b=-1$ ····· ㉠

$f(2)=0$에서 $8+2a+b=0$

$\therefore 2a+b=-8$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-7$, $b=6$

$\therefore b-a=13$

0164 답 ②

$f(x)=x^3+ax^2+bx+3$이라 하자.

$f(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지므로 $f(-1)=0$

$-1+a-b+3=0 \quad \therefore a-b=-2$ ····· ㉠

$f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -3이므로
$f(2)=-3$, $8+4a+2b+3=-3$
$\therefore\ 2a+b=-7$ ····· ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-1$
$\therefore\ a+b=-4$

0165 답 20
$f(x)=x^3-2x^2+ax+b$라 하자.
$f(x)$가 $x-1$, $x+2$를 인수로 가지므로
$f(1)=0$, $f(-2)=0$
$f(1)=0$에서 $1-2+a+b=0$
$\therefore\ a+b=1$ ····· ㉠
$f(-2)=0$에서 $-8-8-2a+b=0$
$\therefore\ -2a+b=16$ ····· ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-5$, $b=6$ ····· ⓘ
따라서 $g(x)=x^2-5x+6$이라 할 때,
$g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는
$g(-2)=4+10+6=20$ ····· ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a, b의 값 구하기	60 %
ⓘⓘ 나머지 구하기	40 %

0166 답 ①
$P(x)+2$가 $x+2$로 나누어떨어지고, $P(x)-2$가 $x-2$로 나누어떨어지므로
$P(-2)+2=0$, $P(2)-2=0$
$\therefore\ P(-2)=-2$, $P(2)=2$
$P(x)=x^2+ax+b$(a, b는 상수)라 하면
$P(-2)=-2$에서 $4-2a+b=-2$
$\therefore\ 2a-b=6$ ····· ㉠
$P(2)=2$에서 $4+2a+b=2$
$\therefore\ 2a+b=-2$ ····· ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-4$
따라서 $P(x)=x^2+x-4$이므로
$P(3)=9+3-4=8$

0167 답 ②
$f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로
$f(1)=4$에서 $1+a+b+6=4$
$\therefore\ a+b=-3$ ····· ㉠
$f(x+2)$가 $x-1$로 나누어떨어지므로
$f(3)=0$에서 $27+9a+3b+6=0$
$\therefore\ 3a+b=-11$ ····· ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=1$
$\therefore\ b-a=5$

0168 답 −36
$f(x)=2x^3-11x^2+ax+b$가 x^2-5x+6, 즉 $(x-2)(x-3)$으로 나누어떨어지므로
$f(2)=0$, $f(3)=0$
$f(2)=0$에서 $16-44+2a+b=0$
$\therefore\ 2a+b=28$ ····· ㉠
$f(3)=0$에서 $54-99+3a+b=0$
$\therefore\ 3a+b=45$ ····· ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=17$, $b=-6$ ····· ⓘ
$\therefore\ f(x)=2x^3-11x^2+17x-6$
따라서 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는
$f(-1)=-2-11-17-6=-36$ ····· ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a, b의 값 구하기	60 %
ⓘⓘ 나머지 구하기	40 %

0169 답 ①
$P(x)-1$이 x^2-4x+3, 즉 $(x-1)(x-3)$으로 나누어떨어지므로
$P(1)-1=0$, $P(3)-1=0$
$\therefore\ P(1)=1$, $P(3)=1$
$P(x+1)$을 x^2-2x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면
$P(x+1)=(x^2-2x)Q(x)+ax+b$
$\quad=x(x-2)Q(x)+ax+b$
양변에 $x=0$, $x=2$를 각각 대입하면
$P(1)=b$, $P(3)=2a+b$이므로
$b=1$, $2a+b=1$
$\therefore\ a=0$, $b=1$
따라서 구하는 나머지는 1이다.

0170 답 ③
$f(x)+g(x)$가 $x+2$로 나누어떨어지므로
$f(-2)+g(-2)=0$ ····· ㉠
$f(x)-g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로
$f(-2)-g(-2)=4$ ····· ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$f(-2)=2$, $g(-2)=-2$
ㄱ. $A(x)=x+f(x)$라 하고 $x=-2$를 대입하면
$A(-2)=-2+f(-2)=-2+2=0$
따라서 $A(x)$는 $x+2$로 나누어떨어진다.
ㄴ. $B(x)=x^2+f(x)g(x)$라 하고 $x=-2$를 대입하면
$B(-2)=(-2)^2+f(-2)g(-2)=4+2\times(-2)=0$
따라서 $B(x)$는 $x+2$로 나누어떨어진다.
ㄷ. $C(x)=f(x)-xg(x)$라 하고 $x=-2$를 대입하면
$C(-2)=f(-2)+2g(-2)=2+2\times(-2)=-2$
따라서 $C(x)$는 $x+2$로 나누어떨어지지 않는다.
따라서 보기에서 $x+2$로 나누어떨어지는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0171 답 ⑤
$f(x)+2$, $g(x)-5$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 모두 3이므로 $f(1)+2=3$, $g(1)-5=3$
$\therefore\ f(1)=1$, $g(1)=8$ ····· ㉠

$f(x)+2$, $g(x)-5$를 $x+1$로 나누었을 때 모두 나누어떨어지므로
$f(-1)+2=0$, $g(-1)-5=0$
$\therefore f(-1)=-2$, $g(-1)=5$ ····· ㉡
$f(x)g(x)$를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)g(x)=(x^2-1)Q(x)+ax+b$
$=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$ ····· ㉢
㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면 $f(1)g(1)=a+b$
㉠에 의하여 $a+b=8$ ····· ㉣
㉢의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $f(-1)g(-1)=-a+b$
㉡에 의하여 $-a+b=-10$ ····· ㉤
㉣, ㉤을 연립하여 풀면 $a=9$, $b=-1$
따라서 구하는 나머지는 $9x-1$이다.

0172 답 (1) x^3+2x^2-x-2 (2) 16

(1) $f(-2)=f(-1)=f(1)=4$에서
$Q(-2)=Q(-1)=Q(1)=0$
따라서 $Q(x)$는 $x+2$, $x+1$, $x-1$을 인수로 갖고, x^3의 계수가 1이므로
$Q(x)=(x+2)(x+1)(x-1)=x^3+2x^2-x-2$ ····· ⓘ
(2) $f(x)=Q(x)+4=x^3+2x^2-x+2$
$\therefore f(2)=8+8-2+2=16$ ····· ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $Q(x)$ 구하기	60 %
ⓘⓘ $f(2)$의 값 구하기	40 %

0173 답 ②

(가)에서 나머지 정리에 의하여 $f(4)=16$
(나)에서 인수 정리에 의하여 $-4f(-4)=0$, $3f(3)=0$이므로
$f(-4)=0$, $f(3)=0$
$f(x)$는 이차식이므로 $f(x)=a(x+4)(x-3)$ (a는 상수, $a\neq0$)이라 하면 $f(4)=16$에서
$8a=16$ $\therefore a=2$
$\therefore f(x)=2(x+4)(x-3)$
따라서 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는
$f(1)=2\times5\times(-2)=-20$

0174 답 ③

x^3+ax^2+bx-4를 $x+1$로 나누었을 때의 몫이 $Q(x)$이고 나머지가 3이므로
$x^3+ax^2+bx-4=(x+1)Q(x)+3$ ····· ㉠
$(x^2+a)Q(x-2)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로
$(4+a)Q(0)=0$
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면
$-4=Q(0)+3$ $\therefore Q(0)=-7$
즉, $Q(0)\neq0$이므로 $(4+a)Q(0)=0$에서
$4+a=0$ $\therefore a=-4$
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$-1+a-b-4=3$ $\therefore a-b=8$
$a=-4$를 대입하면 $-4-b=8$ $\therefore b=-12$
따라서 ㉠에서 $x^3-4x^2-12x-4=(x+1)Q(x)+3$이므로
양변에 $x=1$을 대입하면
$1-4-12-4=2Q(1)+3$
$2Q(1)=-22$ $\therefore Q(1)=-11$

0175 답 ③

$g(x)$를 $f(x)$로 나누었을 때의 나머지가 $f(x)+x^2$이므로 $f(x)$의 최고차항은 $-x^2$이다.
따라서 $f(x)=-x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$f(x)$가 $x+1$을 인수로 가지므로 $f(-1)=0$에서
$-1-a+b=0$ $\therefore b=a+1$
따라서 $f(x)=-x^2+ax+a+1$이므로
$g(x)=f(x)\{f(x)+x^2\}+f(x)+x^2$
$=(-x^2+ax+a+1)(ax+a+1)+ax+a+1$ ····· ㉠
이때 $g(x)$가 $x-1$을 인수로 가지므로 $g(1)=0$
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$g(1)=2a(2a+1)+2a+1$에서
$4a^2+4a+1=0$, $(2a+1)^2=0$ $\therefore a=-\frac{1}{2}$
$a=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면
$g(x)=\left(-x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
$\therefore g(3)=\left(-9-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$
$=(-10)\times(-1)-1=9$

0176 답 ①

(가)에서 $f(1)=f(3)=f(5)=k$ (k는 상수)로 놓으면
$f(1)-k=0$, $f(3)-k=0$, $f(5)-k=0$
이때 $g(x)=f(x)-k$라 하면 $g(x)$도 삼차다항식이고,
$g(1)=g(3)=g(5)=0$이므로 최고차항의 계수를 a ($a\neq0$)라 하면
$g(x)=a(x-1)(x-3)(x-5)$
$g(x)=f(x)-k$에서
$f(x)=g(x)+k$
$=a(x-1)(x-3)(x-5)+k$ ····· ㉠
(나)에서 $f(-1)=0$이므로 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$0=a\times(-2)\times(-4)\times(-6)+k$
$\therefore -48a+k=0$ ····· ㉡
(다)에서 $f(2)=102$이므로 ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면
$102=a\times1\times(-1)\times(-3)+k$
$\therefore 3a+k=102$ ····· ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=2$, $k=96$
따라서 $f(x)=2(x-1)(x-3)(x-5)+96$이므로
$f(0)=2\times(-1)\times(-3)\times(-5)+96=66$

0177 답 ⑤

(가)에서 $f(x-1)+g(x-1)$이 $x-1$로 나누어떨어지므로

$f(0)+g(0)=0$

즉, $f(x)+g(x)$는 x를 인수로 갖는다.

이때 $f(x)+g(x)$는 이차항의 계수가 1인 이차식이고 (나)에서 방정식 $f(x)+g(x)=0$이 중근을 가지므로

$f(x)+g(x)=x^2$

양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)+g(2)=4$ ····· ㉠

$f(x)-g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 4이므로

$f(2)-g(2)=4$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면 $2f(2)=8$

$\therefore f(2)=4$

최고수준 도전 기출 39~41쪽

0178 답 ②

전략 $f_1(x)$를 $(x-a)$의 거듭제곱에 대한 합으로 나타내어 $g_n(x)$를 구한다.

$f_1(x)=(x-a)f_2(x)+1$

$f_2(x)=(x-a)f_3(x)+2$

$f_3(x)=(x-a)f_4(x)+3$

⋮

$f_n(x)=(x-a)f_{n+1}(x)+n$이므로

$f_1(x)=(x-a)\{(x-a)f_3(x)+2\}+1$

$=(x-a)^2f_3(x)+2(x-a)+1$

$=(x-a)^2\{(x-a)f_4(x)+3\}+2(x-a)+1$

$=(x-a)^3f_4(x)+3(x-a)^2+2(x-a)+1$

⋮

$=(x-a)^nf_{n+1}(x)+n(x-a)^{n-1}+(n-1)(x-a)^{n-2}$

$+\cdots+2(x-a)+1$

따라서 $f_1(x)$를 $(x-a)^n$으로 나누었을 때의 나머지는

$g_n(x)=n(x-a)^{n-1}+(n-1)(x-a)^{n-2}+\cdots+2(x-a)+1$

$\therefore g_n(a)=1$

0179 답 ②

전략 몫과 나머지를 이용하여 세운 항등식의 양변이 각각 $x-3$을 인수로 가짐을 이용한다.

$x^n(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $3^{n+1}(x-3)$이므로

$x^n(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+3^{n+1}(x-3)$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$3^n(9+3a+b)=0$, $9+3a+b=0$

$\therefore b=-3a-9$ ····· ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$x^n(x^2+ax-3a-9)=(x-3)^2Q(x)+3^{n+1}(x-3)$

$x^n(x-3)(x+a+3)=(x-3)^2Q(x)+3^{n+1}(x-3)$

$x^n(x+a+3)=(x-3)Q(x)+3^{n+1}$

양변에 $x=3$을 대입하면

$3^n(a+6)=3^{n+1}$, $a+6=3$

$\therefore a=-3$

㉡에서 $b=-3a-9=9-9=0$이므로

$a-2b=-3-0=-3$

0180 답 ⑤

전략 주어진 등식의 양변에 $x=4$, $x=3$, $x=2$, $x=1$을 차례대로 대입하여 $f(x)$의 인수를 구한 후 인수 정리를 이용하여 $f(x)$를 구한다.

$xf(x-1)=(x-4)f(x)$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=4$를 대입하면

$4f(3)=0$ $\therefore f(3)=0$

㉠의 양변에 $x=3$을 대입하면

$3f(2)=-f(3)$ $\therefore f(2)=0$ ($\because f(3)=0$)

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2f(1)=-2f(2)$ $\therefore f(1)=0$ ($\because f(2)=0$)

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(0)=-3f(1)$ $\therefore f(0)=0$ ($\because f(1)=0$)

즉, $f(x)$는 x, $x-1$, $x-2$, $x-3$을 인수로 갖고, 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)$

따라서 $f(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는

$f(4)=4\times3\times2\times1=24$

0181 답 ②

전략 다항식을 x로 나누었을 때의 나머지는 상수이므로 x^2+2x-2로 나누었을 때의 나머지도 상수임을 이용한다.

$f(x)+g(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지는 상수이므로

$x^2+2x-\frac{1}{2}f(x)=R$ (R는 상수)라 하면

$f(x)=2x^2+4x-2R$

$f(x)+g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이고,

$f(x)+g(x)$를 x^2+2x-2로 나누었을 때의 나머지도 R이므로

$f(x)+g(x)=x(x^2+2x-2)+R$

$\therefore g(x)=\{x(x^2+2x-2)+R\}-(2x^2+4x-2R)$

$=x^3-6x+3R$

$g(1)=7$에서 $-5+3R=7$

$\therefore R=4$

따라서 $f(x)=2x^2+4x-8$이므로

$f(3)=18+12-8=22$

0182 답 ①

전략 $f(x+3)-f(x)$에 $x=1$, $x=-2$를 각각 대입한 값을 이용하여 $f(-2)$, $f(1)$, $f(4)$의 값의 관계를 파악한 후 인수 정리를 이용하여 $f(x)$를 구한다.

㈎에서 $f(x+3)-f(x)$는 $x-1$, $x+2$를 인수로 갖는다.

$h(x)=f(x+3)-f(x)$라 하면 $h(1)=0$, $h(-2)=0$이므로

$f(4)-f(1)=0$, $f(1)-f(-2)=0$

$\therefore f(-2)=f(1)=f(4)$

$f(-2)=f(1)=f(4)=k$(k는 상수)라 하면

$f(x)-k$는 $x+2$, $x-1$, $x-4$를 인수로 갖는다.

이때 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-k=(x+2)(x-1)(x-4)$

㈏에서 $f(2)=-3$이므로 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)-k=4\times1\times(-2)$

$-3-k=-8 \quad \therefore k=5$

따라서 $f(x)=(x+2)(x-1)(x-4)+5$이므로

$f(0)=2\times(-1)\times(-4)+5=13$

0183 답 ③

전략 나머지를 $ax+b$로 놓고 $x^{10}-x$에 대한 항등식을 세운 후 x^n-1의 성질을 이용하여 식을 변형하고 양변에 적당한 수를 대입하여 a, b의 값을 구한다.

$x^{10}-x$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

$x^{10}-x=(x-1)^2Q(x)+ax+b$

양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a+b \quad \therefore b=-a \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\therefore x^{10}-x=(x-1)^2Q(x)+ax-a$

$=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$

이 등식의 좌변에서

$x^{10}-x=x(x^9-1)$

$=x(x-1)(x^8+x^7+\cdots+x^2+x+1)$

이므로

$x(x-1)(x^8+x^7+\cdots+x^2+x+1)=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$

$x(x^8+x^7+\cdots+x^2+x+1)=(x-1)Q(x)+a$

양변에 $x=1$을 대입하면 $a=9$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-9$이므로

$R(x)=9x-9$

$\therefore R(2)=18-9=9$

0184 답 ②

전략 $P(x)+2$의 식을 세워 주어진 등식에 대입한 후 항등식의 성질을 이용한다.

$P(x)$의 차수를 n이라 하면 주어진 항등식에서 좌변의 차수는 $2n$이고 우변은 이차식이므로 $n=1$이다.

즉, $P(x)$가 일차식이므로 $P(x)+2=px+q$ (p, q는 상수, $p\neq0$)라 하면 주어진 등식은

$(px+q)^2=(x-a)(x-2a)+4$

$p^2x^2+2pqx+q^2=x^2-3ax+2a^2+4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로 양변의 x^2의 계수를 비교하면

$p^2=1 \quad \therefore p=-1$ 또는 $p=1$

(i) $p=-1$일 때,

㉠의 양변의 x의 계수를 비교하면 $2pq=-3a$

$-2q=-3a$이므로 $a=\frac{2}{3}q$

㉠의 양변의 상수항을 비교하면 $q^2=2a^2+4$

$q^2=\frac{8}{9}q^2+4$, $q^2=36$

$\therefore q=-6$ 또는 $q=6$

따라서 $P(x)+2=-x-6$ 또는 $P(x)+2=-x+6$이므로

$P(x)=-x-8$ 또는 $P(x)=-x+4$이다.

$\therefore P(1)=-9$ 또는 $P(1)=3$

(ii) $p=1$일 때,

㉠의 양변의 x의 계수를 비교하면 $2pq=-3a$

$2q=-3a$이므로 $a=-\frac{2}{3}q$

㉠의 양변의 상수항을 비교하면 $q^2=2a^2+4$

$q^2=\frac{8}{9}q^2+4$, $q^2=36$

$\therefore q=-6$ 또는 $q=6$

따라서 $P(x)+2=x-6$ 또는 $P(x)+2=x+6$이므로

$P(x)=x-8$ 또는 $P(x)=x+4$이다.

$\therefore P(1)=-7$ 또는 $P(1)=5$

(i), (ii)에서 모든 $P(1)$의 값의 합은

$-9+3+(-7)+5=-8$

0185 답 20

전략 $f(x)g(x)$에 대한 항등식을 세운 후 등식의 양변의 차수를 비교하여 $f(x)-2x^2$의 차수와 $f(x)+xg(x)$의 차수를 구한 후 계수가 미지수인 다항식으로 나타낸다.

$f(x)g(x)$를 $f(x)-2x^2$으로 나누었을 때의 몫이 x^2-3x+3이고 나머지가 $f(x)+xg(x)$이므로

$f(x)g(x)=\{f(x)-2x^2\}(x^2-3x+3)+f(x)+xg(x) \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠이 x에 대한 항등식이고 좌변이 삼차다항식이므로 우변도 삼차다항식이다.

즉, $\{f(x)-2x^2\}(x^2-3x+3)$이 삼차다항식이므로 $f(x)-2x^2$은 일차다항식이고, 일차다항식으로 나누었으므로 나머지 $f(x)+xg(x)$는 상수이다.

$f(x)-2x^2=ax+b$ (a, b는 상수, $a\neq0$)라 하면 나머지

$f(x)+xg(x)=(2x^2+ax+b)+xg(x)$가 상수이므로

$g(x)=-2x-a$

따라서 $f(x)+xg(x)=b$이다.

$f(x)=2x^2+ax+b$, $g(x)=-2x-a$를 ㉠에 대입하면

$(2x^2+ax+b)(-2x-a)=(ax+b)(x^2-3x+3)+b \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡이 x에 대한 항등식이므로 양변의 x^3의 계수를 비교하면
$2\times(-2)=a \quad \therefore a=-4$
㉡에 $a=-4$를 대입하면
$(2x^2-4x+b)(-2x+4)=(-4x+b)(x^2-3x+3)+b$
양변에 $x=2$를 대입하면
$0=(-8+b)+b$
$2b=8 \quad \therefore b=4$
따라서 $f(x)=2x^2-4x+4$이므로
$f(-2)=8+8+4=20$

0186 답 9

전략 $f(x)$가 이차식이므로 (가)에서 $f(x)$로 나누었을 때의 나머지 $g(x)$는 일차식 또는 상수이고, (나)에서 $g(x)$로 나누었을 때의 나머지는 상수임을 이용하여 항등식을 세운다.

$f(x)$가 이차식이므로 (가)에서 $g(x)$는 일차식 또는 상수이다.
(나)에서 $f(x)-x^2-x$가 상수이므로
$f(x)=x^2+x+k$ (k는 상수)라 하자.
x^3+3x^2+5x+6을 $f(x)=x^2+x+k$로 나누면

$$\begin{array}{r} x+2 \\ x^2+x+k\,\overline{)\,x^3+3x^2+5x+6} \\ x^3+x^2+kx \\ \hline 2x^2+(5-k)x+6 \\ 2x^2+2x+2k \\ \hline (3-k)x+6-2k \end{array}$$

(가)에서 $g(x)=(3-k)x+6-2k=(3-k)(x+2)$
(나)에서 x^3+3x^2+5x+6을 $g(x)=(3-k)(x+2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 k이므로
$x^3+3x^2+5x+6=(3-k)(x+2)Q(x)+k$
양변에 $x=-2$를 대입하면
$-8+12-10+6=k \quad \therefore k=0$
따라서 $g(x)=3(x+2)$이므로
$g(1)=3\times3=9$

0187 답 ③

전략 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 상수이므로 이 나머지를 R라 하면 $x+1$, x^2-3이 $f(x)-R$의 인수임을 이용한다.

(가)에서 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지와 x^2-3으로 나눈 나머지를 R라 하면 $x+1$, x^2-3은 $f(x)-R$의 인수이다.
이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차다항식이므로
$f(x)-R=(x+1)(x^2-3)(x+a)$ (a는 상수) ····· ㉠
라 하자.
(나)에서 $h(x)=f(x+1)-5$라 하면 $h(x)$가 x^2+x, 즉 $x(x+1)$로 나누어떨어지므로 $h(x)$는 x, $x+1$을 인수로 갖는다.
따라서 $h(0)=f(1)-5=0$, $h(-1)=f(0)-5=0$이므로
$f(0)=5$, $f(1)=5$
㉠의 양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면
$5-R=-3a$, $5-R=-4(1+a)$
$\therefore 3a-R=-5$, $4a-R=-9$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-4$, $R=-7$
따라서 $f(x)=(x+1)(x^2-3)(x-4)-7$이므로
$f(4)=-7$

0188 답 54

전략 주어진 항등식에 $x=0$, $x=1$을 대입한 후 실수 a, b에 대하여 $a^2+b^2=0$이면 $a=b=0$임을 이용하여 $Q(x)$의 인수를 구하고, 인수정리를 이용하여 $Q(x)$를 구한다.

$\{Q(x+1)\}^2+\{Q(x)\}^2=(x^2-x)P(x)$에서
$\{Q(x+1)\}^2+\{Q(x)\}^2=x(x-1)P(x)$ ····· ㉠
㉠의 양변에 $x=0$, $x=1$을 각각 대입하면
$\{Q(1)\}^2+\{Q(0)\}^2=0$, $\{Q(2)\}^2+\{Q(1)\}^2=0$
$\therefore Q(0)=Q(1)=Q(2)=0$
$Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이고 x, $x-1$, $x-2$를 인수로 가지므로
$Q(x)=x(x-1)(x-2)$
이를 ㉠에 대입하면
$\{(x+1)x(x-1)\}^2+\{x(x-1)(x-2)\}^2=x(x-1)P(x)$
$\therefore P(x)=x(x-1)(x+1)^2+x(x-1)(x-2)^2$
$=x(x-1)\{(x+1)^2+(x-2)^2\}$
$=x(x-1)(2x^2-2x+5)$
$=x(x-1)\{(x-2)\times2(x+1)+9\}$
$=x(x-1)(x-2)\times2(x+1)+9x(x-1)$
$=2(x+1)Q(x)+9x(x-1)$
따라서 $R(x)=9x(x-1)$이므로
$R(3)=9\times3\times2=54$

0189 답 ④

전략 $f(x)-3p^2$의 인수가 $x+2$, x^2+4임을 이용하여 $f(x)$를 p에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 조건을 만족시키는 p의 값을 구한다.

(가)에서 $f(x)$를 $x+2$, x^2+4로 나누었을 때의 나머지가 $3p^2$으로 같으므로 $f(x)-3p^2$은 $x+2$, x^2+4를 인수로 갖는다.
이때 $f(x)-3p^2$은 최고차항의 계수가 1인 사차다항식이므로
$f(x)-3p^2=(x+2)(x^2+4)(x+a)$ (a는 상수)라 하면
$f(x)=(x+2)(x^2+4)(x+a)+3p^2$
(나)에서 $f(1)=f(-1)$이므로
$15(1+a)+3p^2=5(-1+a)+3p^2$
$10a=-20 \quad \therefore a=-2$
$\therefore f(x)=(x+2)(x^2+4)(x-2)+3p^2$
$=(x^2-4)(x^2+4)+3p^2$
$=x^4+3p^2-16$
(다)에서 $f(\sqrt{p})=0$이므로
$p^2+3p^2-16=0$, $p^2=4$
$\therefore p=2 \ (\because p>0)$

03 인수분해

난이도별 필수 기출 43~52쪽

0190 답 ④

① $8x^3+12x^2+6x+1$
$=(2x)^3+3\times(2x)^2\times1+3\times2x\times1^2+1^3$
$=(2x+1)^3$

② $10x^2+31x+15=(5x+3)(2x+5)$

③ $x^3+8y^3=x^3+(2y)^3$
$=(x+2y)\{x^2-x\times2y+(2y)^2\}$
$=(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

④ $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$
$=x^2+(-y)^2+(-z)^2+2\times x\times(-y)+2\times(-y)\times(-z)$
$+2\times(-z)\times x$
$=(x-y-z)^2$

⑤ $mx^2-4my^2=m(x^2-4y^2)$
$=m(x+2y)(x-2y)$

따라서 인수분해가 옳지 않은 것은 ④이다.

0191 답 ⑤

$x^2+1=X$로 놓으면
$(x^2+1)^2+3(x^2+1)+2=X^2+3X+2$
$=(X+2)(X+1)$
$=(x^2+3)(x^2+2)$

따라서 $a=3$, $b=2$ 또는 $a=2$, $b=3$이므로
$a+b=5$

0192 답 ②

$x^2=X$로 놓으면
$x^4-x^2-12=X^2-X-12$
$=(X-4)(X+3)$
$=(x^2-4)(x^2+3)$
$=(x-2)(x+2)(x^2+3)$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로
$a+b=5$

0193 답 ⑤

$x^2+5x=X$로 놓으면
$(x^2+5x+4)(x^2+5x+2)-24=(X+4)(X+2)-24$
$=X^2+6X-16$
$=(X+8)(X-2)$
$=(x^2+5x+8)(x^2+5x-2)$

따라서 $a=5$, $b=8$, $c=-2$ 또는 $a=5$, $b=-2$, $c=8$이므로
$a+b+c=11$

0194 답 $16\sqrt{3}$

$x^2y-3x^2-xy^2+3y^2=x^2y-xy^2-3x^2+3y^2$
$=xy(x-y)-3(x^2-y^2)$
$=xy(x-y)-3(x+y)(x-y)$
$=(x-y)\{xy-3(x+y)\}$ ····· ㉠ ····· ⓘ

$x=1-\sqrt{3}$, $y=1+\sqrt{3}$에서
$x+y=2$, $x-y=-2\sqrt{3}$, $xy=-2$ ····· ⓘⓘ

이를 ㉠에 대입하면
$x^2y-3x^2-xy^2+3y^2=-2\sqrt{3}\times(-2-3\times2)$
$=16\sqrt{3}$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $x^2y-3x^2-xy^2+3y^2$ 인수분해하기	40%
ⓘⓘ $x+y$, $x-y$, xy의 값 구하기	30%
ⓘⓘⓘ $x^2y-3x^2-xy^2+3y^2$의 값 구하기	30%

0195 답 ④

$x^2=X$로 놓으면
$x^4-13x^2+4=X^2-13X+4$
$=X^2-4X+4-9X=(X-2)^2-9X$
$=(x^2-2)^2-9x^2=(x^2-2)^2-(3x)^2$
$=(x^2+3x-2)(x^2-3x-2)$

따라서 인수인 것은 ④이다.

0196 답 ①

$(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)+24$
$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$
$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$x^2+x=X$로 놓으면
(주어진 식)$=(X-2)(X-12)+24$
$=X^2-14X+48=(X-6)(X-8)$
$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$
$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

0197 답 ②

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면
$x^2-2xy+y^2+3x-3y+2=x^2+(-2y+3)x+y^2-3y+2$
$=x^2+(-2y+3)x+(y-1)(y-2)$
$=\{x-(y-1)\}\{x-(y-2)\}$
$=(x-y+1)(x-y+2)$

0198 답 ②

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면
$x^2-4xy+3y^2+x-5y-2=x^2+(-4y+1)x+3y^2-5y-2$
$=x^2+(-4y+1)x+(y-2)(3y+1)$
$=\{x-(y-2)\}\{x-(3y+1)\}$
$=(x-y+2)(x-3y-1)$

따라서 두 일차식의 합은
$(x-y+2)+(x-3y-1)=2x-4y+1$

0199 답 ①

$x^2+4=X$로 놓으면

$(x^2+4)^2-3x(x^2+4)-4x^2=X^2-3xX-4x^2$

$=(X-4x)(X+x)$

$=(x^2-4x+4)(x^2+x+4)$

$=(x-2)^2(x^2+x+4)$

따라서 $a=-2$, $b=1$, $c=4$이므로

$a+b+c=3$

0200 답 ④

주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$a^2+3b^2+c^2-4ab-4bc+2ca$

$=a^2+(-4b+2c)a+3b^2-4bc+c^2$

$=a^2+(-4b+2c)a+(3b-c)(b-c)$

$=\{a-(3b-c)\}\{a-(b-c)\}$

$=(a-3b+c)(a-b+c)$

따라서 보기에서 인수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

0201 답 ③

$a^2b-2ab+2a^2-4a+b+2=(a^2-2a+1)b+2a^2-4a+2$

$=(a^2-2a+1)b+2(a^2-2a+1)$

$=(a-1)^2(b+2)$

즉, $(a-1)^2(b+2)=75=3\times5^2$이고, a, b가 자연수이므로

$a-1=5$, $b+2=3$

따라서 $a=6$, $b=1$이므로

$a+b=7$

0202 답 ⑤

$(x-1)(x-4)(x-5)(x-8)+a$

$=\{(x-1)(x-8)\}\{(x-4)(x-5)\}+a$

$=(x^2-9x+8)(x^2-9x+20)+a$

$x^2-9x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X+8)(X+20)+a$

$=X^2+28X+160+a$ ····· ㉠

이 식이 $(x+b)^2(x+c)^2$, 즉 $\{(x+b)(x+c)\}^2$으로 인수분해되려면 ㉠이 완전제곱식이어야 하므로

$160+a=\left(\frac{28}{2}\right)^2$

$\therefore a=196-160=36$

㉠에서

$X^2+28X+160+a=X^2+28X+196$

$=(X+14)^2$

$=(x^2-9x+14)^2$

$=\{(x-2)(x-7)\}^2$

$=(x-2)^2(x-7)^2$

따라서 $b=-2$, $c=-7$ 또는 $b=-7$, $c=-2$이므로

$a+b+c=36+(-2)+(-7)=27$

0203 답 2

주어진 식을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+kxy-3y^2+x+11y-6=x^2+(ky+1)x-3y^2+11y-6$

$=x^2+(ky+1)x-(3y-2)(y-3)$

이때 x의 계수가 $ky+1$이므로 x에 대한 상수항을 두 일차식의 곱으로 인수분해했을 때 두 일차식의 합이 $ky+1$이어야 한다.

즉, $(3y-2)+\{-(y-3)\}=ky+1$이므로

$2y+1=ky+1$ $\therefore k=2$

0204 답 ③

$x^4-4x^3+5x^2-4x+1=x^2\left(x^2-4x+5-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$

$=x^2\left\{x^2+\frac{1}{x^2}-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+5\right\}$

$=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3\right\}$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)+3=X^2-4X+3=(X-1)(X-3)$

$=\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)$

$\therefore$ (주어진 식)$=x^2\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}-3\right)$

$=(x^2-x+1)(x^2-3x+1)$

따라서 인수인 것은 ③이다.

0205 답 ①

주어진 식의 괄호를 풀고, a에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$

$=a(b^2+2bc+c^2)+b(c^2+2ca+a^2)+c(a^2+2ab+b^2)-4abc$

$=ab^2+ac^2+bc^2+ba^2+ca^2+cb^2+2abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc^2+cb^2$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

따라서 보기에서 인수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0206 답 ②

$a^3+b^3+c^3=3abc$에서 $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

이므로 $\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$이 성립한다. 이때 a, b, c는 서로 다른 실수이므로

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq0$

따라서 $a+b+c=0$이므로

$\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}=\frac{-a}{a}+\frac{-b}{b}+\frac{-c}{c}=-3$

0207 답 ①

$x-2y=A$, $2y-3z=B$, $-x+3z=C$로 놓으면

$A+B+C=0$

$\therefore (x-2y)^3+(2y-3z)^3-(x-3z)^3$

$=(x-2y)^3+(2y-3z)^3+(-x+3z)^3$

$=A^3+B^3+C^3$

$=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)+3ABC$

$=3ABC\ (\because A+B+C=0)$

$=3(x-2y)(2y-3z)(-x+3z)$

따라서 보기에서 인수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

0208 답 15

$x^2-8=X$로 놓으면

$(x^2-5x-8)(x^2-x-8)-12x^2$

$=(X-5x)(X-x)-12x^2$

$=X^2-6xX-7x^2$

$=(X+x)(X-7x)$

$=(x^2+x-8)(x^2-7x-8)$

$=(x^2+x-8)(x+1)(x-8)$ …… ⓘ

따라서 $P(x)=x^2+x-8$이고 $Q(x)=x+1$, $R(x)=x-8$ 또는 $Q(x)=x-8$, $R(x)=x+1$이므로 …… ⓘⓘ

$P(3)+Q(9)+R(9)=(9+3-8)+(9+1)+(9-8)$

$=4+10+1=15$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $(x^2-5x-8)(x^2-x-8)-12x^2$ 인수분해하기	40 %
ⓘⓘ $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ $P(3)+Q(9)+R(9)$의 값 구하기	30 %

0209 답 ②

$(4x^2-8x-5)(x^2-x-2)+k$

$=(2x+1)(2x-5)(x+1)(x-2)+k$

$=\{(2x+1)(x-2)\}\{(2x-5)(x+1)\}+k$

$=(2x^2-3x-2)(2x^2-3x-5)+k$

$2x^2-3x=X$로 놓으면

(주어진 식)$=(X-2)(X-5)+k$

$=X^2-7X+10+k$ …… ㉠

이 식이 최고차항의 계수가 2인 이차식의 제곱으로 인수분해되려면

㉠이 완전제곱식이어야 하므로

$10+k=\left(\frac{-7}{2}\right)^2$

$\therefore k=\frac{49}{4}-10=\frac{9}{4}$

㉠에서

$X^2-7X+10+k=X^2-7X+\frac{49}{4}=\left(X-\frac{7}{2}\right)^2$

$=\left(2x^2-3x-\frac{7}{2}\right)^2$

따라서 $f(x)=2x^2-3x-\frac{7}{2}$이므로

$f(1)=2-3-\frac{7}{2}=-\frac{9}{2}$

$\therefore \frac{f(1)}{k}=\frac{-\frac{9}{2}}{\frac{9}{4}}=-2$

0210 답 2

$P(x)=2x^3-7x^2+11x-4$라 하면

$P\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{7}{4}+\frac{11}{2}-4=0$이므로

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

$\frac{1}{2}$	2	−7	11	−4
		1	−3	4
	2	−6	8	0

$2x^3-7x^2+11x-4=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2-6x+8)$

$=(2x-1)(x^2-3x+4)$

따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=-3$, $d=4$이므로

$a+b+c+d=2$

0211 답 ①

$P(x)=x^4+2x^3-9x^2-2x+8$이라 하면

$P(1)=1+2-9-2+8=0$,

$P(-1)=1-2-9+2+8=0$이므로

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	2	−9	−2	8
		1	3	−6	−8
−1	1	3	−6	−8	0
		−1	−2	8	
	1	2	−8	0	

$x^4+2x^3-9x^2-2x+8$

$=(x-1)(x+1)(x^2+2x-8)$

$=(x-1)(x+1)(x-2)(x+4)$

따라서 인수가 아닌 것은 ①이다.

다른 풀이

$P(x)=x^4+2x^3-9x^2-2x+8$이라 하면

① $P(4)=256+128-144-8+8\neq0$이므로 $x-4$는 $P(x)$의 인수가 아니다.

② $P(2)=16+16-36-4+8=0$이므로 $x-2$는 $P(x)$의 인수이다.

③ $P(1)=1+2-9-2+8=0$이므로 $x-1$은 $P(x)$의 인수이다.

④ $P(-1)=1-2-9+2+8=0$이므로 $x+1$은 $P(x)$의 인수이다.

⑤ $P(-4)=256-128-144+8+8=0$이므로 $x+4$는 $P(x)$의 인수이다.

0212 답 ④

$P(x)=x^3+2x^2-x-2$라 하면

$P(1)=1+2-1-2=0$이므로

조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	2	−1	−2
		1	3	2
	1	3	2	0

$P(x)=(x-1)(x^2+3x+2)=(x-1)(x+1)(x+2)$

$Q(x)=x^3+3x^2-4x-12$라 하면

$Q(2)=8+12-8-12=0$이므로

조립제법을 이용하여 $Q(x)$를 인수분해하면

2	1	3	−4	−12
		2	10	12
	1	5	6	0

$Q(x)=(x-2)(x^2+5x+6)=(x-2)(x+2)(x+3)$

따라서 두 다항식의 공통인 인수는 $x+2$이다.

다른 풀이

$x^3+2x^2-x-2=x^2(x+2)-(x+2)$

$=(x^2-1)(x+2)$

$=(x+1)(x-1)(x+2)$

$x^3+3x^2-4x-12=x^2(x+3)-4(x+3)$

$=(x^2-4)(x+3)$

$=(x+2)(x-2)(x+3)$

따라서 두 다항식의 공통인 인수는 $x+2$이다.

0213 답 ②

$f(x)=x^3+ax^2-2x+4$라 하면 $f(x)$가 $x-2$를 인수로 가지므로

$f(2)=0$에서 $8+4a-4+4=0$

$\therefore a=-2$

$f(x)=x^3-2x^2-2x+4$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	−2	−2	4
		2	0	−4
	1	0	−2	0

$f(x)=(x-2)(x^2-2)$

따라서 $b=0$, $c=-2$이므로

$a-b+c=-2-0+(-2)=-4$

0214 답 (1) $a=2$, $b=-8$ (2) $(x-1)(x+2)(x+4)$

(1) $P(x)$는 $x-1$로 나누어떨어지므로

$P(1)=0$에서 $1+5+a+b=0$

$\therefore a+b=-6$ ····· ㉠

$P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 24이므로

$P(2)=24$에서 $8+20+2a+b=24$

$\therefore 2a+b=-4$ ····· ㉡ ····· i

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-8$ ····· ii

(2) (1)에서 $P(x)=x^3+5x^2+2x-8$ ····· iii

$P(x)$는 $x-1$로 나누어떨어지므로 $x-1$을 인수로 갖는다.

따라서 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	5	2	−8
		1	6	8
	1	6	8	0

$P(x)=(x-1)(x^2+6x+8)$

$=(x-1)(x+2)(x+4)$ ····· iv

채점 기준	
i $P(1)=0$, $P(2)=24$임을 이용하여 식 세우기	30 %
ii a, b의 값 구하기	20 %
iii $P(x)$ 구하기	10 %
iv $P(x)$ 인수분해하기	40 %

0215 답 ①

$f(x)=x^4+3x^3+ax^2+bx+2$라 하면 $f(x)$가 $x-1$, $x+2$를 인수로 가지므로 $f(1)=0$, $f(-2)=0$

$f(1)=0$에서 $1+3+a+b+2=0$

$\therefore a+b=-6$ ····· ㉠

$f(-2)=0$에서 $16-24+4a-2b+2=0$

$\therefore 2a-b=3$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=-5$

$f(x)=x^4+3x^3-x^2-5x+2$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	3	−1	−5	2
		1	4	3	−2
−2	1	4	3	−2	0
		−2	−4	2	
	1	2	−1	0	

$x^4+3x^3-x^2-5x+2=(x-1)(x+2)(x^2+2x-1)$

따라서 $Q(x)=x^2+2x-1$이므로

$Q(-1)=1-2-1=-2$

0216 답 ②

$f(x)=x^3+2x^2+3x+6$이라 하면

$f(-2)=-8+8-6+6=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

−2	1	2	3	6
		−2	0	−6
	1	0	3	0

$f(x)=(x+2)(x^2+3)$ $\therefore b=2$

$g(x)=x^3+x+a$라 하면 $g(x)$가 $x+2$로 나누어떨어지므로

$g(-2)=0$에서

$-8-2+a=0$ $\therefore a=10$

$\therefore a+b=10+2=12$

0217 답 ①

$f(x)=x^3+(1-2a)x^2+(a^2-2a-1)x+a^2-1$이라 하면

$f(-1)=-1+1-2a-a^2+2a+1+a^2-1=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	$1-2a$	a^2-2a-1	a^2-1
		-1	$2a$	$-a^2+1$
	1	$-2a$	a^2-1	0

$x^3+(1-2a)x^2+(a^2-2a-1)x+a^2-1$

$=(x+1)(x^2-2ax+a^2-1)$

$=(x+1)\{x^2-2ax+(a+1)(a-1)\}$

$=(x+1)(x-a-1)(x-a+1)$

따라서 인수인 것은 ①이다.

0218 답 ③

$x-1$이 $f(x)$의 인수이므로 $f(1)=0$에서

$a-b-c-a=0 \quad \therefore c=-b$

$\therefore ax^4-bx^3-cx-a=ax^4-bx^3+bx-a$

$=a(x^4-1)-bx(x^2-1)$

$=a(x^2-1)(x^2+1)-bx(x^2-1)$

$=(x^2-1)(ax^2-bx+a)$

$=(x+1)(x-1)(ax^2-bx+a)$

따라서 인수인 것은 ③이다.

0219 답 ④

$f(x)=x^3-(a+1)x^2-a(2a-1)x+2a^2$이라 하면

$f(1)=1-a-1-2a^2+a+2a^2=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	$-a-1$	$-2a^2+a$	$2a^2$
		1	$-a$	$-2a^2$
	1	$-a$	$-2a^2$	0

$x^3-(a+1)x^2-a(2a-1)x+2a^2$

$=(x-1)(x^2-ax-2a^2)$

$=(x-1)(x+a)(x-2a)$

이때 세 일차식의 합이 $3x-6$이므로

$(x-1)+(x+a)+(x-2a)=3x-6$

$-1-a=-6 \quad \therefore a=5$

0220 답 18

$P(x)=x^4+8x^3+5x^2-50x=x(x^3+8x^2+5x-50)$이라 하면

$P(0)=0$, $P(2)=2(8+32+10-50)=0$

조립제법을 이용하여 $x^3+8x^2+5x-50$을 인수분해하면

2	1	8	5	-50
		2	20	50
	1	10	25	0

$P(x)=x(x-2)(x^2+10x+25)$

$=x(x-2)(x+5)^2$ ····· ⓘ

즉, $f(x)g(x)=x(x-2)(x+5)^2$이고 $f(x)+g(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로 두 이차식의 이차항의 계수는 모두 1이다.

따라서 $f(x)=x(x-2)$ 또는 $f(x)=x(x+5)$ 또는 $f(x)=(x-2)(x+5)$ 또는 $f(x)=(x+5)^2$이다.

그런데 $f(1)=6$이므로

$f(x)=x(x+5)$ ····· ⓘⓘ

따라서 $g(x)=(x-2)(x+5)$이므로

$g(4)=2\times9=18$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 두 이차식의 곱을 인수분해하기	40%
ⓘⓘ $f(x)$ 구하기	40%
ⓘⓘⓘ $g(4)$의 값 구하기	20%

0221 답 89

$g(x)=x^4+ax+b$라 하면 $g(x)$가 $(x+2)^2$을 인수로 가지므로

$g(-2)=0$에서

$16-2a+b=0$

$\therefore b=2a-16$ ····· ㉠

$g(x)=x^4+ax+2a-16$이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

-2	1	0	0	a	$2a-16$
		-2	4	-8	$-2a+16$
-2	1	-2	4	$a-8$	0
		-2	8	-24	
	1	-4	12	$a-32$	

이때 $a-32=0$이므로 $a=32$

㉠에서 $b=2\times32-16=48$ ····· ⓘ

$g(x)=(x+2)^2(x^2-4x+12)$이므로

$f(x)=x^2-4x+12$ ····· ⓘⓘ

$\therefore f(1)=1-4+12=9$

$\therefore a+b+f(1)=32+48+9=89$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a, b의 값 구하기	50%
ⓘⓘ $f(x)$ 구하기	30%
ⓘⓘⓘ $a+b+f(1)$의 값 구하기	20%

0222 답 ⑤

$P(x)=x^4-x^3-7x^2+13x-6$이라 하면

$P(1)=1-1-7+13-6=0$, $P(2)=16-8-28+26-6=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $P(x)$를 인수분해하면

1	1	-1	-7	13	-6
		1	0	-7	6
2	1	0	-7	6	0
		2	4	-6	
	1	2	-3	0	

$P(x)=(x-1)(x-2)(x^2+2x-3)$

$=(x-1)^2(x-2)(x+3)$

㈎에서 $f(-a)g(-a)=0$이므로

$f(-a)=0$ 또는 $g(-a)=0$ ····· ㉠

㈏에서 $f(-a)+g(-a)=0$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $f(-a)=0$, $g(-a)=0$

즉, $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x+a$를 인수로 가지므로

$x+a=x-1$ $\therefore a=-1$

두 이차식 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)+g(x)=(x-1)(x-2)+(x-1)(x+3)$

$\therefore f(a)+g(a)=f(-1)+g(-1)$

$=(-2)\times(-3)+(-2)\times2$

$=2$

0223 답 ①

$f(-1)=-1+3+6-8=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	3	-6	-8
		-1	-2	8
	1	2	-8	0

$f(x)=(x+1)(x^2+2x-8)$

$=(x+1)(x+4)(x-2)$

한편 $g(-1)=-2+2a-3+7-2a-2=0$이므로 조립제법을 이용하여 $g(x)$를 인수분해하면

-1	2	$2a-3$	-7	$-2a-2$
		-2	$-2a+5$	$2a+2$
	2	$2a-5$	$-2a-2$	0

$g(x)=(x+1)\{2x^2+(2a-5)x-2a-2\}$

이때 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$가 같은 이차식으로 각각 나누어떨어지려면 $g(x)$가 $x+4$ 또는 $x-2$를 인수로 가져야 한다. 즉,

$g(-4)=0$ 또는 $g(2)=0$이어야 한다.

(i) $g(-4)=0$일 때,

$-3\{32-4(2a-5)-2a-2\}=0$

$-10a+50=0$ $\therefore a=5$

(ii) $g(2)=0$일 때,

$3\{8+2(2a-5)-2a-2\}=0$

$2a-4=0$ $\therefore a=2$

(i), (ii)에서 구하는 모든 a의 값의 합은

$5+2=7$

0224 답 ②

$f(x)=2x^3+ax^2+(2a+4)x+24$라 하면

$f(-2)=-16+4a-4a-8+24=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-2	2	a	$2a+4$	24
		-4	$-2a+8$	-24
	2	$a-4$	12	0

$f(x)=(x+2)\{2x^2+(a-4)x+12\}$

이때 $f(x)$가 계수가 모두 정수인 세 일차식의 곱으로 인수분해되려면 $2x^2+(a-4)x+12$가 계수가 모두 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되어야 한다.

a가 최대인 경우는 $a-4=2\times12+1\times1$

$\therefore a=29$

a가 최소인 경우는 $a-4=2\times(-12)+1\times(-1)$

$\therefore a=-21$

따라서 구하는 a의 최댓값과 최솟값의 합은

$29+(-21)=8$

0225 답 ⑤

$\{P(x)\}^3+\{Q(x)\}^3=12x^4+24x^3+12x^2+16$에서

$\{P(x)+Q(x)\}^3-3P(x)Q(x)\{P(x)+Q(x)\}$

$=12x^4+24x^3+12x^2+16$

이때 ㈎에서 $P(x)+Q(x)=4$이므로

$4^3-3P(x)Q(x)\times4=12x^4+24x^3+12x^2+16$

$-12P(x)Q(x)=12x^4+24x^3+12x^2-48$

$\therefore P(x)Q(x)=-x^4-2x^3-x^2+4$

$P(1)Q(1)=-1-2-1+4=0$,

$P(-2)Q(-2)=-16+16-4+4=0$이므로

조립제법을 이용하여 $P(x)Q(x)$를 인수분해하면

1	-1	-2	-1	0	4
		-1	-3	-4	-4
-2	-1	-3	-4	-4	0
		2	2	4	
	-1	-1	-2	0	

$P(x)Q(x)=(x-1)(x+2)(-x^2-x-2)$

$=-(x-1)(x+2)(x^2+x+2)$

$=-(x^2+x-2)(x^2+x+2)$

이때 $P(x)+Q(x)=4$이고 $P(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로

$P(x)=-x^2-x+2$, $Q(x)=x^2+x+2$

따라서 $P(2)=-4-2+2=-4$, $Q(3)=9+3+2=14$이므로

$P(2)+Q(3)=10$

0226 답 ③

$101^3-3\times101^2+3\times101-1$

$=101^3-3\times101^2\times1+3\times101\times1^2-1^3$

$=(101-1)^3$

$=100^3$

$=10^6$

0227 답 ⑤

$100=a$로 놓으면

$\sqrt{100\times101\times102\times103+1}$

$=\sqrt{a(a+1)(a+2)(a+3)+1}$

$=\sqrt{\{a(a+3)\}\{(a+1)(a+2)\}+1}$

$=\sqrt{(a^2+3a)(a^2+3a+2)+1}$

$a^2+3a=X$로 놓으면

(주어진 식)$=\sqrt{X(X+2)+1}$

$=\sqrt{X^2+2X+1}=\sqrt{(X+1)^2}$

$=X+1=a^2+3a+1$

$=100^2+3\times100+1$

$=10301$

0228 답 ③

$f(-1)=1+8+18-27=0$, $f(3)=81-216+162-27=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	-8	18	0	-27
		-1	9	-27	27
3	1	-9	27	-27	0
		3	-18	27	
	1	-6	9	0	

$f(x)=(x+1)(x-3)(x^2-6x+9)$

$=(x+1)(x-3)^3$

$\therefore f(3.1)=(3.1+1)(3.1-3)^3$

$=4.1\times0.1^3=0.0041$

0229 답 ②

나무 블록의 부피를 $f(x)$라 하면

$f(x)=x^2(x+3)-2\times1^3=x^3+3x^2-2$

$f(-1)=-1+3-2=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	3	0	-2
		-1	-2	2
	1	2	-2	0

$f(x)=(x+1)(x^2+2x-2)$

따라서 $a=1$, $b=2$, $c=-2$이므로

$a\times b\times c=-4$

0230 답 ③

$14=t$로 놓으면

$(14^2+2\times14)^2-18\times(14^2+2\times14)+45$

$=(t^2+2t)^2-18(t^2+2t)+45$

$t^2+2t=X$로 놓으면

$(t^2+2t)^2-18(t^2+2t)+45=X^2-18X+45$

$=(X-3)(X-15)$

$=(t^2+2t-3)(t^2+2t-15)$

$=(t+3)(t-1)(t+5)(t-3)$

$=(t-3)(t-1)(t+3)(t+5)$

$=11\times13\times17\times19$

$\therefore a+b+c+d=11+13+17+19=60$

0231 답 ④

$f(x)=x^3+8x^2+20x+16$이라 하면

$f(-2)=-8+32-40+16=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-2	1	8	20	16
		-2	-12	-16
	1	6	8	0

$f(x)=(x+2)(x^2+6x+8)=(x+2)^2(x+4)$

따라서 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $x+2$, 높이는 $x+4$이므로 원기둥의 겉넓이는

$2\times\pi(x+2)^2+2\pi(x+2)\times(x+4)$

$=2\pi(x+2)\{(x+2)+(x+4)\}$

$=4\pi(x+2)(x+3)$

✓ 중1 다시보기

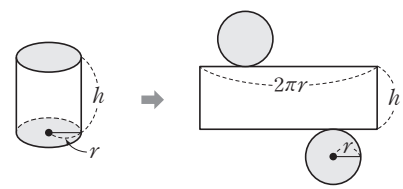
원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면

(1) (원기둥의 겉넓이)$=$(밑넓이)$\times2+$(옆넓이)

$=2\pi r^2+2\pi rh$

(2) (원기둥의 부피)$=$(밑넓이)$\times$(높이)

$=\pi r^2h$



0232 답 ③

주어진 등식의 좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$b^3-c^3-b^2c+bc^2+a^2b-a^2c=(b-c)a^2+b^3-b^2c+bc^2-c^3$

$=(b-c)a^2+b^2(b-c)+c^2(b-c)$

$=(b-c)(a^2+b^2+c^2)$

이때 $(b-c)(a^2+b^2+c^2)=0$에서 $a^2+b^2+c^2>0$이므로

$b-c=0$ $\therefore b=c$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다.

0233 답 ①

$f(x)=8x^3-16x^2-8x+16$이라 하면

$f(1)=8-16-8+16=0$이므로

조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	8	-16	-8	16
		8	-8	-16
	8	-8	-16	0

$8x^3-16x^2-8x+16=(x-1)(8x^2-8x-16)$

$=8(x-1)(x^2-x-2)$

$=8(x+1)(x-1)(x-2)$

$=(2x+2)(2x-2)(2x-4)$

따라서 이 직육면체의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이는 $2x-2$, $2x-4$이므로 이 직육면체에 들어갈 수 있는 가장 큰 구의 지름의 길이는 $2x-4$이고 반지름의 길이는 $x-2$이다.

0234 답 ④

$a^3+b^3+c^3=ab(a+b)-bc(b+c)+ca(c+a)$에서

$a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)=0$이므로

등식의 좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$a^3+b^3+c^3-ab(a+b)+bc(b+c)-ca(c+a)$

$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+b^2(b+c)+c^2(b+c)$

$=a^3-(b+c)a^2-(b^2+c^2)a+(b^2+c^2)(b+c)$

$=a^2(a-b-c)-(b^2+c^2)(a-b-c)$

$=(a-b-c)(a^2-b^2-c^2)$

이때 $(a-b-c)(a^2-b^2-c^2)=0$에서 $a-b-c\neq0$이므로

$a^2-b^2-c^2=0 \quad \therefore a^2=b^2+c^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

참고 삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 항상 크므로 $a<b+c$에서 $a-b-c\neq0$이다.

0235 답 5

직사각형 A의 넓이가 x^3+ax^2+2x이고, 세로의 길이가 $x(x+2)$이므로 $f(x)=x^3+ax^2+2x$라 하면 $f(x)$는 $x(x+2)$를 인수로 가지므로 $f(-2)=0$에서

$-8+4a-4=0 \quad \therefore a=3$

$\therefore f(x)=x^3+3x^2+2x$

$=x(x+2)(x+1)$

즉, 직사각형 A의 가로의 길이는 $x+1$이다.

따라서 직사각형 B의 가로의 길이는 직사각형 A와 같은 $x+1$이고, 직사각형 B의 넓이는 $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$이므로 직사각형 B의 세로의 길이는 $x+3$이다.

직사각형 C의 넓이가 $x^3+x^2-2x+12$이고, 세로의 길이가 $x+3$이므로 조립제법을 이용하여 $x^3+x^2-2x+12$를 인수분해하면

-3	1	1	-2	12
		-3	6	-12
	1	-2	4	0

$x^3+x^2-2x+12=(x+3)(x^2-2x+4)$

따라서 직사각형 C의 가로의 길이는 x^2-2x+4이므로

$b=-2,\ c=4$

$\therefore a+b+c=3+(-2)+4=5$

다른 풀이

직사각형 A의 넓이가 x^3+ax^2+2x이고, 세로의 길이가 $x(x+2)$이므로 가로의 길이를 $x+k$(k는 상수)라 하면

$x^3+ax^2+2x=x(x+2)(x+k)$

$=x^3+(2+k)x^2+2kx$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$a=2+k,\ 2=2k$

$\therefore k=1,\ a=3$

직사각형 A, B의 가로의 길이가 $x+1$이고, 직사각형 B의 넓이가 $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$이므로 직사각형 B의 세로의 길이는 $x+3$이다.

직사각형 C의 넓이가 $x^3+x^2-2x+12$이고, 가로, 세로의 길이가 각각 x^2+bx+c, $x+3$이므로

$x^3+x^2-2x+12=(x^2+bx+c)(x+3)$

$=x^3+(b+3)x^2+(3b+c)x+3c$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$1=b+3,\ -2=3b+c,\ 12=3c$

$\therefore b=-2,\ c=4$

$\therefore a+b+c=3+(-2)+4=5$

0236 답 ⑤

1	1	-1	1	-2	1
		1	0	1	-1
1	1	0	1	-1	0
		1	1	2	
1	1	1	2	1	
		1	2		
1	1	2	4		
		1			
	1	3			

위의 조립제법에서

$x^4-x^3+x^2-2x+1$

$=(x-1)(x^3+x-1)$

$=(x-1)\{(x-1)(x^2+x+2)+1\}$

$=(x-1)^2(x^2+x+2)+(x-1)$

$=(x-1)^2\{(x-1)(x+2)+4\}+(x-1)$

$=(x-1)^3(x+2)+4(x-1)^2+(x-1)$

$=(x-1)^3\{(x-1)+3\}+4(x-1)^2+(x-1)$

$=(x-1)^4+3(x-1)^3+4(x-1)^2+(x-1)$

$\therefore f(x)=(x-1)^4+3(x-1)^3+4(x-1)^2+(x-1)$

$f(101)=100^4+3\times100^3+4\times100^2+100$

$=103040100$

이므로 $f(101)$의 값의 각 자리의 숫자의 합은

$1+3+4+1=9$

0237 답 (1) $(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$ (2) 6 (3) 13

(1) $x^6-1=(x^3-1)(x^3+1)$

$=(x-1)(x^2+x+1)(x+1)(x^2-x+1)$ …… ⅰ

(2) $7^6-1=(7-1)(7+1)(7^2-7+1)(7^2+7+1)$

$=6\times8\times43\times57$

$=(2\times3)\times2^3\times43\times(3\times19)$

$=2^4\times3^2\times19\times43$

따라서 2 이상의 한 자리의 자연수 n이 될 수 있는 수는 2, 3, 4, 6, 8, 9의 6개이다. …… ⅱ

(3) 두 자리의 자연수 n이 될 수 있는 수는

2^4, $2^4\times3$, $2^3\times3$, $2^3\times3^2$, $2^2\times3$, $2^2\times3^2$, $2^2\times19$, 2×3^2, 2×19, 2×43, 3×19, 1×19, 1×43의 13개이다. …… ⅲ

채점 기준	
ⓘ x^6-1 인수분해하기	20 %
ⓘⓘ 한 자리의 자연수 n의 개수 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 두 자리의 자연수 n의 개수 구하기	40 %

0238 답 ②

$f(x)=x^3-3abx+a^3+b^3$이라 하면

$f(x)$가 $x-c$로 나누어떨어지므로

$f(c)=a^3+b^3+c^3-3abc=0$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

이때 $(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$에서

$a+b+c=12$이므로

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\therefore a-b=0,\ b-c=0,\ c-a=0 \quad \therefore a=b=c$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로 구하는 넓이는

$\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2=4\sqrt{3}$

중3 다시보기

한 변의 길이가 a인 정삼각형의

① 높이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$

② 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

0239 답 60

주어진 등식의 좌변을 c에 대하여 내림차순으로 정리한 후 인수분해하면

$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2$

$=-(a+b)c^2+a^3+b^3+a^2b+ab^2$

$=-(a+b)c^2+(a+b)(a^2-ab+b^2)+ab(a+b)$

$=(a+b)(-c^2+a^2-ab+b^2+ab)$

$=(a+b)(a^2+b^2-c^2)$

이때 $(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$에서 $a+b>0$이므로

$a^2+b^2-c^2=0 \quad \therefore a^2+b^2=c^2$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이고 그 넓이는 $\frac{1}{2}ab$이므로

$\frac{1}{2}ab=30$

$\therefore ab=60$

0240 답 $ab+bc+ca$

직육면체 A, B의 부피는 각각 abc, $(a+b)(b+c)(c+a)$이고 직육면체 C의 부피는 두 직육면체 A, B의 부피의 합과 같으므로

$abc+(a+b)(b+c)(c+a)$이다. …… ⓘ

$abc+(a+b)(b+c)(c+a)$

$=abc+(a+b)(bc+ab+c^2+ac)$

$=abc+abc+a^2b+ac^2+a^2c+b^2c+ab^2+bc^2+abc$

$=(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)$

$=(b+c)a^2+\{(b+c)^2+bc\}a+bc(b+c)$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(a+b+c)$

$=a(b+c)(a+b+c)+bc(a+b+c)$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$ …… ⓘⓘ

따라서 직육면체 C의 밑면의 세로의 길이는 $ab+bc+ca$이다.

…… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 직육면체 C의 부피를 a, b, c에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘ 직육면체 C의 부피를 나타내는 식을 인수분해하기	60 %
ⓘⓘⓘ 직육면체 C의 밑면의 세로의 길이 구하기	10 %

다른 풀이

직육면체 C의 부피는 $abc+(a+b)(b+c)(c+a)$

$a+b+c=t$로 놓으면

$a+b=t-c,\ b+c=t-a,\ c+a=t-b$

$\therefore abc+(a+b)(b+c)(c+a)$

$=abc+(t-c)(t-a)(t-b)$

$=abc+t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc$

$=t\{t^2-(a+b+c)t+ab+bc+ca\}$

$=t(t^2-t\times t+ab+bc+ca)$

$=t(ab+bc+ca)$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

따라서 직육면체 C의 밑면의 세로의 길이는 $ab+bc+ca$이다.

최고수준 도전 기출 53쪽

0241 답 ②

전략 인수분해의 정의를 이용하여 x에 대한 항등식을 세운 후 항등식의 성질을 이용하여 a, b, n에 대한 식을 구한다.

$x^3+(ab-1)x-n=(x+1)(x-a)(x-b)$가 성립하므로

$x^3+(ab-1)x-n=x^3+(1-a-b)x^2+(ab-a-b)x+ab$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$1-a-b=0,\ ab-1=ab-a-b,\ -n=ab$

따라서 $a+b=1$, $n=-ab$이므로

$n=-ab=-a(1-a)=a(a-1)$

즉, n은 연속하는 두 정수의 곱 꼴이다.

이때 a가 정수이고 n은 $10\le n\le 50$인 자연수이므로

$n=4\times 3=-3\times(-4)=12$,

$n=5\times 4=-4\times(-5)=20$,

$n=6\times 5=-5\times(-6)=30$,

$n=7\times 6=-6\times(-7)=42$

따라서 주어진 조건을 만족시키는 n의 개수는 4이고, 구하는 다항식의 개수도 4이다.

참고

a의 값	n의 값	다항식 $(x+1)(x-a)(x-b)$
-6	$-6\times(-7)$	$(x+1)(x+6)(x-7)$
-5	$-5\times(-6)$	$(x+1)(x+5)(x-6)$
-4	$-4\times(-5)$	$(x+1)(x+4)(x-5)$
-3	$-3\times(-4)$	$(x+1)(x+3)(x-4)$
4	4×3	$(x+1)(x-4)(x+3)$
5	5×4	$(x+1)(x-5)(x+4)$
6	6×5	$(x+1)(x-6)(x+5)$
7	7×6	$(x+1)(x-7)(x+6)$

0242 답 ④

전략 $2b+2c-a=A$, $2c+2a-b=B$, $2a+2b-c=C$라 하면 $A+B+C=3(a+b+c)$, $A-B=-3(a-b)$, $B-C=-3(b-c)$, $C-A=-3(c-a)$가 됨을 이용한다.

$f(x, y, z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

이고 $f(a, b, c)=1$이므로

$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=1$ ····· ㉠

$f(2b+2c-a, 2c+2a-b, 2a+2b-c)$에서

$2b+2c-a=A$, $2c+2a-b=B$, $2a+2b-c=C$라 하면

$A+B+C=(2b+2c-a)+(2c+2a-b)+(2a+2b-c)$

$=3(a+b+c)$

$(A-B)^2=\{(2b+2c-a)-(2c+2a-b)\}^2$

$=(-3a+3b)^2$

$(B-C)^2=\{(2c+2a-b)-(2a+2b-c)\}^2$

$=(-3b+3c)^2$

$(C-A)^2=\{(2a+2b-c)-(2b+2c-a)\}^2$

$=(3a-3c)^2$

$\therefore f(2b+2c-a, 2c+2a-b, 2a+2b-c)$

$=f(A, B, C)$

$=\frac{1}{2}(A+B+C)\{(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\}$

$=\frac{1}{2}\times3(a+b+c)\times\{(-3a+3b)^2+(-3b+3c)^2+(3a-3c)^2\}$

$=27\times\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$=27\times1\ (\because$ ㉠$)$

$=27$

0243 답 13

전략 $P(x)$를 a에 대한 식으로 인수분해한 후 자연수의 성질을 이용하여 a가 될 수 있는 수를 구한다.

$P(x)$가 $x-a$를 인수로 가지므로 $P(a)=0$

즉, $a^4-290a^2+b=0$에서 $b=-a^4+290a^2=a^2(290-a^2)$

이때 b가 자연수이므로 $290-a^2>0$

따라서 a의 값이 될 수 있는 자연수는 1, 2, 3, …, 17이다.

$P(x)=x^4-290x^2+b=x^4-290x^2+a^2(290-a^2)$에서

$x^2=X$로 놓으면

$x^4-290x^2+a^2(290-a^2)$

$=X^2-290X-a^2(a^2-290)$

$=(X-a^2)(X+a^2-290)$

$=(x^2-a^2)(x^2+a^2-290)$

$=(x-a)(x+a)(x^2+a^2-290)$

$\therefore P(x)=(x-a)(x+a)(x^2+a^2-290)$

주어진 조건을 만족시키려면 x^2+a^2-290이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않아야 한다.

이때 $x^2+a^2-290=x^2-(290-a^2)$이 계수와 상수항이 모두 정수인 서로 다른 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 경우는 $290-a^2$이 제곱수인 경우이다.

이때 $290=1^2+17^2=11^2+13^2$이므로

$290-a^2$이 제곱수가 되는 자연수 a는 1, 11, 13, 17이다.

따라서 조건을 만족시키는 자연수 a의 개수는 $17-4=13$이므로 모든 다항식 $P(x)$의 개수도 13이다.

0244 답 48

전략 ㈐의 식을 인수분해한 후 삼각형의 세 변의 길이에 대한 조건과 ㈎, ㈏의 조건을 이용하여 a, b, c의 값을 구한다.

㈐에서 $a^3+2a^2c+ac^2-ab^2-b^2c-bc^2-abc=0$이므로

$a^3+2a^2c+ac^2-ab^2-b^2c-bc^2-abc$

$=(a-b)c^2+(2a^2-b^2-ab)c+a^3-ab^2$

$=(a-b)c^2+(a-b)(2a+b)c+a(a+b)(a-b)$

$=(a-b)\{c^2+(2a+b)c+a(a+b)\}$

$=(a-b)(c+a)(c+a+b)$

이때 $(a-b)(c+a)(c+a+b)=0$에서

$c+a>0$, $c+a+b>0$이므로

$a-b=0$ $\therefore a=b$

$a=b$를 ㈎의 $a+5b=5c$에 대입하면

$6b=5c$ ····· ㉠

㈏에서 $a+b+c=32$이므로 $a=b$를 대입하면

$2b+c=32$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $b=10$, $c=12$

$\therefore a=10$

즉, 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형이므로 높이를 h라 하면

$h=\sqrt{10^2-6^2}=8$

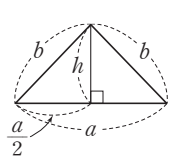
따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times12\times8=48$

✓ 중2 다시보기

오른쪽 그림과 같은 이등변삼각형의 높이를 h라 하면

$h=\sqrt{b^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$



04 복소수

난이도별 필수 기출 56~71쪽

0245 답 ⑤

주어진 복소수 중 실수는 $\sqrt{13}-\sqrt{2}$, $\pi-3.14$, 0이므로

$a=3$

순허수는 $-36i$, $16i$이므로 $b=2$

순허수가 아닌 허수는 $5-\sqrt{5}i$, $3+i$, $-2+2i$, $-2i+2$, $\frac{i}{2}-1$이므로 $c=5$

$\therefore 2a+3b-c=2\times3+3\times2-5=7$

0246 답 ④

$(x^2-5x-6)+(x+3)i$의 실수부분이 0이므로

$x^2-5x-6=0$, $(x+1)(x-6)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=6$

따라서 모든 실수 x의 값의 합은

$-1+6=5$

0247 답 ①

$3x+(2+i)y=1+2i$에서 $(3x+2y)+yi=1+2i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $3x+2y=1$, $y=2$

따라서 $x=-1$, $y=2$이므로

$x+y=1$

0248 답 ③

② $(-4+3i)-(3-4i)=-4+3i-3+4i=-7+7i$

③ $(2+\sqrt{5}i)(2-\sqrt{5}i)=4+5=9$

④ $(4+7i)(3-5i)=12-20i+21i+35=47+i$

⑤ $\frac{7+i}{1+i}=\frac{(7+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{7-7i+i+1}{1+1}$

$=\frac{8-6i}{2}=4-3i$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

0249 답 18

$(3+ai)(2-i)=13+bi$에서 $6-3i+2ai+a=13+bi$

$(a+6)+(2a-3)i=13+bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $a+6=13$, $2a-3=b$

따라서 $a=7$, $b=11$이므로

$a+b=18$

0250 답 ②

ㄱ. $1-3i$는 복소수이면서 허수이다.

ㄴ. $\sqrt{3}$은 실수이므로 복소수이다.

ㄷ. 허수는 크기를 비교할 수 없다.

ㄹ. $z=1+i$일 때, $z^2=(1+i)^2=2i$ ➡ 허수

ㅁ. $z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ ➡ 실수

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ ➡ 실수

따라서 보기에서 옳은 것은 ㅁ이다.

0251 답 ④

$\frac{a+3i}{2-i}=\frac{(a+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$

$=\frac{2a+ai+6i-3}{4+1}$

$=\frac{2a-3+(a+6)i}{5}$

따라서 실수부분이 $\frac{2a-3}{5}$, 허수부분이 $\frac{a+6}{5}$이므로

$\frac{2a-3}{5}+\frac{a+6}{5}=3$

$3a+3=15$, $3a=12$ $\therefore a=4$

0252 답 ③

$\frac{1-i}{1+i}-2(i+2)+i^2=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}-2i-4-1$

$=\frac{1-2i-1}{1+1}-2i-5$

$=-i-2i-5$

$=-5-3i$

따라서 $a=-5$, $b=-3$이므로

$a-b=-2$

0253 답 ③

① $\alpha+\beta=(1+3i)+(2-i)=3+2i$ $\therefore a=3$

② $\beta-\alpha=(2-i)-(1+3i)=1-4i$ $\therefore a=1$

③ $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2-i}{1+3i}=\frac{(2-i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{2-6i-i-3}{1+9}$

$=\frac{-1-7i}{10}=-\frac{1}{10}-\frac{7}{10}i$

$\therefore a=-\frac{1}{10}$

④ $\beta^2=(2-i)^2=4-4i-1=3-4i$ $\therefore a=3$

⑤ $(\alpha-1)(\beta-1)=3i(1-i)=3+3i$ $\therefore a=3$

따라서 a의 값이 가장 작은 것은 ③이다.

0254 답 ④

$\frac{1}{\overline{z}}+\frac{1}{\omega}=\frac{1}{5-3i}+\frac{1}{4-i}$

$=\frac{5+3i}{(5-3i)(5+3i)}+\frac{4+i}{(4-i)(4+i)}$

$=\frac{5+3i}{25+9}+\frac{4+i}{16+1}=\frac{13}{34}+\frac{5}{34}i$

따라서 $a=\frac{13}{34}$, $b=\frac{5}{34}$이므로

$a+b=\frac{18}{34}=\frac{9}{17}$

0255 답 ③

$(4+i)-\overline{(3-2i)}(1-i)+\dfrac{1-7i}{1-2i}$

$=(4+i)-(3+2i)(1-i)+\dfrac{1-7i}{1-2i}$

$=4+i-(3-3i+2i+2)+\dfrac{(1-7i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}$

$=4+i-(5-i)+\dfrac{1+2i-7i+14}{1+4}$

$=4+i-5+i+\dfrac{15-5i}{5}$

$=-1+2i+3-i=2+i$

따라서 $a=2$, $b=1$이므로

$a+b=3$

0256 답 $-\dfrac{37}{8}$

$y+xyi-\dfrac{1}{2}=3i+x$에서 $\left(y-\dfrac{1}{2}\right)+xyi=x+3i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$y-\dfrac{1}{2}=x$, $xy=3$

즉, $x-y=-\dfrac{1}{2}$, $xy=3$이므로 ····· ⓘ

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^3+3\times3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$=-\dfrac{1}{8}-\dfrac{9}{2}=-\dfrac{37}{8}$ ····· ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $x-y$, xy의 값 구하기	60 %
ⓘⓘ 곱셈 공식의 변형을 이용하여 x^3-y^3의 값 구하기	40 %

0257 답 ③

$(1-3i)\triangle(1+i)=(1-3i)(1+i)+\dfrac{1-3i}{1+i}i$

$=(1-3i)(1+i)+\dfrac{(1-3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}i$

$=1+i-3i+3+\dfrac{1-i-3i-3}{1+1}i$

$=4-2i+(-1-2i)i$

$=4-2i-i+2=6-3i$

0258 답 ④

$z_1=(1-i)^2=1-2i-1=-2i$

$z_2=\dfrac{\sqrt{2}+2i}{\sqrt{2}-2i}=\dfrac{(\sqrt{2}+2i)^2}{(\sqrt{2}-2i)(\sqrt{2}+2i)}$

$=\dfrac{2+4\sqrt{2}i-4}{2+4}=\dfrac{-2+4\sqrt{2}i}{6}=\dfrac{-1+2\sqrt{2}i}{3}$

$\therefore z_1z_2=(-2i)\times\dfrac{-1+2\sqrt{2}i}{3}=\dfrac{4\sqrt{2}+2i}{3}$

따라서 $a=\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$이므로

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{\frac{2}{3}}=2\sqrt{2}$

0259 답 315

주어진 식의 좌변과 우변을 각각 정리하면

(좌변)$=\dfrac{x}{1+3i}+\dfrac{y}{1-3i}=\dfrac{x(1-3i)+y(1+3i)}{(1+3i)(1-3i)}$

$=\dfrac{x-3xi+y+3yi}{1+9}$

$=\dfrac{x+y}{10}-\dfrac{3(x-y)}{10}i$ ····· ㉠

(우변)$=\dfrac{9}{2+i}=\dfrac{9(2-i)}{(2+i)(2-i)}$

$=\dfrac{18-9i}{4+1}=\dfrac{18}{5}-\dfrac{9}{5}i$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\dfrac{x+y}{10}=\dfrac{18}{5}$, $\dfrac{3(x-y)}{10}=\dfrac{9}{5}$이므로

$x+y=36$, $x-y=6$

두 식을 연립하여 풀면 $x=21$, $y=15$

$\therefore xy=315$

0260 답 ②

$x(2-i)^2-y(3+i)=\overline{3y-(5-2x)i}$에서

$x(4-4i-1)-3y-yi=3y+(5-2x)i$

$3x-4xi-3y-yi=3y+(5-2x)i$

$3(x-y)-(4x+y)i=3y-(2x-5)i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x-y=y$, $4x+y=2x-5$이므로

$x-2y=0$, $2x+y=-5$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-2$, $y=-1$

$\therefore x+y=-3$

0261 답 ⑤

$iz=\overline{z}$에 $z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi$를 대입하면

$i(a+bi)=a-bi$

$-b+ai=a-bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여 $b=-a$

$\therefore z=a-ai$

ㄱ. $z+\overline{z}=(a-ai)+(a+ai)=2a=-2b$

ㄴ. $i\overline{z}=i(a+ai)=-a+ai$

$=-(a-ai)=-z$

ㄷ. $iz=\overline{z}$에서 $z\neq0$, $\overline{z}\neq0$이므로 $\dfrac{\overline{z}}{z}=i$, $\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{1}{i}$

$\therefore \dfrac{\overline{z}}{z}+\dfrac{z}{\overline{z}}=i+\dfrac{1}{i}=i-i=0$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄷ. $iz=\overline{z}$의 양변을 제곱하면

$-z^2=\overline{z}^2$ $\therefore z^2+\overline{z}^2=0$

이때 $z\overline{z}=(a-ai)(a+ai)=2a^2\neq0$이므로

$\dfrac{\overline{z}}{z}+\dfrac{z}{\overline{z}}=\dfrac{z^2+\overline{z}^2}{z\overline{z}}=0$

0262 답 ①

$f(1, 2)+f(2, 4)+f(3, 6)+\cdots+f(50, 100)$

$=\frac{1-2i}{1+2i}+\frac{2-4i}{2+4i}+\frac{3-6i}{3+6i}+\cdots+\frac{50-100i}{50+100i}$

$=\frac{1-2i}{1+2i}+\frac{1-2i}{1+2i}+\frac{1-2i}{1+2i}+\cdots+\frac{1-2i}{1+2i}$

$=50\times\frac{1-2i}{1+2i}=50\times\frac{(1-2i)^2}{(1+2i)(1-2i)}$

$=50\times\frac{1-4i-4}{1+4}=50\times\frac{-3-4i}{5}$

$=-30-40i$

0263 답 ③

a^2이 최소이고 bc가 최대일 때, a^2-bc는 최솟값을 갖는다.

a^2이 최소가 되는 경우는 $a=5i$일 때이므로

$a^2=(5i)^2=-25$

bc가 최대가 되는 경우는

$b=-4i$, $c=5i$ 또는 $b=5i$, $c=-4i$일 때이므로

$bc=(-4i)\times5i=20$

따라서 a^2-bc의 최솟값은

$-25-20=-45$

0264 답 ④

$z^2-4z=(2+\sqrt{2}i)^2-4(2+\sqrt{2}i)$

$=(2+4\sqrt{2}i)-8-4\sqrt{2}i$

$=-6$

다른 풀이

$z=2+\sqrt{2}i$에서 $z-2=\sqrt{2}i$

양변을 제곱하면 $z^2-4z+4=-2$

$\therefore z^2-4z=-6$

0265 답 ⑤

$\overline{z}=2-i$이므로

$z+i\overline{z}=(2+i)+i(2-i)$

$=2+i+2i+1$

$=3+3i$

0266 답 ③

$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{1+i}{1-i}+\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1+i)^2+(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}$

$=\frac{2i+(-2i)}{2}=0$

다른 풀이

$x+y=(1-i)+(1+i)=2$, $xy=(1-i)(1+i)=2$

$\therefore \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{x^2+y^2}{xy}=\frac{(x+y)^2-2xy}{xy}$

$=\frac{2^2-2\times2}{2}=0$

0267 답 ②

$x+y=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$

$xy=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=1^3-3\times1\times1=-2$

다른 풀이

$x^3+y^3=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^3+\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^3$

$=\frac{1+3\sqrt{3}i+9i^2+3\sqrt{3}i^3}{8}+\frac{1-3\sqrt{3}i+9i^2-3\sqrt{3}i^3}{8}$

$=-1-1=-2$

0268 답 ③

$\overline{z}=1-i$이므로

$\frac{z+1}{z}+\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}}=\frac{2+i}{1+i}+\frac{2-i}{1-i}$

$=\frac{(2+i)(1-i)+(2-i)(1+i)}{(1+i)(1-i)}$

$=\frac{(3-i)+(3+i)}{2}=3$

다른 풀이

$z+\overline{z}=(1+i)+(1-i)=2$

$z\overline{z}=(1+i)(1-i)=2$

$\therefore \frac{z+1}{z}+\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}}=\frac{z\overline{z}+\overline{z}+z\overline{z}+z}{z\overline{z}}$

$=\frac{(z+\overline{z})+2z\overline{z}}{z\overline{z}}$

$=\frac{2+2\times2}{2}=3$

0269 답 ④

$\overline{\alpha}\beta=1$에서 $\frac{1}{\overline{\alpha}}=\beta$

또 $\overline{\alpha}\beta=1$에서 $\overline{(\overline{\alpha}\beta)}=\alpha\overline{\beta}=1$이므로 $\alpha=\frac{1}{\overline{\beta}}$

$\therefore \alpha+\frac{1}{\overline{\alpha}}=\frac{1}{\overline{\beta}}+\beta=3i$

0270 답 ①

$z=\frac{10}{3-i}=\frac{10(3+i)}{(3-i)(3+i)}=3+i$이므로

$\overline{z}=3-i$

$\therefore z+\overline{z}-z\overline{z}=(3+i)+(3-i)-(3+i)(3-i)$

$=6-10=-4$

0271 답 ①

$x+y=(-2+3i)+(2+3i)=6i$

$x-y=(-2+3i)-(2+3i)=-4$

$\therefore x^3+x^2y-xy^2-y^3=x^2(x+y)-y^2(x+y)$

$=(x^2-y^2)(x+y)$

$=(x-y)(x+y)^2$

$=(-4)\times(6i)^2=144$

0272 답 ③

$x+y=(2+i)+(2-i)=4$,

$xy=(2+i)(2-i)=5$이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=4^2-2\times5=6$

$\therefore\ x^4+x^2y^2+y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

$=(6+5)(6-5)=11$

0273 답 ③

$\alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=\overline{\alpha}(\alpha-\beta)-\overline{\beta}(\alpha-\beta)$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha}-\overline{\beta})$

$=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$

이때 $\alpha-\beta=(2-3i)-(3+2i)=-1-5i$이므로

$\overline{\alpha-\beta}=-1+5i$

$\therefore\ \alpha\overline{\alpha}-\overline{\alpha}\beta-\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}=(\alpha-\beta)(\overline{\alpha-\beta})$

$=(-1-5i)(-1+5i)=26$

0274 답 10

$\overline{\alpha}\alpha+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}=\alpha(\overline{\alpha}+\overline{\beta})+\beta(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha}+\overline{\beta})$

$=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

이때 $\alpha=\dfrac{5}{1-2i}=\dfrac{5(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=1+2i$,

$\beta=\dfrac{5}{2+i}=\dfrac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)}=2-i$이므로

$\alpha+\beta=(1+2i)+(2-i)=3+i$, $\overline{\alpha+\beta}=3-i$

$\therefore\ \overline{\alpha}\alpha+\alpha\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta+\beta\overline{\beta}=(\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$

$=(3+i)(3-i)=10$

0275 답 −2

$a=\dfrac{2}{1+i}=\dfrac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1-i$,

$b=\dfrac{2}{1-i}=\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}=1+i$이므로

$a+b=(1-i)+(1+i)=2$

$ab=(1-i)(1+i)=2$ …… ⓘ

$\therefore\ a^3+b^3+ab=(a+b)^3-3ab(a+b)+ab$

$=2^3-3\times2\times2+2=-2$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $a+b$, ab의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ a^3+b^3+ab의 값 구하기	60 %

0276 답 ④

$\overline{\alpha}=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$이므로

$\alpha+\overline{\alpha}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$

$\alpha\overline{\alpha}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}=1$

$\therefore\ z\overline{z}=\dfrac{\alpha+3}{\alpha-1}\times\overline{\left(\dfrac{\alpha+3}{\alpha-1}\right)}=\dfrac{\alpha+3}{\alpha-1}\times\dfrac{\overline{\alpha}+3}{\overline{\alpha}-1}$

$=\dfrac{\alpha\overline{\alpha}+3(\alpha+\overline{\alpha})+9}{\alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})+1}=\dfrac{1+3+9}{1-1+1}=13$

다른 풀이

$z=(\alpha+3)\times\dfrac{1}{\alpha-1}=\dfrac{7+\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{2}{-1+\sqrt{3}i}$

$=\dfrac{7+\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i}=\dfrac{(7+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)}{(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)}$

$=\dfrac{-4-8\sqrt{3}i}{4}=-1-2\sqrt{3}i$

$\therefore\ z\overline{z}=(-1-2\sqrt{3}i)(-1+2\sqrt{3}i)=13$

0277 답 ③

$z=\dfrac{2+\sqrt{5}i}{2-\sqrt{5}i}=\dfrac{(2+\sqrt{5}i)^2}{(2-\sqrt{5}i)(2+\sqrt{5}i)}=\dfrac{-1+4\sqrt{5}i}{9}$

$z=\dfrac{-1+4\sqrt{5}i}{9}$에서 $9z+1=4\sqrt{5}i$

양변을 제곱하면

$81z^2+18z+1=-80$, $81z^2+18z=-81$

$\therefore\ 81z^2+18z+11=-81+11=-70$

0278 답 $\sqrt{3}i$

$x=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$에서 $2x-1=-\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면

$4x^2-4x+1=-3$, $x^2-x+1=0$ …… ⓘ

$\therefore\ x^3-x^2-x+1=x(x^2-x+1)-2x+1$

$=-2x+1=-(2x-1)$

$=\sqrt{3}i$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $x^2-x+1=0$임을 파악하기	60 %
ⓘⓘ x^3-x^2-x+1의 값 구하기	40 %

0279 답 ②

$x=\dfrac{2-i}{1+i}=\dfrac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{1-3i}{2}$

$x=\dfrac{1-3i}{2}$에서 $2x-1=-3i$

양변을 제곱하면

$4x^2-4x+1=-9$, $2x^2-2x+5=0$

$\therefore\ \dfrac{2x^3-4x^2+3x}{2x^2-2x+2}=\dfrac{(x-1)(2x^2-2x+5)-4x+5}{(2x^2-2x+5)-3}$

$=\dfrac{-4x+5}{-3}=\dfrac{4x-5}{3}=\dfrac{2(2x-1)-3}{3}$

$=\dfrac{2\times(-3i)-3}{3}=-1-2i$

0280 답 ②

$\overline{z}^2=-1+4i$에서 $z^2=-1+4i$

$\therefore\ z^2=\overline{-1+4i}=-1-4i$

즉, $z^2+1=-4i$이므로 양변을 제곱하면

$z^4+2z^2+1=-16$, $z^4+2z^2+17=0$

$\therefore\ z^4+3z^2+20=(z^4+2z^2+17)+z^2+3$

$=z^2+3=(-1-4i)+3$

$=2-4i$

따라서 $a=2$, $b=-4$이므로 $a+b=-2$

0281 답 ②

$z^2=-1+3i$에서 $z^2+1=3i$

양변을 제곱하면 $z^4+2z^2+1=-9$, $z^4+2z^2+10=0$

$\therefore\ z^4+2z^3+2z^2+4z+\dfrac{20}{z}$

$=z^4+2z^2+10+\dfrac{2}{z}(z^4+2z^2+10)-10$

$=-10$

0282 답 ②

$z=x(1-2i)+3(2+i)=(x+6)+(-2x+3)i$

z가 순허수가 되려면 실수부분이 0이고 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$x+6=0$ $\quad\therefore\ x=-6$

0283 답 ①

$z=i(x-i)^2=i(x^2-2xi-1)=2x+(x^2-1)i$

z가 실수가 되려면 허수부분이 0이어야 하므로

$x^2-1=0$, $(x+1)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=1$

따라서 모든 x의 값의 합은 $-1+1=0$

0284 답 ④

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

① $\overline{(\overline{z})}=\overline{a-bi}=a+bi=z$

② $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$ ➡ 실수

③ $z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$ ➡ 실수

④ ②에서 $z+\overline{z}=2a$이므로 $z+\overline{z}=0$을 만족시키려면

$2a=0$에서 $a=0$ $\quad\therefore\ z=bi$

이때 z는 0이 아닌 복소수이므로 $b\neq0$

따라서 z는 순허수이다.

⑤ $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\overline{z}}=\dfrac{1}{a+bi}-\dfrac{1}{a-bi}$

$=\dfrac{(a-bi)-(a+bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\dfrac{-2b}{a^2+b^2}i$

z가 허수이면 $b\neq0$이므로 $\dfrac{-2b}{a^2+b^2}$는 0이 아닌 실수이다.

즉, $\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{\overline{z}}$은 순허수이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0285 답 ①

$z=a(a-i)-2a-2-(1+i)=(a^2-2a-3)-(a+1)i$

z가 순허수가 되려면 실수부분이 0이고 허수부분은 0이 아니어야 하므로

$a^2-2a-3=0$, $a+1\neq0$

$a^2-2a-3=0$에서 $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=-1$ 또는 $a=3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a+1\neq0$에서 $a\neq-1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$

$\therefore\ z=-4i$

따라서 $\alpha=3$, $\beta=-4i$이므로

$\alpha^2+\beta^2=3^2+(-4i)^2=9+(-16)=-7$

0286 답 ②

$z=k(1+2i)-3+4i=(k-3)+(2k+4)i$

z^2이 실수가 되려면 z의 실수부분이 0이거나 허수부분이 0이어야 하므로

$k-3=0$ 또는 $2k+4=0$

$\therefore\ k=3$ 또는 $k=-2$

따라서 모든 k의 값의 곱은

$3\times(-2)=-6$

0287 답 2

$z=(1+i)x^2-(1+2i)x-2-3i$

$=(x^2-x-2)+(x^2-2x-3)i$

z^2이 음의 실수가 되려면 z는 순허수이어야 하므로

$x^2-x-2=0$, $x^2-2x-3\neq0$

$x^2-x-2=0$에서 $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$x^2-2x-3\neq0$에서 $(x+1)(x-3)\neq0$

$\therefore\ x\neq-1$이고 $x\neq3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x=2$

0288 답 ①

$z=2+ai(i-1)=(2-a)-ai$

z^2이 음의 실수이려면 z는 순허수이어야 하므로

$2-a=0$, $a\neq0$

따라서 $a=2$이므로 $z=-2i$

$\therefore\ z^6=(z^2)^3=(-4)^3=-64$

다른 풀이

$z=2+ai(i-1)=(2-a)-ai$이므로

$z^2=(2-a)^2-2a(2-a)i+(ai)^2$

$=4(1-a)+2a(a-2)i$

z^2이 음의 실수이므로

$4(1-a)<0$, $2a(a-2)=0$

$4(1-a)<0$에서 $a>1$

$2a(a-2)=0$에서 $a=0$ 또는 $a=2$

따라서 $a=2$이므로 $z^2=-4$

$\therefore\ z^6=(z^2)^3=(-4)^3=-64$

0289 답 0

$z=(a+2i)(a-3i)+a^2(i-2)-5$

$=a^2+6-ai+a^2i-2a^2-5$

$=(-a^2+1)+(a^2-a)i$ $\quad\cdots\cdots$ i

z^2이 양의 실수가 되려면 z의 실수부분은 0이 아니고 허수부분은 0이어야 하므로

$-a^2+1\neq0$, $a^2-a=0$ $\quad\cdots\cdots$ ii

$-a^2+1\neq0$에서 $(1+a)(1-a)\neq0$

$\therefore\ a\neq-1$이고 $a\neq1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a^2-a=0$에서 $a(a-1)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=1$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $a=0$ ····· ⅲ

채점 기준	
ⅰ z를 (실수부분)+(허수부분)i 꼴로 정리하기	20%
ⅱ z^2이 양의 실수가 되기 위한 조건 알기	30%
ⅲ z^2이 양의 실수가 되도록 하는 a의 값 구하기	50%

0290 답 ④

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

ㄱ. $z+\overline{z}+z\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)+(a+bi)(a-bi)$

$=2a+a^2+b^2$ ➡ 실수

ㄴ. $\overline{z}=a-bi$가 순허수이면 $a=0$, $b\neq0$에서 $z=bi$이므로 z도 순허수이다.

ㄷ. $z\overline{z}=0$이면 $(a+bi)(a-bi)=0$, $a^2+b^2=0$

따라서 $a=0$, $b=0$이므로 $z=0$

ㄹ. $z^2+\overline{z}^2=0$이면 $(a+bi)^2+(a-bi)^2=0$

$2a^2-2b^2=0$, $a^2=b^2$

따라서 $b=\pm a$이므로 $z=a\pm ai$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0291 답 ④

$z-1=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면

$(z-1)^2=(a+bi)^2=(a^2-b^2)+2abi$

$(z-1)^2$이 실수이므로 $ab=0$

이때 z가 실수가 아닌 복소수이므로 $b\neq0$ $\therefore a=0$

$\therefore z=1+bi$

① $z-1=bi$의 실수부분은 0이다.

② $(z-1)^2=(bi)^2=-b^2<0$

③ $z+\overline{z}=(1+bi)+(1-bi)=2$

④ $(z+1)^2=(2+bi)^2=4-b^2+4bi$

$(\overline{z}+1)^2=(2-bi)^2=4-b^2-4bi$

이때 $(z+1)^2-(\overline{z}+1)^2=8bi\neq0$ ($\because b\neq0$)이므로

$(z+1)^2\neq(\overline{z}+1)^2$

⑤ $(\overline{z}-1)^2=(-bi)^2=-b^2$이므로 실수이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0292 답 ④

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면

$\overline{z}+\omega=0$에서 $\omega=-\overline{z}=-(a-bi)=-a+bi$

ㄱ. $z+\overline{\omega}=\overline{(\overline{z}+\omega)}=0$이므로 항상 실수이다.

ㄴ. $i(z+\omega)=i(a+bi-a+bi)=i\times2bi=-2b$이므로 항상 실수이다.

ㄷ. $\overline{z}\omega=\overline{z}\times(-\overline{z})=-\overline{z}^2=-(a-bi)^2=-a^2+b^2+2abi$에서

$a\neq0$이면 $\overline{z}\omega$는 실수가 아니다.

ㄹ. $\omega=-\overline{z}$에서 $\overline{\omega}=\overline{-\overline{z}}=-z$

$\dfrac{\overline{\omega}}{z}=\dfrac{-z}{z}=-1$이므로 항상 실수이다.

따라서 보기에서 항상 실수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ의 3개이다.

0293 답 ②

$z^2=(m-n)^2-(m+n-4)^2+2(m-n)(m+n-4)i$

z^2이 실수가 되려면 z^2의 허수부분이 0이어야 하므로

$2(m-n)(m+n-4)=0$

$m-n=0$ 또는 $m+n-4=0$

$\therefore m=n$ 또는 $m+n=4$

(ⅰ) $m=n$인 경우

순서쌍 (m, n)은 $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$의 5개

(ⅱ) $m+n=4$인 경우

순서쌍 (m, n)은 $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3개

(ⅰ), (ⅱ)에서 순서쌍 $(2, 2)$가 중복되므로 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는 7이다.

0294 답 ①

$z_1=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z_1}=a-bi$

ㄱ. $z_1=\overline{z_2}$이면 $z_2=\overline{z_1}=a-bi$이므로 $z_1+z_2=2a$는 실수이다.

ㄴ. $z_1=\overline{z_2}$일 때, $z_2=\overline{z_1}=a-bi$이므로 $z_1z_2=0$이면

$z_1z_2=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=0$

따라서 $a=b=0$이므로

$z_1=z_2=0$

ㄷ. $z_1=1+i$, $z_2=1-i$이면

$z_1^2+z_2^2=(1+i)^2+(1-i)^2=0$이지만 $z_1\neq0$, $z_2\neq0$이다.

ㄹ. $z_1\overline{z_1}=1$이면 $z_1\overline{z_1}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=1$

$\overline{z_1}-\dfrac{1}{z_1}=a-bi-\dfrac{1}{a-bi}=a-bi-\dfrac{a+bi}{a^2+b^2}$

$=a-bi-(a+bi)=-2bi$

이때 $b\neq0$이면 $\overline{z_1}-\dfrac{1}{z_1}$은 실수가 아니다.

ㅁ. $z_1=i$이면 $\overline{z_1}^2=(-i)^2=-1$이지만 z_1은 실수가 아니다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0295 답 ⑤

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

주어진 두 등식에 $z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi$를 대입하면

$(a+bi)+(a-bi)=6$에서 $2a=6$ $\therefore a=3$

$(a+bi)(a-bi)=10$에서 $a^2+b^2=10$

$3^2+b^2=10$ $\therefore b=\pm1$

$\therefore z=3-i$ 또는 $z=3+i$

0296 답 29

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$

주어진 등식에 $z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi$를 대입하면

$3(a+bi)-2(a-bi)=5+10i$

$a+5bi=5+10i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=5$, $5b=10$

$\therefore a=5$, $b=2$

따라서 $z=5+2i$이므로

$z\overline{z}=(5+2i)(5-2i)=29$

0297 답 $-3+i$ 또는 $3+i$

$z=a+bi\,(a,\,b$는 실수$)$라 하면 $\overline{z}=a-bi$

주어진 등식에 $z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi$를 대입하면

$3\{(a+bi)-(a-bi)\}+10=(a+bi)(a-bi)+6i$

$10+6bi=(a^2+b^2)+6i$ ····· ⓘ

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$10=a^2+b^2$, $6b=6$

$\therefore a=-3,\ b=1$ 또는 $a=3,\ b=1$ ····· ⓘⓘ

$\therefore z=-3+i$ 또는 $z=3+i$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi$를 주어진 등식에 대입하여 정리하기	40 %
ⓘⓘ a, b의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 복소수 z 구하기	20 %

0298 답 ⑤

$z=1+ai\,(a$는 실수$)$라 하면 $\overline{z}=1-ai$

주어진 등식에 $z=1+ai$, $\overline{z}=1-ai$를 대입하면

$\dfrac{1+ai}{2+i}+\dfrac{1-ai}{2-i}=2$, $\dfrac{(1+ai)(2-i)+(1-ai)(2+i)}{(2+i)(2-i)}=2$

$\dfrac{2a+4}{5}=2$, $2a+4=10$ $\therefore a=3$

따라서 $z=1+3i$이므로

$z\overline{z}=(1+3i)(1-3i)=10$

0299 답 ④

$z=a+bi\,(a,\,b$는 실수$)$라 하면 $\overline{z}=a-bi$

주어진 등식에 $z=a+bi$, $\overline{z}=a-bi$를 대입하면

$(1-i)(a+bi)+(1+i)(a-bi)=10$

$a+bi-ai+b+a-bi+ai+b=10$

$2(a+b)=10$ $\therefore a+b=5$

ㄱ. $8+(-3)=5$ ㄴ. $(-2)+7=5$

ㄷ. $3+2=5$ ㄹ. $1+3=4$

따라서 보기에서 복소수 z가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0300 답 ⑤

$z=x^2-(5-i)x+4-2i=(x^2-5x+4)+(x-2)i$에서

$\overline{z}=-z$이면

$(x^2-5x+4)-(x-2)i=-(x^2-5x+4)-(x-2)i$

$x^2-5x+4=0$, $(x-1)(x-4)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=4$

따라서 모든 x의 값의 합은 $1+4=5$

0301 답 ③

$z=a+bi\,(a,\,b$는 실수$)$라 하면

㈎에서 $z+(1-i)=(a+bi)+(1-i)=(a+1)+(b-1)i$

이 수가 양의 실수이므로 $a+1>0$, $b-1=0$

$\therefore a>-1,\ b=1$

따라서 $z=a+i$, $\overline{z}=a-i$이므로

㈏에서 $z\overline{z}=(a+i)(a-i)=a^2+1=7$

$a^2=6$ $\therefore a=\sqrt{6}\ (\because a>-1)$

$\therefore \dfrac{1}{2}(z+\overline{z})=\dfrac{1}{2}(\sqrt{6}+i+\sqrt{6}-i)$

$=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{6}=\sqrt{6}$

0302 답 ③

$\overline{z+\overline{z}i}=z+1+2i$에서

$z+\overline{z}i=\overline{z+1+2i}=\overline{z}+1-2i$

$z=a+bi\,(a,\,b$는 실수$)$라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$(a+bi)+(a-bi)i=(a-bi)+1-2i$

$a+bi+ai+b=a-bi+1-2i$

$(a+b)+(a+b)i=(a+1)-(b+2)i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a+b=a+1$, $a+b=-b-2$

$\therefore a=-4,\ b=1$

따라서 $z=-4+i$, $\overline{z}=-4-i$이므로

$z^2+\overline{z}^2=(-4+i)^2+(-4-i)^2$

$=(15-8i)+(15+8i)=30$

0303 답 1

$z=a+bi\,(a,\,b$는 실수$)$라 하면 $\overline{z}=a-bi$

이때 z는 실수가 아닌 복소수이므로 $b\neq 0$

$z^2=\overline{z}$에서 $(a+bi)^2=a-bi$ ····· ⓘ

$(a^2-b^2)+2abi=a-bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=a$, $2ab=-b$

$2ab=-b$에서 $b\neq 0$이므로 $a=-\dfrac{1}{2}$

$a^2-b^2=a$에서 $a=-\dfrac{1}{2}$이므로

$\dfrac{1}{4}-b^2=-\dfrac{1}{2}$, $b^2=\dfrac{3}{4}$ $\therefore b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ····· ⓘⓘ

$\therefore (1+z)(1+\overline{z})=1+(z+\overline{z})+z\overline{z}$

$=1+(a+bi+a-bi)+(a+bi)(a-bi)$

$=1+2a+a^2+b^2$

$=1-1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $z=a+bi$로 놓고 $z^2=\overline{z}$를 a, b에 대하여 나타내기	30 %
ⓘⓘ a, b의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $(1+z)(1+\overline{z})$의 값 구하기	30 %

0304 답 ②

$-z=\dfrac{1}{z}$에서 $z^2=-1$

$z=a+bi\,(a,\,b$는 실수$)$라 하고, $z^2=-1$에 대입하면

$(a+bi)^2=-1$, $(a^2-b^2)+2abi=-1$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2-b^2=-1$, $2ab=0$

$2ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$

이때 $b=0$이면 $a^2-b^2=-1$에서 $a^2=-1$을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않으므로 $a=0$이다.

$a^2-b^2=-1$에서 $b^2=1$ $\therefore b=-1$ 또는 $b=1$

$\therefore z=-i$ 또는 $z=i$

따라서 복소수 z는 2개이다.

0305 답 1

$\frac{z}{z^2+1}$가 실수이므로 $\frac{z}{z^2+1}=\overline{\left(\frac{z}{z^2+1}\right)}$에서

$\frac{z}{z^2+1}=\frac{\overline{z}}{\overline{z}^2+1}$, $z(\overline{z}^2+1)=\overline{z}(z^2+1)$

$z\overline{z}^2-\overline{z}z^2+z-\overline{z}=0$, $z-\overline{z}-z\overline{z}(z-\overline{z})=0$

$(z-\overline{z})(1-z\overline{z})=0$ $\therefore z=\overline{z}$ 또는 $z\overline{z}=1$

그런데 z가 허수이면 $z\neq\overline{z}$이므로 $z\overline{z}=1$

0306 답 1

$z+\frac{1}{z}$이 실수이므로 $z+\frac{1}{z}=\overline{z+\frac{1}{z}}$에서

$z+\frac{1}{z}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}$, $\frac{z^2+1}{z}=\frac{\overline{z}^2+1}{\overline{z}}$

$(z^2+1)\overline{z}=z(\overline{z}^2+1)$, $z^2\overline{z}+\overline{z}=z\overline{z}^2+z$

$z\overline{z}^2-(z^2+1)\overline{z}+z=0$, $(z\overline{z}-1)(\overline{z}-z)=0$

$\therefore z\overline{z}=1$ 또는 $\overline{z}=z$

그런데 z가 허수이면 $\overline{z}\neq z$이므로 $z\overline{z}=1$

$\therefore \frac{(z+\overline{z})^2-(z-\overline{z})^2}{4}=\frac{(z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2)-(z^2-2z\overline{z}+\overline{z}^2)}{4}$

$=\frac{4z\overline{z}}{4}=z\overline{z}=1$

다른 풀이

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 z가 허수이므로 $b\neq0$

$z+\frac{1}{z}=a+bi+\frac{1}{a+bi}=a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}$

$=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$

$z+\frac{1}{z}$이 실수이므로 $b-\frac{b}{a^2+b^2}=0$, $b\left(1-\frac{1}{a^2+b^2}\right)=0$

$b\neq0$이므로 $\frac{1}{a^2+b^2}=1$ $\therefore a^2+b^2=1$

$\therefore \frac{(z+\overline{z})^2-(z-\overline{z})^2}{4}=z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=1$

0307 답 ⑤

$z_1=a+bi$, $z_2=c+di$에서 $\overline{z_1}=a-bi$, $\overline{z_2}=c-di$

ㄱ. $z_1\overline{z_1}=10$에서 $z_1\overline{z_1}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=10$

ㄴ. $a^2+b^2=10$에서 a, b가 자연수이므로

$a=1$, $b=3$ 또는 $a=3$, $b=1$ ····· ㉠

$z_1+\overline{z_2}=(a+bi)+(c-di)=(a+c)+(b-d)i=3$이면

$a+c=3$, $b-d=0$

이때 c가 자연수이므로 $a+c=3$에서 $a<3$

따라서 $a=1$, $c=2$이고 $b=d=3$이므로 $c+d=5$

ㄷ. $(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=\{(a+c)+(b+d)i\}\{(a+c)-(b+d)i\}$

$=(a+c)^2-\{(b+d)i\}^2$

$=(a+c)^2+(b+d)^2$

즉, $(a+c)^2+(b+d)^2=41$이면 $a+c$, $b+d$가 모두 1보다 큰 자연수이므로

$a+c=4$, $b+d=5$ 또는 $a+c=5$, $b+d=4$

(i) $a+c=4$, $b+d=5$일 때,

㉠에 의하여

$a=1$이면 $b=3$, $c=3$, $d=2$

$a=3$이면 $b=1$, $c=1$, $d=4$

(ii) $a+c=5$, $b+d=4$일 때,

㉠에 의하여

$a=1$이면 $b=3$, $c=4$, $d=1$

$a=3$이면 $b=1$, $c=2$, $d=3$

(i), (ii)에서 $z_2\overline{z_2}=(c+di)(c-di)=c^2+d^2$의 최댓값은

$1^2+4^2=17$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0308 답 ①

(가)에서 $\overline{z}=-z$이므로 z는 순허수 또는 0이다.

(i) z가 순허수일 때,

$z=ai$ (a는 0이 아닌 실수)라 하면

(나)에서 $(ai)^2+(k^2-3k-4)ai+(k^2+2k-8)=0$

$(-a^2+k^2+2k-8)+a(k^2-3k-4)i=0$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-a^2+k^2+2k-8=0$, $a(k^2-3k-4)=0$

$a(k^2-3k-4)=0$에서 $a\neq0$이므로

$k^2-3k-4=0$, $(k+1)(k-4)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=4$

$k=-1$을 $-a^2+k^2+2k-8=0$에 대입하면

$-a^2-9=0$, $a^2=-9$

이때 $a^2=-9$를 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

$k=4$를 $-a^2+k^2+2k-8=0$에 대입하면

$-a^2+16=0$, $a^2=16$

$\therefore a=-4$ 또는 $a=4$

즉, 조건을 만족시키는 실수 a가 존재하므로 $k=4$

(ii) $z=0$일 때,

(나)에서 $k^2+2k-8=0$

$(k+4)(k-2)=0$ $\therefore k=-4$ 또는 $k=2$

(i), (ii)에서 $k=4$ 또는 $k=-4$ 또는 $k=2$이므로 그 곱은

$4\times(-4)\times2=-32$

0309 답 ②

$i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$이므로

$i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^{200}$

$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+i^{196}(i+i^2+i^3+i^4)$

$=0+0+\cdots+0=0$

0310 답 ③

$(1+i)^2=2i$, $(1-i)^2=-2i$이므로

$(1+i)^{20}-(1-i)^{20}+2=\{(1+i)^2\}^{10}-\{(1-i)^2\}^{10}+2$

$=(2i)^{10}-(-2i)^{10}+2$

$=2^{10}i^{10}-2^{10}i^{10}+2=2$

0311 답 ③

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$$

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$$

$$\therefore \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{100}-\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{101}=(-i)^{100}-i^{101}=i^{100}-i^{101}$$

$$=(i^4)^{25}-(i^4)^{25}\times i=1-i$$

0312 답 ②

$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}+1=0$이므로

$$\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{1}{i^{99}}$$

$$=\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{i^{92}}\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^{97}}+\frac{1}{i^{98}}+\frac{1}{i^{99}}$$

$$=\frac{1}{i^{97}}+\frac{1}{i^{98}}+\frac{1}{i^{99}}=\frac{1}{i^{4\times24+1}}+\frac{1}{i^{4\times24+2}}+\frac{1}{i^{4\times24+3}}$$

$$=\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}=\frac{1}{i}-1-\frac{1}{i}=-1$$

따라서 $a=-1$, $b=0$이므로 $a-b=-1$

0313 답 ①

$z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i}{2}=-i$이므로

$$z+z^2+z^3+\cdots+z^{10}$$

$$=(-i)+(-i)^2+(-i)^3+\cdots+(-i)^{10}$$

이때 $(-i)+(-i)^2+(-i)^3+(-i)^4=-i-1+i+1=0$이므로

$$z+z^2+z^3+\cdots+z^{10}$$

$$=(-i)+(-i)^2+(-i)^3+\cdots+(-i)^{10}$$

$$=\{(-i)+(-i)^2+(-i)^3+(-i)^4\}$$

$$+\{(-i)^5+(-i)^6+(-i)^7+(-i)^8\}+(-i)^9+(-i)^{10}$$

$$=-i^9+i^{10}=-1-i$$

0314 답 ⑤

주어진 식의 좌변을 정리하면

$$i+2i^2+3i^3+\cdots+1001i^{1001}$$

$$=(i+2i^2+3i^3+4i^4)+i^4(5i+6i^2+7i^3+8i^4)$$

$$+\cdots+i^{996}(997i+998i^2+999i^3+1000i^4)+1001i^{1001}$$

$$=(i-2-3i+4)+(5i-6-7i+8)$$

$$+\cdots+(997i-998-999i+1000)+1001i$$

$$=(2-2i)+(2-2i)+\cdots+(2-2i)+1001i$$

$$=250(2-2i)+1001i$$

$$=500-500i+1001i$$

$$=500+501i$$

따라서 $a=500$, $b=501$이므로 $a+b=1001$

0315 답 0

$$z^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z^3=zz^2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{-4}{4}=-1 \quad \cdots\cdots \text{ⓘ}$$

$$\therefore z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$$

$$=z+z^2+z^3+zz^3+z^2z^3+(z^3)^2$$

$$=z+z^2+(-1)+(-z)+(-z^2)+1$$

$$=0 \quad \cdots\cdots \text{ⓘⓘ}$$

채점 기준	
ⓘ z^2, z^3의 값 구하기	50%
ⓘⓘ 주어진 식의 값 구하기	50%

다른 풀이

$z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$에서

$2z-1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱하면

$4z^2-4z+1=-3$

$\therefore z^2-z+1=0$

$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$을 z^2-z+1로 나누면

$$\begin{array}{r|l} & z^4+2z^3+2z^2+z \\ \hline z^2-z+1 & z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z \\ & z^6-z^5+z^4 \\ \hline & 2z^5+z^3 \\ & 2z^5-2z^4+2z^3 \\ \hline & 2z^4-z^3+z^2 \\ & 2z^4-2z^3+2z^2 \\ \hline & z^3-z^2+z \\ & z^3-z^2+z \\ \hline & 0 \end{array}$$

$$\therefore z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$$

$$=(z^2-z+1)(z^4+2z^3+2z^2+z)$$

$$=0$$

0316 답 ⑤

$$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2=\frac{2}{-2i}=-\frac{1}{i}=-\frac{i}{i^2}=i$$

$$\therefore \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{8n}+\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{8n}=\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^{4n}+\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2\right\}^{4n}$$

$$=(-i)^{4n}+i^{4n}$$

$$=\{(-i)^4\}^n+(i^4)^n$$

$$=1^n+1^n$$

$$=1+1=2$$

0317 답 ⑤

$i+i^2+i^3+i^4=i+(-1)+(-i)+1=0$이므로

$$f(n)=i+i^2+i^3+i^4+\cdots+i^n$$

$$=(i+i^2+i^3+i^4)+i^4(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+i^n$$

따라서 음이 아닌 정수 a에 대하여

$f(4a+1)=i$, $f(4a+2)=i-1$, $f(4a+3)=-1$, $f(4a+4)=0$

이므로 $f(k)=i$가 되려면 $k=4a+1$ 꼴이어야 한다.

따라서 100 이하의 자연수 k는 1, 5, 9, …, 97의 25개이다.

0318 답 ④

$z^2=\left(\frac{\sqrt{2}i}{1-i}\right)^2=\frac{-2}{-2i}=\frac{1}{i}=-i$

$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$

$z^6=z^2z^4=(-i)\times(-1)=i$

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$

따라서 $z^n=1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 8이다.

참고 $z^3=zz^2=-zi=\frac{\sqrt{2}}{1-i}$,

$z^5=zz^4=-z=\frac{-\sqrt{2}i}{1-i}$,

$z^7=zz^6=zi=\frac{-\sqrt{2}}{1-i}$

이므로 z^3, z^5, z^7은 1이 아니다.

0319 답 ⑤

$z=\frac{2}{1+\sqrt{3}i}=\frac{2(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$이므로

$z^2=\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{-2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$z^3=zz^2=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{-4}{4}=-1$

$z^6=(z^3)^2=(-1)^2=1$

따라서 $z^n=-1$을 만족시키는 자연수 n은

$n=6k+3$ (k는 음이 아닌 정수) 꼴이어야 하므로

200 이하의 자연수 n은 3, 9, 15, …, 195의 33개이다.

0320 답 ③

$z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$이므로

$\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}-\frac{1}{z^8}+\cdots+\frac{1}{z^{30}}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{1}{i^{15}}$

이때 $\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}=\frac{1}{i}+1-\frac{1}{i}-1=0$이므로

$\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}-\frac{1}{z^8}+\cdots+\frac{1}{z^{30}}$

$=\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}+\cdots+\frac{1}{i^{15}}$

$=\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^4}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}\right)$

$+\frac{1}{i^8}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^4}\right)+\frac{1}{i^{13}}-\frac{1}{i^{14}}+\frac{1}{i^{15}}$

$=\frac{1}{i^{13}}-\frac{1}{i^{14}}+\frac{1}{i^{15}}$

$=\frac{1}{i^{4\times3+1}}-\frac{1}{i^{4\times3+2}}+\frac{1}{i^{4\times3+3}}$

$=\frac{1}{i}-\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}$

$=\frac{1}{i}+1-\frac{1}{i}=1$

0321 답 i

$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\frac{2i}{2}=i$이므로

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n=-i$에서 $i^n=-i$

$i^1=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$이므로 $i^n=-i$를 만족시키는 자연수 n의 최솟값은 3이다. …… ⓘ

$\therefore\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{6n}=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{18}=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^9=\left(\frac{2i}{2}\right)^9$

$=i^9=i^{4\times2+1}=i$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 자연수 n의 최솟값 구하기	60 %
ⓘⓘ $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{6n}$의 값 구하기	40 %

0322 답 25

$(1-i)^2=-2i$이므로 $(1-i)^{2n}=2^ni^n$에서

$(-2i)^n=2^ni^n$, $2^n\times(-i)^n=2^ni^n$

$\therefore(-i)^n=i^n$

$(-i)^1=-i$, $(-i)^2=-1$, $(-i)^3=i$, $(-i)^4=1$, …이므로

$(-i)^n=i^n$를 만족시키는 자연수 n은

$n=4k+3$ (k는 음이 아닌 정수) 꼴이다.

따라서 100 이하의 자연수 n은 3, 7, 11, …, 99의 25개이다.

0323 답 ③

$z^2=\left(\frac{\sqrt{2}i}{1+i}\right)^2=\frac{-2}{2i}=-\frac{1}{i}=i$이므로

$z^4=(z^2)^2=i^2=-1$

$z^6=z^2z^4=i\times(-1)=-i$

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$

$z^{1235}\times z^n=z^{88}$에서

$z^{8\times154+3}\times z^n=z^{8\times11}$

$z^3\times z^n=1$

$\therefore z^{n+3}=1$

따라서 $n+3$은 8의 배수이어야 하므로

100 이하의 자연수 n은 5, 13, 21, …, 93의 12개이다.

참고 복소수 z에 대하여 $z^n=1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값이 8이면 자연수 k에 대하여 다음이 성립한다.

$z=z^{8k+1}$, $z^2=z^{8k+2}$, $z^3=z^{8k+3}$, $z^4=z^{8k+4}$,

$z^5=z^{8k+5}$, $z^6=z^{8k+6}$, $z^7=z^{8k+7}$, $z^8=z^{8k+8}$

따라서 z^n의 값은 8개의 값이 그 순서대로 반복된다.

0324 답 ⑤

$i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$이므로

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$

$=\left(i^3+\frac{2}{i}\right)+\left(i^4+\frac{3}{i^2}\right)+\left(i^5+\frac{4}{i^3}\right)+\cdots+\left(i^{102}+\frac{101}{i^{100}}\right)$

$=(i^3+i^4+i^5+\cdots+i^{102})+\left(\frac{2}{i}+\frac{3}{i^2}+\frac{4}{i^3}+\cdots+\frac{101}{i^{100}}\right)$

$=\{i^2(i+i^2+i^3+i^4)+i^6(i+i^2+i^3+i^4)+\cdots+i^{98}(i+i^2+i^3+i^4)\}$

$+\left\{\left(\frac{2}{i}-3-\frac{4}{i}+5\right)+\left(\frac{6}{i}-7-\frac{8}{i}+9\right)\right.$

$\left.+\cdots+\left(\frac{98}{i}-99-\frac{100}{i}+101\right)\right\}$

$=(0+0+\cdots+0)+\left\{\left(2-\frac{2}{i}\right)+\left(2-\frac{2}{i}\right)+\cdots+\left(2-\frac{2}{i}\right)\right\}$

$=0+25\left(2-\frac{2}{i}\right)=50-\frac{50}{i}$

$=50+50i$

0325 답 24

$z=\frac{\sqrt{2}}{1+i}$라 하면

$z^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\frac{2}{2i}=\frac{1}{i}=-i$,

$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=i^2=-1$, $z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$, …

$w=\frac{\sqrt{3}+i}{2}$라 하면

$w^2=\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^2=\frac{2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$,

$w^3=w^2\times w=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{\sqrt{3}+i}{2}=i$,

$w^6=(w^3)^2=i^2=-1$, $w^{12}=(w^6)^2=(-1)^2=1$, …

즉, $z^n+w^n=2$를 만족시키려면 $z^n=1$, $w^n=1$이어야 한다.

이때 $z^n=1$이려면 n은 8의 배수이어야 하고 $w^n=1$이려면 n은 12의 배수이어야 하므로 구하는 자연수 n의 최솟값은 8과 12의 최소공배수인 24이다.

0326 답 ⑤

z^2이 음의 실수이려면 z는 순허수이어야 하므로

$a^2-1=0$, $a-1\neq0$

$a^2-1=0$에서 $(a+1)(a-1)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=1$

이때 $a\neq1$이므로 $a=-1$, $z=-2i$

$\frac{(z-\overline{z})i}{4}=\frac{(-2i-2i)i}{4}=\frac{-4i^2}{4}=1$이므로

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n=1$이 되도록 하는 100 이하의 자연수 n의 개수를 구하면

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{-2i}{2}=-i$

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4=\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^2=(-i)^2=i^2=-1$

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6=\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4=(-i)\times(-1)=i$

$\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^8=\left\{\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^4\right\}^2=(-1)^2=1$

⋮

따라서 $\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n=1$이 되도록 하는 100 이하의 자연수 n은

8, 16, 24, …, 96의 12개이다.

0327 답 ③

① $\sqrt{-2}\sqrt{3}=\sqrt{(-2)\times3}=\sqrt{-6}$

② $\sqrt{-2}\sqrt{-5}=-\sqrt{(-2)\times(-5)}=-\sqrt{10}$

③ $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-2}}=-\sqrt{\frac{3}{-2}}=-\sqrt{-\frac{3}{2}}$

④ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{-3}{5}}=\sqrt{-\frac{3}{5}}$

⑤ $\frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-2}}=\sqrt{\frac{-3}{-2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

0328 답 ④

① $a<0$, $b<0$이므로 $a^2>0$, $ab>0$

$\therefore \sqrt{a^3b}=\sqrt{a^2\times ab}=\sqrt{a^2}\sqrt{ab}=|a|\sqrt{ab}=-a\sqrt{ab}$

② $a<0$, $b<0$이므로 $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$

③ $a<0$, $b<0$이므로 $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

④ $a^2>0$, $b<0$이므로

$\sqrt{\frac{b}{a^2}}=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}=\frac{\sqrt{b}}{|a|}=-\frac{\sqrt{b}}{a}$

⑤ $a<0$, $b<0$이므로

$\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=|a|\times|b|=(-a)\times(-b)=ab$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0329 답 ⑤

$\sqrt{\frac{x+2}{x-7}}=-\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-7}}$이므로

$x+2\geq0$, $x-7<0$

따라서 $x\geq-2$, $x<7$이므로 정수 x는

-2, -1, 0, …, 6의 9개이다.

0330 답 ②

$\sqrt{-3}\sqrt{-27}+2\sqrt{3}\sqrt{-9}+\frac{\sqrt{54}}{\sqrt{-2}}$

$=-\sqrt{81}+2\sqrt{-27}-\sqrt{-27}$

$=-9+6\sqrt{3}i-3\sqrt{3}i$

$=-9+3\sqrt{3}i$

0331 답 ⑤

① $\sqrt{-3}\sqrt{-12}+\sqrt{-27}\sqrt{3}=-\sqrt{36}+\sqrt{-81}$

$=-6+9i$

② $\sqrt{-2}(\sqrt{6}-\sqrt{-32})=\sqrt{-2}\sqrt{6}-\sqrt{-2}\sqrt{-32}$

$=\sqrt{-12}+\sqrt{64}=8+2\sqrt{3}i$

③ $\frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}}-\sqrt{-9}\sqrt{4}=\sqrt{8}-\sqrt{-36}$

$=2\sqrt{2}-6i$

④ $\frac{\sqrt{-25}\sqrt{2}}{\sqrt{-5}}-\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{-5}}=\frac{\sqrt{-50}}{\sqrt{-5}}+\sqrt{-5}$

$=\sqrt{10}+\sqrt{5}i$

⑤ $\sqrt{-2}\sqrt{-6}-\frac{\sqrt{-21}}{\sqrt{-7}}=-\sqrt{12}-\sqrt{3}$

$=-2\sqrt{3}-\sqrt{3}=-3\sqrt{3}$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

0332 답 ④

$(1+2i)x+(1-i)y=-3$에서

$(x+y)+(2x-y)i=-3$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=-3$, $2x-y=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=-2$

$\therefore \sqrt{2x}\sqrt{y}+\frac{\sqrt{8x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{-2}\sqrt{-2}+\frac{\sqrt{-8}}{\sqrt{-2}}$

$=-\sqrt{4}+\sqrt{4}=0$

0333 답 ②

ㄱ. $-x<0$이므로 $\sqrt{x^2}+\sqrt{-x}\sqrt{-x}=\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2}=0$

ㄴ. $y-x<0$이므로

$\sqrt{(y-x)^2}=|y-x|=-(y-x)=x-y$

ㄷ. $x>0$, $-y<0$이므로 $\sqrt{x}\sqrt{-y}=\sqrt{-xy}=\sqrt{xy}i$

ㄹ. $x-y>0$, $y-x<0$이므로

$\dfrac{\sqrt{x-y}}{\sqrt{y-x}}=-\sqrt{\dfrac{x-y}{y-x}}=-\sqrt{-1}=-i$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0334 답 ⑤

$z=\sqrt{-2}\sqrt{-18}+\dfrac{\sqrt{-36}}{\sqrt{-4}}-\sqrt{-3^2}-\sqrt{(-3)^2}+ai+a$

$=-\sqrt{36}+\sqrt{9}-\sqrt{-9}-\sqrt{9}+ai+a$

$=-6+3-3i-3+ai+a$

$=(a-6)+(a-3)i$

z^2이 실수가 되려면 z의 실수부분과 허수부분의 곱이 0이어야 하므로

$(a-6)(a-3)=0$ $\therefore a=3$ 또는 $a=6$

따라서 모든 a의 값의 곱은 $3\times6=18$

0335 답 $2i$

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이고 $ab\neq0$이므로 $a<0$, $b<0$

$a<0$이므로 $-a>0$

$\therefore \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}}=\sqrt{\dfrac{a}{-a}}=\sqrt{-1}=i$ …… ⓘ

$a<b$이므로 $a-b<0$, $b-a>0$

$\therefore \dfrac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{a-b}}=-\sqrt{\dfrac{b-a}{a-b}}=-\sqrt{\dfrac{-(a-b)}{a-b}}$

$=-\sqrt{-1}=-i$ …… ⓘⓘ

$\therefore \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}}-\dfrac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{a-b}}=i-(-i)=2i$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}}$ 간단히 하기	40 %
ⓘⓘ $\dfrac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{a-b}}$ 간단히 하기	40 %
ⓘⓘⓘ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{-a}}-\dfrac{\sqrt{b-a}}{\sqrt{a-b}}$ 간단히 하기	20 %

0336 답 ⑤

$\sqrt{\dfrac{a}{b}}=-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$에서 $a>0$, $b<0$

① $a>0$, $b<0$에서 $ab<0$이므로 $|ab|=-ab$

② $b<0$이므로 $\sqrt{ab^2}=\sqrt{a}\sqrt{b^2}=\sqrt{a}\times|b|=-b\sqrt{a}$

③ $a>0$, $b<0$에서 $a-b>0$이므로 $|a-b|=a-b$

④ $a>0$, $b<0$이므로 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

⑤ $-a<0$, $-b>0$이므로 $\sqrt{-a}\sqrt{-b}=\sqrt{(-a)(-b)}=\sqrt{ab}$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

0337 답 (1) $a<0$, $b<0$, $c>0$ (2) $-2a$

(1) $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0$, $b<0$

$\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{c}{b}}$에서 $b<0$, $c>0$ …… ⓘ

(2) $a<0$, $b<0$이므로 $a+b<0$

$b<0$, $c>0$이므로 $b-c<0$

$a<0$, $c>0$이므로 $c-a>0$ …… ⓘⓘ

$\therefore \sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{(b-c)^2}+|c-a|$

$=|a+b|-|b-c|+|c-a|$

$=-(a+b)+(b-c)+(c-a)$

$=-a-b+b-c+c-a=-2a$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a, b, c의 부호 정하기	30 %
ⓘⓘ $a+b$, $b-c$, $c-a$의 부호 정하기	30 %
ⓘⓘⓘ $\sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{(b-c)^2}+|c-a|$ 간단히 하기	40 %

0338 답 ⑤

$\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{y+2}}=-\sqrt{\dfrac{x+1}{y+2}}$에서

$x+1>0$, $y+2<0$ ($\because x\neq-1$)

따라서 $x>-1$, $-y>2$이므로 $x-y>1$

$\therefore \sqrt{(x+1)^2}-\sqrt{(y+2)^2}-\sqrt{(x-y)^2}$

$=|x+1|-|y+2|-|x-y|$

$=(x+1)+(y+2)-(x-y)$

$=x+1+y+2-x+y$

$=2y+3$

0339 답 ④

(나)에서 $\dfrac{\sqrt{b-2}}{\sqrt{a+2}}=-\sqrt{\dfrac{b-2}{a+2}}$이므로

$a+2<0$, $b-2>0$ $\therefore a<-2$, $b>2$

a가 음수, b가 양수이고, (가)에서 $b+c<a$, 즉 $0<b<a-c$이므로

$c<a$

$\therefore c<a<b$

0340 답 ②

$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$에서 $a>0$, $b<0$

$z=\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a}+\sqrt{-b}i$이므로

$(2+i)z+(1-i)\bar{z}$

$=(2+i)(\sqrt{a}+\sqrt{-b}i)+(1-i)(\sqrt{a}-\sqrt{-b}i)$

$=(2\sqrt{a}+2\sqrt{-b}i+\sqrt{a}i-\sqrt{-b})+(\sqrt{a}-\sqrt{-b}i-\sqrt{a}i-\sqrt{-b})$

$=(3\sqrt{a}-2\sqrt{-b})+\sqrt{-b}i$

즉, $(3\sqrt{a}-2\sqrt{-b})+\sqrt{-b}i=1+i$이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$3\sqrt{a}-2\sqrt{-b}=1$, $\sqrt{-b}=1$

$\sqrt{-b}=1$에서 $b=-1$

$3\sqrt{a}-2\sqrt{-b}=1$에서 $3\sqrt{a}-2=1$ $\therefore a=1$

$\therefore ab=1\times(-1)=-1$

0341 답 ④

(가)에서 $a<0$, $b<0$

(나)에서 $z=a^2+bi-2a-3-i=(a^2-2a-3)+(b-1)i$

이때 z^2이 음수이려면 z의 실수부분은 0이어야 하므로

$a^2-2a-3=0$, $(a+1)(a-3)=0$

$\therefore a=-1\ (\because a<0)$

$\therefore z=(b-1)i$

(나)에서 $z^2=-9$이므로

$\{(b-1)i\}^2=-9$, $b^2-2b-8=0$

$(b+2)(b-4)=0$ $\therefore b=-2\ (\because b<0)$

$\therefore a-b=-1-(-2)=1$

최고수준 도전 기출 72~73쪽

0342 답 ④

전략 $z=a+bi$, $\omega=c+di$라 하고 주어진 조건을 이용하여 a, b, c, d에 대한 식을 세운다.

$z=a+bi$, $\omega=c+di$ (a, b, c, d는 실수)라 하면

$\overline{z}=a-bi$, $\overline{\omega}=c-di$

(가)에서 $a+c=b+d$ ····· ㉠

(나)에서 $a-d=6$ $\therefore d=a-6$ ····· ㉡

(다)에서 $\overline{z}-\omega=(a-bi)-(c+di)=(a-c)-(b+d)i$이므로

$a-c=4$ $\therefore c=a-4$ ····· ㉢

㉡, ㉢을 ㉠에 대입하면

$a+(a-4)=b+(a-6)$ $\therefore b=a+2$

$z\omega=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$이므로

$z\omega$의 실수부분은

$ac-bd=a(a-4)-(a+2)(a-6)$

$=a^2-4a-(a^2-4a-12)$

$=12$

0343 답 ③

전략 $z=a+bi$, $\omega=c+di$라 하고 a, b, c, d가 모두 0이 아닌 실수임을 이용하여 보기의 식의 참, 거짓을 판별한다.

$z=a+bi$, $\omega=c+di$ (a, b, c, d는 모두 0이 아닌 실수)라 하면

$z+\omega=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

$z+\omega$의 실수부분이 0이므로 $a+c=0$ $\therefore c=-a$

$z\omega=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

$z\omega$의 허수부분이 0이므로

$ad+bc=0$, $ad-ab=0\ (\because c=-a)$

$a(d-b)=0$ $\therefore b=d\ (\because a\neq 0)$

$\therefore \omega=-a+bi$

ㄱ. $z^2+\omega^2=(a+bi)^2+(-a+bi)^2$

$=(a^2+2abi-b^2)+(a^2-2abi-b^2)$

$=2(a^2-b^2)$

이때 $|a|<|b|$이면 $z^2+\omega^2<0$이다.

ㄴ. $z-\omega=(a+bi)-(-a+bi)=2a\neq 0$

ㄷ. $z\omega=(a+bi)(-a+bi)=-(a^2+b^2)<0$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

0344 답 13

전략 곱셈 공식과 인수분해 공식을 이용하여 식을 변형한 후 복소수가 서로 같을 조건을 이용하여 m, n에 대한 식을 세운다.

$(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$이므로

$(-1)^2=3+6i+2\alpha\beta$, $2\alpha\beta=-2-6i$

$\therefore \alpha\beta=-1-3i$

$\alpha^3-\beta^3=13i$에서

$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=13i$

$(\alpha-\beta)(3+6i-1-3i)=13i$

$\therefore \alpha-\beta=\dfrac{13i}{2+3i}=\dfrac{13i(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$

$=3+2i$

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha-\beta=3+2i$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$\alpha=1+i$, $\beta=-2-i$

$\alpha^3=(1+i)^3=1+3i+3i^2+i^3$

$=-2+2i$

$\beta^3=(-2-i)^3=\{-(2+i)\}^3$

$=-(2^3+3\times 2^2\times i+3\times 2\times i^2+i^3)$

$=-8-12i+6+i=-2-11i$

$m\alpha^3+n\beta^3=-26$에서

$m(-2+2i)+n(-2-11i)=-26$

$(-2m-2n)+(2m-11n)i=-26$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$-2m-2n=-26$, $2m-11n=0$

두 식을 연립하여 풀면 $m=11$, $n=2$

$\therefore m+n=13$

0345 답 ④

전략 $z^2\omega^2=(z\omega)^2$임을 이용하여 $z\omega$의 값을 구하고, $\dfrac{z+\omega}{z-\omega}=\dfrac{z^2+z\omega}{z^2-z\omega}$임을 이용하여 보기의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $z=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$, $\omega=-\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{6}}{2}i$이면

$z-\omega=\sqrt{6}$이므로 $(z-\omega)^2=6$

ㄴ. $(z+\omega)^2=z^2+\omega^2+2z\omega=3i+(-3i)+2z\omega=2z\omega$이고

$z^2\omega^2=3i\times(-3i)=9$에서 $(z\omega)^2=9$이므로

$(z+\omega)^4=\{(z+\omega)^2\}^2$

$=(2z\omega)^2=4(z\omega)^2$

$=4\times 9=36$

ㄷ. $\frac{z+\omega}{z-\omega}=\frac{z(z+\omega)}{z(z-\omega)}=\frac{z^2+z\omega}{z^2-z\omega}$이고

$(z\omega)^2=9$에서 $z\omega=\pm3$이므로

(i) $z\omega=3$일 때,

$$\frac{z+\omega}{z-\omega}=\frac{z^2+z\omega}{z^2-z\omega}=\frac{3i+3}{3i-3}=\frac{i+1}{i-1}$$
$$=\frac{(i+1)^2}{(i-1)(i+1)}=\frac{2i}{-2}=-i$$

(ii) $z\omega=-3$일 때,

$$\frac{z+\omega}{z-\omega}=\frac{z^2+z\omega}{z^2-z\omega}=\frac{3i-3}{3i+3}=\frac{i-1}{i+1}$$
$$=\frac{(i-1)^2}{(i+1)(i-1)}=\frac{-2i}{-2}=i$$

(i), (ii)에서 $\frac{z+\omega}{z-\omega}$는 순허수이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

참고 ㄱ에서 $z=a+bi$, $\omega=c+di$(a, b, c, d는 실수)라 하면

$z^2=3i$, $\omega^2=-3i$이므로 $a^2-b^2+2abi=3i$, $c^2-d^2+2cdi=-3i$

따라서 $a^2-b^2=0$, $c^2-d^2=0$, $ab=\frac{3}{2}$, $cd=-\frac{3}{2}$이므로

$|a|=|b|=|c|=|d|=\sqrt{\frac{3}{2}}$을 만족시키는 a, b, c, d의 값 중에서 ㄱ이 성립하지 않는 예를 찾을 수 있다.

0346 답 94

전략 $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$의 거듭제곱의 값이 반복되는 규칙을 찾아서 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n$의 값이 -2 또는 2인 경우로 나누어 $m+n$의 최댓값을 구한다.

$z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$라 하면

$z^2=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{2i}{2}=i$

$z^3=zz^2=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\times i=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$z^4=(z^2)^2=i^2=-1$

$z^5=zz^4=-z=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$

$z^6=z^2z^4=i\times(-1)=-i$

$z^7=z^3z^4=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\times(-1)=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$

⋮

즉, $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m$의 값은 위의 8개의 값이 그 순서대로 반복된다.

이때 $\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n\right\}^2=4$에서

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=-2$ 또는 $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=2$

(i) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=-2$인 경우

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=-1$, $i^n=1$이므로

$m=4, 12, 20, \cdots, 44$

$n=4, 8, 12, \cdots, 48$

따라서 $m=44$, $n=48$일 때, $m+n$은 최댓값 92를 갖는다.

(ii) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m-i^n=2$인 경우

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^m=1$, $i^n=-1$이므로

$m=8, 16, 24, \cdots, 48$

$n=2, 6, 10, \cdots, 46$

따라서 $m=48$, $n=46$일 때, $m+n$은 최댓값 94를 갖는다.

(i), (ii)에서 $m+n$의 최댓값은 94이다.

0347 답 ①

전략 α의 거듭제곱과 β의 관계를 파악한 후 $\alpha^m\beta^n$을 α의 거듭제곱으로 나타낸다. α의 거듭제곱의 성질을 이용하여 $\alpha^m\beta^n=i$를 만족시키는 $m+2n$의 조건을 찾는다.

$\alpha^2=\left(\frac{2}{\sqrt{3}-i}\right)^2=\frac{4}{2-2\sqrt{3}i}=\frac{2}{1-\sqrt{3}i}$이므로 $\alpha^2=\beta$

$\therefore\ \alpha^m\beta^n=\alpha^m\alpha^{2n}=\alpha^{m+2n}$

한편

$\alpha^3=\alpha\alpha^2=\frac{2}{\sqrt{3}-i}\times\frac{2}{1-\sqrt{3}i}$

$=\frac{4}{-4i}=\frac{1}{-i}=i$

$\alpha^6=(\alpha^3)^2=i^2=-1$

$\alpha^9=\alpha^3\alpha^6=i\times(-1)=-i$

$\alpha^{12}=(\alpha^6)^2=(-1)^2=1$

따라서 $\alpha^{m+2n}=i$를 만족시키는 $m+2n$의 값이 될 수 있는 수는

3, 15, 27, 39, 51, 63, …

이때 m, n은 20 이하의 자연수이므로

$3\le m+2n\le60$

따라서 $m+2n$의 최댓값은 51이다.

0348 답 ③

전략 $\frac{z^2}{1+z}=k$(k는 실수)라 하고 주어진 식을 k에 대한 식으로 변형하거나 $\frac{z^2}{1+z}$이 실수이면 $\frac{z^2}{1+z}=\overline{\left(\frac{z^2}{1+z}\right)}$임을 이용하여 보기의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. $\frac{z^2}{1+z}=k$(k는 실수)라 하면 $1+z=\frac{z^2}{k}$이므로

$\overline{z}^2(1+z)=\overline{z}^2\times\frac{z^2}{k}=\frac{z^2\overline{z}^2}{k}=\frac{(z\overline{z})^2}{k}$

이때 $z\overline{z}$가 실수이므로 $\frac{(z\overline{z})^2}{k}$도 실수이다.

따라서 $\overline{z}^2(1+z)$는 실수이다.

ㄴ. $\frac{z^2}{1+z}$이 실수이므로 $\frac{z^2}{1+z}=\overline{\left(\frac{z^2}{1+z}\right)}$에서

$\frac{z^2}{1+z}=\frac{\overline{z}^2}{1+\overline{z}}$

$z^2(1+\overline{z})=\overline{z}^2(1+z)$, $z^2+z^2\overline{z}-\overline{z}^2-z\overline{z}^2=0$

$(z+\overline{z})(z-\overline{z})+z\overline{z}(z-\overline{z})=0$

$(z-\overline{z})(z+\overline{z}+z\overline{z})=0$

$\therefore\ z=\overline{z}$ 또는 $z+\overline{z}+z\overline{z}=0$

이때 z는 실수가 아니므로 $z\neq\overline{z}$

따라서 $z+\overline{z}+z\overline{z}=0$이므로

$(z+1)(\overline{z}+1)=z\overline{z}+z+\overline{z}+1=1$

ㄷ. $z=a+bi(a, b$는 실수, $b\neq0)$라 하면

$z+\overline{z}+z\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)+(a+bi)(a-bi)$

$=2a+a^2+b^2$

이때 $z+\overline{z}+z\overline{z}=0$이므로 $2a+a^2+b^2=0$

즉, $a=-\frac{1}{2}(a^2+b^2)<0$이므로 z의 실수부분은 음수이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0349 답 ④

전략 z^2+z가 실수이면 $z^2+z=\overline{z^2+z}$임을 이용하여 보기의 참, 거짓을 판별한다.

ㄱ. z^2+z가 실수이므로 $z^2+z=\overline{z^2+z}$에서

$z^2+z=\overline{z}^2+\overline{z}$, $z^2-\overline{z}^2+z-\overline{z}=0$

$(z-\overline{z})(z+\overline{z})+(z-\overline{z})=0$

$(z-\overline{z})(z+\overline{z}+1)=0$

$\therefore z=\overline{z}$ 또는 $z+\overline{z}=-1$

그런데 $b\neq0$이므로

$z\neq\overline{z}$

$\therefore z+\overline{z}=-1$

ㄴ. $z+\overline{z}=-1$이므로

$(a+bi)+(a-bi)=2a=-1$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$이므로 ····· ㉠

$z\overline{z}=\left(-\frac{1}{2}+bi\right)\left(-\frac{1}{2}-bi\right)=\frac{1}{4}+b^2>\frac{1}{4}$

ㄷ. $z^6=z^3$에서 $z^3(z^3-1)=0$

$z^3(z-1)(z^2+z+1)=0$

이때 $z\neq0$, $z\neq1$이므로

$z^2+z+1=0$

㉠에서 $z=-\frac{1}{2}+bi$이므로

$\left(-\frac{1}{2}+bi\right)^2+\left(-\frac{1}{2}+bi\right)+1=0$

$\frac{1}{4}-bi-b^2-\frac{1}{2}+bi+1=0$, $\frac{3}{4}-b^2=0$

따라서 $b^2=\frac{3}{4}$이므로

$a^2+b^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=1$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

05 이차방정식

난이도별 필수 기출 76~95쪽

0350 답 ②

$x^2+4x+7=0$에서

$x=-2\pm\sqrt{2^2-1\times7}=-2\pm\sqrt{3}i$

따라서 $a=-2$, $b=3$이므로

$a-b=-5$

0351 답 ①

이차방정식 $x^2-2x+a=0$의 한 근이 $3+\sqrt{2}$이므로 $x=3+\sqrt{2}$를 대입하면

$(3+\sqrt{2})^2-2(3+\sqrt{2})+a=0$

$(11+6\sqrt{2})-6-2\sqrt{2}+a=0$

$5+4\sqrt{2}+a=0$

$\therefore a=-5-4\sqrt{2}$

0352 답 4

이차방정식 $x^2-3x+a=0$의 한 근이 1이므로 $x=1$을 대입하면

$1-3+a=0$ $\therefore a=2$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$

따라서 $b=2$이므로 $ab=2\times2=4$

다른 풀이

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+b=3$, $1\times b=a$

따라서 $a=2$, $b=2$이므로 $ab=4$

0353 답 $x=-4$ 또는 $x=4$

(i) $x<0$일 때,

$x^2+x-12=0$, $(x+4)(x-3)=0$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=3$

그런데 $x<0$이므로 $x=-4$ ····· ⓘ

(ii) $x\geq0$일 때,

$x^2-x-12=0$, $(x+3)(x-4)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=4$

그런데 $x\geq0$이므로 $x=4$ ····· ⓘⓘ

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-4$ 또는 $x=4$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $x<0$일 때 해 구하기	40%
ⓘⓘ $x\geq0$일 때 해 구하기	40%
ⓘⓘⓘ 방정식의 해 구하기	20%

다른 풀이

$x^2=|x|^2$이므로 $|x|^2-|x|-12=0$

$(|x|+3)(|x|-4)=0$ $\therefore |x|=-3$ 또는 $|x|=4$

그런데 $|x|\geq 0$이므로 $|x|=4$

$\therefore x=-4$ 또는 $x=4$

참고 절댓값 기호를 포함한 방정식은

$|x-a|=\begin{cases}-x+a & (x<a)\\ x-a & (x\geq a)\end{cases}$임을 이용하여 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x의 값을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어 푼다. 이때 나눈 범위에 속하는 것만을 근으로 택한다.

0354 답 ③

$(x\circ x)+(4\circ x)+3=(x^2-x-x)+(4x-4-x)+3$

$=x^2+x-1$

따라서 $x^2+x-1=0$의 해는

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

0355 답 ⑤

주어진 방정식의 양변에 $\sqrt{2}+1$을 곱하면

$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)x^2-(\sqrt{2}+1)(2+\sqrt{2})x+(\sqrt{2}+1)\times 3=0$

$x^2-(4+3\sqrt{2})x+3+3\sqrt{2}=0$

$(x-1)(x-3-3\sqrt{2})=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3+3\sqrt{2}$

따라서 유리수가 아닌 근은 $3+3\sqrt{2}$이다.

참고 x^2의 계수가 무리수인 이차방정식은 x^2의 계수를 유리화한 후 근을 구한다.

✓ 중3 다시보기

무리수에 적당한 수를 곱하여 유리수로 고치는 것을 유리화라 한다.

x^2의 계수가 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$이면 등식의 양변에 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$를 곱하여 x^2의 계수를 유리화할 수 있다.

➡ $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b$

0356 답 ②

(i) $x<-1$일 때,

$x^2+(x+1)-1=0$

$x^2+x=0$, $x(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

그런데 $x<-1$이므로 이를 만족시키는 근은 없다.

(ii) $x\geq -1$일 때,

$x^2-(x+1)-1=0$

$x^2-x-2=0$, $(x+1)(x-2)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=2$

그런데 $x\geq -1$이므로 $x=-1$ 또는 $x=2$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 방정식의 모든 근의 곱은

$(-1)\times 2=-2$

0357 답 ①

이차방정식 $(t-1)x^2-(t^2+4)x+2t+3=0$의 한 근이 1이므로

$x=1$을 대입하면

$t-1-t^2-4+2t+3=0$

$t^2-3t+2=0$, $(t-2)(t-1)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=2$

이때 $t=1$이면 이차방정식이 될 수 없으므로 $t=2$

$t=2$를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-8x+7=0$, $(x-1)(x-7)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=7$

따라서 $a=7$이므로 7^{200}의 일의 자리의 숫자를 구하면

7의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 7, 9, 3, 1이 이 순서로 반복되므로 7^{200}의 일의 자리의 숫자는 7^4의 일의 자리의 숫자와 같은 1이다.

✓ 중1 다시보기

자연수의 거듭제곱의 일의 자리의 숫자는 일정하게 반복되는 특징이 있다.

① 2의 거듭제곱의 일의 자리 숫자 ➡ 2, 4, 8, 6이 반복

② 3의 거듭제곱의 일의 자리 숫자 ➡ 3, 9, 7, 1이 반복

③ 4의 거듭제곱의 일의 자리 숫자 ➡ 4, 6이 반복

④ 5의 거듭제곱의 일의 자리 숫자 ➡ 모두 5

⑤ 6의 거듭제곱의 일의 자리 숫자 ➡ 모두 6

⑥ 7의 거듭제곱의 일의 자리 숫자 ➡ 7, 9, 3, 1이 반복

⑦ 8의 거듭제곱의 일의 자리 숫자 ➡ 8, 4, 2, 6이 반복

⑧ 9의 거듭제곱의 일의 자리 숫자 ➡ 9, 1이 반복

0358 답 ②

(i) $1<x<2$일 때,

$[x]=1$이므로 주어진 방정식은

$x^2-3=0$

$x^2=3$에서 $x=\sqrt{3}$ ($\because 1<x<2$)

(ii) $2\leq x<3$일 때,

$[x]=2$이므로 주어진 방정식은

$x^2-4=0$

$x^2=4$에서 $x=2$ ($\because 2\leq x<3$)

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 곱은

$\sqrt{3}\times 2=2\sqrt{3}$

참고 실수 x에 대하여 x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$로 나타낼 때, $[\ \ ]$를 가우스 기호라 한다. 정수 n에 대하여

(1) $n\leq x<n+1$이면 $[x]=n$

(2) $[x]=n$이면 $n\leq x<n+1$

가우스 기호를 포함한 방정식은 위와 같은 성질을 이용하여 x의 값 또는 범위를 구한다.

0359 답 ②

$x^2-2=\sqrt{x^2}+\sqrt{(x+1)^2}$에서

$x^2-2=|x|+|x+1|$

(i) $x<-1$일 때,

$x^2-2=-x-(x+1)$, $x^2+2x-1=0$

$\therefore x=-1\pm\sqrt{2}$

그런데 $x<-1$이므로 $x=-1-\sqrt{2}$

(ii) $-1\le x<0$일 때,

$x^2-2=-x+(x+1)$, $x^2=3$

$\therefore x=\pm\sqrt{3}$

그런데 $-1\le x<0$이므로 이를 만족시키는 근은 없다.

(iii) $x\ge0$일 때,

$x^2-2=x+(x+1)$, $x^2-2x-3=0$

$(x+1)(x-3)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=3$

그런데 $x\ge0$이므로 $x=3$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 방정식의 근은

$x=-1-\sqrt{2}$ 또는 $x=3$

0360 답 ②

각 이차방정식의 판별식을 D라 하면

ㄱ. $D=1^2-4\times1\times7=-27<0$

즉, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄴ. $D=3^2-4\times1\times(-2)=17>0$

즉, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $\frac{D}{4}=(-2)^2-1\times5=-1<0$

즉, 서로 다른 두 허근을 갖는다.

ㄹ. $\frac{D}{4}=4^2-1\times16=0$

즉, 중근을 갖는다.

따라서 보기에서 허근을 갖는 이차방정식은 ㄱ, ㄷ이다.

0361 답 25

이차방정식 $x^2+10x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=5^2-a=0$ $\therefore a=25$

0362 답 6

이차방정식 $x^2+2(k-2)x+k^2-24=0$의 판별식을 D라 하면

$D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(k^2-24)>0$

$-4k+28>0$ $\therefore k<7$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개이다.

0363 답 ④

이차방정식 $x^2-2kx+k^2+3k-22=0$의 판별식을 D라 하면

$D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-k)^2-(k^2+3k-22)<0$

$-3k+22<0$ $\therefore k>\frac{22}{3}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 8이다.

0364 답 7

이차방정식 $x^2+2ax+a^2+4a-28=0$의 판별식을 D라 하면

$D\ge0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-(a^2+4a-28)\ge0$

$-4a+28\ge0$ $\therefore a\le7$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, …, 7의 7개이다.

0365 답 ③

이차방정식 $x^2-kx+k-1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$D=(-k)^2-4(k-1)=0$

$k^2-4k+4=0$, $(k-2)^2=0$

$\therefore k=2$

이를 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-2x+1=0$, $(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$

따라서 $a=1$이므로 $k+a=2+1=3$

0366 답 ⑤

이차방정식 $ax^2-4ax+3a+5=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(-2a)^2-a(3a+5)=0$

$a^2-5a=0$, $a(a-5)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=5$

이때 $a=0$이면 이차방정식이 될 수 없으므로 $a=5$

0367 답 ②

$\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0$, $b<0$ ($\because ab\ne0$)

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4b>0$

따라서 서로 다른 두 실근을 갖는다.

0368 답 ②

이차방정식 $(a+c)x^2+2bx+a-c=0$의 판별식을 D라 하면

$D>0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=b^2-(a+c)(a-c)>0$

$b^2-a^2+c^2>0$ $\therefore a^2<b^2+c^2$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 예각삼각형이다.

0369 답 ⑤

주어진 이차식이 완전제곱식이 되려면 x에 대한 이차방정식 $x^2+(k-1)x+k+1=0$의 판별식을 D라 할 때, $D=0$이어야 하므로

$D=(k-1)^2-4(k+1)=0$

$k^2-6k-3=0$

$\therefore\ k=3\pm2\sqrt{3}$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은

$(3+2\sqrt{3})+(3-2\sqrt{3})=6$

참고 이차식 ax^2+bx+c가 완전제곱식이면 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 중근을 가지므로 $b^2-4ac=0$이다.

0370 답 ④

이차방정식 $x^2-2ax+b^2=0$의 판별식을 D_1이라 하면 $D_1=0$이어야 하므로

$\frac{D_1}{4}=(-a)^2-b^2=0 \qquad \therefore\ a^2=b^2$

이차방정식 $x^2+ax+b^2+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2-4(b^2+1)=a^2-4b^2-4$

$=a^2-4a^2-4=-3a^2-4<0$

따라서 이차방정식 $x^2+ax+b^2+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

0371 답 ⑤

이차방정식 $x^2+4x-a+3=0$의 판별식을 D_1이라 하면 $D_1=0$이어야 하므로

$\frac{D_1}{4}=2^2-(-a+3)=0,\ a+1=0$

$\therefore\ a=-1$

$a=-1$을 $x^2-ax+b=0$에 대입하면 $x^2+x+b=0$

이차방정식 $x^2+x+b=0$의 판별식을 D_2라 하면 $D_2<0$이어야 하므로

$D_2=1^2-4b<0 \qquad \therefore\ b>\frac{1}{4}$

따라서 정수 b의 최솟값은 1이다.

0372 답 6

이차방정식 $3x^2+5x+a-7=0$의 판별식을 D_1이라 하면 $D_1>0$이어야 하므로

$D_1=5^2-4\times3\times(a-7)>0$

$-12a+109>0 \qquad \therefore\ a<\frac{109}{12}$

따라서 정수 a의 최댓값은 9이므로 $M=9$ ····· ⓘ

또 이차방정식 $x^2-3x+b=0$의 판별식을 D_2라 하면 $D_2<0$이어야 하므로

$D_2=(-3)^2-4b<0$

$-4b+9<0 \qquad \therefore\ b>\frac{9}{4}$

따라서 정수 b의 최솟값은 3이므로 $m=3$ ····· ⓘⓘ

$\therefore\ M-m=9-3=6$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ M의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ m의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $M-m$의 값 구하기	20 %

0373 답 ①

이차방정식 $x^2-2(m+a)x+m^2+m+b=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=\{-(m+a)\}^2-(m^2+m+b)=0$

$(2a-1)m+a^2-b=0$

이 등식이 m에 대한 항등식이므로

$2a-1=0,\ a^2-b=0$

$\therefore\ a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{4}$

$\therefore\ 12(a+b)=12\times\frac{3}{4}=9$

0374 답 17

이차방정식 $ax^2+4x-a+\sqrt{b}=0$의 판별식을 D_1이라 하면 $D_1=0$이어야 하므로

$\frac{D_1}{4}=2^2-a(-a+\sqrt{b})=0$

$a^2-\sqrt{b}a+4=0$ ····· ㉠ ····· ⓘ

서로 다른 실수 a의 개수가 2이므로 a에 대한 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉠의 판별식을 D_2라 하면 $D_2>0$이어야 하므로

$D_2=(-\sqrt{b})^2-16>0$ ····· ⓘⓘ

$b-16>0 \qquad \therefore\ b>16$

따라서 자연수 b의 최솟값은 17이다. ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a에 대한 이차방정식 세우기	30 %
ⓘⓘ a에 대한 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가질 조건 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ b의 최솟값 구하기	40 %

0375 답 ④

$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}$에서 $a<0,\ b>0\ (\because\ b\neq0)$

$\therefore\ ab<0$

각 이차방정식의 판별식을 D라 하면

① $D=a^2+4b>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

② $D=b^2-4a>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

③ $D=1-4ab>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

④ $\frac{D}{4}=1+ab$의 부호를 정할 수 없으므로 근을 판별할 수 없다.

⑤ $D=b^2-4ab>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 항상 서로 다른 두 실근을 갖는 이차방정식이 아닌 것은 ④이다.

0376 답 ③

이차방정식 $ax^2+4bx-a+4b-\frac{k}{a}=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2b)^2-a\left(-a+4b-\frac{k}{a}\right)$

$=4b^2+a^2-4ab+k$

$=(a-2b)^2+k$

ㄱ. $a=2b$, $k=0$이면 $\frac{D}{4}=0$

즉, 중근을 갖는다.

ㄴ. $(a-2b)^2\geq 0$이므로 $k>0$이면 $\frac{D}{4}>0$

즉, 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $k<0$이면 $\frac{D}{4}$의 부호를 정할 수 없으므로 근을 판별할 수 없다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0377 답 ③

이차방정식 $(4n-3)x^2+2nx+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=n^2-(4n-3)=n^2-4n+3$

$g(n)=n^2-4n+3$이라 하면

$g(0)=3>0$이므로 $f(0)=2$

$g(1)=0$이므로 $f(1)=1$

$g(2)=-1<0$이므로 $f(2)=0$

$\therefore f(0)+f(1)-f(2)=2+1-0=3$

0378 답 ④

이차방정식 $x^2+2(k+2a)x-ak^2-bk+c=0$의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(k+2a)^2-(-ak^2-bk+c)=0$

$(a+1)k^2+(4a+b)k+4a^2-c=0$

이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$a+1=0$, $4a+b=0$, $4a^2-c=0$

따라서 $a=-1$, $b=4$, $c=4$이므로

$a+b+c=7$

0379 답 ④

이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 판별식을 D_1, 이차방정식 $x^2-bx-a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_1=a^2-4b$, $D_2=b^2+4a$

ㄱ. $a+b>0$, $ab>0$이면 $a>0$, $b>0$

따라서 $D_1=a^2-4b$의 부호는 알 수 없지만 $D_2=b^2+4a>0$이다.

즉, ㉡이 서로 다른 두 실근을 가지므로 ㉠, ㉡ 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

ㄴ. $\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$에서 $a<0$, $b<0$

따라서 $D_1=a^2-4b>0$이지만 $D_2=b^2+4a$의 부호는 알 수 없다.

즉, ㉠은 서로 다른 두 실근을 갖지만 ㉡의 근을 판별할 수 없다.

ㄷ. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\frac{a}{b}}$에서 $a>0$, $b<0$

따라서 $D_1=a^2-4b>0$, $D_2=b^2+4a>0$이다.

즉, ㉠, ㉡ 모두 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0380 답 ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{1}{2}$, $\alpha\beta=\frac{5}{2}$

$\therefore (\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1$

$=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}+1=4$

0381 답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=5$

$\therefore \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{2}{5}$

0382 답 ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=7$

$\therefore \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$

$=(-2)^2-7=-3$

0383 답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=\frac{2}{3}$

$\therefore \frac{\alpha^2}{\beta}+\frac{\beta^2}{\alpha}=\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha\beta}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

$=\frac{2^3-3\times\frac{2}{3}\times 2}{\frac{2}{3}}=\frac{4}{\frac{2}{3}}=6$

0384 답 15

β가 주어진 이차방정식의 근이므로

$\beta^2-3\beta-6=0$ $\therefore \beta^2=3\beta+6$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$

$\therefore 3\alpha+\beta^2=3\alpha+(3\beta+6)=3(\alpha+\beta)+6$

$=3\times 3+6=15$

0385 답 ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=7$

$\therefore \frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2}{\alpha\beta}$

$=\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+\frac{(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=\frac{2\times 2}{7}+\frac{2^2-3\times 7}{7}=-\frac{13}{7}$

0386 답 $\sqrt{10}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=4$ …… ⓘ

이때 $\alpha+\beta>0$, $\alpha\beta>0$에서 $\alpha>0$, $\beta>0$이므로

$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\beta$

$=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$

$=6+2\times2=10$ …… ⓘⓘ

$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}>0$이므로 $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{10}$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	30%
ⓘⓘ $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$의 값 구하기	50%
ⓘⓘⓘ $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$의 값 구하기	20%

0387 답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=-1$

① $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=-1\times4=-4$

② $(\alpha+2)(\beta+2)=\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4$

$=-1+2\times4+4=11$

③ $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$=4^2-4\times(-1)=20$

④ $\dfrac{2+\alpha}{2-\alpha}+\dfrac{2+\beta}{2-\beta}=\dfrac{(2+\alpha)(2-\beta)+(2+\beta)(2-\alpha)}{(2-\alpha)(2-\beta)}$

$=\dfrac{2(4-\alpha\beta)}{4-2(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$

$=\dfrac{2\times(4+1)}{4-2\times4-1}=-2$

⑤ $\dfrac{\beta}{\alpha-3}+\dfrac{\alpha}{\beta-3}=\dfrac{\beta(\beta-3)+\alpha(\alpha-3)}{(\alpha-3)(\beta-3)}$

$=\dfrac{\alpha^2+\beta^2-3(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9}$

$=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-3(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-3(\alpha+\beta)+9}$

$=\dfrac{4^2-2\times(-1)-3\times4}{-1-3\times4+9}=-\dfrac{3}{2}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0388 답 7

α, β가 주어진 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2-3\alpha+4=0$, $\beta^2-3\beta+4=0$

$\therefore \alpha^2-\alpha+1=2\alpha-3$, $\beta^2-\beta+1=2\beta-3$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=4$

$\therefore (\alpha^2-\alpha+1)(\beta^2-\beta+1)=(2\alpha-3)(2\beta-3)$

$=4\alpha\beta-6(\alpha+\beta)+9$

$=4\times4-6\times3+9=7$

0389 답 ⑤

α, β가 주어진 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2-2(3-p)\alpha+3=0$, $\beta^2-2(3-p)\beta+3=0$

$\therefore \alpha^2+2p\alpha+3=6\alpha$, $\beta^2+2p\beta+3=6\beta$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=3$

$\therefore (\alpha^2+2p\alpha+3)(\beta^2+2p\beta+3)$

$=6\alpha\times6\beta=36\alpha\beta$

$=36\times3=108$

0390 답 ③

α, β가 주어진 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2+2\alpha+3=0$, $\beta^2+2\beta+3=0$

$\therefore \alpha^2+3\alpha+3=\alpha$, $\beta^2+3\beta+3=\beta$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=3$

$\therefore \dfrac{1}{\alpha^2+3\alpha+3}+\dfrac{1}{\beta^2+3\beta+3}=\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$

$=-\dfrac{2}{3}$

0391 답 ①

α가 주어진 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2-5\alpha+3=0$ $\therefore \alpha^3-5\alpha^2=-3\alpha$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=3$

$\therefore \alpha^3-5\alpha^2+2\alpha\beta-3\beta=-3\alpha+2\alpha\beta-3\beta$

$=-3(\alpha+\beta)+2\alpha\beta$

$=-3\times5+2\times3=-9$

0392 답 ⑤

α, β가 주어진 이차방정식의 근이므로

$3\alpha^2-\alpha-9=0$, $3\beta^2-\beta-9=0$

$\therefore 3\alpha^2=\alpha+9$, $3\beta^2=\beta+9$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{1}{3}$, $\alpha\beta=-3$

$\therefore (6\alpha^2+\alpha)(3\beta^2+2\beta+9)=\{2(\alpha+9)+\alpha\}\{(\beta+9)+2\beta+9\}$

$=(3\alpha+18)(3\beta+18)$

$=9(\alpha+6)(\beta+6)$

$=9\{\alpha\beta+6(\alpha+\beta)+36\}$

$=9\times\left(-3+6\times\dfrac{1}{3}+36\right)$

$=315$

0393 답 ③

$P(x)=x^2-2x=x(x-2)$이므로

$\beta P(\alpha)+\alpha P(\beta)=\beta\times\alpha(\alpha-2)+\alpha\times\beta(\beta-2)$

$=\alpha\beta(\alpha+\beta-4)$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$

$\therefore \beta P(\alpha)+\alpha P(\beta)=\alpha\beta(\alpha+\beta-4)$

$=2\times(4-4)=0$

0394 답 (1) 8 (2) 20 (3) 152

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$

(1) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=2^2-2\times(-2)=8$ ····· ⓘ

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=2^3-3\times(-2)\times2=20$ ····· ⓘⓘ

(3) $(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)=\alpha^5+\beta^5+\alpha^2\beta^3+\alpha^3\beta^2$

$=\alpha^5+\beta^5+\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

이므로

$\alpha^5+\beta^5=(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^3+\beta^3)-\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)$

$=8\times20-(-2)^2\times2=152$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $\alpha^2+\beta^2$의 값 구하기	20 %
ⓘⓘ $\alpha^3+\beta^3$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ $\alpha^5+\beta^5$의 값 구하기	50 %

0395 답 ⑤

α, β가 주어진 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2-\sqrt{3}\alpha+1=0$, $\beta^2-\sqrt{3}\beta+1=0$

$\alpha^2+1=\sqrt{3}\alpha$의 양변을 제곱하면

$\alpha^4+2\alpha^2+1=3\alpha^2$ $\therefore \alpha^4-\alpha^2+1=0$

같은 방법으로 하면

$\beta^4-\beta^2+1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=1$

$\therefore (\alpha^6+\alpha^4-\alpha^2+1)(\beta^6+\beta^4-\beta^2+1)=\alpha^6\beta^6=(\alpha\beta)^6$

$=1$

0396 답 4

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha_n+\beta_n=n^2-3n-4$, $\alpha_n\beta_n=n+1$이고

n이 자연수이므로

$$\frac{1}{\alpha_n}+\frac{1}{\beta_n}=\frac{\alpha_n+\beta_n}{\alpha_n\beta_n}=\frac{n^2-3n-4}{n+1}$$

$$=\frac{(n+1)(n-4)}{n+1}=n-4$$

$$\therefore \left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_8}\right)+\left(\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}+\cdots+\frac{1}{\beta_8}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\beta_1}\right)+\left(\frac{1}{\alpha_2}+\frac{1}{\beta_2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\alpha_8}+\frac{1}{\beta_8}\right)$$

$=(1-4)+(2-4)+\cdots+(8-4)$

$=(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4$

$=4$

0397 답 3

α, β가 주어진 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2+3\alpha+1=0$, $\beta^2+3\beta+1=0$

$(\alpha^2+3\alpha+1)^2=\alpha^4+9\alpha^2+1+2(3\alpha^3+3\alpha+\alpha^2)$

$=\alpha^4+6\alpha^3+11\alpha^2+6\alpha+1$

따라서 $\alpha^4+6\alpha^3+11\alpha^2+6\alpha+1=0$이므로

$\alpha^4+6\alpha^3+9\alpha^2-3\alpha-2$

$=(\alpha^4+6\alpha^3+11\alpha^2+6\alpha+1)-2\alpha^2-9\alpha-3$

$=-2\alpha^2-9\alpha-3$ ($\because \alpha^4+6\alpha^3+11\alpha^2+6\alpha+1=0$)

$=-2(\alpha^2+3\alpha+1)-3\alpha-1$

$=-3\alpha-1$ ($\because \alpha^2+3\alpha+1=0$)

$=\alpha^2$ ($\because \alpha^2+3\alpha+1=0$)

같은 방법으로 하면

$\beta^4+6\beta^3+9\beta^2-3\beta-2=\beta^2$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=1$

이때 두 근의 곱이 양수, 합이 음수이므로 두 근은 모두 음수이다.

$\therefore \sqrt{\alpha^4+6\alpha^3+9\alpha^2-3\alpha-2}+\sqrt{\beta^4+6\beta^3+9\beta^2-3\beta-2}$

$=\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\beta^2}=|\alpha|+|\beta|$

$=-\alpha-\beta=-(\alpha+\beta)=3$

다른 풀이

α, β가 주어진 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2+3\alpha+1=0$, $\beta^2+3\beta+1=0$

$\alpha^4+6\alpha^3+9\alpha^2-3\alpha-2$를 $\alpha^2+3\alpha+1$로 나누면

$$\begin{array}{r} \alpha^2+3\alpha\ -1 \\ \alpha^2+3\alpha+1\overline{)\ \alpha^4+6\alpha^3+9\alpha^2-3\alpha-2} \\ \underline{\alpha^4+3\alpha^3+\ \alpha^2} \\ 3\alpha^3+8\alpha^2-3\alpha \\ \underline{3\alpha^3+9\alpha^2+3\alpha} \\ -\ \alpha^2-6\alpha-2 \\ \underline{-\ \alpha^2-3\alpha-1} \\ -3\alpha-1 \end{array}$$

$\alpha^4+6\alpha^3+9\alpha^2-3\alpha-2=(\alpha^2+3\alpha+1)(\alpha^2+3\alpha-1)-3\alpha-1$

이므로

$\alpha^4+6\alpha^3+9\alpha^2-3\alpha-2=-3\alpha-1=\alpha^2$

같은 방법으로 하면

$\beta^4+6\beta^3+9\beta^2-3\beta-2=-3\beta-1=\beta^2$

0398 답 ③

$x^2-ax+b=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+2=a$, $-1\times2=b$ $\therefore a=1$, $b=-2$

따라서 이차방정식 $2ax^2+(a+b)x+b=0$, 즉 $2x^2-x-2=0$의 두 근의 합은

$$-\frac{-1}{2}=\frac{1}{2}$$

0399 답 ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=-4$

$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=-6$이므로

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{a^2-2\times(-4)}{-4}=-6$$

$a^2+8=24$이므로

$a^2=16$ $\therefore a=4$ ($\because a>0$)

0400 답 ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=m$, $\alpha\beta=-m-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=m^2-2(-m-1)$

$=m^2+2m+2$

$\alpha^2+\beta^2=7$이므로

$m^2+2m+2=7$

$\therefore m^2+2m-5=0$

따라서 모든 상수 m의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -2이다.

참고 이차방정식 $m^2+2m-5=0$의 근이 $m=-1\pm\sqrt{6}$이므로 모든 상수 m의 값의 합은 $(-1+\sqrt{6})+(-1-\sqrt{6})=-2$임을 알 수 있다.

0401 답 ③

$x^2+ax-6=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-a$, $\alpha\beta=-6$ ····· ㉠

$x^2+bx+18=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+\beta)+\alpha\beta=-b$, $(\alpha+\beta)\times\alpha\beta=18$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$-a-6=-b$, $(-a)\times(-6)=18$

따라서 $a=3$, $b=9$이므로

$a+b=12$

0402 답 ②

$x^2-ax+b=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=b$ ····· ㉠

$2x^2+ax+a+b=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=-\frac{a}{2}$, $\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{a+b}{2}$

$\therefore \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=-\frac{a}{2}$, $\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{a+b}{2}$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$\frac{a}{b}=-\frac{a}{2}$, $\frac{1}{b}=\frac{a+b}{2}$

이때 $a\neq0$이므로

$a=1$, $b=-2$

$\therefore ab=-2$

0403 답 ⑤

주어진 이차방정식의 두 근을 α, 2α $(\alpha\neq0)$라 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=6k$ $\therefore \alpha=2k$ ····· ㉠

$\alpha\times2\alpha=7k+1$ $\therefore 2\alpha^2-7k-1=0$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$8k^2-7k-1=0$

$(8k+1)(k-1)=0$

$\therefore k=-\frac{1}{8}$ 또는 $k=1$

그런데 $k<0$이므로 $k=-\frac{1}{8}$

0404 답 ⑤

이차방정식 $x^2-10x+a=0$의 두 근을 2α, 3α $(\alpha\neq0)$라 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2\alpha+3\alpha=10$ $\therefore \alpha=2$

따라서 두 근은 4, 6이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a=4\times6=24$이고, 이차방정식 $x^2+ax+2a+3=0$, 즉

$x^2+24x+51=0$의 두 근의 곱은 51이다.

0405 답 6

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=k$ ····· ㉠

또 α, β가 이차방정식 $x^2-3x+k=0$의 근이므로

$\alpha^2-3\alpha+k=0$, $\beta^2-3\beta+k=0$

$\therefore \alpha^2-\alpha+k=2\alpha$, $\beta^2-\beta+k=2\beta$

이를 주어진 등식에 대입하면

$\frac{1}{2\alpha}+\frac{1}{2\beta}=\frac{1}{4}$, $\frac{\alpha+\beta}{2\alpha\beta}=\frac{1}{4}$

㉠을 이 식에 대입하면

$\frac{3}{2k}=\frac{1}{4}$, $2k=12$ $\therefore k=6$

0406 답 3

주어진 이차방정식의 두 근을 α, $-\alpha$ $(\alpha\neq0)$라 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)=-(m^2-2m-3)$ ····· ㉠

$\alpha\times(-\alpha)=-4m+2$ ····· ㉡ ····· ⓘ

㉠에서 $m^2-2m-3=0$, $(m+1)(m-3)=0$

$\therefore m=-1$ 또는 $m=3$ ····· ⓘⓘ

이때 두 근의 부호가 서로 다르면 ㉡에서 $-4m+2<0$이므로

$m>\frac{1}{2}$

$\therefore m=3$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 두 근의 합과 곱을 m에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘ 두 근의 합에 대한 식을 이용하여 m의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 두 근의 곱에 대한 식을 이용하여 m의 값 구하기	40 %

0407 답 ③

주어진 이차방정식의 두 근을 3α, 5α $(\alpha\neq0)$라 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3\alpha+5\alpha=8k$ $\therefore \alpha=k$ ····· ㉠

$3\alpha\times5\alpha=-k+2$ $\therefore 15\alpha^2+k-2=0$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$15k^2+k-2=0$

$(5k+2)(3k-1)=0$

$\therefore k=-\frac{2}{5}$ 또는 $k=\frac{1}{3}$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$-\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}=-\frac{2}{15}$

0408 답 -3

두 근이 연속하는 정수이므로 두 근을 α, $\alpha+1$(α는 정수)로 놓을 수 있다. …… ⓘ

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+1)=2k+1$ $\therefore \alpha=k$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+1)=k^2+2k+3$ …… ㉡ …… ⓘⓘ

㉠을 ㉡에 대입하면

$k(k+1)=k^2+2k+3$, $k^2+k=k^2+2k+3$

$\therefore k=-3$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 두 근을 α, $\alpha+1$로 놓기	30 %
ⓘⓘ 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 식 세우기	30 %
ⓘⓘⓘ k의 값 구하기	40 %

0409 답 ①

이차방정식 $x^2-(2k+5)x-k-5=0$의 두 근을 α, $\alpha+3$이라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+3)=2k+5$ $\therefore \alpha=k+1$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+3)=-k-5$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $(k+1)(k+4)=-k-5$

$k^2+6k+9=0$, $(k+3)^2=0$

$\therefore k=-3$

따라서 이차방정식 $x^2+(k+1)x+2k=0$, 즉 $x^2-2x-6=0$의 두 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -6이다.

0410 답 99

주어진 이차방정식의 두 근을 α, $\alpha+2$(α는 양의 홀수)라 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+2)=-4(k-2)$ $\therefore \alpha=3-2k$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+2)=k^2-16k+42$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(3-2k)(5-2k)=k^2-16k+42$

$3k^2-27=0$, $k^2-9=0$

$(k+3)(k-3)=0$ $\therefore k=-3$ 또는 $k=3$

이때 $\alpha>0$이므로 ㉠에서 $k=-3$, $\alpha=9$

따라서 두 근의 곱은

$\alpha(\alpha+2)=9\times11=99$

0411 답 ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 주어진 이차방정식의 두 근의 곱은 48이고, 두 근의 곱이 양수이므로 두 근은 모두 음수이거나 모두 양수이다.

두 근을 3α, α라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3\alpha+\alpha=5-p$ …… ㉠

$3\alpha\times\alpha=48$ …… ㉡

㉡에서 $\alpha^2=16$ $\therefore \alpha=-4$ 또는 $\alpha=4$

(i) 두 근이 모두 음수일 때,

$\alpha=-4$를 ㉠에 대입하면

$-12-4=5-p$ $\therefore p=21$

(ii) 두 근이 모두 양수일 때,

$\alpha=4$를 ㉠에 대입하면

$12+4=5-p$ $\therefore p=-11$

(i), (ii)에서 양수 p의 값은 21이다.

0412 답 8

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{5}{3}$, $\alpha\beta=\frac{k}{3}$

$\therefore (3\alpha-k)(\alpha-1)+(3\beta-k)(\beta-1)$

$=3\alpha^2-(k+3)\alpha+k+3\beta^2-(k+3)\beta+k$

$=3(\alpha^2+\beta^2)-(k+3)(\alpha+\beta)+2k$

$=3\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}-(k+3)(\alpha+\beta)+2k$

$=3\left\{\left(\frac{5}{3}\right)^2-2\times\frac{k}{3}\right\}-(k+3)\times\frac{5}{3}+2k$

$=-\frac{5}{3}k+\frac{10}{3}$

이때 $(3\alpha-k)(\alpha-1)+(3\beta-k)(\beta-1)=-10$이므로

$-\frac{5}{3}k+\frac{10}{3}=-10$

$-5k+10=-30$

$5k=40$ $\therefore k=8$

0413 답 4

$x^2-ax-3a=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$ …… ㉠

$\alpha\beta=-3a$ …… ㉡

$x^2-2ax+3a=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$|\alpha|+|\beta|=2a$, $|\alpha||\beta|=3a$

$\alpha>\beta$라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로 $\alpha>0$, $\beta<0$

$|\alpha|+|\beta|=\alpha-\beta$, 즉 $\alpha-\beta=2a$ …… ㉢

㉠, ㉢을 연립하여 풀면 $\alpha=\frac{3}{2}a$, $\beta=-\frac{1}{2}a$

이를 ㉡에 대입하면 $\frac{3}{2}a\times\left(-\frac{1}{2}a\right)=-3a$

$\frac{3}{4}a^2-3a=0$, $\frac{3}{4}a(a-4)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=4$

이때 $a=0$이면 $\alpha=\beta=0$이므로 $a=4$

0414 답 ①

$\alpha^2-4\alpha+5=3\beta^2$ …… ㉠

$\beta^2-4\beta+5=3\alpha^2$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면 $\alpha^2-\beta^2-4(\alpha-\beta)=3(\beta^2-\alpha^2)$

$4(\alpha^2-\beta^2)-4(\alpha-\beta)=0$, $4(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)=0$

$\therefore \alpha+\beta-1=0$ ($\because \alpha\neq\beta$) …… ㉢

$2x^2+mx+n=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{m}{2}$, $\alpha\beta=\frac{n}{2}$

㉢에서 $\alpha+\beta=1$이므로 $-\frac{m}{2}=1$

$\therefore\ m=-2$

$\beta=1-\alpha$를 ㉠에 대입하면

$\alpha^2-4\alpha+5=3(1-\alpha)^2$

$\alpha^2-\alpha-1=0 \qquad \therefore\ \alpha=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

이때 $\beta=1-\alpha=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$이므로 $\alpha\beta=\frac{n}{2}$에서

$n=2\alpha\beta=2\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{1-\sqrt{5}}{2}=-2$

$\therefore\ m+n=-2+(-2)=-4$

0415 답 ①

$x^2-ax-1=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=a$ ····· ㉠

$\alpha\beta=-1$ ····· ㉡

$x^2-(a+2)x+b=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\gamma=a+2$ ····· ㉢

$\alpha\gamma=b$ ····· ㉣

㉠−㉢을 하면

$\beta-\gamma=-2 \qquad \therefore\ \gamma=\beta+2$

$\gamma=\beta+2$를 $\alpha=2\beta+2\gamma$에 대입하면

$\alpha=2\beta+2(\beta+2),\ \alpha=4\beta+4$

$\alpha=4\beta+4$를 ㉡에 대입하면 $(4\beta+4)\beta=-1$

$4\beta^2+4\beta+1=0,\ (2\beta+1)^2=0$

$\therefore\ \beta=-\frac{1}{2}$

이때 $\alpha=4\beta+4=4\times\left(-\frac{1}{2}\right)+4=2$,

$\gamma=\beta+2=-\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}$이므로

㉠에서 $a=\alpha+\beta=2+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}$

㉣에서 $b=\alpha\gamma=2\times\frac{3}{2}=3$

$\therefore\ 2a+b=2\times\frac{3}{2}+3=6$

0416 답 120

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=-b$

$\therefore\ |\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{(-2a)^2-4\times(-b)}$

$=\sqrt{4a^2+4b}=2\sqrt{a^2+b}$

이때 $|\alpha-\beta|<12$이므로 $2\sqrt{a^2+b}<12$

$\sqrt{a^2+b}<6$

$\therefore\ a^2+b<36$ ($\because$ a, b는 자연수)

(i) $a=1$일 때, $b<35$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ \cdots,\ (1,\ 34)$의 34개이다.

(ii) $a=2$일 때, $b<32$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ \cdots,\ (2,\ 31)$의 31개이다.

(iii) $a=3$일 때, $b<27$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(3,\ 1),\ (3,\ 2),\ \cdots,\ (3,\ 26)$의 26개이다.

(iv) $a=4$일 때, $b<20$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(4,\ 1),\ (4,\ 2),\ \cdots,\ (4,\ 19)$의 19개이다.

(v) $a=5$일 때, $b<11$이므로 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(5,\ 1),\ (5,\ 2),\ \cdots,\ (5,\ 10)$의 10개이다.

(vi) $a\geq6$일 때, 자연수 b는 존재하지 않는다.

(i)~(vi)에서 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$34+31+26+19+10=120$

0417 답 ④

구하는 이차방정식은

$2\{x^2-(-3+1)x+(-3)\times1\}=0$

$\therefore\ 2x^2+4x-6=0$

0418 답 ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=-1$

따라서 4, -1을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(4-1)x+4\times(-1)=0$, 즉 $x^2-3x-4=0$

0419 답 $x^2+6x+1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\alpha+2)+(\beta+2)=-2$ ····· ㉠

$(\alpha+2)(\beta+2)=-7$ ····· ㉡

㉠에서 $\alpha+\beta=-6$ ····· ⓘ

㉡에서 $\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+11=0$이므로

$\alpha\beta+2\times(-6)+11=0 \qquad \therefore\ \alpha\beta=1$ ····· ⓘⓘ

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2+6x+1=0$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\alpha+\beta$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ $\alpha\beta$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 이차방정식 구하기	40 %

0420 답 ②

$x^2-12x+3=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=12,\ \alpha\beta=3$

이때 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{12}{3}=4,\ \frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{3}$이므로

$\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 3인 이차방정식은

$3\left(x^2-4x+\frac{1}{3}\right)=0 \qquad \therefore\ 3x^2-12x+1=0$

따라서 $a=-12$, $b=1$이므로

$a+b=-11$

0421 답 ③

α, β가 주어진 이차방정식의 근이므로

$\alpha^2+3\alpha+1=0$, $\beta^2+3\beta+1=0$

$$\frac{\beta}{\alpha^2+5\alpha+2}=\frac{\beta}{(\alpha^2+3\alpha+1)+2\alpha+1}=\frac{\beta}{2\alpha+1}$$

$$\frac{\alpha}{\beta^2+5\beta+2}=\frac{\alpha}{(\beta^2+3\beta+1)+2\beta+1}=\frac{\alpha}{2\beta+1}$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=1$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-3)^2-2\times1=7$

$$\frac{\beta}{2\alpha+1}+\frac{\alpha}{2\beta+1}=\frac{\beta(2\beta+1)+\alpha(2\alpha+1)}{(2\alpha+1)(2\beta+1)}$$

$$=\frac{2(\alpha^2+\beta^2)+(\alpha+\beta)}{4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1}$$

$$=\frac{2\times7+(-3)}{4\times1+2\times(-3)+1}=-11$$

$$\frac{\beta}{2\alpha+1}\times\frac{\alpha}{2\beta+1}=\frac{\alpha\beta}{(2\alpha+1)(2\beta+1)}=\frac{\alpha\beta}{4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1}$$

$$=\frac{1}{4\times1+2\times(-3)+1}=-1$$

따라서 구하는 이차방정식은 $x^2+11x-1=0$

0422 답 ⑤

$x^2+ax+b=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+\alpha=-a$, $2\alpha=b$

$\alpha=-a-2$를 $2\alpha=b$에 대입하면 $2(-a-2)=b$

$\therefore\ 2a+b=-4$ ····· ㉠

$x^2-(b-1)x-2(a+b)=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2+\beta=b-1$, $-2\beta=-2(a+b)$

$\beta=b+1$을 $-2\beta=-2(a+b)$에 대입하면

$-2(b+1)=-2(a+b)$, $b+1=a+b$ $\therefore\ a=1$

$a=1$을 ㉠에 대입하면 $2+b=-4$ $\therefore\ b=-6$

$\therefore\ \alpha=-a-2=-1-2=-3$, $\beta=b+1=-6+1=-5$

따라서 α, β를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(-3-5)x+(-3)\times(-5)=0$

$\therefore\ x^2+8x+15=0$

0423 답 ⑤

이차방정식 $x^2-6x+10=0$의 근이 $x=3\pm i$이므로

$x^2-6x+10=\{x-(3+i)\}\{x-(3-i)\}$

$=(x-3-i)(x-3+i)$

0424 답 ②

현수는 x^2의 계수와 b는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$-2\times\frac{1}{3}=\frac{b}{3}$ $\therefore\ b=-2$

수현이는 x^2의 계수와 a는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$2+\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{a}{3}$ $\therefore\ a=\frac{3}{2}$

$\therefore\ a+b=\frac{3}{2}+(-2)=-\frac{1}{2}$

0425 답 ②

이차방정식 $5x^2-4x+4=0$의 근이 $x=\frac{2\pm4i}{5}$이므로

$$5x^2-4x+4=5\left(x-\frac{2+4i}{5}\right)\left(x-\frac{2-4i}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{5}(5x-2-4i)(5x-2+4i)$$

따라서 $ac=(-2)\times(-2)=4$, $bd=(-4)\times4=-16$이므로

$ac+bd=4+(-16)=-12$

0426 답 ②

$f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$

$f(3x-5)=0$이려면 $3x-5=\alpha$ 또는 $3x-5=\beta$

$\therefore\ x=\frac{\alpha+5}{3}$ 또는 $x=\frac{\beta+5}{3}$

따라서 이차방정식 $f(3x-5)=0$의 두 근의 합은

$$\frac{\alpha+5}{3}+\frac{\beta+5}{3}=\frac{\alpha+\beta+10}{3}=\frac{2+10}{3}=4$$

0427 답 ③

지은이는 a와 b는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 합은

$-1+5=-\frac{b}{a}$

$\therefore\ b=-4a$ ····· ㉠

승건이는 a와 c는 바르게 보고 풀었으므로 두 근의 곱은

$(1+\sqrt{5}i)(1-\sqrt{5}i)=\frac{c}{a}$

$\therefore\ c=6a$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2-4ax+6a=0$

$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면 원래의 이차방정식은

$x^2-4x+6=0$

$\therefore\ x=2\pm\sqrt{2}i$

따라서 $p=2$, $q=\sqrt{2}$이므로 $pq=2\sqrt{2}$

0428 답 ⑤

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=6$

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이므로 $f(2x+1)=0$이려면

$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$

$\therefore\ x=\frac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta-1}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 곱은

$$\frac{\alpha-1}{2}\times\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}{4}$$

$$=\frac{6-(-3)+1}{4}=\frac{5}{2}$$

0429 답 ③

$f(\alpha)-2=0$, $f(\beta)-2=0$이므로 α, β는 이차방정식

$f(x)-2=0$의 두 근이다.

$x^2+2x-4=0$의 두 근이 α, β이고 $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로

$f(x)-2=x^2+2x-4$

따라서 $f(x)=x^2+2x-2$이므로

$f(2)=4+4-2=6$

0430 답 ③

$f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)-x=0$의 두 근이다.

$x^2-x+2=0$의 두 근이 α, β이므로 상수 $k(k\neq0)$에 대하여

$f(x)-x=k(x-\alpha)(x-\beta)$로 놓으면

$f(x)-x=k(x^2-x+2)$

이때 $f(0)=4$이므로

$f(0)=2k=4$ $\quad\therefore k=2$

따라서 $f(x)=2(x^2-x+2)+x=2x^2-x+4$이므로

$f(1)=2-1+4=5$

0431 답 ①

$f(2x+1)=0$의 두 근이 α, β이므로

$f(2\alpha+1)=0$, $f(2\beta+1)=0$

$f(x-2)=0$이려면

$x-2=2\alpha+1$ 또는 $x-2=2\beta+1$

$\therefore x=2\alpha+3$ 또는 $x=2\beta+3$

따라서 이차방정식 $f(x-2)=0$의 두 근의 곱은

$(2\alpha+3)(2\beta+3)=4\alpha\beta+6(\alpha+\beta)+9$

$=4\times(-4)+6\times3+9=11$

0432 답 ①

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 근의 공식을 $x=\dfrac{b\pm\sqrt{b^2-ac}}{2a}$로 잘못 알고 풀어서 얻은 두 근이 -1, 2이므로

$\dfrac{b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}+\dfrac{b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=-1+2$

$\dfrac{b}{a}=1$ $\quad\therefore b=a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\dfrac{b+\sqrt{b^2-ac}}{2a}\times\dfrac{b-\sqrt{b^2-ac}}{2a}=-1\times2$

$\dfrac{b^2-(b^2-ac)}{4a^2}=-2$, $\dfrac{c}{4a}=-2$

$\therefore c=-8a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 $ax^2+bx+c=0$에 대입하면

$ax^2+ax-8a=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\dfrac{a}{a}=-1$, $\alpha\beta=\dfrac{-8a}{a}=-8$

$\therefore \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=(-1)^3-3\times(-8)\times(-1)$

$=-25$

0433 답 $2\sqrt{2}$

$x^2+x-1=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=-1$

$\alpha\beta=-1$에서 $\alpha=-\dfrac{1}{\beta}$, $\beta=-\dfrac{1}{\alpha}$

㈎, ㈏에서 $f(\alpha)=\dfrac{1}{\beta}=-\alpha$, $f(\beta)=\dfrac{1}{\alpha}=-\beta$

즉, $f(\alpha)+\alpha=0$, $f(\beta)+\beta=0$이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)+x=0$의 두 근이다.

$x^2+x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 상수 $k(k\neq0)$에 대하여

$f(x)+x=k(x-\alpha)(x-\beta)$로 놓으면

$f(x)+x=k(x^2+x-1)$ $\quad\cdots\cdots$ ⓘ

이때 ㈐에서 $f(0)=1$이므로

$f(0)=-k=1$ $\quad\therefore k=-1$

$\therefore f(x)=-(x^2+x-1)-x=-x^2-2x+1$ $\quad\cdots\cdots$ ⓘⓘ

$f(x)=0$에서 $-x^2-2x+1=0$, 즉 $x^2+2x-1=0$이고 이 이차방정식의 두 근이 m, n이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$m+n=-2$, $mn=-1$

$(m-n)^2=(m+n)^2-4mn=(-2)^2-4\times(-1)=8$이므로

$|m-n|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ $\quad\cdots\cdots$ ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(x)+x$에 대한 식 세우기	40 %
ⓘⓘ $f(x)$ 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ $\lvert m-n\rvert$의 값 구하기	30 %

0434 답 ④

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $2-i$가 근이면 다른 한 근은 $2+i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-i)+(2+i)=-\dfrac{a}{2}$ $\quad\therefore a=-8$

$(2-i)(2+i)=\dfrac{b}{2}$ $\quad\therefore b=10$

$\therefore b-a=10-(-8)=18$

0435 답 ①

계수가 실수인 이차방정식의 한 근이 $2-3i$이면 다른 한 근은 $2+3i$이다.

즉, $\alpha=2+3i$이므로

$\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{1}{2+3i}=\dfrac{2-3i}{(2+3i)(2-3i)}=\dfrac{2}{13}-\dfrac{3}{13}i$

따라서 $a=\dfrac{2}{13}$, $b=-\dfrac{3}{13}$이므로 $a+b=-\dfrac{1}{13}$

0436 답 ③

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $\dfrac{b}{2}+i$가 근이면 다른 한 근은 $\dfrac{b}{2}-i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\left(\dfrac{b}{2}+i\right)+\left(\dfrac{b}{2}-i\right)=-a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$\left(\dfrac{b}{2}+i\right)\left(\dfrac{b}{2}-i\right)=b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $b=-a$

㉡에서 $\dfrac{b^2}{4}+1=b$, $b^2-4b+4=0$

$(b-2)^2=0$ $\quad\therefore b=2$

따라서 $a=-2$, $b=2$이므로 $ab=-4$

0437 답 ④

$\frac{5}{1+2i}=\frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=1-2i$

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $1-2i$가 근이면 다른 한 근은 $1+2i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1-2i)+(1+2i)=2(a+b)$ ····· ㉠

$(1-2i)(1+2i)=-2ab-3$ ····· ㉡

㉠에서 $2=2(a+b)$ $\therefore a+b=1$

㉡에서 $5=-2ab-3$ $\therefore ab=-4$

$\therefore a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=1^3-3\times(-4)\times1=13$

0438 답 ④

$(2+\sqrt{3})^2+a(2+\sqrt{3})+b=0$에서

$(7+2a+b)+(\boxed{\text{(가) } 4+a})\sqrt{3}=0$

이때 a, b가 유리수이므로

$7+2a+b=0$, $\boxed{\text{(가) } 4+a}=0$

$\therefore a=\boxed{\text{(나) } -4}$, $b=1$

따라서 원래의 방정식은 $x^2+(\boxed{\text{(나) } -4})x+1=0$

이 방정식을 풀면 $x=2\pm\sqrt{3}$

따라서 $2-\sqrt{3}$도 주어진 이차방정식의 근이다.

0439 답 14

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 두 허근 α, β는 켤레근이다. β는 α의 켤레복소수이므로 $\beta=\overline{\alpha}$, $\alpha=\overline{\beta}$이고, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=11$이므로

$11\left(\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}+\frac{\overline{\beta}}{\beta}\right)=11\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}\right)=11\times\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

$=11\times\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$

$=11\times\frac{6^2-2\times11}{11}=14$

다른 풀이

이차방정식 $x^2-6x+11=0$의 근을 구하면

$x=3\pm\sqrt{2}i$

$\alpha=3+\sqrt{2}i$, $\beta=3-\sqrt{2}i$라 하면

$11\left(\frac{\overline{\alpha}}{\alpha}+\frac{\overline{\beta}}{\beta}\right)=11\left(\frac{3-\sqrt{2}i}{3+\sqrt{2}i}+\frac{3+\sqrt{2}i}{3-\sqrt{2}i}\right)$

$=11\times\frac{(3-\sqrt{2}i)^2+(3+\sqrt{2}i)^2}{(3+\sqrt{2}i)(3-\sqrt{2}i)}$

$=11\times\frac{7-6\sqrt{2}i+7+6\sqrt{2}i}{11}=14$

0440 답 ④

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 $2-\sqrt{3}i$가 근이면 다른 한 근은 $2+\sqrt{3}i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{3}i)+(2+\sqrt{3}i)=-a$ $\therefore a=-4$

$(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)=b$ $\therefore b=7$

따라서 $a+b=3$, $a-b=-11$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(3-11)x+3\times(-11)=0$ $\therefore x^2+8x-33=0$

0441 답 79

$\frac{1}{4-\sqrt{15}}=\frac{4+\sqrt{15}}{(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}=4+\sqrt{15}$

주어진 이차방정식의 계수가 유리수이므로 $4+\sqrt{15}$가 근이면 다른 한 근은 $4-\sqrt{15}$이다.

$x^2-mx+n=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(4+\sqrt{15})+(4-\sqrt{15})=m$, $(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15})=n$

$\therefore m=8$, $n=1$

따라서 $m+n=9$, $m-n=7$을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(9+7)x+9\times7=0$ $\therefore x^2-16x+63=0$

즉, $a=-16$, $b=63$이므로 $b-a=79$

0442 답 1

유빈이는 b를 바르게 보고 풀었고, 계수가 실수이므로 $\frac{-3+\sqrt{15}i}{4}$가 근이면 다른 한 근은 $\frac{-3-\sqrt{15}i}{4}$이다.

두 근의 곱은 $\frac{-3+\sqrt{15}i}{4}\times\frac{-3-\sqrt{15}i}{4}=\frac{b}{2}$

$\therefore b=3$ ····· ⓘ

정호는 a를 바르게 보고 풀었고, 계수가 실수이므로 $\frac{1-i}{2}$가 근이면 다른 한 근은 $\frac{1+i}{2}$이다.

두 근의 합은 $\frac{1-i}{2}+\frac{1+i}{2}=-\frac{a}{2}$

$\therefore a=-2$ ····· ⓘⓘ

$\therefore a+b=-2+3=1$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ b의 값 구하기	50 %
ⓘⓘ a의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $a+b$의 값 구하기	10 %

0443 답 10

주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 한 허근을 $a+2i$(a는 실수)라 하면 다른 한 근은 $a-2i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(a+2i)+(a-2i)=p$ ····· ㉠

$(a+2i)(a-2i)=p+19$ ····· ㉡

㉠에서 $2a=p$ $\therefore a=\frac{p}{2}$

㉡에서 $a^2+4=p+19$

$a=\frac{p}{2}$를 이 식에 대입하면 $\frac{p^2}{4}+4=p+19$

$p^2-4p-60=0$, $(p+6)(p-10)=0$

$\therefore p=10$ ($\because p>0$)

0444 답 $x^2-7x+10=0$

$\frac{1}{i^3}-\frac{1}{i^{10}}+\frac{1}{i^{11}}=\frac{1}{-i}-\frac{1}{-1}+\frac{1}{-i}=i+1+i=1+2i$

이때 이차방정식 $x^2+ax+5b=0$의 계수가 실수이므로 $1+2i$가 근이면 다른 한 근은 $1-2i$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+2i)+(1-2i)=-a$, $(1+2i)(1-2i)=5b$

$\therefore a=-2$, $b=1$ …… ⓘ

$a^2+b^2=(-2)^2+1^2=5$, $\frac{ab}{a+b}=\frac{-2\times1}{-2+1}=2$ …… ⓘⓘ

따라서 a^2+b^2, $\frac{ab}{a+b}$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(5+2)x+5\times2=0$ $\therefore x^2-7x+10=0$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a, b의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ a^2+b^2, $\frac{ab}{a+b}$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 이차방정식 구하기	30 %

0445 답 ④

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로

$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

$z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$

따라서 주어진 이차방정식은 $x^2+(a^2+b^2)x+2a=0$이다.

이 이차방정식의 계수가 실수이므로 $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$가 근이면 다른 한 근은 $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=-(a^2+b^2)$ …… ㉠

$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=2a$ …… ㉡

㉡에서 $2a=1$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

㉠에서 $-(a^2+b^2)=-1$ $\therefore a^2+b^2=1$

$a=\frac{1}{2}$을 $a^2+b^2=1$에 대입하면

$b^2=\frac{3}{4}$ $\therefore b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore z=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

0446 답 ②

a^2이 음의 실수이려면 a는 순허수이고, 주어진 이차방정식의 계수가 실수이므로 두 근을 ai, $-ai$ (a는 실수, $a\neq0$)라 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$ai+(-ai)=-(p^2-4)$ …… ㉠

$ai\times(-ai)=-(p+1)$ …… ㉡

㉠에서 $p^2-4=0$이므로 $p=\pm2$

㉡에서 $p+1=-a^2$이므로 $p+1<0$

따라서 구하는 p의 값은 -2이다.

0447 답 ④

㈎에서 허수 z는 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 한 근이고, m, n이 실수이므로 $\overline{z}$도 이 방정식의 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$z+\overline{z}=-m$, $z\overline{z}=n$

이때 ㈏에서 $z+\overline{z}=8$이므로

$m=-8$

또한 이차방정식 $x^2-8x+n=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-4)^2-n<0$

즉, $n>16$이므로 정수 n의 최솟값은 17이다.

따라서 $m+n$의 최솟값은

$-8+17=9$

0448 답 41

㈎에서 나머지 정리에 의하여 $f(1)=2$

즉, $1+a+b=2$에서 $a+b=1$ …… ㉠

㈏에서 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 계수가 실수이므로 $k+i$가 근이면 다른 한 근은 $k-i$이다.

$x^2+ax+b=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(k+i)+(k-i)=-a$, $(k+i)(k-i)=b$

$\therefore a=-2k$, $b=k^2+1$

이를 ㉠에 대입하면 $-2k+k^2+1=1$

$k^2-2k=0$, $k(k-2)=0$

$\therefore k=2$ ($\because k\neq0$)

따라서 $a=-2k=-4$, $b=k^2+1=5$이므로

$a^2+b^2=16+25=41$

0449 답 ①

α가 이차방정식 $x^2-2x-k=0$의 근이므로

$\alpha^2-2\alpha-k=0$, $\alpha^2=2\alpha+k$

$\therefore z=\alpha^2-\alpha+1=(2\alpha+k)-\alpha+1=\alpha+k+1$

$z\overline{z}=(\alpha+k+1)(\overline{\alpha+k+1})$

$=(\alpha+k+1)(\overline{\alpha}+k+1)$

$=\alpha\overline{\alpha}+(k+1)(\alpha+\overline{\alpha})+(k+1)^2$ …… ㉠

이때 $x^2-2x-k=0$의 계수가 실수이므로 한 허근이 α이면 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=2$, $\alpha\overline{\alpha}=-k$

이를 ㉠에 대입하면 $z\overline{z}=21$이므로

$-k+2(k+1)+(k+1)^2=21$

$k^2+3k-18=0$, $(k+6)(k-3)=0$

$\therefore k=-6$ 또는 $k=3$

또한 이차방정식 $x^2-2x-k=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-1)^2-(-k)<0$

$\therefore k<-1$

따라서 구하는 k의 값은 -6이다.

0450 답 ①

올해 늘어난 밭의 넓이는

$(x+10)\{10+(x-10)\}-10^2=500$

$x^2+10x-600=0$, $(x+30)(x-20)=0$

$\therefore x=20\ (\because x>10)$

0451 답 ④

두 상자 A, B의 높이가 같으므로 부피의 비는 밑면의 넓이의 비와 같다.

상자 A의 한 모서리의 길이를 x cm라 하면 상자 A의 밑면의 넓이는 x^2 cm^{2}이고, 상자 B의 밑면의 넓이는 $(x-2)(x+1)$ cm^{2}이다.

두 상자 A, B의 부피의 비가 2 : 1이므로

$x^2:(x-2)(x+1)=2:1$

$2(x-2)(x+1)=x^2$, $x^2-2x-4=0$

$\therefore x=1\pm\sqrt{5}$

그런데 $x>2$이므로 상자 A의 한 모서리의 길이는 $(1+\sqrt{5})$ cm이다.

0452 답 3 m

도로의 폭을 x m라 하면 도로를 제외한 부분의 넓이는

$(16-2x)(10-x)=70$ …… ⓘ

$2x^2-36x+160=70$, $x^2-18x+45=0$

$(x-3)(x-15)=0$ $\therefore x=3$ 또는 $x=15$ …… ⓘⓘ

그런데 $0<x<8$이므로 $x=3$

따라서 도로의 폭은 3 m이다. …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 이차방정식 세우기	40 %
ⓘⓘ 이차방정식 풀기	40 %
ⓘⓘⓘ 도로의 폭 구하기	20 %

참고 활용 문제에서 길이, 넓이, 개수 등은 양수이므로 길이, 넓이, 개수 등을 x로 나타내면 그 값이 양수임을 이용하여 x의 값의 범위를 파악할 수 있어야 한다. 위의 풀이에서 x, $16-2x$, $10-x$는 길이를 나타내므로 $x>0$, $16-2x>0$, $10-x>0$이다. 즉, $x>0$, $x<8$, $x<10$이므로 $0<x<8$인 범위에서 x의 값을 구해야 한다.

0453 답 ③

직사각형의 둘레의 길이가 28 cm이므로 가로, 세로의 길이의 합은 14 cm이다. 따라서 처음 직사각형의 가로의 길이를 x cm라 하면 세로의 길이는 $(14-x)$ cm이므로 새로 만들어진 직사각형의 가로, 세로의 길이는 각각 $(x-2)$ cm, $(17-x)$ cm이다.

즉, 새로 만들어진 직사각형의 넓이는

$(x-2)(17-x)=\frac{9}{8}x(14-x)$

$-x^2+19x-34=\frac{9}{8}(-x^2+14x)$, $x^2+26x-272=0$

$(x+34)(x-8)=0$ $\therefore x=-34$ 또는 $x=8$

그런데 $2<x<14$이므로 $x=8$

따라서 처음 직사각형의 가로의 길이는 8 cm, 세로의 길이는 6 cm이므로 처음 직사각형의 넓이는

$8\times6=48(\text{cm}^2)$

0454 답 ⑤

두 삼각형 ABP와 ADQ에서

$\overline{AB}=\overline{AD}$, $\overline{AP}=\overline{AQ}$, $\angle ABP=\angle ADQ=90^\circ$이므로

$\triangle ABP\equiv\triangle ADQ$ (RHS 합동)

따라서 $\overline{BP}=\overline{DQ}$이므로 $\overline{CP}=x$라 하면

$\overline{BP}=\overline{DQ}=2-x$, $\overline{CQ}=x$

두 삼각형 ABP와 PCQ에서

$\overline{AP}^2=\overline{AB}^2+\overline{BP}^2=2^2+(2-x)^2=x^2-4x+8$

$\overline{PQ}^2=\overline{CP}^2+\overline{CQ}^2=x^2+x^2=2x^2$

이때 $\overline{AP}=\overline{PQ}$이므로 $\overline{AP}^2=\overline{PQ}^2$에서

$x^2-4x+8=2x^2$, $x^2+4x-8=0$

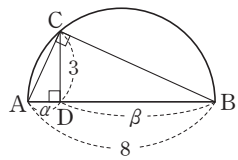
$\therefore x=-2\pm2\sqrt{3}$

그런데 $0<x<2$이므로 $x=2\sqrt{3}-2$

따라서 선분 CP의 길이는 $2\sqrt{3}-2$이다.

0455 답 $x^2-8x+9=0$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$, $\overline{BC}$를 그으면 $\angle ACB$는 지름에 대한 원주각이므로 삼각형 ABC는 $\angle ACB=90^\circ$인 직각삼각형이다.



$\overline{AD}=\alpha$, $\overline{BD}=\beta$라 하면 $\triangle ADC\backsim\triangle CDB$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AD}:\overline{CD}=\overline{CD}:\overline{BD}$

즉, $\alpha:3=3:\beta$이므로 $\alpha\beta=9$ …… ⓘ

따라서 $\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=9$이므로 두 선분 AD, BD의 길이를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-8x+9=0$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\overline{AD}\times\overline{BD}$의 값 구하기	50 %
ⓘⓘ 이차방정식 구하기	50 %

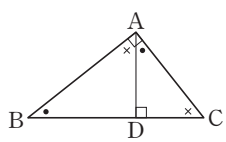
참고 두 삼각형 ADC와 CDB에서

$\angle ADC=\angle CDB=90^\circ$, $\angle ACD=90^\circ-\angle BCD=\angle CBD$이므로

$\triangle ADC\backsim\triangle CDB$ (AA 닮음)이다.

✓ 중2 다시보기

$\angle A=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$일 때



(1) $\triangle ABC\backsim\triangle DBA$ (AA 닮음)이므로

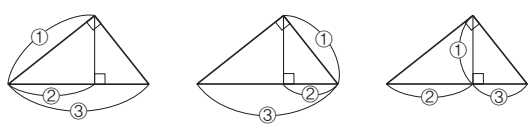
$\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{BC}:\overline{BA}$ ➡ $\overline{AB}^2=\overline{BD}\times\overline{BC}$

(2) $\triangle ABC\backsim\triangle DAC$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AC}:\overline{DC}=\overline{BC}:\overline{AC}$ ➡ $\overline{AC}^2=\overline{CD}\times\overline{CB}$

(3) $\triangle DBA\backsim\triangle DAC$ (AA 닮음)이므로

$\overline{DB}:\overline{DA}=\overline{DA}:\overline{DC}$ ➡ $\overline{AD}^2=\overline{DB}\times\overline{DC}$



➡ $①^2=②\times③$

0456 답 ⑤

$\overline{AQ}=\overline{AP}=a$, $\overline{CR}=\overline{CP}=b$이고, 내접원의 반지름의 길이가 1이므로

$\overline{AB}=a+1$, $\overline{BC}=b+1$

내접원의 성질에 의하여 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times\{(a+1)+(b+1)+(a+b)\}=6$

$2(a+b)+2=12$ $\therefore a+b=5$

또한 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}$이므로

$\frac{1}{2}\times(a+1)\times(b+1)=6$

$ab+a+b+1=12$

$a+b=5$를 이 식에 대입하면 $ab+5+1=12$ $\therefore ab=6$

따라서 $a+b=5$, $ab=6$이므로 a, b를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-5x+6=0$

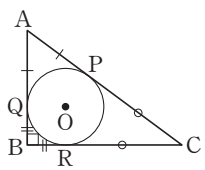
☑ 중2 다시보기

원 O가 삼각형 ABC의 내접원이고 세 점 P, Q, R가 그 접점일 때

➡ $\overline{AP}=\overline{AQ}$

$\overline{BQ}=\overline{BR}$

$\overline{CR}=\overline{CP}$



0457 답 ⑤

미술관의 입장료가 a원일 때 관람객 수를 b라 하자.

할인된 입장료는 $a\left(1-\frac{x}{100}\right)$원, 증가한 관람객 수는 $b\left(1+\frac{3x}{100}\right)$이므로 총수입은

$ab\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{3x}{100}\right)=ab\left(1+\frac{32}{100}\right)$

$1+\frac{2x}{100}-\frac{3x^2}{10000}=1+\frac{32}{100}$, $3x^2-200x+3200=0$

$(x-40)(3x-80)=0$ $\therefore x=40$ 또는 $x=\frac{80}{3}$

그런데 x는 자연수이므로 $x=40$

0458 답 ②

$\overline{AE}=\alpha$, $\overline{AH}=\beta$라 하면 $\overline{PF}=10-\alpha$, $\overline{PG}=10-\beta$

직사각형 PFCG의 둘레의 길이는

$2(10-\alpha)+2(10-\beta)=28$

$40-2(\alpha+\beta)=28$ $\therefore \alpha+\beta=6$

직사각형 PFCG의 넓이는

$(10-\alpha)(10-\beta)=46$

$100-10(\alpha+\beta)+\alpha\beta=46$

$\alpha+\beta=6$을 이 식에 대입하면

$100-10\times6+\alpha\beta=46$ $\therefore \alpha\beta=6$

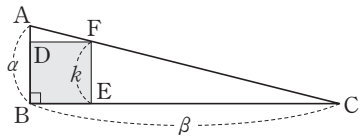
따라서 $\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=6$이므로 두 선분 AE와 AH의 길이를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-6x+6=0$

0459 답 ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$ ····· ㉠



위의 그림과 같이 직각삼각형 ABC에 내접하는 정사각형 DBEF의 한 변의 길이를 k라 하자.

$\triangle ABC\backsim\triangle ADF$ (AA 닮음)이므로

$\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{BC}:\overline{DF}$에서

$\alpha:(\alpha-k)=\beta:k$

$\alpha k=\beta(\alpha-k)$, $\alpha k=\alpha\beta-\beta k$

$(\alpha+\beta)k=\alpha\beta$

$\therefore k=\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ($\because$ ㉠)

한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$인 정사각형 DBEF의 넓이는 $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$,

둘레의 길이는 $4\times\frac{1}{2}=2$이므로 $\frac{1}{4}$, 2를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 4인 이차방정식은

$4\left\{x^2-\left(\frac{1}{4}+2\right)x+\frac{1}{4}\times2\right\}=0$

$\therefore 4x^2-9x+2=0$

따라서 $m=-9$, $n=2$이므로

$m+n=-7$

최고수준 도전 기출 96~97쪽

0460 답 ③

전략 $x=2+\sqrt{3}$을 주어진 이차방정식에 대입한 후 무리수의 성질을 이용하여 a, b, c를 하나의 문자로 나타내어 이차방정식을 구한다.

$x=2+\sqrt{3}$을 주어진 이차방정식에 대입하면

$a(2+\sqrt{3})^2+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c=0$

$a(7+4\sqrt{3})+\sqrt{3}b(2+\sqrt{3})+c=0$

$(7a+3b+c)+(4a+2b)\sqrt{3}=0$

이때 a, b, c가 모두 유리수이므로

$7a+3b+c=0$, $4a+2b=0$

$\therefore b=-2a$, $c=-a$

이를 주어진 이차방정식에 대입하면 $ax^2-2\sqrt{3}ax-a=0$

$a\neq0$이므로 양변을 a로 나누면 $x^2-2\sqrt{3}x-1=0$

$\therefore x=\sqrt{3}\pm2$

따라서 $\beta=-2+\sqrt{3}$이므로

$\alpha+\frac{1}{\beta}=2+\sqrt{3}+\frac{1}{-2+\sqrt{3}}$

$=2+\sqrt{3}-2-\sqrt{3}=0$

참고 주어진 이차방정식의 계수가 모두 유리수가 아니므로 β를 $2+\sqrt{3}$의 켤레근 $2-\sqrt{3}$으로 생각하지 않도록 주의한다.

0461 답 ⑤

전략 이차방정식이 중근을 가지면 판별식이 0임을 이용하고, 곱셈공식의 변형을 이용하여 식의 값을 만족시키는 a, b, c의 조건을 구한다.

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면 $D=0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)=0$

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$

$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

$\therefore a=b=c$

따라서 a, b, c를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 정삼각형이고, 이 삼각형의 넓이가 $16\sqrt{3}$이므로

$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=16\sqrt{3}$

$a^2=64$ $\therefore a=8\ (\because a>0)$

$\therefore \frac{1}{2}abc=\frac{1}{2}\times 8^3=256$

0462 답 1

전략 삼각형의 닮음의 성질을 이용하여 변의 길이를 $\overline{AP}$에 대한 식으로 나타낸 후 사각형 APOS와 사각형 OQCR의 넓이의 합을 이차방정식으로 나타낸다.

삼각형 BCD, ORD에서

$\angle BCD=\angle ORD=90^\circ$, $\angle BDC=\angle ODR$이므로

$\triangle BCD\backsim\triangle ORD$ (AA 닮음)

따라서 $\overline{OR}:\overline{RD}=\overline{BC}:\overline{CD}=6:4$이므로

$3\overline{DR}=2\overline{OR}$

이때 $\overline{AP}=\overline{DR}=x$라 하면 $\overline{OR}=\frac{3}{2}x$

또한 $\overline{AP}<\overline{PB}$이므로

$x<4-x$

$\therefore x<2$

사각형 APOS와 사각형 OQCR의 넓이의 합은

$x\left(6-\frac{3}{2}x\right)+\frac{3}{2}x(4-x)=9$

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1\ (\because 0<x<2)$

따라서 선분 AP의 길이는 1이다.

0463 답 ⑤

전략 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 구한 후 이차방정식의 판별식과 $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값을 이용하여 α, β의 부호를 파악한다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=-1$

이차방정식 $x^2+2x-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(-1)=2>0$이므로 α, β는 실수이다.

이때 두 근의 곱이 음수이고 $\alpha>\beta$이므로

$\alpha>0$, $\beta<0$

$\therefore \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{\frac{2}{\beta}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}}+\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right)^2$

$=\left(\frac{\alpha}{2}+2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\frac{2}{\beta}\right)+\left(\frac{\beta}{2}+2\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\frac{2}{\alpha}\right)$

$=\frac{\alpha+\beta}{2}+2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$

$=\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}+2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$

$=\frac{-2}{2}+\frac{2\times(-2)}{-1}+2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$

$=3+2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$

이때 $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$의 값은

$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\beta^2}}+\sqrt{\frac{\alpha\beta}{\alpha^2}}$

$=\frac{\sqrt{-1}}{|\beta|}+\frac{\sqrt{-1}}{|\alpha|}\ (\because \alpha\beta=-1)$

$=\frac{i}{\alpha}-\frac{i}{\beta}\ (\because \alpha>0,\ \beta<0)$

$=\frac{(\beta-\alpha)i}{\alpha\beta}$

$=(\alpha-\beta)i\ (\because \alpha\beta=-1)$

이때 $\alpha-\beta=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{(-2)^2-4\times(-1)}=2\sqrt{2}$이므로

$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=(\alpha-\beta)i=2\sqrt{2}i$

$\therefore \left(\sqrt{\frac{\alpha}{2}}+\sqrt{\frac{2}{\beta}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{\beta}{2}}+\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right)^2=3+2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)$

$=3+2\times 2\sqrt{2}i=3+4\sqrt{2}i$

다른 풀이

이때 $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$의 값은

$\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2=\frac{\alpha}{\beta}+2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\frac{\beta}{\alpha}$에서

$\frac{\alpha}{\beta}<0$, $\frac{\beta}{\alpha}<0$이므로

$\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)^2=\frac{\alpha}{\beta}-2\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}\times\frac{\beta}{\alpha}}+\frac{\beta}{\alpha}$

$=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-2=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}-2$

$=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}-2$

$=\frac{(-2)^2-2\times(-1)}{-1}-2$

$=-8$

$\therefore \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}=\sqrt{-8}=2\sqrt{2}i$

0464 답 1

전략 이차방정식의 켤레근의 성질을 이용하여 b, c를 a에 대한 식으로 나타낸 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $f(\alpha)+f(\beta)$를 a에 대한 식으로 나타낸다.

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 계수가 실수이므로 (가)에서 $2+i$가 근이면 다른 한 근은 $2-i$이다.

$ax^2+bx+c=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+i)+(2-i)=-\frac{b}{a}$, $(2+i)(2-i)=\frac{c}{a}$

$\therefore b=-4a$, $c=5a$

이를 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대입하면

$f(x)=ax^2-4ax+5a=a(x^2-4x+5)$이므로

$f(\alpha)+f(\beta)=a(\alpha^2-4\alpha+5)+a(\beta^2-4\beta+5)$

$=a(\alpha^2+\beta^2)-4a(\alpha+\beta)+10a$ ····· ㉠

$x^2-2x-1=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=2^2-2\times(-1)=6$

이를 ㉠에 대입하면

$f(\alpha)+f(\beta)=6a-4a\times2+10a=8a$

이때 (나)에서 $f(\alpha)+f(\beta)=4$이므로

$8a=4$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}(x^2-4x+5)$이므로

$f(3)=\frac{1}{2}\times(9-12+5)=1$

0465 답 ②

전략 $f(\alpha^2)$, $f(\beta^2)$을 α^2, β^2을 이용하여 나타내고, α^2, β^2을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식을 구한다.

$x^2-x+1=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=1$ ····· ㉠

또 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha^2-\alpha+1=0$, $\beta^2-\beta+1=0$

$\therefore \alpha=\alpha^2+1$, $\beta=\beta^2+1$

$f(\alpha^2)=-4\alpha+2$, $f(\beta^2)=-4\beta+2$에서

$f(\alpha^2)=-4(\alpha^2+1)+2=-4\alpha^2-2$

$f(\beta^2)=-4(\beta^2+1)+2=-4\beta^2-2$

따라서 이차방정식 $f(x)=-4x-2$, 즉 $x^2+px+q=-4x-2$의 두 근이 α^2, β^2이다.

㉠에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1^2-2\times1=-1$

$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=1^2=1$

따라서 α^2, β^2을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2+x+1=0$

이때 $x^2+px+q=-4x-2$, 즉 $x^2+(p+4)x+q+2=0$이 $x^2+x+1=0$과 같으므로

$p+4=1$, $q+2=1$

$\therefore p=-3$, $q=-1$

따라서 $f(x)=x^2-3x-1$이므로

$f(2x+3)=(2x+3)^2-3(2x+3)-1=4x^2+6x-1$이고 이차방정식 $f(2x+3)=0$, 즉 $4x^2+6x-1=0$의 두 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{3}{2}$이다.

0466 답 ②

전략 켤레근의 성질을 이용하여 a, b의 값을 구하고 $g(x)$와 $f(x)$에 대한 항등식을 세운다.

$f(1+bi)=0$에서 $1+bi$는 이차방정식 $x^2+ax+4=0$의 한 근이고, a가 실수이므로 이 방정식의 다른 한 근은 $1-bi$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+bi)+(1-bi)=-a$ $\therefore a=-2$

$(1+bi)(1-bi)=4$, $b^2=3$ $\therefore b=\sqrt{3}$ ($\because b>0$)

$\therefore f(1\pm\sqrt{3}i)=0$, $g(1-\sqrt{3}i)=-4+3\sqrt{3}i$

$g(x)$를 $f(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $mx+n$ (m, n은 실수)이라 하면

$g(x)=f(x)Q(x)+mx+n$

이 식의 양변에 $x=1-\sqrt{3}i$를 대입하면

$g(1-\sqrt{3}i)=f(1-\sqrt{3}i)Q(1-\sqrt{3}i)+m(1-\sqrt{3}i)+n$

이때 $g(1-\sqrt{3}i)=-4+3\sqrt{3}i$, $f(1-\sqrt{3}i)=0$이므로

$-4+3\sqrt{3}i=m(1-\sqrt{3}i)+n$

$=(m+n)-m\sqrt{3}i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

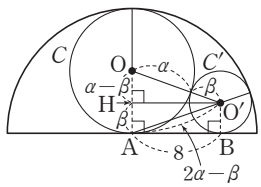
$-4=m+n$, $3\sqrt{3}=-m\sqrt{3}$

$\therefore m=-3$, $n=-1$

따라서 구하는 나머지는 $-3x-1$이다.

0467 답 ④

전략 두 원에 적절한 보조선을 그어 직각삼각형을 만든 후 피타고라스 정리를 이용하여 두 원의 반지름의 길이에 대한 식을 세운다.



두 원 C, C'의 중심을 각각 O, O′이라 하고, 두 원 C, C'의 반지름의 길이를 각각 α, β라 하자.

점 O′에서 $\overline{OA}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OO'}=\alpha+\beta$, $\overline{OH}=\alpha-\beta$, $\overline{O'H}=\overline{AB}=8$이므로

직각삼각형 OHO′에서

$(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)+8^2$, $4\alpha\beta=64$

$\therefore \alpha\beta=16$ ····· ㉠

반원의 반지름의 길이는 원 C의 지름의 길이와 같으므로

$\overline{O'A}=2\alpha-\beta$

따라서 직각삼각형 O′AB에서

$(2\alpha-\beta)^2=8^2+\beta^2$, $4\alpha^2-4\alpha\beta=64$

$\therefore \alpha^2-\alpha\beta=16$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\alpha^2=32$ $\therefore \alpha=4\sqrt{2}$ ($\because \alpha>0$)

$\alpha=4\sqrt{2}$를 ㉠에 대입하면 $\beta=2\sqrt{2}$

따라서 $\alpha+\beta=4\sqrt{2}+2\sqrt{2}=6\sqrt{2}$, $\alpha\beta=4\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=16$이므로

두 원 C, C'의 반지름의 길이를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-6\sqrt{2}x+16=0$

06 이차방정식과 이차함수의 관계

난이도별 필수 기출 99~107쪽

0468 답 22

이차방정식 $x^2-6x-16=0$에서

$(x+2)(x-8)=0$ $\therefore x=-2$ 또는 $x=8$

따라서 $x_1=8$, $x_2=-2$이므로

$2x_1-3x_2=2\times8-3\times(-2)=22$

0469 답 30

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -3, 5이므로 -3, 5는 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+5=-a$, $-3\times5=b$

따라서 $a=-2$, $b=-15$이므로 $ab=30$

0470 답 4

이차함수 $y=-x^2+ax+b$의 그래프와 x축의 두 교점의 x좌표가 -6, 3이므로 -6, 3은 이차방정식 $-x^2+ax+b=0$, 즉 $x^2-ax-b=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-6+3=a$, $-6\times3=-b$

$\therefore a=-3$, $b=18$ …… ⓘ

이때 이차함수 $y=x^2+\frac{b}{9}x+a$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+\frac{b}{9}x+a=0$, 즉 $x^2+2x-3=0$의 두 근이므로

$(x+3)(x-1)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=1$ …… ⓘⓘ

따라서 두 점의 좌표는 $(-3, 0)$, $(1, 0)$이므로 두 점 사이의 거리는 4이다. …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a, b의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 두 점 사이의 거리 구하기	20 %

0471 답 6

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.

이때 $\alpha+\beta=2$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$f(x)=x^2-2x+k$ (k는 상수)라 하자.

$f(x)=x^2-2x+k=(x-1)^2+k-1$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(1, k-1)$

이 꼭짓점이 직선 $y=3x-6$ 위에 있으므로

$k-1=3\times1-6$ $\therefore k=-2$

따라서 $f(x)=x^2-2x-2$이므로

$f(-2)=4+4-2=6$

중3 다시보기

이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 꼴로 변형하여 구한다.

➡ 꼭짓점의 좌표: (p, q)

0472 답 ②

이차방정식 $x^2-(k+1)x-2k=0$의 두 근을 α, β라 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k+1$, $\alpha\beta=-2k$ …… ㉠

이때 주어진 이차함수의 그래프와 x축이 만나는 두 점 사이의 거리가 5이므로 $|\alpha-\beta|=5$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=25$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=25$

이 식에 ㉠을 대입하면 $(k+1)^2+8k=25$

$k^2+10k-24=0$, $(k+12)(k-2)=0$

$\therefore k=-12$ 또는 $k=2$

그런데 $k<0$이므로 $k=-12$

다른 풀이

이차방정식 $x^2-(k+1)x-2k=0$의 두 근을 α, $\alpha+5$라 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+5)=k+1$ …… ㉠

$\alpha(\alpha+5)=-2k$ …… ㉡

㉠에서 $k=2\alpha+4$를 ㉡에 대입하면 $\alpha(\alpha+5)=-2(2\alpha+4)$

$\alpha^2+9\alpha+8=0$, $(\alpha+8)(\alpha+1)=0$

$\therefore \alpha=-8$ 또는 $\alpha=-1$

$\alpha=-8$이면 $k=2\times(-8)+4=-12$

$\alpha=-1$이면 $k=2\times(-1)+4=2$

그런데 $k<0$이므로 $k=-12$

0473 답 ①

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 -1, 4이므로 -1, 4는 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이다.

즉, $f(-1)=0$, $f(4)=0$이므로 $f(2x+1)=0$이려면

$2x+1=-1$ 또는 $2x+1=4$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

따라서 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 곱은

$-1\times\frac{3}{2}=-\frac{3}{2}$

0474 답 31

이차함수의 그래프의 축이 직선 $x=3$이고, $\overline{PQ}=4$이므로 그래프의 x절편은 $3-2$와 $3+2$, 즉 1과 5이다.

즉, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이 1, 5이므로

$ax^2+bx+c=a(x-1)(x-5)$

$y=a(x-1)(x-5)$의 그래프가 꼭짓점 $(3, -4)$를 지나므로

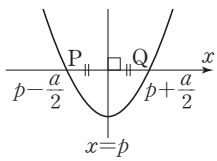
$-4=a\times2\times(-2)$ $\therefore a=1$

$y=(x-1)(x-5)=x^2-6x+5$에서 $b=-6$, $c=5$

$\therefore a-bc=1-(-6)\times5=31$

중3 다시보기

이차함수의 그래프는 축을 중심으로 좌우 대칭인 모양의 포물선이다.
따라서 이차함수의 그래프의 축이 직선 $x=p$이고 x축과 만나는 두 점 P, Q에 대하여 $\overline{PQ}=a$이면 두 점 P, Q의 x좌표는 $p-\frac{a}{2}$, $p+\frac{a}{2}$이다.



0475 답 ②

$y=x^2+ax-a-2$를 a에 대하여 정리하면
$(x-1)a+(x^2-y-2)=0$
이 등식이 a에 대한 항등식이므로
$x-1=0$, $x^2-y-2=0$
$\therefore x=1$, $y=-1$
따라서 점 P의 좌표는 $(1, -1)$이고 점 P가 이차함수의 그래프의 꼭짓점이므로 이차함수의 그래프의 식은
$y=(x-1)^2-1=x^2-2x$
이차방정식 $x^2-2x=0$에서
$x(x-2)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=2$
따라서 그래프의 x절편의 합은 2이다.

0476 답 7

$f(x)$의 이차항의 계수가 1이므로
㈎에서 $f(x)=(x-3)^2+k$(k는 상수) 꼴이고
㈏에서 $f(x)+2$가 완전제곱식이므로 $f(x)+2=(x-3)^2$
$\therefore f(x)=(x-3)^2-2=x^2-6x+7$
따라서 이차방정식 $x^2-6x+7=0$의 두 근이 a, b이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$ab=7$

0477 답 ④

세 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$의 최고차항의 계수의 절댓값이 같으므로 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a($a>0$)라 하면
$f(x)=a(x+1)(x-1)$, $g(x)=-a(x+2)(x-1)$,
$h(x)=a(x-1)(x-2)$
$\therefore f(x)+g(x)+h(x)$
$=a(x+1)(x-1)-a(x+2)(x-1)+a(x-1)(x-2)$
$=a(x-1)\{(x+1)-(x+2)+(x-2)\}$
$=a(x-1)(x-3)$
방정식 $f(x)+g(x)+h(x)=0$에서
$a(x-1)(x-3)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=3$
따라서 모든 근의 합은 $1+3=4$

0478 답 16

㈎에서 $y=-3x^2-12x-21=-3(x+2)^2-9$이므로
A$(-2, -9)$
$y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점이 A이므로
$f(x)=a(x+2)^2-9$ ($a\neq0$인 상수) …… ㉠
라 하면 ㈏에서 $\overline{BC}$가 삼각형 ABC의 밑변일 때, 높이는 점 A의 y좌표의 절댓값인 9이다.
즉, 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times9=27$ $\therefore \overline{BC}=6$ …… ⓘ
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 직선 $x=-2$이고 $\overline{BC}=6$이므로 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표는 $(-5, 0)$, $(1, 0)$이다.
즉, $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1, 0)$을 지나므로 ㉠에서
$0=9a-9$ $\therefore a=1$
따라서 $f(x)=(x+2)^2-9$이므로 …… ⓘⓘ
$f(3)=25-9=16$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 점 A의 좌표와 $\overline{BC}$의 길이 구하기	50 %
ⓘⓘ $f(x)$ 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $f(3)$의 값 구하기	10 %

0479 답 27

$y=2x^2-4ax=2(x-a)^2-2a^2$이므로
A$(a, -2a^2)$
이차방정식 $2x^2-4ax=0$에서 $2x(x-2a)=0$
$\therefore x=0$ 또는 $x=2a$
따라서 $y=2x^2-4ax$의 그래프가 x축과 만나는 원점이 아닌 점 B의 좌표는 B$(2a, 0)$이고 $\overline{BC}=3$이므로 C$(2a+3, 0)$이다.
따라서 x^2의 계수가 -1이고 x축과 두 점 B$(2a, 0)$, C$(2a+3, 0)$에서 만나는 이차함수의 그래프의 식은
$f(x)=-(x-2a)(x-2a-3)$
$y=f(x)$의 그래프가 점 A$(a, -2a^2)$을 지나므로
$-2a^2=-(a-2a)(a-2a-3)$
$-2a^2=-a^2-3a$, $a^2-3a=0$
$a(a-3)=0$ $\therefore a=3$ ($\because a>0$)
$\therefore$ A$(3, -18)$
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times3\times18=27$

0480 답 ③

① 이차방정식 $-x^2+x+5=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1+20=21>0$
이므로 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 2개이다.

② 이차방정식 $-\frac{1}{3}x^2-6x+9=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=9+3=12>0$
이므로 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 2개이다.

③ 이차방정식 $x^2+x+2=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1-8=-7<0$
이므로 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 없다.

④ 이차방정식 $x^2+2x-3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1+3=4>0$

이므로 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 2개이다.

⑤ 이차방정식 $3x^2-12x-5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=36+15=51>0$

이므로 이차함수의 그래프와 x축의 교점은 2개이다.

따라서 교점의 개수가 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

0481 답 ⑤

이차방정식 $x^2+2(k-2)x+k^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-2)^2-k^2<0$

$-4k+4<0 \quad \therefore k>1$

0482 답 1

이차방정식 $x^2-(4k+1)x+4k^2+3k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(4k+1)\}^2-4(4k^2+3k-1)\geq 0$

$-4k+5\geq 0 \quad \therefore k\leq \frac{5}{4}$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다.

참고 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 만난다.

➡ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면 $D\geq 0$

0483 답 17

이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-k$

$9-k>0$이면 $g(k)=2$이므로 $g(1)=g(2)=\cdots=g(8)=2$

$9-k=0$이면 $g(k)=1$이므로 $g(9)=1$

$9-k<0$이면 $g(k)=0$이므로 $g(10)=0$

$\therefore g(1)+g(2)+\cdots+g(10)=8\times 2+1=17$

0484 답 −4

이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(a+2)=0$

$a^2-a-2=0,\ (a+1)(a-2)=0$

$\therefore a=2\ (\because a>0)$ …… ⅰ

$a=2$를 이차함수의 식에 대입하면 $y=x^2+4x+4=(x+2)^2$이므로 주어진 이차함수의 그래프는 점 $(-2,\ 0)$에서 x축에 접한다.

따라서 $b=-2$이므로 …… ⅱ

$ab=2\times(-2)=-4$ …… ⅲ

채점 기준	
ⅰ a의 값 구하기	50 %
ⅱ b의 값 구하기	40 %
ⅲ ab의 값 구하기	10 %

0485 답 ③

이차방정식 $x^2+2kx+k+2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=k^2-(k+2)=0$

$k^2-k-2=0,\ (k+1)(k-2)=0$

$\therefore k=-1$ 또는 $k=2$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-2x+2k-2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(-1)^2-(2k-2)>0$

$3-2k>0 \quad \therefore k<\frac{3}{2}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k=-1$

0486 답 ③

이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$에서 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 $x=1$을 중근으로 갖는다.

즉, $x^2+ax+b=(x-1)^2$이므로

$x^2+ax+b=x^2-2x+1$

$\therefore a=-2,\ b=1$

이차함수 $y=x^2+bx+a$, 즉 $y=x^2+x-2$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는 이차방정식 $x^2+x-2=0$의 두 근이므로

$(x+2)(x-1)=0 \quad \therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 두 점 $(-2,\ 0)$, $(1,\ 0)$ 사이의 거리는

$1-(-2)=3$

0487 답 ④

ㄱ. 주어진 이차함수의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=b^2-4ac>0$

ㄴ. -3, 1은 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$-3+1=-\frac{b}{a},\ -3\times 1=\frac{c}{a}$

$\therefore b=2a,\ c=-3a$ …… ㉠

$\therefore \frac{bc}{a^2}=\frac{2a\times(-3a)}{a^2}=-6$

ㄷ. 이차방정식 $cx^2+ax+b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=a^2-4bc=a^2-4\times 2a\times(-3a)=25a^2\ (\because$ ㉠$)$

이때 $a>0$이므로 $a^2>0 \quad \therefore D_2>0$

따라서 이차함수 $y=cx^2+ax+b$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0488 답 2

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=b^2-4ac<0$ …… ㉠

이차방정식 $bx^2-2(a+c)x+b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=\{-(a+c)\}^2-b^2=a^2+c^2+2ac-b^2$

㉠에서 $-b^2>-4ac$이므로

$a^2+c^2+2ac-b^2>a^2+c^2+2ac-4ac$

$=(a-c)^2$

이때 $(a-c)^2\geq 0$이므로 $\frac{D_2}{4}>0$

따라서 구하는 교점의 개수는 2이다.

0489 답 2

이차방정식 $x^2-2(a+k)x+k^2+2k+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(a+k)\}^2-(k^2+2k+b)=0$

$a^2+2ak-2k-b=0$ …… ⓘ

이 등식이 k에 대한 항등식이므로 k에 대하여 정리하면

$(2a-2)k+a^2-b=0$

따라서 $2a-2=0$, $a^2-b=0$이므로

$a=1$, $b=1$ …… ⓘⓘ

$\therefore a+b=2$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 판별식 구하기	40 %
ⓘⓘ 항등식의 성질을 이용하여 a, b의 값 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ $a+b$의 값 구하기	10 %

0490 답 ②

$x^2-3x+1=x+1$에서 $x^2-4x=0$

$x(x-4)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=4$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 (0, 1), (4, 5)이므로

$ab+cd=0\times 1+4\times 5=20$

참고 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=mx+n$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+n$, 즉 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$의 실근과 같다.

0491 답 ④

이차방정식 $2x^2-6x+3=ax-2$, 즉 $2x^2-(a+6)x+5=0$의 두 근이 x_1, x_2이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=\frac{a+6}{2}$

이때 $x_1+x_2=4$이므로 $\frac{a+6}{2}=4$, $a+6=8$

$\therefore a=2$

0492 답 2

이차함수 $y=3x^2-x-6$의 그래프와 직선 $y=ax+b$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $3x^2-x-6=ax+b$, 즉 $3x^2-(a+1)x-b-6=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-3=\frac{a+1}{3}$, $2=\frac{-b-6}{3}$ $\therefore a=-10$, $b=-12$

$\therefore a-b=2$

0493 답 ③

주어진 그림에서 이차함수 $y=x^2+mx+1$의 그래프와 직선 $y=-x+n$의 교점의 x좌표가 -3, 1이므로 -3, 1은 이차방정식 $x^2+mx+1=-x+n$, 즉 $x^2+(m+1)x+1-n=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-3+1=-(m+1)$, $-3\times 1=1-n$

$\therefore m=1$, $n=4$

$\therefore m+n=5$

0494 답 8

이차방정식 $-x^2+ax+3=-2x+b$, 즉 $x^2-(a+2)x+b-3=0$의 한 근이 $2+\sqrt{5}$이다.

이때 이차방정식의 계수가 유리수이므로 $2+\sqrt{5}$가 근이면 다른 한 근은 $2-\sqrt{5}$이다. …… ⓘ

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=a+2$

$(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})=b-3$

$\therefore a=2$, $b=2$ …… ⓘⓘ

$\therefore a^2+b^2=4+4=8$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $2+\sqrt{5}$가 근인 이차방정식과 다른 한 근 구하기	30 %
ⓘⓘ a, b의 값 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ a^2+b^2의 값 구하기	20 %

0495 답 ④

α, β는 이차방정식 $x^2-5x-3=-ax+1$, 즉 $x^2+(a-5)x-4=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5-a$, $\alpha\beta=-4$ …… ㉠

$|\alpha-\beta|=4\sqrt{5}$의 양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=80$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=80$

이 식에 ㉠을 대입하면 $(5-a)^2-4\times(-4)=80$

$a^2-10a-39=0$, $(a+3)(a-13)=0$

$\therefore a=13$ ($\because a>0$)

0496 답 ③

이차함수 $y=2x^2-(a^2-2a+3)x+(3a-1)$의 그래프와 직선 $y=-2ax+a^2$의 두 교점의 x좌표를 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $2x^2-(a^2-2a+3)x+3a-1=-2ax+a^2$, 즉 $2x^2-(a^2-4a+3)x-a^2+3a-1=0$의 두 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{a^2-4a+3}{2}$, $\alpha\beta=\frac{-a^2+3a-1}{2}$

이때 두 교점의 x좌표의 절댓값이 같고 부호가 다르므로

$\alpha+\beta=0$, $\alpha\beta<0$

$\frac{a^2-4a+3}{2}=0$에서 $(a-1)(a-3)=0$

$\therefore a=1$ 또는 $a=3$

$a=1$이면 $\alpha\beta=\dfrac{-1+3-1}{2}=\dfrac{1}{2}>0$

$a=3$이면 $\alpha\beta=\dfrac{-9+9-1}{2}=-\dfrac{1}{2}<0$

따라서 구하는 상수 a의 값은 3이다.

0497 답 ①

이차함수 $y=2x^2+ax+3$의 그래프와 직선 $y=x+2$의 두 교점의 x좌표를 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $2x^2+ax+3=x+2$, 즉 $2x^2+(a-1)x+1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{1-a}{2}$ ····· ㉠

두 교점의 좌표는 $(\alpha, \alpha+2)$, $(\beta, \beta+2)$이고 y좌표의 합이 6이므로

$(\alpha+2)+(\beta+2)=6$ $\therefore \alpha+\beta=2$

㉠에서 $\dfrac{1-a}{2}=2$, $1-a=4$

$\therefore a=-3$

0498 답 ②

이차함수 $y=\dfrac{1}{2}(x-k)^2$의 그래프와 직선 $y=x$의 두 교점 A, B의 x좌표를 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $\dfrac{1}{2}(x-k)^2=x$, 즉 $x^2-2(k+1)x+k^2=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2(k+1)$, $\alpha\beta=k^2$ ····· ㉠

이때 두 점 A, B의 x좌표가 α, β이면 두 점 C, D의 x좌표도 α, β이고, 선분 CD의 길이가 6이므로 $|\alpha-\beta|=6$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=36$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=36$

이 식에 ㉠을 대입하면 $4(k+1)^2-4k^2=36$

$8k+4=36$ $\therefore k=4$

0499 답 ②

두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하면

$\overline{OA}:\overline{OB}=2:1$이므로 $\overline{OA'}:\overline{OB'}=2:1$

즉, 두 점 A′, B′의 x좌표를 각각 $-2a$, a $(a>0)$라 하면 $-2a$, a는 이차방정식 $-x^2+4=kx$, 즉 $x^2+kx-4=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$-2a+a=-k$, $-2a\times a=-4$

$\therefore k=a$, $a^2=2$

그런데 $a>0$이므로 $a=\sqrt{2}$

$\therefore k=\sqrt{2}$

0500 답 ⑤

이차함수 $f(x)=x^2-x+k$의 그래프와 직선 $y=x+1$의 두 교점의 x좌표가 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $x^2-x+k=x+1$, 즉 $x^2-2x+k-1=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=k-1$ ····· ㉠

$\overline{AB}=\beta-\alpha$이고

$\overline{BC}=f(\beta)-f(\alpha)=(\beta+1)-(\alpha+1)$

$=\beta-\alpha$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(\beta-\alpha)^2=18$

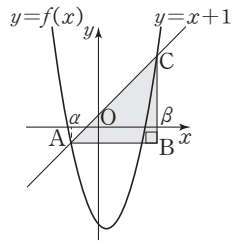
$(\beta-\alpha)^2=36$, $(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=36$

이 식에 ㉠을 대입하면 $2^2-4(k-1)=36$

$-4k=28$ $\therefore k=-7$

따라서 $f(x)=x^2-x-7$이므로

$f(1)=1-1-7=-7$



0501 답 ①

㈎에서 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\dfrac{(6-x)+x}{2}$, 즉 $x=3$이고 $f(x)$의 이차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x-3)^2+k$ (k는 상수)라 하자.

㈏에서 $f(1)=1$이므로

$(-2)^2+k=1$ $\therefore k=-3$

$\therefore f(x)=(x-3)^2-3=x^2-6x+6$

이차함수 $y=x^2-6x+6$의 그래프와 직선 $y=2x-3$의 두 교점 A, B의 x좌표를 α, β라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-6x+6=2x-3$, 즉 $x^2-8x+9=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=9$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=8^2-4\times9=28$이므로

$\alpha-\beta=\pm2\sqrt{7}$

$\therefore \overline{CD}=|\alpha-\beta|=2\sqrt{7}$

0502 답 ②

이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 직선 $y=x+6$이 만나는 두 점의 x좌표가 α, β이므로 α, β는 이차방정식 $ax^2=x+6$, 즉 $ax^2-x-6=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{1}{a}$, $\alpha\beta=-\dfrac{6}{a}$ ····· ㉠

이때 두 점 A, B는 직선 $y=x+6$ 위의 점이므로

A$(\alpha, \alpha+6)$, B$(\beta, \beta+6)$

C$(\beta, \alpha+6)$이므로

$\overline{BC}=(\beta+6)-(\alpha+6)=\dfrac{7}{2}$ $\therefore \alpha-\beta=-\dfrac{7}{2}$

양변을 제곱하면 $(\alpha-\beta)^2=\dfrac{49}{4}$

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\dfrac{49}{4}$

이 식에 ㉠을 대입하면 $\left(\dfrac{1}{a}\right)^2-4\times\left(-\dfrac{6}{a}\right)=\dfrac{49}{4}$

양변에 $4a^2$을 곱한 후 정리하면

$49a^2-96a-4=0$, $(49a+2)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

$a=2$를 ㉠에 대입하면 $\alpha+\beta=\dfrac{1}{2}$, $\alpha\beta=-3$이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-2\times(-3)=\dfrac{25}{4}$

0503 답 7

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β ($\beta<0<\alpha$)라 하면

$A(\alpha, \alpha^2)$, $B(\beta, \beta^2)$

α, β는 이차방정식 $x^2=x+3k$, 즉 $x^2-x-3k=0$의 두 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-3k$ ····· ㉠

$\overline{OC}=\alpha$, $\overline{AC}=\alpha^2$이므로 삼각형 AOC의 넓이는

$S_1=\frac{1}{2}\times\overline{OC}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times\alpha\times\alpha^2=\frac{1}{2}\alpha^3$

$\overline{OD}=|\beta|=-\beta$, $\overline{BD}=\beta^2$이므로 삼각형 BOD의 넓이는

$S_2=\frac{1}{2}\times\overline{OD}\times\overline{BD}=\frac{1}{2}\times(-\beta)\times\beta^2=-\frac{1}{2}\beta^3$ ····· ⓘ

$S_1-S_2=32$에서

$\frac{1}{2}\alpha^3+\frac{1}{2}\beta^3=32$, $\alpha^3+\beta^3=64$ ····· ⓘⓘ

$(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=64$

이 식에 ㉠을 대입하면

$1^3-3\times(-3k)\times1=64$, $9k=63$

$\therefore k=7$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ S_1, S_2를 α, β에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘ $\alpha^3+\beta^3$의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ k의 값 구하기	30 %

0504 답 ⑤

① 이차방정식 $x^2-3x+1=x+1$, 즉 $x^2-4x=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-0=4>0$

② 이차방정식 $x^2-3x+1=x-3$, 즉 $x^2-4x+4=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-4=0$

③ 이차방정식 $x^2-3x+1=2x-1$, 즉 $x^2-5x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=25-8=17>0$

④ 이차방정식 $x^2-3x+1=-x+1$, 즉 $x^2-2x=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-0=1>0$

⑤ 이차방정식 $x^2-3x+1=-2x-1$, 즉 $x^2-x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-8=-7<0$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 만나지 않는 직선은 ⑤이다.

0505 답 9

$x^2+4x+k=-2x+1$에서 $x^2+6x+k-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-(k-1)>0$

$10-k>0$ $\therefore k<10$

따라서 자연수 k의 최댓값은 9이다.

0506 답 ②

$x^2+ax+a^2=-x$에서

$x^2+(a+1)x+a^2=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(a+1)^2-4a^2=0$

$3a^2-2a-1=0$, $(3a+1)(a-1)=0$

$\therefore a=-\frac{1}{3}$ 또는 $a=1$

그런데 $a>0$이므로 $a=1$

0507 답 ④

$x^2+5x+9=x+k$에서

$x^2+4x+9-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(9-k)<0$

$k-5<0$ $\therefore k<5$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

0508 답 4

$2x+k=3x^2-2x+5$에서

$3x^2-4x+5-k=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-3(5-k)\geq0$

$3k-11\geq0$ $\therefore k\geq\frac{11}{3}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 4이다.

0509 답 −1

$2x^2+x-1=3x+k$에서

$2x^2-2x-k-1=0$ ····· ㉠

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-2(-k-1)=0$

$2k+3=0$ $\therefore k=-\frac{3}{2}$ ····· ⓘ

㉠에서 이차방정식 $2x^2-2x+\frac{1}{2}=0$의 근이 a이므로

$2a^2-2a+\frac{1}{2}=0$, $4a^2-4a+1=0$

$(2a-1)^2=0$ $\therefore a=\frac{1}{2}$

$y=3x-\frac{3}{2}$에 $x=\frac{1}{2}$, $y=b$를 대입하면

$b=3\times\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=0$ ····· ⓘⓘ

$\therefore a+b+k=\frac{1}{2}+0+\left(-\frac{3}{2}\right)=-1$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ k의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ a, b의 값 구하기	60 %
ⓘⓘⓘ $a+b+k$의 값 구하기	10 %

0510 답 ④

구하는 직선의 기울기는 -2이므로 직선의 방정식을 $y=-2x+k$ (k는 상수)라 하자.

이 직선이 이차함수 $y=-x^2+2x-3$의 그래프와 접하므로 이차방정식 $-x^2+2x-3=-2x+k$, 즉 $x^2-4x+k+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(k+3)=0$

$1-k=0$ $\therefore k=1$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$y=-2x+1$

0511 답 ④

직선 $y=ax+b$가 점 $(0, 8)$을 지나므로 $b=8$

직선 $y=ax+8$이 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$의 그래프와 접하므로

이차방정식 $ax+8=-\frac{1}{2}x^2+2x$, 즉 $\frac{1}{2}x^2+(a-2)x+8=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2-4\times\frac{1}{2}\times8=0$

$a^2-4a-12=0$, $(a+2)(a-6)=0$

$\therefore a=-2$ ($\because a<0$)

$\therefore a+b=-2+8=6$

0512 답 ③

이차방정식 $x^2+2(k+2)x+4=kx-5$, 즉 $x^2+(k+4)x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+4)^2-36=k^2+8k-20$ ····· ㉠

$D=0$이면 $f(k)=1$이므로 ㉠에서

$k^2+8k-20=0$, $(k+10)(k-2)=0$

$\therefore k=-10$ 또는 $k=2$

$\therefore f(2)=1$

$k=1$이면 ㉠에서 $D=1+8-20=-11<0$이므로

$f(1)=0$

$k=3$이면 ㉠에서 $D=9+24-20=13>0$이므로

$f(3)=2$

마찬가지 방법으로 $k=4, 5, 6, \cdots, 10$일 때, $D>0$이므로

$f(3)=f(4)=\cdots=f(10)=2$

$\therefore f(1)+f(2)+\cdots+f(10)=0+1+2\times8=17$

0513 답 ②

이차방정식 $x^2+3x+a=x+1$, 즉 $x^2+2x+a-1=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=1-(a-1)=0$

$2-a=0$ $\therefore a=2$

이차방정식 $x^2+3x+2=5x+b$, 즉 $x^2-2x+2-b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=1-(2-b)>0$

$b-1>0$ $\therefore b>1$

따라서 정수 b의 최솟값은 2이므로 $m=2$

$\therefore a+m=2+2=4$

0514 답 12

점 $(-3, 1)$을 지나는 직선의 방정식을 $y=m(x+3)+1$ (m은 상수)이라 하자.

이차방정식 $-x^2+2x+3=m(x+3)+1$, 즉

$x^2+(m-2)x+3m-2=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(m-2)^2-4(3m-2)=0$

$\therefore m^2-16m+12=0$

이차방정식 $m^2-16m+12=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=64-12=52>0$

이므로 이 이차방정식의 서로 다른 두 실근이 이차함수의 그래프에 접하는 두 직선의 기울기이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 두 직선의 기울기의 곱은 12이다.

0515 답 $\frac{1}{4}$

이차방정식 $x^2+4ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=4a^2-b=0$ $\therefore b=4a^2$ ····· ⓘ

이차방정식 $x^2+4ax+4a^2=2x$, 즉 $x^2+2(2a-1)x+4a^2=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(2a-1)^2-4a^2\geq0$

$-4a+1\geq0$ $\therefore a\leq\frac{1}{4}$ ····· ⓘⓘ

따라서 a의 최댓값은 $\frac{1}{4}$이다. ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ b를 a에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘ a의 값의 범위 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ a의 최댓값 구하기	20 %

0516 답 ④

주어진 이차함수의 그래프와 직선이 한 점에서 만나므로 이차방정식 $-x^2+4x+5=2x+a$, 즉 $x^2-2x+a-5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(a-5)=0$

$6-a=0$ $\therefore a=6$

이차방정식 $x^2-2x+a-5=0$, 즉 $x^2-2x+1=0$의 근이 점 A의 x좌표이므로

$(x-1)^2=0$ $\therefore x=1$

점 A가 직선 $y=2x+a$, 즉 $y=2x+6$ 위의 점이므로 $x=1$을 $y=2x+6$에 대입하면

$y=8$ $\therefore$ A$(1, 8)$

이차함수 $y=-x^2+4x+5$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구하면 $-x^2+4x+5=0$에서

$x^2-4x-5=0$, $(x+1)(x-5)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=5$

따라서 B(−1, 0), C(5, 0)이므로 $\overline{BC}=6$

$\overline{BC}$가 삼각형 ABC의 밑변일 때, 높이는 점 A의 y좌표인 8이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$

0517 답 ④

이차함수 $y=x^2-3x+4$의 그래프가 직선 $y=-x+b$에 접하므로 이차방정식 $x^2-3x+4=-x+b$, 즉 $x^2-2x+4-b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=1-(4-b)=0,\ b-3=0$

$\therefore\ b=3$

이차함수 $y=-2x^2+3x+a$의 그래프가 직선 $y=-x+3$에 접하므로 이차방정식 $-2x^2+3x+a=-x+3$, 즉 $2x^2-4x+3-a=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=4-2(3-a)=0,\ 2a-2=0$

$\therefore\ a=1$

$\therefore\ a+b=1+3=4$

0518 답 −3, 1

㈎에서 꼭짓점의 x좌표가 −1이고, $f(x)$의 이차항의 계수가 −1이므로 $f(x)=-(x+1)^2+k$(k는 상수)라 하자.

㈏에서 이차방정식 $-(x+1)^2+k=2x+7$, 즉

$x^2+4x+8-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(8-k)=0$

$k-4=0 \quad \therefore\ k=4$

$\therefore\ f(x)=-(x+1)^2+4$

$=-x^2-2x+3$ …… ⓘ

$y=-x^2-2x+3$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2-2x+3=0$에서 $x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore\ x=-3$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 x좌표는 −3, 1이다. …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(x)$ 구하기	50%
ⓘⓘ $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표 구하기	50%

0519 답 ②

이차방정식 $x^2-2ax+a^2-5a=mx+n$, 즉

$x^2-(2a+m)x+a^2-5a-n=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(2a+m)\}^2-4(a^2-5a-n)=0$

$(4m+20)a+m^2+4n=0$

이 등식이 a에 대한 항등식이므로

$4m+20=0,\ m^2+4n=0$

$\therefore\ m=-5,\ n=-\frac{25}{4}$

$\therefore\ 4mn=4\times(-5)\times\left(-\frac{25}{4}\right)=125$

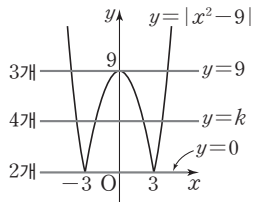
0520 답 ③

방정식 $|x^2-9|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-9|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-9|$에서 $x=-3$, $x=3$을 기준으로 x의 값의 범위를 나누어 함수식을 구하면

$$y=|x^2-9|=\begin{cases} x^2-9 & (x\le -3 \text{ 또는 } x\ge 3)\\ -(x^2-9) & (-3<x<3)\end{cases}$$

이때 교점이 4개이려면 다음 그림과 같이 직선 $y=k$가 원점을 지나는 직선 $y=0$과 점 (0, 9)를 지나는 직선 $y=9$ 사이에 있어야 한다.

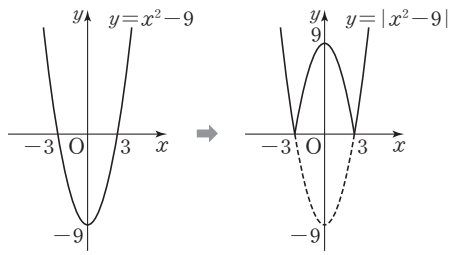


따라서 $0<k<9$이므로 정수 k의 최댓값은 8이다.

참고 함수 $y=|x^2-9|$의 그래프는 다음과 같은 순서로 그릴 수 있다.

① 함수 $y=x^2-9$의 그래프를 그린다.

② $y<0$인 부분, 즉 x축보다 아래쪽에 있는 부분을 x축에 대하여 대칭시킨다.



0521 답 ②

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 (2, 3)이므로

$f(x)=a(x-2)^2+3$(a는 상수)이라 하자.

이 그래프가 점 (0, 0)을 지나므로 $f(0)=0$에서

$0=4a+3 \quad \therefore\ a=-\frac{3}{4}$

점 (0, 6)을 지나는 직선의 방정식을 $y=mx+6$ ($m<0$)이라 하면

$f(x)=-\frac{3}{4}(x-2)^2+3$의 그래프가 이 직선과 접하므로

이차방정식 $-\frac{3}{4}(x-2)^2+3=mx+6$이 중근을 갖는다.

이차방정식 $-3(x-2)^2+12=4mx+24$, 즉

$3x^2+4(m-3)x+24=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4(m-3)^2-3\times 24=0$

$m^2-6m-9=0 \quad \therefore\ m=3\pm 3\sqrt{2}$

이때 $m<0$이므로 구하는 직선의 기울기는 $3-3\sqrt{2}$이다.

중3 다시보기

꼭짓점의 좌표 (p, q)와 그래프 위의 다른 한 점 (x_1, y_1)이 주어질 때, 이차함수의 식은 다음과 같은 순서로 구한다.

① 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$로 놓는다.

② ①의 식에 점 (x_1, y_1)의 좌표를 대입하여 a의 값을 구한다.

최고수준 도전 기출 108~109쪽

0522 답 91

전략 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 a의 값을 구한 후 $S_1-S_2=\triangle BOH-\triangle AOH$임을 이용한다.

이차함수 $y=x^2-4x+\frac{25}{4}$의 그래프가 직선 $y=ax$와 한 점에서만 만나므로 이차방정식 $x^2-4x+\frac{25}{4}=ax$, 즉

$x^2-(a+4)x+\frac{25}{4}=0$의 판별식을 D라 하면

$D=\{-(a+4)\}^2-4\times1\times\frac{25}{4}=0$

$a^2+8a-9=0$

$(a+9)(a-1)=0$

$\therefore a=1\ (\because a>0)$

이차함수 $y=x^2-4x+\frac{25}{4}$의 그래프가 직선 $y=x$와 만나는 점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-4x+\frac{25}{4}=x$, 즉 $x^2-5x+\frac{25}{4}=0$의 실근과 같다.

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=0 \qquad \therefore x=\frac{5}{2}$

$\therefore A\left(\frac{5}{2},\frac{5}{2}\right), B\left(0,\frac{25}{4}\right), H\left(\frac{5}{2},0\right)$

삼각형 BOH의 넓이를 T_1, 삼각형 AOH의 넓이를 T_2라 하면

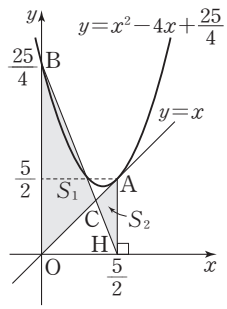
$S_1-S_2=T_1-T_2$

$=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{25}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{5}{2}$

$=\frac{75}{16}$

따라서 $p=16$, $q=75$이므로

$p+q=91$



0523 답 ①

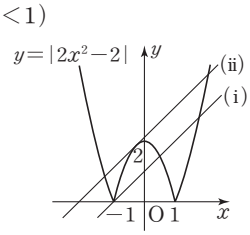
전략 방정식 $|2x^2-2|-x-k=0$의 실근의 개수는 함수 $y=|2x^2-2|$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 교점의 개수와 같음을 이용한다.

$|2x^2-2|-x-k=0$에서 $|2x^2-2|=x+k$이므로 방정식의 실근의 개수는 함수 $y=|2x^2-2|$의 그래프와 직선 $y=x+k$의 교점의 개수와 같다.

함수 $y=|2x^2-2|$에서

$y=|2x^2-2|=\begin{cases}2x^2-2 & (x\le-1 \text{ 또는 } x\ge1)\\ -(2x^2-2) & (-1<x<1)\end{cases}$

이때 교점이 3개인 경우는 오른쪽 그림과 같이 $y=|2x^2-2|$의 그래프와 직선 $y=x+k$가 (i) 또는 (ii)와 같이 만나는 경우이다.



(i) 직선 $y=x+k$가 점 $(-1, 0)$을 지날 때,

$0=-1+k \qquad \therefore k=1$

(ii) 직선 $y=x+k$가 이차함수 $y=-2x^2+2$의 그래프에 접할 때,

이차방정식 $x+k=-2x^2+2$, 즉 $2x^2+x+k-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-8(k-2)=0$

$-8k+17=0 \qquad \therefore k=\frac{17}{8}$

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 곱은

$1\times\frac{17}{8}=\frac{17}{8}$

0524 답 ②

전략 방정식 $f(x)=0$의 실근은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표와 같고, 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표와 같음을 이용한다.

$f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=mx+n$ (a, b, c, m, n은 실수)이라 하자.

ㄱ. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 β, γ이므로 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 β, γ이다.

방정식 $f(-x)=0$에서 $-x=\beta$ 또는 $-x=\gamma$

$\therefore x=-\beta$ 또는 $x=-\gamma$

따라서 $f(-x)=0$의 두 근은 $-\beta$, $-\gamma$이므로 두 근의 합은 $-(\beta+\gamma)$이다.

ㄴ. α, δ가 방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근이므로

$ax^2+bx+c=mx+n$, 즉 $ax^2+(b-m)x+c-n=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\delta=\frac{c-n}{a}$ ……㉠

방정식 $f(x)=g(-x)$, 즉 $f(x)-g(-x)=0$은

$ax^2+(b+m)x+c-n=0$이고

이 방정식의 두 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{c-n}{a}$, 즉 $\alpha\delta$이다.

ㄷ. 방정식 $f(x)=0$의 두 근이 β, γ이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\beta\gamma=\frac{c}{a}$

방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근이 α, δ이므로 ㉠에서 $\alpha\delta=\frac{c-n}{a}$

$\beta\gamma-\alpha\delta=\frac{c}{a}-\frac{c-n}{a}=\frac{n}{a}$

이때 주어진 그래프에서 $a>0$, $n>0$이므로

$\beta\gamma-\alpha\delta>0 \qquad \therefore \beta\gamma>\alpha\delta$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0525 답 ②

전략 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 실수 k의 값에 관계없이 항상 접하려면 이차방정식 $f(x)-g(x)=0$의 판별식 D에 대하여 $D=0$이 실수 k에 대한 항등식임을 이용한다.

$l_1: y=mx+n$, $l_2: y=px+q$ (m, n, p, q는 상수)라 하면

(가)에서 이차방정식 $-x^2+2ax-a^2=mx+n$이 중근을 가지므로

이차방정식 $x^2+(m-2a)x+a^2+n=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(m-2a)^2-4(a^2+n)=0$

이 식이 실수 a의 값에 관계없이 성립하므로 a에 대하여 정리하면

$-4ma+(m^2-4n)=0$

이 등식이 a에 대한 항등식이므로

$m=0,\ m^2-4n=0$

$\therefore\ m=0,\ n=0$

따라서 직선 l_1의 방정식은 $y=0$이다.

㈏에서 이차방정식 $x^2-2bx+b^2+2b+4=px+q$가 중근을 가지므로 이차방정식 $x^2-(2b+p)x+b^2+2b-q+4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=\{-(2b+p)\}^2-4(b^2+2b-q+4)=0$

이 식이 실수 b의 값에 관계없이 성립하므로 b에 대하여 정리하면

$4(p-2)b+p^2+4q-16=0$

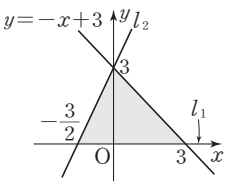
이 등식이 b에 대한 항등식이므로

$4(p-2)=0,\ p^2+4q-16=0$

$\therefore\ p=2,\ q=3$

따라서 직선 l_2의 방정식은 $y=2x+3$이다.

세 직선 $y=-x+3$, l_1, l_2는 오른쪽 그림과 같으므로 이 세 직선으로 만들어지는 삼각형의 넓이는



$\frac{1}{2}\times\left\{3-\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}\times 3=\frac{1}{2}\times\frac{9}{2}\times 3$

$=\frac{27}{4}$

0526 답 ④

전략 두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 접하는 점의 x좌표가 k이면 $f(x)-h(x)=a(x-k)^2$임을 이용한다.

두 함수 $y=f(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 $x=\alpha$인 점에서 접하므로 방정식 $f(x)-h(x)=0$은 중근 α를 갖는다.

이때 ㈎에서 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-h(x)=(x-\alpha)^2$ ····· ㉠

두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$의 그래프가 $x=\beta$인 점에서 접하므로 방정식 $g(x)-h(x)=0$은 중근 β를 갖는다.

이때 ㈎에서 $g(x)$의 최고차항의 계수가 4이므로

$g(x)-h(x)=4(x-\beta)^2$

㈏에서 $\alpha:\beta=1:2$이므로 $\beta=2\alpha$

$\therefore\ g(x)-h(x)=4(x-2\alpha)^2$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면

$f(x)-g(x)=(x-\alpha)^2-4(x-2\alpha)^2$

$=-3x^2+14\alpha x-15\alpha^2$

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 $x=t$인 점에서 만나므로

$f(t)=g(t)$에서 $f(t)-g(t)=0$

즉, $-3t^2+14\alpha t-15\alpha^2=0$에서

$3t^2-14\alpha t+15\alpha^2=0$

$(3t-5\alpha)(t-3\alpha)=0$

$\therefore\ t=\frac{5}{3}\alpha$ 또는 $t=3\alpha$

그런데 $\alpha<t<\beta$, 즉 $\alpha<t<2\alpha$이므로 $t=\frac{5}{3}\alpha$

$\therefore\ \frac{t}{\alpha}=\frac{5}{3}$

0527 답 12

전략 x_1, x_2의 부호가 모두 0 이상인 경우와 하나는 음수인 경우로 나누어 $\frac{|x_1|+|x_2|}{2}$의 값을 생각한다.

직선 $y=n$이 이차함수 $y=x^2-4x+4$의 그래프와 만나는 점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-4x+4=n$의 실근과 같다.

$(x-2)^2=n$에서 $x-2=\pm\sqrt{n}$이므로

$x=2-\sqrt{n}$ 또는 $x=2+\sqrt{n}$

x_1, x_2 중 작은 것을 α, 큰 것을 β라 하면

$\alpha=2-\sqrt{n},\ \beta=2+\sqrt{n}$

(i) $1\le n\le 4$일 때,

$\alpha\ge 0,\ \beta>0$이므로

$\frac{|x_1|+|x_2|}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$

$=\frac{2-\sqrt{n}+2+\sqrt{n}}{2}=2$

따라서 $\frac{|x_1|+|x_2|}{2}$의 값이 자연수가 되는 n의 값은 1, 2, 3, 4의 4개이다.

(ii) $4<n\le 100$일 때,

$\alpha<0,\ \beta>0$이므로

$\frac{|x_1|+|x_2|}{2}=\frac{-\alpha+\beta}{2}$

$=\frac{-(2-\sqrt{n})+2+\sqrt{n}}{2}=\sqrt{n}$

따라서 $\frac{|x_1|+|x_2|}{2}$의 값이 자연수가 되는 n의 값은 9, 16, 25, …, 100의 8개이다.

(i), (ii)에서 구하는 자연수 n의 개수는

$4+8=12$

0528 답 2

전략 두 점 A, B의 좌표가 정해졌으므로 선분 AB가 밑변일 때 삼각형의 높이가 최대인 경우 점 C의 위치에 대하여 생각한다.

점 C를 지나고 이차함수 $y=x^2-3x-4$의 그래프에 접하는 직선이 두 점 A, B를 지나는 직선과 평행할 때, 삼각형 ABC의 넓이가 최대이다.

두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $\frac{6-0}{5-(-1)}=1$이므로 이차함수 $y=x^2-3x-4$의 그래프에 접하는 직선의 방정식을 $y=x+k$ (k는 상수)라 하자.

이차방정식 $x^2-3x-4=x+k$, 즉 $x^2-4x-4-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-2)^2-(-4-k)=0$

$k+8=0$ $\therefore\ k=-8$

따라서 직선의 방정식은 $y=x-8$이므로

$x^2-3x-4=x-8$에서

$x^2-4x+4=0,\ (x-2)^2=0$ $\therefore\ x=2$

$x=2$를 $y=x-8$에 대입하면 $y=-6$

따라서 $a=2,\ b=-6$이므로

$4a+b=8+(-6)=2$

07 이차함수의 최대, 최소

난이도별 필수 기출 111~119쪽

0529 답 11

$f(1)=14$, $f(2)=15$, $f(4)=11$이므로 최솟값은 11이다.

0530 답 ③

$y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$

$-2\le x\le 0$에서 $x=-2$일 때 최댓값은 6이고, $x=0$일 때 최솟값은 -2이므로

$M=6$, $m=-2$

$\therefore M-m=8$

0531 답 ①

$f(x)=x^2-4px=(x-2p)^2-4p^2$

(i) $p=1$일 때,

$f(x)=(x-2)^2-4$이므로 $0\le x\le 2$에서 $x=2$일 때 최솟값은 -4이다.

$\therefore g(1)=f(2)=-4$

(ii) $p=-\frac{1}{3}$일 때,

$f(x)=\left(x+\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9}$이므로 $0\le x\le 2$에서 $x=0$일 때 최솟값은 0이다.

$\therefore g\left(-\frac{1}{3}\right)=f(0)=0$

(i), (ii)에서 $g(1)+g\left(-\frac{1}{3}\right)=-4+0=-4$

0532 답 ⑤

$-x^2-y^2+2x-8y+4=-(x^2-2x+1)-(y^2+8y+16)+21$

$=-(x-1)^2-(y+4)^2+21$

이때 x, y가 실수이므로

$-(x-1)^2\le 0$, $-(y+4)^2\le 0$

$\therefore -x^2-y^2+2x-8y+4\le 21$

따라서 구하는 최댓값은 21이다.

참고 x, y가 실수일 때, $ax^2+by^2+cx+dy+e$의 최대, 최소

➡ $a(x+p)^2+b(y+q)^2+r$ 꼴로 변형한 후 $(x+p)^2\ge 0$, $(y+q)^2\ge 0$임을 이용한다.

0533 답 ④

$4x+y^2=2$에서 $y^2=2-4x$ ····· ㉠

그런데 $y^2\ge 0$이므로 $2-4x\ge 0$ $\therefore x\le\frac{1}{2}$

이때 $S=x^2+y^2+3$이라 하고 ㉠을 대입하면

$S=x^2+(2-4x)+3$

$=x^2-4x+5=(x-2)^2+1$

따라서 $x\le\frac{1}{2}$에서 $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 $\frac{13}{4}$이다.

참고 x, y에 대한 등식이 조건으로 주어졌을 때의 이차식의 최대, 최소

➡ 조건식을 한 문자에 대하여 정리한 후 이차식에 대입하여 이차함수의 최대, 최소를 이용한다.

0534 답 ④

x, y, z가 실수이므로

$2x^2+y^2+3z^2-4x+4y+6z+12$

$=2(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)+3(z^2+2z+1)+3$

$=2(x-1)^2+(y+2)^2+3(z+1)^2+3$

≥ 3

따라서 주어진 식은 $x=1$, $y=-2$, $z=-1$일 때 최솟값이 3이다.

0535 답 ②

$x^2+4x=t$로 놓으면 $t=(x+2)^2-4$

$x=-2$일 때 최솟값은 -4이므로 $t\ge -4$

이때 주어진 함수는

$y=(x^2+4x+5)(x^2+4x+7)+2(x^2+4x)+3$

$=(t+5)(t+7)+2t+3$

$=t^2+14t+38=(t+7)^2-11$

따라서 $t\ge -4$에서 $t=-4$일 때 최솟값은 -2이다.

참고 공통부분이 있는 함수의 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

(i) 공통부분을 t로 놓고 t의 값의 범위를 구한다.

(ii) $y=at^2+bt+c$를 $y=a(t-p)^2+q$ 꼴로 변형한다.

(iii) (i)에서 구한 범위에서 최댓값과 최솟값을 구한다.

0536 답 ①

$y=x^2+2mx-m^2+4m-1=(x+m)^2-2m^2+4m-1$이므로

$x=-m$일 때 최솟값 $-2m^2+4m-1$을 갖는다.

$\therefore g(m)=-2m^2+4m-1$

$=-2(m-1)^2+1$

따라서 $g(m)$은 $-1\le m\le 2$에서 $m=1$일 때 최댓값 1을 갖고, $m=-1$일 때 최솟값 -7을 가지므로 최댓값과 최솟값의 곱은

$1\times(-7)=-7$

0537 답 ②

$x^2-2x-2=t$로 놓으면 $t=(x-1)^2-3$

$-2\le x\le 2$에서 $x=-2$일 때 최댓값은 6이고, $x=1$일 때 최솟값은 -3이므로

$-3\le t\le 6$

이때 주어진 함수는

$y=t^2-4t+1=(t-2)^2-3$

따라서 $-3\le t\le 6$에서 $t=-3$일 때 최댓값은 22이고, $t=2$일 때 최솟값은 -3이므로

$M=22$, $m=-3$

$\therefore M+m=19$

0538 답 6

$f(x)=x^2+|x|+1$이라 하면

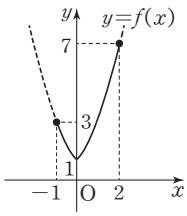
(i) $-1\le x<0$일 때,

$f(x)=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

(ii) $0\le x\le 2$일 때,

$f(x)=x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

(i), (ii)에서 $-1\le x\le 2$일 때 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. …… ⓘ



따라서 $-1\le x\le 2$에서 $x=2$일 때 최댓값은 7이고, $x=0$일 때 최솟값은 1이므로

$M=7,\ m=1$

$\therefore M-m=6$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $y=x^2+\|x\|+1$의 그래프 그리기	50 %
ⓘⓘ $M-m$의 값 구하기	50 %

0539 답 ②

$f(x)=|x^2-4x-5|$라 하면

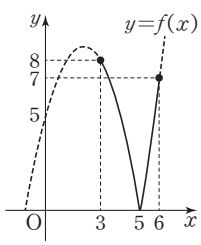
(i) $3\le x<5$일 때,

$f(x)=-x^2+4x+5=-(x-2)^2+9$

(ii) $5\le x\le 6$일 때,

$f(x)=x^2-4x-5=(x-2)^2-9$

(i), (ii)에서 $3\le x\le 6$일 때 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 $3\le x\le 6$에서 $x=3$일 때 최댓값은 8이고, $x=5$일 때 최솟값은 0이므로 최댓값과 최솟값의 합은 8이다.

참고 $|x^2-4x-5|=|(x+1)(x-5)|$이므로 절댓값 안의 식의 값이 0이면서 $3\le x\le 6$에 속하는 $x=5$를 기준으로 x의 값의 범위를 나누어 $f(x)$를 구한다.

0540 답 최댓값: 94, 최솟값: −6

$y=(x-1)(x-3)(x+3)(x+5)+30$

$=\{(x-1)(x+3)\}\{(x-3)(x+5)\}+30$

$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-15)+30$

$x^2+2x=t$로 놓으면 $t=(x+1)^2-1$

$-1\le x\le 3$에서 $x=3$일 때 최댓값은 15이고, $x=-1$일 때 최솟값은 -1이므로 $-1\le t\le 15$ …… ⓘ

이때 주어진 함수는

$y=(x^2+2x-3)(x^2+2x-15)+30$

$=(t-3)(t-15)+30$

$=t^2-18t+75=(t-9)^2-6$ …… ⓘⓘ

따라서 $-1\le t\le 15$에서 $t=-1$일 때 최댓값은 94이고, $t=9$일 때 최솟값은 -6이다. …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 공통부분을 t로 놓고 t의 값의 범위 구하기	40 %
ⓘⓘ 주어진 함수를 $y=(t-p)^2+q$ 꼴로 나타내기	30 %
ⓘⓘⓘ 최댓값과 최솟값 구하기	30 %

0541 답 ③

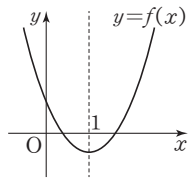
ㄱ. 이차방정식 $ax^2-2ax+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(-a)^2-ab>0$

$a(a-b)>0$에서 $a>1$이므로 $a-b>0$

$\therefore a>b$

ㄴ. $f(x)=ax^2-2ax+b=a(x-1)^2-a+b$이고 $b=f(0)$이므로 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같으면 $b>0$이다.



ㄷ. $0\le x\le 3$에서 $x=3$일 때 최댓값은 $f(3)=3a+b$이다.

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0542 답 ③

$(\sqrt{1+5x}+\sqrt{1+4y})^2=2+5x+4y+2\sqrt{(1+5x)(1+4y)}$

이때 $5x+4y=20$에서 $4y=20-5x$이고 $y>0$이므로

$20-5x>0$ $\therefore 0<x<4$

$2+5x+4y+2\sqrt{(1+5x)(1+4y)}$

$=2+20+2\sqrt{(1+5x)(21-5x)}$

$=22+2\sqrt{-25x^2+100x+21}$

$=22+2\sqrt{-25(x-2)^2+121}$

따라서 $0<x<4$에서 $x=2$일 때 $(\sqrt{1+5x}+\sqrt{1+4y})^2$의 최댓값은

$22+2\sqrt{121}=22+22=44$

0543 답 ①

(나)에서 이차방정식 $f(x)=-2x+1$, 즉 $f(x)+2x-1=0$의 한 근이 $1-\sqrt{2}$이고, 이차방정식의 계수가 모두 유리수이므로 다른 한 근은 $1+\sqrt{2}$이다.

$(1-\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})=2$, $(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})=-1$이므로

$f(x)+2x-1=a(x^2-2x-1)$ (a는 상수)이라 하자.

(가)에서 $f(3)=-1$이므로 $x=3$을 대입하면

$-1+6-1=2a$ $\therefore a=2$

$f(x)+2x-1=2(x^2-2x-1)$이므로

$f(x)=2x^2-6x-1=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{11}{2}$

따라서 $2\le x\le 5$에서 $x=5$일 때 $f(x)$의 최댓값은

$f(5)=50-30-1=19$

0544 답 ②

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 실수, $a\neq 0$)라 하면

(가)에서 $f(0)=c=1$

(나)에서

$a(x+1)^2+b(x+1)+1-\{a(x-1)^2+b(x-1)+1\}=4x+8$

이므로

$ax^2+(2a+b)x+a+b+1-\{ax^2+(-2a+b)x+a-b+1\}$

$=4x+8$

$4ax+2b=4x+8$

이 등식이 x에 대한 항등식이므로 $4a=4$, $2b=8$

$\therefore a=1,\ b=4$

$\therefore\ f(x)=x^2+4x+1=(x+2)^2-3$

따라서 $0\le x\le 2$에서 $x=2$일 때 최댓값은 13, $x=0$일 때 최솟값은 1이므로 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 곱은 13이다.

0545 답 ③

(i) $-1\le x<2$일 때,

$f(x)\times f(|x-2|)=f(x)\times f(-x+2)$

$=(x-3)(-x-1)$

$=-x^2+2x+3$

$=-(x-1)^2+4$

이므로 $-1\le x<2$에서 $x=1$일 때 최댓값은 4, $x=-1$일 때 최솟값은 0이다.

(ii) $2\le x\le 5$일 때,

$f(x)\times f(|x-2|)=f(x)\times f(x-2)$

$=(x-3)(x-5)$

$=x^2-8x+15$

$=(x-4)^2-1$

이므로 $2\le x\le 5$에서 $x=2$일 때 최댓값은 3, $x=4$일 때 최솟값은 -1이다.

(i), (ii)에서 $f(x)\times f(|x-2|)$의 최댓값은 4, 최솟값은 -1이므로 구하는 합은

$4+(-1)=3$

0546 답 ②

$f(x)=-x^2-2x+k=-(x+1)^2+k+1$

$-4\le x\le -2$에서 $x=-2$일 때 최댓값 k를 가지므로

$k=4$

따라서 $f(x)=-(x+1)^2+5$의 최솟값은

$f(-4)=-9+5=-4$

0547 답 ③

$2x^2+\frac{1}{3}y^2-4x+2y+k$

$=2(x^2-2x+1)+\frac{1}{3}(y^2+6y+9)+k-5$

$=2(x-1)^2+\frac{1}{3}(y+3)^2+k-5$

이때 x, y가 실수이므로

$(x-1)^2\ge 0$, $(y+3)^2\ge 0$

$\therefore\ 2x^2+\frac{1}{3}y^2-4x+2y+k\ge k-5$

따라서 $k-5=15$이므로

$k=20$

0548 답 7

$y=x^2-6x+a=(x-3)^2+a-9$

$-2\le x\le 4$에서 $x=-2$일 때 최댓값은 $a+16$이고, $x=3$일 때 최솟값은 $a-9$이다.

이때 최댓값과 최솟값의 합이 21이므로

$(a+16)+(a-9)=21$, $2a=14$

$\therefore\ a=7$

0549 답 ②

$y=ax^2-8ax+b=a(x-4)^2-16a+b$

$a<0$이므로 $2\le x\le 5$에서 $x=4$일 때 최댓값은 $-16a+b$이고,

$x=2$일 때 최솟값은 $-12a+b$이다.

이때 $-16a+b=17$, $-12a+b=13$이므로 두 식을 연립하여 풀면

$a=-1$, $b=1$

$\therefore\ ab=-1$

0550 답 7

$x^2+4x+1=t$로 놓으면

$t=(x+2)^2-3$ $\therefore\ t\ge -3$

이때 주어진 함수는

$y=t^2+4(t-1)+k=(t+2)^2+k-8$

따라서 $t\ge -3$에서 $t=-2$일 때 최솟값은 $k-8$이므로

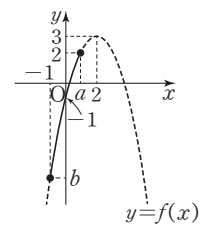
$k-8=-1$ $\therefore\ k=7$

0551 답 ②

$f(x)=-x^2+4x-1=-(x-2)^2+3$이라 하면

$f(2)=3$이므로 $a<2$

즉, $-1\le x\le a$에서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$x=-1$에서 최솟값 b를 가지므로

$b=-9+3=-6$

또 $x=a$에서 최댓값 2를 가지므로

$2=-a^2+4a-1$, $a^2-4a+3=0$

$(a-1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=1$ 또는 $a=3$

그런데 $a<2$이므로 $a=1$

$\therefore\ a+b=1+(-6)=-5$

0552 답 ②

$x^2-2x+2=t$로 놓으면 $t=(x-1)^2+1$

$1\le x\le 3$에서 $x=1$일 때 최솟값은 1이고, $x=3$일 때 최댓값은 5이므로 $1\le t\le 5$

이때 주어진 함수를 $y=f(t)$라 하면

$f(t)=-t^2+6t+k=-(t-3)^2+k+9$

$1\le t\le 5$에서 $t=1$ 또는 $t=5$일 때 최솟값은 $k+5$이므로

$k+5=0$ $\therefore\ k=-5$

따라서 $t=3$일 때 $f(t)$의 최댓값은 $k+9=-5+9=4$이다.

0553 답 ③

$f(x)=x^2-2kx+11=(x-k)^2-k^2+11$이라 하면

(i) $k<1$일 때,

$x\ge 1$에서 최솟값은 $f(1)$이므로 $f(1)=2$

$12-2k=2$ $\therefore\ k=5$

이는 $k<1$을 만족시키지 않는다.

(ii) $k\ge 1$일 때,

$x\ge 1$에서 최솟값은 $f(k)$이므로 $f(k)=2$

$-k^2+11=2$, $k^2=9$

$\therefore k=\pm3$

이때 $k\geq1$이므로 $k=3$

(i), (ii)에서 $k=3$

0554 답 ④

(가)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=\frac{-1+3}{2}$, 즉 $x=1$이고, (나)에서 $f(x)$의 최솟값이 -3이므로

$f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 -3을 갖는다. 이때 x^2의 계수는 1이므로

$f(x)=(x-1)^2-3=x^2-2x-2$

$\therefore a=-2$, $b=-2$

$2\leq x\leq5$에서 $f(x)=(x-1)^2-3$의 최댓값은

$f(5)=13$ $\therefore M=13$

$\therefore a-b+M=-2-(-2)+13=13$

참고 이차함수 $f(x)$에 대하여

① $f(m)=f(n)$이 성립하면

➡ 축의 방정식: $x=\frac{m+n}{2}$, 꼭짓점의 x좌표: $\frac{m+n}{2}$

② x의 값의 범위가 실수 전체일 때, $f(x)$의 최댓값 또는 최솟값이 k이면

➡ 꼭짓점의 y좌표: k

다른 풀이

(가)에서 $1-a+b=9+3a+b$

$-4a=8$ $\therefore a=-2$

$\therefore f(x)=x^2-2x+b=(x-1)^2+b-1$

따라서 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $b-1$을 가지므로 (나)에서

$b-1=-3$ $\therefore b=-2$

$2\leq x\leq5$에서 $f(x)=(x-1)^2-3$의 최댓값은

$f(5)=13$ $\therefore M=13$

$\therefore a-b+M=-2-(-2)+13=13$

0555 답 2

(가)에서 이차방정식 $f(x)=2kx-6$, 즉 $f(x)-(2kx-6)=0$의 두 근이 2, 4이고, $f(x)$의 최고차항의 계수가 k이므로

$f(x)-(2kx-6)=k(x-2)(x-4)$

$\therefore f(x)=k(x^2-6x+8)+(2kx-6)$

$=kx^2-4kx+8k-6$

$=k(x-2)^2+4k-6$ …… ⓘ

$1\leq x\leq4$에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(4)$이고 (나)에서 최댓값이 10이므로

$8k-6=10$, $8k=16$

$\therefore k=2$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $f(x)$를 $k(x-p)^2+q$ 꼴로 나타내기	50 %
ⓘⓘ k의 값 구하기	50 %

0556 답 3

$f(x)=ax^2+bx+5=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a}+5$

$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+5$

(가)에서 $a<0$, $b<0$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}+5\right)$이다.

이때 $-\frac{b}{2a}<0$이므로 $1\leq x\leq2$에 꼭짓점의 x좌표가 포함되지 않는다.

따라서 $1\leq x\leq2$에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(1)$이고 (나)에서 최댓값이 3이므로 $f(1)=3$

즉, $a+b+5=3$이므로 $a+b=-2$

이때 a, b는 음의 정수이므로 $a=-1$, $b=-1$

따라서 $f(x)=-x^2-x+5$이므로

$f(-2)=-4+2+5=3$

0557 답 3

(가)에서 이차방정식 $f(x)=0$이 중근을 가지므로 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=p^2-4q=0$ $\therefore q=\frac{p^2}{4}$ …… ⓘ

$\therefore f(x)=x^2-px+\frac{p^2}{4}=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2$

$-p\leq x\leq p$에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(-p)$이고 (나)에서 최댓값이 9이므로 $f(-p)=9$

즉, $\frac{9}{4}p^2=9$이므로 $p^2=4$

$\therefore p=2$ ($\because p>0$)

이때 $q=\frac{p^2}{4}=\frac{4}{4}=1$이므로 …… ⓘⓘ

$p+q=2+1=3$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ q를 p에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘ p, q의 값 구하기	60 %
ⓘⓘⓘ $p+q$의 값 구하기	10 %

0558 답 ①

(가)에서 $x=1$이 $-2\leq x\leq2$에 포함되고

$f(x)=x^2-(2a-b)x+a^2-4b$

$=\left(x-\frac{2a-b}{2}\right)^2+a^2-4b-\left(\frac{2a-b}{2}\right)^2$

이므로 $f(x)$는 $x=\frac{2a-b}{2}$에서 최솟값을 가진다.

즉, $\frac{2a-b}{2}=1$이므로

$b=2a-2$

이를 $f(x)$에 대입하면

$f(x)=x^2-(2a-2a+2)x+a^2-4(2a-2)$

$=x^2-2x+a^2-8a+8$

$=(x-1)^2+a^2-8a+7$

$-2\leq x\leq2$에서 $f(x)$의 최댓값은 $f(-2)$이고 (나)에서 최댓값이 0이므로 $f(-2)=0$

즉, $a^2-8a+16=0$이므로 $(a-4)^2=0$ $\therefore a=4$

$b=2a-2=2\times4-2=6$

$\therefore a+b=4+6=10$

0559 답 18

$f(x)=x^2-2ax+2a^2=(x-a)^2+a^2$

(i) $0<a<2$일 때,

$f(x)$의 최솟값은 $f(a)$이므로 $f(a)=10$에서

$a^2=10$ $\therefore a=\pm\sqrt{10}$

이때 $0<a<2$인 범위를 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $a\geq2$일 때,

$f(x)$의 최솟값은 $f(2)$이므로 $f(2)=10$에서

$2a^2-4a+4=10$, $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0$ $\therefore a=3$ ($\because a\geq2$)

(i), (ii)에서 $f(x)=x^2-6x+18=(x-3)^2+9$

따라서 $f(x)$의 최댓값은 $f(0)=18$

0560 답 ⑤

$f(x)=-x^2+3x+m-1=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+m+\frac{5}{4}$라 하면

$m\leq x\leq m+1$에서 $f(x)$의 최댓값은 다음과 같이 경우를 나누어 구한다.

(i) $m+1<\frac{3}{2}$, 즉 $m<\frac{1}{2}$일 때,

$f(x)$의 최댓값은 $f(m+1)$이므로 $f(m+1)=2$

$-(m+1)^2+3(m+1)+m-1=2$

$m^2-2m+1=0$, $(m-1)^2=0$ $\therefore m=1$

이때 $m<\frac{1}{2}$인 범위를 만족시키는 m의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $m<\frac{3}{2}\leq m+1$, 즉 $\frac{1}{2}\leq m<\frac{3}{2}$일 때,

$f(x)$의 최댓값은 $f\left(\frac{3}{2}\right)$이므로 $f\left(\frac{3}{2}\right)=2$

$m+\frac{5}{4}=2$ $\therefore m=\frac{3}{4}$

(iii) $\frac{3}{2}\leq m$일 때,

$f(x)$의 최댓값은 $f(m)$이므로 $f(m)=2$

$-m^2+3m+m-1=2$

$m^2-4m+3=0$, $(m-1)(m-3)=0$

$\therefore m=3$ $\left(\because m\geq\frac{3}{2}\right)$

(i), (ii), (iii)에서 모든 실수 m의 값의 합은

$\frac{3}{4}+3=\frac{15}{4}$

0561 답 ⑤

$y=-5x^2+6x+5=-5\left(x-\frac{3}{5}\right)^2+\frac{34}{5}$

따라서 $0\leq x\leq\frac{3}{2}$에서 $x=\frac{3}{5}$일 때 최댓값이 $\frac{34}{5}$이므로 가장 높이 올라갔을 때의 수면으로부터의 높이는 $\frac{34}{5}$ m이다.

0562 답 ③

$h=10$일 때 $b^2=4a(10-a)$이므로

$b^2=4a(10-a)=-4a^2+40a=-4(a-5)^2+100$

따라서 $0<a<10$에서 $a=5$일 때 b^2의 최댓값은 100이다.

0563 답 16

$f(x)=x^2-4ax+14a=(x-2a)^2-4a^2+14a$이므로

$A(2a,\ -4a^2+14a)$, $B(2a,\ 0)$

$\overline{OB}=|2a|=2a$

$\overline{AB}=|-4a^2+14a|=-4a^2+14a$

$\overline{OB}+\overline{AB}=g(a)$라 하면

$g(a)=2a+(-4a^2+14a)=-4a^2+16a$

$=-4(a-2)^2+16$

따라서 $0<a<\frac{7}{2}$에서 $a=2$일 때 $g(a)$의 최댓값은 16이므로

$\overline{OB}+\overline{AB}$의 최댓값은 16이다.

0564 답 ③

물받이의 높이를 x cm라 하면 칠한 직사각형의 가로의 길이가 $(60-2x)$ cm, 세로의 길이가 x cm이므로 $0<x<30$

칠한 직사각형의 넓이를 S cm^{2}라 하면

$S=x(60-2x)=-2x^2+60x$

$=-2(x-15)^2+450$

따라서 $0<x<30$에서 $x=15$일 때 S의 최댓값이 450이므로 직사각형의 넓이가 최대가 될 때 물받이의 높이는 15 cm이다.

0565 답 4000원

튀김 1인분의 가격을 $50x$원 올리면 튀김 1인분의 가격은 $(3000+50x)$원, 하루 판매량은 $(100-x)$인분 $(0<x<100)$이 되므로 하루 판매 금액을 y원이라 하면

$y=(3000+50x)(100-x)$ ····· ⓘ

$=-50x^2+2000x+300000$

$=-50(x-20)^2+320000$

따라서 $0<x<100$에서 $x=20$일 때 최댓값이 320000이므로 $x=20$일 때 하루 판매 금액이 최대가 된다. ····· ⓘⓘ

이때의 튀김 1인분의 가격은

$3000+50x=3000+50\times20=4000$(원) ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 하루 판매 금액에 대한 이차함수의 식 세우기	40 %
ⓘⓘ 하루 판매 금액이 최대가 되는 x의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 하루 판매 금액이 최대가 되는 튀김 1인분의 가격 구하기	20 %

0566 답 10

$y=-x^2+4x$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표를 구하면

$-x^2+4x=0$에서 $x(x-4)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=4$

오른쪽 그림과 같이 점 Q의 좌표를 $(a,\ 0)$ $(0<a<2)$이라 하면

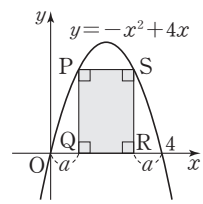
$\overline{QR}=4-2a$, $\overline{PQ}=-a^2+4a$

직사각형 PQRS의 둘레의 길이를 l이라 하면

$l=2(\overline{QR}+\overline{PQ})=2(4-2a-a^2+4a)$

$=-2a^2+4a+8=-2(a-1)^2+10$

따라서 $0<a<2$에서 $a=1$일 때 최댓값이 10이므로 직사각형 PQRS의 둘레의 길이의 최댓값은 10이다.



0567 답 ③

$\triangle ABC \backsim \triangle DFC$ (AA 닮음)이므로 $\overline{DF}=6x$, $\overline{FC}=8x$라 하면

$\overline{BF}=8-8x$

이때 변의 길이는 양수이므로 $0<x<1$

직사각형 EBFD의 넓이를 S라 하면

$S=\overline{DF}\times\overline{BF}=6x(8-8x)$

$=-48x^2+48x$

$=-48\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+12$

따라서 $0<x<1$에서 $x=\frac{1}{2}$일 때 최댓값이 12이므로 직사각형 EBFD의 넓이의 최댓값은 12이다.

0568 답 ③

$\overline{PQ}=x$이고 $\angle QPB=\angle QPC=90^\circ$이므로 두 삼각형 QPB, QPC는 직각삼각형이다.

$\therefore \overline{BQ}^2=\overline{CQ}^2=1+x^2$

$\overline{AP}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$이므로 $\overline{AQ}=\sqrt{3}-x$

$\therefore \overline{AQ}^2+\overline{BQ}^2+\overline{CQ}^2=(\sqrt{3}-x)^2+2(1+x^2)$

$=3x^2-2\sqrt{3}x+5$

$=3\left(x-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+4$

따라서 $0<x<\sqrt{3}$에서 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$일 때 최솟값이 4이므로

$a=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $m=4$

$\therefore \frac{m}{a}=\frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=4\sqrt{3}$

참고 주어진 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점이 P이면

$\overline{BP}=\overline{PC}$이고, $\angle B=\angle C$, $\overline{AB}=\overline{AC}$이므로

$\triangle ABP\equiv\triangle ACP$ (SAS 합동)

따라서 $\angle APB=\angle APC=90^\circ$가 성립한다.

0569 답 ②

두 점 P, Q의 좌표는

$P(t, 2t^2+1)$, $Q(t, -(t-3)^2+1)$

$\therefore \overline{PQ}=(2t^2+1)-\{-(t-3)^2+1\}$

$=3t^2-6t+9$

$\overline{AB}=3$이고 $\overline{AB}\perp\overline{PQ}$이므로 사각형 PAQB의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PQ}=\frac{3}{2}(3t^2-6t+9)$

$=\frac{9}{2}(t-1)^2+9$

따라서 $0<t<3$에서 $t=1$일 때 최솟값이 9이므로 사각형 PAQB의 넓이의 최솟값은 9이다.

0570 답 ②

두 점 A, B는 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점이므로 이차방정식 $x^2-(a+4)x+3a+3=0$에서

$(x-3)\{x-(a+1)\}=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=a+1$

$0<a<2$이므로 $A(a+1, 0)$, $B(3, 0)$

$\therefore \overline{AB}=3-(a+1)=2-a$

점 C는 주어진 이차함수의 그래프와 y축의 교점이므로

$C(0, 3a+3)$ $\therefore \overline{OC}=3a+3$

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{OC}=\frac{1}{2}(2-a)(3a+3)$

$=-\frac{3}{2}a^2+\frac{3}{2}a+3=-\frac{3}{2}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{8}$

따라서 $0<a<2$에서 $a=\frac{1}{2}$일 때 최댓값이 $\frac{27}{8}$이므로 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 $\frac{27}{8}$이다.

0571 답 8

점 A는 주어진 이차함수의 그래프와 y축의 교점이므로

$A(0, 3)$

두 점 B, C는 주어진 이차함수의 그래프와 x축의 교점이므로 이차방정식 $x^2-4x+3=0$에서

$(x-1)(x-3)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=3$

$\therefore B(1, 0)$, $C(3, 0)$

점 $P(a, b)$가 점 A에서 점 C까지 움직이므로

$0\le a\le 3$

또 점 $P(a, b)$가 이차함수 $y=x^2-4x+3$의 그래프 위의 점이므로

$b=a^2-4a+3$

$\therefore 2a+b=2a+(a^2-4a+3)$

$=a^2-2a+3=(a-1)^2+2$

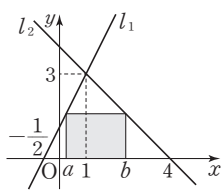
따라서 $0\le a\le 3$에서 $a=1$일 때 최솟값은 2이고, $a=3$일 때 최댓값은 6이므로 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$6+2=8$

0572 답 ⑤

$l_1: 2x-y+1=0$, $l_2: x+y-4=0$에서 두 식을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=3$



두 직선 l_1, l_2의 x절편이 각각 $-\frac{1}{2}$, 4이므로 x축 위에 있는 직사각형의 두 꼭짓점의 x좌표를 각각 a, $b\left(-\frac{1}{2}<a<1,\ 1<b<4\right)$라 하면 나머지 두 꼭짓점의 좌표는 $(a, 2a+1)$, $(b, -b+4)$이다.

이때 두 꼭짓점의 y좌표가 같으므로

$2a+1=-b+4$ $\therefore b=-2a+3$

직사각형의 넓이를 S라 하면

$S=(b-a)(2a+1)=(-2a+3-a)(2a+1)$

$=-6a^2+3a+3=-6\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{27}{8}$

따라서 $-\frac{1}{2}<a<1$에서 $a=\frac{1}{4}$일 때 최댓값이 $\frac{27}{8}$이므로 직사각형의 넓이의 최댓값은 $\frac{27}{8}$이다.

0573 답 ②

작년 이 상품의 판매 가격을 a원, 판매량을 b개라 하면 올해 이 상품의 판매 가격은 $a\left(1+\frac{x}{100}\right)$원, 판매량은 $b\left(1-\frac{3x}{500}\right)$개이다.

이때 올해 이 상품의 총판매 금액을 y원이라 하면

$$y=ab\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{3x}{500}\right)$$

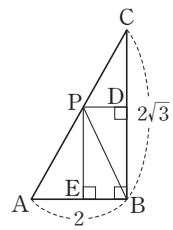
$$=\frac{ab}{50000}(-3x^2+200x+50000)$$

$$=\frac{ab}{50000}\left\{-3\left(x-\frac{100}{3}\right)^2+\frac{160000}{3}\right\}$$

따라서 $20\le x\le 50$에서 $x=\frac{100}{3}$일 때 총판매 금액이 최대가 된다.

0574 답 3

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 D, $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 E라 하고, $\overline{PD}=x\,(0<x<2)$라 하자.



$\triangle CPD\backsim\triangle CAB$(AA 닮음)이므로

$\overline{CD}=\sqrt{3}x$

$\overline{BD}=2\sqrt{3}-\sqrt{3}x$

$\overline{AC}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$이므로

$\overline{PC}=2x \quad \therefore \overline{PC}^2=4x^2$

삼각형 PAE에서

$\overline{PA}^2=\overline{AE}^2+\overline{PE}^2$

$=(2-x)^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3}x)^2$

$=4(2-x)^2$

삼각형 PBD에서

$\overline{PB}^2=\overline{PD}^2+\overline{BD}^2$

$=x^2+(2\sqrt{3}-\sqrt{3}x)^2$

$=x^2+3(2-x)^2$

$\therefore \overline{PA}^2-\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=4(2-x)^2-\{x^2+3(2-x)^2\}+4x^2$

$=(2-x)^2+3x^2=4x^2-4x+4$

$=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3$

따라서 $0<x<2$에서 $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 3이다.

다른 풀이

위의 그림과 같이 점 P에서 $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 D, $\overline{AB}$에 내린 수선의 발을 E라 하면

$\overline{PA}^2-\overline{PB}^2+\overline{PC}^2$

$=(\overline{AE}^2+\overline{PE}^2)-(\overline{PE}^2+\overline{EB}^2)+(\overline{PD}^2+\overline{CD}^2)$

$=\overline{AE}^2+\overline{CD}^2$

이때 $\overline{PD}=x\,(0<x<2)$라 하면 $\overline{AE}=2-x$

$\triangle CPD\backsim\triangle CAB$ (AA 닮음)이므로 $\overline{CD}=\sqrt{3}x$

$\therefore \overline{PA}^2-\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=\overline{AE}^2+\overline{CD}^2=(2-x)^2+3x^2$

$=4x^2-4x+4=4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3$

따라서 $0<x<2$에서 $x=\frac{1}{2}$일 때 최솟값은 3이다.

최고수준 도전 기출 120~121쪽

0575 답 ④

전략 $x-m=X$로 놓고 $f(x-m)$을 X에 대한 식으로 나타낸 후 최솟값이 11이 되도록 하는 실수 m의 값을 구한다.

$x-m=X$로 놓으면 $-1-m\le X\le 3-m$일 때

$f(x-m)=f(X)=X^2-2X-4$

$=(X-1)^2-5$

(i) $3-m<1$, 즉 $m>2$일 때,

$f(X)$의 최솟값은 $f(3-m)$이므로 $f(3-m)=11$

$(2-m)^2-5=11$

$m^2-4m-12=0$, $(m+2)(m-6)=0$

$\therefore m=6\,(\because m>2)$

(ii) $-1-m<1\le 3-m$, 즉 $-2<m\le 2$일 때,

$f(X)$의 최솟값은 $f(1)=-5$이므로 조건을 만족시키는 m의 값이 존재하지 않는다.

(iii) $1\le -1-m$, 즉 $m\le -2$일 때,

$f(X)$의 최솟값은 $f(-1-m)$이므로 $f(-1-m)=11$

$(-2-m)^2-5=11$

$m^2+4m-12=0$, $(m+6)(m-2)=0$

$\therefore m=-6\,(\because m\le -2)$

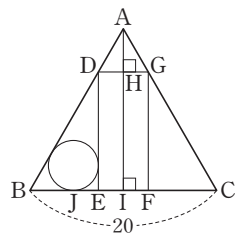
(i), (ii), (iii)에서 모든 실수 m의 값의 곱은

$6\times(-6)=-36$

0576 답 ⑤

전략 점 A에서 $\overline{DG}$, $\overline{BC}$에 수선의 발을 내린 후 닮음인 삼각형을 이용하여 각 변의 길이를 하나의 미지수로 나타낸다.

점 A에서 $\overline{DG}$, $\overline{BC}$에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하고, 원과 선분 BC의 교점을 J라 하자.



$\triangle ADH\backsim\triangle ABI$(AA 닮음)이므로

$\overline{DH}=a\,(0<a<10)$라 하면

$\overline{AH}=\sqrt{3}a$

$\overline{BI}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 20=10$, $\overline{AI}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 20=10\sqrt{3}$이므로

$\overline{DE}=\overline{HI}=10\sqrt{3}-\sqrt{3}a$

직사각형 DEFG의 넓이를 S라 하면

$S=2a(10\sqrt{3}-\sqrt{3}a)$

$=-2\sqrt{3}a^2+20\sqrt{3}a$

$=-2\sqrt{3}(a-5)^2+50\sqrt{3}$

따라서 $0<a<10$에서 $a=5$일 때 최댓값이 $50\sqrt{3}$이므로 직사각형 DEFG의 넓이가 최대이다.

$\overline{DH}=5$일 때 $\overline{BE}=5$, $\overline{DE}=5\sqrt{3}$, $\overline{BD}=10$

삼각형 DBE에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 직각삼각형 DBE의 넓이에 대하여

$\frac{1}{2}\times 5\times 5\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times r\times(5+5\sqrt{3}+10)$

$\therefore\ r=\dfrac{25\sqrt{3}}{15+5\sqrt{3}}=\dfrac{5(\sqrt{3}-1)}{2}$

원의 둘레의 길이는

$2\pi r=2\pi\times\dfrac{5(\sqrt{3}-1)}{2}=(5\sqrt{3}-5)\pi$

따라서 $p=5$, $q=-5$이므로

$p^2+q^2=25+25=50$

0577 답 121

전략 두 직선 $y=4a$, $y=ax$의 교점을 E라 하면 □ACDB=△ACE−△BDE임을 이용하여 사각형 ACDB의 넓이를 a에 대한 식으로 나타낸다.

두 점 A, B는 직선 $y=4a$와 함수 $f(x)=ax^2$의 그래프가 만나는 점이므로

$4a=ax^2$, $x^2=4$

$\therefore\ x=\pm2$

$\therefore$ A$(-2,\ 4a)$, B$(2,\ 4a)$

두 점 C, D는 직선 $y=ax$와 함수 $g(x)=-a(x-a)^2+a^2$의 그래프가 만나는 점이므로

$ax=-a(x-a)^2+a^2$

$x^2-(2a-1)x+a(a-1)=0$

$(x-a+1)(x-a)=0$

$\therefore\ x=a-1$ 또는 $x=a$

$\therefore$ C$(a-1,\ a^2-a)$, D$(a,\ a^2)$

직선 $y=4a$와 직선 $y=ax$가 만나는 점을 E라 하면

$4a=ax$ $\therefore\ x=4$

$\therefore$ E$(4,\ 4a)$

$\overline{AE}=|4-(-2)|=6$, $\overline{BE}=|4-2|=2$이다.

점 C$(a-1,\ a^2-a)$와 직선 $y=4a$ 사이의 거리를 h_1이라 하면

$h_1=|4a-(a^2-a)|=-a^2+5a$

삼각형 ACE의 넓이를 S_1이라 하면

$S_1=\dfrac{1}{2}\times\overline{AE}\times h_1=\dfrac{1}{2}\times6\times(-a^2+5a)$

$=-3a^2+15a$

점 D$(a,\ a^2)$과 직선 $y=4a$ 사이의 거리를 h_2라 하면

$h_2=|4a-a^2|=-a^2+4a$

삼각형 BDE의 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\dfrac{1}{2}\times\overline{BE}\times h_2=\dfrac{1}{2}\times2\times(-a^2+4a)$

$=-a^2+4a$

사각형 ACDB의 넓이를 S라 하면

$S=S_1-S_2$

$=(-3a^2+15a)-(-a^2+4a)$

$=-2a^2+11a$

$=-2\left(a-\dfrac{11}{4}\right)^2+\dfrac{121}{8}$

따라서 $2<a<4$에서 $a=\dfrac{11}{4}$일 때 최댓값이 $\dfrac{121}{8}$이므로 사각형 ACDB의 넓이의 최댓값은 $M=\dfrac{121}{8}$

$\therefore\ 8\times M=121$

0578 답 ①

전략 a의 값이 $a=2$, $2<a\le6$, $6<a\le10$인 경우로 나누어 주어진 조건을 만족시키는지 확인한다.

이차함수 $f(x)=(x-a)^2$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(a,\ 0)$이고 (가)에서 $2\le a\le10$이다.

(i) $a=2$일 때,

$2\le x\le6$에서 함수 $f(x)$의 최댓값과 $6\le x\le10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(6)$으로 같으므로 (나)를 만족시킨다.

$\therefore\ f(-1)=(-1-2)^2=9$

(ii) $2<a\le6$일 때,

$2\le x\le6$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)$ 또는 $f(6)$

$6\le x\le10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(6)$이므로

(나)에 의하여 $f(2)\le f(6)$

즉, $(2-a)^2\le(6-a)^2$이므로 $8a-32\le0$

$\therefore\ 2<a\le4$ ($\because\ 2<a\le6$)

이때 $-5\le-1-a<-3$이므로 $f(-1)=(-1-a)^2$의 값의 범위는 $9<f(-1)\le25$

(iii) $6<a\le10$일 때,

$2\le x\le6$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)$이고

$6\le x\le10$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이다.

이때 $f(2)>0$이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $9\le f(-1)\le25$이므로 $M=25$, $m=9$

$\therefore\ M+m=34$

0579 답 27

전략 이차함수의 그래프가 축에 대하여 대칭임을 이용하여 축의 방정식을 구한 후 이차함수의 그래프의 성질과 주어진 최솟값을 이용하여 이차함수 $f(x)$를 구한다.

(가)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\dfrac{0+4}{2}$,

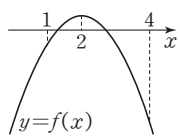
즉 $x=2$이므로 $f(x)=a(x-2)^2+b$ (a, b는 실수, $a\ne0$)라 하자.

$f(1)\ne f(4)$이고, (나)에서 $f(1)=-|f(4)|<0$이므로

$f(4)>0$, $|f(1)|=|f(4)|$ ····· ㉠

(i) $a<0$인 경우

$f(4)<f(1)<0$이 되어 ㉠을 만족시키지 않는다.

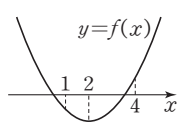


(ii) $a>0$인 경우

㉠에서 $f(1)<0$, $f(4)>0$이므로

$f(1)+f(4)=(a+b)+(4a+b)$

$=5a+2b=0$ ····· ㉡



(i), (ii)에서 $a>0$이므로 (다)에서 함수 $f(x)$는 $-2\le x\le5$에서 $x=2$일 때 최솟값 -5를 갖는다.

즉, $b=f(2)=-5$이므로 ㉡에서

$5a-10=0$ $\therefore\ a=2$

따라서 $f(x)=2(x-2)^2-5$이므로 $-2\le x\le5$에서 $f(x)$의 최댓값은

$f(-2)=2\times16-5=27$

0580 답 ⑤

전략 축의 위치를 기준으로 경우를 나누고, 주어진 이차함수의 최솟값을 이용한다.

ㄱ. $a=\frac{3}{2}$일 때 $f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+b$

$f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 최솟값 5를 가지므로

$f\left(\frac{3}{2}\right)=b=5$

ㄴ. $a\le1$일 때 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값을 가지므로

$f(1)=(1-a)^2+b=5$

$\therefore b=-a^2+2a+4$

ㄷ. (i) $a\le1$일 때,

ㄴ에서 $b=-a^2+2a+4$이므로

$a+b=-a^2+3a+4=-\left(a-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25}{4}$

따라서 $a+b$는 $a=1$일 때 최댓값 6을 갖는다.

(ii) $1<a\le2$일 때,

$f(x)$는 $x=a$에서 최솟값 $b=5$를 갖는다.

즉, $6<a+b\le7$이므로 $a+b$는 $a=2$일 때 최댓값 7을 갖는다.

(iii) $a>2$일 때,

$f(x)$는 $x=2$에서 최솟값을 가지므로

$f(2)=(2-a)^2+b=5$

즉, $b=-a^2+4a+1$이므로

$a+b=-a^2+5a+1=-\left(a-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{29}{4}$

따라서 $a+b$는 $a=\frac{5}{2}$일 때 최댓값 $\frac{29}{4}$를 갖는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a+b$의 최댓값은 $\frac{29}{4}$이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0581 답 ①

전략 $k\le x\le k+1$에서 이차함수 $f(x)=x^2-4$의 최댓값은 $x=k$ 또는 $x=k+1$일 때이다. 따라서 $f(k)>f(k+1)$인 경우와 $f(k)\le f(k+1)$인 경우로 나누어 $g(k)$를 구한 후 $g(k)$의 최솟값을 구한다.

$f(x)=x^2-4$라 하자.

(i) $f(k)>f(k+1)$인 경우

$g(k)=f(k)$이므로 $f(k)>f(k+1)$에서

$k^2-4>(k+1)^2-4$

$0>2k+1 \qquad \therefore k<-\frac{1}{2}$

즉, $k<-\frac{1}{2}$이면 $g(k)=k^2-4$이다.

(ii) $f(k)\le f(k+1)$인 경우

$g(k)=f(k+1)$이므로 $f(k)\le f(k+1)$에서

$k^2-4\le(k+1)^2-4$

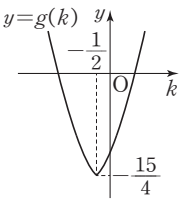
$0\le2k+1 \qquad \therefore k\ge-\frac{1}{2}$

즉, $k\ge-\frac{1}{2}$이면 $g(k)=(k+1)^2-4$이다.

(i), (ii)에서 $g(k)=\begin{cases} k^2-4 & \left(k<-\frac{1}{2}\right) \\ (k+1)^2-4 & \left(k\ge-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$

$k<-\frac{1}{2}$인 모든 실수 k에 대하여 $g(k)>g\left(-\frac{1}{2}\right)$이고 $k\ge-\frac{1}{2}$인 모든 실수 k에 대하여 $g(k)\ge g\left(-\frac{1}{2}\right)$이므로 $g(k)$의 최솟값은 $g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{4}$이다.

참고 $y=g(k)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $g(k)$의 최솟값은 $g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{15}{4}$이다.



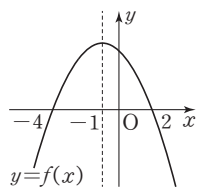
0582 답 ②

전략 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le f(k)$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고, $x=k$일 때 최대임을 이용한다.

(나)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하고, $x=-1$일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 직선 $x=-1$을 축으로 하고, (가)에서 $f(-4)=0$이므로 $f(2)=f(-4)=0$이다.

$f(x)=a(x+4)(x-2)(a<0)$라 하면 ····· ㉠



(i) $p=-2$일 때,

$f(p)=f(p+2)$이므로 $g(p)=f(p)$

(ii) $p<-2$일 때,

$f(p)<f(p+2)$이므로 $g(p)=f(p)$

(iii) $p>-2$일 때,

$f(p)>f(p+2)$이므로 $g(p)=f(p+2)$

(i), (ii), (iii)에서 $g(p)=\begin{cases} f(p) & (p\le-2) \\ f(p+2) & (p>-2) \end{cases}$

$p\le-2$인 모든 실수 p에 대하여 $f(p)\le f(-2)$이므로

$g(p)\le f(-2)$

$p>-2$인 모든 실수 p에 대하여 $f(p+2)<f(0)$

이때 $f(0)=f(-2)$이므로 $g(p)<f(-2)$

따라서 $g(p)$의 최댓값은 $f(-2)$이다.

$f(-2)=4$이므로 ㉠에서

$a\times2\times(-4)=4 \qquad \therefore a=-\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=-\frac{1}{2}(x+4)(x-2)$이므로

$f(3)=-\frac{1}{2}\times7\times1=-\frac{7}{2}$

08 삼차방정식과 사차방정식

난이도별 필수 기출 123~136쪽

0583 답 ③

주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$(x-2)(x^2+2x+4)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{3}i$

0584 답 0

$f(x)=x^3-2x^2-2x+1$이라 하면 $f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	-2	-2	1
		-1	3	-1
	1	-3	1	0

$f(x)=(x+1)(x^2-3x+1)$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x^2-3x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

이때 $\alpha<\beta<\gamma$이므로 $\alpha=-1$, $\beta=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$, $\gamma=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\therefore \alpha+\beta\gamma=-1+\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\times\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$=-1+1=0$

0585 답 ①

$f(x)=x^3+2x-3$이라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	0	2	-3
		1	1	3
	1	1	3	0

$f(x)=(x-1)(x^2+x+3)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+x+3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$

따라서 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\pm\dfrac{\sqrt{11}}{2}$이므로

$a^2b^2=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{11}{4}=\dfrac{11}{16}$

다른 풀이

주어진 삼차방정식의 계수가 실수이므로 한 근이 $a+bi$이면 $a-bi$도 근이다.

이때 $f(x)=x^3+2x-3$이라 하면 $f(1)=0$이므로 $x=1$은 나머지 한 근이다.

따라서 세 근이 1, $a+bi$, $a-bi$이므로 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$1+(a+bi)+(a-bi)=0$

$(a+bi)+(a+bi)(a-bi)+(a-bi)=2$

$(a+bi)(a-bi)=3$

따라서 $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=\pm\dfrac{\sqrt{11}}{2}$이므로

$a^2b^2=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{11}{4}=\dfrac{11}{16}$

0586 답 ⑤

$x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+3X-18=0$

$(X+6)(X-3)=0$

$\therefore X=-6$ 또는 $X=3$

즉, $x^2=-6$ 또는 $x^2=3$이므로

$x=\pm\sqrt{6}i$ 또는 $x=\pm\sqrt{3}$

따라서 주어진 방정식의 모든 허근의 곱은

$-\sqrt{6}i\times\sqrt{6}i=6$

0587 답 ④

$x^4-24x^2+16=0$에서

$x^4-8x^2+16-16x^2=0$

$(x^2-4)^2-(4x)^2=0$

$(x^2+4x-4)(x^2-4x-4)=0$

$x^2+4x-4=0$ 또는 $x^2-4x-4=0$이므로

$x=-2\pm2\sqrt{2}$ 또는 $x=2\pm2\sqrt{2}$

따라서 보기에서 주어진 방정식의 근인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

0588 답 ⑤

$f(x)=x^4-7x^3+16x^2-14x+4$라 하면 $f(1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	-7	16	-14	4
		1	-6	10	-4
2	1	-6	10	-4	0
		2	-8	4	
	1	-4	2	0	

$f(x)=(x-1)(x-2)(x^2-4x+2)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-1)(x-2)(x^2-4x+2)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=2\pm\sqrt{2}$

따라서 $\alpha=2+\sqrt{2}$, $\beta=2-\sqrt{2}$이므로

$\alpha+\beta=4$

0589 답 ⑤

$f(x)=x^3+x^2+x-3$이라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	1	1	-3
		1	2	3
	1	2	3	0

$f(x)=(x-1)(x^2+2x+3)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+2x+3)=0$

이때 주어진 방정식의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 근이므로

$\alpha^2+2\alpha+3=0$, $\beta^2+2\beta+3=0$

즉, $\alpha^2+2\alpha=-3$, $\beta^2+2\beta=-3$이므로

$(\alpha^2+2\alpha+6)(\beta^2+2\beta+8)=(-3+6)\times(-3+8)$

$=3\times5=15$

0590 답 −1

$f(x)=x^4+4x^3+3x^2-2x-6$이라 하면 $f(1)=0$, $f(-3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	4	3	−2	−6
		1	5	8	6
−3	1	5	8	6	0
		−3	−6	−6	
	1	2	2	0	

$f(x)=(x-1)(x+3)(x^2+2x+2)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x+3)(x^2+2x+2)=0$ ····· ⓘ

이때 주어진 방정식의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+2=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$ ····· ⓘⓘ

$\therefore \left\{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)i\right\}^{1234}=(-i)^{1234}=(i^4)^{308}\times i^2$

$=i^2=-1$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 사차방정식의 좌변을 인수분해하기	50 %
ⓘⓘ $\alpha+\beta$의 값 구하기	20 %
ⓘⓘⓘ $\left\{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)i\right\}^{1234}$의 값 구하기	30 %

0591 답 1

$x^2+3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X-1)^2+7X+3=0$

$X^2+5X+4=0$, $(X+1)(X+4)=0$

즉, 주어진 방정식은

$(x^2+3x+1)(x^2+3x+4)=0$

이차방정식 $x^2+3x+1=0$의 판별식을 D_1, $x^2+3x+4=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_1=9-4=5>0$, $D_2=9-16=-7<0$

이므로 $x^2+3x+1=0$에서 두 실근, $x^2+3x+4=0$에서 두 허근을 갖는다.

즉, 주어진 방정식의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+3x+4=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$, $\alpha\beta=4$

$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=(-3)^2-2\times4=1$

0592 답 ①

$x^2-3x=X$로 놓으면 주어진 방정식은 $X(X+6)+5=0$

$X^2+6X+5=0$, $(X+1)(X+5)=0$

즉, 주어진 방정식은

$(x^2-3x+1)(x^2-3x+5)=0$

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 판별식을 D_1, $x^2-3x+5=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_1=9-4=5>0$, $D_2=9-20=-11<0$

이므로 주어진 방정식의 두 실근 α, β는 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 근이다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\beta=1$

0593 답 ②

$f(x)=x^3+(k-1)x^2-k$라 하면

$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$를 인수분해하면

1	1	$k-1$	0	$-k$
		1	k	k
	1	k	k	0

$f(x)=(x-1)(x^2+kx+k)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-1)(x^2+kx+k)=0$

이때 주어진 방정식의 한 허근 z는 이차방정식 $x^2+kx+k=0$의 근이고, 계수가 실수이므로 이 이차방정식의 다른 한 근은 $\bar{z}$이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$z+\bar{z}=-k$ $\therefore k=2$

0594 답 ①

$x^3+(k+1)x^2+(4k-3)x+k+7=0$에 $x=1$을 대입하면

$1+(k+1)+(4k-3)+k+7=0$, $6k=-6$

$\therefore k=-1$

이를 주어진 방정식에 대입하면 $x^3-7x+6=0$

$f(x)=x^3-7x+6$이라 하면

$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$를 인수분해하면

1	1	0	−7	6
		1	1	−6
	1	1	−6	0

$f(x)=(x-1)(x^2+x-6)$

$=(x-1)(x-2)(x+3)$

즉, 주어진 방정식은

$(x-1)(x-2)(x+3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=-3$

$\therefore |\alpha-\beta|=|2-(-3)|=5$

0595 답 ④

$x^4-ax^3-(3a+1)x^2+8x+6a=0$에 $x=-1$을 대입하면

$1+a-(3a+1)-8+6a=0$, $4a=8$

$\therefore a=2$

이를 주어진 방정식에 대입하면 $x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0$

$f(x)=x^4-2x^3-7x^2+8x+12$라 하면 $f(-1)=0$, $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

−1	1	−2	−7	8	12
		−1	3	4	−12
2	1	−3	−4	12	0
		2	−2	−12	
	1	−1	−6	0	

$f(x)=(x+1)(x-2)(x^2-x-6)$

$=(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$

즉, 주어진 방정식은

$(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

따라서 가장 큰 근과 가장 작은 근의 합은

$3+(-2)=1$

0596 답 ②

주어진 방정식의 두 근이 -1, 2이므로 $x=-1$, $x=2$를 각각 대입하면

$2+a+b-3+a+4=0$, $32-8a+4b+6+a+4=0$

$\therefore 2a+b=-3$, $7a-4b=42$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-7$

이를 주어진 방정식에 대입하면 $2x^4-2x^3-7x^2+3x+6=0$

$f(x)=2x^4-2x^3-7x^2+3x+6$이라 하면 $f(-1)=0$, $f(2)=0$

이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	2	-2	-7	3	6
		-2	4	3	-6
2	2	-4	-3	6	0
		4	0	-6	
	2	0	-3	0	

$f(x)=(x+1)(x-2)(2x^2-3)$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x-2)(2x^2-3)=0$

따라서 주어진 방정식의 나머지 두 근은 이차방정식 $2x^2-3=0$의 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 $-\frac{3}{2}$이다.

0597 답 -4

$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)-14=0$에서

$\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}-14=0$

$(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)-14=0$

$x^2+2x=X$로 놓으면 $(X-3)(X-8)-14=0$

$X^2-11X+10=0$, $(X-1)(X-10)=0$

$\therefore X=1$ 또는 $X=10$ …… ⓘ

(i) $X=1$일 때,

$x^2+2x=1$에서 $x^2+2x-1=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 -2이다.

(ii) $X=10$일 때,

$x^2+2x=10$에서 $x^2+2x-10=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은 -2이다.

…… ⓘⓘ

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 모든 근의 합은

$-2+(-2)=-4$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $x^2+2x=X$로 놓고, X에 대한 이차방정식 풀기	50 %
ⓘⓘ X의 값에 따른 각각의 x에 대한 이차방정식의 두 근의 합 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 모든 근의 합 구하기	10 %

0598 답 ①

$x\neq0$이므로 주어진 방정식의 양변을 x^2으로 나누면

$x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0$

$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-1=0$

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3=0$

$x+\frac{1}{x}=X$로 놓으면

$X^2+2X-3=0$, $(X+3)(X-1)=0$

$\therefore X=-3$ 또는 $X=1$

(i) $X=-3$일 때,

$x+\frac{1}{x}=-3$에서 $x^2+3x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=9-4=5>0$

따라서 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(ii) $X=1$일 때,

$x+\frac{1}{x}=1$에서 $x^2-x+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=1-4=-3<0$

따라서 이 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

(i), (ii)에서 a는 방정식 $x+\frac{1}{x}=-3$의 근이므로

$a+\frac{1}{a}=-3$

0599 답 ②

$(a+k)^2$이 음수이려면 $a+k$가 순허수이어야 한다.

$x^4+5x^2+9=0$에서 $x^4+6x^2+9-x^2=0$

$(x^2+3)^2-x^2=0$, $(x^2+x+3)(x^2-x+3)=0$

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$ 또는 $x=\frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$

즉, $a=\frac{-1\pm\sqrt{11}i}{2}$ 또는 $a=\frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$이다.

따라서 $a+k$가 순허수이려면

$k=\pm\frac{1}{2}$ $\therefore k^2=\frac{1}{4}$

0600 답 ④

$f(x)=x^3-x^2+(k-6)x-3k$라 하면 $f(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

3	1	-1	$k-6$	$-3k$
		3	6	$3k$
	1	2	k	0

$f(x)=(x-3)(x^2+2x+k)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-3)(x^2+2x+k)=0$

이 방정식의 근이 모두 실수이려면 이차방정식 $x^2+2x+k=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-k\geq0$ $\therefore k\leq1$

따라서 정수 k의 최댓값은 1이다.

0601 답 ⑤

$f(x)=x^3+(a-1)x-a$라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	0	$a-1$	$-a$
		1	1	a
	1	1	a	0

$f(x)=(x-1)(x^2+x+a)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+x+a)=0$

이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+x+a=0$이 $x\neq1$인 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$x=1$은 이차방정식 $x^2+x+a=0$의 근이 아니어야 하므로

$1+1+a\neq0$ $\therefore a\neq-2$ ····· ㉠

이차방정식 $x^2+x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1-4a>0$ $\therefore a<\frac{1}{4}$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 a의 값의 범위는

$a<-2$ 또는 $-2<a<\frac{1}{4}$

0602 답 ①

$f(x)=x^3+(k-1)x^2-2kx+k$라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	$k-1$	$-2k$	k
		1	k	$-k$
	1	k	$-k$	0

$f(x)=(x-1)(x^2+kx-k)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+kx-k)=0$

이 방정식이 중근을 가지려면 이차방정식 $x^2+kx-k=0$이 중근을 갖거나 1을 근으로 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2+kx-k=0$이 중근을 가질 때,

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=k^2+4k=0$, $k(k+4)=0$

$\therefore k=-4$ 또는 $k=0$

(ii) 이차방정식 $x^2+kx-k=0$이 1을 근으로 가질 때,

$1+k-k=0$에서 $1\neq0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$-4+0=-4$

0603 답 ②

$f(x)=x^3-6x^2+(a+8)x-2a$라 하면 $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	-6	$a+8$	$-2a$
		2	-8	$2a$
	1	-4	a	0

$f(x)=(x-2)(x^2-4x+a)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2-4x+a)=0$

이 방정식이 한 개의 실근과 두 개의 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 두 개의 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-4x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-a<0$ $\therefore a>4$

따라서 자연수 a의 최솟값은 5이다.

0604 답 7

$f(x)=x^3-5x^2+(a+4)x-a$라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	-5	$a+4$	$-a$
		1	-4	a
	1	-4	a	0

$f(x)=(x-1)(x^2-4x+a)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-4x+a)=0$

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되려면 이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 $x=1$과 다른 한 실근을 갖거나 $x=1$이 아닌 중근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 $x=1$과 다른 한 실근을 가질 때,

$x^2-4x+a=0$에 $x=1$을 대입하면

$1-4+a=0$ $\therefore a=3$

이를 $x^2-4x+a=0$에 대입하면

$x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=3$

따라서 $a=3$이면 이차방정식 $x^2-4x+a=0$은 $x=1$과 다른 한 실근을 갖는다.

(ii) 이차방정식 $x^2-4x+a=0$이 $x=1$이 아닌 중근을 가질 때,

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-a=0$ $\therefore a=4$

이를 $x^2-4x+a=0$에 대입하면

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$

$\therefore x=2$(중근)

따라서 $a=4$이면 이차방정식 $x^2-4x+a=0$은 $x=1$이 아닌 중근을 갖는다.

(i), (ii)에서 모든 실수 a의 값의 합은

$3+4=7$

0605 답 −7

$f(x)=x^3+4x^2-(k+5)x+k$라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	4	$-k-5$	k
		1	5	$-k$
	1	5	$-k$	0

$f(x)=(x-1)(x^2+5x-k)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+5x-k)=0$

이 방정식의 서로 다른 실근이 한 개이려면 이차방정식 $x^2+5x-k=0$이 허근을 갖거나 $x=1$을 중근으로 가져야 한다. ····· ⓘ

(i) 이차방정식 $x^2+5x-k=0$이 허근을 가질 때,

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$D=25+4k<0$

$\therefore k<-\frac{25}{4}$

(ii) 이차방정식 $x^2+5x-k=0$이 $x=1$을 중근으로 가질 때,

$1+5-k=0$ $\therefore k=6$

이를 $x^2+5x-k=0$에 대입하면

$x^2+5x-6=0$, $(x+6)(x-1)=0$

$\therefore x=-6$ 또는 $x=1$

따라서 이차방정식 $x^2+5x-k=0$은 $x=1$을 중근으로 갖지 않는다. ····· ⓘⓘ

(i), (ii)에서 $k<-\frac{25}{4}$

따라서 정수 k의 최댓값은 -7이다. ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 방정식의 좌변을 인수분해하여 서로 다른 실근이 한 개일 조건 파악하기	30 %
ⓘⓘ 각각의 경우에서 k의 값의 범위 구하기	60 %
ⓘⓘⓘ 정수 k의 최댓값 구하기	10 %

0606 답 ⑤

$x^3-x^2-kx+k=0$에서

$x^2(x-1)-k(x-1)=0$, $(x-1)(x^2-k)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x^2=k$

0이 아닌 실수 k에 대하여 $k>0$이면 주어진 방정식의 모든 근이 실수이므로 α, β 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$k<0$이면 주어진 방정식의 실근은 $x=1$뿐이므로 $\alpha=1$ 또는 $\beta=1$이다.

(i) $\alpha=1$일 때,

$\alpha^2=-2\beta$에서 $\beta=-\frac{1}{2}\alpha^2=-\frac{1}{2}$이므로 α, β 중 실수는 하나뿐이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\beta=1$일 때,

$\alpha^2=-2\beta$에서 $\alpha^2=-2$

이때 α, γ는 방정식 $x^2=k$의 근이므로

$k=-2$, $\gamma^2=-2$

(i), (ii)에서 $\beta=1$, $\gamma^2=-2$이므로

$\beta^2+\gamma^2=-1$

0607 답 ③

$f(x)=x^4-(k+4)x^3+(3k+4)x^2+(k^2-2k)x-2k^2$이라 하면

$f(2)=0$, $f(k)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	$-k-4$	$3k+4$	k^2-2k	$-2k^2$
		2	$-2k-4$	$2k$	$2k^2$
k	1	$-k-2$	k	k^2	0
		k	$-2k$	$-k^2$	
	1	-2	$-k$	0	

$f(x)=(x-2)(x-k)(x^2-2x-k)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x-k)(x^2-2x-k)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=k$ 또는 $x^2-2x-k=0$

이 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 $k\neq2$이어야 하고, 이차방정식 $x^2-2x-k=0$이 $x=2$, $x=k$가 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-2x-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1+k>0$

$\therefore k>-1$

이때 $x=2$, $x=k$가 모두 이차방정식 $x^2-2x-k=0$의 근이 아니어야 하므로

$2^2-2\times2-k\neq0$, $k^2-2k-k\neq0$

$\therefore k\neq0$, $k\neq3$

따라서 $k>-1$이고, $k\neq0$, $k\neq2$, $k\neq3$을 만족시키는 5 이하의 정수 k는 1, 4, 5의 3개이다.

0608 답 ②

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=3$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=4$, $\alpha\beta\gamma=-9$

$\therefore \frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}$

$=\frac{3}{-9}=-\frac{1}{3}$

0609 답 109

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=4$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-\frac{5}{2}$, $\alpha\beta\gamma=5$ …… ⓘ

$\therefore \alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

$=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma$

$=(\alpha+\beta+\gamma)\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}+3\alpha\beta\gamma$ …… ⓘⓘ

$=4\times\left\{4^2-3\times\left(-\frac{5}{2}\right)\right\}+3\times5$

$=109$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $\alpha+\beta+\gamma$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$의 값 구하기	40 %
ⓘⓘ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$을 변형하기	40 %
ⓘⓘⓘ $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$의 값 구하기	20 %

0610 답 ⑤

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 세 근의 곱은 105이다.

$105=3\times5\times7$이고 세 근이 모두 2보다 큰 자연수이므로 세 근은 3, 5, 7이다.

세 근의 합은 $3+5+7=-p$ $\therefore p=-15$

두 근끼리의 곱의 합은 $3\times5+5\times7+7\times3=q$ $\therefore q=71$

$\therefore p+q=56$

0611 답 6

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=7$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=10$, $\alpha\beta\gamma=-6$

$\therefore (2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)$

$=2^3-(\alpha+\beta+\gamma)\times2^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\times2-\alpha\beta\gamma$

$=8-7\times4+10\times2-(-6)$

$=6$

다른 풀이

$f(x)=x^3-7x^2+10x+6$이라 하면

방정식 $x^3-7x^2+10x+6=0$의 세 근이 α, β, γ이므로

$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$\therefore (2-\alpha)(2-\beta)(2-\gamma)=f(2)$

$=2^3-7\times2^2+10\times2+6$

$=6$

0612 답 ⑤

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 유리수이므로 $2-\sqrt{2}$가 근이면 $2+\sqrt{2}$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(2-\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})+\alpha=\alpha+2$ …… ㉠

$(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})+(2+\sqrt{2})\alpha+\alpha(2-\sqrt{2})=b$ ····· ㉡

$(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})\alpha=-4$ ····· ㉢

㉢에서 $2\alpha=-4$ $\therefore \alpha=-2$

㉠에서 $4+\alpha=a+2$ $\therefore a=0$

㉡에서 $2+4\alpha=b$ $\therefore b=-6$

$\therefore a-b=6$

0613 답 ②

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 실수이므로 $1+i$가 근이면 $1-i$도 근이다.

나머지 한 근을 α라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(1+i)+(1-i)+\alpha=-p$ ····· ㉠

$(1+i)(1-i)+\alpha(1-i)+\alpha(1+i)=q$ ····· ㉡

$\alpha(1+i)(1-i)=-6$ ····· ㉢

㉢에서 $2\alpha=-6$ $\therefore \alpha=-3$

㉠에서 $2+\alpha=-p$ $\therefore p=1$

㉡에서 $2+2\alpha=q$ $\therefore q=-4$

$\therefore p+q=-3$

다른 풀이

주어진 삼차방정식에 $x=1+i$를 대입하면

$(1+i)^3+p(1+i)^2+q(1+i)+6=0$

$(-2+2i)+2pi+q+qi+6=0$

$(4+q)+(2+2p+q)i=0$

p, q가 실수이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$4+q=0$, $2+2p+q=0$

따라서 $p=1$, $q=-4$이므로

$p+q=-3$

0614 답 ④

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=0$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$, $\alpha\beta\gamma=1$

$$\therefore \frac{\beta\gamma}{\alpha}+\frac{\gamma\alpha}{\beta}+\frac{\alpha\beta}{\gamma}$$
$$=\frac{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}{\alpha\beta\gamma}$$
$$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2(\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma)}{\alpha\beta\gamma}$$
$$=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha\beta\gamma}$$
$$=\frac{3^2-2\times1\times0}{1}=9$$

0615 답 ③

삼차방정식 $2x^3-7x^2+ax+b=0$의 세 근을 k, $2k$, $4k$ $(k\neq0)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$k+2k+4k=\frac{7}{2}$ ····· ㉠

$2k^2+8k^2+4k^2=\frac{a}{2}$ ····· ㉡

$k\times2k\times4k=-\frac{b}{2}$ ····· ㉢

㉠에서 $7k=\frac{7}{2}$ $\therefore k=\frac{1}{2}$

㉡에서 $14k^2=\frac{a}{2}$ $\therefore a=7$

㉢에서 $8k^3=-\frac{b}{2}$ $\therefore b=-2$

$\therefore a-b=9$

0616 답 15

삼차방정식 $x^3-ax^2+26x-b=0$의 세 근을 $\alpha-1$, α, $\alpha+1$ $(\alpha>1)$이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 두 근끼리의 곱의 합은

$(\alpha-1)\alpha+\alpha(\alpha+1)+(\alpha+1)(\alpha-1)=26$

$3\alpha^2=27$, $\alpha^2=9$ $\therefore \alpha=3$ $(\because \alpha>1)$

따라서 세 근은 2, 3, 4이다. ····· ⓘ

세 근의 합은 $2+3+4=a$ $\therefore a=9$

세 근의 곱은 $2\times3\times4=b$ $\therefore b=24$ ····· ⓘⓘ

$\therefore b-a=15$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 세 근 구하기	50%
ⓘⓘ a, b의 값 구하기	40%
ⓘⓘⓘ $b-a$의 값 구하기	10%

0617 답 ⑤

삼차방정식 $x^3-4x^2-2x+5=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=4$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2$, $\alpha\beta\gamma=-5$

$5x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$에 대하여

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-2}{-5}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}\times\frac{1}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{4}{-5}=-\frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{-5}=-\frac{1}{5}$$

즉, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 하고 x^3의 계수가 5인 삼차방정식은

$$5\left(x^3-\frac{2}{5}x^2-\frac{4}{5}x+\frac{1}{5}\right)=0$$

$\therefore 5x^3-2x^2-4x+1=0$

따라서 $a=-2$, $b=-4$, $c=1$이므로 $abc=8$

참고 세 수 α, β, γ를 근으로 하고 x^3의 계수가 a인 삼차방정식은

$a\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma\}=0$

0618 답 ①

주어진 삼차방정식의 세 근을 -1, α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$-1+\alpha+\beta=-a$ ····· ㉠

$-\alpha-\beta+\alpha\beta=b$ ····· ㉡

$-\alpha\beta=3$ ····· ㉢

㉢에서 $\alpha\beta=-3$이고 나머지 두 근의 제곱의 합이 6이므로

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$에서

$6=(\alpha+\beta)^2+6$ $\therefore \alpha+\beta=0$

㉠에서 $a=1-(\alpha+\beta)=1$

㉡에서 $b=\alpha\beta-(\alpha+\beta)=-3$

$\therefore a+b=-2$

0619 답 ②

삼차방정식 $2x^3+8x^2-ax+3=0$의 세 근을 α, β, γ라 하고, 이 중에서 α, β를 삼차방정식 $2x^3+6x^2+bx=0$의 두 근이라 하자.

$2x^3+6x^2+bx=0$에서 $x(2x^2+6x+b)=0$이고

$2x^3+8x^2-ax+3=0$에서 $x\neq0$이므로 α, β는 이차방정식

$2x^2+6x+b=0$의 두 근이다.

$2x^3+8x^2-ax+3=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-4$ ····· ㉠

$\alpha\beta\gamma=-\frac{3}{2}$ ····· ㉡

$2x^2+6x+b=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-3$이므로 ㉠에서 $\gamma=-1$

$\alpha\beta=\frac{b}{2}$이므로 ㉡에서 $\frac{b}{2}\times(-1)=-\frac{3}{2}$

$\therefore b=3$

$x=-1$이 $2x^3+8x^2-ax+3=0$의 근이므로

$-2+8+a+3=0$ $\therefore a=-9$

$\therefore a+b=-6$

0620 답 ②

삼차방정식 $x^3+ax^2-7x+4b=0$의 세 근을 1, 1, α라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$1+1+\alpha=-a$ ····· ㉠

$1+\alpha+\alpha=-7$ ····· ㉡

$\alpha=-4b$ ····· ㉢

㉡에서 $2\alpha=-8$ $\therefore \alpha=-4$

㉠에서 $a=-\alpha-2=2$

㉢에서 $b=-\frac{\alpha}{4}=1$

$\therefore ab=2$

다른 풀이

주어진 삼차방정식이 중근 1을 가지므로 등식의 좌변은 $(x-1)^2$을 인수로 갖는다.

즉, 주어진 삼차방정식은 $(x-1)^2(x+4b)=0$으로 좌변이 인수분해된다.

$(x-1)^2(x+4b)=0$에서

$(x^2-2x+1)(x+4b)=0$

$x^3+(4b-2)x^2+(1-8b)x+4b=0$

따라서 $a=4b-2$, $-7=1-8b$이므로

$a=2$, $b=1$

$\therefore ab=2$

0621 답 ③

삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면

$\alpha+\beta+\gamma=303$

이때 방정식 $f(121-3x)=0$의 근은

$121-3x=\alpha$ 또는 $121-3x=\beta$ 또는 $121-3x=\gamma$에서

$x=\frac{121-\alpha}{3}$ 또는 $x=\frac{121-\beta}{3}$ 또는 $x=\frac{121-\gamma}{3}$

따라서 방정식 $f(121-3x)=0$의 세 근의 합은

$$\frac{121-\alpha}{3}+\frac{121-\beta}{3}+\frac{121-\gamma}{3}=\frac{363-(\alpha+\beta+\gamma)}{3}$$

$$=\frac{363-303}{3}=20$$

0622 답 ③

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 계수가 모두 실수이므로 $2-i$가 근이면 $2+i$도 근이다.

이때 $(2-i)(2+i)=5\neq20$이므로 $2-i$, $2+i$는 이차방정식

$x^2+ax+20=0$의 근이 아니다.

즉, 공통인 근 m은 $2-i$, $2+i$가 아닌 다른 한 근이다.

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근이 m, $2-i$, $2+i$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$m+(2-i)+(2+i)=-a$ ····· ㉠

$m(2-i)+m(2+i)+(2-i)(2+i)=b$ ····· ㉡

$m(2-i)(2+i)=-c$ ····· ㉢

㉠에서 $a=-m-4$이고 m이 방정식 $x^2+ax+20=0$의 한 근이므로

$m^2+(-m-4)\times m+20=0$, $-4m+20=0$

$\therefore m=5$

$m=5$를 ㉠, ㉡, ㉢에 각각 대입하여 풀면

$a=-m-4=-9$, $b=4m+5=25$, $c=-5m=-25$

$\therefore m+a+b+c=5+(-9)+25+(-25)=-4$

0623 답 7

주어진 사차방정식은 α를 근으로 가지면 $-\alpha$도 근으로 가지므로 양의 실근 2개, 음의 실근 2개를 갖는다.

이때 서로 다른 네 실근을

α, β, $-\beta(=\gamma)$, $-\alpha(=\delta)$ $(\alpha<\beta<0)$

라 할 수 있다.

$x^2=X$로 놓으면 주어진 사차방정식은

$X^2-(2a-9)X+4=0$

이고 이 이차방정식의 두 근은 α^2, β^2이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=2a-9$

즉, $2a-9=5$이므로

$a=7$

0624 답 ①

주어진 사차방정식의 계수가 모두 실수이므로 $1-2i$가 근이면 $1+2i$도 근이다.

$1-2i$, $1+2i$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(1-2i+1+2i)x+(1-2i)(1+2i)=0$

$\therefore x^2-2x+5=0$

따라서 주어진 사차방정식의 좌변은 x^2-2x+5를 인수로 갖는다.

또한 $f(x)=x^4-x^3+kx^2+(10-k)x-10$이라 하면 $f(1)=0$이므로 주어진 사차방정식의 좌변은 일차식 $x-1$을 인수로 갖는다.

$x^4-x^3+kx^2+(10-k)x-10=(x^2-2x+5)(x-1)(x-a)$ (a는 실수)라 하면

$x^4-x^3+kx^2+(10-k)x-10$

$=(x^2-2x+5)\{x^2-(a+1)x+a\}$

위의 식의 양변의 상수항을 비교하면 $-10=5a$이므로

$a=-2$

$\therefore x^4-x^3+kx^2+(10-k)x-10=(x^2-2x+5)(x^2+x-2)$

$=x^4-x^3+x^2+9x-10$

$\therefore k=1$

0625 답 18

$f(x)$의 계수가 모두 실수이므로 (나)에서 $1+i$가 방정식 $f(x)=0$의 근이면 $1-i$도 근이다.

$1+i$, $1-i$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-(1+i+1-i)x+(1+i)(1-i)=0$, 즉 $x^2-2x+2=0$이므로 $f(x)$는 x^2-2x+2를 인수로 갖는다.

방정식 $f(x)=0$의 중근을 k (k는 실수)라 하면 (가)에서 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)=(x^2-2x+2)(x-k)^2$ ····· ⓘ

$f(x)=(x^2-2x+2)(x^2-2kx+k^2)$의 삼차항은

$x^2\times(-2kx)+(-2x)\times x^2=(-2k-2)x^3$

(가)에서 $f(x)$의 삼차항의 계수가 0이므로

$-2k-2=0$ $\therefore k=-1$ ····· ⓘⓘ

따라서 $f(x)=(x^2-2x+2)(x+1)^2$이므로

$f(2)=(4-4+2)\times9=18$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 방정식 $f(x)=0$의 중근을 k로 놓고, $f(x)$를 k에 대한 식으로 나타내기	40 %
ⓘⓘ k의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $f(2)$의 값 구하기	20 %

0626 답 ④

$f(-1)=f(2)=f(5)=3$에서

$f(-1)-3=0$, $f(2)-3=0$, $f(5)-3=0$

즉, 삼차방정식 $f(x)-3=0$의 세 근이 -1, 2, 5이다.

$f(x)-3=a(x+1)(x-2)(x-5)$ (a는 실수, $a\neq0$)라 하면

$f(x)=a(x+1)(x-2)(x-5)+3$

$f(1)=19$에서

$a\times2\times(-1)\times(-4)+3=19$

$\therefore a=2$

$\therefore f(x)=2(x+1)(x-2)(x-5)+3$

$=2x^3-12x^2+6x+23$

따라서 삼차방정식 $f(x)=0$의 모든 근의 합은 근과 계수의 관계에 의하여

$-\dfrac{-12}{2}=6$

0627 답 ②

삼차방정식 $x^3+px^2-2x-3=0$의 계수가 모두 실수이므로 두 허근 α, α^2은 서로 켤레복소수이다.

$\alpha=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq0$)라 하면 $\alpha^2=\overline{\alpha}$이므로

$(a+bi)^2=a-bi$

$(a^2-b^2)+2abi=a-bi$

$\therefore a^2-b^2=a$, $2ab=-b$

$2ab=-b$에서 $b(2a+1)=0$ $\therefore a=-\dfrac{1}{2}$ ($\because b\neq0$)

$a^2-b^2=a$에서 $\dfrac{1}{4}-b^2=-\dfrac{1}{2}$

$b^2=\dfrac{3}{4}$ $\therefore b=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 주어진 삼차방정식의 두 허근은 $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$이고, 한 실근을 k라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

세 근의 곱은

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\times k=3$

$\therefore k=3$

세 근의 합은

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}+3=-p$

$\therefore p=-2$

0628 답 ③

α가 방정식 $x^4-5x^3+7x^2-x-2=0$의 근이므로

$\alpha^4-5\alpha^3+7\alpha^2-\alpha-2=0$

$\therefore \alpha^4-5\alpha^3+7\alpha^2=\alpha+2$

마찬가지로 $\beta^4-5\beta^3+7\beta^2=\beta+2$, $\gamma^4-5\gamma^3+7\gamma^2=\gamma+2$,

$\delta^4-5\delta^3+7\delta^2=\delta+2$이므로

$(\alpha^4-5\alpha^3+7\alpha^2)(\beta^4-5\beta^3+7\beta^2)(\gamma^4-5\gamma^3+7\gamma^2)(\delta^4-5\delta^3+7\delta^2)$

$=(\alpha+2)(\beta+2)(\gamma+2)(\delta+2)$ ····· ㉠

주어진 사차방정식의 네 근이 α, β, γ, δ이므로

$x^4-5x^3+7x^2-x-2=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$

$x=-2$를 대입하면

$16+40+28+2-2=(-2-\alpha)(-2-\beta)(-2-\gamma)(-2-\delta)$

$\therefore (\alpha+2)(\beta+2)(\gamma+2)(\delta+2)=84$

따라서 ㉠에서 구하는 식의 값은 84이다.

0629 답 ①

(가)에서 삼차방정식 $P(x)=0$의 한 실근을 α, 서로 다른 두 허근을 β, γ라 하면

$\beta\gamma=5$ ····· ㉠

(나)에서 삼차방정식 $P(3x-1)=0$의 근은

$3x-1=\alpha$ 또는 $3x-1=\beta$ 또는 $3x-1=\gamma$에서

$x=\dfrac{\alpha+1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\beta+1}{3}$ 또는 $x=\dfrac{\gamma+1}{3}$이므로

$\dfrac{\alpha+1}{3}=0$, $\dfrac{\beta+1}{3}+\dfrac{\gamma+1}{3}=2$

$\therefore \alpha=-1$, $\beta+\gamma=4$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 α, β, γ를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은
$(x+1)(x^2-4x+5)=0$
따라서 $P(x)=(x+1)(x^2-4x+5)=x^3-3x^2+x+5$이므로
$a=-3$, $b=1$, $c=5$
$\therefore a+b+c=3$

0630 답 ⑤

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라 하면 삼차방정식 $f(x)=0$의 세 근이 α, β, γ이다.

ㄱ. 방정식 $a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d=0$, 즉
$f(x-1)=0$의 근은
$x-1=\alpha$ 또는 $x-1=\beta$ 또는 $x-1=\gamma$에서
$x=\alpha+1$ 또는 $x=\beta+1$ 또는 $x=\gamma+1$
따라서 주어진 방정식의 세 근은 $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$이다.

ㄴ. $ax^3-bx^2+cx-d=0$의 양변에 -1을 곱하면
$-ax^3+bx^2-cx+d=0$
$a(-x)^3+b(-x)^2+c(-x)+d=0$
즉, 방정식 $f(-x)=0$의 근은
$-x=\alpha$ 또는 $-x=\beta$ 또는 $-x=\gamma$에서
$x=-\alpha$ 또는 $x=-\beta$ 또는 $x=-\gamma$
따라서 주어진 방정식의 세 근은 $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$이다.

ㄷ. $ax^3+\frac{b}{2}x^2+\frac{c}{4}x+\frac{d}{8}=0$의 양변에 8을 곱하면
$8ax^3+4bx^2+2cx+d=0$
$a(2x)^3+b(2x)^2+c(2x)+d=0$
즉, 방정식 $f(2x)=0$의 근은
$2x=\alpha$ 또는 $2x=\beta$ 또는 $2x=\gamma$에서
$x=\frac{\alpha}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta}{2}$ 또는 $x=\frac{\gamma}{2}$
따라서 주어진 방정식의 세 근은 $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$이다.

ㄹ. $dx^3+cx^2+bx+a=0$의 양변을 x^3으로 나누면
$\frac{a}{x^3}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x}+d=0$
$a\left(\frac{1}{x}\right)^3+b\left(\frac{1}{x}\right)^2+c\left(\frac{1}{x}\right)+d=0$
즉, 방정식 $f\left(\frac{1}{x}\right)=0$의 근은
$\frac{1}{x}=\alpha$ 또는 $\frac{1}{x}=\beta$ 또는 $\frac{1}{x}=\gamma$에서
$x=\frac{1}{\alpha}$ 또는 $x=\frac{1}{\beta}$ 또는 $x=\frac{1}{\gamma}$
따라서 주어진 방정식의 세 근은 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

0631 답 ③

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$
ω는 방정식 $x^3=1$의 한 허근이므로
$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$
$\therefore \omega^{50}+\omega^{51}+\omega^{52}=\omega^{50}(1+\omega+\omega^2)$
$=0$

0632 답 ④

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$이므로
① $\omega^3=1$
② $\omega^2+\omega=-1$
③ $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^8$
$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\omega^6(1+\omega+\omega^2)$
$=0$
④ $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)=(-\omega^2)\times(-\omega)\times(1+1)$
$=2\omega^3=2$
⑤ $\frac{\omega^2}{1+\omega}+\frac{1+\omega^2}{\omega}+\frac{1}{\omega+\omega^2}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}+\frac{-\omega}{\omega}+\frac{1}{-1}$
$=-1-1-1=-3$
따라서 그 값이 가장 큰 것은 ④이다.

0633 답 ④

$x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$
이때 ω는 방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로 $\overline{\omega}$도 이 방정식의 근이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$
$\therefore (2\omega-1)(2\overline{\omega}-1)=4\omega\overline{\omega}-2(\omega+\overline{\omega})+1$
$=4\times1-2\times1+1=3$

0634 답 ④

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로
$\omega^2+\omega+1=0$
양변에 $\omega-1$을 곱하면
$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$, $\omega^3-1=0$ $\therefore \omega^3=1$
$\therefore 1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{90}$
$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{87}(1+\omega+\omega^2)+\omega^{90}$
$=\omega^{90}=(\omega^3)^{30}=1$

0635 답 ③

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$
ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로
$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$
$\therefore \frac{1}{1+\omega^{20}}-\frac{1}{1+\omega^{21}}+\frac{1}{1+\omega^{22}}$
$=\frac{1}{1+(\omega^3)^6\times\omega^2}-\frac{1}{1+(\omega^3)^7}+\frac{1}{1+(\omega^3)^7\times\omega}$
$=\frac{1}{1+\omega^2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{1+\omega}=\frac{1}{-\omega}-\frac{1}{2}+\frac{1}{-\omega^2}$
$=-\frac{\omega+1}{\omega^2}-\frac{1}{2}=-\frac{-\omega^2}{\omega^2}-\frac{1}{2}$
$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

0636 답 ③

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$
ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로
$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

ㄱ. $\omega+\overline{\omega}=-\omega\overline{\omega}=-1$

ㄴ. $\omega^2-\omega+1=(\omega^2+\omega+1)-2\omega=-2\omega\neq0$

ㄷ. $\omega^3+\overline{\omega}^3=1+1=2$

$\omega\overline{\omega}-(\omega^2+\overline{\omega}^2)=\omega\overline{\omega}-\{(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}\}$

$=3\omega\overline{\omega}-(\omega+\overline{\omega})^2$

$=3-(-1)^2=2$

$\therefore\ \omega^3+\overline{\omega}^3=\omega\overline{\omega}-(\omega^2+\overline{\omega}^2)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0637 답 ⑤

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

ㄱ. $1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}=1+\frac{1}{\omega^3}(\omega^2+\omega+1)$

$=1\ (\because\ \omega^2+\omega+1=0)$

ㄴ. $\omega^2+1=\frac{(\omega^2+1)(\omega+1)}{\omega+1}=\frac{\omega^3+\omega^2+\omega+1}{\omega+1}$

$=\frac{1+0}{\omega+1}=\frac{1}{\omega+1}$

ㄷ. $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^3)(1+\omega^4)(1+\omega^5)$

$=(1+\omega)(1+\omega^2)(1+1)(1+\omega)(1+\omega^2)$

$=(-\omega^2)\times(-\omega)\times2\times(-\omega^2)\times(-\omega)$

$=\omega^3\times2\times\omega^3=1\times2\times1=2$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄴ. $\omega^2+1=-\omega=-\frac{\omega^3}{\omega^2}=-\frac{1}{-(\omega+1)}=\frac{1}{\omega+1}$

0638 답 ④

$x^3-1=0$에서 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore\ 1-2\omega+3\omega^2-4\omega^3+5\omega^4-6\omega^5$

$=1-2\omega+3\omega^2-4+5\omega-6\omega^2$

$=-3+3\omega-3\omega^2$

$=-3+3\omega-3(-\omega-1)\ (\because\ \omega^2+\omega+1=0)$

$=-3+3\omega+3\omega+3$

$=6\omega$

따라서 $a=6$, $b=0$이므로 $a+b=6$

0639 답 ④

$z+\overline{z}=-1$, $z\overline{z}=1$이므로 z, $\overline{z}$는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이다.

이차방정식의 양변에 $x-1$을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

즉, $x^3-1=0$이므로 $x^3=1$

따라서 $z^3=1$, $\overline{z}^3=1$이므로

$\frac{\overline{z}}{z^5}+\frac{(\overline{z})^2}{z^4}+\frac{(\overline{z})^3}{z^3}+\frac{(\overline{z})^4}{z^2}+\frac{(\overline{z})^5}{z}$

$=\frac{\overline{z}}{z^2}+\frac{(\overline{z})^2}{z}+\frac{1}{1}+\frac{\overline{z}}{z^2}+\frac{(\overline{z})^2}{z}$

$=\frac{2\overline{z}}{z^2}+\frac{2(\overline{z})^2}{z}+1$

$=\frac{2z\overline{z}}{z^3}+\frac{2z^2(\overline{z})^2}{z^3}+1$

$=2+2+1=5$

0640 답 ⑤

$x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

ㄱ. $\omega^2-\omega+1=0$의 양변을 ω로 나누면

$\omega-1+\frac{1}{\omega}=0\qquad\therefore\ \omega+\frac{1}{\omega}=1$

ㄴ. $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{20}$

$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\cdots+\omega^{18}(1+\omega+\omega^2)$

$=(1+\omega+\omega^2)-(1+\omega+\omega^2)+\cdots+(1+\omega+\omega^2)$

$=1+\omega+\omega^2=(\omega^2-\omega+1)+2\omega$

$=2\omega$

ㄷ. 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 두 근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore\ z\overline{z}=\frac{\omega+1}{2\omega-1}\times\frac{\overline{\omega}+1}{2\overline{\omega}-1}=\frac{\omega\overline{\omega}+\omega+\overline{\omega}+1}{4\omega\overline{\omega}-2(\omega+\overline{\omega})+1}$

$=\frac{1+1+1}{4-2+1}=1$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0641 답 ②

방정식 $x+\frac{1}{x}=-1$의 한 허근이 ω이므로

$\omega+\frac{1}{\omega}=-1$

양변에 ω를 곱하면 $\omega^2+1=-\omega$

$\therefore\ \omega^2+\omega+1=0$

양변에 $\omega-1$을 곱하면 $(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

$\omega^3-1=0$

즉, $\omega^3=1$이므로

$\omega^3+\frac{1}{\omega^3}=1+1=2$

$\omega^5+\frac{1}{\omega^5}=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}=\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2-2=(-1)^2-2=-1$

$\omega^7+\frac{1}{\omega^7}=\omega+\frac{1}{\omega}=-1$

$\vdots$

$\therefore\ \left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)+\left(\omega^3+\frac{1}{\omega^3}\right)+\left(\omega^5+\frac{1}{\omega^5}\right)+\cdots+\left(\omega^{19}+\frac{1}{\omega^{19}}\right)$

$=(-1+2-1)+(-1+2-1)+(-1+2-1)+(-1)$

$=-1$

0642 답 ⑤

$x^4-4x^3+x-4=0$에서

$x^3(x-4)+(x-4)=0$

$(x^3+1)(x-4)=0$

$(x+1)(x^2-x+1)(x-4)=0$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)(x-4)(x^2-x+1)=0$이므로 이 방정식의 허근 α는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 근이다.

따라서 $\alpha^2-\alpha+1=0$이므로 양변에 $\alpha+1$을 곱하면

$(\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$

$\alpha^3+1=0 \quad \therefore \alpha^3=-1$

$\alpha^4=-\alpha$, $\alpha^5=-\alpha^2$, $\alpha^6=1$, …이므로

$$\begin{aligned}\alpha^{503}+\alpha^{504}+\alpha^{505}&=\alpha^{6\times83+5}+\alpha^{6\times84}+\alpha^{6\times84+1}\\&=\alpha^5+1+\alpha\\&=-\alpha^2+\alpha+1\\&=(-\alpha+1)+\alpha+1\ (\because \alpha^2-\alpha+1=0)\\&=2\end{aligned}$$

0643 답 -1

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

α, β는 방정식 $x^3=1$의 근이므로

$\alpha^3=1$, $\beta^3=1$

α, β는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=1$ …… ⓘ

$f(n)=\alpha^n+\beta^n$에서

$f(1)=\alpha+\beta=-1$

$f(2)=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-2=-1$

$f(3)=\alpha^3+\beta^3=1+1=2$

$f(4)=\alpha^4+\beta^4=\alpha+\beta=-1$

⋮

$f(100)=\alpha^{100}+\beta^{100}=\alpha+\beta=-1$ …… ⓘⓘ

$\therefore f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(100)$

$=(-1-1+2)+(-1-1+2)+\cdots+(-1)$

$=-1$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ α^3, β^3, $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$의 값 구하기	30%
ⓘⓘ $f(n)$의 규칙 찾기	50%
ⓘⓘⓘ 식의 값 구하기	20%

0644 답 ①

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega\overline{\omega}=1$

$\therefore \dfrac{\overline{\omega}}{\omega}=\overline{\omega}\times\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{1}{\omega}\times\dfrac{1}{\omega}=\dfrac{1}{\omega^2}=\dfrac{\omega^3}{\omega^2}=\omega$

즉, $\dfrac{\overline{\omega}}{\omega}=\omega$, $\dfrac{\omega}{\overline{\omega}}=\dfrac{1}{\omega}$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{\overline{\omega}}{\omega}+\frac{\omega^2}{\overline{\omega}^2}+\frac{\overline{\omega}^3}{\omega^3}+\frac{\omega^4}{\overline{\omega}^4}+\frac{\overline{\omega}^5}{\omega^5}+\cdots+\frac{\omega^{100}}{\overline{\omega}^{100}}\\&=\omega+\frac{1}{\omega^2}+\omega^3+\frac{1}{\omega^4}+\omega^5+\cdots+\frac{1}{\omega^{100}}\\&=(\omega+\omega^3+\omega^5+\cdots+\omega^{99})+\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^4}+\frac{1}{\omega^6}+\cdots+\frac{1}{\omega^{100}}\right)\end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}&\omega+\omega^3+\omega^5+\cdots+\omega^{99}\\&=(\omega+1+\omega^2)+(\omega+1+\omega^2)+\cdots+(\omega+1+\omega^2)+\omega+1\\&=\omega+1\end{aligned}$$

이고, $\dfrac{1}{\omega^2}+\dfrac{1}{\omega}+1=\dfrac{1+\omega+\omega^2}{\omega^2}=0$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^4}+\frac{1}{\omega^6}+\cdots+\frac{1}{\omega^{100}}\\&=\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}+1\right)+\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}+1\right)\\&\qquad+\cdots+\left(\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}+1\right)+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}\\&=\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}=\frac{1+\omega}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\overline{\omega}}{\omega}+\frac{\omega^2}{\overline{\omega}^2}+\frac{\overline{\omega}^3}{\omega^3}+\frac{\omega^4}{\overline{\omega}^4}+\frac{\overline{\omega}^5}{\omega^5}+\cdots+\frac{\omega^{100}}{\overline{\omega}^{100}}=\omega+1+(-1)=\omega$$

0645 답 ②

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=1$, $\omega^2+\omega+1=0$

음이 아닌 정수 k에 대하여

(ⅰ) $n=3k+1$일 때,

$\omega^n=\omega^{3k+1}=(\omega^3)^k\times\omega=\omega$

$\omega^{2n}=\omega^{6k+2}=(\omega^3)^{2k}\times\omega^2=\omega^2$

$\therefore f(n)=\dfrac{1+\omega^n}{\omega^{2n}}=\dfrac{1+\omega}{\omega^2}=\dfrac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

(ⅱ) $n=3k+2$일 때,

$\omega^n=\omega^{3k+2}=(\omega^3)^k\times\omega^2=\omega^2$

$\omega^{2n}=\omega^{6k+4}=(\omega^3)^{2k+1}\times\omega=\omega$

$\therefore f(n)=\dfrac{1+\omega^n}{\omega^{2n}}=\dfrac{1+\omega^2}{\omega}=\dfrac{-\omega}{\omega}=-1$

(ⅲ) $n=3k+3$일 때,

$\omega^n=\omega^{3k+3}=(\omega^3)^{k+1}=1$

$\omega^{2n}=\omega^{6k+6}=(\omega^3)^{2k+2}=1$

$\therefore f(n)=\dfrac{1+\omega^n}{\omega^{2n}}=\dfrac{1+1}{1}=2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)$

$=16\times(-1-1+2)+(-1)+(-1)=-2$

0646 답 ③

$x^3=27$에서 $x^3-27=0$, $(x-3)(x^2+3x+9)=0$

이 방정식의 허근 ω는 이차방정식 $x^2+3x+9=0$의 근이고 계수가 모두 실수이므로 $x^2+3x+9=0$의 두 근은 ω, $\overline{\omega}$이다.

$\therefore \omega^3=\overline{\omega}^3=27$, $\omega^2+3\omega+9=0$, $\overline{\omega}^2+3\overline{\omega}+9=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-3$, $\omega\overline{\omega}=9$

ㄱ. $\frac{\overline{\omega}}{\omega}+\frac{\omega}{\overline{\omega}}=\frac{\omega^2+\overline{\omega}^2}{\omega\overline{\omega}}=\frac{(\omega+\overline{\omega})^2-2\omega\overline{\omega}}{\omega\overline{\omega}}=\frac{9-2\times9}{9}=-1$

ㄴ. $\overline{\omega}^2+3\overline{\omega}+9=0$이므로

$\overline{\omega}^2=-3\overline{\omega}-9=-3(-\omega-3)-9=3\omega$ ····· ㉠

ㄷ. $\omega^2+3\omega+9=0$에서 $\omega^2+9=-3\omega$이고 ㉠에서 $\overline{\omega}^2=3\omega$이므로

$\frac{\overline{\omega}^2}{\omega^2+9}=\frac{3\omega}{-3\omega}=-1$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0647 답 ②

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$

양변에 $\omega-1$을 곱하면

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$, $\omega^3-1=0$ $\therefore \omega^3=1$

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$ $\therefore \overline{\omega}=\frac{1}{\omega}=\frac{\omega^2}{\omega^3}=\omega^2$

$\therefore (\omega^2+1)^{3n}\times(\overline{\omega}+1)^n=\{(\omega^2+1)^3\times(\overline{\omega}+1)\}^n$

$=\{(-\omega)^3\times(\omega^2+1)\}^n$

$=\{-\omega^3\times(-\omega)\}^n=\omega^n$

따라서 ω^n의 값이 양의 실수가 되려면 n은 3의 배수이어야 하므로 50 이하의 자연수 n은 3, 6, 9, …, 48의 16개이다.

0648 답 ④

$x^3+1=0$에서 $(x+1)(x^2-x+1)=0$

ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

$\therefore 1-\omega=-\omega^2$

이를 $\omega^{4n}+(1-\omega)^{4n}+1=0$에 대입하면

$\omega^{4n}+(-\omega^2)^{4n}+1=0$ $\therefore \omega^{8n}+\omega^{4n}+1=0$

음이 아닌 정수 k에 대하여

(i) $n=3k+1$일 때,

$\omega^{8n}+\omega^{4n}+1=\omega^{24k+8}+\omega^{12k+4}+1$

$=(\omega^3)^{8k+2}\times\omega^2+(\omega^3)^{4k+1}\times\omega+1$

$=(-1)^{8k+2}\times\omega^2+(-1)^{4k+1}\times\omega+1$

$=\omega^2-\omega+1=0$

(ii) $n=3k+2$일 때,

$\omega^{8n}+\omega^{4n}+1=\omega^{24k+16}+\omega^{12k+8}+1$

$=(\omega^3)^{8k+5}\times\omega+(\omega^3)^{4k+2}\times\omega^2+1$

$=(-1)^{8k+5}\times\omega+(-1)^{4k+2}\times\omega^2+1$

$=-\omega+\omega^2+1=0$

(iii) $n=3k+3$일 때,

$\omega^{8n}+\omega^{4n}+1=\omega^{24k+24}+\omega^{12k+12}+1$

$=(\omega^3)^{8k+8}+(\omega^3)^{4k+4}+1$

$=(-1)^{8k+8}+(-1)^{4k+4}+1$

$=1+1+1=3\neq0$

(i), (ii), (iii)에서 $n=3k+1$ 또는 $n=3k+2$일 때,

$\omega^{4n}+(1-\omega)^{4n}+1=0$을 만족시킨다.

따라서 100 이하의 자연수 중 $n=3k+3$인 자연수, 즉 3의 배수인 자연수 33개를 제외하면 구하는 자연수 n의 개수는

$100-33=67$

0649 답 ②

처음 정육면체의 한 모서리의 길이를 x라 하면

$(x-1)(x+2)^2=50$

$x^3+3x^2-54=0$ ····· ㉠

$f(x)=x^3+3x^2-54$라 하면 $f(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

3	1	3	0	−54
		3	18	54
	1	6	18	0

$f(x)=(x-3)(x^2+6x+18)$

따라서 ㉠에서 $(x-3)(x^2+6x+18)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=-3\pm3i$

이때 x는 실수이므로 $x=3$

따라서 처음 정육면체의 부피는

$x^3=3^3=27$

0650 답 3

상자의 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이는 각각 $(20-2x)$ cm, $(16-2x)$ cm이므로

$x(20-2x)(16-2x)=420$

$4x(x-10)(x-8)=420$

$x^3-18x^2+80x-105=0$ ····· ㉠

$f(x)=x^3-18x^2+80x-105$라 하면 $f(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

3	1	−18	80	−105
		3	−45	105
	1	−15	35	0

$f(x)=(x-3)(x^2-15x+35)$

따라서 ㉠에서 $(x-3)(x^2-15x+35)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\frac{15\pm\sqrt{85}}{2}$

따라서 자연수 x의 값은 3이다.

0651 답 6 m

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x m라 하면 높이는 $2x$ m이다.

27π m^3의 물을 부었을 때 물의 높이가 $(2x-3)$ m이므로

$\pi x^2(2x-3)=27\pi$ ····· ⓘ

$2x^3-3x^2-27=0$ ····· ㉠

$f(x)=2x^3-3x^2-27$이라 하면 $f(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

3	2	−3	0	−27
		6	9	27
	2	3	9	0

$f(x)=(x-3)(2x^2+3x+9)$

따라서 ㉠에서 $(x-3)(2x^2+3x+9)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=\frac{-3\pm3\sqrt{7}i}{4}$

이때 x는 실수이므로 $x=3$ ····· ⓘⓘ

따라서 수족관의 높이는 $2x=2\times3=6$(m) ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 x m로 놓고, 방정식 세우기	40 %
ⓘⓘ x의 값 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ 수족관의 높이 구하기	10 %

0652 답 ④

처음 직육면체에서 직육면체 모양의 구멍을 파내고 남은 부분의 부피가 228 cm^3이므로

$x(x+1)(x+2)-\frac{1}{2}x^3=228$

$x^3+6x^2+4x-456=0$ ····· ㉠

$f(x)=x^3+6x^2+4x-456$이라 하면 $f(6)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

6	1	6	4	−456
		6	72	456
	1	12	76	0

$f(x)=(x-6)(x^2+12x+76)$

따라서 ㉠에서 $(x-6)(x^2+12x+76)=0$

$\therefore x=6$ 또는 $x=-6\pm2\sqrt{10}i$

이때 x는 실수이므로 $x=6$

0653 답 ①

작은 구의 반지름의 길이를 x라 하면 큰 구의 반지름의 길이는 $2x+1$이고, 두 구의 부피의 차가 $\frac{1264}{3}\pi$이므로

$\frac{4}{3}\pi(2x+1)^3-\frac{4}{3}\pi x^3=\frac{1264}{3}\pi$

$7x^3+12x^2+6x-315=0$ ····· ㉠

$f(x)=7x^3+12x^2+6x-315$라 하면 $f(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

3	7	12	6	−315
		21	99	315
	7	33	105	0

$f(x)=(x-3)(7x^2+33x+105)$

따라서 ㉠에서 $(x-3)(7x^2+33x+105)=0$

이때 x는 실수이므로 $x=3$

따라서 작은 구의 반지름의 길이는 3이다.

참고 방정식 $(x-3)(7x^2+33x+105)=0$에서 이차방정식 $7x^2+33x+105=0$의 판별식을 D라 하면

$D=33^2-4\times7\times105=-1851<0$

이므로 방정식 $(x-3)(7x^2+33x+105)=0$의 실근은 $x=3$이다.

0654 답 ④

$f(x)=x^3-10x^2+(a+16)x-2a$라 하면 $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	−10	$a+16$	$-2a$
		2	-16	$2a$
	1	−8	a	0

$f(x)=(x-2)(x^2-8x+a)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2-8x+a)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x^2-8x+a=0$

이때 주어진 삼차방정식의 세 근이 이등변삼각형의 세 변의 길이와 같으므로 이차방정식 $x^2-8x+a=0$이 2를 근으로 갖거나 중근을 가져야 한다.

(i) 2를 근으로 가질 때,

$4-16+a=0$ $\therefore a=12$

이때 $(x-2)(x^2-8x+a)=0$에서

$(x-2)^2(x-6)=0$

따라서 삼차방정식의 세 근은 2, 2, 6이다.

그런데 $2+2<6$이므로 삼각형의 세 변의 길이가 될 수 없다.

(ii) 중근을 가질 때,

이차방정식 $x^2-8x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=16-a=0$ $\therefore a=16$

이때 $(x-2)(x^2-8x+a)=0$에서

$(x-2)(x-4)^2=0$

따라서 삼차방정식의 세 근은 2, 4, 4이다.

이때 $2+4>4$이므로 삼각형의 세 변의 길이가 될 수 있다.

(i), (ii)에서 구하는 세 변의 길이는 2, 4, 4이다.

0655 답 ②

직육면체의 밑면의 가로, 세로의 길이와 높이를 각각 a, b, c라 하자. a, b, c가 삼차방정식 $x^3-4\sqrt{2}x^2+10x+k=0$의 세 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b+c=4\sqrt{2}$, $ab+bc+ca=10$

직육면체의 서로 다른 두 꼭짓점 사이의 거리의 최댓값은 직육면체의 대각선의 길이와 같으므로 구하는 최댓값은

$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)}$

$=\sqrt{(4\sqrt{2})^2-2\times10}$

$=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

0656 답 ④

직육면체의 세 모서리의 길이를 각각 a cm, b cm, c cm라 하면

모든 모서리의 길이의 합이 32 cm이므로

$4(a+b+c)=32$ $\therefore a+b+c=8$

겉넓이가 34 cm^2이므로

$2(ab+bc+ca)=34$ $\therefore ab+bc+ca=17$

부피가 10 cm^3이므로

$abc=10$

이때 a, b, c를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-8x^2+17x-10=0$ ····· ㉠

$f(x)=x^3-8x^2+17x-10$이라 하면 $f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

1	1	−8	17	−10
		1	−7	10
	1	−7	10	0

$f(x)=(x-1)(x^2-7x+10)$

$=(x-1)(x-2)(x-5)$

따라서 ㉠에서 $(x-1)(x-2)(x-5)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $x=2$ 또는 $x=5$

따라서 세 모서리의 길이는 1 cm, 2 cm, 5 cm이므로 가장 긴 모서리의 길이와 가장 짧은 모서리의 길이의 합은

$5+1=6(\text{cm})$

0657 답 3 mm

반구의 반지름의 길이를 x mm라 하면 주어진 캡슐의 부피가 72π mm^{3}이므로

$\frac{4}{3}\pi x^3+\pi x^2(10-2x)=72\pi$ …… ⓘ

$x^3-15x^2+108=0$ …… ㉠

$f(x)=x^3-15x^2+108$이라 하면 $f(3)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

3	1	−15	0	108
		3	−36	−108
	1	−12	−36	0

$f(x)=(x-3)(x^2-12x-36)$

따라서 ㉠에서 $(x-3)(x^2-12x-36)=0$

$\therefore x=3$ 또는 $x=6\pm6\sqrt{2}$ …… ⓘⓘ

그런데 $0<x<5$이므로 $x=3$

따라서 반구의 반지름의 길이는 3 mm이다. …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 방정식 세우기	40 %
ⓘⓘ 방정식 풀기	50 %
ⓘⓘⓘ 반구의 반지름의 길이 구하기	10 %

0658 답 5

삼각형 AOB의 밑변이 $\overline{AB}$일 때 높이는 점 A의 y좌표인 k이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times k=15$ $\therefore \overline{AB}\times k=30$ …… ㉠

$A(\alpha, k)$, $B(\beta, k)$라 하면 α, β는 이차방정식 $x^2-8x+12=k$, 즉 $x^2-8x+12-k=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=8$, $\alpha\beta=12-k$

$\therefore \overline{AB}=\beta-\alpha=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{64-4(12-k)}=\sqrt{4k+16}$

㉠에서 $\overline{AB}^2\times k^2=900$이므로

$k^2(4k+16)=900$, $k^3+4k^2-225=0$ …… ㉡

$f(k)=k^3+4k^2-225$라 하면 $f(5)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(k)$를 인수분해하면

5	1	4	0	−225
		5	45	225
	1	9	45	0

$f(k)=(k-5)(k^2+9k+45)$

따라서 ㉡에서 $(k-5)(k^2+9k+45)=0$

$\therefore k=5$ 또는 $k=\frac{-9\pm3\sqrt{11}i}{2}$

이때 k는 양수이므로 $k=5$

0659 답 ③

$f(x)=x^3-8x^2+(12+k)x-2k$라 하면 $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	−8	12+k	−2k
		2	−12	2k
	1	−6	k	0

$f(x)=(x-2)(x^2-6x+k)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)(x^2-6x+k)=0$

이때 주어진 삼차방정식의 서로 다른 세 실근이 직각삼각형의 세 변의 길이와 같으므로 이차방정식 $x^2-6x+k=0$이 2가 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는다.

$4-12+k\neq0$이므로 $k\neq8$ …… ㉠

이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-k>0$ $\therefore k<9$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $k<8$ 또는 $8<k<9$ …… ㉢

이차방정식 $x^2-6x+k=0$의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=k$

2, α, β는 직각삼각형의 세 변의 길이이므로 빗변의 길이가 2 또는 β이다.

(i) 빗변의 길이가 2인 경우

$\alpha^2+\beta^2=4$이므로 $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4$

$6^2-2k=4$ $\therefore k=16$

이는 ㉢을 만족시키지 않는다.

(ii) 빗변의 길이가 β인 경우

$\alpha^2+4=\beta^2$이므로 $\alpha^2-\beta^2=-4$

$(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=-4$, $6(\alpha-\beta)=-4$

$\therefore \alpha-\beta=-\frac{2}{3}$

$\alpha+\beta=6$, $\alpha-\beta=-\frac{2}{3}$를 연립하여 풀면

$\alpha=\frac{8}{3}$, $\beta=\frac{10}{3}$ $\therefore k=\frac{8}{3}\times\frac{10}{3}=\frac{80}{9}$

(i), (ii)에서 $k=\frac{80}{9}$

$\therefore 36k=36\times\frac{80}{9}=320$

참고 2, α, β가 직각삼각형의 세 변의 길이이고 $\alpha<\beta$일 때, $\alpha+\beta=6$이면 $6-\beta<\beta$ $\therefore \beta>3$

따라서 β가 2, α, β 중 가장 크므로 빗변의 길이는 β이다.

최고수준 도전 기출 137~139쪽

0660 답 ①

전략 주어진 사차방정식의 좌변을 두 이차식의 곱으로 인수분해한 후 a의 값에 따른 두 이차방정식의 근을 판별하여 $f(a)$의 값을 구한다.

$x^4+2ax^3+(a^2+7)x^2+7ax+12=0$의 좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2a^2+(2x^3+7x)a+x^4+7x^2+12=0$

$x^2a^2+x(2x^2+7)a+(x^2+3)(x^2+4)=0$

$\therefore (x^2+ax+3)(x^2+ax+4)=0$ …… ㉠

두 이차방정식 $x^2+ax+3=0$, $x^2+ax+4=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=a^2-12$, $D_2=a^2-16$

(i) $a=-6$일 때,

$D_1>0$, $D_2>0$이므로 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는

$f(-6)=2+2=4$

(ii) $a=-4$일 때,

$D_1>0$, $D_2=0$이므로 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는

$f(-4)=2+1=3$

(iii) $a=3$일 때,

$D_1<0$, $D_2<0$이므로 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는

$f(3)=0+0=0$

(iv) $a=5$일 때,

$D_1>0$, $D_2>0$이므로 방정식 ㉠의 서로 다른 실근의 개수는

$f(5)=2+2=4$

(i)~(iv)에서

$f(-6)+f(-4)+f(3)+f(5)=4+3+0+4=11$

참고 두 이차방정식 $x^2+ax+3=0$, $x^2+ax+4=0$이 공통근 k를 갖는다고 하면 $k^2+ak+3=0$, $k^2+ak+4=0$

이때 $k^2+ak=-3$, $k^2+ak=-4$이므로 두 식을 모두 만족시키는 실수 k의 값은 존재하지 않는다. 따라서 두 이차방정식은 공통근을 갖지 않는다.

0661 답 20

전략 사차방정식의 좌변이 x^4, x^2, 상수항으로 이루어진 복이차식이면 방정식의 두 실근끼리의 절댓값이 같고 부호가 서로 반대임을 이용하여 방정식을 세운 후 계수를 비교한다.

주어진 사차방정식이 α를 근으로 가지면 $-\alpha$도 근으로 갖고,

$|\alpha|\neq|\beta|$이므로 $\beta\neq-\alpha$이다.

따라서 β, $-\beta$도 주어진 사차방정식의 근이므로 주어진 사차방정식의 네 근은 α, $-\alpha$, β, $-\beta$이다.

주어진 사차방정식의 좌변에서

$$x^4-27x^2+2a-4=(x+\alpha)(x-\alpha)(x+\beta)(x-\beta)$$
$$=(x^2-\alpha^2)(x^2-\beta^2)$$
$$=x^4-(\alpha^2+\beta^2)x^2+\alpha^2\beta^2$$

$\therefore\ \alpha^2\beta^2=2a-4$

이때 $\alpha\beta=6$이므로 $2a-4=(\alpha\beta)^2=36$

$2a=40$ $\therefore\ a=20$

0662 답 16

전략 삼차방정식의 좌변을 인수분해하여 허근 ω를 구하고, ω와 $\overline{\omega}$ 사이의 관계를 이용하여 $\omega\overline{\omega}-\omega$를 간단히 정리한 후 허근의 거듭제곱의 성질을 이용한다.

$f(x)=x^3-3x^2+4x-2$라 하면

$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여

$f(x)$를 인수분해하면

1	1	−3	4	−2
		1	−2	2
	1	−2	2	0

$f(x)=(x-1)(x^2-2x+2)$

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2-2x+2)=0$

이때 허근 ω는 이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 근이다.

이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 두 허근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\omega+\overline{\omega}=2$, $\omega\overline{\omega}=2$

$\therefore\ \omega(\overline{\omega}-1)=\omega\overline{\omega}-\omega=2-\omega=\overline{\omega}$

이차방정식 $x^2-2x+2=0$의 두 근은 $1+i$, $1-i$이므로

(i) $\omega=1+i$, $\overline{\omega}=1-i$일 때,

$\overline{\omega}^2=(1-i)^2=-2i$, $\overline{\omega}^4=(-2i)^2=-4$이므로

$\overline{\omega}^{16}=(-4)^4=256$

(ii) $\omega=1-i$, $\overline{\omega}=1+i$일 때,

$\overline{\omega}^2=(1+i)^2=2i$, $\overline{\omega}^4=(2i)^2=-4$이므로

$\overline{\omega}^{16}=(-4)^4=256$

(i), (ii)에서 $\{\omega(\overline{\omega}-1)\}^n=\overline{\omega}^n=256$을 만족시키는 자연수 n의 값은 16이다.

0663 답 ①

전략 방정식 $(2x+3)^3+a(2x+3)^2+b(2x+3)+c=0$의 근은 방정식 $f(2x+3)=0$의 근임을 이용한다.

(나)에서 삼차방정식 $f(x)=0$의 계수가 모두 유리수이므로 $\sqrt{3}-2$가 근이면 $-\sqrt{3}-2$도 근이다.

(가)에서 나머지 한 근이 -1이므로 방정식 $f(x)=0$의 세 근은

$x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}-2$ 또는 $x=-\sqrt{3}-2$

방정식 $(2x+3)^3+a(2x+3)^2+b(2x+3)+c=0$, 즉

$f(2x+3)=0$의 근은

$2x+3=-1$ 또는 $2x+3=\sqrt{3}-2$ 또는 $2x+3=-\sqrt{3}-2$에서

$x=-2$ 또는 $x=\dfrac{\sqrt{3}-5}{2}$ 또는 $x=\dfrac{-\sqrt{3}-5}{2}$

따라서 방정식 $f(2x+3)=0$의 모든 근의 합은

$-2+\dfrac{\sqrt{3}-5}{2}+\dfrac{-\sqrt{3}-5}{2}=-7$

0664 답 ④

전략 세 근 $\dfrac{1}{\alpha\beta}$, $\dfrac{1}{\beta\gamma}$, $\dfrac{1}{\gamma\alpha}$에 대하여 세 근의 합, 두 근끼리의 곱의 합, 세 근의 곱을 이용하여 a, b, c에 대한 식을 세운다.

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma=-a$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$, $\alpha\beta\gamma=-c$

삼차방정식 $x^3-3x^2-2x-1=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{1}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}=3$이므로

$\dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=3$, $\dfrac{-a}{-c}=3$ $\therefore\ a=3c$ …… ㉠

$\dfrac{1}{\alpha\beta}\times\dfrac{1}{\beta\gamma}+\dfrac{1}{\beta\gamma}\times\dfrac{1}{\gamma\alpha}+\dfrac{1}{\gamma\alpha}\times\dfrac{1}{\alpha\beta}=-2$이므로

$\dfrac{1}{\alpha\beta^2\gamma}+\dfrac{1}{\alpha\beta\gamma^2}+\dfrac{1}{\alpha^2\beta\gamma}=-2$

$\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(\alpha\beta\gamma)^2}=-2$, $\dfrac{b}{(-c)^2}=-2$ $\therefore\ b=-2c^2$ …… ㉡

$\dfrac{1}{\alpha\beta}\times\dfrac{1}{\beta\gamma}\times\dfrac{1}{\gamma\alpha}=1$이므로

$\dfrac{1}{(\alpha\beta\gamma)^2}=1$, $\dfrac{1}{(-c)^2}=1$ $\therefore\ c^2=1$ …… ㉢

㉠, ㉢에서 $a^2=9c^2=9$

㉡, ㉢에서 $b=-2$이므로 $b^2=4$

$\therefore\ (abc)^2=a^2b^2c^2=9\times4\times1=36$

0665 답 ⑤

전략 $x^2=X$로 치환한 후 인수분해하여 방정식을 풀었을 때, 실근과 허근을 모두 갖도록 a의 값의 범위를 정한다.

$x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2+(3-2a)X+(a+2)(a-5)=0$

$\{X-(a+2)\}\{X-(a-5)\}=0$

$\therefore X=a+2$ 또는 $X=a-5$

즉, $x^2=a+2$ 또는 $x^2=a-5$이므로

$x=\pm\sqrt{a+2}$ 또는 $x=\pm\sqrt{a-5}$

이때 주어진 사차방정식이 실근과 허근을 모두 가지므로

$a+2\geq 0$, $a-5<0$ $\therefore -2\leq a<5$ ····· ㉠

따라서 실근은 $x=\pm\sqrt{a+2}$, 허근은 $x=\pm\sqrt{a-5}$이다.

ㄱ. $a=1$이면 실근은 $x=\pm\sqrt{3}$이므로 모든 실근의 곱은

$-\sqrt{3}\times\sqrt{3}=-3$

ㄴ. 모든 실근의 곱이 -4이면 $-\sqrt{a+2}\times\sqrt{a+2}=-4$

$-a-2=-4$ $\therefore a=2$

따라서 허근은 $x=\pm\sqrt{3}i$이므로 그 곱은 $-\sqrt{3}i\times\sqrt{3}i=3$

ㄷ. 주어진 방정식이 정수인 근을 가지려면 $\pm\sqrt{a+2}$가 정수이어야 하므로 $a+2$가 어떤 정수의 제곱이어야 한다.

㉠에서 $0\leq a+2<7$

따라서 $a+2$의 값이 될 수 있는 수는 0, 1, 4이므로

$a=-2$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=2$이고 그 합은

$-2+(-1)+2=-1$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0666 답 ⑤

전략 $\omega^3=1$을 만족시키는 허근의 성질과 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 ω, $\overline{\omega}$ 사이의 관계식을 구한다.

$x^3=1$에서 $x^3-1=0$, $(x-1)(x^2+x+1)=0$

ω는 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이다.

ㄱ. $\alpha=3+\omega$이면 $a=3$, $b=1$이므로

$N(\alpha)=3^2+1^2-3=7$

ㄴ. 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 두 근이 ω, $\overline{\omega}$이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$

$\alpha=a+b\omega$이므로

$\alpha\overline{\alpha}=(a+b\omega)(a+b\overline{\omega})=a^2+ab(\omega+\overline{\omega})+b^2\omega\overline{\omega}$

$=a^2-ab+b^2=N(\alpha)$

ㄷ. ㄴ에 의하여

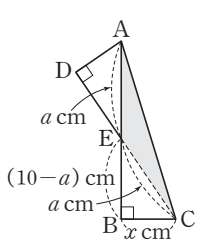
$N(\alpha\beta)=\alpha\beta\overline{\alpha\beta}=\alpha\overline{\alpha}\beta\overline{\beta}=N(\alpha)N(\beta)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0667 답 2

전략 합동인 삼각형을 찾아 직각삼각형의 변의 길이를 x로 나타내고, 주어진 넓이를 이용하여 x에 대한 식을 세운다.

오른쪽 그림과 같이 직사각형 모양의 종이의 대각선을 따라 접었을 때, 두 삼각형 ADE와 CBE에서



$\angle D=\angle B=90^\circ$, $\angle AED=\angle CEB$,

$\overline{AD}=\overline{CB}$

이므로 $\triangle ADE\equiv\triangle CBE$ (ASA 합동)

$\overline{AE}=a$ cm라 하면

$\overline{CE}=\overline{AE}=a$(cm), $\overline{BE}=10-a$(cm)

삼각형 CBE에서

$a^2=x^2+(10-a)^2$, $a^2=x^2+100-20a+a^2$

$\therefore a=\dfrac{x^2+100}{20}$ ····· ㉠

삼각형 AEC의 밑변의 길이가 $\overline{AE}$이면 높이가 $\overline{BC}$이므로 겹쳐지는 부분의 넓이는 $\dfrac{1}{2}ax$ cm^{2}이다.

즉, $\dfrac{1}{2}ax=\dfrac{26}{5}$이므로 ㉠을 대입하면

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{x^2+100}{20}\times x=\dfrac{26}{5}$

$x^3+100x-208=0$ ····· ㉡

$f(x)=x^3+100x-208$이라 하면 $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	1	0	100	−208
		2	4	208
	1	2	104	0

$f(x)=(x-2)(x^2+2x+104)$

따라서 ㉡에서 $(x-2)(x^2+2x+104)=0$

$\therefore x=2$ 또는 $x=-1\pm\sqrt{103}i$

이때 x는 실수이므로 $x=2$

0668 답 40

전략 인수분해를 이용하여 주어진 삼차방정식의 한 근을 구한 후 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 나머지 두 근이 될 수 있는 경우를 생각한다.

주어진 방정식이 x에 대한 삼차방정식이므로 $a\neq 0$이다.

$f(x)=ax^3+(-a+b)x^2+(-5a-2b)x+6a$라 하면 $f(2)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

2	a	$-a+b$	$-5a-2b$	$6a$
		$2a$	$2a+2b$	$-6a$
	a	$a+b$	$-3a$	0

$f(x)=(x-2)\{ax^2+(a+b)x-3a\}$

즉, 주어진 방정식은 $(x-2)\{ax^2+(a+b)x-3a\}=0$

이때 주어진 삼차방정식이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지므로 이차방정식 $ax^2+(a+b)x-3a=0$은 $x\neq 2$인 서로 다른 두 정수를 근으로 갖는다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱이 $\dfrac{-3a}{a}=-3$이므로 가능한 두 근은

1, -3 또는 -1, 3

따라서 두 근의 합은 -2 또는 2이므로

$-\dfrac{a+b}{a}=-2$ 또는 $-\dfrac{a+b}{a}=2$

$\therefore b=a$ 또는 $b=-3a$

(i) $b=a$일 때,

순서쌍 (a, b)는 $(-15, -15)$, $(-14, -14)$, …, $(-1, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, …, $(15, 15)$의 30개이다.

(ii) $b=-3a$일 때,

순서쌍 (a, b)는 $(-5, 15)$, $(-4, 12)$, $(-3, 9)$, $(-2, 6)$, $(-1, 3)$, $(1, -3)$, $(2, -6)$, $(3, -9)$, $(4, -12)$, $(5, -15)$의 10개이다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b)의 개수는 $30+10=40$

0669 답 ①

전략 주어진 삼차방정식의 좌변을 인수분해하여 한 실근을 구한 후 α, β, γ가 각각 그 실근인 경우로 나누어 나머지 조건을 확인한다.

$f(x)=x^3-(a^2+a-1)x^2-a(a-3)x+4a$라 하면

$f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	$-a^2-a+1$	$-a^2+3a$	$4a$
		-1	a^2+a	$-4a$
	1	$-a^2-a$	$4a$	0

$f(x)=(x+1)\{x^2-a(a+1)x+4a\}$

즉, 주어진 방정식은 $(x+1)\{x^2-a(a+1)x+4a\}=0$ ····· ㉠

이고 $x=-1$은 주어진 방정식의 근이다.

(i) $a=-1$인 경우

$\alpha\times\gamma=-4$에서 $\gamma=4$이므로 $-1<\beta<4$이다.

이차방정식 $x^2-a(a+1)x+4a=0$의 두 근이 β, 4이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$4\beta=4a$ $\therefore \beta=a$

$x=4$를 $x^2-a(a+1)x+4a=0$에 대입하면 $16-4a^2=0$

$a^2=4$ $\therefore a=\pm2$

$a=-2$이면 $\beta=-2$이므로 $-1<\beta<4$를 만족시키지 않고,

$a=2$이면 $\beta=2$이므로 $-1<\beta<4$를 만족시킨다.

$\therefore a=2$

(ii) $\beta=-1$인 경우

이차방정식 $x^2-a(a+1)x+4a=0$의 두 근이 α, γ이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha\gamma=4a=-4$ $\therefore a=-1$

$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $(x+1)(x^2-4)=0$

따라서 $\alpha=-2$, $\gamma=2$이므로 $\alpha<\beta<\gamma$를 만족시킨다.

(iii) $\gamma=-1$인 경우

$\alpha\times\gamma=-4$에서 $a=4$이므로 $\alpha<\beta<\gamma$를 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a=-1$ 또는 $a=2$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $-1+2=1$

0670 답 ①

전략 $\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$임을 이용하여 ω의 거듭제곱의 값의 규칙을 찾고, $\omega^m+\omega^n$의 값이 될 수 있는 음수를 찾는다.

$x^3=-1$에서 $x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

ω는 이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 허근이므로

$\omega^3=-1$, $\omega^2-\omega+1=0$

이때 $\omega^2=\omega-1$, $\omega^3=-1$, $\omega^4=-\omega$, $\omega^5=-\omega+1$, $\omega^6=1$, …이므로 $\omega^m+\omega^n$의 값이 음수가 되는 경우는

$\omega^m+\omega^n=-1$ 또는 $\omega^m+\omega^n=-2$이다.

(i) $\omega^m+\omega^n=-1$인 경우

음이 아닌 정수 p, q에 대하여 m과 n은 $6p+2$와 $6q+4$ 꼴이므로 조건을 만족시키는 9 이하의 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은 $(2, 4)$, $(4, 2)$, $(4, 8)$, $(8, 4)$이고 a는 6, 12이다.

(ii) $\omega^m+\omega^n=-2$인 경우

음이 아닌 정수 p, q에 대하여 m과 n은 $6p+3$과 $6q+3$ 꼴이므로 조건을 만족시키는 9 이하의 자연수 m, n의 순서쌍 (m, n)은 $(3, 3)$, $(3, 9)$, $(9, 3)$, $(9, 9)$이고 a는 6, 12, 18이다.

(i), (ii)에서 서로 다른 자연수 a는 6, 12, 18의 3개이다.

0671 답 12

전략 주어진 사차방정식의 좌변을 인수분해한 후 이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 중근을 가져야 함을 이용한다.

$x^4+(2a+1)x^3+(3a+2)x^2+(a+2)x=0$에서

$x\{x^3+(2a+1)x^2+(3a+2)x+a+2\}=0$

$f(x)=x^3+(2a+1)x^2+(3a+2)x+a+2$라 하면

$f(-1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

-1	1	$2a+1$	$3a+2$	$a+2$
		-1	$-2a$	$-a-2$
	1	$2a$	$a+2$	0

$f(x)=(x+1)(x^2+2ax+a+2)$

즉, 주어진 방정식은

$x(x+1)(x^2+2ax+a+2)=0$ ····· ㉠

이때 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$이 0 또는 -1을 근으로 갖거나 0, -1이 아닌 중근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$이 0을 근으로 갖는 경우

$x=0$을 대입하면

$a+2=0$ $\therefore a=-2$

이를 ㉠에 대입하면

$x(x+1)(x^2-4x)=0$ $\therefore x^2(x+1)(x-4)=0$

따라서 $a=-2$일 때 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(ii) 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$이 -1을 근으로 갖는 경우

$x=-1$을 대입하면

$1-2a+a+2=0$ $\therefore a=3$

이를 ㉠에 대입하면

$x(x+1)(x^2+6x+5)=0$ $\therefore x(x+1)^2(x+5)=0$

따라서 $a=3$일 때 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(iii) 이차방정식 $x^2+2ax+a+2=0$이 0, -1이 아닌 중근을 갖는 경우

$x^2+2ax+a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-a-2=0$

$(a+1)(a-2)=0$ $\therefore a=-1$ 또는 $a=2$

ⓘ $a=-1$을 ㉠에 대입하면

$x(x+1)(x^2-2x+1)=0$ $\therefore x(x+1)(x-1)^2=0$

따라서 $a=-1$일 때 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

ⓘⓘ $a=2$를 ㉠에 대입하면

$x(x+1)(x^2+4x+4)=0$ $\therefore x(x+1)(x+2)^2=0$

따라서 $a=2$일 때 주어진 방정식은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(i), (ii), (iii)에서

$a=-2$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$

따라서 모든 실수 a의 값의 곱은

$-2\times(-1)\times2\times3=12$

09 연립이차방정식

난이도별 필수 기출 141~146쪽

0672 답 5

$x-y=3$에서 $y=x-3$ ····· ㉠

㉠을 $x^2-3xy+2y^2=6$에 대입하면

$x^2-3x(x-3)+2(x-3)^2=6$

$-3x=-12$ $\therefore x=4$

이를 ㉠에 대입하면 $y=1$

따라서 $\alpha=4$, $\beta=1$이므로 $\alpha+\beta=5$

0673 답 ③

$6x^2-xy-2y^2=0$에서 $(2x+y)(3x-2y)=0$

$\therefore y=-2x$ 또는 $2y=3x$

(i) $y=-2x$를 $3x-2y=7$에 대입하면

$3x-2(-2x)=7$, $7x=7$ $\therefore x=1$

이를 $y=-2x$에 대입하면 $y=-2$

(ii) $2y=3x$를 $3x-2y=7$에 대입하면

$0=7$이므로 등식이 성립하지 않는다.

(i), (ii)에서 $x=1$, $y=-2$이므로

$\alpha-\beta=1-(-2)=3$

0674 답 $a=1$, $b=-1$, 나머지 한 근: $x=0$, $y=1$

$x=1$, $y=-2$를 주어진 연립방정식에 대입하면

$a=3x+y=3-2=1$

$b=x^2-xy-y^2=1+2-4=-1$ ····· i

$3x+y=1$에서 $y=-3x+1$ ····· ㉠

㉠을 $x^2-xy-y^2=-1$에 대입하면

$x^2-x(-3x+1)-(-3x+1)^2=-1$

$5x^2-5x=0$, $5x(x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$

$x=0$을 ㉠에 대입하면 $y=1$이므로 주어진 연립방정식의 나머지 한 근은

$x=0$, $y=1$ ····· ii

채점 기준	
i a, b의 값 구하기	40%
ii 나머지 한 근 구하기	60%

0675 답 ①

$3x^2-4xy-4y^2=0$에서 $(3x+2y)(x-2y)=0$

$\therefore y=-\frac{3}{2}x$ 또는 $y=\frac{1}{2}x$

이때 $xy<0$에서 x, y의 부호가 서로 다르므로

$y=-\frac{3}{2}x$

이를 $x^2-y-10=0$에 대입하면

$x^2+\frac{3}{2}x-10=0$, $2x^2+3x-20=0$

$(x+4)(2x-5)=0$ $\therefore x=-4$ 또는 $x=\frac{5}{2}$

그런데 x는 정수이므로 $x=-4$

이를 $y=-\frac{3}{2}x$에 대입하면 $y=6$

$\therefore x+y=2$

0676 답 42

두 연립방정식의 공통인 해는 연립방정식 $\begin{cases}3x+y=4\\x^2-y^2=-48\end{cases}$의 해와 같다.

$3x+y=4$에서 $y=-3x+4$ ····· ㉠

㉠을 $x^2-y^2=-48$에 대입하면

$x^2-(-3x+4)^2=-48$, $x^2-3x-4=0$

$(x+1)(x-4)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=4$

이를 각각 ㉠에 대입하면 위의 연립방정식의 해는

$x=-1$, $y=7$ 또는 $x=4$, $y=-8$ ····· i

(i) $x=-1$, $y=7$을 $ax^2-y^2=-1$, $x+y=b$에 각각 대입하면

$a-49=-1$, $-1+7=b$

$\therefore a=48$, $b=6$

(ii) $x=4$, $y=-8$을 $ax^2-y^2=-1$, $x+y=b$에 각각 대입하면

$16a-64=-1$, $4-8=b$

$\therefore a=\frac{63}{16}$, $b=-4$ ····· ii

(i), (ii)에서 정수 a, b의 값은 $a=48$, $b=6$이므로

$a-b=42$ ····· iii

채점 기준	
i 주어진 연립방정식의 공통인 해 구하기	40%
ii a, b의 값 구하기	50%
iii $a-b$의 값 구하기	10%

0677 답 ③

$x^2-y^2=6$에서 $(x+y)(x-y)=6$ ····· ㉠

$(x+y)^2-2(x+y)=3$에서 $(x+y)^2-2(x+y)-3=0$

$(x+y+1)(x+y-3)=0$

$\therefore x+y=-1$ 또는 $x+y=3$

(i) $x+y=-1$을 ㉠에 대입하면

$-(x-y)=6$, $x-y=-6$

$x+y=-1$, $x-y=-6$을 연립하여 풀면

$x=-\frac{7}{2}$, $y=\frac{5}{2}$

이때 x가 음수이므로 구하는 해가 아니다.

(ii) $x+y=3$을 ㉠에 대입하면

$3(x-y)=6$, $x-y=2$

$x+y=3$, $x-y=2$를 연립하여 풀면

$x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{1}{2}$

(i), (ii)에서 $x=\frac{5}{2}$, $y=\frac{1}{2}$이므로

$12xy=12\times\frac{5}{2}\times\frac{1}{2}=15$

0678 답 ①

$x+y=-3$에서 $y=-x-3$ ····· ㉠

㉠을 $xy=2$에 대입하면

$x(-x-3)=2$, $x^2+3x+2=0$

$(x+1)(x+2)=0$ $\therefore x=-1$ 또는 $x=-2$

이를 각각 ㉠에 대입하면 주어진 연립방정식의 해는

$x=-1$, $y=-2$ 또는 $x=-2$, $y=-1$

$a=x^2+y^2=(-1)^2+(-2)^2=5$이고

$b=5x-3y$는

$5\times(-1)-3\times(-2)=1$ 또는 $5\times(-2)-3\times(-1)=-7$

이때 $b<0$이므로 $b=-7$

$\therefore a+b=5+(-7)=-2$

0679 답 ③

$x+y=a$에서 $y=-x+a$이므로 이를 $x^2-2xy=-3$에 대입하면

$x^2-2x(-x+a)=-3$

$3x^2-2ax+3=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9=0$

$a^2=9$ $\therefore a=\pm3$

그런데 $a>0$이므로 $a=3$

0680 답 2

$x-y=2a$에서 $y=x-2a$이므로 이를 $2x^2-xy=-a^2-a+1$에 대입하면

$2x^2-x(x-2a)=-a^2-a+1$

$x^2+2ax+a^2+a-1=0$

이 이차방정식이 실근을 갖지 않으므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-(a^2+a-1)<0$

$-a+1<0$ $\therefore a>1$

따라서 정수 a의 최솟값은 2이다.

0681 답 ③

$x+y=4$에서 $y=-x+4$이므로 이를 $xy+x+y=a$에 대입하면

$x(-x+4)+x+(-x+4)=a$

$x^2-4x+a-4=0$

이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(a-4)\geq0$

$8-a\geq0$ $\therefore a\leq8$

따라서 실수 a의 최댓값은 8이다.

다른 풀이

주어진 연립방정식에서 $x+y=4$, $xy=a-(x+y)=a-4$이므로

x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-4t+a-4=0$

이 이차방정식이 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-(a-4)\geq0$

$8-a\geq0$ $\therefore a\leq8$

따라서 실수 a의 최댓값은 8이다.

0682 답 ②

$x-y=3$에서 $y=x-3$이므로 이를 $x^2-xy-y^2=k$에 대입하면

$x^2-x(x-3)-(x-3)^2=k$

$x^2-9x+9+k=0$

이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=81-4(9+k)>0$

$45-4k>0$ $\therefore k<\frac{45}{4}$

따라서 자연수 k의 최댓값은 11이다.

0683 답 ①

주어진 두 이차방정식의 공통근이 α이므로

$\alpha^2+(2k+1)\alpha+6=0$ ····· ㉠

$\alpha^2-(k+1)\alpha-3k+4=0$ ····· ㉡

㉠−㉡을 하면

$(3k+2)\alpha+(3k+2)=0$, $(3k+2)(\alpha+1)=0$

$\therefore k=-\frac{2}{3}$ 또는 $\alpha=-1$

(i) $k=-\frac{2}{3}$일 때,

두 이차방정식이 모두 $x^2-\frac{1}{3}x+6=0$이므로 서로 다른 두 이차방정식이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha=-1$일 때,

$\alpha=-1$을 ㉠에 대입하면

$1-(2k+1)+6=0$, $2k=6$ $\therefore k=3$

(i), (ii)에서 $\alpha=-1$, $k=3$이므로

$\alpha-k=-4$

0684 답 ④

$x^3+ax^2+bx+c=0$의 계수가 모두 실수이므로 $1+\sqrt{2}i$가 근이면

$1-\sqrt{2}i$도 근이다.

$1+\sqrt{2}i$, $1-\sqrt{2}i$를 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2-2x+3=0$

즉, $m\neq1\pm\sqrt{2}i$이다.

방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$의 세 근은 $1+\sqrt{2}i$, $1-\sqrt{2}i$, m이므로

$x^3+ax^2+bx+c=(x^2-2x+3)(x-m)$

$=x^3+(-m-2)x^2+(2m+3)x-3m$

$\therefore a=-m-2$, $b=2m+3$, $c=-3m$ ····· ㉠

연립방정식의 근이 m이므로 $m^2+am+6=0$

이 식에 $a=-m-2$를 대입하면

$m^2+(-m-2)m+6=0$

$-2m+6=0$ $\therefore m=3$

$m=3$을 ㉠에 대입하면

$a=-3-2=-5$, $b=6+3=9$, $c=-9$

$\therefore a+b+c+m=-5+9+(-9)+3=-2$

0685 답 24

$\begin{cases} 12x^2+5x-7y=-26 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+x-y=-2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡×6을 하면

$-x-y=-14$ $\therefore y=-x+14$

이를 ㉡에 대입하면 $2x^2+x-(-x+14)=-2$

$x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

그런데 x는 양수이므로 $x=2$

이를 $y=-x+14$에 대입하면 $y=12$

$\therefore xy=24$

다른 풀이

$2x^2+x-y=-2$에서 $y=2x^2+x+2$ $\cdots\cdots ㉠$

이를 $12x^2+5x-7y=-26$에 대입하면

$12x^2+5x-7(2x^2+x+2)=-26$

$x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$ $\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

그런데 x는 양수이므로 $x=2$

이를 ㉠에 대입하면 $y=12$

$\therefore xy=24$

0686 답 ②

주어진 연립방정식을 변형하면 $\begin{cases} xy+(x+y)=11 \\ xy(x+y)=30 \end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면 $\begin{cases} u+v=11 \\ uv=30 \end{cases}$

$u+v=11$에서 $v=-u+11$ $\cdots\cdots ㉠$

㉠을 $uv=30$에 대입하면

$u(-u+11)=30$, $u^2-11u+30=0$

$(u-5)(u-6)=0$ $\therefore u=5$ 또는 $u=6$

이를 각각 ㉠에 대입하면

$u=5$, $v=6$ 또는 $u=6$, $v=5$

(i) $u=5$, $v=6$, 즉 $x+y=5$, $xy=6$일 때,

x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-5t+6=0$, $(t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=3$

$\therefore x=2$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=2$

(ii) $u=6$, $v=5$, 즉 $x+y=6$, $xy=5$일 때,

x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-6t+5=0$, $(t-1)(t-5)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=5$

$\therefore x=1$, $y=5$ 또는 $x=5$, $y=1$

(i), (ii)에서 $2x-y$의 최댓값은 $2\times5-1=9$

0687 답 $\frac{1}{2}$

$\begin{cases} 12x^2-y^2=2 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x^2+xy=1 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠−㉡×2를 하면

$8x^2-2xy-y^2=0$, $(4x+y)(2x-y)=0$

$\therefore y=-4x$ 또는 $y=2x$ ····· ⓘ

(i) $y=-4x$를 ㉠에 대입하면

$12x^2-16x^2=2$, $x^2=-\frac{1}{2}$

이를 만족시키는 실수 x의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $y=2x$를 ㉠에 대입하면

$12x^2-4x^2=2$, $x^2=\frac{1}{4}$

$\therefore x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\pm1$ (복부호동순)

(i), (ii)에서 $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=-1$ 또는 $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=1$이므로

$|\alpha-\beta|=\frac{1}{2}$ ····· ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ y를 x에 대한 일차식으로 나타내기	50 %
ⓘⓘ $\lvert\alpha-\beta\rvert$의 값 구하기	50 %

0688 답 2

두 방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 공통근을 α라 하면

$\alpha^2-p\alpha-2q=0$ $\cdots\cdots ㉠$

$\alpha^2-q\alpha-2p=0$ $\cdots\cdots ㉡$

㉠−㉡을 하면 $(q-p)\alpha-2(q-p)=0$

$(q-p)(\alpha-2)=0$ $\therefore p=q$ 또는 $\alpha=2$

그런데 $p=q$이면 두 방정식이 일치하므로 서로 다른 두 이차식이라는 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore \alpha=2$

공통근이 아닌 $f(x)=0$의 근과 $g(x)=0$의 근의 비가 2 : 1이므로 두 근을 $2k$, k $(k\neq0)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+2k=p$, $2\times2k=-2q$ $\therefore p=2k+2$, $q=-2k$

$2+k=q$, $2\times k=-2p$ $\therefore q=k+2$, $p=-k$

즉, $2k+2=-k$이므로 $k=-\frac{2}{3}$

따라서 $p=\frac{2}{3}$, $q=\frac{4}{3}$이므로

$\frac{q}{p}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}=2$

0689 답 5

(i) $x\geq y$일 때,

$[x, y]=y$, $\langle x, y\rangle=x$이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} x-y=2y+2 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-xy+y^2=x+16 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=3y+2$이고 이를 ㉡에 대입하면

$(3y+2)^2-(3y+2)y+y^2=3y+2+16$

$y^2+y-2=0$, $(y+2)(y-1)=0$

$\therefore y=-2$ 또는 $y=1$

이를 각각 $x=3y+2$에 대입하면

$x=-4$, $y=-2$ 또는 $x=5$, $y=1$

그런데 $x\geq y$이므로 $x=5$, $y=1$ ····· ⓘ

(ii) $x<y$일 때,

$[x, y]=x$, $\langle x, y\rangle=y$이므로 주어진 연립방정식은

$\begin{cases} x-y=2x+2 & \cdots\cdots ㉢ \\ x^2-xy+y^2=y+16 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

㉢에서 $x=-y-2$이고 이를 ㉣에 대입하면

$(-y-2)^2-(-y-2)y+y^2=y+16$

$3y^2+5y-12=0$, $(3y-4)(y+3)=0$

$\therefore y=\frac{4}{3}$ 또는 $y=-3$

이를 각각 $x=-y-2$에 대입하면

$x=-\frac{10}{3}$, $y=\frac{4}{3}$ 또는 $x=1$, $y=-3$

그런데 $x<y$이므로 $x=-\frac{10}{3}$, $y=\frac{4}{3}$ ····· ii

(i), (ii)에서 주어진 연립방정식의 해는

$x=5$, $y=1$ 또는 $x=-\frac{10}{3}$, $y=\frac{4}{3}$

따라서 xy의 최댓값은 5이다. ····· iii

채점 기준	
i $x\geq y$일 때 x, y의 값 구하기	40 %
ii $x<y$일 때 x, y의 값 구하기	40 %
iii xy의 최댓값 구하기	20 %

0690 답 ⑤

두 원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2라 하면

$\begin{cases} 2\pi r_1+2\pi r_2=12\pi \\ \pi r_1^2+\pi r_2^2=26\pi \end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases} r_1+r_2=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ r_1^2+r_2^2=26 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $r_2=-r_1+6$ ····· ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$r_1^2+(-r_1+6)^2=26$, $r_1^2-6r_1+5=0$

$(r_1-1)(r_1-5)=0$ $\therefore r_1=1$ 또는 $r_1=5$

이를 각각 ㉢에 대입하면

$r_1=1$, $r_2=5$ 또는 $r_1=5$, $r_2=1$

따라서 두 원 중 큰 원의 반지름의 길이는 5이다.

0691 답 ③

직각을 낀 두 변의 길이를 각각 x cm, y cm라 하면

$x^2+y^2=169$

삼각형의 넓이가 30 cm^2이므로 $\frac{1}{2}xy=30$ $\therefore xy=60$

$\therefore (x+y)^2=x^2+y^2+2xy=169+2\times 60=289$

이때 $x>0$, $y>0$이므로 $x+y=17$

$\therefore$ $\begin{cases} x+y=17 \\ xy=60 \end{cases}$

x, y는 t에 대한 이차방정식 $t^2-17t+60=0$의 두 근이다.

$(t-5)(t-12)=0$ $\therefore t=5$ 또는 $t=12$

$\therefore x=5$, $y=12$ 또는 $x=12$, $y=5$

따라서 짧은 변의 길이는 5 cm이다.

0692 답 38

$\begin{cases} 2a+2b=62 \\ a^2+b^2=25^2 \end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases} a+b=31 & \cdots\cdots ㉠ \\ a^2+b^2=625 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $b=-a+31$ ····· ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$a^2+(-a+31)^2=625$, $a^2-31a+168=0$

$(a-7)(a-24)=0$ $\therefore a=7$ 또는 $a=24$

이를 각각 ㉢에 대입하면 $a=7$, $b=24$ 또는 $a=24$, $b=7$

그런데 $a>b$이므로 $a=24$, $b=7$

$\therefore a+2b=24+14=38$

0693 답 6

$\begin{cases} 4a+4b=120 \\ b^2-a^2=180 \end{cases}$ $\therefore$ $\begin{cases} a+b=30 & \cdots\cdots ㉠ \\ b^2-a^2=180 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ ····· i

㉠에서 $b=-a+30$ ····· ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

$(-a+30)^2-a^2=180$

$-60a=-720$ $\therefore a=12$

이를 ㉢에 대입하면 $b=18$ ····· ii

$\therefore 2a-b=2\times 12-18=6$ ····· iii

채점 기준	
i 연립방정식 세우기	30 %
ii a, b의 값 구하기	60 %
iii $2a-b$의 값 구하기	10 %

0694 답 ①

처음 꽃밭의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 x m, y m라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=100 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+3)(y+3)=xy+51 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=14-x$ ····· ㉢

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(14-x)^2=100$, $x^2-14x+48=0$

$(x-6)(x-8)=0$ $\therefore x=6$ 또는 $x=8$

이를 각각 ㉢에 대입하면

$x=6$, $y=8$ 또는 $x=8$, $y=6$

따라서 처음 꽃밭의 가로의 길이와 세로의 길이의 차는 2 m이다.

0695 답 ①

할인하기 전 제품 A의 개당 판매 가격을 x원, 할인하기 전 판매량을 y개라 하면

$\begin{cases} xy=120000 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x-100)(y+200)=150000 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $xy+200x-100y-20000=150000$

$xy+200x-100y=170000$

이 식에 ㉠을 대입하면

$120000+200x-100y=170000$

$2x-y=500$ $\therefore y=2x-500$

이를 ㉠에 대입하면

$x(2x-500)=120000$, $x^2-250x-60000=0$

$(x+150)(x-400)=0$ $\therefore x=400$ ($\because x>0$)

따라서 할인하기 전 제품 A의 개당 판매 가격은 400원이다.

0696 답 43

$x>y$이므로 (가)에서 $x-y=10$

(나)에서 물통의 부피는 $\pi x^2\times 50-\pi y^2\times 50=16000\pi$이므로

$x^2-y^2=320$

$\therefore \begin{cases} x-y=10 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2-y^2=320 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=x-10$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면 $x^2-(x-10)^2=320$

$20x=420$ $\therefore x=21$

$x=21$을 ㉢에 대입하면 $y=11$

$\therefore x+2y=21+2\times 11=43$

0697 답 83

처음 자연수의 십의 자리의 숫자를 x, 일의 자리의 숫자를 y라 하면

$\begin{cases} x^2+y^2=73 \\ (10y+x)+(10x+y)=121 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} x^2+y^2=73 & \cdots\cdots ㉠ \\ x+y=11 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $y=-x+11$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$x^2+(-x+11)^2=73$, $x^2-11x+24=0$

$(x-3)(x-8)=0$ $\therefore x=3$ 또는 $x=8$

이를 각각 ㉢에 대입하면

$x=3$, $y=8$ 또는 $x=8$, $y=3$

이때 처음 수가 바꾼 수보다 더 크므로 처음 수는 83이다.

0698 답 12

두 정사각형 B, C의 한 변의 길이를 각각 x, y라 하면 정사각형 A의 한 변의 길이는 $11-x$이고 정사각형 D의 한 변의 길이는 $x-y$이다.

두 정사각형 B, C의 한 변의 길이의 합이 정사각형 A의 한 변의 길이와 같으므로

$x+y=11-x$ $\therefore 2x+y=11$

두 정사각형 A, D의 넓이의 차가 48이므로

$(11-x)^2-(x-y)^2=48$

$\therefore \begin{cases} 2x+y=11 & \cdots\cdots ㉠ \\ (11-x)^2-(x-y)^2=48 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-2x+11$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$(11-x)^2-(x+2x-11)^2=48$

$2x^2-11x+12=0$, $(2x-3)(x-4)=0$

$\therefore x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=4$

이를 각각 ㉢에 대입하면

$x=\frac{3}{2}$, $y=8$ 또는 $x=4$, $y=3$

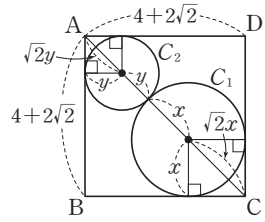
이때 $x>y$이므로 $x=4$, $y=3$

따라서 정사각형 C의 한 변의 길이는 3이므로 둘레의 길이는

$4\times 3=12$

0699 답 3

두 원 C_1, C_2의 반지름의 길이를 각각 x, y라 하면 정사각형의 대각선의 길이가 $\sqrt{2}(4+2\sqrt{2})=4(1+\sqrt{2})$이므로



$\sqrt{2}x+x+y+\sqrt{2}y=4(1+\sqrt{2})$

$x(1+\sqrt{2})+y(1+\sqrt{2})=4(1+\sqrt{2})$

$(x+y)(1+\sqrt{2})=4(1+\sqrt{2})$

$\therefore x+y=4$

또 두 원 C_1, C_2의 넓이의 합이 10π이므로

$\pi x^2+\pi y^2=10\pi$ $\therefore x^2+y^2=10$

$\therefore \begin{cases} x+y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2+y^2=10 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $y=-x+4$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$x^2+(-x+4)^2=10$, $x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$ $\therefore x=1$ 또는 $x=3$

이를 각각 ㉢에 대입하면

$x=1$, $y=3$ 또는 $x=3$, $y=1$

$\therefore xy=3$

0700 답 39

두 삼각형 ABC와 DBA에서

$\angle BCA=\angle BAD$, $\angle B$는 공통이므로

$\triangle ABC\backsim\triangle DBA$ (AA 닮음)

$\overline{CD}=x$, $\overline{AC}=x-1$, $\overline{AB}=y$라 하면

$\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{AC}:\overline{DA}$이므로 $y:8=(x-1):6$

$6y=8(x-1)$ $\therefore 4x-3y=4$

$\overline{AB}:\overline{DB}=\overline{BC}:\overline{BA}$이므로 $y:8=(8+x):y$

$y^2=8(8+x)$ $\therefore y^2=8x+64$

$\therefore \begin{cases} 4x-3y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ y^2=8x+64 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠에서 $x=\frac{3}{4}y+1$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉡에 대입하면

$y^2=8\left(\frac{3}{4}y+1\right)+64$, $y^2-6y-72=0$

$(y+6)(y-12)=0$ $\therefore y=12$ ($\because y>0$)

$y=12$를 ㉢에 대입하면 $x=10$

$\therefore \overline{AB}=12$, $\overline{BC}=8+10=18$, $\overline{CA}=10-1=9$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$12+18+9=39$

0701 답 ②

$x^2+y^2-6x+4y+9=0$에서

$(x-3)^2+(y+2)^2=4$

$x-3$, $y+2$가 모두 정수이므로

$x-3=0$, $y+2=\pm 2$ 또는 $x-3=\pm 2$, $y+2=0$

따라서 정수 x, y의 순서쌍 (x, y)는

$(3, 0)$, $(3, -4)$, $(5, -2)$, $(1, -2)$의 4개이다.

0702 답 ③

$xy-x-y-1=0$에서

$x(y-1)-(y-1)-2=0$

$\therefore (x-1)(y-1)=2$

(i) $x-1=-2$, $y-1=-1$일 때, $x=-1$, $y=0$

(ii) $x-1=-1$, $y-1=-2$일 때, $x=0$, $y=-1$

(iii) $x-1=1$, $y-1=2$일 때, $x=2$, $y=3$

(iv) $x-1=2$, $y-1=1$일 때, $x=3$, $y=2$

(i)~(iv)에서 $x+y$의 최댓값은

$2+3=5$

0703 답 ⑤

주어진 식의 좌변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면

$2x^2-2(y+1)x+y^2-2y+5=0$ ····· ㉠

x가 실수이므로 x에 대한 이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=\{-(y+1)\}^2-2(y^2-2y+5)\geq 0$

$y^2-6y+9\leq 0$, $(y-3)^2\leq 0$

이때 y가 실수이므로

$y-3=0$ $\therefore y=3$

이를 ㉠에 대입하면 $2x^2-8x+8=0$

$x^2-4x+4=0$, $(x-2)^2=0$

$\therefore x=2$

따라서 $x=2$, $y=3$이므로

$xy=6$

0704 답 4

두 사람이 모은 장난감의 개수를 각각 x, y $(x>y)$라 하면

$xy=2(x-y)+13$, $xy-2x+2y-4=9$

$x(y-2)+2(y-2)=9$ $\therefore (x+2)(y-2)=9$ ····· ⓘ

이때 x, y가 자연수이므로 $x+2$는 3 이상의 자연수이고 $y-2$는 -1 이상의 정수이다.

(i) $x+2=3$, $y-2=3$일 때, $x=1$, $y=5$

(ii) $x+2=9$, $y-2=1$일 때, $x=7$, $y=3$

그런데 $x>y$이므로 $x=7$, $y=3$ ····· ⓘⓘ

$\therefore x-y=4$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 장난감의 개수에 대한 부정방정식 세우기	40 %
ⓘⓘ 부정방정식 풀기	40 %
ⓘⓘⓘ 장난감의 개수의 차 구하기	20 %

0705 답 ④

$(2x^2+y^2-11)^2+(xy+x-2y-4)^2=0$에서 x, y가 정수이므로

$2x^2+y^2-11=0$, $xy+x-2y-4=0$

$\begin{cases} 2x^2+y^2=11 & \cdots\cdots ㉠ \\ xy+x-2y=4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉡에서 $x(y+1)-2(y+1)=2$ $\therefore (x-2)(y+1)=2$

$x-2$와 $y+1$은 모두 정수이므로

(i) $x-2=-1$, $y+1=-2$일 때, $x=1$, $y=-3$

(ii) $x-2=-2$, $y+1=-1$일 때, $x=0$, $y=-2$

(iii) $x-2=1$, $y+1=2$일 때, $x=3$, $y=1$

(iv) $x-2=2$, $y+1=1$일 때, $x=4$, $y=0$

(i)~(iv)에서 ㉠을 만족시키는 x, y의 값은 $x=1$, $y=-3$

$\therefore x-y=4$

0706 답 ①

$m^2+2m+4=k^2$ (k는 정수)으로 놓으면

$m^2+2m+1-k^2=-3$

$(m+1)^2-k^2=-3$

$\therefore (m+1+k)(m+1-k)=-3$

$m+1+k$, $m+1-k$는 모두 정수이므로

(i) $m+1+k=1$, $m+1-k=-3$일 때,

$m+k=0$, $m-k=-4$를 연립하여 풀면

$m=-2$, $k=2$

(ii) $m+1+k=-3$, $m+1-k=1$일 때,

$m+k=-4$, $m-k=0$을 연립하여 풀면

$m=-2$, $k=-2$

(iii) $m+1+k=-1$, $m+1-k=3$일 때,

$m+k=-2$, $m-k=2$를 연립하여 풀면

$m=0$, $k=-2$

(iv) $m+1+k=3$, $m+1-k=-1$일 때,

$m+k=2$, $m-k=-2$를 연립하여 풀면

$m=0$, $k=2$

(i)~(iv)에서 정수 m의 값은 -2, 0이므로 그 합은

$-2+0=-2$

최고수준 도전 기출 147쪽

0707 답 ①

전략 이차방정식의 두 근을 α, β라 하고 근과 계수의 관계를 이용하여 α, β에 대한 식을 세운 후 이 식을 정리하여 얻은 부정방정식의 두 근이 정수임을 이용하여 α, β의 값을 구한다.

주어진 이차방정식의 정수인 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=k$ ····· ㉠

$\alpha\beta=k+2$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $\alpha\beta=\alpha+\beta+2$

$\alpha\beta-\alpha-\beta=2$, $\alpha(\beta-1)-(\beta-1)=3$

$\therefore (\alpha-1)(\beta-1)=3$

이때 α, β가 정수이므로 $\alpha-1$, $\beta-1$도 정수이다.

(i) $\alpha-1=-1$, $\beta-1=-3$일 때, $\alpha=0$, $\beta=-2$

(ii) $\alpha-1=-3$, $\beta-1=-1$일 때, $\alpha=-2$, $\beta=0$

(iii) $\alpha-1=1$, $\beta-1=3$일 때, $\alpha=2$, $\beta=4$

(iv) $\alpha-1=3$, $\beta-1=1$일 때, $\alpha=4$, $\beta=2$

㉠에서 $k=\alpha+\beta$이므로 (i)~(iv)에서

$k=-2$ 또는 $k=6$

따라서 모든 실수 k의 값의 곱은

$-2\times 6=-12$

0708 답 ②

전략 $x+y=u$, $xy=v$로 놓고 u, v에 대한 연립방정식을 푼 후 x, y가 t에 대한 이차방정식 $t^2-ut+v=0$의 두 근임을 이용하여 x, y의 값을 구한다.

주어진 연립방정식을 변형하면

$\begin{cases}(x+y)^2+(x+y)-2xy=2\\(x+y)^2-xy=1\end{cases}$

$x+y=u$, $xy=v$로 놓으면

$\begin{cases}u^2+u-2v=2 & \cdots\cdots ㉠\\u^2-v=1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡에서 $v=u^2-1$ $\cdots\cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면

$u^2+u-2(u^2-1)=2$, $u^2-u=0$

$u(u-1)=0$

$\therefore u=0$ 또는 $u=1$

이를 각각 ㉢에 대입하면

$u=0$, $v=-1$ 또는 $u=1$, $v=0$

(i) $u=0$, $v=-1$, 즉 $x+y=0$, $xy=-1$일 때,

x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-1=0$

$\therefore t=\pm1$

$\therefore x=-1$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=-1$

(ii) $u=1$, $v=0$, 즉 $x+y=1$, $xy=0$일 때,

x, y를 두 근으로 하는 t에 대한 이차방정식은

$t^2-t=0$, $t(t-1)=0$

$\therefore t=0$ 또는 $t=1$

$\therefore x=0$, $y=1$ 또는 $x=1$, $y=0$

(i), (ii)에서 $x+2y$의 최솟값은

$1+2\times(-1)=-1$

다른 풀이

$\begin{cases}x^2+y^2+x+y=2 & \cdots\cdots ㉠\\x^2+xy+y^2=1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉡−㉠을 하면 $xy-x-y=-1$

$x(y-1)-(y-1)=0$, $(x-1)(y-1)=0$

$\therefore x=1$ 또는 $y=1$

(i) $x=1$일 때,

$x=1$을 ㉡에 대입하면 $y^2+y=0$

$y(y+1)=0$

$\therefore y=-1$ 또는 $y=0$

따라서 연립방정식의 해는

$x=1$, $y=-1$ 또는 $x=1$, $y=0$

(ii) $y=1$일 때,

$y=1$을 ㉡에 대입하면 $x^2+x=0$

$x(x+1)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=0$

따라서 연립방정식의 해는

$x=-1$, $y=1$ 또는 $x=0$, $y=1$

(i), (ii)에서 $x+2y$의 최솟값은

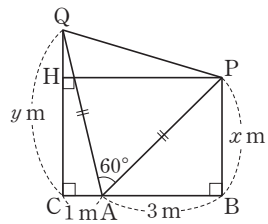
$1+2\times(-1)=-1$

0709 답 ④

전략 $\overline{BP}=x$ m, $\overline{CQ}=y$ m로 놓고 삼각형 APQ가 정삼각형임을 이용하여 연립이차방정식을 세운다.

오른쪽 그림에서 $\overline{AP}=\overline{AQ}$이고 $\angle PAQ=60°$이므로 삼각형 APQ는 정삼각형이다.

$\overline{BP}=x$ m, $\overline{CQ}=y$ m라 하고 점 P에서 선분 CQ에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{AP}^2=\overline{AQ}^2$에서 $x^2+3^2=y^2+1^2$ $\therefore x^2-y^2=-8$

$\overline{PH}=\overline{BC}=4$(m), $\overline{HQ}=\overline{CQ}-\overline{BP}=y-x$(m)이므로 삼각형 PQH에서

$\overline{PQ}^2=(y-x)^2+4^2$

$\overline{PQ}^2=\overline{AQ}^2$에서 $(y-x)^2+4^2=y^2+1^2$

$\therefore x^2-2xy=-15$

$\therefore \begin{cases}x^2-y^2=-8 & \cdots\cdots ㉠\\x^2-2xy=-15 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠×15−㉡×8을 하면

$7x^2+16xy-15y^2=0$

$(x+3y)(7x-5y)=0$

$\therefore x=-3y$ 또는 $7x=5y$

그런데 $x>0$, $y>0$이므로 $7x=5y$

$\therefore 7\overline{BP}=5\overline{CQ}$

따라서 $t=7$, $s=5$이므로 $t+s=12$

0710 답 ⑤

전략 연립방정식의 두 식을 변형하면 $(x+y)^2=m^2$이므로 경우를 나누어 부정방정식의 해를 구한다.

$\begin{cases}x^2+y^2=m^2+4m-6 & \cdots\cdots ㉠\\xy=3-2m & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠+㉡×2를 하면

$(x+y)^2=m^2$ $\therefore m=\pm(x+y)$

(i) $m=x+y$일 때,

이를 ㉡에 대입하면 $xy=3-2(x+y)$

$xy+2x+2y-3=0$

$x(y+2)+2(y+2)=7$

$\therefore (x+2)(y+2)=7$

그런데 $x+2>2$, $y+2>2$이므로 이를 만족시키는 자연수 x, y는 존재하지 않는다.

(ii) $m=-(x+y)$일 때,

이를 ㉡에 대입하면 $xy=3+2(x+y)$

$xy-2x-2y-3=0$

$x(y-2)-2(y-2)=7$

$\therefore (x-2)(y-2)=7$

이때 x, y가 자연수이므로

$x-2=1$, $y-2=7$ 또는 $x-2=7$, $y-2=1$

$\therefore x=3$, $y=9$ 또는 $x=9$, $y=3$

(i), (ii)에서 $x+y=3+9=12$

10 연립일차부등식

난이도별 필수 기출 149~158쪽

0711 답 ⑤

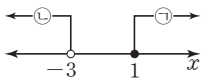
$5x-2\geq 3x$에서 $2x\geq 2$

$\therefore x\geq 1$ ····· ㉠

$2x-1>4x+5$에서 $-2x>6$

$\therefore x<-3$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는 없다.



0712 답 ②

$3(x-1)<2x+3$에서 $3x-3<2x+3$

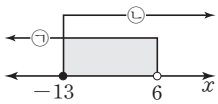
$\therefore x<6$ ····· ㉠

$2+2(x-2)\leq 3x+11$에서 $2+2x-4\leq 3x+11$

$-x\leq 13$ $\therefore x\geq -13$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는

$-13\leq x<6$



따라서 $a=-13$, $b=6$이므로 $a+b=-7$

0713 답 ③

$x+2\leq \frac{3x+1}{2}$에서 $2(x+2)\leq 3x+1$

$2x+4\leq 3x+1$, $-x\leq -3$

$\therefore x\geq 3$ ····· ㉠

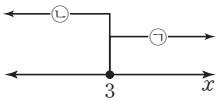
$\frac{3x+1}{2}\leq \frac{1}{3}x+4$에서 $3(3x+1)\leq 6\left(\frac{1}{3}x+4\right)$

$9x+3\leq 2x+24$, $7x\leq 21$

$\therefore x\leq 3$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식의 해는

$x=3$



0714 답 ②

$1.5x-2.4<\frac{x}{2}+1$에서

$15x-24<5x+10$, $10x<34$

$\therefore x<\frac{17}{5}$ ····· ㉠

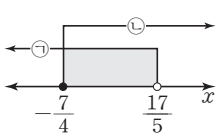
$\frac{x-1}{2}+3\geq \frac{3-2x}{4}$에서

$2(x-1)+12\geq 3-2x$, $4x\geq -7$

$\therefore x\geq -\frac{7}{4}$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는

$-\frac{7}{4}\leq x<\frac{17}{5}$



따라서 정수 x의 최솟값은 -1이다.

0715 답 ②

ㄱ. $2x<2-x$에서 $x<\frac{2}{3}$

$3+x\geq 4x$에서 $x\leq 1$

$\therefore x<\frac{2}{3}$

ㄴ. $x-1>2x+3$에서 $x<-4$

$2x-1\geq -3$에서 $x\geq -1$

$\therefore$ 해는 없다.

ㄷ. $3x-1\geq 2-3x$에서 $x\geq \frac{1}{2}$

$2(3-x)>4x+3$에서 $6-2x>4x+3$

$\therefore x<\frac{1}{2}$

$\therefore$ 해는 없다.

ㄹ. $0.5x-1.5\leq 0.3x+2$에서

$5x-15\leq 3x+20$ $\therefore x\leq \frac{35}{2}$

$\frac{1}{2}x+1<\frac{3}{4}x-2$에서

$2x+4<3x-8$ $\therefore x>12$

$\therefore 12<x\leq \frac{35}{2}$

ㅁ. $2x-3<2(1-2x)$에서

$2x-3<2-4x$ $\therefore x<\frac{5}{6}$

$2(1-2x)\leq 4x-1$에서

$2-4x\leq 4x-1$ $\therefore x\geq \frac{3}{8}$

$\therefore \frac{3}{8}\leq x<\frac{5}{6}$

따라서 보기에서 해가 없는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0716 답 4

$\frac{3}{10}x-\frac{1}{5}<0.5x+0.2$에서 $3x-2<5x+2$

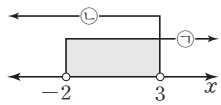
$-2x<4$ $\therefore x>-2$ ····· ㉠ ····· ⓘ

$0.5x+0.2<0.4x+0.5$에서 $5x+2<4x+5$

$\therefore x<3$ ····· ㉡ ····· ⓘⓘ

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 부등식의 해는

$-2<x<3$



따라서 정수 x는 -1, 0, 1, 2의 4개이다. ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 부등식 $\frac{3}{10}x-\frac{1}{5}<0.5x+0.2$의 해 구하기	30 %
ⓘⓘ 부등식 $0.5x+0.2<0.4x+0.5$의 해 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 정수 x의 개수 구하기	40 %

0717 답 ③

$2x-1\leq 3$에서 $2x\leq 4$ $\therefore x\leq 2$

$3x+2a+2>5$에서 $3x>-2a+3$

$\therefore x>\frac{-2a+3}{3}$

주어진 그림에서 연립부등식의 해가 $-1<x\le 2$이므로

$\frac{-2a+3}{3}=-1$, $-2a=-6$ $\therefore a=3$

참고 연립부등식 $\begin{cases} ax+b\le 0 \\ cx+d>0 \end{cases}$의 해가 $\alpha<x\le\beta$이면 α는 방정식 $cx+d=0$의 해이고, β는 방정식 $ax+b=0$의 해이다. (단, $a>0$, $c>0$)

0718 답 ③

$3x-7>a-2x$에서 $5x>a+7$

$\therefore x>\frac{a+7}{5}$

$4x-5\le x+4$에서 $3x\le 9$ $\therefore x\le 3$

주어진 연립부등식의 해가 $2<x\le b$이므로

$\frac{a+7}{5}=2$, $b=3$

따라서 $a=3$, $b=3$이므로

$a+b=6$

0719 답 ②

$\frac{x-a}{2}<x+4$에서

$x-a<2(x+4)$, $x-a<2x+8$

$-x<a+8$ $\therefore x>-a-8$

$x+4\le -x-2a$에서

$2x\le -2a-4$ $\therefore x\le -a-2$

주어진 부등식의 해가 $-4<x\le 2$이므로

$-a-8=-4$ $\therefore a=-4$

0720 답 4

$2x+b\ge x-1+a$에서 $x\ge a-b-1$

$3x-a\le 5+b$에서 $3x\le a+b+5$

$\therefore x\le\frac{a+b+5}{3}$ …… ⅰ

주어진 연립부등식의 해가 $x=-3$이므로

$a-b-1=-3$, $\frac{a+b+5}{3}=-3$

$\therefore a-b=-2$, $a+b=-14$

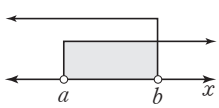
두 식을 연립하여 풀면 $a=-8$, $b=-6$ …… ⅱ

$\therefore a-2b=-8-2\times(-6)=4$ …… ⅲ

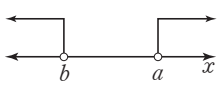
채점 기준	
ⅰ 각 일차부등식의 해 구하기	50 %
ⅱ a, b의 값 구하기	40 %
ⅲ $a-2b$의 값 구하기	10 %

0721 답 ②

ㄱ. $a<b$이면 연립부등식의 해는 $a<x<b$



ㄴ. $a>b$이면 연립부등식의 해는 없다.



ㄷ. $a\le b$이면 연립부등식의 해는 $a<x<b$이거나 없다.

ㄹ. $a\ge b$이면 연립부등식의 해는 없다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

0722 답 ⑤

$x+3\le 2x+k$에서 $x\ge 3-k$

$3x+2\ge -x+2k+3$에서 $4x\ge 2k+1$

$\therefore x\ge\frac{2k+1}{4}$

주어진 연립부등식의 해가 $x\ge 2$이므로

$3-k=2$ 또는 $\frac{2k+1}{4}=2$

(ⅰ) $3-k=2$, 즉 $k=1$일 때,

주어진 연립부등식은 $\begin{cases} x\ge 2 \\ x\ge\frac{3}{4} \end{cases}$ 이므로 해가 $x\ge 2$를 만족시킨다.

(ⅱ) $\frac{2k+1}{4}=2$, 즉 $k=\frac{7}{2}$일 때,

주어진 연립부등식은 $\begin{cases} x\ge -\frac{1}{2} \\ x\ge 2 \end{cases}$ 이므로 해가 $x\ge 2$를 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 상수 k의 값의 합은

$1+\frac{7}{2}=\frac{9}{2}$

0723 답 ③

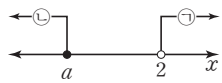
$4-x<2(x-1)$에서

$4-x<2x-2$, $-3x<-6$

$\therefore x>2$ …… ㉠

$3x-a\le 2x$에서 $x\le a$ …… ㉡

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서



$a\le 2$

따라서 상수 a의 최댓값은 2이다.

0724 답 ①

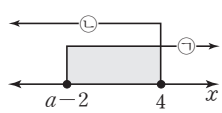
$2x+a-6\le 3x-4$에서

$-x\le -a+2$ $\therefore x\ge a-2$ …… ㉠

$3x-4\le 12-x$에서

$4x\le 16$ $\therefore x\le 4$ …… ㉡

주어진 부등식이 해를 가지려면 오른쪽 그림에서



$a-2\le 4$

$\therefore a\le 6$

0725 답 ④

$\frac{x}{2}-\frac{a}{4}\ge\frac{x}{4}-\frac{1}{8}$에서 $4x-2a\ge 2x-1$

$2x\ge 2a-1$ $\therefore x\ge a-\frac{1}{2}$ …… ㉠

$3x-1\ge 5x-7$에서 $-2x\ge -6$

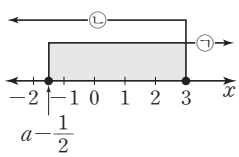
$\therefore x\le 3$ …… ㉡

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이려면 오른쪽 그림에서

$-2<a-\frac{1}{2}\le -1$

$\therefore\ -\frac{3}{2}<a\le -\frac{1}{2}$

따라서 상수 a의 최댓값은 $-\frac{1}{2}$이다.



0726 답 ③

$2(x-2)-1<4x+1$에서 $2x-5<4x+1$

$-2x<6$ $\therefore\ x>-3$ ····· ㉠

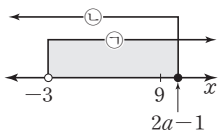
$4x+1\le 3x+2a$에서 $x\le 2a-1$ ····· ㉡

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x가 12개 이상이려면 오른쪽 그림에서

$2a-1\ge 9,\ 2a\ge 10$

$\therefore\ a\ge 5$

따라서 상수 a의 최솟값은 5이다.



0727 답 ④

$3x+1<2(3-x)$에서 $3x+1<6-2x$

$5x<5$ $\therefore\ x<1$ ····· ㉠

$x-a\le 2x-3$에서 $-x\le a-3$

$\therefore\ x\ge -a+3$ ····· ㉡

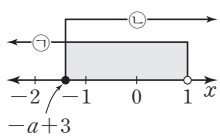
주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 -1과 0뿐이려면 오른쪽 그림에서

$-2<-a+3\le -1,\ -5<-a\le -4$

$\therefore\ 4\le a<5$

따라서 $\alpha=4,\ \beta=5$이므로

$\alpha\beta=20$



0728 답 2

$3(x-a)-2<x+4$에서 $3x-3a-2<x+4$

$2x<3a+6$ $\therefore\ x<\frac{3}{2}a+3$ ····· ㉠

$x+4\le 4(x-2)$에서 $x+4\le 4x-8$

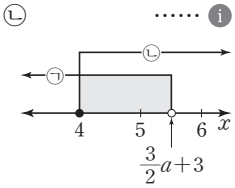
$-3x\le -12$ $\therefore\ x\ge 4$ ····· ㉡ ····· i

주어진 부등식을 만족시키는 정수 x의 값의 합이 $9=4+5$이려면 오른쪽 그림에서

$5<\frac{3}{2}a+3\le 6,\ 2<\frac{3}{2}a\le 3$

$\therefore\ \frac{4}{3}<a\le 2$ ····· ii

따라서 a의 최댓값은 2이다. ····· iii



채점 기준	
i 연립부등식으로 변형하여 각 부등식의 해 구하기	40%
ii a의 값의 범위 구하기	50%
iii a의 최댓값 구하기	10%

0729 답 ②

$4x-1\le 2x+k$에서 $2x\le k+1$ $\therefore\ x\le\frac{k+1}{2}$

$5x-3<6x+1$에서 $-x<4$ $\therefore\ x>-4$

$\therefore\ \begin{cases} x\le\frac{k+1}{2} & \cdots\cdots ㉠ \\ x>-4 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

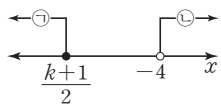
ㄱ. $k=-11$이면 ㉠에서 $x\le -5$이므로 연립부등식 $\begin{cases} x\le -5 \\ x>-4 \end{cases}$의 해는 없다.

ㄴ. 연립부등식이 해를 갖지 않으려면 오른쪽 그림에서

$\frac{k+1}{2}\le -4$

$k+1\le -8$ $\therefore\ k\le -9$

따라서 k의 최댓값은 -9이다.



ㄷ. $k=9$이면 ㉠에서 $x\le 5$이므로 연립부등식 $\begin{cases} x\le 5 \\ x>-4 \end{cases}$의 해는

$-4<x\le 5$

따라서 정수 x는 $-3,\ -2,\ \cdots,\ 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5$의 9개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

참고 두 정수 $m,\ n\ (m<n)$에 대하여

① $m<x<n$을 만족시키는 정수 x의 개수 ➡ $n-m-1$

② $m<x\le n$ (또는 $m\le x<n$)을 만족시키는 정수 x의 개수 ➡ $n-m$

③ $m\le x\le n$을 만족시키는 정수 x의 개수 ➡ $n-m+1$

0730 답 ②

$3x-a<2x$에서 $x<a$

$2x<bx+2$에서 $(2-b)x<2$

주어진 부등식의 해가 $-1<x<3$이므로

$x<a$가 $x<3$이다.

$\therefore\ a=3$

$(2-b)x<2$의 해가 $x>-1$이므로 $2-b<0$이고 $x>\frac{2}{2-b}$이다.

$\frac{2}{2-b}=-1$이므로 $2=-2+b$ $\therefore\ b=4$

$\therefore\ a-b=3-4=-1$

참고 $(2-b)x<2$에서

(i) $2-b>0$이면 $x<\frac{2}{2-b}$

(ii) $2-b=0$이면 $0\times x<2$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-1<x<3$이 될 수 없다.

0731 답 6

$6x-2>3x+10$에서 $3x>12$ $\therefore\ x>4$

$(a-1)x-5<x-2$에서 $(a-2)x<3$

(i) $a-2<0$, 즉 $a<2$일 때,

$x>\frac{3}{a-2}$

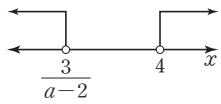
(ii) $a-2=0$, 즉 $a=2$일 때,

$0\times x<3$이므로 해는 모든 실수이다.

(iii) $a-2>0$, 즉 $a>2$일 때,

$x<\frac{3}{a-2}$

주어진 연립부등식이 해를 갖지 않으려면



$a>2$이고 $x<\frac{3}{a-2}$이어야 하므로 오른쪽 그림에서

$\frac{3}{a-2}\le 4$, $3\le 4(a-2)$

$3\le 4a-8$, $-4a\le -11$ $\therefore a\ge\frac{11}{4}$

따라서 정수 a의 최솟값은 3이므로 $m=3$

주어진 연립부등식이 해를 가지려면 $a<\frac{11}{4}$이어야 하므로 정수 a의 최댓값은 2이다.

$\therefore n=2$

$\therefore mn=3\times 2=6$

0732 답 ④

$3x-a\le x+2a$에서 $2x\le 3a$ $\therefore x\le\frac{3}{2}a$

$3x-a<4x-b$에서 $x>-a+b$

부등식을 잘못 나타내어 푼 해가 $3<x\le 9$이므로

$x\le\frac{3}{2}a$가 $x\le 9$이고, $x>-a+b$가 $x>3$이다.

즉, $\frac{3}{2}a=9$, $-a+b=3$이므로

$a=6$, $b=9$

따라서 부등식 $3x-6\le x+12<4x-9$에서

$\begin{cases}3x-6\le x+12 & \cdots\cdots ㉠\\ x+12<4x-9 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $2x\le 18$ $\therefore x\le 9$ $\cdots\cdots ㉢$

㉡에서 $-3x<-21$ $\therefore x>7$ $\cdots\cdots ㉣$

㉢, ㉣에서 처음 부등식의 해는 $7<x\le 9$

0733 답 $x\ge 2$

$\begin{cases}ax-b<0\\ cx-d\le 0\end{cases}$에서 $\begin{cases}ax<b\\ cx\le d\end{cases}$

이 연립부등식의 해가 $-2\le x<3$이므로

$ax<b$의 해는 $x<3$

따라서 $a>0$이고 $x<\frac{b}{a}$이므로 $\frac{b}{a}=3$

$cx\le d$의 해는 $x\ge -2$

따라서 $c<0$이고 $x\ge\frac{d}{c}$이므로 $\frac{d}{c}=-2$ $\cdots\cdots$ ⓘ

$\begin{cases}ax+b>0\\ cx+d\le 0\end{cases}$에서 $\begin{cases}ax>-b\\ cx\le -d\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}x>-\frac{b}{a}\\ x\ge -\frac{d}{c}\end{cases}$

따라서 $\begin{cases}x>-3\\ x\ge 2\end{cases}$이므로 연립부등식의 해는

$x\ge 2$ $\cdots\cdots$ ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a, c의 부호와 a와 b, c와 d 사이의 관계식 구하기	50 %
ⓘⓘ 연립부등식 $\begin{cases}ax+b>0\\ cx+d\le 0\end{cases}$의 해 구하기	50 %

0734 답 ④

$ax-1\le -x+2$에서 $(a+1)x\le 3$ $\cdots\cdots ㉠$

$-x+2<bx+3$에서 $-1<(b+1)x$ $\cdots\cdots ㉡$

이때 주어진 부등식의 해가 $-\frac{3}{4}<x\le\frac{6}{5}$이므로

ㄱ. ㉠의 해는 $x\le\frac{6}{5}$

따라서 $a+1>0$이므로 $a>-1$

ㄴ. ㉡의 해는 $x>-\frac{3}{4}$

따라서 $b+1>0$이므로 $b>-1$

ㄷ. ㉠에서 $x\le\frac{3}{a+1}$이므로 $\frac{3}{a+1}=\frac{6}{5}$

$6a+6=15$, $6a=9$ $\therefore a=\frac{3}{2}$

㉡에서 $x>-\frac{1}{b+1}$이므로 $-\frac{1}{b+1}=-\frac{3}{4}$

$3b+3=4$, $3b=1$ $\therefore b=\frac{1}{3}$

$\therefore ab=\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0735 답 ②

$|9-2x|<3$에서 $-3<9-2x<3$

$-12<-2x<-6$ $\therefore 3<x<6$

따라서 $a=3$, $b=6$이므로 $b-a=3$

0736 답 7

$2x+5\le 9$에서 $2x\le 4$ $\therefore x\le 2$ $\cdots\cdots ㉠$

$|x-3|\le 7$에서 $-7\le x-3\le 7$

$\therefore -4\le x\le 10$ $\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 연립부등식의 해는 $-4\le x\le 2$

따라서 정수 x는 -4, -3, …, 0, 1, 2의 7개이다.

0737 답 ⑤

$|x-a|+2\le b$에서 $|x-a|\le b-2$

$-b+2\le x-a\le b-2$ $\therefore a-b+2\le x\le a+b-2$

주어진 부등식의 해가 $-2\le x\le 8$이므로

$a-b+2=-2$, $a+b-2=8$

즉, $a-b=-4$, $a+b=10$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=7$

$\therefore ab=21$

0738 답 ③

$|x-2|>1$에서 $x-2<-1$ 또는 $x-2>1$

$\therefore x<1$ 또는 $x>3$ $\cdots\cdots ㉠$

$|x-2|\le 3$에서 $-3\le x-2\le 3$

$\therefore -1\le x\le 5$ $\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-1 \le x < 1$ 또는 $3 < x \le 5$

따라서 정수 x는 -1, 0, 4, 5의 4개이다.

다른 풀이

$1 < |x-2| \le 3$에서 $x-2=0$, 즉 $x=2$를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<2$일 때,

$1 < -(x-2) \le 3$, $1 < -x+2 \le 3$

$-1 < -x \le 1$ $\therefore -1 \le x < 1$

(ii) $x \ge 2$일 때,

$1 < x-2 \le 3$ $\therefore 3 < x \le 5$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$-1 \le x < 1$ 또는 $3 < x \le 5$

따라서 정수 x는 -1, 0, 4, 5의 4개이다.

0739 답 ③

$|2x-a| < 7$에서 $-7 < 2x-a < 7$

$a-7 < 2x < a+7$ $\therefore \frac{a-7}{2} < x < \frac{a+7}{2}$

$3-2x \le 5$에서 $-2x \le 2$ $\therefore x \ge -1$

주어진 연립부등식의 해가 $b \le x < 4$이므로

$b=-1$, $4=\frac{a+7}{2}$

따라서 $a=1$, $b=-1$이므로 $a+b=0$

0740 답 ②

$|2x+a| < 3$에서 $-3 < 2x+a < 3$, $-a-3 < 2x < 3-a$

$\therefore \frac{-a-3}{2} < x < \frac{3-a}{2}$ ····· ㉠

㉠을 만족시키는 정수 x의 최댓값이 4이므로

$4 < \frac{3-a}{2} \le 5$, $8 < 3-a \le 10$, $5 < -a \le 7$

$\therefore -7 \le a < -5$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$-7+(-6)=-13$

0741 답 ③

$|x-1| < n$에서 $-n < x-1 < n$

$\therefore 1-n < x < 1+n$

위의 식을 만족시키는 정수 x의 개수가 9이므로 정수 x는

-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5이고

$5 < 1+n \le 6$ $\therefore 4 < n \le 5$

따라서 자연수 n의 값은 5이다.

다른 풀이

$|x-1| < n$에서 $-n < x-1 < n$

$\therefore 1-n < x < 1+n$

n이 자연수이면 $1-n$, $1+n$이 정수이고, 위의 식을 만족시키는 정수 x의 개수가 9이므로

$(1+n)-(1-n)-1=9$, $2n=10$ $\therefore n=5$

0742 답 ③

$|x-1| < 2x-7$에서 $x-1=0$, 즉 $x=1$을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<1$일 때,

$-(x-1) < 2x-7$, $-x+1 < 2x-7$

$-3x < -8$ $\therefore x > \frac{8}{3}$

그런데 $x<1$이므로 해는 없다.

(ii) $x \ge 1$일 때,

$x-1 < 2x-7$, $-x < -6$ $\therefore x > 6$

그런데 $x \ge 1$이므로 $x > 6$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $x > 6$

0743 답 ⑤

$x > |3x+1| - 7$에서 $3x+1=0$, 즉 $x=-\frac{1}{3}$을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x < -\frac{1}{3}$일 때,

$x > -(3x+1)-7$, $x > -3x-8$

$4x > -8$ $\therefore x > -2$

그런데 $x < -\frac{1}{3}$이므로 $-2 < x < -\frac{1}{3}$

(ii) $x \ge -\frac{1}{3}$일 때,

$x > (3x+1)-7$, $x > 3x-6$

$-2x > -6$ $\therefore x < 3$

그런데 $x \ge -\frac{1}{3}$이므로 $-\frac{1}{3} \le x < 3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2 < x < 3$

따라서 정수 x의 값은 -1, 0, 1, 2이므로 구하는 합은

$-1+0+1+2=2$

0744 답 8

$|3x-1| < 4$에서 $-4 < 3x-1 < 4$

$-3 < 3x < 5$ $\therefore -1 < x < \frac{5}{3}$ ····· ⓘ

$ax-3a+b<0$에서 $ax<3a-b$ ····· ㉠

주어진 연립부등식의 해가 $-1<x<1$이므로 부등식 ㉠의 해는 $x<1$이어야 한다.

㉠에서 $a>0$

$x < \frac{3a-b}{a}$에서 $\frac{3a-b}{a}=1$이므로

$3a-b=a$ $\therefore b=2a$ ····· ⓘⓘ

$ax-2a-3b \ge 0$에 $b=2a$를 대입하면

$ax-2a-6a \ge 0$, $ax \ge 8a$

$\therefore x \ge 8$ ($\because a>0$)

따라서 x의 최솟값은 8이다. ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 부등식 $\|3x-1\|<4$의 해 구하기	20 %
ⓘⓘ a의 부호와 a, b 사이의 관계식 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ x의 최솟값 구하기	40 %

0745 답 ③

$2|1-x|+3|x+1|<9$에서

(i) $x<-1$일 때,

$2(1-x)-3(x+1)<9$, $-5x-1<9$

$-5x<10$ $\therefore x>-2$

그런데 $x<-1$이므로 $-2<x<-1$

(ii) $-1\le x<1$일 때,

$2(1-x)+3(x+1)<9$, $x+5<9$ $\therefore x<4$

그런데 $-1\le x<1$이므로 $-1\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때,

$-2(1-x)+3(x+1)<9$, $5x+1<9$

$5x<8$ $\therefore x<\frac{8}{5}$

그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x<\frac{8}{5}$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$-2<x<\frac{8}{5}$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1의 3개이다.

0746 답 ④

$3|x-1|+2|x+1|>11$에서

(i) $x<-1$일 때,

$-3(x-1)-2(x+1)>11$, $-5x+1>11$

$-5x>10$ $\therefore x<-2$

그런데 $x<-1$이므로 $x<-2$

(ii) $-1\le x<1$일 때,

$-3(x-1)+2(x+1)>11$, $-x+5>11$

$-x>6$ $\therefore x<-6$

그런데 $-1\le x<1$이므로 해가 없다.

(iii) $x\ge 1$일 때,

$3(x-1)+2(x+1)>11$, $5x-1>11$

$5x>12$ $\therefore x>\frac{12}{5}$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x>\frac{12}{5}$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<-2$ 또는 $x>\frac{12}{5}$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=\frac{12}{5}$이므로 $\alpha+\beta=\frac{2}{5}$

0747 답 ③

$|2x-4|\le x+a$에서 $2x-4=0$, 즉 $x=2$를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<2$일 때,

$-(2x-4)\le x+a$, $-2x+4\le x+a$

$-3x\le a-4$ $\therefore x\ge\frac{4-a}{3}$

그런데 $x<2$이고 $a>0$에서 $\frac{4-a}{3}<\frac{4}{3}$이므로

$\frac{4-a}{3}\le x<2$

(ii) $x\ge 2$일 때,

$2x-4\le x+a$ $\therefore x\le a+4$

그런데 $x\ge 2$이고 $a>0$에서 $a+4>4$이므로

$2\le x\le a+4$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$\frac{4-a}{3}\le x\le a+4$

이는 $\frac{1}{3}\le x\le 7$과 같으므로

$\frac{4-a}{3}=\frac{1}{3}$, $a+4=7$

$\therefore a=3$

0748 답 9

$|x-3k|<k^2$에서 $-k^2<x-3k<k^2$

$\therefore -k^2+3k<x<k^2+3k$

이 부등식의 해가 $2<x<10$이므로

$-k^2+3k=2$에서 $k^2-3k+2=0$

$(k-1)(k-2)=0$

$\therefore k=1$ 또는 $k=2$ ····· ㉠

$k^2+3k=10$에서 $k^2+3k-10=0$

$(k+5)(k-2)=0$

$\therefore k=-5$ 또는 $k=2$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $k=2$ ····· i

부등식 $|x-3|<k$, 즉 $|x-3|<2$에서

$-2<x-3<2$ $\therefore 1<x<5$ ····· ii

따라서 구하는 모든 정수 x의 값의 합은

$2+3+4=9$ ····· iii

채점 기준	
i k의 값 구하기	50 %
ii 부등식 $\|x-3\|<k$의 해 구하기	30 %
iii 모든 정수 x의 값의 합 구하기	20 %

0749 답 ④

$\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$이므로 주어진 부등식은

$2|x+2|+|x-1|\le 6$

(i) $x<-2$일 때,

$-2(x+2)-(x-1)\le 6$, $-3x-3\le 6$

$-3x\le 9$ $\therefore x\ge -3$

그런데 $x<-2$이므로 $-3\le x<-2$

(ii) $-2\le x<1$일 때,

$2(x+2)-(x-1)\le 6$, $x+5\le 6$ $\therefore x\le 1$

그런데 $-2\le x<1$이므로 $-2\le x<1$

(iii) $x\ge 1$일 때,

$2(x+2)+(x-1)\le 6$, $3x+3\le 6$

$3x\le 3$ $\therefore x\le 1$

그런데 $x\ge 1$이므로 $x=1$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$-3\le x\le 1$

따라서 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1의 5개이다.

0750 답 ⑤

$x+|2x-3|\le 6$에서 $2x-3=0$, 즉 $x=\frac{3}{2}$을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<\frac{3}{2}$일 때,

$x-(2x-3)\le 6$, $-x+3\le 6$

$-x\le 3$ $\therefore x\ge -3$

그런데 $x<\frac{3}{2}$이므로 $-3\le x<\frac{3}{2}$

(ii) $x\ge\frac{3}{2}$일 때,

$x+(2x-3)\le 6$, $3x-3\le 6$

$3x\le 9$ $\therefore x\le 3$

그런데 $x\ge\frac{3}{2}$이므로 $\frac{3}{2}\le x\le 3$

(i), (ii)에서 부등식 $x+|2x-3|\le 6$의 해는

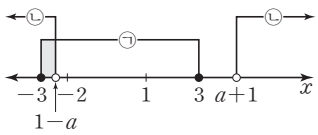
$-3\le x\le 3$ ····· ㉠

$|x-1|>a$에서

$x-1<-a$ 또는 $x-1>a$

$\therefore x<1-a$ 또는 $x>a+1$ ····· ㉡

주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 1이려면 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $-3<1-a\le -2$이므로

$-4<-a\le -3$ $\therefore 3\le a<4$

따라서 양수 a의 값이 될 수 있는 것은 ⑤ 3이다.

0751 답 ④

$b<0$이면 $|ax-1|<b$의 해가 존재하지 않으므로 $b>0$

이때 $ab<0$이므로 $a<0$

$|ax-1|<b$에서 $-b<ax-1<b$

$-b+1<ax<b+1$

$\therefore \frac{b+1}{a}<x<\frac{-b+1}{a}$ ($\because a<0$)

주어진 부등식의 해가 $-5<x<3$이므로

$\frac{b+1}{a}=-5$, $\frac{-b+1}{a}=3$

$5a+b=-1$, $3a+b=1$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=4$

$\therefore b-a=5$

0752 답 ③

$||x-2|+3|<7$에서 $-7<|x-2|+3<7$

$-10<|x-2|<4$

이때 $|x-2|\ge 0$이므로 $0\le|x-2|<4$

$-4<x-2<4$ $\therefore -2<x<6$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, …, 5의 7개이다.

다른 풀이

$||x-2|+3|<7$에서 $x-2=0$, 즉 $x=2$를 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<2$일 때,

$|-(x-2)+3|<7$, $-7<-x+5<7$

$-12<-x<2$ $\therefore -2<x<12$

그런데 $x<2$이므로 $-2<x<2$

(ii) $x\ge 2$일 때,

$|(x-2)+3|<7$, $-7<x+1<7$ $\therefore -8<x<6$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x<6$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-2<x<6$

따라서 정수 x는 -1, 0, 1, …, 5의 7개이다.

0753 답 ①

$|\sqrt{x^2-6x+9}+|x+4||\le 8$에서

$||x-3|+|x+4||\le 8$

$-8\le|x-3|+|x+4|\le 8$

이때 $|x-3|\ge 0$, $|x+4|\ge 0$이므로

$0\le|x-3|+|x+4|\le 8$

(i) $x<-4$일 때,

$0\le-(x-3)-(x+4)\le 8$

$0\le-2x-1\le 8$, $1\le-2x\le 9$

$\therefore -\frac{9}{2}\le x\le-\frac{1}{2}$

그런데 $x<-4$이므로 $-\frac{9}{2}\le x<-4$

(ii) $-4\le x<3$일 때,

$0\le-(x-3)+(x+4)\le 8$

$0\le 0\times x+7\le 8$이므로 부등식은 항상 성립한다.

그런데 $-4\le x<3$이므로 $-4\le x<3$

(iii) $x\ge 3$일 때,

$0\le(x-3)+(x+4)\le 8$

$0\le 2x+1\le 8$, $-1\le 2x\le 7$

$\therefore -\frac{1}{2}\le x\le\frac{7}{2}$

그런데 $x\ge 3$이므로 $3\le x\le\frac{7}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$-\frac{9}{2}\le x\le\frac{7}{2}$

따라서 $a=-\frac{9}{2}$, $b=\frac{7}{2}$이므로

$4ab=4\times\left(-\frac{9}{2}\right)\times\frac{7}{2}=-63$

0754 답 ③

(i) $x<-3$일 때,

$2|x+3|+|x-3|=-2(x+3)-(x-3)$

$=-3x-3$

그런데 $x<-3$이므로 $-3x-3>6$

$\therefore 2|x+3|+|x-3|>6$

(ii) $-3 \le x < 3$일 때,

$2|x+3|+|x-3| = 2(x+3)-(x-3)$

$= x+9$

그런데 $-3 \le x < 3$이므로 $6 \le x+9 < 12$

$\therefore 6 \le 2|x+3|+|x-3| < 12$

(iii) $x \ge 3$일 때,

$2|x+3|+|x-3| = 2(x+3)+(x-3)$

$= 3x+3$

그런데 $x \ge 3$이므로 $3x+3 \ge 12$

$\therefore 2|x+3|+|x-3| \ge 12$

(i), (ii), (iii)에서 $2|x+3|+|x-3| \ge 6$

따라서 주어진 부등식이 해를 가지려면 $k \ge 6$

0755 답 2

$|x-a|+|x| \le b$에 $a=n$, $b=n+5$를 대입하면

$|x-n|+|x| \le n+5$

(i) $x < 0$일 때,

$-(x-n)-x \le n+5$, $-2x \le 5$ $\therefore x \ge -\frac{5}{2}$

그런데 $x < 0$이므로 $-\frac{5}{2} \le x < 0$

(ii) $0 \le x < n$일 때,

$-(x-n)+x \le n+5$

$0 \times x \le 5$이므로 부등식은 항상 성립한다.

그런데 $0 \le x < n$이므로 $0 \le x < n$

(iii) $x \ge n$일 때,

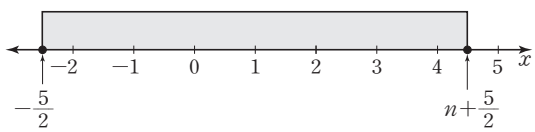
$(x-n)+x \le n+5$

$2x \le 2n+5$ $\therefore x \le n+\frac{5}{2}$

그런데 $x \ge n$이므로 $n \le x \le n+\frac{5}{2}$ $\left(\because n < n+\frac{5}{2}\right)$

(i), (ii), (iii)에서 $-\frac{5}{2} \le x \le n+\frac{5}{2}$ ····· ㉠

$f(n, n+5)=7$에서 ㉠을 만족시키는 정수 x가 7개이므로 다음 그림과 같아야 한다.



따라서 $4 \le n+\frac{5}{2} < 5$이므로

$\frac{3}{2} \le n < \frac{5}{2}$

따라서 자연수 n의 값은 2이다.

0756 답 ②

어떤 자연수를 x라 하면

(가)에서 $6x-320 > 40$

$6x > 360$ $\therefore x > 60$ ····· ㉠

(나)에서 $3x-190 \le 5$

$3x \le 195$ $\therefore x \le 65$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $60 < x \le 65$

따라서 자연수 x는 61, 62, 63, 64, 65의 5개이다.

0757 답 ③

과자를 x개 산다고 하면 사탕은 $(20-x)$개 살 수 있으므로

$\begin{cases} x > 20-x \\ 700x+500(20-x) \le 13000 \end{cases}$

$x > 20-x$에서 $2x > 20$

$\therefore x > 10$ ····· ㉠

$700x+500(20-x) \le 13000$에서

$700x+10000-500x \le 13000$, $200x \le 3000$

$\therefore x \le 15$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $10 < x \le 15$

따라서 과자는 최대 15개까지 살 수 있다.

0758 답 27

직사각형의 세로의 길이를 x cm라 하면 가로의 길이는 $(3x-4)$ cm이므로

$88 \le 2\{(3x-4)+x\} \le 112$

$88 \le 8x-8 \le 112$, $96 \le 8x \le 120$

$\therefore 12 \le x \le 15$

따라서 세로의 길이는 12 cm 이상 15 cm 이하이므로

$a=12$, $b=15$ $\therefore a+b=27$

0759 답 25

연속하는 세 홀수를 $x-2$, x, $x+2$라 하면

$63 < (x-2)+x+(x+2) < 72$ ····· ⓘ

$63 < 3x < 72$ $\therefore 21 < x < 24$ ····· ⓘⓘ

이때 x는 홀수이므로 $x=23$

따라서 연속하는 세 홀수는 21, 23, 25이므로 가장 큰 수는 25이다. ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 부등식 세우기	40 %
ⓘⓘ 부등식 풀기	40 %
ⓘⓘⓘ 세 홀수 중 가장 큰 수 구하기	20 %

0760 답 ③

증명사진을 x장 인화했을 때, 한 장당 가격이 400원 이상 450원 미만이 되려면 총가격이 $400x$원 이상 $450x$원 미만이어야 하므로

$400x \le 5000+(x-8) \times 200 < 450x$

$400x \le 200x+3400 < 450x$

$400x \le 200x+3400$에서

$200x \le 3400$ $\therefore x \le 17$ ····· ㉠

$200x+3400 < 450x$에서

$-250x < -3400$ $\therefore x > \frac{68}{5}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{68}{5} < x \le 17$

따라서 최소 14장을 인화해야 한다.

0761 답 $9<x<18$

세 변의 길이는 각각 x cm, x cm, $(36-2x)$ cm이다.

(i) 가장 긴 변의 길이가 x cm일 때,

$36-2x\le x$에서 $-3x\le -36$ $\therefore x\ge 12$ ····· ㉠

또 $x<x+(36-2x)$이어야 하므로

$2x<36$ $\therefore x<18$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $12\le x<18$ ····· ⓘ

(ii) 가장 긴 변의 길이가 $(36-2x)$ cm일 때,

$x\le 36-2x$에서 $3x\le 36$ $\therefore x\le 12$ ····· ㉢

또 $36-2x<x+x$이어야 하므로

$-4x<-36$ $\therefore x>9$ ····· ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $9<x\le 12$ ····· ⓘⓘ

(i), (ii)에서 삼각형을 만들 수 있는 x의 값의 범위는

$9<x<18$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 가장 긴 변의 길이가 x cm일 때, x의 값의 범위 구하기	40 %
ⓘⓘ 가장 긴 변의 길이가 $(36-2x)$ cm일 때, x의 값의 범위 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ x의 값의 범위 구하기	20 %

0762 답 ②

식품 A의 섭취량을 x g이라 하면 식품 B의 섭취량은 $(300-x)$ g이므로

$$\begin{cases}\frac{150}{100}x+\frac{200}{100}(300-x)\ge 500 & \cdots\cdots ㉠\\ \frac{23}{100}x+\frac{13}{100}(300-x)\ge 50 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 $15x+20(300-x)\ge 5000$

$15x+6000-20x\ge 5000$, $-5x\ge -1000$

$\therefore x\le 200$ ····· ㉢

㉡에서 $23x+13(300-x)\ge 5000$

$23x+3900-13x\ge 5000$, $10x\ge 1100$

$\therefore x\ge 110$ ····· ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $110\le x\le 200$

따라서 식품 A의 최소 섭취량과 최대 섭취량의 합은

$110+200=310$(g)

0763 답 3

세 점 A(-1), B(4), P(x)에 대하여

$\overline{AP}=|x+1|$, $\overline{BP}=|x-4|$

$\overline{AP}-\overline{BP}\le 3$에서

$|x+1|-|x-4|\le 3$

(i) $x<-1$일 때,

$-(x+1)+(x-4)\le 3$

$0\times x\le 8$이므로 부등식은 항상 성립한다.

그런데 $x<-1$이므로 $x<-1$

(ii) $-1\le x<4$일 때,

$(x+1)+(x-4)\le 3$, $2x\le 6$ $\therefore x\le 3$

그런데 $-1\le x<4$이므로 $-1\le x\le 3$

(iii) $x\ge 4$일 때,

$(x+1)-(x-4)\le 3$

$0\times x\le -2$이므로 부등식의 해는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는 $x\le 3$

따라서 x의 최댓값은 3이다.

0764 답 11

회원 수를 x라 하면 전체 쿠폰의 개수는

$11+3(x-1)=3x+8$

회장이 받는 쿠폰의 개수는 전체 쿠폰의 개수에서 나머지 회원들에게 나누어 준 쿠폰의 개수를 뺀 것과 같다. 회장을 제외한 나머지 회원들에게 4장씩 주면 회장은 쿠폰을 1장 이상 4장 미만으로 받으므로

$1\le 3x+8-4(x-1)<4$

$1\le -x+12<4$, $-11\le -x<-8$

$\therefore 8<x\le 11$

따라서 최대 회원 수는 11이다.

0765 답 65

과즙 10 % 함유 음료 200 g에 들어 있는 과즙의 양은

$200\times\frac{10}{100}=20$(g)

더 넣어야 하는 과즙의 양을 x g이라 할 때, 과즙 함유율이 20 % 이상 25 % 이하이려면

$\frac{20}{100}\times(200+x)\le 20+x\le\frac{25}{100}\times(200+x)$

$\frac{20}{100}\times(200+x)\le 20+x$에서

$200+x\le 100+5x$, $-4x\le -100$ $\therefore x\ge 25$ ····· ㉠

$20+x\le\frac{25}{100}\times(200+x)$에서

$80+4x\le 200+x$, $3x\le 120$ $\therefore x\le 40$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $25\le x\le 40$

따라서 더 넣어야 하는 과즙의 양의 최댓값은 40 g, 최솟값은 25 g이므로 $M=40$, $m=25$

$\therefore M+m=65$

✓ 중1 다시보기

① (소금물의 농도) $=\frac{\text{(소금의 양)}}{\text{(소금물의 양)}}\times 100(\%)$

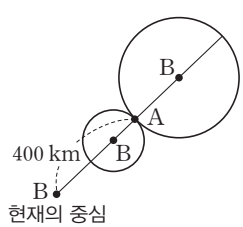
② (소금의 양) $=\frac{\text{(소금물의 농도)}}{100}\times$(소금물의 양)

0766 답 16시간

오른쪽 그림과 같이 태풍의 중심의 위치를 B라 하면 지점 A가 t시간 후 폭풍권에 있을 조건은

$\overline{AB}\le$(폭풍권의 반지름의 길이)이므로

$|400-20t|\le 50+5t$ ····· ⓘ



(i) $t<20$일 때,

$400-20t\le 50+5t$, $-25t\le -350$ $\therefore t\ge 14$

그런데 $t<20$이므로 $14\le t<20$

(ii) $t \geq 20$일 때,

$-(400-20t) \leq 50+5t$, $15t \leq 450$

$\therefore t \leq 30$

그런데 $t \geq 20$이므로 $20 \leq t \leq 30$

(i), (ii)에서 $14 \leq t \leq 30$ ····· ⓘⓘ

따라서 지점 A는 $30-14=16$(시간) 동안 태풍의 폭풍권에 들어 있다. ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 부등식 세우기	40 %
ⓘⓘ 부등식 풀기	40 %
ⓘⓘⓘ 태풍의 폭풍권에 들어 있는 시간 구하기	20 %

0767 답 19

학생 수를 x라 하면 낱개 과자의 개수는 $4(x-4)$이다.

낱개 과자를 3개씩 먹으면 과자가 두 상자 이하, 즉 낱개 과자가 0개 이상 10개 이하로 남으므로

$3x \leq 4(x-4) \leq 3x+10$

$3x \leq 4(x-4)$에서

$3x \leq 4x-16$

$\therefore x \geq 16$ ····· ㉠

$4(x-4) \leq 3x+10$에서

$4x-16 \leq 3x+10$

$\therefore x \leq 26$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$16 \leq x \leq 26$

이때 x는 자연수이고 $4(x-4)$는 5의 배수이어야 하므로 $x=19$ 또는 $x=24$이다.

따라서 최소 학생 수는 19이다.

0768 답 ④

한 방에 6명씩 배정하면 9명의 회원이 남으므로 방의 개수를 x라 하면 회원은 $(6x+9)$명이다.

한 방에 8명씩 배정하면 방이 4개 남으므로 $(x-5)$개의 방에는 8명씩 배정되고, 나머지 한 방에는 1명 이상 8명 이하가 배정된다.

즉, $8(x-5)+1 \leq 6x+9 \leq 8(x-4)$

$8(x-5)+1 \leq 6x+9$에서

$8x-39 \leq 6x+9$, $2x \leq 48$

$\therefore x \leq 24$ ····· ㉠

$6x+9 \leq 8(x-4)$에서

$6x+9 \leq 8x-32$, $-2x \leq -41$

$\therefore x \geq \frac{41}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{41}{2} \leq x \leq 24$

이때 x는 자연수이므로

$x=21$ 또는 $x=22$ 또는 $x=23$ 또는 $x=24$

따라서 회원은 135명 또는 141명 또는 147명 또는 153명이므로 회원 수가 될 수 있는 것은 ④이다.

최고수준 도전 기출 159쪽

0769 답 ①

전략 $|f(x)|<|g(x)|$ 꼴의 부등식은 $|f(x)|^2<|g(x)|^2$임을 이용하여 부등식의 해를 구한다.

$|x-a|<|x-b|$에서 양변을 제곱하면

$x^2-2ax+a^2<x^2-2bx+b^2$

$2(a-b)x>(a+b)(a-b)$

이때 $a-b<0$이므로

$x<\frac{a+b}{2}$ ····· ㉠

$|x-b|<|x-c|$에서 양변을 제곱하면

$x^2-2bx+b^2<x^2-2cx+c^2$

$2(b-c)x>(b+c)(b-c)$

이때 $b-c<0$이므로

$x<\frac{b+c}{2}$ ····· ㉡

$\frac{a+b}{2}<\frac{b+c}{2}$이므로 ㉠, ㉡에서 주어진 부등식의 해는

$x<\frac{a+b}{2}$

다른 풀이

$|x-a|<|x-b|$에서

(i) $x<a$일 때,

$-x+a<-x+b$에서 $a<b$이므로 부등식은 항상 성립한다.

그런데 $x<a$이므로 $x<a$

(ii) $a \leq x<b$일 때,

$x-a<-x+b$, $2x<a+b$ $\therefore x<\frac{a+b}{2}$

그런데 $a \leq x<b$이므로 $a \leq x<\frac{a+b}{2}$

(iii) $x \geq b$일 때,

$x-a<x-b$에서 $b<a$이므로 부등식의 해는 없다.

(i), (ii), (iii)에서 부등식 $|x-a|<|x-b|$의 해는

$x<\frac{a+b}{2}$ ····· ㉠

$|x-b|<|x-c|$에서

(iv) $x<b$일 때,

$-x+b<-x+c$에서 $b<c$이므로 부등식은 항상 성립한다.

그런데 $x<b$이므로 $x<b$

(v) $b \leq x<c$일 때,

$x-b<-x+c$, $2x<b+c$ $\therefore x<\frac{b+c}{2}$

그런데 $b \leq x<c$이므로 $b \leq x<\frac{b+c}{2}$

(vi) $x \geq c$일 때,

$x-b<x-c$에서 $c<b$이므로 부등식의 해는 없다.

(iv), (v), (vi)에서 부등식 $|x-b|<|x-c|$의 해는

$x<\frac{b+c}{2}$ ····· ㉡

$\frac{a+b}{2}<\frac{b+c}{2}$이므로 ㉠, ㉡에서 주어진 부등식의 해는

$x<\frac{a+b}{2}$

0770 답 ③

전략 부등식 $|x|+|x-8|<10$의 해를 구한 후 수직선에 나타냈을 때 연립부등식의 해가 $|a|<x<3|a|$, $|a|<x<9$인 경우로 나누어 조건을 만족시키는 정수 a의 값을 구한다.

$|x|+|x-8|<10$에서

(i) $x<0$일 때,

$-x-x+8<10$, $-2x<2$ $\therefore x>-1$

그런데 $x<0$이므로 $-1<x<0$

(ii) $0\le x<8$일 때,

$x-x+8<10$에서 $8<10$이므로 부등식은 항상 성립한다.

그런데 $0\le x<8$이므로 $0\le x<8$

(iii) $x\ge 8$일 때,

$x+x-8<10$, $2x<18$ $\therefore x<9$

그런데 $x\ge 8$이므로 $8\le x<9$

(i), (ii), (iii)에서 부등식 $|x|+|x-8|<10$의 해는 $-1<x<9$

따라서 주어진 연립부등식은

$$\begin{cases} -1<x<9 & \cdots\cdots ㉠ \\ |a|<x<3|a| & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 범위에서 정수 x의 개수가 3이 되도록 하는 조건은

(iv) $3|a|\le 9$일 때,

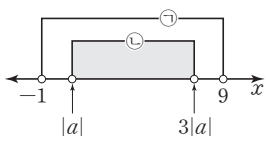
㉠, ㉡은 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는

$|a|<x<3|a|$

이때 $|a|$, $3|a|$가 모두 정수이므로 정수 x의 개수는

$3|a|-|a|-1=3$, $2|a|=4$

따라서 $|a|=2$이므로 $a=\pm 2$



(v) $3|a|>9$일 때,

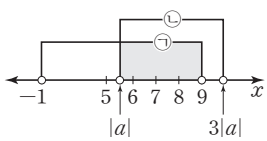
㉠, ㉡은 오른쪽 그림과 같으므로 연립부등식의 해는

$|a|<x<9$

이를 만족시키는 정수 x가 6, 7, 8의 3개이려면

$5\le |a|<6$

이때 a가 정수이므로 $|a|=5$ $\therefore a=\pm 5$



(iv), (v)에서 정수 a는 -5, -2, 2, 5의 4개이다.

0771 답 10

전략 a의 x %만큼을 늘리면 $a+a\times\frac{x}{100}$, x %만큼을 줄이면 $a-a\times\frac{x}{100}$임을 이용하여 식을 세운다.

이번 달까지 매달 저축한 금액과 소비한 금액의 합은 42만 원이다.

7만 원의 x %만큼을 늘리고 35만 원의 7 %만큼을 줄이면 42만 원의 4 % 넘게 줄게 되므로

$$7\left(1+\frac{x}{100}\right)+35\times\frac{93}{100}<42\times\frac{96}{100}$$

$7(100+x)+35\times 93<42\times 96$

$700+7x+3255<4032$, $7x<77$

$\therefore x<11$ $\cdots\cdots ㉠$

7만 원의 8 %만큼을 늘리고 35만 원의 x %만큼을 줄이면 42만 원의 7 % 이상 줄게 되므로

$$7\times\frac{108}{100}+35\left(1-\frac{x}{100}\right)\le 42\times\frac{93}{100}$$

$7\times 108+35(100-x)\le 42\times 93$

$756+3500-35x\le 3906$, $-35x\le -350$

$\therefore x\ge 10$ $\cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $10\le x<11$

따라서 정수 x의 값은 10이다.

0772 답 ③

전략 주어진 일차부등식의 해를 이용하여 a, b 사이의 관계식을 구한 후 이를 연립부등식에 대입한다.

일차부등식 $(2a-b)x>a-4$의 해가 $x<1$이므로

$2a-b<0$이고 $x<\frac{a-4}{2a-b}$

따라서 $\frac{a-4}{2a-b}=1$이므로 $a-4=2a-b$

$\therefore b=a+4$ $\cdots\cdots ㉠$

㉠을 $(a+2)x+3a<b(x-1)+6$에 대입하면

$(a+2)x+3a<(a+4)(x-1)+6$

$ax+2x+3a<ax+4x-a-4+6$

$-2x<-4a+2$

$\therefore x>2a-1$ $\cdots\cdots ㉡$

㉠을 $ax+2a+b>(b-3)x+4$에 대입하면

$ax+2a+a+4>(a+4-3)x+4$

$ax+3a+4>ax+x+4$

$\therefore x<3a$ $\cdots\cdots ㉢$

ㄱ. $a=1$이면 ㉡에서 $x>1$, ㉢에서 $x<3$이므로 주어진 연립부등식의 해는

$1<x<3$

위의 부등식을 만족시키는 정수 x는 2의 한 개이므로

$f(1)=1$

ㄴ. $a=0$이면 ㉡에서 $x>-1$, ㉢에서 $x<0$이므로 주어진 연립부등식의 해는

$-1<x<0$

위의 부등식을 만족시키는 정수 x는 존재하지 않으므로

$f(0)=0$

따라서 $a=0$일 때 $f(a)=0$이지만 $a>-1$이다.

ㄷ. 주어진 연립부등식의 해가 존재하려면 ㉡, ㉢에서

$2a-1<3a$ $\therefore a>-1$

이때 연립부등식의 해는 $2a-1<x<3a$이고, a가 정수이면

$f(a)=3a-(2a-1)-1=a$

즉, $1<f(a)<10-a$에서 $1<a<10-a$

$\therefore 1<a<5$

이때 $a=4$이면 ㉠에서 $b=8$이고, 부등식 $(2a-b)x>a-4$, 즉 $0\times x>0$은 해가 존재하지 않으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $1<f(a)<10-a$를 만족시키는 정수 a는 2, 3의 2개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

11 이차부등식

난이도별 필수 기출 162~181쪽

0773 답 ③

이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 해는 $x=1\pm\sqrt{2}$

따라서 이차부등식 $x^2-2x-1<0$의 해는

$1-\sqrt{2}<x<1+\sqrt{2}$

이때 $1<\sqrt{2}<2$이므로 $-2<-\sqrt{2}<-1$

$-1<1-\sqrt{2}<0$, $2<1+\sqrt{2}<3$

따라서 정수 x는 0, 1, 2이므로 구하는 합은

$0+1+2=3$

0774 답 ⑤

$x^2+6x-7\geq0$에서 $(x+7)(x-1)\geq0$

$\therefore x\leq-7$ 또는 $x\geq1$ ····· ㉠

① $|x+2|\leq5$에서 $-5\leq x+2\leq5$ $\therefore -7\leq x\leq3$

② $|x-3|\geq2$에서 $x-3\leq-2$ 또는 $x-3\geq2$

$\therefore x\leq1$ 또는 $x\geq5$

③ $|x-3|\leq2$에서 $-2\leq x-3\leq2$ $\therefore 1\leq x\leq5$

④ $|x+3|\leq4$에서 $-4\leq x+3\leq4$ $\therefore -7\leq x\leq1$

⑤ $|x+3|\geq4$에서 $x+3\leq-4$ 또는 $x+3\geq4$

$\therefore x\leq-7$ 또는 $x\geq1$

이상에서 해가 ㉠과 같은 것은 ⑤이다.

0775 답 ③

ㄱ. $2x^2\geq3x-6$에서 $2x^2-3x+6\geq0$

$2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{39}{8}\geq0$

따라서 해는 모든 실수이다.

ㄴ. $x^2+81>18x$에서 $x^2-18x+81>0$

$(x-9)^2>0$

따라서 해는 $x\neq9$인 모든 실수이다.

ㄷ. $-16x^2+8x-1>0$에서 $16x^2-8x+1<0$

$(4x-1)^2<0$

따라서 해는 없다.

ㄹ. $x^2-12x+36\geq0$에서 $(x-6)^2\geq0$

따라서 해는 모든 실수이다.

따라서 보기에서 해가 모든 실수인 부등식은 ㄱ, ㄹ이다.

0776 답 ②

① $x^2-4x+3>0$에서 $(x-1)(x-3)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>3$

② $x^2-2x+4<0$에서 $(x-1)^2+3<0$이므로 이차부등식

$x^2-2x+4<0$의 해는 없다.

③ $-9x^2+12x-4<0$에서 $9x^2-12x+4>0$

$(3x-2)^2>0$

따라서 해는 $x\neq\frac{2}{3}$인 모든 실수이다.

④ $-2x^2+5x-2\geq0$에서 $2x^2-5x+2\leq0$

$(2x-1)(x-2)\leq0$ $\therefore \frac{1}{2}\leq x\leq2$

⑤ $x^2-6x+9\geq0$에서 $(x-3)^2\geq0$이므로 이차부등식

$x^2-6x+9\geq0$의 해는 모든 실수이다.

0777 답 ③

부등식 $f(x)-g(x)\leq0$, 즉 $f(x)\leq g(x)$의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 이차함수 $y=g(x)$의 그래프보다 아래쪽에 있거나 만나는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로

$-1\leq x\leq4$

0778 답 ⑤

$ax^2+(b-m)x+c-n>0$에서

$ax^2+bx+c>mx+n$

이 부등식의 해는 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $y=mx+n$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로

$-\frac{8}{3}<x<\frac{9}{2}$

0779 답 ②

부등식 $x^2-|x|-6<0$에서 $x=0$을 기준으로 구간을 나누면

(i) $x<0$일 때,

$x^2+x-6<0$, $(x+3)(x-2)<0$

$\therefore -3<x<2$

그런데 $x<0$이므로 $-3<x<0$

(ii) $x\geq0$일 때,

$x^2-x-6<0$, $(x+2)(x-3)<0$

$\therefore -2<x<3$

그런데 $x\geq0$이므로 $0\leq x<3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $-3<x<3$

다른 풀이

$x^2-|x|-6<0$에서 $|x|^2-|x|-6<0$

$(|x|+2)(|x|-3)<0$

이때 $|x|+2>0$이므로 $|x|-3<0$

$|x|<3$ $\therefore -3<x<3$

0780 답 ②

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+1$의 두 교점의 y좌표가 1, 7이므로 이를 $y=2x+1$에 대입하면 두 교점의 x좌표는 0, 3이다.

이차부등식 $f(x)-2x-1>0$에서 $f(x)>2x+1$

이 부등식의 해는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2x+1$보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위와 같으므로

$0<x<3$

따라서 정수 x는 1, 2의 2개이다.

0781 답 $x<-3$ 또는 $-2<x<1$ 또는 $x>2$

$f(x)g(x)<0$에서

$f(x)>0$, $g(x)<0$ 또는 $f(x)<0$, $g(x)>0$ ····· ⓘ

(i) $f(x)>0$, $g(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$x<-3$ 또는 $x>2$

(ii) $f(x)<0$, $g(x)>0$을 만족시키는 x의 값의 범위는

$-2<x<1$ …… ii

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$x<-3$ 또는 $-2<x<1$ 또는 $x>2$ …… iii

채점 기준

i $f(x)g(x)<0$이 되는 경우 파악하기	20%
ii 경우를 나누어 각각을 만족시키는 x의 값의 범위 구하기	60%
iii 부등식의 해 구하기	20%

0782 답 ②

$|2x+3|<2$에서 $-2<2x+3<2$, $-5<2x<-1$

$\therefore -\frac{5}{2}<x<-\frac{1}{2}$

해가 $-\frac{5}{2}<x<-\frac{1}{2}$이고 x^2의 계수가 2인 이차부등식은

$2\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)<0$ $\therefore 2x^2+6x+\frac{5}{2}<0$

따라서 $a=6$, $b=\frac{5}{2}$이므로 $ab=15$

0783 답 ③

해가 $x<b$ 또는 $x>4$이고 x^2의 계수가 2인 이차부등식은

$2(x-4)(x-b)>0$ $\therefore 2x^2-2(4+b)x+8b>0$

이 이차부등식이 $2x^2-12x+4a>0$과 같으므로

$2(4+b)=12$, $8b=4a$ $\therefore a=4$, $b=2$

$\therefore a+b=6$

다른 풀이

$2x^2-12x+4a>0$의 해가 $x<b$ 또는 $x>4$이므로 b, 4는 이차방정식 $2x^2-12x+4a=0$의 해이다.

$x=4$를 $2x^2-12x+4a=0$에 대입하면

$32-48+4a=0$, $4a=16$ $\therefore a=4$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$b+4=-\frac{-12}{2}=6$ $\therefore b=2$

$\therefore a+b=4+2=6$

0784 답 ⑤

$ax-b>0$의 해가 $x>\frac{1}{4}$이므로 $a>0$

해가 $x>\frac{b}{a}$이므로 $\frac{b}{a}=\frac{1}{4}$ $\therefore b=\frac{a}{4}$

$ax^2-ax+b>0$, 즉 $ax^2-ax+\frac{a}{4}>0$에서 양변을 a로 나누면

$x^2-x+\frac{1}{4}>0$, $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2>0$

이 이차부등식의 해는 $x\neq\frac{1}{2}$인 모든 실수이다.

0785 답 ④

이차함수 $y=x^2-ax+b$의 그래프가 직선 $y=x+2$보다 아래쪽에 있으려면

$x^2-ax+b<x+2$

$\therefore x^2-(a+1)x+b-2<0$ …… ㉠

이때 해가 $1<x<4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x-1)(x-4)<0$ $\therefore x^2-5x+4<0$

이 부등식이 ㉠과 같으므로

$a+1=5$, $b-2=4$ $\therefore a=4$, $b=6$

$\therefore a+b=10$

0786 답 ②

이차부등식 $f(x)\le0$의 해가 $-5\le x\le-3$이므로

$f(x)=a(x+3)(x+5)$ $(a>0)$라 하면

$f(10-3x)=a(10-3x+3)(10-3x+5)$

$=a(3x-13)(3x-15)$

부등식 $f(10-3x)>0$, 즉 $a(3x-13)(3x-15)>0$에서

$(3x-13)(3x-15)>0$ ($\because a>0$)

$\therefore x<\frac{13}{3}$ 또는 $x>5$

따라서 부등식 $f(10-3x)>0$을 만족시키는 정수 x의 값이 될 수 없는 것은 ② 5이다.

다른 풀이

$f(x)\le0$의 해가 $-5\le x\le-3$이므로

$f(x)>0$의 해는 $x<-5$ 또는 $x>-3$

$f(10-3x)>0$의 해는 $10-3x<-5$ 또는 $10-3x>-3$에서

$-3x<-15$ 또는 $-3x>-13$

$\therefore x<\frac{13}{3}$ 또는 $x>5$

따라서 부등식 $f(10-3x)>0$을 만족시키는 정수 x의 값이 될 수 없는 것은 ② 5이다.

0787 답 ①

$x^2+2(a-2)x+a^2-4a\le0$에서

$(x+a)(x+a-4)\le0$

$\therefore -a\le x\le-a+4$

$-a$와 $-a+4$가 모두 정수이므로 부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 값의 합은

$-a+(-a+1)+(-a+2)+(-a+3)+(-a+4)$

$=-5a+10$

따라서 $-5a+10=5$이므로 $a=1$

0788 답 ①

이차부등식 $ax^2+bx+c<0$의 해가 $x<-3$ 또는 $x>4$이므로

$a<0$

해가 $x<-3$ 또는 $x>4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$(x+3)(x-4)>0$ $\therefore x^2-x-12>0$

양변에 a를 곱하면 $ax^2-ax-12a<0$ ($\because a<0$)

이 부등식이 $ax^2+bx+c<0$과 같으므로

$b=-a$, $c=-12a$

이를 $cx^2+ax-b<0$에 대입하면 $-12ax^2+ax+a<0$

양변을 $-a$로 나누면 $12x^2-x-1<0$ ($\because -a>0$)

$(4x+1)(3x-1)<0$ $\therefore -\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$

0789 답 ⑤

ㄱ, ㄴ. $ax^2+bx+c\geq 0$의 해가 $x=3$뿐이면 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 위로 볼록하고 x축에 접한다.

$\therefore a<0,\ b^2-4ac=0$

ㄷ. $ax^2+bx+c=a(x-3)^2$이 성립하므로

$ax^2+bx+c=ax^2-6ax+9a$

따라서 $b=-6a,\ c=9a$이므로

$3a+b+\frac{c}{3}=3a-6a+\frac{9a}{3}=0$

ㄹ. $a-b+c=a+6a+9a=16a<0$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

0790 답 7

$ax^2+bx+c<0$의 해가 $-1<x<5$이므로

$ax^2+bx+c=a(x+1)(x-5)\ (a>0)$라 하면

$a(x-3)^2+b(x-3)+c=a\{(x-3)+1\}\{(x-3)-5\}$

$=a(x-2)(x-8)$

따라서 $a(x-3)^2+b(x-3)+c\leq 0$, 즉 $a(x-2)(x-8)\leq 0$에서

$(x-2)(x-8)\leq 0\ (\because a>0)$

$\therefore 2\leq x\leq 8$

즉, 정수 x는 2, 3, 4, …, 8의 7개이다.

0791 답 2

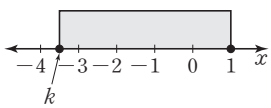
$x^2-(k+1)x+k\leq 0$에서

$(x-1)(x-k)\leq 0$

(i) $k<1$일 때,

$(x-1)(x-k)\leq 0$에서 $k\leq x\leq 1$

이 이차부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이려면 오른쪽 그림에서 $-4<k\leq -3$



즉, 정수 k의 값은 -3이다. …… ⓘ

(ii) $k=1$일 때,

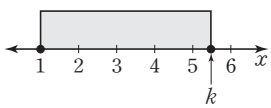
$(x-1)(x-k)\leq 0$에서 $(x-1)^2\leq 0$

이 이차부등식을 만족시키는 정수 x가 1뿐이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다. …… ⓘⓘ

(iii) $k>1$일 때,

$(x-1)(x-k)\leq 0$에서 $1\leq x\leq k$

이 이차부등식을 만족시키는 정수 x가 5개이려면 오른쪽 그림에서 $5\leq k<6$



즉, 정수 k의 값은 5이다. …… ⓘⓘⓘ

(i), (ii), (iii)에서 정수 k의 값은 -3, 5이므로 구하는 합은

$-3+5=2$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ $k<1$일 때, 정수 k의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ $k=1$일 때, 조건을 만족시키는지 확인하기	30 %
ⓘⓘⓘ $k>1$일 때, 정수 k의 값 구하기	30 %
ⓘⓥ 모든 정수 k의 값의 합 구하기	10 %

0792 답 ①

$P(x)=ax^2+bx+c\ (a,\ b,\ c$는 상수, $a\neq 0)$라 하면

(가)의 $P(x)\geq -2x-3$에서 $ax^2+bx+c\geq -2x-3$

$\therefore ax^2+(b+2)x+c+3\geq 0$ …… ㉠

이차부등식 ㉠의 해가 $0\leq x\leq 1$이므로 $a<0$

해가 $0\leq x\leq 1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은

$x(x-1)\leq 0$ $\therefore x^2-x\leq 0$

양변에 a를 곱하면 $ax^2-ax\geq 0\ (\because a<0)$

이 부등식이 ㉠과 같으므로

$b+2=-a,\ c+3=0$ $\therefore b=-a-2,\ c=-3$

$\therefore P(x)=ax^2-(a+2)x-3$ …… ㉡

(나)의 $P(x)=-3x-2$에서 $ax^2-(a+2)x-3=-3x-2$

$\therefore ax^2-(a-1)x-1=0$

이 이차방정식이 중근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$D=(a-1)^2+4a=0,\ a^2+2a+1=0$

$(a+1)^2=0$ $\therefore a=-1$

이를 ㉡에 대입하면 $P(x)=-x^2-x-3$

$\therefore P(-1)=-1+1-3=-3$

0793 답 ④

주어진 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 두 점 $(-1,\ 0)$, $(2,\ 0)$에서 만나고 위로 볼록하므로

$f(x)=a(x+1)(x-2)\ (a<0)$라 하면

$f\left(\frac{x+k}{2}\right)=a\left(\frac{x+k}{2}+1\right)\left(\frac{x+k}{2}-2\right)$

$=\frac{a}{4}(x+k+2)(x+k-4)$

부등식 $f\left(\frac{x+k}{2}\right)\geq 0$, 즉 $\frac{a}{4}(x+k+2)(x+k-4)\geq 0$에서

$(x+k+2)(x+k-4)\leq 0\ (\because a<0)$

$\therefore -k-2\leq x\leq -k+4$

이때 부등식 $f\left(\frac{x+k}{2}\right)\geq 0$의 해가 $-4\leq x\leq 2$이므로

$-k-2=-4,\ -k+4=2$ $\therefore k=2$

0794 답 ④

n이 정수일 때, $[x-n]=[x]-n$이므로

$[x-2]=[x]-2$

즉, 부등식 $[x-2]^2-[x]-10\leq 0$에서

$([x]-2)^2-[x]-10\leq 0$

$[x]^2-5[x]-6\leq 0,\ ([x]+1)([x]-6)\leq 0$

$\therefore -1\leq [x]\leq 6$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $[x]=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$

$[x]=-1$일 때, $-1\leq x<0$

$[x]=0$일 때, $0\leq x<1$

$[x]=1$일 때, $1\leq x<2$

⋮

$[x]=5$일 때, $5\leq x<6$

$[x]=6$일 때, $6\leq x<7$

따라서 구하는 부등식의 해는 $-1\leq x<7$이므로

$\alpha=-1,\ \beta=7$ $\therefore \alpha+\beta=6$

0795 답 ②

$(a+c)x^2+(a+b)x+(b+c)>0$의 해가 $-2<x<-1$이므로
$a+c<0$
$(a+c)x^2+(a+b)x+(b+c)>0$의 양변을 $a+c$로 나누면
$x^2+\frac{a+b}{a+c}x+\frac{b+c}{a+c}<0$ ····· ㉠
해가 $-2<x<-1$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x+2)(x+1)<0$
$\therefore x^2+3x+2<0$ ····· ㉡
㉠, ㉡이 같으므로 $\frac{a+b}{a+c}=3$, $\frac{b+c}{a+c}=2$
$a+b=3(a+c)$, $b+c=2(a+c)$
$\therefore 2a-b+3c=0$, $2a-b+c=0$
두 식을 연립하여 풀면
$b=2a$, $c=0$
이때 $a+c<0$에서 $a<0$
$ax^2+bx+c>0$에 $b=2a$, $c=0$을 대입하면
$ax^2+2ax>0$
$x^2+2x<0$ ($\because a<0$)
$x(x+2)<0$ $\therefore -2<x<0$

0796 답 27

㈎에서 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=p$이므로
$f(x)=\frac{1}{2}(x-p)^2+m$, $g(x)=2(x-p)^2+n$ (m, n은 상수)
이라 하자.
㈏에서 $\frac{1}{2}(x-p)^2+m\geq 2(x-p)^2+n$, 즉
$\frac{3}{2}(x-p)^2+n-m\leq 0$의 해가 $-1\leq x\leq 5$이므로
해가 $-1\leq x\leq 5$이고 x^2의 계수가 $\frac{3}{2}$인 이차부등식을 구하면
$\frac{3}{2}(x+1)(x-5)\leq 0$
$\frac{3}{2}(x^2-4x-5)\leq 0$
$\therefore \frac{3}{2}(x-2)^2-\frac{27}{2}\leq 0$
$\therefore p=2$, $n-m=-\frac{27}{2}$ ····· ㉠
$f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2+m$, $g(x)=2(x-2)^2+n$이므로
$f(2)=m$, $g(2)=n$
따라서 ㉠에서
$p\times\{f(2)-g(2)\}=2(m-n)$
$=2\times\frac{27}{2}=27$

0797 답 8

이차부등식 $2x^2+8x+a\leq 0$의 해가 오직 한 개이므로 이차방정식 $2x^2+8x+a=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=16-2a=0$
$\therefore a=8$

0798 답 ④

모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+(m+2)x+2m+1>0$이 성립하려면 이차방정식 $x^2+(m+2)x+2m+1=0$의 판별식을 D라 할 때
$D=(m+2)^2-4(2m+1)<0$
$m^2-4m<0$, $m(m-4)<0$
$\therefore 0<m<4$
따라서 정수 m은 1, 2, 3이므로 구하는 합은
$1+2+3=6$

0799 답 ①

이차부등식 $x^2-2(k+2)x-4(k+2)<0$이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2(k+2)x-4(k+2)\geq 0$이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2-2(k+2)x-4(k+2)=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(k+2)^2+4(k+2)\leq 0$
$k^2+8k+12\leq 0$, $(k+6)(k+2)\leq 0$
$\therefore -6\leq k\leq -2$
따라서 k의 최댓값은 -2이다.
참고 이차부등식 $ax^2+bx+c<0$이 해를 갖지 않을 조건은 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+bx+c\geq 0$이 성립할 조건과 같다.

0800 답 ④

모든 실수 x에 대하여 $-x^2+(m+3)x-m<3$, 즉
$x^2-(m+3)x+m+3>0$이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2-(m+3)x+m+3=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(m+3)^2-4(m+3)<0$
$m^2+2m-3<0$, $(m+3)(m-1)<0$
$\therefore -3<m<1$

0801 답 ③

모든 실수 x에 대하여 $x^2+x+3a>2x+a+1$, 즉
$x^2-x+2a-1>0$이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2-x+2a-1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=1-4(2a-1)<0$
$5-8a<0$ $\therefore a>\frac{5}{8}$
따라서 정수 a의 최솟값은 1이다.

0802 답 ③

모든 실수 x에 대하여 $-x^2+(k+1)x-5<x-1$, 즉
$x^2-kx+4>0$이 성립해야 한다.
이차방정식 $x^2-kx+4=0$의 판별식을 D라 하면
$D=k^2-16<0$
$(k+4)(k-4)<0$
$\therefore -4<k<4$
따라서 정수 k는 -3, -2, -1, …, 3의 7개이다.

0803 답 ②

이차부등식 $(k-1)x^2+2(k-1)x-2\geq 0$의 해가 오직 한 개이므로

$k-1<0$ $\therefore k<1$

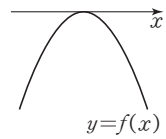
이차방정식 $(k-1)x^2+2(k-1)x-2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2+2(k-1)=0$

$k^2=1$ $\therefore k=\pm 1$

그런데 $k<1$이므로 $k=-1$

참고 이차부등식 $f(x)\geq 0$의 해가 오직 한 개이려면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같아야 하므로 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 할 때, (이차항의 계수)<0, $D=0$이어야 한다.



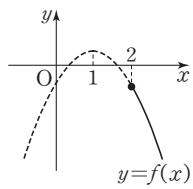
0804 답 ②

$f(x)=-x^2+2x+3a+1$이라 하면

$f(x)=-(x-1)^2+3a+2$

$x\geq 2$에서 $f(x)\leq 0$이어야 하므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다. $f(2)\leq 0$에서

$-4+4+3a+1\leq 0$ $\therefore a\leq -\frac{1}{3}$



따라서 a의 최댓값은 $-\frac{1}{3}$이다.

0805 답 ①

$f(x)=2x^2+4x+a^2+3a-20$이라 하면

$f(x)=2(x+1)^2+a^2+3a-22$

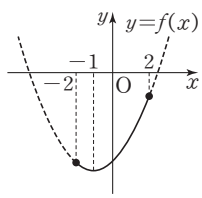
$-2\leq x\leq 2$에서 $f(x)<0$이어야 하므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

$-2\leq x\leq 2$에서 $f(x)$는 $x=2$일 때 최대이므로 $f(2)<0$에서

$8+8+a^2+3a-20<0$

$a^2+3a-4<0$, $(a+4)(a-1)<0$

$\therefore -4<a<1$



따라서 정수 a는 -3, -2, -1, 0이므로 구하는 합은

$-3+(-2)+(-1)+0=-6$

0806 답 ⑤

$\sqrt{x^2+2(k+1)x+2k^2-k-9}$가 실수이려면

$x^2+2(k+1)x+2k^2-k-9\geq 0$이어야 한다.

모든 실수 x에 대하여 위의 부등식이 성립하려면 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k+1)x+2k^2-k-9=0$의 판별식 D에 대하여

$\frac{D}{4}=(k+1)^2-(2k^2-k-9)\leq 0$

$k^2-3k-10\geq 0$, $(k+2)(k-5)\geq 0$

$\therefore k\leq -2$ 또는 $k\geq 5$

0807 답 4

이차부등식 $ax^2+2(a+2)x+2a+1<0$이 해를 갖지 않으려면 모든 실수 x에 대하여 $ax^2+2(a+2)x+2a+1\geq 0$이 성립해야 하므로 $a>0$이어야 한다. …… ⓘ

이차방정식 $ax^2+2(a+2)x+2a+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+2)^2-a(2a+1)\leq 0$

$a^2-3a-4\geq 0$, $(a+1)(a-4)\geq 0$

$\therefore a\leq -1$ 또는 $a\geq 4$ …… ⓘⓘ

그런데 $a>0$이므로 $a\geq 4$

따라서 a의 최솟값은 4이다. …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a의 부호 구하기	30 %
ⓘⓘ a의 값의 범위 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ a의 최솟값 구하기	20 %

0808 답 ④

(i) $a>0$일 때,

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+2(a+1)x+6(a+1)=0$이 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+1)^2-6a(a+1)\geq 0$

$5a^2+4a-1\leq 0$, $(a+1)(5a-1)\leq 0$

$\therefore -1\leq a\leq \frac{1}{5}$

그런데 $a>0$이므로 $0<a\leq \frac{1}{5}$

(ii) $a<0$일 때,

이차함수 $y=ax^2+2(a+1)x+6(a+1)$의 그래프는 위로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

$\therefore a<0$

(i), (ii)에서 a의 값의 범위는

$a<0$ 또는 $0<a\leq \frac{1}{5}$

0809 답 ②

두 이차함수의 그래프가 서로 만나지 않으려면 이차함수 $y=x^2-6x+4$의 그래프가 이차함수 $y=-x^2+2kx+2$의 그래프보다 항상 위쪽에 있어야 하므로 모든 실수 x에 대하여

$x^2-6x+4>-x^2+2kx+2$, 즉 $x^2-(k+3)x+1>0$이 성립해야 한다.

이차방정식 $x^2-(k+3)x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k+3)^2-4<0$, $k^2+6k+5<0$

$(k+5)(k+1)<0$ $\therefore -5<k<-1$

따라서 정수 k는 -4, -3, -2의 3개이다.

0810 답 ⑤

(i) $a=1$일 때,

$0\times x^2+0\times x+6>0$이므로 x의 값에 관계없이 주어진 부등식이 항상 성립한다. $\therefore a=1$

(ii) $a\neq 1$일 때,

x의 값에 관계없이 주어진 부등식이 항상 성립하려면

$a-1>0$ $\therefore a>1$ …… ㉠

이차방정식 $(a-1)x^2+2(a-1)x+4a+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-1)^2-(a-1)(4a+2)<0$

$3a^2-3>0$, $(a+1)(a-1)>0$

$\therefore a<-1$ 또는 $a>1$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a>1$

(i), (ii)에서 a의 값의 범위는 $a\geq 1$

0811 답 $-3\leq a<-1$

$f(x)>g(x)$에서 $ax^2-2ax+3>-3x^2+6x+1$

$(a+3)x^2-2(a+3)x+2>0$ ····· ㉠ ····· ⓘ

(i) $a+3=0$, 즉 $a=-3$일 때,

부등식 ㉠에서 $0\times x^2-0\times x+2>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 성립한다.

$\therefore a=-3$ ····· ⓘⓘ

(ii) $a+3\neq 0$, 즉 $a\neq -3$일 때,

부등식 ㉠이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면

$a+3>0$ $\therefore a>-3$ ····· ㉡

이차방정식 $(a+3)x^2-2(a+3)x+2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+3)^2-2(a+3)<0$

$a^2+4a+3<0$, $(a+3)(a+1)<0$

$\therefore -3<a<-1$ ····· ㉢

㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $-3<a<-1$ ····· ⓘⓘⓘ

(i), (ii)에서 a의 값의 범위는

$-3\leq a<-1$ ····· ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ $f(x)>g(x)$를 x에 대한 이차부등식으로 나타내기	20%
ⓘⓘ 부등식의 x^2의 계수가 0일 때, a의 값 구하기	30%
ⓘⓘⓘ 부등식의 x^2의 계수가 0이 아닐 때, a의 값의 범위 구하기	30%
ⓘⓥ a의 값의 범위 구하기	20%

0812 답 ②

$(x-1)(x-5)\leq k(x-p)$에서 $x^2-6x+5-kx+kp\leq 0$

$x^2-(k+6)x+kp+5\leq 0$

이 이차부등식이 실수 k의 값에 관계없이 항상 해를 가져야 하므로

이차방정식 $x^2-(k+6)x+kp+5=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1\geq 0$이어야 한다.

$D_1=(k+6)^2-4(kp+5)\geq 0$이므로

$k^2+12k+36-4kp-20\geq 0$

$k^2-2(2p-6)k+16\geq 0$

이 부등식이 실수 k의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 이차방정식 $k^2-2(2p-6)k+16=0$의 판별식을 D_2라 하면 $D_2\leq 0$이어야 한다.

$\frac{D_2}{4}=(2p-6)^2-16\leq 0$이므로

$p^2-6p+5\leq 0$, $(p-1)(p-5)\leq 0$

$\therefore 1\leq p\leq 5$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=5$이므로 $\alpha+\beta=6$

0813 답 13

(나)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=\frac{(x+3)+(1-x)}{2}$, 즉 $x=2$이고 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=(x-2)^2+a$ (a는 상수)라 하자.

(가)에서 나머지 정리에 의하여 $f(1)=4$이므로

$1+a=4$ $\therefore a=3$

$\therefore f(x)=(x-2)^2+3=x^2-4x+7$

$f(2x)+f(-x)\geq k$에서

$(4x^2-8x+7)+(x^2+4x+7)\geq k$

$5x^2-4x+14-k\geq 0$

이 부등식이 항상 성립해야 하므로 이차방정식

$5x^2-4x+14-k=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-5(14-k)\leq 0$

$5k-66\leq 0$ $\therefore k\leq \frac{66}{5}$

따라서 정수 k의 최댓값은 13이다.

0814 답 ⑤

$f(x)>g(x)$에서 $f(x)-g(x)>0$

$f(x)-g(x)=(x^2-2ax+a+2)-(-x^2+2ax-a^2)$

$=2x^2-4ax+a^2+a+2$

$=2(x-a)^2-a^2+a+2$

이므로 이차함수 $y=f(x)-g(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(a, -a^2+a+2)$이다.

(i) $a<0$일 때,

$0\leq x\leq 2$에서 $f(x)-g(x)$의 최솟값은

$f(0)-g(0)=a^2+a+2$이고

$a^2+a+2=\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}>0$

즉, $a<0$에서 $f(x)-g(x)>0$이 성립한다.

(ii) $0\leq a<2$일 때,

$0\leq x\leq 2$에서 $f(x)-g(x)$의 최솟값은

$f(a)-g(a)=-a^2+a+2$이므로

$-a^2+a+2>0$, $a^2-a-2<0$

$(a+1)(a-2)<0$ $\therefore -1<a<2$

그런데 $0\leq a<2$이므로 $0\leq a<2$

(iii) $a\geq 2$일 때,

$0\leq x\leq 2$에서 $f(x)-g(x)$의 최솟값은

$f(2)-g(2)=a^2-7a+10$이므로

$a^2-7a+10>0$, $(a-2)(a-5)>0$

$\therefore a<2$ 또는 $a>5$

그런데 $a\geq 2$이므로 $a>5$

(i), (ii), (iii)에서 a의 값의 범위는 $a<2$ 또는 $a>5$

0815 답 ⑤

(가)에서 $\frac{1-x}{4}=t$로 놓으면 $x=1-4t$

부등식 $f(t)\leq 0$의 해가 $-7\leq x\leq 9$이므로

$-7\leq 1-4t\leq 9$, $-8\leq -4t\leq 8$ $\therefore -2\leq t\leq 2$

즉, 부등식 $f(x)\le 0$의 해가 $-2\le x\le 2$이므로
$f(x)=a(x^2-4)\ (a>0)$라 하자.
(나)에서 이차부등식 $a(x^2-4)\ge 2x-\frac{13}{3}$, 즉
$ax^2-2x-4a+\frac{13}{3}\ge 0$이 모든 실수 x에 대하여 성립한다.
이차방정식 $ax^2-2x-4a+\frac{13}{3}=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=1-a\left(-4a+\frac{13}{3}\right)\le 0$
$4a^2-\frac{13}{3}a+1\le 0,\ 12a^2-13a+3\le 0$
$(3a-1)(4a-3)\le 0 \quad \therefore\ \frac{1}{3}\le a\le\frac{3}{4}$ ····· ㉠
$f(3)=a(9-4)=5a$이고
㉠에서 $\frac{5}{3}\le 5a\le\frac{15}{4}$
따라서 $f(3)$의 최댓값은 $\frac{15}{4}$, 최솟값은 $\frac{5}{3}$이므로
$M=\frac{15}{4},\ m=\frac{5}{3} \quad \therefore\ M-m=\frac{25}{12}$

0816 답 ①
$x^2+6x+5\ge 0$에서 $(x+5)(x+1)\ge 0$
$\therefore\ x\le -5$ 또는 $x\ge -1$ ····· ㉠
$x^2+4x-21<0$에서 $(x+7)(x-3)<0$
$\therefore\ -7<x<3$ ····· ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면
$-7<x\le -5$ 또는 $-1\le x<3$
따라서 정수 x는 -6, -5, -1, 0, 1, 2이므로 구하는 합은
$-6+(-5)+(-1)+0+1+2=-9$

0817 답 $-2\le x\le 1$ 또는 $x=3$
$x^2+4x-6\le 2x^2-3$에서
$x^2-4x+3\ge 0,\ (x-1)(x-3)\ge 0$
$\therefore\ x\le 1$ 또는 $x\ge 3$ ····· ㉠ ····· ⓘ
$2x^2-3\le x^2+x+3$에서
$x^2-x-6\le 0,\ (x+2)(x-3)\le 0$
$\therefore\ -2\le x\le 3$ ····· ㉡ ····· ⓘⓘ
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-2\le x\le 1$ 또는 $x=3$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 부등식 $x^2+4x-6\le 2x^2-3$의 해 구하기	40 %
ⓘⓘ 부등식 $2x^2-3\le x^2+x+3$의 해 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 주어진 부등식의 해 구하기	20 %

0818 답 ①
$2x^2+3x-14>0$에서 $(2x+7)(x-2)>0$
$\therefore\ x<-\frac{7}{2}$ 또는 $x>2$ ····· ㉠
$x^2-2x>3$에서 $x^2-2x-3>0,\ (x+1)(x-3)>0$
$\therefore\ x<-1$ 또는 $x>3$ ····· ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $x<-\frac{7}{2}$ 또는 $x>3$
해가 $x<-\frac{7}{2}$ 또는 $x>3$이고 x^2의 계수가 2인 이차부등식은
$2\left(x+\frac{7}{2}\right)(x-3)>0 \quad \therefore\ 2x^2+x-21>0$
이 부등식이 $2x^2+ax+b>0$과 같으므로
$a=1,\ b=-21$
$\therefore\ a+b=-20$

0819 답 ④
$x^2-2x-15<0$에서 $(x+3)(x-5)<0$
$\therefore\ -3<x<5$ ····· ㉠
$x^2-3|x|-4<0$에서 $x=0$을 기준으로 구간을 나누면
(i) $x<0$일 때,
$x^2+3x-4<0,\ (x+4)(x-1)<0$
$\therefore\ -4<x<1$
그런데 $x<0$이므로 $-4<x<0$
(ii) $x\ge 0$일 때,
$x^2-3x-4<0,\ (x+1)(x-4)<0$
$\therefore\ -1<x<4$
그런데 $x\ge 0$이므로 $0\le x<4$
(i), (ii)에서 $x^2-3|x|-4<0$의 해는
$-4<x<4$ ····· ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3<x<4$
따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2, 3의 6개이다.

0820 답 ①
$\begin{cases} x(x+1)<2(x+6) & \cdots\cdots ㉠ \\ 2(x+6)<x^2+3x+6 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $x^2-x-12<0,\ (x+3)(x-4)<0$
$\therefore\ -3<x<4$ ····· ㉢
㉡에서 $x^2+x-6>0,\ (x+3)(x-2)>0$
$\therefore\ x<-3$ 또는 $x>2$ ····· ㉣
㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $2<x<4$
해가 $2<x<4$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식은
$(x-2)(x-4)<0 \quad \therefore\ x^2-6x+8<0$
따라서 $a=-6,\ b=8$이므로
$a+b=2$

0821 답 ③
$x^2-2x-8=0$에서 $(x+2)(x-4)=0$
$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=4$
$\therefore\ f(x)=\begin{cases} -x^2+2x+8 & (-2<x<4) \\ x^2-2x-8 & (x\le -2 \text{ 또는 } x\ge 4) \end{cases}$
(i) $-2<x<4$일 때,
$f(x)\le g(x)$에서 $-x^2+2x+8\le x+6$
$x^2-x-2\ge 0,\ (x+1)(x-2)\ge 0$
$\therefore\ x\le -1$ 또는 $x\ge 2$
그런데 $-2<x<4$이므로
$-2<x\le -1$ 또는 $2\le x<4$

(ii) $x\le -2$ 또는 $x\ge 4$일 때,

$f(x)\le g(x)$에서 $x^2-2x-8\le x+6$

$x^2-3x-14\le 0$ $\therefore \dfrac{3-\sqrt{65}}{2}\le x\le \dfrac{3+\sqrt{65}}{2}$

그런데 $x\le -2$ 또는 $x\ge 4$이므로

$\dfrac{3-\sqrt{65}}{2}\le x\le -2$ 또는 $4\le x\le \dfrac{3+\sqrt{65}}{2}$

(i), (ii)에서 $f(x)\le g(x)$의 해는

$\dfrac{3-\sqrt{65}}{2}\le x\le -1$ 또는 $2\le x\le \dfrac{3+\sqrt{65}}{2}$

따라서 정수 x는 -2, -1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$-2+(-1)+2+3+4+5=11$

참고 $8<\sqrt{65}<9$이므로 $-3<\dfrac{3-\sqrt{65}}{2}<-2$, $5<\dfrac{3+\sqrt{65}}{2}<6$이다.

0822 답 ③

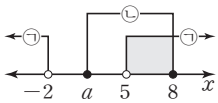
$x^2-3x-10>0$에서 $(x+2)(x-5)>0$

$\therefore x<-2$ 또는 $x>5$ ····· ㉠

$x^2-(8+a)x+8a\le 0$에서

$(x-8)(x-a)\le 0$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 $5<x\le 8$이려면 오른쪽 그림에서

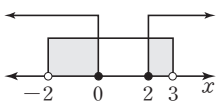


$-2\le a\le 5$

따라서 a의 최댓값은 5이다.

0823 답 ①

주어진 연립부등식의 해가 $-2<x\le 0$ 또는 $2\le x<3$이려면 오른쪽 그림과 같아야 한다.



$x^2-x-a<0$은 해가 $-2<x<3$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식이므로

$(x+2)(x-3)<0$, $x^2-x-6<0$ $\therefore a=6$

$x^2-2x+b\ge 0$은 해가 $x\le 0$ 또는 $x\ge 2$이고 x^2의 계수가 1인 이차부등식이므로

$x(x-2)\ge 0$, $x^2-2x\ge 0$ $\therefore b=0$

$\therefore a+b=6$

다른 풀이

$x^2-x-a<0$의 해가 $-2<x<3$이므로 이차방정식 $x^2-x-a=0$의 두 근은 -2, 3이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-2\times 3=-a$ $\therefore a=6$

또 $x^2-2x+b\ge 0$의 해가 $x\le 0$ 또는 $x\ge 2$이므로 이차방정식 $x^2-2x+b=0$의 두 근은 0, 2이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$0\times 2=b$ $\therefore b=0$

$\therefore a+b=6$

0824 답 ①

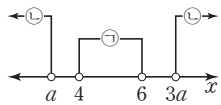
$|x-5|<1$에서 $-1<x-5<1$ $\therefore 4<x<6$ ····· ㉠

$x^2-4ax+3a^2>0$에서 $(x-a)(x-3a)>0$

이때 a는 자연수이므로

$x<a$ 또는 $x>3a$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않으려면 오른쪽 그림에서



$a\le 4$, $3a\ge 6$

$\therefore 2\le a\le 4$

따라서 자연수 a는 2, 3, 4의 3개이다.

0825 답 ①

$x^2-6x+8\le 0$에서 $(x-2)(x-4)\le 0$

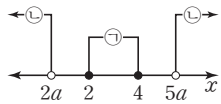
$\therefore 2\le x\le 4$ ····· ㉠

$x^2-7ax+10a^2>0$에서 $(x-2a)(x-5a)>0$

이때 a는 양수이므로

$x<2a$ 또는 $x>5a$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않으려면 오른쪽 그림에서



$2a\le 2$, $5a\ge 4$ $\therefore \dfrac{4}{5}\le a\le 1$

따라서 $\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\beta=1$이므로 $\alpha\beta=\dfrac{4}{5}$

0826 답 ②

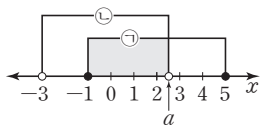
$x^2-4x-5\le 0$에서 $(x+1)(x-5)\le 0$

$\therefore -1\le x\le 5$ ····· ㉠

$x^2+(3-a)x-3a<0$에서

$(x-a)(x+3)<0$ ····· ㉡

연립부등식을 만족시키는 정수 x가 4개이려면 오른쪽 그림에서



$2<a\le 3$

따라서 a의 최댓값은 3이다.

0827 답 ②

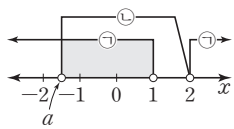
$x^2-3x+2>0$에서 $(x-1)(x-2)>0$

$\therefore x<1$ 또는 $x>2$ ····· ㉠

$x^2-(a+2)x+2a<0$에서

$(x-a)(x-2)<0$ ····· ㉡

연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값이 -1과 0뿐이려면 오른쪽 그림에서



$-2\le a<-1$

따라서 $\alpha=-2$, $\beta=-1$이므로

$\alpha+\beta=-3$

0828 답 6

$a<b<c$이므로

$(x-a)(x-b)>0$에서 $x<a$ 또는 $x>b$ ····· ㉠

$(x-b)(x-c)>0$에서 $x<b$ 또는 $x>c$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $x<a$ 또는 $x>c$이므로

$a=-3$, $c=4$

즉, 이차부등식 $x^2+ax-c<0$은 $x^2-3x-4<0$이므로

$(x+1)(x-4)<0$ $\therefore -1<x<4$

따라서 정수 x는 0, 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$0+1+2+3=6$

0829 답 $\frac{3}{2}<a\le\frac{9}{2}$

$-x^2+1<x^2+2x+a$에서

$2x^2+2x+a-1>0$

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $2x^2+2x+a-1=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, $D_1<0$이어야 하므로

$\frac{D_1}{4}=1-2(a-1)<0$

$3-2a<0 \quad \therefore a>\frac{3}{2}$ ····· ㉠ ····· i

$x^2+2x+a\le3x^2+5$에서

$2x^2-2x+5-a\ge0$

이 이차부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면 이차방정식 $2x^2-2x+5-a=0$의 판별식을 D_2라 할 때, $D_2\le0$이어야 하므로

$\frac{D_2}{4}=1-2(5-a)\le0$

$2a-9\le0 \quad \therefore a\le\frac{9}{2}$ ····· ㉡ ····· ii

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{3}{2}<a\le\frac{9}{2}$ ····· iii

채점 기준	
i $-x^2+1<x^2+2x+a$가 항상 성립하도록 하는 a의 값의 범위 구하기	40%
ii $x^2+2x+a\le3x^2+5$가 항상 성립하도록 하는 a의 값의 범위 구하기	40%
iii a의 값의 범위 구하기	20%

0830 답 ⑤

$(x-a)^2<a^2$에서 $x^2-2ax<0$

$x(x-2a)<0$

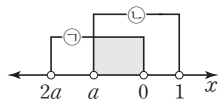
$\therefore 2a<x<0 \ (\because a<0)$ ····· ㉠

$x^2+a<(a+1)x$에서 $x^2-(a+1)x+a<0$

$(x-1)(x-a)<0$

$\therefore a<x<1 \ (\because a<0)$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 연립부등식의 해는



$a<x<0$

이 해가 $b<x<b+1$과 같으므로

$a=b,\ 0=b+1$

따라서 $a=b=-1$이므로

$a+b=-2$

0831 답 $-\frac{3}{2}\le a<-1$ 또는 $2<a\le\frac{5}{2}$

$x^2-2x-15\le0$에서 $(x+3)(x-5)\le0$

$\therefore -3\le x\le5$ ····· ㉠

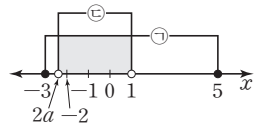
$x^2-(2a+1)x+2a<0$에서

$(x-1)(x-2a)<0$ ····· ㉡ ····· i

(i) $2a<1$, 즉 $a<\frac{1}{2}$일 때,

부등식 ㉡의 해는 $2a<x<1$ ····· ㉢

㉠, ㉢의 공통부분에 속하는 정수 x의 개수가 3이 되도록 ㉠, ㉢을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$-3\le2a<-2 \quad \therefore -\frac{3}{2}\le a<-1$

그런데 $a<\frac{1}{2}$이므로 $-\frac{3}{2}\le a<-1$

(ii) $2a=1$, 즉 $a=\frac{1}{2}$일 때,

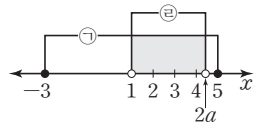
부등식 ㉡에서 $(x-1)^2<0$이므로 주어진 두 부등식을 모두 만족시키는 x의 값은 없다.

$\therefore a\ne\frac{1}{2}$

(iii) $2a>1$, 즉 $a>\frac{1}{2}$일 때,

부등식 ㉡의 해는 $1<x<2a$ ····· ㉣

㉠, ㉣의 공통부분에 속하는 정수 x의 개수가 3이 되도록 ㉠, ㉣을 수직선 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같으므로



$4<2a\le5 \quad \therefore 2<a\le\frac{5}{2}$

그런데 $a>\frac{1}{2}$이므로 $2<a\le\frac{5}{2}$ ····· ii

(i), (ii), (iii)에서 a의 값의 범위는

$-\frac{3}{2}\le a<-1$ 또는 $2<a\le\frac{5}{2}$ ····· iii

채점 기준	
i 두 부등식의 해를 a에 대한 식으로 나타내기	20%
ii 범위를 나누어 조건을 만족시키는 a의 값의 범위 구하기	60%
iii a의 값의 범위 구하기	20%

0832 답 ④

(i) $2x+a\le x^2$에서 $x^2-2x-a\ge0$

$f(x)=x^2-2x-a$라 하면 $f(x)=(x-1)^2-a-1$

$-1\le x\le1$에서 $f(x)$는 $x=1$에서 최소이므로 $f(1)\ge0$에서

$-a-1\ge0 \quad \therefore a\le-1$

(ii) $x^2\le2x+b$에서 $x^2-2x-b\le0$

$g(x)=x^2-2x-b$라 하면 $g(x)=(x-1)^2-b-1$

$-1\le x\le1$에서 $g(x)$는 $x=-1$에서 최대이므로 $g(-1)\le0$에서

$3-b\le0 \quad \therefore b\ge3$

(i), (ii)에서 $a=-1$, $b=3$일 때 $b-a$의 값이 최소이므로 구하는 최솟값은

$3-(-1)=4$

0833 답 10

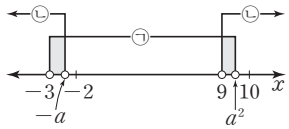
$x^2-(a^2-3)x-3a^2<0$에서 $(x+3)(x-a^2)<0$

$\therefore -3<x<a^2 \ (\because a^2>4)$ ····· ㉠

$x^2+(a-9)x-9a>0$에서 $(x+a)(x-9)>0$

$\therefore x<-a$ 또는 $x>9 \ (\because a>2)$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분이 존재하지 않으려면 다음 그림에서



$a^2 \le 10$, $-a \le -2$ $\therefore 2 < a \le \sqrt{10}$ ($\because a > 2$)

따라서 $M = \sqrt{10}$이므로 $M^2 = 10$

0834 답 ③

$x^2+6x-16 \le 0$에서 $(x+8)(x-2) \le 0$

$\therefore -8 \le x \le 2$ ····· ㉠

$x^2-3kx-4k^2 > 0$에서

$(x+k)(x-4k) > 0$ ····· ㉡

(i) $k > 0$일 때,

부등식 ㉡의 해는 $x < -k$ 또는 $x > 4k$

㉠과 공통부분이 존재하려면

$-k > -8$ 또는 $4k < 2$

$k < 8$ 또는 $k < \frac{1}{2}$ $\therefore k < 8$

그런데 $k > 0$이므로 $0 < k < 8$

(ii) $k = 0$일 때,

㉡에서 $x^2 > 0$이므로 해는 $x \ne 0$인 모든 실수이고 ㉠과 공통부분이 존재한다.

$\therefore k = 0$

(iii) $k < 0$일 때,

부등식 ㉡의 해는 $x < 4k$ 또는 $x > -k$

㉠과 공통부분이 존재하려면

$4k > -8$ 또는 $-k < 2$ $\therefore k > -2$

그런데 $k < 0$이므로 $-2 < k < 0$

(i), (ii), (iii)에서 k의 값의 범위는 $-2 < k < 8$

0835 답 21

$|x-n| > 2$에서 $x-n < -2$ 또는 $x-n > 2$

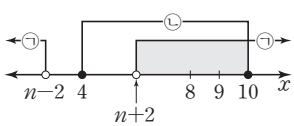
$\therefore x < n-2$ 또는 $x > n+2$ ····· ㉠

$x^2-14x+40 \le 0$에서 $(x-4)(x-10) \le 0$

$\therefore 4 \le x \le 10$ ····· ㉡

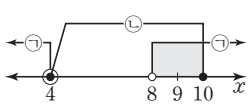
(i) $n-2 < 4$, 즉 $n < 6$일 때,

$n+2 < 8$이므로 오른쪽 그림에서 연립부등식을 만족시키는 자연수 x는 3개 이상이다.

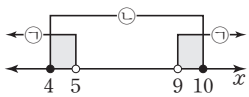


(ii) $n-2 \ge 4$, $n+2 \le 10$, 즉 $6 \le n \le 8$일 때,

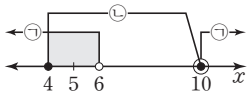
$n=6$이면 오른쪽 그림에서 연립부등식을 만족시키는 자연수 x는 9, 10의 2개이다.



$n=7$이면 오른쪽 그림에서 연립부등식을 만족시키는 자연수 x는 4, 10의 2개이다.

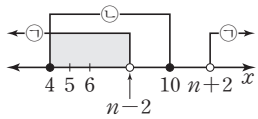


$n=8$이면 오른쪽 그림에서 연립부등식을 만족시키는 자연수 x는 4, 5의 2개이다.



(iii) $n+2 > 10$, 즉 $n > 8$일 때,

$n-2 > 6$이므로 오른쪽 그림에서 연립부등식을 만족시키는 자연수 x는 3개 이상이다.



(i), (ii), (iii)에서 n은 6, 7, 8이므로 구하는 합은

$6+7+8=21$

0836 답 ②

$|x+b| \le 1$에서 $-1 \le x+b \le 1$

$\therefore -1-b \le x \le 1-b$ ····· ㉠

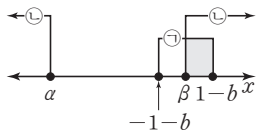
$x^2+x+a \ge 0$의 해를

$x \le \alpha$ 또는 $x \ge \beta$ $(\alpha < \beta)$ ····· ㉡

라 하면 이차방정식 $x^2+x+a=0$의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=-1$, $\alpha\beta=a$ ····· ㉢

연립부등식의 해가 $2 \le x \le 3$이므로

(i) ㉠, ㉡이 오른쪽 그림과 같은 경우

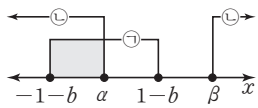


$1-b=3$이므로 $b=-2$

$\beta=2$이므로 ㉢에서

$\alpha=-3$, $a=-6$

(ii) ㉠, ㉡이 오른쪽 그림과 같은 경우



$-1-b=2$이므로 $b=-3$

$\alpha=3$이므로 ㉢에서 $\beta=-4$

그런데 $\alpha < \beta$를 만족시키지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-6$, $b=-2$

이차부등식 $x^2+ax-4b \le 0$, 즉 $x^2-6x+8 \le 0$의 해를 구하면

$(x-2)(x-4) \le 0$ $\therefore 2 \le x \le 4$

따라서 정수 x는 2, 3, 4의 3개이다.

참고 (i)에서 $b=-2$이면 $-1-b=1<2$이므로 연립부등식의 해가 $2 \le x \le 3$이 되려면 $\beta=2$이어야 한다.

(ii)에서 $b=-3$이면 $1-b=4>3$이므로 연립부등식의 해가 $2 \le x \le 3$이 되려면 $\alpha=3$이어야 한다.

0837 답 11

$x^2-11x+24 < 0$에서 $(x-3)(x-8) < 0$

$\therefore 3 < x < 8$ ····· ㉠

$x^2-2kx+k^2-9 > 0$에서 $x^2-2kx+(k+3)(k-3) > 0$

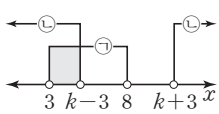
$(x-k+3)(x-k-3) > 0$

$\therefore x < k-3$ 또는 $x > k+3$ ····· ㉡

(i) $3 < k-3 < 8$, 즉 $6 < k < 11$일 때,

$k+3 > 9$이므로 연립부등식의 해는

$3 < x < k-3$



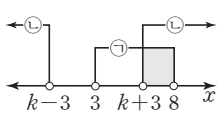
이때 $\alpha=3$, $\beta=k-3$이므로

$\beta-\alpha=2$에서 $k-3-3=2$ $\therefore k=8$

(ii) $3 < k+3 < 8$, 즉 $0 < k < 5$일 때,

$k-3 < 2$이므로 연립부등식의 해는

$k+3 < x < 8$



이때 $\alpha=k+3$, $\beta=8$이므로

$\beta-\alpha=2$에서 $8-(k+3)=2$ $\therefore k=3$

(i), (ii)에서 모든 k의 값의 합은 $8+3=11$

0838 답 13

모든 실수 x에 대하여 부등식 $-x^2-x+1\le mx+n$, 즉
$x^2+(m+1)x+n-1\ge 0$이 성립해야 하므로 이차방정식
$x^2+(m+1)x+n-1=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=(m+1)^2-4(n-1)\le 0$
$4n\ge m^2+2m+5$ …… ㉠ …… ⓘ
모든 실수 x에 대하여 부등식 $mx+n\le x^2-5x+3$, 즉
$x^2-(m+5)x+3-n\ge 0$이 성립해야 하므로 이차방정식
$x^2-(m+5)x+3-n=0$의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=(m+5)^2-4(3-n)\le 0$
$4n\le -m^2-10m-13$ …… ㉡ …… ⓘⓘ
㉠, ㉡에서
$m^2+2m+5\le 4n\le -m^2-10m-13$ …… ㉢
$m^2+2m+5\le -m^2-10m-13$이므로
$2m^2+12m+18\le 0$, $2(m+3)^2\le 0$
$\therefore m=-3$
$m=-3$을 ㉢에 대입하면 $8\le 4n\le 8$이므로 $n=2$ …… ⓘⓘⓘ
$\therefore m^2+n^2=(-3)^2+2^2=13$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ $-x^2-x+1\le mx+n$이 항상 성립하는 조건 구하기	30 %
ⓘⓘ $mx+n\le x^2-5x+3$이 항상 성립하는 조건 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ m, n의 값 구하기	30 %
ⓘⓥ m^2+n^2의 값 구하기	10 %

0839 답 ①

$-2x-|a|\le |b|-3$에서 $-2x\le |a|+|b|-3$
$|a|+|b|=3$이므로 $-2x\le 0$ $\therefore x\ge 0$
이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 이차부등식 $x^2+ax+b<0$의 해는 $\alpha<x<\beta$이고, 연립부등식의 해가 $0\le x<2$이려면 $\alpha<0$, $\beta=2$이어야 한다.
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha\beta=b$에서
$2\alpha=b<0$
$\beta=2$는 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 근이므로
$4+2a+b=0$ $\therefore b=-2a-4$ …… ㉠
$|a|+|b|=3$에 ㉠을 대입하면
$|a|+|-2a-4|=3$ $\therefore |a|+2|a+2|=3$
이때 $b<0$, 즉 $-2a-4<0$이므로 $a>-2$
(i) $-2<a<0$일 때,
$-a+2(a+2)=3$ $\therefore a=-1$
$a=-1$을 ㉠에 대입하면 $b=-2$
(ii) $a\ge 0$일 때,
$a+2(a+2)=3$, $3a=-1$ $\therefore a=-\frac{1}{3}$
그런데 $a\ge 0$인 조건을 만족시키지 않는다.
(i), (ii)에서 $a=-1$, $b=-2$이므로 $a+b=-3$

0840 답 ⑤

공의 높이가 지면으로부터 3 m 이상이려면
$-5t^2+7t+1\ge 3$, $5t^2-7t+2\le 0$
$(5t-2)(t-1)\le 0$ $\therefore \frac{2}{5}\le t\le 1$

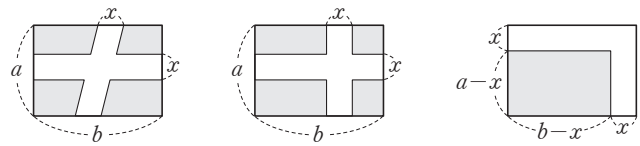
0841 답 ⑤

처음 정사각형의 한 변의 길이를 x cm라 하면 직사각형의 넓이는 $(x+3)(x+2)$ cm^{2}이므로
$42\le (x+3)(x+2)\le 72$에서
$\begin{cases} 42\le (x+3)(x+2) & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+3)(x+2)\le 72 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $x^2+5x-36\ge 0$
$(x+9)(x-4)\ge 0$ $\therefore x\le -9$ 또는 $x\ge 4$
그런데 $x>0$이므로 $x\ge 4$ …… ㉢
㉡에서 $x^2+5x-66\le 0$
$(x+11)(x-6)\le 0$ $\therefore -11\le x\le 6$
그런데 $x>0$이므로 $0<x\le 6$ …… ㉣
㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $4\le x\le 6$
따라서 처음 정사각형의 한 변의 길이의 최댓값은 6 cm이다.

0842 답 ①

꽃밭의 넓이는 한 변의 길이가 $(10-x)$ m인 정사각형의 넓이와 같고, 꽃밭의 넓이가 81 m^2 이상이 되려면
$(10-x)^2\ge 81$, $x^2-20x+19\ge 0$
$(x-1)(x-19)\ge 0$ $\therefore x\le 1$ 또는 $x\ge 19$ …… ㉠
이때 $x>0$, $10-x>0$이므로 $0<x<10$ …… ㉡
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $0<x\le 1$

참고 다음 세 직사각형에서 칠한 부분의 넓이는 모두 같다.



➡ (칠한 부분의 넓이)$=(a-x)(b-x)$

0843 답 ④

(가)에서 가로의 길이와 세로의 길이의 합이 $\frac{1}{2}\times 24=12$(m)이므로 가로의 길이는 $(12-x)$ m이다.
(나), (다)에서 $\begin{cases} x>2(12-x) & \cdots\cdots ㉠ \\ x(12-x)\ge 20 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $x>24-2x$, $3x>24$ $\therefore x>8$ …… ㉢
㉡에서 $x^2-12x+20\le 0$
$(x-2)(x-10)\le 0$ $\therefore 2\le x\le 10$ …… ㉣
㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $8<x\le 10$

0844 답 ③

라면 한 그릇의 가격을 $100x$원 내리면 하루 판매량은 $20x$그릇이 늘어나므로 하루의 라면 판매액의 합계가 442000원 이상이 되려면
$(2000-100x)(200+20x)\ge 442000$
$x^2-10x+21\le 0$, $(x-3)(x-7)\le 0$
$\therefore 3\le x\le 7$
따라서 라면 한 그릇의 가격의 최댓값은 $x=3$일 때이므로
$2000-100\times 3=1700$(원)

0845 답 ⑤

변의 길이는 양수이므로

$x-2>0$ $\therefore x>2$ ····· ㉠

세 변 중 가장 긴 변의 길이는 $x+2$이므로

$x+2<x+(x-2)$ $\therefore x>4$ ····· ㉡

이 삼각형이 둔각삼각형이 되려면

$(x+2)^2>x^2+(x-2)^2$

$x^2+4x+4>x^2+x^2-4x+4$

$x^2-8x<0$, $x(x-8)<0$

$\therefore 0<x<8$ ····· ㉢

㉠, ㉡, ㉢의 공통부분을 구하면

$4<x<8$

따라서 자연수 x는 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$5+6+7=18$

☑ 중2 다시보기

삼각형의 세 변의 길이가 a, b, c (c가 가장 긴 변의 길이)일 때

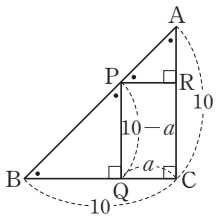
① $c^2<a^2+b^2$ ➡ 예각삼각형

② $c^2=a^2+b^2$ ➡ 직각삼각형

③ $c^2>a^2+b^2$ ➡ 둔각삼각형

0846 답 15

오른쪽 그림에서 세 삼각형 ABC, APR, PBQ는 모두 직각이등변삼각형이다.



$\overline{QC}=a$이므로 $0<a<10$

$\overline{PR}=a$, $\overline{BQ}=10-a$이므로

$\overline{AR}=\overline{PR}=a$, $\overline{PQ}=\overline{BQ}=10-a$

직사각형 PQCR의 넓이는 $a(10-a)$,

삼각형 APR의 넓이는 $\frac{1}{2}a^2$, 삼각형 PBQ의 넓이는 $\frac{1}{2}(10-a)^2$

이므로

$$\begin{cases} a(10-a)>\frac{1}{2}a^2 & \cdots\cdots ㉠ \\ a(10-a)>\frac{1}{2}(10-a)^2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $\frac{3}{2}a^2-10a<0$

$a(3a-20)<0$ $\therefore 0<a<\frac{20}{3}$ ····· ㉢

㉡에서 $(10-a)\left\{a-\frac{1}{2}(10-a)\right\}>0$

$(a-10)\left(\frac{3}{2}a-5\right)<0$ $\therefore \frac{10}{3}<a<10$ ····· ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $\frac{10}{3}<a<\frac{20}{3}$

따라서 자연수 a는 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$4+5+6=15$

0847 답 ④

$\overline{AE}=x$ $(x>0)$라 하면 두 직사각형 AFIE, IGCH의 넓이의 합은 x^2+2x, 둘레의 길이의 합은 $4x+2(x+2)$이므로

$$\begin{cases} x^2+2x\geq 24 & \cdots\cdots ㉠ \\ 4x+2(x+2)\leq 40 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $x^2+2x-24\geq 0$

$(x+6)(x-4)\geq 0$ $\therefore x\leq -6$ 또는 $x\geq 4$

그런데 $x>0$이므로 $x\geq 4$ ····· ㉢

㉡에서 $6x\leq 36$ $\therefore x\leq 6$

그런데 $x>0$이므로 $0<x\leq 6$ ····· ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $4\leq x\leq 6$

따라서 선분 AE의 길이의 범위는

$4\leq \overline{AE}\leq 6$

0848 답 70

일반 우편보다 등기 우편을 이용하는 것이 유리한 경우는

$\frac{1}{2}x+7<\frac{1}{4}x+8$, $\frac{1}{4}x<1$ $\therefore x<4$

그런데 $x>0$이므로 $0<x<4$ ····· ㉠

익일 특급 우편보다 등기 우편을 이용하는 것이 유리한 경우는

$\frac{1}{2}x+7<\frac{1}{2}x^2+x+1$

$x^2+x-12>0$, $(x+4)(x-3)>0$

$\therefore x<-4$ 또는 $x>3$

그런데 $x>0$이므로 $x>3$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $3<x<4$

$\therefore 30<10x<40$

따라서 $a=30$, $b=40$이므로 $a+b=70$

0849 답 50

이용료를 인상하기 전의 한 달 이용료를 A원, 회원 수를 B라 하면 x%만큼 인상한 이용료는 $A\left(1+\frac{x}{100}\right)$원, $0.4x$%만큼 감소한 회원 수는 $B\left(1-\frac{0.4x}{100}\right)$이므로

$A\left(1+\frac{x}{100}\right)\times B\left(1-\frac{0.4x}{100}\right)\geq AB\left(1+\frac{20}{100}\right)$ ····· ⓘ

$\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{x}{250}\right)\geq 1+\frac{1}{5}$

$(100+x)(250-x)\geq 30000$

$x^2-150x+5000\leq 0$

$(x-50)(x-100)\leq 0$

$\therefore 50\leq x\leq 100$ ····· ⓘⓘ

따라서 x의 최솟값은 50이다. ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 부등식 세우기	40 %
ⓘⓘ x의 값의 범위 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ x의 최솟값 구하기	20 %

0850 답 15

점 A가 y축 위의 점이므로 $A(0, k^2+4)$

$y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k^2+4$의 교점의 x좌표는

$-x^2+2kx+k^2+4=k^2+4$

$x^2-2kx=0$, $x(x-2k)=0$ $\therefore x=0$ 또는 $x=2k$

$\therefore B(2k, k^2+4)$

C$(2k, 0)$이므로

$g(k)=2\{2k+(k^2+4)\}=2(k^2+2k+4)$

부등식 $14\le g(k)\le 78$에서 $14\le 2(k^2+2k+4)\le 78$

$7\le k^2+2k+4\le 39$

$7\le k^2+2k+4$에서 $k^2+2k-3\ge 0$

$(k+3)(k-1)\ge 0$ $\therefore k\le -3$ 또는 $k\ge 1$

그런데 $k>0$이므로 $k\ge 1$ ····· ㉠

$k^2+2k+4\le 39$에서 $k^2+2k-35\le 0$

$(k+7)(k-5)\le 0$ $\therefore -7\le k\le 5$

그런데 $k>0$이므로 $0<k\le 5$ ····· ㉡

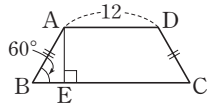
㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1\le k\le 5$

따라서 자연수 k는 1, 2, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$1+2+3+4+5=15$

0851 답 ③

꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 E라 하면



$\overline{BE}=\frac{1}{2}(d-12)=\frac{1}{2}d-6$

직각삼각형 ABE에서

$\overline{AE}=\overline{BE}\tan 60^\circ=\left(\frac{1}{2}d-6\right)\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}d-6\sqrt{3}$

$\overline{AB}=\frac{\overline{BE}}{\cos 60^\circ}=\frac{\frac{1}{2}d-6}{\frac{1}{2}}=d-12$

선분 AD의 길이는 선분 AB의 길이의 2배보다 길지 않으므로

$\overline{AD}\le 2\overline{AB}$에서

$12\le 2(d-12)$ $\therefore d\ge 18$ ····· ㉠

사다리꼴 ABCD의 넓이가 $64\sqrt{3}$ 이하이므로

$\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{BC})\times\overline{AE}\le 64\sqrt{3}$에서

$\frac{1}{2}\times(d+12)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}d-6\sqrt{3}\right)\le 64\sqrt{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}(d+12)(d-12)\le 64\sqrt{3}$

$d^2-144\le 256$, $d^2\le 400$

$\therefore 0<d\le 20$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $18\le d\le 20$

따라서 d의 최댓값과 최솟값의 합은

$20+18=38$

중3 다시보기

$\angle B=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서

① $\angle A$의 크기와 빗변의 길이 b를 알 때

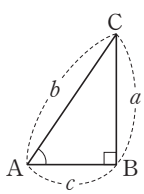
➡ $a=b\sin A$, $c=b\cos A$

② $\angle A$의 크기와 밑변의 길이 c를 알 때

➡ $a=c\tan A$, $b=\frac{c}{\cos A}$

③ $\angle A$의 크기와 높이 a를 알 때

➡ $b=\frac{a}{\sin A}$, $c=\frac{a}{\tan A}$



0852 답 9

$\overline{AB}=3x$라 하면 $\overline{AD}=3x+6$이므로

$S_1=\frac{1}{2}\times(3x+6)\times 3x=\frac{9}{2}(x^2+2x)$

$S_2=\triangle P_1Q_2D-\triangle P_2Q_1D$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(3x+6)\times\left(\frac{2}{3}\times 3x\right)-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}(3x+6)\times\left(\frac{1}{3}\times 3x\right)$

$=2x(x+2)-\frac{1}{2}x(x+2)$

$=\frac{3}{2}(x^2+2x)$

$\therefore S_1-S_2=\frac{9}{2}(x^2+2x)-\frac{3}{2}(x^2+2x)$

$=3(x^2+2x)$

$9\le S_1-S_2\le 24$에서

$9\le 3(x^2+2x)\le 24$

$3\le x^2+2x\le 8$

$3\le x^2+2x$에서 $x^2+2x-3\ge 0$

$(x+3)(x-1)\ge 0$ $\therefore x\le -3$ 또는 $x\ge 1$

그런데 $x>0$이므로 $x\ge 1$ ····· ㉠

$x^2+2x\le 8$에서 $x^2+2x-8\le 0$

$(x+4)(x-2)\le 0$ $\therefore -4\le x\le 2$

그런데 $x>0$이므로 $0<x\le 2$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $1\le x\le 2$

$\therefore 3\le 3x\le 6$

따라서 변 AB의 길이의 최댓값과 최솟값의 합은

$6+3=9$

0853 답 ③

이차방정식 $x^2+4ax+3a^2+25=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(2a)^2-(3a^2+25)<0$, $a^2-25<0$

$(a+5)(a-5)<0$ $\therefore -5<a<5$

0854 답 ⑤

이차방정식 $x^2+ax-a+3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2-4(-a+3)>0$, $a^2+4a-12>0$

$(a+6)(a-2)>0$

$\therefore a<-6$ 또는 $a>2$ ····· ㉠

이차방정식 $x^2+(a+2)x+2a+1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(a+2)^2-4(2a+1)<0$, $a^2-4a<0$

$a(a-4)<0$

$\therefore 0<a<4$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $2<a<4$

0855 답 ④

이차방정식 $x^2-3ax+a(2a+1)=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=(-3a)^2-4a(2a+1)\ge 0$

$a^2-4a\ge 0$, $a(a-4)\ge 0$

$\therefore a\le 0$ 또는 $a\ge 4$ ····· ㉠

이차방정식 $x^2+2(3a+1)x+4a^2+9=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(3a+1)^2-(4a^2+9)<0$

$5a^2+6a-8<0$, $(a+2)(5a-4)<0$

$\therefore -2<a<\frac{4}{5}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면

$-2<a\le 0$

0856 답 ③

두 이차방정식 $ax^2+4x+3=0$, $x^2-5x-a=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\frac{D_1}{4}=4-3a$, $D_2=25+4a$

(i) 실근의 개수가 모두 2인 경우

$\frac{D_1}{4}=4-3a>0$에서 $a<\frac{4}{3}$ ····· ㉠

$D_2=25+4a>0$에서 $a>-\frac{25}{4}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-\frac{25}{4}<a<\frac{4}{3}$

(ii) 실근의 개수가 모두 1인 경우

$\frac{D_1}{4}=4-3a=0$에서 $a=\frac{4}{3}$ ····· ㉢

$D_2=25+4a=0$에서 $a=-\frac{25}{4}$ ····· ㉣

㉢, ㉣의 공통부분이 존재하지 않는다.

(iii) 실근의 개수가 모두 0인 경우

$\frac{D_1}{4}=4-3a<0$에서 $a>\frac{4}{3}$ ····· ㉤

$D_2=25+4a<0$에서 $a<-\frac{25}{4}$ ····· ㉥

㉤, ㉥의 공통부분이 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 a의 값의 범위는

$-\frac{25}{4}<a<\frac{4}{3}$

이때 $a\neq 0$이므로 정수 a는 -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1의 7개이다.

0857 답 4

이차방정식 $x^2+2mx+2m+3=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\frac{D_1}{4}=m^2-(2m+3)\ge 0$

$m^2-2m-3\ge 0$, $(m+1)(m-3)\ge 0$

$\therefore m\le -1$ 또는 $m\ge 3$ ····· ㉠ ····· ⓘ

모든 실수 x에 대하여 $(m+2)x^2-2(m+2)x+7>0$이 성립하므로

(i) $m=-2$일 때,

$0\times x^2-0\times x+7>0$이므로 모든 실수 x에 대하여 부등식이 성립한다.

(ii) $m\neq -2$일 때,

모든 실수 x에 대하여 부등식이 성립하려면 이차함수 $y=(m+2)x^2-2(m+2)x+7$의 그래프가 아래로 볼록해야 하므로

$m+2>0$ $\therefore m>-2$ ····· ㉡

이차방정식 $(m+2)x^2-2(m+2)x+7=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=(m+2)^2-7(m+2)<0$

$m^2-3m-10<0$, $(m+2)(m-5)<0$

$\therefore -2<m<5$ ····· ㉢

㉡, ㉢의 공통부분을 구하면 $-2<m<5$

(i), (ii)에서 $-2\le m<5$ ····· ㉣ ····· ⓘⓘ

㉠, ㉣의 공통부분을 구하면 $-2\le m\le -1$ 또는 $3\le m<5$

따라서 정수 m은 -2, -1, 3, 4이므로 구하는 합은

$-2+(-1)+3+4=4$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $x^2+2mx+2m+3=0$이 실근을 가질 조건 구하기	30 %
ⓘⓘ $(m+2)x^2-2(m+2)x+7>0$이 항상 성립할 조건 구하기	50 %
ⓘⓘⓘ 모든 정수 m의 값의 합 구하기	20 %

0858 답 3

두 이차방정식 $x^2+2ax+3a=0$, $ax^2+ax+1=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\frac{D_1}{4}=a^2-3a$, $D_2=a^2-4a$

(i) $x^2+2ax+3a=0$이 허근을 갖는 경우

$\frac{D_1}{4}<0$, $D_2\ge 0$이어야 한다.

$a^2-3a<0$에서 $a(a-3)<0$ $\therefore 0<a<3$

$a^2-4a\ge 0$에서 $a(a-4)\ge 0$ $\therefore a\le 0$ 또는 $a\ge 4$

따라서 조건을 만족시키는 a의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $ax^2+ax+1=0$이 허근을 갖는 경우

$\frac{D_1}{4}\ge 0$, $D_2<0$이어야 한다.

$a^2-3a\ge 0$에서 $a(a-3)\ge 0$ $\therefore a\le 0$ 또는 $a\ge 3$

$a^2-4a<0$에서 $a(a-4)<0$ $\therefore 0<a<4$

따라서 조건을 만족시키는 a의 값의 범위는

$3\le a<4$

(i), (ii)에서 a의 값의 범위는 $3\le a<4$

따라서 a의 최솟값은 3이다.

0859 답 ④

이차방정식 $x^2-ax+a=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, 이 방정식이 실근을 가지려면

$D_1=a^2-4a\ge 0$, $a(a-4)\ge 0$

$\therefore a\le 0$ 또는 $a\ge 4$ ····· ㉠

이차방정식 $x^2-2x-a^2+5=0$의 판별식을 D_2라 할 때, 이 방정식이 실근을 가지려면

$\frac{D_2}{4}=1-(-a^2+5)\ge 0$, $a^2-4\ge 0$

$(a+2)(a-2)\ge 0$ $\therefore a\le -2$ 또는 $a\ge 2$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 두 이차방정식 중 적어도 하나가 실근을 갖도록 하는 a의 값의 범위는 ㉠, ㉡을 합친 범위이므로

$a\le 0$ 또는 $a\ge 2$

0860 답 4

$x^2+kx=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$(X+2)(X+6)+3=0$

$X^2+8X+15=0$, $(X+3)(X+5)=0$

$(x^2+kx+3)(x^2+kx+5)=0$

두 이차방정식 $x^2+kx+3=0$, $x^2+kx+5=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=k^2-12$, $D_2=k^2-20$

주어진 사차방정식이 실근과 허근을 모두 가지려면

$D_1<0$, $D_2\geq 0$ 또는 $D_1\geq 0$, $D_2<0$이어야 한다.

(i) $D_1<0$, $D_2\geq 0$일 때,

$k^2-12<0$, $k^2-20\geq 0$, 즉 $k^2<12$, $k^2\geq 20$을 만족시키는 자연수 k는 존재하지 않는다.

(ii) $D_1\geq 0$, $D_2<0$일 때,

$k^2-12\geq 0$에서 $k^2\geq 12$

$k^2-20<0$에서 $k^2<20$

즉, $12\leq k^2<20$이고 k는 자연수이므로

$k^2=16$ $\therefore k=4$

(i), (ii)에서 자연수 k의 값은 4이다.

0861 답 ④

(가)에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은

$x=\dfrac{(2+x)+(2-x)}{2}$, 즉 $x=2$이므로

$f(x)=a(x-2)^2+b$ (a, b는 자연수)라 하면

(나)에서 방정식 $a(x-2)^2+b=2x-4$가 한 실근을 갖는다.

이차방정식 $ax^2-2(2a+1)x+4a+b+4=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=(2a+1)^2-a(4a+b+4)=0$

$\therefore ab=1$

이때 a, b는 자연수이므로 $a=b=1$

$\therefore f(x)=(x-2)^2+1=x^2-4x+5$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=kx+6-k-k^2$이 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $x^2-4x+5=kx+6-k-k^2$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 $x^2-(k+4)x+k^2+k-1=0$의 판별식을 D_2라 하면

$D_2=(k+4)^2-4(k^2+k-1)>0$

$3k^2-4k-20<0$, $(k+2)(3k-10)<0$

$\therefore -2<k<\dfrac{10}{3}$

따라서 정수 k는 -1, 0, 1, 2, 3의 5개이다.

0862 답 ③

$f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax-2a$라 하면

$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$f(x)=(x-1)(x^2+ax+2a)$

	1	$a-1$	a	$-2a$
		1	a	$2a$
	1	a	$2a$	0

즉, 주어진 방정식은 $(x-1)(x^2+ax+2a)=0$

이 방정식이 한 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 이차방정식 $x^2+ax+2a=0$이 서로 다른 두 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+ax+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-8a<0$, $a(a-8)<0$

$\therefore 0<a<8$

따라서 정수 a는 1, 2, 3, …, 7의 7개이다.

0863 답 ①

$f(x)=x^3+(8-a)x^2+(a^2-8a)x-a^3$이라 하면

$f(a)=0$이므로 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$f(x)=(x-a)(x^2+8x+a^2)$

	a	1	$8-a$	a^2-8a	$-a^3$
			a	$8a$	a^3
		1	8	a^2	0

즉, 주어진 방정식은 $(x-a)(x^2+8x+a^2)=0$

이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 이차방정식 $x^2+8x+a^2=0$이 $x\neq a$인 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2+8x+a^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=16-a^2>0$, $a^2-16<0$

$(a+4)(a-4)<0$ $\therefore -4<a<4$ …… ㉠

이때 $x\neq a$이어야 하므로 $a^2+8a+a^2\neq 0$

$2a^2+8a\neq 0$, $2a(a+4)\neq 0$

$\therefore a\neq -4$, $a\neq 0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $-4<a<0$ 또는 $0<a<4$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, 1, 2, 3의 6개이다.

0864 답 ③

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수가 같으면 두 이차방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 실근의 개수가 같다.

두 이차방정식 $f(x)=0$, $g(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=4-(-3k^2-12k+40)$

$=3k^2+12k-36=3(k^2+4k-12)$

$=3(k+6)(k-2)$ …… ㉠

$\dfrac{D_2}{4}=36-(3k^2-36k+96)$

$=-3k^2+36k-60=-3(k^2-12k+20)$

$=-3(k-2)(k-10)$ …… ㉡

(i) 실근의 개수가 0으로 같은 경우

$D_1<0$, $D_2<0$이므로 ㉠, ㉡에서

$\begin{cases}3(k+6)(k-2)<0\\-3(k-2)(k-10)<0\end{cases}$

$3(k+6)(k-2)<0$에서 $-6<k<2$ …… ㉢

$-3(k-2)(k-10)<0$에서 $(k-2)(k-10)>0$

$\therefore k<2$ 또는 $k>10$ …… ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $-6<k<2$

따라서 정수 k는 -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1의 7개이다.

(ii) 실근의 개수가 1로 같은 경우

$D_1=0$, $D_2=0$이므로 ㉠, ㉡에서

$\begin{cases}3(k+6)(k-2)=0\\-3(k-2)(k-10)=0\end{cases}$

$3(k+6)(k-2)=0$에서 $k=-6$ 또는 $k=2$

$-3(k-2)(k-10)=0$에서 $k=2$ 또는 $k=10$

따라서 정수 k는 2의 1개이다.

(iii) 실근의 개수가 2로 같은 경우

$D_1>0$, $D_2>0$이므로 ㉠, ㉡에서

$\begin{cases} 3(k+6)(k-2)>0 \\ -3(k-2)(k-10)>0 \end{cases}$

$3(k+6)(k-2)>0$에서 $k<-6$ 또는 $k>2$ ····· ㉢

$-3(k-2)(k-10)>0$에서 $(k-2)(k-10)<0$

$\therefore 2<k<10$ ····· ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $2<k<10$

따라서 정수 k는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9의 7개이다.

(i), (ii), (iii)에서 모든 정수 k의 개수는 $7+1+7=15$이다.

0865 답 ⑤

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면

$D=b^2-4ac>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 $a>0$, $b>0$, $c>0$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(\text{두 근의 합})=-\frac{b}{a}<0$

$(\text{두 근의 곱})=\frac{c}{a}>0$

즉, 두 근의 합은 음수이고 두 근의 곱은 양수이므로 두 근은 모두 음수이다.

따라서 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 개의 음의 근을 갖는다.

0866 답 ③

이차방정식 $x^2-2kx+3k+4=0$의 판별식을 D, 두 근을 α, β라 하면 두 근이 모두 양수이므로

(i) $\frac{D}{4}=k^2-(3k+4)\geq 0$, $k^2-3k-4\geq 0$

$(k+1)(k-4)\geq 0$ $\therefore k\leq -1$ 또는 $k\geq 4$

(ii) $\alpha+\beta=2k>0$ $\therefore k>0$

(iii) $\alpha\beta=3k+4>0$ $\therefore k>-\frac{4}{3}$

(i), (ii), (iii)에서 k의 값의 범위는 $k\geq 4$

0867 답 9

이차방정식 $x^2+2(k+1)x-k+5=0$의 판별식을 D라 하면

(i) $\frac{D}{4}=(k+1)^2-(-k+5)>0$, $k^2+3k-4>0$

$(k+4)(k-1)>0$ $\therefore k<-4$ 또는 $k>1$

(ii) $\alpha\beta=-k+5>0$ $\therefore k<5$

(i), (ii)에서 k의 값의 범위는

$k<-4$ 또는 $1<k<5$

따라서 자연수 k는 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$2+3+4=9$

참고 두 실근 α, β에 대하여 '서로 다른'이라는 조건이 없으면 $D\geq 0$이고, '서로 다른'이라는 조건이 있으면 $D>0$이다.

0868 답 ②

$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}=-\sqrt{\alpha\beta}$, $\alpha\beta\neq 0$에서 $\alpha<0$, $\beta<0$이므로 주어진 이차방정식의 서로 다른 두 실근은 모두 음수이다.

(i) 이차방정식 $x^2-2(a-2)x+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a-2)^2-a>0$, $a^2-5a+4>0$

$(a-1)(a-4)>0$ $\therefore a<1$ 또는 $a>4$

(ii) $\alpha+\beta=2(a-2)<0$ $\therefore a<2$

(iii) $\alpha\beta=a>0$

(i), (ii), (iii)에서 a의 값의 범위는 $0<a<1$

0869 답 ①

두 근 사이에 1이 있어야 하므로 $f(x)=x^2+2mx+2$라 하면

$f(1)<0$이어야 한다.

$f(1)=1+2m+2<0$, $2m<-3$ $\therefore m<-\frac{3}{2}$

따라서 정수 m의 최댓값은 -2이다.

0870 답 ④

$f(x)=x^2-2kx+25$라 할 때

(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-25\geq 0$

$(k+5)(k-5)\geq 0$ $\therefore k\leq -5$ 또는 $k\geq 5$

(ii) $f(1)>0$에서 $1-2k+25>0$

$-2k>-26$ $\therefore k<13$

(iii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$k>1$

(i), (ii), (iii)에서 k의 값의 범위는 $5\leq k<13$

따라서 정수 k의 최댓값은 12이다.

0871 답 ④

$f(x)=x^2+2(k+2)x-k-2$라 할 때

(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(k+2)^2+(k+2)\geq 0$, $k^2+5k+6\geq 0$

$(k+2)(k+3)\geq 0$ $\therefore k\leq -3$ 또는 $k\geq -2$

(ii) $f(-1)>0$에서 $1-2(k+2)-k-2>0$

$-3k>5$ $\therefore k<-\frac{5}{3}$

(iii) $f(4)>0$에서 $16+8(k+2)-k-2>0$

$7k>-30$ $\therefore k>-\frac{30}{7}$

(iv) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=-k-2$이므로

$-1<-k-2<4$

$1<-k<6$ $\therefore -6<k<-1$

(i)~(iv)에서 k의 값의 범위는

$-\frac{30}{7}<k\leq -3$ 또는 $-2\leq k<-\frac{5}{3}$

따라서 k의 값이 될 수 없는 것은 ④ $-\frac{5}{2}$이다.

0872 답 44

$f(x)=x^2-2kx+k+2$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 근이 모두 0과 3 사이에 있으므로

(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=k^2-(k+2)>0$, $k^2-k-2>0$

$(k+1)(k-2)>0$ $\therefore k<-1$ 또는 $k>2$

(ii) $f(0)>0$에서 $k+2>0$ $\therefore k>-2$

(iii) $f(3)>0$에서 $9-6k+k+2>0$

$-5k>-11$ $\therefore k<\frac{11}{5}$

(iv) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$이므로

$0<k<3$

(i)~(iv)에서 k의 값의 범위는 $2<k<\frac{11}{5}$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=\frac{11}{5}$이므로 $10\alpha\beta=44$

0873 답 ①

이차방정식 $x^2+(2a^2+a-15)x+a-2=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(2a^2+a-15)$, $\alpha\beta=a-2$

이때 α, β의 부호는 서로 다르므로 $\alpha\beta<0$

즉, $a-2<0$에서 $a<2$ ····· ㉠

또 양수인 근의 절댓값이 음수인 근의 절댓값보다 크므로 $\alpha+\beta>0$

즉, $-(2a^2+a-15)>0$에서 $2a^2+a-15<0$

$(a+3)(2a-5)<0$ $\therefore -3<a<\frac{5}{2}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $-3<a<2$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1의 4개이다.

참고 서로 다른 부호의 두 실근을 갖는 이차방정식은 이차항의 계수와 상수항의 곱이 음수이므로 판별식의 부호가 항상 양수이다.

즉, $x^2+(2a^2+a-15)x+a-2=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(2a^2+a-15)^2-4(a-2)>0$ ($\because a-2<0$)

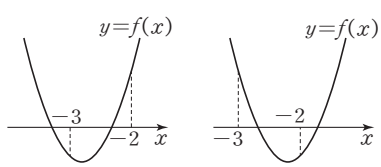
따라서 실근을 가질 조건을 생각하지 않아도 된다.

0874 답 ④

$x^2+5x+6=0$에서 $(x+3)(x+2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=-2$

즉, 이차방정식 $x^2-ax+2=0$의 두 근 중에서 한 근만이 -3과 -2 사이에 있어야 하므로 $f(x)=x^2-ax+2$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



$f(-3)=3a+11$, $f(-2)=2a+6$이고,

$f(-3)f(-2)<0$이므로 $(3a+11)(2a+6)<0$

$\therefore -\frac{11}{3}<a<-3$

따라서 $\alpha=-\frac{11}{3}$, $\beta=-3$이므로 $\alpha\beta=11$

0875 답 ③

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=m^2-(-4m-5)>0$

$m^2+4m+5>0$, $(m+2)^2+1>0$

즉, m의 값에 관계없이 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식 $x^2+2mx-4m-5=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하고, α, β가 모두 0 또는 양의 실수인 경우를 생각한다.

(i) $\alpha+\beta=-2m>0$ $\therefore m<0$

(ii) $\alpha\beta=-4m-5\geq0$ $\therefore m\leq-\frac{5}{4}$

(i), (ii)에서 서로 다른 두 근이 0 또는 양의 실수가 되도록 하는 m의 값의 범위는 $m\leq-\frac{5}{4}$

따라서 두 근 중 적어도 하나가 음의 실수가 되려면 $m>-\frac{5}{4}$이므로 정수 m의 최솟값은 -1이다.

0876 답 ①

$x^4+mx^2-2m+5=0$에서 $x^2=X$로 놓으면

$X^2+mX-2m+5=0$ ····· ㉠

이때 주어진 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉠의 판별식을 D, 두 실근을 α, β라 하면

(i) $D=m^2-4(-2m+5)>0$, $m^2+8m-20>0$

$(m+10)(m-2)>0$ $\therefore m<-10$ 또는 $m>2$

(ii) $\alpha+\beta=-m>0$ $\therefore m<0$

(iii) $\alpha\beta=-2m+5>0$ $\therefore m<\frac{5}{2}$

(i), (ii), (iii)에서 m의 값의 범위는 $m<-10$

따라서 정수 m의 최댓값은 -11이다.

0877 답 11

$f(x)=x^2-2(m+2)x-m$이라 하면

(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 중 한 근만 $-2\leq x\leq3$에 속하는 경우

$f(-2)=3m+12$, $f(3)=-7m-3$이고,

$f(-2)f(3)\leq0$이므로

$(3m+12)(-7m-3)\leq0$, $(m+4)(7m+3)\geq0$

$\therefore m\leq-4$ 또는 $m\geq-\frac{3}{7}$

(ii) 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 모두 $-2\leq x\leq3$에 속하는 경우

이차방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(m+2)^2+m\geq0$, $m^2+5m+4\geq0$

$(m+4)(m+1)\geq0$

$\therefore m\leq-4$ 또는 $m\geq-1$ ····· ㉠

$f(-2)\geq0$에서 $3m+12\geq0$

$\therefore m\geq-4$ ····· ㉡

$f(3)\geq0$에서 $-7m-3\geq0$

$\therefore m\leq-\frac{3}{7}$ ····· ㉢

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=m+2$이므로

$-2\le m+2\le 3$ $\therefore -4\le m\le 1$ ····· ㉣

㉠~㉣에서 $m=-4$ 또는 $-1\le m\le -\frac{3}{7}$

(i), (ii)에서 $m\le -4$ 또는 $m\ge -1$

그런데 $-6\le m\le 6$이므로

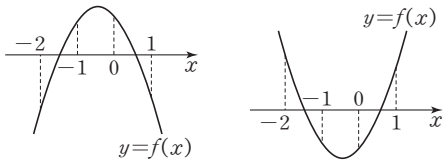
$-6\le m\le -4$ 또는 $-1\le m\le 6$

따라서 정수 m은 -6, -5, -4, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6의 11개이다.

0878 답 $-3<a<-2$

이차방정식 $ax^2-2x+a^2-4=0$의 한 근은 -2와 -1 사이에 있고, 다른 한 근은 0과 1 사이에 있어야 한다.

$f(x)=ax^2-2x+a^2-4$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $f(-2)f(-1)<0$이고 $f(0)f(1)<0$이다. ····· ⓘ

(i) $f(-2)f(-1)<0$일 때,

$f(-2)=a^2+4a=a(a+4)$,

$f(-1)=a^2+a-2=(a+2)(a-1)$

$f(-2)>0$, $f(-1)<0$ 또는 $f(-2)<0$, $f(-1)>0$이므로

ⓘ $f(-2)>0$, $f(-1)<0$일 때,

$a(a+4)>0$에서 $a<-4$ 또는 $a>0$ ····· ㉠

$(a+2)(a-1)<0$에서 $-2<a<1$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $0<a<1$

ⓘⓘ $f(-2)<0$, $f(-1)>0$일 때,

$a(a+4)<0$에서 $-4<a<0$ ····· ㉢

$(a+2)(a-1)>0$에서 $a<-2$ 또는 $a>1$ ····· ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $-4<a<-2$

ⓘ, ⓘⓘ에서 $-4<a<-2$ 또는 $0<a<1$ ····· ⓘⓘ

(ii) $f(0)f(1)<0$일 때,

$f(0)=a^2-4=(a+2)(a-2)$,

$f(1)=a^2+a-6=(a+3)(a-2)$

$f(0)>0$, $f(1)<0$ 또는 $f(0)<0$, $f(1)>0$이므로

ⓘ $f(0)>0$, $f(1)<0$일 때,

$(a+2)(a-2)>0$에서 $a<-2$ 또는 $a>2$ ····· ㉤

$(a+3)(a-2)<0$에서 $-3<a<2$ ····· ㉥

㉤, ㉥의 공통부분을 구하면 $-3<a<-2$

ⓘⓘ $f(0)<0$, $f(1)>0$일 때,

$(a+2)(a-2)<0$에서 $-2<a<2$ ····· ㉦

$(a+3)(a-2)>0$에서 $a<-3$ 또는 $a>2$ ····· ㉧

㉦, ㉧의 공통부분은 존재하지 않는다.

ⓘ, ⓘⓘ에서 $-3<a<-2$ ····· ⓘⓘⓘ

(i), (ii)에서 $f(-2)f(-1)<0$이고 $f(0)f(1)<0$을 만족시키는 a의 값의 범위는

$-3<a<-2$ ····· ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ $f(-2)f(-1)$, $f(0)f(1)$의 부호 구하기	30 %
ⓘⓘ $f(-2)f(-1)<0$일 때, a의 값의 범위 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ $f(0)f(1)<0$일 때 a의 값의 범위 구하기	30 %
ⓘⓥ 실수 a의 값의 범위 구하기	10 %

최고수준 도전 기출 182~183쪽

0879 답 37

전략 A를 소수 첫째 자리에서 반올림한 값이 a이면 $a-0.5\le A<a+0.5$임을 이용하여 이차부등식을 세운다.

소수 첫째 자리에서 반올림한 값이 $1+5x$이므로 $1+5x$는 정수이고, $5x$도 정수이다.

$(1+5x)-0.5\le (x+1)(x-2)<(1+5x)+0.5$이므로

$5x+0.5\le x^2-x-2<5x+1.5$

부등식의 각 변에 $11-5x$를 더하면 $11.5\le x^2-6x+9<12.5$

$11.5\le (x-3)^2<12.5$ ····· ㉠

이때 $5x$는 정수이므로 $x-3=\frac{n}{5}$ (n은 정수)이라 하고, 이를 ㉠에 대입하면 $11.5\le \frac{n^2}{25}<12.5$

$\therefore 287.5\le n^2<312.5$

따라서 정수 n의 값은 ± 17이므로

$x=-\frac{2}{5}$ 또는 $x=\frac{32}{5}$

이때 p, q는 서로소인 자연수이므로 $p=5$, $q=32$

$\therefore p+q=37$

0880 답 ⑤

전략 x의 값의 범위를 나누어 각 범위에서 이차함수 $y=f(x)$에 대하여 $f(x)\ge 0$을 만족시키려면 ($f(x)$의 최솟값)≥ 0임을 이용한다.

(i) $x<1$일 때,

$\frac{1}{2}x^2-x+k\ge -x+1-x+4$

$x^2+2x+2k-10\ge 0$, $(x+1)^2+2k-11\ge 0$

이차함수 $y=(x+1)^2+2k-11$은 $x<1$에서 $x=-1$일 때 최소이므로

$2k-11\ge 0$ $\therefore k\ge \frac{11}{2}$

(ii) $1\le x<4$일 때,

$\frac{1}{2}x^2-x+k\ge x-1-x+4$

$x^2-2x+2k-6\ge 0$, $(x-1)^2+2k-7\ge 0$

이차함수 $y=(x-1)^2+2k-7$은 $1\le x<4$에서 $x=1$일 때 최소이므로

$2k-7\ge 0$ $\therefore k\ge \frac{7}{2}$

(iii) $x\ge 4$일 때,

$\frac{1}{2}x^2-x+k\ge x-1+x-4$

$x^2-6x+2k+10\geq 0$, $(x-3)^2+2k+1\geq 0$

이차함수 $y=(x-3)^2+2k+1$은 $x\geq 4$에서 $x=4$일 때 최소이므로

$2k+2\geq 0$ $\therefore k\geq -1$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식이 x의 값에 관계없이 항상 성립하려면 $k\geq \frac{11}{2}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{11}{2}$이다.

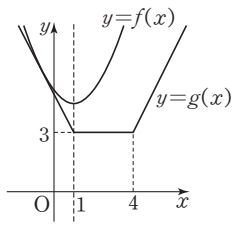
다른 풀이

$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+k$, $g(x)=|x-1|+|x-4|$라 하면

$f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+k-\frac{1}{2}$

$$g(x)=\begin{cases}-2x+5 & (x<1)\\ 3 & (1\leq x<4)\\ 2x-5 & (x\geq 4)\end{cases}$$

주어진 부등식이 모든 x에 대하여 성립하면서 실수 k의 값이 최소일 때는 오른쪽 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $x<1$에서 함수 $y=g(x)$의 그래프와 접할 때이다.



방정식 $\frac{1}{2}x^2-x+k=-2x+5$, 즉

$x^2+2x+2k-10=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(2k-10)=0$, $11-2k=0$ $\therefore k=\frac{11}{2}$

따라서 실수 k의 최솟값은 $\frac{11}{2}$이다.

0881 답 ⑤

전략 이차부등식 $f(x)>0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립하려면 x^2의 계수가 양수이고, 이차방정식 $f(x)=0$이 실근을 갖지 않음을 이용한다.

ㄱ, ㄴ. $ax^2-2bx+c>0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로 이차방정식 $ax^2-2bx+c=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$a>0$, $\frac{D_1}{4}=b^2-ac<0$ ····· ㉠

$px^2-2qx+r>0$이 x의 값에 관계없이 항상 성립하므로 이차방정식 $px^2-2qx+r=0$의 판별식을 D_2라 하면

$p>0$, $\frac{D_2}{4}=q^2-pr<0$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $a>0$, $p>0$이므로 $ap>0$

㉠, ㉡에서 $b^2<ac$, $q^2<pr$이므로

$b^2+q^2<ac+pr$

ㄷ. 두 부등식 $ax^2-2bx+c>0$, $px^2-2qx+r>0$을 변끼리 더하면

$(a+p)x^2-2(b+q)x+c+r>0$

주어진 두 부등식이 항상 성립하므로 위의 부등식도 항상 성립한다. 따라서 이차방정식 $(a+p)x^2-2(b+q)x+c+r=0$의 판별식을 D_3이라 하면

$a+p>0$, $\frac{D_3}{4}=(b+q)^2-(a+p)(c+r)<0$

$\therefore (b+q)^2<(a+p)(c+r)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0882 답 117

전략 $f(\alpha)=f(\beta)$이면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$이고, 축의 방정식이 $x=k$이면 최솟값 또는 최댓값이 $f(k)$임을 이용한다.

(가)의 $f(3)-f(-1)=0$에서 $f(3)=f(-1)$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축의 방정식은 $x=\frac{3+(-1)}{2}$, 즉 $x=1$이다.

(가)의 $f(1)+g(1)=10$에서 $f(1)=10-g(1)$이고, 이차함수 $f(x)$의 x^2의 계수가 1이므로 $f(x)=(x-1)^2+10-g(1)$이라 하면 함수 $f(x)$의 최솟값은 $10-g(1)$이고, (나)에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 $19-g(1)$이다.

이차함수 $g(x)$의 x^2의 계수가 -1이므로

$g(x)=-(x-a)^2+19-g(1)$ (a는 상수) ····· ㉢

이라 하면 (다)에서 부등식 $f(x)<g(x)$는

$(x-1)^2+10-g(1)<-(x-a)^2+19-g(1)$

$2x^2-2(a+1)x+a^2-8<0$

이 부등식의 해가 $1<x<4$이므로

$2x^2-2(a+1)x+a^2-8=2(x-1)(x-4)$

$=2x^2-10x+8$

즉, $2(a+1)=10$이므로 $a=4$

$a=4$를 ㉢에 대입하면

$g(x)=-(x-4)^2+19-g(1)$

이 식에 $x=1$을 대입하면

$g(1)=-9+19-g(1)$ $\therefore g(1)=5$

따라서 $f(x)=(x-1)^2+5$, $g(x)=-(x-4)^2+14$이므로

$f(3)g(3)=9\times 13=117$

0883 답 ④

전략 $f(x)-g(x)\leq 0$을 p에 대한 식으로 나타내고 p의 부호에 따라 경우를 나누어 부등식을 푼다.

$f(x)=x^2+px+p=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+p$이므로

$\mathrm{A}\left(-\frac{p}{2}, -\frac{p^2}{4}+p\right)$

$f(0)=p$이므로 $\mathrm{B}(0, p)$

이차함수 $f(x)$의 x^2의 계수가 1이고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=g(x)$의 교점의 x좌표가 $-\frac{p}{2}$, 0이므로

$f(x)-g(x)=x\left(x+\frac{p}{2}\right)$

(i) $p>0$일 때,

$x\left(x+\frac{p}{2}\right)\leq 0$의 해는 $-\frac{p}{2}\leq x\leq 0$

이 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 10이려면

$-10<-\frac{p}{2}\leq -9$ $\therefore 18\leq p<20$

(ii) $p<0$일 때,

$x\left(x+\frac{p}{2}\right)\leq 0$의 해는 $0\leq x\leq -\frac{p}{2}$

이 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 10이려면

$9\leq -\frac{p}{2}<10$ $\therefore -20<p\leq -18$

(ⅰ), (ⅱ)에서 p의 값의 범위는

$-20<p\le -18$ 또는 $18\le p<20$

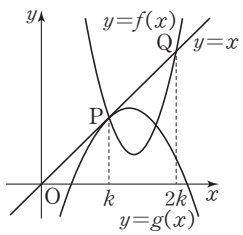
따라서 정수 p는 -19, -18, 18, 19이므로

$M=19$, $m=-19$

$\therefore M-m=38$

0884 답 ②

전략 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2라 할 때, $\overline{OP}=\overline{PQ}$이면 $\overline{OH_1}=\overline{H_1H_2}$이므로 두 점 P, Q의 x좌표를 k, $2k$로 놓고 $f(x)$, $g(x)$를 k에 대한 식으로 나타낸다.



㈐에서 $\overline{OP}=\overline{PQ}$이므로 점 P의 x좌표를 k $(k>0)$라 하면 점 Q의 x좌표는 $2k$이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$는 오른쪽 그림과 같다.

㈎에서 이차방정식 $f(x)=x$는 k, $2k$를 두 근으로 갖고, $f(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로

$f(x)-x=2(x-k)(x-2k)$

$\therefore f(x)=2(x-k)(x-2k)+x$

㈏에서 이차방정식 $g(x)=x$는 k를 중근으로 갖고, $g(x)$의 최고차항의 계수가 -1이므로

$g(x)-x=-(x-k)^2$

$\therefore g(x)=-(x-k)^2+x$

$\therefore f(x)+g(x)=2(x-k)(x-2k)+x-(x-k)^2+x$

$=x^2+2(1-2k)x+3k^2$

부등식 $f(x)+g(x)\ge 0$, 즉 $x^2+2(1-2k)x+3k^2\ge 0$의 해가 모든 실수이므로 이차방정식 $x^2+2(1-2k)x+3k^2=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(1-2k)^2-3k^2\le 0$, $k^2-4k+1\le 0$

$\therefore 2-\sqrt{3}\le k\le 2+\sqrt{3}$

따라서 점 P의 x좌표의 최댓값은 $2+\sqrt{3}$이다.

0885 답 ④

전략 $x\ge 1$, $x<1\le x+3$, $x+3<1$인 경우로 나누어 $f(x)$를 구한 후 부등식 $f(x)\le x$를 만족시키는 x의 값의 범위를 구한다.

$g(t)=t^2-2t-2=(t-1)^2-3$이라 하자.

(ⅰ) $x\ge 1$일 때,

$x\le t\le x+3$에서 $g(t)$는 $t=x$일 때 최솟값 x^2-2x-2를 가지므로 $f(x)=x^2-2x-2$

$f(x)\le x$에서

$x^2-2x-2\le x$, $x^2-3x-2\le 0$

$\therefore \frac{3-\sqrt{17}}{2}\le x\le \frac{3+\sqrt{17}}{2}$

그런데 $x\ge 1$이므로 $1\le x\le \frac{3+\sqrt{17}}{2}$

(ⅱ) $x<1\le x+3$, 즉 $-2\le x<1$일 때,

$x\le t\le x+3$에서 $g(t)$는 $t=1$일 때 최솟값 -3을 가지므로

$f(x)=-3$

$f(x)\le x$에서 $-3\le x$

그런데 $-2\le x<1$이므로 $-2\le x<1$

(ⅲ) $x+3<1$, 즉 $x<-2$일 때,

$x\le t\le x+3$에서 $g(t)$는 $t=x+3$일 때 최솟값 $(x+2)^2-3$을 가지므로 $f(x)=(x+2)^2-3=x^2+4x+1$

$f(x)\le x$에서

$x^2+4x+1\le x$, $x^2+3x+1\le 0$

$\therefore \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\le x\le \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

그런데 $x<-2$이므로 $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\le x<-2$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 x의 값의 범위는

$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\le x\le \frac{3+\sqrt{17}}{2}$

따라서 정수 x는 -2, -1, 0, 1, 2, 3의 6개이다.

0886 답 ⑤

전략 $a=1$인 경우와 $a\ne 1$인 경우로 나누어 생각한다. 이때 이차방정식의 근의 공식을 이용하여 직접 해를 구하거나, 판별식을 이용하여 서로 다른 허근의 개수가 2이기 위한 a의 값의 범위를 구한다.

(ⅰ) $a=1$일 때,

주어진 방정식은 $(x^2+x+1)^2=0$

이때 방정식 $x^2+x+1=0$의 근은 $x=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

따라서 방정식 $(x^2+x+1)^2=0$의 서로 다른 허근의 개수는 2이다.

(ⅱ) $a\ne 1$일 때,

두 이차방정식 $x^2+ax+a=0$, $x^2+x+a=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$D_1=a^2-4a$, $D_2=1-4a$

ⓘ $D_1\ge 0$, $D_2<0$일 때,

$a^2-4a\ge 0$에서 $a(a-4)\ge 0$

$\therefore a\le 0$ 또는 $a\ge 4$ ····· ㉠

$1-4a<0$에서 $a>\frac{1}{4}$ ····· ㉡

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $a\ge 4$

ⓘⓘ $D_1<0$, $D_2\ge 0$일 때,

$a^2-4a<0$에서 $a(a-4)<0$

$\therefore 0<a<4$ ····· ㉢

$1-4a\ge 0$에서 $a\le\frac{1}{4}$ ····· ㉣

㉢, ㉣의 공통부분을 구하면 $0<a\le\frac{1}{4}$

ⓘ, ⓘⓘ에서 $0<a\le\frac{1}{4}$ 또는 $a\ge 4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 a의 값의 범위는

$0<a\le\frac{1}{4}$ 또는 $a=1$ 또는 $a\ge 4$

따라서 $k=\frac{1}{4}$, $m=1$, $n=4$이므로

$8k+4m+2n=2+4+8=14$

12 합의 법칙과 곱의 법칙

난이도별 필수 기출 185~192쪽

0887 답 10

지원하는 방법의 수는 2+3+5=10

0888 답 ①

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 6인 경우

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지

(ii) 눈의 수의 합이 10인 경우

(4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

5+3=8

0889 답 ②

1부터 50까지의 자연수 중에서 2의 배수는 25개, 5의 배수는 10개이다.

이때 2의 배수이면서 5의 배수인 수, 즉 10의 배수는 5개이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

25+10−5=30

0890 답 ⑤

x, y가 음이 아닌 정수이므로 $x+y$가 될 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

(i) $x+y=0$일 때, 순서쌍 (x, y)는 (0, 0)의 1개

(ii) $x+y=1$일 때, 순서쌍 (x, y)는 (0, 1), (1, 0)의 2개

(iii) $x+y=2$일 때, 순서쌍 (x, y)는

(0, 2), (1, 1), (2, 0)의 3개

(iv) $x+y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는

(0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0)의 4개

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

1+2+3+4=10

0891 답 ①

y의 값을 기준으로 경우를 나누어 순서쌍 (x, y)의 개수를 구하면

(i) $y=1$일 때, 순서쌍 (x, y)는

(8, 1), (7, 1), …, (1, 1)의 8개

(ii) $y=2$일 때, 순서쌍 (x, y)는

(6, 2), (5, 2), …, (1, 2)의 6개

(iii) $y=3$일 때, 순서쌍 (x, y)는

(4, 3), (3, 3), (2, 3), (1, 3)의 4개

(iv) $y=4$일 때, 순서쌍 (x, y)는

(2, 4), (1, 4)의 2개

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y)의 개수는

8+6+4+2=20

0892 답 8

10의 약수 중 두 주사위에서 나오는 눈의 수의 합이 될 수 있는 값은

2, 5, 10이다. …… ⓘ

두 주사위에서 나오는 눈의 수를 순서쌍으로 나타내면

(i) 눈의 수의 합이 2인 경우

(1, 1)의 1가지

(ii) 눈의 수의 합이 5인 경우

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지

(iii) 눈의 수의 합이 10인 경우

(4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지 …… ⓘⓘ

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

1+4+3=8 …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 두 눈의 수의 합이 될 수 있는 값 구하기	20 %
ⓘⓘ 각각의 경우의 수 구하기	60 %
ⓘⓘⓘ 경우의 수 구하기	20 %

0893 답 ④

$|a-b|\le 2$이므로 $|a-b|$가 될 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

(i) $|a-b|=0$일 때, 순서쌍 (a, b)는

(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)의 4개

(ii) $|a-b|=1$일 때, 순서쌍 (a, b)는

(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)의 6개

(iii) $|a-b|=2$일 때, 순서쌍 (a, b)는

(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)의 4개

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 4+6+4=14

0894 답 ⑤

a_1의 값에 따른 a_2, a_3의 순서쌍 (a_2, a_3)은

(i) $a_1=1$일 때, $a_2+a_3=2$이므로

(1, 1)의 1개

(ii) $a_1=2$일 때, $a_2+a_3=4$이므로

(1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3개

(iii) $a_1=3$일 때, $a_2+a_3=6$이므로

(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5개

(iv) $a_1=4$일 때, $a_2+a_3=8$이므로

(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5개

(v) $a_1=5$일 때, $a_2+a_3=10$이므로

(4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3개

(vi) $a_1=6$일 때, $a_2+a_3=12$이므로

(6, 6)의 1개

(i)~(vi)에서 구하는 경우의 수는

1+3+5+5+3+1=18

0895 답 4

한 개의 가격이 400원, 800원인 빵을 각각 x개, y개 산다고 하면

$400x+800y=3600$

$\therefore x+2y=9$

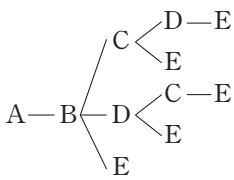
이때 x, y는 자연수이므로 이 방정식을 만족시키는 x, y의 값을 순서쌍 (x, y)로 나타내면

$(1, 4)$, $(3, 3)$, $(5, 2)$, $(7, 1)$

따라서 구하는 방법의 수는 4이다.

0896 답 15

꼭짓점 A에서 출발하여 가장 먼저 꼭짓점 B를 거쳐 꼭짓점 E에 도착하는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.



같은 방법으로 꼭짓점 A에서 출발하여 가장 먼저 꼭짓점 C 또는 D를 거쳐 꼭짓점 E에 도착하는 경우도 각각 5가지이므로 구하는 경우의 수는

$5\times3=15$

0897 답 ②

y의 값에 따른 x, z의 순서쌍 (x, z)는

(i) $y=1$일 때, $x+z=8$이므로

$(1, 7)$, $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$, $(5, 3)$, $(6, 2)$, $(7, 1)$의 7개

(ii) $y=2$일 때, $x+z=6$이므로

$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$의 5개

(iii) $y=3$일 때, $x+z=4$이므로

$(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 3개

(iv) $y=4$일 때, $x+z=2$이므로

$(1, 1)$의 1개

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$7+5+3+1=16$

0898 답 ③

36을 소인수분해 하면 $36=2^2\times3^2$

즉, 36과 서로소가 아닌 자연수는 2 또는 3을 소인수로 갖는 자연수이므로 2의 배수 또는 3의 배수이다.

1부터 100까지의 자연수 중에서 2의 배수는 50개, 3의 배수는 33개이다.

이때 2의 배수이면서 3의 배수인 수, 즉 6의 배수는 16개이다.

따라서 구하는 자연수의 개수는 $50+33-16=67$

0899 답 ①

이차방정식 $ax^2+6x+b=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-ab>0$ $\quad\therefore ab<9$

$ab<9$를 만족시키는 순서쌍 (a, b)는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(1, 5)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$의 14개이다.

0900 답 14

z의 값에 따른 x, y의 순서쌍 (x, y)는

(i) $z=0$일 때, $x+2y=11$이므로

$(7, 2)$, $(5, 3)$, $(3, 4)$, $(1, 5)$의 4개

(ii) $z=1$일 때, $x+2y=8$이므로

$(8, 0)$, $(6, 1)$, $(4, 2)$, $(2, 3)$, $(0, 4)$의 5개

(iii) $z=2$일 때, $x+2y=5$이므로

$(5, 0)$, $(3, 1)$, $(1, 2)$의 3개

(iv) $z=3$일 때, $x+2y=2$이므로

$(2, 0)$, $(0, 1)$의 2개

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는

$4+5+3+2=14$

0901 답 12

100원, 300원, 600원짜리 사탕을 각각 x개, y개, z개 산다고 하면 그 금액의 합이 1500원이므로

$100x+300y+600z=1500$

$\therefore x+3y+6z=15$

따라서 구하는 방법의 수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수와 같다. …… ⓘ

z의 값에 따른 x, y의 순서쌍 (x, y)는

(i) $z=0$일 때, $x+3y=15$이므로

$(15, 0)$, $(12, 1)$, $(9, 2)$, $(6, 3)$, $(3, 4)$, $(0, 5)$의 6개

(ii) $z=1$일 때, $x+3y=9$이므로

$(9, 0)$, $(6, 1)$, $(3, 2)$, $(0, 3)$의 4개

(iii) $z=2$일 때, $x+3y=3$이므로

$(3, 0)$, $(0, 1)$의 2개 …… ⓘⓘ

(i), (ii), (iii)에서 구하는 방법의 수는

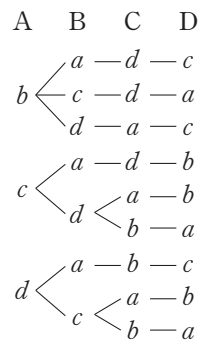
$6+4+2=12$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ 방정식의 해에 대한 순서쌍으로 생각하기	30 %
ⓘⓘ $z=0$, 1, 2인 경우로 나누어 순서쌍 (x, y)의 개수 구하기	60 %
ⓘⓘⓘ 방법의 수 구하기	10 %

0902 답 ③

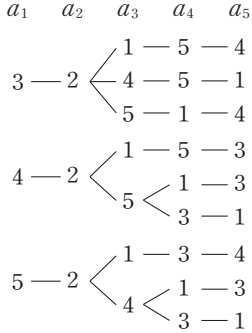
네 학생 A, B, C, D의 학생증을 각각 a, b, c, d라 할 때, 네 학생이 모두 자신의 것이 아닌 학생증을 받는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 9이다.

0903 답 9

$a_2=2$, $a_k\neq k$ $(k=1, 3, 4, 5)$를 만족시키는 경우를 수형도로 나타내면 오른쪽과 같다.



따라서 구하는 자연수의 개수는 9이다.

0904 답 17

함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=ax-b$가 서로 다른 두 점에서 만나면 이차방정식 $x^2=ax-b$, 즉 $x^2-ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$D=a^2-4b>0$ $\therefore a^2>4b$ …… ⓘ

b의 값에 따른 a, b의 순서쌍 (a, b)는

(i) $b=1$일 때, $a^2>4$이므로

$(3, 1)$, $(4, 1)$, $(5, 1)$, $(6, 1)$의 4개

(ii) $b=2$일 때, $a^2>8$이므로

$(3, 2)$, $(4, 2)$, $(5, 2)$, $(6, 2)$의 4개

(iii) $b=3$일 때, $a^2>12$이므로

$(4, 3)$, $(5, 3)$, $(6, 3)$의 3개

(iv) $b=4$일 때, $a^2>16$이므로

$(5, 4)$, $(6, 4)$의 2개

(v) $b=5$일 때, $a^2>20$이므로

$(5, 5)$, $(6, 5)$의 2개

(vi) $b=6$일 때, $a^2>24$이므로

$(5, 6)$, $(6, 6)$의 2개 …… ⓘⓘ

(i)~(vi)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$4+4+3+2+2+2=17$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a, b 사이의 관계식 구하기	20 %
ⓘⓘ b의 값의 경우를 나누어 순서쌍 (a, b)의 개수 각각 구하기	60 %
ⓘⓘⓘ 순서쌍 (a, b)의 개수 구하기	20 %

0905 답 12

$a\geq b\geq c$이고, $a+b+c=24$이므로 $a\geq 8$ …… ㉠

삼각형의 두 변의 길이의 합은 나머지 한 변의 길이보다 길어야 하므로 $b+c>a$

이때 $b+c=24-a$이므로 $24-a>a$ $\therefore a<12$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $8\leq a<12$ …… ⓘ

a의 값에 따른 b, c의 순서쌍 (b, c)는

(i) $a=8$일 때, $8\geq b\geq c$이고, $b+c=16$이므로

$(8, 8)$의 1개

(ii) $a=9$일 때, $9\geq b\geq c$이고, $b+c=15$이므로

$(9, 6)$, $(8, 7)$의 2개

(iii) $a=10$일 때, $10\geq b\geq c$이고, $b+c=14$이므로

$(10, 4)$, $(9, 5)$, $(8, 6)$, $(7, 7)$의 4개

(iv) $a=11$일 때, $11\geq b\geq c$이고, $b+c=13$이므로

$(11, 2)$, $(10, 3)$, $(9, 4)$, $(8, 5)$, $(7, 6)$의 5개 …… ⓘⓘ

(i)~(iv)에서 구하는 삼각형의 개수는

$1+2+4+5=12$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a의 값의 범위 구하기	30 %
ⓘⓘ a의 값의 경우를 나누어 순서쌍 (b, c)의 개수 각각 구하기	60 %
ⓘⓘⓘ 삼각형의 개수 구하기	10 %

0906 답 ②

500 이하의 자연수 중에서 7의 배수는

7, 14, 21, …, 497의 71개

500 이하의 자연수 중에서 5로 나누었을 때의 나머지가 4인 자연수는

4, 9, 14, …, 499의 100개

500 이하의 자연수 중에서 7의 배수이면서 5로 나누었을 때의 나머지가 4인 자연수는

14, 49, 84, …, 469의 14개

따라서 구하는 자연수의 개수는

$500-(71+100-14)=343$

참고 7의 배수이면서 5로 나누었을 때의 나머지가 4인 자연수는 $35m+14$ (m은 음이 아닌 정수) 꼴이다.

0907 답 ②

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 판별식을 D_1이라 하면

$D_1=a^2-4b<0$ $\therefore a^2<4b$ …… ㉠

이차방정식 $x^2+4x+b=0$의 판별식을 D_2라 하면

$\frac{D_2}{4}=4-b\geq 0$ $\therefore b\leq 4$

이때 b는 6 이하의 자연수이므로 $b=1, 2, 3, 4$

b의 값에 따른 a, b의 순서쌍 (a, b)는

(i) $b=1$일 때, ㉠에서 $a^2<4$이므로

$(1, 1)$의 1개

(ii) $b=2$일 때, ㉠에서 $a^2<8$이므로

$(1, 2)$, $(2, 2)$의 2개

(iii) $b=3$일 때, ㉠에서 $a^2<12$이므로

$(1, 3)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$의 3개

(iv) $b=4$일 때, ㉠에서 $a^2<16$이므로

$(1, 4)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$의 3개

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (a, b)의 개수는

$1+2+3+3=9$

0908 답 ④

m의 값에 따른 m, n의 순서쌍 (m, n)은

(i) $m=1$일 때,

n이 어떤 자연수의 네제곱이어야 하므로

$(1, 1)$, $(1, 16)$의 2개

(ii) $m=2$일 때, $n^2=\bullet^4$

n이 어떤 자연수의 제곱이어야 하므로

$(2, 1)$, $(2, 4)$, $(2, 9)$, $(2, 16)$의 4개

(iii) $m=3$일 때, $n^3=\bullet^4$

n이 어떤 자연수의 네제곱이어야 하므로

$(3, 1)$, $(3, 16)$의 2개

(iv) $m=4$일 때, $n^4=\bullet^4$

n은 자연수이므로

$(4, 1)$, $(4, 2)$, $(4, 3)$, …, $(4, 16)$의 16개

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (m, n)의 개수는

$2+4+2+16=24$

0909 답 ⑤

$a \geq -2$, $c \geq 4$에서 $a+c \geq -2+4=2$ ····· ㉠

$a-2b+c=6$에서 $a+c=2b+6$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $2b+6 \geq 2$이므로 $b \geq -2$

또한 $b \leq 2$이므로 $-2 \leq b \leq 2$

b의 값에 따른 a, c의 순서쌍 (a, c)는

(i) $b=-2$일 때, ㉡에서 $a+c=2$이므로

$(-2, 4)$의 1개

(ii) $b=-1$일 때, ㉡에서 $a+c=4$이므로

$(-2, 6)$, $(-1, 5)$, $(0, 4)$의 3개

(iii) $b=0$일 때, ㉡에서 $a+c=6$이므로

$(-2, 8)$, $(-1, 7)$, $(0, 6)$, $(1, 5)$, $(2, 4)$의 5개

(iv) $b=1$일 때, ㉡에서 $a+c=8$이므로

$(-2, 10)$, $(-1, 9)$, $(0, 8)$, $(1, 7)$, $(2, 6)$,

$(3, 5)$, $(4, 4)$의 7개

(v) $b=2$일 때, ㉡에서 $a+c=10$이므로

$(-2, 12)$, $(-1, 11)$, $(0, 10)$, $(1, 9)$, $(2, 8)$,

$(3, 7)$, $(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$의 9개

(i)~(v)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$1+3+5+7+9=25$

0910 답 9

두 자연수의 백의 자리의 숫자의 합을 a, 십의 자리의 숫자의 합을 b, 일의 자리의 숫자의 합을 c라 하면 두 수의 합은

$100a+10b+c<500$

(i) $a=3=1+2$일 때,

b는 1, 2를 제외한 3, 4, 5, 6에서 두 수를 뽑아 합한 값이 된다.

즉, 7, 8, 9, 10, 11이 될 수 있고 a, b의 값이 정해지면 c의 값도 정해지므로 경우의 수는 5이다.

(ii) $a=4=1+3$일 때,

b는 1, 3을 제외한 2, 4, 5, 6에서 두 수를 뽑아 합한 값이 된다.

즉, 6, 7, 8, 9, 10, 11이 될 수 있는데 10과 11이 되는 경우 합이 500보다 커지므로 제외해야 한다.

또 a, b의 값이 정해지면 c의 값도 정해지므로 경우의 수는 4이다.

(i), (ii)에서 합이 500보다 작은 경우의 수는

$5+4=9$

0911 답 ⑤

한 개의 동전에서 나오는 경우의 수는 2, 한 개의 주사위에서 나오는 경우의 수는 6이므로 구하는 경우의 수는

$2 \times 2 \times 6 \times 6=144$

0912 답 45

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 6, 9의 3개

십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 4의 3개

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7, 9의 5개

따라서 구하는 자연수의 개수는

$3 \times 3 \times 5=45$

0913 답 ④

$72=2^3 \times 3^2$이므로 72의 약수의 개수는

$(3+1) \times (2+1)=12$ $\therefore a=12$

$189=3^3 \times 7$이므로 189의 약수의 개수는

$(3+1) \times (1+1)=8$ $\therefore b=8$

$\therefore a+b=12+8=20$

☑ 중1 다시보기

자연수 A가

$A=a^m \times b^n \times c^l$

(a, b, c는 서로 다른 소수, m, n, l은 자연수)

으로 소인수분해 될 때,

A의 약수 ➡ (a^m의 약수) $\times$ (b^n의 약수) $\times$ (c^l의 약수) 꼴

이므로 A의 약수의 개수는 $(m+1) \times (n+1) \times (l+1)$이다.

0914 답 ②

(가)에서 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4, 6, 8의 5개

(나)에서 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 6의 4개

따라서 구하는 자연수의 개수는

$5 \times 4=20$

0915 답 5

희연이가 커피와 케이크를 주문하는 경우의 수는 $n \times 4=4n$

동균이가 커피와 케이크를 주문하는 경우의 수는

$(n-1) \times 3=3(n-1)$

$4n \times 3(n-1)=240$이므로

$n^2-n-20=0$, $(n+4)(n-5)=0$

$\therefore n=5$ ($\because n$은 자연수)

0916 답 ②

$(a+b)(p+q)(x+y+z)$에서 a, b에 곱해지는 항이 각각 p, q의 2개이고, 그 각각에 대하여 곱해지는 항이 각각 x, y, z의 3개이므로 구하는 항의 개수는

$2 \times 2 \times 3=12$

0917 답 ①

$4^k \times 7^3=2^{2k} \times 7^3$의 약수의 개수는

$(2k+1) \times (3+1)=36$

$2k+1=9$ $\therefore k=4$

0918 답 ③

(i) A → B → C → D로 가는 경우의 수는

$2 \times 2 \times 1=4$

(ii) A → C → B → D로 가는 경우의 수는

$3 \times 2 \times 3=18$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$4+18=22$

0919 답 ④

A에 칠할 수 있는 색은 4가지
C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지
B에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지
D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지
이므로 구하는 경우의 수는
$4\times3\times2\times2=48$

0920 답 ①

$108=2^2\times3^3$과 $360=2^3\times3^2\times5$의 최대공약수는 $2^2\times3^2$
108과 360의 공약수의 개수는 $2^2\times3^2$의 약수의 개수와 같으므로
$(2+1)\times(2+1)=9$

✓ 중1 다시보기

(1) 두 개 이상의 자연수의 공약수는 그 수들의 최대공약수의 약수이다.
(2) 자연수가 소인수분해 된 꼴로 주어졌을 때, 최대공약수와 최소공배수는 소인수의 지수끼리 비교하여 다음과 같이 구한다.
① 최대공약수 ➡ 공통인 소인수 중 지수가 작거나 같은 것을 택한다.
② 최소공배수 ➡ 공통인 소인수 중 지수가 크거나 같은 것을 택하고, 공통이 아닌 소인수도 모두 곱한다.

0921 답 9

$(x+y)^2(a+b+c)=(x^2+2xy+y^2)(a+b+c)$
이때 x^2, $2xy$, y^2에 곱해지는 항이 각각 a, b, c의 3개이므로 구하는 항의 개수는
$3\times3=9$

참고 두 다항식 A, B의 각 항의 문자가 모두 다를 때, 다항식 AB의 전개식의 항의 개수는
➡ (A의 항의 개수)$\times$(B의 항의 개수)

0922 답 ⑤

(i) A → B → C → A로 가는 경우의 수는
$3\times4\times2=24$
(ii) A → C → B → A로 가는 경우의 수는
$2\times4\times3=24$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$24+24=48$

0923 답 ③

10000원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액과 5000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액은 같다.
즉, 10000원짜리 지폐 1장을 5000원짜리 지폐 2장으로 생각하면 구하는 금액의 수는 1000원짜리 지폐 2장, 5000원짜리 지폐 5장으로 지불할 수 있는 금액의 수와 같다.
1000원짜리 지폐 2장으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 1000원, 2000원으로 그 금액의 수는 3
5000원짜리 지폐 5장으로 지불할 수 있는 금액은
0원, 5000원, 10000원, 15000원, 20000원, 25000원으로 그 금액의 수는 6
이때 0원을 지불하는 경우는 제외하므로 구하는 금액의 수는
$3\times6-1=17$

참고 금액이 중복되는 경우 m원짜리 지폐 1장으로 지불할 수 있는 금액과 n원짜리 지폐 p장으로 지불할 수 있는 금액이 같으면 m원짜리 지폐 1장을 n원짜리 지폐 p장으로 바꾸어 생각할 수 있다. (단, n원짜리 지폐의 수가 p 이상일 때만 가능하다.)
따라서 이 문제에서 10000원짜리 지폐 1장을 5000원짜리 지폐 2장으로 바꾸어 생각할 수 있다. 하지만 1000원짜리 지폐의 수가 5000원짜리 지폐 1장을 1000원짜리로 바꾸는 5장보다 작으므로 5000원짜리 지폐는 1000원짜리 지폐로 바꾸어 생각하면 안 된다.

0924 답 ④

십의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 합이 짝수인 경우는 두 자리의 숫자가 모두 짝수이거나 모두 홀수인 경우이다.
두 자리의 숫자가 모두 짝수인 자연수의 개수는
$4\times5=20$
두 자리의 숫자가 모두 홀수인 자연수의 개수는
$5\times5=25$
따라서 구하는 자연수의 개수는
$20+25=45$

0925 답 ②

C에 칠할 수 있는 색은 5가지
A에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 4가지
B에 칠할 수 있는 색은 A, C에 칠한 색을 제외한 3가지
E에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 3가지
D에 칠할 수 있는 색은 C, E에 칠한 색을 제외한 3가지
따라서 구하는 경우의 수는
$5\times4\times3\times3\times3=540$

0926 답 28

540을 소인수분해 하면
$540=2^2\times3^3\times5$ …… ⅰ
짝수는 2를 인수로 가지므로 540의 약수 중 짝수의 개수는
$2\times3^3\times5$의 약수의 개수와 같다.
$\therefore a=(1+1)\times(3+1)\times(1+1)=16$ …… ⅱ
9의 배수는 3^2을 인수로 가지므로 540의 약수 중 9의 배수의 개수는
$2^2\times3\times5$의 약수의 개수와 같다.
$\therefore b=(2+1)\times(1+1)\times(1+1)=12$ …… ⅲ
$\therefore a+b=16+12=28$ …… ⅳ

채점 기준

ⅰ 540을 소인수분해 하기	10%
ⅱ a의 값 구하기	40%
ⅲ b의 값 구하기	40%
ⅳ $a+b$의 값 구하기	10%

0927 답 ②

(i) A와 C에 같은 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색과 같은 색이므로 1가지

D에 칠할 수 있는 색은 A(C)에 칠한 색을 제외한 3가지

따라서 칠하는 경우의 수는

$4\times3\times1\times3=36$

(ii) A와 C에 다른 색을 칠하는 경우

A에 칠할 수 있는 색은 4가지

B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 3가지

C에 칠할 수 있는 색은 A와 B에 칠한 색을 제외한 2가지

D에 칠할 수 있는 색은 A와 C에 칠한 색을 제외한 2가지

따라서 칠하는 경우의 수는

$4\times3\times2\times2=48$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$36+48=84$

다른 풀이

(i) 모두 다른 색을 칠하는 경우의 수는

$4\times3\times2\times1=24$

(ii) A와 C에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$4\times3\times2=24$

(iii) B와 D에만 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$4\times3\times2=24$

(iv) A와 C, B와 D에 각각 같은 색을 칠하는 경우의 수는

$4\times3=12$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$24+24+24+12=84$

0928 답 67

구하는 자연수의 개수는 $2^2\times3^3\times5^2\times7$의 약수의 개수에서 1, 2, 3, 5, 7의 5개를 제외한 것과 같다.

$2^2\times3^3\times5^2\times7$의 약수의 개수는

$(2+1)\times(3+1)\times(2+1)\times(1+1)=72$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$72-5=67$

0929 답 4

B 지점과 D 지점을 연결하는 x개의 도로를 추가한다고 하면

(i) A → B → C로 가는 경우의 수는 $2\times1=2$

(ii) A → D → C로 가는 경우의 수는 $3\times2=6$

(iii) A → B → D → C로 가는 경우의 수는 $2\times x\times2=4x$

(iv) A → D → B → C로 가는 경우의 수는 $3\times x\times1=3x$

(i)~(iv)에서 A 지점에서 출발하여 C 지점으로 가는 경우의 수는

$2+6+4x+3x=7x+8$

즉, $7x+8=36$이므로 $7x=28$

$\therefore x=4$

따라서 추가해야 하는 도로의 개수는 4이다.

0930 답 135

$abc+a+b+c$의 값이 짝수가 되는 경우는 a, b, c가 모두 짝수이거나 또는 모두 홀수이거나 또는 두 수는 홀수이고 한 수는 짝수인 경우이다.

(i) a, b, c가 모두 짝수인 경우

a, b, c가 될 수 있는 수는 모두 2, 4, 6의 3가지이므로

a, b, c가 모두 짝수인 경우의 수는

$3\times3\times3=27$

(ii) a, b, c가 모두 홀수인 경우

a, b, c가 될 수 있는 수는 모두 1, 3, 5의 3가지이므로

a, b, c가 모두 홀수인 경우의 수는

$3\times3\times3=27$

(iii) a, b, c 중 두 수는 홀수이고 한 수는 짝수인 경우

a, b, c 중 짝수를 정하는 경우의 수는 3이고 a, b, c가 될 수 있는 수를 정하는 경우의 수는 각각 3이므로

a, b, c 중 두 수는 홀수이고 한 수는 짝수인 경우의 수는

$3\times3\times3\times3=81$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$27+27+81=135$

다른 풀이

$abc+a+b+c$의 값이 짝수가 되는 경우의 수는 한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 모든 경우의 수에서 $abc+a+b+c$의 값이 홀수가 되는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

한 개의 주사위를 세 번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

$abc+a+b+c$의 값이 홀수가 되는 경우는 a, b, c 중 두 수는 짝수이고 한 수는 홀수인 경우이다. a, b, c 중 홀수를 정하는 경우의 수는 3이고 a, b, c가 될 수 있는 수를 정하는 경우의 수는 각각 3이므로 $abc+a+b+c$의 값이 홀수가 되는 경우의 수는

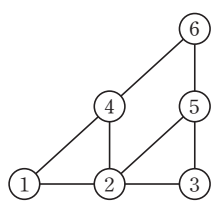
$3\times3\times3\times3=81$

따라서 구하는 경우의 수는

$216-81=135$

0931 답 ④

오른쪽 그림과 같이 6개의 섬에 번호를 부여하면 ②번 섬은 다른 4개의 섬과 다리로 연결되어 있으므로 ②번 섬에 세우는 깃발의 색을 먼저 정한다.



②번 섬에 세우는 깃발과 같은 색의 다른 깃발은 항상 ⑥번 섬에 세워야 한다.

남은 두 색의 깃발 중 한 가지 색을 선택하면 ①번 섬에 깃발을 세우는 경우의 수는 2이다.

①번 섬에 세우는 깃발과 같은 색의 다른 깃발은 ③번 또는 ⑤번 섬에 세워야 하고, 두 섬 중 한 섬을 선택하는 경우의 수는 2이다.

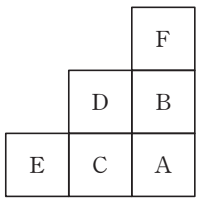
나머지 두 섬에는 남은 깃발을 세운다.

따라서 섬에 깃발을 세우는 경우의 수는

$3\times2\times2=12$

0932 답 72

오른쪽 그림과 같이 각 정사각형을 A, B, C, D, E, F라 하자.



(i) B와 C에 같은 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 3가지
B와 C에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 2가지
D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 2가지
E에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 2가지
F에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 칠하는 경우의 수는
$3\times2\times2\times2\times2=48$

(ii) B와 C에 다른 색을 칠하는 경우
A에 칠할 수 있는 색은 3가지
B에 칠할 수 있는 색은 A에 칠한 색을 제외한 2가지
C에 칠할 수 있는 색은 A, B에 칠한 색을 제외한 1가지
D에 칠할 수 있는 색은 B, C에 칠한 색을 제외한 1가지
E에 칠할 수 있는 색은 C에 칠한 색을 제외한 2가지
F에 칠할 수 있는 색은 B에 칠한 색을 제외한 2가지
따라서 칠하는 경우의 수는
$3\times2\times1\times1\times2\times2=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$48+24=72$

0933 답 ⑤

숫자 3을 일의 자리 또는 십의 자리 또는 백의 자리에 쓰는 경우로 각각 나누어 쓰는 횟수를 구해 보자.

(i) 숫자 3을 일의 자리에 쓰는 경우
ⓘ 한 자리의 수일 때, 그 횟수는 3의 1
ⓘⓘ 두 자리의 수일 때,
십의 자리에 올 수 있는 숫자는
1, 2, 3, …, 9의 9개
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 3의 1개
$\therefore 9\times1=9$
ⓘⓘⓘ 세 자리의 수일 때,
백의 자리에 올 수 있는 숫자는
1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개
십의 자리에 올 수 있는 숫자는
0, 1, 2, …, 9의 10개
일의 자리에 올 수 있는 숫자는 3의 1개
$\therefore 6\times10\times1=60$
ⓘ, ⓘⓘ, ⓘⓘⓘ에서 숫자 3을 일의 자리에 쓰는 횟수는
$1+9+60=70$

(ii) 숫자 3을 십의 자리에 쓰는 경우
ⓘ 두 자리의 수일 때,
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 3의 1개
일의 자리에 올 수 있는 숫자는
0, 1, 2, …, 9의 10개
$\therefore 1\times10=10$
ⓘⓘ 세 자리의 수일 때,
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 3의 1개
일의 자리에 올 수 있는 숫자는
0, 1, 2, …, 9의 10개
$\therefore 6\times1\times10=60$
ⓘ, ⓘⓘ에서 숫자 3을 십의 자리에 쓰는 횟수는
$10+60=70$

(iii) 숫자 3을 백의 자리에 쓰는 경우
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 3의 1개
십의 자리에 올 수 있는 숫자는
0, 1, 2, …, 9의 10개
일의 자리에 올 수 있는 숫자는
0, 1, 2, …, 9의 10개
$\therefore 1\times10\times10=100$

(i), (ii), (iii)에서 숫자 3을 쓰는 총 횟수는
$70+70+100=240$

최고수준 도전 기출 193쪽

0934 답 ③

전략 순서쌍 $(|x|, |y|, |z|)$가 될 수 있는 경우를 먼저 구한 후 0을 포함하는 경우와 포함하지 않는 경우로 나누어 각각의 순서쌍의 개수를 구한다.

주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 $(|x|, |y|, |z|)$는
$(11, 1, 0), (10, 2, 0), (9, 3, 0), (8, 4, 0), (7, 5, 0),$
$(9, 2, 1), (8, 3, 1), (7, 4, 1), (6, 5, 1), (7, 3, 2),$
$(6, 4, 2), (5, 4, 3)$

(i) 0을 포함하는 경우
$(11, 1, 0), (10, 2, 0), (9, 3, 0), (8, 4, 0), (7, 5, 0)$의 5개
이때 $(|x|, |y|, |z|)=(a, b, 0)$ 꼴에서 (x, y, z)는
$(a, b, 0), (a, -b, 0), (-a, b, 0), (-a, -b, 0)$의 4개가 있다.
따라서 0을 포함하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$5\times4=20$

(ii) 0을 포함하지 않는 경우
$(9, 2, 1), (8, 3, 1), (7, 4, 1), (6, 5, 1), (7, 3, 2),$
$(6, 4, 2), (5, 4, 3)$의 7개
이때 $(|x|, |y|, |z|)=(a, b, c)$ 꼴에서 (x, y, z)는
$(a, b, c), (a, b, -c), (a, -b, c), (-a, b, c),$
$(a, -b, -c), (-a, b, -c), (-a, -b, c),$
$(-a, -b, -c)$의 8개가 있다.
따라서 0을 포함하지 않는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$7\times8=56$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는
$20+56=76$

0935 답 ①

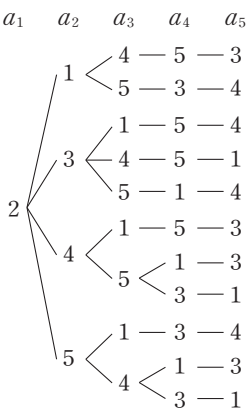
전략 $a_1=2$, $a_1=3$, $a_1=4$, $a_1=5$인 경우로 나누어 수형도를 이용하여 자연수의 개수를 구한다.

오른쪽 수형도를 이용하면 $a_1=2$일 때, 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 11이다.

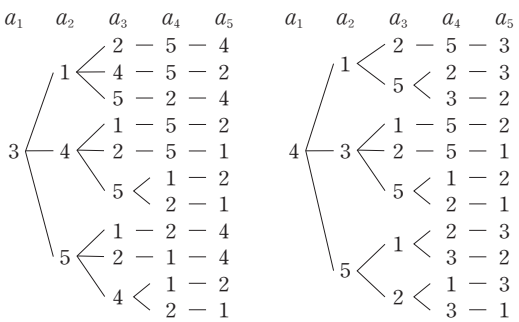
같은 방법으로 수형도를 이용하면 $a_1=3$, $a_1=4$, $a_1=5$일 때 조건을 만족시키는 자연수의 개수는 각각 11이다.

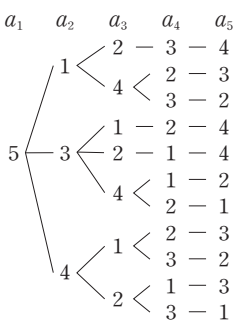
따라서 구하는 자연수의 개수는

$11\times4=44$



참고 $a_1=3$, $a_1=4$, $a_1=5$일 때의 수형도는 다음과 같다.





0936 답 ⑤

전략 2^m의 일의 자리의 숫자와 3^n의 일의 자리의 숫자가 각각 반복됨을 이용하여 그 합의 일의 자리의 숫자가 3이 되는 경우의 수를 구한다.

2^m의 일의 자리의 숫자는 2, 4, 8, 6이 반복되고,

3^n의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 반복된다.

2^m+3^n의 일의 자리의 숫자가 3이 되는 경우는

(i) 일의 자리의 숫자가 2^m은 2이고, 3^n은 1인 경우

2^m의 일의 자리의 숫자가 2일 때 m의 값은

1, 5, 9, …, 29의 8가지

3^n의 일의 자리의 숫자가 1일 때 n의 값은

4, 8, 12, …, 28의 7가지

따라서 2^m+3^n의 일의 자리의 숫자가 3이 되는 경우의 수는

$8\times7=56$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2^m은 4이고, 3^n은 9인 경우

2^m의 일의 자리의 숫자가 4일 때 m의 값은

2, 6, 10, …, 30의 8가지

3^n의 일의 자리의 숫자가 9일 때 n의 값은

2, 6, 10, …, 30의 8가지

따라서 2^m+3^n의 일의 자리의 숫자가 3이 되는 경우의 수는

$8\times8=64$

(iii) 일의 자리의 숫자가 2^m은 6이고, 3^n은 7인 경우

2^m의 일의 자리의 숫자가 6일 때 m의 값은

4, 8, 12, …, 28의 7가지

3^n의 일의 자리의 숫자가 7일 때 n의 값은

3, 7, 11, …, 27의 7가지

따라서 2^m+3^n의 일의 자리의 숫자가 3이 되는 경우의 수는

$7\times7=49$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$56+64+49=169$

0937 답 ②

전략 조건 A를 만족시키는 경우의 수를 구하기 어려울 때에는 모든 경우의 수에서 조건 A를 만족시키지 않는 경우의 수를 빼서 구한다.

$\begin{cases} x^2+ax-y=0 & \cdots\cdots ㉠ \\ bx+y+c=0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

㉠+㉡을 하면

$x^2+(a+b)x+c=0$

이 이차방정식이 실수인 해를 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=(a+b)^2-4c\geq0$

$\therefore (a+b)^2\geq4c$ ····· ㉢

이때 ㉢을 만족시키는 경우의 수는 모든 경우의 수에서

$(a+b)^2<4c$를 만족시키는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

c의 값에 따른 $(a+b)^2<4c$를 만족시키는 a, b의 순서쌍 (a, b)를 구하면

(i) $c=1$일 때, $(a+b)^2<4$를 만족시키는 a, b는 존재하지 않는다.

(ii) $c=2$일 때, $(a+b)^2<8$이므로

$(1, 1)$의 1개

(iii) $c=3$일 때, $(a+b)^2<12$이므로

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$의 3개

(iv) $c=4$일 때, $(a+b)^2<16$이므로

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$의 3개

(v) $c=5$일 때, $(a+b)^2<20$이므로

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 6개

(vi) $c=6$일 때, $(a+b)^2<24$이므로

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$의 6개

(i)~(vi)에서 $(a+b)^2<4c$를 만족시키는 경우의 수는

$1+3+3+6+6=19$

한 개의 주사위를 세 번 던져서 a, b, c를 정하는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$이므로 구하는 경우의 수는

$216-19=197$

13 순열

난이도별 필수 기출 195~206쪽

0938 답 ⑤

구하는 경우의 수는 6명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수와 같으므로

$6!=720$

0939 답 ⑤

${}_7P_3=210$

0940 답 990

서로 다른 11개에서 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_{11}P_3=990$

0941 답 ②

D 칸에 올 수 있는 수는 2, 4, 6이므로 3개이다.

그 각각에 대하여 D 칸에 적은 수를 제외한 나머지 5개의 수 중에서 3개를 택하여 3개의 칸 A, B, C에 적는 방법의 수는 ${}_5P_3=60$

따라서 구하는 방법의 수는

$3\times60=180$

0942 답 10

n명 중에서 3명을 택하는 순열의 수가 720이므로 ${}_nP_3=720$

$720=10\times9\times8$이므로

$n(n-1)(n-2)=10\times9\times8$

$\therefore n=10$ ($\because n$은 자연수)

0943 답 12

첫 번째 발표회에서 발표 순서를 정하는 경우의 수는 $3!=6$

두 번째 발표회에서 발표 순서를 정하는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 전체 발표 순서를 정하는 경우의 수는

$6\times2=12$

0944 답 240

정민이와 지은이 사이에 5명이 일렬로 서는 경우의 수는 $5!=120$

정민이와 지은이가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times2=240$

0945 답 ⑤

여학생 2명을 한 명으로 생각하여 남학생 4명과 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!=120$

여학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times2=240$

0946 답 ④

주장이 첫 번째 순서에 공을 찰 때, 나머지 4명의 선수의 순서를 정하는 경우의 수는

${}_8P_4=1680$

주장이 다섯 번째 순서에 공을 찰 때, 나머지 4명의 선수의 순서를 정하는 경우의 수는

${}_8P_4=1680$

따라서 구하는 경우의 수는

$1680+1680=3360$

0947 답 ⑤

학생 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $5!=120$

학생 사이사이와 양 끝에 선생님 3명을 세우는 경우의 수는

${}_6P_3=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times120=14400$

0948 답 3

고등학생 4명을 한 명으로 생각하여 $(n+1)$명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $(n+1)!$

고등학생 4명이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $4!=24$

이때 고등학생끼리 서로 이웃하게 세우는 경우의 수가 576이므로

$(n+1)!\times24=576$ …… ⓘ

$(n+1)!=24=4\times3\times2\times1$

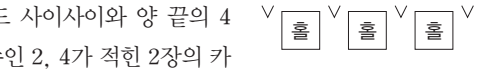
따라서 $n+1=4$이므로 $n=3$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 고등학생끼리 서로 이웃하게 세우는 경우의 수를 이용하여 식 세우기	50 %
ⓘⓘ n의 값 구하기	50 %

0949 답 ⑤

홀수인 1, 3, 5가 적힌 3장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3!=6$

홀수가 적힌 카드 사이사이와 양 끝의 4개의 자리에 짝수인 2, 4가 적힌 2장의 카드를 나열하는 경우의 수는



${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times12=72$

0950 답 ①

남학생 사이사이에 항상 2명의 여학생이 있도록 세우는 경우는 다음과 같다.



남학생 3명을 세우는 경우의 수는 $3!=6$

여학생 4명을 세우는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times24=144$

0951 답 ③

남학생, 여학생의 순서로 교대로 서는 경우의 수는

$4!\times4!=24\times24=576$

여학생, 남학생의 순서로 교대로 서는 경우의 수는

$4!\times4!=24\times24=576$

따라서 구하는 경우의 수는

$576+576=1152$

0952 답 ②

1학년 학생끼리 한 묶음, 2학년 학생끼리 한 묶음, 3학년 학생끼리 한 묶음으로 생각하여 3묶음을 일렬로 세우는 경우의 수는

$3!=6$

각각의 묶음에서 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!, 2!, 3!이므로 구하는 경우의 수는

$6\times2!\times2!\times3!=6\times2\times2\times6=144$

0953 답 ③

6명의 학생이 일렬로 서는 경우의 수는 $6!=720$

가현이와 강빈이를 한 묶음으로 생각하여 일렬로 서는 경우의 수는

$5!\times2!=120\times2=240$

따라서 가현이와 강빈이 사이에 적어도 한 명의 학생이 서서 사진을 찍는 경우의 수는

$720-240=480$

0954 답 192

(i) 20대 참가자가 첫 번째와 마지막 무대에 오르는 경우

20대 참가자 3명 중에서 2명을 뽑아 첫 번째와 마지막 무대에 세우는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

나머지 참가자 4명을 무대에 세우는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 20대 참가자가 첫 번째와 마지막 무대에 오르는 경우의 수는 $6\times24=144$ …… ⓘ

(ii) 30대 참가자가 첫 번째와 마지막 무대에 오르는 경우

30대 참가자 2명을 첫 번째와 마지막 무대에 세우는 경우의 수는 $2!=2$

나머지 참가자 4명을 무대에 세우는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 30대 참가자가 첫 번째와 마지막 무대에 오르는 경우의 수는 $2\times24=48$ …… ⓘⓘ

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$144+48=192$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 20대 참가자가 첫 번째와 마지막 무대에 오르는 경우의 수 구하기	40 %
ⓘⓘ 30대 참가자가 첫 번째와 마지막 무대에 오르는 경우의 수 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 경우의 수 구하기	20 %

0955 답 24

3명이 내리게 될 3개의 층과 1층을 제외하면 사람이 내리지 않는 층은 3개이다.

이 3개의 층 사이사이와 양 끝의 4개의 층 중에서 서로 다른 3개를 택하여 각각 1명씩 내리면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 순열의 수와 같으므로

${}_4P_3=24$

0956 답 120

1학년 학생 10명을 일렬로 세우는 경우의 수는 10!

$\vee\,(1,1)\vee(1,1)\vee(1,1)\vee(1,1)\vee(1,1)\vee$

이때 1학년 학생을 2명씩 묶어서 묶음 사이사이와 양 끝의 6개의 자리에 2학년 학생 3명을 세우는 경우의 수는

${}_6P_3=120$

따라서 $120\times10!=n\times10!$이므로 $n=120$

0957 답 ④

이웃하지 않는 두 개의 케이지를 선택하는 경우는

a와 c, a와 e, a와 f, b와 d, b와 f, c와 d, c와 e, c와 f, e와 f

의 9가지이다.

이 두 케이지에 고양이와 햄스터를 넣는 경우의 수는

$2!=2$

나머지 4개의 케이지에 4마리의 동물을 넣는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$9\times2\times24=432$

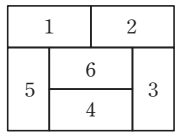
0958 답 1200

오른쪽 그림에서 서로 이웃한 2개 지역을 고르는 경우는

1과 2, 1과 5, 1과 6, 2와 3, 2와 6,

3과 4, 3과 6, 4와 5, 4와 6, 5와 6

의 10가지이다.



이웃한 2개 지역을 담당하는 1명을 정하고, 나머지 4개 지역을 담당하는 4명을 정하는 경우의 수는 $5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times120=1200$

0959 답 ①

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 4개

나머지 자리에 천의 자리의 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4\times24=96$

참고 서로 다른 n개의 숫자를 한 번씩 사용하여 만들 수 있는 r자리의 자연수의 개수

(1) n개의 숫자에 0이 없는 경우 ➡ ${}_nP_r$

(2) n개의 숫자에 0이 있는 경우 ➡ $(n-1)\times{}_{n-1}P_{r-1}$

0960 답 ⑤

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5, 7의 4개

나머지 자리에 일의 자리의 숫자를 제외한 6개의 숫자 중에서 4개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는 ${}_6P_4=360$

따라서 구하는 홀수의 개수는

$4\times360=1440$

0961 답 312

짝수이려면 일의 자리의 숫자가 0 또는 2 또는 4이어야 한다.

(ⅰ) 일의 자리의 숫자가 0인 짝수의 개수

0을 제외한 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 $5!=120$ …… ⓘ

(ⅱ) 일의 자리의 숫자가 2인 짝수의 개수

첫째 자리에 올 수 있는 숫자는 0과 2를 제외한 4개

나머지 자리에 첫째 자리에 오는 숫자와 2를 제외한 4개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!=24$

일의 자리의 숫자가 2인 짝수의 개수는 $4\times24=96$ …… ⓘⓘ

(ⅲ) 일의 자리의 숫자가 4인 짝수의 개수

(ⅱ)와 같은 방법으로 하면 96 …… ⓘⓘⓘ

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 짝수의 개수는

$120+96+96=312$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ 일의 자리의 숫자가 0인 짝수의 개수 구하기	30 %
ⓘⓘ 일의 자리의 숫자가 2인 짝수의 개수 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 일의 자리의 숫자가 4인 짝수의 개수 구하기	30 %
ⓘⓥ 짝수의 개수 구하기	10 %

0962 답 ①

9개의 숫자 중에서 4개의 숫자를 사용하여 네 자리의 비밀번호를 만드는 경우의 수는 ${}_9P_4=3024$

짝수만을 이용하여 네 자리의 비밀번호를 만드는 경우의 수는

$4!=24$

따라서 구하는 비밀번호의 개수는

$3024-24=3000$

0963 답 54

57□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

6□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

7□□□□ 꼴인 자연수의 개수는 $4!=24$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6+24+24=54$

0964 답 ①

5의 배수이려면 일의 자리의 숫자가 5이어야 한다.

1□□□5 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

2□□□5 꼴인 자연수의 개수는 $3!=6$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$6+6=12$

0965 답 ②

1□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_3=24$

2□□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_3=24$

30□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_3P_2=6$

310□ 꼴인 자연수는 3102, 3104이므로 3104는

$24+24+6+2=56$(번째)로 작은 수이다.

0966 답 ③

7□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$

5□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$

3□□ 꼴인 자연수의 개수는 ${}_4P_2=12$

이때 $12+12+12=36$이므로 1□□ 꼴인 자연수를 큰 수부터 나열해 보면 175, 173, 170, 157, …

따라서 40번째에 오는 수는 157이다.

0967 답 20

3의 배수가 되려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

5개의 숫자 0, 2, 4, 6, 8 중에서 서로 다른 3개를 택할 때, 그 합이 3의 배수인 경우는 다음과 같다.

0, 2, 4 또는 0, 4, 8 또는 2, 4, 6 또는 4, 6, 8 …… ⓘ

(ⅰ) 0, 2, 4로 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$2\times2!=4$

(ⅱ) 0, 4, 8로 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$2\times2!=4$

(ⅲ) 2, 4, 6으로 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$3!=6$

(ⅳ) 4, 6, 8로 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$3!=6$ …… ⓘⓘ

(ⅰ)~(ⅳ)에서 3의 배수인 세 자리의 자연수의 개수는

$4+4+6+6=20$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 3의 배수가 되도록 3개의 숫자를 택하는 경우 모두 구하기	30 %
ⓘⓘ 각 경우에서 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수 구하기	60 %
ⓘⓘⓘ 3의 배수인 세 자리의 자연수의 개수 구하기	10 %

0968 답 ④

4의 배수는 끝에서 두 자리의 수가 4의 배수이어야 한다.

주어진 숫자로 만들 수 있는 4의 배수인 끝에서 두 자리의 수는

04, 12, 20, 24, 32, 40, 52

(ⅰ) 끝에서 두 자리의 수가 04, 20, 40인 경우

4개의 숫자 중에서 나머지 두 자리의 수를 만드는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

(ⅱ) 끝에서 두 자리의 수가 12, 24, 32, 52인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 끝의 두 자리의 두 수와 0을 제외한 3개이고, 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 나머지 3개이므로 4의 배수를 만드는 경우의 수는 $3\times3=9$

(ⅰ), (ⅱ)에서 4의 배수의 개수는 $3\times12+4\times9=72$

0969 답 ④

(가)에서 2, 3, 5가 서로 이웃하지 않아야 하고, (나)에서 4, 6이 서로 이웃하지 않아야 한다.

1, 4, 6을 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3!=6$

1, 4, 6 사이사이와 양 끝에 2, 3, 5를 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$

따라서 소수끼리 서로 이웃하지 않게 배열하는 경우의 수는

$6\times24=144$

이때 4, 6이 서로 이웃하면서 소수끼리 서로 이웃하지 않게 배열하는 경우의 수는 4, 6을 한 묶음으로 생각하여 1, (4와 6) 사이와 양 끝에 2, 3, 5를 배열하는 경우의 수와 같으므로

$2! \times 2! \times {}_3P_3 = 2 \times 2 \times 6 = 24$

따라서 만들 수 있는 자연수의 개수는 $144 - 24 = 120$

0970 답 ③

9의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 9의 배수이어야 하므로 9개의 숫자 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 중에서 서로 다른 3개를 사용하여 9의 배수를 만드는 경우는

(0, 1, 8), (0, 2, 7), (0, 3, 6), (0, 4, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 7, 8), (4, 6, 8), (5, 6, 7)

(i) (0, 1, 8), (0, 2, 7), (0, 3, 6), (0, 4, 5)를 사용하여 9의 배수를 만드는 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 0을 제외한 2개

나머지 자리에 백의 자리의 숫자를 제외한 2개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 9의 배수의 개수는 $4 \times 2 \times 2 = 16$

(ii) (1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 7, 8), (4, 6, 8), (5, 6, 7)을 사용하여 9의 배수를 만드는 경우

3개의 숫자를 일렬로 나열하는 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 9의 배수의 개수는 $6 \times 6 = 36$

(i), (ii)에서 구하는 9의 배수의 개수는 $16 + 36 = 52$

0971 답 ③

각 자리의 숫자들의 합이 홀수이려면 세 자리의 숫자가 모두 홀수이거나 두 자리의 숫자는 0 또는 짝수, 한 자리의 숫자는 홀수이어야 한다.

(i) 세 자리의 숫자가 모두 홀수인 경우

1, 3, 5, 7, 9의 5개의 숫자 중에서 3개를 뽑아 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 ${}_5P_3 = 60$

(ii) 두 자리의 숫자는 0 또는 짝수, 한 자리의 숫자는 홀수인 경우

ⓘ (홀수, 0 또는 짝수, 0 또는 짝수)인 경우

백의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 5

십의 자리, 일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_5P_2 = 20$

따라서 자연수의 개수는 $5 \times 20 = 100$

ⓘⓘ (짝수, 홀수, 0 또는 짝수)인 경우

백의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 4

십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 5

일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 4

따라서 자연수의 개수는 $4 \times 5 \times 4 = 80$

ⓘⓘⓘ (짝수, 0 또는 짝수, 홀수)인 경우

백의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 4

십의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 4

일의 자리의 숫자를 택하는 경우의 수는 5

따라서 자연수의 개수는 $4 \times 4 \times 5 = 80$

ⓘ, ⓘⓘ, ⓘⓘⓘ에서 자연수의 개수는 $100 + 80 + 80 = 260$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$60 + 260 = 320$

0972 답 96

400보다 크고 4000보다 작은 자연수를 세 자리의 자연수인 경우와 네 자리의 자연수인 경우로 나누어 구해 보자.

(i) 세 자리의 자연수

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 4, 5의 2개

나머지 자리에 백의 자리의 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_2 = 12$

따라서 세 자리의 자연수의 개수는

$2 \times 12 = 24$

(ii) 네 자리의 자연수

천의 자리의 숫자에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3의 3개

나머지 자리에 천의 자리의 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 3개를 택하여 일렬로 나열하는 경우의 수는 ${}_4P_3 = 24$

따라서 네 자리의 자연수의 개수는

$3 \times 24 = 72$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$24 + 72 = 96$

0973 답 336

9개의 숫자 중에서 3개를 택하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는 ${}_9P_3 = 504$

각 자리의 수 중에서 두 수의 합이 9가 되는 경우는

(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5)의 4가지

각각의 경우에 대하여 이미 택한 2개의 숫자를 제외한 나머지 7개의 숫자 중에서 1개를 택하여 일렬로 배열하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는

$4 \times {}_7P_1 \times 3! = 4 \times 7 \times 6 = 168$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$504 - 168 = 336$

0974 답 673

1부터 9까지의 자연수 중 소수는 2, 3, 5, 7의 4개이고 비밀번호는 소수가 2개 이상 포함되어야 하므로 가장 큰 수부터 생각하면

(i) 9□□ 꼴인 자연수의 개수

${}_4P_2 = 12$

(ii) 8□□ 꼴인 자연수의 개수

${}_4P_2 = 12$

(iii) 7□□ 꼴인 자연수의 개수

소수를 2개 포함하는 경우는

$3 \times 5 \times 2! = 30$

소수를 3개 포함하는 경우는

${}_3P_2 = 6$

$\therefore 30 + 6 = 36$

(i), (ii), (iii)에서 백의 자리의 숫자가 9, 8, 7인 자연수의 개수는

$12 + 12 + 36 = 60$

따라서 61번째의 수는 백의 자리의 숫자가 6이고 소수를 2개 포함하는 수 중에서 가장 큰 수이므로 675이고 62번째의 수는 백의 자리의 숫자가 6이고 소수를 2개 포함하는 수 중에서 두 번째로 큰 수이므로 673이다.

0975 답 ①

전송한 다섯 자리의 수를 $4abc0$이라 하면 $a+b+c$=(짝수)인 경우는 a, b, c가 모두 0 또는 짝수이거나 a, b, c 중 하나는 0 또는 짝수이고, 나머지는 홀수인 경우이다.

(단, a, b, c는 0, 1, 2, …, 9인 서로 다른 정수)

(i) a, b, c가 모두 0 또는 짝수인 경우

a, b, c를 정하는 방법의 수는 0, 2, 4, 6, 8의 5개 중에서 서로 다른 3개를 뽑아 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

${}_5P_3=60$

(ii) a, b, c 중 하나는 0 또는 짝수이고, 나머지는 홀수인 경우

ⓘ a가 0 또는 짝수일 때,

a는 0, 2, 4, 6, 8의 5개 중에서 하나이다.

b, c를 정하는 방법의 수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개 중에서 2개를 뽑아 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$5\times{}_5P_2=5\times20=100$

ⓘⓘ b가 0 또는 짝수일 때,

ⓘ과 같은 방법으로 하면 $5\times{}_5P_2=5\times20=100$

ⓘⓘⓘ c가 0 또는 짝수일 때,

ⓘ과 같은 방법으로 하면 $5\times{}_5P_2=5\times20=100$

ⓘ, ⓘⓘ, ⓘⓘⓘ에서 a, b, c 중 하나는 0 또는 짝수이고, 나머지는 홀수인 경우의 수는

$100+100+100=300$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$60+300=360$

0976 답 720

2개의 문자 e를 한 묶음으로 생각하여 6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $6!=720$

2개의 문자 e는 같은 문자이므로 자리를 바꾸는 경우의 수는 1

따라서 구하는 경우의 수는 $720\times1=720$

0977 답 1440

4개의 자음 p, r, v, d 중에서 양 끝에 오는 2개의 자음을 택하여 배열하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

나머지 5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $5!=120$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times120=1440$

0978 답 ⑤

모음 i와 e를 한 묶음으로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $5!=120$

i와 e의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$120\times2=240$

0979 답 480

C, D, E, F를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!=24$

배열한 C, D, E, F 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 A, B를 배열하는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times20=480$

다른 풀이

6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $6!=720$

A와 B를 한 묶음으로 생각하여 5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $5!=120$

A와 B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

A와 B가 서로 이웃하도록 배열하는 경우의 수는

$120\times2=240$

따라서 구하는 경우의 수는 $720-240=480$

0980 답 ②

6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $6!=720$

4개의 자음 l, m, n, d 중에서 양 끝에 오는 2개의 자음을 택하여 배열하는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

그 각각에 대하여 나머지 4개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!=24$

양 끝에 모두 자음이 오는 경우의 수는

$12\times24=288$

따라서 구하는 경우의 수는

$720-288=432$

0981 답 144

자음은 j, s, t, c의 4개이고 모음은 u, i, e의 3개이므로 자음 4개를 일렬로 배열하고 그 사이사이에 모음 3개를 배열하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$4!\times3!=24\times6=144$

0982 답 ⑤

모음은 a, e의 2개이므로 1, 3, 5번째 자리 중 두 자리에 모음을 배열하는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

나머지 네 자리에 자음 4개를 배열하는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times24=144$

0983 답 79번째

a□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

m□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

r□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

sa□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$ …… ⓘ

sm□□□ 꼴인 문자열에서 smart는 첫 번째이므로 smart가 나타나는 순서는

$24+24+24+6+1=79$(번째) …… ⓘⓘ

채점 기준

ⓘ a, m, r, sa로 시작하는 문자열의 개수 각각 구하기	50 %
ⓘⓘ smart는 몇 번째에 나타나는지 구하기	50 %

0984 답 4

7개의 알파벳을 일렬로 배열하는 경우의 수는 $7!=5040$

모음의 개수를 n이라 하면 양 끝에 모두 모음이 오도록 배열하는 경우의 수는

${}_nP_2\times5!=120\times{}_nP_2$

이때 적어도 한쪽 끝에 자음이 오도록 배열하는 경우의 수가 4320이므로

$5040-120\times{}_nP_2=4320$

$120\times{}_nP_2=720 \quad \therefore {}_nP_2=6$

즉, $n(n-1)=6=3\times2$이므로 $n=3$ ($\because$ n은 자연수)

따라서 모음의 개수가 3이므로 자음의 개수는 $7-3=4$

0985 답 ⑤

C와 G 사이에 C와 G를 제외한 5개의 문자 중 3개의 문자를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는 ${}_5P_3=60$

C와 G의 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

C□□□G를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$60\times2\times6=720$

0986 답 ④

a와 b가 이웃하는 경우의 수는 a와 b를 한 묶음으로 생각하여 일렬로 배열한 후 a와 b가 자리를 바꾸는 경우의 수를 곱한 것과 같으므로

$4!\times2!=24\times2=48$

마찬가지 방법으로 b와 c가 이웃하는 경우의 수는 48

이때 a와 b, b와 c가 모두 이웃하는 경우의 수는 abc 또는 cba를 하나로 생각하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$2\times3!=2\times6=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$48+48-12=84$

0987 답 *dbace*

a□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

b□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

c□□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $4!=24$

da□□□ 꼴인 문자열의 개수는 $3!=6$ …… ⓘ

이때 a□□□□ 꼴인 문자열부터 da□□□ 꼴인 문자열까지의 총개수는

$24+24+24+6=78$ …… ⓘⓘ

따라서 79번째에 오는 문자열은 $dbace$이다. …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ a, b, c, da로 시작하는 문자열의 개수 각각 구하기	40 %
ⓘⓘ da로 시작하는 문자열까지의 총개수 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 79번째에 오는 문자열 구하기	30 %

0988 답 ④

(가), (나)에서 A와 B를 한 묶음, C와 D를 한 묶음으로 생각하여 5명을 일렬로 세우는 경우의 수는

$5!\times2!\times2!=120\times2\times2=480$

이때 (가), (나)를 만족시키면서 B와 C가 서로 이웃하는 경우는

(i) ABCD를 한 묶음으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수

$4!=24$

(ii) DCBA를 한 묶음으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수

$4!=24$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$480-(24+24)=432$

0989 답 ③

6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $6!=720$

(i) V와 S 사이에 문자가 없는 경우

V, S가 이웃하는 경우이므로 V, S를 한 묶음으로 생각하여 배열하는 경우의 수는

$5!\times2!=120\times2=240$

(ii) V와 S 사이에 한 개의 문자가 있는 경우

V와 S를 제외한 4개의 문자 중에서 V와 S 사이에 들어갈 문자 1개를 택한 후 세 문자를 한 묶음으로 생각하여 배열하는 경우의 수는

$4\times4!\times2!=4\times24\times2=192$

(i), (ii)에서 V와 S 사이에 문자가 2개 미만인 경우의 수는

$240+192=432$

따라서 V와 S 사이에 문자가 2개 이상인 경우의 수는

$720-432=288$

다른 풀이

(i) V와 S 사이에 문자가 2개 있는 경우의 수는

${}_4P_2\times2!\times3!=12\times2\times6=144$

(ii) V와 S 사이에 문자가 3개 있는 경우의 수는

${}_4P_3\times2!\times2!=24\times2\times2=96$

(iii) V와 S 사이에 문자가 4개 있는 경우의 수는

$4!\times2!=24\times2=48$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$144+96+48=288$

0990 답 ⑤

(i) b와 d 사이에 a, e를 배열하는 경우

b, a, e, d를 한 묶음으로 생각하여 배열하는 경우의 수는 $3!=6$

b와 d가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

a와 e가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 b와 d 사이에 a, e를 배열하는 경우의 수는

$6\times2\times2=24$

(ii) b와 d 사이에 c, f를 배열하는 경우

b, c, f, d를 한 묶음으로 생각하고 a, e를 한 묶음으로 생각하여 배열하는 경우의 수는 $2!=2$

b와 d가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

c와 f가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

a와 e가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 b와 d 사이에 c, f를 배열하는 경우의 수는

$2\times2\times2\times2=16$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $24+16=40$

0991 답 ②

5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $5!=120$

AB를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!=24$

BC를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!=24$

CA를 한 문자로 생각하여 4개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!=24$

ABC를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3!=6$

BCA를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3!=6$

CAB를 한 문자로 생각하여 3개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 문자열의 개수는

$120-\{(24+24+24)-(6+6+6)\}=66$

참고 AB가 포함된 문자열은 ABC, CAB가 포함된 문자열을 포함하고, BC가 포함된 문자열은 ABC, BCA가 포함된 문자열을 포함하고, CA가 포함된 문자열은 BCA, CAB가 포함된 문자열을 포함한다.

따라서 AB, BC, CA가 포함된 문자열의 개수의 합에는 ABC, BCA, CAB가 포함된 문자열의 개수가 중복으로 더해졌으므로 ABC, BCA, CAB가 포함된 문자열의 개수의 합을 뺀다.

0992 답 576

앞줄에 여학생이 앉는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$

뒷줄에 남학생이 앉는 경우의 수는 $4!=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times24=576$

0993 답 ②

부부끼리 묶어 한 사람으로 생각하면 3명이 일렬로 앉는 경우의 수는 $3!=6$

부부끼리 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 각각 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times2\times2\times2=48$

0994 답 84

(i) A, B가 2인용 소파에 이웃하여 앉는 경우의 수는

$2!\times3!=2\times6=12$

(ii) A, B가 3인용 소파에 이웃하여 앉는 경우의 수는

$2\times2!\times3!=2\times2\times6=24$

(i), (ii)에서 A, B가 이웃하여 앉는 경우의 수는

$12+24=36$ …… (i)

5명이 소파에 나누어 앉는 전체 경우의 수는 $5!=120$이므로 A와 B가 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는

$120-36=84$ …… (ii)

채점 기준	
(i) A와 B가 이웃하여 앉는 경우의 수 구하기	60%
(ii) A와 B가 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수 구하기	40%

0995 답 ②

두 명의 학생이 빈 의자 9개 중에서 서로 다른 의자에 앉는 경우의 수는 ${}_9P_2=72$

두 명의 학생 사이에 빈 의자가 없도록 이웃하여 앉는 경우의 수는

$8\times2=16$

따라서 두 명 사이에 적어도 하나의 빈 의자가 있도록 앉는 경우의 수는

$72-16=56$

0996 답 ③

2학년 학생 4명이 일렬로 앉는 경우의 수는 $4!=24$

2학년 학생 사이사이의 3개의 자리에 1학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$24\times6=144$

다른 풀이

양 끝에 있는 의자에 2학년 학생 4명 중에서 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

나머지 4개의 의자에 1학년 학생끼리는 서로 이웃하지 않도록 앉는 경우는 오른쪽 그림과 같이 3가지가 있다.

1	2	1	2
1	2	2	1
2	1	2	1

각각의 경우에 대하여 1학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 $2!=2$

2학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times3\times2\times2=144$

0997 답 720

여학생 2명 사이에 빈 의자가 없도록 이웃하여 앉는 경우의 수는

$6\times2=12$

남은 5개의 의자에 남학생 3명이 앉는 경우의 수는

${}_5P_3=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$12\times60=720$

0998 답 ⑤

A, B가 앉는 줄을 선택하는 경우의 수는 2

한 줄에 놓인 3개의 좌석 중에서 2개의 좌석을 택하여 A, B가 앉는 경우의 수는 ${}_3P_2=6$

나머지 세 명이 맞은편 줄의 좌석에 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times6\times6=72$

0999 답 ⑤

할아버지와 할머니는 같은 열, 아버지와 어머니는 다른 열에 앉도록 나누는 경우는

{(할아버지, 할머니, 아버지), (어머니, 아들, 딸)} 또는

{(할아버지, 할머니, 어머니), (아버지, 아들, 딸)}

두 묶음의 열을 정하는 경우의 수는 $2!=2$

할아버지와 할머니가 있는 열에서 두 분이 이웃하게 앉는 경우의 수는

$2\times2!=4$

할아버지와 할머니가 없는 열에서 세 명이 앉는 경우의 수는

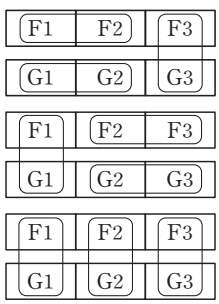
$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times2\times4\times6=96$

1000 답 ⑤

같은 학년 학생이 앉는 자리를 로 나타내어 좌석 6개를 3개의 영역으로 나누면 같은 학년 학생끼리 앞뒤로 앉거나 옆으로 나란히 앉는 방법은 오른쪽과 같이 3가지 경우가 있다.



같은 학년 학생을 묶어 한 사람으로 생각하면 3명이 3개의 영역에 앉는 방법의 수는 $3!=6$

그 각각에 대하여 같은 학년 학생끼리 서로 자리를 바꾸는 방법의 수는 각각 $2!=2$

따라서 구하는 방법의 수는

$3\times6\times2\times2\times2=144$

1001 답 576

㈎에서 A와 B가 앉는 줄을 고르는 경우의 수는 3

A와 B가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 A와 B가 같은 2인용 의자에 이웃하여 앉는 경우의 수는

$3\times2=6$

A와 B가 앉은 좌석을 제외한 5개의 좌석에 C와 D가 앉는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$

C와 D가 같은 2인용 의자에 이웃하여 앉는 경우의 수는

$2\times2!=4$

따라서 C와 D가 같은 2인용 의자에 이웃하여 앉지 않는 경우의 수는

$20-4=16$

A, B, C, D가 앉은 좌석을 제외한 나머지 3개의 좌석에 E, F, G가 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times16\times6=576$

1002 답 40

(i) A의 양옆에 여학생이 앉는 경우

A의 양옆에 여학생을 배열하는 경우의 수는 $2!=2$

(여, A, 여)의 묶음과 나머지 2명을 배열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 A의 양옆에 여학생이 앉는 경우의 수는

$2\times6=12$

(ii) B의 양옆에 남학생이 앉는 경우

B의 양옆에 남학생을 배열하는 경우의 수는

${}_3P_2=6$

(남, B, 남)의 묶음과 나머지 2명을 배열하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 B의 양옆에 남학생이 앉는 경우의 수는

$6\times6=36$

(iii) A의 양옆에 여학생이 앉고, B의 양옆에 남학생이 앉는 경우

B, A 또는 A, B의 왼쪽과 오른쪽에 앉을 학생을 선택하는 경우의 수는 각각 $2\times1=2$

(남, B, A, 여) 또는 (여, A, B, 남)의 묶음과 나머지 1명을 배열하는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 A의 양옆에 여학생이 앉고 B의 양옆에 남학생이 앉는 경우의 수는

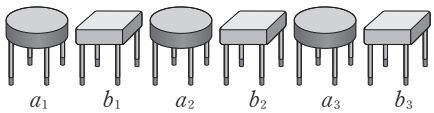
$(2+2)\times2=8$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$12+36-8=40$

1003 답 ①

둥근 의자를 a_1, a_2, a_3, 사각 의자를 b_1, b_2, b_3이라 하자.



(i) 2학년 2명이 b_1, b_2에 앉는 경우

2학년 2명이 b_1과 b_2에 앉는 경우의 수는 $2!=2$

a_3, b_3에 1학년 1명과 3학년 1명이 앉는 경우의 수는

$2\times2\times2!=8$

남은 1학년 1명과 3학년 1명이 a_1, a_2에 앉는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 2학년 2명이 b_1, b_2에 앉는 경우의 수는

$2\times8\times2=32$

(ii) 2학년 2명이 b_1, b_3에 앉는 경우

2학년 2명이 b_1과 b_3에 앉는 경우의 수는 $2!=2$

ⓘ 1학년 2명이 a_1, b_2에 앉고, 3학년 2명이 a_2, a_3에 앉는 경우의 수는

$2!\times2!=4$

ⓘⓘ 3학년 2명이 a_1, b_2에 앉고, 1학년 2명이 a_2, a_3에 앉는 경우의 수는

$2!\times2!=4$

따라서 2학년 2명이 b_1, b_3에 앉는 경우의 수는

$2\times(4+4)=16$

(iii) 2학년 2명이 b_2, b_3에 앉는 경우

2학년 2명이 b_2와 b_3에 앉는 경우의 수는 $2!=2$

ⓘ 1학년 2명이 a_1, a_2에 앉고, 3학년 2명이 b_1, a_3에 앉는 경우의 수는

$2!\times2!=4$

ⓘ 3학년 2명이 a_1, a_2에 앉고, 1학년 2명이 b_1, a_3에 앉는 경우의 수는

$2!\times 2!=4$

따라서 2학년 2명이 b_2, b_3에 앉는 경우의 수는

$2\times(4+4)=16$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$32+16+16=64$

최고수준 도전 기출 207쪽

1004 답 ⑤

전략 5개의 숫자로 만들 수 있는 세 자리의 자연수를 구한 후 이 수들의 백의 자리의 숫자의 총합, 십의 자리의 숫자의 총합, 일의 자리의 숫자의 총합으로 나누어 생각한다.

5개의 숫자에서 서로 다른 3개를 택하여 만든 세 자리의 자연수는 123, 124, 125, …, 542, 543이고, 그 개수는 ${}_5\mathrm{P}_3=60$이다.

이 수들의 총합을 S, 백의 자리의 숫자의 총합을 S_1, 십의 자리의 숫자의 총합을 S_2, 일의 자리의 숫자의 총합을 S_3이라 하면

$123=1\times100+2\times10+3$

$124=1\times100+2\times10+4$

⋮

$543=5\times100+4\times10+3$

$\therefore S=S_1\times100+S_2\times10+S_3$

이때 S_1에는 1, 2, 3, 4, 5가 각각 $60\div5=12$(개)씩 있으므로

$S_1=(1+2+3+4+5)\times12=180$

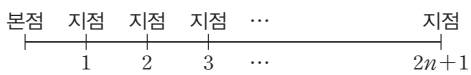
같은 방법으로 $S_2=S_3=180$이므로

$S=180\times(100+10+1)=19980$

1005 답 ③

전략 경우의 수를 구하여 A를 ${}_m\mathrm{P}_r$ 꼴로 나타낸 후 주어진 식에 대입하여 a, b의 값을 구한다.

다음 그림과 같이 본점에서 가까운 순서대로 지점 1, 2, 3, …, $2n+1$이라 하자.



갑, 을, 병을 제외한 $(2n-2)$명의 직원에 대하여

첫 번째 직원이 지점을 선택하는 경우의 수는 $2n+1$

두 번째 직원이 지점을 선택하는 경우의 수는 $2n$

세 번째 직원이 지점을 선택하는 경우의 수는 $2n-1$

⋮

$(2n-2)$번째 직원이 지점을 선택하는 경우의 수는 4

이때 남은 3개의 지점 중에서 가까운 순서대로 갑, 을, 병을 보내는 경우의 수는 1이다.

$A=(2n+1)\times2n\times(2n-1)\times\cdots\times4={}_{2n+1}\mathrm{P}_{2n-2}$이므로

$${}_{2n-1}\mathrm{P}_{n-2}+\frac{A}{(n+1)!}$$

$$={}_{2n-1}\mathrm{P}_{n-2}+\frac{{}_{2n+1}\mathrm{P}_{2n-2}}{(n+1)!}$$

$$=\frac{(2n-1)!}{(n+1)!}+\frac{(2n+1)!}{3!(n+1)!}$$

$$=\frac{(2n-1)!}{(n+1)!}+\frac{(2n+1)\times2n\times(2n-1)!}{3!(n+1)!}$$

$$=\frac{3(2n-1)!+(2n+1)\times n\times(2n-1)!}{3(n+1)!}$$

$$=\frac{(2n-1)!\times(2n^2+n+3)}{3(n+1)!}$$

따라서 $a=-1$, $b=3$이므로 $ab=-3$

1006 답 ②

전략 A가 24번 의자에 앉는 경우와 25번 의자에 앉는 경우로 나누어 경우의 수를 구한다.

(가)에서 A는 24번 또는 25번 의자에 앉을 수 있고, B는 11번 또는 12번 또는 13번 또는 14번 의자에 앉을 수 있으며 (나), (다)에서 어느 두 학생도 양옆 또는 앞뒤로 이웃하여 앉을 수 없다.

(i) A가 24번 의자에 앉는 경우

11	12	13	14	15	16	17
		23	A	25		

A를 제외한 4명의 학생은 11번, 13번, 15번, 17번 의자에 각각 한 명씩 앉아야 한다.

이때 B는 11번 또는 13번 의자 중 1개의 의자에 앉아야 하므로 B가 의자를 택하여 앉는 경우의 수는 2

이 각각에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 의자에 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 A가 24번 의자에 앉는 경우의 수는

$2\times6=12$

(ii) A가 25번 의자에 앉는 경우

11	12	13	14	15	16	17
		23	24	A		

A를 제외한 4명의 학생은 11번 또는 12번 의자 중 1개, 14번 의자, 16번 또는 17번 의자 중 1개, 23번 의자에 각각 한 명씩 앉아야 한다.

11번 또는 12번 의자 중 1개를 택하고, 16번 또는 17번 의자 중 1개를 택하는 경우의 수는 $2\times2=4$

이때 B는 11번 또는 12번 의자 중 택한 의자 또는 14번 의자 중 1개의 의자에 앉아야 하므로 B가 의자를 택하여 앉는 경우의 수는 2

이 각각에 대하여 A, B를 제외한 3명의 학생이 나머지 3개의 의자에 앉는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 A가 25번 의자에 앉는 경우의 수는

$4\times2\times6=48$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$12+48=60$

14 조합

난이도별 필수 기출 209~220쪽

1007 답 ②

${}_8P_2+{}_7C_4={}_8P_2+{}_7C_3=8\times7+\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=56+35=91$

1008 답 ④

① $0!=1$

② ${}_7C_0=1$

③ ${}_7P_7=7!=5040$

④ ${}_7P_6=7\times6\times5\times4\times3\times2=7!$

⑤ ${}_7C_2=\frac{7\times6}{2}=21$

따라서 옳은 것은 ④이다.

1009 답 8

${}_nP_3:{}_nP_4=1:5$에서 $5\times{}_nP_3={}_nP_4$

$5n(n-1)(n-2)=n(n-1)(n-2)(n-3)$

이때 ${}_nP_4$에서 $n\geq4$이므로 양변을 $n(n-1)(n-2)$로 나누면

$5=n-3$ $\therefore n=8$

1010 답 22

${}_nC_7={}_nC_5$에서 $n-7=5$ $\therefore n=12$ …… ⅰ

${}_{10}C_r={}_{10}C_{r-2}$에서 $10-r=r-2$ $\therefore r=6$ …… ⅱ

${}_7C_3+{}_7C_4={}_8C_k$에서 $k=4$ …… ⅲ

$\therefore n+r+k=12+6+4=22$ …… ⅳ

채점 기준	
ⅰ n의 값 구하기	30%
ⅱ r의 값 구하기	30%
ⅲ k의 값 구하기	30%
ⅳ $n+r+k$의 값 구하기	10%

1011 답 ②

${}_6C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5+{}_{10}C_6={}_7C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5+{}_{10}C_6$

$={}_8C_3+{}_8C_4+{}_9C_5+{}_{10}C_6$

$={}_9C_4+{}_9C_5+{}_{10}C_6$

$={}_{10}C_5+{}_{10}C_6={}_{11}C_6={}_{11}C_5$

$=\frac{11\times10\times9\times8\times7}{5\times4\times3\times2\times1}=462$

1012 답 6

$3\times{}_{n-1}P_2+4\times{}_nC_2={}_nP_3$에서

$3(n-1)(n-2)+4\times\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)(n-2)$

이때 ${}_nP_3$에서 $n\geq3$이므로 양변을 $n-1$로 나누면

$3(n-2)+2n=n(n-2)$

$n^2-7n+6=0$, $(n-1)(n-6)=0$

$\therefore n=6$ ($\because n\geq3$)

1013 답 ⑤

$n\times{}_{n-1}C_{r-1}=n\times\frac{(n-1)!}{(r-1)!\times(\boxed{(가)\ n-r})!}$

$=\frac{n\times(n-1)!}{(r-1)!\times(n-r)!}$

$=\frac{\boxed{(나)\ n}!}{(r-1)!(\boxed{(가)\ n-r})!}$

$=r\times\frac{\boxed{(나)\ n}!}{r!(\boxed{(가)\ n-r})!}$

$=r\times{}_nC_r$

따라서 (가) $n-r$, (나) n이므로 두 식의 합은

$(n-r)+n=2n-r$

1014 답 ①

${}_{n-1}P_r+r\times{}_{n-1}P_{r-1}=\frac{(n-1)!}{\boxed{(가)\ (n-r-1)!}}+r\times\frac{(n-1)!}{\boxed{(나)\ (n-r)!}}$

$=\frac{(n-1)!(n-r)}{(n-r)!}+r\times\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$

$=\frac{(n-1)!}{(n-r)!}\times\{(n-r)+r\}$

$=\frac{(n-1)!}{(n-r)!}\times\boxed{(다)\ n}$

$=\frac{\boxed{(라)\ n!}}{(n-r)!}={}_nP_r$

1015 답 ②

${}_nC_{r-1}+2\times{}_nC_r+{}_nC_{r+1}={}_nC_{r-1}+{}_nC_r+{}_nC_r+{}_nC_{r+1}$

$={}_{n+1}C_r+{}_{n+1}C_{r+1}$

$={}_{n+2}C_{r+1}$

1016 답 ②

${}_{n+1}P_4-3\times{}_{n+1}P_3-7\times{}_nP_2\leq0$에서

$(n+1)n(n-1)(n-2)-3(n+1)n(n-1)-7n(n-1)\leq0$

이때 ${}_{n+1}P_4$에서 $n\geq3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나누면

$(n+1)(n-2)-3(n+1)-7\leq0$

$n^2-4n-12\leq0$, $(n+2)(n-6)\leq0$

$\therefore 3\leq n\leq6$ ($\because n\geq3$)

따라서 모든 자연수 n의 값의 합은

$3+4+5+6=18$

1017 답 ③

① ${}_nC_0=1$, ${}_nC_n=1$이므로 ${}_nC_0={}_nC_n$

② ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$이므로 ${}_nP_r={}_nC_r\times r!$

③ ${}_{n+1}C_r={}_{n+1}C_{n+1-r}$

⑤ $n\times{}_{n-1}C_{r-1}=n\times\frac{(n-1)!}{(r-1)!(n-r)!}=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$

$r\times{}_nC_r=r\times\frac{n!}{r!(n-r)!}=\frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}$

$\therefore n\times{}_{n-1}C_{r-1}=r\times{}_nC_r$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

1018 답 ④

${}_{n+3}C_{n+1}=28$에서 ${}_{n+3}C_{n+1}={}_{n+3}C_{(n+3)-(n+1)}={}_{n+3}C_2$이므로

${}_{n+3}C_2=28$

$\frac{(n+3)(n+2)}{2}=28$, $n^2+5n-50=0$

$(n+10)(n-5)=0$ $\therefore n=-10$ 또는 $n=5$

이때 n은 자연수이므로 $n=5$

${}_{11}C_{r+2}={}_{11}C_{3r-3}$에서

(i) $r+2=3r-3$이면 $2r=5$ $\therefore r=\frac{5}{2}$

이때 r는 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) ${}_{11}C_{r+2}={}_{11}C_{11-(r+2)}={}_{11}C_{9-r}={}_{11}C_{3r-3}$이므로

$9-r=3r-3$이면 $4r=12$ $\therefore r=3$

(i), (ii)에서 $r=3$

$\therefore n+r=5+3=8$

1019 답 8

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-6+4=-\frac{{}_nC_r}{5}$, $-6\times4=-\frac{2}{5}\times{}_nP_r$

$\therefore {}_nC_r=10$, ${}_nP_r=60$

이때 ${}_nC_r=\frac{{}_nP_r}{r!}$이므로 $10=\frac{60}{r!}$, $r!=6$

$6=3\times2\times1$이므로 $r!=3\times2\times1$

$\therefore r=3$ …… ⓘ

${}_nP_3=60$에서 $n(n-1)(n-2)=60$

$60=5\times4\times3$이므로 $n(n-1)(n-2)=5\times4\times3$

이때 n은 자연수이므로 $n=5$ …… ⓘⓘ

$\therefore n+r=5+3=8$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ r의 값 구하기	50 %
ⓘⓘ n의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $n+r$의 값 구하기	10 %

참고 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 근과 계수의 관계에 의하여 다음이 성립한다.

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

1020 답 ④

${}_nP_r=a$라 하면 ${}_nP_r+{}_nC_r=140$에서

${}_nC_r=140-a$

이때 ${}_nP_r\geq{}_nC_r$이므로 $a\geq140-a$ $\therefore a\geq70$

${}_nP_r\times{}_nC_r=2400$에서

$a(140-a)=2400$, $a^2-140a+2400=0$

$(a-20)(a-120)=0$ $\therefore a=120$ ($\because a\geq70$)

따라서 ${}_nP_r=120$, ${}_nC_r=140-a=20$이므로

${}_nP_r=r!\times{}_nC_r$에서 $120=r!\times20$

$r!=6=3\times2\times1$ $\therefore r=3$

${}_nP_3=120$에서 $120=6\times5\times4$이므로 $n=6$

$\therefore nr=6\times3=18$

1021 답 ④

생활 공예반 6개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$

손뜨개반 4개 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times6=90$

1022 답 ④

빨간 구슬 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

노란 구슬 1개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times4=40$

1023 답 ③

A 모둠 학생 6명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_3=20$

B 모둠 학생 5명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_3={}_5C_2=10$

따라서 구하는 경우의 수는

$20+10=30$

1024 답 ②

${}_nC_3=455$이므로 $\frac{n(n-1)(n-2)}{3\times2\times1}=455$

$n(n-1)(n-2)=2730=15\times14\times13$

$\therefore n=15$ ($\because n$은 자연수)

1025 답 ⑤

① ${}_6C_3=20$

② ${}_5P_2=20$

③ ${}_4C_3+{}_5C_3={}_4C_1+{}_5C_2=4+10=14$

④ 두 눈의 수의 차가 1인 경우는

(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6),

(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (6, 5)

의 10가지이다.

⑤ 남자 3명이 일렬로 서는 경우의 수가 $3!=6$

남자 사이사이와 양 끝에 여자들이 교대로 서는 경우의 수는

$2\times3!=2\times6=12$

따라서 남자와 여자가 교대로 서는 경우의 수는

$6\times12=72$

이상에서 경우의 수가 가장 큰 것은 ⑤이다.

1026 답 ①

A 음식점에서 주문하는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_2C_1={}_3C_1\times{}_2C_1=3\times2=6$

B 음식점에서 주문하는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_4C_1=6\times4=24$

C 음식점에서 주문하는 경우의 수는
${}_2C_2 \times {}_5C_1 = 1 \times 5 = 5$
따라서 구하는 경우의 수는
$6+24+5=35$

1027 답 13

${}_nC_2 = 78$이므로 $\frac{n(n-1)}{2\times 1} = 78$
$n(n-1) = 156 = 13 \times 12 \quad \therefore n = 13 (\because n$은 자연수)

1028 답 ②

선택한 카드에 적혀 있는 수의 합이 짝수이려면 홀수가 적혀 있는 카드 2장, 짝수가 적혀 있는 카드 3장 또는 홀수가 적혀 있는 카드 4장, 짝수가 적혀 있는 카드 1장을 택해야 한다.
(i) 홀수가 적혀 있는 카드 2장, 짝수가 적혀 있는 카드 3장을 택하는 경우의 수는
${}_4C_2 \times {}_4C_3 = {}_4C_2 \times {}_4C_1 = 6 \times 4 = 24$
(ii) 홀수가 적혀 있는 카드 4장, 짝수가 적혀 있는 카드 1장을 택하는 경우의 수는
${}_4C_4 \times {}_4C_1 = 1 \times 4 = 4$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$24+4=28$

1029 답 10

남학생과 여학생의 수를 각각 n이라 하자.
전체에서 3명을 택하는 경우의 수는 ${}_{2n}C_3$
남학생 중에서 3명을 택하는 경우의 수는 ${}_nC_3$
전체에서 3명을 택하는 경우의 수는 남학생 중에서 3명을 택하는 경우의 수의 12배이므로
${}_{2n}C_3 = 12 \times {}_nC_3$ …… ⓘ
$\frac{2n(2n-1)(2n-2)}{3\times 2\times 1} = 12 \times \frac{n(n-1)(n-2)}{3\times 2\times 1}$
이때 $n \geq 3$이므로 양변을 $n(n-1)$로 나눈 후 정리하면
$2n-1 = 3(n-2)$
$\therefore n = 5$ …… ⓘⓘ
따라서 남학생과 여학생의 수는 각각 5이므로 여학생 중에서 3명을 택하는 경우의 수는
${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 주어진 조건을 조합을 이용한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘ 남학생과 여학생의 수 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 여학생 중에서 3명을 택하는 경우의 수 구하기	30 %

1030 답 ①

구하는 경우의 수는 빨간색, 주황색, 노란색을 제외한 4가지 색 중에서 3가지 색을 택하는 경우의 수와 같으므로
${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

1031 답 220

13명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{13}C_3 = 286$
여자만 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$
남자만 3명을 뽑는 경우의 수는 ${}_8C_3 = 56$
따라서 구하는 경우의 수는
$286-(10+56)=220$

1032 답 ①

구하는 자연수의 개수는 8개의 1을 일렬로 배열한 후 1 사이사이와 맨 끝의 8개의 자리에 4개의 0을 배열하는 경우의 수와 같으므로
${}_8C_4 = 70$

1033 답 ②

성은이와 희근이를 포함하여 5명을 뽑는 경우의 수는 성은이와 희근이를 제외한 7명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수와 같으므로
${}_7C_3 = 35$
성은이와 희근이를 한 사람으로 생각하여 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4! = 24$
성은이와 희근이가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$
따라서 구하는 경우의 수는
$35 \times 24 \times 2 = 1680$

1034 답 ②

전체 10개의 공 중에서 4개의 공을 택하는 경우의 수는 ${}_{10}C_4 = 210$
(i) 빨간 공을 포함하지 않고 택하는 경우의 수
노란 공과 파란 공에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로
${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$
(ii) 빨간 공이 1개 포함되도록 택하는 경우의 수
빨간 공에서 1개를 택하고 노란 공과 파란 공에서 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로
${}_4C_1 \times {}_6C_3 = 4 \times 20 = 80$
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$210-(15+80)=115$

다른 풀이

빨간 공이 2개 포함되는 경우의 수는 ${}_4C_2 \times {}_6C_2 = 6 \times 15 = 90$
빨간 공이 3개 포함되는 경우의 수는 ${}_4C_3 \times {}_6C_1 = 4 \times 6 = 24$
빨간 공이 4개 포함되는 경우의 수는 ${}_4C_4 = 1$
따라서 구하는 경우의 수는
$90+24+1=115$

1035 답 ④

서로 다른 7가지 토핑 중에서 3가지 이상 7가지 이하를 선택하는 경우의 수는
${}_7C_3 + {}_7C_4 + {}_7C_5 + {}_7C_6 + {}_7C_7 = {}_7C_3 + {}_7C_3 + {}_7C_2 + {}_7C_1 + {}_7C_7$
$= 35+35+21+7+1$
$= 99$

1036 답 $a<b<c$

남자 2명, 여자 2명을 뽑는 경우의 수는

$a={}_5C_2\times{}_4C_2=10\times6=60$ …… ⓘ

여자를 적어도 1명 뽑는 경우는 전체 9명 중에서 4명을 뽑는 경우에서 남자만 4명을 뽑는 경우를 제외하면 되므로 그 경우의 수는

$b={}_9C_4-{}_5C_4={}_9C_4-{}_5C_1=126-5=121$ …… ⓘⓘ

여자 1명, 남자 1명을 반드시 포함하는 경우의 수는 남자 5명 중에서 1명을 뽑고, 여자 4명 중에서 1명을 뽑은 후 나머지 2명을 뽑는 경우의 수와 같으므로

$c={}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_7C_2=5\times4\times21=420$ …… ⓘⓘⓘ

따라서 a, b, c의 대소를 비교하면 $a<b<c$이다. …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ a의 값 구하기	30 %
ⓘⓘ b의 값 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ c의 값 구하기	30 %
ⓘⓥ a, b, c의 대소 비교하기	10 %

1037 답 ②

3학년 학생 4명 중에서 2명을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

1학년 학생 2명과 3학년 학생 2명의 순서를 정하는 경우의 수는 $4!=24$

순서를 정한 1학년 학생 2명과 3학년 학생 2명의 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 2학년 학생 3명을 배정하면 되므로 ${}_5P_3=60$

따라서 구하는 경우의 수는

$6\times24\times60=8640$

1038 답 ③

(ⅰ) $a=5$일 때,

$c<b<5$이므로 1, 2, 3, 4 중에서 2개를 뽑아 큰 수를 b, 작은 수를 c로 정하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

(ⅱ) $a=6$일 때,

$c<b<6$이므로 1, 2, 3, 4, 5 중에서 2개를 뽑아 큰 수를 b, 작은 수를 c로 정하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수의 개수는

$6+10=16$

1039 답 ④

B가 뽑은 카드에 적힌 숫자의 최솟값이 19이므로 B는 20 이상의 숫자가 적힌 11장의 카드 중에서 9장의 카드를 뽑으면 된다. 이 경우의 수는

${}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$

A가 뽑은 카드에 적힌 숫자의 최솟값이 8이므로 A는 9 이상의 숫자가 적힌 카드 중 B가 뽑는 카드를 제외한 12장의 카드 중에서 9장의 카드를 뽑으면 된다. 이 경우의 수는

${}_{12}C_9={}_{12}C_3=220$

따라서 $k^2=55\times220=110^2$이므로 $k=110$

1040 답 ③

5컬레의 양말 중에서 짝이 맞는 한 컬레를 택하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

나머지 4컬레의 양말 8짝 중에서 2짝을 택하는 경우의 수는

${}_8C_2=28$

이때 양말 4컬레 중에서 짝이 맞는 한 컬레의 양말을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

즉, 양말 8짝 중에서 짝이 맞지 않는 2짝을 택하는 경우의 수는

$28-4=24$

따라서 구하는 경우의 수는

$5\times24=120$

1041 답 5명

전체 경우의 수는 ${}_{12}C_3=220$

남자 회원의 수를 n이라 하면 남자 회원 중에서만 운영진 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_nC_3=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$

여자 회원이 적어도 1명은 포함되도록 운영진 3명을 뽑는 경우의 수가 185이므로

$220-\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=185$ …… ⓘ

$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=35$

$n(n-1)(n-2)=210=7\times6\times5$

이때 n은 자연수이므로 $n=7$

따라서 남자 회원이 7명이므로 여자 회원은 5명이다. …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 여자 회원이 적어도 1명 포함되도록 뽑는 경우의 수를 식으로 나타내기	60 %
ⓘⓘ 여자 회원 수 구하기	40 %

1042 답 11

육상부 선수의 수를 n이라 하면 A, B를 제외한 $(n-2)$명 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는 ${}_{n-2}C_2$

뽑은 4명을 일렬로 세우는 경우의 수는 $4!=24$

이때 주어진 경우의 수가 864이므로

${}_{n-2}C_2\times24=864$, ${}_{n-2}C_2=36$

$\dfrac{(n-2)(n-3)}{2\times1}=36$, $(n-2)(n-3)=72=9\times8$

이때 n은 자연수이므로 $n-2=9$ $\therefore n=11$

따라서 육상부 선수의 수는 11이다.

1043 답 ④

일주일 중에서 A 제품을 홍보하는 3일을 택하는 경우의 수는

${}_7C_3=35$

A 제품을 홍보하는 날을 제외한 나머지 4일 중에서 B 제품을 홍보하는 2일을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_2=6$

C, D, E, F 제품 중에서 두 제품을 택하여 나머지 2일에 배정하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$35\times6\times12=2520$

1044 답 16

8개의 인형 중에서 5개를 선택하면 종류별 인형의 개수는
2개, 2개, 1개 또는 2개, 1개, 1개, 1개를 선택한다.

(i) 인형을 종류별로 2개, 2개, 1개를 선택하는 경우
네 종류의 인형 중에서 2개를 선택하는 두 종류의 인형을 고르고, 나머지 두 종류의 인형 중에서 1개를 선택하는 한 종류의 인형을 고르는 경우의 수는
${}_4C_2 \times {}_2C_1 = 6 \times 2 = 12$

(ii) 인형을 종류별로 2개, 1개, 1개, 1개를 선택하는 경우
네 종류의 인형 중에서 2개를 선택하는 한 종류의 인형을 고르고, 나머지 세 종류의 인형 중에서 1개를 선택하는 세 종류의 인형을 고르는 경우의 수는
${}_4C_1 \times {}_3C_3 = 4 \times 1 = 4$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$12+4=16$

1045 답 ⑤

11개의 공 중에서 5개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공의 색이 3종류이려면 색깔별 공의 개수가 2개, 2개, 1개 또는 3개, 1개, 1개이어야 한다.

(i) 각 색깔별로 2개, 2개, 1개의 공을 꺼내는 경우
흰 공, 검은 공, 파란 공 중 2개의 공을 꺼낼 색을 고르는 경우의 수는 ${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$
흰 공, 검은 공, 파란 공 중 2개의 공을 꺼내지 않은 색깔의 공과 빨간 공, 노란 공 중에서 1개의 공을 꺼낼 색을 고르는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$
따라서 각 색깔별로 2개, 2개, 1개의 공을 꺼내는 경우의 수는
$3 \times 3 = 9$

(ii) 각 색깔별로 3개, 1개, 1개의 공을 꺼내는 경우
공이 3개 이상인 것은 흰 공뿐이므로 흰 공 3개를 꺼내야 한다.
남은 검은 공, 파란 공, 빨간 공, 노란 공 중에서 1개의 공을 꺼낼 색을 고르는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$
따라서 각 색깔별로 3개, 1개, 1개의 공을 꺼내는 경우의 수는
$1 \times 6 = 6$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$9+6=15$

1046 답 ①

계단을 두 단씩 올라가는 횟수는 0, 1, 2, 3, 4의 5가지이고, 그 각각에 대하여 나머지는 모두 한 단씩 올라가는 경우의 수를 구하면

(i) 두 단씩 올라가는 횟수가 0인 경우
계단을 오르는 8번 중에서 두 단을 오르는 경우가 없으므로 경우의 수는 1

(ii) 두 단씩 올라가는 횟수가 1인 경우
계단을 오르는 7번 중에서 두 단을 오르는 1번을 고르는 경우의 수는 ${}_7C_1 = 7$

(iii) 두 단씩 올라가는 횟수가 2인 경우
계단을 오르는 6번 중에서 두 단을 오르는 2번을 고르는 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$

(iv) 두 단씩 올라가는 횟수가 3인 경우
계단을 오르는 5번 중에서 두 단을 오르는 3번을 고르는 경우의 수는 ${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

(v) 두 단씩 올라가는 횟수가 4인 경우
계단을 오르는 4번 중에서 두 단을 오르는 4번을 고르는 경우의 수는 ${}_4C_4 = 1$

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는
$1+7+15+10+1=34$

1047 답 ⑤

18개의 자연수 중에서
3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수는 1, 4, 7, 10, 13, 16의 6개
3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수는 2, 5, 8, 11, 14, 17의 6개
3의 배수는 3, 6, 9, 12, 15, 18의 6개
네 수의 곱이 3의 배수이므로 네 수 중 적어도 하나는 3의 배수이다.
또 네 수의 합이 3의 배수이므로 나머지 세 수를 각각 3으로 나눈 나머지의 합이 3의 배수이어야 한다.
따라서 조건을 만족시키는 네 수는 3으로 나누었을 때의 나머지가 각각 0, 0, 0, 0 또는 0, 0, 1, 2 또는 0, 1, 1, 1 또는 0, 2, 2, 2인 경우이다.

(i) 3의 배수를 4개 택하는 경우의 수는
${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

(ii) 3의 배수를 2개, 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수를 1개, 나머지가 2인 수를 1개 택하는 경우의 수는
${}_6C_2 \times {}_6C_1 \times {}_6C_1 = 15 \times 6 \times 6 = 540$

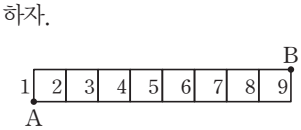
(iii) 3의 배수를 1개, 3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수를 3개 택하는 경우의 수는
${}_6C_1 \times {}_6C_3 = 6 \times 20 = 120$

(iv) 3의 배수를 1개, 3으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수를 3개 택하는 경우의 수는
${}_6C_1 \times {}_6C_3 = 6 \times 20 = 120$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는
$15+540+120+120=795$

1048 답 42

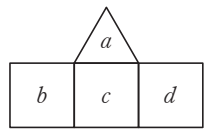
다음 그림과 같이 세로 방향의 직선 도로를 왼쪽에서부터 차례대로 1, 2, 3, …, 9라 하자.



A 지점에서 출발하여 B 지점까지 갈 때, 1번 도로 또는 9번 도로를 선택하여 지나는 경우에는 각 도로를 지날 때 진행 방향을 1번 바꾸게 되고, 2번, 3번, …, 8번 도로를 선택하여 지나는 경우에는 각 도로를 지날 때 진행 방향을 2번 바꾸게 된다.
따라서 진행 방향을 5번 바꾸려면 1번 또는 9번 도로 중 하나를 선택하여 지나고 2번, 3번, …, 8번의 도로 중 2개를 선택하여 지나야 한다.
즉, 구하는 경우의 수는
${}_2C_1 \times {}_7C_2 = 2 \times 21 = 42$

1049 답 130

오른쪽 그림과 같이 정삼각형에 적힌 수를 a, 정사각형에 적힌 수를 각각 b, c, d라 하면



㈎에서 $a>b$, $a>c$, $a>d$이고,

㈏에서 $b\neq c$, $c\neq d$

(i) $b=d$일 때,

6개의 숫자 중에서 서로 다른 3개를 택하여 가장 큰 수를 a로 정하고, 나머지 두 수를 $b(d)$와 c에 배열하면 되므로

${}_6C_3\times 2!=20\times 2=40$

(ii) $b\neq d$일 때,

6개의 숫자 중에서 서로 다른 4개를 택하여 가장 큰 수를 a로 정하고, 나머지 세 수를 b, c, d에 배열하면 되므로

${}_6C_4\times 3!={}_6C_2\times 3!=15\times 6=90$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$40+90=130$

1050 답 ⑤

구하는 사각형의 개수는 8개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_8C_4=70$

1051 답 ②

8개의 꼭짓점 중에서 2개를 연결하여 만들 수 있는 선분의 개수는

${}_8C_2=28$

이때 팔각형의 변의 개수는 8이므로 구하는 대각선의 개수는

$28-8=20$

참고 n각형의 대각선의 개수는 n개의 꼭짓점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수에서 n각형의 변의 개수를 뺀 것과 같다.

➡ ${}_nC_2-n=\dfrac{n(n-3)}{2}$

1052 답 210

가로 방향의 평행한 직선 5개 중에서 2개, 세로 방향의 평행한 직선 7개 중에서 2개를 택하면 한 개의 평행사변형이 결정되므로 구하는 평행사변형의 개수는

${}_5C_2\times{}_7C_2=10\times 21=210$

참고 m개의 평행선과 이와 평행하지 않은 n개의 평행선이 만날 때 만들어지는 평행사변형의 개수 ➡ ${}_mC_2\times{}_nC_2$

1053 답 ②

서로 평행한 두 직선 위의 점을 하나씩 택하여 연결하면 하나의 직선을 만들 수 있으므로

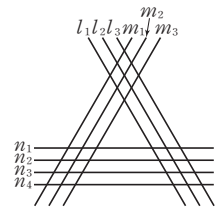
${}_6C_1\times{}_9C_1=6\times 9=54$

한 직선 위의 점들로 만들 수 있는 직선이 2개이므로 구하는 직선의 개수는

$54+2=56$

1054 답 45

(i) l_1, l_2, l_3 중에서 2개, m_1, m_2, m_3 중에서 2개를 택하는 경우의 수는



${}_3C_2\times{}_3C_2={}_3C_1\times{}_3C_1$

$=3\times 3=9$ …… ⓘ

(ii) m_1, m_2, m_3 중에서 2개, n_1, n_2, n_3, n_4 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_4C_2={}_3C_1\times{}_4C_2=3\times 6=18$ …… ⓘⓘ

(iii) l_1, l_2, l_3 중에서 2개, n_1, n_2, n_3, n_4 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_4C_2={}_3C_1\times{}_4C_2=3\times 6=18$ …… ⓘⓘⓘ

(i), (ii), (iii)에서 구하는 평행사변형의 개수는

$9+18+18=45$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ 직선 l_x, m_y 중에서 택하는 경우의 수 구하기	30 %
ⓘⓘ 직선 m_x, n_y 중에서 택하는 경우의 수 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ 직선 l_x, n_y 중에서 택하는 경우의 수 구하기	30 %
ⓘⓥ 평행사변형의 개수 구하기	10 %

1055 답 6

${}_nC_2\times{}_{n+2}C_2=420$이므로

$\dfrac{n(n-1)}{2\times 1}\times\dfrac{(n+2)(n+1)}{2\times 1}=420$

$n(n-1)(n+2)(n+1)=1680$

$(n+2)(n+1)n(n-1)=8\times 7\times 6\times 5$

이때 n은 자연수이므로 $n+2=8$

$\therefore\ n=6$

1056 답 ②

9개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_9C_3=84$

한 직선 위에 있는 4개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3={}_4C_1=4$

이때 한 직선 위에 4개의 점이 있는 직선은 3개이고, 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$84-3\times 4=72$

1057 답 ③

10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_{10}C_2=45$

이때 10개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 직선의 개수가 31이므로

$45-{}_nC_2+1=31$, ${}_nC_2=15$

$\dfrac{n(n-1)}{2\times 1}=15$, $n(n-1)=30=6\times 5$

$\therefore\ n=6$ ($\because$ n은 자연수)

1058 답 756

18개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_{18}C_3=816$

한 직선 위에 있는 6개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_3=20$

이때 한 직선 위에 6개의 점이 있는 직선은 3개이고, 한 직선 위에 있는 3개의 점으로는 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$816-3\times20=756$

다른 풀이

(i) 세 모서리에서 각각 1개의 점을 선택하면 1개의 삼각형이 결정되므로 삼각형의 개수는

${}_6C_1\times{}_6C_1\times{}_6C_1=6\times6\times6=216$

(ii) 한 모서리에서 2개의 점을 선택하고 다른 한 모서리에서 1개의 점을 선택하면 삼각형이 결정되므로 삼각형의 개수는

${}_3C_1\times{}_6C_2\times({}_6C_1+{}_6C_1)=3\times15\times(6+6)=540$

(i), (ii)에서 구하는 삼각형의 개수는

$216+540=756$

1059 답 (1) 26 (2) 120

(1) 11개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_{11}C_2=55$

직선 l 위에 있는 5개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

직선 m 위에 있는 7개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

${}_7C_2=21$

따라서 구하는 직선의 개수는

$55-10-21+2=26$ …… ⓘ

(2) 11개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_{11}C_3=165$

직선 l 위에 있는 5개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

직선 m 위에 있는 7개의 점 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

${}_7C_3=35$

한 직선 위에 있는 점 중에서 3개를 택하면 삼각형을 만들 수 없으므로 구하는 삼각형의 개수는

$165-10-35=120$ …… ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 서로 다른 직선의 개수 구하기	50 %
ⓘⓘ 삼각형의 개수 구하기	50 %

1060 답 ⑤

10개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_{10}C_4=210$

한 변 위의 4개의 점 중에서 4개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_4=1$

한 변 위의 4개의 점 중에서 3개를 택하고, 다른 변 위의 6개의 점 중에서 한 개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_3\times{}_6C_1={}_4C_1\times{}_6C_1=4\times6=24$

한 변 위의 3개의 점 중에서 3개를 택하고, 다른 변 위의 7개의 점 중에서 한 개를 택하는 경우의 수는

${}_3C_3\times{}_7C_1=1\times7=7$

따라서 구하는 사각형의 개수는

$210-(1+24+7)=178$

1061 답 ③

18개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_{18}C_2=153$

서로 다른 두 점을 이어서 만든 선분 중에서 길이가 유리수인 경우는 가로 방향의 직선 위의 점 중에서 2개, 세로 방향의 직선 위의 점 중에서 2개를 택할 때이다.

가로 방향의 직선은 3개이고 각각에 대하여 한 직선 위에 있는 6개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2$이므로 가로 방향의 직선 위의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$3\times{}_6C_2=3\times15=45$

세로 방향의 직선은 6개이고 각각에 대하여 한 직선 위에 있는 3개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2$이므로 세로 방향의 직선 위의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수는

$6\times{}_3C_2=6\times{}_3C_1=6\times3=18$

즉, 선분 중에서 길이가 유리수인 것의 개수는

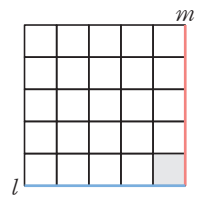
$45+18=63$

따라서 선분 중에서 길이가 무리수인 것의 개수는

$153-63=90$

1062 답 ①

오른쪽 그림과 같이 두 선분 l, m을 연장하여 큰 정사각형을 만들고 가로 방향의 선 6개 중에서 2개, 세로 방향의 선 6개 중에서 2개를 택하면 한 개의 직사각형이 결정되므로 만들 수 있는 직사각형의 개수는



${}_6C_2\times{}_6C_2=15\times15=225$

이때 색칠한 정사각형을 포함하는 직사각형을 만드는 경우의 수는 가로, 세로 방향의 선을 2개씩 택할 때, 두 선분 l, m이 포함되는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_1\times{}_5C_1=5\times5=25$

따라서 구하는 직사각형의 개수는

$225-25=200$

1063 답 ③

$a={}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=20\times1\times\frac{1}{2}=10$

$b={}_6C_2\times{}_4C_4=15\times1=15$

$\therefore b-a=5$

1064 답 ①

우유 3개를 한 개씩 받는 사람을 택하는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

서로 다른 빵 3개 중 2개를 우유를 받지 않은 사람에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 순열의 수이므로

${}_3P_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times6=60$

1065 답 ⑤

7명의 학생을 3명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_3\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=35\times6\times1\times\frac{1}{2}$$

$$=105$$

3개의 조를 3곳의 봉사 활동 장소에 배정하는 경우의 수는

$3!=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$105\times6=630$

1066 답 ①

5명을 3개의 조로 나누는 방법은

1명, 1명, 3명 또는 1명, 2명, 2명

(i) 1명, 1명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=5\times4\times1\times\frac{1}{2}$$

$$=10$$

(ii) 1명, 2명, 2명으로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1\times{}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=5\times6\times1\times\frac{1}{2}$$

$$=15$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10+15=25$

1067 답 ③

3개의 역 중에서 내리는 2개의 역을 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

5명의 사람을 1명, 4명 또는 2명, 3명으로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_1\times{}_4C_4+{}_5C_2\times{}_3C_3=5\times1+10\times1$$

$$=15$$

나눈 사람들이 2개의 역에 각각 내리는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times15\times2=90$

1068 답 90

구하는 경우의 수는 6개의 팀을 3개, 3개의 두 조로 나눈 후 각각을 2개, 1개의 두 조로 나누는 경우의 수와 같다. …… ⓘ

(i) 6개의 팀을 3개, 3개로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=20\times1\times\frac{1}{2}=10$$

(ii) 3개의 팀을 2개, 1개로 나누는 경우의 수는

$${}_3C_2\times{}_1C_1={}_3C_1\times{}_1C_1=3\times1=3$$ …… ⓘⓘ

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10\times3\times3=90$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 6개의 팀을 나누는 경우 파악하기	30 %
ⓘⓘ 각각의 경우의 수 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ 경우의 수 구하기	30 %

1069 답 ③

각 조에 적어도 한 명의 여학생이 포함되려면 남학생 4명과 여학생 1명, 남학생 3명과 여학생 2명의 두 개의 조로 나누어야 한다.

남학생 7명 중에서 4명과 여학생 3명 중에서 1명을 뽑아 한 조가 되는 경우의 수는

$${}_7C_4\times{}_3C_1={}_7C_3\times{}_3C_1$$

$$=35\times3=105$$

다른 풀이

10명을 5명, 5명의 2개의 조로 나누는 경우의 수는

$${}_{10}C_5\times{}_5C_5\times\frac{1}{2!}=252\times1\times\frac{1}{2}=126$$

여학생 3명이 같은 조에 포함되도록 나누는 경우의 수는 남학생 7명을 2명, 5명으로 나누는 경우의 수와 같으므로

$${}_7C_2\times{}_5C_5=21\times1=21$$

따라서 구하는 경우의 수는

$126-21=105$

1070 답 ④

서로 다른 공 7개를 똑같은 상자 3개에 빈 상자가 없도록 나누어 담을 때, 각 상자에 담을 수 있는 공의 개수는

1, 1, 5 또는 1, 2, 4 또는 1, 3, 3 또는 2, 2, 3

(i) 1개, 1개, 5개로 나누어 담는 경우의 수는

$${}_7C_1\times{}_6C_1\times{}_5C_5\times\frac{1}{2!}=7\times6\times1\times\frac{1}{2}=21$$

(ii) 1개, 2개, 4개로 나누어 담는 경우의 수는

$${}_7C_1\times{}_6C_2\times{}_4C_4=7\times15\times1=105$$

(iii) 1개, 3개, 3개로 나누어 담는 경우의 수는

$${}_7C_1\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=7\times20\times1\times\frac{1}{2}=70$$

(iv) 2개, 2개, 3개로 나누어 담는 경우의 수는

$${}_7C_2\times{}_5C_2\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=21\times10\times1\times\frac{1}{2}=105$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$21+105+70+105=301$

1071 답 315

구하는 경우의 수는 7개의 팀을 4개, 3개의 두 조로 나눈 후 4개인 조를 다시 2개, 2개의 두 조로 나누고 3개인 조를 2개, 1개의 두 조로 나누는 경우의 수와 같다.

(i) 7개의 팀을 4개, 3개로 나누는 경우의 수는

$${}_7C_4\times{}_3C_3={}_7C_3\times{}_3C_3=35\times1=35$$

(ii) 4개의 팀을 2개, 2개로 나누는 경우의 수는

$${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=6\times1\times\frac{1}{2}=3$$

(iii) 3개의 팀을 2개, 1개로 나누는 경우의 수는

$${}_3C_2\times{}_1C_1={}_3C_1\times{}_1C_1=3\times1=3$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$35\times3\times3=315$

1072 답 210

(i) 2명인 조에 A가 속하고, 3명인 조에 B가 속하는 경우

A와 같은 조가 될 한 명을 정하는 경우의 수는

${}_6C_1=6$

나머지 5명을 B와 같은 조가 될 2명과 나머지 3명으로 나누는 경우의 수는

${}_5C_2\times{}_3C_3=10\times1=10$

따라서 2명인 조에 A가 속하고, 3명인 조에 B가 속하는 경우의 수는

$6\times10=60$

(ii) 3명인 조에 A가 속하고, 2명인 조에 B가 속하는 경우

(i)의 경우의 수와 같으므로 그 경우의 수는 60이다.

(iii) A와 B가 각각 3명인 서로 다른 조에 속하는 경우

A, B를 제외한 나머지 6명을 A와 같은 조가 될 2명, B와 같은 조가 될 2명, 나머지 2명으로 나누는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_2\times{}_2C_2=15\times6\times1=90$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$60+60+90=210$

다른 풀이

8명의 학생을 2명, 3명, 3명의 3개 조로 나누는 경우의 수는

$${}_8C_2\times{}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=28\times20\times1\times\frac{1}{2}=280$$

A와 B가 같은 조에 속하는 경우는 A와 B가 2명인 조 또는 3명인 조에 속하는 경우이다.

(i) A와 B가 2명인 조에 속하는 경우

A, B를 제외한 6명을 3명, 3명의 2개 조로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_3\times{}_3C_3\times\frac{1}{2!}=20\times1\times\frac{1}{2}=10$$

(ii) A와 B가 3명인 조에 속하는 경우

A, B와 같은 조가 될 1명을 정하고, 나머지 5명을 2명, 3명의 2개 조로 나누는 경우의 수는

${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_3C_3=6\times10\times1=60$

(i), (ii)에서 A와 B가 같은 조에 속하는 경우의 수는

$10+60=70$

따라서 구하는 경우의 수는

$280-70=210$

1073 답 450

(i) 빨간색 공을 바구니에 넣는 경우의 수

(나)에서 빨간색 공을 한 바구니에 2개 이상 넣을 수 없으므로 서로 다른 3개의 바구니에 빨간색 공이 하나씩 들어가야 한다.

따라서 빨간색 공을 바구니에 넣는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

(ii) 파란색 공을 바구니에 넣는 경우의 수

(가)에서 모든 바구니에 공이 1개 이상 들어가야 하므로 빨간색 공을 넣지 않은 2개의 빈 바구니에 파란색 공을 각각 1개씩 넣고, 남은 4개의 파란색 공을 전체 5개의 바구니에 각각 2개 이하로 넣으면 된다.

ⓘ 2개의 바구니에 파란색 공을 2개씩 넣는 경우

5개의 바구니에서 파란색 공을 넣을 2개의 바구니를 택하는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

${}_5C_2=10$

ⓘⓘ 3개의 바구니에 파란색 공을 2개, 1개, 1개 넣는 경우

5개의 바구니에서 파란색 공 2개를 넣을 바구니 1개를 택하고, 남은 4개의 바구니에서 파란색 공을 1개씩 넣을 바구니 2개를 택하는 경우와 같으므로 그 경우의 수는

${}_5C_1\times{}_4C_2=5\times6=30$

ⓘⓘⓘ 4개의 바구니에 파란색 공을 1개씩 넣는 경우의 수는

${}_5C_4={}_5C_1=5$

ⓘ, ⓘⓘ, ⓘⓘⓘ에서 파란색 공을 바구니에 넣는 경우의 수는

$10+30+5=45$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$10\times45=450$

최고수준 도전 기출 221쪽

1074 답 ②

전략 A, B가 선택하는 과목 중에서 서로 일치하는 과목이 수학 과목인 경우와 과학 과목인 경우로 나누어 경우의 수를 구한다.

(i) 서로 일치하는 과목이 수학 과목일 때

3개의 수학 과목 중에서 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

위의 각 경우에 대하여 나머지 6개의 과목 중에서 A가 2개를 선택하고, 나머지 4개의 과목 중에서 B가 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_6C_2\times{}_4C_2=15\times6=$ (가) 90

이때의 경우의 수는 $3\times$ (가) 90

(ii) 서로 일치하는 과목이 과학 과목일 때

4개의 과학 과목 중에서 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

위의 각 경우에 대하여 나머지 6개의 과목 중에서 A, B는 수학 과목을 1개 이상 선택해야 하므로 다음 두 가지 경우로 나눌 수 있다.

(ii-1) A, B 모두 수학 과목 1개와 과학 과목 1개를 선택하는 경우의 수는

$({}_3C_1\times{}_3C_1)\times({}_2C_1\times{}_2C_1)=3\times3\times2\times2=36$

(ii-2) A, B 중 한 명은 수학 과목 2개를 선택하고, 다른 한 명은 수학 과목 1개와 과학 과목 1개를 선택하는 경우의 수는

A, B 중 수학 과목 2개를 선택할 학생을 택하는 경우의 수는

${}_2C_1=2$

이 학생이 3개의 수학 과목 중 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

다른 한 명이 남아 있는 수학 과목 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_1C_1=1$

이 학생이 과학 과목 중 공통으로 선택한 한 과목을 제외한 3개의 과목 중 1개를 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$이므로

$2\times3\times1\times3=$ (나) 18

이때의 경우의 수는 $4\times(36+\boxed{\text{(나) }18})$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$3\times\boxed{\text{(가) }90}+4\times(36+\boxed{\text{(나) }18})$이다.

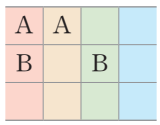
따라서 $p=90$, $q=18$이므로

$p+q=108$

1075 답 762

전략 A, B 두 학생이 같은 종류의 아이스크림을 1개 구매하는 경우와 2개 구매하는 경우로 나누어 생각한다.

(i) A, B 두 학생이 같은 종류의 아이스크림을 1개 구매하는 경우



A가 두 종류를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

B가 A가 택한 종류와 A가 택하지 않은 두 종류 중에서 하나씩 택하는 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_2C_1=2\times2=4$

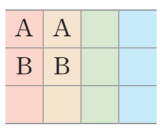
C, D가 택하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 C, D가 모두 A, B가 공통으로 택한 종류를 택하는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

${}_4C_2\times{}_4C_2-({}_1C_1\times{}_3C_1\times{}_1C_1\times{}_3C_1)=6\times6-9=27$

따라서 A, B 두 학생이 같은 종류의 아이스크림을 1개 구매하는 경우의 수는

$6\times4\times27=648$

(ii) A, B 두 학생이 같은 종류의 아이스크림을 2개 구매하는 경우



A가 두 종류를 택하는 경우의 수는

${}_4C_2=6$

B가 A가 택한 종류를 택하는 경우의 수는

${}_2C_2=1$

C, D가 택하는 경우의 수는 전체 경우의 수에서 C, D가 모두 A, B가 택한 종류를 택하는 경우의 수를 뺀 것과 같다.

C, D가 모두 A, B가 택한 종류를 택하는 경우는

ⓘ A, B가 택한 두 종류 중 하나를 C, D가 모두 택하는 경우

C, D가 각각 A, B가 택한 두 종류 중에서 하나, A, B가 택하지 않은 두 종류 중에서 하나를 택하는 경우의 수는

$({}_2C_1\times{}_2C_1)\times({}_2C_1\times{}_2C_1)=2\times2\times2\times2=16$

ⓘⓘ A, B가 택한 두 종류를 C, D가 모두 택하는 경우

C, D가 택하는 경우의 수는

${}_2C_2\times{}_2C_2=1\times1=1$

ⓘ, ⓘⓘ에서 C, D가 택하는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_4C_2-(16+1)=6\times6-17=19$

따라서 A, B 두 학생이 같은 종류의 아이스크림을 2개 구매하는 경우의 수는

$6\times1\times19=114$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$648+114=762$

1076 답 53

전략 첫 번째 단과 마지막 단의 폭을 정하는 경우로 나누어 각각의 경우에서 50 cm인 단, 100 cm인 단, 150 cm인 단의 개수를 구한 후 경우의 수를 구한다.

$\overline{AC}=3$(m)이므로 (가)에서 단의 전체 개수는

$300\div30=10$

(나)에서 각 단의 폭은 50 cm, 100 cm, 150 cm 중 하나이고, (다)에서 첫 번째 단과 마지막 단의 폭은 각각

100 cm, 100 cm 또는 100 cm, 150 cm 또는 150 cm, 150 cm

(i) 첫 번째 단과 마지막 단의 폭이 각각 100 cm, 100 cm인 경우

첫 번째 단과 마지막 단 사이에 있는 8개의 단의 폭의 합은 500 cm이다.

ⓘ 폭이 50 cm인 단 6개와 폭이 100 cm인 단 2개를 설계하는 경우의 수는 8개의 단을 6개와 2개로 나누는 경우의 수와 같으므로

${}_8C_6\times{}_2C_2={}_8C_2\times{}_2C_2$

$=28\times1=28$

ⓘⓘ 폭이 50 cm인 단 7개와 폭이 150 cm인 단 1개를 설계하는 경우의 수는 8개의 단을 7개와 1개로 나누는 경우의 수와 같으므로

${}_8C_7\times{}_1C_1={}_8C_1\times{}_1C_1$

$=8\times1=8$

ⓘ, ⓘⓘ에서 첫 번째 단과 마지막 단의 폭이 100 cm, 100 cm인 경우의 수는

$28+8=36$

(ii) 첫 번째 단과 마지막 단의 폭이 각각 100 cm, 150 cm인 경우

첫 번째 단과 마지막 단 사이에 있는 8개의 단의 폭의 합은 450 cm이다.

폭이 50 cm인 단 7개와 폭이 100 cm인 단 1개를 설계하고, 첫 번째 단과 마지막 단을 설계하는 경우의 수는

${}_8C_7\times{}_1C_1\times2!={}_8C_1\times{}_1C_1\times2!$

$=8\times1\times2=16$

(iii) 첫 번째 단과 마지막 단의 폭이 각각 150 cm, 150 cm인 경우

첫 번째 단과 마지막 단 사이에 있는 8개의 단의 폭의 합은 400 cm이므로 8개의 단의 폭은 모두 50 cm이다.

즉, 폭이 50 cm인 단 8개로 계단을 설계하는 경우의 수는

${}_8C_8=1$

(i), (ii), (iii)에서 계단을 설계하는 경우의 수는

$36+16+1=53$

참고 (i)에서 8개의 단의 폭이 모두 50 cm이면 그 합이 400 cm로 100 cm가 부족하므로 2개의 단이 100 cm이거나 1개의 단이 150 cm이어야 한다.

(ii)에서 8개의 단의 폭이 모두 50 cm이면 그 합이 400 cm로 50 cm가 부족하므로 1개의 단이 100 cm이어야 한다.

15 행렬의 연산

난이도별 필수 기출 224~243쪽

1077 답 ⑤

주어진 표를 행렬로 나타내면 $\begin{pmatrix} 6 & 250 & 80 \\ 4 & 420 & 115 \\ 5 & 510 & 49 \end{pmatrix}$

따라서 c는 5월에 사용한 문자(건)이다.

1078 답 0

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3x-5=-2$, $-3=y-2$

따라서 $x=1$, $y=-1$이므로 $x+y=0$

1079 답 ④

① 행렬 A는 3×3 행렬이다.

② 제2행의 모든 성분의 합은 $1+(-2)+2=1$

③ $i+j=4$를 만족시키는 모든 성분의 합은

$a_{13}+a_{22}+a_{31}=-1+(-2)+2=-1$

④ $j=3$인 모든 성분의 합은

$a_{13}+a_{23}+a_{33}=-1+2+4=5$

⑤ $i<j$인 모든 성분의 합은

$a_{12}+a_{13}+a_{23}=3+(-1)+2=4$

따라서 옳은 것은 ④이다.

1080 답 ④

$a_{11}=1^2+1^2-1\times1=1$, $a_{12}=1^2+2^2-1\times2=3$,

$a_{13}=1^2+3^2-1\times3=7$, $a_{21}=2^2+1^2-2\times1=3$,

$a_{22}=2^2+2^2-2\times2=4$, $a_{23}=2^2+3^2-2\times3=7$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

1081 답 ③

i가 홀수, 즉 $i=1$일 때,

$a_{11}=3\times1+1=4$, $a_{12}=3\times1+2=5$

i가 짝수, 즉 $i=2$일 때,

$a_{21}=3\times2-1=5$, $a_{22}=3\times2-2=4$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}=4+5+5+4=18$

1082 답 ①

1번 책은 1번, 4번 키워드를 포함하고 있으므로

$a_{11}=1$, $a_{12}=0$, $a_{13}=0$, $a_{14}=1$

2번 책은 1번, 2번, 4번 키워드를 포함하고 있으므로

$a_{21}=1$, $a_{22}=1$, $a_{23}=0$, $a_{24}=1$

3번 책은 3번 키워드를 포함하고 있으므로

$a_{31}=0$, $a_{32}=0$, $a_{33}=1$, $a_{34}=0$

4번 책은 2번, 3번 키워드를 포함하고 있으므로

$a_{41}=0$, $a_{42}=1$, $a_{43}=1$, $a_{44}=0$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1083 답 1

$\begin{pmatrix} 4+a\sqrt{3} & -2 \\ 4 & b\sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c-\sqrt{3} & -2 \\ b^2 & d+2\sqrt{3} \end{pmatrix}$이므로 행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$4+a\sqrt{3}=c-\sqrt{3}$, $4=b^2$, $b\sqrt{3}=d+2\sqrt{3}$ …… ⓘ

$4+a\sqrt{3}=c-\sqrt{3}$에서 a, c가 유리수이므로

$a=-1$, $c=4$

$b\sqrt{3}=d+2\sqrt{3}$에서 b, d가 유리수이므로

$b=2$, $d=0$ …… ⓘⓘ

$\therefore a-b+c-d=-1-2+4-0=1$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 식 세우기	40 %
ⓘⓘ a, b, c, d의 값 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $a-b+c-d$의 값 구하기	20 %

1084 답 5

$a_{12}=p\times1+q\times2-2=p+2q-2=5$이므로

$p+2q=7$ …… ㉠

$a_{13}=p\times1+q\times3-2=p+3q-2=7$이므로

$p+3q=9$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $p=3$, $q=2$

$\therefore p+q=5$

1085 답 ③

$\begin{pmatrix} 1-x & x+y \\ -1 & xy \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y-2 & xy+1 \\ -1 & 4-xy \end{pmatrix}$이므로

$1-x=y-2$, $xy=4-xy$

$\therefore x+y=3$, $xy=2$

$\therefore x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=3^3-3\times2\times3=9$

1086 답 ⑤

a_{11}은 $3\times1+4\times1+1=8$, 즉 2^3의 약수의 개수이므로

$a_{11}=4$

a_{12}는 $3\times1+4\times2+1=12$, 즉 $2^2\times3$의 약수의 개수이므로

$a_{12}=(2+1)\times(1+1)=6$

a_{21}은 $3\times2+4\times1+1=11$의 약수의 개수이므로

$a_{21}=2$

a_{22}는 $3\times2+4\times2+1=15$, 즉 3×5의 약수의 개수이므로

$a_{22}=(1+1)\times(1+1)=4$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

참고 a, b, c는 서로 다른 소수, l, m, n은 자연수일 때,
① a^l의 약수의 개수 ➡ $l+1$
② $a^l \times b^m$의 약수의 개수 ➡ $(l+1)(m+1)$
③ $a^l \times b^m \times c^n$의 약수의 개수 ➡ $(l+1)(m+1)(n+1)$

1087 답 ①

$a_{11}=p+q$, $a_{12}=p+2q$, $a_{21}=2p+q$, $a_{22}=2p+2q$이므로

$A=\begin{pmatrix} p+q & p+2q \\ 2p+q & 2p+2q \end{pmatrix}$

$b_{11}=3\times1=3$, $b_{12}=3^1-1=2$, $b_{21}=3^2-2=7$, $b_{22}=3\times2=6$이므로

$B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$

$A=B$에서 $\begin{pmatrix} p+q & p+2q \\ 2p+q & 2p+2q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$이므로

$p+q=3$, $p+2q=2$

두 식을 연립하여 풀면 $p=4$, $q=-1$

$\therefore pq=-4$

1088 답 ③

$a_{11}=2\times1\times(1-1)=0$, $a_{12}=2\times1\times(2-1)=2$,

$a_{13}=2\times1\times(3-1)=4$, $a_{21}=2\times2\times(1-2)=-4$,

$a_{22}=2\times2\times(2-2)=0$, $a_{23}=2\times2\times(3-2)=4$

$b_{ij}=2a_{ji}$이므로

$b_{11}=2a_{11}=0$, $b_{12}=2a_{21}=-8$, $b_{21}=2a_{12}=4$, $b_{22}=2a_{22}=0$,

$b_{31}=2a_{13}=8$, $b_{32}=2a_{23}=8$

$\therefore B=\begin{pmatrix} 0 & -8 \\ 4 & 0 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$

1089 답 ②

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x+y=-1$ ····· ㉠

$x+z=5$ ····· ㉡

$y+z=-2$ ····· ㉢

㉠, ㉡, ㉢을 변끼리 더하면

$2(x+y+z)=2$ $\therefore x+y+z=1$

㉠에서 $z=1-(x+y)=1-(-1)=2$

㉡에서 $y=1-(x+z)=1-5=-4$

㉢에서 $x=1-(y+z)=1-(-2)=3$

$\therefore xyz=3\times(-4)\times2=-24$

1090 답 27

$a_{11}=-a_{11}$, $a_{22}=-a_{22}$, $a_{33}=-a_{33}$이므로

$a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$

$\therefore a=b=c=0$

$a_{12}=-a_{21}$이므로 $3e=-9$ $\therefore e=-3$

$a_{13}=-a_{31}$이므로 $-d=-f$ $\therefore d=f$

$a_{23}=-a_{32}$이므로 $d=-(-e)$ $\therefore d=e$

$\therefore d=e=f=-3$

$\therefore abc-def=0\times0\times0-(-3)\times(-3)\times(-3)=27$

1091 답 ③

$a_{11}=1$, $a_{12}=0$, $a_{13}=0$이므로 1 → 1로 가는 도로 1개만 있다.

$a_{21}=1$, $a_{22}=0$, $a_{23}=2$이므로 2 → 1로 가는 도로가 1개,

2 → 2로 가는 도로는 없고, 2 → 3으로 가는 도로가 2개 있다.

$a_{31}=1$, $a_{32}=0$, $a_{33}=1$이므로 3 → 1로 가는 도로가 1개,

3 → 2로 가는 도로는 없고, 3 → 3으로 가는 도로가 1개 있다.

따라서 도로의 연결 상태를 바르게 나타낸 것은 ③이다.

1092 답 27

$i=1$, $j=1$일 때, $f(x)=x^3+x^2-x+1$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$a_{11}=f(1)=1+1-1+1=2$

$i=1$, $j=2$일 때, $f(x)=x^3+x^2-2x+1$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$a_{12}=f(2)=8+4-4+1=9$

$i=2$, $j=1$일 때, $f(x)=x^3+2x^2-x+1$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는

$a_{21}=f(1)=1+2-1+1=3$

$i=2$, $j=2$일 때, $f(x)=x^3+2x^2-2x+1$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는

$a_{22}=f(2)=8+8-4+1=13$ ····· ⓘ

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}=2+9+3+13=27$ ····· ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$의 값 구하기	80 %
ⓘⓘ 행렬 A의 모든 성분의 합 구하기	20 %

참고 다항식 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지는 $f(a)$와 같고 이를 나머지 정리라 한다.

1093 답 ②

이차함수 $y=x^2-2(i+j)x+9$의 그래프와 x축이 만나는 점의 개수는 이차방정식 $x^2-2(i+j)x+9=0$의 서로 다른 실근의 개수와 같다.

이차방정식 $x^2-2(i+j)x+9=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(i+j)^2-9$

$i=1$, $j=1$일 때, $\frac{D}{4}=(1+1)^2-9=-5<0$이므로 $a_{11}=0$

$i=1$, $j=2$일 때, $\frac{D}{4}=(1+2)^2-9=0$이므로 $a_{12}=1$

$i=2$, $j=1$일 때, $\frac{D}{4}=(2+1)^2-9=0$이므로 $a_{21}=1$

$i=2$, $j=2$일 때, $\frac{D}{4}=(2+2)^2-9=7>0$이므로 $a_{22}=2$

$\therefore A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

1094 답 236

1번 주머니에서 카드 3장을 뽑아 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$a_{11}={}_5\mathrm{P}_3=60$

1번 주머니에서 카드 3장을 뽑아 만들 수 있는 2의 배수는 일의 자리의 숫자가 2 또는 4인 수이므로 그 개수는

$a_{12}=2\times{}_4\mathrm{P}_2=2\times12=24$

2번 주머니에서 카드 3장을 뽑아 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

$a_{21}=5\times{}_5\mathrm{P}_2=5\times20=100$

2번 주머니에서 카드 3장을 뽑아 만들 수 있는 2의 배수는 일의 자리의 숫자가 0 또는 2 또는 4인 수이므로 그 개수는

$a_{22}={}_5\mathrm{P}_2+4\times4+4\times4=20+16+16=52$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은

$a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}=60+24+100+52=236$

1095 답 384

$A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$라 하면 a, b, …, i는 2부터 9까지의 자연수 중 하나이다.

㈏에서 $beh=27=3\times3\times3$

$\therefore\ b=3,\ e=3,\ h=3$

㈎에서 $abc=30$

$b=3$을 대입하면 $3ac=30$ $\therefore\ ac=10$

이를 만족시키는 순서쌍 $(a,\ c)$는 $(2,\ 5)$, $(5,\ 2)$의 2개이다.

㈐에서 $ghi=48$

$h=3$을 대입하면 $3gi=48$ $\therefore\ gi=16$

이를 만족시키는 순서쌍 $(g,\ i)$는 $(2,\ 8)$, $(4,\ 4)$, $(8,\ 2)$의 3개이다.

d, f는 각각 8개의 수 중 하나이므로 행렬 A의 개수는

$2\times3\times8\times8=384$

1096 답 ④

$A+2B=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\6&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\7&4\end{pmatrix}$

따라서 $A+2B$의 $(1,\ 2)$ 성분은 4이다.

다른 풀이

$(1,\ 2)$ 성분끼리만 계산하면 $2+2\times1=4$

1097 답 ④

$A+B=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&0\\2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2&0\\3&-3\end{pmatrix}$

$A+B$의 모든 성분의 합이 6이므로

$(a+2)+0+3+(-3)=6$ $\therefore\ a=4$

1098 답 17

$2\begin{pmatrix}a&1\\5&b\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-2&a\\b&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\-2&-7\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}2a+6&2-3a\\10-3b&2b-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&5\\-2&-7\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2a+6=4,\ 10-3b=-2$

따라서 $a=-1$, $b=4$이므로

$a^2+b^2=1+16=17$

1099 답 ①

$2A+B=\begin{pmatrix}5&2\\3&-1\end{pmatrix}$에서

$B=\begin{pmatrix}5&2\\3&-1\end{pmatrix}-2A=\begin{pmatrix}5&2\\3&-1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}2&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5&2\\3&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&0\\0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$

1100 답 ⑤

$2\left(P-\frac{1}{2}Q\right)-(P-3Q)=2P-Q-P+3Q=P+2Q$

$=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&0\\2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-2\\0&4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5&-2\\2&5\end{pmatrix}$

1101 답 21

$2(X-2A)=4X+3(A-4X)$에서

$2X-4A=4X+3A-12X,\ 10X=7A$

$\therefore\ X=\frac{7}{10}A$

이때 A의 모든 성분의 합이 30이므로 X의 모든 성분의 합은

$\frac{7}{10}\times30=21$

1102 답 25

$2X-3A=3(X-B)+A$에서

$2X-3A=3X-3B+A$

$\therefore\ X=-4A+3B=-4\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}4&3\\-2&6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-4&-8\\0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12&9\\-6&18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&1\\-6&22\end{pmatrix}$

따라서 X의 모든 성분의 합은

$8+1+(-6)+22=25$

1103 답 ②

$A+B=\begin{pmatrix}-3&4\\2&3\end{pmatrix}$ …… ㉠

$A-2B=\begin{pmatrix}-2&3\\1&4\end{pmatrix}$ …… ㉡

㉠−㉡을 하면

$3B=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

$\therefore B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}$을 ㉡의 양변에 더하면

$(A-2B)+B=A-B$

$=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{3} & \frac{10}{3}\\ \frac{4}{3} & \frac{11}{3}\end{pmatrix}$

따라서 $A-B$의 모든 성분의 합은

$-\frac{7}{3}+\frac{10}{3}+\frac{4}{3}+\frac{11}{3}=6$

참고 행렬 A, B에 대한 두 등식이 주어지면 A, B에 대한 연립방정식으로 생각하여 A 또는 B를 소거한다.

1104 답 ①

$xA+yB=C$에서

$x\begin{pmatrix}5 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4 & 5\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}5x+4y & -x+5y\\ x+y & 2x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$5x+4y=-1$, $-x+5y=6$

두 식을 연립하여 풀면 $x=-1$, $y=1$

$\therefore xy=-1$

1105 답 7

$X+Y=A-2B$ ····· ㉠

$X-Y=2A+B$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면

$2X=3A-B$

$=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix}$

$\therefore X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ ····· ⓘ

㉠−㉡을 하면

$2Y=-A-3B$

$=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}9 & 0\\ -3 & 6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-10 & 0\\ 4 & -8\end{pmatrix}$

$\therefore Y=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-10 & 0\\ 4 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 2 & -4\end{pmatrix}$ ····· ⓘⓘ

따라서 $M=2$, $m=-5$이므로

$M-m=7$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ X 구하기	40 %
ⓘⓘ Y 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $M-m$의 값 구하기	20 %

1106 답 10

$xA+yB=C$에서

$x\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}3 & a\\ 2 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & b\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2x+3y & x+ay\\ 2y & x-4y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & b\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$2x+3y=-1$, $x+ay=2$, $2y=2$, $x-4y=b$

$2y=2$에서 $y=1$

$2x+3y=-1$에 $y=1$을 대입하면

$2x+3=-1$ $\therefore x=-2$

$x+ay=2$에 $x=-2$, $y=1$을 대입하면

$-2+a=2$ $\therefore a=4$

$x-4y=b$에 $x=-2$, $y=1$을 대입하면

$-2-4=b$ $\therefore b=-6$

$\therefore a-b=4-(-6)=10$

1107 답 14

$a_{ij}=a_{ji}$에서 $a_{12}=a_{21}$

$a_{11}=x$, $a_{12}=a_{21}=y$, $a_{22}=z$라 하면 $A=\begin{pmatrix}x & y\\ y & z\end{pmatrix}$

$b_{ij}=-b_{ji}$에서 $b_{11}=-b_{11}$이므로 $b_{11}=0$

$b_{22}=-b_{22}$이므로 $b_{22}=0$

$b_{12}=-b_{21}$이므로 $b_{12}=w$라 하면 $B=\begin{pmatrix}0 & w\\ -w & 0\end{pmatrix}$

$A+B=\begin{pmatrix}8 & 15\\ -1 & 7\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}x & y\\ y & z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & w\\ -w & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 15\\ -1 & 7\end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix}x & y+w\\ y-w & z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 15\\ -1 & 7\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x=8$, $y+w=15$, $y-w=-1$, $z=7$

$y+w=15$, $y-w=-1$을 연립하여 풀면

$y=7$, $w=8$

$\therefore a_{21}+a_{22}=y+z=7+7=14$

1108 답 ⑤

A는 2×1 행렬, B는 2×2 행렬, C는 1×2 행렬이다.

ㄱ. 2×1 행렬과 2×2 행렬의 곱은 정의되지 않는다.

ㄴ. 2×2 행렬과 2×1 행렬의 곱은 2×1 행렬이 된다.

ㄷ. 2×2 행렬과 1×2 행렬의 곱은 정의되지 않는다.

ㄹ. 1×2 행렬과 2×1 행렬의 곱은 1×1 행렬이 된다.

ㅁ. 1×2 행렬과 2×2 행렬의 곱은 1×2 행렬이 된다.

ㅂ. 1×2 행렬과 1×2 행렬의 곱은 정의되지 않는다.

따라서 보기에서 그 곱이 정의되는 행렬은 ㄴ, ㄹ, ㅁ이다.

참고 두 행렬 A, B의 곱 AB는 (A의 열의 개수)=(B의 행의 개수)일 때 정의된다.

1109 답 21

$A-B=\begin{pmatrix}1&4\\5&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$

$\therefore (A-B)C=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\12\end{pmatrix}$

따라서 $(A-B)C$의 모든 성분의 합은

$9+12=21$

1110 답 ②

$X+AB=B$에서

$X=B-AB=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2&-1\end{pmatrix}$

따라서 X의 모든 성분의 합은

$1+0+2+(-1)=2$

1111 답 36

$AB=O$에서

$\begin{pmatrix}1&2\\3&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y&-2\\-3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}y-6&0\\3y-3x&-6+x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$y-6=0$, $-6+x=0$

따라서 $x=6$, $y=6$이므로

$xy=36$

1112 답 ②

$YX=\begin{pmatrix}37&47\\59&65\end{pmatrix}\begin{pmatrix}23000&28000\\56000&72000\end{pmatrix}$

YX의 $(2,1)$ 성분은

$59\times23000+65\times56000$

이는 가게 A의 5월의 축구공과 축구화의 판매 총액과 같다.

1113 답 13

$a_{11}=1-1+1=1$, $a_{12}=1-2+1=0$,

$a_{21}=2-1+1=2$, $a_{22}=2-2+1=1$이므로

$A=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$

$b_{11}=1+1+1=3$, $b_{12}=1+2+1=4$,

$b_{21}=2+1+1=4$, $b_{22}=2+2+1=5$이므로

$B=\begin{pmatrix}3&4\\4&5\end{pmatrix}$

$\therefore AB=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4\\4&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\10&13\end{pmatrix}$

따라서 AB의 $(2,2)$ 성분은 13이다.

1114 답 ①

$A^2=\begin{pmatrix}-1&a\\b&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&a\\b&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+ab&a\\b&ab+4\end{pmatrix}$이므로

$A^2=A$에서

$\begin{pmatrix}1+ab&a\\b&ab+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&a\\b&2\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$1+ab=-1$ $\therefore ab=-2$

이때 $a^2+b^2=10$이므로

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=10+2\times(-2)=6$

1115 답 10

$A+B=\begin{pmatrix}1&3\\2&3\end{pmatrix}$ ····· ㉠

$A-B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면

$2A=\begin{pmatrix}1&3\\2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\4&2\end{pmatrix}$

$\therefore A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&2\\4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$ ····· ⓘ

㉠−㉡을 하면

$2B=\begin{pmatrix}1&3\\2&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&4\\0&4\end{pmatrix}$

$\therefore B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&4\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&2\end{pmatrix}$ ····· ⓘⓘ

$\therefore A^2-B^2=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\0&2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&2\\4&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&4\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-1\end{pmatrix}$ ····· ⓘⓘⓘ

따라서 $a=3$, $b=-2$, $c=4$, $d=-1$이므로

$ac-bd=12-2=10$ ····· ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ A 구하기	30 %
ⓘⓘ B 구하기	30 %
ⓘⓘⓘ A^2-B^2 구하기	30 %
ⓘⓥ $ac-bd$의 값 구하기	10 %

주의 일반적으로 행렬에서는 곱셈에 대한 교환법칙이 성립하지 않으므로 $A^2-B^2=(A+B)(A-B)$로 생각하여 $A^2-B^2=\begin{pmatrix}1&3\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-4\\8&-5\end{pmatrix}$로 계산하지 않도록 주의한다.

1116 답 ③

$PQ=\begin{pmatrix}30&40\\10&20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5.1&21.4\\10.7&11.5\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}30\times5.1+40\times10.7&30\times21.4+40\times11.5\\10\times5.1+20\times10.7&10\times21.4+20\times11.5\end{pmatrix}$

$$QP=\begin{pmatrix}5.1 & 21.4\\ 10.7 & 11.5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30 & 40\\ 10 & 20\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}5.1\times30+21.4\times10 & 5.1\times40+21.4\times20\\ 10.7\times30+11.5\times10 & 10.7\times40+11.5\times20\end{pmatrix}$$
(지원자 수)=(채용 인원수)×(경쟁률)이므로
두 직군 A, B의 신입 채용 지원자 수의 합은
$m=30\times5.1+40\times10.7$
즉, m의 값은 행렬 PQ의 (1, 1) 성분과 같다.
직군 B의 신입과 경력직 채용 지원자 수의 합은
$n=40\times10.7+20\times11.5$
즉, n의 값은 행렬 QP의 (2, 2) 성분과 같다.
따라서 $m+n$의 값은 행렬 PQ의 (1, 1) 성분과 행렬 QP의 (2, 2) 성분의 합과 같다.

1117 답 ②

$$A^2=\begin{pmatrix}a^2 & 3\\ 2 & a+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^2 & 3\\ 2 & a+1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}a^4+6 & 3a^2+3(a+1)\\ 2a^2+2(a+1) & 6+(a+1)^2\end{pmatrix}$$
A^2의 (1, 1) 성분과 (2, 2) 성분이 서로 같으므로
$a^4+6=6+(a+1)^2$, $a^4-(a+1)^2=0$
$(a^2+a+1)(a^2-a-1)=0$
$\therefore a^2+a+1=0$ 또는 $a^2-a-1=0$
이차방정식 $a^2+a+1=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=1-4=-3<0$
즉, $a^2+a+1=0$은 서로 다른 두 허근을 갖는다.
이차방정식 $a^2-a-1=0$의 판별식을 D_2라 하면
$D_2=1+4=5>0$
즉, $a^2-a-1=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
이때 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하면 모든 실수 a의 값의 곱은 -1이다.

1118 답 ①

$$A^2-xE=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}-x\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-x & 2\\ -1 & -2-x\end{pmatrix}$$
$f(A^2-xE)=0$에서
$(-1-x)^2-2\times(-1)\times(-2-x)=0$
$x^2+2x+1-4-2x=0$, $x^2=3$
$\therefore x=-\sqrt{3}$ 또는 $x=\sqrt{3}$
따라서 모든 실근의 곱은 $-\sqrt{3}\times\sqrt{3}=-3$

1119 답 ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=-4$
$$AB=\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\alpha & -1+\alpha\beta\\ 3 & -2-\beta\end{pmatrix}$$
이므로 AB의 모든 성분의 합은
$1-\alpha+(-1+\alpha\beta)+3+(-2-\beta)$
$=-(\alpha+\beta)+\alpha\beta+1=-5+(-4)+1=-8$

1120 답 8

$$ABC=\begin{pmatrix}x & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ 2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2x+6 & x+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ 2\end{pmatrix}$$
$$=((2x+6)x+(x+2)\times2)$$
$$=(2x^2+8x+4)$$
$$=(2(x+2)^2-4)$$ ····· ⓘ
ABC의 성분은 $x=-2$일 때, 최솟값 -4를 가지므로
$a=-2$, $m=-4$
$\therefore am=8$ ····· ⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ ABC의 성분에 대한 식 구하기	50 %
ⓘⓘ am의 값 구하기	50 %

1121 답 ①

A가 $A^2=E$를 만족시키므로
$$A^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & 2b(a+3)\\ 2c(a+3) & (a+6)^2+bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$
행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$a^2+bc=1$, $2b(a+3)=0$, $2c(a+3)=0$, $(a+6)^2+bc=1$
(i) $a\neq$ (가) -3인 경우
$2b(a+3)=0$, $2c(a+3)=0$에서 $b=0$이고 $c=0$이므로
$$A^2=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & (a+6)^2\end{pmatrix}$$ ····· ㉠
이다.
㉠에서 $a^2\neq(a+6)^2$이므로 $A^2\neq E$
따라서 주어진 조건에 모순이다.
(ii) $a=$ (가) -3인 경우
주어진 조건 $A^2=E$에서 $a^2+bc=1$
$a=-3$을 대입하면 $9+bc=1$이므로 $bc=$ (나) -8이다.
b, c가 정수이므로 $bc=$ (나) -8을 만족시키는 순서쌍 (b, c)를 모두 구하면
$(-8, 1)$, $(-4, 2)$, $(-2, 4)$, $(-1, 8)$,
$(1, -8)$, $(2, -4)$, $(4, -2)$, $(8, -1)$
따라서 순서쌍 (b, c)의 개수는 (다) 8이다.
따라서 $A^2=E$를 만족시키는 행렬 A의 개수는 (다) 8이다.
따라서 $p=-3$, $q=-8$, $r=8$이므로
$p+q+r=-3$

1122 답 ③

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ x & y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\ y-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ n\end{pmatrix}$$에서
$$\begin{pmatrix}x-1-2(y-2)\\ x(x-1)+y(y-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ n\end{pmatrix}$$
행렬이 서로 같을 조건에 의하여
$x-1-2(y-2)=0$ ····· ㉠
$x(x-1)+y(y-2)=n$ ····· ㉡

㉠에서

$x-1-2y+4=0 \quad \therefore x=2y-3$

이를 ㉡에 대입하면

$(2y-3)(2y-4)+y(y-2)=n$

$5y^2-16y+12-n=0 \quad \cdots\cdots$ ㉢

실수 y가 존재하므로 y에 대한 이차방정식 ㉢의 실근이 존재해야 한다. ㉢의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=64-5(12-n)\geq 0$

$5n\geq -4 \quad \therefore n\geq -\frac{4}{5}$

따라서 정수 n의 최솟값은 0이다.

1123 답 ④

도시형 가옥 1채를 짓기 위해 필요한 철재와 목재의 구매 비용은

$8\times 35+20\times 12$

도시형 가옥 1채를 짓기 위해 필요한 철재와 목재의 운송비는

$8\times 5+20\times 2$

전원형 가옥 1채를 짓기 위해 필요한 철재와 목재의 구매 비용은

$5\times 35+25\times 12$

전원형 가옥 1채를 짓기 위해 필요한 철재와 목재의 운송비는

$5\times 5+25\times 2$

이때 $\begin{pmatrix} 8\times 35+20\times 12 & 5\times 35+25\times 12 \\ 8\times 5+20\times 2 & 5\times 5+25\times 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 35 & 12 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}$

이고, 도시형 가옥은 4채, 전원형 가옥은 6채를 지으므로 구하는 행렬의 식은

$\begin{pmatrix} 35 & 12 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 20 & 25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

1124 답 ①

처음 두 용기 A, B에 들어 있는 소금의 양은 각각

$100\times\frac{a_0}{100}=a_0(\text{g}),\ 100\times\frac{b_0}{100}=b_0(\text{g})$이고,

덜어 내는 10 g의 소금물에 들어 있는 소금의 양은 각각

$10\times\frac{a_0}{100}=0.1a_0(\text{g}),\ 10\times\frac{b_0}{100}=0.1b_0(\text{g})$

이므로 덜어 내어 섞는 작업을 한 번 시행한 후 용기 A, B에 들어 있는 소금의 양은 각각

$(0.9a_0+0.1b_0)$ g, $(0.9b_0+0.1a_0)$ g

1회 시행한 후 두 용기 A, B의 소금물의 농도를 각각 a_1 %, b_1 %라 하면

$a_1=\frac{0.9a_0+0.1b_0}{100}\times 100=0.9a_0+0.1b_0$

$b_1=\frac{0.9b_0+0.1a_0}{100}\times 100=0.1a_0+0.9b_0$

$\therefore \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$

a_1, b_1에 대하여 같은 시행을 반복하므로 2번 시행한 후 두 용기 A, B의 소금물의 농도를 각각 a_2 %, b_2 %라 하면

$a_2=0.9a_1+0.1b_1$, $b_2=0.1a_1+0.9b_1$

$\therefore \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}^2\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$

따라서 5번 시행한 후 두 용기 A, B의 소금물의 농도 a %, b %에 대하여

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}^5\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$

$\therefore T=\begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}^5$

1125 답 24

$MA+B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$에서 MA와 B는 각각 이차정사각행렬이다. 이때 $M=\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, 즉 M이 2×1 행렬이므로 A는 1×2 행렬이다.

$A=(x \quad y)$, $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 하면 $MA+B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$에서

$$MA+B=\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}(x \quad y)+\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 4x & 4y \\ -5x & -5y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} 4x+a & 4y+b \\ -5x+c & -5y+d \end{pmatrix}$$

$\therefore \begin{pmatrix} 4x+a & 4y+b \\ -5x+c & -5y+d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$

이때 우변의 모든 성분의 합은 $-1+(-2)+3+(-6)=-6$이므로 좌변의 모든 성분의 합도 -6이다.

또 행렬 B의 모든 성분의 합이 18이므로 $a+b+c+d=18$

$(4x+a)+(4y+b)+(-5x+c)+(-5y+d)=-6$이므로

$-x-y+a+b+c+d=-6$

$-(x+y)+18=-6$

$\therefore x+y=24$

따라서 행렬 A의 모든 성분의 합은 24이다.

1126 답 2

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(ax+by \quad bx+ay)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
$$=((ax+by)x+(bx+ay)y)$$
$$=(ax^2+2bxy+ay^2)$$

모든 실수 x, y에 대하여 이 행렬의 성분이 음이 아니므로

$ax^2+2bxy+ay^2\geq 0$이 항상 성립한다.

x에 대한 이차방정식 $ax^2+2bxy+ay^2=0$의 판별식을 D라 하면

$a>0$, $D\leq 0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=(by)^2-a\times ay^2\leq 0$

$(b^2-a^2)y^2\leq 0$

모든 실수 y에 대하여 $y^2\geq 0$이므로

$b^2-a^2\leq 0 \quad \therefore a^2\geq b^2$

$\therefore a^2+(b-2)^2\geq b^2+(b-2)^2$

$=2b^2-4b+4=2(b-1)^2+2$

≥ 2

따라서 $a^2+(b-2)^2$의 최솟값은 2이다.

1127 답 7

$(A-E)(A^2+A+E)=A^3+A^2+A-A^2-A-E^2$

$=A^3-E^2=A^3-E$

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&-3\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-9\\0&4\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1&-9\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-21\\0&8\end{pmatrix}$

$\therefore (A-E)(A^2+A+E)=A^3-E$

$=\begin{pmatrix}1&-21\\0&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&-21\\0&7\end{pmatrix}$

따라서 (2, 2) 성분은 7이다.

1128 답 8

$A(B+C)-(C+A)B+C(A+B)$

$=AB+AC-CB-AB+CA+CB$

$=AC+CA$

$=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\-2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0\\-1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&6\end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$2+0+0+6=8$

1129 답 25

$\begin{pmatrix}2a-3c\\2b-3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\2b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3c\\-3d\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$이므로

$A\begin{pmatrix}2a-3c\\2b-3d\end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}-3A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$

$=2\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-18\end{pmatrix}$

따라서 $p=7$, $q=-18$이므로

$p-q=25$

1130 답 3

$(A+2E)(A-2E)=-3E$에서

$A^2-4E=-3E$ $\therefore A^2=E$

$A^2=\begin{pmatrix}-1&1\\a&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\a&b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+a&-1+b\\-a+ab&a+b^2\end{pmatrix}$

즉, $\begin{pmatrix}1+a&-1+b\\-a+ab&a+b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$이므로

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$1+a=1$, $-1+b=0$

따라서 $a=0$, $b=1$이므로

$2a+3b=0+3=3$

1131 답 ③

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$에서

$A^2+AB+BA+B^2=A^2+2AB+B^2$

$\therefore AB=BA$

즉, $\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&x\\2y&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&x\\2y&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}0&x\\0&2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x&0\\2y-6&0\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x=0$, $0=2y-6$ $\therefore y=3$

$\therefore x+y=3$

1132 답 ③

$A^2-AB+2BA-2B^2=A(A-B)+2B(A-B)$

$=(A+2B)(A-B)$

$A+2B=\begin{pmatrix}0&0\\4&-1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1&-3\\-2&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&0\\4&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-6\\-4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-6\\0&-1\end{pmatrix}$

$A-B=\begin{pmatrix}0&0\\4&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-3\\-2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&3\\6&-1\end{pmatrix}$

$\therefore A^2-AB+2BA-2B^2=(A+2B)(A-B)$

$=\begin{pmatrix}2&-6\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&3\\6&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-38&12\\-6&1\end{pmatrix}$

1133 답 15

$A\begin{pmatrix}2a\\2b\end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\4\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}-2c\\-2d\end{pmatrix}=-2A\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x\\-2y\end{pmatrix}$

따라서 $A\begin{pmatrix}2a&-2c\\2b&-2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&-2x\\4&-2y\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}10&-2x\\4&-2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z&4\\w&-6\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$10=z$, $-2x=4$, $4=w$, $-2y=-6$

$\therefore x=-2$, $y=3$, $z=10$, $w=4$

$\therefore x+y+z+w=15$

참고 이차정사각행렬 A에 대하여

$A\begin{pmatrix}a_1\\b_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}a_2\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix}$이면 $A\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\y_1&y_2\end{pmatrix}$

1134 답 ④

$(2A-3B)^2=4A^2-12AB+9B^2$에서

$4A^2-6AB-6BA+9B^2=4A^2-12AB+9B^2$

$AB+BA=2AB$ $\therefore AB=BA$

즉, $\begin{pmatrix}1&1\\x&y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\x&y\end{pmatrix}$이므로

$\begin{pmatrix}3&5\\x+2y&2x+3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2x&1+2y\\2+3x&2+3y\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$3=1+2x$, $5=1+2y$

따라서 $x=1$, $y=2$이므로

$x^2+y^2=1+4=5$

1135 답 ③

$A^2=2A-E$이므로

$$A^2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=(2A-E)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-E\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$=2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$

1136 답 18

$A^2+A^3=-3A-3E$의 양변에 A^2을 곱하면

$A^2(A^2+A^3)=A^2(-3A-3E)$

$\therefore A^4+A^5=-3A^3-3A^2=-3(A^2+A^3)$

$=-3(-3A-3E)$

$=9A+9E$

이때 A의 모든 성분의 합이 0이므로 $9A$의 모든 성분의 합도 0이다.

또 $9E$의 모든 성분의 합은 18이므로 A^4+A^5의 모든 성분의 합은

$0+18=18$

1137 답 1

$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$에서

$A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$

$\therefore AB=BA$ …… ⓘ

즉, $\begin{pmatrix}x&y\\1&x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&1\\y&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&1\\y&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\1&x\end{pmatrix}$이므로

$$\begin{pmatrix}x^2+y^2&x+y\\x+xy&1+x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+1&xy+x\\xy+1&y^2+x\end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$x^2+y^2=x^2+1$, $x+xy=xy+1$

$\therefore x=1$, $y^2=1$ …… ⓘⓘ

따라서 (x, y)는 $(1, -1)$, $(1, 1)$이므로 이 두 점과 원점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times1=1$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

ⓘ $AB=BA$임을 알기	20%
ⓘⓘ x, y^2의 값 구하기	50%
ⓘⓘⓘ 도형의 넓이 구하기	30%

1138 답 ④

$(A+2E)^2=5A+6E$에서

$A^2+4A+4E=5A+6E$

$\therefore A^2=A+2E$

$(A+2E)^2=5A+6E$의 양변에 $A+2E$를 곱하면

$(A+2E)^3=(5A+6E)(A+2E)$

$=5A^2+16A+12E$

$=5(A+2E)+16A+12E$

$=5A+10E+16A+12E$

$=21A+22E$

따라서 $p=21$, $q=22$이므로

$p+q=43$

1139 답 ③

실수 a, b에 대하여 $a\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-2\end{pmatrix}$가 성립한다고 하면

$$\begin{pmatrix}a+3b\\-2a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\-2\end{pmatrix}$$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a+3b=15$, $-2a+b=-2$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3$, $b=4$

$$\therefore A\begin{pmatrix}15\\-2\end{pmatrix}=A\left\{3\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$=3A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+4A\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

$$=3\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\21\end{pmatrix}$$

따라서 $p=-1$, $q=21$이므로

$p+q=20$

다른 풀이

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$라 하면

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$에서

$\begin{pmatrix}a-2b\\c-2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3a+b\\3c+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$a-2b=1$, $c-2d=3$, $3a+b=-1$, $3c+d=3$

$\therefore a=-\frac{1}{7}$, $b=-\frac{4}{7}$, $c=\frac{9}{7}$, $d=-\frac{6}{7}$

따라서 $A=\begin{pmatrix}-\frac{1}{7}&-\frac{4}{7}\\\frac{9}{7}&-\frac{6}{7}\end{pmatrix}$이므로

$$A\begin{pmatrix}15\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{7}&-\frac{4}{7}\\\frac{9}{7}&-\frac{6}{7}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\21\end{pmatrix}$$

$\therefore p+q=-1+21=20$

1140 답 ④

$A^2+A=2E$에서 $B(A^2+A)=B(2E)$

$BAA+BA=2B$

$BA=4E$를 대입하면

$(4E)A+4E=2B$

$4A+4E=2B$ $\therefore B=2A+2E$

$\therefore B^2=(2A+2E)^2$

$=4A^2+8A+4E$

$=4(-A+2E)+8A+4E$

$=-4A+8E+8A+4E$

$=4A+12E$

따라서 $p=4$, $q=12$이므로

$pq=48$

1141 답 ②

$AB-BA=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}$에서

$A(AB-BA)=A\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}$

$A^2B-ABA=A\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ ····· ㉠

또 $AB-BA=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}$에서

$(AB-BA)A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}A$

$ABA-BA^2=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}A$ ····· ㉡

㉠+㉡을 하면

$A^2B-BA^2=A\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}A$

$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ -4 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ -4 & 4\end{pmatrix}$

1142 답 ④

$(A-3B)^2=A^2-6AB+9B^2$에서

$A^2-3AB-3BA+9B^2=A^2-6AB+9B^2$

$AB+BA=2AB$ $\therefore AB=BA$

$\therefore A^3-B^3=(A-B)^3+3AB(A-B)$ ····· ㉠

$A-B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$에서

$(A-B)^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}$

$=-AB$

따라서 ㉠에서

$A^3-B^3=(A-B)^2(A-B)+3AB(A-B)$

$=-AB(A-B)+3AB(A-B)$

$=2AB(A-B)$

$=2\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{pmatrix}$

$=2\begin{pmatrix}3 & 6\\ -6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 12\\ -12 & -6\end{pmatrix}$

1143 답 ⑤

㈏의 $A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$에서

$A^2\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

㈎를 대입하면

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y\\ -2y\end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix}x+1\\ y+2\end{pmatrix}=A\left\{\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}\right\}=A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x+2y\\ -2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2y+1\\ 2-2y\end{pmatrix}$

따라서 $A\begin{pmatrix}x+1\\ y+2\end{pmatrix}$의 모든 성분의 합은

$(x+2y+1)+(2-2y)=x+3$

1144 답 12

$A-B=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=3E$에서 $A=3E+B$이므로

$AB=(3E+B)B=3B+B^2=B(3E+B)=BA$

즉, $AB=BA$이므로

$A^2+B^2=(A-B)^2+2AB$

$=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 0 & 5\end{pmatrix}$

따라서 구하는 모든 성분의 합은

$5+2+0+5=12$

1145 답 ②

$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$

$A^3=A^2A=(-E)A=-A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E^2=E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

따라서 A^n은 A, $-E$, $-A$, E가 반복되므로

행렬 A^n이 될 수 없는 것은 ② $\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$이다.

1146 답 ④

$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

$\therefore A^{212}=(A^3)^{70}A^2=E^{70}A^2=A^2$

$A^2=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$이므로 구하는 모든 성분의 곱은

$-2\times(-1)\times3\times1=6$

1147 답 ②

$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

$\therefore A^{1010}=(A^2)^{505}=E^{505}=E$

$A^{1010}\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$에서

$E\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$

따라서 $p=5$, $q=1$이므로

$p-q=4$

1148 답 ④

$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\-1 & -1\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}-1 & 3\\-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\-1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -6\\2 & -2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-2 & -6\\2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 3\\-1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 0\\0 & 8\end{pmatrix}=8E$

$\therefore A^9=(A^3)^3=(8E)^3=512E$

$\therefore A^9\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=512E\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=512\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}512\\512\end{pmatrix}$

따라서 $p=512$, $q=512$이므로

$p+q=1024$

1149 답 24

$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\2 & 0\end{pmatrix}$

$A^4=A^2A^2=\begin{pmatrix}0 & -2\\2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -2\\2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 0\\0 & -4\end{pmatrix}=-4E$

$\therefore A^2+A^4+A^6+A^8+A^{10}$

$=A^2+A^4+A^4A^2+(A^4)^2+(A^4)^2A^2$

$=A^2-4E-4EA^2+(-4E)^2+(-4E)^2A^2$

$=A^2-4E-4A^2+16E+16A^2$

$=13A^2+12E$

$=13\begin{pmatrix}0 & -2\\2 & 0\end{pmatrix}+12\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & -26\\26 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12 & 0\\0 & 12\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}12 & -26\\26 & 12\end{pmatrix}$

따라서 $A^2+A^4+A^6+A^8+A^{10}$의 모든 성분의 합은

$12+(-26)+26+12=24$

1150 답 762

$A=\begin{pmatrix}-4 & 8\\-3 & 6\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}-4 & 8\\-3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 8\\-3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 16\\-6 & 12\end{pmatrix}=2A$

$A^3=A^2A=2AA=2(2A)=4A$

$A^4=A^3A=4AA=4(2A)=8A$

$\vdots$

$A^n=2^{n-1}A$ (n은 자연수) …… ⓘ

$\therefore A+A^2+A^3+\cdots+A^7$

$=A+2A+4A+8A+16A+32A+64A$

$=127A$ …… ⓘⓘ

따라서 행렬 $127A$의 $(2, 2)$ 성분은

$127\times6=762$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ A의 거듭제곱의 규칙 찾기	40 %
ⓘⓘ $A+A^2+A^3+\cdots+A^7$을 간단히 하기	40 %
ⓘⓘⓘ $127A$의 $(2, 2)$ 성분 구하기	20 %

참고 케일리–해밀턴 정리에 의하여 다음과 같이 $A^2=2A$임을 알 수 있다.

$A^2-(-4+6)A+\{-4\times6-8\times(-3)\}E=O$

$A^2-2A=O$ $\therefore A^2=2A$

1151 답 34

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\6 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 0\\6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\9 & 1\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1 & 0\\9 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\12 & 1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\3n & 1\end{pmatrix}$

따라서 행렬 A^n의 $(2, 1)$ 성분은 $3n$이므로 $a_n=3n$

$a_n>100$에서 $3n>100$ $\therefore n>\frac{100}{3}$

따라서 자연수 n의 최솟값은 34이다.

1152 답 ⑤

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 8\end{pmatrix}$에서 행렬 A의 모든 성분의 합은 $1+2+4+8=15$

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\4 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 18\\36 & 72\end{pmatrix}=9A$

$A^3=A^2A=9AA=9(9A)=9^2A$

$A^4=A^3A=9^2AA=9^2(9A)=9^3A$

$\vdots$

$A^n=9^{n-1}A$ (n은 자연수)

따라서 $A^{10}=9^9A=3^{18}A$이고, 행렬 A의 모든 성분의 합이 15이므로 A^{10}의 모든 성분의 합은

$3^{18}\times15=3^{19}\times5$

참고 케일리–해밀턴 정리에 의하여 다음과 같이 $A^2=9A$임을 알 수 있다.

$A^2-(1+8)A+(1\times8-2\times4)E=O$

$A^2-9A=O$ $\therefore A^2=9A$

1153 답 51

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-\frac{1}{2}$, $\alpha\beta=-2$

$\therefore\ 2\alpha+2\beta+1=2(\alpha+\beta)+1=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+1=0,$

$\frac{4}{\alpha}+\frac{4}{\beta}=\frac{4(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}=\frac{4\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{-2}=1$

즉, $A=\begin{pmatrix}1 & 2\alpha+2\beta+1\\ \alpha\beta & \frac{4}{\alpha}+\frac{4}{\beta}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$이므로

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -6 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -8 & 1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2n & 1\end{pmatrix}$

A^n의 모든 성분의 합이 -100이므로

$1+0+(-2n)+1=-100,\ 2n=102$

$\therefore\ n=51$

1154 답 2

$(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$

$=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 1 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ ····· ⓘ

$(A+B)^4=(A+B)^2(A+B)^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$(A+B)^6=(A+B)^4(A+B)^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$(A+B)^{30}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ ····· ⓘⓘ

따라서 $(A+B)^{30}$의 모든 성분의 합은

$0+0+1+1=2$ ····· ⓘⓘⓘ

채점 기준	
ⓘ $(A+B)^2$ 구하기	40 %
ⓘⓘ $(A+B)^{30}$ 구하기	40 %
ⓘⓘⓘ $(A+B)^{30}$의 모든 성분의 합 구하기	20 %

1155 답 4

$AB+A=\begin{pmatrix}a & -1\\ 1 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 0 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & -1\\ 1 & b\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-a & -a+2\\ -1 & -1-2b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & -1\\ 1 & b\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0 & -a+1\\ 0 & -b-1\end{pmatrix}$

$AB+A=O$에서

$\begin{pmatrix}0 & -a+1\\ 0 & -b-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$-a+1=0,\ -b-1=0$

$\therefore\ a=1,\ b=-1$

따라서 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$이므로

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O$

$A^3=A^4=\cdots=A^{2010}=O$이므로

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{2010}=A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

따라서 $p=1,\ q=-1,\ r=1,\ s=-1$이므로

$p^2+q^2+r^2+s^2=1+1+1+1=4$

1156 답 200

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$A^m=\begin{pmatrix}1 & 2m\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에서

$B^2=BB=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$B^3=B^2B=\begin{pmatrix}1 & 6\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$B^4=B^3B=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 12\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$B^n=\begin{pmatrix}1 & 3n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\therefore\ A^m-B^n=\begin{pmatrix}1 & 2m\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 3n\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2m-3n\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

A^m-B^n의 모든 성분의 합이 10이므로 $2m-3n=10$

이를 $m+n=30$과 연립하여 풀면 $m=20,\ n=10$

$\therefore\ mn=200$

1157 답 ②

$A=\begin{pmatrix}\omega & 1\\ \omega+1 & -\omega\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}\omega & 1\\ \omega+1 & -\omega\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\omega & 1\\ \omega+1 & -\omega\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}\omega^2+\omega+1 & 0\\ 0 & \omega^2+\omega+1\end{pmatrix}$

방정식 $x^3=1$, 즉 $(x-1)(x^2+x+1)=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$

$\therefore\ A^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O$

$A^2=A^3=A^4=\cdots=A^{300}=O$이므로

$A+A^2+A^3+\cdots+A^{300}=A+O+O+\cdots+O=A$

1158 답 3

$A=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1\\ 3 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1\\ 3 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1\\ 3 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$

$A^3=A^2A=(-E)A=-A$

$A^4=(A^2)^2=(-E)^2=E$ …… ⓘ

$A+A^2+A^3+A^4=A+(-E)+(-A)+E=O$

$\therefore\ A+A^2+A^3+\cdots+A^{81}$

$=(A+A^2+A^3+A^4)+A^4(A+A^2+A^3+A^4)$

$+A^8(A+A^2+A^3+A^4)+\cdots+A^{76}(A+A^2+A^3+A^4)+A^{81}$

$=A^{81}=(A^4)^{20}A=E^{20}A=A$ …… ⓘⓘ

$A\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}+A^2\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}+A^3\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}+\cdots+A^{81}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$

$=(A+A^2+A^3+\cdots+A^{81})\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$

$=A\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}$

$A\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$이므로 $\begin{pmatrix}\sqrt{2} & -1\\ 3 & -\sqrt{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}\sqrt{2}p-q\\ 3p-\sqrt{2}q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$\sqrt{2}p-q=0,\ 3p-\sqrt{2}q=1$ …… ⓘⓘⓘ

두 식을 연립하여 풀면

$p=1,\ q=\sqrt{2}$

$\therefore\ p^2+q^2=1+2=3$ …… ⓘⓥ

채점 기준	
ⓘ A의 거듭제곱의 규칙 찾기	30 %
ⓘⓘ $A+A^2+A^3+\cdots+A^{81}$ 간단히 하기	40 %
ⓘⓘⓘ p, q에 대한 식 세우기	20 %
ⓘⓥ p^2+q^2의 값 구하기	10 %

1159 답 8

$A=\begin{pmatrix}3 & -6\\ -1 & 2\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}3 & -6\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & -6\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15 & -30\\ -5 & 10\end{pmatrix}=5A$

$A^3=A^2A=(5A)A=5A^2=5(5A)=5^2A$

$A^4=A^3A=(5^2A)A=5^2A^2=5^2(5A)=5^3A$

$\vdots$

$A^n=5^{n-1}A=5^{n-1}\begin{pmatrix}3 & -6\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3\times5^{n-1} & -6\times5^{n-1}\\ -5^{n-1} & 2\times5^{n-1}\end{pmatrix}$

$\therefore\ f(n)=|3\times5^{n-1}\times(-5^{n-1})-(-6\times5^{n-1})\times(2\times5^{n-1})|$

$=|-3\times5^{2n-2}+12\times5^{2n-2}|$

$=|9\times5^{2n-2}|$

$=3^2\times5^{2n-2}$

$f(n)$의 약수의 개수는 $(2+1)\times(2n-2+1)=6n-3$

약수의 개수가 45이려면

$6n-3=45,\ 6n=48$

$\therefore\ n=8$

참고 케일리-해밀턴 정리에 의하여 다음과 같이 $A^2=5A$임을 알 수 있다.

$A^2-(3+2)A+\{3\times2-(-6)\times(-1)\}E=O$

$A^2-5A=O$ $\therefore\ A^2=5A$

1160 답 15

$AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

즉, $AB=BA$이므로 $A^nB^n=(AB)^n$

$AB=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$에서

$(AB)^2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$(AB)^3=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$(AB)^4=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$(AB)^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & (-1)^n\end{pmatrix}$ (단, n은 자연수)

$\therefore\ A^{100}B^{100}+A^{101}B^{101}+A^{102}B^{102}+A^{103}B^{103}$

$=(AB)^{100}+(AB)^{101}+(AB)^{102}+(AB)^{103}$

$=\begin{pmatrix}2^{100} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2^{101} & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2^{102} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2^{103} & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}2^{100}+2^{101}+2^{102}+2^{103} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은

$2^{100}+2^{101}+2^{102}+2^{103}=(1+2+2^2+2^3)2^{100}$

$=15\times2^{100}$

$\therefore\ k=15$

다른 풀이

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$

$B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$에서

$B^2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$B^3=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$B^4=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\vdots$

$B^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ (단, n은 자연수)

$\therefore A^{100}B^{100}+A^{101}B^{101}+A^{102}B^{102}+A^{103}B^{103}$
$=(A^2)^{50}B^{100}+(A^2)^{50}AB^{101}+(A^2)^{51}B^{102}+(A^2)^{51}AB^{103}$
$=E^{50}B^{100}+E^{50}AB^{101}+E^{51}B^{102}+E^{51}AB^{103}$
$=B^{100}+AB^{101}+B^{102}+AB^{103}$
$=\begin{pmatrix}2^{100}&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{101}&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2^{102}&0\\0&1\end{pmatrix}$
$+\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{103}&0\\0&1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}2^{100}&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2^{101}&0\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2^{102}&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2^{103}&0\\0&-1\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}2^{100}+2^{101}+2^{102}+2^{103}&0\\0&0\end{pmatrix}$
따라서 모든 성분의 합은
$2^{100}+2^{101}+2^{102}+2^{103}=(1+2+2^2+2^3)2^{100}=15\times2^{100}$
$\therefore k=15$

1161 답 32

$AB=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\1&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
$=-E$
$BA=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&0\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&0\\0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$
$=-E$
즉, $AB=BA$이므로 $B^nA^n=(BA)^n$ (단, n은 자연수)
$\therefore B^4A^8=(BA)^4A^4=(-E)^4A^4=A^4$ ····· ㉠
$A=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}$에서
$A^2=AA=\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\3&1\end{pmatrix}$
$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}4&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&0\\7&1\end{pmatrix}$
$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}8&0\\7&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&0\\15&1\end{pmatrix}$
따라서 ㉠에서 $B^4A^8=A^4=\begin{pmatrix}16&0\\15&1\end{pmatrix}$이므로 B^4A^8의 모든 성분의 합은 $16+0+15+1=32$

1162 답 ③

$A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$, $X_1=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$이므로
$X_2=AX_1=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-3\end{pmatrix}$
$X_3=X_2A=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&2\\3&-1\end{pmatrix}$
$X_4=AX_3=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&2\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\4&-2\end{pmatrix}$
$X_5=X_4A=\begin{pmatrix}3&-1\\4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}=X_1$
$X_6=AX_5=AX_1=X_2$, $X_7=X_6A=X_2A=X_3$
$X_8=AX_7=AX_3=X_4$
⋮
따라서 음이 아닌 정수 k에 대하여
$X_{4k+1}=X_1=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}$, $X_{4k+2}=X_2=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-3\end{pmatrix}$,
$X_{4k+3}=X_3=\begin{pmatrix}-4&2\\3&-1\end{pmatrix}$, $X_{4k+4}=X_4=\begin{pmatrix}3&-1\\4&-2\end{pmatrix}$
$\therefore X_{15}+X_{20}+X_{25}-X_{30}$
$=X_3+X_4+X_1-X_2$
$=\begin{pmatrix}-4&2\\3&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&-1\\4&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&4\\-1&-3\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}-2&0\\10&4\end{pmatrix}$
따라서 $X_{15}+X_{20}+X_{25}-X_{30}$의 모든 성분의 합은
$-2+0+10+4=12$

1163 답 ③

$A+B=O$에서 $B=-A$
$AB=E$에 $B=-A$를 대입하면 $A(-A)=E$
$\therefore A^2=-E$, $A^4=E$
같은 방법으로 하면 $B^2=-E$, $B^4=E$
$\therefore A^{100}+B^{102}=(A^4)^{25}+(B^4)^{25}B^2$
$=E+B^2=E+(-E)=O$

1164 답 ⑤

$A^2-2A+E=O$에서
$A^2-A=A-E$
$A^3-A^2=A(A^2-A)=A(A-E)=A^2-A$
$=A-E$
$A^4-A^3=A(A^3-A^2)=A(A-E)=A^2-A$
$=A-E$
⋮
$A^n-A^{n-1}=A-E$
위 등식들을 변끼리 더하면
$A^n-A=\boxed{(가)\ (n-1)}(A-E)$
$\therefore A^n=(n-1)A-(n-1)E+A$
$=\boxed{(나)\ n}A-\boxed{(가)\ (n-1)}E$
따라서 $f(n)=n-1$, $g(n)=n$이므로
$f(100)+g(100)=99+100=199$

1165 답 ②

$A+B=-E$에서 $B=-A-E$
이를 $AB=E$에 대입하면
$A(-A-E)=E$, $-A^2-A=E$
$\therefore A^2+A+E=O$
같은 방법으로 하면 $B^2+B+E=O$
$\therefore (A+B)+(A^2+B^2)+\cdots+(A^{2011}+B^{2011})$
$=(A+A^2+A^3+\cdots+A^{2011})+(B+B^2+B^3+\cdots+B^{2011})$
$=A+A^2(E+A+A^2)+\cdots+A^{2009}(E+A+A^2)$
$+B+B^2(E+B+B^2)+\cdots+B^{2009}(E+B+B^2)$
$=A+B=-E$

1166 답 ①

$A^{n+1}=A^{n+2}+A^n$에서 $A^{n+2}=A^{n+1}-A^n$이므로

$A^3=A^2-A$

$A^4=A^3-A^2=(A^2-A)-A^2=-A$

$A^5=A^4-A^3=(-A)-(A^2-A)=-A^2$

$A^6=A^5-A^4=(-A^2)-(-A)=-A^2+A$

$A^7=A^6-A^5=(-A^2+A)-(-A^2)=A$

$\therefore A^{100}+A^{102}=(A^7)^{14}A^2+(A^7)^{14}A^4$

$=A^{14}A^2+A^{14}A^4$

$=(A^7)^2A^2+(A^7)^2A^4$

$=A^2A^2+A^2A^4$

$=A^4+A^6$

$=(-A)+(-A^2+A)$

$=-A^2$

1167 답 −54

$A-B=-3E$에서

$A(A-B)=A(-3E)$, $A^2-AB=-3A$

$AB=O$이므로

$A^2=-3A$

$\therefore A^3=-3A^2=-3(-3A)=9A$ …… ⓘ

또 $A-B=-3E$에서

$(A-B)B=(-3E)B$, $AB-B^2=-3B$

$AB=O$이므로

$B^2=3B$

$\therefore B^3=3B^2=3(3B)=9B$ …… ⓘⓘ

$\therefore A^3-B^3=9A-9B=9(A-B)$

$=9(-3E)=-27E$

$=-27\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-27&0\\0&-27\end{pmatrix}$ …… ⓘⓘⓘ

따라서 A^3-B^3의 모든 성분의 합은

$-27+0+0+(-27)=-54$ …… ⓘⓥ

채점 기준

ⓘ A^3을 A에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘ B^3을 B에 대한 식으로 나타내기	30 %
ⓘⓘⓘ A^3-B^3 구하기	30 %
ⓘⓥ A^3-B^3의 모든 성분의 합 구하기	10 %

1168 답 ⑤

$A^2+2A+4E=O$의 양변에 $A-2E$를 곱하면

$(A-2E)(A^2+2A+4E)=O$

$A^3-8E=O$ $\therefore A^3=8E$

따라서 $A^{30}=(A^3)^{10}=(8E)^{10}=8^{10}E=2^{30}E$이므로

$k=2^{30}$

다른 풀이

$A^2+2A+4E=O$에서 $A^2=-2A-4E$

양변에 A를 곱하면

$A^3=-2A^2-4A=-2(-2A-4E)-4A=8E$

따라서 $A^{30}=(A^3)^{10}=(8E)^{10}=8^{10}E=2^{30}E$이므로

$k=2^{30}$

1169 답 64

$A^2-A+E=O$에서 $A^2=A-E$

양변에 A를 곱하면

$A^3=A^2-A=(A-E)-A=-E$

$\therefore A^7=(A^3)^2A=(-E)^2A=A$

$B^2+2B=O$에서 $B^2=-2B$

양변에 B를 곱하면

$B^3=-2B^2=-2(-2B)=4B$

$B^4=4B^2=4(-2B)=-8B$

$B^5=-8B^2=-8(-2B)=16B$

$B^6=16B^2=16(-2B)=-32B$

$B^7=-32B^2=-32(-2B)=64B$

따라서 $A^7B^7=A(64B)=64AB$이므로

$k=64$

1170 답 ③

$A\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

$A^2\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=-2A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

$A^3\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=-2A\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=4A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

$A^4\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=4A\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=-8A\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}=-8\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

⋮

$A^{10}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=(-2)^9\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{10}\\-2^{11}\end{pmatrix}$

따라서 $p=2^{10}$, $q=-2^{11}$이므로

$\dfrac{p}{q}=\dfrac{2^{10}}{-2^{11}}=-\dfrac{1}{2}$

1171 답 ⑤

ㄱ. $k\langle x, y\rangle=k\begin{pmatrix}x&y\\y&x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}kx&ky\\ky&kx\end{pmatrix}$

$\langle kx, ky\rangle=\begin{pmatrix}kx&ky\\ky&kx\end{pmatrix}$

$\therefore k\langle x, y\rangle=\langle kx, ky\rangle$

ㄴ. $\langle a, b\rangle-\langle c, d\rangle=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}c&d\\d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-c&b-d\\b-d&a-c\end{pmatrix}$

$\langle a-c, b-d\rangle=\begin{pmatrix}a-c&b-d\\b-d&a-c\end{pmatrix}$

$\therefore \langle a, b\rangle-\langle c, d\rangle=\langle a-c, b-d\rangle$

ㄷ. $\langle a, b\rangle\langle c, d\rangle=\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c&d\\d&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+bd&ad+bc\\bc+ad&bd+ac\end{pmatrix}$

$\langle c, d\rangle\langle a, b\rangle=\begin{pmatrix}c&d\\d&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+bd&bc+ad\\ad+bc&bd+ac\end{pmatrix}$

$\therefore \langle a, b\rangle\langle c, d\rangle=\langle c, d\rangle\langle a, b\rangle$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

1172 답 ④

ㄱ. $(A+B)(A-B)=A^2-AB+BA-B^2=A^2-B^2$

ㄴ. $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$이면

$AB+BA=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$

즉, $AB+BA=O$이지만 $A\neq O$, $B\neq O$이다.

ㄷ. $AB=BA$이므로 $A+2BA=BA+E$에서

$A+2AB=AB+E$, $A+AB=E$

$\therefore A(B+E)=E$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

1173 답 ②

ㄱ. $A\diamond B=AB-BA$

$B\diamond A=BA-AB=-(AB-BA)$

$\therefore A\diamond B\neq B\diamond A$

ㄴ. $kA\diamond kB=(kA)(kB)-(kB)(kA)=k^2AB-k^2BA$

$k(A\diamond B)=k(AB-BA)=kAB-kBA$

$k^2AB-k^2BA=kAB-kBA$에서

$(k^2-k)AB=(k^2-k)BA$, $k(k-1)AB=k(k-1)BA$

따라서 $k=1$이거나 $AB=BA$인 경우에만

$kA\diamond kB=k(A\diamond B)$가 성립한다.

ㄷ. $(A\diamond B)+(A\diamond C)=AB-BA+AC-CA$

$A\diamond(B+C)=A(B+C)-(B+C)A$

$=AB+AC-BA-CA$

$\therefore (A\diamond B)+(A\diamond C)=A\diamond(B+C)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

1174 답 ④

ㄱ. $A^2=O$의 양변에 A를 곱하면

$A^3=AO=O$

ㄴ. $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$이면

$A-E=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$

$(A-E)^2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$

즉, $(A-E)^2=O$이지만 $A\neq E$이다.

ㄷ. $A+B=O$에서 $B=-A$이므로

$AB=A(-A)=-A^2$, $BA=(-A)A=-A^2$

$\therefore AB=BA$

ㄹ. $A(A-E)=E$에서 $A^2-A=E$

$(A^2-A)B=EB$, $AAB-AB=B$

$AB=E$를 대입하면

$AE-E=B$ $\therefore B=A-E$

$\therefore B^2=(A-E)^2=A^2-2A+E$

$=(A+E)-2A+E=-A+2E$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

1175 답 ④

ㄱ. $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$이면

$A^2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

즉, $A^2=E$이지만 $A\neq E$이다.

ㄴ. $(A+2B)^2=A^2+2AB+2BA+4B^2$,

$(A-2B)^2=A^2-2AB-2BA+4B^2$이므로

$(A+2B)^2=(A-2B)^2$이면

$2AB+2BA=-2AB-2BA$

$4AB+4BA=O$

$\therefore AB+BA=O$

ㄷ. $AB=A$에서 $ABAB=A^2$

이때 $BA=B$이므로 $ABB=A^2$

또 $AB=A$이므로 $AB=A^2$

$\therefore A^2=A$

같은 방법으로 하면 $B^2=B$이므로

$A^2+B^2=A+B$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

1176 답 ④

$AB=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}&a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}&a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}$

이므로

$x=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}$

$y=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$

$z=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}$

$w=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}$

ㄱ. 상반기에 판매된 제품 (가)의 제조 원가 금액은 $a_{11}b_{11}$만 원

상반기에 판매된 제품 (나)의 제조 원가 금액은 $a_{12}b_{21}$만 원

즉, 상반기에 판매된 두 제품의 제조 원가 총액은

$a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}=x$(만 원)

ㄴ. 상반기에 판매된 제품 (가)의 판매 금액은 $a_{21}b_{11}$만 원

상반기에 판매된 제품 (나)의 판매 금액은 $a_{22}b_{21}$만 원

하반기에 판매된 제품 (가)의 판매 금액은 $a_{21}b_{12}$만 원

하반기에 판매된 제품 (나)의 판매 금액은 $a_{22}b_{22}$만 원

즉, 1년 동안 판매된 두 제품의 판매 총액은

$a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}=z+w$(만 원)

ㄷ. 하반기에 판매된 제품 (가)의 판매 이익금은

$(a_{21}-a_{11})b_{12}=a_{21}b_{12}-a_{11}b_{12}$(만 원)

하반기에 판매된 제품 (나)의 판매 이익금은

$(a_{22}-a_{12})b_{22}=a_{22}b_{22}-a_{12}b_{22}$(만 원)

즉, 하반기에 판매된 두 제품의 판매 이익금 총액은

$a_{21}b_{12}-a_{11}b_{12}+a_{22}b_{22}-a_{12}b_{22}$

$=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}-(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})=w-y$(만 원)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

1177 답 ⑤

ㄱ. $AB=kA$에서

$(AB)A=(kA)A$

$\therefore ABA=kA^2$ ····· ㉠

$BA=kB$에서

$A(BA)=A(kB)$

$\therefore ABA=kAB=k(kA)=k^2A$ ····· ㉡

㉠, ㉡에서 $kA^2=k^2A$

$\therefore A^2=kA$

ㄴ. $AB^2A=ABBA=(kA)(kB)=k^2AB$

$=k^2(kA)=k^3A$

ㄷ. $AB^n=ABB^{n-1}=(kA)B^{n-1}$

$=kABB^{n-2}=k(kA)B^{n-2}$

$=k^2AB^{n-2}=\cdots=k^{n-1}AB$

$=k^{n-1}(kA)=k^nA$

$A^nB=A^{n-1}AB=A^{n-1}(kA)=kA^n$

$=kA^2A^{n-2}=k(kA)A^{n-2}$

$=k^2A^{n-1}=\cdots=k^{n-1}A^2$

$=k^{n-1}(kA)=k^nA$

$\therefore AB^n=A^nB$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

1178 답 ⑤

ㄱ. $A+B=E$에서 $B=-A+E$

이를 $AB=-E$에 대입하면

$A(-A+E)=-E$, $-A^2+A=-E$

$\therefore A^2=A+E$ ····· ㉠

같은 방법으로 하면

$B^2=B+E$ ····· ㉡

$\therefore A^2+B^2=(A+E)+(B+E)$

$=(A+B)+2E=E+2E=3E$

ㄴ. ㉠의 $A^2=A+E$에서

$A^2A^n=(A+E)A^n$

$\therefore A^{n+2}=A^{n+1}+A^n$ ····· ㉢

㉡의 $B^2=B+E$에서

$B^2B^n=(B+E)B^n$

$\therefore B^{n+2}=B^{n+1}+B^n$ ····· ㉣

㉢+㉣을 하면

$A^{n+2}+B^{n+2}=A^{n+1}+B^{n+1}+A^n+B^n$ ····· ㉤

ㄷ. ㉤에서

$A^3+B^3=A^2+B^2+A+B=3E+E=4E$

$A^4+B^4=A^3+B^3+A^2+B^2=4E+3E=7E$

$A^5+B^5=A^4+B^4+A^3+B^3=7E+4E=11E$

$A^6+B^6=A^5+B^5+A^4+B^4=11E+7E=18E$

$A^7+B^7=A^6+B^6+A^5+B^5=18E+11E=29E$

$A^8+B^8=A^7+B^7+A^6+B^6=29E+18E=47E$

$A^9+B^9=A^8+B^8+A^7+B^7=47E+29E=76E$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

1179 답 ④

ㄱ. $A+B=2E$에서 $B=-A+2E$

이를 $AB=3B$에 대입하면

$A(-A+2E)=3(-A+2E)$

$-A^2+2A=-3A+6E$, $A^2-5A+6E=O$

$(A-2E)(A-3E)=O$

이때 $A=2E$, $B=O$이면 $A+B=2E$, $AB=3B$가 성립하지만 $A\neq3E$이다.

ㄴ. $A+B=2E$에서 $A=-B+2E$

이를 $AB=3B$에 대입하면

$(-B+2E)B=3B$, $-B^2+2B=3B$

$\therefore B^2+B=O$ ····· ㉠

ㄷ. $AB=3B$의 좌변에 $B=-A+2E$를 대입하면

$A(-A+2E)=3B$

$-A^2+2A=3B$ $\therefore A^2=2A-3B$

또 ㉠에서 $B^2=-B$이므로

$A^2-B^2=(2A-3B)-(-B)$

$=2A-2B=2(A-B)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

1180 답 ②

$A=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}$에서

$A^2=AA=\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-2&-3\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\-1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$

ㄱ. $S(A)=1+3+(-1)+(-2)=1$

$S(A^2)=-2+(-3)+1+1=-3$

$S(A^3)=1+0+0+1=2$

$\therefore S(A)+S(A^2)+S(A^3)=0$ ····· ㉠

$A+A^2+A^3=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=O$이므로

$S(A+A^2+A^3)=0$

$\therefore S(A)+S(A^2)+S(A^3)=S(A+A^2+A^3)$

ㄴ. $A=A^4=A^7=\cdots$,

$A^2=A^5=A^8=\cdots$,

$A^3=A^6=A^9=\cdots$이므로

$S(A)+S(A^2)+\cdots+S(A^{100})$

$=\{S(A)+S(A^2)+S(A^3)\}+\{S(A)+S(A^2)+S(A^3)\}$

$+\cdots+\{S(A)+S(A^2)+S(A^3)\}+S(A)$

$=33\{S(A)+S(A^2)+S(A^3)\}+S(A)$

$=0+1\ (\because$ ㉠$)$

$=1$

ㄷ. $m=1$, $n=2$일 때,

$S(AA^2)=S(A^3)=2$

$S(A)\times S(A^2)=1\times(-3)=-3$

$\therefore S(AA^2)\neq S(A)\times S(A^2)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

1181 답 ⑤

ㄱ. $A^2=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2-b^2 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이면 $a^2-b^2=0$, $2ab=0$

$2ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$

$a=0$이면 $a^2-b^2=0$에서 $b=0$

$b=0$이면 $a^2-b^2=0$에서 $a=0$

따라서 $a=b=0$이므로 $A=O$이다.

ㄴ. $A^2+E=\begin{pmatrix} a^2-b^2+1 & -2ab \\ 2ab & a^2-b^2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이면

$a^2-b^2+1=0$, $2ab=0$

$2ab=0$에서 $a=0$ 또는 $b=0$

$a=0$이면 $a^2-b^2+1=0$에서 $b^2=1$

$\therefore b=\pm 1$

$b=0$이면 $a^2-b^2+1=0$에서 $a^2=-1$을 만족시키는 실수 a의 값이 존재하지 않는다.

따라서 $A^2+E=O$를 만족시키는 행렬 A는

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$의 2개이다.

ㄷ. $A^2-A=\begin{pmatrix} a^2-b^2-a & -2ab+b \\ 2ab-b & a^2-b^2-a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이면

$a^2-b^2-a=0$, $2ab-b=0$

$2ab-b=0$에서 $(2a-1)b=0$

$\therefore a=\frac{1}{2}$ 또는 $b=0$

$a=\frac{1}{2}$이면 $a^2-b^2-a=0$에서 $b^2=-\frac{1}{4}$을 만족시키는 실수 b의 값이 존재하지 않는다.

$b=0$이면 $a^2-b^2-a=0$에서

$a^2-a=0$, $a(a-1)=0$

$\therefore a=0$ 또는 $a=1$

따라서 $A^2-A=O$를 만족시키는 행렬 A는 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$의 2개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

1182 답 ⑤

ㄱ. $A^2+A+E=O$에서 양변에 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^2+A+E)=O$, $A^3-E=O$

$\therefore A^3=E$

ㄴ. $B=A-E$이므로

$AB=A(A-E)=A^2-A$

$BA=(A-E)A=A^2-A$

$\therefore AB=BA$

ㄷ. $B=A-E$에서 $A-B=E$이고 ㄴ에서 $AB=BA$가 성립하므로

$(A+B)(A^2+B^2)(A^4+B^4)$

$=(A-B)(A+B)(A^2+B^2)(A^4+B^4)$

$=(A^2-B^2)(A^2+B^2)(A^4+B^4)$

$=(A^4-B^4)(A^4+B^4)$

$=A^8-B^8$ ····· ㉠

ㄱ에서 $A^3=E$이므로

$A^8=(A^3)^2A^2=A^2=-A-E\ (\because A^2+A+E=O)$

$B^2=(A-E)^2=A^2-2A+E^2$

$=(-A-E)-2A+E=-3A$

$B^4=(B^2)^2=(-3A)^2=9A^2$

$B^8=(B^4)^2=(9A^2)^2=81A^4=81A^3A=81A$

따라서 ㉠에서

$(A+B)(A^2+B^2)(A^4+B^4)=A^8-B^8$

$=-A-E-81A$

$=-82A-E$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

최고수준 도전 기출 244~245쪽

1183 답 ①

전략 주어진 행렬의 곱셈의 결과가 나타내는 규칙을 찾는다.

수요일에 처음 설정한 번호가 1 1 2 5이므로

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$

$\vdots$

이때 (2, 1) 성분과 (2, 2) 성분이 2씩 커지므로 5일 후, 즉 다음 주 월요일에 처음 설정한 번호와 일치하게 된다.

1184 답 21

전략 $A^2+2A-E=O$에서 $A(A+2E)=E$임을 이용하여 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$를 구한다.

㈎의 $A^2+2A-E=O$에서

$A^2+2A=E$, $A(A+2E)=E$

$(A+2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$에서

$A(A+2E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$E\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=3A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=3A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\ (\because$ ㈏)

$=\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \end{pmatrix}$

따라서 $x=9$, $y=12$이므로

$x+y=21$

1185 답 40

전략 $A+kB=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}$, $A+B=E$를 연립하여 B에 대한 식으로 나타낸 후 $B^2=B$를 이용하여 식을 간단히 한다.

$A+kB=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}$, $A+B=E$를 각 변끼리 빼면

$kB-B=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}-E$

$(k-1)B=\begin{pmatrix}2&2\\1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$

$\{(k-1)B\}^2=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&6\\3&6\end{pmatrix}$

$(k-1)^2B^2=3\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=3(k-1)B$

이때 $B^2=B$이므로

$(k-1)^2B=3(k-1)B$

$B\neq O$, $k\neq1$이므로

$k-1=3$ $\quad\therefore k=4$

$\therefore 10k=40$

1186 답 ③

전략 행렬 B의 각 성분을 미지수로 놓고, 행렬이 서로 같을 조건을 이용하여 미지수에 대한 식을 세운다.

$B=\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}$라 하면 (가)에서

$\begin{pmatrix}p&q\\r&s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}p-q\\r-s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$p-q=0$, $r-s=0$

즉, $p=q$, $r=s$이므로 $B=\begin{pmatrix}p&p\\r&r\end{pmatrix}$로 나타낼 수 있다.

(나)의 $AB=2A$에서

$\begin{pmatrix}1&1\\a&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&p\\r&r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2a&2a\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}p+r&p+r\\a(p+r)&a(p+r)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\2a&2a\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$p+r=2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 (나)의 $BA=4B$에서

$\begin{pmatrix}p&p\\r&r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\a&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4p&4p\\4r&4r\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}p(1+a)&p(1+a)\\r(1+a)&r(1+a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4p&4p\\4r&4r\end{pmatrix}$

행렬이 서로 같을 조건에 의하여

$p(1+a)=4p$, $r(1+a)=4r$

$pa-3p=0$, $ra-3r=0$

$p(a-3)=0$, $r(a-3)=0$

$\therefore a=3$ 또는 $p=0$, $r=0$

이때 ㉠에서 $a=3$

따라서 $A+B=\begin{pmatrix}1&1\\3&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}p&p\\r&r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+p&1+p\\3+r&3+r\end{pmatrix}$이므로

행렬 $A+B$의 (1, 2) 성분과 (2, 1) 성분의 합은

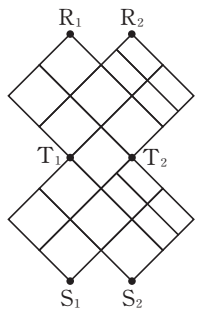
$(1+p)+(3+r)=4+p+r$

$=4+2=6$ ($\because$ ㉠)

1187 답 ②

전략 R_1 지점에서 S_2 지점까지 갈 때 반드시 지나는 두 지점을 생각하여 경우를 나누어 최단 거리로 가는 방법의 수를 구한다.

주어진 두 개의 도로망 중 오른쪽의 도로망은 왼쪽의 도로망을 위아래로 이어 붙인 것과 같다.



따라서 R_1, R_2 지점에서 T_1 또는 T_2 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수는 P_1, P_2 지점에서 Q_1 또는 Q_2 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수와 같고, T_1, T_2 지점에서 S_1 또는 S_2 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수도 P_1, P_2 지점에서 Q_1 또는 Q_2 지점까지 최단 거리로 가는 방법의 수와 같다.

R_1 지점에서 S_2 지점까지 최단 거리로 갈 때, T_1 또는 T_2 지점 중 하나는 반드시 지나고 두 지점을 동시에 지날 수는 없다.

(i) $R_1\rightarrow T_1\rightarrow S_2$로 가는 경우

$R_1\rightarrow T_1$로 가는 방법의 수는 $P_1\rightarrow Q_1$로 가는 방법의 수와 같으므로

a_{11}

$T_1\rightarrow S_2$로 가는 방법의 수는 $P_1\rightarrow Q_2$로 가는 방법의 수와 같으므로

a_{12}

따라서 $R_1\rightarrow T_1\rightarrow S_2$로 가는 방법의 수는

$a_{11}a_{12}$

(ii) $R_1\rightarrow T_2\rightarrow S_2$로 가는 경우

$R_1\rightarrow T_2$로 가는 방법의 수는 $P_1\rightarrow Q_2$로 가는 방법의 수와 같으므로

a_{12}

$T_2\rightarrow S_2$로 가는 방법의 수는 $P_2\rightarrow Q_2$로 가는 방법의 수와 같으므로

a_{22}

따라서 $R_1\rightarrow T_2\rightarrow S_2$로 가는 방법의 수는

$a_{12}a_{22}$

(i), (ii)에서 $R_1\rightarrow S_2$로 가는 방법의 수는

$a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

이때 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$에서

$A^2=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a_{11}^2+a_{12}a_{21}&a_{11}a_{12}+a_{12}a_{22}\\a_{11}a_{21}+a_{21}a_{22}&a_{12}a_{21}+a_{22}^2\end{pmatrix}$

따라서 ㉡은 행렬 A^2의 (1, 2) 성분과 같다.

1188 답 9

전략 $A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$과 $A\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$를 구한 후 $A\begin{pmatrix}-8\\11\end{pmatrix}$을 이 두 식의 합, 차, 실수배를 이용하여 나타낸다.

㈎의 $A^2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$의 양변에 A를 곱하면

$AA^2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $A^3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ ($\because$ ㈏)

위의 식의 양변에 A를 곱하면

$A^2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

$\therefore A\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ($\because$ ㈎)

실수 a, b에 대하여 $a\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\11\end{pmatrix}$이라 하면

$\begin{pmatrix}2a-2b\\a+4b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\11\end{pmatrix}$에서

$2a-2b=-8$, $a+4b=11$

두 식을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$

$\therefore A\begin{pmatrix}-8\\11\end{pmatrix}=A\left\{-\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}\right\}$

$=-A\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+3A\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$

$=-\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-1\end{pmatrix}$

따라서 $p=8$, $q=-1$이므로

$p-q=9$

1189 답 ③

전략 주어진 식을 적절히 변형하여 $AB=BA$임을 먼저 확인한다. 또 주어진 두 식을 통해 AB와 A^3을 E로 나타낼 수 있으므로 이를 이용하여 거듭제곱을 간단히 나타낸다.

ㄱ. $ABA-A^2=E$에서

$(AB-A)A=E$ ····· ㉠

$A(BA-A)=E$ ····· ㉡

㉡의 양변의 왼쪽에 $AB-A$를 곱하면

$(AB-A)A(BA-A)=AB-A$

$E(BA-A)=AB-A$ ($\because$ ㉠)

$BA-A=AB-A$

$\therefore AB=BA$ ····· ㉢

ㄴ. $AB+B=A$에서 $AB-A=-B$

이를 ㉠에 대입하면

$-BA=E$ $\therefore BA=-E$

㉢에서 $AB=BA=-E$ ····· ㉣

$\therefore A^{99}B^{99}=(AB)^{99}=(-E)^{99}=-E$

ㄷ. ㉣을 ㉠에 대입하면

$(-E-A)A=E$, $-A-A^2=E$

$\therefore A^2+A+E=O$ ····· ㉤

양변에 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^2+A+E)=O$

$A^3-E=O$ $\therefore A^3=E$

㉤에서 $A^2=-A-E$이므로

$(A-E)^2=A^2-2A+E=(-A-E)-2A+E$

$=-3A$

$\therefore (A-E)^{200}=\{(A-E)^2\}^{100}$

$=(-3A)^{100}=3^{100}(A^3)^{33}A$

$=3^{100}E^{33}A=3^{100}A$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.