



정답과 해설

기하

I. 이차곡선

I-1. 이차곡선

01 포물선

개념 확인

11쪽

001 ㉡ (1) $y^2 = x$ (2) $y^2 = -8x$

(3) $x^2 = 20y$ (4) $x^2 = -\frac{2}{3}y$

(1) 초점이 $F(\frac{1}{4}, 0)$ 이고 준선이 $x = -\frac{1}{4}$ 인 포물선

의 방정식은 $y^2 = 4px$ 에서 $p = \frac{1}{4}$ 이므로

$$y^2 = 4 \times \frac{1}{4}x$$

$$\therefore y^2 = x$$

(2) 초점이 $F(-2, 0)$ 이고 준선이 $x = 2$ 인 포물선의 방정식은 $y^2 = 4px$ 에서 $p = -2$ 이므로

$$y^2 = 4 \times (-2)x$$

$$\therefore y^2 = -8x$$

(3) 초점이 $F(0, 5)$ 이고 준선이 $y = -5$ 인 포물선의 방정식은 $x^2 = 4py$ 에서 $p = 5$ 이므로

$$x^2 = 4 \times 5y$$

$$\therefore x^2 = 20y$$

(4) 초점이 $F(0, -\frac{1}{6})$ 이고 준선이 $y = \frac{1}{6}$ 인 포물선

의 방정식은 $x^2 = 4py$ 에서 $p = -\frac{1}{6}$ 이므로

$$x^2 = 4 \times \left(-\frac{1}{6}\right)y$$

$$\therefore x^2 = -\frac{2}{3}y$$

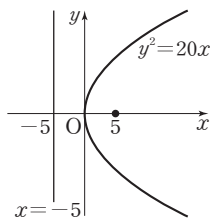
002 ㉡ 풀이 참조

(1) $y^2 = 20x$ 에서 $y^2 = 4 \times 5x$ 이므로 $p = 5$

초점의 좌표는 $(5, 0)$,

준선의 방정식은 $x = -5$

이고 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

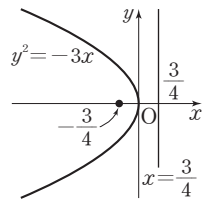


(2) $y^2 = -3x$ 에서 $y^2 = 4 \times \left(-\frac{3}{4}\right)x$ 이므로 $p = -\frac{3}{4}$

초점의 좌표는 $\left(-\frac{3}{4}, 0\right)$,

준선의 방정식은 $x = \frac{3}{4}$

이고 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

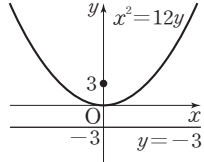


(3) $x^2 = 12y$ 에서 $x^2 = 4 \times 3y$ 이므로 $p = 3$

초점의 좌표는 $(0, 3)$,

준선의 방정식은 $y = -3$

이고 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

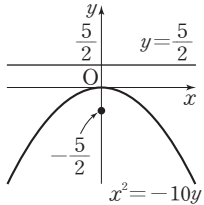


(4) $x^2 = -10y$ 에서 $x^2 = 4 \times \left(-\frac{5}{2}\right)y$ 이므로 $p = -\frac{5}{2}$

초점의 좌표는 $\left(0, -\frac{5}{2}\right)$,

준선의 방정식은 $y = \frac{5}{2}$

이고 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



003 ㉡ 풀이 참조

(1) 주어진 포물선은 포물선 $y^2 = 16x$ 를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = 16x$, 즉 $y^2 = 4 \times 4x$ 의

초점의 좌표는 $(4, 0)$,

준선의 방정식은 $x = -4$,

꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$ 이다.

따라서 구하는 포물선의

초점의 좌표는 $(0, 2)$,

준선의 방정식은 $x = -8$,

꼭짓점의 좌표는 $(-4, 2)$ 이다.

(2) 주어진 포물선은 포물선 $x^2 = -2y$ 를 x 축의 방향으로 3 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2 = -2y$, 즉 $x^2 = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)y$ 의

초점의 좌표는 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$,

준선의 방정식은 $y = \frac{1}{2}$,

꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$ 이다.

따라서 구하는 포물선의

초점의 좌표는 $(3, -\frac{3}{2})$,

준선의 방정식은 $y = -\frac{1}{2}$,

꼭짓점의 좌표는 $(3, -1)$ 이다.

004 ㉠ (1) $(y-1)^2=4(x-2)$

(2) $(y-2)^2=-3(x+3)$

(1) $y^2-4x-2y+9=0$ 에서

$$y^2-2y+1=4x-8$$

$$\therefore (y-1)^2=4(x-2)$$

(2) $y^2+3x-4y+13=0$ 에서

$$y^2-4y+4=-3x-9$$

$$\therefore (y-2)^2=-3(x+3)$$

유제

13-21쪽

005 ㉠ 8

초점이 $F(0, \frac{1}{2})$ 이고 준선이 $y = -\frac{1}{2}$ 인 포물선의

방정식은 $x^2=4py$ 에서 $p=\frac{1}{2}$ 이므로

$$x^2=4 \times \frac{1}{2}y \quad \therefore x^2=2y$$

이 포물선이 점 $(4, a)$ 를 지나므로

$$4^2=2a \quad \therefore a=8$$

006 ㉠ $y^2=16x$

점 P가 나타내는 도형은 초점이 점 $(4, 0)$ 이고 준선이 $x=-4$ 인 포물선이다.

따라서 점 P가 나타내는 도형의 방정식은 $y^2=4px$ 에서 $p=4$ 이므로

$$y^2=4 \times 4x \quad \therefore y^2=16x$$

▶ 다른 풀이 ◀

$F(4, 0)$, $P(x, y)$ 라 하고,

점 P에서 직선 $x=-4$ 에

내린 수선의 발을 H라 하

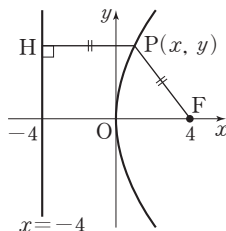
면 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2}=|x+4|$$

양변을 제곱하면

$$(x-4)^2+y^2=(x+4)^2$$

$$\therefore y^2=16x$$



007 ㉠ -9

꼭짓점이 원점이고 초점이 $F(-1, 0)$ 인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$ 에서 $p=-1$ 이므로

$$y^2=4 \times (-1)x \quad \therefore y^2=-4x$$

이 포물선이 점 $(a, -6)$ 을 지나므로

$$(-6)^2=-4a \quad \therefore a=-9$$

008 ㉠ 5

$y^2=12x$ 에서 $y^2=4 \times 3x$ 이므로

$F(3, 0)$

$x^2=-16y$ 에서 $x^2=4 \times (-4)y$ 이므로

$F'(0, -4)$

$$\therefore \overline{FF'}=\sqrt{(-3)^2+(-4)^2}=5$$

009 ㉠ -10

주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+2}{2}, -1\right) \quad \therefore (-1, -1)$$

즉, 주어진 포물선은 꼭짓점이 원점인 포물선을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

이때 평행이동하기 전의 포물선의 초점의 좌표가

$(-4+1, -1+1)$, 즉 $(-3, 0)$ 이므로 평행이동하기 전의 포물선의 방정식은

$$y^2=4 \times (-3)x \quad \therefore y^2=-12x$$

따라서 주어진 포물선의 방정식은

$$(y+1)^2=-12(x+1)$$

이므로 $a=-12$, $m=1$, $n=1$

$$\therefore a+m+n=-10$$

010 ㉠ $(x-1)^2=-16(y-2)$

주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$$\left(1, \frac{-2+6}{2}\right) \quad \therefore (1, 2)$$

즉, 주어진 포물선은 꼭짓점이 원점인 포물선을 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 평행이동하기 전의 포물선의 초점의 좌표가

$(1-1, 2-2)$, 즉 $(0, 0)$ 이므로 평행이동하기 전의 포물선의 방정식은

$$x^2=4 \times (-4)y \quad \therefore x^2=-16y$$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$(x-1)^2=-16(y-2)$$

| 다른 풀이 |

포물선 위의 점을 $P(x, y)$ 라 하고, 점 P에서 준선 $y=6$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}=|y-6|$$

양변을 제곱하면

$$(x-1)^2+(y+2)^2=(y-6)^2$$

$$\therefore (x-1)^2=-16(y-2)$$

011 ㉔ ④

주어진 포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(1, 0)$ 이므로 주어진 포물선은 꼭짓점이 원점인 포물선을 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(3, 0)$ 이므로 평행이동하기 전의 포물선의 초점의 좌표는 $(3-1, 0)$, 즉 $(2, 0)$ 이다.

꼭짓점에서 초점과 준선에 이르는 거리가 $1-(-1)=2$

즉, 평행이동하기 전의 포물선의 방정식은

$$y^2=4 \times 2x \quad \therefore y^2=8x$$

따라서 주어진 포물선의 방정식은

$$y^2=8(x-1)$$

이 포물선이 점 $(3, a)$ 를 지나므로

$$a^2=8 \times (3-1)=16$$

$$\therefore a=4 (\because a>0)$$

012 ㉔ $(x-2)^2=12(y+1)$,

$$(x-2)^2=-12(y-5)$$

포물선 위의 점을 $P(x, y)$, 준선의 방정식을 $y=a$ 라 하고, 점 P에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이므로

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=|y-a|$$

양변을 제곱하면

$$(x-2)^2+(y-2)^2=(y-a)^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

포물선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(-4, 2)$ 를 지나므로

$$(-4-2)^2+(2-2)^2=(2-a)^2$$

$$a^2-4a-32=0, (a+4)(a-8)=0$$

$$\therefore a=-4 \text{ 또는 } a=8$$

$$(i) a=-4 \text{ 일 때, } \textcircled{1} \text{ 에서 } (x-2)^2+(y-2)^2=(y+4)^2$$

$$\therefore (x-2)^2=12(y+1)$$

$$(ii) a=8 \text{ 일 때, } \textcircled{1} \text{ 에서 } (x-2)^2+(y-2)^2=(y-8)^2$$

$$\therefore (x-2)^2=-12(y-5)$$

(i), (ii)에서 구하는 포물선의 방정식은

$$(x-2)^2=12(y+1), (x-2)^2=-12(y-5)$$

013 ㉔ 풀이 참조

$$(1) y^2+8x+2y-15=0 \text{ 에서}$$

$$y^2+2y+1=-8x+16$$

$$\therefore (y+1)^2=-8(x-2)$$

즉, 이 포물선은 포물선 $y^2=-8x$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=-8x$, 즉 $y^2=4 \times (-2)x$ 의

초점의 좌표는 $(-2, 0)$,

준선의 방정식은 $x=2$,

꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$ 이다.

따라서 구하는 포물선의

초점의 좌표는 $(0, -1)$,

준선의 방정식은 $x=4$,

꼭짓점의 좌표는 $(2, -1)$ 이다.

$$(2) x^2+2x-6y-11=0 \text{ 에서}$$

$$x^2+2x+1=6y+12$$

$$\therefore (x+1)^2=6(y+2)$$

즉, 이 포물선은 포물선 $x^2=6y$ 를 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=6y$, 즉 $x^2=4 \times \frac{3}{2}y$ 의

초점의 좌표는 $(0, \frac{3}{2})$,

준선의 방정식은 $y=-\frac{3}{2}$.

꼭짓점의 좌표는 $(0, 0)$ 이다.

따라서 구하는 포물선의

초점의 좌표는 $(-1, -\frac{1}{2})$,

준선의 방정식은 $y=-\frac{7}{2}$.

꼭짓점의 좌표는 $(-1, -2)$ 이다.

014 ㉔ -7

$$y^2-5x+6y-1=0 \text{ 에서}$$

$$y^2+6y+9=5x+10$$

$$\therefore (y+3)^2=5(x+2)$$

즉, 이 포물선은 포물선 $y^2=5x$ 를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=5x$, 즉 $y^2=4 \times \frac{5}{4}x$ 의 초점의 좌표

는 $(\frac{5}{4}, 0)$, 준선의 방정식은 $x=-\frac{5}{4}$ 이다.

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(-\frac{3}{4}, -3)$,

준선의 방정식은 $x = -\frac{13}{4}$ 이므로

$$a = -\frac{3}{4}, b = -3, c = -\frac{13}{4}$$

$$\therefore a+b+c = -7$$

015 ㉮ 3

$$x^2 + 6x + 4y + 4a + 1 = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + 6x + 9 = -4y - 4a + 8$$

$$\therefore (x+3)^2 = -4(y+a-2)$$

즉, 이 포물선은 포물선 $x^2 = -4y$ 를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 $-a+2$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2 = -4y$, 즉 $x^2 = 4 \times (-1)y$ 의 초점의 좌표는 $(0, -1)$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$$(-3, -a+1)$$

이 점이 점 $(b, 2)$ 와 일치하므로

$$-3 = b, -a+1 = 2 \quad \therefore a = -1, b = -3$$

$$\therefore ab = 3$$

016 ㉮ -5

$$y^2 - 12x + 12a = 0 \text{에서}$$

$$y^2 = 12(x-a)$$

즉, 이 포물선은 포물선 $y^2 = 12x$ 를 x 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = 12x$, 즉 $y^2 = 4 \times 3x$ 의 초점의 좌표는 $(3, 0)$ 이므로 포물선 $y^2 = 12(x-a)$ 의 초점의 좌표는

$$(3+a, 0)$$

$$\text{또 } y^2 + 8x - 8b = 0 \text{에서}$$

$$y^2 = -8(x-b)$$

즉, 이 포물선은 포물선 $y^2 = -8x$ 를 x 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2 = -8x$, 즉 $y^2 = 4 \times (-2)x$ 의 초점의 좌표는 $(-2, 0)$ 이므로 포물선 $y^2 = -8(x-b)$ 의 초점의 좌표는

$$(-2+b, 0)$$

두 포물선의 초점이 일치하므로

$$3+a = -2+b$$

$$\therefore a-b = -5$$

017 ㉮ 9

포물선 $x^2 = 8y$, 즉 $x^2 = 4 \times 2y$ 의 초점 F의 좌표는 $(0, 2)$ 이고, 준선의 방정식은 $y = -2$ 이다.

오른쪽 그림과 같이

두 점 A, B에서 준선

$y = -2$ 에 내린 수선

의 발을 각각 A'', B''

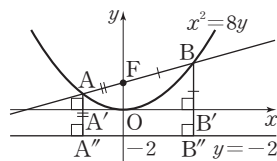
이라 하면 포물선의 정

의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AA''} = \overline{AA'} + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$\overline{BF} = \overline{BB''} = \overline{BB'} + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = 3 + 6 = 9$$



018 ㉮ 7/2

포물선 $y^2 = 6x$, 즉 $y^2 = 4 \times \frac{3}{2}x$ 의 초점 F의 좌표는

$(\frac{3}{2}, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x = -\frac{3}{2}$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에

서 준선 $x = -\frac{3}{2}$ 에 내린 수

선의 발을 H라 하면 포물선

의 정의에 의하여

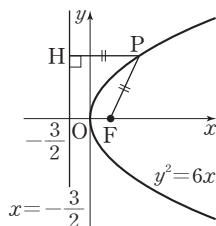
$$\overline{PH} = \overline{PF} = 5$$

이때 점 P의 x좌표를 a라 하

면

$$a + \frac{3}{2} = 5 \quad \therefore a = \frac{7}{2}$$

따라서 구하는 점 P의 x좌표는 $\frac{7}{2}$ 이다.



019 ㉮ 9

포물선 $y^2 = 16x$, 즉 $y^2 = 4 \times 4x$ 의 초점 F의 좌표는 $(4, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x = -4$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에

서 준선 $x = -4$ 에 내린 수

선의 발을 H라 하면 포물선

의 정의에 의하여

$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

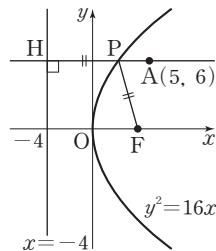
또 점 P는 선분 AH 위의 점

이므로

$$\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PH}$$

$$= \overline{AH}$$

$$= 5 - (-4) = 9$$



020 ㉔ 21

포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH} = \overline{PF}, \overline{QH'} = \overline{QF}$$

$$\therefore \overline{PH} + \overline{QH'} = \overline{PF} + \overline{QF} = \overline{PQ} = 7$$

따라서 사각형 PHH'Q의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (\overline{PH} + \overline{QH'}) \times \overline{HH'} = \frac{1}{2} \times 7 \times 6 = 21$$

021 ㉔ 7

포물선 $y^2 = -8x$, 즉 $y^2 = 4 \times (-2)x$ 의 초점은

$A(-2, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x=2$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점

P, B에서 준선 $x=2$ 에 내

린 수선의 발을 각각 H, H'

이라 하면 포물선의 정의에

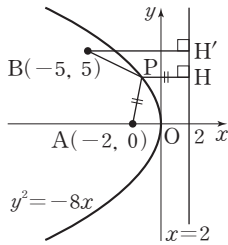
의하여 $\overline{AP} = \overline{PH}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{PH} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{BH'}$$

$$= 2 - (-5) = 7$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 7이다.



022 ㉔ $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

포물선 $y^2 = 2x$, 즉 $y^2 = 4 \times \frac{1}{2}x$ 의 초점을 F라 하면

$F(\frac{1}{2}, 0)$ 이고, 준선 l 의 방정식은 $x = -\frac{1}{2}$ 이다.

포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH} = \overline{PF} \text{이므로}$$

$$\overline{AP} + \overline{PH}$$

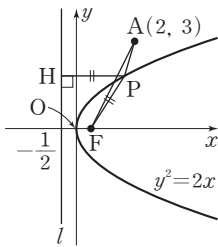
$$= \overline{AP} + \overline{PF}$$

$$\geq \overline{AF}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2 + (-3)^2}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{2}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PH}$ 의 최솟값은 $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ 이다.



023 ㉔ $\frac{7}{6}$

포물선 $x^2 = 6y$, 즉 $x^2 = 4 \times \frac{3}{2}y$ 의 초점 F의 좌표는

$(0, \frac{3}{2})$ 이고, 준선의 방정식은 $y = -\frac{3}{2}$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A에서 준선

$y = -\frac{3}{2}$ 에 내린 수선의

발을 각각 H, H'이라

하면 포물선의 정의에

의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PH}$$

$$\geq \overline{AH'}$$

즉, 세 점 A, P, H가 직선 $x=1$ 위에 있을 때

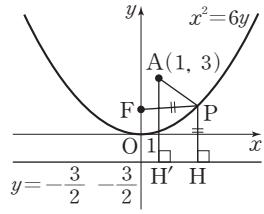
$\overline{AP} + \overline{PF}$ 의 값이 최소이다.

$x^2 = 6y$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$1^2 = 6y \quad \therefore y = \frac{1}{6} \quad \therefore P\left(1, \frac{1}{6}\right)$$

따라서 $a=1, b=\frac{1}{6}$ 이므로

$$a+b = \frac{7}{6}$$



024 ㉔ $2\sqrt{2}$

포물선 $x^2 = 4y$ 의 초점을 F라 하면 $F(0, 1)$ 이고, 준

선 l 의 방정식은 $y = -1$ 이다.

포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH} = \overline{PF} \text{이므로}$$

$$\overline{AP} + \overline{PH} = \overline{AP} + \overline{PF}$$

$$\geq \overline{AF}$$

$$= \sqrt{(-a)^2 + 1^2}$$

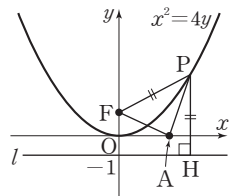
$$= \sqrt{a^2 + 1}$$

이때 $\overline{AP} + \overline{PH}$ 의 최솟값이 3이므로

$$\sqrt{a^2 + 1} = 3$$

양변을 제곱하면 $a^2 + 1 = 9$

$$a^2 = 8 \quad \therefore a = 2\sqrt{2} (\because a > 0)$$



연습문제

22~23쪽

025 ㉔ -3

원 $(x+3)^2 + y^2 = 36$ 의 중심의 좌표는 $(-3, 0)$

즉, 초점이 점 $(-3, 0)$ 이고 준선이 $x=3$ 인 포물선의

방정식은 $y^2 = 4px$ 에서 $p = -3$ 이므로

$$y^2 = 4 \times (-3)x \quad \therefore y^2 = -12x$$

이 포물선이 점 $(a, 6)$ 을 지나므로

$$6^2 = -12a \quad \therefore a = -3$$

026 ㉡ 18

$$y^2 - 4x + 2ay + 8 = 0 \text{에서}$$

$$y^2 + 2ay + a^2 = 4x + a^2 - 8$$

$$\therefore (y+a)^2 = 4\left(x + \frac{a^2-8}{4}\right) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

즉, 포물선 ㉡은 포물선 $y^2=4x$ 를 x 축의 방향으로 $-\frac{a^2-8}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한

것이므로 꼭짓점의 좌표는

$$\left(-\frac{a^2-8}{4}, -a\right)$$

또 $x^2 + 2x - 4y + b = 0$ 에서

$$x^2 + 2x + 1 = 4y - b + 1$$

$$\therefore (x+1)^2 = 4\left(y - \frac{b-1}{4}\right) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

즉, 포물선 ㉢은 포물선 $x^2=4y$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 $\frac{b-1}{4}$ 만큼 평행이동한 것

이므로 꼭짓점의 좌표는

$$\left(-1, \frac{b-1}{4}\right)$$

두 점 $\left(-\frac{a^2-8}{4}, -a\right), \left(-1, \frac{b-1}{4}\right)$ 이 원점에 대하여 대칭이므로

$$\frac{a^2-8}{4} = -1, a = \frac{b-1}{4}$$

$$\frac{a^2-8}{4} = -1 \text{에서 } a^2-8 = -4$$

$$a^2=4 \quad \therefore a=2 (\because a>0)$$

$$a = \frac{b-1}{4} \text{에서 } 2 = \frac{b-1}{4}$$

$$b-1=8 \quad \therefore b=9$$

$$\therefore ab=18$$

027 ㉡ ④

포물선 $y^2=8x$, 즉 $y^2=4 \times 2x$ 의 초점 F의 좌표는 (2, 0)이고, 준선의 방정식은 $x=-2$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 준선 $x=-2$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

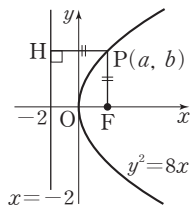
$$\overline{PH} = \overline{PF} = 4$$

즉, $a - (-2) = 4$ 이므로 $a=2$

이때 점 P(2, b)는 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로

$$b^2 = 8 \times 2 = 16 \quad \therefore b=4 (\because b>0)$$

$$\therefore a+b=6$$



028 ㉡ $\frac{1}{8}$

초점이 $F\left(0, -\frac{1}{4}\right)$ 이고 준선이 $y=\frac{1}{4}$ 인 포물선의 방정식은

$$x^2 = 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)y \quad \therefore x^2 = -y$$

이 포물선의 꼭짓점 A의 좌표는 (0, 0) ▶▶▶▶▶ ①

또 포물선의 초점 F를 지나고 x 축에 평행한 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{4}$ 이므로 이 직선이 포물선과 만나는 점의 x 좌표는

$$x^2 = -\left(-\frac{1}{4}\right), x^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

즉, 두 점 B, C의 좌표는

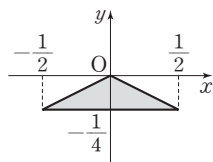
$$\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 삼

각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left\{ \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right\} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{8} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$



단계	채점 기준	비율
①	점 A의 좌표 구하기	30 %
②	두 점 B, C의 좌표 구하기	50 %
③	삼각형 ABC의 넓이 구하기	20 %

029 ㉡ ②

점 P가 나타내는 도형은 초점이 점 (3, 3)이고 준선이 $x=-5$ 인 포물선이다.

이 포물선의 꼭짓점의 좌표는

$$\left(\frac{3+(-5)}{2}, 3\right) \quad \therefore (-1, 3)$$

즉, 이 포물선은 꼭짓점이 원점인 포물선을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

이때 평행이동하기 전의 포물선의 초점의 좌표가

(3+1, 3-3), 즉 (4, 0)이므로 평행이동하기 전의 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4 \times 4x \quad \therefore y^2 = 16x$$

즉, 주어진 도형의 방정식은

$$(y-3)^2 = 16(x+1) \quad \therefore y^2 - 16x - 6y - 7 = 0$$

따라서 $a=-16, b=-6, c=-7$ 이므로

$$a-b-c = -16 - (-6) - (-7) = -3$$

030 ㉮ $y^2 - 2x + 4y = 0$

축이 x 축에 평행하므로 포물선의 방정식을 $y^2 + Ax + By + C = 0$ (A, B, C 는 상수, $A \neq 0$)이라 하면 이 포물선이 세 점 $(0, 0)$, $(0, -4)$, $(6, 2)$ 를 지나므로

$$C = 0$$

$$(-4)^2 - 4B + C = 0$$

$$2^2 + 6A + 2B + C = 0$$

세 식을 연립하여 풀면 $A = -2, B = 4, C = 0$

따라서 구하는 포물선의 방정식은 $y^2 - 2x + 4y = 0$

031 ㉮ $(\sqrt{3}, \frac{3}{2})$

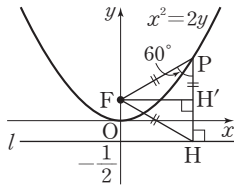
포물선 $x^2 = 2y$, 즉 $x^2 = 4 \times \frac{1}{2}y$ 의 초점 F 의 좌표는

$(0, \frac{1}{2})$ 이고 준선 l 의 방정식은 $y = -\frac{1}{2}$ 이다.

이때 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이고 $\angle FPH = 60^\circ$ 이므로 삼각형 PFH 는 정삼각형이다.

오른쪽 그림과 같이 점 F 에서 선분 PH 에 내린 수선의 발을 H' 이라 하면

$$\begin{aligned} \overline{PH'} &= \overline{HH'} \\ &= \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$



따라서 점 P 의 y 좌표는 $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$ 이고, 점 P 는 포물선 위의 점이므로 x 좌표는

$$x^2 = 2 \times \frac{3}{2} \quad \therefore x = \sqrt{3} \quad (\because x > 0)$$

따라서 점 P 의 좌표는 $(\sqrt{3}, \frac{3}{2})$

032 ㉮ 18

포물선 $y^2 = -12x$, 즉 $y^2 = 4 \times (-3)x$ 의 초점 F 의 좌표는 $(-3, 0)$ 이고 준선의 방정식은 $x = 3$ 이다.

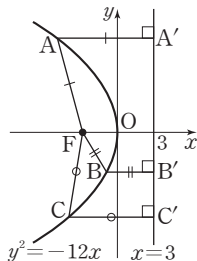
세 점 A, B, C 의 x 좌표를 각각 x_1, x_2, x_3 이라 하면

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = -3 \quad \therefore x_1 + x_2 + x_3 = -9$$

한편 오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C 에서 준선 $x = 3$ 에 내린 수선의 발을 각각 A', B', C' 이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AA'} = 3 - x_1$$

$$\overline{BF} = \overline{BB'} = 3 - x_2$$



$$\overline{CF} = \overline{CC'} = 3 - x_3$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF} &= (3 - x_1) + (3 - x_2) + (3 - x_3) \\ &= 9 - (x_1 + x_2 + x_3) \\ &= 9 - (-9) = 18 \end{aligned}$$

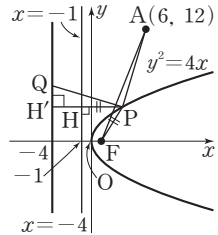
033 ㉮ ③

포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점을 F 라 하면 $F(1, 0)$ 이고 준선의 방정식은 $x = -1$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P 에서 두 직선 $x = -1, x = -4$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H' 이라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{PQ} &\geq \overline{AP} + \overline{PH'} \\ &= \overline{AP} + \overline{PH} + 3 \\ &= \overline{AF} + \overline{PF} + 3 \\ &\geq \overline{AF} + 3 \\ &= \sqrt{(1-6)^2 + (-12)^2} + 3 \\ &= 13 + 3 = 16 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PQ}$ 의 최솟값은 16이다.



034 ㉮ 28

포물선 $y^2 = 20x$, 즉 $y^2 = 4 \times 5x$ 의 초점은 $A(5, 0)$ 이고 준선의 방정식은 $x = -5$ 이다.

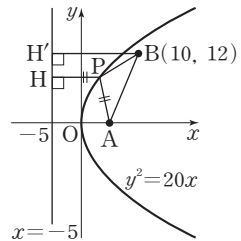
오른쪽 그림과 같이 두 점

P, B 에서 준선 $x = -5$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H' 이라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PA} = \overline{PH}$ 이

므로 삼각형 ABP 의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BP} + \overline{PA} &= \overline{AB} + \overline{BP} + \overline{PH} \\ &\geq \overline{AB} + \overline{BH'} \\ &= \sqrt{(10-5)^2 + 12^2} + \{10 - (-5)\} \\ &= 13 + 15 = 28 \end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABP 의 둘레의 길이의 최솟값은 28이다.



035 ㉮ $\frac{2\sqrt{10}}{3}$

| 접근 방법 | $\overline{AF} = 5k, \overline{BF} = 2k$ ($k > 0$)로 놓고, 직선 l 의 기울기를 k 에 대한 식으로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하자.

$$\overline{AF} : \overline{BF} = 5 : 2 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AF} = 5k, \overline{BF} = 2k (k > 0)$$

라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AH} = \overline{AF} = 5k, \overline{BH'} = \overline{BF} = 2k$$

이때 점 A에서 선분 H'B의 연장선에 내린 수선의 발을 C라 하면

$$\overline{BC} = \overline{CH'} - \overline{BH'} = \overline{AH} - \overline{BH'} = 5k - 2k = 3k$$

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{(5k+2k)^2 - (3k)^2} = 2\sqrt{10}k (\because k > 0)$$

따라서 구하는 직선 l의 기울기는

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{2\sqrt{10}k}{3k} = \frac{2\sqrt{10}}{3}$$

036 270

[접근 방법] 포물선의 정의를 이용하여 두 점 A, B의 좌표를 각각 구한다.

포물선 $x^2 = 12y$, 즉 $x^2 = 4 \times 3y$ 의 초점 F의 좌표는 (0, 3)이고 준선의 방정식은 $y = -3$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선 $y = -3$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AH} = \overline{AF} = 30, \overline{BH'} = \overline{BF} = 15$$

즉, 점 A의 y좌표는 $30 - 3 = 27$, 점 B의 y좌표는 $15 - 3 = 12$ 이므로 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b ($a > 0, b < 0$)라 하면

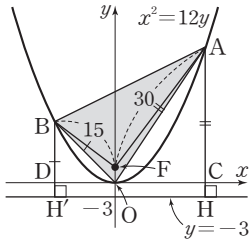
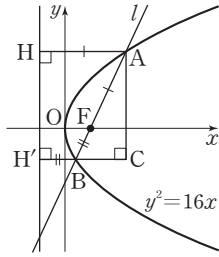
$$a^2 = 12 \times 27 = 324 \quad \therefore a = 18 (\because a > 0)$$

$$b^2 = 12 \times 12 = 144 \quad \therefore b = -12 (\because b < 0)$$

$$\therefore A(18, 27), B(-12, 12)$$

두 선분 AH, BH'과 x축의 교점을 각각 C, D라 하면 $\triangle ABO = \square ABDC - (\triangle AOC + \triangle BDO)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times (27 + 12) \times \{18 - (-12)\} \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} \times 18 \times 27 + \frac{1}{2} \times 12 \times 12 \right) \\ &= 585 - (243 + 72) = 270 \end{aligned}$$



02 타원

개념 확인

27쪽

$$037 \text{ ㉡ (1) } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1 \quad (2) \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$$

$$(3) \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (4) \frac{x^2}{19} + \frac{y^2}{25} = 1$$

(1) 중심이 원점이고 두 초점이 x축 위에 있으므로 구

하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하자.

두 초점으로부터 거리의 합이 8이므로

$$2a = 8 \quad \therefore a = 4$$

두 초점의 좌표가 (3, 0), (-3, 0)이므로

$$a^2 - b^2 = 3^2 \text{에서 } b^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

(2) 중심이 원점이고 두 초점이 x축 위에 있으므로 구

하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하자.

두 초점으로부터 거리의 합이 12이므로

$$2a = 12 \quad \therefore a = 6$$

두 초점의 좌표가 (5, 0), (-5, 0)이므로

$$a^2 - b^2 = 5^2 \text{에서 } b^2 = 6^2 - 5^2 = 11$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$$

(3) 중심이 원점이고 두 초점이 y축 위에 있으므로 구

하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 이라 하자.

두 초점으로부터 거리의 합이 6이므로

$$2b = 6 \quad \therefore b = 3$$

두 초점의 좌표가 (0, 2), (0, -2)이므로

$$b^2 - a^2 = 2^2 \text{에서 } a^2 = 3^2 - 2^2 = 5$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(4) 중심이 원점이고 두 초점이 y축 위에 있으므로 구

하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 이라 하자.

두 초점으로부터 거리의 합이 10이므로

$$2b=10 \quad \therefore b=5$$

두 초점의 좌표가 $(0, \sqrt{6})$, $(0, -\sqrt{6})$ 이므로

$$b^2 - a^2 = (\sqrt{6})^2 \text{에서 } a^2 = 5^2 - (\sqrt{6})^2 = 19$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{19} + \frac{y^2}{25} = 1$$

| 다른 풀이 |

- (1) 타원 위의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 8$ 이므로

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 8$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 8 - \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 3x + 16$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 구하는 타원의 방정식은

$$7x^2 + 16y^2 = 112$$

$$\therefore \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$$

038 ㉠ 풀이 참조

- (1) 타원 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{10-4} = \sqrt{6}$ 이므로

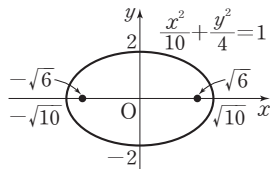
초점의 좌표는 $(\sqrt{6}, 0)$, $(-\sqrt{6}, 0)$,

장축의 길이는 $2 \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$,

단축의 길이는 $2 \times 2 = 4$

이고 그래프는 오른쪽

쪽 그림과 같다.



- (2) 타원 $3x^2 + 2y^2 = 18$, 즉 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에서

$$\sqrt{9-6} = \sqrt{3} \text{이므로}$$

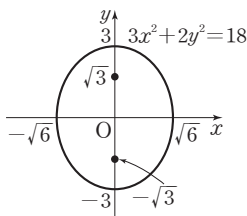
초점의 좌표는 $(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$,

장축의 길이는 $2 \times 3 = 6$,

단축의 길이는 $2 \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

이고 그래프는 오른쪽

그림과 같다.



039 ㉠ 풀이 참조

- (1) 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 5 만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $\sqrt{25-16} = 3$ 이므로

중심의 좌표는 $(0, 0)$,

초점의 좌표는 $(3, 0)$, $(-3, 0)$,

꼭짓점의 좌표는

$(5, 0)$, $(-5, 0)$, $(0, 4)$, $(0, -4)$ 이다.

따라서 구하는 타원의

중심의 좌표는 $(-2, 5)$,

초점의 좌표는 $(1, 5)$, $(-5, 5)$,

꼭짓점의 좌표는

$(3, 5)$, $(-7, 5)$, $(-2, 9)$, $(-2, 1)$ 이다.

- (2) $4(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 에서

$$(x-1)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

즉, 이 타원은 타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로

1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ 이므로

중심의 좌표는 $(0, 0)$,

초점의 좌표는 $(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$,

꼭짓점의 좌표는

$(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(0, -2)$ 이다.

따라서 구하는 타원의

중심의 좌표는 $(1, 2)$,

초점의 좌표는 $(1, \sqrt{3}+2)$, $(1, -\sqrt{3}+2)$,

꼭짓점의 좌표는 $(2, 2)$, $(0, 2)$, $(1, 4)$, $(1, 0)$ 이다.

$$040 \text{ ㉠ (1) } \frac{(x+3)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{6} = 1$$

$$(2) \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1$$

- (1) $2x^2 + y^2 + 12x - 4y + 16 = 0$ 에서

$$2(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 6$$

$$\therefore \frac{(x+3)^2}{3} + \frac{(y-2)^2}{6} = 1$$

- (2) $3x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 4 = 0$ 에서

$$3(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 2y + 1) = 12$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{3} = 1$$

041 ㉡ (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$ (2) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{18} = 1$

(1) 중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 구

하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 이

라 하자.

단축의 길이가 4이므로

$$2a = 4 \quad \therefore a = 2$$

두 초점의 좌표가 $(0, 2), (0, -2)$ 이므로

$$b^2 - a^2 = 2^2 \text{에서 } b^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$$

(2) 타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{5} = 1$ 에서 $\sqrt{12-5} = \sqrt{7}$ 이므로 두

초점의 좌표는

$$(\sqrt{7}, 0), (-\sqrt{7}, 0)$$

중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 구

하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이

라 하자.

장축의 길이가 10이므로

$$2a = 10 \quad \therefore a = 5$$

두 초점의 좌표가 $(\sqrt{7}, 0), (-\sqrt{7}, 0)$ 이므로

$$a^2 - b^2 = (\sqrt{7})^2 \text{에서 } b^2 = 5^2 - (\sqrt{7})^2 = 18$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{18} = 1$$

042 ㉡ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 구하는

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 이라 하자.

두 초점의 좌표가 $(0, 6), (0, -6)$ 이므로

$$b^2 - a^2 = 6^2 \quad \therefore (b+a)(b-a) = 36 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

장축과 단축의 길이의 차가 4이므로

$$2b - 2a = 4 \quad \therefore b - a = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$2(b+a) = 36 \quad \therefore a+b = 18 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

②, ③을 연립하여 풀면 $a=8, b=10$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$$

043 ㉡ 8

주어진 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

이때 $\sqrt{25-9}=4$ 이므로 두 초점 F, F'의 좌표는

$$(4, 0), (-4, 0)$$

$$\therefore FF' = 4 - (-4) = 8$$

044 ㉡ $4\sqrt{3}$

중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 주어진

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하자.

두 초점의 좌표가 $(2, 0), (-2, 0)$ 이므로

$$a^2 - b^2 = 2^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 점 $(2, 3)$ 을 지나므로

$$\frac{2^2}{a^2} + \frac{3^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore 4b^2 + 9a^2 = a^2b^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하여 정리하면

$$b^4 - 9b^2 - 36 = 0, (b^2 + 3)(b^2 - 12) = 0$$

그런데 $b^2 > 0$ 이므로

$$b^2 = 12 \quad \therefore b = 2\sqrt{3} (\because b > 0)$$

따라서 구하는 단축의 길이는

$$2b = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

045 ㉡ $\frac{(x+1)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

타원의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-1+(-1)}{2}, \frac{0+(-4)}{2} \right)$$

$$\therefore (-1, -2)$$

즉, 주어진 타원은 중심이 원점인 타원을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 두 초점 F, F'의 x 좌표가 같으므로 구하는 타원

의 방정식을 $\frac{(x+1)^2}{a^2} + \frac{(y+2)^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 이

라 하자.

두 초점으로부터 거리의 합이 8이므로

$$2b = 8 \quad \therefore b = 4$$

중심에서 초점까지의 거리가 2이므로

$$b^2 - a^2 = 2^2 \text{에서 } a^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{(x+1)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

| 다른 풀이 |

타원 위의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 8$ 이므로

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y+4)^2} = 8$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 8 - \sqrt{(x+1)^2 + (y+4)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$2\sqrt{(x+1)^2 + (y+4)^2} = y + 10$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$4(x+1)^2 + 3(y+2)^2 = 48$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

046 $\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{(y-4)^2}{20} = 1$

타원의 중심은 선분 FF' 의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+(-6)}{2}, \frac{4+4}{2} \right)$$

$$\therefore (-2, 4)$$

즉, 주어진 타원은 중심이 원점인 타원을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

이때 두 초점 F, F' 의 y 좌표가 같으므로 구하는 타원의

방정식을 $\frac{(x+2)^2}{a^2} + \frac{(y-4)^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하자.

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 12 \text{이므로}$$

$$2a = 12 \quad \therefore a = 6$$

중심에서 초점까지의 거리가 4 이므로

$$a^2 - b^2 = 4^2 \text{에서 } b^2 = 6^2 - 4^2 = 20$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{(y-4)^2}{20} = 1$$

047 $-\frac{75}{4}$

타원의 중심은 선분 FF' 의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+2}{2}, \frac{3+(-3)}{2} \right)$$

$$\therefore (2, 0)$$

즉, 주어진 타원은 중심이 원점인 타원을 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 두 초점 F, F' 의 x 좌표가 같으므로 주어진 타원의

방정식을 $\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 이라 하자.

장축의 길이가 10 이므로

$$2b = 10 \quad \therefore b = 5$$

중심에서 초점까지의 거리가 3 이므로

$$b^2 - a^2 = 3^2 \text{에서 } a^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

즉, 주어진 타원의 방정식은

$$\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

이 타원이 y 축과 만나는 점의 y 좌표는

$$\frac{(0-2)^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1, \quad \frac{y^2}{25} = \frac{3}{4}$$

$$y^2 = \frac{75}{4} \quad \therefore y = \pm \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

따라서 구하는 y 좌표의 곱은

$$\frac{5\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{5\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{75}{4}$$

048 $\frac{32}{5}$

두 점 A, C 의 y 좌표가 같으므로 선분 AC 는 타원의 장축 또는 단축이다.

선분 AC 의 중점은 타원의 중심과 같으므로 타원의 중심을 M 이라 하면

$$M\left(\frac{-4+6}{2}, \frac{-3+(-3)}{2} \right)$$

$$\therefore M(1, -3)$$

이때 $\overline{AM} = 5, \overline{BM} = 3$ 이므로 선분 AC 는 타원의 장축이다.

즉, 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ 을 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것

이므로 주어진 타원의 방정식은

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$$

따라서 $a = 25, b = 9, m = 1, n = -3$ 이므로

$$a + b + m + n = 32$$

049 $\frac{1}{2}$ 풀이 참조

$$2x^2 + y^2 + 12x - 4y + 6 = 0 \text{에서}$$

$$2(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 4y + 4) = 16$$

$$\therefore \frac{(x+3)^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$$

즉, 이 타원은 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{16} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $\sqrt{16-8} = 2\sqrt{2}$ 이므로

중심의 좌표는 $(0, 0)$,

초점의 좌표는 $(0, 2\sqrt{2}), (0, -2\sqrt{2})$,

꼭짓점의 좌표는

$(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0), (0, 4), (0, -4)$,

장축의 길이는 $2 \times 4 = 8$,

단축의 길이는 $2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ 이다.

따라서 구하는 타원의

중심의 좌표는 $(-3, 2)$,

초점의 좌표는 $(-3, 2\sqrt{2}+2), (-3, -2\sqrt{2}+2)$,

꼭짓점의 좌표는

$(2\sqrt{2}-3, 2), (-2\sqrt{2}-3, 2), (-3, 6), (-3, -2)$,

장축의 길이는 8,

단축의 길이는 $4\sqrt{2}$ 이다.

050 ㉠ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ 에서

$4(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 - 4y + 4) = 36$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

ㄴ. 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{9-4} = \sqrt{5}$ 이므로 두 초

점의 좌표는

$(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$

즉, 주어진 타원의 두 초점의 좌표는

$(\sqrt{5}+1, 2), (-\sqrt{5}+1, 2)$

ㄷ. 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 네 꼭짓점의 좌표는

$(3, 0), (-3, 0), (0, 2), (0, -2)$

즉, 주어진 타원의 네 꼭짓점의 좌표는

$(4, 2), (-2, 2), (1, 4), (1, 0)$

ㄹ. 장축의 길이는 $2 \times 3 = 6$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

051 ㉡ $2\sqrt{2}$

$4x^2 + 3y^2 - 16x - 18y + 19 = 0$ 에서

$4(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 - 6y + 9) = 24$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{6} + \frac{(y-3)^2}{8} = 1$$

즉, 이 타원은 타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8} = 1$ 을 x 축의 방향으로 2

만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8} = 1$ 에서 $\sqrt{8-6} = \sqrt{2}$ 이므로 두

초점의 좌표는

$(0, \sqrt{2}), (0, -\sqrt{2})$

주어진 타원의 두 초점의 좌표는

$(2, \sqrt{2}+3), (2, -\sqrt{2}+3)$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$\sqrt{2}+3 - (-\sqrt{2}+3) = 2\sqrt{2}$$

[참고] 타원을 평행이동하면 두 초점도 같이 평행이동하여

좌표는 변하지만 두 초점 사이의 거리는 변하지 않는다. 따라서 주어진 타원의 두 초점 사이의 거리는 평행이동하기 전

인 타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8} = 1$ 의 두 초점 사이의 거리와 같다.

052 ㉢ 3

$5x^2 + 8y^2 - 20x - 16y - 92 = 0$ 에서

$5(x^2 - 4x + 4) + 8(y^2 - 2y + 1) = 120$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{24} + \frac{(y-1)^2}{15} = 1$$

즉, 이 타원은 타원 $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{15} = 1$ 을 x 축의 방향으로

2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{15} = 1$ 에서 $\sqrt{24-15} = 3$ 이므로 두

초점의 좌표는

$(3, 0), (-3, 0)$

주어진 타원의 두 초점 F, F'의 좌표는

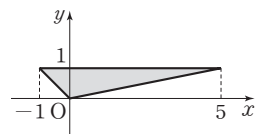
$(5, 1), (-1, 1)$

따라서 오른쪽 그림에서

삼각형 OFF'의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{5 - (-1)\} \times 1$$

$$= 3$$



053 ㉣ 8

타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{4-3} = 1$ 이므로 두 초점의

좌표는

$(0, 1), (0, -1)$

즉, 두 점 F(0, 1),

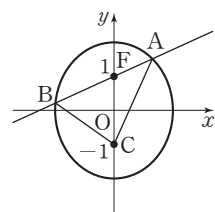
C(0, -1)은 주어진 타원의

두 초점이므로 타원의 정의

에 의하여

$$\overline{AF} + \overline{AC} = \overline{BF} + \overline{BC}$$

$$= 2 + 2 = 4$$



따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} &= (\overline{AF} + \overline{BF}) + \overline{BC} + \overline{AC} \\ &= (\overline{AF} + \overline{AC}) + (\overline{BF} + \overline{BC}) \\ &= 4 + 4 = 8\end{aligned}$$

054 16

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $\sqrt{25-16}=3$ 이므로 두 초점

F, F'의 좌표는

$$(3, 0), (-3, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 3 - (-3) = 6$$

타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 5 = 10$$

따라서 삼각형 PF'F의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{PF'} + \overline{FF'} + \overline{PF} &= (\overline{PF} + \overline{PF'}) + \overline{FF'} \\ &= 10 + 6 = 16\end{aligned}$$

055 4√7

타원의 정의에 의하여

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{BF} + \overline{BF'} = 2b$$

삼각형 ABF'의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{BF'} + \overline{AF'} &= (\overline{AF} + \overline{BF}) + \overline{BF'} + \overline{AF'} \\ &= (\overline{AF} + \overline{AF'}) + (\overline{BF} + \overline{BF'}) \\ &= 2b + 2b = 4b\end{aligned}$$

즉, $4b=16$ 이므로 $b=4$

이때 $b^2 - a^2 = 3^2$ 에서 $a^2 = 4^2 - 3^2 = 7$

$$\therefore a = \sqrt{7} \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore ab = \sqrt{7} \times 4 = 4\sqrt{7}$$

056 6

타원 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$ 에서 $\sqrt{7-3}=2$ 이므로 두 초점 F,

F'의 좌표는

$$(2, 0), (-2, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 2 - (-2) = 4$$

$\overline{PF} = a$, $\overline{PF'} = b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a + b = 2 \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$$

직각삼각형 PF'F에서

$$a^2 + b^2 = 4^2 = 16$$

이때 $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ 이므로

$$16 = (2\sqrt{7})^2 - 2ab \quad \therefore ab = 6$$

따라서 사각형 PF'QF의 넓이는

$$ab = 6$$

057 12

타원 $4x^2 + y^2 = 12$, 즉 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$ 에서

$\sqrt{12-3}=3$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(0, 3), (0, -3)$$

즉, 두 점 A, B는 주어진 타원의 두 초점이다.

$\overline{PA} = a$, $\overline{PB} = b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a + b = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

이때 $a > 0$, $b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a = b \text{ 일 때 성립})$$

$$4\sqrt{3} \geq 2\sqrt{ab}, \sqrt{ab} \leq 2\sqrt{3}$$

$$\therefore ab \leq 12$$

따라서 $\overline{PA} \times \overline{PB}$ 의 최댓값은 12이다.

|다른 풀이|

타원 $4x^2 + y^2 = 12$, 즉 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$ 에서

$\sqrt{12-3}=3$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(0, 3), (0, -3)$$

즉, 두 점 A, B는 주어진 타원의 두 초점이다.

타원의 정의에 의하여

$$\overline{PA} + \overline{PB} = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\overline{PA} = a \text{라 하면 } \overline{PB} = 4\sqrt{3} - \overline{PA} = 4\sqrt{3} - a$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{PA} \times \overline{PB} &= a(4\sqrt{3} - a) \\ &= -a^2 + 4\sqrt{3}a \\ &= -(a - 2\sqrt{3})^2 + 12\end{aligned}$$

따라서 $a = 2\sqrt{3}$, 즉 $\overline{PA} = \overline{PB} = 2\sqrt{3}$ 일 때 $\overline{PA} \times \overline{PB}$ 의 최댓값은 12이다.

058 6

점 P(a, b)가 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{8} + \frac{b^2}{18} = 1$$

이때 $a^2 > 0$, $b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{8} + \frac{b^2}{18} &\geq 2\sqrt{\frac{a^2}{8} \times \frac{b^2}{18}} \\ &\quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{8} = \frac{b^2}{18} \text{ 일 때 성립} \right)\end{aligned}$$

$$1 \geq \frac{ab}{6} \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore ab \leq 6$$

따라서 ab의 최댓값은 6이다.

059 ㉔ 20

$D(a, b)$ ($a > 0, b > 0$)라 하면 직사각형 ABCD의 넓이는

$$2a \times 2b = 4ab$$

점 $D(a, b)$ 가 타원 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{20} + \frac{b^2}{5} = 1$$

이때 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2}{20} + \frac{b^2}{5} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{20} \times \frac{b^2}{5}} \quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{20} = \frac{b^2}{5} \text{ 일 때 성립} \right)$$

$$1 \geq \frac{ab}{5} \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore ab \leq 5$$

따라서 $4ab \leq 20$ 이므로 구하는 넓이의 최댓값은 20이다.

060 ㉔ 10

$\overline{PF} = a, \overline{PF'} = b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a + b = 2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$

$$= (2\sqrt{5})^2 - 2ab$$

$$= 20 - 2ab \quad \dots\dots \text{㉑}$$

이때 $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a = b \text{ 일 때 성립})$$

$$2\sqrt{5} \geq 2\sqrt{ab}, \sqrt{ab} \leq \sqrt{5}$$

$$\therefore ab \leq 5$$

㉑에서

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = 20 - 2ab \geq 20 - 2 \times 5 = 10$$

따라서 $\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2$ 의 최솟값은 10이다.

연습문제

38-40쪽

061 ㉔ ④

타원 $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점의 좌표는

$$(\sqrt{4^2 - b^2}, 0), (-\sqrt{4^2 - b^2}, 0)$$

이때 두 초점 사이의 거리가 6이므로

$$\sqrt{16 - b^2} - (-\sqrt{16 - b^2}) = 6$$

$$\sqrt{16 - b^2} = 3$$

양변을 제곱하면

$$16 - b^2 = 9 \quad \therefore b^2 = 7$$

062 ㉔ ①

주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로

2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 주어진 타원의 중심의 좌표는

$$(2, 2) \quad \dots\dots \text{㉑}$$

한편 타원의 중심은 두 초점을 이은 선분의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{6 + (-2)}{2}, \frac{b + b}{2} \right)$$

$$\therefore (2, b) \quad \dots\dots \text{㉒}$$

㉑, ㉒이 일치하므로

$$b = 2$$

이때 주어진 타원의 두 초점의 y 좌표가 같고 중심에서 초점까지의 거리가 4이므로

$$a - 4 = 4^2 \quad \therefore a = 20$$

$$\therefore ab = 40$$

063 ㉔ 80

$$3x^2 + 5y^2 + 18x - 20y - 28 = 0 \text{에서}$$

$$3(x^2 + 6x + 9) + 5(y^2 - 4y + 4) - 75 = 0$$

$$\therefore 3(x+3)^2 + 5(y-2)^2 - 75 = 0$$

이 타원을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 타원 $3x^2 + 5y^2 - 75 = 0$ 과 일치하므로

$$m = 3, n = -2, k = -75$$

$$\therefore m - n - k = 3 - (-2) - (-75) = 80$$

064 ㉔ $12\sqrt{2}$

타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{QF} + \overline{QF'} = 2 \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

따라서 사각형 $PFQF'$ 의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{PF} + \overline{QF} + \overline{QF'} + \overline{PF'} \\ = (\overline{PF} + \overline{PF'}) + (\overline{QF} + \overline{QF'}) \\ = 6\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2} \end{aligned}$$

065 ㉮ 17

중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 타원의

방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하자.

두 초점의 좌표가 $(4, 0), (-4, 0)$ 이므로

$$a^2 - b^2 = 4^2 \quad \therefore (a+b)(a-b) = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

장축과 단축의 길이의 차가 2이므로

$$2a - 2b = 2 \quad \therefore a - b = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면 } a + b = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{을 연립하여 풀면 } a = \frac{17}{2}, b = \frac{15}{2}$$

$$\therefore \overline{PF} + \overline{PF'} = 2a = 2 \times \frac{17}{2} = 17$$

066 ㉮ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 타원의

방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하자.

삼각형 $AF'F$ 가 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$$\overline{AF} = \overline{AF'} = \overline{FF'} = 4$$

즉, 두 초점으로부터 거리의 합이 $\overline{AF} + \overline{AF'} = 8$ 이므로

$$2a = 8 \quad \therefore a = 4$$

한편 $\overline{FF'} = 4$ 에서 두 초점 F, F' 의 좌표는

$$(2, 0), (-2, 0)$$

$$\text{즉, } a^2 - b^2 = 2^2 \text{에서 } b^2 = 4^2 - 2^2 = 12$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

067 ㉮ $4\sqrt{5}$

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{20} = 1$ 에서 $\sqrt{25-20} = \sqrt{5}$ 이므로 두 초

점 F, F' 의 좌표는

$$(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'} = \sqrt{5} - (-\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{20} = 1$ 에 $x = \sqrt{5}$ 를 대입하면

$$\frac{(\sqrt{5})^2}{25} + \frac{y^2}{20} = 1, \frac{y^2}{20} = \frac{4}{5}$$

$$y^2 = 16 \quad \therefore y = \pm 4$$

$$\therefore P(\sqrt{5}, 4) \text{ 또는 } P(\sqrt{5}, -4) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 삼각형 $PF'F$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 4 = 4\sqrt{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

단계	채점 기준	비율
①	선분 FF' 의 길이 구하기	40 %
②	점 P의 좌표 구하기	40 %
③	삼각형 $PF'F$ 의 넓이 구하기	20 %

068 ㉮ $2\sqrt{13}$

타원의 중심은 선분 FF' 의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+2}{2}, \frac{6+0}{2} \right)$$

$$\therefore (2, 3)$$

즉, 주어진 타원은 중심이 원점인 타원을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이때 두 초점 F, F' 의 x 좌표가 같으므로 주어진 타원

의 방정식을 $\frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-3)^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 이라 하자.

중심에서 초점까지의 거리가 3이므로

$$b^2 - a^2 = 3^2 \text{에서 } b^2 = a^2 + 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

주어진 타원이 점 $(4, 3)$ 을 지나므로

$$\frac{(4-2)^2}{a^2} + \frac{(3-3)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{4}{a^2} = 1 \quad \therefore a^2 = 4$$

이를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$b^2 = 4 + 9 = 13 \quad \therefore b = \sqrt{13} (\because b > 0)$$

따라서 구하는 장축의 길이는

$$2b = 2 \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$$

069 ㉮ ②

$$16x^2 + 7y^2 - 32x - 14y - 89 = 0 \text{에서}$$

$$16(x^2 - 2x + 1) + 7(y^2 - 2y + 1) = 112$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{7} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

즉, 이 타원은 타원 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$ 을 x 축의 방향으로

1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $\sqrt{16-7} = 3$ 이므로 두

초점의 좌표는

$$(0, 3), (0, -3)$$

주어진 타원의 두 초점의 좌표는

$$(1, 4), (1, -2)$$

따라서 y 좌표가 양수인 초점 $F(1, 4)$ 와 직선 $4x + 3y + 2 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|4 + 12 + 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{18}{5}$$

070 ㉒ 12

타원 $13x^2 + 4y^2 = 52$, 즉 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{13} = 1$ 에서

$\sqrt{13 - 4} = 3$ 이므로 두 초점 P, Q 의 좌표는

$(0, 3), (0, -3)$

$13x^2 + 4y^2 - 52x + 24y + 36 = 0$ 에서

$13(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 + 6y + 9) = 52$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+3)^2}{13} = 1$$

즉, 이 타원은 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{13} = 1$ 을 x 축의 방향으로

2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로

두 초점 P', Q' 의 좌표는

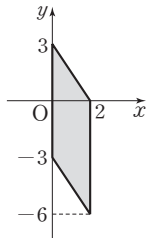
$(2, 0), (2, -6)$

따라서 오른쪽 그림에서 사각형

$PQQ'P'$ 은 평행사변형이므로 그

넓이는

$$\{3 - (-3)\} \times 2 = 12$$



071 ㉒ 20

타원 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ 에서 $\sqrt{100 - 36} = 8$ 이므로 두 초점의 좌표는

$(8, 0), (-8, 0)$

이때 $F(8, 0)$ 이라 하면

두 점 $A(-8, 0),$

$F(8, 0)$ 은 타원의 초점

이므로 타원의 정의에 의

하여

$$\overline{AP} + \overline{PF} = 2 \times 10$$

$$= 20$$

한편 포물선 $y^2 = 32x$, 즉 $y^2 = 4 \times 8x$ 의 초점의 좌표

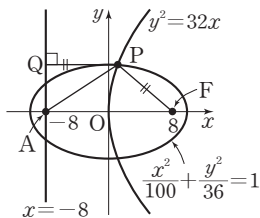
는 $(8, 0)$ 이고 준선의 방정식은 $x = -8$ 이다.

즉, 점 $F(8, 0)$ 은 포물선의 초점이므로 포물선의 정

의에 의하여

$$\overline{PQ} = \overline{PF}$$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{PQ} = \overline{AP} + \overline{PF} = 20$$



072 ㉒ 24

타원의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AF} + \overline{AF'} &= \overline{BF} + \overline{BF'} = \overline{CF} + \overline{CF'} = \overline{DF} + \overline{DF'} \\ &= 2 \times 7 = 14 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AF'} = 14 - \overline{AF}, \overline{BF'} = 14 - \overline{BF},$$

$$\overline{CF'} = 14 - \overline{CF}, \overline{DF'} = 14 - \overline{DF}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AF'} + \overline{BF'} + \overline{CF'} + \overline{DF'} &= (14 - \overline{AF}) + (14 - \overline{BF}) + (14 - \overline{CF}) \\ &\quad + (14 - \overline{DF}) \end{aligned}$$

$$= 14 \times 4 - (\overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF} + \overline{DF})$$

$$= 56 - 32 = 24$$

073 ㉒ 11

타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$ 에서 $\sqrt{36 - 11} = 5$ 이므로 두 초점

F, F' 의 좌표는

$(5, 0), (-5, 0)$

$$\therefore \overline{FF'} = 5 - (-5) = 10$$

$\overline{PF} = a, \overline{PF'} = b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a + b = 2 \times 6 = 12$$

점 P 가 두 점 F, F' 을 지름의 양 끝 점으로 하는 원 위의 점이므로

$$\angle FPF' = 90^\circ$$

직각삼각형 $PF'F$ 에서

$$a^2 + b^2 = 10^2 = 100$$

이때 $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ 이므로

$$12^2 = 100 + 2ab \quad \therefore ab = 22$$

따라서 삼각형 $PF'F$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 22 = 11$$

074 ㉒ 72

타원 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{36} = 1$ 에서 $\sqrt{36 - 20} = 4$ 이므로 두 초점

의 좌표는

$(0, 4), (0, -4)$

즉, 두 점 A, B 는 주어진 타원의 두 초점이다.

$\overline{PA} = a, \overline{PB} = b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a + b = 2 \times 6 = 12$$

$$\therefore \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = a^2 + b^2$$

$$= (a + b)^2 - 2ab$$

$$= 12^2 - 2ab$$

$$= 144 - 2ab \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이때 $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a = b \text{ 일 때 성립})$$

$$12 \geq 2\sqrt{ab}, \sqrt{ab} \leq 6$$

$$\therefore ab \leq 36$$

㉠에서

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 = 144 - 2ab$$

$$\geq 144 - 2 \times 36 = 72$$

따라서 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2$ 의 최솟값은 72이다.

075 ㉢ 48

오른쪽 그림과 같이 타원의 중심이 원점, 단축이 x 축 위에 있도록 좌표평면 위에 놓으면 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$$

직사각형의 꼭짓점 중 제1사

분면 위의 점을 $P(a, b)$ 라 하면 직사각형의 넓이는

$$2a \times 2b = 4ab$$

점 $P(a, b)$ 가 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{36} = 1$$

이때 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{36} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{16} \times \frac{b^2}{36}} \quad (\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{16} = \frac{b^2}{36} \text{ 일 때 성립})$$

$$1 \geq \frac{ab}{12} \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore ab \leq 12$$

따라서 $4ab \leq 48$ 이므로 구하는 넓이의 최댓값은 48이다.

076 ㉢ ⑤

| 접근 방법 | 원점 O가 선분 FF'의 중점임을 이용하여 닮은 두 삼각형을 찾은 후 두 선분 PF, PF'의 길이를 구한다.

중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하자.

두 초점의 좌표가 $(5, 0), (-5, 0)$ 이므로

$$a^2 - b^2 = 5^2 = 25 \quad \dots\dots ㉠$$

원점 O는 선분 FF'의 중점

이므로

$$\triangle F'OH \sim \triangle F'FP$$

(SAS 닮음)

이때 두 삼각형 F'OH,

F'FP의 닮음비는 1 : 2이므로 $\overline{HO} = k (k > 0)$ 라 하면 $\overline{PF} = 2k$

$$\text{또 } \frac{\overline{PF'}}{\overline{HO}} = 4 \text{에서 } \overline{PF'} = 4k$$

이때 $\overline{HF'} = \frac{1}{2} \overline{PF'} = 2k$ 이므로 직각삼각형 F'OH에서

$$k^2 + (2k)^2 = 5^2, k^2 = 5 \quad \therefore k = \sqrt{5} (\because k > 0)$$

$$\text{즉, } \overline{PF} = 2\sqrt{5}, \overline{PF'} = 4\sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

이때 타원의 정의에 의하여 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ 이므로

$$2a = 6\sqrt{5} \quad \therefore a = 3\sqrt{5}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$(3\sqrt{5})^2 - b^2 = 25, b^2 = 20 \quad \therefore b = 2\sqrt{5} (\because b > 0)$$

따라서 구하는 단축의 길이는

$$2b = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

077 ㉢ 11

| 접근 방법 | 타원의 정의를 이용하여 $\overline{PQ} + \overline{FQ}$ 의 값이 최대가 되는 점 P의 위치를 찾는다.

타원 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1$ 에서 $\sqrt{49 - 33} = 4$ 이므로 두 초점

F, F'의 좌표는

$$(4, 0), (-4, 0)$$

타원의 정의에 의하여

$$\overline{FQ} + \overline{F'Q} = 2 \times 7 = 14$$

$$\overline{FQ} + (\overline{F'P} + \overline{PQ}) = 14$$

$$\therefore \overline{PQ} + \overline{FQ} = 14 - \overline{F'P} \quad \dots\dots ㉠$$

즉, $\overline{PQ} + \overline{FQ}$ 의 값이 최대가 되려면 선분 F'P의 길이가 최소이어야 한다.

점 P가 원의 중심 (0, 3)과 타원의 초점 F'을 이은 선분과 원의 교점일 때 선분 F'P의 길이가 최소이므로

$\overline{F'P}$ 의 최솟값은

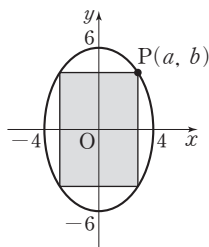
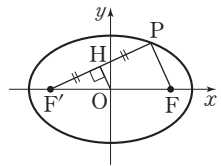
$$\sqrt{4^2 + 3^2} - 2 = 5 - 2 = 3$$

㉠에서

$$\overline{PQ} + \overline{FQ} = 14 - \overline{F'P}$$

$$\leq 14 - 3 = 11$$

따라서 $\overline{PQ} + \overline{FQ}$ 의 최댓값은 11이다.



03 쌍곡선

개념 확인

45쪽

078 ㉡ (1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ (2) $x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$

(3) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1$ (4) $x^2 - \frac{y^2}{9} = -1$

- (1) 중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \text{이라 하자.}$$

두 초점으로부터 거리의 차이가 8이므로

$$2a = 8 \quad \therefore a = 4$$

두 초점의 좌표가 $(5, 0), (-5, 0)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5^2 \text{에서 } b^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

- (2) 중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \text{이라 하자.}$$

두 초점으로부터 거리의 차이가 2이므로

$$2a = 2 \quad \therefore a = 1$$

두 초점의 좌표가 $(4, 0), (-4, 0)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 4^2 \text{에서 } b^2 = 4^2 - 1^2 = 15$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$x^2 - \frac{y^2}{15} = 1$$

- (3) 중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0) \text{이라 하자.}$$

두 초점으로부터 거리의 차이가 4이므로

$$2b = 4 \quad \therefore b = 2$$

두 초점의 좌표가 $(0, 3), (0, -3)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 3^2 \text{에서 } a^2 = 3^2 - 2^2 = 5$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1$$

- (4) 중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0) \text{이라 하자.}$$

두 초점으로부터 거리의 차이가 6이므로

$$2b = 6 \quad \therefore b = 3$$

두 초점의 좌표가 $(0, \sqrt{10}), (0, -\sqrt{10})$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (\sqrt{10})^2 \text{에서 } a^2 = (\sqrt{10})^2 - 3^2 = 1$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$x^2 - \frac{y^2}{9} = -1$$

| 다른 풀이 |

- (1) 쌍곡선 위의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 8$ 이므로

$$|\sqrt{(x-5)^2 + y^2} - \sqrt{(x+5)^2 + y^2}| = 8$$

$$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \sqrt{(x+5)^2 + y^2} \pm 8$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$-5x - 16 = \pm 4\sqrt{(x+5)^2 + y^2}$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$9x^2 - 16y^2 = 144$$

$$\therefore \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

079 ㉡ 풀이 참조

- (1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{2} = 1$ 에서 $\sqrt{7+2} = 3$ 이므로

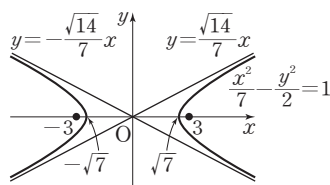
초점의 좌표는 $(3, 0), (-3, 0)$,

꼭짓점의 좌표는 $(\sqrt{7}, 0), (-\sqrt{7}, 0)$,

주축의 길이는 $2 \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$,

점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}x$, 즉 $y = \pm \frac{\sqrt{14}}{7}x$

이고 그래프는 다음 그림과 같다.



- (2) 쌍곡선 $x^2 - 3y^2 = -6$, 즉 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = -1$ 에서

$$\sqrt{6+2} = 2\sqrt{2} \text{이므로}$$

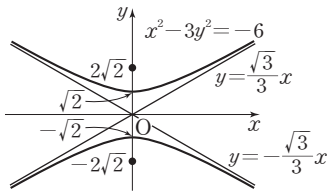
초점의 좌표는 $(0, 2\sqrt{2}), (0, -2\sqrt{2})$,

꼭짓점의 좌표는 $(0, \sqrt{2}), (0, -\sqrt{2})$,

주축의 길이는 $2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$,

점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}x$, 즉 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$

이고 그래프는 다음 그림과 같다.



080 ㉡ 풀이 참조

- (1) 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ 에서 $\sqrt{20+5} = 5$ 이므로

중심의 좌표는 (0, 0),

초점의 좌표는 (5, 0), (-5, 0),

꼭짓점의 좌표는 $(2\sqrt{5}, 0)$, $(-2\sqrt{5}, 0)$,

점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}x$, 즉 $y = \pm \frac{1}{2}x$ 이다.

따라서 구하는 쌍곡선의

중심의 좌표는 (3, -2),

초점의 좌표는 (8, -2), (-2, -2),

꼭짓점의 좌표는

$(2\sqrt{5}+3, -2)$, $(-2\sqrt{5}+3, -2)$,

점근선의 방정식은 $y+2 = \pm \frac{1}{2}(x-3)$, 즉

$y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$, $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 이다.

- (2) $4(x+1)^2 - 2(y-4)^2 = -8$ 에서

$$\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(y-4)^2}{4} = -1$$

즉, 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = -1$ 을 x 축의

방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = -1$ 에서 $\sqrt{2+4} = \sqrt{6}$ 이

므로

중심의 좌표는 (0, 0),

초점의 좌표는 $(0, \sqrt{6})$, $(0, -\sqrt{6})$,

꼭짓점의 좌표는 $(0, 2)$, $(0, -2)$,

점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{2}{\sqrt{2}}x$, 즉 $y = \pm \sqrt{2}x$ 이다.

따라서 구하는 쌍곡선의

중심의 좌표는 (-1, 4),

초점의 좌표는 $(-1, \sqrt{6}+4)$, $(-1, -\sqrt{6}+4)$,

꼭짓점의 좌표는 $(-1, 6)$, $(-1, 2)$,

점근선의 방정식은 $y-4 = \pm \sqrt{2}(x+1)$, 즉

$y = \sqrt{2}x + \sqrt{2} + 4$, $y = -\sqrt{2}x - \sqrt{2} + 4$ 이다.

081 ㉡ (1) $(x-2)^2 - \frac{(y+1)^2}{3} = 1$

(2) $\frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{2} = -1$

- (1) $3x^2 - y^2 - 12x - 2y + 8 = 0$ 에서

$$3(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 2y + 1) = 3$$

$$\therefore (x-2)^2 - \frac{(y+1)^2}{3} = 1$$

- (2) $x^2 - 2y^2 + 6x + 8y + 5 = 0$ 에서

$$(x^2 + 6x + 9) - 2(y^2 - 4y + 4) = -4$$

$$\therefore \frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{2} = -1$$

유제

47-56쪽

082 ㉡ (1) $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{8} = -1$ (2) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{40} = 1$

- (1) 중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0) \text{이라 하자.}$$

주축의 길이가 $4\sqrt{2}$ 이므로

$$2b = 4\sqrt{2} \quad \therefore b = 2\sqrt{2}$$

두 초점의 좌표가 $(0, 6)$, $(0, -6)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 6^2 \text{에서 } a^2 = 6^2 - (2\sqrt{2})^2 = 28$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{8} = -1$$

- (2) 중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \text{이라 하자.}$$

두 꼭짓점의 좌표가 $(3, 0)$, $(-3, 0)$ 이므로

$$a = 3$$

두 초점의 좌표가 $(7, 0)$, $(-7, 0)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 7^2 \text{에서 } b^2 = 7^2 - 3^2 = 40$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{40} = 1$$

083 ㉡ $\frac{x^2}{3} - y^2 = -1$

타원 $6x^2 + 2y^2 = 12$, 즉 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$ 에서 $\sqrt{6-2}=2$

이므로 두 초점의 좌표는

$$(0, 2), (0, -2)$$

중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 구하는

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하자.

두 초점으로부터 거리의 차가 2이므로

$$2b = 2 \quad \therefore b = 1$$

두 초점의 좌표가 $(0, 2), (0, -2)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 2^2 \text{에서 } a^2 = 2^2 - 1^2 = 3$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{3} - y^2 = -1$$

|다른 풀이|

타원 $6x^2 + 2y^2 = 12$, 즉 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$ 에서 $\sqrt{6-2}=2$

이므로 두 초점의 좌표는

$$(0, 2), (0, -2)$$

두 초점을 $F(0, 2), F'(0, -2)$ 라 하고, 쌍곡선 위의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$|PF - PF'| = 2 \text{이므로}$$

$$|\sqrt{x^2 + (y-2)^2} - \sqrt{x^2 + (y+2)^2}| = 2$$

$$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + (y+2)^2} \pm 2$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$-2y - 1 = \pm \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$x^2 - 3y^2 = -3$$

$$\therefore \frac{x^2}{3} - y^2 = -1$$

084 ㉡ $3\sqrt{7}$

중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 주어진

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라

하자.

주축의 길이가 $6\sqrt{2}$ 이므로

$$2a = 6\sqrt{2} \quad \therefore a = 3\sqrt{2}$$

두 초점의 좌표가 $(9, 0), (-9, 0)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 9^2 \text{에서 } b^2 = 9^2 - (3\sqrt{2})^2 = 63$$

따라서 주어진 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{63} = 1$$

이 쌍곡선이 점 $(6, k)$ 를 지나므로

$$\frac{6^2}{18} - \frac{k^2}{63} = 1, \quad \frac{k^2}{63} = 1$$

$$k^2 = 63 \quad \therefore k = 3\sqrt{7} \quad (\because k > 0)$$

085 ㉡ $(0, \sqrt{10}), (0, -\sqrt{10})$

중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 주어진

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$)이라

하자.

두 초점의 좌표가 $(0, 5), (0, -5)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5^2 \text{에서 } a^2 = 25 - b^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 쌍곡선이 점 $(3, 4)$ 를 지나므로

$$\frac{3^2}{a^2} - \frac{4^2}{b^2} = -1 \quad \therefore 16a^2 - 9b^2 = a^2b^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$16(25 - b^2) - 9b^2 = (25 - b^2)b^2$$

$$b^4 - 50b^2 + 400 = 0, \quad (b^2 - 10)(b^2 - 40) = 0$$

$$\therefore b^2 = 10 \text{ 또는 } b^2 = 40$$

그런데 $0 < b^2 < 25$ 이므로 $b^2 = 10$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 25 - b^2 > 0 \quad \therefore 0 < b^2 < 25$$

$$\therefore b = \sqrt{10} \quad (\because b > 0)$$

따라서 구하는 쌍곡선의 꼭짓점의 좌표는

$$(0, \sqrt{10}), (0, -\sqrt{10})$$

086 ㉡ (1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = -1$ (2) 3

(1) 중심이 원점이고 두 초점이 y 축 위에 있으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0) \text{이라 하자.}$$

두 초점의 좌표가 $(0, 8), (0, -8)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 8^2 = 64 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점근선의 방정식이 $y = \pm\sqrt{3}x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \sqrt{3} \quad \therefore b = \sqrt{3}a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$a^2 + (\sqrt{3}a)^2 = 64, \quad 4a^2 = 64 \quad \therefore a^2 = 16$$

이를 ②에 대입하면

$$16 + b^2 = 64 \quad \therefore b^2 = 48$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{48} = -1$$

(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 점근선의 방정식이

$$y = \pm \frac{1}{2}x \text{이므로}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \quad \therefore a = 2b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

쌍곡선이 점 $(6, 2\sqrt{2})$ 를 지나므로

$$\frac{6^2}{a^2} - \frac{(2\sqrt{2})^2}{b^2} = 1$$

이 식에 $\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$\frac{36}{(2b)^2} - \frac{8}{b^2} = 1, b^2 = 1 \quad \therefore b = 1 (\because b > 0)$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $a = 2$

$$\therefore a + b = 3$$

087 ㉡ 10

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{k^2} = -1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm kx$$

한 점근선의 방정식이 $y = 5x$ 이므로

$$k = 5 (\because k > 0)$$

따라서 구하는 주축의 길이는

$$2k = 2 \times 5 = 10$$

088 ㉡ 30

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

두 점근선이 서로 수직이므로

$$\frac{b}{a} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -1 \quad \therefore a^2 = b^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

쌍곡선이 점 $(4, 1)$ 을 지나므로

$$\frac{4^2}{a^2} - \frac{1^2}{b^2} = 1$$

이 식에 $\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$\frac{16}{b^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \quad \therefore b^2 = 15$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $a^2 = 15$

$$\therefore a^2 + b^2 = 30$$

089 ㉡ ②

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 주축의 길이가 6이므로

$$2a = 6 \quad \therefore a = 3$$

쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y = 2x$ 이므로

$$\frac{b}{3} = 2 \quad \therefore b = 6$$

즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ 에서 $\sqrt{9+36} = 3\sqrt{5}$ 이므로

두 초점의 좌표는 $(3\sqrt{5}, 0), (-3\sqrt{5}, 0)$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$3\sqrt{5} - (-3\sqrt{5}) = 6\sqrt{5}$$

090 ㉡ $\frac{(x-3)^2}{3} - \frac{(y-2)^2}{6} = 1$

쌍곡선의 중심은 선분 FF' 의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{2+2}{2}\right) \quad \therefore (3, 2)$$

즉, 주어진 쌍곡선은 중심이 원점인 쌍곡선을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 두 초점 F, F' 의 y 좌표가 같으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{(x-3)^2}{a^2} - \frac{(y-2)^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0) \text{이라 하자.}$$

두 초점으로부터 거리의 차가 $2\sqrt{3}$ 이므로

$$2a = 2\sqrt{3} \quad \therefore a = \sqrt{3}$$

중심에서 초점까지의 거리가 3이므로

$$a^2 + b^2 = 3^2 \text{에서 } b^2 = 3^2 - (\sqrt{3})^2 = 6$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-3)^2}{3} - \frac{(y-2)^2}{6} = 1$$

▶ 다른 풀이 ▶

쌍곡선 위의 점을 $P(x, y)$ 라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2\sqrt{3}$ 이므로

$$|\sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} - \sqrt{x^2 + (y-2)^2}| = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{(x-6)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2} \pm 2\sqrt{3}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$-3x + 6 = \pm \sqrt{3}\sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$6(x-3)^2 - 3(y-2)^2 = 18$$

$$\therefore \frac{(x-3)^2}{3} - \frac{(y-2)^2}{6} = 1$$

091 ㉡ $\frac{(x+1)^2}{25} - \frac{(y+4)^2}{11} = 1$

쌍곡선의 중심은 선분 FF' 의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{5+(-7)}{2}, \frac{-4+(-4)}{2}\right) \quad \therefore (-1, -4)$$

즉, 주어진 쌍곡선은 중심이 원점인 쌍곡선을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

이때 두 초점 F, F'의 y좌표가 같으므로 구하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{(x+1)^2}{a^2} - \frac{(y+4)^2}{b^2} = 1 \quad (a>0, b>0) \text{이라 하자.}$$

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 10 \text{이므로}$$

$$2a=10 \quad \therefore a=5$$

중심에서 초점까지의 거리가 6이므로

$$a^2 + b^2 = 6^2 \text{에서 } b^2 = 6^2 - 5^2 = 11$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x+1)^2}{25} - \frac{(y+4)^2}{11} = 1$$

092 ㉡ 6

쌍곡선의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{4+4}{2}, \frac{6+(-4)}{2} \right)$$

$$\therefore (4, 1)$$

즉, 주어진 쌍곡선은 중심이 원점인 쌍곡선을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 두 초점 F, F'의 x좌표가 같으므로 주어진 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{(x-4)^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = -1 \quad (a>0, b>0) \text{이라 하자.}$$

주축의 길이가 $2\sqrt{5}$ 이므로

$$2b=2\sqrt{5} \quad \therefore b=\sqrt{5}$$

중심에서 초점까지의 거리가 5이므로

$$a^2 + b^2 = 5^2 \text{에서 } a^2 = 5^2 - (\sqrt{5})^2 = 20$$

즉, 주어진 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{(x-4)^2}{20} - \frac{(y-1)^2}{5} = -1$$

이 쌍곡선이 y축과 만나는 점의 y좌표는

$$\frac{(0-4)^2}{20} - \frac{(y-1)^2}{5} = -1, \quad (y-1)^2 = 9$$

$$y-1 = \pm 3 \quad \therefore y = -2 \text{ 또는 } y = 4$$

따라서 쌍곡선이 y축과 두 점 (0, -2), (0, 4)에서 만나므로 구하는 두 점 사이의 거리는

$$4 - (-2) = 6$$

093 ㉡ 6

두 직선 $y = \frac{3}{2}x - 3$, $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 의 교점의 x좌표는

$$\frac{3}{2}x - 3 = -\frac{3}{2}x + 3$$

$$3x = 6 \quad \therefore x = 2$$

즉, 교점의 좌표는 (2, 0)이고, 이 점이 쌍곡선의 중심이므로 주어진 쌍곡선은 중심이 원점인 쌍곡선을 x축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선의 중심과 한 초점의 x좌표가 같으므로 주어진 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a>0, b>0) \text{이라 하자.}$$

한 점근선의 방정식이 $y = \frac{3}{2}x - 3$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \frac{3}{2} \quad \therefore a = \frac{2}{3}b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

중심에서 초점까지의 거리가 $\sqrt{13}$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (\sqrt{13})^2 \text{에서 } b^2 = 13 - a^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$b^2 = 13 - \left(\frac{2}{3}b \right)^2, \quad \frac{13}{9}b^2 = 13$$

$$b^2 = 9 \quad \therefore b = 3 \quad (\because b > 0)$$

따라서 구하는 주축의 길이는

$$2b = 2 \times 3 = 6$$

094 ㉡ 풀이 참조

$$x^2 - 4y^2 + 4x + 24y - 24 = 0 \text{에서}$$

$$(x^2 + 4x + 4) - 4(y^2 - 6y + 9) = -8$$

$$\therefore \frac{(x+2)^2}{8} - \frac{(y-3)^2}{2} = -1$$

즉, 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = -1$ 을 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = -1$ 에서 $\sqrt{8+2} = \sqrt{10}$ 이므로

중심의 좌표는 (0, 0),

초점의 좌표는 (0, $\sqrt{10}$), (0, $-\sqrt{10}$),

꼭짓점의 좌표는 (0, $\sqrt{2}$), (0, $-\sqrt{2}$),

주축의 길이는 $2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$,

점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}x$, 즉 $y = \pm \frac{1}{2}x$ 이다.

따라서 구하는 쌍곡선의

중심의 좌표는 (-2, 3),

초점의 좌표는 (-2, $\sqrt{10}+3$), (-2, $-\sqrt{10}+3$),

꼭짓점의 좌표는 (-2, $\sqrt{2}+3$), (-2, $-\sqrt{2}+3$),

주축의 길이는 $2\sqrt{2}$,

점근선의 방정식은 $y - 3 = \pm \frac{1}{2}(x + 2)$, 즉

$$y = \frac{1}{2}x + 4, \quad y = -\frac{1}{2}x + 2 \text{이다.}$$

095 ㉡ -14

$$9x^2 - 16y^2 + 18x + 64y + 89 = 0 \text{에서}$$

$$9(x^2 + 2x + 1) - 16(y^2 - 4y + 4) = -144$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = -1$$

즉, 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$ 을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$ 에서 $\sqrt{16+9}=5$ 이므로 두 초점의 좌표는 (0, 5), (0, -5), 주축의 길이는 $2 \times 3 = 6$ 이다.

따라서 주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는 (-1, 7), (-1, -3), 주축의 길이는 6이므로 $ac + bd + p = -1 \times (-1) + 7 \times (-3) + 6 = -14$

096 ㉡ (-3, 1)

$$x^2 - 9y^2 + 6x + 18y - 18 = 0 \text{에서}$$

$$(x^2 + 6x + 9) - 9(y^2 - 2y + 1) = 18$$

$$\therefore \frac{(x+3)^2}{18} - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

즉, 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{2} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. 이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{2} = 1$ 의 중심의 좌표는 (0, 0)이고, 쌍곡선의 두 점근선의 교점은 쌍곡선의 중심과 같으므로 주어진 쌍곡선의 두 점근선의 교점의 좌표는 (-3, 1)

| 다른 풀이 |

$$x^2 - 9y^2 + 6x + 18y - 18 = 0 \text{에서}$$

$$(x^2 + 6x + 9) - 9(y^2 - 2y + 1) = 18$$

$$\therefore \frac{(x+3)^2}{18} - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

즉, 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{2} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{2} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}x, \text{ 즉 } y = \pm \frac{1}{3}x$$

이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y - 1 = \pm \frac{1}{3}(x + 3)$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x + 2, y = -\frac{1}{3}x$$

두 점근선의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{3}x + 2 = -\frac{1}{3}x, \frac{2}{3}x = -2 \quad \therefore x = -3$$

이를 $y = -\frac{1}{3}x$ 에 대입하면

$$y = -\frac{1}{3} \times (-3) = 1$$

따라서 두 점근선의 교점의 좌표는 (-3, 1)이다.

097 ㉡ 9

$$7x^2 - 2y^2 - 28x - 12y - 4 = 0 \text{에서}$$

$$7(x^2 - 4x + 4) - 2(y^2 + 6y + 9) = 14$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(y+3)^2}{7} = 1$$

즉, 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$ 에서 $\sqrt{2+7}=3$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(3, 0), (-3, 0)$$

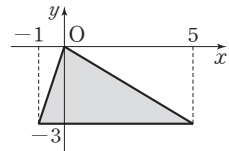
주어진 쌍곡선의 두 초점 F, F'의 좌표는

$$(5, -3), (-1, -3)$$

따라서 오른쪽 그림에서 삼

각형 OFF'의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{5 - (-1)\} \times 3 = 9$$



098 ㉡ 6

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = -1$ 에서 $\sqrt{9+16}=5$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(0, 5), (0, -5)$$

즉, 두 점 A(0, 5), D(0, -5)는 주어진 쌍곡선의 초점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{BD} - \overline{BA} = 2 \times 4 = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\overline{CD} - \overline{CA} = 2 \times 4 = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$\overline{BD} - \overline{BA} + \overline{CD} - \overline{CA} = 16$$

$$\overline{BD} + \overline{CD} - (\overline{BA} + \overline{CA}) = 16$$

$$\therefore \overline{BD} + \overline{CD} - \overline{BC} = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

이때 삼각형 BCD의 둘레의 길이가 28이므로

$$\overline{BC} + \overline{CD} + \overline{BD} = 28 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉢} - \textcircled{㉣}$ 을 하면

$$2\overline{BC} = 12 \quad \therefore \overline{BC} = 6$$

099 ㉡ 32

쌍곡선 $\frac{x^2}{11} - \frac{y^2}{25} = -1$ 에서 $\sqrt{11+25}=6$ 이므로 두

초점 F, F'의 좌표는

$$(0, 6), (0, -6)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 6 - (-6) = 12$$

한편 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \times 5 = 10 (\because \overline{PF'} > \overline{PF})$$

이때 $\overline{PF'} = 3\overline{PF}$ 이므로

$$3\overline{PF} - \overline{PF} = 10 \quad \therefore \overline{PF} = 5, \overline{PF'} = 15$$

따라서 삼각형 PFF'의 둘레의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{FF'} + \overline{PF'} = 5 + 12 + 15 = 32$$

100 ㉡ 3

쌍곡선 $3x^2 - y^2 = 3$, 즉 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 에서 $\sqrt{1+3}=2$

이므로 두 초점 F, F'의 좌표는

$$(2, 0), (-2, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 2 - (-2) = 4$$

$\overline{PF} = a, \overline{PF'} = b$ 라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$|a - b| = 2 \times 1 = 2$$

직각삼각형 PF'F에서

$$a^2 + b^2 = 4^2 = 16$$

이때 $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ 이므로

$$2^2 = 16 - 2ab \quad \therefore ab = 6$$

따라서 삼각형 PF'F의 넓이는

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

101 ㉡ 40

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $\sqrt{25-9}=4$ 이므로 두 초점

F, F'의 좌표는 (4, 0), (-4, 0)

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 에서 $\sqrt{4+12}=4$ 이므로 두 초점

의 좌표는 (4, 0), (-4, 0)

즉, 주어진 타원과 쌍곡선의 초점은 일치한다.

타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 5 = 10$$

쌍곡선의 정의에 의하여

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 2 \times 2 = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore |\overline{PF}^2 - \overline{PF'}^2| &= |(\overline{PF} + \overline{PF'}) \times (\overline{PF} - \overline{PF'})| \\ &= 10 \times 4 = 40 \end{aligned}$$

$$102 \text{ ㉡ (1) } y^2 = 8(x+3) \text{ (2) } \frac{x^2}{7} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$$

(1) 원의 중심 C의 좌표를 (x, y)라 하면 점 C에서 점 A(-1, 0)까지의 거리와 직선 $x = -5$ 까지의 거리가 서로 같으므로 ◀ 원의 반지름의 길이이다.

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = |x+5|$$

양변을 제곱하면

$$(x+1)^2 + y^2 = (x+5)^2 \quad \therefore y^2 = 8(x+3)$$

(2) 쌍곡선 $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$$\frac{a^2}{28} - \frac{b^2}{12} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

선분 AP의 중점 M의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{4+b}{2} \quad \therefore a = 2x, b = 2y - 4$$

이를 ①에 대입하면

$$\frac{(2x)^2}{28} - \frac{(2y-4)^2}{12} = 1$$

$$\therefore \frac{x^2}{7} - \frac{(y-2)^2}{3} = 1$$

개념 확인

57쪽

103 ㉡ (1) 포물선 (2) 타원 (3) 원 (4) 쌍곡선

(1) $x^2 - 6x + 8y + 25 = 0$ 에서

$$x^2 - 6x + 9 = -8y - 16$$

$$\therefore (x-3)^2 = -8(y+2)$$

따라서 주어진 방정식은 포물선 $x^2 = -8y$ 를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 포물선을 나타낸다.

(2) $9x^2 + 5y^2 + 54x + 10y + 41 = 0$ 에서

$$9(x^2 + 6x + 9) + 5(y^2 + 2y + 1) = 45$$

$$\therefore \frac{(x+3)^2}{5} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

따라서 주어진 방정식은 타원 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 타원을 나타낸다.

(3) $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 8 = 0$ 에서

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 - 2y + 1) = 9$$

$$\therefore (x+4)^2 + (y-1)^2 = 9$$

따라서 주어진 방정식은 중심의 좌표가 (-4, 1)이고 반지름의 길이가 3인 원을 나타낸다.

(4) $3x^2 - 2y^2 + 18x + 16y - 17 = 0$ 에서

$$3(x^2 + 6x + 9) - 2(y^2 - 8y + 16) = 12$$

$$\therefore \frac{(x+3)^2}{4} - \frac{(y-4)^2}{6} = 1$$

따라서 주어진 방정식은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 쌍곡선을 나타낸다.

유제

59쪽

104 ㉠ $\frac{3}{2} < k < 2$ 또는 $k > 2$

$$kx^2 + 2y^2 - 4kx + 6 = 0$$
에서

$$k(x-2)^2 + 2y^2 = 4k-6$$

이 방정식이 나타내는 도형이 타원이 되려면

$$k \times 2 > 0, k \neq 2, 4k-6 > 0$$

$$\therefore \frac{3}{2} < k < 2 \text{ 또는 } k > 2$$

105 ㉠ 3

방정식 $3x^2 + ky^2 - 12y = 0$ 이 나타내는 도형이 원이 되려면

$$k=3 \quad \therefore a=3$$

방정식 $3x^2 + ky^2 - 12y = 0$ 이 나타내는 도형이 포물선이 되려면

$$k=0 \quad \therefore \beta=0$$

$$\therefore \alpha + \beta = 3$$

106 ㉠ 4

방정식 $(k-3)x^2 + (k-8)y^2 - 4x + 6y + 10 = 0$ 이 나타내는 도형이 쌍곡선이 되려면

$$(k-3)(k-8) < 0 \quad \therefore 3 < k < 8$$

따라서 정수 k 는 4, 5, 6, 7의 4개이다.

107 ㉠ -1

$$2x^2 - 3y^2 + 8x - 6y + k(x^2 + 3y^2) = 0$$
에서

$$(k+2)x^2 + (3k-3)y^2 + 8x - 6y = 0$$

이 방정식이 나타내는 도형이 포물선이 되려면

$$k+2=0 \text{ 또는 } 3k-3=0 \quad \therefore k=-2 \text{ 또는 } k=1$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은 $-2+1=-1$

연습문제

60-62쪽

108 ㉠ ③

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{6} = 1$ 의 한 초점의 좌표가 $(3\sqrt{2}, 0)$ 이므로

$$a^2 + 6 = (3\sqrt{2})^2 \text{에서 } a^2 = (3\sqrt{2})^2 - 6 = 12$$

$$\therefore a = 2\sqrt{3} \quad (\because a > 0)$$

따라서 구하는 주축의 길이는

$$2a = 2 \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

109 ㉠ 8

쌍곡선의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{3+3}{2}, \frac{3+(-7)}{2} \right) \quad \therefore (3, -2)$$

즉, 주어진 쌍곡선은 중심이 원점인 쌍곡선을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

$$\therefore m=3, n=-2$$

이때 쌍곡선 $\frac{(x-3)^2}{a^2} - \frac{(y+2)^2}{b^2} = -1$ 의 주축의

길이가 8이므로

$$2b=8 \quad \therefore b=4$$

중심에서 초점까지의 거리가 5이므로

$$a^2 + b^2 = 5^2 \text{에서 } a^2 = 5^2 - 4^2 = 9$$

$$\therefore a=3 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore a+b+m+n=3+4+3+(-2)=8$$

110 ㉠ ④

$$4x^2 - y^2 + 16x + 6y + 11 = 0$$
에서

$$4(x^2 + 4x + 4) - (y^2 - 6y + 9) = -4$$

$$\therefore (x+2)^2 - \frac{(y-3)^2}{4} = -1$$

즉, 이 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

① 주축의 길이는 $2 \times 2 = 4$

②, ③ 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$ 의 두 꼭짓점의 좌표는

$$(0, 2), (0, -2)$$

주어진 쌍곡선의 두 꼭짓점의 좌표는

$$(-2, 5), (-2, 1)$$

즉, 두 꼭짓점이 직선 $x = -2$ 위에 있으므로 주축은 y 축에 평행하다.

④ 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$ 에서 $\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$ 이므로 두

초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{5}), (0, -\sqrt{5})$$

주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$$(-2, \sqrt{5}+3), (-2, -\sqrt{5}+3)$$

⑤ 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm 2x$$

주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y-3 = \pm 2(x+2)$$

$$\therefore y = 2x+7, y = -2x-1$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

111 ㉡ 6

방정식 $(k-2)x^2 + (k+5)y^2 = (k-2)(k+5)$ 가 나타내는 도형이 쌍곡선이 되려면

$$(k-2)(k+5) < 0 \quad \therefore -5 < k < 2$$

따라서 정수 k 는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1$ 의 6개이다.

112 ㉡ 44

쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{12+4} = 4$ 이므로 두 초점

F, F'의 좌표는

$$(4, 0), (-4, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 4 - (-4) = 8$$

점 Q는 점 P(a, b)와 원점에 대하여 대칭인 점이므로 Q(-a, -b)

$$\therefore \square F'QFP = \triangle F'QF + \triangle F'FP$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times b + \frac{1}{2} \times 8 \times b$$

$$= 8b$$

즉, $8b = 32$ 이므로 $b = 4$

또 점 P(a, 4)가 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{12} - \frac{4^2}{4} = 1 \quad \therefore a^2 = 60$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 60 - 4^2 = 44$$

113 ㉡ $\frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{675} = 1$

A(-30, 0), B(30, 0)이고 배의 위치를 P(x, y)라 하면 $|\overline{PA} - \overline{PB}| = 30$ 이므로

$$|\sqrt{(x+30)^2 + y^2} - \sqrt{(x-30)^2 + y^2}| = 30$$

$$\sqrt{(x+30)^2 + y^2} = \sqrt{(x-30)^2 + y^2} \pm 30$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$2x-15 = \pm \sqrt{(x-30)^2 + y^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3x^2 - y^2 = 675$$

$$\therefore \frac{x^2}{225} - \frac{y^2}{675} = 1$$

114 ㉡ $y = \pm \sqrt{2}x$

타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(2\sqrt{3}, 0), (-2\sqrt{3}, 0)$$

단축의 길이는 $2 \times 2 = 4$

한편 중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 주

어진 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)

이라 하자.

타원의 단축의 길이가 쌍곡선의 주축의 길이와 같으므로

$$2a = 4 \quad \therefore a = 2$$

두 초점의 좌표가 $(2\sqrt{3}, 0), (-2\sqrt{3}, 0)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (2\sqrt{3})^2 \text{에서 } b^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2^2 = 8$$

즉, 주어진 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$$

따라서 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{2}x \quad \therefore y = \pm \sqrt{2}x$$

115 ㉡ 4

(가)에서 중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 주어진 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \text{이라 하자.}$$

두 초점의 좌표가 $(2\sqrt{2}, 0), (-2\sqrt{2}, 0)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

(나)에서 두 점근선이 서로 수직이므로

$$\frac{b}{a} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -1 \quad \therefore b^2 = a^2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$a^2 + a^2 = 8, a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는

$$2a = 2 \times 2 = 4$$

116 ㉡ π

쌍곡선 $9x^2 - y^2 = -9$, 즉 $x^2 - \frac{y^2}{9} = -1$ 에서

$\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ 이므로 두 초점의 좌표는

$(0, \sqrt{10}), (0, -\sqrt{10})$

점근선의 방정식은

$$y = \pm 3x \quad \therefore 3x \pm y = 0 \quad \text{▶▶▶▶▶ ①}$$

이때 원의 중심의 좌표를 $(0, \sqrt{10})$ 이라 하면 원의 중심과 점근선 $3x - y = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|\sqrt{10}|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = 1 \quad \text{▶▶▶▶▶ ②}$$

따라서 쌍곡선의 점근선에 접하는 원의 반지름의 길이가 1이므로 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times 1^2 = \pi \quad \text{▶▶▶▶▶ ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	쌍곡선의 초점의 좌표와 점근선의 방정식 구하기	50 %
②	원의 중심과 점근선 사이의 거리 구하기	30 %
③	원의 넓이 구하기	20 %

117 ㉡ ㄱ, ㄷ

ㄱ. $2x^2 - y^2 - 4x - 2 = 0$ 에서 $2(x^2 - 2x + 1) - y^2 = 4$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로

로 1만큼 평행이동한 것이므로 겹쳐질 수 있다.

ㄷ. $2x^2 - y^2 + 4x + 2y + 5 = 0$ 에서

$$2(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 2y + 1) = -4$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(y-1)^2}{4} = -1$$

이 쌍곡선은 평행이동하여 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$

과 겹쳐질 수 없다.

ㄴ. $2x^2 - y^2 - 8x - 6y - 5 = 0$ 에서

$$2(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 6y + 9) = 4$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{2} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로

2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 겹쳐질 수 있다.

따라서 평행이동하여 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} = 1$ 과 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

118 ㉡ ⑤

쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1$ 에서 $\sqrt{5+4} = 3$ 이므로 두 초

점 F, F'의 좌표는

$(0, 3), (0, -3)$

$$\therefore \overline{FF'} = 3 - (-3) = 6$$

한편 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2 \times 2 = 4 \quad (\because \overline{PF} > \overline{PF'})$$

이때 $\overline{PF} : \overline{PF'} = 2 : 1$ 에서 $\overline{PF} = 2\overline{PF'}$ 이므로

$$2\overline{PF'} - \overline{PF'} = 4 \quad \therefore \overline{PF} = 8, \overline{PF'} = 4$$

따라서 삼각형 PFF'의 둘레의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{FF'} + \overline{PF'} = 8 + 6 + 4 = 18$$

119 ㉡ 10

쌍곡선 $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{10} = 1$ 에서 $\sqrt{15+10} = 5$ 이므로 두 초

점 F, F'의 좌표는

$(5, 0), (-5, 0)$

$$\therefore \overline{FF'} = 5 - (-5) = 10$$

$\overline{PF'} = a, \overline{PF} = b$ 라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$|a - b| = 2 \times \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$$

점 P가 선분 FF'을 지름으로 하는 원 위의 점이므로

$$\angle F'PF = 90^\circ$$

직각삼각형 PF'F에서 $a^2 + b^2 = 10^2 = 100$

이때 $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ 이므로

$$(2\sqrt{15})^2 = 100 - 2ab \quad \therefore ab = 20$$

따라서 삼각형 PF'F의 넓이는

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 20 = 10$$

120 ㉡ ②

쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = \overline{QF} - \overline{QF'} = 2a$$

$$\therefore \overline{PF'} = \overline{PF} + 2a, \overline{QF'} = \overline{QF} - 2a$$

이때 $\overline{PF} = \overline{QF}$ 이므로 $\overline{QF'} = \overline{PF} - 2a$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PQ} &= \overline{PF'} - \overline{QF'} \\ &= (\overline{PF} + 2a) - (\overline{PF} - 2a) = 4a \end{aligned}$$

즉, $4a = 8$ 이므로 $a = 2$

한편 쌍곡선의 두 초점의 좌표가 $(c, 0), (-c, 0)$ 이므로

$$a^2 + 16 = c^2 \text{에서 } c^2 = 2^2 + 16 = 20$$

$$\therefore c = 2\sqrt{5} \quad (\because c > 0)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 2\sqrt{5} - (-2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$$

121 ㉮ $\frac{x^2}{12} - \frac{(y-1)^2}{4} = -1$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 P에서 점 $(0, -3)$ 과 x 축에 이르는 거리의 비가 2 : 1이므로

$$\sqrt{x^2 + (y+3)^2} : |y| = 2 : 1$$

$$\therefore \sqrt{x^2 + (y+3)^2} = 2|y|$$

양변을 제곱하면

$$x^2 + (y+3)^2 = 4y^2, \quad x^2 - 3y^2 + 6y + 9 = 0$$

$$x^2 - 3(y^2 - 2y + 1) = -12$$

$$\therefore \frac{x^2}{12} - \frac{(y-1)^2}{4} = -1$$

122 ㉮ 4

$$x^2 - 4y^2 + 6x + 8y + k = 0 \text{에서}$$

$$(x^2 + 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -k + 5$$

$$\therefore (x+3)^2 - 4(y-1)^2 = -k + 5$$

이 방정식이 나타내는 도형이 x 축에 평행한 주축을 갖는 쌍곡선이 되려면

$$-k + 5 > 0 \quad \therefore k < 5$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 4이다.

123 ㉮ $\frac{8}{5}$

㉮ 접근 방법 ㉮ 두 선분 PQ, PR의 길이는 점 P와 쌍곡선의 두 점근선 사이의 거리임을 이용한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\frac{a^2}{8} - \frac{b^2}{2} = 1 \quad \therefore a^2 - 4b^2 = 8 \quad \dots\dots ㉮$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}x, \text{ 즉 } y = \pm \frac{1}{2}x$$

$$\therefore x \pm 2y = 0$$

점 $P(a, b)$ 와 직선 $x - 2y = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a - 2b|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|a - 2b|}{\sqrt{5}}$$

또 점 $P(a, b)$ 와 직선 $x + 2y = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|a + 2b|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|a + 2b|}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \overline{PQ} \times \overline{PR} = \frac{|a - 2b|}{\sqrt{5}} \times \frac{|a + 2b|}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{|a^2 - 4b^2|}{5}$$

$$= \frac{8}{5} (\because ㉮)$$

124 ㉮ ㉮

㉮ 접근 방법 ㉮ 초점이 x 축 위에 있고 중심이 원점인 쌍곡선은 y 축에 대하여 대칭임을 이용한다.

삼각형 PQF가 정삼각형이므로

$$\angle PQF = 60^\circ$$

주어진 쌍곡선은 y 축에 대하여 대칭이고 점 Q가 y 축 위의 점이므로 삼각형

QF'F는 $\overline{QF} = \overline{QF'}$ 인 이등변삼각형이다.

$$\therefore \angle QF'F = \frac{1}{2} \angle PQF$$

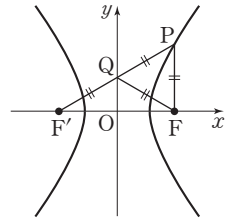
$$= \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$$

이때 $\overline{OF'} = 3\sqrt{3}$ 이므로 직각삼각형 QF'O에서

$$\overline{QF'} = \frac{\overline{OF'}}{\cos 30^\circ} = \frac{3\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6$$

따라서 $\overline{PF'} = 2\overline{QF'} = 12$, $\overline{PF} = \overline{QF'} = 6$ 이므로 쌍곡선의 정의에 의하여 구하는 주축의 길이는

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 12 - 6 = 6$$



125 ㉮ $5\sqrt{5} - 8$

㉮ 접근 방법 ㉮ 쌍곡선의 정의를 이용하여 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 값이 최소가 되는 점 P의 위치를 찾는다.

쌍곡선 $9x^2 - 16y^2 = 144$, 즉 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 에서

$\sqrt{16+9}=5$ 이므로 두 초점의 좌표는

$(5, 0), (-5, 0)$

오른쪽 그림과 같이 점

A는 쌍곡선의 한 초점

이므로 나머지 초점을

F라 하면 쌍곡선의 정

의에 의하여

$$\overline{PF} - \overline{PA} = 2 \times 4 = 8$$

$$\therefore \overline{PA} = \overline{PF} - 8$$

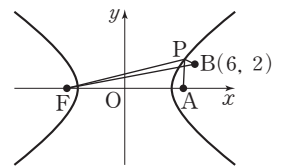
$$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PF} + \overline{PB} - 8$$

$\geq \overline{BF} - 8$ 세 점 B, P, F가 한 직선 위에 있을 때 최소이다.

$$= \sqrt{(-5-6)^2 + (-2)^2} - 8$$

$$= 5\sqrt{5} - 8$$

따라서 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 $5\sqrt{5} - 8$ 이다.



01 이차곡선의 접선

개념 확인

67쪽

126 ㉡ (1) $y = -4x - 1$

(2) $y = -2x + 3$

(1) $y^2 = 16x$ 에서 $y^2 = 4 \times 4x$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = -4x + \frac{4}{-4} \quad \therefore y = -4x - 1$$

(2) $x^2 = -3y$ 에서 $x^2 = 4 \times \left(-\frac{3}{4}\right)y$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = -2x - (-2) \times \left(-\frac{3}{4}\right) \\ \therefore y = -2x + 3$$

127 ㉡ (1) $y = -x + 3$

(2) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$

(1) $y^2 = -12x$ 에서 $y^2 = 4 \times (-3)x$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$6y = 2 \times (-3) \times (x - 3) \\ \therefore y = -x + 3$$

(2) $x^2 = 8y$ 에서 $x^2 = 4 \times 2y$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$2x = 2 \times 2 \times \left(y + \frac{1}{2}\right) \\ \therefore y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

128 ㉡ $-2, 4, -4, 16, 4, 4, -2x + 4$

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x = \boxed{-2}(y + y_1)$$

이 직선이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$0 = -2\left(\boxed{4} + y_1\right) \quad \therefore y_1 = \boxed{-4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 $x^2 = -4y$ 위의 점이므로

$$x_1^2 = -4y_1$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$x_1^2 = \boxed{16} \quad \therefore x_1 = -4 \text{ 또는 } x_1 = \boxed{4}$$

따라서 $x_1 = -4, y_1 = -4$ 또는 $x_1 = 4, y_1 = -4$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x + \boxed{4} \text{ 또는 } y = \boxed{-2x + 4}$$

유제

69~73쪽

129 ㉡ $y = \frac{1}{2}x - 2$

직선 $2x + y - 1 = 0$, 즉 $y = -2x + 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 포물선 $y^2 = -4x$, 즉 $y^2 = 4 \times (-1)x$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{-1}{\frac{1}{2}} \quad \therefore y = \frac{1}{2}x - 2$$

| 다른 풀이 |

직선 $2x + y - 1 = 0$, 즉 $y = -2x + 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

포물선 $y^2 = -4x$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식을 $y = \frac{1}{2}x + k$ 라 하자.

이를 $y^2 = -4x$ 에 대입하면

$$\left(\frac{1}{2}x + k\right)^2 = -4x \quad \therefore x^2 + 4(k+4)x + 4k^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{2(k+4)\}^2 - 4k^2 = 0$$

$$32k + 64 = 0 \quad \therefore k = -2$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x - 2$$

130 ㉡ $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4\sqrt{3}$

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30° 인 직선의 기울기는

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 포물선 $y^2 = 16x$, 즉 $y^2 = 4 \times 4x$ 에 접하고 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{4}{\frac{\sqrt{3}}{3}} \quad \therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4\sqrt{3}$$

131 ㉡ $\frac{17}{8}$

직선 $x - 4y + 3 = 0$, 즉 $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ 과 평행한 직선의 기울기는 $\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 포물선 $x^2 = -8y$, 즉 $x^2 = 4 \times (-2)y$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{4}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{4}x - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times (-2)$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$$

즉, $A\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $F(0, -2)$ 이므로 선분 AF의 길이는

$$\frac{1}{8} - (-2) = \frac{17}{8}$$

132 ㉡ $-\frac{1}{12}$

직선 $y=6x$ 를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y=6(x-k) \quad \therefore y=6x-6k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 포물선 $y^2=12x$, 즉 $y^2=4 \times 3x$ 에 접하고 기울기가 6인 직선의 방정식은

$$y=6x + \frac{1}{2}$$

이 식이 $\textcircled{1}$ 과 일치하므로

$$-6k = \frac{1}{2} \quad \therefore k = -\frac{1}{12}$$

| 다른 풀이 |

직선 $y=6x$ 를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$y=6(x-k) \quad \therefore y=6x-6k$$

이를 $y^2=12x$ 에 대입하면

$$(6x-6k)^2=12x \quad \therefore 3x^2-(6k+1)x+3k^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-(6k+1)\}^2 - 4 \times 3 \times 3k^2 = 0$$

$$12k+1=0 \quad \therefore k = -\frac{1}{12}$$

133 ㉡ $y = -3x + \frac{9}{2}$

점 $(3, a)$ 가 포물선 $x^2 = -2y$ 위의 점이므로

$$3^2 = -2a \quad \therefore a = -\frac{9}{2}$$

따라서 포물선 $x^2 = -2y$, 즉 $x^2 = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)y$ 위의

점 $\left(3, -\frac{9}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$3x = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(y - \frac{9}{2}\right)$$

$$\therefore y = -3x + \frac{9}{2}$$

| 다른 풀이 |

점 $(3, a)$ 가 포물선 $x^2 = -2y$ 위의 점이므로

$$3^2 = -2a \quad \therefore a = -\frac{9}{2}$$

$x^2 = -2y$, 즉 $x^2 = 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)y$ 이므로 접선의 기울

기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y = mx + \frac{m^2}{2}$$

이 직선이 점 $\left(3, -\frac{9}{2}\right)$ 를 지나므로

$$-\frac{9}{2} = 3m + \frac{m^2}{2}, m^2 + 6m + 9 = 0$$

$$(m+3)^2 = 0 \quad \therefore m = -3$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -3x + \frac{9}{2}$$

134 ㉡ ④

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(9, 6)$ 에서의 접선의 방정식은

$$6y = 2 \times 1 \times (x+9) \quad \therefore y = \frac{1}{3}x + 3$$

포물선 $y^2=4x$ 의 준선의 방정식은 $x=-1$

이를 $y = \frac{1}{3}x + 3$ 에 대입하면

$$y = \frac{1}{3} \times (-1) + 3 = \frac{8}{3}$$

따라서 접선과 포물선의 준선이 만나는 점의 좌표는

$$\left(-1, \frac{8}{3}\right) \text{이므로}$$

$$a = -1, b = \frac{8}{3} \quad \therefore a + b = \frac{5}{3}$$

135 ㉡ $2\sqrt{2}$

포물선 $y^2 = -16x$, 즉 $y^2 = 4 \times (-4)x$ 의 초점의 좌

표는

$$(-4, 0)$$

점 $(-2, 4\sqrt{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$$4\sqrt{2}y = 2 \times (-4) \times (x-2)$$

$$\therefore y = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}$$

이 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 점

$(-4, 0)$ 을 지나고 기울기가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+4) \quad \therefore y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 2\sqrt{2}$$

따라서 구하는 y 절편은 $2\sqrt{2}$ 이다.

136 ㉔ 20

점 $P(a, b)$ 가 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로
 $b^2=8a$ ㉔

포물선 $y^2=8x$, 즉 $y^2=4 \times 2x$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$by=2 \times 2 \times (x+a) \quad \therefore y=\frac{4}{b}x+\frac{4a}{b}$$

$$\therefore Q(-a, 0)$$

이때 $PQ=4\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{(-a-a)^2+(-b)^2}=4\sqrt{2}$$

양변을 제곱하면

$$4a^2+b^2=32$$

이 식에 ㉔을 대입하면

$$4a^2+8a=32, a^2+2a-8=0$$

$$(a+4)(a-2)=0 \quad \therefore a=-4 \text{ 또는 } a=2$$

㉔에서 $a>0$ 이므로 $a=2, b^2=16$

$$\therefore a^2+b^2=2^2+16=20$$

137 ㉔ $y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}$ 또는 $y=x-3$

$x^2=12y$, 즉 $x^2=4 \times 3y$ 이므로 접점의 좌표를

(x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x=2 \times 3 \times (y+y_1) \quad \therefore x_1x=6(y+y_1)$$

이 직선이 점 $(4, 1)$ 을 지나므로

$$4x_1=6(1+y_1) \quad \therefore y_1=\frac{2}{3}x_1-1 \quad \dots\dots ㉔$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 $x^2=12y$ 위의 점이므로

$$x_1^2=12y_1$$

이 식에 ㉔을 대입하면

$$x_1^2=12\left(\frac{2}{3}x_1-1\right), x_1^2-8x_1+12=0$$

$$(x_1-2)(x_1-6)=0 \quad \therefore x_1=2 \text{ 또는 } x_1=6$$

따라서 ㉔에서 $x_1=2$ 일 때 $y_1=\frac{1}{3}$, $x_1=6$ 일 때 $y_1=3$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \text{ 또는 } y=x-3$$

|다른 풀이| 기울기가 주어진 접선의 방정식 이용

$x^2=12y$, 즉 $x^2=4 \times 3y$ 이므로 접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y=mx-3m^2$$

이 직선이 점 $(4, 1)$ 을 지나므로

$$1=4m-3m^2, 3m^2-4m+1=0$$

$$(3m-1)(m-1)=0 \quad \therefore m=\frac{1}{3} \text{ 또는 } m=1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \text{ 또는 } y=x-3$$

|다른 풀이| 판별식 이용

점 $(4, 1)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y-1=m(x-4) \quad \therefore y=mx-4m+1$$

이를 $x^2=12y$ 에 대입하면

$$x^2=12(mx-4m+1)$$

$$\therefore x^2-12mx+48m-12=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(-6m)^2-(48m-12)=0$$

$$3m^2-4m+1=0, (3m-1)(m-1)=0$$

$$\therefore m=\frac{1}{3} \text{ 또는 } m=1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{3} \text{ 또는 } y=x-3$$

138 ㉔ 3

$y^2=-8x$, 즉 $y^2=4 \times (-2)x$ 이므로 접점의 좌표를

(x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1y=2 \times (-2) \times (x+x_1) \quad \therefore y_1y=-4(x+x_1)$$

이 직선이 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로

$$3y_1=-4(-1+x_1)$$

$$\therefore x_1=-\frac{3}{4}y_1+1 \quad \dots\dots ㉔$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 $y^2=-8x$ 위의 점이므로

$$y_1^2=-8x_1$$

이 식에 ㉔을 대입하면

$$y_1^2=-8\left(-\frac{3}{4}y_1+1\right), y_1^2-6y_1+8=0$$

$$(y_1-2)(y_1-4)=0 \quad \therefore y_1=2 \text{ 또는 } y_1=4$$

즉, ㉔에서 $y_1=2$ 일 때 $x_1=-\frac{1}{2}$, $y_1=4$ 일 때

$x_1=-2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y=-2x+1 \text{ 또는 } y=-x+2$$

따라서 두 접선의 y 절편은 1, 2이므로 구하는 합은

$$1+2=3$$

139 ㉔ 8

$y^2=2x$, 즉 $y^2=4 \times \frac{1}{2}x$ 이므로 접점의 좌표를 (x_1, y_1)

이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1y=2 \times \frac{1}{2} \times (x+x_1) \quad \therefore y_1y=x+x_1$$

이 직선이 점 $(-8, 0)$ 을 지나므로

$$0 = -8 + x_1 \quad \therefore x_1 = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 $y^2 = 2x$ 위의 점이므로

$$y_1^2 = 2x_1$$

이 식에 $\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$y_1^2 = 16 \quad \therefore y_1 = \pm 4$$

따라서 $x_1 = 8, y_1 = -4$ 또는 $x_1 = 8, y_1 = 4$ 이므로 두

점 P, Q의 좌표는

$$(8, -4), (8, 4)$$

$$\therefore \overline{PQ} = 4 - (-4) = 8$$

140 ㉠ -2

$x^2 = 8y$, 즉 $x^2 = 4 \times 2y$ 이므로 접선의 기울기를 m 이

라 하면 접선의 방정식은

$$y = mx - 2m^2$$

이 직선이 점 $(0, a)$ 를 지나므로

$$a = -2m^2 \quad \therefore 2m^2 + a = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이때 두 접선이 서로 수직이므로 m 에 대한 이차방정

식 $\textcircled{7}$ 의 두 실근의 곱이 -1 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{a}{2} = -1 \quad \therefore a = -2$$

|참고| 포물선 밖의 점에서 포물선에 그은 두 접선이 서로 수직이면 이 점은 포물선의 준선 위에 있음을 이용하여 a 의 값을 구할 수도 있다.

따라서 점 $(0, a)$ 는 포물선 $x^2 = 8y$, 즉 $x^2 = 4 \times 2y$ 의 준선 $y = -2$ 위에 있으므로 $a = -2$ 이다.

개념 확인

77쪽

141 ㉠ (1) $y = -2x \pm 4$

$$(2) y = \frac{3}{2}x \pm 4\sqrt{3}$$

$$(1) y = -2x \pm \sqrt{2 \times (-2)^2 + 8}$$

$$\therefore y = -2x \pm 4$$

$$(2) 3x^2 + 4y^2 = 48 \text{에서 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

$$y = \frac{3}{2}x \pm \sqrt{16 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 12}$$

$$\therefore y = \frac{3}{2}x \pm 4\sqrt{3}$$

142 ㉠ (1) $y = 2x - 6$

$$(2) y = -x + 5$$

$$(1) \frac{2x}{6} + \frac{-2y}{12} = 1 \quad \therefore y = 2x - 6$$

$$(2) \frac{3x}{15} + \frac{2y}{10} = 1 \quad \therefore y = -x + 5$$

143 ㉠ 12, 1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, 3, 4, $2x + 4$

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x + \frac{y_1y}{12} = 1$$

이 직선이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$-2x_1 = \boxed{1} \quad \therefore x_1 = \boxed{-\frac{1}{2}} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 $x^2 + \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + \frac{y_1^2}{12} = 1$$

이 식에 $\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$\boxed{\frac{1}{4}} + \frac{y_1^2}{12} = 1$$

$$y_1^2 = 9 \quad \therefore y_1 = -3 \text{ 또는 } y_1 = \boxed{3}$$

$$\text{따라서 } x_1 = -\frac{1}{2}, y_1 = -3 \text{ 또는 } x_1 = -\frac{1}{2}, y_1 = 3 \text{이}$$

므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = -2x - \boxed{4} \text{ 또는 } y = \boxed{2x + 4}$$

유제

79~83쪽

144 ㉠ $y = -3x \pm 3\sqrt{2}$

직선 $3x + y - 5 = 0$, 즉 $y = -3x + 5$ 와 평행한 직선의 기울기는 -3 이다.

따라서 타원 $9x^2 + y^2 = 9$, 즉 $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$ 에 접하고

기울기가 -3 인 직선의 방정식은

$$y = -3x \pm \sqrt{1 \times (-3)^2 + 9} \quad \therefore y = -3x \pm 3\sqrt{2}$$

|다른 풀이|

직선 $3x + y - 5 = 0$, 즉 $y = -3x + 5$ 와 평행한 직선의 기울기는 -3 이다.

타원 $9x^2 + y^2 = 9$ 에 접하고 기울기가 -3 인 직선의 방정식을 $y = -3x + k$ 라 하자.

이를 $9x^2 + y^2 = 9$ 에 대입하면
 $9x^2 + (-3x + k)^2 = 9$
 $\therefore 18x^2 - 6kx + k^2 - 9 = 0$
 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (-3k)^2 - 18(k^2 - 9) = 0$
 $-9k^2 + 162 = 0, k^2 = 18$
 $\therefore k = \pm 3\sqrt{2}$
 따라서 구하는 직선의 방정식은
 $y = -3x \pm 3\sqrt{2}$

145 ㉠ 4

직선 $2x + y + 4 = 0$, 즉 $y = -2x - 4$ 에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

타원 $x^2 + 4y^2 = 8$, 즉 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2} \quad \therefore y = \frac{1}{2}x \pm 2$$

이 직선이 점 (a, a) 를 지나므로

$$a = \frac{1}{2}a \pm 2 \quad \therefore a = \pm 4$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 4$

146 ㉠ $\frac{9\sqrt{10}}{5}$

타원 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{7} = 1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{3}x \pm \sqrt{18 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 7} \quad \therefore y = \frac{1}{3}x \pm 3$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $y = \frac{1}{3}x + 3$ 위의

점 $(0, 3)$ 과 직선 $y = \frac{1}{3}x - 3$, 즉 $x - 3y - 9 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-9-9|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{9\sqrt{10}}{5}$$

147 ㉠ 4

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$\frac{2^2}{b^2} = 1 \quad \therefore b^2 = 4$$

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{a^2 \times 2^2 + 4} \quad \therefore y = 2x \pm \sqrt{4a^2 + 4}$$

직선 $y = 2x + \sqrt{4a^2 + 4}$ 가 직선 $y = 2x + 6$ 과 일치하므로

$$\sqrt{4a^2 + 4} = 6$$

양변을 제곱하면

$$4a^2 + 4 = 36 \quad \therefore a^2 = 8$$

즉, 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{8-4} = 2$ 이므로 두 초점

의 좌표는

$$(2, 0), (-2, 0)$$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$2 - (-2) = 4$$

148 ㉠ ②

점 $(3, \sqrt{5})$ 가 타원 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{3^2}{18} + \frac{(\sqrt{5})^2}{b^2} = 1, \frac{5}{b^2} = \frac{1}{2} \quad \therefore b^2 = 10$$

타원 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{10} = 1$ 위의 점 $(3, \sqrt{5})$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{3x}{18} + \frac{\sqrt{5}y}{10} = 1 \quad \therefore y = -\frac{\sqrt{5}}{3}x + 2\sqrt{5}$$

따라서 구하는 y 절편은 $2\sqrt{5}$ 이다.

149 ㉠ 4

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{25} = 1$ 위의 점 $\left(\frac{4}{5}a, 3\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\frac{4}{5}ax}{a^2} + \frac{3y}{25} = 1 \quad \therefore \frac{4}{5a}x + \frac{3}{25}y = 1$$

이 직선이 점 $(5, 0)$ 을 지나므로

$$\frac{4}{a} = 1 \quad \therefore a = 4$$

150 ㉠ 15

타원 $4x^2 + 9y^2 = 45$ 위의 점 $(3, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4 \times 3x + 9 \times 1y = 45 \quad \therefore y = -\frac{4}{3}x + 5$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이다.

즉, 기울기가 $\frac{3}{4}$ 이고 점 $(4, -6)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y+6=\frac{3}{4}(x-4) \quad \therefore y=\frac{3}{4}x-9$$

따라서 $P(12, 0)$, $Q(0, -9)$ 이므로

$$\overline{PQ}=\sqrt{(-12)^2+(-9)^2}=15$$

151 $5\sqrt{2}$

점 $(-3, 2)$ 가 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{(-3)^2}{a^2}+\frac{2^2}{b^2}=1 \quad \therefore \frac{9}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(-3, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{-3x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}=1 \quad \therefore y=\frac{3b^2}{2a^2}x+\frac{b^2}{2}$$

이 접선의 기울기가 $\frac{2}{3}$ 이므로

$$\frac{3b^2}{2a^2}=\frac{2}{3} \quad \therefore b^2=\frac{4}{9}a^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\frac{9}{a^2}+\frac{4}{\frac{4}{9}a^2}=1, \frac{18}{a^2}=1$$

$$a^2=18 \quad \therefore a=3\sqrt{2} (\because a>0)$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$b^2=\frac{4}{9}\times 18=8 \quad \therefore b=2\sqrt{2} (\because b>0)$$

$$\therefore a+b=5\sqrt{2}$$

152 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$ 또는 $y=x-2$

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$3x_1x+y_1y=3$$

이 직선이 점 $(3, 1)$ 을 지나므로

$$9x_1+y_1=3 \quad \therefore y_1=-9x_1+3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 $3x^2+y^2=3$ 위의 점이므로

$$3x_1^2+y_1^2=3$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$3x_1^2+(-9x_1+3)^2=3$$

$$14x_1^2-9x_1+1=0$$

$$(7x_1-1)(2x_1-1)=0$$

$$\therefore x_1=\frac{1}{7} \text{ 또는 } x_1=\frac{1}{2}$$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서 $x_1=\frac{1}{7}$ 일 때 $y_1=\frac{12}{7}$, $x_1=\frac{1}{2}$ 일 때

$y_1=-\frac{3}{2}$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{4} \text{ 또는 } y=x-2$$

| 다른 풀이 |

점 $(3, 1)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y-1=m(x-3) \quad \therefore y=mx-3m+1$$

이를 $3x^2+y^2=3$ 에 대입하면

$$3x^2+(mx-3m+1)^2=3$$

$$\therefore (m^2+3)x^2+2m(-3m+1)x+(9m^2-6m-2)=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=\{m(-3m+1)\}^2-(m^2+3)(9m^2-6m-2)=0$$

$$4m^2-3m-1=0$$

$$(4m+1)(m-1)=0$$

$$\therefore m=-\frac{1}{4} \text{ 또는 } m=1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{7}{4} \text{ 또는 } y=x-2$$

153 -2

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x+\frac{y_1y}{2}=1$$

이 직선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$y_1=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점이므로

$$x_1^2+\frac{y_1^2}{2}=1$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$x_1^2+\frac{1^2}{2}=1, x_1^2=\frac{1}{2}$$

$$\therefore x_1=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

즉, $x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_1=1$ 또는 $x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_1=1$ 이므로

접선의 방정식은

$$y=\sqrt{2}x+2 \text{ 또는 } y=-\sqrt{2}x+2$$

따라서 두 접선의 기울기는 $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$ 이므로

$$m_1m_2=\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=-2$$

154 ㉡9

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{18} + \frac{y_1y}{6} = 1$$

이 직선이 점 $(6, 0)$ 을 지나므로

$$\frac{x_1}{3} = 1 \quad \therefore x_1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{6} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{18} + \frac{y_1^2}{6} = 1$$

이 식에 $\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$\frac{3^2}{18} + \frac{y_1^2}{6} = 1, y_1^2 = 3 \quad \therefore y_1 = \pm\sqrt{3}$$

즉, $x_1 = 3, y_1 = -\sqrt{3}$ 또는 $x_1 = 3, y_1 = \sqrt{3}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3} \text{ 또는 } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$$

따라서 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}$ 이 점 $(k, \sqrt{3})$ 을 지나므로

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}k - 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}k = 3\sqrt{3} \quad \therefore k = 9$$

155 ㉡ $\frac{36}{5}$

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x + 6y_1y = 24$$

이 직선이 점 $A(6, 2)$ 를 지나므로

$$6x_1 + 12y_1 = 24 \quad \therefore x_1 = -2y_1 + 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 $x^2 + 6y^2 = 24$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + 6y_1^2 = 24$$

이 식에 $\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$(-2y_1 + 4)^2 + 6y_1^2 = 24$$

$$5y_1^2 - 8y_1 - 4 = 0, (5y_1 + 2)(y_1 - 2) = 0$$

$$\therefore y_1 = -\frac{2}{5} \text{ 또는 } y_1 = 2$$

즉, $\textcircled{7}$ 에서 $y_1 = -\frac{2}{5}$ 일 때 $x_1 = \frac{24}{5}, y_1 = 2$ 일 때

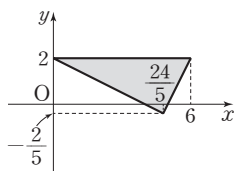
$x_1 = 0$ 이므로 두 점 B, C의 좌표는

$$\left(\frac{24}{5}, -\frac{2}{5}\right), (0, 2)$$

따라서 오른쪽 그림에서 삼

각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times \left\{ 2 - \left(-\frac{2}{5}\right) \right\} = \frac{36}{5}$$



개념 확인

87쪽

156 ㉡(1) $y = -x \pm 2$

$$(2) y = \frac{1}{2}x \pm 1$$

$$(1) y = -x \pm \sqrt{9 \times (-1)^2 - 5} \quad \therefore y = -x \pm 2$$

$$(2) y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{4 - 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2} \quad \therefore y = \frac{1}{2}x \pm 1$$

157 ㉡(1) $y = 3x - 7$

$$(2) y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2$$

$$(1) \frac{3x}{7} - \frac{2y}{14} = 1 \quad \therefore y = 3x - 7$$

$$(2) \frac{\sqrt{3}x}{3} - \frac{4y}{8} = -1 \quad \therefore y = \frac{2\sqrt{3}}{3}x + 2$$

158 ㉡4, 3, 3, 3, $-2\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{4} - \frac{y_1y}{3} = -1$$

이 직선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$-\frac{y_1}{3} = -1 \quad \therefore y_1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = -1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{3} = -1$$

이 식에 $\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$\frac{x_1^2}{4} - 3 = -1, x_1^2 = 8$$

$$\therefore x_1 = \pm 2\sqrt{2} \text{ 또는 } x_1 = 2\sqrt{2}$$

따라서 $x_1 = -2\sqrt{2}, y_1 = 3$ 또는 $x_1 = 2\sqrt{2}, y_1 = 3$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1 \text{ 또는 } y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$$

유제

89~94쪽

159 ㉡ $y = \frac{1}{3}x \pm \sqrt{11}$

직선 $x - 3y + 7 = 0$, 즉 $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ 과 평행한 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$ 이다.

따라서 쌍곡선 $4x^2 - 3y^2 = -36$, 즉 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{12} = -1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{3}x \pm \sqrt{12 - 9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$\therefore y = \frac{1}{3}x \pm \sqrt{11}$$

| 다른 풀이 |

직선 $x - 3y + 7 = 0$, 즉 $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$ 과 평행한 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$ 이다.

쌍곡선 $4x^2 - 3y^2 = -36$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{3}$ 인 직선의 방정식을 $y = \frac{1}{3}x + k$ 라 하자.

이를 $4x^2 - 3y^2 = -36$ 에 대입하면

$$4x^2 - 3\left(\frac{1}{3}x + k\right)^2 = -36$$

$$\therefore 11x^2 - 6kx - 9k^2 + 108 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-3k)^2 - 11(-9k^2 + 108) = 0$$

$$108k^2 - 1188 = 0, k^2 = 11$$

$$\therefore k = \pm\sqrt{11}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{3}x \pm \sqrt{11}$$

160 ㉠ -4

직선 $2x + y + 1 = 0$, 즉 $y = -2x - 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - y^2 = 1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1} \quad \therefore y = \frac{1}{2}x \pm 1$$

따라서 두 직선의 x 절편은 -2 , 2 이므로 구하는 곱은 $-2 \times 2 = -4$

161 ㉠ $2\sqrt{15}$

쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{k} = -1$ 에 접하고 기울기가 $\sqrt{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{2}x \pm \sqrt{k - 3 \times (\sqrt{2})^2}$$

$$\therefore y = \sqrt{2}x \pm \sqrt{k - 6}$$

즉, 직선 $y = \sqrt{2}x - \sqrt{k - 6}$ 이 직선 $y = \sqrt{2}x - 3$ 과 일치하므로

$$\sqrt{k - 6} = 3$$

양변을 제곱하면

$$k - 6 = 9 \quad \therefore k = 15$$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{15} = -1$ 의 주축의 길이는

$$2 \times \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$$

162 ㉠ 26

쌍곡선 $\frac{x^2}{k} - \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{k \times 2^2 - 4} \quad \therefore y = 2x \pm \sqrt{4k - 4}$$

이때 두 접선 사이의 거리는 직선 $y = 2x + \sqrt{4k - 4}$ 위의 점 $(0, \sqrt{4k - 4})$ 와 직선 $y = 2x - \sqrt{4k - 4}$, 즉 $2x - y - \sqrt{4k - 4} = 0$ 사이의 거리와 같다.

점 $(0, \sqrt{4k - 4})$ 와 직선 $2x - y - \sqrt{4k - 4} = 0$ 사이의 거리는 $\frac{|-\sqrt{4k - 4} - \sqrt{4k - 4}|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{4k - 4}}{\sqrt{5}}$ 이므로

$$\frac{2\sqrt{4k - 4}}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}, \sqrt{4k - 4} = 10$$

양변을 제곱하면

$$4k - 4 = 100 \quad \therefore k = 26$$

163 ㉠ $y = \frac{1}{2}x - 1$

점 $(8, a)$ 가 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{8^2}{16} - \frac{a^2}{3} = 1, a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 (\because a > 0)$$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점 $(8, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{8x}{16} - \frac{3y}{3} = 1 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x - 1$$

164 ㉠ ②

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1$ 위의 점 $(2a, \sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2ax}{a^2} - \sqrt{3}y = 1 \quad \therefore y = \frac{2\sqrt{3}}{3a}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이 직선이 직선 $y = -\sqrt{3}x + 1$ 과 수직이므로

$$\frac{2\sqrt{3}}{3a} \times (-\sqrt{3}) = -1, -\frac{2}{a} = -1 \quad \therefore a = 2$$

165 ㉔ 26

점 (a, b) 가 쌍곡선 $x^2 - 3y^2 = -6$ 위의 점이므로

$$a^2 - 3b^2 = -6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

쌍곡선 $x^2 - 3y^2 = -6$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$ax - 3by = -6 \quad \therefore y = \frac{a}{3b}x + \frac{2}{b}$$

이 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{a}{3b} = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{3}{2}b$$

이를 ㉔에 대입하면

$$\left(\frac{3}{2}b\right)^2 - 3b^2 = -6, \quad -\frac{3}{4}b^2 = -6 \quad \therefore b^2 = 8$$

이를 다시 ㉔에 대입하면

$$a^2 - 3 \times 8 = -6 \quad \therefore a^2 = 18$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 26$$

166 ㉔ 9

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 $A(4, 6)$ 에서의 접선의

방정식은

$$\frac{4x}{4} - \frac{6y}{12} = 1 \quad \therefore y = 2x - 2$$

이 직선의 x 절편은 1이므로 $B(1, 0)$

또 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 에서 $\sqrt{4+12}=4$ 이므로 두

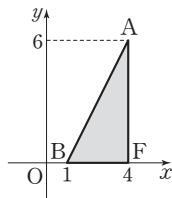
초점의 좌표는

$$(4, 0), (-4, 0) \quad \therefore F(4, 0)$$

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형

ABF의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (4-1) \times 6 = 9$$



167 ㉔ $y = -x + 2$ 또는 $y = x - 2$

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1 x}{5} - \frac{y_1 y}{9} = -1$$

이 직선이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$\frac{2x_1}{5} = -1 \quad \therefore x_1 = -\frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{9} = -1$ 위의 점이므로

로

$$\frac{x_1^2}{5} - \frac{y_1^2}{9} = -1$$

이 식에 ㉔을 대입하면

$$\frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^2}{5} - \frac{y_1^2}{9} = -1, \quad y_1^2 = \frac{81}{4}$$

$$\therefore y_1 = \pm \frac{9}{2}$$

$$\text{따라서 } x_1 = -\frac{5}{2}, y_1 = -\frac{9}{2} \text{ 또는 } x_1 = -\frac{5}{2}, y_1 = \frac{9}{2}$$

이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = x - 2 \text{ 또는 } y = -x + 2$$

| 다른 풀이 |

점 $(2, 0)$ 을 지나고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = m(x - 2) \quad \therefore y = mx - 2m$$

이를 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{9} = -1$ 에 대입하면

$$\frac{x^2}{5} - \frac{(mx - 2m)^2}{9} = -1$$

$$\therefore (9 - 5m^2)x^2 + 20m^2x - 20m^2 + 45 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (10m^2)^2 - (9 - 5m^2)(-20m^2 + 45) = 0$$

$$405m^2 - 405 = 0, \quad m^2 = 1$$

$$\therefore m = \pm 1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = -x + 2 \text{ 또는 } y = x - 2$$

168 ㉔ 3

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$4x_1 x - 5y_1 y = 20$$

이 직선이 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$12x_1 - 10y_1 = 20 \quad \therefore y_1 = \frac{6}{5}x_1 - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 쌍곡선 $4x^2 - 5y^2 = 20$ 위의 점이므로

$$4x_1^2 - 5y_1^2 = 20$$

이 식에 ㉔을 대입하면

$$4x_1^2 - 5\left(\frac{6}{5}x_1 - 2\right)^2 = 20, \quad 2x_1^2 - 15x_1 + 25 = 0$$

$$(2x_1 - 5)(x_1 - 5) = 0$$

$$\therefore x_1 = \frac{5}{2} \text{ 또는 } x_1 = 5$$

즉, ㉔에서 $x_1 = \frac{5}{2}$ 일 때 $y_1 = 1$, $x_1 = 5$ 일 때 $y_1 = 4$ 이

므로 접선의 방정식은

$$y = 2x - 4 \text{ 또는 } y = x - 1$$

따라서 두 접선의 기울기는 2, 1이므로 구하는 합은

$$2 + 1 = 3$$

169 ㉡ 2

쌍곡선 $x^2 - y^2 = -3$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$ax - by = -3$$

이 직선이 점 $(-3, 0)$ 을 지나므로

$$-3a = -3 \quad \therefore a = 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (a, b) 가 쌍곡선 $x^2 - y^2 = -3$ 위의 점이므로

$$a^2 - b^2 = -3$$

이 식에 $\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$1^2 - b^2 = -3, \quad b^2 = 4 \quad \therefore b = 2 (\because b > 0)$$

$$\therefore ab = 1 \times 2 = 2$$

170 ㉡ $\left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점선의 방정식은

$$x_1x - 2y_1y = 4$$

이 직선이 점 $P(2, 1)$ 을 지나므로

$$2x_1 - 2y_1 = 4 \quad \therefore y_1 = x_1 - 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 쌍곡선 $x^2 - 2y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$x_1^2 - 2y_1^2 = 4$$

이 식에 $\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$x_1^2 - 2(x_1 - 2)^2 = 4, \quad x_1^2 - 8x_1 + 12 = 0$$

$$(x_1 - 2)(x_1 - 6) = 0 \quad \therefore x_1 = 2 \text{ 또는 } x_1 = 6$$

즉, $\textcircled{7}$ 에서 $x_1 = 2$ 일 때 $y_1 = 0$, $x_1 = 6$ 일 때 $y_1 = 4$ 이므로

두 점 A, B의 좌표는

$$(2, 0), (6, 4)$$

따라서 삼각형 PAB의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+2+6}{3}, \frac{1+0+4}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

171 ㉡ (1) $y = x + 2$

$$(2) y = -\frac{1}{2}x - 2 \text{ 또는 } y = -\frac{1}{2}x + 2$$

(1) $y^2 = 8x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2y \times \frac{dy}{dx} = 8$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{4}{y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

따라서 점 $(2, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{4}{4} = 1$ 이

므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - 4 = x - 2 \quad \therefore y = x + 2$$

(2) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{x}{4} + y \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 기울기가

$$-\frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$-\frac{x_1}{4y_1} = -\frac{1}{2} \quad \therefore x_1 = 2y_1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 위의 점이므로

로

$$\frac{x_1^2}{8} + \frac{y_1^2}{2} = 1$$

이 식에 $\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$\frac{(2y_1)^2}{8} + \frac{y_1^2}{2} = 1, \quad y_1^2 = 1 \quad \therefore y_1 = \pm 1$$

따라서 $\textcircled{7}$ 에서 $y_1 = -1$ 일 때 $x_1 = -2$, $y_1 = 1$ 일 때

$x_1 = 2$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x + 2) \text{ 또는 } y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}x - 2 \text{ 또는 } y = -\frac{1}{2}x + 2$$

연습문제

95~96쪽

172 ㉡ 2

포물선 $y^2 = -16x$, 즉 $y^2 = 4 \times (-4)x$ 에 접하고 기울기가 m ($m \neq 0$)인 직선의 방정식은

$$y = mx - \frac{4}{m}$$

이 직선이 직선 $y = mx - 2$ 와 일치해야 하므로

$$-\frac{4}{m} = -2 \quad \therefore m = 2$$

| 다른 풀이 |

$y = mx - 2$ 를 $y^2 = -16x$ 에 대입하면

$$(mx - 2)^2 = -16x$$

$$\therefore m^2x^2 - 4(m - 4)x + 4 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{-2(m - 4)\}^2 - 4m^2 = 0$$

$$-32m + 64 = 0 \quad \therefore m = 2$$

173 ㉡ -28

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 60° 인 직선의 기울기는

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

타원 $x^2 + 2y^2 = 8$, 즉 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가

$\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x \pm \sqrt{8 \times (\sqrt{3})^2 + 4}$$

$$\therefore y = \sqrt{3}x \pm 2\sqrt{7}$$

따라서 두 직선의 y 절편은 $-2\sqrt{7}, 2\sqrt{7}$ 이므로 구하는 곱은

$$-2\sqrt{7} \times 2\sqrt{7} = -28$$

174 ㉡ ①

타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2a^2} = 1$ 위의 점 $(2, a)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{8} + \frac{ay}{2a^2} = 1 \quad \therefore y = -\frac{a}{2}x + 2a$$

이 직선의 기울기가 -3 이므로

$$-\frac{a}{2} = -3 \quad \therefore a = 6$$

175 ㉡ $y = 2x \pm 2\sqrt{5}$

두 점근선의 교점이 원점이므로 주어진 쌍곡선의 방정

식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하자.

이 쌍곡선이 점 $(-3, 0)$ 을 지나므로

$$\frac{(-3)^2}{a^2} = 1, a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

또 점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{4}{3}x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3} \quad \therefore b = 4$$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인

직선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{9 \times 2^2 - 16}$$

$$\therefore y = 2x \pm 2\sqrt{5}$$

176 ㉡ ⑤

포물선 $y^2 = 6x$ 위의 점과 직선 $3x - 4y + 24 = 0$ 사이의 거리가 최소이려면 포물선 위의 점에서의 접선이 직선 $3x - 4y + 24 = 0$ 과 평행해야 한다.

직선 $3x - 4y + 24 = 0$, 즉 $y = \frac{3}{4}x + 6$ 과 평행한 직선

의 기울기는 $\frac{3}{4}$ 이므로 포물선 $y^2 = 6x$, 즉

$y^2 = 4 \times \frac{3}{2}x$ 에 접하고 기울기가 $\frac{3}{4}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{4}} \quad \therefore y = \frac{3}{4}x + 2$$

직선 $y = \frac{3}{4}x + 2$ 위의 점 $(0, 2)$ 와 직선

$3x - 4y + 24 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-8 + 24|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{16}{5}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{16}{5}$ 이다.

177 ㉡ 1

포물선 $y^2 = 8px$, 즉 $y^2 = 4 \times 2px$ 위의 점 $P(2p, 4p)$

에서의 접선의 방정식은

$$4py = 2 \times 2p(x + 2p) \quad \therefore y = x + 2p$$

즉, $Q(-2p, 0), R(0, 2p)$ 이므로

$$\overline{PR} = \sqrt{(-2p)^2 + (2p - 4p)^2} = 2\sqrt{2}p \quad (\because p > 0)$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(2p)^2 + (2p)^2} = 2\sqrt{2}p \quad (\because p > 0)$$

$$\therefore \frac{\overline{PR}}{\overline{QR}} = \frac{2\sqrt{2}p}{2\sqrt{2}p} = 1$$

178 ㉡ $24\sqrt{2}$

$x^2 = 16y$, 즉 $x^2 = 4 \times 4y$ 이므로 점점의 좌표를

(x_1, y_1) 이라 하면 점점의 방정식은

$$x_1x = 2 \times 4 \times (y + y_1) \quad \therefore x_1x = 8(y + y_1)$$

이 직선이 점 $A(0, -2)$ 를 지나므로

$$0 = 8(-2 + y_1) \quad \therefore y_1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 $x^2 = 16y$ 위의 점이므로

$$x_1^2 = 16y_1$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$x_1^2 = 16 \times 2 = 32 \quad \therefore x_1 = \pm 4\sqrt{2}$$

즉, $x_1 = -4\sqrt{2}, y_1 = 2$ 또는 $x_1 = 4\sqrt{2}, y_1 = 2$ 이므로

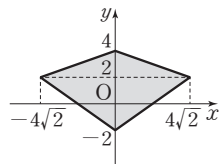
두 점 B, C의 좌표는 $(-4\sqrt{2}, 2), (4\sqrt{2}, 2)$

포물선 $x^2 = 16y$ 의 초점 D의 좌표는 $(0, 4)$

따라서 오른쪽 그림에서 사

각형 ACDB의 넓이는

$$2 \times \left[\frac{1}{2} \times \{4 - (-2)\} \times 4\sqrt{2} \right] = 24\sqrt{2}$$



179 ㉮ $-\frac{1}{2}$

타원 $x^2 + 4y^2 = 20$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선 l 의 방정식은

$$ax + 4by = 20 \quad \text{..... ㉠}$$

원점과 직선 $ax + 4by = 20$, 즉 $ax + 4by - 20 = 0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|-20|}{\sqrt{a^2 + (4b)^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$2\sqrt{2}\sqrt{a^2 + 16b^2} = 20$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 + 16b^2 = 50 \quad \text{..... ㉡}$$

또 점 $P(a, b)$ 는 타원 $x^2 + 4y^2 = 20$ 위의 점이므로

$$a^2 + 4b^2 = 20 \quad \text{..... ㉢}$$

$$\text{㉡, ㉢을 연립하여 풀면 } a^2 = 10, b^2 = \frac{5}{2}$$

$$\therefore a = \sqrt{10}, b = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad (\because a > 0, b > 0) \quad \text{..... ㉣}$$

따라서 직선 l 의 방정식은 $\sqrt{10}x + 2\sqrt{10}y = 20$, 즉

$$y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{10} \text{이므로 구하는 기울기는 } -\frac{1}{2} \text{이다.}$$

..... ㉤

단계	채점 기준	비율
㉠	타원 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선 l 의 방정식 세우기	20%
㉡	a, b 의 값 구하기	60%
㉤	직선 l 의 기울기 구하기	20%

180 ㉮ 8

점 P 의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{12} + \frac{y_1y}{4} = 1$$

이 직선이 점 $A(0, a)$ 를 지나므로

$$\frac{ay_1}{4} = 1 \quad \therefore y_1 = \frac{4}{a} \quad \text{..... ㉠}$$

점 $P(x_1, y_1)$ 은 타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{12} + \frac{y_1^2}{4} = 1$$

이 식에 ㉠을 대입하면

$$\frac{x_1^2}{12} + \frac{\left(\frac{4}{a}\right)^2}{4} = 1 \quad \therefore x_1^2 = 12 - \frac{48}{a^2} \quad \text{..... ㉡}$$

한편 $\overline{OA} = \overline{AP}$ 에서 $\overline{OA}^2 = \overline{AP}^2$ 이므로

$$a^2 = x_1^2 + (y_1 - a)^2$$

이 식에 ㉠, ㉡을 대입하면

$$a^2 = 12 - \frac{48}{a^2} + \left(\frac{4}{a} - a\right)^2$$

$$4 - \frac{32}{a^2} = 0 \quad \therefore a^2 = 8$$

181 ㉮ 12

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(6, -3)$ 에서의 접선의

방정식은

$$\frac{6x}{a^2} + \frac{-3y}{b^2} = 1 \quad \therefore y = \frac{2b^2}{a^2}x - \frac{b^2}{3}$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점 $P(6, -3)$ 에서의 접선

의 방정식은

$$\frac{6x}{9} - \frac{-3y}{3} = 1 \quad \therefore y = -\frac{2}{3}x + 1$$

이때 두 직선이 서로 수직이므로

$$\frac{2b^2}{a^2} \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -1 \quad \therefore a^2 = \frac{4}{3}b^2 \quad \text{..... ㉠}$$

또 점 $P(6, -3)$ 이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{6^2}{a^2} + \frac{(-3)^2}{b^2} = 1$$

$$\therefore 9a^2 + 36b^2 = a^2b^2 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a^2 = 48, b^2 = 36$

$$\therefore a^2 - b^2 = 12$$

182 ㉮ 144

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방

정식은

$$\frac{ax}{4} - \frac{by}{3} = 1$$

이 직선이 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ 의 넓이를 이등분

하면 타원의 중심 $(0, -1)$ 을 지나므로

$$\frac{b}{3} = 1 \quad \therefore b = 3$$

또 점 (a, b) , 즉 점 $(a, 3)$ 이 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{3} = 1$ 위

의 점이므로

$$\frac{a^2}{4} - \frac{3^2}{3} = 1, \frac{a^2}{4} = 4$$

$$\therefore a^2 = 16$$

$$\therefore a^2b^2 = 16 \times 3^2 = 144$$

183 ㉠ 8

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$8x_1x - y_1y = -8$$

이 직선이 점 $P(1, 0)$ 을 지나므로

$$8x_1 = -8$$

$$\therefore x_1 = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 쌍곡선 $8x^2 - y^2 = -8$ 위의 점이므로

$$8x_1^2 - y_1^2 = -8$$

이 식에 $\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$8 \times (-1)^2 - y_1^2 = -8, y_1^2 = 16$$

$$\therefore y_1 = \pm 4$$

즉, $x_1 = -1, y_1 = -4$ 또는 $x_1 = -1, y_1 = 4$ 이므로

두 점 A, B의 좌표는

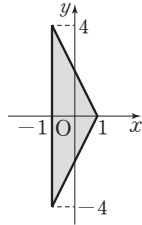
$$(-1, -4), (-1, 4)$$

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형

PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{4 - (-4)\} \times \{1 - (-1)\}$$

$$= 8$$



184 ㉠ 5

| 접근 방법 | 포물선의 정의를 이용하여 점 A의 좌표를 구한 후 포물선 위의 점 A에서의 접선의 방정식을 구한다.

포물선 $y^2 = 12x$, 즉 $y^2 = 4 \times 3x$ 의 초점 F의 좌표는 $(3, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x = -3$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선 $x = -3$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하자.

$$\overline{AF} : \overline{BF} = 3 : 1 \text{에서}$$

$$\overline{AF} = 3k, \overline{BF} = k (k > 0) \text{라}$$

하면 포물선의 정의에 의하여

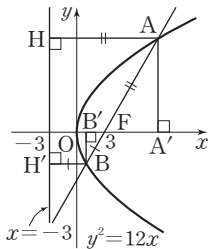
$$\overline{AH} = \overline{AF} = 3k$$

$$\overline{BH'} = \overline{BF} = k$$

두 점 A, B에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하면

$$\overline{A'F} = 3k - 6$$

$$\overline{B'F} = 6 - k$$



이때 $\triangle AFA' \sim \triangle BFB'$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{AF} : \overline{BF} = \overline{A'F} : \overline{B'F}$$

$$3 : 1 = (3k - 6) : (6 - k)$$

$$3(6 - k) = 3k - 6$$

$$6k = 24 \quad \therefore k = 4$$

즉, 점 A의 x 좌표는 $3 \times 4 - 3 = 9$ 이므로 y 좌표는

$$y^2 = 12 \times 9 = 108 \quad \therefore y = 6\sqrt{3} (\because y > 0)$$

$$\therefore A(9, 6\sqrt{3})$$

따라서 포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점 $A(9, 6\sqrt{3})$ 에서의 접선의 방정식은

$$6\sqrt{3}y = 2 \times 3 \times (x + 9)$$

$$\therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 3\sqrt{3}$$

따라서 구하는 y 절편은 $3\sqrt{3}$ 이다.

185 ㉠ 18

| 접근 방법 | 타원 위의 점 P에서의 접선의 x 절편, y 절편을 구한 후 산술평균과 기하평균의 관계를 이용한다.

점 P의 좌표를 (a, b) ($a > 0, b > 0$)라 하면 타원

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{27} = 1 \text{ 위의 점 } P(a, b) \text{에서의 접선의 방정식}$$

은

$$\frac{ax}{12} + \frac{by}{27} = 1 \quad \therefore y = -\frac{9a}{4b}x + \frac{27}{b}$$

이 직선의 x 절편은 $\frac{12}{a}$, y 절편은 $\frac{27}{b}$ 이므로 접선과 x 축, y 축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{12}{a} \times \frac{27}{b} = \frac{162}{ab}$$

또 점 $P(a, b)$ 는 타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{27} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{27} = 1$$

이때 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2}{12} + \frac{b^2}{27} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{12} \times \frac{b^2}{27}}$$

$$\left(\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{12} = \frac{b^2}{27} \text{ 일 때 성립} \right)$$

$$1 \geq \frac{ab}{9} (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore ab \leq 9$$

따라서 $\frac{162}{ab} \geq \frac{162}{9} = 18$ 이므로 구하는 넓이의 최솟값은 18이다.

II. 공간도형과 공간좌표

II-1. 공간도형

01 직선과 평면의 위치 관계

개념 확인

101쪽

- 186 ㉠ (1) 직선 AB, 직선 AC, 직선 BE, 직선 CF
(2) 직선 AD, 직선 BE
(3) 직선 BC, 직선 EF

- 187 ㉠ (1) 평면 ABCDEF, 평면 ABHG
(2) 평면 ABHG, 평면 BHIC,
평면 DJKE, 평면 FLKE
(3) 평면 BHIC, 평면 GHIJKL
(4) 직선 GH, 직선 HI, 직선 IJ, 직선 JK,
직선 KL, 직선 LG

- 188 ㉠ (1) 평면 ABCD, 평면 AEHD,
평면 BFGC, 평면 DHGC,
평면 EFGH
(2) 직선 BC
(3) 평면 ABCD

유제

103쪽

189 ㉠ ③

- ③ 두 직선 AB, EF는 꼬인 위치에 있으므로 한 평면을 결정할 수 없다.

- 190 ㉠ (1) 직선 BE, 직선 DE, 직선 EF
(2) 평면 ADFC (3) 직선 BC (4) 평면 ABC
(1) 직선 AC와 꼬인 위치에 있는 직선은
직선 BE, 직선 DE, 직선 EF
(2) 직선 BE와 평행한 평면은 평면 ADFC
(3) 평면 ABC와 평면 BEFC의 교선은 직선 BC
(4) 평면 DEF와 평행한 평면은 평면 ABC

191 ㉠ 6

- (i) 두 직선 DF, EH는 꼬인 위치에 있으므로 한 평면을 만들 수 없다.
(ii) 세 점 A, B, G로 만들 수 있는 평면은 평면 ABG
(iii) 직선 DF와 세 점 A, B, G로 만들 수 있는 평면은
평면 AFD, 평면 BDF, 평면 DFG

그런데 네 점 A, D, F, G는 한 평면 위에 있으므로 평면 AFD와 평면 DFG는 같은 평면이다.

- (iv) 직선 EH와 세 점 A, B, G로 만들 수 있는 평면은
평면 AEH, 평면 BHE, 평면 EGH
따라서 구하는 서로 다른 평면의 개수는
 $1 + (3 - 1) + 3 = 6$

192 ㉠ 6

- 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리 CD,
모서리 DE의 2개이다. $\therefore a = 2$
모서리 CD와 평행한 모서리는 모서리 BE의 1개이다.
 $\therefore b = 1$
모서리 AD와 한 점에서 만나는 면은 면 ABC, 면
ABE, 면 BCDE의 3개이다. $\therefore c = 3$
 $\therefore a + b + c = 6$

개념 확인

107쪽

193 ㉠ (1) 90° (2) 90° (3) 45°

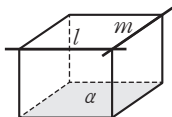
- (1) $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ 이므로 직선 AB와 직선 EF가 이루는
각의 크기는 직선 AB와 직선 BC가 이루는 각의
크기와 같다.
이때 $\angle ABC = 90^\circ$ 이므로 직선 AB와 직선 EF
가 이루는 각의 크기는 90° 이다.
(2) $\overline{AD} \parallel \overline{BE}$ 이므로 직선 AD와 직선 BC가 이루는
각의 크기는 직선 BE와 직선 BC가 이루는 각의
크기와 같다.
이때 $\angle CBE = 90^\circ$ 이므로 직선 AD와 직선 BC가
이루는 각의 크기는 90° 이다.
(3) $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ 이므로 직선 AC와 직선 DE가 이루는
각의 크기는 직선 AC와 직선 AB가 이루는 각의
크기와 같다.
이때 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 직각이등변삼각
형이므로 $\angle BAC = 45^\circ$
따라서 직선 AC와 직선 DE가 이루는 각의 크기
는 45° 이다.

194 ㉠ 평면 ABCD, 평면 EFGH

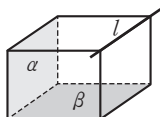
- $\overline{AE} \perp \overline{AB}$, $\overline{AE} \perp \overline{AD}$ 이므로 $\overline{AE} \perp$ (평면 ABCD)
 $\overline{AE} \perp \overline{EF}$, $\overline{AE} \perp \overline{EH}$ 이므로 $\overline{AE} \perp$ (평면 EFGH)
따라서 직선 AE와 수직인 평면은
평면 ABCD, 평면 EFGH

195 ㉠ ㄷ

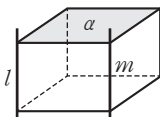
ㄱ. [반례] 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $l \perp m$, $m \parallel \alpha$ 이지만 $l \not\parallel \alpha$ 이다.



ㄴ. [반례] 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $l \parallel \alpha$, $l \parallel \beta$ 이지만 $\alpha \not\perp \beta$ 이다.



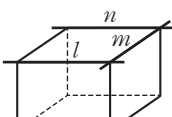
ㄷ. 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $l \parallel m$, $l \perp \alpha$ 이면 $m \perp \alpha$ 이다.



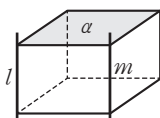
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

196 ㉠ ㄷ, ㄴ

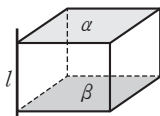
ㄱ. [반례] 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $l \perp m$, $m \perp n$ 이지만 $l \not\parallel n$ 이다.



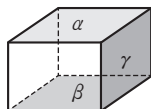
ㄴ. [반례] 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $l \perp \alpha$, $m \perp \alpha$ 이지만 $l \not\parallel m$ 이다.



ㄷ. 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $l \perp \alpha$, $\alpha \parallel \beta$ 이면 $l \perp \beta$ 이다.



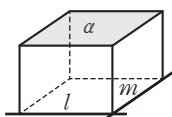
ㄹ. 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\alpha \parallel \beta$, $\alpha \perp \gamma$ 이면 $\beta \perp \gamma$ 이다.



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

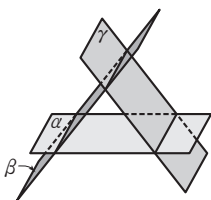
197 ㉠ ④

④ [반례] 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 한 평면 α 에 평행한 서로 다른 두 직선 l , m 은 서로 수직이다.



198 ㉠ 7

주어진 조건을 만족시키는 세 평면 α , β , γ 에 의하여 나누어지는 공간의 개수가 최대려면 세 평면 α , β , γ 는 오른쪽 그림과 같아야 한다.



따라서 세 평면 α , β , γ 에 의하여 나누어지는 공간의 최대 개수는 7이다.

199 ㉠ 60°

$\overline{BF} \parallel \overline{AD}$ 이므로 직선 AC와 직선 BF가 이루는 각의 크기는 직선 AC와 직선 AD가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 삼각형 ACD는 정삼각형이므로

$$\angle CAD = 60^\circ$$

따라서 구하는 각의 크기는 60° 이다.

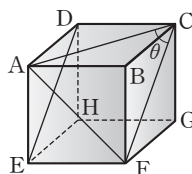
200 ㉠ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{DE} \parallel \overline{CF}$ 이므로 직선 AC와 직선 DE가 이루는 각의 크기는 직선 AC와 직선 CF가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \angle ACF = \theta$$

이때 삼각형 AFC는 정삼각형이므로 $\theta = 60^\circ$

$$\therefore \sin \theta = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



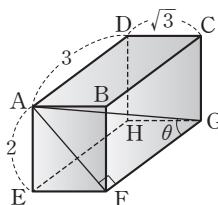
201 ㉠ $\frac{3}{4}$

$\overline{BC} \parallel \overline{FG}$ 이므로 직선 AG와 직선 BC가 이루는 각의 크기는 직선 AG와 직선 FG가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \angle AGF = \theta$$

이때 $\overline{AG} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2 + 2^2} = 4$ 이므로 직각삼각형 AFG에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{FG}}{\overline{AG}} = \frac{3}{4}$$



202 ㉠ 4

직선 BD와 이루는 각의 크기가 90° 인 직선은 직선 AE, 직선 BF, 직선 CG, 직선 DH의 4개이다.

203 ㉠ (가) $\overline{AC}$ (나) $\overline{AE}$

사각형 ABCD는 정사각형이므로

$$\overline{BD} \perp \overline{AC}$$

또 $\overline{BD} \perp \overline{BF}$ 이고 $\overline{BF} \parallel \overline{AE}$ 이므로

$$\overline{BD} \perp \overline{AE}$$

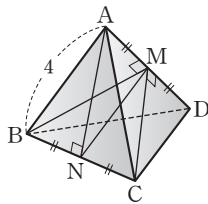
따라서 선분 BD는 평면 AEGC 위의 평행하지 않은
 $\overline{AC}$, $\overline{AE}$ 와 각각 수직이므로
 $\overline{BD} \perp$ (평면 AEGC)

204 ㉠ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 삼각형 ABC는 정삼각형이므로 $\overline{AB} \perp \overline{CM}$
 ㄴ. 삼각형 ABD는 정삼각형이므로 $\overline{AB} \perp \overline{DM}$
 또 ㄱ에서 $\overline{AB} \perp \overline{CM}$ 이므로
 $\overline{AB} \perp$ (평면 CDM)
 ㄷ. ㄴ에서 $\overline{AB} \perp$ (평면 CDM)이고 모서리 CD가 평
 면 CDM에 포함되므로
 $\overline{AB} \perp \overline{CD}$
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

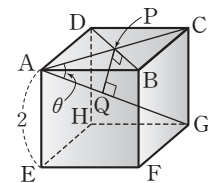
205 ㉠ $2\sqrt{2}$

두 삼각형 ABD, ACD는 정
 삼각형이고 점 M은 모서리
 AD의 중점이므로
 $\overline{AD} \perp \overline{BM}$, $\overline{AD} \perp \overline{CM}$
 즉, $\overline{AD} \perp$ (평면 BCM)이므
 로 $\overline{AD} \perp \overline{MN}$
 점 N은 모서리 BC의 중점이므로 직각삼각형 ABN
 에서
 $\overline{AN} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$
 따라서 직각삼각형 ANM에서
 $\overline{MN} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$



206 ㉠ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\overline{CG} \perp$ (평면 ABCD)이므로
 $\overline{CG} \perp \overline{BD}$
 사각형 ABCD는 정사각형이
 므로
 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$
 $\therefore \overline{BD} \perp$ (평면 AGC)
 이때 $\overline{BD} \perp \overline{PQ}$ 이므로 선분 PQ는 평면 AGC에 속한
 다.
 즉, 점 P는 선분 BD 위의 점이면서 평면 AGC 위의
 점이므로 두 대각선 AC, BD의 교점이다.
 $\therefore \overline{AP} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$



한편 $\angle CAG = \theta$ 라 하면 $\overline{AG} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$
 이므로 직각삼각형 AGC에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{CG}}{\overline{AG}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 직각삼각형 PAQ에서

$$\overline{PQ} = \overline{AP} \sin \theta = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

| 다른 풀이 |

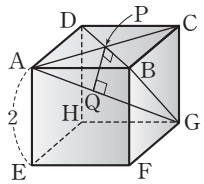
$$\overline{AP} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2},$$

$$\overline{AG} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3} \text{ 이}$$

므로 삼각형 AGP의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \overline{PQ}$$

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



연습문제

114~115쪽

207 ㉠ ④

④ 평행하지도 않고 만나지도 않는, 즉 꼬인 위치에
 있는 두 직선은 한 평면을 결정할 수 없다.

208 ㉠ 4

모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는 모서리
 CD, 모서리 CF, 모서리 DE, 모서리 EF의 4개이다.

209 ㉠ ⑤

④ 모서리를 포함하는 직선 중 직선 BF와 꼬인 위치
 에 있는 것은 직선 AD, 직선 CD, 직선 EH, 직선
 GH의 4개이다.

⑤ 모서리를 포함하는 직선 중 평면 ABCD와 평행한
 것은 직선 EF, 직선 EH, 직선 FG, 직선 GH의
 4개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

210 ㉠ 60°

$\overline{CD} \parallel \overline{BE}$ 이므로 직선 AB와 직선 CD가 이루는 각의
 크기는 직선 AB와 직선 BE가 이루는 각의 크기와
 같다.

이때 삼각형 ABE는 정삼각형이므로

$$\angle ABE = 60^\circ$$

따라서 구하는 각의 크기는 60° 이다.

211 ㉮ 5

- (i) 두 직선 BD, EG는 꼬인 위치에 있으므로 한 평면을 만들 수 없다.
- (ii) 세 점 A, C, F로 만들 수 있는 평면은 평면 AFC
- (iii) 직선 BD와 세 점 A, C, F로 만들 수 있는 평면은 평면 ABD, 평면 BCD, 평면 BDF
그런데 네 점 A, B, C, D는 한 평면 위에 있으므로 평면 ABD와 평면 BCD는 같은 평면이다.
- (iv) 직선 EG와 세 점 A, C, F로 만들 수 있는 평면은 평면 AEG, 평면 CEG, 평면 EFG
그런데 네 점 A, C, E, G는 한 평면 위에 있으므로 평면 AEG와 평면 CEG는 같은 평면이다.

▶▶▶▶▶ ①

따라서 구하는 서로 다른 평면의 개수는

$$1 + (3-1) + (3-1) = 5$$

▶▶▶▶▶ ②

단계	채점 기준	비율
①	세 점 A, C, F와 두 직선 BD, EG로 만들 수 있는 평면 구하기	80%
②	서로 다른 평면의 개수 구하기	20%

212 ㉮ 10

공간에서 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 한 평면을 결정한다.

따라서 서로 다른 다섯 개의 점으로 만들 수 있는 서로 다른 평면의 개수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

213 ㉮ 16

직선 AG와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 BC, 직선 CD, 직선 DE, 직선 EF, 직선 HI, 직선 IJ, 직선 JK, 직선 KL의 8개이다.

$$\therefore a=8$$

직선 BC와 평행한 평면은 평면 EFLK, 평면 GHIJKL의 2개이다.

$$\therefore b=2$$

$$\therefore ab=16$$

214 ㉮ ㄱ, ㄷ

ㄱ. 직선 AC와 직선 PQ는 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 꼬인 위치에 있다.

- ㄴ. 두 점 P, Q가 각각 두 삼각형 ABC, ACD의 무게중심이므로 오른쪽 그림과 같이 모서리 AC의 중점을 M이라 하면

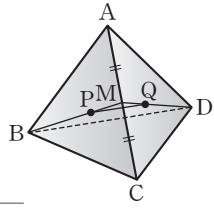
$$\overline{BP} : \overline{PM} = 2 : 1, \overline{DQ} : \overline{QM} = 2 : 1$$

$$\text{따라서 } \overline{BP} : \overline{PM} = \overline{DQ} : \overline{QM} \text{이므로}$$

$$\overline{BD} \parallel \overline{PQ}$$

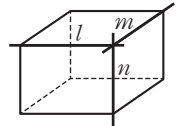
- ㄷ. 직선 PQ는 평면 BCD와 만나지 않으므로 평행하다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

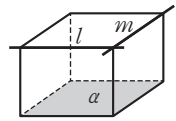


215 ㉮ ㄷ

- ㄱ. [반례] 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $l \perp n$, $m \perp n$ 이지만 $l \not\perp m$ 이다.



- ㄴ. [반례] 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $l \perp m$, $l \parallel \alpha$ 이지만 $m \not\parallel \alpha$ 이다.



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

216 ㉮ $\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\overline{DF} \parallel \overline{AC}$ 이므로 직선 CE와 직선 DF가 이루는 각의 크기는 직선 CE와 직선 AC가 이루는 각의 크기와 같다. $\therefore \angle ACE = \theta$

▶▶▶▶▶ ①

주어진 삼각기둥의 한 모서리의 길이를 a 라 하면 삼각형 AEC는 $\overline{AE} = \overline{CE} = \sqrt{2}a$ 인 이등변삼각형이다.

▶▶▶▶▶ ②

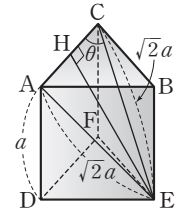
오른쪽 그림과 같이 점 E에서 모서리 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} a$$

따라서 직각삼각형 CHE에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{CH}}{\overline{CE}} = \frac{\frac{1}{2} a}{\sqrt{2} a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

▶▶▶▶▶ ③



단계	채점 기준	비율
①	$\angle ACE = \theta$ 임을 알기	30%
②	삼각형 AEC가 이등변삼각형임을 알기	20%
③	$\cos \theta$ 의 값 구하기	50%

1 접근 방법 | 평행한 선분을 이용하여 사각형 PQRS가 어떤 사각형인지 파악하고, 평행선 사이의 선분의 길이의 비를 이용하여 사각형 PQRS의 변의 길이를 구한다.

$$\overline{PQ} \parallel \overline{AC}, \overline{AC} \parallel \overline{SR} \text{이므로 } \overline{PQ} \parallel \overline{SR}$$

$$\overline{PS} \parallel \overline{BD}, \overline{BD} \parallel \overline{QR} \text{이므로 } \overline{PS} \parallel \overline{QR}$$

즉, 사각형 PQRS는 평행사변형이다.

$$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n \quad (m > 0, n > 0) \text{이라 하면}$$

$$\overline{PQ} \parallel \overline{AC} \text{이므로 } \overline{PQ} : \overline{AC} = n : (m+n)$$

$$\therefore \overline{PQ} = \frac{n}{m+n} \overline{AC} = \frac{8n}{m+n}$$

$$\text{또 } \overline{PS} \parallel \overline{BD} \text{이므로 } \overline{PS} : \overline{BD} = m : (m+n)$$

$$\therefore \overline{PS} = \frac{m}{m+n} \overline{BD} = \frac{8m}{m+n}$$

따라서 구하는 사각형 PQRS의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} 2(\overline{PQ} + \overline{PS}) &= 2\left(\frac{8n}{m+n} + \frac{8m}{m+n}\right) \\ &= 2 \times \frac{8(m+n)}{m+n} = 16 \end{aligned}$$

$$218 \text{ ㉠ (1) } 4\sqrt{10} \quad (2) \frac{32\sqrt{5}}{3}$$

1 접근 방법 | 이등변삼각형의 성질을 이용하여 직선과 평면의 수직 관계를 파악한다.

(1) 두 삼각형 ABC, DBC는 이등변삼각형이므로

$$\overline{AM} \perp \overline{BC}, \overline{DM} \perp \overline{BC} \quad \therefore \overline{BC} \perp (\text{평면 AMD})$$

$$\text{이때 } \overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 2\sqrt{2} \text{이므로 직각삼각형 ABM}$$

$$\text{에서 } \overline{AM} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{7}$$

한편 점 M에서 모서리

AD에 내린 수선의 발

을 N이라 하면 삼각형

AMD는 $\overline{AM} = \overline{DM}$ 인

이등변삼각형이므로

$$\overline{AN} = \frac{1}{2} \overline{AD} = 2\sqrt{2}$$

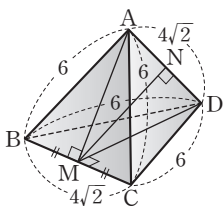
직각삼각형 AMN에서

$$\overline{MN} = \sqrt{(2\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \triangle AMD = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{10}$$

(2) 주어진 사면체의 부피는 삼각형 AMD를 밑면으로 하고 높이가 선분 BM인 삼각뿔의 부피의 2배이므로

$$2 \times \left(\frac{1}{3} \times 4\sqrt{10} \times 2\sqrt{2} \right) = \frac{32\sqrt{5}}{3}$$



02 삼수선 정리와 정사영

개념 확인

119쪽

$$219 \text{ ㉠ (가) } \frac{1}{2} \quad (\text{나}) 60$$

$$220 \text{ ㉠ (1) } 90^\circ \quad (2) 45^\circ$$

(1) $\overline{AB} \perp \overline{AD}$, $\overline{AB} \perp \overline{AE}$ 이므로 평면 ABCD와 평면 AEFB가 이루는 각의 크기는 $\angle DAE$ 의 크기와 같다.

이때 $\angle DAE = 90^\circ$ 이므로 평면 ABCD와 평면 AEFB가 이루는 각의 크기는 90° 이다.

(2) $\overline{CG} \perp \overline{AC}$, $\overline{CG} \perp \overline{BC}$ 이므로 평면 AEGC와 평면 BFGC가 이루는 각의 크기는 $\angle ACB$ 의 크기와 같다.

이때 $\angle ACB = 45^\circ$ 이므로 평면 AEGC와 평면 BFGC가 이루는 각의 크기는 45° 이다.

$$221 \text{ ㉠ } \frac{3}{5}$$

$\overline{FG} \perp \overline{AF}$, $\overline{FG} \perp \overline{BF}$ 이므로 평면 AFGD와 평면 BFGC가 이루는 각의 크기는 $\angle AFB$ 의 크기와 같다.

$$\therefore \angle AFB = \theta$$

이때 $\overline{AF} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이므로 직각삼각형 AFB에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{BF}}{\overline{AF}} = \frac{3}{5}$$

유제

121~123쪽

$$222 \text{ ㉠ } 2\sqrt{3}$$

오른쪽 그림과 같이 선분

PH를 그으면 직각삼각형

PHO에서

$$\overline{PH} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$$

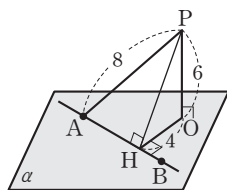
이때 $\overline{PO} \perp \alpha$ 이고

$\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{PH} \perp \overline{AB}$$

따라서 직각삼각형 PAH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{13})^2} = 2\sqrt{3}$$



223 ㉓ ①

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 I라 하고 선분 EI를 그으면

$\overline{AE} \perp$ (평면 EFGH),

$\overline{AI} \perp \overline{FH}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{EI} \perp \overline{FH}$

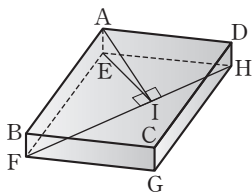
이때 $\overline{FH} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$ 이므로 직각삼각형 EFH의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times 5\sqrt{5} \times \overline{EI} = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 \quad \therefore \overline{EI} = 2\sqrt{5}$$

따라서 직각삼각형 AEI에서

$$\overline{AI} = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{21}$$

즉, 점 A와 직선 FH 사이의 거리는 $\sqrt{21}$ 이다.



224 ㉓ 4

오른쪽 그림과 같이 선분 PH를 그으면 $\overline{PO} \perp \alpha$ 이고

$\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

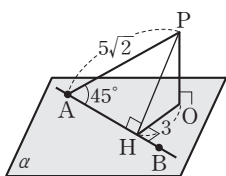
$\overline{PH} \perp \overline{AB}$

이때 직각삼각형 PAH에서

$$\overline{PH} = \overline{AP} \sin 45^\circ = 5\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$$

따라서 직각삼각형 PHO에서

$$\overline{PO} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$



225 ㉓ 1

오른쪽 그림과 같이 선분 DH를 그으면

$\overline{AD} \perp$ (평면 BCD),

$\overline{AH} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

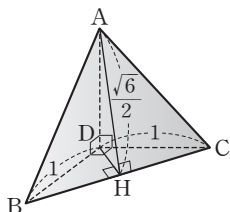
$\overline{DH} \perp \overline{BC}$

이때 $\overline{BC} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ 이므로 직각삼각형 BCD의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \overline{DH} = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \quad \therefore \overline{DH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 직각삼각형 ADH에서

$$\overline{AD} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$



226 ㉓ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H, 점 A에서 모서리 CD에 내린 수선의 발을 M이라 하고 선분 HM을

그으면 $\overline{AH} \perp$ (평면 BCDE), $\overline{AM} \perp \overline{CD}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{HM} \perp \overline{CD}$

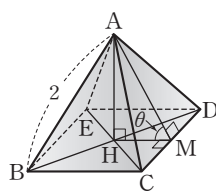
즉, 평면 ACD와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기는 선분 AM과 선분 HM이 이루는 각의 크기와 같으므로 $\angle AMH = \theta$

이때 정삼각형 ACD에서 $\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$

또 정사각형 BCDE에서 점 H는 두 대각선의 교점이므로 $\overline{HM} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

따라서 직각삼각형 AHM에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{HM}}{\overline{AM}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



227 ㉓ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 M이라 하고 선분 GM을 그으면

$\overline{CG} \perp$ (평면 EFGH),

$\overline{CM} \perp \overline{FH}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{GM} \perp \overline{FH}$

즉, 평면 CHF와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 선분 CM과 선분 GM이 이루는 각의 크기와 같으므로 $\angle CMG = \theta$

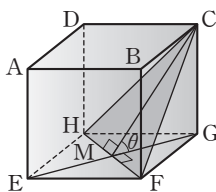
이때 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면 정사각형 EFGH에서 점 M은 두 대각선의 교점이므로

$$\overline{GM} = \frac{1}{2} \overline{GE} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

직각삼각형 CMG에서

$$\overline{CM} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{GM}}{\overline{CM}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{6}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



228 ㉡ 60°

$\overline{FG} \perp \overline{AF}$, $\overline{FG} \perp \overline{EF}$ 이므로 평면 AFGD와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 선분 AF와 선분 EF가 이루는 각의 크기와 같다.

즉, 평면 AFGD와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\angle AFE = \theta$

이때 $\overline{AF} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$ 이므로 직각삼각형 AEF에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{EF}}{\overline{AF}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = 60^\circ$$

따라서 구하는 각의 크기는 60°이다.

229 ㉡ $2\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 점

A에서 평면 BCDE에

내린 수선의 발을 H,

점 A에서 선분 CD에

내린 수선의 발을 M이라 하고 선분 HM을 그으면

$\overline{AH} \perp$ (평면 BCDE), $\overline{AM} \perp \overline{CD}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{HM} \perp \overline{CD}$

즉, 평면 ACD와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기는 선분 AM과 선분 HM이 이루는 각의 크기와 같으므로 $\angle AMH = 45^\circ$

이때 정사각형 BCDE에서 점 H는 두 대각선의 교점이므로

$$\overline{HM} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

직각삼각형 AHM에서

$$\overline{AM} = \frac{\overline{HM}}{\cos 45^\circ} = 2 \times \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}$$

한편 이등변삼각형 ACD에서 점 M은 선분 CD의 중점이므로

$$\overline{CM} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

따라서 직각삼각형 ACM에서

$$\overline{AC} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$$

개념 확인

127쪽

230 ㉡ (1) 점 D (2) 점 E (3) 선분 EG

(4) 삼각형 BCA

231 ㉡ (1) $5\sqrt{3}$ (2) 8 (3) 45°

$$(1) \overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 30^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$(2) 4 = \overline{AB} \cos 60^\circ \text{에서 } 4 = \overline{AB} \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore \overline{AB} = 8$$

$$(3) 3\sqrt{2} = 6 \cos \theta \text{에서 } \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

232 ㉡ (1) 5 (2) $6\sqrt{3}$ (3) 60°

$$(1) S' = S \cos 45^\circ = 5\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5$$

$$(2) 9 = S \cos 30^\circ \text{에서 } 9 = S \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore S = 6\sqrt{3}$$

$$(3) 7 = 14 \cos \theta \text{에서 } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

유제

129~133쪽

233 ㉡ $3\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 점 C

에서 선분 BD에 내린 수

선의 발을 M이라 하면

$\overline{CM} \perp$ (평면 BDHF)

즉, 선분 CF의 평면

BDHF 위로의 정사영은 선분 MF이다.

이때 이등변삼각형 BCD에서 점 M은 선분 BD의 중점이므로

$$\overline{MB} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

직각삼각형 MFB에서

$$\overline{MF} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{3}$$

따라서 구하는 정사영의 길이는 $3\sqrt{3}$ 이다.

234 ㉡ $12\sqrt{3}$

단면인 타원의 장축의 밑면을 포함한 평면 위로의 정사영은 밑면인 원의 지름이다.

따라서 타원의 장축의 길이를 l 이라 하면

$$l \cos 30^\circ = 2 \times 9$$

$$l \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18 \quad \therefore l = 12\sqrt{3}$$

235 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

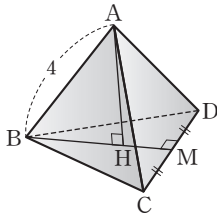
오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 선분 AB의 평면 BCD 위로의 정사영은 선분 BH이다.

선분 CD의 중점을 M이라 하면 정삼각형 BCD에서

$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

이때 점 H는 정삼각형 BCD의 무게중심이므로

$$\overline{BH} = \frac{2}{3} \overline{BM} = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$



236 $12 + 6\sqrt{2}$

두 직선 AB, CD와 평면 β 가 이루는 각의 크기는 각각 45° 이므로

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 45^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\overline{C'D'} = \overline{CD} \cos 45^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$\overline{BC} \parallel \beta$, $\overline{AD} \parallel \beta$ 이므로 두 직선 BC, AD와 평면 β 가 이루는 각의 크기는 각각 0° 이다.

$$\therefore \overline{B'C'} = \overline{BC} \cos 0^\circ = 6 \times 1 = 6,$$

$$\overline{A'D'} = \overline{AD} \cos 0^\circ = 6 \times 1 = 6$$

따라서 사각형 A'B'C'D'의 둘레의 길이는

$$\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \overline{A'D'} = 3\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{2} + 6 = 12 + 6\sqrt{2}$$

237 18

단면인 사각형의 사각기둥의 밑면을 포함한 평면 위로의 정사영은 사각기둥의 밑면이다.

단면인 사각형의 넓이를 S라 하면 사각기둥의 밑면의 넓이는 $3^2 = 9$ 이므로

$$S \cos 60^\circ = 9, S \times \frac{1}{2} = 9 \quad \therefore S = 18$$

238 $8\sqrt{6}$

한 변의 길이가 8인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 = 16\sqrt{3}$$

따라서 이 정삼각형의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는

$$16\sqrt{3} \cos 45^\circ = 16\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{6}$$

239 $6\sqrt{3}\pi$

오른쪽 그림과 같이 밑면과 30° 의 각을 이루는 평면으로 자른 단면은 원이다.

단면인 원의 지름을 선분

BC라 하고, 점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OBC는 $\overline{OB} = \overline{OC} = 4$ 인 이등변삼각형이므로

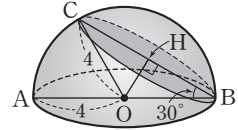
$$\overline{BH} = \overline{CH}$$

직각삼각형 OBH에서

$$\overline{BH} = \overline{OB} \cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

따라서 단면인 원의 넓이가 $\pi \times (2\sqrt{3})^2 = 12\pi$ 이므로 구하는 정사영의 넓이는

$$12\pi \cos 30^\circ = 12\pi \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}\pi$$



240 $2\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 구와 입체도형이 접하는 점들을 연결하면 구와 반지름의 길이가 같은 원이 된다.

이 원을 밑면과 한 점에서 만나도록 평행이동하면 이 원과 밑면이 이루는 각의 크기는 30° 이다.

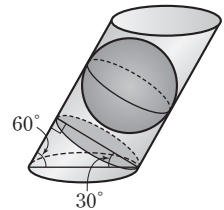
이 원을 포함하는 평면을 α 라 하면 밑면인 타원의 평면 α 위로의 정사영은 이 원이므로 그 넓이는

$$8\sqrt{3}\pi \cos 30^\circ = 8\sqrt{3}\pi \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\pi$$

이때 구의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\pi r^2 = 12\pi, r^2 = 12 \quad \therefore r = 2\sqrt{3} (\because r > 0)$$

따라서 구하는 구의 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다.



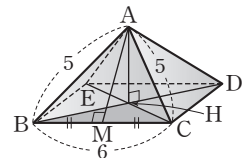
241 (1) 9 (2) $\frac{3}{4}$

(1) 오른쪽 그림과 같이 점

A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC의 평면 BCDE 위로의 정사영은 삼각형 HBC이다.

이때 점 H는 정사각형 BCDE의 두 대각선의 교점이므로 구하는 정사영의 넓이는

$$\triangle HBC = \frac{1}{4} \square BCDE = \frac{1}{4} \times 6^2 = 9$$



(2) 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$ 인 이등변삼각형이므로
점 A에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 M이라
하면

$$\overline{BM}=\overline{CM}=3$$

$$\text{직각삼각형 ABM에서 } \overline{AM}=\sqrt{5^2-3^2}=4$$

$$\therefore \triangle ABC=\frac{1}{2} \times 6 \times 4=12$$

$$\text{따라서 } \triangle HBC=\triangle ABC \cos \theta \text{이므로}$$

$$9=12 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta=\frac{3}{4}$$

242 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 삼각형
BDE의 평면 EFGH 위로
의 정사영은 삼각형 FHE이
므로

$$\triangle FHE=\triangle BDE \cos \theta$$

한편

$\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EB}=\sqrt{6^2+6^2}=6\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 BDE
는 정삼각형이다.

$$\therefore \triangle BDE=\frac{\sqrt{3}}{4} \times (6\sqrt{2})^2=18\sqrt{3}$$

$$\text{이때 } \triangle FHE=\frac{1}{2} \times 6 \times 6=18 \text{이므로}$$

$$18=18\sqrt{3} \cos \theta \quad \therefore \cos \theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

243 $\frac{\sqrt{6}}{6}$

오른쪽 그림과 같이 점 M에
서 모서리 AB에 내린 수선의
발을 P라 하면 사각형
AMGN의 평면 ABCD 위
로의 정사영은 사각형 APCN
이므로

$$\square APCN=\square AMGN \cos \theta$$

한편 $\overline{AM}=\overline{MG}=\overline{GN}=\overline{NA}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$ 이므
로 사각형 AMGN은 마름모이다.

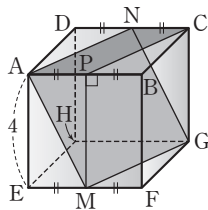
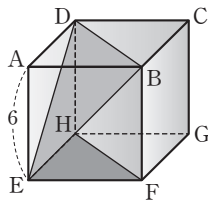
$$\text{이때 } \overline{AG}=\sqrt{4^2+4^2+4^2}=4\sqrt{3},$$

$$\overline{MN}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\square AMGN=\frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 4\sqrt{2}=8\sqrt{6}$$

$$\text{이때 } \square APCN=2 \times 4=8 \text{이므로}$$

$$8=8\sqrt{6} \cos \theta \quad \therefore \cos \theta=\frac{\sqrt{6}}{6}$$



244 $\frac{9\sqrt{10}}{5}$

평면 ABCD와 평면

AMND가 이루는 각의

크기는 직선 AB와 직선

AM이 이루는 각의 크기

와 같으므로 평면 ABCD

와 평면 AMND가 이루

는 각의 크기를 θ 라 하면

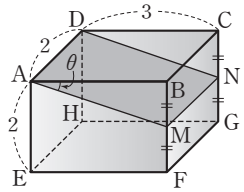
$$\angle BAM=\theta$$

직각삼각형 AMB에서

$$\overline{AM}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10} \quad \therefore \cos \theta=\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

이때 $\square ABCD=2 \times 3=6$ 이므로 구하는 정사영의 넓
이는

$$\square ABCD \cos \theta=6 \times \frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{9\sqrt{10}}{5}$$



연습문제

134~136쪽

245 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 선분

PH를 그으면 직각삼각형

PHO에서

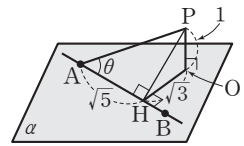
$$\overline{PH}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$$

이때 $\overline{PO} \perp \alpha$ 이고 $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의
하여

$$\overline{PH} \perp \overline{AB}$$

따라서 직각삼각형 PAH에서

$$\overline{PA}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3 \quad \therefore \cos \theta=\frac{\overline{AH}}{\overline{PA}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$



246 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

오른쪽 그림과 같이 점 M에

서 모서리 EF에 내린 수선의

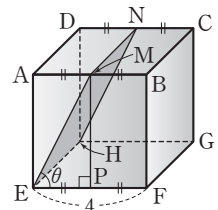
발을 P라 하면

$$\overline{ME} \perp \overline{HE}, \overline{EP} \perp \overline{HE}$$

즉, 평면 MEHN과 평면

EFGH가 이루는 각의 크기

는 직선 ME와 직선 EP가 이루는 각의 크기와 같으
므로 $\angle MEP=\theta$



따라서 직각삼각형 MEP에서

$$\overline{ME} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{EP}}{\overline{ME}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

247 ㉮ 6√3

도형 F'의 넓이는 3²=9

따라서 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기가 30°이므로

도형 F의 넓이를 S라 하면

$$9 = S \cos 30^\circ, 9 = S \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore S = 6\sqrt{3}$$

248 ㉮ ②

오른쪽 그림과 같이 점 P

에서 선분 AB에 내린 수

선의 발을 H라 하고 선분

CH를 그으면 $\overline{PC} \perp \alpha$,

$\overline{PH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{CH} \perp \overline{AB}$

이때 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 6$ 이고 넓이가 12이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times \overline{CH} = 12 \quad \therefore \overline{CH} = 4$$

직각삼각형 PHC에서

$$\overline{PH} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

따라서 점 P와 직선 AB 사이의 거리는 $2\sqrt{5}$ 이다.

249 ㉮ $\frac{\sqrt{3}}{4}$

오른쪽 그림과 같이 직선 l

위의 점 A에서 교선 XY

에 내린 수선의 발을 B라

하고 점 B에서 직선 m에

내린 수선의 발을 C라 하

면 $\overline{AB} \perp \beta$, $\overline{BC} \perp m$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{AC} \perp m$

이때 $\overline{PA} = a$ 라 하면 직각삼각형 APB에서

$$\overline{PB} = \overline{PA} \cos 30^\circ = a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

또 직각삼각형 BPC에서

$$\overline{PC} = \overline{PB} \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a$$

이때 $\angle APC = \theta$ 이므로 직각삼각형 APC에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{PC}}{\overline{PA}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

250 ㉮ $3\sqrt{5}$

오른쪽 그림과 같이 선분 HI

를 그으면

$\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH),

$\overline{DI} \perp \overline{EM}$ 이므로 삼수선 정

리에 의하여

$\overline{HI} \perp \overline{EM}$ ▶▶▶▶▶ ①

이때 직각삼각형 EFM에서

$$\overline{EM} = \sqrt{5^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

직각삼각형 EMH의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \frac{5\sqrt{5}}{2} \times \overline{HI} = \frac{1}{2} \times 5 \times 5$$

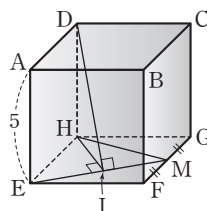
$$\therefore \overline{HI} = 2\sqrt{5}$$

▶▶▶▶▶ ②

따라서 직각삼각형 DHI에서

$$\overline{DI} = \sqrt{5^2 + (2\sqrt{5})^2} = 3\sqrt{5}$$

▶▶▶▶▶ ③



단계	채점 기준	비율
①	$\overline{HI} \perp \overline{EM}$ 임을 알기	40%
②	선분 HI의 길이 구하기	40%
③	선분 DI의 길이 구하기	20%

251 ㉮ 3

오른쪽 그림과 같이 점 M에

서 평면 EFGH에 내린 수선

의 발을 I, 선분 EG에 내린

수선의 발을 J라 하고 선분 IJ

를 그으면

$\overline{MI} \perp$ (평면 EFGH),

$\overline{MJ} \perp \overline{EG}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{IJ} \perp \overline{EG}$

이때 $\overline{EG} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 IEG의 넓

이에서

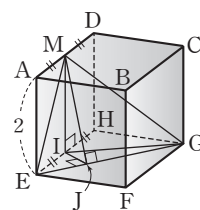
$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \overline{IJ} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2$$

$$\therefore \overline{IJ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

직각삼각형 MIJ에서

$$\overline{MJ} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \triangle MEG = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} = 3$$



252 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 모서리 BC의 중점을 N이라 하면

$$\overline{MN} \perp \overline{BC}, \overline{DN} \perp \overline{BC}$$

즉, 평면 BCM과 평면

BCD가 이루는 각의 크기는

선분 MN과 선분 DN이 이

루는 각의 크기와 같으므로 $\angle MND = \theta$

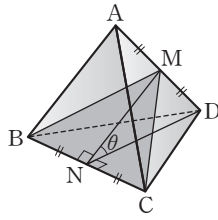
이때 정사면체의 한 모서리의 길이를 $2a$ 라 하면

$$\overline{DN} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a = \sqrt{3}a$$

또 $\overline{MD} = a$ 이므로 직각삼각형 MND에서

$$\overline{MN} = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 - a^2} = \sqrt{2}a$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{MN}}{\overline{DN}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



253 $\frac{2}{3}$

평면 FGH와 평면 BEG가 이루는 각의 크기는 평면 EFGH와 평면 BEG가 이루는 각의 크기와 같다.

오른쪽 그림과 같이 점

B에서 선분 EG에 내린

수선의 발을 P라 하고 선

분 PF를 그으면

$$\overline{BF} \perp (\text{평면 EFGH}),$$

$$\overline{BP} \perp \overline{EG} \text{이므로 삼수선 정리에 의하여}$$

$$\overline{PF} \perp \overline{EG}$$

즉, 평면 FGH와 평면 BEG가 이루는 각의 크기는

선분 PF와 선분 BP가 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle BPF = \theta$$

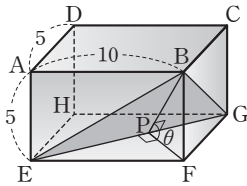
이때 $\overline{EG} = \sqrt{10^2 + 5^2} = 5\sqrt{5}$ 이므로 직각삼각형 EFG의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times 5\sqrt{5} \times \overline{PF} = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 \quad \therefore \overline{PF} = 2\sqrt{5}$$

따라서 직각삼각형 BPF에서

$$\overline{BP} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 + 5^2} = 3\sqrt{5}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{PF}}{\overline{BP}} = \frac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{3}$$



254 2

선분 DF의 평면 ABCD 위로의 정사영은 선분 DB

이므로 $\angle FDB = \alpha$

$$\overline{DF} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{10},$$

$$\overline{DB} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2} = 3 \text{이므로}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{DB}}{\overline{DF}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \quad \text{..... ①}$$

선분 DF의 평면 AEFB 위로의 정사영은 선분 AF

이므로 $\angle DFA = \beta$

$$\overline{AF} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{5})^2} = \sqrt{6} \text{이므로}$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{AF}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{15}}{5} \quad \text{..... ②}$$

선분 DF의 평면 AEHD 위로의 정사영은 선분 DE

이므로 $\angle FDE = \gamma$

$$\overline{DE} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\cos \gamma = \frac{\overline{DE}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{..... ③}$$

$$\therefore \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$$

$$= \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 \quad \text{..... ④}$$

단계	채점 기준	비율
①	$\cos \alpha$ 의 값 구하기	30 %
②	$\cos \beta$ 의 값 구하기	30 %
③	$\cos \gamma$ 의 값 구하기	30 %
④	$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma$ 의 값 구하기	10 %

255 $\frac{5\sqrt{13}}{2}$

오른쪽 그림과 같이 점

A에서 두 평면의 교선

에 내린 수선의 발을 H,

평면 β 에 내린 수선의

발을 A'이라 하고 선분

A'H를 그으면 $\overline{AA'} \perp \beta$, $\overline{AH} \perp \overline{BH}$ 이므로 삼수선

정리에 의하여 $\overline{A'H} \perp \overline{BH}$

직각삼각형 ABH에서

$$\overline{AH} = \overline{AB} \sin 60^\circ = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$$

$$\overline{BH} = \overline{AB} \cos 60^\circ = 10 \times \frac{1}{2} = 5$$

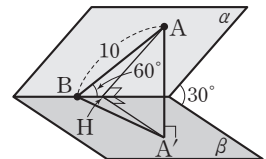
또 직각삼각형 AHA'에서

$$\overline{A'H} = \overline{AH} \cos 30^\circ = 5\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2}$$

이때 선분 AB의 평면 β 위로의 정사영은 선분 A'B

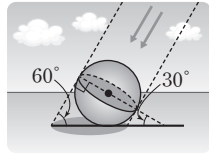
이므로 직각삼각형 BA'H에서

$$\overline{A'B} = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 5^2} = \frac{5\sqrt{13}}{2}$$



256 $\boxed{96\sqrt{3}\pi \text{ cm}^2}$

오른쪽 그림과 같이 태양 광선과 수직이고 공의 중심을 지나는 평면이 지면과 이루는 각의 크기는 30° 이다.



이때 공의 중심을 지나는 단면의 넓이는 $\pi \times 12^2 = 144\pi \text{ (cm}^2\text{)}$ 이므로 공의 그림자의 넓이를 $S \text{ cm}^2$ 라 하면

$$144\pi = S \cos 30^\circ, 144\pi = S \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

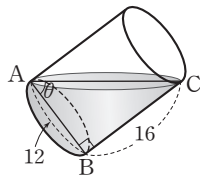
$$\therefore S = 96\sqrt{3}\pi$$

따라서 구하는 그림자의 넓이는 $96\sqrt{3}\pi \text{ cm}^2$ 이다.

[참고] 빛과 수직인 평면 α 위에 도형 A 가 있을 때, 도형 A 의 그림자를 B 라 하면 그림자 B 의 평면 α 위로의 정사영이 도형 A 임을 이용한다.

257 $\boxed{60\pi}$

오른쪽 그림과 같이 밑면의 지름의 양 끝 점을 각각 A, B 라 하고 수면의 장축의 양 끝 점 중 A 가 아닌 점을 C 라 하면



$$\overline{AC} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$$

이때 수면이 밑면과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

한편 수면의 원기둥의 밑면을 포함한 평면 위로의 정사영은 원기둥의 밑면인 원이고 밑면인 원의 넓이는 $\pi \times 6^2 = 36\pi$ 이므로 수면의 넓이를 S 라 하면

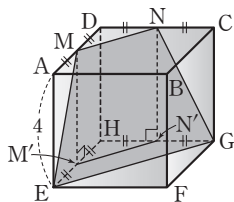
$$S \cos \theta = 36\pi, S \times \frac{3}{5} = 36\pi$$

$$\therefore S = 60\pi$$

따라서 수면의 넓이는 60π 이다.

258 $\boxed{\frac{1}{3}}$

오른쪽 그림과 같이 점 M 에서 모서리 EH 에 내린 수선의 발을 M' , 점 N 에서 모서리 HG 에 내린 수선의 발을 N' 이라 하면 사각형 $MEGN$ 의 평면



$EFGH$ 위로의 정사영은 사각형 $M'EGN'$ 이므로

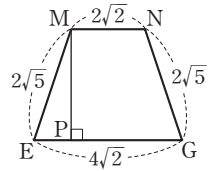
$$\square M'EGN' = \square MEGN \cos \theta \quad \text{▶▶▶▶▶ ①}$$

$$\overline{MN} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\overline{ME} = \overline{NG} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5},$$

$\overline{EG} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ 이고, $\overline{MN} \parallel \overline{EG}$ 이므로 사각형 $MEGN$ 은 등변사다리꼴이다.

오른쪽 그림과 같이 점 M 에서 선분 EG 에 내린 수선의 발을 P 라 하면



$$\overline{EP} = \sqrt{2}$$

직각삼각형 EPM 에서

$$\overline{MP} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\therefore \square MEGN = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) \times 3\sqrt{2} = 18$$

한편

$$\square M'EGN' = \triangle EGH - \triangle M'N'H$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 6 \quad \text{▶▶▶▶▶ ②}$$

따라서 $6 = 18 \cos \theta$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{1}{3} \quad \text{▶▶▶▶▶ ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	$\square M'EGN' = \square MEGN \cos \theta$ 임을 알기	30 %
②	두 사각형 $MEGN, M'EGN'$ 의 넓이 구하기	50 %
③	$\cos \theta$ 의 값 구하기	20 %

259 $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{4}}$

두 평면 ABC, BCD 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 삼각형 ABC 의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 GBC 이므로

$$\triangle GBC = \triangle ABC \cos \theta$$

삼각형 ABC 는 한 변의 길이가 3인 정삼각형이므로

$$\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

점 G 는 삼각형 BCD 의 무게중심이므로

$$\triangle GBC = \frac{1}{3} \triangle BCD = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{즉, } \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \cos \theta \text{이므로 } \cos \theta = \frac{1}{3}$$

따라서 삼각형 GBC 의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle GBC \cos \theta = \frac{3\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

| 접근 방법 | 삼수선 정리와 삼각형의 넓이를 이용하여 선분의 길이를 구한다.

오른쪽 그림과 같이 점 H에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 R라 하면

$\overline{AH} \perp (\text{평면 BCD}),$

$\overline{HR} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선 정

리에 의하여

$\overline{AR} \perp \overline{BC}$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 32이므로

$$\frac{1}{2} \times 8 \times \overline{AR} = 32 \quad \therefore \overline{AR} = 8$$

또 $\triangle BCH = \frac{1}{2} \triangle BCD$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 8 \times \overline{HR} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 8 \right) \quad \therefore \overline{HR} = 4$$

즉, 직각삼각형 ARH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$$

한편 $\overline{BD} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$ 이므로 직각이등변삼각형 BCD에서

$$\overline{HC} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \triangle AHC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{6}$$

261 ㉮ $90\sqrt{3} + 18\pi$

| 접근 방법 | 원기둥의 지면 위로의 정사영은 직사각형 부분과 밑면의 반인 반원 부분으로 나누어 생각한다.

오른쪽 그림과 같이 원

기둥의 지면 위로의 정

사영 중 직사각형 부분

의 넓이를 S_1 , 원기둥

의 한 밑면의 반인 반

원의 정사영의 넓이를

S_2 라 하면 원기둥의 지면 위로의 정사영의 넓이는 $S_1 + 2S_2$ 이다.

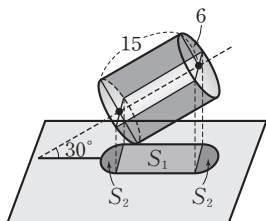
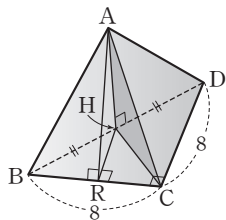
이때 원기둥이 지면과 30° 의 각을 이루므로 원기둥의 밑면은 지면과 60° 의 각을 이룬다.

$$\therefore S_1 = (12 \times 15) \times \cos 30^\circ = 180 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 90\sqrt{3},$$

$$S_2 = \left(\frac{1}{2} \times \pi \times 6^2 \right) \times \cos 60^\circ = 18\pi \times \frac{1}{2} = 9\pi$$

따라서 구하는 그림자의 넓이는

$$90\sqrt{3} + 2 \times 9\pi = 90\sqrt{3} + 18\pi$$



01 공간에서 점의 좌표

개념 확인

141쪽

262 ㉮ (1) $P(2, 0, 4), Q(2, 6, 0), R(0, 6, 4)$

(2) $P(0, -5, 4), Q(-3, -5, 0),$

$R(0, 0, 4)$

263 ㉮ (1) $(5, 0, 0)$ (2) $(0, 0, 2)$

(3) $(0, -4, 2)$ (4) $(5, 0, 2)$

264 ㉮ (1) $(3, 1, 2)$ (2) $(-3, 1, 2)$

(3) $(-3, -1, -2)$ (4) $(3, -1, 2)$

265 ㉮ (1) $\sqrt{33}$ (2) 7

$$(1) \overline{AB} = \sqrt{(4-3)^2 + (1+3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{33}$$

$$(2) \overline{OA} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + 3^2} = 7$$

유제

143~151쪽

266 ㉮ $(-2, -5, 3)$

점 $P(2, -5, -3)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(-2, 5, 3)$

점 $Q(-2, 5, 3)$ 을 zx 평면에 대하여 대칭이동한 점 R의 좌표는 $(-2, -5, 3)$

267 ㉮ -3

점 $P(3, a, b)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점 Q의 좌표는 $(3, -a, -b)$

점 $Q(3, -a, -b)$ 에서 yz 평면에 내린 수선의 발 R의 좌표는 $(0, -a, -b)$

이 점이 점 $R(c, 7, -4)$ 와 일치하므로

$$0=c, -a=7, -b=-4$$

$$\therefore a=-7, b=4, c=0$$

$$\therefore a+b+c=-3$$

268 ㉮ $a=1, b=-1, c=-4$

점 $A(a, b, 4)$ 를 z 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a, -b, 4)$ ㉠

점 $B(a-2, 2b+3, c)$ 를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(a-2, 2b+3, -c)$ ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$$-a = a - 2, -b = 2b + 3, 4 = -c$$

$$\therefore a = 1, b = -1, c = -4$$

269 ㉢ -24

점 C는 점 B(2, a, 4)에서 yz평면에 내린 수선의 발
이므로 C(0, a, 4)

점 C(0, a, 4)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는
(0, -a, -4)

이 점이 점 (0, -6, b)와 일치하므로

$$-a = -6, -4 = b \quad \therefore a = 6, b = -4$$

$$\therefore ab = -24$$

270 ㉢ ⑤

점 A(3, 0, -2)를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점
B의 좌표는 (3, 0, 2)

$$\therefore \overline{BC} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + (2-2)^2} = 5$$

271 ㉢ 2√3

점 A(1, -1, -1)을 xy평면, yz평면, zx평면에 대
하여 대칭이동한 점은 각각 B(1, -1, 1),
C(-1, -1, -1), D(1, 1, -1)이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1+1)^2 + (-1-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(1+1)^2 + (1+1)^2 + (-1+1)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{DB} = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-1)^2 + (1+1)^2} = 2\sqrt{2}$$

이때 $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DB}$ 이므로 삼각형 BCD는 한 변의
길이가 $2\sqrt{2}$ 인 정삼각형이다.

따라서 삼각형 BCD의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3}$$

272 ㉢ -7

점 A(a, 2, -1)을 y축에 대하여 대칭이동한 점 P의
좌표는 (-a, 2, 1)

점 A(a, 2, -1)에서 zx평면에 내린 수선의 발 Q의
좌표는 (a, 0, -1)

이때 $\overline{PQ} = 6$ 이므로

$$\sqrt{(a+a)^2 + (-2)^2 + (-1-1)^2} = 6$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 = 7 \quad \therefore a = \pm\sqrt{7}$$

따라서 모든 a의 값의 곱은

$$-\sqrt{7} \times \sqrt{7} = -7$$

273 ㉢ √2

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-t-1)^2 + (t-1-2)^2 + (1-t)^2}$$

$$= \sqrt{3t^2 - 12t + 14}$$

$$= \sqrt{3(t-2)^2 + 2}$$

따라서 t=2일 때 선분 AB의 길이의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이
다.

274 ㉢ ②

yz축 위의 점을 P(0, a, 0)이라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(-2)^2 + a^2 + (-1)^2 = (-3)^2 + (a-2)^2$$

$$4a = 8 \quad \therefore a = 2$$

275 ㉢ 27

점 P가 yz평면 위에 있으므로 a=0

$$\therefore P(0, b, c)$$

$\overline{OP} = \overline{AP}$ 에서 $\overline{OP}^2 = \overline{AP}^2$ 이므로

$$b^2 + c^2 = (-5)^2 + (b-1)^2 + (c+2)^2$$

$$2b - 4c = 30 \quad \therefore b - 2c = 15 \quad \dots\dots ㉠$$

$\overline{OP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{OP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$b^2 + c^2 = (-1)^2 + (b+1)^2 + (c-4)^2$$

$$2b - 8c = -18 \quad \therefore b - 4c = -9 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$b = 39, c = 12$$

$$\therefore a + b - c = 0 + 39 - 12 = 27$$

276 ㉢ (7, 7, 0)

xy평면 위에 있는 직선 y=x 위의 점 P의 좌표를

(a, a, 0)이라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-1)^2 + (a-3)^2 + (-2)^2 = (a-5)^2 + (a-1)^2 + 4^2$$

$$4a = 28 \quad \therefore a = 7$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 (7, 7, 0)

277 ㉢ (1, 0, 1), (2, 0, 2)

zx평면 위의 점 C의 좌표를 (a, 0, c)라 하자.

이때 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$

$\overline{AB} = \overline{BC}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 이므로

$$(2-1)^2 + (1-1)^2 + (1-2)^2 = (a-2)^2 + (-1)^2 + (c-1)^2$$

$$\therefore a^2 + c^2 - 4a - 2c + 4 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$\overline{BC} = \overline{CA}$ 에서 $\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 이므로

$$(a-2)^2 + (-1)^2 + (c-1)^2 = (1-a)^2 + 1^2 + (2-c)^2$$

$$2a - 2c = 0 \quad \therefore c = a$$

이를 ①에 대입하여 정리하면

$$a^2 - 3a + 2 = 0, (a-1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 $a = 1$ 일 때 $c = 1$, $a = 2$ 일 때 $c = 2$ 이므로 구하

는 점 C의 좌표는 (1, 0, 1), (2, 0, 2)

278 ㉮ 4√2

두 점 A, B의 yz 평면 위로의 정사영을 각각 A' , B' 이라 하면

$$A'(0, 2, -1), B'(0, -2, 3)$$

따라서 구하는 정사영의 길이는

$$\overline{A'B'} = \sqrt{(-2-2)^2 + (3+1)^2} = 4\sqrt{2}$$

279 ㉮ 60°

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-1)^2 + (\sqrt{3})^2 + (1-1)^2} = 2$$

점 A는 zx 평면 위의 점이고 점 B의 zx 평면 위로의 정사영을 B' 이라 하면

$$B'(2, 0, 1)$$

$$\therefore \overline{AB'} = |2-1| = 1$$

이때 직선 AB 와 zx 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\overline{AB'} = \overline{AB} \cos \theta$ 이므로

$$1 = 2 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

280 ㉮ 6

$$\overline{AB} = \sqrt{(a-1)^2 + (1+2)^2 + (7-3)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - 2a + 26}$$

두 점 A, B의 yz 평면 위로의 정사영을 각각 A' , B' 이라 하면

$$A'(0, -2, 3), B'(0, 1, 7)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(1+2)^2 + (7-3)^2} = 5$$

이때 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 45^\circ$ 이므로

$$5 = \sqrt{a^2 - 2a + 26} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$5\sqrt{2} = \sqrt{a^2 - 2a + 26}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 2a - 24 = 0, (a+4)(a-6) = 0$$

$$\therefore a = 6 (\because a > 0)$$

281 ㉮ 2/3

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-4)^2 + (-3-1)^2 + (-1+5)^2}$$

$$= 6$$

두 점 A, B의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A' , B' 이라 하면

$$A'(4, 1, 0), B'(2, -3, 0)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(2-4)^2 + (-3-1)^2}$$

$$= 2\sqrt{5}$$

이때 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 이므로

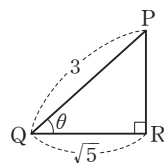
$$2\sqrt{5} = 6 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형

PQR에서

$$\overline{PR} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{5})^2} = 2$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}} = \frac{2}{3}$$



282 ㉮ 6

두 점 A, B의 x 좌표의 부호가 다르므로 두 점 A, B는 yz 평면을 기준으로 서로 반대쪽에 있다.

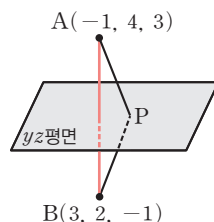
점 P가 선분 AB 위에 있을 때 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} \geq \overline{AB}$$

$$= \sqrt{(3+1)^2 + (2-4)^2 + (-1-3)^2}$$

$$= 6$$

따라서 구하는 최솟값은 6이다.

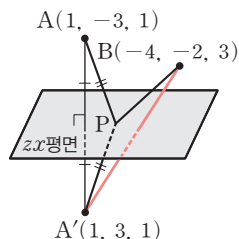


283 ㉮ 3√6

두 점 A, B의 y 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 zx 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A를 zx 평면에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면 $A'(1, 3, 1)$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로 점 P가 선분 $A'B$ 위에 있을 때 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소이다.



$$\begin{aligned}
 \therefore \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{A'P} + \overline{BP} \\
 &\geq \overline{A'B} \\
 &= \sqrt{(-4-1)^2 + (-2-3)^2 + (3-1)^2} \\
 &= 3\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $3\sqrt{6}$ 이다.

284 ㉮ 5

두 점 A, B의 z좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 xy평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 $A'(a, 2, -1)$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로 점 P가 선분 A'B 위에 있을 때 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소이다.

$$\begin{aligned}
 \therefore \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{A'P} + \overline{BP} \\
 &\geq \overline{A'B} \\
 &= \sqrt{(1-a)^2 + (4-2)^2 + (3+1)^2} \\
 &= \sqrt{a^2 - 2a + 21}
 \end{aligned}$$

그런데 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값이 6이므로

$$\sqrt{a^2 - 2a + 21} = 6$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 2a - 15 = 0, (a+3)(a-5) = 0$$

$$\therefore a = 5 (\because a > 0)$$

285 ㉮ $2\sqrt{13}$

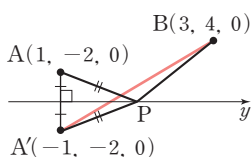
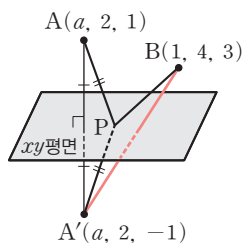
두 점 A, B의 z좌표가 0이고 x좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 xy평면 위에 있고 y축을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A를 y축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면 $A'(-1, -2, 0)$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로 점 P가 선분 A'B 위에 있을 때 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 값이 최소이다.

$$\begin{aligned}
 \therefore \overline{AP} + \overline{BP} &= \overline{A'P} + \overline{BP} \\
 &\geq \overline{A'B} \\
 &= \sqrt{(3+1)^2 + (4+2)^2} = 2\sqrt{13}
 \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $2\sqrt{13}$ 이다.



개념 확인

153쪽

$$286 \text{ ㉮ } (1) (0, -2, 1) \quad (2) \left(-\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$$

$$(1) \left(\frac{2 \times 3 + 1 \times (-6)}{2+1}, \frac{2 \times (-4) + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times 2 + 1 \times (-1)}{2+1} \right)$$

$$\therefore (0, -2, 1)$$

$$(2) \left(\frac{-6+3}{2}, \frac{2-4}{2}, \frac{-1+2}{2} \right)$$

$$\therefore \left(-\frac{3}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$$

$$287 \text{ ㉮ } (2, -1, 3)$$

$$\left(\frac{3-2+5}{3}, \frac{-1+1-3}{3}, \frac{5+4+0}{3} \right)$$

$$\therefore (2, -1, 3)$$

유제

155~159쪽

288 ㉮ 5

선분 AB를 2:1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times 1 + 1 \times 9}{2+1}, \frac{2 \times 9 + 1 \times 1}{2+1} \right)$$

$$\therefore P\left(\frac{11}{3}, \frac{11}{3}, \frac{19}{3}\right)$$

선분 AB를 1:3으로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 5 + 3 \times 1}{1+3}, \frac{1 \times 1 + 3 \times 9}{1+3}, \frac{1 \times 9 + 3 \times 1}{1+3} \right)$$

$$\therefore Q(2, 7, 3)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \overline{PQ} &= \sqrt{\left(2 - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(7 - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(3 - \frac{19}{3}\right)^2} \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

289 ㉮ -8

선분 AB를 1:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times a + 2 \times 4}{1+2}, \frac{1 \times 5 + 2 \times (-1)}{1+2}, \frac{1 \times (-3) + 2 \times 6}{1+2} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+8}{3}, 1, 3\right)$$

이 점이 yz평면 위에 있으므로 x좌표가 0이다.

$$\text{따라서 } \frac{a+8}{3} = 0 \text{ 이므로 } a = -8$$

290 ㉮ (1, -1, -3)

선분 AB를 3:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 0 + 1 \times 2}{3+1}, \frac{3 \times a + 1 \times (-5)}{3+1}, \frac{3 \times b + 1 \times (-1)}{3+1} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}, \frac{3a-5}{4}, \frac{3b-1}{4} \right)$$

이 점이 점 $\left(\frac{1}{2}, 1, -4 \right)$ 와 일치하므로

$$\frac{3a-5}{4}=1, \frac{3b-1}{4}=-4 \quad \therefore a=3, b=-5$$

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+0}{2}, \frac{-5+3}{2}, \frac{-1-5}{2} \right) \quad \therefore (1, -1, -3)$$

291 ㉡ 2

선분 AB를 1: k로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 2 + k \times 5}{1+k}, \frac{1 \times 6 + k \times (-3)}{1+k}, \frac{1 \times (-4) + k \times (-2)}{1+k} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{5k+2}{1+k}, \frac{-3k+6}{1+k}, \frac{-2k-4}{1+k} \right)$$

이 점이 zx 평면 위에 있으므로 y 좌표가 0이다.

$$\text{따라서 } \frac{-3k+6}{k+1}=0 \text{이므로 } k=2$$

292 ㉡ (-8, 7, -3)

평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 평행사변형 OABC의 두 대각선 OB, AC의 중점이 일치한다.

대각선 OB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0-3}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{0-2}{2} \right)$$

$$\therefore \left(-\frac{3}{2}, 2, -1 \right) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

점 C의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5+a}{2}, \frac{-3+b}{2}, \frac{1+c}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 이 일치하므로

$$-\frac{3}{2} = \frac{5+a}{2}, 2 = \frac{-3+b}{2}, -1 = \frac{1+c}{2}$$

$$\therefore a=-8, b=7, c=-3$$

따라서 점 C의 좌표는 $(-8, 7, -3)$

293 ㉡ 17

평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치한다.

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{6+1}{2}, \frac{-3+b}{2}, \frac{1+5}{2} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{7}{2}, \frac{-3+b}{2}, 3 \right) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-2}{2}, \frac{-3+4}{2}, \frac{2+c}{2} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a-2}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2+c}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 이 일치하므로

$$\frac{7}{2} = \frac{a-2}{2}, \frac{-3+b}{2} = \frac{1}{2}, 3 = \frac{2+c}{2}$$

$$\therefore a=9, b=4, c=4 \quad \therefore a+b+c=17$$

294 ㉡ $8\sqrt{5}$

점 C의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 평행사변형 ABCD의 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{9+b}{2}, \frac{-3+c}{2} \right)$$

이때 대각선 AC의 중점은 두 대각선의 교점

$(3, -1, 0)$ 과 일치하므로

$$\frac{1+a}{2}=3, \frac{9+b}{2}=-1, \frac{-3+c}{2}=0$$

$$\therefore a=5, b=-11, c=3$$

따라서 $C(5, -11, 3)$ 이므로

$$BC = \sqrt{(5-5)^2 + (-11-5)^2 + (3+5)^2} = 8\sqrt{5}$$

295 ㉡ 3

마름모의 두 대각선은 서로를 수직이등분하므로 마름모 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치한다.

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+8}{2}, \frac{a-1}{2}, \frac{0+5}{2} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{5}{2}, \frac{a-1}{2}, \frac{5}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+4}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{5+0}{2} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{5}{2}, \frac{b+2}{2}, \frac{5}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 이 일치하므로

$$\frac{a-1}{2} = \frac{b+2}{2} \quad \therefore a=b+3 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

또 마름모는 네 변의 길이가 모두 같으므로

$$\overline{AD} = \overline{CD} \text{에서 } \overline{AD}^2 = \overline{CD}^2$$

$$(4+3)^2 + (2-a)^2 = (4-8)^2 + (2+1)^2 + (-5)^2$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0, (a-1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a=3 (\because a>2)$$

이를 $\textcircled{㉢}$ 에 대입하여 풀면 $b=0$

$$\therefore a+b=3$$

296 ㉠ -7

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+3-1}{3}, \frac{1+b+2}{3}, \frac{-2+4+c}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+2}{3}, \frac{b+3}{3}, \frac{c+2}{3} \right)$$

이 점이 원점과 일치하므로

$$\frac{a+2}{3}=0, \frac{b+3}{3}=0, \frac{c+2}{3}=0$$

$$\therefore a=-2, b=-3, c=-2$$

$$\therefore a+b+c=-7$$

297 ㉠ (5, 3, -6)

점 C의 좌표를 (a, b, c)라 하면 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3-2+a}{3}, \frac{-4+1+b}{3}, \frac{2+1+c}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+1}{3}, \frac{b-3}{3}, \frac{c+3}{3} \right)$$

이 점이 점 (2, 0, -1)과 일치하므로

$$\frac{a+1}{3}=2, \frac{b-3}{3}=0, \frac{c+3}{3}=-1$$

$$\therefore a=5, b=3, c=-6$$

따라서 점 C의 좌표는 (5, 3, -6)

298 ㉠ (6, -1, 4)

점 A의 좌표를 (a, b, c)라 하면 삼각형 ABC의 무게중심 G는 선분 AM을 2:1로 내분하는 점이므로 점 G의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times a}{2+1}, \frac{2 \times 2 + 1 \times b}{2+1}, \frac{2 \times (-5) + 1 \times c}{2+1} \right)$$

$$\therefore G\left(\frac{a+6}{3}, \frac{b+4}{3}, \frac{c-10}{3} \right)$$

이 점이 점 (4, 1, -2)와 일치하므로

$$\frac{a+6}{3}=4, \frac{b+4}{3}=1, \frac{c-10}{3}=-2$$

$$\therefore a=6, b=-1, c=4$$

따라서 점 A의 좌표는 (6, -1, 4)

299 ㉠ $\left(2, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3} \right)$

변 AB를 2:1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 2 + 1 \times 5}{2+1}, \frac{2 \times (-4) + 1 \times (-1)}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times 2}{2+1} \right)$$

$$\therefore P\left(3, -3, \frac{8}{3} \right)$$

변 BC를 2:1로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-1) + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times (-4)}{2+1}, \frac{2 \times 2 + 1 \times 3}{2+1} \right)$$

$$\therefore Q\left(0, \frac{2}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

변 CA를 2:1로 내분하는 점 R의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times (-1)}{2+1}, \frac{2 \times (-1) + 1 \times 3}{2+1}, \frac{2 \times 2 + 1 \times 2}{2+1} \right)$$

$$\therefore R\left(3, \frac{1}{3}, 2 \right)$$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{3+0+3}{3}, \frac{-3+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}{3}, \frac{\frac{8}{3}+\frac{7}{3}+2}{3} \right)$$

$$\therefore \left(2, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

| 다른 풀이 |

삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로 구하는 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{5+2-1}{3}, \frac{-1-4+3}{3}, \frac{2+3+2}{3} \right)$$

$$\therefore \left(2, -\frac{2}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

연습문제

160~162쪽

300 ㉠ ①

점 A(a, 2, -1)을 xy평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (a, 2, 1) ㉠

점 B(3, b, c)를 z축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (-3, -b, c) ㉡

㉠, ㉡이 일치하므로

$$a=-3, 2=-b, 1=c$$

$$\therefore a=-3, b=-2, c=1$$

$$\therefore a+b+c=-4$$

301 ㉠ $\frac{10}{3}$

$\overline{AB}=2\overline{AC}$ 에서 $\overline{AB}^2=4\overline{AC}^2$ 이므로

$$(a+1)^2+(-2-2)^2+(5-1)^2=4\{(1+1)^2+(-2)^2+(a-1)^2\}$$

$$3a^2-10a+3=0, (3a-1)(a-3)=0$$

$$\therefore a=\frac{1}{3} \text{ 또는 } a=3$$

따라서 모든 a의 값의 합은 $\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$

302 ㉠ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

$$\overline{AB}=\sqrt{2^2+(-7+3)^2+(3+1)^2}=6$$

두 점 A, B의 zx 평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라 하면

$$A'(0, 0, -1), B'(2, 0, 3)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{2^2 + (3+1)^2} = 2\sqrt{5}$$

이때 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 이므로

$$2\sqrt{5} = 6 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

303 ㉓ ③

선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3-1}{2}, \frac{a+3}{2}, \frac{-2+a}{2} \right)$$

$$\therefore \left(1, \frac{a+3}{2}, \frac{a-2}{2} \right)$$

이 점이 xy 평면 위에 있으므로 z 좌표가 0이다.

$$\text{따라서 } \frac{a-2}{2} = 0 \text{이므로 } a=2$$

304 ㉓ $\sqrt{14}$

선분 AB를 2:3으로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 2 + 3 \times 2}{2+3}, \frac{2 \times 1 + 3 \times (-4)}{2+3}, \frac{2 \times (-2) + 3 \times 3}{2+3} \right)$$

$$\therefore P(2, -2, 1) \quad \text{..... ①}$$

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{2+2+5}{3}, \frac{-4+1+3}{3}, \frac{3-2-7}{3} \right)$$

$$\therefore G(3, 0, -2) \quad \text{..... ②}$$

따라서 선분 PG의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{PG} &= \sqrt{(3-2)^2 + 2^2 + (-2-1)^2} \\ &= \sqrt{14} \quad \text{..... ③} \end{aligned}$$

단계	채점 기준	비율
①	선분 AB를 2:3으로 내분하는 점 P의 좌표 구하기	40%
②	삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표 구하기	40%
③	선분 PG의 길이 구하기	20%

305 ㉓ 8

점 A(2, a, a-1)을 x 축에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 (2, -a, -a+1) ㉠

점 C(b, c, 2)를 z 축에 대하여 대칭이동한 점 D의 좌표는 (-b, -c, 2) ㉡

㉠, ㉡이 원점에 대하여 대칭이므로

$$2=b, -a=c, -a+1=-2$$

$$\therefore a=3, b=2, c=-3$$

$$\therefore a+b-c=8$$

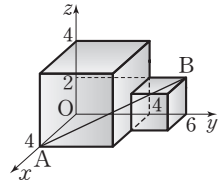
306 ㉓ $2\sqrt{14}$

오른쪽 그림과 같이 두 정육면체를 좌표공간 위에 놓으면

$$A(4, 0, 0), B(0, 6, 2)$$

따라서 두 꼭짓점 A, B 사이의 거리는

$$\overline{AB} = \sqrt{(-4)^2 + 6^2 + 2^2} = 2\sqrt{14}$$



307 ㉓ 3

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= (2-1)^2 + (1-a)^2 + (-2)^2 \\ &= a^2 - 2a + 6 \end{aligned}$$

$$\overline{BC}^2 = (-2)^2 + (-1-1)^2 + 1^2 = 9$$

$$\begin{aligned} \overline{CA}^2 &= 1^2 + (a+1)^2 + (2-1)^2 \\ &= a^2 + 2a + 3 \end{aligned}$$

이때 삼각형 ABC가 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \text{에서}$$

$$a^2 + 2a + 3 = (a^2 - 2a + 6) + 9$$

$$4a = 12 \quad \therefore a = 3$$

308 ㉓ (0, -6, -2)

yz 평면 위에 있는 직선 $z = \frac{1}{3}y$ 위의 점 P의 좌표는

(0, 3a, a)라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$(-5)^2 + (3a+1)^2 + (a-4)^2$$

$$= 2^2 + (3a-3)^2 + (a+3)^2$$

$$10a = -20 \quad \therefore a = -2$$

따라서 점 P의 좌표는 (0, -6, -2)

309 ㉓ $5\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{a^2 + (1+2)^2 + (7-3)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + 25} \end{aligned}$$

점 A는 yz 평면 위의 점이고 점 B의 yz 평면 위로의 정사영을 B'이라 하면

$$B'(0, 1, 7)$$

$$\therefore \overline{AB'} = \sqrt{(1+2)^2 + (7-3)^2} = 5$$

이때 $\overline{AB'} = \overline{AB} \cos 60^\circ$ 이므로

$$5 = \sqrt{a^2 + 25} \times \frac{1}{2}$$

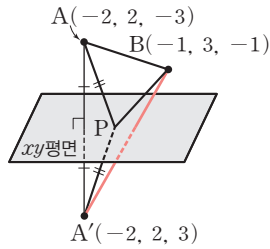
$$10 = \sqrt{a^2 + 25}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 = 75 \quad \therefore a = 5\sqrt{3} (\because a > 0)$$

310 ㉡ $\sqrt{6}+3\sqrt{2}$

두 점 A, B의 z 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 xy 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다. 점 A를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면



$$A'(-2, 2, 3)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로 삼각형 ABP의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AB} + \overline{BP} + \overline{AP} \\ &= \overline{AB} + \overline{BP} + \overline{A'P} \\ &\geq \overline{AB} + \overline{A'B} \\ &= \sqrt{(-1+2)^2 + (3-2)^2 + (-1+3)^2} \\ &\quad + \sqrt{(-1+2)^2 + (3-2)^2 + (-1-3)^2} \\ &= \sqrt{6} + 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{6}+3\sqrt{2}$ 이다.

311 ㉡ $9\sqrt{2}$

두 점 A, B의 yz 평면 위로의 정사영을 각각 A' , B' 이라 하면

$$A'(0, 2, -3), B'(0, -4, 3)$$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(-4-2)^2 + (3+3)^2} = 6\sqrt{2}$$

또 선분 AB를 2:1로 내분하는 점을 P라 하면 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times (-4) + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times (-3)}{2+1} \right)$$

$$\therefore P(3, -2, 1)$$

점 P에서 yz 평면에 내린 수선의 발을 P' 이라 하면

$$P'(0, -2, 1) \quad \therefore \overline{PP'} = 3$$

이때 $\overline{A'B'} \perp \overline{PP'}$ 이므로 삼각형 $PA'B'$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{A'B'} \times \overline{PP'} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 3 = 9\sqrt{2}$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는 $9\sqrt{2}$ 이다.

312 ㉡ 4

$\overline{AP} : \overline{BP} = m : n$ 이므로 점 P는 선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점이다.

즉, 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{m \times 4 + n \times (-2)}{m+n}, \frac{m \times (-1) + n \times 3}{m+n}, \frac{m \times 5 + n \times (-2)}{m+n} \right)$$

$$\therefore P\left(\frac{4m-2n}{m+n}, \frac{-m+3n}{m+n}, \frac{5m-2n}{m+n} \right)$$

이 점이 zx 평면 위에 있으므로 y 좌표가 0이다.

$$\text{따라서 } \frac{-m+3n}{m+n} = 0 \text{ 이므로 } m=3n$$

이때 m, n 은 서로소인 자연수이므로

$$m=3, n=1$$

$$\therefore m+n=4$$

313 ㉡ (1, 10, 7)

평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로 평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치한다.

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{2+2}{2}, \frac{5+11}{2}, \frac{4+7}{2} \right)$$

$$\therefore \left(2, 8, \frac{11}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 D의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5+a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{1+c}{2} \right) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 일치하므로

$$2 = \frac{5+a}{2}, 8 = \frac{2+b}{2}, \frac{11}{2} = \frac{1+c}{2}$$

$$\therefore a=-1, b=14, c=10$$

$$\therefore D(-1, 14, 10)$$

한편 $\triangle ABP \sim \triangle MDP$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{BP} : \overline{DP} = \overline{AB} : \overline{MD} = 2 : 1$$

따라서 점 P는 선분 BD를 2:1로 내분하는 점이므로

점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-1) + 1 \times 5}{2+1}, \frac{2 \times 14 + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times 10 + 1 \times 1}{2+1} \right)$$

$$\therefore P(1, 10, 7)$$

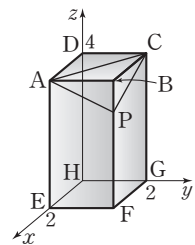
314 ㉡ $\sqrt{17}$

오른쪽 그림과 같이 점 H가 원점, 세 모서리 HE, HG, HD가 각각 x 축, y 축, z 축 위에 있도록 직육면체를 좌표공간에 놓으면

$$A(2, 0, 4), C(0, 2, 4),$$

$$P(2, 2, 3)$$

$$\therefore \overline{BP} : \overline{PF} = 1 : 3 \text{ 이므로 } \overline{PF} = \frac{3}{4} \overline{BF} = 3$$



삼각형 APC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+0+2}{3}, \frac{0+2+2}{3}, \frac{4+4+3}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{11}{3}\right)$$

따라서 구하는 거리는

$$\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{11}{3}\right)^2} = \sqrt{17}$$

315 ㉔ ④

| 접근 방법 | 선분 PI의 길이를 이용하여 점 P의 좌표를 구하고, 삼수선 정리를 이용하여 점 H와 직선 l 사이의 거리와 같은 선분을 찾는다.

$$\overline{PI} = 3\sqrt{2} \text{에서 } \overline{PI}^2 = 18 \text{이므로}$$

$$(4-a)^2 + (4-5)^2 + (-a-1)^2 = 18$$

$$a^2 - 3a = 0, a(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 3 (\because a \text{는 자연수})$$

오른쪽 그림과 같이

$$\overline{PH} \perp (xy \text{평면}), \overline{PI} \perp l \text{이}$$

므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{HI} \perp l$$

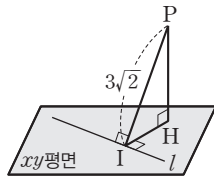
점 P(3, 5, 4)에서 xy 평면

에 내린 수선의 발 H의 좌표는

$$(3, 5, 0)$$

$$\therefore \overline{HI} = \sqrt{(4-3)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{2}$$

따라서 점 H와 직선 l 사이의 거리는 $\sqrt{2}$ 이다.



316 ㉔ 8

| 접근 방법 | 삼각형의 각의 이등분선의 성질과 점 P가 변 BC의 내분점임을 이용하여 $\overline{BP} : \overline{CP}$ 를 구한다.

점 P가 $\angle A$ 의 이등분선과

변 BC의 교점이므로

$$\overline{BP} : \overline{CP} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

점 P가 변 BC를

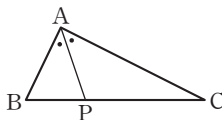
$m : n$ (m, n 은 서로소인 자연수)으로 내분한다고 하면 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{m \times 5 + n \times (-1)}{m+n}, \frac{m \times 3 + n \times 0}{m+n}, \frac{m \times a + n \times 4}{m+n}\right)$$

$$\therefore P\left(\frac{5m-n}{m+n}, \frac{3m}{m+n}, \frac{am+4n}{m+n}\right) \dots\dots ㉑$$

이 점이 점 (1, 1, b)와 일치하므로

$$\frac{5m-n}{m+n} = 1, \frac{3m}{m+n} = 1 \quad \therefore n = 2m$$



이때 m, n 은 서로소인 자연수이므로

$$m=1, n=2$$

$$\therefore \overline{BP} : \overline{CP} = \overline{AB} : \overline{AC} = 1 : 2$$

이때

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-1)^2 + 1^2 + (4-2)^2} = 3,$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(5-1)^2 + (3+1)^2 + (a-2)^2} = \sqrt{a^2 - 4a + 36}$$

이므로

$$3 : \sqrt{a^2 - 4a + 36} = 1 : 2$$

$$\sqrt{a^2 - 4a + 36} = 6$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 4a = 0$$

$$a(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 4 (\because a > 0)$$

$$\textcircled{㉑} \text{의 } z \text{좌표에서 } \frac{am+4n}{m+n} = b \text{이므로}$$

$$b = 4$$

$$\therefore a + b = 8$$

317 ㉔ 18√2

| 접근 방법 | 정사면체의 꼭짓점 C에서 $\triangle OAB$ 에 내린 수선의 발은 $\triangle OAB$ 의 무게중심과 일치함을 이용한다.

삼각형 OAB는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로 높이는

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore B(3, 3\sqrt{3}, 0)$$

삼각형 OAB의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+6+3}{3}, \frac{0+0+3\sqrt{3}}{3}, \frac{0+0+0}{3}\right)$$

$$\therefore (3, \sqrt{3}, 0)$$

이때 꼭짓점 C의 xy 평면 위로의 정사영이 삼각형

OAB의 무게중심과 일치하므로

$$a = 3, b = \sqrt{3}$$

$$\therefore C(3, \sqrt{3}, c)$$

한편 $\overline{OC} = 6$ 에서 $\overline{OC}^2 = 36$ 이므로

$$3^2 + (\sqrt{3})^2 + c^2 = 36$$

$$c^2 = 24$$

$$\therefore c = 2\sqrt{6} (\because c > 0)$$

따라서 $a = 3, b = \sqrt{3}, c = 2\sqrt{6}$ 이므로

$$abc = 18\sqrt{2}$$

02 구의 방정식

개념 확인

167쪽

318 ㉡ (1) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-5)^2 = 4$
 (2) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

319 ㉡ (1) 중심의 좌표: $(1, -3, -2)$
 반지름의 길이: $3\sqrt{2}$
 (2) 중심의 좌표: $(0, 2, -1)$
 반지름의 길이: 2

(1) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 4z - 4 = 0$ 에서
 $(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z+2)^2 = 18$
 따라서 구의 중심의 좌표는 $(1, -3, -2)$, 반지름의 길이는 $3\sqrt{2}$ 이다.
 (2) $x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z + 1 = 0$ 에서
 $x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$
 따라서 구의 중심의 좌표는 $(0, 2, -1)$, 반지름의 길이는 2이다.

320 ㉡ (1) $(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 1$
 (2) $(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 16$
 (3) $(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$

(1) 주어진 구가 xy 평면에 접하므로 반지름의 길이는 $|1| = 1$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 1$
 (2) 주어진 구가 yz 평면에 접하므로 반지름의 길이는 $|-4| = 4$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 16$
 (3) 주어진 구가 zx 평면에 접하므로 반지름의 길이는 $|3| = 3$
 따라서 구하는 구의 방정식은
 $(x+4)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 9$

321 ㉡ (1) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 10$
 (2) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 13$
 (3) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 5$

(1) 주어진 구가 x 축에 접하므로 반지름의 길이는 $\sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 10$$

(2) 주어진 구가 y 축에 접하므로 반지름의 길이는 $\sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 13$$

(3) 주어진 구가 z 축에 접하므로 반지름의 길이는 $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 5$$

322 ㉡ (1) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 7$
 (2) $(y+2)^2 + (z-3)^2 = 15$
 (3) $(x-1)^2 + (z-3)^2 = 12$

(1) 주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면
 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (0-3)^2 = 16$
 $\therefore (x-1)^2 + (y+2)^2 = 7$
 (2) 주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면
 $(0-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$
 $\therefore (y+2)^2 + (z-3)^2 = 15$
 (3) 주어진 구의 방정식에 $y=0$ 을 대입하면
 $(x-1)^2 + (0+2)^2 + (z-3)^2 = 16$
 $\therefore (x-1)^2 + (z-3)^2 = 12$

유제

169~177쪽

323 ㉡ (1) $x^2 + y^2 + z^2 = 21$
 (2) $(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 11$

(1) 구의 반지름의 길이는 두 점 $(0, 0, 0)$,
 $(2, -4, -1)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 = 21$$

(2) 구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$C\left(\frac{5+3}{2}, \frac{0-2}{2}, \frac{-1+5}{2}\right)$$

$$\therefore C(4, -1, 2)$$

이때 구의 반지름의 길이는

$$\overline{CA} = \sqrt{(5-4)^2 + 1^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{11}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 11$$

| 다른 풀이 |

(1) 구의 반지름의 길이를 r 라 하면 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

이 구가 점 $(2, -4, -1)$ 을 지나므로

$$2^2 + (-4)^2 + (-1)^2 = r^2$$

$$\therefore r^2 = 21$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 = 21$$

324 ㉠ $(x-2)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 38$

구 $(x-2)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 5$ 의 중심의 좌표는

$$(2, 0, -3)$$

구의 반지름의 길이는 두 점 $(2, 0, -3), (4, -3, 2)$

사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(4-2)^2 + (-3)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{38}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-2)^2 + y^2 + (z+3)^2 = 38$$

325 ㉠ 1

구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$C\left(\frac{-3-1}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{-5+1}{2}\right)$$

$$\therefore C(-2, 3, -2)$$

이때 구의 반지름의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{CA} &= \sqrt{(-3+2)^2 + (2-3)^2 + (-5+2)^2} \\ &= \sqrt{11} \end{aligned}$$

즉, 구의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 11$$

이 구가 점 $(k, 2, -1)$ 을 지나므로

$$(k+2)^2 + (2-3)^2 + (-1+2)^2 = 11$$

$$k^2 + 4k - 5 = 0, (k+5)(k-1) = 0$$

$$\therefore k = 1 (\because k > 0)$$

326 ㉠ -7

구 $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 25$ 의 중심을 C라 하면

$$C(2, -3, 1)$$

이때 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$\frac{2+a}{2} = 2, \frac{1+b}{2} = -3, \frac{4+c}{2} = 1$$

따라서 $a=2, b=-7, c=-2$ 이므로

$$a+b+c = -7$$

327 ㉠ 5

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax - 6y + 8z + k = 0$ 에서

$$(x+a)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = a^2 + 25 - k$$

이 구의 중심의 좌표는 $(-a, 3, -4)$ 이므로

$$-2 = -a, b=3, c=-4$$

$$\therefore a=2, b=3, c=-4$$

구의 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2 + 25 - k}$ 이므로

$$\sqrt{29 - k} = 5, 29 - k = 25 \quad \therefore k = 4$$

$$\therefore a+b+c+k = 5$$

328 ㉠ $\sqrt{21}$

구의 방정식을 $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

으로 놓자.

이 구가

점 $(0, 0, 0)$ 을 지나므로 $D=0$

점 $(4, 0, 0)$ 을 지나므로

$$16 + 4A = 0 \quad \therefore A = -4$$

점 $(0, 2, 0)$ 을 지나므로

$$4 + 2B = 0 \quad \therefore B = -2$$

점 $(-2, 0, 2)$ 를 지나므로

$$4 + 4 - 2A + 2C = 0$$

$$16 + 2C = 0 \quad \therefore C = -8$$

즉, 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 8z = 0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 21$$

따라서 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{21}$ 이다.

329 ㉠ $k > -14$

$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z - k = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = k + 14$$

주어진 방정식이 구를 나타내려면 $k+14 > 0$ 이어야

하므로 $k > -14$

330 ㉠ -6

$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - ky - 2z = k$ 에서

$$(x+3)^2 + \left(y - \frac{k}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{k^2}{4} + k + 10$$

이때 구의 부피가 최소이려면 구의 반지름의 길이

$$\sqrt{\frac{k^2}{4} + k + 10} \text{이 최소이어야 한다.}$$

$\frac{k^2}{4} + k + 10 = \frac{1}{4}(k+2)^2 + 9$ 이므로 $k = -2$ 일 때 반지름의 길이가 최소이다.

즉, 구의 방정식은

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 9$$

이 구의 중심의 좌표는 $(-3, -1, 1)$ 이고 반지름의 길이는 3이므로

$$a=-3, b=-1, c=1, r=3$$

$$\therefore a+b+c-r=-6$$

331 ㉡ 2

$x^2+y^2+z^2-4x-10y+4kz+20=0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z+2k)^2 = 4k^2 + 9$$

이 구가 zx 평면에 접하므로 반지름의 길이는 중심의 y 좌표의 절댓값과 같다.

$$\text{즉, } \sqrt{4k^2+9}=|5| \text{에서 } 4k^2+9=25$$

$$k^2=4 \quad \therefore k=2 (\because k>0)$$

332 ㉡ $\frac{15}{2}$

구의 중심 $C(k, 3, 4)$ 에서 y 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $H(0, 3, 0)$

$$\therefore \overline{CH} = \sqrt{(-k)^2 + (3-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{k^2+16}$$

이때 선분 CH 의 길이는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\sqrt{k^2+16} = k+1$$

양변을 제곱하면

$$k^2+16 = k^2+2k+1$$

$$2k=15 \quad \therefore k = \frac{15}{2}$$

333 ㉡ $2\sqrt{5}$

구가 yz 평면에 접하므로 반지름의 길이는 중심의 x 좌표의 절댓값과 같다.

$$\therefore r = |a| = a (\because a>0)$$

구의 중심 $C(a, 2, -1)$ 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $H(a, 0, 0)$

$$\therefore \overline{CH} = \sqrt{(a-a)^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

이때 선분 CH 의 길이는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$r = \sqrt{5} \quad \therefore a = \sqrt{5}$$

$$\therefore a+r = 2\sqrt{5}$$

334 ㉡ 10

구가 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 동시에 접하고

점 $P(4, -1, 5)$ 를 지나므로 반지름의 길이를 r 라 하면 중심의 좌표는 $(r, -r, r)$

즉, 구의 방정식은

$$(x-r)^2 + (y+r)^2 + (z-r)^2 = r^2$$

이 구가 점 $P(4, -1, 5)$ 를 지나므로

$$(4-r)^2 + (-1+r)^2 + (5-r)^2 = r^2$$

$$r^2 - 10r + 21 = 0, (r-3)(r-7) = 0$$

$$\therefore r=3 \text{ 또는 } r=7$$

따라서 두 구의 반지름의 길이의 합은

$$3+7=10$$

335 ㉡ $2\sqrt{21}\pi$

yz 평면과 만나므로 주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$(0+2)^2 + (y-4)^2 + (z+3)^2 = 25$$

$$\therefore (y-4)^2 + (z+3)^2 = 21$$

따라서 주어진 구와 yz 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 $\sqrt{21}$ 인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi \times \sqrt{21} = 2\sqrt{21}\pi$$

|다른 풀이|

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C 라 하고 점 C 에서 yz 평면에 내린 수선의 발을 H , 구와 yz 평면이 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P 라 하면 $C(-2, 4, -3)$,

$H(0, 4, -3)$ 이므로

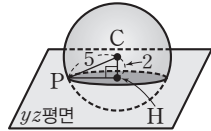
$$\overline{CP}=5, \overline{CH}=2$$

직각삼각형 CPH 에서

$$\overline{PH} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$$

따라서 주어진 구와 yz 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 $\sqrt{21}$ 인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi \times \sqrt{21} = 2\sqrt{21}\pi$$



336 ㉡ 16π

xy 평면과 만나므로 주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$x^2+y^2-4x+2y-11=0$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$$

따라서 주어진 구와 xy 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 4인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \times 4^2 = 16\pi$$

337 ㉮ 1

zx 평면과 만나므로 주어진 구의 방정식에 $y=0$ 을 대입하면

$$x^2 + z^2 - 6x - 2z + k = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + (z-1)^2 = 10 - k$$

이때 주어진 구와 zx 평면이 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 3이므로

$$\sqrt{10-k} = 3 \text{에서 } 10-k=9$$

$$\therefore k=1$$

338 ㉮ 24

구의 중심의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 반지름의 길이가 13이므로 구의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 169$$

yz 평면과 만나므로 이 식에 $x=0$ 을 대입하면

$$(0-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 169$$

$$\therefore (y-b)^2 + (z-c)^2 = 169 - a^2$$

이 방정식이 $(y-5)^2 + (z+2)^2 = 25$ 와 일치하므로

$$b=5, c=-2, 169-a^2=25$$

$$169-a^2=25 \text{에서 } a^2=144$$

$$\therefore a=\pm 12$$

즉, 두 구의 중심의 좌표는

$$(-12, 5, -2), (12, 5, -2)$$

따라서 두 구의 중심 사이의 거리는

$$12 - (-12) = 24$$

339 ㉮ $\sqrt{10}$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 2z + 10 = 0 \text{에서}$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(-3, 2, -1)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{(-3+1)^2 + (2-1)^2 + (-1-2)^2} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

오른쪽 그림과 같이

점 A에서 구에 그은

접선의 접점 P에 대

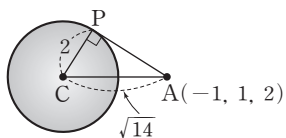
하여 선분 CP의 길

이는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\overline{CP} = 2$$

따라서 직각삼각형 APC에서

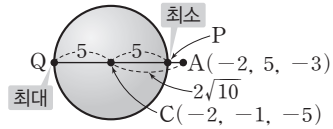
$$\overline{AP} = \sqrt{(\sqrt{14})^2 - 2^2} = \sqrt{10}$$



340 ㉮ 15

주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(-2, -1, -5)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{(-2+2)^2 + (-1-5)^2 + (-5+3)^2} \\ &= 2\sqrt{10} \end{aligned}$$



위의 그림과 같이 직선 AC가 구와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면 구하는 선분의 길이의

$$\text{최댓값 } M = \overline{AC} + \overline{CQ} = 2\sqrt{10} + 5$$

$$\text{최솟값 } m = \overline{AC} - \overline{CP} = 2\sqrt{10} - 5$$

$$\begin{aligned} \therefore Mm &= (2\sqrt{10} + 5) \times (2\sqrt{10} - 5) \\ &= 40 - 25 = 15 \end{aligned}$$

341 ㉮ 5

주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(2, 1, 1)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{(2-k)^2 + (1-4)^2 + (1-5)^2} \\ &= \sqrt{k^2 - 4k + 29} \end{aligned}$$

오른쪽 그림과 같이 점

A에서 구에 그은 접선

의 접점을 P라 하면

$$\overline{CP} = 3, \overline{AP} = 5$$

직각삼각형 APC에서

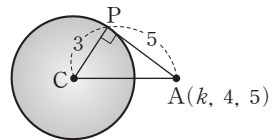
$$\overline{AC} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$$

$$\text{즉, } \sqrt{k^2 - 4k + 29} = \sqrt{34} \text{에서}$$

$$k^2 - 4k + 29 = 34$$

$$k^2 - 4k - 5 = 0, (k+1)(k-5) = 0$$

$$\therefore k=5 (\because k>0)$$



342 ㉮ 121

주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(2, -4, 4)$ 이고 반지름의 길이가 5이다.

원점 O에 대하여 $\overline{OP}^2 = a^2 + b^2 + c^2$

이므로 점 P의 위치가 오른쪽 그림과

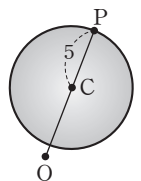
같을 때 $a^2 + b^2 + c^2$ 의 값이 최대이다.

$$\text{이때 } \overline{OC} = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 4^2} = 6 \text{이}$$

므로

$$\overline{OP} = \overline{OC} + 5 = 6 + 5 = 11$$

따라서 $a^2 + b^2 + c^2$ 의 최댓값은 $11^2 = 121$



343 ㉮ $\sqrt{6}$

구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$C\left(\frac{5-3}{2}, \frac{1+1}{2}, \frac{2+2}{2}\right) \quad \therefore C(1, 1, 2)$$

따라서 구의 반지름의 길이는

$$\overline{OC} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{6}$$

344 ㉮ $-\frac{1}{4}$

$x^2 + y^2 + z^2 - 4kx + 2y + 8z - 2k = 0$ 에서

$$(x-2k)^2 + (y+1)^2 + (z+4)^2 = 4k^2 + 2k + 17$$

이때 구의 부피가 최소가 되려면 구의 반지름의 길이

$\sqrt{4k^2 + 2k + 17}$ 이 최소이어야 한다,

$$4k^2 + 2k + 17 = 4\left(k + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{67}{4} \text{ 이므로 } k = -\frac{1}{4} \text{ 일}$$

때 반지름의 길이가 최소이다.

따라서 구하는 상수 k 의 값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

345 ㉮ 2

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y + az + b = 0$ 에서

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 + \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + 8 - b$$

이 구가 xy 평면에 접하므로 반지름의 길이는 중심의 z 좌표의 절댓값과 같다.

$$\text{즉, } \sqrt{\frac{a^2}{4} + 8 - b} = \left| -\frac{a}{2} \right| \text{에서}$$

$$\frac{a^2}{4} + 8 - b = \frac{a^2}{4} \quad \therefore b = 8$$

또 구가 점 $(5, -2, 3)$ 을 지나므로

$$(5-2)^2 + (-2+2)^2 + \left(3 + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$3a + 18 = 0 \quad \therefore a = -6$$

$$\therefore a + b = 2$$

346 ㉮ 3

xy 평면과 만나므로 주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$(x-2)^2 + (y-a)^2 + (0-3)^2 = r^2$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y-a)^2 = r^2 - 9$$

이 원의 넓이가 16π 이므로

$$(r^2 - 9)\pi = 16\pi$$

$$r^2 - 9 = 16, r^2 = 25$$

$$\therefore r = 5 (\because r > 0)$$

▶▶▶▶▶ ①

zx 평면과 만나므로 주어진 구의 방정식에 $y=0$ 을 대입하면

$$(x-2)^2 + (0-a)^2 + (z-3)^2 = 25$$

$$\therefore (x-2)^2 + (z-3)^2 = 25 - a^2$$

이 원의 넓이가 21π 이므로

$$(25 - a^2)\pi = 21\pi$$

$$25 - a^2 = 21, a^2 = 4$$

$$\therefore a = 2 (\because a > 0)$$

▶▶▶▶▶ ②

$$\therefore r - a = 3$$

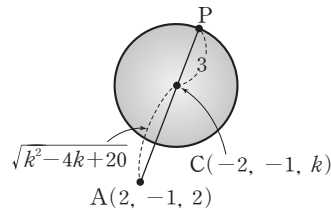
▶▶▶▶▶ ③

단계	채점 기준	비율
①	r 의 값 구하기	40 %
②	a 의 값 구하기	40 %
③	$r - a$ 의 값 구하기	20 %

347 ㉮ 5

주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(-2, -1, k)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AC} &= \sqrt{(-2-2)^2 + (-1+1)^2 + (k-2)^2} \\ &= \sqrt{k^2 - 4k + 20} \end{aligned}$$



또 구의 반지름의 길이는 3이므로 위의 그림에서 선분 AP의 길이의 최댓값은

$$\overline{AC} + 3 = \sqrt{k^2 - 4k + 20} + 3$$

이때 선분 AP의 길이의 최댓값이 8이므로

$$\sqrt{k^2 - 4k + 20} + 3 = 8 \text{에서 } \sqrt{k^2 - 4k + 20} = 5$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$k^2 - 4k - 5 = 0, (k+1)(k-5) = 0$$

$$\therefore k = 5 (\because k > 0)$$

348 ㉮ ④

구의 방정식을 $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$ 으로 놓자.

이 구가

점 $(0, 0, 0)$ 을 지나므로 $D = 0$

점 $(8, 0, 0)$ 을 지나므로 $64 + 8A = 0 \quad \therefore A = -8$

점 $(0, -6, 0)$ 을 지나므로 $36 - 6B = 0 \quad \therefore B = 6$

점 $(0, 0, 4)$ 를 지나므로 $16 + 4C = 0 \quad \therefore C = -4$

즉, 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z = 0$$

이때 점 $(4, -1, a)$ 가 구 위의 점이므로

$$16 + 1 + a^2 - 32 - 6 - 4a = 0$$

$$a^2 - 4a - 21 = 0, (a+3)(a-7) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 7$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$-3 + 7 = 4$$

349 $\sqrt{5}$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 4 = 0 \text{에서}$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = 9$$

즉, 주어진 구의 중심의 좌표는 $(-1, 2, 0)$ 이고 반지름의 길이는 3이다.

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C라 하고 점 C에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하면

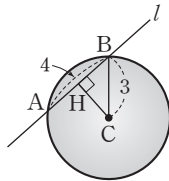
$$\overline{CB} = 3$$

$$\overline{BH} = \frac{1}{2} \overline{BA} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

직각삼각형 CBH에서 삼각형 CBA는 $\overline{CB} = \overline{CA}$ 인 이등변삼각형이므로 $\overline{BH} = \overline{AH}$

$$\overline{CH} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

따라서 구의 중심과 직선 l 사이의 거리는 $\sqrt{5}$ 이다.



350 48π

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1 \text{에서 } \overline{AP} = 2\overline{BP}$$

$$\therefore \overline{AP}^2 = 4\overline{BP}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\begin{aligned} (x+1)^2 + (y-1)^2 + (z+4)^2 \\ = 4\{(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2\} \end{aligned}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 10y + 22 = 0$$

$$\therefore (x-3)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 12$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(3, 5, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 구이므로 구하는 도형의 겉넓이는

$$4\pi \times (2\sqrt{3})^2 = 48\pi$$

351 $\textcircled{2}$

구의 중심의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 구가 x 축, y 축, z 축에 동시에 접하므로 구의 중심에서 x 축, y 축, z 축에 이르는 거리는 모두 구의 반지름의 길이와 같다.

$$\text{즉, } |a| = |b| = |c| \text{이므로 } a^2 = b^2 = c^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

구의 중심에서 x 축에 내린 수선의 발의 좌표는

$$(a, 0, 0)$$

이때 구의 반지름의 길이는 두 점 $(a, b, c), (a, 0, 0)$

사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(a-a)^2 + (-b)^2 + (-c)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$b^2 + c^2 = 8, 2b^2 = 8 (\because \textcircled{1}) \quad \therefore b^2 = 4$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 3b^2 = 12 (\because \textcircled{1})$$

따라서 원점과 구의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 2\sqrt{3}$$

352 -26

xy 평면과 만나므로 주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$x^2 + y^2 - 8x + 2ky + 14 = 0$$

$$\therefore (x-4)^2 + (y+k)^2 = k^2 + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

yz 평면과 만나므로 주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$y^2 + z^2 + 2ky - 6z + 14 = 0$$

$$\therefore (y+k)^2 + (z-3)^2 = k^2 - 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

두 원 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하면

$$S_1 = (k^2 + 2)\pi, S_2 = (k^2 - 5)\pi$$

한편 $S_1 : S_2 = 4 : 3$ 에서 $3S_1 = 4S_2$ 이므로

$$3(k^2 + 2)\pi = 4(k^2 - 5)\pi$$

$$3k^2 + 6 = 4k^2 - 20, k^2 = 26$$

$$\therefore k = \pm\sqrt{26}$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$-\sqrt{26} \times \sqrt{26} = -26$$

353 $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$

구의 중심의 좌표를 (a, b, c) ($c > 0$)라 하면 구의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 9$$

xy 평면과 만나므로 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하여 정리하면

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 9 - c^2$$

이 방정식이 $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$, 즉

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5 \text{와 일치하므로}$$

$$a=2, b=-1, 9-c^2=5$$

$$9-c^2=5 \text{에서 } c^2=4 \quad \therefore c=2 (\because c > 0)$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

354 ㉔ ⑤

yz 평면과 만나므로 주어진 구의 방정식에 $x=0$ 을 대입하면

$$(0-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 25$$

$$\therefore (y-3)^2 + (z-4)^2 = 21 \quad \dots\dots ㉔$$

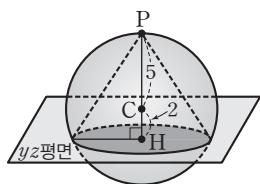
즉, 주어진 구를 yz 평면으로 자른 단면의 넓이는 21π 이다.

원 ㉔을 밑면으로 하고 구에 내접하는 원뿔의 부피가 최대하려면 원뿔의 높이가 최대이어야 한다.

구의 중심을 C라 하고 점 C에서 yz 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$C(2, 3, 4), H(0, 3, 4) \quad \therefore \overline{CH}=2$$

점 H는 원 ㉔의 중심이므로 점 P의 위치가 오른쪽 그림과 같을 때 원뿔의 높이가 최대가 된다.



즉, 원뿔의 높이의 최댓값은

$$\overline{CP} + \overline{CH} = 5 + 2 = 7$$

따라서 구하는 원뿔의 부피의 최댓값은

$$\frac{1}{3} \times 21\pi \times 7 = 49\pi$$

355 ㉔ 5√2π

주어진 구의 중심을 C라 하면 C(1, 5, -4)이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(1+3)^2 + (5-2)^2 + (-4-1)^2} = 5\sqrt{2}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 구에 그은 접선의 접점을 P라 하면

$$\overline{CP}=5$$

직각삼각형 ACP에서

$$\overline{AP} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - 5^2} = 5$$

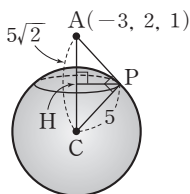
직각삼각형 ACP의 꼭짓점 P에서 변 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ACP의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 5 = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times \overline{PH}$$

$$\therefore \overline{PH} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

따라서 접점이 나타내는 도형은 점 H를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi \times \frac{5\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}\pi$$



356 ㉔ ①

구의 중심을 C라 하고 점 C에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$C(2, -3, 4), H(2, -3, 0)$$

이때 $\overline{CH}=4$ 이므로 오른쪽 그림과 같이 직선 CH가 구와 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하면 거리의

$$(\text{최댓값}) = \overline{CH} + \overline{CQ}$$

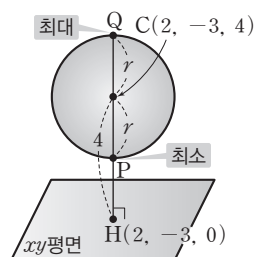
$$= 4 + r$$

$$(\text{최솟값}) = \overline{CH} - \overline{CP} = 4 - r$$

따라서 $(4+r)(4-r)=12$ 이므로

$$16 - r^2 = 12, r^2 = 4$$

$$\therefore r=2 (\because r>0)$$



357 ㉔ 1

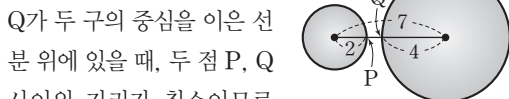
구 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 의 중심의 좌표는 (0, 0, 0)이고 반지름의 길이는 2이다.

또 구 $(x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-6)^2 = 16$ 의 중심의 좌표는 (-3, 2, 6)이고 반지름의 길이는 4이다.

즉, 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 6^2} = 7$$

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q가 두 구의 중심을 이은 선분 위에 있을 때, 두 점 P, Q 사이의 거리가 최소이므로

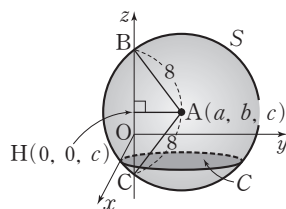


구하는 최솟값은

$$7 - (2 + 4) = 1$$

358 ㉔ ⑤

| 접근 방법 | 구 S와 xy 평면이 만나서 생기는 원의 넓이를 이용하여 점 A와 z 축 사이의 거리를 구한다.



점 A의 좌표를 (a, b, c)라 하면 $\overline{OA}=7$ 이므로

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 7 \quad \therefore a^2 + b^2 + c^2 = 49 \quad \dots\dots ㉔$$

점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 8인 구 S의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 64$$

이때 구 S와 xy 평면이 만나서 생기는 원을 C 라 하자.

구 S의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면 원 C의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (0-c)^2 = 64$$

$$\therefore (x-a)^2 + (y-b)^2 = 64 - c^2$$

원 C의 넓이가 25π 이므로

$$(64 - c^2)\pi = 25\pi, \quad 64 - c^2 = 25 \quad \therefore c^2 = 39$$

이를 ㉠에 대입하면

$$a^2 + b^2 + 39 = 49 \quad \therefore a^2 + b^2 = 10$$

점 A에서 z 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$H(0, 0, c)$$

$$\therefore \overline{AH} = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2 + (c-c)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}$$

한편 점 B는 구 S 위의 점이므로 $\overline{AB} = 8$

따라서 직각삼각형 ABH에서

$$\overline{BH} = \sqrt{8^2 - (\sqrt{10})^2} = 3\sqrt{6}$$

$$\therefore \overline{BC} = 2\overline{BH} = 2 \times 3\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$$

359 ㉠ $\sqrt{13}$

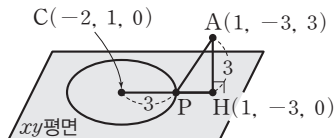
㉠ 접근 방법 구와 xy 평면이 만나서 생기는 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 구하고, 점 A에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 이용하여 평면 위에서의 최단 거리를 구한다.

주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$$

$$\therefore (x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$$

다음 그림과 같이 원의 중심을 C, 점 A에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 CH와 원이 만나는 점을 P라 하면 점 A에서 원에 이르는 거리의 최솟값은 선분 AP의 길이와 같다.



이때 $C(-2, 1, 0)$, $H(1, -3, 0)$ 이므로

$$\overline{CH} = \sqrt{(1+2)^2 + (-3-1)^2} = 5$$

$$\therefore \overline{PH} = \overline{CH} - \overline{CP} = 5 - 3 = 2$$

즉, 직각삼각형 APH에서 $\overline{AH} = 3$ 이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{13}$ 이다.

III. 벡터

III-1. 벡터의 연산

01 벡터의 연산

유제

185쪽

360 ㉠ (1) $\overrightarrow{DF}$, (2) $\overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DA}$

(1) $\overrightarrow{AC}$ 와 크기와 방향이 각각 같은 벡터는

$$\overrightarrow{DF}$$

(2) $\overrightarrow{CF}$ 와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터는

$$\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DA}$$

361 ㉠ (1) $\overrightarrow{FO}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ED}$

$$(2) \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BC}$$

$$(3) \sqrt{3}$$

(1) $\overrightarrow{AB}$ 와 크기와 방향이 각각 같은 벡터는

$$\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$$

(2) $\overrightarrow{EF}$ 와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터는

$$\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BC}$$

(3) $\overrightarrow{CF} = 2\overrightarrow{AB} = 2 \times 1 = 2$ 이므로 직각삼각형 CEF에서

$$|\overrightarrow{CE}| = \overline{CE} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

362 ㉠ ㄱ, ㄴ

$$\text{ㄱ. } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{a}$$

$$\text{ㄴ. } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \vec{b}$$

$$\text{ㄷ. } \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -\vec{c}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

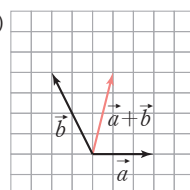
363 ㉠ $\sqrt{21}$

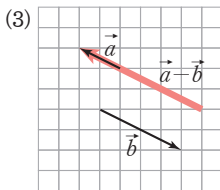
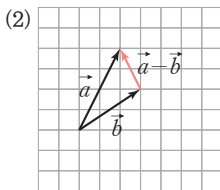
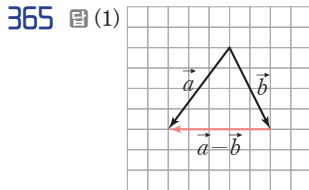
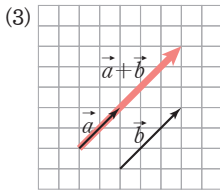
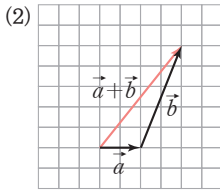
$$|\overrightarrow{AG}| = \overline{AG} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 4^2} = \sqrt{21}$$

개념 확인

189쪽

364 ㉠ (1)





366 ㉮ (1) $\overrightarrow{BC}$ (2) $\overrightarrow{AB}$ (3) $\overrightarrow{AE}$ (4) $\vec{0}$

$$\begin{aligned} (1) \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{BA} + (-\overrightarrow{CA}) \\ &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} \\ (2) \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} \\ (3) \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} \\ (4) \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} \\ &= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{CA} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0} \end{aligned}$$

유제

191쪽

367 ㉮ (1) $-\vec{a} + \vec{b}$ (2) $\vec{a} + \vec{b}$

$$\begin{aligned} (1) \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\vec{a} + \vec{b} \\ (2) \overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

| 다른 풀이 |

$$\begin{aligned} (1) \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b} \\ (2) \overrightarrow{DA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{DO} \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

368 ㉮ ⑤

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} \\ &= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0} \end{aligned}$$

369 ㉮ ④

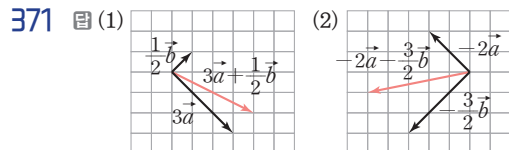
$$\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FB} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EB}$$

370 ㉮ $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE} + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \vec{c} + \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \end{aligned}$$

개념 확인

195쪽



372 ㉮ (1) $5\vec{a} + 5\vec{b}$ (2) $\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{5}{4}\vec{b}$

(3) $-4\vec{a} + 5\vec{b} + 2\vec{c}$ (4) $\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{c}$

$$\begin{aligned} (1) 4(2\vec{a} - \vec{b}) + 3(-\vec{a} + 3\vec{b}) &= 8\vec{a} - 4\vec{b} - 3\vec{a} + 9\vec{b} \\ &= (8-3)\vec{a} + (-4+9)\vec{b} = 5\vec{a} + 5\vec{b} \\ (2) \frac{1}{2}(4\vec{a} - \vec{b}) - \frac{1}{4}(2\vec{a} + 3\vec{b}) &= 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} \\ &= \left(2 - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)\vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{5}{4}\vec{b} \\ (3) 3(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}) - (7\vec{a} - 2\vec{b} - 8\vec{c}) &= 3\vec{a} + 3\vec{b} - 6\vec{c} - 7\vec{a} + 2\vec{b} + 8\vec{c} \\ &= (3-7)\vec{a} + (3+2)\vec{b} + (-6+8)\vec{c} \\ &= -4\vec{a} + 5\vec{b} + 2\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & \frac{1}{6}(4\vec{a}+3\vec{b}+8\vec{c}) + \frac{1}{3}(\vec{a}-6\vec{b}+2\vec{c}) \\
 &= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{4}{3}\vec{c} + \frac{1}{3}\vec{a} - 2\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} \\
 &= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)\vec{a} + \left(\frac{1}{2} - 2\right)\vec{b} + \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\right)\vec{c} \\
 &= \vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} + 2\vec{c}
 \end{aligned}$$

373 ㉠ (가) $-\vec{a} + \vec{b}$ (나) $2\vec{a} - 2\vec{b}$ (다) -2

유제

197~203쪽

374 ㉠ (1) $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$

(2) $\vec{x} = 3\vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c}$

(3) $\vec{x} = \frac{2}{5}\vec{a} + \vec{b}$

(4) $\vec{x} = -\vec{a} + 6\vec{b} - 6\vec{c}$

(5) $\vec{x} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + 3\vec{c}$

(6) $\vec{x} = 3\vec{a} + \frac{5}{4}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

(1) $3\vec{x} + 2\vec{a} = 8\vec{a} - 3\vec{b}$ 에서

$$3\vec{x} = 6\vec{a} - 3\vec{b} \quad \therefore \vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$$

(2) $2\vec{x} - 5\vec{a} = \vec{a} - 4\vec{b} - 6\vec{c}$ 에서

$$2\vec{x} = 6\vec{a} - 4\vec{b} - 6\vec{c} \quad \therefore \vec{x} = 3\vec{a} - 2\vec{b} - 3\vec{c}$$

(3) $4(\vec{a} + 2\vec{x}) - (5\vec{b} + \vec{x}) = 2\vec{x} + 6\vec{a}$ 에서

$$4\vec{a} + 8\vec{x} - 5\vec{b} - \vec{x} = 2\vec{x} + 6\vec{a}$$

$$5\vec{x} = 2\vec{a} + 5\vec{b} \quad \therefore \vec{x} = \frac{2}{5}\vec{a} + \vec{b}$$

(4) $3(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{x}) = 2(3\vec{c} - \vec{x}) + 4\vec{a}$ 에서

$$3\vec{a} + 6\vec{b} - 3\vec{x} = 6\vec{c} - 2\vec{x} + 4\vec{a}$$

$$-\vec{x} = \vec{a} - 6\vec{b} + 6\vec{c} \quad \therefore \vec{x} = -\vec{a} + 6\vec{b} - 6\vec{c}$$

(5) $2(\vec{a} - \vec{x} + 3\vec{c}) - \frac{1}{2}(\vec{b} - 2\vec{x}) = \vec{x} - \vec{a}$ 에서

$$2\vec{a} - 2\vec{x} + 6\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{x} = \vec{x} - \vec{a}$$

$$-2\vec{x} = -3\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - 6\vec{c}$$

$$\therefore \vec{x} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{4}\vec{b} + 3\vec{c}$$

(6) $\frac{3}{2}(\vec{x} - 2\vec{a}) - \frac{1}{4}(3\vec{b} - 2\vec{c}) = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{b})$ 에서

$$\frac{3}{2}\vec{x} - 3\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\therefore \vec{x} = 3\vec{a} + \frac{5}{4}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$$

375 ㉠ $\vec{x} = \vec{a}, \vec{y} = -\vec{a} + \vec{b}$

$$3\vec{x} + \vec{y} = 2\vec{a} + \vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\vec{x} - 2\vec{y} = 3\vec{a} - 2\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2}$ 을 하면

$$7\vec{x} = 7\vec{a} \quad \therefore \vec{x} = \vec{a}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3\vec{a} + \vec{y} = 2\vec{a} + \vec{b} \quad \therefore \vec{y} = -\vec{a} + \vec{b}$$

376 ㉠ $-3\vec{a} - 2\vec{b}$

$$2\vec{x} - \vec{y} = \vec{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$5\vec{x} - 3\vec{y} = -\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2}$ 을 하면

$$\vec{x} = 3\vec{a} + \vec{b}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2(3\vec{a} + \vec{b}) - \vec{y} = \vec{a}$$

$$6\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{y} = \vec{a} \quad \therefore \vec{y} = 5\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\therefore 4\vec{x} - 3\vec{y} = 4(3\vec{a} + \vec{b}) - 3(5\vec{a} + 2\vec{b})$$

$$= 12\vec{a} + 4\vec{b} - 15\vec{a} - 6\vec{b}$$

$$= -3\vec{a} - 2\vec{b}$$

377 ㉠ (1) $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ (2) $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$$(1) \overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$(2) \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

378 ㉠ ㄱ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\text{ㄴ. } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\text{ㄷ. } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{a} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\text{ㄹ. } \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

379 $\square -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + 2\vec{c}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \\ &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} \\ &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ &= \vec{c} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} \\ \therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} &= \vec{c} + \left(-\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}\right) \\ &= -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + 2\vec{c}\end{aligned}$$

380 $\square 4\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} &= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}) + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DA} \\ &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DF} \\ \therefore |2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| &= |\overrightarrow{DF}| = \overline{DF} \\ &= \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

381 $\square$ (1) $m=2, n=3$ (2) $m=3, n=-1$

(1) $(3m+2n-12)\vec{a} + (m-n+1)\vec{b} = \vec{0}$ 에서

$$3m+2n-12=0, m-n+1=0$$

$$\therefore 3m+2n=12, m-n=-1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$m=2, n=3$$

(2) $m\vec{a} + (m+3n)\vec{b} = (n+4)\vec{a} + 2(n+1)\vec{b}$ 에서

$$m=n+4, m+3n=2(n+1)$$

$$\therefore m-n=4, m+n=2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$m=3, n=-1$$

382 $\square 5$

$$3m\vec{a} - n\vec{b} = (\vec{a} - \vec{b})m + (2\vec{a} + 3\vec{b})n + 6\vec{a}$$

$$3m\vec{a} - n\vec{b} = m\vec{a} - m\vec{b} + 2n\vec{a} + 3n\vec{b} + 6\vec{a}$$

$$\therefore 3m\vec{a} - n\vec{b} = (m+2n+6)\vec{a} + (-m+3n)\vec{b}$$

따라서 $3m=m+2n+6, -n=-m+3n$ 이므로

$$m-n=3, m-4n=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$m=4, n=1 \quad \therefore m+n=5$$

383 $\square 25$

$$(x^2-2x+y)\vec{a} + (y^2-3y)\vec{b} = (y+3)\vec{a} + 4\vec{b}$$

$$x^2-2x+y=y+3, y^2-3y=4$$

$$x^2-2x+y=y+3 \text{에서 } x^2-2x-3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=3 (\because x>0)$$

$$y^2-3y=4 \text{에서 } y^2-3y-4=0$$

$$(y+1)(y-4)=0 \quad \therefore y=4 (\because y>0)$$

$$\therefore x^2+y^2=3^2+4^2=25$$

384 $\square 12$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-2\vec{a} + k\vec{b}) - \vec{a} = -3\vec{a} + k\vec{b}$$

이때 $m\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ 에서

$$m(-\vec{a} + \vec{b}) = 3(-3\vec{a} + k\vec{b})$$

$$\therefore -m\vec{a} + m\vec{b} = -9\vec{a} + 3k\vec{b}$$

따라서 $-m=-9, m=3k$ 이므로

$$k=3, m=9$$

$$\therefore k+m=12$$

385 $\square 9$

두 벡터 $5\vec{a} + 2\vec{b}, (m+1)\vec{a} + 4\vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$(m+1)\vec{a} + 4\vec{b} = k(5\vec{a} + 2\vec{b}) \quad (\text{단, } k \neq 0)$$

$$\therefore (m+1)\vec{a} + 4\vec{b} = 5k\vec{a} + 2k\vec{b}$$

따라서 $m+1=5k, 4=2k$ 이므로

$$k=2, m=9$$

386 $\square -11$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이어야 한다.

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (11\vec{a} + m\vec{b}) - (2\vec{a} + \vec{b})$$

$$= 9\vec{a} + (m-1)\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5\vec{a} - 3\vec{b}) - (2\vec{a} + \vec{b})$$

$$= 3\vec{a} - 4\vec{b}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$9\vec{a} + (m-1)\vec{b} = k(3\vec{a} - 4\vec{b})$$

$$\therefore 9\vec{a} + (m-1)\vec{b} = 3k\vec{a} - 4k\vec{b}$$

따라서 $9=3k, m-1=-4k$ 이므로

$$k=3, m=-11$$

387 $\square 24$

두 벡터 $2\vec{p} - \vec{q}, \vec{p} + \vec{r}$ 가 서로 평행하려면

$$\vec{p} + \vec{r} = k(2\vec{p} - \vec{q}) \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이어야 한다.

$$\begin{aligned}\vec{p} + \vec{r} &= (\vec{a} - 3\vec{b}) + (2\vec{a} + m\vec{b}) \\ &= 3\vec{a} + (m-3)\vec{b} \\ 2\vec{p} - \vec{q} &= 2(\vec{a} - 3\vec{b}) - (3\vec{a} + \vec{b}) \\ &= -\vec{a} - 7\vec{b}\end{aligned}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}3\vec{a} + (m-3)\vec{b} &= k(-\vec{a} - 7\vec{b}) \\ \therefore 3\vec{a} + (m-3)\vec{b} &= -k\vec{a} - 7k\vec{b}\end{aligned}$$

따라서 $3 = -k$, $m-3 = -7k$ 이므로
 $k = -3$, $m = 24$

388 [문] 점 P, 점 R

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b} \\ \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (-\vec{a} + 2\vec{b}) - \vec{a} \\ &= -2\vec{a} + 2\vec{b} = 2(-\vec{a} + \vec{b}) \\ \overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA} = (3\vec{a} - \vec{b}) - \vec{a} \\ &= 2\vec{a} - \vec{b} \\ \overrightarrow{AR} &= \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OA} = \left(\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) - \vec{a} \\ &= \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = -\frac{1}{2}(-\vec{a} + \vec{b})\end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 이므로 항상 직선 AB 위에 있는 점은 점 P, 점 R이다.

연습문제

204~206쪽

389 [문] ㉡

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \text{이므로} \\ \overline{AO} &= \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{13}{2} \\ \therefore |\overrightarrow{AO}| &= \overline{AO} = \frac{13}{2}\end{aligned}$$

390 [문] 3

$\overrightarrow{DF}$ 와 크기와 방향이 각각 같은 벡터는 $\overrightarrow{AB}$ 이므로
 $a = 1$
 또 $\overrightarrow{FB}$ 와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터는 $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{AD}$
 이므로
 $b = 2$
 $\therefore a + b = 3$

391 [문] ㉢

$$\begin{aligned}\text{㉠ } \overrightarrow{AA} &= \vec{0} \\ \text{㉡ } \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{BB} = \vec{0} \\ \text{㉢ } \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{DC} \\ \text{㉣ } \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) + \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0} \\ \text{㉤ } \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BD} \\ &= \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DD} = \vec{0}\end{aligned}$$

따라서 나머지 넷과 다른 하나는 ㉢이다.

392 [문] ㄱ, ㄴ, ㄷ

$$\begin{aligned}\text{ㄱ. } \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB} = -\vec{b} \\ \text{ㄴ. } \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} = -\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} = -\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= -\vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} - \vec{b} \\ \text{ㄷ. } \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \vec{a} - \vec{c} \\ \text{ㄹ. } \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OC} \\ &= \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0} \\ \therefore |\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}| &= |\vec{0}| = 0\end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

393 [문] ㉢

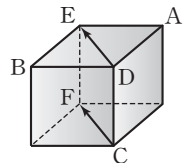
$$\begin{aligned}3(\vec{x} + 2\vec{y}) - 4\vec{y} &= 3\vec{x} + 6\vec{y} - 4\vec{y} = 3\vec{x} + 2\vec{y} \\ &= 3(3\vec{a} + 2\vec{b}) + 2(\vec{a} - 4\vec{b}) \\ &= 9\vec{a} + 6\vec{b} + 2\vec{a} - 8\vec{b} = 11\vec{a} - 2\vec{b}\end{aligned}$$

394 [문] ㉠

$$\begin{aligned}(\vec{a} - m\vec{b}) - (n\vec{a} - 4\vec{b}) &= \vec{a} - \vec{b} \text{에서} \\ 2\vec{a} - m\vec{b} - n\vec{a} + 4\vec{b} &= \vec{a} - \vec{b} \\ \therefore (2-n)\vec{a} + (-m+4)\vec{b} &= \vec{a} - \vec{b} \\ \text{따라서 } 2-n &= 1, -m+4 = -1 \text{이므로} \\ m=5, n=1 &\quad \therefore m+n=6\end{aligned}$$

395 [문] ㉢

주어진 전개도로 만든 정육면체는
 오른쪽 그림과 같으므로
 $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$



396 [문] $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) \\ &= \vec{a} + \vec{c} - \vec{b} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\end{aligned}$$

397 ㉡ 직사각형

(가)에서 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$ 이므로

$$\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PC} \quad \therefore \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$$

즉, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{CD}$ 이므로 사각형 ABCD의 한 쌍의 대변의 길이가 같고 서로 평행하다.

..... ㉠ >>>>> ㉡

(나)에서 $|\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PD}|$ 이므로

$$|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{DB}|$$

즉, $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DB}$ 이므로 사각형 ABCD의 두 대각선의 길이가 같다.

..... ㉢ >>>>> ㉡

㉠, ㉢에서 사각형 ABCD는 직사각형이다. >>>>> ㉢

단계	채점 기준	비율
①	사각형 ABCD의 한 쌍의 대변의 길이가 같고 서로 평행함을 알기	50%
②	사각형 ABCD의 두 대각선의 길이가 같음을 알기	30%
③	사각형 ABCD가 직사각형임을 알기	20%

398 ㉡ 4

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DF} &= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG}) + (\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FH}) + (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GE}) + (\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HF}) \\ &= (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{DH}) + (\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GE}) + (\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HF}) \\ &= 4\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EE} + \overrightarrow{FF} = 4\overrightarrow{BF} \\ \therefore m &= 4 \end{aligned}$$

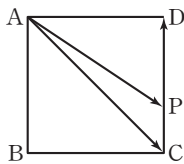
| 다른 풀이 |

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}, \overrightarrow{AE} = \vec{c} \text{라 하면} \\ \overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{BH} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, \\ \overrightarrow{CE} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{DF} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} \\ \therefore \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DF} &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + (-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + (-\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) + (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) \\ &= 4\vec{c} = 4\overrightarrow{AE} = 4\overrightarrow{BF} \\ \therefore m &= 4 \end{aligned}$$

399 ㉡ ①

오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{CD}$ 의 삼등분점 중 점 C에 가까운 점을 P라 하면

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$$



$$\therefore \left| \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \right| = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{AP}| = \overline{AP}$$

$$\text{이때 } \overrightarrow{CP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} = 1 \text{이므로 } \overline{DP} = 2$$

$$\therefore \left| \overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \right| = \overline{AP} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

400 ㉡ $\frac{3}{4}$

오른쪽 그림과 같이 점 O

를 시점으로 하는 두 벡터

$\vec{a}, \vec{b}$ 를 정하면

$$\overrightarrow{OP} = -2\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{OQ} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OR} = \vec{a} + 2\vec{b}$$

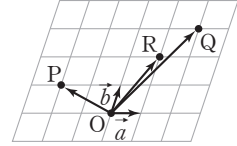
이를 $\overrightarrow{OR} = s\overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{OQ}$ 에 대입하면

$$\vec{a} + 2\vec{b} = s(-2\vec{a} + \vec{b}) + t(2\vec{a} + 3\vec{b})$$

$$\therefore \vec{a} + 2\vec{b} = (-2s + 2t)\vec{a} + (s + 3t)\vec{b}$$

따라서 $1 = -2s + 2t$, $2 = s + 3t$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면

$$s = \frac{1}{8}, t = \frac{5}{8} \quad \therefore s + t = \frac{3}{4}$$



401 ㉡ ㄴ, ㄹ

$$\text{ㄱ. } \vec{a} + \vec{c} = \vec{a} + (4\vec{a} - 3\vec{b}) = 5\vec{a} - 3\vec{b}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \vec{a} - \vec{c} &= \vec{a} - (4\vec{a} - 3\vec{b}) = -3\vec{a} + 3\vec{b} \\ &= -3(\vec{a} - \vec{b}) \end{aligned}$$

$$\text{ㄷ. } \vec{b} + \vec{c} = \vec{b} + (4\vec{a} - 3\vec{b}) = 4\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄹ. } \vec{b} - \vec{c} &= \vec{b} - (4\vec{a} - 3\vec{b}) = -4\vec{a} + 4\vec{b} \\ &= -4(\vec{a} - \vec{b}) \end{aligned}$$

따라서 보기에서 $\vec{a} - \vec{b}$ 와 서로 평행한 벡터는 ㄴ, ㄹ이다.

402 ㉡ 7

두 벡터 $\vec{x}, \vec{y}$ 가 서로 평행하려면

$$\vec{x} = k\vec{y} \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots ㉠$$

이어야 한다.

>>>>> ①

$$\vec{x} + 3\vec{a} = m\vec{a} + 2\vec{b} \text{에서}$$

$$\vec{x} = (m-3)\vec{a} + 2\vec{b} \quad \dots\dots ㉢$$

$$\text{㉢을 } \vec{y} - \vec{x} = 4\vec{a} + 2\vec{b} \text{에 대입하면}$$

$$\vec{y} - \{(m-3)\vec{a} + 2\vec{b}\} = 4\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\therefore \vec{y} = (m+1)\vec{a} + 4\vec{b} \quad \dots\dots ㉡$$

>>>>> ②

$$\text{㉢, ㉡을 ㉠에 대입하면}$$

$$(m-3)\vec{a} + 2\vec{b} = k\{(m+1)\vec{a} + 4\vec{b}\}$$

$$\therefore (m-3)\vec{a} + 2\vec{b} = k(m+1)\vec{a} + 4k\vec{b}$$

따라서 $m-3=k(m+1)$, $2=4k$ 이므로

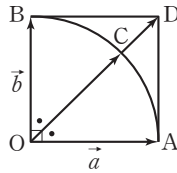
$$k=\frac{1}{2}, m=7$$

▶▶▶▶▶ ③

단계	채점 기준	비율
①	두 벡터 $\vec{x}, \vec{y}$ 가 서로 평행하도록 하는 식 세우기	10%
②	두 벡터 $\vec{x}, \vec{y}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내기	60%
③	m 의 값 구하기	30%

403 ㉮ $\frac{1}{2}$

오른쪽 그림과 같이 두 선분 OA, OB를 이웃하는 두 변으로 하는 정사각형의 나머지 꼭짓점을 D라 하면



$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$$

세 점 O, C, D가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{OD} = \sqrt{2} \overrightarrow{OC}$$

$$\text{즉, } \vec{a} + \vec{b} = \sqrt{2} \overrightarrow{OC} \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{a} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{b}$$

따라서 $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $n = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$mn = \frac{1}{2}$$

404 ㉮ ④

| 접근 방법 | 주어진 쌍곡선이 y 축에 대하여 대칭임을 이용하여 주어진 식을 변형한 후 이 식이 나타내는 도형을 파악한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 의 꼭짓점 중 x 좌표가 음수인 점을 A'이라 하면

$$A(\sqrt{2}, 0), A'(-\sqrt{2}, 0)$$

이때 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{A'O}$ 이므로

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{A'P}$$

$$\text{즉, } |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}| = k \text{에서 } |\overrightarrow{A'P}| = k$$

$$\therefore \overline{A'P} = k$$

따라서 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OP}| = k$ 를 만족시키는 점 P는 중심이 점 A'이고 반지름의 길이가 k 인 원 위의 점이므로 점 P의 개수는 쌍곡선과 원의 교점의 개수와 같다.

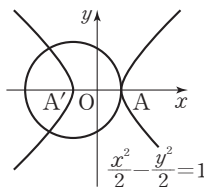
이때 교점의 개수가 3이려면

오른쪽 그림과 같이 원이 점

A를 지나야 하므로

$$k = \overline{AA'}$$

$$= \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$



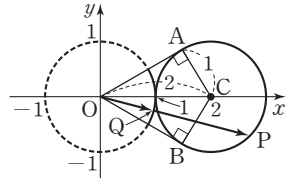
405 ㉮ $\frac{\pi}{3}$

| 접근 방법 | $\overrightarrow{OQ}$ 는 $\overrightarrow{OP}$ 와 방향이 같은 단위벡터임을 이용하여 점 Q가 나타내는 도형이 부채꼴의 호임을 파악한다.

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} \text{ 이므로 } \overrightarrow{OQ} \text{는 } \overrightarrow{OP} \text{와 방향이 같은 단위}$$

벡터이다.

즉, 점 Q가 나타내는 도형은 다음 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴의 호이다.



원 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 의 중심을 C라 하고 원점 O에서 이 원에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B라 하면 $\angle OAC = 90^\circ$, $\overline{OC} = 2$, $\overline{AC} = 1$ 이므로 직각삼각형 AOC에서

$$\sin(\angle AOC) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle AOC = 30^\circ$$

따라서 $\angle AOB = 60^\circ$ 이므로 구하는 도형의 길이는

$$2\pi \times 1 \times \frac{60}{360} = \frac{\pi}{3}$$

406 ㉮ 48

| 접근 방법 | 평행사변형을 이용한 벡터의 덧셈으로 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}$ 를 하나의 벡터로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 두 선분 OB, OF를 이웃하는 두 변으로 하는 평

행사변형의 나머지 꼭짓점을 G라 하면

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OG}$$

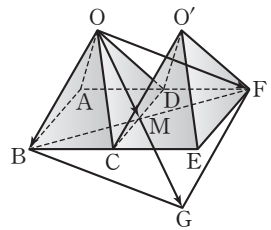
이때 선분 OG의 중점을 M이라 하면 점 M은 선분 BF의 중점이므로 선분 CD의 중점이다.

$$\therefore \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OM}$$

한편 삼각형 OCD는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$$\overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OF}|^2 &= |2\overrightarrow{OM}|^2 \\ &= 4\overline{OM}^2 \\ &= 4 \times (2\sqrt{3})^2 = 48 \end{aligned}$$



01 벡터의 성분

개념 확인

209쪽

407 ㉠ (1) $-\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c}$

(2) $-\vec{a}+4\vec{b}-3\vec{c}$

$$\begin{aligned} (1) \quad \overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}) \\ &= -\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}+3\overrightarrow{OC} \\ &= -\vec{a}-2\vec{b}+3\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CA} &= 3(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})+2(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}) \\ &= -\overrightarrow{OA}+4\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OC} = -\vec{a}+4\vec{b}-3\vec{c} \end{aligned}$$

408 ㉠ (1) $\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}$ (2) $\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}$

(3) $\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

(1) $\frac{3\vec{b}+2\vec{a}}{3+2} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}$

(2) $\frac{2\vec{b}+3\vec{a}}{2+3} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{b}$

유제

211~215쪽

409 ㉠ $\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{3}{10}\vec{b}$

점 P는 변 OB를 3:1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{OB} = \frac{3}{4}\vec{b}$$

점 Q는 선분 PA를 3:2로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \frac{3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OP}}{3+2} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OP} \\ &= \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5} \times \frac{3}{4}\vec{b} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{3}{10}\vec{b} \end{aligned}$$

410 ㉠ $-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

점 P는 모서리 OA의 중점이므로

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

점 Q는 모서리 BC를 2:1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{2\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}}{2+1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$$

$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\right) - \frac{1}{2}\vec{a} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

411 ㉠ $\frac{1}{4}$

선분 OP가 $\angle AOB$ 의 이등분선이므로

$$\overrightarrow{AP} : \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OB} = 3 : 5$$

즉, 점 P는 변 AB를 3:5로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3\overrightarrow{OB}+5\overrightarrow{OA}}{3+5} = \frac{5}{8}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OB}$$

따라서 $m = \frac{5}{8}$, $n = \frac{3}{8}$ 이므로

$$m-n = \frac{1}{4}$$

412 ㉠ $-\frac{6}{7}$

점 P는 선분 DB를 4:3으로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{EP} = \frac{4\overrightarrow{EB}+3\overrightarrow{ED}}{4+3} = \frac{4}{7}\overrightarrow{EB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{ED}$$

이때

$$\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DH} = \vec{b} - \vec{c},$$

$$\overrightarrow{ED} = -\overrightarrow{DE} = -(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH})$$

$$= -\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DH} = -\vec{a} - \vec{c}$$

이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{EP} &= \frac{4}{7}\overrightarrow{EB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{ED} = \frac{4}{7}(\vec{b} - \vec{c}) + \frac{3}{7}(-\vec{a} - \vec{c}) \\ &= -\frac{3}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b} - \vec{c} \end{aligned}$$

따라서 $l = -\frac{3}{7}$, $m = \frac{4}{7}$, $n = -1$ 이므로

$$l+m+n = -\frac{6}{7}$$

| 다른 풀이 |

$$\overrightarrow{EP} = \overrightarrow{DP} - \overrightarrow{DE} = \frac{4}{7}\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DE}$$

$$= \frac{4}{7}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) - (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DH})$$

$$= -\frac{3}{7}\overrightarrow{DA} + \frac{4}{7}\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DH} = -\frac{3}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b} - \vec{c}$$

따라서 $l = -\frac{3}{7}$, $m = \frac{4}{7}$, $n = -1$ 이므로

$$l+m+n = -\frac{6}{7}$$

413 ㉠ 2

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{에서}$$

$$\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = (-\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} = -\vec{a} - 2\vec{b}$$

따라서 $m = -1$, $n = -2$ 이므로

$$mn = 2$$

414 ㉔ $-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = \vec{a} + \vec{b}$

오른쪽 그림과 같이 두 번
BC, CD의 중점을 각각 M,
N이라 하면

$$\begin{aligned}\vec{AM} &= \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{2} \\ &= \frac{\vec{a} + (\vec{a} + \vec{b})}{2} = \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{AN} &= \frac{\vec{AC} + \vec{AD}}{2} \\ &= \frac{(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{b}}{2} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{2}\end{aligned}$$

무게중심은 두 선분 AM, AN을 각각 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\vec{AG}_1 = \frac{2}{3}\vec{AM} = \frac{2}{3} \times \frac{2\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\vec{AG}_2 = \frac{2}{3}\vec{AN} = \frac{2}{3} \times \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{2} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\begin{aligned}\therefore \vec{G_1G_2} &= \vec{AG_2} - \vec{AG_1} \\ &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) - \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

415 ㉔ ①

7개의 점 A, B, C, D, E, F, G의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ 라 하면

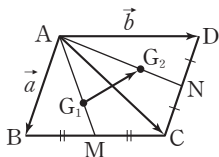
$$\vec{d} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \vec{e} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \vec{f} = \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2},$$

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore \vec{DG} + \vec{EG} + \vec{FG} &= (\vec{g} - \vec{d}) + (\vec{g} - \vec{e}) + (\vec{g} - \vec{f}) \\ &= 3\vec{g} - (\vec{d} + \vec{e} + \vec{f}) \\ &= 3 \times \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} - \left(\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2}\right) \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

|다른 풀이|

$$\begin{aligned}\vec{DG} + \vec{EG} + \vec{FG} &= -(\vec{GD} + \vec{GE} + \vec{GF}) \\ &= -\left(\frac{\vec{GA} + \vec{GB}}{2} + \frac{\vec{GB} + \vec{GC}}{2} + \frac{\vec{GC} + \vec{GA}}{2}\right) \\ &= -(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC}) = \vec{0}\end{aligned}$$



416 ㉔ $-\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{12}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}$

오른쪽 그림과 같이 모서리

AB의 중점을 M이라 하면

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

무게중심 G는 선분 OM을

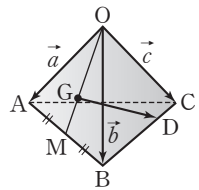
2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\vec{OG} = \frac{2}{3}\vec{OM} = \frac{2}{3} \times \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

점 D는 모서리 BC를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned}\vec{OD} &= \frac{3\vec{OC} + \vec{OB}}{3+1} = \frac{1}{4}\vec{OB} + \frac{3}{4}\vec{OC} \\ &= \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \vec{GD} &= \vec{OD} - \vec{OG} = \left(\frac{1}{4}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}\right) - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{12}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}\end{aligned}$$



417 ㉔ ④

네 점 A, B, C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$ 라

하면 $\vec{PA} + \vec{PB} + 6\vec{PC} = \vec{AB}$ 에서

$$(\vec{a} - \vec{p}) + (\vec{b} - \vec{p}) + 6(\vec{c} - \vec{p}) = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\vec{a} + 3\vec{c} = 4\vec{p}$$

$$\therefore \vec{p} = \frac{\vec{a} + 3\vec{c}}{4} = \frac{1 \times \vec{a} + 3 \times \vec{c}}{1+3}$$

따라서 점 P는 변 CA를 1 : 3으로 내분하는 점이다.

|다른 풀이|

$$\vec{PA} + \vec{PB} + 6\vec{PC} = \vec{AB} \text{에서}$$

$$\vec{PA} + \vec{PB} + 6\vec{PC} = \vec{PB} - \vec{PA}$$

$$\therefore \vec{PA} = -3\vec{PC} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{세 점 A, P, C는 한 직선 위에 있고} \\ \vec{PA}, \vec{PC} \text{는 방향이 서로 반대이다.} \end{array} \right.$$

따라서 점 P는 변 CA를 1 : 3으로 내분하는 점이다.

418 ㉔ 5 : 2

네 점 A, B, C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{p}$ 라

하면 $2\vec{PA} + 4\vec{PB} + \vec{PC} = \vec{BC}$ 에서

$$2(\vec{a} - \vec{p}) + 4(\vec{b} - \vec{p}) + (\vec{c} - \vec{p}) = \vec{c} - \vec{b}$$

$$2\vec{a} + 5\vec{b} = 7\vec{p}$$

$$\therefore \vec{p} = \frac{2\vec{a} + 5\vec{b}}{7} = \frac{5 \times \vec{b} + 2 \times \vec{a}}{5+2}$$

따라서 점 P는 변 AB를 5 : 2로 내분하는 점이므로

$$\triangle CAP : \triangle CPB = \vec{AP} : \vec{PB} = 5 : 2$$

419 ㉮ 85

$$4\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0} \text{에서}$$

$$4\overrightarrow{PA} = -3\overrightarrow{PC}$$

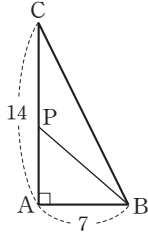
즉, 점 P는 변 AC를 3:4로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{7} \times 14 = 6$$

직각삼각형 ABP에서

$$\overrightarrow{PB}^2 = 7^2 + 6^2 = 85$$

$$\therefore |\overrightarrow{PB}|^2 = \overrightarrow{PB}^2 = 85$$



420 ㉮ 10

네 점 A, B, C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{p}$ 라

하면 $3\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{CB}$ 에서

$$3(\vec{a} - \vec{p}) + 4(\vec{b} - \vec{p}) + 2(\vec{c} - \vec{p}) = \vec{b} - \vec{c}$$

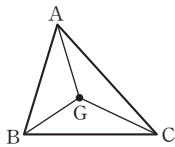
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 3\vec{p} \quad \therefore \vec{p} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

따라서 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\triangle PAB = \frac{1}{3} \triangle ABC = \frac{1}{3} \times 30 = 10$$

|참고| 점 G가 삼각형 ABC의 무게중심일 때,

$$\begin{aligned} \triangle GAB &= \triangle GBC = \triangle GCA \\ &= \frac{1}{3} \triangle ABC \end{aligned}$$



개념 확인

219쪽

421 ㉮ (1) (5, 4) (2) (-3, 7)

422 ㉮ (1) $2\sqrt{5}$ (2) 13

(1) $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

(2) $|\vec{b}| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2} = 13$

423 ㉮ (1) (-1, 0) (2) (9, -14)

(1) $2\vec{a} + \vec{b} = 2(1, -2) + (-3, 4) = (-1, 0)$

(2) $3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(1, -2) - 2(-3, 4) = (9, -14)$

424 ㉮ (1) (-6, 3), $3\sqrt{5}$ (2) (-5, -3), $\sqrt{34}$

(1) $\overrightarrow{AB} = (-4-2, 1-(-2)) = (-6, 3)$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2} = 3\sqrt{5}$

(2) $\overrightarrow{AB} = (-5-0, -3-0) = (-5, -3)$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}$

유제

221~225쪽

425 ㉮ (1, -1)

$$4(\vec{x} - \vec{b}) = 3\vec{x} + 2\vec{a} - \vec{b} \text{에서}$$

$$4\vec{x} - 4\vec{b} = 3\vec{x} + 2\vec{a} - \vec{b}$$

$$\therefore \vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$$

$$= 2(5, -2) + 3(-3, 1)$$

$$= (1, -1)$$

426 ㉮ (2, -1), $\sqrt{5}$

$$-(3\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) + 2(\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c})$$

$$= -3\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} + 2\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$$

$$= -\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}$$

$$= -(3, 0) + (-1, 2) + 3(2, -1)$$

$$= (2, -1)$$

$$\therefore |-(3\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) + 2(\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c})|$$

$$= \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

427 ㉮ $-\frac{3}{2}$

$$\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, k\right) + \frac{1}{4}(\sqrt{3}, 8) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, k+2\right)$$

이때 $\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$ 가 단위벡터이므로

$$\left|\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right| = 1$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (k+2)^2} = 1$$

양변을 제곱하면

$$\frac{3}{4} + k^2 + 4k + 4 = 1, \quad 4k^2 + 16k + 15 = 0$$

$$(2k+5)(2k+3) = 0 \quad \therefore k = -\frac{5}{2} \text{ 또는 } k = -\frac{3}{2}$$

그런데 $k > -2$ 이므로 $k = -\frac{3}{2}$

428 ㉮ 24

$$\vec{a} + \vec{b} = (4t-2, -1) + \left(2, 1 + \frac{3}{t}\right) = \left(4t, \frac{3}{t}\right)$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}|^2 = (4t)^2 + \left(\frac{3}{t}\right)^2 = 16t^2 + \frac{9}{t^2}$$

이때 $t^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$16t^2 + \frac{9}{t^2} \geq 2\sqrt{16t^2 \times \frac{9}{t^2}}$$

$$= 24 \left(\text{단, 등호는 } 16t^2 = \frac{9}{t^2} \text{일 때 성립} \right)$$

따라서 $|\vec{a} + \vec{b}|^2$ 의 최솟값은 24이다.

429 ㉔ (1) $4\vec{a}-2\vec{b}$ (2) $-3\vec{a}+\vec{b}$

(1) $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면

$$(10, 8) = k(2, 3) + l(-1, 2) \\ = (2k-l, 3k+2l)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$10=2k-l, 8=3k+2l$$

두 식을 연립하여 풀면 $k=4, l=-2$

$$\therefore \vec{c}=4\vec{a}-2\vec{b}$$

(2) $\vec{d}=k\vec{a}+l\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면

$$(-7, -7) = k(2, 3) + l(-1, 2) \\ = (2k-l, 3k+2l)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-7=2k-l, -7=3k+2l$$

두 식을 연립하여 풀면 $k=-3, l=1$

$$\therefore \vec{d}=-3\vec{a}+\vec{b}$$

430 ㉔ -2

두 벡터 $\vec{a}+t\vec{b}, \vec{a}+\vec{c}$ 를 각각 성분으로 나타내면

$$\vec{a}+t\vec{b} = (1, -2) + t(5, 8) = (1+5t, -2+8t)$$

$$\vec{a}+\vec{c} = (1, -2) + (1, 6) = (2, 4)$$

두 벡터 $\vec{a}+t\vec{b}, \vec{a}+\vec{c}$ 가 서로 평행하려면

$$\vec{a}+t\vec{b} = k(\vec{a}+\vec{c}) \quad (k \neq 0) \text{ 이어야 한다.}$$

$$\therefore (1+5t, -2+8t) = k(2, 4) = (2k, 4k)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$1+5t=2k, -2+8t=4k$$

두 식을 연립하여 풀면 $k=-\frac{9}{2}, t=-2$

431 ㉔ $\sqrt{5}$

$\vec{c}=2\vec{a}-\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면

$$(7, 2q) = 2(2p, 3) - (1, p-q) \\ = (4p-1, 6-p+q)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$7=4p-1, 2q=6-p+q$$

$$\therefore p=2, q=4$$

따라서 $\vec{b}=(1, -2)$ 이므로

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

432 ㉔ ②

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{a}=t\vec{b} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

$$\therefore (k+3, 3k-1) = t(1, 1) = (t, t)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$k+3=t, 3k-1=t$$

두 식을 연립하여 풀면

$$t=5, k=2$$

433 ㉔ 12

$$\overrightarrow{AB} = (-1 - (-3), 1 - 5) = (2, -4)$$

$$\overrightarrow{CD} = (x-4, y-(-2)) = (x-4, y+2)$$

이때 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ 이므로

$$(2, -4) = (x-4, y+2)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$2=x-4, -4=y+2$$

따라서 $x=6, y=-6$ 이므로

$$x-y=12$$

434 ㉔ 6

$$\overrightarrow{AB} = (4 - (x-1), (x+1) - 2)$$

$$= (5-x, x-1)$$

이때 $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{10}$ 이므로

$$\sqrt{(5-x)^2 + (x-1)^2} = 2\sqrt{10}$$

양변을 제곱하면

$$x^2 - 10x + 25 + x^2 - 2x + 1 = 40$$

$$x^2 - 6x - 7 = 0, (x+1)(x-7) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 7$$

따라서 모든 x 의 값의 합은

$$-1+7=6$$

435 ㉔ (2, 1)

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{AP} = (x-2, y-(-4)) = (x-2, y+4)$$

$$\overrightarrow{BP} = (x-5, y-1)$$

$$\overrightarrow{CP} = (x-(-1), y-6) = (x+1, y-6)$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP}$$

$$= (x-2, y+4) + (x-5, y-1) + (x+1, y-6)$$

$$= (3x-6, 3y-3)$$

이때 $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{CP} = \vec{0}$ 이므로

$$(3x-6, 3y-3) = (0, 0)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$3x-6=0, 3y-3=0$$

$$\therefore x=2, y=1$$

따라서 점 P의 좌표는 (2, 1)

436 ㉮ $\sqrt{2}$

직선 $y = -x + 3$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, -a+3)$ 이라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= (a-1, (-a+3)-4) \\ &= (a-1, -a-1) \\ \overrightarrow{BP} &= (a-5, (-a+3)-(-2)) \\ &= (a-5, -a+5) \\ \therefore \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} &= (a-1, -a-1) + (a-5, -a+5) \\ &= (2a-6, -2a+4) \\ \therefore |\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}| &= \sqrt{(2a-6)^2 + (-2a+4)^2} \\ &= \sqrt{8a^2 - 40a + 52} \\ &= \sqrt{8\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + 2}\end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{5}{2}$ 일 때 $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}|$ 의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

개념 확인

229쪽

437 ㉮ (1) $(3, -1, 4)$ (2) $(-4, 2, 1)$
(3) $(0, 1, -6)$ (4) $(5, 0, -3)$

438 ㉮ (1) 3 (2) 5 (3) 4 (4) $2\sqrt{6}$

$$\begin{aligned}(1) |\vec{a}| &= \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3 \\ (2) |\vec{b}| &= \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} = 5 \\ (3) |\vec{c}| &= \sqrt{(\sqrt{5})^2 + (-\sqrt{2})^2 + 3^2} = 4 \\ (4) |\vec{d}| &= \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{7})^2 + (\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

439 ㉮ (1) $(4, -2, 6)$ (2) $(13, -3, -5)$
(3) $(5, 1, -17)$ (4) $(-7, 2, 0)$

$$\begin{aligned}(1) 2\vec{a} - \vec{b} &= 2(3, -1, 1) - (2, 0, -4) \\ &= (4, -2, 6) \\ (2) 3\vec{a} + 2\vec{b} &= 3(3, -1, 1) + 2(2, 0, -4) \\ &= (13, -3, -5) \\ (3) -\vec{a} + 4\vec{b} &= -(3, -1, 1) + 4(2, 0, -4) \\ &= (5, 1, -17) \\ (4) -2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} &= -2(3, -1, 1) - \frac{1}{2}(2, 0, -4) \\ &= (-7, 2, 0)\end{aligned}$$

440 ㉮ (1) $(1, 2, 1), \sqrt{6}$

(2) $(-3, 0, 4), 5$

$$\begin{aligned}(1) \overrightarrow{AB} &= (2-1, 6-4, -1-(-2)) \\ &= (1, 2, 1) \\ \therefore |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \\ (2) \overrightarrow{AB} &= (2-5, -1-(-1), 7-3) \\ &= (-3, 0, 4) \\ \therefore |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 4^2} = 5\end{aligned}$$

유제

231~237쪽

441 ㉮ -3

$$\begin{aligned}2(3\vec{x} + \vec{a}) &= 5(\vec{x} - \vec{b}) + 3\vec{a} \text{에서} \\ 6\vec{x} + 2\vec{a} &= 5\vec{x} - 5\vec{b} + 3\vec{a} \\ \therefore \vec{x} &= \vec{a} - 5\vec{b} \\ &= (3, -2, 1) - 5(1, -1, 1) \\ &= (-2, 3, -4)\end{aligned}$$

따라서 벡터 $\vec{x}$ 의 모든 성분의 합은 $-2+3+(-4)=-3$

442 ㉮ $\sqrt{29}$

$$\begin{aligned}2(\vec{2a} + \vec{b} - \vec{c}) - 3(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}) \\ &= 4\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c} - 3\vec{a} - 3\vec{b} + 6\vec{c} \\ &= \vec{a} - \vec{b} + 4\vec{c} \\ &= (4, 1, -1) - (2, 4, -1) + 4(0, 0, 1) \\ &= (2, -3, 4) \\ \therefore |2(\vec{2a} + \vec{b} - \vec{c}) - 3(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c})| \\ &= \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{29}\end{aligned}$$

443 ㉮ $(2, -5, 9)$

$$\begin{aligned}2\vec{p} + \vec{q} &= (4, 0, 3) \quad \cdots \cdots \text{㉠} \\ \vec{p} - \vec{q} &= (2, 3, -3) \quad \cdots \cdots \text{㉡} \\ \text{㉠} + \text{㉡} \text{을 하면} \\ 3\vec{p} &= (6, 3, 0) \quad \therefore \vec{p} = (2, 1, 0) \\ \text{이를 ㉡에 대입하면} \\ (2, 1, 0) - \vec{q} &= (2, 3, -3) \\ \therefore \vec{q} &= (2, 1, 0) - (2, 3, -3) = (0, -2, 3) \\ \therefore \vec{p} + 3\vec{q} &= (2, 1, 0) + 3(0, -2, 3) \\ &= (2, -5, 9)\end{aligned}$$

444 ㉠ -2

$$\begin{aligned} \vec{t}\vec{a}+\vec{b} &= t(3, -1, 1) + (5, -5, 2) \\ &= (3t+5, -t-5, t+2) \\ \therefore |\vec{t}\vec{a}+\vec{b}| &= \sqrt{(3t+5)^2 + (-t-5)^2 + (t+2)^2} \\ &= \sqrt{11t^2 + 44t + 54} \\ &= \sqrt{11(t+2)^2 + 10} \end{aligned}$$

따라서 $|\vec{t}\vec{a}+\vec{b}|$ 는 $t=-2$ 일 때 최솟값을 갖는다.

445 ㉠ 9

$$\begin{aligned} \vec{d} &= l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} \text{를 성분으로 나타내면} \\ (5, 0, 4) &= l(1, 1, 1) + m(1, -1, 0) + n(0, 1, -1) \\ &= (l+m, l-m+n, l-n) \end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$5=l+m, 0=l-m+n, 4=l-n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

세 식을 변끼리 더하면

$$9=3l \quad \therefore l=3$$

이를 ①에 각각 대입하여 풀면

$$m=2, n=-1$$

$$\therefore 4l-m+n=4 \times 3 - 2 + (-1) = 9$$

446 ㉠ 3

두 벡터 $\vec{a}+t\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{c}$ 를 각각 성분으로 나타내면

$$\begin{aligned} \vec{a}+t\vec{b} &= (-3, -8, 3) + t(2, 1, 0) \\ &= (-3+2t, -8+t, 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}+\vec{c} &= (-3, -8, 3) + (9, -2, 3) \\ &= (6, -10, 6) \end{aligned}$$

두 벡터 $\vec{a}+t\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{c}$ 가 서로 평행하려면

$$\vec{a}+t\vec{b} = k(\vec{a}+\vec{c}) \quad (k \neq 0) \text{이어야 한다.}$$

$$\begin{aligned} \therefore (-3+2t, -8+t, 3) &= k(6, -10, 6) \\ &= (6k, -10k, 6k) \end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-3+2t=6k, -8+t=-10k, 3=6k$$

$$\therefore k=\frac{1}{2}, t=3$$

447 ㉠ $3\sqrt{10}$

$\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면

$$\begin{aligned} (-3, -4, z-3) &= (x-1, 2, -1) - 2(3, y+1, 2) \\ &= (x-7, -2y, -5) \end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-3=x-7, -4=-2y, z-3=-5$$

$$\therefore x=4, y=2, z=-2$$

따라서 $\vec{a}=(3, 2, -1)$, $\vec{b}=(3, 3, 2)$,

$\vec{c}=(-3, -4, -5)$ 이므로

$$\begin{aligned} 2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c} &= 2(3, 2, -1) - (3, 3, 2) + (-3, -4, -5) \\ &= (0, -3, -9) \end{aligned}$$

$$\therefore |2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-9)^2} = 3\sqrt{10}$$

448 ㉠ -12

두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{c}$ 를 각각 성분으로 나타내면

$$\begin{aligned} \vec{a}+\vec{b} &= (3, -1, 4) + (-7, m+1, 3n) \\ &= (-4, m, 4+3n) \end{aligned}$$

$$\vec{a}-\vec{c} = (3, -1, 4) - (1, 2, 3) = (2, -3, 1)$$

두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{c}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{a}+\vec{b} = k(\vec{a}-\vec{c}) \quad (\text{단, } k \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore (-4, m, 4+3n) &= k(2, -3, 1) \\ &= (2k, -3k, k) \end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-4=2k, m=-3k, 4+3n=k$$

따라서 $k=-2$, $m=6$, $n=-2$ 이므로

$$mn=-12$$

449 ㉠ $\sqrt{6}$

$$\vec{AB} = (5-1, -2-2, 5-(-3)) = (4, -4, 8)$$

$$\begin{aligned} \vec{CD} &= (a-(-2), b-3, c-(-1)) \\ &= (a+2, b-3, c+1) \end{aligned}$$

이때 $\vec{AB}=4\vec{CD}$ 이므로

$$\begin{aligned} (4, -4, 8) &= 4(a+2, b-3, c+1) \\ &= (4a+8, 4b-12, 4c+4) \end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$4=4a+8, -4=4b-12, 8=4c+4$$

$$\therefore a=-1, b=2, c=1$$

따라서 $D(-1, 2, 1)$ 이므로

$$|\vec{OD}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

450 ㉠ $\sqrt{6}$

$$\begin{aligned} \vec{AB} &= ((t+1)-3, 4-t, (t+3)-(t+1)) \\ &= (t-2, 4-t, 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{AB}| &= \sqrt{(t-2)^2 + (4-t)^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{2t^2 - 12t + 24} \\ &= \sqrt{2(t-3)^2 + 6} \end{aligned}$$

따라서 $t=3$ 일 때 $|\vec{AB}|$ 의 최솟값은 $\sqrt{6}$ 이다.

451 ㉮ 11

$$\overrightarrow{AB} = (1 - (-1), 0 - 3, 4 - 2) = (2, -3, 2)$$

$$\overrightarrow{CD} = (a - 4, -1 - 5, b - (-1))$$

$$= (a - 4, -6, b + 1)$$

이때 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ 이므로

$$\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB} \text{ (단, } k \neq 0 \text{)}$$

$$\begin{aligned} \therefore (a - 4, -6, b + 1) &= k(2, -3, 2) \\ &= (2k, -3k, 2k) \end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$a - 4 = 2k, -6 = -3k, b + 1 = 2k$$

따라서 $k = 2, a = 8, b = 3$ 이므로

$$a + b = 11$$

452 ㉮ $\sqrt{38}$

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\overrightarrow{AP} = (x - (-1), y - 5, z - 2)$$

$$= (x + 1, y - 5, z - 2)$$

$$\overrightarrow{BP} = (x - 3, y - 1, z - 5)$$

$$\overrightarrow{CP} = (x - 4, y - 3, z - (-1))$$

$$= (x - 4, y - 3, z + 1)$$

이때 $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CP}$ 이므로

$$(x + 1, y - 5, z - 2) + (x - 3, y - 1, z - 5)$$

$$= (x - 4, y - 3, z + 1)$$

$$\therefore (2x - 2, 2y - 6, 2z - 7) = (x - 4, y - 3, z + 1)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$2x - 2 = x - 4, 2y - 6 = y - 3, 2z - 7 = z + 1$$

$$\therefore x = -2, y = 3, z = 8$$

따라서 $\overrightarrow{BP} = (-5, 2, 3)$ 이므로

$$|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{38}$$

453 ㉮ $(x+3)^2 + y^2 = 16$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{AP} = (x - 1, y - 4)$$

$$\overrightarrow{BP} = (x - (-1), y - 2) = (x + 1, y - 2)$$

이때 $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{2} |\overrightarrow{BP}|$ 이므로

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 4)^2} = \sqrt{2} \sqrt{(x + 1)^2 + (y - 2)^2}$$

양변을 제곱하면

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16$$

$$= 2(x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4)$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 7 = 0$$

$$\therefore (x + 3)^2 + y^2 = 16$$

454 ㉮ $(x-3)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\overrightarrow{PA} = (1 - x, -2 - y, 5 - z)$$

$$\overrightarrow{PB} = (3 - x, -1 - y, 1 - z)$$

$$\overrightarrow{PC} = (5 - x, 3 - y, 3 - z)$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$$

$$\begin{aligned} &= (1 - x, -2 - y, 5 - z) + (3 - x, -1 - y, 1 - z) \\ &\quad + (5 - x, 3 - y, 3 - z) \end{aligned}$$

$$= (9 - 3x, -3y, 9 - 3z)$$

이때 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}| = 9$ 이므로

$$\sqrt{(9 - 3x)^2 + (-3y)^2 + (9 - 3z)^2} = 9$$

양변을 제곱하면

$$9(x - 3)^2 + 9y^2 + 9(z - 3)^2 = 81$$

$$\therefore (x - 3)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 9$$

455 ㉮ 4π

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{PA} = (2 - x, 4 - y)$$

$$\overrightarrow{PB} = (-1 - x, 5 - y)$$

$$\overrightarrow{PC} = (5 - x, -3 - y)$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$$

$$= (2 - x, 4 - y) + (-1 - x, 5 - y)$$

$$+ (5 - x, -3 - y)$$

$$= (6 - 3x, 6 - 3y)$$

이때 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}| = 6$ 이므로

$$\sqrt{(6 - 3x)^2 + (6 - 3y)^2} = 6$$

양변을 제곱하면

$$9(x - 2)^2 + 9(y - 2)^2 = 36$$

$$\therefore (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 (2, 2)를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 둘레의 길이는

$$2\pi \times 2 = 4\pi$$

456 ㉮ 9

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\overrightarrow{OA} = (2, -2, 1)$$

$$\overrightarrow{AP} = (x - 2, y - (-2), z - 1)$$

$$= (x - 2, y + 2, z - 1)$$

이때 $|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{AP}| = k$ 이므로

$$\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \sqrt{(x - 2)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2} = k$$

양변을 제곱하면

$$9\{(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2\} = k^2$$

$$\therefore (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = \frac{k^2}{9}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 (2, -2, 1)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{k}{3}$ 인 구이다.

이때 이 도형의 겹넓이가 36π 이므로

$$4\pi \times \left(\frac{k}{3}\right)^2 = 36\pi, k^2 = 81$$

$$\therefore k = 9 (\because k > 0)$$

연습문제

238~240쪽

457 ㉮ $\frac{1}{3}$

점 M은 변 AB의 중점이므로

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

점 N은 변 OA를 1:2로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\vec{a} - \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$= -\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\text{따라서 } m = -\frac{1}{6}, n = -\frac{1}{2} \text{ 이므로 } m - n = \frac{1}{3}$$

458 ㉮ $\frac{1}{9}$

네 점 A, B, C, G의 위치벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{g}$ 라 하면

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\overrightarrow{AG} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC} \text{에서}$$

$$\vec{g} - \vec{a} = m(\vec{b} - \vec{a}) + n(\vec{c} - \vec{a})$$

$$\therefore \vec{g} = (-m - n + 1)\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = (-m - n + 1)\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$$

세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 는 서로 평행하지 않으므로

$$\frac{1}{3} = -m - n + 1, \frac{1}{3} = m, \frac{1}{3} = n$$

$$\text{따라서 } m = \frac{1}{3}, n = \frac{1}{3} \text{ 이므로 } mn = \frac{1}{9}$$

| 다른 풀이 |

오른쪽 그림과 같이 변 BC의

중점을 M이라 하면

$$\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

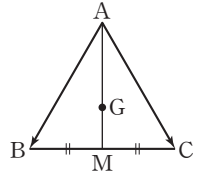
무게중심 G는 선분 AM을

2:1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \times \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{따라서 } m = \frac{1}{3}, n = \frac{1}{3} \text{ 이므로 } mn = \frac{1}{9}$$



459 ㉮ ③

$$\vec{p} + \vec{q} = (3, 2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\vec{p} - 2\vec{q} = (0, -4) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

① - ②을 하면

$$3\vec{q} = (3, 6) \quad \therefore \vec{q} = (1, 2)$$

이를 ①에 대입하면 $\vec{p} + (1, 2) = (3, 2)$

$$\therefore \vec{p} = (3, 2) - (1, 2) = (2, 0)$$

$$\therefore \vec{p} - \vec{q} = (2, 0) - (1, 2) = (1, -2)$$

따라서 $\vec{p} - \vec{q}$ 의 모든 성분의 합은

$$1 + (-2) = -1$$

460 ㉮ $\sqrt{35}$

$$3(\vec{a} + \vec{b}) - 2(\vec{a} - \vec{c})$$

$$= \vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}$$

$$= (2, -3, 1) + 3(-1, 2, 4) + 2(3, -2, -5)$$

$$= (5, -1, 3)$$

$$\therefore |3(\vec{a} + \vec{b}) - 2(\vec{a} - \vec{c})| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{35}$$

461 ㉮ $\frac{4}{3}$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$$

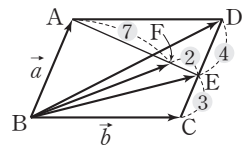
이고 점 E는 변 CD를

3:4로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{BE} = \frac{3\overrightarrow{BD} + 4\overrightarrow{BC}}{3+4}$$

$$= \frac{4}{7}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{7}\overrightarrow{BD}$$

$$= \frac{4}{7}\vec{b} + \frac{3}{7}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{3}{7}\vec{a} + \vec{b}$$



점 F는 선분 AE를 7:2로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BF} &= \frac{7\overrightarrow{BE} + 2\overrightarrow{BA}}{7+2} = \frac{2}{9}\overrightarrow{BA} + \frac{7}{9}\overrightarrow{BE} \\ &= \frac{2}{9}\vec{a} + \frac{7}{9}\left(\frac{3}{7}\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{5}{9}\vec{a} + \frac{7}{9}\vec{b}\end{aligned}$$

따라서 $m = \frac{5}{9}$, $n = \frac{7}{9}$ 이므로 $m+n = \frac{4}{3}$

462 ㉠ $\frac{2}{9}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG_1} &= \frac{2}{3} \times \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG_2} &= \frac{2}{3} \times \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} \\ &= \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{G_1G_2} &= \overrightarrow{OG_2} - \overrightarrow{OG_1} \\ &= \left(\frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}\right) - \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

따라서 $l = -\frac{1}{3}$, $m = 0$, $n = \frac{1}{3}$ 이므로

$$l^2 + m^2 + n^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

463 ㉠ $-\frac{9}{4}$

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 의 시점을 좌표평면의 원점으로 놓고 각각 성분으로 나타내면

$$\vec{a} = (1, 2), \vec{b} = (-2, 4), \vec{c} = (-6, -2) \quad \text{..... ①}$$

즉, $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$ 를 성분으로 나타내면

$$\begin{aligned}(-6, -2) &= m(1, 2) + n(-2, 4) \\ &= (m-2n, 2m+4n)\end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-6 = m - 2n, \quad -2 = 2m + 4n \quad \text{..... ②}$$

두 식을 연립하여 풀면

$$m = -\frac{7}{2}, \quad n = \frac{5}{4}$$

$$\therefore m+n = -\frac{9}{4} \quad \text{..... ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 의 시점을 좌표평면의 원점으로 놓고 각각 성분으로 나타내기	30%
②	m , n 에 대한 식 세우기	40%
③	$m+n$ 의 값 구하기	30%

464 ㉠ ⑤

$\vec{v} = (x, y)$ 라 하면

$$\vec{v} + \vec{b} = (x, y) + (4, -2) = (x+4, y-2)$$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{v} + \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{v} + \vec{b} = k\vec{a} \quad (\text{단, } k \neq 0)$$

$$\begin{aligned}\therefore (x+4, y-2) &= k(3, 1) \\ &= (3k, k)\end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$x+4 = 3k, \quad y-2 = k$$

$$\therefore x = 3k-4, \quad y = k+2$$

$$\begin{aligned}\therefore |\vec{v}|^2 &= x^2 + y^2 = (3k-4)^2 + (k+2)^2 \\ &= 10k^2 - 20k + 20 = 10(k-1)^2 + 10\end{aligned}$$

따라서 $k=1$ 일 때 $|\vec{v}|^2$ 의 최솟값은 10이다.

465 ㉠ ③

점 D의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{AB} = (3-1, 2-1) = (2, 1)$$

$$\overrightarrow{CD} = (x - (-3), y - 4) = (x+3, y-4)$$

이때 $3\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 이므로

$$3(2, 1) = (x+3, y-4)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$6 = x+3, \quad 3 = y-4$$

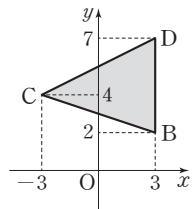
$$\therefore x = 3, \quad y = 7$$

$$\therefore D(3, 7)$$

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형

BDC의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times (7-2) \times \{3 - (-3)\} \\ = 15\end{aligned}$$



466 ㉠ $-\frac{8}{5}$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \quad (\text{단, } k \neq 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = (1-3, -1-(a+1)) = (-2, -2-a),$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2-3, a-(a+1)) = (-5, -1) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}(-2, -2-a) &= k(-5, -1) \\ &= (-5k, -k)\end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$-2 = -5k, \quad -2-a = -k$$

$$\therefore k = \frac{2}{5}, \quad a = -\frac{8}{5}$$

467 ㉮ $\vec{b}=(-2, 1, 2), \vec{c}=(2, -1, -2)$

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$\vec{b}=k\vec{a}$ (단, $k \neq 0$)

$\therefore \vec{b}=k(-4, 2, 4)=(-4k, 2k, 4k)$

이때 $|\vec{b}|=3$ 이므로

$\sqrt{(-4k)^2+(2k)^2+(4k)^2}=3$

$6|k|=3, |k|=\frac{1}{2}$

$\therefore k=\pm \frac{1}{2}$

$\therefore \vec{b}=(-2, 1, 2), \vec{c}=(2, -1, -2)$

468 ㉮ $\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$

$\vec{AB}=(3-1, 1-3, 3-2)=(2, -2, 1)$

$\therefore |\vec{AB}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$

따라서 벡터 $\vec{AB}$ 와 방향이 반대인 단위벡터는

$$-\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|}=-\frac{1}{3}\vec{AB}=-\frac{1}{3}(2, -2, 1)$$

$$=\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

469 ㉮ 7

평행사변형 ABCD에서 $\vec{AD}=\vec{BC}$

$\vec{AD}=(a-(-1), b-0, c-1)$

$= (a+1, b, c-1),$

$\vec{BC}=(3-0, 5-2, 8-3)=(3, 3, 5)$ 이므로

$(a+1, b, c-1)=(3, 3, 5)$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$a+1=3, b=3, c-1=5$

$\therefore a=2, b=3, c=6$

따라서 D(2, 3, 6)이므로

$|\vec{OD}|=\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$

470 ㉮ (0, 4, -1)

yz평면 위의 점 P의 좌표를 (0, a, b)라 하면

$\vec{PA}=(-1, 5-a, -2-b)$

$\vec{PB}=(-4, 3-a, 2-b)$

$\vec{PC}=(-1, 4-a, -3-b)$

$\therefore \vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}$

$=(-1, 5-a, -2-b)+(-4, 3-a, 2-b)$

$+(-1, 4-a, -3-b)$

$=(-6, 12-3a, -3-3b)$

$\therefore |\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}|$

$=\sqrt{(-6)^2+(12-3a)^2+(-3-3b)^2}$

$=3\sqrt{(a-4)^2+(b+1)^2+4}$

즉, $|\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}|$ 는 $a=4, b=-1$ 일 때 최솟값을 갖는다.

따라서 구하는 점 P의 좌표는 (0, 4, -1)

471 ㉮ $32\sqrt{3}\pi$

점 P의 좌표를 (x, y, z)라 하면

$\vec{AP}=(x-4, y+2, z-2)$

$\vec{BP}=(x-1, y-1, z+1)$

▶▶▶▶▶ ①

이때 $|\vec{AP}|=2|\vec{BP}|$ 이므로

$\sqrt{(x-4)^2+(y+2)^2+(z-2)^2}$

$=2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2}$

양변을 제곱하면

$x^2-8x+16+y^2+4y+4+z^2-4z+4$

$=4(x^2-2x+1+y^2-2y+1+z^2+2z+1)$

$x^2+y^2+z^2-4y+4z-4=0$

$\therefore x^2+(y-2)^2+(z+2)^2=12$

▶▶▶▶▶ ②

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 (0, 2, -2)를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 구이므로 구하는 도형의 부피는

$\frac{4}{3}\pi \times (2\sqrt{3})^3=32\sqrt{3}\pi$

▶▶▶▶▶ ③

단계	채점 기준	비율
①	점 P의 좌표를 (x, y, z)로 놓고 두 벡터 $\vec{AP}, \vec{BP}$ 를 성분으로 나타내기	20%
②	점 P가 나타내는 도형의 방정식 구하기	50%
③	점 P가 나타내는 도형의 부피 구하기	30%

472 ㉮ ⑤

㉮ 방법 ㉮ (4)의 등식을 변형하여 선분 BD의 내분점의 위치를 파악하고, 높이가 같은 삼각형의 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같음을 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

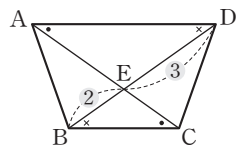
(4)에서

$t\vec{AC}=3\vec{AB}+2\vec{AD}$

$\therefore \frac{t}{5}\vec{AC}=\frac{2\vec{AD}+3\vec{AB}}{2+3}$

이때 선분 BD를 2:3으로

내분하는 점을 E라 하면 $\frac{t}{5}\vec{AC}=\vec{AE}$ 이므로 점 E는 두 선분 BD, AC의 교점이다. ㉮ 세 점 A, E, C는 한 직선 위에 있다.



삼각형 ABD의 넓이가 12이고 $\overline{BD} : \overline{ED} = 5 : 3$ 이므로

$$\triangle AED = \frac{3}{5} \triangle ABD = \frac{3}{5} \times 12 = \frac{36}{5}$$

(가)에서 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ 가 서로 평행하므로

$$\triangle AED \sim \triangle CEB \text{ (AA 닮음)}$$

이때 두 삼각형 AED, CEB의 닮음비는

$$\overline{ED} : \overline{EB} = 3 : 2 \text{ 이므로 넓이의 비는 } 9 : 4 \text{ 이다.}$$

$$\therefore \triangle CEB = \frac{4}{9} \triangle AED = \frac{4}{9} \times \frac{36}{5} = \frac{16}{5}$$

$$\overline{BE} : \overline{BD} = 2 : 5 \text{ 이므로}$$

$$\triangle BCD = \frac{5}{2} \triangle CEB = \frac{5}{2} \times \frac{16}{5} = 8$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD = 12 + 8 = 20$$

473 ㉔ $\frac{3}{4}$

| 접근 방법 | 주어진 등식을 변형하여 변 BC의 내분점의 위치를 파악하고, 점 D와의 관계를 이용하여 $\overline{BD} : \overline{DC}$ 를 구한다.

$$6\overrightarrow{PA} + 4\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0} \text{ 에서}$$

$$6\overrightarrow{PA} = -4\overrightarrow{PB} - 3\overrightarrow{PC}$$

$$\therefore 6\overrightarrow{PA} = -7 \times \frac{3\overrightarrow{PC} + 4\overrightarrow{PB}}{3+4}$$

이때 변 BC를 3 : 4로 내분하는 점을 Q라 하면

$$6\overrightarrow{PA} = -7\overrightarrow{PQ}$$

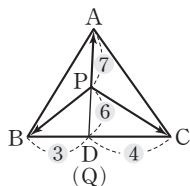
즉, 점 P는 선분 AQ를 7 : 6으로 내분하는 점이다.

점 Q는 직선 AP와 변 BC의

교점이므로 점 D와 일치한다.

따라서 $\overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 4$ 이므로

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{3}{4}$$



474 ㉔ ③

| 접근 방법 | 점 P의 xy 평면, yz 평면, zx 평면 위로의 정사영이 각각 점 A, B, C임을 이용하여 주어진 등식을 성분으로 나타낸다.

점 P(3, -2, 4)의 xy 평면, yz 평면, zx 평면 위로의 정사영이 각각 점 A, B, C이므로

$$A(3, -2, 0), B(0, -2, 4), C(3, 0, 4)$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} = (3, -2, 0), \overrightarrow{OB} = (0, -2, 4),$$

$$\overrightarrow{OC} = (3, 0, 4)$$

$$\overrightarrow{OP} = l\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC} \text{ 를 성분으로 나타내면}$$

$$(3, -2, 4)$$

$$= l(3, -2, 0) + m(0, -2, 4) + n(3, 0, 4)$$

$$= (3l + 3n, -2l - 2m, 4m + 4n)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$3 = 3l + 3n, -2 = -2l - 2m, 4 = 4m + 4n$$

$$\therefore l + n = 1, l + m = 1, m + n = 1$$

세 식을 변끼리 더하면 $2(l + m + n) = 3$

$$\therefore 8(l + m + n) = 4 \times 3 = 12$$

III-2. 벡터의 성분과 내적

02 벡터의 내적

개념 확인

243쪽

475 ㉔ (1) $10\sqrt{3}$ (2) -10

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 30^\circ$$

$$= 4 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}| \cos (180^\circ - 120^\circ)$$

$$= -4 \times 5 \times \frac{1}{2} = -10$$

476 ㉔ (1) -3 (2) -8

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times 2 + (-1) \times 5 = -3$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \times (-1) + 4 \times (-6) + 5 \times 3 = -8$$

477 ㉔ (1) 16 (2) -5

$$(1) \vec{a} \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 3\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}|^2 + 3\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= 2^2 + 3 \times 4 = 16$$

$$(2) (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} + \vec{b})$$

$$= 2\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b}$$

$$= 2|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2$$

$$= 2 \times 2^2 - 4 - 3^2 = -5$$

유제

245~249쪽

478 ㉔ (1) 4 (2) 0 (3) 4 (4) -4

(1) 삼각형 AFC는 정삼각형이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$ 가 이루는 각의 크기가 60° 이다.

$$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AF}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AF} = |\overrightarrow{AC}| |\overrightarrow{AF}| \cos 60^\circ$$

$$= 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 4$$

(2) 시점이 점 D가 되도록 벡터 $\overrightarrow{BF}$ 를 평행이동하면

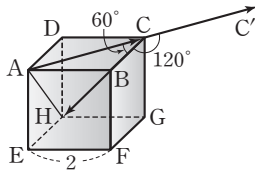
$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DH}$$

두 벡터 $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{DC}$ 가 이루는 각의 크기가 90° 이고
 $|\overrightarrow{DH}| = |\overrightarrow{DC}| = 2$ 이므로
 $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{DH}| |\overrightarrow{DC}| \cos 90^\circ$
 $= 2 \times 2 \times 0 = 0$

(3) 시점이 점 D가 되도록 벡터 $\overrightarrow{CG}$ 를 평행이동하면
 $\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}$

두 벡터 $\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{DG}$ 가 이루는 각의 크기가 45° 이고
 $|\overrightarrow{DH}| = 2$, $|\overrightarrow{DG}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로
 $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DG} = |\overrightarrow{DH}| |\overrightarrow{DG}| \cos 45^\circ$
 $= 2 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$

(4) 오른쪽 그림과 같이
 시점이 점 C가 되도록
 벡터 $\overrightarrow{AC}$ 를 평행
 이동하면
 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CC'}$



이때 삼각형 AHC는 정삼각형이므로
 $\angle ACH = 60^\circ$

따라서 두 벡터 $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{CH}$ 가 이루는 각의 크기가
 $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 이고
 $|\overrightarrow{CC'}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CH}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로
 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{CH}$
 $= -|\overrightarrow{CC'}| |\overrightarrow{CH}| \cos (180^\circ - 120^\circ)$
 $= -2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = -4$

479 ㉠ $-\frac{1}{2}$

시점이 점 C가 되도록 벡터 $\overrightarrow{AF}$ 를 평행이동하면
 $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD}$

두 벡터 $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CB}$ 가 이루는 각의 크기가 120° 이고
 $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{CB}| = 1$ 이므로 정육각형의 한 내각의 크기는 $\frac{180^\circ \times (6-2)}{6} = 120^\circ$
 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB}$
 $= -|\overrightarrow{CD}| |\overrightarrow{CB}| \cos (180^\circ - 120^\circ)$
 $= -1 \times 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

480 ㉠ $6\sqrt{2}$

두 벡터 $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ 가 이루는 각의 크기는
 $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$
 이때 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 6\sqrt{2}$ 이므로
 $|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos 45^\circ = 6\sqrt{2}$
 $4 \times |\overrightarrow{BC}| \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \quad \therefore |\overrightarrow{BC}| = 3$

따라서 $|\overrightarrow{BC}| = 3$ 이므로 평행사변형 ABCD의 넓이는
 $|\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{BC}| \times \sin 45^\circ = 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$

481 ㉠ 13

두 벡터 $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 삼
 각형 AFG에서 $\angle AFG = 90^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{AG}|} \\ \text{이때 } 0^\circ < \theta < 90^\circ \text{이므로} \\ \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AG} &= |\overrightarrow{AF}| |\overrightarrow{AG}| \cos \theta \\ &= |\overrightarrow{AF}| |\overrightarrow{AG}| \times \frac{|\overrightarrow{AF}|}{|\overrightarrow{AG}|} \\ &= |\overrightarrow{AF}|^2 = 2^2 + 3^2 = 13 \end{aligned}$$

482 ㉠ 13

$$\begin{aligned} 3\vec{a} - \vec{b} &= 3(-4, 2, 1) - (-2, -1, 3) \\ &= (-10, 7, 0) \\ \therefore (3\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{b} &= (-10, 7, 0) \cdot (-2, -1, 3) \\ &= -10 \times (-2) + 7 \times (-1) + 0 \times 3 \\ &= 13 \end{aligned}$$

483 ㉠ $\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (3, k-2) \cdot (-2, k+1) \\ &= 3 \times (-2) + (k-2)(k+1) \\ &= k^2 - k - 8 \\ \text{이때 } \vec{a} \cdot \vec{b} &= -2 \text{이므로 } k^2 - k - 8 = -2 \\ k^2 - k - 6 &= 0, (k+2)(k-3) = 0 \\ \therefore k &= -2 \text{ 또는 } k = 3 \end{aligned}$$

그런데 $k < 0$ 이므로 $k = -2$

따라서 $\vec{b} = (-2, -1)$ 이므로

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

484 ㉠ ⑤

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} &= (4, 2), \overrightarrow{BC} = (2-0, 0-2) = (2, -2) \text{이므로} \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} &= (4, 2) \cdot (2, -2) \\ &= 4 \times 2 + 2 \times (-2) = 4 \end{aligned}$$

485 ㉠ -4

$$\begin{aligned} |\vec{a}| &= 6 \text{이므로} \\ \sqrt{(k-1)^2 + 4^2 + (k+1)^2} &= 6 \\ \text{양변을 제곱하면} \\ k^2 - 2k + 1 + 16 + k^2 + 2k + 1 &= 36 \\ k^2 &= 9 \quad \therefore k = \pm 3 \\ \text{그런데 } k > 0 \text{이므로 } k &= 3 \end{aligned}$$

따라서 $\vec{a}=(2, 4, 4)$, $\vec{b}=(2, -3, 1)$ 이므로
 $\vec{a} \cdot \vec{b}=(2, 4, 4) \cdot (2, -3, 1)$
 $=2 \times 2+4 \times(-3)+4 \times 1=-4$

486 ㉮ 6

$$\begin{aligned} |3\vec{a}+2\vec{b}|^2 &= 9|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 9 \times 2^2 + 12 \times (-3) + 4 \times 3^2 \\ &= 36 \end{aligned}$$

그런데 $|3\vec{a}+2\vec{b}| \geq 0$ 이므로
 $|3\vec{a}+2\vec{b}|=6$

487 ㉮ 5

$$\begin{aligned} |\vec{a}-3\vec{b}| &= 5 \text{의 양변을 제곱하면} \\ |\vec{a}|^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 &= 25 \\ 2^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b} + 9 \times (\sqrt{3})^2 &= 25 \\ -6\vec{a} \cdot \vec{b} &= -6 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \\ \therefore \vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} \\ &= 2^2 + 1 = 5 \end{aligned}$$

488 ㉮ 2

$$\begin{aligned} \left| \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right|^2 &= |\vec{a}|^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 \\ \text{두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{가 이루는 각의 크기가 } 120^\circ \text{이고} \\ |\vec{a}| &= 2, |\vec{b}| = 4 \text{이므로} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= -|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ - 120^\circ) \\ &= -2 \times 4 \times \frac{1}{2} = -4 \end{aligned}$$

$$\therefore \left| \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right|^2 = 2^2 + (-4) + \frac{1}{4} \times 4^2 = 4$$

그런데 $\left| \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right| \geq 0$ 이므로

$$\left| \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right| = 2$$

489 ㉮ 95

$$\begin{aligned} |\vec{a} + \vec{b}| &= 5 \text{의 양변을 제곱하면} \\ |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 25 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ |\vec{a} - \vec{b}| &= \sqrt{13} \text{의 양변을 제곱하면} \\ |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 &= 13 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①+②을 하면

$$2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) = 38 \quad \therefore |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 19$$

$$\begin{aligned} \therefore |2\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - 2\vec{b}|^2 \\ &= 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 5(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) = 5 \times 19 = 95 \end{aligned}$$

개념 확인

251쪽

490 ㉮ (1) 60° (2) 135°

(1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, \sqrt{3}) \cdot (2, 0) = 1 \times 2 + \sqrt{3} \times 0 = 2$
 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ \leq \theta < 90^\circ$)라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \sqrt{2^2 + 0^2}} = \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= 60^\circ \end{aligned}$$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, \sqrt{2}, 1) \cdot (-\sqrt{3}, 0, -\sqrt{3})$
 $= 1 \times (-\sqrt{3}) + \sqrt{2} \times 0 + 1 \times (-\sqrt{3})$
 $= -2\sqrt{3}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($90^\circ < \theta \leq 180^\circ$)라 하면

$$\begin{aligned} \cos(180^\circ - \theta) &= -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \\ &= -\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2 + 1^2} \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 0^2 + (-\sqrt{3})^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

따라서 $180^\circ - \theta = 45^\circ$ 이므로 $\theta = 135^\circ$

491 ㉮ (1) $\frac{8}{3}$ (2) 3

(1) 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 수직이면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 이므로
 $(k, 4) \cdot (3, -2) = 0$

$$3k - 8 = 0 \quad \therefore k = \frac{8}{3}$$

(2) 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}||\vec{b}|$ 이므로

$$\begin{aligned} (1, 2, 2) \cdot (2, 4, k+1) \\ &= \pm \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 4^2 + (k+1)^2} \\ 2k + 12 &= \pm 3\sqrt{k^2 + 2k + 21} \end{aligned}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$k^2 - 6k + 9 = 0, (k-3)^2 = 0 \quad \therefore k = 3$$

유제

253~257쪽

492 ㉮ 135°

$$\vec{a} - \vec{b} = (3, 1) - (4, -2) = (-1, 3)$$

$$\vec{a} - \vec{c} = (3, 1) - (1, 2) = (2, -1)$$

$$\begin{aligned}\therefore (\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{c}) &= (-1, 3) \cdot (2, -1) \\ &= -1 \times 2 + 3 \times (-1) = -5 \\ (\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{c}) &< 0 \text{ 이므로 두 벡터 } \vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-\vec{c} \text{ 가} \\ \text{이루는 각의 크기를 } \theta (90^\circ < \theta \leq 180^\circ) \text{ 라 하면} \\ \cos(180^\circ - \theta) &= -\frac{(\vec{a}-\vec{b}) \cdot (\vec{a}-\vec{c})}{|\vec{a}-\vec{b}| |\vec{a}-\vec{c}|} \\ &= -\frac{-5}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

따라서 $180^\circ - \theta = 45^\circ$ 이므로
 $\theta = 135^\circ$

493 ㉠ 2

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\begin{aligned}\cos 30^\circ &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{1 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 3 + 0 \times k}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2 + 0^2} \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2 + k^2}} \\ \sqrt{k^2 + 12} &= 4\end{aligned}$$

양변을 제곱하면

$$k^2 + 12 = 16, k^2 = 4$$

$$\therefore k = 2 (\because k > 0)$$

494 ㉠ 45°

$$\vec{a} + \vec{b} = (x, 2) + (x-2, 6) = (2x-2, 8) \text{ 이고}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = 10 \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{(2x-2)^2 + 8^2} = 10$$

양변을 제곱하면

$$4x^2 - 8x + 4 + 64 = 100$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0, (x+2)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 4$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 4$

$$\text{즉, } \vec{a} = (4, 2), \vec{b} = (2, 6) \text{ 이므로}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times 2 + 2 \times 6 = 20$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 $\theta (0^\circ \leq \theta < 90^\circ)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{20}{\sqrt{4^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 6^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

495 ㉠ $\frac{5}{13}$

오른쪽 그림과 같이 점 H

가 원점, 세 모서리 HE,

HG, HD가 각각 x 축,

y 축, z 축 위에 있도록 직

육면체를 좌표공간에 놓

으면

$$A(1, 0, 2), C(0, 3, 2), F(1, 3, 0)$$

$$\therefore \overrightarrow{AF} = (1-1, 3-0, 0-2) = (0, 3, -2),$$

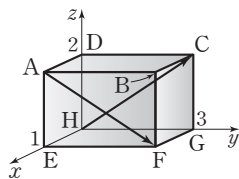
$$\overrightarrow{HC} = (0, 3, 2)$$

$$\therefore \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HC} = (0, 3, -2) \cdot (0, 3, 2)$$

$$= 0 \times 0 + 3 \times 3 + (-2) \times 2 = 5$$

따라서 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HC} > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HC}}{|\overrightarrow{AF}| |\overrightarrow{HC}|} \\ &= \frac{5}{\sqrt{0^2 + 3^2 + (-2)^2} \sqrt{0^2 + 3^2 + 2^2}} \\ &= \frac{5}{13}\end{aligned}$$



496 ㉠ ③

$|2\vec{a} + \vec{b}| = 4$ 의 양변을 제곱하면

$$4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 16$$

$$4 \times 1^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 3^2 = 16$$

$$4\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{3}{4}$$

따라서 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= \frac{\frac{3}{4}}{1 \times 3} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

497 ㉠ 90°

$|2\vec{a} + 3\vec{b}| = |2\vec{a} - 3\vec{b}|$ 의 양변을 제곱하면

$$4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2$$

$$24\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를

$\theta (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 0$$

$$\therefore \theta = 90^\circ$$

498 ㉔ 60°

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0} \text{에서 } \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = |-\vec{c}|$$

양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$$

$$2^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4^2 = (2\sqrt{7})^2$$

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} = 8$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 4$$

$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를

$\theta (0^\circ \leq \theta < 90^\circ)$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{4}{2 \times 4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

499 ㉔ 6

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 가 이루는 각

의 크기를 $\theta (0^\circ \leq \theta < 90^\circ)$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{12\sqrt{3}}{6 \times 4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \frac{1}{2} = 6$$

500 ㉔ $\frac{1}{2}$

$$2\vec{a} + \vec{b} = 2(1, 1) + (1, -1)$$

$$= (3, 1)$$

$$\vec{a} + x\vec{b} = (1, 1) + x(1, -1)$$

$$= (1+x, 1-x)$$

두 벡터 $2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + x\vec{b}$ 가 서로 평행하면

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + x\vec{b}) = \pm |2\vec{a} + \vec{b}| |\vec{a} + x\vec{b}| \text{ 이므로}$$

$$(3, 1) \cdot (1+x, 1-x)$$

$$= \pm \sqrt{3^2 + 1^2} \sqrt{(1+x)^2 + (1-x)^2}$$

$$2x + 4 = \pm \sqrt{10} \sqrt{2x^2 + 2}$$

양변을 제곱하면

$$4x^2 + 16x + 16 = 20x^2 + 20$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$(2x-1)^2 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

501 ㉔ $5\sqrt{2}$

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 수직이면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 이므로

$$(2t+1, t) \cdot \left(1, -\frac{3}{t}\right) = 0$$

$$(2t+1) \times 1 + t \times \left(-\frac{3}{t}\right) = 0$$

$$t-1=0 \quad \therefore t=1$$

따라서 $\vec{a} = (3, 1), \vec{b} = (1, -3)$ 이므로

$$\vec{a} + 2\vec{b} = (3, 1) + 2(1, -3)$$

$$= (5, -5)$$

$$\therefore |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{2}$$

502 ㉔ ②

두 벡터 $6\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$ 가 서로 수직이면

$$(6\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \text{이므로}$$

$$6|\vec{a}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{b}|^2 = 0$$

$$6 \times 1^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 3^2 = 0$$

$$-5\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{3}{5}$$

503 ㉔ 풀이 참조

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \vec{c} - \vec{b}$$

이때 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ 이고

$\angle AOC = \angle AOB = 60^\circ$ 이므로

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} = \vec{a} \cdot (\vec{c} - \vec{b})$$

$$= \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$= |\vec{a}| |\vec{c}| \cos 60^\circ - |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{a}|^2 - \frac{1}{2} |\vec{a}|^2 = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BC}$$

따라서 두 모서리 OA, BC는 서로 수직이다.

연습문제

258~260쪽

504 ㉔ ②

삼각형 ABC는 정삼각형이므로 $\angle ABC = 60^\circ$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}| \cos 60^\circ$$

$$= 6 \times 6 \times \frac{1}{2} = 18$$

505 ㉓ 7

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (3, x-2, 4) \cdot (2, 3-x, 1) \\ &= 3 \times 2 + (x-2)(3-x) + 4 \times 1 \\ &= -x^2 + 5x + 4\end{aligned}$$

이때 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$ 이므로

$$-x^2 + 5x + 4 = -10$$

$$x^2 - 5x - 14 = 0, (x+2)(x-7) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 7$$

그런데 x 는 양수이므로 $x = 7$

506 ㉓ ⑤

$|\vec{a} - 2\vec{b}| = 4$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 16$$

$$4^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \times (\sqrt{5})^2 = 16$$

$$-4\vec{a} \cdot \vec{b} = -20$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 5$$

507 ㉓ $\frac{3}{5}$

$$2\vec{a} - \vec{b} = (5, -1) \text{에서}$$

$$2\vec{a} = (5, -1) + \vec{b}$$

$$= (5, -1) + (1, 3) = (6, 2)$$

$$\therefore \vec{a} = (3, 1)$$

..... ①

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = (3, 1) \cdot (1, 3)$$

$$= 3 \times 1 + 1 \times 3 = 6$$

..... ②

따라서 $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{3^2+1^2} \sqrt{1^2+3^2}} = \frac{3}{5}$$

..... ③

단계	채점 기준	비율
①	벡터 $\vec{a}$ 의 성분 구하기	30 %
②	$\vec{a} \cdot \vec{b}$ 구하기	20 %
③	$\cos \theta$ 의 값 구하기	50 %

508 ㉓ -6

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하면 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| |\vec{b}|$ 이므로

$$(x, 2, -4) \cdot (-3, 1, -2)$$

$$= \pm \sqrt{x^2+2^2+(-4)^2} \sqrt{(-3)^2+1^2+(-2)^2}$$

$$-3x+10 = \pm \sqrt{14} \sqrt{x^2+20}$$

양변을 제곱하면

$$9x^2 - 60x + 100 = 14x^2 + 280$$

$$x^2 + 12x + 36 = 0$$

$$(x+6)^2 = 0 \quad \therefore x = -6$$

509 ㉓ 120

오른쪽 그림과 같이 점 I에서

변 AB에 내린 수선의 발을

E라 하면

$$\triangle BIE \equiv \triangle BID$$

(RHS 합동)

$$\therefore \overline{BE} = \overline{BD} = 8$$

두 벡터 $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BI}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 직각삼각형 BIE에서

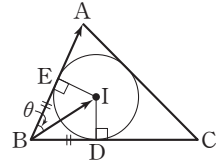
$$\cos \theta = \frac{|\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{BI}|}$$

$$\therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI} = |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BI}| \cos \theta$$

$$= |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BI}| \times \frac{|\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{BI}|}$$

$$= |\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BE}|$$

$$= 15 \times 8 = 120$$



510 ㉓ ③

정사면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면 두 삼각형 ABC, BCD는 정삼각형이므로

$$\overline{MA} = \overline{MD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서

삼각형 BCD에 내린 수선의

발을 H라 하면 점 H는 삼각형

BCD의 무게중심이므로

$$\overline{MH} = \frac{1}{3} \overline{MD}$$

두 벡터 $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

직각삼각형 AMH에서

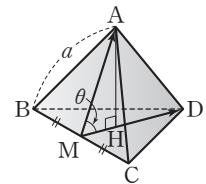
$$\cos \theta = \frac{\overline{MH}}{\overline{MA}} = \frac{\frac{1}{3} \overline{MD}}{\overline{MD}} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = |\overrightarrow{MA}| |\overrightarrow{MD}| \cos \theta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}a^2$$

이때 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = 12$ 이므로

$$\frac{1}{4}a^2 = 12, a^2 = 48 \quad \therefore a = 4\sqrt{3} (\because a > 0)$$



511 ㉠ 0

점 D는 선분 AB를 1:2로 내분하는 점이므로

$$D\left(\frac{1 \times 0 + 2 \times 3}{1+2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times 0}{1+2}\right)$$

$$\therefore D(2, 2)$$

점 E는 선분 BC를 1:2로 내분하는 점이므로

$$E\left(\frac{1 \times 6 + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times (-15) + 2 \times 6}{1+2}\right)$$

$$\therefore E(2, -1)$$

즉, 선분 DE 위를 움직이는 점 P의 좌표는

$$(2, t) \text{ (단, } -1 \leq t \leq 2)$$

이때 $\overrightarrow{OP} = (2, t)$, $\overrightarrow{AP} = (2-3, t-0) = (-1, t)$ 이

므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} &= (2, t) \cdot (-1, t) \\ &= 2 \times (-1) + t \times t = t^2 - 2 \end{aligned}$$

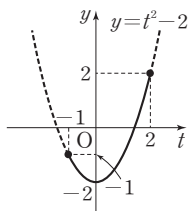
따라서 오른쪽 그림에서

$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP}$ 는 $t=2$ 일 때 최댓값

2, $t=0$ 일 때 최솟값 -2를 가

지므로 최댓값과 최솟값의 합은

$$2 + (-2) = 0$$



512 ㉠ 2√7

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 60° 이고 $|\vec{a}|=2$,

$|\vec{b}|=2$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \times 2 \times \frac{1}{2} = 2 \quad \text{..... ①}$$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{3a} - 2\vec{b}|^2 &= 9|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ &= 9 \times 2^2 - 12 \times 2 + 4 \times 2^2 \\ &= 28 \quad \text{..... ②} \end{aligned}$$

그런데 $|\vec{3a} - 2\vec{b}| \geq 0$ 이므로

$$|\vec{3a} - 2\vec{b}| = 2\sqrt{7} \quad \text{..... ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	$\vec{a} \cdot \vec{b}$ 구하기	40%
②	$ \vec{3a} - 2\vec{b} ^2$ 의 값 구하기	50%
③	$ \vec{3a} - 2\vec{b} $ 의 값 구하기	10%

513 ㉠ ②

$$\begin{aligned} &(\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AC} + 3k\overrightarrow{CD}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 3k(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}) + k(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC}) \\ &\quad + 3k^2(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD}) \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 45^\circ \\ &= 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= -|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{CD}| \cos (180^\circ - 180^\circ) \\ &= -1 \times 1 \times 1 = -1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{AC}| \cos 45^\circ \\ &= 1 \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} &= |\overrightarrow{BC}| |\overrightarrow{CD}| \cos 90^\circ \\ &= 1 \times 1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} &(\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{AC} + 3k\overrightarrow{CD}) \\ &= 1 + 3k \times (-1) + k \times 1 + 3k^2 \times 0 = 1 - 2k \end{aligned}$$

따라서 $1 - 2k = 0$ 이므로 $k = \frac{1}{2}$

514 ㉠ ③

$$\overrightarrow{BA} = (3-1, 3-2, 1-1) = (2, 1, 0)$$

$$\overrightarrow{BC} = (0-1, 2-2, 3-1) = (-1, 0, 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} &= (2, 1, 0) \cdot (-1, 0, 2) \\ &= 2 \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times 2 = -2 \end{aligned}$$

따라서 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos (180^\circ - \theta) &= -\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} \\ &= -\frac{-2}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2}} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

515 ㉠ $\frac{3\sqrt{6}}{2}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= (3, 4, 1) \cdot (2, 1, -1) \\ &= 3 \times 2 + 4 \times 1 + 1 \times (-1) = 9 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} > 0$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ \leq \theta < 90^\circ$)라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|}$$

따라서 벡터 $\overrightarrow{OA}$ 의 벡터 $\overrightarrow{OB}$ 위로의 정사영의 길이는

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{OA}| \cos \theta &= |\overrightarrow{OA}| \times \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|} \\ &= \frac{9}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

01 직선의 방정식

개념 확인

265쪽

520 ㉠ (1) $x+2=\frac{y-3}{4}$ (2) $y=2$

521 ㉠ (1) $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{3}=z-5$
(2) $x-2=\frac{z+1}{3}, y=-4$

522 ㉠ (1) $\frac{3-x}{4}=\frac{y+2}{5}$
(2) $\frac{x+2}{4}=y-4=-z$

(1) 두 점 A(3, -2), B(-1, 3)을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB}=(-1-3, 3-(-2))=(-4, 5)$$

따라서 점 A(3, -2)를 지나고 방향벡터가

$$\overrightarrow{AB}=(-4, 5) \text{인 직선의 방정식은}$$

$$\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{5} \quad \therefore \frac{3-x}{4}=\frac{y+2}{5}$$

(2) 두 점 A(-2, 4, 0), B(2, 5, -1)을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB}=(2-(-2), 5-4, -1-0)=(4, 1, -1)$$

따라서 점 A(-2, 4, 0)을 지나고 방향벡터가

$$\overrightarrow{AB}=(4, 1, -1) \text{인 직선의 방정식은}$$

$$\frac{x+2}{4}=\frac{y-4}{1}=-z$$

유제

267-271쪽

523 ㉠ $\frac{x+4}{2}=\frac{3-y}{5}$

점 (-4, 3)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(2, -5)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+4}{2}=\frac{y-3}{-5} \quad \therefore \frac{x+4}{2}=\frac{3-y}{5}$$

524 ㉠ $\frac{x-3}{2}=-\frac{y+1}{4}=\frac{z-6}{3}$

직선 $\frac{x-5}{2}=\frac{3-y}{4}=\frac{z}{3}$ 의 방향벡터는

$$\vec{u}=(2, -4, 3)$$

평행한 두 직선은 방향벡터가 서로 같으므로 구하는 직선의 방향벡터는 $\vec{u}=(2, -4, 3)$

따라서 점 (3, -1, 6)을 지나고 방향벡터가

$$\vec{u}=(2, -4, 3) \text{인 직선의 방정식은}$$

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-6}{3}$$

$$\therefore \frac{x-3}{2}=-\frac{y+1}{4}=\frac{z-6}{3}$$

525 ㉠ 1

직선 $3(x-1)=2(y+3)$, 즉 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{3}$ 의 방향

벡터는

$$\vec{u}=(2, 3)$$

평행한 두 직선은 방향벡터가 서로 같으므로 점

(3, -2)를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(2, 3)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{3}$$

이 직선이 점 (5, k)를 지나므로

$$\frac{5-3}{2}=\frac{k+2}{3} \quad \therefore k=1$$

526 ㉠ $(0, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

점 (-1, 4, 2)를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(2, -3, 1)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-4}{-3}=z-2$$

이때 yz 평면 위의 점은 x 좌표가 0이므로 이 식에

$x=0$ 을 대입하면

$$\frac{1}{2}=\frac{y-4}{-3}=z-2 \quad \therefore y=\frac{5}{2}, z=\frac{5}{2}$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(0, \frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

527 ㉠ $\frac{3}{4}$

두 점 A(0, 2), B(3, -6)을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB}=(3-0, -6-2)=(3, -8)$$

즉, 점 A(0, 2)를 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{AB}=(3, -8)$

인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{3}=\frac{y-2}{-8}$$

이 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$\frac{x}{3}=\frac{1}{4} \quad \therefore x=\frac{3}{4}$$

따라서 구하는 x 절편은 $\frac{3}{4}$ 이다.

528 ㉮ $\left(-\frac{1}{2}, 0, -2\right)$

두 점 A(-2, 2, 1), B(1, -2, -5)를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (1 - (-2), -2 - 2, -5 - 1) \\ &= (3, -4, -6)\end{aligned}$$

즉, 점 A(-2, 2, 1)을 지나고 방향벡터가

$\overrightarrow{AB} = (3, -4, -6)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-1}{-6}$$

이때 zx 평면 위의 점은 y 좌표가 0이므로 이 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$\frac{x+2}{3} = \frac{1}{2} = \frac{z-1}{-6} \quad \therefore x = -\frac{1}{2}, z = -2$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, 0, -2\right)$

529 ㉮ -2

두 점 A(5, -2, 4), B(1, -1, 3)을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB} = (1-5, -1-(-2), 3-4) = (-4, 1, -1)$$

즉, 점 A(5, -2, 4)를 지나고 방향벡터가

$\overrightarrow{AB} = (-4, 1, -1)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-5}{-4} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{-1}$$

이 직선이 점 $(-3, a, b)$ 를 지나므로

$$2 = a + 2 = -b + 4 \quad \therefore a = 0, b = 2$$

$$\therefore a - b = -2$$

530 ㉮ 4

두 점 A(-1, 6), B(3, -2)를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB} = (3 - (-1), -2 - 6) = (4, -8)$$

즉, 점 A(-1, 6)을 지나고 방향벡터가

$\overrightarrow{AB} = (4, -8)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-6}{-8}$$

$$\text{이 식에 } y=0 \text{을 대입하면 } \frac{x+1}{4} = \frac{3}{4} \quad \therefore x=2$$

$$\text{또 } x=0 \text{을 대입하면 } \frac{1}{4} = \frac{y-6}{-8} \quad \therefore y=4$$

따라서 두 점 A, B를 지나는 직선과 x 축, y 축의 교점의 좌표는 각각 (2, 0), (0, 4)이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$$

531 ㉮ (1, -1, 3)

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = 3-z=t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=2t+1, y=3t-1, z=-t+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$\frac{x-5}{4} = y = -\frac{z+2}{5} = s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=4s+5, y=s, z=-5s-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서

$$2t+1=4s+5, 3t-1=s, -t+3=-5s-2$$

세 식 중 두 식을 연립하여 풀면 $t=0, s=-1$

$t=0$ 을 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$x=2 \times 0 + 1 = 1, y=3 \times 0 - 1 = -1,$$

$$z=-1 \times 0 + 3 = 3$$

따라서 구하는 교점의 좌표는 (1, -1, 3)

532 ㉮ $\frac{x-3}{2} = 1-y = \frac{z-4}{3}$

$$\frac{x+3}{4} = \frac{4-y}{2} = \frac{z+2}{3} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=4t-3, y=-2t+4, z=3t-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$x-2 = \frac{y-4}{2} = \frac{z-4}{3} = s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=s+2, y=2s+4, z=3s+4 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서

$$4t-3=s+2, -2t+4=2s+4, 3t-2=3s+4$$

세 식 중 두 식을 연립하여 풀면 $t=1, s=-1$

$t=1$ 을 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$x=4 \times 1 - 3 = 1, y=-2 \times 1 + 4 = 2, z=3 \times 1 - 2 = 1$$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 (1, 2, 1)이므로 두 점

(1, 2, 1), (3, 1, 4)를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{u} = (3-1, 1-2, 4-1) = (2, -1, 3)$$

따라서 점 (3, 1, 4)를 지나고 방향벡터가

$\overrightarrow{u} = (2, -1, 3)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{3}$$

$$\therefore \frac{x-3}{2} = 1-y = \frac{z-4}{3}$$

533 ㉮ (4, -1, 3)

두 점 (-2, 3, 1), (1, 1, 2)를 지나는 직선의 방향벡터를 $\overrightarrow{u_1}$ 이라 하면

$$\overrightarrow{u_1} = (1 - (-2), 1 - 3, 2 - 1) = (3, -2, 1)$$

즉, 점 (-2, 3, 1)을 지나고 방향벡터가

$\overrightarrow{u_1} = (3, -2, 1)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = z-1$$

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = z-1 = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=3t-2, y=-2t+3, z=t+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

두 점 (5, 2, -1), (6, 5, -5)를 지나고 직선의 방향벡터를 $\vec{u}_2$ 라 하면

$$\vec{u}_2 = (6-5, 5-2, -5-(-1)) = (1, 3, -4)$$

즉, 점 (5, 2, -1)을 지나고 방향벡터가

$$\vec{u}_2 = (1, 3, -4) \text{인 직선의 방정식은}$$

$$x-5 = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-4}$$

$$x-5 = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-4} = s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=s+5, y=3s+2, z=-4s-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서

$$3t-2=s+5, -2t+3=3s+2, t+1=-4s-1$$

세 식 중 두 식을 연립하여 풀면 $t=2, s=-1$

$t=2$ 를 ⑦에 대입하면

$$x=3 \times 2 - 2 = 4, y=-2 \times 2 + 3 = -1, z=2+1=3$$

따라서 구하는 교점의 좌표는 (4, -1, 3)

534 ㉠ -2

$$x+1=y-2=z-3=t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=t-1, y=t+2, z=t+3 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$\frac{x-a}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=2s+a, y=3s, z=4s \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서

$$t-1=2s+a, t+2=3s, t+3=4s$$

두 식 $t+2=3s, t+3=4s$ 를 연립하여 풀면

$$t=1, s=1$$

이를 $t-1=2s+a$ 에 대입하면

$$1-1=2 \times 1 + a \quad \therefore a = -2$$

개념 확인

273쪽

535 ㉠ (1) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (2) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

(1) 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (3, 4), \vec{v} = (-1, 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|3 \times (-1) + 4 \times 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

(2) 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (1, 2, 1), \vec{v} = (5, 1, -1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|1 \times 5 + 2 \times 1 + 1 \times (-1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} \sqrt{5^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

536 ㉠ (1) -2 (2) 5

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (a, -1, 3), \vec{v} = (2, 1, -3)$$

(1) $l \parallel m$, 즉 두 직선 l, m 이 서로 평행하면

$$\vec{u} = k\vec{v} \quad (k \neq 0) \text{이므로}$$

$$(a, -1, 3) = k(2, 1, -3) = (2k, k, -3k)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=2k, -1=k, 3=-3k$$

$$\therefore k = -1, a = -2$$

(2) $l \perp m$, 즉 두 직선 l, m 이 서로 수직이면

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{이므로}$$

$$a \times 2 + (-1) \times 1 + 3 \times (-3) = 0$$

$$2a - 10 = 0 \quad \therefore a = 5$$

유제

275~280쪽

537 ㉠ (1) 30° (2) 45°

(1) 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (\sqrt{3}, 1), \vec{v} = (1, \sqrt{3})$$

두 직선 l, m 이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|\sqrt{3} \times 1 + 1 \times \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore \theta &= 30^\circ \end{aligned}$$

(2) 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, 2, 1), \vec{v} = (1, 4, -1)$$

두 직선 l, m 이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|2 \times 1 + 2 \times 4 + 1 \times (-1)|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore \theta &= 45^\circ \end{aligned}$$

538 ㉡ (1) $-\frac{1}{9}$, 9 (2) -4

(1) 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (k, -1), \vec{v} = (5, 4)$$

이때 두 직선 l, m 이 이루는 각의 크기가 45° 이므로

$$\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \cos 45^\circ$$

$$\frac{|k \times 5 + (-1) \times 4|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2} \sqrt{5^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2|5k - 4| = \sqrt{82(k^2 + 1)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$9k^2 - 80k - 9 = 0, (9k + 1)(k - 9) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{1}{9} \text{ 또는 } k = 9$$

(2) 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (k, 1, 1), \vec{v} = (2, 1, -2)$$

이때 두 직선 l, m 이 이루는 각의 크기가 45° 이므로

$$\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \cos 45^\circ$$

$$\frac{|k \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times (-2)|}{\sqrt{k^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2|2k - 1| = 3\sqrt{2(k^2 + 2)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$k^2 + 8k + 16 = 0, (k + 4)^2 = 0$$

$$\therefore k = -4$$

539 ㉡ 2

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (1, 3, k), \vec{v} = (3, -1, 2)$$

$$\text{이때 } \cos \theta = \frac{2}{7} \text{ 이므로 } \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{2}{7}$$

$$\frac{|1 \times 3 + 3 \times (-1) + k \times 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + k^2} \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{2}{7}$$

$$7|2k| = 2\sqrt{14(k^2 + 10)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$k^2 = 4 \quad \therefore k = 2 (\because k > 0)$$

540 ㉡ 8

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, k), \vec{v} = (3, 1)$$

이때 두 직선 l, m 이 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \cos 60^\circ$$

$$\frac{|2 \times 3 + k \times 1|}{\sqrt{2^2 + k^2} \sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

$$2|k + 6| = \sqrt{10(k^2 + 4)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3k^2 - 24k - 52 = 0$$

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든

실수 k 의 값의 합은

$$-\frac{-24}{3} = 8$$

541 ㉡ -2

세 직선 l, m, n 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ 이라 하면

$$\vec{u}_1 = (1, 1, -1), \vec{u}_2 = (a, -1, 1), \vec{u}_3 = (1, 1, b)$$

이때 두 직선 l, m 이 서로 평행하면 $\vec{u}_1 = k\vec{u}_2 (k \neq 0)$

이므로

$$(1, 1, -1) = k(a, -1, 1) = (ak, -k, k)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$1 = ak, 1 = -k, -1 = k$$

$$\therefore k = -1, a = -1$$

또 두 직선 l, n 이 서로 수직이면 $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0$ 이므로

$$1 \times 1 + 1 \times 1 + (-1) \times b = 0$$

$$-b + 2 = 0 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore ab = -1 \times 2 = -2$$

542 ㉡ 2

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (4, 2 - k), \vec{v} = (2, k)$$

이때 두 직선 l, m 이 서로 수직이 되려면 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ 이어야 하므로

$$4 \times 2 + (2 - k) \times k = 0$$

$$k^2 - 2k - 8 = 0, (k + 2)(k - 4) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 4$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은 $-2 + 4 = 2$

543 ㉡ 3

두 점 $(-1, a), (a + 2, 7)$ 을 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (a + 2 - (-1), 7 - a) = (a + 3, 7 - a)$$

직선 $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{2}$ 의 방향벡터를 $\vec{v}$ 라 하면

$$\vec{v} = (3, 2)$$

이때 두 직선이 서로 평행하면 $\vec{u} = k\vec{v} (k \neq 0)$ 이므로
 $(a+3, 7-a) = k(3, 2) = (3k, 2k)$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$a+3=3k, 7-a=2k$$

두 식을 연립하여 풀면

$$k=2, a=3$$

544 ㉠

직선 $\frac{x-1}{2} = y+1 = z$ 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, 1, 1)$$

한편 점 $(1, a, 0)$ 은 직선 $\frac{x-1}{2} = y+1 = z$ 위에 있
 으므로

$$a+1=0 \quad \therefore a=-1$$

두 점 $(1, -1, 0), (b, -3, -2)$ 를 지나는 직선 l 의
 방향벡터를 $\vec{v}$ 라 하면

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (b-1, -3-(-1), -2-0) \\ &= (b-1, -2, -2) \end{aligned}$$

이때 직선 $\frac{x-1}{2} = y+1 = z$ 와 직선 l 이 수직이면

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \text{ 이므로}$$

$$2 \times (b-1) + 1 \times (-2) + 1 \times (-2) = 0$$

$$2b-6=0 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore a+b=-1+3=2$$

545 ㉠ (1) $(0, 3, 1)$ (2) $\sqrt{3}$

(1) $x+1 = \frac{y-1}{2} = 2-z=t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x=t-1, y=2t+1, z=-t+2$$

점 H는 직선 l 위의 점이므로

$$H(t-1, 2t+1, -t+2) \text{로 놓으면}$$

$$\overrightarrow{AH} = (t-2, 2t-1, -t+2)$$

이때 직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (1, 2, -1) \text{이고, } \overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(t-2) \times 1 + (2t-1) \times 2 + (-t+2) \times (-1) = 0$$

$$6t-6=0 \quad \therefore t=1$$

따라서 점 H의 좌표는 $(0, 3, 1)$

(2) $\overrightarrow{AH} = (-1, 1, 1)$ 이므로 구하는 거리는

$$|\overrightarrow{AH}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

546 ㉠ $5\sqrt{2}$

$3-x=y=\frac{z-1}{2}=t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x=-t+3, y=t, z=2t+1$$

점 A $(-2, 7, 1)$ 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H
 라 하면 점 H는 직선 l 위의 점이므로

$$H(-t+3, t, 2t+1) \text{로 놓으면}$$

$$\overrightarrow{AH} = (-t+5, t-7, 2t)$$

이때 직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면 $\vec{u} = (-1, 1, 2)$

이고, $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ 이므로

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(-t+5) \times (-1) + (t-7) \times 1 + 2t \times 2 = 0$$

$$6t-12=0 \quad \therefore t=2$$

따라서 $\overrightarrow{AH} = (3, -5, 4)$ 이므로 구하는 거리는

$$|\overrightarrow{AH}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 4^2} = 5\sqrt{2}$$

547 ㉠ $3\sqrt{6}$

직선 $3x=6(y+1)=2(3-z)$, 즉

$\frac{x}{2} = y+1 = \frac{3-z}{3}$ 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, 1, -3)$$

평행한 두 직선은 방향벡터가 서로 같으므로 점

$(-1, 4, 7)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (2, 1, -3)$ 인

직선 l 의 방정식은

$$\frac{x+1}{2} = y-4 = \frac{z-7}{-3}$$

$\frac{x+1}{2} = y-4 = \frac{z-7}{-3} = t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x=2t-1, y=t+4, z=-3t+7$$

점 A $(5, -1, 0)$ 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H
 라 하면 선분 AP의 길이의 최솟값은 선분 AH의 길
 이과 같다.

점 H는 직선 l 위의 점이므로

$$H(2t-1, t+4, -3t+7) \text{로 놓으면}$$

$$\overrightarrow{AH} = (2t-6, t+5, -3t+7)$$

이때 직선 l 의 방향벡터는 $\vec{u} = (2, 1, -3)$ 이고,

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(2t-6) \times 2 + (t+5) \times 1 + (-3t+7) \times (-3) = 0$$

$$14t-28=0 \quad \therefore t=2$$

즉, $\overrightarrow{AH} = (-2, 7, 1)$ 이므로

$$|\overrightarrow{AH}| = \sqrt{(-2)^2 + 7^2 + 1^2} = 3\sqrt{6}$$

따라서 선분 AP의 길이의 최솟값은 $3\sqrt{6}$ 이다.

548 ㉮ $\frac{7}{5}$

$$\frac{x+1}{2}=2-y=z=t \text{ (} t \text{는 실수)로 놓으면}$$

$$x=2t-1, y=-t+2, z=t$$

점 A(-1, 1, a)에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 직선 l 위의 점이므로

$$H(2t-1, -t+2, t) \text{로 놓으면}$$

$$\overrightarrow{AH}=(2t, -t+1, t-a)$$

이때 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면 $\vec{u}=(2, -1, 1)$

이고, $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ 이므로

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}=0$$

$$2t \times 2 + (-t+1) \times (-1) + (t-a) \times 1 = 0$$

$$6t-a-1=0 \quad \therefore t=\frac{a+1}{6}$$

$$\text{즉, } \overrightarrow{AH}=\left(\frac{a+1}{3}, \frac{-a+5}{6}, \frac{-5a+1}{6}\right) \text{이므로}$$

$$|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{2} \text{에서}$$

$$\sqrt{\left(\frac{a+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{-a+5}{6}\right)^2 + \left(\frac{-5a+1}{6}\right)^2} = \sqrt{2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$5a^2-2a-7=0$$

$$(a+1)(5a-7)=0 \quad \therefore a=\frac{7}{5} \text{ (} \because a>0 \text{)}$$

549 ㉮ (1) $2x-5y-16=0$ (2) $3x-y+7=0$

(1) 점 (3, -2)를 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(2, -5)$

인 직선의 방정식은

$$2(x-3)-5(y+2)=0 \quad \therefore 2x-5y-16=0$$

(2) 직선 $\frac{x-1}{3}=5-y$ 의 방향벡터는 (3, -1)이므로

구하는 직선의 법선벡터는 (3, -1)이다.

따라서 점 (-1, 4)를 지나고 법선벡터가 (3, -1)

인 직선의 방정식은

$$3(x+1)-(y-4)=0 \quad \therefore 3x-y+7=0$$

연습문제

281~283쪽

550 ㉮ ④

점 (-1, 5)를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(1, -3)$ 인 직선의 방정식은

$$x+1=\frac{y-5}{-3}$$

이 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$x+1=\frac{5}{3} \quad \therefore x=\frac{2}{3}$$

따라서 구하는 x절편은 $\frac{2}{3}$ 이다.

551 ㉮ $\frac{1-x}{5}=\frac{y}{6}=\frac{z+3}{2}$

두 점 A(3, -1, 2), B(-2, 5, 4)를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB}=(-2-3, 5-(-1), 4-2)=(-5, 6, 2)$$

평행한 두 직선은 방향벡터가 서로 같으므로 점

(1, 0, -3)을 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{AB}=(-5, 6, 2)$

인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{-5}=\frac{y}{6}=\frac{z+3}{2} \quad \therefore \frac{1-x}{5}=\frac{y}{6}=\frac{z+3}{2}$$

552 ㉮ (0, 2, 3)

$$\frac{x-4}{2}=-\frac{y+2}{2}=-\frac{z+3}{3}=t \text{ (} t \text{는 실수)로 놓으면}$$

$$x=2t+4, y=-2t-2, z=-3t-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x+1=3-y=\frac{z-1}{2}=s \text{ (} s \text{는 실수)로 놓으면}$$

$$x=s-1, y=-s+3, z=2s+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$2t+4=s-1, -2t-2=-s+3, -3t-3=2s+1$$

세 식 중 두 식을 연립하여 풀면 $t=-2, s=1$

$t=-2$ 를 ①에 대입하면

$$x=2 \times (-2)+4=0, y=-2 \times (-2)-2=2,$$

$$z=-3 \times (-2)-3=3$$

따라서 구하는 교점의 좌표는 (0, 2, 3)

553 ㉮ ②

$$\text{두 직선 } \frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3}, x-1=\frac{2-y}{3} \text{의 방향벡터}$$

를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(4, 3), \vec{v}=(1, -3)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

$$= \frac{|4 \times 1 + 3 \times (-3)|}{\sqrt{4^2+3^2} \sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

554 ㉮ $\frac{5}{2}$

두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(-6, 5), \vec{v}=(a, 3)$$

두 직선 l, m 이 서로 수직이면 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ 이므로
 $-6 \times a + 5 \times 3 = 0$
 $-6a + 15 = 0 \quad \therefore a = \frac{5}{2}$

555 ㉮ 52

점 $(6, 3)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (2, 3)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{3}$$

이 식에 $y=0$ 을 대입하면 $\frac{x-6}{2} = -1 \quad \therefore x=4$

또 $x=0$ 을 대입하면 $-3 = \frac{y-3}{3} \quad \therefore y=-6$

따라서 $A(4, 0), B(0, -6)$ 이므로

$$\overline{AB}^2 = (0-4)^2 + (-6-0)^2 = 52$$

556 ㉮ 8

직선 $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{6} = \frac{z+4}{3}$ 의 방향벡터는

$$\vec{u} = (2, 6, 3)$$

평행한 두 직선은 방향벡터가 서로 같으므로 점

$(1, -3, 2)$ 를 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (2, 6, 3)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{6} = \frac{z-2}{3} \quad \text{..... ①}$$

이 직선이 점 $(3, a, b)$ 를 지나므로

$$1 = \frac{a+3}{6} = \frac{b-2}{3} \quad \therefore a=3, b=5 \quad \text{..... ②}$$

$$\therefore a+b=8 \quad \text{..... ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	직선의 방정식 구하기	50%
②	a, b 의 값 구하기	40%
③	$a+b$ 의 값 구하기	10%

557 ㉮ $x-3=-y=z-3$

정육면체의 한 모서리의 길이가 3이므로

$$A(3, 0, 3), G(0, 3, 0)$$

즉, 두 점 A, G 를 지나고 방향벡터는

$$\vec{AG} = (0-3, 3-0, 0-3) = (-3, 3, -3)$$

따라서 점 $A(3, 0, 3)$ 을 지나고 방향벡터가

$\vec{AG} = (-3, 3, -3)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{-3} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{-3} \quad \therefore x-3=-y=z-3$$

558 ㉮ -6

$$\frac{x-3}{2} = -\frac{y+3}{5} = \frac{z}{2} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=2t+3, y=-5t-3, z=2t \quad \text{..... ㉠}$$

$$x+1=4-y=\frac{z+6}{2}=s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=s-1, y=-s+4, z=2s-6 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$2t+3=s-1, -5t-3=-s+4, 2t=2s-6$$

세 식 중 두 식을 연립하여 풀면 $t=-1, s=2$

$t=-1$ 을 ㉠에 대입하면

$$x=2 \times (-1) + 3 = 1, y=-5 \times (-1) - 3 = 2,$$

$$z=2 \times (-1) = -2$$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 $(1, 2, -2)$ 이므로 두 점 $(1, 2, -2), (3, 0, 1)$ 을 지나는 직선의 방향벡터는

$$(3-1, 0-2, 1-(-2)) = (2, -2, 3)$$

따라서 $a=-2, b=3$ 이므로

$$ab=-6$$

559 ㉮ ②

두 점 $A(1, 1, 2), D(k, 2, 3)$ 을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{AD} = (k-1, 2-1, 3-2) = (k-1, 1, 1)$$

즉, 점 $A(1, 1, 2)$ 를 지나고 방향벡터가

$\vec{AD} = (k-1, 1, 1)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{k-1} = y-1 = z-2$$

$$\frac{x-1}{k-1} = y-1 = z-2 = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=(k-1)t+1, y=t+1, z=t+2 \quad \text{..... ㉠}$$

두 점 $B(-1, 0, 1), C(-1, -1, -1)$ 을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{BC} = (-1-(-1), -1-0, -1-1)$$

$$= (0, -1, -2)$$

즉, 점 $B(-1, 0, 1)$ 을 지나고 방향벡터가

$\vec{BC} = (0, -1, -2)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{y}{-1} = \frac{z-1}{-2}, x=-1 \quad \therefore y=\frac{z-1}{2}, x=-1$$

$$y=\frac{z-1}{2}=s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$y=s, z=2s+1 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$t+1=s, t+2=2s+1$$

두 식을 연립하여 풀면 $t = -1, s = 0$

이때 $x = -1$ 이므로 $x = (k-1)t + 1$ 에서
 $-1 = (k-1) \times (-1) + 1 \quad \therefore k = 3$

560 ㉡ ⑤

$$x = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2} = t \text{ (} t \text{는 실수)로 놓으면}$$

$$x = t, y = 2t + 1, z = 2t - 1 \quad \dots\dots ㉠$$

이 식을 $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ 에 대입하면

$$t^2 + (2t+1)^2 + (2t-1)^2 = 11$$

$$9t^2 = 9, t^2 = 1 \quad \therefore t = \pm 1$$

$t = 1$ 을 ㉠에 대입하면

$$x = 1, y = 2 \times 1 + 1 = 3, z = 2 \times 1 - 1 = 1$$

$t = -1$ 을 ㉠에 대입하면

$$x = -1, y = 2 \times (-1) + 1 = -1,$$

$$z = 2 \times (-1) - 1 = -3$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 (1, 3, 1),

(-1, -1, -3)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-1)^2 + (-1-3)^2 + (-3-1)^2} = 6$$

561 ㉡ $\frac{9}{14}$

직선 $\frac{x+1}{2} = y - 4 = \frac{z-2}{3}$ 와 z 축의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, 1, 3), \vec{v} = (0, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|2 \times 0 + 1 \times 0 + 3 \times 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}} \end{aligned}$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \left(\frac{3}{\sqrt{14}} \right)^2 = \frac{9}{14}$$

562 ㉡ $\frac{4}{5}$

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (1, -1), \vec{v} = (1, 7)$$

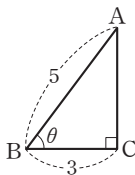
$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|1 \times 1 + (-1) \times 7|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{3}{5}$$

오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC

에서

$$\overline{AC} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{4}{5}$$



563 ㉡ $x = -y = z$

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (1, 3, 2), \vec{v} = (1, 2, 1)$$

구하는 직선의 방향벡터를 $\vec{w} = (a, b, c)$ 라 하자.

직선 l 과 수직이면 $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ 이므로

$$1 \times a + 3 \times b + 2 \times c = 0$$

$$\therefore a + 3b + 2c = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

직선 m 과 수직이면 $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$ 이므로

$$1 \times a + 2 \times b + 1 \times c = 0$$

$$\therefore a + 2b + c = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠ - ㉡을 하면

$$b + c = 0 \quad \therefore b = -c$$

이를 ㉠에 대입하면

$$a + 3 \times (-c) + 2c = 0, a - c = 0 \quad \therefore a = c$$

$$\therefore \vec{w} = (c, -c, c)$$

따라서 원점을 지나고 방향벡터가 $\vec{w} = (c, -c, c)$ 인

직선의 방정식은

$$\frac{x}{c} = \frac{y}{-c} = \frac{z}{c} \quad \therefore x = -y = z \quad (\because c \neq 0)$$

564 ㉡ 2

세 직선 l, m, n 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ 이라 하면

$$\vec{u}_1 = (2, 4, -3), \vec{u}_2 = (1, a, b), \vec{u}_3 = (3, c, 4)$$

이때 $l \parallel m$, 즉 두 직선 l, m 이 서로 평행하면

$$\vec{u}_1 = k\vec{u}_2 \quad (k \neq 0) \text{이므로}$$

$$(2, 4, -3) = k(1, a, b) = (k, ak, bk)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$2 = k, 4 = ak, -3 = bk$$

$$\therefore k = 2, a = 2, b = -\frac{3}{2} \quad \text{..... ①}$$

또 $m \perp n$, 즉 두 직선 m, n 이 서로 수직이면

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_3 = 0 \text{이므로}$$

$$1 \times 3 + 2 \times c + \left(-\frac{3}{2}\right) \times 4 = 0$$

$$2c - 3 = 0 \quad \therefore c = \frac{3}{2} \quad \text{..... ②}$$

$$\therefore a + b + c = 2 + \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} = 2 \quad \text{..... ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	a, b 의 값 구하기	50 %
②	c 의 값 구하기	40 %
③	$a + b + c$ 의 값 구하기	10 %

565 $\Rightarrow \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

원점과 점 $(1, 2, 2)$ 를 지나고 직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (1, 2, 2)$$

즉, 원점을 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (1, 2, 2)$ 인 직선 l 의 방정식은

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$$

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{2} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = t, y = 2t, z = 2t$$

점 $A(-2, 1, 3)$ 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 점 H 는 직선 l 위의 점이므로 $H(t, 2t, 2t)$ 로 놓으면

$$\overrightarrow{AH} = (t+2, 2t-1, 2t-3)$$

$$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u} \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(t+2) \times 1 + (2t-1) \times 2 + (2t-3) \times 2 = 0$$

$$9t - 6 = 0$$

$$\therefore t = \frac{2}{3}$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

566 $\Rightarrow \frac{13\sqrt{3}}{3}$

| 접근 방법 | 점 A 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, 선분 AH 의 길이가 정삼각형 ABC 의 높이임을 이용한다.

$$\frac{x}{3} = \frac{y+4}{2} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = 3t, y = 2t - 4$$

점 $A(1, 1)$ 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 점 H 는 직선 l 위의 점이므로 $H(3t, 2t-4)$ 로 놓으면

$$\overrightarrow{AH} = (3t-1, 2t-5)$$

이때 직선 l 의 방향벡터는 $\vec{u} = (3, 2)$ 이고, $\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ 이므로

$$\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(3t-1) \times 3 + (2t-5) \times 2 = 0$$

$$13t - 13 = 0$$

$$\therefore t = 1$$

즉, $\overrightarrow{AH} = (2, -3)$ 이므로

$$|AH| = |\overrightarrow{AH}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$

이때 선분 AH 는 정삼각형 ABC 의 높이이므로 한 변의 길이를 a 라 하면

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{13}$$

$$\therefore a = \frac{2\sqrt{39}}{3}$$

따라서 정삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{2\sqrt{39}}{3}\right)^2 = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

567 $\Rightarrow \sqrt{5}$

| 접근 방법 | 교인 위치에 있는 두 직선 l, m 위의 점을 각각 P, Q 라 하면 두 직선 l, m 사이의 거리는 직선 PQ 가 두 직선 l, m 과 각각 수직일 때 선분 PQ 의 길이와 같음을 이용한다.

$$\frac{x-3}{2} = -\frac{y+1}{2} = z-2 = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = 2t + 3, y = -2t - 1, z = t + 2$$

$$x = \frac{y}{2} = 4 - z = s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = s, y = 2s, z = -s + 4$$

직선 l 위의 점을 $P(2t+3, -2t-1, t+2)$, 직선 m 위의 점을 $Q(s, 2s, -s+4)$ 로 놓으면

$$\overrightarrow{PQ} = (-2t+s-3, 2t+2s+1, -t-s+2)$$

한편 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, -2, 1), \vec{v} = (1, 2, -1)$$

$$\begin{aligned} \text{직선 } PQ \text{와 직선 } l \text{이 서로 수직이면 } \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u} &= 0 \text{이므로} \\ (-2t+s-3) \times 2 + (2t+2s+1) \times (-2) & \\ &+ (-t-s+2) \times 1 \end{aligned}$$

$$= 0$$

$$-9t - 3s - 6 = 0$$

$$\therefore 3t + s + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

또 직선 PQ 와 직선 m 이 서로 수직이면 $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} (-2t+s-3) \times 1 + (2t+2s+1) \times 2 & \\ &+ (-t-s+2) \times (-1) \end{aligned}$$

$$= 0$$

$$3t + 6s - 3 = 0$$

$$\therefore t + 2s - 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면

$$t = -1, s = 1$$

따라서 $\overrightarrow{PQ} = (0, 1, 2)$ 이므로 구하는 거리는

$$|PQ| = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

02 평면과 구의 방정식

개념 확인

285쪽

568 ㉡ (1) $x+3y-2z+15=0$

(2) $4x-z+2=0$

(3) $2x-3y+z+5=0$

(1) $(x-2)+3(y+3)-2(z-4)=0$

$\therefore x+3y-2z+15=0$

(2) $4x-(z-2)=0 \quad \therefore 4x-z+2=0$

(3) $2(x-1)-3(y-2)+(z+1)=0$

$\therefore 2x-3y+z+5=0$

569 ㉡ (1) $(2, -1, 1)$ (2) $(3, 5, -4)$

유제

287~289쪽

570 ㉡ (1) $2x-4y+z+6=0$

(2) $2x+3y-z-10=0$

(1) 구하는 평면의 법선벡터는 직선

$\frac{x+3}{2} = \frac{1-y}{4} = z+1$ 의 방향벡터와 같으므로

$\vec{n} = (2, -4, 1)$

따라서 점 $(1, 3, 4)$ 를 지나고 법선벡터가

$\vec{n} = (2, -4, 1)$ 인 평면의 방정식은

$2(x-1)-4(y-3)+(z-4)=0$

$\therefore 2x-4y+z+6=0$

(2) 평면 $2x+3y-z=4$ 의 법선벡터는

$\vec{n} = (2, 3, -1)$

평행한 두 평면은 법선벡터가 서로 같으므로 구하

는 평면의 법선벡터는 $\vec{n} = (2, 3, -1)$

따라서 점 $(3, 1, -1)$ 을 지나고 법선벡터가

$\vec{n} = (2, 3, -1)$ 인 평면의 방정식은

$2(x-3)+3(y-1)-(z+1)=0$

$\therefore 2x+3y-z-10=0$

571 ㉡ $x+2y+4z-2=0$

구하는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하면

$2a+d=0 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}d \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$b+d=0 \quad \therefore b=-d \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$6a-c+d=0$

$\therefore c=6a+d=6 \times \left(-\frac{1}{2}d\right)+d=-2d \quad \dots\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에 의하여 평면의 방정식은

$-\frac{1}{2}dx-dy-2dz+d=0$

이때 $d \neq 0$ 이므로 양변을 d 로 나누어 정리하면

$x+2y+4z-2=0$

572 ㉡ -8

평면 $x+2y-z+3=0$ 의 법선벡터는

$\vec{n} = (1, 2, -1)$

평행한 두 평면은 법선벡터가 서로 같으므로 점

$(3, 1, -2)$ 를 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (1, 2, -1)$ 인

평면의 방정식은

$(x-3)+2(y-1)-(z+2)=0$

$\therefore x+2y-z-7=0$

이 평면이 점 $(5, -3, a)$ 를 지나므로

$5+2 \times (-3)-a-7=0 \quad \therefore a=-8$

573 ㉡ 2

평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하면

$3a+d=0 \quad \therefore a=-\frac{1}{3}d \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$-b+d=0 \quad \therefore b=d \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$-2c+d=0 \quad \therefore c=\frac{1}{2}d \quad \dots\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에 의하여 평면의 방정식은

$-\frac{1}{3}dx+dy+\frac{1}{2}dz+d=0$

이때 $d \neq 0$ 이므로 양변을 d 로 나누어 정리하면

$2x-6y-3z-6=0$

이 평면이 점 $(3, -1, k)$ 를 지나므로

$2 \times 3-6 \times (-1)-3 \times k-6=0$

$-3k+6=0 \quad \therefore k=2$

574 ㉡ $\frac{5-x}{2}=y+2=z$

$x-y+3z-7=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$2x+5y-z=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2}$ 을 하면

$-7y+7z-14=0 \quad \therefore z=y+2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1} \times 5 + \textcircled{2}$ 을 하면

$7x+14z-35=0 \quad \therefore z=\frac{5-x}{2} \quad \dots\dots \textcircled{4}$

㉔, ㉕에서 구하는 교선의 방정식은

$$\frac{5-x}{2}=y+2=z$$

575 ㉔ (3, 2, 2)

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{5}=3-z=t \text{ (} t \text{는 실수)로 놓으면}$$

$$x=2t+1, y=5t-3, z=-t+3$$

즉, 구하는 교점의 좌표를 $(2t+1, 5t-3, -t+3)$ 으로 놓고 주어진 평면의 방정식에 대입하면

$$2(2t+1)+(5t-3)-4(-t+3)=0$$

$$13t-13=0 \quad \therefore t=1$$

따라서 구하는 교점의 좌표는 (3, 2, 2)

576 ㉔ $2x-y-z+5=0$

$$2x+3y+z=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$x+y+z-1=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

㉑-㉒을 하면

$$x+2y+1=0 \quad \therefore y=\frac{-x-1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

㉑-㉒ $\times 2$ 를 하면

$$y-z+2=0 \quad \therefore y=z-2 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$\textcircled{㉓}, \textcircled{㉔} \text{에서 교선의 방정식은 } \frac{-x-1}{2}=y=z-2$$

이 직선의 방향벡터는 $(-2, 1, 1)$ 이므로 점 $(-2, 0, 1)$ 을 지나고 법선벡터가 $(-2, 1, 1)$ 인 평면의 방정식은

$$-2(x+2)+y+(z-1)=0$$

$$\therefore 2x-y-z+5=0$$

577 ㉔ 1

점 $(1, -2, 6)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(1, 2, -1)$ 인 직선의 방정식은

$$x-1=\frac{y+2}{2}=6-z$$

$$x-1=\frac{y+2}{2}=6-z=t \text{ (} t \text{는 실수)로 놓으면}$$

$$x=t+1, y=2t-2, z=-t+6$$

즉, 교점의 좌표를 $(t+1, 2t-2, -t+6)$ 으로 놓고 주어진 평면의 방정식에 대입하면

$$2(t+1)+(2t-2)+(-t+6)=0$$

$$3t+6=0 \quad \therefore t=-2$$

따라서 교점의 좌표는 $(-1, -6, 8)$ 이므로

$$a=-1, b=-6, c=8$$

$$\therefore a+b+c=1$$

개념 확인

291쪽

578 ㉔ (1) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ (2) $\frac{1}{14}$

(1) 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1=(1, -2, 2), \vec{n}_2=(1, 1, 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|1 \times 1 + (-2) \times 1 + 2 \times 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

(2) 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1=(2, 1, -3), \vec{n}_2=(3, -2, 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|2 \times 3 + 1 \times (-2) + (-3) \times 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{1}{14} \end{aligned}$$

유제

293~296쪽

579 ㉔ 45°

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1=(4, 1, -1), \vec{n}_2=(2, -1, -2)$$

두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|4 \times 2 + 1 \times (-1) + (-1) \times (-2)|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

580 ㉔ ④

평면 $2x+2y-z+5=0$ 과 xy 평면의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1=(2, 2, -1), \vec{n}_2=(0, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|2 \times 0 + 2 \times 0 + (-1) \times 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

581 ㉠ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

직선 $\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{4} = z-3$ 에 수직인 평면의 법선벡터를 $\vec{n}_1$ 이라 하면 벡터 $\vec{n}_1$ 은 직선의 방향벡터와 같으므로

$$\vec{n}_1 = (3, 4, 1)$$

평면 $4x + y - 3z + 5 = 0$ 의 법선벡터를 $\vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_2 = (4, 1, -3)$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|3 \times 4 + 4 \times 1 + 1 \times (-3)|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 1^2} \sqrt{4^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\theta = 60^\circ$ 이므로 $\sin \theta = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

582 ㉠ 5

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (3, -4, k), \vec{n}_2 = (1, 1, -1)$$

$$\text{이때 } \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{5} \text{이므로 } \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

$$\frac{|3 \times 1 + (-4) \times 1 + k \times (-1)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + k^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

$$5|-k-1| = \sqrt{18(k^2+25)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$7k^2 + 50k - 425 = 0, (7k+85)(k-5) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{85}{7} \text{ 또는 } k = 5$$

그런데 k 는 정수이므로 $k = 5$

583 ㉠ (1) 3 (2) -3

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (a-1, 3, 1), \vec{n}_2 = (6, 9, a)$$

(1) $\alpha \parallel \beta$, 즉 두 평면 α, β 가 서로 평행하면

$$\vec{n}_1 = k\vec{n}_2 (k \neq 0) \text{이므로}$$

$$(a-1, 3, 1) = k(6, 9, a) = (6k, 9k, ak)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$a-1 = 6k, 3 = 9k, 1 = ak$$

$$\therefore k = \frac{1}{3}, a = 3$$

(2) $\alpha \perp \beta$, 즉 두 평면 α, β 가 서로 수직이면

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \text{이므로}$$

$$(a-1) \times 6 + 3 \times 9 + 1 \times a = 0$$

$$7a + 21 = 0 \quad \therefore a = -3$$

584 ㉠ 2

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (2, a, 8), \vec{n}_2 = (1, -1, b)$$

두 평면 α, β 가 서로 평행하면 $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2 (k \neq 0)$ 이므로

$$(2, a, 8) = k(1, -1, b) = (k, -k, bk)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$2 = k, a = -k, 8 = bk$$

$$\therefore k = 2, a = -2, b = 4$$

$$\therefore a + b = 2$$

585 ㉠ 2

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (3a, 3, 1), \vec{n}_2 = (4, 2, \frac{a}{3})$$

이때 두 평면 α, β 가 만나지 않으려면 두 평면 α, β 는 서로 평행해야 한다.

즉, $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2 (k \neq 0)$ 이어야 하므로

$$(3a, 3, 1) = k(4, 2, \frac{a}{3}) = (4k, 2k, \frac{ak}{3})$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$3a = 4k, 3 = 2k, 1 = \frac{ak}{3}$$

$$\therefore k = \frac{3}{2}, a = 2$$

586 ㉠ $x-5y+3z+4=0$

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (2, 1, 1), \vec{n}_2 = (1, -1, -2)$$

구하는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}_3 = (a, b, c)$ 라 하자.

평면 α 와 수직이면 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_3 = 0$ 이므로

$$2a + b + c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

평면 β 와 수직이면 $\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_3 = 0$ 이므로

$$a - b - 2c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$3a - c = 0 \quad \therefore c = 3a$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$2a + b + 3a = 0 \quad \therefore b = -5a$$

$$\therefore \vec{n}_3 = (a, -5a, 3a)$$

따라서 점 $(4, 1, -1)$ 을 지나고 법선벡터가

$$\vec{n}_3 = (a, -5a, 3a) \text{인 평면의 방정식은}$$

$$a(x-4) - 5a(y-1) + 3a(z+1) = 0$$

이때 $a \neq 0$ 이므로 양변을 a 로 나누어 정리하면

$$x - 5y + 3z + 4 = 0$$

587 ㉮ 30°

직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{u} = (3, -5, 4), \vec{n} = (4, -5, -3)$$

직선 l 과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 두 벡터 $\vec{u}, \vec{n}$ 이 이루는 각의 크기는 $90^\circ - \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \theta) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} \\ &= \frac{|3 \times 4 + (-5) \times (-5) + 4 \times (-3)|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 4^2} \sqrt{4^2 + (-5)^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $90^\circ - \theta = 60^\circ$ 이므로 $\theta = 30^\circ$

588 ㉮ -1

직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{u} = (a, 2, a-1), \vec{n} = (2, a+1, -1)$$

직선 l 과 평면 α 가 서로 평행하면 $\vec{u} \perp \vec{n}$ 이므로

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

$$a \times 2 + 2 \times (a+1) + (a-1) \times (-1) = 0$$

$$3a + 3 = 0 \quad \therefore a = -1$$

개념 확인

297쪽

589 ㉮ (1) 3 (2) $\sqrt{14}$

(1) 점 $(2, 0, 1)$ 과 평면 $x + 2y + 2z + 5 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 + 2 \times 0 + 2 \times 1 + 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3$$

(2) 원점과 평면 $3x - y - 2z + 14 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|14|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \sqrt{14}$$

유제

299~303쪽

590 ㉮ $\frac{\sqrt{14}}{2}$

점 $(3, -1, 4)$ 를 지나고 법선벡터가

$$\vec{n} = (1, -3, -2)$$
인 평면 α 의 방정식은

$$(x-3) - 3(y+1) - 2(z-4) = 0$$

$$\therefore x - 3y - 2z + 2 = 0$$

따라서 점 $(1, 0, -2)$ 와 평면 α 사이의 거리는

$$\frac{|1 - 3 \times 0 - 2 \times (-2) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

591 ㉮ 2

주어진 두 평면의 법선벡터가 $\vec{n} = (6, -2, -3)$ 으로 같으므로 두 평면은 서로 평행하다.

이때 두 평면 사이의 거리는 평면 $6x - 2y - 3z - 3 = 0$ 위의 점 $(0, 0, -1)$ 과 평면 $6x - 2y - 3z + 11 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|6 \times 0 - 2 \times 0 - 3 \times (-1) + 11|}{\sqrt{6^2 + (-2)^2 + (-3)^2}} = 2$$

592 ㉮ $3x - 5y + 4z - 20 = 0$,

$$3x - 5y + 4z + 20 = 0$$

법선벡터가 $\vec{n} = (3, -5, 4)$ 인 평면의 방정식을

$3x - 5y + 4z + d = 0$ 으로 놓으면 원점과 평면 사이의 거리가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{|d|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 4^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$|d| = 20 \quad \therefore d = \pm 20$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$3x - 5y + 4z - 20 = 0, 3x - 5y + 4z + 20 = 0$$

593 ㉮ 9

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (2, -1, 2), \vec{n}_2 = (a, b, 4)$$

두 평면 α, β 가 서로 평행하면 $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2 (k \neq 0)$ 이므로

$$(2, -1, 2) = k(a, b, 4) = (ak, bk, 4k)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$2 = ak, -1 = bk, 2 = 4k$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}, a = 4, b = -2$$

이때 평면 α 위의 점 $(2, 0, 0)$ 과 평면 β 사이의 거리가 $\frac{5}{2}$ 이므로

$$\frac{|4 \times 2 - 2 \times 0 + 4 \times 0 + c|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{5}{2}$$

$$|c + 8| = 15, c + 8 = \pm 15$$

$$\therefore c = 7 (\because c > 0)$$

$$\therefore a + b + c = 4 + (-2) + 7 = 9$$

594 ㉮ $3x+y-z-9=0, 3x+y-z+13=0$

법선벡터가 $\vec{n}=(3, 1, -1)$ 인 평면의 방정식을

$3x+y-z+d=0$ 으로 놓자.

구와 평면이 접하면 구의 중심 $(0, 1, 3)$ 과 평면

$3x+y-z+d=0$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길이

$\sqrt{11}$ 과 같으므로

$$\frac{|3 \times 0 + 1 - 3 + d|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{11}$$

$$|d-2|=11, d-2=\pm 11$$

$$\therefore d=-9 \text{ 또는 } d=13$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$3x+y-z-9=0, 3x+y-z+13=0$$

595 ㉮ 16

$$x^2+y^2+z^2+2y-3=0 \text{에서}$$

$$x^2+(y+1)^2+z^2=4$$

구와 평면이 접하려면 구의 중심 $(0, -1, 0)$ 과 평면

$x+8y-4z+k=0$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길

이 2와 같아야 하므로

$$\frac{|0+8 \times (-1)-4 \times 0+k|}{\sqrt{1^2+8^2+(-4)^2}}=2$$

$$|k-8|=18, k-8=\pm 18$$

$$\therefore k=-10 \text{ 또는 } k=26$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-10+26=16$$

596 ㉮ $x-2y+z-6\sqrt{2}=0,$

$$x-2y+z+6\sqrt{2}=0$$

구하는 평면의 법선벡터는 직선 $x-3=\frac{1-y}{2}=z-1$

의 방향벡터와 같으므로

$$\vec{n}=(1, -2, 1)$$

법선벡터가 $\vec{n}=(1, -2, 1)$ 인 평면의 방정식을

$x-2y+z+d=0$ 으로 놓자.

구와 평면이 접하면 구의 중심 $(1, 0, -1)$ 과 평면

$x-2y+z+d=0$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길이

$2\sqrt{3}$ 과 같으므로

$$\frac{|1-2 \times 0 + (-1) + d|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 2\sqrt{3}$$

$$|d|=6\sqrt{2} \quad \therefore d=\pm 6\sqrt{2}$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$x-2y+z-6\sqrt{2}=0, x-2y+z+6\sqrt{2}=0$$

597 ㉮ $x+2y-2z-3=0$

법선벡터가 $\vec{v}=(1, 2, -2)$ 인 평면의 방정식을

$x+2y-2z+d=0$ 으로 놓자.

구 $x^2+(y-1)^2+(z-4)^2=9$ 와 평면이 접하면 구의

중심 $(0, 1, 4)$ 와 평면 $x+2y-2z+d=0$ 사이의 거

리가 구의 반지름의 길이 3과 같으므로

$$\frac{|0+2 \times 1 - 2 \times 4 + d|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 3$$

$$|d-6|=9$$

$$d-6=\pm 9$$

$$\therefore d=-3 \text{ 또는 } d=15 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또 구 $(x-1)^2+y^2+(z-2)^2=4$ 와 평면이 접하면

구의 중심 $(1, 0, 2)$ 와 평면 $x+2y-2z+d=0$ 사이

의 거리가 구의 반지름의 길이 2와 같으므로

$$\frac{|1+2 \times 0 - 2 \times 2 + d|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 2$$

$$|d-3|=6$$

$$d-3=\pm 6$$

$$\therefore d=-3 \text{ 또는 } d=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $d=-3$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$x+2y-2z-3=0$$

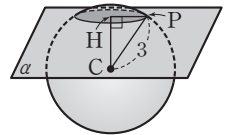
598 ㉮ 3π

오른쪽 그림과 같이 구의 중

심을 $C(1, 1, -1)$ 이라 하

고, 점 C 에서 평면 α 에 내

린 수선의 발을 H 라 하면



$$\overline{CH} = \frac{|1-1+2 \times (-1)-4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \sqrt{6}$$

이때 구와 평면 α 의 교선인 원 위의 한 점을 P 라 하면

$\overline{CP}=3$ 이므로 직각삼각형 CPH 에서

$$\overline{HP} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{3}$$

따라서 구와 평면 α 가 만나서 생기는 도형은 반지름의

길이가 $\sqrt{3}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{3})^2 = 3\pi$$

599 ㉮ $(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2})$

구의 중심을 $C(0, 0, 0)$ 이라 하고, 점 C 에서 평면 α

에 내린 수선의 발을 $H(a, b, c)$ 라 하면

$$\overrightarrow{CH}=(a, b, c)$$

평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면 $\vec{n}=(1, -2, 3)$ 이고, $\overrightarrow{CH} \parallel \vec{n}$ 이므로

$$\overrightarrow{CH}=t\vec{n} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

$$(a, b, c)=t(1, -2, 3)=(t, -2t, 3t)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$a=t, b=-2t, c=3t$$

$$\therefore H(t, -2t, 3t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 점 H는 평면 α 위의 점이므로

$$t-2 \times (-2t)+3 \times 3t-7=0$$

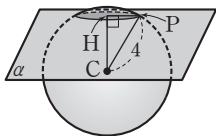
$$14t-7=0 \quad \therefore t=\frac{1}{2}$$

이를 ①에 대입하면 구하는 도형의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2}\right)$$

600 ㉡ 7

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 $C(1, 0, 2)$ 라 하고, 점 C에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH}=\frac{|1+0-2+k|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|k-1|}{\sqrt{3}}$$

이때 구와 평면 α 의 교선인 원 위의 한 점을 P라 하면

$$\overline{CP}=4$$

한편 구와 평면 α 가 만나서 생기는 원의 넓이가 4π 이므로 원의 반지름의 길이는 2이다.

$$\therefore \overline{HP}=2$$

직각삼각형 CPH에서

$$\overline{CH}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } \frac{|k-1|}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$|k-1|=6, k-1=\pm 6$$

$$\therefore k=7 (\because k>0)$$

601 ㉡ $\frac{25}{2}$

평면 α 의 법선벡터는 직선 $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{3}=-z$ 의 방향벡터와 같으므로

$$\vec{n}=(2, 3, -1)$$

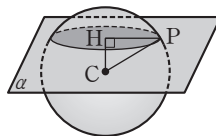
점 $(1, 1, -1)$ 을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(2, 3, -1)$

인 평면 α 의 방정식은

$$2(x-1)+3(y-1)-(z+1)=0$$

$$\therefore 2x+3y-z-6=0$$

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 $C(-2, 2, 3)$ 이라 하고, 점 C에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH}=\frac{|2 \times (-2)+3 \times 2-3-6|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

한편 구와 평면 α 가 만나서 생기는 원의 둘레의 길이가 6π 이므로 원의 반지름의 길이는 3이다.

$$\therefore \overline{HP}=3$$

직각삼각형 CPH에서

$$\overline{CP}^2=\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2+3^2=\frac{25}{2} \quad \therefore k=\frac{25}{2}$$

개념 확인

305쪽

602 ㉡ (1) 점 $(0, 0, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 구

(2) 점 $C(1, 3, -2)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 구

603 ㉡ (1) 점 $C(2, -1, 5)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 구

(2) 점 $(0, 0, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{30}$ 인 구

$$(2) (\vec{p}-\vec{c}) \cdot (\vec{p}+\vec{c})=0 \text{에서 } |\vec{p}|^2-|\vec{c}|^2=0$$

$$\therefore |\vec{p}|=|\vec{c}|$$

$$\text{이때 } |\vec{c}|=\sqrt{2^2+(-1)^2+5^2}=\sqrt{30} \text{ 이므로}$$

$$|\vec{p}|=\sqrt{30}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(0, 0, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{30}$ 인 구이다.

유제

307쪽

$$604 ㉡ (x-1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=3$$

구 위의 한 점을 $P(x, y, z)$ 라 하면 $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$ 이므로

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}=0$$

$$\text{이때 } \overrightarrow{AP}=(x-2, y-3, z-3),$$

$$\overrightarrow{BP}=(x, y-5, z-1) \text{ 이므로}$$

$$(x-2)x+(y-3)(y-5)+(z-3)(z-1)=0$$

$$x^2-2x+y^2-8y+15+z^2-4z+3=0$$

$$\therefore (x-1)^2+(y-4)^2+(z-2)^2=3$$

605 ㉔ 32π

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\overrightarrow{AP} = (x-1, y, z+1)$$

$$\overrightarrow{BP} = (x-1, y+4, z-3)$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + y(y+4) + (z+1)(z-3) = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 + 4y + z^2 - 2z - 3 = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 = 8$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(1, -2, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 구이므로 구하는 겹넓이는

$$4\pi \times (2\sqrt{2})^2 = 32\pi$$

606 ㉔ $2\sqrt{15}$

$|\overrightarrow{AP}| = 7$ 을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 점 $A(-3, 5, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 7인 구이므로 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$(x+3)^2 + (y-5)^2 + z^2 = 49$$

이 식에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$z^2 = 15 \quad \therefore z = \pm\sqrt{15}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형과 z 축의 두 교점 Q, R의 좌표는 $(0, 0, -\sqrt{15}), (0, 0, \sqrt{15})$ 이므로 선분 QR의 길이는

$$\overline{QR} = \sqrt{15} - (-\sqrt{15}) = 2\sqrt{15}$$

607 ㉔ 2

$|\vec{p} - \vec{a}| = 1$ 을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 점 $A(3, 2, -1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 구이다.

구의 중심 $A(3, 2, -1)$ 과 평면 $x+y+z-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+2+(-1)-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{3}$$

이때 구의 반지름의 길이가 1이므로 점 P와 평면

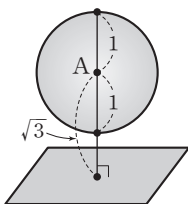
$x+y+z-1=0$ 사이의 거리의

최댓값은 $\sqrt{3}+1$,

최솟값은 $\sqrt{3}-1$ 이다.

따라서 구하는 곱은

$$(\sqrt{3}+1) \times (\sqrt{3}-1) = 2$$



연습문제

308-310쪽

608 ㉔ $x=1$

x 축에 수직인 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{n} = (1, 0, 0)$$

따라서 점 $B(1, 2, 3)$ 을 지나고 법선벡터가

$\vec{n} = (1, 0, 0)$ 인 평면의 방정식은

$$x-1=0 \quad \therefore x=1$$

609 ㉔ 8

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = z-2 = t \text{ (} t \text{는 실수)로 놓으면}$$

$$x=2t+1, y=3t-1, z=t+2 \quad \text{▶▶▶▶▶ ①}$$

즉, 구하는 교점의 좌표를 $(2t+1, 3t-1, t+2)$ 로 놓고 주어진 평면의 방정식에 대입하면

$$(2t+1) - (3t-1) - (t+2) + 2 = 0$$

$$-2t+2=0 \quad \therefore t=1 \quad \text{▶▶▶▶▶ ②}$$

따라서 교점의 좌표는 $(3, 2, 3)$ 이므로

$$a=3, b=2, c=3$$

$$\therefore a+b+c=8 \quad \text{▶▶▶▶▶ ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	직선의 방정식을 t 로 놓고, x, y, z 를 t 에 대한 식으로 나타내기	30%
②	t 의 값 구하기	40%
③	$a+b+c$ 의 값 구하기	30%

610 ㉔ ③

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (1, k, 1), \vec{n}_2 = (k, 1, -1)$$

두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \cos 60^\circ$$

$$\frac{|1 \times k + k \times 1 + 1 \times (-1)|}{\sqrt{1^2+k^2+1^2} \sqrt{k^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$2|2k-1| = k^2+2$$

$$\text{이때 } k > \frac{1}{2} \text{ 이므로 } 2(2k-1) = k^2+2$$

$$k^2-4k+4=0, (k-2)^2=0$$

$$\therefore k=2$$

611 ㉔ -1, 1

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (1, a-2, 2), \vec{n}_2 = (5, -a-2, -4)$$

두 평면 α, β 가 서로 수직이 되려면 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ 이어야
하므로

$$1 \times 5 + (a-2)(-a-2) + 2 \times (-4) = 0$$

$$a^2 = 1 \quad \therefore a = \pm 1$$

612 ㉔ ④

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2z - 3 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 6$$

구와 평면이 접하려면 구의 중심 $(1, -1, -1)$ 과 평면 $x+y-2z+k=0$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길이 $\sqrt{6}$ 과 같아야 하므로

$$\frac{|1+(-1)-2 \times (-1)+k|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2}} = \sqrt{6}$$

$$|k+2|=6, k+2=\pm 6 \quad \therefore k=4 (\because k>0)$$

613 ㉔ 10

직선 $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{a} = \frac{z+5}{4}$ 에 수직인 평면의 법선 벡터는 직선의 방향벡터와 같으므로

$$\vec{n} = (2, a, 4)$$

점 $(1, 1, -2)$ 를 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (2, a, 4)$ 인 평면의 방정식은

$$2(x-1) + a(y-1) + 4(z+2) = 0$$

$$\therefore 2x + ay + 4z - a + 6 = 0$$

이 식이 $2x+5y+bz+c=0$ 과 일치하므로

$$a=5, 4=b, -a+6=c$$

$$\therefore a=5, b=4, c=1$$

$$\therefore a+b+c=10$$

614 ㉔ $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{4} = 2-z$

평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하면

$$a+d=0 \quad \therefore a=-d \quad \dots\dots ㉑$$

$$-a+b+d=0$$

$$\therefore b=a-d=-d-d=-2d \quad \dots\dots ㉒$$

$$b+2c+d=0$$

$$\therefore c = \frac{-b-d}{2} = \frac{2d-d}{2} = \frac{1}{2}d \quad \dots\dots ㉓$$

㉑, ㉒, ㉓에 의하여 평면의 방정식은

$$-dx - 2dy + \frac{1}{2}dz + d = 0$$

이때 $d \neq 0$ 이므로 양변을 d 로 나누어 정리하면

$$2x+4y-z-2=0$$

이 평면에 수직인 직선의 방향벡터는 $\vec{u} = (2, 4, -1)$

이므로 점 C(0, 1, 2)를 지나고 방향벡터가

$\vec{u} = (2, 4, -1)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1} \quad \therefore \frac{x}{2} = \frac{y-1}{4} = 2-z$$

615 ㉔ $(-1, 2, -4)$

$$x-2z-7=0 \text{에서 } z = \frac{x-7}{2}$$

$$y-3z-14=0 \text{에서 } z = \frac{y-14}{3}$$

즉, 교선 l 의 방정식은

$$\frac{x-7}{2} = \frac{y-14}{3} = z$$

$$\frac{x-7}{2} = \frac{y-14}{3} = z = t \text{ (} t \text{는 실수)로 놓으면}$$

$$x=2t+7, y=3t+14, z=t$$

원점 O에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 직선 l 위의 점이므로 $H(2t+7, 3t+14, t)$ 로 놓으면

$$\overrightarrow{OH} = (2t+7, 3t+14, t)$$

이때 직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면 $\vec{u} = (2, 3, 1)$ 이고, $\overrightarrow{OH} \perp \vec{u}$ 이므로

$$\overrightarrow{OH} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(2t+7) \times 2 + (3t+14) \times 3 + t \times 1 = 0$$

$$14t+56=0 \quad \therefore t=-4$$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(-1, 2, -4)$

616 ㉔ $2\sqrt{11}$

$$x-2=y=\frac{z-3}{3}=t \text{ (} t \text{는 실수)로 놓으면}$$

$$x=t+2, y=t, z=3t+3$$

A($t+2, t, 3t+3$)으로 놓고 $x-2y-z+5=0$ 에 대입하면

$$(t+2)-2 \times t-(3t+3)+5=0$$

$$-4t+4=0 \quad \therefore t=1$$

$$\therefore A(3, 1, 6)$$

B($t+2, t, 3t+3$)으로 놓고 $2x+y+z-1=0$ 에 대입하면

$$2(t+2)+t+(3t+3)-1=0$$

$$6t+6=0 \quad \therefore t=-1$$

$$\therefore B(1, -1, 0)$$

따라서 선분 AB의 길이는

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-3)^2 + (-1-1)^2 + (0-6)^2} = 2\sqrt{11}$$

617 ㉑ ①

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (1, 2, -2)$$

$$\vec{n}_2 = (2, -2, 1)$$

두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|1 \times 2 + 2 \times (-2) + (-2) \times 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} \\ &= \frac{4}{9}\end{aligned}$$

한편 정삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}$$

따라서 정삼각형 ABC의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle ABC \cos \theta = 9\sqrt{3} \times \frac{4}{9} = 4\sqrt{3}$$

618 ㉑ $\frac{x+6}{7} = -y = \frac{z+5}{4}$

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (1, -1, -k)$$

$$\vec{n}_2 = (k-1, 3, -1)$$

두 평면 α, β 가 서로 수직이면 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ 이므로

$$1 \times (k-1) + (-1) \times 3 + (-k) \times (-1) = 0$$

$$2k-4=0$$

$$\therefore k=2 \quad \text{..... ①}$$

$$x-y-2z=4 \quad \text{..... ㉠}$$

$$x+3y-z=-1 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠-㉡을 하면

$$-4y-z=5 \quad \therefore y = \frac{z+5}{-4} \quad \text{..... ㉢}$$

㉠-㉡ $\times 2$ 를 하면

$$-x-7y=6 \quad \therefore y = \frac{x+6}{-7} \quad \text{..... ㉣}$$

㉢, ㉣에서 구하는 교선의 방정식은

$$\frac{x+6}{-7} = y = \frac{z+5}{-4}$$

$$\therefore \frac{x+6}{7} = -y = \frac{z+5}{4} \quad \text{..... ②}$$

단계	채점 기준	비율
①	k 의 값 구하기	40%
②	두 평면 α, β 의 교선의 방정식 구하기	60%

619 ㉑ $\frac{\sqrt{6}}{9}$

두 점 $(1, -2, 4), (2, 5, 2)$ 를 지나는 직선 l 의 방향 벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2-1, 5-(-2), 2-4) = (1, 7, -2)$$

xy 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면 $\vec{n} = (0, 0, 1)$

직선 l 과 xy 평면이 이루는 각의 크기가 θ 이면 두 벡터

$\vec{u}, \vec{n}$ 이 이루는 각의 크기는 $90^\circ - \theta$ 이므로

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - \theta) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} \\ &= \frac{|1 \times 0 + 7 \times 0 + (-2) \times 1|}{\sqrt{1^2 + 7^2 + (-2)^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{9}\end{aligned}$$

620 ㉑ 160

구의 중심 $(0, 0, 1)$ 과 평면 $2x-y+2z-7=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 \times 0 - 0 + 2 \times 1 - 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{5}{3}$$

이때 구의 반지름의 길이가 1이므로 점 P와 평면

$2x-y+2z-7=0$ 사이의 거리의 최댓값은

$$d = \frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3}$$

$$\therefore 60d = 60 \times \frac{8}{3} = 160$$

621 ㉑ -4

오른쪽 그림과 같이 구의 중

심을 $C(1, 2, -1)$ 이라 하

고, 점 C에서 평면 α 에 내

린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned}\overline{CH} &= \frac{|2 \times 1 + 2 + 2 \times (-1) + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} \\ &= \frac{|k+2|}{3}\end{aligned}$$

한편 구와 평면 α 가 만나서 생기는 원의 넓이가 9π 이

므로 원의 반지름의 길이는 3이다.

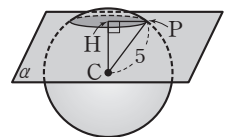
$$\therefore \overline{HP} = 3$$

$$\text{직각삼각형 CPH에서 } \overline{CH} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$\text{즉, } \frac{|k+2|}{3} = 4 \text{이므로 } |k+2| = 12$$

$$k+2 = \pm 12 \quad \therefore k = -14 \text{ 또는 } k = 10$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은 $-14 + 10 = -4$



622 ㉔ 20

$$|\vec{p}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{p} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \text{에서}$$

$$|\vec{p} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \quad \therefore |\vec{p} - \vec{b}| = |\vec{a}|$$

$$\text{이때 } |\vec{a}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14} \text{이므로}$$

$$|\vec{p} - \vec{b}| = \sqrt{14}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 B(1, 1, 4)를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{14}$ 인 구이므로

$$l=1, m=1, n=4, r=\sqrt{14}$$

$$\therefore l+m+n+r^2=1+1+4+(\sqrt{14})^2=20$$

623 ㉔ $x-4y+5z+3=0, 3x+2y+z-5=0$

ㄱ 접근 방법 두 평면 α, β 가 이루는 각을 이등분하는 평면 위의 점에서 두 평면 α, β 까지의 거리가 같음을 이용한다.

두 평면 α, β 가 이루는 각을 이등분하는 평면 위의 점의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 이 점에서 두 평면 α, β 까지의 거리가 같으므로

$$\frac{|2a-b+3c-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+3^2}} = \frac{|a+3b-2c-4|}{\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}}$$

$$\frac{|2a-b+3c-1|}{\sqrt{14}} = \frac{|a+3b-2c-4|}{\sqrt{14}}$$

$$2a-b+3c-1 = \pm(a+3b-2c-4)$$

$$\therefore a-4b+5c+3=0, 3a+2b+c-5=0$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$x-4y+5z+3=0, 3x+2y+z-5=0$$

624 ㉔ $\sqrt{14}$

ㄱ 접근 방법 직선과 평면이 이루는 각의 크기를 이용하여 a, b, c 사이의 관계식을 구한 후 점 P와 평면 α 사이의 거리를 구한다.

직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{u}=(2, 3, -1), \vec{n}=(a, b, c)$$

직선 l 과 평면 α 가 이루는 각의 크기가 30° 이면 두 벡터 $\vec{u}, \vec{n}$ 이 이루는 각의 크기는 $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ 이므로

$$\frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \cos 60^\circ$$

$$\frac{|2a+3b-c|}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{|2a+3b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

한편 점 P(-4, -6, 2)와 평면 α 사이의 거리는

$$\frac{|-4a-6b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\text{이때 } |-4a-6b+2c| = 2|2a+3b-c| \text{이므로}$$

$$\frac{|-4a-6b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{2|2a+3b-c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{14}}{2} = \sqrt{14}$$

625 ㉔ 8π

ㄱ 접근 방법 두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하고 $\cos \theta$ 의 값을 이용하여 정사영의 넓이를 구한다.

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y+2z-15=0 \text{에서}$$

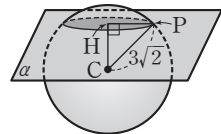
$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=18$$

오른쪽 그림과 같이 구의 중

심을 C(1, 1, -1)이라 하

고, 점 C에서 평면 α 에 내

린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{CH} = \frac{|2 \times 1 - 2 \times 1 + (-1) - 8|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 3$$

이때 구와 평면 α 의 교선인 원 위의 한 점을 P라 하면

$$\overline{CP} = 3\sqrt{2} \text{이므로 직각삼각형 CPH에서}$$

$$\overline{HP} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 3^2} = 3$$

즉, 주어진 구와 평면 α 가 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 3인 원이므로 그 넓이는

$$\pi \times 3^2 = 9\pi$$

한편 두 평면 α, β 의 법선벡터를 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1=(2, -2, 1), \vec{n}_2=(1, -2, 2)$$

두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$= \frac{|2 \times 1 + (-2) \times (-2) + 1 \times 2|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{8}{9}$$

따라서 구하는 넓이는

$$9\pi \cos \theta = 9\pi \times \frac{8}{9} = 8\pi$$

memo

