

01 / 이차곡선

2~7쪽

중단원 기출문제 ①회

1 답 ①

포물선 $x^2 = \frac{1}{3}y$, 즉 $x^2 = 4 \times \frac{1}{12}y$ 의 초점의 좌표는 $(0, \frac{1}{12})$

2 답 $y^2 = -18x$

꼭짓점이 원점이고 초점이 x 축 위에 있는 포물선의 방정식을 $y^2 = 4px$ ($p \neq 0$)라 하자.

이 포물선이 점 $(-2, 6)$ 을 지나므로

$$6^2 = 4p \times (-2) \quad \therefore p = -\frac{9}{2}$$

$$\therefore y^2 = -18x$$

3 답 -4

포물선 $y^2 = -4(x+p)$ 는 포물선 $y^2 = -4x$ 를 x 축의 방향으로 $-p$ 만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2 = -4x$, 즉 $y^2 = 4 \times (-1)x$ 의 초점의 좌표는 $(-1, 0)$

따라서 포물선 $y^2 = -4(x+p)$ 의 초점의 좌표는

$$(-1-p, 0)$$

포물선 $y^2 = 12(x-q)$ 는 포물선 $y^2 = 12x$ 를 x 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2 = 12x$, 즉 $y^2 = 4 \times 3x$ 의 초점의 좌표는

$$(3, 0)$$

따라서 포물선 $y^2 = 12(x-q)$ 의 초점의 좌표는

$$(3+q, 0)$$

두 초점이 일치하므로

$$-1-p=3+q \quad \therefore p+q=-4$$

4 답 ③

$$y^2 - 6y - 4x + 5 = 0 \text{에서 } y^2 - 6y + 9 = 4x + 4$$

$$\therefore (y-3)^2 = 4(x+1)$$

즉, 이 포물선은 포물선 $y^2 = 4x$ 를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점의 좌표는 $(1, 0)$, 준선의 방정식은 $x = -1$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(0, 3)$, 준선의 방정식은 $x = -2$ 이다.

따라서 $a=0$, $b=3$, $c=-2$ 이므로

$$a+b-c=5$$

5 답 ⑤

$$x^2 - 4x - 12y + 4 = 0 \text{에서 } x^2 - 4x + 4 = 12y$$

$$\therefore (x-2)^2 = 12y$$

즉, 이 포물선은 포물선 $x^2 = 12y$ 를 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2 = 12y$ 의 초점의 좌표는 $(0, 3)$, 준선의 방정식은 $y = -3$ 이므로 주어진 포물선의 초점 F의 좌표는 $(2, 3)$, 준선의 방정식은 $y = -3$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 점 $P(a, b)$ 에서 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH} = \overline{PF} = 15$$

즉, $\overline{PH} = 15$ 에서

$$b+3=15 \quad \therefore b=12$$

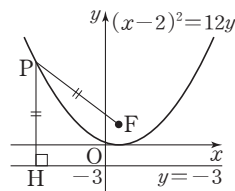
이때 점 $P(a, 12)$ 가 포물선 $(x-2)^2 = 12y$ 위의 점이므로

$$(a-2)^2 = 144, a-2 = \pm 12$$

$$\therefore a=14 \text{ 또는 } a=-10$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$14 + (-10) = 4$$



6 답 6

포물선 $y^2 = 4x$ 의 준선의 방정식은 $x = -1$

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 A'', B''이라 하면 포물선의 정의에 의하여

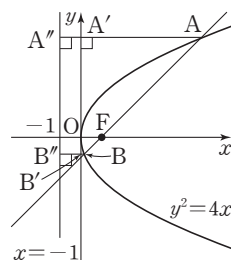
$$\overline{AF} = \overline{AA''} = \overline{AA'} + 1$$

$$\overline{BF} = \overline{BB''} = \overline{BB'} + 1$$

이때 $\overline{AF} + \overline{BF} = \overline{AB} = 8$ 이므로

$$(\overline{AA'} + 1) + (\overline{BB'} + 1) = 8$$

$$\therefore \overline{AA'} + \overline{BB'} = 6$$



7 답 ⑤

포물선 $y^2 = 8x$, 즉 $y^2 = 4 \times 2x$ 의 준선의 방정식은 $x = -2$

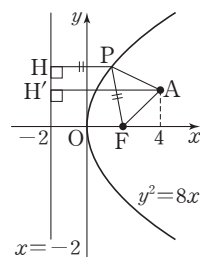
오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PH}$$

$$\geq \overline{AH'}$$

$$= 4 + 2 = 6$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PF}$ 의 최솟값은 6이다.



8 답 48

$$\text{타원 } \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1 \text{의}$$

장축의 길이는 $2 \times 10 = 20$, 단축의 길이는 $2 \times 8 = 16$ 이므로

$$a=20, b=16$$

$$\sqrt{100-64}=6 \text{이므로 두 초점의 좌표는}$$

$$(0, 6), (0, -6)$$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$c=6-(-6)=12$$

$$\therefore a+b+c=48$$

9 답 ⑤

주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

① 장축의 길이는 $2 \times 6 = 12$

② 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $\sqrt{36-16} = 2\sqrt{5}$ 이므로 두 초점의 좌표는 $(2\sqrt{5}, 0), (-2\sqrt{5}, 0)$

주어진 타원의 두 초점의 좌표는

$$(2\sqrt{5}+2, -1), (-2\sqrt{5}+2, -1)$$

③ 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ 의 네 꼭짓점의 좌표는

$$(-6, 0), (6, 0), (0, -4), (0, 4)$$

주어진 타원의 네 꼭짓점의 좌표는

$$(8, -1), (-4, -1), (2, 3), (2, -5)$$

④ 중심의 좌표는 $(2, -1)$

⑤ x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동하면

$$\text{타원 } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1 \text{과 겹쳐진다.}$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

10 답 ①

타원 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{13} = 1$ 에서 $\sqrt{49-13} = 6$ 이므로 두 초점 F, F'의 좌표는 $(6, 0), (-6, 0)$ $\therefore \overline{FF'} = 12$

$\overline{PF} = a, \overline{PF'} = b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a+b=2 \times 7 = 14$$

점 P가 원 위의 점이므로 $\angle FPF' = 90^\circ$

직각삼각형 PFF'에서

$$a^2 + b^2 = 12^2 = 144$$

이때 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ 에서

$$14^2 = 144 + 2ab, 2ab = 52 \quad \therefore ab = 26$$

따라서 삼각형 PFF'의 넓이는

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 26 = 13$$

11 답 40

$D(a, b)$ ($a > 0, b > 0$)라 하면 직사각형 ABCD의 넓이는

$$2a \times 2b = 4ab$$

점 D(a, b)가 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{25} = 1$$

$\frac{a^2}{16} > 0, \frac{b^2}{25} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{25} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{16} \times \frac{b^2}{25}} \quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{16} = \frac{b^2}{25} \text{일 때 성립} \right)$$

$$1 \geq \frac{ab}{10} \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore ab \leq 10$$

따라서 $4ab \leq 40$ 이므로 구하는 넓이의 최댓값은 40이다.

12 답 ⑤

쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 의 두 초점의 좌표가 $(0, 4), (0, -4)$ 이므로

$$5 + b^2 = 4^2, b^2 = 11 \quad \therefore |b| = \sqrt{11}$$

따라서 구하는 주축의 길이는

$$2|b| = 2\sqrt{11}$$

13 답 $y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x$

타원 $\frac{x^2}{70} + \frac{y^2}{25} = 1$ 에서 $\sqrt{70-25} = 3\sqrt{5}$ 이므로 두 초점의 좌표는 $(3\sqrt{5}, 0), (-3\sqrt{5}, 0)$

또 타원의 단축의 길이가 $2 \times 5 = 10$ 이므로 쌍곡선의 주축의 길이는 10이다.

중심이 원점이고 두 초점이 x 축 위에 있으므로 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0) \text{이라 하자.}$$

주축의 길이가 10이므로

$$2a = 10 \quad \therefore a = 5$$

두 초점의 좌표가 $(3\sqrt{5}, 0), (-3\sqrt{5}, 0)$ 이므로

$$b^2 = (3\sqrt{5})^2 - a^2 = (3\sqrt{5})^2 - 5^2 = 20$$

$$\therefore b = 2\sqrt{5}$$

따라서 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{20} = 1$ 이므로 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}x$$

14 답 3

쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = -1$ 을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면

$$\frac{(x-a)^2}{3} - \frac{(y-b)^2}{5} = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$5x^2 - 3y^2 + 20x + 18y + c = 0$ 에서

$$5(x^2 + 4x + 4) - 3(y^2 - 6y + 9) = -c - 7$$

$$\frac{(x+2)^2}{3} - \frac{(y-3)^2}{5} = \frac{-c-7}{15} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②이 일치하므로

$$a = -2, b = 3, -1 = \frac{-c-7}{15}$$

$$\therefore a = -2, b = 3, c = 8$$

$$\therefore a - b + c = -2 - 3 + 8 = 3$$

15 답 ④

$$4x^2 - y^2 - 24x - 2y - 1 = 0 \text{에서}$$

$$4(x^2 - 6x + 9) - (y^2 + 2y + 1) = 36$$

$$\therefore \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{(y+1)^2}{36} = 1$$

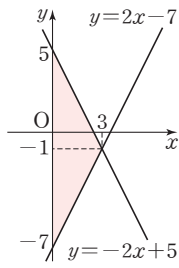
즉, 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = \pm 2x$ 이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y+1 = \pm 2(x-3)$$

$$\therefore y = 2x - 7, y = -2x + 5$$

이때 두 점근선의 교점의 좌표는 $(3, -1)$ 이므로
오른쪽 그림에서 구하는 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \{5 - (-7)\} \times 3 = 18$



16 답 ⑤

쌍곡선 $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $\sqrt{20+16}=6$ 이므로 두 초점 F, F'의 좌표는
 $(6, 0), (-6, 0)$

점 P가 제1사분면 위의 점이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{PF'} - \overline{PF} &= 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5} \\ \therefore \overline{AP} + \overline{PF'} &= \overline{AP} + \overline{PF} - \overline{PF} + \overline{PF'} \\ &\geq \overline{AF} + (\overline{PF'} - \overline{PF}) \\ &= \sqrt{6^2 + (-2\sqrt{11})^2} + 4\sqrt{5} \\ &= 4\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 8\sqrt{5} \end{aligned}$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PF'}$ 의 최솟값은 $8\sqrt{5}$ 이다.

17 답 16

원의 중심 C의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 C에서 점 $(-3, 2)$ 까지의
거리와 직선 $x=1$ 까지의 거리가 서로 같으므로

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+3)^2 + (y-2)^2} &= |1-x| \\ \text{양변을 제곱하면 } (x+3)^2 + (y-2)^2 &= (1-x)^2 \\ \therefore (y-2)^2 &= -8(x+1) \end{aligned}$$

따라서 $a=2, b=-8, c=-1$ 이므로 $abc=16$

18 답 $3\sqrt{7}$ m

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라 하자.

장축의 길이가 24이므로

$$2a=24 \quad \therefore a=12$$

두 초점 사이의 거리가 18, 즉 중심에서 초점 사이의 거리가 9이므로

$$b^2 = a^2 - 9^2 = 12^2 - 9^2 = 63 \quad \therefore b = 3\sqrt{7} \quad (\because b > 0)$$

따라서 터널에서 가장 높은 곳의 높이는 $3\sqrt{7}$ m이다.

19 답 7

ㄱ. 직선 ㄴ. 원 ㄷ. 타원 ㄹ. 쌍곡선 ㅁ. 포물선

따라서 이차곡선은 ㄴ, ㄷ, ㄹ, ㅁ의 4개이므로 $a=4$

포물선은 ㅁ의 1개이므로 $b=1$

초점이 2개인 도형은 ㄷ, ㄹ의 2개이므로 $c=2$

$$\therefore a+b+c=7$$

20 답 ②

$x^2 + 6x + k(y^2 + 3) = 0$ 에서 $(x^2 + 6x + 9) + ky^2 = -3k + 9$

$$\therefore (x+3)^2 + ky^2 = -3k + 9$$

이 방정식이 나타내는 도형이 타원이 되려면

$$k > 0, k \neq 1, -3k + 9 > 0$$

$$\therefore 0 < k < 1, 1 < k < 3$$

따라서 실수 k 의 값이 될 수 있는 것은 ②이다.

중단원 기출문제 2회

1 답 ①

초점이 $F(-4, 0)$ 이고 준선이 $x=4$ 인 포물선의 방정식은

$$y^2 = 4 \times (-4)x \quad \therefore y^2 = -16x$$

이 포물선이 점 $(k, 2)$ 를 지나므로

$$2^2 = -16k \quad \therefore k = -\frac{1}{4}$$

2 답 34

포물선 $(x-2)^2 = 8y$ 는 포물선 $x^2 = 8y$ 를 x 축의 방향으로 2만큼 평
행이동한 것이다.

포물선 $x^2 = 8y$, 즉 $x^2 = 4 \times 2y$ 의 초점의 좌표는

$$(0, 2)$$

따라서 포물선 $(x-2)^2 = 8y$ 의 초점 F_1 의 좌표는

$$(2, 2)$$

포물선 $(y+3)^2 = -4x$ 는 포물선 $y^2 = -4x$ 를 y 축의 방향으로 -3
만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2 = -4x$, 즉 $y^2 = 4 \times (-1)x$ 의 초점의 좌표는

$$(-1, 0)$$

따라서 포물선 $(y+3)^2 = -4x$ 의 초점 F_2 의 좌표는

$$(-1, -3)$$

$$\therefore \overline{F_1 F_2}^2 = (-1-2)^2 + (-3-2)^2 = 34$$

3 답 ⑤

$y^2 - 4x - 8y + 8 = 0$ 에서

$$y^2 - 8y + 16 = 4x + 8$$

$$\therefore (y-4)^2 = 4(x+2) \quad \dots\dots ㉠$$

즉, 이 포물선은 포물선 $y^2 = 4x$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방
향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점의 좌표는 $(1, 0)$ 이므로 포물선 ㉠의 초점의
좌표는

$$(-1, 4)$$

$x^2 - 2x - 4y + k = 0$ 에서

$$x^2 - 2x + 1 = 4y - k + 1$$

$$\therefore (x-1)^2 = 4\left(y - \frac{k-1}{4}\right) \quad \dots\dots ㉡$$

즉, 이 포물선은 포물선 $x^2 = 4y$ 를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방
향으로 $\frac{k-1}{4}$ 만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2 = 4y$ 의 초점의 좌표는 $(0, 1)$ 이므로 포물선 ㉡의 초점의
좌표는

$$\left(1, \frac{k+3}{4}\right)$$

두 점 $(-1, 4), \left(1, \frac{k+3}{4}\right)$ 이 원점에 대하여 대칭이므로

$$-4 = \frac{k+3}{4} \quad \therefore k = -19$$

4 답 $20\sqrt{6}$

포물선 $x^2 = 12y$, 즉 $x^2 = 4 \times 3y$ 의 초점 F의 좌표는 $(0, 3)$, 준선의
방정식은 $y = -3$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 준선 $y = -3$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH} = \overline{PF} = 11$$

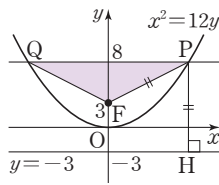
즉, 두 점 P, Q의 y좌표는 8이고 두 점 P, Q는 포물선 $x^2 = 12y$ 위의 점이므로

$$x^2 = 12 \times 8 \quad \therefore x = \pm 4\sqrt{6}$$

$$\therefore P(4\sqrt{6}, 8), Q(-4\sqrt{6}, 8)$$

따라서 삼각형 FPQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{4\sqrt{6} - (-4\sqrt{6})\} \times (8 - 3) = 20\sqrt{6}$$



5 답 ③

포물선 $y^2 = 16x$, 즉 $y^2 = 4 \times 4x$ 의 준선의 방정식은 $x = -4$

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AH_1} = \overline{AP} + 4$$

$$\overline{BF} = \overline{BH_2} = \overline{BQ} + 4$$

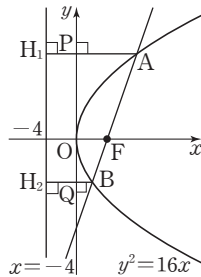
이때 $\overline{AF} + \overline{BF} = \overline{AB} = 18$ 이므로

$$(\overline{AP} + 4) + (\overline{BQ} + 4) = 18$$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{BQ} = 10$$

사각형 APQB의 넓이가 $60\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 10 \times \overline{PQ} = 60\sqrt{2} \quad \therefore \overline{PQ} = 12\sqrt{2}$$



6 답 11

포물선 $y^2 = 4x$ 의 초점의 좌표는 $(1, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x = -1$ 이다.

즉, 점 A(1, 0)은 포물선의 초점이다.

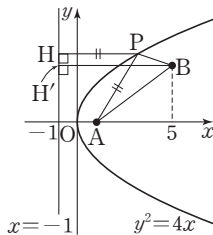
오른쪽 그림과 같이 두 점 P, B에서 준선에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PA} = \overline{PH}$ 이므로

$$\overline{AB} + \overline{BP} + \overline{PA} = \overline{AB} + \overline{BP} + \overline{PH}$$

$$\geq \overline{AB} + \overline{BH'}$$

$$= \sqrt{(5-1)^2 + 3^2} + 6 = 11$$

따라서 삼각형 ABP의 둘레의 길이의 최솟값은 11이다.



7 답 ②

중심이 원점이고 두 초점이 x축 위에 있으므로 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \text{이라 하자.}$$

두 초점의 좌표가 F(3, 0), F'(-3, 0)이므로

$$a^2 - b^2 = 3^2 \quad \therefore b^2 = a^2 - 9 \quad \dots\dots ㉠$$

이 타원이 점 $(4, \sqrt{15})$ 를 지나므로

$$\frac{16}{a^2} + \frac{15}{b^2} = 1 \quad \therefore 16b^2 + 15a^2 = a^2b^2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면

$$a^4 - 40a^2 + 144 = 0, (a^2 - 4)(a^2 - 36) = 0$$

$$\therefore a^2 = 4 \text{ 또는 } a^2 = 36$$

이때 ㉠에서 $a^2 - 9 > 0$, 즉 $a^2 > 9$ 이므로

$$a^2 = 36 \quad \therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

따라서 타원의 장축의 길이는

$$2a = 2 \times 6 = 12$$

8 답 ③

$$2x^2 + y^2 - 4x - 4y - 12 = 0 \text{에서}$$

$$2(x^2 - 2x + 1) + y^2 - 4y + 4 = 18$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{18} = 1$$

즉, 이 타원은 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$ 을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$ 에서 $\sqrt{18-9} = 3$ 이므로 두 초점의 좌표는

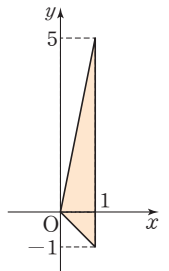
$$(0, 3), (0, -3)$$

주어진 타원의 두 초점 F, F'의 좌표는

$$(1, 5), (1, -1)$$

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형 OFF'의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{5 - (-1)\} \times 1 = 3$$



9 답 21

타원의 정의에 의하여

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{BF} + \overline{BF'} = \overline{CF} + \overline{CF'} = 2 \times 8 = 16$$

$$\therefore \overline{AF} = 16 - \overline{AF'}, \overline{BF} = 16 - \overline{BF'}, \overline{CF} = 16 - \overline{CF'}$$

$$\therefore \overline{AF} + \overline{BF} + \overline{CF}$$

$$= (16 - \overline{AF'}) + (16 - \overline{BF'}) + (16 - \overline{CF'})$$

$$= 48 - (\overline{AF'} + \overline{BF'} + \overline{CF'})$$

$$= 48 - 27 = 21$$

10 답 $6\sqrt{5}$

$\overline{OH}$ 가 $\overline{PF'}$ 의 수직이등분선이므로

$$\overline{OP} = \overline{OF'} = 5$$

즉, 점 P는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 원 위의 점이므로

점 P의 좌표를 (a, b) ($a > 0, b > 0$)라 하면

$$a^2 + b^2 = 25 \quad \therefore b^2 = 25 - a^2 \quad \dots\dots ㉠$$

점 H의 좌표는 $(\frac{a-5}{2}, \frac{b}{2})$ 이므로

$$\overline{PF'} = 4\overline{OH}, \text{ 즉 } \overline{PF'}^2 = 16\overline{OH}^2 \text{에서}$$

$$(a+5)^2 + b^2 = 16 \left\{ \left(\frac{a-5}{2} \right)^2 + \left(\frac{b}{2} \right)^2 \right\}$$

$$3a^2 - 50a + 3b^2 + 75 = 0$$

이 식에 ㉠을 대입하면

$$3a^2 - 50a + 3(25 - a^2) + 75 = 0$$

$$50a = 150 \quad \therefore a = 3$$

이를 ㉠에 대입하면

$$b^2 = 16 \quad \therefore b = 4 \quad (\because b > 0)$$

즉, 점 P의 좌표는 $(3, 4)$

따라서 장축의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{PF} + \overline{PF'} &= \sqrt{(5-3)^2 + (-4)^2} + \sqrt{(-5-3)^2 + (-4)^2} \\ &= 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

11 [답] ⑤

$$5x^2 + 4y^2 = 80 \text{에서 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1$$

타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$\overline{PF} > 0$, $\overline{PF'} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} \geq 2\sqrt{\overline{PF} \times \overline{PF'}} \quad (\text{단, 등호는 } \overline{PF} = \overline{PF'} \text{일 때 성립})$$

$$4\sqrt{5} \geq 2\sqrt{\overline{PF} \times \overline{PF'}}$$

$$\therefore \sqrt{\overline{PF} \times \overline{PF'}} \leq 2\sqrt{5}$$

양변을 제곱하면

$$\overline{PF} \times \overline{PF'} \leq 20$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 &= (\overline{PF} + \overline{PF'})^2 - 2\overline{PF} \times \overline{PF'} \\ &= (4\sqrt{5})^2 - 2\overline{PF} \times \overline{PF'} \\ &\geq 80 - 2 \times 20 = 40 \end{aligned}$$

따라서 $\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2$ 의 최솟값은 40이다.

12 [답] 30

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 꼭짓점의 좌표는

$$(a, 0), (-a, 0)$$

이 두 점이 타원 $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점과 일치하므로

$$\sqrt{30 - b^2} = a$$

양변을 제곱하면

$$30 - b^2 = a^2 \quad \therefore a^2 + b^2 = 30$$

13 [답] ①

$$\overline{AB} = \overline{FB} - \overline{FA} \text{에서}$$

$$2a = 25 - 1 \quad \therefore a = 12$$

주어진 쌍곡선 $\frac{x^2}{12^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 초점은 x 축 위에 있으므로 두 초점의 좌표는

$$(12 + 1, 0), (-12 - 1, 0) \quad \therefore (13, 0), (-13, 0)$$

$$b^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \text{이므로 } b = 5 \quad (\because b > 0)$$

따라서 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{5}{12}x$$

14 [답] ④

쌍곡선 $\frac{(x+2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = -1$ 은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ 을 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{3}{2}x$$

따라서 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x + 2), \quad y - 2 = -\frac{3}{2}(x + 2)$$

$$\therefore y = \frac{3}{2}x + 5, \quad y = -\frac{3}{2}x - 1$$

따라서 $m = \frac{3}{2}$, $p = 5$, $q = -1$ 이므로

$$m(p + q) = \frac{3}{2} \times \{5 + (-1)\} = 6$$

15 [답] ④

$$3x^2 - 2y^2 + 6x + 16y + 1 = 0 \text{에서}$$

$$3(x^2 + 2x + 1) - 2(y^2 - 8y + 16) = -30$$

$$\therefore \frac{(x+1)^2}{10} - \frac{(y-4)^2}{15} = -1$$

즉, 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = -1$ 을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. 주축의 길이는

$$2 \times \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$$

ㄴ. 쌍곡선 $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = -1$ 에서 $\sqrt{10+15} = 5$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(0, 5), (0, -5)$$

주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는

$$(-1, 9), (-1, -1)$$

즉, 두 초점 사이의 거리는

$$9 - (-1) = 10$$

ㄷ. 두 점근선의 교점은 쌍곡선의 중심과 같으므로 교점의 좌표는

$$(-1, 4) \text{이다.}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

16 [답] $(\sqrt{39}, 4)$

쌍곡선 $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{10} = 1$ 에서 $\sqrt{15+10} = 5$ 이므로 두 초점 F, F'의 좌표는

$$(5, 0), (-5, 0)$$

점 P의 좌표를 (a, b) ($a > 0, b > 0$)라 하면 점 P는 쌍곡선 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{15} - \frac{b^2}{10} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

사각형 PF'QF가 평행사변형이므로

$$\begin{aligned} \square PF'QF &= 2\triangle PF'F \\ &= 2 \times \left[\frac{1}{2} \times \{5 - (-5)\} \times b \right] = 10b \end{aligned}$$

즉, $10b = 40$ 이므로 $b = 4$

이를 ①에 대입하면

$$\frac{a^2}{15} - \frac{16}{10} = 1, \quad a^2 = 39$$

$$\therefore a = \sqrt{39} \quad (\because a > 0)$$

따라서 점 P의 좌표는 $(\sqrt{39}, 4)$

17 [답] ④

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ 에서 $\sqrt{1+8} = 3$ 이므로 두 초점 F, F'의 좌표는

$$(3, 0), (-3, 0)$$

F(3, 0), F'(-3, 0)이라 하면

$$\overline{FF'} = 6$$

이때 쌍곡선의 주축의 길이가 2이므로 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 PF'F가 이등변삼각형이므로

$$\overline{PF} = \overline{FF'} \text{ 또는 } \overline{PF'} = \overline{FF'}$$

(i) $\overline{PF} = \overline{FF'}$, 즉 $\overline{PF} = 6$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에 의하여 } \overline{PF'} = 8$$

오른쪽 그림과 같이 점 F에서 선분 PF'에 내린 수선의 발을 H₁이라 하면

$$\overline{PH_1} = \frac{1}{2} \overline{PF'} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

직각삼각형 PH₁F에서

$$\overline{FH_1} = \sqrt{6^2 - 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times \overline{PF'} \times \overline{FH_1} = \frac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$$

(ii) $\overline{PF'} = \overline{FF'}$, 즉 $\overline{PF'} = 6$ 일 때,

㉠에 의하여 $\overline{PF} = 4$

오른쪽 그림과 같이 점 F'에서 선분 PF에 내린 수선의 발을 H₂라 하면

$$\overline{PH_2} = \frac{1}{2} \overline{PF} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

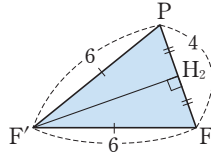
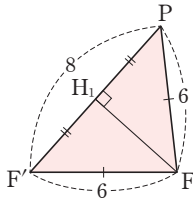
직각삼각형 PF'H₂에서

$$\overline{F'H_2} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times \overline{PF} \times \overline{F'H_2} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

(i), (ii)에서 모든 S의 값의 곱은

$$8\sqrt{5} \times 8\sqrt{2} = 64\sqrt{10}$$



18 답 ②

점 P의 좌표를 (a, b)라 하면 점 P는 쌍곡선 위의 점이므로

$$a^2 - 9b^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 M의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b+2}{2}$$

$$\therefore a = 2x, b = 2y - 2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$(2x)^2 - 9(2y-2)^2 = 1$$

$$\therefore 4x^2 - 36(y-1)^2 = 1$$

19 답 $\frac{x^2}{625} - \frac{y^2}{1875} = 1$

A(-50, 0), B(50, 0)이고 배의 위치를 P(x, y)라 하면

$$|\overline{PA} - \overline{PB}| = 50 \text{이므로}$$

$$|\sqrt{(x+50)^2 + y^2} - \sqrt{(x-50)^2 + y^2}| = 50$$

$$\sqrt{(x+50)^2 + y^2} = \sqrt{(x-50)^2 + y^2} \pm 50$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$2x - 25 = \pm \sqrt{(x-50)^2 + y^2}$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$3x^2 - y^2 = 1875$$

따라서 구하는 도형의 방정식은

$$\frac{x^2}{625} - \frac{y^2}{1875} = 1$$

20 답 -4

$$(2x^2 + y^2)k - x^2 + 4y^2 - 6y + 1 = 0 \text{에서}$$

$$(2k-1)x^2 + (k+4)y^2 - 6y + 1 = 0$$

이때 x항이 없으므로 이 방정식이 나타내는 도형이 포물선이 되려면

$$k+4=0, (2k-1) \times (-6) \neq 0$$

$$\therefore k = -4$$

02 / 이차곡선의 접선

8~13쪽

중단원 기출문제 1회

1 답 ④

직선 $2x - y - 3 = 0$, 즉 $y = 2x - 3$ 과 평행한 직선의 기울기는 2이므로 포물선 $y^2 = 16x$, 즉 $y^2 = 4 \times 4x$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x + \frac{4}{2} \quad \therefore y = 2x + 2$$

따라서 $a = 2$, $b = 2$ 이므로 $a + b = 4$

2 답 20

포물선 $y^2 = 8x$, 즉 $y^2 = 4 \times 2x$ 의 초점 F의 좌표는 (2, 0)

포물선에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선 l의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{2}{\frac{1}{2}} \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + 4$$

직선 l의 x절편은 -8이므로 A(-8, 0)

직선 l 위의 점 H의 좌표를 $(a, \frac{1}{2}a + 4)$ 라 하면 직선 FH의 기울기가 -2이므로

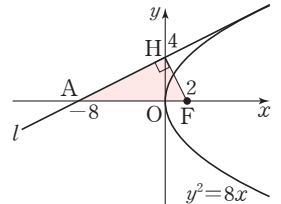
$$\frac{\frac{1}{2}a + 4}{a - 2} = -2, \frac{1}{2}a + 4 = -2a + 4 \quad \therefore a = 0$$

$$\therefore H(0, 4)$$

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형 AFH

의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{2 - (-8)\} \times 4 = 20$$



3 답 ③

포물선 $y^2 = -4x$, 즉 $y^2 = 4 \times (-1)x$ 위의 점 (-4, 4)에서의 접선의 방정식은

$$4y = 2 \times (-1) \times (x - 4) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (-9, -6)에서의 접선의 방정식은

$$-6y = 2 \times (-1) \times (x - 9) \quad \therefore y = \frac{1}{3}x - 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x = 6$, $y = -1$

따라서 두 접선의 교점의 좌표가 (6, -1)이므로

$$a = 6, b = -1 \quad \therefore a - b = 7$$

4 답 1

포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 P(p, 2p)에서의 접선의 방정식은

$$2py = 2p(x + p) \quad \therefore y = x + p$$

따라서 A(-p, 0), B(0, p)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{p^2 + p^2} = \sqrt{2}p \quad (\because p > 0)$$

$$\overline{PB} = \sqrt{(-p)^2 + (p - 2p)^2} = \sqrt{2}p \quad (\because p > 0)$$

$$\therefore \frac{\overline{PB}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}p}{\sqrt{2}p} = 1$$

5 답 $-\frac{4}{3}$

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x = 6(y + y_1)$$

이 직선이 점 $(-1, -4)$ 를 지나므로

$$-x_1 = 6(-4 + y_1) \quad \therefore y_1 = -\frac{1}{6}x_1 + 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 $x^2 = 12y$ 위의 점이므로

$$x_1^2 = 12y_1$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$x_1^2 = 12\left(-\frac{1}{6}x_1 + 4\right), \quad x_1^2 + 2x_1 - 48 = 0$$

$$(x_1 + 8)(x_1 - 6) = 0 \quad \therefore x_1 = -8 \text{ 또는 } x_1 = 6$$

$\textcircled{1}$ 에서 $x_1 = -8$ 일 때 $y_1 = \frac{16}{3}$, $x_1 = 6$ 일 때 $y_1 = 3$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{16}{3} \text{ 또는 } y = x - 3$$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$$-\frac{4}{3} \times 1 = -\frac{4}{3}$$

다른 풀이

접선의 방정식을 $y = mx + n$ 이라 하면 이 직선이 점 $(-1, -4)$ 를 지나므로

$$-4 = -m + n \quad \therefore n = m - 4$$

$y = mx + n$, 즉 $y = mx + m - 4$ 를 $x^2 = 12y$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2 - 12mx - 12m + 48 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-6m)^2 - (-12m + 48) = 0 \quad \therefore 3m^2 + m - 4 = 0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 m 의 값의 곱은 $-\frac{4}{3}$

이다. 즉, 구하는 두 접선의 기울기의 곱은 $-\frac{4}{3}$ 이다.

6 답 ②

접선의 기울기를 m ($m \neq 0$)이라 하면 접선의 방정식은

$$y = mx + \frac{2}{m}$$

이 직선이 점 (a, b) 를 지나므로

$$b = am + \frac{2}{m} \quad \therefore am^2 - bm + 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

m 에 대한 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 실근이 접선의 기울기이고 두 접선이 서로 수직이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{2}{a} = -1 \quad \therefore a = -2$$

이때 점 $(-2, b)$ 가 직선 $x + y = 5$ 위의 점이므로

$$-2 + b = 5 \quad \therefore b = 7$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-2)^2 + 7^2 = 53$$

7 답 ③

직선 $y = 3x - 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{3}x \pm \sqrt{9 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 15} \quad \therefore y = -\frac{1}{3}x \pm 4$$

8 답 10

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$\frac{16}{b^2} = 1, \quad b^2 = 16 \quad \therefore b = 4 \quad (\because b > 0)$$

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{a^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 16}$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 16}$$

이때 직선 $y = \frac{1}{2}x + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 16}$ 이 직선 $y = \frac{1}{2}x + 5$ 와 일치하므로

$$\sqrt{\frac{a^2}{4} + 16} = 5$$

양변을 제곱하면

$$\frac{a^2}{4} + 16 = 25, \quad a^2 = 36 \quad \therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore a + b = 10$$

9 답 ③

타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{10} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{6 \times 3^2 + 10} \quad \therefore y = 3x \pm 8$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $y = 3x + 8$ 위의 점 $(0, 8)$ 과

직선 $y = 3x - 8$, 즉 $3x - y - 8 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-8 - 8|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{8\sqrt{10}}{5}$$

10 답 -4

점 $(-2, a)$ 가 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{(-2)^2}{8} + \frac{a^2}{18} = 1, \quad a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$ 위의 점 $(-2, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{-2x}{8} + \frac{3y}{18} = 1 \quad \therefore y = \frac{3}{2}x + 6$$

이 직선이 점 $(b, 4)$ 를 지나므로

$$4 = \frac{3}{2}b + 6 \quad \therefore b = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore ab = 3 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = -4$$

11 답 2

타원 $x^2 + 9y^2 = 18$, 즉 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{2} = 1$ 에서 $\sqrt{18 - 2} = 4$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(4, 0), (-4, 0)$$

타원 위의 점 $(3, 1)$ 에서의 접선 l 의 방정식은

$$\frac{3x}{18} + \frac{y}{2} = 1 \quad \therefore x + 3y - 6 = 0$$

두 점 $(4, 0)$, $(-4, 0)$ 과 직선 $x + 3y - 6 = 0$ 사이의 거리는 각각

$$\frac{|4 - 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}, \quad \frac{|-4 - 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \sqrt{10}$$

$$\therefore mn = \frac{\sqrt{10}}{5} \times \sqrt{10} = 2$$

12 [답] ⑤

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점이 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ 이므로

$$a^2 - b^2 = c^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

타원 위의 점 $P(6, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{6x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} = 1$$

따라서 점 Q 의 좌표는 $(\frac{a^2}{6}, 0)$

두 삼각형 $PF'F$, PFQ 의 높이가 같으므로 넓이의 비는 밑변의 길이의 비와 같다.

즉, $FF' : FQ = 4 : 1$ 이므로

$$2c : (\frac{a^2}{6} - c) = 4 : 1$$

$$4(\frac{a^2}{6} - c) = 2c \quad \therefore a^2 = 9c \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①을 ②에 대입하면

$$9c - b^2 = c^2 \quad \therefore b^2 = 9c - c^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

한편 점 $P(6, 2)$ 가 타원 위의 점이므로

$$\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1, \quad 36b^2 + 4a^2 = a^2b^2$$

이 식에 ③, ④를 대입하면

$$36(9c - c^2) + 4 \times 9c = 9c(9c - c^2)$$

$$c^3 - 13c^2 + 40c = 0$$

$$c(c-5)(c-8) = 0$$

$$\therefore c = 5 \quad (\because 0 < c < 6)$$

이를 ③, ④에 각각 대입하면 $a^2 = 45$, $b^2 = 20$

$$\therefore a^2 + b^2 = 65$$

13 [답] $\frac{16}{3}$

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{8} + \frac{y_1y}{4} = 1$$

이 직선이 점 $A(4, -2)$ 를 지나므로

$$\frac{4x_1}{8} + \frac{-2y_1}{4} = 1 \quad \therefore y_1 = x_1 - 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{8} + \frac{y_1^2}{4} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①을 ②에 대입하면

$$\frac{x_1^2}{8} + \frac{(x_1-2)^2}{4} = 1$$

$$3x_1^2 - 8x_1 = 0, \quad x_1(3x_1 - 8) = 0$$

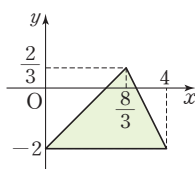
$$\therefore x_1 = 0 \text{ 또는 } x_1 = \frac{8}{3}$$

①에서 $x_1 = 0$ 일 때 $y_1 = -2$, $x_1 = \frac{8}{3}$ 일 때 $y_1 = \frac{2}{3}$ 이므로 두 점 B, C 의 좌표는

$$(0, -2), (\frac{8}{3}, \frac{2}{3})$$

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형 ABC 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times \left\{ \frac{2}{3} - (-2) \right\} = \frac{16}{3}$$



14 [답] ②

쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{3} = 1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{5 \times 1^2 - 3} \quad \therefore y = x \pm \sqrt{2}$$

따라서 $k = \pm \sqrt{2}$ 이므로 구하는 곱은

$$-\sqrt{2} \times \sqrt{2} = -2$$

15 [답] ③

쌍곡선 $\frac{x^2}{k} - \frac{y^2}{27} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{k \times 3^2 - 27} \quad \therefore y = 3x \pm \sqrt{9k - 27}$$

이때 직선 $y = 3x + \sqrt{9k - 27}$ 이 직선 $y = 3x + 6$ 과 일치하므로 $\sqrt{9k - 27} = 6$

양변을 제곱하면

$$9k - 27 = 36 \quad \therefore k = 7$$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{27} = 1$ 의 주축의 길이는 $2\sqrt{7}$ 이다.

16 [답] 1

x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 직선의 기울기는

$$\tan 45^\circ = 1$$

따라서 쌍곡선 $6x^2 - 4y^2 = -24$, 즉 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = -1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{6 - 4 \times 1^2} \quad \therefore y = x \pm \sqrt{2}$$

이때 y 절편이 양수인 직선 $y = x + \sqrt{2}$ 의 x 절편은 $-\sqrt{2}$, y 절편은 $\sqrt{2}$ 이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 1$$

17 [답] ⑤

두 식 $3x^2 + 16y^2 = 48$, $x^2 - 4y^2 = -5$ 를 연립하여 풀면

$$x^2 = 4, \quad y^2 = \frac{9}{4}$$

이때 점 P 가 제1사분면 위의 점이므로 $P(2, \frac{3}{2})$

타원 $3x^2 + 16y^2 = 48$ 위의 점 $P(2, \frac{3}{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$$6x + 24y = 48 \quad \therefore y = -\frac{1}{4}x + 2$$

$$\text{즉, } m = -\frac{1}{4}$$

쌍곡선 $x^2 - 4y^2 = -5$ 위의 점 $P(2, \frac{3}{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x - 6y = -5 \quad \therefore y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}$$

$$\text{즉, } n = \frac{1}{3}$$

$$\therefore mn = -\frac{1}{12}$$

18 [답] 10

쌍곡선 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{6+4} = \sqrt{10}$ 이므로 두 초점 F, F' 의 좌표는 $(\sqrt{10}, 0)$, $(-\sqrt{10}, 0)$

점 P 의 좌표를 (a, b) ($a > 0, b > 0$)라 하면 삼각형 $PF'F$ 의 넓이가 $2\sqrt{5}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \{\sqrt{10} - (-\sqrt{10})\} \times b = 2\sqrt{5}$$

$$b\sqrt{10} = 2\sqrt{5} \quad \therefore b = \sqrt{2}$$

점 $P(a, \sqrt{2})$ 가 쌍곡선 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{6} - \frac{2}{4} = 1, a^2 = 9 \quad \therefore a = 3 (\because a > 0)$$

쌍곡선 위의 점 $P(3, \sqrt{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{3x}{6} - \frac{\sqrt{2}y}{4} = 1 \quad \therefore y = \sqrt{2}x - 2\sqrt{2}$$

따라서 $m = \sqrt{2}, n = -2\sqrt{2}$ 이므로

$$m^2 + n^2 = (\sqrt{2})^2 + (-2\sqrt{2})^2 = 10$$

19 답 ①

쌍곡선 $4x^2 - y^2 = -12$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$4ax - by = -12$$

이 직선이 점 $(3, 6)$ 을 지나므로

$$12a - 6b = -12 \quad \therefore b = 2a + 2 \quad \dots\dots ㉠$$

또 점 (a, b) 가 쌍곡선 $4x^2 - y^2 = -12$ 위의 점이므로

$$4a^2 - b^2 = -12$$

이 식에 ㉠을 대입하면

$$4a^2 - (2a + 2)^2 = -12, -8a = -8 \quad \therefore a = 1$$

이를 ㉠에 대입하면 $b = 4$

$$\therefore b - a = 3$$

20 답 ④

포물선 $y^2 = \frac{16}{3}x$ 위의 점과 직선 $4x - 3y + 5 = 0$ 사이의 거리가 최소이려면 포물선 위의 점에서의 접선이 직선 $4x - 3y + 5 = 0$ 과 평행해야 한다.

직선 $4x - 3y + 5 = 0$, 즉 $y = \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$ 와 평행한 직선의 기울기는 $\frac{4}{3}$

이므로 포물선 $y^2 = \frac{16}{3}x$, 즉 $y^2 = 4 \times \frac{4}{3}x$ 에 접하고 기울기가 $\frac{4}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}} \quad \therefore y = \frac{4}{3}x + 1$$

따라서 구하는 최솟값은 직선 $y = \frac{4}{3}x + 1$ 위의 점 $(0, 1)$ 과 직선

$4x - 3y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-3+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{2}{5}$$

중단원 기출문제 2회

1 답 -4

직선 $y = -\frac{1}{3}x + 1$ 에 수직인 직선의 기울기는 3이므로 포물선

$y^2 = -12x$, 즉 $y^2 = 4 \times (-3)x$ 에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y = 3x + \frac{-3}{3} \quad \therefore y = 3x - 1$$

이 직선이 점 $(-1, a)$ 를 지나므로

$$a = 3 \times (-1) - 1 = -4$$

2 답 ④

포물선 $y^2 = 6x$, 즉 $y^2 = 4 \times \frac{3}{2}x$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y = -x + \frac{\frac{3}{2}}{-1} \quad \therefore y = -x - \frac{3}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

㉠을 $y^2 = 6x$ 에 대입하면

$$\left(-x - \frac{3}{2}\right)^2 = 6x, 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$(2x - 3)^2 = 0 \quad \therefore x = \frac{3}{2}$$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면 $y = -3$

$$\therefore A\left(\frac{3}{2}, -3\right)$$

또 ㉠을 $x^2 = 6y$ 에 대입하면

$$x^2 = 6\left(-x - \frac{3}{2}\right), x^2 + 6x + 9 = 0$$

$$(x + 3)^2 = 0 \quad \therefore x = -3$$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면 $y = \frac{3}{2}$

$$\therefore B\left(-3, \frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{\left(-3 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} + 3\right)^2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

3 답 ②

포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $(5, -2\sqrt{5})$ 에서의 접선의 방정식은

$$-2\sqrt{5}y = 2 \times 1 \times (x + 5)$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{5}}{5}x - \sqrt{5} \quad \dots\dots ㉠$$

포물선 $y^2 = 4x$ 의 준선의 방정식은 $x = -1$

$$㉠에 x = -1을 대입하여 정리하면 y = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

따라서 접선과 포물선의 준선이 만나는 점의 좌표는 $\left(-1, -\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)$

이므로

$$a = -1, b = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + \left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{21}{5}$$

4 답 (4, 4\sqrt{2})

점 P의 좌표를 (a, b) ($a > 0, b > 0$)라 하면 포물선 $y^2 = 8x$, 즉 $y^2 = 4 \times 2x$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$by = 2 \times 2 \times (x + a) \quad \therefore 4x - by + 4a = 0$$

포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점의 좌표는 $(2, 0)$ 이고

점 $(2, 0)$ 과 직선 $4x - by + 4a = 0$ 사이의 거리가 $2\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{|8+4a|}{\sqrt{4^2+(-b)^2}} = 2\sqrt{3} \quad \dots\dots ㉠$$

한편 점 $P(a, b)$ 가 포물선 $y^2 = 8x$ 위의 점이므로

$$b^2 = 8a \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$\frac{|8+4a|}{\sqrt{16+8a}} = 2\sqrt{3}, |8+4a| = 2\sqrt{3(16+8a)}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 2a - 8 = 0, (a+2)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 4 (\because a > 0)$$

이를 ㉔에 대입하면

$$b^2=32 \quad \therefore b=4\sqrt{2} \quad (\because b>0)$$

따라서 점 P의 좌표는 $(4, 4\sqrt{2})$

5 답 ③

포물선 $y^2=12x$, 즉 $y^2=4 \times 3x$ 의 초점 F의 좌표는 $(3, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x=-3$ 이다.

두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 라 하자.

$$\overline{FQ}=\frac{13}{3} \text{이므로 포물선의 정의에 의하여}$$

$$x_2+3=\frac{13}{3} \quad \therefore x_2=\frac{4}{3}$$

점 $Q(\frac{4}{3}, y_2)$ 가 포물선 $y^2=12x$ 위의 점이므로

$$y_2^2=12 \times \frac{4}{3}=16 \quad \therefore y_2=-4 \quad (\because y_2<0)$$

포물선 $y^2=12x$ 위의 점 $Q(\frac{4}{3}, -4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-4y=6(x+\frac{4}{3}) \quad \therefore y=-\frac{3}{2}x-2$$

이 직선이 점 $A(-2, a)$ 를 지나므로

$$a=1 \quad \therefore A(-2, 1)$$

한편 점 $P(x_1, y_1)$ 가 포물선 $y^2=12x$ 위의 점이므로

$$y_1^2=12x_1 \quad \dots\dots ㉔$$

포물선 $y^2=12x$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$yy_1=6(x+x_1)$$

이 직선이 점 $A(-2, 1)$ 을 지나므로

$$y_1=6(-2+x_1) \quad \therefore y_1=6x_1-12 \quad \dots\dots ㉕$$

㉔을 ㉕에 대입하면

$$(6x_1-12)^2=12x_1, \quad 3x_1^2-13x_1+12=0$$

$$(3x_1-4)(x_1-3)=0 \quad \therefore x_1=\frac{4}{3} \text{ 또는 } x_1=3$$

그런데 $x_1=\frac{4}{3}$ 이면 두 점 P, Q가 일치하므로 $x_1=3$

이를 ㉔에 대입하면 $y_1=6$

$$\therefore P(3, 6)$$

$$\therefore \overline{AP}=\sqrt{(3+2)^2+(6-1)^2}=5\sqrt{2}$$

6 답 8

접선의 기울기를 m ($m \neq 0$)이라 하면 접선의 방정식은

$$y=mx+\frac{5}{2m}$$

이 직선이 점 (a, b) 를 지나므로

$$b=ma+\frac{5}{2m} \quad \therefore 2am^2-2bm+5=0 \quad \dots\dots ㉔$$

m 에 대한 이차방정식 ㉔의 두 실근이 접선의 기울기이고 두 접선이 서로 수직이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{5}{2a}=-1 \quad \therefore a=-\frac{5}{2}$$

이때 점 $(-\frac{5}{2}, b)$ 가 직선 $x+y=3$ 위의 점이므로

$$-\frac{5}{2}+b=3 \quad \therefore b=\frac{11}{2}$$

$$\therefore b-a=\frac{11}{2}-(-\frac{5}{2})=8$$

7 답 ①

직선 $y=-2x+4$ 를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면

$$y=-2(x-k)+4$$

$$\therefore y=-2x+2k+4 \quad \dots\dots ㉔$$

타원 $5x^2+y^2=20$, 즉 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20}=1$ 에 접하고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y=-2x \pm \sqrt{4 \times (-2)^2+20} \quad \therefore y=-2x \pm 6$$

$k>0$ 이므로 직선 $y=-2x+6$ 이 직선 ㉔과 일치한다.

$$\therefore 2k+4=6 \text{이므로 } k=1$$

8 답 9

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y=x \pm \sqrt{a^2 \times 1^2+b^2} \quad \therefore y=x \pm \sqrt{a^2+b^2}$$

이때 직선 $y=x+\sqrt{a^2+b^2}$ 이 직선 $y=x+\sqrt{41}$ 과 일치하므로

$$a^2+b^2=41 \quad \therefore b^2=41-a^2 \quad \dots\dots ㉔$$

한편 타원의 두 초점 F, F'의 좌표는

$$(\sqrt{a^2-b^2}, 0), (-\sqrt{a^2-b^2}, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'}=\sqrt{a^2-b^2}-(-\sqrt{a^2-b^2})=2\sqrt{a^2-b^2}$$

따라서 삼각형 FPF'의 둘레의 길이는

$$\overline{FP}+\overline{PF'}+\overline{FF'}=2a+2\sqrt{a^2-b^2}$$

$$\therefore 2a+2\sqrt{a^2-b^2}=16 \text{이므로}$$

$$\sqrt{a^2-b^2}=8-a$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$b^2-16a+64=0$$

이 식에 ㉔을 대입하면

$$(41-a^2)-16a+64=0, \quad a^2+16a-105=0$$

$$(a+21)(a-5)=0 \quad \therefore a=5 \quad (\because a>0)$$

이를 ㉔에 대입하면

$$b^2=16 \quad \therefore b=4 \quad (\because b>0)$$

$$\therefore a+b=9$$

9 답 ③

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{3y}{b^2}=1 \quad \therefore y=-\frac{2b^2}{3a^2}x+\frac{b^2}{3}$$

이때 접선의 기울기가 -2 이므로

$$-\frac{2b^2}{3a^2}=-2 \quad \therefore b^2=3a^2 \quad \dots\dots ㉔$$

또 점 $(2, 3)$ 이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{4}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1$$

이 식에 ㉔을 대입하면

$$\frac{4}{a^2}+\frac{9}{3a^2}=1, \quad \frac{7}{a^2}=1 \quad \therefore a^2=7$$

이를 ㉔에 대입하면 $b^2=21$

주어진 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{21}=1$ 이고 $\sqrt{21-7}=\sqrt{14}$ 이므로 두

초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{14}), (0, -\sqrt{14})$$

따라서 두 초점 사이의 거리는 $\sqrt{14}-(-\sqrt{14})=2\sqrt{14}$

다른 풀이

기울기가 -2인 접선의 방정식은

$$y = -2x \pm \sqrt{a^2 \times (-2)^2 + b^2} \quad \therefore y = -2x \pm \sqrt{4a^2 + b^2}$$

이 직선이 점 (2, 3)을 지나므로

$$3 = -4 \pm \sqrt{4a^2 + b^2}, \pm \sqrt{4a^2 + b^2} = 7$$

양변을 제곱하면

$$4a^2 + b^2 = 49 \quad \therefore b^2 = 49 - 4a^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편 점 (2, 3)이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{4}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1, 4b^2 + 9a^2 = a^2b^2$$

이 식에 $\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$4(49 - 4a^2) + 9a^2 = a^2(49 - 4a^2)$$

$$a^4 - 14a^2 + 49 = 0, (a^2 - 7)^2 = 0 \quad \therefore a^2 = 7$$

이를 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 $b^2 = 21$

주어진 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{21} = 1$ 이고 $\sqrt{21-7} = \sqrt{14}$ 이므로 두

초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{14}), (0, -\sqrt{14})$$

따라서 두 초점 사이의 거리는 $\sqrt{14} - (-\sqrt{14}) = 2\sqrt{14}$

10 답 ①

타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{24} = 1$ 위의 점 P(a, b)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{6} + \frac{by}{24} = 1 \quad \therefore y = -\frac{4a}{b}x + \frac{24}{b}$$

이 직선의 x절편은 $\frac{6}{a}$, y절편은 $\frac{24}{b}$ 이므로 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{6}{a} \times \frac{24}{b} = \frac{72}{ab} \quad (\because a > 0, b > 0)$$

또 점 P(a, b)가 타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{24} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{6} + \frac{b^2}{24} = 1 \quad \therefore 4a^2 + b^2 = 24$$

이때 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{4a^2b^2} \quad (\text{단, 등호는 } 4a^2 = b^2 \text{일 때 성립})$$

$$24 \geq 4ab \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore ab \leq 6$$

따라서 $\frac{72}{ab} \geq \frac{72}{6} = 12$ 이므로 구하는 최솟값은 12이다.

11 답 ②

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{4} + \frac{y_1y}{12} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 직선이 점 (3, 1)을 지나므로

$$\frac{3x_1}{4} + \frac{y_1}{12} = 1 \quad \therefore y_1 = -9x_1 + 12 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{12} = 1 \quad \therefore 3x_1^2 + y_1^2 = 12$$

이 식에 $\textcircled{8}$ 을 대입하면

$$3x_1^2 + (-9x_1 + 12)^2 = 12, 7x_1^2 - 18x_1 + 11 = 0$$

$$(7x_1 - 11)(x_1 - 1) = 0 \quad \therefore x_1 = \frac{11}{7} \text{ 또는 } x_1 = 1$$

$\textcircled{8}$ 에서 $x_1 = \frac{11}{7}$ 일 때 $y_1 = -\frac{15}{7}$, $x_1 = 1$ 일 때 $y_1 = 3$ 이므로 $\textcircled{7}$ 에 대입하면 접선의 방정식은

$$y = \frac{33}{15}x - \frac{28}{5}, y = -x + 4$$

따라서 y절편이 양수인 직선의 방정식은 $y = -x + 4$ 이므로

$$m = -1, n = 4 \quad \therefore mn = -4$$

12 답 45

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{12} + \frac{y_1y}{16} = 1$$

이 직선이 점 A(0, 8)을 지나므로

$$\frac{8y_1}{16} = 1 \quad \therefore y_1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{12} + \frac{y_1^2}{16} = 1$$

이 식에 $\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$\frac{x_1^2}{12} + \frac{2^2}{16} = 1, x_1^2 = 9 \quad \therefore x_1 = \pm 3$$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 (3, 2), (-3, 2)이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} \times \overline{AQ} &= \sqrt{3^2 + (2-8)^2} \times \sqrt{(-3)^2 + (2-8)^2} \\ &= 3\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 45 \end{aligned}$$

13 답 ②

직선 $3x - y - 2 = 0$, 즉 $y = 3x - 2$ 에 평행한 직선의 기울기는 3이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{32} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{9 \times 3^2 - 32} \quad \therefore y = 3x \pm 7$$

이때 y절편이 양수인 직선은 직선 $y = 3x + 7$ 이고 이 직선의 x절편은 $-\frac{7}{3}$ 이다.

14 답 3

타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} = 1$ 위의 점 P(1, 2)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x}{3} + \frac{2y}{6} = 1 \quad \therefore y = -x + 3$$

점 P에서의 타원의 접선과 쌍곡선의 접선이 서로 수직이므로 점 P에서의 쌍곡선의 접선의 기울기는 1이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{b^2 - a^2 \times 1^2} \quad \therefore y = x \pm \sqrt{b^2 - a^2}$$

점 P에서의 쌍곡선의 접선의 y절편이 양수이므로

$$y = x + \sqrt{b^2 - a^2}$$

이 직선이 점 P(1, 2)를 지나므로

$$2 = 1 + \sqrt{b^2 - a^2}, \sqrt{b^2 - a^2} = 1$$

양변을 제곱하면

$$b^2 - a^2 = 1 \quad \therefore b^2 = a^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 P(1, 2)가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 위의 점이므로

$$\frac{1}{a^2} - \frac{4}{b^2} = -1, b^2 - 4a^2 = -a^2b^2$$

이 식에 $\textcircled{7}$ 을 대입하면

$$(a^2 + 1) - 4a^2 = -a^2(a^2 + 1)$$

$$a^4 - 2a^2 + 1 = 0, (a^2 - 1)^2 = 0 \quad \therefore a^2 = 1$$

이를 ㉠에 대입하면 $b^2 = 2$

$$\therefore a^2 + b^2 = 3$$

15 답 2

쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{22} = 1$ 에 접하고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{8m^2 - 22}$$

이때 두 직선 사이의 거리는 직선 $y = mx + \sqrt{8m^2 - 22}$ 위의

점 $(0, \sqrt{8m^2 - 22})$ 와 직선 $y = mx - \sqrt{8m^2 - 22}$, 즉

$mx - y - \sqrt{8m^2 - 22} = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-\sqrt{8m^2 - 22} - \sqrt{8m^2 - 22}|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{2\sqrt{8m^2 - 22}}{\sqrt{m^2 + 1}} = 2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{8m^2 - 22} = \sqrt{2} \times \sqrt{m^2 + 1}$$

양변을 제곱하면

$$8m^2 - 22 = 2m^2 + 2$$

$$m^2 = 4 \quad \therefore m = 2 \quad (\because m > 0)$$

16 답 ②

쌍곡선 $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{15} - \frac{by}{6} = 1$$

이 직선이 타원 $(x-3)^2 + 9y^2 = 18$ 의 넓이를 이등분하려면 타원의 중심인 점 $(3, 0)$ 을 지나야 하므로

$$\frac{3a}{15} = 1 \quad \therefore a = 5$$

이때 점 $(5, b)$ 가 쌍곡선 $\frac{x^2}{15} - \frac{y^2}{6} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{25}{15} - \frac{b^2}{6} = 1 \quad \therefore b^2 = 4$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 5^2 - 4 = 21$$

17 답 ⑤

쌍곡선 $4x^2 - y^2 = 64$ 위의 점 $(5, 6)$ 에서의 접선의 방정식은

$$20x - 6y = 64 \quad \therefore y = \frac{10}{3}x - \frac{32}{3}$$

쌍곡선 $4x^2 - y^2 = 64$, 즉 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{64} = 1$ 의 두 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{8}{4}x \quad \therefore y = \pm 2x$$

두 직선 $y = \frac{10}{3}x - \frac{32}{3}$, $y = 2x$ 의 교점의 좌표는

$$(8, 16)$$

두 직선 $y = \frac{10}{3}x - \frac{32}{3}$, $y = -2x$ 의 교

점의 좌표는

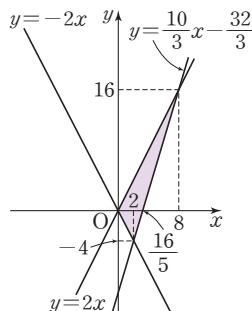
$$(2, -4)$$

따라서 오른쪽 그림에서 접선과 두 점

근선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{16}{5} \times 16 + \frac{1}{2} \times \frac{16}{5} \times 4$$

$$= \frac{128}{5} + \frac{32}{5} = 32$$



18 답 ③

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$2x_1x - 3y_1y = 6$$

이 직선이 점 $P(0, 2)$ 를 지나므로

$$-6y_1 = 6 \quad \therefore y_1 = -1$$

또 점 (x_1, y_1) 이 쌍곡선 $2x^2 - 3y^2 = 6$ 위의 점이므로

$$2x_1^2 - 3y_1^2 = 6$$

이 식에 $y_1 = -1$ 을 대입하면

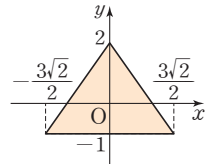
$$2x_1^2 - 3 = 6, x_1^2 = \frac{9}{2} \quad \therefore x_1 = \pm \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -1)$,

$(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -1)$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left\{ \frac{3\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \right\} \times \{2 - (-1)\}$$

$$= \frac{9\sqrt{2}}{2}$$



19 답 $\sqrt{2}$

쌍곡선 $5x^2 - 2y^2 = -30$ 위의 점과 직선 $y = x + 1$ 사이의 거리가 최소이려면 쌍곡선 위의 점에서의 접선이 직선 $y = x + 1$ 과 평행해야 한다.

직선 $y = x + 1$ 의 기울기는 1이므로 쌍곡선 $5x^2 - 2y^2 = -30$, 즉

$\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{15} = -1$ 에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$$y = x \pm \sqrt{15 - 6 \times 1^2}$$

$$\therefore y = x \pm 3$$

따라서 구하는 최솟값은 직선 $y = x + 3$ 위의 점 $(0, 3)$ 과 직선

$y = x + 1$, 즉 $x - y + 1 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-3 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

20 답 ⑤

타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$ 위의 점과 직선 $y = 3x - 9$ 사이의 거리가 최대 또는 최소이려면 타원 위의 점에서의 접선이 직선 $y = 3x - 9$ 와 평행해야 한다.

직선 $y = 3x - 9$ 의 기울기는 3이므로 타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{3 \times 3^2 + 9}$$

$$\therefore y = 3x \pm 6$$

따라서 구하는 최댓값은 직선 $y = 3x + 6$ 위의 점 $(0, 6)$ 과 직선

$y = 3x - 9$, 즉 $3x - y - 9 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$M = \frac{|-6 - 9|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

또 구하는 최솟값은 직선 $y = 3x - 6$ 위의 점 $(0, -6)$ 과 직선

$y = 3x - 9$, 즉 $3x - y - 9 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$m = \frac{|6 - 9|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore Mm = \frac{3\sqrt{10}}{2} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = \frac{9}{2}$$

중단원 기출문제 1회

1 답 7

두 직선 AC, AF로 만들 수 있는 평면은 평면 AFC의 1개이다.
 네 점 B, D, F, H로 만들 수 있는 서로 다른 평면은 평면 BDHF의 1개이다.
 직선 AC와 점 B, D, F, H로 만들 수 있는 서로 다른 평면은 평면 ABCD, AHC의 2개이다.
 직선 AF와 점 B, D, F, H로 만들 수 있는 서로 다른 평면은 평면 AFB, AFD, AFH의 3개이다.
 따라서 만들 수 있는 서로 다른 평면의 개수는
 $1+1+2+3=7$

2 답 ④

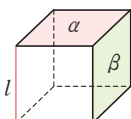
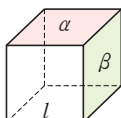
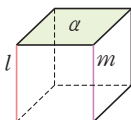
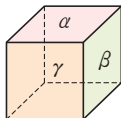
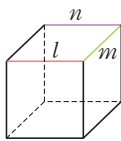
④ 직선 BC와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 AD, 직선 DE, 직선 DF의 3개이다.

3 답 7

직선 BC와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 AD, 직선 AE, 직선 DF, 직선 EF의 4개이므로
 $a=4$
 평면 ABC와 평행한 직선은 직선 DF, 직선 ED, 직선 EF의 3개이므로
 $b=3$
 $\therefore a+b=4+3=7$

4 답 ⑤

- ① [반례] 오른쪽 그림과 같이 $l \perp m$, $m \perp n$ 이면 $l \parallel n$ 이다.
- ② [반례] 오른쪽 그림과 같이 $\alpha \perp \beta$, $\alpha \perp \gamma$ 이면 $\beta \perp \gamma$ 이다.
- ③ [반례] 오른쪽 그림과 같이 $l \perp \alpha$, $m \perp \alpha$ 이면 $l \parallel m$ 이다.
- ④ [반례] 오른쪽 그림과 같이 $l \parallel \alpha$, $\alpha \perp \beta$ 이면 $l \perp \beta$ 이다.
- ⑤ 오른쪽 그림과 같이 $l \perp \alpha$, $l \parallel \beta$ 이면 $\alpha \perp \beta$ 이다.



따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

5 답 ④

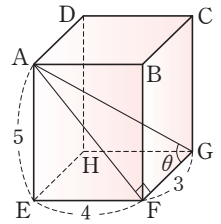
$\overline{BC} \parallel \overline{FG}$ 이므로 직선 AG와 직선 BC가 이루는 각의 크기는 직선 AG와 직선 FG가 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \angle AGF = \theta$$

$$\text{이때 } \overline{AG} = \sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2} = 5\sqrt{2} \text{이므로}$$

직각삼각형 AFG에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{FG}}{\overline{AG}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$$



6 답 45°

오른쪽 그림과 같이 모서리 AD의 중점을 P라 하면 삼각형 ABD에서

$$\overline{MP} \parallel \overline{BD}, \overline{MP} = \frac{1}{2} \overline{BD}$$

또 삼각형 ACD에서

$$\overline{PN} \parallel \overline{AC}, \overline{PN} = \frac{1}{2} \overline{AC}$$

이므로 직선 MN과 직선 AC가 이루는 각의 크기는 직선 MN과 직선 PN이 이루는 각의 크기와 같다.

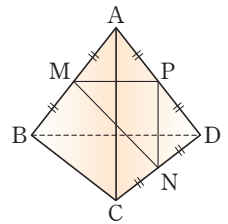
$$\text{이때 } \overline{AC} = \overline{BD}, \overline{AC} \perp \overline{BD} \text{이므로}$$

$$\overline{MP} = \overline{PN}, \overline{MP} \perp \overline{PN}$$

즉, 삼각형 PMN은 직각이등변삼각형이므로

$$\angle PNM = 45^\circ$$

따라서 직선 MN과 직선 AC가 이루는 각의 크기는 45°이다.



7 답 ②

$\overline{AB} \perp \alpha$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{AC} \perp \overline{CD}$$

직각삼각형 ABC에서

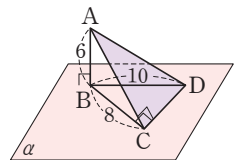
$$\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

또 직각삼각형 BCD에서

$$\overline{CD} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

따라서 삼각형 ACD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 10 = 30$$



8 답 ③

$\overline{OA} \perp$ (평면 OBC), $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{OD} \perp \overline{BC}$$

직각삼각형 BOC에서

$$\overline{BC} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

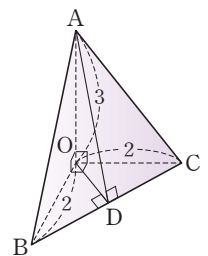
$$\therefore \overline{BD} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

직각삼각형 OBD에서

$$\overline{OD} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 AOD에서

$$\overline{AD} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{11}$$



9 답 ③

오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 N이라 하면

$$\overline{MN} \perp \overline{BC}, \overline{DN} \perp \overline{BC}$$

즉, 평면 BCM과 평면 BCD가 이루는 각의 크기는 직선 MN과 직선 DN이 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle MND = \theta$$

이때 정사면체의 한 모서리의 길이를 $2a$ 라 하면

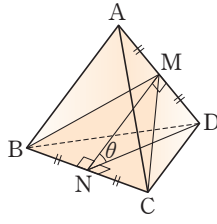
$$\overline{DN} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2a = \sqrt{3}a$$

$$\overline{MD} = \frac{1}{2} \overline{AD} = \frac{1}{2} \times 2a = a$$

따라서 직각삼각형 MND에서

$$\overline{MN} = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 - a^2} = \sqrt{2}a$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{MN}}{\overline{DN}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



10 답 $2\sqrt{6}$

오른쪽 그림과 같이 두 선분 AC와 BD의 교점을 M이라 하면

$$\overline{AM} \perp \overline{BD}, \overline{EM} \perp \overline{BD}$$

따라서 평면 ABCD와 평면 BDE가 이루는 각의 크기는 두 직선 AM과 EM이 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle AME = 60^\circ$$

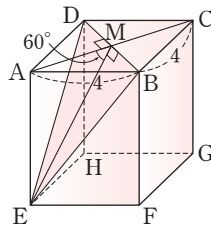
이때 $\overline{AB} = \overline{BC} = 4$ 이므로 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 AEM에서

$$\overline{AE} = \overline{AM} \tan 60^\circ = 2\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{6}$$



11 답 $\frac{7\sqrt{58}}{58}$

직선 BF와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기는 두 직선 BF와 BD가 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle FBD = \theta$$

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, F에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면 점 H는 선분 BD의 중점이다.

직각삼각형 BCD에서

$$\overline{BD} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2}$$

이므로

$$\overline{BH} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} \times 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$$

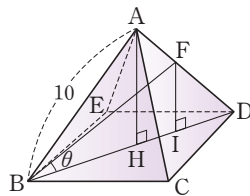
직각삼각형 ABH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{10^2 - (5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}$$

이때 점 F가 선분 AD를 2 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\overline{AH} : \overline{FI} = \overline{AD} : \overline{FD} = 5 : 3 \text{에서}$$

$$\overline{FI} = \frac{3}{5} \overline{AH} = \frac{3}{5} \times 5\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$



또 $\overline{AF} : \overline{FD} = \overline{HI} : \overline{ID} = 2 : 3$ 에서

$$\overline{HI} = \frac{2}{5} \overline{HD} = \frac{2}{5} \overline{BH} = \frac{2}{5} \times 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{BI} = \overline{BH} + \overline{HI} = 5\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 FBI에서

$$\overline{BF} = \sqrt{(7\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{29}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{BI}}{\overline{BF}} = \frac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{29}} = \frac{7\sqrt{58}}{58}$$

12 답 ④

오른쪽 그림과 같이 사각형 AEFB의 두 대각선의 교점을 T라 하면 $\overline{MN} \parallel \overline{TG}$ 이므로 직선 MN과

평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 직선 TG와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기와 같다.

즉, 점 T에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 S라 하면

$$\angle TGS = \theta$$

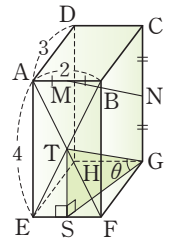
이때 직각삼각형 SFG에서 $\overline{SF} = 1$, $\overline{FG} = 3$ 이므로

$$\overline{GS} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

또 $\overline{TS} = 2$ 이므로 직각삼각형 TSG에서

$$\overline{GT} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{GS}}{\overline{GT}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{35}}{7}$$



13 답 45°

선분 AB의 평면 α 위로의 정사영은 선분 $A'B'$ 이므로 직선 l과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta \text{에서}$$

$$\sqrt{2} = 2 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

14 답 $4\sqrt{19}$

점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 $\triangle BCD$ 의 무게중심이고 선분 AC의 평면 BCD 위로의 정사영은 선분 HC이다.

점 E에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 F라 하면 선분 BE의 평면 BCD 위로의 정사영은 선분 BF이고, 점 E가 선분 AC를 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 F는 선분 HC를 2 : 1로 내분하는 점이다.

오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 M이라 하고, 점 F에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 G라 하면

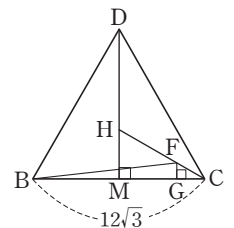
$\triangle HMC \sim \triangle FGC$ (AA 닮음)이고 닮음비는 $\overline{HC} : \overline{FC} = 3 : 1$ 이다. 이때

$$\overline{CM} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 12\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

이므로

$$\overline{CG} = \frac{1}{3} \overline{CM} = \frac{1}{3} \times 6\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{BG} = \overline{BC} - \overline{CG} = 12\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$$



$$\text{또 } \overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 12\sqrt{3} = 18 \text{ 이므로}$$

$$\overline{HM} = \frac{1}{3} \overline{DM} = \frac{1}{3} \times 18 = 6$$

$$\therefore \overline{FG} = \frac{1}{3} \overline{HM} = \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

따라서 선분 BE의 평면 BCD 위로의 정사영의 길이는 직각삼각형 FBG에서

$$\overline{BF} = \sqrt{(10\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4\sqrt{19}$$

15 [답] $6\sqrt{2}\pi$

단면의 원기둥의 밑면을 포함한 평면 위로의 정사영은 원기둥의 밑면이다.

이때 원기둥의 밑넓이는

$$\pi \times (\sqrt{6})^2 = 6\pi$$

따라서 구하는 단면의 넓이를 S라 하면

$$6\pi = S \cos 45^\circ, \frac{\sqrt{2}}{2} S = 6\pi$$

$$\therefore S = 6\sqrt{2}\pi$$

16 [답] $\frac{2\sqrt{21}}{21}$

오른쪽 그림과 같이 사각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 P라 하면 삼각형 OAB의 평면 ABCD 위로의 정사영은 삼각형 PAB이므로

$$\triangle PAB = \triangle OAB \cos \theta$$

한편 점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 8 = 4$$

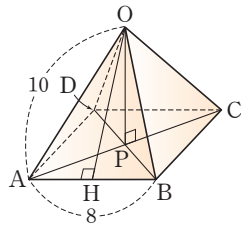
직각삼각형 OAH에서

$$\overline{OH} = \sqrt{10^2 - 4^2} = 2\sqrt{21}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{21} = 8\sqrt{21}$$

$$\text{또 } \triangle PAB = \frac{1}{4} \square ABCD = \frac{1}{4} \times 8^2 = 16 \text{ 이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\triangle PAB}{\triangle OAB} = \frac{16}{8\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$$



17 [답] ③

삼각형 AFC의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 EFG이므로 $\triangle EFG = \triangle AFC \cos \theta$

이때 정육면체의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$$\triangle EFG = \frac{1}{2} a^2$$

또 삼각형 AFC는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}a$ 인 정삼각형이므로

$$\triangle AFC = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2}a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\triangle EFG}{\triangle AFC} = \frac{\frac{1}{2} a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

18 [답] $\frac{16\sqrt{5}}{5}$

평면 ABCD와 평면 AMND가 이루는 각의 크기를 θ 라 하자.

오른쪽 그림과 같이 점 M에서 선분 AB에

내린 수선의 발을 M'이라 하면

$$\angle MAM' = \theta$$

$$\text{이때 } \overline{AM'} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 2 \text{ 이므로 직각삼각형}$$

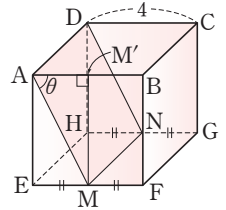
AMM'에서

$$\overline{AM} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{AM'}}{\overline{AM}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서 사각형 ABCD의 평면 AMND 위로의 정사영의 넓이는

$$\square ABCD \cos \theta = 4^2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$$



19 [답] ②

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 선분 AB에

내린 수선의 발을 M이라 하면

$$\overline{OC} \perp (\text{평면 OAB}), \overline{CM} \perp \overline{AB}$$

이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{OM} \perp \overline{AB}$$

이때 정삼각형 ABC에서

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4\sqrt{3}$$

따라서 직각삼각형 OMC에서

$$\overline{OM} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 6^2} = 2\sqrt{3}$$

또 점 O에서 선분 CM에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 OBC의 평면 ABC 위로의 정사영은 삼각형 HBC이다.

$$\text{한편 } \triangle OMC \text{의 넓이는 } \frac{1}{2} \times \overline{OM} \times \overline{OC} = \frac{1}{2} \times \overline{CM} \times \overline{OH} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 6 = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times \overline{OH} \quad \therefore \overline{OH} = 3$$

이때 직각삼각형 COH에서 $\overline{CH} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$ 이므로

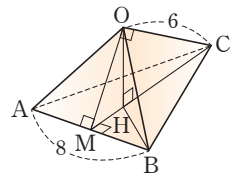
$$\overline{HM} = \overline{CM} - \overline{CH} = 4\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

즉, 점 H는 선분 CM을 3 : 1로 내분하는 점이므로

$$\triangle HBC = \frac{3}{4} \triangle BCM = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \triangle ABC = \frac{3}{8} \triangle ABC$$

$$= \frac{3}{8} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 \right) = 6\sqrt{3}$$

[참고] $\overline{AM} = \overline{BM}$, $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼각형 OAB는 이등변삼각형이다.



20 [답] ④

오른쪽 그림과 같이 태양 광선에 수직이

고 공의 중심을 지나는 평면이 지면과 이루는 각의 크기는 45° 이다.

이때 공의 중심을 지나는 단면의 넓이는

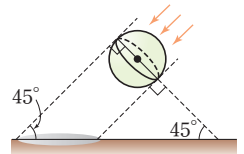
$$\pi \times 10^2 = 100\pi (\text{cm}^2)$$

공의 그림자의 넓이를 S cm^2 라 하면

$$100\pi = S \cos 45^\circ, 100\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} S$$

$$\therefore S = 100\sqrt{2}\pi$$

따라서 공의 그림자의 넓이는 $100\sqrt{2}\pi \text{ cm}^2$ 이다.



중단원 기출문제 2회

1 답 ④

④ 두 직선 AD와 BF는 꼬인 위치에 있으므로 한 평면을 만들 수 없다.

2 답 11

직선 AD와 꼬인 위치에 있는 직선은

직선 BH, 직선 CI, 직선 EK, 직선 FL, 직선 GH, 직선 IJ, 직선 JK, 직선 LG의 8개이므로 $a=8$

직선 AD와 평행한 평면은 평면 BHIC, 평면 FLKE, 평면 GHIJKL의 3개이므로 $b=3$

$\therefore a+b=8+3=11$

3 답 ④

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 T라 하면

$\overline{AT} \perp \overline{BC}$ ㉠

또 선분 PH는 평면 ABC 위의 모든 선분과 수직이므로

$\overline{PH} \perp \overline{BC}$ ㉡

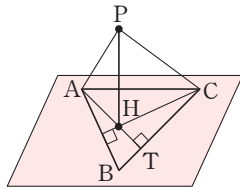
㉠, ㉡에 의하여 (평면 PAH) $\perp$ BC

따라서 평면 PAH 위의 모든 선분은 선분 BC와 수직이므로

$\overline{PA} \perp \overline{BC}$

같은 방법으로 $\overline{PC} \perp \overline{AB}$

따라서 항상 성립하는 것이 아닌 것은 ④이다.



4 답 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{HM}$ 을 그으면

$\overline{EM} = \overline{EH} = 2$ 이므로 직각삼각형 HEM에서

$\overline{HM} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

또 직각삼각형 DHM에서

$\overline{DM} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$

이때 $\overline{GM} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, $\overline{DG} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$ 이므로

$\overline{DM}^2 + \overline{GM}^2 = \overline{DG}^2$

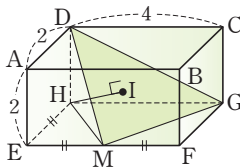
즉, 삼각형 DMG는 $\angle DMG = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

따라서 사면체 D-HMG의 부피는

$\frac{1}{3} \times \triangle DMG \times \overline{HI} = \frac{1}{3} \times \triangle HMG \times \overline{DH}$ 에서

$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} \right) \times \overline{HI} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 2 \right) \times 2$

$\therefore \overline{HI} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$



5 답 60°

$\overline{EF} \parallel \overline{AC}$ 이므로 두 직선 AB와 EF가 이루는 각의 크기는 두 직선 AB와 AC가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 삼각형 ABC는 정삼각형이므로

$\angle BAC = 60^\circ$

따라서 구하는 각의 크기는 60° 이다.

6 답 $\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\overline{BC} \parallel \overline{EF}$ 이므로 두 직선 AE와 BC가 이루는 각의 크기는 두 직선 AE와 EF가 이루는 각의 크기와 같다.

$\therefore \angle AEF = \theta$

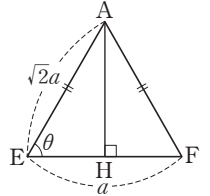
삼각기둥의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$\overline{AE} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 선분 EF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{EH} = \frac{1}{2} \overline{EF} = \frac{a}{2}$

$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{EH}}{\overline{AE}} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{2}}{4}$



7 답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 $\overline{PH}$ 를 그으면

$\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp \overline{AB}$

이므로 삼수선 정리에 의하여

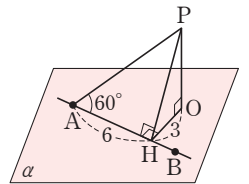
$\overline{PH} \perp \overline{AB}$

직각삼각형 PAH에서

$\overline{PH} = 6 \tan 60^\circ = 6\sqrt{3}$

따라서 직각삼각형 PHO에서

$\overline{OP} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - 3^2} = 3\sqrt{11}$



8 답 ②

오른쪽 그림과 같이 $\overline{HI}$ 를 그으면

$\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{DI} \perp \overline{EG}$

이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{HI} \perp \overline{EG}$

이때 직각삼각형 EFG에서

$\overline{EG} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$

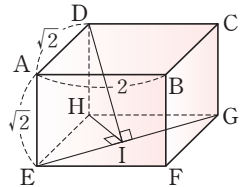
삼각형 EGH의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{EH} \times \overline{HG} = \frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{HI}$ 에서

$\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times 2 = \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times \overline{HI} \quad \therefore \overline{HI} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

따라서 직각삼각형 DHI에서

$\overline{DI} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{30}}{3}$



9 답 $8\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 선분 BC

에 내린 수선의 발을 E, 평면 BCD에

내린 수선의 발을 H라 하면

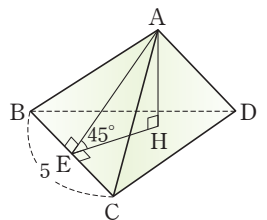
$\overline{AH} \perp$ (평면 BCD), $\overline{AE} \perp \overline{BC}$

이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{HE} \perp \overline{BC}$

따라서 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 각의 크기는 선분 AE와 선분 HE가 이루는 각의 크기와 같으므로

$\angle AEH = 45^\circ$



한편 삼각형 ABC의 넓이가 12이므로

$$\frac{1}{2} \times 5 \times \overline{AE} = 12 \quad \therefore \overline{AE} = \frac{24}{5}$$

이때 직각삼각형 AEH에서

$$\overline{AH} = \overline{AE} \sin 45^\circ = \frac{24}{5} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{12\sqrt{2}}{5}$$

따라서 구하는 사면체의 부피는

$$\frac{1}{3} \times \triangle BCD \times \overline{AH} = \frac{1}{3} \times 10 \times \frac{12\sqrt{2}}{5} = 8\sqrt{2}$$

10 답 30°

$\overline{FG} \perp \overline{AF}$, $\overline{FG} \perp \overline{EF}$ 이므로 평면 AFGD와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 선분 AF와 선분 EF가 이루는 각의 크기와 같다.

즉, 평면 AFGD와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\angle AFE = \theta$

이때 직각삼각형 AEF에서 $\overline{AF} = \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} = 6$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{EF}}{\overline{AF}} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \theta = 30^\circ$$

따라서 구하는 각의 크기는 30° 이다.

참고 다음과 같이 직각삼각형 AEF에서 선분 AF의 길이를 구하지 않

고 $\tan \theta$ 를 이용하여 각의 크기를 구할 수도 있다.

직각삼각형 AEF에서

$$\tan \theta = \frac{\overline{AE}}{\overline{EF}} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \therefore \theta = 30^\circ$$

11 답 30°

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OH}$ 를 그으면

$\overline{AO} \perp \alpha$, $\overline{AH} \perp l$

이므로 삼수선 정리에 의하여

$\overline{OH} \perp l$

따라서 점 A와 직선 l 로 결정되는 평면

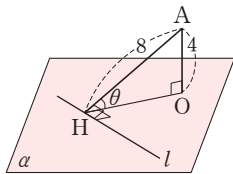
이 평면 α 와 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$\angle AHO = \theta$

이때 직각삼각형 AHO에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{AO}}{\overline{AH}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = 30^\circ$$

따라서 구하는 각의 크기는 30° 이다.



12 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하고, 선분 BH의 연장선이 선분 CD와 만나는 점을 M이라 하면

$\angle ABH = \theta$

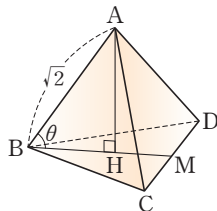
점 H가 삼각형 BCD의 무게중심이므로

$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

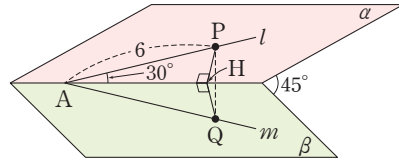
$$\therefore \overline{BH} = \frac{2}{3} \overline{BM} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 직각삼각형 ABH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



13 답 ②



위의 그림과 같이 점 P에서 두 평면 α , β 의 교선에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 PAH의 평면 β 위로의 정사영은 직각삼각형 QAH이다.

직각삼각형 PAH에서

$$\overline{AH} = 6 \cos 30^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\overline{PH} = 6 \sin 30^\circ = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

이때 두 평면 α 와 β 가 이루는 각의 크기가 45° 이므로

$$\overline{QH} = \overline{PH} \cos 45^\circ = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 직각삼각형 QHA에서

$$\overline{AQ} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{14}}{2}$$

14 답 16

타원의 장축의 원기둥의 밑면을 포함한 평면 위로의 정사영은 밑면인 원의 지름이다.

타원의 장축의 길이를 l 이라 하면

$$2 \times 4 = l \cos 60^\circ, \quad 8 = \frac{1}{2}l$$

$$\therefore l = 16$$

15 답 $\frac{3}{2}$

삼각형 $AB'C$ 의 평면 ABC 위로의 정사영은 삼각형 ABC이다.

이때 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 그 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{3})^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

따라서 삼각형 $AB'C$ 의 넓이를 S 라 하면

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} = S \cos 30^\circ \text{에서}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} = S \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore S = \frac{3}{2}$$

16 답 ⑤

오른쪽 그림에서 밑면과 30° 의 각을 이루는 평면으로 자른 단면은 원이다.

단면인 원의 지름을 $\overline{AC}$, 점 O에서 선분

AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각

형 OCA는 $\overline{OA} = \overline{OC}$ 인 이등변삼각형이므로

$\overline{AH} = \overline{CH}$

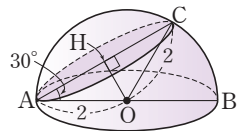
직각삼각형 OHA에서

$$\overline{AH} = 2 \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

이때 단면의 넓이는 $\pi \times (\sqrt{3})^2 = 3\pi$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$3\pi \cos 30^\circ = 3\pi \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$$



17 답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 점 M에서 평면 EFGH에 내린 수선의 발을 M'이라 하면 사각형 MBNH의 평면 EFGH 위로의 정사영은 사각형 M'FNH이므로

$$\square M'FNH = \square MBNH \cos \theta$$

이때 사각형 MBNH는 한 변의 길이가

$$\sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{5} \text{인 마름모이고,}$$

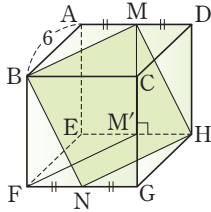
$$\overline{BH} = \sqrt{6^2 + 6^2 + 6^2} = 6\sqrt{3}, \overline{MN} = \overline{DG} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$\square MBNH = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 6\sqrt{2} = 18\sqrt{6}$$

또 사각형 M'FNH는 평행사변형이므로

$$\square M'FNH = 3 \times 6 = 18$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\square M'FNH}{\square MBNH} = \frac{18}{18\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$



18 답 ④

두 평면 ACD와 BCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

삼각형 ACD의 평면 BCD 위로의 정사영이 삼각형 HCD이므로

$$\triangle HCD = \triangle ACD \cos \theta$$

이때 점 H가 삼각형 BCD의 무게중심이므로

$$\triangle HCD = \frac{1}{3} \triangle BCD = \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 \right) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{또 } \triangle ACD = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\triangle HCD}{\triangle ACD} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

따라서 삼각형 HCD의 평면 ACD 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle HCD \cos \theta = \frac{4\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{9}$$

19 답 $9\sqrt{2}\pi$

오른쪽 그림과 같이 컵을 기울이기 전의 수면의 지름을 선분 AB, 컵을 기울였을 때의 수면의 모양은 타원이므로 수면의 장축을 선분 CD, 컵의 밑면의 지름을 선분 CE라 하면

$$\overline{AC} = \overline{BD} = 3$$

$$\therefore \overline{DE} = \overline{DB} + \overline{BE} = 3 + 3 = 6$$

한편 컵의 밑면의 반지름의 길이를 r 라 하면 밑넓이가 9π 이므로

$$\pi r^2 = 9\pi, r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 (\because r > 0)$$

즉, 컵의 밑면의 지름의 길이는

$$\overline{CE} = 2 \times 3 = 6$$

이때 직각삼각형 CDE에서

$$\overline{CD} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$

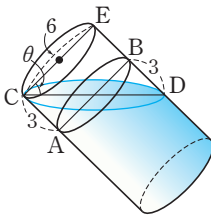
$\angle DCE = \theta$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 구하는 수면의 넓이를 S 라 하면

$$9\pi = S \cos \theta, 9\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} S$$

$$\therefore S = 9\sqrt{2}\pi$$



20 답 $\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있는 원뿔의 모선의 양 끝 점을 각각 A, B라 하고 밑면의 중심을 O라 하자.

원뿔의 밑면과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\angle OBA = \theta$$

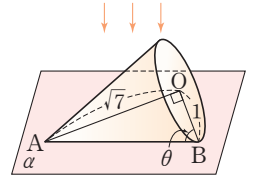
직각삼각형 OAB에서

$$\overline{AB} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 + 1^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{OB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

따라서 구하는 그림자의 넓이는 원뿔의 밑면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이와 같으므로

$$\pi \times 1^2 \times \cos \theta = \pi \times 1^2 \times \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$



중단원 기출문제 ①

1 답 ⑤

점 P에서 xy 평면, yz 평면에 내린 수선의 발이 각각 $Q(-1, 3, 0)$, $R(0, 3, 5)$ 이므로 점 P의 좌표는 $(-1, 3, 5)$
 따라서 점 P $(-1, 3, 5)$ 를 z 축에 대하여 대칭이동한 점은 $P'(1, -3, 5)$ 이므로
 $a=1, b=-3, c=5$
 $\therefore a+b+c=3$

2 답 ②

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{\{1-(x-2)\}^2 + (x+1-3)^2 + (x+4-5)^2} \\ &= \sqrt{3x^2 - 12x + 14} \\ &= \sqrt{3(x-2)^2 + 2} \end{aligned}$$

따라서 $x=2$ 일 때 두 점 A, B 사이의 거리의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

3 답 $\sqrt{11}$

xy 평면 위의 직선 $y=x$ 위의 점 H의 좌표를 $(a, a, 0)$ ($a \neq 0$)이라 하면 원점 O에 대하여 삼각형 OHP는 $\angle OHP=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 $\overline{OP}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{PH}^2$ 에서
 $2^2 + 4^2 + 3^2 = (a^2 + a^2) + \{(a-2)^2 + (a-4)^2 + (-3)^2\}$
 $4a^2 - 12a = 0, 4a(a-3) = 0$
 $\therefore a=3$ ($\because a \neq 0$)

따라서 점 H의 좌표는 $(3, 3, 0)$ 이므로
 $\overline{PH} = \sqrt{(3-2)^2 + (3-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{11}$

다른 풀이

점 P에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H' 이라 하면 $H'(2, 4, 0)$ 이므로

$$\overline{PH'} = 3$$

이때 $\overline{PH} \perp$ (직선 $y=x$),
 $\overline{PH'} \perp$ (xy 평면)이므로 삼수선
 정리에 의하여

$$\overline{HH'} \perp \text{(직선 } y=x)$$

따라서 선분 HH' 의 길이는 점

$H'(2, 4, 0)$ 과 직선 $y=x$, 즉 $x-y=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{HH'} = \frac{|2-4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 PHH' 에서

$$\overline{PH} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{11}$$

4 답 (0, 2, 3)

점 C의 좌표를 $(0, a, b)$ (a, b 는 정수)라 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}, \text{ 즉 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{에서}$$

$$(1-2)^2 + (3-1)^2 + (1-2)^2 = (-1)^2 + (a-3)^2 + (b-1)^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 - 6a - 2b + 5 = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 \text{에서}$$

$$(-1)^2 + (a-3)^2 + (b-1)^2 = 2^2 + (1-a)^2 + (2-b)^2$$

$$2a - b = 1 \quad \therefore b = 2a - 1 \quad \dots\dots ②$$

②을 ①에 대입하면

$$a^2 + (2a-1)^2 - 6a - 2(2a-1) + 5 = 0$$

$$5a^2 - 14a + 8 = 0, (5a-4)(a-2) = 0$$

$$\therefore a=2 \quad (\because a \text{는 정수})$$

$$a=2 \text{를 } ② \text{에 대입하면 } b=3$$

따라서 점 C의 좌표는 $(0, 2, 3)$ 이다.

5 답 9

두 점 A, B의 yz 평면 위로의 정사영을 각각 A', B' 이라 하면

$$A'(0, 3, 5), B'(0, -1, 5) \text{이므로}$$

$$l_1 = \overline{A'B'}$$

$$= \sqrt{(-1-3)^2 + (5-5)^2} = 4$$

또 두 점 A, B의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A'', B'' 이라 하면

$$A''(2, 3, 0), B''(5, -1, 0) \text{이므로}$$

$$l_2 = \overline{A''B''}$$

$$= \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = 5$$

$$\therefore l_1 + l_2 = 9$$

6 답 ④

두 점 A, B의 z 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 xy 평면을 기준으로 서로 같은 쪽에 있다.

점 A를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면

$$A'(1, 3, -2)$$

$$\text{이때 } \overline{AP} = \overline{A'P} \text{이므로}$$

$$\overline{AP} + \overline{PB} = \overline{A'P} + \overline{PB}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{(5-1)^2 + (a-3)^2 + (4+2)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - 6a + 61}$$

이때 $\overline{AP} + \overline{PB}$ 의 최솟값이 $\sqrt{61}$ 이므로

$$\sqrt{a^2 - 6a + 61} = \sqrt{61}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 6a = 0, a(a-6) = 0$$

$$\therefore a=6 \quad (\because a > 0)$$

7 답 $\sqrt{5} + \sqrt{13}$

두 점 A, B의 x 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 yz 평면을 기준으로 서로 같은 쪽에 있다.

점 A를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면

$$A'(-1, 3, 4)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로 삼각형 ABP의 둘레의 길이는

$$\overline{AB} + \overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AB} + \overline{A'P} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{AB} + \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{(2-1)^2 + (1-3)^2 + (4-4)^2}$$

$$+ \sqrt{(2+1)^2 + (1-3)^2 + (4-4)^2}$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{13}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{5} + \sqrt{13}$ 이다.

8 답 6

선분 AB를 2 : 3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times a + 3 \times 1}{2+3}, \frac{2 \times 12 + 3 \times 2}{2+3}, \frac{2 \times 7 + 3 \times (-3)}{2+3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{2a+3}{5}, 6, 1 \right)$$

이 점이 점 (3, 6, 1)과 일치하므로

$$\frac{2a+3}{5}=3, 2a=12 \quad \therefore a=6$$

9 답 ④

점 A가 선분 PQ의 중점이므로 점 Q의 좌표를 (a, b, c)라 하면 점 A의 좌표는

$$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{-1+c}{2} \right)$$

$$\text{따라서 } \frac{1+a}{2}=5, \frac{2+b}{2}=-2, \frac{-1+c}{2}=4 \text{이므로}$$

$$a=9, b=-6, c=9$$

즉, 점 Q의 좌표는 (9, -6, 9)

10 답 ②

선분 AB를 1 : m으로 내분하는 점이 xy평면 위에 있으므로 내분점의 z좌표가 0이다.

$$\text{즉, } \frac{1 \times 6 + m \times (-3)}{1+m} = 0 \text{이므로}$$

$$-3m+6=0 \quad \therefore m=2$$

11 답 ⑤

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{5+1}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{3+5}{2} \right) \quad \therefore (3, 1, 4)$$

점 C의 좌표를 (a, b, c)라 하면 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+a}{2}, \frac{-2+b}{2}, \frac{1+c}{2} \right)$$

평행사변형의 두 대각선의 중점이 일치하므로

$$\frac{3+a}{2}=3, \frac{-2+b}{2}=1, \frac{1+c}{2}=4$$

$$\therefore a=3, b=4, c=7$$

즉, 점 C(3, 4, 7)이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-3)^2 + (4+2)^2 + (7-1)^2} = 6\sqrt{2}$$

다른 풀이

대각선 BD의 중점의 좌표를 M이라 하면 점 M의 좌표는

$$\left(\frac{5+1}{2}, \frac{2+0}{2}, \frac{3+5}{2} \right)$$

$$\therefore (3, 1, 4)$$

평행사변형의 두 대각선은 서로를 이등분하므로

$$\overline{AC} = 2\overline{AM} = 2\sqrt{(3-3)^2 + (1+2)^2 + (4-1)^2} = 6\sqrt{2}$$

12 답 ①

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+3+2}{3}, \frac{2+b+4}{3}, \frac{-1+5+c}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+5}{3}, \frac{b+6}{3}, \frac{c+4}{3} \right)$$

이 점이 점 (3, 3, 2)와 일치하므로

$$\frac{a+5}{3}=3, \frac{b+6}{3}=3, \frac{c+4}{3}=2$$

$$\therefore a=4, b=3, c=2$$

$$\therefore a+b+c=9$$

13 답 (2, 3, 1)

삼각형 PQR의 무게중심은 삼각형 ABC의 무게중심과 일치하므로

삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+5+(-1)}{3}, \frac{-1+7+3}{3}, \frac{4+(-2)+1}{3} \right)$$

$$\therefore (2, 3, 1)$$

다른 풀이

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times 7 + 1 \times (-1)}{2+1}, \frac{2 \times (-2) + 1 \times 4}{2+1} \right)$$

$$\therefore \left(4, \frac{13}{3}, 0 \right)$$

선분 BC를 2 : 1로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (-1) + 1 \times 5}{2+1}, \frac{2 \times 3 + 1 \times 7}{2+1}, \frac{2 \times 1 + 1 \times (-2)}{2+1} \right)$$

$$\therefore \left(1, \frac{13}{3}, 0 \right)$$

선분 CA를 2 : 1로 내분하는 점 R의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 2 + 1 \times (-1)}{2+1}, \frac{2 \times (-1) + 1 \times 3}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2+1} \right)$$

$$\therefore \left(1, \frac{1}{3}, 3 \right)$$

따라서 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{4+1+1}{3}, \frac{\frac{13}{3}+\frac{13}{3}+\frac{1}{3}}{3}, \frac{0+0+3}{3} \right)$$

$$\therefore (2, 3, 1)$$

14 답 $(x-3)^2+(y+2)^2+z^2=12$

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P에 대하여 선분 AP의 중점을 M

이라 하면 점 M은 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점이므로 점 M의

좌표는

$$\left(\frac{1 \times 5 + 2 \times 2}{1+2}, \frac{1 \times (-4) + 2 \times (-1)}{1+2}, \frac{1 \times 2 + 2 \times (-1)}{1+2} \right)$$

$$\therefore (3, -2, 0)$$

또 구의 반지름의 길이는 선분 MB의 길이와 같으므로

$$\overline{MB} = \sqrt{(5-3)^2 + (-4+2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 12$$

15 답 ③

두 점 A(0, 0, -1), B(0, 0, 3)은 모두 z축 위의 점이고, $\overline{AB}=4$ 이다.

점 P(x, y, z)에서 z축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABP의 넓이가 6이므로

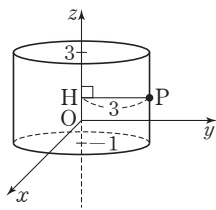
$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{PH} = 6 \quad \therefore \overline{PH} = 3$$

이때 P(x, y, z), H(0, 0, z)이므로

$$\overline{PH} = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-z)^2} = 3 \quad \therefore x^2 + y^2 = 9$$

따라서 $-1 \leq z \leq 3$ 일 때, 점 P가 그리는 도형은 오른쪽 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 3이고 높이가 4인 원기둥의 옆면이므로 그 넓이는

$$2\pi \times 3 \times 4 = 24\pi$$



16 답 ③

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax - 4by - 4z + 8 = 0 \text{에서}$$

$$(x+a)^2 + (y-2b)^2 + (z-2)^2 = a^2 + 4b^2 - 4$$

이 구의 중심의 좌표는 $(-a, 2b, 2)$ 이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2 + 4b^2 - 4}$ 이다.

이때 구가 yz 평면에 접하므로

$$|-a| = \sqrt{a^2 + 4b^2 - 4}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $b^2 = 1$

또 구가 zx 평면에 접하므로

$$|2b| = \sqrt{a^2 + 4b^2 - 4}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $a^2 = 4$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

17 답 ④

주어진 구의 방정식에 $x=0, z=0$ 을 대입하면

$$y^2 - 10y - 11 = 0, (y+1)(y-11) = 0$$

$$\therefore y = -1 \text{ 또는 } y = 11$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(0, -1, 0), (0, 11, 0)$ 이므로

$$\overline{AB} = 11 - (-1) = 12$$

다른 풀이

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 10y + 2z - 11 = 0 \text{에서}$$

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z+1)^2 = 41$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(2, 5, -1)$ 이고 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{41}$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 y 축에 내린

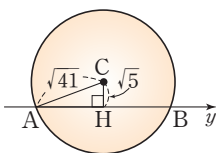
수선의 발을 H라 하면 $H(0, 5, 0)$

$$\therefore \overline{CH} = \sqrt{(-2)^2 + (5-5)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{(\sqrt{41})^2 - (\sqrt{5})^2} = 6$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 2 \times 6 = 12$$



18 답 ③

주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 16$$

따라서 구와 xy 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가

$$\sqrt{16} = 4 \text{인 원이므로 구하는 도형의 넓이는}$$

$$\pi \times 4^2 = 16\pi$$

19 답 -4

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 4z + k = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 5 - k$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(0, 1, 2)$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(0-4)^2 + (1-3)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{29}$$

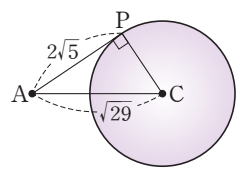
오른쪽 그림과 같이 점 A에서 구에 그은 접선의 접점을 P라 하면 $\overline{AP} = 2\sqrt{5}$ 이므로 직각삼각형 ACP에서

$$\overline{PC} = \sqrt{(\sqrt{29})^2 - (2\sqrt{5})^2} = 3$$

따라서 $\sqrt{5-k} = 3$ 이므로

양변을 제곱하면

$$5-k=9 \quad \therefore k=-4$$



20 답 ③

주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(1, -2, 3)$ 이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{6}$ 이므로

$$\overline{CQ} = \sqrt{(3-1)^2 + (2+2)^2 + (5-3)^2} = 2\sqrt{6}$$

따라서 선분 PQ의 길이의 최솟값은

$$2\sqrt{6} - \sqrt{6} = \sqrt{6}$$

중단원 기출문제 2회

1 답 -2

점 $Q(a, b+c, b-c)$ 를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점이 P이므로 점 P의 좌표는

$$(-a, b+c, b-c) \quad \dots\dots ㉠$$

또 점 $R(a-4, 2b-2, 2c)$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 점이 P이므로 점 P의 좌표는

$$(a-4, -2b+2, -2c) \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$-a = a-4, b+c = -2b+2, b-c = -2c$$

세 식을 연립하여 풀면

$$a=2, b=1, c=-1$$

$$\therefore abc = -2$$

2 답 ③

$$\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$$

$$\overline{OB} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(2-2)^2 + (-1-2)^2 + (-2-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

이때 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 이고 $\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로 삼각형 OAB는 $\angle AOB = 90^\circ$ 인 직각이등변삼각형이다.

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2}$$

3 답 ①

구하는 점을 $P(a, 0, 0)$ 이라 하면

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{에서 } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{이므로}$$

$$(a-1)^2 + (-2)^2 + 3^2 = (a+1)^2 + (-5)^2$$

$$4a = -12 \quad \therefore a = -3$$

따라서 구하는 점의 x 좌표는 -3 이다.

4 답 ⑤

$$\overline{AB} = \sqrt{(5-1)^2 + (5-2)^2 + (a-3)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - 6a + 34}$$

두 점 A, B의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A' , B' 이라 하면
 $A'(1, 2, 0)$, $B'(5, 5, 0)$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(5-1)^2 + (5-2)^2} = 5$$

이때 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 45^\circ$ 이므로

$$5 = \sqrt{a^2 - 6a + 34} \times \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 5\sqrt{2} = \sqrt{a^2 - 6a + 34}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 6a - 16 = 0, \quad (a+2)(a-8) = 0$$

$$\therefore a = 8 \quad (\because a > 0)$$

5 답 $\frac{\sqrt{105}}{21}$

$$\overline{AB} = \sqrt{(3-1)^2 + (1-5)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{21}$$

두 점 A, B의 zx 평면 위로의 정사영을 각각 A' , B' 이라 하면
 $A'(1, 0, 3)$, $B'(3, 0, 2)$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(3-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5}$$

이때 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{21}} = \frac{\sqrt{105}}{21}$$

6 답 ②

두 점 A, B의 y 좌표가 0이고 z 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 zx 평면 위에 있고 x 축을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면

$$A'(1, 0, -2)$$

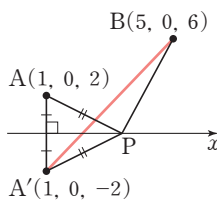
이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{(5-1)^2 + (6+2)^2} = 4\sqrt{5}$$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{5}$ 이다.



7 답 -5

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times (-2)}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 3}{2+1} \right)$$

$$\therefore (3, 2, 1)$$

선분 BC를 3 : 2로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-1) + 2 \times 4}{3+2}, \frac{3 \times 9 + 2 \times 4}{3+2}, \frac{3 \times 5 + 2 \times 0}{3+2} \right)$$

$$\therefore (1, 7, 3)$$

이때 선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+1}{2}, \frac{2+7}{2}, \frac{1+3}{2} \right)$$

$$\therefore \left(2, \frac{9}{2}, 2 \right)$$

따라서 $a=2$, $b=\frac{9}{2}$, $c=2$ 이므로

$$a - 2b + c = 2 - 2 \times \frac{9}{2} + 2 = -5$$

8 답 6

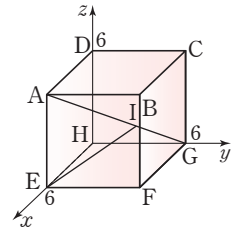
오른쪽 그림과 같이 점 H가 원점, $\overline{HE}$, $\overline{HG}$, $\overline{HD}$ 가 각각 x 축, y 축, z 축 위에 오도록 주어진 정육면체를 좌표공간에 놓으면
 $A(6, 0, 6)$, $G(0, 6, 0)$, $E(6, 0, 0)$

선분 AG를 2 : 1로 내분하는 점 I의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 0 + 1 \times 6}{2+1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times 0}{2+1}, \frac{2 \times 0 + 1 \times 6}{2+1} \right)$$

$$\therefore (2, 4, 2)$$

$$\therefore \overline{EI} = \sqrt{(2-6)^2 + (4-0)^2 + (2-0)^2} = 6$$



9 답 ①

선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점이 zx 평면 위에 있으므로 내분점의 y 좌표가 0이다.

$$\text{즉, } \frac{3 \times 3 + 2 \times a}{3+2} = 0 \text{ 이므로}$$

$$9 + 2a = 0 \quad \therefore a = -\frac{9}{2}$$

10 답 ⑤

점 C의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 선분 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3+a}{2}, \frac{-1+b}{2}, \frac{4+c}{2} \right)$$

이때 선분 AC의 중점이 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점

$P(0, 1, 4)$ 와 일치하므로

$$\frac{3+a}{2} = 0, \quad \frac{-1+b}{2} = 1, \quad \frac{4+c}{2} = 4$$

$$\therefore a = -3, b = 3, c = 4$$

따라서 $C(-3, 3, 4)$ 이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{(-3-2)^2 + (3+2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{51}$$

11 답 -13

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a-2}{2}, \frac{1+2}{2}, \frac{4+0}{2} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a-2}{2}, \frac{3}{2}, 2 \right)$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{b+1}{2}, \frac{-1+4}{2}, \frac{-2+6}{2} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{b+1}{2}, \frac{3}{2}, 2 \right)$$

마름모 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{a-2}{2} = \frac{b+1}{2} \quad \therefore b = a - 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 마름모의 네 변의 길이가 모두 같으므로

$$\overline{AD} = \overline{CD}, \text{ 즉 } \overline{AD}^2 = \overline{CD}^2 \text{에서}$$

$$(1-a)^2 + (4-1)^2 + (6-4)^2 = (1+2)^2 + (4-2)^2 + (6-0)^2$$

$$a^2 - 2a - 35 = 0$$

$$(a+5)(a-7) = 0$$

$$\therefore a = -5 \quad (\because a < 0)$$

$$a = -5 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = -8$$

$$\therefore a + b = -13$$

12 답 ③

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+2+4}{3}, \frac{5+b+2}{3}, \frac{1+4+c}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+6}{3}, \frac{b+7}{3}, \frac{c+5}{3}\right)$$

이 점이 점 (3, 4, 2)와 일치하므로

$$\frac{a+6}{3}=3, \frac{b+7}{3}=4, \frac{c+5}{3}=2 \quad \therefore a=3, b=5, c=1$$

$$\therefore a+b+c=9$$

13 답 ②

구의 중심을 C라 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$C\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1+5}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) \quad \therefore C(3, 2, 1)$$

또 구의 반지름의 길이는

$$CA=\sqrt{(2-3)^2+(-1-2)^2+(3-1)^2}=\sqrt{14}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=14$$

14 답 ③

구의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\sqrt{(4-2)^2+(5-1)^2+(3+1)^2}=\frac{1}{2}\times 6=3$$

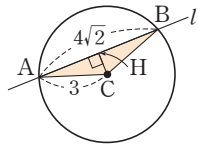
오른쪽 그림과 같이 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 CAH에서

$$AH=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

$$\therefore CH=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{2}\times 1=2\sqrt{2}$$



15 답 ④

$$x^2+y^2+z^2+4x-6y+2z=2\text{에서}$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=16$$

이 구의 중심의 좌표는 (-2, 3, -1)이다.

이때 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-6+a}{2}, \frac{3+b}{2}, \frac{-1+c}{2}\right)$$

이 점이 구의 중심인 점 (-2, 3, -1)과 일치하므로

$$\frac{-6+a}{2}=-2, \frac{3+b}{2}=3, \frac{-1+c}{2}=-1$$

$$\therefore a=2, b=3, c=-1$$

$$\therefore a+b+c=4$$

16 답 13

$$x^2+y^2+z^2+10x-4y+6z+k=0\text{에서}$$

$$(x+5)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=38-k$$

이 구의 중심의 좌표는 (-5, 2, -3)이고 반지름의 길이는 $\sqrt{38-k}$ 이다.

이 구가 yz평면에 접하므로

$$|-5|=\sqrt{38-k}$$

양변을 제곱하면

$$25=38-k \quad \therefore k=13$$

17 답 ③

주어진 구의 방정식에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$(0-2)^2+(0+1)^2+(z-3)^2=r^2$$

$$(z-3)^2=r^2-5 \quad \therefore z=3\pm\sqrt{r^2-5}$$

즉, 주어진 구와 z축의 두 교점의 좌표는

$$(0, 0, 3+\sqrt{r^2-5}), (0, 0, 3-\sqrt{r^2-5})$$

이때 두 교점 사이의 거리가 8이므로

$$(3+\sqrt{r^2-5})-(3-\sqrt{r^2-5})=8$$

$$\sqrt{r^2-5}=4$$

양변을 제곱하면

$$r^2-5=16, r^2=21$$

$$\therefore r=\sqrt{21} (\because r>0)$$

18 답 -4

주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$x^2+y^2-2x-4y+k=0$$

$$\therefore (x-1)^2+(y-2)^2=5-k$$

따라서 구와 xy평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가

$$\sqrt{5-k}\text{인 원이고, 이 원의 넓이가 }9\pi\text{이므로}$$

$$\pi\times(\sqrt{5-k})^2=9\pi, 5-k=9$$

$$\therefore k=-4$$

19 답 ③

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-2z-3=0\text{에서}$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9$$

이 구의 반지름의 길이는 3이다.

또 이 구의 중심을 C라 하면 C(1, 2, 1)이므로

$$PC=\sqrt{(1-4)^2+(2-5)^2+(1-6)^2}=\sqrt{43}$$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 구에 그은

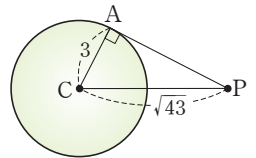
접선의 접점을 A라 하면

$$AC=3$$

따라서 직각삼각형 ACP에서 구하는 접

선의 길이는

$$PA=\sqrt{(\sqrt{43})^2-3^2}=\sqrt{34}$$



20 답 8

주어진 구의 중심을 C라 하면 C(2, -3, 1)이고, 반지름의 길이는 3이므로

$$PC=3$$

$$CQ=\sqrt{(6-2)^2+(1+3)^2+(a-1)^2}$$

$$=\sqrt{(a-1)^2+32}$$

이때 선분 PQ의 길이의 최솟값이 6이므로

$$\sqrt{(a-1)^2+32}-3=6$$

$$\sqrt{(a-1)^2+32}=9$$

양변을 제곱하면

$$(a-1)^2+32=81$$

$$(a-1)^2=49, a-1=\pm 7$$

$$\therefore a=8 (\because a>0)$$

중단원 기출문제 ①

1 답 6+3√3

정삼각형 ABC에서 BM은 중선이고, 정삼각형의 외심은 무게중심과 일치하므로 오른쪽 그림과 같이 원의 중심을 O라 하면 점 O는 선분 BM을 2:1로 내분한다.

이때 OB=2√3이므로 OM=√3

$$BM=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

$$\therefore |\vec{BM}|=BM=3\sqrt{3}$$

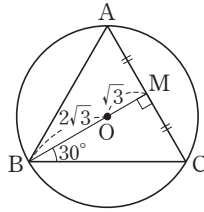
한편 BM⊥AC이므로 직각삼각형 BCM에서

$$BM=BC \cos 30^\circ$$

$$3\sqrt{3}=BC \times \frac{\sqrt{3}}{2}, BC=6$$

$$\therefore |\vec{BC}|=BC=6$$

$$\therefore |\vec{BM}|+|\vec{BC}|=BM+BC=6+3\sqrt{3}$$



2 답 ③

벡터 OD와 같은 벡터는 AO, BC, FE의 3개이다.

3 답 EC, FB, 2√2

벡터 BF와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터는 EC, FB이고

$$EC=FB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$$

$$|\vec{EC}|=|\vec{FB}|=2\sqrt{2}$$

4 답 ⑤

$$\textcircled{1} \vec{CA}+\vec{AC}=\vec{CC}=\vec{0}$$

$$\textcircled{2} \vec{AB}-\vec{AD}=\vec{DB}$$

$$\textcircled{3} \vec{CA}+\vec{DC}=\vec{DC}+\vec{CA}=\vec{DA}$$

$$\textcircled{4} \vec{AB}+\vec{DA}+\vec{CD}=\vec{AB}+(\vec{CD}+\vec{DA}) \\ =\vec{AB}+\vec{CA}=\vec{CA}+\vec{AB}=\vec{CB}$$

$$\textcircled{5} \vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CD}+\vec{DA}=\vec{AC}+\vec{CA}=\vec{AA}=\vec{0}$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

5 답 a-b+c

$$\vec{BD}-\vec{BA}-\vec{BC}=\vec{AD}-\vec{BC}=\vec{AD}-(\vec{AC}-\vec{AB}) \\ =\vec{AB}-\vec{AC}+\vec{AD} \\ =\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$$

6 답 ④

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{AC}+\vec{BA}=\vec{BA}+\vec{AC}=\vec{BC}$$

이때 |\vec{a}+\vec{b}|=5이므로

$$|\vec{BC}|=5 \quad \therefore \vec{BC}=5$$

$$\vec{a}-\vec{c}=\vec{AC}-\vec{DC}=\vec{AC}+\vec{CD}=\vec{AD}$$

이때 |\vec{a}-\vec{c}|=4이므로

$$|\vec{AD}|=4 \quad \therefore \vec{AD}=4$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \vec{BC} \times \vec{AD}=\frac{1}{2} \times 5 \times 4=10$$

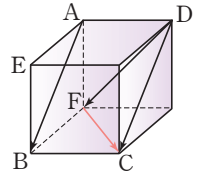
7 답 ⑤

주어진 전개도로 만든 정육면체는 오른쪽

그림과 같으므로

$$\vec{AB}=\vec{DC}$$

$$\therefore \vec{AB}-\vec{DF}=\vec{DC}-\vec{DF}=\vec{FC}$$



8 답 ④

$$\textcircled{1} 4\vec{a}+3\vec{b}-2(\vec{a}+\vec{b})=4\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{a}-2\vec{b}=2\vec{a}+\vec{b}$$

$$\textcircled{2} 2(2\vec{a}-\vec{b})-3(\vec{a}-\vec{b})=4\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{a}+3\vec{b}=\vec{a}+\vec{b}$$

$$\textcircled{3} -\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}+2(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}) \\ =-\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}+4\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}=3\vec{a}-4\vec{b}+3\vec{c}$$

$$\textcircled{4} \vec{c}-2(\vec{b}-\vec{a})+3(2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}) \\ =\vec{c}-2\vec{b}+2\vec{a}+6\vec{a}-3\vec{b}+3\vec{c}=8\vec{a}-5\vec{b}+4\vec{c}$$

$$\textcircled{5} 2(-\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c})-3(2\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}) \\ =-2\vec{a}+4\vec{b}+4\vec{c}-6\vec{a}+3\vec{b}-6\vec{c}=-8\vec{a}+7\vec{b}-2\vec{c}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

9 답 2

$$3\vec{x}-\vec{y}=\vec{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$5\vec{x}-2\vec{y}=-\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

2×①-②을 하면

$$\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b}$$

이를 ①에 대입하면

$$3(2\vec{a}+\vec{b})-\vec{y}=\vec{a} \quad \therefore \vec{y}=6\vec{a}+3\vec{b}-\vec{a}=5\vec{a}+3\vec{b}$$

$$\therefore \vec{y}-2\vec{x}=5\vec{a}+3\vec{b}-2(2\vec{a}+\vec{b}) \\ =5\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{a}-2\vec{b}=\vec{a}+\vec{b}$$

따라서 p=1, q=1이므로

$$p+q=2$$

10 답 4/3

점 E는 변 AB를 1:2로 내분하는 점이므로

$$\vec{EA}=\frac{1}{3}\vec{BA}$$

$$\therefore \vec{ED}=\vec{EA}+\vec{AD}=\frac{1}{3}\vec{BA}+\vec{BC}=\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}$$

점 F는 대각선 AC를 1:3으로 내분하는 점이므로

$$\vec{AF}=\frac{1}{4}\vec{AC}=\frac{1}{4}(\vec{BC}-\vec{BA})=-\frac{1}{4}\vec{BA}+\frac{1}{4}\vec{BC}$$

$$\therefore \vec{FD}=\vec{AD}-\vec{AF}=\vec{BC}-\left(-\frac{1}{4}\vec{BA}+\frac{1}{4}\vec{BC}\right) \\ =\frac{1}{4}\vec{BA}+\frac{3}{4}\vec{BC}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}$$

이때 ED=kFD이므로

$$\frac{1}{3}\vec{a}+\vec{b}=k\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{3}{4}\vec{b}\right)$$

$$\frac{1}{4}k=\frac{1}{3} \quad \therefore k=\frac{4}{3}$$

11 답 2

$$\vec{AC}=\vec{OC}-\vec{OA}=\vec{c}-\vec{a}$$

한편 AB=DC이므로

$$\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{OC}-\vec{OD}$$

$$\therefore \vec{OD}=\vec{OA}-\vec{OB}+\vec{OC}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$$

$$\therefore 2\overrightarrow{OD} + 3\overrightarrow{AC} = 2(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) + 3(\vec{c} - \vec{a})$$

$$= -\vec{a} - 2\vec{b} + 5\vec{c}$$

따라서 $l = -1, m = -2, n = 5$ 이므로

$$l + m + n = 2$$

12 답 ⑤

정사각형 ABCD의 한 변의 길이를 a 라 하면

$$① |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}a$$

$$② |\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2}a$$

$$③ |\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO}| = |\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{AD}| = a$$

$$④ |\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{2}a$$

$$⑤ |\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{OB}| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

따라서 크기가 가장 작은 것은 ⑤이다.

13 답 4

$$\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AC}$$

$$= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{CE}$$

$$= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CE}$$

$$= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FC}$$

$$\therefore |\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{FD}| = |\overrightarrow{FC}| = 4$$

14 답 $3\sqrt{3}$

$$\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$$

$$= (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}$$

$$\therefore |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = |\overrightarrow{EC}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{3}$$

15 답 7

$$(x^2 + 2y)\vec{a} + (2x - 3y + 2)\vec{b} = (y + 1)\vec{a} + (x - 2y + 3)\vec{b}$$

$$x^2 + 2y = y + 1, 2x - 3y + 2 = x - 2y + 3$$

$$\therefore x^2 + y = 1, x - y = 1$$

$$x - y = 1 \text{에서 } y = x - 1$$

이를 $x^2 + y = 1$ 에 대입하여 정리하면

$$x^2 + x - 2 = 0, (x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

$$x = -2 \text{일 때 } y = -3 \text{이므로 } x + y^2 = 7$$

$$x = 1 \text{일 때 } y = 0 \text{이므로 } x + y^2 = 1$$

따라서 $x + y^2$ 의 최댓값은 7이다.

16 답 $\frac{10}{9}$

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에 대하여

$$\overrightarrow{AP} = \vec{a}, \overrightarrow{AQ} = \vec{b} \text{라 하면}$$

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{a} + 2\vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \overrightarrow{AD} = 3\vec{a} + 4\vec{b}$$

이를 $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$ 에 대입하면

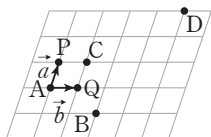
$$3\vec{a} + 4\vec{b} = m(-\vec{a} + 2\vec{b}) + n(\vec{a} + \vec{b})$$

$$3\vec{a} + 4\vec{b} = (-m + n)\vec{a} + (2m + n)\vec{b}$$

$$\therefore 3 = -m + n, 4 = 2m + n$$

두 식을 연립하여 풀면

$$m = \frac{1}{3}, n = \frac{10}{3} \quad \therefore mn = \frac{10}{9}$$



17 답 ⑤

두 벡터 $\vec{p} - \vec{q}, \vec{q} + \vec{r}$ 가 서로 평행하려면

$$\vec{q} + \vec{r} = k(\vec{p} - \vec{q}) \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots ①$$

이어야 한다.

$$\vec{p} - \vec{q} = (4\vec{a} - 5\vec{b}) - (2\vec{a} - 4\vec{b}) = 2\vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{q} + \vec{r} = (2\vec{a} - 4\vec{b}) + (t\vec{a} - \vec{b}) = (2+t)\vec{a} - 5\vec{b}$$

이를 ①에 대입하면

$$(2+t)\vec{a} - 5\vec{b} = k(2\vec{a} - \vec{b}) \quad \therefore (2+t)\vec{a} - 5\vec{b} = 2k\vec{a} - k\vec{b}$$

따라서 $2+t=2k, -5=-k$ 이므로

$$k=5, t=8$$

18 답 -1

㉠에서 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{a} = k\vec{b} \quad (\text{단, } k \neq 0)$$

이를 $m(\vec{a} + \vec{c}) + \vec{c} - \vec{b} = \vec{0}$ 에 대입하면

$$m(k\vec{b} + \vec{c}) + \vec{c} - \vec{b} = \vec{0}$$

$$\therefore (km-1)\vec{b} + (m+1)\vec{c} = \vec{0}$$

㉡에서 두 벡터 $\vec{b}, \vec{c}$ 가 서로 평행하지 않으므로

$$km-1=0, m+1=0$$

$$\therefore k=-1, m=-1$$

19 답 ①

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots ①$$

이어야 한다.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \{3\vec{a} - (t-1)\vec{b}\} - \vec{a} = 2\vec{a} - (t-1)\vec{b}$$

이를 ①에 대입하면

$$2\vec{a} - (t-1)\vec{b} = k(\vec{b} - \vec{a}) \quad \therefore 2\vec{a} - (t-1)\vec{b} = -k\vec{a} + k\vec{b}$$

따라서 $2 = -k, -(t-1) = k$ 이므로

$$k = -2, t = 3$$

20 답 ⑤

세 점 A, C, F가 한 직선 위에 있으려면

$$\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AC} \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots ①$$

이어야 한다.

이때 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ 라 하면 점 E는 변 AD를 1:2로 내분하는 점

$$\therefore \text{이므로 } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\vec{b}$$

한편 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\vec{b} - \vec{a}$ 이고 점 F는 선분 BE 위의 점이므로

$$\overrightarrow{BF} = m\overrightarrow{BE} = m\left(\frac{1}{3}\vec{b} - \vec{a}\right)$$

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \vec{a} + m\left(\frac{1}{3}\vec{b} - \vec{a}\right) = (1-m)\vec{a} + \frac{1}{3}m\vec{b}$$

또 $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$ 이므로 ①에서

$$(1-m)\vec{a} + \frac{1}{3}m\vec{b} = k(\vec{a} + \vec{b}), (1-m)\vec{a} + \frac{1}{3}m\vec{b} = k\vec{a} + k\vec{b}$$

$$\therefore 1-m=k, \frac{1}{3}m=k$$

두 식을 연립하여 풀면

$$k = \frac{1}{4}, m = \frac{3}{4}$$

중단원 기출 문제 2회

1 답 12

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{AE} = 5$$

$$\overline{BD} = \overline{CE} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

따라서 크기가 5인 벡터는 $\overline{AB}, \overline{BA}, \overline{AC}, \overline{CA}, \overline{AD}, \overline{DA}, \overline{AE}, \overline{EA}, \overline{BD}, \overline{DB}, \overline{CE}, \overline{EC}$ 의 12개이다.

2 답 7

벡터 $\overline{QS}$ 와 같은 벡터는 $\overline{AP}, \overline{PB}, \overline{RU}$ 의 3개이므로 $a=3$

벡터 $\overline{RT}$ 와 크기가 같고 방향이 반대인 벡터는 $\overline{TR}, \overline{QA}, \overline{CQ}, \overline{SP}$ 의 4개이므로 $b=4$

$$\therefore a+b=7$$

3 답 ④

$$③ |\overline{AD}| = 2|\overline{BC}| = 2$$

④ 오른쪽 그림과 같이 선분 CE의 중점을 M

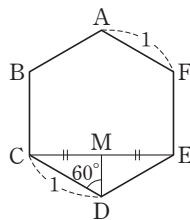
이라 하면 $\angle MDC = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{CM} = \overline{CD} \sin 60^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

즉, $\overline{CE} = 2\overline{CM} = \sqrt{3}$ 이므로

$$|\overline{CE}| = \overline{CE} = \sqrt{3}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.



4 답 ㄱ, ㄴ

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } \overline{AB} - \overline{CB} + \overline{CD} &= (\overline{AB} + \overline{BC}) + \overline{CD} \\ &= \overline{AC} + \overline{CD} = \overline{AD} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } \overline{AD} - \overline{AC} - \overline{BD} + \overline{BC} &= (\overline{AD} - \overline{AC}) - (\overline{BD} - \overline{BC}) \\ &= \overline{CD} - \overline{CD} = \vec{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } \overline{AB} - \overline{AC} + \overline{DC} - \overline{DB} &= (\overline{AB} - \overline{AC}) + (\overline{DC} - \overline{DB}) \\ &= \overline{CB} + \overline{BC} = \overline{CC} = \vec{0} \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

5 답 평행사변형

$$\overline{PB} - \overline{PA} + \overline{PD} - \overline{PC} = \vec{0} \text{에서}$$

$$\overline{PB} - \overline{PA} = \overline{PC} - \overline{PD}$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{DC}$$

즉, 사각형 ABCD에서 $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

따라서 사각형 ABCD는 평행사변형이다.

6 답 ②

$$\overline{GA} = \overline{GH} + \overline{HE} + \overline{EA} \quad \dots\dots ①$$

이때 $\overline{GH} = \overline{CD} = -\overline{DC} = -\vec{b}$, $\overline{HE} = \overline{DA} = \vec{a}$,

$\overline{EA} = \overline{HD} = -\overline{DH} = -\vec{c}$ 이므로 ①에 대입하면

$$\overline{GA} = -\vec{b} + \vec{a} - \vec{c} = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$$

7 답 -24

$$3(\vec{x} - 2\vec{a}) - (\vec{x} - 4\vec{b}) = 2\vec{a} - 8\vec{b} \text{에서}$$

$$3\vec{x} - 6\vec{a} - \vec{x} + 4\vec{b} = 2\vec{a} - 8\vec{b}$$

$$2\vec{x} = 8\vec{a} - 12\vec{b} \quad \therefore \vec{x} = 4\vec{a} - 6\vec{b}$$

따라서 $m=4$, $n=-6$ 이므로

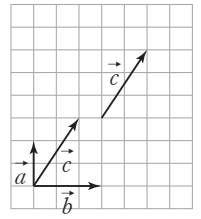
$$mn = -24$$

8 답 ③

오른쪽 그림에서 $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ 이므로

$$m = \frac{3}{2}, n = \frac{2}{3}$$

$$\therefore m - n = \frac{5}{6}$$



9 답 14

$$(\text{ㄱ}) \text{의 } 2(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) - 3(2\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}) = 2\vec{a} + 4\vec{b} + 3\vec{c} \text{에서}$$

$$2\vec{a} - 4\vec{b} + 6\vec{c} - 6\vec{a} + 12\vec{b} - 3\vec{c} = 2\vec{a} + 4\vec{b} + 3\vec{c}$$

$$-4\vec{a} + 8\vec{b} + 3\vec{c} = 2\vec{a} + 4\vec{b} + 3\vec{c}$$

$$6\vec{a} - 4\vec{b} = \vec{0} \quad \therefore \vec{b} = \frac{3}{2}\vec{a} \quad \dots\dots ①$$

$$(\text{ㄷ}) \text{의 } 2(\vec{a} - \vec{c}) - 4(\vec{b} + \vec{c}) + 3(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c} \text{에서}$$

$$2\vec{a} - 2\vec{c} - 4\vec{b} - 4\vec{c} + 3\vec{a} + 3\vec{b} - 3\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}$$

$$5\vec{a} - \vec{b} - 9\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b} - 3\vec{c}$$

$$4\vec{a} + 2\vec{b} - 6\vec{c} = \vec{0}$$

$$6\vec{c} = 4\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\therefore \vec{c} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{2}\vec{a} = \frac{7}{6}\vec{a} \quad (\because ①)$$

(ㄴ)에서 $|\vec{a}| = 12$ 이므로

$$|\vec{c}| = \left| \frac{7}{6}\vec{a} \right| = \frac{7}{6}|\vec{a}| = \frac{7}{6} \times 12 = 14$$

10 답 $4\vec{a} - \vec{b}$

$$\overline{BG} - \overline{HE} = (\overline{BI} + \overline{ID} + \overline{DG}) - \overline{HE} \quad \dots\dots ①$$

이때 $\overline{BI} = 2\overline{AJ} = 2\vec{a}$, $\overline{ID} = \overline{AB} = \vec{b}$, $\overline{DG} = \overline{BI} = 2\vec{a}$,

$\overline{HE} = 2\overline{AB} = 2\vec{b}$ 이므로 ①에 대입하면

$$\overline{BG} - \overline{HE} = (2\vec{a} + \vec{b} + 2\vec{a}) - 2\vec{b} = 4\vec{a} - \vec{b}$$

11 답 $-\frac{1}{2}$

$$\overline{DM} = \overline{AM} - \overline{AD} \quad \dots\dots ①$$

$$\overline{AM} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{FM}$$

$$= \overline{AE} + \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{FG}$$

$$= \overline{AE} + \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD} = \vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

이를 ①에 대입하면

$$\overline{DM} = \left(\vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \right) - \vec{b} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$$

따라서 $p=1$, $q=-\frac{1}{2}$, $r=1$ 이므로

$$pqr = -\frac{1}{2}$$

12 답 $4\sqrt{3}$

$$\overline{CP} - \overline{CB} = \overline{BP} \text{이므로}$$

$$|\overline{CP} - \overline{CB}| = |\overline{BP}| = \overline{BP}$$

선분 BP가 정삼각형 ABD의 높이일 때 선분 BP의 길이가 최소이므로 구하는 최솟값은

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 8 = 4\sqrt{3}$$

13 [답] 6

$\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{OF'}$ 이므로
 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF'} = \overrightarrow{F'P}$
 $\therefore |\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF}| = |\overrightarrow{F'P}| = |\overrightarrow{PF'}| = 4$
 타원의 정의에 의하여 $|\overrightarrow{PF}| + |\overrightarrow{PF'}| = 2 \times 5 = 10$ 이므로
 $|\overrightarrow{PF}| + 4 = 10 \quad \therefore |\overrightarrow{PF}| = 6$
 $\therefore |\overrightarrow{PF}| = |\overrightarrow{PF'}| = 6$

14 [답] ②

$(3x-y)\vec{a} - (x+2y)\vec{b} = 2(2\vec{a} - 3\vec{b})$ 에서
 $(3x-y)\vec{a} - (x+2y)\vec{b} = 4\vec{a} - 6\vec{b}$
 $\therefore 3x-y=4, x+2y=6$
 두 식을 연립하여 풀면 $x=2, y=2$
 $\therefore x^2+y^2=8$

15 [답] ⑤

$3\vec{x} + 5\vec{y} = \vec{a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\vec{x} + 2\vec{y} = \vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - 3 \times \textcircled{2}$ 을 하면
 $-\vec{y} = \vec{a} - 3\vec{b} \quad \therefore \vec{y} = -\vec{a} + 3\vec{b}$
 이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면
 $\vec{x} + 2(-\vec{a} + 3\vec{b}) = \vec{b} \quad \therefore \vec{x} = 2\vec{a} - 5\vec{b}$
 $\therefore \vec{x} + \vec{y} = (2\vec{a} - 5\vec{b}) + (-\vec{a} + 3\vec{b}) = \vec{a} - 2\vec{b}$
 따라서 $p=1, q=-2$ 이므로
 $p-q=3$

16 [답] 3

$x^2\vec{a} + x\vec{b} = (y+3)\vec{a} + (y+1)\vec{b}$ 에서
 $x^2=y+3, x=y+1$
 $x=y+1$ 을 $x^2=y+3$ 에 대입하면
 $(y+1)^2=y+3, y^2+y-2=0$
 $(y+2)(y-1)=0 \quad \therefore y=-2 \text{ 또는 } y=1$
 $y=-2$ 일 때 $x=-1$ 이므로 $x+y=-3$
 $y=1$ 일 때 $x=2$ 이므로 $x+y=3$
 따라서 $x+y$ 의 최댓값은 3이다.

17 [답] ⑤

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{AD}=\vec{b}, \overrightarrow{AE}=\vec{c}$ 라 하면
 $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AE}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=-\overrightarrow{AE}+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$
 $=-\vec{c}+(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$
 $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{DH}+(\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EF})$
 $=\overrightarrow{AE}+(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AE}+(-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})$
 $=\vec{c}+(-\vec{b}+\vec{a})=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$
 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\vec{a}+\vec{b}$
 $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\vec{b}+\vec{c}$
 $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{c}$
 이를 $\overrightarrow{EC}+2\overrightarrow{DF}=m\overrightarrow{AC}+n\overrightarrow{AH}+k\overrightarrow{AF}$ 에 대입하면
 $(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})+2(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})=m(\vec{a}+\vec{b})+n(\vec{b}+\vec{c})+k(\vec{a}+\vec{c})$
 $3\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=(m+k)\vec{a}+(m+n)\vec{b}+(n+k)\vec{c}$
 $\therefore 3=m+k, -1=m+n, 1=n+k$

세 식을 변끼리 더하면 $2(m+n+k)=3$
 $\therefore m+n+k=\frac{3}{2}$

18 [답] ㄱ, ㄴ

$2(\vec{c}-2\vec{a})+3\vec{b}=\vec{a}-\vec{b}$ 에서
 $2\vec{c}=5\vec{a}-4\vec{b} \quad \therefore \vec{c}=\frac{5}{2}\vec{a}-2\vec{b}$
 $\therefore \vec{a}+2\vec{c}=\vec{a}+2(\frac{5}{2}\vec{a}-2\vec{b})=6\vec{a}-4\vec{b}=2(3\vec{a}-2\vec{b})$
 즉, 두 벡터 $3\vec{a}-2\vec{b}, \vec{a}+2\vec{c}$ 는 서로 평행하다.
 $\therefore -\vec{a}+\vec{c}=-\vec{a}+(\frac{5}{2}\vec{a}-2\vec{b})=\frac{3}{2}\vec{a}-2\vec{b}$
 즉, 두 벡터 $3\vec{a}-2\vec{b}, -\vec{a}+\vec{c}$ 는 서로 평행하지 않다.
 $\therefore 3\vec{b}+2\vec{c}=3\vec{b}+2(\frac{5}{2}\vec{a}-2\vec{b})=5\vec{a}-\vec{b}$
 즉, 두 벡터 $3\vec{a}-2\vec{b}, 3\vec{b}+2\vec{c}$ 는 서로 평행하지 않다.
 $\therefore -\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}+\vec{b}+(\frac{5}{2}\vec{a}-2\vec{b})=\frac{3}{2}\vec{a}-\vec{b}=\frac{1}{2}(3\vec{a}-2\vec{b})$
 즉, 두 벡터 $3\vec{a}-2\vec{b}, -\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 는 서로 평행하다.
 따라서 보기에서 벡터 $3\vec{a}-2\vec{b}$ 와 서로 평행한 벡터인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

19 [답] ②

두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 가 서로 평행하려면
 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB} (k \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 이어야 한다.
 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(3\vec{a}-\vec{b})-(\vec{a}+2\vec{b})=2\vec{a}-3\vec{b}$
 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-3\vec{a}+m\vec{b})-(\vec{a}+2\vec{b})=-4\vec{a}+(m-2)\vec{b}$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $-4\vec{a}+(m-2)\vec{b}=k(2\vec{a}-3\vec{b})$
 $\therefore -4\vec{a}+(m-2)\vec{b}=2k\vec{a}-3k\vec{b}$
 따라서 $-4=2k, m-2=-3k$ 이므로
 $m=8, k=-2$

20 [답] ④

세 점 B, P, Q가 한 직선 위에 있으려면
 $\overrightarrow{BQ}=k\overrightarrow{BP} (k \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 이어야 한다.
 이때 $\overrightarrow{AD}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}$ 라 하면
 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB})$
 $=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$
 $\therefore \overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b})-\vec{b}$
 $=\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 또 $\overrightarrow{AQ}=m\overrightarrow{AD}=m\vec{a}$ 이므로
 $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=m\vec{a}-\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{3}$
 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $m\vec{a}-\vec{b}=k(\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}) \quad \therefore m\vec{a}-\vec{b}=\frac{1}{4}k\vec{a}-\frac{3}{4}k\vec{b}$
 따라서 $m=\frac{1}{4}k, -1=-\frac{3}{4}k$ 이므로
 $k=\frac{4}{3}, m=\frac{1}{3}$

중단원 기출문제 ①

1 답 ⑤

점 P는 변 OA를 2:1로 내분하는 점이

므로

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$$

또 점 Q는 선분 BP를 2:1로 내분하는

점이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \frac{2\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OB}}{2+1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{4}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} \\ \therefore \overrightarrow{QA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} - \left(\frac{4}{9}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right) \\ &= \frac{5}{9}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\end{aligned}$$

따라서 $m = \frac{5}{9}$, $n = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$m - n = \frac{5}{9} + \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$$

2 답 ③

$$|\vec{a} - \vec{b}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BA}| = \overline{BA} = 20$$

$\vec{c} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b} = \frac{3\vec{b} + 2\vec{a}}{3+2}$ 에서 점 C는 선분 AB를 3:2로 내분하는 점이므로

$$\overline{BC} = \frac{2}{3+2}\overline{AB} = \frac{2}{5} \times 20 = 8$$

3 답 2

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \\ \therefore \overrightarrow{GA} &= \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OG} \\ &= \vec{a} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \\ &= \frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c}\end{aligned}$$

따라서 $p = \frac{2}{3}$, $q = -\frac{1}{3}$, $r = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$p - q - 3r = \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) - 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 2$$

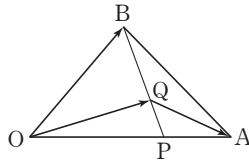
4 답 4

$2\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ 에서 $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ 이므로 점 P는 선분 AC의 중점이다.

$$\therefore \overline{CP} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2} \times 10 = 5$$

또 $4\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ 에서 $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ 이므로 점 Q는 선분 BC를 3:1로 내분하는 점이다.

$$\therefore \overline{CQ} = \frac{1}{4}\overline{BC} = \frac{1}{4} \times 12 = 3$$



이때 오른쪽 그림과 같이 이등변삼각형 ABC에서 선분 BC의 중점을 M이라 하면 삼각형 AMC는 직각삼각형이다.

또 직각삼각형 AMC에서 두 점 P, Q는 각각 선분 AC, 선분 MC의 중점이므로 삼각형 PQC도 직각삼각형이다.

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

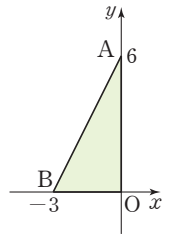
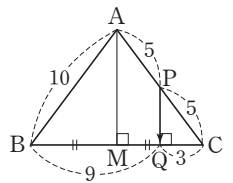
$$\therefore |\overrightarrow{PQ}| = \overline{PQ} = 4$$

5 답 ②

조건을 만족시키는 도형은 오른쪽 그림과 같이 삼각형 OAB의 내부와 그 둘레이다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$$



6 답 1

벡터 $\vec{x}$ 가 단위벡터이므로 $|\vec{x}| = 1$ 에서

$$\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + (2a-1)^2} = 1$$

양변을 제곱하면

$$\frac{9}{25} + (2a-1)^2 = 1, (2a-1)^2 = \frac{16}{25}$$

$$2a-1 = \pm \frac{4}{5} \quad \therefore a = \frac{9}{10} \text{ 또는 } a = \frac{1}{10}$$

따라서 모든 a의 값의 합은 $\frac{9}{10} + \frac{1}{10} = 1$

7 답 ⑤

$$2\vec{x} - \vec{a} = 3\vec{a} + 2\vec{b} \text{에서}$$

$$2\vec{x} = 4\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\therefore \vec{x} = 2\vec{a} + \vec{b} = 2(2, -1) + (-1, 6) = (3, 4)$$

$$\therefore |\vec{x}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

8 답 ①

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \text{에서}$$

$$(5, 8) = m(2, -1) + n(1, 3) = (2m+n, -m+3n)$$

$$\therefore 5 = 2m+n, 8 = -m+3n$$

두 식을 연립하여 풀면

$$m=1, n=3$$

$$\therefore m-n = -2$$

9 답 5

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB} \text{에서}$$

$$(2-a, 4-b) + (5-a, 1-b) + (2-a, 1-b)$$

$$= (5-2, 1-4)$$

$$(9-3a, 6-3b) = (3, -3)$$

따라서 $9-3a=3, 6-3b=-3$ 이므로

$$a=2, b=3$$

$$\therefore a+b=5$$

10 답 ②

$\vec{c} = x\vec{a} + \vec{b}$ 에서

$$\vec{c} = x(1, 2, -1) + (-4, -2, 3)$$

$$= (x-4, 2x-2, -x+3)$$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{c}| &= \sqrt{(x-4)^2 + (2x-2)^2 + (-x+3)^2} \\ &= \sqrt{6x^2 - 22x + 29} \\ &= \sqrt{6\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 + \frac{53}{6}} \end{aligned}$$

따라서 벡터 $\vec{c}$ 의 크기가 최소가 되도록 하는 실수 x 의 값은 $\frac{11}{6}$ 이다.

11 답 ①

$$\vec{a} + \vec{b} = (1, 2, 3) + (2, 1, 3)$$

$$= (3, 3, 6)$$

$$t\vec{b} - \vec{c} = t(2, 1, 3) - (0, 4, 4)$$

$$= (2t, t-4, 3t-4)$$

두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$, $t\vec{b} - \vec{c}$ 가 서로 평행하려면

$$t\vec{b} - \vec{c} = k(\vec{a} + \vec{b}) \quad (k \neq 0)$$

이어야 한다.

$$(2t, t-4, 3t-4) = k(3, 3, 6)$$

$$\therefore 2t = 3k, t-4 = 3k, 3t-4 = 6k$$

세 식 중 두 식을 연립하여 풀면

$$k = -\frac{8}{3}, t = -4$$

12 답 (-1, 1, 0)

점 P의 좌표를 $(a, b, 0)$ 이라 하면

$$\vec{PA} = (2-a, -2-b, 3),$$

$$\vec{PB} = (-4-a, 3-b, 2),$$

$$\vec{PC} = (-1-a, 2-b, 1)$$

이므로

$$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}$$

$$= (2-a, -2-b, 3) + (-4-a, 3-b, 2) + (-1-a, 2-b, 1)$$

$$= (-3-3a, 3-3b, 6)$$

$$\begin{aligned} \therefore |\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}| &= \sqrt{(-3-3a)^2 + (3-3b)^2 + 6^2} \\ &= 3\sqrt{(a+1)^2 + (b-1)^2 + 4} \end{aligned}$$

따라서 $a = -1$, $b = 1$ 일 때 최솟값 6을 가지므로 구하는 점 P의 좌표는 $(-1, 1, 0)$ 이다.

13 답 ④

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\vec{OP} - \vec{OA} = \vec{AP} = (x-2, y+3)$$

$$\vec{AB} = (8-2, 5+3) = (6, 8)$$

이때 $|\vec{OP} - \vec{OA}| = |\vec{AB}|$ 이므로

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2}$$

양변을 제곱하면

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 100$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(2, -3)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 10인 원이므로 구하는 도형의 길이는

$$2\pi \times 10 = 20\pi$$

14 답 ④

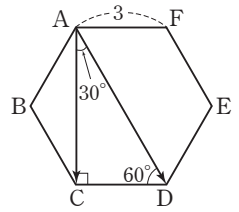
오른쪽 그림과 같이 삼각형 ACD는

$\angle CAD = 30^\circ$, $\angle ACD = 90^\circ$ 인 직각삼각

형이고 $\overline{AD} = 2\overline{BC} = 6$, $\overline{CD} = 3$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{AC} \cdot \vec{AD} &= |\vec{AC}| |\vec{AD}| \cos 30^\circ \\ &= 3\sqrt{3} \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 27 \end{aligned}$$



다른 풀이

$\angle ACD = 90^\circ$ 이므로 $\angle DAC = \theta$ 라 하면

$$\begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{AD} &= |\vec{AC}| |\vec{AD}| \cos \theta \\ &= |\vec{AC}| |\vec{AD}| \times \frac{|\vec{AC}|}{|\vec{AD}|} \\ &= |\vec{AC}|^2 \\ &= (\sqrt{6^2 - 3^2})^2 = 27 \end{aligned}$$

15 답 1

$\vec{DG} = \vec{AF}$ 이고,

$$\overline{AF} = \overline{FH} = \overline{AH} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

이므로 삼각형 AFH는 정삼각형이다.

따라서 두 벡터 $\vec{AF}$, $\vec{AH}$ 가 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\begin{aligned} \vec{DG} \cdot \vec{AH} &= |\vec{AF}| |\vec{AH}| \cos 60^\circ \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

16 답 ⑤

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3, x-2, 1) \cdot (2, 4-x, 5)$$

$$= 3 \times 2 + (x-2)(4-x) + 1 \times 5$$

$$= -x^2 + 6x + 3$$

이때 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ 이므로

$$-x^2 + 6x + 3 = 3, x(x-6) = 0$$

$$\therefore x = 6 \quad (\because x > 0)$$

17 답 ②

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 3 \times 2 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (-2\vec{a} + 3\vec{b}) &= -2|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + 6|\vec{b}|^2 \\ &= -2 \times 3^2 - 3 + 6 \times 2^2 = 3 \end{aligned}$$

18 답 ③

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5} \text{이고,}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3, 4) \cdot (-1, 2) = -3 + 8 = 5 > 0 \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{5}{5 \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

19 답 ①

$$\begin{aligned} |-\vec{a} + \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 \\ &= (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 2 \times \cos 45^\circ + 2^2 \\ &= 8 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 4 = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore |-\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{4} = 2$$

20 답 ⑤

$\vec{p}$ 와 $\vec{q}$ 가 서로 수직이므로 $\vec{p} \cdot \vec{q} = 0$ 에서

$$(-2, a, 2) \cdot (1, -2, -b) = 0$$

$$-2 \times 1 + a \times (-2) + 2 \times (-b) = 0$$

$$-2 - 2a - 2b = 0 \quad \therefore a + b = -1 \quad \dots\dots ㉑$$

또 $\vec{p}$ 와 $\vec{r}$ 가 서로 평행하므로 $\vec{p} = k\vec{r}$ ($k \neq 0$)에서

$$(-2, a, 2) = k(1, b, c)$$

$$-2 = k, a = bk, 2 = ck$$

$$\therefore k = -2, a = -2b, c = -1 \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면

$$a = -2, b = 1, c = -1$$

$$\therefore a + 2b - 3c = -2 + 2 + 3 = 3$$

중단원 기출문제 2회

1 답 $\frac{7}{12}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{b}$

두 점 P, Q의 위치벡터를 각각 $\vec{p}$, $\vec{q}$ 라 하면

$$\vec{p} = \frac{\vec{OB} + 2\vec{OA}}{1+2} = \frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB}$$

$$= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\vec{q} = \frac{2\vec{OB} + \vec{OA}}{2+1} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{OB}$$

$$= \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\therefore \vec{OR} = \frac{\vec{q} + 3\vec{p}}{1+3} = \frac{3}{4}\vec{p} + \frac{1}{4}\vec{q}$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right)$$

$$= \frac{7}{12}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{b}$$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q는 선분 AB를 삼등분한다.

또 선분 PQ를 1:3으로 내분하는 점 R는 선분 AB를 5:7로 내분한다.

$$\therefore \vec{OR} = \frac{5\vec{OB} + 7\vec{OA}}{5+7} = \frac{7}{12}\vec{OA} + \frac{5}{12}\vec{OB}$$

$$= \frac{7}{12}\vec{a} + \frac{5}{12}\vec{b}$$

2 답 ③

$\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ 라 하면

$$\vec{OD} = \frac{\vec{OB} + 2\vec{OA}}{1+2} = \frac{2}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB}$$

$$= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$0 < t < 1$ 인 실수 t 에 대하여 $\vec{OP} : \vec{PD} = t : (1-t)$ 라 하면

$$\vec{OP} = t\vec{OD} = t\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) = \frac{2}{3}t\vec{a} + \frac{1}{3}t\vec{b} \quad \dots\dots ㉑$$

또 $0 < s < 1$ 인 실수 s 에 대하여 $\vec{BP} : \vec{PC} = s : (1-s)$ 라 하면

$$\vec{OP} = \frac{s\vec{OC} + (1-s)\vec{OB}}{s + (1-s)}$$

$$= s\left(\frac{1}{3}\vec{a}\right) + (1-s)\vec{b} = \frac{1}{3}s\vec{a} + (1-s)\vec{b} \quad \dots\dots ㉒$$

㉑, ㉒에서

$$\frac{2}{3}t\vec{a} + \frac{1}{3}t\vec{b} = \frac{1}{3}s\vec{a} + (1-s)\vec{b}$$

이때 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 영벡터가 아니고 평행하지 않으므로

$$\frac{2}{3}t = \frac{1}{3}s, \frac{1}{3}t = 1-s \quad \therefore 2t = s, t = 3-3s$$

두 식을 연립하여 풀면

$$t = \frac{3}{7}, s = \frac{6}{7}$$

이를 ㉑에 대입하면

$$\vec{OP} = \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b} = \frac{2}{7}\vec{OA} + \frac{1}{7}\vec{OB}$$

따라서 $m = \frac{2}{7}$, $n = \frac{1}{7}$ 이므로

$$m + n = \frac{3}{7}$$

3 답 1

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

즉, $\vec{GC} = -\vec{GA} - \vec{GB} = -\vec{a} - \vec{b}$ 이므로

$$\vec{BC} = \vec{GC} - \vec{GB} = (-\vec{a} - \vec{b}) - \vec{b} = -\vec{a} - 2\vec{b}$$

따라서 $m = -1$, $n = -2$ 이므로

$$m - n = -1 - (-2) = 1$$

4 답 ⑤

$$8\vec{PA} + 4\vec{PB} + 3\vec{PC} = \vec{0}$$
에서

$$4\vec{PB} + 3\vec{PC} = -8\vec{PA} \quad \therefore \frac{4\vec{PB} + 3\vec{PC}}{7} = -\frac{8}{7}\vec{PA}$$

이때 선분 BC를 3:4로 내분하는 점을 D라 하면

$$\vec{PD} = -\frac{8}{7}\vec{PA}, \text{ 즉 } 7\vec{PD} = -8\vec{PA}$$

따라서 두 벡터 $\vec{PD}$ 와 $\vec{PA}$ 는 방향이 반대이고

$$\vec{AP} : \vec{PD} = 7 : 8$$

즉, 점 P는 선분 AD를 7:8로 내분하는 점이다.

한편 점 D는 선분 BC를 3:4로 내분하는 점이므로

$$\triangle ABD = \frac{3}{7}\triangle ABC \quad \dots\dots ㉑$$

또 점 P는 선분 AD를 7:8로 내분하는 점이므로

$$\triangle ABP = \frac{7}{15}\triangle ABD = \frac{7}{15} \times \frac{3}{7}\triangle ABC (\because ㉑)$$

$$= \frac{1}{5}\triangle ABC$$

따라서 $\triangle ABC = 5\triangle ABP$ 이므로 $k = 5$

5 답 $3\sqrt{2}$

$$\vec{p} = \vec{a} + k\vec{b} = (2, 4) + k(-1, 1) = (2-k, 4+k)$$

$$\therefore |\vec{p}| = \sqrt{(2-k)^2 + (4+k)^2}$$

$$= \sqrt{2k^2 + 4k + 20}$$

$$= \sqrt{2(k+1)^2 + 18}$$

따라서 $|\vec{p}|$ 는 $k = -1$ 일 때, 최솟값 $3\sqrt{2}$ 를 갖는다.

6 답 ④

$$\vec{a} + t\vec{b} = (1, 2) + t(3, -1) = (1+3t, 2-t)$$

$$\vec{c} - \vec{a} = (2, 1) - (1, 2) = (1, -1)$$

두 벡터 $\vec{a} + t\vec{b}$, $\vec{c} - \vec{a}$ 가 서로 평행하려면

$$\vec{a} + t\vec{b} = k(\vec{c} - \vec{a}) \quad (k \neq 0)$$

이어야 한다.

$$(1+3t, 2-t) = k(1, -1)$$

$$\therefore 1+3t=k, 2-t=-k$$

두 식을 연립하여 풀면

$$k = -\frac{7}{2}, t = -\frac{3}{2}$$

7 답 1

$$\vec{a} + 2\vec{b} = (1, 0, 2) + 2(-1, 1, 0) = (-1, 2, 2)$$

$$\therefore |\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

이때 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 와 방향이 같고 크기가 1인 벡터 $\vec{x}$ 는

$$\vec{x} = \frac{\vec{a} + 2\vec{b}}{|\vec{a} + 2\vec{b}|} = \frac{1}{3}(-1, 2, 2) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

따라서 벡터 $\vec{x}$ 의 모든 성분의 합은

$$-\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

8 답 ①

$$\vec{d} = p\vec{a} + q\vec{b} + r\vec{c} \text{에서}$$

$$(3, -7, -9) = p(4, 0, 1) + q(0, 2, 2) + r(-1, 3, 0)$$

$$= (4p - r, 2q + 3r, p + 2q)$$

$$\therefore 3 = 4p - r, -7 = 2q + 3r, -9 = p + 2q$$

세 식을 연립하여 풀면

$$p = 1, q = -5, r = 1$$

$$\therefore p + q + r = -3$$

9 답 ⑤

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\vec{AC} = k\vec{AB} \quad (\text{단, } k \neq 0)$$

$$\vec{AC} = (x-2, y-(-1), -2-4) = (x-2, y+1, -6),$$

$$\vec{AB} = (3-2, 1-(-1), 1-4) = (1, 2, -3) \text{이므로}$$

$$(x-2, y+1, -6) = k(1, 2, -3)$$

따라서 $x-2=k, y+1=2k, -6=-3k$ 이므로

$$k=2, x=4, y=3$$

$$\therefore xy=12$$

10 답 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 $\vec{OP} = (x, y)$ 이고,

$$\vec{OA} = (2, 1), \vec{OB} = (1, 3) \text{이므로}$$

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB} \text{에서}$$

$$(x, y) = s(2, 1) + t(1, 3) = (2s+t, s+3t)$$

이때 $s+2t=2$, 즉 $s=2-2t$ 이므로

$$(x, y) = (2(2-2t)+t, (2-2t)+3t) = (4-3t, 2+t)$$

즉, $x=4-3t, y=2+t$ 이므로

$$x+3y=4-3t+3(2+t)=10$$

따라서 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$$

11 답 4π

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\vec{PA} = (-4-x, -y)$$

$$\vec{PB} = (-x, -1-y)$$

$$\vec{PC} = (1-x, 4-y)$$

$$\therefore \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}$$

$$= (-4-x, -y) + (-x, -1-y) + (1-x, 4-y)$$

$$= (-3-3x, 3-3y)$$

이때 $|\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}| = 6$ 에서

$$\sqrt{(-3-3x)^2 + (3-3y)^2} = 6$$

$$9(x+1)^2 + 9(y-1)^2 = 36$$

$$\therefore (x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(-1, 1)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \times 2^2 = 4\pi$$

12 답 36

$\vec{AB}$ 가 지름이므로 삼각형 ABP는 $\angle APB = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\therefore \vec{AP} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

이때 $\angle PAB = \theta$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{AP}|}{|\vec{AB}|} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \vec{AB} \cdot \vec{AP} = |\vec{AB}| |\vec{AP}| \cos \theta$$

$$= 10 \times 6 \times \frac{3}{5} = 36$$

13 답 ②

두 벡터 $\vec{AH}, \vec{BD}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\vec{AH} = \vec{BG} \text{이므로}$$

$$\angle DBG = \theta$$

이때 삼각형 DBG는 $\vec{DB} = \vec{DG} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$ 인 이등변삼각형이고, $\vec{BG} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 이다.

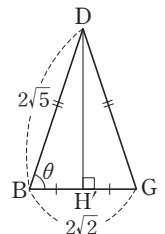
오른쪽 그림과 같이 삼각형 DBG의 꼭짓점 D에서 선분 BG에 내린 수선의 발을 H'이라 하면 직각삼각형 DBH'에서

$$\cos \theta = \frac{|\vec{BH'}|}{|\vec{BD}|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\therefore \vec{AH} \cdot \vec{BD} = \vec{BG} \cdot \vec{BD}$$

$$= |\vec{BG}| |\vec{BD}| \cos \theta$$

$$= 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{10}}{10} = 4$$



14 답 ③

$\vec{AE} = \vec{CF}$ 이고, $\triangle BFC$ 는 정삼각형이므로 두 벡터 $\vec{CF}, \vec{CB}$ 가 이루는 각의 크기는 60° 이다.

이때 정팔면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CB} \\ &= |\overrightarrow{CF}| |\overrightarrow{CB}| \cos 60^\circ \\ &= a \times a \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{a^2}{2} = 6 \text{ 이므로 } a^2 = 12$$

따라서 정팔면체의 겉넓이는

$$8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12 = 24\sqrt{3}$$

15 답 ①

포물선 $y^2 = 4x$ 위를 움직이는 두 점 P, Q의 좌표를

각각 $P(a^2, 2a)$, $Q(b^2, 2b)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= (a^2, 2a) \cdot (b^2, 2b) \\ &= a^2 \times b^2 + 2a \times 2b \\ &= a^2 b^2 + 4ab \\ &= (ab + 2)^2 - 4\end{aligned}$$

따라서 $ab = -2$ 일 때 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 의 최솟값은 -4 이다.

16 답 ②

오른쪽 그림과 같이 점 B를 좌표평면의 원점으로 하고, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ 를 각각 x 축, y 축 위에 놓으면

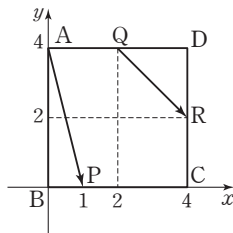
$A(0, 4)$, $P(1, 0)$, $Q(2, 4)$, $R(4, 2)$

이므로

$$\overrightarrow{AP} = (1, 0) - (0, 4) = (1, -4)$$

$$\overrightarrow{QR} = (4, 2) - (2, 4) = (2, -2)$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{QR} = (1, -4) \cdot (2, -2) = 2 + 8 = 10$$



17 답 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$|\vec{b}| = x$ 라 하면

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 1 \times x \times \frac{1}{2} = \frac{x}{2}$$

이므로

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1 + x + x^2$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}|^2 = x^2 - x + 1$$

이때 두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$ 가 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = |\vec{a} + \vec{b}| |\vec{b} - \vec{a}| \cos 60^\circ \text{에서}$$

$$|\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}| |\vec{b} - \vec{a}| \cos 60^\circ$$

$$x^2 - 1 = \sqrt{x^2 + x + 1} \sqrt{x^2 - x + 1} \times \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$x^4 - 3x^2 + 1 = 0$$

이때 $x^4 - 3x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 - x^2 = (x^2 + x - 1)(x^2 - x - 1)$ 이므로

$$x^2 + x - 1 = 0 \text{ 또는 } x^2 - x - 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

그런데 $\textcircled{1}$ 에서 $x^2 - 1 \geq 0$, 즉 $x^2 \geq 1$ 이므로 $x \geq 1$ ($\because x > 0$)

$$\therefore x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

18 답 60°

$\angle BAC$ 의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 가 이루는 각의 크기이다.

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 2) - (1, 2, 1) = (-2, -3, 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2, 0, 4) - (1, 2, 1) = (1, -2, 3)$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2, -3, 1) \cdot (1, -2, 3) = -2 + 6 + 3 = 7$$

한편

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{14},$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

이고, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7 > 0$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ \leq \theta < 90^\circ$)라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{7}{\sqrt{14} \times \sqrt{14}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

따라서 $\angle BAC$ 의 크기는 60° 이다.

19 답 ③

두 벡터 $\vec{a} + 3\vec{b}$, $-2\vec{a} + \vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (-2\vec{a} + \vec{b}) = 0 \text{에서}$$

$$-2|\vec{a}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 3|\vec{b}|^2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $|\vec{a}| = 2|\vec{b}|$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-8|\vec{b}|^2 - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 3|\vec{b}|^2 = 0 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{b}|^2$$

즉, $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ 이므로

$$\cos(180^\circ - \theta) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-|\vec{b}|^2}{2|\vec{b}|^2} = -\frac{1}{2}$$

20 답 ⑤

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3, -4) - (1, 2) = (2, -6)$ 이므로

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = 2\sqrt{10}$$

ㄱ. $\vec{a} = (-2, 6)$ 일 때,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{a} = (2, -6) \cdot (-2, 6) = -4 - 36 = -40$$

이때 $|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$ 이므로

$$|\overrightarrow{AB}| |\vec{a}| = 2\sqrt{10} \times 2\sqrt{10} = 40$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \vec{a} = -|\overrightarrow{AB}| |\vec{a}|$$

즉, $\overrightarrow{AB}$ 와 $\vec{a}$ 는 서로 평행하다.

ㄴ. $\vec{b} = (3, -9)$ 일 때,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{b} = (2, -6) \cdot (3, -9) = 6 + 54 = 60$$

이때 $|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-9)^2} = 3\sqrt{10}$ 이므로

$$|\overrightarrow{AB}| |\vec{b}| = 2\sqrt{10} \times 3\sqrt{10} = 60$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \vec{b} = |\overrightarrow{AB}| |\vec{b}|$$

즉, $\overrightarrow{AB}$ 와 $\vec{b}$ 는 서로 평행하다.

ㄷ. $\vec{c} = \left(-\frac{2}{3}, 2\right)$ 일 때,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{c} = (2, -6) \cdot \left(-\frac{2}{3}, 2\right) = -\frac{4}{3} - 12 = -\frac{40}{3}$$

$$\text{이때 } |\vec{c}| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 2^2} = \frac{2\sqrt{10}}{3} \text{이므로}$$

$$|\overrightarrow{AB}| |\vec{c}| = 2\sqrt{10} \times \frac{2\sqrt{10}}{3} = \frac{40}{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \vec{c} = -|\overrightarrow{AB}| |\vec{c}|$$

즉, $\overrightarrow{AB}$ 와 $\vec{c}$ 는 서로 평행하다.

따라서 보기에서 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 와 서로 평행한 벡터인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

중단원 기출문제 ①

1 답 ⑤

직선 $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = -z-3$ 의 방향벡터는 (3, 2, -1)

즉, 점 (2, -1, 4)를 지나고 방향벡터가 (3, 2, -1)인 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

⑤ $x=11, y=5, z=0$ 을 위의 식에 대입하면

$$\frac{11-2}{3} = \frac{5+1}{2} \neq \frac{0-4}{-1}$$

따라서 점 (11, 5, 0)은 이 직선 위의 점이 아니다.

2 답 $\frac{16}{3}$

점 (2, 1)을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(2, -3)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{-3} \quad \dots\dots ①$$

$y=0$ 을 ①에 대입하면

$$\frac{x-2}{2} = \frac{0-1}{-3} \quad \therefore x = \frac{8}{3}$$

즉, 직선 ①과 x 축이 만나는 점의 좌표는 $(\frac{8}{3}, 0)$

$x=0$ 을 ①에 대입하면

$$\frac{0-2}{2} = \frac{y-1}{-3} \quad \therefore y=4$$

즉, 직선 ①과 y 축이 만나는 점의 좌표는 (0, 4)

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times 4 = \frac{16}{3}$$

3 답 ④

두 점 A(3, 2), B(-1, k)를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{AB} = (-1, k) - (3, 2) = (-4, k-2)$$

즉, 점 (-2, 4)를 지나고 방향벡터가 $\vec{AB}=(-4, k-2)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+2}{-4} = \frac{y-4}{k-2}$$

이 직선의 x 절편이 6이므로 $x=6, y=0$ 을 대입하면

$$\frac{6+2}{-4} = \frac{0-4}{k-2}, 2(k-2)=4 \quad \therefore k=4$$

4 답 3

두 점 A(3, 1, 2), B(-1, 3, 1)을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{AB} = (-1, 3, 1) - (3, 1, 2) = (-4, 2, -1)$$

즉, 점 A(3, 1, 2)를 지나고 방향벡터가 $\vec{AB}=(-4, 2, -1)$ 인 직선 AB의 방정식은

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = -4t+3, y = 2t+1, z = -t+2 \quad \dots\dots ①$$

두 점 C(2, 2, -1), D(5, 1, -3)을 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{CD} = (5, 1, -3) - (2, 2, -1) = (3, -1, -2)$$

즉, 점 C(2, 2, -1)을 지나고 방향벡터가 $\vec{CD}=(3, -1, -2)$ 인

직선 CD의 방정식은

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-2}$$

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{-2} = s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=3s+2, y=-s+2, z=-2s-1 \quad \dots\dots ②$$

①, ②에서

$$-4t+3=3s+2, 2t+1=-s+2, -t+2=-2s-1$$

$$\therefore 4t+3s=1, 2t+s=1, t-2s=3$$

세 식 중 두 식을 연립하여 풀면

$$t=1, s=-1$$

$s=-1$ 을 ②에 대입하면

$$x=-1, y=3, z=1$$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 (-1, 3, 1)이므로

$$a=-1, b=3, c=1$$

$$\therefore a+b+c=3$$

5 답 60°

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(2, -1, 1), \vec{v}=(1, 1, 2)$$

두 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|2 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

6 답 ②

두 점 A(2, -1, 3), B(3, 1, 5)를 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (3, 1, 5) - (2, -1, 3) = (1, 2, 2)$$

두 점 C(0, 4, 1), D(2, 3, 3)을 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{v}$ 라 하면

$$\vec{v} = (2, 3, 3) - (0, 4, 1) = (2, -1, 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|1 \times 2 + 2 \times (-1) + 2 \times 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

7 답 1

두 직선 l, l_2 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(k-1, 3), \vec{v}=(k, -2)$$

두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{u} \cdot \vec{v}=0$ 에서

$$(k-1, 3) \cdot (k, -2) = 0$$

$$k(k-1) + 3 \times (-2) = 0$$

$$k^2 - k - 6 = 0, (k+2)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-2 + 3 = 1$$

8 답 (2, 1, 3)

$$x-1=\frac{y+1}{2}=4-z=t \text{ (} t \text{는 실수)로 놓으면}$$

$$x=t+1, y=2t-1, z=-t+4$$

점 A(2, 0, 1)에서 직선에 내린 수선의 발을

H(t+1, 2t-1, -t+4)로 놓으면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= (t+1, 2t-1, -t+4) - (2, 0, 1) \\ &= (t-1, 2t-1, -t+3)\end{aligned}$$

이때 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면 $\vec{u}=(1, 2, -1)$ 이고,

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ 이므로 $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}=0$ 에서

$$(t-1, 2t-1, -t+3) \cdot (1, 2, -1)=0$$

$$(t-1) \times 1 + (2t-1) \times 2 + (-t+3) \times (-1)=0$$

$$6t-6=0 \quad \therefore t=1$$

따라서 구하는 수선의 발의 좌표는 (2, 1, 3)

9 답 ①

두 점 A(2, 2, 1), B(3, -2, 4)를 지나는 직선 AB의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB}=(3, -2, 4)-(2, 2, 1)=(1, -4, 3)$$

즉, 직선 AB에 수직인 평면의 법선벡터는 (1, -4, 3)이므로

점 A(2, 2, 1)을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{AB}=(1, -4, 3)$ 인 평면의 방정식은

$$(x-2)-4(y-2)+3(z-1)=0$$

$$\therefore x-4y+3z+3=0$$

이 식이 $x+ay+bz+c=0$ 과 일치하므로

$$a=-4, b=3, c=3 \quad \therefore a+b+c=2$$

10 답 $\frac{1}{2}$

세 구의 부피를 모두 이등분하는 평면은 세 구의 중심을 모두 지나 는 평면이다.

즉, 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓으면 이 평면이 세

점 (-1, 0, 0), (1, 1, 0), (3, 5, 2)를 모두 지나므로 세 점의 좌 표를 각각 대입하면

$$-a+d=0, a+b+d=0, 3a+5b+2c+d=0$$

$$\therefore a=d, b=-2d, c=3d$$

이를 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면 평면의 방정식은

$$dx-2dy+3dz+d=0$$

이때 $d \neq 0$ 이므로 $x-2y+3z+1=0$

이 식에 $x=0, z=0$ 을 대입하면

$$-2y+1=0 \quad \therefore y=\frac{1}{2}$$

따라서 주어진 평면이 y축과 만나는 점의 y좌표는 $\frac{1}{2}$ 이다.

11 답 ①

$$x+y+2z-3=0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$2x-y+z+1=0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠ $\times 2$ -㉡을 하면

$$3y+3z-7=0 \quad \therefore z=-y+\frac{7}{3} \quad \dots\dots ㉢$$

㉠+㉢을 하면

$$3x+3z-2=0 \quad \therefore z=-x+\frac{2}{3} \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣에서 교선의 방정식은

$$-x+\frac{2}{3}=-y+\frac{7}{3}=z$$

이 교선의 방향벡터는 (-1, -1, 1)이므로 이 교선에 수직인 평면 의 법선벡터는 (-1, -1, 1)

즉, 점 (1, 2, -1)을 지나고 법선벡터가 (-1, -1, 1)인 평면의 방정식은

$$-(x-1)-(y-2)+(z+1)=0$$

$$\therefore x+y-z-4=0$$

이 평면이 점 (-4, 3, a)를 지나므로

$$-4+3-a-4=0$$

$$\therefore a=-5$$

12 답 ④

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1=(-2, 1, -2), \vec{n}_2=(1, 2, 2)$$

두 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|(-2) \times 1 + 1 \times 2 + (-2) \times 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

한편 평면 α 위의 원의 넓이를 S, 이 원의 평면 β 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면 $S'=S \cos \theta$ 이므로

$$\pi \times 4^2 = S \times \frac{4}{9}$$

$$\therefore S=36\pi$$

따라서 구하는 원의 넓이는 36π 이다.

13 답 ②

평면 $x-2y+z+4=0$ 의 법선벡터를 $\vec{n}_1$ 이라 하면

$$\vec{n}_1=(1, -2, 1)$$

직선 $\frac{x-2}{2}=y=2-z$ 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u}=(2, 1, -1)$$

평면 α 의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면 $\vec{n}=(a, b, c)$

평면 α 는 평면 $x-2y+z+4=0$ 과 서로 수직이므로 $\vec{n} \cdot \vec{n}_1=0$ 에서

$$(a, b, c) \cdot (1, -2, 1)=0$$

$$a \times 1 + b \times (-2) + c \times 1 = 0$$

$$\therefore a-2b+c=0 \quad \dots\dots ㉠$$

또 평면 α 가 직선 $\frac{x-2}{2}=y=2-z$ 를 포함하므로 $\vec{n} \cdot \vec{u}=0$ 에서

$$(a, b, c) \cdot (2, 1, -1)=0$$

$$a \times 2 + b \times 1 + c \times (-1) = 0$$

$$\therefore 2a+b-c=0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $b=3a, c=5a$

$$\therefore \vec{n}=(1, 3, 5)$$

즉, 평면 α 는 직선 $\frac{x-2}{2}=y=2-z$ 위의 점 (2, 0, 2)를 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(1, 3, 5)$ 이므로 평면 α 의 방정식은

$$(x-2)+3(y-0)+5(z-2)=0$$

$$\therefore x+3y+5z-12=0$$

이 평면이 점 $(0, k, k-4)$ 를 지나므로

$$0+3k+5(k-4)-12=0$$

$$8k-32=0 \quad \therefore k=4$$

14 답 3

직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{u}=(k, 1, 3), \vec{n}=(k, k, -4)$$

직선과 평면이 서로 평행하면 $\vec{u} \perp \vec{n}$ 이므로 $\vec{u} \cdot \vec{n}=0$ 에서

$$(k, 1, 3) \cdot (k, k, -4)=0$$

$$k \times k + 1 \times k + 3 \times (-4)=0$$

$$k^2+k-12=0, (k+4)(k-3)=0$$

$$\therefore k=3 (\because k>0)$$

15 답 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

두 점 $A(0, 1, 1), B(1, 2, -1)$ 을 지나는 직선 AB의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB}=(1, 2, -1)-(0, 1, 1)=(1, 1, -2)$$

평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{n}=(1, -2, 1)$$

직선 AB와 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \vec{n}$

이 이루는 각의 크기는 $90^\circ-\theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ-\theta) &= \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AB}| |\vec{n}|} \\ &= \frac{|1 \times 1 + 1 \times (-2) + (-2) \times 1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-2)^2} \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

즉, $90^\circ-\theta=60^\circ$ 이므로 $\theta=30^\circ$

한편 $\overrightarrow{AB}=\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{6}$ 이므로 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영의 길이는

$$\overrightarrow{AB} \cos \theta = \sqrt{6} \times \cos 30^\circ = \sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

16 답 $(3, \frac{3}{2}, 3)$

점 A의 좌표를 (a, b, c) 라 하면

선분 OA의 중점의 좌표는 $(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2})$

이 점이 평면 $2x+y+2z-9=0$ 위의 점이므로

$$a+\frac{b}{2}+c-9=0$$

$$\therefore 2a+b+2c=18 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 평면 $2x+y+2z-9=0$ 과 직선 OA가 서로 수직이므로 평면의 법선벡터 $(2, 1, 2)$ 와 직선 OA의 방향벡터 (a, b, c) 는 평행하다.

즉, $(a, b, c)=k(2, 1, 2) (k \neq 0)$ 이므로

$$a=2k, b=k, c=2k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$2 \times 2k + k + 2 \times 2k = 18$$

$$9k=18 \quad \therefore k=2$$

$k=2$ 를 ②에 대입하면

$$a=4, b=2, c=4$$

따라서 $A(4, 2, 4)$ 이므로 선분 OA를 3:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times 4 + 1 \times 0}{3+1}, \frac{3 \times 2 + 1 \times 0}{3+1}, \frac{3 \times 4 + 1 \times 0}{3+1} \right)$$

$$\therefore \left(3, \frac{3}{2}, 3 \right)$$

17 답 $3\sqrt{14}$

점 $A(6, 6, 10)$ 이 직선 $\frac{x-2}{a}=\frac{y+2}{b}=\frac{z+2}{6}$ 위의 점이므로

$$\frac{6-2}{a}=\frac{6+2}{b}=\frac{10+2}{6} \quad \therefore a=2, b=4$$

따라서 점 $A(6, 6, 10)$ 과 평면 $2x+4y+6z-12=0$,

즉 $x+2y+3z-6=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6+2 \times 6+3 \times 10-6|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}}=3\sqrt{14}$$

18 답 ①

구의 중심을 $O(0, 0, 0)$ 이라 하자.

구 위의 점 $P(0, 4, 3)$ 에서 구에 접하는 평면 α 는 직선 OP에 수직이므로 평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}_1$ 이라 하면

$$\vec{n}_1=\overrightarrow{OP}=(0, 4, 3)$$

또 구 위의 점 $Q(4, 0, 3)$ 에서 구에 접하는 평면 β 는 직선 OQ에 수직이므로 평면 β 의 법선벡터를 $\vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_2=\overrightarrow{OQ}=(4, 0, 3)$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|0 \times 4 + 4 \times 0 + 3 \times 3|}{\sqrt{0^2+4^2+3^2} \sqrt{4^2+0^2+3^2}} = \frac{9}{25} \end{aligned}$$

19 답 $2x+y+2z-9=0$

구의 중심 $(0, 0, 0)$ 과 점 $A(2, 1, 2)$ 를 지나는 벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면 $\vec{n}=(2, 1, 2)$

따라서 구하는 평면은 점 $A(2, 1, 2)$ 를 지나고 법선벡터가

$\vec{n}=(2, 1, 2)$ 이므로 평면의 방정식은

$$2(x-2)+(y-1)+2(z-2)=0$$

$$\therefore 2x+y+2z-9=0$$

20 답 ③

$\vec{p}-\vec{a}=(x, y, z)-(6, -2, 4)=(x-6, y+2, z-4)$ 이므로

$\vec{p} \cdot (\vec{p}-\vec{a})=0$ 에서

$$(x, y, z) \cdot (x-6, y+2, z-4)=0$$

$$x(x-6)+y(y+2)+z(z-4)=0$$

$$x^2+y^2+z^2-6x+2y-4z=0$$

$$\therefore (x-3)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=14$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(3, -1, 2)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{14}$ 인 구이므로 구하는 도형의 겉넓이는

$$4\pi \times (\sqrt{14})^2=56\pi$$

중단원 기출문제 2회

1 답 ⑤

직선 $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{3}$ 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u}=(2, 3)$$

평행한 두 직선은 방향벡터가 같으므로 점 $(-2, 2)$ 를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(2, 3)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{3} \quad \therefore y = \frac{3}{2}x + 5$$

따라서 $m = \frac{3}{2}$, $n = 5$ 이므로

$$mn = \frac{15}{2}$$

2 답 ②

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = z-1 = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = 2t+1, y = 3t+2, z = t+1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\frac{x-7}{2} = \frac{1-y}{2} = z-4 = s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = 2s+7, y = -2s+1, z = s+4 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$2t+1 = 2s+7, 3t+2 = -2s+1, t+1 = s+4$$

$$\therefore t-s = 3, 3t+2s = -1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$t = 1, s = -2$$

$t = 1$ 을 ㉠에 대입하면

$$x = 3, y = 5, z = 2$$

즉, 두 직선 l, m 의 교점의 좌표는 $(3, 5, 2)$

이때 두 점 $(3, 5, 2), (7, 8, -1)$ 을 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (7, 8, -1) - (3, 5, 2) = (4, 3, -3)$$

따라서 점 $(3, 5, 2)$ 를 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (4, 3, -3)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-2}{-3}$$

이 직선이 점 $(a, b, -1)$ 을 지나므로

$$\frac{a-3}{4} = \frac{b-5}{3} = 1$$

$$\therefore a = 7, b = 8$$

$$\therefore a + b = 15$$

3 답 10

$$x-2 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{2} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = t+2, y = 2t+1, z = 2t+1 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠을 $x^2 + y^2 + z^2 = 27$ 에 대입하면

$$(t+2)^2 + (2t+1)^2 + (2t+1)^2 = 27$$

$$3t^2 + 4t - 7 = 0, (3t+7)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -\frac{7}{3} \text{ 또는 } t = 1$$

$t = -\frac{7}{3}$ 을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{11}{3}, z = -\frac{11}{3}$$

$t = 1$ 을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x = 3, y = 3, z = 3$$

따라서 두 교점의 좌표가 $(-\frac{1}{3}, -\frac{11}{3}, -\frac{11}{3}), (3, 3, 3)$ 이므로

$$AB = \sqrt{\left(3 + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(3 + \frac{11}{3}\right)^2 + \left(3 + \frac{11}{3}\right)^2} = 10$$

4 답 ①

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (t, 1, t-1), \vec{v} = (1, -1, 2)$$

두 직선 l, m 이 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\cos 60^\circ = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|t \times 1 + 1 \times (-1) + (t-1) \times 2|}{\sqrt{t^2 + 1^2 + (t-1)^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|3t-3|}{\sqrt{2t^2-2t+2}\sqrt{6}}, \sqrt{6}\sqrt{2t^2-2t+2} = 2|3t-3|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$2t^2 - 5t + 2 = 0, (2t-1)(t-2) = 0$$

그런데 t 가 정수이므로 $t = 2$

5 답 ②

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (a, b, 5), \vec{v} = \left(-1, \frac{1}{2}, 3\right)$$

이때 두 직선 l, m 이 서로 평행하므로 $\vec{u} = t\vec{v} \quad (t \neq 0)$ 에서

$$(a, b, 5) = t\left(-1, \frac{1}{2}, 3\right)$$

따라서 $a = -t, b = \frac{t}{2}, 5 = 3t$ 이므로

$$t = \frac{5}{3}, a = -\frac{5}{3}, b = \frac{5}{6} \quad \therefore a - b = -\frac{5}{3} - \frac{5}{6} = -\frac{5}{2}$$

6 답 $\sqrt{5}$

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{6} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = 2t+2, y = 3t+3, z = 6t+1$$

$H(2t+2, 3t+3, 6t+1)$ 로 놓으면

$$\vec{AH} = (2t+2, 3t+3, 6t+1) - (4, 8, 6)$$

$$= (2t-2, 3t-5, 6t-5)$$

직선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면 $\vec{u} = (2, 3, 6)$ 이고,

$\vec{AH} \perp \vec{u}$ 이므로 $\vec{AH} \cdot \vec{u} = 0$ 에서

$$2(2t-2) + 3(3t-5) + 6(6t-5) = 0$$

$$49t - 49 = 0 \quad \therefore t = 1$$

따라서 $\vec{AH} = (0, -2, 1)$ 이므로 $|\vec{AH}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

7 답 ②

$$\frac{x}{2} = y+1 = \frac{z+2}{2} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = 2t, y = t-1, z = 2t-2$$

$$\frac{1-x}{2} = \frac{y-4}{2} = z+1 = s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = -2s+1, y = 2s+4, z = s-1$$

두 직선 l, m 위의 점을 각각 P, Q라 하고

$P(2t, t-1, 2t-2), Q(-2s+1, 2s+4, s-1)$ 로 놓으면

$$\vec{PQ} = (-2s-2t+1, 2s-t+5, s-2t+1) \quad \dots\dots ㉠$$

한편 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2, 1, 2), \vec{v} = (-2, 2, 1)$$

이때 직선 PQ와 직선 l 이 서로 수직이면 $\vec{PQ} \cdot \vec{u} = 0$ 이므로

$$(-2s-2t+1, 2s-t+5, s-2t+1) \cdot (2, 1, 2) = 0$$

$$\begin{aligned}
 &(-2s-2t+1) \times 2 + (2s-t+5) \times 1 + (s-2t+1) \times 2 = 0 \\
 &-9t+9=0 \quad \therefore t=1 \\
 &\text{또 직선 PQ와 직선 } m \text{이 서로 수직이면 } \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0 \text{이므로} \\
 &(-2s-2t+1, 2s-t+5, s-2t+1) \cdot (-2, 2, 1) = 0 \\
 &(-2s-2t+1) \times (-2) + (2s-t+5) \times 2 + (s-2t+1) \times 1 = 0 \\
 &9s+9=0 \quad \therefore s=-1
 \end{aligned}$$

$t=1, s=-1$ 을 ㉠에 대입하면

$$\overrightarrow{PQ} = (1, 2, -2)$$

따라서 두 직선 l, m 사이의 거리는

$$PQ = |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

8 답 7

평면 $2x-y+3z=5$ 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{n} = (2, -1, 3)$$

점 $(1, -2, 3)$ 을 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (2, -1, 3)$ 인 평면의 방정식은

$$2(x-1) - (y+2) + 3(z-3) = 0$$

$$\therefore 2x - y + 3z - 13 = 0$$

이 평면이 점 $(a, 4, 1)$ 을 지나므로

$$2a - 14 = 0 \quad \therefore a = 7$$

9 답 $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{8} = \frac{z-2}{11}$

세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하면

$$a+2c+d=0, 3b+d=0, 4a+2b+d=0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{12}d, b = -\frac{1}{3}d, c = -\frac{11}{24}d$$

이를 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면 평면의 방정식은

$$-\frac{1}{12}dx - \frac{1}{3}dy - \frac{11}{24}dz + d = 0$$

이때 $d \neq 0$ 이므로 $2x+8y+11z-24=0$

이 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면 $\vec{n} = (2, 8, 11)$ 이므로 이 평면에 수직인 직선의 방향벡터는 $\vec{n} = (2, 8, 11)$

따라서 점 A(1, 0, 2)를 지나고 방향벡터가 $\vec{n} = (2, 8, 11)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{8} = \frac{z-2}{11}$$

10 답 $\frac{11}{4}$

주어진 두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식을

$$2x+3y-z-3+k(x-2y-z+2)=0 \quad (k \text{는 실수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

으로 놓자.

이 평면이 점 $(4, 2, -1)$ 을 지나므로

$$2 \times 4 + 3 \times 2 - (-1) - 3 + k\{4 - 2 \times 2 - (-1) + 2\} = 0$$

$$12 + 3k = 0 \quad \therefore k = -4$$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$2x - 11y - 3z + 11 = 0$$

이 식에 $y=0, z=0$ 을 대입하면

$$2x + 11 = 0 \quad \therefore x = -\frac{11}{2}$$

$$\therefore A\left(-\frac{11}{2}, 0, 0\right)$$

또 $x=0, z=0$ 을 대입하면

$$-11y + 11 = 0 \quad \therefore y = 1$$

$$\therefore B(0, 1, 0)$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{11}{2} \times 1 = \frac{11}{4}$$

11 답 ③

$$2x+y-z-4=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x+y+z-6=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠-㉡ $\times 2$ 를 하면

$$-y-3z+8=0 \quad \therefore z = \frac{8-y}{3} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

㉠-㉡을 하면

$$x-2z+2=0 \quad \therefore z = \frac{x+2}{2} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

㉢, ㉣에서 교선의 방정식은

$$\frac{x+2}{2} = \frac{8-y}{3} = z$$

이 식에 $z=0$ 을 대입하면

$$\frac{x+2}{2} = \frac{8-y}{3} = 0 \quad \therefore x = -2, y = 8$$

$$\therefore A(-2, 8, 0)$$

또 $x=0$ 을 대입하면

$$1 = \frac{8-y}{3} = z \quad \therefore y = 5, z = 1$$

$$\therefore B(0, 5, 1)$$

$$\therefore AB = \sqrt{2^2 + (5-8)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

12 답 -2

평면 $x-2y-2z-3=0$ 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{n} = (1, -2, -2)$$

직선 AH가 점 A(-1, 0, 1)을 지나고 평면의 법선벡터 $\vec{n} = (1, -2, -2)$ 에 평행하므로 직선 AH의 방정식은

$$x+1 = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{-2}$$

$$x+1 = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{-2} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = t-1, y = -2t, z = -2t+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

H($t-1, -2t, -2t+1$)로 놓으면 점 H가 평면 $x-2y-2z-3=0$

위의 점이므로

$$(t-1) - 2 \times (-2t) - 2 \times (-2t+1) - 3 = 0$$

$$9t - 6 = 0 \quad \therefore t = \frac{2}{3}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{4}{3}, z = -\frac{1}{3}$$

$$\text{즉, } H\left(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right) \text{이므로}$$

$$a = -\frac{1}{3}, b = -\frac{4}{3}, c = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore a+b+c = -2$$

13 [답] ①

평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}_1$ 이라 하면

$$\vec{n}_1 = (2, -2, -1)$$

벡터 $\vec{OP}$ 가 평면 α 의 법선벡터 $\vec{n}_1 = (2, -2, -1)$ 과 평행하므로 직선 OP의 방정식은

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = -z$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = -z = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = 2t, y = -2t, z = -t$$

즉, 점 $P(2t, -2t, -t)$ 가 평면 α 위의 점이므로

$$2 \times 2t - 2 \times (-2t) - (-t) + 1 = 0$$

$$9t + 1 = 0 \quad \therefore t = -\frac{1}{9}$$

$$\therefore P\left(-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}\right)$$

또 평면 β 의 법선벡터를 $\vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_2 = (2, 1, 3)$$

벡터 $\vec{OQ}$ 가 평면 β 의 법선벡터 $\vec{n}_2 = (2, 1, 3)$ 과 평행하므로 직선 OQ의 방정식은

$$\frac{x}{2} = y = \frac{z}{3}$$

$$\frac{x}{2} = y = \frac{z}{3} = s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = 2s, y = s, z = 3s$$

즉, 점 $Q(2s, s, 3s)$ 가 평면 β 위의 점이므로

$$2 \times 2s + s + 3 \times 3s - 7 = 0$$

$$14s - 7 = 0 \quad \therefore s = \frac{1}{2}$$

$$\therefore Q\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{OP} \cdot \vec{OQ} &= \left(-\frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}\right) \cdot \left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ &= -\frac{2}{9} \times 1 + \frac{2}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

14 [답] $\frac{\sqrt{3}}{2}$

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (1, 1, 2), \vec{n}_2 = (2, -1, 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|1 \times 2 + 1 \times (-1) + 2 \times 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\theta = 60^\circ$ 이므로 $\sin \theta = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

15 [답] ①

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (k, 3, k-4), \vec{n}_2 = (k-1, -k, 2)$$

두 평면이 서로 수직이므로 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ 에서

$$(k, 3, k-4) \cdot (k-1, -k, 2) = 0$$

$$k(k-1) + 3 \times (-k) + (k-4) \times 2 = 0$$

$$k^2 - 2k - 8 = 0, (k+2)(k-4) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 4$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$-2 \times 4 = -8$$

16 [답] 30°

평면 α 의 방정식을 $ax + by + cz + d = 0$ 으로 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하면

$$-a + d = 0, \sqrt{2}b + d = 0, \sqrt{2}c + d = 0$$

$$\therefore a = d, b = -\frac{\sqrt{2}}{2}d, c = -\frac{\sqrt{2}}{2}d$$

이를 $ax + by + cz + d = 0$ 에 대입하면 평면 α 의 방정식은

$$dx - \frac{\sqrt{2}}{2}dy - \frac{\sqrt{2}}{2}dz + d = 0$$

이때 $d \neq 0$ 이므로

$$2x - \sqrt{2}y - \sqrt{2}z + 2 = 0$$

이 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{n} = (2, -\sqrt{2}, -\sqrt{2})$$

한편 y 축에 평행한 직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (0, 1, 0)$$

직선 l 과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 두 벡터 $\vec{u}, \vec{n}$ 이 이루는 각의 크기는 $90^\circ - \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos(90^\circ - \theta) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} \\ &= \frac{|0 - \sqrt{2} + 0|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{2^2 + (-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2}} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $90^\circ - \theta = 60^\circ$ 이므로 $\theta = 30^\circ$

17 [답] -3

주어진 두 구의 중심을 각각 P, Q라 하면

$$P(4, -5, 1), Q(-2, 3, 5)$$

평면 α 는 선분 PQ의 중점을 지나고 직선 PQ와 수직이다.

선분 PQ의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4-2}{2}, \frac{-5+3}{2}, \frac{1+5}{2}\right) \quad \therefore (1, -1, 3)$$

또 $\vec{PQ} = (-2, 3, 5) - (4, -5, 1) = (-6, 8, 4)$ 이므로

점 $(1, -1, 3)$ 을 지나고 법선벡터가 $\vec{PQ} = (-6, 8, 4)$ 인 평면 α 의 방정식은

$$-6(x-1) + 8(y+1) + 4(z-3) = 0$$

$$\therefore 3x - 4y - 2z - 1 = 0$$

따라서 $a = 3, b = -4, c = -2$ 이므로

$$a + b + c = -3$$

18 [답] ①

주어진 두 평면의 법선벡터가 $\vec{n} = (2, 3, -6)$ 으로 같으므로 두 평면은 평행하다.

이때 두 평면 사이의 거리는 평면 $2x + 3y - 6z - 3 = 0$ 위의 점

$(0, 1, 0)$ 과 평면 $2x + 3y - 6z + 11 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|2 \times 0 + 3 \times 1 - 6 \times 0 + 11|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-6)^2}} = 2$$

19 답 ②

직선 OA의 방향벡터는 $\overrightarrow{OA}=(7, -3, 1)$ 이므로 이 직선에 수직인 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

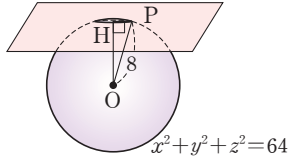
$$\vec{n}=(7, -3, 1)$$

즉, 점 A(7, -3, 1)을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(7, -3, 1)$ 인 평면의 방정식은

$$7(x-7)-3(y+3)+(z-1)=0$$

$$\therefore 7x-3y+z-59=0$$

오른쪽 그림과 같이 구의 중심 O에서 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OH}=\frac{|-59|}{\sqrt{7^2+(-3)^2+1^2}}=\sqrt{59}$$

구와 평면이 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하면

$$\overline{OP}=8$$

직각삼각형 OPH에서

$$\overline{HP}=\sqrt{8^2-(\sqrt{59})^2}=\sqrt{5}$$

따라서 구와 평면이 만나서 생기는 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이므로 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{5})^2=5\pi$$

20 답 ③

$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{b}|$ 를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $|\vec{b}|$ 인 구이다.

이때 $|\vec{b}|=\sqrt{3^2+5^2+(-4)^2}=5\sqrt{2}$ 이므로 점 P가 나타내는 도형의 방정식은

$$(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=50$$

이 식에 $y=0, z=0$ 을 대입하면

$$(x+1)^2+1=50$$

$$x^2+2x-48=0$$

$$(x+8)(x-6)=0$$

$$\therefore x=-8 \text{ 또는 } x=6$$

따라서 점 P가 나타내는 도형이 x 축과 만나는 두 점의 좌표는

$(-8, 0, 0), (6, 0, 0)$ 이므로 두 점 사이의 거리는

$$6-(-8)=14$$

memo 

memo ✨

Handwriting practice lines consisting of 25 horizontal dotted lines.