

0502 [답] $\vec{0}$

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$$

0503 [답] $\overrightarrow{AE}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DC}) \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

0504 [답] $-\vec{a} + \vec{b}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b}$$

0505 [답] $-\vec{b} + \vec{c}$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \vec{c} - \vec{b} = -\vec{b} + \vec{c}$$

0506 [답] $\vec{a} - \vec{c}$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \vec{a} - \vec{c}$$

0507 [답] $2\vec{a} + 3\vec{b}$ **0508** [답] $-\vec{a} - 5\vec{b}$ **0509** [답] $5\vec{a} - \vec{b}$

$$2(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 4\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - \vec{b}$$

0510 [답] $2\vec{a} - 10\vec{b}$

$$4(\vec{a} - \vec{b}) - 2(\vec{a} + 3\vec{b}) = 4\vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{a} - 6\vec{b} = 2\vec{a} - 10\vec{b}$$

0511 [답] $\vec{a} + 7\vec{b} + 4\vec{c}$

$$\begin{aligned}3(2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}) - 5(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) \\ = 6\vec{a} - 3\vec{b} + 9\vec{c} - 5\vec{a} + 10\vec{b} - 5\vec{c} \\ = \vec{a} + 7\vec{b} + 4\vec{c}\end{aligned}$$

0512 [답] $\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(\vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{c}) + \frac{3}{4}(\vec{a} - 6\vec{b} + \vec{c}) \\ = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{5}{4}\vec{c} + \frac{3}{4}\vec{a} - \frac{9}{2}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c} \\ = \vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c}\end{aligned}$$

0513 [답] $\vec{x} = \vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$

$$\begin{aligned}2\vec{x} - \vec{a} = \vec{a} + 3\vec{b} \text{에서 } 2\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \\ \therefore \vec{x} = \vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}\end{aligned}$$

0514 [답] $\vec{x} = \frac{5}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$

$$\begin{aligned}4(\vec{x} - \vec{b}) = 5\vec{a} + 2\vec{x} \text{에서 } 4\vec{x} - 4\vec{b} = 5\vec{a} + 2\vec{x} \\ 2\vec{x} = 5\vec{a} + 4\vec{b} \quad \therefore \vec{x} = \frac{5}{2}\vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

0515 [답] $\vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}$

$$\begin{aligned}3(\vec{a} + 4\vec{x} - 3\vec{b}) = 4\vec{x} - \vec{a} + 7\vec{b} \text{에서} \\ 3\vec{a} + 12\vec{x} - 9\vec{b} = 4\vec{x} - \vec{a} + 7\vec{b} \\ 8\vec{x} = -4\vec{a} + 16\vec{b} \\ \therefore \vec{x} = -\frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b}\end{aligned}$$

0516 [답] $\vec{x} = -7\vec{a} + 7\vec{b}$

$$\begin{aligned}6(3\vec{a} - \vec{x}) + 7(\vec{x} - \vec{b}) = 11\vec{a} \text{에서} \\ 18\vec{a} - 6\vec{x} + 7\vec{x} - 7\vec{b} = 11\vec{a} \\ \therefore \vec{x} = -7\vec{a} + 7\vec{b}\end{aligned}$$

0517 [답] ㄱ과 ㄷ, ㄴ과 ㅅ

$$\begin{aligned}\text{ㄷ. } 3\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b} &= 3\left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) \\ \text{ㄹ. } 2\vec{a} - 2\vec{b} &= 2(\vec{a} - \vec{b}) \\ \text{ㅁ. } -2\vec{a} - \vec{b} &= -2\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \\ \text{ㅂ. } -4\vec{a} - 4\vec{b} &= -4(\vec{a} + \vec{b})\end{aligned}$$

따라서 보기에서 서로 평행한 벡터는 ㄱ과 ㄷ, ㄴ과 ㅅ이다.

0518 [답] $m=2, n=\frac{5}{3}$

$$\begin{aligned}(m-2)\vec{a} + (5-3n)\vec{b} = \vec{0} \text{에서} \\ m-2=0, 5-3n=0 \\ \therefore m=2, n=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

0519 [답] $m=1, n=3$

$$\begin{aligned}(3m+2)\vec{a} + (n-4)\vec{b} = 5\vec{a} - \vec{b} \text{에서} \\ 3m+2=5, n-4=-1 \\ \therefore m=1, n=3\end{aligned}$$

0520 [답] -2

두 벡터 $\frac{3}{2}\vec{a} + m\vec{b}$, $3\vec{a} - 4\vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\frac{3}{2}\vec{a} + m\vec{b} = k(3\vec{a} - 4\vec{b}) \quad (\text{단, } k \neq 0)$$

$$\therefore \frac{3}{2}\vec{a} + m\vec{b} = 3k\vec{a} - 4k\vec{b}$$

따라서 $\frac{3}{2} = 3k, m = -4k$ 이므로

$$k = \frac{1}{2}, m = -2$$

0521 [답] (1) $-2\vec{a} + \vec{b}$ (2) $-8\vec{a} + 4\vec{b}$ (3) 풀이 참조

$$\begin{aligned}(1) \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - 2\vec{a} = -2\vec{a} + \vec{b} \\ (2) \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-6\vec{a} + 4\vec{b}) - 2\vec{a} = -8\vec{a} + 4\vec{b} \\ (3) \overrightarrow{AC} &= 4(-2\vec{a} + \vec{b}) = 4\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

따라서 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

0522 답 $4\sqrt{3}+8$

오른쪽 그림과 같이 정육각형 ABCDEF의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라 하고 두 선분 BD, CF의 교점을 H라 하자.

정육각형의 한 내각의 크기는 120° 이므로

$$\angle OBC = \angle BCO = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$$

즉, 정삼각형 OBC에서

$$\overline{BH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{BD} = 2\overline{BH} = 4\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

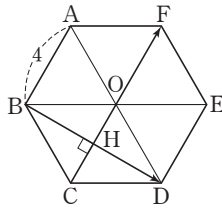
$$|\overrightarrow{BD}| = \overline{BD} = 4\sqrt{3}$$

두 삼각형 OBC, OFA는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로

$$\overline{CF} = 2 \times 4 = 8$$

$$\therefore |\overrightarrow{CF}| = \overline{CF} = 8$$

$$\therefore |\overrightarrow{BD}| + |\overrightarrow{CF}| = 4\sqrt{3} + 8$$



0523 답 2

마름모 ABCD에서 $\overline{AB} = \overline{AD} = 2$ 이고 $\angle A = 60^\circ$ 이므로 삼각형 ABD는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이다.

$$\therefore |\overrightarrow{BD}| = \overline{BD} = 2$$

0524 답 16

정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 2이므로 사각형 AEOH, EBFO, OFCG, HOGD는 한 변의 길이가 1인 정사각형이다.

한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{AO} = \overline{EH} = \overline{EF} = \overline{BO} = \overline{OC} = \overline{FG} = \overline{HG} = \overline{OD} = \sqrt{2}$$

따라서 크기가 $\sqrt{2}$ 인 벡터는 $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{HE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CO}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{GF}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DO}$ 의 16개이다.

0525 답 ①

$$\overline{BG} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$|\overrightarrow{BG}| = \overline{BG} = \sqrt{5}$$

$$\overline{CE} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14} \text{ 이므로}$$

$$|\overrightarrow{CE}| = \overline{CE} = \sqrt{14}$$

$$\therefore |\overrightarrow{BG}|^2 + |\overrightarrow{CE}|^2 = (\sqrt{5})^2 + (\sqrt{14})^2 = 19$$

0526 답 ③

① 두 벡터 $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{EF}$ 는 크기는 같지만 방향이 반대이다.

② 두 벡터 $\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{EO}$ 는 크기는 같지만 방향이 반대이다.

③ 두 벡터 $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{OE}$ 는 크기와 방향이 각각 같으므로 서로 같은 벡터이다.

④ 두 벡터 $\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{DA}$ 는 크기는 같지만 방향이 다르다.

⑤ 두 벡터 $\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EC}$ 는 크기는 같지만 방향이 다르다.

따라서 서로 같은 벡터끼리 짝 지은 것은 ③이다.

0527 답 $\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FD}$

세 점 D, E, F는 각각 세 변 AB, BC, CA의 중점이므로

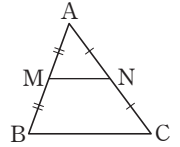
$$\overline{DF} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \overline{BE} = \overline{EC}, \overline{DF} \parallel \overline{BE}, \overline{DF} \parallel \overline{EC}$$

따라서 벡터 $\overrightarrow{DF}$ 와 크기는 같지만 방향이 반대인 벡터는 $\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FD}$ 이다.

중2 다시보기

삼각형 ABC에서 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면

$$\overline{MN} \parallel \overline{BC}, \overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{BC}$$



0528 답 4

벡터 $\overrightarrow{BC}$ 와 같은 벡터는 $\overrightarrow{EF}$ 의 1개이므로 $m=1$ ①

벡터 $\overrightarrow{AD}$ 와 크기는 같지만 방향이 반대인 벡터는 $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{FC}$ 의 3개이므로 $n=3$ ②

$$\therefore m+n=1+3=4 \text{ ③}$$

채점 기준

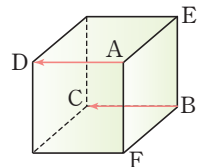
① m의 값 구하기	40 %
② n의 값 구하기	50 %
③ m+n의 값 구하기	10 %

0529 답 ①

주어진 전개도로 정육면체를 만들면 오른쪽

그림과 같으므로

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$



0530 답 ㄴ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \vec{a} + \vec{c}$$

$$\text{ㄴ. } \overrightarrow{FH} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\text{ㄷ. } \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA} + (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) \\ = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0531 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } \overrightarrow{AA} = \vec{0} \text{ 이므로 } |\overrightarrow{AA}| = 0$$

$$\text{ㄴ. } \overrightarrow{AB} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

$$\text{ㄷ. } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

$$\text{ㄹ. } \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0532 답 ⑤

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} &= (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EC} \end{aligned}$$

0533 답 ⑤

$$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{EB}$$

0534 답 ⑤

- ① $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$ 이므로 $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AE}|$
 ② $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{DA}$
 ③ $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$
 ④ $\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BA}$
 ⑤ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

0535 답 평행사변형

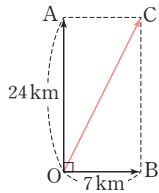
$\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{CP}$ 에서
 $\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{CD}$ 이므로
 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ ①
 즉, 사각형 ABCD에서
 $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{CD}$
 따라서 사각형 ABCD는 평행사변형이다. ②

채점 기준

① 주어진 등식을 간단히 하기	60 %
② 사각형 ABCD가 어떤 사각형인지 말하기	40 %

0536 답 시속 25 km

오른쪽 그림과 같이 드론의 처음 위치를 O, 바람이 없는 상태에서 드론이 1시간 동안 비행하여 도착한 위치를 A, 드론이 위치 O에서 바람에 의해서만 1시간 동안 이동하여 도착한 위치를 B, 드론이 실제로 1시간 후 도착한 위치를 C라 하면
 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$
 이때 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ 이므로
 $\overrightarrow{OC} = \sqrt{7^2 + 24^2} = 25(\text{km})$
 따라서 $|\overrightarrow{OC}| = \overrightarrow{OC} = 25 \text{ km}$ 이므로 드론이 실제로 비행하는 속력은 시속 25 km이다.



0537 답 ⑤

$$\begin{aligned} 3\vec{x} - 4\vec{y} &= \vec{a} & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ -\vec{x} + 2\vec{y} &= \vec{b} & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

① + ② × 2를 하면
 $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b}$
 이를 ②에 대입하면
 $-(\vec{a} + 2\vec{b}) + 2\vec{y} = \vec{b}$
 $2\vec{y} = \vec{a} + 3\vec{b}$
 $\therefore \vec{y} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$
 $\therefore \vec{x} + 4\vec{y} = (\vec{a} + 2\vec{b}) + 4\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}\right)$
 $= \vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{a} + 6\vec{b}$
 $= 3\vec{a} + 8\vec{b}$

0538 답 2

$$\begin{aligned} 2(\vec{x} + \vec{b}) - \vec{a} &= \frac{2}{3}(\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{x}) + \vec{b} \text{에서} \\ 2\vec{x} + 2\vec{b} - \vec{a} &= \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b} + \frac{4}{3}\vec{x} + \vec{b} \\ \frac{2}{3}\vec{x} &= \frac{5}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} \\ \therefore \vec{x} &= \frac{5}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \end{aligned}$$

따라서 $m = \frac{5}{2}$, $n = \frac{1}{2}$ 이므로
 $m - n = 2$

0539 답 ④

$$\begin{aligned} 3\vec{x} + 2\vec{y} &= \vec{a} - 3\vec{b} & \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2\vec{x} - \vec{y} &= 3\vec{a} - 2\vec{b} & \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

① + ② × 2를 하면
 $7\vec{x} = 7\vec{a} - 7\vec{b} \quad \therefore \vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$
 이를 ②에 대입하면
 $2(\vec{a} - \vec{b}) - \vec{y} = 3\vec{a} - 2\vec{b} \quad \therefore \vec{y} = -\vec{a}$
 $\therefore \vec{x} - 3\vec{y} = (\vec{a} - \vec{b}) - 3(-\vec{a}) = 4\vec{a} - \vec{b}$

0540 답 ⑤

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AB} \\ &= -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = -\vec{b} + \vec{a} = \vec{a} - \vec{b} \\ \textcircled{2} \quad \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b} \\ \textcircled{3} \quad \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} \\ &= 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = 2\vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + 2\vec{b} \\ \textcircled{4} \quad \overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} \\ &= -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = -\vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} - \vec{b} \\ \textcircled{5} \quad \overrightarrow{EC} &= \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{AB} \\ &= -\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{AB} = -\vec{b} + 2\vec{a} = 2\vec{a} - \vec{b} \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

0541 답 ㄴ, ㄷ

$$\begin{aligned} \text{ㄱ.} \quad \overrightarrow{AE} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\vec{a} \\ \text{ㄴ.} \quad \overrightarrow{CF} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{4}\vec{a} \\ \text{ㄷ.} \quad \overrightarrow{OA} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \\ &= -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} \\ \text{ㄹ.} \quad \overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CF} \\ &= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) - \frac{1}{4}\vec{a} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0542 답 $-\frac{1}{2}$

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 세 중선을 각각 꼭짓점으로 부터 2 : 1로 내분한다.

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{DG} &= \frac{1}{3} \overrightarrow{DA} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{AD} \\ &= -\frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) \\ &= -\frac{1}{3} \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \right) \\ &= -\frac{1}{3} \left(\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right) = -\frac{1}{3} \vec{a} - \frac{1}{6} \vec{b}\end{aligned}$$

따라서 $m = -\frac{1}{3}$, $n = -\frac{1}{6}$ 이므로 $m+n = -\frac{1}{2}$

0543 답 ①

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \vec{b} - \vec{a}$$

오른쪽 그림과 같이 변 BC의 중점을 M이라 하면

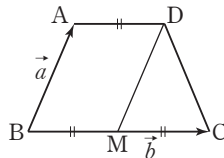
$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \vec{b}$$

$$\text{이때 } 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \text{ 이므로 } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BM}$$

따라서 사각형 ABMD는 평행사변형이므로

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = (\vec{b} - \vec{a}) - \left(\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b} \right) = -2\vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$$



0544 답 $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

네 점 A, B, C, D는 점 O를 중심으로 하는 한 원 위의 점이므로 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD}$

두 선분 OB, OC가 $\angle DOA$ 를 삼등분하므로

$$\angle COA = 60^\circ$$

즉, 삼각형 OAC는 정삼각형이다.

오른쪽 그림과 같이 점 C에서 변 OA에 내린 수선의 발을 E라 하면 점 E는 변 OA의 중점이므로

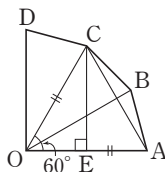
$$\overrightarrow{EA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{EC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overrightarrow{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overrightarrow{OD}$$

$$\text{즉, } \overrightarrow{EA} = \frac{1}{2} \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{EC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overrightarrow{OD} \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overrightarrow{OD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{OA}$$

$$= -\frac{1}{2} \overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{2} \overrightarrow{OD}$$

$$\text{따라서 } m = -\frac{1}{2}, n = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 이므로 } mn = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$



채점 기준

① 삼각형 OAC가 정삼각형임을 알기	30 %
② $\overrightarrow{AC}$ 를 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD}$ 로 나타내기	60 %
③ mn 의 값 구하기	10 %

0545 답 $6\vec{a} + 2\vec{b}$

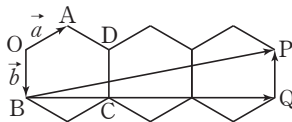
오른쪽 그림과 같이 세 점 C, D, Q를 잡으면

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QP} = 3\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BO}$$

$$= 3(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) - \overrightarrow{OB}$$

$$= 3(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) - \overrightarrow{OB}$$

$$= 6\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} = 6\vec{a} + 2\vec{b}$$



0546 답 $\frac{1}{2}$

$$\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

$$\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{AD} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AE} = \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{c}$$

$$\therefore \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{FM} = (\vec{b} - \vec{a}) + \left(\vec{b} - \frac{1}{2} \vec{c} \right) = -\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{1}{2} \vec{c}$$

따라서 $l = -1$, $m = 2$, $n = -\frac{1}{2}$ 이므로 $l+m+n = \frac{1}{2}$

0547 답 ③

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{b}, \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AD} = \vec{c} \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

이때 $\overrightarrow{CP} = 2\overrightarrow{PF}$ 이므로

$$\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CF} = \frac{2}{3} (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = \frac{2}{3} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c}$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} = \vec{b} + \left(\frac{2}{3} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c} \right) = \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c}$$

0548 답 $\frac{1}{2}$

$$\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2} \vec{c} \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) - \overrightarrow{OA}$$

$$= \left(\vec{b} - \frac{1}{2} \vec{c} \right) - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{c}$$

따라서 $l = -1$, $m = 1$, $n = -\frac{1}{2}$ 이므로 $lmn = \frac{1}{2}$

0549 답 $\frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{c}$

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE})$$

$$= -\vec{b} + (\vec{a} + \vec{c}) = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$$

$$\therefore \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2} (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}) = \frac{1}{2} \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c}$$

$$\text{이때 } \overrightarrow{FL} = \frac{1}{2} \overrightarrow{FG} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \vec{b} \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{ML} = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FL} = \left(\frac{1}{2} \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{c} \right) + \frac{1}{2} \vec{b}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{c}$$

채점 기준

① $\overrightarrow{MF}$ 를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 로 나타내기	50 %
② $\overrightarrow{ML}$ 을 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 로 나타내기	50 %

0550 답 $\angle A, \angle C$

$$\angle A, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ 이므로}$$

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$$

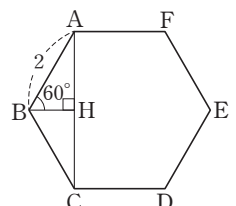
오른쪽 그림과 같이 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 직

각삼각형 ABH에서

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= \overrightarrow{AB} \sin 60^\circ \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \quad \text{정육각형의 한 내각의 크기는 } 120^\circ \text{이다.}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AH} = 2\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = \overrightarrow{AC} = 2\sqrt{3}$$



$$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \text{이므로}$$

$$|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AD}| = \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} = 2 \times 2 = 4$$

$$\therefore \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EA} - 3\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EB} - 3\overrightarrow{EB}$$

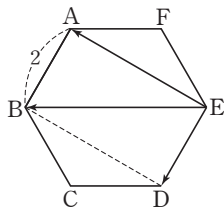
$$= -2\overrightarrow{EB} = 2\overrightarrow{BE}$$

$$\therefore |\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{EA} - 3\overrightarrow{EB}| = |2\overrightarrow{BE}|$$

$$= 2\overrightarrow{BE}$$

$$= 4\overrightarrow{AF}$$

$$= 4 \times 2 = 8$$



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0551 답 ⑤

$$3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$$

$$= 3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = 4\overrightarrow{AB}$$

$$\therefore |3\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}| = |4\overrightarrow{AB}| = 4|\overrightarrow{AB}| = 4 \times 1 = 4$$

0552 답 $8\sqrt{3}$

$$5(\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}) - (3\vec{a} - 7\vec{b} + 8\vec{c})$$

$$= 5\vec{a} - 5\vec{b} + 10\vec{c} - 3\vec{a} + 7\vec{b} - 8\vec{c}$$

$$= 2\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c} = 2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

이때

$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$$

$$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$$

이므로

$$|5(\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}) - (3\vec{a} - 7\vec{b} + 8\vec{c})| = |2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})|$$

$$= |2\overrightarrow{AG}| = 2|\overrightarrow{AG}|$$

$$= 2\sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2}$$

$$= 8\sqrt{3}$$

..... ①

..... ②

채점 기준

① $5(\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}) - (3\vec{a} - 7\vec{b} + 8\vec{c})$ 를 간단히 하기	40 %
② $ 5(\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}) - (3\vec{a} - 7\vec{b} + 8\vec{c}) $ 의 값 구하기	60 %

0553 답 ③

$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \vec{0}$ 에서 $\overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{PC}$ 이므로 두 벡터 $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PC}$ 는 크기는 같지만 방향이 반대이다.

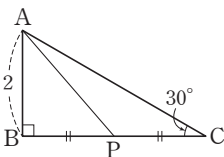
즉, 점 P는 변 BC의 중점이므로 오른쪽 그림과 같은 직각삼각형 ABC에서

$$\overrightarrow{BC} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\tan 30^\circ} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \overrightarrow{BP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

따라서 $PA = \sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{7}$ 이므로

$$|\overrightarrow{PA}|^2 = \overrightarrow{PA}^2 = (\sqrt{7})^2 = 7$$



0554 답 40

$\overrightarrow{OF} = -\overrightarrow{OF'}$ 이므로

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OF'} = \overrightarrow{F'P}$$

$$\therefore |\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF}| = |\overrightarrow{F'P}| = \overrightarrow{PF'} = 2$$

타원의 정의에 의하여 $\overrightarrow{PF} + \overrightarrow{PF'} = 2 \times 3 = 6$ 이므로

$$\overrightarrow{PF} + 2 = 6 \quad \therefore \overrightarrow{PF} = 4$$

따라서 $|\overrightarrow{PF}| = \overrightarrow{PF} = 4$ 이므로

$$k = 4 \quad \therefore 10k = 40$$

0555 답 ①

$$(2m + 3n)\vec{a} - (m - n + 2)\vec{b} = -(m - n)\vec{a} + (m + 5)\vec{b} \text{에서}$$

$$2m + 3n = -(m - n), \quad -(m - n + 2) = m + 5$$

$$\therefore 3m + 2n = 0, \quad 2m - n = -7$$

두 식을 연립하여 풀면

$$m = -2, \quad n = 3 \quad \therefore m - n = -5$$

0556 답 ③

$$(2\vec{a} - k\vec{b}) - (k\vec{a} - 4\vec{b}) = -\vec{a} + \vec{b} \text{에서}$$

$$(2 - k)\vec{a} - (k - 4)\vec{b} = -\vec{a} + \vec{b}$$

따라서 $2 - k = -1, \quad -(k - 4) = 1$ 이므로 $k = 3$

0557 답 ②

$$m(\vec{a} + n\vec{b}) = (3 - n)\vec{a} + 2\vec{b} \text{에서}$$

$$m\vec{a} + mn\vec{b} = (3 - n)\vec{a} + 2\vec{b}$$

즉, $m = 3 - n, \quad mn = 2$ 이므로

$$m + n = 3, \quad mn = 2$$

$$\therefore m^2 + n^2 = (m + n)^2 - 2mn = 3^2 - 2 \times 2 = 5$$

0558 답 $-\frac{1}{4}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2\vec{a} + 3\vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} + 4\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (k\vec{a} - 2\vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) = (k - 1)\vec{a} - \vec{b}$$

이때 $4\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AB}$ 에서

$$4\{(k - 1)\vec{a} - \vec{b}\} = m(\vec{a} + 4\vec{b})$$

$$\therefore (4k - 4)\vec{a} - 4\vec{b} = m\vec{a} + 4m\vec{b}$$

따라서 $4k - 4 = m, \quad -4 = 4m$ 이므로

$$k = \frac{3}{4}, \quad m = -1 \quad \therefore k + m = -\frac{1}{4}$$

채점 기준

① $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내기	40 %
② $4\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AB}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내기	30 %
③ $k + m$ 의 값 구하기	30 %

0559 답 ⑤

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ 라 하면

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \overrightarrow{AB} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

$$= -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$$

$$= \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

이를 $\overrightarrow{DN} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{BM}$ 에 대입하면

$$\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = p\vec{a} + q\left(-\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right)$$

$$\therefore \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} = \left(p - \frac{3}{4}q\right)\vec{a} + \frac{q}{4}\vec{b}$$

따라서 $1 = p - \frac{3}{4}q$, $-\frac{1}{2} = \frac{q}{4}$ 이므로

$$p = -\frac{1}{2}, q = -2$$

$$\therefore pq = 1$$

0560 [답] 7

두 벡터 $\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{p} - \vec{r}$ 가 서로 평행하려면

$$\vec{p} - \vec{r} = k(\vec{p} + \vec{q}) \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이어야 한다.

$$\vec{p} + \vec{q} = (-2\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} + \vec{b}) = -\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\vec{p} - \vec{r} = (-2\vec{a} + \vec{b}) - (-5\vec{a} + m\vec{b}) = 3\vec{a} + (1-m)\vec{b}$$

이를 ①에 대입하면

$$3\vec{a} + (1-m)\vec{b} = k(-\vec{a} + 2\vec{b})$$

$$\therefore 3\vec{a} + (1-m)\vec{b} = -k\vec{a} + 2k\vec{b}$$

따라서 $3 = -k$, $1-m = 2k$ 이므로

$$k = -3, m = 7$$

0561 [답] ②

$$\vec{a} + 2(\vec{b} - \vec{a}) = -\vec{a} + 2\vec{b}$$

즉, 두 벡터 $-\vec{a} + 2\vec{b}$, $-2\vec{a} + k\vec{b}$ 가 서로 평행하려면

$$-2\vec{a} + k\vec{b} = m(-\vec{a} + 2\vec{b}) \quad (m \neq 0)$$

이어야 한다.

$$\therefore -2\vec{a} + k\vec{b} = -m\vec{a} + 2m\vec{b}$$

따라서 $-2 = -m$, $k = 2m$ 이므로

$$m = 2, k = 4$$

0562 [답] ㄱ, ㄹ

$$\text{ㄱ. } \vec{a} + \vec{c} = \vec{a} + (2\vec{a} + 3\vec{b}) = 3\vec{a} + 3\vec{b} = 3(\vec{a} + \vec{b})$$

즉, 두 벡터 $\vec{a} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b}$ 는 서로 평행하다.

$$\text{ㄴ. } \vec{a} - \vec{c} = \vec{a} - (2\vec{a} + 3\vec{b}) = -\vec{a} - 3\vec{b}$$

즉, 두 벡터 $\vec{a} - \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b}$ 는 서로 평행하지 않다.

$$\text{ㄷ. } \vec{b} + \vec{c} = \vec{b} + (2\vec{a} + 3\vec{b}) = 2\vec{a} + 4\vec{b} = 2(\vec{a} + 2\vec{b})$$

즉, 두 벡터 $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b}$ 는 서로 평행하지 않다.

$$\text{ㄹ. } \vec{b} - \vec{c} = \vec{b} - (2\vec{a} + 3\vec{b}) = -2\vec{a} - 2\vec{b} = -2(\vec{a} + \vec{b})$$

즉, 두 벡터 $\vec{b} - \vec{c}$, $\vec{a} + \vec{b}$ 는 서로 평행하다.

따라서 보기에서 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$ 와 서로 평행한 벡터인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

0563 [답] 4

두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 가 서로 평행하려면

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이어야 한다.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4\vec{a} + m\vec{b}) - (\vec{a} + 3\vec{b}) = 3\vec{a} + (m-3)\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (m\vec{a} + 8\vec{b}) - (\vec{a} + 3\vec{b}) = (m-1)\vec{a} + 5\vec{b}$$

이를 ①에 대입하면

$$(m-1)\vec{a} + 5\vec{b} = k\{3\vec{a} + (m-3)\vec{b}\}$$

$$\therefore (m-1)\vec{a} + 5\vec{b} = 3k\vec{a} + (km-3k)\vec{b}$$

즉, $m-1 = 3k$, $5 = km-3k$ 이므로

$$k = \frac{m-1}{3} \text{을 } 5 = km-3k \text{에 대입하면}$$

$$5 = \frac{m(m-1)}{3} - 3 \times \frac{m-1}{3}$$

$$m^2 - 4m - 12 = 0, (m+2)(m-6) = 0$$

$$\therefore m = -2 \text{ 또는 } m = 6$$

따라서 모든 실수 m 의 값의 합은

$$-2 + 6 = 4$$

0564 [답] 3

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{b} = t\vec{a} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

이를 $\vec{a} + k(\vec{c} - 2\vec{a}) + \vec{b} - 5\vec{c} = \vec{0}$ 에 대입하면

$$\vec{a} + k(\vec{c} - 2\vec{a}) + t\vec{a} - 5\vec{c} = \vec{0}$$

$$\therefore (1-2k+t)\vec{a} + (k-5)\vec{c} = \vec{0} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

따라서 $1-2k+t=0$, $k-5=0$ 이므로

$$k=5, t=9 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore |\vec{b}| = |t\vec{a}| = |t| |\vec{a}| = 9 \times \frac{1}{3} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $\vec{b} = t\vec{a} \quad (t \neq 0)$ 로 놓고 주어진 식을 간단히 하기	50 %
② k, t 의 값 구하기	30 %
③ $ \vec{b} $ 의 값 구하기	20 %

0565 [답] ⑤

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AB} \quad (m \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이어야 한다.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-2\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} + 2\vec{b}) = -3\vec{a} - \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (k\vec{a} + 3\vec{b}) - (\vec{a} + 2\vec{b}) = (k-1)\vec{a} + \vec{b}$$

이를 ①에 대입하면

$$(k-1)\vec{a} + \vec{b} = m(-3\vec{a} - \vec{b})$$

$$\therefore (k-1)\vec{a} + \vec{b} = -3m\vec{a} - m\vec{b}$$

따라서 $k-1 = -3m$, $1 = -m$ 이므로

$$m = -1, k = 4$$

0566 [답] C, E

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-2\vec{a} + 3\vec{b}) - \vec{a} \quad (\because \textcircled{7})$$

$$= -3\vec{a} + 3\vec{b} = 3(-\vec{a} + \vec{b})$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (-3\vec{a} + 2\vec{b}) - \vec{a} \quad (\because \textcircled{4})$$

$$= -4\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA} = (-4\vec{a} + 5\vec{b}) - \vec{a} \quad (\because \textcircled{4})$$

$$= -5\vec{a} + 5\vec{b} = 5(-\vec{a} + \vec{b})$$

따라서 $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{AB}$ 이므로 직선 AB 위의 점인 것은 C, E이다.

0567 답 ④

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= k\overrightarrow{AC} \quad (\text{단, } k \neq 0) \quad \dots\dots ㉠ \\ \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \{(p+8)\vec{a} + q\vec{b}\} - (6\vec{a} + \vec{b}) \\ &= (p+2)\vec{a} + (q-1)\vec{b} \\ \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (5\vec{a} + 2\vec{b}) - (6\vec{a} + \vec{b}) \\ &= -\vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}(p+2)\vec{a} + (q-1)\vec{b} &= k(-\vec{a} + \vec{b}) \\ \therefore (p+2)\vec{a} + (q-1)\vec{b} &= -k\vec{a} + k\vec{b}\end{aligned}$$

즉, $p+2 = -k$, $q-1 = k$ 이므로

$$\begin{aligned}p &= -k-2, \quad q = k+1 \\ \therefore p^2 + q^2 &= (-k-2)^2 + (k+1)^2 \\ &= 2k^2 + 6k + 5 \\ &= 2\left(k + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $k = -\frac{3}{2}$ 일 때 $p^2 + q^2$ 의 최솟값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

0568 답 $\frac{3}{2}$

세 점 A, Q, P가 한 직선 위에 있으려면

$$\overrightarrow{QA} = k\overrightarrow{QP} \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots ㉠$$

이어야 한다.

이때 $\overrightarrow{DP} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DQ} = \vec{b}$ 라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP} &= \overrightarrow{DP} - \overrightarrow{DQ} = \vec{a} - \vec{b} \\ \overrightarrow{QA} &= \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BA} = m\overrightarrow{DQ} - \frac{3}{2}\overrightarrow{DP} = m\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a}\end{aligned}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned}m\vec{b} - \frac{3}{2}\vec{a} &= k(\vec{a} - \vec{b}) \\ \therefore -\frac{3}{2}\vec{a} + m\vec{b} &= k\vec{a} - k\vec{b}\end{aligned}$$

따라서 $-\frac{3}{2} = k$, $m = -k$ 이므로 $m = \frac{3}{2}$

AB 유형 점검

94~96쪽

0569 답 ④

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{CD} = \overline{EF} = \overline{GH} = 5 \\ \overline{AH} &= \overline{DE} = \overline{BG} = \overline{CF} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\end{aligned}$$

따라서 크기가 5인 벡터는 $\overline{AB}$, $\overline{BA}$, $\overline{CD}$, $\overline{DC}$, $\overline{EF}$, $\overline{FE}$, $\overline{GH}$, $\overline{HG}$, $\overline{AH}$, $\overline{HA}$, $\overline{DE}$, $\overline{ED}$, $\overline{BG}$, $\overline{GB}$, $\overline{CF}$, $\overline{FC}$ 의 16개이다.

0570 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

0571 답 ⑤

① $\overline{AB} = 1$ 이므로 $|\overrightarrow{AB}| = 1$
즉, 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 는 단위벡터이다.

$$\textcircled{3} \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{FB}$$

$$\textcircled{4} \quad \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DF} \text{이므로 } |\overrightarrow{AE}| = |\overrightarrow{DF}|$$

⑤ 사각형 BCDE는 한 변의 길이가 1인 정사각형이므로

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \therefore |\overrightarrow{BD}| &= \overline{BD} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

0572 답 ⑤

$$\textcircled{1} \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EC}$$

$$\textcircled{2} \quad \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BE}$$

$$\textcircled{3} \quad \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{ED}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{4} \quad \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{ED} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} \\ &= \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{CD}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{5} \quad \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{CC} = \overrightarrow{CE}\end{aligned}$$

따라서 벡터 $\overrightarrow{CE}$ 와 항상 같은 벡터는 ⑤이다.

0573 답 $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \vec{a} - (\vec{c} - \vec{b}) \\ &= \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\end{aligned}$$

0574 답 ④

$$\begin{aligned}5\vec{x} - 2(3\vec{x} - \vec{y}) &= 5\vec{x} - 6\vec{x} + 2\vec{y} \\ &= -\vec{x} + 2\vec{y} \\ &= -(-\vec{a} + 3\vec{b} - 2\vec{c}) + 2(4\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}) \\ &= \vec{a} - 3\vec{b} + 2\vec{c} + 8\vec{a} - 4\vec{b} + 2\vec{c} \\ &= 9\vec{a} - 7\vec{b} + 4\vec{c}\end{aligned}$$

0575 답 ③

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{b} \text{이므로} \\ \overrightarrow{DA} &= 2\overrightarrow{CB} = 2(\vec{a} - \vec{b}) = 2\vec{a} - 2\vec{b} \\ \text{이때 } \overrightarrow{ED} &= \overrightarrow{AB} = \vec{a} \text{이므로} \\ \overrightarrow{EA} &= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} = \vec{a} + (2\vec{a} - 2\vec{b}) = 3\vec{a} - 2\vec{b}\end{aligned}$$

0576 답 4

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{AP_3} + \overrightarrow{AP_4} &= (\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OP_4} - \overrightarrow{OA}) \\ &= (\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{OP_4}) - 4\overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

이때 네 점 P_1, P_2, P_3, P_4 는 원의 둘레를

사등분하므로

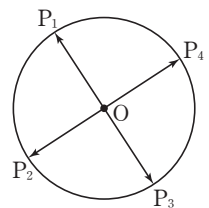
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP_1} &= -\overrightarrow{OP_3}, \quad \overrightarrow{OP_2} = -\overrightarrow{OP_4} \\ \therefore \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3} + \overrightarrow{OP_4} &= \vec{0}\end{aligned}$$

따라서

$$\overrightarrow{AP_1} + \overrightarrow{AP_2} + \overrightarrow{AP_3} + \overrightarrow{AP_4} = -4\overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{AO}$$

이므로

$$k = 4$$



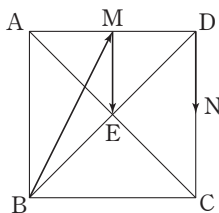
0577 답 ①

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GE} \\
 &= \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
 &= \overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \\
 &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \\
 \therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{CM} \\
 &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + 2\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right) \\
 &= 2\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BF} \\
 \therefore k &= 2
 \end{aligned}$$

0578 답 ③

오른쪽 그림과 같이 정삼각형 ABCD의 두 대각선의 교점을 E라 하면

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{DN} &= \overrightarrow{ME} \\
 \therefore \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DN} &= \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BE} \\
 \text{따라서 } \overrightarrow{BE} &= \frac{1}{2} \times \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2} \text{ 이므로} \\
 |\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{DN}| &= |\overrightarrow{BE}| = \overrightarrow{BE} = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

0579 답 $6\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DP} &= (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DP}) - (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CP}) \\
 &= \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{BP} \\
 \therefore |\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DP}| &= |2\overrightarrow{BP}| = 2|\overrightarrow{BP}|
 \end{aligned}$$

선분 BP의 길이는 선분 BP가 정삼각형 ABD의 높이일 때 최소이므로 선분 BP의 길이의 최솟값은

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

따라서 $|\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{DP}|$ 의 최솟값은

$$2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

0580 답 11

$$\begin{aligned}
 \vec{x} + m\vec{y} &= n\vec{a} + 3\vec{b} \text{에서} \\
 \vec{x} + m\vec{y} &= n(\vec{x} + 2\vec{y}) + 3(3\vec{x} - \vec{y}) \\
 \therefore \vec{x} + m\vec{y} &= (n+9)\vec{x} + (2n-3)\vec{y} \\
 \text{따라서 } 1 &= n+9, m=2n-3 \text{ 이므로} \\
 n &= -8, m = -19 \\
 \therefore n-m &= 11
 \end{aligned}$$

0581 답 ④

$$\begin{aligned}
 2\overrightarrow{AB} + p\overrightarrow{BC} &= q\overrightarrow{CA} \text{에서} \\
 2\overrightarrow{AB} + p(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) &= -q\overrightarrow{AC} \\
 \therefore (2-p)\overrightarrow{AB} + (p+q)\overrightarrow{AC} &= \vec{0} \\
 \text{이때 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않으므로 두 벡터 } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} & \\
 \text{는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않다.} & \\
 \text{따라서 } 2-p=0, p+q=0 \text{ 이므로} & \\
 p=2, q=-2 & \\
 \therefore p-q &= 4
 \end{aligned}$$

0582 답 -2

두 벡터 $\vec{a}-\vec{p}, \vec{b}-\vec{p}$ 가 서로 평행하려면
 $\vec{a}-\vec{p}=k(\vec{b}-\vec{p}) \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots ①$

이어야 한다.

$$\begin{aligned}
 \vec{a}-\vec{p} &= \vec{a} - (x\vec{a} + 3\vec{b}) = (1-x)\vec{a} - 3\vec{b} \\
 \vec{b}-\vec{p} &= \vec{b} - (x\vec{a} + 3\vec{b}) = -x\vec{a} - 2\vec{b}
 \end{aligned}$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}
 (1-x)\vec{a} - 3\vec{b} &= k(-x\vec{a} - 2\vec{b}) \\
 \therefore (1-x)\vec{a} - 3\vec{b} &= -kx\vec{a} - 2k\vec{b}
 \end{aligned}$$

따라서 $1-x = -kx, -3 = -2k$ 이므로 $k = \frac{3}{2}, x = -2$

0583 답 ③

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB} \quad (t \neq 0) \quad \dots\dots ①$$

이어야 한다.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 2\vec{b} - 3\vec{a} \\
 \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \{k\vec{a} + (3-2k)\vec{b}\} - 3\vec{a} = (k-3)\vec{a} + (3-2k)\vec{b}
 \end{aligned}$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}
 (k-3)\vec{a} + (3-2k)\vec{b} &= t(2\vec{b} - 3\vec{a}) \\
 \therefore (k-3)\vec{a} + (3-2k)\vec{b} &= -3t\vec{a} + 2t\vec{b}
 \end{aligned}$$

따라서 $k-3 = -3t, 3-2k = 2t$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면

$$t = \frac{3}{4}, k = \frac{3}{4}$$

0584 답 5

$$-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BA} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이때 $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}| = 10$ 이므로 $|2\overrightarrow{BA}| = 10$

$$2|\overrightarrow{BA}| = 10, |\overrightarrow{BA}| = 5 \quad \therefore \overrightarrow{BA} = 5$$

따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 5이다. $\dots\dots \textcircled{ii}$

채점 기준

① $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ 를 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ 로 나타내기	40 %
② 정삼각형 ABC의 한 변의 길이 구하기	60 %

0585 답 9

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ 가 되려면

$$\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB} \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots ①$$

이어야 한다.

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (5\vec{x} - \vec{y}) - (2\vec{x} + \vec{y}) = 3\vec{x} - 2\vec{y} \\
 \overrightarrow{CD} &= \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \{(m+1)\vec{x} + 3\vec{y}\} - (\vec{x} + m\vec{y}) \\
 &= m\vec{x} + (3-m)\vec{y}
 \end{aligned}$$

$$\dots\dots \textcircled{i}$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned}
 m\vec{x} + (3-m)\vec{y} &= k(3\vec{x} - 2\vec{y}) \\
 \therefore m\vec{x} + (3-m)\vec{y} &= 3k\vec{x} - 2k\vec{y}
 \end{aligned}$$

따라서 $m=3k, 3-m=-2k$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면

$$k=3, m=9 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ 를 $\vec{x}, \vec{y}$ 로 나타내기	50 %
② $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ 임을 이용하여 식 세우기	30 %
③ m의 값 구하기	20 %

0586 **답** -2

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \quad (k \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이어야 한다.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$$

$$= \{(5-3t)\overrightarrow{OA} + (4t-2)\overrightarrow{OB}\} - \overrightarrow{OA}$$

$$= (4-3t)\overrightarrow{OA} + (4t-2)\overrightarrow{OB} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이를 ①에 대입하면

$$(4-3t)\overrightarrow{OA} + (4t-2)\overrightarrow{OB} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})$$

$$\therefore (4-3t)\overrightarrow{OA} + (4t-2)\overrightarrow{OB} = -k\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 $4-3t = -k$, $4t-2 = k$ 이므로 두 식을 연립하여 풀면

$$k = -10, t = -2 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 를 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 로 나타내기	50 %
② 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있음을 이용하여 식 세우기	30 %
③ t의 값 구하기	20 %

C 실력 향상

97쪽

0587 **답** 4

$$-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AE}$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AE}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DH}$$

오른쪽 그림과 같이 선분 BD의 중점을

M이라 하면

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{MH}$$

이때 $\overrightarrow{AB} = 2x$ 라 하면 직각삼각형

ABD에서

$$\overrightarrow{BD} = \sqrt{2^2 + (2x)^2} = 2\sqrt{1+x^2}$$

$$\therefore \overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \sqrt{1+x^2}$$

즉, 직각삼각형 DHM에서

$$\overrightarrow{MH} = \sqrt{(\sqrt{1+x^2})^2 + 2^2} = \sqrt{5+x^2}$$

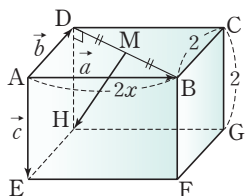
$$\text{이때 } \left| -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} \right| = 3 \text{이므로 } \sqrt{5+x^2} = 3$$

양변을 제곱하면

$$5+x^2=9, x^2=4$$

$$\therefore x=2 \quad (\because x>0)$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = 2x = 4$$



0588 **답** $\frac{3}{5}$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$|\overrightarrow{OA}| = k \text{라 하면 } |\overrightarrow{OP}| = k$$

직각삼각형 OAM에서

$$\overrightarrow{OM} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{1}{2}k\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}k \quad \therefore |\overrightarrow{OM}| = \overrightarrow{OM} = \frac{\sqrt{5}}{2}k$$

이때 세 점 O, P, M이 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{OP} = \frac{2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{OM} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{a} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{b}$$

$$\text{따라서 } m = \frac{2}{\sqrt{5}}, n = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{이므로 } m^2 - n^2 = \frac{3}{5}$$

0589 **답** $\frac{\pi}{3}$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} \text{이므로 벡터 } \overrightarrow{OQ} \text{는 벡터 } \overrightarrow{OP} \text{와 방향이 같은 단위벡터}$$

이다.

오른쪽 그림과 같이

원 $(x-6)^2 + y^2 = 9$ 의 중심을 A, 원

점 O에서 원에 그은 접선의 접점 중

제1사분면 위의 점을 B라 하면 직각

삼각형 ABO에서

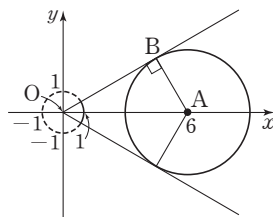
$$\sin(\angle AOB) = \frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle AOB = 30^\circ$$

따라서 점 Q가 나타내는 도형은 반지름의 길이가 1이고 중심각의

크기가 60° 인 부채꼴의 호이므로 구하는 길이는

$$2\pi \times 1 \times \frac{60}{360} = \frac{\pi}{3}$$



0590 **답** ⑤

$$\neg. \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{CA} \text{에서}$$

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PA}$$

$$\therefore \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{CP} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\neg. \text{오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD}$$

의 두 대각선의 교점을 M이라 하면

$$\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PM}$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 2\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{CP}$$

$$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{CP} \quad \therefore \overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{PC}$$

즉, 점 P는 선분 CM의 중점이고 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CM}$ 이므로 점 P는 선

분 AC를 3 : 1로 내분하는 점이다.

$$\therefore \overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\neg. \textcircled{2} \text{에서 } |\overrightarrow{AP}| = \left| \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \right| \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} \quad \therefore \overrightarrow{AP} : \overrightarrow{AC} = 3 : 4$$

$$\therefore \triangle ADC = \frac{4}{3}\triangle ADP = \frac{4}{3} \times 3 = 4$$

즉, 직사각형 ABCD의 넓이는 $2 \times 4 = 8$

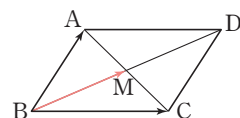
따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

만렙 Note

평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 교점

을 M이라 하면 $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BM}$ 이므로

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BM}$$



06 / 벡터의 성분과 내적

A 개념 확인

98~101쪽

0591 답 $-\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$

$$\vec{AB}-\vec{BC}=(\vec{b}-\vec{a})-(\vec{c}-\vec{b})=-\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$$

0592 답 $-2\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$

$$\begin{aligned}\vec{AC}+2\vec{BA}-3\vec{CA}&=(\vec{c}-\vec{a})+2(\vec{a}-\vec{b})-3(\vec{a}-\vec{c}) \\ &=-2\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}\end{aligned}$$

0593 답 $\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}$

$$\frac{3\vec{b}+5\vec{a}}{3+5}=\frac{5}{8}\vec{a}+\frac{3}{8}\vec{b}$$

0594 답 $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

0595 답 (가) $\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$ (나) $\vec{c}-\vec{g}$ (다) 3

0596 답 $(-3, 0)$

0597 답 $(4, -7)$

0598 답 $(-2, -5)$

0599 답 $\sqrt{10}$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(-3)^2+1^2}=\sqrt{10}$$

0600 답 10

$$|\vec{b}|=\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}=10$$

0601 답 $m=-5, n=4$

$$\vec{a}=\vec{b} \text{이므로 } 3=n-1, -m=5$$

$$\therefore m=-5, n=4$$

0602 답 $m=-1, n=1$

$$\vec{a}=\vec{b} \text{이므로 } 3m+1=-2, -4=-n-3$$

$$\therefore m=-1, n=1$$

0603 답 $(-3, 10)$

$$\vec{a}+6\vec{b}=(3, -2)+6(-1, 2)=(-3, 10)$$

0604 답 $(-11, 10)$

$$-3\vec{a}+2\vec{b}=-3(3, -2)+2(-1, 2)=(-11, 10)$$

0605 답 $(-14, 4)$

$$-6\vec{a}-4\vec{b}=-6(3, -2)-4(-1, 2)=(-14, 4)$$

0606 답 $\vec{AB}=(-1, 3), |\vec{AB}|=\sqrt{10}$

$$\vec{AB}=(0-1, 1-(-2))=(-1, 3) \text{이므로}$$

$$|\vec{AB}|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$$

0607 답 $\vec{AB}=(-3, 3), |\vec{AB}|=3\sqrt{2}$

$$\vec{AB}=(-8-(-5), 2-(-1))=(-3, 3) \text{이므로}$$

$$|\vec{AB}|=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2}$$

0608 답 $(0, 1, 2)$

0609 답 $(1, -3, 2)$

0610 답 $l=7, m=-3, n=2$

$$\vec{a}=\vec{b} \text{이므로 } l-2=5, 4=2n, 3m+1=-8$$

$$\therefore l=7, m=-3, n=2$$

0611 답 $l=-1, m=3, n=3$

$$\vec{a}=\vec{b} \text{이므로 } 5l+1=-4, 5=n+2, 3m+2=11$$

$$\therefore l=-1, m=3, n=3$$

0612 답 $(6, -4, 11)$

$$\vec{a}+4\vec{b}=(2, 4, -1)+4(1, -2, 3)=(6, -4, 11)$$

0613 답 $(5, 14, -6)$

$$3\vec{a}-\vec{b}=3(2, 4, -1)-(1, -2, 3)=(5, 14, -6)$$

0614 답 $(-7, -2, -7)$

$$-2\vec{a}-3\vec{b}=-2(2, 4, -1)-3(1, -2, 3)=(-7, -2, -7)$$

0615 답 $\vec{AB}=(-4, 4, 2), |\vec{AB}|=6$

$$\vec{AB}=(-3-1, 2-(-2), 5-3)=(-4, 4, 2) \text{이므로}$$

$$|\vec{AB}|=\sqrt{(-4)^2+4^2+2^2}=6$$

0616 답 $\vec{AB}=(5, -4, 2), |\vec{AB}|=3\sqrt{5}$

$$\vec{AB}=(4-(-1), -1-3, 0-(-2))=(5, -4, 2) \text{이므로}$$

$$|\vec{AB}|=\sqrt{5^2+(-4)^2+2^2}=3\sqrt{5}$$

0617 답 $3\sqrt{3}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}=|\vec{a}| |\vec{b}| \cos 30^\circ=3 \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

0618 답 $-3\sqrt{2}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b}=-|\vec{a}| |\vec{b}| \cos (180^\circ-135^\circ)=-3 \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}=-3\sqrt{2}$$

0619 답 -11

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times (-4) + (-1) \times 3 = -11$$

0620 답 6

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \times (-2) + (-4) \times 1 + 2 \times 5 = 6$$

0621 답 $\frac{3}{5}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-4) \times 0 + 3 \times 5 = 15$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \text{ 이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{15}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2} \sqrt{0^2 + 5^2}} = \frac{3}{5}$$

0622 답 $\frac{\sqrt{2}}{6}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-2) \times 0 = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \text{ 이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$$

0623 답 60°

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + 0 \times \sqrt{3} = 2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \text{ 이므로 두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{ 가 이루는 각의 크기를}$$

$$\theta (0^\circ \leq \theta < 90^\circ) \text{ 라 하면}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

0624 답 150°

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{3} \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times 0 = -\sqrt{3}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \text{ 이므로 두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{ 가 이루는 각의 크기를}$$

$$\theta (90^\circ < \theta \leq 180^\circ) \text{ 라 하면}$$

$$\begin{aligned} \cos (180^\circ - \theta) &= -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= -\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 180^\circ - \theta = 30^\circ \text{ 이므로 } \theta = 150^\circ$$

0625 답 (1) 1 (2) $-\frac{1}{2}$

$$(1) \vec{a} \perp \vec{b} \text{ 이면 } \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \text{ 이므로}$$

$$(k+1) \times 1 + 2 \times (-k) = 0$$

$$-k+1=0 \quad \therefore k=1$$

$$(2) \vec{a} \parallel \vec{b} \text{ 이면 } \vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| |\vec{b}| \text{ 이므로}$$

$$(-1) \times k + 2 \times 1 + (-4) \times (-2)$$

$$= \pm \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-4)^2} \sqrt{k^2 + 1^2 + (-2)^2}$$

$$-k+10 = \pm \sqrt{21} \sqrt{k^2+5}$$

$$\text{양변을 제곱하여 정리하면}$$

$$4k^2 + 4k + 1 = 0, (2k+1)^2 = 0 \quad \therefore k = -\frac{1}{2}$$

B 유형 완성

102~113쪽

0626 답 $-\frac{5}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}$

점 P는 변 BC를 1:2로 내분하는 점이므로

$$\vec{AP} = \frac{\vec{AC} + 2\vec{AB}}{1+2} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

점 Q는 선분 AP를 2:1로 내분하는 점이므로

$$\vec{AQ} = \frac{2}{3}\vec{AP} = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) = \frac{4}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{BQ} &= \vec{AQ} - \vec{AB} = \left(\frac{4}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b}\right) - \vec{a} \\ &= -\frac{5}{9}\vec{a} + \frac{2}{9}\vec{b} \end{aligned}$$

0627 답 $\frac{15}{64}$

선분 AD는 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\vec{BD} : \vec{CD} = \vec{AB} : \vec{AC} = 3 : 5$$

즉, 점 D는 변 BC를 3:5로 내분하는 점이므로

$$\vec{AD} = \frac{3\vec{AC} + 5\vec{AB}}{3+5} = \frac{5}{8}\vec{AB} + \frac{3}{8}\vec{AC}$$

$$\text{따라서 } m = \frac{5}{8}, n = \frac{3}{8} \text{ 이므로}$$

$$mn = \frac{15}{64}$$

0628 답 3

점 C는 변 AB를 1:3으로 내분하는 점이므로

$$\vec{OC} = \frac{\vec{OB} + 3\vec{OA}}{1+3} = \frac{3}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB}$$

점 D는 변 AB를 3:1로 내분하는 점이므로

$$\vec{OD} = \frac{3\vec{OB} + \vec{OA}}{3+1} = \frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{3}{4}\vec{OB}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{OC} + 2\vec{OD} &= \left(\frac{3}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\vec{OA} + \frac{3}{4}\vec{OB}\right) \\ &= \frac{5}{4}\vec{OA} + \frac{7}{4}\vec{OB} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } m = \frac{5}{4}, n = \frac{7}{4} \text{ 이므로}$$

$$m+n=3$$

0629 답 1

점 M은 모서리 AB의 중점이므로

$$\vec{OM} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

점 N은 모서리 OC의 중점이므로

$$\vec{ON} = \frac{1}{2}\vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\begin{aligned} \therefore \vec{MN} &= \vec{ON} - \vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{c} - \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } x = -\frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}, z = \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

$$x-y+2z=1$$

0630 [답] $-\frac{2}{5}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{b}+\vec{c}$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{DH}-\overrightarrow{DC}=\vec{c}-\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{DH}-\overrightarrow{DA}=\vec{c}-\vec{a} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

점 P는 선분 EG를 2:3으로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= \frac{2\overrightarrow{BG}+3\overrightarrow{BE}}{2+3} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BE} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BG} \\ &= \frac{3}{5}(\vec{c}-\vec{b}) + \frac{2}{5}(\vec{c}-\vec{a}) = -\frac{2}{5}\vec{a} - \frac{3}{5}\vec{b} + \vec{c} \quad \dots\dots \textcircled{iii}\end{aligned}$$

채점 기준

① $\overrightarrow{BE}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 로 나타내기

30 %

② $\overrightarrow{BG}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 로 나타내기

30 %

③ $\overrightarrow{BP}$ 를 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 로 나타내기

40 %

0631 [답] $\frac{20}{17}$

점 P는 변 AD를 3:4로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{7}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP} = \vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}$$

점 M은 변 CD의 중점이므로

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$$

삼각형 ABP에서 점 Q가 변 BP를 $m:(1-m)$ 으로 내분하는 점이라 하면

$$\overrightarrow{BQ} = m\overrightarrow{BP} = m\left(\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}\right) = m\vec{a} + \frac{3}{7}m\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

또 삼각형 ABM에서 점 Q가 변 AM을 $n:(1-n)$ 으로 내분하는 점이라 하면

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BQ} &= \frac{n\overrightarrow{BM} + (1-n)\overrightarrow{BA}}{n + (1-n)} = (1-n)\overrightarrow{BA} + n\overrightarrow{BM} \\ &= (1-n)\vec{a} + n\left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = \left(1-\frac{n}{2}\right)\vec{a} + n\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{ii}\end{aligned}$$

$$\textcircled{i}, \textcircled{ii} \text{에서 } m\vec{a} + \frac{3}{7}m\vec{b} = \left(1-\frac{n}{2}\right)\vec{a} + n\vec{b}$$

$$\therefore m = 1 - \frac{n}{2}, \quad \frac{3}{7}m = n$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } m = \frac{14}{17}, \quad n = \frac{6}{17}$$

$$\text{따라서 } \overrightarrow{BQ} = \frac{14}{17}\vec{a} + \frac{6}{17}\vec{b} \text{ 이므로}$$

$$x = \frac{14}{17}, \quad y = \frac{6}{17} \quad \therefore x + y = \frac{20}{17}$$

다른 풀이

세 점 B, Q, P가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{BQ} = k\overrightarrow{BP} \quad (\text{단, } k \neq 0)$$

$$\therefore \overrightarrow{BQ} = k(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) = k\left(\vec{a} + \frac{3}{7}\vec{b}\right) = k\vec{a} + \frac{3}{7}k\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

또 세 점 A, Q, M이 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{AQ} = l\overrightarrow{AM} \quad (\text{단, } l \neq 0)$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{BA} &= l \times \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{2} \\ &= l \times \frac{(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{BC}}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \overrightarrow{BQ} = \left(1 - \frac{l}{2}\right)\overrightarrow{BA} + l\overrightarrow{BC} = \left(1 - \frac{l}{2}\right)\vec{a} + l\vec{b} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\textcircled{i}, \textcircled{ii} \text{에서 } k\vec{a} + \frac{3}{7}k\vec{b} = \left(1 - \frac{l}{2}\right)\vec{a} + l\vec{b}$$

$$\therefore k = 1 - \frac{l}{2}, \quad \frac{3}{7}k = l$$

두 식을 연립하여 풀면

$$k = \frac{14}{17}, \quad l = \frac{6}{17}$$

$$\text{따라서 } \overrightarrow{BQ} = \frac{14}{17}\vec{a} + \frac{6}{17}\vec{b} \text{ 이므로}$$

$$x = \frac{14}{17}, \quad y = \frac{6}{17} \quad \therefore x + y = \frac{20}{17}$$

0632 [답] ②

변 BC의 중점을 M이라 하면

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\therefore \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}$$

이때 점 G는 선분 AM을 2:1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a}\right) = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\text{따라서 } m = -\frac{2}{3}, \quad n = \frac{1}{3} \text{ 이므로}$$

$$mn = -\frac{2}{9}$$

0633 [답] $\vec{a} + 2\vec{b}$

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$$

$$\text{따라서 } \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b} \text{ 이므로}$$

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{b} - (-\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} + 2\vec{b}$$

0634 [답] $\frac{2}{15}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{5}\vec{d}$

세 점 G_1, G_2, P 의 위치벡터를 각각 $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{p}$ 라 하자.

두 점 G_1, G_2 는 각각 두 삼각형 ABC, BCD의 무게중심이므로

$$\vec{g}_1 = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}, \quad \vec{g}_2 = \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3}$$

점 P는 선분 G_1G_2 를 3:2로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \frac{3\vec{g}_2 + 2\vec{g}_1}{3+2} \\ &= \frac{2}{5}\vec{g}_1 + \frac{3}{5}\vec{g}_2 \\ &= \frac{2}{5} \times \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{\vec{b} + \vec{c} + \vec{d}}{3} \\ &= \frac{2}{15}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{1}{5}\vec{d}\end{aligned}$$

0635 [답] $\frac{7}{6}$

선분 BC의 중점을 M이라 하면 점 G는 선분 AM을 2:1로 내분하는 점이므로

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \times \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$$

점 P는 선분 AG의 중점이므로

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2} \times \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{6}$$

점 Q는 선분 CD의 중점이므로

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{2} - \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{6} \\ &= -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

따라서 $x = -\frac{1}{6}$, $y = \frac{1}{3}$, $z = \frac{1}{2}$ 이므로

$$x + y + 2z = \frac{7}{6} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$ 를 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ 로 나타내기	60 %
② $x + y + 2z$ 의 값 구하기	40 %

0636 **답** ③

$$3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BC} \text{에서}$$

$$3\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PB}$$

$$\therefore 3\overrightarrow{PA} = -2\overrightarrow{PB}$$

따라서 점 P는 변 AB를 2 : 3으로 내분하는 점이므로

$$\triangle APC : \triangle BCP = \overline{AP} : \overline{PB} = 2 : 3$$

0637 **답** 8

$$7\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} - 2\overrightarrow{PA} = 2\overrightarrow{AB} \text{에서}$$

$$7\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} - 2\overrightarrow{PA} = 2(\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA})$$

$$\therefore 5\overrightarrow{PB} = -3\overrightarrow{PC}$$

따라서 점 P는 변 BC를 3 : 5로 내분하는 점이므로

$$m = 3, n = 5 \quad \therefore m + n = 8$$

0638 **답** ③

$$4\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{CB} \text{에서}$$

$$4\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PC}$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PC}$$

ㄱ, ㄴ, ㄷ. 점 P는 변 AC를 1 : 1로 내분하는 점이므로 변 AC 위의 점이다.

$$\text{ㄹ. } \triangle ABP : \triangle BCP = \overline{AP} : \overline{PC} = 1 : 1$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0639 **답** $\sqrt{10}$

$$(\text{㉞}) \text{에서 } 2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = 2\overrightarrow{CA} \text{이므로}$$

$$2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = 2(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PC})$$

$$\therefore \overrightarrow{PB} = -2\overrightarrow{PC}$$

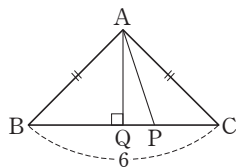
즉, 점 P는 변 BC를 2 : 1로 내분하는 점이다. ①

$$\therefore \overline{BP} = \frac{2}{3}\overline{BC} = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 Q라 하면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로

$$\overline{BQ} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

$$\therefore \overline{QP} = \overline{BP} - \overline{BQ} = 4 - 3 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$



(㉞)에서 삼각형 APC의 넓이는 3이고

$$\overline{PC} = \overline{BC} - \overline{BP} = 6 - 4 = 2 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} \times \overline{PC} \times \overline{AQ} = 3, \quad \frac{1}{2} \times 2 \times \overline{AQ} = 3$$

$$\therefore \overline{AQ} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

따라서 직각삼각형 AQP에서

$$|\overrightarrow{PA}| = \overline{PA} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \quad \dots\dots \textcircled{iv}$$

채점 기준

① 점 P의 위치 파악하기	30 %
② 선분 QP의 길이 구하기	30 %
③ 선분 AQ의 길이 구하기	30 %
④ 벡터 $\overrightarrow{PA}$ 의 크기 구하기	10 %

0640 **답** 14

$$3\overrightarrow{PA} + 5\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC} = \vec{0} \text{에서}$$

$$3\overrightarrow{PA} = -5\overrightarrow{PB} - 2\overrightarrow{PC}$$

$$\therefore 3\overrightarrow{PA} = -7 \times \frac{5\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}}{7}$$

이때 변 BC를 2 : 5로 내분하는 점을 Q라 하면

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{5\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}}{7} \text{이므로}$$

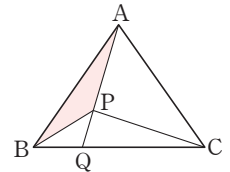
$$3\overrightarrow{PA} = -7\overrightarrow{PQ}$$

따라서 점 P는 선분 AQ를 7 : 3으로 내분하는 점이다.

$$\therefore \triangle ABP = \frac{7}{10} \triangle ABQ$$

$$= \frac{7}{10} \times \frac{2}{7} \triangle ABC$$

$$= \frac{7}{10} \times \frac{2}{7} \times 70 = 14$$



0641 **답** ④

주어진 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB이므로 구하는 도형의 길이는

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$$

만렙 Note

$$\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} \quad (0 \leq m \leq 1, 0 \leq n \leq 1, m + n = 1) \text{에서}$$

(i) $m = 0, n = 1$ 이면 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB}$ 이므로 점 P는 점 B와 같다.

(ii) $m = 1, n = 0$ 이면 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA}$ 이므로 점 P는 점 A와 같다.

(iii) $0 < m < 1, 0 < n < 1$ 이면 $m + n = 1$ 이므로

$$\overrightarrow{OP} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB} = \frac{n\overrightarrow{OB} + m\overrightarrow{OA}}{n + m}$$

즉, 점 P는 선분 AB를 $n : m$ 으로 내분하는 점이다.

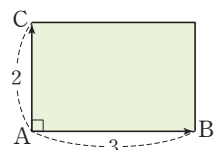
(i), (ii), (iii)에서 점 P가 나타내는 도형은 선분 AB이다.

0642 **답** 6

주어진 조건을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 두 선분 AB, AC를 이웃하는 두 변으로 하는 직사각형의 내부와 그 둘레이다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$3 \times 2 = 6$$



0643 [답] $4\sqrt{3}$

$$m+n \leq 2 \text{에서 } \frac{m}{2} + \frac{n}{2} \leq 1$$

$$\frac{m}{2} = s, \frac{n}{2} = t \text{라 하면 } m \geq 0, n \geq 0 \text{이므로}$$

$$s+t \leq 1, s \geq 0, t \geq 0$$

$$\therefore \vec{AP} = s(2\vec{AB}) + t(2\vec{AC})$$

$\vec{AB}' = 2\vec{AB}, \vec{AC}' = 2\vec{AC}$ 라 하면 점 P가 나타내는 도형은 삼각형 $AB'C'$ 의 내부와 그 둘레이다.

이때 $2|\vec{AB}| = 2|\vec{AC}| = 2 \times 2 = 4$ 이고 $\angle BAC = 60^\circ$ 이므로 삼각형 $AB'C'$ 은 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 4\sqrt{3}$$

0644 [답] ②

$$3(2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) - 2(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c})$$

$$= 4\vec{a} - 5\vec{b} - 3\vec{c}$$

$$= 4(1, -2) - 5(-2, 3) - 3(4, -7)$$

$$= (2, -2)$$

$$\therefore |3(2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}) - 2(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c})| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

0645 [답] ⑤

$$\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = (3, 1) + \frac{1}{2}(-2, 4) = (2, 3)$$

따라서 이 벡터의 모든 성분의 합은

$$2+3=5$$

0646 [답] ④

$$\vec{a} - \vec{x} = 2(\vec{x} - \vec{a} - \vec{b}) \text{에서}$$

$$3\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$$

$$\therefore \vec{x} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} = (5, 1) + \frac{2}{3}(-6, 3) = (1, 3)$$

따라서 $m=1, n=3$ 이므로

$$m^2 + n^2 = 10$$

0647 [답] $8\sqrt{2}$

$$\vec{p} = t\vec{a} + \vec{b} = t(-1, 1) + (3, 1) = (-t+3, t+1)$$

$$\therefore |\vec{p}| = \sqrt{(-t+3)^2 + (t+1)^2}$$

$$= \sqrt{2t^2 - 4t + 10}$$

$$= \sqrt{2(t-1)^2 + 8}$$

즉, $0 \leq t \leq 3$ 에서 $t=3$ 일 때 최댓값은 $\sqrt{16}=4$, $t=1$ 일 때 최솟값은 $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ 이다.

따라서 최댓값과 최솟값의 곱은

$$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

채점 기준

i $ \vec{p} $ 를 t 에 대한 식으로 나타내기	60 %
ii $ \vec{p} $ 의 최댓값과 최솟값의 곱 구하기	40 %

0648 [답] ③

벡터 $\vec{a}$ 가 단위벡터이므로 $|\vec{a}|=1$ 에서

$$\sqrt{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + (2-x)^2} = 1$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$5x^2 - 18x + 13 = 0$$

$$(x-1)(5x-13)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=\frac{13}{5}$$

따라서 모든 x 의 값의 곱은

$$1 \times \frac{13}{5} = \frac{13}{5}$$

0649 [답] ③

$$2\vec{a} - \vec{b} = 2(2, 3) - (1, 2) = (3, 4)$$

$$\therefore |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

벡터 $2\vec{a} - \vec{b}$ 와 방향이 같고 크기가 10인 벡터는

$$10 \times \frac{2\vec{a} - \vec{b}}{|2\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{10}{5}(3, 4) = (6, 8)$$

$$\therefore \vec{x} = (6, 8)$$

따라서 $p=6, q=8$ 이므로

$$p+q=14$$

0650 [답] ⑤

$$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} \text{에서}$$

$$(-3, 1) = m(3, -2) + n(-2, 1)$$

$$= (3m-2n, -2m+n)$$

$$\therefore -3=3m-2n, 1=-2m+n$$

두 식을 연립하여 풀면

$$m=1, n=3$$

$$\therefore m+n=4$$

0651 [답] 21

$$\vec{c} = 2\vec{b} - \vec{a} \text{에서}$$

$$(-q, q) = 2(2, q) - (p, 3)$$

$$= (4-p, 2q-3)$$

따라서 $-q=4-p, q=2q-3$ 이므로

$$p=7, q=3$$

$$\therefore pq=21$$

0652 [답] ②

$$\vec{a} + t\vec{b} = \vec{b} - \vec{c} \text{에서 } \vec{a} + \vec{c} = (1-t)\vec{b} \text{이므로}$$

$$(2x-1, 1) + (3, 2) = (1-t)(x+2, 1)$$

$$(2x+2, 3) = ((1-t)(x+2), 1-t)$$

즉, $2x+2=(1-t)(x+2), 3=1-t$ 이므로

$$t=-2, x=-4$$

따라서 $\vec{a}=(-9, 1), \vec{b}=(-2, 1)$ 이므로

$$\vec{a} - 3\vec{b} = (-9, 1) - 3(-2, 1) = (-3, -2)$$

$$\therefore |\vec{a} - 3\vec{b}| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

0653 [답] ⑤

$\vec{ta} + \vec{c} = t(-1, 2) + (4, 4) = (-t+4, 2t+4)$
 $\vec{b} - \vec{c} = (5, -1) - (4, 4) = (1, -5)$
 두 벡터 $\vec{ta} + \vec{c}$, $\vec{b} - \vec{c}$ 가 서로 평행하려면
 $\vec{ta} + \vec{c} = k(\vec{b} - \vec{c}) \quad (k \neq 0)$
 이어야 한다.
 $(-t+4, 2t+4) = k(1, -5)$
 $\therefore -t+4 = k, 2t+4 = -5k$
 두 식을 연립하여 풀면 $k = -4, t = 8$

0654 [답] ①

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하므로
 $\vec{a} = k\vec{b}$ (단, $k \neq 0$)
 $(2m-1, 3m+1) = k(3, 12)$
 $\therefore 2m-1 = 3k, 3m+1 = 12k$
 두 식을 연립하여 풀면 $k = \frac{1}{3}, m = 1$

0655 [답] $-\frac{2}{3}$

$2\vec{a} + \vec{b} = 2(-1, t) + (3, 2) = (1, 2t+2)$
 $2\vec{b} - \vec{a} = 2(3, 2) - (-1, t) = (7, 4-t)$
 두 벡터 $2\vec{a} + \vec{b}$, $2\vec{b} - \vec{a}$ 가 서로 평행하므로
 $2\vec{b} - \vec{a} = k(2\vec{a} + \vec{b})$ (단, $k \neq 0$)
 $(7, 4-t) = k(1, 2t+2)$
 따라서 $7 = k, 4-t = k(2t+2)$ 이므로
 $t = -\frac{2}{3}$

..... ①

..... ②

채점 기준

① $2\vec{a} + \vec{b}, 2\vec{b} - \vec{a}$ 를 성분으로 나타내기	40 %
② t의 값 구하기	60 %

0656 [답] $\vec{b} = (-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}), \vec{b} = (\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하므로
 $\vec{b} = k\vec{a}$ (단, $k \neq 0$)
 $\therefore \vec{b} = k(1, -2) = (k, -2k)$
 이때 $|\vec{b}| = 5$ 이므로 $\sqrt{k^2 + (-2k)^2} = 5$
 양변을 제곱하면 $k^2 + 4k^2 = 25, k^2 = 5$
 $\therefore k = \pm\sqrt{5}$
 $\therefore \vec{b} = (-\sqrt{5}, 2\sqrt{5}), \vec{b} = (\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$

0657 [답] 27

$\vec{AB} = (7 - (-1), -1 - 3) = (8, -4)$
 $\vec{CD} = (a - 2, b - 5)$
 이때 $\vec{AB} = 2\vec{CD}$ 이므로
 $(8, -4) = 2(a - 2, b - 5)$
 $= (2a - 4, 2b - 10)$
 따라서 $8 = 2a - 4, -4 = 2b - 10$ 이므로
 $a = 6, b = 3 \quad \therefore a^2 - b^2 = 27$

0658 [답] $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$

$\vec{AB} = (1 - 5, -2 - 1) = (-4, -3)$
 $\therefore |\vec{AB}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$
 따라서 벡터 $\vec{AB}$ 와 방향이 반대인 단위벡터는
 $-\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = -\frac{1}{5}(-4, -3) = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$

0659 [답] ④

$\vec{AP} = (p - 1, q - 3), \vec{BP} = (p - 3, q - 4), \vec{CP} = (p - 2, q + 1)$
 $\therefore \vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP}$
 $= (p - 1, q - 3) + (p - 3, q - 4) + (p - 2, q + 1)$
 $= (3p - 6, 3q - 6)$
 이때 $\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP} = \vec{0}$ 이므로
 $(3p - 6, 3q - 6) = (0, 0)$
 따라서 $3p - 6 = 0, 3q - 6 = 0$ 이므로
 $p = 2, q = 2 \quad \therefore p - q = 0$

다른 풀이

$\vec{AP} + \vec{BP} + \vec{CP} = \vec{0}$ 를 만족시키는 점 P는 삼각형 ABC의 무게중심
 이므로
 $P(\frac{1+3+2}{3}, \frac{3+4+1}{3}) \quad \therefore P(2, 2)$
 따라서 $p = 2, q = 2$ 이므로 $p - q = 0$

0660 [답] $\sqrt{5}$

직선 $y = \frac{1}{2}x - 3$ 위의 점 P의 좌표를 $(a, \frac{1}{2}a - 3)$ 이라 하면
 $\vec{AP} = (a - 1, \frac{1}{2}a - 1), \vec{BP} = (a - 4, \frac{1}{2}a - 4)$
 $\therefore \vec{AP} + \vec{BP} = (a - 1, \frac{1}{2}a - 1) + (a - 4, \frac{1}{2}a - 4)$
 $= (2a - 5, a - 5)$
 $\therefore |\vec{AP} + \vec{BP}| = \sqrt{(2a - 5)^2 + (a - 5)^2}$
 $= \sqrt{5a^2 - 30a + 50}$
 $= \sqrt{5(a - 3)^2 + 5}$
 따라서 $a = 3$ 일 때 $|\vec{AP} + \vec{BP}|$ 의 최솟값은 $\sqrt{5}$ 이다.

0661 [답] 10

$\vec{a} + \vec{b} = (-4, 2, -2) \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$
 $\vec{a} - \vec{b} = (0, 2, 4) \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$
 $\textcircled{㉑} + \textcircled{㉒}$ 을 하면
 $2\vec{a} = (-4, 4, 2) \quad \therefore \vec{a} = (-2, 2, 1)$
 이를 $\textcircled{㉑}$ 에 대입하면
 $(-2, 2, 1) + \vec{b} = (-4, 2, -2)$
 $\therefore \vec{b} = (-4, 2, -2) - (-2, 2, 1) = (-2, 0, -3)$
 따라서
 $3\vec{a} + \vec{b} = 3(-2, 2, 1) + (-2, 0, -3) = (-8, 6, 0)$
 이므로
 $|3\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2 + 0^2} = 10$

0662 [답] ③

$$3(\vec{x}-\vec{a})=2(\vec{b}-\vec{x})+\vec{a} \text{에서 } 5\vec{x}=4\vec{a}+2\vec{b}$$

$$\therefore \vec{x}=\frac{4}{5}\vec{a}+\frac{2}{5}\vec{b}=\frac{4}{5}(-1, 9, 0)+\frac{2}{5}(-3, 7, 5)$$

$$=(-2, 10, 2)$$

0663 [답] -1

$$2\vec{a}-\vec{b}=2(1, k, 0)-(2, -1, 1)=(0, 2k+1, -1)$$

$$\therefore |2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{0^2+(2k+1)^2+(-1)^2}$$

$$=\sqrt{(2k+1)^2+1}$$

이때 $|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{10}$ 이므로

$$\sqrt{(2k+1)^2+1}=\sqrt{10}$$

양변을 제곱하면

$$(2k+1)^2+1=10, (2k+1)^2=9$$

$$2k+1=\pm 3 \quad \therefore k=-2 \text{ 또는 } k=1$$

따라서 모든 k 의 값의 합은

$$-2+1=-1$$

채점 기준

① $ 2\vec{a}-\vec{b} $ 를 k 에 대한 식으로 나타내기	40%
② k 의 값 구하기	40%
③ 모든 k 의 값의 합 구하기	20%

0664 [답] 6

$$x\vec{a}+\vec{b}=x(1, 2, -2)+(-4, -5, 2)$$

$$=(x-4, 2x-5, -2x+2)$$

$$\therefore |x\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(x-4)^2+(2x-5)^2+(-2x+2)^2}$$

$$=\sqrt{9x^2-36x+45}$$

$$=\sqrt{9(x-2)^2+9}$$

즉, $|x\vec{a}+\vec{b}|$ 는 $x=2$ 일 때 최솟값 $\sqrt{9}=3$ 을 갖는다.

따라서 $a=2, m=3$ 이므로

$$am=6$$

0665 [답] 5

$$2\vec{c}-2\vec{a}=3\vec{b}+\vec{c} \text{에서 } \vec{c}=2\vec{a}+3\vec{b} \text{이므로}$$

$$(x, y, z)=2(2, -3, -1)+3(0, 4, 3)$$

$$=(4, 6, 7)$$

따라서 $x=4, y=6, z=7$ 이므로

$$x-y+z=5$$

0666 [답] -6

$$\vec{d}=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c} \text{에서}$$

$$(5, 2, -1)=l(2, 0, 1)+m(0, 2, 1)+n(1, 2, 0)$$

$$=(2l+n, 2m+2n, l+m)$$

$$\therefore 5=2l+n, 2=2m+2n, -1=l+m \quad \dots\dots ㉠$$

세 식을 변끼리 더하면

$$6=3(l+m+n) \quad \therefore l+m+n=2$$

이 식에 ㉠을 각각 대입하여 풀면

$$l=1, m=-2, n=3$$

$$\therefore lmn=-6$$

0667 [답] $3\sqrt{5}$

$$\vec{c}=4\vec{a}+2\vec{b} \text{에서}$$

$$(2, -2, 3-z)=4(x, 1, 2)+2(-3, y+2, -2)$$

$$=(4x-6, 2y+8, 4)$$

즉, $2=4x-6, -2=2y+8, 3-z=4$ 이므로

$$x=2, y=-5, z=-1 \quad \dots\dots \text{①}$$

따라서 $\vec{a}=(2, 1, 2), \vec{b}=(-3, -3, -2), \vec{c}=(2, -2, 4)$ 이므로

$$\vec{c}-\vec{a}+\vec{b}=(2, -2, 4)-(2, 1, 2)+(-3, -3, -2)$$

$$=(-3, -6, 0) \quad \dots\dots \text{②}$$

$$\therefore |\vec{c}-\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+0^2}=3\sqrt{5} \quad \dots\dots \text{③}$$

채점 기준

① x, y, z 의 값 구하기	50%
② $\vec{c}-\vec{a}+\vec{b}$ 를 성분으로 나타내기	30%
③ $ \vec{c}-\vec{a}+\vec{b} $ 의 값 구하기	20%

0668 [답] ①

$$\vec{a}+\vec{c}=(5, 1, 5)+(1, x+2, y-1)=(6, x+3, y+4)$$

$$\vec{b}-\vec{c}=(4, 2, 4)-(1, x+2, y-1)=(3, -x, 5-y)$$

두 벡터 $\vec{a}+\vec{c}, \vec{b}-\vec{c}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{a}+\vec{c}=k(\vec{b}-\vec{c}) \quad (\text{단, } k \neq 0)$$

$$(6, x+3, y+4)=k(3, -x, 5-y)$$

따라서 $6=3k, x+3=-kx, y+4=k(5-y)$ 이므로

$$k=2, x=-1, y=2 \quad \therefore x+y=1$$

0669 [답] -1

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{b}=k\vec{a} \quad (\text{단, } k \neq 0)$$

$$(x+1, 3, y-3)=k(4, -2, 6)$$

따라서 $x+1=4k, 3=-2k, y-3=6k$ 이므로

$$k=-\frac{3}{2}, x=-7, y=-6 \quad \therefore x-y=-1$$

0670 [답] ②

$$\vec{a}+\vec{b}=(1, 1, -2)+(0, 3, 3)=(1, 4, 1)$$

$$t\vec{a}-\vec{c}=t(1, 1, -2)-(-1, 1, 4)$$

$$=(t+1, t-1, -2t-4)$$

두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}, t\vec{a}-\vec{c}$ 가 서로 평행하려면

$$t\vec{a}-\vec{c}=k(\vec{a}+\vec{b}) \quad (k \neq 0)$$

이어야 한다.

$$(t+1, t-1, -2t-4)=k(1, 4, 1)$$

$$\therefore t+1=k, t-1=4k, -2t-4=k$$

세 식 중 두 식을 연립하여 풀면 $k=-\frac{2}{3}, t=-\frac{5}{3}$

0671 [답] ③

점 D의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\vec{AB}=(4-1, 2-0, 1-(-2))=(3, 2, 3)$$

$$\vec{CD}=(x+1, y-3, z-5)$$

이때 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ 이므로

$$(3, 2, 3) = (x+1, y-3, z-5)$$

즉, $3=x+1, 2=y-3, 3=z-5$ 이므로

$$x=2, y=5, z=8$$

따라서 점 D의 좌표는 (2, 5, 8)이다.

0672 답 170

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \quad (\text{단, } k \neq 0)$$

$$\overrightarrow{AB} = (2 - (-1), -3 - (-2), -1 - 3) = (3, -1, -4),$$

$$\overrightarrow{AC} = (a+1, 2, b-3) \text{이므로}$$

$$(a+1, 2, b-3) = k(3, -1, -4)$$

따라서 $a+1=3k, 2=-k, b-3=-4k$ 이므로

$$k=-2, a=-7, b=11$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 170$$

0673 답 ②

xy평면 위의 점 P의 좌표를 $(x, y, 0)$ 이라 하면

$$\overrightarrow{PA} = (3-x, 4-y, 5), \overrightarrow{PB} = (4-x, 8-y, 6),$$

$$\overrightarrow{PC} = (5-x, 3-y, 7)$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}$$

$$= (3-x, 4-y, 5) + (4-x, 8-y, 6) + (5-x, 3-y, 7)$$

$$= (12-3x, 15-3y, 18)$$

$$\text{즉, } \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3} = (4-x, 5-y, 6) \text{이므로}$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3} \right| = \sqrt{(4-x)^2 + (5-y)^2 + 6^2}$$

따라서 $x=4, y=5$ 일 때 $\left| \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3} \right|$ 의 최솟값은

$$\sqrt{36} = 6$$

다른 풀이

삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면

$$G\left(\frac{3+4+5}{3}, \frac{4+8+3}{3}, \frac{5+6+7}{3}\right)$$

$$\therefore G(4, 5, 6)$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}}{3} \right| = |\overrightarrow{PG}| \text{이므로 } |\overrightarrow{PG}| \text{의 값이 최소이려면 점 G에}$$

서 xy평면에 내린 수선의 발이 점 P이어야 한다.

$$\therefore P(4, 5, 0)$$

따라서 $|\overrightarrow{PG}|$ 의 최솟값은 6이다.

0674 답 $3\sqrt{5}$

평행사변형 ABCD에서 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AD} = (a+2, b-1, c-4)$$

$$\overrightarrow{BC} = (0-3, -1-(-4), 1-3)$$

$$= (-3, 3, -2)$$

즉, $a+2=-3, b-1=3, c-4=-2$ 이므로

$$a=-5, b=4, c=2$$

따라서 D(-5, 4, 2)이므로

$$|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 2^2} = 3\sqrt{5}$$

다른 풀이

평행사변형 ABCD에서 대각선 AC의 중점

$$\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{4+1}{2}\right), \text{ 즉 } \left(-1, 0, \frac{5}{2}\right) \text{와 대각선 BD의 중점}$$

$$\left(\frac{3+a}{2}, \frac{-4+b}{2}, \frac{3+c}{2}\right) \text{가 일치하므로}$$

$$-1 = \frac{3+a}{2}, 0 = \frac{-4+b}{2}, \frac{5}{2} = \frac{3+c}{2}$$

$$\therefore a=-5, b=4, c=2$$

따라서 D(-5, 4, 2)이므로

$$|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + 2^2} = 3\sqrt{5}$$

0675 답 $\sqrt{13}$

오른쪽 그림과 같이 점 H가 원점, 세 모서리 HE, HG, HD가 각각 x축, y축, z축

위에 있도록 정육면체를 좌표공간에 놓으면

$$A(2, 0, 2), C(0, 2, 2), D(0, 0, 2), \\ E(2, 0, 0), G(0, 2, 0)$$

이때 점 M은 모서리 CG의 중점이므로

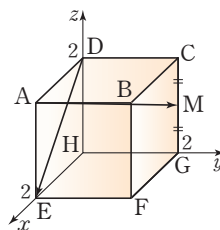
$$M(0, 2, 1)$$

$$\overrightarrow{AM} = (0-2, 2-0, 1-2) = (-2, 2, -1),$$

$$\overrightarrow{DE} = (2-0, 0-0, 0-2) = (2, 0, -2) \text{이므로}$$

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DE} = (-2, 2, -1) + (2, 0, -2) = (0, 2, -3)$$

$$\therefore |\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DE}| = \sqrt{0^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$$



0676 답 48π

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\overrightarrow{AP} = (x-5, y-4, z+2), \overrightarrow{BP} = (x-2, y-1, z-1)$$

이때 $2|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$ 이므로

$$2\sqrt{(x-5)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2}$$

양변을 제곱하면

$$4\{(x-5)^2 + (y-4)^2 + (z+2)^2\} = (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 10y + 6z + 58 = 0$$

$$\therefore (x-6)^2 + (y-5)^2 + (z+3)^2 = 12$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 (6, 5, -3)을 중심으로 하고 반

지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 구이므로 구하는 도형의 겉넓이는

$$4\pi \times (2\sqrt{3})^2 = 48\pi$$

0677 답 $x+y-1=0$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{AP} = (x-2, y-1), \overrightarrow{BP} = (x, y+1)$$

이때 $|\overrightarrow{AP}| = |\overrightarrow{BP}|$ 이므로

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$$

양변을 제곱하면 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+1)^2$

$$\therefore x+y-1=0$$

0678 답 ①

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AP} = (x-1, y-2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (-3-1, 5-2) = (-4, 3)$$

이때 $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AB}|$ 이므로

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(-4)^2+3^2}$$

양변을 제곱하면 $(x-1)^2+(y-2)^2=25$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 (1, 2)를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원이므로 구하는 도형의 길이는

$$2\pi \times 5 = 10\pi$$

0679 답 15

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\overrightarrow{AB}=(2-(-1), 2-2, 0-4)=(3, 0, -4)$$

$$\overrightarrow{BP}=(x-2, y-2, z)$$

..... ①

이때 $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BP}| = k$ 이므로

$$\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2} \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2+z^2} = k$$

양변을 제곱하면

$$25\{(x-2)^2+(y-2)^2+z^2\}=k^2$$

$$\therefore (x-2)^2+(y-2)^2+z^2=\frac{k^2}{25}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 (2, 2, 0)을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\frac{k}{5}$ 인 구이다. ②

→ $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BP}| = k$ 에서 $k > 0$

이때 이 도형의 부피가 36π 이므로

$$\frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{k}{5}\right)^3 = 36\pi, \left(\frac{k}{5}\right)^3 = 27$$

$$\frac{k}{5} = 3 \quad \therefore k = 15$$

..... ③

채점 기준

① 점 P의 좌표를 (x, y, z) 로 놓고 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BP}$ 를 성분으로 나타내기	30 %
② 점 P가 나타내는 도형 구하기	40 %
③ k의 값 구하기	30 %

0680 답 8

직각삼각형의 빗변의 중점은 외심이므로

$$\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}=\frac{1}{2}\overline{AC}=4$$

즉, $\overline{BC}=\overline{MB}=\overline{MC}$ 이므로 삼각형 MBC는 정삼각형이다.

$$\therefore \angle CMB=60^\circ$$

$$\therefore \overline{MB} \cdot \overline{MC} = |\overline{MB}| \cdot |\overline{MC}| \cos 60^\circ = 4 \times 4 \times \frac{1}{2} = 8$$

0681 답 12

오른쪽 그림과 같이 삼각형 BEF는

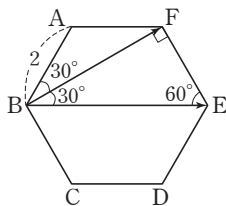
$\angle EBF=30^\circ, \angle BFE=90^\circ$ 인 직각삼각형

이고 $\overline{BE}=2\overline{AF}=4, \overline{EF}=2$ 이므로

$$\overline{BF}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{BE} \cdot \overline{BF} = |\overline{BE}| \cdot |\overline{BF}| \cos 30^\circ$$

$$= 4 \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$$



0682 답 $12\sqrt{3}$

$$\angle ABC=180^\circ-150^\circ=30^\circ$$

이때 $\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 36$ 이므로 $|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}| \cos 30^\circ = 36$

$$4\sqrt{3} \times |\overline{BC}| \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 36 \quad \therefore |\overline{BC}| = 6$$

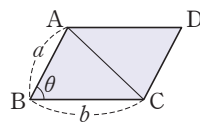
따라서 $\overline{BC}=6$ 이므로 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$\overline{AB} \times \overline{BC} \sin 30^\circ = 4\sqrt{3} \times 6 \times \frac{1}{2} = 12\sqrt{3}$$

참고 오른쪽 그림과 같은 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$\square ABCD = 2\triangle ABC$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} ab \sin \theta = ab \sin \theta$$



0683 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 두 벡터 $\overline{AB}, \overline{AD}$ 가 이루는 각의 크기가 90° 이므로

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| \cos 90^\circ = 2 \times 3 \times 0 = 0$$

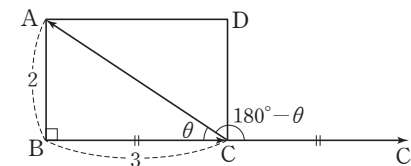
ㄴ. 두 벡터 $\overline{AD}, \overline{CB}$ 가 이루는 각의 크기가 180° 이므로

$$\overline{AD} \cdot \overline{CB} = -|\overline{AD}| \cdot |\overline{CB}| \cos (180^\circ - 180^\circ)$$

$$= -3 \times 3 \times 1 = -9$$

ㄷ. 직각삼각형 ABC에서 $\overline{CA} = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{13}$

$$\angle BCA = \theta \text{라 하면 } \cos \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$



위의 그림과 같이 $\overline{BC} = \overline{CC'}$ 이 되도록 점 C'을 잡으면

$$\angle ACC' = 180^\circ - \theta \text{이므로}$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{BC} = \overline{CA} \cdot \overline{CC'}$$

$$= -|\overline{CA}| \cdot |\overline{CC'}| \cos \{180^\circ - (180^\circ - \theta)\}$$

$$= -\sqrt{13} \times 3 \times \frac{3}{\sqrt{13}} = -9$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0684 답 4

오른쪽 그림에서 $\overline{HF} = \overline{DB}$

$$\overline{DE} = \overline{DB} = \overline{BE} = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2} \text{이므로 삼}$$

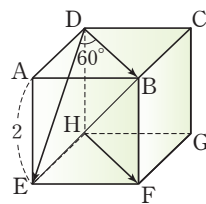
각형 DEB는 정삼각형이다.

따라서 $\angle EDB = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{DE} \cdot \overline{HF} = \overline{DE} \cdot \overline{DB}$$

$$= |\overline{DE}| \cdot |\overline{DB}| \cos 60^\circ$$

$$= 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = 4$$



0685 답 4

정사각뿔의 한 모서리의 길이를 x라 하면

$$\text{직각삼각형 BCD에서 } \overline{BD} = \sqrt{x^2+x^2} = \sqrt{2}x$$

이때 $\overline{AB} = \overline{AD} = x$ 이고 $\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{BD}^2$ 이므로 삼각형 ABD는 직각이등변삼각형이다.

즉, $\angle ABD = 45^\circ$ 이므로

$$\overline{BA} \cdot \overline{BD} = |\overline{BA}| \cdot |\overline{BD}| \cos 45^\circ$$

$$= x \times \sqrt{2}x \times \frac{\sqrt{2}}{2} = x^2$$

이때 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = 16$ 이므로

$$x^2 = 16 \quad \therefore x = 4 \quad (\because x > 0)$$

따라서 정사각뿔의 한 모서리의 길이는 4이다.

0686 답 -10

직각삼각형 HEF에서 $\overline{HF} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

직각삼각형 DHF에서 $\overline{DF} = \sqrt{2^2 + (\sqrt{10})^2} = \sqrt{14}$

$\angle DFH = \theta$ 라 하면 직각삼각형 DHF에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{HF}}{\overline{DF}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}}$$

오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FP}$ 가 되도록

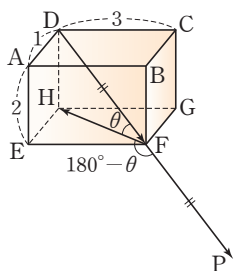
점 P를 잡으면 $\angle HFP = 180^\circ - \theta$ 이므로

$$\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{FH}$$

$$= \overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FH}$$

$$= -|\overrightarrow{FP}| |\overrightarrow{FH}| \cos \{180^\circ - (180^\circ - \theta)\}$$

$$= -\sqrt{14} \times \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}} = -10$$



0687 답 2

두 삼각형 OAB, OBC는 정삼각형이므로

$$\overline{MO} = \overline{NO} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$$

즉, 삼각형 OMN은 $\overline{MO} = \overline{NO}$ 인 이등변삼각형이다.

또 두 점 M, N은 각각 모서리 AB, BC의 중점이므로

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 변 MN에 내

린 수선의 발을 H라 하면

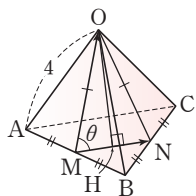
$$\overline{MH} = \frac{1}{2} \overline{MN} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$\angle OMH = \theta$ 라 하면 직각삼각형 OMH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{MH}}{\overline{MO}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$\therefore \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MN} = |\overrightarrow{MO}| |\overrightarrow{MN}| \cos \theta$$

$$= 2\sqrt{3} \times 2 \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = 2$$



채점 기준

① 두 선분 MO, MN의 길이 구하기

40 %

② $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MN}$ 구하기

60 %

0688 답 5

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, 5, x-1) \cdot (3, 1, 4-x)$$

$$= 2 \times 3 + 5 \times 1 + (x-1)(4-x)$$

$$= -x^2 + 5x + 7$$

이때 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 13$ 이므로

$$-x^2 + 5x + 7 = 13$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0, (x-2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 모든 x의 값의 합은 $2+3=5$

0689 답 -6

$$\overrightarrow{AB} = (5-2, -1-3) = (3, -4)$$

$$\overrightarrow{CD} = (1-(-1), 7-4) = (2, 3)$$

$$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = (3, -4) \cdot (2, 3)$$

$$= 3 \times 2 + (-4) \times 3 = -6$$

0690 답 -16

$$\vec{a} + \vec{b} = (k-2, -2, k) + (1, 2k+4, 2-k)$$

$$= (k-1, 2k+2, 2)$$

이때 $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$ 이므로

$$\sqrt{(k-1)^2 + (2k+2)^2 + 2^2} = 6$$

양변을 제곱하면

$$(k-1)^2 + (2k+2)^2 + 4 = 36$$

$$5k^2 + 6k - 27 = 0, (k+3)(5k-9) = 0$$

$$\therefore k = -3 \quad (\because k < 0)$$

따라서 $\vec{a} = (-5, -2, -3), \vec{b} = (1, -2, 5)$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-5, -2, -3) \cdot (1, -2, 5)$$

$$= (-5) \times 1 + (-2) \times (-2) + (-3) \times 5 = -16$$

0691 답 ④

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB} = \{(x, y) - (3, 4)\} \cdot (-3, 6)$$

$$= (x-3, y-4) \cdot (-3, 6)$$

$$= (x-3) \times (-3) + (y-4) \times 6$$

$$= -3x + 6y - 15$$

이때 $(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ 이므로

$$-3x + 6y - 15 = 0 \quad \therefore x - 2y + 5 = 0$$

따라서 $|\overrightarrow{OP}|$ 의 최솟값은 점 $O(0, 0)$ 과 직선 $x - 2y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|5|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \sqrt{5}$$

0692 답 5

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = (4, t, 2t) \cdot (a, t, a) = 4a + t^2 + 2at$$

모든 실수 t에 대하여 $\vec{p} \cdot \vec{q} \geq 0$ 이므로

$$t^2 + 2at + 4a \geq 0$$

이차방정식 $t^2 + 2at + 4a = 0$ 의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 4a \leq 0$$

$$a(a-4) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq 4$$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3, 4의 5개이다.

공통수학1 다시보기

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D라 할 때, 모든 실수 x에 대하여 부등식이 성립하는 조건은 다음과 같다.

$$(1) ax^2 + bx + c > 0 \Rightarrow a > 0, D < 0$$

$$(2) ax^2 + bx + c \geq 0 \Rightarrow a > 0, D \leq 0$$

$$(3) ax^2 + bx + c < 0 \Rightarrow a < 0, D < 0$$

$$(4) ax^2 + bx + c \leq 0 \Rightarrow a < 0, D \leq 0$$

0693 **답** $\frac{52}{5}$

직선 $y = \frac{1}{2}x$ 위의 점 P의 좌표를 $(2a, a)$ 라 하면

$$\overrightarrow{AP} = (2a-3, a), \overrightarrow{BP} = (2a+1, a-2)$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = (2a-3, a) \cdot (2a+1, a-2)$$

$$= (2a-3)(2a+1) + a(a-2)$$

$$= 5a^2 - 6a - 3 = 5\left(a - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{24}{5}$$

..... i

즉, $a = \frac{3}{5}$ 일 때 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ 가 최소이다.

..... ii

따라서 $\overrightarrow{AP} = \left(-\frac{9}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $\overrightarrow{BP} = \left(\frac{11}{5}, -\frac{7}{5}\right)$ 이므로

$$|\overrightarrow{AP}|^2 + |\overrightarrow{BP}|^2 = \left\{\left(-\frac{9}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2\right\} + \left\{\left(\frac{11}{5}\right)^2 + \left(-\frac{7}{5}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{52}{5}$$

..... iii

채점 기준

i 점 P의 좌표를 $(2a, a)$ 로 놓고 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ 를 a 에 대한 식으로 나타내기	40 %
ii $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ 가 최소일 때 a 의 값 구하기	20 %
iii $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ 가 최소일 때 $ \overrightarrow{AP} ^2 + \overrightarrow{BP} ^2$ 의 값 구하기	40 %

0694 **답** ③

$|\vec{a} - 2\vec{b}| = 6$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 36$$

$$6^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \times 3^2 = 36, -4\vec{a} \cdot \vec{b} = -36$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 9$$

0695 **답** 7

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 30^\circ = 2 \times \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (-2\vec{a} + 3\vec{b}) &= -2|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} + 6|\vec{b}|^2 \\ &= -2 \times 2^2 - 3 + 6 \times (\sqrt{3})^2 = 7 \end{aligned}$$

0696 **답** -4

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ 이므로

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - |\overrightarrow{AB}|^2$$

이때 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}| \cos 60^\circ = 4 \times 6 \times \frac{1}{2} = 12$ 이므로

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - |\overrightarrow{AB}|^2 = 12 - 4^2 = -4$$

0697 **답** ④

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ 이므로 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 4$ 에서

$$|\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})| = 4$$

$$\therefore |2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = 4$$

양변을 제곱하면

$$4|\overrightarrow{AB}|^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + |\overrightarrow{BC}|^2 = 16$$

$$4 \times 1^2 + 4 \times 0 + |\overrightarrow{BC}|^2 = 16$$

$$|\overrightarrow{BC}|^2 = 12$$

$$\therefore |\overrightarrow{BC}| = 2\sqrt{3} (\because |\overrightarrow{BC}| > 0)$$

0698 **답** ②

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ 이므로 $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 에서

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = 0$$

$$|\overrightarrow{AC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = 0, |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2$$

$$\therefore |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$$

따라서 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이다.

0699 **답** 45°

$$\vec{a} + \vec{b} = (3, 4) + (-1, 2) = (2, 6)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (3, 4) - (-1, 2) = (4, 2)$$

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = (2, 6) \cdot (4, 2) = 2 \times 4 + 6 \times 2 = 20$$

즉, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) > 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$ 가 이루는 각의

크기를 θ ($0^\circ \leq \theta < 90^\circ$)라 하면

$$\cos \theta = \frac{(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})}{|\vec{a} + \vec{b}| |\vec{a} - \vec{b}|} = \frac{20}{\sqrt{2^2 + 6^2} \sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \theta = 45^\circ$$

0700 **답** ③

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 45° 이므로

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}, \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{x \times (-1) + 3 \times 1}{\sqrt{x^2 + 3^2} \sqrt{(-1)^2 + 1^2}}$$

$$\sqrt{x^2 + 9} = -x + 3$$

양변을 제곱하면 $x^2 + 9 = (-x + 3)^2$

$$6x = 0 \quad \therefore x = 0$$

0701 **답** $\frac{4}{5}$

점 A(1, 2, -1)의 xy 평면, yz 평면 위로의 정사영을 각각 P, Q라 하면

$$P(1, 2, 0), Q(0, 2, -1)$$

$$\therefore \vec{a} = \overrightarrow{OP} = (1, 2, 0), \vec{b} = \overrightarrow{OQ} = (0, 2, -1)$$

..... i

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = (1, 2, 0) \cdot (0, 2, -1)$$

$$= 1 \times 0 + 2 \times 2 + 0 \times (-1) = 4$$

..... ii

즉, $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{4}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} \sqrt{0^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{5}$$

..... iii

채점 기준

i $\vec{a}$, $\vec{b}$ 를 성분으로 나타내기	30 %
ii $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 구하기	30 %
iii $\cos \theta$ 의 값 구하기	40 %

참고 일반적으로 벡터의 정사영은 벡터이다.

0702 **답** $\frac{1}{3}$

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$G\left(\frac{1+2+1}{3}, \frac{1+2+2}{3}, \frac{1+1+2}{3}\right) \quad \therefore G\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

점 H는 삼각형 BCD의 무게중심이므로

$$H\left(\frac{2+1+2}{3}, \frac{2+2+1}{3}, \frac{1+2+2}{3}\right) \quad \therefore H\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AH} = \left(\frac{5}{3}-1, \frac{5}{3}-1, \frac{5}{3}-1\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right),$$

$$\overrightarrow{GD} = \left(2-\frac{4}{3}, 1-\frac{5}{3}, 2-\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

이므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{GD} &= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

즉, $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{GD} > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{GD}}{|\overrightarrow{AH}| |\overrightarrow{GD}|} \\ &= \frac{\frac{4}{9}}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

0703 답 60°

$|\vec{a} + \vec{b}| = 14$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 196, 10^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 6^2 = 196$$

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} = 60 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 30$$

즉, $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ \leq \theta < 90^\circ$)

라 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{30}{10 \times 6} = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = 60^\circ$$

0704 답 ⑤

$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$ 의 양변을 제곱하면

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)라 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = 0 \quad \therefore \theta = 90^\circ$$

0705 답 $\frac{1}{5}$

$|4\vec{a} + \vec{b}| = |-2\vec{a} + 3\vec{b}|$ 의 양변을 제곱하면

$$16|\vec{a}|^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2$$

$$20\vec{a} \cdot \vec{b} = -12|\vec{a}|^2 + 8|\vec{b}|^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ 이므로 $|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 20\vec{a} \cdot \vec{b} = -4|\vec{a}|^2 \quad \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{1}{5}|\vec{a}|^2$$

즉, $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ 이므로

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = -\frac{-\frac{1}{5}|\vec{a}|^2}{|\vec{a}|^2} = \frac{1}{5}$$

0706 답 120°

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 = 1^2 - 4 \times \frac{1}{2} + 4 \times 1^2 = 3$$

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 1^2 + 2 \times \frac{1}{2} + 1^2 = 3$$

$$\therefore |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{3}, |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= |\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} - 2|\vec{b}|^2 \\ &= 1^2 - \frac{1}{2} - 2 \times 1^2 = -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

즉, $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) < 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 θ ($90^\circ < \theta \leq 180^\circ$)라 하면

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ - \theta) &= \frac{(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})}{|\vec{a} - 2\vec{b}| |\vec{a} + \vec{b}|} \\ &= \frac{-\frac{3}{2}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $180^\circ - \theta = 60^\circ$ 이므로

$$\theta = 120^\circ$$

0707 답 ③

$$3\vec{a} + \vec{b} = 3(2, 3) + (1, -2) = (7, 7)$$

$$\vec{a} + m\vec{b} = (2, 3) + m(1, -2) = (2+m, 3-2m)$$

두 벡터 $3\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + m\vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$(3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + m\vec{b}) = 0 \text{에서}$$

$$(7, 7) \cdot (2+m, 3-2m) = 0$$

$$7(2+m) + 7(3-2m) = 0$$

$$-7m = -35 \quad \therefore m = 5$$

0708 답 12

$\vec{b} \parallel \vec{c}$ 이므로 $\vec{c} = k\vec{b}$ (단, $k \neq 0$)

$\vec{b} \perp (\vec{c} - \vec{a})$ 이므로 $\vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$ 에서

$$\vec{b} \cdot (k\vec{b} - \vec{a}) = 0, k|\vec{b}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\therefore k|\vec{b}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

이때

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (6, 3, 4) \cdot (3, 2, 1) = 6 \times 3 + 3 \times 2 + 4 \times 1 = 28,$$

$$|\vec{b}|^2 = 3^2 + 2^2 + 1^2 = 14$$

이므로

$$14k = 28 \quad \therefore k = 2$$

따라서 $\vec{c} = 2\vec{b} = (6, 4, 2)$ 이므로 모든 성분의 합은

$$6 + 4 + 2 = 12$$

0709 답 (0, 8, 6)

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\overrightarrow{AP} = (x-1, y, z-1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3-1, -1-0, 3-1) = (2, -1, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (0-1, 3-0, 2-1) = (-1, 3, 1)$$

$$\overrightarrow{CP} = (x-3, y+1, z-3)$$

..... ①

두 벡터 $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}$ 가 서로 수직이므로 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ 에서

$$(x-1, y, z-1) \cdot (2, -1, 2) = 0$$

$$2(x-1) - y + 2(z-1) = 0$$

$$\therefore 2x - y + 2z - 4 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

..... ②

또 두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CP}$ 가 서로 평행하므로

$$\overrightarrow{CP} = k\overrightarrow{AB} \text{ (단, } k \neq 0)$$

$$(x-3, y+1, z-3) = k(-1, 3, 1)$$

즉, $x-3=-k$, $y+1=3k$, $z-3=k$ 이므로

$$x=-k+3, y=3k-1, z=k+3 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

이를 ①에 대입하여 풀면 $k=3$, $x=0$, $y=8$, $z=6$

따라서 점 P의 좌표는 (0, 8, 6)이다. $\dots\dots \textcircled{iv}$

채점 기준

① 점 P의 좌표를 (x, y, z) 로 놓고 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CP}$ 를 성분으로 나타내기	20 %
② 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AC}$ 가 서로 수직임을 이용하여 x, y, z 사이의 관계식 구하기	30 %
③ $\overrightarrow{CP}=k\overrightarrow{AB}$ ($k \neq 0$)로 놓고 x, y, z 를 k 에 대한 식으로 나타내기	30 %
④ 점 P의 좌표 구하기	20 %

0710 답 1

$$\vec{a}+t\vec{b}=(-2, 3)+t(3, 2)=(-2+3t, 3+2t)$$

$$t\vec{a}+\vec{c}=t(-2, 3)+(x, y)=(-2t+x, 3t+y)$$

두 벡터 $\vec{a}+t\vec{b}$, $t\vec{a}+\vec{c}$ 가 실수 t 의 값에 관계없이 항상 서로 수직이므로 $(\vec{a}+t\vec{b}) \cdot (t\vec{a}+\vec{c})=0$ 에서

$$(-2+3t, 3+2t) \cdot (-2t+x, 3t+y)=0$$

$$(-2+3t)(-2t+x)+(3+2t)(3t+y)=0$$

$$(3x+2y+13)t+(-2x+3y)=0$$

$$\therefore 3x+2y+13=0, -2x+3y=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$x=-3, y=-2 \quad \therefore x-2y=1$$

AB 유형 점검

114~116쪽

0711 답 $\frac{7}{10}$

점 M은 변 AB의 중점이므로

$$\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

점 N은 선분 CM을 3 : 2로 내분하는 점이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BN} &= \frac{3\overrightarrow{BM}+2\overrightarrow{BC}}{3+2} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BM} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} = \frac{3}{10}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

따라서 $x=\frac{3}{10}$, $y=\frac{2}{5}$ 이므로 $x+y=\frac{7}{10}$

0712 답 ④

점 G_1 은 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\overrightarrow{AG_1}=\frac{2}{3} \times \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3}$$

점 G_2 는 삼각형 ACD의 무게중심이므로

$$\overrightarrow{AG_2}=\frac{2}{3} \times \frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{2}=\frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{G_1G_2} &= \overrightarrow{AG_2}-\overrightarrow{AG_1} = \frac{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3} - \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{3} \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \end{aligned}$$

한편 두 점 M, N은 각각 모서리 AB, AD의 중점이므로

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\therefore \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

이때 $\overrightarrow{G_1G_2}=k\overrightarrow{MN}$ 이므로

$$-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}=k\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$$

따라서 $-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}k$ 이므로 $k=\frac{2}{3}$

0713 답 20

$$3\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{AC}$$

$$3\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=2(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA})$$

$$\therefore 5\overrightarrow{PA}=-4\overrightarrow{PB}$$

따라서 점 P는 변 AB를 4 : 5로 내분하는 점이므로

$$\triangle APC=\frac{4}{9}\triangle ABC=\frac{4}{9} \times 45=20$$

0714 답 ③

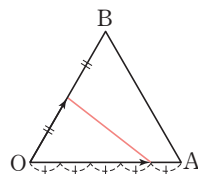
$$5m+8n=4 \text{에서 } \frac{5}{4}m+2n=1$$

$$\frac{5}{4}m=s, 2n=t \text{라 하면 } m \geq 0, n \geq 0 \text{이므로}$$

$$s+t=1, s \geq 0, t \geq 0$$

$$\therefore \overrightarrow{OP}=s\left(\frac{4}{5}\overrightarrow{OA}\right)+t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right)$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 오른쪽 그림과 같이 $\overrightarrow{OA}$ 를 4 : 1로 내분하는 점과 $\overrightarrow{OB}$ 의 중점을 이은 선분이다.



0715 답 $6\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} 5(\vec{a}-2\vec{b})-(\vec{a}-4\vec{b}+\vec{c}) &= 4\vec{a}-6\vec{b}-\vec{c} \\ &= 4(1, -1)-6(2, -1)-(-2, 8) \\ &= (-6, -6) \end{aligned}$$

$$\therefore |5(\vec{a}-2\vec{b})-(\vec{a}-4\vec{b}+\vec{c})|=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2}=6\sqrt{2}$$

0716 답 ③

$$\vec{a}+3\vec{b}=(k, 3)+3(1, 2)=(k+3, 9)$$

이때 $\vec{a}+3\vec{b}=(6, 9)$ 이므로

$$(k+3, 9)=(6, 9)$$

따라서 $k+3=6$ 이므로

$$k=3$$

0717 답 6

$$\overrightarrow{PA}=(-1-a, -1-b), \overrightarrow{PB}=(3-a, 3-b),$$

$$\overrightarrow{PC}=(3-a, -b), \overrightarrow{BA}=(-1-3, -1-3)=(-4, -4)$$

$$\begin{aligned} \therefore \overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC} &= (-1-a, -1-b)+(3-a, 3-b)+(3-a, -b) \\ &= (5-3a, 2-3b) \end{aligned}$$

이때 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BA}$ 이므로

$$(5-3a, 2-3b) = (-4, -4)$$

따라서 $5-3a = -4, 2-3b = -4$ 이므로

$$a=3, b=2 \quad \therefore ab=6$$

다른 풀이

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BA} \text{에서 } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}$$

$$\therefore 2\overrightarrow{PB} = -\overrightarrow{PC}$$

따라서 점 P는 선분 BC를 1:2로 내분하는 점이므로

$$P\left(\frac{1 \times 3 + 2 \times 3}{1+2}, \frac{1 \times 0 + 2 \times 3}{1+2}\right) \quad \therefore P(3, 2)$$

따라서 $a=3, b=2$ 이므로 $ab=6$

0718 답 4

$$\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} = (1, 4, 1) + 3(-1, 1, 0) + (4, -8, 1)$$

$$= (2, -1, 2)$$

$$\therefore |\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

즉, 벡터 $\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}$ 와 방향이 같고 크기가 4인 벡터는

$$4 \times \frac{\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}}{|\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}|} = \frac{4}{3}(2, -1, 2) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

따라서 이 벡터의 모든 성분의 합은

$$\frac{8}{3} + \left(-\frac{4}{3}\right) + \frac{8}{3} = 4$$

0719 답 ④

$$\vec{b} + \vec{c} = (1, -1, 0) + (-3, 0, 3) = (-2, -1, 3)$$

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{a} = k_1(\vec{b} + \vec{c}) \quad (\text{단, } k_1 \neq 0)$$

$$(2, p, -3) = k_1(-2, -1, 3)$$

$$\text{즉, } 2 = -2k_1, p = -k_1, -3 = 3k_1 \text{이므로}$$

$$k_1 = -1, p = 1$$

$$2\vec{a} - \vec{b} = 2(2, 1, -3) - (1, -1, 0) = (3, 3, -6)$$

$$\vec{a} + t\vec{b} = (2, 1, -3) + t(1, -1, 0) = (2+t, 1-t, -3)$$

두 벡터 $2\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} + t\vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{a} + t\vec{b} = k_2(2\vec{a} - \vec{b}) \quad (\text{단, } k_2 \neq 0)$$

$$(2+t, 1-t, -3) = k_2(3, 3, -6)$$

$$\text{즉, } 2+t = 3k_2, 1-t = 3k_2, -3 = -6k_2 \text{이므로}$$

$$k_2 = \frac{1}{2}, t = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore p+t = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

0720 답 2

$$\overrightarrow{AB} = (4-1, 6-0, -1-2) = (3, 6, -3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2-1, x-0, 1-2) = (1, x, -1)$$

이때 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$ 이므로

$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} \quad (\text{단, } k \neq 0)$$

$$(1, x, -1) = k(3, 6, -3)$$

따라서 $1=3k, x=6k, -1=-3k$ 이므로

$$k = \frac{1}{3}, x = 2$$

0721 답 ⑤

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\overrightarrow{AP} = (x, y+2), \overrightarrow{BP} = (x, y-2)$$

이때 $|\overrightarrow{AP}| + |\overrightarrow{BP}| = 6$ 이므로

$$\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 6$$

$$\sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 6 - \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$2y-9 = -3\sqrt{x^2 + (y-2)^2}$$

다시 양변을 제곱하면

$$(2y-9)^2 = 9\{x^2 + (y-2)^2\}, 9x^2 + 5y^2 = 45$$

$$\therefore \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

따라서 이 타원의 단축의 길이는 $2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$

0722 답 $\frac{32}{5}$

오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의

두 대각선 AC, BD의 교점을 M,

$\angle MAH = \theta$ 라 하면

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} &= |\overrightarrow{AH}| |\overrightarrow{AC}| \cos \theta \\ &= |\overrightarrow{AH}| |2\overrightarrow{AM}| \cos \theta \\ &= 2\overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AM} \cos \theta \end{aligned}$$

이때 직각삼각형 AHM에서 $\overrightarrow{AM} \cos \theta = \overrightarrow{AH}$ 이므로

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AM} \cos \theta = 2\overrightarrow{AH}^2$$

한편 직각삼각형 ABD에서 $\overrightarrow{BD} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$

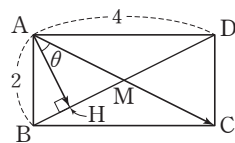
직각삼각형 ABD의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{BD}$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{AH} \times 2\sqrt{5}$$

$$\therefore \overrightarrow{AH} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AH}^2 = 2 \times \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{32}{5}$$



0723 답 4

$\angle ABP = 90^\circ, \overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BF} = 1$ 이므로 직각삼각형 ABP에서

$$\overrightarrow{AP} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$\angle ADQ = 90^\circ, \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF} = 1$ 이므로 직각삼각형 AQD에서

$$\overrightarrow{AQ} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

즉, 삼각형 APQ는 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ}$ 인 이등변삼각형이다.

또 $\angle PFQ = 90^\circ, \overrightarrow{PF} = \overrightarrow{QF} = 3-1=2$ 이므로 직각삼각형 PFQ에서

$$\overrightarrow{PQ} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 변 PQ에

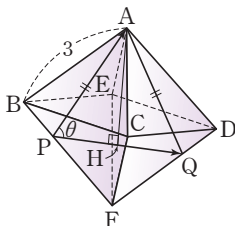
내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overrightarrow{PH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$\angle APH = \theta$ 라 하면 직각삼각형 APH에서

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{PH}}{\overrightarrow{AP}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PQ} = |\overrightarrow{PA}| |\overrightarrow{PQ}| \cos \theta = \sqrt{10} \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = 4$$



0724 답 -6

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{MB} = -\overrightarrow{BM} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{CM} &= (\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BD}) \cdot (-\overrightarrow{BM}) \\ &= -|\overrightarrow{BM}|^2 + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BM} \\ &= -|\overrightarrow{BM}|^2 + |\overrightarrow{BD}| |\overrightarrow{BM}| \cos 60^\circ\end{aligned}$$

$$\text{이때 } |\overrightarrow{BM}| = \overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 3, |\overrightarrow{BD}| = \overline{BD} = \frac{1}{3}\overline{AB} = 2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DM} \cdot \overrightarrow{CM} &= -|\overrightarrow{BM}|^2 + |\overrightarrow{BD}| |\overrightarrow{BM}| \cos 60^\circ \\ &= -3^2 + 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = -6\end{aligned}$$

0725 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-1, 1, 0) \cdot (4, 1, 1)$$

$$= (-1) \times 4 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = -3$$

$$\text{즉, } \vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ - \theta) &= -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ &= -\frac{-3}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 180^\circ - \theta = 60^\circ \text{이므로}$$

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

0726 답 60°

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$|\vec{a}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면 } 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{을 하면 } 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2) = 10$$

$$\therefore |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\text{한편 } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 3 \text{에서}$$

$$|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{에서 } |\vec{a}|^2 = 4, |\vec{b}|^2 = 1$$

$$\therefore |\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$$

$$\text{즉, } \vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \text{이므로 두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{가 이루는 각의 크기를}$$

$$\theta \ (0^\circ \leq \theta < 90^\circ) \text{라 하면}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{1}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

0727 답 ⑤

$$\vec{a} - \vec{c} = (6, -3) - (5, -1) = (1, -2)$$

$$k\vec{b} + \vec{c} = k(1, 1) + (5, -1) = (k+5, k-1)$$

$$\text{두 벡터 } \vec{a} - \vec{c}, k\vec{b} + \vec{c} \text{가 서로 수직이므로 } (\vec{a} - \vec{c}) \cdot (k\vec{b} + \vec{c}) = 0 \text{에서}$$

$$(1, -2) \cdot (k+5, k-1) = 0$$

$$1 \times (k+5) + (-2) \times (k-1) = 0$$

$$-k + 7 = 0 \quad \therefore k = 7$$

0728 답 $\frac{1}{2}$

$$\textcircled{A} \text{에서 벡터 } \vec{c} \text{는 벡터 } \vec{a} + \vec{b} \text{와 크기는 같지만 방향이 반대이므로}$$

$$\vec{c} = -(\vec{a} + \vec{b})$$

$$\text{이때 } \vec{a} + \vec{b} = (5, 4) + (-2, 3) = (3, 7) \text{이므로}$$

$$\vec{c} = -(3, 7) = (-3, -7) \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\textcircled{B} \text{에서}$$

$$\vec{a} + t\vec{c} = (5, 4) + t(-3, -7) = (5-3t, 4-7t)$$

$$\vec{b} - \vec{a} = (-2, 3) - (5, 4) = (-7, -1)$$

$$\text{두 벡터 } \vec{a} + t\vec{c}, \vec{b} - \vec{a} \text{가 서로 평행하므로}$$

$$\vec{a} + t\vec{c} = k(\vec{b} - \vec{a}) \quad (\text{단, } k \neq 0)$$

$$(5-3t, 4-7t) = k(-7, -1)$$

$$\therefore 5-3t = -7k, 4-7t = -k \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면}$$

$$k = -\frac{1}{2}, t = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $\vec{c}$ 를 성분으로 나타내기	20 %
② $\vec{a} + t\vec{c} = k(\vec{b} - \vec{a})$ ($k \neq 0$)로 놓고 k, t 에 대한 연립방정식 세우기	60 %
③ t 의 값 구하기	20 %

0729 답 5

$$\overrightarrow{OA} = (2, 3, 0), \overrightarrow{OB} = (0, 3, 1),$$

$$\overrightarrow{OC} = (2, 0, 1), \overrightarrow{OD} = (12, 9, 5) \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\overrightarrow{OD} = l\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OC} \text{에서}$$

$$(12, 9, 5) = l(2, 3, 0) + m(0, 3, 1) + n(2, 0, 1)$$

$$= (2l+2n, 3l+3m, m+n)$$

$$\text{즉, } 12 = 2l+2n, 9 = 3l+3m, 5 = m+n \text{이므로}$$

$$l+n=6, l+m=3, m+n=5 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\text{세 식을 변끼리 더하면}$$

$$2(l+m+n) = 14 \quad \therefore l+m+n = 7$$

$$\text{이 식에 } \textcircled{1} \text{을 각각 대입하여 풀면}$$

$$l=2, m=1, n=4$$

$$\therefore l-m+n = 5 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ 를 성분으로 나타내기	20 %
② l, m, n 에 대한 연립방정식 세우기	50 %
③ $l-m+n$ 의 값 구하기	30 %

0730 답 16

$$t\vec{a} + \vec{b} = t(-3, 1) + (1, 1) = (-3t+1, t+1)$$

$$\vec{a} + t\vec{b} = (-3, 1) + t(1, 1) = (-3+t, 1+t) \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\therefore f(t) = (t\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + t\vec{b})$$

$$= (-3t+1, t+1) \cdot (-3+t, 1+t)$$

$$= (-3t+1)(-3+t) + (t+1)(1+t)$$

$$= -2t^2 + 12t - 2$$

$$= -2(t-3)^2 + 16 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\text{따라서 } t=3 \text{일 때 } f(t) \text{의 최댓값은 } 16 \text{이다.} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

i $ta+b, a+tb$ 를 성분으로 나타내기	40 %
ii $f(t)$ 를 t 에 대한 식으로 나타내기	40 %
iii $f(t)$ 의 최댓값 구하기	20 %

C 실력 향상

117쪽

0731 답 $\frac{36}{5}$

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 2$ 이고 $\overline{AB} = 6\sqrt{3}$ 이므로
 $\overline{AC} = 4\sqrt{3}$

$\angle BAC = \theta$ 라 하면

$$\begin{aligned}\overline{AB} \cdot \overline{AC} &= |\overline{AB}| |\overline{AC}| \cos \theta \\ &= 6\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} \cos \theta \\ &= 72 \cos \theta\end{aligned}$$

이때 $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 36$ 이므로

$$72 \cos \theta = 36, \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

$$\therefore \angle DAB = \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ$$

$\overline{AD} = x$ 라 하면 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \sin 60^\circ &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AD} \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{AC} \sin 30^\circ \\ \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} \times x \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times x \times 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \\ 18\sqrt{3} &= \frac{5}{2} \sqrt{3} x \\ \therefore x &= \frac{36}{5}\end{aligned}$$

따라서 선분 AD의 길이는 $\frac{36}{5}$ 이다.

0732 답 $\frac{1}{4}$

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

이때 세 점 O, P, G가 한 직선 위에 있으므로

$$\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OG} \quad (\text{단, } k \neq 0)$$

한편 점 M은 모서리 OC의 중점이므로 $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM}$

$$\begin{aligned}\therefore \overrightarrow{OP} &= \frac{k}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \frac{k}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{k}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{2k}{3}\overrightarrow{OM}\end{aligned}$$

그런데 점 P는 삼각형 ABM 위의 점이므로

$$\frac{k}{3} + \frac{k}{3} + \frac{2k}{3} = 1, \frac{4k}{3} = 1$$

$$\therefore k = \frac{3}{4}$$

따라서 점 P는 선분 OG를 3 : 1로 내분하는 점이므로

$$\frac{|\overrightarrow{PG}|}{|\overrightarrow{OG}|} = \frac{1}{4}$$

참고 점 P가 평면 ABM 위의 점이면 네 점 A, B, M, P가 한 평면 위에 있으므로

$$\Rightarrow \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AM} \quad (\text{단, } m, n \text{은 실수})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = m(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + n(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA})$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = (1-m-n)\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB} + n\overrightarrow{OM}$$

0733 답 ①

직각삼각형 CAH에서

$$\begin{aligned}\overline{CA} \cdot \overline{CH} &= |\overline{CA}| |\overline{CH}| \cos(\angle ACH) \\ &= |\overline{CA}| |\overline{CH}| \times \frac{|\overline{CH}|}{|\overline{CA}|} = |\overline{CH}|^2\end{aligned}$$

(나)에서 $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 40$ 이므로

$$|\overline{AB}| |\overline{AC}| \cos(\angle CAB) = 40$$

$$|\overline{AB}| |\overline{AC}| \times \frac{|\overline{AH}|}{|\overline{AC}|} = 40$$

$$\therefore |\overline{AB}| |\overline{AH}| = 40 \quad \xrightarrow{\text{직각삼각형 CAH에서}} \cos(\angle CAB) = \cos(\angle CAH) = \frac{|\overline{AH}|}{|\overline{AC}|}$$

이때 (가)에서 $|\overline{AH}| = \frac{2}{5} |\overline{AB}|$ 이므로

$$\frac{2}{5} |\overline{AB}|^2 = 40, |\overline{AB}|^2 = 100$$

$$\therefore |\overline{AB}| = 10$$

(다)에서 삼각형 ABC의 넓이가 30이므로

$$\frac{1}{2} |\overline{AB}| |\overline{CH}| = 30$$

$$\frac{1}{2} \times 10 \times |\overline{CH}| = 30$$

$$\therefore |\overline{CH}| = 6$$

$$\therefore \overline{CA} \cdot \overline{CH} = |\overline{CH}|^2 = 6^2 = 36$$

0734 답 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}| \cos(180^\circ - 120^\circ) = -1 \times 1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b}_1 &= \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b})}{|\vec{a} + 2\vec{b}|} = \frac{|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a} + 2\vec{b}|} \\ &= \frac{1^2 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{|\vec{a} + 2\vec{b}|} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b}_2 &= \frac{\vec{a} \cdot (\vec{a} + 2\vec{b}_1)}{|\vec{a} + 2\vec{b}_1|} = \frac{|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}_1}{|\vec{a} + 2\vec{b}_1|} \\ &= \frac{1^2 + 2 \times 0}{|\vec{a} + 2\vec{b}_1|} = \frac{1}{|\vec{a} + 2\vec{b}_1|}\end{aligned}$$

이때 두 벡터 $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ 는 단위벡터이므로

$$|\vec{b}_1| = |\vec{b}_2| = 1$$

즉,

$$|\vec{a} + 2\vec{b}_1|^2 = |\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b}_1 + 4|\vec{b}_1|^2 = 1^2 + 4 \times 0 + 4 \times 1^2 = 5$$

이므로

$$|\vec{a} + 2\vec{b}_1| = \sqrt{5}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b}_2 = \frac{1}{|\vec{a} + 2\vec{b}_1|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서 $\vec{a} \cdot \vec{b}_2 > 0$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}_2}{|\vec{a}| |\vec{b}_2|} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{1 \times 1} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

07 / 도형의 방정식

A 개념 확인

118~121쪽

0735 답 $\frac{x-1}{3}=2-y$

0736 답 $\frac{x+2}{4}=\frac{y-3}{5}$

0737 답 $x=-1$

0738 답 $-x-2=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{3}$

0739 답 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-7}=\frac{z-3}{4}$

0740 답 $y=-1, z=4$

0741 답 $x-3=\frac{y-5}{9}$

$\vec{AB}=(4-3, 14-5)=(1, 9)$

따라서 점 A(3, 5)를 지나고 방향벡터가 $\vec{AB}=(1, 9)$ 인 직선의 방정식은

$$x-3=\frac{y-5}{9}$$

0742 답 $\frac{x+1}{4}=\frac{y-4}{-7}$

$\vec{AB}=(3-(-1), -3-4)=(4, -7)$

따라서 점 A(-1, 4)를 지나고 방향벡터가 $\vec{AB}=(4, -7)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+1}{4}=\frac{y-4}{-7}$$

0743 답 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{3}$

$\vec{AB}=(3-1, 2-(-1), 5-2)=(2, 3, 3)$

따라서 점 A(1, -1, 2)를 지나고 방향벡터가 $\vec{AB}=(2, 3, 3)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{3}$$

0744 답 $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z+3}{-4}$

$\vec{AB}=(0-2, 4-(-1), -7-(-3))=(-2, 5, -4)$

따라서 점 A(2, -1, -3)을 지나고 방향벡터가

$\vec{AB}=(-2, 5, -4)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{5}=\frac{z+3}{-4}$$

0745 답 $\frac{4}{5}$

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$\vec{u}=(-2, 1), \vec{v}=(1, -2)$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|(-2) \times 1 + 1 \times (-2)|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{5}$$

0746 답 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$\vec{u}=(3, 4), \vec{v}=(-1, 2)$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|3 \times (-1) + 4 \times 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

0747 답 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$\vec{u}=(1, 1, 1), \vec{v}=(1, -1, 2)$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

0748 답 $\frac{11}{14}$

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$\vec{u}=(3, -1, 2), \vec{v}=(-2, 3, -1)$

$$\begin{aligned} \therefore \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|3 \times (-2) + (-1) \times 3 + 2 \times (-1)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \frac{11}{14} \end{aligned}$$

0749 답 45°

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$\vec{u}=(3, 4), \vec{v}=(7, 1)$

두 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|3 \times 7 + 4 \times 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2} \sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \therefore \theta &= 45^\circ \end{aligned}$$

0750 답 60°

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$\vec{u}=(1, -1, 2), \vec{v}=(2, 1, 1)$

두 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|1 \times 2 + (-1) \times 1 + 2 \times 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \\ \therefore \theta &= 60^\circ \end{aligned}$$

0751 답 (1) 3 (2) -1

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면
 $\vec{u}=(-2, k-1), \vec{v}=(1, -1)$

(1) $l \parallel m$ 이면 $\vec{u} \parallel \vec{v}$ 이므로

$$\vec{u}=t\vec{v} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

$$(-2, k-1)=t(1, -1)$$

따라서 $-2=t, k-1=-t$ 이므로 $t=-2, k=3$

(2) $l \perp m$ 이면 $\vec{u} \perp \vec{v}$ 이므로

$$\vec{u} \cdot \vec{v}=0$$

$$(-2, k-1) \cdot (1, -1)=0$$

$$(-2) \times 1 + (k-1) \times (-1)=0$$

$$-k-1=0 \quad \therefore k=-1$$

0752 답 (1) 4 (2) 1

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면
 $\vec{u}=(k, 4, 2), \vec{v}=(2, k-2, 1)$

(1) $l \parallel m$ 이면 $\vec{u} \parallel \vec{v}$ 이므로

$$\vec{u}=t\vec{v} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

$$(k, 4, 2)=t(2, k-2, 1)$$

따라서 $k=2t, 4=t(k-2), 2=t$ 이므로 $t=2, k=4$

(2) $l \perp m$ 이면 $\vec{u} \perp \vec{v}$ 이므로

$$\vec{u} \cdot \vec{v}=0$$

$$(k, 4, 2) \cdot (2, k-2, 1)=0$$

$$k \times 2 + 4(k-2) + 2 \times 1=0$$

$$6k-6=0 \quad \therefore k=1$$

0753 답 $2x-y-4z+8=0$

$$2(x-1)-(y+2)-4(z-3)=0 \text{에서}$$

$$2x-y-4z+8=0$$

0754 답 $x-3y+2z-1=0$

$$(x-3)-3(y-0)+2(z+1)=0 \text{에서}$$

$$x-3y+2z-1=0$$

0755 답 $3x+y-2z+2=0$

$$3(x-1)+(y+1)-2(z-2)=0 \text{에서}$$

$$3x+y-2z+2=0$$

0756 답 $y=-2$

y 축에 수직인 평면의 법선벡터는 $\vec{n}=(0, 1, 0)$ 이므로 구하는 평면의 방정식은

$$0 \times (x-3) + (y+2) + 0 \times (z-5)=0 \quad \therefore y=-2$$

0757 답 $z=-3$

xy 평면에 평행한 평면, 즉 z 축에 수직인 평면의 법선벡터는 $\vec{n}=(0, 0, 1)$ 이므로 구하는 평면의 방정식은

$$0 \times (x+4) + 0 \times (y-7) + (z+3)=0 \quad \therefore z=-3$$

0758 답 $\frac{\sqrt{3}}{6}$

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면
 $\vec{n}_1=(1, 0, -1), \vec{n}_2=(1, 1, 2)$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$= \frac{|1 \times 1 + 0 \times 1 + (-1) \times 2|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{6}$$

0759 답 $\frac{4}{9}$

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면
 $\vec{n}_1=(1, 2, -2), \vec{n}_2=(2, -1, 2)$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$= \frac{|1 \times 2 + 2 \times (-1) + (-2) \times 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}}$$

$$= \frac{4}{9}$$

0760 답 $\frac{4}{21}$

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면
 $\vec{n}_1=(2, -2, 1), \vec{n}_2=(6, 3, -2)$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$= \frac{|2 \times 6 + (-2) \times 3 + 1 \times (-2)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} \sqrt{6^2 + 3^2 + (-2)^2}}$$

$$= \frac{4}{21}$$

0761 답 30°

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면
 $\vec{n}_1=(1, 1, 0), \vec{n}_2=(1, 2, -1)$

두 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$= \frac{|1 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times (-1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = 30^\circ$$

0762 답 60°

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면
 $\vec{n}_1=(1, 2, -1), \vec{n}_2=(2, 1, 1)$

두 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$= \frac{|1 \times 2 + 2 \times 1 + (-1) \times 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ$$

0763 답 3

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (2, -1, k), \vec{n}_2 = (4, -2, 6)$$

두 평면이 서로 평행하면 $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ 이므로

$$\vec{n}_1 = t\vec{n}_2 \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

$$(2, -1, k) = t(4, -2, 6)$$

$$\text{따라서 } 2=4t, -1=-2t, k=6t \text{이므로 } t=\frac{1}{2}, k=3$$

0764 답 4

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (1, 2, -1), \vec{n}_2 = (2, 1, k)$$

두 평면이 서로 수직이면 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ 이므로

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

$$(1, 2, -1) \cdot (2, 1, k) = 0$$

$$1 \times 2 + 2 \times 1 + (-1) \times k = 0, -k + 4 = 0 \quad \therefore k = 4$$

0765 답 $\frac{5}{6}$

직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{u} = (-1, 2, -1), \vec{n} = (1, -1, 2)$$

직선과 평면이 이루는 각의 크기가 θ 이므로 두 벡터 $\vec{u}, \vec{n}$ 이 이루는 각의 크기는 $90^\circ - \theta$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore \cos(90^\circ - \theta) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} \\ &= \frac{|(-1) \times 1 + 2 \times (-1) + (-1) \times 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

0766 답 4

$$\frac{|2 \times 1 + 1 \times (-2) + 2 \times 3 + 6|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 4$$

0767 답 2

$$\frac{|3 \times 0 - 4 \times 1 + 12 \times 0 - 22|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2}} = 2$$

0768 답 $\sqrt{11}$

$$\frac{|1 \times 2 + 3 \times 0 - 1 \times 3 + 12|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-1)^2}} = \sqrt{11}$$

0769 답 $\frac{\sqrt{14}}{2}$

$$\frac{|-7|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

0770 답 점 $(5, -1, 3)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 구

$$\vec{p} - \vec{a} = (x-5, y+1, z-3)$$

$$|\vec{p} - \vec{a}| = 4 \text{에서 } |\vec{p} - \vec{a}|^2 = 4^2 \text{이므로}$$

$$(x-5)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 4^2$$

따라서 점 P는 점 $(5, -1, 3)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 구 위의 점이다.

0771 답 점 $(5, -1, 3)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 구

$$\vec{p} - \vec{a} = (x-5, y+1, z-3)$$

$$(\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} - \vec{a}) = 9 \text{에서}$$

$$(x-5, y+1, z-3) \cdot (x-5, y+1, z-3) = 9$$

$$\therefore (x-5)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 3^2$$

따라서 점 P는 점 $(5, -1, 3)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 구 위의 점이다.

B 유형 완성

122~133쪽

0772 답 ④

점 P의 좌표는 $(5, -1, 6)$

$$\text{직선 } \frac{x-2}{3} = 3-y = \frac{z-1}{2} \text{의 방향벡터는 } (3, -1, 2)$$

즉, 점 P(5, -1, 6)을 지나고 방향벡터가 $(3, -1, 2)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-6}{2}$$

이 직선이 점 $(a, 1, b)$ 를 지나므로

$$\frac{a-5}{3} = \frac{1+1}{-1} = \frac{b-6}{2} \quad \therefore a = -1, b = 2$$

$$\therefore a+b=1$$

0773 답 -15

점 $(3, -2)$ 를 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (5, 3)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{3} \quad \therefore 3x-5y-19=0$$

따라서 $m=3, n=-5$ 이므로 $mn=-15$

0774 답 $(7, -8, 0)$

점 $(3, -4, 2)$ 를 지나고 방향벡터가 $\vec{u} = (-2, 2, 1)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+4}{2} = z-2$$

$z=0$ 을 대입하면

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+4}{2} = 0-2 \quad \therefore x=7, y=-8$$

따라서 구하는 점의 좌표는

$$(7, -8, 0)$$

0775 답 $\frac{25}{12}$

$$\text{직선 } \frac{x+1}{2} = \frac{2-y}{3} \text{의 방향벡터는 } (2, -3)$$

즉, 점 $(-1, 4)$ 를 지나고 방향벡터가 $(2, -3)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-4}{-3} \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$y=0$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{x+1}{2} = \frac{0-4}{-3} \quad \therefore x = \frac{5}{3}$$

$$\therefore A\left(\frac{5}{3}, 0\right)$$

$x=0$ 을 ㉠에 대입하면

$$\frac{0+1}{2} = \frac{y-4}{-3} \quad \therefore y = \frac{5}{2}$$

$$\therefore B\left(0, \frac{5}{2}\right) \quad \dots\dots \text{ii}$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{25}{12} \quad \dots\dots \text{iii}$$

채점 기준

① 점 $(-1, 4)$ 를 지나고 직선 $\frac{x+1}{2} = \frac{2-y}{3}$ 에 평행한 직선의 방정식 구하기	40 %
② 두 점 A, B의 좌표 구하기	40 %
③ 삼각형 OAB의 넓이 구하기	20 %

0776 답 ③

$$\vec{b} - \vec{a} = (-1, 2, 1) - (-4, 1, 3) = (3, 1, -2)$$

따라서 점 $(1, 2, 3)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{b} - \vec{a} = (3, 1, -2)$ 인 직선 l 의 방정식은

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-2}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{4-1}{3} = 3-2 = \frac{1-3}{-2} \text{이므로 점 } (4, 3, 1) \text{은 직선 } l \text{ 위의 점이다.}$$

0777 답 ①

$B(2, -3, 3), C(-2, 3, -3)$ 이므로

$$\vec{BC} = (-2-2, 3-(-3), -3-3) = (-4, 6, -6)$$

즉, 점 $B(2, -3, 3)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{BC} = (-4, 6, -6)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{-4} = \frac{y+3}{6} = \frac{z-3}{-6}$$

이 직선이 점 $(a, b, 9)$ 를 지나므로

$$\frac{a-2}{-4} = \frac{b+3}{6} = \frac{9-3}{-6}$$

$$\therefore a=6, b=-9$$

$$\therefore a-b=15$$

0778 답 ③

$$\vec{AB} = (-1-(-2), 3-1, 4-2) = (1, 2, 2)$$

즉, 점 $A(-2, 1, 2)$ 를 지나고 방향벡터가 $\vec{AB} = (1, 2, 2)$ 인 직선의 방정식은

$$x+2 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$z=0$ 을 ㉠에 대입하면

$$x+2 = \frac{y-1}{2} = \frac{0-2}{2} \quad \therefore x=-3, y=-1$$

$$\therefore P(-3, -1, 0)$$

$x=0$ 을 ㉠에 대입하면

$$0+2 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{2} \quad \therefore y=5, z=6$$

$$\therefore Q(0, 5, 6)$$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$PQ = \sqrt{3^2 + (5+1)^2 + 6^2} = 9$$

0779 답 ②

$A(2, 0, 2), B(2, 2, 2)$ 이므로

$$M\left(\frac{2+2}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{2+2}{2}\right) \quad \therefore M(2, 1, 2)$$

한편 $G(0, 2, 0)$ 이므로

$$\vec{GM} = (2-0, 1-2, 2-0) = (2, -1, 2)$$

즉, 점 $G(0, 2, 0)$ 을 지나고 방향벡터가 $\vec{GM} = (2, -1, 2)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{2}$$

따라서 $a=2, b=2, c=-1$ 이므로 $abc=-4$

0780 답 9

$$x-3 = \frac{y-1}{2} \text{에서 } 2x-y=5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-2} \text{에서 } 2x+3y=-7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=1, y=-3$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 $(1, -3)$ ①

따라서 두 점 $(1, -3), (2, 6)$ 을 지나고 방향벡터 $\vec{u}$ 는

$$\vec{u} = (2-1, 6-(-3)) = (1, 9) \quad \dots\dots \text{ii}$$

$$\therefore a=9 \quad \dots\dots \text{iii}$$

채점 기준

① 두 직선의 교점의 좌표 구하기	50 %
② 교점과 점 $(2, 6)$ 을 지나고 방향벡터 $\vec{u}$ 구하기	40 %
③ a 의 값 구하기	10 %

0781 답 ②

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+4}{2} = \frac{z-1}{2} = t \text{ (} t \text{는 실수)로 놓으면}$$

$$x=3t+1, y=2t-4, z=t+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{2} = s \text{ (} s \text{는 실수)로 놓으면}$$

$$x=s, y=3s, z=2s+4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서

$$3t+1=s, 2t-4=3s, t+1=2s+4$$

$$\therefore 3t-s=-1, 2t-3s=4, t-2s=3$$

세 식 중 두 식을 연립하여 풀면 $t=-1, s=-2$

$t=-1$ 을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x=-2, y=-6, z=0$$

따라서 두 직선의 교점의 좌표는 $(-2, -6, 0)$ 이므로

$$a=-2, b=-6, c=0$$

$$\therefore a+b+c=-8$$

0782 답 $2\sqrt{6}$

$$\frac{x-2}{2} = y-3 = 1-z = t \text{ (} t \text{는 실수)로 놓으면}$$

$$x=2t+2, y=t+3, z=-t+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠을 주어진 구의 방정식에 대입하면

$$(2t+2)^2 + (t+3)^2 + (-t+1)^2 = 14$$

$$t^2+2t=0, t(t+2)=0 \quad \therefore t=-2 \text{ 또는 } t=0$$

$t = -2$ 를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x = -2, y = 1, z = 3$$

$t = 0$ 을 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x = 2, y = 3, z = 1$$

따라서 두 점 A, B의 좌표는 $(-2, 1, 3), (2, 3, 1)$ 이므로

$$AB = \sqrt{(2+2)^2 + (3-1)^2 + (1-3)^2} = 2\sqrt{6}$$

0783 답 -5

$$\frac{x-3}{a} = \frac{2-y}{a} = \frac{z-1}{2} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = at + 3, y = -at + 2, z = 2t + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{1-x}{5} = \frac{y-2}{a} = \frac{z-2}{3} = s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = -5s + 1, y = as + 2, z = 3s + 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서

$$at + 3 = -5s + 1, -at + 2 = as + 2, 2t + 1 = 3s + 2$$

이때 $-at + 2 = as + 2$ 에서 $a \neq 0$ 이므로

$$t = -s$$

이를 $2t + 1 = 3s + 2$ 에 대입하면

$$2 \times (-s) + 1 = 3s + 2 \quad \therefore s = -\frac{1}{5}$$

따라서 $t = \frac{1}{5}$ 이므로 $at + 3 = -5s + 1$ 에서

$$a \times \frac{1}{5} + 3 = -5 \times \left(-\frac{1}{5}\right) + 1 \quad \therefore a = -5$$

0784 답 $\frac{10}{3}$

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (a, \sqrt{3}, 2), \vec{v} = (\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$$

두 직선이 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\cos 30^\circ = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|a \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 1 + 2 \times 2\sqrt{3}|}{\sqrt{a^2 + (\sqrt{3})^2 + 2^2} \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2 + (2\sqrt{3})^2}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{|\sqrt{3}a + 5\sqrt{3}|}{4\sqrt{a^2 + 7}}$$

$$2\sqrt{3(a^2 + 7)} = |\sqrt{3}a + 5\sqrt{3}|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$3a^2 - 10a + 3 = 0$$

$$(3a - 1)(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{3} \text{ 또는 } a = 3$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$\frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$$

0785 답 ⑤

직선 l 의 방향벡터는 $\vec{u} = (3, -1)$

직선 m 의 방향벡터를 $\vec{v}$ 라 하면 $\vec{v} = (7, 1)$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|3 \times 7 + (-1) \times 1|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2} \sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

0786 답 60°

직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (2-1, 4-1, 5-3) = (1, 3, 2) \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

직선 m 의 방향벡터를 $\vec{v}$ 라 하면

$$\vec{v} = (-1-1, 6-5, 9-6) = (-2, 1, 3) \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

두 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{|1 \times (-2) + 3 \times 1 + 2 \times 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 60^\circ \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 직선 l 의 방향벡터 구하기	20 %
② 직선 m 의 방향벡터 구하기	20 %
③ 두 직선 l, m 이 이루는 각의 크기 구하기	60 %

0787 답 $\frac{3\sqrt{14}}{7}$

직선 $\frac{x-1}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+1}{2}$ 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (3, 1, 2)$$

x 축, y 축, z 축의 방향벡터를 각각 $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ 이라 하면

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{e}_1|}{|\vec{u}| |\vec{e}_1|} = \frac{|3 \times 1 + 1 \times 0 + 2 \times 0|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{3\sqrt{14}}{14},$$

$$\cos \beta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{e}_2|}{|\vec{u}| |\vec{e}_2|} = \frac{|3 \times 0 + 1 \times 1 + 2 \times 0|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{14}}{14},$$

$$\cos \gamma = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{e}_3|}{|\vec{u}| |\vec{e}_3|} = \frac{|3 \times 0 + 1 \times 0 + 2 \times 1|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$\therefore \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \frac{3\sqrt{14}}{7}$$

0788 답 -12

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u} = (-4, -a, 12), \vec{v} = (-2, 1, b)$$

두 직선이 서로 평행하므로 $\vec{u} = k\vec{v} \quad (k \neq 0)$ 에서

$$(-4, -a, 12) = k(-2, 1, b)$$

따라서 $-4 = -2k, -a = k, 12 = kb$ 이므로

$$k = 2, a = -2, b = 6 \quad \therefore ab = -12$$

0789 답 ④

두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터는

$$\vec{AB} = (6-a, a-1)$$

직선 $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-2}$ 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u} = (3, -2)$$

두 직선이 서로 수직이므로 $\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0$ 에서

$$(6-a, a-1) \cdot (3, -2) = 0$$

$$(6-a) \times 3 + (a-1) \times (-2) = 0$$

$$-5a + 20 = 0 \quad \therefore a = 4$$

0790 [답] ②

세 직선 l, m, n 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ 이라 하면
 $\vec{u}_1 = (3, 1, 2), \vec{u}_2 = (-a, b, 4), \vec{u}_3 = (-2, 2, c)$
 $l \parallel m$ 이므로 $\vec{u}_2 = k\vec{u}_1$ ($k \neq 0$)에서
 $(-a, b, 4) = k(3, 1, 2)$
 즉, $-a = 3k, b = k, 4 = 2k$ 이므로
 $k = 2, a = -6, b = 2$
 $l \perp n$ 이므로 $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0$ 에서
 $(3, 1, 2) \cdot (-2, 2, c) = 0$
 $3 \times (-2) + 1 \times 2 + 2 \times c = 0$
 $2c - 4 = 0 \quad \therefore c = 2$
 $\therefore a + b - c = -6 + 2 - 2 = -6$

0791 [답] 6

세 직선 l, m, n 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ 이라 하면
 $\vec{u}_1 = \vec{OA} = (1, 1, a), \vec{u}_2 = (-b, -1, 2), \vec{u}_3 = (-5, -3, 4)$
 두 직선 l, m 이 서로 수직이므로 $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ 에서
 $(1, 1, a) \cdot (-b, -1, 2) = 0$
 $1 \times (-b) + 1 \times (-1) + a \times 2 = 0$
 $\therefore 2a - b - 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 두 직선 l, n 이 서로 수직이므로 $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_3 = 0$ 에서
 $(1, 1, a) \cdot (-5, -3, 4) = 0$
 $1 \times (-5) + 1 \times (-3) + a \times 4 = 0$
 $4a - 8 = 0 \quad \therefore a = 2$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $2 \times 2 - b - 1 = 0 \quad \therefore b = 3$
 $\therefore ab = 2 \times 3 = 6$

0792 [답] ④

$\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{3} = z+1 = t$ (t 는 실수)로 놓으면
 $x = 2t + 3, y = 3t + 2, z = t - 1$
 점 A에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 직선 l 위의
 점이므로 $H(2t+3, 3t+2, t-1)$ 로 놓자.
 $\therefore \vec{AH} = (2t+10, 3t-1, t-3)$
 이때 직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면 $\vec{u} = (2, 3, 1)$
 $\vec{AH} \perp \vec{u}$ 이므로 $\vec{AH} \cdot \vec{u} = 0$ 에서
 $(2t+10, 3t-1, t-3) \cdot (2, 3, 1) = 0$
 $(2t+10) \times 2 + (3t-1) \times 3 + (t-3) \times 1 = 0$
 $14t + 14 = 0$
 $\therefore t = -1$
 따라서 $\vec{AH} = (8, -4, -4)$ 이므로 구하는 거리는
 $|\vec{AH}| = \sqrt{8^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{6}$

0793 [답] $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

원점 O를 지나고 방향벡터가 $\vec{OA} = (-1, 2, -1)$ 인 직선 OA의 방
 정식은
 $-x = \frac{y}{2} = -z$

$-x = \frac{y}{2} = -z = t$ (t 는 실수)로 놓으면
 $x = -t, y = 2t, z = -t$
 점 H는 직선 OA 위의 점이므로 $H(-t, 2t, -t)$ 로 놓으면
 $\vec{BH} = (-t+1, 2t-1, -t-1)$
 $\vec{BH} \perp \vec{OA}$ 이므로 $\vec{BH} \cdot \vec{OA} = 0$ 에서
 $(-t+1, 2t-1, -t-1) \cdot (-1, 2, -1) = 0$
 $(-t+1) \times (-1) + (2t-1) \times 2 + (-t-1) \times (-1) = 0$
 $6t - 2 = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{3}$
 따라서 점 H의 좌표는 $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$

0794 [답] $\frac{\sqrt{70}}{2}$

$\frac{y-1}{2} = z-2 = t$ (t 는 실수)로 놓으면
 $y = 2t + 1, z = t + 2$
 점 H는 직선 l 위의 점이므로 $H(3, 2t+1, t+2)$ 로 놓으면
 $\vec{AH} = (3, 2t-1, t-3) \quad \dots\dots \textcircled{i}$
 이때 직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면
 $\vec{u} = (0, 2, 1)$
 $\vec{AH} \perp \vec{u}$ 이므로 $\vec{AH} \cdot \vec{u} = 0$ 에서
 $(3, 2t-1, t-3) \cdot (0, 2, 1) = 0$
 $3 \times 0 + (2t-1) \times 2 + (t-3) \times 1 = 0$
 $5t - 5 = 0 \quad \therefore t = 1 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$
 즉, $\vec{AH} = (3, 1, -2)$ 이므로
 $|\vec{AH}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$
 또 $H(3, 3, 3)$ 이므로
 $|\vec{BH}| = \sqrt{(3-3)^2 + (3-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{5}$
 따라서 삼각형 AHB의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \sqrt{14} \times \sqrt{5} = \frac{\sqrt{70}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① $\frac{y-1}{2} = z-2 = t$ (t 는 실수)로 놓고 $\vec{AH}$ 의 성분을 t 로 나타내기	30 %
② t 의 값 구하기	30 %
③ 삼각형 AHB의 넓이 구하기	40 %

0795 [답] ③

$x = y = t$ (t 는 실수)로 놓으면
 $x = t, y = t$
 $1 - x = y = 1 - z = s$ (s 는 실수)로 놓으면
 $x = -s + 1, y = s, z = -s + 1$
 두 직선 l, m 위의 점을 각각 P, Q라 하고
 $P(t, t, 1), Q(-s+1, s, -s+1)$ 로 놓으면
 $\vec{PQ} = (-s-t+1, s-t, -s)$
 한편 두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면
 $\vec{u} = (1, 1, 0), \vec{v} = (-1, 1, -1)$
 이때 직선 PQ와 직선 l 이 서로 수직이면 $\vec{PQ} \cdot \vec{u} = 0$ 이므로
 $(-s-t+1, s-t, -s) \cdot (1, 1, 0) = 0$

$$\begin{aligned}
 &(-s-t+1) \times 1 + (s-t) \times 1 + (-s) \times 0 = 0 \\
 &-2t+1=0 \quad \therefore t=\frac{1}{2} \\
 &\text{또 직선 PQ와 직선 } m \text{이 서로 수직이면 } \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}=0 \text{이므로} \\
 &(-s-t+1, s-t, -s) \cdot (-1, 1, -1)=0 \\
 &(-s-t+1) \times (-1) + (s-t) \times 1 + (-s) \times (-1)=0 \\
 &3s-1=0 \quad \therefore s=\frac{1}{3} \\
 &\text{따라서 } \overrightarrow{PQ}=\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}\right) \text{이므로 두 직선 } l, m \text{ 사이의 거리는} \\
 &\overline{PQ}=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{6}
 \end{aligned}$$

0796 [답] P(1, 1, -1), Q(3, 2, -3)

$$\begin{aligned}
 &x-2=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{2}=t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면} \\
 &x=t+2, y=2t+3, z=2t+1 \\
 &\frac{x-1}{2}=\frac{4-y}{2}=z+4=s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓으면} \\
 &x=2s+1, y=-2s+4, z=s-4 \\
 &\text{두 점 P, Q는 각각 두 직선 } l, m \text{ 위의 점이므로} \\
 &P(t+2, 2t+3, 2t+1), Q(2s+1, -2s+4, s-4) \text{로 놓으면} \\
 &\overrightarrow{PQ}=(2s-t-1, -2s-2t+1, s-2t-5) \\
 &\text{한편 두 직선 } l, m \text{의 방향벡터를 각각 } \vec{u}, \vec{v} \text{라 하면} \\
 &\vec{u}=(1, 2, 2), \vec{v}=(2, -2, 1) \\
 &\text{선분 PQ의 길이는 직선 PQ가 두 직선 } l, m \text{에 각각 수직일 때 최소} \\
 &\text{이다.} \\
 &\text{직선 PQ와 직선 } l \text{이 서로 수직이면 } \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{u}=0 \text{이므로} \\
 &(2s-t-1, -2s-2t+1, s-2t-5) \cdot (1, 2, 2)=0 \\
 &(2s-t-1) \times 1 + (-2s-2t+1) \times 2 + (s-2t-5) \times 2=0 \\
 &-9t-9=0 \\
 &\therefore t=-1 \\
 &\text{또 직선 PQ와 직선 } m \text{이 서로 수직이면 } \overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}=0 \text{이므로} \\
 &(2s-t-1, -2s-2t+1, s-2t-5) \cdot (2, -2, 1)=0 \\
 &(2s-t-1) \times 2 + (-2s-2t+1) \times (-2) + (s-2t-5) \times 1=0 \\
 &9s-9=0 \\
 &\therefore s=1 \\
 &\text{따라서 구하는 두 점 P, Q의 좌표는 각각} \\
 &(1, 1, -1), (3, 2, -3)
 \end{aligned}$$

0797 [답] 1

$$\begin{aligned}
 &\text{주어진 평면의 법선벡터는 직선 } 1-x=\frac{y}{3}=\frac{z-2}{2} \text{의 방향벡터와 같} \\
 &\text{으므로} \\
 &(-1, 3, 2) \\
 &\text{즉, 점 } (2, 3, 3) \text{을 지나고 법선벡터가 } (-1, 3, 2) \text{인 평면의 방정} \\
 &\text{식은} \\
 &-(x-2)+3(y-3)+2(z-3)=0 \\
 &\therefore x-3y-2z+13=0 \\
 &\text{이 평면이 점 } (-6, a, 2) \text{를 지나므로} \\
 &-6-3a-2 \times 2+13=0 \\
 &-3a+3=0 \quad \therefore a=1
 \end{aligned}$$

0798 [답] ②

주어진 평면의 법선벡터는 z 축의 방향벡터와 같으므로
 $(0, 0, 1)$
 즉, 점 $(2, 1, -3)$ 을 지나고 법선벡터가 $(0, 0, 1)$ 인 평면의 방정
 식은
 $0 \times (x-2) + 0 \times (y-1) + (z+3) = 0 \quad \therefore z = -3$
 따라서 이 평면 위의 점이 아닌 것은 ②이다.

0799 [답] 5

두 점 $A(2, 1, 4), B(5, -1, 2)$ 를 지나는 직선의 방향벡터는
 $\overrightarrow{AB}=(5-2, -1-1, 2-4)=(3, -2, -2)$
 이때 주어진 평면의 법선벡터는 직선의 방향벡터와 같으므로
 점 $A(2, 1, 4)$ 를 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{AB}=(3, -2, -2)$ 인 평면의
 방정식은
 $3(x-2)-2(y-1)-2(z-4)=0$
 $\therefore 3x-2y-2z+4=0$
 따라서 $a=3, b=-2, c=4$ 이므로
 $a+b+c=5$

0800 [답] $(-7, 0, 0)$

평면 $x-y-2z+2=0$ 의 법선벡터는
 $(1, -1, -2)$ ①
 즉, 점 $(-2, 3, 1)$ 을 지나고 법선벡터가 $(1, -1, -2)$ 인 평면의
 방정식은
 $(x+2)-(y-3)-2(z-1)=0$
 $\therefore x-y-2z+7=0$ ②
 $y=0, z=0$ 을 대입하면
 $x+7=0 \quad \therefore x=-7$
 따라서 구하는 점의 좌표는
 $(-7, 0, 0)$ ③

채점 기준

① 평면 $x-y-2z+2=0$ 의 법선벡터 구하기	20 %
② 조건을 만족시키는 평면의 방정식 구하기	40 %
③ ②의 평면이 x 축과 만나는 점의 좌표 구하기	40 %

0801 [답] ③

세 점 A, B, C 를 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로
 놓고 세 점 A, B, C 의 좌표를 각각 대입하면
 $3c+d=0, -2b+2c+d=0, a-3b+d=0$
 $\therefore a=-\frac{d}{2}, b=\frac{d}{6}, c=-\frac{d}{3}$
 이를 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면 평면의 방정식은
 $-\frac{d}{2}x+\frac{d}{6}y-\frac{d}{3}z+d=0$
 이때 $d \neq 0$ 이므로 $3x-y+2z-6=0$
 점 $D(1, 2, k)$ 가 이 평면 위의 점이므로
 $3 \times 1 - 2 + 2k - 6 = 0$
 $2k - 5 = 0 \quad \therefore k = \frac{5}{2}$

0802 **답** $\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{-7}$

세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 대입하면

$$b+d=0, 2a+3b+2c+d=0, 4a-2b+c+d=0$$

$$\therefore a=-\frac{4}{3}d, b=-d, c=\frac{7}{3}d \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이를 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면 평면의 방정식은

$$-\frac{4}{3}dx-dy+\frac{7}{3}dz+d=0$$

$$\text{이때 } d \neq 0 \text{이므로 } 4x+3y-7z-3=0 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 이 평면의 법선벡터는 $(4, 3, -7)$ 이므로 점 B(2, 3, 2)를 지나고 방향벡터가 $(4, 3, -7)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-2}{-7} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 a, b, c 를 d 에 대한 식으로 나타내기	30 %
② 세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식 구하기	30 %
③ 조건을 만족시키는 직선의 방정식 구하기	40 %

0803 **답** ④

세 점 $(4, 0, 1), (3, 1, 0), (1, 1, 1)$ 을 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$$4a+c+d=0, 3a+b+d=0, a+b+c+d=0$$

$$\therefore b=3a, c=2a, d=-6a$$

이를 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면 평면의 방정식은

$$ax+3ay+2az-6a=0$$

$$\text{이때 } a \neq 0 \text{이므로 } x+3y+2z-6=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$y=0, z=0$ 을 ①에 대입하면

$$x-6=0 \quad \therefore x=6$$

$$\therefore A(6, 0, 0)$$

$x=0, z=0$ 을 ①에 대입하면

$$3y-6=0 \quad \therefore y=2$$

$$\therefore B(0, 2, 0)$$

$x=0, y=0$ 을 ①에 대입하면

$$2z-6=0 \quad \therefore z=3$$

$$\therefore C(0, 0, 3)$$

따라서 삼각형 OABC의 부피는

$$\frac{1}{3} \times \triangle OAB \times \overline{OC} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 6 \times 2 \right) \times 3 = 6$$

0804 **답** -5

평면 $x+ay+bz+c=0$ 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{n}=(1, a, b)$$

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(1, 2, -1), \vec{v}=(3, 2, 1)$$

주어진 평면이 두 직선을 모두 포함하므로

$$\vec{n} \perp \vec{u}, \vec{n} \perp \vec{v}$$

$$\text{즉, } \vec{n} \cdot \vec{u}=0 \text{이므로 } (1, a, b) \cdot (1, 2, -1)=0$$

$$\therefore 1+2a-b=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \vec{n} \cdot \vec{v}=0 \text{이므로 } (1, a, b) \cdot (3, 2, 1)=0$$

$$\therefore 3+2a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=-1, b=-1$$

즉, 평면의 방정식은 $x-y-z+c=0$

이 평면이 직선 l 위의 점 $(4, -2, 1)$ 을 지나므로

$$4-(-2)-1+c=0 \quad \therefore c=-5$$

$$\therefore a-b+c=-1-(-1)+(-5)=-5$$

0805 **답** ⑤

주어진 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a, b, c)$ 라 하자.

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(3, -1, 2), \vec{v}=(1, 2, 3)$$

주어진 평면이 두 직선을 모두 포함하므로

$$\vec{n} \perp \vec{u}, \vec{n} \perp \vec{v}$$

$$\text{즉, } \vec{n} \cdot \vec{u}=0 \text{이므로 } (a, b, c) \cdot (3, -1, 2)=0$$

$$\therefore 3a-b+2c=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \vec{n} \cdot \vec{v}=0 \text{이므로 } (a, b, c) \cdot (1, 2, 3)=0$$

$$\therefore a+2b+3c=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

① $\times$ 2+②을 하면

$$7a+7c=0 \quad \therefore c=-a$$

이를 ①에 대입하면

$$3a-b+2 \times (-a)=0$$

$$a-b=0 \quad \therefore b=a$$

따라서 직선 l 위의 점 $(0, -1, -2)$ 를 지나고 법선벡터가

$$\vec{n}=(a, a, -a) \text{인 평면의 방정식은}$$

$$ax+a(y+1)-a(z+2)=0$$

$$\text{이때 } a \neq 0 \text{이므로 } x+y-z-1=0$$

이 평면이 점 $(k, 3, 5)$ 를 지나므로

$$k+3-5-1=0 \quad \therefore k=3$$

0806 **답** ①

주어진 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a, b, c)$ 라 하자.

직선 $x-1=2-y=\frac{z+1}{2}$ 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면

$$\vec{u}=(1, -1, 2)$$

주어진 평면이 직선을 포함하므로 $\vec{n} \perp \vec{u}$

$$\text{즉, } \vec{n} \cdot \vec{u}=0 \text{이므로}$$

$$(a, b, c) \cdot (1, -1, 2)=0$$

$$\therefore a-b+2c=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 점 $(2, 0, 5)$ 와 직선 위의 점 $(1, 2, -1)$ 은 모두 평면 위의 점

이므로 이 두 점을 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{v}$ 라 하면

$$\vec{v}=(1-2, 2-0, -1-5)=(-1, 2, -6)$$

$$\vec{n} \perp \vec{v} \text{이므로 } \vec{n} \cdot \vec{v}=0 \text{에서}$$

$$(a, b, c) \cdot (-1, 2, -6)=0$$

$$\therefore -a+2b-6c=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①+②을 하면

$$b-4c=0 \quad \therefore b=4c$$

이를 ①에 대입하면

$$a-4c+2c=0 \quad \therefore a=2c$$

즉, 점 $(2, 0, 5)$ 를 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(2c, 4c, c)$ 인 평면의 방정식은

$$2c(x-2)+4cy+c(z-5)=0$$

이때 $c \neq 0$ 이므로 $2x+4y+z-9=0$

$y=0, z=0$ 을 대입하면

$$2x-9=0 \quad \therefore x=\frac{9}{2}$$

따라서 구하는 점의 x 좌표는 $\frac{9}{2}$ 이다.

0807 답 ③

주어진 두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식을

$$x-2y-z+1+k(3x-y-2z+2)=0 \quad (k \text{는 실수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

으로 놓자.

이 평면이 점 $(-2, 1, -1)$ 을 지나므로

$$-2-2 \times 1-(-1)+1+k\{3 \times (-2)-1-2 \times (-1)+2\}=0$$

$$-2-3k=0 \quad \therefore k=-\frac{2}{3}$$

이를 ①에 대입하여 정리하면 구하는 평면의 방정식은

$$3x+4y-z+1=0$$

0808 답 $\frac{8}{5}$

주어진 두 평면의 교선을 포함하는 평면의 방정식을

$$x+3y+z-4+k(x+y+2z-2)=0 \quad (k \text{는 실수}) \text{으로 놓으면}$$

$$(1+k)x+(3+k)y+(1+2k)z-4-2k=0$$

이 평면의 법선벡터를 $\vec{m}$ 이라 하면

$$\vec{m}=(1+k, 3+k, 1+2k)$$

이때 두 벡터 $\vec{n}, \vec{m}$ 은 서로 평행하므로

$$\vec{m}=t\vec{n} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

$$(1+k, 3+k, 1+2k)=t(a, 2, 3)$$

$$\therefore 1+k=at, 3+k=2t, 1+2k=3t$$

두 식 $3+k=2t, 1+2k=3t$ 를 연립하여 풀면

$$k=7, t=5$$

이를 $1+k=at$ 에 대입하면

$$1+7=5a \quad \therefore a=\frac{8}{5}$$

0809 답 $\frac{3}{4}$

$$x+y-z+2=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2x-y-z+3=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2} \text{을 하면 } 3x-2z+5=0$$

$$\therefore x=\frac{2z-5}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{을 하면 } -x+2y-1=0$$

$$\therefore x=2y-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③, ④에서 교선의 방정식은

$$x=2y-1=\frac{2z-5}{3}$$

이 직선의 방향벡터는 $(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 이므로

$$a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2} \quad \therefore ab=\frac{3}{4}$$

다른 풀이

두 평면 $x+y-z+2=0, 2x-y-z+3=0$ 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1=(1, 1, -1), \vec{n}_2=(2, -1, -1)$$

두 평면이 모두 교선을 포함하므로

$$\vec{n}_1 \perp \vec{u}, \vec{n}_2 \perp \vec{u}$$

즉, $\vec{n}_1 \cdot \vec{u}=0$ 이므로

$$(1, 1, -1) \cdot (1, a, b)=0$$

$$\therefore 1+a-b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 $\vec{n}_2 \cdot \vec{u}=0$ 이므로

$$(2, -1, -1) \cdot (1, a, b)=0$$

$$\therefore 2-a-b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}$$

$$\therefore ab=\frac{3}{4}$$

0810 답 ③

$$3x+y-z=7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x-2y-5z=-7 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \times 3 \text{을 하면 } 7y+14z=28$$

$$\therefore z=\frac{4-y}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} \times 2 + \textcircled{2} \text{을 하면 } 7x-7z=7$$

$$\therefore z=x-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③, ④에서 구하는 교선의 방정식은

$$x-1=\frac{4-y}{2}=z$$

0811 답 2

$$x+3y+2z=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x+y+z=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \text{을 하면}$$

$$2y+z=-1$$

$$\therefore y=\frac{-z-1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2} \times 2 \text{를 하면}$$

$$-x+y=-2$$

$$\therefore y=x-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

③, ④에서 교선의 방정식은

$$x-2=y=\frac{-z-1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

이 직선의 방향벡터는 $(1, 1, -2)$

즉, 점 $(1, 0, -2)$ 를 지나고 법선벡터가 $(1, 1, -2)$ 인 평면의 방정식은

$$(x-1)+y-2(z+2)=0$$

$$\therefore x+y-2z-5=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$$

이 평면이 점 $(3, a, 0)$ 을 지나므로

$$3+a-2 \times 0-5=0$$

$$a-2=0$$

$$\therefore a=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준	
i 교선의 방정식 구하기	50 %
ii 조건을 만족시키는 평면의 방정식 구하기	30 %
iii a의 값 구하기	20 %

0812 답 ①

yz 평면의 방정식은 $x=0$

$3x+2y-z=1$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$3 \times 0 + 2y - z = 1 \quad \therefore y = \frac{z+1}{2}$$

즉, 교선의 방정식은 $x=0, y=\frac{z+1}{2}$

$$y = \frac{z+1}{2} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$y=t, z=2t-1$$

점 P는 교선 위의 점이므로 $P(0, t, 2t-1)$ 로 놓으면

$$\overrightarrow{AP} = (-1, t-1, 2t-2)$$

한편 교선의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면 $\vec{u}=(0, 1, 2)$ 이고 선분 AP의 길이는 $\overrightarrow{AP} \perp \vec{u}$ 일 때 최소이다.

즉, $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{u} = 0$ 이므로

$$(-1, t-1, 2t-2) \cdot (0, 1, 2) = 0$$

$$-1 \times 0 + (t-1) \times 1 + (2t-2) \times 2 = 0$$

$$5t-5=0 \quad \therefore t=1$$

따라서 $\overrightarrow{AP}=(-1, 0, 0)$ 이므로 선분 AP의 길이의 최솟값은

$$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$

다른 풀이

점 P는 교선 위의 점이므로 $P(0, t, 2t-1)$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AP}| &= \sqrt{(-1)^2 + (t-1)^2 + (2t-1-1)^2} \\ &= \sqrt{5t^2 - 10t + 6} = \sqrt{5(t-1)^2 + 1} \end{aligned}$$

따라서 $t=1$ 일 때 선분 AP의 길이의 최솟값은 1이다.

0813 답 11

$$\frac{x-3}{2} = y+2 = \frac{z+2}{2} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=2t+3, y=t-2, z=2t-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 주어진 평면의 방정식에 대입하면

$$3(2t+3) - 2(t-2) - (2t-2) - 7 = 0$$

$$2t+8=0 \quad \therefore t=-4$$

이를 ①에 대입하여 정리하면

$$x=-5, y=-6, z=-10$$

따라서 교점의 좌표는 $(-5, -6, -10)$ 이므로

$$a=-5, b=-6, c=-10$$

$$\therefore a-b-c=11$$

0814 답 (4, 1, 5)

직선 l 의 방향벡터는 $(2, -3, 1)$ 이므로 점 A(2, -1, 3)을 지나고 법선벡터가 $(2, -3, 1)$ 인 평면 α 의 방정식은

$$2(x-2) - 3(y+1) + (z-3) = 0$$

$$\therefore 2x - 3y + z - 10 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{7-y}{3} = z-3 = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=2t, y=-3t+7, z=t+3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②을 ①에 대입하면

$$2 \times 2t - 3(-3t+7) + (t+3) - 10 = 0$$

$$14t - 28 = 0 \quad \therefore t=2$$

이를 ②에 대입하여 정리하면

$$x=4, y=1, z=5$$

따라서 구하는 교점의 좌표는 $(4, 1, 5)$

0815 답 ③

$$x+2 = \frac{y-1}{3} = z+1 = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=t-2, y=3t+1, z=t-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 $x+2y-z=1$ 에 대입하면

$$(t-2) + 2(3t+1) - (t-1) = 1$$

$$6t=0 \quad \therefore t=0$$

이를 ①에 대입하여 정리하면

$$x=-2, y=1, z=-1$$

$$\therefore P(-2, 1, -1)$$

또 ①을 $3x-y+2z=-7$ 에 대입하면

$$3(t-2) - (3t+1) + 2(t-1) = -7$$

$$2t-2=0 \quad \therefore t=1$$

이를 ①에 대입하여 정리하면

$$x=-1, y=4, z=0$$

$$\therefore Q(-1, 4, 0)$$

$$\therefore PQ = \sqrt{(-1+2)^2 + (4-1)^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

0816 답 ⑤

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (1, -1, 1), \vec{n}_2 = (4, 1, -1)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|1 \times 4 + (-1) \times 1 + 1 \times (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{4^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

0817 답 8

두 평면 $x+2y+2z-2=0, 2x-y-2z=0$ 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (1, 2, 2), \vec{n}_2 = (2, -1, -2) \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

두 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|1 \times 2 + 2 \times (-1) + 2 \times (-2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{4}{9} \quad \dots\dots \textcircled{ii} \end{aligned}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$\triangle ABC \cos \theta = 18 \times \frac{4}{9} = 8 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

i 두 평면의 법선벡터 구하기	30 %
ii 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos \theta$ 의 값 구하기	40 %
iii 삼각형 ABC의 정사영의 넓이 구하기	30 %

0818 답 3

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (k, -1, -k+1), \vec{n}_2 = (2, -3, 1)$$

두 평면이 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\cos 60^\circ = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|k \times 2 + (-1) \times (-3) + (-k+1) \times 1|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2 + (-k+1)^2} \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|k+4|}{\sqrt{2k^2-2k+2} \sqrt{14}}$$

$$\sqrt{14(2k^2-2k+2)} = 2|k+4|$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$2k^2 - 5k - 3 = 0$$

$$(2k+1)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } k = 3$$

그런데 k 는 정수이므로 $k = 3$

0819 답 $\frac{2}{3}$

두 구 $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 5 = 0, x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0$ 이

만나서 생기는 원을 포함하는 평면 α 의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 5 - (x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2) = 0$$

$$\therefore 4x + 2y - 4z - 3 = 0$$

즉, 평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}_1$ 이라 하면

$$\vec{n}_1 = (4, 2, -4)$$

xy 평면의 법선벡터를 $\vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|4 \times 0 + 2 \times 0 + (-4) \times 1|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-4)^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}$$

만렙 Note

두 구 $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0,$

$x^2 + y^2 + z^2 + a'x + b'y + c'z + d' = 0$ 이 만나서 생기는 원을 포함하는 평면의 방정식

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d - (x^2 + y^2 + z^2 + a'x + b'y + c'z + d') = 0$$

$$\therefore (a-a')x + (b-b')y + (c-c')z + (d-d') = 0$$

다른 풀이

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 5 = 0 \text{에서}$$

$$(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z + 2 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 4$$

두 구의 중심을 각각 C_1, C_2 라 하면

$$C_1(3, 0, 0), C_2(1, -1, 2)$$

즉, 평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}_1$ 이라 하면

$$\vec{n}_1 = \vec{C_1C_2} = (1-3, -1-0, 2-0) = (-2, -1, 2)$$

xy 평면의 법선벡터를 $\vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{|(-2) \times 0 + (-1) \times 0 + 2 \times 1|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}$$

0820 답 17

평면 $ax + by + cz - 8 = 0$ 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{n} = (a, b, c)$$

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (3, 1, -2), \vec{n}_2 = (3, -2, -1)$$

$\vec{n} \perp \vec{n}_1$ 이므로 $\vec{n} \cdot \vec{n}_1 = 0$ 에서

$$(a, b, c) \cdot (3, 1, -2) = 0$$

$$\therefore 3a + b - 2c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\vec{n} \perp \vec{n}_2$ 이므로 $\vec{n} \cdot \vec{n}_2 = 0$ 에서

$$(a, b, c) \cdot (3, -2, -1) = 0$$

$$\therefore 3a - 2b - c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$3b - c = 0 \quad \therefore c = 3b$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3a + b - 2 \times 3b = 0 \quad \therefore a = \frac{5}{3}b$$

즉, 점 $(-2, 3, 1)$ 을 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = \left(\frac{5}{3}b, b, 3b\right)$ 인 평면

의 방정식은

$$\frac{5}{3}b(x+2) + b(y-3) + 3b(z-1) = 0$$

이때 $b \neq 0$ 이므로 $5x + 3y + 9z - 8 = 0$

따라서 $a = 5, b = 3, c = 9$ 이므로 $a + b + c = 17$

0821 답 -8

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (2, -1, -3), \vec{n}_2 = (a, b, -6)$$

두 평면이 서로 평행하려면 $\vec{n}_2 = k\vec{n}_1$ ($k \neq 0$)이어야 하므로

$$(a, b, -6) = k(2, -1, -3)$$

따라서 $a = 2k, b = -k, -6 = -3k$ 이므로

$$k = 2, a = 4, b = -2 \quad \therefore ab = -8$$

0822 답 ②

두 평면 $3x + y + az - 5 = 0, 3x - ay - 2z - 1 = 0$ 의 법선벡터를 각

각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (3, 1, a), \vec{n}_2 = (3, -a, -2)$$

$\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$ 이므로 $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ 에서

$$(3, 1, a) \cdot (3, -a, -2) = 0$$

$$3 \times 3 + 1 \times (-a) + a \times (-2) = 0$$

$$-3a + 9 = 0 \quad \therefore a = 3$$

한편 두 평면 $(b+3)x + (b-5)y - (a+1)z - 1 = 0,$

$x - ay - (b+3)z - 1 = 0$ 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_3, \vec{n}_4$ 라 하면

$$\vec{n}_3 = (b+3, b-5, -a-1), \vec{n}_4 = (1, -a, -b-3)$$

$\vec{n}_3 \parallel \vec{n}_4$ 이므로 $\vec{n}_3 = k\vec{n}_4$ ($k \neq 0$)에서

$$(b+3, b-5, -a-1) = k(1, -a, -b-3)$$

이때 $a = 3$ 이므로

$$b+3 = k, b-5 = -3k, -4 = k(-b-3)$$

세 식 중 두 식을 연립하여 풀면 $k = 2, b = -1$

$$\therefore a - b = 3 - (-1) = 4$$

0823 답 30°

직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{u}=(1, 2, -1), \vec{n}=(1, -1, 2)$$

직선과 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ-\theta) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} \\ &= \frac{|1 \times 1 + 2 \times (-1) + (-1) \times 2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2} \sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $90^\circ-\theta=60^\circ$ 이므로 $\theta=30^\circ$

0824 답 ③

두 점 $(3, -3, 2)$, $(5, -2, 1)$ 을 지나는 직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{u}=(5-3, -2-(-3), 1-2)=(2, 1, -1), \vec{n}=(3, -4, 5)$$

$$\begin{aligned}\therefore \cos(90^\circ-\theta) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} \\ &= \frac{|2 \times 3 + 1 \times (-4) + (-1) \times 5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} \sqrt{3^2+(-4)^2+5^2}} = \frac{\sqrt{3}}{10}\end{aligned}$$

0825 답 $\sqrt{2}$

직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면 $\vec{u}=(\sqrt{2}, -1, 1)$

xy 평면, yz 평면, zx 평면의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ 이라 하면

$$\vec{n}_1=(0, 0, 1), \vec{n}_2=(1, 0, 0), \vec{n}_3=(0, 1, 0)$$

$$\begin{aligned}\therefore \cos(90^\circ-\alpha) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{u}| |\vec{n}_1|} \\ &= \frac{|\sqrt{2} \times 0 + (-1) \times 0 + 1 \times 1|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-1)^2+1^2} \sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{2}, \\ \cos(90^\circ-\beta) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{u}| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|\sqrt{2} \times 1 + (-1) \times 0 + 1 \times 0|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-1)^2+1^2} \sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos(90^\circ-\gamma) &= \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}_3|}{|\vec{u}| |\vec{n}_3|} \\ &= \frac{|\sqrt{2} \times 0 + (-1) \times 1 + 1 \times 0|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-1)^2+1^2} \sqrt{0^2+1^2+0^2}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $90^\circ-\alpha=60^\circ$, $90^\circ-\beta=45^\circ$, $90^\circ-\gamma=60^\circ$ 이므로

$$\alpha=30^\circ, \beta=45^\circ, \gamma=30^\circ$$

$$\therefore \frac{\sin \alpha + \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{\sin 30^\circ + \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

0826 답 12

평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면 $\vec{n}=(1, a, b)$

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(3, 5, 4), \vec{v}=(1, -3, -2)$$

평면과 직선 l 이 서로 평행하므로

$$\vec{n} \perp \vec{u} \text{에서 } \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$$

$$(1, a, b) \cdot (3, 5, 4) = 0$$

$$\therefore 3+5a+4b=0 \quad \dots\dots ㉠$$

평면과 직선 m 이 서로 평행하므로

$$\vec{n} \perp \vec{v} \text{에서 } \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$$

$$(1, a, b) \cdot (1, -3, -2) = 0$$

$$\therefore 1-3a-2b=0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=5, b=-7$$

$$\therefore a-b=12$$

0827 답 ④

직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{u}=(a, -1, 2), \vec{n}=(6, b, 6)$$

직선과 평면이 서로 수직이므로

$$\vec{u} \parallel \vec{n} \text{에서 } \vec{u} = k\vec{n} \text{ (단, } k \neq 0)$$

$$(a, -1, 2) = k(6, b, 6)$$

즉, $a=6k, -1=bk, 2=6k$ 이므로

$$k=\frac{1}{3}, a=2, b=-3$$

따라서 평면 $6x-3y+6z-5=0$ 이 점 $(-1, t, \frac{1}{3})$ 을 지나므로

$$6 \times (-1) - 3t + 6 \times \frac{1}{3} - 5 = 0$$

$$-3t - 9 = 0 \quad \therefore t = -3$$

0828 답 (11, 6, 0)

직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{u}=(a, 2, 3-a), \vec{n}=(3, -6, 2) \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

직선과 평면이 서로 평행하므로

$$\vec{u} \perp \vec{n} \text{에서 } \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

$$(a, 2, 3-a) \cdot (3, -6, 2) = 0$$

$$a \times 3 + 2 \times (-6) + (3-a) \times 2 = 0$$

$$a - 6 = 0 \quad \therefore a = 6 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

즉, 직선 l 의 방정식은

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y-2}{2} = \frac{6-z}{3}$$

$z=0$ 을 대입하면

$$\frac{x+1}{6} = \frac{y-2}{2} = \frac{6-0}{3}$$

$$\therefore x=11, y=6$$

따라서 구하는 교점의 좌표는

$$(11, 6, 0) \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 직선 l 의 방향벡터와 평면의 법선벡터 구하기	20 %
② a 의 값 구하기	40 %
③ 직선 l 과 xy 평면의 교점의 좌표 구하기	40 %

0829 답 ⑤

평면 α 는 선분 AB의 중점을 지나고 직선 AB와 수직이다.

이때 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{0+3}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{-1-2}{2}\right) \quad \therefore \left(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2}\right)$$

$\overrightarrow{AB} = (3-0, 1-(-1), -2-(-1)) = (3, 2, -1)$ 이므로 점 $(\frac{3}{2}, 0, -\frac{3}{2})$ 을 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{AB} = (3, 2, -1)$ 인 평면의 방정식은

$$3(x - \frac{3}{2}) + 2y - (z + \frac{3}{2}) = 0 \quad \therefore 3x + 2y - z - 6 = 0$$

따라서 $a=2, b=-1, c=-6$ 이므로 $abc=12$

0830 답 $\frac{14}{3}$

평면 α 는 선분 AB의 중점을 지나고 직선 AB와 수직이다.
 이때 선분 AB의 중점의 좌표는 $(\frac{a}{2}, \frac{3+b}{2}, \frac{1+c}{2})$ 이고 이 점은 평면 α 위의 점이므로

$$\frac{a}{2} - \frac{3+b}{2} + \frac{1+c}{2} = -1 \quad \therefore a - b + c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편 평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면 $\vec{n} = (1, -1, 1)$
 $\overrightarrow{AB} = (a, b-3, c-1)$ 이고 직선 AB와 평면 α 가 수직이므로
 $\overrightarrow{AB} \parallel \vec{n}$ 에서 $\overrightarrow{AB} = k\vec{n}$ (단, $k \neq 0$)
 $(a, b-3, c-1) = k(1, -1, 1)$
 즉, $a=k, b-3=-k, c-1=k$ 이므로
 $a=k, b=-k+3, c=k+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$k - (-k+3) + (k+1) = 0, 3k-2=0 \quad \therefore k = \frac{2}{3}$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 정리하면

$$a = \frac{2}{3}, b = \frac{7}{3}, c = \frac{5}{3} \quad \therefore a+b+c = \frac{14}{3}$$

0831 답 $2x+y+2z-9=0$

두 구의 중심을 각각 P, Q라 하면
 $P(0, 0, 0), Q(4, 2, 4)$
 이때 평면 α 는 선분 PQ의 중점을 지나고 직선 PQ와 수직이다.

..... i

선분 PQ의 중점의 좌표는

$$(\frac{0+4}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{0+4}{2}) \quad \therefore (2, 1, 2) \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$$

$\overrightarrow{PQ} = (4-0, 2-0, 4-0) = (4, 2, 4)$ 이므로 점 $(2, 1, 2)$ 를 지나고 법선벡터가 $\overrightarrow{PQ} = (4, 2, 4)$ 인 평면 α 의 방정식은

$$4(x-2) + 2(y-1) + 4(z-2) = 0$$

$$\therefore 2x + y + 2z - 9 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

i 두 구의 중심을 각각 P, Q라 할 때, 평면 α 가 선분 PQ의 중점을 지나고 직선 PQ와 수직임을 알기	40%
ii 선분 PQ의 중점의 좌표 구하기	20%
iii 평면 α 의 방정식 구하기	40%

0832 답 $3\sqrt{10}$

점 A를 평면 α 에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a, b, c)$ 라 하면 평면 α 는 선분 AA'의 중점을 지나고 직선 AA'와 수직이다.
 이때 선분 AA'의 중점의 좌표는 $(\frac{6+a}{2}, \frac{1+b}{2}, \frac{-4+c}{2})$ 이고 이 점은 평면 α 위의 점이므로

$$3 \times \frac{6+a}{2} - \frac{1+b}{2} + 2 \times \frac{-4+c}{2} + 5 = 0$$

$$\therefore 3a - b + 2c + 19 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

한편 평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면 $\vec{n} = (3, -1, 2)$
 $\overrightarrow{AA'} = (a-6, b-1, c+4)$ 이고 직선 AA'와 평면 α 가 수직이므로
 $\overrightarrow{AA'} \parallel \vec{n}$ 에서 $\overrightarrow{AA'} = k\vec{n}$ (단, $k \neq 0$)
 $(a-6, b-1, c+4) = k(3, -1, 2)$
 즉, $a-6=3k, b-1=-k, c+4=2k$ 이므로
 $a=3k+6, b=-k+1, c=2k-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$3(3k+6) - (-k+1) + 2(2k-4) + 19 = 0$$

$$14k + 28 = 0 \quad \therefore k = -2$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 정리하면

$$a=0, b=3, c=-8$$

$$\therefore A'(0, 3, -8)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{4^2 + (-2-3)^2 + (-1+8)^2}$$

$$= 3\sqrt{10}$$

따라서 구하는 최솟값은 $3\sqrt{10}$ 이다.

0833 답 $\textcircled{3}$

직선 $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{2}$ 의 방향벡터는 $(2, 1, -2)$ 이므로 점 $(-1, -2, 1)$ 을 지나고 법선벡터가 $(2, 1, -2)$ 인 평면 α 의 방정식은

$$2(x+1) + (y+2) - 2(z-1) = 0$$

$$\therefore 2x + y - 2z + 6 = 0$$

따라서 원점과 평면 α 사이의 거리는

$$\frac{|6|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2$$

0834 답 $\textcircled{2}$

평행한 두 평면 $4x-3y+5z-8=0, 4x-3y+5z+1=0$ 사이의 거리는 평면 $4x-3y+5z-8=0$ 위의 점 $(2, 0, 0)$ 과 평면 $4x-3y+5z+1=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|4 \times 2 - 3 \times 0 + 5 \times 0 + 1|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 5^2}} = \frac{9\sqrt{2}}{10}$$

0835 답 $\frac{4}{3}$

구 α 의 중심 $(3, 1, 2)$ 와 평면 $x+y+z-9=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|3+1+2-9|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \sqrt{3}$$

이때 구의 반지름의 길이가 $\sqrt{d}$ 이고 구 위의 점과 평면 사이의 거리의 최솟값이 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이므로

$$\sqrt{3} - \sqrt{d} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{d} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore d = \frac{4}{3}$$

0836 답 ②

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점을 C라 하면

$$\vec{PC} = \frac{1}{3}\vec{PA} + \frac{2}{3}\vec{PB} \text{이므로}$$

$$\left| \frac{1}{3}\vec{PA} + \frac{2}{3}\vec{PB} \right| = |\vec{PC}|$$

즉, $\left| \frac{1}{3}\vec{PA} + \frac{2}{3}\vec{PB} \right|$ 의 최솟값은 점 C와 평면 α 사이의 거리와 같다.

이때 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times 5 + 1 \times (-1)}{2+1}, \frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2+1} \right)$$

$$\therefore (4, 3, 3)$$

따라서 구하는 최솟값은

$$\frac{|4 + 3 - 2 \times 3 + 11|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2\sqrt{6}$$

0837 답 4

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 4 = 0 \text{에서 } (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$$

구의 중심 (2, 1, 0)과 평면 $2x + y + 2z - k - 10 = 0$ 사이의 거리가
구의 반지름의 길이 3과 같으므로

$$\frac{|2 \times 2 + 1 + 2 \times 0 - k - 10|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 3$$

$$|-k - 5| = 9, -k - 5 = \pm 9$$

$$\therefore k = -14 \text{ 또는 } k = 4$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 4$

0838 답 ③

구의 반지름의 길이는 구의 중심 (3, 2, 1)과 평면 $3x - y + 2z + 5 = 0$
사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|3 \times 3 - 2 + 2 \times 1 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \sqrt{14}$$

따라서 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{14}$ 이다.

0839 답 $2x + 3y + 6z - 6 = 0, 2x + 3y + 6z + 8 = 0$

직선 $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{6}$ 에 수직인 평면의 법선벡터는 (2, 3, 6)이
므로 구하는 평면의 방정식을 $2x + 3y + 6z + d = 0$ 으로 놓자.

구의 중심 (1, -1, 0)과 평면 $2x + 3y + 6z + d = 0$ 사이의 거리가 구
의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|2 \times 1 + 3 \times (-1) + 6 \times 0 + d|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = 1$$

$$|-1 + d| = 7, -1 + d = \pm 7$$

$$\therefore d = -6 \text{ 또는 } d = 8$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$2x + 3y + 6z - 6 = 0, 2x + 3y + 6z + 8 = 0$$

0840 답 ②

두 평면 $2x + y + 2z - 7 = 0, 2x + y + 2z - 1 = 0$ 은 법선벡터가
(2, 1, 2)로 같으므로 서로 평행하다.

구가 평행한 두 평면에 동시에 접하면 두 평면 사이의 거리는 구의
지름의 길이와 같다.

평면 $2x + y + 2z - 7 = 0$ 위의 점 (0, 7, 0)과 평면 $2x + y + 2z - 1 = 0$
사이의 거리는

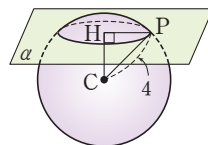
$$\frac{|2 \times 0 + 7 + 2 \times 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = 2$$

따라서 구의 반지름의 길이가 1이므로 구하는 겹넓이는

$$4\pi \times 1^2 = 4\pi$$

0841 답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C(0, 0, 0)이
라 하고, 점 C에서 평면 α 에 내린 수선의 발
을 H라 하면



$$\overline{CH} = \frac{|-20|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 4^2}} = 2\sqrt{2}$$

이때 구와 평면 α 의 교선인 원 위의 한 점을 P라 하면 $\overline{CP} = 4$ 이므로
직각삼각형 CPH에서

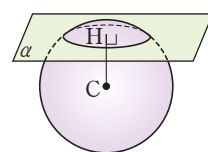
$$\overline{PH} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{2}$$

따라서 구와 평면 α 가 만나서 생기는 교선인 원의 반지름의 길이가
 $2\sqrt{2}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\pi \times (2\sqrt{2})^2 = 8\pi$$

0842 답 (3, 0, -1)

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C(1, -1, 1)
이라 하고, 점 C에서 평면 α 에 내린 수선의
발을 H라 하면 점 H가 구하는 원의 중심이다.



점 H의 좌표를 (a, b, c)라 하면

$$\overrightarrow{CH} = (a-1, b+1, c-1)$$

평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{n} = (2, 1, -2)$$

$$\overrightarrow{CH} \parallel \vec{n} \text{이므로 } \overrightarrow{CH} = t\vec{n} \ (t \neq 0) \text{에서}$$

$$(a-1, b+1, c-1) = t(2, 1, -2)$$

$$\text{즉, } a-1=2t, b+1=t, c-1=-2t \text{이므로}$$

$$a=2t+1, b=t-1, c=-2t+1$$

$$\therefore H(2t+1, t-1, -2t+1) \quad \dots\dots ㉠$$

이때 점 H는 평면 α 위의 점이므로

$$2(2t+1) + (t-1) - 2(-2t+1) - 8 = 0$$

$$9t - 9 = 0 \quad \therefore t = 1$$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면 구하는 원의 중심의 좌표는
(3, 0, -1)

0843 답 ①

점 A(3, 1, 4)를 지나고 법선벡터가 (3, 1, -2)인 평면 α 의 방정
식은

$$3(x-3) + (y-1) - 2(z-4) = 0$$

$$\therefore 3x + y - 2z - 2 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

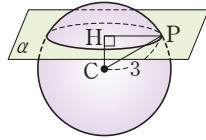
한편 구와 평면 α 가 만나서 생기는 도형은 원이므로 원의 둘레의 길
이가 최대일 때는 평면 α 가 구의 중심을 지날 때이다.

이때 구의 중심의 좌표는 (a, a, a)이므로 ㉠에 대입하면

$$3a + a - 2a - 2 = 0, 2a - 2 = 0 \quad \therefore a = 1$$

0844 [답] 20

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 $C(3, 1, 2)$ 라 하고, 점 C 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H 라 하면



$$\begin{aligned} \overline{CH} &= \frac{|3+3 \times 1+2 \times 2-a|}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}} \\ &= \frac{|10-a|}{\sqrt{14}} \end{aligned}$$

..... ①

이때 구와 평면 α 의 교선인 원 위의 한 점을 P 라 하면

$$\overline{CP}=3, \overline{PH}=\frac{\sqrt{22}}{2} \text{이므로 직각삼각형 CPH에서}$$

$$3^2=\left(\frac{|10-a|}{\sqrt{14}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{22}}{2}\right)^2$$

$$(10-a)^2=49, 10-a=\pm 7$$

$$\therefore a=3 \text{ 또는 } a=17$$

..... ②

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$3+17=20$$

..... ③

채점 기준

① 평면 α 와 원의 중심 사이의 거리를 a 에 대한 식으로 나타내기	30 %
② a 의 값 구하기	60 %
③ 모든 실수 a 의 값의 합 구하기	10 %

0845 [답] $32\sqrt{3}\pi$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}=0 \text{에서 } \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP}$$

즉, $\angle APB=90^\circ$ 이므로 점 P 는 두 점 A, B 를 지름의 양 끝 점으로 하는 구 위의 점이다.

이때 $\overline{AB}=\sqrt{(3+1)^2+(5-1)^2+(-4)^2}=4\sqrt{3}$ 이므로 구의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB}=2\sqrt{3}$$

따라서 점 P 가 나타내는 도형의 부피는

$$\frac{4}{3}\pi \times (2\sqrt{3})^3=32\sqrt{3}\pi$$

다른 풀이

점 P 의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\overrightarrow{AP}=(x+1, y-1, z), \overrightarrow{BP}=(x-3, y-5, z+4)$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}=0 \text{에서}$$

$$(x+1, y-1, z) \cdot (x-3, y-5, z+4)=0$$

$$(x+1)(x-3)+(y-1)(y-5)+z(z+4)=0$$

$$x^2+y^2+z^2-2x-6y+4z+2=0$$

$$\therefore (x-1)^2+(y-3)^2+(z+2)^2=12$$

따라서 점 P 가 나타내는 도형은 점 $(1, 3, -2)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 구이므로 구하는 부피는

$$\frac{4}{3}\pi \times (2\sqrt{3})^3=32\sqrt{3}\pi$$

0846 [답] ⑤

$$(\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}+\vec{a})=0 \text{에서 } |\vec{p}|^2-|\vec{a}|^2=0 \text{이므로}$$

$$|\vec{p}|^2=|\vec{a}|^2 \quad \therefore |\vec{p}|=|\vec{a}|$$

$$\text{이때 } |\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+5^2+2^2}=\sqrt{30} \text{이므로}$$

$$|\vec{p}|=\sqrt{30}$$

따라서 점 P 가 나타내는 도형은 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{30}$ 인 구이므로 구하는 겉넓이는

$$4\pi \times (\sqrt{30})^2=120\pi$$

0847 [답] 6

$$|\vec{p}|^2-(\vec{a}+\vec{b}) \cdot \vec{p}+\vec{a} \cdot \vec{b}=0 \text{에서}$$

$$(\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{b})=0$$

이때 원점 O 에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}, \vec{b}=\overrightarrow{OB}, \vec{p}=\overrightarrow{OP}$ 라 하면

$$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})=0$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}=0$$

즉, $\angle APB=90^\circ$ 이므로 점 P 는 두 점 A, B 를 지름의 양 끝 점으로 하는 구 위의 점이다.

..... ①

이때 구의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+3}{2}, \frac{-1+2}{2}, \frac{3+1}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$$

$\overline{AB}=\sqrt{(3-2)^2+(2+1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{14}$ 이므로 구의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{\sqrt{14}}{2}$$

..... ②

$$\text{따라서 } x=\frac{5}{2}, y=\frac{1}{2}, z=2, r=\frac{\sqrt{14}}{2} \text{이므로}$$

$$xyz+r^2=6$$

..... ③

채점 기준

① 점 P 가 나타내는 도형 구하기	50 %
② 점 P 가 나타내는 도형의 중심의 좌표와 반지름의 길이 구하기	40 %
③ $xyz+r^2$ 의 값 구하기	10 %

AB 유형 점검

134~136쪽

0848 [답] $(-3, 0, 2)$

점 $(-3, 4, 2)$ 를 지나고 y 축에 평행한 직선의 방정식은

$$x=-3, z=2$$

이 직선이 zx 평면과 만나는 점의 y 좌표는 0이므로 구하는 점의 좌표는

$$(-3, 0, 2)$$

0849 [답] ⑤

$$\overrightarrow{AB}=(-1-(-2), 2-1, 1-3)=(1, 1, -2)$$

즉, 점 $A(-2, 1, 3)$ 을 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{AB}=(1, 1, -2)$ 인 직선의 방정식은

$$x+2=y-1=\frac{z-3}{-2}$$

이때 점 $C(4, a, b)$ 가 이 직선 위에 있으므로

$$4+2=a-1=\frac{b-3}{-2}$$

$$\therefore a=7, b=-9$$

$$\therefore a-b=16$$

다른 풀이

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으므로 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$ (단, $k \neq 0$)
 $\overrightarrow{AB}=(-1-(-2), 2-1, 1-3)=(1, 1, -2)$,
 $\overrightarrow{AC}=(6, a-1, b-3)$ 이므로
 $(6, a-1, b-3)=k(1, 1, -2)$
 따라서 $6=k, a-1=k, b-3=-2k$ 이므로
 $k=6, a=7, b=-9 \quad \therefore a-b=16$

0850 답 $\frac{x-7}{-8}=\frac{y+7}{8}=\frac{z+3}{5}$

$\frac{2-x}{5}=\frac{y-a}{4}=\frac{z}{3}=t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x=-5t+2, y=4t+a, z=3t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\frac{x+a}{2}=\frac{a-y}{2}=z+5=s$ (s 는 실수)로 놓으면

$$x=2s-a, y=-2s+a, z=s-5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } -5t+2=2s-a, 4t+a=-2s+a, 3t=s-5$$

$$\therefore 5t+2s=a+2, 2t+s=0, 3t-s=-5$$

세 식을 연립하여 풀면

$$t=-1, s=2, a=-3$$

$t=-1, a=-3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 정리하면

$$x=7, y=-7, z=-3$$

즉, 두 직선의 교점의 좌표는 $(7, -7, -3)$

이때 두 점 $(7, -7, -3), (-1, 1, 2)$ 를 지나는 직선의 방향벡터는

$$(-1-7, 1-(-7), 2-(-3))=(-8, 8, 5)$$

따라서 점 $(7, -7, -3)$ 을 지나고 방향벡터가 $(-8, 8, 5)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x-7}{-8}=\frac{y+7}{8}=\frac{z+3}{5}$$

0851 답 ⑤

주어진 두 직선의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(2, 1), \vec{v}=(1, 3)$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{|2 \times 1 + 1 \times 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

0852 답 1

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(2, t), \vec{v}=(-6, t+4)$$

$l \parallel m$ 이라면 $\vec{u}=k\vec{v}$ ($k \neq 0$)이어야 하므로

$$(2, t)=k(-6, t+4)$$

즉, $2=-6k, t=k(t+4)$ 이므로

$$k=-\frac{1}{3}, t=-1 \quad \therefore a=-1$$

$l \perp m$ 이라면 $\vec{u} \cdot \vec{v}=0$ 이어야 하므로

$$(2, t) \cdot (-6, t+4)=0$$

$$2 \times (-6) + t(t+4)=0$$

$$t^2+4t-12=0, (t+6)(t-2)=0$$

$$\therefore t=-6 \text{ 또는 } t=2$$

그런데 $b > 0$ 이므로 $b=2$

$$\therefore a+b=-1+2=1$$

0853 답 $6\sqrt{3}$

$$x-1=\frac{y-1}{2}=\frac{1-z}{2}=t \text{ (t 는 실수)로 놓으면}$$

$$x=t+1, y=2t+1, z=-2t+1$$

점 A에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 직선 l 위의 점이므로 $H(t+1, 2t+1, -2t+1)$ 로 놓자.

$$\therefore \overrightarrow{AH}=(t+2, 2t+1, -2t+2)$$

이때 직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면 $\vec{u}=(1, 2, -2)$

$\overrightarrow{AH} \perp \vec{u}$ 이므로 $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}=0$ 에서

$$(t+2, 2t+1, -2t+2) \cdot (1, 2, -2)=0$$

$$(t+2) \times 1 + (2t+1) \times 2 + (-2t+2) \times (-2)=0$$

$$9t=0 \quad \therefore t=0$$

즉, $\overrightarrow{AH}=(2, 1, 2)$ 이므로 삼각형 ABC의 높이는

$$|\overrightarrow{AH}|=|\overrightarrow{AH}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$$

삼각형 ABC는 정삼각형이므로 한 변의 길이를 a 라 하면

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a=3 \quad \therefore a=2\sqrt{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$3a=6\sqrt{3}$$

0854 답 ③

점 $(1, 2, -3)$ 을 지나고 법선벡터가 $(6, 3, -2)$ 인 평면의 방정식은

$$6(x-1)+3(y-2)-2(z+3)=0$$

$$\therefore 6x+3y-2z-18=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$y=0, z=0$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$6x-18=0 \quad \therefore x=3$$

$$\therefore P(3, 0, 0)$$

$x=0, z=0$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3y-18=0 \quad \therefore y=6$$

$$\therefore Q(0, 6, 0)$$

$$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-3)^2+6^2}=3\sqrt{5}$$

0855 답 2

구의 부피를 이등분하는 평면은 구의 중심을 지나므로 세 구의 부피를 모두 이등분하는 평면은 세 구의 중심을 모두 지난다.

즉, 평면 $ax+by+cz+1=0$ 이 세 점 $(0, 0, -1), (2, 2, -3),$

$(5, 1, 2)$ 를 모두 지나므로 세 점의 좌표를 각각 대입하면

$$-c+1=0, 2a+2b-3c+1=0, 5a+b+2c+1=0$$

세 식을 연립하여 풀면 $a=-1, b=2, c=1$

$$\therefore a+b+c=2$$

0856 답 ④

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(2, 2, 1), \vec{v}=(3, -2, 1)$$

주어진 평면이 두 직선을 모두 포함하므로

$$\vec{n} \perp \vec{u}, \vec{n} \perp \vec{v}$$

즉, $\vec{n} \cdot \vec{u}=0$ 이므로

$$(1, a, b) \cdot (2, 2, 1)=0$$

$$\therefore 2+2a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ 이므로

$$(1, a, b) \cdot (3, -2, 1) = 0$$

$$\therefore 3 - 2a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

⑦, ⑬을 연립하여 풀면

$$a = \frac{1}{4}, b = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore a + b = -\frac{9}{4}$$

0857 답 ①

평면 α 의 법선벡터는 $(1, -1, 2)$ 이므로 원점 O를 지나고 방향벡터가 $(1, -1, 2)$ 인 직선의 방정식은

$$x - y = \frac{z}{2}$$

$$x - y = \frac{z}{2} = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = t, y = -t, z = 2t \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦을 평면 α 의 방정식에 대입하면

$$t - (-t) + 2 \times 2t + 6 = 0$$

$$6t + 6 = 0 \quad \therefore t = -1$$

이를 ⑦에 대입하여 정리하면

$$x = -1, y = 1, z = -2$$

따라서 직선이 평면 α 와 만나는 점의 좌표는 $(-1, 1, -2)$ 이므로

$$a = -1, b = 1, c = -2$$

$$\therefore abc = 2$$

0858 답 ②

두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (3, -1, a), \vec{n}_2 = (b, -3, -6)$$

두 평면이 서로 평행하려면 $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2 \quad (k \neq 0)$ 이어야 하므로

$$(3, -1, a) = k(b, -3, -6)$$

$$\text{즉, } 3 = bk, -1 = -3k, a = -6k \text{이므로}$$

$$k = \frac{1}{3}, a = -2, b = 9$$

$$\therefore a + b = 7$$

0859 답 $2\sqrt{6}$

직선의 방향벡터를 $\vec{u}$, 평면의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{u} = (k, 2, 2), \vec{n} = (1, 1, -1)$$

직선과 평면이 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\cos(90^\circ - 30^\circ) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|k \times 1 + 2 \times 1 + 2 \times (-1)|}{\sqrt{k^2 + 2^2 + 2^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|k|}{\sqrt{k^2 + 8} \sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3(k^2 + 8)} = 2|k|$$

양변을 제곱하면

$$3(k^2 + 8) = 4k^2$$

$$k^2 = 24 \quad \therefore k = \pm 2\sqrt{6}$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 2\sqrt{6}$

0860 답 $(7, 2, -3)$

평면 α 는 선분 AB의 중점을 지나고 직선 AB와 수직이다.

이때 점 B의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{4+b}{2}, \frac{-7+c}{2}\right)$$

이 점이 평면 α 위의 점이므로

$$3 \times \frac{1+a}{2} - \frac{4+b}{2} + 2 \times \frac{-7+c}{2} + 1 = 0$$

$$\therefore 3a - b + 2c - 13 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

한편 평면 α 의 법선벡터를 $\vec{n}$ 이라 하면

$$\vec{n} = (3, -1, 2)$$

$\vec{AB} = (a-1, b-4, c+7)$ 이고 직선 AB와 평면 α 가 수직이므로

$$\vec{AB} \parallel \vec{n} \text{에서 } \vec{AB} = k\vec{n} \quad (\text{단, } k \neq 0)$$

$$(a-1, b-4, c+7) = k(3, -1, 2)$$

즉, $a-1 = 3k, b-4 = -k, c+7 = 2k$ 이므로

$$a = 3k+1, b = -k+4, c = 2k-7 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

⑬을 ⑦에 대입하면

$$3(3k+1) - (-k+4) + 2(2k-7) - 13 = 0$$

$$14k - 28 = 0$$

$$\therefore k = 2$$

이를 ⑬에 대입하여 정리하면

$$a = 7, b = 2, c = -3$$

따라서 점 B의 좌표는

$$(7, 2, -3)$$

0861 답 $4y - 2z + 1 = 0, 2x + 2y + 4z - 5 = 0$

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면 점 P와 평면 α 사이의 거리는

$$\frac{|x - y + 3z - 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{|x - y + 3z - 3|}{\sqrt{11}}$$

또 점 P와 평면 β 사이의 거리는

$$\frac{|x + 3y + z - 2|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{|x + 3y + z - 2|}{\sqrt{11}}$$

$$\text{즉, } \frac{|x - y + 3z - 3|}{\sqrt{11}} = \frac{|x + 3y + z - 2|}{\sqrt{11}} \text{이므로}$$

$$|x - y + 3z - 3| = |x + 3y + z - 2|$$

$$x - y + 3z - 3 = \pm(x + 3y + z - 2)$$

$$\therefore 4y - 2z + 1 = 0, 2x + 2y + 4z - 5 = 0$$

0862 답 ④

평면 α 가 yz 평면에 수직이므로 평면 α 의 법선벡터를

$$\vec{n} = (0, a, b) \text{라 하자.}$$

이때 평면 α 가 직선 AB를 포함하므로

$$\vec{n} \perp \vec{AB} \text{에서 } \vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$$

$$\vec{AB} = (2-0, 6-2, 1-3) = (2, 4, -2) \text{이므로}$$

$$(0, a, b) \cdot (2, 4, -2) = 0$$

$$4a - 2b = 0$$

$$\therefore b = 2a$$

즉, 점 A(0, 2, 3)을 지나고 법선벡터가 $\vec{n} = (0, a, 2a)$ 인 평면 α 의 방정식은

$$a(y-2) + 2a(z-3) = 0$$

이때 $a \neq 0$ 이므로 $y+2z-8=0$

따라서 점 $(0, 1, 1)$ 과 평면 α 사이의 거리는

$$\frac{|1+2 \times 1-8|}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}}=\sqrt{5}$$

0863 답 ④

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을

$C(1, 1, -2)$ 라 하고, 점 C 에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

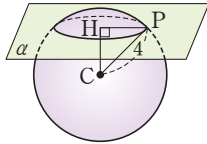
$$\overline{CH}=\frac{|2 \times 1+2 \times 1-2+7|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=3$$

이때 구와 평면 α 의 교선인 원 위의 한 점을 P 라 하면 $\overline{CP}=4$ 이므로 직각삼각형 CPH 에서

$$\overline{PH}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$$

따라서 구와 평면 α 가 만나서 생기는 교선인 원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$ 이므로 구하는 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{7})^2=7\pi$$



0864 답 $6-\sqrt{6}$

원점 O 에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{p}=\overrightarrow{OP}$ 라 하면

$$(\vec{p}-\vec{a}) \cdot (\vec{p}-\vec{b})=0 \text{에서}$$

$$(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB})=0$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}=0$$

즉, $\angle APB=90^\circ$ 이므로 점 P 는 두 점 A, B 를 지름의 양 끝 점으로 하는 구 위의 점이다.

이때 구의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{3-5}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{2-6}{2}\right) \therefore (-1, 1, -2)$$

$\overline{AB}=\sqrt{(-5-3)^2+(3+1)^2+(-6-2)^2}=12$ 이므로 구의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB}=6$$

한편 원점 O 와 구의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{(-1)^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{6}$$

따라서 $|\vec{p}|=|\overrightarrow{OP}|$ 의 최솟값은 $6-\sqrt{6}$

참고 원점과 구의 중심 사이의 거리가 구의 반지름의 길이보다 작으므로 $|\overrightarrow{OP}|$ 의 최솟값은 구의 반지름의 길이와 원점과 구의 중심 사이의 거리의 차와 같다.

0865 답 $-3\sqrt{5}$

$x=0, \frac{y+1}{2}=z+1=t$ (t 는 실수)로 놓으면

$$x=0, y=2t-1, z=t-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$1-x=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{a}=s$ (s 는 실수)로 놓으면

$$x=-s+1, y=2s-1, z=as+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서

$$0=-s+1, 2t-1=2s-1, t-1=as+2$$

$$\therefore t=1, s=1, a=-2$$

두 직선 l, m 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}, \vec{v}$ 라 하면

$$\vec{u}=(0, 2, 1), \vec{v}=(-1, 2, -2)$$

$$\therefore \cos \theta=\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

$$=\frac{|0 \times (-1)+2 \times 2+1 \times (-2)|}{\sqrt{0^2+2^2+1^2} \sqrt{(-1)^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{15} \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$$

$$\therefore \frac{a}{\cos \theta}=\frac{-2}{\frac{2\sqrt{5}}{15}}=-3\sqrt{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① a 의 값 구하기	50 %
② $\cos \theta$ 의 값 구하기	40 %
③ $\frac{a}{\cos \theta}$ 의 값 구하기	10 %

0866 답 $x=\frac{y+12}{3}, z=3$

세 점 A, B, C 를 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$ 으로 놓고 세 점 A, B, C 의 좌표를 각각 대입하면

$$2a+d=0, -6b+d=0, -3c+d=0$$

$$\therefore a=-\frac{d}{2}, b=\frac{d}{6}, c=\frac{d}{3}$$

이를 $ax+by+cz+d=0$ 에 대입하면 평면의 방정식은

$$-\frac{d}{2}x+\frac{d}{6}y+\frac{d}{3}z+d=0$$

$$\text{이때 } d \neq 0 \text{이므로 } 3x-y-2z-6=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

$z=3$ 을 대입하면

$$3x-y-2 \times 3-6=0$$

$$\therefore x=\frac{y+12}{3}$$

따라서 구하는 교선의 방정식은

$$x=\frac{y+12}{3}, z=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① 세 점 A, B, C 를 지나는 평면의 방정식 구하기	50 %
② 교선의 방정식 구하기	50 %

0867 답 -8

$$x^2+y^2+z^2+2x-2y+1=0 \text{에서}$$

$$(x+1)^2+(y-1)^2+z^2=1$$

구의 중심 $(-1, 1, 0)$ 과 평면 $2x+y-2z+k=0$ 사이의 거리가 구의 반지름의 길이 1과 같으므로

$$\frac{|2 \times (-1)+1-2 \times 0+k|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

$$|k-1|=3$$

$$k-1=\pm 3$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$-2 \times 4=-8 \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 구의 중심과 평면 사이의 거리가 구의 반지름의 길이와 같음을 이용하여 식 세우기	60 %
② k 의 값 구하기	30 %
③ 모든 실수 k 의 값의 곱 구하기	10 %

0868 답 -3

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (3-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{11}$$

$$AC = \sqrt{1^2 + (3-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{11}$$

즉, $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로 $\angle BAC$ 의 이등분선은 선분 BC의 중점을 지난다.

선분 BC의 중점을 M이라 하면

$$M\left(\frac{2+0}{2}, \frac{3+3}{2}, \frac{4+6}{2}\right) \quad \therefore M(1, 3, 5)$$

$$\therefore \overrightarrow{AM} = (1 - (-1), 3 - 2, 5 - 3) = (2, 1, 2)$$

즉, 점 A(-1, 2, 3)을 지나고 방향벡터가 $\overrightarrow{AM} = (2, 1, 2)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x+1}{2} = y - 2 = \frac{z-3}{2}$$

이 직선이 점 (a, b, 1)을 지나므로

$$\frac{a+1}{2} = b - 2 = \frac{1-3}{2} \quad \therefore a = -3, b = 1$$

$$\therefore ab = -3$$

0869 답 5

$$\frac{3-x}{2} = \frac{y}{3} = z - 1 = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = -2t + 3, y = 3t, z = t + 1$$

구의 중심을 C(-1, 2, 1)이라 하고, 점 C에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 직선 l 위의 점이므로

$$H(-2t + 3, 3t, t + 1) \text{로 놓자.}$$

$$\therefore \overrightarrow{CH} = (-2t + 4, 3t - 2, t)$$

이때 직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$ 라 하면 $\vec{u} = (-2, 3, 1)$

$$\overrightarrow{CH} \perp \vec{u} \text{이므로 } \overrightarrow{CH} \cdot \vec{u} = 0 \text{에서}$$

$$(-2t + 4, 3t - 2, t) \cdot (-2, 3, 1) = 0$$

$$(-2t + 4) \times (-2) + (3t - 2) \times 3 + t \times 1 = 0$$

$$14t - 14 = 0 \quad \therefore t = 1$$

즉, $\overrightarrow{CH} = (2, 1, 1)$ 이므로 구의 중심 C와 직선 l 사이의 거리는

$$|\overrightarrow{CH}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

이때 구의 반지름의 길이가 1이므로

$$M = \sqrt{6} + 1, m = \sqrt{6} - 1$$

$$\therefore Mm = 5$$

0870 답 ②

직선과 평면의 교점을 A라 하자.

$$\frac{2-x}{4} = y = z - 1 = t \quad (t \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = -4t + 2, y = t, z = t + 1 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠을 주어진 평면의 방정식에 대입하면

$$2(-4t + 2) + t - 2(t + 1) + 7 = 0$$

$$-9t + 9 = 0$$

$$\therefore t = 1$$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$$x = -2, y = 1, z = 2$$

$$\therefore A(-2, 1, 2)$$

한편 주어진 직선 위에 있고 주어진 평면 위에 있지 않은 점 (2, 0, 1)에서 주어진 평면에 내린 수선의 발을 H라 하자.

주어진 평면의 법선벡터는 (2, 1, -2)이므로 점 (2, 0, 1)을 지나고 방향벡터가 (2, 1, -2)인 직선의 방정식은

$$\frac{x-2}{2} = y = \frac{z-1}{-2}$$

$$\frac{x-2}{2} = y = \frac{z-1}{-2} = s \quad (s \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x = 2s + 2, y = s, z = -2s + 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 주어진 평면의 방정식에 대입하면

$$2(2s + 2) + s - 2(-2s + 1) + 7 = 0$$

$$9s + 9 = 0 \quad \therefore s = -1$$

이를 ㉡에 대입하여 정리하면

$$x = 0, y = -1, z = 3$$

$$\therefore H(0, -1, 3)$$

즉, 정사영의 방향벡터는

$$\vec{u} = \overrightarrow{AH} = (0 - (-2), -1 - 1, 3 - 2) = (2, -2, 1)$$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로 $a + b = -1$

0871 답 ②

두 평면 $2x - y + z = 4, x + y + z = 3$ 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_1 = (2, -1, 1), \vec{n}_2 = (1, 1, 1)$$

두 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|2 \times 1 + (-1) \times 1 + 1 \times 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

한편 삼각형 ABC의 무게중심을 G(1, 1, 3)이라 하고, 점 G에서 평면 $x + y + z = 3$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{GH} = \frac{|1 + 1 + 3 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

이때 $\angle HGD = \theta$ 이므로 직각삼각형 HGD에서

$$\overline{DG} = \frac{\overline{GH}}{\cos \theta} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{2}}{3}} = \sqrt{6}$$

오른쪽 그림과 같이 정사면체

ABCD의 한 모서리의 길이를 a라

하면 밑면인 정삼각형 ABC의 높

이는 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ 이므로

$$\overline{GC} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

따라서 직각삼각형 DGC에서

$$a^2 = (\sqrt{6})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2$$

$$\frac{2}{3}a^2 = 6, a^2 = 9$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

참고 오른쪽 그림과 같이 두 평면

$$\alpha: 2x - y + z = 4, \beta: x + y + z = 3$$

이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\angle HGD = \theta$$

