



정답과 해설

기하

01 / 이차곡선

A 개념 확인

8~11쪽

0001 **답** $y^2=16x$

$$y^2=4 \times 4x \quad \therefore y^2=16x$$

0002 **답** $y^2=-2x$

$$y^2=4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)x \quad \therefore y^2=-2x$$

0003 **답** $x^2=20y$

$$x^2=4 \times 5y \quad \therefore x^2=20y$$

0004 **답** $x^2=-3y$

$$x^2=4 \times \left(-\frac{3}{4}\right)y \quad \therefore x^2=-3y$$

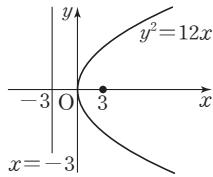
0005 **답** 풀이 참조

$$y^2=12x \text{에서 } y^2=4 \times 3x \text{이므로 } p=3$$

따라서 초점의 좌표는 (3, 0),

준선의 방정식은 $x=-3$ 이고

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



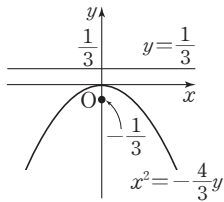
0006 **답** 풀이 참조

$$x^2=-\frac{4}{3}y \text{에서 } x^2=4 \times \left(-\frac{1}{3}\right)y \text{이므로 } p=-\frac{1}{3}$$

따라서 초점의 좌표는 $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$,

준선의 방정식은 $y=\frac{1}{3}$ 이고

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0007 **답** $(y+3)^2=5(x-1)$

0008 **답** $(x-1)^2=-12(y+3)$

0009 **답** 초점의 좌표: (3, -1), 준선의 방정식: $x=1$

주어진 포물선은 포물선 $y^2=4x$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=4x$ 의 초점의 좌표는 (1, 0), 준선의 방정식은 $x=-1$ 이다.

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 (3, -1), 준선의 방정식은 $x=1$ 이다.

0010 **답** 초점의 좌표: $\left(-3, \frac{15}{4}\right)$, 준선의 방정식: $y=\frac{17}{4}$

주어진 포물선은 포물선 $x^2=-y$ 를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=-y$, 즉 $x^2=4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)y$ 의 초점의 좌표는

$\left(0, -\frac{1}{4}\right)$, 준선의 방정식은 $y=\frac{1}{4}$ 이다.

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $\left(-3, \frac{15}{4}\right)$, 준선의 방정식은 $y=\frac{17}{4}$ 이다.

0011 **답** 초점의 좌표: (1, -5), 준선의 방정식: $x=5$

$$y^2+8x+10y+1=0 \text{에서 } (y+5)^2=-8(x-3)$$

즉, 주어진 포물선은 포물선 $y^2=-8x$ 를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=-8x$, 즉 $y^2=4 \times (-2)x$ 의 초점의 좌표는 (-2, 0), 준선의 방정식은 $x=2$ 이다.

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는 (1, -5), 준선의 방정식은 $x=5$ 이다.

0012 **답** $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($a>b>0$)이라 하면

$$2a=6 \text{에서 } a=3$$

$$a^2-b^2=2^2 \text{에서 } b^2=3^2-2^2=5$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

0013 **답** $\frac{x^2}{33}+\frac{y^2}{36}=1$

구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ($b>a>0$)이라 하면

$$2b=12 \text{에서 } b=6$$

$$b^2-a^2=(\sqrt{3})^2 \text{에서 } a^2=6^2-(\sqrt{3})^2=33$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{33}+\frac{y^2}{36}=1$$

0014 **답** 풀이 참조

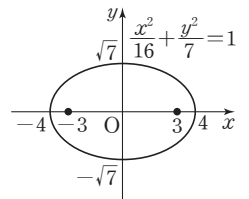
타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7}=1$ 에서 $\sqrt{16-7}=3$ 이므로

초점의 좌표는 (3, 0), (-3, 0),

장축의 길이는 $2 \times 4=8$,

단축의 길이는 $2 \times \sqrt{7}=2\sqrt{7}$ 이고

그래프는 오른쪽 그림과 같다.

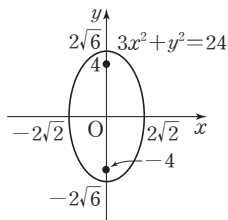


0015 **답** 풀이 참조

$$3x^2+y^2=24 \text{에서 } \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{24}=1$$

$$\sqrt{24-8}=4 \text{이므로}$$

초점의 좌표는 $(0, 4), (0, -4)$,
 장축의 길이는 $2 \times 2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$,
 단축의 길이는 $2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ 이고
 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0016 **답** $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1$

구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$)이라 하면

$$2a = 6\sqrt{3} \text{에서 } a = 3\sqrt{3}$$

$$a^2 - b^2 = 3^2 \text{에서 } b^2 = (3\sqrt{3})^2 - 3^2 = 18$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{18} = 1$$

0017 **답** $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > a > 0$)이라 하면

$$2a = 4 \text{에서 } a = 2$$

$$b^2 - a^2 = (\sqrt{5})^2 \text{에서 } b^2 = (\sqrt{5})^2 + 2^2 = 9$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

0018 **답** $\frac{(x+4)^2}{8} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$

0019 **답** $\frac{(x+4)^2}{10} + \frac{(y-2)^2}{18} = 1$

0020 **답** 초점의 좌표: $(3, 2), (-1, 2)$,

장축의 길이: $2\sqrt{10}$, 단축의 길이: $2\sqrt{6}$

주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6} = 1$ 에서 $\sqrt{10-6} = 2$ 이므로 초점의 좌표는

$$(2, 0), (-2, 0)$$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는 $(3, 2), (-1, 2)$

한편 타원을 평행이동해도 장축, 단축의 길이는 변하지 않으므로 주어진 타원의

$$\text{장축의 길이는 } 2 \times \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

$$\text{단축의 길이는 } 2 \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

0021 **답** 초점의 좌표: $(3, -2), (3, -8)$,

장축의 길이: 10, 단축의 길이: 8

주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ 에서 $\sqrt{25-16} = 3$ 이므로 초점의 좌표는

$$(0, 3), (0, -3)$$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는 $(3, -2), (3, -8)$

한편 타원을 평행이동해도 장축, 단축의 길이는 변하지 않으므로 주어진 타원의

$$\text{장축의 길이는 } 2 \times 5 = 10$$

$$\text{단축의 길이는 } 2 \times 4 = 8$$

0022 **답** 초점의 좌표: $(2, 2), (0, 2)$,

장축의 길이: $2\sqrt{2}$, 단축의 길이: 2

$$x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 7 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2 + 2(y-2)^2 = 2$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{2} + (y-2)^2 = 1$$

즉, 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 에서 $\sqrt{2-1} = 1$ 이므로 초점의 좌표는

$$(1, 0), (-1, 0)$$

따라서 주어진 타원의 초점의 좌표는 $(2, 2), (0, 2)$

한편 타원을 평행이동해도 장축, 단축의 길이는 변하지 않으므로 주어진 타원의

$$\text{장축의 길이는 } 2 \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{단축의 길이는 } 2 \times 1 = 2$$

0023 **답** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하면

$$2a = 6 \text{에서 } a = 3$$

$$a^2 + b^2 = 5^2 \text{에서 } b^2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

0024 **답** $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = -1$

구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하면

$$2b = 2\sqrt{6} \text{에서 } b = \sqrt{6}$$

$$a^2 + b^2 = 3^2 \text{에서 } a^2 = 3^2 - (\sqrt{6})^2 = 3$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = -1$$

0025 **답** 풀이 참조

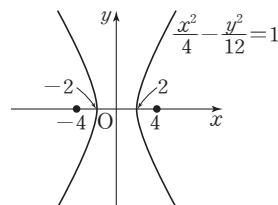
쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 에서 $\sqrt{4+12} = 4$ 이므로

초점의 좌표는 $(4, 0), (-4, 0)$,

꼭짓점의 좌표는 $(2, 0), (-2, 0)$,

주축의 길이는 $2 \times 2 = 4$ 이고

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0026 **답** 풀이 참조

$$6x^2 - y^2 = -6 \text{에서 } x^2 - \frac{y^2}{6} = -1$$

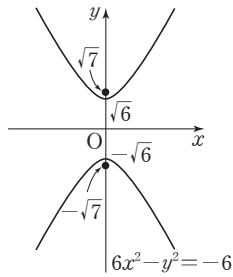
$$\sqrt{1+6} = \sqrt{7} \text{이므로}$$

$$\text{초점의 좌표는 } (0, \sqrt{7}), (0, -\sqrt{7}),$$

$$\text{꼭짓점의 좌표는 } (0, \sqrt{6}), (0, -\sqrt{6}),$$

$$\text{주축의 길이는 } 2 \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6} \text{이고}$$

그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0027 **답** $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$

$$\text{구하는 쌍곡선의 방정식을 } \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{이라 하면}$$

$$3^2 + b^2 = 4^2 \text{에서 } b^2 = 4^2 - 3^2 = 7$$

$$\text{따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$$

0028 **답** $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = -1$

$$\text{구하는 쌍곡선의 방정식을 } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \text{ (} a > 0, b > 0 \text{)이라 하면}$$

$$2b = 4 \text{에서 } b = 2$$

$$a^2 + b^2 = (2\sqrt{3})^2 \text{에서 } a^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2^2 = 8$$

$$\text{따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 } \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = -1$$

0029 **답** $y = \pm 2x$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{에서 } \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$$

$$\text{따라서 구하는 점근선의 방정식은 } y = \pm 2x$$

0030 **답** $y = \pm \frac{3}{5}x$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = -1 \text{에서 } \frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{3^2} = -1$$

$$\text{따라서 구하는 점근선의 방정식은 } y = \pm \frac{3}{5}x$$

0031 **답** $y = \pm \sqrt{7}x$

$$7x^2 - y^2 = 7 \text{에서 } x^2 - \frac{y^2}{(\sqrt{7})^2} = 1$$

$$\text{따라서 구하는 점근선의 방정식은 } y = \pm \sqrt{7}x$$

0032 **답** $y = \pm \frac{2}{3}x$

$$4x^2 - 9y^2 = -36 \text{에서 } \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{2^2} = -1$$

$$\text{따라서 구하는 점근선의 방정식은 } y = \pm \frac{2}{3}x$$

0033 **답** $\frac{(x-3)^2}{10} - \frac{(y-7)^2}{5} = 1$

0034 **답** $\frac{(x-3)^2}{11} - \frac{(y-7)^2}{27} = -1$

0035 **답** 초점의 좌표: $(0, 0), (-10, 0)$

$$\text{꼭짓점의 좌표: } (-2, 0), (-8, 0)$$

$$\text{점근선의 방정식: } y = \frac{4}{3}x + \frac{20}{3}, y = -\frac{4}{3}x - \frac{20}{3}$$

주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{이때 쌍곡선 } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{에서 } \sqrt{9+16} = 5 \text{이므로 초점의 좌표는}$$

$$(5, 0), (-5, 0), \text{ 꼭짓점의 좌표는 } (3, 0), (-3, 0), \text{ 점근선의 방}$$

$$\text{정식은 } y = \pm \frac{4}{3}x \text{이다.}$$

따라서 주어진 쌍곡선의

$$\text{초점의 좌표는 } (0, 0), (-10, 0),$$

$$\text{꼭짓점의 좌표는 } (-2, 0), (-8, 0),$$

$$\text{점근선의 방정식은 } y = \pm \frac{4}{3}(x+5), \text{ 즉 } y = \frac{4}{3}x + \frac{20}{3},$$

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{20}{3} \text{이다.}$$

0036 **답** 초점의 좌표: $(2, 3), (2, -9)$

$$\text{꼭짓점의 좌표: } (2, 2\sqrt{6}-3), (2, -2\sqrt{6}-3)$$

$$\text{점근선의 방정식: } y = \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} - 3,$$

$$y = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 3$$

주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{24} = -1$ 을 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{이때 쌍곡선 } \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{24} = -1 \text{에서 } \sqrt{12+24} = 6 \text{이므로 초점의 좌표는}$$

$$(0, 6), (0, -6), \text{ 꼭짓점의 좌표는 } (0, 2\sqrt{6}), (0, -2\sqrt{6}), \text{ 점근선}$$

$$\text{의 방정식은 } y = \pm \sqrt{2}x \text{이다.}$$

따라서 주어진 쌍곡선의

$$\text{초점의 좌표는 } (2, 3), (2, -9),$$

$$\text{꼭짓점의 좌표는 } (2, 2\sqrt{6}-3), (2, -2\sqrt{6}-3),$$

$$\text{점근선의 방정식은 } y + 3 = \pm \sqrt{2}(x-2), \text{ 즉 } y = \sqrt{2}x - 2\sqrt{2} - 3,$$

$$y = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2} - 3 \text{이다.}$$

0037 **답** 초점의 좌표: $(3, 4), (-5, 4)$

$$\text{꼭짓점의 좌표: } (2, 4), (-4, 4)$$

$$\text{점근선의 방정식: } y = \frac{\sqrt{7}}{3}x + \frac{\sqrt{7}}{3} + 4,$$

$$y = -\frac{\sqrt{7}}{3}x - \frac{\sqrt{7}}{3} + 4$$

$$7(x+1)^2 - 9(y-4)^2 = 63 \text{에서 } \frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-4)^2}{7} = 1$$

즉, 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{이때 쌍곡선 } \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1 \text{에서 } \sqrt{9+7} = 4 \text{이므로 초점의 좌표는}$$

$$(4, 0), (-4, 0), \text{ 꼭짓점의 좌표는 } (3, 0), (-3, 0), \text{ 점근선의 방}$$

$$\text{정식은 } y = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}x \text{이다.}$$

따라서 주어진 쌍곡선의

초점의 좌표는 $(3, 4)$, $(-5, 4)$,

꼭짓점의 좌표는 $(2, 4)$, $(-4, 4)$,

점근선의 방정식은 $y-4=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}(x+1)$, 즉 $y=\frac{\sqrt{7}}{3}x+\frac{\sqrt{7}}{3}+4$,

$y=-\frac{\sqrt{7}}{3}x-\frac{\sqrt{7}}{3}+4$ 이다.

0038 **답** 초점의 좌표: $(2, \sqrt{5}+1)$, $(2, -\sqrt{5}+1)$

꼭짓점의 좌표: $(2, 2)$, $(2, 0)$

점근선의 방정식: $y=\frac{1}{2}x$, $y=-\frac{1}{2}x+2$

$x^2-4y^2-4x+8y+4=0$ 에서 $(x-2)^2-4(y-1)^2=-4$

$\therefore \frac{(x-2)^2}{4}-(y-1)^2=-1$

즉, 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=-1$ 을 x 축의 방향으로 2만큼,

y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-y^2=-1$ 에서 $\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$ 이므로 초점의 좌표는

$(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$, 꼭짓점의 좌표는 $(0, 1)$, $(0, -1)$, 점근선의

방정식은 $y=\pm\frac{1}{2}x$ 이다.

따라서 주어진 쌍곡선의

초점의 좌표는 $(2, \sqrt{5}+1)$, $(2, -\sqrt{5}+1)$,

꼭짓점의 좌표는 $(2, 2)$, $(2, 0)$,

점근선의 방정식은 $y-1=\pm\frac{1}{2}(x-2)$, 즉 $y=\frac{1}{2}x$, $y=-\frac{1}{2}x+2$

이다.

0039 **답** 포물선

$x^2+4x+4y=0$ 에서 $(x+2)^2=-4(y-1)$

따라서 주어진 방정식은 포물선을 나타낸다.

0040 **답** 원

$x^2+y^2-6x=0$ 에서 $(x-3)^2+y^2=9$

따라서 주어진 방정식은 원을 나타낸다.

0041 **답** 타원

$x^2+4y^2+6x-11=0$ 에서 $(x+3)^2+4y^2=20$

$\therefore \frac{(x+3)^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$

따라서 주어진 방정식은 타원을 나타낸다.

0042 **답** 포물선

$2y^2-5x-4y-8=0$ 에서 $2(y-1)^2=5(x+2)$

$\therefore (y-1)^2=\frac{5}{2}(x+2)$

따라서 주어진 방정식은 포물선을 나타낸다.

0043 **답** 쌍곡선

$4x^2-y^2+4x-4y+1=0$ 에서 $4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-(y+2)^2=-4$

$\therefore \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{(y+2)^2}{4}=-1$

따라서 주어진 방정식은 쌍곡선을 나타낸다.

B 유형 완성

12~23쪽

0044 **답** ①

꼭짓점이 원점이고 초점의 좌표가 $(3, 0)$ 인 포물선의 방정식은

$y^2=4\times 3x \quad \therefore y^2=12x$

이 포물선이 점 $(a, 6)$ 을 지나므로

$6^2=12a \quad \therefore a=3$

0045 **답** ①

포물선 $y^2=16x$, 즉 $y^2=4\times 4x$ 의 초점의 좌표는

$(4, 0)$

포물선 $x^2=-12y$, 즉 $x^2=4\times (-3)y$ 의 초점의 좌표는

$(0, -3)$

따라서 두 포물선의 초점 사이의 거리는

$\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$

0046 **답** 32

주어진 포물선의 방정식은

$x^2=4\times (-4)y \quad \therefore x^2=-16y$

$\therefore A(0, 0)$ ①

포물선의 초점 F를 지나고 y 축에 수직인 직선의 방정식은 $y=-4$ 이

므로 이 직선과 포물선이 만나는 점의 x 좌표는

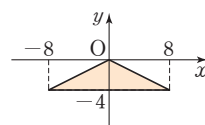
$x^2=-16\times (-4)=64 \quad \therefore x=\pm 8$

즉, 두 점 B, C의 좌표는 $(-8, -4)$, $(8, -4)$ ②

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형 ABC의 넓

이는

$\frac{1}{2}\times \{8-(-8)\}\times 4=32$ ③



채점 기준

① 점 A의 좌표 구하기	30 %
② 두 점 B, C의 좌표 구하기	40 %
③ 삼각형 ABC의 넓이 구하기	30 %

0047 **답** ②

포물선 $x^2=24y$, 즉 $x^2=4\times 6y$ 의 초점의 좌표는 $(0, 6)$ 이므로 포

물선 $x^2=24y$ 를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평

행이동한 포물선의 초점의 좌표는

$(m, 6+n)$

이 점이 점 $(5, 2)$ 와 일치하므로

$m=5, 6+n=2$

따라서 $m=5, n=-4$ 이므로

$m-n=9$

0048 **답** ㄱ, ㄷ

포물선 $y^2=8x$, 즉 $y^2=4\times 2x$ 의 초점의 좌표는 $(2, 0)$ 이다.

ㄱ. 포물선 $y^2=4(x-1)$ 은 포물선 $y^2=4x$ 를 x 축의 방향으로 1만큼

평행이동한 것이다.

이때 포물선 $y^2=4x$ 의 초점의 좌표는 $(1, 0)$ 이므로 포물선

$y^2=4(x-1)$ 의 초점의 좌표는 $(2, 0)$ 이다.

- 나. 포물선 $x^2=4(y-1)$ 은 포물선 $x^2=4y$ 를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
 이때 포물선 $x^2=4y$ 의 초점의 좌표는 $(0, 1)$ 이므로 포물선 $x^2=4(y-1)$ 의 초점의 좌표는 $(0, 2)$ 이다.
- 다. 포물선 $(x-2)^2=-4(y-1)$ 은 포물선 $x^2=-4y$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
 이때 포물선 $x^2=-4y$ 의 초점의 좌표는 $(0, -1)$ 이므로 포물선 $(x-2)^2=-4(y-1)$ 의 초점의 좌표는 $(2, 0)$ 이다.
- 따라서 포물선 $y^2=8x$ 와 초점이 일치하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0049 답 ⑤

포물선 $(x-1)^2=24y$ 는 포물선 $x^2=24y$ 를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
 이때 포물선 $x^2=24y$, 즉 $x^2=4 \times 6y$ 의 초점의 좌표는 $(0, 6)$ 이므로 포물선 $(x-1)^2=24y$ 의 초점 F의 좌표는 $(1, 6)$ 이다.
 또 포물선 $(y+2)^2=-16(x-2)$ 는 포물선 $y^2=-16x$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.
 이때 포물선 $y^2=-16x$, 즉 $y^2=4 \times (-4)x$ 의 준선의 방정식은 $x=4$ 이므로 포물선 $(y+2)^2=-16(x-2)$ 의 준선 l 의 방정식은 $x=6$ 이다.
 따라서 점 F(1, 6)과 직선 $x=6$ 사이의 거리는 $6-1=5$

0050 답 2

$y^2-8x+8ky+8=0$ 에서 $(y+4k)^2=8(x-1+2k^2)$
 즉, 이 포물선은 포물선 $y^2=8x$ 를 x 축의 방향으로 $1-2k^2$ 만큼, y 축의 방향으로 $-4k$ 만큼 평행이동한 것이다.
 이때 포물선 $y^2=8x$, 즉 $y^2=4 \times 2x$ 의 초점의 좌표가 $(2, 0)$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는 $(3-2k^2, -4k)$
 이 점이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로 $-4k=(3-2k^2)-1 \quad \therefore k^2-2k-1=0$
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 k 의 값의 합은 2이다.

0051 답 1

$4y^2-4x+8y+11=0$ 에서 $4(y+1)^2=4x-7$
 $\therefore (y+1)^2=x-\frac{7}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 즉, 포물선 ㉠은 포물선 $y^2=x$ 를 x 축의 방향으로 $\frac{7}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
 이때 포물선 $y^2=x$, 즉 $y^2=4 \times \frac{1}{4}x$ 의 초점의 좌표가 $(\frac{1}{4}, 0)$ 이므로 포물선 ㉠의 초점의 좌표는 $(2, -1) \quad \dots\dots \textcircled{i}$
 또 $x^2+4x+2y+a=0$ 에서 $(x+2)^2=-2(y-\frac{4-a}{2}) \quad \dots\dots \textcircled{ii}$
 즉, 포물선 ㉡은 포물선 $x^2=-2y$ 를 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 $\frac{4-a}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=-2y$, 즉 $x^2=4 \times (-\frac{1}{2})y$ 의 초점의 좌표가 $(0, -\frac{1}{2})$ 이므로 포물선 ㉡의 초점의 좌표는 $(-2, \frac{3-a}{2}) \quad \dots\dots \textcircled{iii}$

두 포물선 ㉠, ㉡의 초점이 원점에 대하여 대칭이므로

$$\frac{3-a}{2}=1 \quad \therefore a=1$$

채점 기준

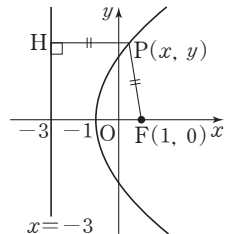
① 포물선 $4y^2-4x+8y+11=0$ 의 초점의 좌표 구하기	40 %
② 포물선 $x^2+4x+2y+a=0$ 의 초점의 좌표 구하기	40 %
③ 상수 a 의 값 구하기	20 %

0052 답 ②

주어진 포물선의 꼭짓점이 점 $(-1, 0)$ 이므로 주어진 포물선은 꼭짓점이 원점인 포물선을 x 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.
 이때 주어진 포물선의 준선이 직선 $x=-3$ 이므로 초점의 좌표는 $(1, 0)$ 이다.
 즉, 평행이동하기 전의 포물선의 초점의 좌표는 $(1+1, 0)$, 즉 $(2, 0)$ 이므로 평행이동하기 전의 포물선의 방정식은 $y^2=4 \times 2x \quad \therefore y^2=8x$
 주어진 포물선의 방정식은 $y^2=8(x+1) \quad \therefore y^2=8x+8$
 따라서 $a=8, b=8$ 이므로 $a+b=16$

다른 풀이

꼭짓점이 점 $(-1, 0)$ 이고 준선이 직선 $x=-3$ 이므로 주어진 포물선의 초점을 F라 하면 점 F의 좌표는 $(1, 0)$ 이다.
 포물선 위의 점을 P(x, y)라 하고, 점 P에서 준선 $x=-3$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이므로
 $\sqrt{(1-x)^2+(-y)^2}=x-(-3)$
 양변을 제곱하면 $(1-x)^2+(-y)^2=(x+3)^2 \quad \therefore y^2=8x+8$
 따라서 $a=8, b=8$ 이므로 $a+b=16$



0053 답 ①

축이 y 축에 평행한 포물선의 방정식을 $x^2+Ax+By+C=0$ (A, B, C 는 상수, $B \neq 0$)이라 하면 이 포물선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $C=0$
 즉, 포물선 $x^2+Ax+By=0$ 이 두 점 $(2, -2), (-2, 6)$ 을 지나므로
 $4+2A-2B=0 \quad \therefore A-B=-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $4-2A+6B=0 \quad \therefore A-3B=2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $A=-4, B=-2$
 주어진 포물선의 방정식은 $x^2-4x-2y=0 \quad \therefore (x-2)^2=2(y+2)$
 이 포물선은 포물선 $x^2=2y$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2=2y$, 즉 $x^2=4 \times \frac{1}{2}y$ 의 초점의 좌표가 $(0, \frac{1}{2})$ 이므로 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$$(2, -\frac{3}{2})$$

따라서 $p=2, q=-\frac{3}{2}$ 이므로

$$pq=-3$$

0054 답 4

포물선 $y^2=\frac{8}{3}x$, 즉 $y^2=4 \times \frac{2}{3}x$ 의 초점 F의 좌표는 $(\frac{2}{3}, 0)$ 이고,

준선의 방정식은 $x=-\frac{2}{3}$ 이다.

세 점 A, B, C의 x좌표를 각각 x_1, x_2, x_3 이라 하면

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{2}{3} \quad \therefore x_1+x_2+x_3=2$$

한편 오른쪽 그림과 같이 세 점 A, B, C

에서 준선 $x=-\frac{2}{3}$ 에 내린 수선의 발을

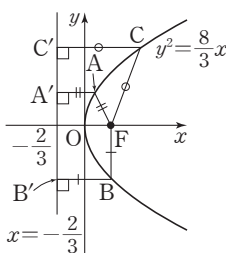
각각 A', B', C'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF}=\overline{AA'}=x_1+\frac{2}{3}$$

$$\overline{BF}=\overline{BB'}=x_2+\frac{2}{3}$$

$$\overline{CF}=\overline{CC'}=x_3+\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AF}+\overline{BF}+\overline{CF} &= \left(x_1+\frac{2}{3}\right)+\left(x_2+\frac{2}{3}\right)+\left(x_3+\frac{2}{3}\right) \\ &= x_1+x_2+x_3+2 \\ &= 2+2=4 \end{aligned}$$



0055 답 ⑤

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이므로 삼각형 PHF는 이등변삼각형이다.

$$\therefore \angle FPH=180^\circ-(50^\circ+50^\circ)=80^\circ$$

0056 답 -5

포물선 $x^2=-12y$, 즉 $x^2=4 \times (-3)y$ 의 초점 F의 좌표는 $(0, -3)$

이고, 준선의 방정식은 $y=3$ 이다.

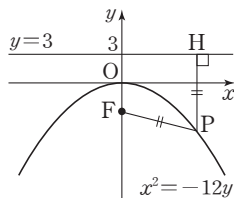
오른쪽 그림과 같이 점 P에서 준선 $y=3$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH}=\overline{PF}=8$$

이때 점 P의 y좌표를 a라 하면

$$3-a=8 \quad \therefore a=-5$$

따라서 구하는 y좌표는 -5이다.



0057 답 23/2

포물선 $y^2=6x$, 즉 $y^2=4 \times \frac{3}{2}x$ 의 초점 F의 좌표는 $(\frac{3}{2}, 0)$ 이고, 준

선의 방정식은 $x=-\frac{3}{2}$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선 $x=-\frac{3}{2}$ 에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 하고, 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β 라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF}=\overline{AH_1}=\alpha+\frac{3}{2}$$

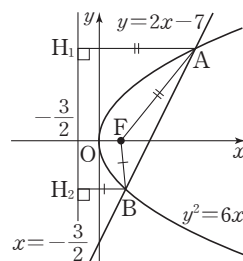
$$\overline{BF}=\overline{BH_2}=\beta+\frac{3}{2}$$

$$\therefore \overline{AF}+\overline{BF}=\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)+\left(\beta+\frac{3}{2}\right)=\alpha+\beta+3$$

한편 포물선 $y^2=6x$ 와 직선 $y=2x-7$ 의 교점의 x좌표는 방정식 $(2x-7)^2=6x$, 즉 $4x^2-34x+49=0$ 의 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{17}{2}$$

$$\therefore \overline{AF}+\overline{BF}=\alpha+\beta+3=\frac{17}{2}+3=\frac{23}{2}$$



0058 답 ⑤

두 점 P, Q의 좌표를 각각 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 라 하면 두 점 P, Q가 포물선 $x^2=8y$ 위의 점이므로

$$x_1^2=8y_1, x_2^2=8y_2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 두 정사각형의 넓이의 합이 52이므로

$$x_1^2+x_2^2=52$$

이 식에 ①을 대입하면

$$8y_1+8y_2=52 \quad \therefore y_1+y_2=\frac{13}{2}$$

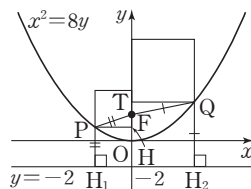
한편 포물선 $x^2=8y$, 즉 $x^2=4 \times 2y$ 의 초점 F의 좌표는 $(0, 2)$ 이고, 준선의 방정식은 $y=-2$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 준선 $y=-2$ 에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF}=\overline{PH_1}=y_1+2$$

$$\overline{QF}=\overline{QH_2}=y_2+2$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PF}+\overline{QF} &= (y_1+2)+(y_2+2)=y_1+y_2+4 \\ &= \frac{13}{2}+4=\frac{21}{2} \end{aligned}$$



0059 답 3

포물선 $y^2=4px$ 의 초점 F의 좌표는 $(p, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x=-p$ 이다.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이고 $\overline{PH}=\overline{FH}=12$ 이므로 삼각형 PHF는 한 변의 길이가 12인 정삼각형이다.

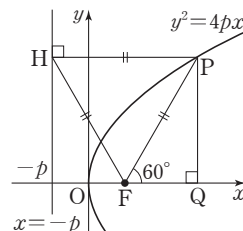
오른쪽 그림과 같이 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하면

$\angle PFQ=\angle HPF=60^\circ$ 이므로 직각삼각형 PFQ에서

$$\overline{FQ}=\overline{PF} \cos 60^\circ=12 \times \frac{1}{2}=6$$

$$\overline{PQ}=\overline{PF} \sin 60^\circ=12 \times \frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$$

즉, 점 P의 좌표는 $(p+6, 6\sqrt{3})$



이때 점 P가 포물선 $y^2=4px$ 위의 점이므로
 $(6\sqrt{3})^2=4p(p+6)$
 $p^2+6p-27=0$
 $(p+9)(p-3)=0$
 $\therefore p=3 (\because p>0)$

다른 풀이

포물선 $y^2=4px$ 의 초점 F의 좌표는 $(p, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x=-p$ 이다.
 포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$ 이고 $\overline{PH}=\overline{FH}=12$ 이므로 삼각형 PHF는 한 변의 길이가 12인 정삼각형이다.

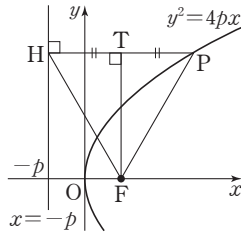
오른쪽 그림과 같이 점 F에서 선분 PH에 내린 수선의 발을 T라 하면 삼각형 PHF가 정삼각형이므로 선분 FT는 선분 PH를 수직이등분한다.

이때 삼각형 PHF의 한 변의 길이가 12이므로

$$\overline{TH}=\frac{1}{2}\times 12=6$$

$$\overline{OF}=\frac{1}{2}\overline{TH}=\frac{1}{2}\times 6=3\text{이므로}$$

$$p=3$$



0060 **답 18**

포물선 $y^2=16x$, 즉 $y^2=4\times 4x$ 의 초점 F의 좌표는 $(4, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x=-4$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선 $x=-4$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

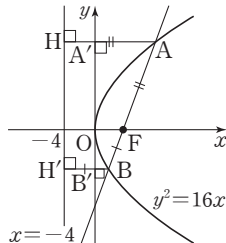
$$\overline{AF}=\overline{AH}=\overline{AA'}+4$$

$$=8+4=12$$

$$\overline{BF}=\overline{BH'}=\overline{BB'}+4$$

$$=2+4=6$$

$$\therefore \overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=12+6=18$$



0061 **답 13**

포물선 $y^2=8x$, 즉 $y^2=4\times 2x$ 의 초점을 F라 하면 점 F의 좌표는 $(2, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x=-2$ 이다.

즉, 주어진 직선은 초점 F(2, 0)을 지난다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 준선 $x=-2$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하고, 두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β 라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF}=\overline{PH}=\alpha+2$$

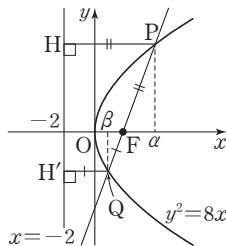
$$\overline{QF}=\overline{QH'}=\beta+2$$

$$\therefore \overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{QF}=(\alpha+2)+(\beta+2)$$

$$=\alpha+\beta+4$$

$$\text{즉, } \alpha+\beta+4=17\text{이므로 } \alpha+\beta=13$$

따라서 두 점 P, Q의 x좌표의 합은 13이다.



0062 **답 ②**

포물선 $x^2=10y$, 즉 $x^2=4\times \frac{5}{2}y$ 의 초점 F의 좌표는 $(0, \frac{5}{2})$ 이고,

준선의 방정식은 $y=-\frac{5}{2}$ 이다.

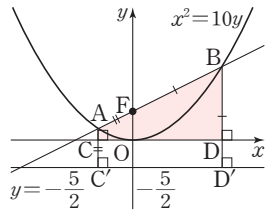
오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선 $y=-\frac{5}{2}$ 에 내린 수선의 발을 각각 C', D'이라 하면 포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}=\overline{AC'}$, $\overline{BF}=\overline{BD'}$ 이므로
 $\overline{AC}=\overline{AC'}-\frac{5}{2}=\overline{AF}-\frac{5}{2}$
 $\overline{BD}=\overline{BD'}-\frac{5}{2}=\overline{BF}-\frac{5}{2}$

따라서 사각형 ACDB의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times (\overline{AC}+\overline{BD})\times \overline{CD}=\frac{1}{2}\times \left\{ \left(\overline{AF}-\frac{5}{2} \right) + \left(\overline{BF}-\frac{5}{2} \right) \right\} \times \overline{CD}$$

$$=\frac{1}{2}\times (\overline{AB}-5)\times \overline{CD}$$

$$=\frac{1}{2}\times (15-5)\times 5\sqrt{6}=25\sqrt{6}$$



0063 **답 14**

포물선 $y^2=12x$, 즉 $y^2=4\times 3x$ 의 초점을 F라 하면 점 F의 좌표는 $(3, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x=-3$ 이다.

즉, 직선 l은 초점 F(3, 0)을 지난다. i

두 점 P, Q의 x좌표를 각각 α, β 라 하면 점 M의 x좌표가 4이므로

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=4 \quad \therefore \alpha+\beta=8$$

..... ii

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, Q에서 준선 $x=-3$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PF}=\overline{PH}=\alpha+3$$

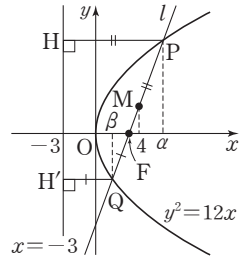
$$\overline{QF}=\overline{QH'}=\beta+3$$

$$\therefore \overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{QF}=(\alpha+3)+(\beta+3)$$

$$=\alpha+\beta+6$$

$$=8+6=14$$

..... iii



채점 기준

i 직선 l이 초점을 지남을 알기	30 %
ii 두 점 P, Q의 x좌표의 합 구하기	30 %
iii 선분 PQ의 길이 구하기	40 %

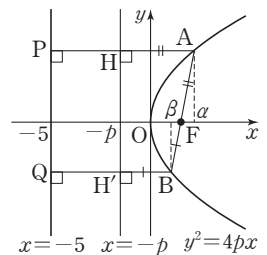
0064 **답 3/2**

포물선 $y^2=4px$ 의 초점 F의 좌표는 $(p, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x=-p$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선 $x=-p$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하고, 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β 라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF}=\overline{AH}=\alpha+p$$

$$\overline{BF}=\overline{BH'}=\beta+p$$



$$\therefore \overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = (\alpha + p) + (\beta + p) \\ = \alpha + \beta + 2p$$

이때 $\overline{AB} = 6$ 이므로

$$\alpha + \beta + 2p = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $\overline{AP} + \overline{BQ} = 13$ 이므로

$$(\alpha + 5) + (\beta + 5) = 13$$

$$\therefore \alpha + \beta = 3$$

이를 ①에 대입하면

$$3 + 2p = 6 \quad \therefore p = \frac{3}{2}$$

0065 답 ①

포물선 $x^2 = 16y$, 즉 $x^2 = 4 \times 4y$ 의 초점 F의 좌표는 (0, 4)이고, 준선의 방정식은 $y = -4$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B에서 준선 $y = -4$ 에 내린 수선의 발을 각각 A', B'이라 하자.

$\overline{AF} : \overline{BF} = 1 : 3$ 이므로 $\overline{AF} = k$,

$\overline{BF} = 3k (k > 0)$ 라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AA'} = \overline{AF} = k, \overline{BB'} = \overline{BF} = 3k$$

이때 점 A에서 선분 BB'에 내린 수선의 발을 C라 하면

$$\overline{BC} = \overline{BB'} - \overline{CB'} = 3k - k = 2k$$

직각삼각형 ACB에서

$$\overline{AC} = \sqrt{(k + 3k)^2 - (2k)^2} = 2\sqrt{3}k$$

직선 l의 기울기는

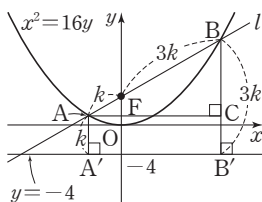
$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{2k}{2\sqrt{3}k} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

즉, 점 F(0, 4)를 지나고 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y - 4 = \frac{\sqrt{3}}{3}x \quad \therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4$$

따라서 구하는 직선 l의 x절편은

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 4 \quad \therefore x = -4\sqrt{3}$$



0066 답 9

포물선 $y^2 = -12x$, 즉 $y^2 = 4 \times (-3)x$ 의 초점 F의 좌표는 (-3, 0)이고, 준선의 방정식은 $x = 3$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A에서 준선 $x = 3$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

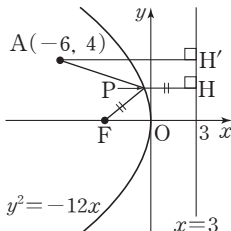
$$\overline{PF} = \overline{PH}$$

$$\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PH}$$

$$\geq \overline{AH'}$$

$$= 3 - (-6) = 9$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PF}$ 의 최솟값은 9이다.



0067 답 15

포물선 $x^2 = 3(y - 2)$ 는 포물선 $x^2 = 3y$ 를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 포물선 $x^2 = 3y$, 즉 $x^2 = 4 \times \frac{3}{4}y$ 의 초점의 좌표는 $(0, \frac{3}{4})$ 이고, 준선의 방정식은 $y = -\frac{3}{4}$ 이므로 주어진 포물선의 초점 F의 좌표는 $(0, \frac{11}{4})$ 이고, 준선의 방정식은 $y = \frac{5}{4}$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A에

서 준선 $y = \frac{5}{4}$ 에 내린 수선의 발을

각각 H, H'이라 하면 포물선의 정

의에 의하여 $\overline{PF} = \overline{PH}$ 이므로

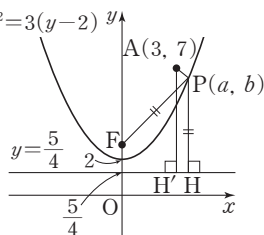
$$\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PH} \geq \overline{AH'}$$

즉, 세 점 A, P, H가 직선 $x = 3$

위에 있을 때 $\overline{AP} + \overline{PF}$ 의 값이 최소이다.

이때 점 P(a, b)는 직선 $x = 3$ 과 포물선 $x^2 = 3(y - 2)$ 의 교점이므로 P(3, 5)

따라서 $a = 3$, $b = 5$ 이므로 $ab = 15$



0068 답 ②

포물선 $y^2 = 8x$, 즉 $y^2 = 4 \times 2x$ 의 초점의 좌표는 (2, 0)이고, 준선의 방정식은 $x = -2$ 이다.

즉, 점 A는 포물선 $y^2 = 8x$ 의 초점이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, B에서

준선 $x = -2$ 에 내린 수선의 발을 각

각 H, H'이라 하면 포물선의 정의에

의하여 $\overline{PA} = \overline{PH}$ 이므로

$$\overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PH} + \overline{PB}$$

$$\geq \overline{BH'}$$

$$= 6 - (-2) = 8$$

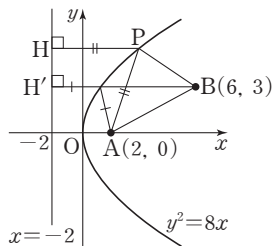
즉, 삼각형 ABP의 둘레의 길이는

$$\overline{AB} + \overline{PB} + \overline{PA} \geq \overline{AB} + \overline{BH'}$$

$$= \sqrt{(6-2)^2 + 3^2} + 8$$

$$= 5 + 8 = 13$$

따라서 삼각형 ABP의 둘레의 길이의 최솟값은 13이다.



0069 답 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

타원 $5x^2 + 9y^2 = 45$, 즉 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ 에서 $\sqrt{9-5} = 2$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(2, 0), (-2, 0)$$

구하는 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하면 이 타원

의 두 초점의 좌표가 (2, 0), (-2, 0)이므로

$$a^2 - b^2 = 2^2 \quad \therefore b^2 = a^2 - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 장축의 길이가 8이므로

$$2a = 8 \quad \therefore a = 4$$

이를 ①에 대입하면

$$b^2 = 4^2 - 4 = 12$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$$

0070 답 ③

주어진 타원의 단축의 길이가 6이므로

$$2a=6 \quad \therefore a=3$$

즉, 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 에서 $\sqrt{25-9}=4$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(0, 4), (0, -4)$$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$4 - (-4) = 8$$

참고 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 $a > 50$ 이면 단축의 길이가 $2 \times 5 = 10$ 이어야 하므로 $a < 50$ 이다.

즉, 장축의 길이는 $2 \times 5 = 10$, 단축의 길이는 $2a$ 이다.

0071 답 $4\sqrt{5}$

주어진 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 이라 하면 두 초점의 좌표가 $(0, 4), (0, -4)$ 이므로

$$b^2 - a^2 = 4^2 \quad \therefore a^2 = b^2 - 16 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

타원이 y 축과 점 $(0, -6)$ 에서 만나므로

$$\frac{(-6)^2}{b^2} = 1, b^2 = 36 \quad \therefore b = 6 (\because b > 0)$$

이를 $\textcircled{i}$ 에 대입하면

$$a^2 = 6^2 - 16 = 20 \quad \therefore a = 2\sqrt{5} (\because a > 0) \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 구하는 단축의 길이는

$$2a = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 로 놓고 a^2, b^2 사이의 관계식 구하기	30 %
② a, b 의 값 구하기	50 %
③ 타원의 단축의 길이 구하기	20 %

0072 답 ①

주어진 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 이라 하면 두 초점

이 $F(\sqrt{5}, 0), F'(-\sqrt{5}, 0)$ 이므로

$$a^2 - b^2 = (\sqrt{5})^2 \quad \therefore (a+b)(a-b) = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

장축과 단축의 길이의 차가 2이므로

$$2a - 2b = 2 \quad \therefore a - b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a + b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{3}$

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 을 연립하여 풀면 $a = 3, b = 2$

$$\therefore PF + PF' = 2a = 2 \times 3 = 6$$

0073 답 ④

삼각형 $AF'F$ 는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로

$$\overline{AF} = \overline{AF'} = \overline{FF'} = 6$$

$\overline{AF} + \overline{AF'} = 12$ 이므로 타원의 정의에 의하여

$$2a = 12 \quad \therefore a = 6$$

또 $\overline{FF'} = 6$ 에서 두 초점의 좌표는 $(3, 0), (-3, 0)$ 이므로

$$a^2 - b^2 = 3^2 \text{에서 } b^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \quad \therefore b = 3\sqrt{3} (\because b > 0)$$

$$\therefore ab = 6 \times 3\sqrt{3} = 18\sqrt{3}$$

0074 답 ①

두 점 A, F는 직선 $y = -2x + 2$ 가 각각 x 축, y 축과 만나는 점이므로 $A(1, 0), F(0, 2)$

주어진 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > a > 0)$ 이라 하면 이 타원

이 점 A(1, 0)을 지나므로

$$\frac{1^2}{a^2} = 1, a^2 = 1 \quad \therefore a = 1 (\because a > 0)$$

또 타원의 한 초점이 F(0, 2)이므로

$$b^2 - a^2 = 2^2 \text{에서 } b^2 = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$\therefore b = \sqrt{5} (\because b > 0)$$

따라서 구하는 장축의 길이는

$$2b = 2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

0075 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$$4x^2 + y^2 - 32x - 4y + 64 = 0 \text{에서}$$

$$4(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4 \quad \therefore (x-4)^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

즉, 이 타원은 타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. 타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{4-1} = \sqrt{3}$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{3}), (0, -\sqrt{3})$$

즉, 주어진 타원의 두 초점의 좌표는 $(4, \sqrt{3}+2), (4, -\sqrt{3}+2)$

이므로 두 초점 사이의 거리는

$$\sqrt{3}+2 - (-\sqrt{3}+2) = 2\sqrt{3}$$

ㄴ. 장축의 길이는 $2 \times 2 = 4$

ㄷ. 단축의 길이는 $2 \times 1 = 2$

ㄹ. 타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 꼭짓점의 좌표는 $(1, 0), (-1, 0), (0, 2), (0, -2)$ 이므로 주어진 타원의 꼭짓점의 좌표는 $(5, 2), (3, 2), (4, 4), (4, 0)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

ㄱ. 타원을 평행이동하면 두 초점도 평행이동하지만 두 초점 사이의 거리는 변하지 않는다.

즉, 주어진 타원의 두 초점 사이의 거리는 타원 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 두 초점 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{3} - (-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

0076 답 ⑤

주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ 을 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ 에서 $\sqrt{12-8}=2$ 이므로 두 초점의 좌표는

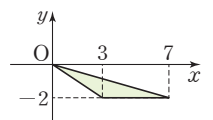
$$(2, 0), (-2, 0)$$

즉, 주어진 타원의 두 초점 F, F'의 좌표는 $(7, -2), (3, -2)$

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형 OFF'의 넓

이는

$$\frac{1}{2} \times (7-3) \times 2 = 4$$



0077 답 14

주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{25} = 1$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 주어진 타원의 중심의 좌표는 $(2, 1)$ ㉠

한편 타원의 중심은 두 초점을 이은 선분의 중점이므로 중심의 좌표는 $(\frac{b+b}{2}, \frac{4-2}{2})$ $\therefore (b, 1)$ ㉡

두 점 ㉠, ㉡이 일치하므로 $b=2$

이때 주어진 타원의 두 초점의 x 좌표가 같고 중심에서 초점까지의 거리가 3이므로

$$25 - a^2 = 3^2 \quad \therefore a = 16$$

$$\therefore a - b = 14$$

0078 답 60

타원의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표는

$$(\frac{7-1}{2}, \frac{4+4}{2}) \quad \therefore (3, 4)$$

즉, 주어진 타원은 중심이 원점인 타원을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

이때 두 초점 F, F'의 y 좌표가 같으므로 주어진 타원의 방정식을

$$\frac{(x-3)^2}{a^2} + \frac{(y-4)^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \text{이라 하자.}$$

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 10 \text{이므로}$$

$$2a = 10 \quad \therefore a = 5$$

중심에서 초점까지의 거리가 4이므로

$$a^2 - b^2 = 4^2 \text{에서 } b^2 = 5^2 - 4^2 = 9 \quad \therefore b = 3 \quad (\because b > 0)$$

따라서 장축의 길이는 $2a = 2 \times 5 = 10$, 단축의 길이는 $2b = 2 \times 3 = 6$

이므로 구하는 곱은

$$10 \times 6 = 60$$

다른 풀이

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 10$ 에서

$$\sqrt{(x-7)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2} = 10$$

$$\sqrt{(x-7)^2 + (y-4)^2} = 10 - \sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$5\sqrt{(x+1)^2 + (y-4)^2} = 4x + 13$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$9(x-3)^2 + 25(y-4)^2 = 225$$

$$\therefore \frac{(x-3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

따라서 장축의 길이는 $2 \times 5 = 10$, 단축의 길이는 $2 \times 3 = 6$ 이므로 구하는 곱은

$$10 \times 6 = 60$$

0079 답 $\frac{6\sqrt{10}}{5}$

$x^2 + 9y^2 - 6x - 18y - 18 = 0$ 에서

$$(x-3)^2 + 9(y-1)^2 = 36 \quad \therefore \frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

즉, 이 타원은 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 꼭짓점의 좌표는

$$(6, 0), (-6, 0), (0, 2), (0, -2)$$

즉, 주어진 타원의 꼭짓점의 좌표는

$$(9, 1), (-3, 1), (3, 3), (3, -1) \quad \dots \dots \text{㉠}$$

이 중 제1사분면 위에 있는 두 꼭짓점의 좌표는 $(9, 1), (3, 3)$ 이므로 직선 l 의 방정식은

$$y - 1 = \frac{3-1}{3-9}(x-9)$$

$$\therefore x + 3y - 12 = 0 \quad \dots \dots \text{㉡}$$

따라서 원점 O와 직선 $x + 3y - 12 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-12|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{6\sqrt{10}}{5} \quad \dots \dots \text{㉢}$$

채점 기준

㉠ 주어진 타원의 꼭짓점의 좌표 구하기	40 %
㉡ 직선 l 의 방정식 구하기	30 %
㉢ 원점 O와 직선 l 사이의 거리 구하기	30 %

공통수학2 다시보기

점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

0080 답 ③

타원 $16x^2 + 9y^2 = 144$, 즉 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 타원의 방정식은

$$\frac{(x-m)^2}{9} + \frac{(y-n)^2}{16} = 1$$

이 타원이 x 축과 y 축에 동시에 접하려면

$$|\text{타원의 중심의 } x\text{좌표}| = \frac{(\text{단축의 길이})}{2},$$

$$|\text{타원의 중심의 } y\text{좌표}| = \frac{(\text{장축의 길이})}{2}$$

이어야 한다.

이 타원의 중심의 좌표는 (m, n) , 장축의 길이는 $2 \times 4 = 8$, 단축의 길이는 $2 \times 3 = 6$ 이므로

$$|m| = 3, |n| = 4$$

따라서 $m = 3, n = 4$ 이므로

$$m + n = 7$$

0081 답 ②

두 점 A, C의 y 좌표가 같으므로 선분 AC는 타원의 장축 또는 단축이다.

선분 AC의 중점을 M이라 하면 점 M의 좌표는

$$(\frac{-1-7}{2}, \frac{3+3}{2}) \quad \therefore (-4, 3)$$

즉, $\overline{AM} = 3, \overline{BM} = 2$ 이므로 선분 AC가 타원의 장축이다.

이때 점 M은 타원의 중심이므로 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 주어진 타원의 방정식은 $\frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$ 이므로

$$a=9, b=4, m=4, n=-3$$

$$\therefore a+b+m+n=14$$

0082 답 24

타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ 에서 $\sqrt{36-20}=4$ 이므로 두 초점의 좌표는

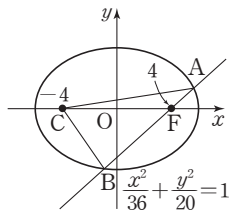
$$(4, 0), (-4, 0)$$

즉, 두 점 $F(4, 0)$, $C(-4, 0)$ 은 주어진 타원의 두 초점이므로 타원의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AC} + \overline{AF} &= \overline{BC} + \overline{BF} \\ &= 2 \times 6 = 12\end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} &= (\overline{AF} + \overline{BF}) + \overline{BC} + \overline{AC} \\ &= (\overline{AF} + \overline{AC}) + (\overline{BF} + \overline{BC}) \\ &= 12 + 12 = 24\end{aligned}$$



0085 답 12

타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$ 에서 $\sqrt{36-27}=3$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(3, 0), (-3, 0)$$

이때 $F(3, 0)$ 이라 하면 두 점

$B(-3, 0)$, $F(3, 0)$ 은 타원의 두

초점이므로 타원의 정의에 의하여

$$\overline{AB} + \overline{AF} = 2 \times 6 = 12 \quad \dots \dots \textcircled{i}$$

한편 포물선 $y^2 = 12x$, 즉

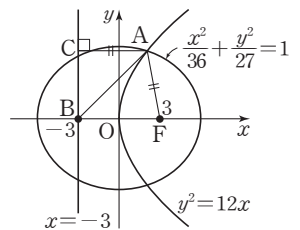
$$y^2 = 4 \times 3x \text{의 초점의 좌표는 } (3, 0)$$

이고, 준선의 방정식은 $x = -3$ 이다.

즉, 점 $F(3, 0)$ 은 포물선의 초점이므로 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AC} = \overline{AF}$$

$$\therefore \overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AF} = 12$$



채점 기준

① 타원의 한 초점을 F라 하고 $\overline{AB} + \overline{AF}$ 의 값 구하기	40 %
② $\overline{AC} = \overline{AF}$ 임을 알기	40 %
③ $\overline{AB} + \overline{AC}$ 의 값 구하기	20 %

0083 답 ③

타원 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에서 $\sqrt{16-7}=3$ 이므로 두 초점 F, F'의 좌표는

$$(0, 3), (0, -3)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 3 - (-3) = 6$$

$\overline{PF} = a$, $\overline{PF'} = b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a+b=2 \times 4=8$$

삼각형 PFF'이 직각삼각형이므로

$$a^2 + b^2 = 6^2 = 36$$

이때 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ 이므로

$$8^2 = 36 + 2ab, 2ab = 28$$

$$\therefore ab = 14$$

따라서 삼각형 PFF'의 넓이는

$$\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 14 = 7$$

0084 답 14

주어진 타원의 두 초점이 $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$ 이므로

$$a^2 - b^2 = 2^2 = 4 \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

타원의 정의에 의하여

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{BF} + \overline{BF'} = 2|a|$$

이때 삼각형 AF'B의 둘레의 길이가 12이므로

$$\begin{aligned}\overline{AB} + \overline{BF'} + \overline{AF'} &= (\overline{AF} + \overline{BF}) + \overline{BF'} + \overline{AF'} \\ &= (\overline{AF} + \overline{AF'}) + (\overline{BF} + \overline{BF'}) \\ &= 2|a| + 2|a| \\ &= 4|a| = 12\end{aligned}$$

$$\therefore |a| = 3$$

이를 ①에 대입하면

$$3^2 - b^2 = 4$$

$$\therefore b^2 = 5$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 3^2 + 5 = 14$$

0086 답 ②

타원의 다른 한 초점을 F'이라 하면 타원

의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{FP_1} + \overline{F'P_1} &= \overline{FP_3} + \overline{F'P_3} = \overline{FP_5} + \overline{F'P_5} \\ &= 2 \times 4 = 8\end{aligned}$$

이때 타원은 원점에 대하여 대칭이고 세

직선 $y=2$, $y=0$, $y=-2$ 는 장축을 사등

분하므로

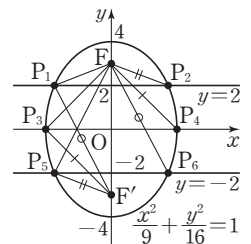
$$\overline{FP_2} = \overline{F'P_5}, \overline{FP_4} = \overline{F'P_3}, \overline{FP_6} = \overline{F'P_1}$$

$$\therefore \overline{FP_1} + \overline{FP_2} + \overline{FP_3} + \dots + \overline{FP_6}$$

$$= \overline{FP_1} + \overline{F'P_5} + \overline{FP_3} + \overline{F'P_3} + \overline{FP_5} + \overline{F'P_1}$$

$$= (\overline{FP_1} + \overline{F'P_1}) + (\overline{FP_3} + \overline{F'P_3}) + (\overline{FP_5} + \overline{F'P_5})$$

$$= 8 + 8 + 8 = 24$$



0087 답 ①

오른쪽 그림과 같이 직선 F'Q와 선분 FP

가 만나는 점을 H라 하면 직선 F'Q가 선

분 FP를 수직이등분하므로 $\triangle F'FP$ 가

$$\overline{FH} = \frac{1}{2}\overline{FP} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

타원의 두 초점이 $F(\sqrt{7}, 0)$,

$F'(-\sqrt{7}, 0)$ 이므로

$$\overline{FF'} = \sqrt{7} - (-\sqrt{7}) = 2\sqrt{7}$$

$$\text{직각삼각형 F'FH에서 } \overline{F'H} = \sqrt{(2\sqrt{7})^2 - (\sqrt{3})^2} = 5$$

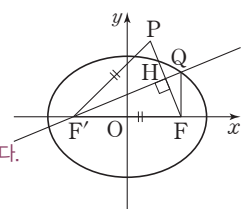
이때 타원의 정의에 의하여 $\overline{FQ} + \overline{F'Q} = 8$

즉, $\overline{F'Q} = 8 - \overline{FQ}$ 이므로

$$\overline{QH} = \overline{F'Q} - \overline{F'H} = (8 - \overline{FQ}) - 5 = 3 - \overline{FQ}$$

따라서 직각삼각형 QHF에서

$$\overline{FQ}^2 = (3 - \overline{FQ})^2 + (\sqrt{3})^2, 6\overline{FQ} = 12 \quad \therefore \overline{FQ} = 2$$



0088 답 64

$\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a+b=2 \times 8=16$$

이때 $a>0$, $b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

$$16 \geq 2\sqrt{ab}, \sqrt{ab} \leq 8$$

$$\therefore ab \leq 64$$

따라서 $\overline{PF} \times \overline{PF'}$ 의 최댓값은 64이다.

공통수학2 다시보기

산술평균과 기하평균의 관계

$a>0$, $b>0$ 일 때,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

0089 답 ①

점 $P(a, b)$ 가 타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{24} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{6} + \frac{b^2}{24} = 1$$

이때 $a^2>0$, $b^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2}{6} + \frac{b^2}{24} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{6} \times \frac{b^2}{24}} \quad (\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{6} = \frac{b^2}{24} \text{ 일 때 성립})$$

$$1 \geq \frac{ab}{6} \quad (\because a>0, b>0)$$

$$\therefore ab \leq 6$$

따라서 ab 의 최댓값은 6이다.

0090 답 16

점 D 의 좌표를 (a, b) ($a>0$, $b>0$)라 하면 직사각형 $ABCD$ 의 넓이는

$$2a \times 2b = 4ab$$

점 $D(a, b)$ 가 타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이때 $a^2>0$, $b^2>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2}{16} + \frac{b^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{16} \times \frac{b^2}{4}} \quad (\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{16} = \frac{b^2}{4} \text{ 일 때 성립})$$

$$1 \geq \frac{ab}{4} \quad (\because a>0, b>0)$$

$$\therefore ab \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 $4ab \leq 16$ 이므로 구하는 넓이의 최댓값은 16이다. $\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① $D(a, b)$ ($a>0$, $b>0$)로 놓고 a, b 사이의 관계식 구하기	40%
② ab 의 값의 범위 구하기	40%
③ 직사각형 $ABCD$ 의 넓이의 최댓값 구하기	20%

0091 답 42

두 초점이 $F(2\sqrt{2}, 0)$, $F'(-2\sqrt{2}, 0)$ 이므로

$$a^2 - b^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{PF}=m$, $\overline{PF'}=n$ 이라 하면 타원의 정의에 의하여

$$m+n=2a$$

이때 $m>0$, $n>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$m+n \geq 2\sqrt{mn} \quad (\text{단, 등호는 } m=n \text{ 일 때 성립})$$

$$2a \geq 2\sqrt{mn}, \sqrt{mn} \leq a$$

$$\therefore mn \leq a^2$$

또 $\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2$ 의 최솟값이 50이므로

$$m^2 + n^2 = (m+n)^2 - 2mn$$

$$\geq (2a)^2 - 2a^2 = 2a^2$$

$$\text{즉, } 2a^2 = 50 \text{ 이므로 } a^2 = 25$$

이를 ①에 대입하면

$$25 - b^2 = 8 \quad \therefore b^2 = 17$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 42$$

0092 답 ⑤

$$|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 10 \text{ 이므로}$$

$$2|a| = 10 \quad \therefore |a| = 5$$

두 초점이 $F(6, 0)$, $F'(-6, 0)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 6^2 \text{ 에서 } b^2 = 6^2 - 5^2 = 11$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 5^2 - 11 = 14$$

0093 답 25

쌍곡선 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{a^2} = -1$ 의 두 꼭짓점의 좌표는

$(0, a)$, $(0, -a)$ $\rightarrow$ 꼭짓점이 y 축 위에 있다.

이 두 점이 타원 $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{25} = 1$ 의 두 초점과 일치하므로

$$25 - b^2 = a^2 \quad \therefore a^2 + b^2 = 25$$

0094 답 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = -1$

구하는 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a>0$, $b>0$)이라 하면

두 초점의 좌표가 $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (\sqrt{5})^2 \quad \therefore b^2 = 5 - a^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 쌍곡선이 점 $(\sqrt{3}, 2)$ 를 지나므로

$$\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{2^2}{b^2} = -1 \quad \therefore 4a^2 - 3b^2 = a^2b^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$4a^2 - 3(5 - a^2) = a^2(5 - a^2)$$

$$a^4 + 2a^2 - 15 = 0, (a^2 + 5)(a^2 - 3) = 0$$

$$\therefore a^2 = 3 \quad (\because a^2 > 0)$$

이를 ①에 대입하면 $b^2 = 5 - 3 = 2$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = -1$$

0095 답 $\sqrt{3}$

타원 $5x^2 + 3y^2 = 30$, 즉 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{10} = 1$ 에서 $\sqrt{10-6}=2$ 이므로 두 초점

의 좌표는

$$(0, 2), (0, -2)$$

이 두 점이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ 의 두 초점과 일치하므로

$$a^2 + b^2 = 2^2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점근선의 방정식이 $y = \pm\sqrt{3}x$ 이고 $a > 0, b > 0$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \sqrt{3} \quad \therefore b = \sqrt{3}a \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

①을 ①에 대입하면

$$a^2 + (\sqrt{3}a)^2 = 4$$

$$a^2 = 1 \quad \therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

이를 ①에 대입하면

$$b = \sqrt{3}$$

$$\therefore ab = \sqrt{3}$$

0096 답 ⑤

쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y = \sqrt{2}x$ 이므로

$$\frac{2\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \quad \therefore a = 2$$

즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{8} = 1$ 에서 $\sqrt{4+8} = 2\sqrt{3}$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(2\sqrt{3}, 0), (-2\sqrt{3}, 0)$$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$2\sqrt{3} - (-2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$$

0097 답 2√5

주어진 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 이라 하면 두

초점이 $F(\sqrt{10}, 0), F'(-\sqrt{10}, 0)$ 이므로

$$a^2 + b^2 = (\sqrt{10})^2 = 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

이때 두 점근선이 서로 수직이므로

$$\frac{b}{a} \times \left(-\frac{b}{a}\right) = -1$$

$$\therefore b^2 = a^2 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이를 ①에 대입하면

$$a^2 + a^2 = 10$$

$$a^2 = 5 \quad \therefore a = \sqrt{5} \quad (\because a > 0) \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 구하는 주축의 길이는

$$2a = 2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 로 놓고 a, b 사이의 관계식 구하기	60 %
② a 의 값 구하기	20 %
③ 쌍곡선의 주축의 길이 구하기	20 %

0098 답 25

쌍곡선 $x^2 - 4y^2 = a$, 즉 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{\frac{a}{4}} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{\frac{\sqrt{a}}{2}}{\frac{\sqrt{a}}{2}}x \quad \therefore x \pm 2y = 0$$

점 P의 좌표를 (α, β) 라 하고 점 P에서 직선 $x - 2y = 0$ 에 내린 수선의 발을 Q라 하면 선분 PQ의 길이는 점 P(α, β)와 직선 $x - 2y = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{PQ} = \frac{|\alpha - 2\beta|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|\alpha - 2\beta|}{\sqrt{5}}$$

또 점 P에서 직선 $x + 2y = 0$ 에 내린 수선의 발을 R라 하면 선분 PR의 길이는 점 P(α, β)와 직선 $x + 2y = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{PR} = \frac{|\alpha + 2\beta|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{|\alpha + 2\beta|}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \overline{PQ} \times \overline{PR} = \frac{|\alpha - 2\beta|}{\sqrt{5}} \times \frac{|\alpha + 2\beta|}{\sqrt{5}} = \frac{|\alpha^2 - 4\beta^2|}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 점 P(α, β)는 쌍곡선 $x^2 - 4y^2 = a$ 위의 점이므로

$$\alpha^2 - 4\beta^2 = a$$

이를 ①에 대입하면

$$\overline{PQ} \times \overline{PR} = \frac{|a|}{5}$$

$$\text{즉, } \frac{|a|}{5} = 5 \text{이므로 } |a| = 25$$

$$\therefore a = 25 \quad (\because a > 0)$$

0099 답 ①

$3x^2 - 5y^2 + 12x - 30y - 18 = 0$ 에서

$$3(x+2)^2 - 5(y+3)^2 = -15$$

이 쌍곡선을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 쌍곡선 $3x^2 - 5y^2 = -15$ 와 일치하므로

$$m = 2, n = 3, k = -15$$

$$\therefore m + n + k = -10$$

0100 답 ㄱ, ㄴ

주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

ㄱ. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 중심의 좌표는 (0, 0)이므로 주어진 쌍곡선의 중심의 좌표는 (-2, -1)이다.

ㄴ. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(\sqrt{13}, 0), (-\sqrt{13}, 0)$ 이므로 주어진 쌍곡선의 두 초점의 좌표는 $(\sqrt{13}-2, -1), (-\sqrt{13}-2, -1)$

즉, 두 초점의 y 좌표의 합은 $-1 + (-1) = -2$

ㄷ. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{3}{2}x$ 이므로 주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

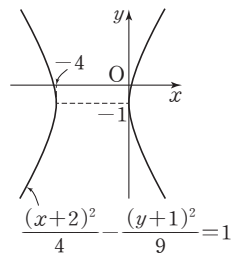
$$y + 1 = \pm \frac{3}{2}(x + 2) \quad \therefore y = \frac{3}{2}x + 2, y = -\frac{3}{2}x - 4$$

ㄹ. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 의 꼭짓점의 좌표는 (2, 0), (-2, 0)이므로 주어진 쌍곡선의 꼭짓점의 좌표는

$$(0, -1), (-4, -1)$$

즉, 주어진 쌍곡선의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 y 축에 접한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.



0101 답 4√3

$$x^2 - 3y^2 + 6x - 12y - 12 = 0 \text{에서}$$

$$(x+3)^2 - 3(y+2)^2 = 9$$

$$\therefore \frac{(x+3)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{3} = 1$$

즉, 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ 을 x 축의 방향으로 -3만큼,

y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$ 에서 $\sqrt{9+3} = 2\sqrt{3}$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(2\sqrt{3}, 0), (-2\sqrt{3}, 0)$$

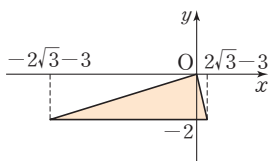
주어진 쌍곡선의 두 초점 F, F'의 좌표는

$$(2\sqrt{3}-3, -2), (-2\sqrt{3}-3, -2)$$

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형 OFF'

의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{(2\sqrt{3}-3) - (-2\sqrt{3}-3)\} \times 2 = 4\sqrt{3}$$



0102 답 9

$$9x^2 - 16y^2 - 18x + 32ky + 9 = 0 \text{에서}$$

$$9(x-1)^2 - 16(y-k)^2 = -16k^2$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{\frac{16}{9}k^2} - \frac{(y-k)^2}{k^2} = -1$$

이때 주축의 길이가 6이므로

$$2k = 6 \quad \therefore k = 3$$

즉, 쌍곡선 $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-3)^2}{9} = -1$ 은 중심이 원점인 쌍곡선

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 주어진 쌍곡선의 중심의 좌표는 (1, 3)이므로

$$a = 1, b = 3$$

$$\therefore abk = 1 \times 3 \times 3 = 9$$

채점 기준

i k의 값 구하기	50%
ii a, b의 값 구하기	40%
iii abk의 값 구하기	10%

0103 답 ④

$$4x^2 - 8x - y^2 - 6y - 9 = 0 \text{에서}$$

$$4(x-1)^2 - (y+3)^2 = 4$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

즉, 이 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm 2x$$

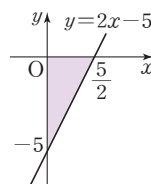
주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y+3 = \pm 2(x-1) \quad \therefore y = 2x-5, y = -2x-1$$

따라서 기울기가 양수인 직선은 직선 $y = 2x - 5$ 이

므로 오른쪽 그림에서 구하는 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{2} \times 5 = \frac{25}{4}$$



0104 답 60°

주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = -1$ 을 x 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = -1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \sqrt{3}x$$

주어진 쌍곡선의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \sqrt{3}(x+2) \quad \therefore y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}, y = -\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$$

오른쪽 그림과 같이 직선

$y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ 이 x 축의 양의 방향과

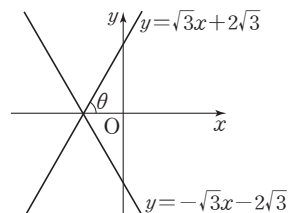
이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\tan \theta = \sqrt{3} \quad \therefore \theta = 60^\circ$$

따라서 두 점근선이 이루는 예각의

크기는

$$180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$$



0105 답 -21

쌍곡선의 중심은 선분 FF'의 중점이므로 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-5+7}{2}, \frac{-2-2}{2} \right) \quad \therefore (1, -2)$$

즉, 주어진 쌍곡선은 중심이 원점인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

이때 쌍곡선 $\frac{(x-1)^2}{a} - \frac{(y+2)^2}{b} = 1$ 의 주축의 길이가 6이므로

$$2\sqrt{a} = 6, \sqrt{a} = 3 \quad \therefore a = 9$$

중심에서 초점까지의 거리가 6이므로

$$a + b = 6^2 \text{에서 } b = 6^2 - 9 = 27$$

따라서 주어진 쌍곡선의 방정식은 $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{27} = 1$ 이므로

$$a = 9, b = 27, m = -1, n = 2$$

$$\therefore a - b + m - n = -21$$

다른 풀이

주어진 쌍곡선 위의 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 주축의 길이가 6이므로 $|\overline{PF} - \overline{PF'}| = 6$ 에서

$$|\sqrt{(x+5)^2 + (y+2)^2} - \sqrt{(x-7)^2 + (y+2)^2}| = 6$$

$$\sqrt{(x+5)^2 + (y+2)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (y+2)^2} \pm 6$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$2x - 5 = \pm \sqrt{(x-7)^2 + (y+2)^2}$$

다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$3(x-1)^2 - (y+2)^2 = 27$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{27} = 1$$

따라서 $a = 9, b = 27, m = -1, n = 2$ 이므로

$$a - b + m - n = -21$$

0106 답 ②

쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$ 에서 $\sqrt{3+6}=3$ 이므로 두 초점의 좌표는
 $(3, 0), (-3, 0)$
 즉, 두 점 A(3, 0), D(-3, 0)은 주어진 쌍곡선의 두 초점이므로
 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{BD} - \overline{BA} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\overline{CD} - \overline{CA} = 2 \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①+②을 하면

$$\overline{BD} - \overline{BA} + \overline{CD} - \overline{CA} = 4\sqrt{3}$$

$$\overline{BD} + \overline{CD} - (\overline{BA} + \overline{CA}) = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore \overline{BD} + \overline{CD} - \overline{BC} = 4\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

이때 삼각형 BDC의 둘레의 길이가 $10\sqrt{3}$ 이므로

$$\overline{BD} + \overline{CD} + \overline{BC} = 10\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

③-③을 하면

$$2\overline{BC} = 6\sqrt{3} \quad \therefore \overline{BC} = 3\sqrt{3}$$

0107 답 20

쌍곡선 $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = -1$ 에서 $\sqrt{7+9}=4$ 이므로 두 초점 F, F'의 좌표는
 $(0, 4), (0, -4)$

$$\therefore \overline{FF'} = 4 - (-4) = 8$$

한편 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} - \overline{PF'} = 2 \times 3 = 6 \rightarrow \overline{PF} = 3\overline{PF'} \text{이므로 } \overline{PF} > \overline{PF'}$$

이때 $\overline{PF} = 3\overline{PF'}$ 이므로

$$3\overline{PF'} - \overline{PF'} = 6, 2\overline{PF'} = 6 \quad \therefore \overline{PF} = 9, \overline{PF'} = 3$$

따라서 삼각형 PFF'의 둘레의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{FF'} + \overline{PF'} = 9 + 8 + 3 = 20$$

0108 답 36

쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{8} = 1$ 에서 $\sqrt{16+8}=2\sqrt{6}$ 이므로 두 초점의 좌표는
 $(2\sqrt{6}, 0), (-2\sqrt{6}, 0)$

즉, 두 점 A($2\sqrt{6}$, 0), B($-2\sqrt{6}$, 0)은 주어진 쌍곡선의 두 초점이므로
 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{BP} - \overline{AP} = \overline{BQ} - \overline{AQ} = \overline{BR} - \overline{AR} = 2 \times 4 = 8$$

이때 $\overline{AP} = 2, \overline{AQ} = 4, \overline{AR} = 6$ 이므로

$$\overline{BP} = \overline{AP} + 8 = 2 + 8 = 10$$

$$\overline{BQ} = \overline{AQ} + 8 = 4 + 8 = 12$$

$$\overline{BR} = \overline{AR} + 8 = 6 + 8 = 14$$

$$\therefore \overline{BP} + \overline{BQ} + \overline{BR} = 36$$

0109 답 ②

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 에서 $\sqrt{4+5}=3$ 이므로 두 초점 F, F'의 좌표는
 $(3, 0), (-3, 0)$

$$\therefore \overline{FF'} = 3 - (-3) = 6$$

한편 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 5 = 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \times 2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $\overline{PF} = 3, \overline{PF'} = 7$

$$\therefore \frac{\overline{PF} \times \overline{PF'}}{\overline{FF'}} = \frac{3 \times 7}{6} = \frac{7}{2}$$

0110 답 24

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 에서 $\sqrt{4+12}=4$ 이므로 두 초점 F, F'의 좌표는
 $(4, 0), (-4, 0)$

$$\therefore \overline{FF'} = 4 - (-4) = 8 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$\overline{PF} = a, \overline{PF'} = b$ 라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$|a - b| = 2 \times 2 = 4$$

삼각형 PF'F가 직각삼각형이므로

$$a^2 + b^2 = 8^2 = 64$$

이때 $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ 이므로

$$4^2 = 64 - 2ab, 2ab = 48 \quad \therefore ab = 24 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\text{따라서 직사각형 PF'QF의 넓이는 } ab = 24 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 선분 FF'의 길이 구하기	30 %
② $\overline{PF} = a, \overline{PF'} = b$ 로 놓고 ab의 값 구하기	50 %
③ 직사각형 PF'QF의 넓이 구하기	20 %

0111 답 ⑤

주어진 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하면 두
 초점이 F(5, 0), F'(-5, 0)이므로

$$a^2 + b^2 = 5^2 = 25 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또 $\overline{FF'} = 5 - (-5) = 10$ 이므로 직각삼각형 FPF'에서

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 = \overline{FF'}^2 = 100$$

이때 $\overline{PF'} = 2\overline{PF}$ 이므로

$$\overline{PF}^2 + (2\overline{PF})^2 = 100, \overline{PF}^2 = 20 \quad \therefore \overline{PF} = 2\sqrt{5}, \overline{PF'} = 4\sqrt{5}$$

한편 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a \rightarrow \overline{PF'} = 2\overline{PF} \text{이므로 } \overline{PF'} > \overline{PF}$$

$$4\sqrt{5} - 2\sqrt{5} = 2a \quad \therefore a = \sqrt{5}$$

$$\text{이를 ㉠에 대입하면 } (\sqrt{5})^2 + b^2 = 25 \quad \therefore b^2 = 20$$

즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ 에 $x=5$ 를 대입하면

$$\frac{5^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1, y^2 = 80 \quad \therefore y = \pm 4\sqrt{5}$$

따라서 A(5, $4\sqrt{5}$), B(5, $-4\sqrt{5}$)이므로

$$\overline{AB} = 4\sqrt{5} - (-4\sqrt{5}) = 8\sqrt{5}$$

0112 답 ④

$2x^2 + y^2 - 10x + 4y + k(-x^2 + 3y^2) = 0$ 에서

$$(2-k)x^2 + (1+3k)y^2 - 10x + 4y = 0$$

이 방정식이 나타내는 도형이 포물선이 되려면

$$2-k=0 \text{ 또는 } 1+3k=0 \quad \therefore k=2 \text{ 또는 } k=-\frac{1}{3}$$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 $2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$

0113 **답** $\frac{1}{6} < a < 1$

$(a-1)x^2+5y^2=(a-1)(6a-1)$ 에서

$$\frac{x^2}{6a-1} + \frac{y^2}{\frac{(a-1)(6a-1)}{5}} = 1$$

이 방정식이 나타내는 도형이 x 축에 평행한 주축을 갖는 쌍곡선이 되려면

$$6a-1 > 0, \frac{(a-1)(6a-1)}{5} < 0$$

$$a > \frac{1}{6}, \frac{1}{6} < a < 1$$

$$\therefore \frac{1}{6} < a < 1$$

0114 **답** ②

$x^2+ky^2-8ky+2k^2=0$ 에서

$$x^2+k(y-4)^2=-2k^2+16k$$

이 방정식이 나타내는 도형이 타원이 되려면

$$1 \times k > 0, k \neq 1, -2k^2+16k > 0$$

$$-2k^2+16k > 0 \text{에서 } k^2-8k < 0$$

$$k(k-8) < 0$$

$$\therefore 0 < k < 8$$

그런데 $k > 0, k \neq 1$ 이므로

$$0 < k < 1 \text{ 또는 } 1 < k < 8$$

따라서 정수 k 는 2, 3, 4, ..., 7의 6개이다.

참고 주어진 방정식은 $k < 0$ 이면 쌍곡선을 나타내고, $k = 1$ 이면 원을 나타낸다.

또 $-2k^2+16k=0$, 즉 $k=0$ 또는 $k=8$ 이면 직선 $x=0$ 또는 점 $(0, 4)$ 를 나타내고, $-2k^2+16k < 0$, 즉 $k < 0$ 또는 $k > 8$ 이면 주어진 방정식을 만족시키는 실수 x, y 가 존재하지 않는다.

0115 **답** $\frac{(x+4)^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$

점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$\sqrt{(x-4)^2+y^2} : |x-(-2)| = 2:1$$

$$\therefore \sqrt{(x-4)^2+y^2} = 2|x+2|$$

양변을 제곱하면

$$(x-4)^2+y^2=4(x+2)^2$$

$$3(x+4)^2-y^2=48$$

$$\therefore \frac{(x+4)^2}{16} - \frac{y^2}{48} = 1$$

0116 **답** ②

원의 중심 P의 좌표를 (x, y) 라 하면 점 P에서 점 A(2, 1)까지의 거리와 x 축까지의 거리가 서로 같으므로

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = |y|$$

양변을 제곱하면

$$(x-2)^2+(y-1)^2=y^2$$

$$\therefore x^2-4x-2y+5=0$$

따라서 $a=-4, b=-2, c=5$ 이므로

$$a-b+c=3$$

0117 **답** $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$

점 A의 좌표를 $(a, 0)$, 점 B의 좌표를 $(0, b)$ 라 하면 $\overline{AB}=4$ 에서

$$\sqrt{(-a)^2+b^2}=4$$

양변을 제곱하면

$$a^2+b^2=16 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

선분 AB를 1:3으로 내분하는 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{1 \times 0 + 3 \times a}{1+3} = \frac{3}{4}a, y = \frac{1 \times b + 3 \times 0}{1+3} = \frac{b}{4}$$

$$\therefore a = \frac{4}{3}x, b = 4y \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

이를 ①에 대입하면

$$\left(\frac{4}{3}x\right)^2 + (4y)^2 = 16$$

$$\therefore \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① A($a, 0$), B($0, b$)로 놓고 a, b 사이의 관계식 구하기	40 %
② P(x, y)로 놓고 a, b 를 각각 x, y 로 나타내기	40 %
③ 점 P가 나타내는 도형의 방정식 구하기	20 %

공통수학2 다시보기

좌표평면 위의 두 점 A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)에 대하여 선분 AB를 $m:n$ ($m>0, n>0$)으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$$

0118 **답** ②

오른쪽 그림과 같이 포물선의 준선을 l 이라 하고 점 P, Q, R, S, T에서 준선 l 에 내린 수선의 발을 각각 P', Q', R', S', T'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{PP'} + \overline{BP}$$

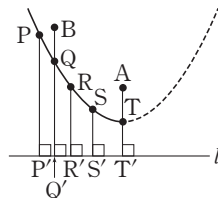
$$\overline{AQ} + \overline{BQ} = \overline{QQ'} + \overline{BQ} = \overline{BQ'}$$

$$\overline{AR} + \overline{BR} = \overline{RR'} + \overline{BR}$$

$$\overline{AS} + \overline{BS} = \overline{SS'} + \overline{BS}$$

$$\overline{AT} + \overline{BT} = \overline{TT'} + \overline{BT}$$

따라서 두 마을 A, B로부터 거리의 합이 최소인 지점은 Q이므로 자전거 보관소 위치로 가장 적절한 지점은 Q이다.

0119 **답** $20\sqrt{7}$ m

선분 FF'의 중점이 원점, 두 초점 F, F'이 x 축 위에 있도록 주어진 타원 모양의 트랙을 좌표평면에 놓고 타원의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \text{이라 하자.}$$

타원 위의 점 P에서 두 점 F, F'에 이르는 거리의 합이 160 m이므로

$$2a = 160 \quad \therefore a = 80$$

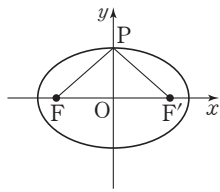
두 초점 F, F' 사이의 거리가 120 m이므로

$$F(-60, 0), F'(60, 0)$$

$$\text{즉, } a^2 - b^2 = 60^2 \text{에서 } b^2 = 80^2 - 60^2 = 2800$$

$$\therefore b = 20\sqrt{7}$$

따라서 오른쪽 그림과 같이 점 P가 y축 위의 꼭짓점일 때, 타원의 중심에서 점 P까지의 거리가 최소이므로 구하는 최솟값은 $20\sqrt{7}$ m이다.



0120 답 150 m

두 정류소 A, B의 중간 지점이 원점이 되도록 좌표평면에 놓으면 두 정류소 A, B의 좌표는 각각

$$(-100, 0), (100, 0)$$

이때 정류소 C에서 두 정류소 A, B에 이르는 거리의 차가 120 m이면 정류소 C는 두 정류소 A, B를 초점으로 하고 주축의 길이가 120인 쌍곡선 위의 점이다.

쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하면 주축의 길이가 120이므로

$$2a = 120 \quad \therefore a = 60$$

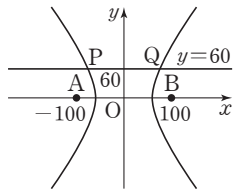
두 초점이 A(-100, 0), B(100, 0)이므로

$$a^2 + b^2 = 100^2 \text{에서 } b^2 = 100^2 - 60^2 = 6400$$

따라서 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{3600} - \frac{y^2}{6400} = 1$$

한편 도로의 폭이 60 m이므로 오른쪽 그림과 같이 이 쌍곡선과 직선 $y=60$ 의 교점을 각각 P, Q라 하자.



쌍곡선 $\frac{x^2}{3600} - \frac{y^2}{6400} = 1$ 에 $y=60$ 을 대입하면

$$\frac{x^2}{3600} - \frac{60^2}{6400} = 1, \quad \frac{x^2}{3600} = \frac{25}{16}$$

$$x^2 = 5625 \quad \therefore x = \pm 75$$

즉, P(75, 60), Q(-75, 60) 또는 P(-75, 60), Q(75, 60)이므로

$$\overline{PQ} = 75 - (-75) = 150$$

따라서 정류소 C를 설치할 수 있는 구간의 길이는 150 m이다.

AB 유형 점검

24~26쪽

0121 답 ⑤

포물선 $y^2=6x$, 즉 $y^2=4 \times \frac{3}{2}x$ 의 초점 F의 좌표는 $(\frac{3}{2}, 0)$

점 F를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점 F'의 좌표는 $(0, \frac{3}{2})$

점 F'($0, \frac{3}{2}$)을 초점으로 하고 원점을 꼭짓점으로 하는 포물선의 방정식은

$$x^2 = 4 \times \frac{3}{2}y \quad \therefore x^2 = 6y$$

이 포물선이 점 $(-4, a)$ 를 지나므로

$$(-4)^2 = 6a \quad \therefore a = \frac{8}{3}$$

0122 답 ③

포물선 $x^2-8y=0$, 즉 $x^2=4 \times 2y$ 의 초점의 좌표는 (0, 2)

한편 $x^2+6x-4y+a+9=0$ 에서

$$(x+3)^2 = 4\left(y - \frac{a}{4}\right)$$

즉, 이 포물선은 포물선 $x^2=4y$ 를 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2=4y$ 의 초점의 좌표는 (0, 1)이므로 포물선

$(x+3)^2 = 4\left(y - \frac{a}{4}\right)$ 의 초점의 좌표는

$$\left(-3, 1 + \frac{a}{4}\right)$$

이때 두 초점 사이의 거리가 5이므로

$$\sqrt{(-3)^2 + \left(\frac{a}{4} - 1\right)^2} = 5$$

양변을 제곱하면

$$9 + \left(\frac{a}{4} - 1\right)^2 = 25, \quad \left(\frac{a}{4} - 1\right)^2 = 16$$

$$\frac{a}{4} - 1 = \pm 4 \quad \therefore a = 20 \text{ 또는 } a = -12$$

$$\therefore a = 20 \quad (\because a > 0)$$

0123 답 ③

포물선 $y^2=4x$ 의 초점 F의 좌표는 (1, 0)이고 준선의 방정식은 $x=-1$ 이다.

이때 $\overline{PF} = 5\overline{OF}$ 이므로

$$\overline{PF} = 5 \times 1 = 5$$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 준선

$x=-1$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH} = \overline{PF} = 5$$

점 P의 좌표를 (a, b)라 하면

$$\overline{PH} = a - (-1) = a + 1$$

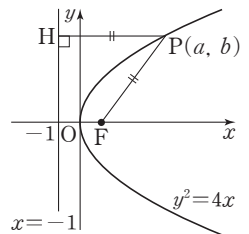
즉, $a + 1 = 5$ 이므로 $a = 4$

점 P(4, b)는 포물선 $y^2=4x$ 위의 점이므로

$$b^2 = 4 \times 4 = 16 \quad \therefore b = \pm 4$$

따라서 P(4, 4) 또는 P(4, -4)이므로

$$\overline{OP} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$



0124 답 ⑤

포물선 $x^2=8y$, 즉 $x^2=4 \times 2y$ 의 초점을 F라 하면 F(0, 2)이고, 준선의 방정식은 $y=-2$ 이다.

즉, 직선 $y=mx+2$ 는 초점 F를 지난다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B

에서 준선 $y=-2$ 에 내린 수선의

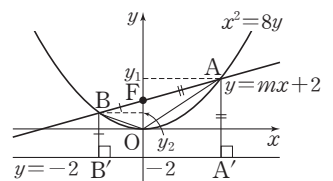
발을 각각 A', B'이라 하고 두 점

A, B의 y좌표를 각각 y_1, y_2 라

하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{AF} = \overline{AA'} = y_1 + 2$$

$$\overline{BF} = \overline{BB'} = y_2 + 2$$



$$\therefore \overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF} = (y_1 + 2) + (y_2 + 2) = y_1 + y_2 + 4$$

$$\text{즉, } y_1 + y_2 + 4 = 10 \text{ 이므로 } y_1 + y_2 = 6$$

따라서 삼각형 OAB의 무게중심의 y좌표는

$$\frac{0 + y_1 + y_2}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

0125 답 10

포물선 $y^2 = 16x$, 즉 $y^2 = 4 \times 4x$ 의 초점 F의 좌표는 (4, 0)이고, 준선의 방정식은 $x = -4$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 점 P, A에서 준선

$x = -4$ 에 내린 수선의 발을 각각 H, H'이라 하면 포물선의 정의에 의하여

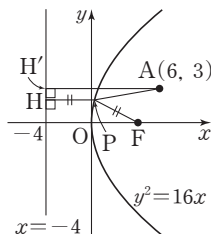
$$\overline{PF} = \overline{PH} \text{ 이므로}$$

$$\overline{AP} + \overline{PF} = \overline{AP} + \overline{PH}$$

$$\geq \overline{AH'}$$

$$= 6 - (-4) = 10$$

따라서 $\overline{AP} + \overline{PF}$ 의 최솟값은 10이다.



0126 답 $2\sqrt{15}$

포물선 $y^2 = 12x$, 즉 $y^2 = 4 \times 3x$ 의 초점의 좌표는 (3, 0)

포물선의 초점과 타원의 한 초점이 일치하므로 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의

두 초점의 좌표는

$$(3, 0), (-3, 0)$$

$$\text{즉, } a^2 - 6 = 3^2 \text{에서 } a^2 = 3^2 + 6 = 15$$

$$\therefore a = \pm\sqrt{15}$$

따라서 구하는 장축의 길이는

$$2|a| = 2 \times \sqrt{15} = 2\sqrt{15}$$

0127 답 12

$$9(x-1)^2 + 25(y+1)^2 = 225 \text{에서}$$

$$\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$$

즉, 이 타원은 타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

타원 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 $\sqrt{25-9}=4$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(4, 0), (-4, 0)$$

주어진 타원의 두 초점의 좌표는

$$(5, -1), (-3, -1)$$

따라서 두 초점 사이의 거리는 $5 - (-3) = 8$ 이므로 $p=8$

장축의 길이는 $2 \times 5 = 10$ 이므로 $q=10$

단축의 길이는 $2 \times 3 = 6$ 이므로 $r=6$

$$\therefore p+q-r=12$$

0128 답 ⑤

$\overline{AF'}=5$, $\overline{AF}=3$ 이므로 직각삼각형 $AF'F$ 에서

$$\overline{FF'} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

즉, 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{5} = 1$ 의 두 초점이 $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$ 이므로

$$a^2 - 5 = 2^2 \text{에서 } a^2 = 2^2 + 5 = 9$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > \sqrt{5})$$

이때 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a = 2 \times 3 = 6$$

따라서 삼각형 $PF'F$ 의 둘레의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{PF'} + \overline{FF'} = 6 + 4 = 10$$

0129 답 32

타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ 에서 $\sqrt{36-16}=2\sqrt{5}$ 이므로 두 초점 F, F'의 좌표는

$$(0, 2\sqrt{5}), (0, -2\sqrt{5})$$

$$\therefore \overline{FF'} = 2\sqrt{5} - (-2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$$

$\overline{OP} = \overline{OF} = \overline{OF'}$ 이므로 오른쪽 그림과 같이

세 점 P, F, F'은 두 점 F, F'을 지름의 양 끝 점으로 하는 원 위의 점이다.

$$\therefore \angle FPF' = 90^\circ$$

$\overline{PF}=a$, $\overline{PF'}=b$ 라 하면 타원의 정의에 의하여

$$a+b=2 \times 6 = 12$$

또 직각삼각형 PPF' 에서

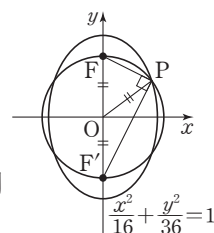
$$a^2 + b^2 = (4\sqrt{5})^2 = 80$$

이때 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ 이므로

$$12^2 = 80 + 2ab$$

$$2ab = 64 \quad \therefore ab = 32$$

$$\therefore \overline{PF} \times \overline{PF'} = ab = 32$$



0130 답 50

타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 5 = 10$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 &= (\overline{PF} + \overline{PF'})^2 - 2\overline{PF} \times \overline{PF'} \\ &= 100 - 2\overline{PF} \times \overline{PF'} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

이때 $\overline{PF} > 0$, $\overline{PF'} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PF} + \overline{PF'} \geq 2\sqrt{\overline{PF} \times \overline{PF'}} \quad (\text{단, 등호는 } \overline{PF} = \overline{PF'} \text{일 때 성립})$$

$$10 \geq 2\sqrt{\overline{PF} \times \overline{PF'}}$$

$$\sqrt{\overline{PF} \times \overline{PF'}} \leq 5$$

$$\therefore \overline{PF} \times \overline{PF'} \leq 25 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2 \geq 100 - 2 \times 25 = 50$$

따라서 $\overline{PF}^2 + \overline{PF'}^2$ 의 최솟값은 50이다.

0131 답 $10\sqrt{3}$

주어진 쌍곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ ($a > 0$, $b > 0$)이라 하면

주축의 길이가 $2\sqrt{15}$ 이므로

$$2b = 2\sqrt{15} \quad \therefore b = \sqrt{15}$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{15} = -1$ 이 점 (2, -4)를 지나므로

$$\frac{2^2}{a^2} - \frac{(-4)^2}{15} = -1, \quad \frac{4}{a^2} = \frac{1}{15} \quad \therefore a^2 = 60$$

즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{60} - \frac{y^2}{15} = -1$ 에서 $\sqrt{60+15}=5\sqrt{3}$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(0, 5\sqrt{3}), (0, -5\sqrt{3})$$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$5\sqrt{3} - (-5\sqrt{3}) = 10\sqrt{3}$$

0132 답 ③

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 한 점근선의 방정식이 $y=x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = 1 \quad \therefore b=a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ 의 한 초점이 $F(c, 0)$ 이므로

$$a^2 + a^2 = c^2, 2a^2 = c^2 \quad \therefore c = \sqrt{2}a \quad (\because a > 0, c > 0)$$

$x = \sqrt{2}a$ 를 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ 에 대입하면

$$\frac{(\sqrt{2}a)^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1, y^2 = a^2 \quad \therefore y = \pm a$$

두 점 P, Q의 좌표는 $(\sqrt{2}a, a), (\sqrt{2}a, -a)$ 이므로

$$\overline{PQ} = 8 \text{에서 } a - (-a) = 8 \quad \therefore a = 4$$

따라서 $b=4, c=4\sqrt{2}$ 이므로

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4^2 + 4^2 + (4\sqrt{2})^2 = 64$$

0133 답 ④

쌍곡선 $4x^2 - 9y^2 = 36$, 즉 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ 에서 $\sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(\sqrt{13}, 0), (-\sqrt{13}, 0)$$

점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{2}{3}x \quad \therefore 2x \pm 3y = 0$$

이때 원의 중심의 좌표를 $(\sqrt{13}, 0)$ 이라 하면 원의 중심과 점근선

$2x - 3y = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2\sqrt{13} - 0|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = 2$$

따라서 원의 반지름의 길이가 2이므로 그 넓이는

$$\pi \times 2^2 = 4\pi$$

0134 답 4

$$4x^2 - y^2 - 8x - 8y + 4 = 0 \text{에서}$$

$$4(x-1)^2 - (y+4)^2 = -16$$

$$\therefore \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y+4)^2}{16} = -1$$

즉, 이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1$ 을 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

따라서 주어진 쌍곡선의 주축의 길이는 $2 \times 4 = 8$ 이므로 $a=8$

또 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = -1$ 의 점근선의 방정식은 $y = \pm 2x$ 이므로 주

어진 쌍곡선의 점근선 중 기울기가 양수인 직선의 방정식은

$$y+4=2(x-1) \quad \therefore y=2x-6$$

따라서 $b=2, c=-6$ 이므로

$$a+b+c=8+2+(-6)=4$$

0135 답 7

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 에서 $\sqrt{9+7}=4$ 이므로 두 초점 F, F'의 좌표는

$$(4, 0), (-4, 0)$$

$$\therefore \overline{FF'} = 4 - (-4) = 8$$

$\overline{PF'} = a, \overline{PF} = b$ 라 하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$a - b = 2 \times 3 = 6$$

삼각형 PF'F는 $\angle F'PF = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로

$$a^2 + b^2 = 8^2 = 64$$

이때 $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ 이므로

$$6^2 = 64 - 2ab, 2ab = 28 \quad \therefore ab = 14$$

따라서 삼각형 PF'F의 넓이는 $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \times 14 = 7$

0136 답 $k < -3$ 또는 $k > 2$

$$3x^2 + 4y^2 - 2 + k(x^2 - 2y^2 - 2) = 0 \text{에서}$$

$$(3+k)x^2 + (4-2k)y^2 - 2 - 2k = 0$$

이 방정식이 나타내는 도형이 쌍곡선이 되려면

$$(3+k)(4-2k) < 0, (k+3)(k-2) > 0$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k > 2$$

0137 답 $x=1$

점 P의 좌표를 (a, b) 라 하면 점 P는 포물선 $y^2 = 8(x-1)$ 위의 점 이므로

$$b^2 = 8(a-1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 포물선 $y^2 = 8(x-1)$ 은 포물선 $y^2 = 8x$ 를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2 = 8x$, 즉 $y^2 = 4 \times 2x$ 의 초점의 좌표가 $(2, 0)$ 이므로 포물선 $y^2 = 8(x-1)$ 의 초점 F의 좌표는 $(3, 0)$ 이다.

선분 PF의 중점 Q의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{a+3}{2}, y = \frac{b}{2} \quad \therefore a = 2x-3, b = 2y$$

이를 ①에 대입하면

$$(2y)^2 = 8(2x-3-1), 4y^2 = 8(2x-4) \quad \therefore y^2 = 4(x-2)$$

즉, 이 포물선은 포물선 $y^2 = 4x$ 를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 포물선 $y^2 = 4x$ 의 준선의 방정식은 $x = -1$ 이므로 포물선

$y^2 = 4(x-2)$ 의 준선의 방정식은 $x = 1$ 이다.

0138 답 ②

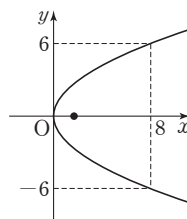
오른쪽 그림과 같이 자동차의 전조등의 단면인 포물선과 축이 만나는 점이 원점이 되도록 포물선을 좌표평면에 놓자.

포물선의 방정식을 $y^2 = 4px$ 라 하면 이 포물선이 점 $(8, 6)$ 을 지나므로

$$6^2 = 4p \times 8 \quad \therefore p = \frac{9}{8}$$

따라서 초점의 좌표가 $(\frac{9}{8}, 0)$ 이므로 꼭짓점과 초점 사이의 거리는

$$\frac{9}{8} \text{ cm이다.}$$



0139 답 20

포물선 $(x-5)^2=a(y-1)$ 은 포물선 $x^2=ay$ 를 x 축의 방향으로 5만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2=ay$, 즉 $x^2=4 \times \frac{a}{4}y$ 의 초점의 좌표가 $(0, \frac{a}{4})$ 이므로 포물선 $(x-5)^2=a(y-1)$ 의 초점의 좌표는

$$(5, \frac{a}{4}+1) \quad \dots\dots \textcircled{i} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

또 포물선 $(y-3)^2=b(x-2)$ 는 포물선 $y^2=bx$ 를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2=bx$, 즉 $y^2=4 \times \frac{b}{4}x$ 의 초점의 좌표가 $(\frac{b}{4}, 0)$ 이므로 포물선 $(y-3)^2=b(x-2)$ 의 초점의 좌표는

$$(\frac{b}{4}+2, 3) \quad \dots\dots \textcircled{ii} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

두 초점 $\textcircled{i}$, $\textcircled{ii}$ 이 일치하므로

$$5 = \frac{b}{4} + 2, \quad \frac{a}{4} + 1 = 3$$

따라서 $a=8$, $b=12$ 이므로

$$a+b=20 \quad \dots\dots \textcircled{iii} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 포물선 $(x-5)^2=a(y-1)$ 의 초점의 좌표 구하기	40%
② 포물선 $(y-3)^2=b(x-2)$ 의 초점의 좌표 구하기	40%
③ $a+b$ 의 값 구하기	20%

0140 답 $2\sqrt{3}$

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점을 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ ($c>0$)라 하면 $b^2 - a^2 = c^2$ $\dots\dots \textcircled{i} \quad \dots\dots \textcircled{i}$

두 초점 F , F' 사이의 거리는

$$FF' = c - (-c) = 2c$$

두 점 A , B 의 좌표는 각각 $(0, b)$, $(0, -b)$ 이므로

$$AB = b - (-b) = 2b$$

(가)에서 삼각형 PAB 의 넓이는 삼각형 PFF' 의 넓이의 2배이므로

$$AB = 2FF'$$

$$\text{즉, } 2b = 2 \times 2c \text{이므로 } b = 2c \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

한편 타원의 정의에 의하여

$$PF + PF' = 2b$$

(나)에서 삼각형 PFF' 의 둘레의 길이는 6이므로

$$PF + PF' + FF' = 2b + 2c = 6$$

$$\therefore b + c = 3 \quad \dots\dots \textcircled{iii} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$\textcircled{ii}$, $\textcircled{iii}$ 을 연립하여 풀면

$$b = 2, c = 1$$

이를 $\textcircled{i}$ 에 대입하면

$$2^2 - a^2 = 1^2, a^2 = 2^2 - 1^2 = 3 \quad \therefore a = \sqrt{3} \quad (\because a > 0) \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

$$\therefore ab = \sqrt{3} \times 2 = 2\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{iv} \quad \dots\dots \textcircled{iv}$$

채점 기준

① 두 초점을 $F(0, c)$, $F'(0, -c)$ ($c>0$)로 놓고 a , b , c 사이의 관계식 구하기	20%
② b , c 사이의 관계식 구하기	50%
③ a , b , c 의 값 구하기	20%
④ ab 의 값 구하기	10%

0141 답 36

쌍곡선 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = -1$ 에서 $\sqrt{5+4}=3$ 이므로 두 초점 F , F' 의 좌표는 $(0, 3)$, $(0, -3)$ $\therefore FF' = 3 - (-3) = 6$

이때 삼각형 PFF' 의 둘레의 길이가 15이

므로

$$PF + PF' + FF' = 15$$

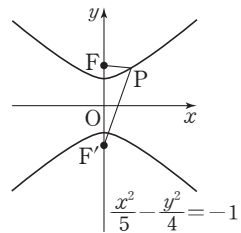
$$PF + PF' + 6 = 15$$

$$\therefore PF + PF' = 9 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

쌍곡선의 정의에 의하여

$$|PF - PF'| = 2 \times 2 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore |PF^2 - PF'^2| = |(PF + PF')(PF - PF')| = 9 \times 4 = 36 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$



채점 기준

① $PF + PF'$ 의 값 구하기	60%
② $ PF - PF' $ 의 값 구하기	20%
③ $ PF^2 - PF'^2 $ 의 값 구하기	20%

C 실력 향상

27쪽

0142 답 24

포물선 $y^2=8x$, 즉 $y^2=4 \times 2x$ 의 초점을 F 라 하면 점 F 의 좌표는 $(2, 0)$ 이고, 준선의 방정식은 $x=-2$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 두 직선 AC , BD 가

준선 $x=-2$ 와 만나는 점을 각각 H , T

라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$AF = AH, BF = BT$$

사각형 $ABDC$ 의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} AB + BD + DC + CA &= (AF + BF) + BD + DC + CA \\ &= (AH + BT) + BD + DC + CA \\ &= (AH + AC) + (BT + BD) + DC \\ &= 8 + 8 + DC = 16 + DC \quad \dots\dots \textcircled{i} \end{aligned}$$

한편 두 점 A , B 의 좌표를 각각

$$\left(\frac{\alpha^2}{8}, \alpha\right), \left(\frac{\beta^2}{8}, -\beta\right) \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

라 하면 세 점 A , F , B 가 한 직선 위에 있으므로

$$\frac{\alpha}{\frac{\alpha^2}{8} - 2} = \frac{-\beta}{\frac{\beta^2}{8} - 2}, \alpha(\beta^2 - 16) = -\beta(\alpha^2 - 16)$$

$$\therefore (\alpha\beta - 16)(\alpha + \beta) = 0$$

그런데 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 이므로 $\alpha\beta = 16$

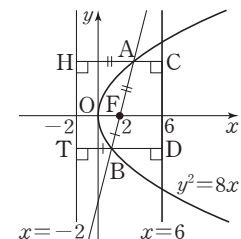
또 $\alpha > 0$, $\beta > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta} = 2\sqrt{16} = 8 \quad (\text{단, 등호는 } \alpha = \beta \text{일 때 성립})$$

$DC = \alpha + \beta$ 이므로 $\textcircled{i}$ 에서

$$\begin{aligned} AB + BD + DC + CA &= 16 + DC \\ &\geq 16 + 8 = 24 \end{aligned}$$

따라서 사각형 $ABDC$ 의 둘레의 길이의 최솟값은 24이다.



0143 답 4

타원 E_1 에서 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF_1} + \overline{PO} = 2 \times 4 = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\overline{QF_1} + \overline{QO} = 2 \times 4 = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

타원 E_2 에서 타원의 정의에 의하여

$$\overline{PF_2} + \overline{PO} = 2 \times 5 = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\overline{QF_2} + \overline{QO} = 2 \times 5 = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉢}$ 을 하면

$$\overline{PF_1} - \overline{PF_2} = -2$$

$\textcircled{㉡} - \textcircled{㉣}$ 을 하면

$$\overline{QF_1} - \overline{QF_2} = -2$$

$$\therefore |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| + |\overline{QF_1} - \overline{QF_2}| = |-2| + |-2| = 4$$

0144 답 14

타원 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ 에서 $\sqrt{16-7}=3$ 이므로 두 초점 F, F'의 좌표는

$(3, 0), (-3, 0)$

이때 $A(0, 3)$ 이므로

$$\overline{OA} = \overline{OF}$$

또 $\overline{AP} = \overline{PF}$ 이고 선분 PO는 공통이므로

$\triangle PAO \equiv \triangle PFO$ (SSS 합동)

즉, $\angle POA = \angle POF = 45^\circ$ 이므로 점

P는 직선 $y=x$ 위의 점이다.

$B(0, -3), F'(-3, 0)$ 이므로

$$\overline{PB} = \overline{PF'}$$

타원의 정의에 의하여

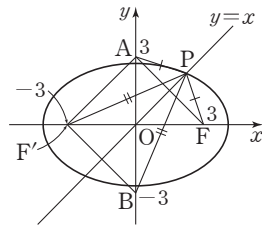
$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2 \times 4 = 8$$

$\overline{AF'} = \overline{F'B} = 3\sqrt{2}$ 이므로 사각형 $AF'BP$ 의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} \overline{AF'} + \overline{F'B} + \overline{BP} + \overline{AP} &= 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + (\overline{PF'} + \overline{PF}) \\ &= 8 + 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 $a=8, b=6$ 이므로

$$a+b=14$$



0145 답 7

쌍곡선 $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$ 에서 $\sqrt{9+7}=4$ 이므로 두 초점의 좌표는

$(4, 0), (-4, 0)$

오른쪽 그림과 같이 점 A는 쌍곡선의

한 초점이므로 다른 한 초점을 F라

하면 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF} - \overline{PA} = 2 \times 3 = 6$$

$$\overline{PA} = \overline{PF} - 6$$

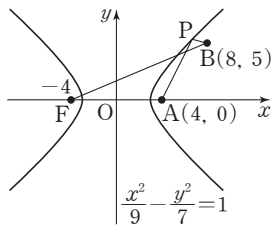
$$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} = \overline{PF} + \overline{PB} - 6$$

$\geq \overline{BF} - 6 \longrightarrow$ 세 점 F, P, B가 한 직선 위에 있을 때

$$= \sqrt{(-4-8)^2 + (-5)^2} - 6 \quad \text{PF+PB의 값이 최소이다.}$$

$$= 13 - 6 = 7$$

따라서 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 의 최솟값은 7이다.



02 / 이차곡선의 접선

A 개념 확인

28~29쪽

0146 답 $y=3x+\frac{1}{2}$

$y^2=6x$ 에서 $y^2=4 \times \frac{3}{2}x$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y=3x+\frac{\frac{3}{2}}{3} \quad \therefore y=3x+\frac{1}{2}$$

0147 답 $y=-4x-12$

$x^2=3y$ 에서 $x^2=4 \times \frac{3}{4}y$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y=-4x-(-4) \times \frac{3}{4} \quad \therefore y=-4x-12$$

0148 답 $y=6x-\frac{1}{3}$

$y^2=-8x$ 에서 $y^2=4 \times (-2)x$ 이고 직선 $y=6x-4$ 와 평행한 직선의 기울기는 6이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y=6x+\frac{-2}{6} \quad \therefore y=6x-\frac{1}{3}$$

0149 답 $y=3x+1$

$y^2=12x$ 에서 $y^2=4 \times 3x$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$2y=2 \times 3 \times \left(x+\frac{1}{3}\right) \quad \therefore y=3x+1$$

0150 답 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$

$y^2=-2x$ 에서 $y^2=4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)x$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$\sqrt{2}y=2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times (x-1) \quad \therefore y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

0151 답 $y=2x-4$

$x^2=4y$ 에서 $x^2=4 \times y$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$4x=2 \times 1 \times (y+4) \quad \therefore y=2x-4$$

0152 답 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$x^2=-8y$ 에서 $x^2=4 \times (-2)y$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$2x=2 \times (-2) \times \left(y-\frac{1}{2}\right) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$$

0153 답 $y=-x \pm 2\sqrt{3}$

$$y=-x \pm \sqrt{3 \times (-1)^2 + 9} \quad \therefore y=-x \pm 2\sqrt{3}$$

0154 답 $y=2x \pm 3$

$x^2+2y^2=2$ 에서 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y=2x \pm \sqrt{2 \times 2^2 + 1} \quad \therefore y=2x \pm 3$$

0155 답 $y = \frac{1}{3}x \pm 2\sqrt{2}$

직선 $y = -3x + 5$ 에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{3}x \pm \sqrt{9 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 7} \quad \therefore y = \frac{1}{3}x \pm 2\sqrt{2}$$

0156 답 $y = x - 4$

$$\frac{3x}{12} + \frac{-y}{4} = 1 \quad \therefore y = x - 4$$

0157 답 $y = \frac{1}{2}x + 2$

$$\frac{-2x}{8} + \frac{y}{2} = 1 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + 2$$

0158 답 $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$

$$2x + 4 \times 2y = 20 \quad \therefore y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{2}$$

0159 답 $y = -x - 5$

$$3 \times (-2x) + 2 \times (-3y) = 30 \quad \therefore y = -x - 5$$

0160 답 $y = x \pm \sqrt{2}$

$$y = x \pm \sqrt{4 \times 1^2 - 2} \quad \therefore y = x \pm \sqrt{2}$$

0161 답 $y = -2x \pm 1$

$9x^2 - 2y^2 = -18$ 에서 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{9} = -1$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y = -2x \pm \sqrt{9 - 2 \times (-2)^2} \quad \therefore y = -2x \pm 1$$

0162 답 $y = -4x \pm 5$

직선 $4x + y - 7 = 0$, 즉 $y = -4x + 7$ 과 평행한 직선의 기울기는 -4 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y = -4x \pm \sqrt{2 \times (-4)^2 - 7} \quad \therefore y = -4x \pm 5$$

0163 답 $y = -x + 1$

$$\frac{4x}{4} - \frac{-3y}{3} = 1 \quad \therefore y = -x + 1$$

0164 답 $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$

$$\frac{6x}{12} - \frac{6y}{9} = -1 \quad \therefore y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$

0165 답 $y = -2x - 2$

$$3 \times (-4x) - 6y = 12 \quad \therefore y = -2x - 2$$

0166 답 $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$$-x - 2y = -3 \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

B 유형 완성

30~37쪽

0167 답 16

직선 $x - 3y + 5 = 0$, 즉 $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ 에 수직인 직선의 기울기는 -3 이다.

따라서 포물선 $y^2 = 3x$, 즉 $y^2 = 4 \times \frac{3}{4}x$ 에 접하고 기울기가 -3 인 직선의 방정식은

$$y = -3x + \frac{3}{-3} \quad \therefore 12x + 4y + 1 = 0$$

따라서 $a = 12$, $b = 4$ 이므로 $a + b = 16$

다른 풀이

포물선 $y^2 = 3x$ 에 접하고 직선 $x - 3y + 5 = 0$ 에 수직인 직선의 방정식을 $y = -3x + k$ 라 하자.

이를 $y^2 = 3x$ 에 대입하면

$$(-3x + k)^2 = 3x \quad \therefore 9x^2 - 3(2k + 1)x + k^2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = \{-3(2k + 1)\}^2 - 36k^2 = 0, \quad 36k + 9 = 0 \quad \therefore k = -\frac{1}{4}$$

$$\text{즉, 직선의 방정식은 } y = -3x - \frac{1}{4} \quad \therefore 12x + 4y + 1 = 0$$

따라서 $a = 12$, $b = 4$ 이므로 $a + b = 16$

0168 답 3

직선 $y = 2x - 5$ 와 평행한 직선의 기울기는 2이다.

따라서 포물선 $y^2 = 8x$, 즉 $y^2 = 4 \times 2x$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x + \frac{2}{2} \quad \therefore y = 2x + 1$$

이 직선이 점 $(a, 7)$ 을 지나므로

$$7 = 2a + 1 \quad \therefore a = 3$$

0169 답 32

포물선 $y^2 = -4x$, 즉 $y^2 = 4 \times (-1)x$ 에 접하고 기울기가 m ($m \neq 0$)인 직선의 방정식은

$$y = mx - \frac{1}{m}$$

이 직선이 직선 $y = mx + 4$ 와 일치하므로

$$-\frac{1}{m} = 4 \quad \therefore m = -\frac{1}{4}$$

따라서 직선 $y = -\frac{1}{4}x + 4$ 의 x 절편은 16, y 절편은 4이므로 구하는

$$\text{넓이는 } \frac{1}{2} \times 16 \times 4 = 32$$

다른 풀이

$y = mx + 4$ 를 $y^2 = -4x$ 에 대입하면

$$(mx + 4)^2 = -4x \quad \therefore m^2x^2 + 4(2m + 1)x + 16 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = \{2(2m + 1)\}^2 - 16m^2 = 0$$

$$16m + 4 = 0 \quad \therefore m = -\frac{1}{4}$$

따라서 직선 $y = -\frac{1}{4}x + 4$ 의 x 절편은 16, y 절편은 4이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 16 \times 4 = 32$$

0170 **답** $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

포물선 $y^2 = x$, 즉 $y^2 = 4 \times \frac{1}{4}x$ 에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

⑦을 $y^2 = x$ 에 대입하면

$$\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2 = x, \quad \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \quad \therefore x = 1$$

이를 ⑦에 대입하여 정리하면 $y = -1$

$$\therefore A(1, -1) \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

또 ⑦을 $x^2 = 8y$ 에 대입하면

$$x^2 = 8\left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right), \quad x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0 \quad \therefore x = -2$$

이를 ⑦에 대입하여 정리하면 $y = \frac{1}{2}$

$$\therefore B\left(-2, \frac{1}{2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(-2-1)^2 + \left(\frac{1}{2}+1\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{iv}$$

채점 기준

① 접선의 방정식 구하기	30 %
② 점 A의 좌표 구하기	30 %
③ 점 B의 좌표 구하기	30 %
④ 선분 AB의 길이 구하기	10 %

0171 **답** -2

꼭짓점이 원점이고 준선이 $x = -4$ 인 포물선의 방정식은 $y^2 = 16x$
 포물선 $y^2 = 16x$, 즉 $y^2 = 4 \times 4x$ 위의 점 (1, 4)에서의 접선의 방정식은

$$4y = 2 \times 4 \times (x+1) \quad \therefore y = 2x+2$$

이 직선이 점 $(k, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = 2k+2 \quad \therefore k = -2$$

다른 풀이

접선의 기울기를 m ($m \neq 0$)이라 하면 접선의 방정식은

$$y = mx + \frac{4}{m}$$

이 직선이 점 (1, 4)를 지나므로

$$4 = m + \frac{4}{m}, \quad m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$(m-2)^2 = 0 \quad \therefore m = 2$$

따라서 직선 $y = 2x+2$ 가 점 $(k, -2)$ 를 지나므로

$$-2 = 2k+2 \quad \therefore k = -2$$

0172 **답** ⑤

점 $(a, 2a)$ 가 포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점이므로

$$(2a)^2 = 12a, \quad a^2 - 3a = 0$$

$$a(a-3) = 0 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

따라서 포물선 $y^2 = 12x$, 즉 $y^2 = 4 \times 3x$ 위의 점 (3, 6)에서의 접선의 방정식은

$$6y = 2 \times 3 \times (x+3) \quad \therefore y = x+3$$

따라서 이 직선의 기울기는 1, y 절편은 3이므로

$$b = 1, \quad c = 3$$

$$\therefore a+b+c = 3+1+3 = 7$$

0173 **답** ④

포물선 $x^2 = 2y$, 즉 $x^2 = 4 \times \frac{1}{2}y$ 의 초점의 좌표는 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

점 (4, 8)에서의 접선의 방정식은

$$4x = 2 \times \frac{1}{2} \times (y+8) \quad \therefore y = 4x-8$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$ 이므로 기울기가 $-\frac{1}{4}$ 이고

점 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x \quad \therefore y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

따라서 구하는 x 절편은 2이다.

0174 **답** $\frac{5}{2}$

포물선 $y^2 = -x$, 즉 $y^2 = 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)x$ 위의 점 $(-1, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times (x-1) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 $(-4, -2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-2y = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) \times (x-4) \quad \therefore y = \frac{1}{4}x - 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면

$$x = 2, \quad y = -\frac{1}{2}$$

따라서 두 접선의 교점의 좌표가 $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ 이므로

$$a = 2, \quad b = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a - b = \frac{5}{2}$$

0175 **답** ②

포물선 $y^2 = 4px$ 의 준선의 방정식은 $x = -p$

점 $\left(\frac{1}{p}, 2\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2y = 2 \times p \times \left(x + \frac{1}{p}\right) \quad \therefore y = px + 1$$

이 직선이 준선 $x = -p$ 와 만나는 점의 y 좌표는

$$y = p \times (-p) + 1 = -p^2 + 1$$

즉, $-p^2 + 1 = -\frac{5}{4}$ 이므로

$$p^2 = \frac{9}{4} \quad \therefore p = \frac{3}{2} \quad (\because p > 0)$$

0176 답 2

포물선 $y^2=8x$, 즉 $y^2=4 \times 2x$ 의 초점 F의 좌표는 (2, 0)

점 P의 좌표를 (a, b) ($a>0, b>0$)라 하면 점 P는 포물선 $y^2=8x$ 위의 점이므로

$$b^2=8a \quad \therefore a=\frac{b^2}{8} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 P(a, b)에서의 접선 l의 방정식은

$$by=2 \times 2 \times (x+a)$$

$$\therefore y=\frac{4}{b}x+\frac{4a}{b}$$

즉, Q($-a, 0$)이므로

$$\overline{FQ}=2-(-a)=2+a$$

이때 삼각형 FPQ의 넓이가 $\frac{5}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times (2+a) \times b = \frac{5}{2}$$

$$\therefore 2b+ab=5$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

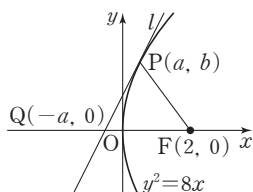
$$2b+\frac{b^2}{8} \times b=5, \quad b^3+16b-40=0$$

$$(b-2)(b^2+2b+20)=0$$

$$\therefore b=2 \quad (\because b^2+2b+20>0)$$

따라서 직선 l의 기울기는

$$\frac{4}{b}=2$$



0177 답 32

$y=x+3$ 을 $x^2=4y$ 에 대입하면

$$x^2=4(x+3), \quad x^2-4x-12=0$$

$$(x+2)(x-6)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=6$$

이를 $y=x+3$ 에 대입하여 정리하면 $x=-2$ 일 때 $y=1$, $x=6$ 일 때 $y=9$ 이므로

$$A(6, 9), B(-2, 1) \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

포물선 $x^2=4y$ 위의 점 A(6, 9)에서의 접선의 방정식은

$$6x=2(y+9) \quad \therefore y=3x-9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 B(-2, 1)에서의 접선의 방정식은

$$-2x=2(y+1) \quad \therefore y=-x-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $x=2, y=-3$

$$\therefore C(2, -3) \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

이때 두 직선 $y=x+3, y=-x-1$ 은 서로 수직이므로

$$\overline{AB} \perp \overline{BC}$$

즉, 삼각형 ABC는 $\angle ABC=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$$\overline{AB}=\sqrt{(-2-6)^2+(1-9)^2}=8\sqrt{2},$$

$$\overline{BC}=\sqrt{(2+2)^2+(-3-1)^2}=4\sqrt{2}$$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 32 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 두 점 A, B의 좌표 구하기	30%
② 점 C의 좌표 구하기	30%
③ 삼각형 ABC의 넓이 구하기	40%

0178 답 $\frac{10}{3}$

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1y=-2(x+x_1)$$

이 직선이 점 (3, 0)을 지나므로

$$0=-2(3+x_1) \quad \therefore x_1=-3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 $y^2=-4x$ 위의 점이므로

$$y_1^2=-4x_1$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$y_1^2=-4 \times (-3)=12 \quad \therefore y_1=\pm 2\sqrt{3}$$

즉, $x_1=-3, y_1=-2\sqrt{3}$ 또는 $x_1=-3, y_1=2\sqrt{3}$ 이므로 접선의 방

$$\text{정식은 } y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\sqrt{3} \text{ 또는 } y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } m=-\frac{\sqrt{3}}{3}, n=\sqrt{3} \text{ 또는 } m=\frac{\sqrt{3}}{3}, n=-\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$m^2+n^2=\frac{10}{3}$$

다른 풀이

직선 $y=mx+n$ 이 점 (3, 0)을 지나므로

$$0=3m+n \quad \therefore n=-3m \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$y=mx+n$, 즉 $y=mx-3m$ 을 $y^2=-4x$ 에 대입하면

$$(mx-3m)^2=-4x$$

$$\therefore m^2x^2-2(3m^2-2)x+9m^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=\{-(3m^2-2)\}^2-9m^4=0, \quad -12m^2+4=0 \quad \therefore m^2=\frac{1}{3}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } n^2=9m^2=3 \quad \therefore m^2+n^2=\frac{10}{3}$$

0179 답 $\frac{5}{2}$

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x=4(y+y_1)$$

이 직선이 점 (3, 1)을 지나므로

$$3x_1=4(1+y_1) \quad \therefore y_1=\frac{3}{4}x_1-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 $x^2=8y$ 위의 점이므로

$$x_1^2=8y_1$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$x_1^2=8\left(\frac{3}{4}x_1-1\right), \quad x_1^2-6x_1+8=0$$

$$(x_1-2)(x_1-4)=0 \quad \therefore x_1=2 \text{ 또는 } x_1=4$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } x_1=2 \text{ 일 때 } y_1=\frac{1}{2}, \quad x_1=4 \text{ 일 때 } y_1=2$$

따라서 두 점 P, Q의 좌표는 $\left(2, \frac{1}{2}\right), (4, 2)$ 이므로

$$\overline{PQ}=\sqrt{(4-2)^2+\left(2-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{5}{2}$$

0180 답 ②

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$y_1y=3(x+x_1)$$

이 직선이 점 (-2, 2)를 지나므로

$$2y_1=3(-2+x_1) \quad \therefore y_1=\frac{3}{2}x_1-3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 $y^2=6x$ 위의 점이므로

$$y_1^2=6x_1$$

이 식에 ㉠을 대입하면

$$\left(\frac{3}{2}x_1-3\right)^2=6x_1, 3x_1^2-20x_1+12=0$$

$$(3x_1-2)(x_1-6)=0 \quad \therefore x_1=\frac{2}{3} \text{ 또는 } x_1=6$$

㉠에서 $x_1=\frac{2}{3}$ 일 때 $y_1=-2$, $x_1=6$ 일 때 $y_1=6$ 이므로 접선의 방정

$$\text{식은 } y=-\frac{3}{2}x-1 \text{ 또는 } y=\frac{1}{2}x+3$$

$$\therefore m_1m_2=-\frac{3}{2} \times \frac{1}{2}=-\frac{3}{4}$$

다른 풀이

접선의 기울기를 $m(m \neq 0)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$y=mx+\frac{3}{m} \quad \therefore y=mx+\frac{3}{2m}$$

이 직선이 점 $(-2, 2)$ 를 지나므로

$$2=-2m+\frac{3}{2m}$$

$$\therefore 4m^2+4m-3=0$$

이 이차방정식의 두 실근이 m_1, m_2 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$m_1m_2=-\frac{3}{4}$$

0181 답 4

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x=-(y+y_1)$$

이 직선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$0=-(2+y_1) \quad \therefore y_1=-2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 $x^2=-2y$ 위의 점이므로

$$x_1^2=-2y_1$$

이 식에 ㉠을 대입하면

$$x_1^2=-2 \times (-2)=4 \quad \therefore x_1=\pm 2$$

즉, 접선의 방정식은

$$y=2x+2 \text{ 또는 } y=-2x+2$$

기울기가 양수인 직선 l 의 방정식은 $y=2x+2$ 이므로

$$A(-2, -2), B(-1, 0)$$

한편 직선 l 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이므로 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이

고 점 $A(-2, -2)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y+2=-\frac{1}{2}(x+2) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x-3$$

$$\therefore C(0, -3)$$

$$\overline{AB}=\sqrt{(-1+2)^2+2^2}=\sqrt{5},$$

$$\overline{AC}=\sqrt{2^2+(-3+2)^2}=\sqrt{5}$$

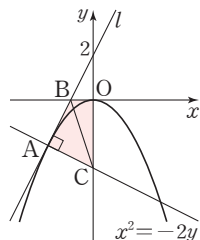
이므로 오른쪽 그림에서 사각형 OBAC의 넓

이는

$$\triangle ACB + \triangle OBC$$

$$=\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} + \frac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{OC}$$

$$=\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} + \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = 4$$



0182 답 ③

접선의 기울기를 $m(m \neq 0)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$y=mx+\frac{3}{m}$$

이 직선이 점 $(k, -2)$ 를 지나므로

$$-2=km+\frac{3}{m} \quad \therefore km^2+2m+3=0$$

이 m 에 대한 이차방정식의 두 실근이 접선의 기울기이고 두 접선이 서로 수직이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{3}{k}=-1 \quad \therefore k=-3$$

만렙 Note

포물선 $y^2=4px$ 밖의 한 점 (a, b) 에서 포물선에 그은 두 접선이 서로 수직이면 점 (a, b) 는 포물선의 준선 $x=-p$ 위에 있다.

따라서 점 $(k, -2)$ 가 포물선 $y^2=12x$ 의 준선 $x=-3$ 위에 있어야 하므로 $k=-3$ 임을 알 수 있다.

0183 답 $2\sqrt{10}$

접선의 기울기를 $m(m \neq 0)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$y=mx+\frac{a}{m} \quad \therefore y=mx+\frac{a}{4m}$$

이 직선이 점 $A(-3, 2)$ 를 지나므로

$$2=-3m+\frac{a}{4m} \quad \therefore 12m^2+8m-a=0 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이 m 에 대한 이차방정식의 두 실근이 접선의 기울기이고 두 접선이 서로 수직이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{a}{12}=-1 \quad \therefore a=12 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 포물선 $y^2=12x$, 즉 $y^2=4 \times 3x$ 의 초점 F의 좌표는 $(3, 0)$

이므로

$$\overline{AF}=\sqrt{(3+3)^2+(-2)^2}=2\sqrt{10} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 접선의 기울기를 m 으로 놓고 m 에 대한 이차방정식 세우기	40 %
② a 의 값 구하기	30 %
③ 선분 AF의 길이 구하기	30 %

0184 답 ②

접선의 기울기를 $m(m \neq 0)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$y=mx-m^2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) \quad \therefore y=mx+\frac{3}{2}m^2$$

이 직선이 점 $P(a, b)$ 를 지나므로

$$b=am+\frac{3}{2}m^2 \quad \therefore 3m^2+2am-2b=0$$

이 m 에 대한 이차방정식의 두 실근이 접선의 기울기이고 두 접선이 서로 수직이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-\frac{2b}{3}=-1 \quad \therefore b=\frac{3}{2}$$

이때 점 $P\left(a, \frac{3}{2}\right)$ 이 직선 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$ 위의 점이므로

$$\frac{3}{2}=-\frac{a}{3}+\frac{1}{2} \quad \therefore a=-3$$

$$\therefore ab=-3 \times \frac{3}{2}=-\frac{9}{2}$$

0185 답 ③

직선 $y=x-3$ 에 수직인 직선의 기울기는 -1 이다.

즉, 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y = -x \pm \sqrt{9 \times (-1)^2 + 4} \quad \therefore y = -x \pm \sqrt{13}$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $y = -x + \sqrt{13}$ 위의 점 $(0, \sqrt{13})$

과 직선 $y = -x - \sqrt{13}$, 즉 $x + y + \sqrt{13} = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0 + \sqrt{13} + \sqrt{13}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{26}$$

다른 풀이

타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 직선 $y = x - 3$ 에 수직인 직선의 방정식을 $y = -x + k$ 라 하자.

이를 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 대입하면

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(-x+k)^2}{4} = 1$$

$$\therefore 13x^2 - 18kx + 9k^2 - 36 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-9k)^2 - 13(9k^2 - 36) = 0, \quad -36k^2 + 468 = 0$$

$$k^2 = 13 \quad \therefore k = \pm\sqrt{13}$$

$$\therefore y = -x \pm \sqrt{13}$$

따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $y = -x + \sqrt{13}$ 위의 점 $(0, \sqrt{13})$

과 직선 $y = -x - \sqrt{13}$, 즉 $x + y + \sqrt{13} = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0 + \sqrt{13} + \sqrt{13}|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \sqrt{26}$$

공통수학2 다시보기

평행한 두 직선 l 과 l' 사이의 거리는 직선 l 위의 한 점과 직선 l' 사이의 거리와 같다.

0186 답 4

직선 $2x - y + 1 = 0$, 즉 $y = 2x + 1$ 과 평행한 직선의 기울기는 2이다.

따라서 타원 $4x^2 + y^2 = 8$, 즉 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{2 \times 2^2 + 8} \quad \therefore y = 2x \pm 4$$

이 직선이 점 $(3a, 7a)$ 를 지나므로

$$7a = 2 \times 3a \pm 4 \quad \therefore a = \pm 4$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 4$

0187 답 ③

타원 $2x^2 + 7y^2 = 14$, 즉 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{2} = 1$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y = -x \pm \sqrt{7 \times (-1)^2 + 2} \quad \therefore y = -x \pm 3$$

즉, 두 점 A, B의 좌표는

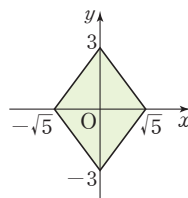
$$(0, 3), (0, -3)$$

타원 $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{2} = 1$ 에서 $\sqrt{7-2} = \sqrt{5}$ 이므로 두 초점 F, F'의 좌표는

$$(\sqrt{5}, 0), (-\sqrt{5}, 0)$$

따라서 오른쪽 그림에서 사각형 AFBF'의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{3 - (-3)\} \times \{\sqrt{5} - (-\sqrt{5})\} = 6\sqrt{5}$$



0188 답 ②

타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{36 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 16} \quad \therefore y = \frac{1}{2}x \pm 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 포물선 $y^2 = ax$, 즉 $y^2 = 4 \times \frac{a}{4}x$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{\frac{a}{4}}{\frac{1}{2}} \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{a}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 a 는 양수이고 두 직선 ①, ②이 일치하므로

$$5 = \frac{a}{2} \quad \therefore a = 10$$

따라서 포물선 $y^2 = 10x$, 즉 $y^2 = 4 \times \frac{5}{2}x$ 의 초점의 x 좌표는 $\frac{5}{2}$ 이다.

0189 답 $2\sqrt{5}$

주어진 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > a > 0$)이라 하면 두 초점의 좌표가 $(0, 2)$, $(0, -2)$ 이므로

$$b^2 - a^2 = 2^2 = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에 접하고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y = -2x \pm \sqrt{a^2 \times (-2)^2 + b^2} \quad \therefore y = -2x \pm \sqrt{4a^2 + b^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

직선 $y = -2x + \sqrt{4a^2 + b^2}$ 이 직선 $y = -2x + 3$ 과 일치하므로

$$\sqrt{4a^2 + b^2} = 3$$

$$\text{양변을 제곱하면 } 4a^2 + b^2 = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{을 연립하여 풀면 } a^2 = 1, b^2 = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

따라서 타원 $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$ 의 장축의 길이는

$$2 \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

채점 기준

① 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > a > 0$)로 놓고 기울기가 -2 인 접선의 방정식 구하기	30 %
② a^2, b^2 의 값 구하기	50 %
③ 타원의 장축의 길이 구하기	20 %

0190 답 ④

타원 $3x^2 + 16y^2 = 16$ 위의 점 $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$-6x + 8y = 16 \quad \therefore y = \frac{3}{4}x + 2$$

이 직선이 점 $(a, a+1)$ 을 지나므로

$$a+1 = \frac{3}{4}a + 2, \quad \frac{a}{4} = 1 \quad \therefore a = 4$$

0191 답 1

타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$ 에서 $\sqrt{12-3}=3$ 이므로 두 초점의 좌표는
 $(0, 3), (0, -3) \quad \therefore F(0, 3)$

타원 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$ 위의 점 $(\sqrt{2}, 2)$ 에서의 접선 l 의 방정식은

$$\frac{\sqrt{2}x}{3} + \frac{2y}{12} = 1 \quad \therefore 2\sqrt{2}x + y - 6 = 0$$

따라서 점 $F(0, 3)$ 과 직선 $2\sqrt{2}x + y - 6 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|0+3-6|}{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}} = 1$$

0192 답 2

타원 $x^2 + 2y^2 = 6$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$ax + 2by = 6$$

이 직선이 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$6b = 6 \quad \therefore b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (a, b) 가 타원 $x^2 + 2y^2 = 6$ 위의 점이므로

$$a^2 + 2b^2 = 6$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$a^2 + 2 \times 1^2 = 6, a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 (\because a > 0)$$

$$\therefore ab = 2 \times 1 = 2$$

0193 답 ④

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1 \quad \therefore y = -\frac{2b^2}{a^2}x + b^2$$

이 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$-\frac{2b^2}{a^2} = -\frac{1}{2} \quad \therefore a^2 = 4b^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 $(2, 1)$ 이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{2^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$\frac{4}{4b^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \frac{2}{b^2} = 1 \quad \therefore b^2 = 2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a^2 = 4 \times 2 = 8$

즉, 타원 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 에서 $\sqrt{8-2} = \sqrt{6}$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0)$$

따라서 두 초점 사이의 거리는 $\sqrt{6} - (-\sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$

0194 답 20

점 P 의 좌표를 (x_1, y_1) ($x_1 > 0, y_1 > 0$)이라 하면 $H(x_1, 0)$

타원 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{6} = 1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a} + \frac{y_1y}{6} = 1 \quad \therefore Q\left(\frac{a}{x_1}, 0\right)$$

따라서 $\overline{OH} = x_1, \overline{OQ} = \frac{a}{x_1}$ 이므로 $\overline{OH} \times \overline{OQ} = a$

이때 $\overline{OH} \times \overline{OQ} = 20$ 이므로 $a = 20$

0195 답 $6\sqrt{2}$

타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{9} + \frac{by}{8} = 1 \quad \therefore y = -\frac{8a}{9b}x + \frac{8}{b}$$

이 직선의 x 절편은 $\frac{9}{a}$, y 절편은 $\frac{8}{b}$ 이므로 삼각형 OAB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{9}{|a|} \times \frac{8}{|b|} = \frac{36}{|ab|}$$

또 점 $P(a, b)$ 가 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{8} = 1$$

이때 $a^2 > 0, b^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a^2}{9} + \frac{b^2}{8} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{9} \times \frac{b^2}{8}} \quad \left(\text{단, 등호는 } \frac{a^2}{9} = \frac{b^2}{8} \text{ 일 때 성립} \right)$$

$$1 \geq \frac{|ab|}{3\sqrt{2}} \quad \therefore |ab| \leq 3\sqrt{2}$$

따라서 $\frac{36}{|ab|} \geq \frac{36}{3\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값은 $6\sqrt{2}$ 이다.

0196 답 ③

점 P 의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 포물선 $y^2 = 12x$, 즉 $y^2 = 4 \times 3x$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y_1y = 6(x + x_1) \quad \therefore y = \frac{6}{y_1}x + \frac{6x_1}{y_1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 타원 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{a} = 1$ 위의 점 $P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{4} + \frac{y_1y}{a} = 1 \quad \therefore y = -\frac{ax_1}{4y_1}x + \frac{a}{y_1} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

두 직선 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 이 서로 수직이므로

$$\frac{6}{y_1} \times \left(-\frac{ax_1}{4y_1}\right) = -1 \quad \therefore y_1^2 = \frac{3a}{2}x_1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

한편 점 $P(x_1, y_1)$ 이 포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점이므로

$$y_1^2 = 12x_1 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{에서 } \frac{3a}{2}x_1 = 12x_1 \quad \therefore a = 8 (\because x_1 \neq 0)$$

참고 주어진 포물선과 타원은 제1사분면과 제4사분면에서 만나므로 점 P 의 x 좌표는 양수이다.

0197 답 ⑤

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점점의 방정식은

$$4x_1x + y_1y = 20$$

이 직선이 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$12x_1 + 2y_1 = 20 \quad \therefore y_1 = -6x_1 + 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 $4x^2 + y^2 = 20$ 위의 점이므로

$$4x_1^2 + y_1^2 = 20$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$4x_1^2 + (-6x_1 + 10)^2 = 20, x_1^2 - 3x_1 + 2 = 0$$

$$(x_1 - 1)(x_1 - 2) = 0 \quad \therefore x_1 = 1 \text{ 또는 } x_1 = 2$$

$\textcircled{1}$ 에서 $x_1 = 1$ 일 때 $y_1 = 4$, $x_1 = 2$ 일 때 $y_1 = -2$ 이므로 점점의 방정식은 $y = -x + 5$ 또는 $y = 4x - 10$

따라서 두 점점의 기울기의 합은 $-1 + 4 = 3$

다른 풀이

$$4x^2 + y^2 = 20 \text{에서 } \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{20} = 1$$

접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{5m^2 + 20}$$

이 직선이 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$2 = 3m \pm \sqrt{5m^2 + 20}, \quad 2 - 3m = \pm \sqrt{5m^2 + 20}$$

양변을 제곱하면

$$(2 - 3m)^2 = 5m^2 + 20 \quad \therefore m^2 - 3m - 4 = 0$$

이 이차방정식의 두 실근이 접선의 기울기이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 함은 3이다.

0198 답 18

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{12} + \frac{y_1y}{16} = 1$$

이 직선이 점 $A(6, 4)$ 를 지나므로

$$\frac{6x_1}{12} + \frac{4y_1}{16} = 1 \quad \therefore y_1 = -2x_1 + 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{12} + \frac{y_1^2}{16} = 1$$

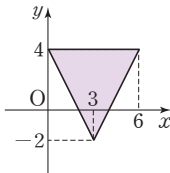
이 식에 ①을 대입하면 $\frac{x_1^2}{12} + \frac{(-2x_1 + 4)^2}{16} = 1$

$$x_1^2 - 3x_1 = 0, \quad x_1(x_1 - 3) = 0 \quad \therefore x_1 = 0 \text{ 또는 } x_1 = 3$$

①에서 $x_1 = 0$ 일 때 $y_1 = 4$, $x_1 = 3$ 일 때 $y_1 = -2$ 이므로 두 점 B, C의 좌표는 $(0, 4)$, $(3, -2)$

따라서 오른쪽 그림에서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times \{4 - (-2)\} = 18$$



0199 답 ②

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{15} + \frac{y_1y}{10} = 1$$

이 직선이 점 $(5, 0)$ 을 지나므로

$$\frac{5x_1}{15} = 1 \quad \therefore x_1 = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{15} + \frac{y_1^2}{10} = 1$$

이 식에 ①을 대입하면 $\frac{3^2}{15} + \frac{y_1^2}{10} = 1, y_1^2 = 4 \quad \therefore y_1 = \pm 2$

즉, $x_1 = 3, y_1 = -2$ 또는 $x_1 = 3, y_1 = 2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = -x + 5 \text{ 또는 } y = x - 5$$

이때 두 접선이 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하려면 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y = -x + 5$, 즉 $x + y - 5 = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 r 와 같아야 하므로

$$\frac{|-5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = r \quad \therefore r = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

0200 답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

점 Q의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x + 5y_1y = 5$$

이 직선이 점 $P(0, a)$ 를 지나므로

$$5ay_1 = 5 \quad \therefore y_1 = \frac{1}{a} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 점 $Q(x_1, y_1)$ 이 타원 $x^2 + 5y^2 = 5$ 위의 점이므로

$$x_1^2 + 5y_1^2 = 5$$

이 식에 ①을 대입하면

$$x_1^2 + 5 \times \left(\frac{1}{a}\right)^2 = 5 \quad \therefore x_1^2 = 5 - \frac{5}{a^2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $\overline{PQ} = \overline{OP}$ 에서 $\overline{PQ}^2 = \overline{OP}^2$ 이므로

$$x_1^2 + (y_1 - a)^2 = a^2 \quad \therefore x_1^2 + y_1^2 - 2ay_1 = 0$$

이 식에 ①, ②을 대입하면

$$\left(5 - \frac{5}{a^2}\right) + \left(\frac{1}{a}\right)^2 - 2a \times \frac{1}{a} = 0$$

$$3 - \frac{4}{a^2} = 0, \quad a^2 = \frac{4}{3} \quad \therefore a = \frac{2\sqrt{3}}{3} (\because a > 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 점 Q의 y좌표를 a에 대한 식으로 나타내기	30 %
② 점 Q의 x좌표와 a 사이의 관계식 구하기	30 %
③ 양수 a의 값 구하기	40 %

0201 답 $6 + 2\sqrt{6}$

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{9} + \frac{y_1y}{3} = 1$$

이 직선이 점 $(0, 3)$ 을 지나므로 $\frac{3y_1}{3} = 1 \quad \therefore y_1 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{3} = 1$$

이 식에 ①을 대입하면

$$\frac{x_1^2}{9} + \frac{1^2}{3} = 1, \quad x_1^2 = 6 \quad \therefore x_1 = \pm\sqrt{6}$$

즉, $P(-\sqrt{6}, 1), Q(\sqrt{6}, 1)$ 이므로 $\overline{PQ} = 2\sqrt{6}$

타원의 다른 한 초점을 F' 이라 하면 $\overline{PF} = \overline{QF'}$ 이고 타원의 정의에 의하여

$$\overline{QF} + \overline{QF'} = 2 \times 3 = 6$$

따라서 삼각형 PFQ의 둘레의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{QF} + \overline{PQ} = \overline{QF'} + \overline{QF} + \overline{PQ} = 6 + 2\sqrt{6}$$

0202 답 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \pm 4$

x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 30° 인 직선의 기울기는

$$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 쌍곡선 $6x^2 - 2y^2 = -36$, 즉 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{18} = -1$ 에 접하고 기울

기가 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \pm \sqrt{18 - 6 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} \quad \therefore y = \frac{\sqrt{3}}{3}x \pm 4$$

0203 답 $\frac{3}{2}$

직선 $2x - y + 1 = 0$ 을 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$$2(x - k) - y + 1 = 0 \quad \therefore y = 2x - 2k + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{8} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{3 \times 2^2 - 8} \quad \therefore y = 2x \pm 2$$

이 직선이 직선 $\textcircled{1}$ 과 일치하므로

$$-2k + 1 = \pm 2 \quad \therefore k = \frac{3}{2} \quad (\because k > 0)$$

0204 답 ②

쌍곡선 $ax^2 - y^2 = a$, 즉 $x^2 - \frac{y^2}{a} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{1 \times 3^2 - a} \quad \therefore y = 3x \pm \sqrt{9 - a}$$

이때 두 직선 사이의 거리는 직선 $y = 3x + \sqrt{9 - a}$ 위의 점 $(0, \sqrt{9 - a})$ 와 직선 $y = 3x - \sqrt{9 - a}$, 즉 $3x - y - \sqrt{9 - a} = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0 - \sqrt{9 - a} - \sqrt{9 - a}|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{2\sqrt{9 - a}}{\sqrt{10}}$$

$$\text{즉, } \frac{2\sqrt{9 - a}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5} \text{이므로}$$

$$10\sqrt{9 - a} = 20, \sqrt{9 - a} = 2$$

양변을 제곱하면

$$9 - a = 4 \quad \therefore a = 5$$

0205 답 $\sqrt{5}$

쌍곡선이 점 $(\sqrt{2}, 0)$ 을 지나고 점근선이 원점을 지나므로 주어진 쌍

곡선의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)이라 하면

$$\frac{(\sqrt{2})^2}{a^2} = 1, a^2 = 2 \quad \therefore a = \sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

또 점근선의 방정식이 $y = \pm 2x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = 2 \quad (\because b > 0) \quad \therefore b = 2a = 2\sqrt{2}$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{8} = 1$ 에 접하고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{2m^2 - 8} \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

두 점 A, B의 좌표는

$$(0, \sqrt{2m^2 - 8}), (0, -\sqrt{2m^2 - 8})$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{2m^2 - 8} - (-\sqrt{2m^2 - 8}) = 2\sqrt{2m^2 - 8} \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$$

$$\text{즉, } 2\sqrt{2m^2 - 8} = 2\sqrt{2} \text{이므로 } \sqrt{2m^2 - 8} = \sqrt{2}$$

양변을 제곱하면

$$2m^2 - 8 = 2, m^2 = 5$$

$$\therefore m = \sqrt{5} \quad (\because m > 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 쌍곡선의 방정식을 구한 후 기울기가 m 인 접선의 방정식 구하기	50 %
② 선분 AB의 길이를 m 에 대한 식으로 나타내기	30 %
③ 양수 m 의 값 구하기	20 %

0206 답 $\frac{5}{3}$

쌍곡선 $4x^2 - 5y^2 = 16$ 위의 점 $(3, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$12x - 10y = 16 \quad \therefore y = \frac{6}{5}x - \frac{8}{5}$$

이 직선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{5}{6}$ 이므로 기울기가 $-\frac{5}{6}$ 이고

점 $(2, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{5}{6}(x - 2) \quad \therefore y = -\frac{5}{6}x + \frac{5}{3}$$

따라서 구하는 y 절편은 $\frac{5}{3}$ 이다.

0207 답 ⑤

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = -1$ 위의 점 $(2, 2\sqrt{6})$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{4} - \frac{2\sqrt{6}y}{12} = -1 \quad \therefore y = \frac{\sqrt{6}}{2}x + \sqrt{6}$$

$$\therefore A(-2, 0)$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = -1$ 에서 $\sqrt{4 + 12} = 4$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(0, 4), (0, -4) \quad \therefore F(0, 4)$$

$$\therefore \overline{AF} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

0208 답 ②

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$ax - by = 1 \quad \therefore y = \frac{a}{b}x - \frac{1}{b}$$

이 직선의 기울기가 2이므로 $\frac{a}{b} = 2 \quad \therefore a = 2b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

또 점 $P(a, b)$ 가 쌍곡선 $x^2 - y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$a^2 - b^2 = 1$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$(2b)^2 - b^2 = 1, b^2 = \frac{1}{3} \quad \therefore b = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because b > 0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore ab = \frac{2}{3}$$

0209 답 $\frac{\sqrt{2}}{16}$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{(1-a)^2} = 1$ 위의 점 $(\sqrt{2}a, 1-a)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\sqrt{2}ax}{a^2} - \frac{(1-a)y}{(1-a)^2} = 1 \quad \therefore y = \frac{\sqrt{2}(1-a)}{a}x + a - 1$$

이 직선의 x 절편은 $\frac{a}{\sqrt{2}}$, y 절편은 $a - 1$ 이므로 직선과 x 축, y 축으로

둘러싸인 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{|a|}{\sqrt{2}} \times |a - 1| = \frac{1}{2} \times \frac{a}{\sqrt{2}} \times (1 - a) \quad (\because 0 < a < 1)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}(-a^2 + a) = -\frac{\sqrt{2}}{4}\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{16}$$

따라서 $a = \frac{1}{2}$ 일 때 최댓값은 $\frac{\sqrt{2}}{16}$ 이다.

0210 [답] 44

쌍곡선 $x^2 - 2y^2 = a$ 위의 점 $(b, 1)$ 에서의 접선의 방정식은
 $bx - 2y = a$

$$\therefore y = \frac{b}{2}x - \frac{a}{2} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

쌍곡선 $x^2 - 2y^2 = a$, 즉 $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{\frac{a}{2}} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \sqrt{\frac{a}{2}}x \quad \therefore y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

이때 $b > 0$ 이므로 직선 $\textcircled{i}$ 은 직선 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x$ 와 서로 수직이다.

$$\text{즉, } \frac{b}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 \text{이므로 } b = 2\sqrt{2}$$

따라서 점 $(2\sqrt{2}, 1)$ 이 쌍곡선 $x^2 - 2y^2 = a$ 위의 점이므로
 $(2\sqrt{2})^2 - 2 \times 1^2 = a \quad \therefore a = 6 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$

$$\therefore a^2 + b^2 = 36 + 8 = 44 \quad \dots\dots \textcircled{iv}$$

채점 기준

① 점 $(b, 1)$ 에서의 접선의 방정식 구하기	20 %
② 점근선의 방정식 구하기	20 %
③ 양수 a , b 의 값 구하기	50 %
④ $a^2 + b^2$ 의 값 구하기	10 %

0211 [답] 12

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 12$ 위의 점 $(4, 2)$ 에서의 접선의 방정식은
 $4x - 2y = 12 \quad \therefore y = 2x - 6$

쌍곡선 $x^2 - y^2 = 12$, 즉 $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{12} = 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = \pm x$

오른쪽 그림과 같이 직선 $y = 2x - 6$

과 두 점근선 $y = x$, $y = -x$ 의 교점

을 각각 P, Q라 하자.

$$2x - 6 = x \text{에서 } x = 6$$

$$\therefore P(6, 6)$$

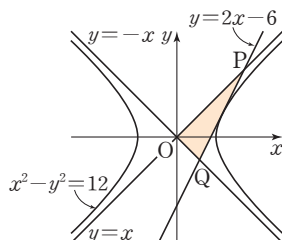
$$2x - 6 = -x \text{에서 } x = 2$$

$$\therefore Q(2, -2)$$

이때 두 점근선이 서로 수직이므로 원점 O에 대하여 삼각형 POQ는
 $\angle POQ = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

따라서 $OP = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$, $OQ = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로 구하
 는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times OP \times OQ = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 12$$



0212 [답] ①

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$x_1x - 4y_1y = -4$$

이 직선이 점 $(2, 0)$ 을 지나므로

$$2x_1 = -4 \quad \therefore x_1 = -2 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 쌍곡선 $x^2 - 4y^2 = -4$ 위의 점이므로

$$x_1^2 - 4y_1^2 = -4$$

이 식에 $\textcircled{i}$ 을 대입하면

$$(-2)^2 - 4y_1^2 = -4, y_1^2 = 2$$

$$\therefore y_1 = \pm\sqrt{2}$$

따라서 $x_1 = -2, y_1 = -\sqrt{2}$ 또는 $x_1 = -2, y_1 = \sqrt{2}$ 이므로 두 점 A,
 B의 좌표는

$$(-2, -\sqrt{2}), (-2, \sqrt{2})$$

$$\therefore AB = \sqrt{2} - (-\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

0213 [답] ②

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$3x_1x - y_1y = 3$$

이 직선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$-y_1 = 3 \quad \therefore y_1 = -3 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 쌍곡선 $3x^2 - y^2 = 3$ 위의 점이므로

$$3x_1^2 - y_1^2 = 3$$

이 식에 $\textcircled{i}$ 을 대입하면

$$3x_1^2 - (-3)^2 = 3, x_1^2 = 4 \quad \therefore x_1 = \pm 2$$

즉, $x_1 = -2, y_1 = -3$ 또는 $x_1 = 2, y_1 = -3$ 이므로 접선의 방정식은

$$y = -2x + 1 \text{ 또는 } y = 2x + 1$$

따라서 기울기가 양수인 직선 $y = 2x + 1$ 이 타원

$3(x-a)^2 + (y+2a)^2 = 3$ 의 넓이를 이등분하려면 타원의 중심

$(a, -2a)$ 를 지나야 하므로

$$-2a = 2a + 1 \quad \therefore a = -\frac{1}{4}$$

0214 [답] $\frac{\sqrt{3}}{3}$

접선의 기울기를 m 이라 하면 접선의 방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{9m^2 - 5}$$

이 직선이 점 $(a, 1)$ 을 지나므로

$$1 = am \pm \sqrt{9m^2 - 5}, 1 - am = \pm \sqrt{9m^2 - 5}$$

양변을 제곱하면 $(1 - am)^2 = 9m^2 - 5$

$$\therefore (a^2 - 9)m^2 - 2am + 6 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이 m 에 대한 이차방정식의 두 실근이 접선의 기울기이고 두 접선이
 서로 수직이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{6}{a^2 - 9} = -1, a^2 = 3 \quad \therefore a = -\sqrt{3} (\because a < 0)$$

이를 $\textcircled{i}$ 에 대입하여 정리하면

$$3m^2 - \sqrt{3}m - 3 = 0$$

따라서 두 접선의 기울기의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에
 의하여 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

0215 [답] ②

포물선 $y^2 = 2x$ 위의 점과 직선 $x - 2y + 6 = 0$ 사이의 거리가 최소이
 려면 포물선 위의 점에서의 접선이 직선 $x - 2y + 6 = 0$ 과 평행해야
 한다.

직선 $x - 2y + 6 = 0$, 즉 $y = \frac{1}{2}x + 3$ 과 평행한 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이다.

따라서 포물선 $y^2 = 2x$, 즉 $y^2 = 4 \times \frac{1}{2}x$ 에 접하고 기울기가 $\frac{1}{2}$ 인 직
 선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + 1$$

따라서 구하는 최솟값은 직선 $y = \frac{1}{2}x + 1$ 위의 점 $(0, 1)$ 과 직선 $x - 2y + 6 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0 - 2 + 6|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

0216 ①

쌍곡선 $2x^2 - y^2 = 4$ 위의 점 P와 직선 $y = 2x + 8$ 사이의 거리가 최소이려면 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선이 직선 $y = 2x + 8$ 과 평행해야 한다.

쌍곡선 $2x^2 - y^2 = 4$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2ax - by = 4 \quad \therefore y = \frac{2a}{b}x - \frac{4}{b}$$

이 직선이 직선 $y = 2x + 8$ 과 평행해야 하므로

$$\frac{2a}{b} = 2 \quad \therefore b = a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 $P(a, b)$ 가 쌍곡선 $2x^2 - y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$2a^2 - b^2 = 4$$

이 식에 ①을 대입하면

$$2a^2 - a^2 = 4, a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 (\because a > 0)$$

이를 ①에 대입하면 $b = 2$

$$\therefore ab = 4$$

0217 ② $2\sqrt{2}$

선분 PH의 길이는 점 P와 직선 $y = -x + 7$ 사이의 거리와 같다. 즉, 선분 PH의 길이가 최소이려면 타원 위의 점 P에서의 접선이 직선 $y = -x + 7$ 과 평행해야 한다.

직선 $y = -x + 7$ 과 평행한 직선의 기울기는 -1 이므로 타원

$4x^2 + 5y^2 = 20$, 즉 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ 에 접하고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y = -x \pm \sqrt{5 \times (-1)^2 + 4} \quad \therefore y = -x \pm 3 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

오른쪽 그림에서 구하는 최솟값

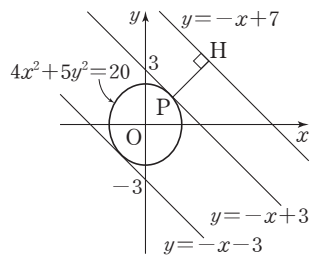
은 직선 $y = -x + 3$ 위의 점

$(0, 3)$ 과 직선 $y = -x + 7$, 즉

$x + y - 7 = 0$ 사이의 거리와 같

으므로

$$\frac{|0 + 3 - 7|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$



채점 기준

① 직선 $y = -x + 7$ 과 평행한 점 P에서의 접선의 방정식 구하기	50 %
② 선분 PH의 길이의 최솟값 구하기	50 %

0218 ② $y = -2x - 3$

삼각형 AFP에서 밑변을 선분 AF로 생각하면 선분 AF의 길이는 일정하므로 삼각형 AFP의 넓이가 최대이려면 타원 위의 점 P에서의 접선이 직선 AF와 평행하고 y절편이 음수이어야 한다.

이때 타원 $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$ 에서 초점 F의 좌표는 $(0, 2)$, 꼭짓점 A의 좌표는 $(1, 0)$ 이므로 직선 AF의 기울기는

$$\frac{0 - 2}{1 - 0} = -2$$

즉, 타원 $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$ 에 접하고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y = -2x \pm \sqrt{1 \times (-2)^2 + 5}$$

$$\therefore y = -2x \pm 3$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $y = -2x - 3$ 이다.

0219 ③

점 $A(-3, 6)$ 과 포물선 $y^2 = -4x$ 위의 점 P 사이의 거리가 최소이려면 포물선 위의 점 P에서의 접선이 직선 AP와 서로 수직이어야 한다.

점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 포물선 $y^2 = -4x$ 위의 점

$P(x_1, y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = -2(x + x_1) \quad \therefore y = -\frac{2}{y_1}x - \frac{2x_1}{y_1}$$

이 직선이 직선 AP와 서로 수직이어야 하므로

$$\left(-\frac{2}{y_1}\right) \times \frac{y_1 - 6}{x_1 + 3} = -1, 2y_1 - 12 = x_1 y_1 + 3y_1$$

$$\therefore x_1 y_1 + y_1 + 12 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 $P(x_1, y_1)$ 이 포물선 $y^2 = -4x$ 위의 점이므로

$$y_1^2 = -4x_1 \quad \therefore x_1 = -\frac{y_1^2}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$-\frac{y_1^2}{4} \times y_1 + y_1 + 12 = 0, y_1^3 - 4y_1 - 48 = 0$$

$$(y_1 - 4)(y_1^2 + 4y_1 + 12) = 0$$

$$\therefore y_1 = 4 (\because y_1^2 + 4y_1 + 12 > 0)$$

이를 ②에 대입하면

$$x_1 = -\frac{4^2}{4} = -4$$

따라서 점 P의 좌표가 $(-4, 4)$ 일 때 두 점 A, P 사이의 거리가 최소이므로 구하는 최솟값은

$$\sqrt{(-4 + 3)^2 + (4 - 6)^2} = \sqrt{5}$$

0220 ②

삼각형 ABP에서 밑변을 선분 AB로 생각하면 선분 AB의 길이는 일정하므로 삼각형 ABP의 넓이가 최소이려면 쌍곡선 위의 점 P에서의 접선이 직선 AB와 평행해야 한다.

직선 AB의 기울기는 $\frac{-1 - 3}{0 - 2} = 2$ 이므로 쌍곡선 $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{8} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{3 \times 2^2 - 8} \quad \therefore y = 2x \pm 2$$

오른쪽 그림에서 점 P와 직선 AB

사이의 거리의 최솟값은 점

$A(2, 3)$ 과 직선 $y = 2x - 2$, 즉

$2x - y - 2 = 0$ 사이의 거리와 같으

므로

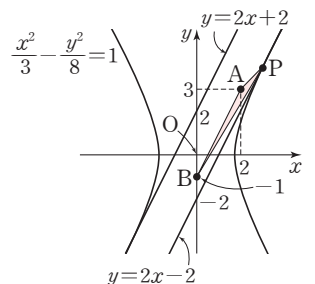
$$\frac{|4 - 3 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2)^2 + (-1 - 3)^2} = 2\sqrt{5}$$

이므로 삼각형 ABP의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 1$$



0221 답 ③

직선 $x+2y-5=0$, 즉 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$ 에 수직인 직선의 기울기는 2이다.

따라서 포물선 $y^2=-6x$, 즉 $y^2=4\times(-\frac{3}{2})x$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y=2x+\frac{-\frac{3}{2}}{2} \quad \therefore y=2x-\frac{3}{4}$$

이 직선이 점 $(k, 1)$ 을 지나므로

$$1=2k-\frac{3}{4} \quad \therefore k=\frac{7}{8}$$

0222 답 $y=x+5$

포물선 $y^2=4px$ 의 준선의 방정식은 $x=-p$

점 $A(p, 2p)$ 에서 준선 $x=-p$ 까지의 거리가 10이므로

$$p-(-p)=10, 2p=10 \quad \therefore p=5$$

따라서 포물선 $y^2=20x$ 위의 점 $A(5, 10)$ 에서의 접선의 방정식은

$$10y=10(x+5) \quad \therefore y=x+5$$

0223 답 ③

포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(n^2, 2n)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2ny=2(x+n^2) \quad \therefore x-ny+n^2=0$$

이 직선이 원 C 와 만나려면 원의 중심 $(1, 0)$ 과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이인 6 이하이어야 하므로

$$\frac{|1-0+n^2|}{\sqrt{1^2+(-n)^2}} \leq 6, \sqrt{1+n^2} \leq 6$$

양변을 제곱하면

$$1+n^2 \leq 36 \quad \therefore n^2 \leq 35$$

따라서 자연수 n 은 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

0224 답 -6

점점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 점선의 방정식은

$$y_1y=6(x+x_1)$$

이 직선이 점 $(-2, 1)$ 을 지나므로

$$y_1=6(-2+x_1) \quad \therefore y_1=6x_1-12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 포물선 $y^2=12x$ 위의 점이므로

$$y_1^2=12x_1$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$(6x_1-12)^2=12x_1, 3x_1^2-13x_1+12=0$$

$$(3x_1-4)(x_1-3)=0 \quad \therefore x_1=\frac{4}{3} \text{ 또는 } x_1=3$$

$\textcircled{1}$ 에서 $x_1=\frac{4}{3}$ 일 때 $y_1=-4$, $x_1=3$ 일 때 $y_1=6$ 이므로 점선의 방정

$$\text{식은 } y=-\frac{3}{2}x-2 \text{ 또는 } y=x+3$$

따라서 기울기가 음수인 직선 $y=-\frac{3}{2}x-2$ 가 점 $(a, 7)$ 을 지나므로

$$7=-\frac{3}{2}a-2 \quad \therefore a=-6$$

0225 답 ②

접선의 기울기를 m ($m \neq 0$)이라 하면 점선의 방정식은

$$y=mx+\frac{p}{m}$$

이 직선이 점 $(p+4, 2)$ 를 지나므로

$$2=m(p+4)+\frac{p}{m} \quad \therefore (p+4)m^2-2m+p=0$$

이 m 에 대한 이차방정식의 두 실근이 점선의 기울기이고 두 접선이 서로 수직이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{p}{p+4}=-1, p=-p-4 \quad \therefore p=-2$$

0226 답 $2\sqrt{6}$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{2}=1$ 에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x \pm \sqrt{a^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2}$$

$$\therefore y=-\frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2}$$

이 직선의 y 절편이 2이므로 $\sqrt{\frac{a^2}{4} + 2}=2$

$$\text{양변을 제곱하면 } \frac{a^2}{4} + 2 = 4 \quad \therefore a^2 = 8$$

즉, 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 에서 $\sqrt{8-2}=\sqrt{6}$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0)$$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$\sqrt{6}-(-\sqrt{6})=2\sqrt{6}$$

0227 답 24

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ 의 두 꼭짓점 A, B의 좌표는 각각

$$(6, 0), (0, 4)$$

즉, 두 점 A, B를 지나는 직선의 기울기는 $-\frac{2}{3}$ 이므로 타원

$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ 에 접하고 기울기가 $-\frac{2}{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y=-\frac{2}{3}x \pm \sqrt{36 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 16}$$

$$\therefore y=-\frac{2}{3}x \pm 4\sqrt{2}$$

x 절편과 y 절편이 모두 양수인 직선 $y=-\frac{2}{3}x+4\sqrt{2}$ 가 x 축, y 축과 만

나는 두 점 C, D의 좌표는 각각

$$(6\sqrt{2}, 0), (0, 4\sqrt{2})$$

따라서 삼각형 OCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 24$$

0228 답 ③

타원 $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 (a, b) 에서의 점선의 방정식은

$$\frac{ax}{32}+\frac{by}{8}=1$$

이 직선이 점 $(8, 0)$ 을 지나므로

$$\frac{8a}{32}=1 \quad \therefore a=4$$

또 점 $(4, b)$ 가 타원 $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{4^2}{32} + \frac{b^2}{8} = 1, b^2 = 4 \quad \therefore b = 2 (\because b > 0)$$

$$\therefore a + b = 4 + 2 = 6$$

0229 [답] 15

타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1 \quad \therefore y = -\frac{2b^2}{a^2}x + b^2$$

이 직선의 기울기가 -1 이므로

$$-\frac{2b^2}{a^2} = -1 \quad \therefore a^2 = 2b^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 $(2, 1)$ 이 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{2^2}{a^2} + \frac{1^2}{b^2} = 1 \quad \therefore a^2 + 4b^2 = a^2b^2$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면 $2b^2 + 4b^2 = 2b^2 \times b^2 \quad \therefore b^2 = 3 (\because b \neq 0)$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $a^2 = 2 \times 3 = 6$

$$\therefore 2a^2 + b^2 = 2 \times 6 + 3 = 15$$

0230 [답] $\frac{2}{3}$

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$4x_1x + y_1y = 4$$

이 직선이 점 $P(1, 2)$ 를 지나므로

$$4x_1 + 2y_1 = 4 \quad \therefore y_1 = -2x_1 + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 타원 $4x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로 $4x_1^2 + y_1^2 = 4$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$4x_1^2 + (-2x_1 + 2)^2 = 4, x_1^2 - x_1 = 0$$

$$x_1(x_1 - 1) = 0 \quad \therefore x_1 = 0 \text{ 또는 } x_1 = 1$$

따라서 두 점 A, B의 x 좌표는 0, 1이므로 삼각형 ABP의 무게중심의 x 좌표는

$$\frac{0+1+1}{3} = \frac{2}{3}$$

0231 [답] 4

타원 $x^2 + 4y^2 = a^2$, 즉 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{4}} = 1$ 에 접하고 기울기가 m 인 직선의

방정식은

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + \frac{a^2}{4}}$$

이 직선이 점 $(2, 4)$ 를 지나므로

$$4 = 2m \pm \sqrt{a^2m^2 + \frac{a^2}{4}}, 4 - 2m = \pm \sqrt{a^2m^2 + \frac{a^2}{4}}$$

양변을 제곱하면 $(4 - 2m)^2 = a^2m^2 + \frac{a^2}{4}$

$$\therefore (a^2 - 4)m^2 + 16m + \frac{a^2}{4} - 16 = 0$$

이 m 에 대한 이차방정식의 두 실근이 접선의 기울기이고 두 접선이 서로 수직이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{\frac{a^2}{4} - 16}{a^2 - 4} = -1, \frac{a^2}{4} - 16 = -a^2 + 4$$

$$a^2 = 16 \quad \therefore a = 4 (\because a > 0)$$

0232 [답] ①

쌍곡선 $\frac{x^2}{k} - \frac{y^2}{3} = 1$ 에 접하고 기울기가 $\sqrt{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{2}x \pm \sqrt{k \times (\sqrt{2})^2 - 3}$$

$$\therefore y = \sqrt{2}x \pm \sqrt{2k - 3}$$

직선 $y = \sqrt{2}x - \sqrt{2k - 3}$ 이 직선 $y = \sqrt{2}x - 3$ 과 일치하므로

$$-\sqrt{2k - 3} = -3$$

양변을 제곱하면

$$2k - 3 = 9 \quad \therefore k = 6$$

따라서 쌍곡선 $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ 의 주축의 길이는

$$2 \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$$

0233 [답] -16

쌍곡선 $x^2 - 3y^2 = 24$, 즉 $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{8} = 1$ 의 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}x \quad \therefore y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

기울기가 양수인 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 에 수직인 직선의 기울기는 $-\sqrt{3}$ 이다.

즉, 쌍곡선 $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{8} = 1$ 에 접하고 기울기가 $-\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = -\sqrt{3}x \pm \sqrt{24 \times (-\sqrt{3})^2 - 8}$$

$$\therefore y = -\sqrt{3}x \pm 8$$

이 직선이 점 $(k, 4)$ 를 지나므로

$$4 = -\sqrt{3}k \pm 8$$

$$\therefore k = -4\sqrt{3} \text{ 또는 } k = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

따라서 모든 k 의 값의 곱은

$$-4\sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} = -16$$

0234 [답] ②

$3x^2 + 4y^2 = 16$ 과 $x^2 - 2y^2 = 2$ 를 연립하여 풀면

$$x^2 = 4, y^2 = 1$$

이때 점 P는 제1사분면 위의 점이므로 $P(2, 1)$

타원 $3x^2 + 4y^2 = 16$ 위의 점 $P(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$6x + 4y = 16 \quad \therefore y = -\frac{3}{2}x + 4$$

$$\therefore m = -\frac{3}{2}$$

또 쌍곡선 $x^2 - 2y^2 = 2$ 위의 점 $P(2, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x - 2y = 2 \quad \therefore y = x - 1$$

$$\therefore n = 1$$

$$\therefore m + n = -\frac{3}{2} + 1 = -\frac{1}{2}$$

0235 [답] ②

접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{2} - y_1y = 1$$

이 직선이 점 $A(3, 2)$ 를 지나므로

$$\frac{3x_1}{2} - 2y_1 = 1 \quad \therefore y_1 = \frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 (x_1, y_1) 이 쌍곡선 $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{x_1^2}{2} - y_1^2 = 1$$

이 식에 ㉠을 대입하면

$$\frac{x_1^2}{2} - \left(\frac{3}{4}x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 = 1, \quad x_1^2 - 12x_1 + 20 = 0$$

$$(x_1 - 2)(x_1 - 10) = 0 \quad \therefore x_1 = 2 \text{ 또는 } x_1 = 10$$

㉠에서 $x_1 = 2$ 일 때 $y_1 = 1$, $x_1 = 10$ 일 때 $y_1 = 7$ 이므로 두 점 P, Q의 좌표는

$$(2, 1), (10, 7)$$

즉, 두 점 P, Q를 지나는 직선 l의 방정식은

$$y - 1 = \frac{7-1}{10-2}(x-2)$$

$$\therefore 3x - 4y - 2 = 0$$

따라서 점 A(3, 2)와 직선 $3x - 4y - 2 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|9-8-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{1}{5}$$

0236 $\sqrt{5}$

타원 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ 위의 점과 직선 $2x - y + 9 = 0$ 사이의 거리가 최소
이려면 타원 위의 점에서의 접선이 직선 $2x - y + 9 = 0$ 과 평행해야
한다.

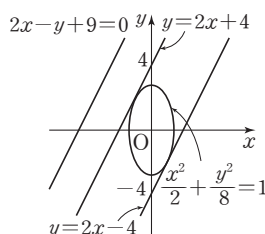
직선 $2x - y + 9 = 0$, 즉 $y = 2x + 9$ 와 평행한 직선의 기울기는 2이므로
타원 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y = 2x \pm \sqrt{2 \times 2^2 + 8}$$

$$\therefore y = 2x \pm 4$$

오른쪽 그림에서 구하는 최솟값은 직선 $y = 2x + 4$ 위의 점 (0, 4)와 직선 $2x - y + 9 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|0-4+9|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \sqrt{5}$$



0237 ③

포물선 $x^2 = -\frac{1}{4}y$ 위의 점 P와 직선 $y = -2x + 3$ 사이의 거리가 최소
이려면 포물선 위의 점 P에서의 접선이 직선 $y = -2x + 3$ 과 평행
해야 한다.

포물선 $x^2 = -\frac{1}{4}y$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 접선의 방정식은

$$ax = -\frac{1}{8}(y+b)$$

$$\therefore y = -8ax - b$$

이 직선이 직선 $y = -2x + 3$ 과 평행해야 하므로

$$-8a = -2 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

또 점 $P(\frac{1}{4}, b)$ 가 포물선 $x^2 = -\frac{1}{4}y$ 위의 점이므로

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = -\frac{1}{4}b \quad \therefore b = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore 8a - 4b = 8 \times \frac{1}{4} - 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 3$$

0238 8

접선의 기울기를 m ($m \neq 0$)이라 하면 접선의 방정식은

$$y = mx + \frac{2}{m}$$

이 직선이 점 $(-4, k)$ 를 지나므로

$$k = -4m + \frac{2}{m}$$

$$\therefore 4m^2 + km - 2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이 m 에 대한 이차방정식의 두 실근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{k}{4}, \quad \alpha\beta = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

이때 $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$ 이므로

$$(\sqrt{6})^2 = \left(-\frac{k}{4}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$6 = \frac{k^2}{16} + 2, \quad k^2 = 64$$

$$\therefore k = 8 \quad (\because k > 0) \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 접선의 기울기를 m 으로 놓고 m 에 대한 이차방정식 세우기	40 %
② $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 의 값 구하기	30 %
③ 양수 k 의 값 구하기	30 %

0239 -20

타원 $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ 위의 점 (4, 1)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{20} + \frac{y}{5} = 1 \quad \therefore y = -x + 5 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

포물선 $y^2 = kx$, 즉 $y^2 = 4 \times \frac{k}{4}x$ 에 접하고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$$y = -x - \frac{k}{4} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

두 직선 ㉠, ㉡이 일치하므로

$$5 = -\frac{k}{4} \quad \therefore k = -20 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 타원 위의 점 (4, 1)에서의 접선의 방정식 구하기	40 %
② 포물선에 접하고 기울기가 -1인 직선의 방정식 구하기	40 %
③ k 의 값 구하기	20 %

0240 92

쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{ax}{8} - \frac{by}{4} = 1 \quad \therefore y = \frac{a}{2b}x - \frac{4}{b} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이 직선이 원 $(x-1)^2 + y^2 = 4$ 의 넓이를 이등분하려면 원의 중심 (1, 0)을 지나야 하므로

$$0 = \frac{a}{2b} - \frac{4}{b} \quad \therefore a = 8$$

또 점 $(8, b)$ 가 쌍곡선 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ 위의 점이므로

$$\frac{8^2}{8} - \frac{b^2}{4} = 1 \quad \therefore b^2 = 28 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 8^2 + 28 = 92 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 점 (a, b) 에서의 접선의 방정식 구하기	30 %
② a, b^2 의 값 구하기	50 %
③ a^2+b^2 의 값 구하기	20 %

C 실력 향상

41쪽

0241 답 $\frac{27\sqrt{2}}{2}$

포물선 $y^2=6x$, 즉 $y^2=4 \times \frac{3}{2}x$ 의 초점 F의 좌표는 $(\frac{3}{2}, 0)$ 이고 준선의 방정식은 $x=-\frac{3}{2}$ 이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 준선

$x=-\frac{3}{2}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면 포물선의 정의에 의하여

$$\overline{PH}=\overline{PF}=\frac{9}{2}$$

이때 점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면

$$x_1-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{2} \quad \therefore x_1=3$$

또 점 P($3, y_1$)이 포물선 $y^2=6x$ 위의 점이므로

$$y_1^2=6 \times 3=18 \quad \therefore y_1=3\sqrt{2} \quad (\because y_1>0)$$

즉, 포물선 $y^2=6x$ 위의 점 P($3, 3\sqrt{2}$)에서의 접선 l의 방정식은

$$3\sqrt{2}y=3(x+3) \quad \therefore y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore Q(-3, 0)$$

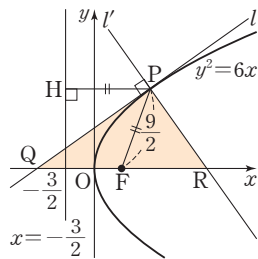
직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $-\sqrt{2}$ 이므로 점 P($3, 3\sqrt{2}$)를 지나고 기울기가 $-\sqrt{2}$ 인 직선 l'의 방정식은

$$y-3\sqrt{2}=-\sqrt{2}(x-3) \quad \therefore y=-\sqrt{2}x+6\sqrt{2}$$

$$\therefore R(6, 0)$$

따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \{6-(-3)\} \times 3\sqrt{2}=\frac{27\sqrt{2}}{2}$$



0242 답 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 의 두 꼭짓점 (2, 0), (0, 1)을 지나고 직선의 방정식은

$$y=\frac{1-0}{0-2}(x-2) \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 에 접하고 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 인 직선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}x \pm \sqrt{a^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b^2} \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$$

직선 $y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}$ 이 직선 ①과 일치하므로

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}+b^2}=1$$

$$\text{양변을 제곱하면 } \frac{a^2}{4}+b^2=1 \quad \therefore a^2+4b^2=4$$

이 식과 $a^2+b^2=2$ 를 연립하여 풀면 $a^2=\frac{4}{3}, b^2=\frac{2}{3}$

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 에서 $\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\frac{4}{3}-\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right)$$

따라서 두 초점 사이의 거리는

$$\frac{\sqrt{6}}{3}-\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

0243 답 ①

점 P의 좌표를 $\left(\frac{1}{n}, y_1\right)$ ($y_1>0$)이라 하면 타원 C_1 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\frac{1}{n}x}{\frac{1}{n}}+y_1y=1 \quad \therefore \frac{1}{2n}x+y_1y=1$$

$$y=0\text{을 대입하여 풀면 } x=2n \quad \therefore a=2n$$

또 점 Q의 좌표를 $\left(\frac{1}{n}, y_2\right)$ ($y_2>0$)라 하면 타원 C_2 위의 점 Q에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\frac{1}{n}x}{\frac{1}{n}}+\frac{y_2y}{2}=1$$

$$y=0\text{을 대입하여 풀면 } x=\frac{n}{2} \quad \therefore b=\frac{n}{2}$$

$$\text{즉, } a-b=2n-\frac{n}{2}=\frac{3}{2}n\text{이므로 } 6 \leq a-b \leq 15\text{에서}$$

$$6 \leq \frac{3}{2}n \leq 15 \quad \therefore 4 \leq n \leq 10$$

따라서 자연수 n은 4, 5, 6, ..., 10의 7개이다.

0244 답 ③

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 P(4, k)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2}-\frac{ky}{b^2}=1 \quad \therefore y=\frac{4b^2}{a^2k}x-\frac{b^2}{k}$$

$$\therefore Q\left(\frac{a^2}{4}, 0\right), R\left(0, -\frac{b^2}{k}\right)$$

삼각형 QOR의 넓이 A_1 은

$$A_1=\frac{1}{2} \times \overline{OQ} \times \overline{OR}=\frac{1}{2} \times \frac{a^2}{4} \times \frac{b^2}{k}=\frac{a^2b^2}{8k}$$

삼각형 PRS의 넓이 A_2 는

$$A_2=\frac{1}{2} \times \overline{PS} \times \overline{OS}=\frac{1}{2} \times k \times 4=2k$$

이때 $A_1:A_2=9:4$ 에서 $4A_1=9A_2$ 이므로

$$4 \times \frac{a^2b^2}{8k}=9 \times 2k, \frac{a^2b^2}{2k}=18k$$

$$a^2b^2=36k^2 \quad \therefore k^2=\frac{a^2b^2}{36} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 점 P(4, k)가 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이므로

$$\frac{16}{a^2}-\frac{k^2}{b^2}=1$$

이 식에 ①을 대입하면

$$\frac{16}{a^2}-\frac{1}{b^2} \times \frac{a^2b^2}{36}=1, \frac{16}{a^2}-\frac{a^2}{36}=1$$

$$a^4+36a^2-576=0, (a^2+48)(a^2-12)=0$$

$$\text{그런데 } a^2+48>0\text{이므로 } a^2=12 \quad \therefore |a|=2\sqrt{3}$$

따라서 구하는 주축의 길이는 $2 \times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$

03 / 공간도형

A 개념 확인

44~47쪽

0245 [답] ㄴ, ㄷ

0246 [답] 3

- (i) 세 점 A, B, C는 한 평면 위의 점이므로 만들 수 있는 평면은 평면 ABC
 (ii) 직선 DE와 세 점 A, B, C로 만들 수 있는 평면은 평면 AED, 평면 BDE, 평면 CDE
 그런데 네 점 B, C, D, E는 한 평면 위의 점이므로 평면 BDE와 평면 CDE는 서로 같은 평면이다.
 (i), (ii)에서 구하는 서로 다른 평면의 개수는 $1+2=3$

0247 [답] 직선 AB, 직선 AD, 직선 EF, 직선 EH

0248 [답] 직선 BF, 직선 CG, 직선 DH

0249 [답] 직선 BC, 직선 CD, 직선 FG, 직선 GH

0250 [답] 평면 AEFB, 평면 AEHD

0251 [답] 평면 ABCD, 평면 EFGH

0252 [답] 평면 BFGC, 평면 DHGC

0253 [답] 평면 AEFB, 평면 BFGC, 평면 DHGC, 평면 AEHD

0254 [답] 평면 EFGH

0255 [답] 90°

$\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ 이므로 직선 AB와 직선 EF가 이루는 각의 크기는 직선 AB와 직선 BC가 이루는 각의 크기와 같다.
 이때 $\angle ABC = 90^\circ$ 이므로 직선 AB와 직선 EF가 이루는 각의 크기는 90° 이다.

0256 [답] 45°

$\overline{DF} \parallel \overline{AC}$ 이므로 직선 BC와 직선 DF가 이루는 각의 크기는 직선 BC와 직선 AC가 이루는 각의 크기와 같다.
 이때 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 인 직각이등변삼각형이므로 $\angle ACB = 45^\circ$
 따라서 직선 BC와 직선 DF가 이루는 각의 크기는 45° 이다.

0257 [답] 90°

$\overline{CF} \parallel \overline{AD}$ 이므로 직선 CF와 직선 DE가 이루는 각의 크기는 직선 AD와 직선 DE가 이루는 각의 크기와 같다.
 이때 $\angle ADE = 90^\circ$ 이므로 직선 CF와 직선 DE가 이루는 각의 크기는 90° 이다.

0258 [답] 90°

직선 AB는 평면 AEHD 위의 평행하지 않은 두 직선 AD, AE와 각각 수직이므로 $\overline{AB} \perp$ (평면 AEHD)
 따라서 직선 AB와 평면 AEHD가 이루는 각의 크기는 90° 이다.

0259 [답] (가) $\overline{AM}$ (나) ABM

0260 [답] (가) l (나) $\overline{OH}$ (다) $\overline{PH}$

0261 [답] 90°

평면 ABCD와 평면 AEHD의 교선 AD에 대하여 $\overline{AD} \perp \overline{AB}$, $\overline{AD} \perp \overline{AE}$ 이고, $\angle BAE = 90^\circ$ 이다.
 따라서 평면 ABCD와 평면 AEHD가 이루는 각의 크기는 90° 이다.

0262 [답] 45°

평면 DEFC와 평면 EFGH의 교선 EF에 대하여 $\overline{EF} \perp \overline{CF}$, $\overline{EF} \perp \overline{GF}$ 이고, $\angle CFG = 45^\circ$ 이다.
 따라서 평면 DEFC와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 45° 이다.

0263 [답] (가) l (나) n

0264 [답] 점 A

0265 [답] 선분 EF

0266 [답] 삼각형 EFG

0267 [답] 선분 BC

0268 [답] $6\sqrt{3}$

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 30^\circ = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

0269 [답] 60°

$$4 = 8 \cos \theta \text{에서 } \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \therefore \theta = 60^\circ$$

0270 [답] 10

$$S' = S \cos 60^\circ = 20 \times \frac{1}{2} = 10$$

0271 [답] 45°

$$3\sqrt{2} = 6 \cos \theta \text{에서 } \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \theta = 45^\circ$$

0272 답 18√3

평면 α 위에 있는 정사각형의 넓이는 $6^2=36$
 따라서 구하는 정사영의 넓이는
 $36 \cos 30^\circ = 36 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$

B 유형 완성

48~57쪽

0273 답 7

- (i) 네 점 B, D, F, H는 한 평면 위의 점이므로 만들 수 있는 평면은 평면 BDHF
 (ii) 두 직선 AC, CE는 한 점에서 만나므로 만들 수 있는 평면은 평면 AEC
 (iii) 직선 AC와 네 점 B, D, F, H로 만들 수 있는 평면은 평면 ABC, 평면 ACD, 평면 AFC, 평면 AHC
 그런데 네 점 A, B, C, D는 한 평면 위의 점이므로 평면 ABC와 평면 ACD는 서로 같은 평면이다.
 (iv) 직선 CE와 네 점 B, D, F, H로 만들 수 있는 평면은 평면 BCE, 평면 CDE, 평면 CEF, 평면 CHE
 그런데 네 점 B, C, E, H는 한 평면 위의 점이므로 평면 BCE와 평면 CHE는 서로 같은 평면이다.
 또 네 점 C, D, E, F는 한 평면 위의 점이므로 평면 CDE와 평면 CEF는 서로 같은 평면이다.
 (i)~(iv)에서 구하는 서로 다른 평면의 개수는
 $1+1+3+2=7$

0274 답 ③

- ③ 직선 AB와 직선 CG는 꼬인 위치에 있으므로 한 평면을 결정하지 않는다.

0275 답 ④

6개의 점 B, C, D, E, F, G는 한 평면 위의 점이므로 만들 수 있는 평면은
 평면 BCDEFG
 한 직선 위에 있지 않은 세 점으로 만들 수 있는 평면은
 평면 ABC, 평면 ABD, 평면 ABE, 평면 ABF, 평면 ABG, 평면 ACD, 평면 ACE, 평면 ACF, 평면 ACG, 평면 ADE, 평면 ADF, 평면 ADG, 평면 AEF, 평면 AEG, 평면 AFG
 따라서 구하는 서로 다른 평면의 개수는
 $1+15=16$

다른 풀이

밑면의 6개의 점으로 만들 수 있는 평면은
 평면 BCDEFG의 1개
 점 A와 밑면의 두 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는
 ${}_6C_2=15$
 따라서 구하는 서로 다른 평면의 개수는
 $1+15=16$

0276 답 19

- (i) 세 직선 l, m, n 중 두 직선으로 만들 수 있는 평면의 개수는
 ${}_3C_2=3$ ①
 (ii) 네 점 A, B, C, D 중 세 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는
 ${}_4C_3=4$ ②
 (iii) 세 직선 l, m, n 중 한 직선과 네 점 A, B, C, D 중 한 점으로 만들 수 있는 평면의 개수는
 ${}_3C_1 \times {}_4C_1=12$ ③
 (i), (ii), (iii)에서 구하는 서로 다른 평면의 최대 개수는
 $3+4+12=19$ ④

채점 기준

① 세 직선 l, m, n 으로 만들 수 있는 평면의 개수 구하기	30 %
② 네 점 A, B, C, D로 만들 수 있는 평면의 개수 구하기	30 %
③ 세 직선 l, m, n 중 한 직선과 네 점 A, B, C, D 중 한 점으로 만들 수 있는 평면의 개수 구하기	30 %
④ 서로 다른 평면의 최대 개수 구하기	10 %

0277 답 10

직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은
 직선 CI, 직선 DJ, 직선 EK, 직선 FL,
 직선 HI, 직선 IJ, 직선 KL, 직선 LG
 $\therefore a=8$
 직선 AB와 평행한 평면은
 평면 GHIJKL, 평면 DEKJ
 $\therefore b=2$
 $\therefore a+b=10$

0278 답 ㄱ

- ㄱ. 직선 DE와 꼬인 위치에 있는 직선은 직선 AB, 직선 BC, 직선 BF, 직선 CG, 직선 FG, 직선 GH의 6개이다.
 ㄴ. 평면 DEF에 포함된 직선은 직선 CD, 직선 EF의 2개이다.
 ㄷ. 평면 DEF와 평행한 평면은 없다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

0279 답 4

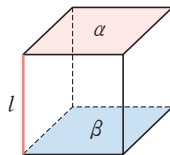
직선 BD를 포함하려면 두 꼭짓점 B, D를 반드시 포함하고 나머지 한 꼭짓점을 선택해야 한다.
 따라서 직선 BD를 포함하는 서로 다른 평면은
 직선 BD와 점 A(또는 점 C)를 포함하는 평면 ABCD,
 직선 BD와 점 F(또는 점 H)를 포함하는 평면 BDHF,
 직선 BD와 점 E를 포함하는 평면 BDE,
 직선 BD와 점 G를 포함하는 평면 BGD의 4개이다.

0280 답 ㄱ, ㄴ

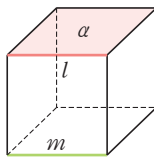
- ㄷ. $\overline{BF} \parallel \overline{CE}$ 이고 $\overline{CE} \parallel \overline{MN}$ 이므로 $\overline{BF} \parallel \overline{MN}$
 즉, 직선 MN과 직선 BF는 서로 평행하다.
 ㄹ. 직선 MN과 직선 EF는 한 점에서 만난다.
 따라서 보기에서 직선 MN과 꼬인 위치에 있는 직선은 ㄱ, ㄴ이다.

0281 답 ②

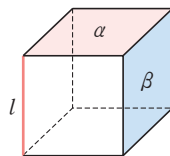
ㄱ. 오른쪽 그림과 같이 $l \perp \alpha$, $l \perp \beta$ 이면 $\alpha \parallel \beta$ 이다.



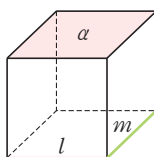
ㄴ. [반례] 오른쪽 그림과 같이 $l \parallel m$, $m \parallel \alpha$ 이면 직선 l 은 평면 α 에 포함된다.



ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 $l \perp \alpha$, $l \parallel \beta$ 이면 $\alpha \perp \beta$ 이다.



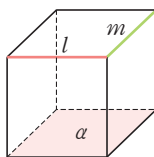
ㄹ. [반례] 오른쪽 그림과 같이 $l \perp m$, $m \parallel \alpha$ 이면 $l \parallel \alpha$ 이다.



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0282 답 ④

④ [반례] 오른쪽 그림과 같이 한 평면에 평행한 서로 다른 두 직선은 서로 수직이다.



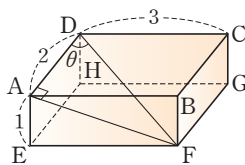
0283 답 ②

$\overline{EH} \parallel \overline{AD}$ 이므로 직선 DF와 직선 EH가 이루는 각의 크기는 직선 DF와 직선 AD가 이루는 각의 크기와 같다.

$\therefore \angle ADF = \theta$

이때 $\overline{DF} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ 이므로 직각삼각형 AFD에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{AD}}{\overline{DF}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$



0284 답 60°

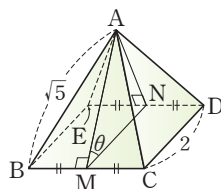
$\overline{CF} \parallel \overline{DE}$ 이므로 직선 BD와 직선 CF가 이루는 각의 크기는 직선 BD와 직선 DE가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 삼각형 BDE는 정삼각형이므로 $\angle BDE = 60^\circ$

따라서 구하는 각의 크기는 60° 이다.

0285 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

오른쪽 그림과 같이 모서리 ED의 중점을 N이라 하면 $\overline{CD} \parallel \overline{MN}$ 이므로 직선 AM과 직선 CD가 이루는 각의 크기는 직선 AM과 직선 MN이 이루는 각의 크기와 같다.



$\therefore \angle AMN = \theta$

..... ①

이때 $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 1$ 이므로 직각삼각형 ABM에서

$$\overline{AM} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2$$

또 $\overline{EN} = \frac{1}{2}\overline{ED} = 1$ 이므로 직각삼각형 AEN에서

$$\overline{AN} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = 2$$

즉, 삼각형 AMN은 $\overline{AM} = \overline{MN} = \overline{AN} = 2$ 인 정삼각형이므로

$\angle AMN = 60^\circ$

..... ②

$$\therefore \sin \theta = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

..... ③

채점 기준

① $\angle AMN = \theta$ 임을 알기	30 %
② $\angle AMN$ 의 크기 구하기	50 %
③ $\sin \theta$ 의 값 구하기	20 %

0286 답 ④

$\overline{BC} \parallel \overline{FG}$ 이므로 직선 AG와 직선 BC가 이루는 각의 크기는 직선 AG와 직선 FG가 이루는 각의 크기와 같다.

$\therefore \angle AGF = \theta$

이때 $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \sqrt{2}$, $\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 이므로 $\overline{AB} = a$ 라

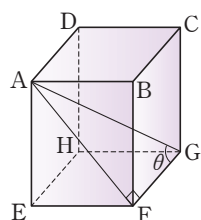
하면

$$\overline{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}a, \overline{AE} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

$$\therefore \overline{AG} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2 + a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \sqrt{3}a$$

따라서 직각삼각형 AFG에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{FG}}{\overline{AG}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$



0287 답 $\sqrt{7}$

$\overline{AB} \parallel \overline{DE}$ 이므로 직선 AB와 직선 CE가 이루는 각의 크기는 직선 DE와 직선 CE가 이루는 각의 크기와 같다.

$\therefore \angle CED = \theta$

정삼각기둥의 한 모서리의 길이를 a 라 하면 직각삼각형 BCE에서

$$\overline{CE} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

또 직각삼각형 ADC에서

$$\overline{CD} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

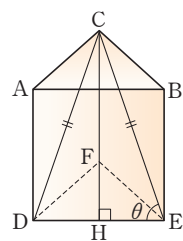
즉, 삼각형 CDE는 $\overline{CD} = \overline{CE}$ 인 이등변삼각형이므로 점 C에서 선분 DE에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{EH} = \frac{1}{2}\overline{DE} = \frac{a}{2}$$

따라서 직각삼각형 CHE에서

$$\overline{CH} = \sqrt{(\sqrt{2}a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\overline{CH}}{\overline{EH}} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{2}a}{\frac{a}{2}} = \sqrt{7}$$

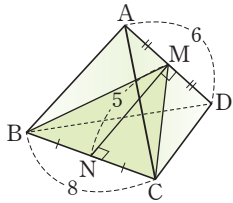


0288 **답** ㄱ, ㄷ

- ㄱ. $\overline{BC} \perp \overline{AB}$, $\overline{BC} \perp \overline{BF}$ 이므로 $\overline{BC} \perp$ (평면 AEFB)
 ㄴ. 직선 DG와 직선 HG는 수직이 아니므로 직선 DG와 평면 EFGH는 수직이 아니다.
 ㄷ. $\overline{AE} \perp$ (평면 EFGH)이므로 $\overline{AE} \perp \overline{FH}$
 또 $\overline{FH} \perp \overline{EG}$ 이므로 $\overline{FH} \perp$ (평면 AEGC)
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

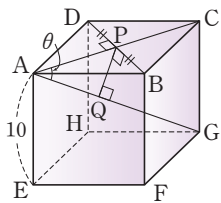
0289 **답** 40

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$, $\overline{AD} \perp \overline{MN}$ 이므로
 $\overline{AD} \perp$ (평면 BCM)
 사면체 ABCD의 부피는 사면체 ABCM의 부피와 사면체 DBCM의 부피의 합과 같고, 두 사면체 ABCM, DBCM의 부피는 서로 같다.
 → 두 사면체는 밑면을 면 BCM으로 하면 높이가 이때 삼각형 BCM의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 6 = 3$ 이므로 부피가 서로 같다.
 $\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{MN} = \frac{1}{2} \times 8 \times 5 = 20$
 따라서 사면체 ABCD의 부피는
 $2 \times \left(\frac{1}{3} \times 20 \times 3 \right) = 40$



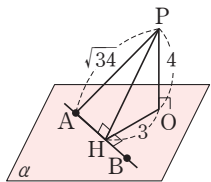
0290 **답** $\frac{5\sqrt{6}}{3}$

$\overline{CG} \perp$ (평면 ABCD)이므로 $\overline{CG} \perp \overline{BD}$
 또 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ 이므로 $\overline{BD} \perp$ (평면 AGC)
 이때 평면 AGC는 선분 PQ를 포함하므로 $\overline{BD} \perp \overline{PQ}$
 한편 $\angle CAG = \theta$ 라 하면 $\overline{AG} = 10\sqrt{3}$ 이므로 직각삼각형 CAG에서
 $\sin \theta = \frac{\overline{CG}}{\overline{AG}} = \frac{10}{10\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
 따라서 선분 PQ의 길이는 $\overline{PQ} \perp \overline{AG}$ 일 때 최소이고
 $\overline{AP} = \frac{1}{2} \overline{AC} = 5\sqrt{2}$ 이므로 직각삼각형 PAQ에서
 $\overline{PQ} = \overline{AP} \sin \theta = 5\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{6}}{3}$



0291 **답** 3

오른쪽 그림과 같이 선분 PH를 그으면 직각삼각형 PHO에서
 $\overline{PH} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
 이때 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여
 $\overline{PH} \perp \overline{AB}$
 따라서 직각삼각형 PAH에서
 $\overline{AH} = \sqrt{(\sqrt{34})^2 - 5^2} = 3$



0292 **답** $\sqrt{3}$

직각삼각형 PAH에서
 $\overline{AH} = \overline{PA} \cos (\angle PAH) = 2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{10}}{5} = 2\sqrt{2}$

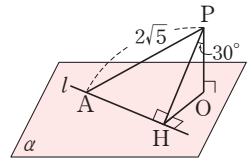
$$\therefore \overline{PH} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$$

오른쪽 그림과 같이 선분 OH를 그으면
 $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp l$ 이므로 삼수선 정리에 의하여
 $\overline{OH} \perp l$

즉, 직각삼각형 PHO에서

$$\overline{OH} = \overline{PH} \sin 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

따라서 점 O와 직선 l 사이의 거리는 $\sqrt{3}$ 이다.



0293 **답** $3\sqrt{7}$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{PA} \perp \alpha$,
 $\overline{PH} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여
 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ ㉠

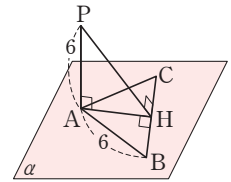
이때 삼각형 ABC는 정삼각형이므로

$$\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$$

즉, 직각삼각형 PAH에서

$$\overline{PH} = \sqrt{6^2 + (3\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{7}$$

따라서 점 P와 직선 BC 사이의 거리는 $3\sqrt{7}$ 이다. ㉢



채점 기준

㉠ 점 P에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ 임을 알기	40 %
㉡ 선분 AH의 길이 구하기	30 %
㉢ 점 P와 직선 BC 사이의 거리 구하기	30 %

0294 **답** $\frac{\sqrt{3}}{4}$

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AO} \perp \alpha$,
 $\overline{OH} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여
 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$
 이때 $\overline{AB} = a$ 라 하면 직각삼각형 ABO에서

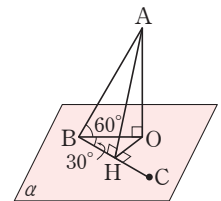
$$\overline{BO} = \overline{AB} \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$$

또 직각삼각형 OBH에서

$$\overline{BH} = \overline{BO} \cos 30^\circ = \frac{a}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a$$

따라서 직각삼각형 ABH에서

$$\cos (\angle ABC) = \frac{\overline{BH}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

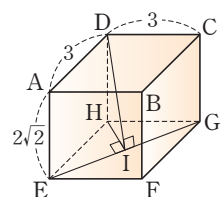


0295 **답** $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

오른쪽 그림과 같이 선분 HI를 그으면
 $\overline{DH} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{DI} \perp \overline{EG}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여
 $\overline{HI} \perp \overline{EG}$

이때 직각삼각형 EGH에서

$$\overline{EG} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$



삼각형 EGH의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{EH} \times \overline{GH} = \frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{HI}$$

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \overline{HI} \quad \therefore \overline{HI} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 직각삼각형 DHI에서

$$\overline{DI} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

0296 답 $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

오른쪽 그림과 같이 선분 FH를 그으면

$\overline{CF} \perp$ (평면 DEF), $\overline{CH} \perp \overline{DE}$ 이므로 삼수선

정리에 의하여

$$\overline{FH} \perp \overline{DE}$$

이때 직각삼각형 DEF에서

$$\overline{DE} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

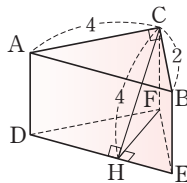
삼각형 DEF의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{DF} \times \overline{EF} = \frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{FH}$$

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \overline{FH} \quad \therefore \overline{FH} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

따라서 직각삼각형 CHF에서

$$\overline{CF} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$



0297 답 $12\sqrt{3}$

직각삼각형 BCD에서

$$\overline{BC} = \overline{CD} \tan 45^\circ = 6 \times 1 = 6$$

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = \frac{\overline{BC}}{\cos 30^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$$

한편 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{AB} \perp \overline{BD}$ 이므로

$\overline{AB} \perp$ (평면 BCD)

또 $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{AC} \perp \overline{CD}$$

따라서 삼각형 ACD는 $\angle ACD = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 그 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

0298 답 4

오른쪽 그림과 같이 선분 LM을 그으면

$\overline{FL} \perp$ (평면 GHIJKL), $\overline{FM} \perp \overline{HK}$ 이므로

삼수선 정리에 의하여

$$\overline{LM} \perp \overline{HK}$$

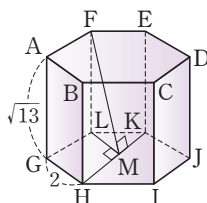
이때 밑면이 정육각형이므로 $\angle MKL = 60^\circ$

직각삼각형 MKL에서

$$\overline{LM} = \overline{LK} \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

따라서 직각삼각형 FLM에서

$$\overline{FM} = \sqrt{(\sqrt{13})^2 + (\sqrt{3})^2} = 4$$



0299 답 ④

오른쪽 그림과 같이 점 M에서 평면 EFGH

에 내린 수선의 발을 I라 하고 점 M에서 선

분 EG에 내린 수선의 발을 J라 하면

$\overline{MI} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{MJ} \perp \overline{EG}$ 이므로 삼수

선 정리에 의하여

$$\overline{IJ} \perp \overline{EG}$$

직각삼각형 HEG에서

$$\overline{EG} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

이때 $\overline{EI} = \frac{1}{2} \overline{EH} = 2$ 이므로 삼각형 EGI의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{EI} \times \overline{GH} = \frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{IJ}$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \overline{IJ}$$

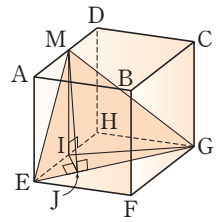
$$\therefore \overline{IJ} = \sqrt{2}$$

직각삼각형 MIJ에서

$$\overline{MJ} = \sqrt{4^2 + (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 MEG의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{MJ} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 12$$



0300 답 $\frac{1}{3}$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면

BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하고 점

A에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 M

이라 하면 $\overline{AH} \perp$ (평면 BCDE),

$\overline{AM} \perp \overline{BC}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{HM} \perp \overline{BC}$$

즉, 평면 ABC와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기는 선분 AM과

선분 HM이 이루는 각의 크기와 같으므로

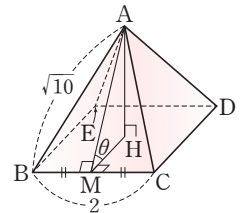
$$\angle AMH = \theta$$

이때 $\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 1$ 이므로 직각삼각형 ABM에서

$$\overline{AM} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - 1^2} = 3$$

따라서 $\overline{HM} = \frac{1}{2} \overline{CD} = 1$ 이므로 직각삼각형 AMH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{HM}}{\overline{AM}} = \frac{1}{3}$$



0301 답 30°

$\overline{AF} \perp \overline{FG}$, $\overline{EF} \perp \overline{FG}$ 이므로 평면 AFGD와 평면 EFGH가 이루는

각의 크기는 선분 AF와 선분 EF가 이루는 각의 크기와 같다.

평면 AFGD와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\angle AFE = \theta$$

직각삼각형 AEF에서

$$\overline{AF} = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16$$

$$\text{즉, } \cos \theta = \frac{\overline{EF}}{\overline{AF}} = \frac{8\sqrt{3}}{16} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

$$\theta = 30^\circ$$

따라서 평면 AFGD와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 30° 이다.

0302 답 60°

오른쪽 그림과 같이 모서리 BC의 중점을 M이라 하면 두 삼각형 ABC, BCD가 정삼각형이므로

$$\overline{AM} \perp \overline{BC}, \overline{DM} \perp \overline{BC}$$

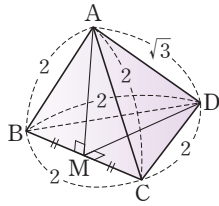
즉, 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 각의 크기는 선분 AM과 선분 DM이 이루는 각의 크기와 같다.

이때 두 정삼각형 ABC, BCD에서 점 M은 변 BC의 중점이므로

$$\overline{AM} = \overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

즉, 삼각형 AMD는 $\overline{AM} = \overline{DM} = \overline{AD} = \sqrt{3}$ 인 정삼각형이므로 $\angle AMD = 60^\circ$

따라서 평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 각의 크기는 60° 이다.



0303 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 점 F에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{BF} \perp$ (평면 ABCD), $\overline{FM} \perp \overline{AC}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{BM} \perp \overline{AC}$$

..... ①

즉, 평면 AFC와 평면 ABCD가 이루는 각의 크기는 선분 FM과 선분 BM이 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle BMF = \theta$$

이때 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\overline{BM} = \frac{1}{2} \overline{BD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

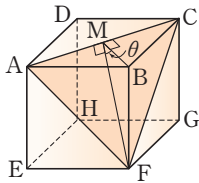
따라서 직각삼각형 BMF에서 $\rightarrow$ 점 M은 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이다.

$$\overline{FM} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

..... ②

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{BM}}{\overline{FM}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{6}}{2}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

..... ③



채점 기준

① 점 F에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 M이라 하고, $\overline{BM} \perp \overline{AC}$ 임을 알기	30 %
② 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하고, 두 선분 BM, FM의 길이를 a 에 대한 식으로 나타내기	40 %
③ $\cos \theta$ 의 값 구하기	30 %

0304 답 ⑤

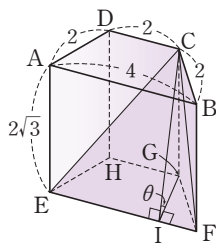
오른쪽 그림과 같이 점 C에서 모서리 EF에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{CG} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{CI} \perp \overline{EF}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{GI} \perp \overline{EF}$$

즉, 평면 CEF와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기는 선분 CI와 선분 GI가 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle CIG = \theta$$



이때 $\overline{FI} = \frac{1}{2}(\overline{EF} - \overline{GH}) = 1$ 이므로 직각삼각형 GIF에서

$$\overline{GI} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

따라서 직각삼각형 CIG에서

$$\overline{CI} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{15}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{GI}}{\overline{CI}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

0305 답 $\frac{\sqrt{15}}{5}$

오른쪽 그림과 같이 점 B에서 교선 XY에 내린 수선의 발을 H라 하고 점 H에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 I라 하면 $\overline{BH} \perp \beta$, $\overline{HI} \perp \overline{AC}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{BI} \perp \overline{AC}$$

즉, 평면 ABC와 평면 β 가 이루는 각의 크기는 선분 BI와 선분 HI가 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle BIH = \theta$$

이때 $\overline{AB} = a$ 라 하면 직각삼각형 BAH에서

$$\overline{AH} = \overline{AB} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

직각삼각형 AIH에서

$$\begin{aligned} \overline{AI} &= \overline{AH} \cos 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}a \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}a \end{aligned}$$

즉, 직각삼각형 AIB에서

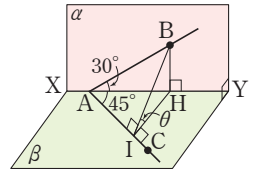
$$\overline{BI} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}a$$

삼각형 AIH가 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{HI} = \overline{AI} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$$

따라서 직각삼각형 BIH에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{HI}}{\overline{BI}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{4}a}{\frac{\sqrt{10}}{4}a} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$



0306 답 $\frac{3}{7}$

오른쪽 그림과 같이 점 M에서 평면 DEF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\angle MDH = \theta$$

정삼각기둥의 한 모서리의 길이를 a 라 하면 정삼각형 DEF에서 점 H는 변 EF의 중점이므로

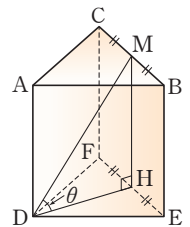
$$\overline{DH} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

즉, 직각삼각형 MDH에서

$$\overline{MD} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}a$$

$$\text{따라서 } \cos \theta = \frac{\overline{DH}}{\overline{MD}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{7}}{2}a} = \frac{\sqrt{21}}{7} \text{ 이므로}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{3}{7}$$



0307 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BFGC에 내린 수선의 발은 점 B이므로

$$\angle AGB = \theta$$

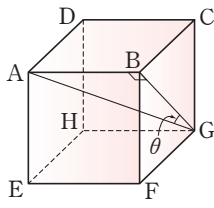
정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면

$$\overline{AG} = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3}a$$

$$\overline{BG} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

따라서 직각삼각형 AGB에서

$$\cos \theta = \frac{\overline{BG}}{\overline{AG}} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



채점 기준

i $\angle AGB = \theta$ 임을 알기	30 %
ii 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하고, 두 선분 AG, BG의 길이를 a 에 대한 식으로 나타내기	40 %
iii $\cos \theta$ 의 값 구하기	30 %

0308 45°

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하고 직선 AD와 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\angle ADH = \theta$

이때 두 정삼각형 ABC, BCD에서 점 H는 변 BC의 중점이므로

$$\overline{AH} = \overline{DH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

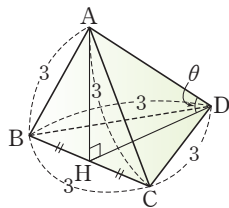
직각삼각형 AHD에서

$$\overline{AD} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{즉, } \cos \theta = \frac{\overline{DH}}{\overline{AD}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{이므로}$$

$$\theta = 45^\circ$$

따라서 직선 AD와 평면 BCD가 이루는 각의 크기는 45° 이다.



0309 $\frac{\sqrt{7}}{4}$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCDE에

내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 직선 AB와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기가 60° 이므로

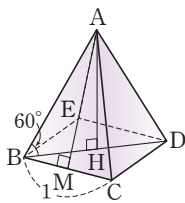
$$\angle ABH = 60^\circ$$

직각삼각형 ABH에서

$$\overline{AB} = \frac{\overline{BH}}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

한편 점 A에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로

$$\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$



즉, 직각삼각형 ABM에서

$$\overline{AM} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AM} = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

0310 ②

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\alpha \perp \beta$ 이므로

$$\overline{DH} \perp \overline{CH}$$

$$\therefore \angle DCH = \theta$$

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AB} = \sqrt{(2\sqrt{29})^2 - 6^2} = 4\sqrt{5}$$

삼각형 DAB는 이등변삼각형이므로

$$\overline{AH} = \overline{BH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{5} = 2\sqrt{5}$$

직각삼각형 DAH에서

$$\overline{DH} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{5})^2} = 4$$

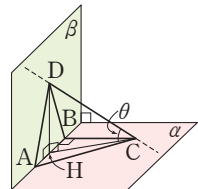
직각삼각형 CBH에서

$$\overline{CH} = \sqrt{6^2 + (2\sqrt{5})^2} = 2\sqrt{14}$$

따라서 직각삼각형 CDH에서

$$\overline{CD} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{14})^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{CH}}{\overline{CD}} = \frac{2\sqrt{14}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$



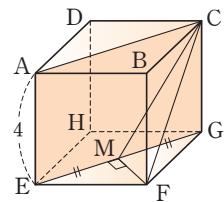
0311 $2\sqrt{6}$

오른쪽 그림과 같이 선분 EG의 중점을 M이라 하면 $\overline{FM} \perp$ (평면 AEGC)이므로 선분 CF의 평면 AEGC 위로의 정사영은 선분 CM이다.

$$\text{따라서 } \overline{MG} = \frac{1}{2}\overline{EG} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{이므로}$$

직각삼각형 CMG에서

$$\overline{CM} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{6}$$



0312 $10\sqrt{2}$

타원의 장축의 원기둥의 밑면을 포함한 평면 위로의 정사영은 밑면인 원의 지름이다.

즉, 타원의 장축의 길이를 a 라 하면

$$a \cos 45^\circ = 10, a \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10$$

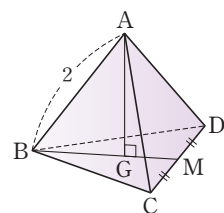
$$\therefore a = 10\sqrt{2}$$

따라서 구하는 타원의 장축의 길이는 $10\sqrt{2}$ 이다.

0313 ④

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 G라 하면 모서리 AB의 평면 BCD 위로의 정사영은 선분 BG이다.

모서리 CD의 중점을 M이라 하면 삼각형 BCD가 정삼각형이므로



$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$$

이때 점 G는 삼각형 BCD의 무게중심이므로

$$\overline{BG} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{2}{3} \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

만렙 Note

오른쪽 그림과 같이 정사면체의 꼭짓점 A에서 면

BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} \perp \overline{BH}, \overline{AH} \perp \overline{CH}, \overline{AH} \perp \overline{DH}$$

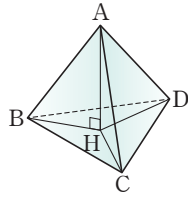
직각삼각형 AHB, AHC, AHD에서

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD}, \overline{AH} \text{는 공통이므로}$$

$\triangle AHB \cong \triangle AHC \cong \triangle AHD$ (RHS 합동)

$$\therefore \overline{BH} = \overline{CH} = \overline{DH}$$

따라서 점 H는 삼각형 BCD의 외심이고 정삼각형은 외심과 무게중심이 일치하므로 점 H는 삼각형 BCD의 무게중심이다.



0314 답 12

오른쪽 그림과 같이 점 M에서 모서리 EF에 내린 수선의 발을 M', 점 N에서 모서리 HG에 내린 수선의 발을 N'이라 하면 사각형 MFGN의 평면 EFGH 위로의 정사영은 사각형 M'FGN'이다. ①
선분 MF와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기가 60° 이므로

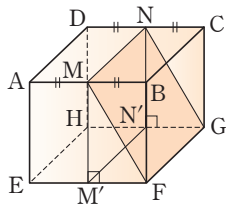
$$\overline{M'F} = \overline{MF} \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

선분 NG와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기가 60° 이므로

$$\overline{N'G} = \overline{NG} \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

따라서 구하는 정사영의 둘레의 길이는

$$\overline{M'F} + \overline{FG} + \overline{N'G} + \overline{M'N'} = 2 + 4 + 2 + 4 = 12 \quad \dots\dots ②$$



채점 기준

① 사각형 MFGN의 평면 EFGH 위로의 정사영 구하기	30 %
② 정사영의 둘레의 길이 구하기	70 %

0315 답 $\sqrt{39}$

오른쪽 그림과 같이 점 A의 평면 β 위로의 정사영을 A'이라 하면 선분 AB의 평면 β 위로의 정사영은 선분 A'B이다.

이때 점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AA'} \perp \beta$,

$\overline{AH} \perp l$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{A'H} \perp l$$

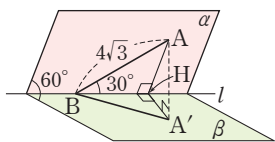
직각삼각형 ABH에서

$$\overline{AH} = \overline{AB} \sin 30^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{BH} = \overline{AB} \cos 30^\circ = 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6$$

직각삼각형 AHA'에서

$$\overline{A'H} = \overline{AH} \cos 60^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$



따라서 직각삼각형 A'HB에서

$$\overline{A'B} = \sqrt{6^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{39}$$

주의 직선 AB와 평면 β 가 이루는 각의 크기가 30° 가 아니므로 $\overline{A'B} = \overline{AB} \cos 30^\circ$ 로 구하지 않도록 주의한다.

0316 답 $9\sqrt{6}$

삼각형 APC의 평면 ABC 위로의 정사영은 삼각형 ABC이다.

이때 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}$$

따라서 삼각형 APC의 넓이를 S라 하면

$$9\sqrt{3} = S \cos 45^\circ$$

$$9\sqrt{3} = S \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore S = 9\sqrt{6}$$

0317 답 36

두 단면 A, B의 직육면체의 밑면을 포함한 평면 위로의 정사영은 모두 직육면체의 밑면이다.

따라서 단면 B의 넓이를 S라 하면

$$12\sqrt{3} \cos 30^\circ = S \cos 60^\circ$$

$$12\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = S \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore S = 36$$

0318 답 $4\sqrt{2}$

오른쪽 그림에서 밑면과 30° 의 각을 이루는 평면으로 자른 단면은 원이다. ①

단면인 원의 지름을 선분 AC, 점 O에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 AOC는 $\overline{OA} = \overline{OC}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{AH} = \overline{CH}$$

이때 반구의 반지름의 길이를 a라 하면 직각삼각형 AOH에서

$$\overline{AH} = \overline{OA} \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

즉, 단면인 원의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \frac{3}{4}a^2\pi$$

이때 단면의 밑면 위로의 정사영의 넓이는

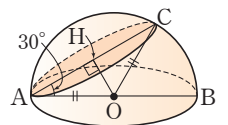
$$\frac{3}{4}a^2\pi \cos 30^\circ = \frac{3}{4}a^2\pi \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2\pi \quad \dots\dots ②$$

$$\text{즉, } \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2\pi = 12\sqrt{3}\pi \text{이므로}$$

$$a^2 = 32 \quad \therefore a = 4\sqrt{2} (\because a > 0)$$

따라서 반구의 반지름의 길이는 $4\sqrt{2}$ 이다. ③



채점 기준

① 단면의 모양이 원임을 알기	20 %
② 반구의 반지름의 길이를 a라 하고, 단면의 밑면 위로의 정사영의 넓이를 a에 대한 식으로 나타내기	50 %
③ 반구의 반지름의 길이 구하기	30 %

0319 답 $6 + \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

오른쪽 그림과 같이 원기둥의 평면 α 위로의 정사영 중 직사각형 부분의 넓이를 S_1 , 원기둥의 한 밑면의 반인 반원의 정사영의 넓이를 S_2 라 하면 원기둥의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는 $S_1 + 2S_2$ 이다.

원기둥의 옆면은 평면 α 와 60° 의 각을 이루므로

$$S_1 = 2 \times 6 \times \cos 60^\circ$$

$$= 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

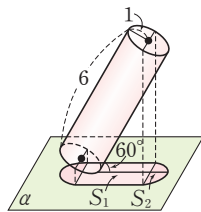
원기둥의 밑면은 평면 α 와 30° 의 각을 이루므로

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 \times \cos 30^\circ$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

$$S_1 + 2S_2 = 6 + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}\pi = 6 + \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$$



0320 답 ③

오른쪽 그림과 같이 모서리 EF의 중점을 N이라 하면 삼각형 CMF의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 GNF이므로

$$\triangle GNF = \triangle CMF \cos \theta$$

이때 삼각형 CMF에서

$$\overline{CM} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{FM} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{CF} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

즉, 삼각형 CMF는 $\overline{CM} = \overline{FM}$ 인 이등변삼각형이므로 점 M에서 선분 CF에 내린 수선의 발을 P라 하면

$$\overline{CP} = \frac{1}{2}\overline{CF} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

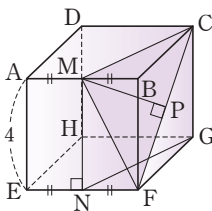
직각삼각형 CMP에서

$$\overline{MP} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore \triangle CMF = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 4\sqrt{6}$$

따라서 $\triangle GNF = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\triangle GNF}{\triangle CMF} = \frac{4}{4\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

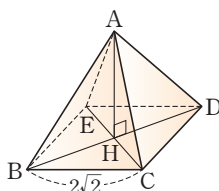


0321 답 $\frac{\sqrt{2}}{5}$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 ABC의 평면 BCDE 위로의 정사영은 삼각형 HBC이므로

$$\triangle HBC = \triangle ABC \cos \theta \quad \dots \text{①}$$

이때 점 H는 사각형 BCDE의 두 대각선의 교점이므로



$$\triangle HBC = \frac{1}{4} \square BCDE = \frac{1}{4} \times (2\sqrt{2})^2 = 2 \quad \dots \text{②}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\triangle HBC}{\triangle ABC} = \frac{2}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5} \quad \dots \text{③}$$

채점 기준

① 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\triangle HBC = \triangle ABC \cos \theta$ 임을 알기	40%
② 삼각형 HBC의 넓이 구하기	40%
③ $\cos \theta$ 의 값 구하기	20%

0322 답 ②

삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영은

삼각형 A'BC이므로

$$\triangle A'BC = \triangle ABC \cos \theta$$

선분 BC의 중점을 M이라 하면

$$\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 2 \text{이므로 직각삼각형 ABM에서}$$

$$\overline{AM} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4\sqrt{2}$$

$$= 8\sqrt{2}$$

삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{A'B} = \overline{A'C}$$

이때 $\angle CA'B = 90^\circ$ 이므로 삼각형 A'BC는 직각이등변삼각형이다.

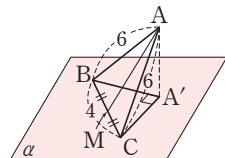
즉, $\angle A'BC = 45^\circ$ 이므로 직각삼각형 A'BC에서

$$\overline{A'B} = \overline{BC} \cos 45^\circ$$

$$= 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

따라서 $\triangle A'BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\triangle A'BC}{\triangle ABC} = \frac{4}{8\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$



0323 답 $\frac{8}{15}$

삼각형 ABD의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 EBD이므로

$$\triangle EBD = \triangle ABD \cos \theta$$

그런데 $\overline{BE} : \overline{EC} = 4 : 1$ 이므로

$$\triangle EBD : \triangle ECD = 4 : 1$$

$$\therefore \triangle EBD = \frac{4}{5} \triangle BCD$$

또 $\overline{AD} : \overline{DC} = 3 : 2$ 이므로

$$\triangle ABD : \triangle BCD = 3 : 2$$

$$\therefore \triangle ABD = \frac{3}{2} \triangle BCD$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\triangle EBD}{\triangle ABD} = \frac{\frac{4}{5} \triangle BCD}{\frac{3}{2} \triangle BCD} = \frac{8}{15}$$

0324 답 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

평면 EMCN과 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 사각형 EMCN의 평면 EFGH 위로의 정사영은 사각형 EFGH이므로

$$\square EFGH = \square EMCN \cos \theta$$

이때 사각형 EMCN은 마름모이고 $\overline{CE} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (2\sqrt{7})^2} = 6$,
 $\overline{MN} = \overline{BD} = 2\sqrt{2}$ 이므로

$$\square EMCN = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

또 $\square EFGH = 2^2 = 4$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\square EFGH}{\square EMCN} = \frac{4}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

따라서 사각형 EFGH의 평면 EMCN 위로의 정사영의 넓이는

$$\square EFGH \cos \theta = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

0325 $\frac{64}{5}$

평면 AMND와 평면 AEHD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 사각형 AMND의 평면 AEHD 위로의 정사영은 사각형 AEHD이므로
 $\square AEHD = \square AMND \cos \theta$

이때 $\overline{EM} = \frac{3}{4}\overline{EF} = 3$ 이므로 직각삼각형 AEM에서

$$\overline{AM} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

$$\therefore \square AMND = 4 \times 5 = 20$$

또 $\square AEHD = 4^2 = 16$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\square AEHD}{\square AMND} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

따라서 사각형 AEHD의 평면 AMND 위로의 정사영의 넓이는

$$\square AEHD \cos \theta = 16 \times \frac{4}{5} = \frac{64}{5}$$

0326 ④

평면 ABC와 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 GBC이므로
 $\triangle GBC = \triangle ABC \cos \theta$

이때 $\triangle GBC = \frac{1}{3}\triangle BCD = \frac{1}{3}\triangle ABC$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\triangle GBC}{\triangle ABC} = \frac{\frac{1}{3}\triangle ABC}{\triangle ABC} = \frac{1}{3}$$

따라서 삼각형 GBC의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle GBC \cos \theta = \left\{ \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{3})^2 \right\} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

0327 ②

단면과 원기둥의 밑면이 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 단면의 원기둥의 밑면을 포함한 평면 위로의 정사영은 반원이므로

$$\frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 3\pi \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{2}{3}$$

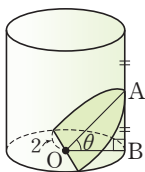
오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 O, 높이를 이등분하는 점을 A, 점 A에서 밑면에 내린 수선의 발을 B라 하면 직각삼각형 AOB에서

$$\overline{AO} = \frac{\overline{BO}}{\cos \theta} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

따라서 원기둥의 높이는 $2\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ 이므로 원기둥의 부피는

$$\pi \times 2^2 \times 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}\pi$$



0328 60π

오른쪽 그림과 같이 물통을 기울이기 전의 수면의 지름을 선분 AB라 하고, 물이 쏟아지기 직전까지 물통을 기울였을 때의 수면의 모양은 타원이므로 수면의 장축을 선분 CD, 원기둥의 밑면의 지름을 선분 CE라 하자.

물통을 기울이면 한쪽 수면이 올라온 만큼 반대쪽 수면이 내려가므로

$$\overline{AC} = \overline{BD} = 8 \quad \therefore \overline{DE} = 16$$

직각삼각형 CDE에서

$$\overline{CD} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$$

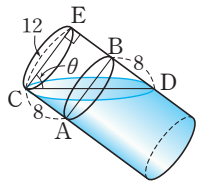
$\angle DCE = \theta$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overline{CE}}{\overline{CD}} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

이때 수면의 원기둥의 밑면을 포함한 평면 위로의 정사영은 원기둥의 밑면인 원이므로 구하는 수면의 넓이를 S라 하면

$$\pi \times 6^2 = S \cos \theta, \quad 36\pi = S \times \frac{3}{5}$$

$$\therefore S = 60\pi$$



0329 $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발을 H라 하고, 평면 ACD와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 삼각형 ACD의 평면 BCDE 위로의 정사영은 삼각형 HCD이므로

$$\triangle HCD = \triangle ACD \cos \theta$$

이때

$$\triangle ACD = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3},$$

$$\triangle HCD = \frac{1}{4} \square BCDE = \frac{1}{4} \times 2^2 = 1$$

이므로

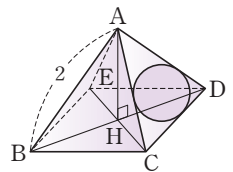
$$\cos \theta = \frac{\triangle HCD}{\triangle ACD} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

한편 삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r라 하면 삼각형 ACD의 넓이가 $\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2}r \times (2+2+2) = \sqrt{3} \quad \therefore r = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 원의 넓이는 $\pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{\pi}{3}$ 이므로 구하는 정사영의 넓이는

$$\frac{\pi}{3} \cos \theta = \frac{\pi}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{9}\pi$$



0330 $24\sqrt{3}\pi \text{ cm}^2$

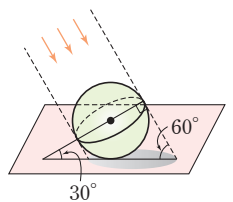
오른쪽 그림과 같이 태양 광선과 수직이고 공의 중심을 지나는 평면이 지면과 이루는 각의 크기는 30° 이다.

이때 공의 그림자의 넓이를 $S \text{ cm}^2$ 라 하면

$$\pi \times 6^2 = S \cos 30^\circ, \quad 36\pi = S \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore S = 24\sqrt{3}\pi$$

따라서 공의 그림자의 넓이는 $24\sqrt{3}\pi \text{ cm}^2$ 이다.



0331 답 4√2 m

오른쪽 그림과 같이 태양 광선과 수직이고 애드벌룬의 중심을 지나는 평면이 지면과 이루는 각의 크기는 45°이다. ①

이때 애드벌룬의 반지름의 길이를 r m라 하면 애드벌룬의 그림자의 넓이가 $8\sqrt{2}\pi$ m²이므로

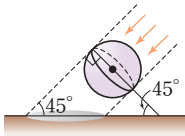
$$\pi r^2 = 8\sqrt{2}\pi \cos 45^\circ$$

$$\pi r^2 = 8\sqrt{2}\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$r^2 = 8$$

$$\therefore r = 2\sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

따라서 애드벌룬의 지름의 길이는 $4\sqrt{2}$ m이다. ③



채점 기준

① 태양 광선과 수직이고 애드벌룬의 중심을 지나는 평면이 지면과 이루는 각의 크기 구하기	30 %
② 애드벌룬의 반지름의 길이 구하기	60 %
③ 애드벌룬의 지름의 길이 구하기	10 %

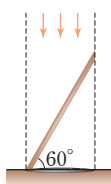
0332 답 3/4 m

나무 막대와 지면이 이루는 각의 크기가 60°이고 태양 광선이 지면과 30°의 각을 이루며 나무 막대를 비출 때, 지면에 생기는 나무 막대의 그림자의 길이가 3 m이므로 나무 막대의 길이는

$$3 \cos 60^\circ = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ (m)}$$

오른쪽 그림과 같이 태양 광선이 지면에 수직으로 비출 때, 지면에 생기는 나무 막대의 그림자의 길이는

$$\frac{3}{2} \cos 60^\circ = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{ (m)}$$



AB 유형 점검

58~60쪽

0333 답 6

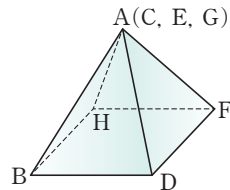
- (i) 세 점 A, C, G는 한 평면 위의 점이므로 만들 수 있는 평면은 평면 AGC
- (ii) 두 직선 EH, DF는 꼬인 위치에 있으므로 한 평면을 만들 수 없다.
- (iii) 직선 EH와 세 점 A, C, G로 만들 수 있는 평면은 평면 AEH, 평면 ECH, 평면 EGH
- (iv) 직선 DF와 세 점 A, C, G로 만들 수 있는 평면은 평면 AFD, 평면 CDF, 평면 DFG
- 그런데 네 점 A, D, F, G는 한 평면 위의 점이므로 평면 AFD와 평면 DFG는 서로 같은 평면이다.
- (i)~(iv)에서 구하는 서로 다른 평면의 개수는
- $$1 + 3 + 2 = 6$$

0334 답 ④

주어진 전개도로 만든 정사각뿔은 오른쪽 그림과 같다.

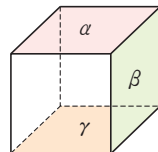
따라서 직선 AB와 꼬인 위치에 있는 직선은

직선 DF, 직선 FH

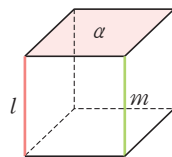


0335 답 ㄴ

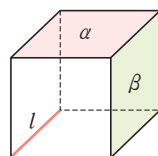
ㄱ. [반례] 오른쪽 그림과 같이 $\alpha \perp \beta$, $\beta \perp \gamma$ 이면 $\alpha \parallel \gamma$ 이다.



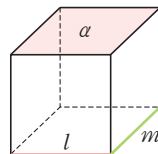
ㄴ. 오른쪽 그림과 같이 $l \perp \alpha$, $m \perp \alpha$ 이면 $l \parallel m$ 이다.



ㄷ. [반례] 오른쪽 그림과 같이 $l \parallel \alpha$, $l \parallel \beta$ 이면 $\alpha \perp \beta$ 이다.



ㄹ. [반례] 오른쪽 그림과 같이 $l \parallel \alpha$, $m \parallel \alpha$ 이면 $l \perp m$ 이다.



따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

0336 답 √6/3

오른쪽 그림과 같이 모서리 CD의 중점을 N이라 하면 $\overline{MC} \parallel \overline{AN}$ 이므로 직선 AG와 직선 MC가 이루는 각의 크기는 직선 AG와 직선 AN이 이루는 각의 크기와 같다.

$$\therefore \angle NAG = \theta$$

이때 삼각형 NAG에서

$$\overline{AN} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{NG} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{AG} = \sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}$$

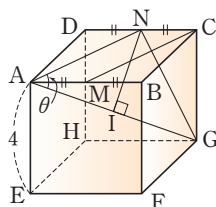
즉, 삼각형 NAG는 $\overline{AN} = \overline{NG}$ 인 이등변삼각형이므로 점 N에서 선분 AG에 내린 수선의 발을 I라 하면

$$\overline{AI} = \frac{1}{2} \overline{AG} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

따라서 직각삼각형 NAI에서

$$\overline{NI} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\overline{NI}}{\overline{AI}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



0337 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $k \perp \alpha$ 이므로 직선 k 는 평면 α 위의 모든 직선과 수직이다.

$$\therefore \overline{PA} \perp \overline{BC}$$

나. $\overline{PA} \perp \alpha$ 이고 삼각형 BCD는 평면 α 위에 있으므로

$$\overline{PA} \perp \triangle BCD$$

다. $\overline{AD} \perp \triangle PBC$ 가 성립하려면 직선 AD는 평면 PBC 위의 모든 직선과 수직이어야 하므로 직선 AD와 직선 BC는 수직이어야 한다. 그런데 점 D는 평면 α 위의 임의의 점이므로 직선 AD와 직선 BC가 항상 수직인 것은 아니다.

즉, $\overline{AD} \perp \triangle PBC$ 가 성립하지 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0338 답 ①

오른쪽 그림과 같이 선분 AB의 중점을 M이라 하면 삼각형 PAB는 정삼각형이므로

$$\overline{PM} \perp \overline{AB}$$

또 $\overline{PH} \perp \alpha$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{HM} \perp \overline{AB}$$

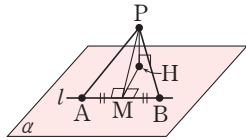
이때 $\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 3$ 이므로 직각삼각형 PAM에서

$$\overline{PM} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

즉, 직각삼각형 PMH에서

$$\overline{HM} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 4^2} = \sqrt{11}$$

따라서 점 H와 직선 l 사이의 거리는 $\sqrt{11}$ 이다.



0339 답 12

오른쪽 그림과 같이 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{CD} \perp$ (평면 ABC), $\overline{DH} \perp \overline{AB}$ 이므로 삼

수선 정리에 의하여

$$\overline{CH} \perp \overline{AB}$$

이때 삼각형 ABD의 넓이가 20이므로

$$\frac{1}{2} \times 8 \times \overline{DH} = 20$$

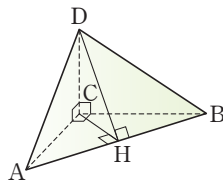
$$\therefore \overline{DH} = 5$$

직각삼각형 DCH에서

$$\overline{CH} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH} = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 = 12$$



0340 답 ④

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 직선 l과 평면 α 에 내린 수선의 발을 각각 I, H라 하면

$\overline{PH} \perp \alpha$, $\overline{PI} \perp l$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{HI} \perp l$$

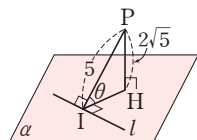
즉, 점 P와 직선 l에 의하여 결정되는 평면이 평면 α 와 이루는 각의 크기는 선분 PI와 선분 HI가 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle PIH = \theta$$

따라서 직각삼각형 PIH에서

$$\overline{HI} = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{HI}}{\overline{PI}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$



0341 답 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 모서리 AD를 2:1로

내분하는 점을 S라 하면 평면 BCD와 평면

PQS는 평행하므로 평면 PQR와 평면

BCD가 이루는 각의 크기는 평면 PQR와

평면 PQS가 이루는 각의 크기와 같다.

사면체 APQS는 정사면체이고 점 R는 모

서리 AS의 중점이므로 모서리 PQ의 중점을 T라 하면

$$\overline{RT} \perp \overline{PQ}, \overline{ST} \perp \overline{PQ}$$

즉, 평면 PQR와 평면 PQS가 이루는 각의 크기는 선분 RT와 선분

ST가 이루는 각의 크기와 같으므로

$$\angle RTS = \theta$$

이때 정사면체 APQS의 한 모서리의 길이를 a라 하면

$$\overline{ST} = \overline{AT} = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \overline{RS} = \frac{a}{2}$$

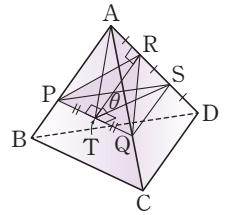
즉, 삼각형 ATS는 $\overline{ST} = \overline{AT}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{RT} \perp \overline{AS}$$

따라서 직각삼각형 RTS에서

$$\overline{RT} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{RT}}{\overline{ST}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$



0342 답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ 이므로 직선 EF와 평면 PQR가

이루는 각의 크기는 직선 AB와 평면

PQR가 이루는 각의 크기와 같다.

오른쪽 그림과 같이 점 B에서 평면 PQR

에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$$\angle BPM = \theta$$

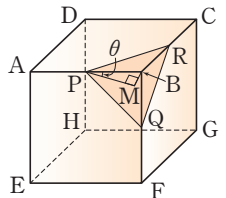
이때 $\overline{BP} = a$ 라 하면 삼각형 PQR는 $\overline{PQ} = \overline{QR} = \overline{RP} = \sqrt{2}a$ 인 정삼각형이므로 점 M은 삼각형 PQR의 무게중심이다.

$$\therefore \overline{PM} = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2}a = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

따라서 직각삼각형 BPM에서

$$\overline{BM} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{3}a\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\overline{BM}}{\overline{BP}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



0343 답 ②

삼각형 ABN은 $\overline{AN} = \overline{BN} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{3} = 6$

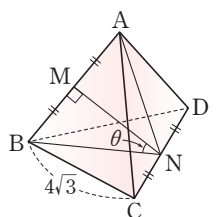
인 이등변삼각형이므로

$$\overline{MN} \perp \overline{AB}$$

이때 $\overline{MB} = \frac{1}{2} \overline{AB} = 2\sqrt{3}$ 이므로 직각삼각형

MBN에서

$$\overline{MN} = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{6}$$



선분 MN과 평면 BCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\angle MNB = \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{MN}}{\overline{BN}} = \frac{2\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 선분 MN의 평면 BCD 위로의 정사영의 길이는

$$\overline{MN} \cos \theta = 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = 4$$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 점 M에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 I라 하면 선분 MN의 평면 BCD 위로의 정사영은 선분 IN이다.

또 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 삼각형 BCD의 무게 중심이다.

즉, 두 점 I, H는 직선 BN 위에 있다.

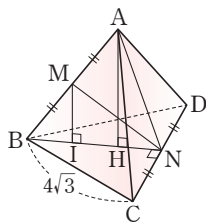
$$\text{이때 } \overline{BN} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\sqrt{3} = 6 \text{ 이므로}$$

$$\overline{BH} = \frac{2}{3} \overline{BN} = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

직각삼각형 ABH에서 $\overline{MI} \parallel \overline{AH}$ 이고 점 M은 모서리 AB의 중점이므로

$$\overline{BI} = \frac{1}{2} \overline{BH} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

$$\therefore \overline{IN} = \overline{BN} - \overline{BI} = 6 - 2 = 4$$



0344 **답** $2\sqrt{6}$

정사각형 A의 한 변의 길이를 a 라 하면 그 넓이는

$$a \times a = a^2$$

두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기가 30° 이므로 정사각형 A의 평면 β 위로의 정사영 B의 넓이는

$$a^2 \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

이때 도형 B의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 18이므로

$$18 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \cos 30^\circ$$

$$18 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$a^2 = 24 \quad \therefore a = 2\sqrt{6} \quad (\because a > 0)$$

따라서 정사각형 A의 한 변의 길이는 $2\sqrt{6}$ 이다.

0345 **답** ④

오른쪽 그림과 같이 두 모서리 EH, GH의 중점을 각각 M, N이라 하면 사각형 PQRS의 평면 EFGH 위로의 정사영은 사각형 MQRN이므로

$$\square MQRN = \square PQRS \cos \theta$$

$$\text{이때 } \overline{DP} = \overline{DS} = \overline{FQ} = \overline{FR} = 3 \text{ 이므로}$$

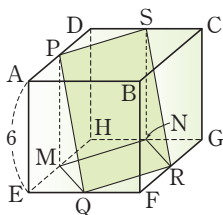
$$\overline{PS} = \overline{QR} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

직각삼각형 PAE에서

$$\overline{PE} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$$

즉, 직각삼각형 PEQ에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 + 3^2} = 3\sqrt{6}$$



사각형 PQRS는 직사각형이므로

$$\square PQRS = 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} = 18\sqrt{3}$$

사각형 MQRN은 한 변의 길이가 $3\sqrt{2}$ 인 정사각형이므로

$$\square MQRN = (3\sqrt{2})^2 = 18$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\square MQRN}{\square PQRS} = \frac{18}{18\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

0346 **답** $\frac{16\sqrt{5}}{5}$

오른쪽 그림과 같이 점 G에서 선분 FH에 내린 수선의 발을 P라 하면

$\overline{IG} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{GP} \perp \overline{FH}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{IP} \perp \overline{FH}$$

즉, 평면 FGH와 평면 FGH가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\angle IPG = \theta$$

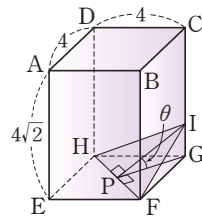
$$\text{이때 } \overline{IG} = \frac{1}{4} \overline{CG} = \sqrt{2}, \overline{PG} = \frac{1}{2} \overline{EG} = 2\sqrt{2} \text{ 이므로 직각삼각형 IPG에서}$$

$$\overline{IP} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{10}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{PG}}{\overline{IP}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

따라서 $\triangle FGH = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$ 이므로 삼각형 FGH의 평면 FGH 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle FGH \cos \theta = 8 \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$$



0347 **답** $\frac{4\sqrt{5}}{5}\pi$

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있는 원뿔의 모선의 양 끝 점을 각각 A, B, 밑면인 원의 중심을 O라 하고 원뿔의 밑면과 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

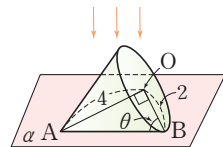
$$\angle OBA = \theta$$

$$\text{이때 직각삼각형 OAB에서 } \overline{AB} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5} \text{ 이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\overline{BO}}{\overline{AB}} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서 구하는 그림자의 넓이는 원뿔의 밑면의 평면 α 위로의 정사영의 넓이와 같으므로

$$\pi \times 2^2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}\pi$$



0348 **답** $4\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 선분 HQ를 그으면

$\overline{PH} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{PQ} \perp \overline{EG}$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{HQ} \perp \overline{EG}$$

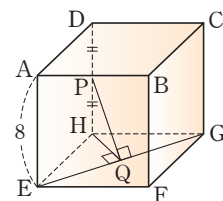
이때 직각삼각형 EFG에서

$$\overline{EG} = \sqrt{8^2 + 8^2} = 8\sqrt{2}$$

직각삼각형 EGH의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{EH} \times \overline{GH} = \frac{1}{2} \times \overline{EG} \times \overline{HQ}$$

..... **i**



$$\frac{1}{2} \times 8 \times 8 = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} \times \overline{HQ}$$

$$\therefore \overline{HQ} = 4\sqrt{2} \quad \dots \textcircled{ii}$$

따라서 $\overline{PH} = \frac{1}{2} \overline{DH} = 4$ 이므로 직각삼각형 PHQ에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{3} \quad \dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $HQ \perp EG$ 임을 알기	30 %
② 선분 HQ의 길이 구하기	40 %
③ 선분 PQ의 길이 구하기	30 %

0349 답 $\frac{33}{25}$

점 G에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발은 점 C이므로

$$\angle GAC = \alpha$$

$$\text{이때 } \overline{AG} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 + 3^2} = 5,$$

$\overline{AC} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2} = 4$ 이므로 직각삼각형 GAC에서

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AG}} = \frac{4}{5} \quad \dots \textcircled{i}$$

점 G에서 평면 AEFB에 내린 수선의 발은 점 F이므로

$$\angle GAF = \beta$$

이때 $\overline{AF} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 3^2} = \sqrt{17}$ 이므로 직각삼각형 GAF에서

$$\cos \beta = \frac{\overline{AF}}{\overline{AG}} = \frac{\sqrt{17}}{5} \quad \dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{17}}{5}\right)^2 = \frac{33}{25} \quad \dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $\cos \alpha$ 의 값 구하기	40 %
② $\cos \beta$ 의 값 구하기	40 %
③ $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta$ 의 값 구하기	20 %

0350 답 $3\sqrt{3}$

평면 ABC와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 삼각형 ABC의 평면 BCDE 위로의 정사영은 삼각형 MBC이므로

$$\triangle MBC = \triangle ABC \cos \theta \quad \dots \textcircled{i}$$

이때 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 6인 정삼각형이므로

$$\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 = 9\sqrt{3}$$

$$\text{또 } \triangle MBC = \frac{1}{4} \square BCDE = \frac{1}{4} \times 6^2 = 9 \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \frac{\triangle MBC}{\triangle ABC} = \frac{9}{9\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \dots \textcircled{ii}$$

따라서 삼각형 MBC의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle MBC \cos \theta = 9 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3} \quad \dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 평면 ABC와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기를 θ 라 하고, $\triangle MBC = \triangle ABC \cos \theta$ 임을 알기	30 %
② $\cos \theta$ 의 값 구하기	40 %
③ 삼각형 MBC의 평면 ABC 위로의 정사영의 넓이 구하기	30 %

C 실력 향상

61쪽

0351 답 ⑤

주어진 전개도로 만든 사면체는 오른쪽 그림과 같다.

$$\therefore \overline{AC} = \overline{AE} = \overline{BE} \text{이므로}$$

$$\overline{AC} = \overline{AP} = \overline{BP}$$

$$\angle DAC = 90^\circ \text{이므로}$$

$$\angle PAC = 90^\circ$$

즉, 삼각형 APC는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{CP} = \sqrt{2} \overline{AP} = \sqrt{2} \overline{BP}$$

$$\therefore \overline{AC} \perp \overline{AP}, \overline{AC} \perp \overline{AB} \text{이므로}$$

$$\overline{AC} \perp (\text{평면 APB})$$

$$\therefore \overline{PM} \perp \overline{AC} \quad \dots \textcircled{㉠}$$

이때 삼각형 APB는 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{PM} \perp \overline{AB} \quad \dots \textcircled{㉡}$$

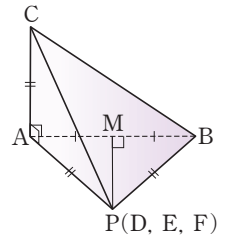
㉠, ㉡에서

$$\overline{PM} \perp (\text{평면 ABC})$$

$$\therefore \overline{PM} \perp \overline{BC}$$

즉, 직선 PM과 직선 BC는 서로 수직이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㉠, ㉡, ㉢이다.



0352 답 $\frac{2\sqrt{41}}{5}$

오른쪽 그림과 같이 점 Q에서 모서리 BC

에 내린 수선의 발을 S라 하면

$\overline{QS} \perp (\text{평면 ABCD}), \overline{QR} \perp \overline{CP}$ 이므로 삼

수선 정리에 의하여

$$\overline{RS} \perp \overline{CP}$$

$$\text{이때 } \overline{PD} = \frac{3}{4} \overline{AD} = 3 \text{이므로 직각삼각형}$$

CDP에서

$$\overline{CP} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

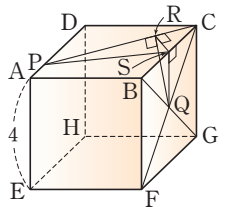
$$\text{또 } \overline{CS} = \frac{1}{2} \overline{BC} = 2 \text{이므로 삼각형 CPS의 넓이에서}$$

$$\frac{1}{2} \times \overline{CS} \times \overline{CD} = \frac{1}{2} \times \overline{CP} \times \overline{RS}$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times \overline{RS} \quad \therefore \overline{RS} = \frac{8}{5}$$

$$\text{따라서 } \overline{QS} = \frac{1}{2} \overline{BF} = 2 \text{이므로 직각삼각형 QSR에서}$$

$$\overline{QR} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{41}}{5}$$

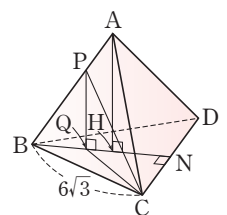


0353 답 $2\sqrt{13}$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 평면 BCD에

내린 수선의 발을 Q라 하면 선분 CP의 평면 BCD 위로의 정사영은 선분 CQ이다.

또 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 H는 삼각형 BCD의 무게 중심이다.



이때 점 B에서 모서리 CD에 내린 수선의 발을 N이라 하면 두 점 Q, H는 직선 BN 위에 있다.

$$\overline{BN} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6\sqrt{3} = 9 \text{이므로}$$

$$\overline{BH} = \frac{2}{3}\overline{BN} = \frac{2}{3} \times 9 = 6$$

직각삼각형 ABH에서 $\overline{PQ} \parallel \overline{AH}$ 이고 $\overline{AP} : \overline{PB} = 1 : 2$ 이므로 $\overline{HQ} : \overline{QB} = 1 : 2$

$$\therefore \overline{BQ} = \frac{2}{3}\overline{BH} = \frac{2}{3} \times 6 = 4$$

$$\therefore \overline{QN} = \overline{BN} - \overline{BQ} = 9 - 4 = 5$$

따라서 $\overline{CN} = \frac{1}{2}\overline{CD} = 3\sqrt{3}$ 이므로 직각삼각형 CNQ에서

$$\overline{CQ} = \sqrt{5^2 + (3\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{13}$$

0354 답 $\frac{25}{4}$

평면 ABC와 평면 AED가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 삼각형 APQ의 평면 AED 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle APQ \cos \theta$$

오른쪽 그림과 같이 모서리 DE의 중점

을 R라 하면

$$\angle QAR = \theta$$

이때 삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC} = 5\sqrt{5}$

인 이등변삼각형이므로

$$\overline{AQ} \perp \overline{BC}$$

$\overline{BQ} = \frac{1}{2}\overline{BC} = 5$ 이므로 직각삼각형 ABQ에서

$$\overline{AQ} = \sqrt{(5\sqrt{5})^2 - 5^2} = 10$$

즉, 삼각형 AQR는 $\overline{AQ} = \overline{QR} = \overline{AR} = 10$ 인 정삼각형이므로 $\theta = 60^\circ$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$$

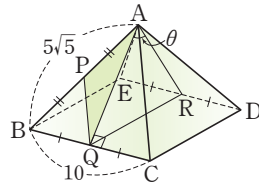
한편 점 P는 모서리 AB의 중점이므로

$$\triangle APQ = \frac{1}{2}\triangle ABQ$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times 5 \times 10 \right) = \frac{25}{2}$$

따라서 삼각형 APQ의 평면 AED 위로의 정사영의 넓이는

$$\triangle APQ \cos \theta = \frac{25}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{25}{4}$$



04 / 공간좌표

A 개념 확인

62~65쪽

0355 답 (2, 0, 3)

0356 답 (2, 4, 3)

0357 답 (0, 4, 3)

0358 답 (3, 0, 0)

0359 답 (0, -2, 0)

0360 답 (0, 0, 4)

0361 답 (-1, 4, 0)

0362 답 (0, 4, -3)

0363 답 (-1, 0, -3)

0364 답 (5, 1, -2)

0365 답 (-5, -1, -2)

0366 답 (-5, 1, 2)

0367 답 (-4, -2, -6)

0368 답 (4, -2, 6)

0369 답 (-4, 2, 6)

0370 답 (4, 2, -6)

0371 답 $2\sqrt{17}$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(4+2)^2 + (-3-1)^2 + (1+3)^2} \\ &= 2\sqrt{17} \end{aligned}$$

0372 답 $\sqrt{41}$

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \sqrt{(3-7)^2 + (2+2)^2 + (1-4)^2} \\ &= \sqrt{41} \end{aligned}$$

0373 답 $\sqrt{21}$

$$OA = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{21}$$

0374 답 $(5, 1, -3)$

0375 답 $(-5, -1, 3)$

0376 답 $2\sqrt{35}$

$$B(5, 1, -3), C(-5, -1, 3) \text{이므로}$$

$$BC = \sqrt{(-5-5)^2 + (-1-1)^2 + (3+3)^2} = 2\sqrt{35}$$

0377 답 $(-2, -1, 4)$

$$\left(\frac{1 \times 2 + 2 \times (-4)}{1+2}, \frac{1 \times (-5) + 2 \times 1}{1+2}, \frac{1 \times 0 + 2 \times 6}{1+2} \right)$$

$$\therefore (-2, -1, 4)$$

0378 답 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$

$$\left(\frac{3 \times 2 + 1 \times (-4)}{3+1}, \frac{3 \times (-5) + 1 \times 1}{3+1}, \frac{3 \times 0 + 1 \times 6}{3+1} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

0379 답 $(-1, -2, 3)$

$$\left(\frac{-4+2}{2}, \frac{1-5}{2}, \frac{6+0}{2} \right)$$

$$\therefore (-1, -2, 3)$$

0380 답 $(-1, -1, 0)$

$$\left(\frac{0+2-5}{3}, \frac{1-3-1}{3}, \frac{6-4-2}{3} \right)$$

$$\therefore (-1, -1, 0)$$

0381 답 $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\right)$

$$\left(\frac{1+4-1}{3}, \frac{-2+5+2}{3}, \frac{3-1+4}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\right)$$

0382 답 중심의 좌표: $(1, -2, 0)$, 반지름의 길이: 2

0383 답 중심의 좌표: $(0, -1, 5)$, 반지름의 길이: $\sqrt{2}$

0384 답 중심의 좌표: $(0, 0, 0)$, 반지름의 길이: 3

0385 답 $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 4$

0386 답 $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

0387 답 $(x+3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25$

구의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x+3)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 25$$

0388 답 $(x-3)^2 + (y+5)^2 + (z-2)^2 = 45$

구의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(1-3)^2 + 5^2 + (-2-2)^2} = 3\sqrt{5}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 + (z-2)^2 = 45$$

0389 답 $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 16$

구가 xy 평면에 접하므로 반지름의 길이는

$$|4| = 4$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 16$$

0390 답 $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 9$

구가 yz 평면에 접하므로 반지름의 길이는

$$|-3| = 3$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 9$$

0391 답 $(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 1$

구가 zx 평면에 접하므로 반지름의 길이는

$$|1| = 1$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-4)^2 = 1$$

0392 답 $(x-2)^2 + (y+5)^2 + (z+1)^2 = 26$

구가 x 축에 접하므로 반지름의 길이는

$$\sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 + (z+1)^2 = 26$$

0393 답 $(x-2)^2 + (y+5)^2 + (z+1)^2 = 5$

구가 y 축에 접하므로 반지름의 길이는

$$\sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 + (z+1)^2 = 5$$

0394 답 $(x-2)^2 + (y+5)^2 + (z+1)^2 = 29$

구가 z 축에 접하므로 반지름의 길이는

$$\sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 + (z+1)^2 = 29$$

0395 [답] 중심의 좌표: (0, -1, 2), 반지름의 길이: $2\sqrt{2}$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 4z - 3 = 0 \text{에서}$$

$$x^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 8$$

따라서 구의 중심의 좌표는 (0, -1, 2), 반지름의 길이는 $2\sqrt{2}$ 이다.

0396 [답] 중심의 좌표: (-2, 2, -1), 반지름의 길이: $\sqrt{14}$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 4y + 2z - 5 = 0 \text{에서}$$

$$(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 14$$

따라서 구의 중심의 좌표는 (-2, 2, -1), 반지름의 길이는 $\sqrt{14}$ 이다.

0397 [답] 중심의 좌표: (3, -4, 1), 반지름의 길이: 2

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 2z + 22 = 0 \text{에서}$$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z-1)^2 = 4$$

따라서 구의 중심의 좌표는 (3, -4, 1), 반지름의 길이는 2이다.

B 유형 완성

66~75쪽

0398 [답] (1, -3, 0)

점 P(-1, 3, 5)에서 xy 평면에 내린 수선의 발 Q의 좌표는

$$(-1, 3, 0)$$

따라서 점 Q(-1, 3, 0)을 z 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(1, -3, 0)$$

0399 [답] ㄴ, ㄷ

ㄱ. 점 (2, -3, 5)에서 x 축에 내린 수선의 발의 좌표는

$$(2, 0, 0)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0400 [답] 1

점 P($a-b$, $a+3$, 3)을 zx 평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(a-b, -a-3, 3) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 Q(-2, - b , $c-b$)를 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(2, -b, -c+b) \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

①, ②이 원점에 대하여 대칭이므로

$$a-b=-2, -a-3=b, 3=c-b$$

$$\therefore a-b=-2, a+b=-3, b-c=-3$$

세 식을 연립하여 풀면

$$a=-\frac{5}{2}, b=-\frac{1}{2}, c=\frac{5}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$$

$$\therefore a-2b+c=-\frac{5}{2}-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 점 P를 zx 평면에 대하여 대칭이동한 점과 점 Q를 y 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표 구하기	40%
② a, b, c 의 값 구하기	40%
③ $a-2b+c$ 의 값 구하기	20%

0401 [답] ③

점 C는 점 B(4, a , 3)에서 yz 평면에 내린 수선의 발이므로

$$C(0, a, 3)$$

점 C(0, a , 3)을 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(0, -a, -3)$$

따라서 $-a=-6, -3=b$ 이므로 $a=6, b=-3$

$$\therefore a+b=3$$

0402 [답] ④

B(-2, 5, -4), C(2, -5, -4)이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{(2+2)^2 + (-5-5)^2 + (-4+4)^2} = 2\sqrt{29}$$

0403 [답] ①

$\overline{AB} = \overline{AC}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2$ 이므로

$$(a+1-1)^2 + (3-4)^2 + (1-2)^2 = (-1)^2 + (3-4)^2 + (3-2)^2$$

$$a^2 = 1 \quad \therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

0404 [답] 6

$$\overline{AB} = \sqrt{(4-x-1)^2 + (x-1-1)^2 + (x+3-4)^2}$$

$$= \sqrt{3x^2 - 12x + 14}$$

$$= \sqrt{3(x-2)^2 + 2}$$

즉, $x=2$ 일 때 두 점 A, B 사이의 거리의 최솟값은 $\sqrt{2}$ 이다.

따라서 $\alpha=2, \beta=\sqrt{2}$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2^2 + (\sqrt{2})^2 = 6$$

0405 [답] 60

Q(-6, 3, 4), R(6, -3, -4)이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{(-6-6)^2 + (3-3)^2 + (4-4)^2} = 12$$

$$\overline{PR} = \sqrt{(6-6)^2 + (-3-3)^2 + (-4-4)^2} = 10$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(6+6)^2 + (-3-3)^2 + (-4-4)^2} = 2\sqrt{61} \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

이때 $\overline{QR}^2 = \overline{PQ}^2 + \overline{PR}^2$ 이므로 삼각형 PQR는 $\angle P=90^\circ$ 인 직각삼각형이다. $\cdots \cdots \textcircled{ii}$

따라서 삼각형 PQR의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{PR} = \frac{1}{2} \times 12 \times 10 = 60 \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 세 변 PQ, PR, QR의 길이 구하기	50%
② 삼각형 PQR가 $\angle P=90^\circ$ 인 직각삼각형임을 알기	30%
③ 삼각형 PQR의 넓이 구하기	20%

0406 [답] ⑤

zx 평면 위에 있는 직선 $x=z$ 위의 점 H의 좌표를 ($a, 0, a$) ($a \neq 0$)

라 하면 원점 O에 대하여 삼각형 PHO는 $\angle PHO=90^\circ$ 인 직각삼각

형이므로 $\overline{OP}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{PH}^2$ 에서

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = (a^2 + a^2) + \{(a-2)^2 + (-3)^2 + (a-6)^2\}$$

$$a^2 - 4a = 0, a(a-4) = 0 \quad \therefore a = 4 \quad (\because a \neq 0)$$

따라서 H(4, 0, 4)이므로

$$\overline{PH} = \sqrt{(4-2)^2 + (-3)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{17}$$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 점 P(2, 3, 6)에서 zx 평면에 내린 수선의 발을 H'이라 하면

$H'(2, 0, 6)$ 이므로 $\overline{PH'}=3$

이때 $\overline{PH} \perp$ (직선 $x=z$), $\overline{PH'} \perp$ (zx 평면)

이므로 삼수선 정리에 의하여

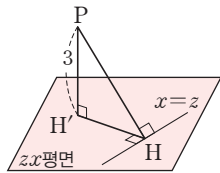
$\overline{HH'} \perp$ (직선 $x=z$)

따라서 선분 $\overline{HH'}$ 의 길이는 점 $H'(2, 0, 6)$ 과 직선 $x=z$, 즉 $x-z=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\overline{HH'} = \frac{|2-6|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

따라서 직각삼각형 $\overline{PH'H}$ 에서

$$\overline{PH} = \sqrt{3^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{17}$$



0407 답 $2\sqrt{7}$

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 A라 하면

$$\overline{OA} = \overline{OP} \cos 60^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$\overline{PA} = \overline{OP} \sin 60^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$\therefore P(2, 2\sqrt{3}, 0)$

점 Q에서 y 축에 내린 수선의 발을 B라 하면

$$\overline{OB} = \overline{OQ} \cos 30^\circ = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

$$\overline{QB} = \overline{OQ} \sin 30^\circ = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$\therefore Q(0, 2\sqrt{3}, 2)$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3}-2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

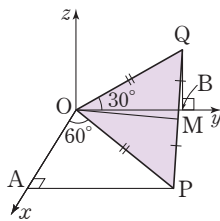
한편 삼각형 $\overline{OPQ}$ 는 $\overline{OP} = \overline{OQ}$ 인 이등변삼각형이므로 선분 $\overline{PQ}$ 의 중점을 M이라 하면

$$\overline{PM} = \frac{1}{2} \overline{PQ} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$\text{직각삼각형 OPM에서 } \overline{OM} = \sqrt{4^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{14}$$

따라서 삼각형 $\overline{OPQ}$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{OM} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{14} = 2\sqrt{7}$$



0408 답 (6, 0, 0)

구하는 점을 P(a, 0, 0)이라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a-3)^2 + 4^2 + (-1)^2 = (a-2)^2 + 1^2 + 3^2$$

$$-2a = -12 \quad \therefore a = 6$$

따라서 구하는 점의 좌표는 (6, 0, 0)이다.

0409 답 ①

점 P의 좌표를 (0, a, 0)이라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(-1)^2 + (a-2)^2 + (-2)^2 = 1^2 + (a+1)^2 + (-1)^2$$

$$-6a = -6 \quad \therefore a = 1$$

$\therefore P(0, 1, 0)$

점 Q의 좌표를 (b, 0, c)라 하면

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서 $\overline{AQ}^2 = \overline{BQ}^2$ 이므로

$$(b-1)^2 + (-2)^2 + (c-2)^2 = (b+1)^2 + 1^2 + (c-1)^2$$

$$-4b - 2c = -6 \quad \therefore 2b + c = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$\overline{AQ} = \overline{CQ}$ 에서 $\overline{AQ}^2 = \overline{CQ}^2$ 이므로

$$(b-1)^2 + (-2)^2 + (c-2)^2 = (b-5)^2 + (-2)^2 + (c+2)^2$$

$$8b - 8c = 24 \quad \therefore b - c = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $b=2, c=-1$

$\therefore Q(2, 0, -1)$

$$\therefore \overline{PQ} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

0410 답 (3, 0, 0), (5, 0, 0)

점 C의 좌표를 (a, b, 0)이라 하면 삼각형 ABC가 정삼각형이므로

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$ 에서 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$

$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$$(4-4)^2 + (1-4)^2 + (4-1)^2 = (a-4)^2 + (b-1)^2 + (-4)^2$$

$$\therefore a^2 + b^2 - 8a - 2b + 15 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2$ 에서

$$(a-4)^2 + (b-1)^2 + (-4)^2 = (4-a)^2 + (4-b)^2 + 1^2$$

$$6b = 0 \quad \therefore b = 0$$

이를 ①에 대입하면 $a^2 - 8a + 15 = 0$

$$(a-3)(a-5) = 0 \quad \therefore a = 3 \text{ 또는 } a = 5$$

따라서 구하는 점 C의 좌표는 (3, 0, 0), (5, 0, 0)

0411 답 ②

두 점 A, B의 yz 평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라 하면

$A'(0, 1, 3), B'(0, 4, 1)$

따라서 구하는 정사영의 길이는

$$\overline{A'B'} = \sqrt{(4-1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{13}$$

0412 답 7

$$\overline{AB} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (a-3)^2 + (\sqrt{2}-3\sqrt{2})^2} = \sqrt{a^2 - 6a + 25}$$

두 점 A, B의 zx 평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라 하면

$A'(0, 0, 3\sqrt{2}), B'(2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}-3\sqrt{2})^2} = 4$$

이때 직선 AB와 zx 평면이 이루는 각의 크기가 45° 이므로

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 45^\circ \text{에서 } 4 = \sqrt{a^2 - 6a + 25} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 6a - 7 = 0, (a+1)(a-7) = 0 \quad \therefore a = 7 (\because a > 0)$$

0413 답 $\frac{3}{4}$

두 점 A, B는 xy 평면 위에 있으므로 점 C의

xy 평면 위로의 정사영을 C'이라 하면 삼각형

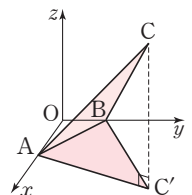
ABC의 xy 평면 위로의 정사영은 삼각형

ABC'이다.

삼각형 ABC에서

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{4^2 + (4-2)^2 + (\sqrt{14})^2} = \sqrt{34}$$



$$\overline{CA} = \sqrt{(2-4)^2 + (-4)^2 + (-\sqrt{14})^2} = \sqrt{34}$$

즉, 삼각형 ABC는 $\overline{BC} = \overline{CA}$ 인 이등변삼각형이다.

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{CH} = \sqrt{(\sqrt{34})^2 - (\sqrt{2})^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 4\sqrt{2} = 8$$

한편 $C'(4, 4, 0)$ 이므로

$$\overline{BC'} = \sqrt{4^2 + (4-2)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overline{C'A} = \sqrt{(2-4)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$$

즉, 삼각형 ABC'은 $\overline{BC'} = \overline{C'A}$ 인 이등변삼각형이다.

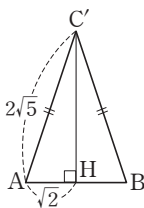
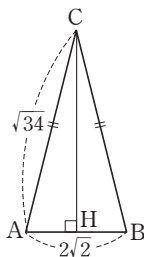
오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 C'에서 변 AB에 내린 수선의 발도 H이므로 직각삼각형 C'AH에서

$$\overline{C'H} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC' &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{C'H} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6 \end{aligned}$$

$$\triangle ABC' = \triangle ABC \cos \theta \text{ 이므로}$$

$$6 = 8 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{3}{4}$$



0414 답 25

선분을 평행이동하여도 그 길이는 변하지 않으므로 점 A를 원점 O, 점 B의 좌표를 (a, b, c) 라 하자.

점 B의 xy 평면, yz 평면 위로의 정사영을 각각 C, D라 하면

$$C(a, b, 0), D(0, b, c)$$

이때 선분 AB의 xy 평면, yz 평면 위로의 정사영은 각각 선분 OC, 선분 OD이므로 $\overline{OC} = 12, \overline{OD} = 5$

$$\overline{OC} = 12 \text{에서 } \sqrt{a^2 + b^2} = 12$$

$$a^2 + b^2 = 144 \quad \therefore a^2 = 144 - b^2$$

$$\overline{OD} = 5 \text{에서 } \sqrt{b^2 + c^2} = 5$$

$$b^2 + c^2 = 25 \quad \therefore c^2 = 25 - b^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \overline{AB} &= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \\ &= \sqrt{(144 - b^2) + b^2 + (25 - b^2)} \\ &= \sqrt{169 - b^2} \end{aligned}$$

이때 ①에서 $b^2 \geq 0, c^2 = 25 - b^2 \geq 0$ 이므로 $0 \leq b^2 \leq 25$

따라서 선분 AB의 길이는 $b^2 = 0$ 일 때 최댓값 13, $b^2 = 25$ 일 때 최솟값 $\sqrt{169 - 25} = 12$ 를 가지므로

$$M = 13, m = 12 \quad \therefore M + m = 25$$

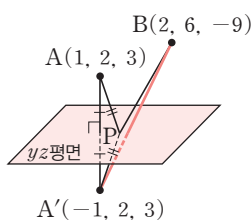
0415 답 ③

두 점 A, B의 x 좌표의 부호가 같으므로

두 점 A, B는 yz 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

$$A'(-1, 2, 3)$$



이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{(2+1)^2 + (6-2)^2 + (-9-3)^2} = 13$$

따라서 구하는 최솟값은 13이다.

만렙 Note

두 점 A, B가 좌표평면을 기준으로 같은 쪽에 있는지 서로 반대쪽에 있는지 확인한다.

(1) xy 평면 $\Rightarrow$ 두 점 A, B의 z 좌표의 부호 확인

(2) yz 평면 $\Rightarrow$ 두 점 A, B의 x 좌표의 부호 확인

(3) zx 평면 $\Rightarrow$ 두 점 A, B의 y 좌표의 부호 확인

이때 각 좌표의 부호가 같으면 두 점 A, B는 같은 쪽에 있고, 부호가 다르면 두 점 A, B는 서로 반대쪽에 있다.

0416 답 10

두 점 A, B의 y 좌표가 0이고 z 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 zx 평면 위에 있고 x 축을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A를 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

$$A'(6, 0, -4)$$

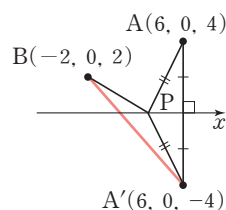
이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{(-2-6)^2 + (2+4)^2} = 10$$

따라서 구하는 최솟값은 10이다.



0417 답 2

두 점 A, B의 y 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 zx 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A를 zx 평면에 대하여 대칭이동한 점을 A'이라 하면

$$A'(1, -3, -1) \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP}$$

$$\geq \overline{A'B}$$

$$= \sqrt{(2-1)^2 + (1+3)^2 + (a+1)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + 2a + 18} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

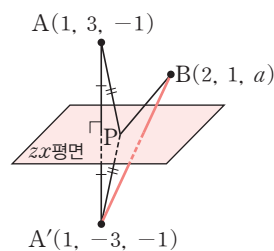
이때 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값이 $\sqrt{26}$ 이므로

$$\sqrt{a^2 + 2a + 18} = \sqrt{26}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 + 2a - 8 = 0, (a+4)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 (\because a > 0) \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$



채점 기준

① 점 A를 zx 평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표 구하기	20 %
② $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 a 에 대한 식으로 나타내기	40 %
③ 양수 a 의 값 구하기	40 %

0418 답 $3\sqrt{13}$

오른쪽 그림과 같이 점 H가 원점, 세 모서리 HE, HG, HD가 각각 x 축, y 축, z 축 위에 있도록 직육면체를 좌표공간에 놓으면

$M(2, 0, 5)$, $N(1, 4, 5)$

점 N을 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점을 N' 이라 하면 $\overrightarrow{MN}$ 의 길이를 구하면

$N'(1, 4, -5)$

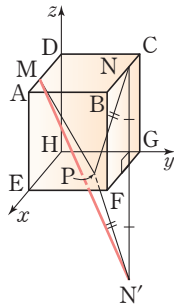
이때 $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{N'P}$ 이므로

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{N'P}$$

$$\geq \overrightarrow{MN'}$$

$$= \sqrt{(1-2)^2 + 4^2 + (-5-5)^2} = 3\sqrt{13}$$

따라서 구하는 최솟값은 $3\sqrt{13}$ 이다.



0419 답 $\sqrt{6} + \sqrt{14}$

두 점 A, B의 z 좌표의 부호가 같으므로 두 점 A, B는 xy 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면

$A'(2, 4, -1)$

이때 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{A'P}$ 이므로 삼각형 ABP의 둘레의 길이는

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'P} + \overrightarrow{BP}$$

$$\geq \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'B}$$

$$= \sqrt{(3-2)^2 + (2-4)^2 + (2-1)^2} + \sqrt{(3-2)^2 + (2-4)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{6} + \sqrt{14}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{6} + \sqrt{14}$ 이다.

0420 답 ②

$a > 1$ 이므로 두 점 A, B의 z 좌표의 부호가 같고 두 점 A, B는 xy 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다.

점 A를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면

$A'(5, 1, -a)$

이때 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{A'P}$ 이므로

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{A'P} + \overrightarrow{BP}$$

$$\geq \overrightarrow{A'B}$$

$$= \sqrt{(2-5)^2 + (-3-1)^2 + (2a-1+a)^2} = \sqrt{9a^2 - 6a + 26}$$

이때 $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{BP}$ 의 최솟값이 $5\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{9a^2 - 6a + 26} = 5\sqrt{2}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $3a^2 - 2a - 8 = 0$

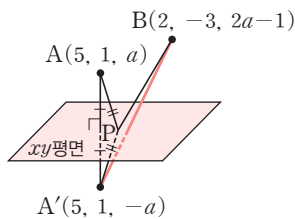
$$(3a+4)(a-2) = 0 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 1)$$

한편 두 점 A, B의 y 좌표의 부호가 다르므로 두 점 A, B는 zx 평면을 기준으로 서로 반대쪽에 있다.

$$\therefore \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{BQ} \geq \overrightarrow{AB}$$

$$= \sqrt{(2-5)^2 + (-3-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{26}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\sqrt{26}$ 이다.



0421 답 ②

선분 AB를 2:1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 12}{2+1}, \frac{2 \times a + 1 \times (a+6)}{2+1}, \frac{2 \times 1 + 1 \times 4}{2+1} \right)$$

$$\therefore (6, a+2, 2)$$

이 점이 점 $(b, 5, c)$ 와 일치하므로

$$6 = b, a+2 = 5, 2 = c$$

따라서 $a=3, b=6, c=2$ 이므로

$$a+b+c=11$$

0422 답 $(-1, -2, 1)$

$P(5, 10, -5), Q(-5, -10, 5)$ 이므로

선분 PQ를 3:2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-5) + 2 \times 5}{3+2}, \frac{3 \times (-10) + 2 \times 10}{3+2}, \frac{3 \times 5 + 2 \times (-5)}{3+2} \right)$$

$$\therefore (-1, -2, 1)$$

0423 답 $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{17}{4} \right)$

선분 AB를 $m:n$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{m \times (-5) + n \times 3}{m+n}, \frac{m \times (-4) + n \times 4}{m+n}, \frac{m \times 1 + n \times a}{m+n} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{-5m+3n}{m+n}, \frac{-4m+4n}{m+n}, \frac{m+an}{m+n} \right)$$

이 점이 점 $C(-3, b, 2)$ 와 일치하므로

$$\frac{-5m+3n}{m+n} = -3 \text{에서}$$

$$-5m+3n = -3m-3n \quad \therefore m=3n$$

이때 m, n 은 서로소인 자연수이므로

$$m=3, n=1$$

$$\text{또 } \frac{-4m+4n}{m+n} = b \text{에서 } b = \frac{-4 \times 3 + 4 \times 1}{3+1} = -2$$

$$\frac{m+an}{m+n} = 2 \text{에서 } \frac{3+a \times 1}{3+1} = 2 \quad \therefore a=5$$

$$\therefore A(3, 4, 5), C(-3, -2, 2)$$

따라서 선분 AC를 $n:m$, 즉 1:3으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-3) + 3 \times 3}{1+3}, \frac{1 \times (-2) + 3 \times 4}{1+3}, \frac{1 \times 2 + 3 \times 5}{1+3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{17}{4} \right)$$

채점 기준

① 자연수 m, n 의 값 구하기

40 %

② 두 점 A, C의 좌표 구하기

40 %

③ 선분 AC를 $n:m$ 으로 내분하는 점의 좌표 구하기

20 %

0424 답 ①

선분 AC의 중점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{2+2}{2}, \frac{4+4}{2} \right)$$

$$\therefore (3, 2, 4)$$

선분 BC를 1:3으로 내분하는 점 Q의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 4 + 3 \times 0}{1+3}, \frac{1 \times 2 + 3 \times 2}{1+3}, \frac{1 \times 4 + 3 \times 0}{1+3} \right)$$

$$\therefore (1, 2, 1)$$

점 P의 zx 평면 위로의 정사영 P'의 좌표는

(3, 0, 4)

점 Q의 y 축 위로의 정사영 Q'의 좌표는

(0, 2, 0)

이때 $\overline{OP'} \perp \overline{OQ'}$ 이므로 삼각형 OP'Q'의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OP'} \times \overline{OQ'} = \frac{1}{2} \times \sqrt{3^2 + 4^2} \times 2 = 5$$

0425 답 350

오른쪽 그림과 같이 점 M이 원점, 모서리 DE가 y 축 위에 있도록 정삼각기둥을 좌표공간에 놓으면

B(0, 3, 6)

이때 삼각형 DEF는 정삼각형이므로

$$\overline{MF} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3} \quad \begin{array}{l} \text{MF} \perp \text{DE이므로} \\ \text{MF는 } x\text{축 위에 있다.} \end{array}$$

$\therefore C(-3\sqrt{3}, 0, 6)$

한편 선분 BM을 1:2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 0 + 2 \times 0}{1+2}, \frac{1 \times 0 + 2 \times 3}{1+2}, \frac{1 \times 0 + 2 \times 6}{1+2} \right)$$

$\therefore (0, 2, 4)$

따라서 $l = \overline{CP} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 2^2 + (4-6)^2} = \sqrt{35}$ 이므로

$$10l^2 = 350$$

0426 답 7

선분 AB를 3:2로 내분하는 점이 z 축 위에 있으므로 내분점의 x 좌표, y 좌표가 0이다.

$$\text{즉, } \frac{3 \times (-6) + 2 \times a}{3+2} = 0, \frac{3 \times b + 2 \times 3}{3+2} = 0 \text{이므로}$$

$$-18 + 2a = 0, 3b + 6 = 0$$

따라서 $a = 9, b = -2$ 이므로 $a + b = 7$

0427 답 3

선분 AB를 1: m 으로 내분하는 점이 xy 평면 위에 있으므로 내분점의 z 좌표가 0이다.

$$\text{즉, } \frac{1 \times (-9) + m \times 3}{1+m} = 0 \text{이므로}$$

$$-9 + 3m = 0 \quad \therefore m = 3$$

0428 답 ⑤

선분 AB의 중점이 zx 평면 위에 있으므로 중점의 y 좌표가 0이다.

$$\text{즉, } \frac{b+6}{2} = 0 \text{이므로 } b = -6$$

또 선분 AB를 1:2로 내분하는 점이 y 축 위에 있으므로 내분점의 x 좌표, z 좌표가 0이다.

$$\text{즉, } \frac{1 \times (-8) + 2 \times a}{1+2} = 0, \frac{1 \times c + 2 \times (-5)}{1+2} = 0 \text{이므로}$$

$$-8 + 2a = 0, c - 10 = 0 \quad \therefore a = 4, c = 10$$

$$\therefore a + b + c = 8$$

0429 답 $\left(\frac{7}{5}, \frac{19}{5}, -\frac{7}{5}\right)$

선분 AB를 $m:n$ 으로 내분하는 점이 yz 평면 위에 있으므로 내분점의 x 좌표가 0이다.

$$\text{즉, } \frac{m \times (-5) + n \times 3}{m+n} = 0 \text{이므로}$$

$$-5m + 3n = 0 \quad \therefore 5m = 3n \quad \dots\dots \text{①}$$

이때 m, n 은 서로소인 자연수이므로

$$m = 3, n = 5 \quad \dots\dots \text{②}$$

따라서 선분 AB를 1:(3 m - n), 즉 1:4로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times (-5) + 4 \times 3}{1+4}, \frac{1 \times 3 + 4 \times 4}{1+4}, \frac{1 \times 5 + 4 \times (-3)}{1+4} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{7}{5}, \frac{19}{5}, -\frac{7}{5} \right) \quad \dots\dots \text{③}$$

채점 기준

① m, n 사이의 관계식 구하기	40 %
② 자연수 m, n 의 값 구하기	20 %
③ 선분 AB를 1:(3 m - n)으로 내분하는 점의 좌표 구하기	40 %

0430 답 12

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3-7}{2}, \frac{4+3}{2}, \frac{1+5}{2} \right) \quad \therefore \left(-2, \frac{7}{2}, 3 \right)$$

점 D의 좌표를 (a, b, c)라 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+a}{2}, \frac{-1+b}{2}, \frac{2+c}{2} \right)$$

평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$$-2 = \frac{4+a}{2}, \frac{7}{2} = \frac{-1+b}{2}, 3 = \frac{2+c}{2}$$

$$\therefore a = -8, b = 8, c = 4$$

따라서 D(-8, 8, 4)이므로

$$\overline{OD} = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + 4^2} = 12$$

0431 답 ④

평행사변형 ABCD의 각 변의 중점을 이어서 만든 사각형 PQRS도 평행사변형이고, 평행사변형 PQRS의 두 대각선의 교점은 평행사변형 ABCD의 두 대각선의 교점과 일치한다.

평행사변형 ABCD의 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+6}{2}, \frac{1+a}{2} \right)$$

$$\therefore \left(-1, 4, \frac{1+a}{2} \right)$$

이 점이 점 ($b, c, 3$)과 일치하므로

$$-1 = b, 4 = c, \frac{1+a}{2} = 3$$

따라서 $a = 5, b = -1, c = 4$ 이므로 $abc = -20$

중2 다시보기

사각형의 각 변의 중점을 이어서 만든 사각형은 다음과 같다.

- (1) 사각형, 평행사변형 $\Rightarrow$ 평행사변형
- (2) 직사각형, 등변사다리꼴 $\Rightarrow$ 마름모
- (3) 마름모 $\Rightarrow$ 직사각형
- (4) 정사각형 $\Rightarrow$ 정사각형

0432 답 -5

대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4-3}{2}, \frac{2+2}{2}, \frac{4+a}{2} \right) \quad \therefore \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{4+a}{2} \right)$$

대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{3-2}{2}, \frac{-2+6}{2}, \frac{-2+b}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}, 2, \frac{-2+b}{2}\right)$$

마름모 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 중점이 일치하므로

$$\frac{4+a}{2} = \frac{-2+b}{2} \quad \therefore b = a+6 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

또 마름모의 네 변의 길이가 모두 같으므로

$$\overline{AB} = \overline{BC}, \text{ 즉 } \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 \text{ 에서}$$

$$(3-4)^2 + (-2-2)^2 + (-2-4)^2 = (-3-3)^2 + (2+2)^2 + (a+2)^2$$

$$a^2 + 4a + 3 = 0, (a+3)(a+1) = 0$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = -1$$

⑦에서 $a = -3$ 일 때 $b = 3$, $a = -1$ 일 때 $b = 5$ 이므로

$$ab \text{의 최댓값은 } -1 \times 5 = -5$$

0433 답 29

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+3+1}{3}, \frac{8+b-6}{3}, \frac{-2+2-3}{3}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+4}{3}, \frac{b+2}{3}, -1\right)$$

이 점이 점 (3, 0, -1)과 일치하므로

$$\frac{a+4}{3} = 3, \frac{b+2}{3} = 0$$

따라서 $a = 5$, $b = -2$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 29$$

0434 답 ④

A(9, 3, 6), B(-9, 3, -6), C(9, -3, -6)이므로

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{9-9+9}{3}, \frac{3+3-3}{3}, \frac{6-6-6}{3}\right)$$

$$\therefore (3, 1, -2)$$

따라서 $a = 3$, $b = 1$, $c = -2$ 이므로

$$a+b-c = 6$$

0435 답 (2, 3, 4)

삼각형 ABC의 무게중심은 삼각형 PQR의 무게중심과 일치하므로

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{4+7-5}{3}, \frac{7-3+5}{3}, \frac{-1+4+9}{3}\right)$$

$$\therefore (2, 3, 4)$$

다른 풀이

세 점 A, B, C의 좌표를 각각 (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) 이라 하자.

변 AB의 중점이 P(4, 7, -1)이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2} = 4, \frac{y_1+y_2}{2} = 7, \frac{z_1+z_2}{2} = -1$$

$$\therefore x_1+x_2=8, y_1+y_2=14, z_1+z_2=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

변 BC의 중점이 Q(7, -3, 4)이므로

$$\frac{x_2+x_3}{2} = 7, \frac{y_2+y_3}{2} = -3, \frac{z_2+z_3}{2} = 4$$

$$\therefore x_2+x_3=14, y_2+y_3=-6, z_2+z_3=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

변 CA의 중점이 R(-5, 5, 9)이므로

$$\frac{x_3+x_1}{2} = -5, \frac{y_3+y_1}{2} = 5, \frac{z_3+z_1}{2} = 9$$

$$\therefore x_3+x_1=-10, y_3+y_1=10, z_3+z_1=18 \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

⑦, ⑧, ⑨을 변끼리 더하면

$$2(x_1+x_2+x_3)=12, 2(y_1+y_2+y_3)=18, 2(z_1+z_2+z_3)=24$$

$$\therefore x_1+x_2+x_3=6, y_1+y_2+y_3=9, z_1+z_2+z_3=12$$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

$$\therefore (2, 3, 4)$$

0436 답 (-5, -19, 14)

점 A의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 삼각형 ABC의 무게중심 G는 선

분 AM을 2:1로 내분하는 점이므로 점 G의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 4 + 1 \times a}{2+1}, \frac{2 \times 8 + 1 \times b}{2+1}, \frac{2 \times 2 + 1 \times c}{2+1}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+8}{3}, \frac{b+16}{3}, \frac{c+4}{3}\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

이 점이 점 (1, -1, 6)과 일치하므로

$$\frac{a+8}{3} = 1, \frac{b+16}{3} = -1, \frac{c+4}{3} = 6$$

$$\therefore a = -5, b = -19, c = 14$$

따라서 점 A의 좌표는 (-5, -19, 14)이다. $\cdots \cdots \textcircled{ii}$

채점 기준

① 점 A의 좌표를 (a, b, c) 라 하고 선분 AM을 2:1로 내분하는 점의 좌표 구하기 50%

② 점 A의 좌표 구하기 50%

다른 풀이

세 점 A, B, C의 좌표를 각각 (a, b, c) , (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) 라 하자.

변 BC의 중점이 M(4, 8, 2)이므로

$$\frac{x_1+x_2}{2} = 4, \frac{y_1+y_2}{2} = 8, \frac{z_1+z_2}{2} = 2$$

$$\therefore x_1+x_2=8, y_1+y_2=16, z_1+z_2=4$$

삼각형 ABC의 무게중심이 G(1, -1, 6)이므로

$$\frac{a+x_1+x_2}{3} = 1, \frac{b+y_1+y_2}{3} = -1, \frac{c+z_1+z_2}{3} = 6$$

$$\text{즉, } \frac{a+8}{3} = 1, \frac{b+16}{3} = -1, \frac{c+4}{3} = 6 \text{ 이므로}$$

$$a = -5, b = -19, c = 14$$

따라서 점 A의 좌표는 (-5, -19, 14)이다.

0437 답 ②

오른쪽 그림과 같이 점 H가 원점, 세 모서리 HE,

HG, HD가 각각 x 축, y 축, z 축 위에 있도록 직

육면체를 좌표공간에 놓으면

B(3, 3, 6), D(0, 0, 6), E(3, 0, 0),

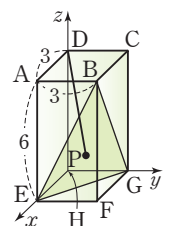
G(0, 3, 0)

이때 삼각형 BEG의 무게중심 P의 좌표는

$$\left(\frac{3+3+0}{3}, \frac{3+0+3}{3}, \frac{6+0+0}{3}\right)$$

$$\therefore (2, 2, 2)$$

$$\therefore \overline{DP} = \sqrt{2^2 + 2^2 + (2-6)^2} = 2\sqrt{6}$$



0438 [답] $(x-8)^2+(y-6)^2+(z-7)^2=169$

구의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{-4+20}{2}, \frac{3+9}{2}, \frac{3+11}{2}\right) \rightarrow \text{구의 중심은 선분 AB의 중점이다.}$$

$$\therefore (8, 6, 7)$$

또 구의 반지름의 길이는

$$\sqrt{(-4-8)^2+(3-6)^2+(3-7)^2}=13$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-8)^2+(y-6)^2+(z-7)^2=169$$

0439 [답] ③구 $(x-3)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=10$ 의 중심의 좌표는

$$(3, 1, -2)$$

따라서 구하는 구의 반지름의 길이는 두 점 $(3, 1, -2)$, $(2, 2, 3)$

사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(2-3)^2+(2-1)^2+(3+2)^2}=3\sqrt{3}$$

0440 [답] 6

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y-4z+k=0 \text{에서}$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=9-k$$

이 구의 중심의 좌표는 $(1, -2, 2)$ 이므로

$$a=1, b=-2, c=2$$

또 구의 반지름의 길이는 $\sqrt{9-k}$ 이므로

$$\sqrt{9-k}=2$$

양변을 제곱하면

$$9-k=4$$

$$\therefore k=5$$

$$\therefore a+b+c+k=6$$

0441 [답] ③구의 방정식을 $x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0$ 이라 하자.점 $(0, 0, 1)$ 을 지나므로

$$1+C+D=0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

점 $(1, 0, 1)$ 을 지나므로

$$2+A+C+D=0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

점 $(0, 2, 1)$ 을 지나므로

$$5+2B+C+D=0 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

점 $(0, 0, 4)$ 를 지나므로

$$16+4C+D=0 \quad \cdots \textcircled{㉣}$$

①, ②, ③, ④를 연립하여 풀면

$$A=-1, B=-2, C=-5, D=4$$

즉, 구의 방정식은

$$x^2+y^2+z^2-x-2y-5z+4=0$$

$$\therefore \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{7}{2}$$

따라서 구의 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{14}}{2}$ 이므로 구하는 구의 겹넓이는

$$4\pi \times \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2=14\pi$$

중1 다시보기

구의 겹넓이와 부피

반지름의 길이가 r 인 구에서

$$(1) (\text{겹넓이})=4\pi r^2$$

$$(2) (\text{부피})=\frac{4}{3}\pi r^3$$

0442 [답] $2\sqrt{5}$

$$x^2+y^2+z^2-2ax+4az+6a^2-4a=0 \text{에서}$$

$$(x-a)^2+y^2+(z+2a)^2=-a^2+4a$$

이 구의 중심의 좌표는 $(a, 0, -2a)$ 이고 반지름의 길이는

$$\sqrt{-a^2+4a} \text{이다.} \quad \cdots \textcircled{i}$$

이때 구의 부피가 최대하려면 구의 반지름의 길이가 최대이어야 한다.

$$-a^2+4a=-(a-2)^2+4 \text{이므로 } a=2 \text{일 때 반지름의 길이가 최대이다.} \quad \cdots \textcircled{ii}$$

따라서 점 C의 좌표가 $(2, 0, -4)$ 이므로

$$OC=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5} \quad \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 주어진 구의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 a 를 이용하여 나타내기	30 %
② 구의 부피가 최대일 때, a 의 값 구하기	40 %
③ 선분 OC의 길이 구하기	30 %

0443 [답] 2

$$x^2+y^2+z^2-4x-6y-8z+25=0 \text{에서}$$

$$(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2=4$$

즉, 주어진 구의 중심의 좌표는 $(2, 3, 4)$ 이고 반지름의 길이는 2이므로 이 구의 xy 평면 위로의 정사영 T 의 방정식은

$$(x-2)^2+(y-3)^2=4$$

 xy 평면에서 이 원과 직선 $y=x+k$, 즉 $x-y+k=0$ 이 접하므로 원의 중심 $(2, 3, 0)$ 과 직선 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 2와 같다.

$$\text{즉, } \frac{|2-3+k|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2 \text{이므로 } |-1+k|=2\sqrt{2}$$

$$-1+k=\pm 2\sqrt{2} \quad \rightarrow \text{직선 } y=x+k \text{과 정사영 } T \text{가 } xy \text{평면 위에 있으므로}$$

 xy 평면에서 원과 직선 사이의 위치 관계로 생각한다.

$$\therefore k=1\pm 2\sqrt{2}$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$(1+2\sqrt{2})+(1-2\sqrt{2})=2$$

0444 [답] ①

$$\overline{PA}:\overline{PB}=1:2 \text{에서 } \overline{PB}=2\overline{PA}$$

$$\therefore \overline{PB}^2=4\overline{PA}^2$$

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$(1-x)^2+(-3-y)^2+(-1-z)^2=4\{(1-x)^2+(3-y)^2+(2-z)^2\}$$

$$x^2+y^2+z^2-2x-10y-6z+15=0$$

$$\therefore (x-1)^2+(y-5)^2+(z-3)^2=20$$

즉, 점 P가 나타내는 도형은 점 $(1, 5, 3)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$ 인 구이다.따라서 $a=1, b=5, c=3, r=2\sqrt{5}$ 이므로

$$a-b-c+r^2=13$$

0445 **답** ②

점 Q의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 점 Q가 구 $x^2+y^2+z^2=4$ 위의 점
이므로

$$a^2+b^2+c^2=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 선분 PQ의 중점 M의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\frac{4+a}{2}=x, \frac{2+b}{2}=y, \frac{-4+c}{2}=z$$

$$\therefore a=2x-4, b=2y-2, c=2z+4$$

이를 ①에 대입하면

$$(2x-4)^2+(2y-2)^2+(2z+4)^2=4$$

$$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=1$$

0446 **답** $32\sqrt{3}\pi$

$\angle APB=90^\circ$ 이므로 삼각형 APB에서 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{AB}^2$

점 P의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$\{(x-5)^2+y^2+(z-2)^2\}+\{(x-1)^2+(y-4)^2+(z+2)^2\}$$

$$=(1-5)^2+4^2+(-2-2)^2$$

$$x^2+y^2+z^2-6x-4y+1=0$$

$$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2+z^2=12$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 $(3, 2, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 구이므로 구하는 도형의 부피는

$$\frac{4}{3}\pi \times (2\sqrt{3})^3=32\sqrt{3}\pi$$

0447 **답** 100

구의 중심을 C라 하면 $C(8, 2, -6)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{k}$ 이다.

점 C에서 y 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$H(0, 2, 0)$$

이때 선분 CH의 길이는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\sqrt{(-8)^2+(2-2)^2+6^2}=\sqrt{k}$$

$$\sqrt{k}=10 \quad \therefore k=100$$

0448 **답** ⑤

구가 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 동시에 접하고 점 $(1, 2, -5)$ 를 지나므로 구의 반지름의 길이를 r 라 하면 구의 중심의 좌표는

$(r, r, -r)$ 이다.

즉, 구의 방정식은

$$(x-r)^2+(y-r)^2+(z+r)^2=r^2$$

이 구가 점 $(1, 2, -5)$ 를 지나므로

$$(1-r)^2+(2-r)^2+(-5+r)^2=r^2$$

$$r^2-8r+15=0, (r-3)(r-5)=0$$

$$\therefore r=3 \text{ 또는 } r=5$$

따라서 두 구의 반지름의 길이의 합은

$$3+5=8$$

0449 **답** ④

구가 x 축, y 축, z 축에 동시에 접하므로 구의 중심에서 x 축, y 축, z 축에 이르는 거리는 모두 구의 반지름의 길이와 같다.

구의 중심을 $C(a, b, c)$ 라 하고, 점 C에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $H(a, 0, 0)$

이때 선분 CH의 길이는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\sqrt{(a-a)^2+(-b)^2+(-c)^2}=2$$

$$\therefore b^2+c^2=4$$

같은 방법으로 하면 $a^2+b^2=4, a^2+c^2=4$

세 식을 변끼리 더하면

$$2(a^2+b^2+c^2)=12 \quad \therefore a^2+b^2+c^2=6$$

따라서 원점에서 구의 중심까지의 거리는

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{6}$$

0450 **답** -85

$x^2+y^2+z^2-2x+6y+az+b=0$ 에서

$$(x-1)^2+(y+3)^2+\left(z+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}-b+10$$

이 구의 중심의 좌표는 $\left(1, -3, -\frac{a}{2}\right)$ 이고 반지름의 길이는

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+10} \text{이다.} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이때 구가 xy 평면에 접하므로

$$\left|-\frac{a}{2}\right|=\sqrt{\frac{a^2}{4}-b+10}$$

양변을 제곱하면

$$\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}-b+10 \quad \therefore b=10$$

또 구가 점 $(4, -1, 2)$ 를 지나므로

$$(4-1)^2+(-1+3)^2+\left(2+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}-b+10$$

이 식에 $b=10$ 을 대입하여 정리하면

$$2a+17=0 \quad \therefore a=-\frac{17}{2} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore ab=-\frac{17}{2} \times 10=-85 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 주어진 구의 중심의 좌표와 반지름의 길이를 a, b 를 이용하여 나타내기	30 %
② a, b 의 값 구하기	60 %
③ ab 의 값 구하기	10 %

0451 **답** 18

점 A와 구의 중심이 yz 평면을 기준으로 같은 쪽에 있으므로

$$a>0$$

이때 구가 yz 평면에 접하므로

$$|a|=4 \quad \therefore a=4 (\because a>0)$$

즉, 구의 방정식은 $(x-4)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=16$

이 구가 점 $A(2, 4, 6)$ 을 지나므로

$$(2-4)^2+(4-b)^2+(6-c)^2=16$$

$$\therefore b^2+c^2-8b-12c+40=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 점 C에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$H(4, 0, 0)$$

이때 선분 CH의 길이는 구의 반지름의 길이와 같으므로

$$\sqrt{(4-4)^2+(-b)^2+(-c)^2}=4 \quad \therefore b^2+c^2=16$$

이를 ①에 대입하면

$$16-8b-12c+40=0 \quad \therefore 2b+3c=14$$

$$\therefore a+2b+3c=4+14=18$$

0452 답 ③

주어진 구의 방정식에 $x=0, z=0$ 을 대입하면

$$y^2 - 10y + 1 = 0 \quad \therefore y = 5 \pm 2\sqrt{6}$$

따라서 주어진 구와 y 축의 두 교점 A, B의 좌표는

$$(0, 5 + 2\sqrt{6}, 0), (0, 5 - 2\sqrt{6}, 0)$$

$$\therefore \overline{AB} = (5 + 2\sqrt{6}) - (5 - 2\sqrt{6}) = 4\sqrt{6}$$

다른 풀이

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 10y - 8z + 1 = 0 \text{에서}$$

$$(x-3)^2 + (y-5)^2 + (z-4)^2 = 49$$

이 구의 중심의 좌표는 (3, 5, 4)이고 반지름의 길이는 7이다.

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C라 하고

점 C(3, 5, 4)에서 y 축에 내린 수선의 발을

H라 하면

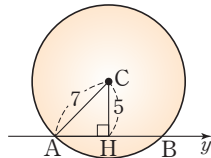
$$H(0, 5, 0)$$

$$\therefore \overline{CH} = \sqrt{(-3)^2 + (5-5)^2 + (-4)^2} = 5$$

따라서 직각삼각형 CAH에서

$$\overline{AH} = \sqrt{7^2 - 5^2} = 2\sqrt{6}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AH} = 4\sqrt{6}$$



0453 답 ①

주어진 구의 방정식에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$z^2 - 2z - a = 0 \quad \therefore z = 1 \pm \sqrt{a+1}$$

즉, 주어진 구와 z 축의 두 교점의 좌표는

$$(0, 0, 1 + \sqrt{a+1}), (0, 0, 1 - \sqrt{a+1})$$

이때 두 점 사이의 거리가 6이므로

$$(1 + \sqrt{a+1}) - (1 - \sqrt{a+1}) = 6$$

$$\sqrt{a+1} = 3$$

양변을 제곱하면

$$a+1=9 \quad \therefore a=8$$

즉, 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 2z - 8 = 0$$

$$\therefore (x+3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 22$$

따라서 $r^2=22$ 이므로

$$a+r^2=30$$

0454 답 4√3

주어진 구의 방정식에 $y=0, z=0$ 을 대입하면

$$(x+1)^2 + (0-2)^2 + (0+2)^2 = 14$$

$$(x+1)^2 = 6, x+1 = \pm\sqrt{6} \quad \therefore x = -1 \pm \sqrt{6}$$

즉, 주어진 구와 x 축의 두 교점 A, B의 좌표는

$$(-1 + \sqrt{6}, 0, 0), (-1 - \sqrt{6}, 0, 0)$$

$$\therefore \overline{AB} = (-1 + \sqrt{6}) - (-1 - \sqrt{6}) = 2\sqrt{6}$$

한편 C(-1, 2, -2)이고 점 C에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$H(-1, 0, 0)$$

$$\therefore \overline{CH} = \sqrt{(-1+1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{3}$$

..... ①

..... ②

..... ③

..... ④

채점 기준

① 구와 x 축의 교점의 x 좌표 구하기	30%
② 삼각형 ABC의 밑변 AB의 길이 구하기	20%
③ 삼각형 ABC의 높이 구하기	30%
④ 삼각형 ABC의 넓이 구하기	20%

0455 답 4√2π

점 (1, 3, 4)를 중심으로 하고 zx 평면에 접하는 구의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 9$$

이 식에 $x=0$ 을 대입하면

$$(0-1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 9$$

$$\therefore (y-3)^2 + (z-4)^2 = 8$$

따라서 주어진 구와 yz 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi$$

다른 풀이

오른쪽 그림과 같이 구의 중심을 C라 하고,

점 C에서 yz 평면에 내린 수선의 발을 H,

구와 yz 평면이 만나서 생기는 원 위의 한 점을 P라 하면

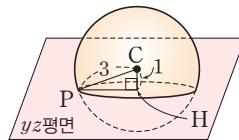
$$\overline{CP} = 3, \overline{CH} = 1$$

직각삼각형 CPH에서

$$\overline{PH} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$$

따라서 주어진 구와 yz 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\pi$$



0456 답 ④

주어진 구의 방정식에 $y=0$ 을 대입하면

$$x^2 + z^2 - 8x - 2z + k = 0$$

$$\therefore (x-4)^2 + (z-1)^2 = 17 - k$$

따라서 주어진 구와 zx 평면이 만나서 생기는 도형은 반지름의 길이가

$$\sqrt{17-k}$$
인 원이고, 이 원의 넓이가 12π 이므로

$$\pi \times (\sqrt{17-k})^2 = 12\pi, 17-k=12$$

$$\therefore k=5$$

0457 답 ②

구의 중심의 좌표를 (a, b, c)라 하면 구의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 9$$

이 식에 $z=0$ 을 대입하면

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (0-c)^2 = 9$$

$$\therefore (x-a)^2 + (y-b)^2 = 9 - c^2$$

이 식이 $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$ 와 일치하므로

$$a = -1, b = 2, 9 - c^2 = 5$$

$$9 - c^2 = 5 \text{에서 } c^2 = 4 \quad \therefore c = \pm 2$$

따라서 구의 중심의 좌표는 (-1, 2, 2) 또는 (-1, 2, -2)이므로

구의 중심과 원점 사이의 거리는

$$\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (\pm 2)^2} = 3$$

0458 답 $\frac{128}{3}\pi$

주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0 \quad \therefore (x+2)^2 + (y-1)^2 = 16$$

즉, 주어진 구와 xy 평면이 만나서 생기는 원의 반지름의 길이는 4이므로 원뿔의 밑면인 원의 반지름의 길이는 4이다.

한편 $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z - 11 = 0$ 에서

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25$$

구의 중심을 C라 하면 $C(-2, 1, 3)$ 이고 반지름의 길이는 5이다.

점 C에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면

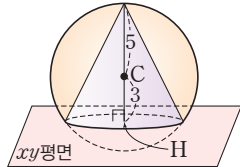
$$\overline{CH} = 3$$

이때 원뿔의 부피가 최대이려면 원뿔의 높이가 최대이어야 하므로 원뿔의 높이의 최댓값은

$$\overline{CH} + 5 = 8$$

따라서 구하는 원뿔의 부피의 최댓값은

$$\frac{1}{3} \times (\pi \times 4^2) \times 8 = \frac{128}{3}\pi$$



0459 답 $\sqrt{6}$

구의 중심의 좌표를 (a, b, c) , 반지름의 길이를 r (r 는 자연수)라 하면 구의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

이 식에 $z=0, x=0, y=0$ 을 각각 대입하여 정리하면

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 - c^2,$$

$$(y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 - a^2,$$

$$(x-a)^2 + (z-c)^2 = r^2 - b^2$$

이때 구 S와 xy 평면, yz 평면, xz 평면이 만나서 생기는 도형의 넓이가 각각 $\pi, 2\pi, 3\pi$ 이므로

$$(r^2 - c^2)\pi = \pi, (r^2 - a^2)\pi = 2\pi, (r^2 - b^2)\pi = 3\pi$$

$$\therefore r^2 - c^2 = 1, r^2 - a^2 = 2, r^2 - b^2 = 3$$

세 식을 변끼리 더하면

$$3r^2 - (a^2 + b^2 + c^2) = 6$$

$$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 3r^2 - 6$$

이때 원점에서 구 S의 중심까지의 거리는

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{3r^2 - 6}$$

r 는 자연수이므로 구하는 거리의 최솟값은 $r=2$ 일 때 $\sqrt{6}$ 이다.

0460 답 ⑤

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2z + 7 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 4$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(1, -3, 1)$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(1-4)^2 + (-3-3)^2 + (1-3)^2} = 7$$

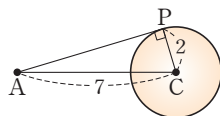
오른쪽 그림과 같이 점 A에서 구에 그은 접

선의 접점을 P라 하면

$$\overline{CP} = 2 \rightarrow \overline{CP} \text{는 구의 반지름}$$

따라서 직각삼각형 ACP에서 구하는 접선의 길이는

$$\overline{AP} = \sqrt{7^2 - 2^2} = 3\sqrt{5}$$



0461 답 31

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y - 2az + 9 + 2a = 0$$

$$(x+1)^2 + (y+3)^2 + (z-a)^2 = (a-1)^2$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(-1, -3, a)$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(-1-1)^2 + (-3-5)^2 + (a-2)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - 4a + 72}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 구에 그은

접선의 접점을 P라 하면

$$\overline{AP} = 3$$

따라서 직각삼각형 ACP에서

$$\overline{CP} = \sqrt{(\sqrt{a^2 - 4a + 72})^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - 4a + 63}$$

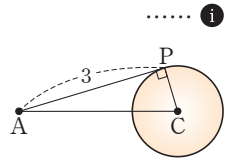
이때 $\overline{CP} = |a-1|$ 이므로

$$|a-1| = \sqrt{a^2 - 4a + 63}$$

양변을 제곱하면

$$a^2 - 2a + 1 = a^2 - 4a + 63$$

$$2a = 62 \quad \therefore a = 31$$



채점 기준

i 구의 중심과 점 A 사이의 거리를 a 에 대한 식으로 나타내기	30 %
ii 구의 반지름의 길이를 이용하여 a 에 대한 식 세우기	40 %
iii a 의 값 구하기	30 %

0462 답 $2\sqrt{2}\pi$

주어진 구의 중심을 C라 하면 $C(-1, 0, 1)$ 이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2)^2 + (1-1)^2} = 2\sqrt{2}$$

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 구에 그은

접선의 접점을 P라 하면

$$\overline{CP} = 2 \rightarrow \text{구의 반지름의 길이}$$

직각삼각형 ACP에서

$$\overline{AP} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2$$

이때 직각삼각형 ACP의 꼭짓점 P에서 변 AC에 내린 수선의 발을 H라 하면

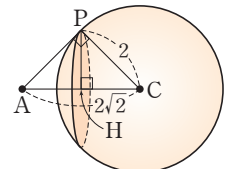
$$\frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{CP} = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{PH}$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \overline{PH}$$

$$\therefore \overline{PH} = \sqrt{2}$$

따라서 접점이 나타내는 도형은 점 H를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원이므로 구하는 도형의 둘레의 길이는

$$2\pi \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}\pi$$



0463 답 $8\sqrt{6}$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 19 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 24$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(2, 1, 0)$ 이고 반지름의 길이는 $2\sqrt{6}$ 이다.

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{(2-8)^2 + (1-7)^2 + 12^2} = 6\sqrt{6}$$

따라서 선분 AP의 길이의 최댓값은

$$\overline{AC} + 2\sqrt{6} = 8\sqrt{6}$$

0464 **답** 256

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 24z + 160 = 0 \text{에서}$$

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 + (z-12)^2 = 9$$

이 구의 중심을 C라 하면 C(3, -4, 12)이고 반지름의 길이는 3이다.

한편 원점 O에 대하여 $\overline{OP} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ 이므로 점

P의 위치가 오른쪽 그림과 같을 때 $a^2 + b^2 + c^2$ 의

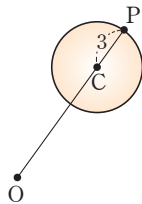
값이 최대이다.

$$\text{이때 } \overline{OC} = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2} = 13 \text{이므로}$$

$$\overline{OP} = \overline{OC} + 3 = 13 + 3 = 16$$

따라서 $a^2 + b^2 + c^2$ 의 최댓값은

$$16^2 = 256$$



0465 **답** ④

구 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 의 중심은 원점 O이고 반지름의 길이는 2이다.

$$\text{또 } x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 12z + 45 = 0 \text{에서}$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+6)^2 = 4$$

이 구의 중심을 O'이라 하면 O'(-2, 3, -6)이고 반지름의 길이는

2이다.

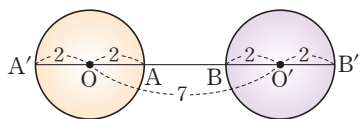
즉, 두 구의 중심 사이의 거리는

$$\overline{OO'} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-6)^2} = 7$$

이때 다음 그림에서 두 점 P, Q가 각각 A, B의 위치에 있을 때 선

분 PQ의 길이가 최소이고, A', B'의 위치에 있을 때 선분 PQ의 길

이가 최대이다.



따라서 $M = 7 + (2+2) = 11$, $m = 7 - (2+2) = 3$ 이므로

$$Mm = 33$$

0466 **답** $3\sqrt{2}$

주어진 구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면 원 C의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (0-2)^2 = 5$$

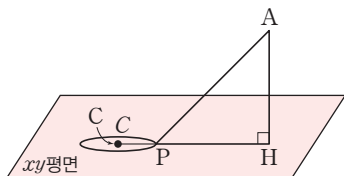
$$\therefore (x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

이 원의 중심을 C라 하면 C(2, 2, 0)이고 반지름의 길이는 1이다.

다음 그림과 같이 점 A에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 H라 하고,

선분 CH와 원 C가 만나는 점을 P라 하면 점 A에서 원에 이르는 거

리의 최솟값은 선분 AP의 길이와 같다.



이때 H(2, -2, 0)이므로

$$\overline{CH} = \sqrt{(2-2)^2 + (-2-2)^2} = 4$$

$$\overline{PH} = \overline{CH} - \overline{CP} = 4 - 1 = 3$$

직각삼각형 APH에서 $\overline{AH} = 3$ 이므로

$$\overline{AP} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $3\sqrt{2}$ 이다.

AB 유형 점검

76~78쪽

0467 **답** ④

점 P(a, b, c)를 x 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는

$$(a, -b, -c) \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

점 Q(4-2c, 3-a, a-5)를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌

표는

$$(-4+2c, 3-a, a-5) \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡이 일치하므로

$$a = -4 + 2c, -b = 3 - a, -c = a - 5$$

세 식을 연립하여 풀면 $a = 2, b = -1, c = 3$

$$\therefore a + 2b + 3c = 2 + 2 \times (-1) + 3 \times 3 = 9$$

0468 **답** ②

B(1, -3, -2), C(1, 3, -2)이므로

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-1)^2 + (-3-3)^2 + (-2-2)^2} = 2\sqrt{13}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(1-1)^2 + (3+3)^2 + (-2+2)^2} = 6$$

$$\overline{CA} = \sqrt{(1-1)^2 + (3-3)^2 + (2+2)^2} = 4$$

이때 $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼

각형이다.

따라서 세 점 A, B, C를 지나는 원의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{13} = \sqrt{13}$$

중3 다시보기

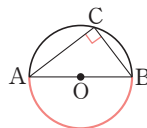
반원에 대한 원주각의 크기는 90° 이다.

→ 선분 AB가 원 O의 지름이면 $\angle ACB = 90^\circ$

→ 원 O에서 호 AB에 대한 원주각의 크기가 90°

이면 호 AB는 반원이다.

→ 선분 AB는 원 O의 지름



0469 **답** $(\frac{1}{12}, 0, \frac{1}{4})$

직선 $z = 3x$ 위의 점 P의 좌표를 (a, 0, 3a)라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 에서 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$ 이므로

$$(a+1)^2 + (-2)^2 + (3a)^2 = (a-2)^2 + 1^2 + (3a-1)^2$$

$$12a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{12}$$

따라서 점 P의 좌표는 $(\frac{1}{12}, 0, \frac{1}{4})$ 이다.

0470 **답** ④

두 점 A, B의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A', B'이라 하면

A'(4, 2, 0), B'(-1, k, 0)

$$\therefore \overline{A'B'} = \sqrt{(-1-4)^2 + (k-2)^2} = \sqrt{(k-2)^2 + 25}$$

즉, 선분 AB의 xy 평면 위로의 정사영의 길이는 $k = 2$ 일 때 최솟값

5를 갖는다.

선분 AB의 길이는

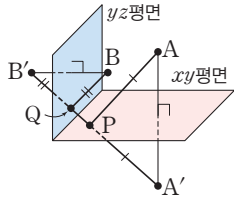
$$\overline{AB} = \sqrt{(-1-4)^2 + (2-2)^2 + (4-9)^2} = 5\sqrt{2}$$

이때 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 이므로

$$5 = 5\sqrt{2} \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

0471 답 ④

두 점 A, B는 x 좌표, y 좌표, z 좌표의 부호가 모두 같으므로 두 점 A, B는 xy 평면, yz 평면을 기준으로 같은 쪽에 있다. 점 A를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면



$$A'(8, 4, -2)$$

점 B를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라 하면

$$B'(-4, 8, 4)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$, $\overline{QB} = \overline{QB'}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} &= \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \\ &\geq \overline{A'B'} \\ &= \sqrt{(-4-8)^2 + (8-4)^2 + (4+2)^2} = 14 \end{aligned}$$

따라서 구하는 최솟값은 14이다.

0472 답 $\frac{34}{5}$

선분 OP가 $\angle AOB$ 의 이등분선이므로

$$\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{AP} : \overline{BP}$$

이때 $\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3$, $\overline{OB} = \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2} = 7$ 이므로

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 7$$

즉, 점 P는 변 AB를 3:7로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는

$$\begin{aligned} &\left(\frac{3 \times 6 + 7 \times 2}{3+7}, \frac{3 \times 2 + 7 \times 1}{3+7}, \frac{3 \times 3 + 7 \times 2}{3+7} \right) \\ &\therefore \left(\frac{16}{5}, \frac{13}{10}, \frac{23}{10} \right) \end{aligned}$$

따라서 $a = \frac{16}{5}$, $b = \frac{13}{10}$, $c = \frac{23}{10}$ 이므로

$$a + b + c = \frac{34}{5}$$

0473 답 $\left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}\right)$

선분 AB를 3:2로 내분하는 점이 xy 평면 위에 있으므로 내분점의 z 좌표가 0이다.

$$\text{즉, } \frac{3 \times 3 + 2 \times c}{3+2} = 0 \text{이므로}$$

$$9 + 2c = 0 \quad \therefore c = -\frac{9}{2}$$

또 선분 AB를 2:3으로 내분하는 점이 z 축 위에 있으므로 내분점의 x 좌표, y 좌표가 0이다.

$$\text{즉, } \frac{2 \times (-1) + 3 \times a}{2+3} = 0, \frac{2 \times 4 + 3 \times b}{2+3} = 0 \text{이므로}$$

$$-2 + 3a = 0, 8 + 3b = 0$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}, b = -\frac{8}{3}$$

$$\therefore A\left(\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{9}{2}\right)$$

따라서 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{\frac{2}{3} - 1}{2}, \frac{-\frac{8}{3} + 4}{2}, \frac{-\frac{9}{2} + 3}{2} \right)$$

$$\therefore \left(-\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}\right)$$

0474 답 ②

점 C의 좌표를 (a, b, c) 라 하면 대각선 AC의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{-4+a}{2}, \frac{-2+b}{2}, \frac{-3+c}{2} \right)$$

대각선 AC의 중점은 두 대각선의 교점 $M(-3, 0, 2)$ 와 일치하므로

$$\frac{-4+a}{2} = -3, \frac{-2+b}{2} = 0, \frac{-3+c}{2} = 2$$

$$\therefore a = -2, b = 2, c = 7$$

$$\therefore C(-2, 2, 7)$$

점 D의 좌표를 (d, e, f) 라 하면 대각선 BD의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+d}{2}, \frac{-1+e}{2}, \frac{-2+f}{2} \right)$$

대각선 BD의 중점은 두 대각선의 교점 $M(-3, 0, 2)$ 와 일치하므로

$$\frac{4+d}{2} = -3, \frac{-1+e}{2} = 0, \frac{-2+f}{2} = 2$$

$$\therefore d = -10, e = 1, f = 6$$

$$\therefore D(-10, 1, 6)$$

따라서 삼각형 CDM의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{-2-10-3}{3}, \frac{2+1+0}{3}, \frac{7+6+2}{3} \right) \quad \therefore (-5, 1, 5)$$

0475 답 ①

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z - 15 = 0 \text{에서}$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = 29$$

이 구의 중심을 C라 하면 $C(2, 1, -3)$ 이고 점 C는 선분 AB의 중점이다.

이때 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{4+a}{2}, \frac{-2+b}{2}, \frac{1+c}{2} \right)$$

$$\text{따라서 } \frac{4+a}{2} = 2, \frac{-2+b}{2} = 1, \frac{1+c}{2} = -3 \text{이므로}$$

$$a = 0, b = 4, c = -7 \quad \therefore a - b + c = -11$$

0476 답 $2\sqrt{5}$

점 $(-1, 2, -3)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 구의 방정식은

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 8$$

$$\text{즉, } x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 6 = 0 \text{이므로}$$

$$a = 2, b = -4, c = 6, d = 6$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 6y - 4z + 2 = 0 \text{에서}$$

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 20$$

따라서 구하는 구의 반지름의 길이는 $2\sqrt{5}$ 이다.

0477 답 ③

점 P의 좌표를 (p, q, r) 라 하면

점 P는 구 $(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 1$ 위의 점이므로

$$(p-1)^2 + q^2 + (r-3)^2 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

선분 AP를 2:1로 내분하는 점 Q의 좌표를 (x, y, z) 라 하면

$$x = \frac{2 \times p + 1 \times 4}{2+1}, y = \frac{2 \times q + 1 \times 3}{2+1}, z = \frac{2 \times r + 1 \times (-3)}{2+1}$$

$$\therefore p = \frac{3x-4}{2}, q = \frac{3y-3}{2}, r = \frac{3z+3}{2}$$

이를 ①에 대입하면

$$\left(\frac{3x-4}{2} \right)^2 + \left(\frac{3y-3}{2} \right)^2 + \left(\frac{3z+3}{2} \right)^2 = 1$$

$$9(x-2)^2 + 9(y-1)^2 + 9(z-1)^2 = 4$$

$$\therefore 9x^2 + 9y^2 + 9z^2 - 36x - 18y - 18z + 50 = 0$$

따라서 $a = -36$, $b = -18$, $c = -18$, $d = 50$ 이므로

$$a - b - c + d = 50$$

0478 답 ③

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax - 4by - 4z + 8 = 0 \text{에서}$$

$$(x+a)^2 + (y-2b)^2 + (z-2)^2 = a^2 + 4b^2 - 4$$

이 구의 중심의 좌표는 $(-a, 2b, 2)$ 이고 반지름의 길이는

$$\sqrt{a^2 + 4b^2 - 4} \text{이다.}$$

이때 구가 yz 평면에 접하므로

$$|-a| = \sqrt{a^2 + 4b^2 - 4}$$

양변을 제곱하면

$$a^2 = a^2 + 4b^2 - 4$$

$$4b^2 = 4$$

$$\therefore b^2 = 1$$

또 구가 zx 평면에 접하므로

$$|2b| = \sqrt{a^2 + 4b^2 - 4}$$

양변을 제곱하면

$$4b^2 = a^2 + 4b^2 - 4$$

$$\therefore a^2 = 4$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

0479 답 ⑤

구의 반지름의 길이를 r 라 하면 구의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = r^2$$

이 식에 $x=0$, $z=0$ 을 대입하면

$$(0-3)^2 + (y-4)^2 + (0-1)^2 = r^2$$

$$(y-4)^2 = r^2 - 10, y-4 = \pm\sqrt{r^2-10}$$

$$\therefore y = 4 \pm \sqrt{r^2-10}$$

즉, 주어진 구와 y 축의 두 교점 A, B의 좌표는

$$(0, 4 + \sqrt{r^2-10}, 0), (0, 4 - \sqrt{r^2-10}, 0)$$

이때 $\overline{AB} = 10\sqrt{6}$ 이므로

$$(4 + \sqrt{r^2-10}) - (4 - \sqrt{r^2-10}) = 10\sqrt{6}$$

$$2\sqrt{r^2-10} = 10\sqrt{6}, \sqrt{r^2-10} = 5\sqrt{6}$$

양변을 제곱하면

$$r^2 - 10 = 150, r^2 = 160$$

$$\therefore r = 4\sqrt{10} (\because r > 0)$$

0480 답 ②

구의 중심의 좌표를 (a, b, c) , 반지름의 길이를 r 라 하면 구의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

이 식에 $y=0$ 을 대입하면

$$(x-a)^2 + (0-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

$$\therefore (x-a)^2 + (z-c)^2 = r^2 - b^2$$

이 식이 $(x-2)^2 + (z-3)^2 = 5$ 와 일치하므로

$$a=2, c=3, r^2 - b^2 = 5$$

즉, 구의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-b)^2 + (z-3)^2 = b^2 + 5$$

이 구가 점 $(1, 8, 1)$ 을 지나므로

$$(1-2)^2 + (8-b)^2 + (1-3)^2 = b^2 + 5$$

$$-16b = -64$$

$$\therefore b = 4$$

따라서 구의 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 21$$

이 구가 점 $(k, 0, 1)$ 을 지나므로

$$(k-2)^2 + (0-4)^2 + (1-3)^2 = 21$$

$$(k-2)^2 = 1, k-2 = \pm 1$$

$$\therefore k = 1 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 모든 k 의 값의 합은

$$1 + 3 = 4$$

0481 답 $5\sqrt{2}-3$

삼각형 OAB의 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{0+7+5}{3}, \frac{0+6+9}{3}, 0 \right)$$

$$\therefore (4, 5, 0)$$

이때 세 점 O, A, B의 z 좌표가 모두 0이므로 세 점 O, A, B는 xy 평면 위의 점이다.

즉, 평면 OAB는 xy 평면이다.

따라서 구 S가 xy 평면에 접하므로 접점 G는 구의 중심의 xy 평면 위로의 정사영이다.

한편 구 S의 반지름의 길이가 3이므로 구의 중심을 C라 하면

$$C(4, 5, -3) \text{ 또는 } C(4, 5, 3)$$

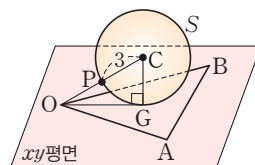
$$\therefore \overline{OC} = \sqrt{4^2 + 5^2 + (\pm 3)^2} = 5\sqrt{2}$$

이때 점 P의 위치가 오른쪽 그림과 같

을 때 선분 OP의 길이가 최소이다.

따라서 선분 OP의 길이의 최솟값은

$$\overline{OC} - 3 = 5\sqrt{2} - 3$$



0482 답 -1

$$\overline{AB}^2 = 1^2 + (3-3)^2 + (3-1)^2 = 5$$

$$\overline{BC}^2 = 1^2 + (3+k-3)^2 + (2-k-3)^2 = 2k^2 + 2k + 2$$

$$\overline{CA}^2 = (-1-1)^2 + (3-3-k)^2 + (1-2+k)^2 = 2k^2 - 2k + 5$$

(i) 삼각형 ABC가 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형인 경우

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2 \text{에서}$$

$$2k^2 + 2k + 2 = 5 + (2k^2 - 2k + 5)$$

$$4k = 8$$

$$\therefore k = 2$$

..... i

(ii) 삼각형 ABC가 $\angle B = 90^\circ$ 인 직각삼각형인 경우

$$\overline{CA}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \text{에서}$$

$$2k^2 - 2k + 5 = 5 + (2k^2 + 2k + 2)$$

$$-4k = 2$$

$$\therefore k = -\frac{1}{2}$$

..... ii

(iii) 삼각형 ABC가 $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형인 경우

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 \text{에서}$$

$$5 = (2k^2 + 2k + 2) + (2k^2 - 2k + 5)$$

$$4k^2 = -2$$

$$\therefore k^2 = -\frac{1}{2}$$

이를 만족시키는 k 의 값은 존재하지 않는다. ③

(i), (ii), (iii)에서 모든 k 의 값은

$$2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \quad \text{..... ④}$$

채점 기준

① 삼각형 ABC가 $\angle A=90^\circ$ 인 직각삼각형인 경우 k 의 값 구하기	30 %
② 삼각형 ABC가 $\angle B=90^\circ$ 인 직각삼각형인 경우 k 의 값 구하기	30 %
③ 삼각형 ABC가 $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형인 경우 k 의 값 구하기	30 %
④ 모든 k 의 값의 곱 구하기	10 %

0483 답 $(x-3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 12$

선분 AB를 2:1로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times 5 + 1 \times 2}{2+1}, \frac{2 \times (-4) + 1 \times (-1)}{2+1}, \frac{2 \times 2 + 1 \times (-1)}{2+1}\right)$$

$$\therefore (4, -3, 1) \quad \text{..... ①}$$

구의 중심은 선분 AP의 중점이므로 구의 중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1-3}{2}, \frac{-1+1}{2}\right)$$

$$\therefore (3, -2, 0) \quad \text{..... ②}$$

구의 반지름의 길이는 구의 중심과 점 B 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(5-3)^2 + (-4+2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{3} \quad \text{..... ③}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 12 \quad \text{..... ④}$$

채점 기준

① 점 P의 좌표 구하기	30 %
② 구의 중심의 좌표 구하기	30 %
③ 구의 반지름의 길이 구하기	30 %
④ 구의 방정식 구하기	10 %

0484 답 3π

주어진 구의 중심은 원점 O이고 반지름의 길이는 2이므로

$$\overline{OP} = 2$$

$$\overline{OA} = \sqrt{1^2 + 3^2 + (\sqrt{6})^2} = 4 \quad \text{..... ①}$$

오른쪽 그림과 같이 직각삼각형 OPA에서

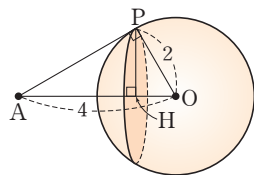
$$\overline{AP} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \quad \text{..... ②}$$

이때 직각삼각형 OPA의 꼭짓점 P에서 변 OA에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\frac{1}{2} \times \overline{AP} \times \overline{OP} = \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{PH} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 2 = \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{PH}$$

$$\therefore \overline{PH} = \sqrt{3} \quad \text{..... ③}$$



따라서 점 P가 나타내는 도형은 점 H를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 원이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\pi \times (\sqrt{3})^2 = 3\pi$$

..... ④

채점 기준

① 두 선분 OA, OP의 길이 구하기	20 %
② 선분 AP의 길이 구하기	20 %
③ 점 P와 선분 OA 사이의 거리 구하기	40 %
④ 점 P가 나타내는 도형의 넓이 구하기	20 %

C 실력 향상

79쪽

0485 답 ③

오른쪽 그림과 같이 점 H가 원점, 세 모서리 HE, HG, HD가 각각 x 축, y 축, z 축 위에 있도록 직육면체를 좌표공간에 놓으면

$D(0, 0, 6)$, $F(2, 6, 0)$

이때 두 점 F, P는 xy 평면 위의 점이다.

$D'(-6, 0, 0)$ 을 잡으면 y 축 위의 점 P에

대하여 $\overline{DP} = \overline{D'P}$ 이므로

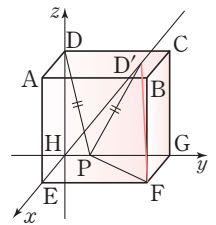
$$\overline{DP} + \overline{PF} = \overline{D'P} + \overline{PF}$$

$$\geq \overline{D'F}$$

$$= \sqrt{(2+6)^2 + 6^2}$$

$$= 10$$

따라서 구하는 최솟값은 10이다.



0486 답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 점 O가 원점, 세 모서리 OB, OC, OA가 각각 x 축, y 축, z 축 위에 있도록 사면체를 좌표공간에 놓으면

$A(0, 0, 4)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$,

$D(-2, 0, 0)$

이때 점 M은 모서리 AD의 중점이므로

$M(-1, 0, 2)$

점 M(-1, 0, 2)에서 평면 BCD, 즉 xy 평면에 내린 수선의 발을 H라 하면

$H(-1, 0, 0)$

$$\therefore \overline{MC} = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3,$$

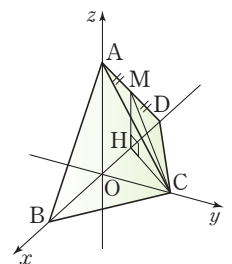
$$\overline{HC} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

선분 MC의 평면 BCD 위로의 정사영은 선분 HC이므로

$$\overline{HC} = \overline{MC} \cos \theta \text{에서}$$

$$\sqrt{5} = 3 \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$



0487 답 $3\sqrt{5}$

오른쪽 그림과 같이 점 O가 원점, 세 모서리 OP, OQ, OR가 각각 x축, y축, z축 위에 있도록 사면체를 좌표공간에 놓으면

$P(2, 0, 0)$, $Q(0, 4, 0)$, $R(0, 0, 6)$

네 점 O, P, Q, R를 지나는 구의 방정식을

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz = 0$$

이라 하자.

점 $P(2, 0, 0)$ 을 지나므로

$$4 + 2A = 0$$

$$\therefore A = -2$$

점 $Q(0, 4, 0)$ 을 지나므로

$$16 + 4B = 0$$

$$\therefore B = -4$$

점 $R(0, 0, 6)$ 을 지나므로

$$36 + 6C = 0$$

$$\therefore C = -6$$

따라서 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$$

$$\therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 14$$

이 구의 중심 C의 좌표는 $(1, 2, 3)$ 이고 반지름의 길이는 $\sqrt{14}$ 이다.

즉, $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ 인 구 위의 두 점 A, B에 대하여 삼각형 ABC는

$\overline{CA} = \overline{CB} = \sqrt{14}$ 인 이등변삼각형이다.

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 C에서 변 AB

에 내린 수선의 발을 H라 하면

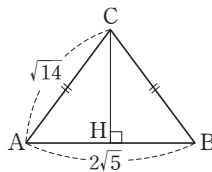
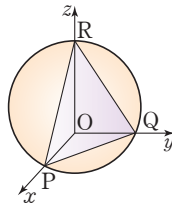
$$\overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} = \sqrt{5}$$

직각삼각형 CAH에서

$$\overline{CH} = \sqrt{(\sqrt{14})^2 - (\sqrt{5})^2} = 3$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CH} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times 3 = 3\sqrt{5}$$



0488 답 48π

구의 중심을 C라 하면 $C(0, 0, 6)$ 이고 반지름의 길이는 3이다.

오른쪽 그림과 같이 점 P에서 나온 빛이 구와

접하는 점을 A, 선분 PA의 연장선이 xy평면

과 만나는 점을 B라 하면

$$\overline{PC} = 6, \overline{AC} = 3$$

직각삼각형 PAC에서

$$\overline{PA} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

이때 두 삼각형 PAC, POB는 서로 닮음이고 $\overline{PO} = 12$ 이므로

$$\overline{PA} : \overline{PO} = \overline{AC} : \overline{OB} \text{에서}$$

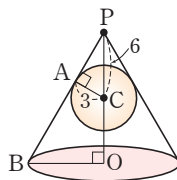
$$3\sqrt{3} : 12 = 3 : \overline{OB}$$

$$\sqrt{3}\overline{OB} = 12$$

$$\therefore \overline{OB} = 4\sqrt{3}$$

따라서 그림자는 반지름의 길이가 $4\sqrt{3}$ 인 원이므로 그 넓이는

$$\pi \times (4\sqrt{3})^2 = 48\pi$$



05 / 벡터의 연산

A 개념 확인

82~85쪽

0489 답 시점: P, 종점: Q

0490 답 시점: D, 종점: A

0491 답 2

$$|\overrightarrow{CD}| = \overline{CD} = 2$$

0492 답 $2\sqrt{5}$

$$|\overrightarrow{BD}| = \overline{BD} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

0493 답 $2\sqrt{2}$

$$|\overrightarrow{AF}| = \overline{AF} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

0494 답 $2\sqrt{3}$

$$|\overrightarrow{AG}| = \overline{AG} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$$

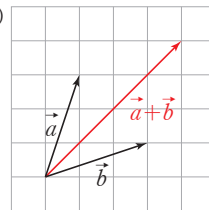
0495 답 $\vec{f}, \vec{h}$

0496 답 $\vec{f}, \vec{g}, \vec{i}$

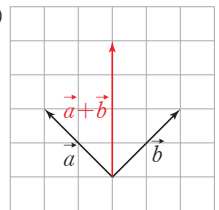
0497 답 $\vec{f}$

0498 답 $\vec{i}$

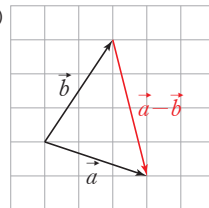
0499 답 (1)



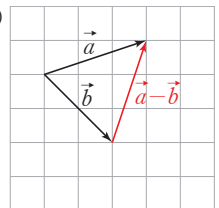
(2)



0500 답 (1)



(2)



0501 답 $\overrightarrow{AD}$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{CD} \\ &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} \end{aligned}$$