유형만렙 LITE

정답과 해설

미적분 I

01 함수의 극한

개념유형 9~11쪽

001 답 0

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to0} f(x)=0$

002 답 1

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to1} f(x)=1$

003 답 1

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to2} f(x)=1$

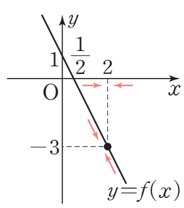
004 답 -1

함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to-1} f(x)=-1$

005 답 -3

$f(x)=-2x+1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



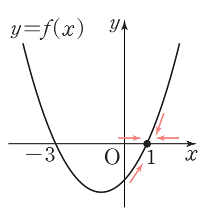
따라서 x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -3에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to2} (-2x+1)=-3$

006 답 0

$f(x)=x^2+2x-3$이라 하면 $f(x)=(x+3)(x-1)$

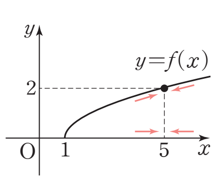
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로



$\lim_{x\to1} (x^2+2x-3)=0$

007 답 2

$f(x)=\sqrt{x-1}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

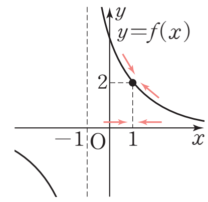


따라서 x의 값이 5에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to5} \sqrt{x-1}=2$

008 답 2

$f(x)=\frac{4}{x+1}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

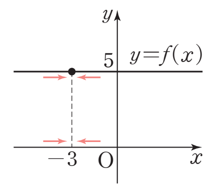


따라서 x의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to1} \frac{4}{x+1}=2$

009 답 5

$f(x)=5$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



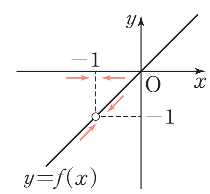
따라서 모든 실수 x에서 $f(x)$의 값이 항상 5이므로

$\lim_{x\to-3} 5=5$

010 답 -1

$f(x)=\frac{x^2+x}{x+1}$라 하면 $x\neq-1$일 때, $f(x)=\frac{x(x+1)}{x+1}=x$

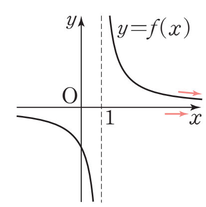
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로



$\lim_{x\to-1} \frac{x^2+x}{x+1}=-1$

011 답 0

$f(x)=\frac{2}{x-1}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

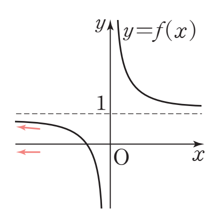


따라서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to\infty} \frac{2}{x-1}=0$

012 답 1

$f(x)=\frac{1}{x}+1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

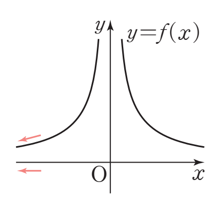


따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x}+1\right)=1$

013 답 0

$f(x)=\frac{1}{|x|}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

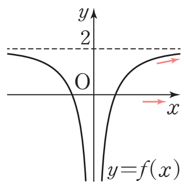


따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{|x|}=0$

014 답 2

$f(x)=2-\frac{1}{|x|}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

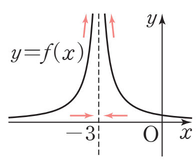


따라서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{|x|}\right)=2$

015 답 ∞

$f(x)=\frac{1}{|x+3|}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

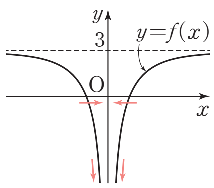


따라서 x의 값이 -3에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim_{x\to-3}\frac{1}{|x+3|}=\infty$

016 답 $-\infty$

$f(x)=3-\frac{2}{|x|}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

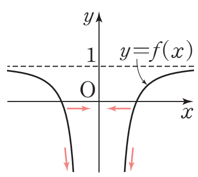


따라서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim_{x\to0}\left(3-\frac{2}{|x|}\right)=-\infty$

017 답 $-\infty$

$f(x)=1-\frac{1}{x^2}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

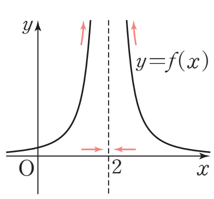


따라서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim_{x\to0}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=-\infty$

018 답 ∞

$f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

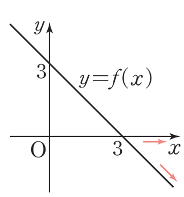


따라서 x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim_{x\to2}\frac{1}{(x-2)^2}=\infty$

019 답 $-\infty$

$f(x)=-x+3$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



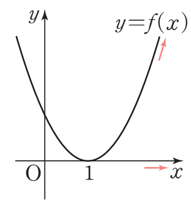
따라서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim_{x\to\infty}(-x+3)=-\infty$

020 답 ∞

$f(x)=x^2-2x+1$이라 하면 $f(x)=(x-1)^2$

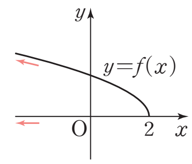
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로



$\lim_{x\to\infty}(x^2-2x+1)=\infty$

021 답 ∞

$f(x)=\sqrt{-x+2}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

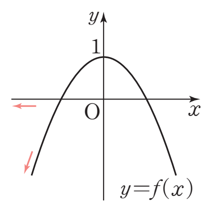


따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로

$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{-x+2}=\infty$

022 답 $-\infty$

$f(x)=1-2x^2$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$\lim_{x\to-\infty}(1-2x^2)=-\infty$

실전유형

12쪽

023 답 ⑤

주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 x의 값이 0에 한없이 가까워질 때

① 함수 $f(x)$는 1에 수렴한다.

② 함수 $f(x)$는 -1에 수렴한다.

③ 함수 $f(x)$는 0에 수렴한다.

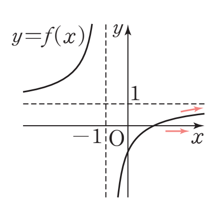
④ 함수 $f(x)$는 1에 수렴한다.

따라서 $x\to0$일 때 함수 $f(x)$가 수렴하지 않는 것은 ⑤이다.

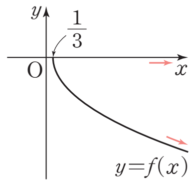
024 답 ④

ㄱ. $f(x)=\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x+1)-2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1}$

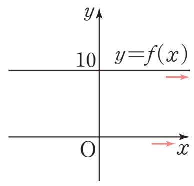
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$는 1에 수렴한다.



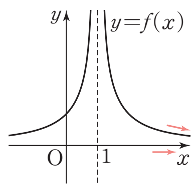
ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$는 음의 무한대로 발산한다.



ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$는 10에 수렴한다.



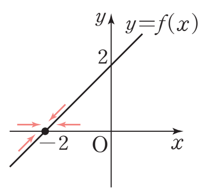
ㄹ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x의 값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$는 0에 수렴한다.



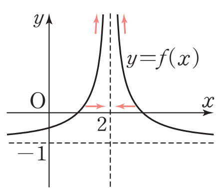
따라서 보기에서 x의 값이 한없이 커질 때, 함수 $f(x)$가 수렴하는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

025 답 ③

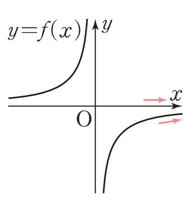
ㄱ. $f(x)=x+2$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 -2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to -2}(x+2)=0$



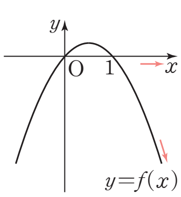
ㄴ. $f(x)=\frac{1}{|x-2|}-1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로
$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{|x-2|}-1\right)=\infty$



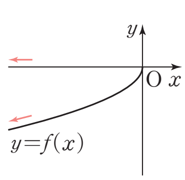
ㄷ. $f(x)=-\frac{2}{x}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{2}{x}\right)=0$



ㄹ. $f(x)=-x^2+x$라 하면 $f(x)=-x(x-1)$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로
$\lim_{x\to\infty}(-x^2+x)=-\infty$



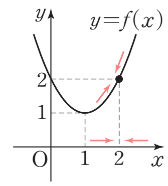
ㅁ. $f(x)=-\sqrt{-x}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로
$\lim_{x\to -\infty}(-\sqrt{-x})=-\infty$



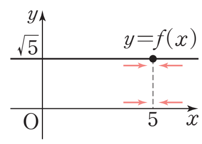
따라서 보기에서 발산하는 극한은 ㄴ, ㄹ, ㅁ의 3개이다.

026 답 ④

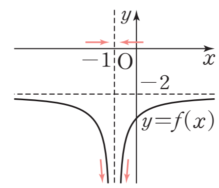
① $f(x)=x^2-2x+2$라 하면 $f(x)=(x-1)^2+1$
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to 2}(x^2-2x+2)=2$



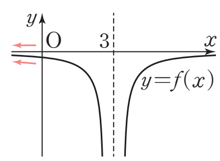
② $f(x)=\sqrt{5}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 모든 실수 x에서 $f(x)$의 값이 항상 $\sqrt{5}$이므로
$\lim_{x\to 5}\sqrt{5}=\sqrt{5}$



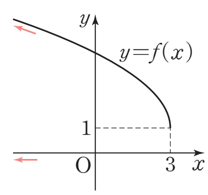
③ $f(x)=-\frac{1}{|x+1|}-2$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로
$\lim_{x\to -1}\left(-\frac{1}{|x+1|}-2\right)=-\infty$



④ $f(x)=-\frac{1}{(x-3)^2}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to -\infty}\left\{-\frac{1}{(x-3)^2}\right\}=0$



⑤ $f(x)=\sqrt{9-3x}+1$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$의 값은 한없이 커지므로
$\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{9-3x}+1)=\infty$



따라서 옳은 것은 ④이다.

개념유형

14~15쪽

027 답 1

x의 값이 0보다 크면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to 0+}f(x)=1$

028 답 0

x의 값이 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로
$\lim_{x\to 0-}f(x)=0$

029 답 2

x의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to1+} f(x)=2$

030 답 3

x의 값이 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 3에 한없이 가까워지므로

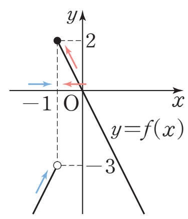
$\lim_{x\to2-} f(x)=3$

031 답 2

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 x의 값이 -1보다 크면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to-1+} f(x)=2$



032 답 -3

x의 값이 -1보다 작으면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -3에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to-1-} f(x)=-3$

033 답 0

x의 값이 0보다 크면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to0+} f(x)=0$

034 답 0

x의 값이 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to0-} f(x)=0$

035 답 0

$\lim_{x\to0+} f(x)=0$, $\lim_{x\to0-} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to0} f(x)=0$

036 답 -1

x의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to1+} f(x)=-1$

037 답 1

x의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to1-} f(x)=1$

038 답 존재하지 않는다.

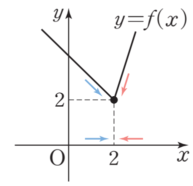
$\lim_{x\to1+} f(x)\neq\lim_{x\to1-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

039 답 2

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 x의 값이 2보다 크면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to2+} f(x)=2$



040 답 2

x의 값이 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to2-} f(x)=2$

041 답 2

$\lim_{x\to2+} f(x)=2$, $\lim_{x\to2-} f(x)=2$이므로

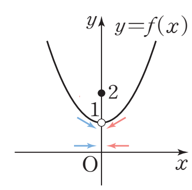
$\lim_{x\to2} f(x)=2$

042 답 1

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 x의 값이 0보다 크면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to0+} f(x)=1$



043 답 1

x의 값이 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to0-} f(x)=1$

044 답 1

$\lim_{x\to0+} f(x)=1$, $\lim_{x\to0-} f(x)=1$이므로

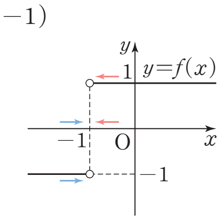
$\lim_{x\to0} f(x)=1$

045 답 1, -1, 존재하지 않는다

046 답 존재하지 않는다.

$f(x)=\dfrac{|x+1|}{x+1}$이라 하면 $f(x)=\begin{cases} 1 & (x>-1) \\ -1 & (x<-1) \end{cases}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to-1+} f(x)=1$, $\lim_{x\to-1-} f(x)=-1$

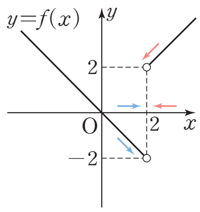
$\therefore \lim_{x\to-1+} f(x)\neq\lim_{x\to-1-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to-1} f(x)$, 즉 $\lim_{x\to-1}\dfrac{|x+1|}{x+1}$의 값은 존재하지 않는다.

047 답 존재하지 않는다.

$f(x)=\dfrac{x^2-2x}{|x-2|}$라 하면 $f(x)=\begin{cases} x & (x>2) \\ -x & (x<2) \end{cases}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to 2+} f(x)=2$, $\lim_{x\to 2-} f(x)=-2$

$\therefore \lim_{x\to 2+} f(x)\neq \lim_{x\to 2-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to 2} f(x)$, 즉 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{|x-2|}$의 값은 존재하지 않는다.

실전유형 16쪽

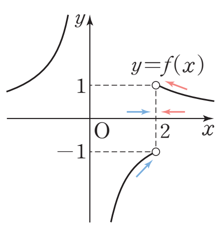
048 답 ③

$\lim_{x\to 0+} f(x)+\lim_{x\to 1-} f(x)=2+1=3$

049 답 ⑤

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x} & (x>2) \\ -\dfrac{2}{x} & (x<2) \end{cases}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to 2+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 2-} f(x)=-1$

즉, $a=1$, $b=-1$이므로

$a-b=2$

050 답 ⑤

① $\lim_{x\to -2+} f(x)=-1$

② $\lim_{x\to 1+} f(x)=0$

③ $\lim_{x\to 2-} f(x)=-1$

④ $\lim_{x\to -1+} f(x)=1$, $\lim_{x\to -1-} f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to -1} f(x)=1$

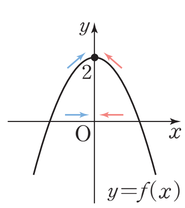
⑤ $\lim_{x\to 0+} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=2$

따라서 $\lim_{x\to 0+} f(x)\neq \lim_{x\to 0-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 극한값이 존재하지 않는 것은 ⑤이다.

051 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $f(x)=-x^2+2$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

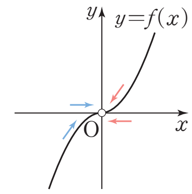


$\lim_{x\to 0+} f(x)=2$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=2$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=2$

ㄴ. $f(x)=\dfrac{x^3}{|x|}$이라 하면 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x>0) \\ -x^2 & (x<0) \end{cases}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

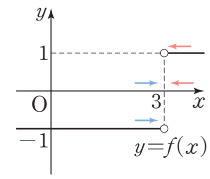


$\lim_{x\to 0+} f(x)=0$, $\lim_{x\to 0-} f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=0$

ㄷ. $f(x)=\dfrac{|3-x|}{x-3}$라 하면 $f(x)=\begin{cases} 1 & (x>3) \\ -1 & (x<3) \end{cases}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



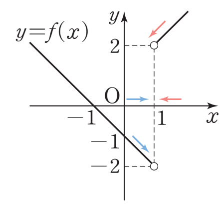
$\lim_{x\to 3+} f(x)=1$, $\lim_{x\to 3-} f(x)=-1$

따라서 $\lim_{x\to 3+} f(x)\neq \lim_{x\to 3-} f(x)$이므로

$\lim_{x\to 3} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄹ. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$이라 하면 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x>1) \\ -x-1 & (x<1) \end{cases}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로



$\lim_{x\to 1+} f(x)=2$, $\lim_{x\to 1-} f(x)=-2$

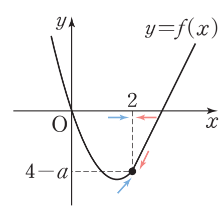
따라서 $\lim_{x\to 1+} f(x)\neq \lim_{x\to 1-} f(x)$이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

052 답 6

$\lim_{x\to 2} f(x)$의 값이 존재하려면



$\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2-} f(x)$이어야 한다.

이때 $\lim_{x\to 2+} f(x)=\lim_{x\to 2+} (2x-a)=4-a$,

$\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2-} (x^2-3x)=-2$이므로

$4-a=-2 \qquad \therefore a=6$

개념유형 17쪽

053 답 −1

$\lim_{x\to 1} \{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 1} f(x)+\lim_{x\to 1} g(x)$

$=2+(-3)=-1$

054 답 9

$\lim_{x\to 1} \{3f(x)-g(x)\}=3\lim_{x\to 1} f(x)-\lim_{x\to 1} g(x)$

$=3\times 2-(-3)=9$

055 답 −6

$\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1} f(x)\times \lim_{x\to 1} g(x)$

$=2\times(-3)=-6$

056 답 -2

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+4}{2g(x)+3}=\frac{\lim\limits_{x\to1}\{f(x)+4\}}{\lim\limits_{x\to1}\{2g(x)+3\}}$$
$$=\frac{\lim\limits_{x\to1}f(x)+\lim\limits_{x\to1}4}{2\lim\limits_{x\to1}g(x)+\lim\limits_{x\to1}3}$$
$$=\frac{2+4}{2\times(-3)+3}=-2$$

057 답 5

$\lim\limits_{x\to-1}(-4x+1)=-4\times(-1)+1=5$

058 답 6

$\lim\limits_{x\to3}(x^2-2x+3)=3^2-2\times3+3=6$

059 답 6

$\lim\limits_{x\to1}(x+1)(x^2+2)=(1+1)\times(1^2+2)=6$

060 답 -7

$$\lim_{x\to-2}\frac{3x^2-5}{x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to-2}(3x^2-5)}{\lim\limits_{x\to-2}(x+1)}=\frac{3\times(-2)^2-5}{-2+1}=-7$$

실전유형

18쪽

061 답 -1

$$\lim_{x\to0}\frac{2f(x)-g(x)}{7-f(x)g(x)}=\frac{2\times4-3}{7-4\times3}=-1$$

062 답 30

$$a=\lim_{x\to1}(2x^2+1)f(x)$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{2x^2+1}{x+1}\times(x+1)f(x)\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{2x^2+1}{x+1}\times\lim_{x\to1}(x+1)f(x)$$
$$=\frac{3}{2}\times1=\frac{3}{2}$$

$\therefore\ 20a=20\times\frac{3}{2}=30$

063 답 ④

$4f(x)+5g(x)=h(x)$라 하면

$g(x)=\frac{h(x)-4f(x)}{5}$, $\lim\limits_{x\to2}h(x)=8$

$$\therefore\ \lim_{x\to2}g(x)=\lim_{x\to2}\frac{h(x)-4f(x)}{5}$$
$$=\frac{8-4\times(-3)}{5}=4$$

064 답 ②

$2f(x)-3g(x)=h(x)$라 하면

$f(x)=\frac{h(x)+3g(x)}{2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=0$

$$\therefore\ \lim_{x\to\infty}\frac{4f(x)+g(x)}{3f(x)-g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\times\frac{h(x)+3g(x)}{2}+g(x)}{3\times\frac{h(x)+3g(x)}{2}-g(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2h(x)+7g(x)}{\frac{3}{2}h(x)+\frac{7}{2}g(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4h(x)+14g(x)}{3h(x)+7g(x)}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4\times\frac{h(x)}{g(x)}+14}{3\times\frac{h(x)}{g(x)}+7}$$
$$=\frac{14}{7}=2$$

065 답 -4

$$\lim_{x\to0}\frac{6x+2f(x)}{x-f(x)}=\lim_{x\to0}\frac{6+2\times\frac{f(x)}{x}}{1-\frac{f(x)}{x}}=\frac{6+2\times5}{1-5}=-4$$

066 답 ④

ㄱ. $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha$, $\lim\limits_{x\to a}\{f(x)-g(x)\}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\frac{\{f(x)+g(x)\}+\{f(x)-g(x)\}}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases}0 & (x\ge a)\\ 1 & (x<a)\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}1 & (x\ge a)\\ 0 & (x<a)\end{cases}$이면

$\lim\limits_{x\to a}f(x)g(x)=0$이지만 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\left\{g(x)\times\frac{f(x)}{g(x)}\right\}=\alpha\beta$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

개념유형

20~22쪽

067 답 $x-3$, $x-3$, -1

068 답 -2

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to-1}(x-1)=-2$$

069 답 27

$$\lim_{x\to3}\frac{x^3-27}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}=\lim_{x\to3}(x^2+3x+9)=27$$

070 답 0

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x+1}=0$$

071 답 $\sqrt{x+3}+2$, $\sqrt{x+3}+2$, $\sqrt{x+3}+2$, $\frac{1}{4}$

072 답 1

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt{2x+5}-1}{x+2}=\lim_{x\to-2}\frac{(\sqrt{2x+5}-1)(\sqrt{2x+5}+1)}{(x+2)(\sqrt{2x+5}+1)}=\lim_{x\to-2}\frac{2(x+2)}{(x+2)(\sqrt{2x+5}+1)}=\lim_{x\to-2}\frac{2}{\sqrt{2x+5}+1}=\frac{2}{1+1}=1$$

073 답 12

$$\lim_{x\to3}\frac{3x-9}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to3}\frac{3(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}=\lim_{x\to3}\frac{3(x-3)(\sqrt{x+1}+2)}{x-3}=\lim_{x\to3}3(\sqrt{x+1}+2)=3(2+2)=12$$

074 답 $-\frac{4}{3}$

$$\lim_{x\to-4}\frac{\sqrt{x^2-7}-3}{x+4}=\lim_{x\to-4}\frac{(\sqrt{x^2-7}-3)(\sqrt{x^2-7}+3)}{(x+4)(\sqrt{x^2-7}+3)}=\lim_{x\to-4}\frac{x^2-16}{(x+4)(\sqrt{x^2-7}+3)}=\lim_{x\to-4}\frac{(x+4)(x-4)}{(x+4)(\sqrt{x^2-7}+3)}=\lim_{x\to-4}\frac{x-4}{\sqrt{x^2-7}+3}=\frac{-8}{3+3}=-\frac{4}{3}$$

075 답 $\frac{2}{x}$, 3

076 답 $\frac{1}{3}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+3}{6x^2+3x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{6+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

077 답 5

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2}{(x+1)(x-4)}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+2}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}}=5$$

078 답 0

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$$

079 답 ∞

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{3}{x}}=\infty$$

080 답 1

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}+1}{x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+\frac{1}{x}}{1+\frac{4}{x}}=1$$

081 답 ∞, 1, t, $-\frac{1}{2}$

082 답 -1

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-x}}{x-2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+t}}{-t-2}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{t}}}{-1-\frac{2}{t}}=-1$$

083 답 2

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-2x}{\sqrt{x^2-2}+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{1+2t}{\sqrt{t^2-2}+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{t}+2}{\sqrt{1-\frac{2}{t^2}}+\frac{1}{t}}=2$$

084 답 -3

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x+1}{\sqrt{4x^2-x+3}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-6t+1}{\sqrt{4t^2+t+3}}=\lim_{t\to\infty}\frac{-6+\frac{1}{t}}{\sqrt{4+\frac{1}{t}+\frac{3}{t^2}}}=\frac{-6}{2}=-3$$

085 답 $\sqrt{x^2+1}+x$, $\sqrt{x^2+1}+x$, $\sqrt{x^2+1}+x$, 0

086 답 $\frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+3x}-x)(\sqrt{x^2+3x}+x)}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+3x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}$$
$$=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

087 답 1

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2})}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}$$
$$=\frac{2}{1+1}=1$$

088 답 2

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-4x}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+4t}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+4t}-t)(\sqrt{t^2+4t}+t)}{\sqrt{t^2+4t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4t}{\sqrt{t^2+4t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{t}}+1}$$
$$=\frac{4}{1+1}=2$$

089 답 $2x$, 2, -1

090 답 $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}\times\frac{x}{2-\sqrt{2x}}\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2-\sqrt{2x}}=\frac{1}{2}$$

091 답 -1

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{x}{x+1}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\times\frac{-1}{x+1}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{1+\frac{1}{x}}=-1$$

092 답 $\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\left(1-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{(x+1)(x-1)}\times\frac{x-1}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{2}$$

실전유형 23~25쪽

093 답 ①

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2+2x-8}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x^2+2x-8)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x+4)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x+2}+2)}$$
$$=\frac{1}{6(2+2)}=\frac{1}{24}$$

094 답 ⑤

① $\lim_{x\to1}\sqrt{2x-1}=1$

② $\lim_{x\to-1}\frac{3x^2+x-2}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(3x-2)}{x+1}$
$$=\lim_{x\to-1}(3x-2)=-5$$

③ $\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x+2)(x-2)}$
$$=\lim_{x\to2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}$$
$$=\frac{12}{4}=3$$

④ $\lim_{x\to9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\lim_{x\to9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$
$$=\lim_{x\to9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}$$
$$=\lim_{x\to9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}$$
$$=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

⑤ $\lim_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}$$
$$=\frac{1+1}{2}=1$$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

095 답 ③

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)(x-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(2x+1)=3$$

096 답 -5

$$\lim_{x\to -1+}\frac{f(x)}{x+1}+\lim_{x\to -1-}\frac{f(x)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1+}\frac{x^2+x}{x+1}+\lim_{x\to -1-}\frac{x^2-2x-3}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1+}\frac{x(x+1)}{x+1}+\lim_{x\to -1-}\frac{(x+1)(x-3)}{x+1}$$
$$=\lim_{x\to -1+}x+\lim_{x\to -1-}(x-3)$$
$$=-1+(-4)=-5$$

097 답 2

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-1}{(x^2-1)f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2-1)f(x)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{f(x)}=\frac{2}{f(1)}$$

따라서 $\frac{2}{f(1)}=1$이므로 $f(1)=2$

098 답 ③

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}+5}{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{1}{x^2}}+\frac{5}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{3}{2}$$

따라서 $a=2$, $b=3$이므로

$ab=6$

099 답 ④

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x-\sqrt{16x^2-2}}{3x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{-t-\sqrt{16t^2-2}}{-3t+1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1-\sqrt{16-\frac{2}{t^2}}}{-3+\frac{1}{t}}$$
$$=\frac{-1-4}{-3}=\frac{5}{3}$$

100 답 ④

① $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{3x^2-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}}{3-\frac{7}{x^2}}=\frac{1}{3}$

② $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+9}{(x-1)(x^2+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+9}{x^3-x^2+x-1}$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{9}{x^3}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=0$$

③ $\lim_{x\to\infty}\frac{5x}{\sqrt{x^2-3}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1-\frac{3}{x^2}}+1}$

$$=\frac{5}{1+1}=\frac{5}{2}$$

④ $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{2}{x}}=\infty$

⑤ $x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2-5}+2}{x+1}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-5}+2}{-t+1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{5}{t^2}}+\frac{2}{t}}{-1+\frac{1}{t}}=-1$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

101 답 ③

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2+3x+2}-2x)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2+3x+2}-2x)(\sqrt{4x^2+3x+2}+2x)}{\sqrt{4x^2+3x+2}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{\sqrt{4x^2+3x+2}+2x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+2}$$
$$=\frac{3}{2+2}=\frac{3}{4}$$

102 답 2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-x+1}}{(x-\sqrt{x^2-x+1})(x+\sqrt{x^2-x+1})}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{1+1}{1}=2$$

103 답 ③

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{4x^2-8x}+2x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{4t^2+8t}-2t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{4t^2+8t}-2t)(\sqrt{4t^2+8t}+2t)}{\sqrt{4t^2+8t}+2t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{8t}{\sqrt{4t^2+8t}+2t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{8}{\sqrt{4+\frac{8}{t}}+2}$$
$$=\frac{8}{2+2}=2$$

104 답 3

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2ax}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1-\frac{a}{x}}}$$
$$=\frac{2a}{1+1}=a$$
$\therefore a=3$

105 답 ②

$$\lim_{x\to\infty}x\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}-1\right)=\lim_{x\to\infty}\left(x\times\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\right)$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left\{x\times\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})}\right\}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+x}+x+1}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1+\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

106 답 ④

$$\lim_{x\to-1}\frac{9}{x+1}\left(\frac{x^2}{2x-1}+\frac{1}{3}\right)=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{9}{x+1}\times\frac{3x^2+2x-1}{3(2x-1)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{9}{x+1}\times\frac{(x+1)(3x-1)}{3(2x-1)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{3(3x-1)}{2x-1}$$
$$=\frac{3\times(-4)}{-3}=4$$

107 답 ④

$\mathrm{P}(t, \sqrt{2t})$, $\mathrm{H}(t, 0)$이므로

$\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{t^2+(\sqrt{2t})^2}=\sqrt{t^2+2t}$, $\overline{\mathrm{OH}}=t$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{OP}}-\overline{\mathrm{OH}})=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+2t}-t)$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+2t}-t)(\sqrt{t^2+2t}+t)}{\sqrt{t^2+2t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2t}{\sqrt{t^2+2t}+t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{t}}+1}$$
$$=\frac{2}{1+1}=1$$

108 답 $\frac{1}{2}$

두 점 $\mathrm{A}(3, 0)$, $\mathrm{B}(0, 3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{3}{-3}x \qquad \therefore y=-x+3$

따라서 $\overline{\mathrm{OQ}}=x$, $\overline{\mathrm{PQ}}=-x+3$이므로

$f(x)=x(-x+3)$ (단, $0<x<3$)

$$\therefore \lim_{x\to3-}\frac{f(x)}{9-x^2}=\lim_{x\to3-}\frac{x(-x+3)}{(3+x)(3-x)}$$
$$=\lim_{x\to3-}\frac{x}{3+x}$$
$$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

109 답 ③

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(t+1)^2+(t+1)^2=2t^2+4t+2$

직선 $y=x+1$에 수직인 직선의 기울기는 -1이므로 점 $\mathrm{P}(t, t+1)$을 지나고 기울기가 -1인 직선의 방정식은

$y-(t+1)=-(x-t) \qquad \therefore y=-x+2t+1$

따라서 $\mathrm{Q}(0, 2t+1)$이므로

$\overline{\mathrm{AQ}}^2=1^2+(2t+1)^2=4t^2+4t+2$

$$\therefore \lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AQ}}^2}{\overline{\mathrm{AP}}^2}=\lim_{t\to\infty}\frac{4t^2+4t+2}{2t^2+4t+2}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{4+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}{2+\frac{4}{t}+\frac{2}{t^2}}$$
$$=\frac{4}{2}=2$$

110 답 2

두 점 $\mathrm{A}(0, t)$, $\mathrm{B}(-1, 0)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-t=\frac{-t}{-1}x \qquad \therefore y=tx+t$

$x=\frac{y}{t}-1$이므로 $x^2+y^2=1$에 대입하면 점 P의 y좌표는

$\left(\frac{y}{t}-1\right)^2+y^2=1$, $\left(\frac{1}{t^2}+1\right)y^2-\frac{2}{t}y=0$

$y\left\{\left(\frac{1}{t^2}+1\right)y-\frac{2}{t}\right\}=0$

$$\therefore y=\frac{\frac{2}{t}}{\frac{1}{t^2}+1}=\frac{2t}{1+t^2}\ (\because y\neq0)$$

따라서 $\overline{\mathrm{OA}}=t$, $\overline{\mathrm{PH}}=\frac{2t}{1+t^2}$이므로

$$\lim_{t\to\infty}(\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{PH}})=\lim_{t\to\infty}\left(t\times\frac{2t}{1+t^2}\right)=\lim_{t\to\infty}\frac{2t^2}{1+t^2}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{t^2}+1}=2$$

111 답 $\frac{1}{2}$

점 P의 좌표를 (a, a^2), 점 Q의 좌표를 $(0, b)$라 하면 $\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{PQ}}$, 즉 $\overline{\mathrm{OQ}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2$이므로

$b^2=(-a)^2+(b-a^2)^2 \qquad \therefore b=\frac{a^2+1}{2}$

점 P가 원점 O에 한없이 가까워지면 $a\to0$이므로

$$\lim_{a\to0}b=\lim_{a\to0}\frac{a^2+1}{2}=\frac{1}{2}$$

따라서 점 Q는 점 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$에 한없이 가까워진다.

$\therefore t=\frac{1}{2}$

112 답 $0,\ 1,\ 1,\ x+a+1,\ 2,\ 2,\ 2,\ -3$

113 답 $a=5,\ b=14$

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^2+ax-b)=0$이므로

$4+2a-b=0 \quad \therefore b=2a+4 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+a+2)=a+4$$

따라서 $a+4=9$이므로 $a=5$

이를 ㉠에 대입하면 $b=14$

114 답 $a=3,\ b=2$

$x\to-1$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}(x^2+ax+b)=0$이므로

$1-a+b=0 \quad \therefore b=a-1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2+ax+b}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2+ax+a-1}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{(x+1)(x+a-1)}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x+a-1}=\frac{1}{a-2}$$

따라서 $\frac{1}{a-2}=1$이므로

$a-2=1 \quad \therefore a=3$

이를 ㉠에 대입하면 $b=2$

115 답 $a=6,\ b=12$

$x\to-2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-2}(ax+b)=0$이므로

$-2a+b=0 \quad \therefore b=2a \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-2}\frac{ax+b}{x^2+x-2}=\lim_{x\to-2}\frac{ax+2a}{x^2+x-2}=\lim_{x\to-2}\frac{a(x+2)}{(x+2)(x-1)}=\lim_{x\to-2}\frac{a}{x-1}=-\frac{a}{3}$$

따라서 $-\frac{a}{3}=-2$이므로 $a=6$

이를 ㉠에 대입하면 $b=12$

116 답 $0,\ 3,\ 3,\ 3,\ 2,\ 2,\ -2,\ -1$

117 답 $a=4,\ b=-4$

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(a\sqrt{x}+b)=0$이므로

$a+b=0 \quad \therefore b=-a \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x}-a}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{a(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{a}{\sqrt{x}+1}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=2$이므로 $a=4$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-4$

118 답 $a=2,\ b=2$

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(\sqrt{x+a}-b)=0$이므로

$\sqrt{a+2}-b=0 \quad \therefore b=\sqrt{a+2} \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-b}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{a+2}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a+2})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+2})}{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+2})}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a+2})}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a+2}}=\frac{1}{2\sqrt{a+2}}$$

따라서 $\frac{1}{2\sqrt{a+2}}=\frac{1}{4}$이므로

$\sqrt{a+2}=2,\ a+2=4 \quad \therefore a=2$

이를 ㉠에 대입하면 $b=2$

119 답 $a=2,\ b=-1$

$x\to-1$일 때 (분자)$\to0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-1}(\sqrt{x+a}+b)=0$이므로

$\sqrt{a-1}+b=0 \quad \therefore b=-\sqrt{a-1} \quad \cdots\cdots$ ㉠

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+a}+b}=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a-1}}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})}{(\sqrt{x+a}-\sqrt{a-1})(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})}{x+1}=\lim_{x\to-1}(\sqrt{x+a}+\sqrt{a-1})=2\sqrt{a-1}$$

따라서 $2\sqrt{a-1}=2$이므로

$\sqrt{a-1}=1,\ a-1=1 \quad \therefore a=2$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-1$

실전유형 28~29쪽

120 답 5

$x \to -1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to -1}(x^2+4x+a)=0$이므로

$1-4+a=0 \qquad \therefore a=3$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to -1}\frac{x^2+4x+a}{x+1}=\lim_{x \to -1}\frac{x^2+4x+3}{x+1}=\lim_{x \to -1}\frac{(x+3)(x+1)}{x+1}=\lim_{x \to -1}(x+3)=2$$

$\therefore b=2$

$\therefore a+b=5$

121 답 15

$x \to 3$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 3}(2x^2+ax+b)=0$이므로

$18+3a+b=0 \qquad \therefore b=-3a-18 \qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to 3}\frac{2x^2+ax+b}{x-3}=\lim_{x \to 3}\frac{2x^2+ax-3a-18}{x-3}=\lim_{x \to 3}\frac{(x-3)(2x+a+6)}{x-3}=\lim_{x \to 3}(2x+a+6)=a+12$$

따라서 $a+12=7$이므로 $a=-5$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-3$

$\therefore ab=15$

122 답 ⑤

$x \to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 2}(a\sqrt{x-1}+b)=0$이므로

$a+b=0 \qquad \therefore b=-a \qquad \cdots\cdots ㉠$

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to 2}\frac{a\sqrt{x-1}+b}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{a\sqrt{x-1}-a}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{a(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\lim_{x \to 2}\frac{a(x-2)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}=\lim_{x \to 2}\frac{a}{\sqrt{x-1}+1}=\frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=1$이므로 $a=2$

이를 ㉠에 대입하면 $b=-2$

$\therefore a-b=4$

123 답 $a=3$, $b=1$

$x \to 1$일 때 (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 1}(x^2-b)=0$이므로

$1-b=0 \qquad \therefore b=1$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to 1}\frac{x^2+(a-1)x-a}{x^2-b}=\lim_{x \to 1}\frac{x^2+(a-1)x-a}{x^2-1}=\lim_{x \to 1}\frac{(x+a)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x \to 1}\frac{x+a}{x+1}=\frac{1+a}{2}$$

따라서 $\frac{1+a}{2}=2$이므로

$1+a=4 \qquad \therefore a=3$

124 답 ④

$x \to 1$일 때 (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 1}(\sqrt{x^2-x+1}-ax)=0$이므로

$1-a=0 \qquad \therefore a=1$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}-ax}=\lim_{x \to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}-x}=\lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}{(\sqrt{x^2-x+1}-x)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}=\lim_{x \to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x^2-x+1}+x)}{-(x-1)}=\lim_{x \to 1}(-\sqrt{x^2-x+1}-x)=-2$$

$\therefore b=-2$

$\therefore a-b=3$

125 답 ②

$x \to -1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to -1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$

따라서 $1-a+b=0$이므로 $b=a-1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$$\therefore \lim_{x \to -1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x \to -1}\frac{x^2+ax+a-1}{x+1}=\lim_{x \to -1}\frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1}=\lim_{x \to -1}(x+a-1)=a-2$$

따라서 $a-2=3$이므로 $a=5$

이를 ㉠에 대입하면 $b=4$

즉, $f(x)=x^2+5x+4$이므로

$f(-2)=4-10+4=-2$

126 답 ③

(가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

(나)에서 $x \to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 2}f(x)=0$이므로 $f(2)=0$

$f(x)=2(x-2)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x \to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{2(x-2)(x+a)}{x-2}=\lim_{x \to 2}2(x+a)=2(2+a)$$

따라서 $2(2+a)=6$이므로

$2+a=3 \qquad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=2(x-2)(x+1)=2x^2-2x-4$

127 답 6

㈎에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

㈏에서 $x \to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1} f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(x+a)$ (a는 상수)라 하면

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+a)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+a}{x+1}=\frac{1+a}{2}$$

따라서 $\frac{1+a}{2}=-\frac{1}{2}$이므로

$1+a=-1 \qquad \therefore a=-2$

즉, $f(x)=(x-1)(x-2)$이므로

$f(-1)=-2\times(-3)=6$

128 답 ⑤

$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{x-4}=5$에서 $x\to 4$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 4} f(x)=0$이므로 $f(4)=0$

이때 $f(x)$는 이차함수이므로

$f(x)=(x-4)(ax+b)$ (a, b는 상수, $a\neq 0$)라 하면

$$\lim_{x\to 4}\frac{f(x)}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(ax+b)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(ax+b)=4a+b$$

$\therefore 4a+b=5$ …… ㉠

$f(1)=3$에서

$-3(a+b)=3 \qquad \therefore a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$

따라서 $f(x)=(x-4)(2x-3)$이므로

$f(0)=-4\times(-3)=12$

129 답 13

㈎에서 $f(x)-x^3$은 최고차항의 계수가 6인 일차함수이므로

$f(x)-x^3=6x+a$ (a는 상수)라 하면

$f(x)=x^3+6x+a$

㈏에서 $\lim_{x\to 0}(x^3+6x+a)=-7$이므로

$a=-7$

따라서 $f(x)=x^3+6x-7$이므로

$f(2)=8+12-7=13$

130 답 ②

$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)}{x-5}=-7$에서 $x\to 5$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 5} f(x)=0$이므로 $f(5)=0$ …… ㉠

$\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x+2}$에서 $x\to -2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to -2} f(x)=0$이므로 $f(-2)=0$ …… ㉡

이때 $f(x)$는 이차함수이므로 ㉠, ㉡에서

$f(x)=a(x+2)(x-5)$ ($a\neq 0$)라 하면

$$\lim_{x\to 5}\frac{f(x)}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{a(x+2)(x-5)}{x-5}=\lim_{x\to 5}a(x+2)=7a$$

따라서 $7a=-7$이므로 $a=-1$

즉, $f(x)=-(x+2)(x-5)=-x^2+3x+10$이므로

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2+3x+10}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(-1+\frac{3}{x}+\frac{10}{x^2}\right)=-1$$

개념유형

30~31쪽

131 답 3

$\lim_{x\to 1}(x+2)=3$, $\lim_{x\to 1}(x^2-x+3)=3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to 1} f(x)=3$

132 답 -2

$\lim_{x\to 1}(-x^2+x-2)=-2$, $\lim_{x\to 1}(x^2-3x)=-2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to 1} f(x)=-2$

133 답 1

$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty} f(x)=1$

134 답 3

$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-1}{x+3}=3$, $\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{x+3}=3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty} f(x)=3$

135 답 1, 1, 1

136 답 0

모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로 $4x-1<f(x)<4x+2$의 각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{4x-1}{x^2+1}<\frac{f(x)}{x^2+1}<\frac{4x+2}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{4x-1}{x^2+1}=0$, $\lim_{x\to\infty}\frac{4x+2}{x^2+1}=0$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=0$$

137 답 2

모든 실수 x에 대하여 $x^2+1>0$이므로

$2x^2+x-4<f(x)<2x^2+x+3$의 각 변을 x^2+1로 나누면

$$\frac{2x^2+x-4}{x^2+1}<\frac{f(x)}{x^2+1}<\frac{2x^2+x+3}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x-4}{x^2+1}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+x+3}{x^2+1}=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2+1}=2$$

실전유형

31쪽

138 답 -3

$\lim_{x\to2}(-x^2+3x-5)=-3$, $\lim_{x\to2}(x^2-5x+3)=-3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to2}f(x)=-3$$

139 답 2

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2+2}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+7}{3x^2+4}=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=2$$

140 답 ③

모든 실수 x에 대하여 $2x^2+1>0$이므로

$x^2-3<(2x^2+1)f(x)<x^2+6$의 각 변을 $2x^2+1$로 나누면

$$\frac{x^2-3}{2x^2+1}<f(x)<\frac{x^2+6}{2x^2+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6}{2x^2+1}=\frac{1}{2}$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\frac{1}{2}$$

141 답 3

$x>0$일 때 $3x+1>0$이므로 $3x+1<f(x)<3x+2$의 각 변을 제곱하면

$9x^2+6x+1<\{f(x)\}^2<9x^2+12x+4$

모든 양의 실수 x에 대하여 $3x^2+1>0$이므로 각 변을 $3x^2+1$로 나누면

$$\frac{9x^2+6x+1}{3x^2+1}<\frac{\{f(x)\}^2}{3x^2+1}<\frac{9x^2+12x+4}{3x^2+1}$$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+6x+1}{3x^2+1}=3$, $\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2+12x+4}{3x^2+1}=3$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{3x^2+1}=3$$

실전유형으로 중단원 점검

32~33쪽

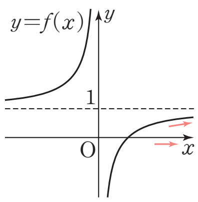
1 답 1

$f(-1)-\lim_{x\to-2+}f(x)+\lim_{x\to0-}f(x)=-1-(-1)+1=1$

2 답 ⑤

① $f(x)=1-\frac{1}{x}$이라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

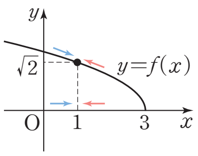
$\lim_{x\to\infty}f(x)=1$



② $f(x)=\sqrt{3-x}$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=\sqrt{2}$, $\lim_{x\to1-}f(x)=\sqrt{2}$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=\sqrt{2}$

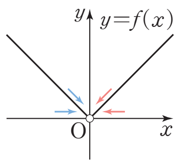


③ $f(x)=\frac{x^2}{|x|}$이라 하면 $f(x)=\begin{cases} x & (x>0) \\ -x & (x<0)\end{cases}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to0-}f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=0$



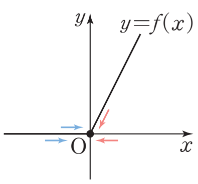
④ $f(x)=x+|x|$라 하면

$f(x)=\begin{cases} 2x & (x\ge0) \\ 0 & (x<0)\end{cases}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to0+}f(x)=0$, $\lim_{x\to0-}f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)=0$



⑤ $f(x)=\frac{x^2-x-2}{|x+1|}$라 하면

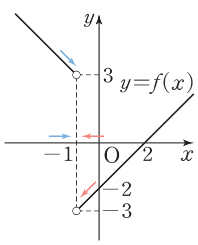
$f(x)=\begin{cases} x-2 & (x>-1) \\ -x+2 & (x<-1)\end{cases}$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=-3$, $\lim_{x\to-1-}f(x)=3$

따라서 $\lim_{x\to-1+}f(x)\ne\lim_{x\to-1-}f(x)$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.



따라서 극한값이 존재하지 않는 것은 ⑤이다.

3 답 ①

$\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하려면 $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$이어야 한다.

이때 $\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(2x+a)=2+a$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(-x^2-2)=-3$이므로

$2+a=-3$ $\quad\therefore a=-5$

4 답 15

$-3f(x)+g(x)=h(x)$라 하면

$f(x)=\dfrac{g(x)-h(x)}{3}$, $\lim_{x\to3}h(x)=-4$

$$\therefore \lim_{x\to3}f(x)g(x)=\lim_{x\to3}\left\{\frac{g(x)-h(x)}{3}\times g(x)\right\} \quad \cdots\cdots \text{ i}$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to3}\{g(x)\}^2-\frac{1}{3}\lim_{x\to3}g(x)h(x)$$

$$=\frac{1}{3}\times5^2-\frac{1}{3}\times5\times(-4)=15 \quad \cdots\cdots \text{ ii}$$

채점 기준

i $-3f(x)+g(x)=h(x)$로 놓고 $\lim_{x\to3}f(x)g(x)$ 변형하기	60 %
ii $\lim_{x\to3}f(x)g(x)$의 값 구하기	40 %

5 답 ②

$f(x)+2g(x)=h(x)$라 하면

$g(x)=\dfrac{h(x)-f(x)}{2}$

$\lim_{x\to\infty}h(x)=3$, $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$이므로

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{h(x)}{f(x)}=0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2g(x)}{3f(x)+4g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-2\times\dfrac{h(x)-f(x)}{2}}{3f(x)+4\times\dfrac{h(x)-f(x)}{2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2f(x)-h(x)}{f(x)+2h(x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\dfrac{h(x)}{f(x)}}{1+2\times\dfrac{h(x)}{f(x)}}=2$$

6 답 ④

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{4x+5}-3)(\sqrt{4x+5}+3)}{(x^2-1)(\sqrt{4x+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{4(x-1)}{(x+1)(x-1)(\sqrt{4x+5}+3)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{4}{(x+1)(\sqrt{4x+5}+3)}$$

$$=\frac{4}{2(3+3)}=\frac{1}{3}$$

7 답 ②

$x=-t$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9x^2+4x+1}-x}{2x+3}=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{9t^2-4t+1}+t}{-2t+3}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{9-\dfrac{4}{t}+\dfrac{1}{t^2}}+1}{-2+\dfrac{3}{t}}$$

$$=\frac{3+1}{-2}=-2$$

8 답 ①

$$\lim_{x\to\infty}(4x-\sqrt{16x^2+8x})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(4x-\sqrt{16x^2+8x})(4x+\sqrt{16x^2+8x})}{4x+\sqrt{16x^2+8x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-8x}{4x+\sqrt{16x^2+8x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-8}{4+\sqrt{16+\dfrac{8}{x}}}$$

$$=\frac{-8}{4+4}=-1$$

9 답 $\frac{3}{2}$

$A(t, \sqrt{6t})$, $B(t, \sqrt{3t})$이므로

$\overline{OA}=\sqrt{t^2+(\sqrt{6t})^2}=\sqrt{t^2+6t}$

$\overline{OB}=\sqrt{t^2+(\sqrt{3t})^2}=\sqrt{t^2+3t}$

$\therefore \lim_{t\to\infty}(\overline{OA}-\overline{OB})$

$$=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2+6t}-\sqrt{t^2+3t})$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{(\sqrt{t^2+6t}-\sqrt{t^2+3t})(\sqrt{t^2+6t}+\sqrt{t^2+3t})}{\sqrt{t^2+6t}+\sqrt{t^2+3t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3t}{\sqrt{t^2+6t}+\sqrt{t^2+3t}}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\dfrac{6}{t}}+\sqrt{1+\dfrac{3}{t}}}$$

$$=\frac{3}{1+1}=\frac{3}{2}$$

10 답 3

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^2+ax-b)=0$이므로

$4+2a-b=0 \quad \therefore b=2a+4 \quad \cdots\cdots$ ㉠ $\quad \cdots\cdots$ i

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-b}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+ax-2a-4}{x^3-8}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{x+a+2}{x^2+2x+4}$$

$$=\frac{a+4}{12} \quad \cdots\cdots \text{ ii}$$

따라서 $\dfrac{a+4}{12}=\dfrac{1}{4}$이므로

$a+4=3 \quad \therefore a=-1$

이를 ㉠에 대입하면 $b=2$ $\quad \cdots\cdots$ iii

$\therefore b-a=3$ $\quad \cdots\cdots$ iv

채점 기준

i b를 a에 대한 식으로 나타내기	30 %
ii 등식의 좌변을 a에 대한 식으로 나타내기	40 %
iii a, b의 값 구하기	20 %
iv $b-a$의 값 구하기	10 %

11 답 ④

$x \to -1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to -1} (\sqrt{x^2+3}+a)=0$이므로

$2+a=0 \quad \therefore a=-2$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2+3}+a}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x+1}$$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$
$$= \lim_{x \to -1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}+2}$$
$$= \frac{-2}{2+2} = -\frac{1}{2}$$

$\therefore b=-\frac{1}{2}$

$\therefore a+b=-\frac{5}{2}$

12 답 20

(가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

(나)에서 $x \to -3$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to -3} f(x)=0$이므로 $f(-3)=0$

$f(x)=(x+3)(x+a)$ (a는 상수)라 하면 …… ⅰ

$$\lim_{x \to -3} \frac{f(x)}{x+3} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x+a)}{x+3}$$
$$= \lim_{x \to -3} (x+a) = -3+a$$

따라서 $-3+a=1$이므로 $a=4$

즉, $f(x)=(x+3)(x+4)$이므로 …… ⅱ

$\therefore f(1)=4\times5=20$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ $f(x)$의 식 세우기	40 %
ⅱ $f(x)$ 구하기	50 %
ⅲ $f(1)$의 값 구하기	10 %

13 답 $\frac{3}{2}$

모든 양의 실수 x에 대하여 $4x^2+3>0$이므로

$6x^2-x<(4x^2+3)f(x)<6x^2+x+1$의 각 변을 $4x^2+3$으로 나누면

$$\frac{6x^2-x}{4x^2+3}<f(x)<\frac{6x^2+x+1}{4x^2+3}$$

이때 $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2-x}{4x^2+3}=\frac{3}{2}$, $\lim_{x \to \infty} \frac{6x^2+x+1}{4x^2+3}=\frac{3}{2}$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x \to \infty} f(x)=\frac{3}{2}$

02 함수의 연속

개념유형

35~36쪽

001 답 ×

$f(1)=1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 정의된다.

002 답 ○

$\lim_{x \to 1+} f(x)=1$, $\lim_{x \to 1-} f(x)=0$이므로

$\lim_{x \to 1+} f(x) \neq \lim_{x \to 1-} f(x)$

따라서 $\lim_{x \to 1} f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

003 답 ○

$\lim_{x \to 1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

004 답 ○

$f(2)=-1$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 정의된다.

005 답 ×

$\lim_{x \to 2+} f(x)=\lim_{x \to 2-} f(x)=0$이므로

$\lim_{x \to 2} f(x)=0$

006 답 ×

$\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

007 답 -1, -1, 연속

008 답 연속

$f(0)=0$, $\lim_{x \to 0} f(x)=\lim_{x \to 0} (x^2-x)=0$이므로

$\lim_{x \to 0} f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

009 답 연속

$f(0)=2$

$\lim_{x \to 0+} f(x)=\lim_{x \to 0+} (x+2)=2$, $\lim_{x \to 0-} f(x)=\lim_{x \to 0-} (-x+2)=2$이므로

$\lim_{x \to 0} f(x)=2$

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x)=f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

010 답 1, 1, $3x-5$, 1, 1, 2, 연속

011 답 연속

(ⅰ) $f(2)=2-4=-2$

(ⅱ) $\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(x-4)=-2$,

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x^2-3x)=-2$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=-2$

(ⅲ) $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이다.

012 답 불연속

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(x^2-1)=3$,

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(-x^2+2x)=0$이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)\neq\lim_{x\to2-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to2}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

013 답 0, $x+1$, $x+1$, 2, 불연속

014 답 연속

(ⅰ) $f(1)=3$

(ⅱ) $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}(x+2)=3$

(ⅲ) $\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

015 답 불연속

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}\frac{x-1}{x-1}=1$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}\frac{-(x-1)}{x-1}=-1$이므로

$\lim_{x\to1+}f(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

실전유형

36~37쪽

016 답 ⑤

①, ② 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 정의되지 않으므로 $x=-1$에서 불연속이다.

③ $\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(x+1)=0$,

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(-x+1)=2$이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)\neq\lim_{x\to-1-}f(x)$

따라서 $\lim_{x\to-1}f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

④ $f(-1)=1$

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}\frac{(x+1)^2}{x+1}=\lim_{x\to-1+}(x+1)=0$,

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}\frac{(x+1)^2}{-(x+1)}=\lim_{x\to-1-}\{-(x+1)\}=0$이므로

$\lim_{x\to-1}f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to-1}f(x)\neq f(-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

⑤ $f(-1)=3$

$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x^3+1}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}$

$=\lim_{x\to-1}(x^2-x+1)=3$

$\therefore \lim_{x\to-1}f(x)=f(-1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

따라서 $x=-1$에서 연속인 함수는 ⑤이다.

017 답 ②

ㄱ. $f(x)=\begin{cases} x(x-1) & (x\geq1) \\ -x(x-1) & (x<1) \end{cases}$이므로 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이어야 한다.

$f(1)=0$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}x(x-1)=0$,

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}\{-x(x-1)\}=0$이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 정의되지 않으므로 $x=3$에서 불연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=2$에서 연속이어야 한다.

$f(2)=0$

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}\sqrt{x-2}=0$,

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x-2)=0$이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 연속이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄹ. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이려면 $x=0$에서 연속이어야 한다.

$f(0)=0$

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{x^2+x}{x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{x(x+1)}{x}$

$=\lim_{x\to0}(x+1)=1$

$\therefore \lim_{x\to0}f(x)\neq f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 모든 실수 x에서 연속인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

018 답 ②

(i) $f(1)=3$

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1-} f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to1} f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to1} f(x)\neq f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(ii) $\lim_{x\to3+} f(x)=1$, $\lim_{x\to3-} f(x)=3$이므로

$\lim_{x\to3+} f(x)\neq \lim_{x\to3-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to3} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 3의 1개이므로

$a=1$

함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 1, 3의 2개이므로

$b=2$

$\therefore a+b=3$

019 답 ⑤

② $\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0-} f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to0} f(x)=1$

③ $f(-2)=1$

$\lim_{x\to-2+} f(x)=\lim_{x\to-2-} f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to-2} f(x)=1$

$\therefore \lim_{x\to-2} f(x)=f(-2)$

④, ⑤ (i) $\lim_{x\to-1+} f(x)=-1$, $\lim_{x\to-1-} f(x)=0$이므로

$\lim_{x\to-1+} f(x)\neq \lim_{x\to-1-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to-1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

(ii) $f(0)=0$, $\lim_{x\to0} f(x)=1$이므로 $\lim_{x\to0} f(x)\neq f(0)$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

(iii) $\lim_{x\to1+} f(x)=2$, $\lim_{x\to1-} f(x)=1$이므로

$\lim_{x\to1+} f(x)\neq \lim_{x\to1-} f(x)$

따라서 $\lim_{x\to1} f(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 $-2<x<2$일 때 함수 $f(x)$의 극한값이 존재하지 않는 x의 값은 -1, 1의 2개이고, 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 -1, 0, 1의 3개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

020 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\lim_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}=1+0=1$,

$\lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}=0+(-1)=-1$이므로

$\lim_{x\to0+}\{f(x)+g(x)\}\neq \lim_{x\to0-}\{f(x)+g(x)\}$

따라서 $\lim_{x\to0}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다.

ㄴ. $f(0)-g(0)=1-0=1$

$\lim_{x\to0+}\{f(x)-g(x)\}=1-0=1$,

$\lim_{x\to0-}\{f(x)-g(x)\}=0-(-1)=1$이므로

$\lim_{x\to0}\{f(x)-g(x)\}=1$

$\therefore \lim_{x\to0}\{f(x)-g(x)\}=f(0)-g(0)$

따라서 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄷ. $f(0)g(0)=1\times0=0$

$\lim_{x\to0+} f(x)g(x)=1\times0=0$, $\lim_{x\to0-} f(x)g(x)=0\times(-1)=0$이므로

$\lim_{x\to0} f(x)g(x)=0$

$\therefore \lim_{x\to0} f(x)g(x)=f(0)g(0)$

따라서 함수 $f(x)g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

따라서 보기의 함수 중 $x=0$에서 연속인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

021 답 ③

ㄱ. $\lim_{x\to1+} f(x)g(x)=1\times(-1)=-1$,

$\lim_{x\to1-} f(x)g(x)=-1\times1=-1$이므로

$\lim_{x\to1} f(x)g(x)=-1$

ㄴ. $f(1)+g(1)=1+1=2$

$\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=1+(-1)=0$,

$\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=-1+1=0$이므로

$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=0$

$\therefore \lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}\neq f(1)+g(1)$

따라서 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to-1+} f(x)g(x)=1\times0=0$,

$\lim_{x\to-1-} f(x)g(x)=-1\times1=-1$이므로

$\lim_{x\to-1+} f(x)g(x)\neq \lim_{x\to-1-} f(x)g(x)$

따라서 $\lim_{x\to-1} f(x)g(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=-1$에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

개념유형

39~40쪽

022 답 (1, 5)

023 답 $[-2, 3]$

024 답 $(-4, 7]$

025 답 $[-6, -1)$

026 답 $(1, \infty)$

027 답 $[-3, \infty)$

028 답 $(-\infty, -8)$

029 답 $(-\infty, 2]$

030 답 $(-\infty, \infty)$

031 답 $(-\infty, \infty)$

032 답 $(-\infty, 2)$, $(2, \infty)$

033 답 $[-3, \infty)$

034 답 $(-\infty, \infty)$

함수 $f(x)=-3x+1$은 모든 실수 x에서 연속이므로 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

035 답 $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$

함수 $f(x)=\frac{3}{x+1}$은 $x\neq-1$인 모든 실수 x에서 연속이므로 구간 $(-\infty, -1)$, $(-1, \infty)$에서 연속이다.

036 답 $(-\infty, 2]$

함수 $f(x)=\sqrt{2-x}$는 구간 $(-\infty, 2)$에서 연속이고 $\lim_{x\to2-}\sqrt{2-x}=f(2)=0$이므로 구간 $(-\infty, 2]$에서 연속이다.

037 답 $(-\infty, \infty)$

함수 $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$은 모든 실수 x에서 연속이므로 구간 $(-\infty, \infty)$에서 연속이다.

038 답 1, 6, 1, 6, 1, 7

039 답 2

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2-}f(x)=f(2)$

$\lim_{x\to2+}f(x)=\lim_{x\to2+}(x^2+3x-6)=4$

$\lim_{x\to2-}f(x)=\lim_{x\to2-}(x+a)=2+a$

$f(2)=4+6-6=4$

따라서 $4=2+a$이므로 $a=2$

040 답 -7

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$

$\lim_{x\to-1+}f(x)=\lim_{x\to-1+}(\sqrt{x+1}+3)=3$

$\lim_{x\to-1-}f(x)=\lim_{x\to-1-}(ax-4)=-a-4$

$f(-1)=0+3=3$

따라서 $3=-a-4$이므로 $a=-7$

041 답 x^2+ax-2, -1, $x+1$, 3, 3

042 답 $a=2$, $b=-1$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+a}{x-1}=b$ …… ㉠

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2-3x+a)=0$이므로

$1-3+a=0$ $\therefore a=2$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+a}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(x-2)=-1\end{aligned}$$

$\therefore b=-1$

043 답 $a=3$, $b=9$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+8}-b}{x-1}=1$ …… ㉠

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(a\sqrt{x^2+8}-b)=0$이므로

$3a-b=0$ $\therefore b=3a$ …… ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+8}-b}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{a\sqrt{x^2+8}-3a}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{a(\sqrt{x^2+8}-3)(\sqrt{x^2+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{a(x+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2+8}+3)}\\&=\lim_{x\to1}\frac{a(x+1)}{\sqrt{x^2+8}+3}=\frac{a}{3}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{3}=1$이므로 $a=3$

이를 ㉡에 대입하면 $b=9$

실전유형

41~42쪽

044 답 ②

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2-}f(x)=f(-2)$

$\lim_{x\to-2+}f(x)=\lim_{x\to-2+}(x^2-a)=4-a$

$\lim_{x\to-2-}f(x)=\lim_{x\to-2-}(5x+a)=-10+a$

$f(-2)=4-a$

따라서 $4-a=-10+a$이므로

$-2a=-14$ $\therefore a=7$

045 답 1

함수 $f(x)$가 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 3} f(x)=f(3)$

$\therefore \lim_{x \to 3} \frac{x^2+ax+b}{x-3}=4$ ...... ㉠

$x \to 3$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to 3}(x^2+ax+b)=0$이므로

$9+3a+b=0 \quad \therefore b=-3a-9$ ...... ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3} \frac{x^2+ax+b}{x-3} &= \lim_{x \to 3} \frac{x^2+ax-3a-9}{x-3} \\ &= \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x+a+3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \to 3}(x+a+3)=a+6\end{aligned}$$

따라서 $a+6=4$이므로 $a=-2$

이를 ㉡에 대입하면 $b=-3$

$\therefore a-b=1$

046 답 $\frac{7}{8}$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to -1} f(x)=f(-1)$

$\therefore \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2-a}=b$ ...... ㉠

$x \to -1$일 때 (분자)$\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x \to -1}(x^2-a)=0$이므로

$1-a=0 \quad \therefore a=1$ ...... ㉡

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2-a} &= \lim_{x \to -1} \frac{\sqrt{x+5}-2}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \to -1} \frac{(\sqrt{x+5}-2)(\sqrt{x+5}+2)}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+5}+2)} \\ &= \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+5}+2)} \\ &= \lim_{x \to -1} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{x+5}+2)}=-\frac{1}{8}\end{aligned}$$

$\therefore b=-\frac{1}{8}$

$\therefore a+b=\frac{7}{8}$

047 답 ③

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x & (|x| \ge 1) \\ -x^2+ax+b & (|x|<1) \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x^2-x & (x \le -1 \text{ 또는 } x \ge 1) \\ -x^2+ax+b & (-1<x<1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$, $x=1$에서 연속이다.

(i) $x=-1$에서 연속이면

$\lim_{x \to -1+} f(x)=\lim_{x \to -1-} f(x)=f(-1)$

$\lim_{x \to -1+} f(x)=\lim_{x \to -1+}(-x^2+ax+b)=-1-a+b$

$\lim_{x \to -1-} f(x)=\lim_{x \to -1-}(x^2-x)=2$

$f(-1)=1-(-1)=2$

따라서 $-1-a+b=2$이므로

$a-b=-3$ ...... ㉠

(ii) $x=1$에서 연속이면

$\lim_{x \to 1+} f(x)=\lim_{x \to 1-} f(x)=f(1)$

$\lim_{x \to 1+} f(x)=\lim_{x \to 1+}(x^2-x)=0$

$\lim_{x \to 1-} f(x)=\lim_{x \to 1-}(-x^2+ax+b)=-1+a+b$

$f(1)=1-1=0$

따라서 $0=-1+a+b$이므로

$a+b=1$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=2$

$\therefore ab=-2$

048 답 4

$$f(x)g(x)=\begin{cases} (x-1)(-x+k) & (x \ge 4) \\ (-x+6)(-x+k) & (x<4) \end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=4$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 4+} f(x)g(x)=\lim_{x \to 4-} f(x)g(x)=f(4)g(4)$

$\lim_{x \to 4+} f(x)g(x)=\lim_{x \to 4+}(x-1)(-x+k)=3(-4+k)$

$\lim_{x \to 4-} f(x)g(x)=\lim_{x \to 4-}(-x+6)(-x+k)=2(-4+k)$

$f(4)g(4)=3(-4+k)$

따라서 $3(-4+k)=2(-4+k)$이므로

$-12+3k=-8+2k \quad \therefore k=4$

049 답 ③

함수 $(x+a)f(x)$가 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to -1+}(x+a)f(x)=\lim_{x \to -1-}(x+a)f(x)=(-1+a)f(-1)$

$\lim_{x \to -1+}(x+a)f(x)=(-1+a)\times 4=4(-1+a)$

$\lim_{x \to -1-}(x+a)f(x)=(-1+a)\times 1=-1+a$

$(-1+a)f(-1)=4(-1+a)$

따라서 $4(-1+a)=-1+a$이므로

$-4+4a=-1+a$, $3a=3 \quad \therefore a=1$

050 답 ④

$$\{f(x)\}^2=\begin{cases} (-2x+6)^2 & (x<a) \\ (2x-a)^2 & (x \ge a) \end{cases}$$

함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 하므로

$\lim_{x \to a+}\{f(x)\}^2=\lim_{x \to a-}\{f(x)\}^2=\{f(a)\}^2$

$\lim_{x \to a+}\{f(x)\}^2=\lim_{x \to a+}(2x-a)^2=a^2$

$\lim_{x \to a-}\{f(x)\}^2=\lim_{x \to a-}(-2x+6)^2=(-2a+6)^2$

$\{f(a)\}^2=(2a-a)^2=a^2$

따라서 $a^2=(-2a+6)^2$이므로

$a^2=4a^2-24a+36$, $a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0 \quad \therefore a=2$ 또는 $a=6$

따라서 모든 a의 값의 합은

$2+6=8$

051 답 ②

$x\neq1$일 때,

$$f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=x-2$$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$$f(1)=\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}(x-2)=-1$$

052 답 5

$x\neq2$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2+x+a}{x-2}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2}f(x)=f(2)$

$\therefore \lim_{x\to2}\dfrac{x^2+x+a}{x-2}=f(2)$ ...... ㉠

$x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to2}(x^2+x+a)=0$이므로

$4+2+a=0 \qquad \therefore a=-6$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x^2+x+a}{x-2}&=\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}(x+3)=5\end{aligned}$$

$\therefore f(2)=5$

053 답 ①

$x\neq a$일 때, $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x-a}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=a$에서 연속이므로

$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

$\therefore \lim_{x\to a}\dfrac{x^2+2x+1}{x-a}=f(a)$ ...... ㉠

$x\to a$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to a}(x^2+2x+1)=0$이므로

$a^2+2a+1=0,\ (a+1)^2=0 \qquad \therefore a=-1$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{x^2+2x+1}{x-a}&=\lim_{x\to-1}\frac{x^2+2x+1}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2}{x+1}\\&=\lim_{x\to-1}(x+1)=0\end{aligned}$$

$\therefore f(a)=0$

$\therefore f(a)-a=1$

054 답 ⑤

$x\neq5$일 때, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-4}+a}{x-5}$

함수 $f(x)$가 $x\geq4$인 모든 실수 x에서 연속이면 $x=5$에서 연속이므로

$\lim_{x\to5}f(x)=f(5)$

$\therefore \lim_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x-4}+a}{x-5}=f(5)$ ...... ㉠

$x\to5$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to5}(\sqrt{x-4}+a)=0$이므로

$1+a=0 \qquad \therefore a=-1$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-4}+a}{x-5}&=\lim_{x\to5}\frac{\sqrt{x-4}-1}{x-5}\\&=\lim_{x\to5}\frac{(\sqrt{x-4}-1)(\sqrt{x-4}+1)}{(x-5)(\sqrt{x-4}+1)}\\&=\lim_{x\to5}\frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-4}+1)}\\&=\lim_{x\to5}\frac{1}{\sqrt{x-4}+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\therefore f(5)=\dfrac{1}{2}$

055 답 42

$x^2-x-6=0$에서 $(x+2)(x-3)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=3$

$x\neq-2,\ x\neq3$일 때, $f(x)=\dfrac{x^3+ax+b}{x^2-x-6}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-2}f(x)=f(-2)$

$\therefore \lim_{x\to-2}\dfrac{x^3+ax+b}{x^2-x-6}=f(-2)$

$x\to-2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to-2}(x^3+ax+b)=0$이므로

$-8-2a+b=0 \qquad \therefore 2a-b=-8$ ...... ㉠

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=3$에서 연속이므로

$\lim_{x\to3}f(x)=f(3)$

$\therefore \lim_{x\to3}\dfrac{x^3+ax+b}{x^2-x-6}=f(3)$

$x\to3$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to3}(x^3+ax+b)=0$이므로

$27+3a+b=0 \qquad \therefore 3a+b=-27$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-7,\ b=-6$

$\therefore ab=42$

개념유형 43~44쪽

056 답 $(-\infty,\ \infty)$

함수 $f(x)=2x^2+4x-5$는 다항함수이므로 연속함수의 성질에 의하여 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

057 답 $(-\infty,\ \infty)$

두 함수 $y=3x-1,\ y=x^2+4x-7$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 연속함수의 성질에 의하여 함수

$f(x)=(3x-1)(x^2+4x-7)$은 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

058 답 $\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \infty\right)$

두 함수 $y=x+3$, $y=2x-1$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 연속함수의 성질에 의하여 함수 $f(x)=\frac{x+3}{2x-1}$은 $x\neq\frac{1}{2}$인 모든 실수, 즉 구간 $\left(-\infty,\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \infty\right)$에서 연속이다.

059 답 $(-\infty,\ -4),\ (-4,\ 4),\ (4,\ \infty)$

두 함수 $y=x$, $y=x^2-16$은 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 연속함수의 성질에 의하여 함수

$f(x)=\frac{x}{x^2-16}=\frac{x}{(x+4)(x-4)}$는 $x\neq-4$, $x\neq4$인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ -4),\ (-4,\ 4),\ (4,\ \infty)$에서 연속이다.

060 답 $(-\infty,\ \infty)$

함수 $f(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 연속함수의 성질에 의하여 함수 $5f(x)$는 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

061 답 $(-\infty,\ \infty)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 연속함수의 성질에 의하여 함수 $f(x)+g(x)$는 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

062 답 $(-\infty,\ \infty)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 연속함수의 성질에 의하여 함수 $2g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)-2g(x)$는 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

063 답 $(-\infty,\ \infty)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 연속함수의 성질에 의하여 함수 $f(x)g(x)$는 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

064 답 $(-\infty,\ \infty)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

이때 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-2x+1}{x^2+4}$에서 $x^2+4>0$이므로 연속함수의 성질에 의하여 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$는 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ \infty)$에서 연속이다.

065 답 $(-\infty,\ 1),\ (1,\ \infty)$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

이때 $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^2+4}{x^2-2x+1}=\frac{x^2+4}{(x-1)^2}$에서 연속함수의 성질에 의하여 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 $x\neq1$인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty,\ 1),\ (1,\ \infty)$에서 연속이다.

실전유형

44쪽

066 답 ④

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄱ. 두 함수 $3f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $3f(x)+g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $g(x)\times g(x)=\{g(x)\}^2$도 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{4x+1}{x^2+2}$에서 $x^2+2>0$이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄹ. $\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}=\frac{x^2+2}{x^2+2+4x+1}=\frac{x^2+2}{x^2+4x+3}$

$=\frac{x^2+2}{(x+3)(x+1)}$

따라서 함수 $\frac{f(x)}{f(x)+g(x)}$는 $(x+3)(x+1)\neq0$인 모든 실수, 즉 $x\neq-3$, $x\neq-1$인 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 보기의 함수 중 모든 실수 x에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

067 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 함수 $2f(x)+3g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄴ. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x=a$에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$도 $x=a$에서 연속이다.

ㄷ. [반례] 두 함수 $f(x)=1$, $g(x)=x-a$는 각각 $x=a$에서 연속이지만 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1}{x-a}$은 $x=a$에서 불연속이다.

ㄹ. [반례] 두 함수 $f(x)=2x$, $g(x)=x+a$는 각각 $x=a$에서 연속이지만 함수 $\frac{1}{f(x)-g(x)}=\frac{1}{x-a}$은 $x=a$에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 $x=a$에서 항상 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

068 답 3

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에서 연속이려면 이차방정식 $g(x)=0$, 즉 $x^2+ax+1=0$이 실근을 갖지 않아야 한다.

이차방정식 $x^2+ax+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=a^2-4<0$, $(a+2)(a-2)<0$

$\therefore\ -2<a<2$

따라서 정수 a는 -1, 0, 1의 3개이다.

개념유형

45~46쪽

069 답 최댓값: 2, 최솟값: 0

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[2,\ 3]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

이때 $x=3$일 때 최댓값 2, $x=2$일 때 최솟값 0을 갖는다.

070 답 최댓값: 1, 최솟값: 0

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$일 때 최댓값 1, $x=-2$일 때 최솟값 0을 갖는다.

071 답 최댓값: 1

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$일 때 최댓값 1을 갖고, 최솟값은 갖지 않는다.

072 답 최솟값: -1

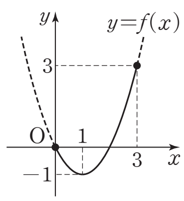
함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 최댓값은 갖지 않고, $x=1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.

073 답 2, 6, -1, 3

074 답 최댓값: 3, 최솟값: -1

함수 $f(x)=x^2-2x=(x-1)^2-1$은 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

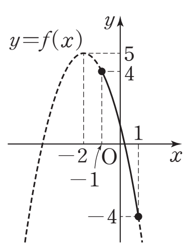
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 $x=3$일 때 최댓값 3, $x=1$일 때 최솟값 -1을 갖는다.



075 답 최댓값: 4, 최솟값: -4

함수 $f(x)=-x^2-4x+1=-(x+2)^2+5$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

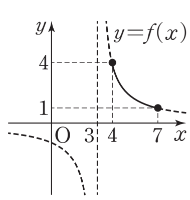
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 $x=-1$일 때 최댓값 4, $x=1$일 때 최솟값 -4를 갖는다.



076 답 최댓값: 4, 최솟값: 1

함수 $f(x)=\dfrac{4}{x-3}$는 닫힌구간 $[4, 7]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

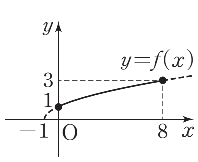
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[4, 7]$에서 $x=4$일 때 최댓값 4, $x=7$일 때 최솟값 1을 갖는다.



077 답 최댓값: 3, 최솟값: 1

함수 $f(x)=\sqrt{x+1}$은 닫힌구간 $[0, 8]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

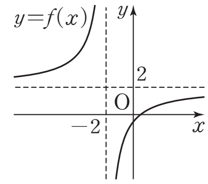
이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 8]$에서 $x=8$일 때 최댓값 3, $x=0$일 때 최솟값 1을 갖는다.



실전유형 46쪽

078 답 ㄱ, ㄹ

함수 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}=-\dfrac{5}{x+2}+2$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ, ㄹ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-7, -3]$, $[-1, 5]$에서 연속이므로 각 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 반열린구간 $(-3, 0]$에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 3]$에서 $x=3$일 때 최댓값 1을 갖고, 최솟값은 갖지 않는다.

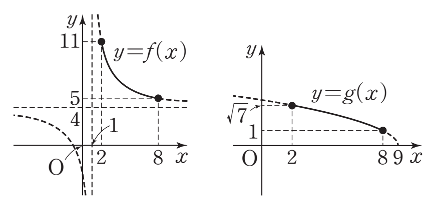
ㅁ. 함수 $f(x)$는 반열린구간 $[0, 4)$에서 최댓값은 갖지 않고, $x=0$일 때 최솟값 $-\dfrac{1}{2}$을 갖는다.

따라서 보기의 구간에서 최댓값과 최솟값이 모두 존재하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

079 답 12

두 함수 $f(x)=\dfrac{4x+3}{x-1}=\dfrac{7}{x-1}+4$, $g(x)=\sqrt{-x+9}$는 닫힌구간 $[2, 8]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

이때 닫힌구간 $[2, 8]$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $M=f(2)=11$, $m=g(8)=1$이므로

$M+m=12$

080 답 ④

① $\lim\limits_{x\to1+}f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to1-}f(x)=1$이므로

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1-}f(x)$

따라서 $\lim\limits_{x\to1}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

② ①에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

$f(2)=1$

$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=\lim\limits_{x\to2-}f(x)=2$이므로 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=2$

즉, $\lim\limits_{x\to2}f(x)\neq f(2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.

따라서 열린구간 $(-1, 3)$에서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 1, 2의 2개이다.

③ 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

④ 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $x=1$일 때 최댓값 3을 갖고, $x=0$일 때 최솟값 0을 갖는다.

⑤ 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[2, 3]$에서 최댓값은 갖지 않고, $x=2$ 또는 $x=3$일 때 최솟값 1을 갖는다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

개념유형

081 답 연속, -1, 3, 2, 사잇값

082 답 풀이 참조

함수 $f(x)=x^3+x^2-3$은 닫힌구간 $[-2, 1]$에서 연속이다.
또 $f(-2)=-7$, $f(1)=-1$에서 $f(-2)\neq f(1)$이고,
$f(-2)<-3<f(1)$이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=-3$인 c가 열린구간 $(-2, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

083 답 $>$, 0, $(0, 2)$, $(0, 2)$

084 답 풀이 참조

$f(x)=x^2-3x-5$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 4]$에서 연속이고 $f(-2)=5>0$, $f(4)=-1<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, 4)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $x^2-3x-5=0$은 열린구간 $(-2, 4)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

085 답 풀이 참조

$f(x)=x^3-x^2-2x$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 $f(1)=-2<0$, $f(3)=12>0$이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $x^3-x^2-2x=0$은 열린구간 $(1, 3)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

086 답 풀이 참조

$f(x)=x^4+4x+2$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 $f(-1)=-1<0$, $f(1)=7>0$이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $x^4+4x+2=0$은 열린구간 $(-1, 1)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

087 답 $<$, $<$, $(1, 2)$, 2

088 답 3개

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고 $f(-2)f(-1)<0$, $f(-1)f(0)>0$, $f(0)f(1)<0$, $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, 2)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

실전유형

089 답 ④

$f(x)=x^3-2x-3$이라 하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고
$f(-2)=-7$, $f(-1)=-2$, $f(0)=-3$, $f(1)=-4$, $f(2)=1$,
$f(3)=18$
따라서 $f(1)f(2)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식
$x^3-2x-3=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 실근을 갖는다.

090 답 5

$f(x)=2x^2-8x+a$라 하면 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[3, 4]$에서 연속이고
$f(3)=-6+a$, $f(4)=a$
이때 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(3, 4)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $f(3)f(4)<0$이어야 하므로
$(-6+a)\times a<0$, $a(a-6)<0$ $\quad\therefore 0<a<6$
따라서 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

091 답 ⑤

$g(x)=f(x)-2x$라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고
$g(-1)=f(-1)+2=a+2$
$g(1)=f(1)-2=(a-3)-2=a-5$
이때 방정식 $f(x)-2x=0$, 즉 $g(x)=0$의 중근이 아닌 오직 하나의 실근이 열린구간 $(-1, 1)$에 존재하려면 $g(-1)g(1)<0$이어야 하므로
$(a+2)(a-5)<0$ $\quad\therefore -2<a<5$
따라서 모든 정수 a의 값의 합은
$-1+0+1+2+3+4=9$

092 답 2

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-3, 1]$에서 연속이고 $f(-1)f(0)<0$, $f(0)f(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-1, 0)$, $(0, 1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-3, 1)$에서 적어도 2개의 실근을 가지므로
$n=2$

093 답 2개

$f(x)=x$에서 $f(x)-x=0$이므로 $g(x)=f(x)-x$라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[-1, 2]$에서 연속이고
$g(-1)=f(-1)-(-1)=-3+1=-2$
$g(0)=f(0)-0=5$
$g(1)=f(1)-1=2-1=1$
$g(2)=f(2)-2=1-2=-1$
이때 $g(-1)g(0)<0$, $g(1)g(2)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$은 열린구간 $(-1, 0)$, $(1, 2)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)-x=0$, 즉 $f(x)=x$는 열린구간 $(-1, 2)$에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

094 답 3개

함수 $y=f(x)$의 그래프가 다섯 개의 점 $(-2, -3)$, $(-1, 1)$, $(0, -2)$, $(1, 3)$, $(2, 4)$를 지나므로
$f(-2)=-3$, $f(-1)=1$, $f(0)=-2$, $f(1)=3$, $f(2)=4$
함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고 $f(-2)f(-1)<0$, $f(-1)f(0)<0$, $f(0)f(1)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.
따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(-2, 2)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

실전유형으로 중단원 점검 50~51쪽

1 답 ⑤

① $f(1)=\sqrt{2}$, $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\sqrt{x+1}=\sqrt{2}$이므로
$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

② $f(1)=\frac{1}{2}$, $\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x}{x+1}=\frac{1}{2}$이므로
$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

③ $f(1)=0$
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}(x-1)=0$, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}\{-(x-1)\}=0$ 이므로
$\lim_{x\to1}f(x)=0$
$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=f(1)$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

④ $f(1)=1$
$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}x^2=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}x^3=1$이므로
$\lim_{x\to1}f(x)=1$
$\therefore \lim_{x\to1}f(x)=f(1)$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

⑤ $f(1)=-1$
$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to1}x=1$$
$\therefore \lim_{x\to1}f(x)\neq f(1)$
따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 $x=1$에서 불연속인 함수는 ⑤이다.

2 답 ⑤

ㄱ. $\lim_{x\to2+}f(x)=2$, $\lim_{x\to2-}f(x)=0$이므로
$\lim_{x\to2+}f(x)\neq\lim_{x\to2-}f(x)$
따라서 $\lim_{x\to2}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $0<x<2$에서 연속이므로 $0<a<2$인 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$이다.

ㄷ. ㄱ에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 불연속이다.
$f(3)=-1$
$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=0$이므로 $\lim_{x\to3}f(x)=0$
$\therefore \lim_{x\to3}f(x)\neq f(3)$
즉, 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.
따라서 함수 $f(x)$가 불연속인 x의 값은 2, 3의 2개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

3 답 ①

ㄱ. $f(1)+g(1)=2+0=2$
$\lim_{x\to1+}\{f(x)+g(x)\}=1+1=2$,
$\lim_{x\to1-}\{f(x)+g(x)\}=2+0=2$이므로
$\lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=2$
$\therefore \lim_{x\to1}\{f(x)+g(x)\}=f(1)+g(1)$
따라서 함수 $f(x)+g(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x\to1+}\{f(x)-g(x)\}=1-1=0$,
$\lim_{x\to1-}\{f(x)-g(x)\}=2-0=2$이므로
$\lim_{x\to1+}\{f(x)-g(x)\}\neq\lim_{x\to1-}\{f(x)-g(x)\}$
따라서 $\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)-g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

ㄷ. $\lim_{x\to1+}f(x)g(x)=1\times1=1$, $\lim_{x\to1-}f(x)g(x)=2\times0=0$이므로
$\lim_{x\to1+}f(x)g(x)\neq\lim_{x\to1-}f(x)g(x)$
따라서 $\lim_{x\to1}f(x)g(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)g(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 $x=1$에서 연속인 것은 ㄱ이다.

4 답 7

$f(1)=5$에서
$1-2+b=5$ $\therefore b=6$ …… ⅰ
함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=3$에서 연속이므로
$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3-}f(x)=f(3)$
$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3+}(ax+6)=3a+6$
$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}(x^2-2x+6)=9$
$f(3)=3a+6$
따라서 $3a+6=9$이므로 $a=1$ …… ⅱ
$\therefore a+b=7$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ b의 값 구하기	20 %
ⅱ a의 값 구하기	70 %
ⅲ $a+b$의 값 구하기	10 %

5 답 15

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$

$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-4}{x-1}=b$ …… ㉠

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}(x^2+ax-4)=0$이므로

$1+a-4=0 \quad \therefore a=3$ …… ⅰ

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-4}{x-1}&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+3x-4}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+4)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(x+4)=5\end{aligned}$$

$\therefore b=5$ …… ⅱ

$\therefore ab=15$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ a의 값 구하기	50 %
ⅱ b의 값 구하기	40 %
ⅲ ab의 값 구하기	10 %

6 답 9

$x\neq4$일 때, $f(x)=\frac{2x^2+ax+b}{x-4}$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=4$에서 연속이므로

$\lim_{x\to4} f(x)=f(4)$

$\therefore \lim_{x\to4}\frac{2x^2+ax+b}{x-4}=f(4)$ …… ㉠

$x\to4$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to4}(2x^2+ax+b)=0$이므로

$32+4a+b=0 \quad \therefore b=-4a-32$ …… ㉡

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4}\frac{2x^2+ax+b}{x-4}&=\lim_{x\to4}\frac{2x^2+ax-4a-32}{x-4}\\&=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(2x+a+8)}{x-4}\\&=\lim_{x\to4}(2x+a+8)=a+16\end{aligned}$$

$\therefore f(4)=a+16$

한편 $f(1)=3$에서

$\frac{2+a+b}{-3}=3 \quad \therefore b=-a-11$ …… ㉢

㉡, ㉢에서

$-4a-32=-a-11,\ -3a=21 \quad \therefore a=-7$

$\therefore f(4)=-7+16=9$

7 답 ①

두 함수 $f(x)$, $g(x)$는 다항함수이므로 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄱ. 두 함수 $f(x)$, $2g(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)-2g(x)$도 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이므로 함수 $f(x)\times f(x)=\{f(x)\}^2$도 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{-x^2+x+4}{x-5}$는 $x-5\neq0$인 모든 실수, 즉 $x\neq5$인 모든 실수 x에서 연속이다.

ㄹ. $\frac{g(x)}{x-f(x)}=\frac{x-5}{x-(-x^2+x+4)}=\frac{x-5}{x^2-4}=\frac{x-5}{(x+2)(x-2)}$

따라서 함수 $\frac{g(x)}{x-f(x)}$는 $(x+2)(x-2)\neq0$인 모든 실수, 즉 $x\neq-2$, $x\neq2$인 모든 실수 x에서 연속이다.

따라서 보기의 함수 중 모든 실수 x에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

8 답 $0<a<1$

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에서 연속이려면 이차방정식 $g(x)=0$, 즉 $x^2+2ax+a=0$이 실근을 갖지 않아야 한다. …… ⅰ

이차방정식 $x^2+2ax+a=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-a<0,\ a(a-1)<0$

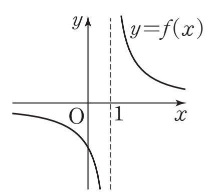
$\therefore 0<a<1$ …… ⅱ

채점 기준

ⅰ $\frac{f(x)}{g(x)}$가 모든 실수 x에서 연속이 되도록 하는 조건 구하기	50 %
ⅱ a의 값의 범위 구하기	50 %

9 답 ③

함수 $f(x)=\frac{2}{x-1}$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



①, ②, ⑤ 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[2, 3]$에서 연속이므로 각 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

③ 함수 $f(x)$는 반열린구간 $[0, 1)$에서 $x=0$일 때 최댓값 -2를 갖고, 최솟값은 갖지 않는다.

④ 함수 $f(x)$는 반열린구간 $(1, 2]$에서 최댓값은 갖지 않고, $x=2$일 때 최솟값 2를 갖는다.

따라서 최솟값이 존재하지 않는 구간은 ③이다.

10 답 ②

$f(x)=x^3+5x+2$라 하면 함수 $f(x)$는 모든 실수 x에서 연속이고

$f(-2)=-16$, $f(-1)=-4$, $f(0)=2$, $f(1)=8$, $f(2)=20$, $f(3)=44$

따라서 $f(-1)f(0)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $x^3+5x+2=0$은 열린구간 $(-1, 0)$에서 실근을 갖는다.

11 답 3개

함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 4]$에서 연속이고 $f(0)f(1)<0$, $f(1)f(2)<0$, $f(3)f(4)<0$이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(3, 4)$에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(0, 4)$에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

03 미분계수와 도함수

개념유형 54~55쪽

001 답 1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{0-(-2)}{2}=1$$

002 답 4

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{11-3}{2}=4$$

003 답 2

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{9-5}{2}=2$$

004 답 14

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{30-2}{2}=14$$

005 답 -1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{6-10}{4}=-1$$

006 답 6

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0)-f(-3)}{0-(-3)}=\frac{1-(-17)}{3}=6$$

007 답 $2+\Delta x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{(1+\Delta x)-1}$$
$$=\frac{\{(1+\Delta x)^2+1\}-2}{\Delta x}$$
$$=\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=2+\Delta x$$

008 답 $3a^2+3a\Delta x+(\Delta x)^2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{(a+\Delta x)-a}$$
$$=\frac{(a+\Delta x)^3-a^3}{\Delta x}$$
$$=\frac{3a^2\Delta x+3a(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}$$
$$=3a^2+3a\Delta x+(\Delta x)^2$$

009 답 7, 6, $a+6$, $a+6$, $a+6$, 4

010 답 6

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(a^2-1)-0}{a-1}$$
$$=\frac{(a+1)(a-1)}{a-1}=a+1$$

따라서 $a+1=7$이므로 $a=6$

011 답 3

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(2a^2+a-4)-(-1)}{a-1}$$
$$=\frac{2a^2+a-3}{a-1}=\frac{(2a+3)(a-1)}{a-1}$$
$$=2a+3$$

따라서 $2a+3=9$이므로 $a=3$

012 답 2

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a)-f(1)}{a-1}=\frac{(-a^2-2a+9)-6}{a-1}$$
$$=\frac{-a^2-2a+3}{a-1}=\frac{-(a+3)(a-1)}{a-1}$$
$$=-a-3$$

따라서 $-a-3=-5$이므로 $a=2$

실전유형 55쪽

013 답 ③

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{(5a+26)-(a+2)}{4}=a+6$$

따라서 $a+6=8$이므로 $a=2$

014 답 ④

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a}$$
$$=\{2(a+1)^2-(a+1)\}-(2a^2-a)$$
$$=4a+1$$

따라서 $4a+1=21$이므로 $a=5$

015 답 3

x의 값이 -2에서 5까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(-2)}{5-(-2)}=\frac{-19-(-12)}{7}=-1$$

x의 값이 0에서 a까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{(-a^2+2a-4)-(-4)}{a}$$
$$=\frac{-a^2+2a}{a}=-a+2$$

따라서 $-1=-a+2$이므로 $a=3$

016 답 [방법1] 4, 6, 6, 6
[방법2] 4, $x+1$, $x+1$, 6

017 답 2

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(1+\Delta x)-5\}-(-3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\Delta x}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}2=2$$

018 답 -8

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-4(1+\Delta x)^2-(-4)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-8\Delta x-4(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(-8-4\Delta x)=-8$$

019 답 4

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(1+\Delta x)^2+2(1+\Delta x)\}-3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4$$

020 답 $2a$, $2a$, $2a$, $2a$, 2

021 답 1

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{4(a+\Delta x)^2+5\}-(4a^2+5)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{8a\Delta x+4(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(8a+4\Delta x)=8a$$

따라서 $8a=8$이므로 $a=1$

022 답 3

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{-3(a+\Delta x)^2+(a+\Delta x)\}-(-3a^2+a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(-6a+1)\Delta x-3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(-6a+1-3\Delta x)=-6a+1$$

따라서 $-6a+1=-17$이므로 $a=3$

023 답 1

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{2(a+\Delta x)^3+1\}-(2a^3+1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{6a^2\Delta x+6a(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\{6a^2+6a\Delta x+2(\Delta x)^2\}=6a^2$$

따라서 $6a^2=6$이므로

$a^2=1$ $\therefore a=1$ ($\because a>0$)

024 답 3, 3

025 답 $-2f'(a)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times(-2)$$
$$=-2f'(a)$$

026 답 $\frac{4}{3}f'(a)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{3h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+4h)-f(a)}{4h}\times\frac{4}{3}$$
$$=\frac{4}{3}f'(a)$$

027 답 $f(a)$, $-h$, $f'(a)$, $2f'(a)$

028 답 $-f'(a)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)+f(a)-f(a+3h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a)}{2h}\times 2-\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)-f(a)}{3h}\times 3$$
$$=2f'(a)-3f'(a)=-f'(a)$$

029 답 $7f'(a)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+5h)-f(a-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+5h)-f(a)+f(a)-f(a-2h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+5h)-f(a)}{5h}\times 5-\lim_{h\to 0}\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}\times(-2)$$
$$=5f'(a)+2f'(a)=7f'(a)$$

030 답 $x-1$, $x-1$, $\frac{1}{2}$, 3

031 답 2

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{3x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{3(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{1}{3}f'(1)$$
$$=\frac{1}{3}\times 6=2$$

032 답 $\frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2+2x-3}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+3)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+3}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+3}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{4}$$
$$=6\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

033 답 12

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x^2)-f(1)}{(x-1)(x+1)}\times(x+1)\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x^2)-f(1)}{x^2-1}\times\lim_{x\to1}(x+1)$$
$$=f'(1)\times2$$
$$=6\times2=12$$

034 답 1, 1, 2, 2, 2

035 답 −2

$f(x)=x^2+3$이라 하면 구하는 접선의 기울기는 $f'(-1)$과 같으므로

$$f'(-1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(-1+\Delta x)-f(-1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(-1+\Delta x)^2+3\}-4}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}(-2+\Delta x)=-2$$

036 답 −4

$f(x)=-x^2+2x$라 하면 구하는 접선의 기울기는 $f'(3)$과 같으므로

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{-(3+\Delta x)^2+2(3+\Delta x)\}-(-3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-4\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}(-4-\Delta x)=-4$$

037 답 7

$f(x)=2x^2-x+1$이라 하면 구하는 접선의 기울기는 $f'(2)$와 같으므로

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{2(2+\Delta x)^2-(2+\Delta x)+1\}-7}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{7\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}(7+2\Delta x)=7$$

실전유형

59~61쪽

038 답 ②

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{-(3+\Delta x)^2+4(3+\Delta x)+1\}-4}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{-2\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}(-2-\Delta x)=-2$$

039 답 15

$$f'(-2)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(-2+\Delta x)-f(-2)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{3(-2+\Delta x)^2+a(-2+\Delta x)\}-(12-2a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(a-12)\Delta x+3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}(a-12+3\Delta x)$$
$$=a-12$$

따라서 $a-12=3$이므로 $a=15$

040 답 ①

x의 값이 -1에서 2까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{11-(-7)}{3}=6$$

$x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{(a+\Delta x)^2+5(a+\Delta x)-3\}-(a^2+5a-3)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{(2a+5)\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}(2a+5+\Delta x)$$
$$=2a+5$$

따라서 $6=2a+5$이므로 $a=\frac{1}{2}$

041 답 ⑤

$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+6h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(a+6h)-f(a)}{6h}\times6$$
$$=6f'(a)$$
$$=6\times2=12$$

042 답 9

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{5h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\times\frac{3}{5}$$
$$=\frac{3}{5}f'(2)$$
$$=\frac{3}{5}\times15=9$$

043 답 −18

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3+4h)-f(3-5h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+4h)-f(3)+f(3)-f(3-5h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+4h)-f(3)}{4h}\times2-\lim_{h\to0}\frac{f(3-5h)-f(3)}{-5h}\times\left(-\frac{5}{2}\right)$$
$$=2f'(3)+\frac{5}{2}f'(3)$$
$$=\frac{9}{2}f'(3)=\frac{9}{2}\times(-4)=-18$$

044 답 ③

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-4}{h}=6$에서 $h\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{h\to0}\{f(1+2h)-4\}=0$이므로 $f(1)=4$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-4}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2$$
$$=2f'(1)$$

따라서 $2f'(1)=6$이므로 $f'(1)=3$

$\therefore f(1)+f'(1)=7$

045 답 6

$$\lim_{x\to-4}\frac{f(x)-f(-4)}{x+4}=\lim_{x\to-4}\frac{f(x)-f(-4)}{x-(-4)}=f'(-4)=6$$

046 답 ①

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2+2x-15}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{(x+5)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to3}\left\{\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\frac{1}{x+5}\right\}$$
$$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\lim_{x\to3}\frac{1}{x+5}$$
$$=f'(3)\times\frac{1}{8}=16\times\frac{1}{8}=2$$

047 답 $\frac{1}{4}$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2-4h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)+f(2)-f(2-4h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+3h)-f(2)}{3h}\times3-\lim_{h\to0}\frac{f(2-4h)-f(2)}{-4h}\times(-4)$$
$$=3f'(2)+4f'(2)=7f'(2)$$

따라서 $7f'(2)=21$이므로 $f'(2)=3$

$$\therefore \lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x^3-8}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x^2+2x+4}\right\}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2+2x+4}$$
$$=f'(2)\times\frac{1}{12}=3\times\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

048 답 ⑤

$$\lim_{x\to1}\frac{xf(1)-f(x)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{xf(1)-f(1)+f(1)-f(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=f(1)-f'(1)$$
$$=5-(-1)=6$$

049 답 ①

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=3$에서 $x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-2\}=0$이므로 $f(1)=2$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\frac{1}{x+1}\right\}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}f'(1)$$

따라서 $\frac{1}{2}f'(1)=3$이므로 $f'(1)=6$

$$\therefore \frac{f'(1)}{f(1)}=3$$

050 답 10

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2,\ f(2))$에서의 접선의 기울기가 5이므로 $f'(2)=5$

$$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(2+7h)-f(2+h)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+7h)-f(2)+f(2)-f(2+h)}{3h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(2+7h)-f(2)}{7h}\times\frac{7}{3}-\lim_{h\to0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\times\frac{1}{3}$$
$$=\frac{7}{3}f'(2)-\frac{1}{3}f'(2)$$
$$=2f'(2)$$
$$=2\times5=10$$

051 답 8

$f(1)=6$이므로

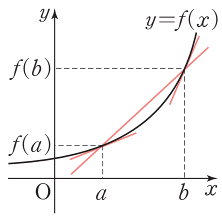
$a+2=6 \qquad \therefore a=4$

따라서 $f(x)=4x^2+2$이므로 점 $(1,\ 6)$에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\{4(1+\Delta x)^2+2\}-6}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{8\Delta x+4(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to0}(8+4\Delta x)=8$$

052 답 ②

A, B의 값은 각각 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$에서의 접선의 기울기이고 C의 값은 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기이다.
따라서 오른쪽 그림에서
$A<C<B$



개념유형 62~63쪽

053 답 ○

054 답 ×

$x=a$에서 불연속이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

055 답 ×

$x=a$에서 그래프가 꺾여 있으므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하지 않다.

056 답 **0, 연속, $-x$, -1, 미분가능하지 않다, 연속, 미분가능하지 않다**

057 답 **연속이지만 미분가능하지 않다.**

(i) $f(0)=0$

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}(x-x)=\lim_{x\to0+}0=0$

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}\{x-(-x)\}=\lim_{x\to0-}2x=0$

따라서 $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x-x}{x}=\lim_{x\to0+}0=0$

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{x-(-x)}{x}=\lim_{x\to0-}2=2$

따라서 $f'(0)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

058 답 **연속이고 미분가능하다.**

(i) $f(0)=0$

$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}|x^2|=0$

따라서 $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0+}x=0$

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to0-}x=0$

따라서 $f'(0)$이 존재하므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

059 답 **연속이지만 미분가능하지 않다.**

(i) $f(0)=-1$

$\lim_{x\to0+} f(x)=\lim_{x\to0+}(x^2-1)=-1$

$\lim_{x\to0-} f(x)=\lim_{x\to0-}(2x-1)=-1$

따라서 $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{(x^2-1)-(-1)}{x}=\lim_{x\to0+}x=0$

$\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{(2x-1)-(-1)}{x}=\lim_{x\to0-}2=2$

따라서 $f'(0)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

실전유형 63쪽

060 답 ㄴ, ㄹ

ㄱ. (i) $f(1)=0$

$\lim_{x\to1} f(x)=\lim_{x\to1}(x-1)^3=0$

따라서 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)^3}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-1)^2=0$

따라서 $f'(1)$이 존재하므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고 미분가능하다.

ㄴ. (i) $f(1)=0$

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+}(x^2-1)=0$

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-}\{-(x^2-1)\}=0$

따라서 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{x^2-1}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}(x+1)=2$

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\frac{-(x+1)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\{-(x+1)\}=-2$

따라서 $f'(1)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

ㄷ. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 정의되지 않으므로 불연속이고 미분가능하지 않다.

ㄹ. (i) $f(1)=2$

$\lim_{x\to1+} f(x)=\lim_{x\to1+}(x^2+x)=2$

$\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1-}(-x+3)=2$

따라서 $\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\dfrac{(x^2+x)-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}\dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1+}(x+2)=3$

$\lim_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\dfrac{(-x+3)-2}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}\dfrac{-(x-1)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1-}(-1)=-1$

따라서 $f'(1)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

따라서 보기의 함수 중 $x=1$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

061 답 4

불연속인 x의 값은 2의 1개이므로

$m=1$

미분가능하지 않은 x의 값은 1, 2, 3의 3개이므로

$n=3$

$\therefore m+n=4$

062 답 ⑤

① 점 $(4, f(4))$에서의 접선의 기울기가 양수이므로 $f'(4)>0$

② $\lim_{x\to5+} f(x)=\lim_{x\to5-} f(x)$이므로 $\lim_{x\to5} f(x)$의 값이 존재한다.

③ 미분가능하면서 접선의 기울기가 0인 x의 값은 2이다.

④ 불연속인 x의 값은 3, 5의 2개이다.

⑤ 미분가능하지 않은 x의 값은 1, 3, 5의 3개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

개념유형

64~65쪽

063 답 $x+h$, $4h$, 4

064 답 $f'(x)=0$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{-8-(-8)}{h}=0$

065 답 $f'(x)=5$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{\{5(x+h)+6\}-(5x+6)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{5h}{h}=5$

066 답 $f'(x)=2x-1$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{\{(x+h)^2-(x+h)\}-(x^2-x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{(2x-1)h+h^2}{h}$

$=\lim_{h\to0}(2x-1+h)=2x-1$

067 답 $f'(x)=3x^2$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{\{(x+h)^3+2\}-(x^3+2)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$

$=\lim_{h\to0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2$

068 답 $f'(x)=3$, $f'(2)=3$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{\{3(x+h)+7\}-(3x+7)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{3h}{h}=3$

$\therefore f'(2)=3$

069 답 $f'(x)=-2x+4$, $f'(2)=0$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{\{-(x+h)^2+4(x+h)\}-(-x^2+4x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{(-2x+4)h-h^2}{h}$

$=\lim_{h\to0}(-2x+4-h)=-2x+4$

$\therefore f'(2)=-4+4=0$

070 답 $f'(x)=6x^2$, $f'(2)=24$

$f'(x)=\lim_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{\{2(x+h)^3-5\}-(2x^3-5)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{6x^2h+6xh^2+2h^3}{h}$

$=\lim_{h\to0}(6x^2+6xh+2h^2)=6x^2$

$\therefore f'(2)=24$

실전유형

65쪽

071 답 (가) $x+h$ (나) $(10x+1)h$ (다) $10x+1$

072 답 ④

ㄱ. $\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}\times(-1)$

$=-f'(x)$

ㄴ. $\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}=f'(x)$

ㄷ. $\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x+2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x)+f(x)-f(x+2h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\times3-\lim_{h\to0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{2h}\times2$

$=3f'(x)-2f'(x)=f'(x)$

따라서 보기에서 $f'(x)$와 같은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

개념유형

67쪽

073 답 $y'=5x^4$

$y'=(x^5)'=5x^{5-1}=5x^4$

074 답 $y'=14x^{13}$

$y'=(x^{14})'=14x^{14-1}=14x^{13}$

075 답 $y'=1$

$y'=(x)'=1$

076 답 $y'=0$

$y'=(9)'=0$

077 답 $y'=2$

$y'=2(x)'+(7)'=2\times1+0=2$

078 답 $y'=6x-4$

$y'=3(x^2)'-4(x)'+(6)'$

$=3\times2x-4\times1+0$

$=6x-4$

079 답 $y'=-3x^2+10x$

$y'=-(x^3)'+5(x^2)'-(1)'$

$=-3x^2+5\times2x-0$

$=-3x^2+10x$

080 답 $y'=x^4-x^3+x^2-x+1$

$y'=\frac{1}{5}(x^5)'-\frac{1}{4}(x^4)'+\frac{1}{3}(x^3)'-\frac{1}{2}(x^2)'+(x)'$

$=\frac{1}{5}\times5x^4-\frac{1}{4}\times4x^3+\frac{1}{3}\times3x^2-\frac{1}{2}\times2x+1$

$=x^4-x^3+x^2-x+1$

081 답 x^2+1, x^2+1, 2, $2x$, $6x^2-6x+2$

082 답 $y'=8x+19$

$y'=(x+5)'(4x-1)+(x+5)(4x-1)'$

$=4x-1+(x+5)\times4$

$=4x-1+4x+20$

$=8x+19$

083 답 $y'=9x^2+20x-14$

$y'=(3x-2)'(x^2+4x-2)+(3x-2)(x^2+4x-2)'$

$=3(x^2+4x-2)+(3x-2)(2x+4)$

$=3x^2+12x-6+6x^2+8x-8$

$=9x^2+20x-14$

084 답 $y'=8x^3-18x^2+2$

$y'=(x^3+1)'(2x-6)+(x^3+1)(2x-6)'$

$=3x^2(2x-6)+(x^3+1)\times2$

$=6x^3-18x^2+2x^3+2$

$=8x^3-18x^2+2$

085 답 $y'=3x^2-2x-30$

$y'=(x)'(x+5)(x-6)+x(x+5)'(x-6)+x(x+5)(x-6)'$

$=(x+5)(x-6)+x(x-6)+x(x+5)$

$=x^2-x-30+x^2-6x+x^2+5x$

$=3x^2-2x-30$

086 답 $y'=6x^2-6x-11$

$y'=(x+2)'(x-3)(2x-1)+(x+2)(x-3)'(2x-1)$

$+(x+2)(x-3)(2x-1)'$

$=(x-3)(2x-1)+(x+2)(2x-1)+(x+2)(x-3)\times2$

$=2x^2-7x+3+2x^2+3x-2+2x^2-2x-12$

$=6x^2-6x-11$

087 답 $y'=18x-30$

$y'=2(3x-5)(3x-5)'$

$=2(3x-5)\times3$

$=18x-30$

실전유형 68~71쪽

088 답 ③

$f'(x)=3x^2-4x+7$이므로

$f'(2)=12-8+7=11$

089 답 ④

$f'(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{19}$이므로

$f'(0)=1$

$f'(1)=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{20\text{개}}=20$

$\therefore f'(0)+f'(1)=21$

090 답 19

$f'(x)=21x^2-a$이므로 $f'(1)=2$에서

$21-a=2 \qquad \therefore a=19$

091 답 ⑤

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a\neq0$)라 하면

$f'(x)=2ax+b$

$f'(0)=-3$에서 $b=-3$

$f'(1)=-1$에서 $2a+b=-1$

$2a-3=-1 \qquad \therefore a=1$

$\therefore f(x)=x^2-3x+c$

$f(1)=2$에서 $1-3+c=2 \qquad \therefore c=4$

따라서 $f(x)=x^2-3x+4$이므로

$f(3)=9-9+4=4$

092 답 ④

$f'(x)=(2x+1)'(x^2-3x+5)+(2x+1)(x^2-3x+5)'$

$\quad=2(x^2-3x+5)+(2x+1)(2x-3)$

$\therefore f'(-1)=2\times9+(-1)\times(-5)=23$

093 답 −2

$f'(x)=(x-3)'(x+1)(x+4)+(x-3)(x+1)'(x+4)$

$\qquad+(x-3)(x+1)(x+4)'$

$\quad=(x+1)(x+4)+(x-3)(x+4)+(x-3)(x+1)$

$\therefore f'(0)=1\times4+(-3)\times4+(-3)\times1=-11,$

$\quad f'(2)=3\times6+(-1)\times6+(-1)\times3=9$

$\therefore f'(0)+f'(2)=-2$

094 답 ②

$f'(x)=(x^3-1)'(x^2+a)+(x^3-1)(x^2+a)'$

$\quad=3x^2(x^2+a)+(x^3-1)\times2x$

$f'(1)=15$에서

$3(1+a)=15,\ 1+a=5 \qquad \therefore a=4$

095 답 ④

$f'(x)=2(x^2-4x+2)(x^2-4x+2)'$

$\quad=2(x^2-4x+2)(2x-4)$

$\therefore f'(1)=2\times(-1)\times(-2)=4$

096 답 ③

$g'(x)=(x^2)'f(x)+x^2f'(x)$

$\quad=2xf(x)+x^2f'(x)$

$\therefore g'(2)=4f(2)+4f'(2)$

$\quad=4\times1+4\times3=16$

097 답 −17

$f(x)=5x^2+3x-10$이라 하면

$f'(x)=10x+3$

따라서 점 $(-2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-2)=-20+3=-17$

098 답 ②

$f(x)=-x^3+ax^2+bx-1$이라 하면 점 $(1,\ 4)$가 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로 $f(1)=4$에서

$-1+a+b-1=4 \qquad \therefore a+b=6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$이고 점 $(1,\ 4)$에서의 접선의 기울기가 5이므로 $f'(1)=5$에서

$-3+2a+b=5 \qquad \therefore 2a+b=8 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=4$

$\therefore b-a=2$

099 답 3

$f(x)=x^3-6x^2+15x+8$이라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+15=3(x-2)^2+3$

m의 최솟값은 $f'(x)$의 최솟값과 같고, $f'(x)$는 $x=2$에서 최솟값 3을 가지므로 m의 최솟값은 3이다.

100 답 ③

$\lim_{h\to0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(2+2h)-f(2)}{2h}\times2=2f'(2)$

$f'(x)=3x^2-4x$이므로 $f'(2)=12-8=4$

따라서 구하는 값은

$2f'(2)=2\times4=8$

101 답 −6

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{4h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{4}f'(1)$

$f'(x)=(x-4)'(3x^2-x+5)+(x-4)(3x^2-x+5)'$

$\quad=3x^2-x+5+(x-4)(6x-1)$

$\therefore f'(1)=7+(-3)\times5=-8$

따라서 구하는 값은

$\frac{3}{4}f'(1)=\frac{3}{4}\times(-8)=-6$

102 답 9

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{(x+3)(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}\times\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}$$
$$=\frac{1}{6}f'(3)$$

$f'(x)=6x^2-2x+6$이므로

$f'(3)=54-6+6=54$

따라서 구하는 값은

$\frac{1}{6}f'(3)=\frac{1}{6}\times 54=9$

103 답 −10

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+4h)-f(-1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+4h)-f(-1)+f(-1)-f(-1-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+4h)-f(-1)}{4h}\times 4-\lim_{h\to 0}\frac{f(-1-h)-f(-1)}{-h}\times(-1)$$
$$=4f'(-1)+f'(-1)$$
$$=5f'(-1)$$

$f'(x)=3x^2-5$이므로

$f'(-1)=3-5=-2$

따라서 구하는 값은

$5f'(-1)=5\times(-2)=-10$

104 답 ⑤

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+2h)-f(3+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+2h)-f(3)+f(3)-f(3+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+2h)-f(3)}{2h}\times 2-\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$
$$=2f'(3)-f'(3)$$
$$=f'(3)$$

$\therefore f'(3)=-7$

$f'(x)=-3x^2+2x+a$이므로 $f'(3)=-7$에서

$-27+6+a=-7 \qquad \therefore a=14$

105 답 7

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=9$에서 $x\to 1$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 1}f(x)=0$이므로 $f(1)=0$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$\therefore f'(1)=9$

$f(x)=x^3+ax^2+b$에서 $f'(x)=3x^2+2ax$

$f(1)=0$에서

$1+a+b=0 \qquad \therefore a+b=-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)=9$에서 $3+2a=9 \qquad \therefore a=3$

이를 ㉠에 대입하면

$3+b=-1 \qquad \therefore b=-4$

$\therefore a-b=7$

106 답 ④

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-10}{x^2-4}=5$에서 $x\to 2$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-10\}=0$이므로 $f(2)=10$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{f(x)-10}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x+2)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{1}{4}f'(2)$$

따라서 $\frac{1}{4}f'(2)=5$이므로 $f'(2)=20$

$f(x)=x^3+2ax-b$에서 $f'(x)=3x^2+2a$

$f(2)=10$에서

$8+4a-b=10 \qquad \therefore 4a-b=2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(2)=20$에서

$12+2a=20 \qquad \therefore a=4$

이를 ㉠에 대입하면

$16-b=2 \qquad \therefore b=14$

$\therefore a+b=18$

107 답 20

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=2$에서 미분가능하므로 $x=2$에서 연속이고 미분계수 $f'(2)$가 존재한다.

(i) $x=2$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 2-}f(x)=f(2)$에서

$2a-b=6 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) 미분계수 $f'(2)$가 존재하므로

$$\lim_{x\to 2+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x^2+x)-6}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}\frac{(x+3)(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2+}(x+3)=5$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{(ax-b)-6}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2-}\frac{(ax-b)-(2a-b)}{x-2}\ (\because ㉠)$$
$$=\lim_{x\to 2-}\frac{a(x-2)}{x-2}=a$$

$\therefore a=5$

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$10-b=6 \qquad \therefore b=4$

$\therefore ab=20$

다른 풀이

$g(x)=x^2+x$, $h(x)=ax-b$라 하면

$g'(x)=2x+1$, $h'(x)=a$

(i) $x=2$에서 연속이므로 $g(2)=h(2)$에서

$6=2a-b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) 미분계수 $f'(2)$가 존재하므로 $g'(2)=h'(2)$에서

$5=a$

$a=5$를 ㉠에 대입하면

$6=10-b \qquad \therefore b=4$

$\therefore ab=20$

108 답 ③

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하면 $x=1$에서 연속이고 미분계수 $f'(1)$이 존재한다.

(i) $x=1$에서 연속이므로 $\lim_{x\to 1-} f(x)=f(1)$에서

$1+a=b+2 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) 미분계수 $f'(1)$이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to 1+}\frac{(bx^2+x+1)-(b+2)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1+}\frac{b(x+1)(x-1)+(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1+}\{b(x+1)+1\}=2b+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to 1-}\frac{(x^3+ax)-(b+2)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1-}\frac{(x^3+ax)-(1+a)}{x-1}\ (\because ㉠)\\&=\lim_{x\to 1-}\frac{(x-1)(x^2+x+1)+a(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to 1-}(x^2+x+1+a)=a+3\end{aligned}$$

따라서 $2b+1=a+3$이므로

$a-2b=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=3$

$\therefore a+b=7$

109 답 -22

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 $x=a$에서 연속이고 미분계수 $f'(a)$가 존재한다.

(i) $x=a$에서 연속이므로 $\lim_{x\to a-} f(x)=f(a)$에서

$a^2-2a=-6a+b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

(ii) 미분계수 $f'(a)$가 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}&=\lim_{x\to a+}\frac{(-6x+b)-(-6a+b)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a+}\frac{-6(x-a)}{x-a}=-6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}&=\lim_{x\to a-}\frac{(x^2-2x)-(-6a+b)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a-}\frac{(x^2-2x)-(a^2-2a)}{x-a}\ (\because ㉠)\\&=\lim_{x\to a-}\frac{(x+a)(x-a)-2(x-a)}{x-a}\\&=\lim_{x\to a-}(x+a-2)=2a-2\end{aligned}$$

따라서 $-6=2a-2$이므로 $a=-2$

$a=-2$를 ㉠에 대입하면

$4+4=12+b \qquad \therefore b=-4$

따라서 $f(x)=\begin{cases}-6x-4 & (x\ge -2)\\ x^2-2x & (x<-2)\end{cases}$이므로

$f(3)=-18-4=-22$

110 답 ⑤

다항식 x^9-ax^5+bx-4를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 0이므로

$x^9-ax^5+bx-4=(x-1)^2Q(x) \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1-a+b-4=0 \qquad \therefore a-b=-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$9x^8-5ax^4+b=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$

양변에 $x=1$을 대입하면

$9-5a+b=0 \qquad \therefore 5a-b=9 \qquad \cdots\cdots$ ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$a=3$, $b=6$

$\therefore a+b=9$

참고 x에 대한 다항식 A를 다항식 $B(B\neq 0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$A=BQ+R$ (R는 상수 또는 (R의 차수)<(B의 차수))

이고, 이는 x에 대한 항등식이다.

111 답 15

다항식 x^8+x^4+1을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$를 $ax+b$(a, b는 상수)라 하면

$x^8+x^4+1=(x+1)^2Q(x)+ax+b \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$1+1+1=-a+b$

$\therefore a-b=-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$8x^7+4x^3=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-8-4=a \qquad \therefore a=-12$

이를 ㉡에 대입하면

$-12-b=-3 \qquad \therefore b=-9$

따라서 $R(x)=-12x-9$이므로

$R(-2)=24-9=15$

112 답 ⑤

다항식 x^6+2x^2+ax+b를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $4x-3$이므로

$x^6+2x^2+ax+b=(x-1)^2Q(x)+4x-3 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$1+2+a+b=4-3$

$\therefore a+b=-2 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$6x^5+4x+a=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+4$

양변에 $x=1$을 대입하면

$6+4+a=4 \qquad \therefore a=-6$

이를 ㉡에 대입하면

$-6+b=-2 \qquad \therefore b=4$

$\therefore ab=-24$

실전유형으로 중단원 점검 72~73쪽

1 답 ②

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)}$$
$$=\frac{(6a+24)-(-4a-11)}{5}$$
$$=2a+7$$

따라서 $2a+7=3$이므로 $a=-2$

2 답 2

x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{31-15}{2}=8 \qquad \cdots\cdots \text{ⅰ}$$

$x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\{(a+\Delta x)^2+4(a+\Delta x)+10\}-(a^2+4a+10)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2a+4)\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2a+4+\Delta x)$$
$$=2a+4 \qquad \cdots\cdots \text{ⅱ}$$

따라서 $8=2a+4$이므로 $a=2$ $\cdots\cdots$ ⅲ

채점 기준

ⅰ x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율 구하기	40 %
ⅱ $x=a$에서의 미분계수 구하기	40 %
ⅲ a의 값 구하기	20 %

3 답 ③

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+5h)-f(-1)}{4h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+5h)-f(-1)}{5h}\times\frac{5}{4}$$
$$=\frac{5}{4}f'(-1)=\frac{5}{4}\times 12=15$$

4 답 $-\frac{1}{3}$

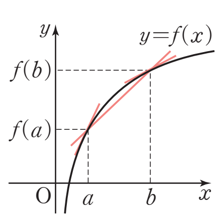
$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x^2+5x-14}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{(x+7)(x-2)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+7}$$
$$=f'(2)\times\frac{1}{9}=-3\times\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}$$

5 답 ④

A, B의 값은 각각 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$에서의 접선의 기울기이고 C의 값은 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기이다.

따라서 오른쪽 그림에서

$B<C<A$



6 답 ㄷ, ㄹ

ㄱ. (ⅰ) $f(0)=1$

$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(x+1)^2=1$

따라서 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ⅱ) $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^2-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2x}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}(x+2)=2$$

따라서 $f'(0)$이 존재하므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이고 미분가능하다.

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 정의되지 않으므로 불연속이고 미분가능하지 않다.

ㄷ. (ⅰ) $f(0)=0$

$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt{x^2}=0$

따라서 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ⅱ) $$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{x}{x}=1$$
$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0-}\frac{-x}{x}=-1$$

따라서 $f'(0)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

ㄹ. (ⅰ) $f(0)=5$

$\lim_{x\to 0+}f(x)=\lim_{x\to 0+}(x^2+5)=5$

$\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0-}(2x+5)=5$

따라서 $\lim_{x\to 0}f(x)=f(0)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(ⅱ) $$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{(x^2+5)-5}{x}=\lim_{x\to 0+}x=0$$
$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{(2x+5)-5}{x}=\lim_{x\to 0-}2=2$$

따라서 $f'(0)$이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

따라서 보기의 함수 중 $x=0$에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

7 답 ③

① $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$이고, 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 음수이므로

$f'(1)<0$

② $\lim_{x\to 2+}f(x)\neq\lim_{x\to 2-}f(x)$이므로 $\lim_{x\to 2}f(x)$의 값은 존재하지 않는다.

③ 미분가능하면서 접선의 기울기가 0인 x의 값은 존재하지 않는다.

④ 불연속인 x의 값은 -1, 2의 2개이다.
⑤ 미분가능하지 않은 x의 값은 -1, 0, 2의 3개이다.
따라서 옳은 것은 ③이다.

8 답 45

$f'(x)=1-2x+3x^2-\cdots+9x^8$이므로
$f'(-1)=1+2+3+\cdots+9=45$

9 답 3

$f'(x)=(2x+a)'(x^2-x+1)+(2x+a)(x^2-x+1)'$
$\quad\quad =2(x^2-x+1)+(2x+a)(2x-1)$
$f'(2)=27$에서
$2\times3+(4+a)\times3=27$
$3(4+a)=21,\ 4+a=7$
$\therefore\ a=3$

10 답 −6

$f(x)=2x^2+ax+b$라 하면 점 $(-1,\ -5)$가 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로 $f(-1)=-5$에서
$2-a+b=-5\quad\quad \therefore\ a-b=7\quad\quad \cdots\cdots$ ㉠
점 $(-1,\ -5)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기가 $-\dfrac{1}{2}$이므로 접선의 기울기는 2이다.
이때 $f'(x)=4x+a$이므로 $f'(-1)=2$에서
$-4+a=2\quad\quad \therefore\ a=6$
이를 ㉠에 대입하면
$6-b=7\quad\quad \therefore\ b=-1$
$\therefore\ ab=-6$

11 답 4

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)}$$
$$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\times\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}$$
$$=\frac{1}{2}f'(1)\quad\quad\cdots\cdots\ \text{i}$$
$f'(x)=-3x^2+6x+5$이므로
$f'(1)=-3+6+5=8\quad\quad \cdots\cdots$ ii
따라서 구하는 값은
$\dfrac{1}{2}f'(1)=\dfrac{1}{2}\times8=4\quad\quad \cdots\cdots$ iii

채점 기준

i 주어진 극한을 미분계수로 나타내기	50 %
ii $f'(1)$의 값 구하기	30 %
iii 극한값 구하기	20 %

12 답 20

$\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=11$에서 $x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이다.
즉, $\displaystyle\lim_{x\to-1}f(x)=0$이므로 $f(-1)=0$
$$\therefore\ \lim_{x\to-1}\frac{f(x)}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}=f'(-1)$$
$\therefore\ f'(-1)=11\quad\quad \cdots\cdots$ i
$f(x)=x^3-ax^2+b$에서 $f'(x)=3x^2-2ax$
$f(-1)=0$에서
$-1-a+b=0\quad\quad \therefore\ a-b=-1\quad\quad \cdots\cdots$ ㉠
$f'(-1)=11$에서
$3+2a=11\quad\quad \therefore\ a=4$
이를 ㉠에 대입하면
$4-b=-1\quad\quad \therefore\ b=5\quad\quad \cdots\cdots$ ii
$\therefore\ ab=20\quad\quad \cdots\cdots$ iii

채점 기준

i $f(-1)$, $f'(-1)$의 값 구하기	40 %
ii a, b의 값 구하기	50 %
iii ab의 값 구하기	10 %

13 답 27

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 미분가능하면 $x=3$에서 미분가능하므로 $x=3$에서 연속이고 미분계수 $f'(3)$이 존재한다.
(i) $x=3$에서 연속이므로 $\displaystyle\lim_{x\to3-}f(x)=f(3)$에서
$3a+4b=6\quad\quad \cdots\cdots$ ㉠
(ii) 미분계수 $f'(3)$이 존재하므로
$$\lim_{x\to3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{(x^2-3)-6}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}(x+3)=6$$
$$\lim_{x\to3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{(ax+4b)-6}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}\frac{(ax+4b)-(3a+4b)}{x-3}\ (\because\ ㉠)$$
$$=\lim_{x\to3-}\frac{a(x-3)}{x-3}=a$$
$\therefore\ a=6$
$a=6$을 ㉠에 대입하면
$18+4b=6\quad\quad \therefore\ b=-3$
$\therefore\ a^2-b^2=27$

14 답 ⑤

다항식 x^8+ax^3+bx-7을 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 0이므로
$x^8+ax^3+bx-7=(x+1)^2Q(x)\quad\quad \cdots\cdots$ ㉠
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$1-a-b-7=0\quad\quad \therefore\ a+b=-6\quad\quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$8x^7+3ax^2+b=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$
양변에 $x=-1$을 대입하면
$-8+3a+b=0\quad\quad \therefore\ 3a+b=8\quad\quad \cdots\cdots$ ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=7$, $b=-13$
$\therefore\ a-b=20$

04 도함수의 활용 (1)

개념유형

75~76쪽

001 답 $2x+1$, 3, 3, $3x-1$

002 답 $y=-5x+4$

$f(x)=x^2-5x+4$라 하면

$f'(x)=2x-5$

점 $(0,\ 4)$에서의 접선의 기울기는

$f'(0)=-5$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-4=-5x \qquad \therefore y=-5x+4$

003 답 $y=-4x+13$

$f(x)=-x^2+9$라 하면

$f'(x)=-2x$

점 $(2,\ 5)$에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=-4$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-5=-4(x-2) \qquad \therefore y=-4x+13$

004 답 $y=x+4$

$f(x)=x^3+x^2+3$이라 하면

$f'(x)=3x^2+2x$

점 $(-1,\ 3)$에서의 접선의 기울기는

$f'(-1)=3-2=1$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y-3=x+1 \qquad \therefore y=x+4$

005 답 $y=-2x+2$

$f(x)=x^3-2x^2-x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-4x-1$

점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는

$f'(1)=3-4-1=-2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-2(x-1) \qquad \therefore y=-2x+2$

006 답 $2x+3$, $2t+3$, 1, 1, 1, $5x-1$

007 답 $y=-2x+7$

$f(x)=-x^2+4x-2$라 하면

$f'(x)=-2x+4$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2+4t-2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 -2이므로 $f'(t)=-2$에서

$-2t+4=-2 \qquad \therefore t=3$

따라서 접점의 좌표는 $(3,\ 1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-1=-2(x-3) \qquad \therefore y=-2x+7$

008 답 $y=8x+2$ 또는 $y=8x-2$

$f(x)=x^3+5x$라 하면

$f'(x)=3x^2+5$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3+5t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 8이므로 $f'(t)=8$에서

$3t^2+5=8,\ t^2=1 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ -6)$ 또는 $(1,\ 6)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y+6=8(x+1)$ 또는 $y-6=8(x-1)$

$\therefore y=8x+2$ 또는 $y=8x-2$

009 답 $y=-9x-15$ 또는 $y=-9x+17$

$f(x)=-x^3+3x+1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+3$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+3t+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 -9이므로 $f'(t)=-9$에서

$-3t^2+3=-9,\ t^2=4 \qquad \therefore t=-2$ 또는 $t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(-2,\ 3)$ 또는 $(2,\ -1)$이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-3=-9(x+2)$ 또는 $y+1=-9(x-2)$

$\therefore y=-9x-15$ 또는 $y=-9x+17$

010 답 $y=-3x-2$

$f(x)=2x^2+x$라 하면

$f'(x)=4x+1$

직선 $y=-3x+5$에 평행한 직선의 기울기는 -3이므로 접점의 좌표를 $(t,\ 2t^2+t)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 -3이다.

$f'(t)=-3$에서 $4t+1=-3 \qquad \therefore t=-1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ 1)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-1=-3(x+1) \qquad \therefore y=-3x-2$

011 답 $y=2x+1$

$f(x)=x^2-2x+5$라 하면

$f'(x)=2x-2$

직선 $2x-y+3=0$, 즉 $y=2x+3$에 평행한 직선의 기울기는 2이므로 접점의 좌표를 $(t,\ t^2-2t+5)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 2이다.

$f'(t)=2$에서 $2t-2=2 \qquad \therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2,\ 5)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-5=2(x-2) \qquad \therefore y=2x+1$

012 답 $y=-2x-8$

$f(x)=x^2+4x+1$이라 하면

$f'(x)=2x+4$

직선 $y=\frac{1}{2}x-2$에 수직인 직선의 기울기는 -2이므로 접점의 좌표를 $(t,\ t^2+4t+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 -2이다.

$f'(t)=-2$에서 $2t+4=-2 \qquad \therefore t=-3$

따라서 접점의 좌표는 $(-3,\ -2)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y+2=-2(x+3) \qquad \therefore y=-2x-8$

013 답 $y=4x+3$ 또는 $y=4x-1$

$f(x)=x^3+x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2+1$

직선 $x+4y-5=0$, 즉 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$에 수직인 직선의 기울기는 4이므로 접점의 좌표를 $(t,\ t^3+t+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 4이다.

$f'(t)=4$에서 $3t^2+1=4$, $t^2=1$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,\ -1)$ 또는 $(1,\ 3)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y+1=4(x+1)$ 또는 $y-3=4(x-1)$

$\therefore y=4x+3$ 또는 $y=4x-1$

014 답 $2t+3$, $2t+3$, $2t+3$, 1, -1, $5x+1$

015 답 $y=-6x-7$ 또는 $y=2x+1$

$f(x)=x^2+2$라 하면

$f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+2)=2t(x-t)$

$\therefore y=2tx-t^2+2$ ...... ㉠

직선 ㉠이 점 $(-1,\ -1)$을 지나므로

$-1=-2t-t^2+2$, $t^2+2t-3=0$

$(t+3)(t-1)=0$ $\therefore t=-3$ 또는 $t=1$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-6x-7$ 또는 $y=2x+1$

016 답 $y=x-1$ 또는 $y=5x-5$

$f(x)=x^2+x-1$이라 하면

$f'(x)=2x+1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+t-1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+t-1)=(2t+1)(x-t)$

$\therefore y=(2t+1)x-t^2-1$ ...... ㉠

직선 ㉠이 점 $(1,\ 0)$을 지나므로

$0=2t+1-t^2-1$, $t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$ $\therefore t=0$ 또는 $t=2$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=x-1$ 또는 $y=5x-5$

017 답 $y=-2x$ 또는 $y=-10x$

$f(x)=-x^2-6x-4$라 하면

$f'(x)=-2x-6$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^2-6t-4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t-6$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^2-6t-4)=(-2t-6)(x-t)$

$\therefore y=(-2t-6)x+t^2-4$ ...... ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=t^2-4$, $t^2=4$

$\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=-2x$ 또는 $y=-10x$

018 답 $y=3x-3$

$f(x)=x^3-1$이라 하면

$f'(x)=3x^2$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-1)=3t^2(x-t)$

$\therefore y=3t^2x-2t^3-1$ ...... ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ -3)$을 지나므로

$-3=-2t^3-1$, $t^3=1$

$\therefore t=1$ ($\because$ t는 실수)

이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$y=3x-3$

실전유형

77~79쪽

019 답 ③

$f(x)=x^2+x+4$라 하면

$f'(x)=2x+1$

점 $(1,\ 6)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3$이므로 접선의 방정식은

$y-6=3(x-1)$ $\therefore y=3x+3$

따라서 구하는 y절편은 3이다.

020 답 ①

$f(x)=x^3-5x^2+6x$라 하면

$f'(x)=3x^2-10x+6$

점 $(3,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=3$이므로 접선의 방정식은

$y=3(x-3)$ $\therefore y=3x-9$

이 직선이 점 $(5,\ a)$를 지나므로

$a=15-9=6$

021 답 2

$f(x)=x^3+2x^2-ax+3$이라 하면 곡선 $y=f(x)$가 점 $(-1,\ 8)$을 지나므로 $f(-1)=8$에서

$-1+2+a+3=8$ $\therefore a=4$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-4x+3$이므로

$f'(x)=3x^2+4x-4$

점 $(-1,\ 8)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=-5$이므로 접선의 방정식은

$y-8=-5(x+1)$ $\therefore y=-5x+3$

$\therefore b=-5$, $c=3$

$\therefore a+b+c=2$

022 답 -6

$x^2-6x+8=0$에서

$(x-2)(x-4)=0$ $\quad \therefore x=2$ 또는 $x=4$

따라서 곡선 $y=x^2-6x+8$이 x축과 만나는 두 점의 좌표는

$(2, 0)$, $(4, 0)$

$f(x)=x^2-6x+8$이라 하면

$f'(x)=2x-6$

점 $(2, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-2$이므로 접선의 방정식은

$y=-2(x-2)$ $\quad \therefore y=-2x+4$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

점 $(4, 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(4)=2$이므로 접선의 방정식은

$y=2(x-4)$ $\quad \therefore y=2x-8$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

두 직선 l, m의 교점의 x좌표는 ㉠, ㉡에서

$-2x+4=2x-8$, $4x=12$ $\quad \therefore x=3$

이를 ㉠에 대입하면 $y=-2$

따라서 $a=3$, $b=-2$이므로

$ab=-6$

023 답 ④

$f(x)=2x^2-5x$라 하면

$f'(x)=4x-5$

점 $(3, 3)$에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=7$

따라서 점 $(3, 3)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{7}$이므로 직선의 방정식은

$y-3=-\frac{1}{7}(x-3)$ $\quad \therefore x+7y-24=0$

따라서 $a=7$, $b=-24$이므로

$a-b=31$

024 답 -1

$f(x)=x^3-2x^2+3$이라 하면

$f'(x)=3x^2-4x$

점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$

따라서 점 $(1, 2)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 1이므로 직선의 방정식은

$y-2=x-1$ $\quad \therefore y=x+1$

$y=0$을 대입하면

$0=x+1$ $\quad \therefore x=-1$

따라서 구하는 x절편은 -1이다.

025 답 ②

$f(x)=-x^3+x+2$라 하면

$f'(x)=-3x^2+1$

점 $\mathrm{P}(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-2$이므로 접선 l의 방정식은

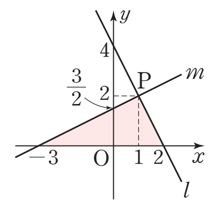
$y-2=-2(x-1)$ $\quad \therefore y=-2x+4$

직선 l에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{2}$이므로 직선 m의 방정식은

$y-2=\frac{1}{2}(x-1)$ $\quad \therefore y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$

따라서 오른쪽 그림에서 두 직선 l, m 및 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times5\times2=5$



026 답 ②

$f(x)=x^2-4x+5$라 하면

$f'(x)=2x-4$

접점의 좌표를 (t, t^2-4t+5)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 -6이므로 $f'(t)=-6$에서

$2t-4=-6$ $\quad \therefore t=-1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 10)$이므로 접선의 방정식은

$y-10=-6(x+1)$ $\quad \therefore y=-6x+4$

이 직선이 점 $(k, 7)$을 지나므로

$7=-6k+4$ $\quad \therefore k=-\frac{1}{2}$

027 답 ②

두 점 $(0, 3)$, $(1, 2)$를 지나는 직선의 기울기는

$\frac{2-3}{1-0}=-1$

$f(x)=-x^2+3x+1$이라 하면

$f'(x)=-2x+3$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+3t+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 -1이므로 $f'(t)=-1$에서

$-2t+3=-1$ $\quad \therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 3)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-3=-(x-2)$ $\quad \therefore y=-x+5$

028 답 $y=-12x-3$

$f(x)=x^3+6x^2+5$라 하면

$f'(x)=3x^2+12x=3(x+2)^2-12$

따라서 접선의 기울기는 $x=-2$에서 최솟값 -12를 갖는다.

이때 접점의 좌표는 $(-2, 21)$이고 접선의 기울기는 -12이므로 구하는 접선의 방정식은

$y-21=-12(x+2)$ $\quad \therefore y=-12x-3$

029 답 ①

$f(x)=x^3+ax^2+9x+3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+9$

점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1)=2$에서

$3+2a+9=2$ $\quad \therefore a=-5$

따라서 $f(x)=x^3-5x^2+9x+3$이므로 점 $(1, f(1))$, 즉 점 $(1, 8)$에서의 접선의 방정식은

$y-8=2(x-1)$ $\quad \therefore y=2x+6$ $\quad \therefore b=6$

$\therefore a+b=1$

030 답 4

$f(x)=x^3-9x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-9$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-9t+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(t)=3$에서

$3t^2-9=3,\ t^2=4$ $\quad\therefore t=-2$ 또는 $t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(-2,\ 12)$ 또는 $(2,\ -8)$이므로 접선의 방정식은

$y-12=3(x+2)$ 또는 $y+8=3(x-2)$

$\therefore y=3x+18$ 또는 $y=3x-14$

따라서 모든 k의 값의 합은

$18+(-14)=4$

031 답 ③

$f(x)=x^3-x+9$라 하면

$f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-t+9)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-t+9)=(3t^2-1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-1)x-2t^3+9$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ -7)$을 지나므로

$-7=-2t^3+9,\ t^3=8$ $\quad\therefore t=2$ ($\because t$는 실수)

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=11x-7$

따라서 $a=11,\ b=-7$이므로

$a+b=4$

032 답 ④

$f(x)=x^3-x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 $(t,\ t^3-t+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-1)x-2t^3+2$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$4=-2t^3+2,\ t^3=-1$ $\quad\therefore t=-1$ ($\because t$는 실수)

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=2x+4$

$y=0$을 대입하면

$0=2x+4$ $\quad\therefore x=-2$

따라서 구하는 x절편은 -2이다.

033 답 ④

$f(x)=x^2-4x+2$라 하면

$f'(x)=2x-4$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2-4t+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t-4$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2-4t+2)=(2t-4)(x-t)$

$\therefore y=(2t-4)x-t^2+2$

이 직선이 점 $(0,\ 1)$을 지나므로

$1=-t^2+2,\ t^2=1$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 $f'(-1)=-6,\ f'(1)=-2$이므로

$m_1m_2=12$

034 답 $2\sqrt{2}$

$f(x)=x^2+2$라 하면

$f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+2)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+2)=2t(x-t)$ $\quad\therefore y=2tx-t^2+2$

이 직선이 점 $(0,\ 0)$을 지나므로

$0=-t^2+2,\ t^2=2$ $\quad\therefore t=-\sqrt{2}$ 또는 $t=\sqrt{2}$

따라서 두 접점의 좌표는 $(-\sqrt{2},\ 4),\ (\sqrt{2},\ 4)$이므로

$\overline{AB}=\sqrt{2}-(-\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

035 답 9

$f(x)=-x^3+x+4$라 하면

$f'(x)=-3x^2+1$

접점의 좌표를 $(t,\ -t^3+t+4)$라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-3t^2+1$이므로 접선의 방정식은

$y-(-t^3+t+4)=(-3t^2+1)(x-t)$

$\therefore y=(-3t^2+1)x+2t^3+4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

직선 ㉠이 점 $(-1,\ 8)$을 지나므로

$8=3t^2-1+2t^3+4,\ 2t^3+3t^2-5=0$

$(t-1)(2t^2+5t+5)=0$

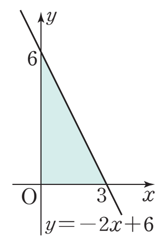
$\therefore t=1$ ($\because t$는 실수)

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=-2x+6$

따라서 오른쪽 그림에서 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3\times6=9$



036 답 ⑤

$f(x)=x^3+ax-3,\ g(x)=bx^2-1$이라 하면

$f'(x)=3x^2+a,\ g'(x)=2bx$

(i) $x=1$인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(1)=g(1)$에서

$a-2=b-1$ $\quad\therefore a-b=1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

(ii) $x=1$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로 $f'(1)=g'(1)$에서

$3+a=2b$ $\quad\therefore a-2b=-3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5,\ b=4$

$\therefore ab=20$

037 답 26

$f(x)=x^3+2,\ g(x)=3x^2-2$라 하면

$f'(x)=3x^2,\ g'(x)=6x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

(i) $x=t$인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$에서

$t^3+2=3t^2-2,\ t^3-3t^2+4=0$

$(t+1)(t-2)^2=0$ $\quad\therefore t=-1$ 또는 $t=2$

(ii) $x=t$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2=6t$, $t^2-2t=0$

$t(t-2)=0$　　$\therefore t=0$ 또는 $t=2$

(i), (ii)에서 $t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 10)$이고 접선의 기울기는 12이므로 공통인 접선의 방정식은

$y-10=12(x-2)$　　$\therefore y=12x-14$

따라서 $a=12$, $b=-14$이므로

$a-b=26$

038 답 ④

$f(x)=x^3-kx$, $g(x)=-x^2+12$라 하면

$f'(x)=3x^2-k$, $g'(x)=-2x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

(i) $x=t$인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$에서

$t^3-kt=-t^2+12$　　…… ㉠

(ii) $x=t$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(t)=g'(t)$에서

$3t^2-k=-2t$　　$\therefore k=3t^2+2t$　　…… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$t^3-(3t^2+2t)t=-t^2+12$

$2t^3+t^2+12=0$, $(t+2)(2t^2-3t+6)=0$

$\therefore t=-2$ ($\because t$는 실수)

이를 ㉡에 대입하면

$k=8$

개념유형

81쪽

039 답 0, 0, 0, −2

040 답 $\frac{1}{2}$

함수 $f(x)=x^2-x$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(1)=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-1$이므로 $f'(c)=0$에서

$2c-1=0$　　$\therefore c=\frac{1}{2}$

041 답 1

함수 $f(x)=-3x^2+6x+4$는 닫힌구간 $[-1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 3)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(3)=-5$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-6x+6$이므로 $f'(c)=0$에서

$-6c+6=0$　　$\therefore c=1$

042 답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

함수 $f(x)=x^3-4x+1$은 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)=1$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(0, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-4$이므로 $f'(c)=0$에서

$3c^2-4=0$, $c^2=\frac{4}{3}$　　$\therefore c=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\because 0<c<2$)

043 답 −1, 1

함수 $f(x)=-2x^3+6x$는 닫힌구간 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$에서 연속이고 열린구간 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$에서 미분가능하며 $f(-\sqrt{3})=f(\sqrt{3})=0$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-6x^2+6$이므로 $f'(c)=0$에서

$-6c^2+6=0$, $c^2=1$　　$\therefore c=-1$ 또는 $c=1$

044 답 $f'(c)$, −8, 1

045 답 2

함수 $f(x)=x^2-2x+3$은 닫힌구간 $[1, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(1, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-2$이므로 $\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$에서

$\frac{6-2}{2}=2c-2$, $2=2c-2$　　$\therefore c=2$

046 답 $\frac{5}{2}$

함수 $f(x)=-x^2+3x+4$는 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(1, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-2x+3$이므로 $\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$에서

$\frac{0-6}{3}=-2c+3$, $-2=-2c+3$　　$\therefore c=\frac{5}{2}$

047 답 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$

함수 $f(x)=2x^3+5$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=6x^2$이므로 $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(c)$에서

$\frac{7-3}{2}=6c^2$, $2=6c^2$, $c^2=\frac{1}{3}$

$\therefore c=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $c=\frac{\sqrt{3}}{3}$

048 답 $\sqrt{3}$

함수 $f(x)=-x^3+4x$는 닫힌구간 $[0, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(0, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-3x^2+4$이므로 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$에서

$\frac{-15-0}{3}=-3c^2+4$

$-5=-3c^2+4$, $c^2=3$

$\therefore c=\sqrt{3}$ ($\because 0<c<3$)

실전유형

82쪽

049 답 ④

함수 $f(x)=x^4-4x^2+1$은 닫힌구간 $[-2, 2]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$에서 미분가능하며 $f(-2)=f(2)=1$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-2, 2)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=4x^3-8x$이므로 $f'(c)=0$에서

$4c^3-8c=0$, $c(c+\sqrt{2})(c-\sqrt{2})=0$

$\therefore c=-\sqrt{2}$ 또는 $c=0$ 또는 $c=\sqrt{2}$

따라서 구하는 실수 c의 개수는 3이다.

050 답 -3

함수 $f(x)=x^3-9x+3$은 닫힌구간 $[-3, 3]$에서 연속이고 열린구간 $(-3, 3)$에서 미분가능하며 $f(-3)=f(3)=3$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-3, 3)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-9$이므로 $f'(c)=0$에서

$3c^2-9=0$, $c^2=3$

$\therefore c=-\sqrt{3}$ 또는 $c=\sqrt{3}$

따라서 모든 실수 c의 값의 곱은

$-\sqrt{3}\times\sqrt{3}=-3$

051 답 -1

함수 $f(x)=x^2+kx-2$는 닫힌구간 $[-3, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-3, 1)$에서 미분가능하다.

$f(-3)=f(1)$에서

$9-3k-2=1+k-2$

$4k=8 \qquad \therefore k=2$

따라서 $f(x)=x^2+2x-2$이고 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-3, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x+2$이므로 $f'(c)=0$에서

$2c+2=0 \qquad \therefore c=-1$

052 답 ㄷ

ㄱ. 함수 $f(x)=|x|-3$은 $x=0$에서 미분가능하지 않으므로 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 롤의 정리가 성립하지 않는다.

ㄴ. 함수 $f(x)=-x^2+2x+2$에서 $f(-1)=-1$, $f(1)=3$이므로 $f(-1)\neq f(1)$

따라서 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 롤의 정리가 성립하지 않는다.

ㄷ. 함수 $f(x)=x^3-x+5$는 닫힌구간 $[-1, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(1)=5$이므로 롤의 정리가 성립한다.

따라서 보기의 함수 중 롤의 정리가 성립하는 것은 ㄷ이다.

053 답 ④

함수 $f(x)=x^3-3x-2$는 닫힌구간 $[1, 4]$에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(1, 4)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2-3$이므로 $\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$에서

$\frac{50-(-4)}{3}=3c^2-3$

$18=3c^2-3$, $c^2=7$

$\therefore c=\sqrt{7}$ ($\because 1<c<4$)

054 답 ②

함수 $f(x)=x^2-5x+8$은 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린구간 (a, b)에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 c가 열린구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-5$이고, $c=3$이므로 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$에서

$\frac{(b^2-5b+8)-(a^2-5a+8)}{b-a}=1$

$\frac{(b^2-a^2)-5(b-a)}{b-a}=1$

$\frac{(b-a)(b+a-5)}{b-a}=1$

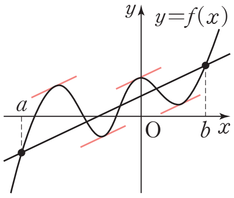
$b+a-5=1$

$\therefore a+b=6$

055 답 4

닫힌구간 $[a, b]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c는 열린구간 (a, b)에서 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선에 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선에 평행한 접선을 4개 그을 수 있으므로 구하는 실수 c의 개수는 4이다.



실전유형으로 중단원 점검 83~84쪽

1 답 ①

$f(x)=x^3+2x^2-4$라 하면

$f'(x)=3x^2+4x$

점 $(-2, -4)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=4$이므로 접선의 방정식은

$y+4=4(x+2) \quad \therefore y=4x+4$

$y=0$을 대입하면

$0=4x+4 \quad \therefore x=-1$

따라서 구하는 x절편은 -1이다.

2 답 28

$f(x)=x^3+ax^2+4x-7$이라 하면 곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 1)$을 지나므로 $f(1)=1$에서

$1+a+4-7=1 \quad \therefore a=3$ …… ⅰ

따라서 $f(x)=x^3+3x^2+4x-7$이므로

$f'(x)=3x^2+6x+4$

점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=13$이므로 접선의 방정식은

$y-1=13(x-1) \quad \therefore y=13x-12$

$\therefore b=13, c=-12$ …… ⅱ

$\therefore a+b-c=28$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ a의 값 구하기	30 %
ⅱ b, c의 값 구하기	60 %
ⅲ $a+b-c$의 값 구하기	10 %

3 답 ③

$f(x)=x^2-x+6$이라 하면

$f'(x)=2x-1$

점 $(2, 8)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=3$

따라서 점 $(2, 8)$에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$이므로 직선의 방정식은

$y-8=-\frac{1}{3}(x-2) \quad \therefore x+3y-26=0$

따라서 $a=3$, $b=-26$이므로

$a+b=-23$

4 답 ③

$f(x)=x^2+2x+2$라 하면

$f'(x)=2x+2$

직선 $y=6x-3$에 평행한 직선의 기울기는 6이므로 접점의 좌표를 (t, t^2+2t+2)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 6이다.

$f'(t)=6$에서

$2t+2=6 \quad \therefore t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 10)$이므로 구하는 직선의 방정식은

$y-10=6(x-2) \quad \therefore y=6x-2$

5 답 $y=3x-6$

$f(x)=-x^3+3x^2-5$라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x=-3(x-1)^2+3$

따라서 접선의 기울기는 $x=1$에서 최댓값 3을 갖는다. …… ⅰ

이때 접점의 좌표는 $(1, -3)$이고 접선의 기울기는 3이므로 구하는 접선의 방정식은

$y+3=3(x-1) \quad \therefore y=3x-6$ …… ⅱ

채점 기준

ⅰ 접선의 기울기의 최댓값과 그때의 x의 값 구하기	50 %
ⅱ 기울기가 최대인 접선의 방정식 구하기	50 %

6 답 ①

$f(x)=3x^2-x+1$이라 하면

$f'(x)=6x-1$

접점의 좌표를 $(t, 3t^2-t+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=6t-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(3t^2-t+1)=(6t-1)(x-t)$

$\therefore y=(6t-1)x-3t^2+1$

이 직선이 점 $(0, 0)$을 지나므로

$0=-3t^2+1, t^2=\frac{1}{3}$

$\therefore t=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $t=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 $f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-2\sqrt{3}-1$, $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=2\sqrt{3}-1$이므로

$m_1+m_2=-2$

7 답 4

$f(x)=x^3-x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 (t, t^3-t+2)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-1$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^3-t+2)=(3t^2-1)(x-t)$

$\therefore y=(3t^2-1)x-2t^3+2$ …… ㉠ …… ⅰ

직선 ㉠이 점 $(0, 4)$를 지나므로

$4=-2t^3+2, t^3=-1$

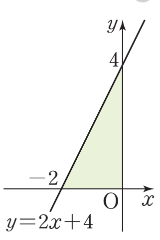
$\therefore t=-1$ ($\because t$는 실수) …… ⅱ

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$y=2x+4$ …… ⅲ

따라서 오른쪽 그림에서 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times4=4$ …… ⅳ



채점 기준

ⅰ 접점의 x좌표를 t라 하고 접선의 방정식 세우기	40 %
ⅱ t의 값 구하기	30 %
ⅲ 접선의 방정식 구하기	10 %
ⅳ 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	20 %

8 답 ④

$f(x)=2x^3-6$, $g(x)=-3x^2-5$라 하면

$f'(x)=6x^2$, $g'(x)=-6x$

두 곡선이 $x=t$인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

(i) $x=t$인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$에서

$2t^3-6=-3t^2-5$, $2t^3+3t^2-1=0$

$(t+1)^2(2t-1)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=\frac{1}{2}$

(ii) $x=t$인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$f'(t)=g'(t)$에서

$6t^2=-6t$, $t^2+t=0$

$t(t+1)=0 \qquad \therefore t=-1$ 또는 $t=0$

(i), (ii)에서 $t=-1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, -8)$이고 접선의 기울기는 6이므로 공통인 접선의 방정식은

$y+8=6(x+1) \qquad \therefore y=6x-2$

따라서 $a=6$, $b=-2$이므로 $a+b=4$

9 답 ③

함수 $f(x)=x^4-6x^2+4$는 닫힌구간 $[-1, \sqrt{5}]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, \sqrt{5})$에서 미분가능하며 $f(-1)=f(\sqrt{5})=-1$이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$인 c가 열린구간 $(-1, \sqrt{5})$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=4x^3-12x$이므로 $f'(c)=0$에서

$4c^3-12c=0$, $c(c+\sqrt{3})(c-\sqrt{3})=0$

$\therefore c=0$ 또는 $c=\sqrt{3}$ ($\because -1<c<\sqrt{5}$)

따라서 구하는 실수 c의 개수는 2이다.

10 답 ④

함수 $f(x)=x^3+x-1$은 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 0)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=f'(c)$인 c가 열린구간 $(-2, 0)$에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2+1$이므로 $\frac{f(0)-f(-2)}{0-(-2)}=f'(c)$에서

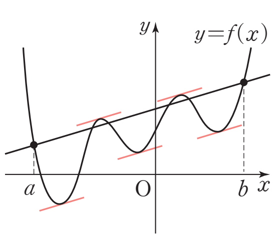
$\frac{-1-(-11)}{2}=3c^2+1$

$5=3c^2+1$, $c^2=\frac{4}{3} \qquad \therefore c=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ($\because -2<c<0$)

11 답 ④

닫힌구간 $[a, b]$에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c는 열린구간 (a, b)에서 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선에 평행한 접선을 갖는 점의 x좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선에 평행한 접선을 5개 그을 수 있으므로 구하는 실수 c의 개수는 5이다.



05 도함수의 활용 (2)

개념유형

86~88쪽

001 답 ×

함수 $f(x)$는 구간 $[a, b]$에서 감소하고, 구간 $[b, c]$에서 증가한다.

002 답 ○

003 답 ○

004 답 ×

함수 $f(x)$는 구간 $[g, h]$에서 증가하고, 구간 $[h, i]$에서 감소한다.

005 답 >, <, <, 증가

006 답 증가

$x_1<x_2\le 0$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=(-2x_1^2+1)-(-2x_2^2+1)$

$=-2(\underset{-}{\underline{x_1+x_2}})(\underset{-}{\underline{x_1-x_2}})<0$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, 0]$에서 증가한다.

007 답 증가

$x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-x_2^3=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)$

이때 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2=\left(x_1+\frac{x_2}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x_2^2>0$이므로

$(\underset{-}{\underline{x_1-x_2}})(\underset{+}{\underline{x_1^2+x_1x_2+x_2^2}})<0$

$\therefore f(x_1)<f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

008 답 감소

$0<x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여

$f(x_1)-f(x_2)=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}=\frac{\overset{+}{x_2-x_1}}{\underset{+}{x_1x_2}}>0$

$\therefore f(x_1)>f(x_2)$

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 감소한다.

009 답 $3x^2-3$, 1, -1, -1, -1, 증가, 감소

010 답 구간 $[-1, \infty)$에서 증가, 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소

$f(x)=x^2+2x-3$에서 $f'(x)=2x+2=2(x+1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-4	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -1]$에서 감소한다.

011 답 구간 [0, 2]에서 증가, 구간 (−∞, 0], [2, ∞)에서 감소

$f(x)=-x^3+3x^2+5$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	5	↗	9	↘

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[0, 2]$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 0]$, $[2, \infty)$에서 감소한다.

012 답 구간 (−∞, ∞)에서 증가

$f(x)=2x^3-6x^2+6x$에서

$f'(x)=6x^2-12x+6=6(x-1)^2$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가한다.

013 답 구간 [3, ∞)에서 증가, 구간 (−∞, 3]에서 감소

$f(x)=x^4-4x^3$에서

$f'(x)=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0	↘	-27	↗

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $[3, \infty)$에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 3]$에서 감소한다.

014 답 $\ge$, $\le$, $-\frac{1}{3}$

015 답 $a\le-\frac{4}{3}$

$f(x)=-x^3+2x^2+ax-1$에서

$f'(x)=-3x^2+4x+a$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4+3a\le0 \qquad \therefore a\le-\frac{4}{3}$

016 답 $-3\le a\le3$

$f(x)=x^3+ax^2+3x-1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+3$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-9\le0$

$(a+3)(a-3)\le0 \qquad \therefore -3\le a\le3$

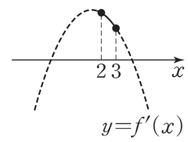
017 답 $\le$, $\le$, 1, $\le$, $\le$, 8, 8

018 답 $a\ge9$

$f(x)=-x^3+3x^2+ax-1$에서

$f'(x)=-3x^2+6x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $[2, 3]$에서 증가하려면 오른쪽 그림과 같이 $2\le x\le3$에서 $f'(x)\ge0$이어야 하므로



$f'(2)\ge0$, $f'(3)\ge0$

$f'(2)\ge0$에서 $-12+12+a\ge0 \qquad \therefore a\ge0 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(3)\ge0$에서 $-27+18+a\ge0 \qquad \therefore a\ge9 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

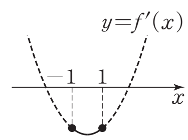
㉠, ㉡에서 $a\ge9$

019 답 $-1\le a\le1$

$f(x)=x^3+ax^2-5x+7$에서

$f'(x)=3x^2+2ax-5$

함수 $f(x)$가 구간 $[-1, 1]$에서 감소하려면 오른쪽 그림과 같이 $-1\le x\le1$에서 $f'(x)\le0$이어야 하므로



$f'(-1)\le0$, $f'(1)\le0$

$f'(-1)\le0$에서 $3-2a-5\le0 \qquad \therefore a\ge-1 \qquad \cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)\le0$에서 $3+2a-5\le0 \qquad \therefore a\le1 \qquad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-1\le a\le1$

실전유형

88~89쪽

020 답 ④

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗		↘		↗

① 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -2]$에서 증가하고, 구간 $[-2, -1]$에서 감소한다.

② 함수 $f(x)$는 구간 $[-2, 0]$에서 감소한다.

③ 함수 $f(x)$는 구간 $[-1, 0]$에서 감소하고, 구간 $[0, 1]$에서 증가한다.

⑤ 함수 $f(x)$는 구간 $[3, \infty)$에서 증가한다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

021 답 ⑤

$f(x)=x^3-6x^2+9x-2$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

따라서 함수 $f(x)$가 감소하는 구간은 $[1, 3]$이므로

$a=1$, $b=3$ $\quad\therefore a+b=4$

022 답 33

$f(x)=-x^3+ax^2-bx+2$에서

$f'(x)=-3x^2+2ax-b$

함수 $f(x)$가 증가하는 구간이 $[3, 5]$이므로 3, 5는 이차방정식 $f'(x)=0$의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3+5=\frac{2a}{3}$, $3\times5=\frac{b}{3}$ $\quad\therefore a=12, b=45$

$\therefore b-a=33$

023 답 $0\le k\le\frac{3}{4}$

$f(x)=x^3-2kx^2+kx+6$에서

$f'(x)=3x^2-4kx+k$

$x_1<x_2$인 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $f(x_1)<f(x_2)$가 성립하려면 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4k^2-3k\le0$

$k(4k-3)\le0$ $\quad\therefore 0\le k\le\frac{3}{4}$

024 답 ④

$f(x)=-x^3-2ax^2+(a-9)x+1$에서

$f'(x)=-3x^2-4ax+a-9$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2+3a-27\le0$

$(a+3)(4a-9)\le0$ $\quad\therefore -3\le a\le\frac{9}{4}$

따라서 정수 a는 -3, -2, -1, 0, 1, 2의 6개이다.

025 답 ③

$f(x)=ax^3-x^2+12ax-2$에서

$f'(x)=3ax^2-2x+12a$

함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 감소하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le0$이어야 하므로

$a<0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-36a^2\le0$

$36a^2-1\ge0$, $(6a+1)(6a-1)\ge0$

$\therefore a\le-\frac{1}{6}$ 또는 $a\ge\frac{1}{6}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a\le-\frac{1}{6}$

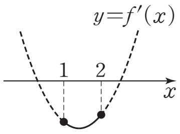
따라서 a의 최댓값은 $-\frac{1}{6}$이다.

026 답 ④

$f(x)=x^3-4x^2+ax+1$에서

$f'(x)=3x^2-8x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $[1, 2]$에서 감소하려면 오른쪽 그림과 같이 $1\le x\le2$에서 $f'(x)\le0$이어야 하므로



$f'(1)\le0$, $f'(2)\le0$

$f'(1)\le0$에서 $3-8+a\le0$ $\quad\therefore a\le5$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(2)\le0$에서 $12-16+a\le0$ $\quad\therefore a\le4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a\le4$

따라서 모든 자연수 a의 값의 합은

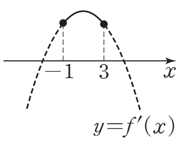
$1+2+3+4=10$

027 답 4

$f(x)=-x^3+2ax^2+15x+2$에서

$f'(x)=-3x^2+4ax+15$

함수 $f(x)$가 $-1\le x\le3$에서 증가하려면 오른쪽 그림과 같이 $-1\le x\le3$에서 $f'(x)\ge0$이어야 하므로



$f'(-1)\ge0$, $f'(3)\ge0$

$f'(-1)\ge0$에서 $-3-4a+15\ge0$ $\quad\therefore a\le3$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(3)\ge0$에서 $-27+12a+15\ge0$ $\quad\therefore a\ge1$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $1\le a\le3$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=3$이므로

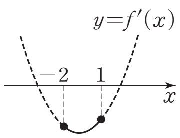
$\alpha+\beta=4$

028 답 ②

$f(x)=x^3-(a+1)x^2-6ax+1$에서

$f'(x)=3x^2-2(a+1)x-6a$

함수 $f(x)$가 구간 $[-2, 1]$에서 감소하려면 오른쪽 그림과 같이 $-2\le x\le1$에서 $f'(x)\le0$이어야 하므로



$f'(-2)\le0$, $f'(1)\le0$

$f'(-2)\le0$에서 $12+4a+4-6a\le0$

$-2a\le-16$ $\quad\therefore a\ge8$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f'(1)\le0$에서 $3-2a-2-6a\le0$

$-8a\le-1$ $\quad\therefore a\ge\frac{1}{8}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a\ge8$

따라서 a의 최솟값은 8이다.

개념유형

029 답 **극댓값: 2, 극솟값: -4**

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 2, $x=-3$에서 극솟값 -4를 갖는다.

030 답 **극댓값: 0, 극솟값: -3**

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 0, $x=-4$ 또는 $x=0$에서 극솟값 -3을 갖는다.

031 답 a, e, g

032 답 b, f

033 답 **2, 2, 3, 0, 2, 3**

034 답 **극댓값: 21, 극솟값: -11**

$f(x)=x^3-12x+5$에서

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	21 극대	$\searrow$	-11 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값 21, $x=2$에서 극솟값 -11을 갖는다.

035 답 **극댓값: 25, 극솟값: -7**

$f(x)=-x^3+3x^2+9x-2$에서

$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-7 극소	$\nearrow$	25 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 25, $x=-1$에서 극솟값 -7을 갖는다.

036 답 **극댓값: 7, 극솟값: 6**

$f(x)=x^4-2x^2+7$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	6 극소	$\nearrow$	7 극대	$\searrow$	6 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극댓값 7, $x=-1$ 또는 $x=1$에서 극솟값 6을 갖는다.

037 답 **극댓값: 26**

$f(x)=-x^4+4x^3-1$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2=-4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	26 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극댓값 26을 갖는다.

실전유형

038 답 **6**

$f(x)=2x^3-9x^2+12x-2$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$	2 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값 3, $x=2$에서 극솟값 2를 가지므로

$M=3$, $m=2$ $\quad\therefore Mm=6$

039 답 **23**

$f(x)=x^4-6x^2+8x-1$에서

$f'(x)=4x^3-12x+8=4(x+2)(x-1)^2$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-25 극소	$\nearrow$	2	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극솟값 -25를 가지므로

$a=-2$, $m=-25$ $\quad\therefore a-m=23$

040 답 ⑤

$f(x)=-3x^4+4x^3+12x^2-4$에서

$f'(x)=-12x^3+12x^2+24x=-12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	1 극대	↘	-4 극소	↗	28 극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 1, $x=2$에서 극댓값 28, $x=0$에서 극솟값 -4를 가지므로 모든 극값의 합은

$1+28+(-4)=25$

041 답 $2\sqrt{5}$

$f(x)=x^3-3x+5$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7 극대	↘	3 극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 7, $x=1$에서 극솟값 3을 가지므로

$A(-1,\ 7)$, $B(1,\ 3)$

따라서 선분 AB의 길이는

$\sqrt{(1+1)^2+(3-7)^2}=2\sqrt{5}$

042 답 14

$f(x)=-2x^3+3x^2+ax+4$에서

$f'(x)=-6x^2+6x+a$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극소이므로 $f'(-1)=0$에서

$-6-6+a=0 \qquad \therefore a=12$

$\therefore f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이므로 $b=2$

$\therefore a+b=14$

043 답 ③

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극대이고, $x=3$에서 극소이므로

$f'(-1)=0$, $f'(3)=0$

$f'(-1)=0$에서 $3-2a+b=0 \qquad \therefore 2a-b=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$f'(3)=0$에서 $27+6a+b=0 \qquad \therefore 6a+b=-27 \qquad \cdots\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-9$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$이므로 극댓값은

$f(-1)=-1-3+9+1=6$

044 답 ③

$f(x)=x^3-6x^2+ax+b$에서

$f'(x)=3x^2-12x+a$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극댓값 -1을 가지므로

$f'(1)=0$, $f(1)=-1$

$f'(1)=0$에서 $3-12+a=0 \qquad \therefore a=9$

$f(1)=-1$에서 $1-6+a+b=-1$

$4+b=-1 \qquad \therefore b=-5$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+9x-5$,

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	-1 극대	↘	-5 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극솟값 -5를 갖는다.

045 답 2

$f(x)=2x^3-3ax^2-12a^2x-1$에서

$f'(x)=6x^2-6ax-12a^2=6(x+a)(x-2a)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-a$ 또는 $x=2a$

$a>0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$7a^3-1$ 극대	↘	$-20a^3-1$ 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-a$에서 극댓값 $7a^3-1$, $x=2a$에서 극솟값 $-20a^3-1$을 갖고 그 합이 -106이므로

$(7a^3-1)+(-20a^3-1)=-106$

$-13a^3=-104$, $a^3=8$

$\therefore a=2$ ($\because a$는 실수)

046 답 ②

$f(x)=x^3-3x^2-9x+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$a+5$ 극대	↘	$a-27$ 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 $a+5$, $x=3$에서 극솟값 $a-27$을 갖는다.

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 서로 다르므로

$a+5=-(a-27)$

$2a=22 \qquad \therefore a=11$

047 답 2

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 구간 $[-3,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=3$에서 극댓값을 가지므로 극댓값을 갖는 모든 x의 값의 합은

$-1+3=2$

048 답 10

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$에서 $f'(x)=6x^2+2ax+b$

$f'(-1)=0$에서 $6-2a+b=0$

$\therefore\ 2a-b=6$ $\cdots\cdots$ ㉠

$f'(2)=0$에서 $24+4a+b=0$

$\therefore\ 4a+b=-24$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3,\ b=-12$

$\therefore\ f(x)=2x^3-3x^2-12x+c$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극댓값 8을 가지므로 $f(-1)=8$에서

$-2-3+12+c=8$ $\quad\therefore\ c=1$

$\therefore\ a-b+c=10$

049 답 15

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+c$ ($a,\ b,\ c$는 상수)라 하면

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

$f'(0)=0$에서 $b=0$

$f'(3)=0$에서 $-27+6a+b=0$

$-27+6a=0$ $\quad\therefore\ a=\frac{9}{2}$

$\therefore\ f(x)=-x^3+\frac{9}{2}x^2+c$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극솟값 $\frac{3}{2}$을 가지므로 $f(0)=\frac{3}{2}$에서

$c=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=-x^3+\frac{9}{2}x^2+\frac{3}{2}$이고 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극대이므로 극댓값은

$f(3)=-27+\frac{81}{2}+\frac{3}{2}=15$

050 답 ④

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

ㄴ. 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극값을 갖지 않는다.

ㄹ. 구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=3$에서 극값을 가지므로 극값은 2개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

개념유형

95~96쪽

051 답 풀이 참조

$f(x)=x^3-3x^2+1$에서

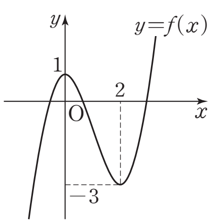
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$	-3 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



052 답 풀이 참조

$f(x)=2x^3-3x^2-1$에서

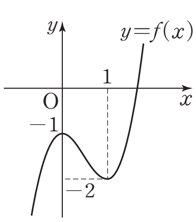
$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-1 극대	$\searrow$	-2 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



053 답 풀이 참조

$f(x)=-x^3+3x-2$에서

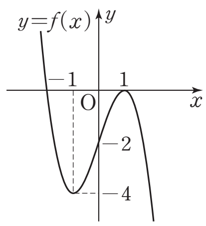
$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	-4 극소	↗	0 극대	↘

또 $f(0)=-2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



054 답 풀이 참조

$f(x)=x^3-3x^2+3x-1$에서

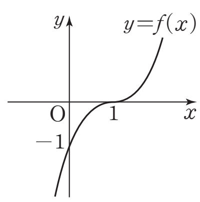
$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	↗	0	↗

또 $f(0)=-1$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



055 답 풀이 참조

$f(x)=x^4-2x^2+1$에서

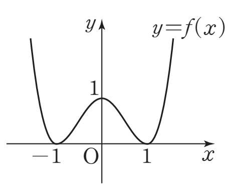
$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	0 극소	↗	1 극대	↘	0 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



056 답 풀이 참조

$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3-4$에서

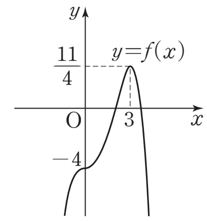
$f'(x)=-x^3+3x^2=-x^2(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	-4	↗	$\frac{11}{4}$ 극대	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



057 답 서로 다른 두 실근, >, >, $a<-3$ 또는 $a>3$

058 답 $a<\frac{4}{3}$

$f(x)=x^3-2x^2+ax+4$에서

$f'(x)=3x^2-4x+a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-3a>0$ $\quad\therefore a<\frac{4}{3}$

059 답 $a<-6$ 또는 $a>6$

$f(x)=-2x^3+ax^2-6x+1$에서

$f'(x)=-6x^2+2ax-6$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-36>0$

$(a+6)(a-6)>0$ $\quad\therefore a<-6$ 또는 $a>6$

060 답 $a<0$ 또는 $a>18$

$f(x)=x^3+ax^2+6ax-3$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+6a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-18a>0$

$a(a-18)>0$ $\quad\therefore a<0$ 또는 $a>18$

061 답 중근, ≤, ≤, $-\sqrt{6}\le a\le\sqrt{6}$

062 답 $a \geq 12$

$f(x) = -x^3 + 6x^2 - ax + 3$에서

$f'(x) = -3x^2 + 12x - a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = 36 - 3a \leq 0$　　$\therefore a \geq 12$

063 답 $-6 \leq a \leq 6$

$f(x) = 3x^3 + ax^2 + 4x - 2$에서

$f'(x) = 9x^2 + 2ax + 4$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 - 36 \leq 0$

$(a+6)(a-6) \leq 0$　　$\therefore -6 \leq a \leq 6$

064 답 $0 \leq a \leq 9$

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + 9ax$에서

$f'(x) = x^2 + 2ax + 9a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 - 9a \leq 0$

$a(a-9) \leq 0$　　$\therefore 0 \leq a \leq 9$

실전유형

97쪽

065 답 ③

$f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 1$이라 하면

$f'(x) = 4x^3 - 4x^2 - 4x + 4 = 4(x+1)(x-1)^2$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{8}{3}$ 극소	↗	$\frac{8}{3}$	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ③이다.

066 답 ②

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗		↗	극대	↘

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ②이다.

067 답 ①

$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + ax^2 + 2x + 5$에서

$f'(x) = 2x^2 + 2ax + 2$

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 - 4 > 0$

$(a+2)(a-2) > 0$　　$\therefore a < -2$ 또는 $a > 2$

068 답 3

$f(x) = x^3 - ax^2 + (a^2 - 2a)x + 4$에서

$f'(x) = 3x^2 - 2ax + a^2 - 2a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 - 3a^2 + 6a > 0$

$a^2 - 3a < 0$, $a(a-3) < 0$　　$\therefore 0 < a < 3$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

$1 + 2 = 3$

069 답 ③

$f(x) = x^3 + ax^2 + (a+6)x + 3$에서

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a + 6$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 - 3a - 18 \leq 0$

$(a+3)(a-6) \leq 0$　　$\therefore -3 \leq a \leq 6$

따라서 정수 a는 $-3, -2, -1, \dots, 6$의 10개이다.

070 답 9

$f(x) = 3x^3 + ax^2 + ax - 7$에서

$f'(x) = 9x^2 + 2ax + a$

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = a^2 - 9a \leq 0$

$a(a-9) \leq 0$　　$\therefore 0 \leq a \leq 9$

따라서 a의 최댓값은 9이다.

개념유형

98쪽

071 답 최댓값: 9, 최솟값: −11

$f(x)=x^3-3x^2+9$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

구간 $[-2, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-11	↗	9 극대	↘	5 극소	↗	9

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$ 또는 $x=3$에서 최댓값 9, $x=-2$에서 최솟값 -11을 갖는다.

072 답 최댓값: 8, 최솟값: −8

$f(x)=x^3-6x^2+8$에서

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ $(\because -1\le x\le 2)$

구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	8 극대	↘	-8

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 8, $x=2$에서 최솟값 -8을 갖는다.

073 답 최댓값: −1, 최솟값: −6

$f(x)=-2x^3+9x^2-12x-1$에서

$f'(x)=-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=2$

구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	-1	↘	-6 극소	↗	-5

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값 -1, $x=1$에서 최솟값 -6을 갖는다.

074 답 최댓값: 6, 최솟값: −3

$f(x)=x^4+4x^3+4x^2-3$에서

$f'(x)=4x^3+12x^2+8x=4x(x+2)(x+1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=0$

구간 $[-3, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	6	↘	-3 극소	↗	-2 극대	↘	-3 극소	↗	6

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$ 또는 $x=1$에서 최댓값 6, $x=-2$ 또는 $x=0$에서 최솟값 -3을 갖는다.

075 답 최댓값: 7, 최솟값: −10

$f(x)=-3x^4+4x^3+6$에서

$f'(x)=-12x^3+12x^2=-12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	6	↗	7 극대	↘	-10

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 7, $x=2$에서 최솟값 -10을 갖는다.

실전유형

99~100쪽

076 답 ⑤

$f(x)=3x^4+8x^3+6x^2-3$에서

$f'(x)=12x^3+24x^2+12x=12x(x+1)^2$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-2	↘	-3 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 -3을 가지므로

$a=0$, $m=-3$ $\quad\therefore a-m=3$

077 답 ④

$f(x)=x^4-2x^2+2$에서

$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

구간 $[-2, 1]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	10	↘	1 극소	↗	2 극대	↘	1

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최댓값 10, $x=-1$ 또는 $x=1$에서 최솟값 1을 가지므로

$M=10$, $m=1$ $\quad \therefore M+m=11$

078 답 12

$f(x)=2x^3+ax^2+bx+5$에서

$f'(x)=6x^2+2ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값 -15를 가지므로

$f'(2)=0$, $f(2)=-15$

$f'(2)=0$에서 $24+4a+b=0$

$\therefore 4a+b=-24$ $\quad \cdots\cdots$ ㉠

$f(2)=-15$에서 $16+4a+2b+5=-15$

$\therefore 2a+b=-18$ $\quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-12$

$\therefore f(x)=2x^3-3x^2-12x+5$,

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

구간 $[-3, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-40	↗	12 극대	↘	-15 극소	↗	-4

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최댓값 12를 갖는다.

079 답 ⑤

$f(x)=-x^3+6x^2-9x+a$에서

$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$a+16$	↘	$a-4$ 극소	↗	a

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 $a-4$를 가지므로

$a-4=1$ $\quad \therefore a=5$

080 답 ②

$f(x)=ax^3-3ax^2-b$에서

$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ ($\because 1\le x\le 4$)

$a>0$이므로 구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-2a-b$	↘	$-4a-b$ 극소	↗	$16a-b$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 $16a-b$, $x=2$에서 최솟값 $-4a-b$를 가지므로

$16a-b=14$, $-4a-b=-6$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$

$\therefore a-b=-1$

081 답 -1

$f(x)=-2x^3+6x+a$에서

$f'(x)=-6x^2+6=-6(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

구간 $[-2, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$a+4$	↘	$a-4$ 극소	↗	$a+4$ 극대	↘	$a-4$

함수 $f(x)$는 $x=-2$ 또는 $x=1$에서 최댓값 $a+4$를 가지므로

$a+4=7$ $\quad \therefore a=3$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$ 또는 $x=2$에서 최소이므로 최솟값은

$a-4=3-4=-1$

082 답 ④

$f(x)=x^3-3x^2+a$에서

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ ($\because 1\le x\le 4$)

구간 $[1, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a-2$	↘	$a-4$ 극소	↗	$a+16$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=4$에서 최댓값 $a+16$, $x=2$에서 최솟값 $a-4$를 가지므로

$M=a+16$, $m=a-4$

이때 $M+m=20$에서 $(a+16)+(a-4)=20$

$2a=8$ $\quad \therefore a=4$

083 답 $\sqrt{5}$

점 P의 좌표를 (a, a^2+1)이라 하면 점 P와 점 $(3, 1)$ 사이의 거리는

$\sqrt{(3-a)^2+(-a^2)^2}=\sqrt{a^4+a^2-6a+9}$

$f(a)=a^4+a^2-6a+9$라 하면

$f'(a)=4a^3+2a-6=2(a-1)(2a^2+2a+3)$

$f'(a)=0$인 a의 값은 $a=1$ ($\because$ a는 실수)

함수 $f(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$
$f(a)$	↘	5 극소	↗

따라서 함수 $f(a)$의 최솟값은 5이므로 점 P와 점 $(3,\ 1)$ 사이의 거리의 최솟값은 $\sqrt{5}$이다.

084 답 16

점 P의 좌표를 $(a,\ -a^2+6a)\ (0<a<6)$라 하면

$\overline{\mathrm{PH}}=a,\ \overline{\mathrm{OH}}=-a^2+6a$

삼각형 OPH의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=\frac{1}{2}a(-a^2+6a)=-\frac{1}{2}a^3+3a^2$

$\therefore\ S'(a)=-\frac{3}{2}a^2+6a=-\frac{3}{2}a(a-4)$

$S'(a)=0$인 a의 값은 $a=4\ (\because\ 0<a<6)$

$0<a<6$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	4	$\cdots$	6
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	16 극대	↘	

따라서 삼각형 OPH의 넓이 $S(a)$의 최댓값은 16이다.

085 답 $12\sqrt{3}$

점 A의 좌표를 $(a,\ -a^2+9)\ (0<a<3)$라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=2a,\ \overline{\mathrm{AD}}=-a^2+9$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a(-a^2+9)=-2a^3+18a$

$\therefore\ S'(a)=-6a^2+18=-6(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})$

$S'(a)=0$인 a의 값은 $a=\sqrt{3}\ (\because\ 0<a<3)$

$0<a<3$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	$12\sqrt{3}$ 극대	↘	

따라서 직사각형 ABCD의 넓이 $S(a)$의 최댓값은 $12\sqrt{3}$이다.

086 답 128

잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이를 x라 하면 상자의 밑면인 정사각형의 한 변의 길이는

$12-2x$

이때 $x>0,\ 12-2x>0$이므로 $0<x<6$

상자의 부피를 $V(x)$라 하면

$V(x)=x(12-2x)^2=4x^3-48x^2+144x$

$\therefore\ V'(x)=12x^2-96x+144=12(x-2)(x-6)$

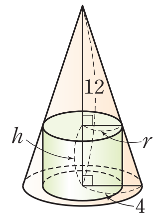
$V'(x)=0$인 x의 값은 $x=2\ (\because\ 0<x<6)$

$0<x<6$에서 함수 $V(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	6
$V'(x)$		+	0	−	
$V(x)$		↗	128 극대	↘	

따라서 상자의 부피 $V(x)$의 최댓값은 128이다.

087 답 ④



오른쪽 그림과 같이 원뿔에 내접하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r, 높이를 h라 하면

$r:4=(12-h):12\qquad\therefore\ h=12-3r$

이때 $r>0,\ 12-3r>0$이므로 $0<r<4$

원기둥의 부피를 $V(r)$라 하면

$V(r)=\pi r^2h=\pi r^2(12-3r)=\pi(12r^2-3r^3)$

$\therefore\ V'(r)=\pi(24r-9r^2)=3\pi r(8-3r)$

$V'(r)=0$인 r의 값은 $r=\frac{8}{3}\ (\because\ 0<r<4)$

$0<r<4$에서 함수 $V(r)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$	4
$V'(r)$		+	0	−	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 부피 $V(r)$가 최대인 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $\frac{8}{3}$이다.

실전유형으로 중단원 점검 101~102쪽

1 답 ③

$f(x)=-x^3+3x^2+5$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	5	↗	9	↘

따라서 함수 $f(x)$가 증가하는 구간은 $[0,\ 2]$이다.

2 답 2

$f(x)=x^3-3ax^2+(a+10)x+2$에서

$f'(x)=3x^2-6ax+a+10$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 0$이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9a^2-3a-30\leq 0$

$3a^2-a-10\leq 0,\ (3a+5)(a-2)\leq 0$

$\therefore\ -\frac{5}{3}\leq a\leq 2$

따라서 모든 정수 a의 값의 합은

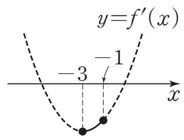
$-1+0+1+2=2$

3 답 ④

$f(x)=x^3+9x^2+ax-3$에서

$f'(x)=3x^2+18x+a$

함수 $f(x)$가 구간 $[-3, -1]$에서 감소하려면 오른쪽 그림과 같이 $-3\le x\le -1$에서 $f'(x)\le 0$이어야 하므로



$f'(-3)\le 0$, $f'(-1)\le 0$

$f'(-3)\le 0$에서 $27-54+a\le 0$　　$\therefore a\le 27$　　…… ㉠

$f'(-1)\le 0$에서 $3-18+a\le 0$　　$\therefore a\le 15$　　…… ㉡

㉠, ㉡에서 $a\le 15$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, …, 15의 15개이다.

4 답 32

$f(x)=x^3+3x^2-9x-10$에서

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-3	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	17 극대	↘	−15 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값 17, $x=1$에서 극솟값 -15를 가지므로

$M=17$, $m=-15$　　$\therefore M-m=32$

5 답 14

$f(x)=-2x^3+ax^2+12x-b$에서 $f'(x)=-6x^2+2ax+12$

함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 극솟값 -13을 가지므로

$f'(-1)=0$, $f(-1)=-13$

$f'(-1)=0$에서 $-6-2a+12=0$　　$\therefore a=3$

$f(-1)=-13$에서 $2+a-12-b=-13$

$-7-b=-13$　　$\therefore b=6$　　…… ⅰ

$\therefore f(x)=-2x^3+3x^2+12x-6,$

　$f'(x)=-6x^2+6x+12=-6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-1	…	2	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−13 극소	↗	14 극대	↘

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극댓값 14를 갖는다.　　…… ⅱ

채점 기준

ⅰ a, b의 값 구하기	50 %
ⅱ $f(x)$의 극댓값 구하기	50 %

6 답 ②

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-2	…	1	…
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-2)=0$에서 $12-4a+b=0$　　$\therefore 4a-b=12$　　…… ㉠

$f'(1)=0$에서 $3+2a+b=0$　　$\therefore 2a+b=-3$　　…… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2}$, $b=-6$

$\therefore f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+c$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극댓값 8을 가지므로 $f(-2)=8$에서

$-8+6+12+c=8$　　$\therefore c=-2$

따라서 $f(x)=x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-2$이고 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이므로 극솟값은

$f(1)=1+\frac{3}{2}-6-2=-\frac{11}{2}$

7 답 ⑤

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-3	…	-1	…	1	…	3	…
$f'(x)$	+	0	−	0	−	0	+	0	−
$f(x)$	↗	극대	↘		↘	극소	↗	극대	↘

① $f'(-1)=0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하다.

⑤ 구간 $(-3, 3)$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극값을 가지므로 극값은 1개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

8 답 11

$f(x)=-2x^3+ax^2-18x+3$에서

$f'(x)=-6x^2+2ax-18$

삼차함수 $f(x)$가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-108>0$

$(a+6\sqrt{3})(a-6\sqrt{3})>0$　　$\therefore a<-6\sqrt{3}$ 또는 $a>6\sqrt{3}$

따라서 자연수 a의 최솟값은 11이다.

9 답 6

$f(x)=x^3-2ax^2+(a+9)x+2$에서

$f'(x)=3x^2-4ax+a+9$　　…… ⅰ

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4a^2-3a-27\le 0$

$(4a+9)(a-3)\le 0$　　$\therefore -\frac{9}{4}\le a\le 3$　　…… ⅱ

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2, 3의 6개이다.　　…… ⅲ

채점 기준

ⅰ $f'(x)$ 구하기	20 %
ⅱ a의 값의 범위 구하기	60 %
ⅲ 정수 a의 개수 구하기	20 %

10 답 ④

$f(x)=-x^4+4x^3-3$에서

$f'(x)=-4x^3+12x^2=-4x^2(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=3$

구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-3	↗	24 극대	↘	-3

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값 24, $x=0$ 또는 $x=4$에서 최솟값 -3을 가지므로

$M=24$, $m=-3$

$\therefore M-m=27$

11 답 ③

$f(x)=2x^3-9x^2+12x+a$에서

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=2$

구간 $[-1, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a-23$	↗	$a+5$ 극대	↘	$a+4$ 극소	↗	$a+9$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 최솟값 $a-23$을 가지므로

$a-23=-26$ $\quad\therefore a=-3$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최대이므로 최댓값은

$a+9=-3+9=6$

12 답 $16\sqrt{2}$

직사각형의 꼭짓점 중 제1사분면 위에 있는 점을 P라 하자.

점 P의 좌표를 $(a, -a^2+6)(0<a<\sqrt{6})$이라 하고 직사각형의 넓이를 $S(a)$라 하면

$S(a)=2a\times2(-a^2+6)=-4a^3+24a$ …… ⅰ

$\therefore S'(a)=-12a^2+24=-12(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$

$S'(a)=0$인 a의 값은 $a=\sqrt{2}$ ($\because 0<a<\sqrt{6}$)

$0<a<\sqrt{6}$에서 함수 $S(a)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{6}$
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	$16\sqrt{2}$ 극대	↘	

따라서 직사각형의 넓이 $S(a)$의 최댓값은 $16\sqrt{2}$이다. …… ⅱ

채점 기준	
ⅰ 직사각형의 넓이를 함수로 나타내기	50 %
ⅱ 직사각형의 넓이의 최댓값 구하기	50 %

06 도함수의 활용 (3)

개념유형

104~105쪽

001 답 0, 0, 5, 1, 1

002 답 3

$f(x)=x^3+6x^2+9x+2$라 하면

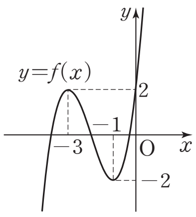
$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=-1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2 극대	↘	-2 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



003 답 2

$f(x)=2x^3-3x^2+1$이라 하면

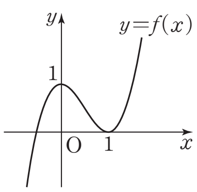
$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	1 극대	↘	0 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



004 답 4

$f(x)=2x^4-4x^2+1$이라 하면

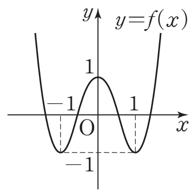
$f'(x)=8x^3-8x=8x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1 극소	↗	1 극대	↘	-1 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 네 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



005 답 1

$x^3-x^2+3x=2x^2-2$에서

$x^3-3x^2+3x+2=0$

$f(x)=x^3-3x^2+3x+2$라 하면

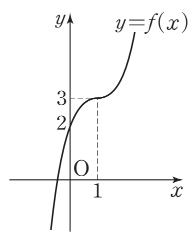
$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	3	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



006 답 3

$x^4-5x^3=-x^3-4x^2+1$에서

$x^4-4x^3+4x^2-1=0$

$f(x)=x^4-4x^3+4x^2-1$이라 하면

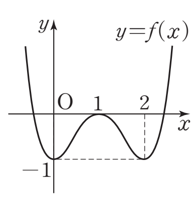
$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+
$f(x)$	↘	−1 극소	↗	0 극대	↘	−1 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



007 답 1, 1, 3, −1, $-1<k<3$, $k=-1$ 또는 $k=3$, $k<-1$ 또는 $k>3$

008 답 (1) $-2<k<2$

(2) $k=-2$ 또는 $k=2$

(3) $k<-2$ 또는 $k>2$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=x^3-3x^2+2$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^3-3x^2+2$라 하면

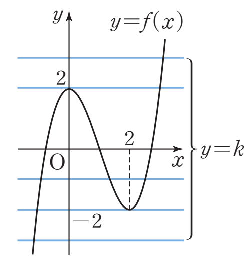
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	2 극대	↘	−2 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와



(1) 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-2<k<2$

(2) 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$k=-2$ 또는 $k=2$

(3) 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 하므로

$k<-2$ 또는 $k>2$

009 답 (1) $4<k<5$

(2) $k=4$ 또는 $k=5$

(3) $k<4$ 또는 $k>5$

$2x^3-9x^2+12x-k=0$에서

$2x^3-9x^2+12x=k$

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=2x^3-9x^2+12x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=2x^3-9x^2+12x$라 하면

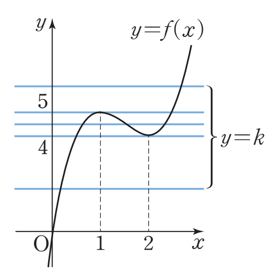
$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5 극대	↘	4 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와



(1) 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$4<k<5$

(2) 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$k=4$ 또는 $k=5$

(3) 직선 $y=k$가 한 점에서 만나야 하므로

$k<4$ 또는 $k>5$

실전유형

105~106쪽

010 답 2

$f(x)=3x^4-4x^3-1$이라 하면

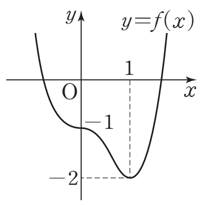
$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-1	↘	-2 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



011 답 ⑤

$f(x)=x^3-12x$라 하면

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=2$

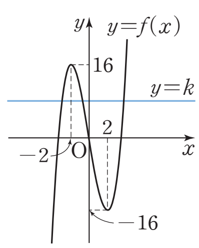
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	16 극대	↘	-16 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$-16<k<16$

따라서 정수 k는 -15, -14, -13, $\ldots$, 15의 31개이다.



012 답 ④

$x^3-3x^2-9x+k=0$에서

$x^3-3x^2-9x=-k$

$f(x)=x^3-3x^2-9x$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	5 극대	↘	-27 극소	↗

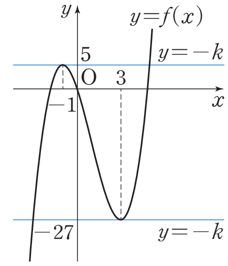
함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2이려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$-k=5$ 또는 $-k=-27$

$\therefore$ $k=-5$ 또는 $k=27$

따라서 모든 k의 값의 합은

$-5+27=22$



013 답 12

$3x^2(x^2-2)=8x(x^2-3)+k$에서

$3x^4-8x^3-6x^2+24x=k$

$f(x)=3x^4-8x^3-6x^2+24x$라 하면

$f'(x)=12x^3-24x^2-12x+24$

$\quad=12(x+1)(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

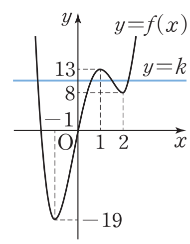
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-19 극소	↗	13 극대	↘	8 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로

$8<k<13$

따라서 정수 k의 최댓값은 12이다.



014 답 ②

$2x^3-3x^2-12x-k=0$에서

$2x^3-3x^2-12x=k$

$f(x)=2x^3-3x^2-12x$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

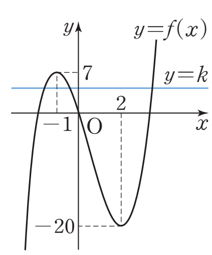
x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	7 극대	↘	-20 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고 두 개는 음수이려면

$0<k<7$

따라서 $\alpha=0$, $\beta=7$이므로

$\beta-\alpha=7$



015 답 4

$f(x)=x^3+3x^2-9x$라 하면

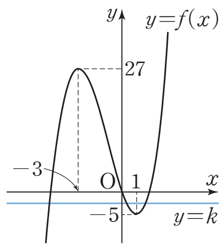
$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	27 극대	$\searrow$	-5 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고 한 개는 음수이려면



$-5<k<0$

따라서 정수 k는 -4, -3, -2, -1의 4개이다.

016 답 12

$x^4+\frac{8}{3}x^3-2x^2-8x+k=0$에서

$x^4+\frac{8}{3}x^3-2x^2-8x=-k$

$f(x)=x^4+\frac{8}{3}x^3-2x^2-8x$라 하면

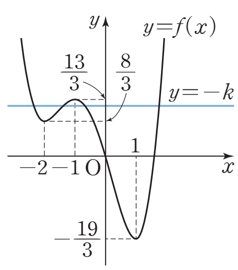
$f'(x)=4x^3+8x^2-4x-8=4(x+2)(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\frac{8}{3}$ 극소	$\nearrow$	$\frac{13}{3}$ 극대	$\searrow$	$-\frac{19}{3}$ 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-k$의 교점의 x좌표가 한 개는 양수이고 세 개는 음수이려면



$\frac{8}{3}<-k<\frac{13}{3}$

$\therefore\ -\frac{13}{3}<k<-\frac{8}{3}$

따라서 모든 정수 k의 값의 곱은

$-4\times(-3)=12$

017 답 ②

주어진 곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $2x^3+3x^2-7x=5x+k$, 즉 $2x^3+3x^2-12x=k$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=2x^3+3x^2-12x$라 하면

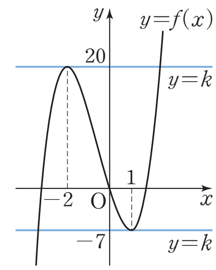
$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	20 극대	$\searrow$	-7 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$k=-7$ 또는 $k=20$

따라서 모든 k의 값의 합은

$-7+20=13$

018 답 ③

주어진 두 곡선이 만나는 점의 개수가 2이려면 방정식 $2x^2-1=x^3-x^2+k$, 즉 $-x^3+3x^2-1=k$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=-x^3+3x^2-1$이라 하면

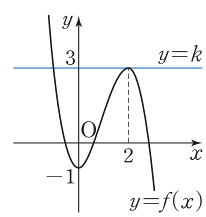
$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$k=3$ ($\because\ k>0$)

019 답 -4

두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식 $x^4-6x-k=-5x^2+8x+k$, 즉 $x^4+5x^2-14x=2k$가 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^4+5x^2-14x$라 하면

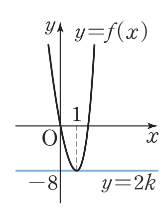
$f'(x)=4x^3+10x-14=2(x-1)(2x^2+2x+7)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because$ x는 실수)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-8 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 방정식 $f(x)=2k$가 오직 하나의 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2k$가 한 점에서 만나야 하므로



$2k=-8\qquad\therefore\ k=-4$

개념유형 108~109쪽

020 답 $x+1,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0$

021 답 풀이 참조

$f(x)=-x^4+2x^2-1$이라 하면

$f'(x)=-4x^3+4x=-4x(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	0 극대	↘	-1 극소	↗	0 극대	↘

함수 $f(x)$의 최댓값은 0이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\le 0$

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $-x^4+2x^2-1\le 0$이 성립한다.

022 답 풀이 참조

$f(x)=x^3-3x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because x\ge 0$)

$x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	0 극소	↗

$x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이므로 $x\ge 0$일 때, $f(x)\ge 0$

따라서 $x\ge 0$일 때, 부등식 $x^3-3x+2\ge 0$이 성립한다.

023 답 풀이 참조

$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$이라 하면

$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=2$

$x\ge 1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘	1 극소	↗

$x\ge 1$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 1이므로 $x\ge 1$일 때, $f(x)>0$

따라서 $x\ge 1$일 때, 부등식 $2x^3-9x^2+12x-3>0$이 성립한다.

024 답 풀이 참조

$x^3+4x^2\le x^2+4$에서

$x^3+3x^2-4\le 0$

$f(x)=x^3+3x^2-4$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ ($\because x\le -1$)

$x\le -1$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	↗	0 극대	↘	-2

$x\le -1$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 0이므로 $x\le -1$일 때, $f(x)\le 0$

따라서 $x\le -1$일 때, 부등식 $x^3+4x^2\le x^2+4$가 성립한다.

025 답 풀이 참조

$x^3+1>6x^2-9x$에서

$x^3-6x^2+9x+1>0$

$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$이라 하면

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because 0\le x\le 2$)

$0\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↗	5 극대	↘	3

$0\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 1이므로 $0\le x\le 2$일 때, $f(x)>0$

따라서 $0\le x\le 2$일 때, 부등식 $x^3+1>6x^2-9x$가 성립한다.

026 답 $a,\ a-8,\ a-8,\ 0,\ 8$

027 답 $a\ge 0$

$f(x)=x^4+x^3+x^2+a$라 하면

$f'(x)=4x^3+3x^2+2x=x(4x^2+3x+2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ ($\because x$는 실수)

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	a 극소	↗

함수 $f(x)$의 최솟값은 a이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이 성립하려면

$a\ge 0$

028 답 $a\le -1$

$f(x)=3x^4-4x^3-a$라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	$-a$	↘	$-a-1$ 극소	↗

함수 $f(x)$의 최솟값은 $-a-1$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$-a-1\geq 0 \qquad \therefore a\leq -1$

029 답 $a>1$

$5x^3-2x^2+a>3x^3+x^2$에서

$2x^3-3x^2+a>0$

$f(x)=2x^3-3x^2+a$라 하면

$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because x>0$)

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$a-1$ 극소	$\nearrow$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $a-1$이므로 $x>0$일 때, $f(x)>0$이 성립하려면

$a-1>0 \qquad \therefore a>1$

030 답 $a\leq 0$

$x^3-x^2+3x\geq 2x^2+a$에서

$x^3-3x^2+3x-a\geq 0$

$f(x)=x^3-3x^2+3x-a$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$

$0\leq x\leq 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-a$	$\nearrow$	$-a+1$	$\nearrow$	$-a+2$

$0\leq x\leq 2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-a$이므로 $0\leq x\leq 2$일 때, $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$-a\geq 0 \qquad \therefore a\leq 0$

031 답 $a\leq -4$

$2x^3+4x\geq 7x^2+a$에서

$2x^3-7x^2+4x-a\geq 0$

$f(x)=2x^3-7x^2+4x-a$라 하면

$f'(x)=6x^2-14x+4=2(3x-1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ ($\because 1\leq x\leq 3$)

$1\leq x\leq 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-a-1$	$\searrow$	$-a-4$ 극소	$\nearrow$	$-a+3$

$1\leq x\leq 3$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-a-4$이므로 $1\leq x\leq 3$일 때, $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$-a-4\geq 0 \qquad \therefore a\leq -4$

실전유형

110쪽

032 답 ①

$x^4-4x^3+16x\geq a$에서

$x^4-4x^3+16x-a\geq 0$

$f(x)=x^4-4x^3+16x-a$라 하면

$f'(x)=4x^3-12x^2+16=4(x+1)(x-2)^2$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-a-11$ 극소	$\nearrow$	$-a+16$	$\nearrow$

함수 $f(x)$의 최솟값은 $-a-11$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$-a-11\geq 0 \qquad \therefore a\leq -11$

033 답 8

$3x^4-4x^3-12x^2+40\geq a$에서

$3x^4-4x^3-12x^2+40-a\geq 0$

$f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+40-a$라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$-a+35$ 극소	$\nearrow$	$-a+40$ 극대	$\searrow$	$-a+8$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$의 최솟값은 $-a+8$이므로 구간 $(-\infty, \infty)$에서 $f(x)\geq 0$이 성립하려면

$-a+8\geq 0 \qquad \therefore a\leq 8$

따라서 자연수 a는 1, 2, 3, …, 8의 8개이다.

034 답 ⑤

$f(x)\leq g(x)$에서 $f(x)-g(x)\leq 0$

$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면

$h(x)=-x^4-x^3+2x^2-\left(\frac{1}{3}x^3-2x^2+a\right)$

$\quad=-x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2-a$

$\therefore h'(x)=-4x^3-4x^2+8x=-4x(x+2)(x-1)$

$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	$-a+\frac{32}{3}$ 극대	$\searrow$	$-a$ 극소	$\nearrow$	$-a+\frac{5}{3}$ 극대	$\searrow$

함수 $h(x)$의 최댓값은 $-a+\frac{32}{3}$이므로 모든 실수 x에 대하여
$h(x)=f(x)-g(x)\le 0$이 성립하려면
$-a+\frac{32}{3}\le 0 \qquad \therefore a\ge \frac{32}{3}$
따라서 a의 최솟값은 $\frac{32}{3}$이다.

035 답 -17

함수 $y=f(x)$의 그래프가 함수 $y=g(x)$의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x에 대하여 $f(x)>g(x)$, 즉 $f(x)-g(x)>0$이 성립해야 한다.
$h(x)=f(x)-g(x)$라 하면
$h(x)=x^4+8x^2-(4x^3+16x+a)$
$\quad =x^4-4x^3+8x^2-16x-a$
$\therefore h'(x)=4x^3-12x^2+16x-16=4(x-2)(x^2-x+2)$
$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ ($\because$ x는 실수)
함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$\searrow$	$-a-16$ 극소	$\nearrow$

함수 $h(x)$의 최솟값은 $-a-16$이므로 모든 실수 x에 대하여
$h(x)=f(x)-g(x)>0$이 성립하려면
$-a-16>0 \qquad \therefore a<-16$
따라서 정수 a의 최댓값은 -17이다.

036 답 9

$x^3+3x^2-24x+38>k$에서
$x^3+3x^2-24x+38-k>0$
$f(x)=x^3+3x^2-24x+38-k$라 하면
$f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=2$ ($\because x\ge 0$)
$x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$-k+38$	$\searrow$	$-k+10$ 극소	$\nearrow$

$x\ge 0$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-k+10$이므로 $x\ge 0$일 때, $f(x)>0$이 성립하려면
$-k+10>0 \qquad \therefore k<10$
따라서 자연수 k는 1, 2, 3, …, 9의 9개이다.

037 답 ④

$-3x^4+12x^2+x\le 4x^3+x+a$에서
$-3x^4-4x^3+12x^2-a\le 0$
$f(x)=-3x^4-4x^3+12x^2-a$라 하면
$f'(x)=-12x^3-12x^2+24x=-12x(x+2)(x-1)$
$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$ ($\because -1\le x\le 2$)
$-1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-a+13$	$\searrow$	$-a$ 극소	$\nearrow$	$-a+5$ 극대	$\searrow$	$-a-32$

$-1\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $-a+13$이므로 $-1\le x\le 2$일 때, $f(x)\le 0$이 성립하려면
$-a+13\le 0 \qquad \therefore a\ge 13$
따라서 a의 최솟값은 13이다.

038 답 3

$f(x)\ge 3g(x)$에서 $f(x)-3g(x)\ge 0$
$h(x)=f(x)-3g(x)$라 하면
$h(x)=x^3+3x^2-k-3(2x^2+3x-10)$
$\quad =x^3-3x^2-9x+30-k$
$\therefore h'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$
$h'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$
구간 $[-1, 4]$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$h'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-k+35$	$\searrow$	$-k+3$ 극소	$\nearrow$	$-k+10$

구간 $[-1, 4]$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은 $-k+3$이므로 구간 $[-1, 4]$에서 $h(x)=f(x)-3g(x)\ge 0$이 성립하려면
$-k+3\ge 0 \qquad \therefore k\le 3$
따라서 k의 최댓값은 3이다.

개념유형

112~113쪽

039 답 16, 2

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=2t+8,\ a=\frac{dv}{dt}=2$
따라서 $t=4$에서의 점 P의 속도와 가속도는
$v=2\times 4+8=16,\ a=2$

040 답 9, 12

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-6t,\ a=\frac{dv}{dt}=6t-6$
따라서 $t=3$에서의 점 P의 속도와 가속도는
$v=3\times 3^2-6\times 3=9,\ a=6\times 3-6=12$

041 답 5, 8

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-4t+1$, $a=\frac{dv}{dt}=6t-4$

따라서 $t=2$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=3\times2^2-4\times2+1=5$, $a=6\times2-4=8$

042 답 2, -8

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2-2t+7$, $a=\frac{dv}{dt}=-6t-2$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도와 가속도는

$v=-3\times1^2-2\times1+7=2$, $a=-6\times1-2=-8$

043 답 -3, 0, -3, 0, 4, 2

044 답 7

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=2t-14$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$2t-14=0 \qquad \therefore t=7$

045 답 3

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-18t$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$6t^2-18t=0$, $t^2-3t=0$

$t(t-3)=0 \qquad \therefore t=3\ (\because t>0)$

046 답 5

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-3t^2+12t+15$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$-3t^2+12t+15=0$, $t^2-4t-5=0$

$(t+1)(t-5)=0 \qquad \therefore t=5\ (\because t>0)$

047 답 ○

시각 t에서의 속도는 $x'(t)$이므로 위치 $x(t)$의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

$x'(a)=0$이고 그 좌우에서 $x'(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=a$에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

048 답 ×

$x'(b)>0$이므로 $t=b$에서의 점 P의 속도는 양의 값이다.

049 답 ○

$|x(c)|$의 값이 가장 크므로 $t=c$에서 점 P가 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

050 답 ×

$a<t<b$에서 $x'(t)>0$이므로 점 P는 양의 방향으로 움직인다.

051 답 ×

$x(b)=0$이므로 $0<t<d$에서 점 P는 $t=b$일 때 원점을 한 번 지난다.

052 답 ×

시각 t에서의 가속도는 $v'(t)$이므로 속도 $v(t)$의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

$v'(b)<0$이므로 $t=b$에서의 점 P의 가속도는 음의 값이다.

053 답 ×

$v(a)>0$, $v(c)<0$이므로 $t=a$에서와 $t=c$에서의 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.

054 답 ×

$v(c)\neq0$이므로 $t=c$에서 점 P는 움직이고 있다.

055 답 ○

056 답 ○

$v(t)=0$이고 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 $0<t<d$에서 점 P는 $t=b$일 때 운동 방향을 한 번 바꾼다.

실전유형

114~116쪽

057 답 ①

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-6t^2+12t-1=-6(t-1)^2+5$

따라서 $t=1$에서의 점 P의 속도가 최대이다.

058 답 ⑤

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2+2t-5$, $a=\frac{dv}{dt}=6t+2$

따라서 $t=3$에서의 점 P의 가속도는

$6\times3+2=20$

059 답 -2

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-10t+6$

점 P가 원점을 지나는 순간의 위치는 0이므로

$t^3-5t^2+6t=0$, $t(t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=3\ (\because t>0)$

따라서 점 P가 출발 후 처음으로 다시 원점을 지나는 시각은 $t=2$이므로 구하는 속도는

$3\times2^2-10\times2+6=-2$

060 답 ④

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=9t^2-6t+7$

$a=\frac{dv}{dt}=18t-6$

점 P의 속도가 10이면

$9t^2-6t+7=10$

$3t^2-2t-1=0$, $(3t+1)(t-1)=0$

$\therefore t=1$ ($\because t>0$)

따라서 $t=1$에서의 점 P의 가속도는

$18\times1-6=12$

061 답 ③

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-8t+k$

점 P의 시각 $t=2$에서의 속도가 5이므로

$3\times2^2-8\times2+k=5$

$\therefore k=9$

062 답 27

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1=\frac{dx_1}{dt}=3t^2-4t+3$

$v_2=\frac{dx_2}{dt}=2t+12$

두 점 P, Q의 속도가 같으면 $v_1=v_2$에서

$3t^2-4t+3=2t+12$

$t^2-2t-3=0$, $(t+1)(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t\geq0$)

$t=3$에서의 두 점 P, Q의 위치는

$x_1=3^3-2\times3^2+3\times3=18$

$x_2=3^2+12\times3=45$

따라서 구하는 거리는

$45-18=27$

063 답 ②

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-3t-6$

$a=\frac{dv}{dt}=6t-3$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$3t^2-3t-6=0$, $(t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$6\times2-3=9$

064 답 ⑤

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=2t^2-10t+12$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$2t^2-10t+12=0$, $(t-2)(t-3)=0$

$\therefore t=2$ 또는 $t=3$

따라서 점 P가 출발 후 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=3$이므로 구하는 점 P의 위치는

$\frac{2}{3}\times3^3-5\times3^2+12\times3=9$

065 답 $2<t<5$

시각 t에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q라 하면

$v_P=\frac{dx_P}{dt}=2t-10$

$v_Q=\frac{dx_Q}{dt}=4t-8$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호가 서로 반대이므로 $v_Pv_Q<0$에서

$(2t-10)(4t-8)<0$, $(t-2)(t-5)<0$

$\therefore 2<t<5$

066 답 54

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=3t^2-27$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$3t^2-27=0$, $t^2=9$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

점 P의 운동 방향이 원점에서 바뀌므로 $t=3$에서의 위치가 0이다.

따라서 $3^3-27\times3+k=0$이므로

$k=54$

067 답 5초, 75 m

브레이크를 밟은 지 t초 후의 자동차의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=30-6t$

자동차가 정지하는 순간의 속도는 0이므로

$30-6t=0$ $\qquad\therefore t=5$

따라서 자동차가 브레이크를 밟은 후 5초 동안 움직인 거리는

$30\times5-3\times5^2=75$(m)

068 답 ⑤

제동을 건 지 t초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=48-3t^2$

열차가 정지하는 순간의 속도는 0이므로

$48-3t^2=0$, $t^2=16$

$\therefore t=4$ ($\because t>0$)

열차가 제동을 건 후 4초 동안 움직인 거리는

$48\times4-4^3=128$(m)

따라서 역으로부터 128 m 떨어진 지점에서부터 제동을 걸어야 한다.

069 답 ④

t초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=20-10t$

물체가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이므로

$20-10t=0 \qquad \therefore t=2$

따라서 $t=2$에서의 물체의 높이는

$20\times2-5\times2^2=20(\text{m})$

070 답 $-15\,\text{m/s}$

t초 후의 물체의 속도를 $v\,\text{m/s}$라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=5-10t$

물체가 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로

$10+5t-5t^2=0,\ (t+1)(t-2)=0$

$\therefore t=2\ (\because t>0)$

따라서 $t=2$에서의 물체의 속도는

$5-10\times2=-15(\text{m/s})$

071 답 $90\,\text{m}$

t초 후의 물체의 속도를 $v\,\text{m/s}$라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=30-10t$

물체가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이므로

$30-10t=0 \qquad \therefore t=3$

$t=3$에서의 물체의 높이는

$30\times3-5\times3^2=45(\text{m})$

따라서 물체가 지면에 떨어질 때까지 움직인 거리는

$45\times2=90(\text{m})$

072 답 ④

시각 t에서의 속도는 $x'(t)$이므로 위치 $x(t)$의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

① $x'(a)=0$이므로 $t=a$에서의 점 P의 속도는 0이다.

② $x'(c)=0$이고 그 좌우에서 $x'(t)$의 부호가 바뀌므로 $t=c$에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

③ $a<t<b$에서 $x'(t)<0$이므로 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

④ $c<t<d$에서 $x'(t)>0$이고 $d<t<e$에서 $x'(t)>0$이므로 $c<t<d$에서와 $d<t<e$에서의 점 P의 운동 방향은 서로 같다.

⑤ $x(b)=0,\ x(d)=0$이므로 $0<t<e$에서 점 P는 $t=b,\ t=d$일 때 원점을 지난다.
따라서 $0<t<e$에서 점 P는 원점을 두 번 지난다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

073 답 ④

시각 t에서의 가속도는 $v'(t)$이므로 속도 $v(t)$의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

① $0<t<a$에서 $v'(t)>0$이므로 점 P의 가속도는 양의 값이다.

② $v(d)\neq0$이므로 $t=d$에서 점 P는 움직이고 있다.

③ $a<t<b$에서 점 P의 속도는 감소한다.

④ $c<t<d$에서 $v'(t)=0$이므로 점 P의 가속도는 0으로 일정하다.

⑤ $v(t)=0$이고 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 $0<t<e$에서 점 P는 $t=b$일 때 운동 방향을 한 번 바꾼다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

개념유형

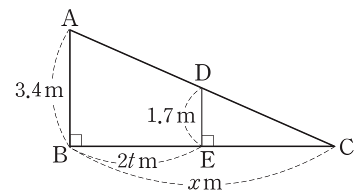
117~118쪽

074 답 $2t,\ x-2t,\ 3t,\ t,\ 1$

075 답 $2\,\text{m/s}$

사람이 t초 동안 움직인 거리는 $2t\,\text{m}$

t초 후 가로등 바로 밑에서 그림자 끝까지의 거리를 $x\,\text{m}$라 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC \backsim \triangle DEC$이므로

$3.4:1.7=x:(x-2t)$

$x=2(x-2t) \qquad \therefore x=4t$

t초 후의 그림자의 길이를 $l\,\text{m}$라 하면

$l=\overline{CE}=x-2t=4t-2t=2t$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 $\dfrac{dl}{dt}=2(\text{m/s})$

076 답 $75\,\text{cm}^2/\text{s}$

t초 후의 직사각형의 가로의 길이는 $(3+3t)\,\text{cm}$, 세로의 길이는 $(4+3t)\,\text{cm}$이므로 직사각형의 넓이를 $S\,\text{cm}^2$라 하면

$S=(3+3t)(4+3t)=9t^2+21t+12$

시각 t에서의 직사각형의 넓이의 변화율은

$\dfrac{dS}{dt}=18t+21$

따라서 $t=3$에서의 직사각형의 넓이의 변화율은

$18\times3+21=75(\text{cm}^2/\text{s})$

077 답 $12\sqrt{3}\,\text{cm}^2/\text{s}$

t초 후의 정삼각형의 한 변의 길이는 $(2+2t)\,\text{cm}$이므로 정삼각형의 넓이를 $S\,\text{cm}^2$라 하면

$S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(2+2t)^2$

시각 t에서의 정삼각형의 넓이의 변화율은

$\dfrac{dS}{dt}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times2(2+2t)\times2=\sqrt{3}(2+2t)$

따라서 $t=5$에서의 정삼각형의 넓이의 변화율은

$\sqrt{3}(2+2\times5)=12\sqrt{3}(\text{cm}^2/\text{s})$

078 답 $108\,\text{cm}^3/\text{s}$

t초 후의 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(2+t)\,\text{cm}$이므로 정육면체의 부피를 $V\,\text{cm}^3$라 하면

$V=(2+t)^3$

시각 t에서의 정육면체의 부피의 변화율은

$\dfrac{dV}{dt}=3(2+t)^2$

따라서 $t=4$에서의 정육면체의 부피의 변화율은

$3(2+4)^2=108(\text{cm}^3/\text{s})$

079 답 $280\pi\,\text{cm}^3/\text{s}$

t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $(3+2t)\,\text{cm}$이므로 원기둥의 부피를 $V\,\text{cm}^3$라 하면

$V=\pi(3+2t)^2\times10$

시각 t에서의 원기둥의 부피의 변화율은

$\frac{dV}{dt}=10\pi\times2(3+2t)\times2=40\pi(3+2t)$

따라서 $t=2$에서의 원기둥의 부피의 변화율은

$40\pi(3+2\times2)=280\pi(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$

실전유형 118~119쪽

080 답 ③

t초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(5+2t)$cm이므로 정사각형의 한 대각선의 길이를 $l$cm라 하면

$l=\sqrt{2}(5+2t)=2\sqrt{2}t+5\sqrt{2}$

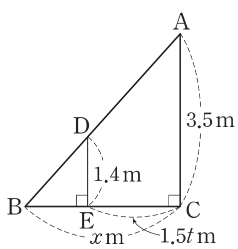
따라서 정사각형의 한 대각선의 길이의 변화율은

$\frac{dl}{dt}=2\sqrt{2}(\mathrm{cm/s})$

081 답 (1) 2.5 m/s (2) 1 m/s

사람이 t초 동안 움직인 거리는 $1.5t$ m

t초 후 가로등 바로 밑에서 그림자 끝까지의 거리를 x m라 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC \backsim \triangle DBE$이므로

$3.5:1.4=x:(x-1.5t)$

$2x=5(x-1.5t)$ $\quad\therefore x=2.5t$

(1) 그림자의 끝이 움직이는 속도를 v m/s라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=2.5(\mathrm{m/s})$

(2) t초 후의 그림자의 길이를 l m라 하면

$l=\overline{BE}=x-1.5t=2.5t-1.5t=t$

따라서 그림자의 길이의 변화율은

$\frac{dl}{dt}=1(\mathrm{m/s})$

082 답 $3\sqrt{2}$

t초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(6t, 0)$, $(0, 6t)$이므로 점 C의 좌표는 $(3t, 3t)$이다.

선분 OC의 길이를 l이라 하면

$l=\sqrt{9t^2+9t^2}=3\sqrt{2}t$ ($\because t>0$)

따라서 선분 OC의 길이의 변화율은

$\frac{dl}{dt}=3\sqrt{2}$

083 답 72π cm²/s

t초 후의 원의 반지름의 길이는 $(1+4t)$cm이므로 원의 넓이를 Scm²라 하면

$S=\pi(1+4t)^2$

시각 t에서의 원의 넓이의 변화율은

$\frac{dS}{dt}=\pi\times2(1+4t)\times4=8\pi(1+4t)$

따라서 $t=2$에서의 원의 넓이의 변화율은

$8\pi(1+4\times2)=72\pi(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$

084 답 ②

t초 후의 정육면체의 한 모서리의 길이는 $(3+2t)$cm

한 모서리의 길이가 9cm이면

$3+2t=9$ $\quad\therefore t=3$

t초 후의 정육면체의 겉넓이를 Scm²라 하면

$S=6(3+2t)^2$

시각 t에서의 정육면체의 겉넓이의 변화율은

$\frac{dS}{dt}=6\times2(3+2t)\times2=24(3+2t)$

따라서 $t=3$에서의 정육면체의 겉넓이의 변화율은

$24(3+2\times3)=216(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$

085 답 ②

t초 후의 직사각형의 가로의 길이는 $(12+2t)$cm, 세로의 길이는 $(12-t)$cm이므로 $0<t<12$

t초 후의 직사각형의 넓이를 Scm²라 하면

$S=(12+2t)(12-t)=-2t^2+12t+144$

직사각형의 넓이가 130cm²이면

$-2t^2+12t+144=130$, $t^2-6t-7=0$

$(t+1)(t-7)=0$ $\quad\therefore t=7$ ($\because 0<t<12$)

시각 t에서의 직사각형의 넓이의 변화율은

$\frac{dS}{dt}=-4t+12$

따라서 $t=7$에서의 직사각형의 넓이의 변화율은

$-4\times7+12=-16(\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$

086 답 ⑤

t초 후의 풍선의 반지름의 길이는 $(2+t)$cm이므로 풍선의 부피를 Vcm³라 하면

$V=\frac{4}{3}\pi(2+t)^3$

시각 t에서의 풍선의 부피의 변화율은

$\frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi\times3(2+t)^2=4\pi(2+t)^2$

따라서 $t=8$에서의 풍선의 부피의 변화율은

$4\pi(2+8)^2=400\pi(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$

087 답 18π cm³/s

t초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $(1+t)$cm, 높이는 $(10-2t)$cm이므로 $0<t<5$

원기둥의 높이가 6cm이면

$10-2t=6$ $\quad\therefore t=2$

t초 후의 원기둥의 부피를 Vcm³라 하면

$V=\pi(1+t)^2(10-2t)$

시각 t에서의 원기둥의 부피의 변화율은

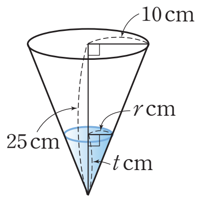
$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=\pi\{2(1+t)(10-2t)+(1+t)^2\times(-2)\}\\&=\pi\{2(10-2t)-2(1+t)\}(1+t)\\&=\pi(18-6t)(1+t)\end{aligned}$$

따라서 $t=2$에서의 원기둥의 부피의 변화율은

$\pi(18-6\times2)(1+2)=18\pi(\mathrm{cm}^3/\mathrm{s})$

088 답 ④

t초 후의 수면의 높이는 t cm이므로 수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면 오른쪽 그림에서



$10 : r = 25 : t \qquad \therefore r = \frac{2}{5}t$

수면의 높이가 10 cm이면 $t=10$

t초 후의 물의 부피를 V cm^{3}라 하면

$V = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times t = \frac{1}{3} \times \pi \left(\frac{2}{5}t\right)^2 \times t = \frac{4}{75}\pi t^3$

시각 t에서의 물의 부피의 변화율은

$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{25}\pi t^2$

따라서 $t=10$에서의 물의 부피의 변화율은

$\frac{4}{25}\pi \times 10^2 = 16\pi (\text{cm}^3/\text{s})$

실전유형으로 중단원 점검

120~121쪽

1 답 ⑤

$f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$이라 하면

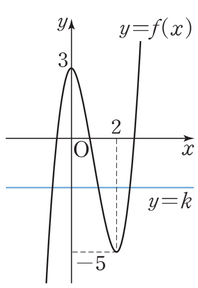
$f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$

$f'(x) = 0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	3 극대	↘	-5 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로



$-5 < k < 3$

따라서 정수 k는 $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$의 7개이다.

2 답 $-2 < k < 0$

$x^3 - 3x - k = 0$에서 $x^3 - 3x = k$ …… ⅰ

$f(x) = x^3 - 3x$라 하면

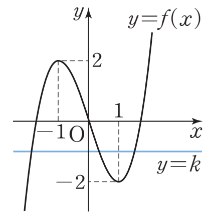
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2 극대	↘	-2 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. …… ⅱ



따라서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표가 두 개는 양수이고 한 개는 음수이려면

$-2 < k < 0$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ 주어진 방정식을 $f(x)=k$로 정리하기	10 %
ⅱ $y=f(x)$의 그래프 그리기	50 %
ⅲ k의 값의 범위 구하기	40 %

3 답 ③

주어진 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $x^3 - 5x^2 + 5x = x^2 - 4x + k$, 즉 $x^3 - 6x^2 + 9x = k$가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$라 하면

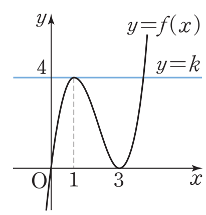
$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$

$f'(x) = 0$인 x의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	4 극대	↘	0 극소	↗

함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 방정식 $f(x)=k$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로



$k=4$ ($\because k>0$)

4 답 11

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 12x + a$라 하면

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 12x + 12 = 12(x+1)(x-1)^2$

$f'(x) = 0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	↘	$a-11$ 극소	↗	$a+5$	↗

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $a-11$이다. …… ⅰ

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이 성립하려면

$a - 11 \geq 0 \qquad \therefore a \geq 11$ …… ⅱ

따라서 a의 최솟값은 11이다. …… ⅲ

채점 기준

ⅰ 좌변의 최솟값을 a에 대한 식으로 나타내기	50 %
ⅱ a의 값의 범위 구하기	30 %
ⅲ a의 최솟값 구하기	20 %

5 답 ③

$x^4+4x^3-28x \geq -2x^4-4x+a$에서

$3x^4+4x^3-24x-a \geq 0$

$f(x)=3x^4+4x^3-24x-a$라 하면

$f'(x)=12x^3+12x^2-24=12(x-1)(x^2+2x+2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because$ x는 실수)

$0<x<2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$-a-17$ 극소	$\nearrow$	

$0<x<2$에서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $-a-17$이므로 $0<x<2$일 때, $f(x) \geq 0$이 성립하려면

$-a-17 \geq 0$ $\quad\therefore a \leq -17$

따라서 a의 최댓값은 -17이다.

6 답 ②

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-10t+4$

점 P가 원점을 지나는 순간의 위치는 0이므로

$t^3-5t^2+4t=0$, $t(t-1)(t-4)=0$

$\therefore t=1$ 또는 $t=4$ ($\because t>0$)

따라서 점 P가 출발 후 처음으로 다시 원점을 지나는 시각은 $t=1$이므로 구하는 속도는

$3\times1^2-10\times1+4=-3$

7 답 ④

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=-3t^2-t+19$

$a=\dfrac{dv}{dt}=-6t-1$

점 P의 속도가 5이면

$-3t^2-t+19=5$, $3t^2+t-14=0$

$(3t+7)(t-2)=0$ $\quad\therefore t=2$ ($\because t>0$)

따라서 $t=2$에서의 점 P의 가속도는

$-6\times2-1=-13$

8 답 18

시각 t에서의 점 P의 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-12t-15$

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-12$ $\quad\cdots\cdots$ ⅰ

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$3t^2-12t-15=0$, $(t+1)(t-5)=0$

$\therefore t=5$ ($\because t>0$) $\quad\cdots\cdots$ ⅱ

따라서 $t=5$에서의 점 P의 가속도는

$6\times5-12=18$ $\quad\cdots\cdots$ ⅲ

채점 기준

ⅰ 시각 t에서의 점 P의 속도와 가속도 구하기	40 %
ⅱ 운동 방향을 바꾸는 순간의 시각 구하기	40 %
ⅲ 운동 방향을 바꾸는 순간의 가속도 구하기	20 %

9 답 128 m

제동을 건 지 t초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=32-4t$

열차가 정지하는 순간의 속도는 0이므로

$32-4t=0$ $\quad\therefore t=8$

따라서 열차가 제동을 건 후 8초 동안 움직인 거리는

$32\times8-2\times8^2=128$(m)

10 답 ①

t초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$v=\dfrac{dx}{dt}=20-10t$

물체가 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로

$25+20t-5t^2=0$, $(t+1)(t-5)=0$

$\therefore t=5$ ($\because t>0$)

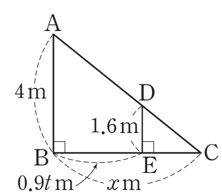
따라서 $t=5$에서의 물체의 속도는

$20-10\times5=-30$(m/s)

11 답 0.6 m/s

사람이 t초 동안 움직인 거리는 $0.9t$ m

t초 후 가로등 바로 밑에서 그림자 끝까지의 거리를 x m라 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle$ABC$\backsim\triangle$DEC이므로

$4 : 1.6=x : (x-0.9t)$

$2x=5(x-0.9t)$ $\quad\therefore x=1.5t$

t초 후의 그림자의 길이를 l m라 하면

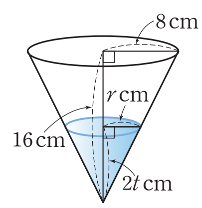
$l=\overline{CE}=x-0.9t=1.5t-0.9t=0.6t$

따라서 그림자의 길이의 변화율은

$\dfrac{dl}{dt}=0.6$(m/s)

12 답 18π cm³/s

t초 후의 수면의 높이는 $2t$ cm이므로 수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면 오른쪽 그림에서



$8 : r=16 : 2t$ $\quad\therefore r=t$

수면의 높이가 6 cm이면

$2t=6$ $\quad\therefore t=3$

t초 후의 물의 부피를 V cm³라 하면

$V=\dfrac{1}{3}\times\pi r^2\times2t=\dfrac{1}{3}\times\pi t^2\times2t=\dfrac{2}{3}\pi t^3$

시각 t에서의 물의 부피의 변화율은

$\dfrac{dV}{dt}=2\pi t^2$

따라서 $t=3$에서의 물의 부피의 변화율은

$2\pi\times3^2=18\pi$(cm³/s)

07 부정적분

개념유형

124쪽

001 답 $7x+C$

$(7x)'=7$이므로

$\int 7\,dx=7x+C$

002 답 x^2+C

$(x^2)'=2x$이므로

$\int 2x\,dx=x^2+C$

003 답 $-x^3+C$

$(-x^3)'=-3x^2$이므로

$\int(-3x^2)\,dx=-x^3+C$

004 답 x^4+C

$(x^4)'=4x^3$이므로

$\int 4x^3\,dx=x^4+C$

005 답 3

006 답 $f(x)=4x+1$

$f(x)=(2x^2+x+C)'=4x+1$

007 답 $f(x)=12x^2-5$

$f(x)=(4x^3-5x+C)'=12x^2-5$

008 답 $f(x)=4x^3+9x^2-2x$

$f(x)=(x^4+3x^3-x^2+C)'=4x^3+9x^2-2x$

실전유형

125쪽

009 답 ④

$f(x)=(4x^3+3x^2-2x+C)'$

$\quad=12x^2+6x-2$

010 답 ②

$f(x)=(x^3-x^2-x+C)'$

$\quad=3x^2-2x-1$

$\therefore f(1)=3-2-1=0$

011 답 5

$ax^3-6x-5=(2x^4+bx^2-5x+C)'$

$\quad=8x^3+2bx-5$

따라서 $a=8$, $-6=2b$이므로

$a=8$, $b=-3$

$\therefore a+b=5$

012 답 ⑤

$(x-1)f(x)=(x^4+4x^3-8x^2+C)'$

$\quad=4x^3+12x^2-16x$

$\quad=4x(x+4)(x-1)$

따라서 $f(x)=4x(x+4)$이므로

$f(2)=4\times2\times6=48$

013 답 ⑤

$f(x)=F'(x)=(2x^3+ax^2+4x)'$

$\quad=6x^2+2ax+4$

$f(1)=4$에서

$6+2a+4=4 \qquad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=6x^2-6x+4$이므로

$f(-1)=6+6+4=16$

014 답 2

$g(x)=\{x^2f(x)+C\}'$

$\quad=2xf(x)+x^2f'(x)$

$\therefore g(1)=2f(1)+f'(1)$

$\quad=2\times2+(-2)=2$

015 답 1

$f'(x)=x^3-x^2-3$이므로

$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=8-4-3=1$

개념유형

126~127쪽

016 답 $3x^2+x$

$\frac{d}{dx}\left\{\int f(x)\,dx\right\}=f(x)=3x^2+x$

017 답 $3x^2+x+C$

$\int\left\{\frac{d}{dx}f(x)\right\}dx=f(x)+C=3x^2+x+C$

018 답 x^5-x^2

$\frac{d}{dx}\left\{\int(x^5-x^2)\,dx\right\}=x^5-x^2$

019 답 x^5-x^2+C

$\int\left\{\frac{d}{dx}(x^5-x^2)\right\}dx=x^5-x^2+C$

020 답 7

$f(x)=4x+3$이므로

$f(1)=4+3=7$

021 답 3

$f(x)=-3x^3+5x+1$이므로

$f(1)=-3+5+1=3$

022 답 x^3+x^2-x, 2, x^3+x^2-x+2

023 답 $f(x)=x^2-5x+7$

$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^2-5x)\right\}dx$

$\quad=x^2-5x+C$

$f(2)=1$에서

$4-10+C=1 \qquad \therefore C=7$

$\therefore f(x)=x^2-5x+7$

024 답 $f(x)=2x^3-4x^2-x+3$

$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(2x^3-4x^2-x)\right\}dx$

$\quad=2x^3-4x^2-x+C$

$f(-1)=-2$에서

$-2-4+1+C=-2 \qquad \therefore C=3$

$\therefore f(x)=2x^3-4x^2-x+3$

실전유형

127쪽

025 답 ③

$\frac{d}{dx}\left\{\int(5x^2+ax-1)dx\right\}=bx^2+2x+c$에서

$5x^2+ax-1=bx^2+2x+c$

따라서 $a=2$, $b=5$, $c=-1$이므로

$a+b+c=6$

026 답 8

$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(8x^3-3x^2-2x)\right\}dx$

$\quad=8x^3-3x^2-2x+C$

$f(-1)=-4$에서

$-8-3+2+C=-4 \qquad \therefore C=5$

따라서 $f(x)=8x^3-3x^2-2x+5$이므로

$f(1)=8-3-2+5=8$

027 답 ④

$\frac{d}{dx}\int\{f(x)-x^2+4\}dx=\int\frac{d}{dx}\{2f(x)-3x+1\}dx$에서

$f(x)-x^2+4=2f(x)-3x+1+C$

$\therefore f(x)=-x^2+3x+3-C$

$f(1)=3$에서

$-1+3+3-C=3 \qquad \therefore C=2$

따라서 $f(x)=-x^2+3x+1$이므로

$f(0)=1$

개념유형

129~131쪽

028 답 $6x+C$

029 답 $\frac{1}{2}x^2+C$

$\int x\,dx=\frac{1}{1+1}x^{1+1}+C=\frac{1}{2}x^2+C$

030 답 $\frac{1}{5}x^5+C$

$\int x^4\,dx=\frac{1}{4+1}x^{4+1}+C=\frac{1}{5}x^5+C$

031 답 $\frac{1}{10}x^{10}+C$

$\int x^9\,dx=\frac{1}{9+1}x^{9+1}+C=\frac{1}{10}x^{10}+C$

032 답 $2x^6+C$

$\int 12x^5\,dx=12\int x^5\,dx=12\times\frac{1}{6}x^6+C=2x^6+C$

033 답 $2x^2+3x+C$

$\int(4x+3)dx=4\int x\,dx+3\int dx$

$\quad=4\times\frac{1}{2}x^2+3x+C$

$\quad=2x^2+3x+C$

034 답 $\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3+7x+C$

$\int(2x^3-x^2+7)dx=2\int x^3\,dx-\int x^2\,dx+7\int dx$

$\quad=2\times\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+7x+C$

$\quad=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{3}x^3+7x+C$

035 답 $\frac{3}{4}x^8-\frac{1}{2}x^6+4x^2+C$

$$\int(6x^7-3x^5+8x)\,dx=6\int x^7\,dx-3\int x^5\,dx+8\int x\,dx$$
$$=6\times\frac{1}{8}x^8-3\times\frac{1}{6}x^6+8\times\frac{1}{2}x^2+C$$
$$=\frac{3}{4}x^8-\frac{1}{2}x^6+4x^2+C$$

036 답 x, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$

037 답 $2x^4-4x^3+3x^2-x+C$

$$\int(2x-1)^3\,dx=\int(8x^3-12x^2+6x-1)\,dx$$
$$=2x^4-4x^3+3x^2-x+C$$

038 답 $\frac{1}{4}x^4+x+C$

$$\int(x+1)(x^2-x+1)\,dx=\int(x^3+1)\,dx$$
$$=\frac{1}{4}x^4+x+C$$

039 답 $\frac{1}{2}x^2-2x+C$

$$\int\frac{x^2-4}{x+2}\,dx=\int\frac{(x+2)(x-2)}{x+2}\,dx$$
$$=\int(x-2)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2-2x+C$$

040 답 x^2+x+C

$$\int\frac{2x^2-x-1}{x-1}\,dx=\int\frac{(x-1)(2x+1)}{x-1}\,dx$$
$$=\int(2x+1)\,dx$$
$$=x^2+x+C$$

041 답 $2x$, $3x$, $\frac{3}{2}$, 5

042 답 $2x^3+2x^2-4x+C$

$$\int(6x^2-5)\,dx+\int(4x+1)\,dx=\int\{(6x^2-5)+(4x+1)\}\,dx$$
$$=\int(6x^2+4x-4)\,dx$$
$$=2x^3+2x^2-4x+C$$

043 답 x^3+x^2+x+C

$$\int(x^2+3x-1)\,dx+\int(2x^2-x+2)\,dx$$
$$=\int\{(x^2+3x-1)+(2x^2-x+2)\}\,dx$$
$$=\int(3x^2+2x+1)\,dx$$
$$=x^3+x^2+x+C$$

044 답 x^3-2x^2+3x+C

$$\int(4x^2+x+3)\,dx-\int(x^2+5x)\,dx$$
$$=\int\{(4x^2+x+3)-(x^2+5x)\}\,dx$$
$$=\int(3x^2-4x+3)\,dx$$
$$=x^3-2x^2+3x+C$$

045 답 $-\frac{1}{2}x^4+4x+C$

$$\int(x^3-2x^2+8)\,dx-\int(3x^3-2x^2+4)\,dx$$
$$=\int\{(x^3-2x^2+8)-(3x^3-2x^2+4)\}\,dx$$
$$=\int(-2x^3+4)\,dx$$
$$=-\frac{1}{2}x^4+4x+C$$

046 답 $4x^2+C$

$$\int(x+2)^2\,dx-\int(x-2)^2\,dx$$
$$=\int(x^2+4x+4)\,dx-\int(x^2-4x+4)\,dx$$
$$=\int\{(x^2+4x+4)-(x^2-4x+4)\}\,dx$$
$$=\int 8x\,dx$$
$$=4x^2+C$$

047 답 $6x^3+2x+C$

$$\int(3x+1)^2\,dx+\int(3x-1)^2\,dx$$
$$=\int(9x^2+6x+1)\,dx+\int(9x^2-6x+1)\,dx$$
$$=\int\{(9x^2+6x+1)+(9x^2-6x+1)\}\,dx$$
$$=\int(18x^2+2)\,dx$$
$$=6x^3+2x+C$$

048 답 $2x^3+2x+C$

$$\int(x+1)^3\,dx-\int(x-1)^3\,dx$$
$$=\int(x^3+3x^2+3x+1)\,dx-\int(x^3-3x^2+3x-1)\,dx$$
$$=\int\{(x^3+3x^2+3x+1)-(x^3-3x^2+3x-1)\}\,dx$$
$$=\int(6x^2+2)\,dx$$
$$=2x^3+2x+C$$

049 답 $\frac{1}{2}x^2+3x+C$

$$\int \frac{x^2}{x-3}dx-\int \frac{9}{x-3}dx=\int \frac{x^2-9}{x-3}dx$$
$$=\int \frac{(x+3)(x-3)}{x-3}dx$$
$$=\int (x+3)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+3x+C$$

050 답 $\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$

$$\int \frac{x^3}{x+1}dx+\int \frac{1}{x+1}dx=\int \frac{x^3+1}{x+1}dx$$
$$=\int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx$$
$$=\int (x^2-x+1)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C$$

051 답 x^4+3x^2, 1, x^4+3x^2+1

052 답 $f(x)=x^3+2x^2-x+2$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (3x^2+4x-1)\,dx$$
$$=x^3+2x^2-x+C$$

$f(0)=2$에서 $C=2$

$\therefore f(x)=x^3+2x^2-x+2$

053 답 $f(x)=2x^3-4x^2-5x+9$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (6x^2-8x-5)\,dx$$
$$=2x^3-4x^2-5x+C$$

$f(2)=-1$에서

$16-16-10+C=-1 \qquad \therefore C=9$

$\therefore f(x)=2x^3-4x^2-5x+9$

054 답 $f(x)=x^3-x^2-x+1$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (3x+1)(x-1)\,dx$$
$$=\int (3x^2-2x-1)\,dx$$
$$=x^3-x^2-x+C$$

$f(1)=0$에서

$1-1-1+C=0 \qquad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=x^3-x^2-x+1$

055 답 $f(x)=2x^4-x+3$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (2x-1)(4x^2+2x+1)\,dx$$
$$=\int (8x^3-1)\,dx$$
$$=2x^4-x+C$$

$f(-1)=6$에서

$2+1+C=6 \qquad \therefore C=3$

$\therefore f(x)=2x^4-x+3$

056 답 -4, $-4x$, 5, $-4x+5$

057 답 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+1$

$F(x)=xf(x)-x^3+3x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-3x^2+6x$

$xf'(x)=3x^2-6x=x(3x-6)$

$\therefore f'(x)=3x-6$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (3x-6)\,dx$$
$$=\frac{3}{2}x^2-6x+C$$

$f(4)=1$에서

$24-24+C=1 \qquad \therefore C=1$

$\therefore f(x)=\frac{3}{2}x^2-6x+1$

058 답 $f(x)=3x^2-2x-5$

$F(x)=xf(x)-2x^3+x^2+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-6x^2+2x$

$xf'(x)=6x^2-2x=x(6x-2)$

$\therefore f'(x)=6x-2$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int (6x-2)\,dx$$
$$=3x^2-2x+C$$

$f(2)=3$에서

$12-4+C=3 \qquad \therefore C=-5$

$\therefore f(x)=3x^2-2x-5$

실전유형

132~134쪽

059 답 -4

$$f(x)=\int (5x^4-4x^3+3x^2-2x+1)\,dx$$
$$=x^5-x^4+x^3-x^2+x+C$$

$f(1)=2$에서

$1-1+1-1+1+C=2 \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=x^5-x^4+x^3-x^2+x+1$이므로

$f(-1)=-1-1-1-1-1+1=-4$

060 답 $\frac{7}{5}$

$f(x)=\int(x-1)(x+1)(x^2+1)\,dx$

$=\int(x^4-1)\,dx$

$=\frac{1}{5}x^5-x+C$

$f(0)=-3$에서 $C=-3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{5}x^5-x-3$이므로

$f(2)=\frac{32}{5}-2-3=\frac{7}{5}$

061 답 ④

$f(x)=\int\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)dx-\int\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)dx$

$=\int\left\{\left(\frac{1}{2}x^3+2x+1\right)-\left(\frac{1}{2}x^3+x\right)\right\}dx$

$=\int(x+1)\,dx$

$=\frac{1}{2}x^2+x+C$

$f(0)=1$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x+1$이므로

$f(4)=8+4+1=13$

062 답 ⑤

$f(x)=\int\frac{x^3}{x-1}dx+\int\frac{1}{1-x}dx$

$=\int\frac{x^3}{x-1}dx-\int\frac{1}{x-1}dx$

$=\int\frac{x^3-1}{x-1}dx$

$=\int\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx$

$=\int(x^2+x+1)\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

$f(0)=-1$에서 $C=-1$

따라서 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x-1$이므로

$f(-2)=-\frac{8}{3}+2-2-1=-\frac{11}{3}$

063 답 33

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(9x^2+4x)\,dx$

$=3x^3+2x^2+C$

$f(1)=6$에서

$3+2+C=6\qquad\therefore C=1$

따라서 $f(x)=3x^3+2x^2+1$이므로

$f(2)=24+8+1=33$

064 답 65

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3ax^2+5)\,dx$

$=ax^3+5x+C$

$f(0)=-4$에서 $C=-4$

$f(1)=3$에서

$a+5+C=3,\ a+1=3\qquad\therefore a=2$

따라서 $f(x)=2x^3+5x-4$이므로

$f(3)=54+15-4=65$

065 답 ②

$f'(x)=3x^2-8x-2$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-8x-2)\,dx$

$=x^3-4x^2-2x+C$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 2)$를 지나므로 $f(0)=2$에서

$C=2$

따라서 $f(x)=x^3-4x^2-2x+2$이므로

$f(-1)=-1-4+2+2=-1$

066 답 ①

$\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}\times3$

$=3f'(x)$

따라서 $3f'(x)=6x^2-3x-9$이므로

$f'(x)=2x^2-x-3$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2x^2-x-3)\,dx$

$=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-3x+C$

$f(0)=1$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-3x+1$이므로

$f(3)=18-\frac{9}{2}-9+1=\frac{11}{2}$

067 답 8

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1})\,dx$

$=x+x^2+x^3+\cdots+x^n+C$

$f(0)=-1$에서 $C=-1$

$f(1)=7$에서

$\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{개}}+C=7$

$n-1=7\qquad\therefore n=8$

068 답 ②

$F(x)=xf(x)-3x^4-2x^2+1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-12x^3-4x$

$xf'(x)=12x^3+4x=x(12x^2+4)$

$\therefore f'(x)=12x^2+4$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(12x^2+4)\,dx$

$=4x^3+4x+C$

$f(0)=2$에서 $C=2$

따라서 $f(x)=4x^3+4x+2$이므로

$f(-1)=-4-4+2=-6$

069 답 1

$xf(x)-F(x)=2x^3-6x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf'(x)-f(x)=6x^2-12x$

$xf'(x)=6x^2-12x=x(6x-12)$

$\therefore\ f'(x)=6x-12$

$\therefore\ f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x-12)\,dx$

$=3x^2-12x+C$

$f(1)=4$에서

$3-12+C=4\qquad\therefore\ C=13$

$\therefore\ f(x)=3x^2-12x+13$

$=3(x-2)^2+1$

따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 1이다.

070 답 10

$F(x)+\int xf(x)\,dx=2x^3+4x^2+2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+xf(x)=6x^2+8x+2$

$(x+1)f(x)=2(x+1)(3x+1)$

$\therefore\ f(x)=2(3x+1)=6x+2$

$\therefore\ F(x)=\int f(x)\,dx=\int(6x+2)\,dx$

$=3x^2+2x+C$

$F(0)=5$에서 $C=5$

따라서 $F(x)=3x^2+2x+5$이므로

$F(1)=3+2+5=10$

071 답 7

(i) $x\geq1$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(2x+1)\,dx=x^2+x+C_1$

(ii) $x<1$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int 3x^2\,dx=x^3+C_2$

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+C_1 & (x\geq1)\\ x^3+C_2 & (x<1)\end{cases}$

$f(-1)=1$에서

$-1+C_2=1\qquad\therefore\ C_2=2$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to1-}f(x)=f(1)$에서

$1+C_2=1+1+C_1,\ 3=2+C_1\qquad\therefore\ C_1=1$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^2+x+1 & (x\geq1)\\ x^3+2 & (x<1)\end{cases}$이므로

$f(2)=4+2+1=7$

072 답 ①

$f'(x)=\begin{cases}3x^2+x & (x\geq0)\\ 3x^2-x & (x<0)\end{cases}$

(i) $x\geq0$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2+x)\,dx=x^3+\frac{1}{2}x^2+C_1$

(ii) $x<0$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-x)\,dx=x^3-\frac{1}{2}x^2+C_2$

(i), (ii)에서 $f(x)=\begin{cases}x^3+\frac{1}{2}x^2+C_1 & (x\geq0)\\ x^3-\frac{1}{2}x^2+C_2 & (x<0)\end{cases}$

$f(2)=5$에서

$8+2+C_1=5\qquad\therefore\ C_1=-5$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x\to0-}f(x)=f(0)$에서

$C_2=C_1\qquad\therefore\ C_2=-5$

따라서 $f(x)=\begin{cases}x^3+\frac{1}{2}x^2-5 & (x\geq0)\\ x^3-\frac{1}{2}x^2-5 & (x<0)\end{cases}$이므로

$f(-2)=-8-2-5=-15$

073 답 9

(i) $x<0$일 때

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int(-2x)\,dx=-x^2+C_1$

(ii) $x\geq0$일 때

$F(x)=\int f(x)\,dx=\int k(2x-x^2)\,dx=k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_2$

(i), (ii)에서 $F(x)=\begin{cases}-x^2+C_1 & (x<0)\\ k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_2 & (x\geq0)\end{cases}$

함수 $F(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서 연속이다.

따라서 $\lim_{x\to0-}F(x)=F(0)$에서 $C_1=C_2$

$F(2)-F(-3)=21$에서

$k\left(4-\frac{8}{3}\right)+C_2-(-9+C_1)=21$

$\frac{4}{3}k+9=21\qquad\therefore\ k=9$

074 답 −14

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-12)\,dx$

$=x^3-12x+C$

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$이므로 $f'(x)=0$인 x의 값은

$x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극대이고 극댓값이 18이므로 $f(-2)=18$에서

$-8+24+C=18 \qquad \therefore C=2$

$\therefore f(x)=x^3-12x+2$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이므로 극솟값은

$f(2)=8-24+2=-14$

075 답 ②

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int(3ax^2-12ax+9a)\,dx$$
$$=ax^3-6ax^2+9ax+C$$

$f'(x)=3ax^2-12ax+9a=3a(x-1)(x-3)$이므로 $f'(x)=0$인 x의 값은

$x=1$ 또는 $x=3$

$a<0$이므로 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극대이고 극댓값이 3이므로 $f(3)=3$에서

$27a-54a+27a+C=3 \qquad \therefore C=3$

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극소이고 극솟값이 -1이므로 $f(1)=-1$에서

$a-6a+9a+C=-1$

$4a+3=-1 \qquad \therefore a=-1$

따라서 $f(x)=-x^3+6x^2-9x+3$이므로

$f(2)=-8+24-18+3=1$

076 답 $f(x)=x^3-6x^2+20$

$f(x)$가 삼차함수이면 $f'(x)$는 이차함수이고 주어진 그래프에서 $f'(0)=f'(4)=0$이므로 $f'(x)=ax(x-4)\ (a>0)$라 하면

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int ax(x-4)\,dx$$
$$=\int(ax^2-4ax)\,dx$$
$$=\frac{1}{3}ax^3-2ax^2+C$$

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이고 극댓값이 20이므로 $f(0)=20$에서

$C=20$

함수 $f(x)$는 $x=4$에서 극소이고 극솟값이 -12이므로 $f(4)=-12$에서

$\frac{64}{3}a-32a+C=-12$

$-\frac{32}{3}a+20=-12 \qquad \therefore a=3$

$\therefore f(x)=x^3-6x^2+20$

실전유형으로 중단원 점검

135~136쪽

1 답 ①

$$f(x)=\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-4x+C\right)'$$
$$=x^2+x-4$$

$\therefore f(-1)=1-1-4=-4$

2 답 9

$$12x^3+ax^2+7=(bx^4-2x^3+7x+C)'$$
$$=4bx^3-6x^2+7$$

따라서 $12=4b$, $a=-6$이므로

$a=-6$, $b=3$

$\therefore b-a=9$

3 답 ④

$\frac{d}{dx}\left\{\int(ax^3+bx^2+5)\,dx\right\}=2x^3-9x^2+c$에서

$ax^3+bx^2+5=2x^3-9x^2+c$

따라서 $a=2$, $b=-9$, $c=5$이므로

$a+b+c=-2$

4 답 ⑤

$$f(x)=\int\left\{\frac{d}{dx}(x^3+2x^2-3x)\right\}dx$$
$$=x^3+2x^2-3x+C$$

$f(-2)=7$에서

$-8+8+6+C=7 \qquad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=x^3+2x^2-3x+1$이므로

$f(3)=27+18-9+1=37$

5 답 ③

$$f(x)=\int\frac{x^2+x}{x+3}dx-\int\frac{6}{x+3}dx$$
$$=\int\frac{x^2+x-6}{x+3}dx$$
$$=\int\frac{(x+3)(x-2)}{x+3}dx$$
$$=\int(x-2)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2-2x+C$$

$f(2)=1$에서

$2-4+C=1 \qquad \therefore C=3$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+3$이므로

$f(4)=8-8+3=3$

6 답 6

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(4x^3+6x^2-5)\,dx$$
$$=x^4+2x^3-5x+C \qquad \cdots\cdots ⓘ$$

$f(1)=0$에서

$1+2-5+C=0 \qquad \therefore C=2$ …… ⅱ

따라서 $f(x)=x^4+2x^3-5x+2$이므로

$f(-1)=1-2+5+2=6$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타내기	50 %
ⅱ 적분상수 구하기	30 %
ⅲ $f(-1)$의 값 구하기	20 %

7 답 $f(x)=x^3-2x^2+x-1$

$f'(x)=3x^2-4x+1$이므로

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-4x+1)\,dx$

$=x^3-2x^2+x+C$ …… ⅰ

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1,\ -1)$을 지나므로 $f(1)=-1$에서

$1-2+1+C=-1 \qquad \therefore C=-1$ …… ⅱ

$\therefore f(x)=x^3-2x^2+x-1$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타내기	60 %
ⅱ 적분상수 구하기	30 %
ⅲ $f(x)$ 구하기	10 %

8 답 ④

$F(x)=(x+1)f(x)-2x^3+6x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+1)f'(x)-6x^2+6$

$(x+1)f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$

$\therefore f'(x)=6(x-1)=6x-6$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x-6)\,dx$

$=3x^2-6x+C$

$f(0)=-1$에서 $C=-1$

따라서 $f(x)=3x^2-6x-1$이므로

$f(3)=27-18-1=8$

9 답 -15

(ⅰ) $x\ge-1$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(4x+5)\,dx=2x^2+5x+C_1$

(ⅱ) $x<-1$일 때

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(6x^2-5)\,dx=2x^3-5x+C_2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $f(x)=\begin{cases}2x^2+5x+C_1 & (x\ge-1)\\ 2x^3-5x+C_2 & (x<-1)\end{cases}$ …… ⅰ

$f(1)=4$에서

$2+5+C_1=4 \qquad \therefore C_1=-3$

함수 $f(x)$가 모든 실수 x에서 연속이면 $x=-1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to-1-}f(x)=f(-1)$에서

$-2+5+C_2=2-5+C_1$

$3+C_2=-6 \qquad \therefore C_2=-9$ …… ⅱ

따라서 $f(x)=\begin{cases}2x^2+5x-3 & (x\ge-1)\\ 2x^3-5x-9 & (x<-1)\end{cases}$이므로

$f(-2)=-16+10-9=-15$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ $f(x)$를 적분상수를 포함한 식으로 나타내기	40 %
ⅱ 적분상수 구하기	40 %
ⅲ $f(-2)$의 값 구하기	20 %

10 답 ①

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(x^2-x-2)\,dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+C$

$f'(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)$이므로 $f'(x)=0$인 x의 값은

$x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고 극솟값이 -2이므로 $f(2)=-2$에서

$\frac{8}{3}-2-4+C=-2 \qquad \therefore C=\frac{4}{3}$

$\therefore f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{4}{3}$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 극댓값은

$f(-1)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2+\frac{4}{3}=\frac{5}{2}$

11 답 ④

$f(x)$가 삼차함수이면 $f'(x)$는 이차함수이고 주어진 그래프에서 $f'(0)=f'(2)=0$이므로 $f'(x)=ax(x-2)\ (a<0)$라 하면

$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int ax(x-2)\,dx$

$=\int(ax^2-2ax)\,dx$

$=\frac{1}{3}ax^3-ax^2+C$

주어진 그래프에서 $f'(x)$의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고 극솟값이 1이므로 $f(0)=1$에서

$C=1$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고 극댓값이 5이므로 $f(2)=5$에서

$\frac{8}{3}a-4a+C=5$

$-\frac{4}{3}a+1=5 \qquad \therefore a=-3$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2+1$이므로

$f(1)=-1+3+1=3$

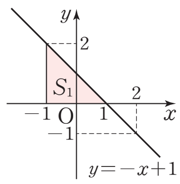
08 정적분

개념유형

138~140쪽

001 답 2

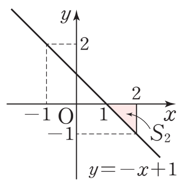
직선 $y=-x+1$과 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$\int_{-1}^{1}(-x+1)\,dx=S_1$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times2=2$$

002 답 $-\frac{1}{2}$

직선 $y=-x+1$과 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면



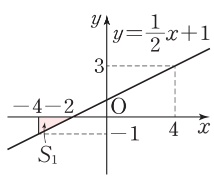
$$\int_{1}^{2}(-x+1)\,dx=-S_2$$
$$=-\frac{1}{2}\times1\times1=-\frac{1}{2}$$

003 답 $\frac{3}{2}$

$$\int_{-1}^{2}(-x+1)\,dx=S_1-S_2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

004 답 -1

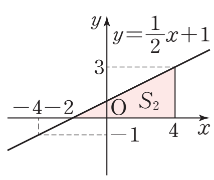
직선 $y=\frac{1}{2}x+1$과 x축 및 두 직선 $x=-4$, $x=-2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1이라 하면



$$\int_{-4}^{-2}\left(\frac{1}{2}x+1\right)dx=-S_1$$
$$=-\frac{1}{2}\times2\times1=-1$$

005 답 9

직선 $y=\frac{1}{2}x+1$과 x축 및 두 직선 $x=-2$, $x=4$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2라 하면



$$\int_{-2}^{4}\left(\frac{1}{2}x+1\right)dx=S_2$$
$$=\frac{1}{2}\times6\times3=9$$

006 답 8

$$\int_{-4}^{4}\left(\frac{1}{2}x+1\right)dx=-S_1+S_2=-1+9=8$$

007 답 $9x+4$

008 답 $2x^2-3x+7$

009 답 $(x-2)(x+3)$

010 답 $-5x+2$

011 답 $4x^3-x+6$

012 답 $(x-2)(x^2+x+1)$

013 답 6

$$\int_{2}^{5}2\,dx=\Big[2x\Big]_{2}^{5}=10-4=6$$

014 답 14

$$\int_{1}^{2}6x^2\,dx=\Big[2x^3\Big]_{1}^{2}=16-2=14$$

015 답 6

$$\int_{1}^{3}(2x-1)\,dx=\Big[x^2-x\Big]_{1}^{3}$$
$$=(9-3)-(1-1)=6$$

016 답 22

$$\int_{2}^{4}(3x+2)\,dx=\left[\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{2}^{4}$$
$$=(24+8)-(6+4)=22$$

017 답 9

$$\int_{0}^{3}(x^2-2x+3)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+3x\right]_{0}^{3}$$
$$=9-9+9=9$$

018 답 8

$$\int_{-3}^{1}(3x^2+4x-1)\,dx=\Big[x^3+2x^2-x\Big]_{-3}^{1}$$
$$=(1+2-1)-(-27+18+3)$$
$$=8$$

019 답 12

$$\int_{-1}^{2}(4x^3-2x)\,dx=\Big[x^4-x^2\Big]_{-1}^{2}$$
$$=(16-4)-(1-1)=12$$

020 답 $-\frac{19}{4}$

$$\int_{0}^{1}(x^3+6x^2-7)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4+2x^3-7x\right]_{0}^{1}$$
$$=\frac{1}{4}+2-7=-\frac{19}{4}$$

021 답 $\frac{3}{4}$

$$\int_{-1}^{2}(x-1)(x^2+x+1)\,dx=\int_{-1}^{2}(x^3-1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x\right]_{-1}^{2}$$
$$=(4-2)-\left(\frac{1}{4}+1\right)=\frac{3}{4}$$

022 답 $\frac{9}{2}$

$$\int_{1}^{4}\frac{y^2-1}{y+1}\,dy=\int_{1}^{4}\frac{(y+1)(y-1)}{y+1}\,dy$$
$$=\int_{1}^{4}(y-1)\,dy=\left[\frac{1}{2}y^2-y\right]_{1}^{4}$$
$$=(8-4)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{9}{2}$$

023 답 0

024 답 0

025 답 -21

$$\int_{1}^{-2}(6x^2-2x)\,dx=-\int_{-2}^{1}(6x^2-2x)\,dx$$
$$=-\left[2x^3-x^2\right]_{-2}^{1}$$
$$=-\{(2-1)-(-16-4)\}=-21$$

026 답 -4

$$\int_{1}^{0}(5x^4-3x^2+8x)\,dx=-\int_{0}^{1}(5x^4-3x^2+8x)\,dx$$
$$=-\left[x^5-x^3+4x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=-(1-1+4)=-4$$

실전유형 141쪽

027 답 16

$$\int_{-3}^{1}(x+1)(3x-1)\,dx+\int_{2}^{2}(2x^3+x)\,dx$$
$$=\int_{-3}^{1}(3x^2+2x-1)\,dx+\int_{2}^{2}(2x^3+x)\,dx$$
$$=\left[x^3+x^2-x\right]_{-3}^{1}+0$$
$$=(1+1-1)-(-27+9+3)=16$$

028 답 ②

$$\int_{-1}^{2}(6x-a)\,dx=\left[3x^2-ax\right]_{-1}^{2}$$
$$=(12-2a)-(3+a)$$
$$=9-3a$$

따라서 $9-3a=3$이므로 $a=2$

029 답 ①

$$\int_{0}^{a}(3x^2-4)\,dx=\left[x^3-4x\right]_{0}^{a}=a^3-4a$$

따라서 $a^3-4a=0$이므로

$a(a+2)(a-2)=0 \qquad \therefore a=2\ (\because a>0)$

030 답 ④

$$\int_{-2}^{1}(4x^3+4kx-5)\,dx=\left[x^4+2kx^2-5x\right]_{-2}^{1}$$
$$=(1+2k-5)-(16+8k+10)$$
$$=-6k-30$$

즉, $-6k-30<0$이므로 $k>-5$

따라서 정수 k의 최솟값은 -4이다.

031 답 10

$x^2-2x-1=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=-1$

$$\therefore \int_{-\alpha}^{\beta}(3x^2-2)\,dx=\left[x^3-2x\right]_{-\alpha}^{\beta}$$
$$=(\beta^3-2\beta)-(-\alpha^3+2\alpha)$$
$$=\alpha^3+\beta^3-2(\alpha+\beta)$$
$$=\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\}-2(\alpha+\beta)$$
$$=2^3-3\times(-1)\times2-2\times2$$
$$=10$$

032 답 ③

함수 $f(x)$는 $f'(x)$의 부정적분이므로

$$\int_{1}^{2}f'(x)\,dx=\left[f(x)\right]_{1}^{2}=f(2)-f(1)$$

$f(x)-f(1)=x^3+4x^2-5x$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)-f(1)=8+16-10$

$\therefore f(2)-f(1)=14$

$\therefore \int_{1}^{2}f'(x)\,dx=14$

개념유형 143~144쪽

033 답 $3x-2,\ 8x,\ 4x^2,\ 64$

034 답 12

$$\int_{-2}^{1}(3x^2+x-6)\,dx+\int_{-2}^{1}(x+8)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}\{(3x^2+x-6)+(x+8)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(3x^2+2x+2)\,dx$$
$$=\left[x^3+x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$
$$=(1+1+2)-(-8+4-4)=12$$

035 답 **22**

$$\int_1^3 (2x^2-5x+1)\,dx+\int_1^3 (x^2+5x-3)\,dx$$
$$=\int_1^3 \{(2x^2-5x+1)+(x^2+5x-3)\}\,dx$$
$$=\int_1^3 (3x^2-2)\,dx$$
$$=\Big[x^3-2x\Big]_1^3$$
$$=(27-6)-(1-2)=22$$

036 답 **42**

$$\int_0^3 (x+7)\,dx-\int_0^3 (x-7)\,dx=\int_0^3 \{(x+7)-(x-7)\}\,dx$$
$$=\int_0^3 14\,dx$$
$$=\Big[14x\Big]_0^3=42$$

037 답 **15**

$$\int_{-1}^2 (6x^2-x+1)\,dx-\int_{-1}^2 (x+1)\,dx$$
$$=\int_{-1}^2 \{(6x^2-x+1)-(x+1)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^2 (6x^2-2x)\,dx$$
$$=\Big[2x^3-x^2\Big]_{-1}^2$$
$$=(16-4)-(-2-1)=15$$

038 답 **13**

$$\int_1^2 (3x^3+4)\,dx-\int_1^2 (-x^3+4x)\,dx$$
$$=\int_1^2 \{(3x^3+4)-(-x^3+4x)\}\,dx$$
$$=\int_1^2 (4x^3-4x+4)\,dx$$
$$=\Big[x^4-2x^2+4x\Big]_1^2$$
$$=(16-8+8)-(1-2+4)=13$$

039 답 **2, 2, $3x^2$, x^3, 2, 7**

040 답 **20**

$$\int_0^2 (3-4x)\,dx-\int_2^0 (6x+5)\,dx$$
$$=\int_0^2 (3-4x)\,dx+\int_0^2 (6x+5)\,dx$$
$$=\int_0^2 \{(3-4x)+(6x+5)\}\,dx$$
$$=\int_0^2 (2x+8)\,dx$$
$$=\Big[x^2+8x\Big]_0^2$$
$$=4+16=20$$

041 답 $\frac{40}{3}$

$$\int_{-1}^3 (2x^2-3x+4)\,dx+\int_3^{-1} (x^2-3x+3)\,dx$$
$$=\int_{-1}^3 (2x^2-3x+4)\,dx-\int_{-1}^3 (x^2-3x+3)\,dx$$
$$=\int_{-1}^3 \{(2x^2-3x+4)-(x^2-3x+3)\}\,dx$$
$$=\int_{-1}^3 (x^2+1)\,dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3+x\Big]_{-1}^3$$
$$=(9+3)-\left(-\frac{1}{3}-1\right)=\frac{40}{3}$$

042 답 $-\frac{63}{4}$

$$\int_{-2}^1 (2x^3-x-6)\,dx+\int_1^{-2} (x^3+5x+1)\,dx$$
$$=\int_{-2}^1 (2x^3-x-6)\,dx-\int_{-2}^1 (x^3+5x+1)\,dx$$
$$=\int_{-2}^1 \{(2x^3-x-6)-(x^3+5x+1)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^1 (x^3-6x-7)\,dx$$
$$=\Big[\frac{1}{4}x^4-3x^2-7x\Big]_{-2}^1$$
$$=\left(\frac{1}{4}-3-7\right)-(4-12+14)=-\frac{63}{4}$$

043 답 **3, 3, 12**

044 답 **21**

$$\int_0^{-1} (x^2+4)\,dx+\int_{-1}^3 (x^2+4)\,dx=\int_0^3 (x^2+4)\,dx$$
$$=\Big[\frac{1}{3}x^3+4x\Big]_0^3$$
$$=9+12=21$$

045 답 **−16**

$$\int_{-2}^1 (y^3-3y^2)\,dy+\int_1^2 (y^3-3y^2)\,dy=\int_{-2}^2 (y^3-3y^2)\,dy$$
$$=\Big[\frac{1}{4}y^4-y^3\Big]_{-2}^2$$
$$=(4-8)-(4+8)$$
$$=-16$$

046 답 **30**

$$\int_{-2}^{-1} (3x^2-1)\,dx-\int_3^{-1} (3x^2-1)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{-1} (3x^2-1)\,dx+\int_{-1}^3 (3x^2-1)\,dx$$
$$=\int_{-2}^3 (3x^2-1)\,dx$$
$$=\Big[x^3-x\Big]_{-2}^3$$
$$=(27-3)-(-8+2)=30$$

047 답 -12

$\int_2^0 (4x^3-4x+1)\,dx-\int_{-1}^0 (4x^3-4x+1)\,dx$

$=\int_2^0 (4x^3-4x+1)\,dx+\int_0^{-1} (4x^3-4x+1)\,dx$

$=\int_2^{-1} (4x^3-4x+1)\,dx$

$=\Big[x^4-2x^2+x\Big]_2^{-1}$

$=(1-2-1)-(16-8+2)=-12$

실전유형 144~146쪽

048 답 ④

$\int_1^2 (3x^2+x+2)\,dx-3\int_1^2 (x^2-x)\,dx$

$=\int_1^2 \{(3x^2+x+2)-3(x^2-x)\}\,dx$

$=\int_1^2 (4x+2)\,dx$

$=\Big[2x^2+2x\Big]_1^2$

$=(8+4)-(2+2)=8$

049 답 ③

$\int_{-1}^2 (x+1)^3dx+\int_{-1}^2 (x-1)^3dx$

$=\int_{-1}^2 \{(x^3+3x^2+3x+1)+(x^3-3x^2+3x-1)\}\,dx$

$=\int_{-1}^2 (2x^3+6x)\,dx$

$=\Big[\frac{1}{2}x^4+3x^2\Big]_{-1}^2$

$=(8+12)-\Big(\frac{1}{2}+3\Big)=\frac{33}{2}$

050 답 ⑤

$\int_{-2}^4 \frac{x^2+6}{x+3}dx-\int_4^{-2} \frac{5x}{x+3}dx=\int_{-2}^4 \frac{x^2+6}{x+3}dx+\int_{-2}^4 \frac{5x}{x+3}dx$

$=\int_{-2}^4 \frac{x^2+5x+6}{x+3}dx$

$=\int_{-2}^4 \frac{(x+3)(x+2)}{x+3}dx$

$=\int_{-2}^4 (x+2)\,dx$

$=\Big[\frac{1}{2}x^2+2x\Big]_{-2}^4$

$=(8+8)-(2-4)=18$

051 답 ⑤

$5\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 (5x+f(x))\,dx$

$=\int_0^1 \{5f(x)-(5x+f(x))\}\,dx$

$=\int_0^1 \{4f(x)-5x\}\,dx$

$=\int_0^1 \{4(x^2+x)-5x\}\,dx$

$=\int_0^1 (4x^2-x)\,dx$

$=\Big[\frac{4}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1$

$=\frac{4}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$

052 답 -3

$\int_0^3 (x^2+7x+k)\,dx+\int_0^3 (3x-x^2)\,dx$

$=\int_0^3 \{(x^2+7x+k)+(3x-x^2)\}\,dx$

$=\int_0^3 (10x+k)\,dx$

$=\Big[5x^2+kx\Big]_0^3$

$=45+3k$

따라서 $45+3k=36$이므로 $k=-3$

053 답 2

$\int_{-5}^1 \{2f(x)+g(x)\}\,dx=5$ …… ㉠

$\int_{-5}^1 \{f(x)-g(x)\}\,dx=4$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$\int_{-5}^1 [\{2f(x)+g(x)\}+\{f(x)-g(x)\}]dx=9$

$3\int_{-5}^1 f(x)\,dx=9 \quad \therefore \int_{-5}^1 f(x)\,dx=3$

이때 ㉡에서 $\int_{-5}^1 f(x)\,dx-\int_{-5}^1 g(x)\,dx=4$이므로

$3-\int_{-5}^1 g(x)\,dx=4 \quad \therefore \int_{-5}^1 g(x)\,dx=-1$

$\therefore \int_{-5}^1 \{f(x)+g(x)\}\,dx=\int_{-5}^1 f(x)\,dx+\int_{-5}^1 g(x)\,dx$

$=2$

054 답 10

$\int_{-2}^1 f(x)\,dx-\int_3^1 f(x)\,dx=\int_{-2}^1 f(x)\,dx+\int_1^3 f(x)\,dx$

$=\int_{-2}^3 f(x)\,dx$

$=\int_{-2}^3 (4x^3-6x^2+3)\,dx$

$=\Big[x^4-2x^3+3x\Big]_{-2}^3$

$=(81-54+9)-(16+16-6)$

$=10$

055 답 ①

$$\int_{-1}^{2}(2x-7)\,dx+\int_{2}^{4}(2x-7)\,dx-\int_{5}^{4}(2x-7)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(2x-7)\,dx+\int_{2}^{4}(2x-7)\,dx+\int_{4}^{5}(2x-7)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{5}(2x-7)\,dx$$
$$=\Big[x^2-7x\Big]_{-1}^{5}$$
$$=(25-35)-(1+7)$$
$$=-18$$

056 답 6

$$\int_{-4}^{3}f(x)\,dx=\int_{-4}^{1}f(x)\,dx+\int_{1}^{3}f(x)\,dx$$
$$=\int_{-4}^{1}f(x)\,dx+\left\{\int_{1}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{3}f(x)\,dx\right\}$$
$$=\int_{-4}^{1}f(x)\,dx-\int_{0}^{1}f(x)\,dx+\int_{0}^{3}f(x)\,dx$$
$$=4-7+9$$
$$=6$$

057 답 17

$$\int_{-2}^{3}f(x)\,dx=\int_{-2}^{0}(x+2)\,dx+\int_{0}^{3}(3x^2-4x+2)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{0}+\Big[x^3-2x^2+2x\Big]_{0}^{3}$$
$$=-(2-4)+(27-18+6)$$
$$=17$$

058 답 8

$$f(x)=\begin{cases}-x+4 & (x\ge2)\\ x & (x\le2)\end{cases}$$ 이므로

$$\int_{0}^{4}xf(x)\,dx=\int_{0}^{2}x^2\,dx+\int_{2}^{4}(-x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{2}+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{2}^{4}$$
$$=\frac{8}{3}+\left(-\frac{64}{3}+32\right)-\left(-\frac{8}{3}+8\right)$$
$$=8$$

059 답 ③

$k<1$이므로

$$\int_{k}^{3}f(x)\,dx=\int_{k}^{1}(-2x)\,dx+\int_{1}^{3}(3x^2-5)\,dx$$
$$=\Big[-x^2\Big]_{k}^{1}+\Big[x^3-5x\Big]_{1}^{3}$$
$$=-1-(-k^2)+(27-15)-(1-5)$$
$$=k^2+15$$

따라서 $k^2+15=19$이므로

$k^2=4$ $\therefore\ k=-2$ ($\because\ k<1$)

060 답 ②

$$|x+1|=\begin{cases}x+1 & (x\ge-1)\\ -x-1 & (x\le-1)\end{cases}$$ 이므로

$$\int_{-2}^{2}|x+1|\,dx=\int_{-2}^{-1}(-x-1)\,dx+\int_{-1}^{2}(x+1)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^2-x\right]_{-2}^{-1}+\left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{2}$$
$$=\left(-\frac{1}{2}+1\right)-(-2+2)+(2+2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)$$
$$=5$$

061 답 10

$$|x-3|=\begin{cases}x-3 & (x\ge3)\\ -x+3 & (x\le3)\end{cases}$$ 이므로

$$\int_{1}^{4}(x+|x-3|)\,dx=\int_{1}^{3}(x-x+3)\,dx+\int_{3}^{4}(x+x-3)\,dx$$
$$=\int_{1}^{3}3\,dx+\int_{3}^{4}(2x-3)\,dx$$
$$=\Big[3x\Big]_{1}^{3}+\Big[x^2-3x\Big]_{3}^{4}$$
$$=9-3+(16-12)-(9-9)$$
$$=10$$

062 답 ⑤

$$|3x^2-6x|=\begin{cases}3x^2-6x & (x\le0\ \text{또는}\ x\ge2)\\ -3x^2+6x & (0\le x\le2)\end{cases}$$ 이므로

$$\int_{1}^{3}|3x^2-6x|\,dx=\int_{1}^{2}(-3x^2+6x)\,dx+\int_{2}^{3}(3x^2-6x)\,dx$$
$$=\Big[-x^3+3x^2\Big]_{1}^{2}+\Big[x^3-3x^2\Big]_{2}^{3}$$
$$=(-8+12)-(-1+3)+(27-27)-(8-12)$$
$$=6$$

063 답 6

$a>4$이고 $$|2x-8|=\begin{cases}2x-8 & (x\ge4)\\ -2x+8 & (x\le4)\end{cases}$$ 이므로

$$\int_{3}^{a}|2x-8|\,dx=\int_{3}^{4}(-2x+8)\,dx+\int_{4}^{a}(2x-8)\,dx$$
$$=\Big[-x^2+8x\Big]_{3}^{4}+\Big[x^2-8x\Big]_{4}^{a}$$
$$=(-16+32)-(-9+24)+(a^2-8a)-(16-32)$$
$$=a^2-8a+17$$

따라서 $a^2-8a+17=5$이므로

$a^2-8a+12=0$, $(a-2)(a-6)=0$

$\therefore\ a=6$ ($\because\ a>4$)

개념유형

148쪽

064 답 2, 2, $\frac{2}{5}$

065 답 48

$$\int_{-3}^{3}(x^2+5)\,dx=2\int_{0}^{3}(x^2+5)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3+5x\right]_0^3$$
$$=2(9+15)$$
$$=48$$

066 답 224

$$\int_{-2}^{2}(7x^6-6x^2)\,dx=2\int_{0}^{2}(7x^6-6x^2)\,dx$$
$$=2\left[x^7-2x^3\right]_0^2$$
$$=2(128-16)$$
$$=224$$

067 답 0

$$\int_{-1}^{1}(3x^5+2x^3-x)\,dx=0$$

068 답 $5x^4$, 1, $5x^4$, x^5, 1, 2

069 답 -6

$$\int_{-3}^{3}(x^7-6x^5-x^2+x+2)\,dx$$
$$=\int_{-3}^{3}(-x^2+2)\,dx+\int_{-3}^{3}(x^7-6x^5+x)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{3}(-x^2+2)\,dx+0$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^3$$
$$=2(-9+6)=-6$$

070 답 28

$$\int_{-2}^{2}(2x+1)(3x-1)\,dx=\int_{-2}^{2}(6x^2+x-1)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(6x^2-1)\,dx+\int_{-2}^{2}x\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(6x^2-1)\,dx+0$$
$$=2\left[2x^3-x\right]_0^2$$
$$=2(16-2)=28$$

071 답 36

$$\int_{-3}^{3}x(x+1)^2\,dx=\int_{-3}^{3}(x^3+2x^2+x)\,dx$$
$$=\int_{-3}^{3}2x^2\,dx+\int_{-3}^{3}(x^3+x)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{3}2x^2\,dx+0$$
$$=2\left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^3$$
$$=2\times18=36$$

실전유형

072 답 ⑤

$$\int_{-2}^{0}(x^5+3x^2-1)\,dx+\int_{0}^{2}(x^5+3x^2-1)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{2}(x^5+3x^2-1)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(3x^2-1)\,dx$$
$$=2\left[x^3-x\right]_0^2$$
$$=2(8-2)=12$$

073 답 ④

$$\int_{-1}^{1}f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}(10x^9+9x^8+8x^7+\cdots+2x+1)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{1}(9x^8+7x^6+5x^4+3x^2+1)\,dx$$
$$=2\left[x^9+x^7+x^5+x^3+x\right]_0^1$$
$$=2(1+1+1+1+1)$$
$$=10$$

074 답 ③

$$\int_{-a}^{a}(x^3-6x+5)\,dx=2\int_{0}^{a}5\,dx$$
$$=2\left[5x\right]_0^a$$
$$=2\times5a=10a$$

따라서 $10a=30$이므로 $a=3$

075 답 -8

$f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$이므로

$$\int_{-3}^{3}f(x)\,dx=2\int_{0}^{3}f(x)\,dx,\ \int_{-3}^{3}g(x)\,dx=0$$
$$\therefore \int_{-3}^{3}\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_{-3}^{3}f(x)\,dx-\int_{-3}^{3}g(x)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{3}f(x)\,dx$$
$$=2\times(-4)=-8$$

076 답 ②

$xf(x)-f(x)=3x^4-3x$에서

$(x-1)f(x)=3x(x-1)(x^2+x+1)$

$\therefore f(x)=3x(x^2+x+1)=3x^3+3x^2+3x$

$$\therefore \int_{-2}^{2}f(x)\,dx=\int_{-2}^{2}(3x^3+3x^2+3x)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}3x^2\,dx$$
$$=2\left[x^3\right]_0^2$$
$$=2\times8=16$$

077 답 $5x-3$

078 답 2

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+1}(2t-1)\,dt=\{2(x+1)-1\}-(2x-1)=2$$

079 답 $4x+4$

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{x+2}t^2\,dt=(x+2)^2-x^2=4x+4$$

080 답 $2x+5$

081 답 $f(x)=-3x^2+6x+1$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(-x^3+3x^2+x-3)$$

$\therefore f(x)=-3x^2+6x+1$

082 답 $f(x)=8x^3-9x^2$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\int_{2}^{x}f(t)\,dt=\frac{d}{dx}(2x^4-3x^3-8)$$

$\therefore f(x)=8x^3-9x^2$

083 답 k, $2k$, $2k$, -4, $3x^2-2x-4$

084 답 $f(x)=4x-16$

$\int_{1}^{3}f(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면 $f(x)=4x+k$이므로

$$\begin{aligned}\int_{1}^{3}f(t)\,dt&=\int_{1}^{3}(4t+k)\,dt\\&=\Big[2t^2+kt\Big]_1^3\\&=(18+3k)-(2+k)\\&=2k+16\end{aligned}$$

따라서 $2k+16=k$이므로 $k=-16$

$\therefore f(x)=4x-16$

085 답 $f(x)=x^2-6x+9$

$\int_{0}^{3}f(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면 $f(x)=x^2-6x+k$이므로

$$\begin{aligned}\int_{0}^{3}f(t)\,dt&=\int_{0}^{3}(t^2-6t+k)\,dt\\&=\Big[\frac{1}{3}t^3-3t^2+kt\Big]_0^3\\&=9-27+3k\\&=3k-18\end{aligned}$$

따라서 $3k-18=k$이므로

$2k=18$ $\quad\therefore k=9$

$\therefore f(x)=x^2-6x+9$

086 답 a, a^3, 1, -1, $3x^2$

087 답 $a=1$, $f(x)=2x-2$

주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$$\int_{a}^{a}f(t)\,dt=a^2-2a+1$$

$0=a^2-2a+1$, $(a-1)^2=0$

$\therefore a=1$

또 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-2$

088 답 $a=2$, $f(x)=4x-1$

주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$$\int_{a}^{a}f(t)\,dt=2a^2-a-6$$

$0=2a^2-a-6$, $(2a+3)(a-2)=0$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

또 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=4x-1$

089 답 -1, a, -1, $2x+1$

090 답 $f(x)=10x-5$

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$$\int_{1}^{1}f(t)\,dt=5+a$$

$0=5+a$ $\quad\therefore a=-5$

따라서 $\int_{1}^{x}f(t)\,dt=5x^2-5x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=10x-5$

091 답 $f(x)=3x^2-6x+2$

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$\int_{2}^{2}f(t)\,dt=8-12+2a$$

$0=2a-4$ $\quad\therefore a=2$

따라서 $\int_{2}^{x}f(t)\,dt=x^3-3x^2+2x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2-6x+2$

092 답 x, $xf(x)$, $3x^2-2x-1$, $3x^2-2x-1$, $6x-2$

093 답 $f(x)=6x-8$

$\int_{2}^{x}(x-t)f(t)\,dt=x^3-4x^2+4x$에서

$$x\int_{2}^{x}f(t)\,dt-\int_{2}^{x}tf(t)\,dt=x^3-4x^2+4x$$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{2}^{x} f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-8x+4$

$\therefore \int_{2}^{x} f(t)\,dt=3x^2-8x+4$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-8$

094 답 $f(x)=12x^2$

$\int_{-1}^{x} (x-t)f(t)\,dt=x^4+4x+3$에서

$x\int_{-1}^{x} f(t)\,dt-\int_{-1}^{x} tf(t)\,dt=x^4+4x+3$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=4x^3+4$

$\therefore \int_{-1}^{x} f(t)\,dt=4x^3+4$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2$

실전유형 153~155쪽

095 답 2

$\int_{1}^{3} f(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면 $f(x)=3x^2-8x+k$이므로

$$\begin{aligned}\int_{1}^{3} f(t)\,dt&=\int_{1}^{3} (3t^2-8t+k)\,dt\\&=\Big[t^3-4t^2+kt\Big]_{1}^{3}\\&=(27-36+3k)-(1-4+k)\\&=2k-6\end{aligned}$$

따라서 $2k-6=k$이므로 $k=6$

즉, $f(x)=3x^2-8x+6$이므로

$f(2)=12-16+6=2$

096 답 ②

$\int_{0}^{1} tf(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면 $f(x)=5x^3+k$이므로

$$\begin{aligned}\int_{0}^{1} tf(t)\,dt&=\int_{0}^{1} (5t^4+kt)\,dt\\&=\Big[t^5+\frac{1}{2}kt^2\Big]_{0}^{1}\\&=1+\frac{1}{2}k\end{aligned}$$

따라서 $1+\frac{1}{2}k=k$이므로

$\frac{1}{2}k=1 \qquad \therefore k=2$

즉, $f(x)=5x^3+2$이므로

$f(-1)=-5+2=-3$

097 답 2

$\int_{-1}^{3} f'(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면 $f(x)=-x^3+3x+k$이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{3} f'(t)\,dt&=\int_{-1}^{3} (-3t^2+3)\,dt\\&=\Big[-t^3+3t\Big]_{-1}^{3}\\&=(-27+9)-(1-3)\\&=-16\end{aligned}$$

$\therefore k=-16$

따라서 $f(x)=-x^3+3x-16$이므로

$f(-3)=27-9-16=2$

098 답 8

$f(x)=3x^2+\int_{0}^{2} (2x-1)f(t)\,dt$에서

$f(x)=3x^2+2x\int_{0}^{2} f(t)\,dt-\int_{0}^{2} f(t)\,dt$

$\int_{0}^{2} f(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면 $f(x)=3x^2+2kx-k$이므로

$$\begin{aligned}\int_{0}^{2} f(t)\,dt&=\int_{0}^{2} (3t^2+2kt-k)\,dt\\&=\Big[t^3+kt^2-kt\Big]_{0}^{2}\\&=8+4k-2k\\&=2k+8\end{aligned}$$

따라서 $2k+8=k$이므로 $k=-8$

즉, $f(x)=3x^2-16x+8$이므로

$f(0)=8$

099 답 ③

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=9x^2+2$

$\therefore f(1)=9+2=11$

100 답 21

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=9x^2-4x$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^{2} f'(x)\,dx&=\int_{-1}^{2} (9x^2-4x)\,dx\\&=\Big[3x^3-2x^2\Big]_{-1}^{2}\\&=(24-8)-(-3-2)\\&=21\end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_{1}^{x} (9t^2-4t)\,dt\\&=\Big[3t^3-2t^2\Big]_{1}^{x}\\&=(3x^3-2x^2)-(3-2)\\&=3x^3-2x^2-1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-1}^{2} f'(x)\,dx&=\Big[f(x)\Big]_{-1}^{2}=f(2)-f(-1)\\&=(24-8-1)-(-3-2-1)\\&=21\end{aligned}$$

101 답 ③

주어진 등식의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=a^3+2a^2-3a$

$a(a+3)(a-1)=0 \qquad \therefore a=1\ (\because a>0)$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=3x^2+4x-3$

$\therefore f(a)=f(1)=3+4-3=4$

102 답 24

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=-2+a+7 \qquad \therefore a=-5$

$\int_{-1}^{x} f(t)\,dt=2x^3-5x^2+7$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x^2-10x$

$\therefore f(3)=54-30=24$

103 답 ①

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=2f(2)+24-16 \qquad \therefore f(2)=-4$

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+9x^2-8x$

$xf'(x)=-9x^2+8x=x(-9x+8)$

$\therefore f'(x)=-9x+8$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(-9x+8)\,dx$

$\qquad =-\frac{9}{2}x^2+8x+C$

$f(2)=-4$에서

$-18+16+C=-4 \qquad \therefore C=-2$

따라서 $f(x)=-\frac{9}{2}x^2+8x-2$이므로

$f(0)=-2$

104 답 10

$\int_{1}^{x}(x-t)f(t)\,dt=x^4-x^2-2x+2$에서

$x\int_{1}^{x}f(t)\,dt-\int_{1}^{x}tf(t)\,dt=x^4-x^2-2x+2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{1}^{x}f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=4x^3-2x-2$

$\therefore \int_{1}^{x}f(t)\,dt=4x^3-2x-2$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2-2$

$\therefore f(1)=12-2=10$

105 답 6

주어진 등식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=8+4a+4 \qquad \therefore a=-3$

$\int_{2}^{x}(x-t)f(t)\,dt=x^3-3x^2+4$에서

$x\int_{2}^{x}f(t)\,dt-\int_{2}^{x}tf(t)\,dt=x^3-3x^2+4$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{2}^{x}f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=3x^2-6x$

$\therefore \int_{2}^{x}f(t)\,dt=3x^2-6x$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=6x-6$

$\therefore f(2)=12-6=6$

106 답 ②

$\int_{0}^{x}(x-t)f'(t)\,dt=x^4+2x^2$에서

$x\int_{0}^{x}f'(t)\,dt-\int_{0}^{x}tf'(t)\,dt=x^4+2x^2$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{0}^{x}f'(t)\,dt+xf'(x)-xf'(x)=4x^3+4x$

$\therefore \int_{0}^{x}f'(t)\,dt=4x^3+4x$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=12x^2+4$

$\therefore f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(12x^2+4)\,dx$

$\qquad =4x^3+4x+C$

$f(0)=-3$에서 $C=-3$

따라서 $f(x)=4x^3+4x-3$이므로

$f'(-1)-f(1)=(12+4)-(4+4-3)=11$

107 답 ⑤

$f(x)=\int_{0}^{x}(t^2-9)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=x^2-9=(x+3)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이므로

$M=f(-3)=\int_{0}^{-3}(t^2-9)\,dt$

$\quad =\left[\frac{1}{3}t^3-9t\right]_{0}^{-3}$

$\quad =-9+27=18$

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 극소이므로

$m=f(3)=\int_{0}^{3}(t^2-9)\,dt$

$\quad =\left[\frac{1}{3}t^3-9t\right]_{0}^{3}$

$\quad =9-27=-18$

$\therefore M-m=36$

다른 풀이

$f(x)=\int_{0}^{x}(t^2-9)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-9t\right]_{0}^{x}=\frac{1}{3}x^3-9x$이므로

$f'(x)=x^2-9=(x+3)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	18 극대	↘	-18 극소	↗

따라서 $M=18$, $m=-18$이므로

$M-m=36$

108 답 5

$f(x)=\int_{-1}^{x}(3t^2+at+b)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+ax+b$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 4를 가지므로

$f'(1)=0$, $f(1)=4$

$f'(1)=0$에서 $3+a+b=0$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$f(1)=4$에서

$$f(1)=\int_{-1}^{1}(3t^2+at+b)\,dt$$
$$=2\int_{0}^{1}(3t^2+b)\,dt$$
$$=2\Big[t^3+bt\Big]_0^1=2(1+b)$$

따라서 $2(1+b)=4$이므로

$1+b=2 \qquad \therefore b=1$

이를 ㉠에 대입하면

$3+a+1=0 \qquad \therefore a=-4$

$\therefore b-a=5$

109 답 ①

$f(x)=\int_{x}^{x+1}(t^3-t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=\{(x+1)^3-(x+1)\}-(x^3-x)$$
$$=3x^2+3x=3x(x+1)$$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대이므로 극댓값은

$$f(-1)=\int_{-1}^{0}(t^3-t)\,dt=\left[\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{0}$$
$$=-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

따라서 $a=-1$, $b=\frac{1}{4}$이므로

$a+b=-\frac{3}{4}$

110 답 ③

$f(x)=\int_{0}^{x}(-6t^2+12t)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

$0\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최대이므로 최댓값은

$$f(2)=\int_{0}^{2}(-6t^2+12t)\,dt$$
$$=\Big[-2t^3+6t^2\Big]_0^2$$
$$=-16+24=8$$

111 답 -4

$f(x)=\int_{1}^{x}3(t-1)(t-3)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=3$ ($\because 2\le x\le 4$)

$2\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	2	$\cdots$	3	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

$$f(2)=\int_{1}^{2}3(t-1)(t-3)\,dt$$
$$=\int_{1}^{2}(3t^2-12t+9)\,dt$$
$$=\Big[t^3-6t^2+9t\Big]_1^2$$
$$=(8-24+18)-(1-6+9)=-2$$
$$f(3)=\int_{1}^{3}(3t^2-12t+9)\,dt$$
$$=\Big[t^3-6t^2+9t\Big]_1^3$$
$$=(27-54+27)-(1-6+9)=-4$$
$$f(4)=\int_{1}^{4}(3t^2-12t+9)\,dt$$
$$=\Big[t^3-6t^2+9t\Big]_1^4$$
$$=(64-96+36)-(1-6+9)=0$$

따라서 함수 $f(x)$의 최댓값은 0, 최솟값은 -4이므로 구하는 합은 -4이다.

112 답 ②

$f(x)=\int_{x}^{x+4}t^2\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(x+4)^2-x^2=8x+16=8(x+2)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 최소이므로 최솟값은

$$f(-2)=\int_{-2}^{2}t^2\,dt=2\int_{0}^{2}t^2\,dt$$
$$=2\left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2=2\times\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$$

개념유형

113 답 1, 1, 6

114 답 3

$f(t)=t^2+2t+3$이라 하고 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x(t^2+2t+3)\,dt&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_0^x\\&=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}\\&=F'(0)=f(0)\\&=3\end{aligned}$$

115 답 16

$f(t)=t^2+5t+2$라 하고 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x(t^2+5t+2)\,dt&=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\int_2^x f(t)\,dt\\&=\lim_{x\to2}\frac{1}{x-2}\Big[F(t)\Big]_2^x\\&=\lim_{x\to2}\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\\&=F'(2)=f(2)\\&=4+10+2=16\end{aligned}$$

116 답 8

$f(t)=(t+1)^3$이라 하고 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(t+1)^3\,dt&=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt\\&=\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\Big[F(t)\Big]_1^x\\&=\lim_{x\to1}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\\&=F'(1)=f(1)\\&=2^3=8\end{aligned}$$

117 답 -1

$f(t)=3t^2-t-4$라 하고 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x(3t^2-t-4)\,dt&=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)\,dt\\&=\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\Big[F(t)\Big]_1^x\\&=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x+1}\times\frac{F(x)-F(1)}{x-1}\right\}\\&=\frac{1}{2}F'(1)=\frac{1}{2}f(1)\\&=\frac{1}{2}(3-1-4)=-1\end{aligned}$$

118 답 3, 3, 7

119 답 -2

$f(t)=2t-4$라 하고 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_1^{x+1}(2t-4)\,dt&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_1^{x+1}f(t)\,dt\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_1^{x+1}\\&=\lim_{x\to0}\frac{F(x+1)-F(1)}{x}\\&=F'(1)=f(1)\\&=2-4=-2\end{aligned}$$

120 답 2

$f(t)=7+3t-2t^2$이라 하고 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{-1}^{x-1}(7+3t-2t^2)\,dt&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_{-1}^{x-1}f(t)\,dt\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_{-1}^{x-1}\\&=\lim_{x\to0}\frac{F(x-1)-F(-1)}{x}\\&=F'(-1)=f(-1)\\&=7-3-2=2\end{aligned}$$

121 답 4

$f(t)=t^3+t-6$이라 하고 함수 $f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_2^{x+2}(t^3+t-6)\,dt&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_2^{x+2}f(t)\,dt\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_2^{x+2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{F(x+2)-F(2)}{x}\\&=F'(2)=f(2)\\&=8+2-6=4\end{aligned}$$

실전유형

122 답 ②

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\int_1^{1+3h}f(x)\,dx&=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}\Big[F(x)\Big]_1^{1+3h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{F(1+3h)-F(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\frac{F(1+3h)-F(1)}{3h}\times3\\&=3F'(1)=3f(1)\\&=3(-4+2+1)=-3\end{aligned}$$

123 답 3

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\int_2^x f(t)\,dt=\lim_{x\to2}\frac{1}{x^2-4}\Big[F(t)\Big]_2^x$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{1}{x+2}\times\frac{F(x)-F(2)}{x-2}\right\}$$
$$=\frac{1}{4}F'(2)=\frac{1}{4}f(2)$$
$$=\frac{1}{4}(4+2a+2)=\frac{a+3}{2}$$

따라서 $\frac{a+3}{2}=3$이므로

$a+3=6\qquad\therefore a=3$

124 답 ①

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\Big[F(t)\Big]_0^x$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}$$
$$=F'(0)=f(0)$$

$\therefore f(0)=1$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-4x+1)\,dx$$
$$=x^3-2x^2+x+C$$

$f(0)=1$에서 $C=1$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+x+1$이므로

$f(2)=8-8+2+1=3$

실전유형으로 중단원 점검 158~159쪽

1 답 ②

$$\int_{-2}^{-2}x^7\,dx-\int_{-1}^{2}(t+2)(2t-1)\,dt$$
$$=\int_{-2}^{-2}x^7\,dx-\int_{-1}^{2}(2t^2+3t-2)\,dt$$
$$=0-\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2-2t\right]_{-1}^{2}$$
$$=-\left\{\left(\frac{16}{3}+6-4\right)-\left(-\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+2\right)\right\}$$
$$=-\frac{9}{2}$$

2 답 3

$$\int_{-3}^{1}(x^3-6x+a)\,dx=\left[\frac{1}{4}x^4-3x^2+ax\right]_{-3}^{1}$$
$$=\left(\frac{1}{4}-3+a\right)-\left(\frac{81}{4}-27-3a\right)$$
$$=4a+4 \qquad\cdots\cdots \text{ⅰ}$$

따라서 $4a+4=16$이므로 $a=3$ ⋯⋯ ⅱ

채점 기준

ⅰ $\int_{-3}^{1}(x^3-6x+a)\,dx$를 a에 대한 식으로 나타내기	70 %
ⅱ a의 값 구하기	30 %

3 답 ⑤

$$\int_{-2}^{1}(x^2+2x-3)\,dx-4\int_{-2}^{1}(x^2+x-2)\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}\{(x^2+2x-3)-4(x^2+x-2)\}\,dx$$
$$=\int_{-2}^{1}(-3x^2-2x+5)\,dx$$
$$=\Big[-x^3-x^2+5x\Big]_{-2}^{1}$$
$$=(-1-1+5)-(8-4-10)$$
$$=9$$

4 답 $\frac{5}{3}$

$$\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{2}f(x)\,dx-\int_{-1}^{-3}f(x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{2}f(x)\,dx+\int_{-3}^{-1}f(x)\,dx$$
$$=\int_{-3}^{-1}f(x)\,dx+\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{2}f(x)\,dx$$
$$=\int_{-3}^{2}f(x)\,dx$$
$$=\int_{-3}^{2}(x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_{-3}^{2}$$
$$=\left(\frac{8}{3}+8\right)-(-9+18)$$
$$=\frac{5}{3}$$

5 답 33

$$\int_{-3}^{3}f(x)\,dx=\int_{-3}^{0}(x-1)^2\,dx+\int_{0}^{3}(x^2+1)\,dx$$
$$=\int_{-3}^{0}(x^2-2x+1)\,dx+\int_{0}^{3}(x^2+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_{0}^{3}$$
$$=-(-9-9-3)+(9+3)$$
$$=33$$

6 답 ④

$$|x^2-4|=\begin{cases}x^2-4 & (x\le-2\text{ 또는 }x\ge2)\\ -x^2+4 & (-2\le x\le2)\end{cases}$$ 이므로

$$\int_{0}^{3}|x^2-4|\,dx=\int_{0}^{2}(-x^2+4)\,dx+\int_{2}^{3}(x^2-4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{0}^{2}+\left[\frac{1}{3}x^3-4x\right]_{2}^{3}$$
$$=\left(-\frac{8}{3}+8\right)+(9-12)-\left(\frac{8}{3}-8\right)$$
$$=\frac{23}{3}$$

7 답 ②

$$\int_{-a}^{a}(3x^2-x-7)\,dx=2\int_0^a(3x^2-7)\,dx$$
$$=2\Big[x^3-7x\Big]_0^a$$
$$=2(a^3-7a)$$

따라서 $2(a^3-7a)=12$이므로

$a^3-7a-6=0$, $(a+2)(a+1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 a의 값의 합은

$-2+(-1)+3=0$

8 답 6

$\int_0^1 f(t)\,dt=k$ (k는 상수)로 놓으면 $f(x)=8x^3-2kx$이므로

$$\int_0^1 f(t)\,dt=\int_0^1(8t^3-2kt)\,dt$$
$$=\Big[2t^4-kt^2\Big]_0^1$$
$$=2-k \quad \cdots\cdots \text{ⅰ}$$

따라서 $2-k=k$이므로

$2k=2 \qquad \therefore\ k=1$ …… ⅱ

즉, $f(x)=8x^3-2x$이므로

$f(1)=8-2=6$ …… ⅲ

채점 기준

ⅰ $\int_0^1 f(t)\,dt=k$로 놓고 $\int_0^1 f(t)\,dt$를 k에 대한 식으로 나타내기	60 %
ⅱ k의 값 구하기	20 %
ⅲ $f(1)$의 값 구하기	20 %

9 답 ⑤

주어진 등식의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1+a+3 \qquad \therefore\ a=-4$

$\int_1^x f(t)\,dt=x^2-4x+3$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-4$

$\therefore\ f(4)=8-4=4$

10 답 24

주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$0=1-2-a-1 \qquad \therefore\ a=-2$

$\int_{-1}^x (x-t)f(t)\,dt=x^4+2x^3-2x-1$에서

$x\int_{-1}^x f(t)\,dt-\int_{-1}^x tf(t)\,dt=x^4+2x^3-2x-1$

양변을 x에 대하여 미분하면

$\int_{-1}^x f(t)\,dt+xf(x)-xf(x)=4x^3+6x^2-2$

$\therefore\ \int_{-1}^x f(t)\,dt=4x^3+6x^2-2$

양변을 다시 x에 대하여 미분하면

$f(x)=12x^2+12x$

$\therefore\ f(1)=12+12=24$

11 답 −4

$f(x)=\int_0^x(-t^2-2t+3)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=-x^2-2x+3=-(x+3)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-3$ 또는 $x=1$ …… ⅰ

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극대이므로

$$M=f(1)=\int_0^1(-t^2-2t+3)\,dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3-t^2+3t\Big]_0^1=-\frac{1}{3}-1+3=\frac{5}{3} \quad \cdots\cdots \text{ⅱ}$$

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극소이므로

$$m=f(-3)=\int_0^{-3}(-t^2-2t+3)\,dt$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}t^3-t^2+3t\Big]_0^{-3}=9-9-9=-9 \quad \cdots\cdots \text{ⅲ}$$

$\therefore\ 3M+m=-4$ …… ⅳ

채점 기준

ⅰ $f'(x)=0$인 x의 값 구하기	10 %
ⅱ M의 값 구하기	40 %
ⅲ m의 값 구하기	40 %
ⅳ $3M+m$의 값 구하기	10 %

12 답 ①

$f(x)=\int_{-1}^x(3t^2+3t-6)\,dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=3x^2+3x-6=3(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=1$ ($\because\ -1\le x\le 3$)

$-1\le x\le 3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	극소	↗	

함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최소이므로 최솟값은

$$f(1)=\int_{-1}^1(3t^2+3t-6)\,dt=2\int_0^1(3t^2-6)\,dt$$
$$=2\Big[t^3-6t\Big]_0^1=2(1-6)=-10$$

13 답 −1

함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하면

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2-9}\int_3^x f(t)\,dt=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2-9}\Big[F(t)\Big]_3^x$$
$$=\lim_{x\to 3}\left\{\frac{1}{x+3}\times\frac{F(x)-F(3)}{x-3}\right\}$$
$$=\frac{1}{6}F'(3)=\frac{1}{6}f(3)$$
$$=\frac{1}{6}(27-36+3)=-1$$

09 정적분의 활용

개념유형

161쪽

001 답 2, $\le$, $\frac{4}{3}$

002 답 $\frac{32}{3}$

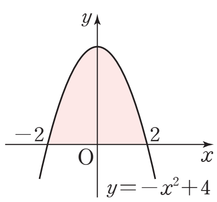
곡선 $y=-x^2+4$와 x축의 교점의 x좌표는

$-x^2+4=0$에서

$(x+2)(x-2)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=2$

$-2\le x\le 2$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{-2}^{2}(-x^2+4)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(-x^2+4)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_0^2$$
$$=\frac{32}{3}$$

003 답 $\frac{1}{12}$

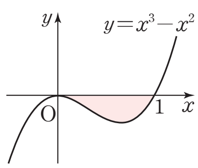
곡선 $y=x^3-x^2$과 x축의 교점의 x좌표는

$x^3-x^2=0$에서

$x^2(x-1)=0$

$\therefore\ x=0$ 또는 $x=1$

$0\le x\le 1$에서 $y\le 0$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면



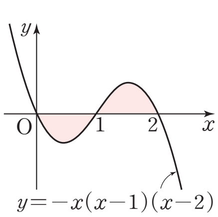
$$S=\int_{0}^{1}(-x^3+x^2)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{12}$$

004 답 $\ge$, $\le$, $-x^3+x$, $-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{2}$

005 답 $\frac{1}{2}$

곡선 $y=-x(x-1)(x-2)$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x(x-1)(x-2)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$



$0\le x\le 1$에서 $y\le 0$이고, $1\le x\le 2$에서 $y\ge 0$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{0}^{1}x(x-1)(x-2)\,dx+\int_{1}^{2}\{-x(x-1)(x-2)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{1}(x^3-3x^2+2x)\,dx+\int_{1}^{2}(-x^3+3x^2-2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2\right]_1^2$$
$$=\frac{1}{2}$$

006 답 $\frac{37}{12}$

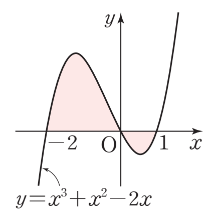
곡선 $y=x^3+x^2-2x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^3+x^2-2x=0$에서

$x(x+2)(x-1)=0$

$\therefore\ x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$-2\le x\le 0$에서 $y\ge 0$이고, $0\le x\le 1$에서 $y\le 0$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^3-x^2+2x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^0+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^1$$
$$=\frac{37}{12}$$

007 답 $\le$, $\ge$, $-x^2+x$, $-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2$, 1

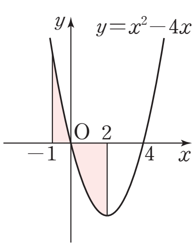
008 답 $\frac{23}{3}$

곡선 $y=x^2-4x$와 x축의 교점의 x좌표는

$x^2-4x=0$에서

$x(x-4)=0$ $\qquad\therefore\ x=0$ 또는 $x=4$

$-1\le x\le 0$에서 $y\ge 0$이고, $0\le x\le 2$에서 $y\le 0$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면



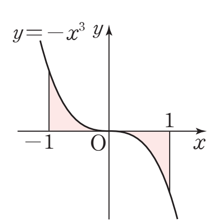
$$S=\int_{-1}^{0}(x^2-4x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2\right]_{-1}^0+\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^2$$
$$=\frac{23}{3}$$

009 답 $\frac{1}{2}$

곡선 $y=-x^3$과 x축의 교점의 x좌표는

$-x^3=0$에서 $x=0$

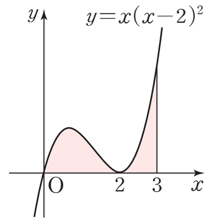
$-1\le x\le 0$에서 $y\ge 0$이고, $0\le x\le 1$에서 $y\le 0$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면



$$S=\int_{-1}^{0}(-x^3)\,dx+\int_{0}^{1}x^3\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{2}$$

실전유형 162쪽

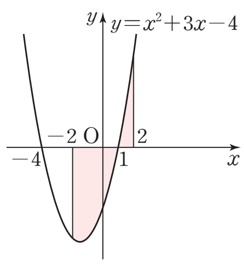
010 답 $\frac{9}{4}$



곡선 $y=x(x-2)^2$과 x축의 교점의 x좌표는
$x(x-2)^2=0$에서
$x=0$ 또는 $x=2$
따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^3 |x(x-2)^2|\,dx$$
$$=\int_0^3 x(x-2)^2 dx$$
$$=\int_0^3 (x^3-4x^2+4x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^3=\frac{9}{4}$$

011 답 ④

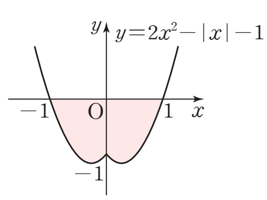


곡선 $y=x^2+3x-4$와 x축의 교점의 x좌표는 $x^2+3x-4=0$에서
$(x+4)(x-1)=0$
$\therefore x=-4$ 또는 $x=1$
따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^2 |x^2+3x-4|\,dx$$
$$=\int_{-2}^1 (-x^2-3x+4)\,dx+\int_1^2 (x^2+3x-4)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+4x\right]_{-2}^1+\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x\right]_1^2$$
$$=\frac{49}{3}$$

012 답 $\frac{5}{3}$

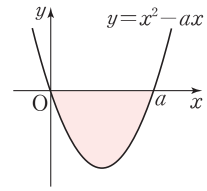
$y=2x^2-|x|-1=\begin{cases}2x^2-x-1 & (x\ge 0)\\ 2x^2+x-1 & (x\le 0)\end{cases}$이므로 함수
$y=2x^2-|x|-1$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표는
(i) $x\ge 0$일 때
$2x^2-x-1=0$에서 $(2x+1)(x-1)=0$
$\therefore x=1$ ($\because x\ge 0$)
(ii) $x\le 0$일 때
$2x^2+x-1=0$에서 $(2x-1)(x+1)=0$
$\therefore x=-1$ ($\because x\le 0$)



(i), (ii)에서 함수 $y=2x^2-|x|-1$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=2\int_0^1 |2x^2-x-1|\,dx$$
$$=2\int_0^1 (-2x^2+x+1)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1=\frac{5}{3}$$

013 답 ②

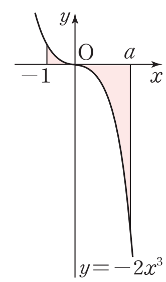


곡선 $y=x^2-ax$와 x축의 교점의 x좌표는
$x^2-ax=0$에서
$x(x-a)=0$ $\quad\therefore x=0$ 또는 $x=a$
$a>0$이므로 곡선 $y=x^2-ax$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^a |x^2-ax|\,dx$$
$$=\int_0^a (-x^2+ax)\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_0^a=\frac{1}{6}a^3$$

따라서 $\frac{1}{6}a^3=\frac{9}{2}$이므로
$a^3=27$ $\quad\therefore a=3$ ($\because a$는 실수)

014 답 2



$a>0$이므로 곡선 $y=-2x^3$과 x축 및 두 직선 $x=-1$, $x=a$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^a |-2x^3|\,dx$$
$$=\int_{-1}^0 (-2x^3)\,dx+\int_0^a 2x^3 dx$$
$$=\left[-\frac{1}{2}x^4\right]_{-1}^0+\left[\frac{1}{2}x^4\right]_0^a$$
$$=\frac{1}{2}a^4+\frac{1}{2}$$

따라서 $\frac{1}{2}a^4+\frac{1}{2}=\frac{17}{2}$이므로
$a^4-16=0$, $(a+2)(a-2)(a^2+4)=0$
$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

015 답 ④

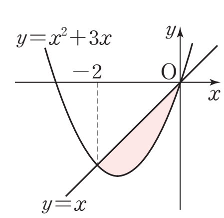
$$S_2=\int_0^1 x^3 dx=\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

$S_1+S_2=1$이므로
$S_1=1-S_2=\frac{3}{4}$
$\therefore S_1 : S_2=\frac{3}{4} : \frac{1}{4}=3 : 1$

개념유형 164~165쪽

016 답 2, 2, 2, $\le$, $x+2$, $-x^2+x+2$, $\frac{9}{2}$

017 답 $\frac{4}{3}$



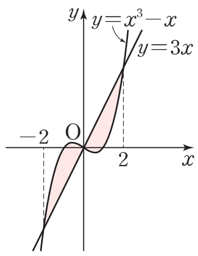
곡선 $y=x^2+3x$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^2+3x=x$에서
$x^2+2x=0$, $x(x+2)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$

$-2 \le x \le 0$에서 $x^2+3x \le x$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^{0}\{x-(x^2+3x)\}\,dx=\int_{-2}^{0}(-x^2-2x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}=\frac{4}{3}$$

018 답 8



곡선 $y=x^3-x$와 직선 $y=3x$의 교점의 x좌표는 $x^3-x=3x$에서

$x^3-4x=0$, $x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

$-2 \le x \le 0$에서 $x^3-x \ge 3x$, $0 \le x \le 2$에서 $x^3-x \le 3x$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-2}^{0}\{(x^3-x)-3x\}\,dx+\int_{0}^{2}\{3x-(x^3-x)\}\,dx$$

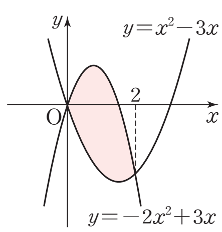
$$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^3+4x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=8$$

019 답 $\le$, x^2-2x+2, $-2x^2+8x-6$, $\frac{8}{3}$

020 답 4



두 곡선 $y=x^2-3x$, $y=-2x^2+3x$의 교점의 x좌표는 $x^2-3x=-2x^2+3x$에서

$x^2-2x=0$, $x(x-2)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$

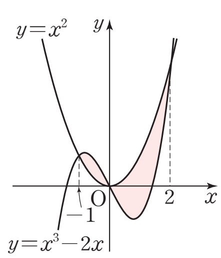
$0 \le x \le 2$에서 $x^2-3x \le -2x^2+3x$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{0}^{2}\{(-2x^2+3x)-(x^2-3x)\}\,dx$$

$$=\int_{0}^{2}(-3x^2+6x)\,dx$$

$$=\left[-x^3+3x^2\right]_{0}^{2}=4$$

021 답 $\frac{37}{12}$



두 곡선 $y=x^3-2x$, $y=x^2$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x=x^2$에서

$x^3-x^2-2x=0$, $x(x+1)(x-2)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

$-1 \le x \le 0$에서 $x^3-2x \ge x^2$이고, $0 \le x \le 2$에서 $x^3-2x \le x^2$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{0}\{(x^3-2x)-x^2\}\,dx+\int_{0}^{2}\{x^2-(x^3-2x)\}\,dx$$

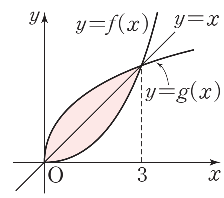
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x^2-2x)\,dx+\int_{0}^{2}(-x^3+x^2+2x)\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{2}$$

$$=\frac{37}{12}$$

022 답 2, 1, 2, 2, $\frac{1}{3}$

023 답 3



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $\frac{1}{3}x^2=x$에서

$x^2-3x=0$, $x(x-3)=0$

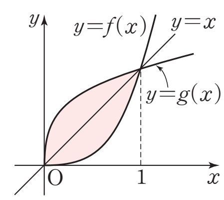
$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=3$

$0 \le x \le 3$에서 $\frac{1}{3}x^2 \le x$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=2\int_{0}^{3}\left(x-\frac{1}{3}x^2\right)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{9}x^3\right]_{0}^{3}=3$$

024 답 $\frac{1}{2}$



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^3=x$에서

$x^3-x=0$, $x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$ ($\because$ $x \ge 0$)

$0 \le x \le 1$에서 $x^3 \le x$이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

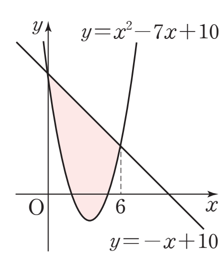
$$S=2\int_{0}^{1}(x-x^3)\,dx$$

$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}$$

실전유형

165~167쪽

025 답 36



곡선 $y=x^2-7x+10$과 직선 $y=-x+10$의 교점의 x좌표는 $x^2-7x+10=-x+10$에서

$x^2-6x=0$, $x(x-6)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=6$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

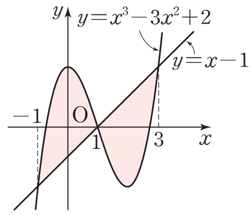
$$S=\int_{0}^{6}\{(-x+10)-(x^2-7x+10)\}\,dx$$

$$=\int_{0}^{6}(-x^2+6x)\,dx$$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2\right]_{0}^{6}=36$$

026 답 ③

곡선 $y=x^3-3x^2+2$와 직선 $y=x-1$의 교점의 x좌표는 $x^3-3x^2+2=x-1$에서



$x^3-3x^2-x+3=0$

$(x+1)(x-1)(x-3)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=1$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{1}\{(x^3-3x^2+2)-(x-1)\}\,dx+\int_{1}^{3}\{(x-1)-(x^3-3x^2+2)\}\,dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(x^3-3x^2-x+3)\,dx+\int_{1}^{3}(-x^3+3x^2+x-3)\,dx$$

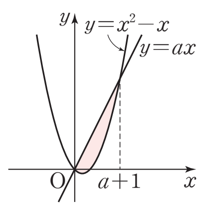
$$=2\int_{0}^{1}(-3x^2+3)\,dx+\int_{1}^{3}(-x^3+3x^2+x-3)\,dx$$

$$=2\Big[-x^3+3x\Big]_0^1+\Big[-\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2-3x\Big]_1^3$$

$$=8$$

027 답 2

곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 $x^2-x=ax$에서



$x^2-(a+1)x=0$, $x\{x-(a+1)\}=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=a+1$

$a>0$이므로 곡선 $y=x^2-x$와 직선 $y=ax$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{0}^{a+1}\{ax-(x^2-x)\}\,dx$$

$$=\int_{0}^{a+1}\{-x^2+(a+1)x\}\,dx$$

$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+\frac{a+1}{2}x^2\Big]_0^{a+1}$$

$$=-\frac{(a+1)^3}{3}+\frac{(a+1)^3}{2}$$

$$=\frac{(a+1)^3}{6}$$

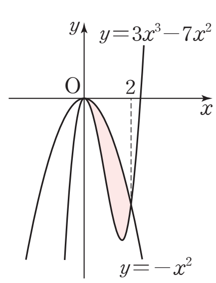
따라서 $\dfrac{(a+1)^3}{6}=\dfrac{9}{2}$이므로

$(a+1)^3=27$, $a+1=3$ ($\because$ a는 실수)

$\therefore$ $a=2$

028 답 4

두 곡선 $y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$의 교점의 x좌표는 $3x^3-7x^2=-x^2$에서



$x^3-2x^2=0$, $x^2(x-2)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

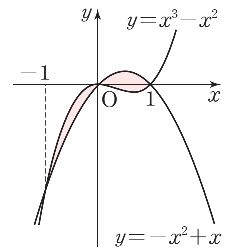
$$S=\int_{0}^{2}\{-x^2-(3x^3-7x^2)\}\,dx$$

$$=\int_{0}^{2}(-3x^3+6x^2)\,dx$$

$$=\Big[-\frac{3}{4}x^4+2x^3\Big]_0^2=4$$

029 답 ②

두 곡선 $y=x^3-x^2$, $y=-x^2+x$의 교점의 x좌표는 $x^3-x^2=-x^2+x$에서



$x^3-x=0$, $x(x+1)(x-1)=0$

$\therefore$ $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{-1}^{0}\{(x^3-x^2)-(-x^2+x)\}\,dx+\int_{0}^{1}\{(-x^2+x)-(x^3-x^2)\}\,dx$$

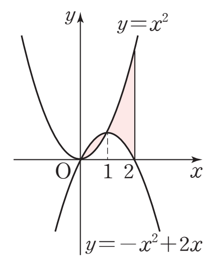
$$=\int_{-1}^{0}(x^3-x)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^3+x)\,dx$$

$$=\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\Big]_{-1}^0+\Big[-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{2}$$

030 답 2

두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+2x$의 교점의 x좌표는 $x^2=-x^2+2x$에서



$x^2-x=0$, $x(x-1)=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{0}^{1}\{(-x^2+2x)-x^2\}\,dx+\int_{1}^{2}\{x^2-(-x^2+2x)\}\,dx$$

$$=\int_{0}^{1}(-2x^2+2x)\,dx+\int_{1}^{2}(2x^2-2x)\,dx$$

$$=\Big[-\frac{2}{3}x^3+x^2\Big]_0^1+\Big[\frac{2}{3}x^3-x^2\Big]_1^2$$

$$=2$$

031 답 ①

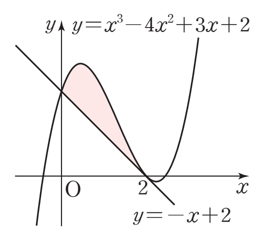
$f(x)=x^3-4x^2+3x+2$라 하면

$f'(x)=3x^2-8x+3$

점 $(2,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-1$이므로 접선의 방정식은

$y=-(x-2)$ $\quad\therefore$ $y=-x+2$

곡선 $y=x^3-4x^2+3x+2$와 직선 $y=-x+2$의 교점의 x좌표는



$x^3-4x^2+3x+2=-x+2$에서

$x^3-4x^2+4x=0$

$x(x-2)^2=0$

$\therefore$ $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{0}^{2}\{(x^3-4x^2+3x+2)-(-x+2)\}\,dx$$

$$=\int_{0}^{2}(x^3-4x^2+4x)\,dx$$

$$=\Big[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\Big]_0^2$$

$$=\frac{4}{3}$$

032 답 ②

$f(x)=x^2-4x+6$이라 하면

$f'(x)=2x-4$

점 A(3, 3)에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=2$이므로 접선의 방정식은

$y-3=2(x-3)$ $\quad\therefore y=2x-3$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^3 \{(x^2-4x+6)-(2x-3)\}\,dx$$
$$=\int_0^3 (x^2-6x+9)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3$$
$$=9$$

033 답 $\frac{2}{3}$

$f(x)=x^2+1$이라 하면

$f'(x)=2x$

접점의 좌표를 $(t,\ t^2+1)$이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=2t$이므로 접선의 방정식은

$y-(t^2+1)=2t(x-t)$ $\quad\therefore y=2tx-t^2+1$

이 직선이 원점을 지나므로

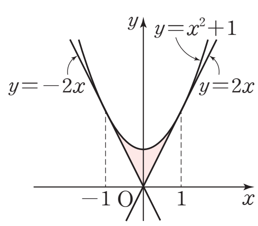
$0=-t^2+1,\ (t+1)(t-1)=0$

$\therefore t=-1$ 또는 $t=1$

따라서 접선의 방정식은

$y=-2x$ 또는 $y=2x$

곡선과 두 접선으로 둘러싸인 도형이 y축에 대하여 대칭이므로 구하는 도형의 넓이를 S라 하면



$$S=2\int_0^1 \{(x^2+1)-2x\}\,dx$$
$$=2\int_0^1 (x^2-2x+1)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x\right]_0^1$$
$$=\frac{2}{3}$$

034 답 3

$A=B$이므로

$$\int_0^a (x^2-2x)\,dx=0$$
$$\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^a=0$$

$\frac{1}{3}a^3-a^2=0,\ a^2(a-3)=0$

$\therefore a=3\ (\because a>2)$

035 답 1

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 x(x-a)(x-2)\,dx=0$$
$$\int_0^2 \{x^3-(a+2)x^2+2ax\}\,dx=0$$
$$\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+2}{3}x^3+ax^2\right]_0^2=0$$

$4-\frac{8(a+2)}{3}+4a=0$

$12-8(a+2)+12a=0$

$4a-4=0$ $\quad\therefore a=1$

036 답 ④

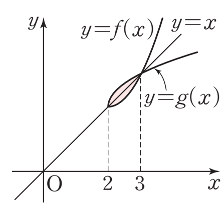
$A=B$이므로

$$\int_0^2 \{(-x^2+k)-(x^3+x^2)\}\,dx=0$$
$$\int_0^2 (-x^3-2x^2+k)\,dx=0$$
$$\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+kx\right]_0^2=0$$

$2k-\frac{28}{3}=0$ $\quad\therefore k=\frac{14}{3}$

037 답 ①

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $x^2-4x+6=x$에서

$x^2-5x+6=0,\ (x-2)(x-3)=0$

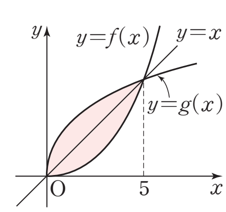
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=2\int_2^3 \{x-(x^2-4x+6)\}\,dx$$
$$=2\int_2^3 (-x^2+5x-6)\,dx$$
$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2-6x\right]_2^3$$
$$=\frac{1}{3}$$

038 답 ③

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=2\int_0^5 \{x-f(x)\}\,dx$$
$$=\int_0^5 2x\,dx-2\int_0^5 f(x)\,dx$$
$$=\left[x^2\right]_0^5-2\times 7$$
$$=25-14=11$$

039 답 5

시각 $t=5$에서의 점 P의 위치는

$0+\int_0^5 (6-2t)\,dt=\left[6t-t^2\right]_0^5=5$

040 답 3

시각 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량은

$\int_1^4 (6-2t)\,dt=\left[6t-t^2\right]_1^4=3$

041 답 5

$1\le t\le 3$에서 $v(t)\ge 0$이고, $3\le t\le 4$에서 $v(t)\le 0$이므로 시각 $t=1$에서 $t=4$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_1^3 (6-2t)\,dt+\int_3^4 (-6+2t)\,dt=\left[6t-t^2\right]_1^3+\left[-6t+t^2\right]_3^4=5$

042 답 6

시각 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$2+\int_0^2 (6t-3t^2)\,dt=2+\left[3t^2-t^3\right]_0^2=6$

043 답 -2

시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$\int_1^3 (6t-3t^2)\,dt=\left[3t^2-t^3\right]_1^3=-2$

044 답 6

$1\le t\le 2$에서 $v(t)\ge 0$이고, $2\le t\le 3$에서 $v(t)\le 0$이므로 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_1^2 (6t-3t^2)\,dt+\int_2^3 (-6t+3t^2)\,dt=\left[3t^2-t^3\right]_1^2+\left[-3t^2+t^3\right]_2^3$

$=6$

045 답 0, 1, 1, 1, 1, $-\frac{2}{3}$

046 답 $\frac{20}{3}$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$이므로

$t^2-6t+8=0,\ (t-2)(t-4)=0$

$\therefore\ t=2$ 또는 $t=4$

따라서 점 P는 출발 후 시각 $t=2$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로 시각 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$0+\int_0^2 (t^2-6t+8)\,dt=\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_0^2=\frac{20}{3}$

047 답 $-\frac{4}{3}$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$이므로

$-t^2+4t-3=0,\ (t-1)(t-3)=0$

$\therefore\ t=1$ 또는 $t=3$

따라서 점 P는 출발 후 시각 $t=1$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로 시각 $t=1$에서의 점 P의 위치는

$0+\int_0^1 (-t^2+4t-3)\,dt=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_0^1=-\frac{4}{3}$

048 답 $\frac{27}{4}$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$이므로

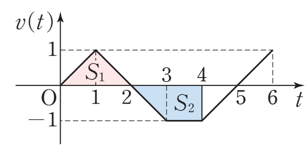
$-t^3+3t^2=0,\ t^2(t-3)=0$

$\therefore\ t=3\ (\because\ t>0)$

따라서 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$0+\int_0^3 (-t^3+3t^2)\,dt=\left[-\frac{1}{4}t^4+t^3\right]_0^3=\frac{27}{4}$

049 답 $-\frac{1}{2}$



시각 $t=4$에서의 점 P의 위치는

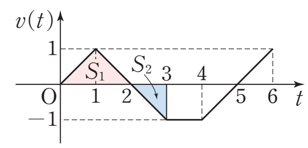
$0+\int_0^4 v(t)\,dt$

$=S_1-S_2$

$=\frac{1}{2}\times 2\times 1-\frac{1}{2}\times(2+1)\times 1$

$=-\frac{1}{2}$

050 답 $\frac{1}{2}$



시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

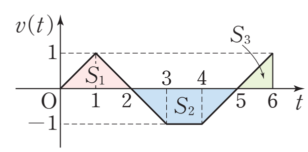
$\int_0^3 v(t)\,dt$

$=S_1-S_2$

$=\frac{1}{2}\times 2\times 1-\frac{1}{2}\times 1\times 1$

$=\frac{1}{2}$

051 답 $\frac{7}{2}$



시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리는

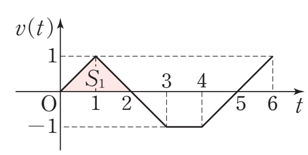
$\int_0^6 |v(t)|\,dt$

$=S_1+S_2+S_3$

$=\frac{1}{2}\times 2\times 1+\frac{1}{2}\times(3+1)\times 1+\frac{1}{2}\times 1\times 1$

$=\frac{7}{2}$

052 답 1

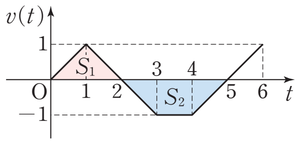


점 P는 출발 후 시각 $t=2$에서 처음으로 운동 방향을 바꾸므로 시각 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$0+\int_0^2 v(t)\,dt=S_1=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$

053 답 3

점 P는 출발 후 시각 $t=5$에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸므로 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는



$$\int_0^5 |v(t)|\,dt=S_1+S_2$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times(3+1)\times1$$
$$=3$$

실전유형

170~173쪽

054 답 ④

시각 $t=0$에서의 점 P의 위치를 a라 하면 시각 $t=3$에서의 점 P의 위치가 11이므로

$$a+\int_0^3(-4t+5)\,dt=11$$
$$a+\Big[-2t^2+5t\Big]_0^3=11$$

$a-3=11$ $\quad\therefore a=14$

따라서 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치는 14이다.

055 답 6

시각 $t=0$에서의 점 P의 위치가 0이고 시각 $t=1$에서의 점 P의 위치가 -3이므로

$$0+\int_0^1(3t^2-4t+k)\,dt=-3$$
$$\Big[t^3-2t^2+kt\Big]_0^1=-3$$

$k-1=-3$ $\quad\therefore k=-2$

따라서 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3(3t^2-4t-2)\,dt=\Big[t^3-2t^2-2t\Big]_1^3=6$$

056 답 5

$k>2$이고 시각 $t=2$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리가 24이므로

$$\int_2^k|4t-6|\,dt=24$$
$$\int_2^k(4t-6)\,dt=24,\ \Big[2t^2-6t\Big]_2^k=24$$

$2k^2-6k+4=24$, $k^2-3k-10=0$

$(k+2)(k-5)=0$

$\therefore k=5$ ($\because k>2$)

057 답 $\frac{9}{2}$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각은 $2t^2+3t=t^2+6t$에서

$t^2-3t=0$, $t(t-3)=0$

$\therefore t=3$ ($\because t>0$)

시각 $t=3$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^3(2t^2+3t)\,dt=\Big[\frac{2}{3}t^3+\frac{3}{2}t^2\Big]_0^3=\frac{63}{2}$$

시각 $t=3$에서의 점 Q의 위치는

$$0+\int_0^3(t^2+6t)\,dt=\Big[\frac{1}{3}t^3+3t^2\Big]_0^3=36$$

따라서 구하는 거리는

$$36-\frac{63}{2}=\frac{9}{2}$$

058 답 ③

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$이므로

$3t^2-4t-4=0$, $(3t+2)(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

따라서 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2(3t^2-4t-4)\,dt=\Big[t^3-2t^2-4t\Big]_0^2=-8$$

059 답 100 m

자동차가 정지할 때 $v(t)=0$이므로

$20-2t=0$ $\quad\therefore t=10$

따라서 자동차가 정지할 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^{10}|20-2t|\,dt=\int_0^{10}(20-2t)\,dt$$
$$=\Big[20t-t^2\Big]_0^{10}$$
$$=100(\text{m})$$

060 답 ②

점 P가 출발 후 다시 원점을 지나는 시각을 $t=a$라 하면

$$\int_0^a(2t-t^2)\,dt=0$$
$$\Big[t^2-\frac{1}{3}t^3\Big]_0^a=0,\ a^2-\frac{1}{3}a^3=0$$

$a^2(3-a)=0$ $\quad\therefore a=3$ ($\because a>0$)

따라서 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3|2t-t^2|\,dt=\int_0^2(2t-t^2)\,dt+\int_2^3(-2t+t^2)\,dt$$
$$=\Big[t^2-\frac{1}{3}t^3\Big]_0^2+\Big[-t^2+\frac{1}{3}t^3\Big]_2^3$$
$$=\frac{8}{3}$$

061 답 ④

두 점 P, Q가 만나려면 위치가 같아야 하므로 두 점이 만나는 시각을 $t=a$라 하면

$$\int_0^a(3t^2-6t)\,dt=\int_0^a(10t-16)\,dt$$
$$\Big[t^3-3t^2\Big]_0^a=\Big[5t^2-16t\Big]_0^a$$

$a^3-3a^2=5a^2-16a$

$a^3-8a^2+16a=0$, $a(a-4)^2=0$

$\therefore a=4$ ($\because a>0$)

따라서 두 점 P, Q가 출발 후 다시 만나는 시각은 $t=4$이다.

062 답 ③

점 P가 움직이는 방향이 바뀔 때 $v(t)=0$이므로

$t^2-at=0$, $t(t-a)=0$

$\therefore t=a\ (\because a>0)$

$0\le t\le a$에서 $t^2-at\le 0$이고 시각 $t=0$에서 $t=a$까지 점 P가 움직인 거리가 $\frac{9}{2}$이므로

$$\int_0^a |t^2-at|\,dt=\frac{9}{2}$$

$$\int_0^a (-t^2+at)\,dt=\frac{9}{2}$$

$$\left[-\frac{1}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^a=\frac{9}{2}$$

$$\frac{a^3}{6}=\frac{9}{2},\ a^3=27$$

$\therefore a=3\ (\because a$는 실수$)$

063 답 ②

물체가 최고 높이에 도달할 때 $v(t)=0$이므로

$20-10t=0 \qquad \therefore t=2$

따라서 물체를 쏘아 올린 지 2초 후에 최고 높이에 도달하므로 구하는 높이는

$$25+\int_0^2 (20-10t)\,dt=25+\left[20t-5t^2\right]_0^2=45(\mathrm{m})$$

064 답 ④

공이 지면에 떨어지는 시각을 $t=a$라 하면 그때의 공의 높이는 0이므로

$$30+\int_0^a (25-10t)\,dt=0$$

$$30+\left[25t-5t^2\right]_0^a=0$$

$$30+25a-5a^2=0$$

$$a^2-5a-6=0,\ (a+1)(a-6)=0$$

$\therefore a=6\ (\because a>0)$

따라서 공을 쏘아 올린 후 지면에 떨어질 때까지 걸리는 시간은 6초이다.

065 답 **50 m**

공이 지면으로부터 80 m 높이에 도달하는 시각을 $t=a$라 하면

$$40+\int_0^a (30-10t)\,dt=80$$

$$40+\left[30t-5t^2\right]_0^a=80$$

$$40+30a-5a^2=80$$

$$a^2-6a+8=0,\ (a-2)(a-4)=0$$

$\therefore a=2$ 또는 $a=4$

따라서 공이 두 번째로 지면으로부터 80 m 높이에 도달하는 시각은 $t=4$이므로 시각 $t=0$에서 $t=4$까지 공이 움직인 거리는

$$\int_0^4 |30-10t|\,dt=\int_0^3 (30-10t)\,dt+\int_3^4 (-30+10t)\,dt$$

$$=\left[30t-5t^2\right]_0^3+\left[-30t+5t^2\right]_3^4$$

$$=50(\mathrm{m})$$

066 답 ①

열기구가 출발한 지 10초 후의 높이는

$$\int_0^9 \frac{1}{3}t\,dt+\int_9^{10} (12-t)\,dt=\left[\frac{1}{6}t^2\right]_0^9+\left[12t-\frac{1}{2}t^2\right]_9^{10}$$

$$=16(\mathrm{m})$$

067 답 **5**

점 P가 $t=0$에서 $t=5$까지 움직인 거리는

$$\int_0^5 |v(t)|\,dt=\int_0^2 |v(t)|\,dt+\int_2^5 |v(t)|\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\times 2+\frac{1}{2}\times 3\times 2$$

$$=5$$

068 답 ①

점 P는 $t=4$일 때 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있고 그때의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^4 v(t)\,dt=-\frac{1}{2}\times(4+1)\times 2=-5$$

참고 점 P는 원점을 출발하여 $t=4$까지 음의 방향으로 좌표가 -5인 점까지 이동하고, $t=4$에서 운동 방향을 바꾸어 양의 방향으로 $t=5$까지 좌표가 $-\frac{9}{2}$인 점까지 이동하므로 $t=4$일 때 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있다.

069 답 ②

ㄱ. 시각 $t=4$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^4 v(t)\,dt=\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^4 v(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\times 2-\frac{1}{2}\times 2\times 2$$

$$=0$$

따라서 $t=4$일 때 점 P는 원점을 다시 지난다.

ㄴ. 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^6 v(t)\,dt=\int_0^4 v(t)\,dt+\int_4^6 v(t)\,dt$$

$$=0+\frac{1}{2}\times(1+2)\times 2$$

$$=3$$

ㄷ. 시각 $t=3$에서 $t=7$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_3^7 |v(t)|\,dt=\int_3^4 |v(t)|\,dt+\int_4^7 |v(t)|\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\times 1\times 2+\left\{\frac{1}{2}\times(1+2)\times 2+\frac{1}{2}\times(1+2)\times 1\right\}$$

$$=\frac{11}{2}$$

ㄹ. $v(t)=0$이고 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 점 P는 시각 $t=2$, $t=4$에서 운동 방향을 바꾼다.

따라서 점 P는 출발 후 $t=8$까지 운동 방향을 두 번 바꾼다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

070 답 ④

점 P가 출발 후 다시 원점을 지날 때의 시각을 $t=a$라 하면

$$\int_0^a v(t)\,dt=0$$

이때 $\int_0^4 v(t)\,dt=-\frac{1}{2}\times4\times3=-6$, $\int_4^6 v(t)\,dt=\frac{1}{2}\times2\times3=3$,

$\int_6^7 v(t)\,dt=1\times3=3$이므로

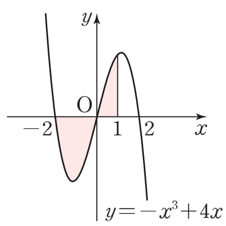
$\int_0^4 v(t)\,dt+\int_4^6 v(t)\,dt+\int_6^7 v(t)\,dt=0$

$\therefore \int_0^7 v(t)\,dt=0 \qquad \therefore a=7$

따라서 점 P가 출발 후 다시 원점을 지날 때까지 걸리는 시간은 7초이다.

실전유형으로 중단원 점검 174~175쪽

1 답 ④



곡선 $y=-x^3+4x$와 x축의 교점의 x좌표는 $-x^3+4x=0$에서

$x(x+2)(x-2)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

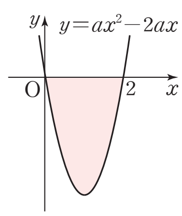
$S=\int_{-2}^{1}|-x^3+4x|\,dx$

$=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx+\int_{0}^{1}(-x^3+4x)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4+2x^2\right]_{0}^{1}$

$=\frac{23}{4}$

2 답 ③



곡선 $y=ax^2-2ax$와 x축의 교점의 x좌표는 $ax^2-2ax=0$에서

$ax(x-2)=0 \qquad \therefore x=0$ 또는 $x=2$

$a>0$이므로 곡선 $y=ax^2-2ax$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S라 하면

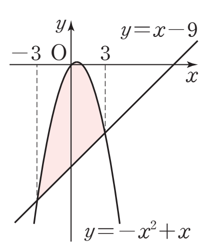
$S=\int_0^2|ax^2-2ax|\,dx$

$=\int_0^2(-ax^2+2ax)\,dx$

$=\left[-\frac{1}{3}ax^3+ax^2\right]_0^2=\frac{4}{3}a$

따라서 $\frac{4}{3}a=8$이므로 $a=6$

3 답 36



곡선 $y=-x^2+x$와 직선 $y=x-9$의 교점의 x좌표는 $-x^2+x=x-9$에서

$x^2-9=0$

$(x+3)(x-3)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=3$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

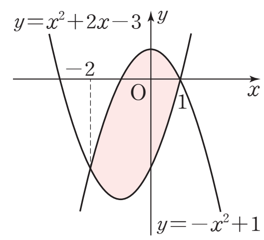
$S=\int_{-3}^{3}\{(-x^2+x)-(x-9)\}\,dx$

$=\int_{-3}^{3}(-x^2+9)\,dx$

$=2\int_0^3(-x^2+9)\,dx$

$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+9x\right]_0^3=36$

4 답 ②



두 곡선 $y=x^2+2x-3$, $y=-x^2+1$의 교점의 x좌표는 $x^2+2x-3=-x^2+1$에서

$x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-2}^{1}\{(-x^2+1)-(x^2+2x-3)\}\,dx$

$=\int_{-2}^{1}(-2x^2-2x+4)\,dx$

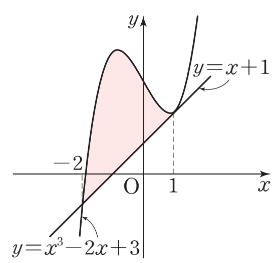
$=\left[-\frac{2}{3}x^3-x^2+4x\right]_{-2}^{1}=9$

5 답 $\frac{27}{4}$

$f(x)=x^3-2x+3$이라 하면 $f'(x)=3x^2-2$

점 $(1, 2)$에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=1$이므로 접선의 방정식은

$y-2=x-1 \qquad \therefore y=x+1$ …… ⅰ



곡선 $y=x^3-2x+3$과 직선 $y=x+1$의 교점의 x좌표는 $x^3-2x+3=x+1$에서

$x^3-3x+2=0$

$(x+2)(x-1)^2=0$

$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ …… ⅱ

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$S=\int_{-2}^{1}\{(x^3-2x+3)-(x+1)\}\,dx$

$=\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\,dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-2}^{1}=\frac{27}{4}$ …… ⅲ

채점 기준	
ⅰ 접선의 방정식 구하기	30 %
ⅱ 곡선과 접선의 교점의 x좌표 구하기	30 %
ⅲ 곡선과 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	40 %

6 답 ③

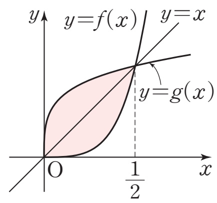
$A=B$이므로

$\int_0^a(-x^2+4x)\,dx=0$

$\left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^a=0$, $-\frac{1}{3}a^3+2a^2=0$

$a^2(a-6)=0 \qquad \therefore a=6\ (\because a>4)$

7 답 ③



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표는 $4x^3=x$에서

$4x^3-x=0$, $x(2x+1)(2x-1)=0$

$\therefore x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ ($\because x\ge 0$)

따라서 구하는 도형의 넓이를 S라 하면

$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}(x-4x^3)\,dx$$
$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-x^4\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{1}{8}$$

8 답 10

시각 $t=3$에서의 점 P의 위치가 -15이므로

$$0+\int_0^3(3t^2-6t+a)\,dt=-15$$

$$\left[t^3-3t^2+at\right]_0^3=-15$$

$3a=-15$ $\quad\therefore a=-5$ …… i

따라서 시각 $t=2$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_2^4(3t^2-6t-5)\,dt=\left[t^3-3t^2-5t\right]_2^4$$
$$=10$$ …… ii

채점 기준

i a의 값 구하기	60 %
ii 시각 $t=2$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량 구하기	40 %

9 답 ③

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$이므로

$6t^2-12t=0$, $t(t-2)=0$

$\therefore t=2$ ($\because t>0$)

따라서 시각 $t=2$에서의 점 P의 위치는

$$1+\int_0^2(6t^2-12t)\,dt=1+\left[2t^3-6t^2\right]_0^2$$
$$=-7$$

10 답 ④

점 P가 출발 후 다시 원점을 지나는 시각을 $t=a$라 하면

$$\int_0^a(9-3t)\,dt=0$$

$\left[9t-\frac{3}{2}t^2\right]_0^a=0$, $9a-\frac{3}{2}a^2=0$

$a(6-a)=0$ $\quad\therefore a=6$ ($\because a>0$)

따라서 시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^6|9-3t|\,dt=\int_0^3(9-3t)\,dt+\int_3^6(-9+3t)\,dt$$
$$=\left[9t-\frac{3}{2}t^2\right]_0^3+\left[-9t+\frac{3}{2}t^2\right]_3^6$$
$$=27$$

11 답 95 m

공이 최고 높이에 도달할 때 $v(t)=0$이므로

$40-10t=0$ $\quad\therefore t=4$ …… i

따라서 공을 쏘아 올린 지 4초 후에 최고 높이에 도달하므로 구하는 높이는

$$15+\int_0^4(40-10t)\,dt=15+\left[40t-5t^2\right]_0^4$$
$$=95(\text{m})$$ …… ii

채점 기준

i 공이 최고 높이에 도달하는 시각 구하기	30 %
ii 공이 최고 높이에 도달하는 순간의 지면으로부터의 높이 구하기	70 %

12 답 ㄷ, ㄹ

ㄱ. 시각 $t=3$에서 $t=5$까지 점 P는 2의 속도로 일정하게 움직인다.

ㄴ. 시각 $t=9$에서의 점 P의 위치는

$$0+\int_0^9 v(t)\,dt=\int_0^2 v(t)\,dt+\int_2^6 v(t)\,dt+\int_6^9 v(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\times2\times1+\frac{1}{2}\times(2+4)\times2-\frac{1}{2}\times3\times2$$
$$=4$$

ㄷ. 점 P가 정지할 때 $v(t)=0$이므로 출발 후 처음으로 정지하는 시각은 $t=2$이다.

따라서 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2|v(t)|\,dt=\frac{1}{2}\times2\times1=1$$

ㄹ. $v(t)=0$이고 그 좌우에서 $v(t)$의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 점 P는 시각 $t=6$에서 운동 방향을 바꾼다.

따라서 점 P는 출발 후 $t=9$까지 운동 방향을 한 번 바꾼다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

memo

memo