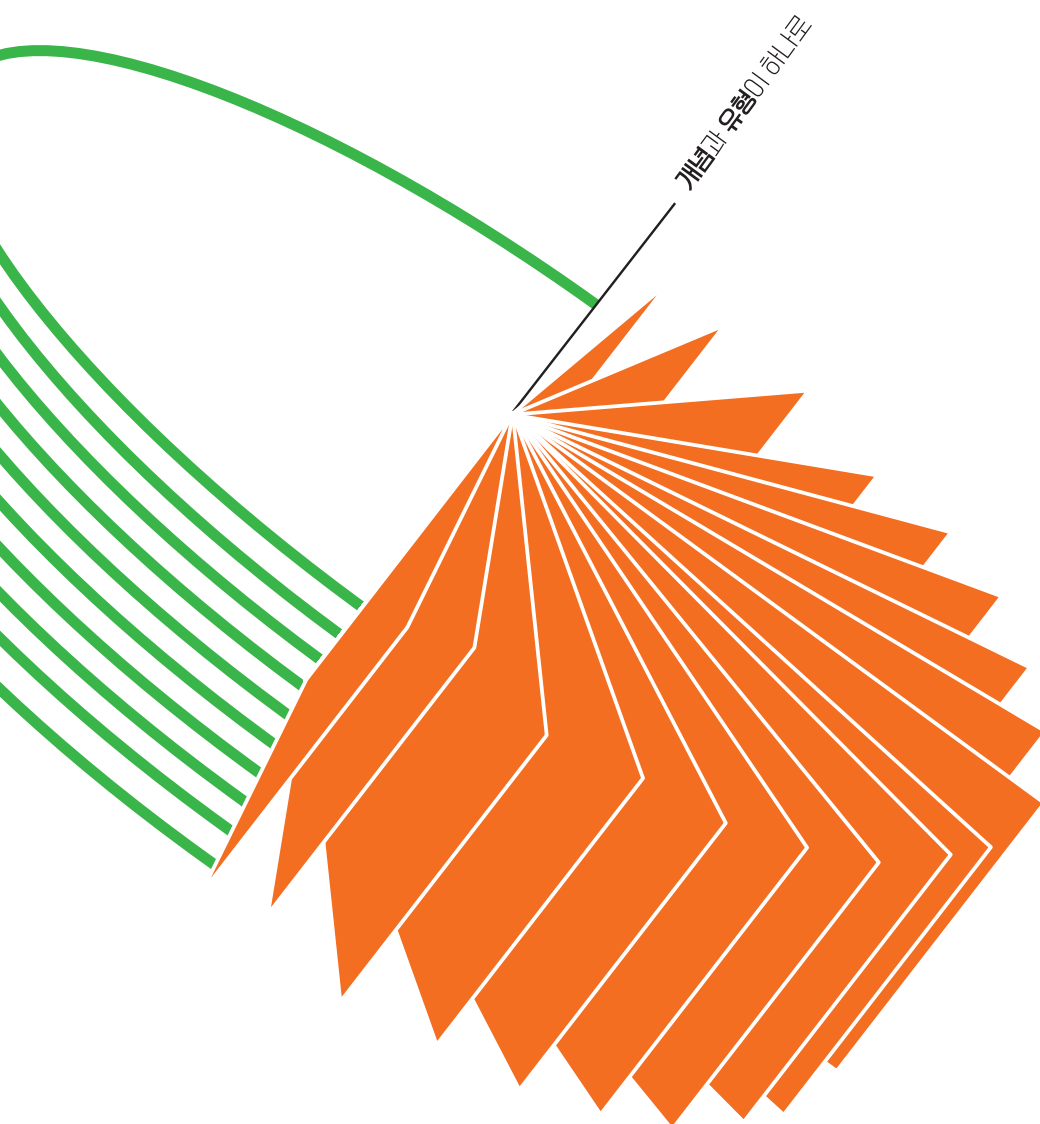


개념+유형

미적분Ⅱ

정답과 해설



개념편

정답과 해설

I-1 01 수열의 극한

수열의 수렴과 발산

문제

10쪽

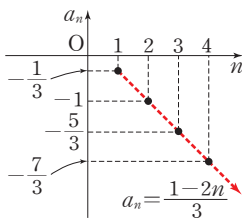
01-1 ㉡ (1) 발산 (2) 수렴, 0 (3) 발산

(4) 발산 (5) 수렴, $\frac{1}{4}$ (6) 수렴, 2

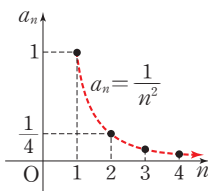
주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하고 $n=1, 2, 3, \dots$ 을 차례대로 대입하여 a_n 의 값의 변화를 그래프로 나타낸 후 수열의 수렴, 발산을 판정한다.

(1) 오른쪽 그림과 같이 n 의

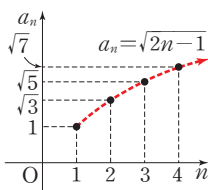
값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다. 따라서 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.



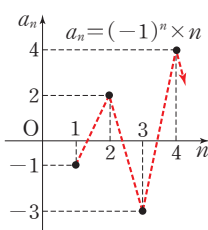
(2) 오른쪽 그림과 같이 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 0에 한없이 가까워진다. 따라서 주어진 수열은 수렴하고, 극한값은 0이다.



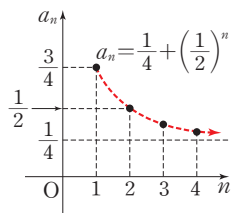
(3) 오른쪽 그림과 같이 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값도 한없이 커진다. 따라서 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.



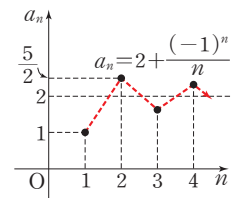
(4) 오른쪽 그림과 같이 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 어느 한 값에 수렴하지도 않고 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지도 않는다. 따라서 주어진 수열은 발산(진동)한다.



(5) 오른쪽 그림과 같이 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 $\frac{1}{4}$ 에 한없이 가까워진다. 따라서 주어진 수열은 수렴하고, 극한값은 $\frac{1}{4}$ 이다.



(6) 오른쪽 그림과 같이 n 의 값이 한없이 커질 때, a_n 의 값은 2에 한없이 가까워진다. 따라서 주어진 수열은 수렴하고, 극한값은 2이다.



2 수열의 극한값의 계산

개념 Check

12쪽

1 ㉡ (1) 6 (2) -1 (3) -30 (4) -1

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n + 3) &= -\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \\ &= -(-3) + 3 = 6 \\ (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n + 4b_n) &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 4 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= 3 \times (-3) + 4 \times 2 = -1 \\ (3) \lim_{n \rightarrow \infty} 5a_n b_n &= 5 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= 5 \times (-3) \times 2 = -30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n}{3b_n} &= \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{3 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \\ &= \frac{2 \times (-3)}{3 \times 2} = -1 \end{aligned}$$

2 ㉡ (1) 2 (2) 1 (3) -3 (4) $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= 2 + 0 = 2 \\ (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= 1 - 0 - 0 = 1 \\ (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n} - 3 \right) \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) &= \left(2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \\ &= (0 - 3)(1 + 0) = -3 \end{aligned}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{1 - 0}{2 + 0} = \frac{1}{2}$$

문제

13~23쪽

02-1 ㉡ 2

수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 4) = 2$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 4 = 2 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$$

수열 $\{b_n\}$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + 3) = 5$ 에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 5 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - b_n}{2a_n - 5b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 5 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \\ &= \frac{6 - 2}{2 \times 6 - 5 \times 2} = 2 \end{aligned}$$

02-2 ㉡ -6

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 수렴하므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2b_n) = 4 \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$$

$$\therefore \alpha + 2\beta = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 5b_n) = 17 \text{에서}$$

$$2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - 5 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 17$$

$$\therefore 2\alpha - 5\beta = 17 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $\alpha = 6$, $\beta = -1$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{6}{-1} = -6$$

02-3 ㉡ 3

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이 수렴하므로

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 4 \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4$$

$$\therefore \alpha + \beta = 4$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 10 \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = 10$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 10$$

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \text{이므로}$$

$$4^2 = 10 + 2\alpha\beta \quad \therefore \alpha\beta = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha\beta = 3$$

다른 풀이

두 수열 $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n^2 + b_n^2\}$ 이 수렴하므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \{ (a_n + b_n)^2 - (a_n^2 + b_n^2) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) \} \\ &= \frac{1}{2} (4^2 - 10) = 3 \end{aligned}$$

03-1 ㉡ (1) ∞ (2) $\frac{3}{2}$ (3) 0 (4) $\frac{1}{2}$

(1) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + n}{3n^2 - 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + \frac{1}{n}}{3 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}} = \infty$$

(2) 식을 전개한 후 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2 으로 각각 나누면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)(3n-5)}{(2n+1)(n+3)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n - 10}{2n^2 + 7n + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n} - \frac{10}{n^2}}{2 + \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2}} \\ &= \frac{3 + 0 - 0}{2 + 0 + 0} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

(3) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n}}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{0}{2+0} = 0$$

(4) 분모, 분자를 분모의 최고차항인 $\sqrt{n}$ 으로 각각 나누면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

04-1 ㉡ (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} (1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+n}{2n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{2n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n}{4n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{4} \\ &= \frac{1+0}{4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\
= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^2-1}{2^2} \times \frac{3^2-1}{3^2} \times \frac{4^2-1}{4^2} \times \cdots \times \frac{n^2-1}{n^2}\right) \\
= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \times \frac{(3-1)(3+1)}{3^2} \right. \\
\quad \times \frac{(4-1)(4+1)}{4^2} \times \cdots \times \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} \Big\} \\
= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1 \times 3}{2 \times 2} \times \frac{2 \times 4}{3 \times 3} \times \frac{3 \times 5}{4 \times 4} \right. \\
\quad \times \cdots \times \frac{(n-1)(n+1)}{n \times n} \Big\} \\
= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2} = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

04-2 ㉡ $\frac{1}{4}$

첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n+1$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k+1) = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + n = n^2 + 2n$$

$$\begin{aligned}
\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{a_n a_{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{(2n+1)\{2(n+1)+1\}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{4n^2 + 8n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{4 + \frac{8}{n} + \frac{3}{n^2}} \\
&= \frac{1+0}{4+0+0} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

05-1 ㉡ 9

주어진 식의 좌변의 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n 으로 각각 나누면

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a + \frac{1}{n^2}} + 2}{1} &= 5 \\
\sqrt{a+0} + 2 &= 5, \sqrt{a} = 3 \quad \therefore a = 9
\end{aligned}$$

05-2 ㉡ 3

주어진 식의 좌변의 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + 6 - \frac{3}{n}}{b - \frac{1}{n}} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a \neq 0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로 $a = 0$

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{3}{n}}{b - \frac{1}{n}} = 2$$

$$\begin{aligned}
\frac{6-0}{b-0} &= 2 \quad \therefore b = 3 \\
\therefore b - a &= 3 - 0 = 3
\end{aligned}$$

05-3 ㉡ 16

주어진 식의 좌변의 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^3 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{4}{n^3}}{1 - b + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = 5$$

$1-b \neq 0$, 즉 $b \neq 1$ 이면 극한값이 0이므로 $b = 1$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2 + 3n - 4}{3n^2 + 2n - 1} = 5$$

좌변의 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{3}{n} - \frac{4}{n^2}}{3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} = 5$$

$$\frac{a+0-0}{3+0-0} = 5 \quad \therefore a = 15$$

$$\therefore a + b = 15 + 1 = 16$$

06-1 ㉡ (1) $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$

(1) 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + 1}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 5n} - \sqrt{n^2 + 1})(\sqrt{n^2 + 5n} + \sqrt{n^2 + 1})}{\sqrt{n^2 + 5n} + \sqrt{n^2 + 1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n - 1}{\sqrt{n^2 + 5n} + \sqrt{n^2 + 1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{5}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \\
&= \frac{5-0}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1+0}} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

(2) 분모를 유리화하면

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 4n + 2} - n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n + 2} + n}{(\sqrt{n^2 + 4n + 2} - n)(\sqrt{n^2 + 4n + 2} + n)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 4n + 2} + n}{4n + 2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}} + 1}{4 + \frac{2}{n}} \\
&= \frac{\sqrt{1+0+0} + 1}{4+0} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

06-2 ㉡ 2

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 4\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \\ &= \frac{4}{\sqrt{1+0}+1} = 2 \end{aligned}$$

07-1 ㉡ $\frac{2}{5}$

$$\begin{aligned} 6+8+10+\cdots+(2n+4) &= \sum_{k=1}^n (2k+4) \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 4n \\ &= n^2+5n \\ 1+3+5+\cdots+(2n-1) &= \sum_{k=1}^n (2k-1) \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

이를 주어진 극한에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{6+8+10+\cdots+(2n+4)}-\sqrt{1+3+5+\cdots+(2n-1)}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+5n}-\sqrt{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+5n}-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+5n}+n}{(\sqrt{n^2+5n}-n)(\sqrt{n^2+5n}+n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+5n}+n}{5n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{n}}+1}{5} \\ &= \frac{\sqrt{1+0}+1}{5} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

07-2 ㉡ $\frac{1}{2}$

주어진 수열은

$$\sqrt{1 \times 2}-1, \sqrt{2 \times 3}-2, \sqrt{3 \times 4}-3, \sqrt{4 \times 5}-4, \dots$$

이므로 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n(n+1)}-n \\ &= \sqrt{n^2+n}-n \end{aligned}$$

따라서 구하는 극한값은

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n}-n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+n}-n)(\sqrt{n^2+n}+n)}{\sqrt{n^2+n}+n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

07-3 ㉡ -2

이차방정식 $x^2-x+n-\sqrt{n^2+n}=0$ 의 두 근이 a_n, b_n 이

므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n+b_n=1, a_nb_n=n-\sqrt{n^2+n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n+b_n}{a_nb_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-\sqrt{n^2+n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+\sqrt{n^2+n}}{(n-\sqrt{n^2+n})(n+\sqrt{n^2+n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+\sqrt{n^2+n}}{-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{-1} \\ &= \frac{1+\sqrt{1+0}}{-1} = -2 \end{aligned}$$

08-1 ㉡ 4

주어진 식의 좌변의 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2+an}-\sqrt{n^2+3})(\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+3})}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+3}} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an-3}{\sqrt{n^2+an}+\sqrt{n^2+3}} = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a-\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}} = 2$$

$$\frac{a-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = 2 \quad \therefore a=4$$

08-2 ㉡ -6

주어진 식의 좌변의 분모를 유리화하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2+an}+3n+a}{(\sqrt{9n^2+an}-3n-a)(\sqrt{9n^2+an}+3n+a)} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2+an}+3n+a}{-5an-a^2} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9+\frac{a}{n}}+3+\frac{a}{n}}{-5a-\frac{a^2}{n}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{\sqrt{9+0}+3+0}{-5a-0} = \frac{1}{5} \quad \therefore a=-6$$

08-3 ㉡ 6

주어진 식의 좌변의 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{an^2+n}-bn)(\sqrt{an^2+n}+bn)}{\sqrt{an^2+n}+bn} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-b^2)n^2+n}{\sqrt{an^2+n}+bn} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a-b^2)n+1}{\sqrt{a+\frac{1}{n}}+b} = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$a-b^2 \neq 0$, 즉 $a \neq b^2$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로

$$a=b^2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①을 ①에 대입하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{b^2 + \frac{1}{n}} + b} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 + 0} + b} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{2b} = \frac{1}{4} \quad (\because b > 0) \quad \therefore b=2$$

이를 ①에 대입하면 $a=4$

$$\therefore a+b=4+2=6$$

09-1 [답] (1) 3 (2) 1 (3) -4

$$(1) \frac{3a_n-2}{2a_n+1} = b_n \text{으로 놓으면 } 3a_n-2=b_n(2a_n+1)$$

$$\therefore a_n = \frac{b_n+2}{3-2b_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n+2}{3-2b_n} = \frac{1+2}{3-2 \times 1} = 3$$

$$(2) (2n^2+n+1)a_n = b_n \text{으로 놓으면}$$

$$a_n = \frac{b_n}{2n^2+n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 \times \frac{b_n}{2n^2+n+1} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2+n+1} \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= \frac{1}{2} \times 2 = 1 \end{aligned}$$

$$(3) 2a_n - b_n = c_n \text{으로 놓으면}$$

$$b_n = 2a_n - c_n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$$

①을 구하는 극한에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n+b_n-1}{3a_n-2b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n+(2a_n-c_n)-1}{3a_n-2(2a_n-c_n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4a_n-c_n-1}{-a_n+2c_n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4-\frac{c_n}{a_n}-\frac{1}{a_n}}{-1+\frac{2c_n}{a_n}} = -4 \end{aligned}$$

[다른 풀이]

(2) 수렴하는 수열의 곱으로 식을 변형하면

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n^2}{2n^2+n+1} \times (2n^2+n+1)a_n \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2+n+1} \times \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2+n+1)a_n \\ &= \frac{1}{2} \times 2 = 1 \end{aligned}$$

10-1 [답] 5

$5n^2+2n-3 < a_n < 5n^2+3n+1$ 의 각 변을 $(n+1)^2$ 으로 나누면

$$\frac{5n^2+2n-3}{(n+1)^2} < \frac{a_n}{(n+1)^2} < \frac{5n^2+3n+1}{(n+1)^2}$$

$$\therefore \frac{5n^2+2n-3}{n^2+2n+1} < \frac{a_n}{(n+1)^2} < \frac{5n^2+3n+1}{n^2+2n+1}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+2n-3}{n^2+2n+1} = 5$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2+3n+1}{n^2+2n+1} = 5$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{(n+1)^2} = 5$$

10-2 [답] 0

모든 자연수 n 에 대하여

$$-1 \leq \cos n\theta \leq 1$$

각 변을 n^2+2 로 나누면

$$-\frac{1}{n^2+2} \leq \frac{\cos n\theta}{n^2+2} \leq \frac{1}{n^2+2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n^2+2} \right) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+2} = 0$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n\theta}{n^2+2} = 0$$

10-3 [답] 1

$2n-1 < na_n < \sqrt{4n^2+2n}$ 의 각 변에 $\frac{n}{2n^2-1}$ 을 곱하면

$$\frac{n(2n-1)}{2n^2-1} < \frac{n^2 a_n}{2n^2-1} < \frac{n\sqrt{4n^2+2n}}{2n^2-1}$$

$$\therefore \frac{2n^2-n}{2n^2-1} < \frac{n^2 a_n}{2n^2-1} < \frac{\sqrt{4n^4+2n^3}}{2n^2-1}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-n}{2n^2-1} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^4+2n^3}}{2n^2-1} = 1$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n}{2n^2-1} = 1$$

[다른 풀이]

$2n-1 < na_n < \sqrt{4n^2+2n}$ 의 각 변을 n 으로 나누면

$$\frac{2n-1}{n} < a_n < \frac{\sqrt{4n^2+2n}}{n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2+2n}}{n} = 2$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n}{2n^2-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2-1} \times \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ &= \frac{1}{2} \times 2 = 1 \end{aligned}$$

11-1 ㉡ ㄱ, ㄴ

ㄱ. $a_n < b_n$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이면 n 의 값이 한없이 커질 때 a_n 의 값도 한없이 커지므로 b_n 의 값도 한없이 커진다.
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

ㄴ. [반례] $\{a_n\}: 1, 0, 1, 0, 1, \dots$
 $\{b_n\}: 0, 1, 0, 1, 0, \dots$

이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ 이지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

ㄷ. [반례] $a_n = \frac{1}{n^2}$, $b_n = n$ 이라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ (발산)} \text{이지만}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} \times n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

즉, 수열 $\{a_n b_n\}$ 은 수렴한다.

ㄹ. [반례] $a_n = 2 + (-1)^n$, $b_n = 4$ 라 하면 $0 < a_n < b_n$ 이고 수열 $\{b_n\}$ 은 4에 수렴하지만 수열 $\{a_n\}$ 은 발산(진동)한다.

ㅁ. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{a_n - b_n\}$ 이 모두 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \beta \text{ (}\alpha, \beta \text{는 실수)라 하면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n - (a_n - b_n)\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \alpha - \beta$$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 도 수렴한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

12-1 ㉡ $\frac{4}{3}$

$P_n(n, 2n^2)$, $Q_n(n+1, 2n^2+4n+2)$ 이므로

$$a_n = \overline{P_n Q_n} = \sqrt{1^2 + (4n+2)^2}$$

$$= \sqrt{16n^2 + 16n + 5}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{9n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16n^2 + 16n + 5}}{\sqrt{9n^2 + n}} = \frac{4}{3}$$

12-2 ㉡ $\frac{1}{4}$

직선 $P_n H_n$ 은 직선 $y = nx$ 와 서로 수직이므로 기울기가 $-\frac{1}{n}$ 이고, 점 $P_n\left(\frac{n}{2}, \frac{n^2}{4}\right)$ 을 지나므로 직선 $P_n H_n$ 의 방정식은

$$y - \frac{n^2}{4} = -\frac{1}{n}\left(x - \frac{n}{2}\right) \quad \therefore y = -\frac{1}{n}x + \frac{1}{2} + \frac{n^2}{4}$$

이 직선과 직선 $y = nx$ 의 교점 H_n 의 x 좌표를 구하면

$$nx = -\frac{1}{n}x + \frac{1}{2} + \frac{n^2}{4}$$

$$\left(n + \frac{1}{n}\right)x = \frac{1}{2} + \frac{n^2}{4}, \quad \frac{n^2+1}{n}x = \frac{n^2+2}{4}$$

$$\therefore x = \frac{n(n^2+2)}{4(n^2+1)}$$

따라서 $h_n = \frac{n(n^2+2)}{4(n^2+1)}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{4n^2+4} = \frac{1}{4}$$

다른 풀이

$P_n\left(\frac{n}{2}, \frac{n^2}{4}\right)$, $H_n(h_n, nh_n)$ 이고 직선 $P_n H_n$ 과 직선

$y = nx$ 는 서로 수직이므로

$$\frac{nh_n - \frac{n^2}{4}}{h_n - \frac{n}{2}} \times n = -1$$

$$n\left(nh_n - \frac{n^2}{4}\right) = \frac{n}{2} - h_n, \quad (n^2+1)h_n = \frac{n^3+2n}{4}$$

$$\therefore h_n = \frac{n^3+2n}{4(n^2+1)}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2}{4n^2+4} = \frac{1}{4}$$

연습문제

24~25쪽

1 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ	2 3	3 ㉡	4 3
5 ㉡	6 2	7 ㉡	8 8
		9 ㉡	
10 6	11 -1	12 ㉡	13 ㄴ
15 ㉡			14 $\frac{1}{4}$

1 ㄱ. 수열 6, 6, 6, 6, ...은 n 의 값이 한없이 커질 때, 6에 수렴한다.

ㄴ. 수열 $\left\{-\frac{1}{2}n^2+3\right\}$ 의 첫째항부터 차례대로 항을 나열해 보면

$$\frac{5}{2}, 1, -\frac{3}{2}, -5, \dots$$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때, 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.

ㄷ. 수열 $\left\{\frac{3}{n+2}\right\}$ 의 첫째항부터 차례대로 항을 나열해 보면

$$1, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \dots$$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때, 이 수열은 0에 수렴한다.

ㄹ. 수열 $\{\tan 2n\pi+1\}$ 의 첫째항부터 차례대로 항을 나열해 보면

$$1, 1, 1, 1, \dots$$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때, 이 수열은 1에 수렴한다.

ㄱ. 수열 $\left\{\frac{\cos n\pi}{n+1}\right\}$ 의 첫째항부터 차례대로 항을 나열해 보면

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때, 이 수열은 0에 수렴한다.

ㄴ. 수열 $1, 1-1, 1-1+1, 1-1+1-1, \dots$ 은

$$1, 0, 1, 0, \dots$$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때, 이 수열은 발산(진동)한다.

따라서 보기에서 수렴하는 수열인 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ이다.

$$\begin{aligned} 2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 - a_n b_n + b_n^2) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n + b_n)^2 - 3a_n b_n\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n)^2 - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n \\ &= 3^2 - 3 \times 2 = 3 \end{aligned}$$

3 수열 $\{a_n\}$ 이 0이 아닌 실수에 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad (\alpha \neq 0 \text{인 실수}) \text{라 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 4 - 4a_n \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} (4 - 4a_n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 4 - 4 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$\frac{1}{\alpha} = 4 - 4\alpha, \quad 4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0 \quad (\because \alpha \neq 0)$$

$$(2\alpha - 1)^2 = 0 \quad \therefore \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

$$4 \quad 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)$$

$$= \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n (k^2 + k)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{\frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 3}{n^3 + 3n^2 + 2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = 3$$

5 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_n = 2 + (n-1)d = dn + 2 - d \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dn+2-d}{2n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d + \frac{2-d}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{d}{2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{d}{2} = 3 \text{이므로 } d = 6$$

$$\text{따라서 } a_n = 6n - 4 \text{이므로}$$

$$a_3 = 18 - 4 = 14$$

$$\begin{aligned} 6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})(\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 2}{\sqrt{1 + \frac{3}{n}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}} = 2 \end{aligned}$$

$$7 \quad \sqrt{4n^2} < \sqrt{4n^2 + 2n + 1} < \sqrt{4n^2 + 4n + 1} \text{이므로}$$

$$\sqrt{(2n)^2} < \sqrt{4n^2 + 2n + 1} < \sqrt{(2n+1)^2}$$

$$\therefore 2n < \sqrt{4n^2 + 2n + 1} < 2n+1$$

따라서 $\sqrt{4n^2 + 2n + 1}$ 의 정수 부분이 $2n$ 이므로 소수 부분

$$a_n \text{은}$$

$$a_n = \sqrt{4n^2 + 2n + 1} - 2n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 2n + 1} - 2n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2 + 2n + 1} - 2n)(\sqrt{4n^2 + 2n + 1} + 2n)}{\sqrt{4n^2 + 2n + 1} + 2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{\sqrt{4n^2 + 2n + 1} + 2n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{\sqrt{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + 2} = \frac{1}{2}$$

8 (가)에서 좌변의 분모, 분자를 분모의 최고차항인 n^2 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} = -2 \quad \dots\dots ㉠$$

$a \neq 0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로

$$a = 0$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}} = -2$$

$$\frac{b}{2} = -2 \quad \therefore b = -4$$

(나)에서 좌변의 분모를 1로 보고 분자를 유리화하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + cn} - n)(\sqrt{n^2 + cn} + n)}{\sqrt{n^2 + cn} + n} = 6$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{cn}{\sqrt{n^2 + cn} + n} = 6, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{\sqrt{1 + \frac{c}{n}} + 1} = 6$$

$$\frac{c}{2} = 6 \quad \therefore c = 12$$

$$\therefore a + b + c = 0 + (-4) + 12 = 8$$

9 주어진 식의 좌변의 분모를 유리화하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^b(\sqrt{n^4 + 4n} + \sqrt{n^4 + n})}{(\sqrt{n^4 + 4n} - \sqrt{n^4 + n})(\sqrt{n^4 + 4n} + \sqrt{n^4 + n})} = 6$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^b(\sqrt{n^4 + 4n} + \sqrt{n^4 + n})}{3n} = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $b < -1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^b(\sqrt{n^4 + 4n} + \sqrt{n^4 + n})}{3n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a\left(\sqrt{1 + \frac{4}{n^3}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}\right)}{3n^{-(b+1)}} = 0 \quad \leftarrow \begin{matrix} -(b+1) > 0 \text{이므로} \\ \text{상수} \end{matrix} \text{ 꼴이 된다.} \end{aligned}$$

이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ii) $b = -1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a(\sqrt{n^4 + 4n} + \sqrt{n^4 + n})}{3n^2} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a\left(\sqrt{1 + \frac{4}{n^3}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}\right)}{3} = \frac{2}{3}a \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \textcircled{1} \text{에서 } \frac{2}{3}a = 6 \text{이므로 } a = 9$$

(iii) $b > -1$ 일 때,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^b(\sqrt{n^4 + 4n} + \sqrt{n^4 + n})}{3n} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{3} n^{b+1} \left(\sqrt{1 + \frac{4}{n^3}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^3}} \right) = \infty \quad \leftarrow \begin{matrix} b+1 > 0 \text{이므로} \\ \text{상수} \end{matrix} \text{ 꼴이 된다.} \end{aligned}$$

이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a = 9$, $b = -1$ 이므로

$$a + b = 8$$

참고 $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴의 극한에서 0이 아닌 극한값을 가지므로 ㉠의 좌변의 분자, 분모의 차수가 같아야 한다.

즉, 분모의 차수가 1이므로 분자의 차수도 1이어야 한다.

$$\therefore b = -1$$

10 $\frac{a_n}{3n+1} = c_n$ 으로 놓으면

$$a_n = (3n+1)c_n$$

$\frac{b_n}{5n+1} = d_n$ 으로 놓으면

$$b_n = (5n+1)d_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{5n^2 + 3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)c_n \times (5n+1)d_n}{5n^2 + 3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)(5n+1)}{5n^2 + 3n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} c_n d_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15n^2 + 8n + 1}{5n^2 + 3n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} c_n d_n \\ &= 3 \times 2 \times 1 = 6 \end{aligned}$$

11 $a_n + b_n = c_n$ 으로 놓으면

$$b_n = c_n - a_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -2 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2b_n}{a_n} - \frac{a_n}{b_n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2(c_n - a_n)}{a_n} - \frac{a_n}{c_n - a_n} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2c_n}{a_n} - 2 - \frac{1}{\frac{c_n}{a_n} - 1} \right) \\ &= -2 - (-1) = -1 \end{aligned}$$

12 $\sqrt{9n^2 - 5} + 2n < a_n < 5n + 1$ 의 각 변을 n 으로 나누면

$$\frac{\sqrt{9n^2 - 5} + 2n}{n} < \frac{a_n}{n} < \frac{5n + 1}{n}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 - 5} + 2n}{n} = 5, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + 1}{n} = 5 \text{이므로 수}$$

열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + 2)^2}{na_n + 5n^2 - 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a_n}{n} + \frac{2}{n} \right)^2}{\frac{a_n}{n} + 5 - \frac{2}{n^2}} \\ &= \frac{5^2}{5 + 5} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

13 ㄱ. [반례] $a_n = n^2$, $b_n = \frac{1}{n}$ 이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ 이고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이지만 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty \text{이다.}$$

ㄴ. [반례] $a_n = (-1)^n$ 이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = 1$ 이지만

수열 $\{a_n\}$ 은 발산(진동)하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq -1$$

ㄷ. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n + b_n) - a_n\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 - \alpha = -\alpha\end{aligned}$$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 도 수렴한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

14. $\log_3 a_n + \log_3 a_{n+1} + \log_3 a_{n+2} = 1$ 에서

$$\log_3 a_n a_{n+1} a_{n+2} = 1$$

$$a_n a_{n+1} a_{n+2} = 3 \quad \therefore a_{n+2} = \frac{3}{a_n a_{n+1}}$$

$a_1 = 3, a_2 = 4$ 이므로

$$a_3 = \frac{3}{a_1 a_2} = \frac{3}{3 \times 4} = \frac{1}{4}$$

$$a_4 = \frac{3}{a_2 a_3} = \frac{3}{4 \times \frac{1}{4}} = 3$$

$$a_5 = \frac{3}{a_3 a_4} = \frac{3}{\frac{1}{4} \times 3} = 4$$

$$a_6 = \frac{3}{a_4 a_5} = \frac{3}{3 \times 4} = \frac{1}{4}$$

⋮

따라서 $a_{3k} = \frac{1}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+3} \sum_{k=1}^n a_{3k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+3} \times \frac{1}{4} n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4n+12} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

15. 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{CA}^2} = \sqrt{2^2 + n^2} = \sqrt{n^2 + 4}$$

이때 선분 AD가 $\angle A$ 의 이등분선이므로

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \overline{AB} : \overline{AC} = 2 : n$$

$$\therefore a_n = \frac{n}{n+2} \times \sqrt{n^2 + 4} = \frac{n\sqrt{n^2 + 4}}{n+2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (n - a_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{n\sqrt{n^2 + 4}}{n+2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2) - n\sqrt{n^2 + 4}}{n+2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2 - \sqrt{n^2 + 4})}{n+2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2 - \sqrt{n^2 + 4})(n+2 + \sqrt{n^2 + 4})}{(n+2)(n+2 + \sqrt{n^2 + 4})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2}{n^2 + 4n + 4 + (n+2)\sqrt{n^2 + 4}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{1 + \frac{4}{n} + \frac{4}{n^2} + \left(1 + \frac{2}{n}\right)\sqrt{1 + \frac{4}{n^2}}} = 2$$

I-1 02 등비수열의 극한

등비수열의 수렴과 발산

문제

27~30쪽

01-1 ㉡ (1) -9 (2) 10 (3) 0 (4) 9

(1) 분모, 분자를 3^n 으로 각각 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+2}}{7 \times 2^{n-1} - 3^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{\frac{7}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1} \\ &= \frac{9}{\frac{7}{2} \times 0 - 1} = -9\end{aligned}$$

(2) 분모, 분자를 5^n 으로 각각 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 5^n + 2^{n+1}}{5^{n-1} - 3^{n+3}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n}{\frac{1}{5} - 27 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n} \\ &= \frac{2 + 2 \times 0}{\frac{1}{5} - 27 \times 0} = 10\end{aligned}$$

(3) 분모, 분자를 4^n 으로 각각 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 3^n}{3^{n+1} + 5 \times 2^{2n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{4}\right)^n}{3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n + 5} \\ &= \frac{2 \times 0 - 0}{3 \times 0 + 5} = 0\end{aligned}$$

(4) 분모, 분자를 9^n 으로 각각 나누면

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2n+1} + 4^n}{3^{2n-1} + 4^{n-2}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \left(\frac{4}{9}\right)^n}{\frac{1}{3} + \frac{1}{16} \times \left(\frac{4}{9}\right)^n} \\ &= \frac{3 + 0}{\frac{1}{3} + \frac{1}{16} \times 0} = 9\end{aligned}$$

01-2 ㉡ 2

주어진 식의 좌변의 분모, 분자를 5^n 으로 각각 나누면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n + 30}{a - 7 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n} = 15$$

$$\frac{16 \times 0 + 30}{a - 7 \times 0} = 15 \quad \therefore a = 2$$

02-1 ㉡ (1) 0 (2) $\frac{8}{9}$

$$(1) 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1} - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$$

$$1 + 5 + 5^2 + \cdots + 5^n = \frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} = \frac{1}{4}(5^{n+1} - 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+3^2+\cdots+3^n}{1+5+5^2+\cdots+5^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}(3^{n+1}-1)}{\frac{1}{4}(5^{n+1}-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(3^{n+1}-1)}{5^{n+1}-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \times \left(\frac{3}{5}\right)^n - 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n}{5 - \left(\frac{1}{5}\right)^n} \\ &= \frac{6 \times 0 - 2 \times 0}{5 - 0} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad 1+9+9^2+\cdots+9^n &= \frac{9^{n+1}-1}{9-1} = \frac{1}{8}(9^{n+1}-1) \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n+1}+3^{2n}}{1+9+9^2+\cdots+9^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n+1}+3^{2n}}{\frac{1}{8}(9^{n+1}-1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8(2^{3n+1}+3^{2n})}{9^{n+1}-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16 \times 8^n + 8 \times 9^n}{9^{n+1}-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n + 8}{9 - \left(\frac{1}{9}\right)^n} \\ &= \frac{16 \times 0 + 8}{9 - 0} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

02-2 ㉡ $\frac{1}{2}$

첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은
 $a_n = 3 \times 2^{n-1}$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{3(2^n-1)}{2-1} = 3 \times 2^n - 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 2^{n-1}}{3 \times 2^n - 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{2}}{3 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} \\ &= \frac{\frac{3}{2}}{3 - 3 \times 0} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

03-1 ㉡ (1) $1 \leq x < 7$

$$(2) \quad -1 - \sqrt{2} \leq x < -1 \text{ 또는 } -1 < x \leq -1 + \sqrt{2}$$

$$(3) \quad x = 5 \text{ 또는 } -5 < x \leq 3$$

$$(4) \quad -6 \leq x < -4 \text{ 또는 } -1 \leq x \leq 1$$

(1) 등비수열 $\left\{\left(\frac{4-x}{3}\right)^n\right\}$ 이 수렴하려면

$$-1 < \frac{4-x}{3} \leq 1$$

$$-3 < 4-x \leq 3$$

$$-7 < -x \leq -1$$

$$\therefore 1 \leq x < 7$$

(2) 등비수열 $\{x^n(x+2)^n\}$ 이 수렴하려면

$$-1 < x^2+2x \leq 1$$

(i) $x^2+2x > -1$ 에서

$$x^2+2x+1 > 0$$

$$\therefore (x+1)^2 > 0$$

따라서 $x \neq -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

(ii) $x^2+2x \leq 1$ 에서

$$x^2+2x-1 \leq 0$$

$$\therefore -1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{2}$$

(i), (ii)에서

$$-1 - \sqrt{2} \leq x < -1 \text{ 또는 } -1 < x \leq -1 + \sqrt{2}$$

(3) 수열 $\left\{(x-5)\left(\frac{x+1}{4}\right)^{n-1}\right\}$ 이 수렴하려면

$$x-5=0 \text{ 또는 } -1 < \frac{x+1}{4} \leq 1$$

$$x=5 \text{ 또는 } -4 < x+1 \leq 4$$

$$\therefore x=5 \text{ 또는 } -5 < x \leq 3$$

(4) 수열 $\left\{(x+1)\left(\frac{x^2+5x-1}{5}\right)^{n-1}\right\}$ 이 수렴하려면

$$x+1=0 \text{ 또는 } -1 < \frac{x^2+5x-1}{5} \leq 1$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } -5 < x^2+5x-1 \leq 5$$

(i) $x^2+5x-1 > -5$ 에서

$$x^2+5x+4 > 0$$

$$(x+4)(x+1) > 0$$

$$\therefore x < -4 \text{ 또는 } x > -1$$

(ii) $x^2+5x-1 \leq 5$ 에서

$$x^2+5x-6 \leq 0$$

$$(x+6)(x-1) \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq x \leq 1$$

(i), (ii)에서

$$-6 \leq x < -4 \text{ 또는 } -1 < x \leq 1$$

$$\therefore -6 \leq x < -4 \text{ 또는 } -1 \leq x \leq 1$$

04-1 ㉡ 3

(i) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}+6}{x^{2n}+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{6}{x^{2n}}}{1 + \frac{2}{x^{2n}}} = \frac{x+0}{1+0} = x$$

(ii) $x = -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = -1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1}+6}{x^{2n}+2} = \frac{-1+6}{1+2} = \frac{5}{3}$$

(iii) $x=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 6}{x^{2n} + 2} = \frac{1+6}{1+2} = \frac{7}{3}$$

(iv) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + 6}{x^{2n} + 2} = \frac{0+6}{0+2} = 3$$

$$(i) \sim (iv) \text{에서 } f(x) = \begin{cases} x & (|x| > 1) \\ \frac{5}{3} & (x = -1) \\ \frac{7}{3} & (x = 1) \\ 3 & (|x| < 1) \end{cases}$$

$$\therefore f(-4) + f(-1) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f(1) = -4 + \frac{5}{3} + 3 + \frac{7}{3} = 3$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} f(-4) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-4)^{2n+1} + 6}{(-4)^{2n} + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4 \times 16^n + 6}{16^n + 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4 + 6 \times \left(\frac{1}{16}\right)^n}{1 + 2 \times \left(\frac{1}{16}\right)^n} = \frac{-4 + 6 \times 0}{1 + 2 \times 0} = -4 \end{aligned}$$

$$f(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{2n+1} + 6}{(-1)^{2n} + 2} = \frac{-1 + 6}{1 + 2} = \frac{5}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1} + 6}{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} + 2} = \frac{0 + 6}{0 + 2} = 3$$

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{2n+1} + 6}{1^{2n} + 2} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore f(-4) + f(-1) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f(1) = -4 + \frac{5}{3} + 3 + \frac{7}{3} = 3$$

연습문제

31~32쪽

1 ② 2 2 3 ① 4 ③ 5 ②

6 $-\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{6}$ 7 -1 8 $\neg$, $\rightleftharpoons$ 9 $\frac{8}{3}$

10 ⑤ 11 4 12 3 13 $\frac{2}{5}$ 14 3

$$1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = 2$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{3n+1} + 2^{2n-1}}{(2^n + 1)(4^n - 2^n + 1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 8^n + \frac{1}{2} \times 4^n}{8^n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{8}\right)^n} = 2 \end{aligned}$$

3 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ($\alpha \neq 0$ 인 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + \left(\frac{3}{5}\right)^n \times a_n}{\frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{5}\right)^n + a_n} = 10 \text{에서}$$

$$\frac{5}{\alpha} = 10 \quad \therefore \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$$

4 $S_n = 4^n - 1$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 4^n - 1 - (4^{n-1} - 1) \\ &= (4 - 1)4^{n-1} = 3 \times 4^{n-1} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 - 1 = 4 - 1 = 3$$

(i), (ii)에서 $a_n = 3 \times 4^{n-1}$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 4^{n-1}}{4^n - 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

5 $3^n - 2^n < a_n < 3^n + 2^n$ 의 각 변을 $3^{n+1} + 2^n$ 으로 나누면

$$\frac{3^n - 2^n}{3^{n+1} + 2^n} < \frac{a_n}{3^{n+1} + 2^n} < \frac{3^n + 2^n}{3^{n+1} + 2^n}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^{n+1} + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + 2^n}{3^{n+1} + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{3 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} \text{이므로 수열의 극한}$$

의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{3^{n+1} + 2^n} = \frac{1}{3}$$

- 6 등비수열 $\{(\sqrt{3}\tan x)^n\}$ 의 공비가 $\sqrt{3}\tan x$ 이므로 이 등비수열이 수렴하려면

$$-1 < \sqrt{3}\tan x \leq 1 \quad \therefore -\frac{\sqrt{3}}{3} < \tan x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

이때 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$-\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{6}$$

- 7 (가)에서 수열 $\left\{(x-4)\left(-\frac{x}{2}\right)^{n-1}\right\}$ 이 수렴하려면

$$x-4=0 \text{ 또는 } -1 < -\frac{x}{2} \leq 1$$

$$\therefore x=4 \text{ 또는 } -2 \leq x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

(나)에서 수열 $\left\{(x+4)\left(\frac{x+1}{3}\right)^{n-1}\right\}$ 이 수렴하려면

$$x+4=0 \text{ 또는 } -1 < \frac{x+1}{3} \leq 1$$

$$x=-4 \text{ 또는 } -3 < x+1 \leq 3$$

$$\therefore -4 \leq x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 두 수열 중에서 어느 하나만 수렴하려면 ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 $-2 \leq x < 2$ 를 제외해야 하므로 정수 x 의 값은 $-4, -3, 2, 4$

따라서 구하는 모든 정수 x 의 값의 합은

$$-4 + (-3) + 2 + 4 = -1$$

- 8 등비수열 $\{r^n\}$ 의 공비가 r 이고 이 등비수열이 수렴하므로 $-1 < r \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$

ㄱ. 등비수열 $\{r^{2n}\}$ 의 공비는 r^2 이고 ㉢에서

$$0 \leq r^2 \leq 1$$

즉, 등비수열 $\{r^{2n}\}$ 은 반드시 수렴한다.

ㄴ. 등비수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$ ($r \neq 0$)의 공비는 $\frac{1}{r}$ 이고 ㉢에서

$$\frac{1}{r} < -1 \text{ 또는 } \frac{1}{r} \geq 1$$

즉, 등비수열 $\left\{\left(\frac{1}{r}\right)^n\right\}$ 은 $\frac{1}{r} < -1$ 또는 $\frac{1}{r} > 1$ 일 때는 수렴하지 않는다.

ㄷ. 등비수열 $\{(-r)^n\}$ 의 공비는 $-r$ 이고 ㉢에서

$$-1 \leq -r < 1$$

즉, 등비수열 $\{(-r)^n\}$ 은 $-r = -1$ 일 때는 수렴하지 않는다.

ㄹ. 등비수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\}$ 의 공비는 $\frac{1-r}{2}$ 이고 ㉢에서

$$-1 \leq -r < 1, 0 \leq 1-r < 2$$

$$\therefore 0 \leq \frac{1-r}{2} < 1$$

즉, 등비수열 $\left\{\left(\frac{1-r}{2}\right)^n\right\}$ 은 반드시 수렴한다.

따라서 보기에서 반드시 수렴하는 수열인 것은 ㄱ, ㄹ이다.

- 9 (i) $0 < r < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + r + 2}{r^n + 1} = r + 2$$

$$\text{즉, } r + 2 = \frac{7}{3} \text{에서 } r = \frac{1}{3} \quad \blacktriangleleft 0 < r < 1 \text{을 만족시킨다.}$$

- (ii) $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + r + 2}{r^n + 1} = \frac{1 + 1 + 2}{1 + 1} = 2 \neq \frac{7}{3}$$

- (iii) $r > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + r + 2}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r + \frac{r}{r^n} + \frac{2}{r^n}}{1 + \frac{1}{r^n}} = r$$

$$\therefore r = \frac{7}{3} \quad \blacktriangleleft r > 1 \text{을 만족시킨다.}$$

- (i), (ii), (iii)에서 $r = \frac{1}{3}$ 또는 $r = \frac{7}{3}$

따라서 모든 r 의 값의 합은

$$\frac{1}{3} + \frac{7}{3} = \frac{8}{3}$$

- 10 (i) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{n+1} + 3x}{x^n + 2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x + \frac{3x}{x^n}}{1 + \frac{2}{x^n}} = 2x$$

- (ii) $x = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 1$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{n+1} + 3x}{x^n + 2} = \frac{2 + 3}{1 + 2} = \frac{5}{3}$$

- (iii) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^{n+1} + 3x}{x^n + 2} = \frac{3}{2}x$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (|x| > 1) \\ \frac{5}{3} & (x = 1) \\ \frac{3}{2}x & (|x| < 1) \end{cases}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)f(1)f(6) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 12 = 10$$

다른 풀이

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 3 \times \frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2} = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 1^{n+1} + 3 \times 1}{1^n + 2} = \frac{5}{3}$$

$$f(6) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 6^{n+1} + 3 \times 6}{6^n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 + 18 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n}{1 + 2 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

$$= 12$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right)f(1)f(6) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3} \times 12 = 10$$

- 11 직선 $y=n$ 이 곡선 $y=\log_2(3-x)-1$ 과 만나는 점 A_n 의 좌표를 구하면

$$n = \log_2(3-x) - 1$$

$$n+1 = \log_2(3-x), \quad 2^{n+1} = 3-x$$

$$\therefore x = 3 - 2^{n+1}$$

따라서 $A_n(3 - 2^{n+1}, n)$ 이므로

$$C_n(3 - 2^{n+1}, 0)$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2} \times |3 - 2^{n+1}| \times n$$

$$= \frac{n}{2}(2^{n+1} - 3)$$

직선 $y=n$ 이 곡선 $y=\log_2(2x-6)$ 과 만나는 점 B_n 의 좌표를 구하면

$$n = \log_2(2x-6)$$

$$2^n = 2x - 6, \quad 2^{n-1} = x - 3$$

$$\therefore x = 2^{n-1} + 3$$

따라서 $B_n(2^{n-1} + 3, n)$ 이므로

$$D_n(2^{n-1} + 3, 0)$$

$$\therefore T_n = \frac{1}{2} \times (2^{n-1} + 3) \times n$$

$$= \frac{n}{2}(2^{n-1} + 3)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{T_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{2}(2^{n+1} - 3)}{\frac{n}{2}(2^{n-1} + 3)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} - 3}{2^{n-1} + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2} + 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} = 4 \end{aligned}$$

- 12 $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{100}{101}$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 곱하면

$$\frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \dots \times \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \left(\frac{100}{101}\right)^{n-1}$$

$$\therefore \frac{a_n}{a_1} \leq \left(\frac{100}{101}\right)^{n-1}$$

$$a_n > 0 \text{이므로 } 0 < a_n \leq a_1 \left(\frac{100}{101}\right)^{n-1}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \left(\frac{100}{101}\right)^{n-1} = 0$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 3n^2 + 1}{a_n + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2a_n}{n^2} + 3 + \frac{1}{n^2}}{\frac{a_n}{n^2} + 1} = 3$$

- 13 $a_1=1$ 이고 $a_{n+3}=5a_n$ 이므로

$$a_4 = 5a_1 = 5 \times 1 = 5$$

$$a_7 = 5a_4 = 5 \times 5 = 5^2$$

$$a_{10} = 5a_7 = 5 \times 5^2 = 5^3$$

$\vdots$

$$\therefore a_{3k-2} = 5^{k-1} \text{ (단, } k \text{는 자연수)}$$

$$a_2 = 2 \text{이고 } a_{n+3} = 5a_n \text{이므로}$$

$$a_5 = 5a_2 = 5 \times 2$$

$$a_8 = 5a_5 = 5 \times (5 \times 2) = 2 \times 5^2$$

$$a_{11} = 5a_8 = 5 \times (2 \times 5^2) = 2 \times 5^3$$

$\vdots$

$$\therefore a_{3k-1} = 2 \times 5^{k-1} \text{ (단, } k \text{는 자연수)}$$

$$a_3 = 3 \text{이고 } a_{n+3} = 5a_n \text{이므로}$$

$$a_6 = 5a_3 = 5 \times 3$$

$$a_9 = 5a_6 = 5 \times (5 \times 3) = 3 \times 5^2$$

$$a_{12} = 5a_9 = 5 \times (3 \times 5^2) = 3 \times 5^3$$

$\vdots$

$$\therefore a_{3k} = 3 \times 5^{k-1} \text{ (단, } k \text{는 자연수)}$$

$$\therefore S_n = \sum_{k=1}^{3n} a_k$$

$$= (a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{3n-2})$$

$$+ (a_2 + a_5 + a_8 + \dots + a_{3n-1})$$

$$+ (a_3 + a_6 + a_9 + \dots + a_{3n})$$

$$= \frac{5^n - 1}{5 - 1} + \frac{2(5^n - 1)}{5 - 1} + \frac{3(5^n - 1)}{5 - 1}$$

$$= \frac{3}{2}(5^n - 1)$$

이때 $a_{3n} = 3 \times 5^{n-1}$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{3n}}{S_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 5^{n-1}}{\frac{3}{2}(5^n - 1)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 5^{n-1}}{5^n - 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n} = \frac{2}{5}$$

14 (i) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx - 1}{x^{2n} + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{ax^2}{x^{2n}} + \frac{bx}{x^{2n}} - \frac{1}{x^{2n}}}{1 + \frac{3}{x^{2n}}} = x \end{aligned}$$

(ii) $x = -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = -1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx - 1}{x^{2n} + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + a - b - 1}{1 + 3} \\ &= \frac{a - b - 2}{4} \end{aligned}$$

(iii) $x = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx - 1}{x^{2n} + 3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + b - 1}{1 + 3} \\ &= \frac{a + b}{4} \end{aligned}$$

(iv) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + ax^2 + bx - 1}{x^{2n} + 3} = \frac{ax^2 + bx - 1}{3}$$

(i)~(iv)에서

$$f(x) = \begin{cases} x & (|x| > 1) \\ \frac{a-b-2}{4} & (x = -1) \\ \frac{a+b}{4} & (x = 1) \\ \frac{ax^2+bx-1}{3} & (|x| < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x = -1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{ax^2 + bx - 1}{3} &= \lim_{x \rightarrow -1-} x = \frac{a - b - 2}{4} \\ \frac{a - b - 1}{3} &= -1 = \frac{a - b - 2}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore a - b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} x &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{ax^2 + bx - 1}{3} = \frac{a + b}{4} \\ 1 &= \frac{a + b - 1}{3} = \frac{a + b}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore a + b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 1$, $b = 3$

$$\therefore ab = 3$$

I-2 01 급수

II 급수의 수렴과 발산

개념 Check

35쪽

1 답 (1) $\frac{2}{3}$ (2) 5

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3}$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 5 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} = 5$$

문제

36~37쪽

01-1 답 (1) 수렴, 1 (2) 발산 (3) 발산

주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하자.

$$\begin{aligned} (1) S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 1이다.

$$\begin{aligned} (2) S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) \\ &\quad + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - 1) = \infty$$

따라서 주어진 급수는 발산한다.

(3) (i) $n = 2k - 1$ (k 는 자연수)일 때,

$$\begin{aligned} S_{2k-1} &= -\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k}{k+1} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} = -\frac{1}{2}$$

(ii) $n=2k$ (k 는 자연수)일 때,

$$\begin{aligned} S_{2k} &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4} + \frac{4}{5}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(-\frac{k}{k+1} + \frac{k+1}{k+2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{k+1}{k+2} \\ \therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} + \frac{k+1}{k+2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

02-1 ㉡ (1) 2 (2) $\frac{3}{4}$

(1) $\frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$ 이므로

$$\begin{aligned} &1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \right\} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

(2) $3+5+7+\cdots+(2n+1) = \sum_{k=1}^n (2k+1)$

$$\begin{aligned} &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= n(n+2) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3+5+7+\cdots+(2n+1)} = \frac{1}{n(n+2)} \\ \therefore \frac{1}{3} + \frac{1}{3+5} + \frac{1}{3+5+7} + \frac{1}{3+5+7+9} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

02-2 ㉡ $\frac{1}{8}$

$S_n = n^2 + 3n$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 3n - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= 2n + 2 \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1 + 3 \times 1 = 4$$

(i), (ii)에서 $a_n = 2n + 2$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)\{2(n+1)+2\}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2)(2n+4)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

2 급수의 성질

문제

39~41쪽

03-1 ㉡ 7

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3 - \frac{a_n}{4}\right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{a_n}{4}\right) = 0$$

$$3 - \frac{a_n}{4} = b_n \text{으로 놓으면 } a_n = 12 - 4b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{2} + 1\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{12 - 4b_n}{2} + 1\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-2b_n + 7) \\ &= -2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 7 \\ &= 0 + 7 = 7 \end{aligned}$$

03-2 ㉮ 5

$a_n - 3 = c_n$ 으로 놓으면 $a_n = c_n + 3$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - 1)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - 1) = 0$$

$b_n - 1 = d_n$ 으로 놓으면 $b_n = d_n + 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(c_n + 3) + (d_n + 1)\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (c_n + d_n + 4)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} c_n + \lim_{n \rightarrow \infty} d_n + \lim_{n \rightarrow \infty} 4$$

$$= 1 + 0 + 4 = 5$$

03-3 ㉮ 2

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+2n}} \right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+2n}} \right) = 0$$

$a_n - \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+2n}} = b_n$ 으로 놓으면

$$a_n = b_n + \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+2n}}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n + \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+2n}} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+2n}}$$

$$= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+2n}}{(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+2n})(\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+2n})}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+2n}}{n} = 2$$

04-1 ㉮ -7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(4a_n - \frac{1}{2}b_n \right) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

$$= 4 \times (-1) - \frac{1}{2} \times 6 = -7$$

04-2 ㉮ 8

$3a_n - 2b_n = c_n$ 으로 놓으면 $a_n = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2, \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 20 \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}c_n \right) = \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

$$= \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3} \times 20 = 8$$

04-3 ㉮ 3

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 3b_n) = 11 \text{에서}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - 3 \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 11 \quad \therefore \alpha - 3\beta = 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉮}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n + b_n) = 8 \text{에서}$$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 8 \quad \therefore 2\alpha + \beta = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉮}$$

㉮, ㉮을 연립하여 풀면 $\alpha = 5, \beta = -2$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha + \beta \\ = 5 + (-2) = 3$$

05-1 ㉮ ㉮, ㉮

㉮. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n - 1) + 1\} \\ = 0 + 1 = 1$$

즉, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 발산한다.

㉮. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 모두 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

㉮. [반례] $a_n = \frac{1}{n(n+1)}, b_n = n^2$ 이라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\ \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 은 1에 수렴하고 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ 이지만

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n(n+1)} = 1 \neq 0$$

㉮. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㉮, ㉮이다.

- 1 ④ 2 $\frac{5}{12}$ 3 $\frac{1}{2}$ 4 $\frac{1}{5}$ 5 ④
 6 1 7 ③ 8 $\frac{1}{4}$ 9 9 10 ③
 11 57 12 $\frac{1}{12}$ 13 ②

- 1 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면
 $1 + \frac{2n-1}{n+3} < S_n < 3 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$
 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n-1}{n+3}\right) = 3$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{3 + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right\} = 3$ 이므로
 수열의 극한의 대소 관계에 의하여
 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3 \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 3$

- 2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 4n + 3}$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right)$
 $= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right)$
 $= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right.$
 $\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \right\}$
 $= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12}$

- 3 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_3 = 6$ 에서 $a + 2d = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $a_6 = 12$ 에서 $a + 5d = 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2, d = 2$
 $\therefore a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$
 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right)$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \right\}$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$
 $= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$
 $= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \right.$
 $\quad \left. + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\}$
 $= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$

- 4 다항식 $a_n x^2 - a_n x - 1$ 이 $x - n - 5$ 로 나누어떨어지므로
 $a_n(n+5)^2 - a_n(n+5) - 1 = 0$
 $a_n(n+4)(n+5) = 1$
 $\therefore a_n = \frac{1}{(n+4)(n+5)}$
 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+4} - \frac{1}{k+5} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) \right.$
 $\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+5} \right) \right\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{n+5} \right) = \frac{1}{5}$

- 5 ㄱ. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3}{n^3 + 2} = 3 \neq 0$ 이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3}{n^3 + 2}$ 은 발산한다.
 ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+2}{n+3} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k+2}{k+3} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5} \right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6} \right) \right.$
 $\quad \left. + \cdots + \left(\frac{n-1}{n} - \frac{n+1}{n+2} \right) + \left(\frac{n}{n+1} - \frac{n+2}{n+3} \right) \right\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{n+1}{n+2} - \frac{n+2}{n+3} \right)$
 $= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - 1 - 1$
 $= -\frac{5}{6}$
 ㄷ. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 2n} - n)(\sqrt{n^2 + 2n} + n)}{\sqrt{n^2 + 2n} + n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + 2n} + n} = 1 \neq 0$
 즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2 + 2n} - n)$ 은 발산한다.
 ㄹ. 주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면 자
 연수 k 에 대하여
 (i) $n = 2k - 1$ 일 때,
 $S_{2k-1} = 1 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right)$
 $\quad \quad \quad + \cdots + \left(-\frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k-1} \right)$
 $= 1$
 $\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} = 1$

(ii) $n=2k$ 일 때,

$$S_{2k} = \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) \\ = 1 - \frac{1}{2k+1}$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) = 1$$

(i), (ii)에서 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = 1$ 이므로 주어진 급수는 수렴한다.

따라서 보기에서 수렴하는 급수인 것은 ㄴ, ㄹ이다.

6 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an^2+6}{4n^2+8n+3}$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+6}{4n^2+8n+3} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{6}{n^2}}{4 + \frac{8}{n} + \frac{3}{n^2}} = 0$$

즉, $\frac{a}{4} = 0$ 이므로 $a = 0$

$$\therefore b = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{4n^2+8n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{(2n+1)(2n+3)} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \\ = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right\} \\ = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) \\ = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

$$\therefore b - a = 1 - 0 = 1$$

7 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{3n^2-n}{2n^2+1} \right)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{3n^2-n}{2n^2+1} \right) = 0$$

$$a_n - \frac{3n^2-n}{2n^2+1} = b_n \text{으로 놓으면}$$

$$a_n = b_n + \frac{3n^2-n}{2n^2+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n + \frac{3n^2-n}{2n^2+1} \right) = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + 2a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} + 2 \times \frac{3}{2} = \frac{21}{4}$$

8 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 1) = 3$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (a_n - 1) + 1 \} = 3 + 1 = 4$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n - 6)$ 이 수렴하므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n - 6) = 0$$

$a_n + b_n - 6 = c_n$ 으로 놓으면 $b_n = -a_n + c_n + 6$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nb_n+5}{2na_n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(-a_n+c_n+6)+5}{2na_n+1} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-a_n+c_n+6+\frac{5}{n}}{2a_n+\frac{1}{n}} \\ = \frac{-4+6}{2 \times 4} = \frac{1}{4}$$

9 $\frac{b_n}{2} - a_n = c_n$ 으로 놓으면 $b_n = 2a_n + 2c_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 5, \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 3 \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (5a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ 5a_n - (2a_n + 2c_n) \} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (3a_n - 2c_n) = 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \\ = 3 \times 5 - 2 \times 3 = 9$$

10 ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{2} \right)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - \frac{1}{2} \right) = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(a_n - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \right\} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \beta$ (α, β 는 실수)라

하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n + b_n) + (a_n - b_n)}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n + b_n) - (a_n - b_n)}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 도 모두 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{ (α 는 실수)라 하면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{ a_n - (a_n - b_n) \} = \alpha - 0 = \alpha$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

ㄹ. [반례] $a_n = 1, b_n = 2$ 라 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 2n = \infty$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 발산하지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ 이므로

로 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 은 모두 수렴한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

$$\begin{aligned}
 11 \quad S_m &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m+1}{n(n+m+1)} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m+1} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m+1} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{m+2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{m+4} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m+1} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$m=1$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore a_1 = S_1 = \frac{3}{2}$$

$m=9$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 S_9 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{13} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{21} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+10} \right) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{n+3} - \cdots - \frac{1}{n+10} \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10}
 \end{aligned}$$

$m=10$ 일 때,

$$\begin{aligned}
 S_{10} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{12} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{13} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{14} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{23} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+11} \right) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{11} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{n+3} - \cdots - \frac{1}{n+11} \right) \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{11} \\
 &= S_9 + \frac{1}{11}
 \end{aligned}$$

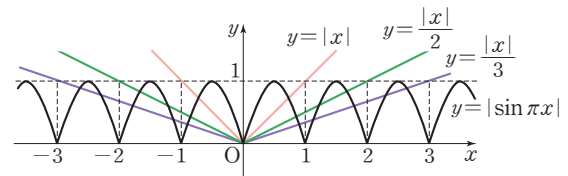
$$\therefore a_{10} = S_{10} - S_9 = \left(S_9 + \frac{1}{11} \right) - S_9 = \frac{1}{11}$$

$$\therefore a_1 + a_{10} = \frac{3}{2} + \frac{1}{11} = \frac{35}{22}$$

따라서 $p=22$, $q=35$ 이므로 $p+q=57$

- 12 함수 $y = \sin \pi x$ 의 주기가 2이므로 함수 $y = |\sin \pi x|$ 의 주기는 1이다.

함수 $y = |\sin \pi x|$ 의 그래프와 함수 $y = |x|$, $y = \frac{|x|}{2}$, $y = \frac{|x|}{3}$, ...의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $a_1=3$, $a_2=3+4=7$, $a_3=7+4=11$, ...이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3이고 공차가 4인 등차수열이다.

$$\therefore a_n = 3 + (n-1) \times 4 = 4n-1$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k+3} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{15} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n+3} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4n+3} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

- 13 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = 1$ 에서 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) a_{n+1} = 0$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n+1} - a_n)$ 의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned}
 S_n &= (a_2 - a_1) + 2(a_3 - a_2) + 3(a_4 - a_3) \\
 &\quad + \cdots + (n-1)(a_n - a_{n-1}) + n(a_{n+1} - a_n) \\
 &= a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \cdots + (n-1)a_n + na_{n+1} \\
 &\quad - a_1 - 2a_2 - 3a_3 - \cdots - (n-1)a_{n-1} - na_n \\
 &= -(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) + na_{n+1} \\
 &= -\sum_{k=1}^n a_k + (n+1)a_{n+1} - a_{n+1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n+1} - a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\sum_{k=1}^n a_k + (n+1)a_{n+1} - a_{n+1} \right\} \\
 &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)a_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \\
 &= -1 + 0 - 0 = -1
 \end{aligned}$$

I-2 02 등비급수

등비급수의 수렴과 발산

개념 Check

45쪽

1 [답] (1) 수렴, $\frac{1}{3}$ (2) 발산 (3) 발산 (4) 수렴, $\frac{3}{2}$

(1) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 에서 공비는 $\frac{1}{4}$ 이고 $-1 < \frac{1}{4} < 1$ 이므로 이 급수는 수렴한다.

따라서 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비급수의 합은

$$\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

(2) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{6}{5}\right)^n$ 에서 공비는 $-\frac{6}{5}$ 이고 $-\frac{6}{5} < -1$ 이므로 이 급수는 발산한다.

(3) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5} \times 4^{n-1}$ 에서 공비는 4 이고 $4 > 1$ 이므로 이 급수는 발산한다.

(4) 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 에서 공비는 $-\frac{1}{3}$ 이고 $-1 < -\frac{1}{3} < 1$ 이므로 이 급수는 수렴한다.

따라서 첫째항이 2, 공비가 $-\frac{1}{3}$ 인 등비급수의 합은

$$\frac{2}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{2}$$

2 [답] $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$

등비급수 $1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + \dots$ 의 공비가 $-3x$ 이므로 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < -3x < 1$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

문제

46~53쪽

01-1 [답] (1) $-\frac{1}{5}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{1}{4}$ (4) $-\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} (1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \left(\frac{3}{4}\right)^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{-\frac{1}{4}}{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 - 3^n}{5^n} &= 5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n \\ &= 5 \times \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} - \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}} \\ &= 5 \times \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} - 3^{2n-1}}{18^{n-1}} &= 36 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n - 6 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 36 \times \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} - 6 \times \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 36 \times \frac{1}{8} - 6 \times 1 = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

01-2 [답] $-\frac{1}{17}$

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \cos \frac{n\pi}{2} \\ &= -\frac{1}{4} \cos \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \cos \pi + \left(-\frac{1}{4}\right)^3 \cos \frac{3\pi}{2} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{4}\right)^4 \cos 2\pi + \left(-\frac{1}{4}\right)^5 \cos \frac{5\pi}{2} \\ &\quad + \left(-\frac{1}{4}\right)^6 \cos 3\pi + \dots \\ &= 0 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + 0 + \left(-\frac{1}{4}\right)^4 + 0 - \left(-\frac{1}{4}\right)^6 + \dots \\ &= \frac{-\frac{1}{16}}{1 - \left(-\frac{1}{16}\right)} = -\frac{1}{17} \end{aligned}$$

02-1 [답] $\frac{7}{12}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{k-1}}{7^k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{5^k - 1}{7^k} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n - 1}{7^n} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{\frac{5}{7}}{1 - \frac{5}{7}} - \frac{\frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{7}{12} \end{aligned}$$

02-2 ㉔ $\frac{5}{6}$

$a_n = 5 \times 2^{n-1}$ 이므로

$$S_n = \frac{5(2^n - 1)}{2 - 1} = 5 \times 2^n - 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S_n - a_n}{4^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5 \times 2^n - 5) - 5 \times 2^{n-1}}{4^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{5}{2} \times 2^n - 5}{4^n} \\ &= \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{5}{2} \times \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} - 5 \times \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{5}{2} \times 1 - 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

02-3 ㉔ $\frac{19}{3}$

9^n 의 일의 자리의 숫자는 차례대로 9, 1, 9, 1, ... 이므로

$$a_1 = 9, a_2 = 1, a_3 = 9, a_4 = 1, \dots$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} &= \frac{9}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{9}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \dots \\ &= \left(\frac{9}{2} + \frac{9}{2^3} + \frac{9}{2^5} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots\right) \\ &= \frac{\frac{9}{2}}{1 - \frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = 6 + \frac{1}{3} = \frac{19}{3} \end{aligned}$$

02-4 ㉔ $\frac{13}{2}$

$$a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n + 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{1}{3}\right)^n + 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} + \frac{4}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} + 6 = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

03-1 ㉔ 2

$$1 - \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} - \frac{x^3}{27} + \dots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{x}{3}\right)} = \frac{3}{3+x}$$

$$\text{따라서 } \frac{3}{3+x} = \frac{3}{5} \text{ 이므로}$$

$$3+x=5 \quad \therefore x=2$$

03-2 ㉔ 3

두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 공비를 각각 r, s 라 하자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 \text{ 에서 } \frac{1}{1-r} = 4$$

$$1 = 4 - 4r \quad \therefore r = \frac{3}{4}$$

$$\therefore a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2 \text{ 에서 } \frac{1}{1-s} = 2$$

$$1 = 2 - 2s \quad \therefore s = \frac{1}{2}$$

$$\therefore b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \frac{b_3}{a_3} + \frac{b_4}{a_4} + \dots &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \end{aligned}$$

03-3 ㉔ $\frac{5}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \text{ 에서 } \frac{a}{1-r} = 2$$

$$\therefore a = 2(1-r) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

수열 $\{a_n^3\}$ 은 첫째항이 a^3 , 공비가 r^3 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = 24 \text{ 에서 } \frac{a^3}{1-r^3} = 24$$

$$\therefore a^3 = 24(1-r^3) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ 을 } \textcircled{2} \text{ 에 대입하면 } 8(1-r)^3 = 24(1-r^3)$$

$$(1-r)^3 = 3(1-r)(1+r+r^2)$$

$$(1-r)^2 = 3(1+r+r^2) \quad (\because -1 < r < 1)$$

$$2r^2 + 5r + 2 = 0, (r+2)(2r+1) = 0$$

$$\therefore r = -\frac{1}{2} \quad (\because -1 < r < 1)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a = 2 \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \right\} = 3$$

$$\therefore a+r = 3 + \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

04-1 ㉔ (1) $2 \leq x < 4$

$$(2) x = -2 \text{ 또는 } -\sqrt{2} < x < 0 \text{ 또는 } 0 < x < \sqrt{2}$$

$$(1) \text{ 급수 } \sum_{n=1}^{\infty} (x-2)(x-3)^{n-1} \text{ 이 수렴하려면}$$

$$(x-2)(x-3) = 0 \text{ 또는 } -1 < x-3 < 1$$

$$(i) (x-2)(x-3) = 0 \text{ 에서 } x=2 \text{ 또는 } x=3$$

$$(ii) -1 < x-3 < 1 \text{ 에서 } 2 < x < 4$$

$$(i), (ii) \text{ 에서 } 2 \leq x < 4$$

(2) 급수 $(x+2)+(x+2)(x^2-1)+(x+2)(x^2-1)^2+\dots$

이 수렴하려면

$$x+2=0 \text{ 또는 } -1 < x^2-1 < 1$$

(i) $x+2=0$ 에서 $x=-2$

(ii) $-1 < x^2-1 < 1$ 에서 $0 < x^2 < 2$

$$\therefore -\sqrt{2} < x < 0 \text{ 또는 } 0 < x < \sqrt{2}$$

(i), (ii)에서

$$x=-2 \text{ 또는 } -\sqrt{2} < x < 0 \text{ 또는 } 0 < x < \sqrt{2}$$

04-2 ㉡ $1 < x < 9$

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (1-\log_3 x)^n$ 이 수렴하려면

$$-1 < 1-\log_3 x < 1, \quad -2 < -\log_3 x < 0$$

$$0 < \log_3 x < 2 \quad \therefore 1 < x < 9$$

05-1 ㉡ (1) $\frac{104}{333}$ (2) $\frac{23}{90}$

(1) $0.\dot{3}1\dot{2}=0.312312312\dots$

$$=0.312+0.000312+0.000000312+\dots$$

$$=\frac{312}{1000}+\frac{312}{1000000}+\frac{312}{1000000000}+\dots$$

$$=\frac{\frac{312}{1000}}{1-\frac{1}{1000}}$$

$$=\frac{312}{999}=\frac{104}{333}$$

(2) $0.2\dot{5}=0.2555\dots$

$$=0.2+0.05+0.005+0.0005+\dots$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{5}{100}+\frac{5}{1000}+\frac{5}{10000}+\dots$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{\frac{5}{100}}{1-\frac{1}{10}}$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{5}{90}=\frac{23}{90}$$

05-2 ㉡ 7

$$1.\dot{5}=\frac{14}{9}, \quad 0.\dot{7}=\frac{7}{9} \text{이므로}$$

$$a_n=\frac{14}{9} \times \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}=2 \times \left(\frac{7}{9}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n=\sum_{n=1}^{\infty} 2 \times \left(\frac{7}{9}\right)^n=2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n$$

$$=2 \times \frac{\frac{7}{9}}{1-\frac{7}{9}}=7$$

06-1 ㉡ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

점 P_n 의 x 좌표를 x_n 이라 하면

$$x_1=\overline{OP_1} \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2=x_1-\overline{P_1P_2} \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3=x_2+\overline{P_2P_3} \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\vdots$

$$\therefore a=\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}+\dots$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

점 P_n 의 y 좌표를 y_n 이라 하면

$$y_1=\overline{OP_1} \sin 30^\circ=\frac{1}{2}$$

$$y_2=y_1+\overline{P_1P_2} \sin 30^\circ=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$y_3=y_2+\overline{P_2P_3} \sin 30^\circ=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$\vdots$

$$\therefore b=\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4+\dots$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$$\therefore ab=\frac{\sqrt{3}}{3} \times 1=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

07-1 ㉡ 8π

$$\overline{A_1A_2}=4\text{이므로 } l_1=\frac{1}{2} \times 2\pi \times 2=2\pi$$

$$\overline{A_2A_3}=\frac{3}{4} \overline{A_1A_2}=3\text{이므로}$$

$$l_2=\frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{3}{2}=\frac{3}{2}\pi$$

$$\overline{A_3A_4}=\frac{3}{4} \overline{A_2A_3}=\frac{9}{4}\text{이므로}$$

$$l_3=\frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{9}{8}=\frac{9}{8}\pi$$

$\vdots$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} l_n=2\pi+\frac{3}{2}\pi+\frac{9}{8}\pi+\dots$$

$$=\frac{2\pi}{1-\frac{3}{4}}=8\pi$$

다른 풀이

$$\overline{A_1A_2}=4\text{이므로 } l_1=2\pi$$

선분 A_nA_{n+1} 을 1:3으로 내분하는 점이 A_{n+2} 이므로

$$\overline{A_{n+1}A_{n+2}}=\frac{3}{4}\overline{A_nA_{n+1}}$$

이때 반원의 호의 길이는 반지름의 길이에 비례하므로

$$l_{n+1}=\frac{3}{4}l_n$$

따라서 수열 $\{l_n\}$ 은 첫째항이 2π , 공비가 $\frac{3}{4}$ 인 등비수열
이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{2\pi}{1-\frac{3}{4}} = 8\pi$$

08-1 [답] 10

오른쪽 그림에서 정사각형 A_n
의 한 변의 길이를 a_n 이라 하면
직각이등변삼각형 B_n 의 빗변이
아닌 한 변의 길이는 a_{n+1} 이다.

$$a_1=2\text{이므로}$$

$$a_2=a_1\cos 45^\circ=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a_3=a_2\cos 45^\circ=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$a_4=a_3\cos 45^\circ=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3$$

⋮

$$\therefore a_n=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$$

이때 정사각형 A_n 의 넓이를 S_n 이라 하면

$$S_n=a_n^2$$

$$= \left\{ 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n-1} \right\}^2 = 4 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$= \frac{4}{1-\frac{1}{2}} = 8$$

한편 직각이등변삼각형 B_n 의 넓이를 T_n 이라 하면

$$T_n = \frac{1}{2} \times a_{n+1}^2$$

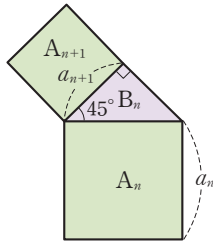
$$= \frac{1}{2} \times \left\{ 2 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n \right\}^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} T_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

따라서 모든 정사각형과 직각이등변삼각형의 넓이의 합은

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n + \sum_{n=1}^{\infty} T_n = 8 + 2 = 10$$



연습문제

54~56쪽

1 2	2 ④	3 6	4 $\frac{11}{120}$	5 ③
6 $\frac{\pi}{3}$	7 27	8 $0 \leq x < 2$	9 ④	
10 $\neg, \cup$	11 2	12 ④	13 ②	14 27 m
15 $\frac{\sqrt{3}}{3}$	16 7	17 $\frac{2}{3}$	18 ③	

$$1 \quad \log_3 3 + \log_3 \sqrt{3} + \log_3 \sqrt[4]{3} + \log_3 \sqrt[8]{3} + \cdots$$

$$= \log_3 3 + \log_3 3^{\frac{1}{2}} + \log_3 3^{\frac{1}{4}} + \log_3 3^{\frac{1}{8}} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}-2}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^n$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} - 2 \times \frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}$$

$$= 2 - 2 \times \frac{1}{5} = \frac{8}{5}$$

$$3 \quad \log_8 (S_n + 1) = \frac{n}{3} \text{에서}$$

$$S_n = 8^{\frac{n}{3}} - 1 = 2^n - 1$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 2^n - 1 - (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

(i), (ii)에서 $a_n = 2^{n-1}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9}{2^{n-1} \times 2^n}$$

$$= 18 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$= 18 \times \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}$$

$$= 18 \times \frac{1}{3} = 6$$

$$4 \quad n=2\text{일 때, } (-5)^2\text{의 제곱근 중 실수인 것은 } \pm 5\text{이므로}$$

$$a_2=2$$

$$n=3\text{일 때, } (-5)^3\text{의 세제곱근 중 실수인 것은 } -5\text{이므로}$$

$$a_3=1$$

$n=4$ 일 때, $(-5)^4$ 의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 5 이므로 $a_4=2$

$n=5$ 일 때, $(-5)^5$ 의 5제곱근 중 실수인 것은 -5 이므로 $a_5=1$

$\vdots$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{5^n} &= \frac{2}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{2}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \cdots \\ &= \left(\frac{2}{5^2} + \frac{2}{5^4} + \frac{2}{5^6} + \cdots \right) + \left(\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{5^7} + \cdots \right) \\ &= \frac{\frac{2}{25}}{1 - \frac{1}{25}} + \frac{\frac{1}{125}}{1 - \frac{1}{25}} \\ &= \frac{1}{12} + \frac{1}{120} = \frac{11}{120}\end{aligned}$$

- 5 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_n = ar^{n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{a_n + 2^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{ar^{n-1} + 2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{a}{r} \times \left(\frac{r}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n}\end{aligned}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{a_n + 2^n} = 6$ 으로 극한값이 존재하고

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{r} \times \left(\frac{r}{3}\right)^n = \frac{1}{6}$$

등비수열의 극한에서 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$$\frac{r}{3} = 1, \frac{a}{r} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}, r = 3$$

따라서 $a_n = \frac{1}{2} \times 3^{n-1}$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{n-1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = 3\end{aligned}$$

- 6 $\sin^2 \theta + \sin^2 \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^3 \theta + \cdots$
 $= \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta}$
 즉, $\frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{3}{2}$ 이므로
 $\frac{1 - \cos^2 \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{3}{2}$
 $\frac{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{1 - \cos \theta} = \frac{3}{2}$

$$1 + \cos \theta = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

- 7 두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 공비가 같으므로 공비를 r 라 하자.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 9 \text{에서 } \frac{a_1}{1-r} = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = 6 \text{에서 } \frac{b_1}{1-r} = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$\frac{a_1 - b_1}{1-r} = 3$$

$$\frac{2}{1-r} = 3, 1-r = \frac{2}{3} \quad \therefore r = \frac{1}{3}$$

이를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$\frac{a_1}{1 - \frac{1}{3}} = 9 \quad \therefore a_1 = 6$$

$$\therefore a_n = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$a_1 - b_1 = 2$ 에서

$$6 - b_1 = 2 \quad \therefore b_1 = 4$$

$$\therefore b_n = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n &= \sum_{n=1}^{\infty} 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \times 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 24 \times \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} \\ &= \frac{24}{1 - \frac{1}{9}} = 27\end{aligned}$$

- 8 수열 $\left\{ \frac{x}{4} \left(1 - \frac{x}{4} \right)^{n-1} \right\}$ 이 수렴하려면

$$\frac{x}{4} = 0 \text{ 또는 } -1 < 1 - \frac{x}{4} \leq 1$$

$$x = 0 \text{ 또는 } -2 < -\frac{x}{4} \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq x < 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{3} \right)^n$ 이 수렴하려면

$$-1 < \frac{x^2 - x + 1}{3} < 1$$

$$(i) \frac{x^2 - x + 1}{3} > -1 \text{에서 } x^2 - x + 4 > 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 성립한다.

$$(ii) \frac{x^2-x+1}{3} < 1 \text{에서 } x^2-x-2 < 0$$

$$(x+1)(x-2) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 2$$

$$(i), (ii) \text{에서 } -1 < x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

따라서 구하는 x 의 값의 범위는 $\textcircled{I}, \textcircled{L}$ 에서

$$0 \leq x < 2$$

9 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로

$$-1 < r < 1 \quad \dots\dots \textcircled{I}$$

① $\sum_{n=1}^{\infty} r^{2n}$ 은 공비가 r^2 인 등비급수이므로 $\textcircled{I}$ 에서

$$0 \leq r^2 < 1$$

즉, 주어진 급수는 반드시 수렴한다.

② $\sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n$ 은 공비가 $-r$ 인 등비급수이므로 $\textcircled{I}$ 에서

$$-1 < -r < 1$$

즉, 주어진 급수는 반드시 수렴한다.

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r-1}{2}\right)^n$ 은 공비가 $\frac{r-1}{2}$ 인 등비급수이므로 $\textcircled{I}$ 에서

$$-2 < r-1 < 0 \quad \therefore -1 < \frac{r-1}{2} < 0$$

즉, 주어진 급수는 반드시 수렴한다.

④ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2}-1\right)^n$ 은 공비가 $\frac{r}{2}-1$ 인 등비급수이므로 $\textcircled{I}$ 에서

$$-\frac{1}{2} < \frac{r}{2} < \frac{1}{2} \quad \therefore -\frac{3}{2} < \frac{r}{2}-1 < -\frac{1}{2}$$

즉, 주어진 급수는 $-\frac{3}{2} < \frac{r}{2}-1 \leq -1$ 일 때는 수렴하지 않는다.

⑤ $\sum_{n=1}^{\infty} r^n, \sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n$ 이 수렴하므로 $\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} r^n, \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n$ 도 수렴한다.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n + (-r)^n}{3} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} r^n + \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} (-r)^n \text{이므로 주어진 급수는 반드시 수렴한다.}$$

따라서 반드시 수렴한다고 할 수 없는 것은 ④이다.

10 ㄱ. 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 등비수열 $\{a_n^3\}$ 의 공비는 r^3 이다.

이때 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 이 수렴하므로

$$-1 < r^3 < 1$$

$$\therefore -1 < r < 1$$

즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 도 수렴한다.

ㄴ. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 이면 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 0이거나

$$-1 < (\text{공비}) < 1 \text{이므로 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{은 수렴한다.}$$

ㄷ. [반례] $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이라 하면

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$\beta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \alpha\beta = 2 \times \frac{3}{2} = 3$$

$$a_n b_n = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \text{이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{1}{1-\frac{1}{6}} = \frac{6}{5}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n \neq \alpha\beta$$

ㄹ. [반례] $a_n = 3^n, b_n = -3^n$ 이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 의 공

비가 모두 3이고 $3 > 1$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 발산한다.

이때 $a_n + b_n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

11 $a_1 = 0, \dot{a} = \frac{a}{9}, a_2 = 0, \dot{0}\dot{a} = \frac{a}{99}$ 이므로 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{99}{\frac{a}{9}} = \frac{1}{11}$$

따라서 첫째항이 $\frac{a}{9}$, 공비가 $\frac{1}{11}$ 인 등비급수의 합이

$$0.2\dot{4} = \frac{22}{90} \text{이므로}$$

$$\frac{\frac{a}{9}}{1-\frac{1}{11}} = \frac{22}{90}, \frac{11}{90}a = \frac{22}{90} \quad \therefore a = 2$$

12 n 번째 수거하여 재생산된 비닐의 양을 a_n kg이라 하면

$$a_1 = 200 \times 0.8 \times 0.75 = 200 \times \frac{3}{5} = 120$$

$$a_2 = a_1 \times 0.8 \times 0.75 = 120 \times \frac{3}{5}$$

$$a_3 = a_2 \times 0.8 \times 0.75 = 120 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

⋮

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{120}{1-\frac{3}{5}} = 300$$

따라서 재생산되는 비닐의 총량은 300 kg이다.

- 13 원 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$ 에 접하고 기울기가 -1 인 접선의 방정식은

$$y=-x \pm \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \sqrt{(-1)^2+1}$$

$$\therefore y=-x \pm \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

이때 제1사분면을 지나는 접선의 방정식은

$$y=-x+\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

이 접선이 x 축과 만나는 점의 좌표가 $(a_n, 0)$ 이므로

$$0=-a_n+\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \therefore a_n=\sqrt{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

다른 풀이

기울기가 -1 인 접선이 점 $(a_n, 0)$ 을 지나므로 접선의 방정식은

$$y=-(x-a_n) \quad \therefore x+y-a_n=0$$

원 $x^2+y^2=\left(\frac{1}{4}\right)^{2n}$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 접선 $x+y-a_n=0$

사이의 거리는 반지름의 길이 $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ 과 같으므로

$$\frac{|-a_n|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\therefore a_n = \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

- 14 공이 정지할 때까지 움직인 거리는

$$3+2 \times \left(3 \times \frac{4}{5}\right) + 2 \times \left\{3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2\right\} + 2 \times \left\{3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^3\right\} + \dots$$

$$= 3 + 2 \times \frac{12}{5} = 3 + 2 \times 12 = 27(\text{m})$$

- 15 두 정삼각형 $A_n B_n C_n$, $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1}$ 은 닮음이고 닮음비가 $2:1$ 이므로 넓이의 비는 $4:1$ 이다.

$$\therefore S_{n+1} = \frac{1}{4} S_n$$

이때 정삼각형 $A_1 B_1 C_1$ 의 한 변의 길이는 $2 \times \frac{1}{2} = 1$ 이므로

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열
이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S_k &= \sum_{n=1}^{\infty} S_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

- 16 함수 $f(x)=2x^2+3x-6$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표는 이차방정식 $2x^2+3x-6=0$ 의 근과 같으므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{3}{2}, \alpha\beta = -3$$

한편 주어진 그래프에서 $\alpha < -1$, $\beta > 1$ 이므로

$$-1 < \frac{1}{\alpha} < 0, 0 < \frac{1}{\beta} < 1$$

따라서 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^n}$ 은 모두 수렴하므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha^n} + \frac{1}{\beta^n}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\beta^n} \\ &= \frac{\frac{1}{\alpha}}{1-\frac{1}{\alpha}} + \frac{\frac{1}{\beta}}{1-\frac{1}{\beta}} \\ &= \frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\beta-1} \\ &= \frac{(\alpha+\beta)-2}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1} \\ &= \frac{-\frac{3}{2}-2}{-3-\left(-\frac{3}{2}\right)+1} = 7 \end{aligned}$$

- 17 $4a_1+4^2a_2+4^3a_3+\dots+4^n a_n=3^n-1$ ㉠

$$4a_1+4^2a_2+4^3a_3+\dots+4^{n-1}a_{n-1}=3^{n-1}-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

㉠-㉡을 하면

$$4^n a_n = (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1)$$

$$= 2 \times 3^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{2 \times 3^{n-1}}{4^n}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 4a_1 = 3 - 1$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{2}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a_n = \frac{2 \times 3^{n-1}}{4^n}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \times 3^{n-1}}{4^n} \times \frac{1}{3^{n-1}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= 2 \times \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

18 직각삼각형 $A_1B_1D_1$ 에서

$$\overline{D_1B_1} = \sqrt{\overline{A_1B_1}^2 + \overline{A_1D_1}^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

$$\therefore \overline{D_1E_1} = \frac{1}{2} \overline{D_1B_1} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$\triangle A_2D_1E_1 \cong \triangle B_2C_1E_1$ (SAS 합동)이므로

$$S_1 = 2\triangle A_2D_1E_1$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{17}}{2} \times \frac{\sqrt{17}}{2} = \frac{17}{4}$$

오른쪽 그림과 같이

$\angle C_1D_1B_1 = \theta$ 라 하고, 두 점

A_2, B_2 에서 선분 D_1C_1 에 내

린 수선의 발을 각각 H_1, H_2

라 하자.

직각삼각형 $B_1C_1D_1$ 에서

$$\sin \theta = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{D_1B_1}} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

$\angle A_2D_1H_1 = \frac{\pi}{2} - \theta, \overline{A_2D_1} = \overline{D_1E_1} = \frac{\sqrt{17}}{2}$ 이므로 직각삼

각형 $A_2D_1H_1$ 에서

$$\begin{aligned}\overline{D_1H_1} &= \overline{A_2D_1} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \overline{A_2D_1} \sin \theta \\ &= \frac{\sqrt{17}}{2} \times \frac{\sqrt{17}}{17} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

이때 $\overline{C_1H_2} = \overline{D_1H_1} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\overline{A_2B_2} = \overline{H_1H_2} = \overline{D_1C_1} - (\overline{D_1H_1} + \overline{C_1H_2})$$

$$= 4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 3$$

두 직각삼각형 $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ 는 닮음이고 닮음비가

$\overline{A_1B_1} : \overline{A_2B_2} = 4 : 3$ 이므로 넓이의 비는 $16 : 9$ 이다.

즉, 두 직각삼각형 $A_nB_nC_nD_n, A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 의 넓이

의 비가 $16 : 9$ 이므로 그림 R_n 에 새로 색칠한 부분과 그

림 R_{n+1} 에 새로 색칠한 부분의 넓이의 비도 $16 : 9$ 이다.

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 은 첫째항이 $\frac{17}{4}$, 공비가 $\frac{9}{16}$ 인 등비급수의

합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{17}{4}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{68}{7}$$

II-1 01 지수함수와 로그함수의 미분

지수함수와 로그함수의 극한

개념 Check

59쪽

1 답 (1) ∞ (2) 0 (3) 0 (4) ∞ (5) 25 (6) 7

2 답 (1) ∞ (2) $-\infty$ (3) $-\infty$ (4) ∞ (5) -1 (6) -2

3 답 (1) 2 (2) 3 (3) 1 (4) 0

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \log_3 (x^2 + 5) = \log_3 \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 5) = \log_3 9 = 2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 1} \log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{3x+5} = \log_{\frac{1}{2}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{3x+5} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{4x+3}{2x+1} = \log_2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+3}{2x+1} = \log_2 2 = 1$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{5}} \frac{x^2+3x}{x^2+1} = \log_{\frac{1}{5}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3x}{x^2+1} = \log_{\frac{1}{5}} 1 = 0$$

문제

60~61쪽

01-1 답 (1) 0 (2) 5 (3) -1 (4) 2

(1) 분모, 분자를 4^x 으로 각각 나누면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{4^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^x} = 0$$

(2) 분모, 분자를 5^x 으로 각각 나누면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 5^{x+1}}{5^x - 3^{x+1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x + 5}{1 - 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^x} = 5$$

(3) 분모, 분자에 2^x 을 각각 곱하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + 1}{4^x - 1} = -1$$

(4) 4^x 으로 묶으면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (4^x - 3^{x+1})^{\frac{1}{2x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[4^x \left\{ 1 - 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \left\{ 1 - 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^x \right\}^{\frac{1}{2x}} \\ &= 2 \times 1 = 2\end{aligned}$$

다른 풀이

(3) $-x = t$ 로 놓으면 $x = -t$ 이고, $x \rightarrow -\infty$ 일 때

$t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x + 2^{-x}}{2^x - 2^{-x}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2^{-t} + 2^t}{2^{-t} - 2^t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^t + 1}{\left(\frac{1}{4}\right)^t - 1} = -1\end{aligned}$$

01-2 ㉡ 2

주어진 식의 좌변의 분모, 분자를 9^x 으로 각각 나누면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \times 3^{2x+1} + 2^{x-1}}{9^{x-1} - 2^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3a + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{9}\right)^x}{\frac{1}{9} - \left(\frac{2}{9}\right)^x} = 27a$$

따라서 $27a=54$ 이므로 $a=2$

02-1 ㉡ (1) 1 (2) -1 (3) 2 (4) 1

$$(1) \lim_{x \rightarrow 1+} \{\log_2(x^2-1) - \log_2(x-1)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \log_2 \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \log_2 \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+} \log_2(x+1)$$

$$= \log_2 \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1)$$

$$= \log_2 2 = 1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} (\log_3 |x^2-4| - \log_3 |x^3-8|)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \log_3 \left| \frac{x^2-4}{x^3-8} \right|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \log_3 \left| \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} \right|$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \log_3 \left| \frac{x+2}{x^2+2x+4} \right|$$

$$= \log_3 \lim_{x \rightarrow 2} \left| \frac{x+2}{x^2+2x+4} \right|$$

$$= \log_3 \frac{1}{3} = -1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_3(9x+2) - \log_3(x-1)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{9x+2}{x-1}$$

$$= \log_3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x+2}{x-1}$$

$$= \log_3 9 = 2$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log(10x^2+1) - \log x^2\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{10x^2+1}{x^2}$$

$$= \log \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2+1}{x^2}$$

$$= \log 10 = 1$$

02-2 ㉡ 100

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{\log(ax+1) - \log(x-1)\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{ax+1}{x-1}$$

$$= \log \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+1}{x-1}$$

$$= \log a$$

따라서 $\log a=2$ 이므로 $a=100$

2 무리수 e 와 자연로그

개념 Check

63쪽

1 ㉡ (1) $\sqrt{e}$ (2) e^3

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+x)^{\frac{1}{x}}\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right\}^3 = e^3$$

2 ㉡ (1) $\frac{1}{2}$ (2) 3 (3) $\frac{1}{\ln 3}$ (4) $\ln 5$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{3x} \times 3 = 1 \times 3 = 3$$

문제

64~69쪽

03-1 ㉡ (1) $\sqrt{e}$ (2) $\frac{1}{e^2}$ (3) $\frac{1}{e^6}$ (4) e^4 (5) $\frac{1}{e\sqrt{e}}$ (6) $\frac{1}{e}$

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{4x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\}^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{3}\right)^{-\frac{6}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{\left(1 + \frac{x}{3}\right)^{\frac{3}{x}}\right\}^{-2} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{4x}\right)^{8x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{\left(1 - \frac{3}{4x}\right)^{-\frac{4x}{3}}\right\}^{-6} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x+2}\right)^{-6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x}\right)^{6x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{6x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{\left(1 + \frac{2}{3x}\right)^{\frac{3x}{2}}\right\}^4$$

$$= e^4$$

(5) $-x=t$ 로 놓으면 $x=-t$ 이고, $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^{3x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2t}\right)^{-3t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{2t}\right)^{2t}\right\}^{-\frac{3}{2}}$$

$$= e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{e\sqrt{e}}$$

(6) $x-2=t$ 로 놓으면 $x=2+t$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-1)^{\frac{1}{2-x}} = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^{-1}$$

$$= e^{-1} = \frac{1}{e}$$

04-1 ㉔ (1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $-3e$ (4) $-\frac{1}{2}$ (5) 1 (6) 1

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+3x}{\ln(1+4x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{4x}{\ln(1+4x)} \times \frac{x^2+3x}{4x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{4x}{\ln(1+4x)} \times \frac{x+3}{4} \right\} \\ &= 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\ln(1+2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{2x}{\ln(1+2x)} \times \frac{1}{2} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1-3x}-e}{x} &= e \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x}-1}{x} \\ &= e \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x}-1}{-3x} \times (-3) \\ &= e \times 1 \times (-3) = -3e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-e^{2x}}{x^3+4x} &= -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x}-1}{2x} \times \frac{2x}{x^3+4x} \right) \\ &= -\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2x}-1}{2x} \times \frac{2}{x^2+4} \right) \\ &= -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(5) $x+1=t$ 로 놓으면 $x=-1+t$ 이고, $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\ln(x+2)}{x+1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

(6) $x-1=t$ 로 놓으면 $x=1+t$ 이고, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-e^{x-1}}{x-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^2-e^t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2+2t+1-e^t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (t+2) - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t-1}{t} = 2-1=1 \end{aligned}$$

05-1 ㉔ (1) $2\ln 5$ (2) 2 (3) $\frac{3\ln 3}{2}$ (4) $\ln 8$ (5) $\frac{\ln 2}{2}$

$$(6) \frac{\ln 4+2}{3}$$

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x}-1}{\log_5(1+2x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{4x}-1}{4x} \times \frac{2x}{\log_5(1+2x)} \times 2 \right\} \\ &= 1 \times \ln 5 \times 2 = 2\ln 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(9^x-1)\log_3(1+3x)}{x^3+3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{9^x-1}{x} \times \frac{\log_3(1+3x)}{3x} \times \frac{3x^2}{x^3+3x^2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{9^x-1}{x} \times \frac{\log_3(1+3x)}{3x} \times \frac{3}{x+3} \right\} \\ &= \ln 9 \times \frac{1}{\ln 3} \times 1 = \frac{2\ln 3}{\ln 3} = 2 \end{aligned}$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{x+1}-3}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x-1}{x} = \frac{3\ln 3}{2}$$

$$\begin{aligned} (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x-2^{-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x-1-2^{-x}+1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4^x-1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{-x}-1}{-x} \\ &= \ln 4 + \ln 2 = \ln 8 \end{aligned}$$

(5) $x-3=t$ 로 놓으면 $x=3+t$ 이고, $x \rightarrow 3$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\log_2(2x-5)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_2(1+2t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{\log_2(1+2t)} \times \frac{1}{2} \\ &= \ln 2 \times \frac{1}{2} = \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

(6) $x+1=t$ 로 놓으면 $x=t-1$ 이고, $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{4^{x+1}-x^2}{x^3+1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4^t-(t-1)^2}{(t-1)^3+1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4^t-1-t^2+2t}{t^3-3t^2+3t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{4^t-1}{t^3-3t^2+3t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t^2+2t}{t^3-3t^2+3t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{4^t-1}{t} \times \frac{1}{t^2-3t+3} \right) + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t+2}{t^2-3t+3} \\ &= \ln 4 \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{\ln 4+2}{3} \end{aligned}$$

06-1 ㉔ 1

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(a+5x) = 0$$

$$\ln a = 0 \quad \therefore a = 1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{x^2+bx} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+5x)}{5x} \times \frac{5x}{x^2+bx} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+5x)}{5x} \times \frac{5}{x+b} \right\} \\ &= 1 \times \frac{5}{b} = \frac{5}{b} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{5}{b} = 5 \text{이므로 } b = 1$$

$$\therefore ab = 1 \times 1 = 1$$

06-2 ㉔ 4

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{bx+c}-1) = 0$$

$$e^c - 1 = 0 \quad \therefore c = 0$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(ax+1)}{e^{bx}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+ax)}{ax} \times \frac{bx}{e^{bx}-1} \times \frac{a}{b} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{a}{b} = 4 \text{ 이므로 } a = 4b$$

$$\therefore \frac{a}{b+c} = \frac{4b}{b+0} = 4$$

06-3 ㉡ 2

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow -1} \{a \ln(x+2) + b\} = 0 \quad \therefore b = 0$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{a \ln(x+2)}{x^2-1} = -1$$

이때 $x+1=t$ 로 놓으면 $x=t-1$ 이고, $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{a \ln(x+2)}{x^2-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a \ln(1+t)}{(t-1)^2-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a \ln(1+t)}{t^2-2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+t)}{t} \times \frac{a}{t-2} \right\} \\ &= 1 \times \left(-\frac{a}{2} \right) = -\frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{a}{2} = -1 \text{ 이므로 } a = 2$$

$$\therefore a+b = 2+0 = 2$$

07-1 ㉡ 4

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - e^{a-2}}{ax} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{4x} - e^{a-2}) = 0, \quad 1 - e^{a-2} = 0 \quad \therefore a = 2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{4x} \times 2 = 1 \times 2 = 2 \\ \therefore ab &= 2 \times 2 = 4 \end{aligned}$$

07-2 ㉡ 3

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2+4x}{\ln(a+bx)} = \lim_{x \rightarrow 0-} (x+b)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2+4x}{\ln(a+bx)} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(a+bx) = 0, \quad \ln a = 0 \quad \therefore a = 1$$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2+4x}{\ln(1+bx)} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ \frac{bx}{\ln(1+bx)} \times \frac{x^2+4x}{bx} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ \frac{bx}{\ln(1+bx)} \times \frac{x+4}{b} \right\} \\ &= 1 \times \frac{4}{b} = \frac{4}{b} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{4}{b} = b \text{ 이므로 } b^2 = 4 \quad \therefore b = 2 \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore a+b = 1+2 = 3$$

07-3 ㉡ ln 3

$$x \neq 0 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{3^x - a + 2}{ax}$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\therefore f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - a + 2}{ax} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3^x - a + 2) = 0, \quad 1 - a + 2 = 0 \quad \therefore a = 3$$

이를 ㉠에 대입하면

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} \times \frac{1}{3} = \ln 3 \times \frac{1}{3} = \frac{\ln 3}{3}$$

$$\therefore a \times f(0) = 3 \times \frac{\ln 3}{3} = \ln 3$$

08-1 ㉡ $\frac{1}{2}$

$A(0, 1), P(t, e^t), Q(t, 1)$ 이므로

$$\overline{AP}^2 = t^2 + (e^t - 1)^2, \quad \overline{PQ}^2 = (e^t - 1)^2$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{PQ}^2}{\overline{AP}^2} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(e^t - 1)^2}{t^2 + (e^t - 1)^2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^2}{1 + \left(\frac{e^t - 1}{t}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

08-2 ㉡ 50

$A(1, 0), P(t, \ln t), Q(t, 0)$ 이므로

$$\overline{AQ} = |t-1|, \quad \overline{PQ} = |\ln t|$$

$$\therefore S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{AQ} \times \overline{PQ} = \frac{1}{2} \times |t-1| \times |\ln t|$$

$t \rightarrow 1$ + 일 때 $t-1 > 0$, $\ln t > 0$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow 1+} \frac{100S(t)}{(t-1)^2} = \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{50(t-1)\ln t}{(t-1)^2}$$

$$= 50 \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\ln t}{t-1} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $t-1=s$ 로 놓으면 $t=1+s$ 이고, $t \rightarrow 1$ + 일 때 $s \rightarrow 0$ + 이므로 $\textcircled{7}$ 에서

$$50 \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{\ln t}{t-1} = 50 \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+s)}{s} = 50 \times 1 = 50$$

3 지수함수와 로그함수의 미분

문제

71~74쪽

09-1 $\textcircled{B}$ (1) $y' = e^{x-1} + 1$

(2) $y' = (x^3 + 3x^2 + 4)e^x - 9x^2$

(3) $y' = 3x^2 + 3^{x+3} \ln 3$

(4) $y' = \{(2x+1)\ln 4 + 2\}4^x$

(1) $y' = e^{-1}(e^x)' + (x)' + (-1)'$
 $= e^{-1} \times e^x + 1 = e^{x-1} + 1$

(2) $y' = (e^x - 3)'(x^3 + 4) + (e^x - 3)(x^3 + 4)'$
 $= e^x(x^3 + 4) + (e^x - 3) \times 3x^2$
 $= (x^3 + 3x^2 + 4)e^x - 9x^2$

(3) $y' = (x^3)' + 3^3(3^x)'$
 $= 3x^2 + 3^3 \times 3^x \ln 3 = 3x^2 + 3^{x+3} \ln 3$

(4) $y' = (2x+1)'4^x + (2x+1)(4^x)'$
 $= 2 \times 4^x + (2x+1)4^x \ln 4$
 $= \{(2x+1)\ln 4 + 2\}4^x$

09-2 $\textcircled{B}$ $2e^2 + \ln 3$

$$f'(x) = 2e^2(e^x)' + (3^x)'$$

$$= 2e^2 \times e^x + 3^x \ln 3 = 2e^{x+2} + 3^x \ln 3$$

$$\therefore f'(0) = 2e^2 + \ln 3$$

10-1 $\textcircled{B}$ (1) $y' = 3 \ln x + \frac{2}{x} + 3$

(2) $y' = e^x \left(\ln 2x + \frac{1}{x} \right)$

(3) $y' = \log_2 x + 1 + \frac{1}{\ln 2}$

(4) $y' = 2x + \frac{1}{x \ln 2}$

(1) $y' = (3x+2)' \ln x + (3x+2)(\ln x)'$
 $= 3 \ln x + (3x+2) \times \frac{1}{x}$
 $= 3 \ln x + \frac{2}{x} + 3$

(2) $y' = \{e^x(\ln 2 + \ln x)\}'$
 $= (e^x)'(\ln 2 + \ln x) + e^x(\ln 2 + \ln x)'$
 $= e^x(\ln 2 + \ln x) + e^x \times \frac{1}{x}$
 $= e^x \left(\ln 2x + \frac{1}{x} \right)$

(3) $y' = (x)'(\log_2 x + 1) + x(\log_2 x + 1)'$
 $= \log_2 x + 1 + x \times \frac{1}{x \ln 2}$
 $= \log_2 x + 1 + \frac{1}{\ln 2}$

(4) $y' = (x^2 + \log_2 3 + \log_2 x)'$
 $= (x^2)' + (\log_2 3)' + (\log_2 x)'$
 $= 2x + \frac{1}{x \ln 2}$

10-2 $\textcircled{B}$ $\frac{e^2}{\ln 3}$

$$f'(x) = e(e^x)' \log_3 x + e^{x+1}(\log_3 x)'$$

$$= e \times e^x \log_3 x + e^{x+1} \times \frac{1}{x \ln 3}$$

$$= e^{x+1} \left(\log_3 x + \frac{1}{x \ln 3} \right)$$

$$\therefore f'(1) = \frac{e^2}{\ln 3}$$

11-1 $\textcircled{B}$ $240 \ln 2$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+4h) - f(2-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+4h) - f(2) + f(2) - f(2-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+4h) - f(2)}{4h} \times 4 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2-h)}{-h}$$

$$= 4f'(2) + f'(2) = 5f'(2) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $f(x) = 2^{x+2} + 4^x = 4 \times 2^x + 4^x$ 이므로

$$f'(x) = 4 \times 2^x \ln 2 + 4^x \ln 4$$

따라서 구하는 극한값은 $\textcircled{7}$ 에서

$$5f'(2) = 5(4 \times 4 \ln 2 + 16 \ln 4)$$

$$= 5(16 \ln 2 + 32 \ln 2) = 240 \ln 2$$

11-2 $\textcircled{B}$ $\frac{1}{\ln 2} - 3$

$f(x) = \log_2 4x - 3x + 1$ 에서 $f(1) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이때 $f(x) = \log_2 4x - 3x + 1 = \log_2 x - 3x + 3$ 이므로

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} - 3$$

따라서 구하는 극한값은 $\textcircled{7}$ 에서

$$f'(1) = \frac{1}{\ln 2} - 3$$

11-3 ㉡ 3

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+2}{x-1} = b$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+2\} = 0 \quad \therefore f(1) = -2$$

$$\begin{aligned} \therefore b &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+2}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$f(1) = -2 \text{에서 } 1-a = -2 \quad \therefore a = 3$$

즉, $f(x) = x \ln x + x^2 - 3x$ 이므로

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} + 2x - 3 = \ln x + 2x - 2$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } b = f'(1) = 0$$

$$\therefore a-b = 3-0 = 3$$

12-1 ㉡ $\ln 3 + 1$

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 + 3^x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (ax + b)$$

$$\therefore b = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 3^x \ln 3 & (x > 0) \\ a & (x < 0) \end{cases} \text{이고 미분계수 } f'(0) \text{이 존재하므로}$$

재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (2x + 3^x \ln 3) = \lim_{x \rightarrow 0-} a$$

$$\therefore a = \ln 3$$

$$\therefore a+b = \ln 3 + 1$$

12-2 ㉡ $-e$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 미분가능하고 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \ln ax = \lim_{x \rightarrow 1-} e^{x+b}$$

$$\therefore \ln a = e^{1+b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 1) \\ e^{x+b} & (x < 1) \end{cases} \text{이고 미분계수 } f'(1) \text{이 존재하므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1-} e^{x+b}$$

$$1 = e^{1+b} \quad \therefore b = -1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\ln a = 1 \quad \therefore a = e$$

$$\therefore ab = e \times (-1) = -e$$

연습문제

75~77쪽

1 ③	2 -4	3 $\sqrt{e}$	4 3	5 ①
6 10	7 3	8 $36 \ln 2$	9 ④	10 0
11 ④	12 ②	13 12	14 24	15 e
16 $2 \ln 5$	17 $3 \ln 3 + 5 \ln 5$	18 3	19 -1	
20 ③	21 24			

$$1 \quad \neg. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+2^x}{1-3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x}{\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1} = 0$$

$$\begin{aligned} \neg. \lim_{x \rightarrow \infty} (8^x + 3^x)^{\frac{1}{3x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[8^x \left\{ 1 + \left(\frac{3}{8}\right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{3x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \left\{ 1 + \left(\frac{3}{8}\right)^x \right\}^{\frac{1}{3x}} \\ &= 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow \infty} \log_3 \frac{6x}{2x+5} = \log_3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{2x+5} = \log_3 3 = 1$$

$$\begin{aligned} \neg. \lim_{x \rightarrow 3} (\log_2 |x^3 - 27| - \log_2 |x^2 - 9|) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \log_2 \left| \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \log_2 \left| \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{(x+3)(x-3)} \right| \\ &= \log_2 \lim_{x \rightarrow 3} \left| \frac{x^2+3x+9}{x+3} \right| \\ &= \log_2 \frac{9}{2} = 2 \log_2 3 - 1 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+4x)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{(1+4x)^{\frac{1}{4x}}\}^{12} = e^{12} \text{이므로}$$

$$a = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{3x}\right)^{3x} \right\}^{-\frac{1}{3}} = e^{-\frac{1}{3}} \text{이므로}$$

$$b = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore ab = 12 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -4$$

$$\begin{aligned} 3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) \right. \\ \left. \times \dots \times \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \right\}^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \times \frac{n+1}{n} \times \frac{n+2}{n+1} \times \frac{n+3}{n+2} \times \dots \times \frac{2n+1}{2n} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1-\frac{a}{x}}{1+\frac{a}{x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1-\frac{a}{x} \right)^x}{\left(1+\frac{a}{x} \right)^x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left\{ \left(1-\frac{a}{x} \right)^{-\frac{x}{a}} \right\}^{-a}}{\left\{ \left(1+\frac{a}{x} \right)^{\frac{x}{a}} \right\}^a} \\
 &= \frac{e^{-a}}{e^a} = \frac{1}{e^{2a}}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{e^{2a}} = \frac{1}{e^6}$ 이므로

$$a=3$$

$$\begin{aligned}
 5 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \{ \ln x - \ln(x+4) \} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x}{x+4} \right)^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{x+4}{x} \right)^{-x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{4}{x} \right)^{-x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left\{ \left(1 + \frac{4}{x} \right)^{\frac{x}{4}} \right\}^{-4} \\
 &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{4}{x} \right)^{\frac{x}{4}} \right\}^{-4} \\
 &= \ln e^{-4} = -4
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x \{ \ln x - \ln(x+4) \} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \frac{x}{x+4} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 - \frac{4}{x+4} \right)
 \end{aligned}$$

$-\frac{4}{x+4} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{-4-4t}{t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 - \frac{4}{x+4} \right) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-4-4t}{t} \ln(1+t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ (-4-4t) \times \frac{\ln(1+t)}{t} \right\} \\
 &= -4 \times 1 = -4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{2x} + e^{3x} + \cdots + e^{nx} - n}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + e^{2x} - 1 + e^{3x} - 1 + \cdots + e^{nx} - 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3 \\
 &\quad + \cdots + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{nx} - 1}{nx} \times n \\
 &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n \\
 &= \frac{n(n+1)}{2}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{n(n+1)}{2} = 55$ 이므로

$$n(n+1) = 10 \times 11 \quad \therefore n = 10 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

7 $\ln(1+3x) \leq f(x) \leq e^{3x} - 1$ 의 각 변을 x 로 나누면

$$\frac{\ln(1+3x)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{e^{3x}-1}{x}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times 3 = 3$,

$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{3x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^{3x}-1}{3x} \times 3 = 3$ 이므로 함수의 극한의

대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = 3$$

8 (가)에서

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 3^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1 - 3^x + 1}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 1}{x} \\
 &= \ln a - \ln 3 = \ln \frac{a}{3}
 \end{aligned}$$

즉, $\ln \frac{a}{3} = \ln 2$ 이므로 $a = 6$

이를 (나)에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_2 x}{6(x-1)} = b$$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x=1+t$ 이고, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 b &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_2 x}{6(x-1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+t)}{6t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+t)}{t} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6 \ln 2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = 6 \times 6 \ln 2 = 36 \ln 2$$

9 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{ax+b} - e^2) = 0$$

$$e^b - e^2 = 0 \quad \therefore b = 2$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax+2} - e^2}{\log_2(1+x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ e^2 \times \frac{e^{ax} - 1}{ax} \times \frac{x}{\log_2(1+x)} \times a \right\} \\
 &= e^2 \times 1 \times \ln 2 \times a = ae^2 \ln 2
 \end{aligned}$$

즉, $ae^2 \ln 2 = \ln 2$ 이므로

$$a = \frac{1}{e^2}$$

$$\therefore ab = \frac{1}{e^2} \times 2 = \frac{2}{e^2}$$

10 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(2x+b)}{e^{ax}-1} = \lim_{x \rightarrow 0-} \{a(x-b)^2+1\}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(2x+b)}{e^{ax}-1} = ab^2+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(2x+b) = 0$$

$$\ln b = 0 \quad \therefore b = 1$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(2x+1)}{e^{ax}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times \frac{ax}{e^{ax}-1} \times \frac{2}{a} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{2}{a} = \frac{2}{a} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{2}{a} = ab^2+1 = a+1 \text{이므로}$$

$$a^2+a-2=0$$

$$(a+2)(a-1)=0$$

$$\therefore a=1 \quad (\because a>0)$$

$$\therefore a-b=1-1=0$$

- 11 $P(t, e^{2t}-1), Q(f(t), 0)$ 이므로

$$\overline{PQ}^2 = \{f(t)-t\}^2 + (e^{2t}-1)^2, \overline{OQ}^2 = \{f(t)\}^2$$

$$PQ=OQ \text{에서 } \overline{PQ}^2 = \overline{OQ}^2 \text{이므로}$$

$$\{f(t)-t\}^2 + (e^{2t}-1)^2 = \{f(t)\}^2$$

$$-2tf(t)+t^2+(e^{2t}-1)^2=0$$

$$\therefore f(t) = \frac{t}{2} + \frac{(e^{2t}-1)^2}{2t}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2t}-1}{t} \right)^2 \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{2t}-1}{2t} \times 2 \right)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} + 2 \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{e^{2t}-1}{2t} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} + 2 \times 1 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

- 12 점 A의 x좌표를 구하면 $e^{x^2}-1=t$

$$e^{x^2}=1+t \quad \therefore x=\sqrt{\ln(1+t)} \quad (\because x \geq 0)$$

$$\text{또 점 B의 x좌표를 구하면 } e^{x^2}-1=5t$$

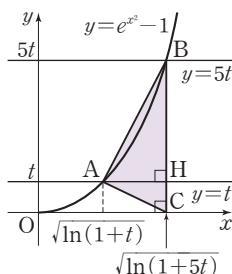
$$e^{x^2}=1+5t \quad \therefore x=\sqrt{\ln(1+5t)} \quad (\because x \geq 0)$$

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$H(\sqrt{\ln(1+5t)}, t)$$

$$\therefore \overline{AH}$$

$$= \sqrt{\ln(1+5t)} - \sqrt{\ln(1+t)}$$



$$\therefore S(t) = \frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{BC}$$

$$= \frac{1}{2} \times \{\sqrt{\ln(1+5t)} - \sqrt{\ln(1+t)}\} \times 5t$$

$$= \frac{5}{2} t \{\sqrt{\ln(1+5t)} - \sqrt{\ln(1+t)}\}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{5}{2} t \{\sqrt{\ln(1+5t)} - \sqrt{\ln(1+t)}\}}{t\sqrt{t}}$$

$$= \frac{5}{2} \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\sqrt{\ln(1+5t)}}{\sqrt{t}} - \frac{\sqrt{\ln(1+t)}}{\sqrt{t}} \right\}$$

$$= \frac{5}{2} \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \sqrt{\frac{\ln(1+5t)}{5t}} \times 5 - \sqrt{\frac{\ln(1+t)}{t}} \right\}$$

$$= \frac{5}{2} (\sqrt{5}-1)$$

- 13 $f'(x) = 4^x \ln 4 + 3^x \ln 3$

점 (0, 2)에서의 접선의 기울기는 $f'(0)$ 이므로

$$f'(0) = \ln 4 + \ln 3 = \ln 12$$

$$\therefore a = 12$$

- 14 $f'(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x-6)e^x$

$$= (x^2+4x-4)e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$(x^2+4x-4)e^x = 0$$

$$\therefore x^2+4x-4=0 \quad (\because e^x > 0)$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -4, \alpha\beta = -4$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= (-4)^2 - 2 \times (-4)$$

$$= 24$$

- 15 $f'(x) = (2x+2a)(\ln x - 1) + (x^2+2ax) \times \frac{1}{x}$

$$= (2x+2a) \ln x - x$$

$$\therefore f'(e) = (2e+2a) - e$$

$$= e + 2a$$

따라서 $e + 2a = 3e$ 이므로

$$a = e$$

- 16 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \ln 5}{x - 1} = -1$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고,

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - \ln 5\} = 0$$

$$\therefore f(1) = \ln 5$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \ln 5}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \text{이므로} \\ f'(1) &= -1 \\ g(x) &= (\log_5 x + x^2)f(x) \text{에서} \\ g'(x) &= \left(\frac{1}{x \ln 5} + 2x\right)f(x) + (\log_5 x + x^2)f'(x) \\ \therefore g'(1) &= \left(\frac{1}{\ln 5} + 2\right)f(1) + f'(1) \\ &= \left(\frac{1}{\ln 5} + 2\right) \times \ln 5 + (-1) \\ &= 2 \ln 5\end{aligned}$$

17 $f(x) = 3^x + 5^x$ 이라 하면 $f(1) = 8$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^x + 5^x - 8}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \\ f'(x) &= 3^x \ln 3 + 5^x \ln 5 \text{이므로 구하는 극한값은} \\ f'(1) &= 3 \ln 3 + 5 \ln 5\end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}x - 1 = t \text{로 놓으면 } x &= 1 + t \text{이고, } x \rightarrow 1 \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^x + 5^x - 8}{x - 1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3^{1+t} + 5^{1+t} - 8}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3^{t+1} - 3 + 5^{t+1} - 5}{t} \\ &= 3 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3^t - 1}{t} + 5 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5^t - 1}{t} \\ &= 3 \ln 3 + 5 \ln 5\end{aligned}$$

18 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1+} (a \ln x + b) &= \lim_{x \rightarrow 1-} (2^x - 1) \\ \therefore b &= 1 \\ f'(x) &= \begin{cases} \frac{a}{x} & (x > 1) \\ 2^x \ln 2 & (x < 1) \end{cases} \text{이고 미분계수 } f'(1) \text{이 존재하} \\ \text{므로} \\ \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) \\ \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{a}{x} &= \lim_{x \rightarrow 1-} 2^x \ln 2 \\ \therefore a &= 2 \ln 2 \\ \therefore e^a - b &= e^{2 \ln 2} - 1 \\ &= e^{\ln 4} - 1 \\ &= 4 - 1 = 3\end{aligned}$$

19 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) &= f(2)g(2) \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{\ln(x^2 - 4x + 5)} &= 0\end{aligned}$$

$x - 2 = t$ 로 놓으면 $x = 2 + t$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{\ln(x^2 - 4x + 5)} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+t)}{\ln(1+t^2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{t^2}{\ln(1+t^2)} \times \frac{f(2+t)}{t^2} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+t)}{t^2}\end{aligned}$$

즉, $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+t)}{t^2} = 0$ 이므로 함수 $f(2+t)$ 는 t^2 을 인수로 갖는다.

이때 삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이면 함수 $f(2+t)$ 의 최고차항의 계수도 1이다.

$f(2+t) = t^2(t+a)$ (a 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(2+t)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(t+a)}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} (t+a) = a\end{aligned}$$

즉, $a = 0$ 이므로

$$f(2+t) = t^3$$

따라서 $f(x) = (x-2)^3$ 이므로

$$f(1) = -1$$

20 $Q(k, e^{\frac{k}{2} + 3t})$ 이므로 점 R의 y좌표는 $e^{\frac{k}{2} + 3t}$

점 R의 x좌표를 구하면

$$e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{k}{2} + 3t}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{k}{2} + 3t$$

$$\therefore x = k + 6t$$

$$\therefore R(k + 6t, e^{\frac{k}{2} + 3t})$$

$P(k, e^{\frac{k}{2}})$ 이므로

$$\overline{PQ} = e^{\frac{k}{2} + 3t} - e^{\frac{k}{2}} = e^{\frac{k}{2}}(e^{3t} - 1), \overline{QR} = 6t$$

$\overline{PQ} = \overline{QR}$ 에서

$$e^{\frac{k}{2}}(e^{3t} - 1) = 6t$$

$$e^{\frac{k}{2}} = \frac{6t}{e^{3t} - 1} \quad (\because e^{3t} - 1 > 0)$$

$$\frac{k}{2} = \ln \frac{6t}{e^{3t} - 1}$$

$$\therefore k = 2 \ln \frac{6t}{e^{3t} - 1}$$

따라서 $f(t) = 2 \ln \frac{6t}{e^{3t} - 1}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0+} f(t) &= \lim_{t \rightarrow 0+} 2 \ln \frac{6t}{e^{3t} - 1} \\ &= 2 \lim_{t \rightarrow 0+} \ln \left(\frac{3t}{e^{3t} - 1} \times 2 \right) \\ &= 2 \ln \left(\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{3t}{e^{3t} - 1} \times 2 \right) \\ &= 2 \ln (1 \times 2) \\ &= \ln 4\end{aligned}$$

- 21 (가)에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 0$$

$$\therefore g(3) = 0$$

$g(x) = e^x f(x)$ 의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$g(3) = e^3 f(3)$$

즉, $e^3 f(3) = 0$ 이므로

$$f(3) = 0$$

(가)에서

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x-3} = g'(3)$$

$$\therefore g'(3) = 0$$

$g(x) = e^x f(x)$ 에서

$$g'(x) = e^x f(x) + e^x f'(x)$$

$$= e^x \{f(x) + f'(x)\}$$

$$\therefore g'(3) = e^3 \{f(3) + f'(3)\}$$

즉, $e^3 \{f(3) + f'(3)\} = 0$ 이므로

$$f(3) + f'(3) = 0$$

이때 $f(3) = 0$ 이므로

$$f'(3) = 0$$

(나)에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(3x) - f(3x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} f(3x) - f(3x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{3x} - 1)f(3x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ f(3x) \times \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times 3 \right\} \\ &= f(0) \times 1 \times 3 = 3f(0) \end{aligned}$$

즉, $3f(0) = 18$ 이므로

$$f(0) = 6$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f(0) = 6 \text{이므로}$$

$$c = 6$$

$$f(3) = 0 \text{이므로}$$

$$9a + 3b + 6 = 0$$

$$\therefore 3a + b = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$f'(3) = 0 \text{이므로}$$

$$6a + b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = \frac{2}{3}, b = -4$$

따라서 $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x + 6$ 이므로

$$f(9) = 54 - 36 + 6$$

$$= 24$$

II-1 02 삼각함수의 덧셈정리

여러 가지 삼각함수

개념 Check

79쪽

- 1 답 (1) 2 (2) -2 (3) $\sqrt{3}$

$$(1) \csc \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\begin{aligned} (2) \sec \left(-\frac{2}{3}\pi \right) &= \frac{1}{\cos \left(-\frac{2}{3}\pi \right)} = \frac{1}{-\cos \frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \cot 210^\circ &= \frac{1}{\tan 210^\circ} = \frac{1}{\tan 30^\circ} \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

- 2 답 (1) $-\frac{5}{4}$ (2) $\frac{5}{3}$ (3) $-\frac{3}{4}$

- 3 답 $\sqrt{3}$

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 1 + (\sqrt{2})^2 = 3$$

이때 θ 가 제1사분면의 각이면 $\sec \theta > 0$ 이므로

$$\sec \theta = \sqrt{3}$$

문제

80~81쪽

- 01-1 답 $\frac{3}{2}$

$$\overline{OP} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5 \text{이므로}$$

$$\csc \theta = -\frac{5}{4}, \sec \theta = -\frac{5}{3}, \cot \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore 2 \cot \theta - 4 \csc \theta + 3 \sec \theta$$

$$= 2 \times \frac{3}{4} - 4 \times \left(-\frac{5}{4} \right) + 3 \times \left(-\frac{5}{3} \right) = \frac{3}{2}$$

- 01-2 답 제4사분면

(i) $\sin \theta \cot \theta > 0$ 에서

$$\sin \theta > 0, \cot \theta > 0 \text{ 또는 } \sin \theta < 0, \cot \theta < 0$$

$\sin \theta > 0, \cot \theta > 0$ 인 θ 는 제1사분면의 각이다.

$\sin \theta < 0, \cot \theta < 0$ 인 θ 는 제4사분면의 각이다.

따라서 $\sin \theta \cot \theta > 0$ 을 만족시키는 θ 는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\sec \theta \cot \theta < 0$ 에서

$\sec \theta > 0, \cot \theta < 0$ 또는 $\sec \theta < 0, \cot \theta > 0$

$\sec \theta > 0, \cot \theta < 0$ 인 θ 는 제4사분면의 각이다.

$\sec \theta < 0, \cot \theta > 0$ 인 θ 는 제3사분면의 각이다.

따라서 $\sec \theta \cot \theta < 0$ 을 만족시키는 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 θ 는 제4사분면의 각이다.

02-1 $\text{답} -\frac{1}{3}$

$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ 이고 θ 가 제3사분면의 각이면 $\tan \theta > 0$ 이므로

$$\tan \theta = \sqrt{\sec^2 \theta - 1} = \sqrt{\left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 1} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{4}{3}$$

$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ 이고 θ 가 제3사분면의 각이면 $\csc \theta < 0$ 이므로

$$\csc \theta = -\sqrt{1 + \cot^2 \theta} = -\sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\frac{5}{3}$$

$$\therefore \csc \theta + \cot \theta = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

02-2 $\text{답} \frac{100}{9}$

$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$ 이므로 $\tan \theta (1 + \cot \theta) = -2$ 에서

$$\tan \theta + 1 = -2 \quad \therefore \tan \theta = -3$$

$$\therefore \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 1 + (-3)^2 = 10$$

$$\cot \theta = -\frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$\csc^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta = 1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$$

$$\therefore \csc^2 \theta + \sec^2 \theta = \frac{10}{9} + 10 = \frac{100}{9}$$

02-3 $\text{답} -\frac{4}{3}$

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sec \theta + \csc \theta &= \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}} = -\frac{4}{3} \end{aligned}$$

2 삼각함수의 덧셈정리

개념 Check

83쪽

1 답 (1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ (3) $-2-\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} (1) \sin 75^\circ &= \sin (45^\circ + 30^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \cos 15^\circ &= \cos (45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \tan 105^\circ &= \tan (60^\circ + 45^\circ) \\ &= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 45^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \times 1} \\ &= -2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

2 답 (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} (1) \sin 100^\circ \cos 55^\circ - \cos 100^\circ \sin 55^\circ \\ &= \sin (100^\circ - 55^\circ) \\ &= \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \cos 40^\circ \cos 70^\circ + \sin 40^\circ \sin 70^\circ \\ &= \cos (40^\circ - 70^\circ) = \cos (-30^\circ) \\ &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \frac{\tan 80^\circ - \tan 20^\circ}{1 + \tan 80^\circ \tan 20^\circ} &= \tan (80^\circ - 20^\circ) \\ &= \tan 60^\circ = \sqrt{3} \end{aligned}$$

문제

84~87쪽

03-1 답 (1) $-\frac{5\sqrt{3}}{9}$ (2) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$ (3) $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 에서 $\cos \alpha > 0, \sin \beta > 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} (1) \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= -\frac{5\sqrt{3}}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ &= \frac{\sqrt{6}}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - (-2\sqrt{2})}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \times (-2\sqrt{2})} \\ &= -\frac{5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

03-2 ㉠ $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} (\tan \alpha + 3)(\tan \beta - 3) &= -10 \text{에서} \\ \tan \alpha \tan \beta - 3(\tan \alpha - \tan \beta) - 9 &= -10 \\ \tan \alpha \tan \beta + 1 &= 3(\tan \alpha - \tan \beta) \\ \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} &= \frac{1}{3} \\ \therefore \tan(\alpha - \beta) &= \frac{1}{3} (\because \tan \alpha > 0, \tan \beta > 0) \end{aligned}$$

04-1 ㉠ (1) $\frac{4}{5}$ (2) $\frac{3}{5}$ (3) $\frac{4}{3}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sec \theta > 0$ 이므로

$$\sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

또 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned} (1) \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \cos 2\theta &= 1 - 2 \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \tan 2\theta &= \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \\ &= \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

04-2 ㉠ $\frac{7}{9}$

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{4}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{16}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{16}{9}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \frac{7}{9}$$

$$\therefore \sin 2\theta = \frac{7}{9}$$

05-1 ㉠ $\frac{7}{4}$

두 직선 $y = \frac{1}{3}x + 3$, $y = 5x + 4$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{1}{3}, \tan \beta = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan \theta &= |\tan(\alpha - \beta)| \\ &= \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| \\ &= \left| \frac{\frac{1}{3} - 5}{1 + \frac{1}{3} \times 5} \right| = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

05-2 ㉠ $\frac{\pi}{3}$

두 직선 $\sqrt{3}x + 2y = 0$, $3\sqrt{3}x - y + 1 = 0$, 즉 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $y = 3\sqrt{3}x + 1$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \beta = 3\sqrt{3}$$

따라서 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \tan \theta &= |\tan(\alpha - \beta)| \\ &= \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| \\ &= \left| \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\sqrt{3}}{1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 3\sqrt{3}} \right| = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} (\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

05-3 ㉮ 3

두 직선 $ax-4y+12=0$, $x+2y+4=0$, 즉 $y=\frac{a}{4}x+3$,

$y=-\frac{1}{2}x-2$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{a}{4}, \tan \beta = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan \theta &= |\tan(\alpha - \beta)| \\ &= \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| \\ &= \left| \frac{\frac{a}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \frac{a}{4} \times \left(-\frac{1}{2}\right)} \right| \\ &= \left| \frac{2a+4}{8-a} \right| \end{aligned}$$

따라서 $\left| \frac{2a+4}{8-a} \right| = 2$ 이므로

$$2a+4=2(8-a) \text{ 또는 } 2a+4=-2(8-a)$$

$$\therefore a=3$$

06-1 ㉮ $\frac{119}{169}$

$$\overline{AC} = \overline{AE} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$\angle CAB = \alpha$, $\angle EAD = \beta$ 라

하면

$$\sin \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{12}{13}$$

$$\cos \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{5}{13}$$

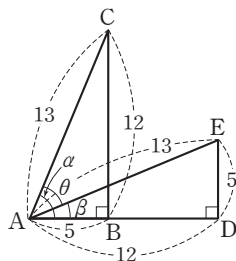
$$\sin \beta = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{5}{13}$$

$$\cos \beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} = \frac{12}{13}$$

이때 $\theta = \alpha - \beta$ 이므로

$$\sin \theta = \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{12}{13} \times \frac{12}{13} - \frac{5}{13} \times \frac{5}{13} = \frac{119}{169}$$



06-2 ㉮ 7

점 D가 변 AB를 2 : 1로 내분하므로

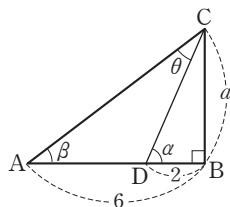
$$\overline{BD} = 6 \times \frac{1}{3} = 2$$

$\angle CDB = \alpha$, $\angle CAB = \beta$ 라

하면

$$\tan \alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{a}{2}$$

$$\tan \beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{6}$$



이때 $\theta = \alpha - \beta$ 이므로

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{a}{2} - \frac{a}{6}}{1 + \frac{a}{2} \times \frac{a}{6}}$$

$$= \frac{4a}{a^2 + 12}$$

$$\text{즉, } \frac{4a}{a^2 + 12} = \frac{4}{7} \text{ 이므로 } 7a = a^2 + 12$$

$$a^2 - 7a + 12 = 0, (a-3)(a-4) = 0$$

$$\therefore a=3 \text{ 또는 } a=4$$

따라서 모든 a 의 값의 합은

$$3+4=7$$

3 삼각함수의 합성

문제

89쪽

07-1 ㉮ (1) $2 \sin\left(\theta + \frac{5}{6}\pi\right)$ (2) $2 \cos\left(\theta - \frac{5}{3}\pi\right)$

$$(1) -\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$$

$$= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{5}{6}\pi \sin \theta + \sin \frac{5}{6}\pi \cos \theta \right)$$

$$= 2 \sin\left(\theta + \frac{5}{6}\pi\right)$$

$$(2) -\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$$

$$= 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \right)$$

$$= 2 \left(\sin \frac{5}{3}\pi \sin \theta + \cos \frac{5}{3}\pi \cos \theta \right)$$

$$= 2 \cos\left(\theta - \frac{5}{3}\pi\right)$$

07-2 ㉮ 최댓값: 4, 최솟값: -4

$$y = 4 \sin x + 4\sqrt{3} \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 4 \sin x + 4\sqrt{3} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 4 \sin x + 4\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right)$$

$$= -2 \sin x + 2\sqrt{3} \cos x$$

$$= 4 \left(-\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right)$$

$$= 4 \left(\cos \frac{2}{3}\pi \sin x + \sin \frac{2}{3}\pi \cos x \right)$$

$$= 4 \sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$$

이때 $-1 \leq \sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) \leq 1$ 이므로

$$-4 \leq 4 \sin\left(x + \frac{2}{3}\pi\right) \leq 4$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 4, 최솟값은 -4이다.

연습문제

90~91쪽

- 1 3 2 ㄱ, ㄴ 3 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 4 ④ 5 $\frac{14}{25}$
 6 ② 7 $-\frac{5}{8}$ 8 ① 9 $\frac{4+\sqrt{15}}{8}$ 10 $\frac{8}{15}$
 11 ⑤ 12 4 13 ① 14 ④

- 1 $OP = \sqrt{(-9)^2 + 12^2} = 15$ 이므로
 $\csc \theta = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$, $\sec \theta = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$,
 $\tan \theta = -\frac{12}{9} = -\frac{4}{3}$
 $\therefore \frac{3 \sec \theta}{4 \csc \theta + 5 \tan \theta} = \frac{3 \times \left(-\frac{5}{3}\right)}{4 \times \frac{5}{4} + 5 \times \left(-\frac{4}{3}\right)} = 3$
- 2 ㄱ. $\frac{1}{1+\cos \theta} + \frac{1}{1-\cos \theta} = \frac{(1-\cos \theta) + (1+\cos \theta)}{(1+\cos \theta)(1-\cos \theta)}$
 $= \frac{2}{1-\cos^2 \theta}$
 $= \frac{2}{\sin^2 \theta} = 2 \csc^2 \theta$
 ㄴ. $\frac{\cot \theta}{1+\csc \theta} + \frac{1+\csc \theta}{\cot \theta}$
 $= \frac{\cot^2 \theta + (1+\csc \theta)^2}{(1+\csc \theta) \cot \theta}$
 $= \frac{\cot^2 \theta + 1 + 2 \csc \theta + \csc^2 \theta}{(1+\csc \theta) \cot \theta}$
 $= \frac{2 \csc^2 \theta + 2 \csc \theta}{(1+\csc \theta) \cot \theta} = \frac{2 \csc \theta (\csc \theta + 1)}{(1+\csc \theta) \cot \theta}$
 $= \frac{2 \csc \theta}{\cot \theta} = 2 \csc \theta \tan \theta$
 $= 2 \times \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
 $= \frac{2}{\cos \theta} = 2 \sec \theta$
 ㄷ. $\frac{1+\cos \theta}{\sec \theta - \tan \theta} - \frac{1-\cos \theta}{\sec \theta + \tan \theta}$
 $= \frac{(1+\cos \theta)(\sec \theta + \tan \theta) - (1-\cos \theta)(\sec \theta - \tan \theta)}{(\sec \theta - \tan \theta)(\sec \theta + \tan \theta)}$
 $= \frac{2(\cos \theta \sec \theta + \tan \theta)}{\sec^2 \theta - \tan^2 \theta}$
 $= \frac{2(1+\tan \theta)}{(1+\tan^2 \theta) - \tan^2 \theta} = 2(1+\tan \theta)$

$$\begin{aligned} & \therefore (\tan \theta + \cot \theta)^2 - (\sin \theta + \csc \theta)^2 - (\cos \theta + \sec \theta)^2 \\ &= (\tan^2 \theta + 2 + \cot^2 \theta) - (\sin^2 \theta + 2 + \csc^2 \theta) \\ &\quad - (\cos^2 \theta + 2 + \sec^2 \theta) \\ &= (\tan^2 \theta - \sec^2 \theta) + (\cot^2 \theta - \csc^2 \theta) \\ &\quad - (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 2 \\ &= -1 + (-1) - 1 - 2 = -5 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

- 3 $\tan \theta + \cot \theta = -8$ 에서
 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -8$, $\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = -8$
 $\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -8$
 $\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{8}$
 $\therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$
 $= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$
 $= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{4}$
 $\therefore |\sin \theta - \cos \theta| = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
- 4 $\frac{\cos 20^\circ \cos 25^\circ - \sin 20^\circ \sin 25^\circ}{\sin 140^\circ \cos 20^\circ - \cos 140^\circ \sin 20^\circ}$
 $= \frac{\cos(20^\circ + 25^\circ)}{\sin(140^\circ - 20^\circ)} = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{\cos 45^\circ}{\sin 60^\circ}$
 $= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$
- 5 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \alpha < 0$, $\cos \beta > 0$ 이므로
 $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$
 $\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5}$
 $\therefore \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
 $= \frac{3}{5} \times \frac{\sqrt{21}}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{2}{5}$
 $= \frac{3\sqrt{21} + 8}{25}$
 $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
 $= -\frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{21}}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$
 $= \frac{-4\sqrt{21} - 6}{25}$
 $\therefore 4 \sin(\alpha - \beta) + 3 \cos(\alpha + \beta)$
 $= \frac{12\sqrt{21} + 32}{25} + \frac{-12\sqrt{21} - 18}{25} = \frac{14}{25}$

6 $2\cos\alpha=3\sin\alpha$ 에서

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2}{3} \quad \therefore \tan\alpha=\frac{2}{3}$$

$\tan(\alpha+\beta)=1$ 에서

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1$$

$$\frac{\frac{2}{3}+\tan\beta}{1-\frac{2}{3}\tan\beta}=1$$

$$\frac{2}{3}+\tan\beta=1-\frac{2}{3}\tan\beta, \quad \frac{5}{3}\tan\beta=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan\beta=\frac{1}{5}$$

7 $\sin\alpha-\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\alpha-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\cos^2\alpha+2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=\frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}+\textcircled{8}$ 을 하면

$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\beta+\cos^2\beta)+2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=\frac{3}{4}$$

$$2+2\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \cos(\alpha+\beta)=-\frac{5}{8}$$

8 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ 에서 $\sin\theta<0$ 이므로

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$$

$$\therefore \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{4}{5}=-\frac{24}{25},$$

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\times\left(\frac{4}{5}\right)^2-1=\frac{7}{25}$$

$$\therefore \sin 2\theta-\cos 2\theta=-\frac{24}{25}-\frac{7}{25}=-\frac{31}{25}$$

9 $0<\theta<\frac{\pi}{4}$ 에서 $0<2\theta<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos 2\theta>0$

$$\therefore \cos 2\theta=\sqrt{1-\sin^2 2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos^2\theta &= \frac{1+\cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{1+\frac{\sqrt{15}}{4}}{2} = \frac{4+\sqrt{15}}{8} \end{aligned}$$

10 직선 $y=\frac{1}{4}x$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\tan\theta=\frac{1}{4}$$

직선 $y=mx$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 2θ 이므로

$$m=\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$=\frac{2\times\frac{1}{4}}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{8}{15}$$

11 학생의 눈이 있는 지점을 A, 보이는 건물의 밑부분과 꼭대기를 각각 B, C라 하고 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면

$$\tan\theta=\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{1.5}{6}=\frac{1}{4}$$

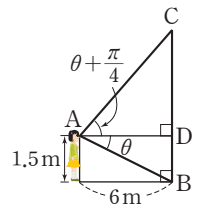
$$\therefore \overline{CD}=\overline{AD}\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=6\times\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=6\times\frac{\frac{1}{4}+1}{1-\frac{1}{4}\times 1}=6\times\frac{5}{3}=10(\text{m})$$

따라서 건물의 높이는

$$\overline{BD}+\overline{CD}=1.5+10=11.5(\text{m})$$



12 $y=\cos x-\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2$

$$=\cos x-\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)+2$$

$$=\cos x-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)+2$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x+2$$

$$=\cos\frac{5}{6}\pi\sin x+\sin\frac{5}{6}\pi\cos x+2$$

$$=\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)+2$$

이때 $-1\leq\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)\leq 1$ 이므로

$$1\leq\sin\left(x+\frac{5}{6}\pi\right)+2\leq 3$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 3, 최솟값은 1이므로

$$M=3, m=1$$

$$\therefore M+m=4$$

- 13 $y' = e^x$ 이므로 곡선 $y = e^x$ 위의 두 점 $A(t, e^t)$, $B(-t, e^{-t})$ 에서의 접선 l, m 의 기울기는 각각 e^t, e^{-t} 이다. 두 직선 l, m 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 하면

$$\tan \alpha = e^t, \tan \beta = e^{-t}$$

두 직선 l, m 이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = 1$$

$$\frac{e^t - e^{-t}}{1 + e^t \times e^{-t}} = 1, e^t - e^{-t} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$e^{2t} - 2e^t - 1 = 0$$

$$e^t = s (s > 0) \text{로 놓으면}$$

$$s^2 - 2s - 1 = 0 \quad \therefore s = 1 + \sqrt{2} \quad (\because s > 0)$$

$$\text{즉, } e^t = 1 + \sqrt{2} \text{이므로 } t = \ln(1 + \sqrt{2})$$

따라서 두 점 $A(t, e^t)$, $B(-t, e^{-t})$ 을 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{e^t - e^{-t}}{t - (-t)} = \frac{2}{2t} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \frac{1}{t} = \frac{1}{\ln(1 + \sqrt{2})}$$

- 14 $\angle EAB = \alpha$, $\overline{BE} = x$ ($0 < x < \frac{1}{2}$)라 하면

$$\tan \alpha = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = x$$

$\angle CDB = \beta$ 라 하면 $\overline{AD} = 2x$, $\overline{BD} = 1 - 2x$ 이므로

$$\tan \beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{BD}} = \frac{1}{1 - 2x}$$

$\angle CFE = \angle AFD$ 이므로

$$\tan(\angle CFE) = \tan(\angle AFD) = \tan(\beta - \alpha)$$

$$= \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha}$$

$$= \frac{\frac{1}{1 - 2x} - x}{1 + \frac{1}{1 - 2x} \times x}$$

$$= \frac{1 - x(1 - 2x)}{(1 - 2x) + x} = \frac{2x^2 - x + 1}{1 - x}$$

$$\text{즉, } \frac{2x^2 - x + 1}{1 - x} = \frac{16}{15} \text{이므로}$$

$$15(2x^2 - x + 1) = 16(1 - x)$$

$$30x^2 + x - 1 = 0, (5x + 1)(6x - 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{6} \quad (\because 0 < x < \frac{1}{2})$$

$$\therefore \tan(\angle CDB) = \tan \beta = \frac{1}{1 - 2x} = \frac{1}{1 - 2 \times \frac{1}{6}} = \frac{3}{2}$$

II-1 03 삼각함수의 미분

삼각함수의 극한

개념 Check

93쪽

1 ☐ (1) 0 (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (5) -2 (6) 1

2 ☐ (1) 1 (2) 1 (3) $\frac{1}{3}$ (4) 4 (5) 2 (6) $\frac{1}{2}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{3} = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{4x} \times 4 = 1 \times 4 = 4$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{4x} \times 2 = 1 \times 2 = 2$

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{3x} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

문제

94~98쪽

01-1 ☐ (1) $\frac{1}{2}$ (2) $2\sqrt{2}$ (3) 2 (4) 0

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\sin x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - 1}{\sin x - \cos x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x (\sin x - \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)}{\cos^2 x (\sin x - \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{2 \sin x \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \pi} 2 \cos^2 x \\ &= 2 \times (-1)^2 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\cos x (1 + \sin x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{0}{1 + 1} = 0
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 (2) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\sin x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2 x - 1}{\cos x \left(\frac{\sin x}{\cos x} - 1 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\tan x + 1)(\tan x - 1)}{\cos x (\tan x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x + 1}{\cos x} \\
 &= \frac{1 + 1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

02-1 ㉠ (1) 5 (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 3x}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{\sin x} + \frac{\sin 3x}{\sin x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{x}{\sin x} \times 2 \right) \\
 &\quad + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{x}{\sin x} \times 3 \right) \\
 &= 1 \times 1 \times 2 + 1 \times 1 \times 3 = 5
 \end{aligned}$$

(2) $x \rightarrow 0$ 일 때, $\sin 2x \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin 2x)}{\tan 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(\sin 2x)}{\sin 2x} \times \frac{3x}{\tan 3x} \times \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2}{3} \right\} \\
 &= 1 \times 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

(3) $x \rightarrow 0$ 일 때, $(4x^3 + 3x^2 - 2x) \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x^3 + 3x^2 - 2x)}{3x^2 - 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(4x^3 + 3x^2 - 2x)}{4x^3 + 3x^2 - 2x} \times \frac{4x^3 + 3x^2 - 2x}{3x^2 - 4x} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(4x^3 + 3x^2 - 2x)}{4x^3 + 3x^2 - 2x} \times \frac{4x^2 + 3x - 2}{3x - 4} \right\} \\
 &= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x \sin x (1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin x (1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{1 + \cos x} \right) \\
 &= 1 \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

02-2 ㉠ -3

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 \cos x}{\cos x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 \cos x (\cos x + 1)}{(\cos x - 1)(\cos x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 \cos x (\cos x + 1)}{\cos^2 x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 \cos x (\cos x + 1)}{-\sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ -a \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \times \cos x (\cos x + 1) \right\} \\
 &= -a \times 1^2 \times 1 \times 2 = -2a \\
 \text{따라서 } -2a &= 6 \text{이므로} \\
 a &= -3
 \end{aligned}$$

03-1 ㉠ (1) $-\frac{1}{\pi}$ (2) 1 (3) $-\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{1}{2}$

(1) $x - 3 = t$ 로 놓으면 $x = 3 + t$ 이고, $x \rightarrow 3$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sin \pi x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \pi(3 + t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin(3\pi + \pi t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{-\sin \pi t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\pi t}{\sin \pi t} \times \frac{1}{\pi} \right) \\
 &= -1 \times \frac{1}{\pi} \\
 &= -\frac{1}{\pi}
 \end{aligned}$$

(2) $x - \pi = t$ 로 놓으면 $x = \pi + t$ 이고, $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \pi} (x - \pi) \cot x &= \lim_{t \rightarrow 0} t \cot(\pi + t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan(\pi + t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\tan t} = 1
 \end{aligned}$$

(3) $x-1=t$ 로 놓으면 $x=1+t$ 이고, $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos \frac{\pi}{2}x}{x^2-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos \frac{\pi}{2}(1+t)}{(1+t)^2-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}t\right)}{t^2+2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin \frac{\pi}{2}t}{t(t+2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left[-\frac{\sin \frac{\pi}{2}t}{\frac{\pi}{2}t} \times \frac{\pi}{2(t+2)} \right] \\ &= -1 \times \frac{\pi}{4} \\ &= -\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

(4) $\frac{1}{2x+1}=t$ 로 놓으면

$$2x+1=\frac{1}{t} \quad \therefore x=\frac{1-t}{2t}$$

$x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{2x+1} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1-t}{2t} \sin t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin t}{t} \times \frac{1-t}{2} \right) \\ &= 1 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

03-2 ㉡ $-\frac{\pi}{2}$

$x-\frac{1}{2}=t$ 로 놓으면 $x=\frac{1}{2}+t$ 이고, $x \rightarrow \frac{1}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\tan(\cos \pi x)}{2x-1} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan\left\{\cos \pi\left(\frac{1}{2}+t\right)\right\}}{2\left(\frac{1}{2}+t\right)-1} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi t\right)\right\}}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan(-\sin \pi t)}{2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan(-\sin \pi t)}{-\sin \pi t} \times \frac{\sin \pi t}{\pi t} \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ &= -\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

04-1 ㉡ 2

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + a) = 0$$

$$1+a=0 \quad \therefore a=-1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{e^x-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 3x}{3x} \times \frac{x}{e^x-1} \times 3 \right) \\ &= 1 \times 1 \times 3 = 3\end{aligned}$$

$$\therefore b=3$$

$$\therefore a+b=-1+3=2$$

04-2 ㉡ $\frac{1}{2}$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax^2+b}-1) = 0$$

$$\sqrt{b}-1=0 \quad \therefore b=1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \sin x}{\sqrt{ax^2+1}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \sin x (\sqrt{ax^2+1}+1)}{(\sqrt{ax^2+1}-1)(\sqrt{ax^2+1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \sin x (\sqrt{ax^2+1}+1)}{ax^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{\sqrt{ax^2+1}+1}{a} \right) \\ &= 1 \times 1 \times \frac{2}{a} = \frac{2}{a} \\ \text{즉, } \frac{2}{a} &= 4 \text{이므로 } a = \frac{1}{2} \\ \therefore b-a &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

04-3 ㉡ $\frac{\pi}{2}$

$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (ax-b) = 0$$

$$\frac{\pi}{2}a-b=0 \quad \therefore b=\frac{\pi}{2}a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{ax - \frac{\pi}{2}a}{\cos x} = 1$$

이때 $x - \frac{\pi}{2} = t$ 로 놓으면 $x = \frac{\pi}{2} + t$ 이고, $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{ax - \frac{\pi}{2}a}{\cos x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a\left(\frac{\pi}{2} + t\right) - \frac{\pi}{2}a}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{at}{-\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} \times (-a) \\ &= 1 \times (-a) = -a\end{aligned}$$

즉, $-a = 1$ 이므로 $a = -1$

이를 ㉠에 대입하면 $b = -\frac{\pi}{2}$

$$\therefore ab = -1 \times \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

05-1 [답] 1

직각삼각형 BCH에서 $\overline{BH} = 3 \sin \theta$

$\angle ABH = \frac{\pi}{2} - \angle CBH = \angle BCH = \theta$ 이므로 직각삼각형 ABH에서

$$\overline{AH} = \overline{BH} \tan \theta = 3 \sin \theta \tan \theta$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{AH}}{3\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{3 \sin \theta \tan \theta}{3\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{\tan \theta}{\theta} \right) \\ &= 1 \times 1 = 1\end{aligned}$$

다른 풀이

직각삼각형 ABC에서 $\overline{AC} = \frac{3}{\cos \theta}$

직각삼각형 BCH에서 $\overline{CH} = 3 \cos \theta$

$$\therefore \overline{AH} = \overline{AC} - \overline{CH} = \frac{3}{\cos \theta} - 3 \cos \theta$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{AH}}{3\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\frac{3}{\cos \theta} - 3 \cos \theta}{3\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\theta^2 \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 \theta}{\theta^2 \cos \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \times \frac{1}{\cos \theta} \right\} \\ &= 1^2 \times 1 = 1\end{aligned}$$

05-2 [답] $\frac{1}{4}$

직각삼각형 OHB에서

$$\overline{OH} = \cos \theta, \overline{BH} = \sin \theta$$

$\overline{AH} = \overline{OA} - \overline{OH} = 1 - \cos \theta$ 이므로

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{BH}$$

$$= \frac{1}{2} (1 - \cos \theta) \sin \theta$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(1 - \cos \theta) \sin \theta}{2\theta^3} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) \sin \theta}{2\theta^3(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(1 - \cos^2 \theta) \sin \theta}{2\theta^3(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 \theta \sin \theta}{2\theta^3(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^3 \times \frac{1}{2(1 + \cos \theta)} \right\} \\ &= 1^3 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

2 삼각함수의 미분

개념 Check

99쪽

1 [답] (1) $y' = \cos x - \sqrt{3} \sin x$

(2) $y' = \sin x + x \cos x$

문제

100쪽

06-1 [답] $\frac{1}{\pi}$

$$f'(x) = (\ln x)' - (\cos x)' = \frac{1}{x} + \sin x$$

$$\therefore f'(\pi) = \frac{1}{\pi} + \sin \pi = \frac{1}{\pi}$$

06-2 [답] 0

$$\begin{aligned}& \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2} + h\right) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right) - f\left(\frac{\pi}{2} - h\right)}{-h} \\ &= f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

이때 $f(x) = (x+1) \sin x + \cos x$ 에서

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x+1)' \sin x + (x+1)(\sin x)' + (\cos x)' \\ &= \sin x + (x+1) \cos x - \sin x \\ &= (x+1) \cos x\end{aligned}$$

따라서 구하는 극한값은 ㉠에서

$$2f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \cos \frac{\pi}{2} \right\} = 2 \times 0 = 0$$

06-3 ㉔ $-4e^{\frac{\pi}{2}}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= a(e^x)' \cos x + ae^x (\cos x)' \\ &= ae^x \cos x + ae^x \times (-\sin x) \\ &= ae^x (\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

$$f'(0) = 4 \text{에서 } a = 4$$

따라서 $f'(x) = 4e^x (\cos x - \sin x)$ 이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4e^{\frac{\pi}{2}} \times (-1) = -4e^{\frac{\pi}{2}}$$

연습문제

101~102쪽

- 1 $1-\sqrt{2}$ 2 4 3 ② 4 ③ 5 ⑤
6 $\frac{1}{2}$ 7 π 8 ③ 9 6 10 1
11 ④ 12 $-\frac{\pi}{2}$

1 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cot x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\sin x \times \frac{\cos x}{\sin x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x - \cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x (\sin x - \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{\cos x} \right) \\ &= -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \cot x + \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x} = 1 - \sqrt{2}$$

2 $f(n) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{x} + \dots + \frac{\sin nx}{x}}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{2x} \times 2 + \dots + \frac{\sin nx}{nx} \times n}$
 $= \frac{2}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$
 $= \frac{2}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{4}{n(n+1)}$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} f(n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \right\} \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 4 \times 1 = 4 \end{aligned}$$

3 $x - \pi = t$ 로 놓으면 $x = \pi + t$ 이고, $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{(x - \pi) \sin x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + \cos(\pi + t)}{t \sin(\pi + t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{-t \sin t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{-t \sin t (1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{-t \sin t (1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{-t \sin t (1 + \cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin t}{t} \times \frac{1}{1 + \cos t} \right) \\ &= -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

4 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x + b) = 0$

$$\ln b = 0 \quad \therefore b = 1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sin ax} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{ax}{\sin ax} \times \frac{1}{a} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{a} = 3 \text{이므로 } a = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a + b = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

5 $x \neq 0$ 일 때, $f(x) = \frac{a - 4 \cos \frac{\pi}{2} x}{(e^{2x} - 1)^2}$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로 $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\therefore f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a - 4 \cos \frac{\pi}{2} x}{(e^{2x} - 1)^2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

$$\text{(분자)} \rightarrow 0 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 0} \left(a - 4 \cos \frac{\pi}{2} x \right) = 0$$

$$a - 4 = 0 \quad \therefore a = 4$$

이를 ⑤에 대입하면

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - 4 \cos \frac{\pi}{2} x}{(e^{2x} - 1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \left(1 - \cos \frac{\pi}{2} x\right) \left(1 + \cos \frac{\pi}{2} x\right)}{(e^{2x} - 1)^2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{2} x\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} x\right)}{(e^{2x} - 1)^2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{2} x\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 \frac{\pi}{2} x}{(e^{2x} - 1)^2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{2} x\right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{\frac{\pi}{2} x} \right)^2 \times \left(\frac{2x}{e^{2x} - 1} \right)^2 \times \frac{\frac{\pi^2}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{2} x} \right\} \\
 &= 1^2 \times 1^2 \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{8} \\
 \therefore a \times f(0) &= 4 \times \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{2}
 \end{aligned}$$

- 6 직각삼각형 POH에서 $\overline{OH} = \cos \theta$, $\overline{PH} = \sin \theta$ 이므로
 $\overline{AH} = \overline{OA} - \overline{OH} = 1 - \cos \theta$

삼각형 AQH는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{QH} = \overline{AH} = 1 - \cos \theta$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\overline{QH}}{\theta \times \overline{PH}} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos \theta}{\theta \sin \theta} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{\theta \sin \theta (1 + \cos \theta)} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{1 - \cos^2 \theta}{\theta \sin \theta (1 + \cos \theta)} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 \theta}{\theta \sin \theta (1 + \cos \theta)} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{1}{1 + \cos \theta} \right) \\
 &= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

- 7 $f'(x) = -2 \cos x$ 이므로 $f'(a) = 2$ 에서
 $-2 \cos a = 2$, $\cos a = -1$
 $\therefore a = \pi$ ($\because 0 \leq a \leq 2\pi$)

- 8 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로
 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0)$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0+} (ae^x + 2x + 5) &= \lim_{x \rightarrow 0-} (\cos x + bx) \\
 a + 5 &= 1 \quad \therefore a = -4
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -4e^x + 2 & (x > 0) \\ -\sin x + b & (x < 0) \end{cases} \text{이고 미분계수 } f'(0) \text{이 존재}$$

$$\text{재하므로 } \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (-4e^x + 2) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-\sin x + b) \quad \therefore b = -2$$

$$\therefore ab = -4 \times (-2) = 8$$

$$\begin{aligned}
 9 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos^4 x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(1 - \cos^2 x)(1 + \cos^2 x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin^2 x (1 + \cos^2 x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{x^2} \times \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \times \frac{1}{1 + \cos^2 x} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} \times 1^2 \times \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}
 \end{aligned}$$

$$\approx, \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 2 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^a} = b \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{x^2} \times x^{2-a} \right\} = b \quad \therefore 4 \lim_{x \rightarrow 0} x^{2-a} = b$$

이때 $a > 2$ 이면 b 의 값이 존재하지 않고 $0 < a < 2$ 이면

$$b = 0 \text{이므로 양수 } b \text{에 대하여}$$

$$a = 2, b = 4 \quad \therefore a + b = 6$$

$$\begin{aligned}
 10 \quad a_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_1(x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2} x} \times \frac{x}{\sin x} \times \frac{1}{2} \right) \\
 &= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$x \rightarrow 0 \text{일 때, } f_1(x) = \sin \frac{1}{2} x \text{에서 } f_1(x) \rightarrow 0 \text{이므로}$$

$$f_2(x) = \sin \left(\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} x \right) \text{에서 } f_2(x) \rightarrow 0$$

$$f_3(x) = \sin \left\{ \frac{1}{2} \sin \left(\frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} x \right) \right\} \text{에서 } f_3(x) \rightarrow 0$$

$\vdots$

$$f_n(x) \rightarrow 0$$

$$\therefore a_{n+1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(f_n(x))}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \left\{ \frac{1}{2} f_n(x) \right\}}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin \left\{ \frac{1}{2} f_n(x) \right\}}{\frac{1}{2} f_n(x)} \times \frac{\frac{1}{2} f_n(x)}{\sin x} \right]$$

$$= 1 \times \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x)}{\sin x} = \frac{1}{2} a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열
이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

11 직각삼각형 OHP에서 $\overline{PH} = \sin \theta$, $\overline{OH} = \cos \theta$

$$\therefore f(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{OH} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta$$

$$\angle QPO = \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \angle AQR = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\text{직각삼각형 OQP에서 } \overline{OQ} = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\therefore \overline{AQ} = \overline{OQ} - \overline{OA} = \frac{1}{\cos \theta} - 1 = \frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta}$$

$$\begin{aligned} \therefore g(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{AQ}^2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta}\right)^2 \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{g(\theta)}}{\theta \times f(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 - \cos \theta}{\cos \theta} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}}{\frac{\theta}{2} \sin \theta \cos \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos \theta) \sqrt{\pi - 2\theta}}{\theta \sin \theta \cos^2 \theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) \sqrt{\pi - 2\theta}}{\theta \sin \theta \cos^2 \theta (1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos^2 \theta) \sqrt{\pi - 2\theta}}{\theta \sin \theta \cos^2 \theta (1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 \theta \sqrt{\pi - 2\theta}}{\theta \sin \theta \cos^2 \theta (1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{\sqrt{\pi - 2\theta}}{\cos^2 \theta (1 + \cos \theta)} \right\} \\ &= 1 \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 12 \quad f(x) &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{t \cos x - x \cos t}{t - x} \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{t \cos x - x \cos x + x \cos x - x \cos t}{t - x} \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \frac{(t - x) \cos x - x(\cos t - \cos x)}{t - x} \\ &= \lim_{t \rightarrow x} \cos x - x \lim_{t \rightarrow x} \frac{\cos t - \cos x}{t - x} \\ &= \cos x - x(\cos x)' \quad \text{--- } g(t) = \cos t \text{라 하면} \\ &= \cos x + x \sin x \quad \text{--- } \lim_{t \rightarrow x} \frac{g(t) - g(x)}{t - x} = g'(x) \end{aligned}$$

$$\therefore f'(x) = -\sin x + \sin x + x \cos x = x \cos x$$

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'(\pi) = \frac{\pi}{2} + (-\pi) = -\frac{\pi}{2}$$

II-2 01 여러 가지 미분법(1)

함수의 뜻의 미분법

개념 Check

105쪽

1 답 (1) $y' = -\frac{1}{(x-4)^2}$ (2) $y' = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

$$(1) y' = -\frac{(x-4)'}{(x-4)^2} = -\frac{1}{(x-4)^2}$$

$$\begin{aligned} (2) y' &= \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1 - x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

2 답 (1) $y' = 3 \sec x \tan x - \csc x \cot x$

$$(2) y' = 2 \sec^2 x + \csc^2 x$$

문제

106~107쪽

01-1 답 (1) $y' = -\frac{4}{x^5} - \frac{15}{x^6} - \frac{6}{x^7}$

$$(2) y' = \frac{(1-x)e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$$

$$(3) y' = -\frac{2 \sin x}{(1 - \cos x)^2}$$

$$\begin{aligned} (1) y' &= \frac{(x^2+3x+1)'x^6 - (x^2+3x+1)(x^6)'}{(x^6)^2} \\ &= \frac{(2x+3) \times x^6 - (x^2+3x+1) \times 6x^5}{x^{12}} \\ &= \frac{-4x^7 - 15x^6 - 6x^5}{x^{12}} \end{aligned}$$

$$= -\frac{4}{x^5} - \frac{15}{x^6} - \frac{6}{x^7}$$

$$\begin{aligned} (2) y' &= \frac{(x)'(e^x+1) - x(e^x+1)'}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^x+1 - xe^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(1-x)e^x+1}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) y' &= \frac{(1+\cos x)'(1-\cos x) - (1+\cos x)(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2} \\ &= \frac{-\sin x(1-\cos x) - (1+\cos x)\sin x}{(1-\cos x)^2} \\ &= -\frac{2 \sin x}{(1-\cos x)^2} \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} (1) y &= \frac{1}{x^4} + \frac{3}{x^5} + \frac{1}{x^6} = x^{-4} + 3x^{-5} + x^{-6} \text{이므로} \\ y' &= -4x^{-5} - 15x^{-6} - 6x^{-7} \\ &= -\frac{4}{x^5} - \frac{15}{x^6} - \frac{6}{x^7} \end{aligned}$$

01-2 ㉔ 20

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1)}{3h} \times 3 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-h)}{-h} \\
 &= 3f'(1) + f'(1) = 4f'(1) \quad \dots\dots \textcircled{7} \\
 &\text{이때 } f(x) = \frac{2x-3}{x^2+x-1} \text{에서} \\
 &f'(x) = \frac{(2x-3)'(x^2+x-1) - (2x-3)(x^2+x-1)'}{(x^2+x-1)^2} \\
 &= \frac{2(x^2+x-1) - (2x-3)(2x+1)}{(x^2+x-1)^2} \\
 &= -\frac{2x^2-6x-1}{(x^2+x-1)^2} \\
 &\text{따라서 구하는 극한값은 } \textcircled{7} \text{에서} \\
 &4f'(1) = 4 \times \left\{ -\frac{2-6-1}{(1+1-1)^2} \right\} = 20
 \end{aligned}$$

02-1 ㉔ (1) $y' = \sec x \{3x^2 + (x^3 - 2) \tan x\}$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad y' &= \frac{\cot x}{x} - \ln x \csc^2 x \\
 (3) \quad y' &= \sin x (1 + \sec^2 x) \\
 (4) \quad y' &= -\frac{\csc x \cot x}{(1 + \csc x)^2} \\
 (1) \quad y' &= (x^3 - 2)' \sec x + (x^3 - 2)(\sec x)' \\
 &= 3x^2 \sec x + (x^3 - 2) \sec x \tan x \\
 &= \sec x \{3x^2 + (x^3 - 2) \tan x\} \\
 (2) \quad y' &= (\ln x)' \cot x + \ln x (\cot x)' \\
 &= \frac{1}{x} \times \cot x - \ln x \csc^2 x \\
 &= \frac{\cot x}{x} - \ln x \csc^2 x \\
 (3) \quad y' &= (\sin x)' \tan x + \sin x (\tan x)' \\
 &= \cos x \times \frac{\sin x}{\cos x} + \sin x \sec^2 x \\
 &= \sin x + \sin x \sec^2 x \\
 &= \sin x (1 + \sec^2 x) \\
 (4) \quad y' &= \frac{(\csc x)'(1 + \csc x) - \csc x (1 + \csc x)'}{(1 + \csc x)^2} \\
 &= \frac{-\csc x \cot x (1 + \csc x) + \csc x \csc x \cot x}{(1 + \csc x)^2} \\
 &= -\frac{\csc x \cot x}{(1 + \csc x)^2}
 \end{aligned}$$

02-2 ㉔ -3

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (ax)' \sec x + ax (\sec x)' \\
 &= a \sec x + ax \sec x \tan x \\
 &= a \sec x (1 + x \tan x) \\
 f'(\pi) &= 3 \text{에서 } -a = 3 \quad \therefore a = -3
 \end{aligned}$$

2 합성함수의 미분법

개념 Check

111쪽

- 1 ㉔ (1) $y' = 8(2x+1)^3$ (2) $y' = 10x(x^2-2)^4$
 (3) $y' = \frac{2 \ln x}{x}$ (4) $y' = -5 \sin x (1 + \cos x)^4$
 (1) $y' = 4(2x+1)^3(2x+1)'$
 $= 8(2x+1)^3$
 (2) $y' = 5(x^2-2)^4(x^2-2)'$
 $= 10x(x^2-2)^4$
 (3) $y' = 2 \ln x (\ln x)'$
 $= \frac{2 \ln x}{x}$
 (4) $y' = 5(1 + \cos x)^4(1 + \cos x)'$
 $= -5 \sin x (1 + \cos x)^4$
- 2 ㉔ (1) $y' = 2xe^{x^2-1}$ (2) $y' = 2^{4x+4} \ln 2$
 (3) $y' = \frac{3x^2+1}{x^3+x}$ (4) $y' = \frac{5}{(5x-4) \ln 3}$
 (5) $y' = 2 \cos(2x+3)$ (6) $y' = 4 \sin(1-4x)$
 (1) $y' = e^{x^2-1} \times (x^2-1)'$
 $= 2xe^{x^2-1}$
 (2) $y' = 2^{4x+2} \ln 2 \times (4x+2)'$
 $= 4 \times 2^{4x+2} \ln 2$
 $= 2^{4x+4} \ln 2$
 (3) $y' = \frac{(x^3+x)'}{x^3+x}$
 $= \frac{3x^2+1}{x^3+x}$
 (4) $y' = \frac{(5x-4)'}{(5x-4) \ln 3}$
 $= \frac{5}{(5x-4) \ln 3}$
 (5) $y' = \cos(2x+3) \times (2x+3)'$
 $= 2 \cos(2x+3)$
 (6) $y' = -\sin(1-4x) \times (1-4x)'$
 $= 4 \sin(1-4x)$
- 3 ㉔ (1) $y' = \pi x^{\pi-1}$ (2) $y' = \frac{3}{2} \sqrt{x}$
 (3) $y' = -\sqrt{3} x^{-\sqrt{3}-1}$ (4) $y' = -\frac{1}{3x^3 \sqrt{x}}$
 (2) $y' = (x^{\frac{3}{2}})'$
 $= \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{x}$
 (4) $y' = (x^{-\frac{1}{3}})'$
 $= -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3x^3 \sqrt{x}}$

03-1 ㉔ (1) $y' = (3x+1)^2(15x^2+2x-45)$

(2) $y' = \frac{5(x^2+1)^4(x^2-1)}{x^6}$

(3) $y' = 2e^{\sin x} \cos x$

(4) $y' = (2x-1)3^{x^2-x+1} \ln 3$

(5) $y' = 2x \left\{ \ln(x^2+2) + \frac{x^2}{x^2+2} \right\}$

(6) $y' = 15 \sin^2(5x-1) \cos(5x-1)$

(1) $y' = (x^2-5)'(3x+1)^3 + (x^2-5)\{(3x+1)^3\}'$
 $= 2x(3x+1)^3 + (x^2-5) \times 3(3x+1)^2(3x+1)'$
 $= 2x(3x+1)^3 + 9(x^2-5)(3x+1)^2$
 $= (3x+1)^2(15x^2+2x-45)$

(2) $y' = 5 \left(\frac{x^2+1}{x} \right)^4 \left(\frac{x^2+1}{x} \right)'$
 $= 5 \left(\frac{x^2+1}{x} \right)^4 \times \frac{(x^2+1)' \times x - (x^2+1)(x)'}{x^2}$
 $= 5 \left(\frac{x^2+1}{x} \right)^4 \times \frac{2x \times x - (x^2+1)}{x^2}$
 $= \frac{5(x^2+1)^4(x^2-1)}{x^6}$

(3) $y' = 2e^{\sin x}(\sin x)' = 2e^{\sin x} \cos x$

(4) $y' = 3^{x^2-x+1} \ln 3 \times (x^2-x+1)'$
 $= (2x-1)3^{x^2-x+1} \ln 3$

(5) $y' = (x^2)' \ln(x^2+2) + x^2 \{\ln(x^2+2)\}'$
 $= 2x \ln(x^2+2) + \frac{x^2}{x^2+2} \times (x^2+2)'$
 $= 2x \ln(x^2+2) + \frac{2x^3}{x^2+2}$
 $= 2x \left\{ \ln(x^2+2) + \frac{x^2}{x^2+2} \right\}$

(6) $y' = 3 \sin^2(5x-1) \{\sin(5x-1)\}'$
 $= 3 \sin^2(5x-1) \times \cos(5x-1) \times (5x-1)'$
 $= 15 \sin^2(5x-1) \cos(5x-1)$

04-1 ㉔ 9

$y' = 3\{f(x)\}^2 f'(x)$ 이므로 $x=1$ 에서의 미분계수는
 $3\{f(1)\}^2 f'(1) = 3 \times 1^2 \times 3 = 9$

04-2 ㉔ 12

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+2}{x-1} = 3$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한

값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+2\} = 0 \quad \therefore f(1) = -2$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)+2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$
 $= f'(1) = 3$

또 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-1}{x+1} = 4$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고,

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$\lim_{x \rightarrow -1} \{g(x)-1\} = 0 \quad \therefore g(-1) = 1$

$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)-g(-1)}{x+1}$
 $= g'(-1) = 4$

$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ 에서

$h'(x) = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x)$

$\therefore h'(-1) = f'(g(-1))g'(-1)$
 $= f'(1)g'(-1) = 3 \times 4 = 12$

05-1 ㉔ (1) $y' = x^{2\pi-1}(2\pi \cos x - x \sin x)$

(2) $y' = \frac{2x+4}{3^3 \sqrt{(x^2+4x+5)^2}}$

(3) $y' = \frac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

(4) $y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$

(1) $y' = (x^{2\pi})' \cos x + x^{2\pi}(\cos x)'$
 $= 2\pi x^{2\pi-1} \cos x - x^{2\pi} \sin x$
 $= x^{2\pi-1}(2\pi \cos x - x \sin x)$

(2) $y' = \{(x^2+4x+5)^{\frac{1}{3}}\}'$
 $= \frac{1}{3}(x^2+4x+5)^{-\frac{2}{3}}(x^2+4x+5)'$
 $= \frac{2x+4}{3^3 \sqrt{(x^2+4x+5)^2}}$

(3) $y' = \{(x-1)(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\}'$
 $= (x-1)'(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} + (x-1)\{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\}'$
 $= (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} + (x-1) \left\{ -\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}(x^2+1)' \right\}$
 $= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{2x(x-1)}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$
 $= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x(x-1)}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$
 $= \frac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

(4) $y' = \{(1+\sin x)^{\frac{1}{2}}\}' = \frac{1}{2}(1+\sin x)^{-\frac{1}{2}}(1+\sin x)'$
 $= \frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$

06-1 ㉔ (1) $y' = \cot x$ (2) $y' = \frac{2x}{(x^2-3) \ln 2}$

(3) $y' = \frac{1}{x \ln |x| \ln 5}$ (4) $y' = \frac{3(1-2 \ln |x|)}{x^3}$

(1) $y' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

(2) $y' = \frac{(x^2-3)'}{(x^2-3) \ln 2} = \frac{2x}{(x^2-3) \ln 2}$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad y' &= \frac{(\ln|x|)'}{\ln|x| \ln 5} = \frac{1}{x \ln|x| \ln 5} \\
 (4) \quad y &= \frac{\ln|x|^3}{x^2} = \frac{3 \ln|x|}{x^2} \text{ 이므로} \\
 y' &= \frac{(3 \ln|x|)' x^2 - 3 \ln|x| \times (x^2)'}{(x^2)^2} \\
 &= \frac{\frac{3}{x} \times x^2 - 3 \ln|x| \times 2x}{x^4} \\
 &= \frac{3x - 6x \ln|x|}{x^4} = \frac{3(1 - 2 \ln|x|)}{x^3}
 \end{aligned}$$

06-2 ㉮ 6

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(ax-3)'}{ax-3} = \frac{a}{ax-3} \\
 f'(1) &= 2 \text{에서} \\
 \frac{a}{a-3} &= 2, \quad a = 2a - 6 \quad \therefore a = 6
 \end{aligned}$$

07-1 ㉮ (1) $y' = x^x (\ln x + 1)$

$$(2) \quad y' = \frac{4}{|x+1|(x+1)\sqrt{(x-1)(x+3)}}$$

(1) $x > 0, y > 0$ 이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면 $\ln y = x \ln x$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 \frac{y'}{y} &= (x)' \ln x + x (\ln x)' \\
 &= \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1
 \end{aligned}$$

$$\therefore y' = y (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1)$$

(2) 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\begin{aligned}
 \ln y &= \ln \sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}} \\
 &= \frac{1}{2} (\ln|x-1| + \ln|x+3| - 2 \ln|x+1|)
 \end{aligned}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}
 \frac{y'}{y} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+3} - \frac{2}{x+1} \right) \\
 &= \frac{4}{(x-1)(x+1)(x+3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore y' &= y \times \frac{4}{(x-1)(x+1)(x+3)} \\
 &= \sqrt{\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}} \times \frac{4}{(x-1)(x+1)(x+3)} \\
 &= \frac{4}{|x+1|(x+1)\sqrt{(x-1)(x+3)}}
 \end{aligned}$$

07-2 ㉮ 2

$x > 0, f(x) > 0$ 이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = (\ln x)^2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \ln x \times (\ln x)' = 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f'(x) &= f(x) \times \frac{2 \ln x}{x} = x^{\ln x} \times \frac{2 \ln x}{x} \\
 &= 2x^{\ln x - 1} \ln x
 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(e) = 2 \times 1 \times 1 = 2$$

연습문제

117~119쪽

1 ⑤	2 ③	3 6	4 -6	5 ①
6 $\frac{44}{3}$	7 6	8 $2 - \sqrt{2}$	9 ④	10 ④
11 ③	12 ④	13 $\sqrt{6}$	14 $\frac{3}{2}$	15 ④
16 $-\sqrt{3}$	17 ⑤	18 ①	19 6	

$$\begin{aligned}
 1 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e+h) - f(e-2h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e+h) - f(e) + f(e) - f(e-2h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e+h) - f(e)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(e) - f(e-2h)}{-2h} \times 2 \\
 &= f'(e) + 2f'(e) = 3f'(e)
 \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(\ln x)' x^2 - \ln x \times (x^2)'}{(x^2)^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} \\
 &= \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}
 \end{aligned}$$

이므로 구하는 극한값은

$$3f'(e) = 3 \times \left(-\frac{1}{e^3} \right) = -\frac{3}{e^3}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad f'(x) &= \frac{(ax+b)'(x^2+1) - (ax+b)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\
 &= \frac{a(x^2+1) - (ax+b) \times 2x}{(x^2+1)^2} \\
 &= \frac{-ax^2 - 2bx + a}{(x^2+1)^2}
 \end{aligned}$$

$$f'(0) = -3 \text{에서 } a = -3$$

$$f'(1) = 2 \text{에서 } \frac{-2b}{4} = 2 \quad \therefore b = -4$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{-3x-4}{x^2+1} \text{ 이므로}$$

$$f(1) = \frac{-3-4}{1+1} = -\frac{7}{2}$$

- 3 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)+2}{x-3} = 4$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)+2\} = 0 \quad \therefore f(3) = -2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)+2}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) = 4$$

$$g(x) = \frac{f(x)}{e^{x-3}} \text{에서}$$

$$g'(x) = \frac{f'(x) \times e^{x-3} - f(x) \times (e^{x-3})'}{(e^{x-3})^2}$$

$$= \frac{f'(x) \times e^{x-3} - f(x) \times e^{x-3}}{(e^{x-3})^2}$$

$$= \frac{f'(x) - f(x)}{e^{x-3}}$$

$$\therefore g'(3) = f'(3) - f(3) = 4 - (-2) = 6$$

$$\begin{aligned} 4 \quad f'(x) &= \frac{(x)'(x^2+x+9) - x(x^2+x+9)'}{(x^2+x+9)^2} \\ &= \frac{(x^2+x+9) - x(2x+1)}{(x^2+x+9)^2} \\ &= \frac{-x^2+9}{(x^2+x+9)^2} \end{aligned}$$

$$f'(x) > 0 \text{에서 } \frac{-x^2+9}{(x^2+x+9)^2} > 0$$

$$-x^2+9 > 0, x^2-9 < 0$$

$$(x+3)(x-3) < 0 \quad \therefore -3 < x < 3$$

$$\text{따라서 } a = -3, b = 3 \text{이므로 } a - b = -6$$

$$\begin{aligned} 5 \quad f'(x) &= \frac{(\tan x)'(1+\sec x) - \tan x(1+\sec x)'}{(1+\sec x)^2} \\ &= \frac{\sec^2 x(1+\sec x) - \tan x \sec x \tan x}{(1+\sec x)^2} \\ &= \frac{\sec^2 x(1+\sec x) - \sec x(\sec^2 x - 1)}{(1+\sec x)^2} \\ &= \frac{\sec x(\sec x + 1)}{(1+\sec x)^2} = \frac{\sec x}{1+\sec x} \end{aligned}$$

$$\therefore f'(0) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{3}\right) - f\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h} \\ &\quad + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(\frac{\pi}{3}-h\right) - f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-h} \\ &= \frac{1}{2} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } f'(x) = a \sec^2 x - \csc^2 x \text{이므로 } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6 \text{에서}$$

$$2a - 2 = 6 \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore f'(x) = 4 \sec^2 x - \csc^2 x$$

$$\text{따라서 } \textcircled{7} \text{에서 구하는 극한값은}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times 4 - \frac{4}{3} = \frac{44}{3}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad f'(x) &= (x^2+a)'e^x + (x^2+a)(e^x)' \\ &= 2xe^x + (x^2+a)e^x \times (x^2)' \\ &= 2xe^x(x^2+a+1) \end{aligned}$$

$$f'(1) = 16e \text{에서}$$

$$2e(a+2) = 16e, a+2 = 8$$

$$\therefore a = 6$$

$$\begin{aligned} 8 \quad f(x) &= \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}} \\ &= \frac{1}{2} \{ \ln(1+\cos x) - \ln(1-\cos x) \} \\ \therefore f'(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{(1+\cos x)'}{1+\cos x} - \frac{(1-\cos x)'}{1-\cos x} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{-\sin x}{1+\cos x} - \frac{\sin x}{1-\cos x} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{-\sin x(1-\cos x) - \sin x(1+\cos x)}{1-\cos^2 x} \\ &= \frac{-2\sin x}{2\sin^2 x} = -\csc x \end{aligned}$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{4}\right) - f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{2} - (-2) = 2 - \sqrt{2}$$

$$9 \quad h(x) = f(g(x)) \text{라 하면}$$

$$h\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = e \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{f(g(x)) - e}{x - \frac{\pi}{3}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{h(x) - h\left(\frac{\pi}{3}\right)}{x - \frac{\pi}{3}} \\ &= h'\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\text{이때 } h'(x) = f'(g(x))g'(x) \text{이고}$$

$$f'(x) = e^{2x}(2x)' = 2e^{2x},$$

$$g'(x) = \cos \frac{x}{2} \times \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \text{이므로 구하는 극한값은}$$

$$\begin{aligned} h'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= f'\left(g\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)g'\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= f'\left(\frac{1}{2}\right)g'\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2e \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}e \end{aligned}$$

- 10 주어진 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x^3+x) \times (x^3+x)' = e^x$$

$$\therefore (3x^2+1)f'(x^3+x) = e^x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $x^3+x=2$ 에서 $x^3+x-2=0$

$$(x-1)(x^2+x+2)=0$$

$$\therefore x=1 \quad (\because x^2+x+2>0)$$

따라서 $\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$4f'(2)=e \quad \therefore f'(2)=\frac{e}{4}$$

- 11 $f(g(x))=3x^2+4x-1$ 에서

$$f'(g(x))g'(x)=6x+4$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(g(1))g'(1)=10$$

$$f'(3)g'(1)=10$$

$$2g'(1)=10$$

$$\therefore g'(1)=5$$

- 12 (가)에서

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+4h)-g(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+4h)-g(2)}{4h} \times 4$$

$$= 4g'(2) = 8$$

$$\therefore g'(2)=2$$

$$\{(f \circ g)(x)\}' = \{f(g(x))\}' = f'(g(x))g'(x) \text{이므로}$$

(나)에서

$$f'(g(2))g'(2)=10$$

$$2f'(g(2))=10$$

$$\therefore f'(g(2))=5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(x) = \frac{2^x}{\ln 2} \text{에서 } f'(x) = 2^x$$

$\textcircled{1}$ 에서 $g(2)=k$ (k 는 실수)라 하면 $f'(k)=5$ 이므로

$$2^k=5 \quad \therefore k=\log_2 5$$

$$\therefore g(2)=\log_2 5$$

- 13 $f'(x) = \{(ax^2+2)^{\frac{1}{2}}\}'$

$$= \frac{1}{2}(ax^2+2)^{-\frac{1}{2}}(ax^2+2)'$$

$$= \frac{ax}{\sqrt{ax^2+2}}$$

$$f'(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{에서}$$

$$\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{3a+2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$3a = \sqrt{3a+2}$$

양변을 제곱하면

$$9a^2 = 3a+2$$

$$9a^2 - 3a - 2 = 0, (3a+1)(3a-2) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } a = \frac{2}{3}$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = \frac{2}{3}$

$$\text{따라서 } f(x) = \sqrt{\frac{2}{3}x^2 + 2} \text{이므로}$$

$$f(\sqrt{6}) = \sqrt{4+2} = \sqrt{6}$$

- 14 $f'(x) = \frac{(x^2+2x)'}{x^2+2x} = \frac{2x+2}{x^2+2x}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f'(n)}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{n^2+2n} \times \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right.$$

$$\left. + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{3}{2}$$

- 15 $x > 0, f(x) > 0$ 이므로 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = \cos 2x \ln x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (\cos 2x)' \ln x + \cos 2x (\ln x)'$$

$$= -\sin 2x \times (2x)' \ln x + \cos 2x \times \frac{1}{x}$$

$$= -2 \ln x \sin 2x + \frac{\cos 2x}{x}$$

$$\therefore f'(x) = \left(-2 \ln x \sin 2x + \frac{\cos 2x}{x} \right) f(x)$$

양변에 $x = \frac{\pi}{2}$ 를 대입하면

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi} f\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \therefore k = -\frac{2}{\pi}$$

- 16 오른쪽 그림과 같이 삼각형

ABC에 내접하는 원의 중심

을 O라 하고, 점 O에서 변

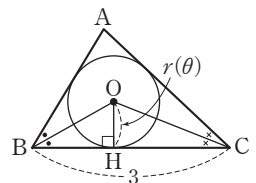
BC에 내린 수선의 발을 H

라 하자.

점 O는 삼각형 ABC의 내심이므로

$$\angle OBH = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{\pi}{6}$$

$$\angle OCH = \frac{1}{2} \angle ACB = \theta$$



$\overline{OH}=r(\theta)$ 이므로 직각삼각형 OBH에서

$$\overline{BH}=\frac{r(\theta)}{\tan \frac{\pi}{6}}=\sqrt{3}r(\theta)$$

직각삼각형 OHC에서

$$\overline{CH}=\frac{r(\theta)}{\tan \theta}$$

$\overline{BH}+\overline{CH}=3$ 이므로

$$\sqrt{3}r(\theta)+\frac{r(\theta)}{\tan \theta}=3, r(\theta) \times \frac{\sqrt{3} \tan \theta+1}{\tan \theta}=3$$

$$\therefore r(\theta)=\frac{3 \tan \theta}{\sqrt{3} \tan \theta+1}$$

$$h(\theta)=\frac{r(\theta)}{\tan \theta}=\frac{3}{\sqrt{3} \tan \theta+1} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} h'(\theta) &= -\frac{3(\sqrt{3} \tan \theta+1)'}{(\sqrt{3} \tan \theta+1)^2} \\ &= -\frac{3\sqrt{3} \sec^2 \theta}{(\sqrt{3} \tan \theta+1)^2} \end{aligned}$$

$$\therefore h'\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3\sqrt{3} \times \frac{4}{3}}{\left(\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3}+1\right)^2}=-\sqrt{3}$$

- 17 $f(x)=\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})$ 이라 하면

$f(0)=\ln n$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln \frac{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}}{n} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=5 \end{aligned}$$

이때

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx})'}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}} \\ &= \frac{e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+e^{3x}+\cdots+e^{nx}} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f'(0) &= \frac{1+2+3+\cdots+n}{n} \\ &= \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{n+1}{2}=5$ 이므로

$$n+1=10 \quad \therefore n=9$$

- 18 $g'(x)=\frac{\{e^{f(x)}\}'(x+1)-e^{f(x)}(x+1)'}{(x+1)^2}$

$$= \frac{e^{f(x)}f'(x) \times (x+1)-e^{f(x)}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{e^{f(x)}\{(x+1)f'(x)-1\}}{(x+1)^2}$$

방정식 $g'(x)=0$ 에서

$$\frac{e^{f(x)}\{(x+1)f'(x)-1\}}{(x+1)^2}=0$$

$$\therefore (x+1)f'(x)-1=0 \quad (\because e^{f(x)}>0) \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

방정식 $g'(x)=0$ 의 두 근이 $-3, 1$ 이므로 $\textcircled{7}$ 에 $x=-3$ 을 대입하면

$$-2f'(-3)-1=0 \quad \therefore f'(-3)=-\frac{1}{2}$$

$\textcircled{7}$ 에 $x=1$ 을 대입하면

$$2f'(1)-1=0 \quad \therefore f'(1)=\frac{1}{2}$$

이차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(0)=1$ 이므로

$f(x)=ax^2+bx+1$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$$f'(x)=2ax+b$$

$$f'(-3)=-\frac{1}{2} \text{에서 } -6a+b=-\frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$f'(1)=\frac{1}{2} \text{에서 } 2a+b=\frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

$\textcircled{8}, \textcircled{9}$ 을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{8}, b=\frac{1}{4}$$

따라서 $f(x)=\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{4}x+1$ 이므로

$$f(4)=2+1+1=4$$

- 19 $(f \circ g)(0)=4$ 에서 $f(g(0))=4$

$g(0)=1$ 이므로 $f(1)=4$

$(f \circ g)'(0)=2$ 에서 $f'(g(0))g'(0)=2$

$$\therefore f'(1)g'(0)=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$g'(x)=e^{x^2+x}(x^2+x)'=(2x+1)e^{x^2+x} \text{이므로}$$

$$g'(0)=1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$f'(1)=2$$

$f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

$R(x)=ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x-1)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)=a+b$$

$$\therefore a+b=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{2}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f'(1)=a \quad \therefore a=2$$

이를 $\textcircled{3}$ 에 대입하여 풀면

$$b=2$$

따라서 $R(x)=2x+2$ 이므로

$$R(2)=4+2=6$$

II-2 02 여러 가지 미분법(2)

매개변수로 나타낸 함수의 미분법

개념 Check

120쪽

1 [답] (1) $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2t^2+1}$

(2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3t^2}{2t+1}$ (단, $t \neq -\frac{1}{2}$)

(1) x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 12t^3 + 6t, \frac{dy}{dt} = -6t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-6t}{12t^3+6t} = -\frac{1}{2t^2+1}$$

(2) x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 2t+1, \frac{dy}{dt} = -3t^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{3t^2}{2t+1} \quad \left(\text{단, } t \neq -\frac{1}{2}\right)$$

문제

121쪽

01-1 [답] (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{t^2+1}{2t}$ (단, $t \neq 0$)

(2) $\frac{dy}{dx} = 24\sqrt{t}(3t-1)^3$

(3) $\frac{dy}{dx} = -\cot 2t$ (4) $\frac{dy}{dx} = 2\sin t$

(1) x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t(1-t^2) - (1+t^2) \times (-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{4t}{(1-t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2(1-t^2) - 2t \times (-2t)}{(1-t^2)^2} = \frac{2(t^2+1)}{(1-t^2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2(t^2+1)}{(1-t^2)^2}}{\frac{4t}{(1-t^2)^2}} = \frac{t^2+1}{2t} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

(2) x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\frac{dy}{dt} = 4(3t-1)^3 \times 3 = 12(3t-1)^3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{12(3t-1)^3}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = 24\sqrt{t}(3t-1)^3$$

(3) x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = -2\sin 2t, \frac{dy}{dt} = 2\cos 2t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\cos 2t}{-2\sin 2t} = -\cot 2t$$

(4) x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 2\sec^2 t, \frac{dy}{dt} = 4\sec t \tan t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4\sec t \tan t}{2\sec^2 t} = \frac{2\tan t}{\sec t} = 2\sin t$$

01-2 [답] $4e^2$

x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 2te^t + (t^2+1)e^t = (t^2+2t+1)e^t = (t+1)^2e^t$$

$$\frac{dy}{dt} = 4e^{4t+2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4e^{4t+2}}{(t+1)^2e^t} = \frac{4e^{3t+2}}{(t+1)^2} \quad (\text{단, } t \neq -1)$$

따라서 $t=0$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 $4e^2$

2 음함수의 미분법

개념 Check

122쪽

1 [답] (1) $x^2 - y^2 + 4 = 0$ (단, $y \geq 2$)

(2) $xy + x - y = 0$ (단, $y \neq -1$)

문제

123쪽

02-1 [답] (1) $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+1}{6y^2}$ (단, $y \neq 0$)

(2) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{2y(y^2+1)}$ (단, $y \neq 0$)

(3) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x-\cos y}$ (단, $x \neq \cos y$)

(4) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

(1) 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + 1 - 6y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+1}{6y^2} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

(2) 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2(x-1) + 2(y^2+1) \times 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$4y(y^2+1) \frac{dy}{dx} = -2(x-1)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x-1}{2y(y^2+1)} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

(3) 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - \cos y \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x - \cos y) \frac{dy}{dx} = -(2x + y)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{x-\cos y} \quad (\text{단, } x \neq \cos y)$$

(4) 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

02-2 ㉡ $-\frac{5}{7}$ 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$6x^2 + 9y^2 \frac{dy}{dx} - y^2 - x \times 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(2xy - 9y^2) \frac{dy}{dx} = 6x^2 - y^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{6x^2 - y^2}{2xy - 9y^2} \quad (\text{단, } 2xy \neq 9y^2)$$

따라서 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{6-1}{2-9} = -\frac{5}{7}$

3 역함수의 미분법

개념 Check

124쪽

$$1 \quad \text{㉡ (가) } 5y^4 + 2 \quad \text{(나) } \frac{1}{5y^4 + 2}$$

문제

125~126쪽

$$03-1 \quad \text{㉡ (1) } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2 + 6y + 4} \quad (2) \frac{dy}{dx} = \frac{(y+1)^3}{2y}$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2+1}}{y} \quad (4) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2e^{2y}+5}$$

(1) 주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 3y^2 + 6y + 4$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{3y^2 + 6y + 4}$$

(2) 주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= 2 \times \frac{y}{y+1} \times \left(\frac{y}{y+1} \right)' \\ &= 2 \times \frac{y}{y+1} \times \frac{(y+1) - y}{(y+1)^2} = \frac{2y}{(y+1)^3} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{(y+1)^3}{2y}$$

(3) 주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2\sqrt{y^2+1}} = \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{\sqrt{y^2+1}}{y}$$

(4) 주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 2e^{2y} + 5 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2e^{2y} + 5}$$

03-2 ㉡ 1

주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sec y \tan y}{\sec y} = \tan y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\tan y}$$

따라서 $y = \frac{\pi}{4}$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 $\frac{1}{\tan \frac{\pi}{4}} = 1$

04-1 ㉡ 4

 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = \frac{1}{4}$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 3\} = 0 \quad \therefore f(2) = 3$$

$$\therefore g(3) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2) = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$g'(3) = \frac{1}{f'(g(3))} = \frac{1}{f'(2)} = 4$$

04-2 ㉡ $\frac{1}{4}$ $g(\sqrt{3}) = a$ 라 하면 $f(a) = \sqrt{3}$ 이므로

$$\tan a = \sqrt{3} \quad \therefore a = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore g(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

이때 $f'(x) = \sec^2 x$ 이므로

$$g'(\sqrt{3}) = \frac{1}{f'(g(\sqrt{3}))} = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{3})} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

04-3 ㉔ -6

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2) + g(2) - g(2-h)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2+h) - g(2)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2) - g(2-h)}{-h} \\
 &= g'(2) + g'(2) = 2g'(2) \quad \dots\dots \textcircled{1} \\
 & g(2) = a \text{라 하면 } f(a) = 2 \text{이므로} \\
 & \frac{a+1}{a-2} = 2, \quad a+1 = 2a-4 \quad \therefore a=5 \\
 & \therefore g(2) = 5 \\
 & \text{따라서 } f'(x) = \frac{(x-2) - (x+1)}{(x-2)^2} = -\frac{3}{(x-2)^2} \text{이므로} \\
 & \text{구하는 극한값은 } \textcircled{1} \text{에서} \\
 & 2g'(2) = \frac{2}{f'(g(2))} = \frac{2}{f'(5)} = \frac{2}{-\frac{1}{3}} = -6
 \end{aligned}$$

연습문제

127~128쪽

- | | | | | |
|-----------|------|-----|-----|------|
| 1 ② | 2 5 | 3 ⑤ | 4 4 | 5 -6 |
| 6 $x > 1$ | 7 ② | 8 ② | 9 ② | 10 1 |
| 11 ① | 12 ⑤ | | | |

- 1 x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = \sec t \tan t - \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \sec^2 t$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t - \sin t} \\
 &= \frac{1}{\sin t - \sin t \cos^2 t} \\
 &= \frac{1}{\sin t (1 - \cos^2 t)} = \frac{1}{\sin^3 t}
 \end{aligned}$$

$$\tan t = 1 \text{에서 } t = \frac{\pi}{4} \left(\because 0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서 점 $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 1 \right)$, 즉 $t = \frac{\pi}{4}$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3} = 2\sqrt{2}$$

- 2 x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + t + 1, \quad \frac{dy}{dt} = a\pi \cos \pi t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\pi \cos \pi t}{t^2 + t + 1}$$

이때 $t=0$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 5π 이므로

$$a\pi = 5\pi \quad \therefore a = 5$$

- 3 x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} + 1, \quad \frac{dy}{dt} = -3t^2 + 3$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-3t^2 + 3}{\frac{1}{t} + 1} \\
 &= -3t(t-1) = -3t^2 + 3t \\
 &= -3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

따라서 $t = \frac{1}{2}$ 에서 최댓값 $\frac{3}{4}$ 을 가지므로

$$a = \frac{1}{2}$$

- 4 점 $(a, 0)$ 이 곡선 $x^3 - y^3 = e^{xy}$ 위의 점이므로

$$a^3 = 1 \quad \therefore a = 1 \quad (\because a \text{는 실수})$$

$x^3 - y^3 = e^{xy}$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 - 3y^2 \frac{dy}{dx} = ye^{xy} + xe^{xy} \frac{dy}{dx}$$

$$(xe^{xy} + 3y^2) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - ye^{xy}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - ye^{xy}}{xe^{xy} + 3y^2} \quad (\text{단, } xe^{xy} \neq -3y^2)$$

따라서 점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{3-0}{1+0} = 3 \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore a + b = 1 + 3 = 4$$

- 5 점 $(0, -1)$ 이 곡선 $x^3 + ay^3 - bxy + 1 = 0$ 위의 점이므로

$$-a + 1 = 0 \quad \therefore a = 1$$

$x^3 + y^3 - bxy + 1 = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} - by - b \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(bx - 3y^2) \frac{dy}{dx} = 3x^2 - by$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - by}{bx - 3y^2} \quad (\text{단, } bx \neq 3y^2)$$

이때 점 $(0, -1)$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 2이므로

$$-\frac{b}{3} = 2 \quad \therefore b = -6$$

$$\therefore ab = 1 \times (-6) = -6$$

- 6 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2xy^3 + (x^2 + 1) \times 3y^2 \frac{dy}{dx} + 2x + 4 = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{2(xy^3+x+2)}{3(x^2+1)y^2} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

$$\frac{dy}{dx} > 0 \text{에서 } xy^3+x+2 < 0$$

$$\text{이때 } (x^2+1)y^3+x^2+4x+1=0 \text{에서}$$

$$y^3 = -\frac{x^2+4x+1}{x^2+1} \text{이므로}$$

$$x \times \left(-\frac{x^2+4x+1}{x^2+1} \right) + x + 2 < 0$$

$$-x(x^2+4x+1) + (x+2)(x^2+1) < 0$$

$$-x^2+1 < 0, \quad x^2-1 > 0$$

$$(x+1)(x-1) > 0 \quad \therefore x > 1 \quad (\because x > 0)$$

- 7 주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3(y^2-9)-3y \times 2y}{(y^2-9)^2} = -\frac{3(y^2+9)}{(y^2-9)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{(y^2-9)^2}{3(y^2+9)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{y \rightarrow \sqrt{3}} \frac{dy}{dx} &= \lim_{y \rightarrow \sqrt{3}} \left\{ -\frac{(y^2-9)^2}{3(y^2+9)} \right\} \\ &= -\frac{36}{3 \times 12} = -1 \end{aligned}$$

- 8 $g(f(1))=a$ 라 하면 $f(a)=f(1)$

함수 $f(x)$ 가 역함수를 가지면 일대일대응이므로

$$a=1 \quad \therefore g(f(1))=1$$

$$\text{이때 } f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} g'(f(1)) &= \frac{1}{f'(g(f(1)))} = \frac{1}{f'(1)} \\ &= \frac{1}{-\frac{e}{(e+1)^2}} = -\frac{(e+1)^2}{e} \end{aligned}$$

- 9 $h'(x)=g(x)+xg'(x)$ 이므로

$$h'(3)=g(3)+3g'(3) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f(2)=3 \text{에서 } g(3)=2 \text{이므로}$$

$$g'(3) = \frac{1}{f'(g(3))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{5}$$

따라서 $\textcircled{7}$ 에서

$$h'(3)=g(3)+3g'(3)=2+3 \times \frac{1}{5} = \frac{13}{5}$$

- 10 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-3}{x-3} = \frac{1}{3}$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극

한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)-3\} = 0 \quad \therefore f(3)=3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-3}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = f'(3) = \frac{1}{3}$$

$g^{-1}(x)=f(3x)$ 이므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = 3f'(3x), \quad \frac{1}{g'(f(3x))} = 3f'(3x)$$

$$\therefore g'(f(3x)) = \frac{1}{3f'(3x)}$$

$$\text{양변에 } x=1 \text{을 대입하면 } g'(f(3)) = \frac{1}{3f'(3)}$$

$$\therefore g'(3) = \frac{1}{3 \times \frac{1}{3}} = 1$$

- 11 $\textcircled{7}$ 에서 $f(-x)=-f(x)$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$-f'(-x) = -f'(x) \quad \therefore f'(-x) = f'(x)$$

$\textcircled{8}$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-2x\} = 0 \quad \therefore f(1)=2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2x}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)+2-2x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - 2 \\ &= f'(1) - 2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } f'(1)-2=2 \text{이므로 } f'(1)=4$$

$$f(-1) = -f(1) = -2 \text{이므로 } g(-2) = -1$$

$$\therefore g'(-2) = \frac{1}{f'(g(-2))} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

- 12 x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = g'(t)+1, \quad \frac{dy}{dt} = g'(t)-1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)-1}{g'(t)+1}$$

$$t=3 \text{일 때, } \frac{dy}{dx} \text{의 값은 } \frac{g'(3)-1}{g'(3)+1} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$g(3)=a \text{라 하면 } f(a)=3 \text{이므로}$$

$$a^3+a+1=3, \quad a^3+a-2=0$$

$$(a-1)(a^2+a+2)=0$$

$$\therefore a=1 \quad (\because a^2+a+2 > 0)$$

$$\therefore g(3)=1$$

$$\text{이때 } f'(x)=3x^2+1 \text{이므로}$$

$$g'(3) = \frac{1}{f'(g(3))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 값은 $\textcircled{7}$ 에서

$$\frac{g'(3)-1}{g'(3)+1} = \frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}+1} = -\frac{3}{5}$$

II-3 01 도함수의 활용(1)

접선의 방정식

개념 Check

131쪽

1 [답] (1) 1 (2) $y = x + 1$

문제

132~137쪽

01-1 [답] (1) $y = 3x$ (2) $y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1$

(1) $f(x) = \sqrt{6x-1}$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{6}{2\sqrt{6x-1}} = \frac{3}{\sqrt{6x-1}}$$

점 $(\frac{1}{3}, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(\frac{1}{3}) = 3$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - 1 = 3(x - \frac{1}{3})$$

$$\therefore y = 3x$$

(2) $f(x) = \tan \frac{\pi}{4}x$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{\pi}{4} \sec^2 \frac{\pi}{4}x$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = \frac{\pi}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\pi}{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - 1 = \frac{\pi}{2}(x - 1)$$

$$\therefore y = \frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} + 1$$

01-2 [답] $y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}e$

$f(x) = x + x \ln x$ 라 하면

$$f'(x) = 1 + \ln x + x \times \frac{1}{x} \\ = \ln x + 2$$

점 $(e, 2e)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는

$$-\frac{1}{f'(e)} = -\frac{1}{1+2} = -\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 직선의 방정식은

$$y - 2e = -\frac{1}{3}(x - e)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}e$$

02-1 [답] (1) $y = -x + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $y = 3x - 1$

(1) $f(x) = \sin 2x$ 라 하면

$$f'(x) = 2 \cos 2x$$

점점의 좌표를 $(t, \sin 2t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 -1 이므로 $f'(t) = -1$ 에서

$$2 \cos 2t = -1 \quad \therefore \cos 2t = -\frac{1}{2}$$

$$0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{에서 } 0 \leq 2t \leq \pi \text{이므로}$$

$$2t = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore t = \frac{\pi}{3}$$

따라서 점점의 좌표는 $(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = -(x - \frac{\pi}{3})$$

$$\therefore y = -x + \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) $f(x) = \ln 3x$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

점점의 좌표를 $(t, \ln 3t)$ 라 하면 직선 $2x + 6y + 3 = 0$,

즉 $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$ 에 수직인 직선의 기울기는 3이므로

$f'(t) = 3$ 에서

$$\frac{1}{t} = 3 \quad \therefore t = \frac{1}{3}$$

따라서 점점의 좌표는 $(\frac{1}{3}, 0)$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y = 3(x - \frac{1}{3})$$

$$\therefore y = 3x - 1$$

02-2 [답] 1

직선 $y = 3x$ 를 y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면

$$y = 3x + k$$

$f(x) = 3x + \sin x$ 라 하면

$$f'(x) = 3 + \cos x$$

점점의 좌표를 $(t, 3t + \sin t)$ 라 하면 접선의 기울기가 3이므로 $f'(t) = 3$ 에서

$$3 + \cos t = 3, \cos t = 0$$

$$\therefore t = \frac{\pi}{2} (\because 0 < t < \pi)$$

점점의 좌표는 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi + 1)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (\frac{3}{2}\pi + 1) = 3(x - \frac{\pi}{2})$$

$$\therefore y = 3x + 1 \quad \therefore k = 1$$

03-1 ㉡ $y = \frac{1}{4}x + 6$

$f(x) = \sqrt{x} + 5$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

점점의 좌표를 $(t, \sqrt{t} + 5)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기

울기는 $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

점 $(t, \sqrt{t} + 5)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (\sqrt{t} + 5) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(x - t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(-4, 5)$ 를 지나므로

$$5 - (\sqrt{t} + 5) = \frac{1}{2\sqrt{t}}(-4 - t)$$

$$-\sqrt{t} = \frac{1}{2\sqrt{t}}(-4 - t)$$

$$-2t = -4 - t \quad \therefore t = 4$$

따라서 이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y - 7 = \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x + 6$$

03-2 ㉡ $-e^2$

$f(x) = e^{x+1}$ 이라 하면

$$f'(x) = e^{x+1}$$

점점의 좌표를 (t, e^{t+1}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기

울기는 $f'(t) = e^{t+1}$

점 (t, e^{t+1}) 에서의 접선의 방정식은

$$y - e^{t+1} = e^{t+1}(x - t) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-e^{t+1} = -te^{t+1} \quad \therefore t = 1 (\because e^{t+1} > 0)$$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$$y - e^2 = e^2(x - 1) \quad \therefore y = e^2x$$

따라서 이 직선이 점 $(-1, a)$ 를 지나므로

$$a = -e^2$$

04-1 ㉡ 1

$$f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x} \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

점점의 좌표를 $(t, 1 + \frac{1}{t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의

기울기는 $f'(t) = -\frac{1}{t^2}$

점 $(t, 1 + \frac{1}{t})$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \left(1 + \frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2}(x - t)$$

이 직선이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2}(2 - t)$$

$$-\frac{1}{t} = -\frac{2}{t^2} + \frac{1}{t}, \quad -t = -2 + t \quad (\because t \neq 0)$$

$$2t = 2 \quad \therefore t = 1$$

따라서 점점의 좌표는 $(1, 2)$ 의 1개이므로 접선의 개수는

1이다.

04-2 ㉡ -4

$f(x) = (x-a)e^{-x}$ 이라 하면

$$f'(x) = e^{-x} - (x-a)e^{-x} = (1+a-x)e^{-x}$$

점점의 좌표를 $(t, (t-a)e^{-t})$ 이라 하면 이 점에서의 접

선의 기울기는 $f'(t) = (1+a-t)e^{-t}$

점 $(t, (t-a)e^{-t})$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (t-a)e^{-t} = (1+a-t)e^{-t}(x-t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-(t-a)e^{-t} = (1+a-t)e^{-t} \times (-t)$$

$$-(t-a) = -t(1+a-t) \quad (\because e^{-t} > 0)$$

$$\therefore t^2 - at - a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원점에서 곡선 $y = (x-a)e^{-x}$ 에 오직 하나의 접선을 그을

수 있으려면 한 개의 점점이 존재해야 하므로 이차방정식

㉠이 중근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 이어야 하

므로

$$D = a^2 + 4a = 0, \quad a(a+4) = 0$$

$$\therefore a = -4 (\because a \neq 0)$$

05-1 ㉡ $y = \frac{5}{3}x - \frac{8}{3}$

x 와 y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t}, \quad \frac{dy}{dt} = e^t + e^{-t}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

$t = \ln 2$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$$

$t = \ln 2$ 에 대응하는 점의 x 좌표와 y 좌표는

$$x = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \quad y = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - \frac{3}{2} = \frac{5}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right)$$

$$\therefore y = \frac{5}{3}x - \frac{8}{3}$$

05-2 ㉞ $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$

x 와 y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 2\cos t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\cos t}{-\sin t} = -2\cot t$$

$$\cos t = \frac{1}{2} \text{에서 } t = \frac{\pi}{3} \left(\because 0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$$

점 $\left(\frac{1}{2}, \sqrt{3}\right)$, 즉 $t = \frac{\pi}{3}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$-2 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - \sqrt{3} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}x + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

06-1 ㉞ $y = -x + 2\pi$

주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\cos y - x \sin y \frac{dy}{dx} + \cos x \frac{dy}{dx} - y \sin x = 0$$

$$(x \sin y - \cos x) \frac{dy}{dx} = \cos y - y \sin x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\cos y - y \sin x}{x \sin y - \cos x} \quad (\text{단, } x \sin y \neq \cos x)$$

점 (π, π) 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{-1-0}{0-(-1)} = -1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - \pi = -(x - \pi) \quad \therefore y = -x + 2\pi$$

06-2 ㉞ $\sqrt{2}$

주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - y - x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x - 2y) \frac{dy}{dx} = 2x - y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - 2y} \quad (\text{단, } x \neq 2y)$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2-1}{1-2} = -1$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 1 = -(x - 1)$$

$$\therefore x + y - 2 = 0$$

따라서 직선 $x + y - 2 = 0$ 과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2}$$

06-3 ㉞ 4

점 $(1, 2)$ 가 곡선 $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = x^2 + 2$ 위의 점이므로

$$a + \frac{b}{2} = 3 \quad \therefore 2a + b = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = x^2 + 2$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$-\frac{a}{x^2} - \frac{b}{y^2} \times \frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x + \frac{a}{x^2}}{-\frac{b}{y^2}} = -\frac{2x^3y^2 + ay^2}{bx^2} \quad (\text{단, } bx^2 \neq 0)$$

점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 -8 이므로

$$-\frac{8+4a}{b} = -8$$

$$\therefore a - 2b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2, b = 2$

$$\therefore a + b = 4$$

연습문제

138~139쪽

- | | | | |
|--|-----------------|-----------------|--------------|
| 1 2 | 2 $\frac{5}{2}$ | 3 $2\sqrt{2}$ | 4 ② |
| 5 $a < -3 - 2\sqrt{2}$ 또는 $-3 + 2\sqrt{2} < a < 0$ | 6 ③ | | |
| 7 ① | 8 ③ | 9 $\frac{4}{3}$ | 10 ③ 11 ③ |
| 12 $-\frac{\pi}{4}$ | 13 ④ | | |

1 $f(x) = xe^x + 2$ 라 하면

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

점 $(0, 2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(0) = 1$$

점 $(0, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 2 = x \quad \therefore y = x + 2$$

이때 직선 $y = x + 2$ 의 x 절편은 -2 , y 절편은 2 이므로 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

2 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{t}{t+1})$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{4}$ 이므로 $f'(t) = \frac{1}{4}$ 에서

$$\frac{1}{(t+1)^2} = \frac{1}{4}, (t+1)^2 = 4$$

$$t+1 = -2 \text{ 또는 } t+1 = 2$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 접점의 좌표는 $(-3, \frac{3}{2})$ 또는 $(1, \frac{1}{2})$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}(x+3) \text{ 또는 } y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x-1)$$

$$\therefore y = \frac{1}{4}x + \frac{9}{4} \text{ 또는 } y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$$

이때 이 두 접선의 y 절편의 합은

$$\frac{9}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$

- 3 곡선 $y = \ln x$ 에 접하고 직선 $y = x+3$ 과 기울기가 같은 접선의 접점을 $P(t, \ln t)$ 라 하면 구하는 선분의 길이의 최솟값은 점 P 와 직선 $y = x+3$ 사이의 거리와 같다.

$$f(x) = \ln x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

점 P 에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(t) = 1$ 에서

$$\frac{1}{t} = 1 \quad \therefore t = 1$$

$$\therefore P(1, 0)$$

따라서 점 $P(1, 0)$ 과 직선 $y = x+3$, 즉 $x - y + 3 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|1+3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 2\sqrt{2}$$

- 4 $f(x) = \sqrt{x+1}$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{t+1})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}$$

점 $(t, \sqrt{t+1})$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \sqrt{t+1} = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}(x-t) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 직선이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$-\sqrt{t+1} = \frac{1}{2\sqrt{t+1}}(-2-t)$$

$$2(t+1) = 2+t$$

$$2t+2 = t+2 \quad \therefore t = 0$$

이를 ⑦에 대입하면 접선의 방정식은

$$y - 1 = \frac{1}{2}x \quad \therefore y = \frac{1}{2}x + 1$$

따라서 이 직선이 점 $(4, a)$ 를 지나므로

$$a = 2 + 1 = 3$$

- 5 $f(x) = x^2 e^x$ 이라 하면

$$f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x)e^x$$

접점의 좌표를 $(t, t^2 e^t)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = (t^2 + 2t)e^t$

점 $(t, t^2 e^t)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - t^2 e^t = (t^2 + 2t)e^t(x-t)$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$-t^2 e^t = (t^2 + 2t)e^t(a-t)$$

$$-t^2 = (t^2 + 2t)(a-t) \quad (\because e^t > 0)$$

$$\therefore t\{t^2 + (1-a)t - 2a\} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

점 $(a, 0)$ 에서 곡선 $y = x^2 e^x$ 에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 세 개의 접점이 존재해야 하므로 방정식 ⑦이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 $t^2 + (1-a)t - 2a = 0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 에서

$$D = (1-a)^2 + 8a > 0$$

$$a^2 + 6a + 1 > 0$$

$$\therefore a < -3 - 2\sqrt{2} \text{ 또는 } a > -3 + 2\sqrt{2}$$

이때 $a < 0$ 이므로

$$a < -3 - 2\sqrt{2} \text{ 또는 } -3 + 2\sqrt{2} < a < 0$$

- 6 $f(x) = e^x, g(x) = \sqrt{2x+a}$ 라 하면

$$f'(x) = e^x, g'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+a}} = \frac{1}{\sqrt{2x+a}}$$

두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 접한다고 하면 $x=t$ 인 점에서

두 곡선이 만나므로 $f(t) = g(t)$ 에서

$$e^t = \sqrt{2t+a} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 $x=t$ 인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(t) = g'(t) \text{에서}$$

$$e^t = \frac{1}{\sqrt{2t+a}} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧에서

$$e^t = \frac{1}{e^t}$$

$$e^{2t} = 1 \quad \therefore t = 0$$

이를 ⑦에 대입하여 풀면

$$a = 1$$

- 7 $f(x)=ke^x+1$, $g(x)=x^2-3x+4$ 라 하면
 $f'(x)=ke^x$, $g'(x)=2x-3$
 점 P의 x 좌표를 t 라 하면 $x=t$ 인 점에서 두 곡선이 만나
 므로 $f(t)=g(t)$ 에서
 $ke^t+1=t^2-3t+4$
 $\therefore ke^t=t^2-3t+3$ ㉠
 또 $x=t$ 인 점에서의 두 접선이 서로 수직이므로
 $f'(t)g'(t)=-1$ 에서
 $ke^t(2t-3)=-1$ ㉡
 ㉠을 ㉡에 대입하면
 $(t^2-3t+3)(2t-3)=-1$
 $2t^3-9t^2+15t-8=0$
 $(t-1)(2t^2-7t+8)=0$
 $\therefore t=1$ ($\because t$ 는 실수)
 이를 ㉠에 대입하면
 $ke=1 \quad \therefore k=\frac{1}{e}$

- 8 x 와 y 를 각각 t 에 대하여 미분하면
 $\frac{dx}{dt}=3\sec^2 t$, $\frac{dy}{dt}=2\sec t \tan t$
 $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$
 $=\frac{2\sec t \tan t}{3\sec^2 t}$
 $=\frac{2\tan t}{3\sec t}=\frac{2}{3}\sin t$
 $t=\frac{\pi}{3}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는
 $\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
 $t=\frac{\pi}{3}$ 에 대응하는 점의 x 좌표와 y 좌표는
 $x=3 \times \sqrt{3}=3\sqrt{3}$, $y=2 \times 2=4$
 $t=\frac{\pi}{3}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 방정식은
 $y-4=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-3\sqrt{3})$
 $\therefore y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+1$
 따라서 구하는 y 절편은 1이다.

- 9 x 와 y 를 각각 t 에 대하여 미분하면
 $\frac{dx}{dt}=\sqrt{t}$, $\frac{dy}{dt}=t+a$
 $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t+a}{\sqrt{t}}$ (단, $t>0$)

- $t=t_1$ ($t_1>0$)에 대응하는 점의 좌표를 $(b, -8)$ 이라 하면
 $b=\frac{2}{3}t_1\sqrt{t_1}$ ㉠
 $-8=\frac{1}{2}t_1^2+at_1$ ㉡
 $t=t_1$ 에 대응하는 점에서의 접선의 방정식이 $y=-8$ 이므로
 $\frac{t_1+a}{\sqrt{t_1}}=0 \quad \therefore t_1=-a$
 이를 ㉡에 대입하면
 $-8=\frac{1}{2}a^2-a^2$
 $a^2=16 \quad \therefore a=-4$ 또는 $a=4$
 그런데 $t_1=-a$ 에서 $t_1>0$ 이므로
 $a<0$
 $\therefore a=-4$, $t_1=4$
 $t_1=4$ 를 ㉠에 대입하면
 $b=\frac{2}{3} \times 4\sqrt{4}=\frac{16}{3}$
 $\therefore a+b=-4+\frac{16}{3}=\frac{4}{3}$

- 10 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면
 $1+\cos y \frac{dy}{dx}-y-x \frac{dy}{dx}=0$
 $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y-1}{\cos y-x}$ (단, $\cos y \neq x$)
 점 $(0, \pi)$ 에서의 접선의 기울기는
 $\frac{\pi-1}{-1}=-\pi+1$
 점 $(0, \pi)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y-\pi=(-\pi+1)x$
 $\therefore y=(-\pi+1)x+\pi$
 따라서 이 직선이 점 $(1, a)$ 를 지나므로
 $a=1$

- 11 점 $(0, b)$ 가 곡선 $x^3-axy-y^2+4=0$ 위의 점이므로
 $-b^2+4=0 \quad \therefore b=2$ ($\because b>0$)
 $x^3-axy-y^2+4=0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면
 $3x^2-ay-ax \frac{dy}{dx}-2y \frac{dy}{dx}=0$
 $\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-ay}{ax+2y}$ (단, $ax \neq -2y$)
 점 $(0, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 -1 이므로
 $\frac{-2a}{4}=-1 \quad \therefore a=2$
 점 $(0, 2)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y-2=-x$
 $\therefore y=-x+2$

따라서 $c=2$ 이므로
 $a+b+c=2+2+2=6$

- 12 점 $A(t, 0)$ 이라 하면 $g(t)=0$ 에서

$$f(0)=t$$

$$\therefore t=\pi$$

$$f(x)=x+\sin x+\pi \text{에서 } f'(x)=1+\cos x \text{이므로}$$

$$f'(0)=1+1=2$$

점 $A(\pi, 0)$ 에서의 접선의 기울기는

$$g'(\pi)=\frac{1}{f'(g(\pi))}=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}$$

점 $A(\pi, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y=\frac{1}{2}(x-\pi) \quad \therefore y=\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{2}$$

따라서 $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$ab=-\frac{\pi}{4}$$

- 13 $f(x)=e^{|x|}=\begin{cases} e^x & (x \geq 0) \\ e^{-x} & (x < 0) \end{cases}$ 이라 하면

$$f'(x)=\begin{cases} e^x & (x > 0) \\ -e^{-x} & (x < 0) \end{cases}$$

$x > 0$ 일 때, 점점의 좌표를 (t, e^t) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 e^t 이므로 접선의 방정식은

$$y-e^t=e^t(x-t)$$

$$\therefore y=e^tx-(t-1)e^t \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0=-(t-1)e^t \quad \therefore t=1 \quad (\because e^t > 0)$$

이를 ⑦에 대입하면 $y=ex$

또 $x < 0$ 일 때, 점점의 좌표를 (s, e^{-s}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $-e^{-s}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-e^{-s}=-e^{-s}(x-s)$$

$$\therefore y=-e^{-s}x+(s+1)e^{-s} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0=(s+1)e^{-s} \quad \therefore s=-1 \quad (\because e^{-s} > 0)$$

이를 ⑧에 대입하면 $y=-ex$

이때 두 직선 $y=ex, y=-ex$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β 라 하면

$$\tan \alpha=e, \tan \beta=-e$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan \theta &=|\tan (\beta-\alpha)| \\ &=\left|\frac{\tan \beta-\tan \alpha}{1+\tan \beta \tan \alpha}\right| \\ &=\left|\frac{-e-e}{1+(-e) \times e}\right| \\ &=\frac{2e}{e^2-1} \end{aligned}$$

II-3 02 도함수의 활용(2)

함수의 증가와 감소, 극대와 극소

개념 Check

142쪽

1 답 (1) $y''=12x^2+12x$ (2) $y''=\frac{6}{x^3}$

(3) $y''=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ (4) $y''=4e^{2x+1}$

(5) $y''=-\cos x$ (6) $y''=-\frac{1}{x^2 \ln 2}$

2 답 (1) 극댓값: 0, 극솟값: -1

(2) 극댓값: $-\frac{76}{27}$, 극솟값: -4

(1) $f'(x)=6x^2-6x$

$$f''(x)=12x-6$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 6x^2-6x=0$$

$$x(x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

$$\therefore f''(0)=-6 < 0, f''(1)=6 > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 $f(0)=0$,

$x=1$ 에서 극솟값 $f(1)=-1$ 을 갖는다.

(2) $f'(x)=-3x^2-2x+1$

$$f''(x)=-6x-2$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } -3x^2-2x+1=0$$

$$(x+1)(3x-1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{1}{3}$$

$$\therefore f''(-1)=4 > 0, f''\left(\frac{1}{3}\right)=-4 < 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{1}{3}$ 에서 극댓값

$f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{76}{27}$, $x=-1$ 에서 극솟값 $f(-1)=-4$ 를 갖는다.

문제

143~148쪽

01-1 답 -2

$$f'(x)=\cos x \cos x+\sin x(-\sin x)$$

$$=\cos^2 x-\sin^2 x$$

$$=(1-\sin^2 x)-\sin^2 x=1-2\sin^2 x$$

$$f''(x)=-4\sin x(\sin x)'=-4\sin x \cos x$$

$$\therefore f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}=-2$$

01-2 ㉡ 10

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= e^{ax+b} + x \times ae^{ax+b} \\
 &= (ax+1)e^{ax+b} \\
 f''(x) &= ae^{ax+b} + (ax+1) \times ae^{ax+b} \\
 &= a(ax+2)e^{ax+b} \\
 f'(0) &= 1 \text{에서} \\
 e^b &= 1 \quad \therefore b=0 \\
 f''(0) &= 20 \text{에서} \\
 2ae^b &= 20 \\
 2a &= 20 \\
 \therefore a &= 10 \\
 \therefore a+b &= 10+0=10
 \end{aligned}$$

02-1 ㉡ (1) 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가, 구간 $(-\infty, 0]$ 에서 감소

(2) 구간 $(0, \frac{\pi}{6}]$, $[\frac{5}{6}\pi, 2\pi)$ 에서 증가,

구간 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$ 에서 감소

$$\begin{aligned}
 (1) f(x) &= e^x - x \text{에서} \\
 f'(x) &= e^x - 1 \\
 f'(x) &= 0 \text{에서} \\
 e^x - 1 &= 0, e^x = 1 \\
 \therefore x &= 0
 \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		↘	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 0]$ 에서 감소한다.

$$(2) f(x) = \frac{1}{2}x + \cos x \text{에서}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{1}{2} - \sin x \\
 f'(x) &= 0 \text{에서} \\
 \frac{1}{2} - \sin x &= 0, \sin x = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗	$\frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	$\frac{5}{12}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(0, \frac{\pi}{6}]$, $[\frac{5}{6}\pi, 2\pi)$ 에서 증가

하고, 구간 $[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$ 에서 감소한다.

03-1 ㉡ $a \geq 2$

$$f(x) = ax + \sin 2x \text{에서}$$

$$f'(x) = a + 2\cos 2x$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하려면 모든 실수 x 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$a + 2\cos 2x \geq 0$$

$$\text{이때 } -1 \leq \cos 2x \leq 1 \text{이므로}$$

$$-2 \leq 2\cos 2x \leq 2$$

$$a - 2 \leq a + 2\cos 2x \leq a + 2$$

따라서 $a - 2 \geq 0$ 이어야 하므로 $a \geq 2$

03-2 ㉡ $0 < a \leq \frac{1}{3}$

$$f(x) = (ax^2 - 1)e^x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2axe^x + (ax^2 - 1)e^x = (ax^2 + 2ax - 1)e^x$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[-1, 1]$ 에서 감소하려면 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$(ax^2 + 2ax - 1)e^x \leq 0$$

$$\therefore ax^2 + 2ax - 1 \leq 0 \quad (\because e^x > 0)$$

$$g(x) = ax^2 + 2ax - 1 \text{이라 하면}$$

$$g(x) = a(x+1)^2 - a - 1$$

이때 $a > 0$ 이고 $-1 \leq x \leq 1$ 에서

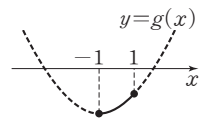
$$g(x) \leq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$g(1) \leq 0$$

$$4a - a - 1 \leq 0 \quad \therefore a \leq \frac{1}{3}$$

따라서 구하는 a 의 값의 범위는

$$0 < a \leq \frac{1}{3}$$



04-1 ㉡ (1) 극댓값: 1, 극솟값: -1

$$(2) \text{극솟값: } e$$

$$(3) \text{극댓값: } \frac{4}{e^2}, \text{극솟값: } 0$$

$$(4) \text{극댓값: } \frac{3\sqrt{3}}{2}, \text{극솟값: } -\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$(1) f(x) = \frac{2x}{x^2+1} \text{에서}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x^2 - 1 = 0, x^2 = 1 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 1, $x=-1$ 에서 극솟값 -1을 갖는다.

(2) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ 에서

$$f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$x-1=0 \quad (\because e^x > 0) \quad \therefore x=1$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 e 를 갖는다.

(3) $f(x) = x(\ln x)^2$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = (\ln x)^2 + x \times 2 \ln x \times \frac{1}{x} = \ln x (\ln x + 2)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \ln x = -2 \text{ 또는 } \ln x = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{e^2} \text{ 또는 } x = 1$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{e^2}$	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{e^2}$ 에서 극댓값 $\frac{4}{e^2}$, $x=1$ 에서 극솟값 0을 갖는다.

(4) $f(x) = 2 \cos x + \sin 2x$ 에서

$$f'(x) = -2 \sin x + 2 \cos 2x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \sin x - \cos 2x = 0$$

$$\sin x - (1 - 2 \sin^2 x) = 0$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(\sin x + 1)(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = -1 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \quad (\because 0 < x < \pi)$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 극댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{5}{6}\pi$

에서 극솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 을 갖는다.

다른 풀이

(1) $f'(x) = -\frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$ 이므로

$$f''(x) = -\frac{4x(x^2+1)^2 - 2(x^2-1) \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{4x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

$$\therefore f''(-1)=1 > 0, f''(1)=-1 < 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 1, $x=-1$ 에서 극솟값 -1을 갖는다.

(2) $f'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$ 이므로

$$f''(x) = \frac{\{e^x + (x-1)e^x\}x^2 - (x-1)e^x \times 2x}{x^4}$$

$$= \frac{(x^2-2x+2)e^x}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=1$$

$$\therefore f''(1)=e > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 e 를 갖는다.

(3) $f'(x) = \ln x (\ln x + 2)$ 이므로

$$f''(x) = \frac{1}{x} (\ln x + 2) + \ln x \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2}{x} (\ln x + 1)$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x = \frac{1}{e^2} \text{ 또는 } x=1$$

$$\therefore f''\left(\frac{1}{e^2}\right) = -2e^2 < 0, f''(1) = 2 > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{e^2}$ 에서 극댓값 $\frac{4}{e^2}$, $x=1$ 에서 극솟값 0을 갖는다.

(4) $f'(x) = -2 \sin x + 2 \cos 2x$ 이므로

$$f''(x) = -2 \cos x - 4 \sin 2x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3\sqrt{3} < 0, f''\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 3\sqrt{3} > 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{6}$ 에서 극댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, $x=\frac{5}{6}\pi$ 에서 극솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 을 갖는다.

05-1 [답] 1

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cos x - b \cos 2x \text{에서} \\ f'(x) &= -a \sin x + 2b \sin 2x \\ x &= \frac{\pi}{3} \text{에서 극댓값 } \frac{3}{2} \text{을 가지므로} \\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 0, f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2} \\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 0 \text{에서} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a + \sqrt{3}b &= 0 \quad \therefore a - 2b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{3}{2} \text{에서} \\ \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b &= \frac{3}{2} \quad \therefore a + b = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면} \\ a &= 2, b = 1 \quad \therefore a - b = 1 \end{aligned}$$

05-2 [답] $-\frac{9}{8} - 2\ln 2$

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 - bx + \ln x \text{에서 } x > 0 \text{이고} \\ f'(x) &= 2ax - b + \frac{1}{x} \\ x &= 1 \text{에서 극솟값 } -3 \text{을 가지므로} \\ f'(1) &= 0, f(1) = -3 \\ f'(1) &= 0 \text{에서} \\ 2a - b + 1 &= 0 \quad \therefore 2a - b = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \\ f(1) &= -3 \text{에서 } a - b = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡} \\ \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{을 연립하여 풀면 } a &= 2, b = 5 \\ \therefore f(x) &= 2x^2 - 5x + \ln x, f'(x) = 4x - 5 + \frac{1}{x} \\ f'(x) &= 0 \text{에서 } 4x - 5 + \frac{1}{x} = 0 \\ 4x^2 - 5x + 1 &= 0, (4x - 1)(x - 1) = 0 \\ \therefore x &= \frac{1}{4} \text{ 또는 } x = 1 \\ x > 0 \text{에서 함수 } f(x) \text{의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.} \end{aligned}$$

x	0	...	$\frac{1}{4}$	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		$\nearrow$	$-\frac{9}{8} - 2\ln 2$ 극대	$\searrow$	-3 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{1}{4}$ 에서 극댓값 $-\frac{9}{8} - 2\ln 2$ 를 갖는다.

06-1 [답] $a \geq 0$

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + \ln x \text{에서 } x > 0 \text{이고} \\ f'(x) &= a + \frac{1}{x} \\ \text{함수 } f(x) \text{가 극값을 갖지 않으려면 } x > 0 \text{에서 } f'(x) &\geq 0 \\ \text{이어야 하므로} \\ a + \frac{1}{x} &\geq 0 \\ \text{이때 } x > 0 \text{일 때 } \frac{1}{x} > 0 \text{이므로 } a &\geq 0 \end{aligned}$$

06-2 [답] $a < 10$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 6x + a)e^{-x} \text{에서} \\ f'(x) &= (2x - 6)e^{-x} - (x^2 - 6x + a)e^{-x} \\ &= (-x^2 + 8x - a - 6)e^{-x} \\ \text{이때 } e^{-x} > 0 \text{이므로 함수 } f(x) \text{가 극댓값과 극솟값을 모두} \\ \text{가지려면 이차방정식 } -x^2 + 8x - a - 6 &= 0 \text{이 서로 다른} \\ \text{두 실근을 가져야 한다.} \\ \text{따라서 이 이차방정식의 판별식을 } D \text{라 하면 } D > 0 \text{이어야} \\ \text{하므로} \end{aligned}$$

$$\frac{D}{4} = 16 - (a + 6) > 0 \quad \therefore a < 10$$

연습문제

149~150쪽

- 1 -4 2 ④ 3 ① 4 ① 5 ②
6 3 7 ④ 8 2 9 ④
10 $-\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$ 11 $\frac{1}{e^{2\pi}-1}$ 12 ③

$$\begin{aligned} 1 \quad \lim_{h \rightarrow 0} & \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - f'\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - f'\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right) - f'\left(\frac{\pi}{3}-h\right)}{2h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}+h\right) - f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{h} \\ & \quad + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'\left(\frac{\pi}{3}-h\right) - f'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-h} \\ &= \frac{1}{2} f''\left(\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2} f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = f''\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

이때 $f'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$ 이므로

$$f''(x) = -\sec^2 x$$

따라서 구하는 극한값은

$$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -2^2 = -4$$

- 2 $e^{f(x)} = \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

$$= \frac{1}{2} \{ \ln(1+\sin x) - \ln(1-\sin x) \}$$

이므로

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{1+\sin x} - \frac{-\cos x}{1-\sin x} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2\cos x}{1-\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

$$f''(x) = \sec x \tan x$$

$$\therefore f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

- 3 $f(x) = x^2 \ln x$ 에서 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x}$$

$$= x(2 \ln x + 1)$$

$$f''(x) = 2 \ln x + 1 + x \times \frac{2}{x}$$

$$= 2 \ln x + 3$$

방정식 $f(x) + f'(x) - 4f''(x) = x - 12$ 에서

$$x^2 \ln x + x(2 \ln x + 1) - 4(2 \ln x + 3) = x - 12$$

$$(x^2 + 2x - 8) \ln x = 0$$

$$(x+4)(x-2) \ln x = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2 (\because x>0)$$

따라서 모든 x 의 값의 합은

$$1+2=3$$

- 4 $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x+1}$ 에서

$$f'(x) = \frac{x^2-x+1-(x-1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2+2x}{(x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{-x(x-2)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x(x-2)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 가 증가하는 x 의 값의 범위가

$$0 \leq x \leq 2 \text{이므로}$$

$$a=0, b=2$$

$$\therefore a+b=2$$

- 5 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{a}{x}$ 에서

$$f'(x) = x - 3 + \frac{a}{x^2}$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2 + a}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(0, \infty)$ 에서 증가하려면 $x > 0$ 에서

$$f'(x) \geq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$\frac{x^3 - 3x^2 + a}{x^2} \geq 0$$

$$\therefore x^3 - 3x^2 + a \geq 0 (\because x > 0)$$

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + a \text{라 하면}$$

$$g'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$g'(x)=0 \text{에서 } x(x-2)=0 \quad \therefore x=2 (\because x>0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$	$a-4$ 극소	$\nearrow$

$x > 0$ 에서 $g(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$a-4 \geq 0 \quad \therefore a \geq 4$$

따라서 a 의 최솟값은 4이다.

- 6 $f(x) = -x^2 + 6x + (a-8) \ln x$ 에서

$$f'(x) = -2x + 6 + \frac{a-8}{x}$$

$$= \frac{-2x^2 + 6x + a - 8}{x}$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 $x > 0$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{-2x^2 + 6x + a - 8}{x} \leq 0$$

$$-2x^2 + 6x + a - 8 \leq 0 (\because x > 0)$$

$$\therefore 2x^2 - 6x - a + 8 \geq 0$$

이차방정식 $2x^2 - 6x - a + 8 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 9 - 2(-a + 8) \leq 0, \quad 2a - 7 \leq 0 \quad \therefore a \leq \frac{7}{2}$$

따라서 자연수 a 는 1, 2, 3의 3개이다.

7 $f(x) = (x^2 - 3)e^{-x}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x} - (x^2 - 3)e^{-x} \\ &= (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } -x^2 + 2x + 3 = 0 \quad (\because e^{-x} > 0)$$

$$(x+1)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-2e$ 극소	$\nearrow$	$\frac{6}{e^3}$ 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극댓값 $\frac{6}{e^3}$, $x=-1$ 에서

극솟값 $-2e$ 를 가지므로

$$a = \frac{6}{e^3}, \quad b = -2e$$

$$\therefore a \times b = -\frac{12}{e^2}$$

다른 풀이

$$f'(x) = (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-2x + 2)e^{-x} - (-x^2 + 2x + 3)e^{-x} \\ &= (x^2 - 4x - 1)e^{-x} \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore f''(-1) = 4e > 0, \quad f''(3) = -\frac{4}{e^3} < 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극댓값 $\frac{6}{e^3}$, $x=-1$ 에서

극솟값 $-2e$ 를 가지므로

$$a = \frac{6}{e^3}, \quad b = -2e \quad \therefore a \times b = -\frac{12}{e^2}$$

8 $f(x) = (1 + \sin x) \cos x$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos^2 x + (1 + \sin x) \times (-\sin x) \\ &= 1 - \sin^2 x - \sin x - \sin^2 x \\ &= -2\sin^2 x - \sin x + 1 \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } -2\sin^2 x - \sin x + 1 = 0$$

$$(\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\sin x = -1 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$0 < x < 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\dots$	$\frac{\pi}{6}$	$\dots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\dots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\dots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 극대	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 극소	$\nearrow$	0	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 극댓값 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, $x = \frac{5}{6}\pi$ 에

서 극솟값 $-\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 을 가지므로 2개의 극값을 갖는다.

참고 이계도함수를 이용하여 극값을 조사할 때, $f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0$,

$$f''\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0 \text{이므로 함수 } f(x) \text{는 } x = \frac{3}{2}\pi \text{에서 극값을 가질}$$

수도 있고 갖지 않을 수도 있다.

9 $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x - 1}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x + a)(x - 1) - (x^2 + ax + b)}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x - a - b}{(x - 1)^2} \end{aligned}$$

$x = -1$ 에서 극댓값 4를 가지므로

$$f'(-1) = 0, \quad f(-1) = 4$$

$$f'(-1) = 0 \text{에서}$$

$$\frac{3 - a - b}{4} = 0 \quad \therefore a + b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$f(-1) = 4 \text{에서}$$

$$\frac{1 - a + b}{-2} = 4 \quad \therefore a - b = 9 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 6, \quad b = -3$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 36 + 9 = 45$$

10 $f(x) = (x - a)e^{x^2}$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{x^2} + (x - a)e^{x^2} \times 2x \\ &= (2x^2 - 2ax + 1)e^{x^2} \end{aligned}$$

이때 $e^{x^2} > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x 에서 $2x^2 - 2ax + 1 \geq 0$ 이어야 한다.

따라서 이차방정식 $2x^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2 \leq 0$$

$$(a + \sqrt{2})(a - \sqrt{2}) \leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$$

11 $f(x) = \cos(\ln x)$ 에서

$$f'(x) = -\sin(\ln x) \times \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{\sin(\ln x)}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \sin(\ln x) = 0 \quad (\because x > 1)$$

$$\ln x = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

$$\therefore x = e^\pi, e^{2\pi}, e^{3\pi}, \dots$$

$x > 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	e^π	...	$e^{2\pi}$	...	$e^{3\pi}$	...	$e^{4\pi}$	...
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$		\	극소	/	극대	\	극소	/	극대	\

따라서 함수 $f(x)$ 가 극대일 때의 x 의 값을 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$e^{2\pi}, e^{4\pi}, \dots, e^{2n\pi}, \dots$$

따라서 $x_n = e^{2n\pi}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n\pi}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{2\pi}} \right)^n$$

$$= \frac{\frac{1}{e^{2\pi}}}{1 - \frac{1}{e^{2\pi}}} = \frac{1}{e^{2\pi} - 1}$$

다른 풀이

$$f'(x) = -\frac{\sin(\ln x)}{x} \circlearrowleft \text{이므로}$$

$$f''(x) = -\frac{\cos(\ln x) \times \frac{1}{x} \times x - \sin(\ln x)}{x^2}$$

$$= \frac{\sin(\ln x) - \cos(\ln x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = e^\pi, e^{2\pi}, e^{3\pi}, \dots$$

$$\therefore f''(e^\pi) = \frac{1}{e^{2\pi}} > 0, f''(e^{2\pi}) = -\frac{1}{e^{4\pi}} < 0,$$

$$f''(e^{3\pi}) = \frac{1}{e^{6\pi}} > 0, f''(e^{4\pi}) = -\frac{1}{e^{8\pi}} < 0, \dots$$

따라서 함수 $f(x)$ 가 극대일 때의 x 의 값을 작은 것부터 차례대로 나열하면

$$e^{2\pi}, e^{4\pi}, \dots, e^{2n\pi}, \dots$$

따라서 $x_n = e^{2n\pi}$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{2n\pi}}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{2\pi}} \right)^n$$

$$= \frac{\frac{1}{e^{2\pi}}}{1 - \frac{1}{e^{2\pi}}} = \frac{1}{e^{2\pi} - 1}$$

12 $y = \ln x$ 에서 $y' = \frac{1}{x}$

점 $P(t, \ln t)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \ln t = \frac{1}{t}(x - t)$$

$$\therefore y = \frac{1}{t}x - 1 + \ln t$$

$y = 0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{1}{t}x - 1 + \ln t$$

$$\frac{1}{t}x = 1 - \ln t$$

$$\therefore x = t - t \ln t$$

$$\therefore p(t) = t - t \ln t$$

점 $Q(2t, \ln 2t)$ 에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \ln 2t = \frac{1}{2t}(x - 2t)$$

$$\therefore y = \frac{1}{2t}x - 1 + \ln 2t$$

$y = 0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{1}{2t}x - 1 + \ln 2t$$

$$\frac{1}{2t}x = 1 - \ln 2t$$

$$\therefore x = 2t - 2t \ln 2t$$

$$\therefore q(t) = 2t - 2t \ln 2t$$

$$f(t) = q(t) - p(t) \text{에서 } t > 0 \text{이고}$$

$$f(t) = (2t - 2t \ln 2t) - (t - t \ln t)$$

$$= t - 2t(\ln 2 + \ln t) + t \ln t$$

$$= (1 - 2 \ln 2)t - t \ln t$$

$$\therefore f'(t) = 1 - 2 \ln 2 - \ln t - t \times \frac{1}{t}$$

$$= -2 \ln 2 - \ln t$$

$$f'(t) = 0 \text{에서}$$

$$-2 \ln 2 - \ln t = 0$$

$$\ln t = \ln \frac{1}{4} \quad \therefore t = \frac{1}{4}$$

$t > 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\frac{1}{4}$	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{1}{4}$ 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t = \frac{1}{4}$ 에서 극댓값 $\frac{1}{4}$ 을 갖는다.

곡선의 볼록과 변곡점

개념 Check

152쪽

- 1 답 (1) 구간 $(-\infty, 2)$ 에서 위로 볼록,
구간 $(2, \infty)$ 에서 아래로 볼록,
변곡점의 좌표: $(2, 2)$
(2) 구간 $(-\infty, -1), (0, \infty)$ 에서 아래로 볼록,
구간 $(-1, 0)$ 에서 위로 볼록,
변곡점의 좌표: $(-1, -1), (0, 0)$
(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ 라 하면
 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9, f''(x) = 6x - 12$
 $f''(x) = 0$ 에서
 $6x - 12 = 0 \quad \therefore x = 2$
이때 $x < 2$ 에서 $f''(x) < 0, x > 2$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로
곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 2)$ 에서 위로 볼록하고,
구간 $(2, \infty)$ 에서 아래로 볼록하다.
따라서 $x = 2$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(2, 2)$
(2) $f(x) = x^4 + 2x^3$ 이라 하면
 $f'(x) = 4x^3 + 6x^2, f''(x) = 12x^2 + 12x$
 $f''(x) = 0$ 에서
 $12x^2 + 12x = 0, 12x(x + 1) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 0$
이때 $x < -1, x > 0$ 에서 $f''(x) > 0, -1 < x < 0$ 에서
 $f''(x) < 0$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1), (0, \infty)$ 에서 아래로 볼록하고,
구간 $(-1, 0)$ 에서 위로 볼록하다.
따라서 $x = -1, x = 0$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(-1, -1), (0, 0)$

문제

153~154쪽

- 01-1 답 (1) 구간 $(-\infty, \ln 2)$ 에서 아래로 볼록,
구간 $(\ln 2, \infty)$ 에서 위로 볼록,
변곡점의 좌표: $(\ln 2, (\ln 2)^2 - 2)$
(2) 구간 $(0, \frac{\pi}{4})$ 에서 아래로 볼록,
구간 $(\frac{\pi}{4}, \pi)$ 에서 위로 볼록,
변곡점의 좌표: $(\frac{\pi}{4}, 0)$

- (3) 구간 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}), (\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$ 에서 아래로 볼록,
구간 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 에서 위로 볼록,
변곡점의 좌표: $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}), (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$

- (4) 구간 $(0, \frac{1}{2})$ 에서 위로 볼록,
구간 $(\frac{1}{2}, \infty)$ 에서 아래로 볼록,
변곡점의 좌표: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \ln 2)$

- (1) $f(x) = x^2 - e^x$ 이라 하면
 $f'(x) = 2x - e^x$
 $f''(x) = 2 - e^x$
 $f''(x) = 0$ 에서
 $2 - e^x = 0, e^x = 2 \quad \therefore x = \ln 2$
이때 $x < \ln 2$ 에서 $f''(x) > 0, x > \ln 2$ 에서 $f''(x) < 0$
이므로 곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $(-\infty, \ln 2)$ 에서 아래로 볼록하고,
구간 $(\ln 2, \infty)$ 에서 위로 볼록하다.
따라서 $x = \ln 2$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(\ln 2, (\ln 2)^2 - 2)$
(2) $f(x) = \sin x - \cos x$ 라 하면
 $f'(x) = \cos x + \sin x$
 $f''(x) = -\sin x + \cos x$
 $f''(x) = 0$ 에서 $-\sin x + \cos x = 0$
 $\sin x = \cos x \quad \therefore x = \frac{\pi}{4} (\because 0 < x < \pi)$
이때 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 $f''(x) > 0, \frac{\pi}{4} < x < \pi$ 에서
 $f''(x) < 0$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $(0, \frac{\pi}{4})$ 에서 아래로 볼록하고,
구간 $(\frac{\pi}{4}, \pi)$ 에서 위로 볼록하다.
따라서 $x = \frac{\pi}{4}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는 $(\frac{\pi}{4}, 0)$
(3) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ 이라 하면
 $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$
 $f''(x) = -\frac{2(x^2 + 1)^2 - 2x \times 2(x^2 + 1) \times 2x}{(x^2 + 1)^4}$
 $= \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}$
 $f''(x) = 0$ 에서
 $6x^2 - 2 = 0, x^2 = \frac{1}{3}$
 $\therefore x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 $f''(x) > 0$,
 $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$
 는 구간 $(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$, $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \infty)$ 에서 아래로 볼록
 하고, 구간 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ 에서 위로 볼록하다.
 따라서 $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호
 가 바뀌므로 변곡점의 좌표는
 $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4}), (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{3}{4})$

(4) $f(x) = 2x^2 + \ln x$ 라 하면 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = 4x + \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = 4 - \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서}$$

$$4 - \frac{1}{x^2} = 0, x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} (\because x > 0)$$

이때 $0 < x < \frac{1}{2}$ 에서 $f''(x) < 0$, $x > \frac{1}{2}$ 에서 $f''(x) > 0$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(0, \frac{1}{2})$ 에서 위로 볼록

하고, 구간 $(\frac{1}{2}, \infty)$ 에서 아래로 볼록하다.

따라서 $x = \frac{1}{2}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변
 곡점의 좌표는

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \ln 2)$$

02-1 ㉡ $\frac{7}{3}$

$f(x) = ax^3 + b \ln x$ 라 하면

$$f'(x) = 3ax^2 + \frac{b}{x}$$

$$f''(x) = 6ax - \frac{b}{x^2}$$

곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표가 $(1, \frac{1}{3})$ 이므로

$$f''(1) = 0, f(1) = \frac{1}{3}$$

$$f''(1) = 0 \text{에서 } 6a - b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(1) = \frac{1}{3} \text{에서 } a = \frac{1}{3}$$

이를 ①에 대입하여 풀면 $b = 2$

$$\therefore a + b = \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3}$$

02-2 ㉡ $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$f(x) = a \sin x + b \cos x - x$ 에서

$$f'(x) = a \cos x - b \sin x - 1$$

$$f''(x) = -a \sin x - b \cos x$$

함수 $f(x)$ 가 $x = \frac{7}{6}\pi$ 에서 극소이므로 $f'(\frac{7}{6}\pi) = 0$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{2}b - 1 = 0 \quad \therefore \sqrt{3}a - b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(\frac{\pi}{3}, f(\frac{\pi}{3}))$ 가 곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점이므로

$$f''(\frac{\pi}{3}) = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{1}{2}b = 0 \quad \therefore \sqrt{3}a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = -\frac{\sqrt{3}}{3}, b = 1$$

$$\therefore ab = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

02-3 ㉡ 9

$f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ 라 하면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

$$f''(x) = 6ax + 2b$$

$x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 -3 이므로

$$f'(1) = -3 \text{에서 } 3a + 2b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표가 $(1, 3)$ 이므로

$$f''(1) = 0, f(1) = 3$$

$$f''(1) = 0 \text{에서 } 6a + 2b = 0 \quad \therefore 3a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f(1) = 3 \text{에서 } a + b + c = 3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a = 1, b = -3$$

이를 ③에 대입하여 풀면 $c = 5$

$$\therefore a - b + c = 1 - (-3) + 5 = 9$$

2 함수의 그래프와 최대, 최소

문제

157~159쪽

03-1 ㉡ (1)~(4) 풀이 참조

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1} \text{에서}$$

(i) 정의역은 $x \neq 1$ 인 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0) = -1$ 이므로 그래프는 점 $(0, -1)$ 을 지난다.

$$(iii) f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0, (x-1)^2 = 1$$

$$x(x-2)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

$x \neq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 위로 볼록과 아래로 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-		-	0	+
$f''(x)$	-	-	-		+	+	+
$f(x)$	$\nearrow$	-1 극대	$\searrow$		$\searrow$	3 극소	$\nearrow$

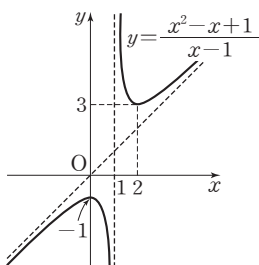
$$(iv) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(x + \frac{1}{x-1}\right) = \infty, \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x + \frac{1}{x-1}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x-1} - x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{x-1} - x\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

따라서 점근선은 직선 $x=1, y=x$ 이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$$(2) f(x) = 2x - \sqrt{x} \text{에서}$$

(i) 정의역은 $x \geq 0$ 인 실수 전체의 집합이다.

$$(ii) 2x - \sqrt{x} = 0 \text{에서 } 2x = \sqrt{x}$$

$$4x^2 = x, x(4x-1)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{1}{4}$$

따라서 그래프는 두 점 $(0, 0), \left(\frac{1}{4}, 0\right)$ 을 지난다.

$$(iii) f'(x) = 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}, f''(x) = \frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } 2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0, 4\sqrt{x}=1$$

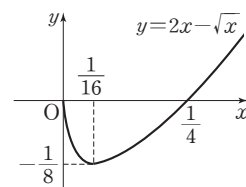
$$16x=1 \quad \therefore x=\frac{1}{16}$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 위로 볼록과 아래로 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{16}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f''(x)$		+	+	+
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$ 극소	$\nearrow$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(2 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \infty$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$$(3) f(x) = e^{-x^2} \text{에서}$$

(i) 정의역은 실수 전체의 집합이다.

(ii) $f(0)=1$ 이므로 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지난다.

(iii) $f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$ 이므로 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

$$(iv) f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x \times (-2xe^{-x^2})$$

$$= 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=0 (\because e^{-x^2} > 0)$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } 2x^2 - 1 = 0 (\because e^{-x^2} > 0)$$

$$x^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

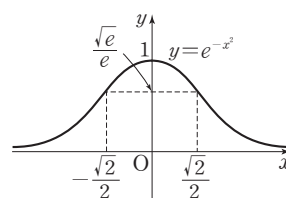
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 위로 볼록과 아래로 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{e}}{e}$ 변곡점	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$	$\frac{\sqrt{e}}{e}$ 변곡점	$\searrow$

$$(v) \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$

이므로 점근선은 x 축이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$(4) f(x) = \cos^2 x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2\cos x \times (-\sin x)$$

$$= -2\sin x \cos x$$

$$= -\sin 2x$$

$$f''(x) = -2\cos 2x$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$\sin 2x = 0$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{에서 } 0 \leq 2x \leq 2\pi \text{이므로}$$

$$2x=0 \text{ 또는 } 2x=\pi \text{ 또는 } 2x=2\pi$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x=\pi$$

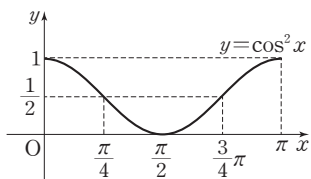
$$f''(x)=0 \text{에서 } \cos 2x=0$$

$$2x=\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } 2x=\frac{3}{2}\pi \quad \therefore x=\frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x=\frac{3}{4}\pi$$

$0 \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 위로 볼록과 아래로 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{4}$	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π
$f'(x)$		-	-	-	0	+	+	+	
$f''(x)$		-	0	+	+	+	0	-	
$f(x)$	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$ 변곡점	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ 변곡점	$\nearrow$	1

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



04-1 [답] (1) 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$

(2) 최댓값: 2, 최솟값: -2

(3) 최댓값: $\frac{1}{2e}$, 최솟값: 0

(4) 최댓값: $\frac{5}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$, 최솟값: $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

(1) $f(x) = \frac{2x}{x^2+4}$ 에서

$$f'(x) = \frac{2(x^2+4) - 2x \times 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-2(x^2-4)}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$x^2-4=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

구간 $[-4, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	...	-2	...	2	...	4
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$-\frac{2}{5}$	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$ 극소	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$ 극대	$\searrow$	$\frac{2}{5}$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

(2) $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ 에서

$$f'(x) = \sqrt{4-x^2} + x \times \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2(2-x^2)}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$2-x^2=0 \quad \therefore x=-\sqrt{2} \text{ 또는 } x=\sqrt{2}$$

구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	$-\sqrt{2}$	...	$\sqrt{2}$	...	2
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2 극소	$\nearrow$	2 극대	$\searrow$	0

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 2, 최솟값은 -2이다.

(3) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ 에서

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - \ln x \times 2x}{x^4} = \frac{1-2\ln x}{x^3}$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$1-2\ln x=0, \ln x=\frac{1}{2}$$

$$\therefore x=\sqrt{e}$$

구간 $[1, e]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	$\sqrt{e}$	...	e
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$ 극대	$\searrow$	$\frac{1}{e^2}$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{2e}$, 최솟값은 0이다.

(4) $f(x) = x - \sin 2x$ 에서

$$f'(x) = 1 - 2\cos 2x$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$1-2\cos 2x=0, \cos 2x=\frac{1}{2}$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{에서 } 0 \leq 2x \leq 2\pi \text{이므로}$$

$$2x=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } 2x=\frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x=\frac{5}{6}\pi$$

구간 $[0, \pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{6}$	...	$\frac{5}{6}\pi$	...	π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 극소	$\nearrow$	$\frac{5}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 극대	$\searrow$	π

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $\frac{5}{6}\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$, 최솟값은

$$\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이다.}$$

05-1 답 3

점 D의 x 좌표를 a 라 하면

$$D\left(a, \frac{2}{a^2+1}\right) \text{ (단, } a>0\text{)}$$

$$\overline{AD}=2a \text{ 이므로}$$

$$\overline{BC}=2\overline{AD}=4a$$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a)=\frac{1}{2}(2a+4a)\times\frac{2}{a^2+1}=\frac{6a}{a^2+1}$$

$$\therefore S'(a)=\frac{6(a^2+1)-6a\times 2a}{(a^2+1)^2}=\frac{-6(a^2-1)}{(a^2+1)^2}$$

$$S'(a)=0 \text{ 에서}$$

$$a^2-1=0 \quad \therefore a=1 \text{ (} \because a>0\text{)}$$

$a>0$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	1	...
$S'(a)$		+	0	-
$S(a)$		$\nearrow$	3 극대	$\searrow$

따라서 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 3이다.

05-2 답 $\frac{\pi}{3}$

점 A의 x 좌표를 a 라 하면

$$A(a, 4\sin a) \text{ (단, } 0<a<\frac{\pi}{2}\text{)}$$

$\overline{BC}=\pi-2a$, $\overline{CD}=4\sin a$ 이므로 직사각형 ABCD의 둘레의 길이를 $f(a)$ 라 하면

$$f(a)=2(\pi-2a+4\sin a)$$

$$\therefore f'(a)=2(-2+4\cos a)=4(2\cos a-1)$$

$$f'(a)=0 \text{ 에서}$$

$$2\cos a-1=0, \cos a=\frac{1}{2}$$

$$\therefore a=\frac{\pi}{3} \text{ (} \because 0<a<\frac{\pi}{2}\text{)}$$

$0<a<\frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	$\frac{\pi}{2}$
$f'(a)$		+	0	-	
$f(a)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $f(a)$ 는 $a=\frac{\pi}{3}$ 일 때 최대이므로 이때 선분

BC의 길이는

$$\pi-2a=\pi-2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$$

연습문제

160~161쪽

1 ①

2 $-3\leq a\leq 0$

3 ①

4 $2e$

5 ④

6 $\neg, \supset$

7 21

8 1

9 $\supset, \neg$

10 ①

11 $\frac{\sqrt{6}}{3}$

12 $\frac{\sqrt{e}}{e}$

13 ②

1 $f(x)=x-2\cos x$ 라 하면

$$f'(x)=1+2\sin x, f''(x)=2\cos x$$

$$f''(x)=0 \text{ 에서}$$

$$\cos x=0 \quad \therefore x=\frac{\pi}{2} \text{ (} \because 0<x<\pi\text{)}$$

따라서 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 에서 $f''(x)>0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서 아래로 볼록하다.

2 $f(x)=3x^4+4ax^3-6ax^2+1$ 이라 하면

$$f'(x)=12x^3+12ax^2-12ax$$

$$f''(x)=36x^2+24ax-12a=12(3x^2+2ax-a)$$

곡선 $y=f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 아래로 볼록하려면 모든 실수 x 에서 $f''(x)\geq 0$ 이어야 하므로

$$3x^2+2ax-a\geq 0$$

이차방정식 $3x^2+2ax-a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D\leq 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$\frac{D}{4}=a^2+3a\leq 0, a(a+3)\leq 0$$

$$\therefore -3\leq a\leq 0$$

3 $f(x)=(x^2-x)e^x$ 이라 하면

$$f'(x)=(2x-1)e^x+(x^2-x)e^x=(x^2+x-1)e^x$$

$$f''(x)=(2x+1)e^x+(x^2+x-1)e^x=x(x+3)e^x$$

$$f''(x)=0 \text{ 에서}$$

$$x(x+3)=0 \text{ (} \because e^x>0\text{)} \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=0$$

$x=-3, x=0$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 x 좌표는 $-3, 0$

따라서 그 합은 $-3+0=-3$

4 $f(x)=(\ln ax)^2$ 이라 하면

$$f'(x)=2\ln ax\times\frac{a}{ax}=\frac{2\ln ax}{x}$$

$$f''(x)=\frac{\frac{2}{x}\times x-2\ln ax}{x^2}=\frac{2(1-\ln ax)}{x^2}$$

$$f''(x)=0 \text{ 에서}$$

$$1-\ln ax=0, \ln ax=1$$

$$ax=e \quad \therefore x=\frac{e}{a}$$

$x = \frac{e}{a}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$$\left(\frac{e}{a}, 1\right)$$

이 점이 직선 $y=2x$ 위에 있으므로

$$1 = 2 \times \frac{e}{a} \quad \therefore a = 2e$$

5 $f(x) = ax^2 - 2\sin 2x$ 라 하면

$$f'(x) = 2ax - 4\cos 2x, f''(x) = 2a + 8\sin 2x$$

곡선 $y=f(x)$ 가 변곡점을 가지려면 방정식 $f''(x)=0$ 이 실근을 갖고, 그 근의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌어야 한다.

$$f''(x)=0 \text{에서 } 2a + 8\sin 2x = 0$$

$$\therefore \sin 2x = -\frac{a}{4}$$

이때 $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ 이므로 실근을 가지려면

$$-1 \leq -\frac{a}{4} \leq 1 \quad \therefore -4 \leq a \leq 4$$

$$a = -4 \text{일 때, } f''(x) = -8 + 8\sin 2x \leq 0$$

$$a = 4 \text{일 때, } f''(x) = 8 + 8\sin 2x \geq 0$$

즉, $a = -4$ 또는 $a = 4$ 일 때 $f''(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 변곡점이 될 수 없다.

따라서 a 의 값의 범위는 $-4 < a < 4$ 이므로 정수 a 는 $-3, -2, -1, \dots, 3$ 의 7개이다.

6 ㄱ. $f'(a)=0$ 이고 $x=a$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 $x=a$ 에서 극소이다.

ㄴ. $f'(b)=0$ 이지만 $x=b$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 $x=b$ 에서 극값을 갖지 않는다.

ㄷ. $f''(0)=0, f''(b)=0$ 이고 $x=0, x=b$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 $x=0, x=b$ 인 점은 변곡점이다.

따라서 그래프의 변곡점은 2개이다.

ㄹ. 구간 $(0, b)$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 그래프는 위로 볼록하다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

7 $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+2}$ 에서

$$f'(x) = \frac{(x^2+x+2) - (x-1)(2x+1)}{(x^2+x+2)^2}$$

$$= \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+x+2)^2}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } -x^2+2x+3=0$$

$$(x+1)(x-3)=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$	$\frac{1}{7}$ 극대	$\searrow$

이때 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선은 x 축이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 $\frac{1}{7}$ 을 가지므로

$$a=3, b=\frac{1}{7}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = 21$$

8 $f(x) = axe^x$ 에서

$$f'(x) = ae^x + axe^x = a(1+x)e^x$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$1+x=0 \quad (\because e^x > 0) \quad \therefore x=-1$$

$a > 0$ 이므로 구간 $[-3, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{3a}{e^3}$	$\searrow$	$-\frac{a}{e}$ 극소	$\nearrow$	ae

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 ae , 최솟값은 $-\frac{a}{e}$ 이고 그 곱이 -1 이므로

$$ae \times \left(-\frac{a}{e}\right) = -1$$

$$-a^2 = -1 \quad \therefore a = 1 \quad (\because a > 0)$$

9 $f(x) = e^x \sin x$ 에서

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x$$

$$= e^x (\sin x + \cos x)$$

$$f''(x) = e^x (\sin x + \cos x) + e^x (\cos x - \sin x)$$

$$= 2e^x \cos x$$

$$f'(x)=0 \text{에서}$$

$$\sin x + \cos x = 0 \quad (\because e^x > 0)$$

$$\sin x = -\cos x$$

$$\therefore x = \frac{3}{4}\pi \quad (\because 0 < x < \pi)$$

$$f''(x)=0 \text{에서}$$

$$\cos x = 0 \quad (\because e^x > 0)$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < x < \pi)$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 위로 볼록과 아래로 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{4}\pi$	...	π
$f'(x)$		+	+	+	0	-	
$f''(x)$		+	0	-	-	-	
$f(x)$		↗	$e^{\frac{\pi}{2}}$ 변곡점	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3}{4}\pi}$ 극대	↘	

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{3}{4}\pi$ 에서 극대이다.

ㄴ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 점 $(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{\pi}{2}})$ 의 1개이다.

ㄷ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 구간 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 에서 위로 볼록하다.

ㄹ. $0 < x < \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{3}{4}\pi$ 일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

10 점 A의 좌표를 (a, e^{-2a}) ($a > 0$)이라 하면

$H(0, e^{-2a})$

$y' = -2e^{-2x}$ 이므로 점 A(a, e^{-2a})에서의 접선의 방정식은 $y - e^{-2a} = -2e^{-2a}(x - a)$

$\therefore y = -2e^{-2a}x + (2a+1)e^{-2a}$

즉, 점 B의 좌표는 $(0, (2a+1)e^{-2a})$ 이므로

$\overline{BH} = (2a+1)e^{-2a} - e^{-2a} = 2ae^{-2a}$

삼각형 ABH의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$S(a) = \frac{1}{2} \times a \times 2ae^{-2a} = a^2e^{-2a}$

$\therefore S'(a) = 2ae^{-2a} - 2a^2e^{-2a}$
 $= 2a(1-a)e^{-2a}$

$S'(a) = 0$ 에서

$a(1-a) = 0$ ($\because e^{-2a} > 0$)

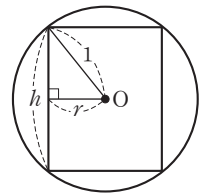
$\therefore a = 1$ ($\because a > 0$)

$a > 0$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	1	...
$S'(a)$		+	0	-
$S(a)$		↗	$\frac{1}{e^2}$ 극대	↘

따라서 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 $\frac{1}{e^2}$ 이다.

11 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r ($0 < r < 1$), 높이를 h 라 하고 구의 중심을 O라 하면 오른쪽 그림과 같이 구의 중심 O를 지나면서 원기둥의 밑면에 수직인 평면으로 자른 단면에서



$$h = 2\sqrt{1-r^2}$$

원기둥의 부피를 $V(r)$ 라 하면

$$V(r) = \pi r^2 h = 2\pi r^2 \sqrt{1-r^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore V'(r) &= 4\pi r \sqrt{1-r^2} + 2\pi r^2 \times \frac{-2r}{2\sqrt{1-r^2}} \\ &= \frac{4\pi r(1-r^2) - 2\pi r^3}{\sqrt{1-r^2}} \\ &= \frac{2\pi r(2-3r^2)}{\sqrt{1-r^2}} \end{aligned}$$

$V'(r) = 0$ 에서 $2-3r^2 = 0$ ($\because r > 0$)

$$r^2 = \frac{2}{3} \quad \therefore r = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad (\because 0 < r < 1)$$

$0 < r < 1$ 에서 함수 $V(r)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	...	$\frac{\sqrt{6}}{3}$	...	1
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 부피 $V(r)$ 는 $r = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 에서 최대이므로 원기둥의

부피를 최대화 하는 밑면의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 이다.

12 $f(x) = \sin^n x$ 라 하면

$$f'(x) = n \sin^{n-1} x \cos x$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= n(n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x - n \sin^{n-1} x \times \sin x \\ &= n(n-1) \sin^{n-2} x \cos^2 x - n \sin^n x \\ &= n \sin^{n-2} x \{ (n-1) \cos^2 x - \sin^2 x \} \\ &= n \sin^{n-2} x (n \cos^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= n \sin^{n-2} x (n \cos^2 x - 1) \end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표가 (a_n, b_n) 이므로

$$f''(a_n) = 0, f(a_n) = b_n$$

$f''(a_n) = 0$ 에서 n 은 2 이상의 자연수이고, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 일 때 $\sin x > 0$ 이므로

$$n \cos^2 a_n - 1 = 0 \quad \therefore \cos^2 a_n = \frac{1}{n}$$

$f(a_n) = b_n$ 에서

$$b_n = \sin^n a_n = (\sqrt{1 - \cos^2 a_n})^n = \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)^n$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{-n} \right\}^{-\frac{1}{2}} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{e}\end{aligned}$$

13 $y=a^x$ 에서 $y'=a^x \ln a$ 이

므로 점 $A(t, a^t)$ 에서의
접선 l 의 기울기는

$$a^t \ln a$$

즉, 점 $A(t, a^t)$ 을 지나고

직선 l 에 수직인 직선의 방
정식은

$$y - a^t = -\frac{1}{a^t \ln a}(x - t)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{a^t \ln a}x + \frac{t}{a^t \ln a} + a^t$$

점 B 의 y 좌표는 0이므로

$$0 = -\frac{1}{a^t \ln a}x + \frac{t}{a^t \ln a} + a^t \text{에서}$$

$$x = t + a^{2t} \ln a$$

$$\therefore B(t + a^{2t} \ln a, 0)$$

점 A 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H , 원점을 O 라 하면

$\triangle AHB \sim \triangle COB$ 이므로

$$\frac{AC}{AB} = \frac{OH}{HB} = \frac{t}{(t + a^{2t} \ln a) - t} = \frac{t}{a^{2t} \ln a}$$

$$f(t) = \frac{t}{a^{2t} \ln a} \text{라 하면}$$

$$f'(t) = \frac{a^{2t} \ln a - 2ta^{2t}(\ln a)^2}{(a^{2t} \ln a)^2}$$

$$= \frac{1 - 2t \ln a}{a^{2t} \ln a}$$

$$f'(t) = 0 \text{에서}$$

$$1 - 2t \ln a = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{2 \ln a}$$

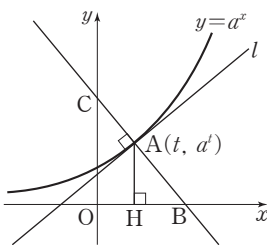
$t > 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음
과 같다.

t	0	...	$\frac{1}{2 \ln a}$	...
$f'(t)$		+	0	-
$f(t)$		↗	극대	↘

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t = \frac{1}{2 \ln a}$ 에서 최대이므로

$$\frac{1}{2 \ln a} = 1$$

$$\ln a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \sqrt{e}$$



II-3 04 도함수의 활용(4)

방정식과 부등식에의 활용

개념 Check

162쪽

1 ㉠ (1) 풀이 참조 (2) 풀이 참조 (3) 1

(1) $f(x) = x - \sqrt{x+1}$ 에서 $x \geq -1$ 이고

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = 0$$

$$\sqrt{x+1} = \frac{1}{2}, x+1 = \frac{1}{4} \quad \therefore x = -\frac{3}{4}$$

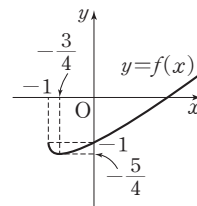
$x \geq -1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내
면 다음과 같다.

x	-1	...	$-\frac{3}{4}$	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	-1	↘	$-\frac{5}{4}$	↗

(2), (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽
그림과 같이 x 축과 한 점에서
만난다.

따라서 주어진 방정식의 서로
다른 실근의 개수는 1이다.



문제

163~165쪽

01-1 ㉠ (1) 2 (2) 1

(1) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2x} - 2$ 라 하면 $x > 0$ 이고

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x^2} = 0, \sqrt{x} = x^2$$

$$x = x^4, x(x-1)(x^2+x+1) = 0$$

$$\therefore x = 1 (\because x > 0)$$

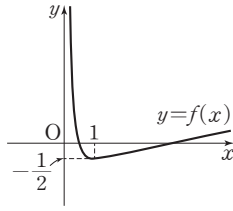
$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{2}$ 극소	↗

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{이므로 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

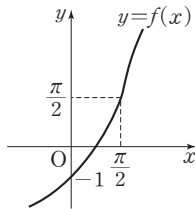
$$(2) f(x)=x-\cos x \text{라 하면 } f'(x)=1+\sin x$$

$$\text{이때 } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{이므로 } f'(x) \geq 0$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$$\text{이때 } f(0)=-1, f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 한 점에서 만난다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

02-1 ㉡ 4

주어진 방정식에서 $\ln x - ex + 6 = a$ 이므로 이 방정식이 오직 한 실근을 가지려면 함수 $y = \ln x - ex + 6$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 오직 한 점에서 만나야 한다.

$$f(x) = \ln x - ex + 6 \text{이라 하면 } x > 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - e$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \frac{1}{x} - e = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{e}$$

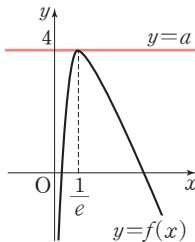
$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	4 극대	↘

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \text{이므로 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 교점이 1개가 되도록 직선 $y=a$ 를 그어 보면 구하는 a 의 값은 4이다.



$$02-2 \text{ ㉡ } \frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} < a < \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$$

주어진 방정식에서 $2\sin x + x = a$ 이므로 이 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y = 2\sin x + x$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$$f(x) = 2\sin x + x \text{라 하면 } f'(x) = 2\cos x + 1$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 2\cos x + 1 = 0, \cos x = -\frac{1}{2}$$

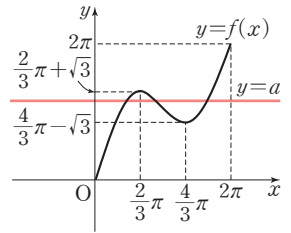
$$\therefore x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	$\frac{4}{3}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	0	↗	$\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$ 극대	↘	$\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ 극소	↗	2π

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 교점이 3개가 되도록 직선 $y=a$ 를 그어 보면 구하는 a 의 값의 범위는

$$\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3} < a < \frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$$



03-1 ㉡ $a \leq 2$

$$\ln(x^2 + e^2) \geq a \text{에서 } \ln(x^2 + e^2) - a \geq 0$$

$$f(x) = \ln(x^2 + e^2) - a \text{라 하면 } f'(x) = \frac{2x}{x^2 + e^2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$2-a$ 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $2-a$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$2-a \geq 0 \quad \therefore a \leq 2$$

03-2 ㉡ $a \leq 1$

$$x^2 + \cos x > a \text{에서 } x^2 + \cos x - a > 0$$

$$f(x) = x^2 + \cos x - a \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 2x - \sin x, f''(x) = 2 - \cos x$$

$x > 0$ 일 때, $-1 \leq \cos x \leq 1$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 $x > 0$ 에서 함수 $f'(x)$ 는 증가한다.

또 $f'(0) = 0$ 이고 $x > 0$ 일 때 함수 $f'(x)$ 가 증가하면

$f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 도 증가한다.

따라서 $x > 0$ 일 때, $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f(0) \geq 0$ 이어야 하므로

$$1-a \geq 0 \quad \therefore a \leq 1$$

2 속도 와 가속도

문제

167~168쪽

04-1 [답] 속도: e^3+2 , 가속도: e^3

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = e^t + 2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = e^t$$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의 속도는

$$v = e^3 + 2$$

$t=3$ 에서의 점 P의 가속도는

$$a = e^3$$

04-2 [답] 3

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -p \sin t + q$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -p \cos t$$

$t = \frac{\pi}{6}$ 에서의 점 P의 속도가 $\frac{3}{2}$ 이므로

$$-\frac{1}{2}p + q = \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$t = \frac{\pi}{6}$ 에서의 점 P의 가속도가 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}p = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore p = 1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $q = 2$

$$\therefore p + q = 1 + 2 = 3$$

04-3 [답] 4

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -2 \cos 2t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 4 \sin 2t$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$-2 \cos 2t = 0, \cos 2t = 0$$

$$0 < t < \frac{\pi}{2} \text{에서 } 0 < 2t < \pi \text{이므로}$$

$$2t = \frac{\pi}{2} \quad \therefore t = \frac{\pi}{4}$$

따라서 $t = \frac{\pi}{4}$ 에서의 점 P의 가속도는

$$a = 4 \sin \frac{\pi}{2} = 4$$

05-1 [답] 속도: $(3, 1)$, 가속도: $(-4, 2)$

$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{2}{t^2}, \frac{dy}{dt} = 2 - \frac{1}{t^2}$ 이므로 시간 t 에서의 점 P의 속도는

$$\left(1 + \frac{2}{t^2}, 2 - \frac{1}{t^2}\right)$$

따라서 $t=1$ 에서의 점 P의 속도는

$$(3, 1)$$

$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4}{t^3}, \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2}{t^3}$ 이므로 시간 t 에서의 점 P의 가속도는

$$\left(-\frac{4}{t^3}, \frac{2}{t^3}\right)$$

따라서 $t=1$ 에서의 점 P의 가속도는

$$(-4, 2)$$

05-2 [답] $\sqrt{17}$

$\frac{dx}{dt} = -2t, \frac{dy}{dt} = \frac{2}{t}$ 이므로 시간 t 에서의 점 P의 속도는

$$\left(-2t, \frac{2}{t}\right)$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 속도는 $(-4, 1)$ 이므로 속력은

$$\sqrt{(-4)^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

05-3 [답] $2\sqrt{e^\pi}$

$$\frac{dx}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t)$$

시간 t 에서의 점 P의 속도는

$$(e^t (\sin t + \cos t), e^t (\cos t - \sin t))$$

따라서 시간 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\{e^t (\sin t + \cos t)\}^2 + \{e^t (\cos t - \sin t)\}^2} = \sqrt{2e^{2t}}$$

$$\text{즉, } \sqrt{2e^{2t}} = \sqrt{2}e^t \text{에서 } e^{2t} = e^\pi$$

$$\therefore t = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = e^t (\sin t + \cos t) + e^t (\cos t - \sin t)$$

$$= 2e^t \cos t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e^t (\cos t - \sin t) + e^t (-\sin t - \cos t)$$

$$= -2e^t \sin t$$

시간 t 에서의 점 P의 가속도는

$$(2e^t \cos t, -2e^t \sin t)$$

따라서 $t = \frac{\pi}{2}$ 에서의 점 P의 가속도는 $(0, -2e^{\frac{\pi}{2}})$ 이므로

가속도의 크기는

$$\sqrt{0 + (-2e^{\frac{\pi}{2}})^2} = 2\sqrt{e^\pi}$$

- 1 1 2 ② 3 ④ 4 $a < -\frac{1}{e}$ 5 $\frac{e}{2}$
 6 $2 < a < 2e$ 7 ② 8 $\frac{\pi}{3}$ 9 ④
 10 ④ 11 2 12 100 13 ④ 14 12π

1 $f(x) = xe^{-x+1} - 1$ 이라 하면

$$f'(x) = e^{-x+1} - xe^{-x+1} = (1-x)e^{-x+1}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$1-x=0 \quad (\because e^{-x+1} > 0)$$

$$\therefore x=1$$

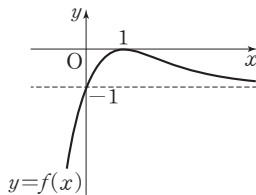
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	0 극대	↘

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{이므로 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 한 점에서 만난다.



따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

2 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수

$y=x^2-5x+2\ln x$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$$f(x) = x^2 - 5x + 2\ln x \text{라 하면 } x > 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = 2x - 5 + \frac{2}{x} \\ = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (\because x > 0)$$

$$(2x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 2$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	2	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$		↗	$-\frac{9}{4} - 2\ln 2$ 극대	↘	$-6 + 2\ln 2$ 극소	↗

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \text{이므로}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같고,

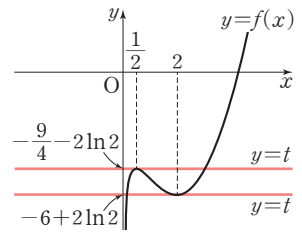
교점이 2개가 되도록 직

선 $y=t$ 를 그어 보면

$$t = -6 + 2\ln 2 \text{ 또는 } t = -\frac{9}{4} - 2\ln 2$$

따라서 모든 t 의 값의 합은

$$(-6 + 2\ln 2) + \left(-\frac{9}{4} - 2\ln 2\right) = -\frac{33}{4}$$



3 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수

$y=\sin x$ 의 그래프와 직선 $y=ax$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

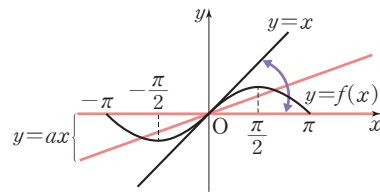
$$f(x) = \sin x \text{라 하면 } f'(x) = \cos x$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y=x$$

$-\pi \leq x \leq \pi$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같고, 교점이 3개가 되도록 직선 $y=ax$ 를 그어 보면 구하는 a 의 값의 범위는

$$0 \leq a < 1$$



4 $xe^x > a$ 에서 $xe^x - a > 0$

$$f(x) = xe^x - a \text{라 하면}$$

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$1+x=0 \quad (\because e^x > 0) \quad \therefore x = -1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$-\frac{1}{e} - a$ 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-\frac{1}{e} - a$ 이므로 모든 실수

x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이 성립하려면

$$-\frac{1}{e} - a > 0 \quad \therefore a < -\frac{1}{e}$$

5 $f(x) \geq g(x)$ 에서 $\sqrt{x} \geq a \ln x$

$$\sqrt{x} - a \ln x \geq 0$$

$$h(x) = \sqrt{x} - a \ln x \text{라 하면}$$

$$h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{a}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2a}{2x}$$

$$h'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\sqrt{x} - 2a = 0 \quad (\because x > 0) \quad \therefore x = 4a^2$$

$x > 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$4a^2$	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$		$\searrow$	$2a(1 - \ln 2a)$ 극소	$\nearrow$

따라서 $x > 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $2a(1 - \ln 2a)$

이므로 $x > 0$ 일 때 $h(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$2a(1 - \ln 2a) \geq 0, \quad 1 - \ln 2a \geq 0 \quad (\because a > 0)$$

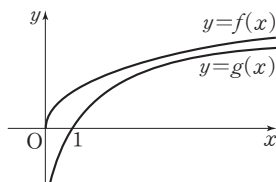
$$\ln 2a \leq 1, \quad 2a \leq e \quad \therefore a \leq \frac{e}{2}$$

$$\text{그런데 } a > 0 \text{이므로 } 0 < a \leq \frac{e}{2}$$

따라서 양수 a 의 최댓값은 $\frac{e}{2}$ 이다.

다른 풀이

$x > 0$ 일 때, 주어진 부등식이 성립하려면 다음 그림과 같이 곡선 $y = f(x)$ 가 곡선 $y = g(x)$ 보다 항상 위쪽에 있거나 두 곡선이 접해야 한다.



$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad g'(x) = \frac{a}{x}$$

두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 접한다고 하면 $x=t$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t) = g(t)$ 에서

$$\sqrt{t} = a \ln t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $x=t$ 인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(t) = g'(t) \text{에서}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{a}{t} \quad \therefore a = \frac{\sqrt{t}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{2} \ln t$$

$$\ln t = 2 \quad \therefore t = e^2$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } a = \frac{e}{2}$$

따라서 $0 < a \leq \frac{e}{2}$ 이므로 양수 a 의 최댓값은 $\frac{e}{2}$ 이다.

6 함수 $y = e^{-x} - 1$ 의 역함수는

$$x = e^{-y} - 1, \quad e^{-y} = x + 1$$

$$-y = \ln(x + 1) \quad \therefore y = -\ln(x + 1)$$

즉, $g(x) = -\ln(x + 1)$ 이므로 $2x + 2 + ag(x) > 0$ 에서 $2x + 2 - a \ln(x + 1) > 0$

$$h(x) = 2x + 2 - a \ln(x + 1) \text{이라 하면}$$

$$h'(x) = 2 - \frac{a}{x+1}$$

$$h'(x) = 0 \text{에서}$$

$$2 - \frac{a}{x+1} = 0, \quad \frac{a}{x+1} = 2$$

$$2x + 2 = a \quad \therefore x = \frac{a-2}{2}$$

$x > 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{a-2}{2}$	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$		$\searrow$	$a\left(1 - \ln \frac{a}{2}\right)$ 극소	$\nearrow$

따라서 $x > 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $a\left(1 - \ln \frac{a}{2}\right)$ 이

므로 $x > 0$ 일 때 $h(x) > 0$ 이 성립하려면

$$a\left(1 - \ln \frac{a}{2}\right) > 0, \quad 1 - \ln \frac{a}{2} > 0$$

$$\ln \frac{a}{2} < 1 \quad \therefore 2 < a < 2e \quad (\because a > 2)$$

7 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 2t \ln t + t^2 \times \frac{1}{t} = 2t \ln t + t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2 \ln t + 2t \times \frac{1}{t} + 1 = 2 \ln t + 3$$

점 P의 가속도가 7이므로 $a = 7$ 에서

$$2 \ln t + 3 = 7, \quad \ln t = 2$$

$$\therefore t = e^2$$

따라서 $t = e^2$ 에서의 점 P의 속도는

$$v = 2e^2 \times 2 + e^2 = 5e^2$$

8 시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$$f'(t) = -\sin t, \quad g'(t) = -2 \sin t \cos t$$

두 점 P, Q의 속도가 같으므로 $f'(t) = g'(t)$ 에서

$$-\sin t = -2 \sin t \cos t$$

$$\sin t(2 \cos t - 1) = 0$$

$$\sin t = 0 \text{ 또는 } \cos t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore t = \frac{\pi}{3} \quad \left(\because 0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$$

9 $\frac{dx}{dt} = \ln t + t \times \frac{1}{t} = \ln t + 1$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4 \ln t - 4t \times \frac{1}{t}}{(\ln t)^2} = \frac{4(\ln t - 1)}{(\ln t)^2}$$

시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$\left(\ln t + 1, \frac{4(\ln t - 1)}{(\ln t)^2} \right)$$

따라서 $t=e^2$ 에서의 점 P의 속도는 $(3, 1)$ 이므로 속력은 $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

10 $\frac{dx}{dt} = 3t^2 + a$, $\frac{dy}{dt} = 2at - 4$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(3t^2 + a, 2at - 4)$$

$t=1$ 에서의 점 P의 속도는 $(3+a, 2a-4)$ 이므로 속력은

$$\sqrt{(3+a)^2 + (2a-4)^2} = \sqrt{5a^2 - 10a + 25}$$

$$\text{즉, } \sqrt{5a^2 - 10a + 25} = 5 \text{이므로}$$

$$5a^2 - 10a + 25 = 25$$

$$a(a-2) = 0 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2, \quad \frac{dy}{dt} = 4t - 4$$

이때 $\frac{d^2x}{dt^2} = 6t$, $\frac{d^2y}{dt^2} = 4$ 이므로 $t=2$ 에서의 점 P의 가속도는

$$(12, 4)$$

따라서 구하는 가속도의 크기는

$$\sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10}$$

11 $\frac{dx}{dt} = 1 - \cos^2 t + \sin^2 t$

$$= 1 - (1 - \sin^2 t) + \sin^2 t = 2\sin^2 t$$

$$\frac{dy}{dt} = -\csc^2 t$$

시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(2\sin^2 t, -\csc^2 t)$ 이므로 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{(2\sin^2 t)^2 + (-\csc^2 t)^2} &= \sqrt{4\sin^4 t + \csc^4 t} \\ &= \sqrt{4\sin^4 t + \frac{1}{\sin^4 t}} \end{aligned}$$

이때 $0 < t < \frac{\pi}{2}$ 에서 $4\sin^4 t > 0$, $\frac{1}{\sin^4 t} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$4\sin^4 t + \frac{1}{\sin^4 t} \geq 2\sqrt{4\sin^4 t \times \frac{1}{\sin^4 t}} = 4$$

(단, 등호는 $4\sin^4 t = \frac{1}{\sin^4 t}$ 일 때 성립)

따라서 구하는 속력의 최솟값은

$$\sqrt{4} = 2$$

12 방정식 $2xe^{1-\frac{x}{n}} = a$ 가 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y = 2xe^{1-\frac{x}{n}}$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$$g(x) = 2xe^{1-\frac{x}{n}} \text{이라 하면}$$

$$g'(x) = 2e^{1-\frac{x}{n}} + 2xe^{1-\frac{x}{n}} \times \left(-\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2e^{1-\frac{x}{n}} \left(1 - \frac{x}{n}\right)$$

$$g'(x) = 0 \text{에서}$$

$$1 - \frac{x}{n} = 0 \quad (\because e^{1-\frac{x}{n}} > 0)$$

$$\therefore x = n$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	n	$\cdots$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\nearrow$	$2n$ 극대	$\searrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \text{이므로 함}$$

수 $y = g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 교점이 2개가 되도록 직선 $y = a$ 를 그어

보면 a 의 값의 범위는

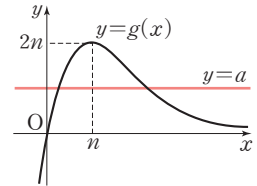
$$0 < a < 2n$$

따라서 정수 a 의 개수는 $f(n) = 2n - 1$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{10} f(n) = \sum_{n=1}^{10} (2n - 1)$$

$$= 2 \times \frac{10 \times 11}{2} - 10$$

$$= 100$$



13 오른쪽 그림과 같이 t 초 후에 지면과 닿은 사다리의 끝에서 벽까지의 거리를 x m, 벽에 닿은 사다리의 끝부터 지면까지의 거리를 y m라 하면

$$x^2 + y^2 = 10^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

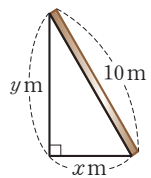
①의 각 항을 t 에 대하여 미분하면

$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\text{이때 } \frac{dx}{dt} = 0.3 \text{이므로}$$

$$0.6x + 2y \frac{dy}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{0.3x}{y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$



㉠에서 $x=8$ 일 때, $y=6$ 이므로

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{0.3 \times 8}{6} = -0.4$$

따라서 벽에 닿은 사다리의 끝이 아래로 내려오는 속력은 0.4 m/s 이다.

- 14 시간 $t=0$ 에서의 점 P의 위치가 $(0, 0)$ 이므로

$$k-1=0 \quad \therefore k=1$$

점 P가 다시 원점을 지나는 경우는 $t \neq 0$ 이고 $x=0, y=0$ 일 때이다.

$$x=0 \text{에서 } 1-\cos t=0$$

$$\cos t=1$$

$$\therefore t=2\pi \text{ 또는 } t=4\pi \text{ 또는 } t=6\pi \text{ 또는 } \dots \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$y=0 \text{에서 } 3\sin t=0$$

$$\sin t=0$$

$$\therefore t=\pi \text{ 또는 } t=2\pi \text{ 또는 } t=3\pi \text{ 또는 } t=4\pi \text{ 또는 } \dots \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉠, ㉡에서 $t_1=2\pi, t_2=4\pi$

$\frac{dx}{dt}=\sin t, \frac{dy}{dt}=3\cos t$ 이므로 시간 t 에서의 점 P의 속도는

$$(\sin t, 3\cos t)$$

즉, 시간 t 에서 점 P의 속력은

$$\sqrt{\sin^2 t + (3\cos t)^2} = \sqrt{\sin^2 t + 9\cos^2 t}$$

또 $\frac{d^2x}{dt^2}=\cos t, \frac{d^2y}{dt^2}=-3\sin t$ 이므로 시간 t 에서의 점 P의 가속도는

$$(\cos t, -3\sin t)$$

즉, 시간 t 에서 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\cos^2 t + (-3\sin t)^2} = \sqrt{\cos^2 t + 9\sin^2 t}$$

이때 점 P의 속력과 가속도의 크기가 서로 같으므로

$$\sqrt{\sin^2 t + 9\cos^2 t} = \sqrt{\cos^2 t + 9\sin^2 t}$$

$$\sin^2 t + 9\cos^2 t = \cos^2 t + 9\sin^2 t$$

$$\cos^2 t = \sin^2 t$$

$2\pi < t < 4\pi$ 에서 $\cos t \neq 0$ 이므로

$$\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = 1, \tan^2 t = 1$$

$$\therefore \tan t = -1 \text{ 또는 } \tan t = 1$$

따라서 $2\pi < t < 4\pi$ 에서 점 P의 속력과 가속도의 크기가 서로 같도록 하는 t 의 값은 $2\pi + \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{3}{4}\pi, 3\pi + \frac{\pi}{4},$

$3\pi + \frac{3}{4}\pi$ 이므로 그 합은

$$a = 2\pi + \frac{\pi}{4} + 2\pi + \frac{3}{4}\pi + 3\pi + \frac{\pi}{4} + 3\pi + \frac{3}{4}\pi$$

$$= 12\pi$$

$$\therefore ka = 1 \times 12\pi = 12\pi$$

III-1 01 여러 가지 함수의 적분

여러 가지 함수의 부정적분

개념 Check

173쪽

1 ㉠ (1) $-\frac{1}{x}+C$ (2) $\frac{3}{4}x^3\sqrt{x}+C$

(3) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$ (4) $\frac{1}{2}\ln|x|+C$

(1) $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx = \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + C$
 $= -\frac{1}{x} + C$

(2) $\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + C$
 $= \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

(3) $\int x\sqrt{x} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} x^{\frac{3}{2}+1} + C$
 $= \frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$

(4) $\int \frac{1}{2x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x} dx$
 $= \frac{1}{2} \ln|x| + C$

2 ㉠ (1) $3e^x+C$ (2) $e^{x-1}+C$ (3) $\frac{9^x}{\ln 9}+C$ (4) $\frac{2^{x+1}}{\ln 2}+C$

(1) $\int 3e^x dx = 3 \int e^x dx = 3e^x + C$

(2) $\int e^{x-1} dx = \int e^x \times e^{-1} dx = \frac{1}{e} \int e^x dx$
 $= \frac{1}{e} \times e^x + C = e^{x-1} + C$

(3) $\int 3^{2x} dx = \int (3^2)^x dx = \int 9^x dx = \frac{9^x}{\ln 9} + C$

(4) $\int 2^{x+1} dx = \int 2^x \times 2 dx = 2 \int 2^x dx$
 $= 2 \times \frac{2^x}{\ln 2} + C = \frac{2^{x+1}}{\ln 2} + C$

3 ㉠ (1) $x-4\cos x+C$ (2) $\tan x-3\sin x+C$
(3) $\sec x+x+C$ (4) $-\cot x-2\csc x+C$

(1) $\int (1+4\sin x) dx = \int dx + 4 \int \sin x dx$
 $= x - 4\cos x + C$

(2) $\int (\sec^2 x - 3\cos x) dx = \int \sec^2 x dx - 3 \int \cos x dx$
 $= \tan x - 3\sin x + C$

$$\begin{aligned}
(3) \quad & \int \tan x (\sec x + \cot x) dx \\
&= \int (\sec x \tan x + 1) dx \\
&= \int \sec x \tan x dx + \int dx \\
&= \sec x + x + C \\
(4) \quad & \int \csc x (\csc x + 2 \cot x) dx \\
&= \int (\csc^2 x + 2 \csc x \cot x) dx \\
&= \int \csc^2 x dx + 2 \int \csc x \cot x dx \\
&= -\cot x - 2 \csc x + C
\end{aligned}$$

문제

174~176쪽

01-1 ㉔ (1) $x^2 - 3x - \frac{1}{2x^2} + C$

(2) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + C$

(3) $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln|x| + \frac{2}{x} + C$

(4) $x - 4\sqrt{x} + \ln|x| + C$

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \int \frac{2x^4 - 3x^3 + 1}{x^3} dx = \int (2x - 3 + x^{-3}) dx \\
&= x^2 - 3x - \frac{1}{2}x^{-2} + C \\
&= x^2 - 3x - \frac{1}{2x^2} + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \int \frac{x+2}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}) dx \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{1}{2}} + C \\
&= \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 4\sqrt{x} + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad & \int \left(x + \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{2}{x}\right) dx \\
&= \int \left(x - 2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx \\
&= \int \left(x - 2 + \frac{1}{x} - 2x^{-2}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln|x| + 2x^{-1} + C \\
&= \frac{1}{2}x^2 - 2x + \ln|x| + \frac{2}{x} + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad & \int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x} dx = \int \frac{x-2\sqrt{x}+1}{x} dx \\
&= \int \left(1 - 2x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{x}\right) dx \\
&= x - 4x^{\frac{1}{2}} + \ln|x| + C \\
&= x - 4\sqrt{x} + \ln|x| + C
\end{aligned}$$

01-2 ㉔ 1

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} dx \\
&= \int \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2} dx \\
&= \int (\sqrt{x}-2) dx = \int (x^{\frac{1}{2}}-2) dx \\
&= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + C
\end{aligned}$$

이때 $f(1) = -\frac{1}{3}$ 에서

$$\frac{2}{3} - 2 + C = -\frac{1}{3} \quad \therefore C = 1$$

따라서 $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 2x + 1$ 이므로

$$f(9) = 18 - 18 + 1 = 1$$

02-1 ㉔ (1) $\frac{1}{2}e^{x+1} - \frac{2^{x+1}}{\ln 2} - \frac{1}{2x} + C$

(2) $\frac{49^x}{\ln 49} - \frac{2 \times 7^x}{\ln 7} + x + C$

(3) $\frac{1}{2}x^2 + e^x + C$

(4) $\frac{9^x}{\ln 9} - \frac{3^x}{\ln 3} + C$

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \int \frac{x^2 e^{x+1} - x^2 2^{x+2} + 1}{2x^2} dx \\
&= \int \left(\frac{e}{2} \times e^x - 2 \times 2^x + \frac{1}{2}x^{-2} \right) dx \\
&= \frac{e}{2} \times e^x - 2 \times \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{2}x^{-1} + C \\
&= \frac{1}{2}e^{x+1} - \frac{2^{x+1}}{\ln 2} - \frac{1}{2x} + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \int (7^x - 1)^2 dx = \int (49^x - 2 \times 7^x + 1) dx \\
&= \frac{49^x}{\ln 49} - 2 \times \frac{7^x}{\ln 7} + x + C \\
&= \frac{49^x}{\ln 49} - \frac{2 \times 7^x}{\ln 7} + x + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad & \int \frac{x^2 - e^{2x}}{x - e^x} dx = \int \frac{(x + e^x)(x - e^x)}{x - e^x} dx \\
&= \int (x + e^x) dx \\
&= \frac{1}{2}x^2 + e^x + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad & \int \frac{27^x - 3^x}{3^x + 1} dx = \int \frac{3^x(9^x - 1)}{3^x + 1} dx \\
&= \int \frac{3^x(3^x + 1)(3^x - 1)}{3^x + 1} dx \\
&= \int 3^x(3^x - 1) dx = \int (9^x - 3^x) dx \\
&= \frac{9^x}{\ln 9} - \frac{3^x}{\ln 3} + C
\end{aligned}$$

02-2 ㉔ $\frac{8}{\ln 8} + 1$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (2^x + 1)(4^x - 2^x + 1) dx \\ &= \int (8^x + 1) dx \\ &= \frac{8^x}{\ln 8} + x + C \end{aligned}$$

○ 이때 $f(0) = \frac{1}{\ln 8}$ 에서

$$\frac{1}{\ln 8} + C = \frac{1}{\ln 8} \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = \frac{8^x}{\ln 8} + x$ 이므로

$$f(1) = \frac{8}{\ln 8} + 1$$

03-1 ㉔ (1) $x + \sin x + C$ (2) $-3 \cot x + x + C$

(3) $\tan x - \ln |x| + C$ (4) $\frac{1}{2} \tan x + C$

(5) $\frac{3}{2} \sin x - \frac{1}{2} x + C$ (6) $x - \cos x + C$

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} dx &= \int \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} dx \\ &= \int \frac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{1 - \cos x} dx \\ &= \int (1 + \cos x) dx \\ &= x + \sin x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int \frac{3 + \sin^2 x}{\sin^2 x} dx &= \int \left(\frac{3}{\sin^2 x} + 1 \right) dx \\ &= \int (3 \csc^2 x + 1) dx \\ &= -3 \cot x + x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int \frac{x - \cos^2 x}{x \cos^2 x} dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int \left(\sec^2 x - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \tan x - \ln |x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 \text{이므로} \\ \int \frac{1}{1 + \cos 2x} dx &= \int \frac{1}{2 \cos^2 x} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sec^2 x dx \\ &= \frac{1}{2} \tan x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2} \right) &= 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} \text{이므로} \\ \sin^2 \frac{x}{2} &= \frac{1 - \cos x}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int \left(\cos x - \sin^2 \frac{x}{2} \right) dx &= \int \left(\cos x - \frac{1 - \cos x}{2} \right) dx \\ &= \int \left(\frac{3}{2} \cos x - \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \frac{3}{2} \sin x - \frac{1}{2} x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (6) \int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx &= \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx \\ &= \int (1 + \sin x) dx \quad \blacktriangleleft \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= x - \cos x + C \end{aligned}$$

03-2 ㉔ -1

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \\ &= \int \frac{1 - \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} dx \\ &= \int \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} \right) dx \\ &= \int (\sec^2 x - \sec x \tan x) dx \\ &= \tan x - \sec x + C \end{aligned}$$

○ 이때 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ 에서

$$1 - \sqrt{2} + C = 1 \quad \therefore C = \sqrt{2}$$

따라서 $f(x) = \tan x - \sec x + \sqrt{2}$ 이므로

$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = -1$$

2 여러 가지 함수의 정적분

개념 Check

178쪽

1 ㉔ (1) $\frac{1}{2}$ (2) 12 (3) 2 (4) $\frac{4}{\ln 2}$ (5) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (6) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} (1) \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx &= \int_1^2 x^{-2} dx = \left[-x^{-1} \right]_1^2 \\ &= -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx &= \int_0^8 x^{\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \right]_0^8 \\ &= 12 - 0 = 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_{\ln 2}^{\ln 4} e^x dx &= \left[e^x \right]_{\ln 2}^{\ln 4} = 4 - 2 = 2 \\
 (4) \int_2^3 2^x dx &= \left[\frac{2^x}{\ln 2} \right]_2^3 = \frac{8}{\ln 2} - \frac{4}{\ln 2} = \frac{4}{\ln 2} \\
 (5) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx &= \left[-\cos x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 0 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 (6) \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \cos x dx &= \left[\sin x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} = 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

2 [답] (1) 0 (2) $3\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}
 (1) f(x) &= 2 \sin x \text{라 하면} \\
 f(-x) &= 2 \sin(-x) = -2 \sin x = -f(x) \\
 \therefore \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 2 \sin x dx &= 0 \\
 (2) f(x) &= 3 \cos x \text{라 하면} \\
 f(-x) &= 3 \cos(-x) = 3 \cos x = f(x) \\
 \therefore \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} 3 \cos x dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} 3 \cos x dx \\
 &= 6 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= 6 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \right) = 3\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

문제

179~183쪽

04-1 [답] (1) $e^3 - e^2 + 1$ (2) $\frac{8}{3} - 3 \ln 3$

$$\begin{aligned}
 (3) \frac{44}{3} \quad (4) e^2 - 6e + 5 \\
 (1) \int_1^e \frac{3x^3 - 2x^2 + 1}{x} dx &= \int_1^e \left(3x^2 - 2x + \frac{1}{x} \right) dx \\
 &= \left[x^3 - x^2 + \ln |x| \right]_1^e \\
 &= (e^3 - e^2 + 1) - (1 - 1) \\
 &= e^3 - e^2 + 1 \\
 (2) \int_{-3}^{-1} \frac{(x+1)^3}{x^2} dx &= \int_{-3}^{-1} \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2} dx \\
 &= \int_{-3}^{-1} \left(x + 3 + \frac{3}{x} + x^{-2} \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} x^2 + 3x + 3 \ln |x| - x^{-1} \right]_{-3}^{-1} \\
 &= \left(\frac{1}{2} - 3 + 1 \right) - \left(\frac{9}{2} - 9 + 3 \ln 3 + \frac{1}{3} \right) \\
 &= \frac{8}{3} - 3 \ln 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_4^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx &= \int_4^9 (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}) dx \\
 &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} \right]_4^9 \\
 &= (18 + 6) - \left(\frac{16}{3} + 4 \right) \\
 &= \frac{44}{3} \\
 (4) \int_1^{e^2} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{x} dx &= \int_1^{e^2} \frac{x-3\sqrt{x}}{x} dx \\
 &= \int_1^{e^2} (1 - 3x^{-\frac{1}{2}}) dx \\
 &= \left[x - 6x^{\frac{1}{2}} \right]_1^{e^2} \\
 &= (e^2 - 6e) - (1 - 6) \\
 &= e^2 - 6e + 5
 \end{aligned}$$

04-2 [답] (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{37}{10}$

$$\begin{aligned}
 (1) \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{x}+2} dx + \int_1^9 \frac{x-5}{\sqrt{x}+2} dx &= \int_1^9 \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{x-5}{\sqrt{x}+2} \right) dx \\
 &= \int_1^9 \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} dx \\
 &= \int_1^9 \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+2} dx \\
 &= \int_1^9 (\sqrt{x}-2) dx = \int_1^9 (x^{\frac{1}{2}} - 2) dx \\
 &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - 2x \right]_1^9 \\
 &= (18 - 18) - \left(\frac{2}{3} - 2 \right) \\
 &= \frac{4}{3} \\
 (2) \int_1^3 (x - \sqrt{x})^2 dx + \int_3^6 (x - \sqrt{x})^2 dx &= \int_1^6 (x - \sqrt{x})^2 dx \\
 &= \int_1^6 (x^2 - 2x\sqrt{x} + x) dx \\
 &= \int_1^6 (x^2 - 2x^{\frac{3}{2}} + x) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{4}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2} x^2 \right]_1^6 \\
 &= \left(\frac{64}{3} - \frac{128}{5} + 8 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{37}{10}
 \end{aligned}$$

05-1 ㉡ (1) $3e^2 + \frac{15}{\ln 4} - 3$ (2) $\frac{26}{3\ln 3} - 3$

(3) $2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ (4) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$$\begin{aligned} (1) \int_0^2 (3e^x + 2^{2x}) dx &= \int_0^2 (3e^x + 4^x) dx \\ &= \left[3e^x + \frac{4^x}{\ln 4} \right]_0^2 \\ &= \left(3e^2 + \frac{16}{\ln 4} \right) - \left(3 + \frac{1}{\ln 4} \right) \\ &= 3e^2 + \frac{15}{\ln 4} - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_{-1}^2 \frac{9^x - 1}{3^x + 1} dx &= \int_{-1}^2 \frac{(3^x + 1)(3^x - 1)}{3^x + 1} dx \\ &= \int_{-1}^2 (3^x - 1) dx \\ &= \left[\frac{3^x}{\ln 3} - x \right]_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{9}{\ln 3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3\ln 3} + 1 \right) \\ &= \frac{26}{3\ln 3} - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 2 \cos x) dx &= \left[-\cos x + 2 \sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \right) \\ &= 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{1 - \sin^2 x} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sec^2 x dx \\ &= \left[\tan x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

05-2 ㉡ (1) 4 (2) $3 + 3\ln 4$

$$\begin{aligned} (1) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x + 1)^2 dx + \int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - 1)^2 dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x + 1)^2 dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin x - 1)^2 dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \{ (\sin x + 1)^2 - (\sin x - 1)^2 \} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 4 \sin x dx \\ &= \left[-4 \cos x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^{2x} + 6e^x + 9} dx - \int_{\ln 4}^{\ln 2} \sqrt{e^{2x} + 6e^x + 9} dx \\ &= \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^{2x} + 6e^x + 9} dx + \int_{\ln 2}^{\ln 4} \sqrt{e^{2x} + 6e^x + 9} dx \\ &= \int_0^{\ln 4} \sqrt{e^{2x} + 6e^x + 9} dx \\ &= \int_0^{\ln 4} \sqrt{(e^x + 3)^2} dx \\ &= \int_0^{\ln 4} (e^x + 3) dx \\ &= \left[e^x + 3x \right]_0^{\ln 4} \\ &= (4 + 3\ln 4) - 1 \\ &= 3 + 3\ln 4 \end{aligned}$$

06-1 ㉡ $34 - \frac{1}{e}$

$-1 \leq x \leq 0$ 일 때 $f(x) = e^x + 1$ 이고, $0 \leq x \leq 4$ 일 때
 $f(x) = x + 3\sqrt{x} + 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (e^x + 1) dx + \int_0^4 (x + 3\sqrt{x} + 2) dx \\ &= \left[e^x + x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x^{\frac{3}{2}} + 2x \right]_0^4 \\ &= \left\{ 1 - \left(\frac{1}{e} - 1 \right) \right\} + (8 + 16 + 8) \\ &= 34 - \frac{1}{e} \end{aligned}$$

06-2 ㉡ $4 - 2\sqrt{3}$

$\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$ 에서 $\cos x = \sqrt{3} \sin x$

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \right)$$

따라서

$$|\cos x - \sqrt{3} \sin x| = \begin{cases} \cos x - \sqrt{3} \sin x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}) \\ -\cos x + \sqrt{3} \sin x & (\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{3}} |\cos x - \sqrt{3} \sin x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x - \sqrt{3} \sin x) dx \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (-\cos x + \sqrt{3} \sin x) dx \\ &= \left[\sin x + \sqrt{3} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} + \left[-\sin x - \sqrt{3} \cos x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) - \sqrt{3} \right\} + \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) \right\} \\ &= 4 - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

07-1 ㉔ (1) $\frac{2}{3}\pi^3$ (2) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

(1) $f(x) = x^2 + 2\cos x$, $g(x) = \sin x$ 라 하면
 $f(-x) = (-x)^2 + 2\cos(-x) = x^2 + 2\cos x = f(x)$
 $g(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -g(x)$
 $\therefore \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + \sin x + 2\cos x) dx$
 $= \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + 2\cos x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sin x dx$
 $= 2 \int_0^{\pi} (x^2 + 2\cos x) dx + 0$
 $= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 + 2\sin x \right]_0^{\pi}$
 $= \frac{2}{3}\pi^3$

(2) $f(x) = \sec^2 x$, $g(x) = x \tan^2 x + x^3 \cos x$ 라 하면
 $f(-x) = \sec^2(-x) = \sec^2 x = f(x)$
 $g(-x) = -x \tan^2(-x) + (-x)^3 \cos(-x)$
 $= -x \tan^2 x - x^3 \cos x = -g(x)$
 $\therefore \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\sec^2 x + x \tan^2 x + x^3 \cos x) dx$
 $= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sec^2 x dx + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (x \tan^2 x + x^3 \cos x) dx$
 $= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec^2 x dx + 0$
 $= 2 \left[\tan x \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$
 $= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

08-1 ㉔ 8

함수 $y = |\cos x|$ 의 주기가 π 이므로
 $\int_0^{\pi} |\cos x| dx = \int_{\pi}^{2\pi} |\cos x| dx = \int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x| dx$
 $= \int_{3\pi}^{4\pi} |\cos x| dx$
 $\therefore \int_0^{4\pi} |\cos x| dx$
 $= \int_0^{\pi} |\cos x| dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\cos x| dx$
 $+ \int_{2\pi}^{3\pi} |\cos x| dx + \int_{3\pi}^{4\pi} |\cos x| dx$
 $= 4 \int_0^{\pi} |\cos x| dx$
 $= 4 \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx \right\}$
 $= 4 \left(\left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right)$
 $= 4(1+1) = 8$

08-2 ㉔ 12

$f(x+\pi) = f(x)$ 이므로
 $\int_{-\pi}^0 f(x) dx = \int_0^{\pi} f(x) dx = \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx$
 $= \dots = \int_{4\pi}^{5\pi} f(x) dx$
 $\therefore \int_{-\pi}^{5\pi} f(x) dx$
 $= \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x) dx$
 $+ \dots + \int_{4\pi}^{5\pi} f(x) dx$
 $= 6 \int_{-\pi}^0 f(x) dx$
 $= 6 \int_{-\pi}^0 (-\sin x) dx$
 $= 6 \left[\cos x \right]_{-\pi}^0$
 $= 6\{1 - (-1)\} = 12$

연습문제

184~186쪽

- | | | | | |
|--------------------|-----|-----------|------------------|------|
| 1 ③ | 2 2 | 3 $e+3$ | 4 $\frac{1}{10}$ | 5 ④ |
| 6 $\pi+1$ | 7 ② | 8 -5 | 9 $5\sqrt{3}$ | |
| 10 $-1+\sqrt{3}$ | | 11 ④ | 12 ⑤ | |
| 13 $e-2\sqrt{e}+1$ | | 14 $-\pi$ | 15 ③ | 16 ② |
| 17 ③ | | | | |

1 $F(x) = \int f(x) dx = \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} \right)^2 dx$
 $= \int \left(x + \frac{2\sqrt{x}}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$
 $= \int (x + 2x^{-\frac{1}{2}} + x^{-2}) dx$
 $= \frac{1}{2}x^2 + 4x^{\frac{1}{2}} - x^{-1} + C$
 $= \frac{1}{2}x^2 + 4\sqrt{x} - \frac{1}{x} + C$
 $\therefore F(2) - F(1) = \left(4\sqrt{2} + \frac{3}{2} + C \right) - \left(\frac{7}{2} + C \right) = 4\sqrt{2} - 2$

2 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 $x - 2^3\sqrt{x}$ 이므로
 $f'(x) = x - 2^3\sqrt{x}$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (x - 2\sqrt[3]{x}) dx \\ &= \int (x - 2x^{\frac{1}{3}}) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4} + C\end{aligned}$$

이때 $f(1) = -7$ 에서

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + C = -7 \quad \therefore C = -6$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^4} - 6$ 이므로

$$f(8) = 32 - 24 - 6 = 2$$

3 (i) $x > 1$ 일 때,

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{2}{x} dx = 2\ln x + C_1$$

(ii) $x < 1$ 일 때,

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x) dx = \int e^{x-1} dx \\ &= \frac{1}{e} \int e^x dx = \frac{1}{e} \times e^x + C_2 = e^{x-1} + C_2\end{aligned}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } f(x) = \begin{cases} 2\ln x + C_1 & (x > 1) \\ e^{x-1} + C_2 & (x < 1) \end{cases}$$

이때 $f(0) = e + \frac{1}{e}$ 에서

$$e^{-1} + C_2 = e + \frac{1}{e} \quad \therefore C_2 = e$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (2\ln x + C_1) = \lim_{x \rightarrow 1-} (e^{x-1} + e)$$

$$\therefore C_1 = e + 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} 2\ln x + e + 1 & (x \geq 1) \\ e^{x-1} + e & (x \leq 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(e) = 2 + e + 1 = e + 3$$

$$4 \quad f(x) = \int 10^x \ln 10 dx = \ln 10 \times \frac{10^x}{\ln 10} + C = 10^x + C$$

이때 $f(1) = 4$ 에서

$$10 + C = 4 \quad \therefore C = -6$$

$$\therefore f(x) = 10^x - 6$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{10^{n+1} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n - 6}{10^{n+1} + 1} = \frac{1}{10}$$

5 (나)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 3e\} = 0 \quad \therefore f(1) = 3e$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 3e}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) \text{이므로}$$

$$f'(1) = 3e + 6$$

(가)에서 $f'(1) = ae + 6$ 이므로 $a = 3$

즉, $f'(x) = 3e^x + 6$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3e^x + 6x) dx \\ &= 3e^x + 3x^2 + C\end{aligned}$$

이때 $f(1) = 3e$ 에서

$$3e + 3 + C = 3e \quad \therefore C = -3$$

따라서 $f(x) = 3e^x + 3x^2 - 3$ 이므로

$$f(2) = 3e^2 + 12 - 3 = 3e^2 + 9$$

6 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 2x + \cos x - x \sin x - \cos x$$

$$xf'(x) = 2x + x \sin x$$

$$\therefore f'(x) = 2 + \sin x \quad (\because x > 0)$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2 + \sin x) dx \\ &= 2x - \cos x + C\end{aligned}$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ 에서

$$\pi + C = 0 \quad \therefore C = -\pi$$

따라서 $f(x) = 2x - \cos x - \pi$ 이므로

$$f(\pi) = 2\pi + 1 - \pi = \pi + 1$$

$$\begin{aligned}7 \quad \int_1^4 \frac{2\sqrt{x}-4}{x^2} dx &= \int_1^4 (2x^{-\frac{3}{2}} - 4x^{-2}) dx \\ &= \left[-4x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-1} \right]_1^4 \\ &= (-2 + 1) - (-4 + 4) = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8 \quad \int_0^a \frac{e^{2x}-9}{e^x+3} dx &= \int_0^a \frac{(e^x+3)(e^x-3)}{e^x+3} dx \\ &= \int_0^a (e^x-3) dx = \left[e^x - 3x \right]_0^a \\ &= e^a - 3a - 1\end{aligned}$$

따라서 $e^a - 3a - 1 = e^2 + b$ 이므로

$$a = 2, -3a - 1 = b \quad \therefore b = -7$$

$$\therefore a + b = -5$$

$$\begin{aligned}9 \quad \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{5}} f(y) dy + \int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{3}} f(z) dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{5}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{5}}^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{3+4\cos^3 x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (3\sec^2 x + 4\cos x) dx \\ &= \left[3\tan x + 4\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &= 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 5\sqrt{3}\end{aligned}$$

10 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 < \cos^2 x < 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \cos^2 x + \cos^4 x + \cdots \quad \leftarrow \text{첫째항이 1이고 공비가} \\ &= \frac{1}{1 - \cos^2 x} \quad \cos^2 x \text{인 등비급수} \\ &= \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x \\ \therefore \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \csc^2 x dx \\ &= \left[-\cot x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -1 - (-\sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

11 $\int_0^{\pi} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2 - \cos x) dx$

$$\begin{aligned} &= \left[-2 \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[2x - \sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= 2 + \{2\pi - (\pi - 1)\} \\ &= \pi + 3 \end{aligned}$$

12 $3^x - 9 = 0$ 에서 $3^x = 9 \quad \therefore x = 2$

따라서 $|3^x - 9| = \begin{cases} 3^x - 9 & (x \geq 2) \\ -3^x + 9 & (x \leq 2) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^3 |3^x - 9| dx &= \int_0^2 (-3^x + 9) dx + \int_2^3 (3^x - 9) dx \\ &= \left[-\frac{3^x}{\ln 3} + 9x \right]_0^2 + \left[\frac{3^x}{\ln 3} - 9x \right]_2^3 \\ &= \left\{ \left(-\frac{9}{\ln 3} + 18 \right) - \left(-\frac{1}{\ln 3} \right) \right\} \\ &\quad + \left\{ \left(\frac{27}{\ln 3} - 27 \right) - \left(\frac{9}{\ln 3} - 18 \right) \right\} \\ &= \frac{10}{\ln 3} + 9 \end{aligned}$$

13 $e^x - e^a = 0$ 에서 $e^x = e^a \quad \therefore x = a$

따라서 $|e^x - e^a| = \begin{cases} e^x - e^a & (x \geq a) \\ -e^x + e^a & (x \leq a) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(a) &= \int_0^1 |e^x - e^a| dx \\ &= \int_0^a (-e^x + e^a) dx + \int_a^1 (e^x - e^a) dx \\ &= \left[-e^x + e^a x \right]_0^a + \left[e^x - e^a x \right]_a^1 \\ &= \{(-e^a + ae^a) - (-1)\} + \{(e - e^a) - (e^a - ae^a)\} \\ &= (2a - 3)e^a + e + 1 \\ \therefore f'(a) &= 2e^a + (2a - 3)e^a = (2a - 1)e^a \\ f'(a) &= 0 \text{에서} \\ 2a - 1 &= 0 \quad (\because e^a > 0) \quad \therefore a = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$0 \leq a \leq 1$ 에서 함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\frac{1}{2}$	...	1
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(a)$ 는 $a = \frac{1}{2}$ 에서 극소이므로 구하는 극솟값은

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e - 2\sqrt{e} + 1$$

14 $f(x) = \tan x, g(x) = a \cos x + 3$ 이라 하면

$$\begin{aligned} f(-x) &= \tan(-x) = -\tan x = -f(x) \\ g(-x) &= a \cos(-x) + 3 = a \cos x + 3 = g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\tan x + a \cos x + 3) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \tan x dx + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (a \cos x + 3) dx \\ &= 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (a \cos x + 3) dx = 2 \left[a \sin x + 3x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= 2 \times \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = a + \pi \end{aligned}$$

이때 $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (\tan x + a \cos x + 3) dx = 0$ 이므로

$$a + \pi = 0 \quad \therefore a = -\pi$$

15 $\textcircled{7}$ 에서 $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} f(x) dx = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} f(x) dx \\ &= \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} f(x) dx \\ \therefore \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi} f(x) dx &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} f(x) dx \\ &\quad + \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} f(x) dx + \int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} f(x) dx \\ &= 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \\ \text{이때 } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{에서} \\ f(-x) &= \sec^2(-x) = \sec^2 x = f(x) \text{이므로} \\ \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{7}{4}\pi} f(x) dx &= 4 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx \\ &= 8 \left[\tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 8 \end{aligned}$$

16 $2f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \dots\dots \textcircled{A}$

$\textcircled{A}$ 의 양변에 x 대신 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2f(x) = x + x^2$$

양변을 $2x^2$ 으로 나누면

$$\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A} - \textcircled{B}$ 을 하면

$$\frac{3}{2}f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$$

$$\therefore \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3} \right) dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{3x} + \frac{2}{3}x^{-2} - \frac{1}{3} \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} \ln|x| - \frac{2}{3x} - \frac{1}{3}x \right]_{\frac{1}{2}}^2$$

$$= \left(\frac{1}{3} \ln 2 - \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \right) - \left(\frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} - \frac{4}{3} - \frac{1}{6} \right)$$

$$= \frac{2 \ln 2}{3} + \frac{1}{2}$$

17 $\int_{-3}^3 (1 + \sin x + \sin^3 x) f(x) dx$

$$= \int_{-3}^3 \{f(x) + \sin x \times f(x) + \sin^3 x \times f(x)\} dx$$

(*)에서 곡선 $y=f(x)$ 는 y 축에 대하여 대칭이므로

$$f(x) = f(-x)$$

$$\sin(-x) \times f(-x) = (-\sin x) \times f(x)$$

$$= -\sin x \times f(x)$$

$$\sin^3(-x) \times f(-x) = \{\sin(-x)\}^3 \times f(x)$$

$$= (-\sin x)^3 \times f(x)$$

$$= -\sin^3 x \times f(x)$$

$$\therefore \int_{-3}^3 (1 + \sin x + \sin^3 x) f(x) dx$$

$$= \int_{-3}^3 \{f(x) + \sin x \times f(x) + \sin^3 x \times f(x)\} dx$$

$$= \int_{-3}^3 f(x) dx$$

$$= 2 \int_0^3 f(x) dx$$

$$= 2 \left[F(x) \right]_0^3$$

$$= 2 \{F(3) - F(0)\}$$

$$= 2 \times (2 - 0)$$

$$= 4$$

III-1 02 치환적분법과 부분적분법

치환적분법

개념 Check

189쪽

1 답 (가) $-\cos x$ (나) -1

(다) $-t$ (라) $-\frac{1}{2}(1 - \sin x)^2$

2 답 (1) $\frac{1}{20}(4x+3)^5 + C$ (2) $-\frac{1}{3}\cos(3x-1) + C$

문제

191~193쪽

01-1 답 (1) $-x(1-x)^6 + C$ (2) $\sqrt{x^2-2x-3} + C$

(3) $\frac{2}{3}(e^x+2)\sqrt{e^x+2} + C$

(4) $\frac{1}{4}\{\ln(x^2+2)\}^2 + C$

(5) $\frac{1}{2}\tan^2 x + C$ (6) $\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + C$

(1) $1-x=t$ 로 놓으면 $x=1-t$

$1-x=t$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$-1 = \frac{dt}{dx}$$

$$\therefore \int (7x-1)(1-x)^5 dx$$

$$= \int \{7(1-t)-1\}t^5 \times (-1) dt$$

$$= \int (7t^6-6t^5) dt = t^7 - t^6 + C$$

$$= (1-x)^7 - (1-x)^6 + C = -x(1-x)^6 + C$$

(2) $x^2-2x-3=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x-2 = \frac{dt}{dx}$$

$$\therefore \int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int t^{-\frac{1}{2}} dt = t^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \sqrt{t} + C = \sqrt{x^2-2x-3} + C$$

(3) $e^x+2=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^x = \frac{dt}{dx}$$

$$\therefore \int e^x \sqrt{e^x+2} dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{\frac{1}{2}} dt$$

$$= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}t\sqrt{t} + C$$

$$= \frac{2}{3}(e^x+2)\sqrt{e^x+2} + C$$

(4) $\ln(x^2+2)=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\frac{2x}{x^2+2} &= \frac{dt}{dx} \\ \therefore \int \frac{x}{x^2+2} \ln(x^2+2) dx &= \int t \times \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \int t dt \\ &= \frac{1}{4} t^2 + C \\ &= \frac{1}{4} \{\ln(x^2+2)\}^2 + C\end{aligned}$$

(5) $\tan x=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\sec^2 x &= \frac{dt}{dx} \\ \therefore \int \sec^2 x \tan x dx &= \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C \\ &= \frac{1}{2} \tan^2 x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(6) \int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x} dx &= \int \frac{\cos x (1-\sin^2 x)}{1+\sin x} dx \\ &= \int \frac{\cos x (1+\sin x)(1-\sin x)}{1+\sin x} dx \\ &= \int \cos x (1-\sin x) dx\end{aligned}$$

$1-\sin x=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}-\cos x &= \frac{dt}{dx} \\ \therefore \int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x} dx &= \int \cos x (1-\sin x) dx \\ &= \int t \times (-1) dt = -\int t dt \\ &= -\frac{1}{2} t^2 + C_1 \\ &= -\frac{1}{2} (1-\sin x)^2 + C_1 \\ &= \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x + C\end{aligned}$$

다른 풀이

(6) $\sin x=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{dt}{dx} \\ \therefore \int \frac{\cos^3 x}{1+\sin x} dx &= \int \cos x (1-\sin x) dx \\ &= \int (1-t) dt \\ &= t - \frac{1}{2} t^2 + C \\ &= \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x + C\end{aligned}$$

01-2 [답] 41

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x) dx = \int (4x+2)(x^2+x+1)^3 dx \\ x^2+x+1 &= t \text{로 놓고 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ 2x+1 &= \frac{dt}{dx}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int (4x+2)(x^2+x+1)^3 dx \\ &= \int t^3 \times 2 dt = 2 \int t^3 dt \\ &= \frac{1}{2} t^4 + C = \frac{1}{2} (x^2+x+1)^4 + C\end{aligned}$$

이때 $f(-1)=1$ 에서

$$\frac{1}{2} + C = 1 \quad \therefore C = \frac{1}{2}$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2} (x^2+x+1)^4 + \frac{1}{2}$ 이므로

$$f(1) = \frac{81}{2} + \frac{1}{2} = 41$$

01-3 [답] 7

$1+\sin x=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{dt}{dx} \\ \therefore f(x) &= \int \cos x (1+\sin x)^4 dx = \int t^4 dt \\ &= \frac{1}{5} t^5 + C = \frac{1}{5} (1+\sin x)^5 + C\end{aligned}$$

이때 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{5}$ 에서 $C = \frac{3}{5}$

따라서 $f(x) = \frac{1}{5} (1+\sin x)^5 + \frac{3}{5}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{32}{5} + \frac{3}{5} = 7$$

01-4 [답] $f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - x - 1$

$$\begin{aligned}f(x) &= \int \frac{e^{4x}}{e^{2x}+1} dx - \int \frac{1}{e^{2x}+1} dx \\ &= \int \frac{e^{4x}-1}{e^{2x}+1} dx = \int \frac{(e^{2x}+1)(e^{2x}-1)}{e^{2x}+1} dx \\ &= \int (e^{2x}-1) dx \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - x + C\end{aligned}$$

이때 $f(0) = -\frac{1}{2}$ 에서

$$\frac{1}{2} + C = -\frac{1}{2} \quad \therefore C = -1$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} e^{2x} - x - 1$$

02-1 [답] (1) $\ln|e^{2x}-1|+C$ (2) $\ln|2^x-x^2|+C$

$$(3) -\frac{1}{2} \ln|1+2\cos x|+C \quad (4) \ln|\sin x|+C$$

(1) $(e^{2x}-1)' = 2e^{2x}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} dx &= \int \frac{(e^{2x}-1)'}{e^{2x}-1} dx \\ &= \ln|e^{2x}-1| + C\end{aligned}$$

(2) $(2^x - x^2)' = 2^x \ln 2 - 2x$ 이므로

$$\int \frac{2^x \ln 2 - 2x}{2^x - x^2} dx = \int \frac{(2^x - x^2)'}{2^x - x^2} dx \\ = \ln |2^x - x^2| + C$$

(3) $(1 + 2 \cos x)' = -2 \sin x$ 이므로

$$\int \frac{\sin x}{1 + 2 \cos x} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2 \sin x}{1 + 2 \cos x} dx \\ = -\frac{1}{2} \int \frac{(1 + 2 \cos x)'}{1 + 2 \cos x} dx \\ = -\frac{1}{2} \ln |1 + 2 \cos x| + C$$

(4) $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ 이고 $(\sin x)' = \cos x$ 이므로

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \\ = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx \\ = \ln |\sin x| + C$$

02-2 $\frac{\ln 3}{3} + 1$

$(x^3 + 3x + 1)' = 3x^2 + 3$ 이므로

$$f(x) = \int \frac{x^2 + 1}{x^3 + 3x + 1} dx \\ = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2 + 3}{x^3 + 3x + 1} dx \\ = \frac{1}{3} \int \frac{(x^3 + 3x + 1)'}{x^3 + 3x + 1} dx \\ = \frac{1}{3} \ln |x^3 + 3x + 1| + C$$

이때 $f(0) = 1$ 에서 $C = 1$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3} \ln |x^3 + 3x + 1| + 1$ 이므로

$$f(-1) = \frac{\ln |-3|}{3} + 1 = \frac{\ln 3}{3} + 1$$

03-1 $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2 \ln |x-1| + C$

$$(2) \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C$$

$$(3) 2 \ln |x+1| - \ln |x-3| + C$$

(1) 분자를 분모로 나누어 식을 변형하면

$$\frac{x^3 + 2x - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 3) + 2}{x - 1} \\ = x^2 + x + 3 + \frac{2}{x-1}$$

$$\therefore \int \frac{x^3 + 2x - 1}{x - 1} dx \\ = \int \left(x^2 + x + 3 + \frac{2}{x-1} \right) dx \\ = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2 \ln |x-1| + C$$

(2) 분모가 인수분해되므로 식을 변형하면

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{1}{(x-3)(x-1)} \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\therefore \int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx \\ = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right) dx \\ = \frac{1}{2} (\ln |x-3| - \ln |x-1|) + C \\ = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C$$

(3) 분모를 인수분해하면 $x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ 이

므로 $\frac{x-7}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}$ (A, B 는 상수)로 놓으면

$$\frac{x-7}{x^2-2x-3} = \frac{(A+B)x-3A+B}{x^2-2x-3}$$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$$A+B=1, -3A+B=-7$$

두 식을 연립하여 풀면 $A=2, B=-1$

$$\therefore \int \frac{x-7}{x^2-2x-3} dx = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-3} \right) dx \\ = 2 \ln |x+1| - \ln |x-3| + C$$

2 치환적분법을 이용한 정적분

개념 Check

195쪽

1 $\frac{1}{3}$ (1) 33 (2) 14

$$(1) \int_0^1 15(3x-1)^4 dx = 15 \int_0^1 (3x-1)^4 dx \\ = 15 \left[\frac{1}{3} \times \frac{1}{5} (3x-1)^5 \right]_0^1 \\ = 15 \times \left\{ \frac{32}{15} - \left(-\frac{1}{15} \right) \right\} = 33$$

$$(2) \int_2^7 \sqrt{3x-5} dx = \int_2^7 (3x-5)^{\frac{1}{2}} dx \\ = \left[\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} (3x-5)^{\frac{3}{2}} \right]_2^7 \\ = \frac{128}{9} - \frac{2}{9} = 14$$

다른 풀이

(1) $3x-1=t$ 로 놓으면 $3 = \frac{dt}{dx}$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=-1$,

$x=1$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\int_0^1 15(3x-1)^4 dx = \int_{-1}^2 5t^4 dt = \left[t^5 \right]_{-1}^2 \\ = 32 - (-1) = 33$$

(2) $3x-5=t$ 로 놓으면 $3=\frac{dt}{dx}$ 이고, $x=2$ 일 때 $t=1$,

$x=7$ 일 때 $t=16$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_2^7 \sqrt{3x-5} dx &= \int_1^{16} \frac{1}{3} \sqrt{t} dt = \frac{1}{3} \int_1^{16} t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_1^{16} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{128}{3} - \frac{2}{3} \right) = 14\end{aligned}$$

2 [답] (가) $3 \cos \theta$ (나) $9 \cos^2 \theta$ (다) $\frac{1}{2} \sin 2\theta$ (라) $\frac{9}{4} \pi$

문제

196~197쪽

04-1 [답] (1) $\ln 11$ (2) 6 (3) $\frac{4}{15}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (5) $\ln 2$ (6) $\frac{1}{12}$

(1) $(x^2+x-1)'=2x+1$ 이므로

$$\int_1^3 \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx = \left[\ln |x^2+x-1| \right]_1^3 = \ln 11$$

(2) $x^2+2x=t$ 로 놓으면 $2x+2=\frac{dt}{dx}$ 이고, $x=0$ 일 때

$t=0$, $x=2$ 일 때 $t=8$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x+1)^3 \sqrt{x^2+2x} dx &= \int_0^8 \sqrt[3]{t} \times \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^8 t^{\frac{1}{3}} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{4} t^{\frac{4}{3}} \right]_0^8 = 6\end{aligned}$$

(3) $1-x=t$ 로 놓으면 $x=1-t$ 이고 $-1=\frac{dt}{dx}$

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^1 x \sqrt{1-x} dx &= \int_1^0 (1-t) \sqrt{t} \times (-1) dt \\ &= \int_0^1 (\sqrt{t} - t\sqrt{t}) dt \\ &= \int_0^1 (t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{3}{2}}) dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}\end{aligned}$$

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) dx = \left[-\frac{1}{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$
 $= \frac{\sqrt{2}}{4} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(5) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ 이므로

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \left[\ln |\ln x| \right]_e^{e^2} = \ln 2$$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2x \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos^2 x - 1) \sin x dx$

$\cos x=t$ 로 놓으면 $-\sin x=\frac{dt}{dx}$ 이고, $x=0$ 일 때

$t=1$, $x=\frac{\pi}{3}$ 일 때 $t=\frac{1}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (2 \cos^2 x - 1) \sin x dx \\ &= \int_1^{\frac{1}{2}} (2t^2 - 1) \times (-1) dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 (2t^2 - 1) dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^3 - t \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= \left(\frac{2}{3} - 1 \right) - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

다른 풀이

(1) $x^2+x-1=t$ 로 놓으면 $2x+1=\frac{dt}{dx}$ 이고, $x=1$ 일 때

$t=1$, $x=3$ 일 때 $t=11$ 이므로

$$\int_1^3 \frac{2x+1}{x^2+x-1} dx = \int_1^{11} \frac{1}{t} dt = \left[\ln |t| \right]_1^{11} = \ln 11$$

(4) $2x+\frac{\pi}{4}=t$ 로 놓으면 $2=\frac{dt}{dx}$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=\frac{\pi}{4}$,

$x=\frac{\pi}{4}$ 일 때 $t=\frac{3}{4}\pi$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) dx &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin t \times \frac{1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin t dt \\ &= \frac{1}{2} \left[-\cos t \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right\} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

(5) $\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$ 이고, $x=e$ 일 때 $t=1$,

$x=e^2$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_1^2 \frac{1}{t} dt = \left[\ln |t| \right]_1^2 = \ln 2$$

04-2 [답] 6

$$\int_2^4 3e^{3x-6} dx = \left[e^{3x-6} \right]_2^4 = e^6 - 1$$

따라서 $k=e^6-1$ 이므로 $\ln |k+1| = \ln e^6 = 6$

다른 풀이

$3x-6=t$ 로 놓으면 $3=\frac{dt}{dx}$ 이고, $x=2$ 일 때 $t=0$,

$x=4$ 일 때 $t=6$ 이므로

$$\int_2^4 3e^{3x-6} dx = \int_0^6 e^t dt = \left[e^t \right]_0^6 = e^6 - 1$$

따라서 $k=e^6-1$ 이므로 $\ln |k+1| = \ln e^6 = 6$

05-1 [답] (1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$

(1) $x = \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta$ 이고,
 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{\cos^2 \theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \theta}{\cos \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

(2) $x = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta$ 이고,
 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{(\tan^2 \theta + 1)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^4 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3 부분적분법

문제

199~201쪽

06-1 [답] (1) $\left(\frac{2}{3} - x \right) e^{3x} + C$ (2) $(x-1) \sin x + \cos x + C$

(3) $\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C$

(1) $f(x) = 1 - 3x$, $g'(x) = e^{3x}$ 으로 놓으면

$f'(x) = -3$, $g(x) = \frac{1}{3} e^{3x}$

$$\begin{aligned} \therefore \int (1-3x)e^{3x} dx &= \frac{1}{3}(1-3x)e^{3x} - \int (-3) \times \frac{1}{3} e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3}(1-3x)e^{3x} + \int e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3} e^{3x} - x e^{3x} + \frac{1}{3} e^{3x} + C = \left(\frac{2}{3} - x \right) e^{3x} + C \end{aligned}$$

(2) $f(x) = x - 1$, $g'(x) = \cos x$ 로 놓으면

$f'(x) = 1$, $g(x) = \sin x$

$$\begin{aligned} \therefore \int (x-1) \cos x dx &= (x-1) \sin x - \int \sin x dx \\ &= (x-1) \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

(3) $f(x) = \ln x$, $g'(x) = x^2$ 으로 놓으면

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{1}{3} x^3$

$$\begin{aligned} \therefore \int x^2 \ln x dx &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{3} x^3 dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C \end{aligned}$$

06-2 [답] $\frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{8}$

$u(x) = \ln 2x$, $v'(x) = x$ 로 놓으면

$u'(x) = \frac{1}{x}$, $v(x) = \frac{1}{2} x^2$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int x \ln 2x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln 2x - \int \frac{1}{x} \times \frac{1}{2} x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln 2x - \frac{1}{2} \int x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln 2x - \frac{1}{4} x^2 + C \end{aligned}$$

이때 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$ 에서 $-\frac{1}{16} + C = \frac{1}{16} \quad \therefore C = \frac{1}{8}$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2} x^2 \ln 2x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{8}$ 이므로

$f(1) = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{8}$

07-1 [답] (1) $\frac{1}{4} (2x^2 - 2x + 1) e^{2x} + C$

(2) $\frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C$

(1) $f(x) = x^2$, $g'(x) = e^{2x}$ 으로 놓으면

$f'(x) = 2x$, $g(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$\begin{aligned} \therefore \int x^2 e^{2x} dx &= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int 2x \times \frac{1}{2} e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$\int x e^{2x} dx$ 에서 $u(x) = x$, $v'(x) = e^{2x}$ 으로 놓으면

$u'(x) = 1$, $v(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$\begin{aligned} \therefore \int x e^{2x} dx &= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

②을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{2x} dx &= \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \left(\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C_1 \right) \\ &= \frac{1}{4} (2x^2 - 2x + 1) e^{2x} + C \end{aligned}$$

(2) $f(x)=\cos x$, $g'(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x)=-\sin x, g(x)=-e^{-x}$$

$$\therefore \int e^{-x} \cos x dx$$

$$=-e^{-x} \cos x - \int (-\sin x) \times (-e^{-x}) dx$$

$$=-e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \sin x dx \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$\int e^{-x} \sin x dx$ 에서 $u(x)=\sin x$, $v'(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면

$$u'(x)=\cos x, v(x)=-e^{-x}$$

$$\therefore \int e^{-x} \sin x dx$$

$$=-e^{-x} \sin x - \int \cos x \times (-e^{-x}) dx$$

$$=-e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉒}$ 을 $\textcircled{㉑}$ 에 대입하면

$$\int e^{-x} \cos x dx$$

$$=-e^{-x} \cos x - (-e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \cos x dx)$$

$$2 \int e^{-x} \cos x dx = -e^{-x} \cos x + e^{-x} \sin x$$

$$\therefore \int e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2} e^{-x} (\sin x - \cos x) + C$$

08-1 $\textcircled{㉑}$ (1) $1-\frac{2}{e}$ (2) $\frac{\pi}{2}$ (3) $\pi-2$ (4) $e-2$

(1) $f(x)=x$, $g'(x)=e^{-x}$ 으로 놓으면

$$f'(x)=1, g(x)=-e^{-x}$$

$$\therefore \int_0^1 x e^{-x} dx = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x}) dx$$

$$= \left[-x e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx$$

$$= -\frac{1}{e} + \left[-e^{-x} \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{e} + \left\{ -\frac{1}{e} - (-1) \right\}$$

$$= 1 - \frac{2}{e}$$

(2) $f(x)=x+1$, $g'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$$f'(x)=1, g(x)=\sin x$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \cos x dx$$

$$= \left[(x+1) \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

$$= \frac{\pi}{2} + 1 - \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 1 - 1 = \frac{\pi}{2}$$

(3) $f(x)=x^2$, $g'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$$f'(x)=2x, g(x)=-\cos x$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx$$

$$= \left[-x^2 \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \times (-\cos x) dx$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ 에서 $u(x)=x$, $v'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$$u'(x)=1, v(x)=\sin x$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉒}$ 을 $\textcircled{㉑}$ 에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x dx = 2 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

$$= \pi - 2$$

(4) $f(x)=x^2$, $g'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x)=2x, g(x)=e^x$$

$$\therefore \int_0^1 x^2 e^x dx = \left[x^2 e^x \right]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx$$

$$= e - 2 \int_0^1 x e^x dx \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$\int_0^1 x e^x dx$ 에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$u'(x)=1, v(x)=e^x$$

$$\therefore \int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= e - \left[e^x \right]_0^1$$

$$= e - (e - 1)$$

$$= 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉒}$ 을 $\textcircled{㉑}$ 에 대입하면

$$\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2$$

08-2 $\textcircled{㉑}$ -1

$f(x)=\cos x$, $g'(x)=e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x)=-\sin x, g(x)=e^x$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx$$

$$= \left[e^x \cos x \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} (-\sin x) \times e^x dx$$

$$= -e^{\pi} + e^{-\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x dx \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x dx \text{에서 } u(x) = \sin x, v'(x) = e^x \text{으로 놓으면}$$

$$u'(x) = \cos x, v(x) = e^x$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin x dx = \left[e^x \sin x \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx$$

$$= - \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①을 ①에 대입하면

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx = -e^{\pi} + e^{-\pi} + \left(- \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx \right)$$

$$2 \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx = -e^{\pi} + e^{-\pi}$$

$$\therefore \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx = -\frac{e^{\pi}}{2} + \frac{e^{-\pi}}{2}$$

따라서 $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$ 이므로

$$a - b = -1$$

정적분으로 정의된 함수

개념 Check

202쪽

1 $\textcircled{답}$ (1) $x \sin x$ (2) $\ln \frac{x+1}{x}$

문제

203~205쪽

09-1 $\textcircled{답}$ (1) $f(x) = e^x - 2e + 2$ (2) $f(x) = \cos x + \frac{3}{4}$

(1) $\int_0^1 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = e^x + 2k$$

이를 $\int_0^1 f(t) dt = k$ 에 대입하면

$$\int_0^1 (e^t + 2k) dt = k$$

$$\left[e^t + 2kt \right]_0^1 = k$$

$$e + 2k - 1 = k \quad \therefore k = -e + 1$$

$$\therefore f(x) = e^x + 2(-e + 1) = e^x - 2e + 2$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = \cos x + k$$

이를 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t dt = k$ 에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos t + k) \sin t dt = k$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin t \cos t + k \sin t) dt = k$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2} \sin 2t + k \sin t \right) dt = k \quad \leftarrow \sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

$$\left[-\frac{1}{4} \cos 2t - k \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = k$$

$$\left(\frac{1}{8} - \frac{k}{2} \right) - \left(-\frac{1}{4} - k \right) = k$$

$$\therefore k = \frac{3}{4}$$

$$\therefore f(x) = \cos x + \frac{3}{4}$$

다른 풀이

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = \cos x + k$$

이를 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(t) \sin t dt = k$ 에 대입하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos t + k) \sin t dt = k$$

$\cos t = s$ 로 놓으면 $-\sin t = \frac{ds}{dt}$ 이고, $t=0$ 일 때

$$s=1, t=\frac{\pi}{3} \text{일 때 } s=\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\int_1^{\frac{1}{2}} (s+k) \times (-1) ds = k, \int_{\frac{1}{2}}^1 (s+k) ds = k$$

$$\left[\frac{1}{2} s^2 + ks \right]_{\frac{1}{2}}^1 = k, \left(\frac{1}{2} + k \right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{k}{2} \right) = k$$

$$\therefore k = \frac{3}{4}$$

$$\therefore f(x) = \cos x + \frac{3}{4}$$

10-1 $\textcircled{답}$ $\frac{1}{2}$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \cos x - a \sin x$$

주어진 등식의 양변에 $x=\pi$ 를 대입하면

$$\int_{\pi}^{\pi} f(t) dt = -a - \frac{1}{2}$$

$$0 = -a - \frac{1}{2} \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

따라서 $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \sin x$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

10-2 $\textcircled{답}$ 1

주어진 등식에서

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = ae^{-x} + x^2 - 3x + 3$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = -ae^{-x} + 2x - 3$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = -ae^{-x} + 2x - 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = ae^{-x} + 2$$

①의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$\int_0^0 f(t) dt = -a - 3$$

$$0 = -a - 3 \quad \therefore a = -3$$

따라서 $f(x) = -3e^{-x} + 2$ 이므로

$$f(\ln 3) = -1 + 2 = 1$$

11-1 $\textcircled{B} -\frac{13}{5}$

주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x(\sqrt{x} - 2)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x(\sqrt{x} - 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \quad (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	4	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$\begin{aligned} f(4) &= \int_1^4 t(\sqrt{t} - 2) dt = \int_1^4 (t\sqrt{t} - 2t) dt \\ &= \int_1^4 (t^{\frac{3}{2}} - 2t) dt = \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} - t^2 \right]_1^4 \\ &= \left(\frac{64}{5} - 16 \right) - \left(\frac{2}{5} - 1 \right) = -\frac{13}{5} \end{aligned}$$

11-2 $\textcircled{B} 4\ln 2 - \frac{3}{2}$

$$f(x) = \int_0^x (2 - e^t)(2 + e^t) dt = \int_0^x (4 - e^{2t}) dt$$

함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 4 - e^{2x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 4 - e^{2x} = 0$$

$$e^{2x} = 4, 2x = \ln 4 \quad \therefore x = \ln 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\ln 2$	...
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	/	극대	\

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \ln 2$ 에서 극대이면서 최대이므로
최댓값은

$$\begin{aligned} f(\ln 2) &= \int_0^{\ln 2} (4 - e^{2t}) dt \\ &= \left[4t - \frac{1}{2}e^{2t} \right]_0^{\ln 2} \\ &= (4\ln 2 - 2) - \left(-\frac{1}{2} \right) = 4\ln 2 - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

연습문제

206~208쪽

1 $\frac{5}{3}$	2 3	3 ④	4 $2\ln 2$	5 27
6 $-\ln 6$	7 ③	8 ②	9 $\frac{5}{11}$	10 3
11 ③	12 $3e^3$	13 ②	14 2	15 -2
16 2	17 2	18 ①	19 1	20 ④
21 $5e$	22 5			

1 $x+1=t$ 로 놓으면 $x=t-1$

$x+1=t$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$1 = \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \\ &= \int \frac{t-1}{\sqrt{t}} dt = \int (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}) dt \\ &= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{2}{3}t\sqrt{t} - 2\sqrt{t} + C \\ &= \frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1} + C \\ &= \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + C \end{aligned}$$

이때 $f(0) = -1$ 에서

$$-\frac{4}{3} + C = -1 \quad \therefore C = \frac{1}{3}$$

따라서 $f(x) = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x+1} + \frac{1}{3}$ 이므로

$$f(3) = \frac{2}{3} \times 2 + \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

2 $f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

$\ln x = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx \\ &= \int \sin t \, dt \\ &= -\cos t + C \\ &= -\cos(\ln x) + C\end{aligned}$$

이때 $f(1)=1$ 에서

$$-1+C=1 \quad \therefore C=2$$

따라서 $f(x)=-\cos(\ln x)+2$ 이므로

$$f(e^\pi)=1+2=3$$

- 3 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(t)$ 이므로

$$f'(t)=\frac{1}{t}+4e^{2t}$$

$$\therefore f(t)=\int \left(\frac{1}{t}+4e^{2t}\right) dt = \ln t + 2e^{2t} + C \quad (\because t>0)$$

$$f(1)=2e^2+1$$

$$2e^2+C=2e^2+1 \quad \therefore C=1$$

따라서 $f(t)=\ln t + 2e^{2t} + 1$ 이므로

$$f(e)=1+2e^{2e}+1=2e^{2e}+2$$

$$\begin{aligned}4 \quad F(x) &= \int f(x) dx = \int \frac{1}{x \ln x} dx \\ &= \int \frac{(\ln x)'}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + C\end{aligned}$$

이때 $F(e)=\ln 2$ 에서 $C=\ln 2$

따라서 $F(x)=\ln |\ln x| + \ln 2$ 이므로

$$F(e^2)=\ln 2 + \ln 2 = 2\ln 2$$

$$5 \quad f'(x)=3f(x) \text{에서 } \frac{f'(x)}{f(x)}=3 \text{이므로}$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int 3 dx$$

$$\therefore \ln f(x)=3x+C \quad (\because f(x)>0)$$

이때 $f(0)=1$ 에서 $C=0$

따라서 $\ln f(x)=3x$ 이므로 $f(x)=e^{3x}$

$$\therefore f(\ln 3)=e^{3\ln 3}=e^{\ln 27}=27$$

$$\begin{aligned}6 \quad f(x) &= \int \frac{1}{x^2+7x+12} dx \\ &= \int \frac{1}{(x+3)(x+4)} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} \right) dx \\ &= \ln |x+3| - \ln |x+4| + C \\ &= \ln \left| \frac{x+3}{x+4} \right| + C\end{aligned}$$

이때 $f(-2)=-\ln 2$ 에서

$$\ln \frac{1}{2} + C = -\ln 2 \quad \therefore C=0$$

$$\therefore f(x)=\ln \left| \frac{x+3}{x+4} \right|$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{20} f(k) &= \sum_{k=1}^{20} \ln \left| \frac{k+3}{k+4} \right| \\ &= \ln \frac{4}{5} + \ln \frac{5}{6} + \ln \frac{6}{7} + \cdots + \ln \frac{23}{24} \\ &= \ln \left(\frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{6}{7} \times \cdots \times \frac{23}{24} \right) \\ &= \ln \frac{1}{6} = -\ln 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}7 \quad & \int_1^e \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \ln x \, dx - \int_1^e \frac{2}{x^2} \ln x \, dx \\ &= \int_1^e \left\{ \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \ln x - \frac{2}{x^2} \ln x \right\} dx \\ &= \int_1^e \frac{3}{x} \ln x \, dx\end{aligned}$$

$\ln x=t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$ 이고, $x=1$ 일 때 $t=0$, $x=e$ 일

때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned}& \int_1^e \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \ln x \, dx - \int_1^e \frac{2}{x^2} \ln x \, dx \\ &= \int_1^e \frac{3}{x} \ln x \, dx = 3 \int_0^1 t \, dt \\ &= 3 \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}8 \quad & \int_0^a \frac{1}{1+e^{-t}} dt = \int_0^a \frac{e^t}{e^t+1} dt \\ &= \int_0^a \frac{(e^t+1)'}{e^t+1} dt \\ &= \left[\ln(e^t+1) \right]_0^a \quad (\because e^t+1>0) \\ &= \ln(e^a+1) - \ln 2 \\ &= \ln \frac{e^a+1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $\ln \frac{e^a+1}{2} = \ln 3$ 이므로 $\frac{e^a+1}{2} = 3$

$$e^a=5 \quad \therefore a=\ln 5$$

$$9 \quad \sin x=t \text{로 놓으면 } \cos x=\frac{dt}{dx} \text{이고, } x=0 \text{일 때 } t=0,$$

$x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned}a_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos x \, dx = \int_0^1 t^n \, dt \\ &= \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k a_{k+1} &= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) \\
&\quad + \cdots + \left(\frac{1}{21} - \frac{1}{22} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{22} \\
&= \frac{5}{11}
\end{aligned}$$

- 10 $x = a \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta} = a \cos \theta$ 이고,
 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=a$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \times a \cos \theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 (1 - \sin^2 \theta)} \times a \cos \theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \times a \cos \theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta d\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\
&= \frac{a^2}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{a^2}{4} \pi
\end{aligned}$$

따라서 $\frac{a^2}{4} \pi = \frac{9}{4} \pi$ 이므로

$$a^2 = 9$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

다른 풀이

$y = \sqrt{a^2 - x^2}$ 이라 하고 양변을 제곱하면

$$y^2 = a^2 - x^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = a^2 \quad (\text{단, } y \geq 0)$$

따라서 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$ 의 값은 원

점을 중심으로 하고 반지름의 길

이가 a 인 원의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 과 같으

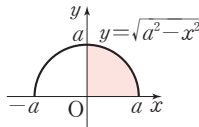
므로

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{4} \pi$$

따라서 $\frac{a^2}{4} \pi = \frac{9}{4} \pi$ 이므로

$$a^2 = 9$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$



- 11 $u(x) = 2x$, $v'(x) = \cos 2x$ 로 놓으면

$$u'(x) = 2, \quad v(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\therefore f(x) = \int 2x \cos 2x dx$$

$$= x \sin 2x - \int \sin 2x dx$$

$$= x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + C$$

이때 $f(0) = -\frac{1}{2}$ 에서

$$\frac{1}{2} + C = -\frac{1}{2} \quad \therefore C = -1$$

따라서 $f(x) = x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x - 1$ 이므로

$$f(\pi) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

- 12 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ 이므로
 $f'(x) = (x^2 + 2)e^{x+2}$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^2 + 2)e^{x+2} dx$$

$g(x) = x^2 + 2$, $h'(x) = e^{x+2}$ 으로 놓으면

$$g'(x) = 2x, \quad h(x) = e^{x+2}$$

$$\therefore f(x) = \int (x^2 + 2)e^{x+2} dx$$

$$= (x^2 + 2)e^{x+2} - \int 2xe^{x+2} dx$$

$$= (x^2 + 2)e^{x+2} - 2 \int xe^{x+2} dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\int xe^{x+2} dx$ 에서 $u(x) = x$, $v'(x) = e^{x+2}$ 으로 놓으면

$$u'(x) = 1, \quad v(x) = e^{x+2}$$

$$\therefore \int xe^{x+2} dx = xe^{x+2} - \int e^{x+2} dx$$

$$= xe^{x+2} - e^{x+2} + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$f(x) = (x^2 + 2)e^{x+2} - 2(xe^{x+2} - e^{x+2} + C_1)$$

$$= (x^2 - 2x + 4)e^{x+2} + C$$

이때 $f(-2) = 12$ 에서

$$12 + C = 12 \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = (x^2 - 2x + 4)e^{x+2}$ 이므로

$$f(1) = 3e^3$$

- 13 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ 이므로

$$\int_0^\pi x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^\pi x \sin x dx$$

$f(x) = x$, $g'(x) = \sin x$ 로 놓으면

$$f'(x) = 1, \quad g(x) = -\cos x$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^{\pi} x \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) dx \\ &= \int_0^{\pi} x \sin x dx \\ &= \left[-x \cos x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx \\ &= \pi + \left[\sin x\right]_0^{\pi} = \pi \end{aligned}$$

14 $f(x)=(\ln x)^2$, $g'(x)=2x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \ln x}{x}, \quad g(x) = x^2 \\ \therefore \int_1^e 2x(\ln x)^2 dx &= \left[x^2(\ln x)^2\right]_1^e - \int_1^e 2x \ln x dx \\ &= e^2 - 2 \int_1^e x \ln x dx \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$\int_1^e x \ln x dx$ 에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{x}, \quad v(x) = \frac{1}{2}x^2 \\ \therefore \int_1^e x \ln x dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{8} \end{aligned}$$

⑧을 ⑦에 대입하면

$$\int_1^e 2x(\ln x)^2 dx = e^2 - 2\left(\frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2-1}{2}$$

따라서 $a=1$, $b=-1$ 이므로

$$a-b=2$$

15 $\int_0^1 e^{-t} f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = x + k$$

이를 $\int_0^1 e^{-t} f(t) dt = k$ 에 대입하면

$$\int_0^1 e^{-t}(t+k) dt = k$$

이때 $u(t)=t+k$, $v'(t)=e^{-t}$ 으로 놓으면 $u'(t)=1$,

$v(t)=-e^{-t}$ 이므로

$$\left[-e^{-t}(t+k)\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-t} dt = k$$

$$-\frac{1}{e}(1+k) + k + \left[-e^{-t}\right]_0^1 = k$$

$$-\frac{2}{e} - \frac{k}{e} + k + 1 = k$$

$$\therefore k = e - 2$$

따라서 $f(x) = x + e - 2$ 이므로

$$f(-e) = -e + e - 2 = -2$$

16 주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 (t-1)f(t) dt = -a+b$$

$$0 = -a+b$$

$$\therefore a=b \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

주어진 등식에서

$$\int_1^x t f(t) dt - x \int_1^x f(t) dt = x^2 \ln x - ax + b$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$x f(x) - \int_1^x f(t) dt - x f(x) = 2x \ln x + x - a$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt = -2x \ln x - x + a$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 f(t) dt = -1+a$$

$$0 = -1+a \quad \therefore a=1$$

이를 ⑦에 대입하면 $b=1$

$$\therefore a+b=1+1=2$$

17 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (a+b \cos x) \sin x$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=\frac{\pi}{2}$ 에서 극댓값 1을 가지므로

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{에서 } a=0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{에서}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a+b \cos t) \sin t dt = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} b \sin t \cos t dt = 1 \quad (\because a=0)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{2} \sin 2t dt = 1$$

$$\left[-\frac{b}{4} \cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$\frac{b}{4} - \left(-\frac{b}{4}\right) = 1, \quad \frac{b}{2} = 1$$

$$\therefore b=2$$

$$\therefore a+b=0+2=2$$

18 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$2x-2=0 \quad \therefore x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이므로
최솟값은

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^1 \frac{2t-2}{t^2-2t+2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(t^2-2t+2)'}{t^2-2t+2} dt \\ &= \left[\ln(t^2-2t+2) \right]_0^1 \quad (\because t^2-2t+2 > 0) \\ &= -\ln 2 \end{aligned}$$

- 19 $f(t) = \sin \pi t + \cos \pi t$ 라 하고 함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x (\sin \pi t + \cos \pi t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} \int_2^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x-2} \\ &= F'(2) \\ &= f(2) \\ &= \sin 2\pi + \cos 2\pi \\ &= 1 \end{aligned}$$

- 20 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이므로 $g(f(x)) = x$
두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 정의되므로 $f(x) > 0$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{f'(g(x))} \text{에서} \\ g'(f(x)) &= \frac{1}{f'(g(f(x)))} = \frac{1}{f'(x)} \\ \therefore \int_1^a \frac{1}{g'(f(x))f(x)} dx &= \int_1^a \frac{f'(x)}{f(x)} dx \\ &= \left[\ln f(x) \right]_1^a \quad (\because f(x) > 0) \\ &= \ln f(a) - \ln f(1) \\ &= \ln f(a) - \ln 8 \end{aligned}$$

즉, $\ln f(a) - \ln 8 = 2 \ln a + \ln(a+1) - \ln 2$ 이고 모든 양수 a 에 대하여 위의 등식이 성립하므로 $a=2$ 를 대입하면

$$\ln f(2) - 3 \ln 2 = 2 \ln 2 + \ln 3 - \ln 2$$

$$\ln f(2) = 4 \ln 2 + \ln 3 = \ln 48$$

$$\therefore f(2) = 48$$

- 21 $f(x) = x^n$, $g'(x) = e^x$ 으로 놓으면

$$f'(x) = nx^{n-1}, \quad g(x) = e^x$$

$$\begin{aligned} \therefore T_n &= \int_0^1 x^n e^x dx \\ &= \left[x^n e^x \right]_0^1 - \int_0^1 nx^{n-1} e^x dx \\ &= e - n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx \\ &= e - nT_{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_6 &= e - 6T_5 = e - 6(e - 5T_4) = 30T_4 - 5e \text{이므로} \\ 30T_4 - T_6 &= 5e \end{aligned}$$

- 22 (㉞)에서 $g(x) = \int_1^x \frac{f(t^2+2)}{t} dt$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$g(1) = 0$$

또 $g(x) = \int_1^x \frac{f(t^2+2)}{t} dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = \frac{f(x^2+2)}{x}$$

$$\int_1^3 x g(x) dx \text{에서 } u(x) = g(x), \quad v'(x) = x \text{로 놓으면}$$

$$u'(x) = g'(x), \quad v(x) = \frac{1}{2}x^2$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^3 x g(x) dx &= \left[\frac{1}{2} x^2 g(x) \right]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{2} x^2 g'(x) dx \\ &= \frac{9}{2} g(3) - \frac{1}{2} g(1) - \frac{1}{2} \int_1^3 x^2 \times \frac{f(x^2+2)}{x} dx \\ &= \frac{9}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times 0 - \frac{1}{2} \int_1^3 x f(x^2+2) dx \\ &= 9 - \frac{1}{2} \int_1^3 x f(x^2+2) dx \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

$$\int_1^3 x f(x^2+2) dx \text{에서 } x^2+2=s \text{로 놓으면 } 2x = \frac{ds}{dx} \text{이고,}$$

$x=1$ 일 때 $s=3$, $x=3$ 일 때 $s=11$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^3 x f(x^2+2) dx &= \int_3^{11} f(s) \times \frac{1}{2} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_3^{11} f(s) ds \\ &= \frac{1}{2} \int_3^{11} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \times 16 \quad (\because \textcircled{4}) \\ &= 8 \end{aligned}$$

이를 ㉞에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_1^3 x g(x) dx &= 9 - \frac{1}{2} \times 8 \\ &= 5 \end{aligned}$$

III-2 01 정적분의 활용(1)

정적분과 급수

개념 Check

212쪽

- 1 답 (가) $\frac{1}{n}$ (나) $\frac{k}{n}$ (다) x^2 (라) $\frac{1}{3}x^3$ (마) $\frac{7}{3}$

문제

213~214쪽

01-1 ㉡ ③

오른쪽 그림과 같이 구간

$[1, 2]$ 를 n 등분하면 각 구간의 오른쪽 끝 점의 x 좌표는 차례대로

$$1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{2}{n}, 1 + \frac{3}{n}, \dots, 1 + \frac{n}{n} (=2)$$

이에 대응하는 y 의 값은 각각

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}}, \sqrt{1 + \frac{2}{n}}, \sqrt{1 + \frac{3}{n}}, \dots, \sqrt{1 + \frac{n}{n}}$$

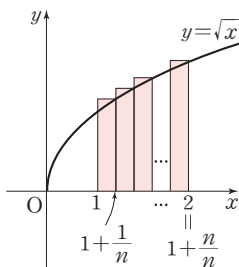
이때 색칠한 각 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{1}{n}$ 이므로 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{2}{n}} + \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{3}{n}} + \dots + \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{n}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}}$$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{k}{n}}$$



01-2 ㉡ $\frac{19}{6}$

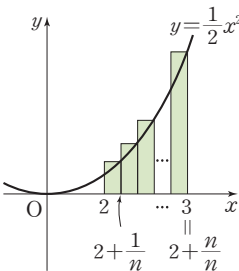
오른쪽 그림과 같이 구간

$[2, 3]$ 을 n 등분하면 각 구간의 오른쪽 끝 점의 x 좌표는 차례대로

$$2 + \frac{1}{n}, 2 + \frac{2}{n}, 2 + \frac{3}{n}, \dots, 2 + \frac{n}{n} (=3)$$

이에 대응하는 y 의 값은 각각

$$\frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2, \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{n}\right)^2, \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{n}\right)^2, \dots, \frac{1}{2} \left(2 + \frac{n}{n}\right)^2$$



이때 색칠한 각 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{1}{n}$ 이므로 직사각형의 넓이의 합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} \left(2 + \frac{2}{n}\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} \left(2 + \frac{n}{n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2n} \left\{ \left(4 + \frac{4}{n} + \frac{1^2}{n^2}\right) + \left(4 + \frac{4 \times 2}{n} + \frac{2^2}{n^2}\right) \right. \\ &\quad \left. + \left(4 + \frac{4 \times 3}{n} + \frac{3^2}{n^2}\right) + \dots + \left(4 + \frac{4n}{n} + \frac{n^2}{n^2}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2n} \left\{ 4n + \frac{4}{n} (1 + 2 + 3 + \dots + n) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n^2} (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \right\} \\ &= \frac{1}{2n} \left\{ 4n + \frac{4}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} \end{aligned}$$

$$= 2 + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{12} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2 + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{12} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right\} \\ &= 2 + 1 + \frac{1}{6} = \frac{19}{6} \end{aligned}$$

02-1 ㉡ (1) $\frac{15}{4}$ (2) $1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (3) $4 \ln 2$ (4) $3 \ln 2 - 1$

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^3}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^3 \times \frac{1}{n}$$

$1 + \frac{k}{n}$ 를 x , $\frac{1}{n}$ 을 dx 로 나타내면 적분 구간은 $[1, 2]$

이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^3}{n^4} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^3 \times \frac{1}{n} \\ &= \int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_1^2 = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\sqrt{n} + \sqrt{2k})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n} + \sqrt{2k}}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{n}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \sqrt{\frac{2k}{n}}\right) \times \frac{2}{n}$$

$\frac{2k}{n}$ 를 x , $\frac{2}{n}$ 를 dx 로 나타내면 적분 구간은 $[0, 2]$ 이

므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n (\sqrt{n} + \sqrt{2k}) &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \sqrt{\frac{2k}{n}}\right) \times \frac{2}{n} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (1 + \sqrt{x}) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_0^2 = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

(3) 주어진 식을 Σ 를 이용하여 나타내면

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n+1} + \frac{4}{n+2} + \frac{4}{n+3} + \cdots + \frac{4}{n+n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4 \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right) \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right) \times \frac{1}{n} \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \times \frac{1}{n} \end{aligned}$$

$1+\frac{k}{n}$ 를 x , $\frac{1}{n}$ 을 dx 로 나타내면 적분 구간은 $[1, 2]$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n+1} + \frac{4}{n+2} + \frac{4}{n+3} + \cdots + \frac{4}{n+n} \right) \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \times \frac{1}{n} \\ &= 4 \int_1^2 \frac{1}{x} dx = 4 \left[\ln |x| \right]_1^2 = 4 \ln 2 \end{aligned}$$

(4) 주어진 식을 Σ 를 이용하여 나타내면

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \ln \left(2 + \frac{2}{n} \right) + \ln \left(2 + \frac{4}{n} \right) + \ln \left(2 + \frac{6}{n} \right) \right. \\ & \quad \left. + \cdots + \ln \left(2 + \frac{2n}{n} \right) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(2 + \frac{2k}{n} \right) \times \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(2 + \frac{2k}{n} \right) \times \frac{2}{n} \end{aligned}$$

$2+\frac{2k}{n}$ 를 x , $\frac{2}{n}$ 를 dx 로 나타내면 적분 구간은 $[2, 4]$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \ln \left(2 + \frac{2}{n} \right) + \ln \left(2 + \frac{4}{n} \right) + \ln \left(2 + \frac{6}{n} \right) \right. \\ & \quad \left. + \cdots + \ln \left(2 + \frac{2n}{n} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(2 + \frac{2k}{n} \right) \times \frac{2}{n} \\ &= \frac{1}{2} \int_2^4 \ln x dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\left[x \ln x \right]_2^4 - \int_2^4 dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(6 \ln 2 - \left[x \right]_2^4 \right) = 3 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

다른 풀이

(1) $\frac{k}{n}$ 를 x , $\frac{1}{n}$ 을 dx 로 나타내면 적분 구간은 $[0, 1]$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n+k)^3}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right)^3 \times \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 (1+x)^3 dx \\ &= \left[\frac{1}{4} (1+x)^4 \right]_0^1 = \frac{15}{4} \end{aligned}$$

(3) $\frac{k}{n}$ 를 x , $\frac{1}{n}$ 을 dx 로 나타내면 적분 구간은 $[0, 1]$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{n+1} + \frac{4}{n+2} + \frac{4}{n+3} + \cdots + \frac{4}{n+n} \right) \\ &= 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \times \frac{1}{n} \\ &= 4 \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= 4 \left[\ln |1+x| \right]_0^1 \\ &= 4 \ln 2 \end{aligned}$$

2 넓이

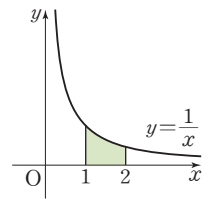
개념 Check

216쪽

1 [답] $\ln 2$

$1 \leq x \leq 2$ 에서 $y > 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^2 \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\ln |x| \right]_1^2 \\ &= \ln 2 \end{aligned}$$



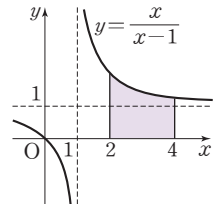
문제

217~220쪽

03-1 [답] (1) $2 + \ln 3$ (2) 2

(1) $2 \leq x \leq 4$ 에서 $y > 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

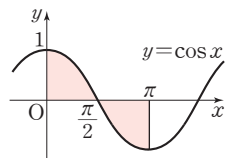
$$\begin{aligned} S &= \int_2^4 \frac{x}{x-1} dx \\ &= \int_2^4 \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) dx \\ &= \left[x + \ln |x-1| \right]_2^4 \\ &= 2 + \ln 3 \end{aligned}$$



(2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $y \geq 0$ 이고,

$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x) dx \\ &= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= 2 \end{aligned}$$



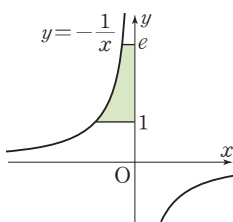
03-2 ㉡ (1) 1 (2) 4

- (1) $y = -\frac{1}{x}$ 을 x 에 대하여 풀면

$$x = -\frac{1}{y}$$

$1 \leq y \leq e$ 에서 $x < 0$ 이므로
구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e \left\{ -\left(-\frac{1}{y}\right) \right\} dy \\ &= \int_1^e \frac{1}{y} dy \\ &= \left[\ln |y| \right]_1^e = 1 \end{aligned}$$



- (2) $y = (x+2)^2$ 을 x 에 대하여 풀면

$$\sqrt{y} = x+2 \quad (\because x \geq -2)$$

$$\therefore x = \sqrt{y} - 2$$

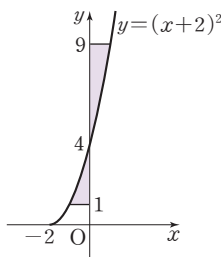
곡선 $x = \sqrt{y} - 2$ 와 y 축의
교점의 y 좌표를 구하면

$$\sqrt{y} - 2 = 0, \sqrt{y} = 2$$

$$\therefore y = 4$$

$1 \leq y \leq 4$ 에서 $x \leq 0$ 이고, $4 \leq y \leq 9$ 에서 $x \geq 0$ 이므로 구
하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 (-\sqrt{y} + 2) dy + \int_4^9 (\sqrt{y} - 2) dy \\ &= \left[-\frac{2}{3}y\sqrt{y} + 2y \right]_1^4 + \left[\frac{2}{3}y\sqrt{y} - 2y \right]_4^9 = 4 \end{aligned}$$



04-1 ㉡ (1) 2 (2) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ (3) $e - \frac{7}{6}$ (4) $\frac{e^2}{2} - e + \frac{3}{2}$

- (1) 두 곡선 $y = \ln x$, $y = -\ln x$
의 교점의 x 좌표를 구하면

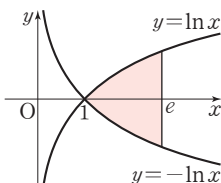
$$\ln x = -\ln x, 2\ln x = 0$$

$$\therefore x = 1$$

$1 \leq x \leq e$ 에서 $\ln x \geq -\ln x$

이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e \{ \ln x - (-\ln x) \} dx = 2 \int_1^e \ln x dx \\ &= 2 \left(\left[x \ln x \right]_1^e - \int_1^e dx \right) = 2 \left(e - \left[x \right]_1^e \right) = 2 \end{aligned}$$



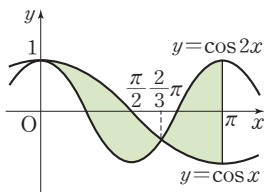
- (2) 두 곡선 $y = \cos x$,
 $y = \cos 2x$ 의 교점의
 x 좌표를 구하면

$$\cos x = \cos 2x$$

$$\cos x = 2\cos^2 x - 1$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$



$$\therefore \cos x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = 1$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

$0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ 에서 $\cos x \geq \cos 2x$ 이고, $\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \pi$ 에서
 $\cos 2x \geq \cos x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{2}{3}\pi} (\cos x - \cos 2x) dx \\ &\quad + \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (\cos 2x - \cos x) dx \\ &= \left[\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} + \left[\frac{1}{2} \sin 2x - \sin x \right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

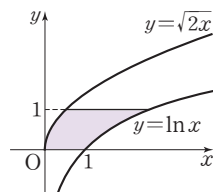
- (3) $y = \ln x$, $y = \sqrt{2x}$ 를 각각 x 에
대하여 풀면

$$x = e^y, x = \frac{1}{2}y^2$$

$0 \leq y \leq 1$ 에서 $e^y > \frac{1}{2}y^2$ 이므로

구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left(e^y - \frac{1}{2}y^2 \right) dy \\ &= \left[e^y - \frac{1}{6}y^3 \right]_0^1 = e - \frac{7}{6} \end{aligned}$$



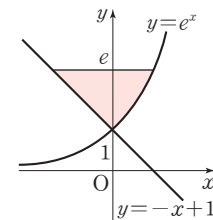
- (4) $y = e^x$, $y = -x + 1$ 을 각각 x 에
대하여 풀면

$$x = \ln y, x = -y + 1$$

$1 \leq y \leq e$ 에서 $\ln y \geq -y + 1$ 이

므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e \{ \ln y - (-y + 1) \} dy \\ &= \int_1^e \ln y dy + \int_1^e (y - 1) dy \\ &= \left[y \ln y \right]_1^e - \int_1^e dy + \left[\frac{1}{2}y^2 - y \right]_1^e \\ &= e - \left[y \right]_1^e + \left(\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{e^2}{2} - e + \frac{3}{2} \end{aligned}$$



05-1 ㉡ $\frac{1}{4}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^k (-3\sqrt{x} + 1) dx = 0, \left[-2x\sqrt{x} + x \right]_0^k = 0$$

$$-2k\sqrt{k} + k = 0, -k(2\sqrt{k} - 1) = 0$$

$$\therefore k = \frac{1}{4} \quad (\because k > \frac{1}{9})$$

05-2 ㉡ $\sqrt{3}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (k \sin x - \cos x) dx = 0$$

$$\left[-k \cos x - \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 0$$

$$\frac{k}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \quad \therefore k = \sqrt{3}$$

05-3 ㉡ $\frac{1}{e}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_k^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx = 0$$

$\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$ 이고, $x = k$ 일 때 $t = \ln k$,

$x = e$ 일 때 $t = 1$ 이므로

$$\int_{\ln k}^1 t^3 dt = 0, \quad \left[\frac{1}{4} t^4 \right]_{\ln k}^1 = 0$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} (\ln k)^4 = 0, \quad (\ln k)^4 = 1$$

$$\therefore \ln k = -1 \text{ 또는 } \ln k = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{e} \quad (\because 0 < k < 1)$$

06-1 ㉡ (1) $\frac{8}{\pi} - 2$ (2) $2e^2$

(1) 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=\sin \frac{\pi}{2}x$ 가 세 점

$(-1, -1)$, $(0, 0)$,

$(1, 1)$ 을 지나므로 곡선

$y=\sin \frac{\pi}{2}x$ 와 직선 $y=x$

의 교점의 x 좌표는

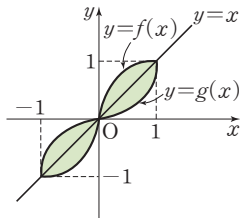
$x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

$-1 \leq x \leq 0$ 에서 $x \geq \sin \frac{\pi}{2}x$ 이고, $0 \leq x \leq 1$ 에서

$\sin \frac{\pi}{2}x \geq x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 2 \left\{ \int_{-1}^0 \left(x - \sin \frac{\pi}{2}x \right) dx + \int_0^1 \left(\sin \frac{\pi}{2}x - x \right) dx \right\} \\ &= 2 \left(\left[\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x \right]_{-1}^0 \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{\pi} - 2$$



(2) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고 $f(1)=0$, $f(e^2)=2$ 이므로 $g(0)=1$, $g(2)=e^2$ 이다.

$$\int_1^{e^2} f(x) dx = S_1,$$

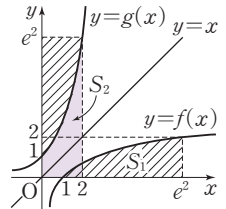
$$\int_0^2 g(x) dx = S_2 \text{라 하면 오}$$

른쪽 그림에서 빗금 친 두 부

분의 넓이가 서로 같으므로

구하는 값은

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} f(x) dx + \int_0^2 g(x) dx &= S_1 + S_2 \\ &= 2 \times e^2 = 2e^2 \end{aligned}$$



연습문제

221~222쪽

1 ⑤

2 ③

3 2

4 $\frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2}$

5 ⑤

6 10

7 $\ln 2$

8 $\frac{e}{2} - 1$

9 $\frac{8}{\pi^2}$

10 ①

11 $\frac{9-2\sqrt{3}}{36}\pi$

12 $\frac{4}{\pi}$

13 $\frac{3}{4}$

1 오른쪽 그림과 같이 구간

$[1, 3]$ 을 n 등분하면 각 구간

의 오른쪽 끝 점의 x 좌표는

차례대로

$$1 + \frac{2}{n}, 1 + \frac{4}{n}, 1 + \frac{6}{n},$$

$$\dots, 1 + \frac{2n}{n} (=3)$$

이에 대응하는 y 의 값은 각각

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^2, \left(1 + \frac{4}{n}\right)^2, \left(1 + \frac{6}{n}\right)^2, \dots, \left(1 + \frac{2n}{n}\right)^2$$

이때 색칠한 각 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{2}{n}$ 이므로 직사

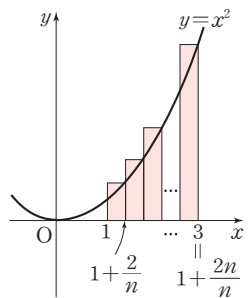
각형의 넓이의 합을 S_n 이라 하면

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{2}{n} \times \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 + \frac{2}{n} \times \left(1 + \frac{4}{n}\right)^2 + \frac{2}{n} \times \left(1 + \frac{6}{n}\right)^2 \\ &\quad + \dots + \frac{2}{n} \times \left(1 + \frac{2n}{n}\right)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2$$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2$$



$$\begin{aligned}
 2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{3k}{n}} &= \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \frac{3k}{n}} \times \frac{3}{n} \\
 &= \frac{1}{3} \int_1^4 \sqrt{x} dx \\
 &= \frac{1}{3} \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_1^4 \\
 &= \frac{14}{9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left(\cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \cos \frac{3\pi}{2n} + \cdots + \cos \frac{n\pi}{2n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{k\pi}{2n} \right) \times \frac{\pi}{n} \\
 &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{k\pi}{2n} \right) \times \frac{\pi}{2n} \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\
 &= 2 \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

- 4 $y = \ln(1-2x) + 1$ 을 x 에 대하여 풀면

$$y - 1 = \ln(1 - 2x)$$

$$1 - 2x = e^{y-1}$$

$$2x = -e^{y-1} + 1$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2}e^{y-1} + \frac{1}{2}$$

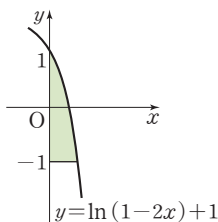
곡선 $x = -\frac{1}{2}e^{y-1} + \frac{1}{2}$ 과 y 축의 교점의 y 좌표를 구하면

$$-\frac{1}{2}e^{y-1} + \frac{1}{2} = 0, \quad e^{y-1} = 1$$

$$y - 1 = 0 \quad \therefore y = 1$$

$-1 \leq y \leq 1$ 에서 $x \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-1}^1 \left(-\frac{1}{2}e^{y-1} + \frac{1}{2} \right) dy \\
 &= \left[-\frac{1}{2}e^{y-1} + \frac{1}{2}y \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



- 5 $1 \leq x \leq e^2$ 에서 $\frac{\ln x}{x} \geq 0$ 이므로

$$S_1 = \int_1^k \frac{\ln x}{x} dx, \quad S_2 = \int_k^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx$$

$\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{x} = \frac{dt}{dx}$ 이고, $x=1$ 일 때 $t=0$, $x=k$

일 때 $t = \ln k$, $x=e^2$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$S_1 = \int_1^k \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^{\ln k} t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^{\ln k} = \frac{1}{2} (\ln k)^2$$

$$S_2 = \int_k^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \int_{\ln k}^2 t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_{\ln k}^2 = 2 - \frac{1}{2} (\ln k)^2$$

$S_1 = S_2$ 에서

$$\frac{1}{2} (\ln k)^2 = 2 - \frac{1}{2} (\ln k)^2$$

$$(\ln k)^2 = 2$$

이때 $1 < k < e^2$ 에서 $0 < \ln k < 2$ 이므로

$$\ln k = \sqrt{2} \quad \therefore k = e^{\sqrt{2}}$$

- 6 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=7$ 로 둘러싸인 도형의 넓이가 18이므로

$$\int_0^7 f(x) dx = 18 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_0^7 x f'(x) dx &= \left[x f(x) \right]_0^7 - \int_0^7 f(x) dx \\
 &= 7f(7) - \int_0^7 f(x) dx \\
 &= 7 \times 4 - 18 \quad (\because \textcircled{1}) \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

- 7 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 직선 $y = 2x$ 의

교점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{x} = 2x, \quad x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because x > 0)$$

곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 직선 $y = \frac{1}{2}x$

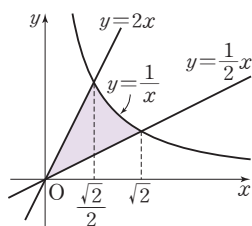
의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}x, \quad x^2 = 2 \quad \therefore x = \sqrt{2} \quad (\because x > 0)$$

$0 \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 $2x \geq \frac{1}{2}x$ 이고, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ 에서

$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \left(2x - \frac{1}{2}x \right) dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}x \right) dx \\
 &= \left[\frac{3}{4} x^2 \right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + \left[\ln |x| - \frac{1}{4} x^2 \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} \\
 &= \ln 2
 \end{aligned}$$



- 8 $f(x) = e^x - 1$ 이라 하면 $f'(x) = e^x$

접점의 좌표를 $(t, e^t - 1)$ 이라 하면 접선의 기울기가 e 이므로 $f'(t) = e$ 에서

$$e^t = e \quad \therefore t = 1$$

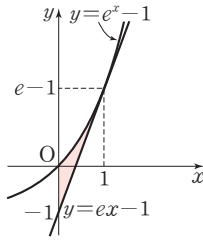
즉, 접점의 좌표는 $(1, e - 1)$ 이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$$y - (e - 1) = e(x - 1)$$

$$\therefore y = ex - 1$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $e^x - 1 \geq ex - 1$ 이므로
로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(e^x - 1) - (ex - 1)\} dx \\ &= \int_0^1 (e^x - ex) dx \\ &= \left[e^x - \frac{e}{2}x^2 \right]_0^1 = \frac{e}{2} - 1 \end{aligned}$$



9 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - ax) dx &= 0, \left[-\frac{1}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} ax^2 \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 \\ 1 - \frac{\pi^2}{8} a &= 0, \frac{\pi^2}{8} a = 1 \quad \therefore a = \frac{8}{\pi^2} \end{aligned}$$

10 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 y 축 및 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

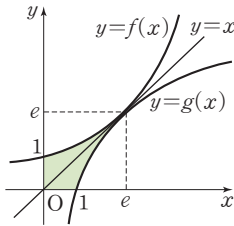
이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 $x=e$ 에서 서로 접하고, 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 접점의 좌표는 (e, e) 이다.

즉, $f(e)=e$ 에서

$$e^{ae} = e, ae = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{e}$$

$0 \leq x \leq e$ 에서 $e^{\frac{1}{e}x} \geq x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = 2 \int_0^e (e^{\frac{1}{e}x} - x) dx = 2 \left[e \times e^{\frac{1}{e}x} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^e = e^2 - 2e$$



11 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ 이므로

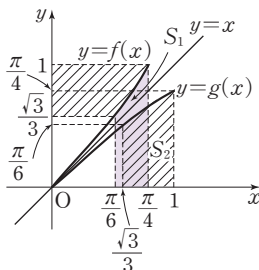
$$g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\pi}{6}, g(1) = \frac{\pi}{4} \text{이다.}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = S_1,$$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 g(x) dx = S_2 \text{라 하면 오}$$

른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 구하는 값은

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^1 g(x) dx &= S_1 + S_2 \\ &= \frac{\pi}{4} \times 1 - \frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{9 - 2\sqrt{3}}{36} \pi \end{aligned}$$



12 $\angle AOP_k = \frac{\pi}{2n} \times k = \frac{k\pi}{2n}$ 이므로 삼각형 OAP_k 의 넓이 S_k 는

$$S_k = \frac{1}{2} \times OA \times OP_k \times \sin \frac{k\pi}{2n} = 2 \sin \frac{k\pi}{2n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} 2 \sin \frac{k\pi}{2n} \\ &= \frac{4}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\sin \frac{k\pi}{2n} \right) \times \frac{\pi}{2n} \\ &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \\ &= \frac{4}{\pi} \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

13 두 곡선 $y=\cos x$, $y=k \sin x$ 의 교점의 x 좌표를

$\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ 라 하면

$$\cos \alpha = k \sin \alpha, \cos^2 \alpha = k^2 \sin^2 \alpha$$

$$\cos^2 \alpha = k^2 (1 - \cos^2 \alpha), (k^2 + 1) \cos^2 \alpha = k^2$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{k^2}{k^2 + 1}$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}} \left(\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

또 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ 이므로

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{k^2}{k^2 + 1} = \frac{1}{k^2 + 1}$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \left(\because 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$$

곡선 $y=\cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$ 와 x

축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의

넓이를 S_1 이라 하면 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

에서 $\cos x \geq 0$ 이므로

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

또 두 곡선 $y=\cos x \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$, $y=k \sin x$ 와 y 축으

로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면 $0 \leq x \leq \alpha$ 에서

$\cos x \geq k \sin x$ 이므로

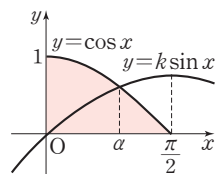
$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{\alpha} (\cos x - k \sin x) dx \\ &= \left[\sin x + k \cos x \right]_0^{\alpha} = \sin \alpha + k \cos \alpha - k \\ &= \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} + \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + 1}} - k = \sqrt{k^2 + 1} - k \end{aligned}$$

주어진 조건에서 $S_1 = 2S_2$ 이므로

$$1 = 2(\sqrt{k^2 + 1} - k), 2\sqrt{k^2 + 1} = 2k + 1$$

$$4k^2 + 4 = 4k^2 + 4k + 1, 4k = 3$$

$$\therefore k = \frac{3}{4}$$



III-2 02 정적분의 활용(2)

입체도형의 부피

개념 Check

223쪽

1 ㉡ 12

입체도형의 밑면으로부터 높이가 x 인 지점에서의 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = x^2 + 1$$

이때 입체도형의 높이가 3이므로 부피를 V 라 하면

$$V = \int_0^3 S(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^3 = 12$$

문제

224~225쪽

01-1 ㉡ $\left(\frac{\pi^2}{2} + 2\right) \text{cm}^3$

물의 높이가 $x \text{ cm}$ 일 때의 수면의 넓이를 $S(x) \text{ cm}^2$ 라 하면

$$S(x) = \sin x + x$$

따라서 물의 높이가 $\pi \text{ cm}$ 일 때, 이 그릇에 담긴 물의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^\pi S(x) dx = \int_0^\pi (\sin x + x) dx \\ &= \left[-\cos x + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{2} + 2 (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

01-2 ㉡ 108π

입체도형의 밑면으로부터 높이가 x 인 지점에서의 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

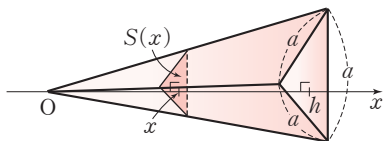
$$S(x) = \pi(\sqrt{10x - x^2})^2 = \pi(10x - x^2)$$

이때 입체도형의 높이가 6이므로 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^6 S(x) dx = \int_0^6 \pi(10x - x^2) dx \\ &= \pi \left[5x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^6 = 108\pi \end{aligned}$$

01-3 ㉡ $\frac{\sqrt{3}}{12}a^2h$

다음 그림과 같이 정삼각뿔의 꼭짓점을 원점, 꼭짓점에서 밑면에 내린 수선을 x 축으로 정하고, x 좌표가 x 인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하자.



밑면과 단면은 서로 닮음이므로 닮음비는

$$h : x$$

이때 넓이의 비는 $h^2 : x^2$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 : S(x) = h^2 : x^2$$

$$\therefore S(x) = \frac{\sqrt{3}a^2}{4h^2}x^2$$

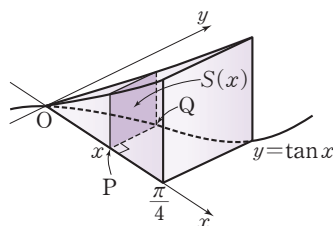
따라서 정삼각뿔의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^h S(x) dx = \int_0^h \frac{\sqrt{3}a^2}{4h^2}x^2 dx \\ &= \frac{\sqrt{3}a^2}{4h^2} \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^h = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2h \end{aligned}$$

02-1 ㉡ $1 - \frac{\pi}{4}$

다음 그림과 같이 x 축 위의 점 $P(x, 0)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$)을 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = \tan x$ 와 만나는 점을 Q 라 하면

$$Q(x, \tan x)$$



이때 $\overline{PQ} = \tan x$ 를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

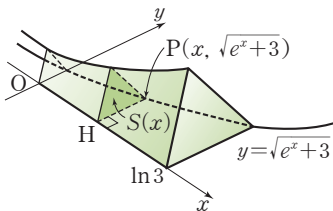
$$S(x) = \tan^2 x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} S(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sec^2 x - 1) dx \\ &= \left[\tan x - x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

02-2 ㉡ $\frac{\sqrt{3}}{4}(2 + 3\ln 3)$

다음 그림과 같이 점 P 의 좌표를 $(x, \sqrt{e^x + 3})$ ($0 \leq x \leq \ln 3$)이라 하면 점 H 의 좌표는 $(x, 0)$



이때 $\overline{PH} = \sqrt{e^x + 3}$ 을 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{e^x + 3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (e^x + 3)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\ln 3} S(x) dx = \int_0^{\ln 3} \frac{\sqrt{3}}{4} (e^x + 3) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[e^x + 3x \right]_0^{\ln 3} = \frac{\sqrt{3}}{4} (2 + 3 \ln 3) \end{aligned}$$

2 속도나 거리

개념 Check

227쪽

1 답 3√13

$\frac{dx}{dt} = 2$, $\frac{dy}{dt} = 3$ 이므로 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^3 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt &= \int_0^3 \sqrt{2^2 + 3^2} dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{13} dt \\ &= \left[\sqrt{13} t \right]_0^3 = 3\sqrt{13} \end{aligned}$$

2 답 19/3

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$ 이므로 $0 \leq x \leq 5$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx &= \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx \\ &= \int_0^5 \frac{1}{2} \sqrt{4+x} dx \\ &= \int_4^9 \frac{1}{2} \sqrt{t} dt \quad \leftarrow 4+x=t \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_4^9 = \frac{19}{3} \end{aligned}$$

문제

228~230쪽

03-1 답 (1) $\frac{7}{2 \ln 2}$ (2) $\frac{1}{\ln 2} - 1$ (3) $\frac{5}{2 \ln 2} - 1$

$$\begin{aligned} (1) \quad 3 + \int_0^3 (2^{t-1} - 1) dt &= 3 + \left[\frac{2^{t-1}}{\ln 2} - t \right]_0^3 \\ &= \frac{7}{2 \ln 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \int_1^2 (2^{t-1} - 1) dt &= \left[\frac{2^{t-1}}{\ln 2} - t \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{\ln 2} - 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \int_0^3 |2^{t-1} - 1| dt &= \int_0^1 (-2^{t-1} + 1) dt + \int_1^3 (2^{t-1} - 1) dt \\ &= \left[-\frac{2^{t-1}}{\ln 2} + t \right]_0^1 + \left[\frac{2^{t-1}}{\ln 2} - t \right]_1^3 \\ &= \frac{5}{2 \ln 2} - 1 \end{aligned}$$

03-2 답 $-\frac{1}{e}$

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v(t) = 0$ 에서

$$(t-1)e^{-t} = 0 \quad \therefore t=1 \quad (\because e^{-t} > 0)$$

따라서 원점을 출발하여 $t=1$ 일 때 운동 방향을 바꾸므로 $t=1$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^1 (t-1)e^{-t} dt &= \left[-(t-1)e^{-t} \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-t}) dt \\ &= -1 - \left[e^{-t} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{e} \end{aligned}$$

04-1 답 $e^2 + 1$

$\frac{dx}{dt} = 2t - \frac{2}{t}$, $\frac{dy}{dt} = 4$ 이므로 $t=1$ 에서 $t=e$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_1^e \sqrt{\left(2t - \frac{2}{t}\right)^2 + 4^2} dt &= \int_1^e \sqrt{4t^2 + 8 + \frac{4}{t^2}} dt \\ &= \int_1^e \sqrt{\left(2t + \frac{2}{t}\right)^2} dt \\ &= \int_1^e \left(2t + \frac{2}{t}\right) dt \\ &= \left[t^2 + 2 \ln t \right]_1^e \\ &= e^2 + 1 \end{aligned}$$

04-2 답 $\frac{3}{2}e^2 - \frac{1}{2}$

$\frac{dx}{dt} = e^{2t} - e^2$, $\frac{dy}{dt} = 2e^{t+1}$ 이므로 $t=0$ 에서 $t=1$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{(e^{2t} - e^2)^2 + (2e^{t+1})^2} dt &= \int_0^1 \sqrt{e^{4t} + 2e^{2t+2} + e^4} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{(e^{2t} + e^2)^2} dt \\ &= \int_0^1 (e^{2t} + e^2) dt \\ &= \left[\frac{1}{2} e^{2t} + e^2 t \right]_0^1 \\ &= \frac{3}{2} e^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

04-3 ㉔ 4

$\frac{dx}{dt}=2\sqrt{t}$, $\frac{dy}{dt}=-t+1$ 이므로 $t=2$ 에서 $t=a$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_2^a \sqrt{(2\sqrt{t})^2 + (-t+1)^2} dt &= \int_2^a \sqrt{t^2 + 2t + 1} dt \\ &= \int_2^a \sqrt{(t+1)^2} dt \\ &= \int_2^a (t+1) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 + t \right]_2^a \\ &= \frac{a^2}{2} + a - 4\end{aligned}$$

따라서 $\frac{a^2}{2} + a - 4 = 8$ 이므로

$$a^2 + 2a - 24 = 0$$

$$(a+6)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

05-1 ㉔ (1) $\frac{\pi^2}{32}$ (2) $\frac{15}{8} + \ln 4$

$$(1) \frac{dx}{dt} = \cos t - t \sin t - \cos t = -t \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = -\sin t + \sin t + t \cos t = t \cos t$$

따라서 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{(-t \sin t)^2 + (t \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{t^2 (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} t dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi^2}{32}\end{aligned}$$

$$(2) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4}x - \frac{1}{x} \text{이므로 } 1 \leq x \leq 4 \text{에서 곡선의 길이는}$$

$$\begin{aligned}\int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{x} \right)^2} dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}} dx \\ &= \int_1^4 \sqrt{\left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x} \right)^2} dx \\ &= \int_1^4 \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{8}x^2 + \ln x \right]_1^4 \\ &= \frac{15}{8} + \ln 4\end{aligned}$$

연습문제

231~232쪽

- 1 $2e^4 - \frac{2}{e^4}$ 2 ② 3 $\frac{4\sqrt{3}}{15}$ 4 ③ 5 $\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2}$
6 3 7 ⑤ 8 ③ 9 ⑤ 10 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
11 ① 12 3

- 1 입체도형의 밑면으로부터 높이가 x 인 지점에서의 단면은 가로의 길이가 $\sqrt{e^x + e^{-x}}$, 세로의 길이가 $2\sqrt{e^x + e^{-x}}$ 인 직사각형이므로 그 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = 2(e^x + e^{-x})$$

이때 입체도형의 높이가 4이므로 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned}V &= \int_0^4 S(x) dx = \int_0^4 2(e^x + e^{-x}) dx \\ &= 2 \left[e^x - e^{-x} \right]_0^4 \\ &= 2e^4 - \frac{2}{e^4}\end{aligned}$$

- 2 $S(h) = he^{-\frac{1}{3}h}$ 이라 하면

$$S'(h) = e^{-\frac{1}{3}h} - \frac{1}{3}he^{-\frac{1}{3}h} = \left(1 - \frac{1}{3}h \right) e^{-\frac{1}{3}h}$$

$$S'(h) = 0 \text{에서}$$

$$1 - \frac{1}{3}h = 0 \quad (\because e^{-\frac{1}{3}h} > 0)$$

$$\therefore h = 3$$

$0 \leq h \leq 6$ 에서 함수 $S(h)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	0	...	3	...	6
$S'(h)$		+	0	-	
$S(h)$		↗	극대	↘	

따라서 함수 $S(h)$ 는 $h=3$ 일 때 최대이므로 이때의 물의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned}V &= \int_0^3 S(h) dh = \int_0^3 he^{-\frac{1}{3}h} dh \\ &= \left[-3he^{-\frac{1}{3}h} \right]_0^3 - \int_0^3 (-3e^{-\frac{1}{3}h}) dh \\ &= -\frac{9}{e} - \left[9e^{-\frac{1}{3}h} \right]_0^3 \\ &= 9 - \frac{18}{e} \text{ (cm}^3\text{)}\end{aligned}$$

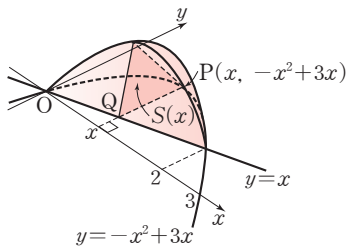
- 3 곡선 $y = -x^2 + 3x$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$-x^2 + 3x = x, \quad x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

다음 그림과 같이 점 P의 좌표를 $(x, -x^2+3x)$ ($0 \leq x \leq 2$)
라 하면 점 Q의 좌표는 (x, x)



이때 $\overline{PQ} = -x^2 + 2x$ 를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

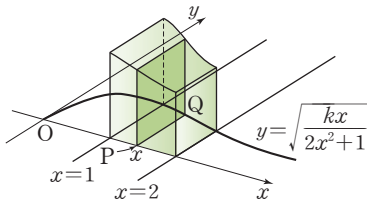
$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{\sqrt{3}}{4} (-x^2 + 2x)^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} (x^4 - 4x^3 + 4x^2) \end{aligned}$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 S(x) dx \\ &= \int_0^2 \frac{\sqrt{3}}{4} (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\frac{1}{5} x^5 - x^4 + \frac{4}{3} x^3 \right]_0^2 = \frac{4\sqrt{3}}{15} \end{aligned}$$

- 4 다음 그림과 같이 x 축 위의 점 $P(x, 0)$ ($1 \leq x \leq 2$)을 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = \sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}$ 와 만나는 점을 Q라 하면

$$Q\left(x, \sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}\right)$$



이때 $\overline{PQ} = \sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}$ 를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \left(\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}} \right)^2 = \frac{kx}{2x^2+1}$$

입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 S(x) dx \\ &= \int_1^2 \frac{kx}{2x^2+1} dx \\ &= \frac{k}{4} \int_1^2 \frac{4x}{2x^2+1} dx \\ &= \frac{k}{4} \left[\ln(2x^2+1) \right]_1^2 = \frac{k}{4} \ln 3 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{k}{4} \ln 3 = 2 \ln 3$ 이므로

$$\frac{k}{4} = 2 \quad \therefore k = 8$$

- 5 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v(t) = 0$ 에서

$$e^{2t} - e^2 = 0, \quad e^{2t} = e^2$$

$$\therefore t = 1$$

따라서 $t=1$ 일 때 운동 방향을 바꾸므로 $t=0$ 에서 $t=1$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^1 |e^{2t} - e^2| dt &= \int_0^1 (-e^{2t} + e^2) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{2t} + e^2 t \right]_0^1 \\ &= \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 6 $t=a$ ($0 < a \leq \pi$)에서의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^a \cos \pi t dt = \left[\frac{1}{\pi} \sin \pi t \right]_0^a = \frac{1}{\pi} \sin a\pi$$

점 P가 원점을 지나려면

$$\frac{1}{\pi} \sin a\pi = 0, \quad \sin a\pi = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } a = 2 \text{ 또는 } a = 3 \quad (\because 0 < a \leq \pi)$$

따라서 점 P는 원점을 3번 지난다.

- 7 $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{t}, \frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{t^2}$ 이므로 $t=1$ 에서 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_1^5 \sqrt{\left(\frac{2}{t}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2} dt &= \int_1^5 \sqrt{1 + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^4}} dt \\ &= \int_1^5 \sqrt{\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^2} dt \\ &= \int_1^5 \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt \\ &= \left[t - \frac{1}{t} \right]_1^5 = \frac{24}{5} \end{aligned}$$

- 8 $\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t)$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t)$$

$t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s_1 이라 하면

$$\begin{aligned} s_1 &= \int_0^4 \sqrt{\{e^t (\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t (\sin t + \cos t)\}^2} dt \\ &= \int_0^4 \sqrt{2e^{2t} (\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^4 e^t dt \\ &= \sqrt{2} \left[e^t \right]_0^4 = \sqrt{2} (e^4 - 1) \end{aligned}$$

또 $t=4$ 에서 $t=\ln a$ 까지 점 P가 움직인 거리를 s_2 라 하면

$$\begin{aligned} s_2 &= \int_4^{\ln a} \sqrt{\{e^t(\cos t - \sin t)\}^2 + \{e^t(\sin t + \cos t)\}^2} dt \\ &= \int_4^{\ln a} \sqrt{2e^{2t}(\sin^2 t + \cos^2 t)} dt \\ &= \sqrt{2} \int_4^{\ln a} e^t dt \\ &= \sqrt{2} \left[e^t \right]_4^{\ln a} = \sqrt{2}(a - e^4) \end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{2}(e^4 - 1) = \sqrt{2}(a - e^4)$ 이므로

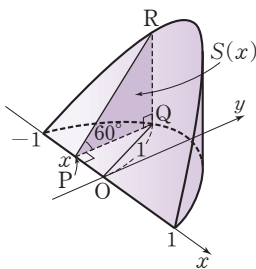
$$e^4 - 1 = a - e^4$$

$$\therefore a = 2e^4 - 1$$

- 9 $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{1-x^2}$ 이므로 $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \left(-\frac{2x}{1-x^2}\right)^2} dx \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(1-x^2)^2}} dx \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \sqrt{\left(\frac{x^2+1}{1-x^2}\right)^2} dx \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{x^2+1}{1-x^2} dx \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(-1 + \frac{2}{1-x^2}\right) dx \\ &= \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \left(-1 + \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= \left[-x - \ln|1-x| + \ln(1+x)\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \ln \frac{9}{5} - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- 10 오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점 O, 밑면의 지름을 x 축으로 정하고, x 축 위의 점 $P(x, 0)$ ($-1 \leq x \leq 1$)을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면을 삼각형 PQR라 하면



$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OQ}^2 - \overline{OP}^2} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\overline{RQ} = \overline{PQ} \tan 60^\circ = \sqrt{3}(1-x^2)$$

삼각형 PQR의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{RQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^1 S(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{3}}{2}(1-x^2) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

- 11 곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=t^2x - \frac{\ln t}{8}$ 가 만나는 서로 다른 두 점의 x 좌표를 α, β 라 하면 α, β 는 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - t^2x + \frac{\ln t}{8} = 0$ 의 두 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = t^2, \quad \alpha\beta = \frac{\ln t}{8}$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$$

$$= t^4 - \frac{\ln t}{4}$$

점 P는 두 점 $(\alpha, \alpha^2), (\beta, \beta^2)$ 의 중점이므로 점 P의 위치 (x, y) 는

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2}t^2$$

$$y = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} = \frac{1}{2}t^4 - \frac{\ln t}{8}$$

따라서 $\frac{dx}{dt} = t, \frac{dy}{dt} = 2t^3 - \frac{1}{8t}$ 이므로 $t=1$ 에서 $t=e$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_1^e \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt &= \int_1^e \sqrt{t^2 + \left(2t^3 - \frac{1}{8t}\right)^2} dt \\ &= \int_1^e \sqrt{4t^6 + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{64t^2}} dt \\ &= \int_1^e \sqrt{\left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right)^2} dt \\ &= \int_1^e \left(2t^3 + \frac{1}{8t}\right) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^4 + \frac{\ln t}{8}\right]_1^e \\ &= \frac{e^4}{2} - \frac{3}{8} \end{aligned}$$

- 12 $0 \leq x \leq 1$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 길이가 4이므로

$$\int_0^1 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(1)에서

$$\{f(x)\}^2 - \{f'(x)\}^2 = -2f(x)$$

$$\{f'(x)\}^2 = \{f(x)\}^2 + 2f(x)$$

$$1 + \{f'(x)\}^2 = \{f(x)\}^2 + 2f(x) + 1$$

$$1 + \{f'(x)\}^2 = \{f(x) + 1\}^2$$

이때 (2)에서 $f(x) + 1 \geq 0$ 이므로

$$\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} = f(x) + 1$$

이를 (1)에 대입하면

$$\int_0^1 \{f(x) + 1\} dx = 4$$

$$\int_0^1 f(x) dx + \left[x \right]_0^1 = 4$$

$$\therefore \int_0^1 f(x) dx = 3$$

유형편

정답과 해설

I-1. 수열의 극한

01 수열의 극한

4~11쪽

1 ④	2 ③	3 ③	4 15	5 ⑤
6 $\frac{1}{4}$	7 ③	8 ⑤	9 ㄱ, ㄷ	10 ①
11 8	12 0	13 ④	14 6	15 $\frac{3}{4}$
16 68	17 ①	18 ①	19 ①	20 $-\frac{5}{2}$
21 1	22 ①	23 ①	24 $\frac{1}{3}$	25 2
26 -1	27 3	28 ④	29 ③	30 ⑤
31 ⑤	32 6	33 21	34 ②	35 ②
36 6	37 ②	38 $\frac{1}{2}$	39 -1	40 ⑤
41 1	42 ④	43 ③	44 ①	45 2
46 3	47 $\frac{1}{2}$	48 5	49 ①	50 $\frac{2}{3}$

- 1 ① 양의 무한대로 발산한다.
 ② 음의 무한대로 발산한다.
 ③ 발산(진동)한다.
 ④ 1에 수렴한다.
 ⑤ 발산(진동)한다.
 따라서 수렴하는 수열인 것은 ④이다.
- 2 ㄱ. 수열 $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$ 의 첫째항부터 차례대로 항을 나열해 보면
 $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots$
 즉, n 의 값이 한없이 커질 때, 이 수열은 1에 수렴한다.
 ㄴ. 수열 $\{5-3n\}$ 의 첫째항부터 차례대로 항을 나열해 보면
 $2, -1, -4, -7, \dots$
 즉, n 의 값이 한없이 커질 때, 이 수열은 음의 무한대로 발산한다.

ㄷ. 수열 $\{n+2^n\}$ 의 첫째항부터 차례대로 항을 나열해 보면

3, 6, 11, 20, ...

즉, n 의 값이 한없이 커질 때, 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.

ㄹ. 수열 $\left\{1+\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$ 의 첫째항부터 차례대로 항을 나열해 보면

2, $\frac{3}{4}, \frac{17}{16}, \frac{63}{64}, \dots$

즉, n 의 값이 한없이 커질 때, 이 수열은 1에 수렴한다.

따라서 보기에서 발산하는 수열인 것은 ㄴ, ㄷ이다.

$$\begin{aligned}
 3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad (\alpha \text{는 실수}) \text{라 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{5-a_n} = 2 \text{에서} \\
 \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 8}{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n} = 2 \\
 \frac{8}{5-\alpha} = 2, \quad 8 = 10 - 2\alpha \\
 2\alpha = 2 \quad \therefore \alpha = 1 \\
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5a_n^2 b_n^2}{3a_n + 2b_n} &= \frac{5 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \\
 &= \frac{5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}{3 \times 2 + 2 \times 3} = 15
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^3 - b_n^3) \\
 = \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n - b_n)^3 + 3a_n b_n (a_n - b_n)\} \\
 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)^3 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \\
 = 2^3 + 3 \times 1 \times 2 = 14
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad (\alpha \text{는 실수}) \text{라 하면} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+2} = \alpha \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - 3}{a_{n+2} + 1} = -\frac{5}{3} \text{에서} \\
 \frac{\alpha - 3}{\alpha + 1} = -\frac{5}{3}, \quad 3\alpha - 9 = -5\alpha - 5 \\
 8\alpha = 4 \quad \therefore \alpha = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n a_{n+1} = \alpha^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
 7 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad (\alpha \text{는 실수}) \text{라 하면 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \alpha \\
 a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4} \text{에서} \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3a_n + 4}
 \end{aligned}$$

$$\alpha = \sqrt{3\alpha + 4}, \alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0$$

$$(\alpha + 1)(\alpha - 4) = 0 \quad \therefore \alpha = -1 \text{ 또는 } \alpha = 4$$

이때 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 양수이므로 $\alpha > 0$

따라서 $\alpha = 4$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 4$

8 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ (α 는 실수)라 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = \alpha$$

이차방정식 $x^2 - a_n x + a_{n+1} - 1 = 0$ 이 중근을 가지므로 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 에서

$$D = a_n^2 - 4(a_{n+1} - 1) = 0$$

$$\therefore a_n^2 - 4a_{n+1} + 4 = 0$$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 - 4a_{n+1} + 4) = 0$ 이므로

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0, (\alpha - 2)^2 = 0 \quad \therefore \alpha = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - a_{2n}) = 3\alpha - \alpha = 2\alpha = 4$$

9 $\neg$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3}{4n^3 - n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n^3}}{4 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = \frac{1}{2}$

$\neg$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n}{n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3}{1 + \frac{1}{n}} = \infty$

$\neg$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n+1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = 1$

$\neg$. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)(3n-1)}{(2n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - 7n + 2}{2n^2 + 5n + 2}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{7}{n} + \frac{2}{n^2}}{2 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{3}{2}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

10 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 a_n}{4 - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{4 - n} \times \lim_{n \rightarrow \infty} n a_n$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{4}{n} - 1} \times 4$$

$$= -4$$

11 (i) $p = 1$ 일 때,

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + n + 3}{n^3 + n + 6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{6}{n^3}} = 0$$

(ii) $p = 2$ 일 때,

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 + n + 3}{n^3 + n^2 + 6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{1}{n^2} + \frac{3}{n^3}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{6}{n^3}} = 6$$

(iii) $p \geq 3$ 일 때,

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^{p+1} + n + 3}{n^p + n^3 + 6} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n + \frac{1}{n^{p-1}} + \frac{3}{n^p}}{1 + \frac{1}{n^{p-3}} + \frac{6}{n^p}}$$

$$= \infty$$

(i), (ii), (iii)에서 p, q 는 자연수이므로

$$p = 2, q = 6 \quad \therefore p + q = 8$$

12 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{n}{n+1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

13 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(1+2+3+\cdots+n)}{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \times \frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$$

14 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n + b_n = 2n, a_n b_n = \frac{n^2 - 3n}{2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} + \frac{b_n}{a_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{a_n b_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n + b_n)^2 - 2a_n b_n}{a_n b_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)^2 - 2 \times \frac{n^2 - 3n}{2}}{\frac{n^2 - 3n}{2}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^2 + 6n}{n^2 - 3n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{6}{n}}{1 - \frac{3}{n}} = 6$$

15 1부터 $3n$ 까지의 모든 자연수의 합은

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 3n = \sum_{k=1}^{3n} k = \frac{3n(3n+1)}{2}$$

1부터 $3n$ 까지의 자연수 중에서 3의 배수의 합은

$$3 + 6 + 9 + \cdots + 3n = \sum_{k=1}^n 3k = 3 \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore A_n = \frac{3n(3n+1)}{2} - \frac{3n(n+1)}{2} = 3n^2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{4n^2 + 3n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{4n^2 + 3n + 2}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{4 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = \frac{3}{4}$$

$$16 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an}{bn+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{b+\frac{3}{n}} = \frac{a}{b} \text{이므로}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{4} \quad \therefore b=4a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+b)n^2+2n}{n^2-4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+b+\frac{2}{n}}{1-\frac{4}{n^2}} = a+b \text{이므로}$$

$$a+b=10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a=2, b=8$

$$\therefore a^2+b^2=4+64=68$$

$$17 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2+2bn-1}{3n+7} = 2 \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+2b-\frac{1}{n}}{3+\frac{7}{n}} = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a \neq 0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로 $a=0$

이를 ①에 대입하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b-\frac{1}{n}}{3+\frac{7}{n}} = 2, \quad \frac{2b}{3} = 2 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore a+b=0+3=3$$

$$18 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16n^2-an+1}}{an^2+2n-1} = b \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16-\frac{a}{n}+\frac{1}{n^2}}}{an+2-\frac{1}{n}} = b$$

$a \neq 0$ 이면 $b=0$ 이므로 $a=0$

$$\therefore b = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16+\frac{1}{n^2}}}{2-\frac{1}{n}} = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2-4n+1}{\sqrt{bn^2+n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n+1}{\sqrt{2n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4+\frac{1}{n}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - \sqrt{n^4+5n^2+6}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n^2-6}{n^2+\sqrt{n^4+5n^2+6}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5-\frac{6}{n^2}}{1+\sqrt{1+\frac{5}{n^2}+\frac{6}{n^4}}} \\ &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 21 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2-10n}-2n}{\sqrt{9n^2+5n}-3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-10n(\sqrt{9n^2+5n}+3n)}{5n(\sqrt{4n^2-10n}+2n)} \\ &= -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9+\frac{5}{n}}+3}{\sqrt{4-\frac{10}{n}}+2} \\ &= -2 \times \frac{3}{2} = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23 \quad a_n &= \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}-(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}-(n+1)} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\{\sqrt{n^2+2n}-(n+1)\}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+2n}+n+1}{-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1+\frac{1}{n}}{-1} = -2 \end{aligned}$$

$$24 \quad x^2+2nx-6n=0 \text{을 풀면}$$

$$x = -n \pm \sqrt{n^2+6n}$$

$$\therefore a_n = -n + \sqrt{n^2+6n}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+6n}-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+6n}+n}{6n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{6}{n}}+1}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

25 첫째항이 0이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{n\{(n-1) \times 2\}}{2} = n^2 - n$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{S_{n+2}} - \sqrt{S_n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{(n+2)^2 - (n+2)} - \sqrt{n^2 - n} \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n + 2} - \sqrt{n^2 - n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 2}{\sqrt{n^2 + 3n + 2} + \sqrt{n^2 - n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{2}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = 2 \end{aligned}$$

26 $3 \times 5^{n-1}$ 의 약수의 개수 a_n 은

$$a_n = (1+1)\{(n-1)+1\} = 2n$$

$24 \times 15^{n-1}$, 즉 $2^3 \times 3^n \times 5^{n-1}$ 의 약수의 개수 b_n 은

$$b_n = (3+1)(n+1)\{(n-1)+1\} = 4n^2 + 4n$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - \sqrt{b_n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n - \sqrt{4n^2 + 4n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4n}{2n + \sqrt{4n^2 + 4n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-4}{2 + \sqrt{4 + \frac{4}{n}}} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27 \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an + 1} - n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + 1}{\sqrt{n^2 + an + 1} + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a}{n} + \frac{1}{n^2}} + 1} \\ &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{2} = \frac{3}{2}$ 이므로 $a=3$

28 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{an^2 + n} - \sqrt{an^2 - an})$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+1)n}{\sqrt{an^2 + n} + \sqrt{an^2 - an}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a+1}{\sqrt{a + \frac{1}{n}} + \sqrt{a - \frac{a}{n}}} \\ &= \frac{a+1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{a+1}{2\sqrt{a}} = \frac{5}{4} \text{이므로 } 2(a+1) = 5\sqrt{a}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$4a^2 - 17a + 4 = 0, (4a-1)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{4} \text{ 또는 } a = 4$$

따라서 모든 양수 a 의 값의 합은

$$\frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$$

$$29 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an+1}{\sqrt{4n^2+bn}-2n} = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an+1)(\sqrt{4n^2+bn}+2n)}{bn} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(an+1)\left(\sqrt{4+\frac{b}{n}}+2\right)}{b} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$a \neq 0$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로 $a=0$

이를 ⑦에 대입하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{b}{n}}+2}{b} = \frac{1}{2}, \frac{4}{b} = \frac{1}{2} \quad \therefore b=8$$

$$\therefore b-a=8-0=8$$

30 $\frac{3a_n-5}{a_n+1} = b_n$ 으로 놓으면

$$3a_n-5 = (a_n+1)b_n \quad \therefore a_n = \frac{b_n+5}{3-b_n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n+5}{3-b_n} = \frac{1+5}{3-1} = 3$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 - a_n + 1) = 9 - 3 + 1 = 7$$

31 $\frac{a_n+2}{2} = b_n$ 으로 놓으면 $a_n = 2b_n - 2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 6 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (2b_n - 2) = 2 \times 6 - 2 = 10$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n+1}{a_n+2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + \frac{1}{n}}{\frac{a_n}{n} + 2} = 5$$

32 $\frac{a_n}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}} = b_n$ 으로 놓으면

$$a_n = (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})b_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 4 \text{이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n}) b_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n}}{\sqrt{n+3} + \sqrt{n}} b_n$$

$$= \frac{3}{2} \times 4 = 6$$

33 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n(b_n+2n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (na_nb_n+2n^2a_n)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n^2 a_n \times \frac{b_n}{n} + 2n^2 a_n \right)$$

$$= 3 \times 5 + 2 \times 3 = 21$$

34 $\frac{na_n}{n^2+3} = b_n$ 으로 놓으면

$$a_n = \frac{(n^2+3)b_n}{n}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{a_n^2 + n} - a_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{a_n^2 + n} + a_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\left(\frac{(n^2+3)b_n}{n}\right)^2 + n} + \frac{(n^2+3)b_n}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{\sqrt{(n^2+3)^2 b_n^2 + n^3} + (n^2+3)b_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^2 b_n^2 + \frac{1}{n}} + \left(1+\frac{3}{n^2}\right)b_n}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 \times 1 + 1 \times 1}} = \frac{1}{2}$$

35 $2a_n + b_n = c_n$ 으로 놓으면 $b_n = c_n - 2a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1 \text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{a_n} = 0$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4a_n^2}{b_n} + \frac{b_n^2}{2a_n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8a_n^3 + b_n^3}{2a_n b_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2a_n + b_n)(4a_n^2 - 2a_n b_n + b_n^2)}{2a_n b_n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n + b_n) \left(\frac{2a_n}{b_n} - 1 + \frac{b_n}{2a_n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \left(\frac{2a_n}{c_n - 2a_n} - 1 + \frac{c_n - 2a_n}{2a_n} \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \left(\frac{2}{\frac{c_n}{a_n} - 2} - 1 + \frac{c_n}{2a_n} - 1 \right)$$

$$= 1 \times (-1 - 1 - 1) = -3$$

36 $3n^3 - n^2 < a_n < 3n^3 + 2n^2 + n$ 의 각 변에 $\frac{2}{n^3}$ 를 곱하면

$$\frac{6n^3 - 2n^2}{n^3} < \frac{2a_n}{n^3} < \frac{6n^3 + 4n^2 + 2n}{n^3}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 - 2n^2}{n^3} = 6, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 + 4n^2 + 2n}{n^3} = 6 \text{이므로}$$

수열의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n}{n^3} = 6$$

37 $\frac{1}{3n^3 + 2n + 3} < \frac{a_n + 3}{6n^3 + n^2} < \frac{1}{3n^3 - n + 2}$ 의 각 변에

$6n^3 + n^2$ 을 곱하면

$$\frac{6n^3 + n^2}{3n^3 + 2n + 3} < a_n + 3 < \frac{6n^3 + n^2}{3n^3 - n + 2}$$

$$\therefore \frac{6n^3 + n^2}{3n^3 + 2n + 3} - 3 < a_n < \frac{6n^3 + n^2}{3n^3 - n + 2} - 3$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^3 + n^2}{3n^3 + 2n + 3} - 3 \right) = 2 - 3 = -1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^3 + n^2}{3n^3 - n + 2} - 3 \right) = 2 - 3 = -1 \text{이므로 수열의 극한}$$

의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$$

38 $\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} < \frac{a_n}{n+1} < \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ 의 각 변에 $\frac{n+1}{\sqrt{n}}$

을 곱하면

$$\frac{(n+1)(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1})}{\sqrt{n}} < \frac{a_n}{\sqrt{n}} < \frac{(n+1)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{n+1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1})} < \frac{a_n}{\sqrt{n}} < \frac{n+1}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$$

$$\therefore \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + 2n + \sqrt{n^2 + n}}} < \frac{a_n}{\sqrt{n}} < \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + n + n}}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + 2n + \sqrt{n^2 + n}}} = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^2 + n + n}} = \frac{1}{2} \text{이므로 수열의 극한의 대소 관계에}$$

의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

39 모든 자연수 n 에 대하여 $-1 \leq \sin n\theta \leq 1$ 이므로 각 변을 $3+n^2$ 으로 나누면

$$-\frac{1}{3+n^2} \leq \frac{\sin n\theta}{3+n^2} \leq \frac{1}{3+n^2}$$

$$\therefore \frac{-1-n^2}{3+n^2} \leq \frac{\sin n\theta - n^2}{3+n^2} \leq \frac{1-n^2}{3+n^2}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1-n^2}{3+n^2} = -1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{3+n^2} = -1 \text{이므로 수열}$$

의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n\theta - n^2}{3+n^2} = -1$$

40 $2n+3 < a_n < 2n+4$ 의 각 변을 n 으로 나누면

$$\frac{2n+3}{n} < \frac{a_n}{n} < \frac{2n+4}{n}$$

$$\text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n} = 2, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{n} = 2 \text{이므로 수열의 극}$$

한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 2$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a_n+1)^2 + 6n^2}{na_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a_n}{n} + \frac{1}{n}\right)^2 + 6}{\frac{a_n}{n}}$$

$$= \frac{4+6}{2} = 5$$

41 $\frac{2n-1}{n} < a_n < \frac{2n+1}{n}$ 의 각 변에 n 을 곱하면
 $2n-1 < na_n < 2n+1$
 n 에 1, 2, 3, ..., n 을 차례대로 대입하여 각 변끼리 더하면
 $1 < a_1 < 3$
 $3 < 2a_2 < 5$
 $5 < 3a_3 < 7$
 $\vdots$
 $+) \frac{2n-1}{n} < na_n < \frac{2n+1}{n}$
 $\sum_{k=1}^n (2k-1) < a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n < \sum_{k=1}^n (2k+1)$
 $2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n < a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n$
 $< 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$
 $n^2 < a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n < n^2 + 2n$
 $\therefore \frac{n^2}{n^2+1} < \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{n^2+1} < \frac{n^2+2n}{n^2+1}$
 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n}{n^2+1} = 1$ 이므로 수열의 극
 한의 대소 관계에 의하여
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n}{n^2+1} = 1$

42 $a_n + n^2 < a_{n+1} < a_n + n^2 + 1$ 에서
 $n^2 < a_{n+1} - a_n < n^2 + 1$
 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$ 을 차례대로 대입하여 각 변끼리
 더하면
 $1^2 < a_2 - a_1 < 1^2 + 1$
 $2^2 < a_3 - a_2 < 2^2 + 1$
 $3^2 < a_4 - a_3 < 3^2 + 1$
 $\vdots$
 $+) (n-1)^2 < a_n - a_{n-1} < (n-1)^2 + 1$
 $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 < a_n - a_1 < \sum_{k=1}^{n-1} (k^2 + 1)$
 $a_1 = 1$ 이므로
 $\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} < a_n - 1 < \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n - 1$
 $\frac{2n^3 - 3n^2 + n + 6}{6} < a_n < \frac{2n^3 - 3n^2 + 7n}{6}$
 $\therefore \frac{2n^3 - 3n^2 + n + 6}{12n^3 + 18} < \frac{a_n}{2n^3 + 3} < \frac{2n^3 - 3n^2 + 7n}{12n^3 + 18}$
 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + n + 6}{12n^3 + 18} = \frac{1}{6},$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 - 3n^2 + 7n}{12n^3 + 18} = \frac{1}{6}$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계
 에 의하여
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n^3 + 3} = \frac{1}{6}$

43 $\neg$. [반례] $a_n = n, b_n = -n^2$ 이라 하면
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ 이지만
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n - n^2) = -\infty$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{a_n - (a_n - b_n)\}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$
 $= \alpha - 0 = \alpha$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n \times \frac{b_n}{a_n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$
 $= \alpha \times 1 = \alpha$
 $\therefore$ [반례] $\{a_n\}: 1, 0, 1, 0, \dots, \{b_n\}: 0, 1, 0, 1, \dots$ 이라
 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$ 이지만 두 수열
 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 은 모두 발산(진동)한다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \therefore$ 이다.

44 $\neg$. $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$ 에서 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-|a_n|) = 0,$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$ 이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 $\therefore$ [반례] $a_n = 1 - \frac{1}{n}, b_n = 1 + \frac{1}{n}$ 이라 하면 $a_n < b_n$ 이지만
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$
 $\therefore$ [반례] $a_n = n, b_n = 1$ 이라 하면 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$
 이고 수열 $\{a_n\}$ 은 발산하지만 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$
 즉, 수열 $\{b_n\}$ 은 수렴한다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$ 이다.

45 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 직선 $y = nx$ 의 교점의 x 좌표를 구하면
 $\frac{1}{x} = nx, x^2 = \frac{1}{n} \therefore x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$
 따라서 두 교점의 좌표는 $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \sqrt{n}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{n}}, -\sqrt{n}\right)$ 이
 므로
 $l_n = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right)^2 + (2\sqrt{n})^2} = \sqrt{\frac{4}{n} + 4n}$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l_n^2}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{n} + 4n}{2n} = 2$

46 $y = \frac{1}{2}x^2$ 에서 $y' = x$
 곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 에 접하고 기울기가 n 인 접선의 접점의 좌
 표를 $\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ 이라 하면 $t = n$

기울기가 n 이고 접점의 좌표가 $(n, \frac{1}{2}n^2)$ 인 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{2}n^2 = n(x - n) \quad \therefore y = nx - \frac{1}{2}n^2$$

따라서 $P_n(\frac{1}{2}n, 0)$, $Q_n(0, -\frac{1}{2}n^2)$ 이므로

$$\begin{aligned} l_n &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}n\right)^2 + \left(\frac{1}{2}n^2\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n^4} = \frac{1}{2}\sqrt{n^4 + n^2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6l_n}{n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n^4 + n^2}}{n^2 + 1} = 3 \end{aligned}$$

- 47** 곡선 $y = nx^2$ 위의 점 중 y 좌표가 1인 점의 x 좌표를 구하면

$$nx^2 = 1, \quad x^2 = \frac{1}{n}$$

$$\therefore x = \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$$

이때 점 P_n 은 제1사분면 위의 점이므로

$$P_n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}, 1\right)$$

$\overline{P_n R} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\overline{Q_n R} = 2n$ 이므로 삼각형 $P_n Q_n R$ 의 넓이 S_n 은

$$S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{n}} \times 2n = \sqrt{n}$$

선분 $P_n Q_n$ 의 길이 l_n 은

$$l_n = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + (-2n)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} + 4n^2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^2}{l_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{\frac{1}{n} + 4n^2}} = \frac{1}{2}$$

- 48** 가로로 놓인 막대의 개수는 $2 \times n \times (n+1)$
세로로 놓인 막대의 개수는 $(n+1) \times (n+1)$
높이로 놓인 막대의 개수는 $2 \times n \times (n+1)$
따라서 입체도형 A_n 을 만드는 데 필요한 막대의 개수 a_n 은
 $a_n = 2n(n+1) + (n+1)^2 + 2n(n+1) = 5n^2 + 6n + 1$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 6n + 1}{n^2} = 5$

- 49** 접선의 방정식을 $y = k(x-2n)$ (k 는 상수)이라 하면

$$a_n = -2kn$$

이때 $a_n > 0$ 이므로 $k < 0$

직선 $y = k(x-2n)$, 즉 $kx - y - 2kn = 0$ 이 원

$x^2 + y^2 = n^2$ 에 접하므로

$$\frac{|-2kn|}{\sqrt{k^2 + (-1)^2}} = n$$

$$\text{양변을 제곱하면 } \frac{4k^2 n^2}{k^2 + 1} = n^2$$

$$4k^2 = k^2 + 1, \quad k^2 = \frac{1}{3} \quad \therefore k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

그런데 $k < 0$ 이므로 $k = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\therefore a_n = \frac{2\sqrt{3}}{3}n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}n}{2n+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

다른 풀이

접선의 방정식을 $y = k(x-2n)$ (k 는 상수)이라 하면

$$a_n = -2kn$$

이때 $a_n > 0$ 이므로 $k < 0$

직선 $y = k(x-2n)$ 이 원 $x^2 + y^2 = n^2$ 에 접하므로

$$x^2 + \{k(x-2n)\}^2 = n^2$$

$$x^2 + (kx - 2kn)^2 = n^2$$

$$(k^2 + 1)x^2 - 4k^2 nx + (4k^2 - 1)n^2 = 0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 에서

$$\frac{D}{4} = 4k^4 n^2 - (k^2 + 1)(4k^2 - 1)n^2 = 0$$

$$-(3k^2 - 1)n^2 = 0, \quad k^2 = \frac{1}{3} \quad \therefore k = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

그런데 $k < 0$ 이므로 $k = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \therefore a_n = \frac{2\sqrt{3}}{3}n$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}n}{2n+1} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

- 50** 곡선 $y = x^2 - \left(4 + \frac{1}{n}\right)x + \frac{4}{n}$ 와 직선 $y = \frac{1}{n}x + 1$ 이 만나는 두 점 P_n, Q_n 의 x 좌표를 각각 α_n, β_n 이라 하면

$$P_n\left(\alpha_n, \frac{\alpha_n}{n} + 1\right), \quad Q_n\left(\beta_n, \frac{\beta_n}{n} + 1\right)$$

이때 α_n, β_n 은 이차방정식 $x^2 - \left(4 + \frac{1}{n}\right)x + \frac{4}{n} = \frac{1}{n}x + 1$,

즉 $x^2 - \left(4 + \frac{2}{n}\right)x + \frac{4}{n} - 1 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = 4 + \frac{2}{n}$$

삼각형 $OP_n Q_n$ 의 무게중심의 y 좌표 a_n 은

$$a_n = \frac{0 + \left(\frac{\alpha_n}{n} + 1\right) + \left(\frac{\beta_n}{n} + 1\right)}{3} = \frac{1}{3n}(\alpha_n + \beta_n) + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{1}{3n}\left(4 + \frac{2}{n}\right) + \frac{2}{3} = \frac{4}{3n} + \frac{2}{3n^2} + \frac{2}{3}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3n} + \frac{2}{3n^2} + \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

1 ③	2 7	3 $3+\sqrt{5}$	4 3	5 12
6 ③	7 $\frac{2}{5}$	8 ④	9 25	10 15
11 4	12 $\perp$	13 2	14 ④	15 ⑤
16 43	17 ④	18 ④	19 ②	20 ②

$$1 \quad \neg. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 6^n}{3^n + 6^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{6}} = -6$$

$$\perp. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1}}{2^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} = \infty$$

$$\subset. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5^n} + 1}{3^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\left(\frac{5}{9}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n}}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 0$$

$$\supset. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} + 4^{n+1}}{5^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 4 \times \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^n} = 5$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\subset$, $\supset$ 이다.

$$2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(a+2)\left(\frac{4}{3}\right)^n + \frac{b}{3}}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$a+2 \neq 0$, 즉 $a \neq -2$ 이면 극한값이 존재하지 않으므로
 $a = -2$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{b}{3}}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + 3} = 1$$

$$\frac{b}{9} = 1 \quad \therefore b = 9$$

$$\therefore a + b = -2 + 9 = 7$$

3 이차방정식 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 을 풀면

$$x = 3 \pm \sqrt{5}$$

이때 $\alpha > \beta$, 즉 $\alpha = 3 + \sqrt{5}$, $\beta = 3 - \sqrt{5}$ 라 하면

$$0 < \frac{\beta}{\alpha} < 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{\alpha^n + \beta^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha + \beta \times \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} \\ &= \alpha = 3 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

다른 풀이

이차방정식 $x^2 - 6x + 4 = 0$ 을 풀면 $x = 3 \pm \sqrt{5}$

이때 $\beta > \alpha$, 즉 $\alpha = 3 - \sqrt{5}$, $\beta = 3 + \sqrt{5}$ 라 하면

$$0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{\alpha^n + \beta^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha \times \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + \beta}{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + 1} \\ &= \beta = 3 + \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$4 \quad S_n = \frac{4(3^n - 1)}{3 - 1} = 2 \times 3^n - 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \times 3^n + 2^n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \times 3^n + 2^n}{2 \times 3^n - 2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}{2 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 3 \end{aligned}$$

5 (i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3^{n+1} - 3 - (3^n - 3) \\ &= 2 \times 3^n \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 - 9 - 3 = 6$$

(i), (ii)에서 $a_n = 2 \times 3^n$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n a_{n+1}}{9^n + 3^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 3^n \times 2 \times 3^{n+1}}{9^n + 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12 \times 9^n}{9^n + 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{12}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n} = 12 \end{aligned}$$

$$6 \quad a_n = 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n + 3^{n-1}$$

$$b_n = 3 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n + 3^{n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times 3^{n+1} - 2 \times 3^n + 3^{n-1}}{3 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n + 3^{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9 - 2 + \frac{1}{3}}{6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{3}} = 22 \end{aligned}$$

7 $10^n = 2^n \times 5^n$ 이므로 10^n 의 약수의 총합 $p(n)$ 은

$$\begin{aligned} p(n) &= (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n)(1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^n) \\ &= \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{5^{n+1} - 1}{5 - 1} \\ &= \frac{1}{4}(10^{n+1} - 5^{n+1} - 2^{n+1} + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^n}{p(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \times 10^n}{10^{n+1} - 5^{n+1} - 2^{n+1} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{10 - 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + \left(\frac{1}{10}\right)^n} \\ &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

8 수열 $\left\{(x+1)\left(\frac{x-2}{3}\right)^{n-1}\right\}$ 이 수렴하려면

$$x+1=0 \text{ 또는 } -1 < \frac{x-2}{3} \leq 1$$

$$x=-1 \text{ 또는 } -3 < x-2 \leq 3$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 5$$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 이므로 그 합은

$$-1+0+1+2+3+4+5=14$$

9 수열 $\{(x-2)(\log_3 x - 2)^{n-1}\}$ 이 수렴하려면

$$x-2=0 \text{ 또는 } -1 < \log_3 x - 2 \leq 1$$

$$x=2 \text{ 또는 } 1 < \log_3 x \leq 3$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } 3 < x \leq 27$$

따라서 정수 x 는 $2, 4, 5, 6, \dots, 27$ 의 25개이다.

10 등비수열 $\left\{\left(\frac{3x-1}{2}\right)^{n-1}\right\}$ 이 수렴하려면

$$-1 < \frac{3x-1}{2} \leq 1, \quad -2 < 3x-1 \leq 2$$

$$-1 < 3x \leq 3 \quad \therefore -\frac{1}{3} < x \leq 1$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \times 3^{n+1} - x^{n+2}}{3^n + x^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{15 - x^2 \left(\frac{x}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{x}{3}\right)^n} = 15$$

11 등비수열 $\{(f(x))^n\}$ 이 수렴하려면

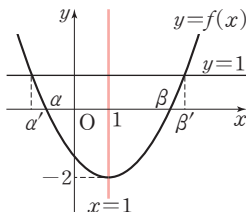
$$-1 < f(x) \leq 1$$

이때 공비가 정수이므로 $f(x)=0$ 또는 $f(x)=1$

방정식 $f(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표와 같으므로 두 근을 α, β 라 하자.

이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=1 \quad \therefore \alpha+\beta=2$$



방정식 $f(x)=1$ 을 만족시키는 x 의 값은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 x 좌표와 같으므로 두 근을 α', β' 이라 하면

$$\frac{\alpha'+\beta'}{2}=1 \quad \therefore \alpha'+\beta'=2$$

따라서 조건을 만족시키는 모든 x 의 값의 합은

$$\alpha+\beta+\alpha'+\beta'=2+2=4$$

12 $\neg$. $r > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{1+r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{\frac{1}{r^n}+1} = r$$

$\neg$. $-1 < r < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{1+r^n} = 0$$

$\neg$. $r < -1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1}}{1+r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{\frac{1}{r^n}+1} = r$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$ 이다.

13 (i) $|r| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{2n}} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+r^{2n}}{2+r^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{r^{2n}}+1}{\frac{2}{r^{2n}}+1} = 1$$

(ii) $|r| = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+r^{2n}}{2+r^{2n}} = \frac{1+1}{2+1} = \frac{2}{3}$$

(iii) $|r| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+r^{2n}}{2+r^{2n}} = \frac{1}{2}$$

따라서 $a=1, b=\frac{2}{3}, c=\frac{1}{2}$ 이므로

$$a+3b-2c=1+2-1=2$$

14 (i) $1 \leq r < 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{3}\right)^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + r^{n+1}}{3^n + 7 \times r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + r \times \left(\frac{r}{3}\right)^n}{1 + 7 \times \left(\frac{r}{3}\right)^n} = 1$$

즉, r 는 $1 \leq r < 3$ 인 자연수이므로 $r=1$ 또는 $r=2$

(ii) $r=3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r}{3}\right)^n = 1$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + r^{n+1}}{3^n + 7 \times r^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + r \times \left(\frac{r}{3}\right)^n}{1 + 7 \times \left(\frac{r}{3}\right)^n} \\ &= \frac{1+3}{1+7} = \frac{1}{2} \neq 1\end{aligned}$$

(iii) $r > 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{r}\right)^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + r^{n+1}}{3^n + 7 \times r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{r}\right)^n + r}{\left(\frac{3}{r}\right)^n + 7} = \frac{r}{7}$$

즉, $\frac{r}{7} = 1$ 에서 $r = 7$

(i), (ii), (iii)에서

$r = 1$ 또는 $r = 2$ 또는 $r = 7$

따라서 모든 r 의 값의 합은

$$1 + 2 + 7 = 10$$

15 (i) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 2x - 1}{x^{n+1} + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2x}{x^n} - \frac{1}{x^n}}{x + \frac{1}{x^n}} = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(ii) $x = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 2x - 1}{x^{n+1} + 1} \\ &= \frac{1 + 2 - 1}{1 + 1} = 1 \end{aligned}$$

(iii) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+1} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n + 2x - 1}{x^{n+1} + 1} \\ &= 2x - 1 \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (|x| > 1) \\ 1 & (x = 1) \\ 2x - 1 & (|x| < 1) \end{cases}$$

따라서 $f(0) = -1$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$, $f(1) = 1$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}$,

$f(3) = \frac{1}{3}$ 이므로 옳지 않은 것은 ⑤이다.

16 (i) $x = 1$, 2일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 3^{n+1}}{x^n + 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x\left(\frac{x}{3}\right)^n - 3}{\left(\frac{x}{3}\right)^n + 1} = -3 \end{aligned}$$

(ii) $x = 3$ 일 때,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 3^{n+1}}{3^n + 3^n} = 0$$

(iii) $x = 4, 5, 6, \dots, 10$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{x}\right)^n = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} - 3^{n+1}}{x^n + 3^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x - 3 \times \left(\frac{3}{x}\right)^n}{1 + \left(\frac{3}{x}\right)^n} = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{x=4}^{10} f(x) &= -3 \times 2 + 0 + (4 + 5 + 6 + \dots + 10) \\ &= -6 + \frac{7(4+10)}{2} = 43 \end{aligned}$$

17 (i) $0 < x < \frac{4}{x}$, 즉 $0 < x < 2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} + \left(\frac{4}{x}\right)^n}{x^n + \left(\frac{4}{x}\right)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \times \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + 1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} + \frac{4}{x}} = \frac{x}{4} \end{aligned}$$

방정식 $f(x) = 2x - 3$ 에서

$$\frac{x}{4} = 2x - 3, \quad \frac{7}{4}x = 3 \quad \therefore x = \frac{12}{7}$$

(ii) $x = \frac{4}{x}$, 즉 $x = 2$ 일 때,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 2^n}{2^n + 2^{n+1}} = 1$$

방정식 $f(x) = 2x - 3$ 에서

$$1 = 2x - 3 \quad \therefore x = 2$$

(iii) $\frac{4}{x} < x$, 즉 $x > 2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x}\right)^{2n} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+1} + \left(\frac{4}{x}\right)^n}{x^n + \left(\frac{4}{x}\right)^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + \left(\frac{2}{x}\right)^{2n}}{1 + \frac{4}{x} \times \left(\frac{2}{x}\right)^{2n}} = x \end{aligned}$$

방정식 $f(x) = 2x - 3$ 에서

$$x = 2x - 3 \quad \therefore x = 3$$

(i), (ii), (iii)에서

$$x = \frac{12}{7} \text{ 또는 } x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 모든 실근의 합은

$$\frac{12}{7} + 2 + 3 = \frac{47}{7}$$

18 (i) $0 < x < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+2} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^{n+2} + 3x - 1}{x^n + 1} = 3x - 1$$

(ii) $x=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+2} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^{n+2} + 3x - 1}{x^n + 1} \\ &= \frac{a+3-1}{1+1} = \frac{a+2}{2} \end{aligned}$$

(iii) $x>1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^{n+2} + 3x - 1}{x^n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + \frac{3x}{x^n} - \frac{1}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^n}} = ax^2 \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & (0 < x < 1) \\ \frac{a+2}{2} & (x=1) \\ ax^2 & (x>1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 양의 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} ax^2 = \lim_{x \rightarrow 1-} (3x-1) = \frac{a+2}{2}$$

$$\therefore a=2$$

19 (i) $0 < x < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+3} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+3} + ax^2 + bx}{x^n + 1} \\ &= ax^2 + bx \end{aligned}$$

(ii) $x=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{n+3} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+3} + ax^2 + bx}{x^n + 1} \\ &= \frac{1+a+b}{1+1} = \frac{a+b+1}{2} \end{aligned}$$

(iii) $x>1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+3} + ax^2 + bx}{x^n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^3 + \frac{ax^2}{x^n} + \frac{bx}{x^n}}{1 + \frac{1}{x^n}} = x^3 \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & (0 < x < 1) \\ \frac{a+b+1}{2} & (x=1) \\ x^3 & (x>1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 연속이다.

따라서 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} x^3 = \lim_{x \rightarrow 1-} (ax^2 + bx) = \frac{a+b+1}{2}$$

$$1 = a + b = \frac{a+b+1}{2}$$

$$\therefore a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

또 $f'(x) = \begin{cases} 2ax+b & (0 < x < 1) \\ 3x^2 & (x>1) \end{cases}$ 이고 미분계수 $f'(1)$ 이

존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} 3x^2 = \lim_{x \rightarrow 1-} (2ax+b)$$

$$\therefore 3 = 2a+b \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-1$

$$\therefore a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5$$

20 (i) $|x| > 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n+1}}{1 + x^{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^{2n}} - x}{\frac{1}{x^{2n}} + 1} = -x \end{aligned}$$

(ii) $x=1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n+1}}{1 + x^{2n}} \\ &= \frac{1-1}{1+1} = 0 \end{aligned}$$

(iii) $x=-1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = -1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n+1}}{1 + x^{2n}} \\ &= \frac{1 - (-1)}{1+1} = 1 \end{aligned}$$

(iv) $|x| < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+1} = 0$ 이므로

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - x^{2n+1}}{1 + x^{2n}} = 1$$

(i)~(iv)에서

$$f(x) = \begin{cases} -x & (|x| > 1) \\ 0 & (x=1) \\ 1 & (-1 \leq x < 1) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

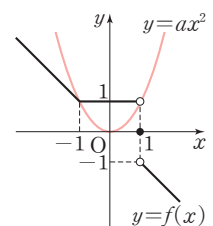
그림과 같으므로 이차함수

$y=ax^2$ ($a>0$)의 그래프와 오직

한 점에서 만나려면

$$0 < a \leq 1$$

따라서 양수 a 의 최댓값은 1이다.



I-2. 급수

01 급수

16~19쪽

1 ②	2 ㄱ, ㄴ	3 2	4 $\frac{1}{2}$	5 ②
6 ③	7 3	8 ③	9 $\frac{1}{2}$	10 15
11 -12	12 ③	13 ④	14 4	15 6
16 ⑤	17 $\frac{5}{2}$	18 5	19 ①	20 -1
21 7	22 ④	23 ㄱ, ㄴ, ㄷ	24 ④	
25 $\frac{1}{4}$	26 $\frac{1}{2}$			

1 주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하자.

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

즉, 주어진 급수는 수렴한다.

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{3}{\sqrt{3k+3} + \sqrt{3k}} \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k}) \\ &= -\sqrt{3} + \sqrt{3n+3} \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-\sqrt{3} + \sqrt{3n+3}) = \infty \end{aligned}$$

즉, 주어진 급수는 발산한다.

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

즉, 주어진 급수는 수렴한다.

따라서 보기에서 발산하는 급수인 것은 ㄴ이다.

2 주어진 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라 하자.

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } S_n &= \left(2 - \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{3} \right) + \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{4} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{n+1}{n} - \frac{n+2}{n+1} \right) \\ &= 2 - \frac{n+2}{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{n+2}{n+1} \right) = 2 - 1 = 1$$

즉, 주어진 급수는 수렴한다.

ㄴ. (i) $n=2k-1$ (k 는 자연수)일 때,

$$\begin{aligned} S_{2k-1} &= -\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= -\frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{k+1} \right) = 0$$

(ii) $n=2k$ (k 는 자연수)일 때,

$$\begin{aligned} S_{2k} &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(-\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = 0$$

(i), (ii)에서 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = 0$ 이므로 주어진 급수는 수렴한다.

ㄷ. (i) $n=2k-1$ (k 는 자연수)일 때,

$$\begin{aligned} S_{2k-1} &= \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) + \left(-\frac{2}{3} + \frac{3}{4} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(-\frac{k-1}{k} + \frac{k}{k+1} \right) \\ &= \frac{k}{k+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

(ii) $n=2k$ (k 는 자연수)일 때,

$$\begin{aligned} S_{2k} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{k}{k+1} - \frac{k}{k+1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k} = 0$$

(i), (ii)에서 $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k-1} \neq \lim_{k \rightarrow \infty} S_{2k}$ 이므로 주어진 급수는 발산한다.

따라서 보기에서 수렴하는 급수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

$$\begin{aligned} \text{3 } S_n &= \frac{n^2+3}{1+2+3+\cdots+n} \\ &= \frac{n^2+3}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2n^2+6}{n^2+n} \\ \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+6}{n^2+n} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4 \quad & \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5 \quad & \sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n^2-1}{n^2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{(n+1)(n-1)}{n \times n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \log \frac{(k+1)(k-1)}{k \times k} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log \frac{3 \times 1}{2 \times 2} + \log \frac{4 \times 2}{3 \times 3} + \log \frac{5 \times 3}{4 \times 4} \right. \\
&\quad \left. + \cdots + \log \frac{(n+1)(n-1)}{n \times n} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left\{ \frac{3 \times 1}{2 \times 2} \times \frac{4 \times 2}{3 \times 3} \times \frac{5 \times 3}{4 \times 4} \right. \\
&\quad \left. \times \cdots \times \frac{(n+1)(n-1)}{n \times n} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{n+1}{2n} = \log \frac{1}{2} = -\log 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6 \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{2a_n a_{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ \frac{2n^2+3}{n^2} - \frac{2(n+1)^2+3}{(n+1)^2} \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left\{ 2 + \frac{3}{n^2} - 2 - \frac{3}{(n+1)^2} \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right\} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{(n+1)^2} \right\} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

7 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n + b_n = -4, \quad a_n b_n = -n^2 + 1$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} \right) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n + b_n}{a_n b_n} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-4}{-n^2 + 1} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{(n-1)(n+1)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n 2 \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\
&= 3
\end{aligned}$$

8 $a_n = 1 + (n-1)d$ 이므로

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{a_n} - \frac{n+1}{a_{n+1}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{a_k} - \frac{k+1}{a_{k+1}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{n+1}{a_{n+1}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{n+1}{d(n+1)} \right) \\
&= 1 - \frac{1}{d}
\end{aligned}$$

따라서 $1 - \frac{1}{d} = \frac{2}{3}$ 이므로

$$d = 3$$

9 $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1} = S_n$ 이라 하면

$$S_n = n^2 + 5n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{n+1} &= S_n - S_{n-1} \\
&= n^2 + 5n - \{(n-1)^2 + 5(n-1)\} \\
&= 2n + 4
\end{aligned}$$

$$\therefore a_n = 2(n+1)(n+2)$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$\frac{a_1}{2} = S_1 = 1 + 5 = 6$$

$$\therefore a_1 = 12$$

(i), (ii)에서

$$a_n = 2(n+1)(n+2)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2(n+1)(n+2)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

10 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = \sum_{k=1}^n ka_k = S_n$ 이라 하면

$$S_n = 5n - 4$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}
na_n &= S_n - S_{n-1} \\
&= 5n - 4 - \{5(n-1) - 4\} = 5
\end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \frac{5}{n}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 5 - 4 = 1$$

(i), (ii)에서

$$a_1 = 1, \quad a_n = \frac{5}{n} \quad (\text{단, } n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} &= a_1 a_2 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{25}{n(n+1)} \\ &= \frac{5}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n 25 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{5}{2} + \lim_{n \rightarrow \infty} 25 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{5}{2} + \frac{25}{2} = 15 \end{aligned}$$

11 두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 4b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{3} + 1 \right)$ 이 수렴하므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 4b_n) &= 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{b_n}{3} + 1 \right) = 0 \\ \frac{b_n}{3} + 1 &= c_n \text{으로 놓으면} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (3c_n - 3) \\ &= 3 \times 0 - 3 = -3 \\ a_n - 4b_n &= d_n \text{으로 놓으면} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (4b_n + d_n) \\ &= 4 \times (-3) + 0 = -12 \end{aligned}$$

12 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (2a_n - 3)$ 이 수렴하므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 3) &= 0 \\ 2a_n - 3 &= b_n \text{으로 놓으면} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} (b_n + 3) = \frac{1}{2} \times (0 + 3) = \frac{3}{2} \\ \text{따라서 } r &= \frac{3}{2} \text{이므로} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+2} - 1}{r^{n+1} + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{2} \right)^{n+2} - 1}{\left(\frac{3}{2} \right)^n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{9}{4} - \left(\frac{2}{3} \right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

13 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{n+2n+3n+\dots+n^2}{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2} \right)$ 이 수렴하므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} - \frac{n+2n+3n+\dots+n^2}{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2} \right) &= 0 \\ \frac{a_n}{n} - \frac{n+2n+3n+\dots+n^2}{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2} &= b_n \text{으로 놓으면} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n + \frac{n+2n+3n+\dots+n^2}{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2} \right) \\ &= 0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \times \frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

14 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 20 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + 10a_{n+1}}{2a_n + 5} \\ = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n + 10 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}}{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 5} = \frac{20 + 0}{0 + 5} = 4 \end{aligned}$$

15 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 4)$ 가 수렴하므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 4) &= 0 \\ a_n - 4 &= b_n \text{으로 놓으면} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n - 4n + \sum_{k=1}^n a_k \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ b_n + 4 - 4n + \sum_{k=1}^n (b_k + 4) \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(b_n + 4 - 4n + \sum_{k=1}^n b_k + 4n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n + 4) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \\ &= 0 + 4 + 2 = 6 \end{aligned}$$

16 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 6^n + 3}{2^n a_n + 3^n b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 3 \times \left(\frac{1}{6} \right)^n}{\left(\frac{1}{3} \right)^n a_n + \left(\frac{1}{2} \right)^n b_n} \dots \textcircled{1}$

$$1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1} < a_n < \frac{3^n}{2} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} (3^n - 1) < a_n < \frac{3^n}{2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \right)^n < \left(\frac{1}{3} \right)^n a_n < \frac{1}{2}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\} = \frac{1}{2}$ 이므로 수열의 극한의 대

소 관계에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n a_n = \frac{1}{2}$

$$\frac{4n^2 - 3n}{2n^2 + 1} < \sum_{k=1}^n b_k < \frac{4n^2 + 5}{2n^2 - 1} \text{에서 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 3n}{2n^2 + 1} = 2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 5}{2n^2 - 1} = 2 \text{이므로 수열의 극한의 대소 관계에 의하여}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n b_k = 2 \quad \therefore \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 2$$

즉, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

따라서 $\textcircled{1}$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \times 6^n + 3}{2^n a_n + 3^n b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 3 \times \left(\frac{1}{6} \right)^n}{\left(\frac{1}{3} \right)^n a_n + \left(\frac{1}{2} \right)^n b_n} \\ &= \frac{2 + 0}{\frac{1}{2} + 0} = 4 \end{aligned}$$

- 17 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = p$ 에서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
 또 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = p$ 이면 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n+1} = p$ 이므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n + S_{n+1} - 2a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 5 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}$ 에서
 $p + p - 0 = 5 \quad \therefore p = \frac{5}{2}$
- 18 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b_n}{3} - 2a_n \right) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} b_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$
 $= \frac{1}{3} \times 3 - 2 \times (-2) = 5$
- 19 $a_n - 2b_n = c_n$ 으로 놓으면
 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} a_n - \frac{1}{2} c_n \right)$
 $= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n$
 $= \frac{1}{2} \times 2 - \frac{1}{2} \times 8 = -3$
- 20 $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} \log b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면
 $\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{a_n}{b_n} = 1$ 에서 $\sum_{n=1}^{\infty} (\log a_n - \log b_n) = 1$
 $\therefore \alpha - \beta = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \log a_n b_n^2 = -2$ 에서 $\sum_{n=1}^{\infty} (\log a_n + 2 \log b_n) = -2$
 $\therefore \alpha + 2\beta = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $\alpha = 0, \beta = -1$
 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \log a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\log a_n + \log b_n) = \alpha + \beta = -1$
- 21 $\sum_{k=1}^n a_k = S_n, \sum_{k=1}^n a_{k+1} = T_n$ 이라 하면
 $T_n = S_n - a_1 + a_{n+1}$
 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$
 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - a_1 + a_{n+1})$
 $= 6 - a_1 + 0 = 6 - a_1$
 이때 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + 3a_{n+1}) = 3$ 에서
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + 3 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = 3$
 $6 + 3(6 - a_1) = 3$
 $24 - 3a_1 = 3 \quad \therefore a_1 = 7$

- 22 $\neg. \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \{b_n + (a_n - b_n)\}$
 $= \alpha + \beta$
 즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 도 수렴한다.
 $\neg. \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 모두 수렴하므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
 $= 0 \times 0 = 0$
 $\neg. [\text{반례}] \{a_n\}: 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$
 $\{b_n\}: 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$
 이라 하면 $a_n b_n = 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 수렴하지만
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ 이다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.
- 23 $\neg. \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 이 수렴하므로
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{a_n}$
 $= \frac{0}{3} = 0$
 $\neg. a_n + 2b_n = c_n, 2a_n - b_n = d_n$ 으로 놓고 두 식을 연립하여 풀면
 $a_n = \frac{1}{5} c_n + \frac{2}{5} d_n, b_n = \frac{2}{5} c_n - \frac{1}{5} d_n$
 이때 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} d_n = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5} c_n + \frac{2}{5} d_n \right)$
 $= \frac{1}{5} \alpha + \frac{2}{5} \beta$
 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{5} c_n - \frac{1}{5} d_n \right)$
 $= \frac{2}{5} \alpha - \frac{1}{5} \beta$
 즉, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 도 모두 수렴한다.
 $\neg. \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
 $= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$
 $= (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \cdots < 0$
 $\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$
 따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg, \neg$ 이다.

24 $nx+ny+y-2=0$ 에 $y=0$ 을 대입하면

$$nx-2=0$$

$$\therefore x=\frac{2}{n} \quad \therefore A_n\left(\frac{2}{n}, 0\right)$$

$nx+ny+y-2=0$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$ny+y-2=0$$

$$\therefore y=\frac{2}{n+1} \quad \therefore B_n\left(0, \frac{2}{n+1}\right)$$

따라서 삼각형 OA_nB_n 의 넓이 S_n 은

$$S_n=\frac{1}{2} \times \frac{2}{n} \times \frac{2}{n+1}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=2 \end{aligned}$$

25 직선 $x-3y+6=0$, 즉 $y=\frac{1}{3}x+2$ 에서 x 좌표와 y 좌표가

모두 자연수이려면 x 좌표가 3의 배수이어야 한다.

즉, $x=3n$ (n 은 자연수)이라 하면 $y=n+2$ 이므로

$$a_n=3n, b_n=n+2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_nb_n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n(n+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{6}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

26 원점을 지나고 원에 접하는 직선의 기울기가 a_n 이므로 직선의 방정식은 $y=a_nx$

원 $(x-2n)^2+y^2=1$ 의 중심의 좌표는 $(2n, 0)$, 반지름의 길이는 1이고 원의 중심과 직선 $y=a_nx$, 즉

$a_nx-y=0$ 사이의 거리는 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|2na_n|}{\sqrt{a_n^2+(-1)^2}}=1$$

$$|2na_n|=\sqrt{a_n^2+1}$$

양변을 제곱하면 $4n^2a_n^2=a_n^2+1$

$$(4n^2-1)a_n^2=1 \quad \therefore a_n^2=\frac{1}{4n^2-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

02 등비급수

20~24쪽

1 $-\frac{3}{7}$	2 $\angle, \sqsubset$	3 29	4 ⑤	5 $-\frac{6}{5}$
6 $-\frac{1}{3}$	7 ⑤	8 $\frac{1}{4}$	9 $\frac{1}{2}$	10 $\frac{100}{3}$
11 ②	12 3	13 10	14 $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$	
15 $0 < x < 1$		16 ③	17 ②	18 $\sqsubset$
19 ①	20 ④	21 ①	22 ①	23 ①
24 80	25 1	26 ④	27 $\frac{2}{3}$	28 $\frac{81}{4}\pi$
29 $\frac{25}{48}\pi$	30 $32-8\pi$			

$$1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n = \frac{-\frac{3}{4}}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)} = -\frac{3}{7}$$

$$\begin{aligned} 2 \quad \neg, \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 2 \\ &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 2 \times \frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2}{4^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - 2 \times \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} \\ &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqsubset, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+(-3)^n}{6^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\angle, \sqsubset$ 이다.

$$\begin{aligned} 3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (3^n-1) \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} 3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \\ &= \frac{3}{1-\frac{3}{5}} - \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \\ &= \frac{15}{2} - \frac{5}{4} = \frac{25}{4} \end{aligned}$$

따라서 $p=4, q=25$ 이므로 $p+q=29$

$$\begin{aligned}
4 \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + \cos n\pi}{5} \right)^n \\
&= \frac{1 + \cos \pi}{5} + \left(\frac{1 + \cos 2\pi}{5} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos 3\pi}{5} \right)^3 \\
&\quad + \left(\frac{1 + \cos 4\pi}{5} \right)^4 + \dots \\
&= 0 + \left(\frac{2}{5} \right)^2 + 0 + \left(\frac{2}{5} \right)^4 + \dots \\
&= \frac{\frac{4}{25}}{1 - \frac{4}{25}} = \frac{4}{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5 \quad & \text{등비수열 } \{a_n\} \text{의 공비는 } \frac{a_2}{a_1} = -\frac{2}{3} \text{이므로} \\
& a_n = 3 \times \left(-\frac{2}{3} \right)^{n-1} \\
& \therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \times \left(-\frac{2}{3} \right)^n = 3 \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3} \right)^n \\
&= 3 \times \frac{-\frac{2}{3}}{1 - \left(-\frac{2}{3} \right)} = -\frac{6}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6 \quad & \text{수열 } \{a_n\} \text{은 } 0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots \text{이므로} \\
& \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} - \frac{a_4}{2^4} + \frac{a_5}{2^5} - \frac{a_6}{2^6} + \dots \\
&= 0 - \frac{1}{2^2} + 0 - \frac{1}{2^4} + 0 - \frac{1}{2^6} + \dots \\
&= -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) \\
&= -\frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7 \quad & \text{수열 } \{a_n\} \text{은 } 3, 1, 3, 1, 3, 1, \dots \text{이므로} \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n)^n}{5^n} = \frac{3}{5} + \frac{1^2}{5^2} + \frac{3^3}{5^3} + \frac{1^4}{5^4} + \frac{3^5}{5^5} + \frac{1^6}{5^6} + \dots \\
&= \left(\frac{3}{5} + \frac{3^3}{5^3} + \frac{3^5}{5^5} + \dots \right) + \left(\frac{1^2}{5^2} + \frac{1^4}{5^4} + \frac{1^6}{5^6} + \dots \right) \\
&= \frac{\frac{3}{5}}{1 - \frac{9}{25}} + \frac{\frac{1}{25}}{1 - \frac{1}{25}} \\
&= \frac{15}{16} + \frac{1}{24} = \frac{47}{48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8 \quad & a_1 = \frac{1}{4}, a_n a_{n+1} = 2^n \text{에서 } a_{n+1} = \frac{2^n}{a_n} \text{이므로} \\
& a_2 = \frac{2}{a_1} = 8 \\
& a_3 = \frac{4}{a_2} = \frac{1}{2} \\
& a_4 = \frac{8}{a_3} = 16
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a_5 = \frac{16}{a_4} = 1 \\
& a_6 = \frac{32}{a_5} = 32 \\
& \vdots \\
& \therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n}} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6} + \dots \\
&= \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots \\
&= \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
9 \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n + (-x)^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{x}{4} \right)^n \\
&= \frac{\frac{x}{2}}{1 - \frac{x}{2}} + \frac{-\frac{x}{4}}{1 - \left(-\frac{x}{4} \right)} \\
&= \frac{x}{2-x} - \frac{x}{4+x} \\
&= \frac{2x^2 + 2x}{-x^2 - 2x + 8} \\
&\stackrel{①}{\approx}, \frac{2x^2 + 2x}{-x^2 - 2x + 8} = \frac{2}{9} \text{이므로} \\
&10x^2 + 11x - 8 = 0, (5x+8)(2x-1) = 0 \\
&\therefore x = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < x < 2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10 \quad & \text{등비수열 } \{a_n\} \text{의 첫째항을 } a, \text{ 공비를 } r \text{라 하면} \\
& \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 10 \text{에서 } \frac{a}{1-r} = 10 \\
& \therefore a = 10(1-r) \quad \dots\dots ① \\
& \text{수열 } \{a_{3n}\} \text{은 첫째항이 } ar^2, \text{ 공비가 } r^3 \text{인 등비수열이므로} \\
& \sum_{n=1}^{\infty} a_{3n} = \frac{10}{7} \text{에서 } \frac{ar^2}{1-r^3} = \frac{10}{7} \\
& \therefore 7ar^2 = 10(1-r^3) \\
& ①을 대입하면 \\
& 70(1-r)r^2 = 10(1-r^3) \\
& 7(1-r)r^2 = (1-r)(1+r+r^2) \\
& 7r^2 = 1+r+r^2 \quad (\because 0 < r < 1) \\
& 6r^2 - r - 1 = 0, (3r+1)(2r-1) = 0 \\
& \therefore r = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < r < 1) \\
& \text{이를 ①에 대입하면 } a = 5 \\
& \text{따라서 } a_n = 5 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \text{이므로} \\
& \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 5 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right\}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 25 \times \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \\
&= \frac{25}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{100}{3}
\end{aligned}$$

- 11 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하자.

수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 a , 공비가 r^2 인 등비수열이고,

수열 $\{a_{2n}\}$ 은 첫째항이 ar , 공비가 r^2 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n}) = 3 \text{에서}$$

$$\frac{a}{1-r^2} - \frac{ar}{1-r^2} = 3$$

$$\frac{a(1-r)}{(1+r)(1-r)} = 3$$

$$\therefore \frac{a}{1+r} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 a^2 , 공비가 r^2 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 6 \text{에서}$$

$$\frac{a^2}{1-r^2} = 6$$

$$\frac{a^2}{(1+r)(1-r)} = 6$$

①을 대입하면

$$\frac{3a}{1-r} = 6 \quad \therefore \frac{a}{1-r} = 2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a}{1-r} = 2$$

- 12 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 (가)에서

$$\frac{a}{1-r} = 2(a+ar)$$

$$2(1+r)(1-r) = 1 \quad (\because a > 0)$$

$$1-r^2 = \frac{1}{2} \quad \therefore r^2 = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

수열 $\{a_n^2\}$ 은 첫째항이 a^2 , 공비가 r^2 인 등비수열이므로

(나)에서

$$\frac{a^2}{1-r^2} = 2(a+ar^2)$$

$$2(1+r^2)(1-r^2) = a \quad (\because a > 0)$$

①을 대입하면

$$a = 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 첫째항이 a , 공비가 r^2 인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = \frac{a}{1-r^2} = \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

- 13 등비급수 $1 - \frac{x}{5} + \frac{x^2}{25} - \frac{x^3}{125} + \dots$ 이 수렴하려면

$$-1 < -\frac{x}{5} < 1$$

$$\therefore -5 < x < 5$$

따라서 $a = -5$, $b = 5$ 이므로

$$b-a = 10$$

- 14 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{2} \cos x)^{n-1}$ 이 수렴하려면

$$-1 < \sqrt{2} \cos x < 1$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi \quad (\because 0 < x < \pi)$$

- 15 수열 $\{x(x-1)^{n-1}\}$ 이 수렴하려면

$$x=0 \text{ 또는 } -1 < x-1 \leq 1$$

$$\therefore 0 \leq x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{등비급수 } \sum_{n=1}^{\infty} (x^2+x-1)^{n-1} \text{이 수렴하려면}$$

$$-1 < x^2+x-1 < 1$$

$$(i) \ x^2+x-1 > -1 \text{에서 } x(x+1) > 0$$

$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 0$$

$$(ii) \ x^2+x-1 < 1 \text{에서 } (x+2)(x-1) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 1$$

(i), (ii)에서

$$-2 < x < -1 \text{ 또는 } 0 < x < 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 구하는 x 의 값의 범위는 ①, ②에서

$$0 < x < 1$$

- 16 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로

$$-1 < r < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2} \text{은 공비가 } r \text{인 등비급수이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$-1 < r < 1$$

즉, 주어진 급수는 반드시 수렴한다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2r-3}{4}\right)^n \text{은 공비가 } \frac{2r-3}{4} \text{인 등비급수이므로 } \textcircled{1}$$

에서

$$-\frac{5}{4} < \frac{2r-3}{4} < -\frac{1}{4}$$

즉, 주어진 급수는 수렴하지 않는 경우가 있다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{2}+1\right)^n \text{은 공비가 } \frac{r}{2}+1 \text{인 등비급수이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{r}{2}+1 < \frac{3}{2}$$

즉, 주어진 급수는 수렴하지 않는 경우가 있다.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n-1} \text{은 공비가 } r^2 \text{인 등비급수이므로 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$0 \leq r^2 < 1$$

즉, 주어진 급수는 반드시 수렴한다.

따라서 보기에서 반드시 수렴하는 급수인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

- 17 두 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b^n$ 이 모두 수렴하므로

$$-1 < a < 1, -1 < b < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄱ. $\sum_{n=1}^{\infty} (ab)^n$ 은 공비가 ab 인 등비급수이므로 ㉠에서
 $-1 < ab < 1$

즉, 주어진 급수는 반드시 수렴한다.

ㄴ. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$ 은 공비가 $\frac{a+b}{2}$ 인 등비급수이므로 ㉠에서

$$-1 < \frac{a+b}{2} < 1$$

즉, 주어진 급수는 반드시 수렴한다.

ㄷ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a-b)^n$ 은 공비가 $a-b$ 인 등비급수이므로 ㉠에서
 $-2 < a-b < 2$

즉, 주어진 급수는 수렴하지 않는 경우가 있다.

ㄹ. $\sum_{n=1}^{\infty} (a^2-b^2)^n$ 은 공비가 a^2-b^2 인 등비급수이므로 ㉠에서

$$-1 < a^2-b^2 < 1$$

즉, 주어진 급수는 반드시 수렴한다.

따라서 보기에서 반드시 수렴하는 급수인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

18 ㄱ. [반례] $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$ 이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

은 모두 수렴하지만 $\frac{a_n}{b_n} = 2^n$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 은 발산한다.

ㄴ. [반례] $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$ 이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 은 모두 발산하지만 $a_n + b_n = 0$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ 은 수렴한다.

ㄷ. 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공비를 각각 a , b 라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^3$ 이 모두 수렴하므로

$$-1 < a^3 < 1, -1 < b^3 < 1$$

$$\therefore -1 < a < 1, -1 < b < 1$$

따라서 $-1 < ab < 1$ 이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 은 수렴한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

19 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 이 수렴하므로 $-1 < r < 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = k$ (k 는 실수)라 하면

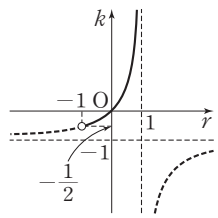
$$\begin{aligned} k &= \frac{r}{1-r} \\ &= \frac{-(1-r)+1}{1-r} \\ &= -\frac{1}{r-1} - 1 \end{aligned}$$

$$-1 < r < 1 \text{에서 } k = -\frac{1}{r-1} - 1$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$k > -\frac{1}{2}$$

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 의 합이 될 수 없는 것은 ㉠이다.



20 $1.5\dot{4} = 1.5444\cdots$

$$= 1.5 + 0.04 + 0.004 + 0.0004 + \cdots$$

$$= \frac{15}{10} + \frac{\frac{4}{100}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{15}{10} + \frac{4}{90} = \frac{139}{90}$$

21 $0.\dot{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, $0.\dot{0}3\dot{7} = \frac{37}{999} = \frac{1}{27}$ 이므로 공비를 r 라 하면

$$\frac{1}{3} r^2 = \frac{1}{27} \quad \therefore r = \frac{1}{3} (\because r > 0)$$

따라서 구하는 등비급수의 합은

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

22 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비를 r 라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0.\dot{6}$ 에서 $0.\dot{6} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ 이므로

$$\frac{r}{1-r} = \frac{2}{3}, 3r = 2 - 2r \quad \therefore r = \frac{2}{5}$$

따라서 $a_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$ 이므로

$$a_2 = \frac{4}{25} = 0.16$$

23 점 P_n 이 한없이 가까워지는 점의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \overline{OP_1} + \overline{P_2P_3} + \overline{P_4P_5} + \cdots$$

$$= 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \cdots$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5}$$

$$y = \overline{P_1P_2} + \overline{P_3P_4} + \overline{P_5P_6} + \cdots$$

$$= \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{6}{5}$$

따라서 점 P_n 이 한없이 가까워지는 점의 좌표는

$$\left(\frac{9}{5}, \frac{6}{5}\right)$$

$$\begin{aligned}
 24 \quad a &= \overline{OP_1} \cos 45^\circ + \overline{P_1P_2} \cos 45^\circ + \overline{P_2P_3} \cos 45^\circ + \cdots \\
 &= 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \cdots \\
 &= \frac{3\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 6\sqrt{2} \\
 b &= \overline{OP_1} \sin 45^\circ - \overline{P_1P_2} \sin 45^\circ + \overline{P_2P_3} \sin 45^\circ - \cdots \\
 &= 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \cdots \\
 &= \frac{3\sqrt{2}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{2} \\
 \therefore a^2 + b^2 &= (6\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 80
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 25 \quad &\text{직각이등변삼각형 } ABC \text{에서 } \angle CAB = 45^\circ \text{이므로} \\
 &\overline{BC} = \overline{AC} \sin 45^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \\
 &\text{삼각형의 중점연결정리에 의하여 삼각형 } ABC \text{에서} \\
 &\overline{B_1C_1} = \frac{1}{2} \overline{BC} = \frac{1}{2} \\
 &\text{삼각형 } AB_1C_1 \text{에서} \\
 &\overline{B_2C_2} = \frac{1}{2} \overline{B_1C_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
 &\text{삼각형 } AB_2C_2 \text{에서} \\
 &\overline{B_3C_3} = \frac{1}{2} \overline{B_2C_2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\
 &\vdots \\
 \therefore \overline{B_1C_1} + \overline{B_2C_2} + \overline{B_3C_3} + \cdots &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots \\
 &= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 26 \quad &\text{진자가 움직인 거리의 합은} \\
 &12 \times \frac{\pi}{3} + 2 \times 12 \times \frac{\pi}{3} \times \frac{3}{4} + 2 \times 12 \times \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \\
 &\quad + 2 \times 12 \times \frac{\pi}{3} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots \\
 &= 4\pi + \frac{6\pi}{1 - \frac{3}{4}} \\
 &= 4\pi + 24\pi = 28\pi (\text{cm})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 27 \quad &\text{삼각형 } A_1B_1D_1 \text{의 넓이 } S_1 \text{은} \\
 S_1 &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} \\
 &\text{두 삼각형 } A_nB_nD_n, A_{n+1}B_{n+1}D_{n+1} \text{은 닮음이고 닮음비가} \\
 &2:1 \text{이므로 넓이의 비는 } 4:1 \text{이다.} \\
 \therefore S_{n+1} &= \frac{1}{4} S_n
 \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열
이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$$

28 부채꼴 $B_1C_1C_2$ 의 넓이 S_1 은

$$S_1 = \pi \times 9^2 \times \frac{60}{360} = \frac{27}{2} \pi$$

이때 선분 B_1B_2 를 그으면 직각삼

각형 $B_1B_2C_2$ 에서

$$\begin{aligned}
 \overline{B_2C_2} &= \overline{B_1C_2} \tan 30^\circ \\
 &= 9 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 3\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

두 부채꼴 $B_nC_nC_{n+1}$,

$B_{n+1}C_{n+1}C_{n+2}$ 는 닮음이고 닮음비

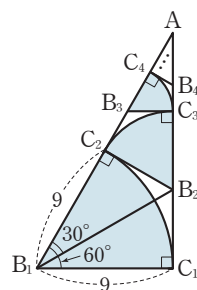
가 $\sqrt{3}:1$ 이므로 넓이의 비는 $3:1$

이다.

$$\therefore S_{n+1} = \frac{1}{3} S_n$$

따라서 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{27}{2} \pi$, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열
이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{27}{2} \pi}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{81}{4} \pi$$



29 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에 내접하는 반원의 반지름의 길이는
1이므로 그림 R_1 에 색칠된 반원의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{2}$$

선분 B_1C_1 을 지름으로 하는

반원의 중심을 O_1 , 점 C_2 에서

선분 B_1C_1 에 내린 수선의 발

을 P_1 이라 하자.

$\overline{A_1B_2} = x$ ($0 < x < 1$)라 하면

$\overline{A_1D_2} = 2x$

직각삼각형 $C_2P_1O_1$ 에서 $\overline{C_2P_1} = 1 - x$, $\overline{P_1O_1} = 1 - 2x$,

$\overline{C_2O_1} = 1$ 이므로

$$(1 - x)^2 + (1 - 2x)^2 = 1^2$$

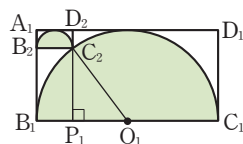
$$5x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$(5x - 1)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{5} \quad (\because 0 < x < 1)$$

두 직사각형 $A_1B_nC_nD_n$, $A_1B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 은 닮음이고 닮

음비가 $5:1$ 이다.



즉, 그림 R_n 에 새로 색칠된 반원과 그림 R_{n+1} 에 새로 색칠된 반원의 넓음비가 5 : 1이므로 넓이의 비는 25 : 1이다.

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 은 첫째항이 $\frac{\pi}{2}$, 공비가 $\frac{1}{25}$ 인 등비급수의 합이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\frac{\pi}{2}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{25}{48}\pi$$

30 n 번째에 새로 색칠된 도형의 넓이를 S_n 이라 하자.

첫 번째로 색칠된 도형의 넓이는 한 변의 길이가 4인 정사각형의 넓이에서 반지름의 길이가 2인 원의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$S_1 = 4^2 - \pi \times 2^2 = 16 - 4\pi$$

두 번째에 새로 색칠된 도형 1개의 넓이는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 정사각형의 넓이에서 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 인 원의 넓이를 뺀 것과 같고, 도형의 개수가 4이므로

$$S_2 = 4 \times \left\{ (\sqrt{2})^2 - \pi \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \right\} = 8 - 2\pi$$

세 번째에 새로 색칠된 도형 1개의 넓이는 한 변의 길이가 $\frac{1}{2}$ 인 정사각형의 넓이에서 반지름의 길이가 $\frac{1}{4}$ 인 원의 넓이를 뺀 것과 같고, 도형의 개수가 4×4 이므로

$$S_3 = 4 \times 4 \times \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \pi \times \left(\frac{1}{4} \right)^2 \right\} = 4 - \pi$$

⋮

따라서 구하는 모든 도형의 넓이의 합은

$$\begin{aligned} (16 - 4\pi) + (8 - 2\pi) + (4 - \pi) + \cdots &= \frac{16 - 4\pi}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 32 - 8\pi \end{aligned}$$

다른 풀이

첫 번째로 색칠된 도형의 넓이는 한 변의 길이가 4인 정사각형의 넓이에서 반지름의 길이가 2인 원의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$4^2 - \pi \times 2^2 = 16 - 4\pi$$

첫 번째로 색칠된 도형과 두 번째에 새로 색칠된 도형 1개는 닮음이고 닮음비는 정사각형의 한 변의 길이의 비와 같으므로 $4 : \sqrt{2}$ 이다.

즉, 넓이의 비는 8 : 1이고 색칠된 도형의 개수는 4배씩 늘어난다.

따라서 구하는 모든 도형의 넓이의 합은 첫째항이

$$16 - 4\pi, \text{ 공비가 } \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2} \text{인 등비급수의 합과 같으므로}$$

$$\frac{16 - 4\pi}{1 - \frac{1}{2}} = 32 - 8\pi$$

II-1. 여러 가지 함수의 미분

01 지수함수와 로그함수의 미분

26~31쪽

1 ㄱ, ㄴ, ㄷ	2 ㉔	3 ㉑	4 ㉔
5 ㉓	6 50	7 $-\frac{1}{4}$	8 $\frac{1}{4}$
10 e^2	11 $-\frac{1}{2}$	12 ㉔	13 $\frac{3}{4}$
15 ㉔	16 $\frac{10}{\ln 2}$	17 2	18 8
20 12	21 8	22 3	23 ㉔
25 3	26 $\frac{1}{2}$	27 6	28 ㉔
30 4	31 $-\frac{2}{3}$	32 ㉓	33 ㉔
35 $-10e^2$	36 $6e^2$	37 ㉔	38 ㉓
40 7	41 -1	39 ㉔	

$$1 \quad \neg. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1}}{5^x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \times \left(\frac{2}{5} \right)^x}{1 - \left(\frac{1}{5} \right)^x} = 0$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x}{2^x - 2^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4^x}{4^x - 1} = 0$$

$$\neg. \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 0 \text{일 때 } t \rightarrow \infty \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^{\frac{1}{x}} + 2^{\frac{1}{x}}}{3^{\frac{1}{x}} + 1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3^t + 2^t}{3^t + 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + \left(\frac{2}{3} \right)^t}{1 + \left(\frac{1}{3} \right)^t} = 1 \end{aligned}$$

$$\neg. \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow -\infty \text{일 때 } t \rightarrow 0^- \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - 7^{\frac{1}{x}}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 - 7^t} = \infty$$

따라서 보기에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

$$\begin{aligned} 2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (4^x - 2^x)^{\frac{1}{2x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[4^x \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^x \right\} \right]^{\frac{1}{2x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^x \right\}^{\frac{1}{2x}} \\ &= 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

$$3 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a \times 3^{x+1} + 12}{3^x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3a + 12 \times \left(\frac{1}{3} \right)^x}{1 + 4 \times \left(\frac{1}{3} \right)^x} = 3a$$

따라서 $3a = 15$ 이므로

$$a = 5$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \{ \log_2 (2x^2 + x + 3) - 2 \log_2 (2x + 1) \} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{2x^2 + x + 3}{(2x + 1)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_2 \frac{2x^2 + x + 3}{4x^2 + 4x + 1} \\
 &= \log_2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + x + 3}{4x^2 + 4x + 1} \\
 &= \log_2 \frac{1}{2} = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5 \quad & \lim_{x \rightarrow -2} (\log_4 |x^2 - 4| - \log_4 |x + 2|) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \log_4 \left| \frac{x^2 - 4}{x + 2} \right| \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \log_4 \left| \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 2} \right| \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \log_4 |x - 2| \\
 &= \log_4 \lim_{x \rightarrow -2} |x - 2| \\
 &= \log_4 4 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6 \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \log_5 (ax - 1) - \frac{1}{2} \log_5 (4x^2 + 1) \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_5 \frac{ax - 1}{\sqrt{4x^2 + 1}} \\
 &= \log_5 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax - 1}{\sqrt{4x^2 + 1}} = \log_5 \frac{a}{2} \\
 &\text{따라서 } \log_5 \frac{a}{2} = 2 \text{ 이므로} \\
 &\frac{a}{2} = 25 \quad \therefore a = 50
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7 \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{4x} \right) \left(1 - \frac{1}{2x} \right) \right\}^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{4x} \right)^x \times \left(1 - \frac{1}{2x} \right)^x \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left\{ \left(1 + \frac{1}{4x} \right)^{4x} \right\}^{\frac{1}{4}} \times \left\{ \left(1 - \frac{1}{2x} \right)^{-2x} \right\}^{-\frac{1}{2}} \right] \\
 &= e^{\frac{1}{4}} \times e^{-\frac{1}{2}} = e^{-\frac{1}{4}} \\
 &\therefore a = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8 \quad & \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \{ (1 + ax)^{\frac{1}{ax}} \}^{3a} = e^{3a} \\
 &\text{따라서 } e^{3a} = e^{\frac{3}{4}} \text{ 이므로 } a = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9 \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{2x - 1} \right)^{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x - 1}{2x} \right)^{-2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{2x} \right)^{-2x}
 \end{aligned}$$

이때 $-x = t$ 로 놓으면 $x = -t$ 이고, $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로 구하는 극한값은

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{2x} \right)^{-2x} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2t} \right)^{2t} = e$$

$$\begin{aligned}
 10 \quad & S_n = \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1} \\
 &\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2S_n} \right)^{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^{4n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{4n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} \right\}^2 = e^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11 \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x)}{e^{4x}-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1-2x)}{-2x} \times \frac{4x}{e^{4x}-1} \times \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} \\
 &= 1 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

12 $x-2=t$ 로 놓으면 $x=2+t$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln \sqrt{x-1}}{x-2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1+t}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \ln(1+t)}{t} \\
 &= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13 \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{ax}-1}{x^3+2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ax}-1}{ax} \times \frac{ax}{x^3+2x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ax}-1}{ax} \times \frac{a}{x^2+2} \right) \\
 &= 1 \times \frac{a}{2} = \frac{a}{2}
 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{a}{2} = 2 \text{ 이므로 } a = 4$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{ax} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3x+1)}{4x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times \frac{3}{4} \\
 &= 1 \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

14 $y = e^{\frac{x}{2}} - 1$ 이라 하면 $e^{\frac{x}{2}} = y + 1$

$$\frac{x}{2} = \ln(y+1) \quad \therefore x = 2 \ln(y+1)$$

따라서 $g(x) = 2 \ln(x+1)$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(2x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln(2x+1)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} \times 4 \\
 &= 1 \times 4 = 4
 \end{aligned}$$

$$15 \text{ ① } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x - 1}{x} \times \frac{1}{5} \\ = \ln 5 \times \frac{1}{5} = \frac{\ln 5}{5}$$

$$\text{② } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1+x)}{\log_3(1-x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log_3(1+x)}{x} \times \frac{-x}{\log_3(1-x)} \times (-1) \right\} \\ = \frac{1}{\ln 3} \times \ln 9 \times (-1) \\ = -\frac{2 \ln 3}{\ln 3} = -2$$

$$\text{③ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4^x - 1) \log_2(1+x)}{x^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{4^x - 1}{x} \times \frac{\log_2(1+x)}{x} \right\} \\ = \ln 4 \times \frac{1}{\ln 2} \\ = \frac{2 \ln 2}{\ln 2} = 2$$

$$\text{④ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - 2^{-x} + 1}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{-x} - 1}{-x} \\ = 1 + \ln 2$$

⑤ $x+1=t$ 로 놓으면 $x=t-1$ 이고, $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\log_2(x+2)}{x+1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+t)}{t} = \frac{1}{\ln 2}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

$$16 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x) + \log_2(1+2x) + \log_2(1+3x) + \log_2(1+4x)}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+2x)}{2x} \times 2 \\ + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+3x)}{3x} \times 3 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+4x)}{4x} \times 4 \\ = \frac{1}{\ln 2} + \frac{2}{\ln 2} + \frac{3}{\ln 2} + \frac{4}{\ln 2} = \frac{10}{\ln 2}$$

$$17 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+8)^x - a^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+8)^x - 1 - a^x + 1}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+8)^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} \\ = \ln(a+8) - \ln a = \ln \frac{a+8}{a}$$

따라서 $\ln \frac{a+8}{a} = \ln 5$ 이므로

$$\frac{a+8}{a} = 5, a+8=5a \quad \therefore a=2$$

18 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{ax+b} - 2) = 0$$

$$\sqrt{b} - 2 = 0 \quad \therefore b=4$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{ax+4} - 2}{\ln(1+4x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{(\sqrt{ax+4} + 2) \ln(1+4x)} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{4x}{\ln(1+4x)} \times \frac{a}{4(\sqrt{ax+4} + 2)} \right\}$$

$$= 1 \times \frac{a}{16} = \frac{a}{16}$$

$$\text{즉, } \frac{a}{16} = \frac{1}{8} \text{이므로 } a=2$$

$$\therefore ab = 2 \times 4 = 8$$

19 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2^{ax+b} - 8) = 0$$

$$2^b - 8 = 0 \quad \therefore b=3$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{ax+3} - 8}{2^{3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8(2^{ax} - 1)}{2^{3x} - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2^{ax} - 1}{ax} \times \frac{3x}{2^{3x} - 1} \times \frac{8}{3} a \right) \\ = \ln 2 \times \frac{1}{\ln 2} \times \frac{8}{3} a = \frac{8}{3} a$$

$$\text{즉, } \frac{8}{3} a = 16 \text{이므로 } a=6$$

$$\therefore a+b = 6+3 = 9$$

20 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} (ax+b) = 0$$

$$a+b=0 \quad \therefore b=-a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{ax - a} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{a(x-1)}$$

이때 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{x-1} - 1}{a(x-1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{at} \\ = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} \times \frac{1}{a} \\ = 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{a} = \frac{1}{6} \text{이므로 } a=6$$

이를 ①에 대입하면 $b=-6$

$$\therefore a-b = 6 - (-6) = 12$$

- 21 $\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $x=\frac{1}{t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a \ln \left(b + \frac{c}{x^2} \right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(b+ct^2)}{t^a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$t \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{t \rightarrow 0} \ln(b+ct^2) = 0$$

$$\ln b = 0 \quad \therefore b = 1$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+ct^2)}{t^a} &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+ct^2)}{ct^2} \times \frac{c}{t^{a-2}} \right\} \\ &= 1 \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c}{t^{a-2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c}{t^{a-2}} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{c}{t^{a-2}} = 4 \text{이므로}$$

$$a=2, c=4$$

$$\therefore abc = 2 \times 1 \times 4 = 8$$

- 22 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(a+x)}{e^{2x}-1} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(a+x) = 0$$

$$\ln a = 0 \quad \therefore a = 1$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^{2x}-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+x)}{x} \times \frac{2x}{e^{2x}-1} \times \frac{1}{2} \right\} \\ &= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore a+4b = 1+2=3$$

- 23 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{e^x - e^{a-1}}{a(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1-} b e^{ax}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{e^x - e^{a-1}}{a(x-1)} = b e^a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (e^x - e^{a-1}) = 0$$

$$e - e^{a-1} = 0, e^{a-1} = e \quad \therefore a = 2$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{e^x - e}{2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{e(e^{x-1}-1)}{2(x-1)}$$

이때 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{e(e^{x-1}-1)}{2(x-1)} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e(e^t-1)}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{e^t-1}{t} \times \frac{e}{2} \\ &= 1 \times \frac{e}{2} = \frac{e}{2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{e}{2} = b e^a \text{이므로}$$

$$\frac{e}{2} = b e^2 \quad \therefore b = \frac{1}{2e}$$

$$\therefore ab = 2 \times \frac{1}{2e} = \frac{1}{e}$$

- 24 $x \neq 0$ 일 때, $f(x) = \frac{e^{3x} - \ln a}{\ln(1+x)}$

함수 $f(x)$ 가 $x > -1$ 에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - \ln a}{\ln(1+x)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} - \ln a) = 0$$

$$1 - \ln a = 0, \ln a = 1 \quad \therefore a = e$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{3x} - 1}{3x} \times \frac{x}{\ln(1+x)} \times 3 \right\} \\ &= 1 \times 1 \times 3 = 3 \end{aligned}$$

- 25 $A(3, 0), P(t, \ln(t-2)), Q(0, \ln(t-2))$ 이므로

$$\overline{OA} = 3, \overline{PQ} = t, \overline{QO} = \ln(t-2)$$

$$\therefore S(t) = \frac{1}{2} \times (t+3) \times \ln(t-2) = \frac{t+3}{2} \ln(t-2)$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 3+} \frac{S(t)}{t-3} = \lim_{t \rightarrow 3+} \left\{ \frac{t+3}{2} \times \frac{\ln(t-2)}{t-3} \right\}$$

이때 $t-3=s$ 로 놓으면 $t=3+s$ 이고, $t \rightarrow 3$ 일 때

$s \rightarrow 0$ 이므로 구하는 극한값은

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 3+} \left\{ \frac{t+3}{2} \times \frac{\ln(t-2)}{t-3} \right\} &= \lim_{s \rightarrow 0+} \left\{ \frac{s+6}{2} \times \frac{\ln(1+s)}{s} \right\} \\ &= \frac{6}{2} \times 1 = 3 \end{aligned}$$

- 26 선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{1+t}{2}, \ln t \right)$

직선 AB의 기울기는 $\frac{2 \ln t}{t-1}$ 이므로 선분 AB의 수직이등

분선의 기울기는 $-\frac{t-1}{2 \ln t}$

선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$$y - \ln t = -\frac{t-1}{2 \ln t} \left(x - \frac{1+t}{2} \right)$$

$$\therefore y = -\frac{t-1}{2 \ln t} x + \frac{(t-1)(t+1)}{4 \ln t} + \ln t$$

즉, 선분 AB의 수직이등분선이 y축과 만나는 점의 y좌표 $p(t)$ 는

$$p(t) = \frac{(t-1)(t+1)}{4\ln t} + \ln t$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 1+} p(t) = \lim_{t \rightarrow 1+} \left\{ \frac{(t-1)(t+1)}{4\ln t} + \ln t \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(t-1)(t+1)}{4\ln t}$$

이때 $t-1=s$ 로 놓으면 $t=1+s$ 이고, $t \rightarrow 1+$ 일 때 $s \rightarrow 0+$ 이므로 구하는 극한값은

$$\lim_{t \rightarrow 1+} \frac{(t-1)(t+1)}{4\ln t} = \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{s(s+2)}{4\ln(1+s)}$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0+} \left\{ \frac{s}{\ln(1+s)} \times \frac{s+2}{4} \right\}$$

$$= 1 \times \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

- 27** 곡선 $y = \frac{1}{4}e^{2x}$ 을 y축의 방향으로 m 만큼 평행이동하면

$$y = \frac{1}{4}e^{2x} + m$$

이 곡선이 원점을 지나므로

$$0 = \frac{1}{4} + m \quad \therefore m = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore f(x) = \frac{e^{2x}-1}{4}$$

곡선 $y = -\ln 3x$ 를 x축의 방향으로 n 만큼 평행이동하면 $y = -\ln 3(x-n)$

이 곡선이 원점을 지나므로

$$0 = -\ln(-3n)$$

$$-3n = 1 \quad \therefore n = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore g(x) = -\ln(3x+1)$$

직선 $y=k$ 와 곡선 $y=g(x)$ 의 교점의 x좌표를 구하면

$$-\ln(3x+1) = k, \quad 3x+1 = e^{-k}$$

$$\therefore x = \frac{e^{-k}-1}{3} \quad \therefore P\left(\frac{e^{-k}-1}{3}, k\right)$$

직선 $y=k$ 와 곡선 $y=f(x)$ 의 교점의 x좌표를 구하면

$$\frac{e^{2x}-1}{4} = k, \quad e^{2x} = 4k+1, \quad 2x = \ln(4k+1)$$

$$\therefore x = \frac{\ln(4k+1)}{2} \quad \therefore R\left(\frac{\ln(4k+1)}{2}, k\right)$$

$Q(0, k)$ 이므로

$$\overline{PQ} = \frac{1-e^{-k}}{3}, \quad \overline{QR} = \frac{\ln(4k+1)}{2}$$

$$\therefore \lim_{k \rightarrow 0+} \frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} = \lim_{k \rightarrow 0+} \frac{\frac{\ln(4k+1)}{2}}{\frac{1-e^{-k}}{3}}$$

$$= \lim_{k \rightarrow 0+} \left\{ \frac{3}{2} \times \frac{\ln(1+4k)}{4k} \times \frac{-k}{e^{-k}-1} \times 4 \right\}$$

$$= \frac{3}{2} \times 1 \times 1 \times 4 = 6$$

28 $f'(x) = (6x-5)(e^x-1) + (3x^2-5x)e^x$

$$= (3x^2+x-5)e^x - 6x+5$$

$$\therefore f'(1) = -e-1$$

29 $f'(x) = e^x + (x+a)e^x = (x+a+1)e^x$

$$\therefore f'(2) = (a+3)e^2$$

즉, $(a+3)e^2 = 8e^2$ 이므로

$$a+3 = 8 \quad \therefore a = 5$$

30 $f'(x) = 2 + a^x \ln a$

$$\therefore f'(0) = 2 + \ln a$$

즉, $2 + \ln a = 2 + \ln 2$ 이므로 $a = 2$

따라서 $f(x) = 2x + 2^x$ 이므로

$$f(1) = 2 + 2 = 4$$

31 $f'(x) = \frac{1}{\ln 2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^x \ln \frac{1}{4}$

$$= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^x \times (-2\ln 2)}{\ln 2}$$

$$= -2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} f'(n) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = -2 \times \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = -\frac{2}{3}$$

32 ① $(e^{x+3})' = e^3 \times e^x = e^{x+3}$

② $(x^2 e^x)' = 2x e^x + x^2 e^x = (x^2 + 2x)e^x$

③ $(\ln 5x)' = (\ln 5 + \ln x)' = \frac{1}{x}$

⑤ $(x \log x)' = \log x + x \times \frac{1}{x \ln 10}$

$$= \log x + \frac{1}{\ln 10}$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

33 $f(x) = x \ln 2x = x(\ln 2 + \ln x)$ 이므로

$$f'(x) = \ln 2 + \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln 2x + 1$$

$$\therefore f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

34 $f(x) = \log_9 \frac{1}{x} - \log_3 \frac{1}{x} = -\log_9 x + \log_3 x$ 이므로

$$f'(x) = -\frac{1}{x \ln 9} + \frac{1}{x \ln 3}$$

$$\therefore f'(2) = -\frac{1}{2 \ln 9} + \frac{1}{2 \ln 3}$$

$$= -\frac{1}{4 \ln 3} + \frac{1}{2 \ln 3} = \frac{1}{4 \ln 3}$$

$$\therefore k = 1$$

35 $f'(x) = a - b \ln x - bx \times \frac{1}{x} = a - b \ln x - b$

$f(1) = 4$ 에서 $a = 4$

$f'(1) = -3$ 에서 $a - b = -3$

$4 - b = -3 \quad \therefore b = 7$

따라서 $f(x) = 4x - 7x \ln x$ 이므로

$f(e^2) = 4e^2 - 14e^2 = -10e^2$

36 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2) + f(2) - f(2-h)}{h}$

$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) - f(2-h)}{-h}$

$= f'(2) + f'(2) = 2f'(2)$

$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$ 이므로 구하는 극한값은

$2f'(2) = 2 \times 3e^2 = 6e^2$

37 $h(x) = f(x)g(x)$ 라 하면

$h(1) = f(1)g(1) = 1 \times 1 = 1$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = h'(1)$

$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 이고

$f'(x) = 5^x \ln 5, g'(x) = \frac{1}{x}$ 이므로 구하는 극한값은

$h'(1) = f'(1)g(1) + f(1)g'(1)$

$= 5 \ln 5 \times 1 + 1 \times 1$

$= 5 \ln 5 + 1$

38 $x \rightarrow e$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$\lim_{x \rightarrow e} \{f(x) - g(x)\} = 0$

$f(e) - g(e) = 0 \quad \therefore f(e) = g(e)$

즉, $a^e = 2 \log_e e$ 이므로

$\frac{2}{\ln b} = a^e \quad \dots\dots \textcircled{7}$

주어진 식의 좌변에서

$\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) - g(x)}{x - e}$

$= \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) - f(e) + g(e) - g(x)}{x - e} \quad (\because f(e) = g(e))$

$= \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} - \lim_{x \rightarrow e} \frac{g(x) - g(e)}{x - e}$

$= f'(e) - g'(e)$

즉, $f'(e) - g'(e) = 0$ 이므로 $f'(e) = g'(e)$

$f'(x) = a^x \ln a, g'(x) = \frac{2}{x \ln b}$ 이므로

$a^e \ln a = \frac{2}{e \ln b}$

⑦을 대입하면

$a^e \ln a = \frac{a^e}{e}, \ln a = \frac{1}{e} \quad (\because a^e \neq 0)$

$\therefore a = e^{\frac{1}{e}}$

이를 ⑦에 대입하면

$\frac{2}{\ln b} = e, \ln b = \frac{2}{e}$

$\therefore b = e^{\frac{2}{e}}$

$\therefore a \times b = e^{\frac{1}{e}} \times e^{\frac{2}{e}} = e^{\frac{3}{e}}$

39 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속이므로

$\lim_{x \rightarrow 1+} (ae^{x-1} - b) = \lim_{x \rightarrow 1-} (bx - 2)$

$a - b = b - 2 \quad \therefore a - 2b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$f'(x) = \begin{cases} ae^{x-1} & (x > 1) \\ b & (x < 1) \end{cases}$ 이고 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$\lim_{x \rightarrow 1+} ae^{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} b \quad \therefore a = b \quad \dots\dots \textcircled{2}$

①, ②을 연립하여 풀면

$a = 2, b = 2$

$\therefore ab = 4$

40 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 미분가능하고 $x=1$ 에서 연속이므로

$\lim_{x \rightarrow 1+} (\ln x + 2) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 + ax + b)$

$2 = 1 + a + b \quad \therefore a + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x > 1) \\ 2x + a & (x < 1) \end{cases}$ 이고 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

따라서

$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 1-} (2x + a)$

$1 = 2 + a \quad \therefore a = -1$

이를 ①에 대입하여 풀면 $b = 2$

따라서 $f(x) = \begin{cases} \ln x + 2 & (x \geq 1) \\ x^2 - x + 2 & (x < 1) \end{cases}$ 이므로

$f(-1) + f(e) = 4 + 3 = 7$

41 $f(x) = \begin{cases} x \ln x + a(x-1) & (x \geq 1) \\ -x \ln x - a(x-1) & (0 < x < 1) \end{cases}$ 이므로

$f'(x) = \begin{cases} \ln x + 1 + a & (x > 1) \\ -\ln x - 1 - a & (0 < x < 1) \end{cases}$

미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$\lim_{x \rightarrow 1+} (\ln x + 1 + a) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-\ln x - 1 - a)$

$1 + a = -1 - a \quad \therefore a = -1$

1 제2사분면	2 ④	3 $\frac{1}{12}$	4 ①
5 $\angle, \sqsubset$	6 $\frac{9}{4}$	7 50	8 ④
10 $\frac{3}{2}$	11 ①	12 $-\frac{3}{8}$	13 ⑤
15 ②	16 $-\frac{2\sqrt{14}}{9}$	17 $\frac{2}{5}$	18 ①
19 ②	20 -1	21 -2	22 $\frac{7}{9}$
24 $\frac{7}{4}$	25 ①	26 ③	27 $10\sqrt{2}$

1 (i) $\cos \theta \csc \theta < 0$ 에서

$\cos \theta > 0, \csc \theta < 0$ 또는 $\cos \theta < 0, \csc \theta > 0$

$\cos \theta > 0, \csc \theta < 0$ 인 θ 는 제4사분면의 각이다.

$\cos \theta < 0, \csc \theta > 0$ 인 θ 는 제2사분면의 각이다.

따라서 $\cos \theta \csc \theta < 0$ 을 만족시키는 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\sec \theta \cot \theta > 0$ 에서

$\sec \theta > 0, \cot \theta > 0$ 또는 $\sec \theta < 0, \cot \theta < 0$

$\sec \theta > 0, \cot \theta > 0$ 인 θ 는 제1사분면의 각이다.

$\sec \theta < 0, \cot \theta < 0$ 인 θ 는 제2사분면의 각이다.

따라서 $\sec \theta \cot \theta > 0$ 을 만족시키는 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 주어진 조건을 만족시키는 θ 는 제2사분면의 각이다.

2 $0 < \theta < \pi$ 이므로 오른쪽 그림과 같

이 직선 $12x + 5y = 0$ 위의 한 점을

$P(-5, 12)$ 라 하면

$$OP = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$$

$$\text{따라서 } \csc \theta = \frac{13}{12}, \sec \theta = -\frac{13}{5},$$

$$\cot \theta = -\frac{5}{12} \text{이므로}$$

$$2 \csc \theta + 4 \cot \theta - 5 \sec \theta$$

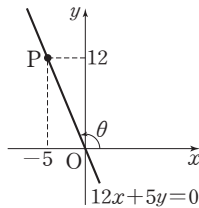
$$= 2 \times \frac{13}{12} + 4 \times \left(-\frac{5}{12}\right) - 5 \times \left(-\frac{13}{5}\right) = \frac{27}{2}$$

3 $OP = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ 이므로 $\csc \alpha = \frac{5}{4}$

점 $P(3, 4)$ 를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 점 Q 의 좌표는 $(4, 3)$ 이므로

$$\cot \beta = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \cot \beta - \csc \alpha = \frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{1}{12}$$



4 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \theta > 0$ 이므로

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad \neg. \frac{1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{1 - \sin \theta} &= \frac{(1 - \sin \theta) + (1 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} \\ &= \frac{2}{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{2}{\cos^2 \theta} = 2 \sec^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle. \frac{\sec \theta}{\csc \theta - \cot \theta} + \frac{\sec \theta}{\csc \theta + \cot \theta} &= \frac{\sec \theta (\csc \theta + \cot \theta) + \sec \theta (\csc \theta - \cot \theta)}{(\csc \theta - \cot \theta)(\csc \theta + \cot \theta)} \\ &= \frac{2 \sec \theta \csc \theta}{\csc^2 \theta - \cot^2 \theta} \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \sec \theta \csc \theta}{(1 + \cot^2 \theta) - \cot^2 \theta} = 2 \sec \theta \csc \theta$$

$$\begin{aligned} \sqsubset. (1 + \csc \theta)(1 + \sec \theta)(1 - \csc \theta)(1 - \sec \theta) &= (1 - \csc^2 \theta)(1 - \sec^2 \theta) \\ &= -\cot^2 \theta \times (-\tan^2 \theta) = 1 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\angle, \sqsubset$ 이다.

6 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan \theta + \cot \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

7 $\frac{2 \sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta - 2 \cos \theta} = 3$ 에서

$$2 \sin \theta + \cos \theta = 3 \sin \theta - 6 \cos \theta$$

$$7 \cos \theta = \sin \theta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos \theta \neq 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 의 양변을 $\cos \theta$

로 나누면

$$7 = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \therefore \tan \theta = 7$$

$$\therefore \sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta = 1 + 7^2 = 50$$

8 $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

따라서 $a = \frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$ 이므로

$$a - b = \frac{1}{2}$$

9 $\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{6}$ 에서

$$\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{3} - \sin \alpha \sin \beta = \frac{5}{6}$$

$$\therefore \sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{6}$$

10 $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \theta - \sin \frac{\pi}{3} \sin \theta$

$$= \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \theta + \sin \frac{\pi}{3} \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 주어진 식에 대입하면

$$\cos^2 \theta + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - \theta\right)$$

$$= \cos^2 \theta + \left(\frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta\right)^2$$

$$+ \left(\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta\right)^2$$

$$= \frac{3}{2} \cos^2 \theta + \frac{3}{2} \sin^2 \theta$$

$$= \frac{3}{2} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \frac{3}{2}$$

11 $0 < \alpha < \beta < 2\pi$ 이고 $\cos \alpha = \cos \beta = \frac{1}{3}$ 이므로

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \alpha > 0$ 이므로

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

또 $\frac{3}{2}\pi < \beta < 2\pi$ 에서 $\sin \beta < 0$ 이므로

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \sin(\beta - \alpha) = \sin \beta \cos \alpha - \cos \beta \sin \alpha$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

12 $\sin \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\cos \alpha + \sin \beta = 1$ 의 양변을 제곱하면

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta)$$

$$+ 2(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) = \frac{5}{4}$$

$$2 + 2 \sin(\alpha + \beta) = \frac{5}{4} \quad \therefore \sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{8}$$

13 $\tan(\alpha + \beta) = n$ 에서

$$\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = n, \quad \frac{2 + \tan \beta}{1 - 2 \tan \beta} = n$$

$$2 + \tan \beta = n - 2n \tan \beta$$

$$(2n + 1) \tan \beta = n - 2$$

$$\therefore \tan \beta = \frac{n - 2}{2n + 1} \quad \therefore f(n) = \frac{n - 2}{2n + 1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \{f(n+1) - f(n)\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \{f(k+1) - f(k)\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} [\{f(2) - f(1)\} + \{f(3) - f(2)\}$$

$$+ \{f(4) - f(3)\} + \dots + \{f(n+1) - f(n)\}]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \{f(n+1) - f(1)\}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{2n+3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

14 이차방정식 $x^2 + 3x - 5 = 0$ 의 두 근이 $\tan \alpha$, $\tan \beta$ 이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$$\tan \alpha + \tan \beta = -3, \quad \tan \alpha \tan \beta = -5$$

$$\therefore \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{-3}{1 - (-5)} = -\frac{1}{2}$$

$$\sec^2(\alpha + \beta) = 1 + \tan^2(\alpha + \beta) = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \text{이므로}$$

$$\cos^2(\alpha + \beta) = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin^2(\alpha + \beta) = 1 - \cos^2(\alpha + \beta) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

$\tan(\alpha + \beta) < 0$ 에서 $\alpha + \beta$ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이므로 $\sin(\alpha + \beta)$ 와 $\cos(\alpha + \beta)$ 의 부호가 서로 다르다.

$$\therefore \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) = -\sqrt{\frac{1}{5} \times \frac{4}{5}} = -\frac{2}{5}$$

$$\therefore 2 \cos^2(\alpha + \beta) - \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta)$$

$$= 2 \times \frac{4}{5} - \left(-\frac{2}{5}\right) = 2$$

15 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sec \theta > 0$ 이므로

$$\sec \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = \sqrt{1 + (2\sqrt{2})^2} = 3$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} = \frac{1}{3}$$

또 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{9},$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = -\frac{7}{9}$$

$$\therefore \sqrt{2} \sin 2\theta + \cos 2\theta = \sqrt{2} \times \frac{4\sqrt{2}}{9} + \left(-\frac{7}{9}\right) = \frac{1}{9}$$

16 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{2}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4}{9}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \frac{5}{9} \quad \therefore \sin 2\theta = \frac{5}{9}$$

이때 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$ 이므로

$$\cos 2\theta < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos 2\theta &= -\sqrt{1 - \sin^2 2\theta} \\ &= -\sqrt{1 - \left(\frac{5}{9}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{14}}{9} \end{aligned}$$

17 $(1 + \tan \theta) \tan 2\theta = \frac{4}{3}$ 에서

$$(1 + \tan \theta) \times \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{4}{3}$$

$$(1 + \tan \theta) \times \frac{2 \tan \theta}{(1 + \tan \theta)(1 - \tan \theta)} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan \theta} = \frac{4}{3}$$

$$6 \tan \theta = 4 - 4 \tan \theta$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{2}{5}$$

18 $y = \cos 2\theta - 4 \sin \theta + 1$

$$= (1 - 2 \sin^2 \theta) - 4 \sin \theta + 1$$

$$= -2 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 2$$

$$= -2(\sin \theta + 1)^2 + 4$$

이때 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ 이므로 주어진 함수는 $\sin \theta = -1$ 일

때 최댓값 4, $\sin \theta = 1$ 일 때 최솟값 -4 를 갖는다.

따라서 $M = 4$, $m = -4$ 이므로

$$Mm = -16$$

19 두 직선 $y = \frac{1}{4}x + 1$, $y = x + 2$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = \frac{1}{4}, \tan \beta = 1$$

$$\therefore \tan \theta = |\tan(\alpha - \beta)| = \left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right|$$

$$= \left| \frac{\frac{1}{4} - 1}{1 + \frac{1}{4} \times 1} \right| = \frac{3}{5}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sec \theta > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \sec \theta &= \sqrt{1 + \tan^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{5} \end{aligned}$$

20 두 직선 $mx - y + 1 = 0$, $2x + y - 3 = 0$, 즉 $y = mx + 1$, $y = -2x + 3$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라 하면

$$\tan \alpha = m, \tan \beta = -2$$

$$|\tan(\alpha - \beta)| = \tan \frac{\pi}{4} = 1 \text{이므로}$$

$$\left| \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \right| = 1$$

$$\left| \frac{m - (-2)}{1 + m \times (-2)} \right| = 1$$

$$\left| \frac{m + 2}{1 - 2m} \right| = 1$$

즉, $m + 2 = 1 - 2m$ 또는 $m + 2 = -1 + 2m$ 이므로

$$m = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } m = 3$$

따라서 모든 m 의 값의 곱은

$$-\frac{1}{3} \times 3 = -1$$

21 직선 $y = 3x + 1$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\tan \theta = 3$$

직선 $y = mx + 5$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 $\theta + 45^\circ$ 이므로

$$m = \tan(\theta + 45^\circ) = \frac{\tan \theta + \tan 45^\circ}{1 - \tan \theta \tan 45^\circ}$$

$$= \frac{3 + 1}{1 - 3 \times 1} = -2$$

22 $\angle BAD = \angle ABD = \alpha$ 라 하면 $\theta = 2\alpha$

$$\sin \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$\cos \theta = \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$$

23 삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이므로

$$\angle C = \angle B = \beta$$

삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합은 π 이므로

$$\alpha + 2\beta = \pi$$

$$\alpha + \beta = \pi - \beta \text{이므로}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \tan(\pi - \beta) = -\tan \beta$$

$$\text{즉, } -\tan \beta = -\frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$\tan \beta = \frac{3}{2}$$

$$\alpha = \pi - 2\beta \text{이므로}$$

$$\tan \alpha = \tan(\pi - 2\beta)$$

$$= -\tan 2\beta$$

$$= -\frac{2\tan \beta}{1 - \tan^2 \beta}$$

$$= -\frac{2 \times \frac{3}{2}}{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{12}{5}$$

24 선분 AC가 선분 BD와 만나는 점을 G라 하자.

$$\angle CAD = \alpha \text{라 하면 } \angle CBD = \alpha$$

이므로 $\overline{CD}$ 의 원주각

$$\tan \alpha = \frac{\overline{CF}}{\overline{BF}} = \frac{2}{5}$$

$$\angle DAE = \beta \text{라 하면}$$

$$\tan \beta = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \tan(\angle GAE) = \tan(\alpha - \beta)$$

$$= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{2}{5} - \frac{1}{6}}{1 + \frac{2}{5} \times \frac{1}{6}} = \frac{7}{32}$$

$$\therefore \overline{GE} = \overline{AE} \tan(\angle GAE)$$

$$= 6 \times \frac{7}{32} = \frac{21}{16}$$

삼각형 AGE와 삼각형 CGF는 닮음이므로

$$\overline{AE} : \overline{CF} = \overline{GE} : \overline{GF}$$

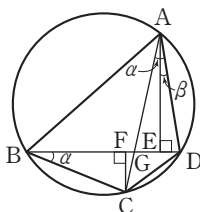
$$6 : 2 = \frac{21}{16} : \overline{GF}$$

$$6\overline{GF} = \frac{21}{8}$$

$$\therefore \overline{GF} = \frac{7}{16}$$

$$\therefore \overline{EF} = \overline{GE} + \overline{GF}$$

$$= \frac{21}{16} + \frac{7}{16} = \frac{7}{4}$$



$$25 \quad 2\sqrt{3} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - 2 \cos \theta$$

$$= 2\sqrt{3} \left(\sin \theta \cos \frac{\pi}{3} + \cos \theta \sin \frac{\pi}{3} \right) - 2 \cos \theta$$

$$= 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta \right) - 2 \cos \theta$$

$$= \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$$

$$= 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta \right)$$

$$= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} \sin \theta + \sin \frac{\pi}{6} \cos \theta \right)$$

$$= 2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{따라서 } r = 2, \alpha = \frac{\pi}{6} \text{이므로}$$

$$r \sin \alpha = 2 \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$26 \quad y = 4 \sin x + 3 \cos x - 1$$

$$= 5 \left(\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x \right) - 1$$

$$= 5(\cos \alpha \sin x + \sin \alpha \cos x) - 1$$

$$= 5 \sin(x + \alpha) - 1 \quad \left(\text{단, } \sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \alpha = \frac{4}{5} \right)$$

$$\text{이때 } -1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1 \text{이므로}$$

$$-6 \leq 5 \sin(x + \alpha) - 1 \leq 4$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 4, 최솟값은 -6이므로

$$M = 4, m = -6$$

$$\therefore M + m = -2$$

$$27 \quad \angle APB = \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\angle PAB = \theta \text{라 하면}$$

$$\overline{AP} = 10 \cos \theta$$

$$\overline{PB} = 10 \sin \theta$$

$$\therefore \overline{AP} + \overline{PB} = 10 \cos \theta + 10 \sin \theta$$

$$= 10\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right)$$

$$= 10\sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos \theta + \cos \frac{\pi}{4} \sin \theta \right)$$

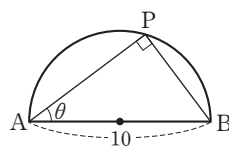
$$= 10\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } \frac{\pi}{4} < \theta + \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$\therefore 10 < 10\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leq 10\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최댓값은 $10\sqrt{2}$ 이다.



1 ⑤	2 $\frac{1}{2}$	3 4	4 2	5 ③
6 ㄷ, ㄹ	7 $\frac{1}{5}$	8 ⑤	9 ④	10 ③
11 $-\frac{1}{2}$	12 ⑤	13 $\frac{1}{2}$	14 ⑤	15 1
16 ⑤	17 1	18 $\frac{1}{3}$	19 2	20 ①
21 3	22 ⑤	23 $\frac{5}{4}$	24 ④	25 ⑤
26 ③	27 2	28 ②	29 ②	30 ④
31 1	32 ④	33 $\frac{\pi}{4}$	34 ①	35 ②
36 10	37 $-\frac{1}{2}$	38 ⑤	39 ①	
40 $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	41 2	42 -3	43 ④	

$$\begin{aligned}
 1 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{1 + \cot x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{1 + \frac{\cos x}{\sin x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x (\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sec x - \tan x}{\cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x} \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2\cos^2 x - 1) - 1}{\cos x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos^2 x - 1)}{\cos x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(\cos x + 1)(\cos x - 1)}{\cos x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} 2(\cos x + 1) \\
 &= 2 \times 2 = 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4 \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{a \cot^2 x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{a \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x (1 - \sin x)}{a \cos^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x (1 - \sin x)}{a (1 - \sin^2 x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x (1 - \sin x)}{a (1 + \sin x)(1 - \sin x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{a (1 + \sin x)} \\
 &= \frac{1}{2a}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{2a} = \frac{1}{4}$ 이므로 $a = 2$

$$5 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{\sin^2 x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 = 3 \times 1^2 = 3$$

$$\begin{aligned}
 6 \quad \text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\ln(1+4x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{4x}{\ln(1+4x)} \times \frac{1}{2} \right\} \\
 &= 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{e^{3x} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{3x}{e^{3x} - 1} \times \frac{2}{3} \right) \\
 &= 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \tan 2x}{\sin 3x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{\sin 3x} + \frac{\tan 2x}{\sin 3x} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{1}{3} \right) \\
 &\quad + \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 2x}{2x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{2}{3} \right) \\
 &= 1 \times 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times 1 \times \frac{2}{3} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ㄹ. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x)}{\tan 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(\tan x)}{\tan x} \times \frac{2x}{\tan 2x} \times \frac{\tan x}{x} \times \frac{1}{2} \right\} \\
 &= 1 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ, ㄹ이다.

$$\begin{aligned}
 7 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x^2 + x)}{\tan(2x^2 + 5x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(4x^2 + x)}{4x^2 + x} \times \frac{2x^2 + 5x}{\tan(2x^2 + 5x)} \times \frac{4x^2 + x}{2x^2 + 5x} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(4x^2 + x)}{4x^2 + x} \times \frac{2x^2 + 5x}{\tan(2x^2 + 5x)} \times \frac{4x + 1}{2x + 5} \right\} \\
 &= 1 \times 1 \times \frac{1}{5} = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8 \quad f(x) &= 1 - \frac{2}{2+3\tan x} = \frac{3\tan x}{2+3\tan x} \\
 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{24\tan x}{x(2+3\tan x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \times \frac{24}{2+3\tan x} \right) \\
 &= 1 \times 12 = 12
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan f(x)}{f(\tan x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x^2-x)}{\tan^2 x - \tan x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x^2-x)}{\tan x(\tan x - 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan(x^2-x)}{x^2-x} \times \frac{x}{\tan x} \times \frac{x-1}{\tan x - 1} \right\} \\
 &= 1 \times 1 \times 1 = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10 \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{\sin 2x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1-x)^{-\frac{1}{x}} \right\}^{\frac{2x}{\sin 2x} \times \left(-\frac{1}{2}\right)} \\
 &= e^{1 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{e}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{e^{-x}-1}{f(x)} \times \frac{-x}{e^{-x}-1} \times (-3) \right\} \\
 &= 1 \times \frac{1}{6} \times 1 \times (-3) = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^{-x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{-x}{e^{-x}-1} \times \frac{f(x)}{-x} \right\} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} \\
 \text{즉, } -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= 6 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -6 \\
 \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin 3x}{3x} \times \frac{x}{f(x)} \times 3 \right\} \\
 &= 1 \times \left(-\frac{1}{6}\right) \times 3 = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos 3x)(1+\cos 3x)}{x^2(1+\cos 3x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2(1+\cos 3x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 \times \frac{9}{1+\cos 3x} \right\} \\
 &= 1^2 \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 13 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\csc x - \cot x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x \sin x (1+\cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 x}{x \sin x (1+\cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \sin x (1+\cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{1+\cos x} \right) \\
 &= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 14 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+ax)}{2-2\cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+ax)(1+\cos x)}{2(1-\cos x)(1+\cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+ax)(1+\cos x)}{2(1-\cos^2 x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+ax)(1+\cos x)}{2\sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+ax)}{ax} \times \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \times \frac{a(1+\cos x)}{2} \right\} \\
 &= 1 \times 1^2 \times a = a \\
 \therefore a &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin 2x \tan 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{1-\cos 2x} \times \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x \tan 2x} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{1-\cos 2x} \times \frac{(1-\cos 2x)(1+\cos 2x)}{\sin 2x \tan 2x (1+\cos 2x)} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{1-\cos 2x} \times \frac{1-\cos^2 2x}{\sin 2x \tan 2x (1+\cos 2x)} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{1-\cos 2x} \times \frac{\sin^2 2x}{\sin 2x \tan 2x (1+\cos 2x)} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{1-\cos 2x} \times \frac{\sin 2x}{\tan 2x (1+\cos 2x)} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x)}{1-\cos 2x} \times \frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{2x}{\tan 2x} \times \frac{1}{1+\cos 2x} \right\} \\
 &= 2 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16 \quad \frac{1}{x} = t \text{로 놓으면 } x &= \frac{1}{t} \text{이고, } x \rightarrow \infty \text{일 때 } t \rightarrow 0+ \text{이므로} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \left(\tan \frac{1}{x} \right) \csc \frac{1}{x} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \sin(\tan t) \csc t \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin(\tan t)}{\sin t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \frac{\sin(\tan t)}{\tan t} \times \frac{t}{\sin t} \times \frac{\tan t}{t} \right\} \\
 &= 1 \times 1 \times 1 = 1
 \end{aligned}$$

- 17 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos^2 x}{(x-\pi) \cot x} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x \sin x}{x-\pi}$
 이때 $x-\pi=t$ 로 놓으면 $x=\pi+t$ 이고, $x \rightarrow \pi$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x \sin x}{x-\pi} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\pi+t) \sin(\pi+t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\cos t \times (-\sin t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \times \cos t \right) \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

- 18 $\frac{1}{3x+1}=t$ 로 놓으면 $x=\frac{1-t}{3t}$ 이고, $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) \tan \frac{1}{3x+1} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{1-t}{3t} + 1 \right) \tan t \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{1+2t}{3} \times \frac{\tan t}{t} \right) \\ &= \frac{1}{3} \times 1 \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

- 19 $x-\frac{\pi}{2}=t$ 로 놓으면 $x=\frac{\pi}{2}+t$ 이고, $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{1-\sin x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{1-\cos t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(1+\cos t)}{(1-\cos t)(1+\cos t)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(1+\cos t)}{1-\cos^2 t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2(1+\cos t)}{\sin^2 t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{t}{\sin t} \right)^2 \times (1+\cos t) \right\} \\ &= 1^2 \times 2 \\ &= 2\end{aligned}$$

- 20 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} (x \tan ax + b) &= 0 \\ \therefore b &= 0\end{aligned}$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan ax}{1-\cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan ax (1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan ax (1+\cos x)}{1-\cos^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan ax (1+\cos x)}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\tan ax}{ax} \times \left(\frac{x}{\sin x} \right)^2 \times a(1+\cos x) \right\} \\ &= 1 \times 1^2 \times 2a = 2a \\ \text{즉, } 2a &= 4 \text{이므로} \\ a &= 2\end{aligned}$$

$$\therefore a-b=2-0=2$$

- 21 $x \rightarrow a$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow a} (2^x - 1) = 0$$

$$2^a - 1 = 0 \quad \therefore a = 0$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x}{2^x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \times \frac{x}{2^x - 1} \times 3 \right) \\ &= 1 \times \frac{1}{\ln 2} \times 3 = \frac{3}{\ln 2}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{3}{\ln 2} = \frac{b}{\ln 2} \text{이므로}$$

$$b = 3$$

$$\therefore a+b=0+3=3$$

- 22 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + a) = 0$$

$$1+a=0 \quad \therefore a=-1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{bx \sin x + x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{(bx \sin x + x^2)(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{(bx \sin x + x^2)(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x}{(bx \sin x + x^2)(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\left(b \times \frac{\sin x}{x} + 1\right)(\cos x + 1)} \\ &= \frac{-1^2}{(b \times 1 + 1) \times 2} \\ &= -\frac{1}{2(b+1)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{즉, } -\frac{1}{2(b+1)} &= \frac{1}{4} \text{이므로} \\ b &= -3 \\ \therefore ab &= -1 \times (-3) = 3 \end{aligned}$$

23 $x \neq 0$ 일 때, $f(x) = \frac{\tan 5x + a}{e^{4x} - 1}$

함수 $f(x)$ 가 $-\frac{\pi}{10} < x < \frac{\pi}{10}$ 에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x + a}{e^{4x} - 1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\tan 5x + a) = 0 \quad \therefore a = 0$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{e^{4x} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan 5x}{5x} \times \frac{4x}{e^{4x} - 1} \times \frac{5}{4} \right) \\ &= 1 \times 1 \times \frac{5}{4} \\ &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

24 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{x - a} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고, 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - a) = 0$$

$$2 - a = 0$$

$$\therefore a = 2$$

이를 ①에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{x - 2} = b$$

이때 $x - 2 = t$ 로 놓으면 $x = 2 + t$ 이고, $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \pi x}{x - 2} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \pi(2+t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin (2\pi + \pi t)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \pi t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \pi t}{\pi t} \times \pi \\ &= 1 \times \pi = \pi \end{aligned}$$

$$\therefore b = \pi$$

$$\therefore ab = 2 \times \pi = 2\pi$$

25 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 9x}{\ln(1+3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{\sin 9x}{9x} \times \frac{3x}{\ln(1+3x)} \times 3 \right\} \\ &= 1 \times 1 \times 3 = 3 \end{aligned}$$

또 $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \sin bx}{\cos bx - 1} = a = 3$ 에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \sin bx}{\cos bx - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \sin bx (\cos bx + 1)}{(\cos bx - 1)(\cos bx + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \sin bx (\cos bx + 1)}{\cos^2 bx - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \sin bx (\cos bx + 1)}{-\sin^2 bx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x (\cos bx + 1)}{-\sin bx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{bx}{\sin bx} \times \frac{\cos bx + 1}{b} \right) \\ &= -1 \times \frac{2}{b} \\ &= -\frac{2}{b} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{2}{b} = 3 \text{이므로}$$

$$b = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore a - b = 3 - \left(-\frac{2}{3} \right) = \frac{11}{3}$$

26 반지름의 길이가 1, 중심각의 크기가 θ 인 호 AB의 길이는 $l = \theta$

오른쪽 그림과 같이 점 O에서 선분 AB

에 내린 수선의 발을 H라 하면

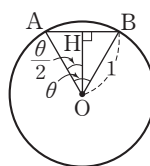
$$\angle AOH = \frac{\theta}{2} \text{이므로 직각삼각형 AOH}$$

에서

$$\overline{AH} = \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2 \overline{AH} = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{l}{\overline{AB}} &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\theta}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}} = 1 \end{aligned}$$



27 $P(t, \sin t) (0 < t < \pi)$ 이므로

$$\overline{OP} = \sqrt{t^2 + \sin^2 t}$$

또 $Q(t, 0)$ 에서

$$\overline{OQ} = t, \overline{PQ} = \sin t$$

$$\overline{PR} = \overline{PQ} = \sin t \text{ 이므로}$$

$$\overline{OR} = \overline{OP} - \overline{PR}$$

$$= \sqrt{t^2 + \sin^2 t} - \sin t$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{OQ}}{\overline{OR}}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t}{\sqrt{t^2 + \sin^2 t} - \sin t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t(\sqrt{t^2 + \sin^2 t} + \sin t)}{(\sqrt{t^2 + \sin^2 t} - \sin t)(\sqrt{t^2 + \sin^2 t} + \sin t)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{t^2 + \sin^2 t} + \sin t}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0+} \sqrt{1 + \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2} + \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin t}{t}$$

$$= \sqrt{1 + 1^2} + 1 = 1 + \sqrt{2}$$

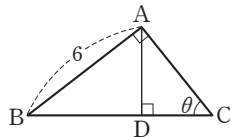
따라서 $a=1$, $b=1$ 이므로

$$a+b=2$$

28 $\angle BAC = \frac{\pi}{2}$ 이므로 직각삼각

형 ABC에서

$$\overline{AC} = \frac{6}{\tan \theta}$$



$\angle ADC = \frac{\pi}{2}$ 이므로 직각삼각형 ADC에서

$$\overline{CD} = \overline{AC} \cos \theta = \frac{6 \cos \theta}{\tan \theta}$$

$$\therefore \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{\overline{CD}}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2} = \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{6 \cos \theta}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2 \tan \theta}$$

$\frac{\pi}{2} - \theta = t$ 로 놓으면 $\theta = \frac{\pi}{2} - t$ 이고, $\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} -$ 일 때

$t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \frac{6 \cos \theta}{\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)^2 \tan \theta} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{6 \cos \left(\frac{\pi}{2} - t\right)}{t^2 \tan \left(\frac{\pi}{2} - t\right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{6 \sin t \tan t}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(6 \times \frac{\sin t}{t} \times \frac{\tan t}{t}\right) \\ &= 6 \times 1 \times 1 = 6 \end{aligned}$$

29 삼각형 OAP는 이등변삼각형

이므로

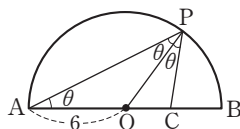
$$\angle APO = \angle PAB = \theta$$

$$\therefore \angle OPC = \angle APO = \theta$$

삼각형 APC에서 $\angle OCP = \pi - 3\theta$

즉, 삼각형 POC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{OC}}{\sin \theta} = \frac{\overline{OP}}{\sin (\pi - 3\theta)}$$



$$\therefore \overline{OC} = \frac{\overline{OP} \sin \theta}{\sin (\pi - 3\theta)} = \frac{6 \sin \theta}{\sin 3\theta}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \overline{OC} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{6 \sin \theta}{\sin 3\theta} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \times \frac{3\theta}{\sin 3\theta} \times 2 \right) \\ &= 1 \times 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

30 직각삼각형 BCH에서 $\overline{BH} = 2 \sin \theta$

$\angle ABH = \frac{\pi}{2} - \angle CBH = \angle BCH = \theta$ 이므로 직각삼각형

ABH에서

$$\overline{AH} = \overline{BH} \tan \theta = 2 \sin \theta \tan \theta$$

$$\therefore S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{BH}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \sin \theta \tan \theta \times 2 \sin \theta$$

$$= 2 \sin^2 \theta \tan \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2 \sin^2 \theta \tan \theta}{\theta^3} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ 2 \times \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \times \frac{\tan \theta}{\theta} \right\} \\ &= 2 \times 1^2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

31 오른쪽 그림과 같이 선분 AR

를 그으면 $\angle ARO = \frac{\pi}{2}$ 이므로

직각삼각형 OAR에서

$$\overline{OR} = 2 \cos \theta$$

$$\therefore \overline{PR} = \overline{OP} - \overline{OR}$$

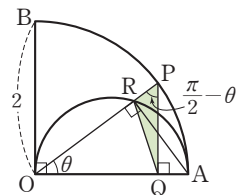
$$= 2 - 2 \cos \theta$$

직각삼각형 OQP에서 $\overline{PQ} = 2 \sin \theta$

또 $\angle QPR = \frac{\pi}{2} - \theta$ 이므로

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{2} \times \overline{PR} \times \overline{PQ} \times \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= \frac{1}{2} \times (2 - 2 \cos \theta) \times 2 \sin \theta \times \cos \theta \\ &= 2(1 - \cos \theta) \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^3} &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2(1 - \cos \theta) \sin \theta \cos \theta}{\theta^3} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta) \sin \theta \cos \theta}{\theta^3(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2(1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \cos \theta}{\theta^3(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{2 \sin^3 \theta \cos \theta}{\theta^3(1 + \cos \theta)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ \left(\frac{\sin \theta}{\theta} \right)^3 \times \frac{2 \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right\} = 1^3 \times 1 = 1 \end{aligned}$$



36 $h(x)=f(x)g(x)$ 에서

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$f'(x)=-2\sin x+\cos x-1 \text{ 이므로}$$

$$f(0)=2, f'(0)=0$$

$$h'(0)=f'(0)g(0)+f(0)g'(0) \text{ 이므로}$$

$$20=2g'(0) \quad \therefore g'(0)=10$$

37 $f(x)$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h)+\sin(x-h)-2\sin x}{h^2}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h + \sin x \cos h - \cos x \sin h - 2\sin x}{h^2}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2\sin x (\cos h - 1)}{h^2}$$

$$=2\sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h^2(\cos h + 1)}$$

$$=2\sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h^2(\cos h + 1)}$$

$$=2\sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 h}{h^2(\cos h + 1)}$$

$$=2\sin x \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ -\left(\frac{\sin h}{h}\right)^2 \times \frac{1}{\cos h + 1} \right\}$$

$$=2\sin x \times \left(-1^2 \times \frac{1}{2}\right) = -\sin x$$

$$\text{따라서 } f'(x) = -\cos x \text{ 이므로}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

38 $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = f'(\pi)$

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \cos x \text{ 이므로 구하는 극한값은}$$

$$f'(\pi) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

39 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+h)-f(\pi-2h)}{h}$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+h)-f(\pi)+f(\pi)-f(\pi-2h)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi+h)-f(\pi)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi)-f(\pi-2h)}{-2h} \times 2$$

$$=f'(\pi) + 2f'(\pi) = 3f'(\pi)$$

$$f'(x) = \sin x + x \cos x \text{ 이므로 구하는 극한값은}$$

$$3f'(\pi) = 3 \times (-\pi) = -3\pi$$

40 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}} = 4$ 에서 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극

$$\text{한값이 존재하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \{f(x)-1\} = 0 \quad \therefore f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \text{ 이므로}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$$

$$f'(x) = \cos x - a \sin x \text{ 이므로 } f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 \text{에서}$$

$$-a = 4 \quad \therefore a = -4$$

$$\text{따라서 } f(x) = \sin x - 4 \cos x \text{ 이므로}$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{2} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

41 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (e^x \cos x + a) = \lim_{x \rightarrow 0-} (bx + 2)$$

$$1 + a = 2 \quad \therefore a = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} e^x (\cos x - \sin x) & (x > 0) \\ b & (x < 0) \end{cases} \text{ 이고 미분계수 } f'(0) \text{이}$$

이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} e^x (\cos x - \sin x) = \lim_{x \rightarrow 0-} b \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore a + b = 1 + 1 = 2$$

42 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 미분가능하고 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 - 3x + 1) = \lim_{x \rightarrow 0-} (a \sin x + b \cos x)$$

$$\therefore b = 1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & (x > 0) \\ a \cos x - \sin x & (x < 0) \end{cases} \text{ 이고 미분계수 } f'(0) \text{이}$$

존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (2x - 3) = \lim_{x \rightarrow 0-} (a \cos x - \sin x)$$

$$\therefore a = -3$$

$$\therefore ab = -3 \times 1 = -3$$

43 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (2x^2 + ax + b) = \lim_{x \rightarrow 0-} 3 \sin x \quad \therefore b = 0$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x + a & (x > 0) \\ 3 \cos x & (x < 0) \end{cases} \text{ 이고 미분계수 } f'(0) \text{이 존재하}$$

므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} (4x + a) = \lim_{x \rightarrow 0-} 3 \cos x \quad \therefore a = 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3x & (x \geq 0) \\ 3 \sin x & (x < 0) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$f(3) = 18 + 9 = 27$$

II-2. 여러 가지 미분법

01 여러 가지 미분법(1)

44~47쪽

1 ②	2 -2	3 2	4 $\frac{\pi}{6}$	5 -2
6 ④	7 ④	8 ②	9 ①	10 1
11 ③	12 ③	13 e^{16}	14 $-2\pi^2$	15 270
16 -8	17 ②	18 -2	19 4	20 ③
21 2	22 π	23 $\frac{4}{\sqrt{3}\ln 5}$	24 $\ln 10$	25 ①
26 1	27 ③	28 ②	29 $\frac{4}{\pi^2}$	

$$1 \quad f'(x) = -\frac{1}{(x-3)^2}$$

$$\therefore f'(6) = -\frac{1}{9}$$

$$2 \quad g'(x) = -\frac{f(x) + xf'(x)}{\{xf(x) + 1\}^2}$$

$$\therefore g'(0) = -f(0) = -2$$

$$3 \quad f'(x) = \frac{5(x^2 + x + 1) - (5x + a)(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$= \frac{-5x^2 - 2ax + 5 - a}{(x^2 + x + 1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = 3 \text{에서 } f'(-1) = 3 \text{이므로}$$

$$a = 3$$

$$\text{따라서 } f'(x) = \frac{-5x^2 - 6x + 2}{(x^2 + x + 1)^2} \text{이므로}$$

$$f'(0) = 2$$

$$4 \quad f'(x) = \frac{\cos x \cos x - (1 + \sin x) \times (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1 + \sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 + \sin x}{(1 + \sin x)(1 - \sin x)}$$

$$= \frac{1}{1 - \sin x}$$

$$f'(a) = 2 \text{에서 } \frac{1}{1 - \sin a} = 2$$

$$2 - 2 \sin a = 1, \sin a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{6} \left(\because -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$5 \quad f'(x) = 3 \sec x \tan x - \csc^2 x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3 \times \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - 4 = -2$$

$$6 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0) + f(0) - f(-h)}{2h}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h) - f(0)}{-h}$$

$$= \frac{1}{2} f'(0) + \frac{1}{2} f'(0)$$

$$= f'(0)$$

$$f'(x) = \frac{\cos x (1 + \tan x) - \sin x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} \text{이므로 구하는}$$

$$\text{극한값은}$$

$$f'(0) = 1$$

$$7 \quad f'(x) = a \sec x \tan x \csc x - a \sec x \csc x \cot x$$

$$= a(\sec^2 x - \csc^2 x)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 16 \text{이므로}$$

$$\frac{8}{3}a = 16$$

$$\therefore a = 6$$

$$\text{따라서 } f(x) = 6 \sec x \csc x \text{이므로}$$

$$b = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6 \times 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$$

$$\therefore ab = 6 \times 8\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$$

$$8 \quad f'(x) = -3^{\cos x} \ln 3 \times \sin x$$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\ln 3 \times 1 = -\ln 3$$

$$9 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$$

$$f(x) = 2x \ln \frac{1}{x^2 + 1} = -2x \ln(x^2 + 1) \text{이므로}$$

$$f'(x) = -2 \ln(x^2 + 1) - \frac{4x^2}{x^2 + 1}$$

$$\text{따라서 구하는 극한값은}$$

$$f'(1) = -2 \ln 2 - 2$$

$$10 \quad f'(x) = 3 \left(\frac{2x+a}{x+1} \right)^2 \times \frac{2(x+1) - (2x+a)}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{3(2-a)(2x+a)^2}{(x+1)^4}$$

$$f'(0) = 3 \text{에서}$$

$$3a^2(2-a) = 3$$

$$a^3 - 2a^2 + 1 = 0$$

$$(a-1)(a^2 - a - 1) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ (}\because a \text{는 정수)}$$

11 $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ 에서

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

$$\therefore h'\left(\frac{\pi}{3}\right) = g'\left(f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= g'(\sqrt{3})f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{이때 } f'(x) = \sec^2 x,$$

$$g'(x) = \frac{2(x^2+3)-2x \times 2x}{(x^2+3)^2} = \frac{-2x^2+6}{(x^2+3)^2} \text{이므로}$$

$$h'\left(\frac{\pi}{3}\right) = g'(\sqrt{3})f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 0 \times 4 = 0$$

12 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \therefore f(0) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$= f'(0) = 2$$

$$f(0) = 0 \text{에서}$$

$$\ln b = 0$$

$$\therefore b = 1$$

$$f(x) = \ln(ax+1) \text{이므로}$$

$$f'(x) = \frac{a}{ax+1}$$

$$f'(0) = 2 \text{에서}$$

$$a = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = \ln(2x+1) \text{이므로}$$

$$f(2) = \ln(4+1) = \ln 5$$

13 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{ax+b} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x+1)^4$$

$$e^b = 1$$

$$\therefore b = 0$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{ax} & (x \geq 0) \\ (2x+1)^4 & (x < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f'(x) = \begin{cases} ae^{ax} & (x > 0) \\ 8(2x+1)^3 & (x < 0) \end{cases}$$

미분계수 $f'(0)$ 이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} ae^{ax} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 8(2x+1)^3$$

$$\therefore a = 8$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} e^{8x} & (x \geq 0) \\ (2x+1)^4 & (x < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(2) = e^{16}$$

$$14 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin 2\pi x) - f(\tan \pi x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin 2\pi x) - f(0) + f(0) - f(\tan \pi x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin 2\pi x) - f(0)}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\tan \pi x) - f(0)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(\sin 2\pi x) - f(0)}{\sin 2\pi x} \times \frac{\sin 2\pi x}{2\pi x} \times 2\pi \right\}$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(\tan \pi x) - f(0)}{\tan \pi x} \times \frac{\tan \pi x}{\pi x} \times \pi \right\}$$

$$= f'(0) \times 1 \times 2\pi - f'(0) \times 1 \times \pi = \pi f'(0)$$

$$f(x) = \sin(2\pi x + \pi) + \cos(\pi x^2 + \pi)$$

$$= -\sin 2\pi x - \cos \pi x^2$$

이므로

$$f'(x) = -\cos 2\pi x \times 2\pi + \sin \pi x^2 \times 2\pi x$$

$$= -2\pi(\cos 2\pi x - x \sin \pi x^2)$$

따라서 구하는 극한값은

$$\pi f'(0) = \pi \times (-2\pi) = -2\pi^2$$

15 $y = \{xf(x)\}^3$ 에서

$$y' = 3\{xf(x)\}^2 \times \{xf(x)\}'$$

$$= 3\{xf(x)\}^2 \{f(x) + xf'(x)\}$$

따라서 $x=3$ 에서의 미분계수는

$$3\{3f(3)\}^2 \{f(3) + 3f'(3)\} = 3 \times 3^2 \times (1+9) = 270$$

16 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = -2$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극

한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)-1\} = 0 \quad \therefore f(0) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0) = -2$$

또 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-3}{x-1} = 4$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극

한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x)-3\} = 0 \quad \therefore g(1) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) = 4$$

이때 $y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ 에서

$$y' = g'(f(x))f'(x) \text{이므로 } x=0 \text{에서의 미분계수는}$$

$$g'(f(0))f'(0) = g'(1)f'(0) = 4 \times (-2) = -8$$

17 $f(x) + f\left(\frac{1}{2}\sin x\right) = \sin x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) + f'\left(\frac{1}{2}\sin x\right) \times \frac{1}{2}\cos x = \cos x \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

⑦의 양변에 $x=\pi$ 를 대입하면

$$f'(\pi) + f'(0) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$\therefore f'(\pi) = \frac{1}{2}f'(0) - 1 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

①의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f'(0) + f'(0) \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore f'(0) = \frac{2}{3}$$

이를 ②에 대입하면

$$f'(\pi) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$$

- 18** $f(g(x)) = f(x)g(x) + 3x^3 + 4x^2 + x - 3$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(g(x))g'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) + 9x^2 + 8x + 1 \\ \therefore f'(g(-1))g'(-1) &= f'(-1)g(-1) + f(-1)g'(-1) + 2 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(g(-1))g'(-1)$$

$$= f'(-1)g(-1) + f(-1)g'(-1) + 2$$

이때 $f'(x) = 2x + 3$ 이고 $g'(-1) = 3$ 이므로

$g(-1) = k$ (k 는 실수)라 하면

$$f'(k) \times 3 = 1 \times k + (-1) \times 3 + 2$$

$$(2k + 3) \times 3 = k - 1, \quad 6k + 9 = k - 1$$

$$\therefore k = -2 \quad \therefore g(-1) = -2$$

- 19** $f(x) = x^3\sqrt{x} = x^{\frac{4}{3}}$ 이므로

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore f'(27) = \frac{4}{3} \times 3 = 4$$

- 20** $f(x) = \sqrt{x^4 + 2x^2 + 2} = (x^4 + 2x^2 + 2)^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(x^4 + 2x^2 + 2)^{-\frac{1}{2}}(4x^3 + 4x) \\ &= \frac{2x^3 + 2x}{\sqrt{x^4 + 2x^2 + 2}} \end{aligned}$$

따라서 $f'(-1) = -\frac{4}{\sqrt{5}}, f'(1) = \frac{4}{\sqrt{5}}$ 이므로

$$a = -\frac{4}{\sqrt{5}}, \quad b = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore ab = -\frac{16}{5}$$

- 21** $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$ 이고 $f(1) = 1$ 이므로

$$h'(1) = g'(f(1))f'(1) = g'(1)f'(1)$$

$$\therefore g'(1)f'(1) = 9 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

이때 $f(x) = (3x - 2)\sqrt{3x - 2} = (3x - 2)^{\frac{3}{2}}$ 이므로

$$f'(x) = \frac{3}{2}(3x - 2)^{\frac{1}{2}} \times 3 = \frac{9}{2}\sqrt{3x - 2}$$

$$\therefore f'(1) = \frac{9}{2}$$

이를 ①에 대입하면

$$\frac{9}{2}g'(1) = 9$$

$$\therefore g'(1) = 2$$

- 22** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \cos x}} = (1 - \cos x)^{-\frac{1}{2}}$ 이므로

$$f'(x) = -\frac{1}{2}(1 - \cos x)^{-\frac{3}{2}} \sin x$$

$$= -\frac{\sin x}{2(1 - \cos x)\sqrt{1 - \cos x}}$$

$f'(a) = 0$ 에서

$$-\frac{\sin a}{2(1 - \cos a)\sqrt{1 - \cos a}} = 0$$

$$\sin a = 0$$

$$\therefore a = \pi \quad (\because 0 < a < 2\pi)$$

- 23** $f'(x) = \frac{\sec^2 x}{\tan x \ln 5}$

$$\therefore f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4}{\sqrt{3} \ln 5}$$

- 24** $f'(x) = \frac{4x^3 + 2ax}{x^4 + ax^2 - 2}$

$f'(-1) = 1$ 이므로

$$\frac{-4 - 2a}{a - 1} = 1$$

$$-4 - 2a = a - 1$$

$$\therefore a = -1$$

따라서 $f(x) = \ln |x^4 - x^2 - 2|$ 이므로

$$f(2) = \ln 10$$

- 25** $f'(x) = \frac{2^x \ln 2}{(2^x - 1) \ln 3}$

$$f'(a) = \frac{2 \ln 2}{\ln 3} \text{에서}$$

$$\frac{2^a \ln 2}{(2^a - 1) \ln 3} = \frac{2 \ln 2}{\ln 3}$$

$$2^a = 2 \times 2^a - 2$$

$$2^a = 2 \quad \therefore a = 1$$

- 26** $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln 1 = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{n}}$$

$\frac{1}{n}=t$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f\left(\frac{\pi}{4} + t\right) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{t} \\ = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

이때 $f'(x) = \frac{\sqrt{2} \cos x}{\sqrt{2} \sin x} = \cot x$ 이므로 구하는 극한값은

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

27 주어진 식의 양변의 절댓값에 자연로그를 취하면

$$\ln |f(x)|$$

$$= 4 \ln |x| + 3 \ln |x-1| - 2 \ln |x-2| - \ln |x-3|$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-3}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f'(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{4}{x} + \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-3} \right) \\ = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

28 주어진 식의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = x \ln (\ln x)$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln (\ln x) + x \times \frac{1}{\ln x} = \ln (\ln x) + \frac{1}{\ln x}$$

$$\therefore f'(x) = f(x) \times \left\{ \ln (\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right\}$$

$$= (\ln x)^x \left\{ \ln (\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right\}$$

$$\therefore f'(e) = 1 \times 1 = 1$$

29 $f(\pi) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - 1}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = f'(\pi) = 2 \ln \pi$$

$f(x) = x^{a \sin x}$ 의 양변에 자연로그를 취하면

$$\ln f(x) = a \sin x \ln x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = a \cos x \ln x + \frac{a \sin x}{x}$$

$$\therefore f'(x) = f(x) \times \left(a \ln x \cos x + \frac{a \sin x}{x} \right)$$

$$= x^{a \sin x} \left(a \ln x \cos x + \frac{a \sin x}{x} \right)$$

$$f'(\pi) = 2 \ln \pi \text{에서 } -a \ln \pi = 2 \ln \pi \quad \therefore a = -2$$

따라서 $f(x) = x^{-2 \sin x}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2} = \frac{4}{\pi^2}$$

02 여러 가지 미분법(2)

48~50쪽

1 $\frac{dy}{dx} = t$	2 ③	3 ②	4 4	5 ④
6 ④	7 ③	8 -2	9 $\frac{17}{2}$	10 -8
11 ②	12 ②	13 ①	14 ②	15 ②
16 $-\frac{1}{8}$	17 4	18 42	19 $\frac{1}{4}$	20 ②

1 x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = t \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = t$$

2 x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t-2}, \frac{dy}{dt} = \frac{\frac{1}{t} \times t - \ln t}{t^2} = \frac{1 - \ln t}{t^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1 - \ln t}{2e^{2t-2}} = \frac{1 - \ln t}{2t^2 e^{2t-2}}$$

따라서 $t=1$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 $\frac{1}{2}$

3 x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cos t - e^t \sin t = e^t (\cos t - \sin t)$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t (\sin t + \cos t)}{e^t (\cos t - \sin t)}$$

$$= \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t} \quad (\text{단, } \cos t \neq \sin t)$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{dy}{dx} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin t + \cos t}{\cos t - \sin t} = \frac{1+0}{0-1} = -1$$

4 x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 2 \times \frac{3}{2} \sqrt{t} = 3\sqrt{t}, \frac{dy}{dt} = 2t + a$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t+a}{3\sqrt{t}} \quad (\text{단, } t \neq 0)$$

이때 $t=1$ 에 대응하는 점에서의 접선이 직선 $y = -\frac{1}{2}x$ 와 수직이므로

$$\frac{2+a}{3} = 2, 2+a=6 \quad \therefore a=4$$

- 5 x, y 를 각각 θ 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{d\theta} = -\csc^2 \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = -\csc \theta \cot \theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-\csc \theta \cot \theta}{-\csc^2 \theta} = \frac{\cot \theta}{\csc \theta} = \cos \theta$$

이때 점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서 $a = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$, $b = \csc \frac{\pi}{6} = 2$ 이므로

$$ab = 2\sqrt{3}$$

- 6 x, y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt} = 4 - 2\cos 2t, \quad \frac{dy}{dt} = 2\sin 2t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2\sin 2t}{4 - 2\cos 2t} = \frac{\sin 2t}{2 - \cos 2t}$$

$t = \alpha$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값 p 는

$$p = \frac{\sin 2\alpha}{2 - \cos 2\alpha}$$

$t = \pi - \alpha$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값 q 는

$$q = \frac{\sin 2(\pi - \alpha)}{2 - \cos 2(\pi - \alpha)} = -\frac{\sin 2\alpha}{2 - \cos 2\alpha}$$

이때 $pq = -\frac{1}{4}$ 에서

$$-\frac{\sin^2 2\alpha}{(2 - \cos 2\alpha)^2} = -\frac{1}{4}$$

$$\frac{1 - \cos^2 2\alpha}{4 - 4\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha} = \frac{1}{4}$$

$$4 - 4\cos^2 2\alpha = 4 - 4\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha$$

$$5\cos^2 2\alpha - 4\cos 2\alpha = 0$$

$$\cos 2\alpha (5\cos 2\alpha - 4) = 0$$

$$\therefore \cos 2\alpha = 0 \text{ 또는 } \cos 2\alpha = \frac{4}{5}$$

따라서 모든 $\cos 2\alpha$ 의 값의 합은

$$0 + \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$$

- 7 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\sin 2y + x \cos 2y \times 2 \frac{dy}{dx} + 3 = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sin 2y + 3}{2x \cos 2y} \quad (\text{단, } x \cos 2y \neq 0)$$

따라서 점 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ 에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{0+3}{2 \times 1 \times (-1)} = \frac{3}{2}$$

- 8 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \times \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} \quad (\text{단, } x \neq 0)$$

이때 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6$ 에서 $x = 4$ 일 때

$$2 + \sqrt{y} = 6, \quad \sqrt{y} = 4 \quad \therefore y = 16$$

따라서 점 $(4, 16)$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은 $-\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{4}} = -2$

- 9 점 (a, b) 가 곡선 $x^2 + 4y^2 = 10$ 위의 점이므로

$$a^2 + 4b^2 = 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x^2 + 4y^2 = 10$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x + 8y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y} \quad (\text{단, } y \neq 0)$$

이때 점 (a, b) 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값이 1이므로

$$-\frac{a}{4b} = 1 \quad \therefore a = -4b$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$(-4b)^2 + 4b^2 = 10$$

$$20b^2 = 10 \quad \therefore b^2 = \frac{1}{2}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $a^2 = 8$

$$\therefore a^2 + b^2 = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

- 10 점 $(1, 1)$ 이 곡선 $5x^2 - 3y^2 + axy + b = 0$ 위의 점이므로

$$5 - 3 + a + b = 0 \quad \therefore a + b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$5x^2 - 3y^2 + axy + b = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$10x - 6y \frac{dy}{dx} + ay + ax \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(ax - 6y) \frac{dy}{dx} = -10x - ay$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-10x - ay}{ax - 6y} \quad (\text{단, } ax \neq 6y)$$

이때 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로

$$\frac{-10 - a}{a - 6} = 3, \quad -10 - a = 3a - 18 \quad \therefore a = 2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $b = -4$

$$\therefore ab = 2 \times (-4) = -8$$

- 11 주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{y+1} + \frac{y}{2\sqrt{y+1}} = \frac{3y+2}{2\sqrt{y+1}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{2\sqrt{y+1}}{3y+2}$$

- 12 주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{3y^2+1}{(y^3+y)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{(y^3+y)^2}{3y^2+1}$$

따라서 $y=1$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$-\frac{2^2}{3+1} = -1$$

- 13 주어진 식의 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$$

이때 $x = \sin y$ 에서 $x = \frac{1}{2}$ 일 때

$$\frac{1}{2} = \sin y \quad \therefore y = \frac{\pi}{6} \left(\because 0 < y < \frac{\pi}{2} \right)$$

따라서 $x = \frac{1}{2}$, 즉 $y = \frac{\pi}{6}$ 에서의 $\frac{dy}{dx}$ 의 값은

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- 14 $g(3)=a$ 라 하면 $f(a)=3$ 이므로

$$a^3+2a+3=3$$

$$a(a^2+2)=0 \quad \therefore a=0 \quad (\because a^2+2>0)$$

$$\therefore g(3)=0$$

이때 $f'(x)=3x^2+2$ 이므로

$$g'(3) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

- 15 $(g \circ f)(x) = x$ 이므로 $g(x) = f^{-1}(x)$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = a \text{라 하면 } f(a) = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\cos a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{\pi}{3} \left(\because 0 < a < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

이때 $f'(x) = -\sin x$ 이므로

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

- 16 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-5}{x-4} = 2$ 에서 $x \rightarrow 4$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고, 극한 값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 4} \{f(x)-5\} = 0 \quad \therefore f(4) = 5$$

$$\therefore g(5) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-5}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = f'(4) = 2 \text{이므로}$$

$$g'(5) = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{x-5} \left\{ \frac{4}{g(x)} - 1 \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \left\{ \frac{1}{x-5} \times \frac{4-g(x)}{g(x)} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \left[\frac{g(x)-4}{x-5} \times \left\{ -\frac{1}{g(x)} \right\} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{g(x)-g(5)}{x-5} \times \lim_{x \rightarrow 5} \left\{ -\frac{1}{g(x)} \right\}$$

$$= g'(5) \times \left\{ -\frac{1}{g(5)} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{8}$$

- 17 $g\left(\frac{x-1}{4}\right) = f^{-1}(x)$ 이므로 양변에 $x = -3$ 을 대입하면

$$g(-1) = f^{-1}(-3)$$

$$\therefore f^{-1}(-3) = 2$$

$$g\left(\frac{x-1}{4}\right) = f^{-1}(x) \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$\frac{1}{4} g'\left(\frac{x-1}{4}\right) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

양변에 $x = -3$ 을 대입하면

$$\frac{1}{4} g'(-1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-3))}$$

$$\frac{1}{4} g'(-1) = \frac{1}{f'(2)}$$

$$\frac{1}{4} g'(-1) = 1$$

$$\therefore g'(-1) = 4$$

- 18 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \ln 1 = 0$ 이므로

$$g(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^6 \{4g(kh) - \pi\}}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^6 \{4g(kh) - 4g(0)\}}{h} \\
 &= 4 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sum_{k=1}^6 \{g(kh) - g(0)\}}{h} \\
 &= 4 \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2h) - g(0)}{h} \right. \\
 &\quad \left. + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3h) - g(0)}{h} + \dots + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(6h) - g(0)}{h} \right\} \\
 &= 4 \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2h) - g(0)}{2h} \times 2 \right. \\
 &\quad \left. + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3h) - g(0)}{3h} \times 3 \right. \\
 &\quad \left. + \dots + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(6h) - g(0)}{6h} \times 6 \right\} \\
 &= 4 \{g'(0) + 2g'(0) + 3g'(0) + \dots + 6g'(0)\} \\
 &= 4 \times 21g'(0) = 84g'(0) \quad \dots \dots \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

따라서 $f'(x) = \frac{\sec^2 x}{\tan x}$ 이므로 구하는 극한값은 $\textcircled{1}$ 에서

$$84g'(0) = 84 \times \frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})} = 84 \times \frac{1}{2} = 42$$

19 (가)의 식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$f(2) + f(4) = 8$$

$$(나)에서 f(2) = 3이므로$$

$$3 + f(4) = 8 \quad \therefore f(4) = 5$$

$$\therefore g(5) = 4$$

또 (가)의 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) - f'(6-x) = 0$$

$$\text{양변에 } x=2 \text{를 대입하면 } f'(2) - f'(4) = 0$$

$$(나)에서 f'(2) = 4이므로$$

$$4 - f'(4) = 0 \quad \therefore f'(4) = 4$$

$$\therefore g'(5) = \frac{1}{f'(4)} = \frac{1}{4}$$

20 $g'(a) = \frac{1}{f'(g(a))} = \frac{1}{8}$ 이므로

$$f'(g(a)) = 8$$

$$\text{이때 } f'(x) = 3e^{3x} - 6e^{2x} + 4e^x \text{이므로 } g(a) = b \text{라 하면}$$

$$f'(b) = 8 \text{에서}$$

$$3e^{3b} - 6e^{2b} + 4e^b = 8$$

$$3e^{3b} - 6e^{2b} + 4e^b - 8 = 0, (e^b - 2)(3e^{2b} + 4) = 0$$

$$\therefore e^b = 2 (\because e^b > 0) \quad \therefore b = \ln 2$$

$$g(a) = \ln 2 \text{에서 } f(\ln 2) = a \text{이므로}$$

$$a = e^{3 \ln 2} - 3e^{2 \ln 2} + 4e^{\ln 2} = 8 - 12 + 8 = 4$$

$$\therefore a + f'(g(a)) = 4 + 8 = 12$$

II-3. 도함수의 활용

01 도함수의 활용(1)

52~55쪽

1 ③	2 2	3 3	4 $\frac{1}{4}$	5 ②
6 -2	7 $y = -4x + 8$	8 ④	9 ①	
10 ④	11 $-\frac{1}{2}$	12 ⑤	13 e	14 2
15 $a < -4$ 또는 $a > 0$	16 ④	17 15	18 $-\frac{5}{4}$	
19 ①	20 $y = \frac{1}{2}x$	21 ③	22 1	
23 ②	24 $y = -8x + 35$	25 6		

1 $f(x) = \tan 2x + \frac{\pi}{2}$ 에서

$$f'(x) = 2 \sec^2 2x$$

점 P에서의 접선의 기울기는

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2 \times (\sqrt{2})^2 = 4$$

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 + \frac{\pi}{2} \text{이므로 점 P에서의 접선의 방정식은}$$

$$y - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) = 4\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$\therefore y = 4x + 1$$

따라서 구하는 y절편은 1이다.

2 $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x-1)}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2}$$

$x = -1$ 인 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1) = 5$$

$f(-1) = -3$ 이므로 점 $(-1, -3)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y + 3 = 5(x + 1)$$

$$\therefore y = 5x + 2$$

이 직선이 점 $(a, 12)$ 를 지나므로

$$12 = 5a + 2$$

$$5a = 10 \quad \therefore a = 2$$

3 점 $(1, b)$ 가 곡선 $y = a^x \ln x$ 위의 점이므로

$$b = 0$$

$$f(x) = a^x \ln x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = a^x \ln a \ln x + a^x \times \frac{1}{x} = a^x \left(\ln a \ln x + \frac{1}{x} \right)$$

점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(1)=3$ 에서 $a=3$

$$\therefore a+b=3+0=3$$

4 $f(x)=x\cos x$ 라 하면

$$f'(x)=\cos x-x\sin x$$

점 $(\pi, -\pi)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(\pi)=-1$$

점 $(\pi, -\pi)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y+\pi=-(x-\pi)$$

$$\therefore y=-x$$

직선 $y=-x$ 가 곡선 $y=-\sqrt{x-k}$ 에 접하므로

$$-x=-\sqrt{x-k} \text{에서 } x^2=x-k$$

$$\therefore x^2-x+k=0$$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 에서

$$D=1-4k=0$$

$$\therefore k=\frac{1}{4}$$

5 $f(x)=x\ln x$ 라 하면

$$f'(x)=\ln x+x\times\frac{1}{x}$$

$$=\ln x+1$$

접점의 좌표를 $(t, t\ln t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(t)=2$ 에서

$$\ln t+1=2$$

$$\ln t=1 \quad \therefore t=e$$

따라서 접점의 좌표는 (e, e) 이므로 접선의 방정식은

$$y-e=2(x-e)$$

$$\therefore y=2x-e$$

$$\therefore a=-e$$

6 $f(x)=-x+\sqrt{4x+3}$ 이라 하면

$$f'(x)=-1+\frac{4}{2\sqrt{4x+3}}$$

$$=-1+\frac{2}{\sqrt{4x+3}}$$

접점의 좌표를 $(t, -t+\sqrt{4t+3})$ 이라 하면 접선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$ 이므로 $f'(t)=1$ 에서

$$-1+\frac{2}{\sqrt{4t+3}}=1$$

$$\frac{2}{\sqrt{4t+3}}=2, \sqrt{4t+3}=1$$

$$4t+3=1 \quad \therefore t=-\frac{1}{2}$$

즉, 접점의 좌표는 $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-\frac{3}{2}=x+\frac{1}{2} \quad \therefore y=x+2$$

따라서 구하는 x 절편은 -2 이다.

7 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 이라 하면

$$f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{1}{t-1})$ 이라 하면 직선 $y=\frac{1}{4}x$ 에 수직

인 직선의 기울기는 -4 이므로 $f'(t)=-4$ 에서

$$-\frac{1}{(t-1)^2}=-4, 4(t-1)^2=1$$

$$4t^2-8t+3=0, (2t-1)(2t-3)=0$$

$$\therefore t=\frac{1}{2} \text{ 또는 } t=\frac{3}{2}$$

그런데 $t>1$ 이므로 $t=\frac{3}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $(\frac{3}{2}, 2)$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-2=-4(x-\frac{3}{2}) \quad \therefore y=-4x+8$$

8 $f(x)=\ln(x-7)$ 이라 하면

$$f'(x)=\frac{1}{x-7}$$

접점의 좌표를 $(t, \ln(t-7))$ 이라 하면 직선

$3x-3y+2=0$, 즉 $y=x+\frac{2}{3}$ 에 평행한 직선의 기울기는

1이므로 $f'(t)=1$ 에서

$$\frac{1}{t-7}=1, t-7=1 \quad \therefore t=8$$

즉, 접점의 좌표는 $(8, 0)$ 이므로 접선의 방정식은

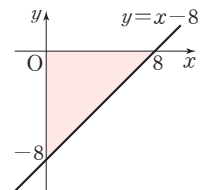
$$y=x-8$$

따라서 이 직선의 x 절편은 8, y 절

편은 -8 이므로 구하는 삼각형의

넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 8 = 32$$



9 직선 $y=x$ 를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동하면

$$y=x-k$$

$$f(x)=e^x+2e^{-x} \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=e^x-2e^{-x}$$

접점의 좌표를 (t, e^t+2e^{-t}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(t)=1$ 에서

$$e^t-2e^{-t}=1$$

$e^t = a$ 로 놓으면

$$a - 2a^{-1} = 1, a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a+1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

즉, $e^t = 2$ 이므로 $t = \ln 2$

따라서 접점의 좌표는 $(\ln 2, 3)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 3 = x - \ln 2 \quad \therefore y = x + 3 - \ln 2$$

$$\therefore k = \ln 2 - 3$$

10 $y = e^x + 1$ 에서 $e^x = y - 1$

양변에 자연로그를 취하면

$$x = \ln(y - 1)$$

즉, 두 함수 $y = e^x + 1$,

$y = \ln(x - 1)$ 은 역함수 관계이

므로 두 함수의 그래프는 직선

$y = x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 선분 AB의 길이가 최소이려면 두 점 A, B는 직선 $y = x$ 와 기울기가 같은 접선의 접점이어야 하므로 두 점 A, B에서의 접선의 기울기가 모두 1이어야 한다.

$f(x) = e^x + 1$ 이라 하면

$$f'(x) = e^x$$

A($a, e^a + 1$)이라 하면 점 A에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(a) = 1$ 에서

$$e^a = 1 \quad \therefore a = 0$$

$$\therefore A(0, 2)$$

또 $g(x) = \ln(x - 1)$ 이라 하면

$$g'(x) = \frac{1}{x-1}$$

B($b, \ln(b - 1)$)이라 하면 점 B에서의 접선의 기울기가 1이므로 $g'(b) = 1$ 에서

$$\frac{1}{b-1} = 1 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore B(2, 0)$$

따라서 A(0, 2), B(2, 0)일 때, 선분 AB의 길이가 최소이므로 구하는 최솟값은

$$\sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$$

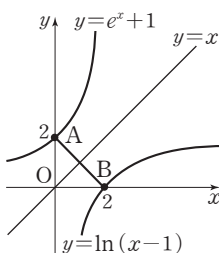
11 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

접점의 좌표를 ($t, \sqrt{t^2 + 1}$)이라 하면 이 점에서의 접선의

기울기는 $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \sqrt{t^2 + 1} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}(x - t) \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$



이 직선이 점 (1, 0)을 지나므로

$$-\sqrt{t^2 + 1} = \frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}(1 - t)$$

$$-(t^2 + 1) = t(1 - t) \quad \therefore t = -1$$

이를 ⑦에 대입하면 접선의 방정식은

$$y - \sqrt{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + 1)$$

$$\therefore y = -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$ab = -\frac{1}{2}$$

12 $f(x) = \ln \frac{x}{2} + 1 = \ln x - \ln 2 + 1$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

A($t, \ln \frac{t}{2} + 1$)이라 하면 점 A에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = \frac{1}{t} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - \left(\ln \frac{t}{2} + 1\right) = \frac{1}{t}(x - t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-\left(\ln \frac{t}{2} + 1\right) = \frac{1}{t} \times (-t)$$

$$\ln \frac{t}{2} = 0, \frac{t}{2} = 1 \quad \therefore t = 2$$

따라서 A(2, 1)이므로 선분 OA의 길이는

$$\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

13 $f(x) = xe^x$ 이라 하면

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1 + x)e^x$$

접점의 좌표를 (t, te^t)이라 하면 이 점에서의 접선의 기

울기는 $f'(t) = (1 + t)e^t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - te^t = (1 + t)e^t(x - t)$$

이 직선이 점 (1, 0)을 지나므로

$$-te^t = (1 + t)e^t(1 - t)$$

$$-t = (1 + t)(1 - t) \quad (\because e^t > 0)$$

$$\therefore t^2 - t - 1 = 0$$

이차방정식 $t^2 - t - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$$

이때 두 접선의 기울기는 각각 $(1 + \alpha)e^\alpha, (1 + \beta)e^\beta$ 이므로

$$\begin{aligned} m_1 m_2 &= (1 + \alpha)e^\alpha (1 + \beta)e^\beta \\ &= (1 + \alpha + \beta + \alpha\beta)e^{\alpha + \beta} \\ &= (1 + 1 - 1)e = e \end{aligned}$$

14 $f(x) = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ 이라 하면

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

접점의 좌표를 $(t, 1 - \frac{1}{t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의

기울기는 $f'(t) = \frac{1}{t^2}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \left(1 - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}(x - t)$$

이 직선이 점 (3, 2)를 지나므로

$$2 - \left(1 - \frac{1}{t}\right) = \frac{1}{t^2}(3 - t)$$

$$t^2 + t = 3 - t \quad (\because t \neq 0)$$

$$t^2 + 2t - 3 = 0$$

$$(t+3)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 접점의 좌표는 $(-3, \frac{4}{3})$, $(1, 0)$ 의 2개이므로 접선의 개수는 2이다.

15 $f(x) = xe^{x-1}$ 이라 하면

$$f'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1} = (1+x)e^{x-1}$$

접점의 좌표를 (t, te^{t-1}) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = (1+t)e^{t-1}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - te^{t-1} = (1+t)e^{t-1}(x - t)$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$-te^{t-1} = (1+t)e^{t-1}(a - t)$$

$$-t = (1+t)(a - t) \quad (\because e^{t-1} > 0)$$

$$\therefore t^2 - at - a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(a, 0)$ 에서 곡선 $y = xe^{x-1}$ 에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 두 개의 접점이 존재해야 하므로 이차방정식 ①이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면 $D > 0$ 이어야 하므로

$$D = a^2 + 4a > 0$$

$$a(a+4) > 0$$

$$\therefore a < -4 \text{ 또는 } a > 0$$

16 $f(x) = (2x+a)e^{-x}$ 이라 하면

$$f'(x) = 2e^{-x} - (2x+a)e^{-x} = (2-2x-a)e^{-x}$$

접점의 좌표를 $(t, (2t+a)e^{-t})$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = (2-2t-a)e^{-t}$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (2t+a)e^{-t} = (2-2t-a)e^{-t}(x - t)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$-(2t+a)e^{-t} = (2-2t-a)e^{-t} \times (-t)$$

$$-(2t+a) = (2-2t-a) \times (-t) \quad (\because e^{-t} > 0)$$

$$\therefore 2t^2 + at + a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원점에서 곡선 $y = (2x+a)e^{-x}$ 에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 한 개의 접점이 존재해야 하므로 이차방정식 ①이 중근을 가져야 한다.

즉, 이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면 $D = 0$ 이어야 하므로

$$D = a^2 - 8a = 0, \quad a(a-8) = 0$$

$$\therefore a = 8 \quad (\because a \neq 0)$$

17 $f(x) = 2\ln x, g(x) = ax + \frac{b}{x}$ 라 하면

$$f'(x) = \frac{2}{x}, \quad g'(x) = a - \frac{b}{x^2}$$

두 곡선이 $x = e^4$ 인 점에서 접하므로 $f(e^4) = g(e^4)$ 에서

$$2\ln e^4 = ae^4 + \frac{b}{e^4}$$

$$ae^4 + \frac{b}{e^4} = 8$$

$$\therefore ae^8 + b = 8e^4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $x = e^4$ 인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(e^4) = g'(e^4) \text{에서}$$

$$\frac{2}{e^4} = a - \frac{b}{e^8}$$

$$\therefore ae^8 - b = 2e^4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = \frac{5}{e^4}, \quad b = 3e^4 \quad \therefore ab = 15$$

18 $f(x) = a + \cos^2 x, g(x) = \sin x$ 라 하면

$$f'(x) = -2\sin x \cos x, \quad g'(x) = \cos x$$

두 곡선이 $x = t$ 인 점에서 공통인 접선을 가진다고 하면

$x = t$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t) = g(t)$ 에서

$$a + \cos^2 t = \sin t \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $x = t$ 인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(t) = g'(t) \text{에서}$$

$$-2\sin t \cos t = \cos t$$

$$\sin t = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore t = \frac{7}{6}\pi \quad \left(\because \frac{\pi}{2} < t < \frac{3}{2}\pi\right)$$

따라서 ①에서

$$a = \sin \frac{7}{6}\pi - \cos^2 \frac{7}{6}\pi$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{4}$$

- 19** 두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$ 는 역함수 관계이므로 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.
즉, 두 곡선이 한 점에서 공통인 접선을 가진다고 하면 공통인 접선은 직선 $y=x$ 이다.

$$f(x)=a^x \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=a^x \ln a$$

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 접점의 좌표를 (t, t) 라 하면 $f(t)=t$ 에서

$$a^t=t$$

$$\therefore a=t^{\frac{1}{t}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $x=t$ 인 점에서의 접선의 기울기가 1이므로

$$a^t \ln a=1$$

①을 대입하면

$$t \ln t^{\frac{1}{t}}=1$$

$$\ln t=1$$

$$\therefore t=e$$

이를 ①에 대입하면

$$a=e^{\frac{1}{e}}$$

- 20** x 와 y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{(1+t)^2}, \quad \frac{dy}{dt}=-\frac{2t}{(t^2+3)^2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{2t}{(t^2+3)^2}}{-\frac{1}{(1+t)^2}} \\ &= \frac{2t(1+t)^2}{(t^2+3)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{1+t}=\frac{1}{2} \text{에서 } t=1$$

$t=1$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는

$$\frac{2 \times 2^2}{(1+3)^2}=\frac{1}{2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore y=\frac{1}{2}x$$

- 21** x 와 y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=a \cos t-2 \cos 2t, \quad \frac{dy}{dt}=-b \sin t+2 \sin 2t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{-b \sin t+2 \sin 2t}{a \cos t-2 \cos 2t} \quad (\text{단, } a \cos t \neq 2 \cos 2t)$$

$$x+2y-3=0 \text{에서}$$

$$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$$

즉, $t=\frac{\pi}{2}$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이

므로

$$\frac{-b}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore b=1$$

$t=\frac{\pi}{2}$ 에 대응하는 점의 x 좌표와 y 좌표는

$$x=a, y=1$$

점 $(a, 1)$ 이 직선 $x+2y-3=0$ 위의 점이므로

$$a+2-3=0$$

$$\therefore a=1$$

$$\therefore ab=1 \times 1=1$$

- 22** x 와 y 를 각각 t 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dt}=3 \sin^2 t \cos t, \quad \frac{dy}{dt}=-3 \cos^2 t \sin t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-3 \cos^2 t \sin t}{3 \sin^2 t \cos t}=-\cot t$$

$$-\cot t=-1 \text{에서 } \tan t=1$$

$$\therefore t=\frac{\pi}{4} \quad \left(\because 0 < t < \frac{\pi}{2} \right)$$

$t=\frac{\pi}{4}$ 에 대응하는 점의 x 좌표와 y 좌표는

$$x=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{4}, \quad y=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

즉, 점 $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-\frac{\sqrt{2}}{4}=-\left(x-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$\therefore y=-x+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이므로 선분 AB의 길이는

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$$

- 23** 주어진 식의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$3+\frac{dy}{dx}-\sin(xy) \times \left(y+x \frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$\{1-x \sin(xy)\} \frac{dy}{dx}=y \sin(xy)-3$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y \sin(xy)-3}{1-x \sin(xy)} \quad (\text{단, } x \sin(xy) \neq 1)$$

점 (0, 1)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{-3}{1} = -3$$

점 (0, 1)에서의 접선의 방정식은

$$y-1=-3x$$

$$\therefore y=-3x+1$$

따라서 구하는 x 절편은 $\frac{1}{3}$ 이다.

- 24** 점 (4, a)가 곡선 $12x - xy^2 - 12 = 0$ 위의 점이므로

$$48 - 4a^2 - 12 = 0$$

$$a^2 = 9$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

$12x - xy^2 - 12 = 0$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$12 - y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{12 - y^2}{2xy} \quad (\text{단, } xy \neq 0)$$

점 (4, 3)에서의 접선의 기울기는

$$\frac{12 - 9}{24} = \frac{1}{8}$$

따라서 접선에 수직인 직선의 기울기는 -8 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y - 3 = -8(x - 4)$$

$$\therefore y = -8x + 35$$

- 25** 점 (1, 1)이 곡선 $ax^2 - bxy - y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$a - b - 1 = 4$$

$$\therefore a - b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 (1, 1)에서의 접선이 원 $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하면 원의 중심 (3, -1)을 지나므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = \frac{-1 - 1}{3 - 1}(x - 1)$$

$$\therefore y = -x + 2$$

$ax^2 - bxy - y^2 = 4$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2ax - by - bx \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2ax - by}{bx + 2y} \quad (\text{단, } bx \neq -2y)$$

점 (1, 1)에서의 접선의 기울기가 -1 이므로

$$\frac{2a - b}{b + 2} = -1$$

$$2a - b = -b - 2$$

$$\therefore a = -1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면

$$b = -6$$

$$\therefore ab = -1 \times (-6) = 6$$

02 도함수의 활용(2)

56~58쪽

1 ④

2 12

3 5

4 2

5 π

6 ④

7 ②

8 $a \geq 2$

9 ②

10 ④

11 ①

12 $\frac{9}{2}$

13 40π

14 1

15 16

16 ④

17 ①

18 $-\frac{12}{e^3}$

19 ③

20 $0 < a < 4$

21 ②

1 $f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} + 3x^2 - 3 = \ln x + 3x^2 - 2$ 이므로

$$f'(1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x) - f'(1)}{x - 1} = f''(1)$$

$$\text{이때 } f''(x) = \frac{1}{x} + 6x \text{이므로 } f''(1) = 7$$

2 $f'(x) = \frac{a(x-3) - ax}{(x-3)^2} = -\frac{3a}{(x-3)^2}$ 이므로

$$f'(2) = 6 \text{에서 } -3a = 6 \quad \therefore a = -2$$

$$f'(x) = \frac{6}{(x-3)^2} \text{이므로}$$

$$f''(x) = -\frac{6 \times 2(x-3)}{(x-3)^4} = -\frac{12}{(x-3)^3}$$

$$\therefore f''(2) = 12$$

3 $f'(x) = 2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x = e^{2x}(2 \sin x + \cos x)$

$$f''(x) = 2e^{2x}(2 \sin x + \cos x) + e^{2x}(2 \cos x - \sin x)$$

$$= e^{2x}(3 \sin x + 4 \cos x)$$

$$f''(x) - 4f'(x) + af(x) = 0 \text{에서}$$

$$e^{2x}(3 \sin x + 4 \cos x) - 4e^{2x}(2 \sin x + \cos x)$$

$$+ ae^{2x} \sin x = 0$$

$$(a-5)e^{2x} \sin x = 0$$

이 식이 x 의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$$a - 5 = 0 \quad \therefore a = 5$$

4 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(f(x)) - 4}{x - 2} = 8$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고,

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \{f'(f(x)) - 4\} = 0 \quad \therefore f'(f(2)) = 4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(f(x)) - 4}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(f(x)) - f'(f(2))}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f'(f(x)) - f'(f(2))}{f(x) - f(2)} \times \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(f(x)) - f'(f(2))}{f(x) - f(2)} \times f'(2)$$

$$= 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(f(x)) - f'(f(2))}{f(x) - f(2)}$$

$$f(2)=3\text{이고 } f(x)=t\text{로 놓으면 } x\rightarrow 2\text{일 때 } t\rightarrow 3\text{이므로}$$

$$4\lim_{x\rightarrow 2}\frac{f'(f(x))-f'(f(2))}{f(x)-f(2)}=4\lim_{t\rightarrow 3}\frac{f'(t)-f'(3)}{t-3}$$

$$=4f''(3)$$

따라서 $4f''(3)=8$ 이므로

$$f''(3)=2$$

- 5 $f(x)=\cos x+x\sin x$ 에서
- $$f'(x)=-\sin x+\sin x+x\cos x=x\cos x$$
- $$f'(x)=0\text{에서 } x\cos x=0$$
- $$\therefore x=\frac{\pi}{2}\text{ 또는 } x=\frac{3}{2}\pi (\because 0<x<2\pi)$$
- $0<x<2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	$\frac{3}{2}\pi$	...	2π
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}\pi$	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 가 감소하는 x 의 값의 범위가

$$\frac{\pi}{2}\leq x\leq \frac{3}{2}\pi\text{이므로 } a=\frac{\pi}{2}, b=\frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore b-a=\pi$$

- 6 $f(x)=e^{-x}+3x$ 에서
- $$f'(x)=-e^{-x}+3$$
- $$f'(x)=0\text{에서 } e^{-x}=3$$
- $$\therefore x=-\ln 3$$
- 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-\ln 3$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$3-3\ln 3$	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-\ln 3, \infty)$ 에서 증가하고 구간 $(-\infty, -\ln 3]$ 에서 감소하므로

$$a=-\ln 3$$

- 7 $12-x^2\geq 0$ 에서 $x^2\leq 12$
- $$\therefore 0\leq x\leq 2\sqrt{3} (\because x\geq 0)$$
- $$f(x)=x+\sqrt{12-x^2}\text{에서}$$
- $$f'(x)=1+\frac{-2x}{2\sqrt{12-x^2}}=1-\frac{x}{\sqrt{12-x^2}}$$
- $$f'(x)=0\text{에서 } \frac{x}{\sqrt{12-x^2}}=1$$
- $$\sqrt{12-x^2}=x, 12-x^2=x^2$$
- $$x^2=6 \quad \therefore x=\sqrt{6} (\because 0\leq x\leq 2\sqrt{3})$$

$0\leq x\leq 2\sqrt{3}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\sqrt{6}$	...	$2\sqrt{3}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	$2\sqrt{6}$	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 가 증가하는 구간은 $(0, \sqrt{6}]$ 이므로 이 구간에 속하는 모든 정수 x 의 값의 합은

$$1+2=3$$

- 8 $f(x)=-x+\ln(2x^2+a)$ 에서
- $$f'(x)=-1+\frac{4x}{2x^2+a}=\frac{-2x^2+4x-a}{2x^2+a}$$
- 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에서 $f'(x)\leq 0$ 이어야 하므로
- $$-2x^2+4x-a\leq 0 (\because 2x^2+a>0)$$
- $$\therefore 2x^2-4x+a\geq 0$$
- 이차방정식 $2x^2-4x+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D\leq 0$ 이어야 하므로
- $$\frac{D}{4}=4-2a\leq 0$$
- $$\therefore a\geq 2$$

- 9 $f(x)=e^x-ax$ 에서
- $$f'(x)=e^x-a$$
- 함수 $f(x)$ 가 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가하려면 $x\geq 0$ 에서 $f'(x)\geq 0$ 이어야 하므로
- $$e^x-a\geq 0 \quad \therefore e^x\geq a$$
- 이때 $x\geq 0$ 에서 $e^x\geq 1$ 이므로
- $$a\leq 1$$
- 따라서 a 의 최댓값은 1이다.

- 10 $f(x)=\frac{e^{ax}}{2x-1}$ 에서
- $$f'(x)=\frac{ae^{ax}(2x-1)-2e^{ax}}{(2x-1)^2}$$
- $$=\frac{(2ax-a-2)e^{ax}}{(2x-1)^2}$$
- 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, -1]$ 에서 감소하려면 $x\leq -1$ 에서 $f'(x)\leq 0$ 이어야 하므로 $x\leq -1$ 에서
- $$2ax-a-2\leq 0 (\because (2x-1)^2>0, e^{ax}>0)$$
- $$g(x)=2ax-a-2\text{라 하면 } 2a\geq 0, g(-1)\leq 0\text{이어야 하므로}$$
- $$a\geq 0, -3a-2\leq 0$$
- $$\therefore a\geq 0$$

- 11 $f(x) = (x^2 - 2x - 7)e^x$ 에서
 $f'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x - 7)e^x = (x^2 - 9)e^x$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x^2 - 9 = 0$ ($\because e^x > 0$)
 $x^2 = 9 \quad \therefore x = -3$ 또는 $x = 3$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{8}{e^3}$ 극대	$\searrow$	$-4e^3$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극댓값 $\frac{8}{e^3}$, $x = 3$ 에서 극솟값 $-4e^3$ 을 가지므로
 $a = \frac{8}{e^3}$, $b = -4e^3 \quad \therefore a \times b = -32$

다른 풀이

$f'(x) = (x^2 - 9)e^x$ 이므로
 $f''(x) = 2xe^x + (x^2 - 9)e^x = (x^2 + 2x - 9)e^x$
 $f'(x) = 0$ 에서 $x = -3$ 또는 $x = 3$
 $\therefore f''(-3) = -\frac{6}{e^3} < 0$, $f''(3) = 6e^3 > 0$
 따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극댓값 $\frac{8}{e^3}$, $x = 3$ 에서 극솟값 $-4e^3$ 을 가지므로
 $a = \frac{8}{e^3}$, $b = -4e^3 \quad \therefore a \times b = -32$

- 12 $f(x) = x + \sqrt{9 - 4x}$ 에서 $x \leq \frac{9}{4}$ 이고
 $f'(x) = 1 + \frac{-4}{2\sqrt{9 - 4x}} = 1 - \frac{2}{\sqrt{9 - 4x}}$
 $f'(x) = 0$ 에서 $\frac{2}{\sqrt{9 - 4x}} = 1$
 $\sqrt{9 - 4x} = 2$, $9 - 4x = 4$
 $\therefore x = \frac{5}{4}$
 $x \leq \frac{9}{4}$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$\frac{5}{4}$	$\cdots$	$\frac{9}{4}$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{13}{4}$ 극대	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{5}{4}$ 에서 극댓값 $\frac{13}{4}$ 을 가지므로
 $a = \frac{5}{4}$, $b = \frac{13}{4} \quad \therefore a + b = \frac{9}{2}$

- 13 $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$ 에서
 $f'(x) = e^x(\sin x - \cos x) + e^x(\cos x + \sin x)$
 $= 2e^x \sin x$
 $f'(x) = 0$ 에서 $\sin x = 0$ ($\because e^x > 0$)
 $\therefore x = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ ($\because x > 0$)
 $x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π	$\cdots$	3π	$\cdots$	4π	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 가 극소일 때의 x 의 값을 작은 것부터 차례대로 나열하면
 $2\pi, 4\pi, \dots, 2n\pi, \dots$
 따라서 $x_n = 2n\pi$ 이므로
 $x_{20} = 40\pi$

- 14 $f(x) = 2n \ln x + \frac{2n+1}{x} - 2n$ 에서 $x > 0$ 이고
 $f'(x) = \frac{2n}{x} - \frac{2n+1}{x^2} = \frac{2nx - 2n - 1}{x^2}$
 $f'(x) = 0$ 에서 $2nx - 2n - 1 = 0$ ($\because x > 0$)
 $\therefore x = \frac{2n+1}{2n}$
 $x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{2n+1}{2n}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값 a_n 은
 $a_n = 2n \ln \frac{2n+1}{2n} + \frac{2n+1}{\frac{2n+1}{2n}} - 2n = 2n \ln \frac{2n+1}{2n}$
 $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2n \ln \frac{2n+1}{2n} \right)$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^{2n} = 1$

- 15 $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ 에서
 $f'(x) = 2x - \frac{a}{x^2}$
 $x = 2$ 에서 극솟값을 가지므로 $f'(2) = 0$
 $4 - \frac{a}{4} = 0 \quad \therefore a = 16$
- 16 $f(x) = x - a \ln x$ 에서 $x > 0$ 이고
 $f'(x) = 1 - \frac{a}{x}$

$$f'(x)=0 \text{에서 } \frac{a}{x}=1 \quad \therefore x=a$$

$x>0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	a	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$a-a\ln a$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극솟값 0을 가지므로
 $a-a\ln a=0, \ln a=1 \quad \therefore a=e$

17 $f(x)=a\sin x-b\cos x$ 에서

$$f'(x)=a\cos x+b\sin x$$

$$x=\frac{2}{3}\pi \text{에서 극댓값 } 2 \text{를 가지므로}$$

$$f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=0, f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=2$$

$$f'\left(\frac{2}{3}\pi\right)=0 \text{에서}$$

$$-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b=0 \quad \therefore a-\sqrt{3}b=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right)=2 \text{에서}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b=2 \quad \therefore \sqrt{3}a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=\sqrt{3}, b=1 \quad \therefore ab=\sqrt{3}$$

18 $f(x)=(ax^2+b)e^x$ 에서

$$f'(x)=2axe^x+(ax^2+b)e^x=(ax^2+2ax+b)e^x$$

$$x=1 \text{에서 극댓값 } 4e \text{를 가지므로}$$

$$f'(1)=0, f(1)=4e$$

$$f'(1)=0 \text{에서}$$

$$(3a+b)e=0 \quad \therefore 3a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(1)=4e \text{에서}$$

$$(a+b)e=4e \quad \therefore a+b=4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-2, b=6$

$$\therefore f(x)=(-2x^2+6)e^x, f'(x)=(-2x^2-4x+6)e^x$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } -2x^2-4x+6=0 \quad (\because e^x>0)$$

$$(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{12}{e^3}$ 극소	$\nearrow$	$4e$ 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-3$ 에서 극솟값 $-\frac{12}{e^3}$ 를 갖는다.

19 $f(x)=(x^2+ax+3)e^x$ 에서

$$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+3)e^x$$

$$=\{x^2+(a+2)x+a+3\}e^x$$

이때 $e^x>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 모든 실수 x 에서

$$x^2+(a+2)x+a+3\geq 0$$

따라서 이차방정식 $x^2+(a+2)x+a+3=0$ 의 판별식을

$$D \text{라 하면 } D\leq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$D=(a+2)^2-4(a+3)\leq 0$$

$$a^2-8\leq 0, (a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})\leq 0$$

$$\therefore -2\sqrt{2}\leq a\leq 2\sqrt{2}$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 이므로 그 합은

$$-2+(-1)+0+1+2=0$$

20 $f(x)=4\ln x+\frac{a}{x}-x$ 에서 $x>0$ 이고

$$f'(x)=\frac{4}{x}-\frac{a}{x^2}-1=\frac{-x^2+4x-a}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x>0$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $-x^2+4x-a=0$ 이 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $-x^2+4x-a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D>0 \text{이어야 하므로}$$

$$\frac{D}{4}=4-a>0 \quad \therefore a<4$$

(ii) (두 근의 합) >0 이어야 하므로 $4>0$

(iii) (두 근의 곱) >0 이어야 하므로 $a>0$

(i), (ii), (iii)에서 a 의 값의 범위는

$$0<a<4$$

21 $f(x)=(x^3-9x+a)e^{-x}$ 에서

$$f'(x)=(3x^2-9)e^{-x}-(x^3-9x+a)e^{-x}$$

$$=(-x^3+3x^2+9x-a-9)e^{-x}$$

이때 $e^{-x}>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $-x^3+3x^2+9x-a-9=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$g(x)=-x^3+3x^2+9x-a-9 \text{라 하면}$$

$$g'(x)=-3x^2+6x+9$$

$$g'(x)=0 \text{에서}$$

$$-3x^2+6x+9=0, (x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

$g(x)$ 는 $x=-1, x=3$ 에서 극값을 가지므로

$$g(-1)g(3)<0, (-14-a)(18-a)<0$$

$$(a+14)(a-18)<0 \quad \therefore -14<a<18$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 17이다.

1 3	2 $\frac{2}{3}\pi$	3 ①	4 $-\frac{1}{2}$	5 96
6 ①	7 ⑤	8 ③	9 9	10 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$
11 ③	12 ④	13 $4\sqrt{2}$	14 $3\sqrt{3}-\pi$	
15 $2e\sqrt{e}$	16 1	17 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$	18 $3\sqrt{3}$	

- 1 $f(x)=\ln(x^2+2)$ 라 하면

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+2}$$

$$f''(x)=\frac{2(x^2+2)-2x \times 2x}{(x^2+2)^2}=\frac{-2(x^2-2)}{(x^2+2)^2}$$

$$f''(x)=0 \text{에서}$$

$$x^2-2=0 \quad \therefore x=-\sqrt{2} \text{ 또는 } x=\sqrt{2}$$

$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ 에서 $f''(x) > 0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 는 구간 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 에서 아래로 볼록하다.

따라서 구간 $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 에 속하는 정수 x 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다.

- 2 $f(x)=(1-\cos x)^2$ 이라 하면

$$f'(x)=2(1-\cos x)\sin x$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2\sin^2 x + 2(1-\cos x)\cos x \\ &= 2\sin^2 x - 2\cos^2 x + 2\cos x \\ &= 2(1-\cos^2 x) - 2\cos^2 x + 2\cos x \\ &= -4\cos^2 x + 2\cos x + 2 \\ &= -2(2\cos^2 x - \cos x - 1) \end{aligned}$$

$$f''(x)=0 \text{에서}$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$(2\cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = 1$$

$$\therefore x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi \quad (\because 0 < x < 2\pi)$$

$x = \frac{2}{3}\pi, x = \frac{4}{3}\pi$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$$\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{9}{4}\right), \left(\frac{4}{3}\pi, \frac{9}{4}\right)$$

따라서 두 변곡점 사이의 거리는

$$\frac{4}{3}\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi$$

- 3 $f(x)=xe^{-2x}$ 이라 하면

$$f'(x)=e^{-2x}+x(-2e^{-2x})=(1-2x)e^{-2x}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -2e^{-2x} + (1-2x)(-2e^{-2x}) \\ &= 4(x-1)e^{-2x} \end{aligned}$$

$$f''(x)=0 \text{에서}$$

$$x-1=0 \quad (\because e^{-2x} > 0) \quad \therefore x=1$$

$x=1$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점 A의 좌표는

$$(1, e^{-2})$$

$f'(1)=-e^{-2}$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$$y-e^{-2}=-e^{-2}(x-1)$$

$$\therefore y=-e^{-2}x+2e^{-2}$$

$$\therefore B(2, 0)$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times e^{-2} = e^{-2}$$

- 4 $f(x)=(ax^2-1)e^{-x}$ 이라 하면

$$f'(x)=2axe^{-x}-(ax^2-1)e^{-x}$$

$$=(-ax^2+2ax+1)e^{-x}$$

$$f''(x)=(-2ax+2a)e^{-x}-(-ax^2+2ax+1)e^{-x}$$

$$=(ax^2-4ax+2a-1)e^{-x}$$

곡선 $y=f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 위로 볼록하려면 모든 실수 x 에서 $f''(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$ax^2-4ax+2a-1 \leq 0 \quad (\because e^{-x} > 0)$$

(i) $a=0$ 일 때, $-1 \leq 0$ 이므로 부등식이 성립한다.

(ii) $a \neq 0$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립하려면 $a < 0$

따라서 이차방정식 $ax^2-4ax+2a-1=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4} = 4a^2 - a(2a-1) \leq 0$$

$$2a^2 + a \leq 0, a(2a+1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq a < 0 \quad (\because a < 0)$$

(i), (ii)에서 $-\frac{1}{2} \leq a \leq 0$

따라서 a 의 최솟값은 $-\frac{1}{2}$ 이다.

- 5 $f(x)=\frac{2}{x^2+b}$ 라 하면

$$f'(x)=-\frac{2 \times 2x}{(x^2+b)^2}=-\frac{4x}{(x^2+b)^2}$$

$$f''(x)=-\frac{4(x^2+b)^2-4x \times 2(x^2+b) \times 2x}{(x^2+b)^4}$$

$$=\frac{12x^2-4b}{(x^2+b)^3}$$

곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 좌표가 $(2, a)$ 이므로

$$f''(2)=0, f(2)=a$$

$$f''(2)=0 \text{에서 } \frac{48-4b}{(4+b)^3}=0$$

$$48-4b=0 \quad (\because b>0)$$

$$\therefore b=12$$

$$f(2)=a \text{에서 } \frac{2}{4+b}=a$$

$$b=12 \text{를 대입하면 } a=\frac{1}{8}$$

$$\therefore \frac{b}{a}=\frac{12}{\frac{1}{8}}=96$$

6 $f(x)=x^2+ax+b\ln x$ 에서

$$f'(x)=2x+a+\frac{b}{x}$$

$$f''(x)=2-\frac{b}{x^2}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극대이므로 $f'(1)=0$ 에서

$$2+a+b=0$$

$$\therefore a+b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

곡선 $y=f(x)$ 의 변곡점의 x 좌표가 2이므로 $f''(2)=0$ 에서

$$2-\frac{b}{4}=0$$

$$\therefore b=8$$

이를 ①에 대입하여 풀면 $a=-10$

$$\therefore ab=-10 \times 8 = -80$$

7 $f(x)=3x^4-4x^3+ax^2$ 이라 하면

$$f'(x)=12x^3-12x^2+2ax$$

$$f''(x)=36x^2-24x+2a$$

$$=2(18x^2-12x+a)$$

곡선 $y=f(x)$ 가 변곡점을 갖지 않으려면 모든 실수 x 에서 $f''(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$18x^2-12x+a \geq 0$$

따라서 이차방정식 $18x^2-12x+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D \leq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=36-18a \leq 0$$

$$18a \geq 36 \quad \therefore a \geq 2$$

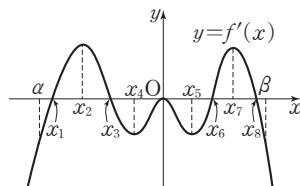
따라서 a 의 최솟값은 2이다.

8 $f''(x)$ 의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	d	$\cdots$	e	$\cdots$
$f''(x)$	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+

$b < x < d$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 가 위로 볼록한 구간은 (b, d) 이다.

9 다음 그림과 같이 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ 을 정하자.



$f'(x_1)=f'(x_3)=f'(x_6)=f'(x_8)=0$ 이고 $x=x_1, x=x_3, x=x_6, x=x_8$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌므로 극값을 갖는 x 의 값의 개수는 4이다.

구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 $f''(x)$ 의 부호를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	α	$\cdots$	x_2	$\cdots$	x_4	$\cdots$	0	$\cdots$	x_5	$\cdots$	x_7	$\cdots$	β
$f''(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	

$x=x_2, x=x_4, x=0, x=x_5, x=x_7$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 개수는 5이다.

따라서 구하는 x 의 값의 개수와 변곡점의 개수의 합은 $4+5=9$

10 $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$ 에서

$$f'(x)=\frac{3(x^2+1)-3x \times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-3(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-6x(x^2+1)^2+3(x^2-1) \times 2(x^2+1) \times 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{6x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$f'(x)=0$ 에서

$$x^2-1=0 \quad \therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

$$f''(x)=0 \text{에서 } x(x^2-3)=0$$

$$\therefore x=-\sqrt{3} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=\sqrt{3}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 위로 볼록과 아래로 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

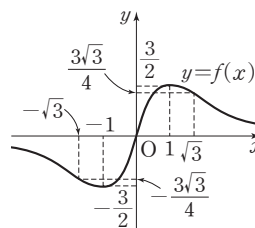
x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	-	-	-	0	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{3}{2}$	$\searrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$
		변곡점		극소		변곡점		극대		변곡점	

또 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=0$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른 쪽 그림과 같다.

∴ 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이다.



$$\therefore f(-x) = \frac{-3x}{(-x)^2+1} = -\frac{3x}{x^2+1} = -f(x) \text{ 이므로 함수 } y=f(x) \text{의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.}$$

ㄷ. $0 < x < \sqrt{3}$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 구간 $(0, \sqrt{3})$ 에서 위로 볼록하다.

ㄹ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 점 $(-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{4})$, 점 $(0, 0)$, 점 $(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{4})$ 의 3개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

11 $f(x) = (x-1)e^{2x}$ 에서

$$f'(x) = e^{2x} + 2(x-1)e^{2x} = (2x-1)e^{2x}$$

$$f''(x) = 2e^{2x} + 2(2x-1)e^{2x} = 4xe^{2x}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$2x-1=0 \quad (\because e^{2x} > 0) \quad \therefore x = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = 0 \text{에서 } x=0 \quad (\because e^{2x} > 0)$$

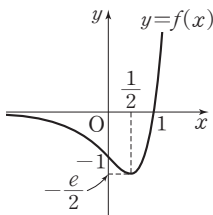
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소, 위로 볼록과 아래로 볼록을 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+	+	+
$f(x)$	$\searrow$	-1 변곡점	$\searrow$	$-\frac{e}{2}$ 극소	$\nearrow$

$$\text{또 } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \text{이므로 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



① 함수 $f(x)$ 의 극솟값은 $-\frac{e}{2}$

이다.

② 함수 $f(x)$ 의 치역은 $\{y \mid y \geq -\frac{e}{2}\}$ 이다.

③ 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 변곡점은 점 $(0, -1)$ 의 1개이다.

④ 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 점근선은 x 축이므로 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다.

⑤ $x < 0$ 에서 $f''(x) < 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 구간 $(-\infty, 0)$ 에서 위로 볼록하다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

12 $f(x) = x \ln x - 2x$ 에서

$$f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 2 = \ln x - 1$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \ln x - 1 = 0, \ln x = 1 \quad \therefore x = e$$

구간 $[1, e^2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	e^2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	-2	$\searrow$	$-e$ 극소	$\nearrow$	0

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=e^2$ 에서 최대이고, $x=e$ 에서 최소이므로

$$\alpha = e^2, \beta = e \quad \therefore \frac{\alpha}{\beta} = e$$

13 $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$ 에서 $0 \leq x \leq 4$ 이고

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} = 0, \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{4-x}, x = 4-x \quad \therefore x = 2$$

$0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$ 극대	$\searrow$	2

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $2\sqrt{2}$, 최솟값은 2이므로 구하는 곱은 $2\sqrt{2} \times 2 = 4\sqrt{2}$

14 $f(x) = 2a \sin x - ax$ 에서

$$f'(x) = 2a \cos x - a = a(2 \cos x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 2 \cos x - 1 = 0$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad \therefore x = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 \leq x \leq \pi)$$

$a > 0$ 이므로 구간 $[0, \pi]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$a(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3})$ 극대	$\searrow$	$-a\pi$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-a\pi$ 이므로

$$-a\pi = -3\pi \quad \therefore a = 3$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{3}$ 에서 최대이므로 구하는 최댓값은

$$3\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3} - \pi$$

- 15 $\frac{1}{2} \sin x + 1 = t$ 로 놓으면 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 에서

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \sin x + 1 \leq \frac{3}{2} \quad \therefore \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$$

주어진 함수 $f(x)$ 를 t 에 대한 함수 $g(t)$ 로 나타내면

$$g(t) = \frac{2e^t}{2t} = \frac{e^t}{t}$$

$$\therefore g'(t) = \frac{e^t \times t - e^t}{t^2} = \frac{(t-1)e^t}{t^2}$$

$$g'(t) = 0 \text{에서 } t=1 \quad (\because e^t > 0)$$

$\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	$\frac{1}{2}$	$\dots$	1	$\dots$	$\frac{3}{2}$
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	$2\sqrt{e}$	$\searrow$	e 극소	$\nearrow$	$\frac{2}{3}e\sqrt{e}$

따라서 함수 $g(t)$ 의 최댓값은 $2\sqrt{e}$, 최솟값은 e 이므로
 $M = 2\sqrt{e}$, $m = e \quad \therefore Mm = 2e\sqrt{e}$

- 16 $P(a, e^a)$, $Q(a, a)$ 이므로

$$\overline{PQ} = e^a - a$$

$$l(a) = e^a - a \text{라 하면}$$

$$l'(a) = e^a - 1$$

$$l'(a) = 0 \text{에서}$$

$$e^a - 1 = 0, e^a = 1 \quad \therefore a = 0$$

함수 $l(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	$\dots$	0	$\dots$
$l'(a)$	-	0	+
$l(a)$	$\searrow$	1 극소	$\nearrow$

따라서 길이 $l(a)$ 의 최솟값은 1이다.

- 17 선분 BP를 그으면 삼각형 ABP에서 $\overline{AP} \perp \overline{BP}$ 이고

$$\overline{AB} \perp \overline{PQ} \text{이므로}$$

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AQ} \times \overline{BQ}$$

$$\text{이때 } \overline{AQ} = x \quad (0 < x < 2) \text{라 하면}$$

$$\overline{PQ}^2 = x(2-x) \quad \therefore \overline{PQ} = \sqrt{x(2-x)} = \sqrt{2x-x^2}$$

삼각형 AQP의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{2x-x^2}$$

$$\therefore S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2x-x^2} + \frac{1}{2}x \times \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{x(3-2x)}{2\sqrt{2x-x^2}}$$

$$S'(x) = 0 \text{에서 } x(3-2x) = 0$$

$$\therefore x = \frac{3}{2} \quad (\because 0 < x < 2)$$

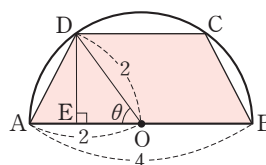
$0 < x < 2$ 에서 함수 $S(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\dots$	$\frac{3}{2}$	$\dots$	2
$S'(x)$		+	0	-	
$S(x)$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 극대	$\searrow$	

따라서 넓이 $S(x)$ 의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ 이다.

- 18 다음 그림과 같이 선분 AB의 중점을 O,

$\angle AOD = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하고, 점 D에서 선분 AO에 내린 수선의 발을 E라 하자.



$\overline{OD} = \overline{OA} = 2$ 이므로 직각삼각형 ODE에서

$$\overline{DE} = 2 \sin \theta, \overline{OE} = 2 \cos \theta$$

$$\therefore \overline{CD} = 2\overline{OE} = 4 \cos \theta$$

사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하면

$$S(\theta) = \frac{1}{2}(\overline{AB} + \overline{CD}) \times \overline{DE}$$

$$= \frac{1}{2}(4 + 4 \cos \theta) \times 2 \sin \theta = 4(1 + \cos \theta) \sin \theta$$

$$\therefore S'(\theta) = -4 \sin^2 \theta + 4(1 + \cos \theta) \cos \theta$$

$$= -4 \sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta$$

$$= -4(1 - \cos^2 \theta) + 4 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta$$

$$= 8 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta - 4$$

$$= 4(2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1)$$

$$S'(\theta) = 0 \text{에서 } 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0$$

$$(\cos \theta + 1)(2 \cos \theta - 1) = 0$$

$$\cos \theta = -1 \text{ 또는 } \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{3} \quad (\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 함수 $S(\theta)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

θ	0	$\dots$	$\frac{\pi}{3}$	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		+	0	-	
$S(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 극대	$\searrow$	

따라서 넓이 $S(\theta)$ 의 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 이다.

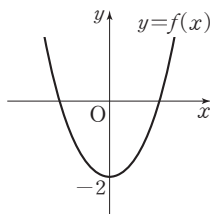
1 2	2 ④	3 ③	4 $-\frac{1}{2}$	5 $0 < a \leq 1$
6 4	7 ④	8 ①	9 $2e$	10 ①
11 ⑤	12 $\frac{1}{4}$	13 $\frac{10}{3}\pi$	14 $\frac{2}{3}$	15 ③
16 1	17 4	18 4	19 ④	20 $3\sqrt{2}$
21 $\sqrt{17}$				

- 1 $f(x) = e^{2x} + e^{-2x} - 4$ 라 하면
 $f'(x) = 2e^{2x} - 2e^{-2x} = 2(e^{2x} - e^{-2x})$
 $f'(x) = 0$ 에서
 $e^{2x} - e^{-2x} = 0, e^{2x} = e^{-2x} \quad \therefore x = 0$
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-2 극소	$\nearrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



- 2 $f(x) = \sin x - x$ 라 하면
 $f'(x) = \cos x - 1$
이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로
 $f'(x) \leq 0$

즉, 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

$$\text{이때 } f(-\pi) = \pi, f(0) = 0,$$

$$f(\pi) = -\pi \text{이므로 함수}$$

$y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 한 점에서 만난다.

따라서 방정식 $\sin x - x = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

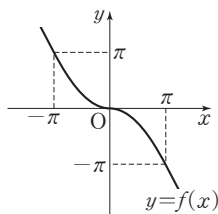
$$\therefore a = 1$$

$g(x) = \ln x - 3x + 4$ 라 하면 $x > 0$ 이고

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 3$$

$$g'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\frac{1}{x} - 3 = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{3}$$



$x > 0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		$\nearrow$	$3 - \ln 3$ 극대	$\searrow$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty,$$

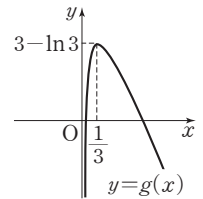
$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = -\infty \text{이므로 함수}$$

$y = g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 방정식 $\ln x - 3x + 4 = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

$$\therefore b = 2$$

$$\therefore a + b = 1 + 2 = 3$$



- 3 $f(x) = x^3 e^{-x}$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x} = x^2(3-x)e^{-x}$$

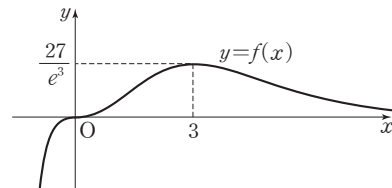
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x^2(3-x) = 0 \quad (\because e^{-x} > 0)$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

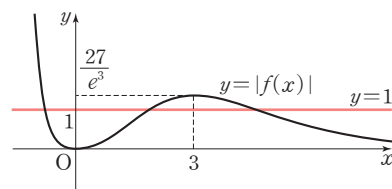
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{27}{e^3}$ 극대	$\searrow$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프에서 x 축보다 아래쪽에 있는 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것과 같으므로 직선 $y = 1$ 을 그어 보면 다음 그림과 같다.



따라서 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 은 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

- 4 주어진 방정식에서 $\ln x - \frac{1}{2}x^2 = a$ 이므로 이 방정식이 오직 한 실근을 가지려면 함수 $y = \ln x - \frac{1}{2}x^2$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 오직 한 점에서 만나야 한다.

$$f(x) = \ln x - \frac{1}{2}x^2 \text{이라 하면 } x > 0 \text{이고}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\frac{1}{x} - x = 0, \frac{1}{x} = x$$

$$x^2 = 1 \quad \therefore x = 1 \quad (\because x > 0)$$

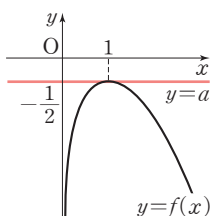
$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	$-\frac{1}{2}$ 극대	↘

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \text{이므로 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 교점이 1개가 되도록 직선 $y=a$ 를 그어 보면 구하는 a 의 값은 $-\frac{1}{2}$ 이다.



- 5 주어진 방정식에서 $x - 2\sqrt{x-1} = a$ 이므로 이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y = x - 2\sqrt{x-1}$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$$f(x) = x - 2\sqrt{x-1} \text{이라 하면 } x \geq 1 \text{이고}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } 1 - \frac{1}{\sqrt{x-1}} = 0, \sqrt{x-1} = 1$$

$$x-1=1 \quad \therefore x=2$$

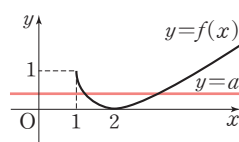
$x \geq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	1	↘	0 극소	↗

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{이므로 함수}$$

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 교점이 2개가 되도록 직선 $y=a$ 를 그어 보면 구하는 a 의 값의 범위는

$$0 < a \leq 1$$



- 6 주어진 방정식에서 $x \cos x - \sin x = -a$ 이므로 이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y = x \cos x - \sin x$ 의 그래프와 직선 $y=-a$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$$f(x) = x \cos x - \sin x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = \cos x - x \sin x - \cos x = -x \sin x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$x \sin x = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\pi \text{ 또는 } x=2\pi \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

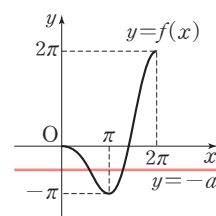
x	0	...	π	...	2π
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	0	↘	$-\pi$ 극소	↗	2π

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 교점이 2개가 되도록 직선 $y=-a$ 를 그어 보면 a 의 값의 범위는

$$-\pi < -a \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a < \pi$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.



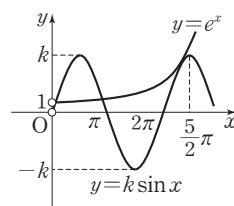
- 7 방정식 $f(x)=g(x)$, 즉 $e^x = k \sin x$ 가 서로 다른 세 양의 실근을 가지려면 두 함수 $y=e^x$, $y=k \sin x$ 의 그래프가 $x > 0$ 일 때 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$$x > 0 \text{에서 두 함수 } y=e^x,$$

$y=k \sin x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 교점이 3개가 되려면 두 함수의 그래프가 $2\pi < x < \frac{5}{2}\pi$ 에서 접해야 한다.

$$f(x) = e^x, g(x) = k \sin x \text{에서}$$

$$f'(x) = e^x, g'(x) = k \cos x$$



두 함수 $y=e^x$, $y=k\sin x$ 의 그래프가 $x=t$ 인 점에서 접한다고 하면 $x=t$ 인 점에서 두 함수의 그래프가 만나므로 $f(t)=g(t)$ 에서

$$e^t=k\sin t \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

또 $x=t$ 인 점에서의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(t)=g'(t)\text{에서}$$

$$e^t=k\cos t \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒}\text{에서 } k\sin t=k\cos t$$

$$\sin t=\cos t$$

$$2\pi < t < \frac{5}{2}\pi \text{에서 } \cos t \neq 0 \text{이므로}$$

$$\frac{\sin t}{\cos t}=1, \tan t=1$$

$$\therefore t=\frac{9}{4}\pi \left(\because 2\pi < t < \frac{5}{2}\pi \right)$$

따라서 $x=\frac{9}{4}\pi$ 인 점에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 접할 때, 방정식 $f(x)=g(x)$ 가 서로 다른 세 양의 실근을 가지므로 $f\left(\frac{9}{4}\pi\right)=g\left(\frac{9}{4}\pi\right)$ 에서

$$e^{\frac{9}{4}\pi}=k\sin\frac{9}{4}\pi \quad \therefore k=\frac{e^{\frac{9}{4}\pi}}{\sin\frac{9}{4}\pi}=\sqrt{2}e^{\frac{9}{4}\pi}$$

- 8 $f(x)=\ln(x^2+4x+7)-a$ 라 하면

$$f'(x)=\frac{2x+4}{x^2+4x+7}$$

$$f'(x)=0\text{에서}$$

$$2x+4=0 \quad \therefore x=-2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\ln 3-a$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $\ln 3-a$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\geq 0$ 이 성립하려면

$$\ln 3-a\geq 0$$

$$\therefore a\leq \ln 3$$

- 9 $2e^x+x\ln x>a$ 에서

$$2e^x+x\ln x-a>0$$

$$f(x)=2e^x+x\ln x-a\text{라 하면}$$

$$f'(x)=2e^x+\ln x+x\times\frac{1}{x}$$

$$=2e^x+\ln x+1$$

$x>1$ 일 때, $e^x>0$, $\ln x>0$ 에서 $f'(x)>0$ 이므로 함수

$f(x)$ 는 $x>1$ 에서 증가한다.

따라서 $x>1$ 일 때, $f(x)>0$ 이 성립하려면 $f(1)\geq 0$ 이어야 하므로

$$2e-a\geq 0$$

$$\therefore a\leq 2e$$

따라서 a 의 최댓값은 $2e$ 이다.

- 10 $1\leq x\leq 2$ 에서 $ax\leq e^x\leq bx$ 이므로

$$a\leq \frac{e^x}{x}\leq b$$

$$f(x)=\frac{e^x}{x}\text{이라 하면}$$

$$f'(x)=\frac{xe^x-e^x}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

$$f'(x)=0\text{에서}$$

$$x-1=0 \quad (\because e^x>0)$$

$$\therefore x=1$$

$1\leq x\leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	e	$\nearrow$	$\frac{e^2}{2}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $1\leq x\leq 2$ 에서 증가하므로

$$e\leq f(x)\leq \frac{e^2}{2}$$

$$\therefore e\leq \frac{e^x}{x}\leq \frac{e^2}{2}$$

$$\text{즉, } a\leq e, b\geq \frac{e^2}{2}\text{이므로 } -a\geq -e\text{에서}$$

$$b-a\geq \frac{e^2}{2}-e=e\left(\frac{e}{2}-1\right)$$

따라서 $b-a$ 의 최솟값은 $e\left(\frac{e}{2}-1\right)$ 이다.

- 11 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=2e^{2t}-\pi\sin\pi t$$

$$a=\frac{dv}{dt}=4e^{2t}-\pi^2\cos\pi t$$

$t=1$ 에서의 점 P의 속도와 가속도는 각각

$$v=2e^2, a=4e^2+\pi^2$$

따라서 구하는 합은

$$2e^2+4e^2+\pi^2=6e^2+\pi^2$$

- 12 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{2t}{t^2+16}$$

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{2(t^2+16)-2t\times 2t}{(t^2+16)^2}=-\frac{2(t^2-16)}{(t^2+16)^2}$$

점 P의 가속도가 0이므로 $a=0$ 에서
 $t^2-16=0 \quad \therefore t=4 \quad (\because t \geq 0)$
 따라서 $t=4$ 에서의 점 P의 속도는
 $v=\frac{1}{4}$

- 13** 시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4} \cos \frac{t}{2} - \frac{1}{8}$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$\frac{1}{4} \cos \frac{t}{2} - \frac{1}{8} = 0$$

$$\cos \frac{t}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{t}{2} = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{t}{2} = \frac{5}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{t}{2} = \frac{7}{3}\pi \text{ 또는 } \dots$$

$$\therefore t = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } t = \frac{10}{3}\pi \text{ 또는 } t = \frac{14}{3}\pi \text{ 또는 } \dots$$

따라서 점 P가 두 번째로 운동 방향을 바꿀 때의 시각은
 $t = \frac{10}{3}\pi$

- 14** 시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도는 각각

$$f'(t) = 2t - a, \quad g'(t) = \frac{2t-2}{t^2-2t+2}$$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호는 서로 반대이므로 $f'(t)g'(t) < 0$ 에서

$$\frac{(2t-a)(2t-2)}{t^2-2t+2} < 0$$

$$(2t-a)(2t-2) < 0 \quad (\because t^2-2t+2 > 0)$$

$$\therefore \frac{a}{2} < t < 1 \quad (\because a < 2)$$

따라서 $\frac{a}{2} = \frac{1}{3}$ 이므로

$$a = \frac{2}{3}$$

- 15** $\frac{dx}{dt} = 2 \sin 2t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos 2t$ 이므로

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 4 \cos 2t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -2 \sin 2t$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$(4 \cos 2t, -2 \sin 2t)$$

따라서 시각 $t = \frac{\pi}{4}$ 에서의 점 P의 가속도는

$$(0, -2)$$

- 16** $\frac{dx}{dt} = \sqrt{7}, \quad \frac{dy}{dt} = 2t+1$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(\sqrt{7}, 2t+1)$

시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{(\sqrt{7})^2 + (2t+1)^2} = \sqrt{4t^2 + 4t + 8}$$

$$\text{즉, } \sqrt{4t^2 + 4t + 8} = 4 \text{이므로}$$

$$4t^2 + 4t + 8 = 16$$

$$(t-1)(t+2) = 0 \quad \therefore t = 1 \quad (\because t \geq 0)$$

- 17** $\frac{dx}{dt} = e^{2(t-1)} - a, \quad \frac{dy}{dt} = be^{t-1}$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$(e^{2(t-1)} - a, be^{t-1})$$

따라서 $t=1$ 에서의 점 P의 속도는 $(1-a, b)$ 이므로

$$1-a = -1, \quad b = 2 \quad \therefore a = 2, \quad b = 2$$

$$\therefore a+b = 4$$

- 18** $\frac{dx}{dt} = ae^t, \quad \frac{dy}{dt} = e^t + te^t = (1+t)e^t$ 이므로

$$\frac{d^2x}{dt^2} = ae^t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = e^t + (1+t)e^t = (2+t)e^t$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$(ae^t, (2+t)e^t)$$

따라서 $t=1$ 에서의 점 P의 가속도는 $(ae, 3e)$ 이므로 가속도의 크기는

$$\sqrt{(ae)^2 + (3e)^2} = e\sqrt{a^2 + 9}$$

$$\text{즉, } e\sqrt{a^2 + 9} = 5e \text{이므로}$$

$$\sqrt{a^2 + 9} = 5, \quad a^2 = 16$$

$$\therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

- 19** $\frac{dx}{dt} = 3 - \cos t, \quad \frac{dy}{dt} = \sin t$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(3 - \cos t, \sin t)$

시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{(3 - \cos t)^2 + \sin^2 t} &= \sqrt{9 - 6 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= \sqrt{10 - 6 \cos t} \end{aligned}$$

이때 $-1 \leq \cos t \leq 1$ 에서

$$-6 \leq -6 \cos t \leq 6$$

$$4 \leq 10 - 6 \cos t \leq 16$$

$$\therefore 2 \leq \sqrt{10 - 6 \cos t} \leq 4$$

따라서 $M=4, m=2$ 이므로

$$M+m=6$$

- 20 $\frac{dx}{dt} = a - \frac{1}{t}, \frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는

$$\left(a - \frac{1}{t}, \frac{1}{t}\right)$$

시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(a - \frac{1}{t}\right)^2 + \frac{1}{t^2}} &= \sqrt{\frac{2}{t^2} - \frac{2}{t}a + a^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2t^2 - 2at + 2}{t^2}}\end{aligned}$$

$f(t) = \frac{a^2t^2 - 2at + 2}{t^2}$ 라 하면

$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{(2a^2t - 2a)t^2 - (a^2t^2 - 2at + 2) \times 2t}{t^4} \\ &= \frac{2at - 4}{t^3}\end{aligned}$$

$f'(t) = 0$ 에서

$$2at - 4 = 0 \quad (\because t > 0)$$

$$\therefore t = \frac{2}{a}$$

$a > 0$ 이므로 $t > 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\frac{2}{a}$	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$\searrow$	$\frac{a^2}{2}$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(t)$ 의 최솟값은 $\frac{a^2}{2}$ 이므로

$$\sqrt{\frac{a^2}{2}} = 3$$

$$a^2 = 18$$

$$\therefore a = 3\sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

- 21 원점을 출발한 지 t 초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각 $A(3t, 0), B(0, 6t)$
이때 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 P의 좌표를 (x, y) 라 하면

$$x = \frac{2 \times 0 + 1 \times 3t}{2+1} = t$$

$$y = \frac{2 \times 6t + 1 \times 0}{2+1} = 4t$$

$$\therefore P(t, 4t)$$

이때 $\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = 4$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속도는 $(1, 4)$

따라서 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$$

III-1. 여러 가지 함수의 적분법

01 여러 가지 함수의 적분

66~70쪽

- 1 254 2 $-e^3 + 2$ 3 $\frac{9}{4}$ 4 ①
5 $f(x) = e^x - 4x + 4$ 6 ③ 7 $\frac{1}{2\ln 3}$
8 $f(x) = 2\tan x - x + \frac{\pi}{3}$ 9 $-\frac{1}{2} - \sqrt{3}$
10 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 11 ② 12 -2 13 $\frac{\pi}{2} - 1$ 14 -3
15 ③ 16 16 17 ③ 18 ③ 19 ③
20 $e^2 - e - 1$ 21 $\frac{1}{2}$ 22 ②
23 $8 - 4\sqrt{2}$ 24 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 25 ④ 26 ①
27 $\frac{3}{2}\pi - 3$ 28 ① 29 ④ 30 $\perp$
31 2 32 ④ 33 ②

$$\begin{aligned}1 \quad f(x) &= \int 7x^2 \sqrt{x} dx = \int 7x^{\frac{5}{2}} dx = 2x^{\frac{7}{2}} + C \\ \therefore f(4) - f(1) &= (2^8 + C) - (2 + C) = 254\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \quad f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{3x^4 - x + 2}{x^2} dx \\ &= \int \left(3x^2 - \frac{1}{x} + 2x^{-2}\right) dx \\ &= x^3 - \ln|x| - 2x^{-1} + C \\ &= x^3 - \ln|x| - \frac{2}{x} + C\end{aligned}$$

$$\text{이때 } f(e) = -\frac{2}{e} \text{에서}$$

$$e^3 - 1 - \frac{2}{e} + C = -\frac{2}{e}$$

$$\therefore C = -e^3 + 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - \ln|x| - \frac{2}{x} - e^3 + 1 \text{이므로}$$

$$f(-1) = -1 + 2 - e^3 + 1 = -e^3 + 2$$

- 3 $F(x) = xf(x) - \ln x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - \frac{1}{x}$$

$$xf'(x) = \frac{1}{x} \quad \therefore f'(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx$$

$$= -x^{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

$$\text{이때 } f(2) = 2 \text{에서 } -\frac{1}{2} + C = 2 \quad \therefore C = \frac{5}{2}$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{5}{2}$ 이므로

$$f(4) = -\frac{1}{4} + \frac{5}{2} = \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad f_n(x) &= \int x^{\frac{1}{n+2}} dx \\ &= \frac{n+2}{n+3} x^{\frac{n+3}{n+2}} + C \end{aligned}$$

이때 $f_n(0) = 0$ 에서 $C = 0$

따라서 $f_n(x) = \frac{n+2}{n+3} x^{\frac{n+3}{n+2}}$ 이므로

$$\begin{aligned} f_1(1) \times f_2(1) \times f_3(1) \times \cdots \times f_{12}(1) \\ = \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{14}{15} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad f(x) &= \int (\sqrt{e^x} + 2)(\sqrt{e^x} - 2) dx \\ &= \int (e^x - 4) dx \\ &= e^x - 4x + C \end{aligned}$$

이때 $f(1) = e$ 에서

$$e - 4 + C = e \quad \therefore C = 4$$

$$\therefore f(x) = e^x - 4x + 4$$

$$6 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = 25^x + 5^x + 1$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (25^x + 5^x + 1) dx$$

$$= \frac{25^x}{\ln 25} + \frac{5^x}{\ln 5} + x + C$$

이때 $f(-1) = -1$ 에서

$$\frac{1}{25 \ln 25} + \frac{1}{5 \ln 5} - 1 + C = -1$$

$$\therefore C = -\frac{11}{50 \ln 5}$$

따라서 $f(x) = \frac{25^x}{\ln 25} + \frac{5^x}{\ln 5} + x - \frac{11}{50 \ln 5}$ 이므로

$$f(0) = \frac{1}{\ln 25} + \frac{1}{\ln 5} - \frac{11}{50 \ln 5} = \frac{32}{25 \ln 5}$$

$$7 \quad \{f(x) + 2g(x)\}' = 3^x \text{에서}$$

$$f(x) + 2g(x) = \int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\{f(x) - 2g(x)\}' = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x \text{에서}$$

$$f(x) - 2g(x) = \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln \frac{1}{3}} + C_2$$

$$= -\frac{3^{-x}}{\ln 3} + C_2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $f(0) = 0, g(0) = \frac{1}{2 \ln 3}$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$f(0) + 2g(0) = \frac{1}{\ln 3} + C_1$$

$$\frac{1}{\ln 3} + C_1 = \frac{1}{\ln 3} \quad \therefore C_1 = 0$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } f(0) - 2g(0) = -\frac{1}{\ln 3} + C_2$$

$$-\frac{1}{\ln 3} + C_2 = -\frac{1}{\ln 3} \quad \therefore C_2 = 0$$

$$\therefore f(x) + 2g(x) = \frac{3^x}{\ln 3} \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$f(x) - 2g(x) = -\frac{3^{-x}}{\ln 3} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3} + \textcircled{4}$ 을 하면

$$2f(x) = \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^{-x}}{\ln 3}$$

$$\therefore f(x) = \frac{3^x - 3^{-x}}{2 \ln 3}$$

$\textcircled{3} - \textcircled{4}$ 을 하면

$$4g(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{3^{-x}}{\ln 3}$$

$$\therefore g(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{4 \ln 3}$$

$$\therefore f(1) - g(1) = \frac{4}{3 \ln 3} - \frac{5}{6 \ln 3}$$

$$= \frac{1}{2 \ln 3}$$

$$8 \quad f(x) = \int \frac{\sin^2 x + 1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{1 - \cos^2 x + 1}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 1 \right) dx$$

$$= \int (2 \sec^2 x - 1) dx$$

$$= 2 \tan x - x + C$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$ 에서

$$2\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + C = 2\sqrt{3} \quad \therefore C = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore f(x) = 2 \tan x - x + \frac{\pi}{3}$$

$$9 \quad f'(x) = 2 \sin x + \cos x \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx$$

$$= \int (2 \sin x + \cos x) dx$$

$$= -2 \cos x + \sin x + C$$

이때 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(\pi, 1)$ 을 지나므로 $f(\pi) = 1$ 에서

$$2 + C = 1 \quad \therefore C = -1$$

따라서 $f(x) = -2\cos x + \sin x - 1$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} - \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} 10 \quad f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (\tan x + \cot x)^2 dx \\ &= \int (\tan^2 x + 2 + \cot^2 x) dx \\ &= \int \{(\sec^2 x - 1) + 2 + (\csc^2 x - 1)\} dx \\ &= \int (\sec^2 x + \csc^2 x) dx \\ &= \tan x - \cot x + C \end{aligned}$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ 에서

$$1 - 1 + C = 0 \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = \tan x - \cot x$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\begin{aligned} 11 \quad \int \frac{1}{1-\cos x} dx &= \int \frac{1+\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)} dx \\ &= \int \frac{1+\cos x}{1-\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} \right) dx \\ &= \int (\csc^2 x + \csc x \cot x) dx \\ &= -\cot x - \csc x + C \end{aligned}$$

따라서 $a = -1$, $b = -1$ 이므로

$$a + b = -2$$

$$\begin{aligned} 12 \quad F(x) &= \int f(x) dx \\ &= \int \frac{2\sin x}{1+\cos 2x} dx \\ &= \int \frac{2\sin x}{1+(2\cos^2 x - 1)} dx \\ &= \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{1}{\cos x} \times \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= \int \sec x \tan x dx \\ &= \sec x + C \\ \therefore F(\pi) - F(0) &= (-1 + C) - (1 + C) \\ &= -2 \end{aligned}$$

13 (i) $x > 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (1 + \cos x) dx \\ &= x + \sin x + C_1 \end{aligned}$$

(ii) $x < 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (2x + \sin x) dx \\ &= x^2 - \cos x + C_2 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} x + \sin x + C_1 & (x > 0) \\ x^2 - \cos x + C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

이때 $f(-\pi) = \pi^2$ 에서

$$\pi^2 + 1 + C_2 = \pi^2 \quad \therefore C_2 = -1$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \sin x + C_1) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - \cos x - 1)$$

$$\therefore C_1 = -2$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} x + \sin x - 2 & (x \geq 0) \\ x^2 - \cos x - 1 & (x \leq 0) \end{cases}$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + 1 - 2 = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\begin{aligned} 14 \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x-2h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x) + f(x) - f(x-2h)}{h} \\ &= 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - f(x)}{2h} + 2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x-2h)}{-2h} \\ &= 2f'(x) + 2f'(x) \\ &= 4f'(x) \end{aligned}$$

즉, $4f'(x) = -6\csc x \cot x$ 이므로

$$f'(x) = -\frac{3}{2}\csc x \cot x$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int \left(-\frac{3}{2}\csc x \cot x \right) dx \\ &= \frac{3}{2}\csc x + C \end{aligned}$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$ 에서

$$3 + C = -\sqrt{3} \quad \therefore C = -\sqrt{3} - 3$$

따라서 $f(x) = \frac{3}{2}\csc x - \sqrt{3} - 3$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \sqrt{3} - 3 = -3$$

$$\begin{aligned}
 15 \quad \int_1^4 (5x-6)\sqrt{x} dx &= \int_1^4 (5x\sqrt{x}-6\sqrt{x}) dx \\
 &= \int_1^4 (5x^{\frac{3}{2}}-6x^{\frac{1}{2}}) dx \\
 &= \left[2x^{\frac{5}{2}}-4x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \\
 &= (64-32)-(2-4)=34
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16 \quad \int_1^3 \frac{3x^2+1}{x^2} dx + 2 \int_1^3 \frac{x+1}{x^2} dx \\
 = \int_1^3 \frac{3x^2+2x+3}{x^2} dx \\
 = \int_1^3 \left(3 + \frac{2}{x} + 3x^{-2} \right) dx \\
 = \left[3x + 2 \ln |x| - 3x^{-1} \right]_1^3 \\
 = (9+2\ln 3-1)-(3-3)=2\ln 3+8 \\
 \text{따라서 } a=2, b=8 \text{ 이므로} \\
 ab=16
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17 \quad \int_1^4 \left(x + \frac{k}{\sqrt{x}} \right) dx &= \int_1^4 \left(x + kx^{-\frac{1}{2}} \right) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2kx^{\frac{1}{2}} \right]_1^4 \\
 &= (8+4k) - \left(\frac{1}{2} + 2k \right) \\
 &= \frac{15}{2} + 2k
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{15}{2} + 2k = \frac{19}{2}$ 이므로 $k=1$

$$\begin{aligned}
 18 \quad \int_1^2 \frac{x^2 e^x + 3ex^2 + 2}{x^2} dx &= \int_1^2 (e^x + 3e + 2x^{-2}) dx \\
 &= \left[e^x + 3ex - 2x^{-1} \right]_1^2 \\
 &= (e^2 + 6e - 1) - (e + 3e - 2) \\
 &= e^2 + 2e + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19 \quad \int_0^1 (3^x+1)(9^x-3^x+1) dx &= \int_0^1 (3^{3x}+1) dx \\
 &= \int_0^1 (27^x+1) dx \\
 &= \left[\frac{27^x}{\ln 27} + x \right]_0^1 \\
 &= \left(\frac{27}{\ln 27} + 1 \right) - \frac{1}{\ln 27} \\
 &= \frac{26}{\ln 27} + 1 = \frac{26}{3 \ln 3} + 1
 \end{aligned}$$

따라서 $a=26, b=1$ 이므로
 $a+b=27$

$$\begin{aligned}
 20 \quad \int_{-2}^2 \frac{e^{3x}-1}{e^{2x}+e^x+1} dx - \int_{-2}^1 \frac{e^{3t}-1}{e^{2t}+e^t+1} dt \\
 = \int_{-2}^2 \frac{e^{3x}-1}{e^{2x}+e^x+1} dx + \int_1^{-2} \frac{e^{3x}-1}{e^{2x}+e^x+1} dx \\
 = \int_1^2 \frac{e^{3x}-1}{e^{2x}+e^x+1} dx \\
 = \int_1^2 \frac{(e^x-1)(e^{2x}+e^x+1)}{e^{2x}+e^x+1} dx \\
 = \int_1^2 (e^x-1) dx \\
 = \left[e^x - x \right]_1^2 \\
 = (e^2-2)-(e-1)=e^2-e-1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21 \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x \cos x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx \\
 &= \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22 \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{1+\cos x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-(2\cos^2 x-1)}{1+\cos x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2-2\cos^2 x}{1+\cos x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2(1+\cos x)(1-\cos x)}{1+\cos x} dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(1-\cos x) dx \\
 &= \left[2x - 2\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 23 \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\sec x + \tan x)^2 dx + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} (\sec x - \tan x)^2 dx \\
 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\sec x + \tan x)^2 dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\sec x - \tan x)^2 dx \\
 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \{ (\sec x + \tan x)^2 - (\sec x - \tan x)^2 \} dx \\
 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} 4 \sec x \tan x dx \\
 = \left[4 \sec x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = 8 - 4\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 24 \quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} dx &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sec^2 x + \csc^2 x) dx \\
 &= \left[\tan x - \cot x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} \right) = \frac{4\sqrt{3}}{3}
 \end{aligned}$$

25 $x-2=0$ 에서 $x=2$

$$\text{따라서 } \frac{|x-2|}{x} = \begin{cases} \frac{x-2}{x} & (x \geq 2) \\ -\frac{x-2}{x} & (x \leq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} & \int_1^3 \frac{|x-2|}{x} dx \\ &= \int_1^2 \left(-\frac{x-2}{x}\right) dx + \int_2^3 \frac{x-2}{x} dx \\ &= \int_1^2 \left(-1 + \frac{2}{x}\right) dx + \int_2^3 \left(1 - \frac{2}{x}\right) dx \\ &= \left[-x + 2\ln|x|\right]_1^2 + \left[x - 2\ln|x|\right]_2^3 \\ &= \{(-2 + 2\ln 2) - (-1)\} + \{(3 - 2\ln 3) - (2 - 2\ln 2)\} \\ &= 2\ln \frac{4}{3} \\ \therefore a &= 2 \end{aligned}$$

26 $4^x - 2^x = 0$ 에서 $2^{2x} = 2^x$

$$2x = x \quad \therefore x = 0$$

$$\text{따라서 } |4^x - 2^x| = \begin{cases} 4^x - 2^x & (x \geq 0) \\ -4^x + 2^x & (x \leq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 |4^x - 2^x| dx \\ &= \int_{-1}^0 (-4^x + 2^x) dx + \int_0^1 (4^x - 2^x) dx \\ &= \left[-\frac{4^x}{\ln 4} + \frac{2^x}{\ln 2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1 \\ &= \left\{\left(-\frac{1}{\ln 4} + \frac{1}{\ln 2}\right) - \left(-\frac{1}{4\ln 4} + \frac{1}{2\ln 2}\right)\right\} \\ & \quad + \left\{\left(\frac{4}{\ln 4} - \frac{2}{\ln 2}\right) - \left(\frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 2}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{8\ln 2} + \frac{1}{2\ln 2} \\ &= \frac{5}{8\ln 2} \end{aligned}$$

27 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서

$$\text{연속이므로 } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (2\cos x + 1) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (-\sin x + k)$$

$$1 = -1 + k \quad \therefore k = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore & \int_0^{\pi} f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\sin x + 2) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2\cos x + 1) dx \\ &= \left[\cos x + 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[2\sin x + x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &= (\pi - 1) + \left\{\pi - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)\right\} \\ &= \frac{3}{2}\pi - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28 \quad & \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (2\sin x - 3\cos x + \tan x) dx \\ & \quad - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 (2\sin x - 3\cos x + \tan x) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (2\sin x - 3\cos x + \tan x) dx \\ & \quad + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2\sin x - 3\cos x + \tan x) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\sin x - 3\cos x + \tan x) dx \\ & \text{이때 } f(x) = 2\sin x + \tan x, \quad g(x) = -3\cos x \text{라 하면} \\ & f(-x) = 2\sin(-x) + \tan(-x) \\ & \quad = -2\sin x - \tan x = -f(x) \\ & g(-x) = -3\cos(-x) = -3\cos x = g(x) \\ \therefore & \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (2\sin x - 3\cos x + \tan x) dx \\ & \quad - \int_{\frac{\pi}{4}}^0 (2\sin x - 3\cos x + \tan x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\sin x - 3\cos x + \tan x) dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (2\sin x + \tan x) dx + \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (-3\cos x) dx \\ &= 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (-3\cos x) dx \\ &= -6 \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -3\sqrt{2} \end{aligned}$$

29 $f(x) = x^2 + \cos x$ 에서 $f'(x) = 2x - \sin x$ 이므로

$$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x)$$

$$\begin{aligned} f'(-x) &= 2 \times (-x) - \sin(-x) = -2x + \sin x \\ &= -f'(x) \end{aligned}$$

$$\therefore f(-x)f'(-x) = -f(x)f'(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore & \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\{f'(x) + 3\} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)f'(x) dx + 3 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \\ &= 0 + 6 \int_0^{\pi} f(x) dx = 6 \int_0^{\pi} (x^2 + \cos x) dx \\ &= 6 \left[\frac{1}{3}x^3 + \sin x\right]_0^{\pi} = 2\pi^3 \end{aligned}$$

30 $\neg$. $f(-x) = -x(e^{-x} - e^x)$

$$= x(e^x - e^{-x}) = f(x)$$

$$\therefore \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$\cup$. $g(x) = xf(x)$ 라 하면

$$g(-x) = -xf(-x)$$

$$= -xf(x) = -g(x)$$

$$\therefore \int_{-a}^a xf(x) dx = 0$$

ㄷ. $f'(x) = (e^x - e^{-x}) + x(e^x + e^{-x})$ 이므로
 $xf'(x) = x(e^x - e^{-x}) + x^2(e^x + e^{-x})$
 $h(x) = xf'(x)$ 라 하면
 $h(-x) = -x(e^{-x} - e^x) + (-x)^2(e^{-x} + e^x)$
 $= x(e^x - e^{-x}) + x^2(e^x + e^{-x}) = h(x)$
 $\therefore \int_{-a}^a xf'(x) dx = 2 \int_0^a xf'(x) dx$
 따라서 보기에서 정적분의 값이 항상 0인 것은 ㄴ이다.

31 함수 $y = |\cos x|$ 의 주기가 π 이므로

$$\begin{aligned} \int_a^{a+\pi} |\cos x| dx &= \int_0^\pi |\cos x| dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi (-\cos x) dx \\ &= \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-\sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^\pi \\ &= 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

32 $\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \sin x$ 이고 함수 $y = \left| \frac{1}{2} \sin x \right|$ 의 주기가 π 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{5\pi} \left| \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right| dx &= \int_0^{5\pi} \left| \frac{1}{2} \sin x \right| dx \\ &= \int_0^\pi \left| \frac{1}{2} \sin x \right| dx + \int_\pi^{2\pi} \left| \frac{1}{2} \sin x \right| dx \\ &\quad + \int_{2\pi}^{3\pi} \left| \frac{1}{2} \sin x \right| dx + \int_{3\pi}^{4\pi} \left| \frac{1}{2} \sin x \right| dx \\ &\quad + \int_{4\pi}^{5\pi} \left| \frac{1}{2} \sin x \right| dx \\ &= 5 \int_0^\pi \left| \frac{1}{2} \sin x \right| dx = 5 \int_0^\pi \frac{1}{2} \sin x dx \\ &= 5 \left[-\frac{1}{2} \cos x \right]_0^\pi = 5 \left\{ \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right\} = 5 \end{aligned}$$

33 $\int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi \sin x dx = \left[-\cos x \right]_0^\pi$
 $= 1 - (-1) = 2$

$f(x+\pi) = f(x)$ 이므로

$$\int_{-\pi}^0 f(x) dx = \int_0^\pi f(x) dx = \int_\pi^{2\pi} f(x) dx = \dots = 2$$

이때 $\int_{-\pi}^k f(x) dx = 14 = 7 \times 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^k f(x) dx &= \int_{-\pi}^0 f(x) dx + \int_0^\pi f(x) dx + \int_\pi^{2\pi} f(x) dx \\ &\quad + \dots + \int_{5\pi}^{6\pi} f(x) dx \\ &= \int_{-\pi}^{6\pi} f(x) dx \\ \therefore k &= 6\pi \end{aligned}$$

02 치환적분법과 부분적분법

71~76쪽

1 $-\frac{1}{3}$	2 $f(x) = e^x - 2x^3 + 4$	3 ⑤	4 9
5 $\frac{\ln 2 + 1}{2}$	6 ④	7 π	8 e
10 $20 - \ln 21$	11 $\ln 3$	12 $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}$	13 ②
14 ④	15 3	16 ②	17 ④
18 $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$	19 ④	20 ①	21 1
22 ④	23 $e + 1$	24 ③	25 $\frac{\pi}{9}$
26 $7e^2 - 7$	27 ②	28 ④	29 ②
30 $2 - \frac{4}{\ln 2}$	31 $f(x) = 2 - \pi \cos x$	32 ④	
33 $4e^2$	34 ①	35 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	36 2
38 1	39 ⑤	40 $\ln 20$	41 $\frac{1}{12}$

1 $f(x) = \int \sin x \cos 2x dx$

$$= \int \sin x (2\cos^2 x - 1) dx$$

$\cos x = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$-\sin x = \frac{dt}{dx}$$

$$\therefore f(x) = \int \sin x (2\cos^2 x - 1) dx$$

$$= \int (2t^2 - 1) \times (-1) dt$$

$$= - \int (2t^2 - 1) dt$$

$$= -\frac{2}{3} t^3 + t + C$$

$$= -\frac{2}{3} \cos^3 x + \cos x + C$$

$$\therefore f(\pi) - f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-\frac{1}{3} + C\right) - C = -\frac{1}{3}$$

2 $f(x) = \int f'(x) dx$

$$= \int 2x(e^{x^2} - 3x) dx$$

$$= \int (2xe^{x^2} - 6x^2) dx$$

$$= \int 2xe^{x^2} dx - \int 6x^2 dx$$

$\int 2xe^{x^2} dx$ 에서 $x^2 = t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$2x = \frac{dt}{dx}$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int 2xe^{x^2} dx - \int 6x^2 dx \\ &= \int e^t dt - \int 6x^2 dx \\ &= e^t - 2x^3 + C \\ &= e^{x^2} - 2x^3 + C\end{aligned}$$

이때 $f(0)=5$ 에서

$$1+C=5 \quad \therefore C=4$$

$$\therefore f(x)=e^{x^2}-2x^3+4$$

3 $\sqrt{x-1}f'(x)=3x-4$ ($x>1$)에서 $\sqrt{x-1}>0$ 이므로

$$f'(x)=\frac{3x-4}{\sqrt{x-1}}$$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{3x-4}{\sqrt{x-1}}dx$$

$$x-1=t \text{로 놓으면 } x=t+1$$

$x-1=t$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$1=\frac{dt}{dx}$$

$$\therefore f(x)=\int \frac{3x-4}{\sqrt{x-1}}dx$$

$$=\int \frac{3t-1}{\sqrt{t}}dt$$

$$=\int (3t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})dt$$

$$=2t^{\frac{3}{2}}-2t^{\frac{1}{2}}+C=2t\sqrt{t}-2\sqrt{t}+C$$

$$=2(x-1)\sqrt{x-1}-2\sqrt{x-1}+C$$

$$=2(x-2)\sqrt{x-1}+C$$

$$\therefore f(5)-f(2)=(12+C)-C=12$$

4 $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=\frac{6(\ln x)^2+1}{x}$ 에서

$$\{f(x)g(x)\}'=\frac{6(\ln x)^2+1}{x} \text{이므로}$$

$$f(x)g(x)=\int \frac{6(\ln x)^2+1}{x}dx$$

$\ln x=t$ 로 놓고 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$$

$$\therefore f(x)g(x)=\int \frac{6(\ln x)^2+1}{x}dx$$

$$=\int (6t^2+1)dt$$

$$=2t^3+t+C$$

$$=2(\ln x)^3+\ln x+C$$

이때 $f(1)=0$ 이므로 $f(1)g(1)=0$ 에서

$$C=0$$

$$\therefore f(x)g(x)=2(\ln x)^3+\ln x$$

이때 $f(x)=\ln x$ 이므로 양변에 $x=e^2$ 을 대입하면

$$2g(e^2)=2 \times 8+2=18 \quad \therefore g(e^2)=9$$

$$5 \quad f(x)=\int f'(x)dx=\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+C \quad (\because x^2+4x+5>0)$$

$$\text{이때 } f(-2)=\frac{1}{2} \text{에서 } C=\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5)+\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$f(-1)=\frac{\ln 2+1}{2}$$

$$6 \quad F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{1+\sin x}{x-\cos x}dx$$

$$=\int \frac{(x-\cos x)'}{x-\cos x}dx$$

$$=\ln|x-\cos x|+C$$

$$\therefore F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\left(\ln\frac{\pi}{2}+C\right)-\left(\ln\frac{3}{2}\pi+C\right)$$

$$=\ln\frac{1}{3}=-\ln 3$$

$$7 \quad f(x)=\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-\sin x}dx-\frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{e^{2x}-\sin x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}-\cos x}{e^{2x}-\sin x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{(e^{2x}-\sin x)'}{e^{2x}-\sin x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-\sin x|+C$$

이때 $f(0)=0$ 에서 $C=0$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{1}{2}\ln|e^{2x}-\sin x| \text{이므로}$$

$$f(\pi)=\frac{\ln e^{2\pi}}{2}=\pi$$

8 $f(2x)\{1+2f'(2x)\}=\{f(2x)\}'\{1+f(2x)\}$ 에서

$$f(2x)+2f(2x)f'(2x)=2f'(2x)+2f(2x)f'(2x)$$

$$f(2x)=2f'(2x)$$

$$\therefore \frac{2f'(2x)}{f(2x)}=1$$

$$\int \frac{2f'(2x)}{f(2x)}dx=\int dx \text{이므로}$$

$$\ln f(2x)=x+C \quad (\because f(2x)>0)$$

이때 $f(2)=1$ 에서

$$0=1+C \quad \therefore C=-1$$

따라서 $\ln f(2x) = x - 1$ 이므로 양변에 $x=2$ 를 대입하면
 $\ln f(4) = 1$
 $\therefore f(4) = e$

$$\begin{aligned} 9 \quad f(x) &= \int \frac{3-x}{x+2} dx \\ &= \int \frac{-(x+2)+5}{x+2} dx \\ &= \int \left(-1 + \frac{5}{x+2} \right) dx \\ &= -x + 5 \ln |x+2| + C \end{aligned}$$

이때 $f(-1) = 5$ 에서

$$1 + C = 5 \quad \therefore C = 4$$

따라서 $f(x) = -x + 5 \ln |x+2| + 4$ 이므로

$$f(-3) = 3 + 4 = 7$$

$$\begin{aligned} 10 \quad f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{1}{x^2-4} dx \\ &= \int \frac{1}{(x-2)(x+2)} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} (\ln |x-2| - \ln |x+2|) + C \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C \end{aligned}$$

이때 $f(0) = 1$ 에서 $C = 1$

따라서 $f(x) = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^5 4f(2k+2) \\ &= \sum_{k=1}^5 \left(\ln \left| \frac{k}{k+2} \right| + 4 \right) \\ &= \left(\ln \frac{1}{3} + 4 \right) + \left(\ln \frac{1}{2} + 4 \right) + \left(\ln \frac{3}{5} + 4 \right) + \left(\ln \frac{2}{3} + 4 \right) \\ &\quad + \left(\ln \frac{5}{7} + 4 \right) \\ &= \ln \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \right) + 4 \times 5 \\ &= \ln \frac{1}{21} + 20 = 20 - \ln 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11 \quad &\text{분모를 인수분해하면 } 2x^2 - 5x - 3 = (2x+1)(x-3) \text{이} \\ &\text{므로 } \frac{x+4}{2x^2-5x-3} = \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x-3} \text{ (A, B는 상수)로} \\ &\text{놓으면} \\ &\frac{x+4}{2x^2-5x-3} = \frac{(A+2B)x-3A+B}{2x^2-5x-3} \\ &\text{이 식은 } x \text{에 대한 항등식이므로} \\ &A+2B=1, -3A+B=4 \\ &\text{두 식을 연립하여 풀면 } A=-1, B=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int \frac{x+4}{2x^2-5x-3} dx \\ &= \int \left(-\frac{1}{2x+1} + \frac{1}{x-3} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \ln |2x+1| + \ln |x-3| + C \end{aligned}$$

이때 $f(4) = -\ln 3$ 에서

$$-\frac{\ln 9}{2} + C = -\ln 3 \quad \therefore C = 0$$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{2} \ln |2x+1| + \ln |x-3|$ 이므로

$$f(0) = \ln 3$$

$$\begin{aligned} 12 \quad &(e^{2x}+1)' = 2e^{2x} \text{이므로} \\ &\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\ln 2} \frac{(e^{2x}+1)'}{e^{2x}+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln (e^{2x}+1) \right]_0^{\ln 2} \\ &= \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 2) = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$13 \quad f(x) = x + \ln x = t \text{로 놓으면 } 1 + \frac{1}{x} = \frac{dt}{dx} \text{이고, } x=1 \text{일}$$

때 $t=1$, $x=e$ 일 때 $t=e+1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^e \left(1 + \frac{1}{x} \right) f(x) dx &= \int_1^{e+1} t dt \\ &= \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_1^{e+1} \\ &= \frac{1}{2} (e^2 + 2e + 1) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{e^2}{2} + e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 14 \quad &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x (1 - \sin^2 x)} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x \cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \times \cos x dx \end{aligned}$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $\cos x = \frac{dt}{dx}$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=0$,

$x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x - \sin^3 x} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} \times \cos x dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{t} dt = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} dt \\ &= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 15 \quad & \int_0^2 \frac{f(x)+f(4-x)}{2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(4-x) dx \right\} \\
 & \int_0^2 f(4-x) dx \text{에서 } 4-x=t \text{로 놓으면 } -1 = \frac{dt}{dx} \text{이고,} \\
 & x=0 \text{일 때 } t=4, x=2 \text{일 때 } t=2 \text{이므로} \\
 & \int_0^2 f(4-x) dx = - \int_4^2 f(t) dt = \int_2^4 f(x) dx \\
 \therefore & \int_0^2 \frac{f(x)+f(4-x)}{2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(4-x) dx \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^4 f(x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \times 6 = 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16 \quad & 2x = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면 } 2 \frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta \text{이고,} \\
 & x=0 \text{일 때 } \theta=0, x=\frac{1}{2} \text{일 때 } \theta=\frac{\pi}{4} \text{이므로} \\
 & \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{4x^2+1} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\tan^2 \theta + 1} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 \theta}{\sec^2 \theta} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \\
 &= \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 17 \quad & x = a \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면 } \frac{dx}{d\theta} = a \sec^2 \theta \text{이고,} \\
 & x=0 \text{일 때 } \theta=0, x=\sqrt{3}a \text{일 때 } \theta=\frac{\pi}{3} \text{이므로} \\
 & \int_0^{\sqrt{3}a} \frac{1}{x^2+a^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{a^2 \tan^2 \theta + a^2} \times a \sec^2 \theta d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{a \sec^2 \theta}{a^2 \sec^2 \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\
 &= \frac{1}{a} \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\
 &= \frac{\pi}{3a} \\
 & \text{따라서 } \frac{\pi}{3a} = \frac{\pi}{12} \text{이므로} \\
 & a=4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 18 \quad & x = 2 \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면 } \frac{dx}{d\theta} = 2 \cos \theta \text{이고,} \\
 & x=0 \text{일 때 } \theta=0, x=1 \text{일 때 } \theta=\frac{\pi}{6} \text{이므로} \\
 & \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4 \sin^2 \theta}{\sqrt{4-4 \sin^2 \theta}} \times 2 \cos \theta d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{4 \sin^2 \theta}{\sqrt{4 \cos^2 \theta}} \times 2 \cos \theta d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \sin^2 \theta d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (1 - \cos 2\theta) d\theta \quad \blacktriangleleft \cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \\
 &= 2 \left[\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
 &= 2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 19 \quad & u(x) = x+1, v'(x) = \sin x \text{로 놓으면} \\
 & u'(x) = 1, v(x) = -\cos x \\
 \therefore & f(x) = \int (x+1) \sin x dx \\
 &= -(x+1) \cos x + \int \cos x dx \\
 &= -(x+1) \cos x + \sin x + C \\
 & \text{이때 } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \text{에서} \\
 & 1 + C = 1 \quad \therefore C = 0 \\
 & \text{따라서 } f(x) = -(x+1) \cos x + \sin x \text{이므로} \\
 & f(\pi) = \pi + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 20 \quad & f(x) = \int f'(x) dx = \int (x-a) e^{-x} dx \\
 & u(x) = x-a, v'(x) = e^{-x} \text{으로 놓으면} \\
 & u'(x) = 1, v(x) = -e^{-x} \\
 \therefore & f(x) = \int (x-a) e^{-x} dx \\
 &= -(x-a) e^{-x} + \int e^{-x} dx \\
 &= -(x-a) e^{-x} - e^{-x} + C \\
 &= -(x-a+1) e^{-x} + C \\
 & \text{이때 } f(0) = -1 \text{에서} \\
 & a-1+C = -1 \quad \therefore C = -a \\
 & \text{따라서 } f(x) = -(x-a+1) e^{-x} - a \text{이므로} \\
 & f(-1) = e-1 \text{에서 } ae-a = e-1 \\
 & a(e-1) = e-1 \quad \therefore a=1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21 \quad & F'(x) = f(x) \text{이므로} \\
 & F(x) + xf(x) = \{xF(x)\}'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore xF(x) &= \int \{F(x) + xf(x)\} dx \\ &= \int (2\ln x + 1) dx \\ &= 2 \int \ln x dx + \int dx \quad \dots\dots \textcircled{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \ln x dx \text{에서 } u(x) &= \ln x, v'(x) = 1 \text{로 놓으면} \\ u'(x) &= \frac{1}{x}, v(x) = x \text{이므로} \\ \int \ln x dx &= x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{8} \\ \textcircled{8} \text{을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}xF(x) &= 2(x \ln x - x + C_1) + \int dx \\ &= 2x \ln x - 2x + x + C = 2x \ln x - x + C \\ \text{이때 } F(1) &= -1 \text{에서 } -1 + C = -1 \quad \therefore C = 0 \\ \text{따라서 } xF(x) &= 2x \ln x - x \text{이므로} \\ F(x) &= 2 \ln x - 1 \quad (\because x > 0) \quad \therefore F(e) = 2 - 1 = 1\end{aligned}$$

22 $f(x) = x^2, g'(x) = \cos 2x$ 로 놓으면
 $f'(x) = 2x, g(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$
 $\therefore \int x^2 \cos 2x dx = \frac{1}{2} x^2 \sin 2x - \int x \sin 2x dx$
 $\dots\dots \textcircled{7}$

$$\begin{aligned}\int x \sin 2x dx \text{에서 } u(x) &= x, v'(x) = \sin 2x \text{로 놓으면} \\ u'(x) &= 1, v(x) = -\frac{1}{2} \cos 2x \\ \therefore \int x \sin 2x dx &= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\ &= -\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C_1 \\ &\dots\dots \textcircled{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{8} \text{을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면} \\ \int x^2 \cos 2x dx &= \frac{1}{2} x^2 \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x - \frac{1}{4} \sin 2x + C \\ &= \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} \right) \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x + C \\ \text{따라서 } p &= \frac{1}{2}, q = -\frac{1}{4}, r = \frac{1}{2} \text{이므로 } p + q + r = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

23 $g(x) = (\ln x)^2, h'(x) = 1$ 로 놓으면
 $g'(x) = \frac{2 \ln x}{x}, h(x) = x$
 $\therefore f(x) = \int (\ln x)^2 dx$
 $= x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x dx \quad \dots\dots \textcircled{7}$

$$\begin{aligned}\int \ln x dx \text{에서 } u(x) &= \ln x, v'(x) = 1 \text{로 놓으면} \\ u'(x) &= \frac{1}{x}, v(x) = x \\ \therefore \int \ln x dx &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{8} \text{을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면} \\ f(x) &= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + C \\ \text{이때 } f(1) &= 3 \text{에서 } 2 + C = 3 \quad \therefore C = 1 \\ \text{따라서 } f(x) &= x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x + 1 \text{이므로} \\ f(e) &= e - 2e + 2e + 1 = e + 1\end{aligned}$$

24 $g(x) = -\cos x$ 이므로 $g'(x) = \sin x$
 $\therefore h(x) = \int 5f(x)g'(x) dx = 5 \int e^{2x} \sin x dx$
 $\int e^{2x} \sin x dx \text{에서 } f(x) = e^{2x}, g'(x) = \sin x$ 이고
 $f'(x) = 2e^{2x}, g(x) = -\cos x$ 이므로
 $\int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x dx \quad \dots\dots \textcircled{7}$

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \cos x dx \text{에서 } u(x) &= e^{2x}, v'(x) = \cos x \text{로 놓으면} \\ u'(x) &= 2e^{2x}, v(x) = \sin x \\ \therefore \int e^{2x} \cos x dx &= e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x dx \quad \dots\dots \textcircled{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{8} \text{을 } \textcircled{7} \text{에 대입하면} \\ \int e^{2x} \sin x dx &= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x - 4 \int e^{2x} \sin x dx \\ 5 \int e^{2x} \sin x dx &= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x \\ \therefore h(x) &= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x + C \\ \text{이때 } h(0) &= -1 \text{에서 } -1 + C = -1 \quad \therefore C = 0 \\ \text{따라서 } h(x) &= -e^{2x} \cos x + 2e^{2x} \sin x \text{이므로} \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) &= 2e^\pi\end{aligned}$$

25 $\sin(\pi - 3x) = \sin 3x$ 이므로
 $\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin(\pi - 3x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin 3x dx$
 $f(x) = x, g'(x) = \sin 3x$ 로 놓으면
 $f'(x) = 1, g(x) = -\frac{1}{3} \cos 3x$
 $\therefore \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin(\pi - 3x) dx$
 $= \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \sin 3x dx$
 $= \left[-\frac{1}{3} x \cos 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3} \cos 3x dx$
 $= \frac{\pi}{9} + \left[\frac{1}{9} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{9}$

$$\begin{aligned}
26 \quad & \int_0^{\ln 4} f(x) dx - \int_1^{\ln 4} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx \\
& g(x) = x^2 + 3, h'(x) = 4e^{2x} \text{으로 놓으면} \\
& g'(x) = 2x, h(x) = 2e^{2x} \\
& \therefore \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 4(x^2 + 3)e^{2x} dx \\
& = \left[2(x^2 + 3)e^{2x} \right]_0^1 - 4 \int_0^1 xe^{2x} dx \\
& = 8e^2 - 6 - 4 \int_0^1 xe^{2x} dx \quad \cdots \cdots \textcircled{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 xe^{2x} dx \text{에서 } u(x) = x, v'(x) = e^{2x} \text{으로 놓으면} \\
& u'(x) = 1, v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \\
& \therefore \int_0^1 xe^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}xe^{2x} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx \\
& = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^1 \\
& = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \\
& = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}
\end{aligned}$$

⑧을 ⑦에 대입하면

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f(x) dx = 8e^2 - 6 - e^2 - 1 = 7e^2 - 7 \\
& \therefore \int_0^{\ln 4} f(x) dx - \int_1^{\ln 4} f(x) dx = 7e^2 - 7
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
27 \quad & f(t) = \frac{\frac{\ln t}{t} - 1}{t} = \frac{\ln t - t}{t^2} \text{이므로} \\
& \int_1^e f(t) dt = \int_1^e \frac{\ln t - t}{t^2} dt \\
& = \int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt - \int_1^e \frac{1}{t} dt \\
& u(t) = \ln t, v'(t) = \frac{1}{t^2} \text{로 놓으면} \\
& u'(t) = \frac{1}{t}, v(t) = -\frac{1}{t} \\
& \therefore \int_1^e f(t) dt \\
& = \int_1^e \frac{\ln t}{t^2} dt - \int_1^e \frac{1}{t} dt \\
& = \left[-\frac{\ln t}{t} \right]_1^e + \int_1^e \frac{1}{t^2} dt - \left[\ln t \right]_1^e (\because t > 0) \\
& = -\frac{1}{e} + \left[-\frac{1}{t} \right]_1^e - 1 \\
& = -\frac{1}{e} + \left(-\frac{1}{e} + 1 \right) - 1 = -\frac{2}{e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
28 \quad & \int_0^1 f'(t) dt = k (k \text{는 상수}) \text{로 놓으면} \\
& f(x) = e^x + 2x - k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 f'(t) dt = \left[f(t) \right]_0^1 = f(1) - f(0) \\
& = (e + 2 - k) - (1 - k) = e + 1 \\
& \therefore k = e + 1 \\
& \text{따라서 } f(x) = e^x + 2x - e - 1 \text{이므로} \\
& f(1) = e + 2 - e - 1 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
29 \quad & f(x) - \int_0^{\frac{1}{3}} f(t) dt = \sin \pi x \text{에서} \\
& f(x) = \sin \pi x + \int_0^{\frac{1}{3}} f(t) dt \\
& \int_0^{\frac{1}{3}} f(t) dt = k (k \text{는 상수}) \text{로 놓으면} \\
& f(x) = \sin \pi x + k \\
& \text{이를 } \int_0^{\frac{1}{3}} f(t) dt = k \text{에 대입하면} \\
& \int_0^{\frac{1}{3}} (\sin \pi t + k) dt = k \\
& \left[-\frac{1}{\pi} \cos \pi t + kt \right]_0^{\frac{1}{3}} = k \\
& -\frac{1}{2\pi} + \frac{k}{3} + \frac{1}{\pi} = k \quad \therefore k = \frac{3}{4\pi} \\
& \text{따라서 } f(x) = \sin \pi x + \frac{3}{4\pi} \text{이므로} \\
& f(-1) = \frac{3}{4\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
30 \quad & \int_1^2 tf(t) dt = k (k \text{는 상수}) \text{로 놓으면} \\
& f(x) = \frac{2^x}{x} + k \\
& \text{이를 } \int_1^2 tf(t) dt = k \text{에 대입하면} \\
& \int_1^2 (2^t + kt) dt = k \\
& \left[\frac{2^t}{\ln 2} + \frac{k}{2}t^2 \right]_1^2 = k \\
& \left(\frac{4}{\ln 2} + 2k \right) - \left(\frac{2}{\ln 2} + \frac{k}{2} \right) = k \quad \therefore k = -\frac{4}{\ln 2} \\
& \text{따라서 } f(x) = \frac{2^x}{x} - \frac{4}{\ln 2} \text{이므로} \\
& f(2) = 2 - \frac{4}{\ln 2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
31 \quad & \text{주어진 등식의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\
& f(x) = 2 + a \cos x \\
& \text{주어진 등식의 양변에 } x = \frac{\pi}{2} \text{를 대입하면} \\
& 0 = \pi + a \quad \therefore a = -\pi \\
& \therefore f(x) = 2 - \pi \cos x
\end{aligned}$$

32 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = 3^x \ln 3 + xf'(x)$$

$$\therefore f(x) = 3^x \ln 3$$

주어진 등식의 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$0 = 1 + a \quad \therefore a = -1$$

$$\begin{aligned} \therefore f(a) &= f(-1) = 3^{-1} \ln 3 \\ &= \frac{\ln 3}{3} \end{aligned}$$

33 주어진 등식에서

$$\int_0^x f(t) dt = 4x + x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 4 + \int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x)$$

$$\therefore f(x) = 4 + \int_0^x f(t) dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = f(x)$$

$$\therefore \frac{f'(x)}{f(x)} = 1$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int dx \text{이므로}$$

$$\ln f(x) = x + C \quad (\because f(x) > 0)$$

$$\therefore f(x) = e^{x+C}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $f(0)=4$ 이므로

$$4 = e^C \quad \therefore C = \ln 4$$

따라서 $f(x) = e^{x+\ln 4} = 4e^x$ 이므로

$$f(2) = 4e^2$$

34 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = e - e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$e - e^x = 0, \quad e^x = e \quad \therefore x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이면서 최대이므로
최댓값은

$$f(1) = \int_0^1 (e - e^t) dt$$

$$= \left[et - e^t \right]_0^1$$

$$= (e - e) - (-1) = 1$$

35 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \sin x - \cos 2x$$

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\sin x - \cos 2x = 0$$

$$\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 0$$

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(\sin x + 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = -1 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \quad (\because 0 < x < \pi)$$

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면
다음과 같다.

x	0	$\dots$	$\frac{\pi}{6}$	$\dots$	$\frac{5}{6}\pi$	$\dots$	π
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{5}{6}\pi$ 에서 극대, $x = \frac{\pi}{6}$ 에서 극소이므로
극댓값과 극솟값은 각각

$$f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \int_0^{\frac{5}{6}\pi} (\sin t - \cos 2t) dt$$

$$= \left[-\cos t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{5}{6}\pi}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - (-1)$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} + 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin t - \cos 2t) dt$$

$$= \left[-\cos t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right) - (-1)$$

$$= -\frac{3\sqrt{3}}{4} + 1$$

따라서 구하는 차는

$$\frac{3\sqrt{3}}{4} + 1 - \left(-\frac{3\sqrt{3}}{4} + 1 \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

36 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \frac{ax}{x^2 + 1}$$

이때 함수 $f(x)$ 가 $x=b$ 에서 극솟값 $-\ln 2$ 를 가지므로

$$f'(b) = 0, \quad f(b) = -\ln 2$$

$$f'(b) = 0 \text{에서 } \frac{ab}{b^2 + 1} = 0$$

$$ab = 0 \quad \therefore b = 0 \quad (\because a > 0)$$

$f(b)=f(0)=-\ln 2$ 에서

$$\int_{-1}^0 \frac{at}{t^2+1} dt = -\ln 2$$

이 식의 좌변에서 $(t^2+1)'=2t$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{at}{t^2+1} dt &= \frac{a}{2} \int_{-1}^0 \frac{2t}{t^2+1} dt \\ &= \frac{a}{2} \int_{-1}^0 \frac{(t^2+1)'}{t^2+1} dt \\ &= \frac{a}{2} \left[\ln(t^2+1) \right]_{-1}^0 \quad (\because t^2+1 > 0) \\ &= -\frac{a}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{a}{2} \ln 2 = -\ln 2 \text{이므로}$$

$$a=2$$

$$\therefore a+b=2+0=2$$

37 주어진 함수 $f(x)$ 를 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x+1) + \frac{4}{x+1} - 2x - \frac{4}{x} \\ &= \frac{2(x^2+x-2)}{x(x+1)} \end{aligned}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore x=1 \quad (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이면서 최소이므로 최솟값은

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_1^2 \left(2t + \frac{4}{t} \right) dt \\ &= \left[t^2 + 4 \ln |t| \right]_1^2 \\ &= (4 + 4 \ln 2) - 1 \\ &= 4 \ln 2 + 3 \end{aligned}$$

따라서 $a=4$, $b=3$ 이므로

$$ab=12$$

38 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} \\ &= F'(0) = f(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

39 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{x^2+1}{x} \int_1^{x+1} f(t) dt \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^2+1}{x} \{ F(x+1) - F(1) \} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (x^2+1) \times \frac{F(x+1) - F(1)}{x} \right\} \\ &= F'(1) = f(1) \end{aligned}$$

즉, $f(1)=3$ 이므로

$$a \cos \pi = 3, \quad -a = 3$$

$$\therefore a = -3$$

따라서 $f(x) = -3 \cos(\pi x^2)$ 이므로

$$\begin{aligned} f(a) &= f(-3) = -3 \cos 9\pi \\ &= -3 \times (-1) = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{40} \quad f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{2x}{x^2+1} dx \\ &= \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx \\ &= \ln(x^2+1) + C \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \\ &= F'(1) = f(1) \end{aligned}$$

즉, $f(1)=2 \ln 2$ 이므로

$$\ln 2 + C = 2 \ln 2 \quad \therefore C = \ln 2$$

따라서 $f(x) = \ln(x^2+1) + \ln 2$ 이므로

$$f(3) = \ln 10 + \ln 2 = \ln 20$$

$$\begin{aligned} \mathbf{41} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2-9} \int_3^x g'(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x^2-9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{g(x) - g(3)}{x-3} \times \frac{1}{x+3} \right\} \\ &= \frac{1}{6} g'(3) \end{aligned}$$

$g(3)=a$ 라 하면 $f(a)=3$ 에서

$$a^3 + 2a + 3 = 3, \quad a^3 + 2a = 0$$

$$a(a^2+2)=0$$

$$\therefore a=0 \quad (\because a^2+2 > 0)$$

$$\therefore g(3)=0$$

이때 $f'(x)=3x^2+2$ 이므로 역함수의 미분법에 의하여

$$g'(3) = \frac{1}{f'(g(3))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2-9} \int_3^x g'(t) dt &= \frac{1}{6} g'(3) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

III-2. 정적분의 활용

01 정적분의 활용(1)

78~84쪽

1 ④	2 84	3 ⑤	4 3	5 9
6 252	7 6	8 ③	9 ④	10 $\frac{31}{5}$
11 $4\sqrt{2}-2$	12 ②	13 e^2-1	14 ③	15 ④
16 $e+\frac{1}{e}-2$	17 ④	18 ②	19 ③	
20 $\frac{5}{2}$	21 ②	22 $\frac{23}{3}$	23 e	24 ④
25 $\frac{27}{2}$	26 ④	27 ①	28 $\frac{14}{3}-\ln 4$	
29 ②	30 ②	31 ⑤	32 $\frac{1}{3}$	
33 $2\ln 2-\frac{6}{5}$		34 $2-\sqrt{3}$	35 $\frac{2}{\pi}$	36 0
37 $\frac{3}{2}$	38 ③	39 $\frac{1}{(e-1)^2}$		40 1
41 $4\ln 2-2$		42 $\frac{4}{9}$	43 $e+1$	

1 오른쪽 그림과 같이 구간

$[1, 3]$ 을 n 등분하면 각 구간
의 오른쪽 끝 점의 x 좌표는
차례대로

$$1+\frac{2}{n}, 1+\frac{4}{n}, 1+\frac{6}{n},$$

$$\dots, 1+\frac{2n}{n}(=3)$$

이에 대응하는 y 의 값은 각각

$$\ln\left(1+\frac{2}{n}\right), \ln\left(1+\frac{4}{n}\right), \ln\left(1+\frac{6}{n}\right), \dots, \ln\left(1+\frac{2n}{n}\right)$$

이때 색칠한 각 직사각형의 가로의 길이는 $\frac{2}{n}$ 이므로 직사

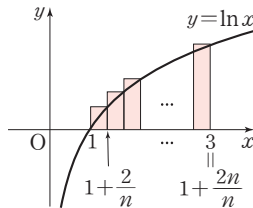
각형의 넓이의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)$$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{2k}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} 2 \quad S &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{4k}{n}\right)^3 \times \boxed{\frac{4}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \boxed{\frac{256}{n^4}} \sum_{k=1}^n k^3 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \boxed{\frac{256}{n^4}} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 64 \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \boxed{64} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{따라서 } f(n) &= \frac{4}{n}, g(n) = \frac{256}{n^4}, a=64 \text{이므로} \\ f(1)+g(2)+a &= 4+16+64 \\ &= 84 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{n} f\left(1+\frac{3k}{n}\right) &= \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{3k}{n}\right) \times \frac{3}{n} \\ &= \frac{2}{3} \int_1^4 f(x) dx \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 f(1+x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{6n} &= 6 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\sin \frac{k\pi}{6n} \right) \times \frac{\pi}{6n} \\ &= 6 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x dx \\ &= 6 \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= 6 - 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } a=6, b=-3 \text{이므로} \\ a+b &= 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3}{n} f\left(2+\frac{4k}{n}\right) &= \frac{3}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(2+\frac{4k}{n}\right) \times \frac{4}{n} \\ &= \frac{3}{4} \int_2^6 f(x) dx \\ &= \frac{3}{4} \times 12 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4}{n} f'\left(3+\frac{2k}{n}\right) &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f'\left(3+\frac{2k}{n}\right) \times \frac{2}{n} \\ &= 2 \int_3^5 f'(x) dx \\ &= 2 \left[f(x) \right]_3^5 \\ &= 2 \{ f(5) - f(3) \} \\ &= 2 \times (128 - 2) = 252 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{2k}{n}\right) \times \frac{1}{n} &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(1+\frac{2k}{n}\right) \times \frac{2}{n} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^3 (3x^2+ax) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x^3 + \frac{a}{2} x^2 \right]_1^3 \\ &= 13+2a \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 13+2a=25 \text{이므로 } a=6$$

$$\begin{aligned}
 8 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^2 + 2kn}{k^3 + 3k^2n + n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 2 \times \frac{k}{n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^3 + 3\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 1} \times \frac{1}{n} \\
 &= \int_0^1 \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2 + 1} dx \\
 &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{(x^3 + 3x^2 + 1)'}{x^3 + 3x^2 + 1} dx \\
 &= \frac{1}{3} \left[\ln |x^3 + 3x^2 + 1| \right]_0^1 \\
 &= \frac{\ln 5}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k\pi}{n^2} f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k\pi}{n} f\left(\frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{n}\right) \times \frac{\pi}{n} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x) dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos x dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \left\{ \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin x \right\}_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin x dx \\
 &= \frac{1}{\pi} \times \left(-\pi + \left[\cos x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \times (-\pi) = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^4 + \left(1 + \frac{3}{n}\right)^4 + \cdots + \left(1 + \frac{n}{n}\right)^4 \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^4 \times \frac{1}{n} \\
 &= \int_1^2 x^4 dx \\
 &= \left[\frac{1}{5} x^5 \right]_1^2 = \frac{31}{5}
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 + \left(1 + \frac{2}{n}\right)^4 + \left(1 + \frac{3}{n}\right)^4 + \cdots + \left(1 + \frac{n}{n}\right)^4 \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right)^4 \times \frac{1}{n} \\
 &= \int_0^1 (1+x)^4 dx \\
 &= \left[\frac{1}{5} (1+x)^5 \right]_0^1 = \frac{31}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 11 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \left\{ f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n} \\
 &= 3 \int_0^1 f(x) dx = 3 \int_0^1 \sqrt{1+x} dx \\
 &= 3 \left[\frac{2}{3} (1+x) \sqrt{1+x} \right]_0^1 = 4\sqrt{2} - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 12 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1^2} + \frac{2}{n^2+2^2} + \frac{3}{n^2+3^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2+k^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\frac{k}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2} \times \frac{1}{n} \\
 &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[\ln(1+x^2) \right]_0^1 \\
 &= \frac{\ln 2}{2}
 \end{aligned}$$

13 점 A_k 의 좌표는 $\left(\frac{2k}{n}, 0\right)$ 이므로 점 B_k 의 좌표는 $\left(\frac{2k}{n}, 2e^{\frac{2k}{n}}\right)$

따라서 $\overline{A_k B_k} = 2e^{\frac{2k}{n}}$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \overline{A_k B_k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 2e^{\frac{2k}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{\frac{2k}{n}} \times \frac{2}{n} \\
 &= \int_0^2 e^x dx \\
 &= \left[e^x \right]_0^2 = e^2 - 1
 \end{aligned}$$

14 $\overline{AC} = 3$ 에서 $\overline{AC_k} = \frac{3k}{n}$

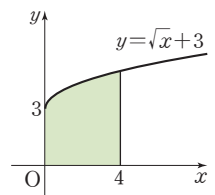
이때 $\triangle AB_1C_1, \triangle AB_2C_2, \triangle AB_3C_3, \dots, \triangle ABC$ 는 모두 서로 닮음이고 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로

$$\overline{B_k C_k} = \overline{AC_k} = \frac{3k}{n}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \overline{B_k C_k} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{3k}{n}\right) \times \frac{3}{n} \\
 &= \int_0^3 x^3 dx \\
 &= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^3 \\
 &= \frac{81}{4}
 \end{aligned}$$

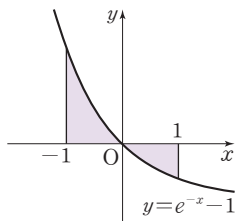
15 $0 \leq x \leq 4$ 에서 $y > 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^4 (\sqrt{x} + 3) dx \\
 &= \left[\frac{2}{3} x \sqrt{x} + 3x \right]_0^4 \\
 &= \frac{52}{3}
 \end{aligned}$$



- 16 $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $y \geq 0$ 이고,
 $0 \leq x \leq 1$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구
 하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 (e^{-x} - 1) dx \\ &\quad + \int_0^1 (-e^{-x} + 1) dx \\ &= \left[-e^{-x} - x \right]_{-1}^0 + \left[e^{-x} + x \right]_0^1 \\ &= e + \frac{1}{e} - 2 \end{aligned}$$

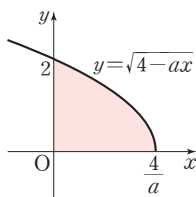


- 17 곡선 $f(x) = \frac{2x-2}{x^2-2x+2}$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\begin{aligned} \frac{2x-2}{x^2-2x+2} &= 0 \\ 2x-2 &= 0 \quad \therefore x=1 \\ 0 \leq x \leq 1 \text{에서 } f(x) &\leq 0 \text{이고, } 1 \leq x \leq 3 \text{에서 } f(x) \geq 0 \text{이므로} \\ \text{영역 } A \text{의 넓이와 영역 } B \text{의 넓이의 합은} \\ \int_0^1 \{-f(x)\} dx + \int_1^3 f(x) dx \\ &= -\int_0^1 \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx + \int_1^3 \frac{2x-2}{x^2-2x+2} dx \\ &= -\left[\ln(x^2-2x+2) \right]_0^1 + \left[\ln(x^2-2x+2) \right]_1^3 \\ &= \ln 10 \end{aligned}$$

- 18 곡선 $y = \sqrt{4-ax}$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\begin{aligned} \sqrt{4-ax} &= 0 \\ ax &= 4 \\ \therefore x &= \frac{4}{a} \end{aligned}$$



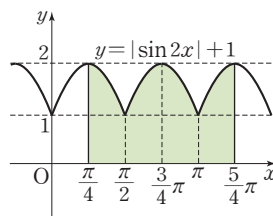
$0 \leq x \leq \frac{4}{a}$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 곡선 $y = \sqrt{4-ax}$ 와 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{4}{a}} \sqrt{4-ax} dx \\ &= -\frac{1}{a} \int_4^0 \sqrt{t} dt \quad \blacktriangleleft 4-ax=t \\ &= \frac{1}{a} \int_0^4 \sqrt{t} dt \\ &= \frac{1}{a} \left[\frac{2}{3} t\sqrt{t} \right]_0^4 \\ &= \frac{16}{3a} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{16}{3a} = \frac{8}{3}$ 이므로
 $a = 2$

- 19 함수 $y = |\sin 2x| + 1$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (|\sin 2x| + 1) dx = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (|\sin 2x| + 1) dx$$



이때 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}$ 에서 곡선 $y = |\sin 2x| + 1$ 은 직선

$x = \frac{\pi}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (|\sin 2x| + 1) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} (|\sin 2x| + 1) dx$$

$\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$ 에서 $y > 0$ 이고, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $\sin 2x \geq 0$

이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (|\sin 2x| + 1) dx \\ &= 4 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + 1) dx \\ &= 4 \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \pi + 2 \end{aligned}$$

- 20 곡선 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin x$ 와 x 축의

교점의 x 좌표를 구하면

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin x = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$\therefore x = \pi \left(\because \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \right)$$

$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \pi$ 에서 $y \geq 0$ 이고, $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ 에서 $y \leq 0$ 이므로

$$S_n = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin x dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \left\{ -\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin x \right\} dx$$

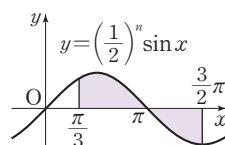
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[-\cos x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\cos x \right]_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$= \frac{5}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$= \frac{5}{2} \times \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{5}{2}$$



- 21 $y = \frac{2}{2-x}$ 를 x 에 대하여 풀면

$$2-x = \frac{2}{y}$$

$$\therefore x = 2 - \frac{2}{y}$$

곡선 $x = 2 - \frac{2}{y}$ 와 y 축의 교점의

y 좌표를 구하면

$$2 - \frac{2}{y} = 0$$

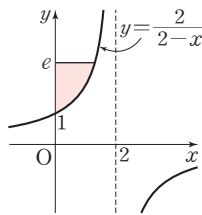
$$\frac{2}{y} = 2 \quad \therefore y = 1$$

$1 \leq y \leq e$ 에서 $x \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_1^e \left(2 - \frac{2}{y} \right) dy$$

$$= \left[2y - 2 \ln |y| \right]_1^e$$

$$= 2e - 4$$



- 22 $y = \sqrt{x+4}$ 를 x 에 대하여 풀

면

$$y^2 = x + 4$$

$$\therefore x = y^2 - 4$$

곡선 $x = y^2 - 4$ 와 y 축의 교점의 y 좌표를 구하면

$$y^2 - 4 = 0$$

$$(y+2)(y-2) = 0$$

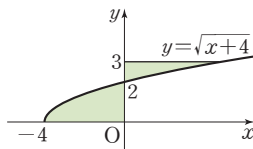
$$\therefore y = 2 \quad (\because y \geq 0)$$

$0 \leq y \leq 2$ 에서 $x \leq 0$ 이고, $2 \leq y \leq 3$ 에서 $x \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^2 (-y^2 + 4) dy + \int_2^3 (y^2 - 4) dy$$

$$= \left[-\frac{1}{3}y^3 + 4y \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}y^3 - 4y \right]_2^3$$

$$= \frac{23}{3}$$



- 23 $y \geq 0$ 일 때, $y = \ln x$ 에서 $x = e^y$

$y \leq 0$ 일 때, $-y = \ln x$ 에서 $x = e^{-y}$

$-\ln 2 \leq y \leq 0$ 에서 $e^{-y} > 0$ 이고,

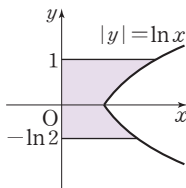
$0 \leq y \leq 1$ 에서 $e^y > 0$ 이므로 구하는

넓이를 S 라 하면

$$S = \int_{-\ln 2}^0 e^{-y} dy + \int_0^1 e^y dy$$

$$= \left[-e^{-y} \right]_{-\ln 2}^0 + \left[e^y \right]_0^1$$

$$= e$$



- 24 $y = (x+a)^2$ 을 x 에 대하여 풀면

$$x + a = \sqrt{y} \quad (\because x \geq -a)$$

$$\therefore x = \sqrt{y} - a$$

$0 \leq y \leq 1$ 에서 $x < 0$ 이므로 곡선

$y = (x+a)^2$ ($x \geq -a$)과 직선

$y = 1$ 및 x 축, y 축으로 둘러싸인

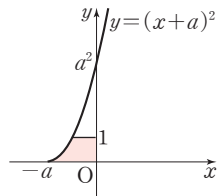
도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^1 (-\sqrt{y} + a) dy$$

$$= \left[-\frac{2}{3}y\sqrt{y} + ay \right]_0^1$$

$$= -\frac{2}{3} + a$$

따라서 $-\frac{2}{3} + a = \frac{7}{3}$ 이므로 $a = 3$



- 25 곡선 $y = 3\sqrt{x}$ 와 직선 $y = x$ 의

교점의 x 좌표를 구하면

$$3\sqrt{x} = x, \quad x^2 - 9x = 0$$

$$x(x-9) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 9$$

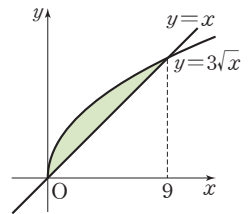
$0 \leq x \leq 9$ 에서 $3\sqrt{x} \geq x$ 이므로

구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^9 (3\sqrt{x} - x) dx$$

$$= \left[2x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^9$$

$$= \frac{27}{2}$$



- 26 $y = \ln \frac{1}{2}x$, $y = 2x - 1$ 을 각각 x 에 대하여 풀면

$$x = 2e^y, \quad x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

$1 \leq y \leq 2$ 에서 $2e^y > \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$ 이

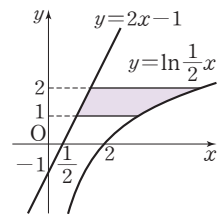
므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_1^2 \left\{ 2e^y - \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2} \right) \right\} dy$$

$$= \int_1^2 \left(2e^y - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} \right) dy$$

$$= \left[2e^y - \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}y \right]_1^2$$

$$= 2e^2 - 2e - \frac{5}{4}$$



- 27 곡선 $y = \frac{3}{x-1}$ 과 직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{3}{x-1} = 1, \quad x-1 = 3 \quad \therefore x = 4$$

$$\therefore A(4, 1)$$

곡선 $y = \frac{3}{x-1}$ 과 직선 $y=3$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{3}{x-1} = 3, x-1=1 \quad \therefore x=2$$

$\therefore B(2, 3)$

직선 AB의 방정식은

$$y-1 = \frac{1-3}{4-2}(x-4) \quad \therefore y = -x+5$$

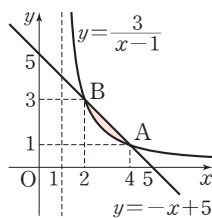
$2 \leq x \leq 4$ 에서 $-x+5 \geq \frac{3}{x-1}$

이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S = \int_2^4 \left\{ (-x+5) - \frac{3}{x-1} \right\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 5x - 3\ln|x-1| \right]_2^4$$

$$= 4 - 3\ln 3$$



28 두 곡선 $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{x}$ 의 교점의

x 좌표를 구하면

$$\sqrt{x} = \frac{1}{x}, x = \frac{1}{x^2}$$

$$x^3 = 1$$

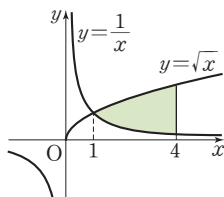
$$\therefore x=1 (\because x \text{는 실수})$$

$1 \leq x \leq 4$ 에서 $\sqrt{x} \geq \frac{1}{x}$ 이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S = \int_1^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \ln|x| \right]_1^4$$

$$= \frac{14}{3} - \ln 4$$



29 두 곡선 $y = \sqrt{2}\cos x$, $y = \sin 2x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\sqrt{2}\cos x = \sin 2x$$

$$\sqrt{2}\cos x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos x (\sqrt{2} - 2\sin x) = 0$$

$$\therefore \cos x = 0 \text{ 또는 } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{2} \left(\because 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $\sqrt{2}\cos x \geq \sin 2x$ 이고, $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서

$\sin 2x \geq \sqrt{2}\cos x$ 이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2}\cos x - \sin 2x) dx$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x - \sqrt{2}\cos x) dx$$

$$= \left[\sqrt{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\frac{1}{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin x \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2 - \sqrt{2}$$

30 $y = e^{x-1} - 1$, $y = \ln(x-1)$ 을 각각 x 에 대하여 풀면

$$x = \ln(y+1) + 1, x = e^y + 1$$

$0 \leq y \leq 1$ 에서 $e^y + 1 > \ln(y+1) + 1$

이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$$S = \int_0^1 [(e^y + 1) - \{\ln(y+1) + 1\}] dy$$

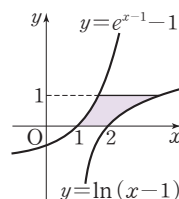
$$= \int_0^1 e^y dy - \int_0^1 \ln(y+1) dy$$

$$= \int_0^1 e^y dy - \int_1^2 \ln t dt \quad \leftarrow y+1=t$$

$$= [e^y]_0^1 - [t \ln t]_1^2 + \int_1^2 dt$$

$$= e - 1 - 2\ln 2 + [t]_1^2$$

$$= e - 2\ln 2$$



31 $f(x) = e^x$ 이라 하면

$$f'(x) = e^x$$

접점의 좌표를 (t, e^t) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울

기는 $f'(t) = e^t$ 이므로 접선 l 의 방정식은

$$y - e^t = e^t(x - t)$$

$$\therefore y = e^t x + (1-t)e^t \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이 직선이 점 $(1, 0)$ 을 지나므로

$$0 = e^t + (1-t)e^t, (2-t)e^t = 0$$

$$\therefore t = 2 (\because e^t > 0)$$

이를 ①에 대입하면 접선 l 의 방정식은

$$y = e^2 x - e^2$$

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $e^x \geq e^2 x - e^2$ 이므로 구

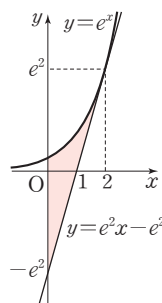
하는 넓이를 S라 하면

$$S = \int_0^2 \{e^x - (e^2 x - e^2)\} dx$$

$$= \int_0^2 (e^x - e^2 x + e^2) dx$$

$$= \left[e^x - \frac{e^2}{2}x^2 + e^2 x \right]_0^2$$

$$= e^2 - 1$$



32 $f(x) = \sqrt{2-x}$ 라 하면

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -\frac{1}{2}$ 이므로 이

점에서의 접선의 방정식은

$$y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

접선과 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \quad \therefore x = 3$$

$1 \leq x \leq 2$ 에서 $\sqrt{2-x} \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \int_1^2 \sqrt{2-x} dx \\ &= 1 + \int_1^0 \sqrt{t} dt \quad \left(2-x=t \right) \\ &= 1 + \left[\frac{2}{3} t\sqrt{t} \right]_1^0 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

다른 풀이

$f(x) = \sqrt{2-x}$ 라 하면

$$f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -\frac{1}{2}$ 이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$$y-1 = -\frac{1}{2}(x-1) \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$y = \sqrt{2-x}$, $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ 을 각각 x 에 대하여 풀면

$$x = 2 - y^2 (y \geq 0), \quad x = 3 - 2y$$

$0 \leq y \leq 1$ 에서 $3 - 2y \geq 2 - y^2$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(3-2y) - (2-y^2)\} dy \\ &= \int_0^1 (y^2 - 2y + 1) dy \\ &= \left[\frac{1}{3}y^3 - y^2 + y \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

33 $f(x) = \frac{1}{x}$ 이라 하면 $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

점 $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -4$ 이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$$y-2 = -4\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad \therefore y = -4x+4$$

점 $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2) = -\frac{1}{4}$ 이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2) \quad \therefore y = -\frac{1}{4}x+1$$

두 접선 $y = -4x+4$,

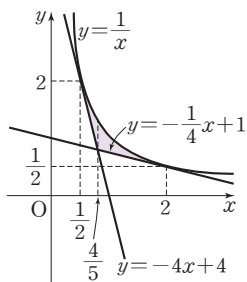
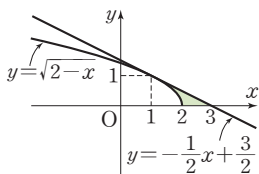
$y = -\frac{1}{4}x+1$ 의 교점의 x 좌

표를 구하면

$$-4x+4 = -\frac{1}{4}x+1$$

$$\frac{15}{4}x = 3$$

$$\therefore x = \frac{4}{5}$$



$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{4}{5}$ 에서 $\frac{1}{x} \geq -4x+4$ 이고, $\frac{4}{5} \leq x \leq 2$ 에서

$\frac{1}{x} \geq -\frac{1}{4}x+1$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{5}} \left\{ \frac{1}{x} - (-4x+4) \right\} dx \\ &\quad + \int_{\frac{4}{5}}^2 \left\{ \frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{4}x+1\right) \right\} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{5}} \left(\frac{1}{x} + 4x - 4 \right) dx + \int_{\frac{4}{5}}^2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{4}x - 1 \right) dx \\ &= \left[\ln|x| + 2x^2 - 4x \right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{4}{5}} + \left[\ln|x| + \frac{1}{8}x^2 - x \right]_{\frac{4}{5}}^2 \\ &= 2\ln 2 - \frac{6}{5} \end{aligned}$$

34 $f(x) = \sin x$ 라 하면

$$f'(x) = \cos x$$

점 $(\alpha, \sin \alpha)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(\alpha) = \cos \alpha$ 이므로 이 점에서의 접선의 방정식은

$$y - \sin \alpha = \cos \alpha (x - \alpha)$$

$$\therefore y = \cos \alpha (x - \alpha) + \sin \alpha$$

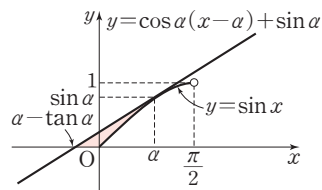
이때 접선과 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\cos \alpha (x - \alpha) + \sin \alpha = 0$$

$$\cos \alpha (x - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$x - \alpha = -\tan \alpha$$

$$\therefore x = \alpha - \tan \alpha$$



$0 \leq x \leq \alpha$ 에서 $\sin x \geq 0$ 이므로 곡선 $y = \sin x$ 와 직선

$y = \cos \alpha (x - \alpha) + \sin \alpha$ 및 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \tan \alpha \times \sin \alpha - \int_0^\alpha \sin x dx \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} - [-\cos x]_0^\alpha \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} + \cos \alpha - 1 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{\sin^2 \alpha}{2 \cos \alpha} + \cos \alpha - 1 = 1$ 이므로

$$\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 4 \cos \alpha = 0$$

$$(1 - \cos^2 \alpha) + 2 \cos^2 \alpha - 4 \cos \alpha = 0$$

$$\cos^2 \alpha - 4 \cos \alpha + 1 = 0$$

$$\therefore \cos \alpha = 2 - \sqrt{3} \quad (\because 0 < \cos \alpha \leq 1)$$

35 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - k) dx = 0$$

$$\left[\sin x - kx \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0$$

$$1 - \frac{\pi}{2}k = 0, \quad \frac{\pi}{2}k = 1$$

$$\therefore k = \frac{2}{\pi}$$

36 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^6 f(x) dx = 0$$

$\int_0^2 f(3x) dx$ 에서 $3x=t$ 로 놓으면 $3 = \frac{dt}{dx}$ 이고, $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=2$ 일 때 $t=6$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(3x) dx &= \int_0^6 f(t) \times \frac{1}{3} dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^6 f(x) dx = 0 \end{aligned}$$

37 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^1 \{xe^x - (-x+a)\} dx = 0$$

$$\int_0^1 xe^x dx + \int_0^1 (x-a) dx = 0$$

$$\left[xe^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx + \left[\frac{1}{2}x^2 - ax \right]_0^1 = 0$$

$$e - \left[e^x \right]_0^1 + \frac{1}{2} - a = 0$$

$$\frac{3}{2} - a = 0 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

38 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 x 축 및 두 직선

$x=2$, $x=16$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$2 \leq x \leq 16$ 에서 $y > 0$ 이므로

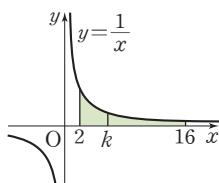
$$\begin{aligned} S_1 &= \int_2^{16} \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\ln |x| \right]_2^{16} = \ln 8 \end{aligned}$$

또 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 x 축 및 두 직선 $x=2$, $x=k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면 $2 \leq x \leq k$ 에서 $y > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_2^k \frac{1}{x} dx \\ &= \left[\ln |x| \right]_2^k = \ln \frac{k}{2} \end{aligned}$$

주어진 조건에서 $S_1 = 2S_2$ 이므로

$$\ln 8 = 2 \ln \frac{k}{2}, \quad \frac{k}{2} = 2\sqrt{2} \quad \therefore k = 4\sqrt{2}$$



39 곡선 $y = \ln(x+1)$ 과 x 축 및 직선 $x=e-1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면 $0 \leq x \leq e-1$ 에서 $y \geq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{e-1} \ln(x+1) dx \\ &= \int_1^e \ln t dt \quad \blacktriangleleft x+1=t \\ &= \left[t \ln t \right]_1^e - \int_1^e dt \\ &= e - \left[t \right]_1^e \\ &= 1 \end{aligned}$$

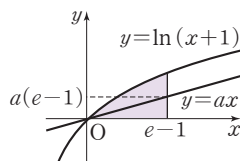
또 직선 $y=ax$ 과 x 축 및 직선 $x=e-1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \frac{1}{2} \times (e-1) \times a(e-1) = \frac{(e-1)^2}{2} a$$

주어진 조건에서 $S_1 = 2S_2$ 이므로

$$1 = 2 \times \frac{(e-1)^2}{2} a$$

$$\therefore a = \frac{1}{(e-1)^2}$$



40 곡선 $y = \sqrt{x}$ 과 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 의

교점의 x 좌표를 구하면

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}x, \quad x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 4$$

곡선 $y = \sqrt{x}$ 과 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를

S_1 이라 하면 $0 \leq x \leq 4$ 에서 $\sqrt{x} \geq \frac{1}{2}x$ 이므로

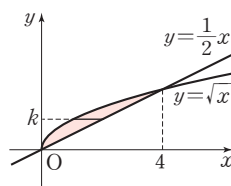
$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^4 \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}x \right) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^2 \right]_0^4 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$y = \sqrt{x}$, $y = \frac{1}{2}x$ 를 각각 x 에 대하여 풀면

$$x = y^2 (y \geq 0), \quad x = 2y$$

곡선 $x = y^2$ 과 두 직선 $x = 2y$, $y = k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면 $0 \leq y \leq k$ 에서 $2y \geq y^2$ 이므로

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^k (2y - y^2) dy \\ &= \left[y^2 - \frac{1}{3}y^3 \right]_0^k \\ &= k^2 - \frac{k^3}{3} \end{aligned}$$



주어진 조건에서 $S_1=2S_2$ 이므로

$$\frac{4}{3}=2\left(k^2-\frac{k^3}{3}\right)$$

$$k^3-3k^2+2=0, (k-1)(k^2-2k-2)=0$$

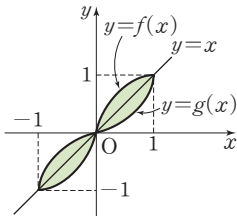
$$\therefore k=1 (\because 0 < k < 2)$$

- 41 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이고,

$$0 \leq x \leq 1 \text{에서 } \frac{2x}{x^2+1} \geq x \text{이므로}$$

로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2+1} - x \right) dx \\ &= 4 \left[\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 (\because x^2+1 > 0) \\ &= 4 \ln 2 - 2 \end{aligned}$$



- 42 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\sqrt{6x-8}=x$$

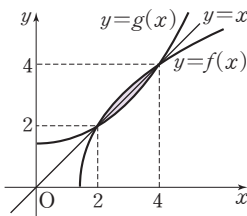
$$x^2-6x+8=0$$

$$(x-2)(x-4)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=4$$

$2 \leq x \leq 4$ 에서 $\sqrt{6x-8} \geq x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_2^4 (\sqrt{6x-8} - x) dx \\ &= 2 \int_2^4 \sqrt{6x-8} dx - 2 \int_2^4 x dx \\ &= \frac{1}{3} \int_4^{16} \sqrt{t} dt - 2 \int_2^4 x dx \quad \leftarrow 6x-8=t \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_4^{16} - 2 \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_2^4 \\ &= \frac{4}{9} \end{aligned}$$

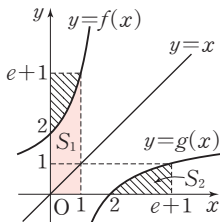


- 43 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고 $f(0)=2$, $f(1)=e+1$ 이므로 $g(2)=0$, $g(e+1)=1$ 이다.

$$\int_0^1 f(x) dx = S_1,$$

$\int_2^{e+1} g(x) dx = S_2$ 라 하면 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx + \int_2^{e+1} g(x) dx &= S_1 + S_2 \\ &= 1 \times (e+1) = e+1 \end{aligned}$$



02 정적분의 활용(2)

85~87쪽

1 $(2+\ln 5) \text{ cm}^3$

2 ②

3 $252\pi \text{ cm}^3$

4 ②

5 $\frac{31}{5}$

6 $\frac{\sqrt{3}}{8}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}$

7 2

8 ①

9 3π

10 4

11 ⑤

12 $\frac{\pi}{3}$

13 $e^3 - \frac{1}{e^3}$

14 $\frac{\pi}{2}$

15 1

16 $4 + \ln 3$

17 3

18 ⑤

19 ①

- 1 물의 높이가 $x \text{ cm}$ 일 때의 수면의 넓이를 $S(x) \text{ cm}^2$ 라 하면

$$S(x) = \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

따라서 이 그릇에 담긴 물의 높이가 2 cm 일 때, 물의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 S(x) dx = \int_0^2 \frac{(x+1)^2}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^2 \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} dx = \int_0^2 \left(1 + \frac{2x}{x^2+1} \right) dx \\ &= \left[x + \ln(x^2+1) \right]_0^2 = 2 + \ln 5 (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

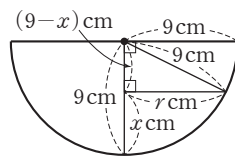
- 2 입체도형의 밑면으로부터 높이가 x 인 지점에서의 단면의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \{\sqrt{\ln(x+1)}\}^2 = \ln(x+1)$$

이때 입체도형의 높이가 5 이므로 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^5 S(x) dx = \int_0^5 \ln(x+1) dx \\ &= \int_1^6 \ln t dt \quad \leftarrow x+1=t \\ &= \left[t \ln t \right]_1^6 - \int_1^6 1 dt \\ &= 6 \ln 6 - \left[t \right]_1^6 = 6 \ln 6 - 5 \end{aligned}$$

- 3 물의 높이가 $x \text{ cm}$ 일 때의 수면의 반지름의 길이를 $r \text{ cm}$, 수면의 넓이를 $S(x) \text{ cm}^2$ 라 하면 오른쪽 그림에서



$$(9-x)^2 + r^2 = 9^2$$

$$r^2 = 18x - x^2$$

$$\therefore S(x) = \pi r^2 = \pi(18x - x^2)$$

따라서 이 그릇에 담긴 물의 높이가 6 cm 일 때, 물의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^6 S(x) dx = \int_0^6 \pi(18x - x^2) dx \\ &= \pi \left[9x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^6 = 252\pi (\text{cm}^3) \end{aligned}$$

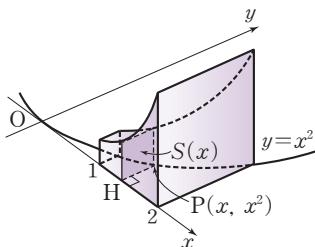
- 4 $\overline{PQ} = \sqrt{4x - x^2}$ 이므로 선분 PQ를 지름으로 하는 원의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \pi \left(\frac{\sqrt{4x - x^2}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{4} (4x - x^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_1^3 S(x) dx \\ &= \int_1^3 \frac{\pi}{4} (4x - x^2) dx \\ &= \frac{\pi}{4} \left[2x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^3 = \frac{11}{6}\pi \end{aligned}$$

- 5 다음 그림과 같이 점 P의 좌표를 (x, x^2) ($1 \leq x \leq 2$)이라 하면 점 H의 좌표는 $(x, 0)$



이때 $\overline{PH} = x^2$ 을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

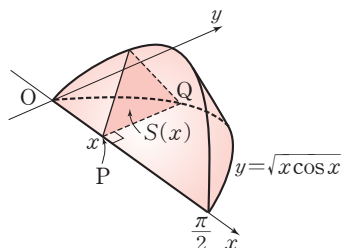
$$S(x) = (x^2)^2 = x^4$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 S(x) dx \\ &= \int_1^2 x^4 dx \\ &= \left[\frac{1}{5}x^5 \right]_1^2 = \frac{31}{5} \end{aligned}$$

- 6 다음 그림과 같이 x 축 위의 점 $P(x, 0)$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)을 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = \sqrt{x \cos x}$ 와 만나는 점을 Q라 하면

$$Q(x, \sqrt{x \cos x})$$



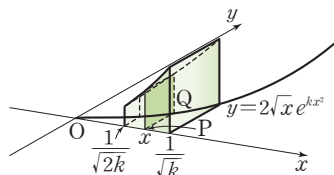
이때 $\overline{PQ} = \sqrt{x \cos x}$ 를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{x \cos x})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} x \cos x$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} S(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{3}}{4} x \cos x dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{\pi}{2} - \left[-\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{8} \pi - \frac{\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

- 7 다음 그림과 같이 x 축 위의 점 $P(x, 0)$ ($\frac{1}{\sqrt{2k}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$)을 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = 2\sqrt{x}e^{kx^2}$ 과 만나는 점을 Q라 하면 $Q(x, 2\sqrt{x}e^{kx^2})$



이때 $\overline{PQ} = 2\sqrt{x}e^{kx^2}$ 을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = (2\sqrt{x}e^{kx^2})^2 = 4xe^{2kx^2}$$

입체도형의 부피를 V 라 하면

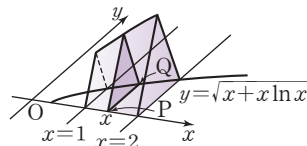
$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}} S(x) dx \\ &= \int_{\frac{1}{\sqrt{2k}}}^{\frac{1}{\sqrt{k}}} 4xe^{2kx^2} dx \\ &= \int_1^2 \frac{1}{k} e^t dt \quad \leftarrow 2kx^2 = t \\ &= \frac{1}{k} \left[e^t \right]_1^2 = \frac{1}{k} (e^2 - e) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{k} (e^2 - e) = \frac{1}{2} (e^2 - e)$ 이므로

$$k = 2$$

- 8 다음 그림과 같이 x 축 위의 점 $P(x, 0)$ ($1 \leq x \leq 2$)을 지나고 x 축에 수직인 직선이 곡선 $y = \sqrt{x + x \ln x}$ 와 만나는 점을 Q라 하면

$$Q(x, \sqrt{x + x \ln x})$$



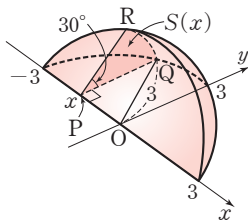
이때 $\overline{PQ} = \sqrt{x + x \ln x}$ 를 한 변으로 하는 정삼각형의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{x + x \ln x})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} x (1 + \ln x)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_1^2 S(x) dx \\ &= \int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{4} x(1+\ln x) dx \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \left[\frac{1}{2} x^2 (1+\ln x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x dx \right\} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{2} + 2\ln 2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^2 \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}(3+8\ln 2)}{16} \end{aligned}$$

- 9 오른쪽 그림과 같이 밑면의 중심을 원점 O , 밑면의 지름을 x 축으로 정하고, x 축 위의 점 $P(x, 0)$ ($-3 \leq x \leq 3$)을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면을 부채꼴 PQR 라 하면



$$PQ = \sqrt{OQ^2 - OP^2} = \sqrt{9 - x^2}$$

부채꼴 PQR 의 넓이를 $S(x)$ 라 하면

$$S(x) = \frac{1}{2} \times PQ^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} (9 - x^2)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_{-3}^3 S(x) dx = \int_{-3}^3 \frac{\pi}{12} (9 - x^2) dx \\ &= \frac{\pi}{12} \left[9x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-3}^3 = 3\pi \end{aligned}$$

- 10 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P 의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned} \int_0^a (t-3)e^t dt &= \left[(t-3)e^t \right]_0^a - \int_0^a e^t dt \\ &= (a-3)e^a + 3 - \left[e^t \right]_0^a \\ &= (a-4)e^a + 4 \end{aligned}$$

따라서 $(a-4)e^a + 4 = 4$ 이므로

$$(a-4)e^a = 0 \quad \therefore a = 4 \quad (\because e^a > 0)$$

- 11 점 P 가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로 $v(t) = 0$ 에서

$$8 - t\sqrt{t} = 0, \quad t^3 = 64 \quad \therefore t = 4 \quad (\because t \geq 0)$$

따라서 $t=4$ 일 때 운동 방향을 바꾸므로 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^4 |8 - t\sqrt{t}| dt &= \int_0^4 (8 - t\sqrt{t}) dt \\ &= \left[8t - \frac{2}{5} t^2 \sqrt{t} \right]_0^4 = \frac{96}{5} \end{aligned}$$

- 12 $t=a$ 에서의 점 P 의 위치를 x_P 라 하면

$$\begin{aligned} x_P &= 0 + \int_0^a 2 \cos 2t dt \\ &= \left[\sin 2t \right]_0^a = \sin 2a \end{aligned}$$

$t=a$ 에서의 점 Q 의 위치를 x_Q 라 하면

$$\begin{aligned} x_Q &= 0 + \int_0^a \cos t dt \\ &= \left[\sin t \right]_0^a = \sin a \end{aligned}$$

두 점이 다시 만나면 위치가 같으므로 $x_P = x_Q$ 에서

$$\sin 2a = \sin a, \quad 2 \sin a \cos a = \sin a$$

$$\sin a (2 \cos a - 1) = 0$$

$$\therefore \sin a = 0 \text{ 또는 } \cos a = \frac{1}{2}$$

이를 만족시키는 a 의 값은 $\frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5}{3}\pi, 2\pi, \dots$

따라서 두 점 P, Q 가 출발 후 처음으로 다시 만나는 시간은 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

- 13 $\frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t}, \frac{dy}{dt} = 2$ 이므로 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^3 \sqrt{(e^t - e^{-t})^2 + 2^2} dt &= \int_0^3 \sqrt{e^{2t} + 2 + e^{-2t}} dt \\ &= \int_0^3 \sqrt{(e^t + e^{-t})^2} dt \\ &= \int_0^3 (e^t + e^{-t}) dt \\ &= \left[e^t - e^{-t} \right]_0^3 = e^3 - \frac{1}{e^3} \end{aligned}$$

- 14 $\frac{dx}{dt} = 2 \sin t \cos t = \sin 2t$

$$\frac{dy}{dt} = -2 \sin t \cos t = -\sin 2t$$

$t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P 가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{(\sin 2t)^2 + (-\sin 2t)^2} dt &= \int_0^a \sqrt{2 \sin^2 2t} dt \\ &= \int_0^a \sqrt{2} \sin 2t dt \\ &= \sqrt{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^a \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2a - 1) \end{aligned}$$

따라서 $-\frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2a - 1) = \sqrt{2}$ 이므로

$$\cos 2a = -1$$

$$2a = \pi \quad (\because 0 < 2a \leq \pi) \quad \therefore a = \frac{\pi}{2}$$

15 $\frac{dx}{dt} = -(2t-2) \sin(t^2-2t)$

$\frac{dy}{dt} = (2t-2) \cos(t^2-2t)$

시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} & \sqrt{\{-(2t-2) \sin(t^2-2t)\}^2 + \{(2t-2) \cos(t^2-2t)\}^2} \\ &= \sqrt{(2t-2)^2 \{\sin^2(t^2-2t) + \cos^2(t^2-2t)\}} \\ &= \sqrt{(2t-2)^2} = |2t-2| \end{aligned}$$

이때 점 P가 출발 후 속력이 0이 되는 시각은

$|2t-2|=0, 2t-2=0$

$\therefore t=1$

따라서 $t=0$ 에서 $t=1$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^1 |2t-2| dt = \int_0^1 (-2t+2) dt = \left[-t^2+2t\right]_0^1 = 1$

16 $\frac{dx}{dt} = t - \frac{1}{t}, \frac{dy}{dt} = -2$ 이므로 시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(t - \frac{1}{t}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{t^2 + 2 + \frac{1}{t^2}} \\ &= \sqrt{\left(t + \frac{1}{t}\right)^2} = t + \frac{1}{t} \end{aligned}$$

$t > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \times \frac{1}{t}} = 2$

이때 등호는 $t = \frac{1}{t}$ 일 때 성립하므로 $t^2 = 1$, 즉 $t = 1$ 일 때

점 P의 속력이 최소가 된다.

따라서 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_1^3 \left(t + \frac{1}{t}\right) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 + \ln t\right]_1^3 = 4 + \ln 3$

17 $y = \frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} = \frac{2}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$ 이므로

$\frac{dy}{dx} = 2x\sqrt{x^2+1}$

즉, $0 \leq x \leq a$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{1 + (2x\sqrt{x^2+1})^2} dx &= \int_0^a \sqrt{4x^4 + 4x^2 + 1} dx \\ &= \int_0^a \sqrt{(2x^2+1)^2} dx \\ &= \int_0^a (2x^2+1) dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 + x\right]_0^a = \frac{2}{3}a^3 + a \end{aligned}$$

따라서 $\frac{2}{3}a^3 + a = 21$ 이므로

$2a^3 + 3a - 63 = 0$

$(a-3)(2a^2+6a+21) = 0$

$\therefore a = 3$ ($\because a > 0$)

18 $\frac{dx}{dt} = -\sin t - 2 \sin t \cos t$

$= -\sin t - \sin 2t$

$\frac{dy}{dt} = \cos t + \cos^2 t - \sin^2 t$

$= \cos t + \cos 2t$ $\blacktriangleleft \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$

따라서 $0 \leq t \leq \pi$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \sqrt{(-\sin t - \sin 2t)^2 + (\cos t + \cos 2t)^2} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2 + 2 \sin t \sin 2t + 2 \cos t \cos 2t} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2 + 2 \sin t \times 2 \sin t \cos t + 2 \cos t (1 - 2 \sin^2 t)} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{2 + 2 \cos t} dt \\ &= \int_0^\pi \sqrt{4 \cos^2 \frac{t}{2}} dt \quad \blacktriangleleft \cos t = 2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1 \\ &= \int_0^\pi 2 \cos \frac{t}{2} dt \\ &= \left[4 \sin \frac{t}{2}\right]_0^\pi = 4 \end{aligned}$$

19 $y = \frac{1}{2}(|e^x - 1| - e^{|x|} + 1)$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + 1 & (-\ln 4 \leq x \leq 0) \\ 0 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

$-\ln 4 \leq x \leq 0$ 일 때 $y = -\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + 1$ 이므로

$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$0 \leq x \leq 1$ 일 때 $y = 0$ 이므로

$\frac{dy}{dx} = 0$

따라서 $-\ln 4 \leq x \leq 1$ 에서 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_{-\ln 4}^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_{-\ln 4}^0 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx + \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \\ &= \int_{-\ln 4}^0 \sqrt{1 + \left\{-\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right\}^2} dx + \int_0^1 dx \\ &= \int_{-\ln 4}^0 \sqrt{\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x}} dx + \left[x\right]_0^1 \\ &= \int_{-\ln 4}^0 \sqrt{\left(\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}\right)^2} dx + 1 \\ &= \int_{-\ln 4}^0 \left(\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}\right) dx + 1 \\ &= \frac{1}{2} \left[e^x - e^{-x}\right]_{-\ln 4}^0 + 1 \\ &= \frac{23}{8} \end{aligned}$$

MEMO