



정답과 해설



I 수열의 극한

1 수열의 극한

01 수열의 극한

9~15쪽

- 01 (1) 수열 $\left\{3 - \frac{1}{n}\right\}$ 에서 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n}\right) = 3$$

따라서 주어진 수열의 극한값은 3이다.

- (2) 수열 $\left\{\left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right\}$ 에서 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값은 0보다 큰 값과 작은 값이 교대로 나타나면서 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^{n+1} = 0$$

따라서 주어진 수열의 극한값은 0이다.

- 02 (1) 수열 $\{3^n\}$ 에서 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값은 한없이 커지므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n = \infty$

따라서 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

- (2) 수열 $\{7 - 2n\}$ 에서 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (7 - 2n) = -\infty$$

따라서 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

- 03 (1) 수열 $\{2n+1\}$ 에서 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값은 한없이 커지므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+1) = \infty$

따라서 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

- (2) 수열 $\left\{2 + \frac{1}{5^n}\right\}$ 에서 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{5^n}\right) = 2$$

따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 2이다.

- (3) 수열 $\{-n^2\}$ 에서 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^2) = -\infty$$

따라서 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

- (4) 수열 $\{3 - (-2)^n\}$ 에서 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값은 양수와 음수가 교대로 나타나면서 그 절댓값이 한없이 커진다.

따라서 주어진 수열은 발산(진동)한다.

02 수열의 극한값의 계산

16~25쪽

$$\begin{aligned} 01 \quad (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{3n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \\ &= 2 - 0 = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{6}{n^3}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 6 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{2}{n}\right) \left(\frac{3}{n^2} - 1\right) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 5 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}\right) \times \left(3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1\right) \\ &= (5 + 0)(0 - 1) = -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{4 - \frac{1}{n}} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} \\ &= \frac{1 + 0}{4 - 0} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 02 \quad (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= 2 + 2 \times (-3) = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (3a_n - b_n - 2) &= 3 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n - \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \\ &= 3 \times 2 - (-3) - 2 = 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n b_n}{4} &= \frac{1}{4} \times \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= \frac{1}{4} \times 2 \times (-3) = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a_n}{3b_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{3 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \\ &= \frac{1 - 2}{3 \times (-3)} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

03 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (α, β 는 실수)라고 하면
 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + 2) = 1$ 에서

$$\alpha + 2 = 1, \quad \alpha = -1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2b_n - 1}{a_n} = -3 \text{에서}$$

$$\frac{2\beta - 1}{\alpha} = -3 \quad \dots\dots ①$$

$$\alpha = -1 \text{을 ①에 대입하여 풀면 } \beta = 2$$

$$\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= (-1) \times 2 = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 04 \quad (1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 1}{n^2 - n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \\ &= \frac{5 - 0}{1 - 0 + 0} = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-1}{(3n+1)(n-1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n-1}{3n^2-2n-1} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{6}{n} - \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}} \\
 &= \frac{0-0}{3-0-0} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2+n}-2n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2+n}-2n)(\sqrt{4n^2+n}+2n)}{\sqrt{4n^2+n}+2n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2+n}+2n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n+3}-\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+3}+\sqrt{n})} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{n+1}+3\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3\sqrt{1+\frac{1}{n}}+3}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} = \frac{3+3}{1+1} = 3
 \end{aligned}$$

05 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^4+4n^2+5) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left(-1 + \frac{4}{n^2} + \frac{5}{n^4} \right) = -\infty$

따라서 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

$$\begin{aligned}
 (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n+4}{n-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2+\frac{4}{n}}{1-\frac{1}{n}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \times \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}}{1-\frac{1}{n}} \right) = \infty
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

06 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2-2n+11}{bn+3}$ 의 값이 존재하므로 $a=0$

$a=0$ 을 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an^2-2n+11}{bn+3}$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n+11}{bn+3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2+\frac{11}{n}}{b+\frac{3}{n}} \\
 &= \frac{-2+0}{b+0} = -\frac{2}{b}
 \end{aligned}$$

따라서 $-\frac{2}{b}=2$ 이므로 $b=-1$

07 $2n^2-1>0, n>0$ 이므로

$$\frac{n\sqrt{2n^2-1}}{2n^2-1} < na_n < \frac{n\sqrt{2n^2+n}}{2n^2-1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{2n^2-1}}{2n^2-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2-\frac{1}{n^2}}}{2-\frac{1}{n^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2-0} = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{2n^2+n}}{2n^2-1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}}}{2-\frac{1}{n^2}} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2-0} = \frac{\sqrt{2}}{2}
 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$

08 모든 자연수 n 에 대하여 $-1 \leq \cos n\theta \leq 1$ 이므로

$$0 \leq \frac{1+\cos n\theta}{n} \leq \frac{2}{n}$$

이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} 0=0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n}=0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\cos n\theta}{n} = 0$$

09 $\frac{n}{10}-1 < \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor \leq \frac{n}{10}$ 이고 $\frac{5}{n+1} > 0$ 이므로

$$\frac{5}{n+1} \left(\frac{n}{10}-1 \right) < \frac{5}{n+1} \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor \leq \frac{5}{n+1} \times \frac{n}{10}$$

즉, $\frac{n-10}{2(n+1)} < \frac{5}{n+1} \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor \leq \frac{n}{2(n+1)}$

$$\begin{aligned}
 \text{이때 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-10}{2(n+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{10}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
 &= \frac{1-0}{2(1+0)} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\
 &= \frac{1}{2(1+0)} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n+1} \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor = \frac{1}{2}$

03 등비수열의 극한

26~31쪽

01 (1) 주어진 수열은 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이다.

이때 $\frac{3}{2} > 1$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2} \right)^n = \infty$

따라서 이 수열은 양의 무한대로 발산한다.

- (2) 주어진 수열은 공비가 -0.99 인 등비수열이다.
 이때 $|-0.99| < 1$ 이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} (-0.99)^n = 0$
 따라서 이 수열은 수렴하고, 그 극한값은 0이다.
- (3) 주어진 수열은 공비가 $-\sqrt{2}$ 인 등비수열이다.
 이때 $-\sqrt{2} < -1$ 이므로 이 수열은 발산(진동)한다

02 (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - (-5)^n}{10^n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(\frac{1}{10}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}$

$$= \frac{0-0}{1-0} = 0$$

따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 0이다.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} + 7^{n-1}}{2^{n-1} + 7^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\left(\frac{2}{7}\right)^n + \frac{1}{7}}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}\right)^n + 7}$

$$= \frac{0 + \frac{1}{7}}{0 + 7} = \frac{1}{49}$$

따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 $\frac{1}{49}$ 이다.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^{2n+1}}{3^{2n} + 4^{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2}{9}\right)^n + 3}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{4}{9}\right)^n}$

$$= \frac{0+3}{1+0} = 3$$

따라서 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 3이다.

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 2^{3n}}{2^{2n} + (-2)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n} = \infty$

따라서 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

- 03 (i) $0 < r < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n} - 3}{r^n + 1} = \frac{0-3}{0+1} = -3$$

- (ii) $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n} - 3}{r^n + 1} = \frac{1-3}{1+1} = -1$$

- (iii) $r > 1$ 일 때, $0 < \frac{1}{r} < 1$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r}\right)^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{2n} - 3}{r^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - 3\left(\frac{1}{r}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{r}\right)^n} = \infty$$

따라서 주어진 수열은 $0 < r < 1$ 일 때 -3 에 수렴,
 $r = 1$ 일 때 -1 에 수렴, $r > 1$ 일 때 양의 무한대로 발산한다.

2 급수

01 급수

41~44쪽

- 01 급수의 제 n 항까지의 부분합을 S_n 이라고 하면

(1) $\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right)$ 이므로

$$S_n = \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{6}$$

따라서 주어진 급수는 수렴하고, 그 합은 $\frac{1}{6}$ 이다.

(2) $\frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})}{(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})}$

$$= \frac{2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})}{n+2 - n} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$$

이므로

$$S_n = (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{4}-\sqrt{2}) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + \cdots$$

$$+ (\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) + (\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})$$

$$= \sqrt{n+2} - 1 - \sqrt{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+2} - 1 - \sqrt{2}) = \infty$$

따라서 주어진 급수는 양의 무한대로 발산한다.

- 02 주어진 급수에서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{5^n + 3^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 3\left(\frac{3}{5}\right)^n} = 1 \neq 0$$

이므로 이 급수는 발산한다.

03 $\sum_{n=1}^{\infty} (2b_n - 5a_n) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} b_n - 5 \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$= 2 \times 4 - 5 \times (-1) = 13$$

02 등비급수

45~51쪽

- 01 (1) 주어진 등비급수의 첫째항은 1이고 공비는 -4 이다.

이때 $|-4| > 1$ 이므로 이 등비급수는 발산한다.

- (2) 주어진 등비급수의 첫째항은 1이고 공비는 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이다.

이때 $\left| \frac{\sqrt{3}}{3} \right| < 1$ 이므로 이 등비급수는 수렴하고 그

합은 $\frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{3 - \sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

- 02 주어진 등비급수의 첫째항은 $\frac{1}{2}$ 이고 공비는 $-\frac{x}{2}$ 이다.

이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < -\frac{x}{2} < 1$$

즉, $-2 < x < 2$

03 (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{8^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$= \frac{\frac{3}{8}}{1 - \frac{3}{8}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}$$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n + 1}{(-3)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$$= \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

04 $0.\dot{0}1\dot{3} = 0.013 + 0.000013 + 0.000000013 + \dots$

$$= \frac{13}{1000} + \frac{13}{1000^2} + \frac{13}{1000^3} + \dots$$

이 급수는 첫째항이 $\frac{13}{1000}$ 이고 공비가 $\frac{1}{1000}$ 인 등비급수이므로

$$0.\dot{0}1\dot{3} = \frac{\frac{13}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{13}{999}$$

- 05 건전지를 처음에 100 % 충전하여 방전될 때까지 사용할 수 있는 시간은

90(시간)

다시 100 % 충전하여 방전될 때까지 사용할 수 있는 시간은

$$90 \times \left(1 - \frac{1}{1000}\right) = 90 \times \frac{999}{1000} \text{ (시간)}$$

또 다시 100 % 충전하여 방전될 때까지 사용할 수 있는 시간은

$$90 \times \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^2 = 90 \times \left(\frac{999}{1000}\right)^2 \text{ (시간)}$$

⋮

따라서 이 건전지를 사용할 수 있는 총 시간은

$$90 + 90 \times \frac{999}{1000} + 90 \times \left(\frac{999}{1000}\right)^2 + \dots$$

$$= \frac{90}{1 - \frac{999}{1000}} = 90000 \text{ (시간)}$$

II 미분법

1 여러 가지 함수의 미분

01 지수함수와 로그함수의 극한과 미분 69~81쪽

01 $\neg. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{7}{10}\right)^x = \left(\frac{7}{10}\right)^0 = 1$

$\neg. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$ $\neg. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^x = \infty$

$\neg. \lim_{x \rightarrow -1} 8^x = 8^{-1} = \frac{1}{8}$

$\neg. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{2}\right)^x = \infty$ $\neg. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{9}{4}\right)^x = 0$

따라서 보기 중 극한값이 존재하는 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

02 (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7^{x+1} - 1}{7^x + 3^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - \left(\frac{1}{7}\right)^x}{1 + \left(\frac{3}{7}\right)^x} = \frac{7-0}{1+0} = 7$

(2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6^x + 2^{2x-1}}{6^{x-1} - 2^{2x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^x + \frac{1}{2}}{\frac{1}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^x - 1}$

$$= \frac{0 + \frac{1}{2}}{0 - 1} = -\frac{1}{2}$$

03 $\neg. \lim_{x \rightarrow 2} \log_8 x = \log_8 2 = \log_2 2 = \frac{1}{3}$

$\neg. \lim_{x \rightarrow 0+} \log_5 x = -\infty$ $\neg. \lim_{x \rightarrow \infty} \log_9 x = \infty$

$\neg. \lim_{x \rightarrow 1} \log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$

$\neg. \lim_{x \rightarrow 0+} \log_{\frac{3}{7}} x = \infty$ $\neg. \lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{2}{9}} x = -\infty$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

04 (1) $\lim_{x \rightarrow -1} \log_6 \frac{2x^2 - 1}{x + 7} = \log_6 \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 1}{x + 7}$

$$= \log_6 \frac{1}{6} = \log_6 6^{-1} = -1$$

(2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{(2x-1)(5x+1)}{x^2+3x+4}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log \frac{10x^2 - 3x - 1}{x^2 + 3x + 4}$$

$$= \log \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10x^2 - 3x - 1}{x^2 + 3x + 4}$$

$$= \log \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}$$

$$= \log 10 = 1$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 3} \{\log_4(4-x) - \log_4(x-1)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \log_4 \frac{4-x}{x-1}$$

$$= \log_4 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4-x}{x-1}$$

$$= \log_4 \frac{1}{2} = \log_{2^2} 2^{-1} = -\frac{1}{2}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \{\log_{\frac{1}{3}}(x^3-1) - \log_{\frac{1}{3}}(9x^3+1)\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x^3-1}{9x^3+1}$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-1}{9x^3+1}$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{x^3}}{9+\frac{1}{x^3}}$$

$$= \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2$$

05 (1) $6x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1+6x)^{\frac{1}{2x}} &= \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{3}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \{(1+t)^{\frac{1}{t}}\}^3 = e^3 \end{aligned}$$

(2) $2x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{\frac{x}{3}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{6}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right\}^{\frac{1}{6}} = e^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

(3) $\frac{x}{5}=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{2x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{10t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right\}^{10} = e^{10} \end{aligned}$$

06 (1) $\ln e^7 = 7 \times \ln e = 7$

$$(2) \ln e\sqrt{e} = \ln e^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \times \ln e = \frac{3}{2}$$

$$(3) \ln \frac{1}{\sqrt[3]{e}} = \ln e^{-\frac{1}{3}} = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \ln e = -\frac{1}{3}$$

07 (1) $2x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{4x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{2t} \\ &= \frac{1}{2} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln(1+t) \\ &= \frac{1}{2} \times \lim_{t \rightarrow 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} \\ &= \frac{1}{2} \times \ln \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} \\ &= \frac{1}{2} \times \ln e = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2) $3x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{5x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t-1}{\frac{5}{3}t} \\ &= \frac{3}{5} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t-1}{t} \\ &= \frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

08 (1) $y=e^{x+4}=e^4 \times e^x$ 이므로

$$y' = e^4 \times e^x = e^{x+4}$$

(2) $y=2^{2x-1}=2^{-1} \times 4^x = \frac{1}{2} \times 4^x$ 이므로

$$y' = \frac{1}{2} \times 4^x \ln 4 = 2^{2x} \ln 2$$

(3) $y' = e^x \times (e^x - 2) + (e^x + 1) \times e^x$
 $= e^x(2e^x - 1)$

(4) $y' = 6^x \ln 6 \times (x^2 + 1) + 6^x \times 2x$
 $= 6^x(x^2 \ln 6 + 2x + \ln 6)$

09 $e^{x-2} = e^{-2} \times e^x = \frac{1}{e^2} \times e^x$ 이므로

$$(e^{x-2})' = \frac{1}{e^2} \times e^x = e^{x-2}$$

$$\begin{aligned} \text{즉, } f'(x) &= 2(x+1) \times e^{x-2} + (x+1)^2 \times e^{x-2} \\ &= (x^2 + 4x + 3)e^{x-2} \end{aligned}$$

따라서 $f'(2) = 15$

10 (1) $y = \ln 5x = \ln 5 + \ln x$ 이므로

$$y' = \frac{1}{x}$$

(2) $y' = \log_2 \frac{x}{8} = \log_2 x - \log_2 8 = \log_2 x - 3$ 이므로

$$y' = \frac{1}{x \ln 2}$$

(3) $y' = 2x \times \ln x + (x^2 + 2) \times \frac{1}{x}$

$$= 2x \ln x + x + \frac{2}{x}$$

(4) $y' = (e^x - 1) \times \log_3 x + (e^x - x) \times \frac{1}{x \ln 3}$

$$= (e^x - 1) \log_3 x + \frac{e^x - x}{x \ln 3}$$

11 $f(x) = x^2 \log_4 x$ 라고 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \times \log_4 x + x^2 \times \frac{1}{x \ln 4} \\ &= 2x \log_4 x + \frac{x}{2 \ln 2} \end{aligned}$$

따라서 점 (2, 2)에서의 접선의 기울기는

$$f'(2) = 2 + \frac{1}{\ln 2}$$

12 $f(x) = ax + b \ln x$ 라고 하면 $f(1) = 2$ 에서

$$a = 2$$

즉, $f(x) = 2x + b \ln x$ 이고

$$f'(x) = 2 + \frac{b}{x}$$

이때 $f'(1) = 3$ 에서

$$2 + b = 3, b = 1$$

02 삼각함수의 덧셈정리

82~90쪽

01 (1) $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$\csc 60^\circ = \frac{1}{\sin 60^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(2) $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 이므로

$$\sec \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(3) $\tan \frac{5}{4}\pi = 1$ 이므로

$$\cot \frac{5}{4}\pi = \frac{1}{\tan \frac{5}{4}\pi} = 1$$

02 (1) $\sin 105^\circ = \sin (60^\circ + 45^\circ)$

$$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

(2) $\cos \frac{5}{12}\pi = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right)$

$$= \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{6} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(3) $\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right)$

$$= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

이므로

$$\csc \frac{\pi}{12} = \frac{4}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

03 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 이면 $\cos \alpha > 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

또 $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 이면 $\sin \beta > 0$ 이므로

$$\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3} \right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(1) $\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(-\frac{1}{3} \right) + \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}$$

(2) $\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \times \left(-\frac{1}{3} \right) - \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= -\frac{5\sqrt{3}}{9}$$

(3) $\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3} \times \left(-\frac{1}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= -\frac{\sqrt{6}}{3}$$

(4) $\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3} \times \left(-\frac{1}{3} \right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{9}$$

04 (1) $\tan 15^\circ = \tan (45^\circ - 30^\circ)$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \times \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

$$= \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

(2) $\tan \frac{7}{12}\pi = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right)$

$$= \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - 1 \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$

이므로

$$\cot \frac{7}{12}\pi = \frac{1}{-2 - \sqrt{3}} = -2 + \sqrt{3}$$

05 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 이면 $\cos \alpha > 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{즉, } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2}$$

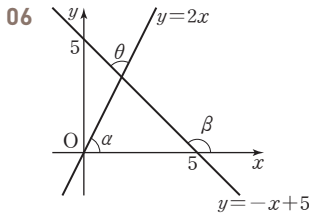
또 $\pi < \beta < \frac{3}{2}\pi$ 이면 $\cos \beta < 0$ 이므로

$$\cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$$

$$\text{즉, } \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} (1) \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}}{1 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{4}} = -\frac{2}{11} \end{aligned}$$



두 직선 $y=2x$, $y=-x+5$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α , β 라고 하면

$$\tan \alpha = 2, \tan \beta = -1$$

이때 $\beta = \alpha + \theta$ 에서 $\theta = \beta - \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} \\ &= \frac{-1 - 2}{1 + (-1) \times 2} = 3 \end{aligned}$$

07 $\angle DBC = \alpha$ 라고 하면 직각삼각형 DBC에서

$$\tan \alpha = \frac{2}{3} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \tan(\theta + \alpha) &= \frac{\tan \theta + \tan \alpha}{1 - \tan \theta \tan \alpha} \\ &= \frac{\frac{5}{12} + \frac{2}{3}}{1 - \frac{5}{12} \times \frac{2}{3}} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

직각삼각형 ABC에서 $\tan(\theta + \alpha) = \frac{\overline{AD} + 2}{3}$ 이므로

$$\frac{\overline{AD} + 2}{3} = \frac{3}{2}, \overline{AD} = \frac{5}{2}$$

03 삼각함수의 극한과 미분

91~99쪽

01 (1) $\lim_{x \rightarrow \pi} (2 - \cos 2x) = 2 - 1 = 1$

(2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x}{1 + \tan 2x} = \frac{2 \times 1}{1 + 0} = 2$

(3) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (\tan x + 3 \cot x) = \sqrt{3} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} (\sec 2x + \csc x) = 2 + 2 = 4$

02 (1) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x(1 + \cos x)}{3 \sin^2 x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x(1 + \cos x)}{3(1 - \cos^2 x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x(1 + \cos x)}{3(1 + \cos x)(1 - \cos x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos x}{3(1 - \cos x)} = \frac{-1}{3 \times 2} = -\frac{1}{6}$

(2) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sec x - \tan x)$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{\cos x(1 + \sin x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x(1 + \sin x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x(1 + \sin x)}$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{0}{1 + 1} = 0$

03 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin 2x}{3 \cos x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - 2 \sin x \cos x}{3 \cos x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x(1 - 2 \sin x)}{3 \cos x}$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - 2 \sin x}{3} = \frac{1 - 2}{3} = -\frac{1}{3}$

04 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{7}{4} \right)$
 $= 1 \times \frac{7}{4} = \frac{7}{4}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\tan 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x} \times \frac{6x}{\tan 6x} \times \frac{1}{3} \right)$
 $= 1 \times 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
 05 \quad (1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x(1 + \cos x)}{\sin^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \cos x)}{\sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \times \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x) \\
 &= 1 \times 2 = 2
 \end{aligned}$$

(2) $x - 2 = t$ 로 놓으면 $x = 2 + t$ 이고,
 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin \pi x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin (2\pi + \pi t)} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \pi t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\pi t}{\sin \pi t} \times \frac{1}{\pi} \right) \\
 &= 1 \times \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 06 \quad (1) y' &= \sqrt{3}(-\sin x) - 2 \cos x \\
 &= -\sqrt{3} \sin x - 2 \cos x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) y' &= (\cos x + \sin x)e^x + (\sin x - \cos x)e^x \\
 &= 2e^x \sin x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 07 \quad f'(x) &= a \cos x \times \cos x + (1 + a \sin x) \times (-\sin x) \\
 &= a \cos^2 x - \sin x - a \sin^2 x
 \end{aligned}$$

이때 $f'(\pi) = 2$ 에서

$$a = 2$$

따라서 $f(x) = (1 + 2 \sin x) \cos x$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

2 여러 가지 미분법

01 함수의 몫의 미분법

109~112쪽

$$\begin{aligned}
 01 \quad (1) y' &= -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} \\
 (2) y' &= \frac{1 \times (x^2 + 2x + 3) - (x - 2)(2x + 2)}{(x^2 + 2x + 3)^2} \\
 &= \frac{-x^2 + 4x + 7}{(x^2 + 2x + 3)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 02 \quad f'(x) &= \frac{\cos x \times e^x - \sin x \times e^x}{(e^x)^2} \\
 &= \frac{\cos x - \sin x}{e^x}
 \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}
 &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi - 2h) - f(\pi)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi - 2h) - f(\pi)}{-2h} \times (-2) \\
 &= -2f'(\pi) \\
 &= (-2) \times \left(-\frac{1}{e^\pi}\right) = \frac{2}{e^\pi}
 \end{aligned}$$

$$03 \quad (1) y' = 3 \sec x \tan x - 2 \csc x \cot x$$

$$\begin{aligned}
 (2) y' &= 1 \times \cot x + x \times (-\csc^2 x) \\
 &= \cot x - x \csc^2 x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 04 \quad f'(x) &= -\frac{\sec^2 x}{(a + \tan x)^2} \text{이고, } f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1 \text{에서} \\
 &\quad -\frac{4}{(a + \sqrt{3})^2} = -1, (a + \sqrt{3})^2 = 4 \\
 &\text{즉, } a = -2 - \sqrt{3} \text{ 또는 } a = 2 - \sqrt{3} \\
 &\text{그런데 } a > 0 \text{이므로 } a = 2 - \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

02 합성함수의 미분법

113~117쪽

$$\begin{aligned}
 01 \quad (1) u &= x^4 + x^3 - 4 \text{로 놓으면 } y = u^{10} \text{에서} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 10u^9 \times (4x^3 + 3x^2) \\
 &= 10x^2(4x + 3)(x^4 + x^3 - 4)^9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) u &= 3x - 2 \text{로 놓으면 } y = e^u \text{에서} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = e^u \times 3 = 3e^{3x-2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) u &= x^2 + x + 1 \text{로 놓으면 } y = \log u \text{에서} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = \frac{1}{u \ln 10} \times (2x + 1) \\
 &= \frac{2x + 1}{(x^2 + x + 1) \ln 10}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) u &= 1 - 5x \text{로 놓으면 } y = \cot u \text{에서} \\
 \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = -\csc^2 u \times (-5) \\
 &= 5 \csc^2(1 - 5x)
 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 (1) y' &= 10(x^4 + x^3 - 4)^9 \times (x^4 + x^3 - 4)' \\
 &= 10(x^4 + x^3 - 4)^9 \times (4x^3 + 3x^2) \\
 &= 10x^2(4x + 3)(x^4 + x^3 - 4)^9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) y' &= e^{3x-2} \times (3x - 2)' \\
 &= e^{3x-2} \times 3 = 3e^{3x-2}
 \end{aligned}$$

$$(3) y' = \frac{1}{(x^2+x+1) \ln 10} \times (x^2+x+1)'$$

$$= \frac{2x+1}{(x^2+x+1) \ln 10}$$

$$(4) y' = -\csc^2(1-5x) \times (1-5x)'$$

$$= -\csc^2(1-5x) \times (-5)$$

$$= 5 \csc^2(1-5x)$$

02 $u = \frac{ax-1}{2x+1}$ 로 놓으면 $y=u^4$ 에서

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 4u^3 \times \frac{a+2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{4(a+2)(ax-1)^3}{(2x+1)^5}$$

이때 $f'(0)=8$ 에서

$$-4(a+2)=8, a=-4$$

03 (1) $\frac{1}{x^8} = x^{-8}$ 이므로

$$y' = -8x^{-9} = -\frac{8}{x^9}$$

(2) $\sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{3}{4}}$ 이므로

$$y' = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$$

(3) $y' = \sqrt{2x}^{\sqrt{2}-1}$

04 (1) $y' = \frac{(x^3+4)'}{x^3+4} = \frac{3x^2}{x^3+4}$

(2) $y' = \frac{(\sin x)'}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

(3) $y' = \frac{(5^x-1)'}{(5^x-1) \ln 5} = \frac{5^x \ln 5}{(5^x-1) \ln 5} = \frac{5^x}{5^x-1}$

(4) $y' = \frac{(2x-\cos x)'}{(2x-\cos x) \ln 3} = \frac{2+\sin x}{(2x-\cos x) \ln 3}$

03 매개변수로 나타낸 함수의 미분법 118~120쪽

01 (1) $x = \frac{1}{3}t$ 에서 $t=3x$ 를 $y=t^2-t+7$ 에 대입하면

$$y = (3x)^2 - 3x + 7 = 9x^2 - 3x + 7$$

(2) $x = 2 \tan t, y = 3 \sec t$ 에서

$$\tan t = \frac{x}{2}, \sec t = \frac{y}{3}$$

이것을 $1 + \tan^2 t = \sec^2 t$ 에 대입하면

$$1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{y}{3}\right)^2$$

즉, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$

02 (1) $\frac{dx}{dt} = 2e^{2t+1}, \frac{dy}{dt} = \frac{2t}{t^2+1}$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2t}{t^2+1}}{\frac{2t}{t^2+1}} = \frac{t}{(t^2+1)e^{2t+1}}$$

(2) $\frac{dx}{dt} = \sec^2 t, \frac{dy}{dt} = 4t$ 이므로

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4t}{\sec^2 t}$$

04 음함수와 역함수의 미분법

121~126쪽

01 (1) 양변의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2xy + x^2 \frac{dy}{dx} + e^y \frac{dy}{dx} = 0$$

따라서 $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2 + e^y}$

(2) 양변의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$2x - 2 \frac{dy}{dx} - \sin y \frac{dy}{dx} = 0$$

따라서 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2 + \sin y}$

02 양변의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$e^x + \ln y \times \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0$$

즉, $\frac{dy}{dx} = -\frac{e^x}{1 + \ln y}$ (단, $1 + \ln y \neq 0$)

따라서 점 $(1, e)$ 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{e}{2}$ 이다.

03 (1) 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = 3^y \ln 3 + 3y^2$$

따라서 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3^y \ln 3 + 3y^2}$

(2) 양변을 y 에 대하여 미분하면

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y-2}$$

따라서 $\frac{dy}{dx} = y-2$

04 $f^{-1}(1)=a$ 라고 하면 $f(a)=1$

즉, $2a^3 + a + 1 = 1$ 에서

$$2a^3 + a = 0, a(2a^2 + 1) = 0$$

그런데 $2a^2 + 1 > 0$ 이므로 $a = 0$

따라서 $f^{-1}(1)=0$ 이고, $f'(x)=6x^2+1$ 에서

$f'(0)=1$ 이므로

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(0)} = 1$$

3 도함수의 활용

01 접선의 방정식

135-141쪽

01 (1) $f(x)=\ln(3x-2)$ 라고 하면 $f'(x)=\frac{3}{3x-2}$

점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-0=3(x-1), \text{ 즉 } y=3x-3$$

(2) $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ 이라고 하면 $f'(x)=\frac{3}{(x+1)^2}$

점 $(1, \frac{1}{2})$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=\frac{3}{4}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}(x-1), \text{ 즉 } y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$$

02 (1) $f(x)=e^{2x-1}$ 이라고 하면 $f'(x)=2e^{2x-1}$

접점의 좌표를 (t, e^{2t-1}) 이라고 하면 접선의 기울기가 2이므로 $f'(t)=2$ 에서

$$2e^{2t-1}=2, e^{2t-1}=1$$

즉, $2t-1=0$ 이므로 $t=\frac{1}{2}$

따라서 접점의 좌표는 $(\frac{1}{2}, 1)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=2\left(x-\frac{1}{2}\right), \text{ 즉 } y=2x$$

(2) $f(x)=x \ln x$ 라고 하면 $f'(x)=\ln x+1$

접점의 좌표를 $(t, t \ln t)$ 라고 하면 접선의 기울기가 2이므로 $f'(t)=2$ 에서

$$\ln t+1=2, t=e$$

따라서 접점의 좌표는 (e, e) 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-e=2(x-e), \text{ 즉 } y=2x-e$$

03 $f(x)=\sqrt{4x-3}$ 이라고 하면 $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{4x-3}}$

접점의 좌표를 $(t, \sqrt{4t-3})$ 이라고 하면 직선

$$x+2y-4=0, \text{ 즉 } y=-\frac{1}{2}x+2 \text{와 수직인 직선의 기울}$$

기가 2이므로 $f'(t)=2$ 에서

$$\frac{2}{\sqrt{4t-3}}=2, \sqrt{4t-3}=1$$

즉, $t=1$

따라서 접점의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-1=2(x-1), \text{ 즉 } y=2x-1$$

04 (1) $f(x)=\frac{2}{x}$ 라고 하면 $f'(x)=-\frac{2}{x^2}$

접점의 좌표를 $(t, \frac{2}{t})$ 라고 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=-\frac{2}{t^2} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-\frac{2}{t}=-\frac{2}{t^2}(x-t)$$

$$y=-\frac{2}{t^2}x+\frac{4}{t} \quad \dots\dots ①$$

이 접선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1=\frac{4}{t}, t=4$$

따라서 $t=4$ 를 ①에 대입하면 구하는 접선의 방정식

$$\text{은 } y=-\frac{1}{8}x+1$$

(2) $f(x)=e^{3x}$ 이라고 하면 $f'(x)=3e^{3x}$

접점의 좌표를 (t, e^{3t}) 이라고 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=3e^{3t} \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-e^{3t}=3e^{3t}(x-t)$$

$$y=3e^{3t}x+e^{3t}(1-3t) \quad \dots\dots ①$$

이 접선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0=e^{3t}(1-3t)$$

그런데 $e^{3t}>0$ 이므로

$$1-3t=0, t=\frac{1}{3}$$

따라서 $t=\frac{1}{3}$ 을 ①에 대입하면 구하는 접선의 방정식

$$\text{은 } y=3ex$$

05 $t=-1$ 에 대응하는 점의 좌표는 $(1, -3)$

$$\frac{dx}{dt}=2t, \frac{dy}{dt}=1-\frac{2}{t^2} \text{이므로}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1-\frac{2}{t^2}}{2t}=\frac{t^2-2}{2t^3}$$

$t=-1$ 에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{2}$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-(-3)=\frac{1}{2}(x-1), \text{ 즉 } y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$$

06 $2x^2-3y^2=5$ 의 각 항을 x 에 대하여 미분하면

$$4x-6y\frac{dy}{dx}=0, \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y} \text{(단, } y \neq 0 \text{)}$$

점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 기울기는 $-\frac{4}{3}$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-(-1)=-\frac{4}{3}(x-2), \text{ 즉 } y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$$

- 01 (1) $y' = 4x^3 + 3x^2$ 이므로 $y'' = 12x^2 + 6x$
 (2) $y' = -e^{2-x}$ 이므로 $y'' = e^{2-x}$
 (3) $y' = \sec^2 x$ 이므로 $y'' = 2\sec^2 x \tan x$
 (4) $y' = \frac{2\ln x}{x}$ 이므로 $y'' = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}$

- 02 $f(x) = \sin^2 x$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin x \cos x \\ f'(x) &= 0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값을 구하면} \\ 2\sin x \cos x &= 0 \\ \text{이때 } 0 < x < \pi \text{이면 } 0 < \sin x < 1 \text{이므로} \\ \cos x &= 0 \\ \text{즉, } x &= \frac{\pi}{2} \\ f''(x) &= 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \text{이므로} \\ f''\left(\frac{\pi}{2}\right) &< 0 \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 극대이고 극댓값은 1, 극솟값은 없다.

- 03 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \ln x$ 라고 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= x - \ln x - 1, f''(x) = 1 - \frac{1}{x} \\ f''(x) &= 0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값은} \\ x &= 1 \\ \text{이때 } 0 < x < 1 \text{에서 } f''(x) < 0, x > 1 \text{에서 } f''(x) > 0 \\ \text{이다. 따라서 곡선 } y &= \frac{1}{2}x^2 - x \ln x \text{는 구간 } (0, 1) \text{에서} \\ \text{위로 볼록하고, 구간 } (1, \infty) \text{에서 아래로 볼록하다.} \end{aligned}$$

- 04 (1) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ 이라고 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - \frac{1}{x^2}, f''(x) = 2 + \frac{2}{x^3} \\ f''(x) &= 0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값을 구하면} \\ 2 + \frac{2}{x^3} &= 0, x^3 = -1 \\ \text{그런데 } x &\text{는 실수이므로 } x = -1 \\ \text{따라서 } x &= -1 \text{의 좌우에서 } f''(x) \text{의 부호가 바뀌} \\ \text{므로 변곡점의 좌표는 } &(-1, 0) \end{aligned}$$

- (2) $f(x) = (x^2 + 1)e^x$ 이라고 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2 + 2x + 1)e^x \\ f''(x) &= (x^2 + 4x + 3)e^x \\ f''(x) &= 0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값을 구하면} \\ (x^2 + 4x + 3)e^x &= 0 \end{aligned}$$

그런데 $e^x > 0$ 이므로

$$x^2 + 4x + 3 = 0, (x+3)(x+1) = 0$$

즉, $x = -3$ 또는 $x = -1$

이때 $x = -3$ 과 $x = -1$ 의 좌우에서 각각 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로 변곡점의 좌표는

$$\left(-3, \frac{10}{e^3}\right), \left(-1, \frac{2}{e}\right)$$

- 05 $f(x) = \frac{x}{e^x}$ 라고 하면 함수 $f(x)$ 의 그래프의 정의역은 실수 전체의 집합이다.

또 $f(0) = 0$ 이므로 원점을 지난다.

$$f'(x) = \frac{1-x}{e^x} \text{이므로 } f'(x) = 0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값을 구하면}$$

$$\frac{1-x}{e^x} = 0$$

그런데 $e^x > 0$ 이므로 $x = 1$

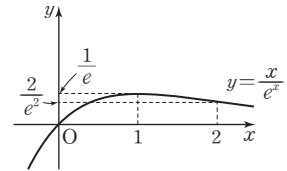
$$f''(x) = \frac{x-2}{e^x} \text{이므로 } f''(x) = 0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값을 구하면}$$

$$\frac{x-2}{e^x} = 0$$

그런데 $e^x > 0$ 이므로 $x = 2$

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	-	-
$f''(x)$	-	-	-	0	+
$f(x)$		$\frac{1}{e}$ 극대		$\frac{2}{e^2}$ 변곡점	

따라서 함수 $y = \frac{x}{e^x}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



- 06 $f(x) = e^x - x + 2$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x - 1 \\ -2 \leq x \leq 1 \text{에서 } f'(x) &= 0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값은} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

x	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$\frac{1}{e^2} + 4$		3		$e + 1$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 최대이고 최댓값은 $\frac{1}{e^2} + 4$, $x = 0$ 에서 최소이고 최솟값은 3이다.

01 $f(x)=x^2-2\ln x-2$ 라고 하면 $f'(x)=2x-\frac{2}{x}$

$f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구하면

$$2x-\frac{2}{x}=0, x^2=1$$

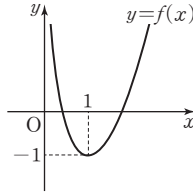
그런데 $x>0$ 이므로 $x=1$

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	-1	/

또 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)=\infty$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 구하는 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



02 $f(x)=x-\ln(x^2+x+1)$ 이라고 하면

$$f'(x)=1-\frac{2x+1}{x^2+x+1}=\frac{x^2-x}{x^2+x+1}$$

$f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구하면

$$\frac{x^2-x}{x^2+x+1}=0$$

그런데 $x^2+x+1>0$ 이므로

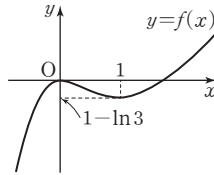
$$x^2-x=0, x(x-1)=0$$

즉, $x=0$ 또는 $x=1$

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	0	\	$1-\ln 3$	/

따라서 서로 다른 세 실근을 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위는

$$1-\ln 3 < k < 0$$



03 주어진 방정식에서

$$\sqrt{x}-x=k$$

$$f(x)=\sqrt{x}-x \text{라고 하면 } f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-1$$

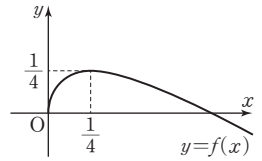
$x \geq 0$ 에서 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구하면

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}-1=0, x=\frac{1}{4}$$

x	0	...	$\frac{1}{4}$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	0	/	$\frac{1}{4}$	\

따라서 실근을 갖지 않도록 하는 실수 k 의 값의 범위는

$$k > \frac{1}{4}$$



04 주어진 부등식에서

$$x-\ln(x+1) \geq 0$$

$f(x)=x-\ln(x+1)$ 이라고 하면

$$f'(x)=1-\frac{1}{x+1}$$

$x > -1$ 에서 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x=0$$

x	-1	...	0	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	0	/

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최소이고 최솟값은 0이므로

$x > -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$$x-\ln(x+1) \geq 0$$

따라서 $x > -1$ 일 때, 주어진 부등식은 성립한다.

05 주어진 부등식에서

$$\sin x \cos x + \sin x - k < 0$$

$f(x)=\sin x \cos x + \sin x - k$ 라고 하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos^2 x - \sin^2 x + \cos x \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) + \cos x \\ &= 2\cos^2 x + \cos x - 1 \\ &= (2\cos x - 1)(\cos x + 1) \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x = -1$$

이때 $0 < x < \pi$ 이면 $-1 < \cos x < 1$ 이므로

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } x = \frac{\pi}{3}$$

x	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		/	$\frac{3\sqrt{3}}{4}-k$	\	

함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{3}$ 에서 최대이고 최댓값은 $\frac{3\sqrt{3}}{4}-k$

이므로 $0 < x < \pi$ 일 때, 부등식 $f(x) < 0$ 이 성립하려면

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}-k < 0$$

$$\text{따라서 } k > \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

- 01 (1) 시각 t 에서 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -\frac{2t}{(t^2+1)^2}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{6t^2-2}{(t^2+1)^3}$$

따라서 $t=1$ 에서 점 P의 속도는 $-\frac{1}{2}$ 이고, 가속도는 $\frac{1}{2}$ 이다.

- (2) 시각 t 에서 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 1 + \pi \cos \pi t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\pi^2 \sin \pi t$$

따라서 $t=1$ 에서 점 P의 속도는 $1-\pi$ 이고, 가속도는 0이다.

- 02 시각 t 에서 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = \cos t + \sin t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\sin t + \cos t$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$\cos t + \sin t = 0, \sin t = -\cos t$$

$$t > 0 \text{이므로 } t = \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, \dots$$

즉, $t = \frac{3}{4}\pi$ 일 때, 점 P는 처음으로 운동 방향을 바꾼다.

따라서 구하는 가속도는 $-\sqrt{2}$ 이다.

- 03 (1) $\frac{dx}{dt} = 6t, \frac{dy}{dt} = 3t^2$ 이므로

$$t=1 \text{에서 점 P의 속도는 } (6, 3)$$

$$t=1 \text{에서 점 P의 속력은 } \sqrt{6^2+3^2} = 3\sqrt{5}$$

- (2) $\frac{d^2x}{dt^2} = 6, \frac{d^2y}{dt^2} = 6t$ 이므로

$$t=1 \text{에서 점 P의 가속도는 } (6, 6)$$

$$t=1 \text{에서 점 P의 가속도의 크기는 } \sqrt{6^2+6^2} = 6\sqrt{2}$$

- 04 $\frac{dx}{dt} = a \ln t + a, \frac{dy}{dt} = 2\sqrt{t}$ 이므로

시각 t 에서 점 P의 속력은

$$\sqrt{(a \ln t + a)^2 + (2\sqrt{t})^2}$$

이때 시각 $t=1$ 에서 점 P의 속력이 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$\sqrt{a^2+4} = 2\sqrt{2}$$

$$a^2+4=8, a^2=4$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a=2$

III 적분법

1 여러 가지 적분법

01 여러 가지 함수의 적분

181~193쪽

01 (1) $\int \frac{2}{x^9} dx = 2 \int x^{-9} dx = -\frac{1}{4}x^{-8} + C$

$$= -\frac{1}{4x^8} + C$$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C$

$$= 2\sqrt{x} + C$$

(3) $\int \frac{1}{5x} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{x} dx = \frac{1}{5} \ln |x| + C$

02 (1) $\int \frac{(x+1)^3}{x^2} dx = \int \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^2} dx$

$$= \int \left(x + 3 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 3x + 3 \ln |x| - \frac{1}{x} + C$$

(2) $\int \left(x^2\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} \right) dx = \int \left(x^{\frac{5}{2}} + x^{-\frac{3}{2}} \right) dx$

$$= \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + C$$

03 $f(x) = \int \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2 dx$

$$= \int \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{4x} \right) dx$$

$$= x + 2\sqrt{x} + \frac{1}{4} \ln |x| + C$$

이때 $f(1)=3$ 에서

$$3+C=3, C=0$$

따라서 $f(x) = x + 2\sqrt{x} + \frac{1}{4} \ln |x|$

04 (1) $\int e^{x-3} dx = \int (e^x \times e^{-3}) dx$

$$= e^{-3} \int e^x dx$$

$$= e^{-3} \times e^x + C$$

$$= e^{x-3} + C$$

(2) $\int 7^{2x-1} dx = \int (49^x \times 7^{-1}) dx$

$$= \frac{1}{7} \int 49^x dx$$

$$= \frac{1}{7} \times \frac{49^x}{\ln 49} + C$$

$$= \frac{7^{2x-1}}{2 \ln 7} + C$$

$$\begin{aligned}
05 \quad & \int (10^x+1)^2 dx + \int (10^x-1)^2 dx \\
&= \int \{(10^x+1)^2 + (10^x-1)^2\} dx \\
&= \int (2 \times 100^x + 2) dx \\
&= 2 \times \frac{100^x}{\ln 100} + 2x + C \\
&= \frac{10^{2x}}{\ln 10} + 2x + C
\end{aligned}$$

06 $a=e^{\frac{1}{3}}$ 이라고 하면 $f(x)=\frac{1}{2}(a^x+a^{-x})$ 에서

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} \int \left\{ a^x - \left(\frac{1}{a}\right)^x \right\} dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{a^x}{\ln a} + \frac{a^{-x}}{\ln a} \right) + C \\
&= \frac{3}{2} \left(e^{\frac{x}{3}} + e^{-\frac{x}{3}} \right) + C
\end{aligned}$$

이때 $f(0)=3$ 에서

$$3+C=3, C=0$$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}(e^{\frac{x}{3}}+e^{-\frac{x}{3}})$ 이므로

$$f(3)=\frac{3}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$$

07 (1) $\int (5 \sec^2 x + \sin x) dx = 5 \tan x - \cos x + C$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \int \sec x (3 \tan x - \cos x) dx \\
&= \int 3 \sec x \tan x dx - \int 1 dx \\
&= 3 \sec x - x + C
\end{aligned}$$

08 $f(x)=\int (\cos x - \sec^2 x) dx$
 $=\sin x - \tan x + C$

이때 $f(0)=1$ 에서 $C=1$ 이므로

$$f(x)=\sin x - \tan x + 1$$

따라서 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

09 (1) $\int \frac{1-\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x}{\cos x} dx = \int \cos x dx$
 $=\sin x + C$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \int (\tan x + \cot x)^2 dx \\
&= \int (\tan^2 x + 2 + \cot^2 x) dx \\
&= \int (1 + \tan^2 x) dx + \int (1 + \cot^2 x) dx \\
&= \int \sec^2 x dx + \int \csc^2 x dx \\
&= \tan x - \cot x + C
\end{aligned}$$

10 (1) $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+1}{x} dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x} \right) dx$
 $= \left[2\sqrt{x} + \ln |x| \right]_1^4 = 2 + 2 \ln 2$

(2) $\int_{-1}^1 e^{x+1} dx = \left[e^{x+1} \right]_{-1}^1 = e^2 - 1$

(3) $\int_0^1 2^{2x+1} dx = \left[\frac{2^{2x}}{\ln 2} \right]_0^1 = \frac{3}{\ln 2}$

(4) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 - \csc^2 x) dx = \left[x + \cot x \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6} - \frac{2\sqrt{3}}{3}$

11 (1) $\int_{-1}^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1} dx - \int_{-1}^1 \frac{1}{e^x+1} dx$
 $= \int_{-1}^1 \frac{e^{2x}-1}{e^x+1} dx = \int_{-1}^1 \frac{(e^x+1)(e^x-1)}{e^x+1} dx$
 $= \int_{-1}^1 (e^x-1) dx$
 $= \left[e^x - x \right]_{-1}^1 = e - \frac{1}{e} - 2$

(2) $\int_0^4 (3^x-1)^2 dx - \int_1^4 (3^x-1)^2 dx$
 $= \int_0^4 (3^x-1)^2 dx + \int_4^1 (3^x-1)^2 dx$
 $= \int_0^1 (3^x-1)^2 dx = \int_0^1 (9^x - 2 \times 3^x + 1) dx$
 $= \left[\frac{3^{2x}}{2 \ln 3} - \frac{2 \times 3^x}{\ln 3} + x \right]_0^1 = 1$

12 $f(x)=\frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1}=x-\sqrt{x}+1$ 이므로
 $\int_1^9 f(x) dx - \int_4^9 f(x) dx - \int_2^4 f(x) dx$
 $= \int_1^9 f(x) dx + \int_9^4 f(x) dx + \int_4^2 f(x) dx$
 $= \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x - \sqrt{x} + 1) dx$
 $= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + x \right]_1^2 = \frac{19}{6} - \frac{4\sqrt{2}}{3}$

13 (1) $f(x)=|2 \cos x|$ 라고 하면

$$f(x)=\begin{cases} 2 \cos x & (0 \leq x < \frac{\pi}{2}) \\ -2 \cos x & (\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi) \end{cases}$$

따라서 구간을 나누어 정적분의 값을 구하면

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\pi} |2 \cos x| dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-2 \cos x) dx \\
&= \left[2 \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[-2 \sin x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= 2 + 2 = 4
\end{aligned}$$

(2) $f(x) = |e^x - e^{-x}|$ 이라고 하면

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - e^x & (-2 \leq x < 0) \\ e^x - e^{-x} & (0 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

따라서 구간을 나누어 정적분의 값을 구하면

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^2 |e^x - e^{-x}| dx \\ &= \int_{-2}^0 (e^{-x} - e^x) dx + \int_0^2 (e^x - e^{-x}) dx \\ &= \left[-e^{-x} - e^x \right]_{-2}^0 + \left[e^x + e^{-x} \right]_0^2 \\ &= \left(-2 + e^2 + \frac{1}{e^2} \right) + \left(e^2 + \frac{1}{e^2} - 2 \right) \\ &= 2 \left(e^2 + \frac{1}{e^2} - 2 \right) \end{aligned}$$

02 치환적분법

194~203쪽

01 (1) $x^2 + 2 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 2x$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2}} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \times 2x dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 3\sqrt{t} + C \\ &= 3\sqrt{x^2+2} + C \end{aligned}$$

(2) $\cot x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = -\csc^2 x$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int \csc^2 x \cot x dx \\ &= - \int \cot x \times (-\csc^2 x) dx \\ &= - \int t dt = -\frac{1}{2} t^2 + C \\ &= -\frac{1}{2} \cot^2 x + C \end{aligned}$$

02 $f'(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$ 이고, $\ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{\sin(\ln x)}{x} dx \\ &= \int \sin(\ln x) \times \frac{1}{x} dx \\ &= \int \sin t dt \\ &= -\cos t + C = -\cos(\ln x) + C \end{aligned}$$

이때 $f(1) = 2$ 이므로

$$-1 + C = 2, C = 3$$

즉, $f(x) = -\cos(\ln x) + 3$

이 곡선이 점 (e^π, k) 를 지나므로 $k = f(e^\pi) = 4$

03 (1) $5x - 2 = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 5$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int \sin(5x-2) dx \\ &= \frac{1}{5} \int \sin(5x-2) \times 5 dx \\ &= \frac{1}{5} \int \sin t dt \\ &= -\frac{1}{5} \cos t + C \\ &= -\frac{1}{5} \cos(5x-2) + C \end{aligned}$$

(2) $3x + 1 = t$ 로 놓으면 $x = \frac{1}{3}(t-1)$ 이고, $\frac{dt}{dx} = 3$

이므로

$$\begin{aligned} & \int \frac{3x-2}{\sqrt{3x+1}} dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{3x-2}{\sqrt{3x+1}} \times 3 dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{t-3}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{3} \int \left(\sqrt{t} - \frac{3}{\sqrt{t}} \right) dt \\ &= \frac{2}{9} t\sqrt{t} - 2\sqrt{t} + C \\ &= \frac{2}{9} (3x+1)\sqrt{3x+1} - 2\sqrt{3x+1} + C \end{aligned}$$

04 (1) $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} dx$

$$= \frac{1}{2} \ln |e^{2x}-1| + C$$

(2) $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = - \int \frac{\cos x - \sin x}{\sin x + \cos x} dx$

$$= -\ln |\sin x + \cos x| + C$$

05 $\frac{2}{9x^2-1} = \frac{2}{(3x-1)(3x+1)} = \frac{1}{3x-1} - \frac{1}{3x+1}$

이므로

$$\begin{aligned} & \int \frac{2}{9x^2-1} dx \\ &= \int \left(\frac{1}{3x-1} - \frac{1}{3x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x-1} dx - \frac{1}{3} \int \frac{3}{3x+1} dx \\ &= \frac{1}{3} \ln |3x-1| - \frac{1}{3} \ln |3x+1| + C \\ &= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{3x-1}{3x+1} \right| + C \end{aligned}$$

06 $\frac{x^2+2x+3}{x+1} = \frac{(x+1)^2+2}{x+1} = x+1 + \frac{2}{x+1}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+2x+3}{x+1} dx &= \int \left(x+1 + \frac{2}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 + x + 2 \ln |x+1| + C \end{aligned}$$

07 (1) $x^3+1=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=3x^2$

$x=-1$ 일 때 $t=0$, $x=0$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 x^2 e^{x^3+1} dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{3} \times e^{x^3+1} \times 3x^2 dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{3} e^t dt \\ &= \left[\frac{1}{3} e^t \right]_0^1 = \frac{1}{3}(e-1)\end{aligned}$$

(2) $\tan x=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=\sec^2 x$

$x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{4}$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \tan x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \times \sec^2 x dx \\ &= \int_0^1 t dt \\ &= \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(3) $4x+5=t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx}=4$

$x=-1$ 일 때 $t=1$, $x=1$ 일 때 $t=9$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{4x+5}} dx &= \int_1^9 \frac{1}{4} \times \frac{1}{\sqrt{4x+5}} \times 4 dx \\ &= \int_1^9 \frac{1}{4\sqrt{t}} dt = \left[\frac{1}{2} \sqrt{t} \right]_1^9 = 1\end{aligned}$$

(4) $\frac{2}{x(x+2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^4 \frac{2}{x(x+2)} dx &= \int_1^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} \right) dx \\ &= \left[\ln|x| - \ln|x+2| \right]_1^4 \\ &= \ln 2\end{aligned}$$

03 부분적분법

204~210쪽

01 (1) $f(x)=5x$, $g'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$f'(x)=5$, $g(x)=\sin x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int 5x \cos x dx &= 5x \sin x - \int 5 \sin x dx \\ &= 5x \sin x + 5 \cos x + C\end{aligned}$$

(2) $f(x)=x$, $g'(x)=e^{3x}$ 으로 놓으면

$f'(x)=1$, $g(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$ 이므로

$$\begin{aligned}\int x e^{3x} dx &= \frac{1}{3} x e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx \\ &= \frac{1}{3} x e^{3x} - \frac{1}{9} e^{3x} + C\end{aligned}$$

02 $f'(x)=(2x+1)\ln x$ 이고,

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=2x+1$ 로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x^2+x$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^2+x) \ln x - \int (x+1) dx \\ &= (x^2+x) \ln x - \frac{1}{2} x^2 - x + C\end{aligned}$$

이때 $f(1)=0$ 이므로

$$-\frac{3}{2} + C = 0, C = \frac{3}{2}$$

따라서 $f(x) = (x^2+x) \ln x - \frac{1}{2} x^2 - x + \frac{3}{2}$ 이므로

$$f(e) = \frac{1}{2} e^2 + \frac{3}{2}$$

03 $f(x)=e^{2x}$, $g'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$f'(x)=2e^{2x}$, $g(x)=\sin x$ 이므로

$$\int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} \sin x - 2 \int e^{2x} \sin x dx$$

..... ①

$\int e^{2x} \sin x dx$ 에 부분적분법을 다시 한 번 적용하자.

$u(x)=e^{2x}$, $v'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$u'(x)=2e^{2x}$, $v(x)=-\cos x$ 이므로

$$\int e^{2x} \sin x dx = -e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x dx$$

..... ②

②를 ①에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned}\int e^{2x} \cos x dx &= e^{2x} \sin x - 2 \left(-e^{2x} \cos x + 2 \int e^{2x} \cos x dx \right) \\ &= e^{2x} (\sin x + 2 \cos x) - 4 \int e^{2x} \cos x dx\end{aligned}$$

즉, $5 \int e^{2x} \cos x dx = e^{2x} (\sin x + 2 \cos x)$ 에서

$$\int e^{2x} \cos x dx = \frac{1}{5} e^{2x} (\sin x + 2 \cos x) + C$$

04 $u(x)=x^2$, $v'(x)=\sin 2x$ 로 놓으면

$u'(x)=2x$, $v(x)=-\frac{1}{2} \cos 2x$ 이므로

$$f(x) = -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \int x \cos 2x dx$$

..... ①

$\int x \cos 2x dx$ 에 부분적분법을 다시 한 번 적용하자.

$g(x)=x$, $h'(x)=\cos 2x$ 로 놓으면

$g'(x)=1$, $h(x)=\frac{1}{2} \sin 2x$ 이므로

$$\int x \cos 2x dx = \frac{1}{2} x \sin 2x - \int \frac{1}{2} \sin 2x dx \quad \dots\dots ②$$

②를 ①에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} x \sin 2x \\ &\quad - \int \frac{1}{2} \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2} x \sin 2x + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} x^2 \right) \cos 2x + C \end{aligned}$$

이때 $f(0)=1$ 에서

$$\frac{1}{4} + C = 1, \quad C = \frac{3}{4}$$

$$\text{즉, } f(x) = \frac{1}{2} x \sin 2x + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} x^2 \right) \cos 2x + \frac{3}{4}$$

$$\text{따라서 } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} + \frac{3}{4}$$

05 (1) $f(x)=x-2$, $g'(x)=e^{x-1}$ 으로 놓으면

$$f'(x)=1, \quad g(x)=e^{x-1} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} &\int_1^2 (x-2)e^{x-1} dx \\ &= \left[(x-2)e^{x-1} \right]_1^2 - \int_1^2 e^{x-1} dx \\ &= 1 - \left[e^{x-1} \right]_1^2 = 2 - e \end{aligned}$$

(2) $f(x)=e^{-x}$, $g'(x)=\sin x$ 로 놓으면

$$f'(x)=-e^{-x}, \quad g(x)=-\cos x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi e^{-x} \sin x dx \\ &= \left[-e^{-x} \cos x \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^{-x} \cos x dx \\ &= \frac{1}{e^\pi} + 1 - \int_0^\pi e^{-x} \cos x dx \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$\int_0^\pi e^{-x} \cos x dx$ 에 부분적분법을 다시 한 번 적용

하자. $u(x)=e^{-x}$, $v'(x)=\cos x$ 로 놓으면

$$u'(x)=-e^{-x}, \quad v(x)=\sin x \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi e^{-x} \cos x dx \\ &= \left[e^{-x} \sin x \right]_0^\pi + \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx \\ &= \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

②를 ①에 대입하여 정리하면

$$\int_0^\pi e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{e^\pi} + 1 - \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx$$

$$\text{즉, } 2 \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{e^\pi} + 1 \text{에서}$$

$$\int_0^\pi e^{-x} \sin x dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{e^\pi} + 1 \right)$$

2 정적분의 활용

01 정적분과 급수

221~223쪽

$$\begin{aligned} 01 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + e^{\frac{3}{n}} + \dots + e^{\frac{n}{n}}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \times \frac{1}{n} \end{aligned}$$

이때 $f(x)=e^x$, $a=0$, $b=1$ 로 놓으면

$$\Delta x = \frac{1}{n}, \quad x_k = \frac{k}{n}$$

따라서 정적분과 급수의 합 사이의 관계에 따라

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{\frac{k}{n}} \times \frac{1}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_0^1 e^x dx \\ &= \left[e^x \right]_0^1 = e - 1 \end{aligned}$$

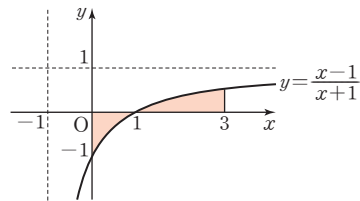
02 넓이

224~229쪽

$$01 \quad \frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1} \text{이고,}$$

곡선과 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{x-1}{x+1} = 0, \quad x=1$$



따라서 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $y \leq 0$, 닫힌구간 $[1, 3]$

에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \left(\frac{2}{x+1} - 1 \right) dx + \int_1^3 \left(1 - \frac{2}{x+1} \right) dx \\ &= \left[2 \ln |x+1| - x \right]_0^1 + \left[x - 2 \ln |x+1| \right]_1^3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

02 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $y \geq 0$, 닫힌구간 $[1, a]$ 에서

$y \leq 0$ 이다. 이때 두 도형 A, B의 넓이가 같으므로

$$\int_0^a (\sqrt{x} - x) dx = 0 \text{에서}$$

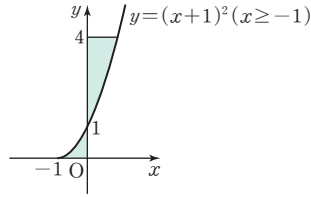
$$\left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^a = 0, \quad \frac{2}{3} a\sqrt{a} - \frac{1}{2} a^2 = 0$$

$$4a\sqrt{a} - 3a^2 = 0, \quad a\sqrt{a}(4 - 3\sqrt{a}) = 0$$

그런데 $a > 1$ 이므로

$$\sqrt{a} = \frac{4}{3}, \quad a = \frac{16}{9}$$

03 $y=(x+1)^2 (x \geq -1)$ 에서 $x=\sqrt{y}-1$



따라서 $0 \leq y \leq 1$ 에서 $\sqrt{y}-1 \leq 0$, $1 \leq y \leq 4$ 에서 $\sqrt{y}-1 \geq 0$ 이므로 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (1-\sqrt{y}) dy + \int_1^4 (\sqrt{y}-1) dy \\ &= \left[y - \frac{2}{3} y\sqrt{y} \right]_0^1 + \left[\frac{2}{3} y\sqrt{y} - y \right]_1^4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

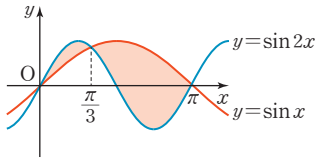
04 두 곡선의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\begin{aligned} \sin x &= \sin 2x, \sin x = 2 \sin x \cos x \\ \sin x(1-2\cos x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \sin x = 0 \text{ 또는 } \cos x = \frac{1}{2}$$

그런데 $0 \leq x \leq \pi$ 이므로

$$x=0 \text{ 또는 } x=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x=\pi$$



따라서 닫힌구간 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 에서 $\sin x \leq \sin 2x$, 닫힌

구간 $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ 에서 $\sin x \geq \sin 2x$ 이므로 구하는 넓이

S 는

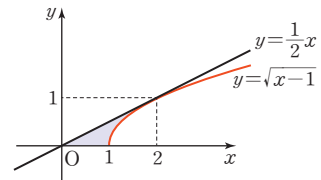
$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2x - \sin x) dx \\ &\quad + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} (\sin x - \sin 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \\ &\quad + \left[-\cos x + \frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

05 $f(x)=\sqrt{x-1}$ 이라고 하면 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=\frac{1}{2}$ 이므로

접선의 방정식은

$$y-1=\frac{1}{2}(x-2), \text{ 즉 } y=\frac{1}{2}x$$



따라서 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \frac{1}{2} x dx - \int_1^2 \sqrt{x-1} dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_0^2 - \left[\frac{2}{3} (x-1)\sqrt{x-1} \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

03 부피

230~233쪽

01 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면

$$S(x) = (\sqrt{e^x + e^{-x}})^2 = e^x + e^{-x}$$

따라서 구하는 부피 V 는

$$\begin{aligned} V &= \int_0^5 (e^x + e^{-x}) dx \\ &= \left[e^x - e^{-x} \right]_0^5 = e^5 - \frac{1}{e^5} \end{aligned}$$

02 입체도형의 부피는

$$\begin{aligned} &\int_0^a \frac{x+1}{x^2+2x+8} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a \frac{2x+2}{x^2+2x+8} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln(x^2+2x+8) \right]_0^a \\ &= \frac{1}{2} \{ \ln(a^2+2a+8) - 3\ln 2 \} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \{ \ln(a^2+2a+8) - 3\ln 2 \} = \ln 2 \text{에서}$$

$$\ln(a^2+2a+8) - 3\ln 2 = 2\ln 2$$

$$\ln(a^2+2a+8) = 5\ln 2$$

$$a^2+2a+8=32, a^2+2a-24=0$$

$$(a+6)(a-4)=0$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a=4$

03 x 좌표가 $x\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 인 점을 지나고 x 축에 수직인

평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면

$$S(x) = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{\sqrt{\cos x}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{8} \cos x$$

따라서 구하는 부피 V 는

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{8} \cos x dx \\ &= \left[\frac{\pi}{8} \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

- 04 x 좌표가 $x(1 \leq x \leq 3)$ 인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면

$$S(x) = \left\{ \frac{1}{x} - \left(-\frac{2}{x} \right) \right\}^2 = \frac{9}{x^2}$$

따라서 구하는 부피 V 는

$$V = \int_1^3 \frac{9}{x^2} dx = \left[-\frac{9}{x} \right]_1^3 = 6$$

04 속도와 거리

234~238쪽

- 01 (1) 시각 $t=2$ 에서 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t+2} \right) dt = \left[t - 4 \ln |t+2| \right]_0^2 = 2 - 4 \ln 2$$

- (2) $0 \leq t \leq 2$ 에서 $v(t) \leq 0$, $2 \leq t \leq 6$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 \left(\frac{4}{t+2} - 1 \right) dt + \int_2^6 \left(1 - \frac{4}{t+2} \right) dt \\ &= \left[4 \ln |t+2| - t \right]_0^2 + \left[t - 4 \ln |t+2| \right]_2^6 \\ &= 2 \end{aligned}$$

- 02 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v(t)=0$ 에서

$$1 - e^{1-t} = 0, t=1$$

즉, $t=1$ 일 때, 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

따라서 $0 \leq t \leq 1$ 에서 $v(t) \leq 0$ 이므로 구하는 거리는

$$\int_0^1 (e^{1-t} - 1) dt = \left[-e^{1-t} - t \right]_0^1 = e - 2$$

- 03 $\frac{dx}{dt} = 2t - 2$, $\frac{dy}{dt} = 4\sqrt{t}$ 이므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \sqrt{(2t-2)^2 + (4\sqrt{t})^2} dt = \int_1^2 (2t+2) dt \\ &= \left[t^2 + 2t \right]_1^2 = 5 \end{aligned}$$

- 04 $f(x) = \frac{\sqrt{x}(x-3)}{3} = \frac{x\sqrt{x}}{3} - \sqrt{x}$ 라고 하면

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

따라서 구하는 곡선의 길이는

$$\begin{aligned} & \int_1^4 \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right)^2} dx \\ &= \int_1^4 \left(\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx \\ &= \left[\frac{x\sqrt{x}}{3} + \sqrt{x} \right]_1^4 = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

....

시험 대비 대단원 TEST

I. 수열의 극한

292~294쪽

- | | | | |
|------------------|--------------------------|---|--------------------|
| 01 ⑤ | 02 -3 | 03 4 | 04 $a=0, b=3$ |
| 05 -4 | 06 2 | 07 $-\frac{3}{5} < x \leq -\frac{1}{5}$ | 08 1 |
| 09 -1 | 10 $\frac{1}{8}$ | 11 $\frac{7}{4}$ | 12 $\frac{\pi}{3}$ |
| 13 -2 | | | |
| 14 $\frac{1}{2}$ | 15 $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ | 16 $\frac{7}{2}$ | 17 $\frac{4}{3}$ |
| | | | 18 3π |

- 01 ① 수열 $\{7n-1\}$ 에서 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값은 한없이 커진다.

즉, 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

- ② 수열 $\{3-11^n\}$ 에서 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커진다.

즉, 주어진 수열은 음의 무한대로 발산한다.

- ③ 수열 $\{1+(-1)^n\}$ 에서 n 의 값이 한없이 커질 때, 일반항의 값은 0과 2가 교대로 나타난다.

즉, 주어진 수열은 발산(진동)한다.

$$④ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \times \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}} \right) = \infty$$

즉, 주어진 수열은 양의 무한대로 발산한다.

$$⑤ \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1 \text{ 이고 } |\sqrt{3}-1| < 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sqrt{3}+1} \right)^n = 0$$

즉, 주어진 수열은 수렴하고, 그 극한값은 0이다.

따라서 수렴하는 수열은 ⑤이다.

- 02 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ (a, β 는 실수)라고 하면

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (4a_n + b_n) = 1 \text{ 에서}$$

$$4a + \beta = 1 \quad \cdots \cdots ①$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - 2b_n) = 7 \text{ 에서}$$

$$a - 2\beta = 7 \quad \cdots \cdots ②$$

- ①, ②를 연립하여 풀면 $a=1, \beta=-3$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -3$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \\ &= 1 \times (-3) = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
03 \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + kn} - n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + kn} + n}{(\sqrt{n^2 + kn} - n)(\sqrt{n^2 + kn} + n)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + kn} + n}{kn} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{k}{n}} + 1}{k} = \frac{1+1}{k} = \frac{2}{k} \\
&\text{따라서 } \frac{2}{k} = \frac{1}{2} \text{ 이므로 } k=4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
04 \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn-2}{an^2+n+1} \text{의 값이 } 0 \text{이 아니므로 } a=0 \\
&a=0 \text{을 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn-2}{an^2+n+1} \text{에 대입하면} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{bn-2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b - \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{b-0}{1+0} = b
\end{aligned}$$

따라서 $b=3$

$$\begin{aligned}
05 \quad & \frac{2a_n+1}{3-a_n} = b_n \text{이라고 하면} \\
&2a_n+1 = (3-a_n)b_n \\
&\text{즉, } a_n = \frac{3b_n-1}{b_n+2} \\
&\text{따라서 } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -1 \text{이므로} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3b_n-1}{b_n+2} = \frac{3 \times (-1) - 1}{(-1) + 2} = -4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
06 \quad & 2n^2 > 0 \text{이므로} \\
&\frac{4n^2+n-3}{2n^2} < a_n < \frac{4n^2+2n+1}{2n^2} \\
&\text{이때} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+n-3}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}{2} \\
&= \frac{4+0-0}{2} = 2 \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2+2n+1}{2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{2} \\
&= \frac{4+0+0}{2} = 2
\end{aligned}$$

이므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$

$$\begin{aligned}
07 \quad & \text{주어진 수열은 첫째항이 } 5x+2, \text{ 공비가 } 5x+2 \text{인 등비} \\
&\text{수열이다. 이 수열이 수렴하려면} \\
&-1 < 5x+2 \leq 1 \\
&\text{즉, } -\frac{3}{5} < x \leq -\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
08 \quad & a_n + b_n = 4^{n+1} \quad \dots\dots ① \\
& a_n - b_n = 3^{n-1} \quad \dots\dots ②
\end{aligned}$$

①+②를 하면

$$2a_n = 4^{n+1} + 3^{n-1}, \text{ 즉 } a_n = \frac{4^{n+1} + 3^{n-1}}{2}$$

①-②를 하면

$$2b_n = 4^{n+1} - 3^{n-1}, \text{ 즉 } b_n = \frac{4^{n+1} - 3^{n-1}}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} - 3^{n-1}}{4^{n+1} + 3^{n-1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n}{4 + \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n} = \frac{4-0}{4+0} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
09 \quad & \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 - 2n + 2} - n) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 - 2n + 2} - n)(\sqrt{n^2 - 2n + 2} + n)}{\sqrt{n^2 - 2n + 2} + n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n + 2}{\sqrt{n^2 - 2n + 2} + n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2 + \frac{2}{n}}{\sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n^2}} + 1} = \frac{-2+0}{1+1} = -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
10 \quad & n \geq 2 \text{일 때,} \\
&a_n = S_n - S_{n-1} \\
&= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\
&= 2n + 2 \quad \dots\dots ①
\end{aligned}$$

이때 $a_1 = S_1 = 1 + 3 = 4$

이것은 ①에 $n=1$ 을 대입한 것과 같으므로

$$\begin{aligned}
&a_n = 2n + 2 \\
&\text{즉, } \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n+2)(2n+4)} \\
&= \frac{1}{4(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)
\end{aligned}$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 의 제 n 항까지의 부분합을 U_n 이라고 하면

$$\begin{aligned}
U_n &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right)
\end{aligned}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{8}$$

11 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} - 2 \right)$ 가 수렴하므로 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n} - 2 \right) = 0$

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3a_n + n - 1}{a_n + 2n + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \times \frac{a_n}{n} + 1 - \frac{1}{n}}{\frac{a_n}{n} + 2 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{3 \times 2 + 1}{2 + 2} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

12 주어진 등비급수는 첫째항이 1, 공비가 $\cos^2 x$ 이므로

$$\frac{1}{1 - \cos^2 x} = \frac{4}{3}, \cos^2 x = \frac{1}{4}$$

이때 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 이면 $0 < \cos x < 1$ 이므로

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

따라서 $x = \frac{\pi}{3}$

13 주어진 등비급수는 첫째항이 1, 공비가 $\log_2(x+3)$ 이다. 이 등비급수가 수렴하려면

$$-1 < \log_2(x+3) < 1$$

$$\log_2 \frac{1}{2} < \log_2(x+3) < \log_2 2$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} < x+3 < 2 \text{에서 } -\frac{5}{2} < x < -1$$

따라서 구하는 정수 x 의 값은 -2 이다.

14 $1+3+5+\dots+(2n-1) = \frac{n(1+2n-1)}{2}$
 $= n^2$ ▶ 40%

따라서 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{2n^2+n-1}$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2+n-1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}$$

$$= \frac{1}{2+0-0} = \frac{1}{2}$$

▶ 60%

15 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n^2+3n} - kn)$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2n^2+3n} - kn)(\sqrt{2n^2+3n} + kn)}{\sqrt{2n^2+3n} + kn}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-k^2)n^2+3n}{\sqrt{2n^2+3n}+kn}$$

▶ 30%

이때 $2-k^2 \neq 0$ 이면 수열 $\{a_n\}$ 은 발산한다.

즉, 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로

$$2-k^2=0, k^2=2$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = \sqrt{2}$

▶ 30%

따라서

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt{2n^2+3n} + \sqrt{2}n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{2 + \frac{3}{n}} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{2}}$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

▶ 40%

16 (i) $0 < r < 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + 2r + 1}{r^n + 1} &= \frac{0 + 2r + 1}{0 + 1} \\ &= 2r + 1 \end{aligned}$$

즉, $2r + 1 = 2$ 에서

$$r = \frac{1}{2}$$

▶ 30%

(ii) $r = 1$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + 2r + 1}{r^n + 1} = \frac{1 + 2 + 1}{1 + 1} = 2$$

▶ 30%

즉, $r = 1$ 은 주어진 등식을 만족시킨다.

(iii) $r > 1$ 일 때, $0 < \frac{1}{r} < 1$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{r} \right)^n = 0$ 이므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n+1} + 2r + 1}{r^n + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r + 2\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{r}\right)^n}{1 + \left(\frac{1}{r}\right)^n}$$

$$= \frac{r + 0 + 0}{1 + 0} = r$$

즉, $r = 2$

▶ 30%

따라서 구하는 모든 실수 r 의 값의 합은

$$\frac{1}{2} + 1 + 2 = \frac{7}{2}$$

▶ 10%

17 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 2이고, 공비를 r 라고 하면

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4 \text{에서}$$

$$\frac{2}{1-r} = 4, r = \frac{1}{2}$$

▶ 30%

즉, $a_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-2}$ 이므로

$$a_{2n} = \left(\frac{1}{2} \right)^{2n-2} = \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1}$$

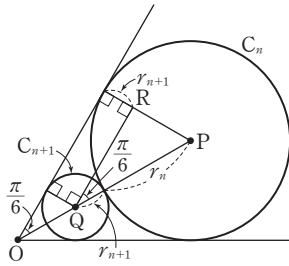
▶ 30%

따라서 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비급수

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

▶ 40%



그림과 같이 두 원 C_n, C_{n+1} 의 중심을 각각 P, Q라 하고, 원 C_n 의 반지름의 길이를 r_n 이라고 하면

$$\overline{PQ} = r_n + r_{n+1}, \overline{PR} = r_n - r_{n+1}$$

직각삼각형 PQR에서 $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{PR}}{\overline{PQ}}$ 이므로

$$\frac{r_n - r_{n+1}}{r_n + r_{n+1}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } r_{n+1} = \frac{1}{3}r_n \quad \bullet 30\%$$

이때 $a_n = 2\pi r_n$ 이므로

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2\pi r_{n+1} = 2\pi \times \frac{1}{3}r_n \\ &= \frac{1}{3} \times 2\pi r_n \\ &= \frac{1}{3}a_n \end{aligned} \quad \bullet 30\%$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2π , 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{2\pi}{1 - \frac{1}{3}} = 3\pi \quad \bullet 40\%$$

II. 미분법

295~297쪽

- | | | | | |
|---------------------|---------------------------|---------------------------|--------------------|------------------|
| 01 $\frac{1}{2}$ | 02 1 | 03 $\frac{1}{2}$ | 04 3 | 05 $\frac{3}{2}$ |
| 06 $2\sqrt{e}(1+e)$ | 07 (1, 0) | 08 3 | | |
| 09 $-e < x < e$ | 10 $\frac{\sqrt{2}}{2}e$ | 11 $1 \leq k < \sqrt{2}$ | | |
| 12 $\frac{5}{e}$ | 13 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ | 14 2 | 15 $a = -2, b = 3$ | |
| 16 $1 - 3\ln 2$ | 17 $k \geq \frac{\pi}{2}$ | 18 $a = 1, b = 2\sqrt{5}$ | | |

01 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\ln(1+4x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{e^{2x} - 1}{2x} \times \frac{4x}{\ln(1+4x)} \times \frac{1}{2} \right\}$$

$$= 1 \times 1 \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

02 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \text{에서}$$

$$1 = e^{1+b}, 1+b=0$$

즉, $b = -1$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a \ln x & (x \geq 1) \\ e^{x-1} & (x < 1) \end{cases}$$

또 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \text{에서}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(1+h)^2 + a \ln(1+h) - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \left\{ 2 + h + a \times \frac{\ln(1+h)}{h} \right\} = 2 + a$$

이고

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

즉, $2 + a = 1$ 이므로 $a = -1$

따라서 $ab = (-1) \times (-1) = 1$

03 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 이면 $\cos \alpha > 0$ 이므로

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$$\text{즉, } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$$

$\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ 이면 $\cos \beta < 0$ 이므로

$$\cos \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{즉, } \tan \beta = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

$$= \frac{\frac{4}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{4}{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

04 $f'(x) = 2 + \cos^2 x - \sin^2 x$ 이므로

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 5h) - f(\pi + h)}{4h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 5h) - f(\pi) + f(\pi) - f(\pi + h)}{4h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + 5h) - f(\pi)}{5h} \times \frac{5}{4}$$

$$- \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\pi + h) - f(\pi)}{h} \times \frac{1}{4}$$

$$= \frac{5}{4} f'(\pi) - \frac{1}{4} f'(\pi)$$

$$= f'(\pi) = 3$$

05 $f'(x) = \frac{4x(x+2)}{(x+1)^2}$ 이고, $f(1) = 2$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} f'(1) \\ &= \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

06 $g(0) = a$ 라고 하면 $f(a) = 0$ 에서

$$e^a - e^{1-a} = 0, \quad e^a = e^{1-a}$$

즉, $a = 1 - a$ 에서 $a = \frac{1}{2}$ 이므로

$$g(0) = \frac{1}{2}$$

이때 $f'(x) = e^x + e^{1-x}$ 에서 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{e}$ 이므로

$$g'(0) = \frac{1}{f'\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

따라서 $f'(0) = 1 + e$ 이므로

$$\frac{f'(0)}{g'(0)} = 2\sqrt{e}(1+e)$$

07 $f(x) = \ln x$ 라고 하면 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P와 직선 $y = x + 7$ 사이의 거리가 최소가 되려면 점 P에서의 접선이 직선 $y = x + 7$ 과 평행해야 한다.

$f'(x) = \frac{1}{x}$ 이고, 점 P의 좌표를 $(t, \ln t)$ 라고 하면

점 P에서의 접선의 기울기는 1이므로 $f'(t) = 1$ 에서

$$\frac{1}{t} = 1, \quad t = 1$$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, 0)$

08 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이거나 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

$$f(x) = 6x + a \cos 4x - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6 - 4a \sin 4x$$

이때 $-1 \leq \sin 4x \leq 1$ 이므로

$$6 - |4a| \leq 6 - 4a \sin 4x \leq 6 + |4a|$$

그런데 $6 + |4a| > 0$ 이므로 $6 - |4a| \geq 0$ 이어야 한다.

즉, $|4a| \leq 6$ 이므로

$$-\frac{3}{2} \leq a \leq \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 정수 a 는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다.

09 $f(x) = \ln(x^2 + e^2)$ 이라고 하면

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + e^2}, \quad f''(x) = -\frac{2(x^2 - e^2)}{(x^2 + e^2)^2}$$

$f''(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구하면

$$-\frac{2(x^2 - e^2)}{(x^2 + e^2)^2} = 0$$

그런데 $(x^2 + e^2)^2 > 0$ 이므로

$$-2(x^2 - e^2) = 0, \quad -2(x + e)(x - e) = 0$$

즉, $x = -e$ 또는 $x = e$

이때 $x < -e$ 또는 $x > e$ 에서 $f''(x) < 0$, $-e < x < e$ 에서 $f''(x) > 0$ 이다.

즉, 곡선 $y = f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -e)$, (e, ∞) 에서 위로 볼록하고, 구간 $(-e, e)$ 에서 아래로 볼록하다.

따라서 구하는 실수 x 의 값의 범위는

$$-e < x < e$$

10 $f(x) = 2(\ln ax)^2$ 이라고 하면

$$f'(x) = \frac{4 \ln ax}{x}, \quad f''(x) = \frac{4(1 - \ln ax)}{x^2}$$

$x > 0$ 에서 $f''(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구하면

$$\frac{4(1 - \ln ax)}{x} = 0$$

즉, $\ln ax = 1$ 이므로

$$ax = e, \quad x = \frac{e}{a}$$

이때 $x = \frac{e}{a}$ 의 좌우에서 $f''(x)$ 의 부호가 바뀌므로

변곡점의 좌표는 $\left(\frac{e}{a}, 2\right)$

이 점이 곡선 $y = x^2$ 위에 있으므로

$$2 = \left(\frac{e}{a}\right)^2, \quad a^2 = \frac{e^2}{2}$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}e$

11 $f(x) = x + \sqrt{1 - x^2}$ 이라고 하면

$$f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

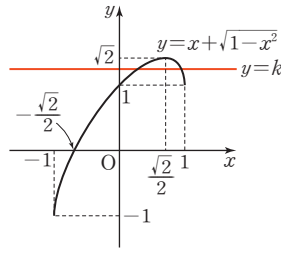
$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구하면

$$\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} = 1, \quad x^2 = \frac{1}{2}$$

즉, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 또는 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

x	-1	...	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	1
$f'(x)$		+	0	+	0	-	
$f(x)$	-1	↗	0	↗	$\sqrt{2}$	↘	1

따라서 서로 다른 두
실근을 갖도록 하는
실수 k 의 값의 범위는
 $1 \leq k < \sqrt{2}$



- 12 시각 t 에서 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라고 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = (-t^2 + 7t - 6)e^{-t}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = (t^2 - 9t + 13)e^{-t}$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$(-t^2 + 7t - 6)e^{-t} = 0$$

그런데 $e^{-t} > 0$ 이므로

$$-t^2 + 7t - 6 = 0, -(t-1)(t-6) = 0$$

즉, 시각 $t=1$ 일 때, 점 P는 처음으로 운동 방향을 바꾼다.

따라서 구하는 가속도는 $\frac{5}{e}$ 이다.

- 13 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{2}{3}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{2}{3}$$

즉, $2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{3} \quad \text{▶ 50 \%}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ 이면 $\cos 2\theta > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \sqrt{1 - \sin^2 2\theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad \text{▶ 50 \%} \end{aligned}$$

- 14 $f(n)$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2(\tan x + \tan 2x + \dots + \tan nx)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan x}{x} + \frac{\tan 2x}{x} + \dots + \frac{\tan nx}{x}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\tan x}{x} + \frac{\tan 2x}{2x} \times 2 + \dots + \frac{\tan nx}{nx} \times n} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + 2 + \dots + n} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{n^2 + n} \quad \text{▶ 70 \%} \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 + 1)f(n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{2 + 0}{1 + 0} = 2 \quad \text{▶ 30 \%} \end{aligned}$$

- 15 주어진 곡선이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$6 + a + 2b - 10 = 0$$

즉, $a + 2b = 4$ ① ▶ 20 %

$3x + ay^2 + bxy - 10 = 0$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3 + 2ay \frac{dy}{dx} + by + bx \frac{dy}{dx} = 0$$

즉, $\frac{dy}{dx} = -\frac{3 + by}{2ay + bx}$ (단, $2ay + bx \neq 0$) ▶ 30 %

이때 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기가 -3 이므로

$$-\frac{3 + b}{2a + 2b} = -3$$

즉, $6a + 5b = 3$ ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -2, b = 3$ ▶ 50 %

- 16 $f(x) = x - \frac{2}{x} - a \ln x$ 에서

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{a}{x}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(1) = 0 \text{에서}$$

$$3 - a = 0, a = 3 \quad \text{▶ 30 \%}$$

즉, $f(x) = x - \frac{2}{x} - 3 \ln x$ 이므로

$$f'(x) = 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x}, f''(x) = -\frac{4}{x^3} + \frac{3}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구하면

$$1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x} = 0, \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2} = 0$$

그런데 $x > 0$ 이므로

$$x^2 - 3x + 2 = 0, (x-1)(x-2) = 0$$

즉, $x=1$ 또는 $x=2$ ▶ 30 %

이때 $f''(1) < 0, f''(2) > 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고 $x=2$ 에서 극소이다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 극솟값은

$$f(2) = 1 - 3 \ln 2 \quad \text{▶ 40 \%}$$

- 17 주어진 부등식에서

$$x \sin x + \cos x - k \leq 0$$

$f(x) = x \sin x + \cos x - k$ 라고 하면

$$f'(x) = x \cos x \quad \text{▶ 30 \%}$$

$f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구하면

$$x \cos x = 0$$

즉, $x=0$ 또는 $\cos x=0$

이때 $0 \leq x \leq \pi$ 이므로 $x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{2}$

x	0	...	$\frac{\pi}{2}$	...	π
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	$1-k$	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}-k$	$\searrow$	$-1-k$

30%

함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{\pi}{2}$ 에서 최대이고 최댓값이 $\frac{\pi}{2}-k$ 이

므로 $0 \leq x \leq \pi$ 일 때, 부등식 $f(x) \leq 0$ 이 성립하려면

$$\frac{\pi}{2}-k \leq 0$$

따라서 $k \geq \frac{\pi}{2}$

40%

18 $\frac{dx}{dt}=t-5, \frac{dy}{dt}=2t$ 이므로

30%

시간 t 에서 점 P의 속력은

$$\begin{aligned} \sqrt{(t-5)^2 + (2t)^2} &= \sqrt{5t^2 - 10t + 25} \\ &= \sqrt{5(t-1)^2 + 20} \end{aligned}$$

30%

따라서 시간 $t=1$ 에서 점 P의 속력이 최소이고 최소값

은 $2\sqrt{5}$ 이므로 $a=1, b=2\sqrt{5}$

40%

III. 적분법

298~300쪽

01 $\frac{1}{2}x^2 + 4 \ln |x| - \frac{2}{x^2} + C$

02 $4 + \frac{3}{4}\pi$

03 $9 + \frac{10}{\ln 3}$ 04 $1 - 2 \ln 2$

05 $\frac{1}{2}$

06 -2 07 $f(x) = (x+2)e^x + 1$

08 $\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)$

09 $\frac{81}{2}$

10 e

11 $\frac{\pi}{8} (2 + \ln 3)$

12 $\frac{38}{3}$

13 $3e - 2$

14 $\frac{\pi}{8}$

15 $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \ln 2$

16 $4 - 3 \ln 2$

17 $\frac{1}{4}$

18 $\frac{14}{27}$

01 $\int \frac{(x^2+2)^2}{x^3} dx = \int \frac{x^4+4x^2+4}{x^3} dx$

$$= \int \left(x + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^3} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 4 \ln |x| - \frac{2}{x^2} + C$$

02 $f(x) = \tan^2 x + 3 \sec^2 x$

$$= (\sec^2 x - 1) + 3 \sec^2 x$$

$$= 4 \sec^2 x - 1$$

이므로 $F(x) = \int (4 \sec^2 x - 1) dx$

$$= 4 \tan x - x + C$$

이때 $F(\pi) = 0$ 에서

$$-\pi + C = 0, C = \pi$$

따라서 $F(x) = 4 \tan x - x + \pi$ 이므로

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 + \frac{3}{4}\pi$$

03 $f(x) = |3^x - 9|$ 라고 하면

$$f(x) = \begin{cases} 9 - 3^x & (0 \leq x < 2) \\ 3^x - 9 & (2 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

따라서 구간을 나누어 정적분의 값을 구하면

$$\begin{aligned} & \int_0^3 |3^x - 9| dx \\ &= \int_0^2 (9 - 3^x) dx + \int_2^3 (3^x - 9) dx \\ &= \left[9x - \frac{3^x}{\ln 3} \right]_0^2 + \left[\frac{3^x}{\ln 3} - 9x \right]_2^3 \\ &= 9 + \frac{10}{\ln 3} \end{aligned}$$

04 $f(x) = \int_0^x (e^t - 2) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = e^x - 2$$

$f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구하면

$$e^x - 2 = 0, e^x = 2$$

즉, $x = \ln 2$

x	...	$\ln 2$	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = \ln 2$ 에서 극소이면서 최소이므

로 구하는 최솟값은

$$\begin{aligned} f(\ln 2) &= \int_0^{\ln 2} (e^t - 2) dt \\ &= \left[e^t - 2t \right]_0^{\ln 2} = 1 - 2 \ln 2 \end{aligned}$$

05 $\int_1^e \frac{x+1}{x(2+\ln x)^2} dx + \int_e^1 \frac{x-2}{x(2+\ln x)^2} dx$

$$= \int_1^e \frac{x+1}{x(2+\ln x)^2} dx - \int_1^e \frac{x-2}{x(2+\ln x)^2} dx$$

$$= \int_1^e \frac{(x+1) - (x-2)}{x(2+\ln x)^2} dx$$

$$= \int_1^e \frac{3}{x(2+\ln x)^2} dx$$

이때 $2 + \ln x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$
 따라서 $x=1$ 일 때 $t=2$, $x=e$ 일 때 $t=3$ 이므로 구하는
 정적분의 값은

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{3}{x(2+\ln x)^2} dx &= \int_2^3 \frac{3}{(2+\ln x)^2} \times \frac{1}{x} dx \\ &= \int_2^3 \frac{3}{t^2} dt = \left[-\frac{3}{t} \right]_2^3 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

06 $f(x) = \ln(x^2 + 4x + 5) + C$ 이고,

$$f(-1) = \ln 2 \text{에서}$$

$$\ln 2 + C = \ln 2, C = 0$$

$$\text{즉, } f(x) = \ln(x^2 + 4x + 5)$$

$$\text{이때 } f(a) = 0 \text{에서}$$

$$\ln(a^2 + 4a + 5) = 0, a^2 + 4a + 5 = 1$$

$$a^2 + 4a + 4 = 0, (a+2)^2 = 0$$

$$\text{따라서 } a = -2$$

07 $f(x) = \int (x+a)e^x dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = (x+a)e^x$$

$$\text{이때 } f'(0) = 3 \text{에서 } a = 3 \text{이므로}$$

$$f(x) = \int (x+3)e^x dx$$

$$u(x) = x+3, v'(x) = e^x \text{으로 놓으면}$$

$$u'(x) = 1, v(x) = e^x \text{이므로}$$

$$f(x) = (x+3)e^x - \int e^x dx$$

$$= (x+2)e^x + C$$

$$\text{따라서 } f(-2) = 1 \text{에서 } C = 1 \text{이므로}$$

$$f(x) = (x+2)e^x + 1$$

08 $a=0, b=1$ 로 놓으면 $\Delta x = \frac{1}{n}, x_k = \frac{k}{n}$ 이므로 정적분과

급수의 합 사이의 관계에 따라 구하는 극한값은

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k f\left(\frac{k}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n} \\ &= \int_0^1 x f(x) dx \\ &= \int_0^1 x e^{x^2-1} dx\end{aligned}$$

$$\text{이때 } x^2 - 1 = t \text{로 놓으면 } \frac{dt}{dx} = 2x$$

$$\text{따라서 } x=0 \text{일 때 } t=-1, x=1 \text{일 때 } t=0 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x e^{x^2-1} dx &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^t \times 2x dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^0 e^t dt = \frac{1}{2} \left[e^t \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right)\end{aligned}$$

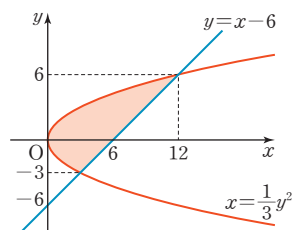
09 $y=x-6$ 에서 $x=y+6$

곡선과 직선의 교점의 y 좌표를 구하면

$$\frac{1}{3}y^2 = y+6, y^2 - 3y - 18 = 0$$

$$(y+3)(y-6) = 0$$

$$\text{즉, } y = -3 \text{ 또는 } y = 6$$



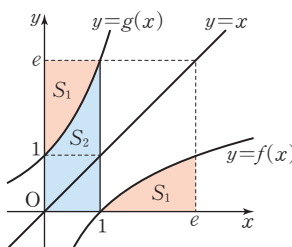
따라서 $-3 \leq y \leq 6$ 에서 $\frac{1}{3}y^2 \leq y+6$ 이므로 구하는
 넓이는

$$\begin{aligned}\int_{-3}^6 \left(y+6 - \frac{1}{3}y^2 \right) dy &= \left[\frac{1}{2}y^2 + 6y - \frac{1}{9}y^3 \right]_{-3}^6 \\ &= \frac{81}{2}\end{aligned}$$

10 $f(1)=0, f(e)=1$ 이므로

$$g(0)=1, g(1)=e$$

두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여
 서로 대칭이다.



이때 $S_1 = \int_1^e f(x) dx, S_2 = \int_0^1 g(x) dx$ 라고 하면

$$\begin{aligned}\int_1^e f(x) dx + \int_0^1 g(x) dx &= S_1 + S_2 \\ &= 1 \times e = e\end{aligned}$$

11 x 좌표가 $x(0 \leq x \leq \ln 3)$ 인 점을 지나고 x 축에 수직인
 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고
 하면

$$S(x) = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{\sqrt{e^x+1}}{2} \right)^2 = \frac{\pi}{8} (e^x + 1)$$

따라서 구하는 부피 V 는

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{\ln 3} \frac{\pi}{8} (e^x + 1) dx \\ &= \frac{\pi}{8} \left[e^x + x \right]_0^{\ln 3} \\ &= \frac{\pi}{8} (2 + \ln 3)\end{aligned}$$

12 $\frac{dx}{dt}=t^2-t, \frac{dy}{dt}=2t\sqrt{t}$ 이므로 구하는 거리는

$$\int_1^3 \sqrt{(t^2-t)^2+(2t\sqrt{t})^2} dt = \int_1^3 (t^2+t) dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_1^3$$

$$= \frac{38}{3}$$

13 $\int_0^1 f(t) dt = k$ (k 는 실수)라고 하면

$$f(x) = e^x + kx \text{이므로}$$

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (e^t + kt) dt$$

$$= \left[e^t + \frac{1}{2}kt^2 \right]_0^1$$

$$= e + \frac{1}{2}k - 1$$

즉, $e + \frac{1}{2}k - 1 = k$ 이므로

$$k = 2(e - 1) \quad \bullet 50\%$$

따라서 $f(x) = e^x + 2(e - 1)x$ 이므로 $\bullet 30\%$

$$f(1) = 3e - 2 \quad \bullet 20\%$$

14 $2x = \tan \theta \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$ 로 놓으면

$$2 \frac{dx}{d\theta} = \sec^2 \theta, \text{ 즉 } \frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{2} \sec^2 \theta \quad \bullet 30\%$$

따라서 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=\frac{1}{2}$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4x^2+1} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \times \frac{1}{2} \sec^2 \theta d\theta \quad \bullet 30\%$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sec^2 \theta} \times \frac{1}{2} \sec^2 \theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2} \theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} \quad \bullet 40\%$$

15 $f'(x) = x \sec^2 x$ 이고, $u(x) = x, v'(x) = \sec^2 x$ 로 놓으면 $u'(x) = 1, v(x) = \tan x$ 이므로

$$f(x) = \int x \sec^2 x dx$$

$$= x \tan x - \int \tan x dx$$

$$= x \tan x - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

$$= x \tan x + \ln |\cos x| + C \quad \bullet 30\%$$

이때 $f(0) = 0$ 에서 $C = 0$ 이므로

$$f(x) = x \tan x + \ln |\cos x| \quad \bullet 40\%$$

따라서

$$a = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \ln 2 \quad \bullet 30\%$$

16 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면

$$S(x) = \left(\sqrt{\frac{2x+1}{x+2}} \right)^2 = \frac{2x+1}{x+2}$$

$$= \frac{2(x+2)-3}{x+2}$$

$$= 2 - \frac{3}{x+2} \quad \bullet 50\%$$

따라서 구하는 부피는

$$\int_0^2 \left(2 - \frac{3}{x+2} \right) dx = \left[2x - 3 \ln |x+2| \right]_0^2$$

$$= 4 - 3 \ln 2 \quad \bullet 50\%$$

17 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$$v(t) = 0 \text{에서}$$

$$\sin t - \sin 2t = 0, \sin t - 2 \sin t \cos t = 0$$

$$\sin t (1 - 2 \cos t) = 0$$

즉, $\sin t = 0$ 또는 $\cos t = \frac{1}{2}$

$t > 0$ 이므로 $\sin t = 0$ 에서 $t = \pi, 2\pi, \dots$

$\cos t = \frac{1}{2}$ 에서 $t = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi, \dots$

즉, 시각 $t = \frac{\pi}{3}$ 에서 점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾼다. $\bullet 50\%$

따라서 $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ 에서 $v(t) \leq 0$ 이므로 구하는 거리는

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sin 2t - \sin t) dt = \left[-\frac{1}{2} \cos 2t + \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{1}{4} \quad \bullet 50\%$$

18 $f(x) = 1 + 2x\sqrt{x}$ 라고 하면

$$f'(x) = 3\sqrt{x} \quad \bullet 30\%$$

이므로 $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ 에서 곡선의 길이는

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + (3\sqrt{x})^2} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + 9x} dx \quad \bullet 30\%$$

이때 $1 + 9x = t$ 로 놓으면 $\frac{dt}{dx} = 9$

따라서 $x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\frac{1}{3}$ 일 때 $t=4$ 이므로

구하는 곡선의 길이는

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \sqrt{1 + 9x} dx = \int_1^4 \frac{1}{9} \times \sqrt{t} \times 9 dt$$

$$= \int_1^4 \frac{1}{9} \sqrt{t} dt$$

$$= \left[\frac{2}{27} t\sqrt{t} \right]_1^4 = \frac{14}{27} \quad \bullet 40\%$$