



정답과 해설



I 경우의 수

1 순열과 조합

01 여러 가지 순열과 중복조합

9~21쪽

- 01 문제 5개에서 각 문제마다 4개의 보기를 고를 수 있으므로 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

따라서 구하는 방법의 수는

$${}_4\Pi_5 = 4^5 = 1024$$

- 02 X 에서 Y 로의 함수의 개수는 집합 X 의 원소 5개에 각각 집합 Y 의 원소 3개가 대응할 수 있으므로 서로 다른 3개에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$$

- 03 만의 자리에 올 수 있는 수는 1, 2의 2가지
남은 4개의 자리에 각각 세 개의 수가 올 수 있으므로
그 경우의 수는

$${}_3\Pi_4$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$2 \times {}_3\Pi_4 = 2 \times 3^4 = 162$$

- 04 천의 자리의 수와 일의 자리의 수의 합이 5인 경우는
(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)

의 4가지

만의 자리에 올 수 있는 수는 1, 2, 3, 4의 4가지

남은 2개의 자리에 각각 다섯 개의 수가 올 수 있으므로
그 경우의 수는

$${}_5\Pi_2$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$4 \times 4 \times {}_5\Pi_2 = 4 \times 4 \times 5^2 = 400$$

- 05 (i) ★가 0번 나오는 경우

세 개의 기호 ●, ▲, ■ 중에서 중복을 허용하여
4개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의
수는

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

- (ii) ★가 1번 나오는 경우

★의 자리를 정한 후, 남은 3개의 자리에 세 개의
기호 ●, ▲, ■ 중에서 중복을 허용하여 3개를 택
하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$$4 \times {}_3\Pi_3 = 4 \times 3^3 = 108$$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$81 + 108 = 189$$

- 06 (i) 0이 0번 나오는 경우

일의 자리에 2, 4 중에서 하나를 배열한 후, 남은
3개의 자리에 각각 1, 2, 3, 4 중에서 하나를 배열
하면 되므로 0이 0번 나오는 짝수의 개수는

$$2 \times {}_4\Pi_3 = 2 \times 4^3 = 128$$

- (ii) 0이 1번 나오는 경우

- ① 일의 자리의 수가 0인 경우

남은 3개의 자리에 각각 1, 2, 3, 4 중에서 하
나를 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

- ② 일의 자리의 수가 2 또는 4인 경우

일의 자리에 2, 4 중에서 하나를 배열하고, 백
의 자리, 십의 자리 중에서 0이 들어갈 자리를
정한 후, 남은 2개의 자리에 각각 1, 2, 3, 4 중
에서 하나를 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$$2 \times 2 \times {}_4\Pi_2 = 64$$

- ①, ②에서 0이 1번 나오는 짝수의 개수는

$$64 + 64 = 128$$

- (i), (ii)에서 구하는 짝수의 개수는

$$128 + 128 = 256$$

- 07 (1) 5개 중에서 같은 것이 각각 3개, 2개씩 있으므로
구하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

- (2) 7개 중에서 같은 것이 각각 2개, 2개, 3개씩 있으
므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 3!} = 210$$

- (3) 양 끝에 s를 배열한 후, 남은 문자 t, a, t, i, t, i,
c, s를 배열하면 된다.

이때 8개 중에서 같은 것이 각각 3개, 2개씩 있으
므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{3! \times 2!} = 3360$$

- 08 지점 P에서 지점 R까지 가는 최단 경로의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

지점 R에서 지점 Q까지 가는 최단 경로의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

따라서 구하는 최단 경로의 수는

$$6 \times 10 = 60$$

- 09 (1) 서로 다른 4개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$$

- (2) 서로 다른 5개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_5H_4 = {}_8C_4 = 70$$

- (3) 서로 다른 2개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

- 10 주사위 1개를 1번 던져 나오는 눈의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 1부터 6까지의 자연수 중에서 중복을 허용하여 3개를 뽑은 후 작거나 같은 수부터 차례로 a , b , c 에 놓으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_6H_3 = {}_8C_3 = 56$$

- 11 (1) $(x+y+z+w)^3$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 4개의 문자 x , y , z , w 에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

- (2) $(x+y+z)^2$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 3개의 문자 x , y , z 에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같고, $(a+b+c+d)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는 4개의 문자 a , b , c , d 에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$${}_3H_2 \times {}_4H_5 = {}_4C_2 \times {}_8C_5 = {}_4C_2 \times {}_8C_3 = 6 \times 56 = 336$$

- 12 $(x+y)^3(a+b+c+d)^4$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

$${}_2H_3 \times {}_4H_4 = {}_4C_3 \times {}_7C_4 = {}_4C_1 \times {}_7C_3 = 4 \times 35 = 140$$

$(a+b+c+d)^4$ 의 전개식에서 d 를 포함하지 않는 서로 다른 항의 개수는 d 를 제외한 3개의 문자 a , b , c 에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

$(x+y)^3(a+b+c+d)^4$ 의 전개식에서 d 를 포함하지 않는 서로 다른 항의 개수는

$${}_2H_3 \times {}_3H_4 = {}_4C_3 \times {}_6C_4 = {}_4C_1 \times {}_6C_2 = 4 \times 15 = 60$$

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$$140 - 60 = 80$$

- 13 (1) 음이 아닌 정수해의 개수는 서로 다른 4개의 문자 a , b , c , d 에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같다. 따라서 음이 아닌 정수해의 개수는

$${}_4H_{12} = {}_{15}C_{12} = {}_{15}C_3 = 455$$

- (2) a , b , c , d 가 양의 정수이므로 $A=a-1$,

$B=b-1$, $C=c-1$, $D=d-1$ 로 놓으면 A , B , C , D 는 음이 아닌 정수이다.

이때 $a=A+1$, $b=B+1$, $c=C+1$, $d=D+1$ 을 방정식 $a+b+c+d=12$ 에 대입하면

$$(A+1) + (B+1) + (C+1) + (D+1) = 12$$

즉, $A+B+C+D=8$

따라서 양의 정수해의 개수는 방정식

$A+B+C+D=8$ 의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로

$${}_4H_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = 165$$

02 이항정리

22-29쪽

- 01 (1) $(a+1)^5$

$$\begin{aligned} &= {}_5C_0 \times a^5 + {}_5C_1 \times a^4 + {}_5C_2 \times a^3 + {}_5C_3 \times a^2 \\ &\quad + {}_5C_4 \times a + {}_5C_5 \\ &= a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1 \end{aligned}$$

- (2) $(x-y)^6$

$$\begin{aligned} &= {}_6C_0 \times x^6 + {}_6C_1 \times x^5 \times (-y) \\ &\quad + {}_6C_2 \times x^4 \times (-y)^2 + {}_6C_3 \times x^3 \times (-y)^3 \\ &\quad + {}_6C_4 \times x^2 \times (-y)^4 + {}_6C_5 \times x \times (-y)^5 \\ &\quad + {}_6C_6 \times (-y)^6 \\ &= x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 \\ &\quad - 6xy^5 + y^6 \end{aligned}$$

- 02 (1) $(a+3b)^5$

$$\begin{aligned} &= {}_5C_0 \times a^5 + {}_5C_1 \times a^4 \times 3b + {}_5C_2 \times a^3 \times (3b)^2 \\ &\quad + {}_5C_3 \times a^2 \times (3b)^3 + {}_5C_4 \times a \times (3b)^4 \\ &\quad + {}_5C_5 \times (3b)^5 \\ &= 1 \times a^5 + 5 \times a^4 \times 3b + 10 \times a^3 \times 9b^2 \\ &\quad + 10 \times a^2 \times 27b^3 + 5 \times a \times 81b^4 + 1 \times 243b^5 \\ &= a^5 + 15a^4b + 90a^3b^2 + 270a^2b^3 + 405ab^4 + 243b^5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \left(2x - \frac{1}{x}\right)^7 &= {}_7C_0 \times (2x)^7 + {}_7C_1 \times (2x)^6 \times \left(-\frac{1}{x}\right) \\
&\quad + {}_7C_2 \times (2x)^5 \times \left(-\frac{1}{x}\right)^2 \\
&\quad + {}_7C_3 \times (2x)^4 \times \left(-\frac{1}{x}\right)^3 \\
&\quad + {}_7C_4 \times (2x)^3 \times \left(-\frac{1}{x}\right)^4 \\
&\quad + {}_7C_5 \times (2x)^2 \times \left(-\frac{1}{x}\right)^5 \\
&\quad + {}_7C_6 \times 2x \times \left(-\frac{1}{x}\right)^6 + {}_7C_7 \times \left(-\frac{1}{x}\right)^7 \\
&= 1 \times 128x^7 + 7 \times 64x^6 \times \left(-\frac{1}{x}\right) \\
&\quad + 21 \times 32x^5 \times \frac{1}{x^2} + 35 \times 16x^4 \times \left(-\frac{1}{x^3}\right) \\
&\quad + 35 \times 8x^3 \times \frac{1}{x^4} + 21 \times 4x^2 \times \left(-\frac{1}{x^5}\right) \\
&\quad + 7 \times 2x \times \frac{1}{x^6} + 1 \times \left(-\frac{1}{x^7}\right) \\
&= 128x^7 - 448x^5 + 672x^3 - 560x + \frac{280}{x} \\
&\quad - \frac{84}{x^3} + \frac{14}{x^5} - \frac{1}{x^7}
\end{aligned}$$

03 (1) $(1+2x^2)^5$ 의 전개식에서 각 항은

$$\begin{aligned}
{}_5C_r \times (2x^2)^r \text{의 꼴이므로} \\
{}_5C_r \times (2x^2)^r = {}_5C_r \times 2^r \times x^{2r} \\
x^{2r} = x^4 \text{에서 } 2r = 4, r = 2 \\
\text{따라서 } x^4 \text{의 계수는} \\
{}_5C_2 \times 2^2 = 40
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \left(x - \frac{3}{x^3}\right)^7 \text{의 전개식에서 각 항은} \\
{}_7C_r \times x^{7-r} \times \left(-\frac{3}{x^3}\right)^r \text{의 꼴이므로} \\
{}_7C_r \times x^{7-r} \times \left(-\frac{3}{x^3}\right)^r \\
= {}_7C_r \times (-3)^r \times \frac{x^{7-r}}{x^{3r}} \\
\frac{x^{7-r}}{x^{3r}} = x^3 \text{에서 } x^{7-r} = x^{3+3r} \text{이므로} \\
7-r = 3+3r, r = 1 \\
\text{따라서 } x^3 \text{의 계수는} \\
{}_7C_1 \times (-3) = -21
\end{aligned}$$

04 $(ax-3)^5$ 의 전개식에서 각 항은

$$\begin{aligned}
{}_5C_r \times (ax)^{5-r} \times (-3)^r \text{의 꼴이므로} \\
{}_5C_r \times (ax)^{5-r} \times (-3)^r \\
= {}_5C_r \times a^{5-r} \times (-3)^r \times x^{5-r}
\end{aligned}$$

$$x^{5-r} = x^3 \text{에서}$$

$$5-r=3, r=2$$

x^3 의 계수가 720이므로

$${}_5C_2 \times a^3 \times (-3)^2 = 720$$

$$90a^3 = 720, a^3 = 8$$

그런데 a 는 자연수이므로

$$a=2$$

05 (1) 8번째 행의 수는

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1$$

이므로 이를 이용하여 $(x-1)^7$ 을 전개하면

$$\begin{aligned}
(x-1)^7 &= x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 \\
&\quad - 21x^2 + 7x - 1
\end{aligned}$$

(2) 9번째 행의 수는

$$1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1$$

이므로 이를 이용하여 $(a+b)^8$ 을 전개하면

$$\begin{aligned}
(a+b)^8 &= a^8 + 8a^7b + 28a^6b^2 + 56a^5b^3 \\
&\quad + 70a^4b^4 + 56a^3b^5 + 28a^2b^6 \\
&\quad + 8ab^7 + b^8
\end{aligned}$$

06 (1) ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0$ 이므로

$${}_{12}C_0 - {}_{12}C_1 + {}_{12}C_2 - \cdots + {}_{12}C_{12} = 0$$

(2) n 이 홀수일 때,

$${}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots + {}_nC_n = 2^{n-1} \text{이므로}$$

$${}_{13}C_1 + {}_{13}C_3 + {}_{13}C_5 + \cdots + {}_{13}C_{13}$$

$$= 2^{13-1} = 2^{12}$$

$$= 4096$$

07 이항정리에 의하여

$$\begin{aligned}
(1+x)^{2n} &= {}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 x + {}_{2n}C_2 x^2 + \cdots \\
&\quad + {}_{2n}C_{2n} x^{2n} \quad \cdots \quad ①
\end{aligned}$$

①의 양변에 $x=1$ 을 대입하여 정리하면

$${}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} = 2^{2n} \quad \cdots \quad ②$$

①의 양변에 $x=-1$ 을 대입하여 정리하면

$${}_{2n}C_0 - {}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_2 - \cdots + {}_{2n}C_{2n} = 0 \quad \cdots \quad ③$$

②+③을 하면

$$2({}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2n}) = 2^{2n}$$

양변을 2로 나누면

$${}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} = 2^{2n-1}$$

②-③을 하면

$$2({}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_3 + {}_{2n}C_5 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1}) = 2^{2n}$$

양변을 2로 나누면

$${}_{2n}C_1 + {}_{2n}C_3 + {}_{2n}C_5 + \cdots + {}_{2n}C_{2n-1} = 2^{2n-1}$$

II 확률

1 확률의 뜻과 활용

01 확률의 뜻

45~53쪽

- 01 동전의 앞면을 '앞', 뒷면을 '뒤'라 하고, 차례로 던진 결과를 순서쌍으로 나타내면

$$(1) S = \{(\text{앞}, \text{앞}, \text{앞}), (\text{앞}, \text{앞}, \text{뒤}), (\text{앞}, \text{뒤}, \text{앞}), (\text{뒤}, \text{앞}, \text{앞}), (\text{앞}, \text{뒤}, \text{뒤}), (\text{뒤}, \text{앞}, \text{뒤}), (\text{뒤}, \text{뒤}, \text{앞}), (\text{뒤}, \text{뒤}, \text{뒤})\}$$

$$(2) A = \{(\text{앞}, \text{앞}, \text{뒤}), (\text{앞}, \text{뒤}, \text{앞}), (\text{뒤}, \text{앞}, \text{앞})\}$$

- 02 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, $B = \{4, 8\}$, $C = \{2, 3, 5, 7\}$ 이므로

$$(1) A^c = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$(2) B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 7, 8\}$$
이므로

$$(B \cup C)^c = \{1, 6, 9\}$$

- (3) $A \cap B = \{4, 8\}$, $A \cap C = \{2\}$, $B \cap C = \emptyset$ 이므로 두 사건 B, C 는 서로 배반사건이다.

- 03 주사위 1개를 두 번 던지는 시행에서 나오는 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$ 이므로

$$n(S) = 36$$

- (1) 곱이 25보다 큰 사건을 A 라고 하면

$$A = \{(5, 6), (6, 5), (6, 6)\}$$

$$\text{이므로 } n(A) = 3$$

$$\text{따라서 } P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

- (2) 곱이 12의 배수인 사건을 B 라고 하면

$$B = \{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (4, 6),$$

$$(6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$$

$$\text{이므로 } n(B) = 7$$

$$\text{따라서 } P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{7}{36}$$

- 04 7명의 학생이 일렬로 줄을 서는 경우의 수는

$$7!$$

3명의 여학생을 하나로 묶어 생각하면 5명의 학생을 일렬로 세우고, 그 각각에 대하여 3명의 여학생이 서로 자리를 바꿀 수 있으므로 그 경우의 수는

$$5! \times 3!$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5! \times 3!}{7!} = \frac{1}{7}$$

- 05 주사위 1개를 두 번 던지는 시행에서 나오는 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

$a + 2b = 5$ 인 경우는 (1, 2), (3, 1)의 2가지

$a + 2b = 10$ 인 경우는 (2, 4), (4, 3), (6, 2)의 3가지

$a + 2b = 15$ 인 경우는 (3, 6), (5, 5)의 2가지

즉, $a + 2b$ 가 5의 배수인 경우의 수는

$$2 + 3 + 2 = 7$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{7}{36}$$

- 06 (1) 평평한 면이 바닥에 닿은 압정의 상대도수는

$$\frac{137}{200}$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{137}{200}$ 이다.

- (2) 점원이 추천한 물건을 구매한 손님의 상대도수는

$$\frac{43}{120}$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{43}{120}$ 이다.

- 07 '가끔 경험했다.'라고 응답한 청소년의 상대도수는

$$\frac{562}{2000} = 0.281$$

따라서 구하는 확률은 0.281이다.

02 확률의 덧셈 정리

54~61쪽

- 01 (1) 공에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 A , 15의 약수인 사건을 B 라고 하면

$$A = \{3, 6, 9, 12, 15\}, B = \{1, 3, 5, 15\},$$

$$A \cap B = \{3, 15\}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{5}{15} + \frac{4}{15} - \frac{2}{15} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

- (2) 공에 적힌 수가 7 이하인 사건을 C , 14 이상인 사건을 D 라고 하면

$$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, D = \{14, 15\},$$

$$C \cap D = \emptyset$$

따라서 C, D 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(C \cup D) &= P(C) + P(D) \\ &= \frac{7}{15} + \frac{2}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

- 02 카드 2장이 흰색인 사건을 A , 검은색인 사건을 B 라고 하면 A, B 는 서로 배반사건이다.

카드 9장 중에서 2장을 꺼내는 경우의 수는

$${}_9C_2 = 36$$

흰색 카드 4장 중에서 2장을 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

$$\text{즉, } P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

검은색 카드 5장 중에서 2장을 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_2 = 10$$

$$\text{즉, } P(B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{18} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

- 03 수국이 장미보다 많은 경우는

수국 4송이와 장미 2송이,

수국 5송이와 장미 1송이

를 꺼내는 것이다.

수국 4송이와 장미 2송이를 꺼내는 사건을 A , 수국 5송이와 장미 1송이를 꺼내는 사건을 B 라고 하면 A, B 는 서로 배반사건이다.

꽃 9송이 중에서 6송이를 꺼내는 경우의 수는

$${}_9C_6 = {}_9C_3 = 84$$

수국 5송이 중에서 4송이, 장미 4송이 중에서 2송이를 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_4 \times {}_4C_2 = {}_5C_1 \times {}_4C_2 = 5 \times 6 = 30$$

$$\text{즉, } P(A) = \frac{30}{84} = \frac{5}{14}$$

수국 5송이 중에서 5송이, 장미 4송이 중에서 1송이를 꺼내는 경우의 수는

$${}_5C_5 \times {}_4C_1 = 1 \times 4 = 4$$

$$\text{즉, } P(B) = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{5}{14} + \frac{1}{21} = \frac{17}{42} \end{aligned}$$

- 04 ‘구독’ 버튼을 누른 사람인 사건을 A , ‘좋아요’ 버튼을 누른 사람인 사건을 B 라고 하면 $A \cap B$ 는 ‘구독’과 ‘좋아요’ 버튼을 모두 누른 사람인 사건이므로

$$P(A) = 0.6, P(B) = 0.8, P(A \cap B) = 0.5$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.6 + 0.8 - 0.5 = 0.9 \end{aligned}$$

- 05 사과주스 4개를 꺼내는 사건을 A 라고 하자.

주스 10개 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}C_4 = 210$$

사과주스 6개 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

$$\text{즉, } P(A) = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$$

따라서 적어도 1개가 포도주스일 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - \frac{1}{14} = \frac{13}{14} \end{aligned}$$

- 06 선분의 길이가 유리수인 사건을 A 라고 하자.

점 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수는

$${}_{12}C_2 = 66$$

선분의 길이가 유리수인 경우는

가로로 놓인 점 3개 중에서 점 2개,

세로로 놓인 점 4개 중에서 점 2개

를 택하는 것이다.

이때 가로로 놓인 점 3개는 4쌍, 세로로 놓인 점 4개는 3쌍이 있으므로 그 경우의 수는

$$4 \times {}_3C_2 + 3 \times {}_4C_2 = 4 \times 3 + 3 \times 6 = 30$$

$$\text{즉, } P(A) = \frac{30}{66} = \frac{5}{11}$$

따라서 선분의 길이가 무리수일 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - \frac{5}{11} = \frac{6}{11} \end{aligned}$$

- 07 $f(a) = f(b)$ 인 함수인 사건을 A 라고 하자.

X 에서 Y 로의 함수 f 의 개수는

$${}_5\Pi_4 = 5^4 = 625$$

$f(a) = f(b)$ 인 함수의 개수는

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

$$\text{즉, } P(A) = \frac{125}{625} = \frac{1}{5}$$

따라서 $f(a) \neq f(b)$ 인 함수일 확률은

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

- 08 아몬드와 호두가 모두 2개 이상 포함되는 사건을 A 라고 하자.

4종류의 견과류 중에서 8개를 고르는 경우의 수는

$${}_4H_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = 165$$

견과류 8개 중에서 아몬드와 호두가 모두 2개 이상 포함되는 것은 아몬드 2개와 호두 2개를 고른 후, 4종류의 견과류 중에서 4개를 더 고르면 되므로 그 경우의 수는

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$$

아몬드와 호두가 모두 2개 이상 포함될 확률은

$$P(A) = \frac{35}{165} = \frac{7}{33}$$

따라서 아몬드가 1개 이하 또는 호두가 1개 이하 포함될 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - \frac{7}{33} = \frac{26}{33} \end{aligned}$$

2 조건부확률

01 조건부확률

71~76쪽

- 01 자율 학습에 참여하는 학생인 사건을 A , 1학년인 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = 0.6, P(A \cap B) = 0.25$$

따라서 구하는 확률은 사건 A 가 일어났을 때의 사건 B 의 조건부확률이므로

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{0.25}{0.6} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

- 02 남성인 사건을 A , 반려묘를 키우는 사람인 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = 0.55, P(A \cap B) = 0.45, P(A \cup B) = 0.75$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$0.75 = 0.55 + P(B) - 0.45$$

$$\text{즉, } P(B) = 0.65$$

따라서 구하는 확률은 사건 B 가 일어났을 때의 사건 A 의 조건부확률이므로

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.45}{0.65} = \frac{9}{13}$$

- 03 첫 번째와 두 번째에 빨간 공이 나오는 사건을 각각 A, B 라고 하면

$$P(A) = \frac{6}{11}$$

첫 번째에 빨간 공이 나왔을 때, 두 번째도 빨간 공이 나올 확률은

$$P(B|A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{6}{11} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{11} \end{aligned}$$

- 04 온라인에서 구매하는 사건을 A , 반품되는 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = 0.75, P(B|A) = 0.8, P(B|A^c) = 0.3$$

따라서 물건이 반품될 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c) \\ &= 0.75 \times 0.8 + (1 - 0.75) \times 0.3 \\ &= 0.675 \end{aligned}$$

02 사건의 독립과 종속

77~83쪽

- 01 오전반인 사건을 A , 수업을 만족하는 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = \frac{120}{200} = \frac{3}{5}, P(B) = \frac{160}{200} = \frac{4}{5},$$

$$P(A \cap B) = \frac{84}{200} = \frac{21}{50}$$

$$\text{이때 } P(A)P(B) = \frac{12}{25} \text{이므로}$$

$$P(A)P(B) \neq P(A \cap B)$$

따라서 수강생이 오전반인 사건과 수업을 만족하는 사건은 서로 종속이다.

- 02 두 사건 A, B 가 서로 독립일 때, 두 사건 A^c, B^c 도 서로 독립이므로

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$$

$$P(B^c|A^c) = 0.3 \text{에서}$$

$$\frac{P(B^c \cap A^c)}{P(A^c)} = 0.3, \frac{P(B^c)P(A^c)}{P(A^c)} = 0.3$$

$$P(B^c) = 0.3$$

이므로

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 0.7$$

- 03 두 학생 A, B가 수강 신청에 성공하는 사건을 각각 A, B라고 하면

$$P(A) = \frac{1}{5}, P(B) = \frac{2}{7}$$

이때 두 사건 A, B는 서로 독립이고, 두 학생 A, B 중에서 1명만 성공해야 하므로 A가 성공하고 B가 성공하지 못하거나 A가 성공하지 못하고 B가 성공해야 한다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} & P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) \\ &= P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) \\ &= \frac{1}{5} \times \left(1 - \frac{2}{7}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) \times \frac{2}{7} \\ &= \frac{1}{7} + \frac{8}{35} = \frac{13}{35} \end{aligned}$$

- 04 옷짝을 던져 등근 면이 나올 확률은 $\frac{3}{5}$

옷짝 4개 모두 등근 면이 나오지 않을 확률은 독립시행의 확률에 의하여

$${}_4C_0 \times \left(\frac{3}{5}\right)^0 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$$

따라서 구하는 확률은

$$1 - \frac{16}{625} = \frac{609}{625}$$

- 05 농구 선수가 자유투에 성공할 확률은 $0.75 = \frac{3}{4}$

농구 선수가 자유투 4번으로 휴식하는 경우는 자유투를 3번 던져 2번 성공하고 4번째에서 성공하면 된다.

따라서 구하는 확률은 독립시행의 확률에 의하여

$$\left\{{}_3C_2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1\right\} \times \frac{3}{4} = \frac{81}{256}$$

- 06 주사위 1개를 던져 6의 약수인 눈의 수가 나올 확률은

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

주사위 1개를 6번 던지므로 6의 약수인 눈의 수가 나오는 횟수를 x 라고 하면 6의 약수가 아닌 눈의 수가 나오는 횟수는

$$6 - x$$

6의 약수인 눈의 수가 나오면 양의 방향으로 3만큼, 6의 약수가 아닌 눈의 수가 나오면 음의 방향으로 1만큼 이동하고, 점 P가 2에 도착해야 하므로

$$3x - (6 - x) = 2, x = 2$$

따라서 구하는 확률은 독립시행의 확률에 의하여

$${}_6C_2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{20}{243}$$

III 통계

1 확률분포

01 확률변수와 확률분포

101~105쪽

- 01 주사위 1개를 1번 던지는 시행에서 나오는 눈의 수는

1, 2, 3, 4, 5, 6

따라서 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은

1, 2, 3, 4, 5, 6

- 02 (1) 가위바위보를 5번 하는 시행에서 표본공간 S 는

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

이때 비긴 횟수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5와 같이 셀 수 있으므로 이산확률변수이다.

- (2) 어느 지역의 하루 강수량을 조사하는 시행에서 표본공간 S 는

$$S = \{x | x \geq 0\}$$

이때 강수량 X 는 0 이상의 모든 실숫값을 가질 수 있으므로 연속확률변수이다.

- 03 (1) 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 각 값을 가질 확률은

$$P(X=0) = {}_3C_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

$$P(X=1) = {}_3C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$P(X=2) = {}_3C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = {}_3C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8}$$

따라서 X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

- (2) 앞면이 나온 동전이 2개 이하일 확률은 $P(X \leq 2)$

이므로

$$P(X \leq 2)$$

$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= 1 - P(X=3)$$

$$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

02 이산확률변수의 기댓값과 표준편차 106~116쪽

- 01 온라인 쇼핑몰에서 발행하는 할인권의 할인액을 확률변수 X 라고 하면 X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1000	2000	3000	합계
$P(X=x)$	0.5	0.25	0.25	1

X 의 평균은

$$E(X) = 1000 \times 0.5 + 2000 \times 0.25 + 3000 \times 0.25 = 1750$$

따라서 할인권 1장당 받을 수 있는 할인액의 평균은 1750원이다.

- 02 꺼낸 구슬 2개의 총액을 확률변수 X 라고 하자.

주머니 A를 골라 200원이 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{4}$$

주머니 B를 골라 200원이 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{12}$$

$$\text{즉, } P(X=200) = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

주머니 A를 골라 600원이 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{{}_3C_1 \times {}_1C_1}{{}_4C_2} = \frac{1}{4}$$

주머니 B를 골라 600원이 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{1}{3}$$

$$\text{즉, } P(X=600) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

주머니 B를 골라 1000원이 나올 확률은

$$P(X=1000) = \frac{1}{2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2} = \frac{1}{12}$$

X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	200	600	1000	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{1}{12}$	1

X 의 평균은

$$E(X) = 200 \times \frac{1}{3} + 600 \times \frac{7}{12} + 1000 \times \frac{1}{12} = 500$$

따라서 총액의 기댓값은 500원이다.

- 03 게임의 점수를 확률변수 X 라고 하자.

상자 B에서 꺼낸 카드 2장에 대한 점수는 상자 A에서 꺼낸 공에 따라 다음과 같다.

카드	-1	-1	-1	0	0	1
	0	1	2	1	2	2
빨간 공	-1	0	1	1	2	3
파란 공	0	-1	-2	0	0	2

파란 공을 꺼내어 -2점이 나올 확률은

$$P(X=-2) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$$

빨간 공을 꺼내어 -1점이 나올 확률은

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$$

파란 공을 꺼내어 -1점이 나올 확률은

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$$

$$\text{즉, } P(X=-1) = \frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6}$$

빨간 공을 꺼내어 0점이 나올 확률은

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$$

파란 공을 꺼내어 0점이 나올 확률은

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{6} = \frac{3}{10}$$

$$\text{즉, } P(X=0) = \frac{1}{15} + \frac{3}{10} = \frac{11}{30}$$

빨간 공을 꺼내어 1점이 나올 확률은

$$P(X=1) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{2}{15}$$

빨간 공을 꺼내어 2점이 나올 확률은

$$\frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$$

파란 공을 꺼내어 2점이 나올 확률은

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{10}$$

$$\text{즉, } P(X=2) = \frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6}$$

빨간 공을 꺼내어 3점이 나올 확률은

$$P(X=3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{15}$$

X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	-2	-1	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{15}$	1

X 의 평균은

$$\begin{aligned} E(X) &= (-2) \times \frac{1}{10} + (-1) \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{11}{30} \\ &\quad + 1 \times \frac{2}{15} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{15} \\ &= \frac{3}{10} = 0.3 \end{aligned}$$

따라서 점수의 기댓값은 0.3점이다.

04 X 의 평균은

$$E(X) = (-1) \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

X 의 분산과 표준편차는

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= (-1)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\ &= \frac{11}{16} \\ \sigma(X) &= \sqrt{\frac{11}{16}} = \frac{\sqrt{11}}{4} \end{aligned}$$

05 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4이므로

$$P(X=2) = \frac{{}_1C_1}{{}_4C_2} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=3) = \frac{{}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{2}{3}$$

$$P(X=4) = \frac{{}_3C_1}{{}_4C_2} = \frac{1}{2}$$

X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

X 의 평균은

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{3} + 4 \times \frac{1}{2} = \frac{10}{3}$$

따라서 X 의 분산과 표준편차는

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{3} + 4^2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 \\ &= \frac{5}{9} \\ \sigma(X) &= \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

06 확률분포가 평균을 중심으로 좌우로 가장 넓게 흩어져 있는 것은 (가)이므로 (가)의 분산이 가장 크다.
표준편차는 분산의 양의 제곱근이므로 분산이 가장 큰 (가)의 표준편차가 가장 크다.

07 $E(X)=8$, $V(X)=9$, $\sigma(X)=3$ 이므로

$$\begin{aligned} (1) E(-2X+3) &= -2E(X)+3 \\ &= -2 \times 8 + 3 = -13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(-2X+3) &= (-2)^2 V(X) \\ &= 4 \times 9 = 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(-2X+3) &= |-2| \sigma(X) \\ &= 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) E\left(\frac{1}{4}X+1\right) &= \frac{1}{4}E(X)+1 \\ &= \frac{1}{4} \times 8 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V\left(\frac{1}{4}X+1\right) &= \left(\frac{1}{4}\right)^2 V(X) \\ &= \frac{1}{16} \times 9 = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma\left(\frac{1}{4}X+1\right) &= \left|\frac{1}{4}\right| \sigma(X) \\ &= \frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

08 $E(X)=3$, $V(X)=4$, $Y=aX+b$ 이므로

$E(Y)=-1$ 에서

$$\begin{aligned} E(aX+b) &= -1, \quad aE(X)+b = -1 \\ 3a+b &= -1 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$V(Y)=16$ 에서

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= 16, \quad a^2V(X) = 16 \\ 4a^2 &= 16, \quad a^2 = 4 \end{aligned}$$

그런데 $a < 0$ 이므로 $a = -2$

$a = -2$ 를 ①에 대입하면

$$-6 + b = -1, \quad b = 5$$

09 $E(2X+4a)=12$ 에서

$$2E(X)+4a=12, \quad E(X)=6-2a$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$ 이므로

$$\begin{aligned} 3 &= (5a^2+14) - (6-2a)^2 \\ a^2+24a-25 &= 0, \quad (a+25)(a-1) = 0 \\ a &= -25 \text{ 또는 } a = 1 \end{aligned}$$

그런데 $a > 0$ 이므로 $a = 1$

10 $T=100+10\left(\frac{X-m}{\sigma}\right)$ 에서

$$T = \frac{10}{\sigma}X - \frac{10m}{\sigma} + 100$$

표준 점수 T 의 평균은

$$\begin{aligned} E(T) &= E\left(\frac{10}{\sigma}X - \frac{10m}{\sigma} + 100\right) \\ &= \frac{10}{\sigma}E(X) - \frac{10m}{\sigma} + 100 \\ &= \frac{10m}{\sigma} - \frac{10m}{\sigma} + 100 = 100 \end{aligned}$$

표준 점수 T 의 표준편차는

$$\begin{aligned} \sqrt{V(T)} &= \sqrt{\left(\frac{10}{\sigma}\right)^2 V(X)} \\ &= \sqrt{\frac{100}{\sigma^2} \times \sigma^2} = \sqrt{100} = 10 \end{aligned}$$

03 이항분포

117~121쪽

- 01 약을 투여한 환자가 완치될 확률은

$$\frac{70}{100} = 0.7$$

약을 투여한 환자 10명 중에서 완치된 환자 수가 확률변수 X 이므로 X 는 이항분포 $B(10, 0.7)$ 을 따른다.

- 02 임의로 택한 사람이 왼손잡이일 확률은

$$\frac{6}{100} = 0.06$$

임의로 택한 4명 중에서 왼손잡이인 사람 수를 확률변수 X 라고 하면 X 는 이항분포 $B(4, 0.06)$ 을 따른다. 이때 왼손잡이가 1명 이하일 확률은

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= {}_4C_0 \times 0.06^0 \times 0.94^4 \\ &\quad + {}_4C_1 \times 0.06^1 \times 0.94^3 \\ &= 0.980 \dots \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은 0.98이다.

- 03 예약 좌석이 20개이므로 예약 좌석이 부족한 경우는 예약한 사람 22명 중 아무 연락 없이 오지 않는 사람이 1명 이하일 때이다.

아무 연락 없이 오지 않는 사람 수를 확률변수 X 라고 하면 X 는 이항분포 $B(22, 0.15)$ 를 따른다. 이때 아무 연락 없이 오지 않는 사람이 1명 이하일 확률은

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= {}_{22}C_0 \times 0.15^0 \times 0.85^{22} \\ &\quad + {}_{22}C_1 \times 0.15^1 \times 0.85^{21} \\ &= 0.1367 \dots \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은 0.137이다.

- 04 X 의 평균은

$$E(X) = 45 \times \frac{1}{3} = 15$$

X 의 분산은

$$V(X) = 45 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 10$$

X 의 표준편차는

$$\sigma(X) = \sqrt{45 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = \sqrt{10}$$

- 05 맞힌 문항 수를 확률변수 X 라고 하면 X 는 이항분포

$$B\left(25, \frac{1}{5}\right) \text{을 따른다.}$$

X 의 평균은

$$E(X) = 25 \times \frac{1}{5} = 5$$

X 의 표준편차는

$$\sigma(X) = \sqrt{25 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5}} = 2$$

04 정규분포

122~134쪽

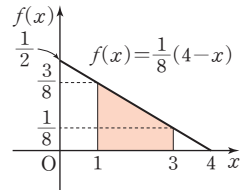
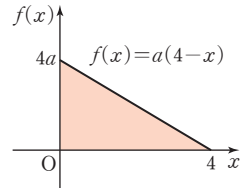
- 01 $f(x) \geq 0$ 이므로 $a \geq 0$

$f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 4a = 1, a = \frac{1}{8}$$

구하는 확률은 오른쪽 그림에서 $f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right) \times 2 = \frac{1}{2}$$



- 02 대칭축의 위치가 오른쪽에 있을수록 평균이 크므로 평균이 가장 큰 것은 (4)이다.

높이가 낮아지면서 양쪽으로 넓게 퍼질수록 표준편차가 커지므로 표준편차가 가장 큰 것은 (1)이다.

- 03 (1) $P(-1 \leq Z \leq 2)$

$$\begin{aligned} &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.3413 + 0.4772 \\ &= 0.8185 \end{aligned}$$

- (2) $P(Z \geq 1)$

$$\begin{aligned} &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 \\ &= 0.1587 \end{aligned}$$

- 04 (1) $P(|Z| \leq c) = P(-c \leq Z \leq c)$

$$\begin{aligned} &= 2P(0 \leq Z \leq c) \\ &= 0.901 \end{aligned}$$

이므로

$$P(0 \leq Z \leq c) = 0.4505$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.65) = 0.4505$ 이므로

$$c = 1.65$$

$$(2) P(Z \leq c) = 0.994 > 0.5 \text{ 이므로 } c > 0$$

$$P(Z \leq c) = 0.5 + P(0 \leq Z \leq c) \\ = 0.994$$

이므로

$$P(0 \leq Z \leq c) = 0.494$$

$$\text{이때 } P(0 \leq Z \leq 2.51) = 0.494 \text{ 이므로}$$

$$c = 2.51$$

05 확률변수 X 는 정규분포 $N(30, 6^2)$ 을 따르므로 확률변수 $Z = \frac{X-30}{6}$ 은 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$(1) P(24 \leq X \leq 36)$$

$$= P\left(\frac{24-30}{6} \leq Z \leq \frac{36-30}{6}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1)$$

$$= 2P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 2 \times 0.3413 = 0.6826$$

$$(2) P(X \leq 39) = P\left(Z \leq \frac{39-30}{6}\right)$$

$$= P(Z \leq 1.5)$$

$$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.5 + 0.4332$$

$$= 0.9332$$

06 통조림 1개의 무게를 확률변수 X 라고 하면 X 는 정규분포 $N(250, 2^2)$ 을 따르므로 확률변수

$$Z = \frac{X-250}{2} \text{은 표준정규분포 } N(0, 1) \text{을 따른다.}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X \leq 255) = P\left(Z \leq \frac{255-250}{2}\right)$$

$$= P(Z \leq 2.5)$$

$$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 2.5)$$

$$= 0.5 + 0.4938$$

$$= 0.9938$$

07 품질 검사 점수를 확률변수 X 라고 하면 X 는 정규분포 $N(100, 20^2)$ 을 따르므로 확률변수 $Z = \frac{X-100}{20}$

은 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

최저 점수를 $c(c > 100)$ 라고 하면 $P(X \geq c) = 0.33$

이어야 하므로

$$P\left(Z \geq \frac{c-100}{20}\right) = 0.33$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{c-100}{20}\right) = 0.33$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{c-100}{20}\right) = 0.17$$

$$\text{이때 } P(0 \leq Z \leq 0.44) = 0.17 \text{ 이므로}$$

$$\frac{c-100}{20} = 0.44, c = 108.8$$

따라서 구하는 최저 점수는 108.8점이다.

08 $np \geq 5, nq \geq 5$ 를 만족시키고

$$np = 100 \times \frac{1}{2} = 50,$$

$$npq = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$$

이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(50, 5^2)$ 을 따른다.

따라서 확률변수 $Z = \frac{X-50}{5}$ 은 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$(1) P(45 \leq X \leq 56)$$

$$= P\left(\frac{45-50}{5} \leq Z \leq \frac{56-50}{5}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 1.2)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.2)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 1.2)$$

$$= 0.3413 + 0.3849$$

$$= 0.7262$$

$$(2) P(X \leq 62)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{62-50}{5}\right)$$

$$= P(Z \leq 2.4)$$

$$= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 2.4)$$

$$= 0.5 + 0.4918$$

$$= 0.9918$$

09 학생 150명 중에서 C사의 스마트폰을 사용하는 학생 수를 확률변수 X 라고 하면 X 는 $n = 150, p = 0.4$ 인 이항분포 $B(150, 0.4)$ 를 따른다.

이때 $np \geq 5, nq \geq 5$ 를 만족시키고,

$$np = 150 \times 0.4 = 60,$$

$$npq = 150 \times 0.4 \times 0.6 = 36$$

이므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(60, 6^2)$ 을 따른다.

따라서 확률변수 $Z = \frac{X-60}{6}$ 은 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(X \leq 54) = P\left(Z \leq \frac{54-60}{6}\right)$$

$$= P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1)$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 - 0.3413$$

$$= 0.1587$$

2 통계적 추정

01 모집단과 표본

144~145쪽

- 01 (1)은 집단 전체를 조사해야 하므로 전수조사가 더 적합하고, (2)는 집단 전체에서 일부분을 택하여 조사해야 하므로 표본조사가 더 적합하다.

02 표본평균과 표본비율의 분포

146~152쪽

- 01 이 과수원에서 생산되는 굴 1개의 당도를 확률변수 X 라고 하면 $E(X)=10$, $\sigma(X)=2$ 이므로 임의추출한 굴 25개의 당도의 표본평균 $\bar{X}$ 에 대하여

$$E(\bar{X})=10, \sigma(\bar{X})=\frac{2}{\sqrt{25}}=\frac{2}{5}=0.4$$

따라서 표본평균 $\bar{X}$ 의 평균은 10브릭스, 표본평균 $\bar{X}$ 의 표준편차는 0.4브릭스이다.

- 02 이 지역의 8월 한 달 동안 가구당 전기요금을 확률변수 X 라고 하면 임의추출한 100가구의 8월 한 달 동안 전기요금의 평균 $\bar{X}$ 에 대하여

$$E(\bar{X})=62000, \sigma(\bar{X})=\frac{10000}{\sqrt{100}}=1000$$

이때 X 는 정규분포 $N(62000, 10000^2)$ 을 따르므로 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(62000, 1000^2)$ 을 따른다.

따라서 확률변수 $Z=\frac{\bar{X}-62000}{1000}$ 은 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 60000) &= P\left(Z \leq \frac{60000-62000}{1000}\right) \\ &= P(Z \leq -2) \\ &= P(Z \geq 2) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

- 03 (1) 이 뮤지컬 동호회 전체 회원 150명 중에서 A 뮤지컬을 관람한 회원이 132명이므로

$$p = \frac{132}{150} = \frac{22}{25}$$

임의추출한 회원 20명 중에서 A 뮤지컬을 관람한

회원이 17명이므로 $\hat{p} = \frac{17}{20}$

- (2) 임의추출한 100명 중에서 최근 한 달 동안 책을 1권 이상 읽은 사람이 17명이므로

$$\hat{p} = \frac{17}{100}$$

- 04 이 지역 학생 100명 중에서 대중교통을 이용하여 등교하는 학생의 비율을 $\hat{p}$ 이라고 하면 $n=100$, $p=0.36$ 이므로

$$E(\hat{p})=0.36$$

$$\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{0.36 \times 0.64}{100}} = 0.048$$

이때 $np \geq 5$, $nq \geq 5$ 를 만족시키므로 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포 $N(0.36, 0.048^2)$ 을 따른다.

따라서 확률변수 $Z = \frac{\hat{p}-0.36}{0.048}$ 은 근사적으로 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\hat{p} \leq 0.3) &= P\left(Z \leq \frac{0.3-0.36}{0.048}\right) \\ &= P(Z \leq -1.25) \\ &= P(Z \geq 1.25) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.25) \\ &= 0.5 - 0.3944 = 0.1056 \end{aligned}$$

03 모평균과 모비율의 추정

153~160쪽

- 01 $P(0 \leq Z \leq 1.64) = 0.45$ 에서

$$P(-1.64 \leq Z \leq 1.64) = 0.9 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} P\left(-1.64 \leq \frac{\bar{X}-m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq 1.64\right) &= P\left(\bar{X} - 1.64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\ &= 0.9 \end{aligned}$$

여기서 표본평균 $\bar{X}$ 에 크기가 n 인 표본으로 구한 표본평균 $\bar{x}$ 의 값을 대입하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 90%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- 02 $n=25$, $\bar{x}=59$, $\sigma=3$ 이므로 이 양계장에서 생산된 달걀 1개의 무게의 평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$59 - 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{25}} \leq m \leq 59 + 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{25}}$$

따라서 $57.824 \leq m \leq 60.176$ (단위: g)

즉, 이 양계장에서 생산된 달걀 1개의 무게의 평균이 57.824 g 이상 60.176 g 이하인 범위에 포함되어 있다는 추정의 신뢰도가 95 %이다.

- 03 $\sigma = 3$ 이므로 모평균 m 을 신뢰도 95 %로 추정할 때의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{n}} = \frac{11.76}{\sqrt{n}}$$

신뢰구간의 길이가 1 이하이려면 $\frac{11.76}{\sqrt{n}} \leq 1$ 에서

$$\sqrt{n} \geq 11.76, n \geq 138.2976$$

따라서 n 의 최솟값은 139이다.

- 04 $P(|Z| \leq c) = \frac{\alpha}{100}$ 를 만족시키는 양수 c 에 대하여 크기가 15인 표본을 임의추출하였을 때, 모평균 m 의 신뢰구간의 길이가 8이므로

$$2c \times \frac{\sigma}{\sqrt{15}} = 8$$

$$c\sigma = 4\sqrt{15} \quad \dots\dots ①$$

$P(|Z| \leq c) = \frac{\alpha}{100}$ 를 만족시키는 양수 c 에 대하여 크기가 n 인 표본을 임의추출하였을 때, 모평균 m 의 신뢰구간의 길이가 4이므로

$$2c \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4$$

$$c\sigma = 2\sqrt{n}$$

①을 대입하면

$$4\sqrt{15} = 2\sqrt{n}, \sqrt{n} = 2\sqrt{15}$$

따라서 양변을 제곱하면

$$n = 60$$

- 05 $P(0 \leq Z \leq 1.64) = 0.45$ 에서

$P(-1.64 \leq Z \leq 1.64) = 0.9$ 이므로

$$P\left(-1.64 \leq \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}} \leq 1.64\right)$$

$$= P\left(\hat{p} - 1.64 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \leq p \leq \hat{p} + 1.64 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$

$$= 0.9$$

여기서 표본비율 $\hat{p}$ 에 크기가 n 인 표본으로 구한 $\hat{p}$ 의 값을 대입하면 모비율 p 에 대한 신뢰도 90 %의 신뢰구간은

$$\hat{p} - 1.64 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \leq p \leq \hat{p} + 1.64 \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

- 06 (1) 주민 1100명 중에서 체육관 건립을 찬성하는 주민의 비율을 $\hat{p}$ 이라고 하면

$$\hat{p} = \frac{605}{1100} = 0.55$$

이때 $n\hat{p} \geq 5$, $n\hat{q} \geq 5$ 를 만족시키므로 이 지역 전체 주민 중에서 체육관 건립을 찬성하는 주민의 비율 p 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\begin{aligned} 0.55 - 2.58 \sqrt{\frac{0.55 \times 0.45}{1100}} &\leq p \\ &\leq 0.55 + 2.58 \sqrt{\frac{0.55 \times 0.45}{1100}} \end{aligned}$$

따라서 $0.5113 \leq p \leq 0.5887$

즉, 이 지역 주민 중에서 체육관 건립을 찬성하는 주민의 비율이 0.5113 이상 0.5887 이하인 범위에 포함되어 있다는 추정의 신뢰도가 99 %이다.

- (2) $\hat{p} = 0.55$ 이므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 1.96 \times \sqrt{\frac{0.55 \times 0.45}{1100}} = 0.0588$$

I. 경우의 수

206~208쪽

- 01 4 02 ③ 03 500 04 420 05 ⑤
 06 1800 07 56 08 ④ 09 ④ 10 ②
 11 ③ 12 286 13 1329 14 2160 15 620
 16 150 17 210 18 10

- 01 사지선다형 문제 n 개의 답을 고르는 경우의 수는

$${}_4\Pi_n = 4^n$$

이때 $4^n \geq 200$ 이어야 하고, $4^3 = 64$, $4^4 = 256$ 이므로
 $n \geq 4$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

- 02 5개의 문자 a, b, c, d, e 중에서 3개를 택하는 중복 순열의 수는 ${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$

(i) b 가 포함되지 않는 경우

네 문자 a, c, d, e 중에서 3개를 뽑는 중복순열의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

(ii) c 가 포함되지 않는 경우

네 문자 a, b, d, e 중에서 3개를 뽑는 중복순열의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

(iii) b, c 가 모두 포함되지 않는 경우

세 문자 a, d, e 중에서 3개를 뽑는 중복순열의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$125 - (64 + 64 - 27) = 24$$

그러므로 ③이다.

다른 풀이

(i) a, d, e 중에서 1개, b, c 가 1개씩 포함되는 경우

일렬로 배열하는 경우의 수는 $3 \times 3! = 18$

(ii) b 가 2개, c 가 1개 포함되는 경우

일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} = 3$

(iii) b 가 1개, c 가 2개 포함되는 경우

일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} = 3$

따라서 구하는 경우의 수는

$$18 + 3 + 3 = 24$$

그러므로 ③이다.

- 03 한 자리의 자연수는 1, 2, 3, 4의 4개

두 자리의 자연수의 개수는 $4 \times {}_5\Pi_1 = 4 \times 5^1 = 20$

세 자리의 자연수의 개수는 $4 \times {}_5\Pi_2 = 4 \times 5^2 = 100$

천의 자리의 수가 1, 2, 3인 네 자리의 자연수의 개수는 $3 \times {}_5\Pi_3 = 3 \times 5^3 = 375$

따라서 $4 + 20 + 100 + 375 = 499$ 이므로 4000은 500 번째 수이다.

- 04 빨간 공 3개, 파란 공 3개, 노란 공 2개를 일렬로 배열 하는 방법의 수는

$$\frac{8!}{3! \times 3! \times 2!} = 560$$

양 끝에 빨간 공이 오도록 배열하는 방법의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

양 끝에 파란 공이 오도록 배열하는 방법의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

양 끝에 노란 공이 오도록 배열하는 방법의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$560 - (60 + 60 + 20) = 420$$

- 05 V, G, N의 순서가 정해져 있으므로 V, G, N을 모두 x 로 생각하여 9개의 문자 E, x , E, R, x , R, E, E, x 를 일렬로 배열한 다음, 3개의 x 를 차례로 V, G, N으로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$$\frac{9!}{4! \times 3! \times 2!} = 1260$$

그러므로 ⑤이다.

- 06 지호의 집을 A, 나머지 5명의 친구의 집을 각각 B, C, D, E, F라고 하자.

민재가 친구의 집을 방문하는 방법의 수는 7개의 문자 A, A, B, C, D, E, F를 일렬로 배열하는 방법의 수와 같으므로

$$\frac{7!}{2!} = 2520$$

민재가 지호의 집을 연이어 방문하는 방법의 수는 A, A를 하나의 문자로 생각하여 A, B, C, D, E, F를 일렬로 배열하는 방법의 수와 같으므로 $6! = 720$

따라서 구하는 방법의 수는

$$2520 - 720 = 1800$$

다른 풀이

지호를 제외한 5명의 친구의 집을 방문하는 방법의 수는 $5! = 120$

지호의 집을 연이어 방문하지 않으려면 다음 그림과 같이 5명의 친구의 집 사이사이와 양 끝의 6자리 중에서 2자리를 택하여 지호의 집을 방문하는 순서로 정하면 된다.

$$\vee \square \vee \square \vee \square \vee \square \vee \square \vee$$

지호의 집을 방문하는 순서를 정하는 방법의 수는

$${}_6C_2 = 15$$

따라서 구하는 방법의 수는

$$120 \times 15 = 1800$$

- 07 딸기주스를 1개 고르고, 서로 다른 6종류의 과일주스에서 중복을 허용하여 3개를 더 고르면 된다.

따라서 구하는 방법의 수는

$${}_6H_3 = {}_8C_3 = 56$$

- 08 $(x+y+z)^4(a+b+c+d)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수는

$${}_3H_4 \times {}_4H_5 = {}_6C_4 \times {}_8C_5 = 840$$

a 를 포함하지 않는 서로 다른 항의 개수는

$${}_3H_4 \times {}_3H_5 = {}_6C_4 \times {}_7C_5 = 315$$

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$$840 - 315 = 525$$

그러므로 ④이다

- 09 $2 < x \leq y \leq z < 10$ 이므로 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 중복을 허용하여 3개를 뽑아 작거나 같은 수부터 차례로 x, y, z 에 놓으면 된다.

따라서 구하는 양의 정수해의 개수는

$${}_7H_3 = {}_9C_3 = 84$$

그러므로 ④이다.

- 10 $(4x-3y)^5$ 의 전개식에서 각 항은

$${}_5C_r \times (4x)^r \times (-3y)^{5-r}, \text{ 즉}$$

$${}_5C_r \times 4^r \times (-3)^{5-r} \times x^r y^{5-r}$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

$$x^r y^{5-r} = x^3 y^2 \text{에서}$$

$$r=3$$

따라서 $x^3 y^2$ 의 계수는

$${}_5C_3 \times 4^3 \times (-3)^2 = 5760$$

그러므로 ②이다.

- 11 $(x+a)(x-2)^5 = x(x-2)^5 + a(x-2)^5$ 이므로 x^4 의 계수는 $(x-2)^5$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $a(x-2)^5$ 의 전개식에서 x^4 의 계수의 합과 같다.

$(x-2)^5$ 의 전개식에서 각 항은

$${}_5C_r \times (-2)^{5-r} \times x^r$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

- (i) $(x-2)^5$ 의 전개식에서 x^3 의 계수

$$r=3 \text{이므로 } {}_5C_3 \times (-2)^2 = 40$$

- (ii) $(x-2)^5$ 의 전개식에서 x^4 의 계수

$$r=4 \text{이므로 } {}_5C_4 \times (-2) = -10$$

x^4 의 계수가 160이므로

$$40 + (-10a) = 160, a = -12$$

그러므로 ③이다.

- 12 $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ 의 전개식에서 각 항은

$${}_nC_r \times x^r \times \left(\frac{1}{x}\right)^{n-r}, \text{ 즉 } {}_nC_r \times \frac{x^r}{x^{n-r}} \text{의 꼴이다.}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_2C_2$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^3 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 없다.}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_4C_3$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^5 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 없다.}$$

$\vdots$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^9 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 없다.}$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10} \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_{10}C_6$$

따라서 주어진 식의 전개식에서 x^2 의 계수는

$${}_2C_2 + {}_4C_3 + {}_6C_4 + {}_8C_5 + {}_{10}C_6$$

$$= 1 + 4 + 15 + 56 + 210 = 286$$

- 13 ${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r (1 \leq r < n)$ 이므로

$${}_3C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{20}C_{18}$$

$$= {}_3C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{20}C_{18} + {}_3C_0 - {}_3C_0$$

$$= {}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{20}C_{18} - {}_3C_0$$

$$= {}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{20}C_{18} - 1$$

$$= {}_5C_2 + {}_5C_3 + \cdots + {}_{20}C_{18} - 1$$

$\vdots$

$$= {}_{20}C_{17} + {}_{20}C_{18} - 1$$

$$= {}_{21}C_{18} - 1$$

$$= {}_{21}C_3 - 1$$

$$= 1329$$

- 14 만의 자리에 올 수 있는 수는 0을 제외한

1, 2, 3, 4, 5

의 5개

20%

일의 자리에 올 수 있는 수는

0, 5

의 2개

20%

남은 3개의 자리에 각각 6개의 수가 올 수 있으므로

그 경우의 수는

$${}_6\Pi_3=6^3=216$$

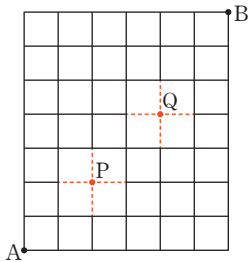
20%

따라서 구하는 5의 배수의 개수는

$$5 \times 2 \times 216 = 2160$$

40%

- 15 다음 그림과 같이 두 지점 P, Q가 있다고 생각하자.



지점 A에서 지점 B로 가는 최단 경로의 수는

$$\frac{13!}{6! \times 7!} = 1716$$

20%

지점 A에서 지점 P를 거쳐 지점 B로 가는 최단 경로의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{9!}{4! \times 5!} = 756$$

지점 A에서 지점 Q를 거쳐 지점 B로 가는 최단 경로의 수는

$$\frac{8!}{4! \times 4!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 700$$

지점 A에서 지점 P, 지점 Q를 차례로 거쳐 지점 B로 가는 최단 경로의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 360$$

지점 A에서 지점 P 또는 지점 Q를 거쳐 지점 B로 가는 최단 경로의 수는

$$756 + 700 - 360 = 1096$$

60%

따라서 구하는 최단 경로의 수는

$$1716 - 1096 = 620$$

20%

- 16 지역의 원소의 개수가 4이므로 원소 6개 중에서 4개를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

30%

$a < b$ 이면 $f(a) \leq f(b)$ 이고 지역의 원소의 개수가 4이므로 선택된 지역의 원소 4개와 이 지역의 원소 4개 중에서 중복을 허용하여 택한 2개를 작거나 같은 수부터 차례로 정의역 X 의 원소에 대응시키면 된다.

즉, 원소 4개 중에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

50%

따라서 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는

$$15 \times 10 = 150$$

20%

- 17 방정식 $x + y + z + w = k$ (k 는 음이 아닌 정수)를 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수는

$${}_4H_k$$

40%

따라서 부등식 $x + y + z + w \leq 6$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수해의 개수는

$$\begin{aligned} & {}_4H_0 + {}_4H_1 + {}_4H_2 + {}_4H_3 + {}_4H_4 + {}_4H_5 + {}_4H_6 \\ &= {}_3C_0 + {}_4C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 + {}_7C_4 + {}_8C_5 + {}_9C_6 \\ &= {}_4C_4 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + {}_7C_3 + {}_8C_3 + {}_9C_3 \\ &= {}_5C_4 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + {}_7C_3 + {}_8C_3 + {}_9C_3 \\ &= {}_6C_4 + {}_6C_3 + {}_7C_3 + {}_8C_3 + {}_9C_3 \\ &= {}_7C_4 + {}_7C_3 + {}_8C_3 + {}_9C_3 \\ &= {}_8C_4 + {}_8C_3 + {}_9C_3 \\ &= {}_9C_4 + {}_9C_3 \\ &= {}_{10}C_4 \\ &= 210 \end{aligned}$$

60%

- 18 $(1+x)^5$ 의 전개식에서 각 항은

$${}_5C_r \times x^r$$

의 꼴로, $(1+x^3)^n$ 의 전개식에서 각 항은

$${}_nC_s \times x^{3s}$$

의 꼴로 나타낼 수 있으므로 $(1+x)^5(1+x^3)^n$ 의 전개식에서 각 항은

$${}_5C_r \times {}_nC_s \times x^{r+3s}$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

40%

$$x^{r+3s} = x^3 \text{에서 } r+3s=3$$

(i) $r=0, s=1$ 일 때, x^3 의 계수는

$${}_5C_0 \times {}_nC_1 = n$$

20%

(ii) $r=3, s=0$ 일 때, x^3 의 계수는

$${}_5C_3 \times {}_nC_0 = 10$$

20%

x^3 의 계수가 20이므로

$$n+10=20, n=10$$

20%

01 $\frac{3}{10}$	02 $\frac{5}{9}$	03 ②	04 $\frac{7}{27}$	05 0.15
06 $\frac{5}{12}$	07 $\frac{19}{20}$	08 $\frac{595}{729}$	09 ④	10 ⑤
11 $\frac{9}{19}$	12 ⑤	13 $\frac{19}{56}$	14 $\frac{1}{3}$	15 $\frac{76}{81}$
16 $\frac{2}{11}$	17 $\frac{3}{8}$	18 $\frac{80}{243}$		

01 5개의 수를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$5! = 120$$

1, 3, 5 중에서 2개를 택하여 양 끝에 일렬로 배열한 후, 나머지 3개를 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3P_2 \times 3! = 36$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{36}{120} = \frac{3}{10}$$

02 10명의 학생 중에서 2명을 선발하는 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = 45$$

남학생 수를 x 라고 하면 여학생 수는

$$10 - x$$

남학생과 여학생이 각각 한 명씩 선발되는 경우의 수는

$${}_xC_1 \times {}_{10-x}C_1 = x(10-x)$$

남학생과 여학생이 각각 한 명씩 선발될 확률은

$$\frac{x(10-x)}{45} = -\frac{1}{45}(x-5)^2 + \frac{5}{9}$$

이므로 $x=5$ 에서 최댓값 $\frac{5}{9}$ 를 갖는다.

따라서 확률의 최댓값은 $\frac{5}{9}$ 이다.

03 두 상자 A, B에서 각각 공을 1개씩 꺼낼 때 나오는 경우의 수는 $5 \times 5 = 25$

두 수의 합이 짝수인 경우는

$$(\text{짝수}) + (\text{짝수}), (\text{홀수}) + (\text{홀수})$$

인 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) (짝수)+(짝수)인 경우

상자 A에서 짝수는 2, 4, 상자 B에서 짝수는 10, 12, 14이므로 그 경우의 수는

$$2 \times 3 = 6$$

(ii) (홀수)+(홀수)인 경우

상자 A에서 홀수는 1, 3, 5, 상자 B에서 홀수는 11, 13이므로 그 경우의 수는

$$3 \times 2 = 6$$

두 수의 합이 짝수인 경우의 수는

$$6 + 6 = 12$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{12}{25}$$

그러므로 ②이다.

04 $X = \{2, 4, 6, 8\}$, $Y = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ 이므로 X 에서 Y 로의 함수 f 의 개수는

$${}_6\Pi_4 = 6^4 = 1296$$

$f(2) \leq f(4) \leq f(6)$ 이므로 집합 Y 의 원소 6개 중에서 중복을 허용하여 3개를 뽑은 후 작거나 같은 수부터 차례로 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ 에 대응시키면 되므로 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_6H_3 = {}_8C_3 = 56$$

$f(8)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_6\Pi_1 = 6$$

$f(2) \leq f(4) \leq f(6)$ 을 만족시키는 함수 f 의 개수는

$$56 \times 6 = 336$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{336}{1296} = \frac{7}{27}$$

05 파인애플 토핑을 추가한 고객인 사건을 A , 치즈 토핑을 추가한 고객인 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = 0.25, P(B) = 0.6, P(A \cup B) = 0.7$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 0.25 + 0.6 - 0.7 \\ &= 0.15 \end{aligned}$$

06 $P(A) = x \left(0 < x < \frac{1}{2} \right)$, $P(B) = y$ 라고 하면

$$2P(A) = 3P(B) \text{에서 } 2x = 3y$$

$$y = \frac{2}{3}x \quad \dots\dots ①$$

$$P(B)\{1 - P(A)\} = \frac{1}{8} \text{에서}$$

$$y(1-x) = \frac{1}{8}$$

①을 대입하면

$$\frac{2}{3}x(1-x) = \frac{1}{8}, 16x^2 - 16x + 3 = 0$$

$$(4x-1)(4x-3) = 0, x = \frac{1}{4} \text{ 또는 } x = \frac{3}{4}$$

그런데 $0 < x < \frac{1}{2}$ 이므로 $x = \frac{1}{4}$

$$x = \frac{1}{4} \text{을 ①에 대입하면 } y = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

$$\text{즉, } P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{6}$$

따라서 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

07 꺼낸 공의 색이 모두 같은 사건을 A 라고 하자.

공 10개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = 120$$

빨간 공 3개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_3 = 1$$

파란 공 4개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_3 = 4$$

노란 공 3개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_3 = 1$$

즉, 꺼낸 공의 색이 모두 같은 경우의 수는

$$1 + 4 + 1 = 6$$

$$\text{이므로 } P(A) = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} \end{aligned}$$

08 각 자리의 수의 곱이 5 미만이거나 홀수인 경우는 1, 2, 3, 4 또는 1, 3, 5, ...이므로 2, 4 또는 홀수로 나 타낼 수 있다.

각 자리의 수의 곱이 2, 4 또는 홀수인 사건을 A 라고 하자.

각 자리의 수가 0이 아닌 세 자리의 자연수의 개수는

$${}_9P_3 = 9^3 = 729$$

(i) 각 자리의 수의 곱이 2, 4인 경우

1, 1, 2 또는 1, 1, 4 또는 1, 2, 2를 일렬로 나열 하면 되므로 그 경우의 수는

$$3 \times \frac{3!}{2!} = 9$$

(ii) 각 자리의 수가 모두 홀수인 경우

1, 3, 5, 7, 9에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$${}_5P_3 = 5^3 = 125$$

각 자리의 수의 곱이 2, 4 또는 홀수인 경우의 수는

$$9 + 125 = 134$$

$$\text{이므로 } P(A) = \frac{134}{729}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - \frac{134}{729} = \frac{595}{729} \end{aligned}$$

다른 풀이

각 자리의 수가 0이 아닌 세 자리의 자연수의 개수는

$${}_9P_3 = 729$$

각 자리의 수의 곱이 5 이상인 짝수는 각 자리의 수의 곱이 짝수인 경우에서 각 자리의 수의 곱이 5 미만인 짝수, 즉 2, 4인 경우만 제외하면 된다.

(i) 각 자리의 수의 곱이 짝수인 경우

(짝수) $\times$ (짝수) $\times$ (짝수), (홀수) $\times$ (짝수) $\times$ (짝수), (홀수) $\times$ (홀수) $\times$ (짝수)의 꼴이므로 그 경우의 수는

$$\begin{aligned} &{}_4P_3 + 3 \times 5 \times {}_4P_2 + 3 \times 5 \times {}_5P_2 \times 4 \\ &= 64 + 240 + 300 = 604 \end{aligned}$$

(ii) 각 자리의 수의 곱이 2, 4인 경우

1, 1, 2 또는 1, 1, 4 또는 1, 2, 2를 일렬로 배열 하면 되므로 그 경우의 수는

$$3 \times \frac{3!}{2!} = 9$$

각 자리의 수의 곱이 5 이상인 짝수의 개수는

$$604 - 9 = 595$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{595}{729}$$

09 1학년 학생인 사건을 A , 급식에 만족한다고 응답한 학생인 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = \frac{90}{160} = \frac{9}{16}$$

$$P(A \cap B) = \frac{70}{160} = \frac{7}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{16}}{\frac{9}{16}} = \frac{7}{9}$$

그러므로 ④이다.

10 $P(B|A) = \frac{1}{3}$ 에서

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{3}P(A)$$

$P(A) = \frac{1}{4}$ 이므로

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$P(A|B)=\frac{1}{4}$ 에서

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{4}, P(B) = 4P(A \cap B)$$

$$P(B) = 4 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$$

따라서 $P(B \cap A^c) = P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

그러므로 ⑤이다.

- 11 20대인 사건을 A , 여자인 사건을 B 라고 하면

$$P(A) = \frac{3}{7}, P(A^c) = \frac{4}{7},$$

$$P(B|A) = \frac{3}{5}, P(B|A^c) = \frac{1}{2}$$

여자일 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \frac{3}{7} \times \frac{3}{5} + \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{19}{35} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{\frac{9}{35}}{\frac{19}{35}} = \frac{9}{19} \end{aligned}$$

- 12 주사위를 던져 3 이상의 눈의 수가 나올 확률은

$$\frac{2}{3}$$

동전을 던져 뒷면이 나올 확률은

$$\frac{1}{2}$$

4회의 시행에서 주사위의 눈의 수가 3 이상이 나오는 횟수가 x , 동전의 뒷면이 나오는 횟수가 y 이므로 각 확률은

$${}_4C_x \times \left(\frac{2}{3}\right)^x \times \left(\frac{1}{3}\right)^{4-x} \times {}_4C_y \times \left(\frac{1}{2}\right)^y \times \left(\frac{1}{2}\right)^{4-y}$$

$$(x=0, 1, 2, 3, 4, y=0, 1, 2, 3, 4)$$

$x^2 + y^2 = 10$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 는

$x=1, y=3$ 또는 $x=3, y=1$ 이다.

$x=1, y=3$ 일 때, 그 확률은

$$\begin{aligned} &{}_4C_1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times {}_4C_3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \\ &= \frac{2}{81} \end{aligned}$$

$x=3, y=1$ 일 때, 그 확률은

$$\begin{aligned} &{}_4C_3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 \times {}_4C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{8}{81} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{2}{81} + \frac{8}{81} = \frac{10}{81}$$

그러므로 ⑤이다.

- 13 집합 $\{1, 2, 3\}$ 의 부분집합의 개수는

$$2^3 = 8$$

두 집합 X, Y 를 택하는 방법의 수는

$${}_8P_2 = 56$$

20%

(i) $n(Y) = 3$ 인 경우

$Y = \{1, 2, 3\}$ 이므로 집합 X 의 개수는

$$2^3 - 1 = 7$$

(ii) $n(Y) = 2$ 인 경우

$Y = \{1, 2\}$ 또는 $Y = \{1, 3\}$ 또는 $Y = \{2, 3\}$ 이

므로 집합 X 의 개수는

$$3 \times (2^2 - 1) = 9$$

(iii) $n(Y) = 1$ 인 경우

$Y = \{1\}$ 또는 $Y = \{2\}$ 또는 $Y = \{3\}$ 이므로 집합 X 의 개수는

$$3 \times (2^1 - 1) = 3$$

$X \subset Y$ 를 만족시키는 두 집합 X, Y 의 개수는

$$7 + 9 + 3 = 19$$

60%

따라서 구하는 확률은

$$\frac{19}{56}$$

20%

- 14 7명의 학생을 일렬로 배열하는 방법의 수는

$$7! = 5040$$

20%

세 학생 A, B, C 를 모두 x , 나머지 학생을 D, E, F, G 로 놓고 x, x, x, D, E, F, G 를 일렬로 배열한 다음, 3개의 x 를 차례로 A, B, C 또는 B, A, C 로 바꾸면 된다.

A, B 가 C 보다 앞에 오도록 배열하는 방법의 수는

$$2 \times \frac{7!}{3!} = 1680$$

60%

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1680}{5040} = \frac{1}{3}$$

20%

- 15 공에 적힌 수의 합이 13 이상인 사건을 A 라고 하자.

▶ 20%

서로 다른 5개의 공을 서로 다른 3개의 상자에 넣는 경우의 수는

$${}_3\Pi_5=243$$

- (i) 1, 3, 4, 5가 적힌 공을 한 상자에, 2가 적힌 공을 남은 두 상자에 넣는 경우의 수는

$$3 \times 2 = 6$$

- (ii) 2, 3, 4, 5가 적힌 공을 한 상자에, 1이 적힌 공을 남은 두 상자에 넣는 경우의 수는

$$3 \times 2 = 6$$

- (iii) 1, 2, 3, 4, 5가 적힌 공을 한 상자에 넣는 경우의 수는 3

공에 적힌 수의 합이 13 이상인 경우의 수는

$$6+6+3=15$$

$$\text{이므로 } P(A)=\frac{15}{243}=\frac{5}{81}$$

▶ 60%

따라서 구하는 확률은

$$P(A^c)=1-P(A)$$

$$=1-\frac{5}{81}=\frac{76}{81}$$

▶ 20%

- 16 지호가 당첨 제비를 뽑는 사건을 A , 은우가 당첨 제비를 뽑는 사건을 B 라고 하면

$$P(A)=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}, P(A^c)=\frac{3}{4}$$

$$P(B|A)=\frac{2}{11}, P(B|A^c)=\frac{3}{11}$$

▶ 30%

은우가 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$P(B)=P(B \cap A)+P(B \cap A^c)$$

$$=P(A)P(B|A)+P(A^c)P(B|A^c)$$

$$=\frac{1}{4} \times \frac{2}{11} + \frac{3}{4} \times \frac{3}{11}$$

$$=\frac{1}{4}$$

▶ 40%

따라서 은우가 당첨 제비를 뽑는다는 조건 아래에서 지호도 당첨 제비를 뽑을 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{\frac{1}{22}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{11}$$

▶ 30%

- 17 동전의 앞면이 2번 나오는 경우는

주사위 1개를 던져 3의 약수인 눈의 수가 나와 동전 1개를 3번 던진 상황에서 앞면이 2번,

주사위 1개를 던져 3의 약수가 아닌 눈의 수가 나와 동전 1개를 4번 던진 상황에서 앞면이 2번

나오는 경우로 나누어 생각할 수 있다.

주사위를 던져 3의 약수인 눈의 수가 나올 확률은

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

주사위 1개를 던져 3의 약수인 눈의 수가 나오고 동전 1개를 3번 던져 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{1}{3} \times {}_3C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{8}$$

주사위 1개를 던져 3의 약수가 아닌 눈의 수가 나오고 동전 1개를 4번 던져 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{2}{3} \times {}_4C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$$

- 18 주사위 1개를 6번 던져 6의 약수인 눈의 수가 나오는 횟수를 x ($0 \leq x \leq 6$)라고 하면 6의 약수가 아닌 눈의 수가 나오는 횟수는

$$6-x$$

6의 약수인 눈의 수가 나오면 2만큼, 6의 약수가 아닌 눈의 수가 나오면 1만큼 움직이고, 점 P가 꼭짓점 E에 도착하려면 4, 10, 16, ...만큼 움직이면 되므로

$$2x + (6-x) = k \quad (k=4, 10, 16, \dots)$$

$$x = k - 6 \quad (k=4, 10, 16, \dots)$$

그런데 $0 \leq x \leq 6$ 이므로

$$x=4$$

즉, 주사위 1개를 6번 던져 6의 약수인 눈의 수가 4번 나와야 한다.

▶ 60%

주사위를 던져 6의 약수인 눈의 수가 나올 확률은

$$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

▶ 10%

따라서 구하는 확률은

$${}_6C_4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$$

▶ 30%

- 01 $\frac{9}{10}$ 02 2 03 ⑤ 04 $\frac{109}{3}$ 05 $\frac{3}{5}$
 06 5328개 07 0.4 08 0.9772
 09 ① 10 0.6826 11 $69.02 \leq m \leq 70.98$
 12 0.2064 13 $E(Y)=15, V(Y)=24$
 14 30850명 15 0.8413 16 81
 17 $557.42 \leq m \leq 562.58$ (단위: mL) 18 72명

01 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{4}{n} + \frac{3}{n} + \frac{2}{n} + \frac{1}{n} = 1, \frac{10}{n} = 1$$

$$n = 10$$

따라서 $P(X \leq 3)$

$$= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{9}{10}$$

02 첫 번째 시행에서 파란 공이 나올 확률은

$$P(X=1) = \frac{1}{5}$$

첫 번째 시행에서 빨간 공이 나오고, 두 번째 시행에서 파란 공이 나올 확률은

$$P(X=2) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$$

두 번째 시행까지 빨간 공만 나오고, 세 번째 시행에서 파란 공이 나올 확률은

$$P(X=3) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

세 번째 시행까지 빨간 공만 나오고, 네 번째 시행에서 파란 공이 나올 확률은

$$P(X=4) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

네 번째 시행까지 빨간 공만 나오고, 다섯 번째 시행에서 파란 공이 나올 확률은

$$P(X=5) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{5}$$

X 의 확률분포표는 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

X 의 평균은

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5} \\ + 4 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{1}{5} \\ = 3$$

따라서 X 의 분산은

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ = 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} \\ + 4^2 \times \frac{1}{5} + 5^2 \times \frac{1}{5} - 3^2 \\ = 2$$

03 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{3} + a + \frac{1}{6} = 1, a = \frac{1}{2}$$

X 의 평균은

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

따라서 $E(aX+1) = aE(X) + 1$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} + 1 = \frac{17}{12}$$

그러므로 ⑤이다.

04 $E(X) = 12$ 이므로

$$np = 12 \quad \dots\dots ①$$

$E(X^2) = 152$ 이므로

$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 에서

$$np(1-p) = 152 - 12^2, np(1-p) = 8$$

①을 대입하면

$$12(1-p) = 8, 1-p = \frac{2}{3}$$

$$p = \frac{1}{3}$$

$p = \frac{1}{3}$ 을 ①에 대입하면

$$\frac{n}{3} = 12, n = 36$$

따라서 $n+p = 36 + \frac{1}{3} = \frac{109}{3}$

05 $f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times (1+4) \times k = 1, k = \frac{2}{5}$$

구하는 확률은 오른쪽

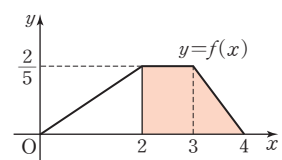
그림에서 $f(x)$ 의 그래프

와 x 축, 직선 $x=2$ 로

둘러싸인 부분의 넓이

와 같으므로

$$P(2 \leq X \leq 4) = \frac{1}{2} \times (1+2) \times \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$



- 06 제품의 중량을 확률변수 X 라고 하면 X 는 정규분포 $N(500, 10^2)$ 을 따른다.

제품의 중량이 490 g 이상 505 g 이하일 확률은

$$\begin{aligned} &P(490 \leq X \leq 505) \\ &= P\left(\frac{490-500}{10} \leq Z \leq \frac{505-500}{10}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0.5) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.3413 + 0.1915 \\ &= 0.5328 \end{aligned}$$

따라서 구하는 제품의 개수는

$$10000 \times 0.5328 = 5328(\text{개})$$

- 07 $f(16) = 0.7$ 이므로

$$P(X \leq 16) = 0.7$$

확률변수 X 는 정규분포 $N(11, \sigma^2)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(X \leq 16) &= P\left(Z \leq \frac{16-11}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{5}{\sigma}\right) \\ &= 0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{5}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

즉, $0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{5}{\sigma}\right) = 0.7$ 이므로

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{5}{\sigma}\right) = 0.2$$

따라서 $P(6 \leq X \leq 16)$

$$\begin{aligned} &= P\left(\frac{6-11}{\sigma} \leq Z \leq \frac{16-11}{\sigma}\right) \\ &= P\left(-\frac{5}{\sigma} \leq Z \leq \frac{5}{\sigma}\right) \\ &= 2P\left(0 \leq Z \leq \frac{5}{\sigma}\right) \\ &= 2 \times 0.2 = 0.4 \end{aligned}$$

- 08 동전 2개를 던져 모두 앞면이 나올 확률은

$$\frac{1}{4}$$

동전 2개 모두 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X 라

고 하면 X 는 이항분포 $B\left(4800, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 4800 \times \frac{1}{4} = 1200$$

$$\sigma(X) = \sqrt{4800 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}} = 30$$

이때 $np \geq 5$, $nq \geq 5$ 이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(1200, 30^2)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 1140) &= P\left(Z \geq \frac{1140-1200}{30}\right) \\ &= P(Z \geq -2) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 0) + 0.5 \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + 0.5 \\ &= 0.4772 + 0.5 \\ &= 0.9772 \end{aligned}$$

- 09 X 의 평균과 분산은

$$E(X) = 1 \times 0.2 + 3 \times 0.5 + 5 \times 0.3 = 3.2$$

$$\begin{aligned} V(X) &= 1^2 \times 0.2 + 3^2 \times 0.5 + 5^2 \times 0.3 - 3.2^2 \\ &= 1.96 \end{aligned}$$

크기가 28이므로

$$E(\bar{X}) = 3.2, V(\bar{X}) = \frac{1.96}{28} = 0.07$$

따라서 $E(\bar{X}) + V(\bar{X}) = 3.2 + 0.07 = 3.27$

그러므로 ①이다.

- 10 이 지역의 고등학생 600명 중에서 도서관을 주 1회 이상 이용하는 학생의 비율을 $\hat{p}$ 이라고 하면

$$E(\hat{p}) = 0.4, \sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{0.4 \times 0.6}{600}} = 0.02$$

이때 $n\hat{p} \geq 5$, $n\hat{q} \geq 5$ 를 만족시키므로 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포 $N(0.4, 0.02^2)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} &P(0.38 \leq \hat{p} \leq 0.42) \\ &= P\left(\frac{0.38-0.4}{0.02} \leq Z \leq \frac{0.42-0.4}{0.02}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 1) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 2 \times 0.3413 \\ &= 0.6826 \end{aligned}$$

- 11 $n=100$, $\bar{x}=70$, $\sigma=5$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$70 - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{100}} \leq m \leq 70 + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{100}}$$

따라서 $69.02 \leq m \leq 70.98$

- 12 사용자 100명 중에서 앱에 만족한다고 답한 사용자의 비율을 $\hat{p}$ 이라고 하면 $\hat{p} = \frac{80}{100} = 0.8$

이때 $n\hat{p} \geq 5$, $n\hat{q} \geq 5$ 를 만족시키므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.58 \times \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{100}} = 0.2064$$

- 13 이산확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x) = {}_{32}C_x \times \left(\frac{1}{4}\right)^x \times \left(\frac{3}{4}\right)^{32-x}$$

이므로 X 는 이항분포 $B\left(32, \frac{1}{4}\right)$ 을 따른다. 40%

$$E(X) = 32 \times \frac{1}{4} = 8 \text{이므로}$$

$$E(Y) = E(2X-1) = 2E(X) - 1 \\ = 2 \times 8 - 1 = 15 \quad 30\%$$

$$V(X) = 32 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 6 \text{이므로}$$

$$V(Y) = V(2X-1) = 2^2 V(X) \\ = 4 \times 6 = 24 \quad 30\%$$

- 14 외국인 관광객의 체류 기간을 확률변수 X 라고 하면 X 는 정규분포 $N(6.3, 1.4^2)$ 을 따른다. 30%

이때 체류 기간이 7일 이상일 확률은

$$P(X \geq 7) = P\left(Z \geq \frac{7-6.3}{1.4}\right) \\ = P(Z \geq 0.5) \\ = 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ = 0.5 - 0.1915 \\ = 0.3085 \quad 50\%$$

따라서 체류 기간이 7일 이상인 외국인 관광객 수는 $0.3085 \times 100000 = 30850(\text{명})$ 20%

- 15 이 모집단의 확률변수를 X 라고 하면 표본의 값의 총합이 4960 이상인 경우는 표본평균 $\bar{X}$ 가 $\frac{4960}{100} = 49.6$ 이상인 경우이므로 구하는 확률은 $P(\bar{X} \geq 49.6)$ 이다. 30%

표본평균 $\bar{X}$ 에 대하여

$$E(\bar{X}) = 50, \sigma(\bar{X}) = \frac{4}{\sqrt{100}} = 0.4$$

이때 X 는 정규분포 $N(50, 4^2)$ 을 따르므로 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(50, 0.4^2)$ 을 따른다. 30%

따라서 구하는 확률은

$$P(\bar{X} \geq 49.6) = P\left(Z \geq \frac{49.6-50}{0.4}\right) \\ = P(Z \geq -1) \\ = P(-1 \leq Z \leq 0) + 0.5 \\ = P(0 \leq Z \leq 1) + 0.5 \\ = 0.3413 + 0.5 \\ = 0.8413 \quad 40\%$$

- 16 X 가 정규분포 $N(45, 3^2)$ 을 따르므로

$$P(X \geq 54) = P\left(Z \geq \frac{54-45}{3}\right) \\ = P(Z \geq 3) \quad 30\%$$

표본평균 $\bar{X}$ 에 대하여

$$E(\bar{X}) = 45, \sigma(\bar{X}) = \frac{3}{\sqrt{n}}$$

$\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(45, \left(\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따르므로

$$P(\bar{X} \leq 44) = P\left(Z \leq \frac{44-45}{\frac{3}{\sqrt{n}}}\right) \\ = P\left(Z \leq -\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \quad 40\%$$

$P(X \geq 54) = P(\bar{X} \leq 44)$ 이므로

$$3 = \frac{\sqrt{n}}{3}, \sqrt{n} = 9$$

따라서 양변을 제곱하면

$$n = 81 \quad 30\%$$

- 17 표본의 크기 $n=400$ 은 충분히 크므로 크기가 n 인 표본으로 구한 표본표준편차의 값 $s=20$ 을 σ 대신 대입하여 근사적으로 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있다. 40%

이 도시 직장인들의 하루 평균 커피 소비량 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$560 - 2.58 \times \frac{20}{\sqrt{400}} \leq m \leq 560 + 2.58 \times \frac{20}{\sqrt{400}}$$

따라서 $557.42 \leq m \leq 562.58$ (단위: mL) 60%

- 18 모비율 p 에 대한 신뢰구간이 $\hat{p} - \alpha \leq p \leq \hat{p} + \alpha$ 의 꼴이므로 $(\hat{p} - \alpha) + (\hat{p} + \alpha) = 2\hat{p}$ 에서

$$\hat{p} = \frac{(\hat{p} - \alpha) + (\hat{p} + \alpha)}{2}$$

신뢰구간이 $0.686 \leq p \leq 0.754$ 이므로

$$\hat{p} = \frac{0.686 + 0.754}{2} = 0.72 \quad 70\%$$

따라서 관람객 100명 중에서 만족한 관람객 수는

$$100 \times 0.72 = 72(\text{명}) \quad 30\%$$