



정답과 해설



I 이차곡선

1 이차곡선

01 포물선

9~17쪽

- 01 (1) $y^2=4px$ 에서 $p=6$ 이므로 $y^2=4 \times 6x$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$y^2=24x$$

- (2) $y^2=4px$ 에서 $p=-4$ 이므로 $y^2=4 \times (-4)x$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

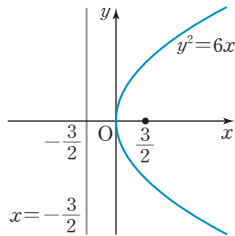
$$y^2=-16x$$

- 02 (1) $y^2=6x=4 \times \frac{3}{2}x$ 이므로 $p=\frac{3}{2}$

따라서 초점의 좌표는 $(\frac{3}{2}, 0)$

준선의 방정식은 $x=-\frac{3}{2}$

또 그래프는 다음 그림과 같다.

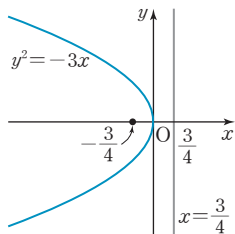


- (2) $y^2=-3x=4 \times (-\frac{3}{4})x$ 이므로 $p=-\frac{3}{4}$

따라서 초점의 좌표는 $(-\frac{3}{4}, 0)$

준선의 방정식은 $x=\frac{3}{4}$

또 그래프는 다음 그림과 같다.



- 03 (1) $x^2=4py$ 에서 $p=6$ 이므로 $x^2=4 \times 6y$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$x^2=24y$$

- (2) $x^2=4py$ 에서 $p=-1$ 이므로 $x^2=4 \times (-1)y$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

$$x^2=-4y$$

- 04 원 $x^2+(y+5)^2=1$ 의 중심의 좌표는 $(0, -5)$ 이므로

포물선의 초점의 좌표는 $(0, -5)$

꼭짓점이 원점이고 $x^2=4py$ 에서 $p=-5$ 이므로

$$x^2=4 \times (-5)y$$

따라서 구하는 포물선의 방정식은

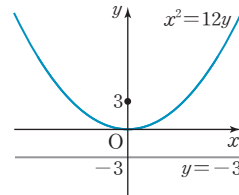
$$x^2=-20y$$

- 05 (1) $x^2=12y=4 \times 3y$ 이므로 $p=3$

따라서 초점의 좌표는 $(0, 3)$

준선의 방정식은 $y=-3$

또 그래프는 다음 그림과 같다.

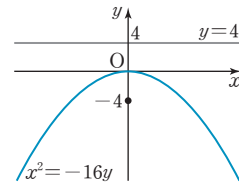


- (2) $x^2=-16y=4 \times (-4)y$ 이므로 $p=-4$

따라서 초점의 좌표는 $(0, -4)$

준선의 방정식은 $y=4$

또 그래프는 다음 그림과 같다.



- 06 (1) 주어진 포물선의 방정식을 변형하면

$$(y-2)^2=8(x+2)$$

이 포물선은 포물선 $y^2=8x$ 를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

$$y^2=8x=4 \times 2x \text{이므로 } p=2$$

포물선 $y^2=8x$ 의 초점의 좌표는 $(2, 0)$

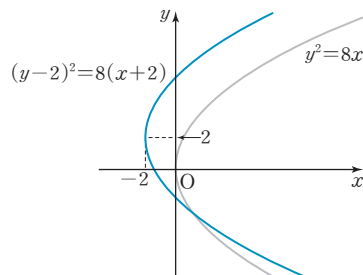
준선의 방정식은 $x=-2$

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$$(2-2, 0+2), \text{ 즉 } (0, 2)$$

준선의 방정식은

$$x=-2-2, \text{ 즉 } x=-4$$



(2) 주어진 포물선의 방정식을 변형하면

$$(x-4)^2 = -4(y-1)$$

이 포물선은 포물선 $x^2 = -4y$ 를 x 축의 방향으로 4만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

$$x^2 = -4y = 4 \times (-1)y \text{이므로 } p = -1$$

포물선 $x^2 = -4y$ 의 초점의 좌표는 $(0, -1)$

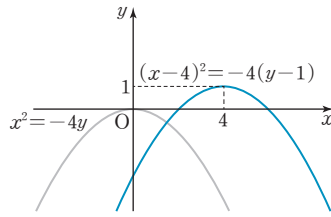
준선의 방정식은 $y = 1$

따라서 주어진 포물선의 초점의 좌표는

$$(0+4, -1+1), \text{ 즉 } (4, 0)$$

준선의 방정식은

$$y = 1 + 1, \text{ 즉 } y = 2$$



02 타원

18~28쪽

01 (1) $2a=8$ 에서 $a=4$

$$c=\sqrt{2} \text{에서 } b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 2 = 14$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{14} = 1$$

(2) $2a=6$ 에서 $a=3$

$$c=1 \text{에서 } b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 1 = 8$$

따라서 구하는 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$$

02 (1) $a=10, b=6$ 이므로

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$$

따라서 초점의 좌표는 $(8, 0), (-8, 0)$

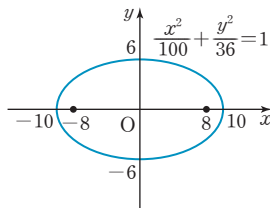
장축의 길이는 $2a=20$

단축의 길이는 $2b=12$

이때 꼭짓점의 좌표는

$$(10, 0), (-10, 0), (0, 6), (0, -6)$$

이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) 주어진 타원의 방정식을 변형하면

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$a=4, b=3 \text{이므로}$$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

따라서 초점의 좌표는

$$(\sqrt{7}, 0), (-\sqrt{7}, 0)$$

장축의 길이는

$$2a=8$$

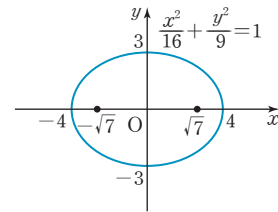
단축의 길이는

$$2b=6$$

이때 꼭짓점의 좌표는

$$(4, 0), (-4, 0), (0, 3), (0, -3)$$

이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



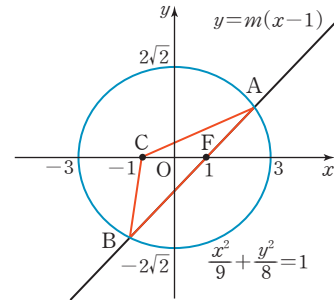
03 $a=3, b=2\sqrt{2}$ 이므로

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 8} = 1$$

이때 점 C는 타원의 초점이므로 다른 한 초점을 F라고 하면 두 초점은

$$F(1, 0), C(-1, 0)$$

한편 직선 $y=m(x-1)$ 은 m 의 값에 관계없이 점 $F(1, 0)$ 을 지난다.



타원의 정의에 따라

$$\overline{AC} + \overline{AF} = 2a = 6$$

$$\overline{BC} + \overline{BF} = 2a = 6$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}$$

$$= (\overline{AF} + \overline{BF}) + \overline{BC} + \overline{AC}$$

$$= (\overline{AC} + \overline{AF}) + (\overline{BC} + \overline{BF})$$

$$= 6 + 6 = 12$$

04 (1) $2b=6$ 에서 $b=3$

$$c=\sqrt{3}\text{에서 } a^2=b^2-c^2=9-3=6$$

$$\text{따라서 구하는 타원의 방정식은 } \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}=1$$

(2) 장축의 길이가 18이므로 $2b=18, b=9$

$$c=5\text{에서 } a^2=b^2-c^2=81-25=56$$

$$\text{따라서 구하는 타원의 방정식은 } \frac{x^2}{56}+\frac{y^2}{81}=1$$

05 장축의 길이가 6이므로 $2b=6, b=3$

$$\text{단축의 길이가 } 2\sqrt{5}\text{이므로 } 2a=2\sqrt{5}, a=\sqrt{5}$$

$$\text{따라서 구하는 타원의 방정식은 } \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$$

06 (1) $a=2\sqrt{6}, b=7$ 이므로

$$c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{49-24}=5$$

$$\text{따라서 초점의 좌표는 } (0, 5), (0, -5)$$

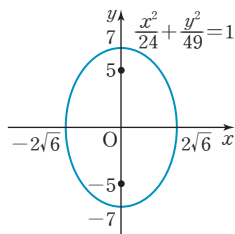
$$\text{장축의 길이는 } 2b=14$$

$$\text{단축의 길이는 } 2a=4\sqrt{6}$$

이때 꼭짓점의 좌표는

$$(2\sqrt{6}, 0), (-2\sqrt{6}, 0), (0, 7), (0, -7)$$

이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) 주어진 타원의 방정식을 변형하면

$$\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{16}=1$$

$$a=\sqrt{7}, b=4\text{이므로}$$

$$c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{16-7}=3$$

$$\text{따라서 초점의 좌표는 } (0, 3), (0, -3)$$

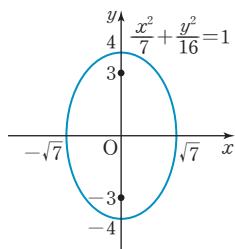
$$\text{장축의 길이는 } 2b=8$$

$$\text{단축의 길이는 } 2a=2\sqrt{7}$$

이때 꼭짓점의 좌표는

$$(\sqrt{7}, 0), (-\sqrt{7}, 0), (0, 4), (0, -4)$$

이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



07 장축의 길이가 30이므로 $2b=30, b=15$

$$c=5\sqrt{5}\text{에서 } a^2=b^2-c^2=225-125=100$$

$$\text{따라서 구하는 타원의 방정식은 } \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{225}=1$$

08 (1) 주어진 타원은 타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 을 x 축의 방향으로

2만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{타원 } \frac{x^2}{4}+y^2=1\text{의 중심의 좌표는 } (0, 0)$$

$$\text{초점의 좌표는 } (\sqrt{4-1}, 0), (-\sqrt{4-1}, 0)$$

$$\text{즉, } (\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$$

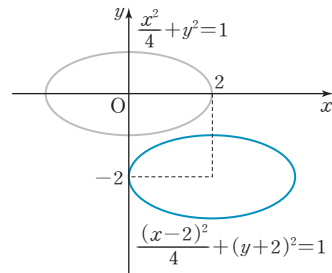
따라서 주어진 타원의 중심의 좌표는

$$(0+2, 0-2), \text{ 즉 } (2, -2)$$

초점의 좌표는

$$(\sqrt{3}+2, 0-2), (-\sqrt{3}+2, 0-2)$$

$$\text{즉, } (\sqrt{3}+2, -2), (-\sqrt{3}+2, -2)$$



(2) 주어진 타원의 방정식을 변형하면

$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{25}=1$$

$$\text{이 도형은 타원 } \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1\text{을 } x\text{축의 방향으로}$$

-2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$$\text{타원 } \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1\text{의 중심의 좌표는 } (0, 0)$$

$$\text{초점의 좌표는 } (0, \sqrt{25-16}), (0, -\sqrt{25-16})$$

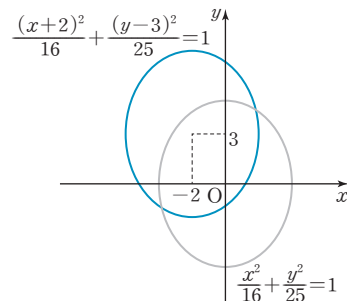
$$\text{즉, } (0, 3), (0, -3)$$

따라서 주어진 타원의 중심의 좌표는

$$(0-2, 0+3), \text{ 즉 } (-2, 3)$$

$$\text{초점의 좌표는 } (0-2, 3+3), (0-2, -3+3)$$

$$\text{즉, } (-2, 6), (-2, 0)$$



- 01 (1) $2a=12$ 에서 $a=6$

$$c=8\text{에서 } b^2=c^2-a^2=64-36=28$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{28}=1$$

- (2) $2a=10$ 에서 $a=5$

$$c=6\text{에서 } b^2=c^2-a^2=36-25=11$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$$

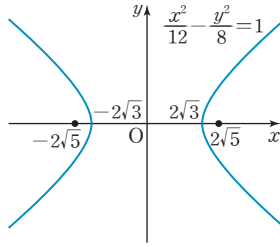
- 02 (1) $a=2\sqrt{3}$, $b=2\sqrt{2}$ 이므로

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{12+8}=2\sqrt{5}$$

따라서 초점의 좌표는 $(2\sqrt{5}, 0)$, $(-2\sqrt{5}, 0)$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(2\sqrt{3}, 0)$, $(-2\sqrt{3}, 0)$

주축의 길이는 $2a=4\sqrt{3}$



- (2) 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=1$

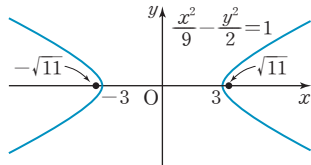
$a=3$, $b=\sqrt{2}$ 이므로

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+2}=\sqrt{11}$$

따라서 초점의 좌표는 $(\sqrt{11}, 0)$, $(-\sqrt{11}, 0)$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(3, 0)$, $(-3, 0)$

주축의 길이는 $2a=6$



- 03 (1) $2b=4$ 에서 $b=2$

$$c=5\text{에서 } a^2=c^2-b^2=25-4=21$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{21}-\frac{y^2}{4}=-1$$

- (2) 주축의 길이가 2이므로 $2b=2$, $b=1$

$$c=\sqrt{6}\text{에서 } a^2=c^2-b^2=6-1=5$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{5}-y^2=-1$$

- 04 주축의 길이가 4이므로 $2b=4$, $b=2$

쌍곡선의 다른 한 초점의 좌표는 $(0, \sqrt{5})$ 이므로

$$c=\sqrt{5}\text{에서 } a^2=c^2-b^2=5-4=1$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은 $x^2-\frac{y^2}{4}=-1$

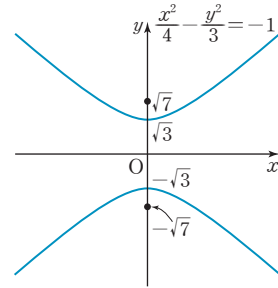
- 05 (1) $a=2$, $b=\sqrt{3}$ 이므로

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4+3}=\sqrt{7}$$

따라서 초점의 좌표는 $(0, \sqrt{7})$, $(0, -\sqrt{7})$

꼭짓점의 좌표는 $(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$

주축의 길이는 $2b=2\sqrt{3}$



- (2) 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{9}=-1$$

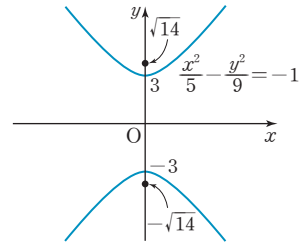
$a=\sqrt{5}$, $b=3$ 이므로

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5+9}=\sqrt{14}$$

따라서 초점의 좌표는 $(0, \sqrt{14})$, $(0, -\sqrt{14})$

꼭짓점의 좌표는 $(0, 3)$, $(0, -3)$

주축의 길이는 $2b=6$



- 06 타원의 방정식 $5x^2+2y^2=10$ 을 변형하면

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}=1$$

이때 타원의 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{5-2}), (0, -\sqrt{5-2})$$

즉, $(0, \sqrt{3})$, $(0, -\sqrt{3})$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ 의 주축의 길이가 2이므로

$$2b=2, b=1$$

이 쌍곡선이 주어진 타원과 두 초점을 공유하므로

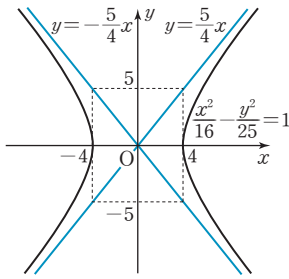
$$a^2=(\sqrt{3})^2-1^2=2$$

따라서 $a^2-b^2=2-1=1$

07 (1) $a=4, b=5$ 이므로 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{5}{4}x$$

이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



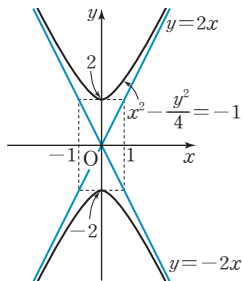
(2) 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$$x^2 - \frac{y^2}{4} = -1$$

$a=1, b=2$ 이므로 점근선의 방정식은

$$y = \pm 2x$$

이고, 그래프는 다음 그림과 같다.



08 구하는 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0)$$

이라고 하자.

두 초점의 좌표가 $F(0, 4), F'(0, -4)$ 이므로

$$4^2 = a^2 + b^2 \quad \dots\dots ①$$

또 점근선의 방정식이 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$ 이므로

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$a = \sqrt{3}b \quad \dots\dots ②$$

②를 ①에 대입하면

$$4^2 = (\sqrt{3}b)^2 + b^2$$

$$16 = 4b^2$$

$$b^2 = 4$$

$b^2=4$ 를 ①에 대입하면

$$4^2 = a^2 + 4$$

$$a^2 = 12$$

따라서 구하는 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = -1$$

09 (1) 주어진 쌍곡선은 쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{25} = 1$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{25} = 1$ 의 중심의 좌표는 $(0, 0)$

초점의 좌표는 $(\sqrt{1+25}, 0), (-\sqrt{1+25}, 0)$

즉, $(\sqrt{26}, 0), (-\sqrt{26}, 0)$

점근선의 방정식은 $y = \pm 5x$

따라서 주어진 쌍곡선의 중심의 좌표는

$(0+2, 0-1)$, 즉 $(2, -1)$

초점의 좌표는

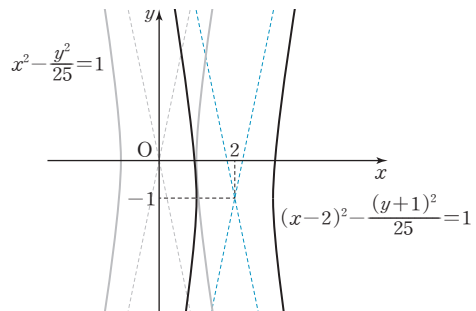
$(\sqrt{26}+2, 0-1), (-\sqrt{26}+2, 0-1)$

즉, $(\sqrt{26}+2, -1), (-\sqrt{26}+2, -1)$

점근선의 방정식은

$$y = 5(x-2) - 1, y = -5(x-2) - 1$$

즉, $y = 5x - 11, y = -5x + 9$



(2) 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{9} = -1$$

이 쌍곡선은 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ 을 x 축의 방향으로 -1만큼, y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = -1$ 의 중심의 좌표는 $(0, 0)$

초점의 좌표는 $(0, \sqrt{4+9}), (0, -\sqrt{4+9})$

즉, $(0, \sqrt{13}), (0, -\sqrt{13})$

점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{3}{2}x$

따라서 주어진 쌍곡선의 중심의 좌표는

$(0-1, 0-2)$, 즉 $(-1, -2)$

초점의 좌표는

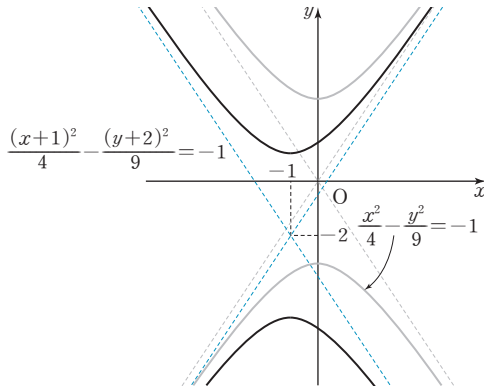
$(0-1, \sqrt{13}-2), (0-1, -\sqrt{13}-2)$

즉, $(-1, \sqrt{13}-2), (-1, -\sqrt{13}-2)$

점근선의 방정식은

$$y = \frac{3}{2}(x+1) - 2, y = -\frac{3}{2}(x+1) - 2$$

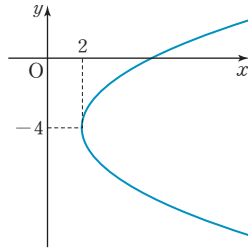
즉, $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, $y = -\frac{3}{2}x - \frac{7}{2}$



10 (1) 주어진 방정식을 변형하면

$$(y+4)^2 = 4(x-2)$$

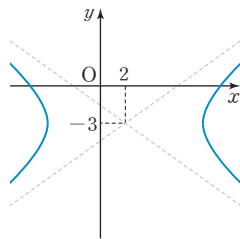
따라서 주어진 방정식이 나타내는 도형은 포물선이다.



(2) 주어진 방정식을 변형하면

$$\frac{(x-2)^2}{40} - \frac{(y+3)^2}{20} = 1$$

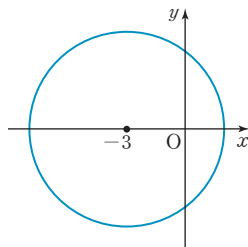
따라서 주어진 방정식이 나타내는 도형은 쌍곡선이다.



(3) 주어진 방정식을 변형하면

$$(x+3)^2 + y^2 = 25$$

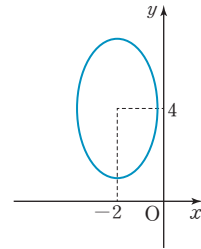
따라서 주어진 방정식이 나타내는 도형은 원이다.



(4) 주어진 방정식을 변형하면

$$\frac{(x+2)^2}{3} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$$

따라서 주어진 방정식이 나타내는 도형은 타원이다.



2 이차곡선의 접선

01 이차곡선의 접선

51~62쪽

01 (1) $y = 3x - \frac{1}{3}$ 을 $y^2 = -4x$ 에 대입하면

$$\left(3x - \frac{1}{3}\right)^2 = -4x$$

$$9x^2 - 2x + \frac{1}{9} = -4x$$

$$9x^2 + 2x + \frac{1}{9} = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 9 \times \frac{1}{9} = 0$$

따라서 직선 $y = 3x - \frac{1}{3}$ 은 포물선 $y^2 = -4x$ 의 접선이다.

(2) $y = -x + 2$ 를 $3x^2 - y^2 = -6$ 에 대입하면

$$3x^2 - (-x + 2)^2 = -6$$

$$3x^2 - (x^2 - 4x + 4) = -6$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

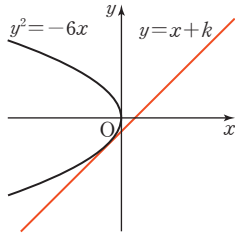
이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = 1^2 - 1 = 0$$

따라서 직선 $y = -x + 2$ 는 쌍곡선 $3x^2 - y^2 = -6$ 의 접선이다.

02 (1) $y=x+k$ 를 $y^2=-6x$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}(x+k)^2 &= -6x \\ x^2 + 2kx + k^2 &= -6x \\ x^2 + 2(k+3)x + k^2 &= 0\end{aligned}$$



이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

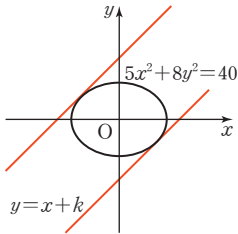
$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (k+3)^2 - k^2 \\ &= 6k + 9\end{aligned}$$

$$D=0 \text{에서 } 6k+9=0$$

$$\text{따라서 } k = -\frac{3}{2}$$

(2) $y=x+k$ 를 $5x^2+8y^2=40$ 에 대입하면

$$\begin{aligned}5x^2 + 8(x+k)^2 &= 40 \\ 5x^2 + 8(x^2 + 2kx + k^2) &= 40 \\ 13x^2 + 16kx + 8k^2 - 40 &= 0\end{aligned}$$



이 이차방정식의 판별식을 D 라고 하면

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (8k)^2 - 13(8k^2 - 40) \\ &= -40k^2 + 520\end{aligned}$$

$$D=0 \text{에서 } -40k^2 + 520 = 0, k^2 = 13$$

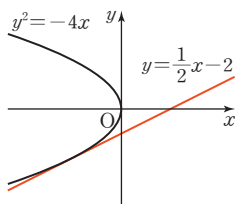
$$\text{따라서 } k = \pm\sqrt{13}$$

03 (1) $y^2=-4x=4 \times (-1)x$ 이므로

$$p = -1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{-1}{\frac{1}{2}}, y = \frac{1}{2}x - 2$$



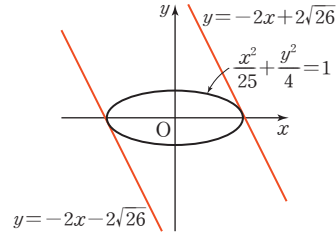
(2) 주어진 타원의 방정식을 변형하면

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

이때 구하는 접선이 직선 $y=-2x-1$ 과 평행하므로 기울기는 -2 이다.

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$\begin{aligned}y &= -2x \pm \sqrt{25 \times (-2)^2 + 4} \\ y &= -2x \pm 2\sqrt{26}\end{aligned}$$

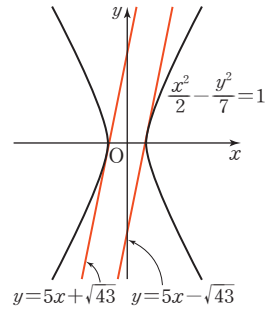


(3) 주어진 쌍곡선의 방정식을 변형하면

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$\begin{aligned}y &= 5x \pm \sqrt{2 \times 5^2 - 7} \\ y &= 5x \pm \sqrt{43}\end{aligned}$$



04 $y^2=8x=4 \times 2x$ 이므로 $p=2$

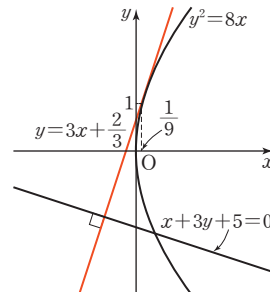
직선 $x+3y+5=0$ 에 수직인 직선의 기울기는 3 이다.

즉, 포물선 $y^2=8x$ 에 접하고 기울기가 3 인 직선의 방

정식은 $y=3x+\frac{2}{3}$

이 직선이 점 $(\frac{1}{9}, k)$ 를 지나므로

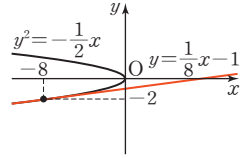
$$k = 3 \times \frac{1}{9} + \frac{2}{3} = 1$$



05 (1) $y^2 = -\frac{1}{2}x = 4 \times \left(-\frac{1}{8}\right)x$ 이므로 $p = -\frac{1}{8}$

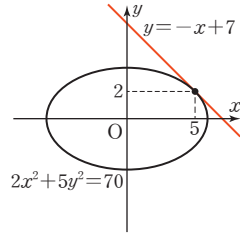
따라서 구하는 접선의 방정식은

$$-2y = 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right)(x-8), y = \frac{1}{8}x - 1$$



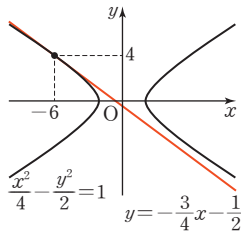
(2) 구하는 접선의 방정식은

$$2 \times 5x + 5 \times 2y = 70, y = -x + 7$$



(3) 구하는 접선의 방정식은

$$-\frac{6x}{4} - \frac{4y}{2} = 1, y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$



06 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 위의 점 $P(4, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} = 1, y = \frac{2b^2}{a^2}x - \frac{b^2}{2}$$

이때 접선의 기울기가 2이므로

$$\frac{2b^2}{a^2} = 2, a^2 = b^2 \quad \dots\dots ①$$

또 점 $P(4, 2)$ 가 쌍곡선 위의 점이므로

$$\frac{16}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \quad \dots\dots ②$$

①을 ②에 대입하면

$$\frac{16}{b^2} - \frac{4}{b^2} = 1, b^2 = 12$$

①에 의하여 $a^2 = 12$

따라서 $a^2 + b^2 = 12 + 12 = 24$

07 쌍곡선 $11x^2 - ay^2 = 3$ 위의 점 $(-1, a)$ 에서의 접선의 방정식은

$$11 \times (-x) - a \times ay = 3$$

$$-11x - a^2y = 3$$

이 접선이 점 $(3, -9)$ 를 지나므로

$$-33 + 9a^2 = 3$$

$$a^2 = 4$$

이때 $a > 0$ 이므로 $a = 2$

08 점점을 $P(x_1, y_1)$ 이라고 하면 구하는 접선의 방정식은

$$5x_1x + 9y_1y = 180 \quad \dots\dots ①$$

이 접선이 점 $(6, -5)$ 를 지나므로

$$30x_1 - 45y_1 = 180$$

$$2x_1 - 3y_1 = 12 \quad \dots\dots ②$$

또 점 $P(x_1, y_1)$ 은 타원 위의 점이므로

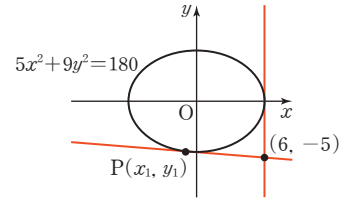
$$5x_1^2 + 9y_1^2 = 180 \quad \dots\dots ③$$

②, ③을 연립하여 풀면

$$x_1 = 6, y_1 = 0 \text{ 또는 } x_1 = -\frac{2}{3}, y_1 = -\frac{40}{9}$$

이것을 ①에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$x = 6 \text{ 또는 } x + 12y + 54 = 0$$



II 공간도형과 공간좌표

1 공간도형

01 직선과 평면의 위치 관계

77~85쪽

01 (1) 세 점 A, C, E는 한 직선 위에 있지 않으므로 한 평면을 결정할 수 있다.

(2) 점 A는 직선 EF 위에 있지 않으므로 한 평면을 결정할 수 있다.

(3) 두 직선 BE, CE는 한 점에서 만나므로 한 평면을 결정할 수 있다.

(4) 두 직선 BD, CF는 꼬인 위치에 있으므로 한 평면을 결정할 수 없다.

따라서 한 평면을 결정할 수 있는 것은 (1), (2), (3)이다.

02 (1) 직선 CH, 직선 DI, 직선 EJ, 직선 GH, 직선 HI, 직선 IJ, 직선 JF

(2) 평면 CHID, 평면 DIJE, 평면 AFJE

(3) 평면 AFJE, 평면 FGHJ

03 직선 l 과 평면 γ 는 평행하므로 만나지 않는다.

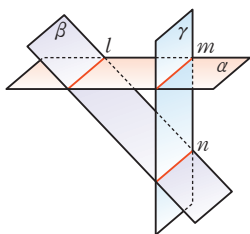
따라서 직선 l 과 평면 γ 에 포함된 직선 m 도 만나지 않는다.

그런데 두 직선 l, m 은 모두 한 평면 α 위에 있으므로 $l \parallel m$ 이다.

또 직선 l 과 평면 γ 에 포함된 직선 n 도 만나지 않는다.

그런데 두 직선 l, n 은 모두 한 평면 β 위에 있으므로 $l \parallel n$ 이다.

즉, $l \parallel m, l \parallel n$ 이므로 $m \parallel n$ 이다.



참고 서로 다른 세 직선 l, m, n 에 대하여

$l \parallel m, l \parallel n$ 이면 $m \parallel n$ 이다.

04 $l \parallel m$ 이므로 두 직선 l, m 은 한 평면을 결정한다.

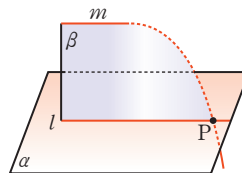
이 평면을 β 라고 하면 직선 l 은 두 평면 α, β 의 교선이다.

평면 α 와 직선 m 이 평행하지 않다고 가정하면 평면 α 와 직선 m 은 한 점에서 만난다.

이 점을 P라고 하면 점 P는 평면 α 와 평면 β 에 동시에 포함되므로 직선 l 위에 있다.

즉, 점 P는 두 직선 l, m 위에 있으므로 $l \parallel m$ 이라는 조건에 모순이다.

따라서 평면 α 는 직선 m 과 평행하다.



05 (1) 직선 AB와 직선 DG가 이루는 각의 크기는

$\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ 이므로 직선 DC와 직선 DG가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 삼각형 DCG는 직각이등변삼각형이므로 $\angle CDG = 45^\circ$ 이다.

따라서 직선 AB와 직선 DG가 이루는 각의 크기는 45° 이다.

(2) 직선 FH와 직선 DG가 이루는 각의 크기는

$\overline{FH} \parallel \overline{BD}$ 이므로 직선 BD와 직선 DG가 이루는 각의 크기와 같다.

이때 삼각형 BGD는 정삼각형이므로 $\angle BDG = 60^\circ$ 이다.

따라서 직선 FH와 직선 DG가 이루는 각의 크기는 60° 이다.

06 직선 l 과 평면 α 의 교점을 O라고 하자.

(i) 두 직선 m, n 의 교점이 O일 때,

예제 3에 의하여

$$l \perp \alpha$$

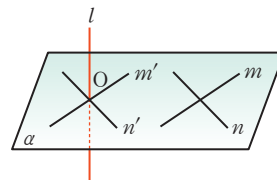
(ii) 두 직선 m, n 의 교점이 점 O가 아닐 때,

점 O를 지나고 두 직선 m, n 에 평행한 직선 m', n' 을 그으면 $l \perp m, m \parallel m'$ 이므로

$$l \perp m'$$

또 $l \perp n, n \parallel n'$ 이므로

$$l \perp n'$$



따라서 **예제 3**에 의하여

$$l \perp \alpha$$

(i), (ii)에서 $l \perp \alpha$ 이다.

01 $\overline{AE} \perp$ (평면 EFGH)이고 $\overline{AI} \perp \overline{FH}$ 이므로 삼수선 정리

②에 의하여

$$\overline{EI} \perp \overline{FH}$$

삼각형 EFH는 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned}\overline{FH} &= \sqrt{\overline{EF}^2 + \overline{EH}^2} \\ &= \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}\end{aligned}$$

삼각형 EFH의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{FH} \times \overline{EI} = \frac{1}{2} \times \overline{EF} \times \overline{EH}$$

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \overline{EI} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2$$

$$\overline{EI} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$\overline{AE} \perp$ (평면 EFGH)이고 선분 EI가 평면 EFGH 위에 있으므로 $\overline{AE} \perp \overline{EI}$ 이다.

즉, 삼각형 AEI도 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned}\overline{AI} &= \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EI}^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{49}{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

따라서 삼각형 AFH의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{FH} \times \overline{AI} = \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{7\sqrt{5}}{5} = \frac{7}{2}$$

02 두 평면 ABCD, ABGH의 교선 AB에 대하여

$$\overline{BC} \perp \overline{AB}, \overline{BG} \perp \overline{AB}$$

즉, 두 평면 ABCD, ABGH가 이루는 각의 크기는

두 직선 BC, BG가 이루는 각의 크기와 같다.

삼각형 BGC는 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned}\overline{BG} &= \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{CG}^2} = \sqrt{10^2 + (10\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{400} = 20\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \cos(\angle CBG) = \frac{\overline{BC}}{\overline{BG}} = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\angle CBG = 60^\circ$$

따라서 두 평면 ABCD, ABGH가 이루는 각의 크기는 60° 이다.

03 사각형 ABCD는 정사각형이므로 $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

또 평면 ABCD와 평면 BFGC는 수직이고, 점 G에서 두 평면의 교선 BC에 내린 수선의 발이 점 C이므로

문제 04에 의하여 $\overline{CG} \perp$ (평면 ABCD)

이때 직선 BD는 평면 ABCD 위의 직선이므로

$$\overline{BD} \perp \overline{CG}$$

따라서 선분 BD는 만나는 두 직선 AC, CG와 각각 수직이므로 $\overline{BD} \perp$ (평면 AEGC)

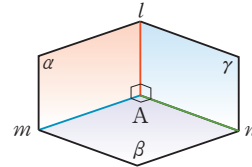
04 두 평면 α, β 의 교선 m 에 대하여

$$l \perp m, n \perp m$$

즉, 두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기는 두 직선 l, n 이 이루는 각의 크기와 같다.

따라서 $l \perp n$ 이므로 $\alpha \perp \beta$ 이다.

같은 방법으로 $\beta \perp \gamma, \gamma \perp \alpha$ 이다.



03 정사영

92~98쪽

01 (1) 두 꼭짓점 A, B에서 평면 GHIJKL에 내린 수선의

발이 각각 두 꼭짓점 G, H이므로 선분 AB의 평면 GHIJKL 위로의 정사영은 선분 GH이다.

(2) 꼭짓점 I에서 평면 ABCDEF에 내린 수선의 발이 꼭짓점 C이므로 선분 CI의 평면 ABCDEF 위로의 정사영은 점 C이다.

(3) 네 꼭짓점 G, H, I, J에서 평면 ABCDEF에 내린 수선의 발이 각각 네 꼭짓점 A, B, C, D이므로 사각형 GHIJ의 평면 ABCDEF 위로의 정사영은 사각형 ABCD이다.

02 (1) $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$

$$= 16 \times \cos 30^\circ$$

$$= 16 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 8\sqrt{3}$$

(2) $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 이므로

$$\cos \theta = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{6\sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

따라서 $\theta = 60^\circ$

- 03 선분 AG의 평면 ABFE 위로의 정사영은 선분 AF이다.

삼각형 ABF는 직각삼각형이므로 정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라고 하면

$$\overline{AF} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BF}^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

$$\sqrt{2}a = 5 \text{이므로 } a = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

삼각형 AFG도 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned}\overline{AG} &= \sqrt{\overline{AF}^2 + \overline{FG}^2} \\ &= \sqrt{5^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{75}{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

- 04 한 변의 길이가 2인 정삼각형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$$

따라서 구하는 정사영의 넓이는

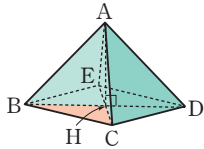
$$\sqrt{3} \times \cos 45^\circ = \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

- 05 구하는 단면의 넓이를 $S \text{ cm}^2$ 라고 하면 단면의 밑면 위로의 정사영은 반지름의 길이가 3 cm인 원이므로

$$\begin{aligned}S \cos 30^\circ &= \pi \times 3^2 \\ S \times \frac{\sqrt{3}}{2} &= 9\pi \\ S &= 6\sqrt{3}\pi\end{aligned}$$

따라서 잘린 단면의 넓이는 $6\sqrt{3}\pi \text{ cm}^2$ 이다.

- 06 오른쪽 그림과 같이 정사각뿔의 꼭짓점 A에서 평면 BCDE에 내린 수선의 발은 H라고 하자.



삼각형 ABC의 평면 BCDE 위로의 정사영은 삼각형 HBC이므로

$$\triangle HBC = \triangle ABC \cos \theta \quad \dots\dots ①$$

점 H는 정사각형 BCDE의 두 대각선 BD, CE의 교점이므로 $\overline{BC} = a$ 라고 하면

$$\triangle HBC = \frac{1}{4}a^2$$

또 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 a 인 정삼각형이므로

$$\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$\text{①에서 } \cos \theta = \frac{\triangle HBC}{\triangle ABC} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

2 공간좌표

01 공간에서 점의 좌표

107~115쪽

- 01 (1) 점 A는 yz 평면 위에 있으므로 x 좌표는 0이다.

$$\text{즉, } A(0, -2, 2)$$

점 B는 zx 평면 위에 있으므로 y 좌표는 0이다.

$$\text{즉, } B(-1, 0, 2)$$

점 C는 xy 평면 위에 있으므로 z 좌표는 0이다.

$$\text{즉, } C(-1, -2, 0)$$

- (2) 점 A는 zx 평면 위에 있으므로 y 좌표는 0이다.

$$\text{즉, } A(3, 0, 5)$$

점 B는 x 축 위에 있으므로 y 좌표, z 좌표는 0이다.

$$\text{즉, } B(3, 0, 0)$$

점 C는 xy 평면 위에 있으므로 z 좌표는 0이다.

$$\text{즉, } C(3, 5, 0)$$

- 02 (1) 점 P를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점은 점 P와 y 좌표, z 좌표는 같고 x 좌표의 부호는 반대이다.

따라서 구하는 점의 좌표는

$$(-1, 2, -3)$$

- (2) 점 P를 x 축에 대하여 대칭이동한 점은 점 P와 x 좌표는 같고 y 좌표, z 좌표의 부호는 반대이다.

따라서 구하는 점의 좌표는

$$(1, -2, 3)$$

- (3) 점 P에서 xy 평면에 내린 수선의 발은 점 P와 x 좌표, y 좌표는 같고 z 좌표는 0이다.

따라서 구하는 수선의 발의 좌표는

$$(1, 2, 0)$$

- (4) 점 P에서 z 축에 내린 수선의 발은 점 P와 z 좌표는 같고 x 좌표, y 좌표는 0이다.

따라서 구하는 수선의 발의 좌표는

$$(0, 0, -3)$$

- 03 점 A를 zx 평면에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는

$$(2, -3, -7)$$

점 B를 원점에 대하여 대칭이동한 점 C의 좌표는

$$(-2, 3, 7)$$

- 04 (1) $\overline{AB} = \sqrt{\{-5 - (-2)\}^2 + \{5 - 1\}^2 + \{2 - (-1)\}^2}$

$$= \sqrt{34}$$

- (2) $\overline{OA} = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 + 2^2}$

$$= 7$$

05 $\overline{AB} = \sqrt{\{0 - (-1)\}^2 + (3-1)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{5}$
 $\overline{BC} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{14}$
 $\overline{CA} = \sqrt{(-1-1)^2 + (1-0)^2 + (2-4)^2} = 3$
 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{CA}^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $\overline{BC}$ 가
 빗변인 직각삼각형이다.

06 정사면체의 모든 모서리의 길이는 같다.
 $\overline{AC} = \overline{BC}$ 이므로 $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$
 $(11-2)^2 + (2-1)^2 + (a-0)^2$
 $= (11-3)^2 + (2-5)^2 + (a-9)^2$
 $a^2 + 82 = a^2 - 18a + 154$
 $18a = 72, a = 4$
 $\overline{AD} = \overline{BD}$ 이므로 $\overline{AD}^2 = \overline{BD}^2$
 $(6-2)^2 + (b-1)^2 + (1-0)^2$
 $= (6-3)^2 + (b-5)^2 + (1-9)^2$
 $b^2 - 2b + 18 = b^2 - 10b + 98$
 $8b = 80, b = 10$
 따라서 $a+b = 4+10 = 14$

07 점 P의 좌표를 $(0, 0, z)$ 라고 하면
 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$
 $(0-0)^2 + (0-1)^2 + (z-1)^2$
 $= \{0 - (-1)\}^2 + \{0 - (-3)\}^2 + \{z - (-2)\}^2$
 $z^2 - 2z + 2 = z^2 + 4z + 14$
 $6z = -12$
 $z = -2$
 따라서 점 P의 좌표는 $(0, 0, -2)$

08 선분 AB를 1 : 2로 내분하는 점을 P(x, y, z)라고 하면

$$x = \frac{1 \times (-1) + 2 \times 2}{1+2} = 1$$

$$y = \frac{1 \times 5 + 2 \times (-4)}{1+2} = -1$$

$$z = \frac{1 \times 6 + 2 \times (-3)}{1+2} = 0$$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, -1, 0)$

09 무게중심 G의 좌표를 (x, y, z) 라고 하면

$$x = \frac{2 + (-1) + (-7)}{3} = -2$$

$$y = \frac{-5 + 0 + (-7)}{3} = -4$$

$$z = \frac{4 + 3 + 2}{3} = 3$$

따라서 무게중심 G의 좌표는 $(-2, -4, 3)$

10 점 C의 좌표를 (a, b, c) 라고 하면 삼각형 ABC의 무게중심 G($-1, 2, -2$)는 선분 CM을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\frac{2 \times (-1) + 1 \times a}{2+1} = -1$$

$$\frac{2 \times 2 + 1 \times b}{2+1} = 2$$

$$\frac{2 \times (-2) + 1 \times c}{2+1} = -2$$

즉, $a = -1, b = 2, c = -4$

따라서 점 C의 좌표는 $(-1, 2, -4)$

02 구의 방정식

116~119쪽

- 01 (1) $(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z+5)^2 = 4$
 (2) 구하는 구의 반지름의 길이를 $r(r > 0)$ 라고 하면

$$(x+4)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = r^2$$

이 구가 점 $(-1, 3, 1)$ 을 지나므로

$$3^2 + 4^2 + 0^2 = r^2, r^2 = 25$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x+4)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = 25$$

- 02 구하는 구의 중심을 C라고 하면 점 C는 선분 AB의 중점이므로

$$C\left(\frac{0+6}{2}, \frac{-3+(-7)}{2}, \frac{4+10}{2}\right)$$

즉, $C(3, -5, 7)$

구의 반지름의 길이는

$$\overline{CA} = \sqrt{(0-3)^2 + \{-3 - (-5)\}^2 + (4-7)^2}$$

$$= \sqrt{22}$$

따라서 구하는 구의 방정식은

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 + (z-7)^2 = 22$$

- 03 (1) 주어진 방정식을 변형하면

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 14$$

따라서 구의 중심의 좌표는 $(3, -1, 2)$ 이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{14}$ 이다.

- (2) 주어진 방정식을 변형하면

$$(x-2)^2 + (y+5)^2 + (z-4)^2 = 64$$

따라서 구의 중심의 좌표는 $(2, -5, 4)$ 이고, 반지름의 길이는 8이다.

III 벡터

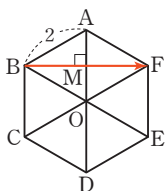
1 벡터의 연산

01 벡터의 뜻

135~138쪽

- 01 (1) $|\overrightarrow{AC}| = \overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2}$
 $= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
 (2) $|\overrightarrow{CH}| = \overline{CH} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{DH}^2}$
 $= \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34}$
 (3) $|\overrightarrow{BH}| = \overline{BH} = \sqrt{\overline{BA}^2 + \overline{AD}^2 + \overline{DH}^2}$
 $= \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$

- 02 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O, $\overrightarrow{BF}$ 와 $\overrightarrow{AD}$ 의 교점을 M이라고 하자.



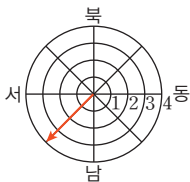
삼각형 ABO는 한 변의 길이가 2

인 정삼각형이므로 $|\overrightarrow{BM}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$

따라서 $|\overrightarrow{BF}| = 2|\overrightarrow{BM}| = 2\sqrt{3}$

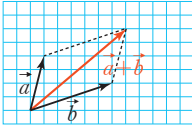
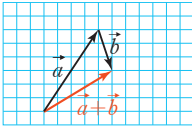
- 03 (1) $\overrightarrow{AC}$ 와 크기와 방향이 각각 같은 벡터는 $\overrightarrow{EF}$ 이다.
 (2) $\overrightarrow{CB}$ 와 크기는 같지만 방향이 반대인 벡터는 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{ED}$ 이다.

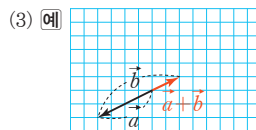
- 04 예 '북동풍 4 m/s'는 북동쪽에서 4 m/s의 속력으로 불어오는 바람을 말한다.
 따라서 광주의 바람의 속도를 벡터로 나타내면 오른쪽 그림과 같다.



02 벡터의 덧셈과 뺄셈

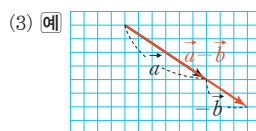
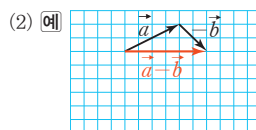
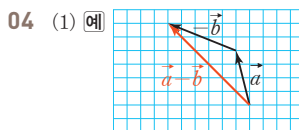
139~144쪽

- 01 (1) 예 
 (2) 예 



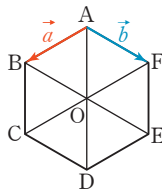
- 02 (1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$
 $= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC})$ (결합법칙)
 $= \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$ (교환법칙)
 $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$
 $= \overrightarrow{AD}$
 (2) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC}$
 $= \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{DC}$ (결합법칙)
 $= \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{ED}) + \overrightarrow{DC}$ (교환법칙)
 $= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC})$ (결합법칙)
 $= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{EC}$
 $= \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA}$ (교환법칙)
 $= \overrightarrow{EA}$

- 03 (1) $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$
 $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
 $= \vec{a} + \vec{b}$
 (2) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$
 $= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$
 $= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$



- 05 (1) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DE}$
 $= \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$
 $= \vec{c} - \vec{b}$
 $= -\vec{b} + \vec{c}$
 (2) $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}$
 $= \overrightarrow{CA} + (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE})$
 $= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}$
 $= -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$

- 06 오른쪽 그림과 같이 정육각형의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라고 하자.



$$\begin{aligned}
 (1) \overrightarrow{FE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OF} \\
 &= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BA} \\
 &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} \\
 &= \vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{b} \\
 (2) \overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} \\
 &= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} \\
 &= \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b}
 \end{aligned}$$

03 벡터의 실수배

145~151쪽

$$\begin{aligned}
 01 \quad (1) \overrightarrow{AD} &= 2\overrightarrow{BC} \\
 &= 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\
 &= 2(\vec{b} - \vec{a}) \\
 &= 2\vec{b} - 2\vec{a} \\
 &= -2\vec{a} + 2\vec{b} \\
 (2) \overrightarrow{AF} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} \\
 &= \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BA} \\
 &= \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} \\
 &= \vec{b} - 2\vec{a} \\
 &= -2\vec{a} + \vec{b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 02 \quad (1) -2(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3(\vec{a} - \vec{b}) \\
 = -2\vec{a} + 4\vec{b} + 3\vec{a} - 3\vec{b} \\
 = -2\vec{a} + 3\vec{a} + 4\vec{b} - 3\vec{b} \\
 = (-2+3)\vec{a} + (4-3)\vec{b} \\
 = \vec{a} + \vec{b} \\
 (2) 4(2\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) - 5(2\vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}) \\
 = 8\vec{a} + 8\vec{b} - 4\vec{c} - 10\vec{a} + 5\vec{b} - 10\vec{c} \\
 = 8\vec{a} - 10\vec{a} + 8\vec{b} + 5\vec{b} - 4\vec{c} - 10\vec{c} \\
 = (8-10)\vec{a} + (8+5)\vec{b} + (-4-10)\vec{c} \\
 = -2\vec{a} + 13\vec{b} - 14\vec{c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 03 \quad (1) 3\vec{x} - \vec{a} &= 2\vec{a} + 3\vec{b} \text{에서} \\
 3\vec{x} &= 3\vec{a} + 3\vec{b} \\
 \vec{x} &= \vec{a} + \vec{b} \\
 (2) 2\vec{b} + \vec{x} &= 3(\vec{x} + 2\vec{a}) \text{에서} \\
 2\vec{b} + \vec{x} &= 3\vec{x} + 6\vec{a} \\
 -2\vec{x} &= 6\vec{a} - 2\vec{b} \\
 \vec{x} &= -3\vec{a} + \vec{b}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 04 \quad (1) \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \\
 &= \vec{b} - \vec{a} = -\vec{a} + \vec{b} \\
 \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \\
 &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \\
 &= \frac{2}{3}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a} \\
 &= -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \\
 (2) \overrightarrow{MN} &= -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{2}{3}(-\vec{a} + \vec{b}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} \\
 &\text{따라서 } \overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{BD} \text{이다.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 05 \quad \vec{p} + \vec{q} &= (9\vec{a} - 3\vec{b}) + (-2\vec{a} - 4\vec{b}) \\
 &= (9-2)\vec{a} + (-3-4)\vec{b} \\
 &= 7\vec{a} - 7\vec{b} \\
 \vec{q} + \vec{r} &= (-2\vec{a} - 4\vec{b}) + (4\vec{a} + 2\vec{b}) \\
 &= (-2+4)\vec{a} + (-4+2)\vec{b} \\
 &= 2\vec{a} - 2\vec{b} \\
 \text{즉, } \vec{p} + \vec{q} &= \frac{7}{2}(\vec{q} + \vec{r})
 \end{aligned}$$

따라서 두 벡터 $\vec{p} + \vec{q}$, $\vec{q} + \vec{r}$ 는 서로 평행하다.

$$\begin{aligned}
 06 \quad \text{두 벡터 } t\vec{a} + 6\vec{b}, (t-1)\vec{a} + 3\vec{b} \text{가 서로 평행하므로} \\
 0 \text{이 아닌 실수 } k \text{에 대하여} \\
 t\vec{a} + 6\vec{b} &= k\{(t-1)\vec{a} + 3\vec{b}\} \\
 t\vec{a} + 6\vec{b} &= (kt-k)\vec{a} + 3k\vec{b} \\
 \text{두 벡터 } \vec{a}, \vec{b} \text{는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로} \\
 t &= kt - k, 6 = 3k \\
 \text{따라서 } k &= 2, t = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 07 \quad \text{두 벡터 } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{를 각각 } \vec{a}, \vec{b} \text{로 나타내면} \\
 \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\
 &= (\vec{a} - \vec{b}) - (2\vec{a} + \vec{b}) \\
 &= -\vec{a} - 2\vec{b} \\
 \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \\
 &= (10\vec{a} + t\vec{b}) - (2\vec{a} + \vec{b}) \\
 &= 8\vec{a} + (t-1)\vec{b}
 \end{aligned}$$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ 를 만족시키는 0이 아닌 실수 k 가 존재해야 하므로

$$\begin{aligned}
 8\vec{a} + (t-1)\vec{b} &= k(-\vec{a} - 2\vec{b}) \\
 8\vec{a} + (t-1)\vec{b} &= -k\vec{a} - 2k\vec{b}
 \end{aligned}$$

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로

$$8 = -k, t-1 = -2k$$

따라서 $k = -8, t = 17$

2 벡터의 성분과 내적

01 벡터의 성분

158~170쪽

$$\begin{aligned}
 01 \quad 5\vec{AB} + 7\vec{CB} &= 5(\vec{OB} - \vec{OA}) + 7(\vec{OB} - \vec{OC}) \\
 &= 5(\vec{b} - \vec{a}) + 7(\vec{b} - \vec{c}) \\
 &= 5\vec{b} - 5\vec{a} + 7\vec{b} - 7\vec{c} \\
 &= -5\vec{a} + 12\vec{b} - 7\vec{c}
 \end{aligned}$$

02 (1) 점 P의 위치벡터는

$$\frac{3\vec{b} + 7\vec{a}}{3+7} = \frac{7}{10}\vec{a} + \frac{3}{10}\vec{b}$$

(2) 점 Q는 선분 AB를 2:1로 내분하는 점이므로 위치벡터는

$$\frac{2\vec{b} + \vec{a}}{2+1} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

03 세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 라고 하면 삼각형 ABC의 무게중심 G의 위치벡터 $\vec{g}$ 는

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

세 점 P, Q, R의 위치벡터를 각각 $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$ 라고 하면

$$\vec{p} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}, \vec{q} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}, \vec{r} = \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2}$$

삼각형 PQR의 무게중심 H의 위치벡터 $\vec{h}$ 는

$$\begin{aligned}
 \vec{h} &= \frac{\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}}{3} \\
 &= \frac{\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} + \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} + \frac{\vec{c} + \vec{a}}{2}}{3} \\
 &= \frac{2(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})}{6} \\
 &= \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}
 \end{aligned}$$

따라서 삼각형 ABC의 무게중심 G의 위치벡터 $\vec{g}$ 와 삼각형 PQR의 무게중심 H의 위치벡터 $\vec{h}$ 는 서로 같다.

$$04 \quad (1) \vec{a} = (6, 5)$$

$$(2) \vec{b} = (-7, 9)$$

$$(3) \vec{c} = \left(-\frac{4}{6}, -\frac{3}{6}\right) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$05 \quad (1) |\vec{a}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$(2) |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$06 \quad \vec{a} = \vec{b} \text{이므로}$$

$$l-3=3-2l, 2=m-1$$

$$\text{따라서 } l=2, m=3$$

$$07 \quad (1) 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2(2, 4) + 3(0, -1) - (2, 0) \\
 &= (4, 8) + (0, -3) - (2, 0) \\
 &= (4+0-2, 8-3-0) \\
 &= (2, 5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) 2(2\vec{a} - 3\vec{c}) + 3\vec{b} + 2(\vec{b} + 2\vec{c}) \\
 &= 4\vec{a} - 6\vec{c} + 3\vec{b} + 2\vec{b} + 4\vec{c} \\
 &= 4\vec{a} + 5\vec{b} - 2\vec{c} \\
 &= 4(2, 4) + 5(0, -1) - 2(2, 0) \\
 &= (8, 16) + (0, -5) - (4, 0) \\
 &= (8+0-4, 16-5-0) \\
 &= (4, 11)
 \end{aligned}$$

$$08 \quad \vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b} \text{를 성분으로 나타내면}$$

$$\begin{aligned}
 (5, 6) &= k(1, 2) + l(-1, 2) \\
 &= (k, 2k) + (-l, 2l) \\
 &= (k-l, 2k+2l)
 \end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$5 = k-l, 6 = 2k+2l$$

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$k=4, l=-1$$

$$09 \quad (1) \text{ 벡터 } \vec{AB} \text{를 성분으로 나타내면}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{AB} &= (-1-4, 3-1) \\
 &= (-5, 2)
 \end{aligned}$$

벡터 $\vec{AB}$ 의 크기는

$$\begin{aligned}
 |\vec{AB}| &= \sqrt{(-5)^2 + 2^2} \\
 &= \sqrt{29}
 \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 벡터 } \vec{AB} \text{를 성분으로 나타내면}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{AB} &= (6-0, -6-0) \\
 &= (6, -6)
 \end{aligned}$$

벡터 $\vec{AB}$ 의 크기는

$$\begin{aligned}
 |\vec{AB}| &= \sqrt{6^2 + (-6)^2} \\
 &= \sqrt{72} \\
 &= 6\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

$$10 \quad (1) \vec{a} = (5, 3, 9)$$

$$(2) \vec{b} = (6, -5, 8)$$

$$(3) \vec{c} = \left(-\frac{2}{2}, \frac{4}{2}, -\frac{7}{2}\right) = \left(-1, 2, -\frac{7}{2}\right)$$

11 (1) $\vec{c} = -2\vec{b}$ 이므로

$$(4, m, 1-n) = -2(-2, 4, 7)$$

$$(4, m, 1-n) = (4, -8, -14)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$m = -8, 1-n = -14$$

따라서 $m = -8, n = 15$

$$(2) 3(\vec{a}-\vec{b})-2(4\vec{a}-3\vec{b})$$

$$= 3\vec{a}-3\vec{b}-8\vec{a}+6\vec{b}$$

$$= -5\vec{a}+3\vec{b}$$

$$= -5(1, 2, 3) + 3(-2, 4, 7)$$

$$= -(5, 10, 15) + (-6, 12, 21)$$

$$= (-5-6, -10+12, -15+21)$$

$$= (-11, 2, 6)$$

12 (1) 벡터 $\vec{AB}$ 를 성분으로 나타내면

$$\vec{AB} = (3 - (-1), 3 - 4, 1 - 5)$$

$$= (4, -1, -4)$$

벡터 $\vec{AB}$ 의 크기는

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + (-1)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{33}$$

(2) 벡터 $\vec{AB}$ 를 성분으로 나타내면

$$\vec{AB} = (3 - 2, -2 - (-3), 5 - 1)$$

$$= (1, 1, 4)$$

벡터 $\vec{AB}$ 의 크기는

$$|\vec{AB}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{18}$$

$$= 3\sqrt{2}$$

02 벡터의 내적

171~179쪽

01 (1) $0^\circ \leq 30^\circ \leq 90^\circ$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 30^\circ$$

$$= \sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 3$$

(2) $0^\circ \leq 90^\circ \leq 90^\circ$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ$$

$$= \sqrt{3} \times 2 \times 0$$

$$= 0$$

(3) $90^\circ < 120^\circ \leq 180^\circ$ 이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}| \cos (180^\circ - 120^\circ)$$

$$= -\sqrt{3} \times 2 \times \cos 60^\circ$$

$$= -\sqrt{3} \times 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= -\sqrt{3}$$

$$02 (1) |\vec{BD}| = \sqrt{3^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$|\vec{CG}| = 3$$

$\vec{CG} \perp$ (평면 ABCD)이므로 두 벡터 $\vec{BD}, \vec{CG}$ 가

이루는 각의 크기를 θ 라고 하면

$$\theta = 90^\circ$$

따라서 $\vec{BD} \cdot \vec{CG} = |\vec{BD}| |\vec{CG}| \cos \theta$

$$= 3\sqrt{2} \times 3 \times \cos 90^\circ$$

$$= 3\sqrt{2} \times 3 \times 0$$

$$= 0$$

$$(2) |\vec{BH}| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$|\vec{AE}| = 3$$

두 벡터 $\vec{BH}, \vec{AE}$ 가 이루는 각의 크기는

$\vec{AE} = \vec{BF}$ 이므로 두 벡터 $\vec{BH}, \vec{BF}$ 가 이루는 각의

크기와 같다.

삼각형 BFH는 $\angle F = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 두

벡터 $\vec{BH}, \vec{AE}$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면

$$\cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 $\vec{BH} \cdot \vec{AE} = |\vec{BH}| |\vec{AE}| \cos \theta$

$$= 3\sqrt{3} \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= 9$$

$$03 (1) \vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \times 3 + (-1) \times 4$$

$$= 8$$

$$(2) \vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} + (-3) \times (-2) + 1 \times 5$$

$$= 17$$

$$04 (1) \vec{a} + \vec{b} = (1, 7), \vec{a} - \vec{b} = (5, -3) \text{이므로}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$= 1 \times 5 + 7 \times (-3)$$

$$= -16$$

$$(2) \vec{a} + \vec{b} = (-9, 6, 5), \vec{a} - \vec{b} = (-1, 6, 1) \text{이므로}$$

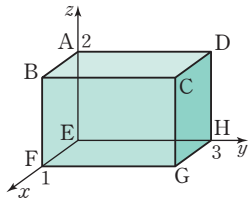
$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$= -9 \times (-1) + 6 \times 6 + 5 \times 1$$

$$= 50$$

- 05 점 E를 원점, 세 모서리 EF, EH, EA를 각각 x 축, y 축, z 축 위에 놓으면

$$A(0, 0, 2), G(1, 3, 0), \\ D(0, 3, 2), F(1, 0, 0)$$



$$\text{즉, } \overrightarrow{AG} = (1, 3, -2), \overrightarrow{DF} = (1, -3, -2) \\ \text{따라서 } \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{DF} \\ = 1 \times 1 + 3 \times (-3) + (-2) \times (-2) \\ = -4$$

06 (1) $|\vec{a} - 2\vec{b}|^2$

$$= (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) \\ = \vec{a} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) - 2\vec{b} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) \\ = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot 2\vec{b} - 2\vec{b} \cdot \vec{a} + 2\vec{b} \cdot 2\vec{b} \\ = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b} \cdot \vec{b} \\ = |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$$

(2) $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$

$$= \vec{a} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) + 2\vec{b} \cdot (\vec{a} - 2\vec{b}) \\ = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot 2\vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{a} - 2\vec{b} \cdot 2\vec{b} \\ = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 4\vec{b} \cdot \vec{b} \\ = |\vec{a}|^2 - 4|\vec{b}|^2$$

07 $|\vec{a} - 2\vec{b}|^2 = (\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$

$$= |\vec{a}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2 \\ = 5^2 - 4 \times 5 \times 3 \times \cos 60^\circ + 4 \times 3^2 \\ = 25 - 30 + 36 \\ = 31$$

따라서 $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{31}$

08 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \times (-3) + \sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 6$

$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 $\theta (0^\circ \leq \theta < 90^\circ)$ 라고 하면

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ = \frac{6}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \sqrt{(-3)^2 + (3\sqrt{3})^2}} \\ = \frac{6}{\sqrt{4} \sqrt{36}} \\ = \frac{1}{2}$$

따라서 $\theta = 60^\circ$

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \times 1 + 1 \times (-2) + 0 \times 2 \\ = -3$

$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ 이므로 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 이루는 각의 크기를 $\theta (90^\circ < \theta \leq 180^\circ)$ 라고 하면

$$\cos (180^\circ - \theta) \\ = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \\ = -\frac{-3}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \\ = \frac{3}{\sqrt{2} \sqrt{9}} \\ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $180^\circ - \theta = 45^\circ$ 이므로 $\theta = 135^\circ$

- 09 (1) 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 수직이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \\ (2k - 3) \times 4 + 1 \times (k + 1) + 4 \times (-4) = 0 \\ 9k - 27 = 0$$

따라서 $k = 3$

- (2) 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| |\vec{b}| \\ -4 \times 2 + 2 \times k + 0 \times 0 \\ = \pm \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0^2} \sqrt{2^2 + k^2 + 0^2} \\ 2k - 8 = \pm \sqrt{20} \sqrt{k^2 + 4} \\ k - 4 = \pm \sqrt{5} \sqrt{k^2 + 4}$$

양변을 제곱하면

$$k^2 - 8k + 16 = 5k^2 + 20 \\ 4k^2 + 8k + 4 = 0 \\ k^2 + 2k + 1 = 0 \\ (k + 1)^2 = 0$$

따라서 $k = -1$

다른 풀이

- (2) 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 가 서로 평행하므로 0이 아닌 실수 t

에 대하여

$$\vec{b} = t\vec{a} \\ (2, k, 0) = t(-4, 2, 0) \\ (2, k, 0) = (-4t, 2t, 0)$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$2 = -4t, k = 2t$$

따라서 $t = -\frac{1}{2}, k = -1$

3 도형의 방정식

01 직선의 방정식

187~195쪽

- 01 (1) $\frac{x-(-2)}{1} = \frac{y-3}{2}$, 즉 $x+2 = \frac{y-3}{2}$
- (2) 직선 $\frac{x}{3} = \frac{2-y}{2}$, 즉 $\frac{x}{3} = \frac{y-2}{-2}$ 에 평행한 직선의
방향벡터는 $\vec{u} = (3, -2)$
따라서 구하는 직선의 방정식은
 $\frac{x-1}{3} = \frac{y-(-3)}{-2}$, 즉 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+3}{-2}$
- (3) 벡터 $\vec{u} = (-1, 1, 2)$ 에 평행한 직선의 방향벡터는
 $\vec{u} = (-1, 1, 2)$
따라서 구하는 직선의 방정식은
 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-(-4)}{2}$
즉, $1-x = y-5 = \frac{z+4}{2}$
- 02 (1) $x = -4$
(2) $x = 1, y = 6$
(3) $x = 2, \frac{y-7}{-1} = \frac{z-(-8)}{-2}$
즉, $x = 2, 7-y = \frac{z+8}{-2}$
- 03 (1) 구하는 직선의 방향벡터는
 $\vec{AB} = (2-1, 3-4) = (1, -1)$
이 직선이 점 A(1, 4)를 지나므로 직선의 방정식은
 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-4}{-1}$, 즉 $x-1 = 4-y$
- (2) 구하는 직선의 방향벡터는
 $\vec{AB} = (-1-3, 2-0, 4-1) = (-4, 2, 3)$
이 직선이 점 A(3, 0, 1)을 지나므로 직선의 방정식은
 $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-0}{2} = \frac{z-1}{3}$
즉, $\frac{3-x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$
- 04 (1) 두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터는
 $\vec{AB} = (0-(-1), 1-2, -1-0)$
 $= (1, -1, -1)$
이 직선이 점 A(-1, 2, 0)을 지나므로 직선의 방정식은
 $\frac{x-(-1)}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-0}{-1}$
즉, $x+1 = 2-y = -z$
이 직선이 yz 평면과 만나는 점의 x 좌표는 0이므로
 $1 = 2-y = -z$ 에서 $y = 1, z = -1$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(0, 1, -1)$

- (2) 두 점 A, B를 지나는 직선의 방향벡터는
 $\vec{AB} = (2-(-1), -2-(-2), -3-1)$
 $= (3, 0, -4)$

이 직선이 점 A(-1, -2, 1)을 지나므로 직선의
방정식은 $\frac{x-(-1)}{3} = \frac{z-1}{-4}, y = -2$
즉, $\frac{x+1}{3} = \frac{1-z}{4}, y = -2$
이 직선이 yz 평면과 만나는 점의 x 좌표는 0이므로
 $\frac{1}{3} = \frac{1-z}{4}$ 에서 $z = -\frac{1}{3}$
따라서 구하는 점의 좌표는 $(0, -2, -\frac{1}{3})$

- 05 두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ 라고 하자.

- (1) $\vec{u}_1 = (-2, 3), \vec{u}_2 = (-3, 2)$ 이므로

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} \\ &= \frac{|-2 \times (-3) + 3 \times 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2} \sqrt{(-3)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{12}{\sqrt{13} \sqrt{13}} = \frac{12}{13}\end{aligned}$$

- (2) $\vec{u}_1 = (3, \sqrt{3}, 2), \vec{u}_2 = (\sqrt{3}, 1, 2\sqrt{3})$ 이므로

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} \\ &= \frac{|3 \times \sqrt{3} + \sqrt{3} \times 1 + 2 \times 2\sqrt{3}|}{\sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2 + 2^2} \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2 + (2\sqrt{3})^2}} \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{16} \sqrt{16}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

- (3) $\vec{u}_1 = (-1, 2, 2), \vec{u}_2 = (0, 1, 2)$ 이므로

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} \\ &= \frac{|-1 \times 0 + 2 \times 1 + 2 \times 2|}{\sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{9} \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

- 06 두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ 라고 하면

$$\vec{u}_1 = (2, \sqrt{3}, a), \vec{u}_2 = (2\sqrt{3}, 1, \sqrt{3})$$

두 직선이 이루는 각의 크기가 30° 이므로

$$\begin{aligned}\cos 30^\circ &= \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{|2 \times 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \times 1 + a \times \sqrt{3}|}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{3})^2 + a^2} \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 1^2 + (\sqrt{3})^2}} \\ |a+5| &= 2\sqrt{a^2+7}\end{aligned}$$

양변을 제곱하면

$$(a+5)^2=4(a^2+7)$$

$$3a^2-10a+3=0, (3a-1)(a-3)=0$$

이때 $a \geq 1$ 이므로 $a=3$

07 두 직선 l_1, l_2 의 방향벡터를 각각 $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ 라고 하자.

$$(1) \vec{u}_1=(5, 2), \vec{u}_2=(-k, 4)$$

(i) 평행할 때,

$$l_1 \parallel l_2 \text{이므로 } \vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$$

즉, $\vec{u}_1 = t\vec{u}_2$ 를 만족시키는 0이 아닌 실수 t 가

$$\text{존재하므로 } (5, 2) = t(-k, 4)$$

$$5 = -kt, 2 = 4t \text{에서}$$

$$t = \frac{1}{2}, k = -10$$

(ii) 수직일 때,

$$l_1 \perp l_2 \text{이므로 } \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$$

$$\text{즉, } \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \text{이므로 } (5, 2) \cdot (-k, 4) = 0$$

$$-5k + 8 = 0 \text{에서 } k = \frac{8}{5}$$

$$(2) \vec{u}_1=(1, -3, 3), \vec{u}_2=(-2, 6, -k)$$

(i) 평행할 때,

$$l_1 \parallel l_2 \text{이므로 } \vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$$

즉, $\vec{u}_1 = t\vec{u}_2$ 를 만족시키는 0이 아닌 실수 t 가

$$\text{존재하므로 } (1, -3, 3) = t(-2, 6, -k)$$

$$1 = -2t, -3 = 6t, 3 = -kt \text{에서}$$

$$t = -\frac{1}{2}, k = 6$$

(ii) 수직일 때,

$$l_1 \perp l_2 \text{이므로 } \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$$

$$\text{즉, } \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0 \text{이므로}$$

$$(1, -3, 3) \cdot (-2, 6, -k) = 0$$

$$-2 - 18 - 3k = 0 \text{에서 } k = -\frac{20}{3}$$

02 평면과 구의 방정식

196-208쪽

$$01 (1) 1(x-0)+2(y-2)+(-1)(z-1)=0$$

$$\text{즉, } x+2y-z-3=0$$

$$(2) x\text{축에 수직인 평면의 법선벡터는 } \vec{n}=(1, 0, 0)$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$1(x-1)+0\{y-(-3)\}+0(z-5)=0$$

$$\text{즉, } x=1$$

02 직선 $\frac{x+1}{2}=\frac{3-y}{3}=\frac{z-4}{4}$ 에 수직인 평면의 법선벡터는 이 직선의 방향벡터와 같으므로 구하는 평면의 법선벡터는 $\vec{n}=(2, -3, 4)$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$2(x-1)+(-3)\{y-(-5)\}+4(z-4)=0$$

$$\text{즉, } 2x-3y+4z-33=0$$

03 구하는 평면의 방정식을

$$ax+by+cz+d=0 \quad \dots\dots ①$$

이라고 하자.

점 A(0, 5, 0)을 ①에 대입하면

$$5b+d=0$$

$$b=-\frac{d}{5}$$

점 B(-1, -1, 0)을 ①에 대입하면

$$-a-b+d=0$$

$$a=-b+d=\frac{6}{5}d$$

점 C(3, 3, -2)를 ①에 대입하면

$$3a+3b-2c+d=0$$

$$c=\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}b+\frac{d}{2}=2d$$

$$\text{따라서 ①은 } \frac{6}{5}dx-\frac{d}{5}y+2dz+d=0 \quad \dots\dots ②$$

$d \neq 0$ 이므로 ②의 양변을 $\frac{d}{5}$ 로 나누면 구하는 평면의

$$\text{방정식은 } 6x-y+10z+5=0$$

$$04 \text{ 구하는 평면의 방정식은 } \frac{x}{-4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{8}=1$$

$$\text{즉, } 2x-4y-z+8=0$$

$$\text{따라서 } a=2, b=-4, c=-1$$

$$05 \frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z+1}{3}=k(k\text{는 실수})\text{로 놓으면}$$

$$x=2k+3, y=4k+1, z=3k-1 \quad \dots\dots ①$$

①을 평면 $2x-y+z=1$ 에 대입하면

$$2(2k+3)-(4k+1)+(3k-1)=1$$

$$3k+3=0, k=-1$$

$$k=-1\text{을 ①에 대입하면 } x=1, y=-3, z=-4$$

따라서 구하는 교점의 좌표는 (1, -3, -4)

06 두 평면의 방정식을 연립하여 x, z 를 각각 소거하면

$$7y+14z-28=0, y=-2z+4 \quad \dots\dots ①$$

$$14x+7y-42=0, y=-2x+6 \quad \dots\dots ②$$

①, ②에 의하여 구하는 교선의 방정식은

$$-2x+6=y=-2z+4$$

07 두 평면의 방정식을 연립하여 x, z 를 각각 소거하면

$$y - z + 2 = 0, y = z - 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x + 2y + 1 = 0, y = \frac{x+1}{-2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②에 의하여 교선의 방정식은

$$\frac{x+1}{-2} = y = z - 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

직선 ③에 수직인 평면의 법선벡터는 직선 ③의 방향 벡터와 같으므로

$$\vec{n} = (-2, 1, 1)$$

이 평면이 점 $(-2, 0, 1)$ 을 지나므로 평면의 방정식은

$$-2(x+2) + 1(y-0) + 1(z-1) = 0$$

$$\text{즉, } 2x - y - z + 5 = 0$$

이 평면이 점 $(0, a, 3)$ 을 지나므로

$$0 - a - 3 + 5 = 0 \text{에서 } a = 2$$

08 두 평면 α, β 의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라고 하자.

(1) $\vec{n}_1 = (-2, 3, 1), \vec{n}_2 = (3, -1, 2)$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|-2 \times 3 + 3 \times (-1) + 1 \times 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{14} \sqrt{14}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(2) $\vec{n}_1 = (1, -2, 2), \vec{n}_2 = (0, 1, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|1 \times 0 + (-2) \times 1 + 2 \times 0|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{9} \sqrt{1}} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

09 두 평면의 법선벡터를 각각 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 라고 하면

$$\vec{n}_1 = (-2, k-2, 1), \vec{n}_2 = (-k-1, 2, 2)$$

(1) 두 평면이 서로 평행하므로 $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$

즉, $\vec{n}_1 = t\vec{n}_2$ 를 만족시키는 0이 아닌 실수 t 가 존재 하므로

$$(-2, k-2, 1) = t(-k-1, 2, 2)$$

$$-2 = -tk - t, k-2 = 2t, 1 = 2t \text{에서}$$

$$t = \frac{1}{2}, k = 3$$

(2) 두 평면이 서로 수직이므로 $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

$$\text{즉, } \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \text{이므로}$$

$$(-2, k-2, 1) \cdot (-k-1, 2, 2) = 0$$

$$4k = 0 \text{에서 } k = 0$$

10 평면 $4x + 2y - 4z + 5 = 0$ 에 평행한 평면의 법선벡터 는 이 평면의 법선벡터와 같으므로 구하는 평면의 법선 벡터는

$$\vec{n} = (4, 2, -4)$$

따라서 구하는 평면의 방정식은

$$4(x-0) + 2(y-1) + (-4)(z-4) = 0$$

$$\text{즉, } 2x + y - 2z + 7 = 0$$

$$11 \frac{|-3 \times (-2) + \sqrt{6} \times 0 + 1 \times 1 + 1|}{\sqrt{(-3)^2 + (\sqrt{6})^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{16}} = 2$$

12 (1) 점 P는 점 $(3, 5, -4)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 구 위의 점이다.

$$(2) (\vec{p} - \vec{a}) \cdot (\vec{p} + \vec{a}) = 0$$

$$\text{즉, } |\vec{p}|^2 - |\vec{a}|^2 = 0 \text{에서}$$

$$|\vec{p}| = |\vec{a}|$$

$$\text{이때 } |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-4)^2} = 5\sqrt{2}$$

따라서 점 P는 점 $(0, 0, 0)$ 을 중심으로 하고 반지 림의 길이가 $5\sqrt{2}$ 인 구 위의 점이다.

13 두 점 $A(0, -1, 1), B(-4, 3, 1)$ 을 지름의 양 끝 점으로 하는 구 위의 한 점을 $P(x, y, z)$ 라고 하면

$$\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BP} \text{이므로 } \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$$

$$\overrightarrow{AP} = (x, y+1, z-1)$$

$$\overrightarrow{BP} = (x+4, y-3, z-1)$$

이므로

$$(x, y+1, z-1) \cdot (x+4, y-3, z-1) = 0$$

$$x(x+4) + (y+1)(y-3) + (z-1)^2 = 0$$

따라서 구의 방정식은

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 8$$

14 점 P의 좌표를 (x, y, z) 라고 하면

$$\overrightarrow{AP} = (x-1, y-5, z-4)$$

$$\overrightarrow{BP} = (x-2, y-2, z-6)$$

이므로 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$ 에서

$$(x-1, y-5, z-4) \cdot (x-2, y-2, z-6) = 0$$

$$(x-1)(x-2) + (y-5)(y-2)$$

$$+ (z-4)(z-6) = 0$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + (z-5)^2 = \frac{7}{2}$$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 반지름의 길이가

$$\frac{\sqrt{14}}{2} \text{인 구이고, 구하는 도형의 부피는}$$

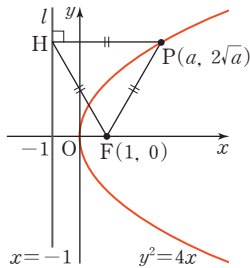
$$\frac{4}{3}\pi \times \left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^3 = \frac{7\sqrt{14}}{3}\pi$$

I. 이차곡선

252~254쪽

- 01 3 02 $3\sqrt{2}$ 03 15 04 24 05 $\neg, \perp$
 06 4 07 6 08 43 09 $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ 10 $-\sqrt{6}$
 11 $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ 12 4 13 18 14 16 15 $\frac{16\sqrt{3}}{3}$
 16 $-\frac{9}{16}$ 17 15

- 01 포물선 $y^2=4x=4 \times 1x$ 의
 초점은 $F(1, 0)$
 준선의 방정식은 $x=-1$
 이므로 $H(-1, 2\sqrt{a})$
 삼각형 FPH가 정삼각형
 이므로



$$\overline{HP} = \overline{HF}$$

$$|a - (-1)| = \sqrt{(1+1)^2 + (-2\sqrt{a})^2}$$

$$|a+1| = \sqrt{4+4a}$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$a^2 - 2a - 3 = 0, (a+1)(a-3) = 0$$

이때 $a > 0$ 이므로 $a=3$

- 02 포물선 $(x-1)^2=4y$ 는 포물선 $x^2=4y$ 를 x 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2=4y=4 \times 1y$ 의 초점의 좌표는 $(0, 1)$ 이므로 $F_1(0+1, 1)$, 즉 $F_1(1, 1)$

포물선 $(y+2)^2=-8x$ 는 포물선 $y^2=-8x$ 를 y 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $y^2=-8x=4 \times (-2)x$ 의 초점의 좌표는 $(-2, 0)$ 이므로

$$F_2(-2, 0-2), \text{ 즉 } F_2(-2, -2)$$

$$\text{따라서 } \overline{F_1F_2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-1)^2} = 3\sqrt{2}$$

- 03 초점이 y 축 위에 있고, 두 초점 사이의 거리가 $2\sqrt{6}$ 이므로 두 초점의 좌표는

$$(0, \sqrt{6}), (0, -\sqrt{6})$$

장축의 길이가 6이므로

$$2b=6, b=3$$

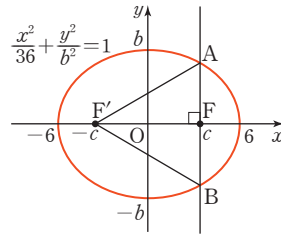
$$a^2 = b^2 - (\sqrt{6})^2 \text{ 이므로}$$

$$a^2 = 9 - 6 = 3$$

$$\text{따라서 } 2a^2 + b^2 = 2 \times 3 + 3^2 = 15$$

- 04 $\overline{AF} = \overline{BF}$ 이므로 $\overline{AF} = \frac{1}{2} \overline{AB}$ 이고, 삼각형 $AF'B$ 가 정삼각형이므로

$$\overline{AF'} = \overline{AB} = 2\overline{AF} \quad \dots\dots ①$$



타원의 정의에 따라

$$\overline{AF} + \overline{AF'} = 12 \quad \dots\dots ②$$

①을 ②에 대입하면 $\overline{AF} = 4, \overline{AF'} = 8$

$\angle AFF' = 90^\circ$ 이므로 직각삼각형 $AF'F$ 에서

$$\overline{FF'} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$$

즉, 두 초점 사이의 거리가 $4\sqrt{3}$ 이므로 $c=2\sqrt{3}$

따라서 $b^2 = 6^2 - c^2$ 이므로 $b^2 = 36 - 12 = 24$

- 05 주어진 타원의 방정식을 변형하면

$$\frac{(x-2)^2}{10} + \frac{(y-1)^2}{2} = 1$$

이 타원은 타원 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{2} = 1$ 을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. 평행이동하여 타원 $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 과 겹쳐지지 않는다.

ㄹ. 타원 $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{2} = 1$ 의 두 초점의 좌표는

$$(\sqrt{10-2}, 0), (-\sqrt{10-2}, 0), \text{ 즉 } (2\sqrt{2}, 0),$$

$$(-2\sqrt{2}, 0) \text{ 이므로 주어진 타원의 두 초점의 좌표}$$

$$\text{는 } (2\sqrt{2}+2, 1), (-2\sqrt{2}+2, 1) \text{ 이다.}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

- 06 쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$$

이라고 하면

$$5 = \sqrt{a^2 + b^2}, a^2 + b^2 = 25$$

주축의 길이가 6이므로 $2a=6, a=3$

$a=3$ 을 $a^2 + b^2 = 25$ 에 대입하면 $b^2 = 16$

이때 $b > 0$ 이므로 $b=4$

직선 l 은 기울기가 양수인 쌍곡선의 점근선이므로 직선

$$l \text{의 방정식은 } y = \frac{4}{3}x, 4x - 3y = 0$$

따라서 점 $F(5, 0)$ 과 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|20|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 4$$

- 07 쌍곡선 $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ 의 두 초점의 좌표는 $(\sqrt{64+36}, 0), (-\sqrt{64+36}, 0)$, 즉 $(10, 0), (-10, 0)$ 이므로 점 F의 좌표는 $(10, 0)$

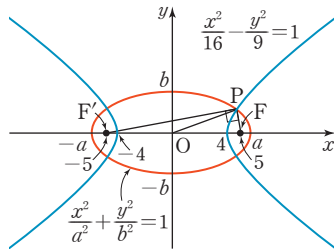
또 쌍곡선의 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{3}{4}x$ 이다.

두 점근선은 x 축에 대하여 서로 대칭이므로 x 축 위의 점에서 두 점근선까지의 거리는 서로 같다.

따라서 초점 F를 중심으로 하고, 두 점근선에 접하는 원의 반지름의 길이는 점 $(10, 0)$ 에서 직선 $y = \frac{3}{4}x$, 즉 $3x - 4y = 0$ 까지의 거리와 같으므로

$$\frac{|30|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = 6$$

- 08 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 에서 두 초점은 $F(\sqrt{16+9}, 0), F'(-\sqrt{16+9}, 0)$, 즉 $F(5, 0), F'(-5, 0)$ 이다.
이때 $\overline{OP} = 5, \overline{OF} = \overline{OF'} = 5$ 이므로 세 점 P, F, F'은 중심이 원점이고 지름이 선분 FF'인 원 위의 점이다.
즉, 삼각형 PF'F는 직각삼각형이다.



타원의 정의에 따라 $\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$ ①

쌍곡선의 정의에 따라 $\overline{PF'} - \overline{PF} = 8$ ②

①, ②를 연립하여 풀면 $\overline{PF'} = a + 4, \overline{PF} = a - 4$

직각삼각형 PF'F에서 $\overline{PF'}^2 + \overline{PF}^2 = \overline{FF'}^2$ 이므로

$$(a+4)^2 + (a-4)^2 = 10^2$$

$$2a^2 + 32 = 100, a^2 = 34$$

한편 타원 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 에서 $b^2 = a^2 - c^2$ 이므로

$$b^2 = 34 - 5^2 = 9$$

따라서 $a^2 + b^2 = 43$

- 09 타원 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} = 1$ 에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은 $y = 2x \pm \sqrt{6 \times 2^2 + 12}, y = 2x \pm 6$
따라서 구하는 두 직선 사이의 거리는 직선 $y = 2x + 6$ 위의 한 점 $(0, 6)$ 과 직선 $y = 2x - 6$, 즉 $2x - y - 6 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-6-6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

- 10 쌍곡선 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ 에 접하고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$$y = 3x \pm \sqrt{4 \times 3^2 - 12}, y = 3x \pm 2\sqrt{6}$$

이 직선이 점 (k, k) 를 지나므로

$$k = 3k \pm 2\sqrt{6}, k = \pm \sqrt{6}$$

이때 $k < 0$ 이므로 $k = -\sqrt{6}$

- 11 $x^2 = 8y = 4 \times 2y$ 이므로 $p = 2$

포물선 위의 점 $(2, \frac{1}{2})$ 에서의 접선의 방정식은

$$2x = 2 \times 2 \left(y + \frac{1}{2} \right), y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

이 접선과 평행하고 점 $(-4, 2)$ 를 지나는 직선 l 의 방정식은

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x + 4), x - 2y + 8 = 0$$

한편 포물선 $x^2 = 8y$ 의 초점의 좌표는 $(0, 2)$ 이므로 초점과 직선 l 사이의 거리는

$$\frac{|-4+8|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

- 12 쌍곡선 위의 접점의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하면

접선의 방정식은 $x_1x - 2y_1y = 2$

이 직선이 점 $A(0, 1)$ 을 지나므로

$$-2y_1 = 2, y_1 = -1 \quad \dots\dots ①$$

또 점 (x_1, y_1) 은 쌍곡선 위의 점이므로

$$x_1^2 - 2y_1^2 = 2 \quad \dots\dots ②$$

①을 ②에 대입하여 풀면 $x_1 = \pm 2$

즉, 두 점 P, Q는 $P(-2, -1), Q(2, -1)$ 이다.

따라서 삼각형 APQ의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$

- 13 $x^2 = -16y = 4 \times (-4)y$ 이므로 $p = -4$

준선의 방정식은 $y = 4$

20%

두 점 A, B에서 준선에

내린 수선의 발을 각각

P', Q'이라고 하면 포물

선의 정의에 따라

$$\overline{AF} = \overline{AP'}$$

$$= \overline{AP} + \overline{PP'}$$

$$= 8 + 4 = 12$$

30%

$$\overline{BF} = \overline{BQ'} = \overline{BQ} + \overline{QQ'}$$

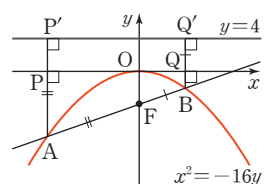
$$= 2 + 4 = 6$$

30%

따라서 $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{BF}$

$$= 12 + 6 = 18$$

20%



- 14 A(0, 5), B(0, -5)이고 쌍곡선 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$ 의 두 초점의 좌표는 (0, $\sqrt{16+9}$), (0, $-\sqrt{16+9}$), 즉 (0, 5), (0, -5)이므로 두 점 A, B는 쌍곡선의 초점이다. ▶ 20%

삼각형 PAB는 직각삼각형이고 $\overline{AB}=10$ 이므로 $\overline{PA}=m$, $\overline{PB}=n$ 이라고 하면

$$m^2 + n^2 = 100 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \text{▶ 20\%}$$

쌍곡선의 성질에 따라

$$|m - n| = 6 \quad \text{▶ 30\%}$$

양변을 제곱하면

$$m^2 - 2mn + n^2 = 36 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하여 풀면

$$mn = 32 \quad \text{▶ 20\%}$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$$\frac{1}{2}mn = 16 \quad \text{▶ 10\%}$$

- 15 $y^2 = 8\sqrt{3}x = 4 \times 2\sqrt{3}x$ 이므로 $p = 2\sqrt{3}$
초점은 F($2\sqrt{3}$, 0) ▶ 10%
주어진 포물선에 접하고 기울기가 $\sqrt{3}$ 인 직선의 방정식은

$$y = \sqrt{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x + 2 \quad \text{▶ 30\%}$$

$y = \sqrt{3}x + 2$ 를 $y^2 = 8\sqrt{3}x$ 에 대입하면

$$(\sqrt{3}x + 2)^2 = 8\sqrt{3}x$$

$$3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$$

$$(\sqrt{3}x - 2)^2 = 0$$

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 을 $y = \sqrt{3}x + 2$ 에 대입하면

$$y = \sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} + 2, y = 4$$

즉, 접점 A의 좌표는

$$\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 4\right) \quad \text{▶ 30\%}$$

또 직선 $y = \sqrt{3}x + 2$ 가 x 축과 만나는 점 B의 좌표는

$$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right) \quad \text{▶ 10\%}$$

따라서 삼각형 ABF의 넓이는

$$\begin{aligned} \triangle ABF &= \frac{1}{2} \times \overline{BF} \times 4 \\ &= \frac{1}{2} \times \left\{ 2\sqrt{3} - \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \right\} \times 4 \\ &= \frac{16\sqrt{3}}{3} \quad \text{▶ 20\%} \end{aligned}$$

다른 풀이

$$y^2 = 8\sqrt{3}x = 4 \times 2\sqrt{3}x \text{이므로 } p = 2\sqrt{3}$$

$$\text{초점은 } F(2\sqrt{3}, 0) \quad \text{▶ 10\%}$$

점 A의 좌표를 (x_1 , y_1)이라고 하면 포물선 위의 점 A에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = 2 \times 2\sqrt{3}(x + x_1)$$

$$y = \frac{4\sqrt{3}}{y_1}x + \frac{4\sqrt{3}x_1}{y_1} \text{ (단, } y_1 \neq 0) \quad \text{▶ 20\%}$$

$$\text{이때 접선의 기울기가 } \sqrt{3} \text{이므로 } \frac{4\sqrt{3}}{y_1} = \sqrt{3}, y_1 = 4$$

점 A(x_1 , 4)는 포물선 $y^2 = 8\sqrt{3}x$ 위의 점이므로

$$4^2 = 8\sqrt{3}x_1, x_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{즉, 점 A의 좌표는 } \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 4\right) \text{이다.} \quad \text{▶ 30\%}$$

또 접선의 방정식은

$$y = \frac{4\sqrt{3}}{4}x + \frac{4\sqrt{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3}}{4}, y = \sqrt{3}x + 2 \quad \text{▶ 10\%}$$

한편 접선 $y = \sqrt{3}x + 2$ 가 x 축과 만나는 점 B의 좌표는

$$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right) \quad \text{▶ 10\%}$$

따라서 삼각형 ABF의 넓이는

$$\begin{aligned} \triangle ABF &= \frac{1}{2} \times \overline{BF} \times 4 \\ &= \frac{1}{2} \times \left\{ 2\sqrt{3} - \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \right\} \times 4 \\ &= \frac{16\sqrt{3}}{3} \quad \text{▶ 20\%} \end{aligned}$$

- 16 타원과 쌍곡선의 한 교점을 P(x_1 , y_1)이라고 하자.

타원 $4x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$4x_1 x + y_1 y = 1 \quad \text{▶ 30\%}$$

쌍곡선 $3x^2 - y^2 = a$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$3x_1 x - y_1 y = a \quad \text{▶ 30\%}$$

$$\text{두 접선이 서로 수직이므로 } -\frac{4x_1}{y_1} \times \frac{3x_1}{y_1} = -1$$

$$12x_1^2 - y_1^2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 P는 타원 $4x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

$$4x_1^2 + y_1^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{를 연립하여 풀면 } x_1^2 = \frac{1}{16}, y_1^2 = \frac{3}{4} \quad \text{▶ 20\%}$$

또 점 P는 쌍곡선 $3x^2 - y^2 = a$ 위의 점이므로

$$3x_1^2 - y_1^2 = a$$

$$x_1^2 = \frac{1}{16}, y_1^2 = \frac{3}{4} \text{을 위의 식에 대입하면}$$

$$\frac{3}{16} - \frac{3}{4} = a, a = -\frac{9}{16} \quad \text{▶ 20\%}$$

- 17 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 의 두 초점의 좌표가 (3, 0), (-3, 0)이므로

$$a^2 + b^2 = 9 \quad \dots\dots ① \quad \text{30\%}$$

점 P(4, k)에서의 접선의 방정식은

$$\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1 \quad \dots\dots ② \quad \text{30\%}$$

직선 ②가 점 (1, 0)을 지나므로

$$\frac{4}{a^2} = 1, a^2 = 4$$

$a^2 = 4$ 를 ①에 대입하여 풀면

$$b^2 = 5$$

즉, 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ 20%

점 P(4, k)는 이 쌍곡선 위의 점이므로

$$\frac{4^2}{4} - \frac{k^2}{5} = 1$$

따라서 $k^2 = 15$ 20%

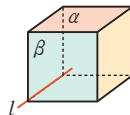
II. 공간도형과 공간좌표

255~257쪽

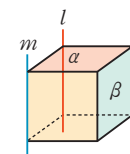
- | | | | | |
|------------------------|----------------|----------------|---------------|-------------|
| 01 9 | 02 ㄴ | 03 $\sqrt{6}$ | 04 30° | 05 128π |
| 06 $(2 + \sqrt{2})\pi$ | 07 $6\sqrt{2}$ | 08 $5\sqrt{2}$ | | |
| 09 (3, 2, -1) | 10 8 | 11 6 | 12 $\sqrt{3}$ | |
| 13 6 | 14 60° | 15 $4\sqrt{3}$ | 16 $\sqrt{3}$ | 17 12 |
| 18 13 | | | | |

- 01 모서리 AB와 꼬인 위치에 있는 모서리는
모서리 CF, 모서리 DF, 모서리 EF
즉, $a=3$
평면 ABC와 평행한 모서리는
모서리 DE, 모서리 EF, 모서리 DF
즉, $b=3$
따라서 $ab=9$

- 02 (반례) ㄱ. 오른쪽 그림과 같은 직육
면체에서 $l \parallel \alpha$, $\alpha \perp \beta$ 이지
만 $l \perp \beta$ 이다.



- ㄴ. 오른쪽 그림과 같은 직육면
체에서 $\alpha \perp \beta$, $l \perp \alpha$, $l \parallel m$
이지만 $m \parallel \beta$ 이다.



따라서 보기 중 옳은 것은 ㄴ이다.

- 03 $\overline{DH} \perp$ (평면 ACD)이고 $\overline{AC}$ 는
평면 ACD 위에 있으므로

$$\overline{AC} \perp \overline{DH}$$

또 $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ 이므로

$$\overline{AC} \perp (\text{평면 BHD})$$

두 대각선 AC, BD의 교점을 P, 점 P에서 $\overline{BH}$ 에 내
린 수선의 발을 Q라고 하면

$$\overline{PQ} \perp \overline{BH}$$

$\overline{PQ}$ 는 평면 BHD 위에 있으므로 $\overline{PQ} \perp \overline{AC}$

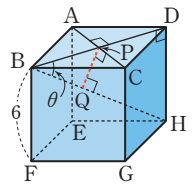
즉, 두 점 P, Q는 주어진 조건을 만족시킨다.

$\angle DBH = \theta$ 라고 하면

$$\sin \theta = \frac{\overline{DH}}{\overline{BH}} = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

따라서 직각삼각형 PBQ에서

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \overline{BP} \sin \theta = \frac{1}{2} \overline{BD} \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{6} \end{aligned}$$



- 04 선분 AB와 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면
 $\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$ 이므로

$$3\sqrt{3} = 6 \cos \theta, \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

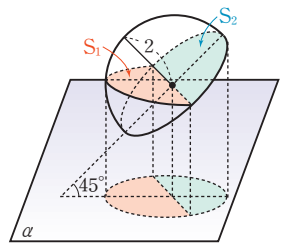
따라서 $\theta = 30^\circ$

- 05 단면의 넓이를 S라고 하면 단면의 밑면 위로의 정사영
은 밑면인 원이므로

$$\pi \times 8^2 = S \cos 60^\circ, 64\pi = \frac{1}{2} S$$

따라서 $S = 128\pi$

- 06 오른쪽 그림과 같이
구하는 그림자의 넓이
는 반구의 밑면의 중
심을 지나고 평면 α 와
평행한 평면이 반구를
자를 때 생기는 반원



S_1 과 반구의 밑면에서 반원 S_2 의 정사영의 넓이의 합
과 같다.

S_1, S_2 의 넓이를 각각 S_1, S_2 라 하고, S_1, S_2 의 평면 α
위로의 정사영의 넓이를 각각 S_1', S_2' 이라고 하면

$$S_1' = S_1 = \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 = 2\pi$$

$$S_2' = S_2 \cos 45^\circ = 2\pi \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}\pi$$

따라서 구하는 넓이는 $S_1' + S_2' = (2 + \sqrt{2})\pi$

- 07 점 A(4, 3, 2)를 xy 평면에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라고 하면

$$A'(4, 3, -2)$$

점 B(2, 3, 4)를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점을 B' 이라고 하면

$$B'(-2, 3, 4)$$

이때 $\overline{AP} = \overline{A'P}$, $\overline{BQ} = \overline{B'Q}$ 이므로

$$\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB} = \overline{A'P} + \overline{PQ} + \overline{QB'} \geq \overline{A'B'} \\ = \sqrt{(-6)^2 + 0^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $6\sqrt{2}$

- 08 점 C의 좌표를 (a, b, c) 라고 하면 평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 교점 $(0, 2, -1)$ 은 선분 AC의 중점과 같으므로

$$\frac{-2+a}{2}=0, \frac{-3+b}{2}=2, \frac{4+c}{2}=-1$$

$$a=2, b=7, c=-6$$

즉, 점 C의 좌표는 $(2, 7, -6)$

따라서 선분 BC의 길이는

$$\overline{BC} = \sqrt{3^2 + 5^2 + (-4)^2} = 5\sqrt{2}$$

- 09 점 $(-4, 1, -3)$ 을 원점에 대하여 대칭이동한 점 A의 좌표는 $(4, -1, 3)$

점 $(-2, 2, 4)$ 를 yz 평면에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는 $(2, 2, 4)$

점 C의 좌표를 (a, b, c) 라고 하면 삼각형 ABC의 무게중심이 $G(3, 1, 2)$ 이므로

$$\frac{4+2+a}{3}=3, \frac{-1+2+b}{3}=1, \frac{3+4+c}{3}=2$$

$$a=3, b=2, c=-1$$

따라서 점 C의 좌표는 $(3, 2, -1)$

- 10 구의 중심의 좌표를 (a, b, c) 라고 하면 구의 반지름의 길이가 5이므로 구의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 25$$

구의 방정식에 $z=0$ 을 대입하면 구가 xy 평면과 만나서 생기는 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (-c)^2 = 25$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 25 - c^2$$

이 식이 $x^2 + y^2 - 6y = 0$, 즉 $x^2 + (y-3)^2 = 9$ 와 일치하므로 $a=0, b=3, 25-c^2=9$

즉, $a=0, b=3, c=\pm 4$

따라서 두 구의 중심의 좌표는 각각 $(0, 3, 4)$,

$(0, 3, -4)$ 이므로 두 구의 중심 사이의 거리는 8이다.

- 11 주어진 구의 방정식을 변형하면

$$(x-a)^2 + (y+2)^2 + (z-2b)^2 = a^2 + 4b^2 - 16$$

$$(\text{단, } a^2 + 4b^2 - 16 > 0)$$

즉, 구의 중심의 좌표는 $(a, -2, 2b)$ 이고, 반지름의 길이는 $\sqrt{a^2 + 4b^2 - 16}$ 이다.

구가 xy 평면에 접하므로 반지름의 길이는 구의 중심의 z 좌표의 절댓값과 같다. 즉, $\sqrt{a^2 + 4b^2 - 16} = |2b|$

양변을 제곱하여 정리하면 $a^2 = 16$

이때 $a > 0$ 이므로 $a=4$

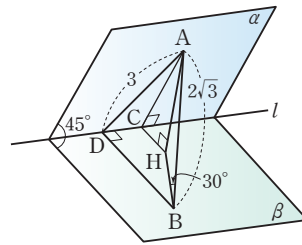
또 구가 yz 평면에 접하므로 반지름의 길이는 구의 중심의 x 좌표의 절댓값과 같다. 즉, $\sqrt{a^2 + 4b^2 - 16} = |a|$

양변을 제곱하여 정리하면 $b^2 = 4$

이때 $b > 0$ 이므로 $b=2$

따라서 $a+b=6$

- 12 다음 그림과 같이 점 A에서 평면 β 에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overline{AH} = \overline{AB} \sin 30^\circ = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$



$\overline{AC}$ 가 평면 β 와 이루는 각의 크기가 45° 이므로 삼각형 ACH는 직각이등변삼각형이다.

$\overline{CH} = \overline{AH} = \sqrt{3}$ 이고 $\overline{AC} = \frac{\overline{AH}}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6}$ 이다.

따라서 직각삼각형 ACD에서

$$\overline{CD} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{6})^2} = \sqrt{3}$$

- 13 평면을 만들 수 있는 경우는 다음과 같다.

(i) 세 점 B, C, D로 만들 수 있는 평면은

평면 BCD 20%

(ii) 두 직선 CF, CH로 만들 수 있는 평면은

평면 CFH 20%

(iii) 직선 CF와 세 점 B, C, D 중 한 점으로 만들 수 있는 평면은

평면 BFC, 평면 DFC 20%

(iv) 직선 CH와 세 점 B, C, D 중 한 점으로 만들 수 있는 평면은

평면 BHC, 평면 CHD 20%

(i)~(iv)에서 구하는 평면의 개수는

$$1 + 1 + 2 + 2 = 6 \quad \text{20\%}$$

- 14 점 A에서 직선 l 과 평면 α 에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라고 하면 $\overline{AM} \perp l$, $\overline{AN} \perp \alpha$ 이므로 삼수선 정리에 의하여

$$\overline{MN} \perp l$$

30%

점 A와 직선 l 에 의하여 결정되는 평면 β 와 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면 $\theta = \angle AMN$

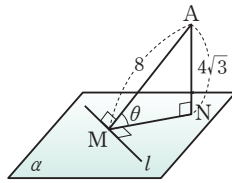
$\overline{AM} = 8$, $\overline{AN} = 4\sqrt{3}$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\overline{AN}}{\overline{AM}} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

50%

따라서 $\theta = 60^\circ$

20%



- 15 잘린 단면인 타원의 밑면 위로의 정사영은 밑면인 원이므로 타원의 장축의 밑면 위로의 정사영은 밑면의 지름이다.

이때 타원의 장축의 길이를 $2a$ 라고 하면

$$12 = 2a \cos 30^\circ$$

$$12 = 2a \times \frac{\sqrt{3}}{2}, a = 4\sqrt{3}$$

40%

또 타원의 단축의 길이를 $2b$ 라고 하면 단축의 길이는 밑면의 지름의 길이와 같으므로

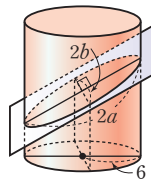
$$2b = 12, b = 6$$

30%

따라서 구하는 두 초점 사이의 거리는

$$2\sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{(4\sqrt{3})^2 - 6^2} = 4\sqrt{3}$$

30%



- 16 $a^2 + b^2 = 4$ 이므로 삼각형 ABC의 세 변의 길이를 각각 구하면

$$\overline{AB} = \sqrt{(b-a)^2 + a^2 + (-b)^2}$$

$$= \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 2ab}$$

$$= \sqrt{8 - 2ab}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(-b)^2 + (b-a)^2 + a^2}$$

$$= \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 2ab}$$

$$= \sqrt{8 - 2ab}$$

$$\overline{CA} = \sqrt{a^2 + (-b)^2 + (b-a)^2}$$

$$= \sqrt{2a^2 + 2b^2 - 2ab}$$

$$= \sqrt{8 - 2ab}$$

30%

삼각형 ABC는 정삼각형이므로 넓이는

$$\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{8 - 2ab})^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} (4 - ab)$$

20%

한편 $a^2 > 0$, $b^2 > 0$ 이고 $a^2 + b^2 = 4$ 이므로

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{a^2 b^2} = 2ab$$

(단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립)

$$4 \geq 2ab, ab \leq 2$$

30%

$$\text{즉, } \frac{\sqrt{3}}{2} (4 - ab) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} (4 - 2) = \sqrt{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최솟값은 $\sqrt{3}$ 이다.

20%

- 17 선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점을 P라고 하면

$$P\left(\frac{-4m+5n}{m+n}, \frac{8m-4n}{m+n}, \frac{7m-2n}{m+n}\right)$$

30%

점 P는 yz 평면 위의 점이므로 점 P의 x 좌표는 0이다.

$$\frac{-4m+5n}{m+n} = 0 \text{에서 } 4m = 5n$$

$$m : n = 5 : 4$$

m, n 은 서로소인 자연수이므로

$$m = 5, n = 4$$

30%

점 P의 z 좌표는 k 이므로

$$k = \frac{7m-2n}{m+n} = \frac{7 \times 5 - 2 \times 4}{5+4} = 3$$

30%

따라서 $m+n+k = 5+4+3 = 12$

10%

- 18 반지름의 길이가 10인 구의 방정식을

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 100$$

이라고 하면 xy 평면, yz 평면, zx 평면과의 교선인 원의 방정식은 각각

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = 100 - c^2 \quad \dots\dots ①$$

$$(y-b)^2 + (z-c)^2 = 100 - a^2 \quad \dots\dots ②$$

$$(x-a)^2 + (z-c)^2 = 100 - b^2 \quad \dots\dots ③$$

60%

이때 원 ①, ②, ③의 반지름의 길이가 각각 6, 8, $\sqrt{31}$ 이므로

$$100 - c^2 = 6^2, 100 - a^2 = 8^2, 100 - b^2 = (\sqrt{31})^2$$

따라서 $a^2 = 36$, $b^2 = 69$, $c^2 = 64$ 이므로 원점에서 구의 중심 (a, b, c) 까지의 거리는

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{36 + 69 + 64} = 13$$

40%

01 $\frac{\sqrt{14}}{2}$	02 5	03 3	04 1	05 $\frac{1}{3}$
06 36	07 -2	08 -10	09 $\frac{1}{2}$	10 4
11 4	12 16π	13 6	14 $\frac{4}{9}$	15 $\frac{1}{2}$
16 -4	17 36	18 $\frac{18}{5}$		

01 $|\overrightarrow{MF}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{BF}| = \frac{1}{2} \times 2 = 1$

$$|\overrightarrow{FN}| = \frac{1}{2} |\overrightarrow{FH}| = \frac{1}{2} \sqrt{3^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

직각삼각형 MFN에서

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

02 $(x+2y)\vec{a} + (2x-y)\vec{b} = 3\vec{a} - 4\vec{b}$ 에서
 $x+2y=3, 2x-y=-4$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=-1, y=2$

따라서 $x^2+y^2=1+4=5$

03 두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 를 각각 $\vec{a}, \vec{b}$ 로 나타내면

$$\overrightarrow{AB} = (-\vec{a} - 3\vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) = -2\vec{a} - 2\vec{b}$$

$$\overrightarrow{AC} = (k\vec{a} + \vec{b}) - (\vec{a} - \vec{b}) = (k-1)\vec{a} + 2\vec{b}$$

세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으려면 $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{AB}$

를 만족시키는 0이 아닌 실수 t 가 존재해야 하므로

$$(k-1)\vec{a} + 2\vec{b} = t(-2\vec{a} - 2\vec{b})$$

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 는 영벡터가 아니고 서로 평행하지 않으므로

$$k-1 = -2t, 2 = -2t$$

따라서 $t = -1, k = 3$

04 오른쪽 그림에서
 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ 가 되도록

점 D를 잡으면 사각형

OADB는 정사각형이고,

$\angle AOD = 45^\circ$ 이므로 점 C

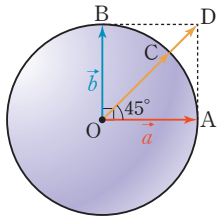
는 선분 OD 위에 있다.

이때 $\overrightarrow{OC} : \overrightarrow{OD} = 1 : \sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \overrightarrow{OD} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{a} + \frac{\sqrt{2}}{2} \vec{b} \end{aligned}$$

따라서 $m = \frac{\sqrt{2}}{2}, n = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$m^2 + n^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$$



05 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ 라고 하자.

점 G는 삼각형 OAB의 두 중선의 교점이므로 무게중심이다.

$\overrightarrow{MG} : \overrightarrow{GB} = 1 : 2$ 이므로

$$\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3} \overrightarrow{MB}$$

이때 $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a}$ 이므로

$$\overrightarrow{GB} = \frac{2}{3} \overrightarrow{MB}$$

$$= \frac{2}{3} \left(\vec{b} - \frac{1}{2} \vec{a} \right)$$

$$= -\frac{1}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b}$$

$$= -\frac{1}{3} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} \overrightarrow{OB}$$

따라서 $x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}$ 이므로

$$x+y = \frac{1}{3}$$

06 선분 AB가 원 O의 지름이므로

$$\angle APB = 90^\circ$$

직각삼각형 ABP에서

$$\overline{AP} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$$

두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}$ 가 이루는 각의 크기를

$\theta (0^\circ < \theta < 90^\circ)$ 라고 하면

$$\cos \theta = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{3}{5}$$

따라서 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AP}| \cos \theta$

$$= 10 \times 6 \times \frac{3}{5} = 36$$

07 $\vec{a} \cdot \vec{b} = (x, -3, 4) \cdot (2, 3x-1, -1)$

$$= 2x - 3(3x-1) - 4$$

$$= -7x - 1$$

$$-7x - 1 = 13 \text{에서 } x = -2$$

08 두 벡터 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 는 서로 수직이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$(1, -3, 2) \cdot (x, 0, y) = 0$$

$$x + 2y = 0 \quad \dots\dots ①$$

한편 벡터 $\vec{b}$ 의 크기가 5이므로

$$|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + 0^2 + y^2} = 5$$

$$\text{즉, } x^2 + y^2 = 25 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x = 2\sqrt{5}, y = -\sqrt{5} \text{ 또는 } x = -2\sqrt{5}, y = \sqrt{5}$$

따라서 $xy = -10$

15 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}, \overrightarrow{OC}=\vec{c}$ 라고 하면

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$$

$$=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}-\frac{\vec{a}}{2}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) \quad \bullet 30\%$$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$ 이고, 두 삼각형 OAB, OBC는 정삼각형이므로

$$\vec{a} \cdot \vec{b}=\vec{b} \cdot \vec{c}=1 \times 1 \times \cos 60^{\circ}=\frac{1}{2} \quad \bullet 30\%$$

따라서 $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{OB}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}) \cdot \vec{b}$

$$=\frac{1}{2}(|\vec{b}|^2+\vec{b} \cdot \vec{c}-\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \quad \bullet 40\%$$

16 $\frac{x-2}{2}=y=z=k(k \text{는 실수})$ 로 놓으면

$$x=2k+2, y=k, z=k$$

이 직선 위의 점 P의 좌표는 $(2k+2, k, k)$ 로 나타낼 수 있다. • 30%

즉, $\overrightarrow{AP}=(2k+2, k+3, k+3),$

$\overrightarrow{BP}=(2k+1, k, k)$ 이므로 • 20%

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$$

$$=(2k+2, k+3, k+3) \cdot (2k+1, k, k)$$

$$=(2k+2)(2k+1)+k(k+3)+k(k+3)$$

$$=6k^2+12k+2$$

$$=6(k+1)^2-4 \quad \bullet 30\%$$

따라서 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP}$ 의 최솟값은 $k=-1$ 일 때 -4 이다. • 20%

17 구의 중심을 $O(0, 0, 0)$ 이라고 하자.

이때 평면 α 위의 점 $(4, 3, 0)$ 을 A라고 하면

$$\overrightarrow{OA}=(4, 3, 0)$$

또 평면 β 위의 점 $(0, 3, 4)$ 를 B라고 하면

$$\overrightarrow{OB}=(0, 3, 4) \quad \bullet 20\%$$

두 평면 α, β 의 법선벡터는 각각 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ 이다. • 30%

두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면

$$\cos \theta=\frac{|\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}|}$$

$$=\frac{|4 \times 0+3 \times 3+0 \times 4|}{\sqrt{4^2+3^2} \sqrt{3^2+4^2}}=\frac{9}{25} \quad \bullet 30\%$$

따라서 평면 α 위에 있는 삼각형의 평면 β 위로의 정사영의 넓이는

$$100 \cos \theta=100 \times \frac{9}{25}=36 \quad \bullet 20\%$$

18 xy 평면에 접하고 점 A에서 평면 α 와 접하는 구의 중심을 C라고 하자.

직선 AC의 방향벡터는 평면 α 의 법선벡터와 같으므로 $\vec{n}=(2, 1, -2)$ 이다.

이 직선이 점 $A(1, 1, 1)$ 을 지나므로 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2}=y-1=\frac{z-1}{-2} \quad \bullet 20\%$$

$$\frac{x-1}{2}=y-1=\frac{z-1}{-2}=k(k \text{는 실수}) \text{로 놓으면}$$

$$x=2k+1, y=k+1, z=-2k+1$$

이 직선 위의 점 C의 좌표는

$(2k+1, k+1, -2k+1)$ 로 나타낼 수 있다. • 20%

$\overrightarrow{AC}=(2k, k, -2k)$ 이고, 구의 반지름의 길이는

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(2k)^2+k^2+(-2k)^2}=3|k|$$

이 구가 xy 평면에 접하므로 반지름의 길이는 구의 중심의 z 좌표의 절댓값과 같다.

즉, $3|k|=|-2k+1|$ • 20%

양변을 제곱하면

$$9k^2=4k^2-4k+1$$

$$5k^2+4k-1=0$$

$$(k+1)(5k-1)=0$$

$$k=-1 \text{ 또는 } k=\frac{1}{5}$$

두 구 C_1, C_2 의 중심의 좌표는

$$(-1, 0, 3), \left(\frac{7}{5}, \frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right) \quad \bullet 20\%$$

따라서 두 구 C_1, C_2 의 중심 사이의 거리는

$$\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2+\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(-\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{18}{5} \quad \bullet 20\%$$



