



정답과 해설



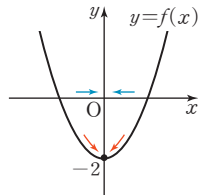
I 함수의 극한과 연속

1 함수의 극한

01 함수의 극한

9~18쪽

- 01 (1) $f(x) = x^2 - 2$ 라고 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x \rightarrow 0$ 일 때,
 $f(x) \rightarrow -2$ 이므로

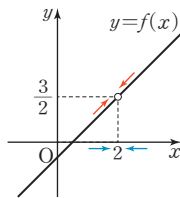


$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 2) = -2$$

- (2) $f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{2x - 4}$ 라고 하면 $x \neq 2$ 일 때,

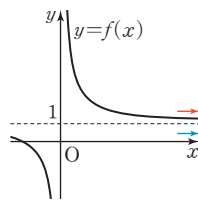
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^2 - 5x + 2}{2x - 4} \\ &= \frac{(x-2)(2x-1)}{2(x-2)} \\ &= x - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x \rightarrow 2$ 일 때,
 $f(x) \rightarrow \frac{3}{2}$ 이므로



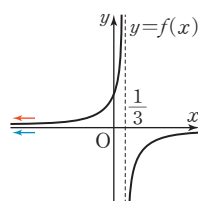
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 5x + 2}{2x - 4} = \frac{3}{2}$$

- 02 (1) $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$ 라고 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x \rightarrow \infty$ 일 때,
 $f(x) \rightarrow 1$ 이므로



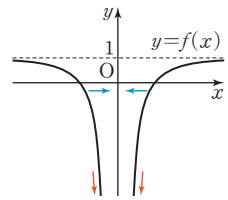
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = 1$$

- (2) $f(x) = \frac{1}{1-3x}$ 이라고 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x \rightarrow -\infty$ 일 때,
 $f(x) \rightarrow 0$ 이므로



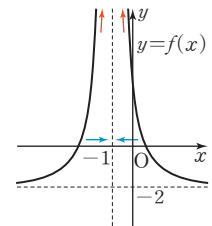
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1-3x} = 0$$

- 03 (1) $f(x) = 1 - \frac{4}{x^2}$ 라고 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x \rightarrow 0$ 일 때,
 $f(x) \rightarrow -\infty$ 이므로



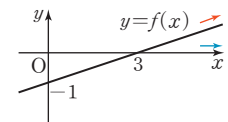
$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{4}{x^2}\right) = -\infty$$

- (2) $f(x) = \frac{5}{(x+1)^2} - 2$ 라고 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x \rightarrow -1$ 일 때,
 $f(x) \rightarrow \infty$ 이므로



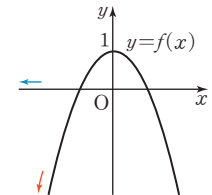
$$\lim_{x \rightarrow -1} \left\{ \frac{5}{(x+1)^2} - 2 \right\} = \infty$$

- 04 (1) $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$ 이라고 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x \rightarrow \infty$ 일 때, $f(x) \rightarrow \infty$ 이므로



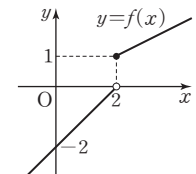
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}x - 1\right) = \infty$$

- (2) $f(x) = 1 - x^2$ 이라고 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 $x \rightarrow -\infty$ 일 때,
 $f(x) \rightarrow -\infty$ 이므로



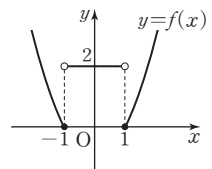
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x^2) = -\infty$$

- 05 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



- (1) $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 1$
(2) $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 0$

- 06 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



- (1) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0$
(2) $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$
(3) $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 2$
(4) $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 0$

07 $f(x) = \frac{x^2-4}{|x+2|}$ 에서 $x > -2$ 일 때,

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} = x-2$$

$x < -2$ 일 때,

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-2)}{-(x+2)} = -x+2$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프

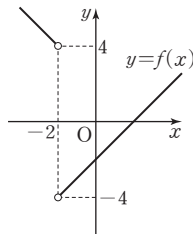
는 오른쪽 그림과 같다.

따라서

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 4$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 는 존재하지 않는다.



08 $x < 1$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프

프는 오른쪽 그림과 같으므로

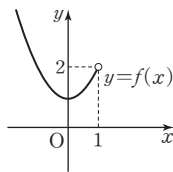
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

$x > 1$ 일 때, $f(x) = a$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a$$

따라서 극한값 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 가 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \text{에서 } a=2$$



02 함수의 극한값의 계산

19~30쪽

$$\begin{aligned} 01 \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{4}x + 1 \right) &= \frac{3}{4} \lim_{x \rightarrow -2} x + \lim_{x \rightarrow -2} 1 \\ &= \frac{3}{4} \times (-2) + 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 3x) &= 2 \lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 3} x \\ &= 2 \times 9 - 3 \times 3 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (2x-3)(3x+5) &= \lim_{x \rightarrow 0} (2x-3) \times \lim_{x \rightarrow 0} (3x+5) \\ &= (0-3)(0+5) = -15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x + 2}{2x + 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 2)}{\lim_{x \rightarrow -1} (2x + 1)} \\ &= \frac{1 - (-1) + 2}{2 \times (-1) + 1} = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 02 \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{2x+1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x+1} \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{1}{x} \right) \left(2 + \frac{1}{5-x} \right) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3 - \frac{1}{x} \right) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{5-x} \right) \\ &= (3-0)(2+0) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 03 \quad (1) \quad \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-1)}{x+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} (x-1) = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1} - 2)(\sqrt{x-1} + 2)}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5)(\sqrt{x-1} + 2)} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+3} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(\sqrt{x+3} + 2) = 8 \end{aligned}$$

04 예 $f(x) = \frac{1}{|x-2|}$, $g(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ 이라고 하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|x-2|} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x-2)^2} = \infty$$

한편

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{1}{(x-2)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\frac{1}{-(x-2)}}{\frac{1}{(x-2)^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} (-x+2) = 0 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ 의 값이 존재한다.

$$05 \quad (1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2+x+1}{x^2+2x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}} = -1$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-3x}{x^2+3x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}}{1+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}} = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2-4x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x - \sqrt{x^2-4x})(x + \sqrt{x^2-4x})}{x + \sqrt{x^2-4x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x + \sqrt{x^2-4x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{x}}} = 2$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2+x} - \sqrt{2x^2-x})$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2x^2+x} - \sqrt{2x^2-x})(\sqrt{2x^2+x} + \sqrt{2x^2-x})}{\sqrt{2x^2+x} + \sqrt{2x^2-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{2x^2+x} + \sqrt{2x^2-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{2+\frac{1}{x}} + \sqrt{2-\frac{1}{x}}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$06 \quad (1) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2+ax+b}{x+3} = -8 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow -3} (x+3) = 0 \text{이}$$

$$\text{므로 } \lim_{x \rightarrow -3} (3x^2+ax+b) = 0$$

$$\text{즉, } 27-3a+b=0 \text{이므로}$$

$$b=3a-27 \quad \dots\dots ①$$

$$\text{①을 } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2+ax+b}{x+3} \text{에 대입하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x^2+ax+3a-27}{x+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3(x^2-9)+a(x+3)}{x+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{3(x+3)(x-3)+a(x+3)}{x+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3} (3x-9+a)$$

$$= a-18$$

$$\text{즉, } a-18=-8 \text{이므로 } a=10$$

$$a=10 \text{을 ①에 대입하면 } b=3$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+a-b}}{x-2} = \frac{1}{4} \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{2x+a-b}) = 0$$

$$\text{즉, } \sqrt{4+a-b}=0 \text{이므로}$$

$$b=\sqrt{4+a} \quad \dots\dots ①$$

$$\text{①을 } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+a-b}}{x-2} \text{에 대입하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+a}-\sqrt{4+a}}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{2x+a}-\sqrt{4+a})(\sqrt{2x+a}+\sqrt{4+a})}{(x-2)(\sqrt{2x+a}+\sqrt{4+a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)}{(x-2)(\sqrt{2x+a}+\sqrt{4+a})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{\sqrt{2x+a}+\sqrt{4+a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4+a}}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{\sqrt{4+a}} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$\sqrt{4+a}=4, a=12$$

$$a=12 \text{를 ①에 대입하면 } b=4$$

$$07 \quad f(x)=ax^2+bx+c(a, b, c \text{는 실수, } a \neq 0) \text{라고 하면}$$

$$f(0)=1 \text{에서 } c=1$$

$$\text{즉, } f(x)=ax^2+bx+1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^2+bx+1}{x+1} = 3 \text{에서 } \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (ax^2+bx+1) = 0$$

$$\text{즉, } a-b+1=0 \text{이므로}$$

$$b=a+1 \quad \dots\dots ①$$

$$\text{①을 } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^2+bx+1}{x+1} \text{에 대입하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax^2+(a+1)x+1}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(ax+1)(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} (ax+1)$$

$$= -a+1$$

$$\text{즉, } -a+1=3 \text{이므로 } a=-2$$

$$a=-2 \text{를 ①에 대입하면 } b=-1$$

$$\text{따라서 } f(x)=-2x^2-x+1$$

$$08 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2-1} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2+1} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$09 \quad \text{주어진 부등식의 각 변에서 } x^3 \text{을 빼면}$$

$$2x^2-5 < f(x)-x^3 < 2x^2+3$$

$$x^2+2x+4 = (x+1)^2+3 > 0 \text{이므로 위의 부등식의 각}$$

$$\text{변을 } x^2+2x+4 \text{로 나누면}$$

$$\frac{2x^2-5}{x^2+2x+4} < \frac{f(x)-x^3}{x^2+2x+4} < \frac{2x^2+3}{x^2+2x+4}$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5}{x^2 + 2x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3}{x^2 + 2x + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}} = 2$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2 + 2x + 4} = 2$

2 함수의 연속

01 함수의 연속

39~44쪽

01 (1) (i) $f(-1) = 1$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (x^3 + 1) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} 1 = 1$

이므로 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 는 존재하지 않는다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 불연속이다.

(2) (i) $g(-1) = 0$

(ii) $\lim_{x \rightarrow -1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(x+1)^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1+} (x+1) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{(x+1)^2}{-(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1-} (-x-1) = 0$

이므로 $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 0$

(iii) $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = g(-1)$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x = -1$ 에서 연속이다.

02 (1) 함수 $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 구간의 기호로 나타내면 $(-\infty, \infty)$

(2) 함수 $f(x) = \frac{2}{x}$ 의 정의역은 $\{x | x \neq 0 \text{인 실수}\}$ 이므로 구간의 기호로 나타내면 $(-\infty, 0), (0, \infty)$

(3) 함수 $f(x) = \sqrt{5-x}$ 의 정의역은 $\{x | x \leq 5\}$ 이므로 구간의 기호로 나타내면 $(-\infty, 5]$

(4) 함수 $f(x) = \frac{1}{4}$ 의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 구간의 기호로 나타내면 $(-\infty, \infty)$

03 (1) 함수 $f(x) = x^2 + 2x - 1$ 은 모든 실수 x 에서 연속
이므로 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$

(2) 함수 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$ 은
 $x \neq -1, x \neq 1$ 인 모든 실수 x 에서 연속이므로 연속
인 구간은
 $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$

(3) 함수 $f(x) = \sqrt{x-3}$ 은 구간 $(3, \infty)$ 에서 연속이고,
 $\lim_{x \rightarrow 3+} \sqrt{x-3} = f(3) = 0$ 이므로 연속인 구간은
 $[3, \infty)$

(4) 함수 $f(x) = -1$ 은 모든 실수 x 에서 연속이므로
연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$

04 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x = \frac{1}{2}$ 에서

연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{ax+3}{2x-1} = b+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 극한값 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{ax+3}{2x-1}$ 이 존재하고

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (2x-1) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (ax+3) = 0$$

즉, $\frac{1}{2}a+3=0$ 이므로 $a=-6$

$a=-6$ 을 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-6x+3}{2x-1} &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{-3(2x-1)}{2x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (-3) = -3 \end{aligned}$$

따라서 $b+1=-3$ 이므로 $b=-4$

05 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이라면 $x=1$ 에서
연속이어야 하므로 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$
에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 + ax + b) = 1 + a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 - 4) = -3$$

$$f(1) = 1 + a + b$$

즉, $1+a+b=-3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

이때 $f(2)=1$ 에서

$$4+2a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1, b=-5$

01 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

(1) 연속함수의 성질에 따라 함수 $3g(x) - 5f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

(2) 연속함수의 성질에 따라 함수 $\frac{1}{2}f(x)g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

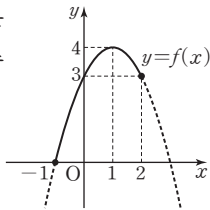
(3) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2+1}{x^2+x} = \frac{x^2+1}{x(x+1)}$ 이므로 연속함수의 성질에 따라 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $x \neq -1$, $x \neq 0$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.

(4) $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2+x}{x^2+1}$ 이고, $x^2+1 > 0$ 이므로 연속함수의 성질에 따라 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

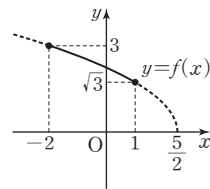
02 (1) 함수 $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ 은 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 \\ = -(x-1)^2 + 4$$

이므로 $x=1$ 일 때 최댓값 4, $x=-1$ 일 때 최솟값 0을 갖는다.



(2) 함수 $f(x) = \sqrt{5-2x}$ 는 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 연속이고, $x=-2$ 일 때 최댓값 3, $x=1$ 일 때 최솟값 $\sqrt{3}$ 을 갖는다.



03 함수 $f(x) = x^3 - x^2 - 3x + 1$ 은 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 연속이고

$$f(2) = -1, f(3) = 10$$

에서 $f(2) \neq f(3)$ 이므로 사잇값 정리에 따라 $f(c) = 2$ 인 c 가 열린구간 $(2, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

04 $f(x) = 3x^3 - x^2 - 2x + 1$ 이라고 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 연속이고

$$f(-1) = -1 < 0, f(0) = 1 > 0$$

이므로 사잇값 정리에 따라 $f(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 0)$ 에 적어도 하나 존재한다.

따라서 방정식 $3x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ 은 열린구간 $(-1, 0)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

II 미분

1 미분계수와 도함수

01 미분계수

67~75쪽

01 (1) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{27 - 6}{3} = 7$

(2) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(-3 + \Delta x) - f(-3)}{\Delta x}$
 $= \frac{-4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = -4 + \Delta x$

02 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{8a + 4}{4} = 2a + 1$ 이므로
 $2a + 1 = 2, a = \frac{1}{2}$

03 (1) $f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 5 = 5$
 (2) $f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x}$
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + 2\Delta x) = 1$

다른 풀이

(1) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 5 = 5$

(2) $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x-1)(x-1)}{x-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} (2x-1) = 1$

04 (1) $-4\Delta x = t$ 로 놓으면 $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a - 4\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a - 4\Delta x) - f(a)}{-4\Delta x} \times (-4) \right\}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a + t) - f(a)}{t} \times (-4) \right\}$$

$$= -4f'(a)$$

(2) $3\Delta x = t$ 로 놓으면 $\Delta x \rightarrow 0$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+3\Delta x) - f(a)}{2\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+3\Delta x) - f(a)}{3\Delta x} \times \frac{3}{2} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(a+t) - f(a)}{t} \times \frac{3}{2} \right\} \\ &= \frac{3}{2} f'(a) \end{aligned}$$

- 05 (1) $f(x) = x^2 + x$ 라고 하면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분계수 $f'(2)$ 와 같으므로

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (5 + \Delta x) = 5 \end{aligned}$$

- (2) $f(x) = 2x^2 - x + 3$ 이라고 하면 구하는 접선의 기울기는 함수 $f(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수 $f'(1)$ 와 같으므로

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3 + 2\Delta x) = 3 \end{aligned}$$

- 06 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기는 0보다 크고 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기보다 작으므로
 $0 < f'(a) < f'(b)$
 이때 점 $(c, f(c))$ 에서의 접선의 기울기는 0보다 작으므로 $f'(c) < 0$
 따라서 $f'(c) < f'(a) < f'(b)$

- 07 $f(x) = |x^2 - x| = |x(x-1)|$ 에서 $f(1) = 0$ 이고,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 - x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x^2 + x) = 0 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \text{한편 } \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 - x}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} x = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x^2 - x)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-x(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x) = -1 \end{aligned}$$

에서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ 은 존재하지 않으므로 함수

$f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

02 도함수

76~82쪽

01 (1) $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = -1$

또 $x=3$ 에서의 미분계수는 $f'(3) = -1$

$$\begin{aligned} (2) f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(6x+1)h + 3h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (6x+1+3h) = 6x+1 \end{aligned}$$

또 $x=3$ 에서의 미분계수는 $f'(3) = 19$

02 (1) $y' = 4x^{4-1} = 4x^3$ (2) $y' = 50x^{50-1} = 50x^{49}$

(3) $y' = 0$ (4) $y' = 0$

03 (1) $y' = \frac{1}{2} \times 4x^3 - 3 \times 1 + 0$
 $= 2x^3 - 3$

(2) $y' = (-1) \times 7x^6 + 2 \times 2x - 0$
 $= -7x^6 + 4x$

(3) $y' = 3 \times 8x^7 - 5 \times 3x^2 - 1 - 0$
 $= 24x^7 - 15x^2 - 1$

(4) $y' = 10x^9 - \frac{2}{3} \times 9x^8 + 5 \times 1 + 0$
 $= 10x^9 - 6x^8 + 5$

04 (1) $y' = 1 \times (1-x) + (x-5) \times (-1)$
 $= -2x + 6$

(2) $y' = 2(2x^2 - x + 1) + (2x-3)(4x-1)$
 $= 12x^2 - 16x + 5$

(3) $y' = 2x(x^3 - 3) + (x^2 + 1) \times 3x^2$
 $= 5x^4 + 3x^2 - 6x$

(4) $y' = 1 \times (x+1)(3x-2) + (x+2) \times 1 \times (3x-2)$
 $+ (x+2)(x+1) \times 3$
 $= 9x^2 + 14x$

2 도함수의 활용

01 접선의 방정식

91~95쪽

- 01 (1) $f(x) = x^2 + 2x - 4$ 라고 하면

$$f'(x) = 2x + 2$$

점 $(0, -4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = 2$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - (-4) = 2(x - 0), \text{ 즉 } y = 2x - 4$$

- (2) $f(x) = -2x^3 + x^2 - x + 5$ 라고 하면

$$f'(x) = -6x^2 + 2x - 1$$

점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -5$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - 3 = -5(x - 1), \text{ 즉 } y = -5x + 8$$

- 02 (1) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}$ 이라고 하면

$$f'(x) = 3x + 1$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{3}{2}t^2 + t + \frac{1}{2})$ 이라고 하면 접선의

기울기가 -2 이므로 $f'(t) = -2$ 에서

$$3t + 1 = -2, t = -1$$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 1)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - 1 = -2\{x - (-1)\}, \text{ 즉 } y = -2x - 1$$

- (2) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x + 1$ 이라고 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 10$$

접점의 좌표를 $(t, t^3 - 6t^2 + 10t + 1)$ 이라고 하면

접선의 기울기가 -2 이므로 $f'(t) = -2$ 에서

$$3t^2 - 12t + 10 = -2, 3(t - 2)^2 = 0$$

즉, $t = 2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 5)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - 5 = -2(x - 2), \text{ 즉 } y = -2x + 9$$

- 03 $f(x) = x^2 - 6x + 8$ 이라고 하면

$$f'(x) = 2x - 6$$

접점의 좌표를 $(t, t^2 - 6t + 8)$ 이라고 하면 직선

$y = \frac{1}{4}x + 1$ 에 수직인 접선의 기울기가 -4 이므로

$f'(t) = -4$ 에서

$$2t - 6 = -4, t = 1$$

따라서 접점의 좌표는 $(1, 3)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - 3 = -4(x - 1), \text{ 즉 } y = -4x + 7$$

- 04 (1) $f(x) = 2x^2 - x + 1$ 이라고 하면

$$f'(x) = 4x - 1$$

접점의 좌표를 $(t, 2t^2 - t + 1)$ 이라고 하면 접선의 기울기는 $f'(t) = 4t - 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (2t^2 - t + 1) = (4t - 1)(x - t)$$

$$y = (4t - 1)x - 2t^2 + 1 \quad \dots\dots ①$$

이 접선이 점 $(1, -6)$ 을 지나므로

$$-6 = 4t - 2t^2, 2t^2 - 4t - 6 = 0$$

$$2(t + 1)(t - 3) = 0$$

즉, $t = -1$ 또는 $t = 3$

따라서 t 의 값을 ①에 대입하면 구하는 접선의 방정식은 $y = -5x - 1$ 또는 $y = 11x - 17$

- (2) $f(x) = -x^3 + x + 3$ 이라고 하면

$$f'(x) = -3x^2 + 1$$

접점의 좌표를 $(t, -t^3 + t + 3)$ 이라고 하면 접선의 방정식은

$$y - (-t^3 + t + 3) = (-3t^2 + 1)(x - t)$$

$$y = (-3t^2 + 1)x + 2t^3 + 3 \quad \dots\dots ①$$

이 접선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 = 2t^3 + 3, t^3 = -1$$

그런데 t 는 실수이므로 $t = -1$

따라서 t 의 값을 ①에 대입하면 구하는 접선의 방정식은 $y = -2x + 1$

02 평균값 정리

96~100쪽

- 01 (1) 함수 $f(x) = x^2 - x + 3$ 은 닫힌구간 $[-2, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, 3)$ 에서 미분가능하며 $f(-2) = f(3)$ 이므로 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(-2, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 2x - 1$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서

$$2c - 1 = 0, c = \frac{1}{2}$$

- (2) 함수 $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ 은 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능하며 $f(-1) = f(1)$ 이므로 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 4x^3 - 8x$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서

$$4c^3 - 8c = 0, 4c(c + \sqrt{2})(c - \sqrt{2}) = 0$$

즉, $c = -\sqrt{2}$ 또는 $c = 0$ 또는 $c = \sqrt{2}$

그런데 $-1 < c < 1$ 이므로 $c = 0$

- 02 (1) 함수 $f(x)=2x^2-x+3$ 은 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 미분가능하므로 $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(-2, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $\frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}=\frac{9-13}{4}=-1$ 이고,
 $f'(x)=4x-1$ 이므로
 $-1=4c-1, c=0$
- (2) 함수 $f(x)=x^3-3x^2+2x+1$ 은 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$ 에서 미분가능하므로 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(0, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{7-1}{3}=2$ 이고,
 $f'(x)=3x^2-6x+2$ 이므로
 $2=3c^2-6c+2, 3c(c-2)=0$
 즉, $c=0$ 또는 $c=2$
 그런데 $0 < c < 3$ 이므로 $c=2$

03 함수의 증가와 감소, 극대와 극소 101~111쪽

- 01 (1) $0 \leq x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\begin{aligned} f(x_2)-f(x_1) &= x_2^4-x_1^4 \\ &= (x_2^2-x_1^2)(x_2^2+x_1^2) \\ &= (x_2-x_1)(x_2+x_1)(x_2^2+x_1^2) \end{aligned}$$
 이때 $x_2-x_1 > 0, x_2+x_1 > 0, x_2^2+x_1^2 > 0$ 이므로
 $f(x_2)-f(x_1) > 0$
 즉, $f(x_1) < f(x_2)$
 따라서 함수 $f(x)=x^4$ 은 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가한다.
- (2) $x_1 < x_2 < 1$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\begin{aligned} f(x_2)-f(x_1) &= \frac{1}{x_2-1}-\frac{1}{x_1-1} \\ &= \frac{x_1-x_2}{(x_2-1)(x_1-1)} \end{aligned}$$
 이때 $x_1-x_2 < 0, x_1-1 < 0, x_2-1 < 0$ 이므로
 $f(x_2)-f(x_1) < 0$
 즉, $f(x_1) > f(x_2)$
 따라서 함수 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 은 구간 $(-\infty, 1)$ 에서 감소한다.

- 02 (1) $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ 이므로
 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은
 $x=-1$ 또는 $x=1$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$	2	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1], [1, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $[-1, 1]$ 에서 감소한다.

- (2) $f'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$ 이므로
 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은
 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	3	$\nearrow$	11	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, 2]$ 에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 0], [2, \infty)$ 에서 감소한다.

- (3) $f'(x)=12x^3+24x^2+12x=12x(x+1)^2$ 이므로
 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은
 $x=-1$ 또는 $x=0$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 0]$ 에서 감소한다.

- (4) $f'(x)=-x^3+4x=-x(x+2)(x-2)$ 이므로
 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은
 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -2], [0, 2]$ 에서 증가하고, 구간 $[-2, 0], [2, \infty)$ 에서 감소한다.

- 03 (1) 함수 $f(x)$ 에서 $x=-4$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여
 $f(x) \leq f(-4)$
 또 $x=1$ 을 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여
 $f(x) \leq f(1)$
 따라서 함수 $f(x)$ 가 극대가 되는 모든 x 의 값은 $-4, 1$ 이다.

(2) 함수 $f(x)$ 에서 $x=-6$ 을 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여

$$f(x) \geq f(-6)$$

또 $x=-2$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여

$$f(x) \geq f(-2)$$

또 $x=4$ 를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x 에 대하여

$$f(x) \geq f(4)$$

따라서 함수 $f(x)$ 가 극소가 되는 모든 x 의 값은 $-6, -2, 4$ 이다.

- 04 (1) $f'(x)=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$ 이므로
 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은
 $x=-2$ 또는 $x=1$

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	18	↘	-9	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극대이고 극댓값은 18, $x=1$ 에서 극소이고 극솟값은 -9이다.

- (2) $f'(x)=12x^3-24x^2=12x^2(x-2)$ 이므로
 $f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은
 $x=0$ 또는 $x=2$

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	↘	1	↘	-15	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 극댓값은 없고, $x=2$ 에서 극소이고 극솟값은 -15이다.

- 05 $f'(x)=3x^2+2ax+b$ 이고, 함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 극소이고 극솟값이 -26이므로 $f'(3)=0$ 에서

$$27+6a+b=0 \quad \dots\dots ①$$

$$f(3)=-26 \text{에서}$$

$$28+9a+3b=-26 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3, b=-9$

즉, $f(x)=x^3-3x^2-9x+1$ 이므로

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	6	↘	-26	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대이고 극댓값은 6이다.

04 함수의 그래프

112-120쪽

- 01 (1) $f(x)=x^3-6x$ 라고 하면

$$f'(x)=3x^2-6=3(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

$f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은

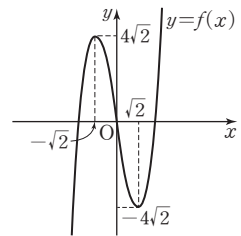
$$x=-\sqrt{2} \text{ 또는 } x=\sqrt{2}$$

x	...	$-\sqrt{2}$	...	$\sqrt{2}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$4\sqrt{2}$	↘	$-4\sqrt{2}$	↗

또 $f(0)=0$ 이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같다.



- (2) $f(x)=-2x^3+3x^2+1$ 이라고 하면

$$f'(x)=-6x^2+6x=-6x(x-1)$$

$f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은

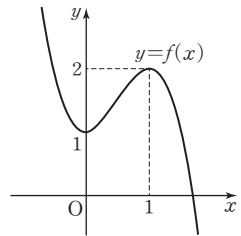
$$x=0 \text{ 또는 } x=1$$

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	1	↗	2	↘

따라서 함수 $y=f(x)$ 의

그래프는 오른쪽 그림과

같다.



- 02 (1) $f(x)=x^4-6x^2+3$ 이라고 하면

$$f'(x)=4x^3-12x$$

$$=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

$f'(x)=0$ 을 만족시키는 x 의 값은

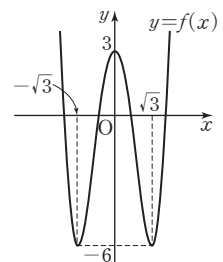
$$x=-\sqrt{3} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=\sqrt{3}$$

x	...	$-\sqrt{3}$	...	0	...	$\sqrt{3}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-6	↗	3	↘	-6	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의

그래프는 오른쪽 그림과

같다.



(2) $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 + 1$ 이라고 하면

$$f'(x) = -12x^3 + 24x^2 - 12x$$

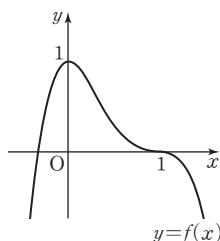
$$= -12x(x-1)^2$$

$f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	↗	1	↘	0	↘

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



03 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	↗	$f(-1)$	↗	$f(2)$	↘

따라서 보기 중 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ㄷ이다.

04 (1) $f(x) = -2x^3 + 9x^2 - 12x + 4$ 에서

$$f'(x) = -6x^2 + 18x - 12$$

$$= -6(x-1)(x-2)$$

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	0
$f(x)$	4	↘	-1	↗	0

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최대이고 최댓값은 4, $x=1$ 에서 최소이고 최솟값은 -1이다.

(2) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x = 0$$

x	-1	...	0	...	1
$f'(x)$		-	0	-	
$f(x)$	6	↘	3	↘	2

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최대이고 최댓값은 6, $x = 1$ 에서 최소이고 최솟값은 2이다.

05 $f(x) = ax^3 - 3ax + b$ ($a > 0$)에서

$$f'(x) = 3ax^2 - 3a$$

$$= 3a(x+1)(x-1)$$

$-3 \leq x \leq 2$ 에서 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

x	-3	...	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-18a+b$	↗	$2a+b$	↘	$-2a+b$	↗	$2a+b$

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대이고 극댓값이 12이므로 $f(-1) = 12$ 에서

$$2a + b = 12 \quad \dots\dots ①$$

또 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극소이고 극솟값이 8이므로 $f(1) = 8$ 에서

$$-2a + b = 8 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 1, b = 10$

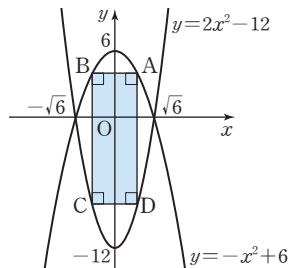
따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 과 $x = 2$ 에서 최대이고 최댓값은

$$f(-1) = f(2) = 12$$

또 함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 최소이고 최솟값은

$$f(-3) = -8$$

06



그림과 같이 직사각형의 꼭짓점을 A, B, C, D라 하고, 점 A의 x 좌표를 a ($a > 0$)라고 하면

$$A(a, -a^2 + 6), D(a, 2a^2 - 12)$$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$ 라고 하면

$$S(a) = 2a(-3a^2 + 18)$$

$$= -6a^3 + 36a \text{ (단, } 0 < a < \sqrt{6} \text{)}$$

$$S'(a) = -18a^2 + 36$$

$$= -18(a + \sqrt{2})(a - \sqrt{2})$$

$0 < a < \sqrt{6}$ 에서 $S'(a) = 0$ 을 만족시키는 a 의 값은

$$a = \sqrt{2}$$

a	0	...	$\sqrt{2}$	...	$\sqrt{6}$
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		↗	$24\sqrt{2}$	↘	

따라서 $S(a)$ 는 $a = \sqrt{2}$ 에서 최대이고 최댓값은 $24\sqrt{2}$ 이므로 구하는 직사각형의 넓이의 최댓값은 $24\sqrt{2}$ 이다.

07 점 P의 좌표를 (a, a^2+1) 이라고 하면

$$\begin{aligned} \overline{AP} &= \sqrt{(a-3)^2 + \{(a^2+1)-1\}^2} \\ &= \sqrt{a^4 + a^2 - 6a + 9} \end{aligned}$$

$f(a) = a^4 + a^2 - 6a + 9$ 라고 하면

$$f'(a) = 4a^3 + 2a - 6$$

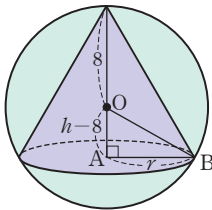
$$= 2(a-1)(2a^2 + 2a + 3)$$

$f'(a) = 0$ 을 만족시키는 a 의 값은 $a=1$

a	...	1	...
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	\	5	/

따라서 $f(a)$ 는 $a=1$ 에서 최소이고 최솟값은 5이므로 선분 AP의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}$ 이다.

08



구에 내접한 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r , 원뿔의 높이를 h 라고 하면 직각삼각형 OAB에서

$$(h-8)^2 + r^2 = 8^2$$

$$\text{즉, } r^2 = -h^2 + 16h$$

원뿔의 부피를 $V(h)$ 라고 하면

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h(-h^2 + 16h)$$

$$= -\frac{1}{3}\pi h^3 + \frac{16}{3}\pi h^2 \quad (\text{단, } 8 < h < 16)$$

$$V'(h) = -\pi h^2 + \frac{32}{3}\pi h = -\pi h\left(h - \frac{32}{3}\right)$$

$8 < h < 16$ 에서 $V'(h) = 0$ 을 만족시키는 h 의 값은

$$h = \frac{32}{3}$$

h	8	...	$\frac{32}{3}$	...	16
$V'(h)$		+	0	-	
$V(h)$		/	극대	\	

따라서 $V(h)$ 는 $h = \frac{32}{3}$ 에서 극대이면서 최대이므로

원뿔의 부피가 최대일 때, 원뿔의 높이는 $\frac{32}{3}$ 이다.

05 방정식과 부등식에의 활용

121~128쪽

01 (1) $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 5$ 라고 하면

$$f'(x) = 6x^2 + 12x = 6x(x+2)$$

$f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	3	\	-5	/

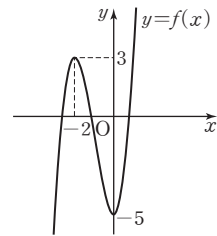
따라서 함수 $y = f(x)$ 의

그래프는 x 축과 서로 다른

세 점에서 만나므로 구하는

방정식의 서로 다른 실근의

개수는 3이다.



(2) $f(x) = -3x^4 + 6x^2 + 1$ 이라고 하면

$$f'(x) = -12x^3 + 12x$$

$$= -12x(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	/	4	\	1	/	4	\

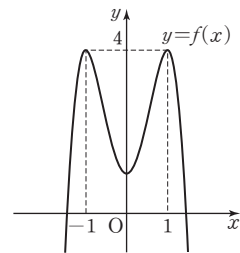
따라서 함수 $y = f(x)$ 의

그래프는 x 축과 서로 다른

두 점에서 만나므로 구

하는 방정식의 서로 다른

실근의 개수는 2이다.



02 $x^3 + 6x^2 + 9x - 2 + a = 0$ 에서

$$x^3 + 6x^2 + 9x - 2 = -a$$

$f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x - 2$ 라고 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$$

$$= 3(x+3)(x+1)$$

$f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x = -3 \text{ 또는 } x = -1$$

x	...	-3	...	-1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	-2	\	-6	/

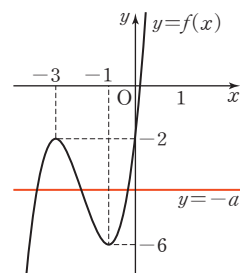
따라서 서로 다른 세 실근을

갖도록 하는 실수 a 의 값의

범위는

$$-6 < -a < -2$$

즉, $2 < a < 6$



03 $x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x = 3x^3 - 4x + a$ 에서

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x = a$$

$f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x$ 라고 하면

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$$

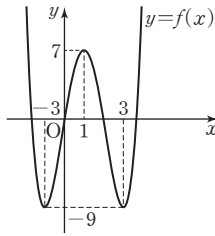
$$= 4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

x	...	-1	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	-9	/	7	\	-9	/

따라서 주어진 두 곡선의 서로 다른 교점은 $a < -9$ 일 때 0개,
 $a = -9$ 또는 $a > 7$ 일 때 2개,
 $a = 7$ 일 때 3개, $-9 < a < 7$
 일 때 4개이다.



04 (1) $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5$ 라고 하면

$$f'(x) = 12x^2 - 6x - 6$$

$$= 6(2x+1)(x-1)$$

$x > 0$ 에서 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x = 1$$

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	5	\	0	/

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최소이고 최솟값은 0이므로
 $x \geq 0$ 인 모든 x 에 대하여

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 5 \geq 0$$

따라서 $x \geq 0$ 일 때, 부등식 $4x^3 - 3x^2 - 6x + 5 \geq 0$
 이 성립한다.

(2) $x^4 + 4x^3 - x^2 + 5 \geq 4x^3 - x^2 - 4x + 2$ 에서

$$x^4 + 4x + 3 \geq 0$$

$f(x) = x^4 + 4x + 3$ 이라고 하면

$$f'(x) = 4x^3 + 4$$

$$= 4(x+1)(x^2 - x + 1)$$

$f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은 $x = -1$

x	...	-1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	0	/

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최소이고 최솟값은 0이
 므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = x^4 + 4x + 3 \geq 0$$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 부등식

$$x^4 + 4x^3 - x^2 + 5 \geq 4x^3 - x^2 - 4x + 2 \text{가 성립한다.}$$

05 $2x^3 + 3x^2 - 4x \geq 8x + k$ 에서

$$2x^3 + 3x^2 - 12x - k \geq 0$$

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - k$ 라고 하면

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$$

$$= 6(x+2)(x-1)$$

$x > 0$ 에서 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x = 1$$

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		\	$-7-k$	/

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최소이고 최솟값은 $-7-k$ 이
 므로 $x > 0$ 인 모든 x 에 대하여 부등식

$$2x^3 + 3x^2 - 12x - k \geq 0 \text{이 성립하려면}$$

$$-7-k \geq 0, k \leq -7$$

06 속도와 가속도

129~132쪽

01 (1) 시각 t 에서 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라고 하면

$$v = 6t^2 - 3t - 9, a = 12t - 3$$

따라서 $t = 2$ 일 때, 점 P의 속도는 9이고, 가속도는
 21이다.

(2) 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$v = 0 \text{에서}$$

$$6t^2 - 3t - 9 = 0, 3(t+1)(2t-3) = 0$$

그런데 $t > 0$ 이므로 $t = \frac{3}{2}$

따라서 $0 < t < \frac{3}{2}$ 일 때 $v < 0$ 이고, $t > \frac{3}{2}$ 일 때 $v > 0$

이므로 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 $\frac{3}{2}$ 이다.

02 높이가 40 m인 순간의 시각을 구하면 $x = 40$ 에서

$$-5t^2 + 30t = 40, 5(t-2)(t-4) = 0$$

$$t = 2 \text{ 또는 } t = 4$$

즉, 시각 $t = 2$ 에서 물체의 높이가 처음으로 40 m이다.

t 초 후의 물체의 속도를 v m/s라고 하면

$$v = -10t + 30$$

따라서 물체의 높이가 처음으로 40 m인 순간의 속도는

$$v = (-10) \times 2 + 30 = 10 \text{ (m/s)}$$

III 적분

1 부정적분과 정적분

01 부정적분

149~155쪽

01 (1) $\left(\frac{1}{2}x\right)' = \frac{1}{2}$ 이므로 $\int \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}x + C$

(2) $(x^6)' = 6x^5$ 이므로 $\int 6x^5 dx = x^6 + C$

(3) $(-x^7)' = -7x^6$ 이므로
 $\int (-7x^6) dx = -x^7 + C$

02 (1) $\int x^7 dx = \frac{1}{7+1}x^8 + C = \frac{1}{8}x^8 + C$

(2) $\int x^{10} dx = \frac{1}{10+1}x^{11} + C = \frac{1}{11}x^{11} + C$

(3) $\int 8 dx = 8x + C$

03 (1) $\int (-2x^3 + 3x^2 + 2) dx$
 $= -2 \int x^3 dx + 3 \int x^2 dx + \int 2 dx$
 $= -2 \left(\frac{1}{4}x^4 + C_1 \right) + 3 \left(\frac{1}{3}x^3 + C_2 \right) + (2x + C_3)$
 $= -\frac{1}{2}x^4 + x^3 + 2x + C$

(2) $\int (10x^4 + 6x - 3) dx$
 $= 10 \int x^4 dx + 6 \int x dx - \int 3 dx$
 $= 10 \left(\frac{1}{5}x^5 + C_1 \right) + 6 \left(\frac{1}{2}x^2 + C_2 \right) - (3x + C_3)$
 $= 2x^5 + 3x^2 - 3x + C$

04 $f(x) = \int (6x^3 - x + 3) dx$
 $= 6 \int x^3 dx - \int x dx + \int 3 dx$
 $= 6 \left(\frac{1}{4}x^4 + C_1 \right) - \left(\frac{1}{2}x^2 + C_2 \right) + (3x + C_3)$
 $= \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$

이때 $f(1) = 2$ 에서

$$4 + C = 2, C = -2$$

따라서 $f(x) = \frac{3}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$

05 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (3x^2 - 6x + 2) dx \\ &= 3 \int x^2 dx - 6 \int x dx + \int 2 dx \\ &= 3 \left(\frac{1}{3}x^3 + C_1 \right) - 6 \left(\frac{1}{2}x^2 + C_2 \right) \\ &\quad + (2x + C_3) \\ &= x^3 - 3x^2 + 2x + C \end{aligned}$$

이때 $f(-1) = 2$ 이므로

$$-6 + C = 2, C = 8$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 8$

02 정적분

156~165쪽

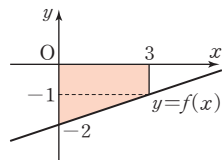
01 (1) $f(x) = \frac{1}{3}x - 2$ 라고 하면

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.

닫힌구간 $[0, 3]$ 에서

$f(x) \leq 0$ 인 부분의 넓이를 S 라고 하면

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left(\frac{1}{3}x - 2 \right) dx &= -S \\ &= -\frac{(1+2) \times 3}{2} = -\frac{9}{2} \end{aligned}$$



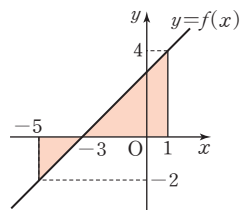
(2) $f(x) = x + 3$ 이라고 하면

함수 $y = f(x)$ 의 그래프
는 오른쪽 그림과 같다.

닫힌구간 $[-5, -3]$ 에
서 $f(x) \leq 0$ 인 부분의
넓이를 S_1 , 닫힌구간

$[-3, 1]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 인 부분의 넓이를 S_2 라고
하면

$$\begin{aligned} \int_{-5}^1 (x+3) dx &= -S_1 + S_2 \\ &= -\left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2 \right) + \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \\ &= 6 \end{aligned}$$

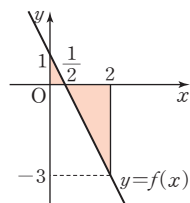


(3) $f(x) = 1 - 2x$ 라고 하면

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.

닫힌구간 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ 에서

$f(x) \geq 0$ 인 부분의 넓이를 S_1 ,



닫힌구간 $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 인 부분의 넓이를 S_2 라고 하면

$$\begin{aligned} & \int_2^0 (1-2x) dx \\ &= -\int_0^2 (1-2x) dx \\ &= -(S_1 - S_2) = -S_1 + S_2 \\ &= -\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1\right) + \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times 3 = 2 \end{aligned}$$

02 (1) $\frac{d}{dx} \int_1^x (-4t^3 + 3t - 2) dt$
 $= -4x^3 + 3x - 2$

(2) $\frac{d}{dx} \int_{-4}^x (2t-1)(t^3+3t-2) dt$
 $= (2x-1)(x^3+3x-2)$

03 $\int_2^x f(t) dt = -x^3 + 2x^2 + ax + 6$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$0 = 2a + 6, a = -3$$

따라서 $\int_2^x f(t) dt = -x^3 + 2x^2 - 3x + 6$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) = -3x^2 + 4x - 3$

04 (1) $\int_{-1}^1 9x^8 dx = \left[x^9\right]_{-1}^1 = 1 - (-1) = 2$

(2) $\int_5^3 2 dx = \left[2x\right]_5^3 = 6 - 10 = -4$

05 (1) $\int_{-1}^1 (1-2x^4) dx + 2 \int_{-1}^1 (x^4+x+1) dx$
 $= \int_{-1}^1 \{(1-2x^4) + 2(x^4+x+1)\} dx$
 $= \int_{-1}^1 (2x+3) dx = 2 \int_{-1}^1 x dx + \int_{-1}^1 3 dx$
 $= 2 \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1 + \left[3x\right]_{-1}^1$
 $= 0 + 6 = 6$

(2) $\int_{-2}^1 (3x+1)^2 dx - \int_{-2}^1 (3x-1)^2 dx$
 $= \int_{-2}^1 \{(3x+1)^2 - (3x-1)^2\} dx$
 $= \int_{-2}^1 12x dx = 12 \int_{-2}^1 x dx$
 $= 12 \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-2}^1 = -18$

06 $\int_0^k (2x-1)^3 dx - \int_k^0 (12x^2+1) dx$
 $= \int_0^k (2x-1)^3 dx + \int_0^k (12x^2+1) dx$
 $= \int_0^k \{(2x-1)^3 + (12x^2+1)\} dx$
 $= \int_0^k (8x^3+6x) dx = 8 \int_0^k x^3 dx + 6 \int_0^k x dx$
 $= 8 \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^k + 6 \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^k = 2k^4 + 3k^2$

즉, $2k^4 + 3k^2 = 14$ 에서

$$2k^4 + 3k^2 - 14 = 0, (2k^2+7)(k^2-2) = 0$$

$$(2k^2+7)(k+\sqrt{2})(k-\sqrt{2}) = 0$$

그런데 k 는 실수이므로

$$k = -\sqrt{2} \text{ 또는 } k = \sqrt{2}$$

따라서 구하는 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$(-\sqrt{2}) \times \sqrt{2} = -2$$

07 (1) $\int_0^6 (8x^3-3x) dx + \int_6^2 (8x^3-3x) dx$

$$= \int_0^2 (8x^3-3x) dx$$

$$= \left[2x^4 - \frac{3}{2}x^2\right]_0^2 = 26$$

(2) $\int_{-1}^5 (2x-1)^2 dx - \int_1^5 (2x-1)^2 dx$

$$= \int_{-1}^5 (2x-1)^2 dx + \int_5^1 (2x-1)^2 dx$$

$$= \int_{-1}^1 (2x-1)^2 dx = \int_{-1}^1 (4x^2-4x+1) dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + x\right]_{-1}^1 = \frac{14}{3}$$

08 (1) $\int_0^4 |3-x| dx$

$$= \int_0^3 (3-x) dx + \int_3^4 (-3+x) dx$$

$$= \left[3x - \frac{1}{2}x^2\right]_0^3 + \left[-3x + \frac{1}{2}x^2\right]_3^4$$

$$= \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$$

(2) $\int_{-2}^0 |x^2-1| dx$

$$= \int_{-2}^{-1} (x^2-1) dx + \int_{-1}^0 (-x^2+1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^0$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

2 정적분의 활용

01 넓이

175~184쪽

01 (1) 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표를

구하면

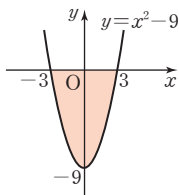
$$x^2 - 9 = 0$$

$$(x+3)(x-3) = 0$$

즉, $x = -3$ 또는 $x = 3$

따라서 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^3 (-x^2 + 9) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 9x \right]_{-3}^3 \\ &= 36 \end{aligned}$$



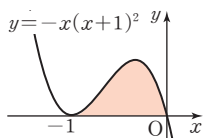
(2) 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$-x(x+1)^2 = 0$$

즉, $x = -1$ 또는 $x = 0$

따라서 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 \{-x(x+1)^2\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (-x^3 - 2x^2 - x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$



02 곡선 $y = ax^2 - 3ax$ ($a > 0$)와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$ax^2 - 3ax = 0$$

$$ax(x-3) = 0$$

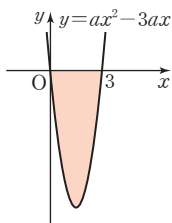
즉, $x = 0$ 또는 $x = 3$

따라서 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서

$y \leq 0$ 이므로 곡선과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^3 |ax^2 - 3ax| dx &= \int_0^3 (-ax^2 + 3ax) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}ax^3 + \frac{3}{2}ax^2 \right]_0^3 \\ &= \frac{9}{2}a \end{aligned}$$

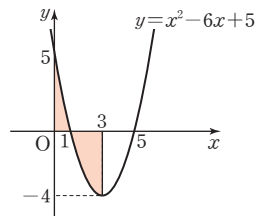
따라서 $\frac{9}{2}a = 18$ 이므로 $a = 4$



03 (1) 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2 - 6x + 5 = 0, (x-1)(x-5) = 0$$

즉, $x = 1$ 또는 $x = 5$



따라서 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $y \geq 0$, 닫힌구간

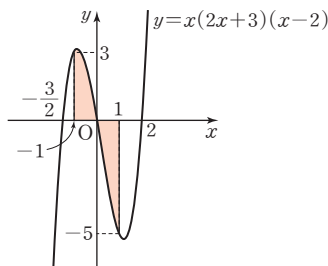
$[1, 3]$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (x^2 - 6x + 5) dx \\ &\quad + \int_1^3 (-x^2 + 6x - 5) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x \right]_0^1 \\ &\quad + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x \right]_1^3 \\ &= \frac{7}{3} + \frac{16}{3} = \frac{23}{3} \end{aligned}$$

(2) 곡선과 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x(2x+3)(x-2) = 0$$

즉, $x = -\frac{3}{2}$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 2$



따라서 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 $y \geq 0$, 닫힌구간

$[0, 1]$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이 S 는

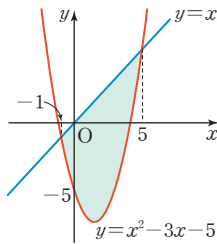
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^0 x(2x+3)(x-2) dx \\ &\quad + \int_0^1 \{-x(2x+3)(x-2)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (2x^3 - x^2 - 6x) dx \\ &\quad + \int_0^1 (-2x^3 + x^2 + 6x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 \right]_{-1}^0 \\ &\quad + \left[-\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{13}{6} + \frac{17}{6} = 5 \end{aligned}$$

04 (1) 곡선과 직선의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2 - 3x - 5 = x, \quad x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x+1)(x-5) = 0$$

즉, $x = -1$ 또는 $x = 5$



따라서 닫힌구간 $[-1, 5]$ 에서 $x^2 - 3x - 5 \leq x$ 이

므로 구하는 넓이 S 는

$$S = \int_{-1}^5 \{x - (x^2 - 3x - 5)\} dx$$

$$= \int_{-1}^5 (-x^2 + 4x + 5) dx$$

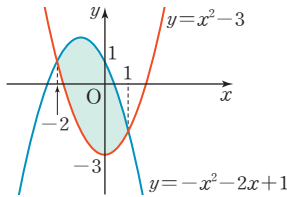
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x \right]_{-1}^5 = 36$$

(2) 두 곡선의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2 - 3 = -x^2 - 2x + 1$$

$$2x^2 + 2x - 4 = 0, \quad 2(x+2)(x-1) = 0$$

즉, $x = -2$ 또는 $x = 1$



따라서 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서

$x^2 - 3 \leq -x^2 - 2x + 1$ 이므로 구하는 넓이 S 는

$$S = \int_{-2}^1 \{(-x^2 - 2x + 1) - (x^2 - 3)\} dx$$

$$= \int_{-2}^1 (-2x^2 - 2x + 4) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x \right]_{-2}^1 = 9$$

05 $f(x) = x^2 - 1$ 이라고 하면

$$f'(x) = 2x$$

점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 2$ 이므로

접선의 방정식은

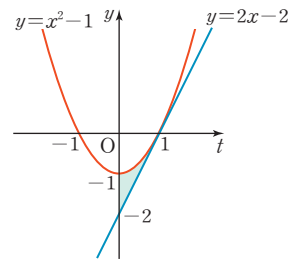
$$y - 0 = 2(x - 1), \quad \text{즉 } y = 2x - 2$$

곡선과 접선의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2 - 1 = 2x - 2, \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)^2 = 0$$

즉, $x = 1$



구하는 넓이는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 접선 $y = 2x - 2$ 와 x 축 및 두 직선 $x = 0, x = 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이
에서 곡선 $y = x^2 - 1$ 과 x 축 및 두 직선 $x = 0, x = 1$ 로
둘러싸인 도형의 넓이를 뺀 것과 같다.

따라서 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $2x - 2 \leq 0, x^2 - 1 \leq 0$ 이

므로 구하는 넓이 S 는

$$S = \int_0^1 (-2x + 2) dx - \int_0^1 (-x^2 + 1) dx$$

$$= \int_0^1 \{(-2x + 2) - (-x^2 + 1)\} dx$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx$$

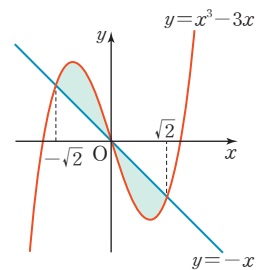
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

06 (1) 곡선과 직선의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^3 - 3x = -x, \quad x^3 - 2x = 0$$

$$x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0$$

즉, $x = -\sqrt{2}$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = \sqrt{2}$



따라서 닫힌구간 $[-\sqrt{2}, 0]$ 에서 $x^3 - 3x \geq -x$,

닫힌구간 $[0, \sqrt{2}]$ 에서 $x^3 - 3x \leq -x$ 이므로 구하

는 넓이 S 는

$$S = \int_{-\sqrt{2}}^0 \{(x^3 - 3x) - (-x)\} dx$$

$$+ \int_0^{\sqrt{2}} \{(-x) - (x^3 - 3x)\} dx$$

$$= \int_{-\sqrt{2}}^0 (x^3 - 2x) dx + \int_0^{\sqrt{2}} (-x^3 + 2x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2 \right]_{-\sqrt{2}}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^2 \right]_0^{\sqrt{2}}$$

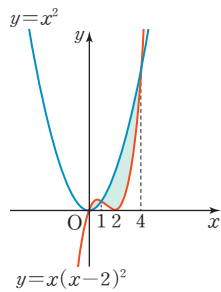
$$= 1 + 1 = 2$$

(2) 두 곡선의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x(x-2)^2 = x^2, \quad x^3 - 5x^2 + 4x = 0$$

$$x(x-1)(x-4) = 0$$

즉, $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=4$



따라서 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $x(x-2)^2 \geq x^2$, 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 $x(x-2)^2 \leq x^2$ 이므로 구하는 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{x(x-2)^2 - x^2\} dx \\ &\quad + \int_1^4 \{x^2 - x(x-2)^2\} dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - 5x^2 + 4x) dx \\ &\quad + \int_1^4 (-x^3 + 5x^2 - 4x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1 \\ &\quad + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 \right]_1^4 \\ &= \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6} \end{aligned}$$

07 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 (x \geq 0)$ 이라고 하면 두 곡선 $y=f(x)$,

$y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선

$y=x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{4}x^2 = x, \quad \frac{1}{4}x(x-4)$$

즉, $x=0$ 또는 $x=4$

구하는 넓이는 곡선

$y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.

닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 $\frac{1}{4}x^2 \leq x$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 와

직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^4 \left(x - \frac{1}{4}x^2 \right) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^3 \right]_0^4 = \frac{8}{3}$$

따라서 구하는 넓이는 $2 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$

02 속도와 거리

185~188쪽

$$\begin{aligned} 01 \quad (1) \quad 2 + \int_0^2 (t^2 - 2t) dt &= 2 + \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_0^2 \\ &= 2 + \left(-\frac{4}{3} \right) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \int_1^3 (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_1^3 = \frac{2}{3}$$

$$(3) \quad v(t) = t^2 - 2t = t(t-2) \text{이므로}$$

$1 \leq t \leq 2$ 에서 $v(t) \leq 0$, $2 \leq t \leq 3$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이다.

따라서 시각 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} &\int_1^2 (-t^2 + 2t) dt + \int_2^3 (t^2 - 2t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + t^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_2^3 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2 \end{aligned}$$

02 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$v(t)=0$ 에서

$$t^2 - 7t + 10 = 0, \quad (t-2)(t-5) = 0$$

즉, $t=2$ 또는 $t=5$

따라서 시각 $t=2$ 에서 점 P가 처음으로 운동 방향을 바꾸므로 구하는 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} &-5 + \int_0^2 (t^2 - 7t + 10) dt \\ &= -5 + \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 10t \right]_0^2 \\ &= -5 + \frac{26}{3} = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

03 $0 \leq t \leq 5$ 에서 $v(t) \geq 0$, $5 \leq t \leq 12$ 에서 $v(t) \leq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^5 v(t) dt &= \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10 \\ \int_5^{12} v(t) dt &= -\frac{(3+7) \times 2}{2} = -10 \end{aligned}$$

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=12$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^{12} |v(t)| dt &= \int_0^5 v(t) dt + \int_5^{12} \{-v(t)\} dt \\ &= 10 - (-10) = 20 \end{aligned}$$

04 $0 \leq t \leq 3$ 에 $v(t) \geq 0$, $3 \leq t \leq 5$ 에서 $v(t) \leq 0$ 이므로

물체를 쏘아 올린 후 5초 동안 물체가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} &\int_0^3 (30 - 10t) dt + \int_3^5 (-30 + 10t) dt \\ &= \left[30t - 5t^2 \right]_0^3 + \left[-30t + 5t^2 \right]_3^5 \\ &= 45 + 20 = 65 \end{aligned}$$

즉, 65 m이다.

I. 함수의 극한과 연속

240~242쪽

- 01 존재하지 않는다. 02 ⑤ 03 -1 04 $-\frac{2}{3}$
 05 $a=4, b=\frac{1}{4}$ 06 2 07 5 08 2
 09 $\subset$ 10 1 11 -1 12 5 13 2
 14 $\frac{1}{4}$ 15 -2 16 8 17 -9 18 2개

01 $x = -5$ 에서 우극한과 좌극한을 구하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -5+} \frac{|x^2+2x-15|}{x+5} &= \lim_{x \rightarrow -5+} \frac{|(x+5)(x-3)|}{x+5} \\ &= \lim_{x \rightarrow -5+} \frac{-(x+5)(x-3)}{x+5} \\ &= \lim_{x \rightarrow -5+} (-x+3) \\ &= 8 \end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -5-} \frac{|x^2+2x-15|}{x+5} &= \lim_{x \rightarrow -5-} \frac{|(x+5)(x-3)|}{x+5} \\ &= \lim_{x \rightarrow -5-} \frac{(x+5)(x-3)}{x+5} \\ &= \lim_{x \rightarrow -5-} (x-3) \\ &= -8 \end{aligned}$$

따라서 $x = -5$ 에서 우극한과 좌극한이 다르므로

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{|x^2+2x-15|}{x+5} \text{는 존재하지 않는다.}$$

02 ① $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-x+1}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 2$

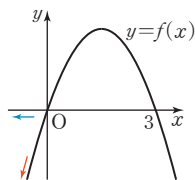
② $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2-5x+2}{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(x-2)}{2x-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (x-2) = -\frac{3}{2}$

③ $f(x) = -x^2+3x$ 라고 하면

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는
오른쪽 그림과 같다.

따라서 $x \rightarrow -\infty$ 일 때,
 $f(x) \rightarrow -\infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2+3x) = -\infty$$



④ $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3+27}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x^2-3x+9)}{x+3}$
 $= \lim_{x \rightarrow -3} (x^2-3x+9) = 27$

⑤ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{x^2+1}}{x}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x(1+\sqrt{x^2+1})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{1+\sqrt{x^2+1}} = 0$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

03 $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2+1)f(x)$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \left\{ \frac{f(x)}{x-1} \times (x-1)(x^2+1) \right\}$
 $= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow -1} (x-1)(x^2+1)$
 $= \frac{1}{4} \times (-4) = -1$

04 $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때, $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}-2x} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2t}{\sqrt{t^2+1}-2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}-2} \\ &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

05 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+x+3}-\sqrt{ax^2+3})$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2+x+3}-\sqrt{ax^2+3})(\sqrt{4x^2+x+3}+\sqrt{ax^2+3})}{\sqrt{4x^2+x+3}+\sqrt{ax^2+3}}$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4-a)x^2+x}{\sqrt{4x^2+x+3}+\sqrt{ax^2+3}}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+x+3}-\sqrt{ax^2+3})$ 의 값이 존재하
므로

$$4-a=0, a=4$$

따라서

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+x+3}-\sqrt{4x^2+3}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{4x^2+x+3}+\sqrt{4x^2+3}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{4+\frac{3}{x^2}}} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

06 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2+3x+2} = 2$ 에서 $f(x)$ 는 x^2 의 계수가 2인 이차 함수이어야 한다.

$f(x) = 2x^2 + ax + b$ (a, b 는 실수)라고 하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + ax + b}{x-2} = 0 \quad \dots\dots ①$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2 + ax + b) = 0$$

즉, $8 + 2a + b = 0$ 에서

$$b = -2a - 8 \quad \dots\dots ②$$

$b = -2a - 8$ 을 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + ax + b}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + ax - 2a - 8}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x^2 - 4) + a(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+2)(x-2) + a(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 4 + a) = 8 + a \end{aligned}$$

즉, $8 + a = 0$ 이므로 $a = -8$

$a = -8$ 을 ②에 대입하면 $b = 8$

따라서 $f(x) = 2x^2 - 8x + 8$ 이므로 $f(1) = 2$

07 $x^2 + 2 > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x^2 + 2$ 로 나누면 $\frac{5x^2 + x + 1}{x^2 + 2} < f(x) < \frac{5x^2 + x + 3}{x^2 + 2}$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x + 1}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + x + 3}{x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 + \frac{2}{x^2}} = 5$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$

08 점 P는 주어진 곡선과 직선의 교점이므로 $y = \frac{2}{x} - 1$ 을

$y = tx$ 에 대입하면

$$\frac{2}{x} - 1 = tx, \quad tx^2 + x - 2 = 0$$

$$\text{즉, } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8t}}{2t}$$

그런데 점 P는 제1사분면 위의 점이므로 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{1+8t}}{2t}, \frac{-1 + \sqrt{1+8t}}{2} \right)$$

$$\text{즉, } \overline{OQ} = \frac{-1 + \sqrt{1+8t}}{2t}, \quad \overline{OR} = \frac{-1 + \sqrt{1+8t}}{2}$$

따라서

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{OQ} \times \overline{OR}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{-1 + \sqrt{1+8t}}{2t} \times \frac{-1 + \sqrt{1+8t}}{2} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2+8t-2\sqrt{1+8t}}{4t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{t} + 8 - 2\sqrt{\frac{1}{t^2} + \frac{8}{t}}}{4} = 2 \end{aligned}$$

09 ㄱ. (i) 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 정의되지 않는다.

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

ㄴ. (i) $f(1) = 0$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2 \end{aligned}$$

$$\text{(iii) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

ㄷ. (i) $f(1) = 2$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} (3x - 1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 - x + 2) = 2 \\ \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{(iii) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

ㄹ. (i) $f(1) = 5$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 + 3x - 4}{|x - 1|} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x+4)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x+4) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2 + 3x - 4}{|x - 1|} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x+4)(x-1)}{-(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x-4) = -5 \end{aligned}$$

이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{|x - 1|}$ 는 존재하지 않는다.

즉, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

따라서 보기 중 $x=1$ 에서 연속인 함수는 ㄷ이다.

10 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2) \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2 + bx}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (ax - 6) = 2a - 6$$

$$f(2) = 2a - 6$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2+bx}{x-2} = 2a-6 \quad \dots\dots ①$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 2+} (x-2) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} (x^2+bx) = 0$$

$$\text{즉, } 4+2b=0 \text{이므로 } b=-2$$

$b=-2$ 를 ①의 좌변에 대입하면

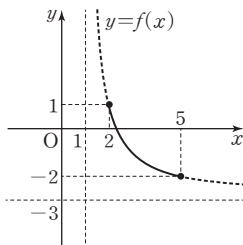
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2-2x}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} x = 2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2=2a-6 \text{이므로 } a=4$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} 4x-6 & (x \leq 2) \\ \frac{x^2-2x}{x-2} & (x > 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(1)+f(3) = (-2)+3=1$$

$$11 \quad f(x) = \frac{7-3x}{x-1} = \frac{-3(x-1)+4}{x-1} = -3 + \frac{4}{x-1}$$



함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[2, 5]$ 에서 $x=2$ 일 때 최댓값 1, $x=5$ 일 때 최솟값 -2 를 갖는다.

$$\text{따라서 } M+m = 1+(-2) = -1$$

12 $f(x) = x^3 - 4x + a$ 라고 하면 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 $f(-1)f(1) < 0$ 일 때 사잇값 정리에 따라 방정식 $f(x) = 0$ 이 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

$$\text{즉, } f(-1)f(1) < 0 \text{에서}$$

$$(a+3)(a-3) < 0, \quad -3 < a < 3$$

따라서 구하는 정수 a 의 개수는 5이다.

13 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(x) \quad \bullet 50\%$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4+} (-kx+12) = -4k+12$$

$$\lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} (x-k)^2 = (4-k)^2$$

$$\text{즉, } -4k+12 = (4-k)^2 \text{에서}$$

$$k^2 - 4k + 4 = 0, \quad (k-2)^2 = 0$$

$$\text{따라서 } k=2 \quad \bullet 50\%$$

$$14 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{에서 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} \{f(x) + g(x)\} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{g(x)}{f(x)} \right\} = 0$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = -1 \text{이므로}$$

• 50%

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x) + g(x)}{3f(x) - g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{g(x)}{f(x)}}{3 - \frac{g(x)}{f(x)}} \\ &= \frac{2 + (-1)}{3 - (-1)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

• 50%

15 $x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때, $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = a$$

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = a \text{이므로}$$

• 50%

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) + x}{f(x) - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \times \frac{f(x)}{x} + 1}{\frac{f(x)}{x} - 1} \\ &= \frac{2a+1}{a-1} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{2a+1}{a-1} = 1 \text{이므로}$$

$$a = -2$$

• 50%

16 $x \neq -1$ 일 때,

$$f(x) = \frac{x^3 + ax + 6}{x+1}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + ax + 6}{x+1} = f(-1)$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + ax + 6) = 0$$

$$\text{즉, } 5-a=0 \text{이므로}$$

$$a=5$$

• 50%

따라서

$$\begin{aligned} f(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x + 6}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 6)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x + 6) \\ &= 8 \end{aligned}$$

• 50%

- 17 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)g(x) = f(3)g(3)$$

 이때

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} (2x+3)(x^2-a^2) = 9(9-a^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} (x-1)(x^2-a^2) = 2(9-a^2)$$

$$f(3)g(3) = 9(9-a^2)$$

 이므로 $9(9-a^2) = 2(9-a^2)$ 에서 ◆ 50%
 $9-a^2=0, a^2=9$
 즉, $a=-3$ 또는 $a=3$ ◆ 30%
 따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은
 $(-3) \times 3 = -9$ ◆ 20%

- 18 $g(x) = f(x) - x - 1$ 이라고 하면 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고

$$g(-1) = f(-1) + 1 - 1 = 1 > 0$$

$$g(0) = f(0) - 0 - 1 = -2 < 0$$

$$g(1) = f(1) - 1 - 1 = -5 < 0$$

$$g(2) = f(2) - 2 - 1 = 2 > 0$$
 ◆ 30%
 이때 $g(-1)g(0) < 0, g(1)g(2) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 따라 방정식 $g(x) = 0$, 즉 $f(x) = x+1$ 은 열린 구간 $(-1, 0), (1, 2)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다. ◆ 50%
 따라서 방정식 $f(x) = x+1$ 은 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 적어도 2개의 실근을 갖는다. ◆ 20%

II. 미분

243~245쪽

- 01 5 02 $\frac{6}{7}$ 03 14 04 10 05 13
 06 3 07 5 08 $-9 \leq k \leq 0$ 09 ⑤
 10 최댓값: 23, 최솟값: -9 11 $\frac{3}{2}$ 12 9
 13 $1 < t < \frac{7}{4}$ 14 32 15 $a=2, b=-1$
 16 $(2, 5)$ 17 $2\sqrt{2}$ 18 풀이 참고

- 01 $\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)} = 12$ 에서

$$\frac{(3a+24)-(-a-4)}{4} = 12, a+7=12$$

 따라서 $a=5$

- 02
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+5h)-f(3-2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+5h)-f(3)+f(3)-f(3-2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+5h)-f(3)}{5h} \times 5$$

$$= 5f'(3) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-2h)-f(3)}{-2h} \times (-2)$$

$$= 5f'(3) - \{-2f'(3)\}$$

$$= 7f'(3)$$

 따라서 $7f'(3) = 6$ 이므로 $f'(3) = \frac{6}{7}$

- 03 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy + 1$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 1$$

 즉, $f(0) = -1$
 따라서 $f'(0) = 6$ 이므로

$$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h)-f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4)+f(h)+8h+1-f(4)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+1}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h-0} + 8$$

$$= f'(0) + 8$$

$$= 6 + 8 = 14$$

- 04 $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 실수, $a \neq 0$)라고 하면

$$f'(x) = 2ax + b$$

 이므로

$$(x+1)f'(x) - f(x)$$

$$= (x+1)(2ax+b) - (ax^2+bx+c)$$

$$= ax^2 + 2ax + b - c$$

 즉, $ax^2 + 2ax + b - c = 2x^2 + 4x - 8$
 모든 실수 x 에 대하여 등식이 성립하므로

$$a=2, b-c=-8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

 $f'(1) = 1$ 에서

$$2a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

 $a=2$ 를 ②에 대입하면

$$4+b=1, b=-3$$

 $b=-3$ 을 ①에 대입하면

$$-3-c=-8, c=5$$

 따라서 $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ 이므로

$$f(-1) = 10$$

- 05 이차 이상의 다항식 $f(x)$ 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$ 를 $ax+b$ (a, b 는 실수)라고 하면

$$f(x) = (x-1)^2 Q(x) + ax + b \quad \cdots \cdots ①$$

$$f(1) = 7 \text{에서} \quad a + b = 7 \quad \cdots \cdots ②$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + a$$

$$f'(1) = 3 \text{에서} \quad a = 3$$

$$a = 3 \text{을 } ② \text{에 대입하면}$$

$$3 + b = 7, \quad b = 4$$

따라서 $R(x) = 3x + 4$ 이므로

$$R(3) = 13$$

- 06 $f(x) = x^3 + 6x^2 + 8x + a$ 라고 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + 8$$

직선 $y = -4x - 5$ 와 곡선 $y = f(x)$ 의 접점의 좌표를 $(t, -4t - 5)$ 라고 하면 $f'(t) = -4$ 에서

$$3t^2 + 12t + 8 = -4$$

$$3t^2 + 12t + 12 = 0, \quad 3(t+2)^2 = 0$$

$$\text{즉, } t = -2$$

따라서 접점의 좌표는 $(-2, 3)$ 이므로 $f(-2) = 3$ 에서

$$-8 + 24 - 16 + a = 3, \quad a = 3$$

- 07 $f'(x) = -2x + 3$ 이고, $\frac{f(a) - f(1)}{a - 1} = f'(3)$ 에서

$$\frac{(-a^2 + 3a + 5) - 7}{a - 1} = -3$$

$$a^2 - 6a + 5 = 0, \quad (a - 1)(a - 5) = 0$$

그런데 $a > 3$ 이므로 $a = 5$

- 08 $f'(x) = -3x^2 + 2kx + 3k$ 이고, 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 역함수가 존재하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $-3x^2 + 2kx + 3k = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 + 9k \leq 0, \quad k(k + 9) \leq 0$$

따라서 $-9 \leq k \leq 0$

- 09 ① 구간 $(-1, 0)$ 에서 $f'(x) < 0$, 구간 $(0, 1)$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-1, 0)$ 에서 감소하고, 구간 $(0, 1)$ 에서 증가한다.

- ② 구간 $(1, 2)$ 에서 $f'(x) > 0$, 구간 $(2, 3)$ 에서 $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(1, 2)$ 에서 증가하고, 구간 $(2, 3)$ 에서 감소한다.

- ③ 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 원점을 지나지는 알 수 없다.

- ④ $f'(1) \neq 0$ 이고 $x = 1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극값을 갖지 않는다.

- ⑤ $f'(4) = 0$ 이고 $x = 4$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 4$ 에서 극소이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

- 10 $f(x) = -x^4 + 6x^2 + 8x - 1$ 에서

$$f'(x) = -4x^3 + 12x + 8$$

$$= -4(x+1)^2(x-2)$$

$-2 \leq x \leq 3$ 에서 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

x	-2	...	-1	...	2	...	3
$f'(x)$		+	0	+	0	-	
$f(x)$	-9	/	-4	/	23	\	-4

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 최대이고 최댓값은 23, $x = -2$ 에서 최소이고 최솟값은 -9이다.

- 11 점 P의 좌표를 $(a, a(a-3)^2)$ (단, $0 < a < 3$)이라고 하면

$$\overline{OH} = a, \quad \overline{PH} = a(a-3)^2$$

삼각형 OHP의 넓이를 $S(a)$ 라고 하면

$$S(a) = \frac{1}{2} a^2 (a-3)^2 \quad (\text{단, } 0 < a < 3)$$

$$S'(a) = 2a^3 - 9a^2 + 9a$$

$$= a(a-3)(2a-3)$$

$0 < a < 3$ 에서 $S'(a) = 0$ 을 만족시키는 a 의 값은

$$a = \frac{3}{2}$$

a	0	...	$\frac{3}{2}$	...	3
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		/	극대	\	

$S(a)$ 는 $a = \frac{3}{2}$ 에서 극대이면서 최대이므로 삼각형

OHP의 넓이는 $a = \frac{3}{2}$ 일 때 최대이다.

따라서 구하는 점 P의 x 좌표는 $\frac{3}{2}$ 이다.

12 $2x^3 - 6x^2 - 18x - k = 0$ 에서

$$2x^3 - 6x^2 - 18x = k$$

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x \text{라고 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x - 18$$

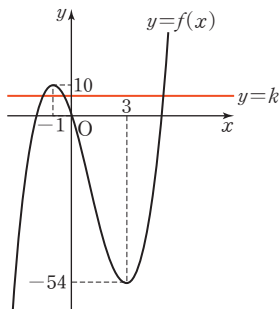
$$= 6(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{을 만족시키는 } x \text{의 값은}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	10	↘	-54	↗

또 $f(0) = 0$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



이때 한 개의 양의 실근과 서로 다른 두 개의 음의 실근을 갖도록 하는 k 의 값의 범위는 $0 < k < 10$ 따라서 구하는 정수 k 의 개수는 9이다.

13 시각 t 에서 두 점 P, Q의 속도를 각각 $v_P(t)$, $v_Q(t)$ 라고 하면

$$v_P(t) = 2t - 2, v_Q(t) = 4t - 7$$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호가 서로 반대이므로 $v_P(t)v_Q(t) < 0$ 에서

$$(2t - 2)(4t - 7) < 0, 2(t - 1)(4t - 7) < 0$$

$$\text{따라서 } 1 < t < \frac{7}{4}$$

14 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(2) - 4f(x)}{x - 2}$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(2) - 4f(2) + 4f(2) - 4f(x)}{x - 2} \quad \bullet 30\%$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)f(2)}{x - 2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4\{f(x) - f(2)\}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)f(2)}{x-2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times 4$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)f(2) - 4f'(2)$$

$$= 4f(2) - 4f'(2)$$

$$= 4 \times 3 - 4 \times (-5) = 32 \quad \bullet 70\%$$

15 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

이때

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (ax^2 + bx + 2)$$

$$= a + b + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^3 + 2) = 3$$

$$f(1) = a + b + 2$$

$$\text{이므로 } a + b + 2 = 3$$

$$\text{즉, } a + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \bullet 40\%$$

또 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

이때

$$\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\{a(1+h)^2 + b(1+h) + 2\} - (a + b + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{(2a + b)h + ah^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0+} (2a + b + ah) = 2a + b$$

$$\lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{(1+h)^3 + 2\} - (a + b + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{\{(1+h)^3 + 2\} - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0-} (3 + 3h + h^2) = 3$$

$$\text{이므로 } 2a + b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \bullet 40\%$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = 2, b = -1 \quad \bullet 20\%$$

16 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{3}$ 이라고 하면 곡선 $y = f(x)$ ($x > 0$)

위의 점 P와 직선 $y = 4x - 6$ 사이의 거리가 최소가 되려면 점 P에서의 접선이 직선 $y = 4x - 6$ 과 평행해야 한다. $\bullet 20\%$

$$f'(x) = x^2 \text{이고, 점 P의 좌표를 } \left(t, \frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{3}\right) \text{이라고}$$

하면 점 P에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(t) = 4$ 에서

$$t^2 = 4$$

$$\text{그런데 } t > 0 \text{이므로 } t = 2 \quad \bullet 50\%$$

$$\text{따라서 점 P의 좌표는 } (2, 5) \quad \bullet 30\%$$

- 17 정사각뿔에 내접하는 직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 x , 높이를 y 라고 하면

$$\begin{aligned}\overline{DE} &= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \overline{AE} &= \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DE}^2} \\ &= \sqrt{3^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

이므로 $\overline{AE} = \overline{DE}$

$$\text{즉, } \overline{AC} = \overline{BC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2}x \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}y &= \overline{AE} - \overline{AC} \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x \quad (\text{단, } 0 < x < 3)\end{aligned} \quad \blacktriangleright 40\%$$

직육면체의 부피를 $V(x)$ 라고 하면

$$\begin{aligned}V(x) &= x^2 y \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}x^3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 \quad (\text{단, } 0 < x < 3)\end{aligned}$$

$$V'(x) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 + 3\sqrt{2}x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}x(x-2)$$

$0 < x < 3$ 에서 $V'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x = 2 \quad \blacktriangleright 30\%$$

x	0	...	2	...	3
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	$2\sqrt{2}$	↘	

따라서 $V(x)$ 는 $x=2$ 에서 최대이고 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이므로 구하는 직육면체의 부피의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다.

$\blacktriangleright 30\%$

- 18 $4x^3 + 5x^2 - 2 \leq 2x^2 + 6x + 3$ 에서

$$4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 \leq 0$$

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 \text{ 라고 하면}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= 12x^2 + 6x - 6 \\ &= 6(x+1)(2x-1)\end{aligned}$$

$x \leq 0$ 에서 $f'(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값은

$$x = -1 \quad \blacktriangleright 40\%$$

x	...	-1	...	0
$f'(x)$	+	0	-	
$f(x)$	↗	0	↘	-5

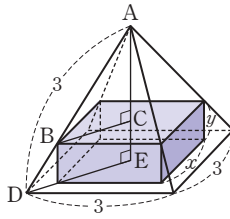
$\blacktriangleright 30\%$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최대이고 최댓값은 0이므로 $x \leq 0$ 인 모든 x 에 대하여

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x - 5 \leq 0$$

따라서 $x \leq 0$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다.

$\blacktriangleright 30\%$



III. 적분

246~248쪽

- 01 $a = -3, b = 4$ 02 8 03 2 04 $\frac{15}{2}$
 05 9 06 $\frac{16}{3}$ 07 -1 08 2 09 $\frac{1}{2}$
 10 $\frac{1}{3}$ 11 6 12 ⑤ 13 12 14 3
 15 13 16 -2 17 $\frac{5}{3}$ 18 10

01 $\frac{d}{dx}F(x) = 3x^2 + 2ax - 4$ 이므로

$$3x^2 + 2ax - 4 = 3x^2 - 6x - b$$

따라서 $2a = -6, -4 = -b$ 이므로

$$a = -3, b = 4$$

02 $f(x) = \int (-3x^2 + 4x + a) dx$

$$= -x^3 + 2x^2 + ax + C$$

$f(0) = 3$ 에서 $C = 3$ 이므로

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + ax + 3$$

$f(-1) = 2$ 에서

$$6 - a = 2, a = 4$$

따라서 $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x + 3$ 이므로

$$f(1) = 8$$

03 $F(x) = (x+2)f(x) + x^3 - 12x$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $F(0) = -8$ 에서

$$-8 = 2f(0)$$

$$\text{즉, } f(0) = -4$$

$F(x) = (x+2)f(x) + x^3 - 12x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + (x+2)f'(x) + 3x^2 - 12$$

$$(x+2)f'(x) = -3x^2 + 12$$

$$(x+2)f'(x) = -3(x+2)(x-2)$$

$$\text{즉, } f'(x) = -3x + 6$$

양변을 x 에 대하여 적분하면

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x + C$$

$f(0) = -4$ 에서 $C = -4$ 이므로

$$f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 6x - 4$$

$$\text{따라서 } f(2) = 2$$

04 $\int_0^1 \frac{x+f(x)}{2} dx = 4$ 에서

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \{x + f(x)\} dx = 4$$

$$\text{즉, } \int_0^1 \{x+f(x)\} dx = 8$$

이때

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{x+f(x)\} dx &= \int_0^1 x dx + \int_0^1 f(x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \int_0^1 f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{2} + \int_0^1 f(x) dx = 8$ 이므로

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{15}{2}$$

05 $\int_{-1}^0 f(x) dx$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^3 f(x) dx + \int_3^0 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^3 f(x) dx + \left\{ \int_3^2 f(x) dx + \int_2^0 f(x) dx \right\} \\ &= \int_{-1}^3 f(x) dx - \int_2^3 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx \\ &= 2 - 1 - (-8) = 9 \end{aligned}$$

06 $\int_{-1}^2 (x|x|+1) dx$

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^0 (-x^2+1) dx + \int_0^2 (x^2+1) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3+x \right]_0^2 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{14}{3} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

07 함수 $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_1^{1+x} f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[F(t) \right]_1^{1+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(1+x) - F(1)}{x} \\ &= F'(1) \\ &= f(1) = -1 \end{aligned}$$

08 $f'(x) = 2x - 4$ 이므로

$$f(x) = \int (2x-4) dx = x^2 - 4x + C$$

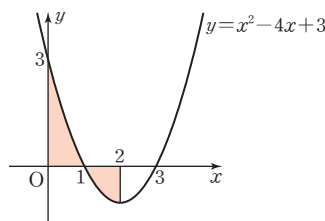
이때 $f(1) = 0$ 에서 $-3 + C = 0$, $C = 3$

$$\text{즉, } f(x) = x^2 - 4x + 3$$

곡선 $y = x^2 - 4x + 3$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 4x + 3 = 0, (x-1)(x-3) = 0$$

즉, $x = 1$ 또는 $x = 3$



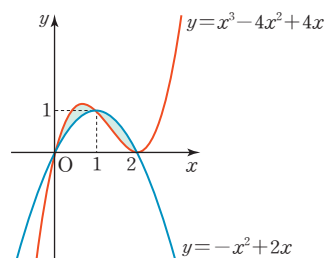
닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $y \geq 0$, 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (x^2 - 4x + 3) dx + \int_1^2 (-x^2 + 4x - 3) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x \right]_1^2 \\ &= \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 \end{aligned}$$

09 두 곡선의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 + 4x &= -x^2 + 2x \\ x^3 - 3x^2 + 2x &= 0, x(x-1)(x-2) = 0 \end{aligned}$$

즉, $x = 0$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 2$



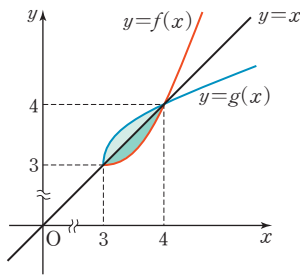
닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $x^3 - 4x^2 + 4x \geq -x^2 + 2x$ 이고, 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 $x^3 - 4x^2 + 4x \leq -x^2 + 2x$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \{(x^3 - 4x^2 + 4x) - (-x^2 + 2x)\} dx \\ &\quad + \int_1^2 \{(-x^2 + 2x) - (x^3 - 4x^2 + 4x)\} dx \\ &= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \\ &\quad + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

10 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 는 직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭이다. 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 12 &= x, x^2 - 7x + 12 = 0 \\ (x-3)(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

즉, $x = 3$ 또는 $x = 4$



구하는 넓이는 닫힌구간 $[3, 4]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배이다.
따라서 닫힌구간 $[3, 4]$ 에서 $x^2-6x+12 \leq x$ 이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} & 2 \int_3^4 \{x - (x^2 - 6x + 12)\} dx \\ &= 2 \int_3^4 (-x^2 + 7x - 12) dx \\ &= 2 \times \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 12x \right]_3^4 \\ &= 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

- 11** 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v(2)=0$ 에서
 $24 - 12(a+1) + 6a = 0, a=2$
 즉, $v(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t-1)(t-2)$
 따라서 $0 \leq t \leq 1$ 에서 $v(t) \geq 0$, $1 \leq t \leq 2$ 에서 $v(t) \leq 0$
 이므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 |v(t)| dt \\ &= \int_0^1 (6t^2 - 18t + 12) dt \\ & \quad + \int_1^2 (-6t^2 + 18t - 12) dt \\ &= \left[2t^3 - 9t^2 + 12t \right]_0^1 + \left[-2t^3 + 9t^2 - 12t \right]_1^2 \\ &= 5 + 1 = 6 \end{aligned}$$

- 12** $\neg$. $v(3)=0, v(5)=0$ 이고, 시각 $t=3, t=5$ 의 좌우에서 각각 $v(t)$ 의 부호가 바뀌므로 점 P는 출발 후 7초 동안 운동 방향이 두 번 바뀐다.
 $\therefore 0 \leq t \leq 3$ 에서 $v(t) \leq 0, 3 \leq t \leq 5$ 에서 $v(t) \geq 0, 5 \leq t \leq 7$ 에서 $v(t) \leq 0$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^3 v(t) dt = -\frac{(1+3) \times 2}{2} = -4 \\ & \int_3^5 v(t) dt = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2 \\ & \int_5^7 v(t) dt = -\left(\frac{1}{2} \times 2 \times 2\right) = -2 \end{aligned}$$

따라서 출발한 지 7초 후의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} & \int_0^7 v(t) dt \\ &= \int_0^3 v(t) dt + \int_3^5 v(t) dt + \int_5^7 v(t) dt \\ &= (-4) + 2 + (-2) = -4 \end{aligned}$$

$\therefore 0 \leq t \leq 3$ 에서 $v(t) \leq 0, 3 \leq t \leq 5$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이

므로 점 P가 출발 후 5초 동안 움직인 거리는

$$\begin{aligned} & \int_0^5 |v(t)| dt \\ &= \int_0^3 \{-v(t)\} dt + \int_3^5 v(t) dt \\ &= -(-4) + 2 = 6 \end{aligned}$$

따라서 보기 중 옳은 것은 $\neg$, $\therefore$ 이므로 ⑤이다.

- 13** $f(x) = \int (2x^3 - 3x^2 + 7) dx$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7 \quad \bullet 30\%$$

따라서 $x^2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때, $t \rightarrow 1$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^2) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^2) - f(1)}{x^2 - 1} \times (x + 1) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(t) - 1}{t - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \\ &= 2f'(1) \\ &= 2 \times 6 = 12 \end{aligned}$$

$\bullet 50\%$

$\bullet 20\%$

- 14** $f'(x) = a(x+1)(x-1) (a > 0)$ 라고 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \int a(x+1)(x-1) dx \\ &= \int (ax^2 - a) dx \\ &= \frac{1}{3}ax^3 - ax + C \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대이고 극댓값이 3이므로 $f(-1)=3$ 에서

$$\frac{2}{3}a + C = 3 \quad \dots\dots ① \quad \bullet 30\%$$

또 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이고 극솟값은 -1 이므로 $f(1)=-1$ 에서

$$-\frac{2}{3}a + C = -1 \quad \dots\dots ② \quad \bullet 30\%$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=3, C=1$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ 이므로

$$f(2) = 3 \quad \bullet 40\%$$

- 15 $\int_1^x f(t) dt = xf(x) - x^3 + 4x^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 3x^2 + 8x$$

$$xf'(x) = 3x^2 - 8x$$

$$\text{즉, } f'(x) = 3x - 8 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (3x - 8) dx \\ &= \frac{3}{2}x^2 - 8x + C \end{aligned}$$

30 %

$$\int_1^x f(t) dt = xf(x) - x^3 + 4x^2 \text{의 양변에 } x=1 \text{을}$$

대입하면

$$0 = f(1) - 1 + 4$$

$$\text{즉, } f(1) = -3 \text{ 이므로}$$

$$\frac{3}{2} - 8 + C = -3, C = \frac{7}{2}$$

30 %

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + \frac{7}{2} \text{ 이므로}$$

$$f(-1) = 13$$

40 %

- 16 $\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = 2x + 2$ 에서

$$\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \int (2x + 2) dx \\ &= x^2 + 2x + C_1 \end{aligned}$$

$$\text{양변에 } x=0 \text{을 대입하면}$$

$$f(0) + g(0) = C_1, C_1 = 1$$

$$\text{즉, } f(x) + g(x) = x^2 + 2x + 1$$

..... ①

30 %

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = 3x^2 + 1 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int (3x^2 + 1) dx \\ &= x^3 + x + C_2 \end{aligned}$$

$$\text{양변에 } x=0 \text{을 대입하면}$$

$$f(0)g(0) = C_2, C_2 = -2$$

$$\text{즉, } f(x)g(x) = x^3 + x - 2$$

$$= (x-1)(x^2+x+2)$$

..... ②

30 %

$$\text{①, ②에서}$$

$$\begin{cases} f(x) = x-1 \\ g(x) = x^2+x+2 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} f(x) = x^2+x+2 \\ g(x) = x-1 \end{cases}$$

$$\text{이때 } f(0) = -1, g(0) = 2 \text{ 이므로}$$

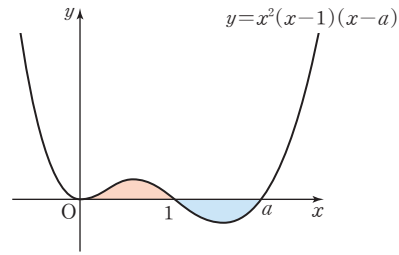
$$f(x) = x-1, g(x) = x^2+x+2$$

$$\text{따라서 } f(3) - g(1) = 2 - 4$$

$$= -2$$

40 %

- 17 $f(x) = x^2(x-1)(x-a)$ (단, $a > 1$)라고 하면
함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $f(x) \geq 0$, 닫힌구간 $[1, a]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 이고, 곡선 $y = f(x)$ 과 x 축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같으므로

$$\int_0^a f(x) dx = 0$$

30 %

$$\int_0^a x^2(x-1)(x-a) dx = 0$$

$$\int_0^a \{x^4 - (a+1)x^3 + ax^2\} dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}(a+1)x^4 + \frac{1}{3}ax^3 \right]_0^a = 0$$

$$-\frac{1}{20}a^5 + \frac{1}{12}a^4 = 0$$

$$-\frac{1}{20}a^4 \left(a - \frac{5}{3} \right) = 0$$

40 %

$$\text{그런데 } a > 1 \text{ 이므로 } a = \frac{5}{3}$$

30 %

- 18 시각 t 에서 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$ 라고 하면

$$x_P(t) = \int (2t-6) dt = t^2 - 6t + C_1$$

$$x_P(0) = 1 \text{에서 } C_1 = 1 \text{ 이므로}$$

$$x_P(t) = t^2 - 6t + 1$$

$$\text{또 } x_Q(t) = \int (-3t^2 + 5t) dt = -t^3 + \frac{5}{2}t^2 + C_2$$

$$x_Q(0) = 1 \text{에서 } C_2 = 1 \text{ 이므로}$$

$$x_Q(t) = -t^3 + \frac{5}{2}t^2 + 1$$

50 %

이때 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각을 $t=a$ 라고 하면 $v_P(a) = v_Q(a)$ 에서

$$2a - 6 = -3a^2 + 5a, 3a^2 - 3a - 6 = 0$$

$$3(a+1)(a-2) = 0$$

$$\text{그런데 } a > 0 \text{ 이므로 } a = 2$$

즉, 시각 $t=2$ 에서 두 점 P, Q의 속도가 같다. 30 %

따라서 두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간의 두 점 사이의 거리는

$$|x_P(2) - x_Q(2)| = |(-7) - 3|$$

$$= 10$$

20 %