



정답과 해설



I 지수함수와 로그함수

1 지수와 로그

01 거듭제곱과 거듭제곱근

9~15쪽

- 01 (1) $x^4 y^3 \times x^2 y \times y^2 = x^{4+2} y^{3+1+2} = x^6 y^6$
 (2) $(x^3)^2 \times (x^2)^3 = x^{3 \times 2} \times x^{2 \times 3} = x^{6+6} = x^{12}$
 (3) $x \times \left(\frac{x}{y^2}\right)^2 = x \times \frac{x^2}{y^{2 \times 2}} = \frac{x^{1+2}}{y^4} = \frac{x^3}{y^4}$
- 02 (1) 64의 세제곱근을 x 라고 하면 $x^3 = 64$ 이므로
 $x^3 - 64 = 0$
 $(x-4)(x^2+4x+16) = 0$
 $x = 4$ 또는 $x = -2 \pm 2\sqrt{3}i$
 따라서 64의 세제곱근은 4, $-2 \pm 2\sqrt{3}i$ 이다.
 (2) 0.0001의 네제곱근을 x 라고 하면 $x^4 = 0.0001$ 이므로
 $x^4 - 0.0001 = 0$
 $(x^2 - 0.01)(x^2 + 0.01) = 0$
 $(x+0.1)(x-0.1)(x+0.1i)(x-0.1i) = 0$
 $x = \pm 0.1$ 또는 $x = \pm 0.1i$
 따라서 0.0001의 네제곱근은 ± 0.1 , $\pm 0.1i$ 이다.
- 03 (1) -125의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -5이므로
 $\sqrt[3]{-125} = -5$
 (2) $\frac{16}{81}$ 의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $-\frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ 이고,
 $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$ 은 양수이므로 $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$
 (3) 32의 다섯제곱근 중에서 실수인 것은 2이므로
 $-5\sqrt[5]{32} = -2$
 (4) 1의 여섯제곱근 중에서 실수인 것은 -1, 1이고,
 $-6\sqrt[6]{1}$ 은 음수이므로 $-6\sqrt[6]{1} = -1$
- 04 (1) $\sqrt[4]{3} \times \sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{3 \times 27} = \sqrt[4]{3^4} = 3$
 (2) $\frac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt[3]{4}} = \sqrt[3]{\frac{32}{4}} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
 (3) $(\sqrt[5]{5})^{15} = 5\sqrt[5]{5^{15}} = 5\sqrt[5]{(5^3)^5} = 5^3 = 125$
 (4) $\sqrt[3]{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[6]{729} = \sqrt[6]{3^6} = 3$
- 05 (1) $\sqrt[3]{8} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^3} + \sqrt[3]{2 \times 4} = 2 + \sqrt[3]{2^3} = 2 + 2 = 4$
 (2) $\sqrt[3]{16} \div \sqrt[6]{4} \div \sqrt[4]{256} = \sqrt[3]{2^4} \div \sqrt[6]{2^2} \div \sqrt[4]{2^8} = 2^{\frac{4}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} \div 2^2 = 2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}-2} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

- 06 정육면체의 한 변의 길이를 a , 구하는 정육면체의 한 변의 길이를 a' 이라고 하면

$$a'^3 = 64a^3, a' = 4a$$

따라서 정육면체의 한 변의 길이를 4배로 해야 한다.

02 지수의 확장

16~25쪽

- 01 (1) $0.1^0 = 1$
 (2) $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$
 (3) $(-7)^{-3} = \frac{1}{(-7)^3} = -\frac{1}{343}$
 (4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3} = (-2)^3 = -8$
- 02 (1) $7^{-5} \times 7^6 = 7^{-5+6} = 7$
 (2) $(-2)^5 \div (-2)^7 = (-2)^{5-7} = (-2)^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4}$
 (3) $(x^2)^3 \times (x^{-1})^2 = x^6 \times x^{-2} = x^{6-2} = x^4$
 (4) $(xy^{-1})^{-2} \div (x^{-3}y^2)^3 = x^{-2}y^2 \div x^{-9}y^6 = x^{-2-(-9)}y^{2-6} = x^7y^{-4} = \frac{x^7}{y^4}$
- 03 ①-㉔, ②-㉕, ③-㉖, ④-㉗
- 04 (1) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{(2^3)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$
 (2) $27^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27^{-1}} = \sqrt[3]{(3^3)^{-1}} = \sqrt[3]{3^{-3}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
 (3) $16^{0.25} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$
 (4) $64^{-0.5} = 64^{-\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{64^{-1}} = \sqrt{(8^2)^{-1}} = \sqrt{(8^{-1})^2} = 8^{-1} = \frac{1}{8}$
- 05 (1) $5^{\frac{1}{3}} \times 5^{-\frac{4}{3}} = 5^{\frac{1}{3}-\frac{4}{3}} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$
 (2) $3^{\frac{3}{2}} \div 3^{-\frac{1}{2}} = 3^{\frac{3}{2}-(-\frac{1}{2})} = 3^2 = 9$
 (3) $(125^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = \{(5^3)^{\frac{2}{3}}\}^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5$
 (4) $2^{\frac{8}{5}} \times 5^{-\frac{7}{5}} \times 10^{-\frac{3}{5}} = 2^{\frac{8}{5}} \times 5^{-\frac{7}{5}} \times (2 \times 5)^{-\frac{3}{5}} = 2^{\frac{8}{5}} \times 5^{-\frac{7}{5}} \times 2^{-\frac{3}{5}} \times 5^{-\frac{3}{5}} = 2^{\frac{8}{5}-\frac{3}{5}} \times 5^{-\frac{7}{5}-\frac{3}{5}} = 2 \times 5^{-2} = \frac{2}{25}$

06 (1) $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[6]{a^4} = (a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{4}{6}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = a$

(2) $(a + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)(a - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} + b)$
 $= \{(a+b) + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\} \{(a+b) - a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\}$
 $= (a+b)^2 - (a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}})^2$
 $= a^2 + 2ab + b^2 - ab = a^2 + ab + b^2$

07 $\sqrt{a} \times a^{\frac{5}{2}} \div a^{-0.25} + (1 - a^{\frac{3}{2}})(1 + a^{\frac{3}{2}})$
 $= (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{5}{2}} \div a^{-\frac{1}{4}} + \{1^2 - (a^{\frac{3}{2}})^2\}$
 $= a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{5}{2}} \div a^{-\frac{1}{4}} + 1 - a^3$
 $= a^{\frac{1}{4} + \frac{5}{2} - (-\frac{1}{4})} + 1 - a^3 = a^3 + 1 - a^3 = 1$
 따라서 $a^k = 1$ 이므로 $k = 0$

08 공룡 A가 달리는 속력은

$$0.25 \times 9.8^{0.5} \times 8^{1.67} \times 4^{-1.17} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

공룡 B가 달리는 속력은

$$0.25 \times 9.8^{0.5} \times 4^{1.67} \times 2^{-1.17} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

① ÷ ②를 하면

$$\frac{0.25 \times 9.8^{0.5} \times 8^{1.67} \times 4^{-1.17}}{0.25 \times 9.8^{0.5} \times 4^{1.67} \times 2^{-1.17}} = \frac{(2^3)^{1.67} \times (2^2)^{-1.17}}{(2^2)^{1.67} \times 2^{-1.17}}$$

$$= 2^{1.67} \times 2^{-1.17} = 2^{1.67-1.17} = 2^{0.5} = \sqrt{2}$$

따라서 공룡 A가 달리는 속력은 공룡 B가 달리는 속력의 $\sqrt{2}$ 배이다.

09 $9g = 9 \times 10^{-3} \text{ kg}$ 이므로 물 9g에 포함된 물 분자의 수는 $\frac{9 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-26}} = 3 \times 10^{-3 - (-26)} = 3 \times 10^{23}$

10 (1) $3\sqrt{2\pi} \times 4^{\frac{\pi}{3}} = 2^{\frac{\pi}{3}} \times (2^2)^{\frac{\pi}{3}} = 2^{\frac{\pi}{3}} \times 2^{\frac{2\pi}{3}} = 2^{\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}} = 2^\pi$

(2) $6^{\sqrt{18}} \div 6^{\sqrt{8}} = 6^{3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}} = 6^{\sqrt{2}}$

(3) $(5^{-\sqrt{3}})^{\frac{1}{\sqrt{12}}} = 5^{-\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{12}}} = 5^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

(4) $(3^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \times 2^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 3^{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}} \times 2^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 3 \times 2^2 = 12$

11 예 $2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ 이므로 (유리수)^(유리수)이 항상 유리수인 것은 아니다.

03 로그의 뜻과 성질

26~34쪽

01 (1) $0 = \log_{11} 1$

(2) $3 = \log_5 125$

(3) $\frac{1}{2} = \log_7 \sqrt{7}$

(4) $-2 = \log_2 0.25$

02 (1) $10^0 = 1$

(2) $2^6 = 64$

(3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9$

(4) $9^{\frac{3}{2}} = 27$

03 (1) $\log_4 64 = x$ 라고 하면 로그의 정의에 따라

$$4^x = 64$$

$$64 = 4^3 \text{이므로 } x = 3$$

따라서 $\log_4 64 = 3$ 이다.

(2) $\log_7 1 = x$ 라고 하면 로그의 정의에 따라

$$7^x = 1$$

$$1 = 7^0 \text{이므로 } x = 0$$

따라서 $\log_7 1 = 0$ 이다.

(3) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = x$ 라고 하면 로그의 정의에 따라

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \text{이므로 } x = 2$$

따라서 $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = 2$ 이다.

(4) $\log_{0.5} 4 = x$ 라고 하면 로그의 정의에 따라

$$0.5^x = 4$$

$$4 = 2^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 0.5^{-2} \text{이므로 } x = -2$$

따라서 $\log_{0.5} 4 = -2$ 이다.

04 예 $x = \log_a N$ ($a > 0, a \neq 1$)에서 진수 N 이 0이면, $a^x = 0$ 이어야 한다. 이를 만족시키는 실수 x 는 존재하지 않으므로 진수가 0인 로그를 정의하지 않는다.

05 (1) $\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4 (2 \times 8) = \log_4 16$
 $= \log_4 4^2 = 2 \log_4 4 = 2$

(2) $\log_5 45 - \log_5 9 = \log_5 \frac{45}{9} = \log_5 5 = 1$

(3) $\log_2 \frac{1}{32} = \log_2 2^{-5} = -5 \log_2 2 = -5$

(4) $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{81} = \log_{\frac{1}{3}} 81^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

$$= \frac{1}{2} \times (-4) \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{2} \times (-4) = -2$$

06 (1) $\log_5 75 + \log_5 \frac{5}{3} = \log_5 \left(75 \times \frac{5}{3}\right) = \log_5 125$
 $= \log_5 5^3 = 3 \log_5 5 = 3$

(2) $\log_2 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \log_2 10 - \log_2 \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$= \log_2 2\sqrt{2} - \log_2 10^{\frac{1}{2}} - \log_2 \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \log_2 2\sqrt{2} - \log_2 \sqrt{10} - \log_2 \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \log_2 \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10} \times \frac{1}{\sqrt{5}}} = \log_2 2 = 1$$

07 (1) $\log_5 24 = \log_5 (2^3 \times 3) = \log_5 2^3 + \log_5 3$

$= 3 \log_5 2 + \log_5 3 = 3a + b$

(2) $\log_5 \sqrt[4]{3.6} = \log_5 \left(\frac{36}{10} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \log_5 \left(\frac{2 \times 3^2}{5} \right)$

$= \frac{1}{4} (\log_5 2 + \log_5 3^2 - \log_5 5)$

$= \frac{1}{4} (\log_5 2 + 2 \log_5 3 - \log_5 5)$

$= \frac{1}{4} a + \frac{1}{2} b - \frac{1}{4}$

08 (1) $\log_{27} 81 = \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3}$

$= \frac{4 \log_3 3}{3 \log_3 3} = \frac{4}{3}$

(2) $\log_{\sqrt{2}} 36 \times \log_6 \frac{1}{4} = \frac{\log_6 36}{\log_6 \sqrt{2}} \times \log_6 \frac{1}{4}$

$= \frac{\log_6 6^2}{\log_6 2^{\frac{1}{2}}} \times \log_6 2^{-2}$

$= \frac{2 \log_6 6}{\frac{1}{2} \log_6 2} \times (-2 \log_6 2)$

$= -8$

09 (1) $\log_9 10 = \frac{\log_3 10}{\log_3 9} = \frac{\log_3 (2 \times 5)}{\log_3 3^2}$

$= \frac{\log_3 2 + \log_3 5}{2 \log_3 3} = \frac{a+b}{2}$

(2) $\log_{30} 75 = \frac{\log_3 75}{\log_3 30} = \frac{\log_3 (3 \times 5^2)}{\log_3 (2 \times 3 \times 5)}$

$= \frac{\log_3 3 + \log_3 5^2}{\log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 5}$

$= \frac{\log_3 3 + 2 \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 5} = \frac{2b+1}{a+b+1}$

10 (1) $\frac{1}{\log_3 2} \times \frac{1}{\log_4 3} = \frac{1}{\log_3 2} \times \log_3 4$

$= \frac{1}{\log_3 2} \times \log_3 2^2$

$= \frac{1}{\log_3 2} \times 2 \log_3 2 = 2$

(2) $\log_{36} 216 = \log_{6^2} 6^3 = \frac{3}{2} \log_6 6 = \frac{3}{2}$

02 (1) $\log 3.15$ 의 값은 0.4983105537...이므로 소수점 아래 다섯째 자리에서 반올림하면 0.4983이다.

(2) $\log 5.91$ 의 값은 0.7715874808...이므로 소수점 아래 다섯째 자리에서 반올림하면 0.7716이다.

03 (1) $\log 828 = \log (10^2 \times 8.28)$

$= \log 10^2 + \log 8.28$

$= 2 + 0.918 = 2.918$

(2) $\log 0.00828 = \log (10^{-3} \times 8.28)$

$= \log 10^{-3} + \log 8.28$

$= -3 + 0.918 = -2.082$

04 $C = 52600$, $C_0 = 2 \times 10^5$ 이므로

$\log \frac{52600}{2 \times 10^5} = \log \frac{10^4 \times 5.26}{2 \times 10^5}$

$= \log (10^{-1} \times 2.63)$

$= \log 10^{-1} + \log 2.63$

$= -1 + 0.42 = -0.58$

$-0.58 = -0.2t$ 이므로

$t = 2.9$

따라서 2시간 54분 후이다.

05 높이가 0.7 km인 곳의 기압을 P_1 이라고 하면

$0.7 = -3.3 \log P_1$ 이므로

$\log P_1 = -\frac{0.7}{3.3} \dots\dots ①$

높이가 4 km인 곳의 기압을 P_2 라고 하면

$4 = -3.3 \log P_2$ 이므로

$\log P_2 = -\frac{4}{3.3} \dots\dots ②$

①-②를 하면

$\log P_1 - \log P_2 = \frac{3.3}{3.3}, \log \frac{P_1}{P_2} = 1$

$\frac{P_1}{P_2} = 10$

따라서 10배이다.

04 상용로그

35~39쪽

01 (1) $\log 100\sqrt{10} = \log 10^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}$

(2) $\log \frac{1}{\sqrt{10}} = \log 10^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$

2 지수함수와 로그함수

01 지수함수의 뜻과 그래프

48~54쪽

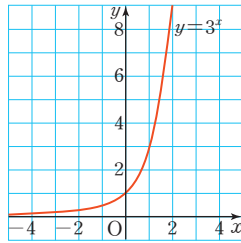
01 (1), (2), (3) 지수함수이다.

(4) $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$)의 꼴이 아니므로 지수함수가 아니다.

- 02 (1) 함수 $y=3^x$ 에서 실수 x 의 값에 대응하는 y 의 값을 구하여 표로 나타내면 다음과 같다.

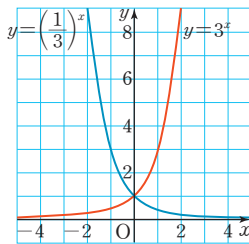
x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	...

x, y 의 값의 순서쌍 (x, y) 를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내고 매끄러운 곡선으로 연결하면 함수 $y=3^x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

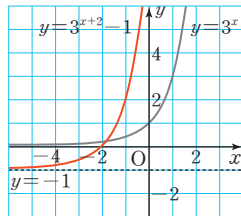


- (2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x = (3^{-1})^x = 3^{-x}$ 이므로 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프는 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

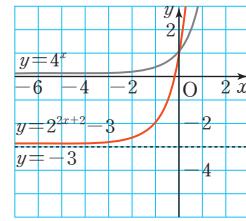
따라서 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



- 03 (1) 함수 $y=3^{x+2}-1$ 의 그래프는 함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것과 같다.
따라서 함수 $y=3^{x+2}-1$ 의 그래프는 다음 그림과 같고, 점근선은 직선 $y=-1$ 이다.



- (2) $y = 2^{2x+2} - 3 = 2^{2(x+1)} - 3 = 4^{x+1} - 3$ 이므로 함수 $y = 2^{2x+2} - 3$ 의 그래프는 함수 $y = 4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것과 같다.
따라서 함수 $y = 2^{2x+2} - 3$ 의 그래프는 다음 그림과 같고, 점근선은 직선 $y = -3$ 이다.



- 04 (1) 주어진 수의 밑을 모두 2로 바꾸면

$$\sqrt[5]{64} = (2^6)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{6}{5}}$$

$$\sqrt[3]{16} = (2^4)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}}$$

함수 $y=2^x$ 은 밑이 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

$$\text{이때 } \frac{6}{5} < \frac{4}{3} \text{ 이므로}$$

$$\sqrt[5]{64} < \sqrt[3]{16}$$

- (2) 주어진 수의 밑을 모두 $\frac{1}{3}$ 로 바꾸면

$$\sqrt[4]{\frac{1}{27}} = \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^3 \right\}^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{3}{4}}$$

$$\sqrt[6]{\frac{1}{81}} = \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^4 \right\}^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{2}{3}}$$

함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 은 밑이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

$$\text{이때 } \frac{3}{4} > \frac{2}{3} \text{ 이므로}$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{27}} < \sqrt[6]{\frac{1}{81}}$$

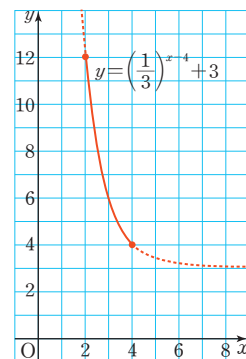
- 05 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-4} + 3$ 은 밑이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 이 함수는

$$x=2 \text{ 일 때, 최댓값 } \left(\frac{1}{3}\right)^{2-4} + 3 = 9 + 3 = 12$$

$$x=4 \text{ 일 때, 최솟값 } \left(\frac{1}{3}\right)^{4-4} + 3 = 1 + 3 = 4$$

를 갖는다.



06 예 지수함수는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하거나, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

(i) x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 경우
 $x=2$ 일 때 최댓값 27, $x=-1$ 일 때 최솟값 1을
 가지므로 $y=3^{x+1}$

(ii) x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 경우
 $x=-1$ 일 때 최댓값 27, $x=2$ 일 때 최솟값 1을
 가지므로 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$

(i), (ii)에서 $y=3^{x+1}$ 또는 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$

02 로그함수의 뜻과 그래프

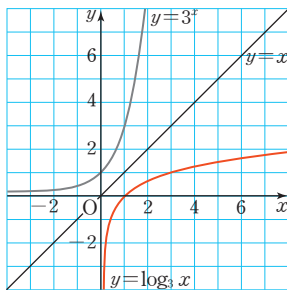
55~61쪽

01 (2), (4) 로그함수이다.

(1), (3) $y=\log_a x$ ($a>0$, $a\neq 1$)의 꼴이 아니므로 로그함수가 아니다.

02 (1) 로그함수 $y=\log_3 x$ 의 그래프는 지수함수 $y=3^x$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

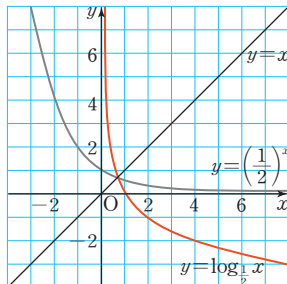
따라서 함수 $y=\log_3 x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) 로그함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프는 지수함수

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 것과 같다.

따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

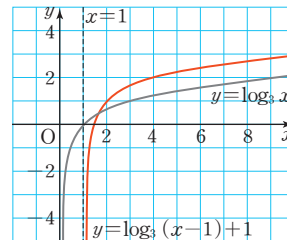


03 (1) 함수 $y=\log_3(x-1)+1$ 의 그래프는 함수

$y=\log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼,

y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 함수 $y=\log_3(x-1)+1$ 의 그래프는 다음 그림과 같고, 점근선은 직선 $x=1$ 이다.

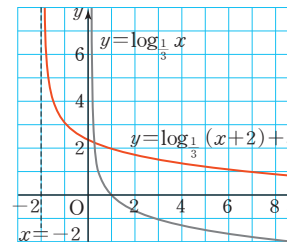


(2) 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+3$ 의 그래프는 함수

$y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼,

y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것과 같다.

따라서 함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+2)+3$ 의 그래프는 다음 그림과 같고, 점근선은 직선 $x=-2$ 이다.



04 (1) $\log_{\frac{1}{2}} 9$ 의 밑을 $\frac{1}{4}$ 로 바꾸면

$$\log_{\frac{1}{2}} 9 = \log_{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} 9 = 2 \log_{\frac{1}{4}} 9 = \log_{\frac{1}{4}} 81$$

함수 $y=\log_{\frac{1}{4}} x$ 는 밑이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

이때 $81 < 100$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{2}} 9 > \log_{\frac{1}{4}} 100$$

(2) 주어진 수의 밑을 모두 7로 바꾸면

$$\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{3} = \log_{7^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{3} = 2 \log_7 \frac{1}{3} = \log_7 \frac{1}{9}$$

$$\log_{\frac{1}{7}} 8 = \log_{7^{-1}} 8 = -\log_7 8 = \log_7 \frac{1}{8}$$

함수 $y=\log_7 x$ 는 밑이 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

이때 $\frac{1}{9} < \frac{1}{8}$ 이므로

$$\log_{\sqrt{7}} \frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{7}} 8$$

05 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x-2)+3$ 은 밑이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 이 함수는

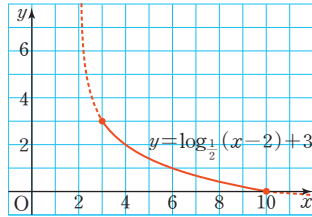
$x=3$ 일 때, 최댓값

$$\log_{\frac{1}{2}}(3-2)+3=0+3=3$$

$x=10$ 일 때, 최솟값

$$\log_{\frac{1}{2}}(10-2)+3=-3+3=0$$

을 갖는다.



06 예 로그함수는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하거나, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

(i) x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 경우

$x=12$ 일 때 최댓값 1, $x=4$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로

$$y=\log_3(x-3)-1$$

(ii) x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 경우

$x=4$ 일 때 최댓값 1, $x=12$ 일 때 최솟값 -1 을 가지므로

$$y=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)+1$$

(i), (ii)에서

$$y=\log_3(x-3)-1$$

$$\text{또는 } y=\log_{\frac{1}{3}}(x-3)+1$$

03 지수함수와 로그함수의 활용

62~71쪽

01 (1) $25=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$ 이므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x+1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$

$$3x+1=-2 \text{에서 } x=-1$$

(2) $4^{-x+3}=(2^2)^{-x+3}=2^{-2x+6}$ 이고

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{x-4}=(2^{-3})^{x-4}=2^{-3x+12} \text{이므로}$$

$$2^{-2x+6}=2^{-3x+12}$$

$$-2x+6=-3x+12 \text{에서 } x=6$$

02 (1) $\left(\frac{1}{49}\right)^x=\left\{\left(\frac{1}{7}\right)^2\right\}^x=\left(\frac{1}{7}\right)^{2x}$ 이므로
 $\left(\frac{1}{7}\right)^{2x}<\left(\frac{1}{7}\right)^{3x-1}$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } 2x>3x-1$$

$$\text{따라서 } x<1$$

(2) $81^x=(3^4)^x=3^{4x}$ 이고

$$\sqrt{3} \times 3^{2x}=3^{\frac{1}{2}} \times 3^{2x}=3^{\frac{1}{2}+2x} \text{이므로}$$

$$3^{4x} \geq 3^{\frac{1}{2}+2x}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } 4x \geq \frac{1}{2}+2x$$

$$\text{따라서 } x \geq \frac{1}{4}$$

03 x 년 후 컴퓨터의 가격이 80만 원이 된다고 하면

$$125\left(1-\frac{20}{100}\right)^x=80 \text{에서 } \left(\frac{4}{5}\right)^x=\frac{80}{125}$$

$$\frac{80}{125}=\frac{16}{25}=\left(\frac{4}{5}\right)^2 \text{이므로 } \left(\frac{4}{5}\right)^x=\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\text{즉, } x=2$$

따라서 가격이 80만 원이 되는 것은 현재부터 2년 후이다.

04 x 년 후 이익금이 320만 원 이상이 된다고 하면

$$180\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{x}{5}} \geq 320 \text{에서 } \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{x}{5}} \geq \frac{320}{180}$$

$$\frac{320}{180}=\frac{16}{9}=\left(\frac{4}{3}\right)^2 \text{이므로 } \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{x}{5}} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^2$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{x}{5} \geq 2 \text{에서 } x \geq 10$$

따라서 이익금이 320만 원 이상이 되는 것은 투자한 지 10년 후이다.

05 (1) 주어진 방정식에서 $x-4=8^{\frac{1}{3}}$ 이므로

$$x-4=2, x=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

진수의 조건에서 $x-4>0$ 이므로

$$x>4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } x=6$$

(2) $2 \log_4(x-3)=\log_4(x-3)^2$ 이므로

$$\log_4(x-3)^2=\log_4(x-1)$$

$$(x-3)^2=(x-1) \text{에서}$$

$$x^2-7x+10=0$$

$$(x-2)(x-5)=0$$

$$x=2 \text{ 또는 } x=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

진수의 조건에서 $x-3>0, x-1>0$ 이므로

$$x>3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } x=5$$

06 (1) $\frac{1}{2} = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{4}} (x+3) \leq \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{2}$$

밑이 1보다 작으므로

$$x+3 \geq \frac{1}{2}$$

$$x \geq -\frac{5}{2} \quad \dots\dots ①$$

진수의 조건에서 $x+3 > 0$ 이므로

$$x > -3 \quad \dots\dots ②$$

①, ②에서 $x \geq -\frac{5}{2}$

(2) 밑이 1보다 크므로

$$x+1 > 2x-1$$

$$x < 2 \quad \dots\dots ①$$

진수의 조건에서 $x+1 > 0$, $2x-1 > 0$ 이므로

$$x > \frac{1}{2} \quad \dots\dots ②$$

①, ②에서 $\frac{1}{2} < x < 2$

07 $S \geq 6000$ 이므로

$$2000 \log m \geq 6000$$

$$\log m \geq 3$$

$$\log m \geq \log 10^3$$

밑이 1보다 크므로

$$m \geq 10^3$$

$$m \geq 1000$$

따라서 최소 1000만 원 이상 사용해야 한다.

08 $T_0=80$, $T_1=20$ 이고 $10 \leq t \leq 20$ 이므로

$$10 \leq -10 \log \frac{T-20}{80-20} \leq 20$$

$$-2 \leq \log \frac{T-20}{60} \leq -1$$

$$\log 10^{-2} \leq \log \frac{T-20}{60} \leq \log 10^{-1}$$

밑이 1보다 크므로

$$10^{-2} \leq \frac{T-20}{60} \leq 10^{-1}$$

$$20.6 \leq T \leq 26$$

따라서 물체의 온도는 20.6°C 이상 26°C 이하이다.

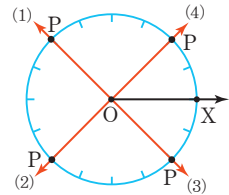
II 삼각함수

1 삼각함수

01 일반각과 호도법

87~95쪽

01 눈금 한 칸이 나타내는 각의 크기가 22.5° 이므로 동경 OP는 각각 다음과 같다.



02 (1) $450^\circ = 360^\circ \times 1 + 90^\circ$ 이므로 일반각은

$$360^\circ \times n + 90^\circ$$

(2) $750^\circ = 360^\circ \times 2 + 30^\circ$ 이므로 일반각은

$$360^\circ \times n + 30^\circ$$

(3) $-140^\circ = 360^\circ \times (-1) + 220^\circ$ 이므로 일반각은

$$360^\circ \times n + 220^\circ$$

(4) $-420^\circ = 360^\circ \times (-2) + 300^\circ$ 이므로 일반각은

$$360^\circ \times n + 300^\circ$$

03 (1) $480^\circ = 360^\circ \times 1 + 120^\circ$

따라서 480° 는 제2사분면의 각이다.

(2) $805^\circ = 360^\circ \times 2 + 85^\circ$

따라서 805° 는 제1사분면의 각이다.

(3) $-410^\circ = 360^\circ \times (-2) + 310^\circ$

따라서 -410° 는 제4사분면의 각이다.

(4) $-880^\circ = 360^\circ \times (-3) + 200^\circ$

따라서 -880° 는 제3사분면의 각이다.

04 ① $150^\circ = 150 \times 1^\circ = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{6} \pi$

② $210^\circ = 210 \times 1^\circ = 210 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{6} \pi$

③ $-75^\circ = -75 \times 1^\circ = -75 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{5}{12} \pi$

④ $-315^\circ = -315 \times 1^\circ = -315 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{7}{4} \pi$

따라서 다음과 같다.

①-㉔, ②-㉕, ③-㉖, ④-㉗

05 (1) $\frac{13}{6} \pi = 2\pi \times 1 + \frac{\pi}{6}$ 이므로 일반각은 $2n\pi + \frac{\pi}{6}$

(2) $-\frac{17}{2} \pi = 2\pi \times (-5) + \frac{3}{2} \pi$ 이므로 일반각은

$$2n\pi + \frac{3}{2} \pi$$

(3) $\frac{22}{3}\pi = 2\pi \times 3 + \frac{4}{3}\pi$ 이므로 일반각은

$$2n\pi + \frac{4}{3}\pi$$

(4) $-\frac{31}{9}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{5}{9}\pi$ 이므로 일반각은

$$2n\pi + \frac{5}{9}\pi$$

06 (1) 부채꼴의 호의 길이는 $12 \times \frac{2}{3}\pi = 8\pi$

따라서 8π cm이다.

부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 12^2 \times \frac{2}{3}\pi = 48\pi$

따라서 48π cm²이다.

(2) 부채꼴의 반지름의 길이를 r , 중심각의 크기를 θ 라고 하면 $r\theta = 9\pi$, $\frac{1}{2}r^2\theta = 36\pi$

두 식을 연립하여 풀면 $r = 8$, $\theta = \frac{9}{8}\pi$

따라서 반지름의 길이는 8 cm, 중심각의 크기는 $\frac{9}{8}\pi$ 이다.

07 색칠한 부분의 넓이는 부채꼴 OCD의 넓이에서 부채꼴 OAB의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\frac{1}{2} \times 16^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 7^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{69}{2}\pi$$

따라서 69π cm²이다.

02 삼각함수의 뜻

96~103쪽

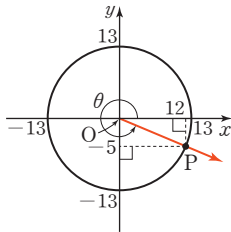
01 $\overline{OP} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$

이므로

$$\sin \theta = -\frac{5}{13}$$

$$\cos \theta = \frac{12}{13}$$

$$\tan \theta = -\frac{5}{12}$$



02 (1) 다음 그림과 같이 $\theta = \frac{5}{6}\pi$ 를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

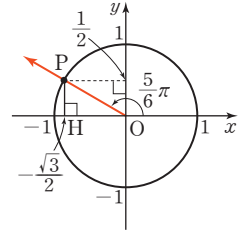
$\angle POH = \frac{\pi}{6}$ 이므로 점 P의 좌표는 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

따라서

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$



(2) 다음 그림과 같이 $\theta = -\frac{\pi}{3}$ 를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

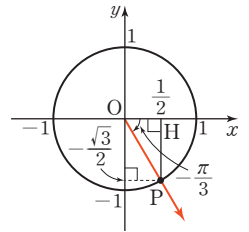
$\angle POH = \frac{\pi}{3}$ 이므로 점 P의 좌표는 $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$

따라서

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\tan \theta = -\sqrt{3}$$



03 (1) $\frac{2}{7}\pi$ 는 제1사분면의 각이므로

$$\sin \frac{2}{7}\pi > 0, \cos \frac{2}{7}\pi > 0, \tan \frac{2}{7}\pi > 0$$

(2) $-\frac{4}{5}\pi$ 는 제3사분면의 각이므로

$$\sin \left(-\frac{4}{5}\pi\right) < 0, \cos \left(-\frac{4}{5}\pi\right) < 0,$$

$$\tan \left(-\frac{4}{5}\pi\right) > 0$$

(3) 170° 는 제2사분면의 각이므로

$$\sin 170^\circ > 0, \cos 170^\circ < 0, \tan 170^\circ < 0$$

(4) -40° 는 제4사분면의 각이므로

$$\sin (-40^\circ) < 0, \cos (-40^\circ) > 0,$$

$$\tan (-40^\circ) < 0$$

04 각 θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

따라서

$$|\cos \theta - \sin \theta| - \sqrt{(\cos \theta)^2} - |\sin \theta - \tan \theta|$$

$$= -(\cos \theta - \sin \theta) - (-\cos \theta)$$

$$-(\sin \theta - \tan \theta)$$

$$= \tan \theta$$

05 $\sin \theta > 0$ 이면 각 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고, $\cos \theta < 0$ 이면 각 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

따라서 각 θ 는 제2사분면의 각이다.

06 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{24}{25}$$

그런데 각 θ 가 제4사분면의 각이면 $\sin \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta = -\sqrt{\frac{24}{25}} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

$$\text{또 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \text{에서 } \tan \theta = \frac{-\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = -2\sqrt{6}$$

07 (1) $\sin \theta + \cos \theta = -\frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

이때 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

(2) $(\sin \theta - \cos \theta)^2$

$$= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{4}$$

$$\text{따라서 } \sin \theta - \cos \theta \text{의 값은 } -\frac{\sqrt{7}}{2} \text{ 또는 } \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\begin{aligned} 08 \quad (1 - \sin^2 \theta)(1 + \tan^2 \theta) &= \cos^2 \theta \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) \\ &= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

03 삼각함수의 그래프

104~120쪽

01 (1) $\cos \frac{9}{4}\pi = \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(2) $\sin \frac{13}{3}\pi = \sin \left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\sin \frac{15}{4}\pi = \sin \left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\cos \frac{35}{6}\pi = \cos \left(6\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

02 $\begin{aligned} &\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) \times \cos \frac{7}{3}\pi - \sin \frac{11}{6}\pi \times \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) \times \cos \left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) \\ &\quad - \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) \times \cos \left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{2} \times \cos \frac{\pi}{3} - \sin \left(-\frac{\pi}{6}\right) \times \cos \frac{\pi}{3} \\ &= -\sin \frac{\pi}{2} \times \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{6} \times \cos \frac{\pi}{3} \\ &= -1 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$

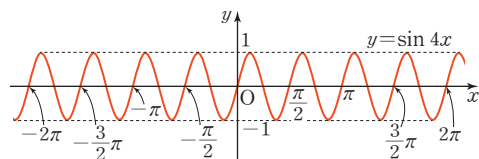
03 (1) $f(x) = \sin 4x$ 라고 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 4x \\ &= \sin (4x + 2\pi) \\ &= \sin 4\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

이므로 함수 $y = \sin 4x$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이다.

또 $-1 \leq \sin 4x \leq 1$ 이므로 치역은

$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 이고, 함수 $y = \sin 4x$ 의 그래프는 다음과 같다.



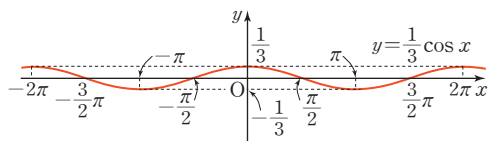
(2) $f(x) = \frac{1}{3} \cos x$ 라고 하면

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} \cos x \\ &= \frac{1}{3} \cos (x + 2\pi) \\ &= f(x + 2\pi) \end{aligned}$$

이므로 함수 $y = \frac{1}{3} \cos x$ 의 주기는 2π 이다.

또 $-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} \cos x \leq \frac{1}{3}$ 이므로 치역은

$\left\{y \mid -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{1}{3}\right\}$ 이고, 함수 $y = \frac{1}{3} \cos x$ 의 그래프는 다음과 같다.



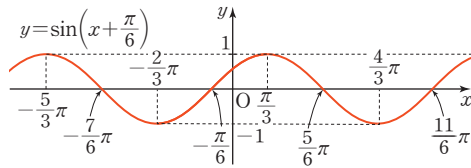
04 (1) 함수 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 의 그래프는 함수

$y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{6}$ 만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 의 주기는 함수 $y = \sin x$ 의 주기와 같으므로 2π 이다.

또 $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ 이므로 치역은

$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 이고, 함수 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) 함수 $y = \frac{1}{2} \cos x + 1$ 의 그래프는 함수

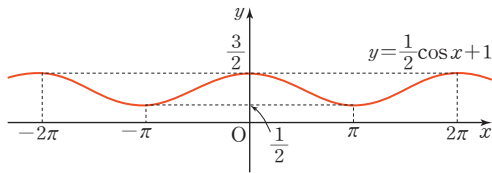
$y = \frac{1}{2} \cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y = \frac{1}{2} \cos x + 1$ 의 주기는 함수

$y = \frac{1}{2} \cos x$ 의 주기와 같으므로 2π 이다.

또 $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \cos x + 1 \leq \frac{3}{2}$ 이므로 치역은

$\left\{y \mid \frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}\right\}$ 이고, 함수 $y = \frac{1}{2} \cos x + 1$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



05 ①-㉠-㉡, ②-㉢-㉣,
③-㉤-㉥, ④-㉦-㉧

06 ①-㉢-㉣, ②-㉤-㉥,
③-㉦-㉧, ④-㉠-㉡

07 (1) $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\tan \frac{7}{3}\pi = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

(3) $\tan \frac{11}{4}\pi = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$
 $= -\tan \frac{\pi}{4} = -1$

08 (1) $f(x) = \tan \frac{x}{2}$ 라고 하면

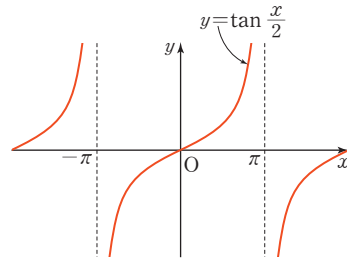
$$\begin{aligned} f(x) &= \tan \frac{x}{2} = \tan\left(\frac{x}{2} + \pi\right) \\ &= \tan \frac{x+2\pi}{2} \\ &= f(x+2\pi) \end{aligned}$$

이므로 함수 $y = \tan \frac{x}{2}$ 의 주기는 2π ,

점근선은 직선 $\frac{x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$

즉, $x = 2n\pi + \pi$ (n 은 정수)이므로 함수

$y = \tan \frac{x}{2}$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



(2) 함수 $y = 2 \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 함수

$y = 2 \tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

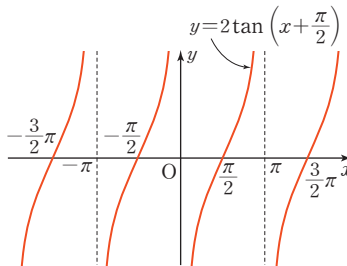
함수 $y = 2 \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 주기는 함수

$y = 2 \tan x$ 의 주기와 같으므로 π ,

점근선은 직선 $x + \frac{\pi}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$

즉, $x = n\pi$ (n 은 정수)이므로 함수

$y = 2 \tan\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



09 (1) $\sin(-153^\circ)$ 의 값은 $-0.4539904997\cdots$ 이므로 소수점 아래 다섯째 자리에서 반올림하면 -0.4540 이다.

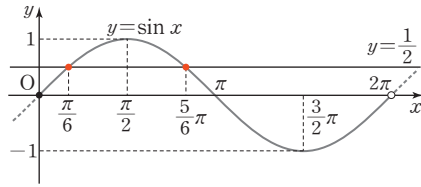
(2) $\cos 3.1\pi$ 의 값은 $-0.9510565162\cdots$ 이므로 소수점 아래 다섯째 자리에서 반올림하면 -0.9511 이다.

(3) $\tan 710^\circ$ 의 값은 $-0.1763269807\cdots$ 이므로 소수점 아래 다섯째 자리에서 반올림하면 -0.1763 이다.

10 (1) 방정식 $\sin x = \frac{1}{2}$ 의 해는 다음 그림에서 함수

$y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표

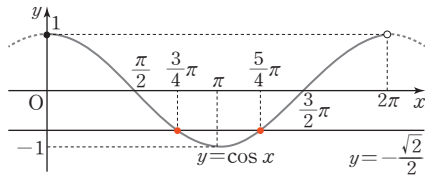
와 같으므로 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5\pi}{6}$



(2) 방정식 $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는 다음 그림에서 함수

$y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의

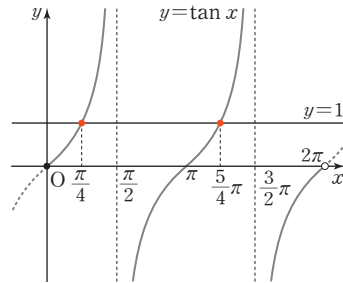
x 좌표와 같으므로 $x = \frac{3\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{5\pi}{4}$



(3) 방정식 $\tan x = 1$ 의 해는 다음 그림에서 함수

$y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의 교점의 x 좌표

와 같으므로 $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{5\pi}{4}$

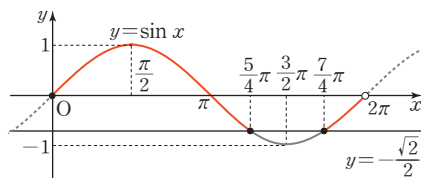


11 (1) 부등식 $\sin x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는 다음 그림에서 함수

$y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 와 만나거나

위쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$0 \leq x \leq \frac{5\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{7\pi}{4} \leq x < 2\pi$$

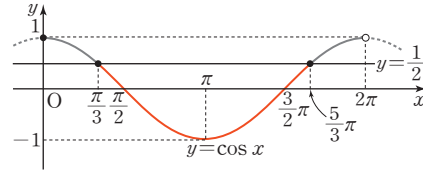


(2) 부등식 $\cos x \leq \frac{1}{2}$ 의 해는 다음 그림에서 함수

$y = \cos x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$ 과 만나거나 아래

쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$$



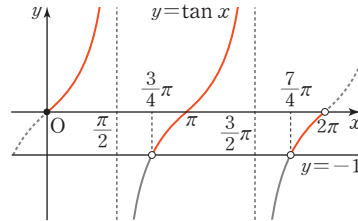
(3) 부등식 $\tan x > -1$ 의 해는 다음 그림에서 함수

$y = \tan x$ 의 그래프가 직선 $y = -1$ 보다 위쪽에 있

는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{또는 } \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$$



12 $(2 \sin x - 1)(2 \sin x + \sqrt{3}) < 0$ 을 풀면

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$$

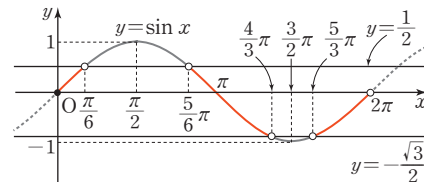
따라서 주어진 부등식의 해는 다음 그림에서 함수

$y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 보다 위쪽에 있고

직선 $y = \frac{1}{2}$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$0 \leq x < \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5\pi}{6} < x < \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{또는 } \frac{5\pi}{3} < x < 2\pi$$



2 사인법칙과 코사인법칙

01 사인법칙과 코사인법칙

129~143쪽

- 01 (1) 사인법칙에서 $\frac{b}{\sin B} = 2R$ 이므로

$$\frac{4}{\sin 45^\circ} = 2R, R = \frac{4}{2 \sin 45^\circ} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{또 } \frac{c}{\sin C} = 2R \text{에서 } \frac{c}{\sin 30^\circ} = 2 \times 2\sqrt{2}$$

$$\text{따라서 } c = 2 \times 2\sqrt{2} \times \sin 30^\circ = 2\sqrt{2}$$

- (2) 사인법칙에서 $\frac{b}{\sin B} = 2R$ 이므로

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R, R = \frac{3\sqrt{3}}{2 \sin 60^\circ} = 3$$

$$\text{또 } A = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ \text{이고}$$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \text{에서 } \frac{a}{\sin 45^\circ} = 2 \times 3$$

$$\text{따라서 } a = 2 \times 3 \times \sin 45^\circ = 3\sqrt{2}$$

- (3) 사인법칙에서 $\frac{a}{\sin A} = 2R$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R, R = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin 60^\circ} = 1$$

$$\text{또 } \frac{c}{\sin C} = 2R \text{에서}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin C} = 2 \times 1, \sin C = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{따라서 } C = 45^\circ$$

- 02 삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하자.

- (1) 사인법칙에서

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} \text{이므로}$$

$$a \times \frac{a}{2R} = b \times \frac{b}{2R} = c \times \frac{c}{2R}$$

$$\text{즉, } a^2 = b^2 = c^2$$

$$a > 0, b > 0, c > 0 \text{이므로}$$

$$a = b = c$$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

- (2) 사인법칙에서

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R} \text{이므로}$$

$$\frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R} = 3 : 4 : 5$$

$$\text{즉, } a : b : c = 3 : 4 : 5$$

$$a = 3k, b = 4k, c = 5k (k > 0) \text{라고 하면}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

- 03 삼각형 ABC에서 $C = 180^\circ - (77^\circ + 39^\circ) = 64^\circ$

$$\text{사인법칙에서 } \frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{\overline{AC}}{\sin B} \text{이므로}$$

$$\frac{900}{\sin 64^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 39^\circ}$$

$$\overline{AC} = \frac{900 \sin 39^\circ}{\sin 64^\circ} = 630$$

따라서 두 지점 A, C 사이의 거리는 630 m이다.

- 04 삼각형 ABD에서 $D = 37^\circ - 23^\circ = 14^\circ$

$$\text{사인법칙에서 } \frac{\overline{AB}}{\sin D} = \frac{\overline{BD}}{\sin A} \text{이므로}$$

$$\frac{100}{\sin 14^\circ} = \frac{\overline{BD}}{\sin 23^\circ}, \overline{BD} = \frac{100 \sin 23^\circ}{\sin 14^\circ}$$

삼각형 BCD에서

$$\begin{aligned} \overline{CD} &= \overline{BD} \times \sin 37^\circ \\ &= \frac{100 \sin 23^\circ}{\sin 14^\circ} \times \sin 37^\circ = 97.5 \end{aligned}$$

따라서 건물의 높이는 97.5 m이다.

- 05 삼각형 ABC에서 $C = 180^\circ - (75^\circ + 45^\circ) = 60^\circ$

$$\text{사인법칙에서 } \frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{\overline{AC}}{\sin B} \text{이므로}$$

$$\frac{120}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ}$$

$$\overline{AC} = \frac{120 \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = 40\sqrt{6}$$

$$\text{삼각형 DAC에서 } \overline{CD} = \overline{AC} \times \tan 30^\circ = 40\sqrt{2}$$

따라서 놀이기구의 높이는 $40\sqrt{2}$ m이다.

- 06 (1) 코사인법칙에서 $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ 이므로

$$b^2 = (2\sqrt{3})^2 + 3^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times 3 \times \cos 30^\circ = 3$$

$$\text{그런데 } b > 0 \text{이므로 } b = \sqrt{3}$$

- (2) 코사인법칙에서 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ 이므로

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{6^2 + (5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{26})^2}{2 \times 6 \times 5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{그런데 } 0^\circ < C < 180^\circ \text{이므로 } C = 45^\circ$$

- 07 코사인법칙에서 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$,

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} b \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \frac{bc}{a} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ = a - c \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } b^2 + c^2 = a^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

- 08 가장 짧은 변의 대각의 크기가 가장 작으므로 그 크기를 θ 라고 하면 코사인법칙에서

$$\cos \theta = \frac{4^2 + (3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10})^2}{2 \times 4 \times 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

그런데 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $\theta = 45^\circ$

- 09 코사인법칙에서

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos A$$

이므로

$$\overline{BC}^2 = 200^2 + 500^2 - 2 \times 200 \times 500 \times \cos 120^\circ = 390000$$

$$\overline{BC} > 0 \text{이므로 } \overline{BC} = 624.4 \dots$$

따라서 두 나무 B, C 사이의 거리는 624 m이다.

- 10 삼각형 ABC에서

$$\cos B = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AC}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BC}}$$

이므로

$$\cos B = \frac{8^2 + 9^2 - 5^2}{2 \times 8 \times 9} = \frac{5}{6}$$

삼각형 ABD에서 $\overline{BD} = 6$ 이고

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BD} \times \cos B$$

이므로

$$\overline{AD}^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \frac{5}{6} = 20$$

$$\overline{AD} > 0 \text{이므로 } \overline{AD} = 2\sqrt{5}$$

- 11 (1) 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}$$

- (2) 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{2} \times \sin \frac{2}{3}\pi$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{6}$$

- 12 코사인법칙에서 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ 이므로

$$\cos A = \frac{14^2 + 15^2 - 13^2}{2 \times 14 \times 15} = \frac{3}{5}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ 에서 $\sin A > 0$ 이므로

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 14 \times 15 \times \frac{4}{5} = 84$$

- 13 삼각형 ABC에서

$$C = 180^\circ - (21^\circ + 122^\circ) = 37^\circ$$

사인법칙에서 $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ 이므로

$$\frac{a}{\sin 21^\circ} = \frac{20}{\sin 37^\circ}$$

$$a = \frac{20 \sin 21^\circ}{\sin 37^\circ} = 12$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S = \frac{1}{2} ca \sin B$$

$$= \frac{1}{2} \times 20 \times 12 \times \sin 122^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 20 \times 12 \times \sin 58^\circ = 102$$

III 수열

1 등차수열과 등비수열

01 수열의 뜻

159~162쪽

- 01 첫째항: 1, 제4항: $\frac{1}{7}$

- 02 예 홀수 번째 항은 1이고 짝수 번째 항은 -1인 수열

- 03 (1) 일반항을 a_n 이라고 하면 $a_n = n^3 - 1$ 이므로

$$a_1 = 1^3 - 1 = 0, a_2 = 2^3 - 1 = 7,$$

$$a_3 = 3^3 - 1 = 26, a_4 = 4^3 - 1 = 63$$

따라서 0, 7, 26, 63

- (2) 일반항을 a_n 이라고 하면 $a_n = n(n+2)$ 이므로

$$a_1 = 1 \times (1+2) = 3, a_2 = 2 \times (2+2) = 8,$$

$$a_3 = 3 \times (3+2) = 15, a_4 = 4 \times (4+2) = 24$$

따라서 3, 8, 15, 24

- (3) 일반항을 a_n 이라고 하면 $a_n = \frac{1}{2-3n}$ 이므로

$$a_1 = \frac{1}{2-3 \times 1} = -1, a_2 = \frac{1}{2-3 \times 2} = -\frac{1}{4},$$

$$a_3 = \frac{1}{2-3 \times 3} = -\frac{1}{7}, a_4 = \frac{1}{2-3 \times 4} = -\frac{1}{10}$$

따라서 $-1, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{7}, -\frac{1}{10}$

(4) 일반항을 a_n 이라고 하면 $a_n = \sqrt{2n+1}$ 이므로
 $a_1 = \sqrt{2 \times 1 + 1} = \sqrt{3}$, $a_2 = \sqrt{2 \times 2 + 1} = \sqrt{5}$,
 $a_3 = \sqrt{2 \times 3 + 1} = \sqrt{7}$, $a_4 = \sqrt{2 \times 4 + 1} = 3$
 따라서 $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, 3$

04 $a_1 = 1 = \sqrt{1}$, $a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = \sqrt{3}$, $a_4 = 2 = \sqrt{4}$, $a_5 = \sqrt{5}$, ...
 따라서 일반항 a_n 은 $a_n = \sqrt{n}$ 이다.

05 38을 이 수열의 제 n 항이라고 하면
 $3n + 2 = 38$, $n = 12$
 따라서 제12항이다.

02 등차수열

163-177쪽

01 (1) $3 - 1 = 5 - 3 = 7 - 5 = \dots = 2$ 이므로
 공차는 2이고, $7 + 2 = 9$ 이다.

(2) $-\frac{1}{6} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right) = \dots = -\frac{1}{2}$ 이므로
 공차는 $-\frac{1}{2}$ 이고, $-\frac{2}{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{6}$ 이다.

02 (1) 첫째항이 -7 , 공차가 5인 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n = -7 + (n-1) \times 5 = 5n - 12$

(2) 첫째항이 10, 공차가 -3 인 등차수열이므로 일반항
 a_n 은 $a_n = 10 + (n-1) \times (-3) = -3n + 13$

03 첫째항이 17, 공차가 -4 인 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n = 17 + (n-1) \times (-4) = -4n + 21$

(1) 제5항은 $a_5 = -4 \times 5 + 21 = 1$

(2) -23 을 이 수열의 제 n 항이라고 하면
 $-4n + 21 = -23$, $n = 11$
 따라서 제11항이다.

04 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_2 = a + (2-1)d = 13$$

$$\text{즉, } a + d = 13 \quad \dots\dots ①$$

$$a_7 = a + (7-1)d = 23$$

$$\text{즉, } a + 6d = 23 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 11$, $d = 2$

따라서 첫째항이 11, 공차가 2이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 11 + (n-1) \times 2 = 2n + 9$

05 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_4 + a_7 = a + (4-1)d + a + (7-1)d = -2$$

$$\text{즉, } 2a + 9d = -2 \quad \dots\dots ①$$

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{17} &= a + (11-1)d + a + (17-1)d \\ &= -36 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2a + 26d = -36 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 8$, $d = -2$

따라서 첫째항이 8, 공차가 -2 이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 8 + (n-1) \times (-2) = -2n + 10$

06 펄스의 각 단의 하단 면의 폭이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d cm, n 단의 하단 면의 폭을 a_n cm 라고 하면

$$a_1 = 40$$

$$a_6 = a_1 + (6-1)d = 75$$

즉, $d = 7$ 이므로

$$a_3 = a_1 + (3-1)d = 40 + 2 \times 7 = 54$$

따라서 3단의 하단 면의 폭은 54 cm이다.

07 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 15 + (n-1) \times (-2) = -2n + 17$$

$a_n < 0$ 이 되려면 $-2n + 17 < 0$, $n > \frac{17}{2} = 8.5$ 이어야 한다.
 따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제9항이다.

08 (1) x 는 -2 와 14 의 등차중항이므로

$$x = \frac{-2+14}{2} = 6$$

y 는 14 와 30 의 등차중항이므로

$$y = \frac{14+30}{2} = 22$$

따라서 $x = 6$, $y = 22$

(2) 3 은 x 와 y 의 등차중항이므로

$$3 = \frac{x+y}{2}, \quad x+y = 6$$

y 는 3 과 -5 의 등차중항이므로

$$y = \frac{3+(-5)}{2} = -1$$

따라서 $x = 7$, $y = -1$

09 세 수를 a , b , c 라고 하면 6 , a , b , c , 22 가 등차수열 이므로 6 , b , 22 도 등차수열이다.

이때 b 는 6 과 22 의 등차중항이므로

$$b = \frac{6+22}{2} = 14$$

등차수열 6 , a , 14 , c , 22 에서 a 는 6 과 14 의 등차중항

이므로 $a = \frac{6+14}{2} = 10$

c 는 14 와 22 의 등차중항이므로 $c = \frac{14+22}{2} = 18$

따라서 세 수 a , b , c 를 순서대로 구하면

$10, 14, 18$

다른 풀이

첫째항을 6, 공차를 d 라고 하면 22는 제5항이므로

$$6 + (5-1)d = 22, d = 4$$

따라서 세 수를 순서대로 구하면

$$10, 14, 18$$

10 (1) $S_{13} = \frac{13(1+25)}{2} = 169$

(2) $S_7 = \frac{7\{2 \times 8 + (7-1) \times 3\}}{2} = 119$

(3) 첫째항이 4, 공차가 -3 이므로

$$S_{10} = \frac{10\{2 \times 4 + (10-1) \times (-3)\}}{2} = -95$$

11 조건을 만족시키는 자연수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$13, 18, 23, \dots, 98$$

이 수열은 첫째항이 13, 공차가 5인 등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 13 + (n-1) \times 5 = 5n + 8$$

$5n + 8 = 98$ 에서 $n = 18$ 이므로 98은 제18항이다.

따라서 구하는 합은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제18항까지의 합 S_{18} 이므로

$$S_{18} = \frac{18(13+98)}{2} = 999$$

12 $100 = 2^2 \times 5^2$ 이므로 100과 서로소인 수는 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아닌 수이다.

즉, 구하는 합은 100 이하의 홀수 중에서 5의 배수를 제외한 수의 합과 같다.

100 이하의 홀수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$1, 3, 5, \dots, 99$$

이 수열은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이고,

$$99 = 1 + (n-1) \times 2, n = 50$$

이므로 100 이하의 홀수의 합은

$$\frac{50(1+99)}{2} = 2500$$

100 이하의 홀수 중에서 5의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$5, 15, 25, \dots, 95$$

이 수열은 첫째항이 5, 공차가 10인 등차수열이고,

$$95 = 5 + (n-1) \times 10, n = 10$$

이므로 100 이하의 홀수 중에서 5의 배수의 합은

$$\frac{10(5+95)}{2} = 500$$

따라서 구하는 합은 $2500 - 500 = 2000$

13 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$S_6 = \frac{6\{2a + (6-1)d\}}{2} = -6$$

$$\text{즉, } 2a + 5d = -2 \quad \dots\dots ①$$

$$S_{12} = \frac{12\{2a + (12-1)d\}}{2} = 132$$

$$\text{즉, } 2a + 11d = 22 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -11, d = 4$

따라서 첫째항부터 제18항까지의 합 S_{18} 은

$$S_{18} = \frac{18\{2 \times (-11) + (18-1) \times 4\}}{2} = 414$$

14 n 각형의 내각의 크기의 합은

$$180^\circ \times (n-2) = 180^\circ \times n - 360^\circ \quad \dots\dots ①$$

첫째항이 72° , 공차가 18° 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n\{2 \times 72^\circ + (n-1) \times 18^\circ\}}{2} \\ &= 9^\circ \times n^2 + 63^\circ \times n \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

①, ②에서 $180^\circ \times n - 360^\circ = 9^\circ \times n^2 + 63^\circ \times n$

$$n^2 - 13n + 40 = 0$$

$$(n-5)(n-8) = 0$$

그런데 $n=8$ 이면 내각의 크기 중 가장 큰 것은

$$72^\circ + (8-1) \times 18^\circ = 198^\circ \text{이므로 한 내각의 크기가}$$

180° 보다 작다는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $n=5$

15 등차수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = -26 + (n-1) \times 4 = 4n - 30$$

$a_n < 0$ 이 되려면 $4n - 30 < 0, n < 7.5$ 이어야 한다.

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제7항까지가 음수이고

제8항부터는 양수이므로 제7항까지의 합이 최소이다.

따라서 S_n 의 최솟값은

$$S_7 = \frac{7\{2 \times (-26) + (7-1) \times 4\}}{2} = -98$$

16 $n \geq 2$ 일때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 5n) - \{(n-1)^2 + 5(n-1)\} \\ &= 2n + 4 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 5 \times 1 = 6 \quad \dots\dots ②$$

그런데 ①에 $n=1$ 을 대입하면 $a_1 = 2 \times 1 + 4 = 6$ 이므로 ②와 일치한다.

따라서 일반항 a_n 은 $a_n = 2n + 4$

17 $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 1) - \{(n-1)^2 + 1\} \\ &= 2n - 1 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2 \quad \dots\dots ②$$

그런데 ①에 $n=1$ 을 대입하면 $a_1 = 2 \times 1 - 1 = 1$ 이므로 ②와 일치하지 않는다.

따라서 일반항 a_n 은 $a_1=2$, $a_n=2n-1 (n \geq 2)$ 이므로 은우의 말은 옳지 않다.

○3 등비수열

178~190쪽

01 (1) $\frac{4}{3} \div \frac{16}{9} = 1 \div \frac{4}{3} = \frac{3}{4} \div 1 = \dots = \frac{3}{4}$ 이므로

공비는 $\frac{3}{4}$ 이고, $\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ 이다.

(2) $5 \div 1 = 25 \div 5 = \dots = 5$ 이므로

공비는 5이고, $25 \times 5 = 125$ 이다.

02 (1) 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 2^{n-1}$$

(2) 첫째항이 6, 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열이므로 일반항

$$a_n \text{은 } a_n = 6 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

03 첫째항이 48, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 48 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(1) 제5항은 $a_5 = 48 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 3$

(2) $\frac{3}{128}$ 을 이 수열의 제 n 항이라고 하면

$$48 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{3}{128}, n=12$$

따라서 제12항이다.

04 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_2 = ar = 12 \quad \dots\dots ①$$

$$a_5 = ar^4 = 324 \quad \dots\dots ②$$

② $\div$ ①을 하면 $r^3 = 27$

r 는 실수이므로 $r=3$

$r=3$ 을 ①에 대입하여 풀면 $a=4$

따라서 첫째항이 4, 공비가 3이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 4 \times 3^{n-1}$$

05 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= a + ar \\ &= a(1+r) = 30 \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_3 + a_4 &= ar^2 + ar^3 \\ &= ar^2(1+r) = 120 \quad \dots\dots ② \end{aligned}$$

② $\div$ ①을 하면 $r^2 = 4$

$a_2 a_3 = ar \times ar^2 = a^2 r^3 > 0$ 에서 $r > 0$ 이므로

$$r = 2$$

$r=2$ 를 ①에 대입하여 풀면

$$a = 10$$

따라서 첫째항과 공비의 합은 $10 + 2 = 12$

06 첫째항을 a 라고 하면 $a_6 = a \times 2^5 = 96$ 이므로

$$a = 3$$

등비수열의 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 \times 2^{n-1}$$

$a_n \geq 1500$ 이 되려면 $3 \times 2^{n-1} \geq 1500$, $2^{n-1} \geq 500$ 이어야 한다.

이때 n 은 자연수이고 $2^8 = 256$, $2^9 = 512$ 이므로

$$n = 10, 11, 12, \dots$$

따라서 처음으로 1500 이상이 되는 항은 제10항이다.

07 공이 튀어 오르는 높이를 차례로 나열하면

$$1, \frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3, \dots$$

즉, 첫째항이 1, 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열이므로 일반항

$$a_n \text{은 } a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_6 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

따라서 이 공이 6번째 튀어 올랐을 때의 높이는

$$\frac{32}{243} \text{ m이다.}$$

08 (1) x 는 18과 2의 등비중항이므로

$$x^2 = 18 \times 2 = 36$$

$$x = -6 \text{ 또는 } x = 6$$

(i) $x = -6$ 일 때, 공비는 $-\frac{1}{3}$ 이므로

$$y = 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

(ii) $x = 6$ 일 때, 공비는 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$y = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

따라서 $x = -6$, $y = -\frac{2}{3}$ 또는 $x = 6$, $y = \frac{2}{3}$

(2) y 는 12와 48의 등비중항이므로

$$y^2 = 12 \times 48 = 576$$

$$y = -24 \text{ 또는 } y = 24$$

(i) $y = -24$ 일 때, 공비는 -2 이므로

$$x = 12 \div (-2) = -6$$

(ii) $y = 24$ 일 때, 공비는 2 이므로

$$x = 12 \div 2 = 6$$

따라서 $x = -6, y = -24$ 또는 $x = 6, y = 24$

09 6, $a, b, c, \frac{3}{8}$ 이 등비수열이므로 6, $b, \frac{3}{8}$ 도 등비수열이다.

이때 b 는 6과 $\frac{3}{8}$ 의 등비중항이므로

$$b^2 = 6 \times \frac{3}{8} = \frac{9}{4}, b = -\frac{3}{2} \text{ 또는 } b = \frac{3}{2}$$

그런데 $b = -\frac{3}{2}$ 이면 a 는 6과 $-\frac{3}{2}$ 의 등비중항이므로

$$a^2 = 6 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -9$$

즉, a 가 허수가 되므로 $b = \frac{3}{2}$

등비수열 6, $a, \frac{3}{2}, c, \frac{3}{8}$ 에서 a 는 6과 $\frac{3}{2}$ 의 등비중항이므로

$$a^2 = 6 \times \frac{3}{2} = 9, a = -3 \text{ 또는 } a = 3$$

(i) $a = -3$ 일 때, 공비는 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$c = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$$

(ii) $a = 3$ 일 때, 공비는 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$c = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

따라서 세 수 a, b, c 를 순서대로 모두 구하면

$$-3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4} \text{ 또는 } 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$$

다른 풀이

첫째항을 6, 공비를 r 라고 하면 $\frac{3}{8}$ 은 제5항이므로

$$6r^4 = \frac{3}{8}, r^4 = \frac{1}{16}$$

r 는 실수이므로 $r = -\frac{1}{2}$ 또는 $r = \frac{1}{2}$

(i) $r = -\frac{1}{2}$ 일 때, 세 수 a, b, c 를 순서대로 구하면

$$-3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4}$$

(ii) $r = \frac{1}{2}$ 일 때, 세 수 a, b, c 를 순서대로 구하면

$$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$$

따라서 세 수 a, b, c 를 순서대로 모두 구하면

$$-3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{4} \text{ 또는 } 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}$$

$$10 (1) S_5 = \frac{\frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^5 \right\}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^5 = \frac{242}{243}$$

(2) 첫째항이 $\sqrt{2}$, 공비가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{\sqrt{2} \{ (\sqrt{2})^{10} - 1 \}}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \frac{\sqrt{2}(2^5 - 1)}{\sqrt{2} - 1} = 62 + 31\sqrt{2} \end{aligned}$$

11 첫째항을 a , 공비를 $r(r \neq 1)$ 라고 하면

$$S_4 = \frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} = 6 \quad \dots\dots ①$$

$$S_8 = \frac{a(r^8 - 1)}{r - 1} = 30 \quad \dots\dots ②$$

②를 변형하면 $\frac{a(r^4 - 1)(r^4 + 1)}{r - 1} = 30$

①을 위의 식에 대입하면 $6(r^4 + 1) = 30, r^4 = 4$

따라서 첫째항부터 제12항까지의 합 S_{12} 는

$$\begin{aligned} S_{12} &= \frac{a(r^{12} - 1)}{r - 1} = \frac{a(r^4 - 1)(r^8 + r^4 + 1)}{r - 1} \\ &= S_4(r^8 + r^4 + 1) \\ &= 6(4^2 + 4 + 1) = 126 \end{aligned}$$

12 $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (6^n - 1) - (6^{n-1} - 1) \\ &= 5 \times 6^{n-1} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

$n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 - 1 = 5 \quad \dots\dots ②$$

그런데 ①에 $n = 1$ 을 대입하면 $a_1 = 5 \times 6^{1-1} = 5$ 이므로 ②와 일치한다.

따라서 일반항 a_n 은 $a_n = 5 \times 6^{n-1}$

$$\begin{aligned} 13 \quad & 30(1+0.06) + 30(1+0.06)^2 + \dots \\ & \quad + 30(1+0.06)^9 + 30(1+0.06)^{10} \\ &= \frac{30(1+0.06)\{(1+0.06)^{10} - 1\}}{(1+0.06) - 1} \\ &= \frac{30 \times 1.06(1.79 - 1)}{0.06} = 418.7 \end{aligned}$$

따라서 4187000원이다.

2

수열의 합과 수학적 귀납법

01 수열의 합

199~209쪽

$$\begin{aligned} 01 \quad (1) \quad & \sum_{k=1}^{10} (2k-1) \\ &= (2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + (2 \times 3 - 1) + \cdots \\ & \quad + (2 \times 10 - 1) \\ &= 1 + 3 + 5 + \cdots + 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \sum_{m=3}^{12} \frac{1}{m+1} \\ &= \frac{1}{3+1} + \frac{1}{4+1} + \frac{1}{5+1} + \cdots + \frac{1}{12+1} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 02 \quad (1) \quad & \text{수열 } 7, 14, 21, \dots, 175 \text{는 첫째항이 } 7, \text{ 공차가 } 7 \text{인} \\ & \text{등차수열이므로 일반항 } a_k \text{는} \\ & \quad a_k = 7 + (k-1) \times 7 = 7k \\ & \quad 7k = 175 \text{에서 } k = 25 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 7 + 14 + 21 + \cdots + 175 = \sum_{k=1}^{25} 7k$$

$$(2) \quad \text{수열 } \frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{4 \times 5}, \frac{1}{6 \times 7}, \dots, \frac{1}{24 \times 25} \text{의 일반항}$$

$$a_k \text{는 } a_k = \frac{1}{2k(2k+1)}$$

$$\frac{1}{2k(2k+1)} = \frac{1}{24 \times 25} \text{에서 } k = 12$$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } & \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{4 \times 5} + \frac{1}{6 \times 7} + \cdots + \frac{1}{24 \times 25} \\ &= \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{2k(2k+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 03 \quad (1) \quad & \sum_{k=1}^{10} 5^k \text{은 일반항이 } 5^k \text{인 수열의 첫째항부터 제10항} \\ & \text{까지의 합이다.} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 5^1 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{10}$$

이 식은 일반항이 5^{k-1} 인 수열의 제2항부터 제11항까지의 합과 같으므로

$$\sum_{k=1}^{10} 5^k = \sum_{k=2}^{11} 5^{k-1}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \sum_{k=1}^7 (2k-3) \text{은 일반항이 } 2k-3 \text{인 수열의 첫째항} \\ & \text{부터 제7항까지의 합이다.} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -1 + 1 + 3 + \cdots + 11$$

이 식은 일반항이 $2k-7$ 인 수열의 제3항부터 제9항까지의 합과 같으므로

$$\sum_{k=1}^7 (2k-3) = \sum_{k=3}^9 (2k-7)$$

$$\begin{aligned} 04 \quad (1) \quad & \sum_{k=1}^{10} (-2a_k + 3) = \sum_{k=1}^{10} (-2a_k) + \sum_{k=1}^{10} 3 \\ &= -2 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 3 \\ &= -2 \times 7 + 3 \times 10 = 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3b_k) = \sum_{k=1}^{10} 2a_k + \sum_{k=1}^{10} 3b_k \\ &= 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 3 \sum_{k=1}^{10} b_k \\ &= 2 \times 7 + 3 \times 9 = 41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 05 \quad (1) \quad & \sum_{k=1}^{30} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{30} \\ &= (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{29}) \\ & \quad + (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{30}) \\ &= \sum_{k=1}^{15} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{15} a_{2k} = 30 + 20 = 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & \sum_{k=1}^{30} (-1)^k a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{30} \\ &= -(a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{29}) \\ & \quad + (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{30}) \\ &= -\sum_{k=1}^{15} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{15} a_{2k} \\ &= -30 + 20 = -10 \end{aligned}$$

$$06 \quad (1) \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + 11 = \sum_{k=1}^{11} k = \frac{11 \times 12}{2} = 66$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 11^2 = \sum_{k=1}^{11} k^2 = \frac{11 \times 12 \times 23}{6} \\ &= 506 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 11^3 = \sum_{k=1}^{11} k^3 = \left(\frac{11 \times 12}{2} \right)^2 \\ &= 4356 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 07 \quad & \sum_{k=1}^{40} \frac{1+2+3+\cdots+k}{k+1} = \sum_{k=1}^{40} \frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{40} \frac{k}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{40} k \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{40 \times 41}{2} = 410 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 08 \quad (1) \quad & 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \cdots + n(n+2) \\ &= \sum_{k=1}^n k(k+2) \\ &= \sum_{k=1}^n (k^2 + 2k) = \sum_{k=1}^n k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+7)}{6} \end{aligned}$$

$$(2) 1^2 \times 2 + 2^2 \times 3 + 3^2 \times 4 + \cdots + 10^2 \times 11$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k^2(k+1) = \sum_{k=1}^{10} (k^3 + k^2)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k^3 + \sum_{k=1}^{10} k^2$$

$$= \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 + \frac{10 \times 11 \times 21}{6}$$

$$= 3025 + 385 = 3410$$

09 $5^3 + 6^3 + 7^3 + \cdots + 11^3$

$$= \sum_{k=1}^7 (k+4)^3 = \sum_{k=1}^7 (k^3 + 12k^2 + 48k + 64)$$

$$= \sum_{k=1}^7 k^3 + 12 \sum_{k=1}^7 k^2 + 48 \sum_{k=1}^7 k + \sum_{k=1}^7 64$$

$$= \left(\frac{7 \times 8}{2} \right)^2 + 12 \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} + 48 \times \frac{7 \times 8}{2} + 64 \times 7$$

$$= 784 + 1680 + 1344 + 448 = 4256$$

다른 풀이

$$5^3 + 6^3 + 7^3 + \cdots + 11^3$$

$$= \sum_{k=1}^{11} k^3 - \sum_{k=1}^4 k^3$$

$$= \left(\frac{11 \times 12}{2} \right)^2 - \left(\frac{4 \times 5}{2} \right)^2$$

$$= 4356 - 100 = 4256$$

10 (1) $\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$$

(2) $\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \cdots$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})$$

$$= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3}-1) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + (\sqrt{7}-\sqrt{5}) + \cdots$$

$$+ (\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}) \}$$

$$= \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$$

02 수학적 귀납법

210~220쪽

01 (1) $a_1 = 1$

$$a_2 = 2 \times a_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$a_3 = 2 \times a_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$a_4 = 2 \times a_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15$$

$$a_5 = 2 \times a_4 + 1 = 2 \times 15 + 1 = 31$$

따라서 제5항은 31이다.

(2) $a_1 = 1$

$$a_2 = \frac{1}{2} \times a_1 + 1 = \frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \times a_2 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + 1 = \frac{7}{4}$$

$$a_4 = \frac{1}{2} \times a_3 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{7}{4} + 1 = \frac{15}{8}$$

$$a_5 = \frac{1}{2} \times a_4 + 1 = \frac{1}{2} \times \frac{15}{8} + 1 = \frac{31}{16}$$

따라서 제5항은 $\frac{31}{16}$ 이다.

02 (1) $a_1 = 9$

$$a_{n+1} = a_n - 4 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(2) $a_1 = 6$

$$a_{n+1} = 2a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

03 (1) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1이고 공차가 5인 등차수열

이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 1 + (n-1) \times 5 = 5n - 4$$

$$a_5 = 5 \times 5 - 4 = 21$$

따라서 제5항은 21이다.

(2) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2이고 공비가 3인 등비수열

이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

$$a_5 = 2 \times 3^4 = 162$$

따라서 제5항은 162이다.

04 (1) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 -2 이고 공차가

$0 - (-2) = 2$ 인 등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -2 + (n-1) \times 2 = 2n - 4$$

$$a_5 = 2 \times 5 - 4 = 6$$

따라서 제5항은 6이다.

(2) 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1이고 공비가 $5 \div 1 = 5$ 인

등비수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 1 \times 5^{n-1} = 5^{n-1}$$

$$a_5 = 5^4 = 625$$

따라서 제5항은 625이다.

05 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1인 등비수열이므로 공비를 r

라고 하면 $\frac{a_6}{a_3}=8$ 에서

$$r^3=8, r=2$$

일반항 a_n 은

$$a_n=1 \times 2^{n-1}=2^{n-1}$$

$$a_8=2^7=128$$

따라서 제8항은 128이다.

06 1시간 후 살아 있는 박테리아의 수는

$$a_1=100000 \times (1-0.5) \times 4=200000$$

$(n+1)$ 시간 후 살아 있는 박테리아의 수는 n 시간 후 살아 있는 박테리아에서 50%가 죽고 나머지는 각각 4마리로 분열한 수와 같으므로

$$a_{n+1}=a_n \times (1-0.5) \times 4=2a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

07 1년 후에 측정한 대나무의 높이는

$$a_1=4 \times \left(1-\frac{1}{4}\right)+2=5$$

$(n+1)$ 년 후에 측정한 대나무의 높이는 n 년 후에 측정한 대나무의 높이의 $\frac{1}{4}$ 만큼 잘라내고 2 m 더 자란 높이와 같으므로

$$a_{n+1}=a_n \times \left(1-\frac{1}{4}\right)+2=\frac{3}{4}a_n+2 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

08 (1) (다), (라), (나)

(2) (가) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변})=2 \times 1-1=\boxed{1}, (\text{우변})=1^2=\boxed{1}$$

이므로 등식 ①이 성립한다.

(라) 양변에 $\boxed{2k+1}$ 을 더하면

$$1+3+5+7+\dots+(2k-1)+\boxed{2k+1}$$

$$=k^2+\boxed{2k+1}=(k+1)^2$$

즉, $n=\boxed{k+1}$ 일 때도 등식 ①이 성립한다.

09 (i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변})=\frac{1}{1 \times 3}=\frac{1}{3}, (\text{우변})=\frac{1}{2 \times 1+1}=\frac{1}{3}$$

따라서 $n=1$ 일 때 문제의 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 문제의 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$= \frac{k}{2k+1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

등식 ①의 양변에 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ 을 더하면

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

$$+ \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$= \frac{k+1}{2k+3}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 문제의 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 문제의 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

08 (i) $n=5$ 일 때,

$$(\text{좌변})=2^5=32 > 25=5^2=(\text{우변})$$

따라서 $n=5$ 일 때 문제의 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 5)$ 일 때, 문제의 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2^k > k^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

부등식 ①의 양변에 2를 곱하면

$$2^{k+1} > 2k^2$$

그런데 $k \geq 5$ 이므로

$$2k^2 - (k+1)^2$$

$$= k^2 - 2k - 1$$

$$= (k-1)^2 - 2 > 0$$

즉, $2k^2 > (k+1)^2$ 이므로

$$2^{k+1} > (k+1)^2$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 문제의 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 문제의 부등식은 $n \geq 5$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

I. 지수함수와 로그함수

268~270쪽

- 01 81 02 ④ 03 6 04 81 05 3
 06 $\frac{30}{31}$ 07 $a=-3, b=1$ 08 ㄱ, ㄴ, ㄷ
 09 $4\sqrt{5}$ 10 ⑤ 11 4 12 $x \geq 2$ 13 $x=8$
 14 4년 15 (1) 6 (2) 5 16 14 dB
 17 (1) -1 (2) $-\frac{35}{9}$ 18 (1) $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{15}{4}$

- 01 $a=(3^{2+\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}+2}$ 이고
 $b=(3^{\sqrt{2}})^{2-\sqrt{2}}=3^{2\sqrt{2}-2}$ 이므로
 $\frac{a}{b}=3^{2\sqrt{2}+2-(2\sqrt{2}-2)}=3^4=81$
- 02 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$ 의 양변을 제곱하여 정리하면
 $a+a^{-1}+2=16$, 즉 $a+a^{-1}=14$
 $a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}=4$ 의 양변을 세제곱하여 정리하면
 $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}}+a^{-\frac{3}{2}}+3 \times 4=64$, 즉 $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=52$
 $\frac{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}+5}{a+a^{-1}+5}=\frac{52+5}{14+5}=3$
 따라서 ④이다.
- 03 $9^x=a$ 에서 $a^{\frac{1}{x}}=9$, $4^y=a$ 에서 $a^{\frac{1}{y}}=4$ 이므로
 $a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=a^{\frac{1}{x}}a^{\frac{1}{y}}=9 \times 4=36$
 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$ 이므로
 $a^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=a^2=36$
 $a>0$ 이므로 $a=6$
- 04 $(3^x)^y=3^{xy}=\frac{1}{3}=3^{-1}$ 이므로 $xy=-1$
 $3^x \times 3^y=3^{x+y}=3$ 이므로 $x+y=1$
 $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
 $=1^3-3 \times (-1) \times 1=4$
 따라서 $3^x \times 3^y=3^{x^3+y^3}=3^4=81$
- 05 밑의 조건에서 $x+1>0$, $x+1 \neq 1$ 이므로
 $x>-1$, $x \neq 0$ ①
 진수의 조건에서 $-x^2+2x+3>0$ 이므로
 $x^2-2x-3<0$, $(x+1)(x-3)<0$
 $-1<x<3$ ②
 ①, ②에서 $-1<x<0$, $0<x<3$ 이므로 구하는 합은
 $1+2=3$

06 $\log_x a=\frac{1}{2}$, $\log_x b=\frac{1}{3}$, $\log_x c=\frac{1}{5}$ 이므로

$$\begin{aligned}\log_{abc} x &= \frac{1}{\log_x abc} \\ &= \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}} \\ &= \frac{30}{31}\end{aligned}$$

- 07 점근선이 직선 $y=1$ 이므로 $b=1$
 점 $(3, 0)$ 을 지나므로 $-\left(\frac{1}{3}\right)^{3+a}+1=0$, $a=-3$
- 08 ㄱ. 함수 $y=4^{x-1}+1$ 의 그래프는 함수 $y=4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것과 같다.
 ㄴ. 함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^x=4^{-x}$ 의 그래프는 함수 $y=4^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것과 같다.
 ㄷ. 함수 $y=2^{2x}+2=4^x+2$ 의 그래프는 함수 $y=4^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것과 같다.
 따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
- 09 $\sqrt[3]{25}$, $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$ 의 밑을 모두 5로 바꾸면
 $\sqrt[3]{25}=(5^2)^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{3}}$
 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}=(5^{-1})^{\frac{3}{4}}=5^{-\frac{3}{4}}$
 함수 $y=5^x$ 는 밑이 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.
 이때 $-\frac{3}{4}<\frac{2}{3}<1$ 이므로
 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}<\sqrt[3]{25}<5$
 따라서 가장 큰 수는 5, 가장 작은 수는 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$ 이므로 구하는 곱은
 $5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}=5^{1-\frac{3}{4}}=5^{\frac{1}{4}}=4\sqrt{5}$
- 10 $(g \circ f)(x)=x$ 를 만족시키는 함수 $y=g(x)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 역함수이다.
 $g(1)=a$ 라고 하면 $f(a)=1$ 이므로
 $\log_5 a-1=1$
 $\log_5 a=2$
 $a=5^2=25$
 따라서 $g(1)=25$ 이므로 ⑤이다.

- 11 $f(x) = x^2 - 2x + a = (x-1)^2 + a - 1$ 이라고 하면

함수 $y = f(x)$ 는

$$x=8\text{일 때, 최댓값 } (8-1)^2 + a - 1 = a + 48$$

$$x=2\text{일 때, 최솟값 } (2-1)^2 + a - 1 = a$$

를 갖는다.

즉, $a \leq f(x) \leq a + 48$ 이므로

함수 $y = \log_2 f(x)$ 는

$$f(x) = a + 48\text{일 때, 최댓값 } \log_2 (a + 48)$$

$$f(x) = a\text{일 때, 최솟값 } \log_2 a$$

를 갖는다.

즉, $\log_2 (a + 48) = 6$ 이므로

$$a + 48 = 2^6, a = 16$$

따라서 최솟값은 $\log_2 16 = 4$

- 12 $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = (2^{-2})^{x-2} = 2^{-2x+4}$ 이므로

$$2^{x-2} \geq 2^{-2x+4}$$

밑이 1보다 크므로

$$x - 2 \geq -2x + 4$$

$$x \geq 2$$

- 13 $\log_4 (x+8) = \log_{2^2} (x+8) = \frac{1}{2} \log_2 (x+8)$ 이므로

$$\log_2 (x-4) = \frac{1}{2} \log_2 (x+8)$$

$$2 \log_2 (x-4) = \log_2 (x+8)$$

$$\log_2 (x-4)^2 = \log_2 (x+8)$$

$$(x-4)^2 = x+8$$

$$x^2 - 9x + 8 = 0$$

$$(x-1)(x-8) = 0$$

$$x=1 \text{ 또는 } x=8 \quad \dots\dots ①$$

진수의 조건에서 $x-4 > 0, x+8 > 0$ 이므로

$$x > 4 \quad \dots\dots ②$$

①, ②에서 $x=8$

- 14 자동차의 현재 가격을 a ($a \geq 0$)라고 하자.

x 년 후 중고차 가격이 현재 가격의 40% 이하가 된다고 하면

$$a \times 0.8^x \leq 0.4a \text{이므로 } 0.8^x \leq 0.4 \quad \bullet 40\%$$

$$\text{양변에 상용로그를 취하면 } \log 0.8^x \leq 0.4 \quad \bullet 20\%$$

$$x \log 0.8 \leq 0.4$$

$$x(3 \log 2 - 1) \leq 0.4$$

$$x(3 \times 0.3 - 1) \leq 0.4$$

$$x \geq 4$$

따라서 4년 후부터이다.

• 40%

- 15 (1) $3^{2x} - 2 \times 3^{x+1} + 1 = 0$ 의 양변을 3^x 으로 나누면

$$3^x - 2 \times 3 + 3^{-x} = 0$$

$$\text{따라서 } 3^x + 3^{-x} = 6$$

• 40%

$$(2) 9^x + 9^{-x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2$$

$$= 6^2 - 2 = 34$$

• 40%

$$\text{따라서 } \frac{9^x + 9^{-x} - 4}{3^x + 3^{-x}} = \frac{34 - 4}{6} = 5$$

• 20%

- 16 벽의 단위 면적당 질량이 $m_0 \text{ kg/m}^2$ 에서 $5m_0 \text{ kg/m}^2$ 로 증가할 때, 음향 투과 손실이 $a \text{ dB}$ 만큼 증가한다고 하자.

• 20%

$$a = (20 \log 5m_0f - 48) - (20 \log m_0f - 48)$$

$$= 20 \log 5 + 20 \log m_0f - 20 \log m_0f$$

$$= 20 \log 5 = 20 \log \frac{10}{2}$$

$$= 20(1 - \log 2) = 20(1 - 0.3)$$

$$= 14$$

따라서 14 dB만큼 증가한다.

• 80%

- 17 (1) $y = 3^{-x+a} - 4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-a} - 4$ 에서 밑이 1보다 작으므로 함수 $y = 3^{-x+a} - 4$ 는 x 의 값이 증가할 때 y 의 값은 감소한다.

• 20%

따라서 $x = -3$ 일 때, 최댓값 5를 가지므로

$$3^{-(-3)+a} - 4 = 5$$

$$3^{3+a} = 9 = 3^2$$

$$3 + a = 2 \text{에서 } a = -1$$

• 40%

$$(2) \text{ 함수 } y = 3^{-x-1} - 4 \text{에서 } x=1 \text{일 때, 최솟값은}$$

$$3^{-1-1} - 4 = \frac{1}{9} - 4 = -\frac{35}{9}$$

• 40%

- 18 (1) $x = \frac{1}{2}$ 일 때, 두 함수 $y = \log_{\frac{1}{4}} x, y = \log_{\sqrt{2}} x$ 의 함

$$\text{숫값은 각각 } \frac{1}{2}, -2$$

• 10%

$$\text{따라서 } A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), B\left(\frac{1}{2}, -2\right) \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = \frac{1}{2} - (-2) = \frac{5}{2}$$

• 20%

$$(2) x=2 \text{일 때, 두 함수 } y = \log_{\frac{1}{4}} x, y = \log_{\sqrt{2}} x \text{의 함}$$

$$\text{숫값은 각각 } -\frac{1}{2}, 2$$

• 10%

$$\text{따라서 } C\left(2, -\frac{1}{2}\right), D(2, 2) \text{이므로}$$

$$\overline{CD} = 2 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

• 20%

$\overline{AB} = \overline{CD}$ 이고 사각형 ABCD는 평행사변형이므로 넓이는

$$\frac{5}{2} \times \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4}$$

• 40%

- 01 ⑤ 02 32 03 $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 04 $-\frac{1}{3}$ 05 ②
 06 ③ 07 9π 08 10 09 $1+\sin\theta$
 10 ⑤ 11 ④ 12 $\frac{43}{3}$ 13 $\frac{25}{4}$ 14 4
 15 $\frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$ 16 $-\frac{1}{8}$ 17 $50\sqrt{2}$ m
 18 $2\sqrt{3}$

- 01 ① $690^\circ = 360^\circ \times 1 + 330^\circ$
 ② $-120^\circ = 360^\circ \times (-1) + 240^\circ$
 $-240^\circ = 360^\circ \times (-1) + 120^\circ$
 ③ $-\frac{\pi}{3} = 2\pi \times (-1) + \frac{5}{3}\pi$
 $\frac{13}{3}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{\pi}{3}$
 ④ $\frac{5}{2}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{\pi}{2}$
 $540^\circ = 540^\circ \times \frac{\pi}{180} = 3\pi = 2\pi \times 1 + \pi$
 ⑤ $\frac{8}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 480^\circ = 360^\circ \times 1 + 120^\circ$
 따라서 ⑤이다.

- 02 $\overline{OP} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$ 이므로
 $\sin\theta = \frac{4}{5}, \cos\theta = -\frac{3}{5}, \tan\theta = -\frac{4}{3}$

$$\frac{36(\sin\theta + \tan\theta)}{\cos\theta} = \frac{36\left(\frac{4}{5} - \frac{4}{3}\right)}{-\frac{3}{5}} = 32$$

- 03 $\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ 의 양변을 제곱하면
 $\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$
 $1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$
 $\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$
 $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$
 $= 1 - 2 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{7}{4}$
 $\sin\theta - \cos\theta = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$
 $0 < \theta < \pi$ 이고 $\sin\theta\cos\theta < 0$ 이므로 θ 는 제2사분면의 각이다.
 $\sin\theta > 0, \cos\theta < 0$ 이므로 $\sin\theta - \cos\theta > 0$
 따라서 $\sin\theta - \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$

$$\begin{aligned} 04 \quad \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{1 + 2\sin\theta\cos\theta} &= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta} \\ &= \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{(\sin\theta + \cos\theta)^2} \\ &= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = 2 \end{aligned}$$

$-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos\theta \neq 0$ 이므로

$$\frac{\cos\theta - \sin\theta}{\cos\theta + \sin\theta} = \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta} = 2$$

$$1 - \tan\theta = 2 + 2\tan\theta$$

따라서 $\tan\theta = -\frac{1}{3}$

- 05 ② 함수 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것과 같으므로 함수 $y = -\cos x$ 의 그래프와 일치한다.

따라서 ②이다.

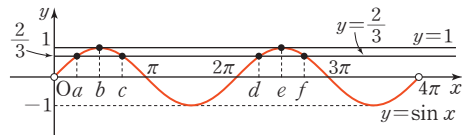
- 06 ① $y = 2\cos x$ 의 주기는 2π 이다.
 ② $y = 3\tan x$ 의 주기는 π 이다.
 ③ $y = -3\sin\frac{1}{2}x + 1$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|} = 4\pi$ 이다.
 ④ $y = \cos(2x + \pi) + 1 = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$ 이다.
 ⑤ $y = \tan\frac{1}{3}x - 1$ 의 주기는 $\frac{\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 3\pi$ 이다.

따라서 ③이다.

- 07 $3\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$
 $(3\sin x - 2)(\sin x - 1) = 0$

$$\sin x = \frac{2}{3} \text{ 또는 } \sin x = 1$$

다음 그림과 같이 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 두 직선 $y = 1, y = \frac{2}{3}$ 의 교점의 x 좌표를 각각 a, b, c, d, e, f 라고 하자.



$a < b < c < d < e < f$ 라고 하면

$$b = \frac{\pi}{2}, c = \pi - a, d = 2\pi + a, e = \frac{5}{2}\pi, f = 3\pi - a$$

따라서 $a + b + c + d + e + f = 9\pi$

- 08 $\sin 10\theta = \sin \pi = 0$, $\sin 20\theta = \sin 2\pi = 0$,
 $\sin 11\theta = \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$,
 $\sin 12\theta = \sin(\pi + 2\theta) = -\sin 2\theta$, ...
 $\sin 19\theta = \sin(\pi + 9\theta) = -\sin 9\theta$ 이고,

$$\sin 5\theta = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\sin 6\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\sin 7\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right) = \cos 2\theta$$

$$\sin 8\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3\theta\right) = \cos 3\theta$$

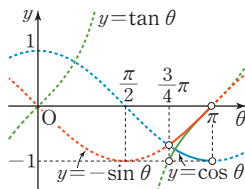
$$\sin 9\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 4\theta\right) = \cos 4\theta$$

이므로

$$\begin{aligned} & \sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \cdots + \sin^2 9\theta + \sin^2 10\theta \\ & \quad + \sin^2 11\theta + \cdots + \sin^2 19\theta + \sin^2 20\theta \\ & = 2(\sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \cdots + \sin^2 9\theta) \\ & = 2(\sin^2 \theta + \sin^2 2\theta + \sin^2 3\theta + \sin^2 4\theta + 1 \\ & \quad + \cos^2 \theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta + \cos^2 4\theta) \\ & = 10 \end{aligned}$$

- 09 오른쪽 그래프에서

$$\begin{aligned} & \frac{3}{4}\pi < \theta < \pi \text{ 일 때,} \\ & -1 < \tan \theta < 0 \\ & \cos \theta < 0 \\ & \cos \theta < -\sin \theta \end{aligned}$$

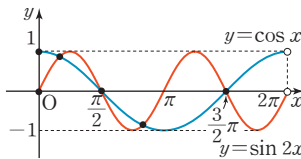


이므로

$$\begin{aligned} & \sqrt{(1+\tan \theta)^2} + |\cos \theta + \tan \theta| - \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} \\ & = 1 + \tan \theta - (\cos \theta + \tan \theta) + (\sin \theta + \cos \theta) \\ & = 1 + \sin \theta \end{aligned}$$

- 10 오른쪽 그림과 같이

두 함수 $y = \cos x$,
 $y = \sin 2x$ 의 그래프
 의 교점은 4개이므로
 방정식 $\sin 2x = \cos x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 4
 이다. 따라서 ⑤이다.



- 11 $\frac{3}{\sin 120^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 40^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 20^\circ}$ 이므로
 $\frac{\overline{AC}}{\sin 40^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 20^\circ} = 2\sqrt{3}$

한편 $\cos 50^\circ = \cos(90^\circ - 40^\circ) = \sin 40^\circ$ 이므로

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 20^\circ} + \frac{\overline{AC}}{\cos 50^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 20^\circ} + \frac{\overline{AC}}{\sin 40^\circ} = 4\sqrt{3}$$

따라서 ④이다.

- 12 삼각형 ABD에서

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2}{2 \times \overline{AB} \times \overline{BD}} \\ &= \frac{4^2 + 3^2 - 3^2}{2 \times 4 \times 3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

삼각형 ABC에서

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \cos B \\ &= 4^2 + 5^2 - 2 \times 4 \times 5 \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{43}{3} \end{aligned}$$

- 13 $\angle AOB = \theta$, $\overline{OA} = r_1$, $\overline{OC} = r_2$ 라고 하면

$$\widehat{AB} : \widehat{CD} = r_1\theta : r_2\theta = 2 : 3 \text{ 이므로}$$

$$r_1 : r_2 = 2 : 3$$

▶ 10%

$$\overline{OA} = 2k, \overline{OC} = 3k \ (k > 0) \text{라고 하면}$$

$$\overline{AC} = k$$

색칠한 도형의 둘레의 길이가 10이므로

$$2k + 2k\theta + 3k\theta = 10$$

$$2k + 5k\theta = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

▶ 20%

색칠한 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (3k)^2 \times \theta - \frac{1}{2} \times (2k)^2 \times \theta = \frac{5}{2} k^2 \theta$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } k\theta = 2 - \frac{2}{5}k$$

▶ 20%

따라서 색칠한 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \frac{5}{2} k \left(2 - \frac{2}{5}k \right) = -k^2 + 5k \\ & = -\left(k - \frac{5}{2} \right)^2 + \frac{25}{4} \end{aligned}$$

▶ 30%

즉, 구하는 최댓값은 $\frac{25}{4}$ 이다.

▶ 20%

- 14 $f(x) = a \cos(bx + 1) + c = a \cos b\left(x + \frac{1}{b}\right) + c$

(가)에서 함수 $y = f(x)$ 의 주기가 3π 이고, $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 3\pi$$

$$b = \frac{2}{3}$$

▶ 40%

(나)에서 함수 $y = f(x)$ 의 최솟값은 -1 , 최댓값은 5 이고, $a > 0$, $c > 0$ 이므로

$$-a + c = -1, a + c = 5$$

▶ 30%

위의 두 식을 연립하여 풀면

$$a = 3, c = 2$$

▶ 20%

따라서 $abc = 4$

▶ 10%

- 15 $x^2 - 2x \sin \theta + \cos^2 \theta - \cos \theta > 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2x \sin \theta + \cos^2 \theta - \cos \theta = 0$ 의 판별식을 D 라고 하면

$$\frac{D}{4} = \sin^2 \theta - (\cos^2 \theta - \cos \theta) < 0 \quad \bullet 40\%$$

$$1 - \cos^2 \theta - (\cos^2 \theta - \cos \theta) < 0$$

$$2 \cos^2 \theta - \cos \theta - 1 > 0$$

$$(2 \cos \theta + 1)(\cos \theta - 1) > 0$$

$$\cos \theta < -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos \theta > 1 \quad \bullet 30\%$$

$$\text{따라서 } \frac{2}{3}\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi \quad \bullet 30\%$$

- 16 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라고 하면 $\frac{2}{\sin 30^\circ} = 2R$ 이므로

$$R = \frac{2}{2 \sin 30^\circ} = 2 \quad \bullet 30\%$$

삼각형 ABC의 외심을 O라고 하면

$$\angle BOC = 2\theta \quad \bullet 30\%$$

삼각형 OBC에서 $\overline{OB} = \overline{OC} = 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \frac{\overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 - \overline{BC}^2}{2 \times \overline{OB} \times \overline{OC}} \\ &= \frac{2^2 + 2^2 - 3^2}{2 \times 2 \times 2} = -\frac{1}{8} \quad \bullet 40\% \end{aligned}$$

17 $\overline{AC} = \frac{50}{\sin 30^\circ} = \frac{50}{\frac{1}{2}} = 100$

$$\overline{BC} = \frac{50}{\sin 45^\circ} = \frac{50}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 50\sqrt{2} \quad \bullet 20\%$$

삼각형 ACB에서

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \times \overline{AC} \times \overline{BC} \times \cos C \\ &= 100^2 + (50\sqrt{2})^2 \\ &\quad - 2 \times 100 \times 50\sqrt{2} \times \cos 45^\circ \\ &= 5000 \quad \bullet 50\% \end{aligned}$$

$\overline{AB} > 0$ 이므로

$$\overline{AB} = 50\sqrt{2} \quad \bullet 20\%$$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $50\sqrt{2}$ m이다.

$$\bullet 10\%$$

18 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \sin 60^\circ = \frac{9\sqrt{3}}{2} \quad \bullet 30\%$

$\overline{BD} : \overline{DC} = \overline{AB} : \overline{AC} = 1 : 2$ 이므로 각의 이등분선의 성질에 따라 $\angle BAD = \angle CAD = 30^\circ$

$$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC \text{이므로}$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \times 3 \times \overline{AD} \times \sin 30^\circ$$

$$+ \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times 6 \times \sin 30^\circ \quad \bullet 60\%$$

$$\text{따라서 } \overline{AD} = 2\sqrt{3} \quad \bullet 10\%$$

III. 수열

274~276쪽

01 1	02 ④	03 196	04 96	05 5
06 20	07 ③	08 ⑤	09 8305	10 $\frac{175}{132}$
11 182	12 19	13 $\frac{40}{9}$	14 192	
15 수지, 103000원	16 415			
17 $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + 4$ ($n=1, 2, 3, \dots$)				
18 풀이 참고				

- 01 공차를 d 라고 하면

$$a_{11} = 19 + 10d = -11 \text{이므로 } d = -3$$

$$\text{일반항 } a_n \text{은 } a_n = -3n + 22$$

$a_n < 0$ 이 되려면 $-3n + 22 < 0$, $n > \frac{22}{3} = 7.3\cdots$ 이어야 한다.

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 제8항부터 음수이다.

$$\text{이때 } a_7 = 1, a_8 = -2 \text{이므로 } |a_7| = 1, |a_8| = 2$$

따라서 $|a_n|$ 의 최솟값은 1이다.

- 02 첫째항을 a , 공차를 d 라고 하면

$$a_3 + a_8 = (a + 2d) + (a + 7d) = 2a + 9d = 46$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$$

$$= \frac{10(2a + 9d)}{2} = \frac{10 \times 46}{2} = 230$$

따라서 ④이다.

- 03 $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n^2 - 3n - \{(n-1)^2 - 3(n-1)\}$$

$$= 2n - 4$$

$$\text{따라서 } a_{100} = 2 \times 100 - 4 = 196$$

- 04 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면

$$a_2 + a_5 = ar + ar^4 = ar(1 + r^3) = 54$$

$$a_3 + a_6 = ar^2 + ar^5 = ar^2(1 + r^3) = 108$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=3, r=2$

일반항 a_n 은 $a_n = 3 \times 2^{n-1}$

따라서 $a_6 = 3 \times 2^5 = 96$

- 05 근과 계수의 관계에 따라 $\alpha + \beta = 4, \alpha\beta = 9$

p 는 α, β 의 등차중항이므로 $p = \frac{\alpha + \beta}{2} = 2$

q 는 α, β 의 등비중항이므로 $q = \sqrt{\alpha\beta} = 3$

따라서 $p + q = 2 + 3 = 5$

- 06 공비를 r 라고 하면 제5항이 16이므로

$$1 \times r^4 = 16$$

$r > 0$ 이므로 $r = 2$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$S_n \geq 10^6 - 1$ 이 되려면 $2^n - 1 \geq 10^6 - 1, 2^n \geq 10^6$ 이어야 한다.

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 2^n \geq \log 10^6, n \log 2 \geq 6$$

$$n \geq \frac{6}{\log 2} = \frac{6}{0.301} = 19.9 \dots$$

따라서 S_n 이 처음으로 $10^6 - 1$ 이상이 되는 자연수 n 의 값은 20이다.

- 07 $x^{10} + x^9 + \dots + x + 1$ 을 $x-1$ 로 나눈 나머지는 11이므로

$$x^{10} + x^9 + \dots + x + 1 = (x-1)f(x) + 11 \quad \dots\dots ①$$

$f(x)$ 를 $x-2$ 로 나눈 나머지는 $f(2)$ 이므로 ①에

$x=2$ 를 대입하면

$$2^{10} + 2^9 + \dots + 2 + 1 = f(2) + 11$$

$$f(2) = \frac{2^{11} - 1}{2 - 1} - 11 = 2^{11} - 12$$

따라서 ③이다.

- 08 $\sum_{k=1}^{10} (k+1)^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} (k+2) + \sum_{k=1}^{10} 3$

$$= \sum_{k=1}^{10} \{(k+1)^2 - 2(k+2) + 3\}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$$

따라서 ⑤이다.

- 09 $1^2 \times 1 + 2^2 \times 4 + 3^2 \times 7 + \dots + 10^2 \times 28$

$$= \sum_{k=1}^{10} k^2(3k-2) = \sum_{k=1}^{10} (3k^3 - 2k^2)$$

$$= 3 \times \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 - 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6}$$

$$= 8305$$

- 10 $\sum_{m=1}^k (2m+1) = 2 \sum_{m=1}^k m + \sum_{m=1}^k 1$

$$= 2 \times \frac{k(k+1)}{2} + 1 \times k$$

$$= k^2 + 2k = k(k+2)$$

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{2}{\sum_{m=1}^k (2m+1)}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \frac{2}{k(k+2)} = \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12} \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{11} - \frac{1}{12} = \frac{175}{132}$$

- 11 0 이상이고 1 미만인 유리수 중에서 분모가 12인 기약분수는

$$\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{7}{12}, \frac{11}{12}$$

이므로 구하는 기약분수의 합은

$$\sum_{k=3}^9 \left\{ \left(k + \frac{1}{12} \right) + \left(k + \frac{5}{12} \right) + \left(k + \frac{7}{12} \right) + \left(k + \frac{11}{12} \right) \right\}$$

$$= \sum_{k=3}^9 (4k+2) = \sum_{k=3}^9 (4k+2) - \sum_{k=1}^2 (4k+2)$$

$$= 4 \sum_{k=1}^9 k + \sum_{k=1}^9 2 - (4 \times 1 + 2 + 4 \times 2 + 2)$$

$$= 4 \times \frac{9 \times 10}{2} + 2 \times 9 - 16 = 182$$

- 12 굴 200개를 상자에 각각 1, 2, 3, ...개씩 넣을 때, 가장 많은 상자가 필요하므로 상자의 개수를 n 이라고 하면

$$\sum_{k=1}^n k \leq 200, \text{ 즉 } \frac{n(n+1)}{2} \leq 200$$

이어야 한다.

위의 부등식을 만족시키는 n 의 최댓값은 19이다.

이때 $\sum_{k=1}^{19} k = 190$ 이고, 남은 굴 10개를 새로운 상자에 담으면 굴의 개수가 같은 상자가 존재하게 된다.

따라서 굴의 개수가 10개 이상인 상자 중 한 개 또는 여러 개를 택하여 굴의 개수가 같은 상자가 존재하지 않도록 담으면 된다.

즉, 필요한 상자의 개수는 19이다.

- 13 공차를 d 라고 하자. 20과 60 사이에 n 개의 수를 넣어 만든 등차수열의 첫째항부터 제 $(n+2)$ 항까지의 합이 400이므로

$$\frac{(n+2)(20+60)}{2}=400 \text{에서 } n=8 \quad \bullet 50\%$$

이 수열의 제10항이 60이므로

$$20+9d=60, d=\frac{40}{9} \quad \bullet 50\%$$

- 14 첫째항을 a , 공비를 r 라고 하면 $(\frac{7}{8})$ 에서

$$ar^4 : a^2r^3 = 2 : 3$$

$$r : a = 2 : 3 \text{이므로 } 2a = 3r \quad \bullet 40\%$$

$$(\frac{1}{2}) \text{에서 } \frac{ar^5 + ar^8}{ar^2 + ar^5} = \frac{ar^5(1+r^3)}{ar^2(1+r^3)} = r^3 = 8$$

$$r \text{는 실수이므로 } r=2 \quad \bullet 40\%$$

$$2a = 3r \text{이므로 } a=3$$

$$\text{따라서 } a_7 = ar^6 = 3 \times 2^6 = 192 \quad \bullet 20\%$$

- 15 [수지] $10(1+0.006)+10(1+0.006)^2+\dots$

$$\begin{aligned} &+10(1+0.006)^{23}+10(1+0.006)^{24} \\ &= \frac{10(1+0.006)\{(1+0.006)^{24}-1\}}{(1+0.006)-1} \\ &= \frac{10(1+0.006)(1.15-1)}{0.006} = 251.5 \quad \bullet 40\% \end{aligned}$$

- [민재] $20(1+0.005)+20(1+0.005)^2+\dots$

$$\begin{aligned} &+20(1+0.005)^{11}+20(1+0.005)^{12} \\ &= \frac{20(1+0.005)\{(1+0.005)^{12}-1\}}{(1+0.005)-1} \\ &= \frac{20(1+0.005)(1.06-1)}{0.005} = 241.2 \quad \bullet 40\% \end{aligned}$$

따라서 수지의 적립금의 원리합계는 2515000원이고, 민재의 적립금의 원리합계는 2412000원이므로 수지의 적립금의 원리합계가 103000원 더 많다. $\bullet 20\%$

- 16 (i) $n=2k-1$ (k 는 자연수)일 때,

$$\left(2k - \frac{3}{4}\right)^2 = 4k^2 - 3k + \frac{9}{16} \text{이므로}$$

$$a_{2k-1} = 4k^2 - 3k + 1 \quad \bullet 30\%$$

- (ii) $n=2k$ (k 는 자연수)일 때,

$$\left(2k + \frac{1}{4}\right)^2 = 4k^2 + k + \frac{1}{16} \text{이므로}$$

$$a_{2k} = 4k^2 + k \quad \bullet 30\%$$

$$\text{따라서 } \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^5 (a_{2k-1} + a_{2k})$$

$$= \sum_{k=1}^5 (8k^2 - 2k + 1)$$

$$= 8 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} - 2 \times \frac{5 \times 6}{2} + 1 \times 5$$

$$= 415 \quad \bullet 40\%$$

- 17 처음 그릇 A와 그릇 B의 설탕의 양은 각각

$$200 \times \frac{4}{100} = 8(g), 200 \times \frac{8}{100} = 16(g)$$

두 그릇에 있는 설탕의 총량은 $8+16=24(g)$ 이고, n 번 반복해도 변함없다.

n 번 반복한 후 그릇 A의 설탕의 양은

$$200 \times \frac{a_n}{100} = 2a_n(g)$$

그릇 A에서 설탕물 100 g을 그릇 B로 옮기면 그릇 A의 설탕의 양은 $a_n(g)$ 이고 이때 그릇 B의 설탕의 양은 $24-a_n(g)$ 이다. $\bullet 50\%$

그리고 그릇 B에서 설탕물 100 g을 그릇 A로 옮기면 그릇 A의 설탕의 양은

$$a_n + \frac{1}{3}(24-a_n) = 8 + \frac{2}{3}a_n(g) \quad \bullet 40\%$$

따라서

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{8 + \frac{2}{3}a_n}{200} \times 100 = \frac{1}{3}a_n + 4 \\ &\quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad \bullet 10\% \end{aligned}$$

- 18 $a_n = 5^{n+1} + 2 \times 3^n + 1$ 이라고 하자.

- (i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = 5^2 + 2 \times 3 + 1 = 32$$

따라서 $n=1$ 일 때 $5^{n+1} + 2 \times 3^n + 1$ 은 8의 배수이다. $\bullet 20\%$

- (ii) $n=k$ 일 때, $a_k = 5^{k+1} + 2 \times 3^k + 1$ 이 8의 배수라고 가정하자.

$n=k+1$ 일 때, $a_{k+1} = 5^{k+2} + 2 \times 3^{k+1} + 1$ 에 대하여

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &= 5^{k+2} + 2 \times 3^{k+1} + 1 - (5^{k+1} + 2 \times 3^k + 1) \\ &= 5 \times 5^{k+1} + 6 \times 3^k + 1 - (5^{k+1} + 2 \times 3^k + 1) \\ &= 4(5^{k+1} + 3^k) \end{aligned}$$

이때 5^{k+1} 과 3^k 은 모두 홀수이므로 $5^{k+1} + 3^k$ 은 짝수이다.

즉, $a_{k+1} - a_k$ 는 8의 배수이다.

a_k 가 8의 배수이므로 a_{k+1} 도 8의 배수이다.

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $5^{n+1} + 2 \times 3^n + 1$ 은 8의 배수이다. $\bullet 70\%$

- (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여

$5^{n+1} + 2 \times 3^n + 1$ 은 8의 배수이다. $\bullet 10\%$