

유형만렙 LITE

정답과 해설

대수

01 지수

개념유형

9~10쪽

001 답 a^8

$$a^3 \times a^5 = a^{3+5} = a^8$$

002 답 a^5

$$a^7 \div a^2 = a^{7-2} = a^5$$

003 답 $\frac{4a^2}{b^2}$

$$\left(\frac{2a}{b}\right)^2 = \frac{(2a)^2}{b^2} = \frac{4a^2}{b^2}$$

004 답 a^4b^9

$$ab^4 \times a^3b^5 = a^{1+3}b^{4+5} = a^4b^9$$

005 답 $-9a^7b^{12}$

$$(3a^2b^3)^2 \times (-ab^2)^3 = 9a^4b^6 \times (-a^3b^6) = -9a^{4+3}b^{6+6} = -9a^7b^{12}$$

006 답 $2a^4b$

$$(2a^3b)^3 \div 4a^5b^2 = 8a^9b^3 \div 4a^5b^2 = 2a^{9-5}b^{3-2} = 2a^4b$$

007 답 b^{18}

$$(a^2b^5)^2 \div \left(\frac{a}{b^2}\right)^4 = a^4b^{10} \div \frac{a^4}{b^8} = a^4b^{10} \times \frac{b^8}{a^4} = b^{10+8} = b^{18}$$

008 답 $\frac{1}{2}a^9b^2$

$$(4a^3b^2)^2 \times \left(\frac{1}{2}a^2b\right)^5 \div (ab)^7 = 16a^6b^4 \times \frac{1}{32}a^{10}b^5 \div a^7b^7 = \frac{1}{2}a^{6+10-7}b^{4+5-7} = \frac{1}{2}a^9b^2$$

009 답 $1, 1, \sqrt{3}, \sqrt{3}$

010 답 $2, -1 \pm \sqrt{3}i$

8의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=8$ 이므로

$$x^3-8=0$$

$$(x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=-1 \pm \sqrt{3}i$$

따라서 8의 세제곱근은 $2, -1 \pm \sqrt{3}i$ 이다.

011 답 $-5, \frac{5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$

-125의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=-125$ 이므로

$$x^3+125=0$$

$$(x+5)(x^2-5x+25)=0$$

$$\therefore x=-5 \text{ 또는 } x=\frac{5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 -125의 세제곱근은 $-5, \frac{5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$ 이다.

012 답 $\pm 3, \pm 3i$

81의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=81$ 이므로

$$x^4-81=0$$

$$(x^2-9)(x^2+9)=0$$

$$(x+3)(x-3)(x+3i)(x-3i)=0$$

$$\therefore x=\pm 3 \text{ 또는 } x=\pm 3i$$

따라서 81의 네제곱근은 $\pm 3, \pm 3i$ 이다.

013 답 $\pm 5, \pm 5i$

625의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=625$ 이므로

$$x^4-625=0$$

$$(x^2-25)(x^2+25)=0$$

$$(x+5)(x-5)(x+5i)(x-5i)=0$$

$$\therefore x=\pm 5 \text{ 또는 } x=\pm 5i$$

따라서 625의 네제곱근은 $\pm 5, \pm 5i$ 이다.

014 답 3

27의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=27$ 이므로

$$x^3-27=0$$

$$(x-3)(x^2+3x+9)=0$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=\frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 27의 세제곱근 중 실수인 것은 3이다.

015 답 -1

-1의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=-1$ 이므로

$$x^3+1=0$$

$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

따라서 -1의 세제곱근 중 실수인 것은 -1이다.

016 답 -4

-64의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=-64$ 이므로

$$x^3+64=0$$

$$(x+4)(x^2-4x+16)=0$$

$$\therefore x=-4 \text{ 또는 } x=2 \pm 2\sqrt{3}i$$

따라서 -64의 세제곱근 중 실수인 것은 -4이다.

017 답 $-2, 2$

16의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=16$ 이므로

$$x^4-16=0, (x^2-4)(x^2+4)=0$$

$$(x+2)(x-2)(x+2i)(x-2i)=0$$

$$\therefore x=\pm 2 \text{ 또는 } x=\pm 2i$$

따라서 16의 네제곱근 중 실수인 것은 -2, 2이다.

018 답 $-\sqrt{7}, \sqrt{7}$

49의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=49$ 이므로

$$x^4-49=0, (x^2-7)(x^2+7)=0$$

$$(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7}i)(x-\sqrt{7}i)=0$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{7} \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{7}i$$

따라서 49의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt{7}, \sqrt{7}$ 이다.

019 답 $\times$

0의 제곱근은 0이다.

020 답 $\bigcirc$

256의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=256$ 이므로

$$x^4-256=0, (x^2-16)(x^2+16)=0$$

$$(x+4)(x-4)(x+4i)(x-4i)=0$$

$$\therefore x=\pm 4 \text{ 또는 } x=\pm 4i$$

따라서 256의 네제곱근은 $\pm 4, \pm 4i$ 이다.

021 답 $\times$

-8의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=-8$ 이므로 $x^3+8=0$

$$(x+2)(x^2-2x+4)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1\pm\sqrt{3}i$$

따라서 -8의 세제곱근 중 실수인 것은 -2의 1개이다.

022 답 $\bigcirc$

$(-7)^3=-343$ 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=-343$ 이므로

$$x^3+343=0, (x+7)(x^2-7x+49)=0$$

$$\therefore x=-7 \text{ 또는 } x=\frac{7\pm 7\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 $(-7)^3$ 의 세제곱근 중 실수인 것은 -7이다.

023 답 $\times$

-9의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=-9$

이를 만족시키는 실수 x 의 값은 존재하지 않으므로 -9의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

024 답 5, 5

025 답 -6

$$\sqrt[3]{-216}=\sqrt[3]{(-6)^3}=-6$$

026 답 0.2

$$\sqrt[3]{0.008}=\sqrt[3]{0.2^3}=0.2$$

027 답 5

$$\sqrt[4]{625}=\sqrt[4]{5^4}=5$$

028 답 -3

$$-\sqrt[4]{81}=-\sqrt[4]{3^4}=-3$$

029 답 $\frac{1}{2}$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^4}=\frac{1}{2}$$

030 답 -3

$$\sqrt[5]{-243}=\sqrt[5]{(-3)^5}=-3$$

실전유형

11쪽

031 답 ③

-512의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=-512$ 이므로

$$x^3+512=0, (x+8)(x^2-8x+64)=0$$

$$\therefore x=-8 \text{ 또는 } x=4\pm 4\sqrt{3}i$$

따라서 -512의 세제곱근은 -8, $4\pm 4\sqrt{3}i$ 이다.

032 답 ③

ㄱ. 64의 제곱근을 x 라 하면 $x^2=64$ 이므로

$$x^2-64=0, (x+8)(x-8)=0$$

$$\therefore x=\pm 8$$

따라서 64의 제곱근은 ± 8 이다.

ㄴ. 제곱근 49는 $\sqrt{49}=7$ 이다.

ㄷ. -216의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=-216$ 이므로

$$x^3+216=0, (x+6)(x^2-6x+36)=0$$

$$\therefore x=-6 \text{ 또는 } x=3\pm 3\sqrt{3}i$$

따라서 -216의 세제곱근은 -6, $3\pm 3\sqrt{3}i$ 이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

033 답 ⑤

a 는 2의 세제곱근이므로 $a^3=2$

$$\sqrt{2} \text{는 } b \text{의 네제곱근이므로 } (\sqrt{2})^4=b \quad \therefore b=4$$

$$\therefore \left(\frac{b}{a}\right)^3=\frac{b^3}{a^3}=\frac{4^3}{2}=32$$

034 답 ⑤

① 125의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=125$ 이므로

$$x^3-125=0, (x-5)(x^2+5x+25)=0$$

$$\therefore x=5 \text{ 또는 } x=\frac{-5\pm 5\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 125의 세제곱근은 5, $\frac{-5\pm 5\sqrt{3}i}{2}$ 이다.

② 9의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=9$ 이므로

$$x^4-9=0, (x^2-3)(x^2+3)=0$$

$$(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)=0$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{3} \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{3}i$$

따라서 9의 네제곱근은 $\pm\sqrt{3}, \pm\sqrt{3}i$ 이다.

③ $-\sqrt{36}=-6$ 의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-6}$ 이다.

④ n 이 짝수일 때, 3의 n 제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[n]{3}, \sqrt[n]{3}$ 이다.

⑤ n 이 홀수일 때, -2 의 n 제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[n]{-2}$ 의 1개이다.
따라서 옳은 것은 ⑤이다.

035 답 3

6의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[4]{6}$, $\sqrt[4]{6}$ 의 2개이므로
 $m=2$
 -35 의 다섯제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{-35}$ 의 1개이므로
 $n=1$
 $\therefore m+n=2+1=3$

036 답 4

$n=3$ 일 때, $2n^2-9n=-9<0$ 이고 n 은 홀수이므로 $f(3)=1$
 $n=4$ 일 때, $2n^2-9n=-4<0$ 이고 n 은 짝수이므로 $f(4)=0$
 $n=5$ 일 때, $2n^2-9n=5>0$ 이고 n 은 홀수이므로 $f(5)=1$
 $n=6$ 일 때, $2n^2-9n=18>0$ 이고 n 은 짝수이므로 $f(6)=2$
 $\therefore f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$

개념유형

13~14쪽

037 답 6

038 답 3

$$\sqrt[4]{27} \times \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{27 \times 3} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

039 답 $\frac{1}{5}$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{5}} \times \sqrt[3]{\frac{1}{25}} = \sqrt[3]{\frac{1}{5} \times \frac{1}{25}} = \sqrt[3]{\frac{1}{125}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = \frac{1}{5}$$

040 답 2

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$$

041 답 $\frac{1}{3}$

$$\frac{\sqrt[4]{6}}{\sqrt[4]{486}} = \sqrt[4]{\frac{6}{486}} = \sqrt[4]{\frac{1}{81}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{1}{3}$$

042 답 6

$$(\sqrt[8]{36})^4 = \sqrt[8]{36^4} = \sqrt[8]{6^8} = 6$$

043 답 $\frac{1}{5}$

$$\left(\sqrt[6]{\frac{1}{25}}\right)^3 = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{25}\right)^3} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{5}\right)^6} = \frac{1}{5}$$

044 답 4

$$\sqrt{\sqrt{256}} = \sqrt[4]{256} = \sqrt[4]{4^4} = 4$$

045 답 2

$$\sqrt[3]{\sqrt[6]{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$$

046 답 25

$$\sqrt[7]{5^{14}} = \sqrt[7]{(5^2)^7} = 5^2 = 25$$

047 답 $\frac{1}{4}$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^6} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

048 답 $\sqrt{11}$

$$(\sqrt[10]{11})^5 = \sqrt[10]{11^5} = \sqrt{11}$$

049 답 $\sqrt[3]{\frac{1}{49}}$

$$\left(\sqrt[6]{\frac{1}{7}}\right)^4 = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{7}\right)^4} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{7}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{1}{49}}$$

050 답 64

$$\sqrt[7]{8^{28}} = \sqrt[7]{8^{28}} = \sqrt[14]{(8^2)^{14}} = 8^2 = 64$$

051 답 $\frac{1}{27}$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{3}\right)^{36}}} = \sqrt[12]{\left(\frac{1}{3}\right)^{36}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

052 답 $\sqrt[5]{5}$

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{125}} = \sqrt[15]{125} = \sqrt[15]{5^3} = \sqrt[5]{5}$$

053 답 $\sqrt{2}$

$$\sqrt[6]{4 \times \sqrt[3]{8}} = \sqrt[6]{4 \times \sqrt[3]{2^3}} = \sqrt[6]{4 \times 2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

054 답 81

$$\sqrt[15]{3^{20}} \times \sqrt[3]{3^8} = \sqrt[3]{3^4} \times \sqrt[3]{3^8} = \sqrt[3]{3^4 \times 3^8} = \sqrt[3]{3^{12}} = 3^4 = 81$$

055 답 $\frac{1}{5}$

$$\sqrt[4]{5^3} \div \sqrt[12]{5^{21}} = \sqrt[4]{5^3} \div \sqrt[4]{5^7} = \sqrt[4]{5^3 \div 5^7} = \sqrt[4]{\frac{5^3}{5^7}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{5}\right)^4} = \frac{1}{5}$$

056 답 6

$$\sqrt[12]{6^4} \times \sqrt[5]{\sqrt[3]{36^5}} = \sqrt[3]{6} \times \sqrt[15]{36^5} = \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{36} = \sqrt[3]{6 \times 36} = \sqrt[3]{6^3} = 6$$

057 답 3

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{243} \div \sqrt[4]{9} &= \sqrt[4]{243} \div \sqrt[8]{9} = \sqrt[4]{243} \div \sqrt[8]{3^2} \\ &= \sqrt[4]{243} \div \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{\frac{243}{3}} = \sqrt[4]{3^4} = 3 \end{aligned}$$

058 답 2

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{3\sqrt{4}} \times \sqrt[6]{\frac{16}{9}} &= \sqrt[3]{3 \times 2} \times \sqrt[6]{\left(\frac{4}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt[3]{6} \times \sqrt[3]{\frac{4}{3}} \\ &= \sqrt[3]{6 \times \frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^3} = 2 \end{aligned}$$

059 답 1

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[6]{27} \times \sqrt[12]{9}}{\sqrt[6]{81}} &= \frac{\sqrt[6]{27} \times \sqrt[12]{3^2}}{\sqrt[6]{81}} = \frac{\sqrt[6]{27 \times 6}}{\sqrt[6]{81}} \\ &= \sqrt[6]{\frac{27 \times 3}{81}} = \sqrt[6]{1} = 1 \end{aligned}$$

060 답 a

$$\sqrt[10]{a^3} \times \sqrt[10]{a^7} = \sqrt[10]{a^3 \times a^7} = \sqrt[10]{a^{10}} = a$$

061 답 a²

$$\frac{\sqrt[3]{a^8}}{\sqrt[3]{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{a^8}{a^2}} = \sqrt[3]{a^6} = a^2$$

062 답 a

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{5\sqrt{a^3}} \times \sqrt[10]{a^9} &= \sqrt[30]{a^3 \times a^9} = \sqrt[30]{a^{12}} = \sqrt[10]{a \times a^9} \\ &= \sqrt[10]{a \times a^9} = \sqrt[10]{a^{10}} = a \end{aligned}$$

063 답 a²b⁴

$$(\sqrt[3]{ab^2})^6 = \sqrt[3]{(ab^2)^6} = \sqrt[3]{a^6b^{12}} = a^2b^4$$

064 답 a³b³

$$\sqrt{a^5b} \times \sqrt[4]{a^2b^{10}} = \sqrt{a^5b} \times \sqrt{ab^5} = \sqrt{a^6b^6} = a^3b^3$$

065 답 a²

$$\sqrt[4]{a^{16}b^6} \div \sqrt[4]{a^3b^3} = \sqrt[4]{a^{13}b^3} \div \sqrt[4]{a^3b^3} = \sqrt[4]{\frac{a^{13}b^3}{a^3b^3}} = \sqrt[4]{a^{10}} = a^2$$

066 답 2a³b³

$$\sqrt[3]{8a^6b^3} \times \sqrt[4]{a^4b^8} = 2a^2b \times ab^2 = 2a^3b^3$$

$$\begin{aligned} ⑤ \sqrt[4]{\sqrt{1024}} \div \sqrt[4]{2} &= \sqrt[8]{1024} \div \sqrt[4]{2} = \sqrt[8]{2^{10}} \div \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2^5} \div \sqrt[4]{2} \\ &= \sqrt[4]{\frac{2^5}{2}} = \sqrt[4]{2^4} = 2 \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

068 답 27

$$\sqrt{\frac{3^{11}+3^{14}}{3^5+3^8}} = \sqrt{\frac{3^{11}(1+3^3)}{3^5(1+3^3)}} = \sqrt{3^6} = 3^3 = 27$$

069 답 ④

$$\begin{aligned} 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{16} + 4\sqrt{16} - 3\sqrt{64} &= 5\sqrt{2 \times 16} + 4\sqrt{2^4} - 6\sqrt{64} \\ &= 5\sqrt{2^5} + 2 - 6\sqrt{2^6} \\ &= 2 + 2 - 2 = 2 \end{aligned}$$

070 답 5

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{4})^2 \div \sqrt[3]{2} \times \sqrt{\frac{625}{3\sqrt[3]{64}}} &= \sqrt[3]{4^2 \div 2} \times \frac{\sqrt{625}}{\sqrt[3]{\sqrt[3]{64}}} = \sqrt[3]{2^4 \div 2} \times \frac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[6]{64}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2^4}{2}} \times \frac{\sqrt[4]{5^4}}{\sqrt[6]{2^6}} = \sqrt[3]{2^3} \times \frac{5}{2} = 2 \times \frac{5}{2} = 5 \end{aligned}$$

071 답 ④

$$\begin{aligned} (a^3)^2 \times (\sqrt[3]{b})^9 \times \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^6 &= a^6 \times \sqrt[3]{b^9} \times \frac{1}{\sqrt{a^6}} = a^6 \times b^3 \times \frac{1}{a^3} \\ &= a^3b^3 = (ab)^3 \end{aligned}$$

따라서 $(ab)^3 = 8$ 이므로 $ab = 2$

072 답 ①

$$\begin{aligned} 9\sqrt{a^3b^6} \times \sqrt[3]{a^5b} \div \sqrt[6]{a^6b^6} &= \sqrt[6]{a^3b^2} \times \sqrt[3]{a^5b} \div ab = \sqrt[6]{a^3b^2 \times a^5b} \div ab \\ &= \sqrt[6]{a^8b^3} \div ab = a^2b \div ab = a \end{aligned}$$

∴ k=1

073 답 1

$$\begin{aligned} \sqrt[6]{\frac{4\sqrt{x}}{5\sqrt[5]{x}}} \div \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{x}}{5\sqrt{x}}} \times \sqrt[5]{\frac{6\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}} &= \frac{\sqrt[6]{4\sqrt{x}}}{\sqrt[5]{5\sqrt[5]{x}}} \div \frac{\sqrt[3]{8\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{5\sqrt{x}}} \times \frac{\sqrt[5]{6\sqrt{x}}}{\sqrt[5]{3\sqrt{x}}} \\ &= \frac{2^{\frac{24}{30}}\sqrt{x}}{5^{\frac{15}{30}}\sqrt{x}} \times \frac{15\sqrt{x}}{24\sqrt{x}} \times \frac{30\sqrt{x}}{15\sqrt{x}} = 1 \end{aligned}$$

개념유형

16~17쪽

074 답 >, 12, >, >

075 답 >

2, 5의 최소공배수가 10이므로

$$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{10}} \sqrt{32}$$

$$\sqrt[5]{5} = 5^{\frac{1}{5}} \times 5^{\frac{1}{5}} = 10^{\frac{1}{10}} \sqrt{25}$$

이때 $32 > 25$ 이므로 $10\sqrt{32} > 10\sqrt{25}$ ∴ $\sqrt{2} > \sqrt[5]{5}$

실전유형

15쪽

067 답 ④

$$① \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5 \times 25} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

$$② \frac{\sqrt[5]{192}}{\sqrt[5]{6}} = \sqrt[5]{\frac{192}{6}} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$③ (\sqrt[4]{9})^2 = \sqrt[4]{9^2} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

$$④ \sqrt{3} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^3} \times \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{3^3 \times 3^2} = \sqrt[6]{3^5}$$

076 ▶

3, 5의 최소공배수가 15이므로

$$\sqrt[3]{3} = 3 \times 5 \sqrt[3]{3^5} = 15 \sqrt[3]{243}$$

$$\sqrt[5]{6} = 5 \times 3 \sqrt[5]{6^3} = 15 \sqrt[5]{216}$$

이때 $243 > 216$ 이므로 $15 \sqrt[3]{243} > 15 \sqrt[5]{216}$

$$\therefore \sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{6}$$

077 ▶

6, 9의 최소공배수가 18이므로

$$\sqrt[6]{3} = 6 \times 3 \sqrt[6]{3^3} = 18 \sqrt[6]{27}$$

$$\sqrt[9]{10} = 9 \times 2 \sqrt[9]{10^2} = 18 \sqrt[9]{100}$$

이때 $27 < 100$ 이므로 $18 \sqrt[6]{27} < 18 \sqrt[9]{100}$

$$\therefore \sqrt[6]{3} < \sqrt[9]{10}$$

078 ▶

$\sqrt[4]{2} = 4 \sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{6} = 8 \sqrt[4]{6}$ 에서

4, 8의 최소공배수가 8이므로

$$\sqrt[4]{2} = 4 \times 2 \sqrt[4]{2^2} = 8 \sqrt[4]{4}$$

이때 $4 < 6$ 이므로 $8 \sqrt[4]{4} < 8 \sqrt[4]{6}$

$$\therefore \sqrt[4]{2} < \sqrt[4]{6}$$

079 ▶

2, 4, 8의 최소공배수가 8이므로

$$\sqrt[2]{2} = 2 \times 4 \sqrt[2]{2^4} = 8 \sqrt[2]{16}$$

$$\sqrt[4]{5} = 4 \times 2 \sqrt[4]{5^2} = 8 \sqrt[4]{25}$$

이때 $10 < 16 < 25$ 이므로 $8 \sqrt[4]{10} < 8 \sqrt[4]{16} < 8 \sqrt[4]{25}$

$$\therefore \sqrt[8]{10} < \sqrt[8]{16} < \sqrt[8]{25}$$

080 ▶

3, 4, 6의 최소공배수가 12이므로

$$\sqrt[3]{2} = 3 \times 4 \sqrt[3]{2^4} = 12 \sqrt[3]{16}$$

$$\sqrt[4]{3} = 4 \times 3 \sqrt[4]{3^3} = 12 \sqrt[4]{27}$$

$$\sqrt[6]{5} = 6 \times 2 \sqrt[6]{5^2} = 12 \sqrt[6]{25}$$

이때 $16 < 25 < 27$ 이므로 $12 \sqrt[3]{16} < 12 \sqrt[6]{25} < 12 \sqrt[4]{27}$

$$\therefore \sqrt[3]{2} < \sqrt[6]{5} < \sqrt[4]{3}$$

081 ▶

2, 3, 4의 최소공배수가 12이므로

$$\sqrt[2]{3} = 2 \times 6 \sqrt[2]{3^6} = 12 \sqrt[2]{729}$$

$$\sqrt[3]{4} = 3 \times 4 \sqrt[3]{4^4} = 12 \sqrt[3]{256}$$

$$\sqrt[4]{6} = 4 \times 3 \sqrt[4]{6^3} = 12 \sqrt[4]{216}$$

이때 $216 < 256 < 729$ 이므로 $12 \sqrt[4]{216} < 12 \sqrt[3]{256} < 12 \sqrt[2]{729}$

$$\therefore \sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4} < \sqrt[2]{3}$$

082 ▶

3, 6, 9의 최소공배수가 18이므로

$$\sqrt[3]{2} = 3 \times 6 \sqrt[3]{2^6} = 18 \sqrt[3]{64}$$

$$\sqrt[6]{6} = 6 \times 3 \sqrt[6]{6^3} = 18 \sqrt[6]{216}$$

$$\sqrt[9]{12} = 9 \times 2 \sqrt[9]{12^2} = 18 \sqrt[9]{144}$$

이때 $64 < 144 < 216$ 이므로 $18 \sqrt[6]{64} < 18 \sqrt[9]{144} < 18 \sqrt[3]{216}$

$$\therefore \sqrt[3]{2} < \sqrt[9]{12} < \sqrt[6]{6}$$

083 ▶

$\sqrt[6]{4}, \sqrt[4]{7} = 8 \sqrt[4]{7}, \sqrt[12]{15}$ 에서

6, 8, 12의 최소공배수가 24이므로

$$\sqrt[6]{4} = 6 \times 4 \sqrt[6]{4^4} = 24 \sqrt[6]{256}$$

$$\sqrt[8]{7} = 8 \times 3 \sqrt[8]{7^3} = 24 \sqrt[8]{343}$$

$$\sqrt[12]{15} = 12 \times 2 \sqrt[12]{15^2} = 24 \sqrt[12]{225}$$

이때 $225 < 256 < 343$ 이므로 $24 \sqrt[12]{225} < 24 \sqrt[6]{256} < 24 \sqrt[8]{343}$

$$\therefore \sqrt[12]{15} < \sqrt[6]{4} < \sqrt[4]{7}$$

실전유형

17쪽

084 ▶ ④

$\sqrt[4]{2}, \sqrt[3]{3} = 6 \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{6} = 18 \sqrt[3]{6}$ 에서

4, 6, 18의 최소공배수가 36이므로

$$\sqrt[4]{2} = 4 \times 9 \sqrt[4]{2^9} = 36 \sqrt[4]{512}$$

$$\sqrt[6]{3} = 6 \times 6 \sqrt[6]{3^6} = 36 \sqrt[6]{729}$$

$$\sqrt[18]{5} = 18 \times 2 \sqrt[18]{5^2} = 36 \sqrt[18]{25}$$

이때 $25 < 512 < 729$ 이므로 $36 \sqrt[18]{25} < 36 \sqrt[4]{512} < 36 \sqrt[6]{729}$

$$\therefore \sqrt[3]{6} < \sqrt[4]{2} < \sqrt[3]{3}$$

085 ▶ A < C < B

$$A = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}, B = \sqrt[6]{\frac{1}{3}}, C = \sqrt[4]{\frac{1}{5}} = \sqrt[8]{\frac{1}{5}} \text{에서}$$

3, 6, 8의 최소공배수가 24이므로

$$A = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 3 \times 8 \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^8} = 24 \sqrt[3]{\frac{1}{256}}$$

$$B = \sqrt[6]{\frac{1}{3}} = 6 \times 4 \sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^4} = 24 \sqrt[6]{\frac{1}{81}}$$

$$C = \sqrt[8]{\frac{1}{5}} = 8 \times 3 \sqrt[8]{\left(\frac{1}{5}\right)^3} = 24 \sqrt[8]{\frac{1}{125}}$$

이때 $\frac{1}{256} < \frac{1}{125} < \frac{1}{81}$ 이므로 $24 \sqrt[8]{\frac{1}{256}} < 24 \sqrt[6]{\frac{1}{125}} < 24 \sqrt[3]{\frac{1}{81}}$

$$\therefore A < C < B$$

086 ▶ 18

$$\sqrt[3]{2} \sqrt[4]{3} = \sqrt[3]{4} \sqrt[4]{2^4 \times 3} = \sqrt[12]{48}$$

$$\sqrt[6]{3} \sqrt[2]{2} = \sqrt[6]{3^2 \times 2} = \sqrt[12]{18}$$

$$\sqrt[4]{2} \sqrt[3]{3} = \sqrt[4]{3} \sqrt[3]{2^3 \times 3} = \sqrt[12]{24}$$

이때 $18 < 24 < 48$ 이므로 $\sqrt[12]{18} < \sqrt[12]{24} < \sqrt[12]{48}$

따라서 $a = \sqrt[12]{18}$ 이므로

$$a^{12} = (\sqrt[12]{18})^{12} = 18$$

087 답 1

088 답 $\frac{1}{16}$

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$$

089 답 $\frac{1}{5}$

$$(\sqrt{5})^{-2} = \frac{1}{(\sqrt{5})^2} = \frac{1}{5}$$

090 답 27

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 3^3 = 27$$

091 답 $\frac{16}{81}$

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^{-4} = \left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

092 답 $\frac{1}{64}$

$$2^{-2} \times 2^{-4} = 2^{-2+(-4)} = 2^{-6} = \frac{1}{64}$$

093 답 9

$$3^{11} \times (3^{-3})^3 = 3^{11} \times 3^{-9} = 3^{11+(-9)} = 3^2 = 9$$

094 답 32

$$8^2 \times 4^{-2} \div 2^{-3} = (2^3)^2 \times (2^2)^{-2} \div 2^{-3} = 2^6 \times 2^{-4} \div 2^{-3} \\ = 2^{6+(-4)-(-3)} = 2^5 = 32$$

095 답 $\frac{a^{18}}{b^{12}}$

$$(a^3 b^{-2})^6 = a^{18} b^{-12} = \frac{a^{18}}{b^{12}}$$

096 답 $\frac{1}{a^2}$

$$(a^2)^{-2} \times a^{-3} \div a^{-5} = a^{-4} \times a^{-3} \div a^{-5} \\ = a^{-4+(-3)-(-5)} \\ = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

097 답 $\frac{b^{27}}{a^{11}}$

$$(a^{-2} b^4)^3 \div (ab^{-3})^5 = a^{-6} b^{12} \div a^5 b^{-15} \\ = a^{-6-5} b^{12-(-15)} \\ = a^{-11} b^{27} = \frac{b^{27}}{a^{11}}$$

098 답 a^6

$$\frac{a^{-6} \times (a^2)^5}{a^3 \times a^{-5}} = \frac{a^{-6} \times a^{10}}{a^{3+(-5)}} = \frac{a^{-6+10}}{a^{-2}} = a^{4-(-2)} = a^6$$

실전유형

19쪽

099 답 ③

$$① -2^{-2} = -\frac{1}{4}$$

$$② 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$③ \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$④ (-3)^{-3} = -\frac{1}{27}$$

$$⑤ \left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = (-3)^2 = 9$$

따라서 두 번째로 큰 수는 ③이다.

100 답 8

$$(5^{-5} \div 5^{-3})^{-2} \div 25^{-2} = \{5^{-5-(-3)}\}^{-2} \div (5^2)^{-2} \\ = (5^{-2})^{-2} \div 5^{-4} \\ = 5^{4-(-4)} = 5^8$$

$\therefore k=8$

101 답 ②

$$\frac{(a^3)^4 \times (a^{-3})^5}{(a^2)^{-7} \times (a^{-6})^{-2}} = \frac{a^{12} \times a^{-15}}{a^{-14} \times a^{12}} = \frac{a^{12+(-15)}}{a^{-14+12}} \\ = a^{-3-(-2)} = a^{-1} = \frac{1}{a}$$

102 답 $\frac{9}{16}$

$$\frac{9^{-5} + 3^{-3}}{3^{-5} + 9^{-6}} \times \frac{17}{4^2 + 16^2} = \frac{(3^2)^{-5} + 3^{-3}}{3^{-5} + (3^2)^{-6}} \times \frac{17}{4^2 + (4^2)^2} \\ = \frac{3^{-10} + 3^{-3}}{3^{-5} + 3^{-12}} \times \frac{17}{4^2 + 4^4} \\ = \frac{3^{-10}(1+3^7)}{3^{-12}(3^7+1)} \times \frac{17}{4^2(1+4^2)} \\ = 3^2 \times \frac{1}{4^2} = \frac{9}{16}$$

개념유형

21~23쪽

103 답 $\frac{1}{2}$

104 답 $2^{\frac{1}{3}}$

105 답 $7^{\frac{2}{3}}$

106 답 $5^{-\frac{3}{5}}$

107 답 3

108 답 $5\sqrt{9}$

$$3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2} = 5\sqrt{9}$$

109 답 $4\sqrt{5}$

$$5^{0.25} = 5^{\frac{1}{4}} = 4\sqrt{5}$$

110 답 $\sqrt{3}$

$$\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{8}} = (3^{-4})^{-\frac{1}{8}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

111 답 2

$$4^{\frac{3}{4}} \div 4^{\frac{1}{4}} = 4^{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

112 답 8

$$(2^{\frac{5}{6}})^3 \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} \times 2^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}} = 2^3 = 8$$

113 답 $\frac{2}{3}$

$$\left\{\left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{5}{6}}\right\}^{\frac{2}{5}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3\right\}^{-\frac{1}{3}} \\ = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{3}$$

114 답 4

$$16^{-\frac{3}{4}} \times 64^{\frac{5}{6}} = (2^4)^{-\frac{3}{4}} \times (2^6)^{\frac{5}{6}} = 2^{-3} \times 2^5 = 2^{-3+5} = 2^2 = 4$$

115 답 7

$$(7^{\frac{5}{4}})^2 \times \sqrt{7} \div (7^{\frac{1}{3}})^6 = 7^{\frac{5}{2}} \times 7^{\frac{1}{2}} \div 7^2 = 7^{\frac{5}{2} + \frac{1}{2} - 2} = 7$$

116 답 9

$$9^{\frac{9}{8}} \div 3^{\frac{1}{2}} \times 27^{\frac{1}{12}} = (3^2)^{\frac{9}{8}} \div 3^{\frac{1}{2}} \times (3^3)^{\frac{1}{12}} = 3^{\frac{9}{4}} \div 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \\ = 3^{\frac{9}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = 3^2 = 9$$

117 답 a^2

$$a^{\frac{3}{2}} \div a^{-\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2} - (-\frac{1}{2})} = a^2$$

118 답 a

$$a^{\frac{8}{3}} \div a^{\frac{1}{6}} \times a^{-\frac{3}{2}} = a^{\frac{8}{3} - \frac{1}{6} + (-\frac{3}{2})} = a$$

119 답 $a^{\frac{13}{12}}$

$$(\sqrt{a^3} \times \sqrt[3]{a^2})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{3}{2} + \frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \\ = (a^{\frac{13}{6}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{13}{12}}$$

120 답 a^2

$$\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt{a^5} \div \sqrt[6]{a^7} = a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{5}{2}} \div a^{\frac{7}{6}} \\ = a^{\frac{2}{3} + \frac{5}{2} - \frac{7}{6}} = a^2$$

121 답 $a^{\frac{1}{4}}$

$$\sqrt[3]{\sqrt{a^4}\sqrt{a}} = (a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{4}}$$

122 답 $a^{\frac{7}{8}}$

$$\sqrt{a\sqrt{a}\sqrt{a}} = \{a \times (a \times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} = \{a \times (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} \\ = (a \times a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{8}}$$

123 답 $a^{\frac{7}{4}}$

$$\sqrt{a\sqrt{a^3}\sqrt[4]{a^4}} = \{a \times (a^3 \times a^2)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} = \{a \times (a^5)^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} \\ = (a \times a^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{4}}$$

124 답 $a^{\frac{7}{12}}$

$$\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a^6} = \{(a^2 \times a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}} = \{(a^{\frac{7}{2}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{12}}$$

125 답 ab

$$(a^3b^2)^{\frac{1}{6}} \times (a^4b^{\frac{1}{3}})^2 = a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = ab$$

126 답 $a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{17}{6}}$

$$\sqrt[3]{a^2b} \div \sqrt[4]{a^3b^2} \times \sqrt{ab^6} = a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}} \div a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}b^3 \\ = a^{\frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 3} \\ = a^{\frac{5}{12}}b^{\frac{17}{6}}$$

127 답 $3^{2\sqrt{2}}$

$$3^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times 3^{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = 3^{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}} = 3^{2\sqrt{2}}$$

128 답 125

$$(25^{\sqrt{3}})^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 25^{\frac{3}{2}} = (5^2)^{\frac{3}{2}} = 5^3 = 125$$

129 답 4

$$2^{\sqrt{3}+1} \div 2^{\sqrt{3}-1} = 2^{\sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1)} = 2^2 = 4$$

130 답 243

$$(3^{\sqrt{20}} \div 3^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}} = (3^{2\sqrt{5}} \div 3^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}} = (3^{2\sqrt{5}-\sqrt{5}})^{\sqrt{5}} \\ = (3^{\sqrt{5}})^{\sqrt{5}} = 3^5 = 243$$

131 $5^{2\sqrt{3}}$

$$5^{\sqrt{48}} \div 5^{\sqrt{27}} \times 5^{\sqrt{3}} = 5^{4\sqrt{3}} \div 5^{3\sqrt{3}} \times 5^{\sqrt{3}} \\ = 5^{4\sqrt{3}-3\sqrt{3}+\sqrt{3}} = 5^{2\sqrt{3}}$$

132 144

$$(2^{\sqrt{8}} \times 3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{8} \times \sqrt{2}} \times 3^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \\ = 2^4 \times 3^2 = 144$$

133 $2^{\frac{\sqrt{2}}{6}}$

$$2^{-\frac{\sqrt{2}}{3}} \times 8^{\frac{\sqrt{2}}{6}} = 2^{-\frac{\sqrt{2}}{3}} \times (2^3)^{\frac{\sqrt{2}}{6}} = 2^{-\frac{\sqrt{2}}{3}} \times 2^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ = 2^{-\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{6}}$$

134 a^6

$$(a^{\sqrt{3}})^{\sqrt{12}} = a^{\sqrt{3} \times \sqrt{12}} = a^6$$

135 $a^{2\sqrt{2}}$

$$a^{\sqrt{2}} \div a^{\sqrt{8}} \times a^{\sqrt{18}} = a^{\sqrt{2}} \div a^{2\sqrt{2}} \times a^{3\sqrt{2}} = a^{\sqrt{2}-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}} = a^{2\sqrt{2}}$$

136 $a^{4\sqrt{2}}$

$$a^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \times a^{\frac{2\sqrt{2}}{3}} \div a^{-3\sqrt{2}} = a^{\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - (-3\sqrt{2})} = a^{4\sqrt{2}}$$

137 $a^{\sqrt{7}}$

$$(a^{\frac{\sqrt{7}}{2}})^6 \div a^{\sqrt{28}} = a^{3\sqrt{7}} \div a^{2\sqrt{7}} = a^{3\sqrt{7}-2\sqrt{7}} = a^{\sqrt{7}}$$

138 $a^6 b^9$

$$(a^{\sqrt{12}} \times b^{\sqrt{27}})^{\sqrt{3}} = a^{\sqrt{12} \times \sqrt{3}} b^{\sqrt{27} \times \sqrt{3}} = a^6 b^9$$

139 ab^2

$$(a^{\frac{1}{\sqrt{10}}} \times b^{\frac{\sqrt{2}}{5}})^{\sqrt{10}} = a^{\frac{1}{\sqrt{10}} \times \sqrt{10}} b^{\frac{\sqrt{2}}{5} \times \sqrt{10}} = ab^2$$

140 ab^3

$$(a^{3\sqrt{6}} b^{2\sqrt{6}})^{\frac{1}{\sqrt{6}}} \times (a^{2\sqrt{6}} b^{-\sqrt{6}})^{-\frac{1}{\sqrt{6}}} = a^3 b^2 \times a^{-2} b^{-1} \\ = a^{3+(-2)} b^{2+(-1)} = ab$$

142 $\frac{5}{2}$

$$\left\{ \left(\frac{8}{125} \right)^{\frac{5}{2}} \right\}^{-\frac{1}{5}} \times \left(\frac{2}{5} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{8}{125} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{2}{5} \right)^{\frac{1}{2}} \\ = \left\{ \left(\frac{2}{5} \right)^3 \right\}^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{2}{5} \right)^{\frac{1}{2}} \\ = \left(\frac{2}{5} \right)^{-\frac{3}{2}} \times \left(\frac{2}{5} \right)^{\frac{1}{2}} \\ = \left(\frac{2}{5} \right)^{-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{5} \right)^{-1} = \frac{5}{2}$$

143 ④

$$\left(\frac{1}{125} \right)^{-\frac{x}{6}} = (5^{-3})^{-\frac{x}{6}} = (5^x)^{\frac{1}{2}} = 49^{\frac{1}{2}} = (7^2)^{\frac{1}{2}} = 7$$

144 ②

$$3^{\sqrt{5}+2} \div (3^{\sqrt{2}})^{3\sqrt{2}} \times 3^{3-\sqrt{5}} = 3^{\sqrt{5}+2} \div 3^6 \times 3^{3-\sqrt{5}} \\ = 3^{\sqrt{5}+2-6+(3-\sqrt{5})} \\ = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

145 ④

$$\textcircled{1} (3^{-4})^{\frac{1}{2}} = 3^{-2} = \frac{1}{9} \\ \textcircled{2} 5^{1+\sqrt{3}} \times 5^{1-\sqrt{3}} = 5^{1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})} = 5^2 = 25 \\ \textcircled{3} (2^{\sqrt{32}} \div 2^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (2^{4\sqrt{2}} \div 2^{\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = (2^{4\sqrt{2}-\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ = (2^{3\sqrt{2}})^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 2^3 = 8 \\ \textcircled{4} 27^{\frac{4}{3}} \times 81^{-\frac{3}{4}} = (3^3)^{\frac{4}{3}} \times (3^4)^{-\frac{3}{4}} = 3^4 \times 3^{-3} \\ = 3^{4+(-3)} = 3 \\ \textcircled{5} (2^{2\sqrt{3}} \times 7^{\frac{1}{\sqrt{3}}})^{\sqrt{3}} = 2^{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \times 7^{\frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3}} = 2^6 \times 7 = 448$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

146 6

$$(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{18}+1} \times (a^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}-\sqrt{6}} \div (a^2)^{3-\sqrt{2}} \\ = a^{6+\sqrt{2}} \times a^{6-3\sqrt{2}} \div a^{6-2\sqrt{2}} \\ = a^{6+\sqrt{2}+(6-3\sqrt{2})-(6-2\sqrt{2})} = a^6 \\ \therefore k=6$$

147 ②

$$\sqrt[4]{a^3} \times \sqrt{a} = (a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} \times (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{8}} \times a^{\frac{1}{4}} \\ = a^{\frac{3}{8} + \frac{1}{4}} = a^{\frac{5}{8}}$$

148 ④

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}} \\ \sqrt[4]{a\sqrt{a^k}} = (a \times a^{\frac{k}{2}})^{\frac{1}{4}} = (a^{\frac{2+k}{2}})^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{2+k}{8}} \\ \text{따라서 } a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2+k}{8}} \text{ 이므로 } \frac{2}{3} = \frac{2+k}{8} \\ 16=6+3k, 3k=10 \\ \therefore k=\frac{10}{3}$$

실전유형

24~25쪽

141 ④

$$(2^{\frac{6}{5}})^{\frac{3}{2}} \times (3^{\frac{5}{3}} \times 4)^{-\frac{2}{5}} \times 3^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{9}{5}} \times (3^{\frac{5}{3}})^{-\frac{2}{5}} \times (2^2)^{-\frac{2}{5}} \times 3^{-\frac{1}{3}} \\ = 2^{\frac{9}{5}} \times 3^{-\frac{2}{3}} \times 2^{-\frac{4}{5}} \times 3^{-\frac{1}{3}} \\ = 2^{\frac{9}{5} + (-\frac{4}{5})} \times 3^{-\frac{2}{3} + (-\frac{1}{3})} \\ = 2 \times 3^{-1} = \frac{2}{3}$$

149 **답** 14

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a \times \sqrt{a} \times \sqrt[3]{a^4}} \div \sqrt[6]{a \times \sqrt[3]{a^k}} &= (a \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{3}} \div (a \times a^{\frac{k}{3}})^{\frac{1}{6}} \\ &= (a^{\frac{17}{6}})^{\frac{1}{3}} \div (a^{\frac{3+k}{3}})^{\frac{1}{6}} \\ &= a^{\frac{17}{18}} \div a^{\frac{3+k}{18}} \\ &= a^{\frac{17}{18} - \frac{3+k}{18}} \\ &= a^{\frac{14-k}{18}} \end{aligned}$$

즉, $a^{\frac{14-k}{18}} = 1$ 이므로

$$\frac{14-k}{18} = 0 \quad (\because a \neq 1)$$

$$\therefore k = 14$$

150 **답** 31

$$\begin{aligned} \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}} &= [a \times \{a \times (a \times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} \\ &= [a \times \{a \times (a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}} \\ &= \{a \times (a \times a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \{a \times (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} \\ &= (a \times a^{\frac{7}{8}})^{\frac{1}{2}} \\ &= (a^{\frac{15}{8}})^{\frac{1}{2}} \\ &= a^{\frac{15}{16}} \end{aligned}$$

따라서 $p=16, q=15$ 이므로

$$p+q=31$$

151 **답** $\frac{15}{4}$

$$a = 25^2 = (5^2)^2 = 5^4 \text{에서 } 5 = a^{\frac{1}{4}} \text{이므로}$$

$$125^5 = (5^3)^5 = 5^{15} = (a^{\frac{1}{4}})^{15} = a^{\frac{15}{4}}$$

$$\therefore k = \frac{15}{4}$$

152 **답** ②

$$a = \sqrt{2} \text{에서 } 2 = a^2$$

$$b = \sqrt[3]{5} \text{에서 } 5 = b^3$$

$$\therefore \sqrt[6]{10} = 10^{\frac{1}{6}} = (2 \times 5)^{\frac{1}{6}} = (a^2 b^3)^{\frac{1}{6}} = a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}}$$

153 **답** ⑤

$$3^{x+1} - 3^x = a \text{에서 } 3 \times 3^x - 3^x = a$$

$$2 \times 3^x = a \quad \therefore 3^x = \frac{a}{2}$$

$$2^{x+2} - 2^x = b \text{에서 } 4 \times 2^x - 2^x = b$$

$$3 \times 2^x = b \quad \therefore 2^x = \frac{b}{3}$$

$$\therefore 24^x = (2^3 \times 3)^x = 2^{3x} \times 3^x$$

$$= (2^x)^3 \times 3^x$$

$$= \left(\frac{b}{3}\right)^3 \times \frac{a}{2}$$

$$= \frac{ab^3}{54}$$

개념유형

27~28쪽

154 **답** $a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$

$$(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}) = (a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2 = a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}$$

155 **답** 4

$$(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 - (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2$$

$$= (a^{\frac{1}{2}})^2 + 2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}} + (a^{-\frac{1}{2}})^2 - \{(a^{\frac{1}{2}})^2 - 2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}} + (a^{-\frac{1}{2}})^2\}$$

$$= a + 2 + a^{-1} - (a - 2 + a^{-1}) = 4$$

156 **답** $a+b$

$$(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = (a^{\frac{1}{3}})^3 + (b^{\frac{1}{3}})^3 = a + b$$

157 **답** 2, 3, 2

158 **답** 11

$$(4+5^{\frac{1}{2}})(2+5^{\frac{1}{4}})(2-5^{\frac{1}{4}}) = (4+5^{\frac{1}{2}})\{2^2 - (5^{\frac{1}{4}})^2\}$$

$$= (4+5^{\frac{1}{2}})(4-5^{\frac{1}{2}})$$

$$= 4^2 - (5^{\frac{1}{2}})^2 = 16 - 5 = 11$$

159 **답** $\frac{49}{6}$

$$(6^{\frac{1}{2}} + 6^{-\frac{1}{2}})^2 = (6^{\frac{1}{2}})^2 + 2 \times 6^{\frac{1}{2}} \times 6^{-\frac{1}{2}} + (6^{-\frac{1}{2}})^2$$

$$= 6 + 2 + 6^{-1} = \frac{49}{6}$$

160 **답** 2, 2, 3, 7

161 **답** 47

$$a^2 + a^{-2} = (a + a^{-1})^2 - 2$$

$$= 7^2 - 2 = 47$$

162 **답** 18

$$a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^3 - 3(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})$$

$$= 3^3 - 3 \times 3 = 18$$

163 **답** 6

$$a + a^{-1} = (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 - 2$$

$$= 2^2 + 2 = 6$$

164 **답** $4\sqrt{2}$

$$(a - a^{-1})^2 = (a + a^{-1})^2 - 4$$

$$= 6^2 - 4 = 32$$

$$\therefore a - a^{-1} = 4\sqrt{2} \quad (\because a > 1)$$

165 **답** 14

$$a^{\frac{3}{2}} - a^{-\frac{3}{2}} = (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^3 + 3(a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}) \\ = 2^3 + 3 \times 2 = 14$$

166 **답** $2x, 3, \frac{1}{2}$

167 **답** $\frac{14}{3}$

$$\frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} \text{의 분모, 분자에 각각 } a^x \text{을 곱하면} \\ \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} = \frac{a^x(a^{3x} + a^{-3x})}{a^x(a^x - a^{-x})} = \frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} - 1} \\ = \frac{(a^{2x})^2 + (a^{2x})^{-1}}{a^{2x} - 1} \\ = \frac{3^2 + 3^{-1}}{3 - 1} = \frac{14}{3}$$

168 **답** 9

$$\frac{a^{5x} + a^{-x}}{a^x + a^{-5x}} \text{의 분모, 분자에 각각 } a^x \text{을 곱하면} \\ \frac{a^{5x} + a^{-x}}{a^x + a^{-5x}} = \frac{a^x(a^{5x} + a^{-x})}{a^x(a^x + a^{-5x})} = \frac{a^{6x} + 1}{a^{2x} + a^{-4x}} \\ = \frac{(a^{2x})^3 + 1}{a^{2x} + (a^{2x})^{-2}} = \frac{3^3 + 1}{3 + 3^{-2}} = 9$$

169 **답** $2x, 1, 3$

170 **답** $\frac{10}{3}$

$$4^x + 4^{-x} = 2^{2x} + 2^{-2x} = 2^{2x} + \frac{1}{2^{2x}} \\ = 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

171 **답** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

$$2^{2x} = 3 \text{이므로} \\ 2^x = (2^{2x})^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \\ \therefore 2^x + 2^{-x} = 2^x + \frac{1}{2^x} = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

실전유형

28~29쪽

172 **답** $x^2 - x^{-2}$

$$(x^{\frac{1}{8}} - x^{-\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{8}} + x^{-\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x + x^{-1}) \\ = (x^{\frac{1}{4}} - x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}} + x^{-\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x + x^{-1}) \\ = (x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})(x + x^{-1}) \\ = (x - x^{-1})(x + x^{-1}) \\ = x^2 - x^{-2}$$

173 **답** ③

$$2^{a+b} = A, 2^{a-b} = B \text{로 놓으면} \\ (2^{a+b} + 2^{a-b})^2 - (2^{a+b} - 2^{a-b})^2 \\ = (A+B)^2 - (A-B)^2 \\ = (A^2 + 2AB + B^2) - (A^2 - 2AB + B^2) \\ = 4AB = 4 \times 2^{a+b} \times 2^{a-b} \\ = 2^2 \times 2^{a+b+(a-b)} = 2^{2a+2}$$

174 **답** ④

$$x = 5^{\frac{1}{3}} - 5^{-\frac{1}{3}} \text{의 양변을 세제곱하면} \\ x^3 = (5^{\frac{1}{3}} - 5^{-\frac{1}{3}})^3 \\ = (5^{\frac{1}{3}})^3 - 3 \times (5^{\frac{1}{3}})^2 \times 5^{-\frac{1}{3}} + 3 \times 5^{\frac{1}{3}} \times (5^{-\frac{1}{3}})^2 - (5^{-\frac{1}{3}})^3 \\ = 5 - 3 \times 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{3}} + 3 \times 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{-1} - 5^{-1} \\ = 5 - 3(5^{\frac{1}{3}} - 5^{-\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5}$$

$$\text{이때 } 5^{\frac{1}{3}} - 5^{-\frac{1}{3}} = x \text{이므로}$$

$$x^3 = 5 - 3x - \frac{1}{5}$$

$$x^3 + 3x = \frac{24}{5}$$

$$\therefore 5x^3 + 15x = 24$$

175 **답** ②

$$a + a^{-1} = (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2 + 2 \\ = (\sqrt{3})^2 + 2 = 5 \\ \therefore a^2 + a^{-2} = (a + a^{-1})^2 - 2 \\ = 5^2 - 2 = 23$$

176 **답** ②

$$27^x + 27^{-x} = (3^x)^3 + (3^{-x})^3 \\ = (3^x + 3^{-x})^3 - 3(3^x + 3^{-x}) \\ = 4^3 - 3 \times 4 = 52$$

177 **답** $\frac{1}{7}$

$$(x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}})^2 = x + x^{-1} - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$\therefore x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}} = 1 \quad (\because x > 1)$$

$$\text{또 } x^2 + x^{-2} = (x + x^{-1})^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7 \text{이므로}$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}}{x^2 + x^{-2}} = \frac{1}{7}$$

178 **답** ①

$$\frac{a^x + a^{-x}}{a^{3x} + a^{-3x}} \text{의 분모, 분자에 각각 } a^x \text{을 곱하면} \\ \frac{a^x + a^{-x}}{a^{3x} + a^{-3x}} = \frac{a^x(a^x + a^{-x})}{a^x(a^{3x} + a^{-3x})} = \frac{a^{2x} + 1}{a^{4x} + a^{-2x}} \\ = \frac{a^{2x} + 1}{(a^{2x})^2 + (a^{2x})^{-1}} = \frac{2 + 1}{2^2 + 2^{-1}} = \frac{2}{3}$$

179 ▶ 4

$\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 3$ 의 좌변의 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^x(a^x + a^{-x})}{a^x(a^x - a^{-x})} = 3, \frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1} = 3$$

$$a^{2x} + 1 = 3(a^{2x} - 1)$$

$$a^{2x} + 1 = 3a^{2x} - 3$$

$$2a^{2x} = 4 \quad \therefore a^{2x} = 2$$

$$\therefore a^{4x} = (a^{2x})^2 = 2^2 = 4$$

180 ▶ $\frac{8}{3}$

$\frac{5^x + 5^{-x}}{5^x - 5^{-x}} = 2$ 의 좌변의 분모, 분자에 각각 5^x 을 곱하면

$$\frac{5^x(5^x + 5^{-x})}{5^x(5^x - 5^{-x})} = 2, \frac{5^{2x} + 1}{5^{2x} - 1} = 2$$

$$5^{2x} + 1 = 2(5^{2x} - 1)$$

$$5^{2x} + 1 = 2 \times 5^{2x} - 2$$

$$\therefore 5^{2x} = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore 25^x - 25^{-x} &= 5^{2x} - 5^{-2x} = 5^{2x} - \frac{1}{5^{2x}} \\ &= 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

181 ▶ 73

$$4^x = 5 \text{에서 } 2^{2x} = 5$$

$\frac{2^x - 2^{-x}}{8^x + 8^{-x}}$ 의 분모, 분자에 각각 2^x 을 곱하면

$$\begin{aligned} \frac{2^x - 2^{-x}}{8^x + 8^{-x}} &= \frac{2^x(2^x - 2^{-x})}{2^x(8^x + 8^{-x})} = \frac{2^x(2^x - 2^{-x})}{2^x(2^{3x} + 2^{-3x})} \\ &= \frac{2^{2x} - 1}{2^{4x} + 2^{-2x}} = \frac{2^{2x} - 1}{(2^{2x})^2 + (2^{2x})^{-1}} \\ &= \frac{5 - 1}{5^2 + 5^{-1}} = \frac{10}{63} \end{aligned}$$

따라서 $p = 63$, $q = 10$ 이므로

$$p + q = 73$$

실전유형으로 중단원 점검

30~31쪽

1 ▶ ④

① 제곱근 81은 $\sqrt{81} = 9$ 이다.

② 64의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3 = 64$ 이므로

$$x^3 - 64 = 0$$

$$(x - 4)(x^2 + 4x + 16) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2 \pm 2\sqrt{3}i$$

따라서 64의 세제곱근은 4, $-2 \pm 2\sqrt{3}i$ 이다.

③ -7 의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-7}$ 의 1개이다.

⑤ n 이 짝수일 때, -6 의 n 제곱근 중 실수인 것은 없다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

2 ▶ 2

$\sqrt{256} = 16$ 의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[4]{16} = -2$, $\sqrt[4]{16} = 2$ 의 2개
이므로

$$a = 2 \quad \dots\dots \text{ i}$$

-27 의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-27} = -3$ 의 1개이므로

$$b = 1 \quad \dots\dots \text{ ii}$$

$$\therefore ab = 2 \times 1 = 2 \quad \dots\dots \text{ iii}$$

채점 기준

i a의 값 구하기

40 %

ii b의 값 구하기

40 %

iii ab의 값 구하기

20 %

3 ▶ ③

$$\textcircled{1} \sqrt[5]{4 \times 5 \sqrt{8}} = \sqrt[5]{4 \times 8} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$\textcircled{2} \sqrt[7]{\frac{256}{2}} = \sqrt[7]{\frac{2^8}{2}} = \sqrt[7]{2^7} = 2$$

$$\textcircled{3} (\sqrt[6]{3})^3 = \sqrt[6]{3^3} = \sqrt[6]{3}$$

$$\textcircled{4} \sqrt[6]{3 \sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{18 \sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{18 \sqrt[3]{2^6}} = \sqrt[6]{18 \times 2^2} = \sqrt[6]{72}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \sqrt[4]{\frac{3 \sqrt{6}}{4 \sqrt{9}}} \times \sqrt{\frac{8 \sqrt{9}}{6 \sqrt{6}}} &= \frac{\sqrt[4]{3 \sqrt{6}}}{\sqrt[4]{4 \sqrt{9}}} \times \frac{\sqrt{8 \sqrt{9}}}{\sqrt{6 \sqrt{6}}} \\ &= \frac{\sqrt[12]{6}}{\sqrt[16]{9}} \times \frac{\sqrt[16]{9}}{\sqrt[12]{6}} = 1 \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

4 ▶ ①

$$A = \sqrt[4]{2}, B = \sqrt[4]{3 \sqrt[3]{2}} = \sqrt[4]{3 \sqrt[3]{2} \times 2} = \sqrt[4]{54},$$

$$C = \sqrt[3]{2 \sqrt[4]{6}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4 \times 6}} = \sqrt[12]{96} \text{에서}$$

4, 12, 12의 최소공배수가 12이므로

$$A = \sqrt[4]{2} = \sqrt[4 \times 3]{2^3} = \sqrt[12]{8}$$

$$\text{이때 } 8 < 54 < 96 \text{이므로 } \sqrt[12]{8} < \sqrt[12]{54} < \sqrt[12]{96}$$

$$\therefore A < B < C$$

5 ▶ ③

$$\begin{aligned} \frac{10}{3^2 + 9^2} \times \frac{27}{2^{-5} + 8^{-2}} &= \frac{10}{3^2 + 3^4} \times \frac{27}{2^{-5} + 2^{-6}} \\ &= \frac{10}{3^2(1 + 3^2)} \times \frac{27}{2^{-6}(2 + 1)} \\ &= \frac{1}{3^2} \times \frac{9}{2^{-6}} \\ &= 2^6 = 64 \end{aligned}$$

6 ▶ ③

$$\begin{aligned} \left\{ \left(\frac{64}{27} \right)^{-\frac{3}{4}} \right\}^{\frac{1}{3}} \times \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{4}} &= \left(\frac{64}{27} \right)^{-\frac{1}{4}} \times \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left\{ \left(\frac{4}{3} \right)^3 \right\}^{-\frac{1}{4}} \times \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(\frac{4}{3} \right)^{-\frac{3}{4}} \times \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{4}} \\ &= \left(\frac{4}{3} \right)^{-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \left(\frac{4}{3} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

7 답 -3

$$\begin{aligned}(a^{2\sqrt{3}})^{-\sqrt{3}} \times a^{2\sqrt{3}} \div (a^2 \div a^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} &= a^{-6} \times a^{2\sqrt{3}} \div (a^{2-\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} \\ &= a^{-6} \times a^{2\sqrt{3}} \div a^{2\sqrt{3}-3} \\ &= a^{-6+2\sqrt{3}-(2\sqrt{3}-3)} \\ &= a^{-3}\end{aligned}$$

$$\therefore k = -3$$

8 답 4

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^4 \times \frac{k\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt[4]{a^3}}} &= (a^4 \times a^{\frac{5}{k}} \times a^{-\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}} = \{a^{4+\frac{5}{k}+(-\frac{3}{4})}\}^{\frac{1}{3}} \\ &= (a^{\frac{13}{4}+\frac{5}{k}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{13}{12}+\frac{5}{3k}}\end{aligned}$$

$$\sqrt{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{따라서 } \frac{13}{12} + \frac{5}{3k} = \frac{3}{2} \text{ 이므로 } \frac{5}{3k} = \frac{5}{12}$$

$$3k = 12 \quad \therefore k = 4$$

9 답 ④

$$a = 27^3 = (3^3)^3 = 3^9 \text{에서 } 3 = a^{\frac{1}{9}} \text{이므로}$$

$$81^5 = (3^4)^5 = 3^{20} = (a^{\frac{1}{9}})^{20} = a^{\frac{20}{9}}$$

$$\therefore k = \frac{20}{9}$$

10 답 ②

$$\begin{aligned}(2^{\frac{1}{3}}+1)(4^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{1}{3}}+1) + (9^{\frac{1}{4}}-4^{\frac{1}{4}})(9^{\frac{1}{4}}+4^{\frac{1}{4}}) \\ = (2^{\frac{1}{3}}+1)(2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}+1) + (3^{\frac{1}{2}}-2^{\frac{1}{2}})(3^{\frac{1}{2}}+2^{\frac{1}{2}}) \\ = (2^{\frac{1}{3}})^3 + 1^3 + (3^{\frac{1}{2}})^2 - (2^{\frac{1}{2}})^2 \\ = 2 + 1 + 3 - 2 = 4\end{aligned}$$

11 답 52

$$x + x^{-1} = (x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})^2 - 2 = (\sqrt{6})^2 - 2 = 4$$

$$\therefore x^3 + x^{-3} = (x + x^{-1})^3 - 3(x + x^{-1})$$

$$= 4^3 - 3 \times 4 = 52$$

채점 기준

i $x + x^{-1}$ 의 값 구하기	50 %
ii $x^3 + x^{-3}$ 의 값 구하기	50 %

12 답 $2\sqrt{2}-1$

$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$ 의 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}} = \frac{a^x(a^{3x}+a^{-3x})}{a^x(a^x+a^{-x})} = \frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1} = \frac{(a^{2x})^2+(a^{2x})^{-1}}{a^{2x}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}-1)^2+(\sqrt{2}-1)^{-1}}{(\sqrt{2}-1)+1} = \frac{3-2\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{3-2\sqrt{2}+\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}-1$$

02 로그

개념 유형

33~34쪽

001 답 $3 = \log_2 8$

002 답 $4 = \log_5 625$

003 답 $-3 = \log_4 \frac{1}{64}$

004 답 $2 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$

005 답 $-4 = \log_{\frac{1}{2}} 16$

006 답 $\frac{1}{2} = \log_6 \sqrt{6}$

007 답 $3^3 = 27$

008 답 $11^0 = 1$

009 답 $5^{-2} = \frac{1}{25}$

010 답 $10^{-4} = 0.0001$

011 답 $\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$

012 답 $7^{\frac{3}{2}} = 7\sqrt{7}$

013 답 16, 4, 4, 4

014 답 -2

$$\log_7 \frac{1}{49} = x \text{라 하면 } 7^x = \frac{1}{49} = 7^{-2} \quad \therefore x = -2$$

$$\therefore \log_7 \frac{1}{49} = -2$$

015 답 -3

$$\log_{\frac{1}{3}} 27 = x \text{라 하면 } \left(\frac{1}{3}\right)^x = 27 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \quad \therefore x = -3$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$$

016 답 4

$$\log_{\sqrt{6}} 36 = x \text{라 하면 } (\sqrt{6})^x = 36 = (\sqrt{6})^4 \quad \therefore x = 4$$

$$\therefore \log_{\sqrt{6}} 36 = 4$$

018 답 $\frac{1}{32}$

$$\log_2 x = -5 \text{에서 } x = 2^{-5} = \frac{1}{32}$$

019 답 8

$$\log_x 64 = 2 \text{에서}$$

$$x^2 = 64$$

$$\therefore x = 8 \quad (\because x > 0)$$

020 답 15

$$\log_x \sqrt{15} = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{15} = 15^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore x = 15$$

021 답 $x > -2$

$$\text{진수의 조건에서 } x+2 > 0$$

$$\therefore x > -2$$

022 답 $7 < x < 8$ 또는 $x > 8$

$$\text{밑의 조건에서}$$

$$x-7 > 0, x-7 \neq 1$$

$$x > 7, x \neq 8$$

$$\therefore 7 < x < 8 \text{ 또는 } x > 8$$

023 답 $1 < x < 2$

$$\text{진수의 조건에서}$$

$$-x^2 + 3x - 2 > 0$$

$$x^2 - 3x + 2 < 0, (x-1)(x-2) < 0$$

$$\therefore 1 < x < 2$$

024 답 1, 6, 6, 6, 7, 0, 5, 6, 6, 7

025 답 $\frac{4}{5} < x < 1$ 또는 $1 < x < 4$

$$\text{밑의 조건에서 } 5x-4 > 0, 5x-4 \neq 1$$

$$x > \frac{4}{5}, x \neq 1$$

$$\therefore \frac{4}{5} < x < 1 \text{ 또는 } x > 1 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$\text{진수의 조건에서 } 4-x > 0$$

$$\therefore x < 4 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡의 공통부분은}$$

$$\frac{4}{5} < x < 1 \text{ 또는 } 1 < x < 4$$

026 답 ④

$$\log_a 9 = 2 \text{에서 } a^2 = 9$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

$$\log_4 b = -1 \text{에서 } b = 4^{-1} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{3}{\frac{1}{4}} = 12$$

027 답 ⑤

$$x = \log_3 4 \text{에서 } 3^x = 4$$

$$\therefore 3^x + 3^{-x} = 3^x + \frac{1}{3^x} = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

028 답 ③

$$\log_6 \{ \log_4 (\log_2 a) \} = 0 \text{에서}$$

$$\log_4 (\log_2 a) = 6^0 = 1$$

$$\log_4 (\log_2 a) = 1 \text{에서}$$

$$\log_2 a = 4^1 = 4$$

$$\therefore a = 2^4 = 16$$

029 답 ①

$$\text{진수의 조건에서 } 11-x > 0$$

$$\therefore x < 11$$

$$\text{따라서 } \log_5 (11-x) \text{가 정의되도록 하는 } x \text{의 값은 ① 9이다.}$$

030 답 8

$$\text{밑의 조건에서 } a+3 > 0, a+3 \neq 1$$

$$a > -3, a \neq -2$$

$$\therefore -3 < a < -2 \text{ 또는 } a > -2 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$\text{진수의 조건에서 } -a^2 + 3a + 28 > 0$$

$$a^2 - 3a - 28 < 0, (a+4)(a-7) < 0$$

$$\therefore -4 < a < 7 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡의 공통부분은}$$

$$-3 < a < -2 \text{ 또는 } -2 < a < 7$$

$$\text{따라서 정수 } a \text{는 } -1, 0, 1, \dots, 6 \text{의 8개이다.}$$

031 답 4

$$\log_{(a-1)} (a-3) \text{이 정의되려면}$$

$$\text{밑의 조건에서 } a-1 > 0, a-1 \neq 1$$

$$a > 1, a \neq 2$$

$$\therefore 1 < a < 2 \text{ 또는 } a > 2 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$\text{진수의 조건에서 } a-3 > 0$$

$$\therefore a > 3 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

$$\log_a (a^2 - 11a + 30) \text{이 정의되려면}$$

$$\text{밑의 조건에서 } a > 0, a \neq 1$$

$$\therefore 0 < a < 1 \text{ 또는 } a > 1 \quad \cdots \cdots \text{㉢}$$

진수의 조건에서 $a^2 - 11a + 30 > 0$

$$(a-5)(a-6) > 0$$

$$\therefore a < 5 \text{ 또는 } a > 6 \quad \cdots \cdots ㉔$$

㉑~㉔의 공통부분은

$$3 < a < 5 \text{ 또는 } a > 6$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 4이다.

032 답 ①

밑의 조건에서 $a > 0, a \neq 1$

$$\therefore 0 < a < 1 \text{ 또는 } a > 1 \quad \cdots \cdots ㉑$$

진수의 조건에서 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2ax + 5a > 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $x^2 + 2ax + 5a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 5a < 0, a(a-5) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 5 \quad \cdots \cdots ㉒$$

㉑, ㉒의 공통부분은

$$0 < a < 1 \text{ 또는 } 1 < a < 5$$

따라서 정수 a 의 값은 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$$2 + 3 + 4 = 9$$

참고 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때, 모든 실수 x 에 대하여

$$(1) ax^2 + bx + c > 0 \text{이 성립} \Rightarrow a > 0, D < 0$$

$$(2) ax^2 + bx + c \geq 0 \text{이 성립} \Rightarrow a > 0, D \leq 0$$

$$(3) ax^2 + bx + c < 0 \text{이 성립} \Rightarrow a < 0, D < 0$$

$$(4) ax^2 + bx + c \leq 0 \text{이 성립} \Rightarrow a < 0, D \leq 0$$

개념유형

37~38쪽

033 답 0

034 답 1

035 답 5

$$\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$$

036 답 -2

$$\log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2$$

037 답 3

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4} \right)^3 = 3$$

038 답 $\frac{1}{6}$

$$\log_5 \sqrt[6]{5} = \log_5 5^{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

039 답 $\frac{2}{3}$

$$\log_7 \sqrt[3]{49} = \log_7 \sqrt[3]{7^2} = \log_7 7^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

040 답 1

$$2 \log_3 \sqrt{3} = \log_3 (\sqrt{3})^2 = \log_3 3 = 1$$

041 답 1

$$\log_{20} 4 + \log_{20} 5 = \log_{20} (4 \times 5) = \log_{20} 20 = 1$$

042 답 2

$$\begin{aligned} \log_6 4 + \log_6 9 &= \log_6 (4 \times 9) \\ &= \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2 \end{aligned}$$

043 답 3

$$\begin{aligned} \log_3 108 + \log_3 \frac{1}{4} &= \log_3 \left(108 \times \frac{1}{4} \right) \\ &= \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3 \end{aligned}$$

044 답 3

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{4}{7} + 2 \log_2 \sqrt{14} &= \log_2 \frac{4}{7} + \log_2 (\sqrt{14})^2 = \log_2 \frac{4}{7} + \log_2 14 \\ &= \log_2 \left(\frac{4}{7} \times 14 \right) = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \end{aligned}$$

045 답 1

$$\log_5 100 - \log_5 20 = \log_5 \frac{100}{20} = \log_5 5 = 1$$

046 답 2

$$\log_3 36 - \log_3 4 = \log_3 \frac{36}{4} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$$

047 답 2

$$\log_4 \frac{1}{2} - \log_4 \frac{1}{32} = \log_4 \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{32}} = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$$

048 답 $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \log_2 \sqrt[3]{12} - \frac{1}{3} \log_2 6 &= \log_2 12^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} \log_2 6 \\ &= \frac{1}{3} \log_2 12 - \frac{1}{3} \log_2 6 \\ &= \frac{1}{3} (\log_2 12 - \log_2 6) \\ &= \frac{1}{3} \log_2 \frac{12}{6} = \frac{1}{3} \log_2 2 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

049 답 1

$$\log_3 12 + \log_3 2 - \log_3 8 = \log_3 \frac{12 \times 2}{8} = \log_3 3 = 1$$

050 답 -1

$$\log_5 2 + \log_5 3 - \log_5 30 = \log_5 \frac{2 \times 3}{30} = \log_5 \frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -1$$

051 답 5

$$\log_2 96 - \log_2 18 + \log_2 6 = \log_2 \frac{96 \times 6}{18} = \log_2 32 = \log_2 2^5 = 5$$

052 답 2

$$\log_7 3 - \log_7 \frac{6}{7} + \log_7 14 = \log_7 \frac{3 \times 14}{\frac{6}{7}} = \log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$$

053 답 2

$$\begin{aligned} 4 \log_3 \sqrt{6} - \log_3 8 - \log_3 \frac{1}{2} &= \log_3 (\sqrt{6})^4 - \log_3 8 - \log_3 \frac{1}{2} \\ &= \log_3 36 - \log_3 8 - \log_3 \frac{1}{2} \\ &= \log_3 \frac{36}{8 \times \frac{1}{2}} = \log_3 9 \\ &= \log_3 3^2 = 2 \end{aligned}$$

054 답 $\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log_7 14 - \log_7 \sqrt{2} - 2 \log_7 \frac{1}{7} &= \frac{1}{2} \log_7 14 - \log_7 2^{\frac{1}{2}} - 2 \log_7 7^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \log_7 14 - \frac{1}{2} \log_7 2 - 2 \times (-1) \\ &= \frac{1}{2} (\log_7 14 - \log_7 2) + 2 \\ &= \frac{1}{2} \log_7 \frac{14}{2} + 2 = \frac{1}{2} \log_7 7 + 2 \\ &= \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

실전유형

38쪽

055 답 ⑤

- ③ $\log_4 \frac{1}{16} = \log_4 4^{-2} = -2$
 ④ $\log_2 \sqrt[4]{32} = \log_2 \sqrt[4]{2^5} = \log_2 2^{\frac{5}{4}} = \frac{5}{4}$
 ⑤ $5 \log_{10} \sqrt[5]{10} = \log_{10} (\sqrt[5]{10})^5 = \log_{10} 10 = 1$
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

056 답 1

$$\begin{aligned} 2 \log_5 \sqrt{10} + \frac{1}{2} \log_5 3 - \log_5 2\sqrt{3} \\ &= \log_5 (\sqrt{10})^2 + \log_5 3^{\frac{1}{2}} - \log_5 2\sqrt{3} \\ &= \log_5 10 + \log_5 \sqrt{3} - \log_5 2\sqrt{3} \\ &= \log_5 \frac{10 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \log_5 5 = 1 \end{aligned}$$

057 답 8

$$\begin{aligned} \log_2 a + 2 \log_2 \sqrt{b} - 3 \log_2 c &= 3 \text{에서} \\ \log_2 a + \log_2 (\sqrt{b})^2 - \log_2 c^3 &= 3 \\ \log_2 a + \log_2 b - \log_2 c^3 &= 3 \\ \log_2 \frac{ab}{c^3} &= 3 \\ \therefore \frac{ab}{c^3} &= 2^3 = 8 \end{aligned}$$

058 답 -3

$$\begin{aligned} \log_3 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log_3 \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log_3 \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \log_3 \left(1 - \frac{1}{27}\right) \\ &= \log_3 \frac{1}{2} + \log_3 \frac{2}{3} + \log_3 \frac{3}{4} + \cdots + \log_3 \frac{26}{27} \\ &= \log_3 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{26}{27}\right) \\ &= \log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} \\ &= -3 \end{aligned}$$

개념유형

40~41쪽

059 답 $\frac{3}{2}$

$$\log_3 27 = \frac{\log_3 27}{\log_3 9} = \frac{\log_3 3^3}{\log_3 3^2} = \frac{3}{2}$$

060 답 $\frac{5}{3}$

$$\log_8 32 = \frac{\log_2 32}{\log_2 8} = \frac{\log_2 2^5}{\log_2 2^3} = \frac{5}{3}$$

061 답 $-\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \log_{100} \frac{1}{1000} &= \frac{\log_{10} \frac{1}{1000}}{\log_{10} 100} \\ &= \frac{\log_{10} 10^{-3}}{\log_{10} 10^2} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

062 답 2

$$\frac{\log_6 49}{\log_6 7} = \log_7 49 = \log_7 7^2 = 2$$

063 답 4

$$\frac{\log_3 81}{\log_3 3} = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$$

064 답 6

$$\frac{1}{\log_{64} 2} = \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$$

065 답 3

$$\frac{1}{\log_{125} 5} = \log_5 125 = \log_5 5^3 = 3$$

066 답 1

$$\log_2 3 \times \log_3 2 = \log_2 3 \times \frac{1}{\log_2 3} = 1$$

067 답 2

$$\begin{aligned} \log_5 4 \times \log_2 5 &= \log_5 2^2 \times \log_2 5 \\ &= 2 \log_5 2 \times \frac{1}{\log_5 2} = 2 \end{aligned}$$

068 답 $\frac{1}{2}$

$$\log_7 3 \times \log_3 \sqrt{7} = \log_7 3 \times \log_3 7^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\log_3 7} \times \frac{1}{2} \log_3 7 = \frac{1}{2}$$

069 답 $\frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \log_2 \sqrt{3} \times \log_9 2 &= \log_2 3^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{\log_2 9} = \frac{1}{2} \log_2 3 \times \frac{1}{\log_2 3^2} \\ &= \frac{1}{2} \log_2 3 \times \frac{1}{2 \log_2 3} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

070 답 3

$$\begin{aligned} \log_2 3 \times \log_3 5 \times \log_5 8 &= \log_2 3 \times \frac{\log_2 5}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 8}{\log_2 5} \\ &= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \end{aligned}$$

071 답 1

$$\log_4 3 \times \log_3 6 \times \log_6 4 = \log_4 3 \times \frac{\log_4 6}{\log_4 3} \times \frac{1}{\log_4 6} = 1$$

072 답 $\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} \log_7 5 \times \log_5 7 \times \log_5 16 &= \log_7 5 \times \frac{1}{\log_7 8} \times \frac{\log_7 16}{\log_7 5} \\ &= \frac{\log_7 16}{\log_7 8} = \frac{\log_7 2^4}{\log_7 2^3} \\ &= \frac{4 \log_7 2}{3 \log_7 2} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

073 답 2

$$\begin{aligned} \log_9 3 + \frac{1}{\log_{27} 9} &= \log_9 3 + \log_9 27 = \log_9 (3 \times 27) \\ &= \log_9 81 = \log_9 9^2 = 2 \end{aligned}$$

074 답 3

$$\begin{aligned} \log_2 24 - \frac{1}{\log_3 2} &= \log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 \frac{24}{3} \\ &= \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3 \end{aligned}$$

075 답 2

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_4 6} + \frac{1}{\log_9 6} &= \log_6 4 + \log_6 9 = \log_6 (4 \times 9) \\ &= \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2 \end{aligned}$$

076 답 3

$$\begin{aligned} \log_5 15 + \frac{1}{\log_{25} 5} - \frac{1}{\log_3 5} &= \log_5 15 + \log_5 25 - \log_5 3 \\ &= \log_5 \frac{15 \times 25}{3} = \log_5 125 \\ &= \log_5 5^3 = 3 \end{aligned}$$

077 답 0

$$\begin{aligned} \log_2 \sqrt{10} - \frac{1}{\log_{10} 2} + \frac{1}{\log_{\sqrt{10}} 2} &= \log_2 \sqrt{10} - \log_2 10 + \log_2 \sqrt{10} \\ &= \log_2 \frac{\sqrt{10} \times \sqrt{10}}{10} = \log_2 1 = 0 \end{aligned}$$

078 답 1

$$\begin{aligned} (\log_5 8 - \log_5 4)(\log_2 15 - \log_2 3) &= \log_5 \frac{8}{4} \times \log_2 \frac{15}{3} \\ &= \log_5 2 \times \log_2 5 \\ &= \log_5 2 \times \frac{1}{\log_5 2} = 1 \end{aligned}$$

079 답 3

$$\begin{aligned} (\log_3 14 - \log_3 2)(\log_7 3 + \log_7 9) &= \log_3 \frac{14}{2} \times \log_7 (3 \times 9) \\ &= \log_3 7 \times \log_7 27 \\ &= \log_3 7 \times \log_7 3^3 \\ &= \frac{1}{\log_7 3} \times 3 \log_7 3 = 3 \end{aligned}$$

실전유형

41쪽

080 답 22

$a = 9^{11}$ 이므로

$$\frac{1}{\log_a 3} = \log_3 a = \log_3 9^{11} = \log_3 (3^2)^{11} = \log_3 3^{22} = 22$$

081 답 2

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_4 x} + \frac{1}{\log_8 x} &= \log_x 2 + \log_x 4 + \log_x 8 \\ &= \log_x (2 \times 4 \times 8) \\ &= \log_x 64 \\ &= \log_x 2^6 \\ &= 6 \log_x 2 \end{aligned}$$

즉, $6 \log_x 2 = 6$ 이므로 $\log_x 2 = 1$

$\therefore x = 2$

082 답 ①

$$\begin{aligned}\log_3(\log_3 2) + \log_3(\log_2 27) &= \log_3(\log_3 2 \times \log_2 27) \\ &= \log_3\left(\frac{1}{\log_2 3} \times \log_2 3^3\right) \\ &= \log_3\left(\frac{1}{\log_2 3} \times 3 \log_2 3\right) \\ &= \log_3 3 = 1\end{aligned}$$

083 답 ①

$$\begin{aligned}\log_a c = \frac{1}{4} \text{에서 } \frac{1}{\log_c a} &= \frac{1}{4} \quad \therefore \log_c a = 4 \\ \log_b c = \frac{1}{5} \text{에서 } \frac{1}{\log_c b} &= \frac{1}{5} \quad \therefore \log_c b = 5 \\ \therefore \frac{1}{\log_{ab} c} &= \log_c ab \\ &= \log_c a + \log_c b \\ &= 4 + 5 = 9\end{aligned}$$

개념유형

43쪽

084 답 $\frac{5}{3}$

$$\log_{5^{12}} 5^{20} = \frac{20}{12} \log_5 5 = \frac{5}{3}$$

085 답 $\frac{7}{2}$

$$\log_4 128 = \log_{2^2} 2^7 = \frac{7}{2} \log_2 2 = \frac{7}{2}$$

086 답 $\frac{3}{4}$

$$\log_{81} 27 = \log_{3^4} 3^3 = \frac{3}{4} \log_3 3 = \frac{3}{4}$$

087 답 6

$$\log_{\sqrt{10}} 1000 = \log_{10^{\frac{1}{2}}} 10^3 = \frac{3}{\frac{1}{2}} \log_{10} 10 = 6$$

088 답 $\frac{1}{2}$

$$\log_{125} 5\sqrt{5} = \log_{5^3} 5^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{3} \log_5 5 = \frac{1}{2}$$

089 답 81

$$16^{\log_2 3} = 3^{\log_2 16} = 3^{\log_2 2^4} = 3^4 = 81$$

090 답 5

$$3^{\log_5 25} = 25^{\log_5 3} = 25^{\log_5 3} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$$

091 답 6

$$7^{\log_7 6} = 6^{\log_7 7} = 6$$

092 답 $\sqrt{2}$

$$5^{\log_5 \sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\log_5 5} = \sqrt{2}$$

093 답 $\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}\log_9 3 + \log_{81} 3 &= \log_{3^2} 3 + \log_{3^4} 3 \\ &= \frac{1}{2} \log_3 3 + \frac{1}{4} \log_3 3 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

094 답 -2

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_5 \frac{1}{5} &= \log_{2^{-1}} 2 + \log_5 5^{-1} \\ &= -\log_2 2 + (-\log_5 5) \\ &= -1 + (-1) = -2\end{aligned}$$

095 답 3

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{32} - \log_{\frac{1}{25}} 5 &= \log_{2^{-2}} 2^{-5} - \log_{5^{-2}} 5 \\ &= \frac{5}{2} \log_2 2 - \left(-\frac{1}{2} \log_5 5\right) \\ &= \frac{5}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 3\end{aligned}$$

096 답 5

$$3^{\log_5 7} - 5^{\log_5 2} = 7^{\log_5 3} - 2^{\log_5 5} = 7 - 2 = 5$$

097 답 7

$$7^{\log_7 3} + 9^{\log_5 2} = 3^{\log_7 7} + 2^{\log_5 9} = 3 + 2^{\log_5 3^2} = 3 + 2^2 = 7$$

실전유형

44~46쪽

098 답 (1) $-\frac{1}{4}$ (2) 6

$$\begin{aligned}(1) & (\log_3 5 - \log_9 5)(\log_5 3 - \log_{25} 27) \\ &= (\log_3 5 - \log_{3^2} 5)(\log_5 3 - \log_{5^2} 3^3) \\ &= \left(\log_3 5 - \frac{1}{2} \log_3 5\right) \left(\log_5 3 - \frac{3}{2} \log_5 3\right) \\ &= \frac{1}{2} \log_3 5 \times \left(-\frac{1}{2} \log_5 3\right) \\ &= -\frac{1}{4} \log_3 5 \times \frac{1}{\log_3 5} = -\frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) & 2^{3 \log_2 3 + \log_2 \frac{4}{3} - \log_2 6} = 2^{\log_2 3^3 + \log_2 \frac{4}{3} - \log_2 6} \\ &= 2^{\log_2 \frac{27 \times \frac{4}{3}}{6}} \\ &= 2^{\log_2 6} = 6^{\log_2 2} = 6\end{aligned}$$

099 ⑤

$$ab = \log_6 7 \times \log_7 13 = \log_6 7 \times \frac{\log_6 13}{\log_6 7} = \log_6 13$$

$$\therefore 36^{ab} = 36^{\log_6 13} = 13^{\log_6 36} = 13^{\log_6 6^2} = 13^2 = 169$$

100 ④

$$A = 5^{\log_5 \frac{4}{3}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_5 5} = \frac{4}{3}$$

$$B = \log_9 3\sqrt{3} = \log_{3^2} 3^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{2} \log_3 3 = \frac{3}{4}$$

$$C = \log_4 (\log_5 625) = \log_4 (\log_5 5^4) = \log_4 4 = 1$$

$$\therefore B < C < A$$

101 2a+3b+1

$$\log_5 540 = \log_5 (2^2 \times 3^3 \times 5) = \log_5 2^2 + \log_5 3^3 + \log_5 5$$

$$= 2 \log_5 2 + 3 \log_5 3 + 1 = 2a + 3b + 1$$

102 ③

$$\log_{100} 18 = \log_{10^2} (2 \times 3^2) = \frac{1}{2} \log_{10} (2 \times 3^2)$$

$$= \frac{1}{2} (\log_{10} 2 + \log_{10} 3^2)$$

$$= \frac{1}{2} \log_{10} 2 + \log_{10} 3 = \frac{a}{2} + b$$

103 ②

$$\log_2 5 = a \text{에서 } \frac{1}{\log_5 2} = a \quad \therefore \log_5 2 = \frac{1}{a}$$

$$\therefore \log_5 12 = \log_5 (2^2 \times 3) = \log_5 2^2 + \log_5 3$$

$$= 2 \log_5 2 + \log_5 3 = \frac{2}{a} + b$$

104 ①

$$3^a = 5 \text{에서 } a = \log_3 5$$

$$\therefore \log_{81} 25 = \log_{3^4} 5^2 = \frac{1}{4} \log_3 5 = \frac{1}{4} a$$

$$\therefore p = \frac{1}{4}$$

105 ②

$$3^a = 4 \text{에서 } a = \log_3 4 = \log_3 2^2 = 2 \log_3 2$$

$$\therefore \log_3 2 = \frac{a}{2}$$

$$3^b = 5 \text{에서 } b = \log_3 5$$

$$\therefore \log_{12} 50 = \frac{\log_3 50}{\log_3 12} = \frac{\log_3 (2 \times 5^2)}{\log_3 (2^2 \times 3)}$$

$$= \frac{\log_3 2 + \log_3 5^2}{\log_3 2^2 + \log_3 3}$$

$$= \frac{\log_3 2 + 2 \log_3 5}{2 \log_3 2 + 1} = \frac{\frac{a}{2} + 2b}{2 \times \frac{a}{2} + 1}$$

$$= \frac{a + 4b}{2a + 2}$$

106 $\frac{2b+c}{a+b}$

$$5^a = x \text{에서 } a = \log_5 x$$

$$5^b = y \text{에서 } b = \log_5 y$$

$$5^c = z \text{에서 } c = \log_5 z$$

$$\therefore \log_{xy} y^2 z = \frac{\log_5 y^2 z}{\log_5 xy} = \frac{\log_5 y^2 + \log_5 z}{\log_5 x + \log_5 y}$$

$$= \frac{2 \log_5 y + \log_5 z}{\log_5 x + \log_5 y} = \frac{2b + c}{a + b}$$

107 ④

$$\frac{1}{3a} + \frac{1}{2b} = \frac{3a+2b}{6ab} = \frac{\log_3 32}{6 \log_3 2}$$

$$= \frac{\log_3 2^5}{6 \log_3 2} = \frac{5 \log_3 2}{3 \log_3 2}$$

$$= \frac{5}{3}$$

108 ④

$$\log_2 a = \log_8 b \text{에서 } \log_2 a = \log_{2^3} b$$

$$\log_2 a = \frac{1}{3} \log_2 b, \quad 3 \log_2 a = \log_2 b$$

$$\log_2 a^3 = \log_2 b \quad \therefore b = a^3$$

$$\therefore \log_a b = \log_a a^3 = 3$$

다른 풀이

$$\log_2 a = \log_8 b \text{에서 } \log_2 a = \log_{2^3} b$$

$$\log_2 a = \frac{1}{3} \log_2 b, \quad \frac{\log_2 b}{\log_2 a} = 3 \quad (\because a \neq 1)$$

$$\therefore \log_a b = 3$$

109 2

$$4^x = 12 \text{에서 } x = \log_4 12$$

$$36^y = 12 \text{에서 } y = \log_{36} 12$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{\log_4 12} + \frac{1}{\log_{36} 12}$$

$$= \log_{12} 4 + \log_{12} 36 = \log_{12} (4 \times 36)$$

$$= \log_{12} 144 = \log_{12} 12^2 = 2$$

다른 풀이

$$4^x = 12 \text{에서 } 4 = 12^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$36^y = 12 \text{에서 } 36 = 12^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

① × ②을 하면

$$4 \times 36 = 12^{\frac{1}{x}} \times 12^{\frac{1}{y}}$$

$$12^2 = 12^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \quad \therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2$$

110 ③

$$56^x = 8 \text{에서 } x = \log_{56} 8$$

$$7^y = 16 \text{에서 } y = \log_7 16$$

$$\therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = \frac{3}{\log_{56} 8} - \frac{4}{\log_7 16} = 3 \log_8 56 - 4 \log_{16} 7$$

$$= 3 \log_{2^3} 56 - 4 \log_{2^4} 7 = \log_2 56 - \log_2 7$$

$$= \log_2 \frac{56}{7} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$$

다른 풀이

$$56^x = 8 \text{에서 } 56 = 8^{\frac{1}{x}} = (2^3)^{\frac{1}{x}} = 2^{\frac{3}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$7^y = 16 \text{에서 } 7 = 16^{\frac{1}{y}} = (2^4)^{\frac{1}{y}} = 2^{\frac{4}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} \div \textcircled{㉡}$ 을 하면

$$56 \div 7 = 2^{\frac{3}{x}} \div 2^{\frac{4}{y}}, \quad 2^3 = 2^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}}$$

$$\therefore \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = 3$$

111 답 1/5

$$\begin{aligned} 25^{\log_5 \sqrt{x}} \times 5^{\log_5 y} &= (5^2)^{\log_5 x^{\frac{1}{2}}} \times 5^{\log_5 y} = 5^{2 \times \frac{1}{2} \log_5 x} \times 5^{\log_5 y} \\ &= 5^{\log_5 x} \times 5^{\log_5 y} = 5^{\log_5 x + \log_5 y} \\ &= 5^{-1} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

112 답 9/16

$$\sqrt{a} = c^8 \text{에서 } a^{\frac{1}{2}} = c^8$$

$$\therefore c = (a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{8}} = a^{\frac{1}{16}}$$

$$b^4 = c^8 \text{에서 } c = (b^4)^{\frac{1}{8}} = b^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a c + \log_b c &= \log_a a^{\frac{1}{16}} + \log_b b^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{16} + \frac{1}{2} = \frac{9}{16} \end{aligned}$$

113 답 ④

$$a^4 b^3 = 1 \text{에서 } b^3 = \frac{1}{a^4} = a^{-4}$$

$$\therefore b = (a^{-4})^{\frac{1}{3}} = a^{-\frac{4}{3}}$$

$$\therefore \log_a a^2 b = \log_a (a^2 \times a^{-\frac{4}{3}}) = \log_a a^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

다른 풀이

$a^4 b^3 = 1$ 의 양변에 a 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_a a^4 b^3 = \log_a 1$$

$$\log_a a^4 + \log_a b^3 = 0$$

$$4 + 3 \log_a b = 0 \quad \therefore \log_a b = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore \log_a a^2 b = \log_a a^2 + \log_a b = 2 + \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

114 답 (1) -1 (2) 1

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 5, \quad \alpha\beta = 1$$

$$(1) \log_5 \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} = \log_5 \frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -1$$

$$\begin{aligned} (2) \log_5 (\alpha^{-1} + \beta^{-1}) &= \log_5 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) \\ &= \log_5 \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \log_5 \frac{5}{1} = 1 \end{aligned}$$

115 답 ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 18, \quad \alpha\beta = 6$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_2 (\alpha + \beta) - 2 \log_2 \alpha\beta &= \log_2 18 - 2 \log_2 6 \\ &= \log_2 18 - \log_2 6^2 \\ &= \log_2 \frac{18}{36} = \log_2 \frac{1}{2} \\ &= \log_2 2^{-1} = -1 \end{aligned}$$

116 답 16

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 a + \log_2 b = 6, \quad \log_2 a \times \log_2 b = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a b + \log_b a &= \frac{\log_2 b}{\log_2 a} + \frac{\log_2 a}{\log_2 b} \\ &= \frac{(\log_2 a)^2 + (\log_2 b)^2}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ &= \frac{(\log_2 a + \log_2 b)^2 - 2 \log_2 a \times \log_2 b}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ &= \frac{6^2 - 2 \times 2}{2} = 16 \end{aligned}$$

117 답 ④

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a = \log_3 5 + 1 = \log_3 5 + \log_3 3$$

$$= \log_3 (5 \times 3) = \log_3 15$$

$$b = \log_3 5 \times 1 = \log_3 5$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{\log_3 5}{\log_3 15} = \log_{15} 5$$

개념유형

48~49쪽

118 답 -3

119 답 2

$$\log 100 = \log 10^2 = 2$$

120 답 -4

$$\log \frac{1}{10000} = \log 10^{-4} = -4$$

121 답 -5

$$\log 0.00001 = \log 10^{-5} = -5$$

122 답 1/4

$$\log \sqrt[4]{10} = \log 10^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

123 답 8/3

$$\log \sqrt[3]{10^8} = \log 10^{\frac{8}{3}} = \frac{8}{3}$$

124 **답** $\frac{7}{2}$

$$\log 1000\sqrt{10} = \log 10^{\frac{7}{2}} = \frac{7}{2}$$

125 **답** 2

$$\log 4 + \log 25 = \log (4 \times 25) = \log 100 = \log 10^2 = 2$$

126 **답** 3

$$\log 7000 - \log 7 = \log \frac{7000}{7} = \log 1000 = \log 10^3 = 3$$

127 **답** $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \log \sqrt{10} - \log \sqrt[6]{10} &= \log 10^{\frac{1}{2}} - \log 10^{\frac{1}{6}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

128 **답** $-\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned} \log 0.1 + \log \sqrt{\frac{1}{1000}} &= \log 10^{-1} + \log 10^{-\frac{3}{2}} \\ &= -1 + \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

129 **답** $\frac{14}{15}$

$$\log \sqrt[5]{10^3} - \log \sqrt[3]{10} = \log 10^{\frac{3}{5}} - \log 10^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{5} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{14}{15}$$

130 **답** 10, 10, 1, 1.5132

131 **답** 4.5132

$$\begin{aligned} \log 32600 &= \log (10^4 \times 3.26) \\ &= \log 10^4 + \log 3.26 \\ &= 4 + 0.5132 = 4.5132 \end{aligned}$$

132 **답** -2.4868

$$\begin{aligned} \log 0.00326 &= \log (10^{-3} \times 3.26) \\ &= \log 10^{-3} + \log 3.26 \\ &= -3 + 0.5132 = -2.4868 \end{aligned}$$

133 **답** 2.2122

$$\begin{aligned} \log 163 &= \log (10^2 \times 1.63) \\ &= \log 10^2 + \log 1.63 \\ &= 2 + 0.2122 = 2.2122 \end{aligned}$$

134 **답** -1.7878

$$\begin{aligned} \log 0.0163 &= \log (10^{-2} \times 1.63) \\ &= \log 10^{-2} + \log 1.63 \\ &= -2 + 0.2122 = -1.7878 \end{aligned}$$

135 **답** -3.7878

$$\begin{aligned} \log 0.000163 &= \log (10^{-4} \times 1.63) \\ &= \log 10^{-4} + \log 1.63 \\ &= -4 + 0.2122 \\ &= -3.7878 \end{aligned}$$

136 **답** 0.3304

137 **답** 0.3729

138 **답** 1.3522

$$\begin{aligned} \text{상용로그표에서 } \log 2.25 &= 0.3522 \text{이므로} \\ \log 22.5 &= \log (10 \times 2.25) \\ &= \log 10 + \log 2.25 \\ &= 1 + 0.3522 \\ &= 1.3522 \end{aligned}$$

139 **답** 3.3655

$$\begin{aligned} \text{상용로그표에서 } \log 2.32 &= 0.3655 \text{이므로} \\ \log 2320 &= \log (10^3 \times 2.32) \\ &= \log 10^3 + \log 2.32 \\ &= 3 + 0.3655 \\ &= 3.3655 \end{aligned}$$

140 **답** -0.6655

$$\begin{aligned} \text{상용로그표에서 } \log 2.16 &= 0.3345 \text{이므로} \\ \log 0.216 &= \log (10^{-1} \times 2.16) \\ &= \log 10^{-1} + \log 2.16 \\ &= -1 + 0.3345 \\ &= -0.6655 \end{aligned}$$

141 **답** -4.6517

$$\begin{aligned} \text{상용로그표에서 } \log 2.23 &= 0.3483 \text{이므로} \\ \log 0.0000223 &= \log (10^{-5} \times 2.23) \\ &= \log 10^{-5} + \log 2.23 \\ &= -5 + 0.3483 \\ &= -4.6517 \end{aligned}$$

142 **답** 1, 10, 10, 13.2, 13.2

143 **답** 1320

$$\begin{aligned} \log 1.32 &= 0.1206 \text{이므로} \\ \log N &= 3.1206 \\ &= 3 + 0.1206 \\ &= \log 10^3 + \log 1.32 \\ &= \log (10^3 \times 1.32) \\ &= \log 1320 \\ \therefore N &= 1320 \end{aligned}$$

144 **답** 0.132

$$\begin{aligned}\log 1.32 &= 0.1206 \text{이므로} \\ \log N &= -0.8794 = -1 + 0.1206 \\ &= \log 10^{-1} + \log 1.32 \\ &= \log (10^{-1} \times 1.32) \\ &= \log 0.132 \\ \therefore N &= 0.132\end{aligned}$$

실전유형 50~51쪽

145 **답** ④

$$\begin{aligned}\log 18 + \log 5 &= \log (18 \times 5) = \log 90 \\ &= \log (3^2 \times 10) = \log 3^2 + \log 10 \\ &= 2 \log 3 + 1 = 2 \times 0.4771 + 1 \\ &= 1.9542\end{aligned}$$

146 **답** ③

$$\begin{aligned}\log x^3 &= 1.2 \text{에서 } 3 \log x = 1.2 \quad \therefore \log x = 0.4 \\ \therefore \log 100x^2 + \log \sqrt{x} &= \log 100 + \log x^2 + \log x^{\frac{1}{2}} \\ &= \log 10^2 + 2 \log x + \frac{1}{2} \log x \\ &= 2 + \frac{5}{2} \log x = 2 + \frac{5}{2} \times 0.4 = 3\end{aligned}$$

147 **답** ③

$$\begin{aligned}\log \frac{27}{5} &= \log 27 - \log 5 = \log 3^3 - \log \frac{10}{2} \\ &= 3 \log 3 - (\log 10 - \log 2) \\ &= 3 \log 3 - 1 + \log 2 = a + 3b - 1\end{aligned}$$

148 **답** 0.3266

$$\begin{aligned}\log 6 - \log 2\sqrt{6} + \log \sqrt{3} &= \log \frac{6 \times \sqrt{3}}{2\sqrt{6}} = \log \frac{3}{\sqrt{2}} \\ &= \log 3 - \log \sqrt{2} = \log 3 - \log 2^{\frac{1}{2}} \\ &= \log 3 - \frac{1}{2} \log 2 \\ &= 0.4771 - \frac{1}{2} \times 0.3010 \\ &= 0.3266\end{aligned}$$

149 **답** ②

$$\begin{aligned}\log 4.28 &= 0.6314 \text{이므로} \\ a = \log 428 &= \log (10^2 \times 4.28) \\ &= \log 10^2 + \log 4.28 = 2 + 0.6314 \\ &= 2.6314 \\ \log b &= -1.3686 = -1 - 0.3686 \\ &= (-1 - 1) + (1 - 0.3686) = -2 + 0.6314 \\ &= \log 10^{-2} + \log 4.28 = \log (10^{-2} \times 4.28) \\ &= \log 0.0428\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore b &= 0.0428 \\ \therefore a + b &= 2.6314 + 0.0428 = 2.6742\end{aligned}$$

150 **답** ㄱ, ㄴ

$$\begin{aligned}\text{ㄱ. } \log 5 &= \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \\ &= 1 - 0.3010 = 0.6990 \\ \text{ㄴ. } \log 20 &= \log (10 \times 2) = \log 10 + \log 2 \\ &= 1 + 0.3010 = 1.3010 \\ \text{ㄷ. } \log 500 &= \log (10^2 \times 5) = \log 10^2 + \log 5 \\ &= 2 + 0.6990 = 2.6990 \\ \text{ㄹ. } \log 0.02 &= \log (10^{-2} \times 2) = \log 10^{-2} + \log 2 \\ &= -2 + 0.3010 = -1.6990\end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

151 **답** ②

$$\begin{aligned}\text{상용로그표에서 } \log 4.19 &= 0.6222 \text{이므로} \\ \log \sqrt{419} &= \log 419^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 419 \\ &= \frac{1}{2} \log (10^2 \times 4.19) \\ &= \frac{1}{2} (\log 10^2 + \log 4.19) \\ &= \frac{1}{2} (2 + 0.6222) = 1.3111\end{aligned}$$

152 **답** 5.33

$$\begin{aligned}x=500 \text{을 } I &= 1.9 \log x + 0.2 \text{에 대입하면} \\ I &= 1.9 \log 500 + 0.2 \\ &= 1.9 \log (10^2 \times 5) + 0.2 \\ &= 1.9 (\log 10^2 + \log 5) + 0.2 \\ &= 1.9 \left(2 + \log \frac{10}{2} \right) + 0.2 \\ &= 1.9 (2 + \log 10 - \log 2) + 0.2 \\ &= 1.9 (2 + 1 - \log 2) + 0.2 \\ &= 1.9 (3 - 0.3) + 0.2 = 5.33\end{aligned}$$

따라서 구하는 약취의 세기는 5.33이다.

153 **답** ③

원본 사진 A를 압축했을 때 최대 신호 대 잡음비가 P_A , 평균제곱오차가 E_A 이므로

$$P_A = 20 \log 255 - 10 \log E_A$$

원본 사진 B를 압축했을 때 최대 신호 대 잡음비가 P_B , 평균제곱오차가 $E_B = 100E_A$ 이므로

$$P_B = 20 \log 255 - 10 \log E_B = 20 \log 255 - 10 \log 100E_A$$

$$\begin{aligned}\therefore P_A - P_B &= 20 \log 255 - 10 \log E_A - (20 \log 255 - 10 \log 100E_A) \\ &= -10 \log E_A + 10 \log 100E_A \\ &= 10 \log \frac{100E_A}{E_A} \\ &= 10 \log 100 \\ &= 10 \log 10^2 \\ &= 10 \times 2 = 20\end{aligned}$$

154 ▶ 0.95

외부 자극의 세기가 600일 때의 감각의 세기가 0.7이므로
 $0.7 = k \log 600 = k \log (10^2 \times 6)$
 $= k(\log 10^2 + \log 6) = k(2 + \log 6)$
 $= k(2 + 0.8) = 2.8k$

$$\therefore k = \frac{1}{4}$$

따라서 외부 자극의 세기가 6000일 때의 감각의 세기는
 $\frac{1}{4} \log 6000 = \frac{1}{4} \log (10^3 \times 6) = \frac{1}{4}(\log 10^3 + \log 6)$
 $= \frac{1}{4}(3 + \log 6) = \frac{1}{4}(3 + 0.8) = 0.95$

155 ▶ ①

현재 빵 판매량을 A 라 하면 매년 전년도 대비 6%씩 증가시키므로
 12년 후의 빵 판매량은

$$A \left(1 + \frac{6}{100}\right)^{12} = A \times 1.06^{12}$$

1.06¹²에 상용로그를 취하면

$$\log 1.06^{12} = 12 \log 1.06 = 12 \times 0.025 = 0.3 = \log 2$$

즉, 1.06¹² = 2이므로 12년 후의 빵 판매량은 $A \times 2$ 이다.

따라서 12년 후의 빵 판매량은 현재 빵 판매량의 2배이다.

156 ▶ ③

현재 생산량을 A , 매년 증가시키는 일정한 비율을 $r\%$ 라 하면
 10년 후의 생산량은 현재 생산량의 4배가 되므로

$$A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} = 4A \quad \therefore \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} = 4$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log \left(1 + \frac{r}{100}\right)^{10} = \log 4$$

$$10 \log \left(1 + \frac{r}{100}\right) = 2 \log 2$$

$$\log \left(1 + \frac{r}{100}\right) = \frac{1}{5} \log 2 = \frac{1}{5} \times 0.3 = 0.06 = \log 1.15$$

즉, $1 + \frac{r}{100} = 1.15$ 이므로 $r = 15$

따라서 매년 15%씩 생산량을 증가시켜야 한다.

실전유형으로 중단원 점검

52~53쪽

1 ▶ ③

$$\log_a 3 = 2 \text{에서 } a^2 = 3 \quad \therefore a = \sqrt{3} (\because a > 0)$$

$$\log_b 5 = 2 \text{에서 } b^2 = 5 \quad \therefore b = \sqrt{5} (\because b > 0)$$

$$\therefore ab = \sqrt{3} \times \sqrt{5} = \sqrt{15}$$

2 ▶ 10

밑의 조건에서 $6 - x > 0$, $6 - x \neq 1$

$$x < 6, x \neq 5$$

$$\therefore x < 5 \text{ 또는 } 5 < x < 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

진수의 조건에서 $-x^2 + 4x + 5 > 0$

$$x^2 - 4x - 5 < 0, (x+1)(x-5) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분은

$$-1 < x < 5$$

따라서 정수 x 의 값은 0, 1, 2, 3, 4이므로 구하는 합은

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

채점 기준

① 밑의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위 구하기	30 %
② 진수의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위 구하기	30 %
③ 모든 정수 x 의 값의 합 구하기	40 %

3 ▶ ②

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log_6 3 - \log_6 2\sqrt{2} + 2 \log_6 2 &= \log_6 3^{\frac{1}{2}} - \log_6 2\sqrt{2} + \log_6 2^2 \\ &= \log_6 \sqrt{3} - \log_6 2\sqrt{2} + \log_6 4 \\ &= \log_6 \frac{\sqrt{3} \times 4}{2\sqrt{2}} = \log_6 \sqrt{6} \\ &= \log_6 6^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $k = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\log_2 k = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$$

4 ▶ 18

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_6 x} + \frac{1}{\log_{18} x} &= \log_x 3 + \log_x 6 + \log_x 18 \\ &= \log_x (3 \times 6 \times 18) \\ &= \log_x 18^2 \\ &= 2 \log_x 18 \end{aligned}$$

즉, $2 \log_x 18 = 2$ 이므로 $\log_x 18 = 1$

$$\therefore x = 18$$

5 ▶ 41

$$\begin{aligned} (2^{\log_2 9 - \log_2 3})^{\log_2 5} + 4^{\log_2 6} &= (2^{\log_2 \frac{9}{3}})^{\log_2 5} + 6^{\log_2 4} \\ &= (2^{\log_2 3})^{\log_2 5} + 6^{\log_2 2^2} \\ &= 2^{\log_2 3 \times \frac{\log_2 5}{\log_2 3}} + 6^2 \\ &= 2^{\log_2 5} + 36 = 5^{\log_2 2} + 36 \\ &= 5 + 36 = 41 \end{aligned}$$

6 ▶ ②

$$\log_3 5 = a \text{에서 } \frac{1}{\log_5 3} = a \quad \therefore \log_5 3 = \frac{1}{a}$$

$$\therefore \log_7 9\sqrt{5} = \frac{\log_5 9\sqrt{5}}{\log_5 7} = \frac{\log_5 9 + \log_5 \sqrt{5}}{\log_5 7}$$

$$= \frac{\log_5 3^2 + \log_5 5^{\frac{1}{2}}}{\log_5 7} = \frac{2 \log_5 3 + \frac{1}{2}}{\log_5 7}$$

$$= \frac{2 \times \frac{1}{a} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{b}} = \frac{a+4}{2ab}$$

7 답 ④

$$108^x = 6 \text{에서 } x = \log_{108} 6$$

$$3^y = 6 \text{에서 } y = \log_3 6$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{y-x}{xy} &= \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \\ &= \frac{1}{\log_{108} 6} - \frac{1}{\log_3 6} \\ &= \log_6 108 - \log_6 3 \\ &= \log_6 \frac{108}{3} = \log_6 36 \\ &= \log_6 6^2 = 2 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$108^x = 6 \text{에서 } 108 = 6^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$3^y = 6 \text{에서 } 3 = 6^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

① ÷ ②을 하면

$$108 \div 3 = 6^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$$

$$6^2 = 6^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$$

$$\therefore \frac{y-x}{xy} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 2$$

8 답 ④

$$\log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{y} = 1 \text{에서 } \log_2 x + \log_{2^{-1}} y^{-1} = 1$$

$$\therefore \log_2 x + \log_2 y = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore 4^{\log_2 x} \times 16^{\log_2 y} &= 4^{\log_2 x} \times (4^2)^{\log_2 y} \\ &= 4^{2 \log_2 x} \times 4^{2 \log_2 y} \\ &= 4^{2 \log_2 x + 2 \log_2 y} \\ &= 4^{2(\log_2 x + \log_2 y)} \\ &= 4^{2 \times 1} = 16 \end{aligned}$$

9 답 7

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_5 a + \log_5 b = 4, \log_5 a \times \log_5 b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a \sqrt{b} + \log_b \sqrt{a} &= \log_a b^{\frac{1}{2}} + \log_b a^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(\log_a b + \log_b a) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\log_5 b}{\log_5 a} + \frac{\log_5 a}{\log_5 b} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(\log_5 a)^2 + (\log_5 b)^2}{\log_5 a \times \log_5 b} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(\log_5 a + \log_5 b)^2 - 2 \log_5 a \times \log_5 b}{\log_5 a \times \log_5 b} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4^2 - 2 \times 1}{1} = 7 \quad \dots\dots \textcircled{ii} \end{aligned}$$

채점 기준

① 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\log_5 a + \log_5 b$, $\log_5 a \times \log_5 b$ 의 값 구하기	20 %
② $\log_a \sqrt{b} + \log_b \sqrt{a}$ 의 값 구하기	80 %

10 답 ①

$$\log x^2 = 0.84 \text{에서 } 2 \log x = 0.84$$

$$\therefore \log x = 0.42$$

$$\begin{aligned} \therefore \log \frac{x^3}{10} + \log \sqrt[3]{x} &= \log x^3 - \log 10 + \log x^{\frac{1}{3}} \\ &= 3 \log x - 1 + \frac{1}{3} \log x \\ &= \frac{10}{3} \log x - 1 \\ &= \frac{10}{3} \times 0.42 - 1 = 0.4 \end{aligned}$$

11 답 61.4204

$$\log 6.02 = 0.7796 \text{이므로}$$

$$\log a = 1.7796 = 1 + 0.7796$$

$$= \log 10 + \log 6.02$$

$$= \log (10 \times 6.02) = \log 60.2$$

$$\therefore a = 60.2$$

$$b = \log 0.0602 = \log (10^{-2} \times 6.02)$$

$$= \log 10^{-2} + \log 6.02$$

$$= -2 + 0.7796 = -1.2204$$

$$\therefore a - b = 60.2 - (-1.2204) = 61.4204$$

12 답 ⑤

$$\textcircled{1} \log 9 = \log 3^2 = 2 \log 3$$

$$= 2 \times 0.4771 = 0.9542$$

$$\textcircled{2} \log \frac{1}{27} = \log 3^{-3} = -3 \log 3$$

$$= -3 \times 0.4771 = -1.4313$$

$$\textcircled{3} \log 30 = \log (10 \times 3) = \log 10 + \log 3$$

$$= 1 + 0.4771 = 1.4771$$

$$\textcircled{4} \log 0.03 = \log (10^{-2} \times 3) = \log 10^{-2} + \log 3$$

$$= -2 + 0.4771 = -1.5229$$

$$\textcircled{5} \log 0.0003 = \log (10^{-4} \times 3) = \log 10^{-4} + \log 3$$

$$= -4 + 0.4771 = -3.5229$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

13 답 ④

소리의 크기가 60 dB일 때의 소리의 세기가 I_1 W/m²이므로

$$60 = 10 \log \frac{I_1}{10^{-12}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

소리의 크기가 50 dB일 때의 소리의 세기가 I_2 W/m²이므로

$$50 = 10 \log \frac{I_2}{10^{-12}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

① - ②을 하면

$$60 - 50 = 10 \log \frac{I_1}{10^{-12}} - 10 \log \frac{I_2}{10^{-12}}$$

$$10 = 10 \left(\log \frac{I_1}{10^{-12}} - \log \frac{I_2}{10^{-12}} \right)$$

$$10 = 10 \log \frac{\frac{I_1}{10^{-12}}}{\frac{I_2}{10^{-12}}}$$

$$\log \frac{I_1}{I_2} = 1$$

$$\therefore \frac{I_1}{I_2} = 10^1 = 10$$

03 지수함수

개념유형

54~55쪽

001 답 ○

002 답 ×

003 답 ○

004 답 ×

005 답 ×

006 답 ○

007 답 ×

008 답 4

$$f(2)=2^2=4$$

009 답 $\sqrt{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$$

010 답 128

$$f(3)f(4)=2^3 \times 2^4=2^7=128$$

011 답 1

$$f(0)=\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$$

012 답 27

$$f(-3)=\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27$$

013 답 $\frac{1}{9}$

$$\frac{f(7)}{f(5)}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7}{\left(\frac{1}{3}\right)^5}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

실전유형

55쪽

014 답 245

$$f(x)=5^x \text{에서 } f(3)=5^3=125, f(1)=5^1=5$$

$$g(x)=\left(\frac{1}{4}\right)^x \text{에서 } g\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{2}}=2$$

$$\therefore f(3)g\left(-\frac{1}{2}\right)-f(1)=125 \times 2-5=245$$

015 답 ④

$$f(m)=3 \text{에서 } a^m=3$$

$$f(n)=9 \text{에서 } a^n=9$$

$$\therefore f(m+n)=a^{m+n}=a^m \times a^n=3 \times 9=27$$

016 답 ③

$$f(6)=4 \text{에서 } a^6=4$$

$$f(-6)=a^{-6}=(a^6)^{-1}=4^{-1}=\frac{1}{4}$$

$$f(-3)=a^{-3}=(a^6)^{-\frac{1}{2}}=4^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(-6)+f(-3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

017 답 $\frac{1}{8}$

$$f(1)=2 \text{에서 } 2^{a+b}=2$$

$$\therefore a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(2)=8 \text{에서 } 2^{2a+b}=2^3$$

$$\therefore 2a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2, b=-1$$

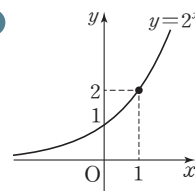
따라서 $f(x)=2^{2x-1}$ 이므로

$$f(-1)=2^{2 \times (-1)-1}=2^{-3}=\frac{1}{8}$$

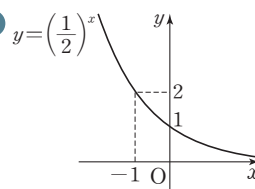
개념유형

57~59쪽

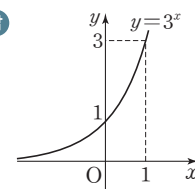
018 답

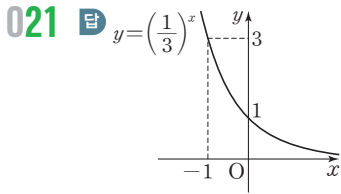


019 답



020 답





022 **답** 실수

023 **답** 증가

024 **답** 1

025 **답** 양의 실수

026 **답** x

027 **답** 2

028 **답** $y = 3^{x+2} + 1$

$y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y - 1 = 3^{x - (-2)} \quad \therefore y = 3^{x+2} + 1$$

029 **답** $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-4} - 1$

$y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 4 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y - (-1) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-4} \quad \therefore y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-4} - 1$$

030 **답** $y = -2^{x+3} - 5$

$y = -2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y - (-5) = -2^{x - (-3)} \quad \therefore y = -2^{x+3} - 5$$

031 **답** $y = -2^{x-1} - 1$

$y = 2^{x-1} + 1$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = 2^{x-1} + 1 \quad \therefore y = -2^{x-1} - 1$$

032 **답** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 1$

$y = 2^{x-1} + 1$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = 2^{-x-1} + 1 \quad \therefore y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 1$$

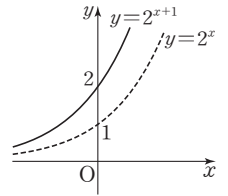
033 **답** $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1$

$y = 2^{x-1} + 1$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = 2^{-x-1} + 1 \quad \therefore y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1$$

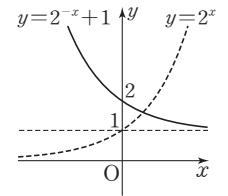
034 **답** 풀이 참조

$y = 2^{x+1}$ 의 그래프는 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 $\{y | y > 0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y = 0$ 이다.



035 **답** 풀이 참조

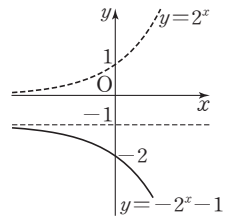
$y = 2^{-x} + 1$ 의 그래프는 $y = 2^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
따라서 치역은 $\{y | y > 1\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y = 1$ 이다.



036 **답** 풀이 참조

$y = -2^x - 1$ 의 그래프는 $y = 2^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y | y < -1\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y = -1$ 이다.

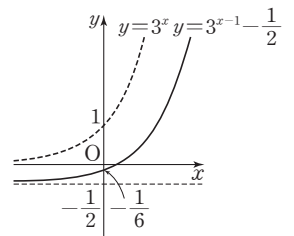


037 **답** 풀이 참조

$y = 3^{x-1} - \frac{1}{2}$ 의 그래프는 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 $-\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y | y > -\frac{1}{2}\}$ 이고,

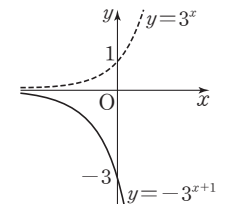
점근선의 방정식은 $y = -\frac{1}{2}$ 이다.



038 **답** 풀이 참조

$y = -3^{x+1}$ 의 그래프는 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

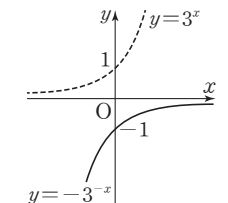
따라서 치역은 $\{y | y < 0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y = 0$ 이다.



039 **답** 풀이 참조

$y = -3^{-x}$ 의 그래프는 $y = 3^x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

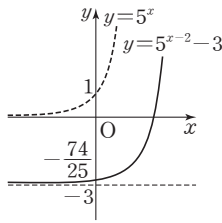
따라서 치역은 $\{y | y < 0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y = 0$ 이다.



040 답 ○

041 답 ○

$y=5^{x-2}-3$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않는다.



042 답 ×

치역은 $\{y|y > -3\}$ 이다.

043 답 ×

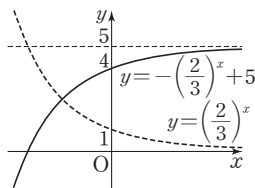
$y=5^{x-2}-3$ 에 $x=2$ 를 대입하면 $y=5^{2-2}-3=-2$ 따라서 그래프는 점 $(2, -2)$ 를 지난다.

044 답 ×

$y=\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

045 답 ×

$y=-\left(\frac{2}{3}\right)^x+5$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면을 지난다.



046 답 ○

047 답 ○

$y=-\left(\frac{2}{3}\right)^x+5$ 에 $x=-1$ 을 대입하면

$$y=-\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}+5=\frac{7}{2}$$

따라서 그래프는 점 $\left(-1, \frac{7}{2}\right)$ 을 지난다.

실전유형

60~61쪽

048 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 정의역은 실수 전체의 집합이다.

ㄴ. $y=\left(\frac{1}{6}\right)^x=6^{-x}$ 이므로 $y=6^x$ 의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{6}\right)^x$ 의 그래프와 y 축에 대하여 대칭이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

049 답 ④

임의의 실수 a, b 에 대하여 $a < b$ 일 때, $f(a) > f(b)$ 를 만족시키는 함수는 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값은 감소하는 함수이므로 $0 < (\text{밑}) < 1$ 인 지수함수이다.

이때 $f(x)=\left(\frac{9}{8}\right)^{-x}=\left(\frac{8}{9}\right)^x$ 에서 $0 < \frac{8}{9} < 1$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ④이다.

050 답 $a < -4$ 또는 $a > 2$

$y=(a^2+2a-7)^x$ 에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하려면 $a^2+2a-7 > 1$ 이어야 하므로

$$a^2+2a-8 > 0, (a+4)(a-2) > 0 \quad \therefore a < -4 \text{ 또는 } a > 2$$

051 답 ④

$y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=2^{x-m}+n$$

이 식이 $y=8 \times 2^x+5=2^{x+3}+5$ 와 일치하므로

$$m=-3, n=5 \quad \therefore m+n=2$$

052 답 3

$y=4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=4^{x-1}+a$$

이 그래프가 점 $\left(\frac{3}{2}, 5\right)$ 를 지나므로

$$5=4^{\frac{3}{2}-1}+a, 5=2+a \quad \therefore a=3$$

053 답 -4

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-5$$

이 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x-2}-5$$

$$y=-\left(\frac{1}{3}\right)^{-x-2}+5 \quad \therefore y=-9 \times 3^x+5$$

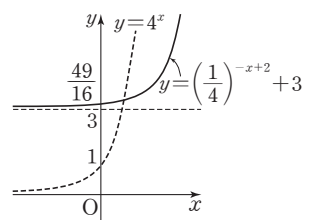
이 식이 $y=a \times 3^x+b$ 와 일치하므로

$$a=-9, b=5 \quad \therefore a+b=-4$$

054 답 ⑤

$y=\left(\frac{1}{4}\right)^{-x+2}+3=4^{x-2}+3$ 의 그래

프는 $y=4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



② $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x+2} + 3$ 에 $x=2$ 를 대입하면 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{-2+2} + 3 = 4$

따라서 그래프는 점 (2, 4)를 지난다.

③ $y = 4^{x-2} + 3$ 에서 밑이 1보다 크므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

⑤ $y = 4^{x-2} + 3$ 은 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 과 밑이 다르므로 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{-x+2} + 3$ 의 그

래프는 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 의 그래프를 평행이동하여 겹쳐질 수 없다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

055 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

ㄱ. $y = 25 \times 5^x = 5^{x+2}$ 이므로 $y = 25 \times 5^x$ 의 그래프는 $y = 5^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y = \frac{5^x}{125} = 5^{x-3}$ 이므로 $y = \frac{5^x}{125}$ 의 그래프는 $y = 5^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

ㄷ. $y = \sqrt{5^x} = 5^{\frac{x}{2}} = (\sqrt{5})^x$
즉, $y = (\sqrt{5})^x$ 은 $y = 5^x$ 과 밑이 다르므로 $y = \sqrt{5^x}$ 의 그래프는 $y = 5^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄹ. $y = 5^{-x} + 5$ 의 그래프는 $y = 5^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 것이다.

따라서 보기의 함수에서 그 그래프가 $y = 5^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

056 답 -2

$y = 3^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y = 3^{-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

이 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-a} + b$$

주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $y = -2$ 이므로 $b = -2$

즉, $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-a} - 2$ 의 그래프가 점 (0, 1)을 지나므로

$$1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-a} - 2, 3^a = 3 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore ab = 1 \times (-2) = -2$$

057 답 ④

$f(x) = -2^{4-3x} + k = -2^{-3\left(x-\frac{4}{3}\right)} + k = -\left(\frac{1}{8}\right)^{x-\frac{4}{3}} + k$ 의 그래프는

$y = \left(\frac{1}{8}\right)^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로

$\frac{4}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

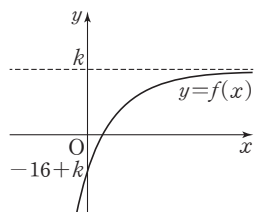
이 그래프가 제2사분면을 지나지 않으려

면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$-16 + k \leq 0 \quad \therefore k \leq 16$$

↳ $x=0$ 일 때의 함수값

따라서 자연수 k 의 최댓값은 16이다.



058 답 ④

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프가 점 $(-3, a)$ 를 지나므로

$$a = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프가 점 $(b, 64)$ 를 지나므로

$$64 = \left(\frac{1}{2}\right)^b$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^b \quad \therefore b = -6$$

$$\therefore ab = 8 \times (-6) = -48$$

059 답 ⑤

$y = 3^x$ 의 그래프가 두 점 $(a, p), (b, q)$ 를 지나므로

$$p = 3^a, q = 3^b$$

이때 $pq = 243$ 이므로

$$3^a \times 3^b = 243$$

$$3^{a+b} = 3^5 \quad \therefore a+b=5$$

060 답 16

$y = 2^x$ 의 그래프가 점 (0, 1)을 지나므로

$$a = 1$$

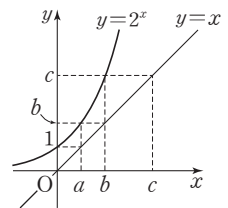
$y = 2^x$ 의 그래프가 점 (1, b)를 지나므로

$$b = 2^1 = 2$$

$y = 2^x$ 의 그래프가 점 (2, c)를 지나므로

$$c = 2^2 = 4$$

$$\therefore c^{ab} = 4^{1 \times 2} = 16$$



개념유형

62~63쪽

061 답 <

$2^{-2}, 2^{0.5}$ 에서 밑이 1보다 크고, $-2 < 0.5$ 이므로

$$2^{-2} < 2^{0.5}$$

062 답 <

$\left(\frac{1}{5}\right)^{-0.1}, \left(\frac{1}{5}\right)^{-10}$ 에서 밑이 1보다 작고, $-0.1 > -10$ 이므로

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-0.1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{-10}$$

063 답 >, 2, 20, 3, 18, >, >

064 답 <

$\frac{1}{81}, \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^5$ 을 밑이 $\frac{1}{3}$ 인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$$\frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4, \left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^5 = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2}}$$

이때 밑이 1보다 작고, $4 > \frac{5}{2}$ 이므로

$$\left(\frac{1}{3}\right)^4 < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{5}{2}} \quad \therefore \frac{1}{81} < \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

065 **답** >

$\sqrt[3]{0.16}$, $0.064^{\frac{1}{4}}$ 을 밑이 0.4인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$$\sqrt[3]{0.16} = (0.4^2)^{\frac{1}{3}} = 0.4^{\frac{2}{3}}, \quad 0.064^{\frac{1}{4}} = (0.4^3)^{\frac{1}{4}} = 0.4^{\frac{3}{4}}$$

이때 밑이 1보다 작고, $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ 이므로

$$0.4^{\frac{2}{3}} > 0.4^{\frac{3}{4}} \quad \therefore \sqrt[3]{0.16} > 0.064^{\frac{1}{4}}$$

066 **답** $4 < 4^{\sqrt{2}} < 4^{\frac{7}{3}}$

$4^{\frac{7}{3}}$, 4 , $4^{\sqrt{2}}$ 에서 밑이 1보다 크고, $1 < \sqrt{2} < \frac{7}{3}$ 이므로

$$4 < 4^{\sqrt{2}} < 4^{\frac{7}{3}}$$

067 **답** $\left(\frac{1}{6}\right)^{-0.7} < \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{6}\right)^{-\sqrt{5}}$

$\left(\frac{1}{6}\right)^{-\sqrt{5}}$, $\left(\frac{1}{6}\right)^{-0.7}$, $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$ 에서 밑이 1보다 작고,

$$-\sqrt{5} < -1 < -0.7 \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{-0.7} < \left(\frac{1}{6}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{6}\right)^{-\sqrt{5}}$$

068 **답** $2, \frac{1}{3}, 4, \frac{4}{5}, <, <, 3^{\frac{1}{4}}, \sqrt[5]{81}$

069 **답** $\frac{1}{49} < \sqrt{\frac{1}{7}} < 7^{0.1}$

$7^{0.1}$, $\sqrt{\frac{1}{7}}$, $\frac{1}{49}$ 을 밑이 $\frac{1}{7}$ 인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$$7^{0.1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-0.1} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-\frac{1}{10}}, \quad \sqrt{\frac{1}{7}} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{49} = \left(\frac{1}{7}\right)^2$$

이때 밑이 1보다 작고, $-\frac{1}{10} < \frac{1}{2} < 2$ 이므로

$$\left(\frac{1}{7}\right)^2 < \left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{7}\right)^{-\frac{1}{10}} \quad \therefore \frac{1}{49} < \sqrt{\frac{1}{7}} < 7^{0.1}$$

070 **답** $5^{0.5} < \sqrt[3]{25} < \sqrt{125}$

$\sqrt[3]{25}$, $5^{0.5}$, $\sqrt{125}$ 를 밑이 5인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$$\sqrt[3]{25} = (5^2)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{2}{3}}, \quad 5^{0.5} = 5^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{125} = (5^3)^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{3}{2}}$$

이때 밑이 1보다 크고, $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{2}$ 이므로

$$5^{\frac{1}{2}} < 5^{\frac{2}{3}} < 5^{\frac{3}{2}} \quad \therefore 5^{0.5} < \sqrt[3]{25} < \sqrt{125}$$

071 **답** $\sqrt[3]{0.01} < \sqrt[5]{0.001} < \sqrt{0.1}$

$\sqrt{0.1}$, $\sqrt[3]{0.01}$, $\sqrt[5]{0.001}$ 을 밑이 0.1인 거듭제곱 꼴로 나타내면

$$\sqrt{0.1} = 0.1^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[3]{0.01} = (0.1^2)^{\frac{1}{3}} = 0.1^{\frac{2}{3}}, \quad \sqrt[5]{0.001} = (0.1^3)^{\frac{1}{5}} = 0.1^{\frac{3}{5}}$$

이때 밑이 1보다 작고, $\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$ 이므로

$$0.1^{\frac{2}{3}} < 0.1^{\frac{3}{5}} < 0.1^{\frac{1}{2}} \quad \therefore \sqrt[3]{0.01} < \sqrt[5]{0.001} < \sqrt{0.1}$$

실전유형

63쪽

072 **답** ①

$$A = \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}, \quad B = \sqrt[7]{81} = (3^4)^{\frac{1}{7}} = 3^{\frac{4}{7}}, \quad C = \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{4}} = 3^{\frac{3}{4}}$$

이때 밑이 1보다 크고, $\frac{1}{2} < \frac{4}{7} < \frac{3}{4}$ 이므로

$$3^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{4}{7}} < 3^{\frac{3}{4}}$$

$$\therefore A < B < C$$

073 **답** $\frac{1}{25}$

$$0.2^{\frac{3}{4}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}, \quad \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{4}} = \left\{\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

이때 밑이 1보다 작고, $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < \frac{3}{2}$ 이므로

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

따라서 가장 큰 수는 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$ 이고 가장 작은 수는 $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$ 이므로 두 수의 곱은

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

074 **답** ④

$$0 < a < 1 \text{에서 } \frac{1}{a} > 1$$

$$\therefore a < 1 < \frac{1}{a}$$

이때 밑 a 가 1보다 작으므로

$$a^{\frac{1}{a}} < a < a^a$$

개념유형

65~66쪽

075 **답** 최댓값: 27, 최솟값: 1

함수 $y = 3^x$ 의 밑이 1보다 크므로 $0 \leq x \leq 3$ 일 때 함수 $y = 3^x$ 은 $x = 3$ 에서 최댓값 $3^3 = 27$, $x = 0$ 에서 최솟값 $3^0 = 1$ 을 갖는다.

076 **답** 최댓값: 8, 최솟값: $\frac{1}{4}$

함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 밑이 1보다 작으므로

$-3 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 은

$x = -3$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$,

$x = 2$ 에서 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ 을 갖는다.

077 **답** 최댓값: 64, 최솟값: $\frac{1}{8}$

$$y=8^{-x}=\left(\frac{1}{8}\right)^x$$

함수 $y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$ 의 밑이 1보다 작으므로

$$-2 \leq x \leq 1 \text{ 일 때 함수 } y=\left(\frac{1}{8}\right)^x \text{ 은}$$

$$x=-2 \text{ 에서 최댓값 } \left(\frac{1}{8}\right)^{-2}=64,$$

$$x=1 \text{ 에서 최솟값 } \left(\frac{1}{8}\right)^1=\frac{1}{8} \text{ 을 갖는다.}$$

078 **답** 최댓값: 81, 최솟값: $\frac{1}{81}$

$$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x}=9^x$$

함수 $y=9^x$ 의 밑이 1보다 크므로 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $y=9^x$ 은

$$x=2 \text{ 에서 최댓값 } 9^2=81, x=-2 \text{ 에서 최솟값 } 9^{-2}=\frac{1}{81} \text{ 을 갖는다.}$$

079 **답** 최댓값: 64, 최솟값: $\frac{1}{4}$

함수 $y=4^{x-2}$ 의 밑이 1보다 크므로 $1 \leq x \leq 5$ 일 때 함수 $y=4^{x-2}$ 은

$$x=5 \text{ 에서 최댓값 } 4^{5-2}=64, x=1 \text{ 에서 최솟값 } 4^{1-2}=\frac{1}{4} \text{ 을 갖는다.}$$

080 **답** 최댓값: 38, 최솟값: 3

함수 $y=\left(\frac{1}{6}\right)^x+2$ 의 밑이 1보다 작으므로

$$-2 \leq x \leq 0 \text{ 일 때 함수 } y=\left(\frac{1}{6}\right)^x+2 \text{ 는}$$

$$x=-2 \text{ 에서 최댓값 } \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}+2=38,$$

$$x=0 \text{ 에서 최솟값 } \left(\frac{1}{6}\right)^0+2=3 \text{ 을 갖는다.}$$

081 **답** 최댓값: 128, 최솟값: $\frac{16}{5}$

함수 $y=5^{x-1}+3$ 의 밑이 1보다 크므로

$$0 \leq x \leq 4 \text{ 일 때 함수 } y=5^{x-1}+3 \text{ 은}$$

$$x=4 \text{ 에서 최댓값 } 5^{4-1}+3=128,$$

$$x=0 \text{ 에서 최솟값 } 5^{0-1}+3=\frac{16}{5} \text{ 을 갖는다.}$$

082 **답** 최댓값: 2, 최솟값: $-\frac{31}{16}$

함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3}-2$ 의 밑이 1보다 작으므로

$$-4 \leq x \leq -1 \text{ 일 때 함수 } y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x+3}-2 \text{ 는}$$

$$x=-4 \text{ 에서 최댓값 } \left(\frac{1}{4}\right)^{-4+3}-2=2,$$

$$x=-1 \text{ 에서 최솟값 } \left(\frac{1}{4}\right)^{-1+3}-2=-\frac{31}{16} \text{ 을 갖는다.}$$

083 **답** $\frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}, -1, \frac{7}{2}, 1, \frac{2}{7}$

084 **답** 최댓값: $\frac{125}{27}$, 최솟값: $\frac{9}{25}$

$$y=3^{-x} \times 5^x=\left(\frac{1}{3}\right)^x \times 5^x=\left(\frac{5}{3}\right)^x$$

함수 $y=\left(\frac{5}{3}\right)^x$ 의 밑이 1보다 크므로

$$-2 \leq x \leq 3 \text{ 일 때 함수 } y=\left(\frac{5}{3}\right)^x \text{ 은}$$

$$x=3 \text{ 에서 최댓값 } \left(\frac{5}{3}\right)^3=\frac{125}{27},$$

$$x=-2 \text{ 에서 최솟값 } \left(\frac{5}{3}\right)^{-2}=\frac{9}{25} \text{ 를 갖는다.}$$

085 **답** 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{16}{25}$

$$y=2^{2x} \times 5^{-x}=4^x \times \left(\frac{1}{5}\right)^x=\left(\frac{4}{5}\right)^x$$

함수 $y=\left(\frac{4}{5}\right)^x$ 의 밑이 1보다 작으므로

$$0 \leq x \leq 2 \text{ 일 때 함수 } y=\left(\frac{4}{5}\right)^x \text{ 은}$$

$$x=0 \text{ 에서 최댓값 } \left(\frac{4}{5}\right)^0=1,$$

$$x=2 \text{ 에서 최솟값 } \left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{16}{25} \text{ 을 갖는다.}$$

086 **답** 최댓값: $\frac{1}{16}$, 최솟값: $-\frac{17}{7}$

$$y=4^{-x} \times 7^x-3=\left(\frac{1}{4}\right)^x \times 7^x-3=\left(\frac{7}{4}\right)^x-3$$

함수 $y=\left(\frac{7}{4}\right)^x-3$ 의 밑이 1보다 크므로

$$-1 \leq x \leq 2 \text{ 일 때 함수 } y=\left(\frac{7}{4}\right)^x-3 \text{ 은}$$

$$x=2 \text{ 에서 최댓값 } \left(\frac{7}{4}\right)^2-3=\frac{1}{16},$$

$$x=-1 \text{ 에서 최솟값 } \left(\frac{7}{4}\right)^{-1}-3=-\frac{17}{7} \text{ 을 갖는다.}$$

087 **답** 3, -2, -3, 1, -3, 1, 1, 1, 2, -3, -3, $\frac{1}{8}$

088 **답** 최댓값: 25, 최솟값: $\frac{1}{25}$

$y=5^{x^2-2x-1}$ 에서 $f(x)=x^2-2x-1$ 이라 하면

$$f(x)=(x-1)^2-2$$

$$-1 \leq x \leq 2 \text{ 에서 } f(-1)=2, f(1)=-2, f(2)=-1 \text{ 이므로}$$

$$-2 \leq f(x) \leq 2$$

이때 함수 $y=5^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 크므로 함수 $y=5^{f(x)}$ 은

$$f(x)=2 \text{ 에서 최댓값 } 5^2=25,$$

$$f(x)=-2 \text{ 에서 최솟값 } 5^{-2}=\frac{1}{25} \text{ 을 갖는다.}$$

089 **답** 최댓값: 27, 최솟값: $\frac{1}{3}$

$y=3^{-x^2+6x-6}$ 에서 $f(x)=-x^2+6x-6$ 이라 하면

$$f(x)=-(x-3)^2+3$$

$$1 \leq x \leq 3 \text{ 에서 } f(1)=-1, f(3)=3 \text{ 이므로}$$

$$-1 \leq f(x) \leq 3$$

이때 함수 $y=3^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 크므로 함수 $y=3^{f(x)}$ 은
 $f(x)=3$ 에서 최댓값 $3^3=27$,
 $f(x)=-1$ 에서 최솟값 $3^{-1}=\frac{1}{3}$ 을 갖는다.

090 **답** 최댓값: 1, 최솟값: $\frac{1}{625}$

$y=\left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2-4x}$ 에서 $f(x)=-x^2-4x$ 라 하면
 $f(x)=-(x+2)^2+4$
 $-4 \leq x \leq 0$ 에서 $f(-4)=0$, $f(-2)=4$, $f(0)=0$ 이므로
 $0 \leq f(x) \leq 4$
 이때 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 작으므로 함수 $y=\left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)}$ 은
 $f(x)=0$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{5}\right)^0=1$,
 $f(x)=4$ 에서 최솟값 $\left(\frac{1}{5}\right)^4=\frac{1}{625}$ 을 갖는다.

실전유형

66~67쪽

091 **답** ⑤

함수 $y=7^{x-3}-4$ 의 밑이 1보다 크므로
 $3 \leq x \leq 5$ 일 때 함수 $y=7^{x-3}-4$ 는
 $x=5$ 에서 최댓값 $7^{5-3}-4=45$,
 $x=3$ 에서 최솟값 $7^{3-3}-4=-3$ 을 갖는다.
 따라서 치역이 $\{y \mid -3 \leq y \leq 45\}$ 이므로
 $a=-3$, $b=45$ $\therefore b-a=48$

092 **답** 31

함수 $y=3^{x+2}+k$ 의 밑이 1보다 크므로
 $-2 \leq x \leq 1$ 일 때 함수 $y=3^{x+2}+k$ 는
 $x=1$ 에서 최댓값 $3^{1+2}+k=27+k$,
 $x=-2$ 에서 최솟값 $3^{-2+2}+k=1+k$ 를 갖는다.
 즉, $1+k=5$ 이므로 $k=4$
 따라서 구하는 최댓값은 $27+4=31$

093 **답** ⑤

$f(x)=a^x$ 에서 $0 < a < 1$ 이므로
 $-2 \leq x \leq 1$ 일 때 함수 $f(x)=a^x$ 은
 $x=-2$ 에서 최댓값 a^{-2} , $x=1$ 에서 최솟값 a 를 갖는다.
 즉, $a=\frac{5}{6}$ 이므로 $M=\left(\frac{5}{6}\right)^{-2}=\frac{36}{25}$ $\therefore a \times M=\frac{6}{5}$

094 **답** ③

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x+1}$ 에서 $f(x)=x^2-4x+1$ 이라 하면
 $f(x)=(x-2)^2-3$
 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(-1)=6$, $f(2)=-3$ 이므로
 $-3 \leq f(x) \leq 6$

이때 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 작으므로 함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{f(x)}$ 은
 $f(x)=-3$, 즉 $x=2$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}=27$ 을 갖는다.
 따라서 $a=2$, $M=27$ 이므로 $a+M=29$

095 **답** ⑤

$y=2^{-x^2+2x+k}$ 에서 $f(x)=-x^2+2x+k$ 라 하면
 $f(x)=-(x-1)^2+k+1$
 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $f(0)=k$, $f(1)=k+1$, $f(2)=k$ 이므로
 $k \leq f(x) \leq k+1$
 이때 함수 $y=2^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 크므로 함수 $y=2^{f(x)}$ 은
 $f(x)=k+1$ 에서 최댓값 2^{k+1} , $f(x)=k$ 에서 최솟값 2^k 을 갖는다.
 즉, $2^{k+1}=2$ 이므로 $k+1=1$ $\therefore k=0$
 따라서 구하는 최솟값은 $2^0=1$

096 **답** $\frac{1}{9}$

$y=a^{x^2+8x+14}$ 에서 $f(x)=x^2+8x+14$ 라 하면
 $f(x)=(x+4)^2-2$ $\therefore f(x) \geq -2$
 이때 $y=a^{f(x)}$ 에서 $0 < a < 1$ 이므로 함수 $y=a^{f(x)}$ 은
 $f(x)=-2$ 에서 최댓값 a^{-2} 을 갖는다.
 즉, $a^{-2}=81$ 이므로 $a^2=\frac{1}{81}$ $\therefore a=\frac{1}{9}$ ($\because 0 < a < 1$)

097 **답** (가) 1 (나) 3 (다) 3 (라) 1 (마) -1

098 **답** $\frac{1}{6}$

$y=6^{-2x}+6^{-x+1}-1=\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^x\right\}^2+6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^x-1$
 $\left(\frac{1}{6}\right)^x=t$ ($t > 0$)로 놓으면 $0 \leq x \leq 1$ 에서
 $\left(\frac{1}{6}\right)^1 \leq \left(\frac{1}{6}\right)^x \leq \left(\frac{1}{6}\right)^0$ $\therefore \frac{1}{6} \leq t \leq 1$
 이때 주어진 함수는 $y=t^2+6t-1=(t+3)^2-10$
 따라서 $\frac{1}{6} \leq t \leq 1$ 일 때 함수 $y=(t+3)^2-10$ 은
 $t=1$, 즉 $x=0$ 에서 최댓값 6, $t=\frac{1}{6}$, 즉 $x=1$ 에서 최솟값 $\frac{1}{36}$ 을 갖는다.

따라서 $a=0$, $b=6$, $c=1$, $d=\frac{1}{36}$ 이므로

$$ac+bd=0 \times 1 + 6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$$

099 **답** 1

$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}+a=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x+a$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^x=t$ ($t > 0$)로 놓으면 주어진 함수는
 $y=t^2-4t+a=(t-2)^2+a-4$
 따라서 함수 $y=(t-2)^2+a-4$ 는 $t=2$, 즉 $x=-1$ 에서 최솟값
 $a-4$ 를 가지므로
 $b=-1$, $a-4=-2$ $\therefore a=2$, $b=-1$
 $\therefore a+b=1$

100 답 $x=2$

$$9^x=81 \text{에서 } 9^x=9^2 \quad \therefore x=2$$

101 답 $x=6$

$$2^{x-1}=32 \text{에서 } 2^{x-1}=2^5 \text{이므로}$$

$$x-1=5 \quad \therefore x=6$$

102 답 $x=3$

$$5^{-x}=\frac{1}{125} \text{에서 } 5^{-x}=5^{-3} \text{이므로}$$

$$-x=-3 \quad \therefore x=3$$

103 답 $x=-\frac{7}{2}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2}=3\sqrt{3} \text{에서 } 3^{-x-2}=3^{\frac{3}{2}} \text{이므로}$$

$$-x-2=\frac{3}{2} \quad \therefore x=-\frac{7}{2}$$

104 답 $x=-2$

$$27^x=\left(\frac{1}{9}\right)^{1-x} \text{에서 } 3^{3x}=3^{-2+2x} \text{이므로}$$

$$3x=-2+2x \quad \therefore x=-2$$

105 답 $x=1$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x-6}=25^{x+1} \text{에서 } 5^{-2x+6}=5^{2x+2} \text{이므로}$$

$$-2x+6=2x+2, -4x=-4 \quad \therefore x=1$$

106 답 $x=-3$

$$2^{-x}=64 \times 2^x \text{에서 } 2^{-x}=2^{6+x} \text{이므로}$$

$$-x=6+x, -2x=6 \quad \therefore x=-3$$

107 답 $x=\frac{2}{3}$

$$\sqrt{6^x}=6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^x \text{에서 } 6^{\frac{x}{2}}=6^{1-x} \text{이므로}$$

$$\frac{x}{2}=1-x, \frac{3}{2}x=1 \quad \therefore x=\frac{2}{3}$$

108 답 $x=-1$ 또는 $x=2$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-2x}=\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} \text{에서 } \left(\frac{3}{2}\right)^{x^2-2x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-x+2} \text{이므로}$$

$$x^2-2x=-x+2$$

$$x^2-x-2=0$$

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

109 답 $2^x, 2^x, 4, 5, 1, 1, 1, 0$

110 답 $x=1$ 또는 $x=2$

$$9^x-12 \times 3^x+27=0 \text{에서}$$

$$(3^x)^2-12 \times 3^x+27=0$$

$$3^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-12t+27=0$$

$$(t-3)(t-9)=0$$

$$\therefore t=3 \text{ 또는 } t=9$$

$$t=3^x \text{이므로 } 3^x=3 \text{ 또는 } 3^x=9=3^2$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=2$$

111 답 $x=-3$ 또는 $x=-1$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x-10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x+16=0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2-10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x+16=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-10t+16=0$$

$$(t-2)(t-8)=0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=8$$

$$t=\left(\frac{1}{2}\right)^x \text{이므로 } \left(\frac{1}{2}\right)^x=2=\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \text{ 또는 } \left(\frac{1}{2}\right)^x=8=\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=-1$$

112 답 $x=2$

$$5^{2x}=20 \times 5^x+5^{x+1} \text{에서}$$

$$(5^x)^2=20 \times 5^x+5 \times 5^x$$

$$(5^x)^2-25 \times 5^x=0$$

$$5^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2-25t=0$$

$$t(t-25)=0$$

$$\therefore t=25 (\because t>0)$$

$$t=5^x \text{이므로 } 5^x=25=5^2$$

$$\therefore x=2$$

113 답 $x=-1$

$$\left(\frac{1}{36}\right)^x+\left(\frac{1}{6}\right)^{x-1}=72 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^x\right\}^2+6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^x-72=0$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2+6t-72=0$$

$$(t+12)(t-6)=0$$

$$\therefore t=6 (\because t>0)$$

$$t=\left(\frac{1}{6}\right)^x \text{이므로 } \left(\frac{1}{6}\right)^x=6=\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$$

$$\therefore x=-1$$

114 답 $1, 8, 4, 1, 1, 0, 0, 4$

115 **답** $x=1$ 또는 $x=4$

$x^{4x} = x^{x+12}$ 에서

(i) 지수가 같으면 $4x = x + 12$

$$3x = 12 \quad \therefore x = 4$$

(ii) 밑이 1이면 $x = 1$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

116 **답** $x=3$ 또는 $x=4$

$(x-2)^{x^2} = (x-2)^{3x+4}$ 에서

(i) 지수가 같으면 $x^2 = 3x + 4$

$$x^2 - 3x - 4 = 0, (x+1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 4$$

그런데 $x > 2$ 이므로 $x = 4$

(ii) 밑이 1이면 $x - 2 = 1$

$$\therefore x = 3$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = 3 \text{ 또는 } x = 4$$

117 **답** 0, 6, 0, 0, 3, 3, 6

118 **답** $x = -1$ 또는 $x = \frac{1}{2}$

$(2x+3)^{2x-1} = (x+2)^{2x-1}$ 에서

(i) 밑이 같으면 $2x+3 = x+2$

$$\therefore x = -1$$

(ii) 지수가 0이면 $2x-1 = 0$

$$\therefore x = \frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = -1 \text{ 또는 } x = \frac{1}{2}$$

119 **답** $x=2$

$x^{2x-4} = 4^{x-2}$ 에서 $(x^2)^{x-2} = 4^{x-2}$

(i) 밑이 같으면 $x^2 = 4$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 2$

(ii) 지수가 0이면 $x-2 = 0$

$$\therefore x = 2$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = 2$$

121 **답** -2

$(\sqrt{5})^{x^2-x} = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1}$ 에서 $5^{\frac{x^2-x}{2}} = 5^{-x+1}$ 이므로

$$\frac{x^2-x}{2} = -x+1$$

$$x^2-x = -2x+2, x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 모든 근의 곱은 $-2 \times 1 = -2$

122 **답** ⑤

$3^{x^2-5x+9} - 27^{x+k} = 0$ 에서 $3^{x^2-5x+9} = 3^{3x+3k}$ 이므로

$$x^2-5x+9 = 3x+3k$$

$$\therefore x^2-8x+9-3k=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 주어진 방정식의 한 근이 2이므로 $x=2$ 를 ①에 대입하면

$$2^2-8 \times 2+9-3k=0$$

$$-3k=3 \quad \therefore k=-1$$

123 **답** $\frac{45}{4}$

$(2^x-8)(4^{2x}-64)=0$ 에서

$$2^x-8=0 \text{ 또는 } 4^{2x}-64=0$$

$$2^x-8=0 \text{에서 } 2^x=2^3 \quad \therefore x=3$$

$4^{2x}-64=0$ 에서 $4^{2x}=4^3$ 이므로

$$2x=3 \quad \therefore x=\frac{3}{2}$$

따라서 $\alpha = \frac{3}{2}, \beta = 3$ 또는 $\alpha = 3, \beta = \frac{3}{2}$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{45}{4}$$

124 **답** ②

$4^x - 5 \times 2^x + 4 = 0$ 에서

$$(2^x)^2 - 5 \times 2^x + 4 = 0$$

$2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$(t-1)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 4$$

$$t = 2^x \text{이므로 } 2^x = 1 = 2^0 \text{ 또는 } 2^x = 4 = 2^2$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 두 근의 합은 $0+2=2$

125 **답** 3

$3^x - 3^{4-x} = 24$ 의 양변에 3^x 을 곱하면

$$(3^x)^2 - 81 = 24 \times 3^x$$

$$(3^x)^2 - 24 \times 3^x - 81 = 0$$

$3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$t^2 - 24t - 81 = 0$$

$$(t+3)(t-27) = 0$$

$$\therefore t = 27 (\because t > 0)$$

$$t = 3^x \text{이므로 } 3^x = 27 = 3^3$$

$$\therefore x = 3$$

실전유형 71~72쪽

120 **답** 2

$3^{x-8} = \left(\frac{1}{27}\right)^x$ 에서 $3^{x-8} = 3^{-3x}$ 이므로

$$x-8 = -3x, 4x = 8 \quad \therefore x = 2$$

126 64

$$a^{2x} - a^x = 12 \text{에서 } (a^x)^2 - a^x - 12 = 0$$

$a^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 12 = 0$$

$$(t+3)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 4 (\because t > 0)$$

$$t = a^x \text{이므로 } a^x = 4$$

$$\text{이때 } x = \frac{1}{3} \text{이므로 } a^{\frac{1}{3}} = 4$$

$$\therefore a = 4^3 = 64$$

127 ①

$$25^x - 3 \times 5^{x+1} + 25 = 0 \text{에서 } (5^x)^2 - 15 \times 5^x + 25 = 0$$

$5^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$t^2 - 15t + 25 = 0 \quad \dots\dots ①$$

주어진 방정식의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식 ①의 두 근은 $5^\alpha, 5^\beta$ 이다.

따라서 ①에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$5^\alpha \times 5^\beta = 25, \quad 5^{\alpha+\beta} = 5^2$$

$$\therefore \alpha + \beta = 2$$

참고 x 에 대한 방정식 $pa^{2x} + qa^x + r = 0 (a > 0, a \neq 1, p \neq 0)$ 의 두 근이 α, β 일 때

⇒ $a^x = t (t > 0)$ 로 놓으면 t 에 대한 이차방정식 $pt^2 + qt + r = 0$ 의 두 근은 a^α, a^β 이다.

128 ④

$$4^x - 3 \times 2^{x+1} + k = 0 \text{에서 } (2^x)^2 - 6 \times 2^x + k = 0$$

$2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$t^2 - 6t + k = 0 \quad \dots\dots ①$$

주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식 ①의 두 근은 $2^\alpha, 2^\beta$ 이다.

따라서 ①에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2^\alpha \times 2^\beta = k \quad \therefore 2^{\alpha+\beta} = k$$

이때 주어진 방정식의 두 근의 합이 3이므로

$$k = 2^3 = 8$$

129 ③

$$(x-1)^{x^2} = (x-1)^{4x+5} \text{에서}$$

(i) 지수가 같으면 $x^2 = 4x + 5$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$(x+1)(x-5) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 5$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $x = 5$

(ii) 밑이 1이면 $x-1=1$

$$\therefore x = 2$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = 2 \text{ 또는 } x = 5$$

따라서 모든 근의 합은 $2+5=7$

130 21

$$x^{2x-6} = (6x+7)^{x-3} \text{에서 } (x^2)^{x-3} = (6x+7)^{x-3}$$

(i) 밑이 같으면 $x^2 = 6x + 7$

$$x^2 - 6x - 7 = 0, \quad (x+1)(x-7) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 7$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x = 7$

(ii) 지수가 0이면 $x-3=0$

$$\therefore x = 3$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x = 3 \text{ 또는 } x = 7$$

따라서 모든 x 의 값의 곱은 $3 \times 7 = 21$

131 ②

빛의 세기가 수면에서 빛의 세기의 25%가 되는 곳의 수심을 k m라 하면

$$I_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{k}{4}} = \frac{25}{100} I_0$$

$$\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{k}{4}} = \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

$$\text{즉, } \frac{k}{4} = 2 \text{이므로 } k = 8$$

따라서 빛의 세기가 수면에서 빛의 세기의 25%가 되는 곳의 수심은 8 m이다.

132 ⑤

처음에 4×10^6 마리였던 박테리아가 2시간 후에 1.6×10^7 마리가 되었으므로

$$4 \times 10^6 \times a^2 = 1.6 \times 10^7$$

$$a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 (\because a > 0)$$

4×10^6 마리였던 박테리아가 t 시간 후에 5.12×10^8 마리가 된다고 하면

$$4 \times 10^6 \times 2^t = 5.12 \times 10^8$$

$$2^t = 128 = 2^7 \quad \therefore t = 7$$

따라서 4×10^6 마리였던 박테리아가 5.12×10^8 마리가 되는 것은 처음으로부터 7시간 후이다.

개념유형

74~75쪽

133 $x > 3$

$$5^x > 125 \text{에서 } 5^x > 5^3$$

밑이 1보다 크므로 $x > 3$

134 $x > \frac{2}{3}$

$$3^{6-3x} < 81 \text{에서 } 3^{6-3x} < 3^4$$

밑이 1보다 크므로 $6-3x < 4$

$$-3x < -2 \quad \therefore x > \frac{2}{3}$$

135 **답** $x \leq 6$

$5 \times 2^{x-3} \leq 40$ 에서 $2^{x-3} \leq 2^3$
 밑이 1보다 크므로 $x-3 \leq 3$
 $\therefore x \leq 6$

136 **답** $x \leq -9$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} \geq 64$ 에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$
 밑이 1보다 작으므로 $x+3 \leq -6$
 $\therefore x \leq -9$

137 **답** $x < 2$

$8^x < 4^{x+1}$ 에서 $2^{3x} < 2^{2x+2}$
 밑이 1보다 크므로 $3x < 2x+2$
 $\therefore x < 2$

138 **답** $x \geq -5$

$9^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x+15}$ 에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2x} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{x+15}$
 밑이 1보다 작으므로 $-2x \leq x+15$
 $-3x \leq 15 \quad \therefore x \geq -5$

139 **답** $x \leq \frac{8}{3}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{81}\right)^{x-2}$ 에서 $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{4x-8}$
 밑이 1보다 작으므로 $x \geq 4x-8$
 $-3x \geq -8 \quad \therefore x \leq \frac{8}{3}$

140 **답** $x > 1$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{2-x} > \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^{2x}$ 에서 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2-x} > \left(\frac{1}{5}\right)^x$
 밑이 1보다 작으므로 $2-x < x$
 $-2x < -2 \quad \therefore x > 1$

141 **답** $x \geq \frac{5}{4}$

$0.3^{2x} \leq 0.09^{5-3x}$ 에서 $0.3^{2x} \leq 0.3^{10-6x}$
 밑이 1보다 작으므로 $2x \geq 10-6x$
 $8x \geq 10 \quad \therefore x \geq \frac{5}{4}$

142 **답** $-2 < x < 5$

$4^{x^2-1} < 64^{x+3}$ 에서 $4^{x^2-1} < 4^{3x+9}$
 밑이 1보다 크므로 $x^2-1 < 3x+9$
 $x^2-3x-10 < 0, (x+2)(x-5) < 0$
 $\therefore -2 < x < 5$

143 **답** $-4 < x < 6$

$\frac{1}{16} < 2^x < 64$ 에서 $2^{-4} < 2^x < 2^6$
 밑이 1보다 크므로 $-4 < x < 6$

144 **답** $-3 \leq x < 4$

$\frac{1}{625} < \left(\frac{1}{5}\right)^x \leq 125$ 에서
 $\left(\frac{1}{5}\right)^4 < \left(\frac{1}{5}\right)^x \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$
 밑이 1보다 작으므로 $-3 \leq x < 4$

145 **답** $3^x, 3^x, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 3^x, 9, 2, 2$ **146** **답** $x \geq 1$

$3 \times 4^x - 2^{x+1} - 8 \geq 0$ 에서
 $3 \times (2^x)^2 - 2 \times 2^x - 8 \geq 0$
 $2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $3t^2 - 2t - 8 \geq 0$
 $(3t+4)(t-2) \geq 0$
 $\therefore t \leq -\frac{4}{3}$ 또는 $t \geq 2$
 그런데 $t > 0$ 이므로 $t \geq 2$
 $t = 2^x$ 이므로 $2^x \geq 2$
 밑이 1보다 크므로 $x \geq 1$

147 **답** $x \leq -3$

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 16 \geq 0$ 에서
 $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 16 \geq 0$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $t^2 - 6t - 16 \geq 0$
 $(t+2)(t-8) \geq 0$
 $\therefore t \leq -2$ 또는 $t \geq 8$
 그런데 $t > 0$ 이므로 $t \geq 8$
 $t = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 이므로 $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 8$
 $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
 밑이 1보다 작으므로 $x \leq -3$

148 **답** $-1 < x < 0$

$2^{2x+1} - 3 \times 2^x + 1 < 0$ 에서
 $2 \times (2^x)^2 - 3 \times 2^x + 1 < 0$
 $2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면
 $2t^2 - 3t + 1 < 0$
 $(2t-1)(t-1) < 0$
 $\therefore \frac{1}{2} < t < 1$
 $t = 2^x$ 이므로 $\frac{1}{2} < 2^x < 1$
 $2^{-1} < 2^x < 2^0$
 밑이 1보다 크므로 $-1 < x < 0$

149 **답** $-3 \leq x \leq 0$

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x - \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} - \left(\frac{1}{3}\right)^x + 27 \leq 0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - 28 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + 27 \leq 0$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 28t + 27 \leq 0, (t-1)(t-27) \leq 0$$

$$\therefore 1 \leq t \leq 27$$

$$t = \left(\frac{1}{3}\right)^x \text{이므로 } 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^0 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } -3 \leq x \leq 0$$

150 **답** $>, >, <, 1, <, <, >, 1, >$

151 **답** $0 < x \leq \frac{2}{3}$ 또는 $x \geq 1$

$$x^{2x+1} \geq x^{3-x} \text{에서}$$

$$(i) 0 < x < 1 \text{일 때,}$$

$$2x+1 \leq 3-x$$

$$3x \leq 2 \quad \therefore x \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{그런데 } 0 < x < 1 \text{이므로 } 0 < x \leq \frac{2}{3}$$

$$(ii) x = 1 \text{일 때,}$$

$$1 \geq 1 \text{이므로 부등식이 성립한다.}$$

$$(iii) x > 1 \text{일 때,}$$

$$2x+1 \geq 3-x$$

$$3x \geq 2 \quad \therefore x \geq \frac{2}{3}$$

$$\text{그런데 } x > 1 \text{이므로 } x > 1$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 주어진 부등식의 해는}$$

$$0 < x \leq \frac{2}{3} \text{ 또는 } x \geq 1$$

152 **답** $1 \leq x \leq 4$

$$x^{x^2-2} \leq x^{3x+2} \text{에서}$$

$$(i) 0 < x < 1 \text{일 때,}$$

$$x^2-2 \geq 3x+2, x^2-3x-4 \geq 0$$

$$(x+1)(x-4) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 4$$

$$\text{그런데 } 0 < x < 1 \text{이므로 해는 없다.}$$

$$(ii) x = 1 \text{일 때,}$$

$$1 \leq 1 \text{이므로 부등식이 성립한다.}$$

$$(iii) x > 1 \text{일 때,}$$

$$x^2-2 \leq 3x+2, x^2-3x-4 \leq 0$$

$$(x+1)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 4$$

$$\text{그런데 } x > 1 \text{이므로 } 1 < x \leq 4$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 주어진 부등식의 해는}$$

$$1 \leq x \leq 4$$

실전유형

76~77쪽

153 **답** 3

$$2^{x-6} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^x \text{에서 } 2^{x-6} \leq 2^{-2x}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x-6 \leq -2x$$

$$3x \leq 6 \quad \therefore x \leq 2$$

$$\text{따라서 자연수 } x \text{의 값은 1, 2이므로 구하는 합은 } 1+2=3$$

154 **답** -8

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} - 0.04^{-4x} \leq 0 \text{에서 } \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} - \left(\frac{1}{25}\right)^{-4x} \leq 0$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-8x}$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } x^2 \geq -8x$$

$$x^2+8x \geq 0, x(x+8) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -8 \text{ 또는 } x \geq 0$$

$$\text{따라서 } \alpha = -8, \beta = 0 \text{이므로 } \alpha + \beta = -8$$

155 **답** $a < x < d$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{f(x)} > \left(\frac{1}{7}\right)^{g(x)} \text{에서 밑이 1보다 작으므로 } f(x) < g(x)$$

$$\text{따라서 주어진 부등식의 해는 이차함수 } y=f(x) \text{의 그래프가 직선}$$

$$y=g(x) \text{보다 아래쪽에 있는 } x \text{의 값의 범위와 같으므로}$$

$$a < x < d$$

156 **답** ③

$$3^{3x-4} < \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x < 9^{x+2} \text{에서 } 3^{3x-4} < 3^{-\frac{x}{2}} < 3^{2x+4}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } 3x-4 < -\frac{x}{2} < 2x+4$$

$$(i) 3x-4 < -\frac{x}{2} \text{에서 } \frac{7}{2}x < 4 \quad \therefore x < \frac{8}{7}$$

$$(ii) -\frac{x}{2} < 2x+4 \text{에서 } -\frac{5}{2}x < 4 \quad \therefore x > -\frac{8}{5}$$

$$(i), (ii) \text{에서 주어진 부등식의 해는 } -\frac{8}{5} < x < \frac{8}{7}$$

$$\text{따라서 정수 } x \text{는 } -1, 0, 1 \text{의 3개이다.}$$

157 **답** ②

$$\left(\frac{1}{25}\right)^x - 4 \times 5^{-x+1} - 125 \geq 0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2 - 20 \times \left(\frac{1}{5}\right)^x - 125 \geq 0$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 20t - 125 \geq 0, (t+5)(t-25) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -5 \text{ 또는 } t \geq 25$$

$$\text{그런데 } t > 0 \text{이므로 } t \geq 25$$

$$t = \left(\frac{1}{5}\right)^x \text{이므로 } \left(\frac{1}{5}\right)^x \geq 25, \left(\frac{1}{5}\right)^x \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } x \leq -2$$

$$\text{따라서 실수 } x \text{의 최댓값은 } -2 \text{이다.}$$

158 **답** $1 < x < 2$

(i) $3^{2x+1} \leq 27^{3x+5}$ 에서 $3^{2x+1} \leq 3^{9x+15}$

밑이 1보다 크므로 $2x+1 \leq 9x+15$
 $-7x \leq 14 \quad \therefore x \geq -2$

(ii) $25^x - 6 \times 5^{x+1} + 125 < 0$ 에서 $(5^x)^2 - 30 \times 5^x + 125 < 0$

$5^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$t^2 - 30t + 125 < 0$

$(t-5)(t-25) < 0$

$\therefore 5 < t < 25$

$t = 5^x$ 이므로 $5 < 5^x < 25$

$5^1 < 5^x < 5^2$

밑이 1보다 크므로 $1 < x < 2$

(i), (ii)에서 주어진 연립부등식의 해는

$1 < x < 2$

159 **답** $k > 4$

$16^x - 4^{x+1} + k > 0$ 에서 $(4^x)^2 - 4 \times 4^x + k > 0$

$4^x = t (t > 0)$ 로 놓으면 $t^2 - 4t + k > 0$

$\therefore (t-2)^2 + k - 4 > 0$

이 부등식이 $t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면

$k - 4 > 0 \quad \therefore k > 4$

160 **답** ④

$x^{3x-1} > x^{x+5}$ 에서

(i) $0 < x < 1$ 일 때,

$3x-1 < x+5$

$2x < 6$

$\therefore x < 3$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$

(ii) $x = 1$ 일 때,

$1 > 1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 일 때,

$3x-1 > x+5$

$2x > 6$

$\therefore x > 3$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$0 < x < 1$ 또는 $x > 3$

따라서 정수 x 의 최솟값은 4이다.

161 **답** ③

$x^{x^2+3x} \geq x^{x+8}$ 에서

(i) $0 < x < 1$ 일 때,

$x^2 + 3x \leq x + 8$

$x^2 + 2x - 8 \leq 0$

$(x+4)(x-2) \leq 0$

$\therefore -4 \leq x \leq 2$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$

(ii) $x = 1$ 일 때,

$1 \geq 1$ 이므로 부등식이 성립한다.

(iii) $x > 1$ 일 때,

$x^2 + 3x \geq x + 8$

$x^2 + 2x - 8 \geq 0$

$(x+4)(x-2) \geq 0$

$\therefore x \leq -4$ 또는 $x \geq 2$

그런데 $x > 1$ 이므로 $x \geq 2$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$0 < x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$

따라서 해가 아닌 것은 ③ $\frac{11}{6}$ 이다.

162 **답** 12

$(x-2)^{6x-15} \leq (x-2)^{3x}$ 에서

(i) $0 < x-2 < 1$, 즉 $2 < x < 3$ 일 때,

$6x-15 \geq 3x$

$3x \geq 15$

$\therefore x \geq 5$

그런데 $2 < x < 3$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x-2 = 1$, 즉 $x = 3$ 일 때,

$1 \leq 1$ 이므로 부등식이 성립한다.

(iii) $x-2 > 1$, 즉 $x > 3$ 일 때,

$6x-15 \leq 3x$

$3x \leq 15$

$\therefore x \leq 5$

그런데 $x > 3$ 이므로 $3 < x \leq 5$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$3 \leq x \leq 5$

따라서 자연수 x 의 값은 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$3+4+5=12$

163 **답** ④

투자한 5000만 원이 t 년 후에 2억 원 이상이 된다고 하면

$5000 \times 2^{\frac{t}{5}} \geq 20000$

$2^{\frac{t}{5}} \geq 2^2, \frac{t}{5} \geq 2 \quad \therefore t \geq 10$

따라서 투자금이 2억 원 이상이 되는 것은 최소 10년 후이다.

164 **답** ①

처음 불순물의 양을 a 라 하면 정수 필터를 x 번 통과한 후 불순물의 양은

$a \left(1 - \frac{40}{100}\right)^x = a \left(\frac{3}{5}\right)^x$

정수 필터를 x 번 통과한 후 불순물의 양이 처음 양의 $\frac{27}{125}$ 이하가 된다고 하면

$a \left(\frac{3}{5}\right)^x \leq \frac{27}{125} a$

$a > 0$ 이므로 $\left(\frac{3}{5}\right)^x \leq \frac{27}{125}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^x \leq \left(\frac{3}{5}\right)^3 \quad \therefore x \geq 3$

따라서 정수 필터를 최소한 3번 통과해야 한다.

1 답 ①

$$f(-1) = \frac{1}{5} \text{에서 } 5^{-a+b} = 5^{-1}$$

$$\therefore -a+b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(1) = 125 \text{에서 } 5^{a+b} = 5^3$$

$$\therefore a+b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2, b=1$$

따라서 $f(x) = 5^{2x+1}$ 이므로

$$f(-2) = 5^{2 \times (-2) + 1} = 5^{-3} = \frac{1}{125}$$

2 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 임의의 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이다.

ㄴ. $f(x) = a^x$ 에 $x = -1$ 을 대입하면 $f(-1) = a^{-1} = \frac{1}{a}$

따라서 그래프는 점 $(-1, \frac{1}{a})$ 을 지난다.

ㄷ. $f(x) = a^x$ 은 일대일함수이므로 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.

ㄹ. 그래프의 접근선의 방정식은 $y = 0$ 이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

3 답 1

$y = (\frac{1}{3})^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 4만큼

평행이동한 그래프의 식은

$$y = (\frac{1}{3})^{x-a} + 4 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이 그래프가 점 $(1, 5)$ 를 지나므로

$$5 = (\frac{1}{3})^{1-a} + 4, (\frac{1}{3})^{1-a} = 1$$

$$1 - a = 0 \quad \therefore a = 1 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① 평행이동한 그래프의 식 구하기	40 %
② a 의 값 구하기	60 %

4 답 $\sqrt{21}$

$f(x) = a^x$ 의 그래프가 두 점 $(b, 3), (c, 7)$ 을 지나므로

$$3 = a^b, 7 = a^c$$

$$\therefore f\left(\frac{b+c}{2}\right) = a^{\frac{b+c}{2}} = (a^b \times a^c)^{\frac{1}{2}} = (3 \times 7)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{21}$$

5 답 $A < B < C$

$$A = \sqrt[4]{8} = (2^3)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$$

$$B = \sqrt{\sqrt{1024}} = (2^{10})^{\frac{1}{8}} = 2^{\frac{5}{4}}$$

$$C = (2^{\frac{1}{3}} \times 16^{\frac{5}{6}})^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{10}{3}})^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{11}{3}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{11}{6}}$$

이때 밑이 1보다 크고, $\frac{3}{4} < \frac{5}{4} < \frac{11}{6}$ 이므로

$$2^{\frac{3}{4}} < 2^{\frac{5}{4}} < 2^{\frac{11}{6}} \quad \therefore A < B < C$$

6 답 ②

함수 $y = 2^{x-3} - k$ 의 밑이 1보다 크므로

$-1 \leq x \leq 5$ 일 때 함수 $y = 2^{x-3} - k$ 는

$x = 5$ 에서 최댓값 $2^{5-3} - k = 4 - k$,

$x = -1$ 에서 최솟값 $2^{-1-3} - k = \frac{1}{16} - k$ 를 갖는다.

즉, $4 - k = 3$ 이므로 $k = 1$

따라서 함수 $y = 2^{x-3} - 1$ 의 최솟값은 $\frac{1}{16} - 1 = -\frac{15}{16}$

7 답 $\frac{8}{3}$

$y = (\frac{3}{2})^{-x^2+8x-17}$ 에서 $f(x) = -x^2+8x-17$ 이라 하면

$$f(x) = -(x-4)^2 - 1 \quad \therefore f(x) \leq -1$$

이때 함수 $y = (\frac{3}{2})^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 크므로

함수 $y = (\frac{3}{2})^{f(x)}$ 은 $f(x) = -1$, 즉 $x = 4$ 에서 최댓값 $(\frac{3}{2})^{-1} = \frac{2}{3}$ 를 갖는다.

따라서 $a = 4, M = \frac{2}{3}$ 이므로 $aM = \frac{8}{3}$

8 답 ⑤

$$y = 2^{2x} - 2^{x+1} + 3 = (2^x)^2 - 2 \times 2^x + 3$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $0 \leq x \leq 3$ 에서

$$2^0 \leq 2^x \leq 2^3$$

$$\therefore 1 \leq t \leq 8$$

이때 주어진 함수는 $y = t^2 - 2t + 3 = (t-1)^2 + 2$

즉, $1 \leq t \leq 8$ 일 때 함수 $y = (t-1)^2 + 2$ 는

$t = 8$ 에서 최댓값 51, $t = 1$ 에서 최솟값 2를 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $51 + 2 = 53$

9 답 ③

$$(\frac{1}{3})^{x^2+1} \times (\sqrt{3})^x - 27^x = 0 \text{에서 } 3^{-x^2-1} \times 3^{\frac{x}{2}} - 3^{3x} = 0$$

$$3^{-x^2+\frac{x}{2}-1} = 3^{3x} \text{이므로 } -x^2 + \frac{x}{2} - 1 = 3x$$

$$-x^2 - \frac{5}{2}x - 1 = 0$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0$$

$$(x+2)(2x+1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = -\frac{1}{2}$$

따라서 두 근의 차는 $-\frac{1}{2} - (-2) = \frac{3}{2}$

10 답 1

$2^x - 2^{2-x} = 3$ 의 양변에 2^x 을 곱하면

$$(2^x)^2 - 4 = 3 \times 2^x$$

$$(2^x)^2 - 3 \times 2^x - 4 = 0$$

$2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

..... ①

$$(t+1)(t-4)=0 \quad \therefore t=4 (\because t>0)$$

$$t=2^x \text{이므로 } 2^x=4=2^2 \quad \therefore x=2$$

$$\text{따라서 } a=2 \text{이므로 } \log_2 a = \log_2 2 = 1$$

..... ii

채점 기준

i $2^x=t (t>0)$ 로 놓고 주어진 방정식을 t 에 대한 이차방정식으로 나타내기	40 %
ii $\log_2 a$ 의 값 구하기	60 %

11 답 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$

$$x^{6x-2}=(2x+3)^{3x-1} \text{에서 } (x^2)^{3x-1}=(2x+3)^{3x-1}$$

(i) 밑이 같으면 $x^2=2x+3$

$$x^2-2x-3=0, (x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

그런데 $x>0$ 이므로 $x=3$

(ii) 지수가 0이면 $3x-1=0$

$$\therefore x=\frac{1}{3}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$$x=\frac{1}{3} \text{ 또는 } x=3$$

12 답 7

$$0.5^{x^2-12}-\left(\frac{1}{16}\right)^x>0 \text{에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-12}>\left(\frac{1}{2}\right)^{4x}$$

밑이 1보다 작으므로 $x^2-12<4x$

$$x^2-4x-12<0, (x+2)(x-6)<0$$

$$\therefore -2<x<6$$

따라서 정수 x 는 $-1, 0, 1, \dots, 5$ 의 7개이다.

13 답 ②

$$3^{2x+1}-10 \times 3^x+3 \leq 0 \text{에서}$$

$$3 \times (3^x)^2-10 \times 3^x+3 \leq 0$$

$3^x=t (t>0)$ 로 놓으면

$$3t^2-10t+3 \leq 0, (3t-1)(t-3) \leq 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} \leq t \leq 3$$

$$t=3^x \text{이므로 } \frac{1}{3} \leq 3^x \leq 3$$

$$3^{-1} \leq 3^x \leq 3^1$$

밑이 1보다 크므로 $-1 \leq x \leq 1$

따라서 정수 x 의 값은 $-1, 0, 1$ 이므로 구하는 합은

$$-1+0+1=0$$

14 답 8년

처음 가치가 100만 원인 제품의 가치가 t 년 후에 25만 원 이하가 된다고 하면

$$100 \times (2\sqrt{2})^{-\frac{t}{6}} \leq 25$$

$$(2\sqrt{2})^{-\frac{t}{6}} \leq \frac{1}{4}, 2^{-\frac{t}{4}} \leq 2^{-2}$$

$$-\frac{t}{4} \leq -2 \quad \therefore t \geq 8$$

따라서 제품의 가치가 25만 원 이하로 떨어지는 것은 최소 8년 후이다.

04 로그함수

개념유형

80~81쪽

001 답 $y=\log_2 x$

$y=2^x$ 에서 로그의 정의에 의하여 $x=\log_2 y$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=\log_2 x$

002 답 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$

$y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 에서 로그의 정의에 의하여 $x=\log_{\frac{1}{3}} y$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$

003 답 $y=\log_5 x-1$

$y=5^{x+1}$ 에서 로그의 정의에 의하여 $x+1=\log_5 y$

$$\therefore x=\log_5 y-1$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=\log_5 x-1$

004 답 $y=\log_7 (x-3)$

$y=7^x+3$ 에서 $y-3=7^x$

로그의 정의에 의하여 $x=\log_7 (y-3)$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=\log_7 (x-3)$

005 답 ○

006 답 ×

007 답 ○

008 답 ×

009 답 ×

010 답 4

$$f(81)=\log_3 81=\log_3 3^4=4$$

011 답 -2

$$f\left(\frac{1}{9}\right)=\log_3 \frac{1}{9}=\log_3 3^{-2}=-2$$

012 답 3

$$\begin{aligned} f(6)+f\left(\frac{9}{2}\right) &= \log_3 6 + \log_3 \frac{9}{2} = \log_3 \left(6 \times \frac{9}{2}\right) \\ &= \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3 \end{aligned}$$

013 답 1

$$f(12)-f(4)=\log_3 12-\log_3 4=\log_3 \frac{12}{4}=\log_3 3=1$$

014 답 0

$$f(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$$

015 답 5

$$f\left(\frac{1}{32}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{32} = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5$$

016 답 -2

$$\begin{aligned} f(18) + f\left(\frac{2}{9}\right) &= \log_{\frac{1}{2}} 18 + \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{9} = \log_{\frac{1}{2}} \left(18 \times \frac{2}{9}\right) \\ &= \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2 \end{aligned}$$

017 답 1

$$f(6) - f(12) = \log_{\frac{1}{2}} 6 - \log_{\frac{1}{2}} 12 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{6}{12} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$$

실전유형

81쪽

018 답 ②

$$f(-4) = 3^{-4} = \frac{1}{81} \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(-4) = g(f(-4)) = g\left(\frac{1}{81}\right) = \log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{81} = \log_{\frac{1}{9}} \left(\frac{1}{9}\right)^2 = 2$$

019 답 4

$$f(2) = 3 \text{에서 } \log_a 5 + 2 = 3$$

$$\log_a 5 = 1 \quad \therefore a = 5$$

$$\text{따라서 } f(x) = \log_5 (2x + 1) + 2 \text{이므로}$$

$$f(12) = \log_5 (2 \times 12 + 1) + 2 = \log_5 25 + 2 = 2 + 2 = 4$$

020 답 ④

$$\textcircled{1} f(1) = \log_2 1 = 0$$

$$\textcircled{2} f(4a) = \log_2 4a = \log_2 a + \log_2 4 = f(a) + \log_2 2^2 = f(a) + 2$$

$$\textcircled{3} f\left(\frac{1}{a}\right) = \log_2 \frac{1}{a} = -\log_2 a = -f(a)$$

$$\textcircled{4} 8^{f(a)} = 8^{\log_2 a} = a^{\log_2 8} = a^{\log_2 2^3} = a^3$$

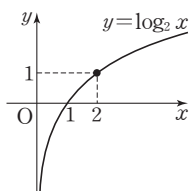
$$\textcircled{5} f(a^4) = \log_2 a^4 = 4 \log_2 a = 4f(a)$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

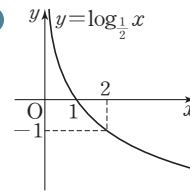
개념유형

83~86쪽

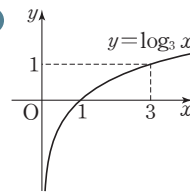
021 답



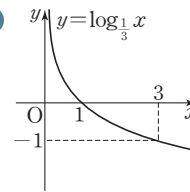
022 답



023 답



024 답



025 답 양의 실수

026 답 증가

027 답 0

028 답 2

$y = \log_4 x$ 에 $x = 16$ 을 대입하면

$$y = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2$$

따라서 그래프는 점 (16, 2)를 지난다.

029 답 y

030 답 4

031 답 $y = x$

032 답 실수

033 답 감소

034 답 1

$$y = \log_{\frac{1}{6}} x \text{에 } x = \frac{1}{6} \text{을 대입하면 } y = \log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{6} = 1$$

따라서 그래프는 점 $\left(\frac{1}{6}, 1\right)$ 을 지난다.

035 답 -2

$$y = \log_{\frac{1}{6}} x \text{에 } x = 36 \text{을 대입하면 } y = \log_{\frac{1}{6}} 36 = \log_{\frac{1}{6}} \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} = -2$$

따라서 그래프는 점 (36, -2)를 지난다.

036 답 $x=0$

037 답 $\neq$

$f(x)$ 는 일대일함수이므로 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.

038 답 x 축

$y = \log_{\frac{1}{6}} x = -\log_6 x$ 이므로 $y = \log_{\frac{1}{6}} x$ 의 그래프는 $y = \log_6 x$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.

039 답 $y = \log_2(x-2)+1$

$y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-1 = \log_2(x-2) \quad \therefore y = \log_2(x-2)+1$$

040 답 $y = \log_3(x+1)+2$

$y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-2 = \log_3\{x-(-1)\} \quad \therefore y = \log_3(x+1)+2$$

041 답 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-3)-2$

$y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-(-2) = \log_{\frac{1}{3}}(x-3) \quad \therefore y = \log_{\frac{1}{3}}(x-3)-2$$

042 답 $y = -\log_4(x+2)+5$

$y = -\log_4 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y-5 = -\log_4\{x-(-2)\} \quad \therefore y = -\log_4(x+2)+5$$

043 답 $y = -\log_3(x+1)+1$

$y = \log_3(x+1)-1$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \log_3(x+1)-1 \quad \therefore y = -\log_3(x+1)+1$$

044 답 $y = \log_3(-x+1)-1$

045 답 $y = -\log_3(-x+1)+1$

$y = \log_3(x+1)-1$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \log_3(-x+1)-1 \quad \therefore y = -\log_3(-x+1)+1$$

046 답 $y = 3^{x+1}-1$

$y = \log_3(x+1)-1$ 의 그래프를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$x = \log_3(y+1)-1$$

$$x+1 = \log_3(y+1)$$

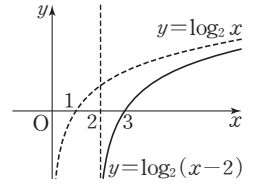
로그의 정의에 의하여

$$y+1 = 3^{x+1} \quad \therefore y = 3^{x+1}-1$$

047 답 풀이 참조

$y = \log_2(x-2)$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

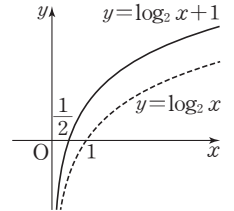
따라서 정의역은 $\{x|x>2\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x=2$ 이다.



048 답 풀이 참조

$y = \log_2 x + 1$ 의 그래프는 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x=0$ 이다.

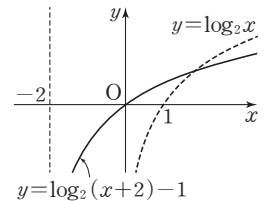


049 답 풀이 참조

$y = \log_2(x+2)-1$ 의 그래프는

$y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

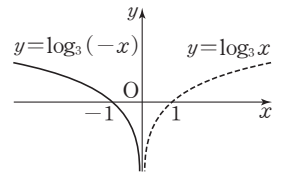
따라서 정의역은 $\{x|x>-2\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x=-2$ 이다.



050 답 풀이 참조

$y = \log_3(-x)$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

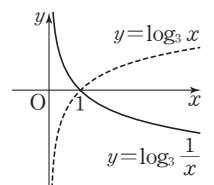
따라서 정의역은 $\{x|x<0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x=0$ 이다.



051 답 풀이 참조

$y = \log_3 \frac{1}{x} = -\log_3 x$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x|x>0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x=0$ 이다.

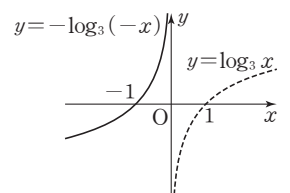


052 답 풀이 참조

$y = -\log_3(-x)$ 의 그래프는

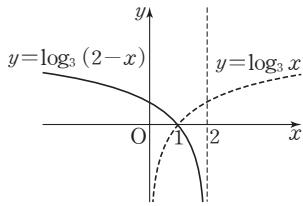
$y = \log_3 x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x|x<0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x=0$ 이다.



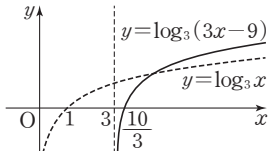
053 답 풀이 참조

$y = \log_3(2-x) = \log_3\{-(x-2)\}$
 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를
 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의
 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므
 로 오른쪽 그림과 같다.
 따라서 정의역은 $\{x|x < 2\}$ 이고,
 점근선의 방정식은 $x=2$ 이다.



054 답 풀이 참조

$y = \log_3(3x-9) = \log_3 3(x-3) = \log_3(x-3) + 1$ 의 그래프는
 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로
 3만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이
 동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
 따라서 정의역은 $\{x|x > 3\}$ 이고, 점근
 선의 방정식은 $x=3$ 이다.

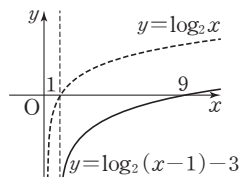


055 답 ×

$y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만
 큼 평행이동한 것이다.

056 답 ○

$y = \log_2(x-1) - 3$ 의 그래프는 오른쪽
 그림과 같으므로 제2사분면을 지나지 않
 는다.



057 답 ×

정의역은 $\{x|x > 1\}$ 이다.

058 답 ○

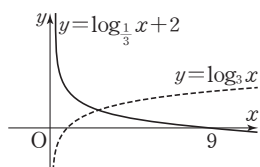
$y = \log_2(x-1) - 3$ 에 $x=2$ 를 대입하면
 $y = \log_2(2-1) - 3 = -3$
 따라서 그래프는 점 $(2, -3)$ 을 지난다.

059 답 ×

$y = \log_{\frac{1}{3}} x + 2 = -\log_3 x + 2$ 의 그래프는 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축
 에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

060 답 ○

$y = \log_{\frac{1}{3}} x + 2$ 의 그래프는 오른쪽 그림
 과 같으므로 제1사분면과 제4사분면을
 지난다.



061 답 ×

점근선의 방정식은 $x=0$ 이다.

062 답 ×

$y = \log_{\frac{1}{3}} x + 2$ 에 $x=1$ 을 대입하면 $y = \log_{\frac{1}{3}} 1 + 2 = 2$
 따라서 그래프는 점 $(1, 2)$ 를 지난다.

실전유형

87~89쪽

063 답 ㄱ, ㄷ

ㄴ. $y = \log_{\frac{1}{4}} x = -\log_4 x$ 이므로 $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 의 그래프는 $y = \log_4 x$ 의
 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.

ㄷ. $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ 에서 밑이 1보다 작으므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은
 감소한다.

ㄹ. 그래프의 점근선의 방정식은 $x=0$ 이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

064 답 $\{x|-3 < x < 5\}$

$y = \log_2(-x^2+2x+15)$ 에서 $-x^2+2x+15 > 0$ 이므로
 $x^2-2x-15 < 0$

$(x+3)(x-5) < 0 \quad \therefore -3 < x < 5$

따라서 구하는 정의역은 $\{x|-3 < x < 5\}$ 이다.

065 답 ①

$y = ax + b$ 의 그래프에서 $a > 0, 0 < b < 1$

$y = \log_b ax$ 에서 $a > 0$ 이므로 $ax > 0$ 에서 $x > 0$ 이다.

또 $0 < b < 1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 $y = \log_b ax$ 의 그래프의 개형은 ①이다.

066 답 ④

$y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만
 큼 평행이동한 그래프의 식은

$y = \log_3(x-m) + n$

이 식이 $y = \log_3(9x+9)$ 와 일치하므로

$y = \log_3(9x+9) = \log_3 9(x+1) = \log_3(x+1) + 2$

따라서 $m = -1, n = 2$ 이므로 $m+n = 1$

067 답 ①

$y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 1만큼
 평행이동한 그래프의 식은

$y = \log_2(x-a) + 1$

이 그래프가 점 $(9, 3)$ 을 지나므로

$3 = \log_2(9-a) + 1$

$\log_2(9-a) = 2$

$9-a = 2^2 = 4 \quad \therefore a = 5$

068 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $y = \log_5(x-2)$ 의 그래프는 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y = \frac{1}{3} \log_5 x = \log_{125} x$ 이므로 $y = \log_5 x$ 와 밑이 다르다.

따라서 $y = \frac{1}{3} \log_5 x$ 의 그래프는 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄷ. $y = \log_5 25x = \log_5 x + 2$ 이므로 $y = \log_5 25x$ 의 그래프는 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

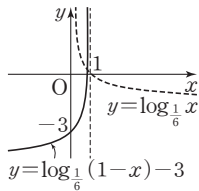
ㄹ. $y = \log_5 \frac{1}{x} = -\log_5 x$ 이므로 $y = \log_5 \frac{1}{x}$ 의 그래프는 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 보기의 함수에서 그 그래프가 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 있는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

069 답 ③

$$y = \log_{\frac{1}{6}}(1-x) - 3 = \log_{\frac{1}{6}}\{-(x-1)\} - 3$$

의 그래프는 $y = \log_{\frac{1}{6}} x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



③ x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

070 답 1

$y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_3(x-a) + b$$

주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=2$ 이므로

$$a=2$$

즉, $y = \log_3(x-2) + b$ 의 그래프가 점 $(5, 2)$ 를 지나므로

$$2 = \log_3(5-2) + b$$

$$2 = 1 + b \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore a - b = 2 - 1 = 1$$

071 답 3

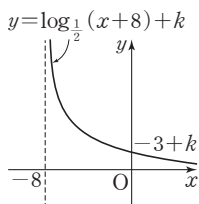
$y = \log_{\frac{1}{2}}(x+8) + k$ 의 그래프는 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -8만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

이 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$-3 + k \geq 0 \quad \therefore k \geq 3$$

→ $x=0$ 일 때의 함수값

따라서 실수 k 의 최솟값은 3이다.



072 답 ⑤

$y = \log_2 x$ 의 그래프가 점 $(4, a)$ 를 지나므로

$$a = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$$

또 $y = \log_2 x$ 의 그래프가 점 $(b, 6)$ 을 지나므로

$$6 = \log_2 b \quad \therefore b = 2^6 = 64$$

$$\therefore \frac{b}{a} = \frac{64}{2} = 32$$

073 답 ④

오른쪽 그림에서

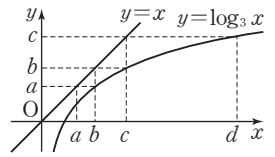
$$a = \log_3 b, c = \log_3 d \text{이므로}$$

$$c - a = \log_3 d - \log_3 b = \log_3 \frac{d}{b}$$

이때 $d = 3b$ 이므로

$$c - a = \log_3 \frac{3b}{b} = \log_3 3 = 1$$

$$\therefore 3^{c-a} = 3$$



074 답 8

$$A(k, \log_2 k), B(k, \log_8 k)$$

이때 $\overline{AB} = 2$ 이므로

$$\log_2 k - \log_8 k = 2, \log_2 k - \frac{1}{3} \log_2 k = 2$$

$$\frac{2}{3} \log_2 k = 2, \log_2 k = 3$$

$$\therefore k = 2^3 = 8$$

075 답 ①

$$g(-5) = a \text{라 하면 } f(a) = -5 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{5}}(a+6) - 5 = -5, \log_{\frac{1}{5}}(a+6) = 0$$

$$a+6 = \left(\frac{1}{5}\right)^0 = 1 \quad \therefore a = -5$$

$$\therefore g(-5) = -5$$

다른 풀이

$$y = \log_{\frac{1}{5}}(x+6) - 5 \text{에서 } y+5 = \log_{\frac{1}{5}}(x+6)$$

$$\text{로그의 정의에 의하여 } x+6 = \left(\frac{1}{5}\right)^{y+5}$$

$$\therefore x = \left(\frac{1}{5}\right)^{y+5} - 6$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+5} - 6$$

$$\text{따라서 } g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+5} - 6 \text{이므로}$$

$$g(-5) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-5+5} - 6 = 1 - 6 = -5$$

076 답 -8

두 함수 $y = \log_7(x+3) + a$, $y = 7^{x+5} + b$ 의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y = \log_7(x+3) + a$ 는 함수 $y = 7^{x+5} + b$ 의 역함수이다.

$$y = 7^{x+5} + b \text{에서 } y - b = 7^{x+5}$$

$$\text{로그의 정의에 의하여 } x+5 = \log_7(y-b)$$

$$\therefore x = \log_7(y-b) - 5$$

$$x \text{와 } y \text{를 서로 바꾸면 } y = \log_7(x-b) - 5$$

$$\text{이 식이 } y = \log_7(x+3) + a \text{와 일치하므로}$$

$$a = -5, b = -3 \quad \therefore a + b = -8$$

077 답 ④

함수 $y = \log_6(x+k) + 3$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은
함수 $y = \log_6(x+k) + 3$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 교점과 같으므로
함수 $y = \log_6(x+k) + 3$ 의 그래프는 점 (4, 4)를 지난다.

$$4 = \log_6(4+k) + 3 \text{에서 } \log_6(4+k) = 1$$

$$4+k=6$$

$$\therefore k=2$$

078 답 ③

$g(x)$ 는 $f(x) = 3^x$ 의 역함수이므로 $y = 3^x$ 에서

로그의 정의에 의하여 $x = \log_3 y$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = \log_3 x$$

$$\therefore g(x) = \log_3 x$$

이때 점 A의 y 좌표가 3이므로

$$3^x = 3 \text{에서 } x = 1$$

$$\therefore A(1, 3)$$

점 B의 y 좌표가 3이므로

$$\log_3 x = 3 \text{에서 } x = 3^3 = 27$$

$$\therefore B(27, 3)$$

따라서 삼각형 OBA의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (27-1) \times 3 = 39$$

079 답 ②

$y = \log_2(x+a) + b$ 에서 $y-b = \log_2(x+a)$

로그의 정의에 의하여 $x+a = 2^{y-b}$

$$\therefore x = 2^{y-b} - a$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = 2^{x-b} - a$$

$$\therefore g(x) = 2^{x-b} - a$$

이때 곡선 $y = 2^{x-b} - a$ 의 점근선이 직선 $y = 1$ 이므로

$$-a = 1 \quad \therefore a = -1$$

즉, 곡선 $y = 2^{x-b} + 1$ 이 점 (3, 2)를 지나므로

$$2 = 2^{3-b} + 1$$

$$2^{3-b} = 1, 3-b = 0$$

$$\therefore b = 3$$

$$\therefore a+b = -1+3 = 2$$

080 답 5

$g(x)$ 는 $y = \log_2 x$ 의 역함수이므로 $y = \log_2 x$ 에서

로그의 정의에 의하여 $x = 2^y$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = 2^x$$

$$\therefore g(x) = 2^x$$

점 A는 $y = \log_2 x$ 의 그래프와 x 축의 교점이므로

$$A(1, 0)$$

점 B의 x 좌표가 1이므로 $y = 2^1 = 2$

$$\therefore B(1, 2)$$

$$\therefore \overline{AB} = 2$$

점 C의 y 좌표가 2이므로 $2 = \log_2 x$ 에서 $x = 2^2 = 4$

$$\therefore C(4, 2)$$

$$\therefore \overline{BC} = 3$$

$$\therefore \overline{AB} + \overline{BC} = 2 + 3 = 5$$

개념유형

90~91쪽

081 답 <

$\log_5 6, \log_5 8$ 에서 밑이 1보다 크고, $6 < 8$ 이므로

$$\log_5 6 < \log_5 8$$

082 답 <

$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{7}, \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{9}$ 에서 밑이 1보다 작고, $\frac{1}{7} > \frac{1}{9}$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{7} < \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{9}$$

083 답 >

$$2 \log_{0.5} \sqrt{26} = \log_{0.5} (\sqrt{26})^2 = \log_{0.5} 26$$

이때 밑이 1보다 작고, $26 < 27$ 이므로

$$\log_{0.5} 26 > \log_{0.5} 27 \quad \therefore 2 \log_{0.5} \sqrt{26} > \log_{0.5} 27$$

084 답 >, 2, 9, 2, 7, >, >

085 답 >

$\log_{\frac{1}{27}} 20$ 을 밑이 $\frac{1}{3}$ 인 로그로 나타내면

$$\log_{\frac{1}{27}} 20 = \log\left(\frac{1}{3}\right)^3 20 = \frac{1}{3} \log_{\frac{1}{3}} 20 = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{20}$$

이때 밑이 1보다 작고, $2 < \sqrt[3]{20}$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{3}} 2 > \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{20} \quad \therefore \log_{\frac{1}{3}} 2 > \log_{\frac{1}{27}} 20$$

086 답 $\log_6 \frac{11}{5} < \log_6 \frac{8}{3} < \log_6 3$

$\log_6 3, \log_6 \frac{8}{3}, \log_6 \frac{11}{5}$ 에서 밑이 1보다 크고, $\frac{11}{5} < \frac{8}{3} < 3$ 이므로

$$\log_6 \frac{11}{5} < \log_6 \frac{8}{3} < \log_6 3$$

087 답 $2 \log_{0.1} 3 < \log_{0.1} 5 < -\log_{0.1} \frac{1}{4}$

$$-\log_{0.1} \frac{1}{4} = \log_{0.1} \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \log_{0.1} 4$$

$$2 \log_{0.1} 3 = \log_{0.1} 3^2 = \log_{0.1} 9$$

이때 밑이 1보다 작고, $4 < 5 < 9$ 이므로

$$\log_{0.1} 9 < \log_{0.1} 5 < \log_{0.1} 4$$

$$\therefore 2 \log_{0.1} 3 < \log_{0.1} 5 < -\log_{0.1} \frac{1}{4}$$

088 답 $2, 2, \frac{1}{2}, \sqrt{7}, <, <, 1, \log_4 7$

089 **답** $2 \log_3 2 < \log_9 25 < 2$

$2 \log_3 2$, 2 , $\log_9 25$ 를 밑이 3인 로그로 나타내면
 $2 \log_3 2 = \log_3 2^2 = \log_3 4$
 $2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$
 $\log_9 25 = \log_{3^2} 5^2 = \log_3 5$
 이때 밑이 1보다 크고, $4 < 5 < 9$ 이므로
 $\log_3 4 < \log_3 5 < \log_3 9$
 $\therefore 2 \log_3 2 < \log_9 25 < 2$

090 **답** $-3 < \log_{\frac{1}{3}} 10 < \log_{\frac{1}{3}} 80$

$\log_{\frac{1}{3}} 80$, -3 을 밑이 $\frac{1}{3}$ 인 로그로 나타내면
 $\log_{\frac{1}{3}} 80 = \log\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} 80 = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 80 = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{80}$
 $-3 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \log_{\frac{1}{3}} 27$
 이때 밑이 1보다 작고, $\sqrt{80} < 10 < 27$ 이므로
 $\log_{\frac{1}{3}} 27 < \log_{\frac{1}{3}} 10 < \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{80}$
 $\therefore -3 < \log_{\frac{1}{3}} 10 < \log_{\frac{1}{3}} 80$

091 **답** $\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{5}} 3 < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2} < \log_{25} 16$

$\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{5}} 3$, $\log_{25} 16$ 을 밑이 $\frac{1}{5}$ 인 로그로 나타내면
 $\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{5}} 3 = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{3}$
 $\log_{25} 16 = \log\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} 4^2 = -\log_{\frac{1}{5}} 4 = \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$
 이때 밑이 1보다 작고, $\frac{1}{4} < \frac{1}{2} < \sqrt{3}$ 이므로
 $\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{3} < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{4}$
 $\therefore \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{5}} 3 < \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{2} < \log_{25} 16$

실전유형

91쪽

092 **답** ④

$B = \log_{36} 9 = \log_{6^2} 3^2 = \log_6 3$
 $C = -\log_6 2 = \log_6 \frac{1}{2}$
 이때 밑이 1보다 크고, $\frac{1}{2} < \frac{4}{3} < 3$ 이므로
 $\log_6 \frac{1}{2} < \log_6 \frac{4}{3} < \log_6 3$
 $\therefore C < A < B$

093 **답** $B < C < A$

$A = 2 \log_a 6 = \log_a 6^2 = \log_a 36$
 $B = -3 \log_{\frac{1}{a}} 4 = 3 \log_a 4 = \log_a 4^3 = \log_a 64$
 $C = \frac{2}{\log_{\sqrt{46}} a} = 2 \log_a \sqrt{46} = \log_a (\sqrt{46})^2 = \log_a 46$

이때 $0 < a < 1$ 이고, $36 < 46 < 64$ 이므로
 $\log_a 64 < \log_a 46 < \log_a 36$
 $\therefore B < C < A$

094 **답** $\log_a 7$

$1 < a < 7$ 의 각 변에 밑이 7인 로그를 취하면
 $\log_7 1 < \log_7 a < \log_7 7$
 $\therefore 0 < \log_7 a < 1$ ㉠
 $\log_7 \frac{1}{a} = \log_7 a^{-1} = -\log_7 a$ 이므로
 $-1 < -\log_7 a < 0 \quad \therefore -1 < \log_7 \frac{1}{a} < 0$ ㉡
 $\log_a 7 = \frac{1}{\log_7 a}$ 이므로 $\frac{1}{\log_7 a} > 1$
 $\therefore \log_a 7 > 1$ ㉢
 ㉠, ㉡, ㉢에서 $\log_7 \frac{1}{a} < \log_7 a < \log_a 7$
 따라서 가장 큰 수는 $\log_a 7$ 이다.

개념유형

93~94쪽

095 **답** 최댓값: 4, 최솟값: 1

함수 $y = \log_2 x$ 의 밑이 1보다 크므로
 $2 \leq x \leq 16$ 일 때 함수 $y = \log_2 x$ 는
 $x = 16$ 에서 최댓값 $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$,
 $x = 2$ 에서 최솟값 $\log_2 2 = 1$ 을 갖는다.

096 **답** 최댓값: 3, 최솟값: 0

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 밑이 1보다 작으므로
 $\frac{1}{27} \leq x \leq 1$ 일 때 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 는
 $x = \frac{1}{27}$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3$,
 $x = 1$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$ 을 갖는다.

097 **답** 최댓값: 2, 최솟값: 0

함수 $y = \log_5 (x+2)$ 의 밑이 1보다 크므로
 $-1 \leq x \leq 23$ 일 때 함수 $y = \log_5 (x+2)$ 는
 $x = 23$ 에서 최댓값 $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$,
 $x = -1$ 에서 최솟값 $\log_5 1 = 0$ 을 갖는다.

098 **답** 최댓값: 1, 최솟값: -4

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} (x-3)$ 의 밑이 1보다 작으므로
 $\frac{7}{2} \leq x \leq 19$ 일 때 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} (x-3)$ 은
 $x = \frac{7}{2}$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$,
 $x = 19$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}} 16 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = -4$ 를 갖는다.

099 **답** 최댓값: 4, 최솟값: 2

함수 $y = \log_3 9x$ 의 밑이 1보다 크므로
 $1 \leq x \leq 9$ 일 때 함수 $y = \log_3 9x$ 는
 $x=9$ 에서 최댓값 $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$,
 $x=1$ 에서 최솟값 $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$ 를 갖는다.

100 **답** 최댓값: -1, 최솟값: -5

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} 8x$ 의 밑이 1보다 작으므로
 $\frac{1}{4} \leq x \leq 4$ 일 때 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} 8x$ 는
 $x = \frac{1}{4}$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1$,
 $x=4$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}} 32 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = -5$ 를 갖는다.

101 **답** 최댓값: 4, 최솟값: 2

함수 $y = \log_2 (3x-2)$ 의 밑이 1보다 크므로
 $2 \leq x \leq 6$ 일 때 함수 $y = \log_2 (3x-2)$ 는
 $x=6$ 에서 최댓값 $\log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$,
 $x=2$ 에서 최솟값 $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$ 를 갖는다.

102 **답** 최댓값: -2, 최솟값: -4

함수 $y = \log_{\frac{1}{5}} (x+1) - 3$ 의 밑이 1보다 작으므로
 $-\frac{4}{5} \leq x \leq 4$ 일 때 함수 $y = \log_{\frac{1}{5}} (x+1) - 3$ 은
 $x = -\frac{4}{5}$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} - 3 = -2$,
 $x=4$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{5}} 5 - 3 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} - 3 = -4$ 를 갖는다.

103 **답** 최댓값: 2, 최솟값: -2

$y = -\log_3 (x-2) = \log_{\frac{1}{3}} (x-2)$
함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} (x-2)$ 의 밑이 1보다 작으므로
 $\frac{19}{9} \leq x \leq 11$ 일 때 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} (x-2)$ 는
 $x = \frac{19}{9}$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2$,
 $x=11$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{3}} 9 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = -2$ 를 갖는다.

104 **답** 1, 1, 1, 5, 5, 1, 1, 1, 0**105** **답** 최댓값: 2, 최솟값: $\log_3 5$

$y = \log_3 (-x^2 + 2x + 8)$ 에서 $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ 이라 하면
 $f(x) = -(x-1)^2 + 9$
 $-1 \leq x \leq 3$ 에서 $f(-1)=5$, $f(1)=9$, $f(3)=5$ 이므로
 $5 \leq f(x) \leq 9$
이때 함수 $y = \log_3 f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로
함수 $y = \log_3 f(x)$ 는
 $f(x)=9$ 에서 최댓값 $\log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$,
 $f(x)=5$ 에서 최솟값 $\log_3 5$ 를 갖는다.

106 **답** 최댓값: 6, 최솟값: 2

$y = \log_2 (x^2 - 4x + 4)$ 에서 $f(x) = x^2 - 4x + 4$ 라 하면
 $f(x) = (x-2)^2$
 $4 \leq x \leq 10$ 에서 $f(4)=4$, $f(10)=64$ 이므로 $4 \leq f(x) \leq 64$
이때 함수 $y = \log_2 f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로
함수 $y = \log_2 f(x)$ 는
 $f(x)=64$ 에서 최댓값 $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$,
 $f(x)=4$ 에서 최솟값 $\log_2 4 = \log_2 2^2 = 2$ 를 갖는다.

107 **답** 최댓값: 0, 최솟값: -1

$y = \log_{\frac{1}{5}} (x^2 - 6x + 10)$ 에서 $f(x) = x^2 - 6x + 10$ 이라 하면
 $f(x) = (x-3)^2 + 1$
 $1 \leq x \leq 4$ 에서 $f(1)=5$, $f(3)=1$, $f(4)=2$ 이므로 $1 \leq f(x) \leq 5$
이때 함수 $y = \log_{\frac{1}{5}} f(x)$ 의 밑이 1보다 작으므로
함수 $y = \log_{\frac{1}{5}} f(x)$ 는
 $f(x)=1$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{5}} 1 = 0$,
 $f(x)=5$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{5}} 5 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = -1$ 을 갖는다.

108 **답** 최댓값: -2, 최솟값: -3

$y = \log_{\frac{1}{2}} (-x^2 - 6x - 1)$ 에서 $f(x) = -x^2 - 6x - 1$ 이라 하면
 $f(x) = -(x+3)^2 + 8$
 $-4 \leq x \leq -1$ 에서 $f(-4)=7$, $f(-3)=8$, $f(-1)=4$ 이므로
 $4 \leq f(x) \leq 8$
이때 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 의 밑이 1보다 작으므로
함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 는
 $f(x)=4$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = -2$,
 $f(x)=8$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = -3$ 을 갖는다.

실전유형

94~95쪽

109 **답** -18

함수 $y = \log_4 (x-2) - 3$ 의 밑이 1보다 크므로
 $6 \leq x \leq 18$ 일 때 함수 $y = \log_4 (x-2) - 3$ 은
 $x=18$ 에서 최댓값 $\log_4 16 - 3 = \log_4 4^2 - 3 = -1$ 을 갖는다.
따라서 $a=18$, $M=-1$ 이므로
 $aM = -18$

110 **답** ④

함수 $y = \log_3 (2x+5) + k$ 의 밑이 1보다 크므로
 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $y = \log_3 (2x+5) + k$ 는
 $x=-1$ 에서 최솟값 $\log_3 3 + k = 1 + k$ 를 갖는다.
즉, $1+k=2$ 이므로 $k=1$

111 답 ④

함수 $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{2}}(x+k)$ 의 밑이 1보다 작으므로
 $0 \leq x \leq 12$ 일 때 함수 $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{2}}(x+k)$ 는
 $x=0$ 에서 최댓값 $2 \log_{\frac{1}{2}} k$,
 $x=12$ 에서 최솟값 $2 \log_{\frac{1}{2}}(12+k)$ 를 갖는다.
 즉, $2 \log_{\frac{1}{2}} k = -4$ 이므로
 $\log_{\frac{1}{2}} k = -2 \quad \therefore k = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$
 $\therefore m = 2 \log_{\frac{1}{2}}(12+4) = 2 \log_{\frac{1}{2}} 16 = 2 \times (-4) = -8$
 $\therefore k+m = -4$

112 답 ②

$f(x) = \log_2(x^2 - 4x + 20)$ 에서 $g(x) = x^2 - 4x + 20$ 이라 하면
 $g(x) = (x-2)^2 + 16$
 $-3 \leq x \leq 3$ 에서 $g(-3) = 41, g(2) = 16, g(3) = 17$ 이므로
 $16 \leq g(x) \leq 41$
 이때 함수 $f(x) = \log_2 g(x)$ 의 밑이 1보다 크므로
 함수 $f(x) = \log_2 g(x)$ 는
 $g(x) = 16$ 에서 최솟값 $\log_2 16 = 4$ 를 갖는다.

113 답 ①

$y = \log_{\frac{1}{2}}(-x^2 + 6x + k)$ 에서 $f(x) = -x^2 + 6x + k$ 라 하면
 $f(x) = -(x-3)^2 + k+9$
 $1 \leq x \leq 5$ 에서 $f(1) = k+5, f(3) = k+9, f(5) = k+5$ 이므로
 $k+5 \leq f(x) \leq k+9$
 이때 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 의 밑이 1보다 작으므로
 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 는
 $f(x) = k+5$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}}(k+5)$,
 $f(x) = k+9$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}}(k+9)$ 를 갖는다.
 즉, $\log_{\frac{1}{2}}(k+9) = -3$ 이므로
 $k+9 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8 \quad \therefore k = -1$
 따라서 구하는 최댓값은 $\log_{\frac{1}{2}}(-1+5) = \log_{\frac{1}{2}} 4 = -2$

114 답 0

진수의 조건에서 $x-2 > 0, 4-x > 0$
 $\therefore 2 < x < 4$
 $y = \log_5(x-2) + \log_5(4-x)$
 $= \log_5(x-2)(4-x)$
 $= \log_5(-x^2 + 6x - 8)$
 $f(x) = -x^2 + 6x - 8$ 이라 하면
 $f(x) = -(x-3)^2 + 1$
 $2 < x < 4$ 에서 $f(2) = 0, f(3) = 1, f(4) = 0$ 이므로
 $0 < f(x) \leq 1$
 이때 함수 $y = \log_5 f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로
 함수 $y = \log_5 f(x)$ 는 $f(x) = 1$ 에서 최댓값 $\log_5 1 = 0$ 을 갖는다.

115 답 4

$y = \log_a(-x^2 + 4x)$ 에서 $f(x) = -x^2 + 4x$ 라 하면
 $f(x) = -(x-2)^2 + 4$
 $1 \leq x \leq 3$ 에서 $f(1) = 3, f(2) = 4, f(3) = 3$ 이므로
 $3 \leq f(x) \leq 4$
 이때 $a > 1$ 이므로 함수 $y = \log_a f(x)$ 는 $f(x) = 4$ 에서 최댓값 $\log_a 4$ 를 갖는다.
 즉, $\log_a 4 = 1$ 이므로 $a = 4$

116 답 ㉠ 8 ㉡ 3 ㉢ 12 ㉣ 1 ㉤ 8

117 답 ③

$y = (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - \log_{\frac{1}{3}} x^6 - 1 = (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - 6 \log_{\frac{1}{3}} x - 1$
 $\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{9} \leq x \leq 3$ 에서
 $\log_{\frac{1}{3}} 3 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$
 $\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^2$
 $\therefore -1 \leq t \leq 2$
 이때 주어진 함수는 $y = t^2 - 6t - 1 = (t-3)^2 - 10$
 즉, $-1 \leq t \leq 2$ 일 때 함수 $y = (t-3)^2 - 10$ 은
 $t = -1$ 에서 최댓값 6, $t = 2$ 에서 최솟값 -9를 갖는다.
 따라서 $M = 6, m = -9$ 이므로
 $M + m = -3$

118 답 -3

$y = (\log_2 x)^2 + a \log_2 x^2 + b = (\log_2 x)^2 + 2a \log_2 x + b$
 $\log_2 x = t$ 로 놓으면 $y = t^2 + 2at + b \quad \dots\dots ㉠$
 이때 함수 ㉠이 $x = \frac{1}{4}$, 즉 $t = \log_2 \frac{1}{4} = -2$ 에서 최솟값 1을 가지므로
 $y = (t+2)^2 + 1$
 $\therefore y = t^2 + 4t + 5$
 이 식이 ㉠과 일치해야 하므로
 $2a = 4, b = 5 \quad \therefore a = 2, b = 5$
 $\therefore a - b = -3$

개념유형

97~98쪽

119 답 2, 9, 7, 7

120 답 x=4

진수의 조건에서 $x-2 > 0 \quad \therefore x > 2 \quad \dots\dots ㉠$
 $\log_{\frac{1}{2}}(x-2) = -1$ 에서
 $x-2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2 \quad \therefore x = 4$
 따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 4$

121 **답** $x = \frac{1}{5}$

밑의 조건에서 $x > 0, x \neq 1$ ㉠

$\log_x 25 = -2$ 에서 $x^{-2} = 25$

$x^2 = \frac{1}{25} \quad \therefore x = -\frac{1}{5} \text{ 또는 } x = \frac{1}{5}$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{1}{5}$

122 **답** $x = 2$

밑의 조건에서 $3x > 0, 3x \neq 1$

$\therefore 0 < x < \frac{1}{3} \text{ 또는 } x > \frac{1}{3}$ ㉠

$\log_{3x} 36 = 2$ 에서 $(3x)^2 = 36$

$9x^2 = 36, x^2 = 4 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 2$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 2$

123 **답** 7, 3, 3

124 **답** $x = -1$

진수의 조건에서 $x+2 > 0, 2x+3 > 0 \quad \therefore x > -\frac{3}{2}$ ㉠

$\log_5 (x+2) = \log_5 (2x+3)$ 에서

$x+2 = 2x+3 \quad \therefore x = -1$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = -1$

125 **답** $x = 3$

진수의 조건에서 $x-1 > 0, x+1 > 0 \quad \therefore x > 1$ ㉠

$2 \log_2 (x-1) = \log_2 (x+1)$ 에서

$\log_2 (x-1)^2 = \log_2 (x+1)$

$(x-1)^2 = x+1$

$x^2 - 3x = 0, x(x-3) = 0$

$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 3$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 3$

126 **답** $x = 7$

진수의 조건에서 $2x-5 > 0 \quad \therefore x > \frac{5}{2}$ ㉠

$-\log_{\frac{1}{5}} (2x-5) = \log_5 9$ 에서

$\log_5 (2x-5) = \log_5 9$

$2x-5 = 9, 2x = 14 \quad \therefore x = 7$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 7$

127 **답** $x = 3$

진수의 조건에서 $x > 0, x-2 > 0 \quad \therefore x > 2$ ㉠

$\log_3 x + \log_3 (x-2) = 1$ 에서

$\log_3 x(x-2) = \log_3 3$

$x(x-2) = 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0, (x+1)(x-3) = 0$

$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 3$

128 **답** 1, -4, -4

129 **답** $x = -\frac{1}{5}$

진수의 조건에서 $5x+2 > 0 \quad \therefore x > -\frac{2}{5}$ ㉠

$\log_{\frac{1}{5}} (5x+2) = \log_{\frac{1}{10}} (5x+2)$ 에서 진수가 같으므로

$5x+2 = 1, 5x = -1 \quad \therefore x = -\frac{1}{5}$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = -\frac{1}{5}$

130 **답** $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 4x, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}$

131 **답** $x = 2$

밑의 조건에서 $x^2 > 0, x^2 \neq 1, x+2 > 0, x+2 \neq 1$

$\therefore -2 < x < -1 \text{ 또는 } -1 < x < 0 \text{ 또는 } 0 < x < 1 \text{ 또는 } x > 1$

..... ㉠

$\log_{x^2} 7 = \log_{(x+2)} 7$ 에서 진수가 같으므로

$x^2 = x+2$

$x^2 - x - 2 = 0, (x+1)(x-2) = 0$

$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 2$

132 **답** 6, 3, 3, 3, 3, 8, 8

133 **답** $x = \frac{1}{9}$ 또는 $x = 1$

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 - 2 \log_{\frac{1}{3}} x = 0$ 에서

$\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면

$t^2 - 2t = 0, t(t-2) = 0$

$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 2$

$t = \log_{\frac{1}{3}} x$ 이므로 $\log_{\frac{1}{3}} x = 0$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}} x = 2$

$\therefore x = \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 1 \text{ 또는 } x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{1}{9}$ 또는 $x = 1$

134 **답** $x = \frac{1}{27}$ 또는 $x = 3$

진수의 조건에서 $x > 0, x^2 > 0 \quad \therefore x > 0$ ㉠

$(\log_3 x)^2 + \log_3 x^2 - 3 = 0$ 에서

$(\log_3 x)^2 + 2 \log_3 x - 3 = 0$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$t^2 + 2t - 3 = 0, (t+3)(t-1) = 0$

$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$

$t = \log_3 x$ 이므로 $\log_3 x = -3$ 또는 $\log_3 x = 1$

$\therefore x = 3^{-3} = \frac{1}{27} \text{ 또는 } x = 3$

따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{1}{27}$ 또는 $x = 3$

135 **답** $x=2$ 또는 $x=32$

진수의 조건에서 $x > 0, x^8 > 0$
 $\therefore x > 0$ ㉠
 $(1 + \log_2 x)^2 - \log_2 x^8 + 4 = 0$ 에서
 $(\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x + 1 - 8 \log_2 x + 4 = 0$
 $(\log_2 x)^2 - 6 \log_2 x + 5 = 0$
 $\log_2 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 6t + 5 = 0$
 $(t-1)(t-5) = 0$
 $\therefore t = 1$ 또는 $t = 5$
 $t = \log_2 x$ 이므로 $\log_2 x = 1$ 또는 $\log_2 x = 5$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = 2^5 = 32$
따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는
 $x = 2$ 또는 $x = 32$

136 **답** $2, 2, 1, -1, -1, -1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$

137 **답** $x=5$ 또는 $x=25$

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠
 $x^{\log_5 x} = \frac{x^3}{25}$ 의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면
 $\log_5 x^{\log_5 x} = \log_5 \frac{x^3}{25}$
 $(\log_5 x)^2 = \log_5 x^3 - \log_5 25$
 $(\log_5 x)^2 - 3 \log_5 x + 2 = 0$
 $\log_5 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 3t + 2 = 0$
 $(t-1)(t-2) = 0$
 $\therefore t = 1$ 또는 $t = 2$
 $t = \log_5 x$ 이므로 $\log_5 x = 1$ 또는 $\log_5 x = 2$
 $\therefore x = 5$ 또는 $x = 5^2 = 25$
따라서 ㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는
 $x = 5$ 또는 $x = 25$

실전유형 99~100쪽

138 **답** ③

진수의 조건에서 $(x-1)^2 > 0, 3x-5 > 0$
 $\therefore x > \frac{5}{3}$ ㉠
 $\log_5 (x-1)^2 = \log_5 (3x-5)$ 에서
 $(x-1)^2 = 3x-5$
 $x^2 - 5x + 6 = 0$
 $(x-2)(x-3) = 0$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$
㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 2$ 또는 $x = 3$
따라서 모든 근의 합은 $2+3=5$

139 **답** 49

진수의 조건에서 $x+2 > 0, x-4 > 0 \therefore x > 4$ ㉠
 $\log_3 (x+2) - \log_{\frac{1}{3}} (x-4) = 3$ 에서
 $\log_3 (x+2) + \log_3 (x-4) = 3$
 $\log_3 (x+2)(x-4) = \log_3 27$
 $(x+2)(x-4) = 27$
 $x^2 - 2x - 35 = 0, (x+5)(x-7) = 0$
 $\therefore x = -5$ 또는 $x = 7$
㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 7$
따라서 $a = 7$ 이므로 $a^2 = 49$

140 **답** 12

진수의 조건에서 $x > 0, 2x-3 > 0 \therefore x > \frac{3}{2}$ ㉠
 $\log_2 x = 1 + \log_4 (2x-3)$ 에서
 $\log_2 x^2 = \log_4 4 + \log_4 (2x-3)$
 $\log_4 x^2 = \log_4 4(2x-3)$
 $x^2 = 4(2x-3)$
 $x^2 - 8x + 12 = 0, (x-2)(x-6) = 0$
 $\therefore x = 2$ 또는 $x = 6$
㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 2$ 또는 $x = 6$
따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은 $2 \times 6 = 12$

141 **답** $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = 3$

밑과 진수의 조건에서
 $x^2 + 1 > 0, x^2 + 1 \neq 1, x+7 > 0, x+7 \neq 1, 4x+3 > 0$
 $\therefore -\frac{3}{4} < x < 0$ 또는 $x > 0$ ㉠
 $\log_{(x^2+1)} (4x+3) = \log_{(x+7)} (4x+3)$ 에서
(i) 밑이 같으면 $x^2 + 1 = x + 7$
 $x^2 - x - 6 = 0, (x+2)(x-3) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 3$
그런데 ㉠에 의하여 $x = 3$
(ii) 진수가 1이면 $4x+3 = 1$
 $4x = -2 \therefore x = -\frac{1}{2}$
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는
 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = 3$

142 **답** ①

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠
 $(\log_{\frac{1}{5}} x)^2 - 2 \log_{\frac{1}{5}} x - 3 = 0$ 에서
 $\log_{\frac{1}{5}} x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 2t - 3 = 0, (t+1)(t-3) = 0$
 $\therefore t = -1$ 또는 $t = 3$
 $t = \log_{\frac{1}{5}} x$ 이므로 $\log_{\frac{1}{5}} x = -1$ 또는 $\log_{\frac{1}{5}} x = 3$
 $\therefore x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5$ 또는 $x = \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$

㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{1}{125}$ 또는 $x = 5$

따라서 두 근의 곱은 $\frac{1}{125} \times 5 = \frac{1}{25}$

143 [답] 64

진수의 조건에서 $x > 0, x^8 > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^8 + k = 0$ 에서

$(\log_2 x)^2 - 8 \log_2 x + k = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

이때 주어진 방정식의 한 근이 4이므로 $x = 4$ 를 ㉡에 대입하면

$(\log_2 4)^2 - 8 \log_2 4 + k = 0$

$2^2 - 8 \times 2 + k = 0 \quad \therefore k = 12$

즉, $k = 12$ 를 ㉡에 대입하면

$(\log_2 x)^2 - 8 \log_2 x + 12 = 0$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$t^2 - 8t + 12 = 0, (t-2)(t-6) = 0$

$\therefore t = 2$ 또는 $t = 6$

$t = \log_2 x$ 이므로 $\log_2 x = 2$ 또는 $\log_2 x = 6$

$\therefore x = 2^2 = 4$ 또는 $x = 2^6 = 64$

㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 4$ 또는 $x = 64$

따라서 다른 한 근은 64이다.

144 [답] 32

진수의 조건에서 $\frac{x}{2} > 0, 4x > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$\left(\log_2 \frac{x}{2}\right)(\log_2 4x) = 4$ 에서

$(\log_2 x - \log_2 2)(\log_2 4 + \log_2 x) = 4$

$(\log_2 x - 1)(2 + \log_2 x) = 4$

$(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 6 = 0$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$t^2 + t - 6 = 0, (t+3)(t-2) = 0$

$\therefore t = -3$ 또는 $t = 2$

$t = \log_2 x$ 이므로 $\log_2 x = -3$ 또는 $\log_2 x = 2$

$\therefore x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$ 또는 $x = 2^2 = 4$

㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{1}{8}$ 또는 $x = 4$

따라서 $\alpha = \frac{1}{8}, \beta = 4$ 또는 $\alpha = 4, \beta = \frac{1}{8}$ 이므로

$64\alpha\beta = 64 \times \frac{1}{8} \times 4 = 32$

145 [답] 2

밑과 진수의 조건에서 $x^2 > 0, x > 0, x \neq 1$

$\therefore 0 < x < 1$ 또는 $x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$\log_3 x^2 + \log_x 9 - 3 = 0$ 에서

$2 \log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} - 3 = 0$

$\log_3 x = t (t \neq 0)$ 로 놓으면

$2t + \frac{1}{t} - 3 = 0$

$2t^2 - 3t + 1 = 0, (2t-1)(t-1) = 0$

$\therefore t = \frac{1}{2}$ 또는 $t = 1$

$t = \log_3 x$ 이므로 $\log_3 x = \frac{1}{2}$ 또는 $\log_3 x = 1$

$\therefore x = 9^{\frac{1}{2}} = 3$ 또는 $x = 9$

㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = 3$ 또는 $x = 9$

따라서 $\alpha = 3, \beta = 9$ 이므로

$\log_a \beta = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2$

146 [답] $\frac{1}{2}$

$(\log x)^2 - k \log x - 9 = 0$ 에서

$\log x = t$ 로 놓으면

$t^2 - kt - 9 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식 ㉠의 두 근은

$\log \alpha, \log \beta$ 이다.

따라서 ㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log \alpha + \log \beta = k, \log \alpha\beta = k$

이때 $\alpha\beta = \sqrt{10}$ 이므로

$k = \log \sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

[참고] x 에 대한 방정식

$p(\log_a x)^2 + q \log_a x + r = 0 (a > 0, a \neq 1, p \neq 0)$ 의 두 근이 α, β 일 때

$\Rightarrow \log_a x = t$ 로 놓으면 t 에 대한 이차방정식 $pt^2 + qt + r = 0$ 의 두 근은 $\log_a \alpha, \log_a \beta$ 이다.

147 [답] 16

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$D = (-\log_2 a)^2 - 4(\log_2 a + 8) = 0$

$\therefore (\log_2 a)^2 - 4 \log_2 a - 32 = 0$

$\log_2 a = t$ 로 놓으면

$t^2 - 4t - 32 = 0, (t+4)(t-8) = 0$

$\therefore t = -4$ 또는 $t = 8$

$t = \log_2 a$ 이므로 $\log_2 a = -4$ 또는 $\log_2 a = 8$

$\therefore a = 2^{-4} = \frac{1}{16}$ 또는 $a = 2^8 = 256$

따라서 모든 양수 a 의 값의 곱은 $\frac{1}{16} \times 256 = 16$

148 [답] ③

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$

$x^{\log_3 x} = 81$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 81$

$(\log_3 x)^2 = 4$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면

$t^2 = 4 \quad \therefore t = -2$ 또는 $t = 2$

$t = \log_3 x$ 이므로 $\log_3 x = -2$ 또는 $\log_3 x = 2$

$\therefore x = 3^{-2} = \frac{1}{9}$ 또는 $x = 3^2 = 9$

㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{1}{9}$ 또는 $x = 9$

따라서 모든 근의 곱은 $\frac{1}{9} \times 9 = 1$

149 $\frac{17}{8}$

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$x^{\log_2 x} = \frac{8}{x^2}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 x^{\log_2 x} = \log_2 \frac{8}{x^2}$$

$$(\log_2 x)^2 = \log_2 8 - \log_2 x^2$$

$$(\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x - 3 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 2t - 3 = 0, (t+3)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 1$$

$$t = \log_2 x \text{ 이므로 } \log_2 x = -3 \text{ 또는 } \log_2 x = 1$$

$$\therefore x = 2^{-3} = \frac{1}{8} \text{ 또는 } x = 2$$

㉠에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{1}{8}$ 또는 $x = 2$

$$\therefore \text{따라서 모든 근의 합은 } \frac{1}{8} + 2 = \frac{17}{8}$$

150 ④

대역폭이 15, 신호전력이 186, 잡음전력이 a 인 채널용량이 75이므로

$$75 = 15 \log_2 \left(1 + \frac{186}{a} \right), \log_2 \left(1 + \frac{186}{a} \right) = 5$$

$$1 + \frac{186}{a} = 2^5 = 32, \frac{186}{a} = 31$$

$$\therefore a = 6$$

151 ②

처음 물의 양을 a 라 하고 x 일 후에 남아 있는 물의 양이 처음의 $\frac{1}{4}$ 이 된다고 하면

$$a \times \left(\frac{9}{10} \right)^x = \frac{1}{4}a, \left(\frac{9}{10} \right)^x = \frac{1}{4}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log \left(\frac{9}{10} \right)^x = \log \frac{1}{4}$$

$$x(\log 9 - \log 10) = -\log 4$$

$$x(2 \log 3 - 1) = -2 \log 2$$

$$x(2 \times 0.48 - 1) = -2 \times 0.3$$

$$-0.04x = -0.6 \quad \therefore x = 15$$

따라서 저수지에 남아 있는 물의 양이 처음의 $\frac{1}{4}$ 이 되는 것은 15일 후이다.

개념유형

102~103쪽

152 11, 6, 6

153 $\frac{3}{2} < x < 4$

진수의 조건에서 $x+1 > 0, 2x-3 > 0 \quad \therefore x > \frac{3}{2}$ ㉠

$\log_{\frac{1}{5}}(x+1) < \log_{\frac{1}{5}}(2x-3)$ 에서

밑이 1보다 작으므로

$$x+1 > 2x-3 \quad \therefore x < 4$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $\frac{3}{2} < x < 4$

154 $x \geq 6$

진수의 조건에서 $4x+3 > 0 \quad \therefore x > -\frac{3}{4}$ ㉠

$\log_3(4x+3) \geq 3$ 에서

$$\log_3(4x+3) \geq \log_3 27$$

밑이 1보다 크므로

$$4x+3 \geq 27, 4x \geq 24 \quad \therefore x \geq 6$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $x \geq 6$

155 $x \geq \frac{4}{3}$

진수의 조건에서 $3x-2 > 0 \quad \therefore x > \frac{2}{3}$ ㉠

$\log_{\frac{1}{2}}(3x-2) \leq -1$ 에서

$$\log_{\frac{1}{2}}(3x-2) \leq \log_{\frac{1}{2}} 2$$

밑이 1보다 작으므로

$$3x-2 \geq 2, 3x \geq 4 \quad \therefore x \geq \frac{4}{3}$$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은 $x \geq \frac{4}{3}$

156 $x > 2$

진수의 조건에서 $x+1 > 0, 2x+5 > 0$

$$\therefore x > -1 \quad \text{..... ㉠}$$

$2 \log_5(x+1) > \log_5(2x+5)$ 에서

$$\log_5(x+1)^2 > \log_5(2x+5)$$

밑이 1보다 크므로

$$(x+1)^2 > 2x+5$$

$$x^2 - 4 > 0$$

$$(x+2)(x-2) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 2 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $x > 2$

157 $4 < x < 6$

진수의 조건에서 $x > 0, x-4 > 0$

$$\therefore x > 4 \quad \text{..... ㉠}$$

$\log_6 x + \log_6(x-4) < \log_6 12$ 에서

$$\log_6 x(x-4) < \log_6 12$$

밑이 1보다 크므로

$$x(x-4) < 12$$

$$x^2 - 4x - 12 < 0$$

$$(x+2)(x-6) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 6 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $4 < x < 6$

158 **답** $1 < x \leq 3$

진수의 조건에서 $x > 0$, $x-1 > 0$, $9-x > 0$
 $\therefore 1 < x < 9$ ㉠
 $\log_2 x + \log_2 (x-1) \leq \log_2 (9-x)$ 에서
 $\log_2 x(x-1) \leq \log_2 (9-x)$
 밑이 1보다 크므로
 $x(x-1) \leq 9-x$
 $x^2-9 \leq 0$
 $(x+3)(x-3) \leq 0$
 $\therefore -3 \leq x \leq 3$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분은 $1 < x \leq 3$

159 **답** $4 < x < 5$

진수의 조건에서 $11-2x > 0$, $x-4 > 0$
 $\therefore 4 < x < \frac{11}{2}$ ㉠
 $\log_4 (11-2x) > -\log_4 \frac{1}{4} (x-4)$ 에서
 $\log_4 (11-2x) > \log_4 (x-4)$
 밑이 1보다 크므로
 $11-2x > x-4$, $-3x > -15$
 $\therefore x < 5$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분은 $4 < x < 5$

160 **답** $x > -\frac{2}{3}$

진수의 조건에서 $x+3 > 0$, $x^2+5 > 0$
 $\therefore x > -3$ ㉠
 $\log_7 (x+3) > \log_{49} (x^2+5)$ 에서
 $\log_7 (x+3)^2 > \log_{49} (x^2+5)$
 $\log_{49} (x+3)^2 > \log_{49} (x^2+5)$
 밑이 1보다 크므로
 $(x+3)^2 > x^2+5$, $6x > -4$
 $\therefore x > -\frac{2}{3}$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분은 $x > -\frac{2}{3}$

161 **답** $0 \leq x < 1$

진수의 조건에서 $x+1 > 0$, $1-x > 0$
 $\therefore -1 < x < 1$ ㉠
 $\log_{\frac{1}{3}} (x+1) \leq \log_{\frac{1}{9}} (1-x)$ 에서
 $\log_{(\frac{1}{3})^2} (x+1)^2 \leq \log_{\frac{1}{9}} (1-x)$
 $\log_{\frac{1}{9}} (x+1)^2 \leq \log_{\frac{1}{9}} (1-x)$
 밑이 1보다 작으므로
 $(x+1)^2 \geq 1-x$
 $x^2+3x \geq 0$
 $x(x+3) \geq 0$
 $\therefore x \leq -3$ 또는 $x \geq 0$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분은 $0 \leq x < 1$

162 **답** $x \geq 8$

진수의 조건에서 $x-2 > 0$, $x+1 > 0$ $\therefore x > 2$ ㉠
 $\log_2 (x-2) \geq \log_4 (x+1) + 1$ 에서
 $\log_2 (x-2)^2 \geq \log_4 (x+1) + \log_4 4$
 $\log_4 (x-2)^2 \geq \log_4 4(x+1)$
 밑이 1보다 크므로
 $(x-2)^2 \geq 4(x+1)$
 $x^2-8x \geq 0$, $x(x-8) \geq 0$
 $\therefore x \leq 0$ 또는 $x \geq 8$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분은 $x \geq 8$

163 **답** $\log_3 x$, 3, 1, 1, $\log_3 x$, 1, $\frac{1}{81}$, 3, $\frac{1}{81}$, 3, $\frac{1}{81}$, 3

164 **답** $0 < x \leq \frac{1}{64}$ 또는 $x \geq 4$

진수의 조건에서 $x > 0$, $x^4 > 0$ $\therefore x > 0$ ㉠
 $(\log_2 x)^2 + \log_2 x^4 - 12 \geq 0$ 에서
 $(\log_2 x)^2 + 4 \log_2 x - 12 \geq 0$
 $\log_2 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 + 4t - 12 \geq 0$, $(t+6)(t-2) \geq 0$
 $\therefore t \leq -6$ 또는 $t \geq 2$
 $t = \log_2 x$ 이므로 $\log_2 x \leq -6$ 또는 $\log_2 x \geq 2$
 $\log_2 x \leq \log_2 \frac{1}{64}$ 또는 $\log_2 x \geq \log_2 4$
 밑이 1보다 크므로
 $x \leq \frac{1}{64}$ 또는 $x \geq 4$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분은 $0 < x \leq \frac{1}{64}$ 또는 $x \geq 4$

165 **답** $0 < x < 2$ 또는 $x > 32$

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠
 $(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 + 6 \log_{\frac{1}{2}} x + 5 > 0$ 에서
 $\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 놓으면
 $t^2 + 6t + 5 > 0$, $(t+5)(t+1) > 0$
 $\therefore t < -5$ 또는 $t > -1$
 $t = \log_{\frac{1}{2}} x$ 이므로 $\log_{\frac{1}{2}} x < -5$ 또는 $\log_{\frac{1}{2}} x > -1$
 $\log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 32$ 또는 $\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} 2$
 밑이 1보다 작으므로
 $x > 32$ 또는 $x < 2$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분은 $0 < x < 2$ 또는 $x > 32$

166 **답** $\frac{1}{125} < x < \frac{1}{5}$

진수의 조건에서 $x > 0$, $125x^4 > 0$ $\therefore x > 0$ ㉠
 $(\log_5 x)^2 + \log_5 125x^4 < 0$ 에서
 $(\log_5 x)^2 + \log_5 125 + \log_5 x^4 < 0$
 $(\log_5 x)^2 + 4 \log_5 x + 3 < 0$
 $\log_5 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 + 4t + 3 < 0$, $(t+3)(t+1) < 0$
 $\therefore -3 < t < -1$

$$t = \log_5 x \text{이므로 } -3 < \log_5 x < -1$$

$$\log_5 \frac{1}{125} < \log_5 x < \log_5 \frac{1}{5}$$

밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{125} < x < \frac{1}{5} \quad \dots\dots \textcircled{\text{L}}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $\frac{1}{125} < x < \frac{1}{5}$

167 **답** $\frac{1}{36} \leq x \leq 6$

진수의 조건에서 $x > 0, 6x > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{\text{A}}$

$$\log_{\frac{1}{6}} x \times \log_{\frac{1}{6}} 6x \leq 2 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{6}} x (\log_{\frac{1}{6}} 6 + \log_{\frac{1}{6}} x) \leq 2$$

$$\log_{\frac{1}{6}} x (-1 + \log_{\frac{1}{6}} x) \leq 2$$

$$(\log_{\frac{1}{6}} x)^2 - \log_{\frac{1}{6}} x - 2 \leq 0$$

$\log_{\frac{1}{6}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 2 \leq 0, (t+1)(t-2) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 2$$

$t = \log_{\frac{1}{6}} x$ 이므로 $-1 \leq \log_{\frac{1}{6}} x \leq 2$

$$\log_{\frac{1}{6}} 6 \leq \log_{\frac{1}{6}} x \leq \log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{36}$$

밑이 1보다 작으므로

$$\frac{1}{36} \leq x \leq 6 \quad \dots\dots \textcircled{\text{L}}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $\frac{1}{36} \leq x \leq 6$

168 **답** $1, \log_5 x, 1, 1, 1, \log_5 x, 1, 5, 5, 0, 5$

169 **답** $\frac{1}{2} < x < 4$

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{\text{A}}$

$$x^{\log_2 x} < 4x \text{의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면}$$

$$\log_2 x^{\log_2 x} < \log_2 4x$$

$$(\log_2 x)^2 < \log_2 4 + \log_2 x$$

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 < 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - t - 2 < 0, (t+1)(t-2) < 0$$

$$\therefore -1 < t < 2$$

$t = \log_2 x$ 이므로 $-1 < \log_2 x < 2$

$$\log_2 \frac{1}{2} < \log_2 x < \log_2 4$$

밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{2} < x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{\text{L}}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $\frac{1}{2} < x < 4$

170 **답** $0 < x < \frac{1}{10} \text{ 또는 } x > 1000$

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{\text{A}}$

$$x^{\log x} > 1000x^2 \text{의 양변에 상용로그를 취하면}$$

$$\log x^{\log x} > \log 1000x^2$$

$$(\log x)^2 > \log 1000 + \log x^2$$

$$(\log x)^2 - 2 \log x - 3 > 0$$

$\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 2t - 3 > 0, (t+1)(t-3) > 0$$

$$\therefore t < -1 \text{ 또는 } t > 3$$

$t = \log x$ 이므로 $\log x < -1$ 또는 $\log x > 3$

$$\log x < \log \frac{1}{10} \text{ 또는 } \log x > \log 1000$$

밑이 1보다 크므로

$$x < \frac{1}{10} \text{ 또는 } x > 1000 \quad \dots\dots \textcircled{\text{L}}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $0 < x < \frac{1}{10} \text{ 또는 } x > 1000$

실전유형

104~105쪽

171 **답** ⑤

진수의 조건에서 $n^2 - 9n + 18 > 0$

$$(n-3)(n-6) > 0$$

$$\therefore n < 3 \text{ 또는 } n > 6 \quad \dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

$\log_{18} (n^2 - 9n + 18) < 1$ 에서

$$\log_{18} (n^2 - 9n + 18) < \log_{18} 18$$

밑이 1보다 크므로

$$n^2 - 9n + 18 < 18$$

$$n^2 - 9n < 0, n(n-9) < 0$$

$$\therefore 0 < n < 9 \quad \dots\dots \textcircled{\text{L}}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $0 < n < 3$ 또는 $6 < n < 9$

따라서 자연수 n 의 값은 1, 2, 7, 8이므로 구하는 합은

$$1 + 2 + 7 + 8 = 18$$

172 **답** 3

진수의 조건에서 $x > 0, 5-x > 0, 4x-2 > 0$

$$\therefore \frac{1}{2} < x < 5 \quad \dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

$$\log_{\frac{1}{5}} x + \log_{\frac{1}{5}} (5-x) \geq \log_{\frac{1}{5}} (4x-2) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{5}} x (5-x) \geq \log_{\frac{1}{5}} (4x-2)$$

밑이 1보다 작으므로

$$x(5-x) \leq 4x-2$$

$$x^2 - x - 2 \geq 0, (x+1)(x-2) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{\text{L}}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $2 \leq x < 5$

따라서 정수 x 는 2, 3, 4의 3개이다.

173 **답** 9

진수의 조건에서 $x+3 > 0, x-3 > 0$

$$\therefore x > 3 \quad \dots\dots \textcircled{\text{A}}$$

$\log_9 (x+3) > \log_3 (x-3)$ 에서

$$\log_9 (x+3) > \log_{3^2} (x-3)^2$$

$\log_3(x+3) > \log_3(x-3)^2$
 밑이 1보다 크므로 $x+3 > (x-3)^2$
 $x^2 - 7x + 6 < 0, (x-1)(x-6) < 0$
 $\therefore 1 < x < 6 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 의 공통부분은 $3 < x < 6$
 따라서 $\alpha=3, \beta=6$ 이므로 $\alpha+\beta=9$

174 답 1 < x ≤ 8

진수의 조건에서 $x > 0, \log_2 x > 0$
 $\log_2 x > \log_2 1$
 밑이 1보다 크므로 $x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 $\log_3(\log_2 x) \leq 1$ 에서
 $\log_3(\log_2 x) \leq \log_3 3$
 밑이 1보다 크므로 $\log_2 x \leq 3$
 $\log_2 x \leq \log_2 8$
 밑이 1보다 크므로 $x \leq 8 \quad \dots\dots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 의 공통부분은 $1 < x \leq 8$

175 답 ②

진수의 조건에서 $x^2 > 0, x > 0, 3x > 0$
 $\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 $\log_3 x^2 - \log_3 x \times \log_3 3x + 6 > 0$ 에서
 $2 \log_3 x - \log_3 x (\log_3 3 + \log_3 x) + 6 > 0$
 $2 \log_3 x - \log_3 x (1 + \log_3 x) + 6 > 0$
 $(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 6 < 0$
 $\log_3 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - t - 6 < 0, (t+2)(t-3) < 0$
 $\therefore -2 < t < 3$
 $t = \log_3 x$ 이므로 $-2 < \log_3 x < 3$
 $\log_3 \frac{1}{9} < \log_3 x < \log_3 27$
 밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{9} < x < 27 \quad \dots\dots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 의 공통부분은 $\frac{1}{9} < x < 27$
 따라서 자연수 x 는 1, 2, 3, ..., 26의 26개이다.

176 답 25

진수의 조건에서 $\frac{5}{x} > 0, \frac{x}{25} > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 $\log_5 \frac{5}{x} \times \log_5 \frac{x}{25} \geq 0$ 에서
 $(\log_5 5 - \log_5 x)(\log_5 x - \log_5 25) \geq 0$
 $(1 - \log_5 x)(\log_5 x - 2) \geq 0$
 $(\log_5 x - 1)(\log_5 x - 2) \leq 0$
 $\log_5 x = t$ 로 놓으면
 $(t-1)(t-2) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq t \leq 2$
 $t = \log_5 x$ 이므로 $1 \leq \log_5 x \leq 2$
 $\log_5 5 \leq \log_5 x \leq \log_5 25$
 밑이 1보다 크므로 $5 \leq x \leq 25 \quad \dots\dots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 의 공통부분은 $5 \leq x \leq 25$
 따라서 실수 x 의 최댓값은 25이다.

177 답 ③

$(\log \frac{1}{2} x)^2 + a \log \frac{1}{2} x + b < 0$ 에서 $\log \frac{1}{2} x = t$ 로 놓으면
 $t^2 + at + b < 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 주어진 부등식의 해가 $2 < x < 4$ 이므로
 $\log \frac{1}{2} 4 < \log \frac{1}{2} x < \log \frac{1}{2} 2$
 $\therefore -2 < t < -1$
 즉, t^2 의 계수가 1이고 해가 $-2 < t < -1$ 인 이차부등식은
 $(t+2)(t+1) < 0 \quad \therefore t^2 + 3t + 2 < 0$
 이 부등식이 $\textcircled{A}$ 와 일치하므로
 $a=3, b=2 \quad \therefore a-b=1$

178 답 6

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $3x^2 - 2(\log_2 n)x + \log_2 n > 0$ 이
 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2 - 2(\log_2 n)x + \log_2 n = 0$ 의 판별
 식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (-\log_2 n)^2 - 3 \log_2 n < 0$
 $(\log_2 n)^2 - 3 \log_2 n < 0$
 $\log_2 n = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 3t < 0, t(t-3) < 0$
 $\therefore 0 < t < 3$
 $t = \log_2 n$ 이므로 $0 < \log_2 n < 3$
 $\log_2 1 < \log_2 n < \log_2 8$
 밑이 1보다 크므로 $1 < n < 8$
 따라서 자연수 n 은 2, 3, 4, ..., 7의 6개이다.

179 답 0 < x < 1/4 또는 x > 8

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 $x^{\log_2 x} > 64x$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면
 $\log_2 x^{\log_2 x} > \log_2 64x$
 $(\log_2 x)^2 > \log_2 64 + \log_2 x$
 $(\log_2 x)^2 - \log_2 x - 6 > 0$
 $\log_2 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - t - 6 > 0, (t+2)(t-3) > 0$
 $\therefore t < -2$ 또는 $t > 3$
 $t = \log_2 x$ 이므로 $\log_2 x < -2$ 또는 $\log_2 x > 3$
 $\log_2 x < \log_2 \frac{1}{4}$ 또는 $\log_2 x > \log_2 8$
 밑이 1보다 크므로 $x < \frac{1}{4}$ 또는 $x > 8 \quad \dots\dots \textcircled{B}$
 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 의 공통부분은 $0 < x < \frac{1}{4}$ 또는 $x > 8$

180 답 ①

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$
 $x^{\log_3 x - 3} \leq \frac{1}{9}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면
 $\log_3 x^{\log_3 x - 3} \leq \log_3 \frac{1}{9}$
 $(\log_3 x - 3) \log_3 x \leq -2$
 $(\log_3 x)^2 - 3 \log_3 x + 2 \leq 0$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 3t + 2 \leq 0, (t-1)(t-2) \leq 0$
 $\therefore 1 \leq t \leq 2$
 $t = \log_3 x$ 이므로 $1 \leq \log_3 x \leq 2$
 $\log_3 3 \leq \log_3 x \leq \log_3 9$
 밑이 1보다 크므로 $3 \leq x \leq 9$ ㉔
 ㉓, ㉔의 공통부분은 $3 \leq x \leq 9$
 따라서 $\alpha = 3, \beta = 9$ 이므로 $\frac{\beta}{\alpha} = 3$

181 답 ②

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉑
 $x^{\log_{\frac{1}{5}} x} \leq \frac{x^2}{125}$ 의 양변에 밑이 $\frac{1}{5}$ 인 로그를 취하면
 $\log_{\frac{1}{5}} x^{\log_{\frac{1}{5}} x} \geq \log_{\frac{1}{5}} \frac{x^2}{125}$
 $(\log_{\frac{1}{5}} x)^2 \geq \log_{\frac{1}{5}} x^2 - \log_{\frac{1}{5}} 125$
 $(\log_{\frac{1}{5}} x)^2 - 2 \log_{\frac{1}{5}} x - 3 \geq 0$
 $\log_{\frac{1}{5}} x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 2t - 3 \geq 0, (t+1)(t-3) \geq 0$
 $\therefore t \leq -1$ 또는 $t \geq 3$
 $t = \log_{\frac{1}{5}} x$ 이므로 $\log_{\frac{1}{5}} x \leq -1$ 또는 $\log_{\frac{1}{5}} x \geq 3$
 $\log_{\frac{1}{5}} x \leq \log_{\frac{1}{5}} 5$ 또는 $\log_{\frac{1}{5}} x \geq \log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{125}$
 밑이 1보다 작으므로 $x \geq 5$ 또는 $x \leq \frac{1}{125}$ ㉒
 ㉑, ㉒의 공통부분은 $0 < x \leq \frac{1}{125}$ 또는 $x \geq 5$
 따라서 정수 x 의 최솟값은 5이다.

182 답 $\frac{1}{100}$ 기압 이상 $\frac{1}{10}$ 기압 이하

평균 해수면에서 높이가 3320 m 이상 6640 m 이하인 곳의 기압을 x 기압이라 하면
 $3.32 \leq -3.32 \log x \leq 6.64$
 $-2 \leq \log x \leq -1$
 $\log \frac{1}{100} \leq \log x \leq \log \frac{1}{10}$
 밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{100} \leq x \leq \frac{1}{10}$
 따라서 구하는 기압의 범위는 $\frac{1}{100}$ 기압 이상 $\frac{1}{10}$ 기압 이하이다.

183 답 ②

골동품의 현재 가격을 a 원이라 하면 n 년 후의 가격은
 $a(1+0.11)^n = 1.11^n a$ (원)
 n 년 후의 가격이 현재 가격의 8배 이상이 된다고 하면
 $1.11^n a \geq 8a, 1.11^n \geq 8$
 양변에 상용로그를 취하면 $\log 1.11^n \geq \log 8$
 $n \log 1.11 \geq 3 \log 2, n \times 0.045 \geq 3 \times 0.3$
 $\therefore n \geq 20$
 따라서 골동품의 가격이 처음으로 현재 가격의 8배 이상이 되는 것은 최소 20년 후이다.

1 답 ①

$f(2) = 4$ 에서 $\log_a (2 \times 2 - 1) + 3 = 4$
 $\log_a 3 = 1 \quad \therefore a = 3$
 따라서 $f(x) = \log_3 (2x - 1) + 3$ 이므로
 $f(5) = \log_3 (2 \times 5 - 1) + 3 = 2 + 3 = 5$

2 답 ⑤

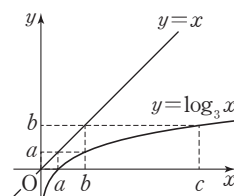
⑤ $y = \log_a \frac{1}{x} = \log_a x^{-1} = -\log_a x$ 이므로 $y = \log_a x$ 의 그래프는
 $y = \log_a \frac{1}{x}$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

3 답 16

$y = \log_2 4x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -6만큼 평행이동한 그래프의 식은
 $y = \log_2 4x - 6$
 이 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은
 $-y = \log_2 4x - 6$
 $y = -\log_2 4x + 6, y = -\log_2 4x + \log_2 64$
 $y = \log_2 \frac{64}{4x} \quad \therefore y = \log_2 \frac{16}{x}$
 이 식이 $y = \log_2 \frac{a}{x}$ 와 일치하므로
 $a = 16$

4 답 24

$y = \log_3 x$ 의 그래프와 x 축의 교점의 좌표가 $(1, 0)$ 이므로
 $a = 1$
 $y = \log_3 x$ 의 그래프가 점 $(b, 1)$ 을 지나므로
 $1 = \log_3 b \quad \therefore b = 3^1 = 3$
 $y = \log_3 x$ 의 그래프가 점 $(c, 3)$ 을 지나므로
 $3 = \log_3 c \quad \therefore c = 3^3 = 27$
 $\therefore c - b = 27 - 3 = 24$



5 답 ③

두 함수 $y = \log_5 (x - a) - 2, y = 5^{x+b} + 4$ 의 그래프가 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y = \log_5 (x - a) - 2$ 는 함수 $y = 5^{x+b} + 4$ 의 역함수이다.
 $y = 5^{x+b} + 4$ 에서 $y - 4 = 5^{x+b}$
 로그의 정의에 의하여 $x + b = \log_5 (y - 4)$
 $\therefore x = \log_5 (y - 4) - b$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = \log_5 (x - 4) - b$
 이 식이 $y = \log_5 (x - a) - 2$ 와 일치하므로
 $a = 4, b = 2 \quad \therefore a + b = 6$

6 답 B < C < A

$$B = -1 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5} \right)^{-1} = \log_{\frac{1}{5}} 5$$

$$C = \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{5}} 16 = \log_{\frac{1}{5}} \sqrt{16} = \log_{\frac{1}{5}} 4$$

이때 밑이 1보다 작고, $3 < 4 < 5$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{5}} 5 < \log_{\frac{1}{5}} 4 < \log_{\frac{1}{5}} 3$$

$$\therefore B < C < A$$

7 답 8

함수 $y = \log_2(x-a)$ 의 밑이 1보다 크므로

$3 \leq x \leq 18$ 일 때 함수 $y = \log_2(x-a)$ 는

$x=18$ 에서 최댓값 $\log_2(18-a)$,

$x=3$ 에서 최솟값 $\log_2(3-a)$ 를 갖는다.

즉, $\log_2(3-a)=0$ 이므로

$$3-a=1 \quad \therefore a=2 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\therefore b = \log_2(18-2) = \log_2 16 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore ab = 2 \times 4 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

i a의 값 구하기	50 %
ii b의 값 구하기	30 %
iii ab의 값 구하기	20 %

8 답 -2

$y = \log_{\frac{1}{3}}(-x^2+2x+9)$ 에서 $f(x) = -x^2+2x+9$ 라 하면

$$f(x) = -(x-1)^2+10$$

$2 \leq x \leq 4$ 에서 $f(2)=9$, $f(4)=1$ 이므로

$$1 \leq f(x) \leq 9$$

이때 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 의 밑이 1보다 작으므로

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 는

$$f(x)=1 \text{에서 최댓값 } \log_{\frac{1}{3}} 1=0,$$

$$f(x)=9 \text{에서 최솟값 } \log_{\frac{1}{3}} 9 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^{-2} = -2 \text{를 갖는다.}$$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 $0 + (-2) = -2$

9 답 ①

$$y = \log_2 2x \times \log_2 \frac{8}{x}$$

$$= (\log_2 2 + \log_2 x)(\log_2 8 - \log_2 x)$$

$$= (1 + \log_2 x)(3 - \log_2 x)$$

$$= -(\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x + 3$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } \frac{1}{2} \leq x \leq 2 \text{에서}$$

$$\log_2 \frac{1}{2} \leq \log_2 x \leq \log_2 2$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 1$$

이때 주어진 함수는 $y = -t^2 + 2t + 3 = -(t-1)^2 + 4$

즉, $-1 \leq t \leq 1$ 일 때 함수 $y = -(t-1)^2 + 4$ 는

$t=1$ 에서 최댓값 4, $t=-1$ 에서 최솟값 0을 갖는다.

따라서 $M=4$, $m=0$ 이므로 $M-m=4$

10 답 3

$$\text{진수의 조건에서 } x+3>0, x+1>0 \quad \therefore x>-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_{\sqrt{3}}(x+3) = \log_3(x+1) + 2 \text{에서}$$

$$\log_{(\sqrt{3})^2}(x+3)^2 = \log_3(x+1) + \log_3 9$$

$$\log_3(x+3)^2 = \log_3 9(x+1)$$

$$(x+3)^2 = 9(x+1)$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$

①에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x=0$ 또는 $x=3$

따라서 모든 근의 합은 $0+3=3$

11 답 $\frac{1}{16}$

$$\text{진수의 조건에서 } 4x>0, 8x^2>0 \quad \therefore x>0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(\log_2 4x)^2 - 2 \log_2 8x^2 = k \text{에서}$$

$$(\log_2 4 + \log_2 x)^2 - 2(\log_2 8 + \log_2 x^2) = k$$

$$(2 + \log_2 x)^2 - 2(3 + 2 \log_2 x) = k$$

$$(\log_2 x)^2 = k + 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 주어진 방정식의 한 근이 16이므로 $x=16$ 을 ②에 대입하면

$$(\log_2 16)^2 = k + 2$$

$$4^2 = k + 2 \quad \therefore k = 14 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

즉, $k=14$ 를 ②에 대입하면

$$(\log_2 x)^2 = 14 + 2$$

$$(\log_2 x)^2 = 16$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 = 16$$

$$\therefore t = -4 \text{ 또는 } t = 4$$

$$t = \log_2 x \text{이므로 } \log_2 x = -4 \text{ 또는 } \log_2 x = 4$$

$$\therefore x = 2^{-4} = \frac{1}{16} \text{ 또는 } x = 2^4 = 16$$

①에 의하여 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{1}{16}$ 또는 $x = 16$

따라서 다른 한 근은 $\frac{1}{16}$ 이다. $\dots\dots \textcircled{ii}$

채점 기준

i k의 값 구하기	50 %
ii 주어진 방정식의 다른 한 근 구하기	50 %

12 답 ③

동굴 입구의 밝기를 A라 하고 동굴 입구로부터 x m 들어간 곳의 밝기가 동굴 입구에서의 밝기의 10%가 된다고 하면

$$A \times \left(\frac{4}{5} \right)^x = \frac{A}{10}$$

$$\left(\frac{4}{5} \right)^x = \frac{1}{10}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log \left(\frac{4}{5} \right)^x = \log \frac{1}{10}, x(\log 4 - \log 5) = -1$$

$$x\{2 \log 2 - (1 - \log 2)\} = -1, x(3 \log 2 - 1) = -1$$

$$x(3 \times 0.3 - 1) = -1, -0.1x = -1$$

$$\therefore x = 10$$

따라서 빛의 밝기가 동굴 입구에서의 밝기의 10%가 되는 곳은 동굴 입구로부터 10 m 들어간 곳이다.

13 답 11

진수의 조건에서 $x+1>0$, $x-5>0$

$$\therefore x>5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\log_{\frac{1}{7}}(x+1)+\log_{\frac{1}{7}}(x-5)>-1 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{7}}(x+1)(x-5)>\log_{\frac{1}{7}}7$$

밑이 1보다 작으므로

$$(x+1)(x-5)<7$$

$$x^2-4x-12<0$$

$$(x+2)(x-6)<0$$

$$\therefore -2<x<6 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $5<x<6$

따라서 $\alpha=5$, $\beta=6$ 이므로 $\alpha+\beta=11$

14 답 ①

진수의 조건에서 $x>0$ $\dots\dots \textcircled{㉠}$

$$-\log_{\frac{1}{2}}x(\log_2 x+1)<2 \text{에서}$$

$$\log_2 x(\log_2 x+1)<2$$

$$(\log_2 x)^2+\log_2 x-2<0$$

$\log_2 x=t$ 로 놓으면

$$t^2+t-2<0$$

$$(t+2)(t-1)<0$$

$$\therefore -2<t<1$$

$$t=\log_2 x \text{이므로 } -2<\log_2 x<1$$

$$\log_2 \frac{1}{4}<\log_2 x<\log_2 2$$

밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{4}<x<2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $\frac{1}{4}<x<2$

따라서 정수 x 는 1의 1개이다.

15 답 25

진수의 조건에서 $x>0$ $\dots\dots \textcircled{㉠}$

$x^{\log_5 x} \leq 25x$ 의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$$\log_5 x^{\log_5 x} \leq \log_5 25x$$

$$(\log_5 x)^2 \leq \log_5 25 + \log_5 x$$

$$(\log_5 x)^2 - \log_5 x - 2 \leq 0$$

$\log_5 x=t$ 로 놓으면

$$t^2-t-2 \leq 0$$

$$(t+1)(t-2) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 2$$

$$t=\log_5 x \text{이므로 } -1 \leq \log_5 x \leq 2$$

$$\log_5 \frac{1}{5} \leq \log_5 x \leq \log_5 25$$

밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{5} \leq x \leq 25 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $\frac{1}{5} \leq x \leq 25$

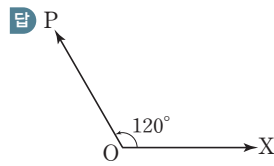
따라서 정수 x 의 최댓값은 25, 최솟값은 1이므로 구하는 곱은 $25 \times 1 = 25$

05 삼각함수

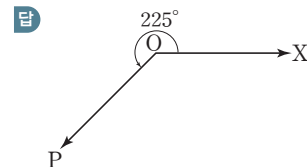
개념유형

111~112쪽

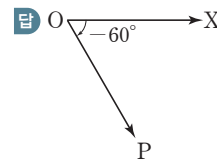
001



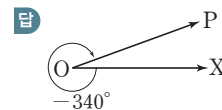
002



003



004



005

$$\text{답 } 360^\circ \times n + 40^\circ$$

006

$$\text{답 } 360^\circ \times n + 125^\circ$$

007

$$\text{답 } 360^\circ \times n + 310^\circ$$

008

$$\text{답 } 360^\circ \times n + 245^\circ$$

009

$$\text{답 } 360^\circ \times n + 100^\circ$$

010

$$\text{답 } 360^\circ \times n + 120^\circ$$

$$480^\circ = 360^\circ \times 1 + 120^\circ \text{이므로 } 360^\circ \times n + 120^\circ$$

011

$$\text{답 } 360^\circ \times n + 45^\circ$$

$$765^\circ = 360^\circ \times 2 + 45^\circ \text{이므로 } 360^\circ \times n + 45^\circ$$

012

$$\text{답 } 360^\circ \times n + 150^\circ$$

$$-210^\circ = 360^\circ \times (-1) + 150^\circ \text{이므로 } 360^\circ \times n + 150^\circ$$

013

$$\text{답 } 360^\circ \times n + 90^\circ$$

$$-630^\circ = 360^\circ \times (-2) + 90^\circ \text{이므로 } 360^\circ \times n + 90^\circ$$

014 답 $360^\circ \times n + 30^\circ$

$-1050^\circ = 360^\circ \times (-3) + 30^\circ$ 이므로 $360^\circ \times n + 30^\circ$

실전유형

112쪽

015 답 ④

- ① $-660^\circ = 360^\circ \times (-2) + 60^\circ$
- ② $-300^\circ = 360^\circ \times (-1) + 60^\circ$
- ③ $420^\circ = 360^\circ \times 1 + 60^\circ$
- ④ $750^\circ = 360^\circ \times 2 + 30^\circ$
- ⑤ $1140^\circ = 360^\circ \times 3 + 60^\circ$

따라서 동경 OP가 나타낼 수 없는 각은 ④이다.

016 답 ㄱ, ㄴ

- ㄱ. $-315^\circ = 360^\circ \times (-1) + 45^\circ$
- ㄴ. $-585^\circ = 360^\circ \times (-2) + 135^\circ$
- ㄷ. $225^\circ = 360^\circ \times 0 + 225^\circ$
- ㄹ. $1125^\circ = 360^\circ \times 3 + 45^\circ$

따라서 보기의 각을 나타내는 동경 중 45° 를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄱ, ㄹ이다.

017 답 ⑤

- ① $-600^\circ = 360^\circ \times (-2) + 120^\circ$
- ② $-240^\circ = 360^\circ \times (-1) + 120^\circ$
- ③ $480^\circ = 360^\circ \times 1 + 120^\circ$
- ④ $840^\circ = 360^\circ \times 2 + 120^\circ$
- ⑤ $1100^\circ = 360^\circ \times 3 + 20^\circ$

따라서 각을 나타내는 동경이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

개념유형

114~115쪽

018 답 75, 1

019 답 제2사분면

$510^\circ = 360^\circ \times 1 + 150^\circ$ 이므로 510° 는 제2사분면의 각이다.

020 답 제3사분면

$930^\circ = 360^\circ \times 2 + 210^\circ$ 이므로 930° 는 제3사분면의 각이다.

021 답 제4사분면

$-70^\circ = 360^\circ \times (-1) + 290^\circ$ 이므로 -70° 는 제4사분면의 각이다.

022 답 제2사분면

$-580^\circ = 360^\circ \times (-2) + 140^\circ$ 이므로 -580° 는 제2사분면의 각이다.

023 답 제4사분면

$-1145^\circ = 360^\circ \times (-4) + 295^\circ$ 이므로 -1145° 는 제4사분면의 각이다.

024 답 45, 45, 45, 1, 45, 180, 225, 3, 1, 3

025 답 제2사분면, 제4사분면

θ 가 제3사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore 180^\circ \times n + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 135^\circ$$

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,

$$180^\circ \times 2k + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times 2k + 135^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 135^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$180^\circ \times (2k+1) + 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times (2k+1) + 135^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 270^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 315^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면, 제4사분면이다.

026 답 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면

θ 가 제4사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 270^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 360^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore 120^\circ \times n + 90^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 120^\circ$$

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때,

$$120^\circ \times 3k + 90^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times 3k + 120^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 90^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 120^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$120^\circ \times (3k+1) + 90^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times (3k+1) + 120^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 210^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 240^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때,

$$120^\circ \times (3k+2) + 90^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times (3k+2) + 120^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 330^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 360^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii), (iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면이다.

027 답 90, 90, 2, 1, 90

028 답 240°

각 θ 를 나타내는 동경과 각 7θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$7\theta - \theta = 360^\circ \times n \quad (n \text{은 정수})$$

$$6\theta = 360^\circ \times n$$

$$\therefore \theta = 60^\circ \times n \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

그런데 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ 이므로 $180^\circ < 60^\circ \times n < 270^\circ$

$$\therefore 3 < n < \frac{9}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=4$

이를 ⑦에 대입하면 $\theta=240^\circ$

029 답 300°

각 θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$4\theta - \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$3\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 120^\circ \times n + 60^\circ \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

그런데 $180^\circ < \theta < 360^\circ$ 이므로 $180^\circ < 120^\circ \times n + 60^\circ < 360^\circ$

$$\therefore 1 < n < \frac{5}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=2$

이를 ⑦에 대입하면 $\theta=300^\circ$

030 답 108°

각 θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$$6\theta - \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$5\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 72^\circ \times n + 36^\circ \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

그런데 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $90^\circ < 72^\circ \times n + 36^\circ < 180^\circ$

$$\therefore \frac{3}{4} < n < 2$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1$

이를 ⑦에 대입하면 $\theta=108^\circ$

031 답 90, 90, 4, 3, 270

032 답 144°

각 θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 4\theta = 360^\circ \times n \quad (n \text{은 정수})$$

$$5\theta = 360^\circ \times n$$

$$\therefore \theta = 72^\circ \times n \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

그런데 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $90^\circ < 72^\circ \times n < 180^\circ$

$$\therefore \frac{5}{4} < n < \frac{5}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=2$

이를 ⑦에 대입하면 $\theta=144^\circ$

033 답 210°

각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 5\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$6\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ \times n + 30^\circ \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

그런데 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ 이므로 $180^\circ < 60^\circ \times n + 30^\circ < 270^\circ$

$$\therefore \frac{5}{2} < n < 4$$

이때 n 은 정수이므로 $n=3$

이를 ⑦에 대입하면 $\theta=210^\circ$

034 답 150°

각 θ 를 나타내는 동경과 각 2θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 2\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$3\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ$$

$$\therefore \theta = 120^\circ \times n + 30^\circ \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

그런데 $90^\circ < \theta < 270^\circ$ 이므로 $90^\circ < 120^\circ \times n + 30^\circ < 270^\circ$

$$\therefore \frac{1}{2} < n < 2$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1$

이를 ⑦에 대입하면 $\theta=150^\circ$

실전유형

116쪽

035 답 ②

① $400^\circ = 360^\circ \times 1 + 40^\circ$ 이므로 400° 는 제1사분면의 각이다.

② $565^\circ = 360^\circ \times 1 + 205^\circ$ 이므로 565° 는 제3사분면의 각이다.

③ $710^\circ = 360^\circ \times 1 + 350^\circ$ 이므로 710° 는 제4사분면의 각이다.

④ $-640^\circ = 360^\circ \times (-2) + 80^\circ$ 이므로 -640° 는 제1사분면의 각이다.

⑤ $-910^\circ = 360^\circ \times (-3) + 170^\circ$ 이므로 -910° 는 제2사분면의 각이다.

따라서 각을 나타내는 동경이 제3사분면에 있는 것은 ②이다.

036 답 ①

3θ 가 제2사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 90^\circ < 3\theta < 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore 120^\circ \times n + 30^\circ < \theta < 120^\circ \times n + 60^\circ$$

(i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때,

$$120^\circ \times 3k + 30^\circ < \theta < 120^\circ \times 3k + 60^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 30^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 60^\circ$$

따라서 θ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$120^\circ \times (3k+1) + 30^\circ < \theta < 120^\circ \times (3k+1) + 60^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 150^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 180^\circ$$

따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때,

$$120^\circ \times (3k+2) + 30^\circ < \theta < 120^\circ \times (3k+2) + 60^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 270^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 300^\circ$$

따라서 θ 는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii), (iii)에서 각 θ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제1사분면, 제2사분면, 제4사분면이다.

따라서 각 θ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제3사분면이다.

037 답 6

2θ 가 제4사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 270^\circ < 2\theta < 360^\circ \times n + 360^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore 180^\circ \times n + 135^\circ < \theta < 180^\circ \times n + 180^\circ$$

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,

$$180^\circ \times 2k + 135^\circ < \theta < 180^\circ \times 2k + 180^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 135^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 180^\circ$$

따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$180^\circ \times (2k+1) + 135^\circ < \theta < 180^\circ \times (2k+1) + 180^\circ$$

$$\therefore 360^\circ \times k + 315^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 360^\circ$$

따라서 θ 는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이므로

$$a=2 \text{ 또는 } a=4$$

따라서 모든 a 의 값의 합은 $2+4=6$

038 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

각 θ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 3\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad \therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $90^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 180^\circ$

$$\therefore \frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1$

이를 ①에 대입하면 $\theta=135^\circ$

$$\therefore \sin(\theta - 75^\circ) = \sin(135^\circ - 75^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

039 답 270°

각 θ 를 나타내는 동경과 각 7θ 를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대이므로

$$7\theta - \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$6\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad \therefore \theta = 60^\circ \times n + 30^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $0^\circ < 60^\circ \times n + 30^\circ < 180^\circ$

$$\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{5}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$

이를 ①에 대입하면 $\theta=30^\circ$ 또는 $\theta=90^\circ$ 또는 $\theta=150^\circ$

따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은

$$30^\circ + 90^\circ + 150^\circ = 270^\circ$$

040 답 6

각 2θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$2\theta + 4\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$6\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ$$

$$\therefore \theta = 60^\circ \times n + 15^\circ \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $0^\circ < \theta < 360^\circ$ 이므로 $0^\circ < 60^\circ \times n + 15^\circ < 360^\circ$

$$\therefore -\frac{1}{4} < n < \frac{23}{4}$$

이때 n 은 정수이므로

$$n=0 \text{ 또는 } n=1 \text{ 또는 } n=2 \text{ 또는 } n=3 \text{ 또는 } n=4 \text{ 또는 } n=5$$

이를 ①에 대입하면

$$\theta = 15^\circ \text{ 또는 } \theta = 75^\circ \text{ 또는 } \theta = 135^\circ \text{ 또는 } \theta = 195^\circ \text{ 또는 } \theta = 255^\circ$$

$$\text{또는 } \theta = 315^\circ$$

따라서 구하는 각 θ 의 개수는 6이다.

041 답 ⑤

각 3θ 를 나타내는 동경과 각 8θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$8\theta - 3\theta = 360^\circ \times n \quad (n \text{은 정수})$$

$$5\theta = 360^\circ \times n$$

$$\therefore \theta = 72^\circ \times n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그런데 $0^\circ < \theta < 360^\circ$ 이므로 $0^\circ < 72^\circ \times n < 360^\circ$

$$\therefore 0 < n < 5$$

이때 n 은 정수이므로

$$n=1 \text{ 또는 } n=2 \text{ 또는 } n=3 \text{ 또는 } n=4$$

이를 ①에 대입하면

$$\theta = 72^\circ \text{ 또는 } \theta = 144^\circ \text{ 또는 } \theta = 216^\circ \text{ 또는 } \theta = 288^\circ$$

따라서 각 θ 의 크기의 최댓값은 288° , 최솟값은 72° 이므로 구하는 합은

$$288^\circ + 72^\circ = 360^\circ$$

개념유형

118~119쪽

042 답 $\frac{\pi}{180}, \frac{5}{12}$

043 답 $\frac{5}{6}\pi$

$$150^\circ = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{6}\pi$$

044 답 $\frac{4}{3}\pi$

$$240^\circ = 240 \times \frac{\pi}{180} = \frac{4}{3}\pi$$

045 답 $-\frac{3}{5}\pi$

$$-108^\circ = -108 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{3}{5}\pi$$

046 답 $-\frac{7}{6}\pi$

$$-210^\circ = -210 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{7}{6}\pi$$

047 답 $-\frac{7}{4}\pi$

$$-315^\circ = -315 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{7}{4}\pi$$

048 답 180, 36

049 답 120°

$$\frac{2}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 120^\circ$$

050 답 330°

$$\frac{11}{6}\pi = \frac{11}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 330^\circ$$

051 답 -54°

$$-\frac{3}{10}\pi = -\frac{3}{10}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -54^\circ$$

052 답 -105°

$$-\frac{7}{12}\pi = -\frac{7}{12}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -105^\circ$$

053 답 -260°

$$-\frac{13}{9}\pi = -\frac{13}{9}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -260^\circ$$

054 답 $2n\pi + \pi$

$$5\pi = 2\pi \times 2 + \pi \text{이므로}$$

$$2n\pi + \pi$$

055 답 $2n\pi + \frac{3}{2}\pi$

$$\frac{7}{2}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{3}{2}\pi \text{이므로 } 2n\pi + \frac{3}{2}\pi$$

056 답 $2n\pi + \frac{2}{3}\pi$

$$\frac{14}{3}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{2}{3}\pi \text{이므로 } 2n\pi + \frac{2}{3}\pi$$

057 답 $2n\pi + \frac{3}{4}\pi$

$$-\frac{5}{4}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{3}{4}\pi \text{이므로 } 2n\pi + \frac{3}{4}\pi$$

058 답 $2n\pi + \frac{7}{5}\pi$

$$-\frac{3}{5}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{7}{5}\pi \text{이므로 } 2n\pi + \frac{7}{5}\pi$$

059 답 $2n\pi + \frac{\pi}{6}$

$$-\frac{23}{6}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{\pi}{6} \text{이므로 } 2n\pi + \frac{\pi}{6}$$

실전유형

119쪽

060 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } -200^\circ = -200 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{10}{9}\pi$$

$$\text{ㄴ. } 135^\circ = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{ㄷ. } \frac{2}{5}\pi = \frac{2}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 72^\circ$$

$$\text{ㄹ. } \frac{5}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 300^\circ$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

061 답 ④

$$30^\circ = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{① } -\frac{7}{4}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{\pi}{4}$$

$$\text{② } -\frac{5}{3}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{\pi}{3}$$

$$\text{③ } -\frac{3}{2}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{\pi}{2}$$

$$\text{④ } \frac{13}{6}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{⑤ } \frac{11}{5}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{\pi}{5}$$

따라서 각을 나타내는 동경이 30° 를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ④이다.

062 답 ②

$$\text{① } -350^\circ = 360^\circ \times (-1) + 10^\circ \text{이므로 } -350^\circ \text{는 제1사분면의 각이다.}$$

$$\text{② } -\frac{\pi}{6} = 2\pi \times (-1) + \frac{11}{6}\pi \text{이므로 } -\frac{\pi}{6} \text{는 제4사분면의 각이다.}$$

$$\text{③ } \frac{9}{4}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{\pi}{4} \text{이므로 } \frac{9}{4}\pi \text{는 제1사분면의 각이다.}$$

$$\text{④ } 760^\circ = 360^\circ \times 2 + 40^\circ \text{이므로 } 760^\circ \text{는 제1사분면의 각이다.}$$

$$\text{⑤ } \frac{49}{8}\pi = 2\pi \times 3 + \frac{\pi}{8} \text{이므로 } \frac{49}{8}\pi \text{는 제1사분면의 각이다.}$$

따라서 각을 나타내는 동경이 존재하는 사분면이 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다.

개념유형

121~122쪽

063 답 $\frac{\pi}{6}, \frac{4}{3}\pi, \frac{\pi}{6}, \frac{16}{3}\pi$

064 답 $l = \frac{3}{2}\pi, S = \frac{3}{2}\pi$

$$l = 2 \times \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

$$S = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{3}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi$$

065 답 $l = 6\pi, S = 27\pi$

$$l = 9 \times \frac{2}{3}\pi = 6\pi$$

$$S = \frac{1}{2} \times 9^2 \times \frac{2}{3}\pi = 27\pi$$

066 답 $l = 16\pi, S = 96\pi$

$$240^\circ = 240 \times \frac{\pi}{180} = \frac{4}{3}\pi \text{이므로}$$

$$l = 12 \times \frac{4}{3}\pi = 16\pi$$

$$S = \frac{1}{2} \times 12^2 \times \frac{4}{3}\pi = 96\pi$$

067 답 $\frac{\pi}{4}, 8, 8, 8\pi, 8, 8\pi$

068 답 $r = 6, S = 12\pi$

$$r \times \frac{2}{3}\pi = 4\pi \text{이므로 } r = 6$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times 6 \times 4\pi = 12\pi$$

069 답 $r = 10, S = 30\pi$

$$r \times \frac{3}{5}\pi = 6\pi \text{이므로 } r = 10$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times 10 \times 6\pi = 30\pi$$

070 답 $r = \frac{4}{7}, S = \frac{4}{21}\pi$

$$r \times \frac{7}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi \text{이므로 } r = \frac{4}{7}$$

$$\therefore S = \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} \times \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{21}\pi$$

071 답 $3, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi$

072 답 $\theta = \frac{4}{5}\pi, l = 4\pi$

$$\frac{1}{2} \times 5^2 \times \theta = 10\pi \text{이므로 } \theta = \frac{4}{5}\pi$$

$$\therefore l = 5 \times \frac{4}{5}\pi = 4\pi$$

073 답 $\theta = \frac{3}{2}\pi, l = 6\pi$

$$\frac{1}{2} \times 4^2 \times \theta = 12\pi \text{이므로 } \theta = \frac{3}{2}\pi$$

$$\therefore l = 4 \times \frac{3}{2}\pi = 6\pi$$

074 답 $\theta = \frac{\pi}{9}, l = \frac{2}{3}\pi$

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \theta = 2\pi \text{이므로 } \theta = \frac{\pi}{9}$$

$$\therefore l = 6 \times \frac{\pi}{9} = \frac{2}{3}\pi$$

075 답 $\frac{\pi}{4}, 16, 4, 4, \pi$

076 답 $r = 2, l = 3\pi$

$$\frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{3}{2}\pi = 3\pi \text{이므로}$$

$$r^2 = 4 \quad \therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

$$\therefore l = 2 \times \frac{3}{2}\pi = 3\pi$$

077 답 $r = 6, l = \frac{5}{2}\pi$

$$\frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{5}{12}\pi = \frac{15}{2}\pi \text{이므로}$$

$$r^2 = 36 \quad \therefore r = 6 \quad (\because r > 0)$$

$$\therefore l = 6 \times \frac{5}{12}\pi = \frac{5}{2}\pi$$

078 답 $r = 3, l = \frac{6}{5}\pi$

$$\frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{2}{5}\pi = \frac{9}{5}\pi \text{이므로}$$

$$r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 \quad (\because r > 0)$$

$$\therefore l = 3 \times \frac{2}{5}\pi = \frac{6}{5}\pi$$

실전유형

122~123쪽

079 답 ④

부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$6 \times \theta = 4\pi \text{이므로 } \theta = \frac{2}{3}\pi$$

080 답 24

$$a \times \pi = 6\pi \text{이므로 } a = 6$$

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 6\pi = b\pi \text{이므로 } 18\pi = b\pi \quad \therefore b = 18$$

$$\therefore a + b = 6 + 18 = 24$$

081 답 ②

$$\frac{1}{2} \times r \times 3\pi = 9\pi \text{이므로 } r = 6$$

$$6 \times \theta = 3\pi \text{이므로 } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore r + \frac{2\theta}{\pi} = 6 + \frac{2 \times \frac{\pi}{2}}{\pi} = 7$$

082 답 ⑤

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면

$$\frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{4}{3} \pi = 6\pi \text{이므로 } r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 \quad (\because r > 0)$$

$$\therefore l = 3 \times \frac{4}{3} \pi = 4\pi$$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는 $2 \times 3 + 4\pi = 6 + 4\pi$

083 답 $\frac{\pi}{2}$

원뿔의 전개도에서 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$$2\pi \times 2 = 4\pi$$

$\angle AOB = \theta$ 라 하면 부채꼴 OAB의 반지름의 길이가 8이므로

$$8 \times \theta = 4\pi \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \angle AOB = \frac{\pi}{2}$$

084 답 ⑤

원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 부채꼴의 호의 길이는 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

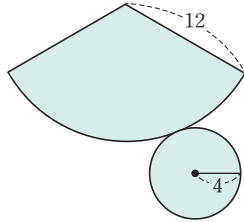
$$2\pi \times 4 = 8\pi$$

옆면인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 8\pi = 48\pi$$

따라서 원뿔의 겉넓이는

$$48\pi + \pi \times 4^2 = 64\pi$$



085 답 ③

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 둘레의 길이가 12이므로 호의 길이는

$$12 - 2r$$

이때 $r > 0$, $12 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 6$

부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} r(12 - 2r) = -r^2 + 6r = -(r - 3)^2 + 9 \quad (0 < r < 6)$$

따라서 $r = 3$ 에서 최댓값을 가지므로 구하는 반지름의 길이는 3이다.

086 답 27

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 둘레의 길이가 20이므로 호의 길이는

$$20 - 2r$$

이때 $r > 0$, $20 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 10$

부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} r(20 - 2r) = -r^2 + 10r = -(r - 5)^2 + 25 \quad (0 < r < 10)$$

즉, $r = 5$ 에서 최댓값 25를 가지므로 $M = 25$

이때 부채꼴의 중심각의 크기가 θ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 5^2 \times \theta = 25 \quad \therefore \theta = 2$$

$$\therefore M + \theta = 25 + 2 = 27$$

다른 풀이

$r = 5$ 에서 부채꼴의 넓이는 최댓값을 가지므로 호의 길이는

$$20 - 2 \times 5 = 10$$

이때 부채꼴의 중심각의 크기가 θ 이므로

$$5 \times \theta = 10$$

$$\therefore \theta = 2$$

087 답 ②

부채꼴의 반지름의 길이를 r m라 하면 둘레의 길이가 60 m이므로 호의 길이는

$$(60 - 2r) \text{ m}$$

이때 $r > 0$, $60 - 2r > 0$ 이므로

$$0 < r < 30$$

부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} r(60 - 2r) = -r^2 + 30r$$

$$= -(r - 15)^2 + 225 (\text{m}^2) \quad (0 < r < 30)$$

따라서 $r = 15$ 에서 최댓값 225 m^2 를 가지므로 꽃밭의 넓이의 최댓값은 225 m^2 이다.

개념유형

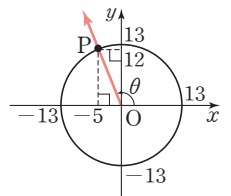
124~125쪽

088 답 4, 5, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$

089 답 $\sin \theta = \frac{12}{13}$, $\cos \theta = -\frac{5}{13}$, $\tan \theta = -\frac{12}{5}$

$\overline{OP} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ 이므로

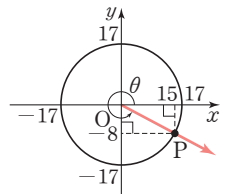
$$\sin \theta = \frac{12}{13}, \cos \theta = -\frac{5}{13}, \tan \theta = -\frac{12}{5}$$



090 답 $\sin \theta = -\frac{8}{17}$, $\cos \theta = \frac{15}{17}$, $\tan \theta = -\frac{8}{15}$

$\overline{OP} = \sqrt{15^2 + (-8)^2} = 17$ 이므로

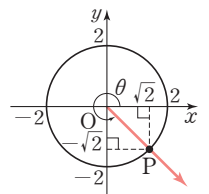
$$\sin \theta = -\frac{8}{17}, \cos \theta = \frac{15}{17}, \tan \theta = -\frac{8}{15}$$



091 답 $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan \theta = -1$

$\overline{OP} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$ 이므로

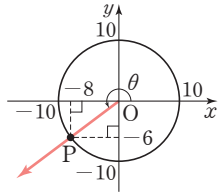
$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = -1$$



092 **답** $\sin \theta = -\frac{3}{5}, \cos \theta = -\frac{4}{5}, \tan \theta = \frac{3}{4}$

$\overline{OP} = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = 10$ 이므로

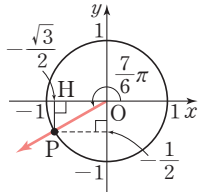
$\sin \theta = -\frac{3}{5}, \cos \theta = -\frac{4}{5}, \tan \theta = \frac{3}{4}$



093 **답** $1, \frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1$

094 **답** $\sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 $\theta = \frac{7}{6}\pi$ 를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OP} = 1$ 이고 $\angle POH = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$\overline{PH} = \overline{OP} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

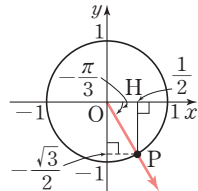
$\overline{OH} = \overline{OP} \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ 이므로

$\sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$

095 **답** $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = \frac{1}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 $\theta = -\frac{\pi}{3}$ 를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OP} = 1$ 이고 $\angle POH = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$\overline{PH} = \overline{OP} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

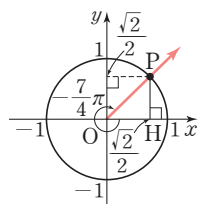
$\overline{OH} = \overline{OP} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 이므로

$\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = \frac{1}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$

096 **답** $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = 1$

오른쪽 그림과 같이 $\theta = \frac{7}{4}\pi$ 를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OP} = 1$ 이고 $\angle POH = \frac{\pi}{4}$ 이므로

$\overline{PH} = \overline{OP} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{OH} = \overline{OP} \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 이므로

$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = 1$

실전유형

125쪽

097 **답** 10

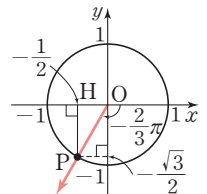
$\overline{OP} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$ 이므로

$\sin \theta = -\frac{4}{5}, \cos \theta = -\frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}$

$\therefore 5 \sin \theta - 10 \cos \theta + 6 \tan \theta$
 $= 5 \times (-\frac{4}{5}) - 10 \times (-\frac{3}{5}) + 6 \times \frac{4}{3}$
 $= 10$

098 **답** -2

오른쪽 그림과 같이 $\theta = -\frac{2}{3}\pi$ 를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{OP} = 1$ 이고 $\angle POH = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$\overline{PH} = \overline{OP} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{OH} = \overline{OP} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

따라서 점 P의 좌표는 $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ 이므로

$\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = \frac{1}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$

$\therefore \sin \theta \tan \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

099 **답** ⑤

점 $P(a, -\frac{1}{2})$ 에서 $\tan \theta = \frac{-\frac{1}{2}}{a} = -\frac{1}{2a}$

즉, $-\frac{1}{2a} = -2$ 이므로 $4a = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{4}$

따라서 점 P의 좌표는 $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ 이므로

$\overline{OP} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

개념유형

126~127쪽

100 **답** 4, <, >, <

101 **답** $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$

$\frac{9}{4}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{\pi}{4}$ 에서 θ 는 제1사분면의 각이므로
 $\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0$

102 **답** $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$

$-\frac{5}{12}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{19}{12}\pi$ 에서 θ 는 제4사분면의 각이므로
 $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$

103 **답** $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

$480^\circ = 360^\circ \times 1 + 120^\circ$ 에서 θ 는 제2사분면의 각이므로
 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$

104 **답** $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$

$-135^\circ = 360^\circ \times (-1) + 225^\circ$ 에서 θ 는 제3사분면의 각이므로
 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$

105 **답** 제2사분면

$\sin \theta > 0$ 이면 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고,
 $\cos \theta < 0$ 이면 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.
 따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.

106 **답** 제3사분면

$\sin \theta < 0$ 이면 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이고,
 $\tan \theta > 0$ 이면 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.
 따라서 θ 는 제3사분면의 각이다.

107 **답** 제4사분면

$\cos \theta > 0$ 이면 θ 는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이고,
 $\tan \theta < 0$ 이면 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.
 따라서 θ 는 제4사분면의 각이다.

108 **답** $>, <, >, 1, <, 3, 1, 3$

109 **답** 제3사분면 또는 제4사분면

$\cos \theta \tan \theta < 0$ 에서
 $\cos \theta > 0, \tan \theta < 0$ 또는 $\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$
 $\cos \theta > 0, \tan \theta < 0$ 이면 θ 는 제4사분면의 각이고,
 $\cos \theta < 0, \tan \theta > 0$ 이면 θ 는 제3사분면의 각이다.
 따라서 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

110 **답** 제1사분면 또는 제4사분면

$\frac{\tan \theta}{\sin \theta} > 0$ 에서
 $\sin \theta > 0, \tan \theta > 0$ 또는 $\sin \theta < 0, \tan \theta < 0$
 $\sin \theta > 0, \tan \theta > 0$ 이면 θ 는 제1사분면의 각이고,
 $\sin \theta < 0, \tan \theta < 0$ 이면 θ 는 제4사분면의 각이다.
 따라서 θ 는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

실전유형

127쪽

111 **답** ③

θ 가 제3사분면의 각이므로
 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$
 ㄴ. $\tan \theta - \cos \theta > 0$
 ㄷ. $\frac{\sin \theta}{\tan \theta} < 0$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

112 **답** 제2사분면

(i) $\sin \theta \tan \theta < 0$ 에서
 $\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 또는 $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$
 $\sin \theta > 0, \tan \theta < 0$ 이면 θ 는 제2사분면의 각이고,
 $\sin \theta < 0, \tan \theta > 0$ 이면 θ 는 제3사분면의 각이다.
 따라서 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.
 (ii) $\cos \theta \tan \theta > 0$ 에서
 $\cos \theta > 0, \tan \theta > 0$ 또는 $\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$
 $\cos \theta > 0, \tan \theta > 0$ 이면 θ 는 제1사분면의 각이고,
 $\cos \theta < 0, \tan \theta < 0$ 이면 θ 는 제2사분면의 각이다.
 따라서 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이다.
 (i), (ii)에서 θ 는 제2사분면의 각이다.

113 **답** $\cos \theta$

$\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 이므로
 $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$
 $\therefore |\sin \theta - \cos \theta| = -\sqrt{\sin^2 \theta}$
 $= -(\sin \theta - \cos \theta) - (-\sin \theta)$
 $= -\sin \theta + \cos \theta + \sin \theta$
 $= \cos \theta$

개념유형

129~130쪽

114 **답** 1, 1, 1, $\frac{16}{25}, <, -\frac{4}{5}, \frac{4}{3}$

115 **답** $\cos \theta = \frac{5}{13}, \tan \theta = -\frac{12}{5}$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서
 $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169}$
 그런데 θ 가 제4사분면의 각이므로 $\cos \theta > 0$
 $\therefore \cos \theta = \frac{5}{13}$
 $\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$

116 **답** $\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan \theta = 2\sqrt{2}$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$

그런데 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\sin \theta > 0$

$\therefore \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$

117 **답** $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

그런데 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 $\cos \theta < 0$

$\therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

118 **답** 2

$(\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2$
 $= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$
 $= 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$
 $= 2$

119 **답** $\frac{2}{\sin \theta}$

$\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$
 $= \frac{\sin \theta(1 - \cos \theta) + \sin \theta(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}$
 $= \frac{\sin \theta - \sin \theta \cos \theta + \sin \theta + \sin \theta \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta}$
 $= \frac{2 \sin \theta}{\sin^2 \theta}$
 $= \frac{2}{\sin \theta}$

120 **답** $\frac{1}{\cos \theta}$

$\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \tan \theta = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$
 $= \frac{\cos^2 \theta - \sin \theta(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta) \cos \theta}$
 $= \frac{\cos^2 \theta - \sin \theta + \sin^2 \theta}{(1 - \sin \theta) \cos \theta}$
 $= \frac{1 - \sin \theta}{(1 - \sin \theta) \cos \theta}$
 $= \frac{1}{\cos \theta}$

121 **답** $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{8}$

122 **답** $-\frac{4}{3}$

$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{3}{8}} = -\frac{4}{3}$

123 **답** $-\frac{8}{3}$

$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{-\frac{3}{8}} = -\frac{8}{3}$

124 **답** $\frac{11}{16}$

$\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$
 $= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$
 $= \frac{1}{2} \times \left\{ 1 - \left(-\frac{3}{8}\right) \right\}$
 $= \frac{11}{16}$

125 **답** $\frac{4}{9}$

$\sin \theta - \cos \theta = -\frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$

$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9}$

$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$

126 **답** $\frac{9}{4}$

$\frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\frac{4}{9}} = \frac{9}{4}$

127 **답** $\pm \frac{\sqrt{17}}{3}$

$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$
 $= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$
 $= 1 + 2 \times \frac{4}{9} = \frac{17}{9}$

$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{17}}{3}$

128 **답** $-\frac{13}{27}$

$\sin^3 \theta - \cos^3 \theta = (\sin \theta - \cos \theta)(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$
 $= \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(1 + \frac{4}{9}\right) = -\frac{13}{27}$

129 **답** 1, 1, $\frac{2}{5}, \frac{9}{5}, <, <, -\frac{3\sqrt{5}}{5}$

130 **답** $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}(\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\&= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\&= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 2\end{aligned}$$

그런데 θ 가 제2사분면의 각이므로 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$
즉, $\sin \theta - \cos \theta > 0$ 이므로
 $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2}$

131 **답** $\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\begin{aligned}(\cos \theta - \sin \theta)^2 &= \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \\&= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\&= 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

그런데 θ 가 제4사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta > 0$
즉, $\cos \theta - \sin \theta > 0$ 이므로
 $\cos \theta - \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

132 **답** $-\frac{1}{2}, \frac{k}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, k, -\frac{3}{4}$

133 **답** $-\frac{4}{3}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡을 ㉢에 대입하면

$$1 + \frac{2}{3}k = \frac{1}{9} \quad \therefore k = -\frac{4}{3}$$

134 **답** $2\sqrt{6}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{k}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{k^2}{16}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{k^2}{16} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

㉡을 ㉢에 대입하면

$$1 + 2 \times \frac{1}{4} = \frac{k^2}{16}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{k^2}{16}$$

$$k^2 = 24$$

$$\therefore k = 2\sqrt{6} \quad (\because k > 0)$$

실전유형

131~132쪽

135 **답** ②

$$\begin{aligned}\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} &= \frac{\cos^2 \theta + (1 - \sin \theta)^2}{(1 - \sin \theta) \cos \theta} \\&= \frac{\cos^2 \theta + 1 - 2 \sin \theta + \sin^2 \theta}{(1 - \sin \theta) \cos \theta} \\&= \frac{2(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta) \cos \theta} \\&= \frac{2}{\cos \theta}\end{aligned}$$

136 **답** 2

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta (1 - \tan \theta)^2 + \cos^2 \theta (1 + \tan \theta)^2 \\&= \cos^2 \theta \{(1 - \tan \theta)^2 + (1 + \tan \theta)^2\} \\&= \cos^2 \theta (1 - 2 \tan \theta + \tan^2 \theta + 1 + 2 \tan \theta + \tan^2 \theta) \\&= \cos^2 \theta (2 + 2 \tan^2 \theta) \\&= 2 \cos^2 \theta \left(1 + \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}\right) \\&= 2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\&= 2\end{aligned}$$

137 **답** ④

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \sin^4 \theta - \cos^4 \theta &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\&= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\&= (1 - \cos^2 \theta) - \cos^2 \theta \\&= 1 - 2 \cos^2 \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{2} \frac{\cos \theta - \cos^3 \theta}{\sin^3 \theta} &= \frac{\cos \theta (1 - \cos^2 \theta)}{\sin^3 \theta} \\&= \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{\sin^3 \theta} \\&= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\&= \frac{1}{\tan \theta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{3} \frac{1 - \sin^4 \theta}{\cos^2 \theta} + \cos^2 \theta &= \frac{(1 + \sin^2 \theta)(1 - \sin^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta} + \cos^2 \theta \\&= 1 + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\&= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{4} \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} + \cos \theta \tan \theta &= \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 + \sin \theta} + \cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\&= \frac{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{1 + \sin \theta} + \sin \theta \\&= 1 - \sin \theta + \sin \theta \\&= 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\textcircled{5} \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \\&= \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 - \cos \theta} \\&= \frac{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{1 + \cos \theta} + \frac{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{1 - \cos \theta} \\&= 1 - \cos \theta + 1 + \cos \theta = 2\end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

138 ④

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에서}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\text{한편 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이므로 } \cos \theta < 0$$

$$\cos^2 \theta = \frac{4}{9} \text{에서 } \cos \theta = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin^2 \theta + \cos \theta = \frac{5}{9} + \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{9}$$

139 $-\frac{1}{3}$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에서}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\text{그런데 } \theta \text{가 제3사분면의 각이므로 } \cos \theta < 0$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta = -\frac{5}{3} + \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

140 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\tan \theta = -2 \text{에서 } \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -2$$

$$\therefore \sin \theta = -2 \cos \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에서}$$

$$(-2 \cos \theta)^2 + \cos^2 \theta = 1, 5 \cos^2 \theta = 1$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\text{그런데 } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{이므로 } \cos \theta > 0$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{따라서 } \sin \theta = -2 \times \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{\sqrt{5}}{2} + \sqrt{5} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

141 ①

$$\frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{\sin \theta(1 + \sin \theta) - \sin \theta(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)}$$

$$= \frac{\sin \theta + \sin^2 \theta - (\sin \theta - \sin^2 \theta)}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{2 \sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2(1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta}$$

$$\text{즉, } \frac{2(1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} = 4 \text{이므로 } 1 - \cos^2 \theta = 2 \cos^2 \theta$$

$$3 \cos^2 \theta = 1 \quad \therefore \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$\text{그런데 } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이므로 } \cos \theta < 0$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

142 $-\frac{2\sqrt{10}}{5}$

$$(\cos \theta - \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 - 2 \times \left(-\frac{3}{10}\right) = \frac{8}{5}$$

$$\text{그런데 } \theta \text{가 제2사분면의 각이므로 } \sin \theta > 0, \cos \theta < 0$$

$$\text{즉, } \cos \theta - \sin \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\cos \theta - \sin \theta = -\frac{2\sqrt{10}}{5}$$

143 $\frac{9}{2}$

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{5}{9}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{5}{9} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{2}{9}$$

$$\therefore \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{9}{2}$$

144 $-\frac{\sqrt{17}}{9}$

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 1 - 2 \times \left(-\frac{4}{9}\right) = \frac{17}{9}$$

$$\text{그런데 } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{이므로 } \sin \theta < 0, \cos \theta > 0$$

$$\text{즉, } \sin \theta - \cos \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta - \cos \theta = -\frac{\sqrt{17}}{3}$$

$$\therefore \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta)$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(-\frac{\sqrt{17}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{17}}{9}$$

145 ①

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

$$\therefore (2 \sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta + 2 \cos \theta)$$

$$= 2 \sin^2 \theta + 5 \sin \theta \cos \theta + 2 \cos^2 \theta$$

$$= 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 5 \sin \theta \cos \theta$$

$$= 2 \times 1 + 5 \times \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{1}{8}$$

146 **답** ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{16}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{16} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

②를 ③에 대입하면

$$1 + 2 \times \frac{k}{4} = \frac{1}{16} \quad \therefore k = -\frac{15}{8}$$

147 **답** $-\frac{1}{3}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) = \frac{4}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) = \frac{k}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } 2 \sin \theta = \frac{4}{3} \quad \therefore \sin \theta = \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = \frac{k}{3}$$

$$\sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) = \frac{k}{3}$$

$$2 \sin^2 \theta - 1 = \frac{k}{3}$$

$$\sin \theta = \frac{2}{3} \text{를 대입하면}$$

$$2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 = \frac{k}{3}$$

$$\therefore k = -\frac{1}{3}$$

148 **답** ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\cos \theta + \tan \theta = \frac{k}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\cos \theta \tan \theta = -\frac{4}{5} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } \cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{4}{5} \quad \therefore \sin \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에서}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

$$\text{그런데 } \frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi \text{이므로 } \cos \theta > 0$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } \frac{3}{5} + \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{k}{5}$$

$$\therefore k = -\frac{11}{3}$$

실전유형으로 중단원 점검

133~134쪽

1 **답** ⑤

$$\textcircled{1} -625^\circ = 360^\circ \times (-2) + 95^\circ$$

$$\textcircled{2} -355^\circ = 360^\circ \times (-1) + 5^\circ$$

$$\textcircled{3} 475^\circ = 360^\circ \times 1 + 115^\circ$$

$$\textcircled{4} 805^\circ = 360^\circ \times 2 + 85^\circ$$

$$\textcircled{5} 1185^\circ = 360^\circ \times 3 + 105^\circ$$

따라서 동경 OP가 나타낼 수 있는 각은 ⑤이다.

2 **답** ⑤

$$\textcircled{1} 550^\circ = 360^\circ \times 1 + 190^\circ \text{이므로 } 550^\circ \text{는 제3사분면의 각이다.}$$

$$\textcircled{2} 735^\circ = 360^\circ \times 2 + 15^\circ \text{이므로 } 735^\circ \text{는 제1사분면의 각이다.}$$

$$\textcircled{3} 1020^\circ = 360^\circ \times 2 + 300^\circ \text{이므로 } 1020^\circ \text{는 제4사분면의 각이다.}$$

$$\textcircled{4} -510^\circ = 360^\circ \times (-2) + 210^\circ \text{이므로 } -510^\circ \text{는 제3사분면의 각이다.}$$

$$\textcircled{5} -920^\circ = 360^\circ \times (-3) + 160^\circ \text{이므로 } -920^\circ \text{는 제2사분면의 각이다.}$$

따라서 각을 나타내는 동경이 제2사분면에 있는 것은 ⑤이다.

3 **답** 180°

각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로

$$5\theta - \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad (n \text{은 정수})$$

$$4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad \therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{그런데 } 0^\circ < \theta < 180^\circ \text{이므로 } 0^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 180^\circ$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로

$$n=0 \text{ 또는 } n=1$$

이를 ①에 대입하면

$$\theta = 45^\circ \text{ 또는 } \theta = 135^\circ$$

따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은

$$45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$$

4 **답** ③

$$\textcircled{1} 10^\circ = 10 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{18}$$

$$\textcircled{2} 72^\circ = 72 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{5}\pi$$

$$\textcircled{3} 220^\circ = 220 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11}{9}\pi$$

$$\textcircled{4} \frac{10}{3}\pi = \frac{10}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 600^\circ$$

$$\textcircled{5} -\frac{7}{10}\pi = -\frac{7}{10}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -126^\circ$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

5 **답** $12+4\pi$

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면

$$\frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{2}{3}\pi = 12\pi \text{이므로}$$

$$r^2 = 36 \quad \therefore r = 6 \quad (\because r > 0)$$

..... i

$$\therefore l = 6 \times \frac{2}{3} \pi = 4\pi \quad \dots \text{ii}$$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$$2 \times 6 + 4\pi = 12 + 4\pi \quad \dots \text{iii}$$

채점 기준

i 부채꼴의 반지름의 길이 구하기	40 %
ii 부채꼴의 호의 길이 구하기	30 %
iii 부채꼴의 둘레의 길이 구하기	30 %

6 답 ④

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 둘레의 길이가 28이므로 호의 길이는

$$28 - 2r$$

이때 $r > 0$, $28 - 2r > 0$ 이므로

$$0 < r < 14$$

부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}r(28 - 2r) = -r^2 + 14r = -(r - 7)^2 + 49 \quad (0 < r < 14)$$

따라서 $r = 7$ 에서 최댓값을 가지므로 구하는 반지름의 길이는 7이다.

7 답 1

$$OP = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = -\frac{1}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \cos \theta - \sin \theta \tan \theta = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-\sqrt{3}) = 1$$

8 답 제3사분면

$\sin \theta \cos \theta > 0$ 에서

$\sin \theta > 0$, $\cos \theta > 0$ 또는 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta < 0$

이때 $\sin \theta + \cos \theta < 0$ 이라면 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta < 0$ 이어야 한다.

따라서 θ 는 제3사분면의 각이다.

9 답 ③

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{이므로 } \sin \theta > 0, \cos \theta < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{\sin^2 \theta} + \sqrt{\cos^2 \theta} - |\cos \theta - \sin \theta| \\ = \sin \theta + (-\cos \theta) - \{-(\cos \theta - \sin \theta)\} \\ = \sin \theta - \cos \theta + \cos \theta - \sin \theta \\ = 0 \end{aligned}$$

10 답 $2 \sin \theta$

$$\begin{aligned} & \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{1 - 2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta} \\ &= \frac{(\sin \theta + \cos \theta)^2}{\sin \theta + \cos \theta} + \frac{(\sin \theta - \cos \theta)^2}{\sin \theta - \cos \theta} \\ &= (\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) \\ &= 2 \sin \theta \end{aligned}$$

11 답 ⑤

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

그런데 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이므로 $\sin \theta < 0$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} = \sqrt{15}$$

$$\therefore \sin \theta + \tan \theta = -\frac{\sqrt{15}}{4} + \sqrt{15} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

12 답 $-\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 - 2 \times \left(-\frac{7}{18}\right) \\ &= \frac{16}{9} \end{aligned}$$

..... i

그런데 θ 가 제4사분면의 각이므로

$\sin \theta < 0$, $\cos \theta > 0$

..... ii

즉, $\sin \theta - \cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta = -\frac{4}{3}$$

..... iii

채점 기준

i $(\sin \theta - \cos \theta)^2$ 의 값 구하기	40 %
ii $\sin \theta$, $\cos \theta$ 의 값의 부호 구하기	30 %
iii $\sin \theta - \cos \theta$ 의 값 구하기	30 %

13 답 ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\cos \theta + \sin \theta) + (\cos \theta - \sin \theta) = \frac{1}{2} \quad \dots \text{㉠}$$

$$(\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta - \sin \theta) = \frac{k}{2} \quad \dots \text{㉡}$$

㉠에서

$$2 \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{4}$$

㉡에서

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{k}{2}$$

$$\cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = \frac{k}{2}$$

$$2 \cos^2 \theta - 1 = \frac{k}{2}$$

$\cos \theta = \frac{1}{4}$ 을 대입하면

$$2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = \frac{k}{2}$$

$$\therefore k = -\frac{7}{4}$$

06 삼각함수의 그래프

개념유형

135~136쪽

001 답 2, 5, 3, 3, 2, 1, 5

002 답 -1

함수 $f(x)$ 의 주기가 3이므로 $f(x+3)=f(x)$
 $\therefore f(14)=f(11+3)=f(11)$
 $=f(8+3)=f(8)$
 $=f(5+3)=f(5)$
 $=f(2+3)=f(2)=-1$

003 답 2

함수 $f(x)$ 의 주기가 5이므로 $f(x)=f(x+5)$
 $\therefore f(-16)=f(-16+5)=f(-11)$
 $=f(-11+5)=f(-6)$
 $=f(-6+5)=f(-1)=2$

004 답 2, 3, 1, 1, 1

005 답 -1

함수 $f(x)$ 의 주기가 3이므로 $f(x+3)=f(x)$
 $\therefore f(10)=f(7+3)=f(7)$
 $=f(4+3)=f(4)$
 $=f(1+3)=f(1)=-1$

006 답 -2

함수 $f(x)$ 의 주기가 4이므로 $f(x+4)=f(x)$
 $\therefore f(12)=f(8+4)=f(8)$
 $=f(4+4)=f(4)$
 $=f(0+4)=f(0)=0-2=-2$

007 답 1

함수 $f(x)$ 의 주기가 2이므로 $f(x+2)=f(x)$
 $\therefore f(8)=f(6+2)=f(6)$
 $=f(4+2)=f(4)$
 $=f(2+2)=f(2)$
 $=f(0+2)=f(0)=0+1=1$

008 답 -3

함수 $f(x)$ 의 주기가 4이므로 $f(x+4)=f(x)$
 $\therefore f(15)=f(11+4)=f(11)$
 $=f(7+4)=f(7)$
 $=f(3+4)=f(3)$
 $=f(-1+4)=f(-1)=2 \times (-1) - 1 = -3$

실전유형

136쪽

009 답 ⑤

함수 $f(x)$ 의 주기가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $f\left(x+\frac{1}{2}\right)=f(x)$
 $\therefore f(5)=f\left(\frac{9}{2}\right)=f(4)=\dots=f(2)=4$

010 답 2

(가)에서 $f(17)=f(14)=f(11)=\dots=f(2)$
 (나)에서 $f(2)=-2+4=2$
 $\therefore f(17)=f(2)=2$

011 답 ①

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2)=f(x-2)$ 이므로 양변에 x 대신 $x+2$ 를 대입하면
 $f(x+4)=f(x)$
 $\therefore f(24)=f(20)=f(16)=\dots=f(0)=-2,$
 $f(25)=f(21)=f(17)=\dots=f(1)=3$
 $\therefore f(24)-f(25)=-2-3=-5$

개념유형

138~139쪽

012 답 1, $-\pi$, $\frac{\pi}{2}$, 2π

013 답 실수

014 답 1, -1

015 답 원점

016 답 2π

017 답 $-\frac{\pi}{2}$, π , 2π , -1

018 답 -1, 1

019 답 y 축

020 답 2π

021 답 $-\frac{\pi}{2}$

022 답 $-\pi$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$

023 답 $\frac{\pi}{2}$

024 답 원점

025 답 π

026 답 $\frac{\pi}{2}$

실전유형

139쪽

027 답 ③

③ $\sin(-x) = -\sin x$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

028 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 치역은 실수 전체의 집합이다.

ㄴ. 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

ㄷ. 그래프의 점근선의 방정식은 $x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

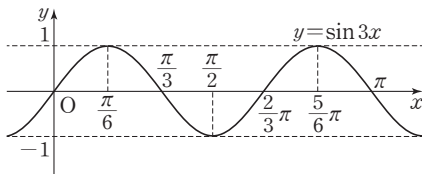
개념유형

141~142쪽

029 답 풀이 참조

$y = \sin 3x$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{3}$ 배 한 것이다.

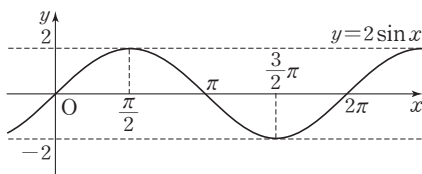
따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -1 이고, 주기는 $\frac{2\pi}{|3|} = \frac{2}{3}\pi$ 이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



030 답 풀이 참조

$y = 2 \sin x$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 것이다.

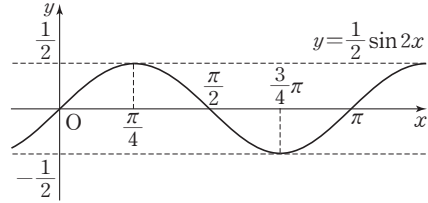
따라서 최댓값은 2, 최솟값은 -2 이고, 주기는 2π 이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



031 답 풀이 참조

$y = \frac{1}{2} \sin 2x$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배, y 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 배 한 것이다.

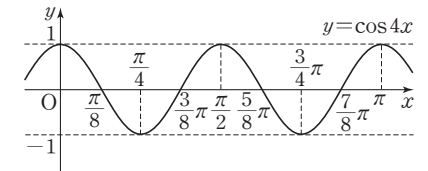
따라서 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $-\frac{1}{2}$ 이고, 주기는 $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$ 이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



032 답 풀이 참조

$y = \cos 4x$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{4}$ 배 한 것이다.

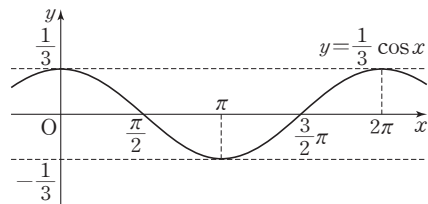
따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -1 이고, 주기는 $\frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$ 이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



033 답 풀이 참조

$y = \frac{1}{3} \cos x$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\frac{1}{3}$ 배 한 것이다.

따라서 최댓값은 $\frac{1}{3}$, 최솟값은 $-\frac{1}{3}$ 이고, 주기는 2π 이므로 그래프는 다음 그림과 같다.

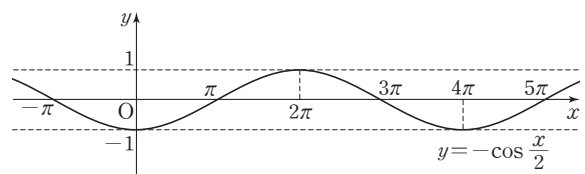


034 답 풀이 참조

$y = -\cos \frac{x}{2}$ 의 그래프는 $y = \cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2배 한 후 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

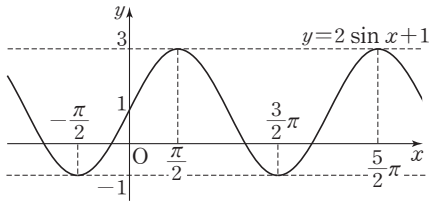
따라서 최댓값은 $|-1| = 1$, 최솟값은 $-|-1| = -1$ 이고, 주기는

$\frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = 4\pi$ 이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



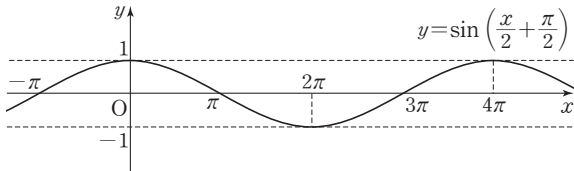
035 ▶ 풀이 참조

$y=2\sin x+1$ 의 그래프는 $y=2\sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.
따라서 최댓값은 $2+1=3$, 최솟값은 $-2+1=-1$ 이고, 주기는 2π 이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



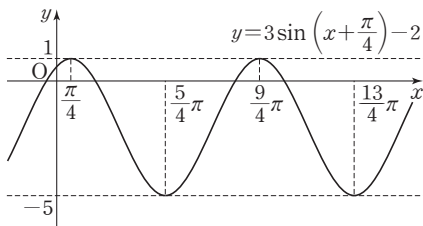
036 ▶ 풀이 참조

$y=\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{1}{2}(x+\pi)$ 의 그래프는 $y=\sin\frac{x}{2}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\pi$ 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 최댓값은 1, 최솟값은 -1 이고, 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$ 이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



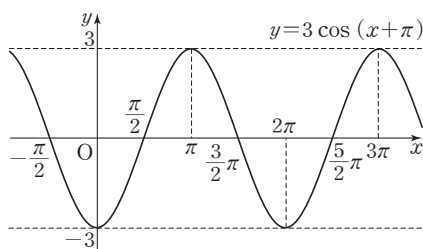
037 ▶ 풀이 참조

$y=3\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-2$ 의 그래프는 $y=3\sin x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 최댓값은 $3-2=1$, 최솟값은 $-3-2=-5$ 이고, 주기는 2π 이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



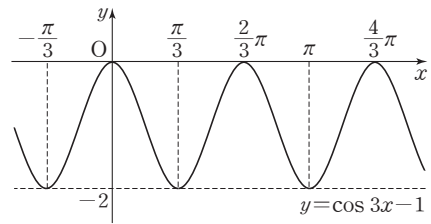
038 ▶ 풀이 참조

$y=3\cos(x+\pi)$ 의 그래프는 $y=3\cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\pi$ 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 최댓값은 3, 최솟값은 -3 이고, 주기는 2π 이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



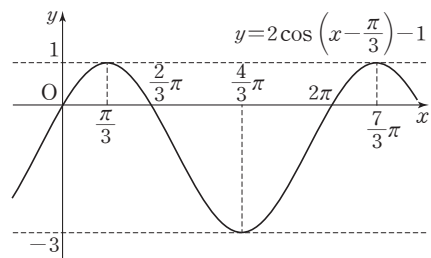
039 ▶ 풀이 참조

$y=\cos 3x-1$ 의 그래프는 $y=\cos 3x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 최댓값은 $1-1=0$, 최솟값은 $-1-1=-2$ 이고, 주기는 $\frac{2\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$ 이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



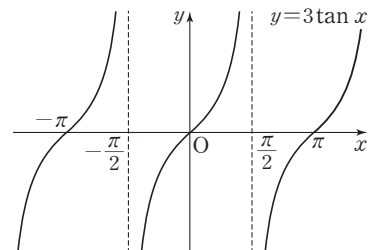
040 ▶ 풀이 참조

$y=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-1$ 의 그래프는 $y=2\cos x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.
따라서 최댓값은 $2-1=1$, 최솟값은 $-2-1=-3$ 이고, 주기는 2π 이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



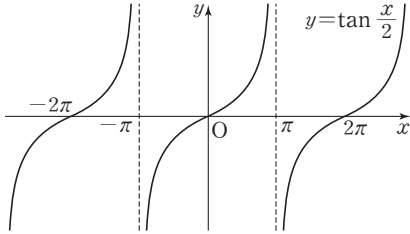
041 ▶ 풀이 참조

$y=3\tan x$ 의 그래프는 $y=\tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3배 한 것이다.
따라서 주기는 π 이고 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



042 ▶ 풀이 참조

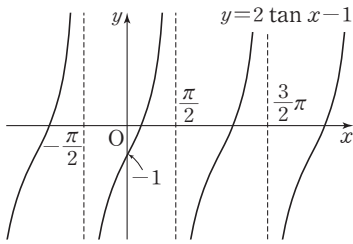
$y=\tan\frac{x}{2}$ 의 그래프는 $y=\tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2배 한 것이다.
따라서 주기는 $\frac{\pi}{\frac{1}{2}}=2\pi$ 이고 점근선의 방정식은 $\frac{x}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=2n\pi+\pi$ (n 은 정수)이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



043 답 풀이 참조

$y=2 \tan x-1$ 의 그래프는 $y=2 \tan x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

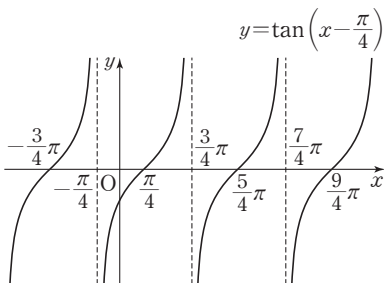
따라서 주기는 π 이고 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



044 답 풀이 참조

$y=\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 의 그래프는 $y=\tan x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 평행이동한 것이다.

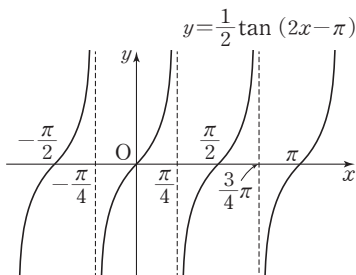
따라서 주기는 π 이고 점근선의 방정식은 $x-\frac{\pi}{4}=n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=n\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n 은 정수)이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



045 답 풀이 참조

$y=\frac{1}{2} \tan (2x-\pi)=\frac{1}{2} \tan 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 $y=\frac{1}{2} \tan 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 주기는 $\frac{\pi}{|2|}=\frac{\pi}{2}$ 이고 점근선의 방정식은 $2x-\pi=n\pi+\frac{\pi}{2}$, 즉 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{3}{4}\pi$ (n 은 정수)이므로 그래프는 다음 그림과 같다.



실전유형

143~144쪽

046 답 12

$y=2 \sin x+1$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은 $-y=2 \sin x+1 \quad \therefore y=-2 \sin x-1$

이 그래프를 y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=-2 \sin x-6$$

이 식이 $y=a \sin x+b$ 와 일치하므로

$$a=-2, b=-6 \quad \therefore ab=12$$

047 답 ①

$y=\tan \frac{\pi}{6} x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\tan \frac{\pi}{6}(x-1)-3$$

이 그래프가 점 $\left(\frac{5}{2}, a\right)$ 를 지나므로

$$a=\tan \frac{\pi}{6}\left(\frac{5}{2}-1\right)-3=\tan \frac{\pi}{4}-3=1-3=-2$$

048 답 ③

① $y=\cos (2x-\pi)=\cos 2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 $y=\cos 2x$ 의 그래

프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

② $y=\cos 2x+3$ 의 그래프는 $y=\cos 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이다.

③ $y=2 \cos x-1$ 의 그래프는 $y=2 \cos x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\cos (-2x)+2$ 의 그래프는 $y=\cos 2x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

⑤ $y=-\cos (2x-4)=-\cos 2(x-2)$ 의 그래프는 $y=\cos 2x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 $y=\cos 2x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없는 것은 ③이다.

049 답 ⑤

주어진 함수의 주기를 각각 구해 보면 다음과 같다.

$$\textcircled{1} \frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2} \quad \textcircled{2} \frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2} \quad \textcircled{3} \frac{\pi}{|2|}=\frac{\pi}{2}$$

$$\textcircled{4} \frac{2\pi}{|4|}=\frac{\pi}{2} \quad \textcircled{5} \frac{2\pi}{|2|}=\pi$$

따라서 주기가 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

050 답 ③

② 최댓값은 $-1|+2=3$, 최솟값은 $-|-1|+2=1$ 이다.

③ 주기는 $\frac{2\pi}{|3|}=\frac{2}{3}\pi$ 이다.

④ $x = \frac{\pi}{3}$ 를 대입하면

$$y = -\cos\left(3 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right) + 2 = -\cos \frac{\pi}{2} + 2 = 0 + 2 = 2$$

따라서 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$ 를 지난다.

⑤ $y = -\cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 2 = -\cos 3\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$ 의 그래프는

$y = -\cos 3x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{6}$ 만큼, y 축의 방향으로

2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

051 답 ②

주기는 π

그래프의 점근선의 방정식은

$$x - \pi = n\pi + \frac{\pi}{2} \text{에서 } x = n\pi + \frac{3}{2}\pi \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

052 답 $\frac{2}{3}$

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2 이고 $a > 0$ 이므로

$$a = 2$$

주기가 6π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 6\pi \quad \therefore b = \frac{1}{3}$$

$$\therefore ab = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

053 답 ①

최솟값이 -1 이고 $a > 0$ 이므로

$$-a + 3 = -1 \quad \therefore a = 4$$

주기가 4π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a + b = 4 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

054 답 11

최댓값이 3이고 $a > 0$ 이므로 $a + c = 3$ ㉠

주기가 π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

즉, $f(x) = a \sin 2x + c$ 이고 $f\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0$ 이므로

$$a \sin \frac{\pi}{6} + c = 0 \quad \therefore \frac{a}{2} + c = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 6, c = -3$$

$$\therefore a + b - c = 6 + 2 - (-3) = 11$$

055 답 ③

주어진 그래프에서 주기가 $8 - 2 = 6$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b\pi} = 6 \quad \therefore b = \frac{1}{6}$$

즉, 주어진 함수는 $y = a \tan \frac{\pi}{6}x$ 이고 그래프가 점 $(2, 3)$ 을 지나므로

$$3 = a \tan \frac{\pi}{3}, \sqrt{3}a = 3 \quad \therefore a = \sqrt{3}$$

$$\therefore a^2 \times b = (\sqrt{3})^2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

056 답 ②

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 3, 최솟값이 -3 이고 $a > 0$ 이므로

$$a = 3$$

주기가 $\frac{10}{3}\pi - \left(-\frac{2}{3}\pi\right) = 4\pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

즉, 주어진 함수는 $y = 3 \cos\left(\frac{x}{2} - c\right)$ 이고 그래프가 점 $\left(\frac{4}{3}\pi, 0\right)$ 을

지나므로

$$0 = 3 \cos\left(\frac{2}{3}\pi - c\right)$$

$$\therefore \cos\left(\frac{2}{3}\pi - c\right) = 0$$

이때 $0 < c < \pi$ 에서 $-\frac{\pi}{3} < \frac{2}{3}\pi - c < \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$\frac{2}{3}\pi - c = \frac{\pi}{2} \quad \therefore c = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore abc = 3 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$$

057 답 ①

주기가 2π 이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a} = 2\pi \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

즉, 주어진 함수는 $y = 3 \tan\left(\frac{x}{2} + b\right) + 2$ 이므로 그래프의 점근선의

방정식은

$$\frac{x}{2} + b = m\pi + \frac{\pi}{2} \text{에서 } \frac{x}{2} = m\pi + \frac{\pi}{2} - b$$

$$\therefore x = 2m\pi + \pi - 2b \text{ (단, } m \text{은 정수)}$$

이 방정식이 $x = 2n\pi$ (n 은 정수)와 일치하므로

$$\pi - 2b = 2k\pi \text{ (단, } k \text{는 정수)}$$

이때 $0 < b < \pi$ 에서 $-\pi < \pi - 2b < \pi$ 이므로

$$\pi - 2b = 0 \quad \therefore b = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore ab = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

개념유형

146~149쪽

058 답 $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}$

059 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos \frac{9}{4}\pi = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

060  $\sqrt{3}$

$$\tan \frac{13}{3}\pi = \tan \left(2\pi \times 2 + \frac{\pi}{3} \right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

061  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin 420^\circ = \sin (360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

062  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos 750^\circ = \cos (360^\circ \times 2 + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

063  1

$$\tan 765^\circ = \tan (360^\circ \times 2 + 45^\circ) = \tan 45^\circ = 1$$

064  $\frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$

065  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

066  -1

$$\tan \left(-\frac{\pi}{4} \right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

067  $-\frac{1}{2}$

$$\sin (-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

068  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos (-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

069  $-\sqrt{3}$

$$\tan (-60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

070  $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}$

071  $-\frac{1}{2}$

$$\cos \frac{4}{3}\pi = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

072  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\tan \frac{5}{6}\pi = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

073  $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \sin 150^\circ &= \sin (180^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

074  $-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \cos 120^\circ &= \cos (180^\circ - 60^\circ) \\ &= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

075  1

$$\begin{aligned} \tan 225^\circ &= \tan (180^\circ + 45^\circ) \\ &= \tan 45^\circ = 1 \end{aligned}$$

076  $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}$

077  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos \frac{3}{4}\pi = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

078  $-\sqrt{3}$

$$\tan \frac{2}{3}\pi = \tan \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \right) = -\frac{1}{\tan \frac{\pi}{6}} = -\sqrt{3}$$

079  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} \sin 120^\circ &= \sin (90^\circ + 30^\circ) \\ &= \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

080  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} \cos 150^\circ &= \cos (90^\circ + 60^\circ) \\ &= -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

081  -1

$$\begin{aligned} \tan 135^\circ &= \tan (90^\circ + 45^\circ) \\ &= -\frac{1}{\tan 45^\circ} = -1 \end{aligned}$$

082  $\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 6, \frac{\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{4}$

083  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos \frac{17}{6}\pi = \cos \left(\frac{\pi}{2} \times 6 - \frac{\pi}{6} \right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{10}{3}\pi = \tan \left(\frac{\pi}{2} \times 6 + \frac{\pi}{3} \right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \cos \frac{17}{6}\pi + \tan \frac{10}{3}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

084 답 $-\sqrt{3}$

$$\sin 210^\circ = \sin(90^\circ \times 3 - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 420^\circ = \cos(90^\circ \times 5 - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 300^\circ = \tan(90^\circ \times 3 + 30^\circ) = -\frac{1}{\tan 30^\circ} = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin 210^\circ + \cos 420^\circ + \tan 300^\circ = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + (-\sqrt{3}) = -\sqrt{3}$$

다른 풀이

$$\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 420^\circ = \cos(360^\circ + 60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\tan 300^\circ = \tan(360^\circ - 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$$

085 답 0

$$\cos 330^\circ = \cos(90^\circ \times 3 + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 240^\circ = \sin(90^\circ \times 3 - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \tan(-405^\circ) &= -\tan 405^\circ = -\tan(90^\circ \times 5 - 45^\circ) \\ &= -\frac{1}{\tan 45^\circ} = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore \cos 330^\circ - \sin 240^\circ \tan(-405^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (-1) = 0$$

다른 풀이

$$\cos 330^\circ = \cos(360^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 240^\circ = \sin(180^\circ + 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(-405^\circ) = -\tan 405^\circ = -\tan(360^\circ + 45^\circ) = -\tan 45^\circ = -1$$

086 답 $2 \sin \theta$

$$\sin(2\pi + \theta) = \sin \theta$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \times 3 + \theta\right) = \sin \theta$$

$$\therefore \sin(2\pi + \theta) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = \sin \theta + \sin \theta = 2 \sin \theta$$

087 답 0

$$\sin\left(\frac{5}{2}\pi - \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \times 5 - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\therefore \sin\left(\frac{5}{2}\pi - \theta\right) - \cos(-\theta) = \cos \theta - \cos \theta = 0$$

088 답 1

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \times 3 - \theta\right) = -\sin \theta$$

$$\cos(5\pi + \theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \times 10 + \theta\right) = -\cos \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos^2\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) + \cos^2(5\pi + \theta) &= (-\sin \theta)^2 + (-\cos \theta)^2 \\ &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

089 답 1

$$\sin\left(\frac{11}{2}\pi + \theta\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \times 11 + \theta\right) = \cos \theta$$

$$\tan(3\pi + \theta) = \tan\left(\frac{\pi}{2} \times 6 + \theta\right) = \tan \theta$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\sin\left(\frac{11}{2}\pi + \theta\right) \tan(3\pi + \theta)}{\sin(\pi - \theta)} &= \frac{\cos \theta \tan \theta}{\sin \theta} \\ &= \frac{\cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\sin \theta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

090 답 0.7986

$$\begin{aligned} \sin 773^\circ &= \sin(360^\circ \times 2 + 53^\circ) \\ &= \sin 53^\circ = 0.7986 \end{aligned}$$

091 답 0.5736

$$\cos(-55^\circ) = \cos 55^\circ = 0.5736$$

092 답 -1.3764

$$\begin{aligned} \tan 126^\circ &= \tan(180^\circ - 54^\circ) \\ &= -\tan 54^\circ = -1.3764 \end{aligned}$$

실전유형

150~151쪽

093 답 ④

$$\textcircled{1} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\textcircled{2} \cos \frac{7}{3}\pi = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{3} \tan \frac{17}{6}\pi = \tan\left(\frac{\pi}{2} \times 6 - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\textcircled{4} \sin \frac{4}{3}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\textcircled{5} \cos\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = \cos \frac{9}{4}\pi = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

094 답 $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

$$\sin \frac{10}{3}\pi = \sin\left(\frac{\pi}{2} \times 6 + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{5}{3}\pi = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right) = \cos \frac{13}{6}\pi = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \frac{10}{3}\pi \tan \frac{5}{3}\pi + \cos\left(-\frac{13}{6}\pi\right) &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times (-\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

095 **답** 0.3620

$$\begin{aligned}\sin 100^\circ &= \sin(90^\circ + 10^\circ) = \cos 10^\circ = 0.9848 \\ \cos 255^\circ &= \cos(90^\circ \times 3 - 15^\circ) = -\sin 15^\circ = -0.2588 \\ \tan 340^\circ &= \tan(360^\circ - 20^\circ) = -\tan 20^\circ = -0.3640 \\ \therefore \sin 100^\circ + \cos 255^\circ + \tan 340^\circ \\ &= 0.9848 + (-0.2588) + (-0.3640) = 0.3620\end{aligned}$$

096 **답** ④

$$\begin{aligned}\sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \text{에서} \\ \cos^2 \theta &= 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \\ \text{그런데 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \cos \theta > 0 \\ \therefore \cos \theta &= \frac{3}{5} \\ \therefore \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - \cos(\pi + \theta) &= \cos \theta - (-\cos \theta) \\ &= 2 \cos \theta \\ &= 2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}\end{aligned}$$

097 **답** $-\frac{2}{\sin \theta}$

$$\begin{aligned}& \frac{\sin(\pi + \theta)}{1 - \sin\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right)} - \frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)}{1 + \cos(\pi - \theta)} \\ &= \frac{-\sin \theta}{1 + \cos \theta} - \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \\ &= \frac{-\sin \theta(1 - \cos \theta) - \sin \theta(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{-2 \sin \theta}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{-2 \sin \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= -\frac{2}{\sin \theta}\end{aligned}$$

098 **답** ③

$$\begin{aligned}\text{삼각형의 세 내각의 크기의 합은 } \pi \text{이므로} \\ A + B + C = \pi \quad \therefore B + C = \pi - A \\ \therefore \cos \frac{B+C}{2} &= \cos \frac{\pi - A}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) \\ &= \sin \frac{A}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

099 **답** $\frac{17}{2}$

$$\begin{aligned}\sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \cdots + \sin^2 80^\circ + \sin^2 85^\circ \\ = (\sin^2 5^\circ + \sin^2 85^\circ) + (\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ) \\ + \cdots + (\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ) + \sin^2 45^\circ \\ \sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \text{이므로} \\ \sin 85^\circ &= \sin(90^\circ - 5^\circ) = \cos 5^\circ \\ \sin 80^\circ &= \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ \\ \sin 75^\circ &= \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ \\ &\vdots \\ \sin 50^\circ &= \sin(90^\circ - 40^\circ) = \cos 40^\circ\end{aligned}$$

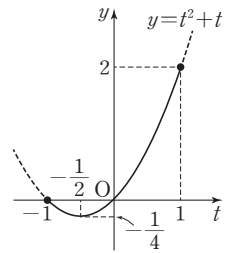
$$\begin{aligned}\therefore (\text{주어진 식}) \\ &= (\sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ) + (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) \\ &\quad + \cdots + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) + \sin^2 45^\circ \\ &= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{8\text{개}} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}\end{aligned}$$

100 **답** -2

$$\begin{aligned}y &= 4 \cos x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 1 \\ &= 4 \cos x - \cos x - 1 = 3 \cos x - 1 \\ -1 &\leq \cos x \leq 1 \text{이므로 } -4 \leq 3 \cos x - 1 \leq 2 \\ \text{따라서 주어진 함수의 최댓값은 } 2, \text{ 최솟값은 } -4 \text{이므로 구하는 합은} \\ 2 + (-4) &= -2\end{aligned}$$

101 **답** ②

$$\begin{aligned}y &= -\cos^2 x + \sin x + 1 \\ &= -(1 - \sin^2 x) + \sin x + 1 = \sin^2 x + \sin x \\ \sin x = t \text{로 놓으면 } -1 &\leq t \leq 1 \text{이고} \\ y &= t^2 + t = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \\ \text{즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으며} \\ \text{로 } t = 1 \text{에서 최댓값 } 2, t = -\frac{1}{2} \text{에서 최솟값} \\ -\frac{1}{4} \text{을 갖는다.} \\ \text{따라서 } M = 2, m = -\frac{1}{4} \text{이므로} \\ M - m &= \frac{9}{4}\end{aligned}$$

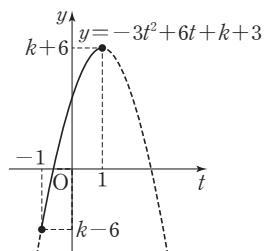


102 **답** -3

$$\begin{aligned}y &= \sin(x + \pi) + 5 \cos\left(x - \frac{3}{2}\pi\right) + k \\ &= -\sin x + 5(-\sin x) + k = -6 \sin x + k \\ \text{이때 최댓값이 } 9 \text{이므로} \\ |-6| + k &= 9 \quad \therefore k = 3 \\ \text{따라서 구하는 최솟값은} \\ -|-6| + k &= -|-6| + 3 = -3\end{aligned}$$

103 **답** 2

$$\begin{aligned}y &= 3 \sin^2 x + 6 \cos x + k \\ &= 3(1 - \cos^2 x) + 6 \cos x + k \\ &= -3 \cos^2 x + 6 \cos x + k + 3 \\ \cos x = t \text{로 놓으면 } -1 &\leq t \leq 1 \text{이고} \\ y &= -3t^2 + 6t + k + 3 = -3(t - 1)^2 + k + 6 \\ \text{즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같} \\ \text{으므로 } t = 1 \text{에서 최댓값 } k + 6, t = -1 \\ \text{에서 최솟값 } k - 6 \text{을 갖는다.} \\ \text{이때 최댓값과 최솟값의 합이 } 4 \text{이므로} \\ (k + 6) + (k - 6) &= 4 \\ 2k &= 4 \quad \therefore k = 2\end{aligned}$$



104 ▶ ⑤

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = \frac{t}{t-2} = \frac{2}{t-2} + 1$$

즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같

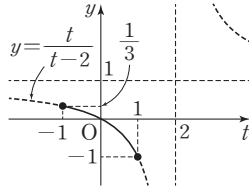
으므로 $t = -1$ 에서 최댓값 $\frac{1}{3}$, $t = 1$ 에서 최솟값 -1 을 갖는다.

따라서 주어진 함수의 치역은

$$\left\{ y \mid -1 \leq y \leq \frac{1}{3} \right\} \text{이므로}$$

$$a = -1, b = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (-1)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{10}{9}$$



105 ▶ -3π

$$y = \cos^2 x - 4 \sin x - 2$$

$$= (1 - \sin^2 x) - 4 \sin x - 2$$

$$= -\sin^2 x - 4 \sin x - 1$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -t^2 - 4t - 1$$

$$= -(t+2)^2 + 3$$

즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으

로 $t = 1$ 에서 최솟값 -6 을 갖는다.

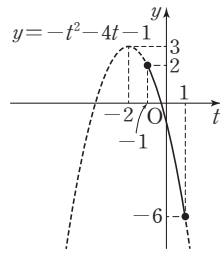
$$\therefore b = -6$$

한편 $t = 1$, 즉 $\sin x = 1$ 에서

$$x = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$\therefore a = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore ab = \frac{\pi}{2} \times (-6) = -3\pi$$



106 ▶ 3

$\tan x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 에서 $0 \leq t \leq 1$ 이고

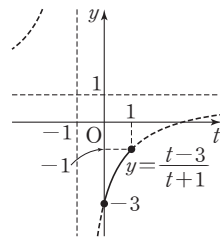
$$y = \frac{t-3}{t+1} = -\frac{4}{t+1} + 1$$

즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으

로 $t = 1$ 에서 최댓값 -1 , $t = 0$ 에서 최솟값 -3 을 갖는다.

따라서 $M = -1$, $m = -3$ 이므로

$$Mm = 3$$



107 ▶ 9

$y = f(x)$ 라 하면

$$y = \sin^2 x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

$$= (1 - \cos^2 x) + \cos x + 1$$

$$= -\cos^2 x + \cos x + 2$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

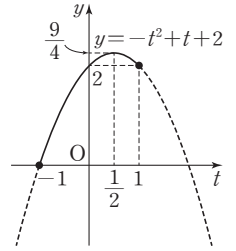
$$y = -t^2 + t + 2 = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으

로 $t = \frac{1}{2}$ 에서 최댓값 $\frac{9}{4}$ 를 갖는다.

따라서 $M = \frac{9}{4}$ 이므로

$$4M = 9$$



개념유형

153~154쪽

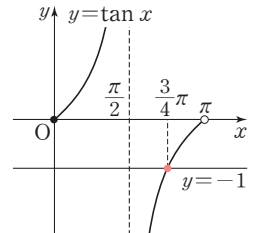
108 ▶ $\frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$

109 ▶ $x = \frac{3}{4}\pi$

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = -1$ 은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 x 좌표는 $\frac{3}{4}\pi$ 이므로 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{3}{4}\pi$$



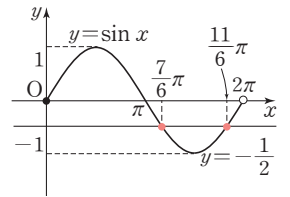
110 ▶ $x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

$2 \sin x + 1 = 0$ 에서 $\sin x = -\frac{1}{2}$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 x 좌표는 $\frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ 이므로 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$



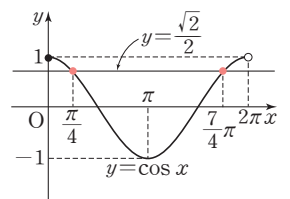
111 ▶ $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{7}{4}\pi$

$\sqrt{2} \cos x - 1 = 0$ 에서 $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{4}, \frac{7}{4}\pi$ 이므로 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{7}{4}\pi$$



112 **답** $x = \frac{\pi}{3}$

$\tan x - \sqrt{3} = 0$ 에서 $\tan x = \sqrt{3}$

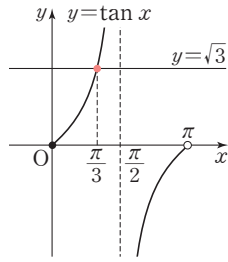
$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와

직선 $y = \sqrt{3}$ 은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{3}$ 이므로 주어진

방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{3}$$



113 **답** $\frac{7}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{2}$

114 **답** $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{2}{3}\pi$

$2 \cos 2x = -1$ 에서 $\cos 2x = -\frac{1}{2}$

$2x = \theta$ 로 놓으면 $\cos \theta = -\frac{1}{2}$

$0 \leq x < \pi$ 에서 $0 \leq 2x < 2\pi$ $\therefore 0 \leq \theta < 2\pi$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프

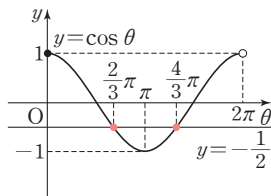
와 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 θ 좌표는 $\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$ 이므로

로

$$2x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } 2x = \frac{4}{3}\pi$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi$$



115 **답** $x = \frac{\pi}{4}$

$x + \frac{\pi}{2} = \theta$ 로 놓으면 $\tan \theta = -1$

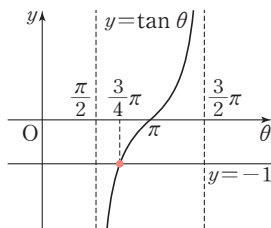
$0 \leq x < \pi$ 에서 $\frac{\pi}{2} \leq x + \frac{\pi}{2} < \frac{3}{2}\pi$ $\therefore \frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3}{2}\pi$

$\frac{\pi}{2} \leq \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 함수 $y = \tan \theta$ 의 그래프와 직선 $y = -1$ 은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 θ 좌표는 $\frac{3}{4}\pi$ 이므로

$$x + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}$$



116 **답** 1, 1, 1, 1, 1, $\frac{4}{3}\pi, 0, \frac{4}{3}\pi, 0, \frac{4}{3}\pi$

117 **답** $x = 0$ 또는 $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{3}{4}\pi$ 또는 $x = \pi$

$\sqrt{2} \sin^2 x - \sin x = 0$ 에서 $\sin x(\sqrt{2} \sin x - 1) = 0$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ 또는 } \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

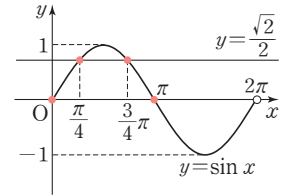
$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프

와 두 직선 $y = 0, y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 x 좌표는 $0, \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \pi$

이므로 주어진 방정식의 해는

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x = \pi$$



118 **답** $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

$2 \cos^2 x - 5 \sin x + 1 = 0$ 에서

$$2(1 - \sin^2 x) - 5 \sin x + 1 = 0$$

$$2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0, (\sin x + 3)(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2} (\because -1 \leq \sin x \leq 1)$$

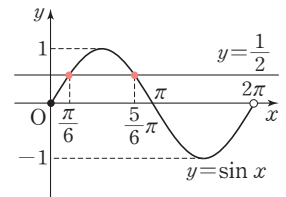
$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프

와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$ 이므로

로 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$



실전유형

154~155쪽

119 **답** $\frac{\pi}{3}$

$2 \sin x = \sqrt{3}$ 에서 $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

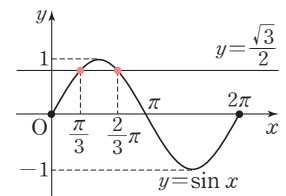
$y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

의 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi$ 이므로 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi$$

따라서 두 근의 차는

$$\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$



120 **답** ⑤

$3 \tan x + \sqrt{3} = 0$ 에서 $\tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

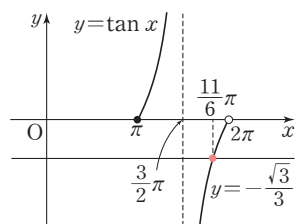
오른쪽 그림과 같이 $\pi \leq x < 2\pi$ 에서

함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선

$y = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{11}{6}\pi$ 이

므로 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{11}{6}\pi$$



121 답 ③

$$1 + \sqrt{2} \sin 2x = 0 \text{에서 } \sin 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2x = \theta \text{로 놓으면 } \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{에서 } 0 \leq 2x \leq 2\pi \quad \therefore 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 에서

함수 $y = \sin \theta$ 의 그래프와 직선

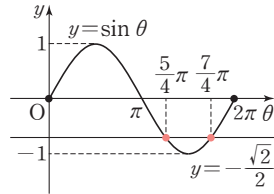
$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{의 교점의 } \theta \text{좌표는 } \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$$

이므로

$$2x = \frac{5}{4}\pi \text{ 또는 } 2x = \frac{7}{4}\pi$$

$$\therefore x = \frac{5}{8}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{8}\pi$$

$$\text{따라서 모든 해의 합은 } \frac{5}{8}\pi + \frac{7}{8}\pi = \frac{3}{2}\pi$$



122 답 ③

$$2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} = 0 \text{에서 } \cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \theta \text{로 놓으면 } \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} < \frac{9}{4}\pi \quad \therefore \frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{9}{4}\pi$$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{9}{4}\pi$ 에서

함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프와 직선

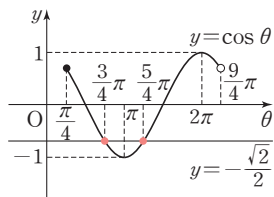
$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{의 교점의 } \theta \text{좌표는 } \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi$$

$$\frac{5}{4}\pi \text{이므로}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x + \frac{\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \pi$$

$$\text{따라서 모든 근의 합은 } \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi$$



123 답 ①

$$\cos x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{3} \text{에서}$$

$$\cos x + \cos x = \sqrt{3} \quad \therefore \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

$$y = \cos x \text{의 그래프와 직선 } y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{의 교점의 } x \text{좌표는 } \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi \text{이므로}$$

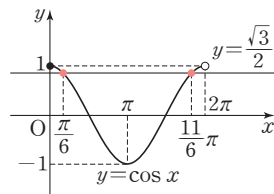
주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{11}{6}\pi \text{이므로}$$

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin \left(\frac{11}{6}\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{5}{3}\pi$$

$$= -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$



124 답 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{4}{3}\pi$

$$\cos x \neq 0 \text{이므로 } \sin x = \sqrt{3} \cos x \text{에서}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \tan x = \sqrt{3}$$

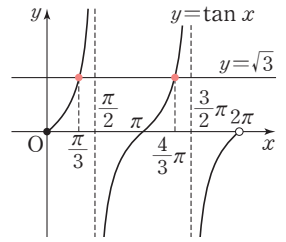
오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

$$y = \tan x \text{의 그래프와 직선 } y = \sqrt{3}$$

$$\text{의 교점의 } x \text{좌표는 } \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi \text{이므로 주}$$

어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$



125 답 ①

$$2 \cos^2 x - \sin x - 1 = 0 \text{에서}$$

$$2(1 - \sin^2 x) - \sin x - 1 = 0$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(\sin x + 1)(2 \sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = -1 \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수

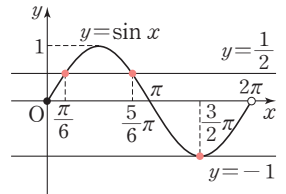
$$y = \sin x \text{의 그래프와 두 직선}$$

$$y = -1, y = \frac{1}{2} \text{의 교점의 } x \text{좌표는 } \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi \text{이므로 주어진 방정식의 해는}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{따라서 } M = \frac{3}{2}\pi, m = \frac{\pi}{6} \text{이므로}$$

$$M - m = \frac{4}{3}\pi$$



126 답 $x = \frac{\pi}{4}$

$$\tan^2 x = 2 \tan x - 1 \text{에서}$$

$$\tan^2 x - 2 \tan x + 1 = 0$$

$$(\tan x - 1)^2 = 0$$

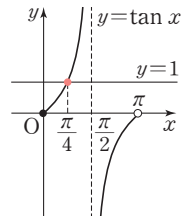
$$\therefore \tan x = 1$$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < \pi$ 에서 함수

$$y = \tan x \text{의 그래프와 직선 } y = 1 \text{의 교점의 } x \text{좌}$$

$$\text{표는 } \frac{\pi}{4} \text{이므로 주어진 방정식의 해는}$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$



127 답 ②

$$4 \sin^2 x - 4 \cos \left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 3 = 0 \text{에서}$$

$$4 \sin^2 x - 4(-\sin x) - 3 = 0$$

$$4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0$$

$$(2 \sin x + 3)(2 \sin x - 1) = 0$$

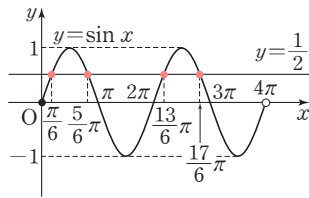
$$\therefore \sin x = \frac{1}{2} (\because -1 \leq \sin x \leq 1)$$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 4\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, \frac{17\pi}{6}$ 이므로 주어진 방정식의 해는

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{13\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{17\pi}{6}$$

따라서 모든 해의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{13\pi}{6} + \frac{17\pi}{6} = 6\pi$$



개념유형

157~158쪽

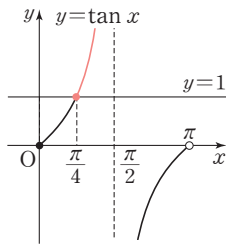
128 답 $\frac{5\pi}{6}\pi, \frac{5\pi}{6}\pi, \frac{5\pi}{6}\pi$

129 답 $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{4}$ 이고 주어진 부등식의 해는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프가 직선 $y = 1$ 과 만나거나 위쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$$



130 답 $0 \leq x \leq \frac{4\pi}{3}\pi$ 또는 $\frac{5\pi}{3}\pi \leq x < 2\pi$

$2 \sin x + \sqrt{3} \geq 0$ 에서

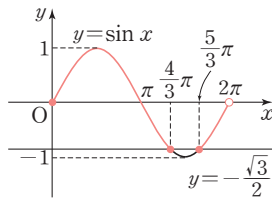
$$\sin x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 x 좌표는 $\frac{4\pi}{3}\pi, \frac{5\pi}{3}\pi$ 이고 주어진 부등식의 해는 함수 $y = \sin x$

의 그래프가 직선 $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 과 만나거나 위쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$0 \leq x \leq \frac{4\pi}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{5\pi}{3}\pi \leq x < 2\pi$$



131 답 $\frac{2\pi}{3}\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3}\pi$

$2 \cos x + 1 \leq 0$ 에서

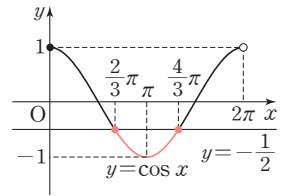
$$\cos x \leq -\frac{1}{2}$$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 x 좌표는 $\frac{2\pi}{3}\pi, \frac{4\pi}{3}\pi$ 이고

주어진 부등식의 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 과 만나거나 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{2\pi}{3}\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3}\pi$$



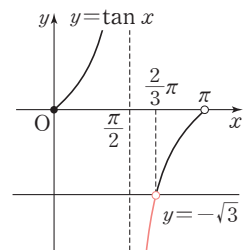
132 답 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}\pi$

$\tan x + \sqrt{3} < 0$ 에서 $\tan x < -\sqrt{3}$

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = -\sqrt{3}$ 은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 x 좌표는 $\frac{2\pi}{3}\pi$ 이고 주어진 부등식의 해는 함수 $y = \tan x$ 의 그래프가 직선 $y = -\sqrt{3}$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}\pi$$



133 답 $\frac{5\pi}{3}\pi, \frac{5\pi}{3}\pi, \frac{5\pi}{3}\pi, \frac{7\pi}{6}\pi, \frac{5\pi}{3}\pi, \frac{7\pi}{6}\pi, \frac{7\pi}{6}\pi, \frac{7\pi}{6}\pi, \frac{3\pi}{2}\pi$

134 답 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 또는 $\frac{11\pi}{6}\pi \leq x < 2\pi$

$$x + \frac{\pi}{3} = \theta \text{로 놓으면 } \sin \theta \geq \frac{1}{2} \quad \dots\dots ①$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } \frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3}\pi \quad \therefore \frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{7\pi}{3}\pi$$

$\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{7\pi}{3}\pi$ 에서 함수 $y = \sin \theta$

그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은 오른쪽 그림과 같다.

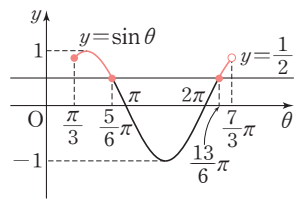
따라서 교점의 θ 좌표는 $\frac{5\pi}{6}\pi, \frac{13\pi}{6}\pi$

이고 부등식 ①의 해는 함수 $y = \sin \theta$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{2}$ 과 만나거나 위쪽에 있는 θ 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{13\pi}{6}\pi \leq \theta < \frac{7\pi}{3}\pi$$

$$\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{6}\pi \text{ 또는 } \frac{13\pi}{6}\pi \leq x + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3}\pi$$

$$\therefore 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{11\pi}{6}\pi \leq x < 2\pi$$



135 답 $\frac{7\pi}{12}\pi < x < \frac{5\pi}{6}\pi$

$$x - \frac{\pi}{3} = \theta \text{로 놓으면 } \tan \theta > 1 \quad \dots\dots ①$$

$$0 \leq x < \pi \text{에서 } -\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}\pi$$

$$\therefore -\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{2\pi}{3}\pi$$

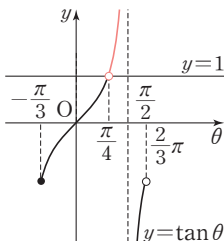
$-\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{2}{3}\pi$ 에서 함수 $y = \tan \theta$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{4}$ 이고 부등식 ㉠의 해는 함수 $y = \tan \theta$ 의 그래프가 직선 $y=1$ 보다 위쪽에 있는 θ 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \frac{7}{12}\pi < x < \frac{5}{6}\pi$$



136 답 1, 1, 0, 1, 1, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, 0, 1, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$, π

137 답 $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi$ 또는 $\pi < x < 2\pi$

$2 \sin^2 x - \sqrt{3} \sin x > 0$ 에서
 $\sin x (2 \sin x - \sqrt{3}) > 0$

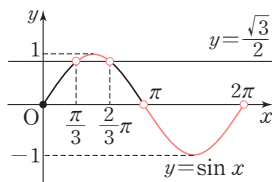
$\therefore \sin x < 0$ 또는 $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ ㉠

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 두 직선 $y=0$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2}{3}\pi$, π ,

2π 이고 부등식 ㉠의 해는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프가 직선 $y=0$ 보다 아래쪽에 있거나 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 보다 위쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \pi < x < 2\pi$$



138 답 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \pi$ 또는 $\frac{5}{3}\pi \leq x < 2\pi$

$2 \sin^2 x - \cos x - 1 \leq 0$ 에서
 $2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 \leq 0$
 $2 \cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0$
 $(\cos x + 1)(2 \cos x - 1) \geq 0$

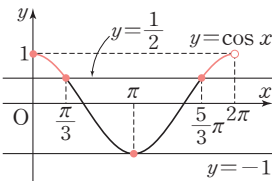
$\therefore \cos x \leq -1$ 또는 $\cos x \geq \frac{1}{2}$ ㉠

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \cos x$ 의 그래프와 두 직선 $y = -1$, $y = \frac{1}{2}$ 은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{3}$, π , $\frac{5}{3}\pi$ 이고 부등식 ㉠의 해는 함수 $y = \cos x$ 의

그래프가 직선 $y = -1$ 과 만나거나 아래쪽에 있거나 직선 $y = \frac{1}{2}$ 과 만나거나 위쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \pi \text{ 또는 } \frac{5}{3}\pi \leq x < 2\pi$$



실전유형

158~159쪽

139 답 $\frac{\pi}{6}$

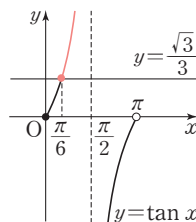
$3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0$ 에서 $\tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < \pi$ 에서 부등식

$\tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{2}$$

따라서 구하는 최솟값은 $\frac{\pi}{6}$ 이다.



140 답 ㉡

$2 \sin x + 1 < 0$ 에서 $\sin x < -\frac{1}{2}$

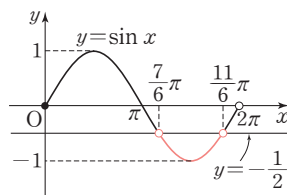
오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

부등식 $\sin x < -\frac{1}{2}$ 의 해는

$$\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{7}{6}\pi$, $\beta = \frac{11}{6}\pi$ 이므로

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos\left(\frac{11}{6}\pi - \frac{7}{6}\pi\right) = \cos \frac{2}{3}\pi = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$



141 답 $\frac{7}{12}\pi \leq x \leq \frac{23}{12}\pi$

$x - \frac{\pi}{4} = \theta$ 로 놓으면 $\cos \theta \leq \frac{1}{2}$

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{4} \leq x - \frac{\pi}{4} < \frac{7}{4}\pi$

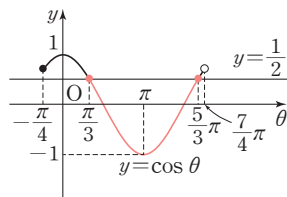
$$\therefore -\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{7}{4}\pi$$

오른쪽 그림과 같이 $-\frac{\pi}{4} \leq \theta < \frac{7}{4}\pi$

에서 부등식 $\cos \theta \leq \frac{1}{2}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5}{3}\pi, \frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore \frac{7}{12}\pi \leq x \leq \frac{23}{12}\pi$$



142 답 $\frac{5}{4}$

$\frac{x}{2} = \theta$ 로 놓으면 $\sin \theta < -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$0 \leq x < 4\pi$ 에서 $0 \leq \frac{x}{2} < 2\pi$ $\therefore 0 \leq \theta < 2\pi$

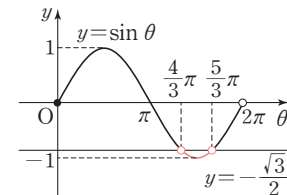
오른쪽 그림과 같이 $0 \leq \theta < 2\pi$ 에서

부등식 $\sin \theta < -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는

$$\frac{4}{3}\pi < \theta < \frac{5}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi < \frac{x}{2} < \frac{5}{3}\pi$$

$$\therefore \frac{8}{3}\pi < x < \frac{10}{3}\pi$$

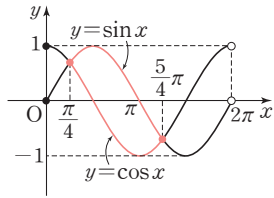
따라서 $\alpha = \frac{8}{3}\pi$, $\beta = \frac{10}{3}\pi$ 이므로 $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{5}{4}$



143 ⑤

부등식 $\sin x \geq \cos x$ 의 해는

$y = \sin x$ 의 그래프가 $y = \cos x$ 의 그래프와 만나거나 위쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로 오른쪽 그림에서 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$



따라서 해가 될 수 없는 것은 ⑤ $\frac{3}{2}\pi$ 이다.

144 ⑤

$$2 \sin^2 x - 3 \cos \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \leq 0 \text{에서}$$

$$2 \sin^2 x - 3(-\sin x) \leq 0$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x \leq 0$$

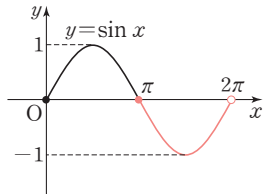
$$\sin x(2 \sin x + 3) \leq 0$$

그런데 $2 \sin x + 3 > 0$ 이므로 $\sin x \leq 0$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

부등식 $\sin x \leq 0$ 의 해는

$$\pi \leq x < 2\pi$$



145 $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

$$\tan^2 x + (\sqrt{3}-1) \tan x - \sqrt{3} \leq 0 \text{에서}$$

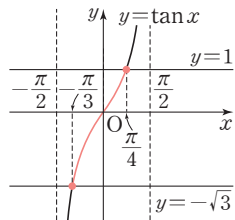
$$(\tan x + \sqrt{3})(\tan x - 1) \leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{3} \leq \tan x \leq 1$$

오른쪽 그림과 같이 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 부

등식 $-\sqrt{3} \leq \tan x \leq 1$ 의 해는

$$-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$$



146 ②

$$2 \sin^2 x - \cos x - 1 \leq 0 \text{에서}$$

$$2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 \leq 0$$

$$2 \cos^2 x + \cos x - 1 \geq 0$$

$$(2 \cos x - 1)(\cos x + 1) \geq 0$$

그런데 $0 \leq x < \pi$ 에서 $\cos x + 1 > 0$ 이므로 $2 \cos x - 1 \geq 0$

$$\therefore \cos x \geq \frac{1}{2}$$

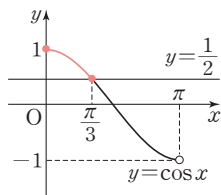
오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < \pi$ 에서 부등식

$$\cos x \geq \frac{1}{2} \text{의 해는}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$$

따라서 $\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$$



147 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$2 \cos^2 x \geq 3 \sin x + 3 \text{에서 } 2(1 - \sin^2 x) - 3 \sin x - 3 \geq 0$$

$$2 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 \leq 0$$

$$(2 \sin x + 1)(\sin x + 1) \leq 0$$

그런데 $\sin x + 1 \geq 0$ 이므로 $2 \sin x + 1 \leq 0$

$$\therefore \sin x \leq -\frac{1}{2}$$

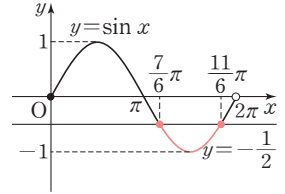
오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 부

등식 $\sin x \leq -\frac{1}{2}$ 의 해는

$$\frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{7}{6}\pi, \beta = \frac{11}{6}\pi$ 이므로

$$\sin(\beta - \alpha) = \sin\left(\frac{11}{6}\pi - \frac{7}{6}\pi\right) = \sin \frac{2}{3}\pi = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



148 ①

$$\sin^2 \theta - 4 \sin \theta \geq 2a + 1 \text{에서 } \sin^2 \theta - 4 \sin \theta - 2a - 1 \geq 0$$

$\sin \theta = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$t^2 - 4t - 2a - 1 \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$y = t^2 - 4t - 2a - 1 \text{이라 하면 } y = (t-2)^2 - 2a - 5$$

즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으

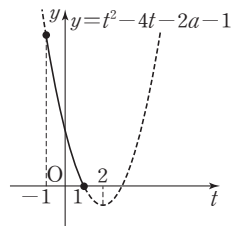
므로 $t=1$ 에서 최솟값 $-2a-4$ 를 갖는다.

이때 부등식 ①이 항상 성립하려면

$$-2a-4 \geq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$a \leq -2$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 -2 이다.



실전유형으로 중단원 점검

160~161쪽

1 11

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2) = f(x)$ 이므로

$$f(35) = f(33) = f(31) = \dots = f(1) = 5$$

$$f(36) = f(34) = f(32) = \dots = f(2) = 1$$

$$f(37) = f(35) = 5$$

$$\therefore f(35) + f(36) + f(37) = 5 + 1 + 5 = 11$$

2 ③

② 치역은 $\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$ 이므로 치역에 속하는 서로 다른 정수는 $-1, 0, 1$ 의 3개이다.

③ 주기가 2π 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $\cos(x+2\pi) = \cos x$ 이다.

$$\textcircled{5} \ x = \frac{\pi}{2} \text{를 대입하면 } y = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

따라서 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ 을 지난다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

3 답 ⑤

② 주기는 $\frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$ 이다.

③ $x=0$ 을 대입하면 $y=2 \tan \pi - 1 = -1$
따라서 그래프는 점 $(0, -1)$ 을 지난다.

④ 그래프의 점근선의 방정식은 $2x + \pi = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$$2x = n\pi - \frac{\pi}{2} \quad \therefore x = \frac{n}{2}\pi - \frac{\pi}{4} \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

⑤ $y = 2 \tan(2x + \pi) - 1 = 2 \tan 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$ 의 그래프는

$y = 2 \tan 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

4 답 1

주기가 4π 이고 $b > 0$ 이므로 $\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$ i

즉, $f(x) = a \sin \frac{x}{2} - 2$ 이고 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1$ 이므로

$$a \sin \frac{\pi}{6} - 2 = -1, \quad \frac{a}{2} = 1 \quad \therefore a = 2 \quad \text{..... ii}$$

$$\therefore ab = 2 \times \frac{1}{2} = 1 \quad \text{..... iii}$$

채점 기준

i b의 값 구하기	40 %
ii a의 값 구하기	40 %
iii ab의 값 구하기	20 %

5 답 2π

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2 이고 $a > 0$ 이므로 $a=2$

주기가 2π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 2\pi \quad \therefore b = 1$$

즉, 주어진 함수는 $y = 2 \cos(x - c)$ 이고 그래프가 점 $(\pi, 2)$ 를 지나므로

$$2 = 2 \cos(\pi - c) \quad \therefore \cos(\pi - c) = 1$$

이때 $0 < c \leq \pi$ 에서 $0 \leq \pi - c < \pi$ 이므로

$$\pi - c = 0 \quad \therefore c = \pi$$

$$\therefore abc = 2 \times 1 \times \pi = 2\pi$$

6 답 ③

$$\sin \frac{2}{3}\pi = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \tan\left(-\frac{25}{4}\pi\right) &= -\tan \frac{25}{4}\pi = -\tan\left(2\pi \times 3 + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\tan \frac{\pi}{4} = -1 \end{aligned}$$

$$\cos \frac{11}{6}\pi = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin \frac{2}{3}\pi \tan\left(-\frac{25}{4}\pi\right) + \cos \frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \times (-1) + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

7 답 $-2 \sin x$

$$\begin{aligned} &\sin\left(\frac{5}{2}\pi - x\right) - \sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) - \cos(4\pi - x) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} \times 5 - x\right) - \sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} \times 3 - x\right) - \cos x \\ &= \cos x - \sin x + (-\sin x) - \cos x \\ &= -2 \sin x \end{aligned}$$

8 답 16

$$y = 2 \sin x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 5$$

$$= 2 \sin x + \sin x - 5$$

$$= 3 \sin x - 5 \quad \text{..... i}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \text{이므로 } -8 \leq 3 \sin x - 5 \leq -2$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 -2 , 최솟값은 -8 이므로

$$M = -2, m = -8 \quad \text{..... ii}$$

$$\therefore Mm = 16 \quad \text{..... iii}$$

채점 기준

i 주어진 함수를 $\sin x$ 에 대한 식으로 나타내기	50 %
ii M, m의 값 구하기	40 %
iii Mm의 값 구하기	10 %

9 답 $\frac{1}{3}$

$$y = 3 \cos^2 x + 4 \sin(\pi + x)$$

$$= 3(1 - \sin^2 x) + 4(-\sin x)$$

$$= -3 \sin^2 x - 4 \sin x + 3$$

$\sin x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고

$$y = -3t^2 - 4t + 3 = -3\left(t + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{13}{3}$$

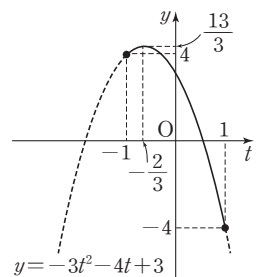
즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으

므로 $t = -\frac{2}{3}$ 에서 최댓값 $\frac{13}{3}$, $t = 1$ 에서

최솟값 -4 를 갖는다.

따라서 구하는 값은

$$\frac{13}{3} + (-4) = \frac{1}{3}$$



10 답 ④

$$2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sqrt{3} = 0 \text{에서 } \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{6} = \theta \text{로 놓으면 } \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } \frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{13}{6}\pi \quad \therefore \frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{13}{6}\pi$$

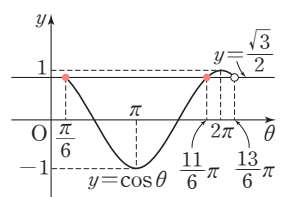
오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{13}{6}\pi$ 에

서 함수 $y = \cos \theta$ 의 그래프와 직선

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{의 교점의 } \theta \text{좌표는 } \frac{\pi}{6}, \frac{11}{6}\pi$$

이므로

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x + \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$$



$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=\frac{5}{3}\pi$$

따라서 모든 근의 합은

$$0 + \frac{5}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$$

11 답 ④

$$2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0 \text{에서}$$

$$2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 = 0$$

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$$

그런데 $0 \leq x < \pi$ 에서 $0 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$$\sin x = 1$$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < \pi$ 에서 함

수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 의

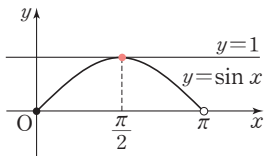
교점의 x 좌표는 $\frac{\pi}{2}$ 이므로 주어진 방정

식의 해는

$$x = \frac{\pi}{2}$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$



12 답 ①

$$\tan x + 1 \leq 0 \text{에서}$$

$$\tan x \leq -1$$

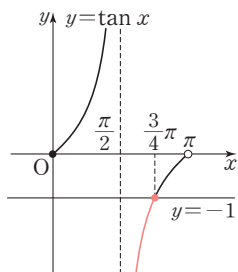
오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < \pi$ 에서 부등식

$\tan x \leq -1$ 의 해는

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3}{4}\pi$$

따라서 $a = \frac{\pi}{2}$, $b = \frac{3}{4}\pi$ 이므로

$$b - a = \frac{\pi}{4}$$



13 답 $0 \leq x < \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$

$$2\sin^2\left(x + \frac{3}{2}\pi\right) + 3\cos x > 2 \text{에서}$$

$$2(-\cos x)^2 + 3\cos x - 2 > 0$$

$$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 > 0$$

$$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) > 0$$

그런데 $\cos x + 2 > 0$ 이므로

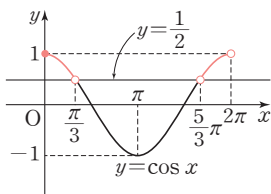
$$2\cos x - 1 > 0$$

$$\therefore \cos x > \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 부

등식 $\cos x > \frac{1}{2}$ 의 해는

$$0 \leq x < \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$$



07 사인법칙과 코사인법칙

개념유형

163~164쪽

001 답 30, 30, $\frac{1}{2}$, $3\sqrt{2}$

002 답 $4\sqrt{3}$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{이므로 } \frac{12}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ}$$

$$12 \sin 30^\circ = b \sin 60^\circ$$

$$12 \times \frac{1}{2} = b \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore b = 4\sqrt{3}$$

003 답 $6\sqrt{3}$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{이므로 } \frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{\sin 120^\circ}$$

$$6 \sin 120^\circ = c \sin 30^\circ$$

$$6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = c \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore c = 6\sqrt{3}$$

004 답 $\sqrt{6}$

$$A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \text{이므로 } \frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{3}{\sin 60^\circ}$$

$$a \sin 60^\circ = 3 \sin 45^\circ$$

$$a \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore a = \sqrt{6}$$

005 답 45, 45, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, 90

006 답 30°

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{이므로 } \frac{3\sqrt{2}}{\sin 135^\circ} = \frac{3}{\sin B}$$

$$3\sqrt{2} \sin B = 3 \sin 135^\circ$$

$$3\sqrt{2} \sin B = 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \sin B = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 45^\circ$ 이므로 $B = 30^\circ$

007 답 60° 또는 120°

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{이므로 } \frac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sin C}$$

$$\sqrt{2} \sin C = \sqrt{6} \sin 30^\circ$$

$$\sqrt{2} \sin C = \sqrt{6} \times \frac{1}{2} \quad \therefore \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 150^\circ$ 이므로 $C = 60^\circ$ 또는 $C = 120^\circ$

008 답 45°

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \text{이므로 } \frac{3\sqrt{6}}{\sin 120^\circ} = \frac{6}{\sin B}$$

$$3\sqrt{6} \sin B = 6 \sin 120^\circ$$

$$3\sqrt{6} \sin B = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 60^\circ$ 이므로 $B = 45^\circ$

009 답 60, 60, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3}$

010 답 2

$$B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$$

$$\frac{b}{\sin B} = 2R \text{이므로 } \frac{2}{\sin 30^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{2}{2 \sin 30^\circ} = \frac{2}{2 \times \frac{1}{2}} = 2$$

011 답 $\sqrt{2}$

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \text{이므로 } \frac{a}{\sin 45^\circ} = 2 \times 1$$

$$\therefore a = 2 \sin 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

012 답 60° 또는 120°

$$\frac{c}{\sin C} = 2R \text{이므로 } \frac{2\sqrt{3}}{\sin C} = 2 \times 2$$

$$\therefore \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 60^\circ$ 또는 $C = 120^\circ$

013 답 3k, 5k, b, c, 3k, 5k, 4, 3, 5

014 답 5 : 6 : 7

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하고,
 $a = 5k$, $b = 6k$, $c = 7k$ ($k > 0$)라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = \frac{a}{2R} : \frac{b}{2R} : \frac{c}{2R}$$

$$= \frac{5k}{2R} : \frac{6k}{2R} : \frac{7k}{2R}$$

$$= 5 : 6 : 7$$

015 답 1, 30, 3, 90, 2, 60, 30, 90, 60, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 1, 2, $\sqrt{3}$

016 답 $\sqrt{2} : 1 : 1$

$$A + B + C = 180^\circ \text{이므로}$$

$$A = 180^\circ \times \frac{2}{2+1+1} = 90^\circ$$

$$B = 180^\circ \times \frac{1}{2+1+1} = 45^\circ$$

$$C = 180^\circ \times \frac{1}{2+1+1} = 45^\circ$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$a : b : c = 2R \sin A : 2R \sin B : 2R \sin C$$

$$= \sin A : \sin B : \sin C$$

$$= \sin 90^\circ : \sin 45^\circ : \sin 45^\circ$$

$$= 1 : \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \sqrt{2} : 1 : 1$$

실전유형

164~166쪽

017 답 ③

$$\angle C = 180^\circ - (45^\circ + 15^\circ) = 120^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ} = \frac{8}{\sin 120^\circ}$ 이므로

$$\overline{BC} \sin 120^\circ = 8 \sin 45^\circ$$

$$\overline{BC} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \therefore \overline{BC} = \frac{8\sqrt{6}}{3}$$

018 답 ③

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 15이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = 2 \times 15$$

$$\therefore \overline{AC} = 30 \sin B = 30 \times \frac{7}{10} = 21$$

019 답 $36\sqrt{2}$

$$B = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{6\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$$6\sqrt{3} \sin 45^\circ = b \sin 60^\circ$$

$$6\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = b \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore b = 6\sqrt{2}$$

또 사인법칙에 의하여 $\frac{6\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 2R$ 이므로

$$R = \frac{6\sqrt{3}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{6\sqrt{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 6$$

$$\therefore bR = 6\sqrt{2} \times 6 = 36\sqrt{2}$$

020 답 16π

$C = 180^\circ - (80^\circ + 55^\circ) = 45^\circ$
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{4\sqrt{2}}{2 \sin 45^\circ} = \frac{4\sqrt{2}}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는
 $\pi \times 4^2 = 16\pi$

021 답 ⑤

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 5이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{5}{\sin B} = 2 \times 5$$

$$\therefore \sin B = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 135^\circ$ 이므로 $B = 30^\circ$

$$\therefore C = 180^\circ - (45^\circ + 30^\circ) = 105^\circ$$

022 답 $\frac{7}{16}$

사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\sin B}$ 이므로

$$2\sqrt{3} \sin B = 3 \sin 60^\circ$$

$$2\sqrt{3} \sin B = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \sin B = \frac{3}{4}$$

이때 $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ 이므로

$$\cos^2 B = 1 - \sin^2 B = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$$

023 답 10

$\widehat{BC}$ 에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$$\angle BAC = \angle BDC = 60^\circ$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{5\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}$$
이므로

$$5\sqrt{6} \sin 45^\circ = \overline{AB} \sin 60^\circ$$

$$5\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \overline{AB} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \overline{AB} = 10$$

024 답 ④

$a+b=7k$, $b+c=8k$, $c+a=9k$ ($k>0$)라 하고

세 식을 변끼리 더하면

$$2(a+b+c) = 24k$$

$$\therefore a+b+c = 12k$$

즉, $a=4k$, $b=3k$, $c=5k$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$$

$$= 4k : 3k : 5k$$

$$= 4 : 3 : 5$$

025 답 ④

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2 \times 6} = \frac{a}{12}, \sin B = \frac{b}{2 \times 6} = \frac{b}{12}, \sin C = \frac{c}{2 \times 6} = \frac{c}{12}$$

이때 $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{5}{4}$ 이므로

$$\frac{a}{12} + \frac{b}{12} + \frac{c}{12} = \frac{5}{4} \quad \therefore a+b+c = 15$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 15이다.

026 답 3

$A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$A = 180^\circ \times \frac{1}{1+1+4} = 30^\circ, B = 180^\circ \times \frac{1}{1+1+4} = 30^\circ,$$

$$C = 180^\circ \times \frac{4}{1+1+4} = 120^\circ$$

사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

$$= \sin 30^\circ : \sin 30^\circ : \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} : \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 : 1 : \sqrt{3}$$

따라서 $a=k$, $b=k$, $c=\sqrt{3}k$ ($k>0$)라 하면

$$\frac{c^2}{ab} = \frac{(\sqrt{3}k)^2}{k \times k} = 3$$

027 답 ②

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $a \sin^2 A = c \sin^2 C$ 에 대입하면

$$a \times \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = c \times \left(\frac{c}{2R}\right)^2$$

$$a^3 - c^3 = 0, (a-c)(a^2 + ac + c^2) = 0$$

이때 $a>0$, $c>0$ 이므로

$$a-c=0 \quad \therefore a=c$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

028 답 ①

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $c \sin C = a \sin A + b \sin B$ 에 대입하면

$$c \times \frac{c}{2R} = a \times \frac{a}{2R} + b \times \frac{b}{2R} \quad \therefore c^2 = a^2 + b^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times a \times b = \frac{ab}{2}$$

029 답 $b=c$ 인 이등변삼각형

$A+B+C=180^\circ$ 이므로

$$\sin(A+C) = \sin(180^\circ - B) = \sin B$$

$$\sin(A+B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$$

$$b \sin(A+C) = c \sin(A+B) \text{에서}$$

$$b \sin B = c \sin C \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$b \times \frac{b}{2R} = c \times \frac{c}{2R}$$

$$b^2 - c^2 = 0$$

$$(b+c)(b-c) = 0$$

이때 $b > 0, c > 0$ 이므로

$$b - c = 0 \quad \therefore b = c$$

따라서 삼각형 ABC는 $b = c$ 인 이등변삼각형이다.

030 답 ③

$$\angle ACB = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AC}}{\sin 60^\circ} = \frac{40}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$$\overline{AC} \sin 45^\circ = 40 \sin 60^\circ$$

$$\overline{AC} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \overline{AC} = 20\sqrt{6}(\text{m})$$

따라서 두 지점 A, C 사이의 거리는 $20\sqrt{6}$ m이다.

031 답 ③

$$\angle BAC = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R m라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{12}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{12}{2 \sin 60^\circ} = \frac{12}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$$

따라서 호수의 둘레의 길이는

$$2\pi \times 4\sqrt{3} = 8\sqrt{3}\pi(\text{m})$$

개념유형

168쪽

032 답 4, 60, 16, $\frac{1}{2}$, 12, $2\sqrt{3}$

033 답 $\sqrt{5}$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \text{이므로}$$

$$b^2 = (2\sqrt{2})^2 + 3^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times 3 \times \cos 45^\circ$$

$$= 8 + 9 - 12\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 5$$

$$\therefore b = \sqrt{5} (\because b > 0)$$

034 답 1

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \text{이므로}$$

$$c^2 = 2^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 2 \times \sqrt{3} \times \cos 30^\circ$$

$$= 4 + 3 - 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 1$$

$$\therefore c = 1 (\because c > 0)$$

035 답 $\sqrt{14}$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \text{이므로}$$

$$a^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{2} \times \cos 150^\circ$$

$$= 6 + 2 - 4\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 14$$

$$\therefore a = \sqrt{14} (\because a > 0)$$

036 답 $\sqrt{37}$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \text{이므로}$$

$$b^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos 120^\circ$$

$$= 16 + 9 - 24 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 37$$

$$\therefore b = \sqrt{37} (\because b > 0)$$

037 답 $\sqrt{34}$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \text{이므로}$$

$$c^2 = (3\sqrt{2})^2 + 2^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 2 \times \cos 135^\circ$$

$$= 18 + 4 - 12\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 34$$

$$\therefore c = \sqrt{34} (\because c > 0)$$

038 답 4, $2\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}$, 60

039 답 45°

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \text{이므로}$$

$$\cos B = \frac{(\sqrt{2})^2 + 3^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \times \sqrt{2} \times 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 45^\circ$

040 답 30°

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{이므로}$$

$$\cos C = \frac{2^2 + (\sqrt{3})^2 - 1^2}{2 \times 2 \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 30^\circ$

041 답 90°

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \text{이므로}$$

$$\cos A = \frac{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 0$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 90^\circ$

042 답 120°

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \text{이므로}$$

$$\cos B = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 120^\circ$

043 **답** 150°

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \text{이므로}$$

$$\cos C = \frac{1^2 + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \times 1 \times \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 150^\circ$

실전유형

169~171쪽

044 **답** 2

코사인법칙에 의하여

$$c^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}+1)^2 - 2 \times \sqrt{2} \times (\sqrt{3}+1) \times \cos 45^\circ$$

$$= 2 + 4 + 2\sqrt{3} - (2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 6 + 2\sqrt{3} - (2\sqrt{3} + 2) = 4$$

$\therefore c = 2$ ($\because c > 0$)

045 **답** ③

$\overline{AC} = x$ ($x > 0$)라 하면 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{7})^2 = 2^2 + x^2 - 2 \times 2 \times x \times \cos 120^\circ$$

$$28 = 4 + x^2 - 4x \times \left(-\frac{1}{2}\right), x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$(x+6)(x-4) = 0 \quad \therefore x = 4 \quad (\because x > 0)$$

따라서 선분 AC의 길이는 4이다.

046 **답** ②

코사인법칙에 의하여

$$a^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \cos 60^\circ$$

$$= 64 + 25 - 80 \times \frac{1}{2} = 49$$

$\therefore a = 7$ ($\because a > 0$)

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{7}{\sin 60^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{7}{2 \sin 60^\circ} = \frac{7}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\pi \times \left(\frac{7}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{49}{3}\pi$

047 **답** ④

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\cos \theta > 0$

$$\therefore \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{14}}{9}\right)^2} = \frac{5}{9}$$

코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos \theta$$

$$= 9 + 36 - 36 \times \frac{5}{9} = 25$$

$\therefore \overline{AC} = 5$ ($\because \overline{AC} > 0$)

048 **답** $\sqrt{51}$

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$$B + D = 180^\circ \quad \therefore D = 180^\circ - B$$

$$\therefore \cos D = \cos(180^\circ - B) = -\cos B = -\frac{1}{4}$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos D$$

$$= 25 + 16 - 40 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 51$$

$\therefore \overline{AC} = \sqrt{51}$ ($\because \overline{AC} > 0$)

049 **답** ②

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2 \times 7$ 이므로

$$\overline{BC} = 14 \sin \frac{\pi}{3} = 14 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$$

$\overline{AC} = x$ ($x > 0$)라 하면 $\overline{AB} : \overline{AC} = 3 : 1$ 에서

$$\overline{AB} = 3\overline{AC} = 3x$$

코사인법칙에 의하여

$$(7\sqrt{3})^2 = x^2 + (3x)^2 - 2 \times x \times 3x \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$147 = x^2 + 9x^2 - 6x^2 \times \frac{1}{2}$$

$$147 = 7x^2, x^2 = 21 \quad \therefore x = \sqrt{21} \quad (\because x > 0)$$

따라서 선분 AC의 길이는 $\sqrt{21}$ 이다.

050 **답** ③

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{4^2 + 5^2 - 3^2}{2 \times 4 \times 5} = \frac{4}{5}$$

$$\cos B = \frac{5^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times 5 \times 3} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos A + \cos B = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

051 **답** $-\frac{1}{8}$

코사인법칙에 의하여

$$\overline{CA}^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos B$$

$$= 4 + 9 - 12 \times \frac{3}{4} = 4$$

$\therefore \overline{CA} = 2$ ($\because \overline{CA} > 0$)

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{2^2 + 2^2 - 3^2}{2 \times 2 \times 2} = -\frac{1}{8}$$

052 **답** ④

사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 4 : 3 : 2$$

즉, $a = 4k, b = 3k, c = 2k$ ($k > 0$)라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{(4k)^2 + (3k)^2 - (2k)^2}{2 \times 4k \times 3k} = \frac{7}{8}$$

053 [답] ⑤

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{9^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 9 \times 8} = \frac{2}{3}$$

또 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = 9^2 + 4^2 - 2 \times 9 \times 4 \times \cos B$$

$$= 81 + 16 - 72 \times \frac{2}{3} = 49$$

$$\therefore \overline{AD} = 7 \quad (\because \overline{AD} > 0)$$

054 [답] 120°

삼각형에서 길이가 가장 긴 변의 대각의 크기가 가장 크므로 그 크기를 θ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{1^2 + 2^2 - (\sqrt{7})^2}{2 \times 1 \times 2} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $\theta = 120^\circ$

따라서 가장 큰 내각의 크기는 120° 이다.

055 [답] ③

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $\sin A > 0$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{2}{\sin A} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{2}{2 \sin A} = \frac{2}{2 \times \frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

따라서 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{4\sqrt{7}}{7}$ 이다.

056 [답] $b=c$ 인 이등변삼각형

코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이를 $b \cos C = c \cos B$ 에 대입하면

$$b \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = c \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = c^2 + a^2 - b^2$$

$$b^2 - c^2 = 0, (b+c)(b-c) = 0$$

이때 $b > 0, c > 0$ 이므로 $b - c = 0 \quad \therefore b = c$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

057 [답] ④

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

이를 $a \cos B - b \cos A = c$ 에 대입하면

$$a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} - b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = c$$

$$2a^2 - 2b^2 = 2c^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

058 [답] ①

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}, \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

이를 $\sin C = 2 \cos A \sin B$ 에 대입하면

$$\frac{c}{2R} = 2 \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{b}{2R}$$

$$c^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$a^2 - b^2 = 0, (a+b)(a-b) = 0$$

이때 $a > 0, b > 0$ 이므로

$$a - b = 0 \quad \therefore a = b$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

059 [답] $5\sqrt{7}$ km

코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = 10^2 + 15^2 - 2 \times 10 \times 15 \times \cos 60^\circ$$

$$= 100 + 225 - 300 \times \frac{1}{2} = 175$$

$$\therefore \overline{AB} = 5\sqrt{7}(\text{km}) \quad (\because \overline{AB} > 0)$$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $5\sqrt{7}$ km이다.

060 [답] ④

$\angle ACB = \pi - \theta$ 이므로 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{8^2 + 4^2 - (4\sqrt{7})^2}{2 \times 8 \times 4} = -\frac{1}{2}$$

$$-\cos \theta = -\frac{1}{2} \quad \therefore \cos \theta = \frac{1}{2}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\theta = \frac{\pi}{3}$

개념유형

173쪽

061 [답] $2\sqrt{3}, 60, 2\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 6$

062 [답] 9

삼각형 ABC의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{2} \times \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 9$$

063 ▶ 14

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2} \times 8 \times 7 \times \sin 150^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 7 \times \frac{1}{2} = 14$$

064 ▶ 15

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15$$

065 ▶ 2, $\sqrt{5}$, 3

066 ▶ $30\sqrt{3}$

삼각형의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{8 \times 13 \times 15}{4 \times \frac{13\sqrt{3}}{3}} = 30\sqrt{3}$$

067 ▶ 4, $\frac{\pi}{6}$, 16, $\frac{1}{2}$, $8\sqrt{3}$

068 ▶ 54

삼각형의 넓이를 S라 하면

$$S = 2 \times (3\sqrt{6})^2 \times \sin \frac{\pi}{4} \times \sin \frac{\pi}{4} \times \sin \frac{\pi}{2}$$

$$= 2 \times 54 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 = 54$$

069 ▶ 8, 9, 8, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{3\sqrt{5}}{7}$, $\frac{3\sqrt{5}}{7}$, $12\sqrt{5}$

070 ▶ $\frac{3\sqrt{15}}{4}$

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \times 2 \times 3} = -\frac{1}{4}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $\sin C > 0$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

071 ▶ $6\sqrt{14}$

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{5^2 + 9^2 - 10^2}{2 \times 5 \times 9} = \frac{1}{15}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $\sin C > 0$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{15}\right)^2} = \frac{4\sqrt{14}}{15}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2} \times 5 \times 9 \times \frac{4\sqrt{14}}{15} = 6\sqrt{14}$$

실전유형

174~175쪽

072 ▶ $9 + 3\sqrt{3}$

$$A = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times (3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 6 \times (3\sqrt{2} + \sqrt{6}) \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 9 + 3\sqrt{3}$$

073 ▶ ③

$$A + B + C = 180^\circ \text{이므로 } \sin(B + C) = \frac{1}{4} \text{에서}$$

$$\sin(180^\circ - A) = \frac{1}{4} \quad \therefore \sin A = \frac{1}{4}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin A = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{1}{4} = 3$$

074 ▶ 135°

삼각형 ABC의 넓이가 $15\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 10 \times 6 \times \sin A = 15\sqrt{2}$$

$$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $90^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 135^\circ$

075 ▶ ②

$0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $\sin B > 0$

$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

이때 삼각형 ABC의 넓이가 45이므로

$$\frac{1}{2} \times c \times 9 \times \sin B = 45$$

$$\frac{1}{2} \times c \times 9 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = 45$$

$$\therefore c = 6\sqrt{5}$$

076 ▶ ③

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{15}}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $\sin C > 0$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{\sqrt{15}}\right)^2} = \sqrt{\frac{11}{15}}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \sqrt{3} \times \sqrt{\frac{11}{15}} = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

077 답 $\frac{18}{5}$

$\overline{AD}=x$ 라 하면 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 6 \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 9 \times x \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times x \times 6 \times \sin 60^\circ$$

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times 9 \times x \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times x \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{27\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}x \quad \therefore x = \frac{18}{5}$$

따라서 선분 AD의 길이는 $\frac{18}{5}$ 이다.

078 답 ④

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 $r (r > 0)$ 라 하면

$$\overline{OP} = \frac{3}{4}r, \overline{OQ} = \frac{r}{3}$$

이때 삼각형 OPQ의 넓이가 $4\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}r \times \frac{r}{3} \times \sin \frac{\pi}{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}r \times \frac{r}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{16}r^2 = 4\sqrt{3}$$

$$r^2 = 64$$

$$\therefore r = 8 (\because r > 0)$$

따라서 호 AB의 길이는

$$8 \times \frac{\pi}{3} = \frac{8}{3}\pi$$

079 답 ②

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\frac{7 \times 8 \times 13}{4R} = 14\sqrt{3}$$

$$\therefore R = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

따라서 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{13\sqrt{3}}{3}$ 이다.

080 답 $48\sqrt{3}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{abc}{4 \times 2\sqrt{2}} = 3\sqrt{6}$$

$$\therefore abc = 48\sqrt{3}$$

따라서 세 변의 길이의 곱은 $48\sqrt{3}$ 이다.

081 답 $9\sqrt{3}$

$$A = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ) = 30^\circ$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$2 \times 6^2 \times \sin 30^\circ \times \sin 30^\circ \times \sin 120^\circ = 2 \times 36 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$$

082 답 $\frac{7\sqrt{3}}{3}$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times (3+7+8) = 6\sqrt{3}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\frac{3 \times 7 \times 8}{4R} = 6\sqrt{3} \quad \therefore R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

따라서 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ 이다.

083 답 ③

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

코사인법칙에 의하여

$$c^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \times \cos 60^\circ$$

$$= 25 + 64 - 80 \times \frac{1}{2} = 49$$

$$\therefore c = 7 (\because c > 0)$$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\frac{1}{2}r(5+8+7) = 10\sqrt{3} \quad \therefore r = \sqrt{3}$$

따라서 내접원의 반지름의 길이는 $\sqrt{3}$ 이다.

084 답 ②

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 8이므로 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2 \times 8} = \frac{a}{16}, \sin B = \frac{b}{2 \times 8} = \frac{b}{16}, \sin C = \frac{c}{2 \times 8} = \frac{c}{16}$$

이때 $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3}{2}$ 이므로

$$\frac{a}{16} + \frac{b}{16} + \frac{c}{16} = \frac{3}{2} \quad \therefore a + b + c = 24$$

따라서 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 3이므로 삼각형

ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 24 = 36$$

개념유형

177~178쪽

085 답 $24\sqrt{3}$

사각형 ABCD의 넓이를 S 라 하면

$$S = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{AC} \times \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 4\sqrt{6} \times 7 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 10\sqrt{3} + 14\sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

086 답 $\overline{BC}, 60, \overline{DC}, 120, 5, \frac{\sqrt{3}}{2}, 3, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{21\sqrt{3}}{4}$

087 답 5+4√3

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$ 를 그으면 삼각형 BCD는 $\overline{BC}=\overline{CD}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle DBC = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$$

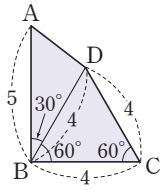
즉, 삼각형 BCD는 정삼각형이므로

$$\overline{BD} = \overline{BC} = 4 \text{이고}$$

$$\angle ABD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned} S &= \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BD} \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{CD} \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 5 + 4\sqrt{3} \end{aligned}$$



088 답 $\overline{BC}$, 6, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $12\sqrt{3}$

089 답 10

평행사변형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$$S = \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 30^\circ = 4 \times 5 \times \frac{1}{2} = 10$$

090 답 12

$$B = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$$S = \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 45^\circ = 3 \times 4\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12$$

091 답 15

$$B = D = 150^\circ$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$$S = \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin 150^\circ = 5 \times 6 \times \frac{1}{2} = 15$$

092 답 $\overline{BD}$, 6, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $12\sqrt{3}$

093 답 5

사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{1}{2} = 5$$

094 답 8

사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 8$$

095 답 $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

실전유형

178~179쪽

096 답 44

삼각형 ACD에서 $\angle CAD = 180^\circ - (90^\circ + 45^\circ) = 45^\circ$ 이므로

$$\overline{AC} = \overline{CD} = 8$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\begin{aligned} \square ABCD &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \\ &= 12 + 32 = 44 \end{aligned}$$

097 답 ②

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

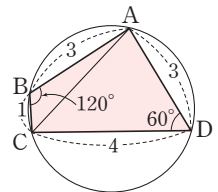
$$B + D = 180^\circ$$

$$\therefore D = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$ 를 그으면 사각형

ABCD의 넓이는

$$\begin{aligned} \square ABCD &= \triangle ABC + \triangle ACD \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 1 \times \sin 120^\circ \\ &\quad + \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} + 3\sqrt{3} = \frac{15\sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$



098 답 $13\sqrt{3}$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \times 8 \times 4 \times \cos 60^\circ$$

$$= 64 + 16 - 64 \times \frac{1}{2} = 48$$

$$\therefore \overline{BD} = 4\sqrt{3} (\because \overline{BD} > 0)$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\begin{aligned} \square ABCD &= \triangle ABD + \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 4\sqrt{3} \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \times 5 \times 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 5\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 13\sqrt{3} \end{aligned}$$

099 답 ②

평행사변형 ABCD의 넓이가 $10\sqrt{2}$ 이므로

$$4 \times \overline{BC} \times \sin 45^\circ = 10\sqrt{2}$$

$$4 \times \overline{BC} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \quad \therefore \overline{BC} = 5$$

100 답 ④

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2 \times 5 \times 4} = \frac{1}{8}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $\sin C > 0$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$5 \times 4 \times \sin C = 5 \times 4 \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{15\sqrt{7}}{2}$$

101 6√3

$\overline{BC} = x (x > 0)$ 라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{13})^2 = 3^2 + x^2 - 2 \times 3 \times x \times \cos 60^\circ$$

$$13 = 9 + x^2 - 6x \times \frac{1}{2}, \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x+1)(x-4) = 0 \quad \therefore x = 4 \quad (\because x > 0)$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$3 \times 4 \times \sin 60^\circ = 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

102 6√6

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $\sin \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 9 \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 4 \times 9 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = 6\sqrt{6}$$

103 30°

사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{27}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 9 \times \sin \theta = \frac{27}{2} \quad \therefore \sin \theta = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이므로 $\theta = 30^\circ$

104 ⑤

등변사다리꼴의 두 대각선의 길이는 같으므로 대각선의 길이를 $x (x > 0)$ 라 하자.

등변사다리꼴 ABCD의 넓이가 $9\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times x \times x \times \sin 135^\circ = 9\sqrt{2}, \quad \frac{1}{2} \times x \times x \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} x^2 = 9\sqrt{2}, \quad x^2 = 36 \quad \therefore x = 6 \quad (\because x > 0)$$

따라서 대각선의 길이는 6이다.

실전유형으로 중단원 점검

180~181쪽

1 ④

$$A = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{6}{\sin 30^\circ} = 2R$$

$$\therefore R = \frac{6}{2 \sin 30^\circ} = \frac{6}{2 \times \frac{1}{2}} = 6$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는

$$\pi \times 6^2 = 36\pi$$

2 6√2

$\widehat{AB}$ 에 대한 원주각의 크기가 같으므로

$$\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin 30^\circ} = \frac{12}{\sin 45^\circ} \text{이므로}$$

$$\overline{BC} \sin 45^\circ = 12 \sin 30^\circ$$

$$\overline{BC} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12 \times \frac{1}{2} \quad \therefore \overline{BC} = 6\sqrt{2}$$

3 ③

$$\frac{a+b}{10} = \frac{b+c}{11} = \frac{c+a}{9} = k (k > 0) \text{라 하면}$$

$$a+b=10k, \quad b+c=11k, \quad c+a=9k$$

세 식을 변끼리 더하면

$$2(a+b+c) = 30k \quad \therefore a+b+c = 15k$$

즉, $a=4k, b=6k, c=5k$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c$$

$$= 4k : 6k : 5k = 4 : 6 : 5$$

4 5√2 m

$$C = 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$$

$$\text{사인법칙에 의하여 } \frac{\overline{AC}}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{\sin 45^\circ} \text{이므로}$$

$$\overline{AC} \sin 45^\circ = 10 \sin 30^\circ$$

$$\overline{AC} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 \times \frac{1}{2} \quad \therefore \overline{AC} = 5\sqrt{2}(\text{m})$$

따라서 두 지점 A, C 사이의 거리는 $5\sqrt{2}$ m이다.

5 ①

코사인법칙에 의하여

$$c^2 = 3^2 + (2\sqrt{3})^2 - 2 \times 3 \times 2\sqrt{3} \times \cos 30^\circ$$

$$= 9 + 12 - 12\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$$

$$\therefore c = \sqrt{3} \quad (\because c > 0)$$

6 $\frac{3}{4}$

$$3 \sin A = 3 \sin B = 2 \sin C = k (k > 0) \text{라 하면}$$

$$\sin A = \frac{k}{3}, \quad \sin B = \frac{k}{3}, \quad \sin C = \frac{k}{2} \quad \dots\dots \text{i}$$

사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

$$= \frac{k}{3} : \frac{k}{3} : \frac{k}{2}$$

$$= 2 : 2 : 3 \quad \dots\dots \text{ii}$$

즉, $a=2l$, $b=2l$, $c=3l$ ($l>0$)이라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(2l)^2 + (3l)^2 - (2l)^2}{2 \times 2l \times 3l} = \frac{3}{4} \quad \dots\dots \text{iii}$$

채점 기준

i $3 \sin A = 3 \sin B = 2 \sin C = k$ 라 하고 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ 를 k 로 나타내기	20 %
ii $a : b : c$ 구하기	30 %
iii $\cos A$ 의 값 구하기	50 %

7 답 a=c인 이등변삼각형

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}, \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이를 $\sin A \cos C = \sin C \cos A$ 에 대입하면

$$\frac{a}{2R} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$a^2 - c^2 = 0, (a+c)(a-c) = 0$$

이때 $a>0$, $c>0$ 이므로

$$a-c=0 \quad \therefore a=c$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

8 답 ③

$\overline{BC}=a$ m, $\overline{AC}=b$ m, $\overline{AB}=c$ m라 하면

$$\text{삼각형 ADC에서 } b = \frac{6}{\sin 60^\circ} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{삼각형 BCE에서 } a = \frac{9}{\sin 60^\circ} = 6\sqrt{3}$$

$\angle ACB = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$ 이므로

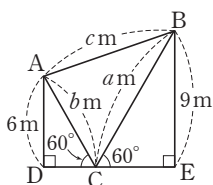
삼각형 ACB에서 코사인법칙에 의하여

$$c^2 = (6\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \times 6\sqrt{3} \times 4\sqrt{3} \times \cos 60^\circ$$

$$= 108 + 48 - 144 \times \frac{1}{2} = 84$$

$$\therefore c = 2\sqrt{21} \quad (\because c>0)$$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $2\sqrt{21}$ m이다.



9 답 ⑤

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r 라 하면 호의 길이가 6π 이므로

$$r \times \frac{3}{4}\pi = 6\pi \quad \therefore r=8$$

따라서 삼각형 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \sin \frac{3}{4}\pi = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 16\sqrt{2}$$

10 답 $\frac{8\sqrt{7}}{7}$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{2} \times (4+5+6) = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\frac{4 \times 5 \times 6}{4R} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

따라서 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{8\sqrt{7}}{7}$ 이다.

11 답 $\frac{39\sqrt{3}}{4}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{BD}$ 를 그으면 삼각형

BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \times 3 \times 5 \times \cos 120^\circ$$

$$= 9 + 25 - 30 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$$

$$\therefore \overline{BD} = 7 \quad (\because \overline{BD} > 0)$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{3^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 8} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $\sin A > 0$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

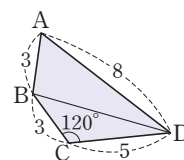
따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \sin A + \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 6\sqrt{3} + \frac{15\sqrt{3}}{2} = \frac{39\sqrt{3}}{2}$$



채점 기준

i 선분 BD의 길이 구하기	30 %
ii $\sin A$ 의 값 구하기	30 %
iii 사각형 ABCD의 넓이 구하기	40 %

12 답 ④

평행사변형 ABCD의 넓이가 35이므로

$$10 \times 7 \times \sin C = 35$$

$$\therefore \sin C = \frac{1}{2}$$

이때 $90^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 150^\circ$

13 답 ③

사각형 ABCD의 넓이가 $2\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times a \times b \times \sin 135^\circ = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2} \times a \times b \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} ab = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore ab = 8$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 6^2 - 2 \times 8 = 20$$

08 등차수열과 등비수열

개념유형

184~185쪽

001 **답** 첫째항: 1, 제4항: $\frac{1}{7}$

002 **답** 첫째항: 2, 제4항: 11

003 **답** 첫째항: -3, 제4항: -9

004 **답** 3, 5, 7, 9, 11

$a_n = 2n + 1$ 의 n 에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$$a_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

$$a_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$$

$$a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$a_4 = 2 \times 4 + 1 = 9$$

$$a_5 = 2 \times 5 + 1 = 11$$

005 **답** -5, -9, -13, -17, -21

$a_n = -4n - 1$ 의 n 에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$$a_1 = -4 \times 1 - 1 = -5$$

$$a_2 = -4 \times 2 - 1 = -9$$

$$a_3 = -4 \times 3 - 1 = -13$$

$$a_4 = -4 \times 4 - 1 = -17$$

$$a_5 = -4 \times 5 - 1 = -21$$

006 **답** 4, 1, -4, -11, -20

$a_n = -n^2 + 5$ 의 n 에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$$a_1 = -1^2 + 5 = 4$$

$$a_2 = -2^2 + 5 = 1$$

$$a_3 = -3^2 + 5 = -4$$

$$a_4 = -4^2 + 5 = -11$$

$$a_5 = -5^2 + 5 = -20$$

007 **답** 1, 3, 7, 15, 31

$a_n = 2^n - 1$ 의 n 에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$$a_1 = 2^1 - 1 = 1$$

$$a_2 = 2^2 - 1 = 3$$

$$a_3 = 2^3 - 1 = 7$$

$$a_4 = 2^4 - 1 = 15$$

$$a_5 = 2^5 - 1 = 31$$

008 **답** 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{13}$

$a_n = \frac{1}{3n-2}$ 의 n 에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$$a_1 = \frac{1}{3 \times 1 - 2} = 1$$

$$a_2 = \frac{1}{3 \times 2 - 2} = \frac{1}{4}$$

$$a_3 = \frac{1}{3 \times 3 - 2} = \frac{1}{7}$$

$$a_4 = \frac{1}{3 \times 4 - 2} = \frac{1}{10}$$

$$a_5 = \frac{1}{3 \times 5 - 2} = \frac{1}{13}$$

009 **답** $a_n = 3n$

$$a_1 = 3 = 3 \times 1, a_2 = 6 = 3 \times 2, a_3 = 9 = 3 \times 3,$$

$$a_4 = 12 = 3 \times 4, a_5 = 15 = 3 \times 5, \dots$$

따라서 일반항 a_n 은

$$a_n = 3n$$

010 **답** $a_n = n^3$

$$a_1 = 1 = 1^3, a_2 = 8 = 2^3, a_3 = 27 = 3^3,$$

$$a_4 = 64 = 4^3, a_5 = 125 = 5^3, \dots$$

따라서 일반항 a_n 은

$$a_n = n^3$$

011 **답** $a_n = (-1)^n$

$$a_1 = -1 = (-1)^1, a_2 = 1 = (-1)^2,$$

$$a_3 = -1 = (-1)^3, a_4 = 1 = (-1)^4,$$

$$a_5 = -1 = (-1)^5, \dots$$

따라서 일반항 a_n 은

$$a_n = (-1)^n$$

012 **답** $a_n = \frac{n}{n+1}$

$$a_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1},$$

$$a_2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{2+1},$$

$$a_3 = \frac{3}{4} = \frac{3}{3+1},$$

$$a_4 = \frac{4}{5} = \frac{4}{4+1},$$

$$a_5 = \frac{5}{6} = \frac{5}{5+1}, \dots$$

따라서 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{n}{n+1}$$

013 **답** $a_n = n(n+1)$

$$a_1 = 1 \times 2 = 1 \times (1+1),$$

$$a_2 = 2 \times 3 = 2 \times (2+1),$$

$$a_3 = 3 \times 4 = 3 \times (3+1),$$

$$a_4 = 4 \times 5 = 4 \times (4+1),$$

$$a_5 = 5 \times 6 = 5 \times (5+1), \dots$$

따라서 일반항 a_n 은

$$a_n = n(n+1)$$

014 답 ③

$a_n = -3n + 5$ 의 n 에 1, 5를 차례로 대입하면
 $a_1 = -3 \times 1 + 5 = 2$, $a_5 = -3 \times 5 + 5 = -10$
 $\therefore a_1 + a_5 = -8$

015 답 $a_n = 10^n - 1$

$a_1 = 9 = 10 - 1$,
 $a_2 = 99 = 100 - 1 = 10^2 - 1$,
 $a_3 = 999 = 1000 - 1 = 10^3 - 1$,
 $a_4 = 9999 = 10000 - 1 = 10^4 - 1$,
 $a_5 = 99999 = 100000 - 1 = 10^5 - 1$, ...
 따라서 일반항 a_n 은
 $a_n = 10^n - 1$

016 답 ④

$a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$, $a_3 = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$,
 $a_4 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$, $a_5 = \frac{1}{16} = \frac{1}{2^4}$, ...
 따라서 일반항 a_n 은 $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$
 $a_k = \frac{1}{1024}$ 에서 $\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{1024}$
 $2^{k-1} = 1024 = 2^{10}$
 $k-1 = 10$
 $\therefore k = 11$

017 답 공차: 2 / 5, 7

$3 - 1 = 2$ 에서 공차가 2이므로 주어진 수열은
 1, 3, $\boxed{5}$, $\boxed{7}$, 9, ...

018 답 공차: 5 / -3, 7

$17 - 12 = 5$ 에서 공차가 5이므로 주어진 수열은
 $\boxed{-3}$, 2, $\boxed{7}$, 12, 17, ...

019 답 공차: -6 / 5, -13

$-7 - (-1) = -6$ 에서 공차가 -6이므로 주어진 수열은
 11, $\boxed{5}$, -1, -7, $\boxed{-13}$, ...

020 답 공차: -3 / -2, -5

$-11 - (-8) = -3$ 에서 공차가 -3이므로 주어진 수열은
 $\boxed{-2}$, $\boxed{-5}$, -8, -11, -14, ...

021 답 공차: $\frac{1}{2}$ / 1, $\frac{3}{2}$

$\frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$ 에서 공차가 $\frac{1}{2}$ 이므로 주어진 수열은
 $\frac{1}{2}$, $\boxed{1}$, $\boxed{\frac{3}{2}}$, 2, $\frac{5}{2}$, ...

022 답 공차: $-\frac{2}{3}$ / $\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3}$

$\frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$ 에서 공차가 $-\frac{2}{3}$ 이므로 주어진 수열은
 2, $\frac{4}{3}$, $\boxed{\frac{2}{3}}$, 0, $\boxed{-\frac{2}{3}}$, ...

023 답 $a_n = 7n - 10$

$a_n = -3 + (n-1) \times 7 = 7n - 10$

024 답 $a_n = -2n + 12$

$a_n = 10 + (n-1) \times (-2) = -2n + 12$

025 답 4, 4, 3, 4, 3, $3n+1$

026 답 $a_n = 4n - 24$

첫째항이 -20, 공차가 $-16 - (-20) = 4$ 이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = -20 + (n-1) \times 4 = 4n - 24$

027 답 $a_n = -5n + 2$

첫째항이 -3, 공차가 $-8 - (-3) = -5$ 이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = -3 + (n-1) \times (-5) = -5n + 2$

028 답 $a_n = -\frac{3}{2}n + \frac{17}{2}$

첫째항이 7, 공차가 $\frac{11}{2} - 7 = -\frac{3}{2}$ 이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 7 + (n-1) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}n + \frac{17}{2}$

029 답 6

공차를 d 라 하면 $a_1 = 3$, $a_6 = 33$ 에서
 $3 + (6-1)d = 33$, $5d = 30$
 $\therefore d = 6$
 따라서 공차는 6이다.

030 답 -3

공차를 d 라 하면 $a_1 = 16$, $a_9 = -8$ 에서
 $16 + (9-1)d = -8$, $8d = -24$
 $\therefore d = -3$
 따라서 공차는 -3이다.

031 답 4, 1, 3, 1, 3, 1, 3, $3n-2$

032 **답** $a_n = 2n - 9$

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_3 = -3$, $a_{10} = 11$ 에서
 $a + 2d = -3$, $a + 9d = 11$
 두 식을 연립하여 풀면 $a = -7$, $d = 2$
 따라서 첫째항이 -7 , 공차가 2 이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = -7 + (n-1) \times 2 = 2n - 9$

033 **답** $a_n = -4n + 29$

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_5 = 9$, $a_9 = -7$ 에서
 $a + 4d = 9$, $a + 8d = -7$
 두 식을 연립하여 풀면 $a = 25$, $d = -4$
 따라서 첫째항이 25 , 공차가 -4 이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 25 + (n-1) \times (-4) = -4n + 29$

034 **답** $a_n = -\frac{1}{3}n$

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_3 = -1$, $a_8 = -\frac{8}{3}$ 에서
 $a + 2d = -1$, $a + 7d = -\frac{8}{3}$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a = -\frac{1}{3}$, $d = -\frac{1}{3}$
 따라서 첫째항이 $-\frac{1}{3}$, 공차가 $-\frac{1}{3}$ 이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = -\frac{1}{3} + (n-1) \times \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}n$

035 **답** -16

$$a_{10} = 11 + 9 \times (-3) = -16$$

036 **답** $\frac{7}{2}$

$$a_{10} = -1 + 9 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

037 **답** 43

첫째항이 -20 , 공차가 $-13 - (-20) = 7$ 이므로
 $a_{10} = -20 + 9 \times 7 = 43$

038 **답** -33

첫째항이 12 , 공차가 $7 - 12 = -5$ 이므로
 $a_{10} = 12 + 9 \times (-5) = -33$

039 **답** -17

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_2 = -1$, $a_5 = -7$ 에서
 $a + d = -1$, $a + 4d = -7$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a = 1$, $d = -2$
 따라서 첫째항이 1 , 공차가 -2 이므로
 $a_{10} = 1 + 9 \times (-2) = -17$

040 **답** 10

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_3 = \frac{33}{4}$, $a_6 = 9$ 에서
 $a + 2d = \frac{33}{4}$, $a + 5d = 9$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a = \frac{31}{4}$, $d = \frac{1}{4}$
 따라서 첫째항이 $\frac{31}{4}$, 공차가 $\frac{1}{4}$ 이므로
 $a_{10} = \frac{31}{4} + 9 \times \frac{1}{4} = 10$

실전유형

189~190쪽

041 **답** 44

$a_n = 4n + 7$ 에서
 $a_1 = 4 \times 1 + 7 = 11$, $a_2 = 4 \times 2 + 7 = 15$
 따라서 첫째항이 11 , 공차가 $15 - 11 = 4$ 이므로 구하는 곱은
 $11 \times 4 = 44$

참고 일반항 a_n 이 $a_n = 4n + 7$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $4 + 7 = 11$ 이고
 공차가 4 인 등차수열이다.

042 **답** ④

공차를 d 라 하면 첫째항이 -2 , 제13항이 -10 이므로
 $-2 + 12d = -10$
 $12d = -8 \quad \therefore d = -\frac{2}{3}$
 따라서 공차는 $-\frac{2}{3}$ 이다.

043 **답** 41

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 제2항이 8 , 제7항이 23 이므로
 $a + d = 8$, $a + 6d = 23$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a = 5$, $d = 3$
 따라서 첫째항이 5 , 공차가 3 이므로 제13항은
 $5 + 12 \times 3 = 41$

044 **답** 8

첫째항을 a 라 하면 $a_5 = -22$ 에서
 $a + 4 \times (-7) = -22$
 $\therefore a = 6$
 따라서 첫째항이 6 , 공차가 -7 이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 6 + (n-1) \times (-7) = -7n + 13$
 $a_k = -43$ 에서 $-7k + 13 = -43$
 $-7k = -56$
 $\therefore k = 8$

045 답 ①

공차를 d 라 하면 $a_{10}-a_7=6$ 에서
 $(4+9d)-(4+6d)=6$
 $3d=6 \quad \therefore d=2$
 따라서 첫째항이 4, 공차가 2이므로
 $a_4=4+3 \times 2=10$

046 답 $a_n=-7n+32$

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_3+a_4=15$ 에서 $(a+2d)+(a+3d)=15$
 $\therefore 2a+5d=15 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $a_5+a_7=-20$ 에서 $(a+4d)+(a+6d)=-20$
 $\therefore a+5d=-10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=25, d=-7$
 따라서 첫째항이 25, 공차가 -7 이므로 일반항 a_n 은
 $a_n=25+(n-1) \times (-7)=-7n+32$

047 답 ③

공차를 d 라 하면
 $a_1=2a_5$ 에서 $a_1=2(a_1+4d)$
 $\therefore a_1+8d=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $a_8+a_{12}=-6$ 에서 $(a_1+7d)+(a_1+11d)=-6$
 $\therefore a_1+9d=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a_1=24, d=-3$
 따라서 첫째항이 24, 공차가 -3 이므로
 $a_2=24+(-3)=21$

048 답 제15항

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_6=24$ 에서 $a+5d=24 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $a_3:a_9=3:5$ 에서 $3a_9=5a_3$ 이므로
 $3(a+8d)=5(a+2d)$
 $\therefore a-7d=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=14, d=2$
 따라서 첫째항이 14, 공차가 2이므로 일반항 a_n 은
 $a_n=14+(n-1) \times 2=2n+12$
 이때 42를 제 k 항이라 하면
 $2k+12=42, 2k=30 \quad \therefore k=15$
 따라서 42는 제15항이다.

049 답 제11항

주어진 등차수열의 일반항 a_n 은
 $a_n=-7+(n-1) \times \frac{3}{4}=\frac{3}{4}n-\frac{31}{4}$
 이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면
 $a_n>0$ 에서 $\frac{3}{4}n-\frac{31}{4}>0$
 $3n>31 \quad \therefore n>10.333\cdots$
 따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제11항이다.

050 답 제9항

주어진 등차수열의 첫째항이 60, 공차가 $52-60=-8$ 이므로 일반항을 a_n 이라 하면
 $a_n=60+(n-1) \times (-8)=-8n+68$
 이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면
 $a_n<0$ 에서 $-8n+68<0$
 $8n>68 \quad \therefore n>8.5$
 따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제9항이다.

051 답 제20항

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 제4항이 -12 , 제12항이 20이므로
 $a+3d=-12, a+11d=20$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a=-24, d=4$
 따라서 주어진 등차수열의 첫째항이 -24 , 공차가 4이므로 일반항을 a_n 이라 하면
 $a_n=-24+(n-1) \times 4=4n-28$
 이때 제 n 항에서 처음으로 50보다 커진다고 하면
 $a_n>50$ 에서 $4n-28>50$
 $4n>78 \quad \therefore n>19.5$
 따라서 처음으로 50보다 커지는 항은 제20항이다.

052 답 ②

공차를 d 라 하면
 $a_1=a_3+8$ 에서 $a_1=(a_1+2d)+8$
 $-2d=8 \quad \therefore d=-4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $2a_4-3a_6=3$ 에서 $2(a_1+3d)-3(a_1+5d)=3$
 $\therefore a_1+9d=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$ 을 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면 $a_1+9 \times (-4)=-3$
 $\therefore a_1=33$
 따라서 주어진 등차수열의 첫째항이 33, 공차가 -4 이므로 일반항 a_n 은
 $a_n=33+(n-1) \times (-4)=-4n+37$
 $a_k<0$ 에서 $-4k+37<0$
 $4k>37 \quad \therefore k>9.25$
 따라서 자연수 k 의 최솟값은 10이다.

053 답 36

공차를 d 라 하면 첫째항이 3, 제4항이 33이므로
 $3+3d=33, 3d=30 \quad \therefore d=10$
 이때 x, y 는 각각 주어진 수열의 제2항, 제3항이므로
 $x=3+10=13, y=3+2 \times 10=23$
 $\therefore x+y=36$

054 답 ③

25는 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열의 제 $(m+2)$ 항이므로
 $1+(m+1) \times 2=25, 2(m+1)=24$
 $m+1=12$
 $\therefore m=11$

055 **답** ④

공차를 d 라 하면 첫째항이 -7 , 제12항이 59이므로
 $-7 + 11d = 59, 11d = 66 \quad \therefore d = 6$
 이때 x_6 은 주어진 수열의 제7항이므로
 $x_6 = -7 + 6 \times 6 = 29$

개념유형

191~192쪽

056 **답** 7

x 는 3과 11의 등차중항이므로
 $x = \frac{3+11}{2} = 7$

057 **답** -5

x 는 5와 -15 의 등차중항이므로
 $x = \frac{5+(-15)}{2} = -5$

058 **답** 2

4는 x 와 $3x$ 의 등차중항이므로
 $4 = \frac{x+3x}{2}, 2x = 4$
 $\therefore x = 2$

059 **답** $x=5, y=11$

x 는 2와 8의 등차중항이므로
 $x = \frac{2+8}{2} = 5$
 y 는 8과 14의 등차중항이므로
 $y = \frac{8+14}{2} = 11$

060 **답** $x=-5, y=-13$

x 는 -1 과 -9 의 등차중항이므로
 $x = \frac{-1+(-9)}{2} = -5$
 y 는 -9 와 -17 의 등차중항이므로
 $y = \frac{-9+(-17)}{2} = -13$

061 **답** $x=1, y=\frac{13}{5}$

x 는 $\frac{1}{5}$ 과 $\frac{9}{5}$ 의 등차중항이므로
 $x = \frac{\frac{1}{5} + \frac{9}{5}}{2} = 1$
 y 는 $\frac{9}{5}$ 와 $\frac{17}{5}$ 의 등차중항이므로
 $y = \frac{\frac{9}{5} + \frac{17}{5}}{2} = \frac{13}{5}$

062 **답** $a, a, a, 12, 4, 4, 4, 4, 16, 16, 9, \pm 3, 4, 7$

063 **답** $-5, -3, -1$

세 수를 $a-d, a, a+d$ 라 하면
 $(a-d) + a + (a+d) = -9 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $(a-d) \times a \times (a+d) = -15 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$ 에서 $3a = -9 \quad \therefore a = -3$
 이를 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면
 $(-3-d) \times (-3) \times (-3+d) = -15$
 $-3(9-d^2) = -15, 9-d^2 = 5$
 $d^2 = 4 \quad \therefore d = \pm 2$
 따라서 세 수는 $-5, -3, -1$ 이다.

064 **답** $-2, 2, 6$

세 수를 $a-d, a, a+d$ 라 하면
 $(a-d) + a + (a+d) = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $(a-d) \times a \times (a+d) = -24 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$ 에서 $3a = 6 \quad \therefore a = 2$
 이를 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면
 $(2-d) \times 2 \times (2+d) = -24$
 $2(4-d^2) = -24, 4-d^2 = -12$
 $d^2 = 16 \quad \therefore d = \pm 4$
 따라서 세 수는 $-2, 2, 6$ 이다.

065 **답** 1, 8, 15

세 수를 $a-d, a, a+d$ 라 하면
 $(a-d) + a + (a+d) = 24 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $(a-d) \times a \times (a+d) = 120 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$ 에서 $3a = 24 \quad \therefore a = 8$
 이를 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면
 $(8-d) \times 8 \times (8+d) = 120$
 $8(64-d^2) = 120, 64-d^2 = 15$
 $d^2 = 49 \quad \therefore d = \pm 7$
 따라서 세 수는 1, 8, 15이다.

실전유형

192~193쪽

066 **답** 50

a 는 2와 12의 등차중항이므로
 $a = \frac{2+12}{2} = 7$
 4 는 7과 b 의 등차중항이므로
 $4 = \frac{7+b}{2}, 7+b = 8$
 $\therefore b = 1$
 $\therefore a^2 + b^2 = 7^2 + 1^2 = 50$

067 답 ④

a^2+2a 는 $6a$ 와 4 의 등차중항이므로

$$a^2+2a=\frac{6a+4}{2}, a^2+2a=3a+2$$

$$a^2-a-2=0, (a+1)(a-2)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 $-1+2=1$

068 답 12

k 는 α 와 β 의 등차중항이므로

$$k=\frac{\alpha+\beta}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

주어진 이차방정식의 두 근이 α, β 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=24$$

이를 ㉠에 대입하면

$$k=\frac{24}{2}=12$$

069 답 40

$\log_3 a$ 는 $\log_3 4$ 와 $\log_3 16$ 의 등차중항이므로

$$\log_3 a=\frac{\log_3 4+\log_3 16}{2}, 2 \log_3 a=\log_3 4+\log_3 16$$

$$\log_3 a^2=\log_3 64, a^2=64 \quad \therefore a=8 \quad (\because a>0)$$

$\log_3 16$ 은 $\log_3 8$ 과 $\log_3 b$ 의 등차중항이므로

$$\log_3 16=\frac{\log_3 8+\log_3 b}{2}, 2 \log_3 16=\log_3 8+\log_3 b$$

$$\log_3 16^2=\log_3 8b, 8b=256 \quad \therefore b=32$$

$$\therefore a+b=8+32=40$$

070 답 ⑤

$f(x)=3x^2+ax-4$ 를 $x+1, x-1, x-2$ 로 나누었을 때의 나머지

는 나머지 정리에 의하여 각각 $f(-1), f(1), f(2)$ 와 같다.

$$\therefore p=f(-1)=-a-1, q=f(1)=a-1, r=f(2)=2a+8$$

이때 q 는 p 와 r 의 등차중항이므로

$$q=\frac{p+r}{2}$$

$$\text{즉, } a-1=\frac{(-a-1)+(2a+8)}{2} \text{ 이므로}$$

$$2a-2=a+7 \quad \therefore a=9$$

071 답 -80

세 수를 $a-d, a, a+d$ 라 하면

$$(a-d)+a+(a+d)=12 \quad \dots\dots ㉠$$

$$(a-d)^2+a^2+(a+d)^2=120 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠ \text{에서 } 3a=12 \quad \therefore a=4$$

이를 ㉡에 대입하면

$$(4-d)^2+4^2+(4+d)^2=120$$

$$2d^2+48=120, 2d^2=72$$

$$d^2=36 \quad \therefore d=-6 \text{ 또는 } d=6$$

따라서 세 수는 $-2, 4, 10$ 이므로 세 수의 곱은

$$-2 \times 4 \times 10 = -80$$

072 답 4

네 수를 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ 라 하면

$$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=28 \quad \dots\dots ㉠$$

$$(a-3d)(a+3d)=40 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠ \text{에서 } 4a=28 \quad \therefore a=7$$

이를 ㉡에 대입하면

$$(7-3d)(7+3d)=40, 49-9d^2=40$$

$$9d^2=9, d^2=1 \quad \therefore d=-1 \text{ 또는 } d=1$$

따라서 네 수는 $4, 6, 8, 10$ 이므로 가장 작은 수는 4 이다.

073 답 ④

주어진 삼차방정식의 세 실근을 $a-d, a, a+d$ 라 하면 근과 계수의

관계에 의하여

$$(a-d)+a+(a+d)=6$$

$$3a=6 \quad \therefore a=2$$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 2 이므로 방정식에 $x=2$ 를 대입하면

$$2^3-6 \times 2^2+3 \times 2+k=0$$

$$\therefore k=10$$

참고 삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

074 답 ⑤

네 내각의 크기를 $a-3d, a-d, a+d, a+3d$ 라 하면

$$(a-3d)+(a-d)+(a+d)+(a+3d)=360^\circ \quad \dots\dots ㉠$$

$$a+3d=3(a-3d) \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠ \text{에서 } 4a=360^\circ \quad \therefore a=90^\circ$$

이를 ㉡에 대입하면

$$90^\circ+3d=3(90^\circ-3d), 90^\circ+3d=270^\circ-9d$$

$$12d=180^\circ \quad \therefore d=15^\circ$$

따라서 네 내각 중 가장 큰 각의 크기는

$$a+3d=90^\circ+3 \times 15^\circ=135^\circ$$

개념유형

195~196쪽

075 답 308

$$S_{11}=\frac{11(3+53)}{2}=308$$

076 답 32

$$S_8=\frac{8\{12+(-4)\}}{2}=32$$

077 답 276

$$S_{12}=\frac{12\{2 \times 1+(12-1) \times 4\}}{2}=276$$

078 **답** -18

$$S_9 = \frac{9\{2 \times 10 + (9-1) \times (-3)\}}{2} = -18$$

079 **답** 616

첫째항이 1, 공차가 6-1=5이므로

$$S_{16} = \frac{16\{2 \times 1 + (16-1) \times 5\}}{2} = 616$$

080 **답** -140

첫째항이 12, 공차가 10-12=-2이므로

$$S_{20} = \frac{20\{2 \times 12 + (20-1) \times (-2)\}}{2} = -140$$

081 **답** 408

수열 1, 7, 13, ..., 67은 첫째항이 1, 공차가 7-1=6인 등차수열이므로 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1 + (n-1) \times 6 = 6n - 5$$

67을 제 k 항이라 하면

$$6k - 5 = 67, 6k = 72 \quad \therefore k = 12$$

따라서 구하는 합은 첫째항이 1, 제12항이 67인 등차수열의 첫째항부터 제12항까지의 합이므로

$$1 + 7 + 13 + \dots + 67 = \frac{12(1+67)}{2} = 408$$

082 **답** -85

수열 $\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, \dots, -9$ 는 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공차가 $0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ 인 등차수열이므로 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{2} + (n-1) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}n + 1$$

-9를 제 k 항이라 하면

$$-\frac{1}{2}k + 1 = -9, -\frac{1}{2}k = -10 \quad \therefore k = 20$$

따라서 구하는 합은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 제20항이 -9인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합이므로

$$\frac{1}{2} + 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \dots + (-9) = \frac{20\left\{\frac{1}{2} + (-9)\right\}}{2} = -85$$

083 **답** 2, 8, -10, 7, -10, 7**084** **답** 첫째항: -3, 공차: 2

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 = -1 \text{에서 } a + d = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_{10} = 60 \text{에서 } \frac{10\{2a + (10-1)d\}}{2} = 60$$

$$\therefore 2a + 9d = 12 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -3, d = 2$

따라서 첫째항은 -3, 공차는 2이다.

085 **답** 첫째항: 3, 공차: -1

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_3 = 6 \text{에서 } \frac{3\{2a + (3-1)d\}}{2} = 6$$

$$\therefore a + d = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_6 = 3 \text{에서 } \frac{6\{2a + (6-1)d\}}{2} = 3$$

$$\therefore 2a + 5d = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 3, d = -1$$

따라서 첫째항은 3, 공차는 -1이다.

086 **답** 첫째항: 16, 공차: -2

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_{10} = 70 \text{에서 } \frac{10\{2a + (10-1)d\}}{2} = 70$$

$$\therefore 2a + 9d = 14 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_{20} = -60 \text{에서 } \frac{20\{2a + (20-1)d\}}{2} = -60$$

$$\therefore 2a + 19d = -6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 16, d = -2$$

따라서 첫째항은 16, 공차는 -2이다.

087 **답** 17, -2, $-2n+19$, $-2n+19$, 9, 9, 9, 9, 81

다른 풀이

첫째항이 17, 공차가 -2인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n\{2 \times 17 + (n-1) \times (-2)\}}{2} \\ &= -n^2 + 18n = -(n-9)^2 + 81 \end{aligned}$$

따라서 S_n 은 $n=9$ 에서 최댓값 81을 갖는다.

088 **답** 91

첫째항이 25, 공차가 -4이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 25 + (n-1) \times (-4) = -4n + 29$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면 $a_n < 0$ 에서

$$-4n + 29 < 0, 4n > 29 \quad \therefore n > 7.25$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제8항부터 음수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최대이다.

따라서 S_n 의 최댓값은

$$S_7 = \frac{7\{2 \times 25 + (7-1) \times (-4)\}}{2} = 91$$

089 **답** -72

첫째항이 -22, 공차가 4이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -22 + (n-1) \times 4 = 4n - 26$$

이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면 $a_n > 0$ 에서

$$4n - 26 > 0, 4n > 26 \quad \therefore n > 6.5$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제7항부터 양수이므로 첫째항부터 제6항까지의 합이 최소이다.

따라서 S_n 의 최솟값은

$$S_6 = \frac{6\{2 \times (-22) + (6-1) \times 4\}}{2} = -72$$

다른 풀이

첫째항이 -22 , 공차가 4 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{n\{2 \times (-22) + (n-1) \times 4\}}{2} \\ = 2n^2 - 24n = 2(n-6)^2 - 72$$

따라서 S_n 은 $n=6$ 에서 최솟값 -72 를 갖는다.

090 **답** -156

첫째항이 -37 , 공차가 5 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -37 + (n-1) \times 5 = 5n - 42$$

이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면 $a_n > 0$ 에서

$$5n - 42 > 0, 5n > 42 \quad \therefore n > 8.4$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제9항부터 양수이므로 첫째항부터 제8항까지의 합이 최소이다.

따라서 S_n 의 최솟값은

$$S_8 = \frac{8\{2 \times (-37) + (8-1) \times 5\}}{2} = -156$$

실전유형

196~198쪽

091 **답** ③

첫째항을 a 라 하면 $a_4=4$ 에서

$$a + 3 \times 3 = 4 \quad \therefore a = -5$$

$$\therefore a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15} = \frac{15\{2 \times (-5) + (15-1) \times 3\}}{2} = 240$$

092 **답** ①

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_2 = -2$, $a_5 = 10$ 에서

$$a + d = -2, a + 4d = 10$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -6$, $d = 4$

따라서 첫째항이 -6 , 공차가 4 인 등차수열의 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{20\{2 \times (-6) + (20-1) \times 4\}}{2} = 640$$

093 **답** 294

첫째항이 -5 , 공차가 4 인 등차수열의 제 k 항이 47 이므로

$$-5 + (k-1) \times 4 = 47$$

$$4(k-1) = 52, k-1 = 13 \quad \therefore k = 14$$

따라서 첫째항이 -5 , 제14항이 47 인 등차수열의 첫째항부터 제14항까지의 합은

$$\frac{14(-5+47)}{2} = 294$$

094 **답** ③

첫째항이 7 , 제 k 항이 -26 인 등차수열의 첫째항부터 제 k 항까지의 합이 -114 이므로

$$\frac{k\{7 + (-26)\}}{2} = -114, -\frac{19}{2}k = -114 \quad \therefore k = 12$$

즉, 제12항이 -26 이므로 공차를 d 라 하면

$$7 + 11d = -26, 11d = -33 \quad \therefore d = -3$$

따라서 공차는 -3 이다.

095 **답** ⑤

첫째항이 18 , 공차가 -2 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \frac{n\{2 \times 18 + (n-1) \times (-2)\}}{2} = -n^2 + 19n$$

$$S_n < 0 \text{에서 } -n^2 + 19n < 0, n^2 - 19n > 0$$

$$n(n-19) > 0 \quad \therefore n < 0 \text{ 또는 } n > 19$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 20 이다.

096 **답** 12

첫째항이 -3 , 끝항이 55 , 항수가 $m+2$ 인 등차수열의 합이 364 이므로

$$\frac{(m+2)(-3+55)}{2} = 364$$

$$26(m+2) = 364, m+2 = 14$$

$$\therefore m = 12$$

097 **답** 720

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_{10} = 40 \text{에서 } \frac{10\{2a + (10-1)d\}}{2} = 40$$

$$\therefore 2a + 9d = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_{20} = 280 \text{에서 } \frac{20\{2a + (20-1)d\}}{2} = 280$$

$$\therefore 2a + 19d = 28 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = -5$, $d = 2$

$$\therefore S_{30} = \frac{30\{2 \times (-5) + (30-1) \times 2\}}{2} = 720$$

098 **답** ④

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_4 = 42 \text{에서 } \frac{4\{2a + (4-1)d\}}{2} = 42$$

$$\therefore 2a + 3d = 21 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_8 = 132 \text{에서 } \frac{8\{2a + (8-1)d\}}{2} = 132$$

$$\therefore 2a + 7d = 33 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = 6$, $d = 3$

$$\therefore a_9 + a_{10} + a_{11} + \dots + a_{20} = S_{20} - S_8 \\ = \frac{20\{2 \times 6 + (20-1) \times 3\}}{2} - 132 \\ = 690 - 132 = 558$$

099 **답** -69

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_6 = 3 \text{에서 } \frac{6\{2a + (6-1)d\}}{2} = 3$$

$$\therefore 2a + 5d = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$S_{12} - S_6 = -33$ 에서

$$S_{12} = S_6 + (-33) = 3 + (-33) = -30 \text{이므로}$$

$$\frac{12\{2a + (12-1)d\}}{2} = -30$$

$$\therefore 2a + 11d = -5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 3$, $d = -1$

따라서 주어진 등차수열의 제13항부터 제18항까지의 합은

$$\begin{aligned} S_{18} - S_{12} &= \frac{18\{2 \times 3 + (18-1) \times (-1)\}}{2} - (-30) \\ &= -99 - (-30) = -69 \end{aligned}$$

100 **답** 8

첫째항이 21, 공차가 -3 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 21 + (n-1) \times (-3) = -3n + 24$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면 $a_n < 0$ 에서

$$-3n + 24 < 0, 3n > 24$$

$$\therefore n > 8$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제9항부터 음수이므로 첫째항부터 제8항까지의 합이 최대이다.

$$\therefore n = 8$$

101 **답** ②

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 제3항이 -31 , 제10항이 -17 이므로

$$a + 2d = -31, a + 9d = -17$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -35, d = 2$$

따라서 첫째항이 -35 , 공차가 2이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -35 + (n-1) \times 2 = 2n - 37$$

이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면 $a_n > 0$ 에서

$$2n - 37 > 0, 2n > 37$$

$$\therefore n > 18.5$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제19항부터 양수이므로 첫째항부터 제18항까지의 합이 최소이다.

$$\therefore k = 18$$

$$\text{따라서 } S_{18} = \frac{18\{2 \times (-35) + (18-1) \times 2\}}{2} = -324 \text{이므로}$$

$$m = -324$$

$$\therefore k - m = 18 - (-324) = 342$$

102 **답** ③

공차를 d 라 하면

$$S_3 = \frac{3\{2 \times (-27) + (3-1)d\}}{2} = 3d - 81$$

$$S_7 = \frac{7\{2 \times (-27) + (7-1)d\}}{2} = 21d - 189$$

$$\text{즉, } 3d - 81 = 21d - 189 \text{이므로}$$

$$18d = 108 \quad \therefore d = 6$$

따라서 첫째항이 -27 , 공차가 6이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -27 + (n-1) \times 6 = 6n - 33$$

이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면 $a_n > 0$ 에서

$$6n - 33 > 0, 6n > 33$$

$$\therefore n > 5.5$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제6항부터 양수이므로 첫째항부터 제5항까지의 합이 최소이다.

따라서 S_n 의 최솟값은

$$S_5 = \frac{5\{2 \times (-27) + (5-1) \times 6\}}{2} = -75$$

103 **답** ③

100 이하의 자연수 중에서 5로 나누었을 때의 나머지가 4인 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$4, 9, 14, \dots, 99$$

즉, 첫째항이 4, 공차가 5인 등차수열이므로 99를 제 n 항이라 하면

$$4 + (n-1) \times 5 = 99$$

$$5(n-1) = 95, n-1 = 19$$

$$\therefore n = 20$$

따라서 구하는 총합은 첫째항이 4, 끝항이 99, 항수가 20인 등차수열의 합이므로

$$\frac{20(4+99)}{2} = 1030$$

104 **답** ⑤

50보다 크고 100보다 작은 자연수 중에서 7의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$56, 63, 70, \dots, 98$$

즉, 첫째항이 56, 공차가 7인 등차수열이므로 98을 제 n 항이라 하면

$$56 + (n-1) \times 7 = 98$$

$$7(n-1) = 42, n-1 = 6$$

$$\therefore n = 7$$

따라서 구하는 총합은 첫째항이 56, 끝항이 98, 항수가 7인 등차수열의 합이므로

$$\frac{7(56+98)}{2} = 539$$

105 **답** 840

두 자리의 자연수 중에서 6으로 나누었을 때의 나머지가 2인 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$14, 20, 26, \dots, 98$$

즉, 첫째항이 14, 공차가 6인 등차수열이므로 98을 제 n 항이라 하면

$$14 + (n-1) \times 6 = 98$$

$$6(n-1) = 84, n-1 = 14$$

$$\therefore n = 15$$

따라서 구하는 총합은 첫째항이 14, 끝항이 98, 항수가 15인 등차수열의 합이므로

$$\frac{15(14+98)}{2} = 840$$

106 답 $2n-4, -2, 1, 2n-4$

107 답 $a_n=4n-1$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 + n - \{2(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 4n - 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 + 1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 ㉡이 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 4n - 1$$

108 답 $a_n = -2n - 3$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= -n^2 - 4n - \{-(n-1)^2 - 4(n-1)\} \\ &= -2n - 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = -1^2 - 4 \times 1 = -5 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 ㉡이 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -2n - 3$$

109 답 $a_n = -4n + 7$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= -2n^2 + 5n - \{-2(n-1)^2 + 5(n-1)\} \\ &= -4n + 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = -2 \times 1^2 + 5 \times 1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 ㉡이 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -4n + 7$$

110 답 $a_n = -6n + 10$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= -3n^2 + 7n - \{-3(n-1)^2 + 7(n-1)\} \\ &= -6n + 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = -3 \times 1^2 + 7 \times 1 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 ㉡이 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -6n + 10$$

111 답 $2n+1, 4, 4, 2n+1$

112 답 $a_1 = -3, a_n = 6n - 7 \ (n \geq 2)$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3n^2 - 4n - 2 - \{3(n-1)^2 - 4(n-1) - 2\} \\ &= 6n - 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 - 4 \times 1 - 2 = -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 ㉡이 같지 않으므로 일반항 a_n 은

$$a_1 = -3, a_n = 6n - 7 \ (n \geq 2)$$

113 답 $a_1 = -4, a_n = -4n + 5 \ (n \geq 2)$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= -2n^2 + 3n - 5 - \{-2(n-1)^2 + 3(n-1) - 5\} \\ &= -4n + 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = -2 \times 1^2 + 3 \times 1 - 5 = -4 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 ㉡이 같지 않으므로 일반항 a_n 은

$$a_1 = -4, a_n = -4n + 5 \ (n \geq 2)$$

실전유형

201쪽

114 답 ①

$$\begin{aligned} a_1 &= S_1 = -4 \times 1^2 + 3 \times 1 = -1 \\ a_8 &= S_8 - S_7 = (-4 \times 8^2 + 3 \times 8) - (-4 \times 7^2 + 3 \times 7) \\ &= -232 - (-175) = -57 \\ \therefore a_1 - a_8 &= -1 - (-57) = 56 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$S_n = -4n^2 + 3n \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = -4n^2 + 3n - \{-4(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= -8n + 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = -4 \times 1^2 + 3 \times 1 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 ㉡이 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -8n + 7$$

$$\therefore a_1 - a_8 = -1 - (-8 \times 8 + 7) = -1 - (-57) = 56$$

115 답 ②

$$S_n = n^2 - 5n \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} a_1 + d &= a_2 = S_2 - S_1 = (2^2 - 5 \times 2) - (1^2 - 5 \times 1) \\ &= -6 - (-4) = -2 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$S_n = n^2 - 5n \text{이므로 } n \geq 2 \text{일 때,}$$

$$a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - 5n - \{(n-1)^2 - 5(n-1)\} = 2n - 6$$

$$\therefore a_1 + d = a_2 = 2 \times 2 - 6 = -2$$

116 **답** 17

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각

$$A_n = 3n^2 - 2n, B_n = 2n^2 + kn \text{ 이라 하면}$$

$$a_{10} = A_{10} - A_9 \\ = (3 \times 10^2 - 2 \times 10) - (3 \times 9^2 - 2 \times 9) = 280 - 225 = 55$$

$$b_{10} = B_{10} - B_9 \\ = (2 \times 10^2 + k \times 10) - (2 \times 9^2 + k \times 9) \\ = (200 + 10k) - (162 + 9k) = k + 38$$

즉, $55 = k + 38$ 이므로 $k = 17$

117 **답** ④

$S_n = 3n^2 - n + 1$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} \\ = 3n^2 - n + 1 - \{3(n-1)^2 - (n-1) + 1\} \\ = 6n - 4 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 - 1 + 1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 ⑦에 $n = 1$ 을 대입한 값과 ⑧이 같지 않으므로 일반항 a_n 은

$$a_1 = 3, a_n = 6n - 4 \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = 3 + (6 \times 3 - 4) + (6 \times 5 - 4) = 3 + 14 + 26 = 43$$

118 **답** 15

$S_n = n^2 - 2n$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} \\ = n^2 - 2n - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\} \\ = 2n - 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \times 1 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 ⑦에 $n = 1$ 을 대입한 값과 ⑧이 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2n - 3$$

$$a_k = 27 \text{에서 } 2k - 3 = 27$$

$$2k = 30 \quad \therefore k = 15$$

119 **답** ②

$S_n = 2n^2 - 3n$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} \\ = 2n^2 - 3n - \{2(n-1)^2 - 3(n-1)\} \\ = 4n - 5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 - 3 \times 1 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 ⑦에 $n = 1$ 을 대입한 값과 ⑧이 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 4n - 5$$

$$a_n > 100 \text{에서 } 4n - 5 > 100$$

$$4n > 105 \quad \therefore n > 26.25$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 27이다.

개념유형

203~204쪽

120 **답** 공비: 2 / 4, 8

$\frac{2}{1} = 2$ 에서 공비가 2이므로 주어진 수열은

$$1, 2, \boxed{4}, \boxed{8}, 16, \dots$$

121 **답** 공비: -2 / -10, 20

$\frac{80}{-40} = -2$ 에서 공비가 -2이므로 주어진 수열은

$$5, \boxed{-10}, \boxed{20}, -40, 80, \dots$$

122 **답** 공비: $\frac{1}{3}$ / 1, $\frac{1}{27}$

$\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$ 에서 공비가 $\frac{1}{3}$ 이므로 주어진 수열은

$$3, \boxed{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \boxed{\frac{1}{27}}, \dots$$

123 **답** 공비: $\sqrt{2}$ / $\sqrt{2}$, 2

$\frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ 에서 공비가 $\sqrt{2}$ 이므로 주어진 수열은

$$\boxed{\sqrt{2}}, \boxed{2}, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, \dots$$

124 **답** 공비: $-\frac{1}{5}$ / -5, $-\frac{1}{5}$

$\frac{-\frac{1}{125}}{\frac{1}{25}} = -\frac{1}{5}$ 에서 공비가 $-\frac{1}{5}$ 이므로 주어진 수열은

$$\boxed{-5}, 1, \boxed{-\frac{1}{5}}, \frac{1}{25}, -\frac{1}{125}, \dots$$

125 **답** 공비: 10 / 0.01, 0.1

$\frac{0.001}{0.0001} = 10$ 에서 공비가 10이므로 주어진 수열은

$$0.0001, 0.001, \boxed{0.01}, \boxed{0.1}, 1, \dots$$

126 **답** $a_n = 4^{n-1}$

127 **답** $a_n = 5 \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

128 **답** 2, -6, -3, 2, -3

129 **답** $a_n = 5 \times (\sqrt{5})^{n-1}$

첫째항이 5, 공비가 $\frac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 5 \times (\sqrt{5})^{n-1}$$

130 **답** $a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-4}$

첫째항이 10^3 , 공비가 $\frac{10^2}{10^3} = \frac{1}{10}$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 10^3 \times \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-4}$$

131 **답** $a_n = 4 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

첫째항이 4, 공비가 $-\frac{8}{4} = -\frac{2}{3}$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 4 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

132 **답** 2

공비를 r 라 하면 $a_1=2$, $a_6=64$ 에서

$$2 \times r^5 = 64, r^5 = 32$$

$$\therefore r = 2$$

따라서 공비는 2이다.

133 **답** $\frac{1}{2}$

공비를 r 라 하면 $a_1=16$, $a_8=\frac{1}{8}$ 에서

$$16 \times r^7 = \frac{1}{8}, r^7 = \frac{1}{128}$$

$$\therefore r = \frac{1}{2}$$

따라서 공비는 $\frac{1}{2}$ 이다.

134 **답** 4, 27, 3, 2, 2, 3, 2

135 **답** $a_n = 5 \times (-2)^{n-1}$

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_3=20$, $a_6=-160$ 에서

$$ar^2 = 20 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^5 = -160 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$r^3 = -8 \quad \therefore r = -2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $a=5$

따라서 첫째항이 5, 공비가 -2 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 5 \times (-2)^{n-1}$$

136 **답** $a_n = (-1)^{n-1}$

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_3=1$, $a_8=-1$ 에서

$$ar^2 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^7 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$r^5 = -1 \quad \therefore r = -1$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $a=1$

따라서 첫째항이 1, 공비가 -1 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 1 \times (-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

137 **답** $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-7}$

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_4=27$, $a_9=\frac{1}{9}$ 에서

$$ar^3 = 27 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^8 = \frac{1}{9} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$r^5 = \frac{1}{243} \quad \therefore r = \frac{1}{3}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $a=729$

따라서 첫째항이 729, 공비가 $\frac{1}{3}$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 729 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-7}$$

138 **답** $\frac{1}{256}$

$$a_9 = 1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$$

139 **답** 243

$$a_9 = \frac{1}{27} \times 3^8 = 243$$

140 **답** 64

첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가 $-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = -2$ 이므로

$$a_9 = \frac{1}{4} \times (-2)^8 = 64$$

141 **답** $81\sqrt{3}$

첫째항이 $\sqrt{3}$, 공비가 $\frac{-3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$ 이므로

$$a_9 = \sqrt{3} \times (-\sqrt{3})^8 = 81\sqrt{3}$$

142 **답** $\frac{1}{81}$

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_3=9$, $a_4=3$ 에서

$$ar^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^3 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r = \frac{1}{3}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $a=81$

따라서 첫째항이 81, 공비가 $\frac{1}{3}$ 이므로

$$a_9 = 81 \times \left(\frac{1}{3}\right)^8 = \frac{1}{81}$$

143 **답** 1024

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_2=\frac{1}{16}$, $a_5=4$ 에서

$$ar = \frac{1}{16} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^4 = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{7} \text{을 하면 } r^3=64 \quad \therefore r=4$$

$$\text{이를 } \textcircled{7} \text{에 대입하여 풀면 } a=\frac{1}{64}$$

따라서 첫째항이 $\frac{1}{64}$, 공비가 4이므로

$$a_9=\frac{1}{64} \times 4^8=1024$$

실전유형

205~206쪽

144 답 첫째항: 10, 공비: $\frac{1}{25}$

$$a_n=2 \times 5^{3-2n} \text{에서}$$

$$a_1=2 \times 5^{3-2 \times 1}=10, \quad a_2=2 \times 5^{3-2 \times 2}=\frac{2}{5}$$

따라서 첫째항은 10, 공비는 $\frac{2}{5}=\frac{1}{25}$ 이다.

145 답 $40\sqrt{2}$

첫째항을 a , 공비를 $r(r>0)$ 라 하면 $a_3=5$, $a_7=20$ 에서

$$ar^2=5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^6=20 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^4=4 \quad \therefore r=\sqrt{2} (\because r>0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하여 풀면 } a=\frac{5}{2}$$

따라서 첫째항이 $\frac{5}{2}$, 공비가 $\sqrt{2}$ 이므로

$$a_{10}=\frac{5}{2} \times (\sqrt{2})^9=40\sqrt{2}$$

146 답 제9항

주어진 등비수열의 첫째항이 $\frac{3}{2}$, 공비가 $\frac{3}{2}$ 이므로 일반항을 a_n 이라 하면

라 하면

$$a_n=\frac{3}{2} \times 2^{n-1}=3 \times 2^{n-2}$$

이때 384를 제 k 항이라 하면

$$3 \times 2^{k-2}=384, \quad 2^{k-2}=128=2^7$$

$$k-2=7 \quad \therefore k=9$$

따라서 384는 제9항이다.

147 답 ①

첫째항을 a 라 하면 $a_4=\frac{1}{12}$ 에서

$$a \times \left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{12} \quad \therefore a=\frac{9}{4}$$

따라서 첫째항이 $\frac{9}{4}$, 공비가 $\frac{1}{3}$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n=\frac{9}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$a_k=\frac{1}{108} \text{에서 } \frac{9}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\frac{1}{108}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\frac{1}{243}=\left(\frac{1}{3}\right)^5$$

$$k-1=5 \quad \therefore k=6$$

148 답 4

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_5+a_7+a_{10}}{a_2+a_4+a_7}=64 \text{에서 } \frac{ar^4+ar^6+ar^9}{ar+ar^3+ar^6}=64$$

$$\frac{ar^4(1+r^2+r^5)}{ar(1+r^2+r^5)}=64$$

$$r^3=64 \quad \therefore r=4$$

따라서 공비는 4이다.

149 답 ①

공비를 $r(r>0)$ 라 하면

$$a_2+a_4=30 \text{에서 } a_1r+a_1r^3=30$$

$$\therefore a_1r(1+r^2)=30 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4+a_6=\frac{15}{2} \text{에서 } a_1r^3+a_1r^5=\frac{15}{2}$$

$$\therefore a_1r^3(1+r^2)=\frac{15}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^2=\frac{1}{4} \quad \therefore r=\frac{1}{2} (\because r>0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{1}{2}a_1\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=30, \quad \frac{5}{8}a_1=30$$

$$\therefore a_1=48$$

150 답 ③

첫째항을 $a(a>0)$, 공비를 $r(r>0)$ 라 하면

$$\log_2 a_7 - \log_2 a_5 = 4 \text{에서}$$

$$\log_2 ar^6 - \log_2 ar^4 = 4$$

$$\log_2 \frac{ar^6}{ar^4} = 4, \quad r^2=2^4=16$$

$$\therefore r=4 (\because r>0)$$

$$\therefore \log_2 a_{15} - \log_2 a_8 = \log_2 (a \times 4^{14}) - \log_2 (a \times 4^7)$$

$$= \log_2 \frac{a \times 4^{14}}{a \times 4^7} = \log_2 4^7$$

$$= \log_2 2^{14} = 14$$

151 답 제6항

첫째항을 a , 공비를 $r(r<0)$ 라 하면

$$a_2=-6 \text{에서 } ar=-6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_5:a_7=1:9 \text{에서 } a_7=9a_5 \text{이므로}$$

$$ar^6=9ar^4, \quad r^2=9$$

$$\therefore r=-3 (\because r<0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면

$$a=2$$

따라서 첫째항이 2, 공비가 -3 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n=2 \times (-3)^{n-1}$$

이때 -486 을 제 k 항이라 하면

$$2 \times (-3)^{k-1}=-486$$

$$(-3)^{k-1} = -243 = (-3)^5$$

$$k-1=5 \quad \therefore k=6$$

따라서 -486은 제6항이다.

152 답 제6항

첫째항이 $\frac{1}{6}$, 공비가 4이므로 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{6} \times 4^{n-1}$$

이때 제 n 항에서 처음으로 100보다 커진다고 하면

$$a_n > 100 \text{에서 } \frac{1}{6} \times 4^{n-1} > 100$$

$$\therefore 4^{n-1} > 600$$

그런데 n 은 자연수이고 $4^4 = 256$, $4^5 = 1024$ 이므로

$$n-1 \geq 5 \quad \therefore n \geq 6$$

따라서 처음으로 100보다 커지는 항은 제6항이다.

153 답 ④

공비를 r 라 하면 첫째항이 135, 제4항이 5이므로

$$135r^3 = 5, r^3 = \frac{1}{27}$$

$$\therefore r = \frac{1}{3}$$

따라서 첫째항이 135, 공비가 $\frac{1}{3}$ 이므로 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 135 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

이때 제 n 항에서 처음으로 $\frac{1}{10}$ 보다 작아진다고 하면

$$a_n < \frac{1}{10} \text{에서 } 135 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < \frac{1}{10}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < \frac{1}{1350}$$

그런데 n 은 자연수이고 $\left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{2187}$ 이므로

$$n-1 \geq 7 \quad \therefore n \geq 8$$

따라서 처음으로 $\frac{1}{10}$ 보다 작아지는 항은 제8항이다.

154 답 ①

첫째항을 a , 공비를 r ($r > 0$)라 하면 $a_3 = 5$, $a_5 = 25$ 에서

$$ar^2 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^4 = 25 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$r^2 = 5 \quad \therefore r = \sqrt{5} \quad (\because r > 0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면

$$a = 1$$

따라서 첫째항이 1, 공비가 $\sqrt{5}$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 1 \times (\sqrt{5})^{n-1} = (\sqrt{5})^{n-1}$$

$$\therefore a_n^2 = \{(\sqrt{5})^{n-1}\}^2 = \{(\sqrt{5})^2\}^{n-1} = 5^{n-1}$$

$$a_n^2 > 4000 \text{에서 } 5^{n-1} > 4000$$

그런데 n 은 자연수이고 $5^5 = 3125$, $5^6 = 15625$ 이므로

$$n-1 \geq 6 \quad \therefore n \geq 7$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 7이다.

155 답 ④

공비를 r ($r > 0$)라 하면 첫째항이 4, 제9항이 64이므로

$$4r^8 = 64$$

$$r^8 = 16 \quad \therefore r = \sqrt{2} \quad (\because r > 0)$$

따라서 공비는 $\sqrt{2}$ 이다.

156 답 400

공비를 r 라 하면 첫째항이 5, 제6항이 160이므로

$$5r^5 = 160$$

$$r^5 = 32 \quad \therefore r = 2$$

이때 x_1 , x_3 은 각각 주어진 수열의 제2항, 제4항이므로

$$x_1 = 5 \times 2 = 10, x_3 = 5 \times 2^3 = 40$$

$$\therefore x_1 x_3 = 400$$

157 답 ②

$\frac{4}{81}$ 는 첫째항이 36, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열의 제 $(m+2)$ 항이므로

$$36 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{m+1} = \frac{4}{81}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{m+1} = \frac{1}{729} = \left(\frac{1}{3}\right)^6$$

$$m+1=6$$

$$\therefore m=5$$

개념유형

207~208쪽

158 답 -6 또는 6

x 는 3과 12의 등비중항이므로

$$x^2 = 3 \times 12 = 36$$

$$\therefore x = -6 \text{ 또는 } x = 6$$

159 답 $-4\sqrt{5}$ 또는 $4\sqrt{5}$

x 는 -2와 -40의 등비중항이므로

$$x^2 = (-2) \times (-40) = 80$$

$$\therefore x = -4\sqrt{5} \text{ 또는 } x = 4\sqrt{5}$$

160 답 -3 또는 3

x 는 2와 $\frac{9}{2}$ 의 등비중항이므로

$$x^2 = 2 \times \frac{9}{2} = 9$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 3$$

161 답 $\sqrt{6}$

6은 a 와 $6a$ 의 등비중항이므로

$$6^2 = a \times 6a, a^2 = 6$$

$$\therefore a = \sqrt{6} \quad (\because a > 0)$$

162 **답** 1

$a+3$ 은 $2a$ 와 $8a$ 의 등비중항이므로

$$(a+3)^2=2a \times 8a$$

$$a^2+6a+9=16a^2, 5a^2-2a-3=0$$

$$(5a+3)(a-1)=0 \quad \therefore a=1 (\because a>0)$$

163 **답** $\frac{1}{3}$

$a+1$ 은 $a-1$ 과 $a-3$ 의 등비중항이므로

$$(a+1)^2=(a-1)(a-3)$$

$$a^2+2a+1=a^2-4a+3, 6a=2 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

164 **답** $ar, ar, r, ar, 3, 3, r, r, 10, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1, 3$

165 **답** 3, -6, 12

세 수를 a, ar, ar^2 이라 하면

$$a+ar+ar^2=9$$

$$\therefore a(1+r+r^2)=9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a \times ar \times ar^2 = -216$$

$$(ar)^3 = -216 \quad \therefore ar = -6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{a(1+r+r^2)}{ar} = -\frac{3}{2}$$

$$2(1+r+r^2) = -3r$$

$$2r^2+5r+2=0$$

$$(r+2)(2r+1)=0$$

$$\therefore r = -2 \text{ 또는 } r = -\frac{1}{2}$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 풀면

$$r = -2 \text{ 일 때 } a = 3, r = -\frac{1}{2} \text{ 일 때 } a = 12$$

따라서 세 수는 3, -6, 12이다.

166 **답** -25, 5, -1

세 수를 a, ar, ar^2 이라 하면

$$a+ar+ar^2 = -21$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = -21 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a \times ar \times ar^2 = 125$$

$$(ar)^3 = 125 \quad \therefore ar = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$\frac{a(1+r+r^2)}{ar} = -\frac{21}{5}$$

$$5(1+r+r^2) = -21r$$

$$5r^2+26r+5=0$$

$$(r+5)(5r+1)=0$$

$$\therefore r = -5 \text{ 또는 } r = -\frac{1}{5}$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 풀면

$$r = -5 \text{ 일 때 } a = -1, r = -\frac{1}{5} \text{ 일 때 } a = -25$$

따라서 세 수는 -25, 5, -1이다.

실전유형

208~209쪽

167 **답** $\frac{15}{8}$

x 는 -3 과 $-\frac{3}{4}$ 의 등비중항이므로

$$x^2 = -3 \times \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{9}{4} \quad \therefore x = \frac{3}{2} (\because x>0)$$

$-\frac{3}{4}$ 은 $\frac{3}{2}$ 과 y 의 등비중항이므로

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{2}y \quad \therefore y = \frac{3}{8}$$

$$\therefore x+y = \frac{3}{2} + \frac{3}{8} = \frac{15}{8}$$

168 **답** 16

3은 a 와 b 의 등차중항이므로

$$3 = \frac{a+b}{2}, a+b=6 \quad \therefore b=6-a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

a 는 1과 b 의 등비중항이므로 $a^2=b$ $\dots\dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$a^2=6-a, a^2+a-6=0$$

$$(a+3)(a-2)=0 \quad \therefore a=2 (\because a>0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$b=6-2=4$$

$$\therefore 2a+3b=2 \times 2+3 \times 4=16$$

169 **답** $3\sqrt{3}$

b 는 a 와 c 의 등비중항이므로 $b^2=ac$

$$b^3=27ac \text{에서 } b^3=27b^2, b^2(b-27)=0$$

$$\therefore b=27 (\because b \neq 0)$$

a 는 1과 27의 등비중항이므로

$$a^2=27 \quad \therefore a = -3\sqrt{3} \text{ 또는 } a = 3\sqrt{3}$$

이때 주어진 등비수열의 공비가 1보다 크므로 $a=3\sqrt{3}$

170 **답** ④

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 $a(a \neq 0)$, 공차를 $d(d \neq 0)$ 라 하면

$$a_2=a+d, a_5=a+4d, a_{14}=a+13d$$

a_5 는 a_2 와 a_{14} 의 등비중항이므로 $a_5^2=a_2a_{14}$ 에서

$$(a+4d)^2=(a+d)(a+13d)$$

$$a^2+8ad+16d^2=a^2+14ad+13d^2$$

$$3d^2-6ad=0, 3d(d-2a)=0$$

$$\therefore d=2a (\because d \neq 0)$$

$$\therefore \frac{a_{23}}{a_3} = \frac{a+22d}{a+2d} = \frac{a+22 \times 2a}{a+2 \times 2a} = \frac{45a}{5a} = 9 (\because a \neq 0)$$

171 **답** -8

세 수를 a, ar, ar^2 이라 하면

$$a+ar+ar^2 = -6$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = -6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a \times ar \times ar^2 = 64$$

$$(ar)^3 = 64 \quad \therefore ar = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } \frac{a(1+r+r^2)}{ar} = -\frac{3}{2}$$

$$2(1+r+r^2) = -3r, 2r^2+5r+2=0$$

$$(r+2)(2r+1)=0 \quad \therefore r=-2 \text{ 또는 } r=-\frac{1}{2}$$

이를 ②에 대입하여 풀면

$$r=-2 \text{ 일 때 } a=-2, r=-\frac{1}{2} \text{ 일 때 } a=-8$$

따라서 세 수는 $-8, 4, -2$ 이므로 가장 작은 수는 -8 이다.

172 답 ③

주어진 삼차방정식의 세 실근을 a, ar, ar^2 이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+ar+ar^2=-k$$

$$\therefore a(1+r+r^2)=-k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a = -50$$

$$\therefore a^2r(1+r+r^2) = -50 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$a \times ar \times ar^2 = 125$$

$$(ar)^3 = 125 \quad \therefore ar = 5 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{a^2r(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = \frac{50}{k} \quad \therefore ar = \frac{50}{k}$$

$$\text{이를 } \textcircled{3} \text{에 대입하면 } \frac{50}{k} = 5 \quad \therefore k = 10$$

173 답 27

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 a, ar, ar^2 이라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 56이므로

$$4(a+ar+ar^2)=56$$

$$\therefore a(1+r+r^2)=14 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

겉넓이가 84이므로

$$2(a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a) = 84$$

$$\therefore a^2r(1+r+r^2) = 42 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } \frac{a^2r(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = 3 \quad \therefore ar = 3$$

따라서 구하는 부피는 $a \times ar \times ar^2 = (ar)^3 = 3^3 = 27$

174 답 ③

첫 번째 시행 후 남은 선분들의 길이의 합은 $1 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$

두 번째 시행 후 남은 선분들의 길이의 합은 $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

세 번째 시행 후 남은 선분들의 길이의 합은 $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

⋮

n 번째 시행 후 남은 선분들의 길이의 합은 $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

따라서 15번째 시행 후 남은 선분들의 길이의 합은 $\left(\frac{2}{3}\right)^{15} = \frac{2^{15}}{3^{15}}$

175 답 ⑤

첫 번째 시행 후 남은 도형의 넓이는 $1 \times \frac{8}{9} = \frac{8}{9}$

두 번째 시행 후 남은 도형의 넓이는

$$\frac{8}{9} \times \frac{8}{9} = \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

세 번째 시행 후 남은 도형의 넓이는

$$\left(\frac{8}{9}\right)^2 \times \frac{8}{9} = \left(\frac{8}{9}\right)^3$$

⋮

n 번째 시행 후 남은 도형의 넓이는

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} \times \frac{8}{9} = \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

따라서 10번째 시행 후 남은 도형의 넓이는

$$\left(\frac{8}{9}\right)^{10} = \frac{8^{10}}{9^{10}} = \frac{2^{30}}{3^{20}}$$

따라서 $p=20, q=30$ 이므로 $p+q=50$

개념유형

211쪽

176 답 364

$$S_6 = \frac{1 \times (3^6 - 1)}{3 - 1} = 364$$

177 답 -682

$$S_{10} = \frac{2\{1 - (-2)^{10}\}}{1 - (-2)} = -682$$

178 답 $\frac{93}{2}$

$$S_5 = \frac{24\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right\}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{93}{2}$$

179 답 120

첫째항이 6, 공비가 $\frac{6}{6} = 1$ 이므로

$$S_{20} = 20 \times 6 = 120$$

180 답 $2(3^{12} - 1)$

첫째항이 4, 공비가 $\frac{12}{4} = 3$ 이므로

$$S_{12} = \frac{4(3^{12} - 1)}{3 - 1} = 2(3^{12} - 1)$$

181 답 $1 - 2^{18}$

첫째항이 3, 공비가 $\frac{-6}{3} = -2$ 이므로

$$S_{18} = \frac{3\{1 - (-2)^{18}\}}{1 - (-2)} = 1 - 2^{18}$$

182 답 762

수열 6, 12, 24, ..., 384는 첫째항이 6, 공비가 $\frac{12}{6} = 2$ 인 등비수열이

므로 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 6 \times 2^{n-1}$$

384를 제 k 항이라 하면

$$6 \times 2^{k-1} = 384$$

$$2^{k-1} = 64 = 2^6, k-1=6 \quad \therefore k=7$$

따라서 구하는 합은 첫째항이 6, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합이므로

$$6 + 12 + 24 + \cdots + 384 = \frac{6(2^7 - 1)}{2 - 1} = 762$$

183 **답** $\frac{484}{9}$

수열 36, 12, 4, ..., $\frac{4}{9}$ 는 첫째항이 36, 공비가 $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 36 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$\frac{4}{9}$ 를 제 k 항이라 하면

$$36 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{81} = \left(\frac{1}{3}\right)^4, k-1=4 \quad \therefore k=5$$

따라서 구하는 합은 첫째항이 36, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열의 첫째항부터 제5항까지의 합이므로

$$36 + 12 + 4 + \cdots + \frac{4}{9} = \frac{36 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5 \right\}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{484}{9}$$

184 **답** 3, 6, 2, 125, 5, $\frac{2}{31}$, $\frac{2}{31}$, 5

185 **답** 첫째항: $\frac{3}{40}$, 공비: 3

첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하면

$$S_4 = 3 \text{에서 } \frac{a(r^4 - 1)}{r - 1} = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_8 = 246 \text{에서 } \frac{a(r^8 - 1)}{r - 1} = 246$$

$$\therefore \frac{a(r^4 - 1)(r^4 + 1)}{r - 1} = 246 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$3(r^4 + 1) = 246, r^4 = 81 \quad \therefore r = 3 \quad (\because r > 0)$$

이를 ①에 대입하면

$$\frac{a(3^4 - 1)}{3 - 1} = 3, 40a = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{40}$$

따라서 첫째항은 $\frac{3}{40}$, 공비는 3이다.

186 **답** 첫째항: $\frac{6}{11}$, 공비: -2

첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하면

$$S_5 = 6 \text{에서 } \frac{a(r^5 - 1)}{r - 1} = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{10} = -186 \text{에서 } \frac{a(r^{10} - 1)}{r - 1} = -186$$

$$\therefore \frac{a(r^5 - 1)(r^5 + 1)}{r - 1} = -186 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$6(r^5 + 1) = -186, r^5 = -32 \quad \therefore r = -2$$

이를 ①에 대입하면

$$\frac{a\{(-2)^5 - 1\}}{-2 - 1} = 6, 11a = 6 \quad \therefore a = \frac{6}{11}$$

따라서 첫째항은 $\frac{6}{11}$, 공비는 -2이다.

실전유형

212~213쪽

187 **답** ④

주어진 등비수열의 첫째항이 2, 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 4 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right\} = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

188 **답** -510

공비를 r 라 하면 첫째항이 6, 제4항이 -48이므로

$$6r^3 = -48, r^3 = -8 \quad \therefore r = -2$$

따라서 첫째항이 6, 공비가 -2인 등비수열의 첫째항부터 제8항까지의 합은

$$\frac{6 \{ 1 - (-2)^8 \}}{1 - (-2)} = -510$$

189 **답** ④

$a_n = 3^{2n-1}$ 에서

$$a_1 = 3^{2 \times 1 - 1} = 3, a_2 = 3^{2 \times 2 - 1} = 27$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 $\frac{27}{3} = 9$ 인 등비수열이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{15} = \frac{3(9^{15} - 1)}{9 - 1} = \frac{3(3^{30} - 1)}{8} = \frac{3^{31} - 3}{8}$$

$$\therefore p = 31$$

190 **답** 6

주어진 등비수열의 첫째항이 3, 공비가 $\frac{12}{3} = 4$ 이므로

$$S_n = \frac{3(4^n - 1)}{4 - 1} = 4^n - 1$$

$$S_k = 4095 \text{에서 } 4^k - 1 = 4095$$

$$4^k = 4096 = 4^6 \quad \therefore k = 6$$

191 **답** ③

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_2 = -12$, $a_5 = 324$ 에서

$$ar = -12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$ar^4 = 324 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

② ÷ ①을 하면

$$r^3 = -27 \quad \therefore r = -3$$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a=4$

따라서 첫째항이 4, 공비가 -3 인 등비수열의 첫째항부터 제6항까지의 합은

$$\frac{4\{1-(-3)^6\}}{1-(-3)} = -728$$

192 답 ③

공비를 r ($r > 0$)라 하면

$$a_1 + a_3 = 20 \text{에서 } a_1 + a_1 r^2 = 20$$

$$\therefore a_1(1+r^2) = 20 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_3 + a_5 = 180 \text{에서 } a_1 r^2 + a_1 r^4 = 180$$

$$\therefore a_1 r^2(1+r^2) = 180 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 \quad (\because r > 0)$$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a_1 = 2$

따라서 첫째항이 2, 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제12항까지의 합은

$$\frac{2(3^{12}-1)}{3-1} = 3^{12} - 1$$

193 답 -2

공비를 r ($r < 0$)라 하면

$$S_4 = \frac{3(r^4-1)}{r-1}$$

$$S_8 = \frac{3(r^8-1)}{r-1} = \frac{3(r^4-1)(r^4+1)}{r-1}$$

$$\frac{S_8}{S_4} = 17 \text{에서 } r^4 + 1 = 17$$

$$r^4 = 16 \quad \therefore r = -2 \quad (\because r < 0)$$

따라서 공비는 -2 이다.

194 답 ③

첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하면

$$S_3 = 21 \text{에서 } \frac{a(r^3-1)}{r-1} = 21 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_6 = 189 \text{에서 } \frac{a(r^6-1)}{r-1} = 189$$

$$\therefore \frac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1} = 189 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$21(r^3+1) = 189, r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{a(2^3-1)}{2-1} = 21, 7a = 21 \quad \therefore a = 3$$

따라서 첫째항이 3, 공비가 2이므로

$$a_4 = 3 \times 2^3 = 24$$

195 답 ⑤

첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하면

$$S_n = 4 \text{에서 } \frac{a(r^n-1)}{r-1} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_{2n} = 16 \text{에서 } \frac{a(r^{2n}-1)}{r-1} = 16$$

$$\therefore \frac{a(r^n-1)(r^n+1)}{r-1} = 16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$4(r^n+1) = 16 \quad \therefore r^n = 3$$

$$\therefore S_{3n} = \frac{a(r^{3n}-1)}{r-1} = \frac{a(r^n-1)(r^{2n}+r^n+1)}{r-1}$$

$$= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \times (r^{2n}+r^n+1)$$

$$= 4(3^2+3+1) = 52$$

196 답 ③

$S_n = 2^n - 1$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 2^n - 1 - (2^{n-1} - 1)$$

$$= 2^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{2}$ 이 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2^{n-1}$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 1 + 2^{3-1} + 2^{5-1} + 2^{7-1} \\ = 1 + 4 + 16 + 64 = 85$$

197 답 -14

$S_n = 7 \times 2^{n+1} + k$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 7 \times 2^{n+1} + k - (7 \times 2^n + k)$$

$$= 7 \times 2^n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 7 \times 2^{1+1} + k = 28 + k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{1}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{2}$ 이 같아야 하므로

$$7 \times 2^1 = 28 + k \quad \therefore k = -14$$

198 답 ②

$$3S_n + 1 = 10^n \text{에서 } S_n = \frac{10^n - 1}{3}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= \frac{10^n - 1}{3} - \frac{10^{n-1} - 1}{3}$$

$$= 3 \times 10^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = \frac{10^1 - 1}{3} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{2}$ 이 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 3 \times 10^{n-1}$$

따라서 $a = 3$, $r = 10$ 이므로

$$r - a = 7$$

199 답 2, 3, 10, 28

200 답 2, 3, 10, 1.5, 30

201 답 $10(1+0.02)^{10}$, 10, 0.02, 10, 1.2, 102

202 답 126만 원

연이율이 5%이고 1년마다 복리로 매년 초에 20만 원씩 5년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} & 20(1+0.05) + 20(1+0.05)^2 + \cdots + 20(1+0.05)^5 \\ &= \frac{20(1+0.05)\{(1+0.05)^5-1\}}{(1+0.05)-1} \\ &= \frac{20 \times 1.05 \times (1.3-1)}{0.05} \end{aligned}$$

= 126(만 원)

따라서 5년째 말의 적립금의 원리합계는 126만 원이다.

203 답 $10(1+0.03)^8$, 8, 10, 9, 1.3, 100

204 답 1250만 원

연이율이 2%이고 1년마다 복리로 매년 말에 50만 원씩 20년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} & 50 + 50(1+0.02) + \cdots + 50(1+0.02)^{19} \\ &= \frac{50\{(1+0.02)^{20}-1\}}{(1+0.02)-1} \\ &= \frac{50(1.5-1)}{0.02} \end{aligned}$$

= 1250(만 원)

따라서 20년째 말의 적립금의 원리합계는 1250만 원이다.

205 답 506만 원

월 이율이 1.2%이고 1개월마다 복리로 매월 초에 30만 원씩 1년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} & 30(1+0.012) + 30(1+0.012)^2 + \cdots + 30(1+0.012)^{12} \\ &= \frac{30(1+0.012)\{(1+0.012)^{12}-1\}}{(1+0.012)-1} \\ &= \frac{30 \times 1.012 \times (1.2-1)}{0.012} \end{aligned}$$

= 506(만 원)

따라서 1년째 말의 적립금의 원리합계는 506만 원이다.

206 답 ①

매년 말에 적립해야 하는 금액을 a 만 원이라 하면 연이율이 5%이고 1년마다 복리로 매년 말에 4년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$a + a(1+0.05) + a(1+0.05)^2 + a(1+0.05)^3 = \frac{a\{(1+0.05)^4-1\}}{(1+0.05)-1}$$

$$= \frac{a(1.22-1)}{0.05}$$

$$= \frac{22}{5}a(\text{만 원})$$

$$\text{즉, } \frac{22}{5}a = 132 \text{이므로}$$

$$a = 30$$

따라서 매년 말에 30만 원씩 적립해야 한다.

실전유형으로 중단원 점검

217~219쪽

1 답 ②

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = 18, a_7 = 10 \text{에서}$$

$$a + 2d = 18, a + 6d = 10$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 22, d = -2$$

따라서 첫째항이 22, 공차가 -2이므로

$$a_{13} = 22 + 12 \times (-2) = -2$$

2 답 ③

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 + a_4 = 8 \text{에서 } (a + 2d) + (a + 3d) = 8$$

$$\therefore 2a + 5d = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_6 - a_8 = 16 \text{에서 } (a + 5d) - (a + 7d) = 16$$

$$-2d = 16 \quad \therefore d = -8$$

이를 ①에 대입하면

$$2a + 5 \times (-8) = 8$$

$$2a = 48 \quad \therefore a = 24$$

따라서 첫째항은 24이다.

3 답 ③

주어진 등차수열의 첫째항이 47, 공차가 $44 - 47 = -3$ 이므로 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 47 + (n-1) \times (-3) = -3n + 50$$

이때 제 n 항에서 처음으로 음수가 된다고 하면

$$a_n < 0 \text{에서 } -3n + 50 < 0$$

$$3n > 50 \quad \therefore n > 16.666 \cdots$$

따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제17항이다.

4 답 ③

공차를 d 라 하면 첫째항이 8, 제10항이 44이므로
 $8+9d=44, 9d=36 \quad \therefore d=4$
 이때 x_5 는 주어진 수열의 제6항이므로
 $x_5=8+5 \times 4=28$

5 답 2

a^2+1 은 $a-2$ 와 $3a+4$ 의 등차중항이므로

$$a^2+1=\frac{(a-2)+(3a+4)}{2}$$

 $a^2+1=2a+1, a^2-2a=0$
 $a(a-2)=0 \quad \therefore a=0$ 또는 $a=2$
 따라서 모든 실수 a 의 값의 합은
 $0+2=2$

6 답 371

세 수를 $a-d, a, a+d$ 라 하면
 $(a-d)+a+(a+d)=27 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $(a-d) \times a \times (a+d)=153 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \quad \dots\dots \textcircled{i}$
 $\textcircled{㉠}$ 에서 $3a=27 \quad \therefore a=9$
 이를 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면
 $(9-d) \times 9 \times (9+d)=153$
 $9(81-d^2)=153, 81-d^2=17$
 $d^2=64 \quad \therefore d=-8$ 또는 $d=8 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$
 따라서 세 수는 1, 9, 17이므로 세 수의 제곱의 합은
 $1^2+9^2+17^2=371 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 세 수를 a, d 를 이용하여 나타내고, a, d 에 대한 연립방정식 세우기	40 %
② a, d 의 값 구하기	40 %
③ 세 수의 제곱의 합 구하기	20 %

7 답 -275

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_2=4, a_6=-32$ 에서
 $a+d=4, a+5d=-32$
 두 식을 연립하여 풀면
 $a=13, d=-9$
 따라서 첫째항이 13, 공차가 -9 인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{10\{2 \times 13 + (10-1) \times (-9)\}}{2} = -275$$

8 답 ③

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $S_4=26$ 에서 $\frac{4\{2a+(4-1)d\}}{2}=26$
 $\therefore 2a+3d=13 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $S_8=68$ 에서 $\frac{8\{2a+(8-1)d\}}{2}=68$
 $\therefore 2a+7d=17 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=5, d=1$
 $\therefore S_{12}=\frac{12\{2 \times 5 + (12-1) \times 1\}}{2}=126$

9 답 ④

첫째항이 -23 , 공차가 2이므로 일반항 a_n 은
 $a_n=-23+(n-1) \times 2=2n-25$
 이때 제 n 항에서 처음으로 양수가 된다고 하면 $a_n>0$ 에서
 $2n-25>0, 2n>25 \quad \therefore n>12.5$
 즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 은 제13항부터 양수이므로 첫째항부터 제12항까지의 합이 최소이다.
 $\therefore n=12$

10 답 22

$S_n=3n^2-4n$ 에서
 (i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=3n^2-4n-\{3(n-1)^2-4(n-1)\}$$

$$=6n-7 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

 (ii) $n=1$ 일 때,
 $a_1=S_1=3 \times 1^2-4 \times 1=-1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 이때 $\textcircled{㉠}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{㉡}$ 이 같으므로 일반항 a_n 은
 $a_n=6n-7$
 $\therefore a_1+a_5=-1+(6 \times 5-7)=-1+23=22$

11 답 7

첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n=\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

 $a_k=\frac{1}{128}$ 에서 $\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{128}$
 $\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\frac{1}{64}=\left(-\frac{1}{2}\right)^6$
 $k-1=6 \quad \therefore k=7 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$

채점 기준

① 일반항 a_n 구하기	40 %
② 자연수 k 의 값 구하기	60 %

12 답 ②

첫째항을 a ($a>0$), 공비를 r ($r>0$)라 하면
 $a_3=1$ 에서 $ar^2=1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $a_9=9a_5$ 에서 $ar^8=9ar^4$
 $r^4=9 \quad \therefore r=\sqrt{3} \quad (\because r>0)$
 이를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하여 풀면
 $a=\frac{1}{3}$
 따라서 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 $\sqrt{3}$ 이므로
 $a_7=\frac{1}{3} \times (\sqrt{3})^6=9$

13 ②

공비를 r ($r > 0$)라 하면 $a_1 = \frac{1}{9}$, $a_5 = 9$ 이므로

$$\frac{1}{9} \times r^4 = 9$$

$$r^4 = 81 \quad \therefore r = 3 \quad (\because r > 0)$$

따라서 첫째항이 $\frac{1}{9}$, 공비가 3이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{1}{9} \times 3^{n-1} = 3^{n-3}$$

이때 제 n 항에서 처음으로 100보다 커진다고 하면

$$a_n > 100 \text{에서 } 3^{n-3} > 100$$

그런데 n 은 자연수이고 $3^4 = 81$, $3^5 = 243$ 이므로

$$n-3 \geq 5 \quad \therefore n \geq 8$$

따라서 처음으로 100보다 커지는 항은 제8항이다.

14 ⑤

b 는 a 와 $a+b$ 의 등차중항이므로

$$b = \frac{a + (a+b)}{2}$$

$$2b = 2a + b \quad \therefore b = 2a \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

a 는 1과 b 의 등비중항이므로

$$a^2 = b \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①을 ②에 대입하면 $a^2 = 2a$

$$a^2 - 2a = 0, a(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a \neq 0)$$

이를 ②에 대입하면

$$b = 2 \times 2 = 4$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 2^2 + 4^2 = 20$$

15 ③

주어진 삼차방정식의 세 실근을 a , ar , ar^2 이라 하면 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = p$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = p \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a = 14$$

$$\therefore a^2 r(1+r+r^2) = 14 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$a \times ar \times ar^2 = 8$$

$$(ar)^3 = 8 \quad \therefore ar = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

②÷③을 하면

$$\frac{a^2 r(1+r+r^2)}{a(1+r+r^2)} = \frac{14}{p} \quad \therefore ar = \frac{14}{p}$$

이를 ③에 대입하면

$$\frac{14}{p} = 2 \quad \therefore p = 7$$

16 $\frac{3}{1024}$

한 변의 길이가 2인 정삼각형의 둘레의 길이는

$$2 \times 3 = 6$$

첫 번째 시행에서 그린 정삼각형의 둘레의 길이는

$$6 \times \frac{1}{2}$$

두 번째 시행에서 그린 정삼각형의 둘레의 길이는

$$6 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

세 번째 시행에서 그린 정삼각형의 둘레의 길이는

$$6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

⋮

n 번째 시행에서 그린 정삼각형의 둘레의 길이는

$$6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

따라서 11번째 시행에서 그린 정삼각형의 둘레의 길이는

$$6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{3}{1024}$$

17 ④

$$S_n = -765 \text{에서 } \frac{9\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)} = -765$$

$$3\{1-(-2)^n\} = -765$$

$$1-(-2)^n = -255$$

$$(-2)^n = 256 = (-2)^8 \quad \therefore n = 8$$

18 ⑤

첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하면

$$S_5 = 4 \text{에서 } \frac{a(r^5-1)}{r-1} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$S_{10} = 32 \text{에서 } \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 32$$

$$\therefore \frac{a(r^5-1)(r^5+1)}{r-1} = 32 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①을 ②에 대입하면

$$4(r^5+1) = 32 \quad \therefore r^5 = 7$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{15} &= \frac{a(r^{15}-1)}{r-1} = \frac{a(r^5-1)(r^{10}+r^5+1)}{r-1} \\ &= \frac{a(r^5-1)}{r-1} \times (r^{10}+r^5+1) \\ &= 4(7^2+7+1) = 228 \end{aligned}$$

19 146

$S_n = 3^n - 1$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3^n - 1 - (3^{n-1} - 1) \\ &= 2 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 - 1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 ①에 $n = 1$ 을 대입한 값과 ②이 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1 - a_3 + a_5 &= 2 - (2 \times 3^{3-1}) + (2 \times 3^{5-1}) \\ &= 2 - 18 + 162 = 146 \quad \dots\dots \textcircled{ii} \end{aligned}$$

채점 기준

i 일반항 a_n 구하기	80 %
ii $a_1 - a_3 + a_5$ 의 값 구하기	20 %

09 수열의 합

개념유형

220~221쪽

001 답 $3+6+9+12+15$

$$\sum_{k=1}^5 3k = 3 \times 1 + 3 \times 2 + 3 \times 3 + 3 \times 4 + 3 \times 5 = 3 + 6 + 9 + 12 + 15$$

002 답 $1+3+5+\cdots+19$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (2k-1) \\ &= (2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + (2 \times 3 - 1) + \cdots + (2 \times 10 - 1) \\ &= 1 + 3 + 5 + \cdots + 19 \end{aligned}$$

003 답 $-1+2-3+\cdots+8$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 (-1)^k \times k \\ &= (-1)^1 \times 1 + (-1)^2 \times 2 + (-1)^3 \times 3 + \cdots + (-1)^8 \times 8 \\ &= -1 + 2 - 3 + \cdots + 8 \end{aligned}$$

004 답 $5^3+5^4+5^5+5^6+5^7$

005 답 $5^2+6^2+7^2+\cdots+16^2$

$$\begin{aligned} \sum_{m=4}^{15} (m+1)^2 &= (4+1)^2 + (5+1)^2 + (6+1)^2 + \cdots + (15+1)^2 \\ &= 5^2 + 6^2 + 7^2 + \cdots + 16^2 \end{aligned}$$

006 답 $8+13+18+\cdots+(5n+3)$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (5k+3) \\ &= (5 \times 1 + 3) + (5 \times 2 + 3) + (5 \times 3 + 3) + \cdots + (5n + 3) \\ &= 8 + 13 + 18 + \cdots + (5n + 3) \end{aligned}$$

007 답 $1+7+7^2+\cdots+7^{n-1}$

$$\sum_{k=1}^n 7^{k-1} = 7^{1-1} + 7^{2-1} + 7^{3-1} + \cdots + 7^{n-1} = 1 + 7 + 7^2 + \cdots + 7^{n-1}$$

008 답 $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{3n-1}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{3i-1} &= \frac{1}{3 \times 1 - 1} + \frac{1}{3 \times 2 - 1} + \frac{1}{3 \times 3 - 1} + \cdots + \frac{1}{3n - 1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{3n - 1} \end{aligned}$$

009 답 $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j(j+1)} \\ &= \frac{1}{1 \times (1+1)} + \frac{1}{2 \times (2+1)} + \frac{1}{3 \times (3+1)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \end{aligned}$$

010 답 $\sum_{k=1}^n 5k$

011 답 $\sum_{k=1}^n (4k+3)$

012 답 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k+1}}$

013 답 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

014 답 $\sum_{k=1}^6 2$

015 답 $\sum_{k=1}^{20} 3^k$

016 답 $\sum_{k=1}^{12} k(k+2)$

017 답 $\sum_{k=1}^{14} (3k-2)$

수열 1, 4, 7, ..., 40의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1 + (n-1) \times 3 = 3n - 2$$

이때 $40 = 3 \times 14 - 2$ 이므로

$$1 + 4 + 7 + \cdots + 40 = \sum_{k=1}^{14} (3k - 2)$$

실전유형

222쪽

018 답 ③

① $\sum_{k=1}^{n+1} 4k = 4 \times 1 + 4 \times 2 + 4 \times 3 + \cdots + 4(n+1)$
 $= 4 + 8 + 12 + \cdots + 4(n+1)$

② $\sum_{k=1}^{11} (2k+1)$
 $= (2 \times 1 + 1) + (2 \times 2 + 1) + (2 \times 3 + 1) + \cdots + (2 \times 11 + 1)$
 $= 3 + 5 + 7 + \cdots + 23$

③ $\sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{3^n}$
 $= \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{3^n}$

④ $\sum_{k=2}^7 (-1)^k$
 $= (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7$
 $= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$

⑤ $\sum_{k=1}^{10} (k+2)^2 = (1+2)^2 + (2+2)^2 + (3+2)^2 + \cdots + (10+2)^2$
 $= 9 + 16 + 25 + \cdots + 144$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

참고 ③ $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{3^{k-1}}$

019 답 5

$$\sum_{k=2}^{50} a_k = 8 \text{에서 } a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{50} = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\sum_{k=1}^{49} a_k = 3 \text{에서 } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{49} = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①-②을 하면

$$a_{50} - a_1 = 5$$

020 답 2

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{99} \log \left(1 + \frac{1}{k} \right) &= \sum_{k=1}^{99} \log \frac{k+1}{k} \\ &= \log \frac{2}{1} + \log \frac{3}{2} + \log \frac{4}{3} + \cdots + \log \frac{100}{99} \\ &= \log \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{100}{99} \right) \\ &= \log 100 = 2 \end{aligned}$$

021 답 150

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{25} (a_{2k-1} + a_{2k}) &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \cdots + (a_{49} + a_{50}) \\ &= \sum_{k=1}^{50} a_k \end{aligned}$$

이때 $\sum_{k=1}^n a_k = 3n$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{25} (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^{50} a_k = 3 \times 50 = 150$$

022 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

$$\textcircled{ㄱ}. \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$\sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=0}^n k$$

$$\textcircled{ㄴ}. \sum_{k=1}^n 3^k = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n$$

$$\sum_{k=0}^n 3^k = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n 3^k \neq \sum_{k=0}^n 3^k$$

$$\textcircled{ㄷ}. \sum_{k=1}^4 a_k + \sum_{k=1}^4 a_{k+4} = (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8)$$

$$= \sum_{k=1}^8 a_k$$

$$\therefore \sum_{k=1}^4 a_k + \sum_{k=1}^4 a_{k+4} = \sum_{k=1}^8 a_k$$

$$\textcircled{ㄹ}. \sum_{i=1}^{10} (2i-1)^2 + \sum_{j=1}^{10} (2j)^2$$

$$= \{(2 \times 1 - 1)^2 + (2 \times 2 - 1)^2 + (2 \times 3 - 1)^2 + \cdots + (2 \times 10 - 1)^2\}$$

$$+ \{(2 \times 1)^2 + (2 \times 2)^2 + (2 \times 3)^2 + \cdots + (2 \times 10)^2\}$$

$$= (1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 19^2) + (2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 20^2)$$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 20^2$$

$$= \sum_{k=1}^{20} k^2$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{10} (2i-1)^2 + \sum_{j=1}^{10} (2j)^2 = \sum_{k=1}^{20} k^2$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

023 답 ②

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) &= (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_1 - a_{n+1} = 1 - a_{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 1 - a_{n+1} = -n^2 + n \text{이므로 } a_{n+1} = n^2 - n + 1$$

$$\therefore a_{11} = 10^2 - 10 + 1 = 91$$

024 답 $\frac{3}{5}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{25} \sin \left(\frac{k\pi}{2} + \theta \right) \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + \sin (\pi + \theta) + \sin \left(\frac{3}{2}\pi + \theta \right) + \sin (2\pi + \theta) \\ &\quad + \cdots + \sin \left(\frac{25}{2}\pi + \theta \right) \\ &= \cos \theta + (-\sin \theta) + (-\cos \theta) + \sin \theta + \cdots + \cos \theta \\ &= \cos \theta = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

개념유형

223~224쪽

025 답 10, 10, 3, 5

026 답 -1

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k = 2 - 3 = -1$$

027 답 8

$$\sum_{k=1}^{10} 4a_k = 4 \sum_{k=1}^{10} a_k = 4 \times 2 = 8$$

028 답 13

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3b_k) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + 3 \sum_{k=1}^{10} b_k = 2 \times 2 + 3 \times 3 = 13$$

029 답 34

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (-a_k + 2b_k + 3) &= -\sum_{k=1}^{10} a_k + 2 \sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} 3 \\ &= -2 + 2 \times 3 + 3 \times 10 = 34 \end{aligned}$$

030 답 3, 5, 37

031 답 32

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 (3a_k - 1)^2 &= \sum_{k=1}^5 (9a_k^2 - 6a_k + 1) = 9 \sum_{k=1}^5 a_k^2 - 6 \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 1 \\ &= 9 \times 5 - 6 \times 3 + 1 \times 5 = 32 \end{aligned}$$

032 답 0

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 (a_k + 1)(a_k - 1) &= \sum_{k=1}^5 (a_k^2 - 1) = \sum_{k=1}^5 a_k^2 - \sum_{k=1}^5 1 \\ &= 5 - 1 \times 5 = 0 \end{aligned}$$

033 답 10, 10, 10, 120

034 답 -200

$$\sum_{k=1}^{20} (k^2 - 2) - \sum_{k=1}^{20} (k^2 + 8) = \sum_{k=1}^{20} \{k^2 - 2 - (k^2 + 8)\} = \sum_{k=1}^{20} (-10) \\ = -10 \times 20 = -200$$

035 답 135

$$\sum_{k=1}^{15} (k+3)^2 - \sum_{k=1}^{15} (k^2 + 6k) = \sum_{k=1}^{15} \{k^2 + 6k + 9 - (k^2 + 6k)\} \\ = \sum_{k=1}^{15} 9 = 9 \times 15 = 135$$

036 답 1

$$\sum_{k=1}^{24} (k^3 - 4) - \sum_{k=3}^{24} (k^3 - 4) = \sum_{k=1}^2 (k^3 - 4) \\ = (1^3 - 4) + (2^3 - 4) = 1$$

037 답 155

$$\sum_{k=1}^9 (k^2 + 5) - \sum_{k=1}^7 (k^2 + 5) = \sum_{k=8}^9 (k^2 + 5) \\ = (8^2 + 5) + (9^2 + 5) = 155$$

실전유형

225~226쪽

038 답 ②

$$\sum_{k=1}^{15} 2b_k = 18 \text{에서 } 2 \sum_{k=1}^{15} b_k = 18 \\ \therefore \sum_{k=1}^{15} b_k = 9 \\ \therefore \sum_{k=1}^{15} (2a_k - 3b_k + 4) = 2 \sum_{k=1}^{15} a_k - 3 \sum_{k=1}^{15} b_k + \sum_{k=1}^{15} 4 \\ = 2 \times 6 - 3 \times 9 + 4 \times 15 \\ = 45$$

039 답 ①

$$\sum_{k=1}^8 (2a_k - 5)^2 = \sum_{k=1}^8 (4a_k^2 - 20a_k + 25) \\ = 4 \sum_{k=1}^8 a_k^2 - 20 \sum_{k=1}^8 a_k + \sum_{k=1}^8 25 \\ = 4 \times 30 - 20 \times 10 + 25 \times 8 \\ = 120$$

040 답 52

$$\sum_{k=1}^{12} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{12} a_k - \sum_{k=1}^{12} b_k = 8 - \sum_{k=1}^{12} b_k \\ \text{즉, } 8 - \sum_{k=1}^{12} b_k = -20 \text{이므로 } \sum_{k=1}^{12} b_k = 28 \\ \therefore \sum_{k=1}^{12} (b_k + 2) = \sum_{k=1}^{12} b_k + \sum_{k=1}^{12} 2 = 28 + 2 \times 12 = 52$$

041 답 ③

$$\sum_{k=1}^{20} (2a_k + 1)^2 = \sum_{k=1}^{20} (4a_k^2 + 4a_k + 1) \\ = 4 \sum_{k=1}^{20} a_k^2 + 4 \sum_{k=1}^{20} a_k + \sum_{k=1}^{20} 1 \\ = 4 \times 5 + 4 \sum_{k=1}^{20} a_k + 1 \times 20 \\ = 4 \sum_{k=1}^{20} a_k + 40$$

$$\text{즉, } 4 \sum_{k=1}^{20} a_k + 40 = 52 \text{이므로}$$

$$4 \sum_{k=1}^{20} a_k = 12 \quad \therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = 3$$

042 답 9

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \alpha, \sum_{k=1}^{10} b_k = \beta \text{라 하면}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k + 2b_k) = 45 \text{에서 } \sum_{k=1}^{10} a_k + 2 \sum_{k=1}^{10} b_k = 45$$

$$\therefore \alpha + 2\beta = 45 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - b_k) = 3 \text{에서 } \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k = 3$$

$$\therefore \alpha - \beta = 3 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$\alpha = 17, \beta = 14$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = 17, \sum_{k=1}^{10} b_k = 14$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} \left(b_k - \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2} = 14 - \frac{1}{2} \times 10 = 9$$

043 답 ①

$$\sum_{k=1}^{50} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{50} (a_k^2 + 2a_k b_k + b_k^2) \\ = \sum_{k=1}^{50} (a_k^2 + b_k^2) + 2 \sum_{k=1}^{50} a_k b_k \\ = \sum_{k=1}^{50} (a_k^2 + b_k^2) + 2 \times 20 = \sum_{k=1}^{50} (a_k^2 + b_k^2) + 40$$

$$\text{즉, } \sum_{k=1}^{50} (a_k^2 + b_k^2) + 40 = 120 \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{50} (a_k^2 + b_k^2) = 80$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{50} (a_k - b_k)^2 = \sum_{k=1}^{50} (a_k^2 - 2a_k b_k + b_k^2) \\ = \sum_{k=1}^{50} (a_k^2 + b_k^2) - 2 \sum_{k=1}^{50} a_k b_k \\ = 80 - 2 \times 20 = 40$$

044 답 247

$$\sum_{k=1}^7 (2^k - 1) = \sum_{k=1}^7 2^k - \sum_{k=1}^7 1 \\ = \frac{2(2^7 - 1)}{2 - 1} - 1 \times 7 \quad \begin{array}{l} \text{첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열의} \\ \text{첫째항부터 제7항까지의 합} \end{array} \\ = 247$$

045 답 ①

$$\sum_{k=1}^{16} a_k = \frac{16\{2 \times 5 + (16 - 1) \times (-3)\}}{2} = -280$$

046 답 80

공비를 r ($r > 0$)라 하면

$$\frac{a_5}{a_3} = \frac{2r^4}{2r^2} = r^2$$

즉, $r^2 = 9$ 이므로 $r = 3$ ($\because r > 0$)

$$\therefore \sum_{k=1}^4 a_k = \frac{2(3^4 - 1)}{3 - 1} = 80$$

047 답 ③

첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_3 = 24$, $a_6 = 3$ 에서

$$ar^2 = 24 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$ar^5 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠}$ 을 하면

$$r^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$

이를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면

$$a \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 24 \quad \therefore a = 96$$

$$\therefore \sum_{k=1}^6 a_k = \frac{96 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 189$$

048 답 ④

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{40} \frac{5^k - 3^k}{4^k} &= \sum_{k=1}^{40} \left(\frac{5}{4}\right)^k - \sum_{k=1}^{40} \left(\frac{3}{4}\right)^k \\ &= \frac{\frac{5}{4} \left\{ \left(\frac{5}{4}\right)^{40} - 1 \right\}}{\frac{5}{4} - 1} - \frac{\frac{3}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{40} \right\}}{1 - \frac{3}{4}} \\ &= 5 \left\{ \left(\frac{5}{4}\right)^{40} - 1 \right\} - 3 \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{40} \right\} \\ &= 5 \times \left(\frac{5}{4}\right)^{40} - 5 - 3 + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40} \\ &= 5 \times \left(\frac{5}{4}\right)^{40} + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{40} - 8 \end{aligned}$$

따라서 $a = 5$, $b = 3$, $c = -8$ 이므로

$$a + b - c = 16$$

049 답 125

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_2 = -3$, $a_7 = 22$ 에서

$$a + d = -3, \quad a + 6d = 22$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -8, \quad d = 5$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{25} a_{2k} - \sum_{k=1}^{25} a_{2k-1} &= (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{50}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{49}) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + \dots + (a_{50} - a_{49}) \\ &= 25d = 25 \times 5 = 125 \end{aligned}$$

050 답 -4

첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_4 + a_{16} = a_{10} + 6 \text{에서}$$

$$(a + 3d) + (a + 15d) = (a + 9d) + 6$$

$$\therefore a + 9d = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\text{또 } \sum_{k=1}^{20} a_k = 100 \text{에서 } \frac{20\{2a + (20-1)d\}}{2} = 100$$

$$\therefore 2a + 19d = 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 24, \quad d = -2$$

$$\therefore a_{15} = 24 + 14 \times (-2) = -4$$

개념유형

228~229쪽

051 답 45

$$1 + 2 + 3 + \dots + 9 = \frac{9 \times 10}{2} = 45$$

052 답 285

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 9^2 = \frac{9 \times 10 \times 19}{6} = 285$$

053 답 2025

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3 = \left(\frac{9 \times 10}{2}\right)^2 = 2025$$

054 답 88

$$\sum_{k=1}^{11} (k+2) = \sum_{k=1}^{11} k + \sum_{k=1}^{11} 2 = \frac{11 \times 12}{2} + 2 \times 11 = 88$$

055 답 77

$$\sum_{k=1}^7 (4k-5) = 4 \sum_{k=1}^7 k - \sum_{k=1}^7 5 = 4 \times \frac{7 \times 8}{2} - 5 \times 7 = 77$$

056 답 96

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 (k^2 - 3k) &= \sum_{k=1}^8 k^2 - 3 \sum_{k=1}^8 k \\ &= \frac{8 \times 9 \times 17}{6} - 3 \times \frac{8 \times 9}{2} = 96 \end{aligned}$$

057 답 462

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 (k^3 + k) &= \sum_{k=1}^6 k^3 + \sum_{k=1}^6 k \\ &= \left(\frac{6 \times 7}{2}\right)^2 + \frac{6 \times 7}{2} = 462 \end{aligned}$$

058 답 1015

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (k+3)(2k-1) &= \sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 5k - 3) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 + 5 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 3 \\ &= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 5 \times \frac{10 \times 11}{2} - 3 \times 10 \\ &= 1015 \end{aligned}$$

059 답 $k, 11, 2, 96$

060 ▶▶ 322

$$\begin{aligned}\sum_{k=4}^{10}(k^2-k) &= \sum_{k=1}^{10}(k^2-k) - \sum_{k=1}^3(k^2-k) \\ &= \sum_{k=1}^{10}k^2 - \sum_{k=1}^{10}k - \left(\sum_{k=1}^3k^2 - \sum_{k=1}^3k\right) \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{10 \times 11}{2} - \left(\frac{3 \times 4 \times 7}{6} - \frac{3 \times 4}{2}\right) \\ &= 322\end{aligned}$$

061 ▶▶ 1935

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^9(k^3+2) &= \sum_{k=1}^9(k^3+2) - \sum_{k=1}^4(k^3+2) \\ &= \sum_{k=1}^9k^3 + \sum_{k=1}^92 - \left(\sum_{k=1}^4k^3 + \sum_{k=1}^42\right) \\ &= \left(\frac{9 \times 10}{2}\right)^2 + 2 \times 9 - \left\{\left(\frac{4 \times 5}{2}\right)^2 + 2 \times 4\right\} \\ &= 1935\end{aligned}$$

062 ▶▶ n^2+2n

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n+1$$

따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (2k+1) = 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + 1 \times n \\ &= n^2 + 2n\end{aligned}$$

063 ▶▶ $n, k, k, 2n+1, n+1, n+2$

064 ▶▶ $\frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n(2n-1) = 2n^2 - n$$

따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (2k^2 - k) = 2 \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n k \\ &= 2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}\end{aligned}$$

065 ▶▶ $\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$$

따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (4k^2 - 4k + 1) \\ &= 4 \sum_{k=1}^n k^2 - 4 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4 \times \frac{n(n+1)}{2} + 1 \times n \\ &= \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}\end{aligned}$$

066 ▶▶ $\frac{n(n+1)(n-7)}{3}$

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n^2 - 5n$$

따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (k^2 - 5k) \\ &= \sum_{k=1}^n k^2 - 5 \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 5 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n-7)}{3}\end{aligned}$$

실전유형

229~231쪽

067 ▶▶ ③

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^7 k^2(k-1) + \sum_{k=1}^7 k(k+1) &= \sum_{k=1}^7 (k^3 - k^2 + k^2 + k) \\ &= \sum_{k=1}^7 (k^3 + k) \\ &= \sum_{k=1}^7 k^3 + \sum_{k=1}^7 k \\ &= \left(\frac{7 \times 8}{2}\right)^2 + \frac{7 \times 8}{2} \\ &= 812\end{aligned}$$

068 ▶▶ 150

$$f(2k) = \frac{1}{2} \times 2k + 2 = k + 2 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15} f(2k) &= \sum_{k=1}^{15} (k+2) = \sum_{k=1}^{15} k + \sum_{k=1}^{15} 2 \\ &= \frac{15 \times 16}{2} + 2 \times 15 = 150\end{aligned}$$

069 ▶▶ ④

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{20} \frac{1+2+3+\cdots+k}{k} &= \sum_{k=1}^{20} \frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^{20} \frac{k+1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{20} k + \sum_{k=1}^{20} 1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{20 \times 21}{2} + 1 \times 20 \right) \\ &= 115\end{aligned}$$

070 ▶▶ 2

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^9 (ak^2 - 10k) &= a \sum_{k=1}^9 k^2 - 10 \sum_{k=1}^9 k \\ &= a \times \frac{9 \times 10 \times 19}{6} - 10 \times \frac{9 \times 10}{2} \\ &= 285a - 450\end{aligned}$$

즉, $285a - 450 = 120$ 이므로

$$285a = 570 \quad \therefore a = 2$$

071 **답** ③

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 (k-c)^2 &= \sum_{k=1}^5 (k^2 - 2ck + c^2) \\ &= \sum_{k=1}^5 k^2 - 2c \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 c^2 \\ &= \frac{5 \times 6 \times 11}{6} - 2c \times \frac{5 \times 6}{2} + c^2 \times 5 \\ &= 5c^2 - 30c + 55 \\ &= 5(c-3)^2 + 10\end{aligned}$$

즉, $c=3$ 에서 최솟값 10을 가지므로 $m=10$

$$\therefore c+m=13$$

072 **답** ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_k + \beta_k = -k, \alpha_k \beta_k = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{12} (\alpha_k^2 + \beta_k^2) &= \sum_{k=1}^{12} \{(\alpha_k + \beta_k)^2 - 2\alpha_k \beta_k\} \\ &= \sum_{k=1}^{12} \{(-k)^2 - 2 \times 1\} \\ &= \sum_{k=1}^{12} (k^2 - 2) = \sum_{k=1}^{12} k^2 - \sum_{k=1}^{12} 2 \\ &= \frac{12 \times 13 \times 25}{6} - 2 \times 12 = 626\end{aligned}$$

073 **답** (1) 385 (2) 750 (3) 210

$$\begin{aligned}(1) \sum_{j=1}^{10} \left\{ \sum_{k=1}^j (2k-1) \right\} &= \sum_{j=1}^{10} \left(2 \sum_{k=1}^j k - \sum_{k=1}^j 1 \right) \\ &= \sum_{j=1}^{10} \left\{ 2 \times \frac{j(j+1)}{2} - 1 \times j \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{10} j^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385 \\ (2) \sum_{n=1}^8 \left(\sum_{m=1}^n mn \right) &= \sum_{n=1}^8 \left(n \sum_{m=1}^n m \right) = \sum_{n=1}^8 \left\{ n \times \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^8 (n^3 + n^2) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^8 n^3 + \sum_{n=1}^8 n^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{8 \times 9}{2} \right)^2 + \frac{8 \times 9 \times 17}{6} \right\} \\ &= 750 \\ (3) \sum_{m=1}^5 \left\{ \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=1}^l 6 \right) \right\} &= \sum_{m=1}^5 \left(\sum_{l=1}^m 6l \right) = \sum_{m=1}^5 \left\{ 6 \times \frac{m(m+1)}{2} \right\} \\ &= 3 \sum_{m=1}^5 (m^2 + m) = 3 \left(\sum_{m=1}^5 m^2 + \sum_{m=1}^5 m \right) \\ &= 3 \left(\frac{5 \times 6 \times 11}{6} + \frac{5 \times 6}{2} \right) = 210\end{aligned}$$

074 **답** ⑤

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \left\{ \sum_{i=1}^k (2i-k) \right\} &= \sum_{k=1}^n \left(2 \sum_{i=1}^k i - \sum_{i=1}^k k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left\{ 2 \times \frac{k(k+1)}{2} - k \times k \right\} \\ &= \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{n(n+1)}{2} = 36 \text{ 이므로}$$

$$n(n+1) = 72 = 8 \times 9$$

$$\therefore n=8$$

075 **답** ③

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^m \left\{ \sum_{y=1}^n (x+y) \right\} &= \sum_{x=1}^m \left(\sum_{y=1}^n x + \sum_{y=1}^n y \right) \\ &= \sum_{x=1}^m \left\{ xn + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= n \sum_{x=1}^m x + \sum_{x=1}^m \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n \times \frac{m(m+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \times m \\ &= \frac{mn(m+n+2)}{2} \\ &= \frac{40(13+2)}{2} \\ &= 300\end{aligned}$$

076 **답** ③

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = (2n)^2 = 4n^2$$

따라서 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n 4k^2 \\ &= 4 \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}\end{aligned}$$

077 **답** 2090

수열 $2 \times 1, 4 \times 4, 6 \times 7, \dots, 20 \times 27$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 2n(3n-2) = 6n^2 - 4n$$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (6k^2 - 4k) \\ &= 6 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 4 \sum_{k=1}^{10} k \\ &= 6 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 4 \times \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 2090\end{aligned}$$

078 **답** ②

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}a_n &= 1 + 2 + 3 + \dots + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}\end{aligned}$$

따라서 첫째항부터 제9항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^9 a_k &= \sum_{k=1}^9 \frac{k^2 + k}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^9 k^2 + \sum_{k=1}^9 k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{9 \times 10 \times 19}{6} + \frac{9 \times 10}{2} \right) \\ &= 165\end{aligned}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 2n^2 + 3n \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 + 3n - \{2(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= 4n + 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 + 3 \times 1 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 ㉡이 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 4n + 1$$

$$\therefore a_5 - a_1 = (4 \times 5 + 1) - 5 = 16$$

080 **답** 56

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{3n}{n+1} \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{3n}{n+1} - \frac{3(n-1)}{(n-1)+1} \\ &= \frac{3}{n(n+1)} \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = \frac{3 \times 1}{1+1} = \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 ㉡이 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{3}{n(n+1)}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{a_k} = \frac{k(k+1)}{3} = \frac{k^2+k}{3} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^7 \frac{k^2+k}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^7 k^2 + \sum_{k=1}^7 k \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{7 \times 8 \times 15}{6} + \frac{7 \times 8}{2} \right) \\ &= 56 \end{aligned}$$

081 **답** ③

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + n \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + n - \{(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= 2n \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 ㉡이 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2n$$

$$\text{따라서 } ka_{2k} = k \times 2 \times 2k = 4k^2 \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^5 ka_{2k} = \sum_{k=1}^5 4k^2 = 4 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} = 220$$

082 **답** $\frac{15}{16}$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{15} - \frac{1}{16} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

083 **답** $\frac{7}{24}$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{21} \frac{1}{(k+2)(k+3)} \\ &= \sum_{k=1}^{21} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \dots + \left(\frac{1}{23} - \frac{1}{24} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{24} = \frac{7}{24} \end{aligned}$$

084 **답** $\frac{4}{27}$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{12} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \dots + \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{27} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{27} \right) = \frac{4}{27} \end{aligned}$$

085 **답** $\frac{4}{25}$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{16} \frac{1}{(3k-1)(3k+2)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{16} \left(\frac{1}{3k-1} - \frac{1}{3k+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} \right) + \dots + \left(\frac{1}{47} - \frac{1}{50} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{50} \right) = \frac{4}{25} \end{aligned}$$

086 **답** $\frac{58}{45}$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^8 \frac{2}{k(k+2)} \\ &= \sum_{k=1}^8 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \\ &\quad + \dots + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{58}{45} \end{aligned}$$

087 $\frac{1}{n+1}, n$

088 $\frac{n}{2(n+2)}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} = \frac{n}{2(n+2)} \end{aligned}$$

089 $\frac{n}{2n+1}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

090 $\frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2 \times 4} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{4 \times 6} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+3)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right. \\ & \quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right) \\ &= \frac{n(5n+13)}{12(n+2)(n+3)} \end{aligned}$$

091 $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{35} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{35} \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})} \\ &= \sum_{k=1}^{35} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{36}-\sqrt{35}) \\ &= -\sqrt{1} + \sqrt{36} = 5 \end{aligned}$$

092 $4-\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{14} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^{14} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})} \\ &= \sum_{k=1}^{14} (\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}) \\ &= (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + (\sqrt{5}-\sqrt{4}) + \cdots + (\sqrt{16}-\sqrt{15}) \\ &= -\sqrt{2} + \sqrt{16} = 4-\sqrt{2} \end{aligned}$$

093 $\frac{2}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}}$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{24} \frac{2}{\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1}} \\ &= \sum_{k=1}^{24} \frac{2(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})}{(\sqrt{2k+1}+\sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})} \\ &= \sum_{k=1}^{24} (\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}) \\ &= (\sqrt{3}-\sqrt{1}) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + (\sqrt{7}-\sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{49}-\sqrt{47}) \\ &= -\sqrt{1} + \sqrt{49} \\ &= 6 \end{aligned}$$

094 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k}}{(\sqrt{2k+2}+\sqrt{2k})(\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k})} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{15} (\sqrt{2k+2}-\sqrt{2k}) \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{4}-\sqrt{2}) + (\sqrt{6}-\sqrt{4}) + (\sqrt{8}-\sqrt{6}) + \cdots + (\sqrt{32}-\sqrt{30}) \} \\ &= \frac{1}{2} (-\sqrt{2} + \sqrt{32}) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

095 $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+3}{2}$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^6 \frac{1}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^6 \frac{\sqrt{k+3}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k+3}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+1})} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 (\sqrt{k+3}-\sqrt{k+1}) \\ &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{4}-\sqrt{2}) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + (\sqrt{6}-\sqrt{4}) \\ & \quad + (\sqrt{7}-\sqrt{5}) + (\sqrt{8}-\sqrt{6}) + (\sqrt{9}-\sqrt{7}) \} \\ &= \frac{1}{2} (-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{8}+\sqrt{9}) \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}+3}{2} \end{aligned}$$

096 $\sqrt{k}, \sqrt{n}, \sqrt{n+1}-1$

097 $\sqrt{n+4}-2$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k+4}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+3}-\sqrt{k+4}}{(\sqrt{k+3}+\sqrt{k+4})(\sqrt{k+3}-\sqrt{k+4})} \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+4}-\sqrt{k+3}) \\ &= (\sqrt{5}-2) + (\sqrt{6}-\sqrt{5}) + (\sqrt{7}-\sqrt{6}) + \cdots + (\sqrt{n+4}-\sqrt{n+3}) \\ &= \sqrt{n+4}-2 \end{aligned}$$

098 **답** $\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}) \\ &= \frac{1}{2} \{(\sqrt{3}-1) + (\sqrt{5}-\sqrt{3}) + (\sqrt{7}-\sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\} \\ &= \frac{\sqrt{2n+1}-1}{2} \end{aligned}$$

099 **답** $\frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2}}{3}$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{11}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{3n-1}+\sqrt{3n+2}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{3k-1}+\sqrt{3k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{3k-1}-\sqrt{3k+2}}{(\sqrt{3k-1}+\sqrt{3k+2})(\sqrt{3k-1}-\sqrt{3k+2})} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\sqrt{3k+2}-\sqrt{3k-1}) \\ &= \frac{1}{3} \{(\sqrt{5}-\sqrt{2}) + (\sqrt{8}-\sqrt{5}) + (\sqrt{11}-\sqrt{8}) \\ & \quad + \cdots + (\sqrt{3n+2}-\sqrt{3n-1})\} \\ &= \frac{\sqrt{3n+2}-\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

실전유형

235쪽

100 **답** ⑤

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{10} \frac{2}{k^2-1} &= \sum_{k=2}^{10} \frac{2}{(k-1)(k+1)} = \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) \\ & \quad + \cdots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{72}{55} \end{aligned}$$

101 **답** 37

수열 $\frac{1}{1 \times 4}, \frac{1}{4 \times 7}, \frac{1}{7 \times 10}, \dots, \frac{1}{25 \times 28}$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

주어진 식의 좌변은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제9항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 a_k &= \sum_{k=1}^9 \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^9 \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{28}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{28}\right) = \frac{9}{28} \end{aligned}$$

따라서 $p=28, q=9$ 이므로 $p+q=37$

102 **답** ④

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = \frac{2}{n(n+1)}$$

따라서 첫째항부터 제19항까지의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{19} a_k &= \sum_{k=1}^{19} \frac{2}{k(k+1)} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{19} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20}\right) \right\} \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{20}\right) \\ &= \frac{19}{10} \end{aligned}$$

103 **답** ②

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{97} \frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3}} &= \sum_{k=1}^{97} \frac{\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3}}{(\sqrt{k+2}+\sqrt{k+3})(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+3})} \\ &= \sum_{k=1}^{97} (\sqrt{k+3}-\sqrt{k+2}) \\ &= (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + (\sqrt{5}-\sqrt{4}) + (\sqrt{6}-\sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{100}-\sqrt{99}) \\ &= 10 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

104 **답** $5-\sqrt{2}$

수열 $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+2}, \frac{1}{2+\sqrt{5}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{24}+5}$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제23항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{23} a_k &= \sum_{k=1}^{23} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^{23} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k+2})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k+2})} \\ &= \sum_{k=1}^{23} (\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}) \\ &= (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{2}-\sqrt{3}) + (\sqrt{5}-\sqrt{2}) + \cdots + (5-\sqrt{24}) \\ &= 5 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

105 **답** ④

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m a_k &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})} \\ &= \sum_{k=1}^m (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{m+1}-\sqrt{m}) \\ &= \sqrt{m+1} - 1 \end{aligned}$$

즉, $\sqrt{m+1}-1=4$ 이므로

$$\sqrt{m+1}=5, m+1=25$$

$$\therefore m=24$$

1 답 ③

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) \\ &= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} a_k \\ &\text{즉, } \sum_{k=1}^{2n} a_k = 2n^2 \text{이므로} \\ &\sum_{k=1}^{20} a_k = 2 \times 10^2 = 200 \end{aligned}$$

2 답 ①

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 (a_k - 1)(a_k + 3) &= \sum_{k=1}^5 (a_k^2 + 2a_k - 3) \\ &= \sum_{k=1}^5 a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^5 a_k - \sum_{k=1}^5 3 \\ &= 10 + 2 \times 4 - 3 \times 5 = 3 \end{aligned}$$

3 답 11

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} a_k = \alpha, \sum_{k=1}^{10} b_k = \beta \text{라 하면} \\ & \sum_{k=1}^{10} (2a_k - b_k) = 7 \text{에서 } 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} b_k = 7 \\ & \therefore 2\alpha - \beta = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ & \sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) = 5 \text{에서 } \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 5 \\ & \therefore \alpha + \beta = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\ & \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면} \\ & \alpha = 4, \beta = 1 \\ & \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = 4, \sum_{k=1}^{10} b_k = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{i} \\ & \therefore \sum_{k=1}^{10} (a_k - 3b_k + 1) = \sum_{k=1}^{10} a_k - 3 \sum_{k=1}^{10} b_k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\ & \quad = 4 - 3 \times 1 + 1 \times 10 = 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{ii} \end{aligned}$$

채점 기준

① $\sum_{k=1}^{10} a_k, \sum_{k=1}^{10} b_k$ 의 값 구하기	60 %
② $\sum_{k=1}^{10} (a_k - 3b_k + 1)$ 의 값 구하기	40 %

4 답 6

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{30} \frac{3^k + 4^k}{2^k} &= \sum_{k=1}^{30} \left(\frac{3}{2} \right)^k + \sum_{k=1}^{30} 2^k \\ &= \frac{\frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{30} - 1 \right\}}{\frac{3}{2} - 1} + \frac{2(2^{30} - 1)}{2 - 1} \\ &= 3 \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{30} - 1 \right\} + 2(2^{30} - 1) \\ &= 3 \times \left(\frac{3}{2} \right)^{30} - 3 + 2 \times 2^{30} - 2 \\ &= 3 \times \left(\frac{3}{2} \right)^{30} + 2 \times 2^{30} - 5 \end{aligned}$$

따라서 $a=3, b=2, c=-5$ 이므로
 $a-b-c=6$

5 답 ②

$$\begin{aligned} & \text{첫째항을 } a, \text{ 공차를 } d \text{라 하면 } a_4=15, a_{11}=57 \text{에서} \\ & a+3d=15, a+10d=57 \\ & \text{두 식을 연립하여 풀면} \\ & a=-3, d=6 \\ & \therefore \sum_{k=1}^{50} a_{2k} - \sum_{k=1}^{50} a_{2k-1} \\ & \quad = (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99}) \\ & \quad = (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + \cdots + (a_{100} - a_{99}) \\ & \quad = 50d = 50 \times 6 = 300 \end{aligned}$$

6 답 ②

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + k^2}{k+1} &= \sum_{k=1}^9 \frac{k(k+1)(2k+1)}{6(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^9 \frac{k(2k+1)}{6} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^9 k^2 + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^9 k \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{9 \times 10 \times 19}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{9 \times 10}{2} \\ &= \frac{205}{2} \end{aligned}$$

7 답 5

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (6k^2 - 1) &= 6 \sum_{k=1}^n k^2 - \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 6 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 1 \times n \\ &= n^2(2n+3) \end{aligned}$$

즉, $n^2(2n+3) = 325 = 5^2 \times (2 \times 5 + 3)$ 이므로
 $n=5$

8 답 ⑤

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 \left\{ \sum_{i=1}^k (i+k) \right\} &= \sum_{k=1}^5 \left(\sum_{i=1}^k i + \sum_{i=1}^k k \right) \\ &= \sum_{k=1}^5 \left\{ \frac{k(k+1)}{2} + k^2 \right\} \\ &= \sum_{k=1}^5 \frac{3k^2 + k}{2} = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^5 k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^5 k \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{5 \times 6}{2} \\ &= 90 \end{aligned}$$

9 답 ③

$$\begin{aligned} & \text{수열 } \{a_n\} \text{의 일반항 } a_n \text{은} \\ & a_n = n(2n+1) = 2n^2 + n \\ & \therefore \sum_{k=1}^{11} a_k = \sum_{k=1}^{11} (2k^2 + k) = 2 \sum_{k=1}^{11} k^2 + \sum_{k=1}^{11} k \\ & \quad = 2 \times \frac{11 \times 12 \times 23}{6} + \frac{11 \times 12}{2} \\ & \quad = 1078 \end{aligned}$$

10 답 610

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 3n^2 - 2n \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3n^2 - 2n - \{3(n-1)^2 - 2(n-1)\} \\ &= 6n - 5 \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 - 2 \times 1 = 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 $\textcircled{7}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{8}$ 이 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 6n - 5 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

따라서 $a_{2k} = 6 \times 2k - 5 = 12k - 5$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_{2k} &= \sum_{k=1}^{10} (12k - 5) \\ &= 12 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 5 \\ &= 12 \times \frac{10 \times 11}{2} - 5 \times 10 \\ &= 610 \quad \dots\dots \textcircled{ii} \end{aligned}$$

채점 기준

i 일반항 a_n 구하기	60 %
ii $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$ 의 값 구하기	40 %

11 답 ①

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{(2n)^2 - 1} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

따라서 첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} a_k &= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{39} - \frac{1}{41} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{41} \right) \\ &= \frac{20}{41} \end{aligned}$$

12 답 $3\sqrt{3}$

수열 $\frac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}, \frac{3}{3+\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{12}+3}, \dots, \frac{3}{\sqrt{48}+\sqrt{45}}$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{3}{\sqrt{3n+3} + \sqrt{3n}}$$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제15항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} a_k &= \sum_{k=1}^{15} \frac{3}{\sqrt{3k+3} + \sqrt{3k}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{3(\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k})}{(\sqrt{3k+3} + \sqrt{3k})(\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k})} \\ &= \sum_{k=1}^{15} (\sqrt{3k+3} - \sqrt{3k}) \\ &= (\sqrt{6} - \sqrt{3}) + (\sqrt{9} - \sqrt{6}) + (\sqrt{12} - \sqrt{9}) + \dots + (\sqrt{48} - \sqrt{45}) \\ &= -\sqrt{3} + \sqrt{48} = 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

10 수학적 귀납법

개념유형

238~241쪽

001 답 125

$a_{n+1} = 5a_n$ 의 n 에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$$a_2 = 5a_1 = 5 \times 1 = 5$$

$$a_3 = 5a_2 = 5 \times 5 = 25$$

$$\therefore a_4 = 5a_3 = 5 \times 25 = 125$$

002 답 -67

$a_{n+1} = 3a_n - 1$ 의 n 에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$$a_2 = 3a_1 - 1 = 3 \times (-2) - 1 = -7$$

$$a_3 = 3a_2 - 1 = 3 \times (-7) - 1 = -22$$

$$\therefore a_4 = 3a_3 - 1 = 3 \times (-22) - 1 = -67$$

003 답 9

$a_{n+1} = a_n + n$ 의 n 에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$a_3 = a_2 + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$\therefore a_4 = a_3 + 3 = 6 + 3 = 9$$

004 답 12

$a_{n+1} = na_n$ 의 n 에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$$a_2 = 1 \times a_1 = 1 \times 2 = 2$$

$$a_3 = 2 \times a_2 = 2 \times 2 = 4$$

$$\therefore a_4 = 3 \times a_3 = 3 \times 4 = 12$$

005 답 3

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ 의 n 에 1, 2를 차례로 대입하면

$$a_3 = a_1 + a_2 = -1 + 2 = 1$$

$$\therefore a_4 = a_2 + a_3 = 2 + 1 = 3$$

006 답 $a_1=1, a_{n+1}=a_n+3 (n=1, 2, 3, \dots)$

주어진 수열은 첫째항이 1, 공차가 $4-1=3$ 인 등차수열이므로 수열 $\{a_n\}$ 을 귀납적으로 정의하면

$$a_1=1, a_{n+1}=a_n+3 (n=1, 2, 3, \dots)$$

참고 수열 $\{a_n\}$ 이 등차수열이므로

$$a_1=1, a_2=4, a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{또는 } a_1=1, a_2=4, 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2} (n=1, 2, 3, \dots)$$

와 같이 정의할 수도 있다.

007 답 $a_1=11, a_{n+1}=a_n-4 (n=1, 2, 3, \dots)$

주어진 수열은 첫째항이 11, 공차가 $7-11=-4$ 인 등차수열이므로

수열 $\{a_n\}$ 을 귀납적으로 정의하면

$$a_1=11, a_{n+1}=a_n-4 (n=1, 2, 3, \dots)$$

008 답 $a_1 = \frac{3}{2}, a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2} \ (n=1, 2, 3, \dots)$

주어진 수열은 첫째항이 $\frac{3}{2}$, 공차가 $1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ 인 등차수열이므로 수열 $\{a_n\}$ 을 귀납적으로 정의하면
 $a_1 = \frac{3}{2}, a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2} \ (n=1, 2, 3, \dots)$

009 답 $-1, 5, -1, -n+6$

010 답 $a_n = 2n + 1$

$a_{n+1} - a_n = 2$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 2인 등차수열이다.
 이때 첫째항이 3이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1$

011 답 $a_n = 6n - 4$

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
 이때 첫째항이 2, 공차가 $a_2 - a_1 = 8 - 2 = 6$ 이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 2 + (n-1) \times 6 = 6n - 4$

012 답 $a_n = -2n + 5$

$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
 이때 첫째항이 3, 공차가 $a_2 - a_1 = 1 - 3 = -2$ 이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 3 + (n-1) \times (-2) = -2n + 5$

013 답 $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n \ (n=1, 2, 3, \dots)$

주어진 수열은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{4}{2} = 2$ 인 등비수열이므로 수열 $\{a_n\}$ 을 귀납적으로 정의하면
 $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n \ (n=1, 2, 3, \dots)$

참고 수열 $\{a_n\}$ 이 등비수열이므로

$$a_1 = 2, a_2 = 4, \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \ (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$\text{또는 } a_1 = 2, a_2 = 4, a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} \ (n=1, 2, 3, \dots)$$

와 같이 정의할 수도 있다.

014 답 $a_1 = 1, a_{n+1} = -3a_n \ (n=1, 2, 3, \dots)$

주어진 수열은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{-3}{1} = -3$ 인 등비수열이므로 수열 $\{a_n\}$ 을 귀납적으로 정의하면
 $a_1 = 1, a_{n+1} = -3a_n \ (n=1, 2, 3, \dots)$

015 답 $a_1 = 25, a_{n+1} = -\frac{1}{5}a_n \ (n=1, 2, 3, \dots)$

주어진 수열은 첫째항이 25, 공비가 $\frac{-5}{25} = -\frac{1}{5}$ 인 등비수열이므로 수열 $\{a_n\}$ 을 귀납적으로 정의하면
 $a_1 = 25, a_{n+1} = -\frac{1}{5}a_n \ (n=1, 2, 3, \dots)$

016 답 $-2, 1, -2, (-2)^{n-1}$

017 답 $a_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이다.
 이때 첫째항이 3이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

018 답 $a_n = 5^{n-1}$

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.
 이때 첫째항이 1, 공비가 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{1} = 5$ 이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 1 \times 5^{n-1} = 5^{n-1}$

019 답 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.
 이때 첫째항이 2, 공비가 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$ 이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 2 \times 3^{n-1}$

실전유형

241~243쪽

020 답 108

$a_{n+1} - a_n = 4$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 4인 등차수열이다.
 이때 첫째항이 12이므로
 $a_{25} = 12 + 24 \times 4 = 108$

021 답 ③

$a_{n+1} = a_n - 3$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 -3 인 등차수열이다.
 이때 첫째항이 40이므로 일반항 a_n 은
 $a_n = 40 + (n-1) \times (-3) = -3n + 43$
 $a_k > 0$ 에서 $-3k + 43 > 0$
 $-3k > -43 \quad \therefore k < 14.333\cdots$
 따라서 자연수 k 의 최댓값은 14이다.

022 답 ②

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.
 이때 첫째항이 3, 공차가 $a_2 - a_1 = 8 - 3 = 5$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합은
 $\frac{10\{2 \times 3 + (10-1) \times 5\}}{2} = 255$

023 답 ⑤

$a_{n+1} = 3a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 3인 등비수열이다.
 이때 첫째항을 a 라 하면
 $a_2 = 2$ 에서 $a \times 3 = 2 \quad \therefore a = \frac{2}{3}$
 $\therefore a_4 = \frac{2}{3} \times 3^3 = 18$

024 답 11

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

이때 첫째항이 2, 공비가 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$ 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$a_k = \frac{1}{512} \text{에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \frac{1}{512} = \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$k-2=9$$

$$\therefore k=11$$

025 답 1023

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

이때 첫째항이 3이므로 공비를 r 라 하면

$$a_4 = 192 \text{에서 } 3r^3 = 192$$

$$r^3 = 64 \quad \therefore r = 4$$

$$\therefore \sum_{k=1}^5 a_k = \frac{3(4^5 - 1)}{4 - 1} = 1023$$

026 답 ①

$a_{n+1} = \frac{n+4}{2n-1} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{1+4}{2 \times 1 - 1} a_1 = 5 \times 1 = 5$$

$$a_3 = \frac{2+4}{2 \times 2 - 1} a_2 = 2 \times 5 = 10$$

$$a_4 = \frac{3+4}{2 \times 3 - 1} a_3 = \frac{7}{5} \times 10 = 14$$

$$\therefore a_5 = \frac{4+4}{2 \times 4 - 1} a_4 = \frac{8}{7} \times 14 = 16$$

027 답 99

$a_{n+1} = a_n + n^2$ 의 n 에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 1^2 = -1 + 1 = 0$$

$$a_3 = a_2 + 2^2 = 0 + 4 = 4$$

$$a_4 = a_3 + 3^2 = 4 + 9 = 13$$

$$a_5 = a_4 + 4^2 = 13 + 16 = 29$$

$$a_6 = a_5 + 5^2 = 29 + 25 = 54$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^6 a_k &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \\ &= -1 + 0 + 4 + 13 + 29 + 54 \\ &= 99 \end{aligned}$$

028 답 ②

$\sqrt{n+1} a_{n+1} = \sqrt{n} a_n$ 에서 $a_{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} a_n$

$a_{n+1} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 35를 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$a_4 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} a_3 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{4}}$$

$\vdots$

$$a_{36} = \frac{1}{\sqrt{36}}$$

$$\therefore \log_6 a_{36} = \log_6 \frac{1}{\sqrt{36}} = \log_6 \frac{1}{6} = -1$$

029 답 ①

$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + n a_n}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{a_1}{1 + a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{1 + 2a_2} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + 2 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{1 + 3a_3} = \frac{\frac{1}{5}}{1 + 3 \times \frac{1}{5}} = \frac{1}{8}$$

$\vdots$

따라서 $a_k = \frac{1}{8}$ 을 만족시키는 자연수 k 의 값은 4이다.

030 답 3

$a_{n+1} = a_n + 2^n + k$ 의 n 에 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_3 = a_2 + 2^2 + k = 5 + 4 + k = k + 9$$

$$a_4 = a_3 + 2^3 + k = (k + 9) + 8 + k = 2k + 17$$

$$a_5 = a_4 + 2^4 + k = (2k + 17) + 16 + k = 3k + 33$$

이때 $a_5 = 42$ 이므로

$$3k + 33 = 42 \quad \therefore k = 3$$

031 답 ①

$a_{n+1} = \begin{cases} 2a_n & (a_n < 7) \\ a_n - 7 & (a_n \geq 7) \end{cases}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = 2a_1 = 2 \times 1 = 2$$

$$a_3 = 2a_2 = 2 \times 2 = 4$$

$$a_4 = 2a_3 = 2 \times 4 = 8$$

$$a_5 = a_4 - 7 = 8 - 7 = 1$$

$$a_6 = 2a_5 = 2 \times 1 = 2$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 2, 4, 8이 이 순서대로 반복된다.

이때 $8 = 4 \times 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 a_k &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \times 2 \\ &= (1 + 2 + 4 + 8) \times 2 = 30 \end{aligned}$$

032 답 $a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 10$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

물 a_n L의 절반을 버리고 10 L의 물을 채워 넣었을 때 수족관에 남아 있는 물의 양이 a_{n+1} L이므로

$$a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n + 10 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

033 **답** (1) 24 (2) $a_{n+1}=2a_n-8$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

- (1) 용기에 16마리의 세균을 넣으면 1시간 동안 4마리는 죽고, 나머지는 각각 2마리로 분열하므로
 $a_1=(16-4) \times 2=24$
- (2) n 시간 후 용기에 살아 있는 세균의 수가 a_n 이면 1시간 동안 4마리는 죽고, 나머지는 각각 2마리로 분열하므로 $(n+1)$ 시간 후 용기에 살아 있는 세균의 수 a_{n+1} 은
 $a_{n+1}=(a_n-4) \times 2=2a_n-8$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

034 **답** 63

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= a_1 + 3 \times 2 = 3 + 6 = 9 \\ a_3 &= a_2 + 3 \times 3 = 9 + 9 = 18 \\ a_4 &= a_3 + 3 \times 4 = 18 + 12 = 30 \\ a_5 &= a_4 + 3 \times 5 = 30 + 15 = 45 \\ \therefore a_6 &= a_5 + 3 \times 6 = 45 + 18 = 63 \end{aligned}$$

개념유형

245쪽

035 **답** 1, $k+1$, $k+1$, $k+1$, $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$

036 **답** 풀이 참조

- (i) $n=1$ 일 때,
 (좌변) $= 1^3 = 1$
 (우변) $= \left(\frac{1 \times 2}{2}\right)^2 = 1$
 따라서 $n=1$ 일 때 주어진 등식이 성립한다.
- (ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2$
 이 등식의 양변에 $(k+1)^3$ 을 더하면
 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left\{\frac{k(k+1)}{2}\right\}^2 + (k+1)^3$
 $= \left\{\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right\}^2$
 따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.
 (i), (ii)에서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

037 **답** 25, 25, 2, $(k+1)^2$, $(k+1)^2$

038 **답** 풀이 참조

- (i) $n=3$ 일 때,
 (좌변) $= 2^3 = 8$
 (우변) $= 2 \times 3 + 1 = 7$
 $8 > 7$ 이므로 $n=3$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다.

- (ii) $n=k$ ($k \geq 3$)일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} 2^k &> 2k+1 \\ \text{이 부등식의 양변에 2를 곱하면} \\ 2^{k+1} &> 4k+2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \\ \text{이때 } k &\geq 3 \text{이면} \\ 4k+2 - \{2(k+1)+1\} &= 2k-1 > 0 \\ \text{이므로} \\ 4k+2 &> 2(k+1)+1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \\ \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서} \\ 2^{k+1} &> 2(k+1)+1 \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

- (i), (ii)에서 주어진 부등식은 $n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

실전유형

246~247쪽

039 **답** ④

- $p(1)$ 이 참이면 $p(3)$ 도 참이다.
 $p(3)$ 이 참이면 $p(3 \times 3) = p(3^2)$ 도 참이다.
 $p(3^2)$ 이 참이면 $p(3 \times 3^2) = p(3^3)$ 도 참이다.
 $\vdots$
 즉, $p(1)$ 이 참이면 모든 자연수 k 에 대하여 $p(3^k)$ 이 참이다.
 ① $p(72) = p(2^3 \times 3^2)$
 ② $p(75) = p(3 \times 5^2)$
 ③ $p(78) = p(2 \times 3 \times 13)$
 ④ $p(81) = p(3^4)$
 ⑤ $p(84) = p(2^2 \times 3 \times 7)$
 따라서 반드시 참인 명제는 ④이다.

040 **답** ⑤

- ㄱ. $p(1)$ 이 참이면 $p(4)$, $p(7)$, $p(10)$, ...이 참이지만 $p(3k)$ 가 참인지는 알 수 없다.
 ㄴ. $p(3)$ 이 참이면 $p(6)$, $p(9)$, $p(12)$, ..., $p(3k)$ 가 참이다.
 ㄷ. $p(1)$ 이 참이면 $p(4)$, $p(7)$, $p(10)$, ...이 참,
 $p(2)$ 가 참이면 $p(5)$, $p(8)$, $p(11)$, ...이 참,
 $p(3)$ 이 참이면 $p(6)$, $p(9)$, $p(12)$, ...가 참이다.
 따라서 $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ 이 참이면 모든 자연수 k 에 대하여 $p(k)$ 가 참이다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

041 **답** ③

- (i) $n=1$ 일 때,
 (좌변) $= 1^2 = 1$, (우변) $= \frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$
 따라서 $n=1$ 일 때 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n = \boxed{\textcircled{㉞}} k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

이 등식의 양변에 $\boxed{\textcircled{㉞}} (k+1)^2$ 을 더하면

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + \boxed{\textcircled{㉞}} (k+1)^2 \\ = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \boxed{\textcircled{㉞}} (k+1)^2 \\ = \frac{\boxed{\textcircled{㉞}} (k+1)(k+2)(2k+3)}{6} \end{aligned}$$

따라서 $n = k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

042 ▶ ①

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{1 \times 3} = \frac{1}{3}, (\text{우변}) = \frac{1}{2 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$$

따라서 $n=1$ 일 때 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

이 등식의 양변에 $\boxed{\textcircled{㉞}} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ + \boxed{\textcircled{㉞}} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ = \frac{k}{2k+1} + \boxed{\textcircled{㉞}} \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ = \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} \\ = \frac{\boxed{\textcircled{㉞}} k + 1}{2k+3} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

따라서 $f(k) = \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, g(k) = k+1$ 이므로

$$f(2) = \frac{1}{(4+1)(4+3)} = \frac{1}{35}, g(6) = 6+1 = 7$$

$$\therefore f(2)g(6) = \frac{1}{5}$$

043 ▶ 풀이 참조

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 2^{1-1} = 1, (\text{우변}) = 2^1 - 1 = 1$$

따라서 $n=1$ 일 때 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1$$

이 등식의 양변에 2^k 을 더하면

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} + 2^k &= 2^k - 1 + 2^k \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

044 ▶ $\textcircled{㉞} 1+kh$ $\textcircled{㉞} kh^2$ $\textcircled{㉞} k+1$

(i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = (1+h)^2 = 1+2h+h^2, (\text{우변}) = 1+2h$$

$1+2h+h^2 > 1+2h$ 이므로 $n=2$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k > \boxed{\textcircled{㉞}} 1+kh$$

이 부등식의 양변에 $1+h$ 를 곱하면

$$\begin{aligned} (1+h)^{k+1} &> (\boxed{\textcircled{㉞}} 1+kh)(1+h) \\ &= 1 + (k+1)h + \boxed{\textcircled{㉞}} kh^2 \\ &> 1 + (k+1)h \end{aligned}$$

따라서 $n = \boxed{\textcircled{㉞}} k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

045 ▶ 풀이 참조

(i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}, (\text{우변}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$\frac{5}{4} < \frac{3}{2}$ 이므로 $n=2$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

이 부등식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \quad \dots \textcircled{㉞}$$

이때 $k \geq 2$ 이면

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} - \left(2 - \frac{1}{k+1}\right) = -\frac{1}{k(k+1)^2} < 0$$

이므로

$$2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1} \quad \dots \textcircled{㉞}$$

$\textcircled{㉞}, \textcircled{㉞}$ 에서

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식은 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

실전유형으로 중단원 점검

248~249쪽

1 ▶ 24

$a_{n+1} - 4 = a_n$, 즉 $a_{n+1} = a_n + 4$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 4인 등차수열이다.

이때 첫째항이 5이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 5 + (n-1) \times 4 = 4n + 1$$

$\dots \textcircled{㉞}$

$$a_k = 97 \text{에서 } 4k + 1 = 97$$

$$4k = 96 \quad \therefore k = 24$$

..... ii

채점 기준

i 일반항 a_n 구하기	70 %
ii 자연수 k 의 값 구하기	30 %

2 답 ③

$2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

이때 첫째항이 2, 공차가 $a_2 - a_1 = 5 - 2 = 3$ 이므로

$$a_{20} = 2 + 19 \times 3 = 59$$

3 답 ①

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

이때 첫째항이 3, 공비가 $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3}$ 이므로

$$a_{50} = 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{49} = \frac{1}{3^{48}}$$

$$\therefore k = 48$$

4 답 ⑤

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

이때 첫째항을 a ($a > 0$), 공비를 r ($r > 0$)라 하면

$$a_2 = 6, a_4 = 96 \text{에서}$$

$$ar = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^3 = 96 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } r^2 = 16 \quad \therefore r = 4 \quad (\because r > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하여 풀면 } a = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } a_3 = \frac{3}{2} \times 4^2 = 24, a_5 = \frac{3}{2} \times 4^4 = 384 \text{이므로}$$

$$a_5 - a_3 = 360$$

5 답 1

$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)}$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + \frac{1}{1 \times 2}$$

$$a_3 = a_2 + \frac{1}{2 \times 3} = a_1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3}$$

$$a_4 = a_3 + \frac{1}{3 \times 4} = a_1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_5 &= a_4 + \frac{1}{4 \times 5} = a_1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \frac{1}{4 \times 5} \\ &= a_1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \\ &= \frac{1}{5} + 1 - \frac{1}{5} = 1 \end{aligned}$$

6 답 ④

$a_{n+1} = 4^n a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 15를 차례로 대입하면

$$a_2 = 4a_1$$

$$a_3 = 4^2 a_2 = 4^2 \times 4a_1$$

$$a_4 = 4^3 a_3 = 4^3 \times 4^2 \times 4a_1$$

⋮

$$\therefore a_{16} = 4^{15} a_{15} = 4^{15} \times \dots \times 4^3 \times 4^2 \times 4a_1$$

$$= 1 \times 4 \times 4^2 \times 4^3 \times \dots \times 4^{15}$$

$$= 4^{1+2+3+\dots+15}$$

$$= 4^{\frac{15 \times 16}{2}} = 4^{120}$$

$$\therefore \log_2 a_{16} = \log_2 4^{120} = \log_2 2^{240} = 240$$

7 답 19

$a_{n+1} = \begin{cases} 3a_n & (a_n < 1) \\ a_n - 1 & (a_n \geq 1) \end{cases}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = 3a_1 = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$a_3 = 3a_2 = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$$

$$a_4 = a_3 - 1 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$

$$a_5 = a_4 - 1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

$$a_6 = 3a_5 = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{9}{4}, \frac{5}{4}$ 가 이 순서대로 반복된다.

이때 $18 = 4 \times 4 + 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{18} a_k &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \times 4 + a_1 + a_2 \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + \frac{5}{4}\right) \times 4 + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 19 \end{aligned}$$

8 답 (1) 4 (2) $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 2$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

(1) 올해 초에 높이가 3m인 대나무를 그 높이의 $\frac{1}{3}$ 만큼 잘라 내고,

대나무는 1년 동안 2m씩 자라므로

$$a_1 = 3 \times \frac{2}{3} + 2 = 4$$

(2) n 년 후에 측정한 대나무의 높이가 a_n m이면 그 높이의 $\frac{1}{3}$ 만큼 잘

라 내고, 대나무는 1년 동안 2m씩 자라므로 $(n+1)$ 년 후에 측정

한 대나무의 높이 a_{n+1} m는

$$a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + 2 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

9 답 ④

$p(1)$ 이 참이면 $p(3), p(5)$ 도 참이다.

$p(3)$ 이 참이면 $p(3 \times 3) = p(3^2), p(5 \times 3) = p(15)$ 도 참이다.

$p(5)$ 가 참이면 $p(5 \times 5) = p(5^2)$ 도 참이다.

⋮

즉, $p(1)$ 이 참이면 음이 아닌 정수 a, b 에 대하여 $p(3^a \times 5^b)$ 이 참이다.

$$\textcircled{1} p(9) = p(3^2)$$

$$\textcircled{2} p(15) = p(3 \times 5)$$

$$\textcircled{3} p(25) = p(5^2)$$

$$\textcircled{4} p(30) = p(2 \times 3 \times 5)$$

$$\textcircled{5} p(45) = p(3^2 \times 5)$$

따라서 반드시 참이라고 할 수 없는 명제는 ④이다.

10 답 풀이 참조

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}, (\text{우변}) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

따라서 $n=1$ 일 때 주어진 등식이 성립한다. ①

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

이 등식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다. ②

(i), (ii)에서 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다. ... ③

채점 기준

① $n=1$ 일 때 주어진 등식이 성립함을 보이기	30 %
② $n=k+1$ 일 때 주어진 등식이 성립함을 보이기	60 %
③ 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립함을 보이기	10 %

11 답 36

(i) $n=4$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$(\text{우변}) = 2^4 = 16$$

$24 > 16$ 이므로 $n=4$ 일 때 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 4)$ 일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k > 2^k$$

이 부등식의 양변에 $(k+1)$ 을 곱하면

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k \times (k+1) > 2^k \times (k+1) \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $k \geq 4$ 이면 $(k+1) > 2$ 이므로

$$2^k \times (k+1) > 2^k \times 2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k \times (k+1) > (k+1) 2^{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 주어진 부등식은 $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

따라서 $f(k) = k+1, g(k) = 2^{k+1}$ 이므로

$$f(3) = 3+1=4, g(4) = 2^{4+1}=32$$

$$\therefore f(3) + g(4) = 36$$

memo ✨

Handwriting practice lines consisting of 25 horizontal dotted lines.

memo ✨

Handwriting practice lines consisting of 20 horizontal dotted lines on a white background.