

대수



수학의 신



정답과 해설

바른 정답

01 지수

STEP 1 핵심 문제 | 18~19쪽

01 ① 02 11 03 -10 04 17 05 ⑤ 06 ③
07 ③ 08 37 09 ② 10 $\frac{24}{5}$ 11 ④ 12 ③

STEP 2 고난도 문제 | 20~23쪽

01 ③ 02 ③ 03 3 04 9 05 -34 06 ②
07 4 08 24 09 ② 10 8 11 ⑤ 12 $\sqrt{6}$
13 ⑤ 14 41 15 24 16 55 17 ④ 18 ⑤
19 $2\sqrt{2}$ 20 ③ 21 -5 22 83 23 5

STEP 3 최고난도 문제 | 24~25쪽

01 3 02 3 03 18 04 ⑤ 05 5 06 65
07 ④ 08 ②

02 로그

STEP 1 핵심 문제 | 26~27쪽

01 56 02 ⑤ 03 ② 04 18 05 ① 06 ③
07 ⑤ 08 75 09 ① 10 16 11 10 12 ②

STEP 2 고난도 문제 | 28~31쪽

01 0 02 ① 03 3 04 ⑤ 05 22 06 36
07 ① 08 54 09 ② 10 45 11 6 12 $\frac{1}{2}$
13 1 14 ④ 15 -5 16 ② 17 426 18 30
19 7120 20 ② 21 7 22 71.6% 23 1.66

STEP 3 최고난도 문제 | 32~33쪽

01 ② 02 -1 03 72 04 78 05 79 06 ③
07 4 08 ③

03 지수함수

STEP 1 핵심 문제 | 34~35쪽

01 ① 02 ③ 03 4 04 ② 05 128 06 ⑤
07 20 08 ④ 09 5 10 ① 11 $2\sqrt{5}$ 12 ②

STEP 2 고난도 문제 | 36~40쪽

01 130 02 49 03 ⑤ 04 ③ 05 $\sqrt{2}$ 06 ④
07 8 08 ① 09 ⑤ 10 $-\frac{1}{2}$ 11 ② 12 2
13 ③ 14 ⑤ 15 2 16 ④ 17 81 18 ②
19 12 20 3 21 $\sqrt{2} < a < 8$ 22 ② 23 ①
24 14 25 ②

STEP 3 최고난도 문제 | 41~43쪽

01 ② 02 5 03 220 04 ⑤ 05 49 06 ①
07 ④ 08 ② 09 $4+\sqrt{3}$ 10 2 11 ⑤

04 로그함수

STEP 1 핵심 문제

44~45쪽

- 01 10 02 3 03 ⑤ 04 $C < A < B$
 05 $-\frac{11}{3}$ 06 $\frac{5}{2}$ 07 33 08 ④ 09 ① 10 2
 11 ① 12 6 13 5

STEP 2 고난도 문제

46~50쪽

- 01 ④ 02 5 03 4 04 9 05 ⑤ 06 $\frac{11}{4}$
 07 9 08 4 09 ② 10 ② 11 45 12 ②
 13 ② 14 12 15 ② 16 ① 17 -7
 18 $-\frac{31}{32}$ 19 ④ 20 5 21 ⑤ 22 8 23 10
 24 ① 25 ③ 26 110

STEP 3 최고난도 문제

51~53쪽

- 01 12 02 -1 03 15 04 ⑤ 05 ④ 06 1021
 07 39 08 ④ 09 ③

기출 변형 문제로 단원 마스터

54~57쪽

- 01 ④ 02 -70 03 ③ 04 ④ 05 12 06 28
 07 ③ 08 4 09 ④ 10 21 11 ② 12 30
 13 24 14 ③

05 삼각함수

STEP 1 핵심 문제

60~61쪽

- 01 2 02 ⑤ 03 ④ 04 ① 05 $\frac{11\sqrt{3}}{7}$ 06 $\frac{1}{3}$
 07 ③ 08 $\cos \theta - \tan \theta$ 09 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 10 ③ 11 ⑤
 12 $\frac{1}{3}$

STEP 2 고난도 문제

62~65쪽

- 01 제2사분면 또는 제4사분면 02 $\frac{34}{3}\pi$ 03 12 04 ④
 05 $3\sqrt{3}$ 06 $\frac{2}{3}\pi$ 07 ④ 08 6 09 ③ 10 ③
 11 17 12 2 13 $\neg, \perp$ 14 9 15 $\frac{11}{9}$
 16 $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ 17 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 18 $\frac{\sqrt{7}}{4}$ 19 ① 20 20 21 ④
 22 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

STEP 3 최고난도 문제

66~67쪽

- 01 13 02 ③ 03 9 04 8 05 82 06 ③
 07 ①

06 삼각함수의 그래프

STEP 1 핵심 문제

68~69쪽

- 01 ② 02 ⑤ 03 ② 04 ③ 05 $\frac{2}{3}$ 06 -1
 07 $\frac{3}{2}$ 08 ④ 09 ④ 10 ④ 11 32 12 ①

바른 정답

STEP 2 고난도 문제 | 70~74쪽

- 01 $\frac{93}{2}\pi$ 02 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 03 ③ 04 ④ 05 ④ 06 ⑤
 07 ④ 08 16 09 ④ 10 $\frac{1}{36}$ 11 $\frac{3}{2}\pi$
 12 $0 < \alpha \leq 2$ 13 35 14 $\frac{1}{3}$ 15 $\sqrt{3}$ 16 2
 17 $\frac{4}{3}\pi$ 18 $-2\sqrt{2}$ 19 ② 20 15 21 ⑤
 22 $\frac{14}{3}$ 23 $\frac{\pi}{2}$ 24 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \overline{PQ} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 25 9
 26 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$

STEP 3 최고난도 문제 | 75~77쪽

- 01 24 02 5 03 ② 04 15 05 ④ 06 48
 07 $\frac{5}{2}\pi$ 08 ① 09 ② 10 $-\frac{1}{8}$ 11 59

07

사인법칙과 코사인법칙

STEP 1 핵심 문제 | 78~79쪽

- 01 $\frac{16}{25}$ 02 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 03 ② 04 $2\sqrt{6}$ 05 $20\sqrt{2}$ m
 06 ⑤ 07 ① 08 71 09 ② 10 $\frac{40\sqrt{3}}{9}$
 11 $\frac{7\sqrt{15}}{4}$

STEP 2 고난도 문제 | 80~84쪽

- 01 $\frac{40}{13}$ 02 ① 03 $12\sqrt{2}$ 04 17 05 $8+4\sqrt{2}$
 06 ④ 07 2 08 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 09 $\sqrt{34}-\sqrt{2}$ 10 ②
 11 ⑤ 12 ④ 13 2 14 $\sqrt{15}$ 15 $\frac{9\sqrt{15}}{5}$ 16 ①
 17 $6+4\sqrt{2}$ 18 $\frac{23}{27}$ 19 $6\sqrt{2}$ 20 $4\sqrt{6}+6\sqrt{2}$
 21 30 22 24π 23 ③ 24 ⑤ 25 $\frac{5}{2}$

STEP 3 최고난도 문제 | 85~87쪽

- 01 $3\sqrt{2}\pi$ 02 6 03 ① 04 22 05 ④
 06 $\frac{13\sqrt{2}}{2}$ 07 $\frac{1+\sqrt{3}}{8}$ 08 15 09 28 10 ④
 11 -1 12 $\frac{87}{10}$

기출 변형 문제로 단원 마스터 | 88~91쪽

- 01 ③ 02 4 03 ① 04 $\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$ 05 7
 06 11 07 ③ 08 8 09 $16\sqrt{2}$ 10 43 11 31
 12 $\frac{3}{2}$ 13 $2\sqrt{3}$ 14 $3\sqrt{6}$ 15 ③

08

등차수열과 등비수열

STEP 1 핵심 문제 | 94~95쪽

- 01 86 02 18 03 93 04 ④ 05 22 06 ①
 07 ⑤ 08 9 09 36 10 25400원 11 86
 12 ⑤

STEP 2 고난도 문제 | 96~100쪽

- 01 ⑤ 02 ⑤ 03 117 04 $\frac{32}{3}$ 05 ④ 06 ④
 07 $\frac{1}{144}$ 08 $\frac{3}{4}$ 09 26 10 ① 11 80 12 65
 13 448 14 18 15 ② 16 ① 17 ⑤ 18 117
 19 3 20 ③ 21 $\sqrt{3}+1$ 22 ① 23 5 24 ①
 25 ③

STEP 3 **최고난도** 문제 | 101~103쪽

01 ④ 02 -9 03 273 04 ③ 05 ④ 06 477
07 84 08 ④ 09 10 10 750 11 $\neg, \perp$

09 수열의 합

STEP 1 **핵심** 문제 | 104~105쪽

01 ② 02 ⑤ 03 700 04 21 05 ② 06 1541
07 ⑤ 08 ④ 09 ④ 10 $\sqrt{2}$ 11 ④

STEP 2 **고난도** 문제 | 106~110쪽

01 0 02 -3 03 ⑤ 04 ③ 05 406 06 ①
07 8 08 ④ 09 ⑤ 10 ③ 11 136 12 $\frac{108}{55}$
13 696 14 ② 15 ① 16 ④ 17 66 18 ⑤
19 ③ 20 ⑤ 21 15 22 650 23 553 24 725
25 93 26 1156 27 ③

STEP 3 **최고난도** 문제 | 111~113쪽

01 ③ 02 $\frac{957}{1024}$ 03 ⑤ 04 ③ 05 ④ 06 5
07 8 08 5 09 3433 10 ⑤

10 수학적 귀납법

STEP 1 **핵심** 문제 | 114~115쪽

01 ④ 02 12 03 ③ 04 ② 05 ③ 06 6
07 ④ 08 8 09 ④ 10 ③ 11 ⑤

STEP 2 **고난도** 문제 | 116~120쪽

01 16 02 ① 03 9 04 120 05 49 06 ④
07 8 08 17 09 616 10 1 11 ⑤ 12 ③
13 ④ 14 -2 15 $\neg, \cap, \cup$ 16 132 17 ①
18 ⑤ 19 ③ 20 64 21 풀이 참조 22 ③

STEP 3 **최고난도** 문제 | 121~123쪽

01 ③ 02 150 03 6 04 ③ 05 48 06 ①
07 20 08 41 09 64 10 25 11 $\frac{633}{260}$ 12 ④

기출 변형 문제로 **단원 마스터** | 124~127쪽

01 ① 02 156 03 ① 04 ② 05 ② 06 28
07 1330 08 ⑤ 09 ② 10 -4 11 ⑤ 12 ③
13 ④ 14 24

STEP 1 핵심 문제

| 18~19쪽

01 ① 02 11 03 -10 04 17 05 ⑤ 06 ③

07 ③ 08 37 09 ② 10 $\frac{24}{5}$ 11 ④ 12 ③

01 답 ①

- ㄱ. $\sqrt[3]{27}=\sqrt[3]{3^3}=3$ 이므로 3의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{3}$ 뿐이다.
 ㄴ. $\sqrt[4]{(-2)^4}=\sqrt[4]{2^4}=2$ 이므로 2의 네제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[4]{2}$, $-\sqrt[4]{2}$ 이다.
 ㄷ. 16의 네제곱근은 방정식 $x^4=16$ 의 근이다.
 $x^4=16$ 에서
 $x^4-16=0$, $(x^2+4)(x^2-4)=0$
 $(x^2+4)(x+2)(x-2)=0$
 $\therefore x=-2i$ 또는 $x=2i$ 또는 $x=-2$ 또는 $x=2$
 따라서 16의 네제곱근은 4개이다.
 ㄹ. n 이 짝수일 때, -25 의 n 제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

02 답 11

- $n(C)$ 의 값은 b 의 a 제곱근 중 실수인 것의 개수이다.
 $A=\{5, 6\}$, $B=\{-3, -2, 2, 3, 4\}$ 이고 $a \in A$, $b \in B$ 이므로
 (i) $a=5$ 일 때,
 b 의 값의 부호에 관계없이 b 의 5제곱근 중 실수인 것은 1개씩 존재한다.
 따라서 b 의 5제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[5]{-3}$, $\sqrt[5]{-2}$, $\sqrt[5]{2}$, $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[5]{4}$ 의 5개이다.
 (ii) $a=6$ 일 때,
 b 가 양수이면 b 의 6제곱근 중 실수인 것은 2개씩 존재하고, b 가 음수이면 b 의 6제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않는다.
 따라서 b 의 6제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[6]{2}$, $\sqrt[6]{2}$, $-\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[6]{3}$, $-\sqrt[6]{4}$, $\sqrt[6]{4}$ 의 6개이다.
 (i), (ii)에서 $n(C)=5+6=11$

03 답 -10

- (i) $x < 0$ 일 때,
 $\sqrt{x^2} + \sqrt[3]{x^3} + \sqrt[4]{x^4} + \cdots + \sqrt[12]{x^{12}} = -x + x + (-x) + \cdots + (-x)$
 $= 6 \times (-x) + 5x = -x$
 즉, $-x=11$ 이므로 $x=-11$ 배점 30%
 (ii) $x=0$ 일 때,
 $\sqrt{x^2} + \sqrt[3]{x^3} + \sqrt[4]{x^4} + \cdots + \sqrt[12]{x^{12}} = 0$ 이므로 주어진 등식을 만족시키지 않는다.배점 30%
 (iii) $x > 0$ 일 때,
 $\sqrt{x^2} + \sqrt[3]{x^3} + \sqrt[4]{x^4} + \cdots + \sqrt[12]{x^{12}} = x + x + x + \cdots + x = 11x$
 즉, $11x=11$ 이므로 $x=1$ 배점 30%
 (i), (ii), (iii)에서 모든 실수 x 의 값의 합은
 $-11+1=-10$ 배점 10%

비법 NOTE

2 이상의 자연수 n 에 대하여

- (1) $x < 0$ 일 때,
 $\bullet n$ 이 짝수이면 $\sqrt[n]{x^n} = |x| = -x$
 $\bullet n$ 이 홀수이면 $\sqrt[n]{x^n} = x$
 (2) $x > 0$ 일 때, $\sqrt[n]{x^n} = x$

04 답 17

$$\begin{aligned} f(a) &= \sqrt[3]{\frac{(2a)^8 - a^8}{(2a)^6 - a^5}} = \sqrt[3]{\frac{a^8(2^8 - 1)}{a^5(2^6 - 1)}} \\ &= \sqrt[3]{a^3 \times \sqrt[3]{\frac{2^8 - 1}{2^6 - 1}}} = a \times \sqrt[3]{\frac{2^8 - 1}{2^6 - 1}} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f(4) &= 4 \times \sqrt[3]{\frac{2^8 - 1}{2^6 \times 4 - 1}} = 4 \times \sqrt[3]{\frac{2^8 - 1}{2^8 - 1}} = 4 \\ f\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{4} \times \sqrt[3]{\frac{2^8 - 1}{2^6 \times \frac{1}{4} - 1}} = \frac{1}{4} \times \sqrt[3]{\frac{2^8 - 1}{2^4 - 1}} \\ &= \frac{1}{4} \times \sqrt[3]{\frac{(2^4 + 1)(2^4 - 1)}{2^4 - 1}} = \frac{1}{4} \times \sqrt[3]{2^4 + 1} = \frac{1}{4} \times \sqrt[3]{17} \end{aligned}$$

$$\therefore f(4)f\left(\frac{1}{4}\right) = 4 \times \frac{1}{4} \times \sqrt[3]{17} = \sqrt[3]{17}$$

$$\therefore b=17$$

05 답 ⑤

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{3\sqrt{3}} &= \sqrt[4]{\sqrt[3]{27}} = \sqrt[8]{27} \\ \sqrt{2\sqrt{2}} &= \sqrt{\sqrt{8}} = \sqrt[4]{8} = \sqrt[8]{8^2} = \sqrt[8]{64} \\ \sqrt[4]{2\sqrt[3]{3}} &= \sqrt[4]{\sqrt[3]{48}} = \sqrt[8]{48} \\ \sqrt[8]{27} &< \sqrt[8]{48} < \sqrt[8]{64} \text{이므로 } a = \sqrt[8]{64}, b = \sqrt[8]{48}, c = \sqrt[8]{27} \\ \therefore \frac{ac}{b} &= \frac{\sqrt[8]{64} \times \sqrt[8]{27}}{\sqrt[8]{48}} = \sqrt[8]{\frac{64 \times 27}{48}} = \sqrt[8]{36} = \sqrt[8]{6^2} = \sqrt[4]{6} \end{aligned}$$

06 답 ③

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt[6]{5}}{\sqrt[4]{2}}\right)^m \times n &= 5^{\frac{m}{6}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{4}} \times n = 5^2 \times 2^2 \text{에서 } \frac{m}{6} \text{과 } \frac{m}{4} \text{이 모두 자연수} \\ &\text{이어야 하므로 } m \text{은 12의 배수이어야 한다.} \\ \text{이때 } n \text{이 자연수이므로 } \frac{m}{6} \leq 2 \quad \therefore m=12 \\ 5^{\frac{12}{6}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{12}{4}} \times n &= 5^2 \times 2^2 \text{에서} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times n &= 2^2 \quad \therefore n=32 \\ \therefore m+n &= 44 \end{aligned}$$

07 답 ③

- (i) $a=4$ 일 때,
 $(\sqrt[n]{4})^3 = 4^{\frac{3}{n}} = (2^2)^{\frac{3}{n}} = 2^{\frac{6}{n}}$ 이 자연수가 되려면 $\frac{6}{n}$ 이 자연수이어야 하므로 n 은 6의 양의 약수이어야 한다.
 따라서 2 이상의 자연수 n 의 값은 2, 3, 6이므로 n 의 최댓값은 6이다.
 $\therefore f(4)=6$

(ii) $a=27$ 일 때,

$$(\sqrt[n]{27})^3 = 27^{\frac{3}{n}} = (3^3)^{\frac{3}{n}} = 3^{\frac{9}{n}} \text{이 자연수가 되려면 } \frac{9}{n} \text{가 자연수이어야}$$

하므로 n 은 9의 양의 약수이어야 한다.

따라서 2 이상의 자연수 n 의 값은 3, 9이므로 n 의 최댓값은 9이다.

$$\therefore f(27)=9$$

$$(i), (ii) \text{에서 } f(4)+f(27)=15$$

08 답 37

$$2^{-a}+2^{-b}+2^{-c}=3 \text{에서}$$

$$\frac{1}{2^a}+\frac{1}{2^b}+\frac{1}{2^c}=3, \frac{2^b \times 2^c + 2^a \times 2^c + 2^a \times 2^b}{2^a \times 2^b \times 2^c}=3$$

$$\frac{2^{a+b}+2^{b+c}+2^{a+c}}{2^{a+b+c}}=3$$

$$\text{이때 } a+b+c=1 \text{이므로 } \frac{2^{a+b}+2^{b+c}+2^{a+c}}{2}=3$$

$$\therefore 2^{a+b}+2^{b+c}+2^{a+c}=6 \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\begin{aligned} \therefore 4^a+4^b+4^c &= (2^2)^a+(2^2)^b+(2^2)^c = (2^a)^2+(2^b)^2+(2^c)^2 \\ &= (2^a+2^b+2^c)^2-2(2^a \times 2^b+2^b \times 2^c+2^a \times 2^c) \\ &= (2^a+2^b+2^c)^2-2(2^{a+b}+2^{b+c}+2^{a+c}) \\ &= \left(\frac{9}{2}\right)^2-2 \times 6 = \frac{33}{4} \dots\dots\dots \text{배점 50\%} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } p=4, q=33 \text{이므로 } p+q=37 \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

09 답 ②

$$\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}=7 \text{에서 } x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=7$$

$$(x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}})^2=x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+2=7+2=9 \text{이므로}$$

$$x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}=3 \quad (\because x>0)$$

$$x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=7 \text{의 양변을 세제곱하면}$$

$$(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^3=343$$

$$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})=343$$

$$x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}+3 \times 7=343 \quad \therefore x^{\frac{3}{2}}+x^{-\frac{3}{2}}=322$$

$$\therefore x^{\frac{1}{4}}+x^{-\frac{1}{4}}+x^{\frac{3}{4}}+x^{-\frac{3}{4}}=3+322=325$$

10 답 $\frac{24}{5}$

$$\frac{2^x+2^{-x}}{2^x-2^{-x}}=\frac{3}{2} \text{의 좌변의 분모, 분자에 } 2^x \text{을 곱하면}$$

$$\frac{2^x(2^x+2^{-x})}{2^x(2^x-2^{-x})}=\frac{3}{2}, \frac{2^{2x}+1}{2^{2x}-1}=\frac{3}{2}$$

$$2(2^{2x}+1)=3(2^{2x}-1) \quad \therefore 2^{2x}=5$$

$$\therefore 4^x-4^{-x}=2^{2x}-(2^{2x})^{-1}=5-\frac{1}{5}=\frac{24}{5}$$

11 답 ④

$3^x=5^{-y}=k$ ($k>0$)로 놓으면 세 실수 x, y, z 가 0이 아니므로 $k \neq 1$

$$3^x=k \text{에서 } 3=k^{\frac{1}{x}} \dots\dots \text{㉠}$$

$$5^{-y}=k \text{에서 } 5=k^{-\frac{1}{y}} \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠} \times \text{㉡} \text{을 하면 } 15=k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} \dots\dots \text{㉢}$$

$$\text{또 } 5^{-y}=k \text{에서 } 5^{2y}=(5^{-y})^{-2}=k^{-2}$$

$$\text{따라서 } 5^{\frac{2y}{z}}=15 \text{에서}$$

$$15=5^{\frac{2y}{z}}=(5^{2y})^{\frac{1}{z}}=(k^{-2})^{\frac{1}{z}}=k^{-\frac{2}{z}} \dots\dots \text{㉣}$$

㉢, ㉣에서 $k^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=k^{-\frac{2}{z}}$ 이고, $k \neq 1$ 이므로

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=-\frac{2}{z}$$

12 답 ③

$I=I_0, r=r_1, x=x_1, B=B_1$ 을 주어진 관계식에 대입하면

$$B_1=\frac{kI_0r_1^2}{2(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$I=I_0, r=3r_1, x=3x_1, B=B_2$ 를 주어진 관계식에 대입하면

$$B_2=\frac{kI_0(3r_1)^2}{2\{(3x_1)^2+(3r_1)^2\}^{\frac{3}{2}}}=\frac{9kI_0r_1^2}{2(3^2x_1^2+3^2r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{9kI_0r_1^2}{2 \times (3^2)^{\frac{3}{2}}(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{9kI_0r_1^2}{2 \times 3^3(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{kI_0r_1^2}{6(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \frac{B_2}{B_1}=\frac{\frac{kI_0r_1^2}{6(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{kI_0r_1^2}{2(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}}=\frac{1}{3}$$

STEP 2 고난도 문제

| 20~23쪽

01 ③	02 ③	03 3	04 9	05 -34	06 ②
07 4	08 24	09 ②	10 8	11 ⑤	12 $\sqrt{6}$
13 ⑤	14 41	15 24	16 55	17 ④	18 ⑤
19 $2\sqrt{2}$	20 ③	21 -5	22 83	23 5	

01 답 ③

$n(n-4)$ 의 세제곱근 중 실수인 것은 1개이므로 $f(n)=1$

(i) $n(n-4)<0$ 일 때,

$$n(n-4)<0 \text{에서 } 0<n<4$$

이때 $n(n-4)$ 의 네제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로

$$g(n)=0$$

(ii) $n(n-4)=0$ 일 때,

$$n(n-4)=0 \text{에서 } n=0 \text{ 또는 } n=4$$

그런데 n 은 자연수이므로 $n=4$

이때 $n(n-4)$ 의 네제곱근 중 실수인 것은 1개이므로 $g(n)=1$

(iii) $n(n-4)>0$ 일 때,

$$n(n-4)>0 \text{에서 } n<0 \text{ 또는 } n>4$$

그런데 n 은 자연수이므로 $n>4$

이때 $n(n-4)$ 의 네제곱근 중 실수인 것은 2개이므로 $g(n)=2$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } g(n)=\begin{cases} 0 & (0<n<4) \\ 1 & (n=4) \\ 2 & (n>4) \end{cases}$$

이때 $f(n)>g(n)$ 을 만족시키려면 $g(n)<1$ 이어야 하므로 $g(n)=0$

$$\therefore 0<n<4$$

따라서 자연수 n 의 값은 1, 2, 3이므로 그 합은

$$1+2+3=6$$

02 답 ③

$g(n) = n^2 - 15n + 50 = (n-5)(n-10)$ 이라 하자.

(i) n 이 홀수인 경우

$g(n)$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 1개이므로 $f(n) = 1$

그런데 n 은 홀수이므로 $4 \leq n \leq 12$ 에서

$$f(5) = f(7) = f(9) = f(11) = 1$$

(ii) n 이 짝수인 경우

① $g(n) < 0$ 일 때, $(n-5)(n-10) < 0$ 에서 $5 < n < 10$

$g(n)$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로 $f(n) = 0$

그런데 n 은 짝수이므로 $4 \leq n \leq 12$ 에서 $f(6) = f(8) = 0$

② $g(n) = 0$ 일 때, $(n-5)(n-10) = 0$ 에서 $n = 5$ 또는 $n = 10$

$g(n)$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 1개이므로 $f(n) = 1$

그런데 n 은 짝수이므로 $4 \leq n \leq 12$ 에서 $f(10) = 1$

③ $g(n) > 0$ 일 때, $(n-5)(n-10) > 0$ 에서 $n < 5$ 또는 $n > 10$

$g(n)$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 2개이므로 $f(n) = 2$

그런데 n 은 짝수이므로 $4 \leq n \leq 12$ 에서 $f(4) = f(12) = 2$

(i), (ii)에서 $f(9) = f(10) = f(11) = 1$ 이므로 $f(n) = f(n+1)$ 을 만족시키는 n 의 값은 9, 10이다.

따라서 모든 n 의 값의 합은 $9 + 10 = 19$

03 답 3

(i) $a > 0, b > 0$ 또는 $a < 0, b < 0$ 일 때,

a, b 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수가 같으므로 $f(n) = g(n)$

$$\therefore f(n) - g(n) = 0$$

즉, $f(m_1) + f(m_2) + f(m_3) - g(m_1) - g(m_2) - g(m_3) = 4$ 를 만족시키지 않는다.

(ii) $a < 0, b > 0$ 일 때,

n 이 짝수이면 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않고, b 의 n 제곱근 중 실수인 것은 2개이므로

$$f(n) = 0, g(n) = 2$$

$$\therefore f(n) - g(n) = -2$$

n 이 홀수이면 a, b 의 n 제곱근 중 실수인 것은 1개이므로

$$f(n) = 1, g(n) = 1$$

$$\therefore f(n) - g(n) = 0$$

즉, $f(m_1) + f(m_2) + f(m_3) - g(m_1) - g(m_2) - g(m_3) = 4$ 를 만족시키지 않는다.

(iii) $a > 0, b < 0$ 일 때,

n 이 짝수이면 a 의 n 제곱근 중 실수인 것은 2개이고, b 의 n 제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로

$$f(n) = 2, g(n) = 0$$

$$\therefore f(n) - g(n) = 2$$

n 이 홀수이면 a, b 의 n 제곱근 중 실수인 것은 1개이므로

$$f(n) = 1, g(n) = 1$$

$$\therefore f(n) - g(n) = 0$$

이때 $f(m_1) + f(m_2) + f(m_3) - g(m_1) - g(m_2) - g(m_3) = 4$ 를 만족시키려면 m_1, m_2, m_3 중 짝수가 2개, 홀수가 1개이어야 한다.

$10 < m_1 < m_2 < m_3 < 16$ 에서 10보다 크고 16보다 작은 짝수는 12, 14,

홀수는 11, 13, 15이므로 순서쌍 (m_1, m_2, m_3) 은

$(11, 12, 14), (12, 13, 14), (12, 14, 15)$ 의 3개이다.

(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 (m_1, m_2, m_3) 의 개수는 3이다.

04 답 9

함수 $y = x^2 + 6x + 9 + n$ 의 그래프와 직선 $y = 2\sqrt{n}(x+3)$ 이 만나는 점의 x 좌표를 구하면 $x^2 + 6x + 9 + n = 2\sqrt{n}(x+3)$ 에서

$$x^2 + (6 - 2\sqrt{n})x + 9 - 6\sqrt{n} + n = 0$$

$$x^2 + 2(3 - \sqrt{n})x + (3 - \sqrt{n})^2 = 0$$

$$(x + 3 - \sqrt{n})^2 = 0 \quad \therefore x = \sqrt{n} - 3$$

$$\therefore f(n) = \sqrt{n} - 3$$

(i) $f(n) < 0$ 일 때,

$$\sqrt{n} - 3 < 0 \text{에서 } \sqrt{n} < 3 \quad \therefore -9 < n < 9$$

이때 n 은 1보다 큰 자연수이므로 $1 < n < 9$

n 이 짝수이면 $f(n)$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않고, n 이 홀수이면 $f(n)$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 1개이므로

$$g(2) = g(4) = g(6) = g(8) = 0, g(3) = g(5) = g(7) = 1$$

(ii) $f(n) = 0$ 일 때,

$$\sqrt{n} - 3 = 0 \text{에서 } \sqrt{n} = 3 \quad \therefore n = 9$$

$f(n)$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 1개이므로 $g(9) = 1$

(iii) $f(n) > 0$ 일 때,

$$\sqrt{n} - 3 > 0 \text{에서 } \sqrt{n} > 3 \quad \therefore n > 9$$

n 이 짝수이면 $f(n)$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 2개이고, n 이 홀수이면 $f(n)$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 1개이므로

$$g(10) = g(12) = 2, g(11) = 1$$

(i), (ii), (iii)에서

$$g(2) + g(3) + g(4) + \cdots + g(12) = 1 \times 5 + 2 \times 2 = 9$$

05 답 -34

$$\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = 10 \text{에서 } \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = t \text{로 놓으면}$$

$$t + t^2 - 2 = 10, t^2 + t - 12 = 0$$

$$(t+4)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -4 \text{ 또는 } t = 3 \quad \cdots \cdots \text{배점 30\%}$$

(i) $t = -4$ 일 때,

$$\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = -4 \text{이므로 } \sqrt[3]{x} = s \text{로 놓으면}$$

$$s + \frac{1}{s} = -4, s^2 + 4s + 1 = 0$$

이 이차방정식의 두 실근을 α, β 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha + \beta = -4, \alpha\beta = 1$

이때 $\sqrt[3]{x} = s$ 에서 $x = s^3$ 이므로 x 의 값은 α^3, β^3 이다.

$$\therefore \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$= (-4)^3 - 3 \times 1 \times (-4) = -52 \quad \cdots \cdots \text{배점 30\%}$$

(ii) $t = 3$ 일 때,

$$\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 3 \text{이므로 } \sqrt[3]{x} = s \text{로 놓으면}$$

$$s + \frac{1}{s} = 3, s^2 - 3s + 1 = 0$$

이 이차방정식의 두 실근을 γ, δ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\gamma + \delta = 3, \gamma\delta = 1$

이때 $\sqrt[3]{x} = s$ 에서 $x = s^3$ 이므로 x 의 값은 γ^3, δ^3 이다.

$$\therefore \gamma^3 + \delta^3 = (\gamma + \delta)^3 - 3\gamma\delta(\gamma + \delta)$$

$$= 3^3 - 3 \times 1 \times 3 = 18 \quad \cdots \cdots \text{배점 30\%}$$

(i), (ii)에서 모든 실수 x 의 값의 합은

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = -52 + 18$$

$$= -34 \quad \cdots \cdots \text{배점 10\%}$$

개념 NOTE

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}, \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

06 답 ②

이차방정식 $x^2-4\sqrt{a}x+4\sqrt{b^2}=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-4\sqrt{a})^2-4\times 4\sqrt{b^2}=0$$

$$\sqrt{a}-4\sqrt{b}=0, \sqrt{a}=4\sqrt{b} \quad \therefore a=16b$$

$$x^2-4\sqrt{a}x+4\sqrt{b^2}=0 \text{에서}$$

$$x^2-4\sqrt{16b}x+4\sqrt{b^2}=0, x^2-2\sqrt{4b}x+4\sqrt{b^2}=0$$

$$(x-4\sqrt{b})^2=0 \quad \therefore x=4\sqrt{b}$$

$$\therefore a=4\sqrt{b}$$

$$2a^4-3a^2<2 \text{에서}$$

$$2(4\sqrt{b})^4-3(4\sqrt{b})^2<2, 2(\sqrt{b})^2-3\sqrt{b}-2<0$$

$$(2\sqrt{b}+1)(\sqrt{b}-2)<0$$

$$\therefore -\frac{1}{2}<\sqrt{b}<2$$

이때 b 는 자연수이므로 $1\leq b<4$

따라서 b 의 값은 1, 2, 3이고, $a=16b$ 이므로 순서쌍 (a, b) 는 (16, 1), (32, 2), (48, 3)의 3개이다.

07 답 4

$$\left[\sqrt[n]{a}+\frac{1}{2}\right]=k \text{ (} k \text{는 정수)로 놓으면}$$

$$k\leq \sqrt[n]{a}+\frac{1}{2}<k+1$$

$$k+1\leq \sqrt[n]{a}+\frac{3}{2}<k+2 \text{이므로 } \left[\sqrt[n]{a}+\frac{3}{2}\right]=k+1$$

$$k+2\leq \sqrt[n]{a}+\frac{5}{2}<k+3 \text{이므로 } \left[\sqrt[n]{a}+\frac{5}{2}\right]=k+2$$

$$\left[\sqrt[n]{a}+\frac{1}{2}\right]+\left[\sqrt[n]{a}+\frac{3}{2}\right]+\left[\sqrt[n]{a}+\frac{5}{2}\right]=6 \text{에서}$$

$$k+(k+1)+(k+2)=6, 3k=3$$

$$\therefore k=1$$

$$\text{즉, } 1\leq \sqrt[n]{a}+\frac{1}{2}<2 \text{이므로 } \frac{1}{2}\leq \sqrt[n]{a}<\frac{3}{2}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^n\leq a<\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

이때 자연수 n 에 대하여 $0<\left(\frac{1}{2}\right)^n<1$ 이므로 자연수 a 의 개수가 4 이상

이려면 $\left(\frac{3}{2}\right)^n>4$ 이어야 한다.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n>4 \text{에서 } \frac{3^n}{2^n}>4, 3^n>4\times 2^n$$

$$\therefore 3^n>2^{n+2}$$

n 은 1보다 큰 자연수이므로

$$n=2 \text{일 때, } 3^2=9, 2^4=16 \text{이므로 } 3^2<2^{2+2}$$

$$n=3 \text{일 때, } 3^3=27, 2^5=32 \text{이므로 } 3^3<2^{3+2}$$

$$n=4 \text{일 때, } 3^4=81, 2^6=64 \text{이므로 } 3^4>2^{4+2}$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

배열 NOTE

$[x]$ 가 x 보다 크지 않은 최대의 정수일 때, 정수 n 에 대하여

$$(1) n\leq x<n+1 \text{이면 } [x]=n$$

$$(2) [x]=n \text{이면 } n\leq x<n+1$$

08 답 24

$$12a-a^2=3^m \text{에서 } 3^m>0 \text{이므로}$$

$$12a-a^2>0, \text{ 즉 } a(a-12)<0 \text{에서 } 0<a<12$$

$$\text{이때 } 12a-a^2=-(a-6)^2+36 \text{이므로}$$

$$0<12a-a^2\leq 36$$

따라서 $0<3^m\leq 36$ 이고 m 이 자연수이므로 m 의 값은 1, 2, 3이다.

(i) $m=1$ 일 때,

$12a-a^2=3$ 이므로 $\sqrt[n]{12a-a^2}=\sqrt[n]{3}$ 이 정수가 되도록 하는 2 이상의 자연수 n 은 존재하지 않는다.

(ii) $m=2$ 일 때,

$12a-a^2=3^2$ 이므로 $\sqrt[n]{12a-a^2}=\sqrt[n]{3^2}$ 은 $n=2$ 일 때 정수이다.

$$\text{이때 } a^2-12a+9=0 \text{에서 } a=6+3\sqrt{3} \text{ 또는 } a=6-3\sqrt{3}$$

(iii) $m=3$ 일 때,

$12a-a^2=3^3$ 이므로 $\sqrt[n]{12a-a^2}=\sqrt[n]{3^3}$ 은 $n=3$ 일 때 정수이다.

$$\text{이때 } a^2-12a+27=0 \text{에서 } (a-3)(a-9)=0$$

$$\therefore a=3 \text{ 또는 } a=9$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$(6+3\sqrt{3})+(6-3\sqrt{3})+3+9=24$$

idea

09 답 ②

$\sqrt[3]{3^{f(n)}}$ 의 네제곱근 중 실수인 것은 $-\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^{f(n)}}}, \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^{f(n)}}}$ 이므로

$$\begin{aligned} -\sqrt[4]{\sqrt[3]{3^{f(n)}}}\times \sqrt[4]{\sqrt[3]{3^{f(n)}}} &= -\sqrt[3]{\frac{f(n)}{4}}\times \sqrt[3]{\frac{f(n)}{4}} \\ &= -\sqrt[3]{\frac{f(n)}{4}+\frac{f(n)}{4}} \\ &= -\sqrt[3]{\frac{f(n)}{2}} \\ &= -(3^{\frac{1}{2}})^{\frac{f(n)}{2}} \\ &= -3^{\frac{f(n)}{4}} \end{aligned}$$

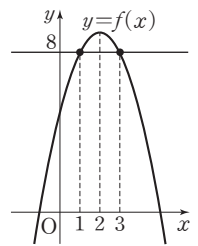
따라서 $-3^{\frac{f(n)}{4}}=-9$, 즉 $3^{\frac{f(n)}{4}}=9=3^2$ 이므로

$$\frac{f(n)}{4}=2 \quad \therefore f(n)=8$$

이때 함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로 $f(n)=8$ 을 만족시키는 자연수 n 의 개수가 2이기 위해서는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 (1, 8)을 지나야 한다.

따라서 $f(1)=-1+k=8$ 이므로

$$k=9$$



10 답 8

$$x=\sqrt{5}+\sqrt{2}, y=\sqrt{5}-\sqrt{2} \text{에서}$$

$$x+y=2\sqrt{5}, xy=3$$

$$a^{\frac{3}{x}}a^{\frac{3}{y}}=3a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}+16a^{\frac{3-xy}{5xy}} \text{에서}$$

$$a^{\frac{3}{x}+\frac{3}{y}}=3a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}+16a^{\frac{3-xy}{5xy}}$$

$$a^{\frac{3(x+y)}{xy}}=3a^{\frac{2}{3}(x+y)}+16a^{\frac{3-xy}{5xy}}$$

$$a^{\frac{3\times 2\sqrt{5}}{3}}=3a^{\frac{2}{3}\times 2\sqrt{5}}+16a^{\frac{3-3}{5\times 3}}$$

$$a^{2\sqrt{5}}=3a^{\frac{4\sqrt{5}}{3}}+16$$

이때 $a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}}=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$\begin{aligned}
 t^3 &= 3t^2 + 16 \\
 t^3 - 3t^2 - 16 &= 0 \\
 (t-4)(t^2+t+4) &= 0 \\
 \therefore t &= 4 \quad (\because t \text{는 실수}) \\
 \text{따라서 } a^{\frac{2\sqrt{5}}{3}} &= 4 \text{이므로} \\
 a^{\sqrt{5}} &= 4^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8
 \end{aligned}$$

11 답 ⑤

$P_1(a, f(a))$ 에서 $Q_1(a, 0)$
 정사각형 OQ_1AB 의 한 변의 길이가 a 이므로 $B(0, a)$
 $Q_2(b, 0)$ 이므로 $P_2(b, a)$
 이때 점 P_2 는 곡선 $y=x^3$ 위의 점이므로
 $a=b^3 \quad \therefore b=a^{\frac{1}{3}} \quad \dots\dots ㉠$
 정사각형 OQ_2CD 의 한 변의 길이가 b 이므로 $D(0, b)$
 $Q_3(c, 0)$ 이므로 $P_3(c, b)$
 이때 점 P_3 은 곡선 $y=x^2$ 위의 점이므로
 $b=c^2 \quad \therefore c=b^{\frac{1}{2}} \quad (\because c>0)$
 ㉠을 대입하면
 $c=(a^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}}$
 $\therefore bc=a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=a^{\frac{1}{2}}$
 $bc=2$ 가 되려면
 $a^{\frac{1}{2}}=2$
 $\therefore a=2^2=4$
 따라서 점 $P_1(4, f(4))$ 의 y 좌표는
 $f(4)=4^2=16$

12 답 $\sqrt{6}$

발효를 시작한 지 $4a$ 시간 후의 이스트의 양은
 $100(1+r^{-\frac{4a}{25}})=100(1+r^{-\frac{2a}{25}})(g)$
 발효를 시작한 지 $2a$ 시간 후의 이스트의 양은
 $100(1+r^{-\frac{2a}{25}})=100(1+r^{-\frac{a}{25}})(g)$
 $4a$ 시간 후의 이스트의 양이 $2a$ 시간 후의 이스트의 양의 $\frac{5}{6}$ 배이므로
 $100(1+r^{-\frac{2a}{25}})=\frac{5}{6} \times 100(1+r^{-\frac{a}{25}})$
 $6(1+r^{-\frac{2a}{25}})=5(1+r^{-\frac{a}{25}})$
 이때 $r^{-\frac{a}{25}}=s \quad (s>0)$ 로 놓으면
 $6(1+s^2)=5(1+s)$
 $6s^2-5s+1=0$
 $(3s-1)(2s-1)=0$
 $\therefore s=\frac{1}{3}$ 또는 $s=\frac{1}{2}$
 즉, $r^{-\frac{a}{25}}=\frac{1}{3}$ 또는 $r^{-\frac{a}{25}}=\frac{1}{2}$ 이므로
 $r^a=\left(\frac{1}{3}\right)^{-25}$ 또는 $r^a=\left(\frac{1}{2}\right)^{-25}$
 $\therefore r^a=3^{25}$ 또는 $r^a=2^{25}$
 따라서 모든 r^a 의 값의 곱은
 $3^{25} \times 2^{25} = (3 \times 2)^{25} = 6^{25} = (\sqrt{6})^{50}$
 $\therefore k=\sqrt{6} \quad (\because k>0)$

13 답 ⑤

(i) p, q 가 모두 홀수일 때,

$$\begin{aligned}
 f(p) \times f(q) &= \sqrt[4]{9 \times 2^{p+1}} \times \sqrt[4]{9 \times 2^{q+1}} \\
 &= \sqrt[4]{3^4 \times 2^{p+1} \times 2^{q+1}} = 3 \times \sqrt[4]{2^{p+q+2}} \\
 &= 3 \times 2^{\frac{p+q+2}{4}}
 \end{aligned}$$

$f(p) \times f(q)$ 가 자연수가 되려면 $2^{\frac{p+q+2}{4}}$ 이 자연수이어야 하므로
 $p+q+2$ 가 4의 배수이어야 한다.

p, q 는 10 이하의 홀수이므로

$p+q+2=4$, 즉 $p+q=2$ 일 때, 순서쌍 (p, q) 는 (1, 1)의 1개이다.

$p+q+2=8$, 즉 $p+q=6$ 일 때, 순서쌍 (p, q) 는 (1, 5), (3, 3), (5, 1)의 3개이다.

$p+q+2=12$, 즉 $p+q=10$ 일 때, 순서쌍 (p, q) 는 (1, 9), (3, 7), (5, 5), (7, 3), (9, 1)의 5개이다.

$p+q+2=16$, 즉 $p+q=14$ 일 때, 순서쌍 (p, q) 는 (5, 9), (7, 7), (9, 5)의 3개이다.

$p+q+2=20$, 즉 $p+q=18$ 일 때, 순서쌍 (p, q) 는 (9, 9)의 1개이다.

따라서 순서쌍 (p, q) 의 개수는

$$1+3+5+3+1=13$$

(ii) p 는 홀수, q 는 짝수일 때,

$$\begin{aligned}
 f(p) \times f(q) &= \sqrt[4]{9 \times 2^{p+1}} \times \sqrt[4]{4 \times 3^q} \\
 &= \sqrt[4]{3^2 \times 2^{p+1} \times 2^2 \times 3^q} = \sqrt[4]{2^{p+3} \times 3^{q+2}} \\
 &= 2^{\frac{p+3}{4}} \times 3^{\frac{q+2}{4}}
 \end{aligned}$$

$f(p) \times f(q)$ 가 자연수가 되려면 $2^{\frac{p+3}{4}}, 3^{\frac{q+2}{4}}$ 이 모두 자연수이어야 하므로
 $p+3, q+2$ 가 모두 4의 배수이어야 한다.

따라서 p 의 값은 1, 5, 9이고, q 의 값은 2, 6, 10이므로 순서쌍 (p, q) 의 개수는

$$3 \times 3 = 9$$

(iii) p 는 짝수, q 는 홀수일 때,

(ii)와 같은 방법으로 하면 순서쌍 (p, q) 의 개수는

$$3 \times 3 = 9$$

(iv) p, q 가 모두 짝수일 때,

$$\begin{aligned}
 f(p) \times f(q) &= \sqrt[4]{4 \times 3^p} \times \sqrt[4]{4 \times 3^q} \\
 &= \sqrt[4]{2^4 \times 3^p \times 2^4 \times 3^q} = 2 \times \sqrt[4]{3^{p+q}} \\
 &= 2 \times 3^{\frac{p+q}{4}}
 \end{aligned}$$

$f(p) \times f(q)$ 가 자연수가 되려면 $3^{\frac{p+q}{4}}$ 이 자연수이어야 하므로 $p+q$
 가 4의 배수이어야 한다.

p, q 는 10 이하의 짝수이므로

$p+q=4$ 일 때, 순서쌍 (p, q) 는 (2, 2)의 1개이다.

$p+q=8$ 일 때, 순서쌍 (p, q) 는 (2, 6), (4, 4), (6, 2)의 3개이다.

$p+q=12$ 일 때, 순서쌍 (p, q) 는 (2, 10), (4, 8), (6, 6), (8, 4), (10, 2)의 5개이다.

$p+q=16$ 일 때, 순서쌍 (p, q) 는 (6, 10), (8, 8), (10, 6)의 3개이다.

$p+q=20$ 일 때, 순서쌍 (p, q) 는 (10, 10)의 1개이다.

따라서 순서쌍 (p, q) 의 개수는

$$1+3+5+3+1=13$$

(i)~(iv)에서 모든 순서쌍 (p, q) 의 개수는

$$13+9+9+13=44$$

14 **답 41**

$n=2^x \times 3^y \times 5^z$ (x, y, z 는 자연수)으로 놓으면 p, q, r 는 각각 x, y, z 의 최솟값이다.

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \sqrt{\frac{n}{3}} &= \sqrt{\frac{2^x \times 3^y \times 5^z}{3}} \\ &= (2^x \times 3^{y-1} \times 5^z)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{x}{2}} \times 3^{\frac{y-1}{2}} \times 5^{\frac{z}{2}} \end{aligned}$$

$\sqrt{\frac{n}{3}}$ 이 자연수가 되려면 x, z 는 모두 짝수이고,
 $y=2k+1$ (k 는 음이 아닌 정수) 꼴이어야 한다.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \sqrt[3]{\frac{n}{4}} &= \sqrt[3]{\frac{2^x \times 3^y \times 5^z}{4}} \\ &= (2^{x-2} \times 3^y \times 5^z)^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{\frac{x-2}{3}} \times 3^{\frac{y}{3}} \times 5^{\frac{z}{3}} \end{aligned}$$

$\sqrt[3]{\frac{n}{4}}$ 이 자연수가 되려면 y, z 는 모두 3의 배수이고,
 $x=3l+2$ (l 은 음이 아닌 정수) 꼴이어야 한다.

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \sqrt[5]{\frac{n}{5}} &= \sqrt[5]{\frac{2^x \times 3^y \times 5^z}{5}} \\ &= (2^x \times 3^y \times 5^{z-1})^{\frac{1}{5}} \\ &= 2^{\frac{x}{5}} \times 3^{\frac{y}{5}} \times 5^{\frac{z-1}{5}} \end{aligned}$$

$\sqrt[5]{\frac{n}{5}}$ 이 자연수가 되려면 x, y 는 모두 5의 배수이고,
 $z=5m+1$ (m 은 음이 아닌 정수) 꼴이어야 한다.

(i), (ii), (iii)에서 x 는 짝수이면서 5의 배수이므로 10의 배수이고,
 $x=3l+2$ (l 은 음이 아닌 정수) 꼴이므로 이를 만족시키는 x 의 최솟값은 20이다. $\therefore p=20$
 y 는 3의 배수이면서 5의 배수이므로 15의 배수이고,
 $y=2k+1$ (k 는 음이 아닌 정수) 꼴이므로 이를 만족시키는 y 의 최솟값은 15이다. $\therefore q=15$
 z 는 짝수이면서 3의 배수이므로 6의 배수이고,
 $z=5m+1$ (m 은 음이 아닌 정수) 꼴이므로 이를 만족시키는 z 의 최솟값은 6이다. $\therefore r=6$
 $\therefore p+q+r=41$

15 **답 24**

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 (나)에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 음수이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 (가)에서 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$ 이 중근인 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 방정식 $x^n-64=0$, $f(x)=0$ 은 각각 서로 다른 두 실근을 갖고, 이 두 실근이 서로 같아야 한다.

(i) n 이 홀수일 때,

방정식 $x^n-64=0$, 즉 $x^n=64$ 의 실근은 $\sqrt[n]{64}$ 의 1개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) n 이 짝수일 때,

방정식 $x^n-64=0$, 즉 $x^n=64$ 의 실근은 $-\sqrt[n]{64}$, $\sqrt[n]{64}$ 이다.

이는 방정식 $f(x)=0$ 의 두 실근과 같으므로

$$\begin{aligned} f(x) &= (x+\sqrt[n]{64})(x-\sqrt[n]{64}) = x^2 - (\sqrt[n]{64})^2 \\ &= x^2 - \sqrt[n]{64^2} = x^2 - \sqrt[n]{2^{12}} = x^2 - 2^{\frac{12}{n}} \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값 $-2^{\frac{12}{n}}$ 을 갖는다.

(나)에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 음의 정수이므로 $\frac{12}{n}$ 가 자연수이어야 한다.

즉, n 은 12의 양의 약수이고 짝수이므로 n 의 값은 2, 4, 6, 12이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$2+4+6+12=24$$

16 **답 55**

$$\begin{aligned} &\frac{10}{10^{-10}+1} + \frac{9}{10^{-9}+1} + \cdots + \frac{1}{10^{-1}+1} + \frac{1}{10^0+1} \\ &\quad + \frac{1}{10^1+1} + \frac{2}{10^2+1} + \cdots + \frac{10}{10^{10}+1} \\ &= 10 \left(\frac{1}{10^{-10}+1} + \frac{1}{10^{10}+1} \right) + 9 \left(\frac{1}{10^{-9}+1} + \frac{1}{10^9+1} \right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{10^{-1}+1} + \frac{1}{10^1+1} \right) + \frac{1}{10^0+1} \\ &= 10 \times \frac{10^{10}+1+10^{-10}+1}{(10^{-10}+1)(10^{10}+1)} + 9 \times \frac{10^9+1+10^{-9}+1}{(10^{-9}+1)(10^9+1)} \\ &\quad + \cdots + \frac{10^1+1+10^{-1}+1}{(10^{-1}+1)(10^1+1)} + \frac{1}{1+1} \\ &= 10 \times \frac{10^{10}+1+10^{-10}+1}{1+10^{-10}+10^{10}+1} + 9 \times \frac{10^9+1+10^{-9}+1}{1+10^{-9}+10^9+1} \\ &\quad + \cdots + \frac{10^1+1+10^{-1}+1}{1+10^{-1}+10^1+1} + \frac{1}{2} \\ &= 10+9+8+\cdots+1+\frac{1}{2}=55+\frac{1}{2} \end{aligned}$$

즉, $n < 55 + \frac{1}{2}$ 이므로 정수 n 의 최댓값은 55이다.

17 **답 ④**

$$\begin{aligned} \frac{a^2-2a\sqrt{2a}+2\sqrt{2a}+1}{2a} &= \frac{a}{2} - \sqrt{2a} + \frac{\sqrt{2a}}{a} + \frac{1}{2a} \\ &= \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) - \sqrt{2} \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) \\ &= \frac{1}{2} (a + a^{-1}) - \sqrt{2} (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$a^{\frac{1}{4}}=3-2\sqrt{2}$ 에서

$$a^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3-2\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = 3+2\sqrt{2}$$

이때 $a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}=6$, $a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}}=-4\sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}} &= (a^{\frac{1}{4}}+a^{-\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}}-a^{-\frac{1}{4}}) \\ &= 6 \times (-4\sqrt{2}) = -24\sqrt{2} \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}=-24\sqrt{2}$ 의 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned} (a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^2 &= (-24\sqrt{2})^2 \\ a+a^{-1}-2 &= 24^2 \times 2 \quad \therefore a+a^{-1}=24^2 \times 2+2 \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

②, ③을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{a^2-2a\sqrt{2a}+2\sqrt{2a}+1}{2a} &= \frac{1}{2} (a + a^{-1}) - \sqrt{2} (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{2} (24^2 \times 2 + 2) - \sqrt{2} \times (-24\sqrt{2}) \\ &= 24^2 + 1 + 24 \times 2 \\ &= (24+1)^2 = 25^2 \end{aligned}$$

$\therefore n=25$

18 답 ⑤

$$\begin{aligned}\frac{\{f(m)\}^2}{f(2m)} &= \frac{(a^m - a^{-m})^2}{a^{2m} - a^{-2m}} \\ &= \frac{(a^m - a^{-m})^2}{(a^m + a^{-m})(a^m - a^{-m})} \\ &= \frac{a^m - a^{-m}}{a^m + a^{-m}}\end{aligned}$$

같은 방법으로 하면

$$\begin{aligned}\frac{\{f(n)\}^2}{f(2n)} &= \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} \\ \text{이때 } \frac{\{f(m)\}^2}{f(2m)} &= \frac{2\{f(n)\}^2}{f(2n)} \text{에서}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{a^m - a^{-m}}{a^m + a^{-m}} &= \frac{2(a^n - a^{-n})}{a^n + a^{-n}} \\ (a^m - a^{-m})(a^n + a^{-n}) &= 2(a^m + a^{-m})(a^n - a^{-n}) \\ a^{m+n} + a^{m-n} - a^{-m+n} - a^{-m-n} &= 2a^{m+n} - 2a^{m-n} + 2a^{-m+n} - 2a^{-m-n} \\ a^{m+n} - 3a^{m-n} + 3a^{-m+n} - a^{-m-n} &= 0 \\ a^{m+n} - a^{-(m+n)} &= 3\{a^{m-n} - a^{-(m-n)}\} \\ f(m+n) &= 3f(m-n) \\ \therefore \frac{f(m+n)}{f(m-n)} &= 3\end{aligned}$$

19 답 $2\sqrt{2}$

(㉞)의 $x^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}$ 에서 양변을 제곱하면

$$\begin{aligned}(x^{\frac{1}{2}})^2 &= (a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}})^2 \\ x &= a + a^{-1} - 2 \\ \therefore x + 2 &= a + a^{-1} \quad \dots\dots \textcircled{㉞}\end{aligned}$$

양변을 제곱하면

$$\begin{aligned}(x+2)^2 &= (a+a^{-1})^2 \\ x^2 + 4x + 4 &= a^2 + a^{-2} + 2 \\ \therefore x^2 + 4x &= a^2 + a^{-2} - 2 = (a - a^{-1})^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉟}\end{aligned}$$

$$a > 1 \text{이므로 } 0 < \frac{1}{a} < 1 \quad \therefore a - a^{-1} > 0$$

(㉟)의 $\frac{x+2-\sqrt{x^2+4x}}{x+2+\sqrt{x^2+4x}} = \frac{1}{8}$ 에서 좌변에 ㉞, ㉟을 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{x+2-\sqrt{x^2+4x}}{x+2+\sqrt{x^2+4x}} &= \frac{a+a^{-1}-\sqrt{(a-a^{-1})^2}}{a+a^{-1}+\sqrt{(a-a^{-1})^2}} \\ &= \frac{a+a^{-1}-(a-a^{-1})}{a+a^{-1}+(a-a^{-1})} \quad (\because a-a^{-1} > 0) \\ &= \frac{2a^{-1}}{2a} = \frac{1}{a^2}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{a^2} = \frac{1}{8} \text{이므로 } a^2 = 8$$

$$\therefore a = 2\sqrt{2} \quad (\because a > 1)$$

20 답 ③

$$(a^{\frac{3}{4}} - a^{-\frac{3}{4}})^2 = a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} - 2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}(a^{\frac{3}{4}} - a^{-\frac{3}{4}})^4 &= (a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} - 2)^2 \\ &= a^3 + a^{-3} + 4 + 2 - 4a^{\frac{3}{2}} - 4a^{-\frac{3}{2}} \\ &= a^3 + a^{-3} - 4(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}) + 6\end{aligned}$$

$$3(a^{\frac{3}{4}} - a^{-\frac{3}{4}})^4 + 12(a^{\frac{3}{4}} - a^{-\frac{3}{4}})^2 = 4 \text{에서}$$

$$3\{a^3 + a^{-3} - 4(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}) + 6\} + 12(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} - 2) = 4$$

$$3(a^3 + a^{-3}) - 10 = 0, \quad 3a^6 - 10a^3 + 3 = 0$$

$$(3a^3 - 1)(a^3 - 3) = 0$$

$$\therefore a^3 = \frac{1}{3} \text{ 또는 } a^3 = 3$$

a 는 실수이므로

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{3}} \text{ 또는 } a = \sqrt[3]{3}$$

따라서 양수 a 의 최댓값은 $\sqrt[3]{3}$ 이다.

21 답 -5

(㉞)에서 $4^x = 5^y = 10^z = k \ (k > 0)$ 로 놓으면 세 실수 x, y, z 가 0이 아니므로 $k \neq 1$ 배점 20%

$$4^x = k, \text{ 즉 } 4^x = 2^{2x} = k \text{에서 } 2 = k^{\frac{1}{2x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

$$5^y = k \text{에서 } 5 = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉟}$$

$$10^z = k \text{에서 } 10 = k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{㉟} \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

㉞ $\times$ ㉟을 하면

$$2 \times 5 = k^{\frac{1}{2x}} \times k^{\frac{1}{y}}, \text{ 즉 } 10 = k^{\frac{1}{2x} + \frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

㉟, ㉞에서 $k^{\frac{1}{z}} = k^{\frac{1}{2x} + \frac{1}{y}}$ 이고, $k \neq 1$ 이므로

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2x} + \frac{1}{y} \quad \dots\dots \textcircled{㉞} \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\text{이때 (㉞)의 } (2x+5)(y+5) = 25 \text{에서 } 2xy + 10x + 5y + 25 = 25$$

$$\therefore 2xy + 10x + 5y = 0$$

$xy \neq 0$ 이므로 양변을 $2xy$ 로 나누면

$$1 + \frac{5}{y} + \frac{5}{2x} = 0 \quad \therefore \frac{1}{y} + \frac{1}{2x} = -\frac{1}{5}$$

$$\text{따라서 ㉞에서 } \frac{1}{z} = -\frac{1}{5} \text{이므로 } z = -5 \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

22 답 83

(㉞)의 $a^{4x} \times (2b)^{7y} = 1$ 에서 $a^{4x} = \frac{1}{(2b)^{7y}} = k \ (k > 0)$ 로 놓으면

$$a^{4x} = k \text{에서 } a^2 = k^{\frac{1}{2x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

$$\frac{1}{(2b)^{7y}} = k \text{에서 } 2b = k^{-\frac{1}{7y}}, \text{ 즉 } (2b)^5 = k^{-\frac{5}{7y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉟}$$

$$\textcircled{㉞} \times \textcircled{㉟} \text{을 하면 } k^{\frac{1}{2x}} \times k^{-\frac{5}{7y}} = a^2 \times (2b)^5, \text{ 즉 } k^{\frac{1}{2x} - \frac{5}{7y}} = 32a^2b^5$$

$$\text{이때 (㉞)에서 } a^2b^5 = 128 \text{이고, (㉞)에서 } \frac{1}{2x} - \frac{5}{7y} = 3 \text{이므로}$$

$$k^3 = 32 \times 128 = 2^{12}$$

그런데 k 는 실수이므로 $k = 2^4 = 16$

$$\text{즉, } a^{4x} = 16, \quad a^{2x} = 4 \text{이므로}$$

$$\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} = \frac{a^x(a^{3x} - a^{-3x})}{a^x(a^x + a^{-x})} = \frac{a^{4x} - a^{-2x}}{a^{2x} + 1}$$

$$= \frac{16 - \frac{1}{4}}{4 + 1} = \frac{63}{20}$$

따라서 $p = 20, \quad q = 63$ 이므로 $p + q = 83$

23 답 5

$2^x = m^y = n^z = k \ (k > 0)$ 로 놓으면 x, y, z 가 모두 양수이므로 $k > 1$

$$2^x = k \text{에서 } 2 = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

$$m^y = k \text{에서 } m = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉟}$$

$$n^z=k \text{에서 } n=k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$xyz \neq 0$ 이므로 $xz-yz=\frac{xy}{2}$ 의 양변을 xyz 로 나누면

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2z} \quad \therefore \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2z} = 0$$

$$\textcircled{C} \text{에서 } n^{\frac{1}{2}} = k^{\frac{1}{2z}} \quad \therefore \sqrt{n} = k^{\frac{1}{2z}} \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$$\textcircled{D} \div \textcircled{A} \div \textcircled{B} \text{을 하면 } m \div 2 \div \sqrt{n} = k^{\frac{1}{y}} \div k^{\frac{1}{x}} \div k^{\frac{1}{2z}}$$

$$\frac{m}{2\sqrt{n}} = k^{\frac{1}{y} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2z}}, \quad \frac{m}{2\sqrt{n}} = k^0 = 1$$

$$\therefore m = 2\sqrt{n}$$

이때 m, n 은 두 자리의 자연수이므로 n 은 제곱수이어야 한다.

$n=4^2=16$ 일 때, $m=8$ — m 이 두 자리의 자연수가 아니다.

$n=5^2=25$ 일 때, $m=10$

$n=6^2=36$ 일 때, $m=12$

$n=7^2=49$ 일 때, $m=14$

$n=8^2=64$ 일 때, $m=16$

$n=9^2=81$ 일 때, $m=18$

따라서 순서쌍 (m, n) 은 $(10, 25), (12, 36), (14, 49), (16, 64), (18, 81)$ 의 5개이다.

STEP 3 최고난도 문제

| 24~25쪽

01 3 02 3 03 18 04 ⑤ 05 5 06 65

07 ④ 08 ②

01 답 3

1단계 $(n^2-11n+24)^3 > 0$ 일 때, $f(n)$ 의 값 구하기

$g(n) = n^2 - 11n + 24 = (n-3)(n-8)$ 이라 하자.

(i) $g(n) > 0$ 일 때,

$$(n-3)(n-8) > 0 \text{에서 } n < 3 \text{ 또는 } n > 8$$

그런데 $n > 1$ 이므로

$$1 < n < 3 \text{ 또는 } n > 8$$

$$g(n) > 0 \text{이면 } \{g(n)\}^3 > 0$$

n 이 짝수이면 $\{g(n)\}^3$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 2개이므로

— $1 < n < 3$ 또는 $n > 8$ 이므로 n 의 값은 2, 10, 12, 14, ...

$$f(2) = f(10) = f(12) = f(14) = \dots = 2$$

n 이 홀수이면 $\{g(n)\}^3$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 1개이므로

— $1 < n < 3$ 또는 $n > 8$ 이므로 n 의 값은 9, 11, 13, ...

$$f(9) = f(11) = f(13) = \dots = 1$$

2단계 $(n^2-11n+24)^3 = 0$ 일 때, $f(n)$ 의 값 구하기

(ii) $g(n) = 0$ 일 때,

$$(n-3)(n-8) = 0 \text{에서 } n = 3 \text{ 또는 } n = 8$$

$\{g(n)\}^3$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 1개이므로

$$f(3) = f(8) = 1$$

3단계 $(n^2-11n+24)^3 < 0$ 일 때, $f(n)$ 의 값 구하기

(iii) $g(n) < 0$ 일 때,

$$(n-3)(n-8) < 0 \text{에서 } 3 < n < 8$$

$$g(n) < 0 \text{이면 } \{g(n)\}^3 < 0$$

n 이 짝수이면 $\{g(n)\}^3$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 존재하지 않으므로

— $3 < n < 8$ 이므로 n 의 값은 4, 6

$$f(4) = f(6) = 0$$

n 이 홀수이면 $\{g(n)\}^3$ 의 n 제곱근 중 실수인 것은 1개이므로

— $3 < n < 8$ 이므로 n 의 값은 5, 7

$$f(5) = f(7) = 1$$

4단계 $f(n)$ 구하기

(i), (ii), (iii)에서

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$f(n)$	2	1	0	1	0	1	1	1	2	1	2	1	...

$$f(n) = \begin{cases} 0 & (n=4 \text{ 또는 } n=6) \\ 1 & (n=8 \text{ 또는 } n \text{은 } 3 \text{ 이상의 홀수}) \\ 2 & (n=2 \text{ 또는 } n \text{은 } 10 \text{ 이상의 짝수}) \end{cases}$$

5단계 k 의 값 구하기

이때 $f(k) + f(k+1) + f(k+2) + \dots + f(k+6)$ 의 항이 7개이므로 그 값이 최소가 되려면

$$k=3$$

idea 02 답 3

1단계 a, b 의 값의 범위 구하기

$\sqrt{ka-a^2} = \sqrt{kb-b^2} = 2$ 에서 $ka-a^2 = kb-b^2 = 2^n$ 이므로 이차방정식 $kx-x^2=2^n$ 은 두 실근 a, b 를 갖는다.

이때 $3(b-a) > 0$ 에서 $b > a$ 이다.

$$f(x) = kx - x^2$$

$$= -\left(x - \frac{k}{2}\right)^2 + \frac{k^2}{4}$$

이라 하면 a, b 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2^n$ 의 두 교점의 x 좌표이다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직

선 $x=\frac{k}{2}$ 에 대하여 대칭이므로

$$0 < 3(b-a) \leq 2k$$

즉, $0 < b-a \leq \frac{2}{3}k$ 가 되려면

$$0 < \frac{k}{2} - a \leq \frac{k}{3}, \quad 0 < b - \frac{k}{2} \leq \frac{k}{3} \text{에서 } -\frac{k}{2} < -a \leq -\frac{k}{6}, \quad \frac{k}{2} < b \leq \frac{5}{6}k$$

$$\therefore \frac{k}{6} \leq a < \frac{k}{2}, \quad \frac{k}{2} < b \leq \frac{5}{6}k$$

2단계 n 의 최댓값 구하기

$$\text{이때 } f\left(\frac{k}{6}\right) = f\left(\frac{5}{6}k\right) = \frac{5}{36}k^2, \quad f\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{k^2}{4} \text{이고, } f(a) = f(b) = 2^n \text{이}$$

므로 $\frac{k}{6} \leq x \leq \frac{5}{6}k$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2^n$ 이 서로 다른 두 교점을 가지려면 $\frac{5}{36}k^2 \leq 2^n < \frac{k^2}{4}$ 이어야 한다.

$$\therefore \frac{5}{9}k^2 \leq 2^{n+2} < k^2$$

(i) $k=8$ 일 때,

$$\frac{320}{9} \leq 2^{n+2} < 64 \text{를 만족시키는 자연수 } n \text{은 존재하지 않는다.}$$

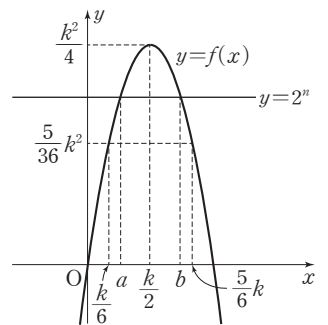
(ii) $k=7$ 일 때,

$$\frac{245}{9} \leq 2^{n+2} < 49 \text{에서 } 2^{n+2} = 32 = 2^5 \text{이므로 } n=3$$

(iii) $k \leq 6$ 일 때,

$$\frac{5}{36}k^2 \leq 2^n < \frac{k^2}{4} \text{을 만족시키는 자연수 } n \text{은 } 3 \text{ 이하이다.}$$

(i), (ii), (iii)에서 자연수 n 의 최댓값은 3이다.



1단계 점 P의 좌표 구하기

두 직선 $y=2^n x$, $y=-x+1$ 이 만나는 점 P의 x 좌표를 구하면
 $2^n x = -x+1$ 에서 $(2^n+1)x=1$

$$\therefore x = \frac{1}{2^n+1}$$

$$\therefore P\left(\frac{1}{2^n+1}, \frac{2^n}{2^n+1}\right)$$

2단계 $S(n)+T(n)$ 구하기

삼각형 OAP의 넓이 $S(n)$ 은

$$S(n) = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{2^n}{2^n+1} = \frac{2^n}{2(2^n+1)} \quad \cdots \textcircled{1}$$

삼각형 OBP의 넓이 $T(n)$ 은

$$T(n) = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2^n+1} = \frac{1}{2(2^n+1)} \quad \cdots \textcircled{2}$$

또 $S(n)+T(n) = \triangle OAP + \triangle OBP$

$$= \triangle OAB = \frac{1}{2}$$

3단계 $S(-n)$, $T(-n)$ 구하기

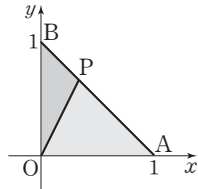
$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$S(-n) = \frac{2^{-n}}{2(2^{-n}+1)} = \frac{1}{2(1+2^n)} = T(n)$$

$$T(-n) = \frac{1}{2(2^{-n}+1)} = \frac{2^n}{2(1+2^n)} = S(n)$$

4단계 식의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore 5S(-9) - T(-9) + 5S(-8) - T(-8) \\ + \cdots + 5S(-1) - T(-1) + 5S(1) - T(1) \\ + 5S(2) - T(2) + \cdots + 5S(9) - T(9) \\ = 5T(9) - S(9) + 5T(8) - S(8) + \cdots + 5T(1) - S(1) \\ + 5S(1) - T(1) + 5S(2) - T(2) + \cdots + 5S(9) - T(9) \\ = 4\{S(1)+T(1)\} + 4\{S(2)+T(2)\} + \cdots + 4\{S(9)+T(9)\} \\ = 4 \times \frac{1}{2} + 4 \times \frac{1}{2} + \cdots + 4 \times \frac{1}{2} \\ = 2 \times 9 = 18 \end{aligned}$$



04 답 5

1단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg$. 집합 A_4 는 $2^a = \frac{4}{b}$, 즉 $2^a \times b = 4$ 를 만족시키는 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 를 원소로 갖는다.

이때 $2^1 \times 2 = 4$, $2^2 \times 1 = 4$ 이므로

$$A_4 = \{(1, 2), (2, 1)\}$$

2단계 $\cup$ 이 옳은지 확인하기

$\cup$. $m=2^k$ 이면 $2^a = \frac{m}{b}$ 에서

$$2^a = \frac{2^k}{b}$$

$$\therefore b = \frac{2^k}{2^a} = 2^{k-a}$$

따라서 $A_m = \{(1, 2^{k-1}), (2, 2^{k-2}), (3, 2^{k-3}), \dots, (k, 1)\}$ 이므로 $n(A_m) = k$

3단계 $\subset$ 이 옳은지 확인하기

$\subset$. 집합 A_m 은 $2^a = \frac{m}{b}$, 즉 $2^a \times b = m$ 을 만족시키는 자연수 a, b 의 순

서쌍 (a, b) 를 원소로 가지므로 $n(A_m) = 1$ 을 만족시키는 원소를 (a', b') 이라 하면

$$2^{a'} \times b' = m$$

이때 $a' > 1$ 이면

$$m = 2 \times 2 \times \cdots \times b'$$

즉, 순서쌍 $(1, 2^{a'-1}b')$, $(2, 2^{a'-2}b')$, ...이 원소이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore a' = 1$$

이때 b' 이 짝수, 즉 $b' = 2k$ (k 는 자연수) 꼴이면

$$m = 2^1 \times 2k = 2^2 k$$

즉, 순서쌍 $(1, 2k)$ 가 원소이면 순서쌍 $(2, k)$ 도 원소이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 b' 은 홀수이어야 한다.

$m = 2^1 \times (\text{홀수})$ 꼴이므로 두 자리 자연수 m 은 $2 \times 5, 2 \times 7, 2 \times 9, \dots, 2 \times 49$ 의 23개이다.

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\cup$, $\subset$ 이다.

05 답 5

1단계 n 의 값의 경우를 나누어 순서쌍의 개수를 a 에 대한 식으로 나타내기

(i) $n=1$ 일 때,

$\sqrt[4]{1^m} = 1$ 은 모든 자연수 m 에 대하여 자연수가 된다.

따라서 순서쌍 (m, n) 은 $(4a, 1), (4a+1, 1), (4a+2, 1), \dots, (8a, 1)$ 이므로 그 개수는

$$8a - 4a + 1 = 4a + 1$$

(ii) $n=2^4=16$ 일 때,

$\sqrt[4]{2^{4m}} = 2^m$ 은 모든 자연수 m 에 대하여 자연수가 된다.

따라서 순서쌍 (m, n) 은 $(4a, 16), (4a+1, 16), (4a+2, 16), \dots, (8a, 16)$ 이므로 그 개수는

$$8a - 4a + 1 = 4a + 1$$

(iii) $n=2^2=4$ 또는 $n=3^2=9$ 일 때,

$\sqrt[4]{2^{2m}} = 2^{\frac{m}{2}}$, $\sqrt[4]{3^{2m}} = 3^{\frac{m}{2}}$ 이 각각 자연수가 되려면 m 은 짝수이어야 한다.

따라서 순서쌍 (m, n) 은 $(4a, 4), (4a+2, 4), (4a+4, 4), \dots,$

$(8a, 4), (4a, 9), (4a+2, 9), (4a+4, 9), \dots, (8a, 9)$ 이므로 그 개수는

$$2(2a+1) = 4a + 2$$

(iv) n 의 값이 (i), (ii), (iii)의 경우를 제외한 값일 때,

$1 \leq n \leq 20$ 을 만족시키는 자연수 n 은 16개이다.

$\sqrt[4]{n^m} = n^{\frac{m}{4}}$ 이 자연수가 되려면 m 은 4의 배수이어야 하므로 자연수

m 은 $4a, 4a+4, 4a+8, \dots, 4a+4a$ 의 $(a+1)$ 개이다.

따라서 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$16(a+1) = 16a + 16$$

(i)~(iv)에서 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$(4a+1) + (4a+1) + (4a+2) + (16a+16) = 28a + 20$$

2단계 a 의 값 구하기

즉, $28a + 20 = 160$ 이므로

$$28a = 140 \quad \therefore a = 5$$

06 답 65

1단계 $f(n)$ 구하기

두 직선 $y=3^n x$, $y=3^{-n}x-3^{-n}$ 이 만나는 점의 x 좌표를 구하면
 $3^n x = 3^{-n} x - 3^{-n}$ 에서 $(3^n - 3^{-n})x = -3^{-n}$

$$\therefore x = -\frac{3^{-n}}{3^n - 3^{-n}}$$

따라서 두 직선이 만나는 점의 y 좌표 $f(n)$ 은

$$\begin{aligned} f(n) &= -\frac{3^{-n}}{3^n - 3^{-n}} \times 3^n \\ &= -\frac{1}{3^n - 3^{-n}} \\ &= -\frac{3^n}{(3^n)^2 - 1} \\ &= -\frac{3^n}{(3^n + 1)(3^n - 1)} \\ &= -\frac{3^n + 1}{(3^n + 1)(3^n - 1)} + \frac{1}{(3^n + 1)(3^n - 1)} \\ &= -\frac{1}{3^n - 1} + \frac{1}{3^{2n} - 1} \end{aligned}$$

2단계 $f(1) + f(2) + f(4) + f(8) + f(16) + f(32)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore f(1) + f(2) + f(4) + f(8) + f(16) + f(32) \\ &= \left(-\frac{1}{3^1 - 1} + \frac{1}{3^2 - 1}\right) + \left(-\frac{1}{3^2 - 1} + \frac{1}{3^4 - 1}\right) \\ &\quad + \left(-\frac{1}{3^4 - 1} + \frac{1}{3^8 - 1}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{3^{32} - 1} + \frac{1}{3^{64} - 1}\right) \\ &= -\frac{1}{3^1 - 1} + \frac{1}{3^{64} - 1} \\ &= \frac{1}{2} \left(-1 + \frac{2}{3^{64} - 1}\right) \end{aligned}$$

3단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p=1$, $q=64$ 이므로

$$p+q=65$$

07 답 ④

1단계 5를 5와 7의 거듭제곱을 이용하여 나타내기

$$(a-4)(b-2)=8 \text{에서}$$

$$ab-2a-4b+8=8$$

$$\therefore ab=2a+4b$$

$$(5^a)^b = 5^{ab} = 5^{2a+4b} = (5^a)^2 \times 5^{4b} \text{이고 } 5^a = 7^b \text{이므로}$$

$$(5^a)^b = (7^b)^2 \times 5^{4b} = (5^4 \times 7^2)^b$$

$$\therefore 5^a = 5^4 \times 7^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

2단계 a 의 값의 범위 구하기

이때 $5^2 < 7^2 < 5^3$ 이므로 각 변에 5를 곱하면

$$5^4 \times 5^2 < 5^4 \times 7^2 < 5^4 \times 5^3$$

$$\therefore 5^6 < 5^a < 5^7$$

밑이 1보다 크므로

$$6 < a < 7$$

3단계 b 의 값의 범위 구하기

$$\text{또 } 5^a = 7^b \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서 } 7^b = 5^4 \times 7^2$$

이때 $7^3 < 5^4 < 7^4$ 이므로 각 변에 7을 곱하면

$$7^3 \times 7^2 < 5^4 \times 7^2 < 7^4 \times 7^2$$

$$\therefore 7^5 < 7^b < 7^6$$

밑이 1보다 크므로

$$5 < b < 6$$

4단계 $[a] + [b]$ 의 값 구하기

따라서 $[a]=6$, $[b]=5$ 이므로

$$[a] + [b] = 11$$

08 답 ②

1단계 $2^3 \sqrt[3]{a^2} = 3^5 \sqrt[5]{b} = k$ 로 놓고 k 의 최솟값 구하기

$$2^3 \sqrt[3]{a^2} = 3^5 \sqrt[5]{b} = k \ (k > 0) \text{로 놓으면}$$

$$2^3 \sqrt[3]{a^2} = k \text{에서 } 2 \times a^{\frac{2}{3}} = k$$

양변을 세제곱하면

$$2^3 \times a^2 = k^3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3^5 \sqrt[5]{b} = k \text{에서 } 3 \times b^{\frac{1}{5}} = k$$

양변을 5제곱하면

$$3^5 \times b = k^5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $k = \frac{k^6}{k^5} = \frac{(k^3)^2}{k^5} = \frac{(2^3 \times a^2)^2}{3^5 \times b} = \frac{2^6 \times a^4}{3^5 \times b}$ 이고 a , b 는 자연수이므로 k 는 양의 유리수이다.

$$k = \frac{q}{p} \ (p, q \text{는 서로소인 자연수}) \text{라 하면 } \textcircled{1} \text{에서}$$

$$2^3 \times a^2 = \frac{q^3}{p^3}$$

즉, $\frac{q^3}{p^3}$ 이 자연수이므로 p^3 은 q^3 의 약수이다.

이때 p , q 는 서로소인 자연수이므로 $p=1$

$k=q$ 이므로 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$2^3 \times a^2 = q^3, \quad 3^5 \times b = q^5$$

따라서 q 는 2, 3을 인수로 가지므로 6의 배수이다.

$q=6m$ (m 은 자연수)이라 하면 $2^3 \times a^2 = q^3$ 에서

$$2^3 \times a^2 = 6^3 m^3, \quad a^2 = 3^3 m^3$$

$$\therefore a = (3m)^{\frac{3}{2}}$$

a 는 자연수이므로 $m=3n^2$ (n 은 자연수) 꼴이어야 한다.

따라서 m 의 최솟값은 3이므로 q , 즉 k 의 최솟값은 18이다.

2단계 $\sqrt[5]{(17a^2+6b)^2}$ 의 최솟값 구하기

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a^2 = \frac{k^3}{2^3}, \quad b = \frac{k^5}{3^5} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{(17a^2+6b)^2} &= \sqrt[5]{\left(17 \times \frac{k^3}{2^3} + 6 \times \frac{k^5}{3^5}\right)^2} \\ &= \left\{17 \times \left(\frac{k}{2}\right)^3 + 6 \times \left(\frac{k}{3}\right)^5\right\}^{\frac{2}{5}} \\ &\geq \left\{17 \times \left(\frac{18}{2}\right)^3 + 6 \times \left(\frac{18}{3}\right)^5\right\}^{\frac{2}{5}} \rightarrow k=18 \text{일 때 최솟값을 갖는다.} \\ &= (17 \times 3^6 + 6^6)^{\frac{2}{5}} \\ &= \{17 \times 3^6 + (2 \times 3)^6\}^{\frac{2}{5}} \\ &= \{3^5(17 \times 3 + 2^6 \times 3)\}^{\frac{2}{5}} \\ &= (3^5)^{\frac{2}{5}} \times (17 \times 3 + 2^6 \times 3)^{\frac{2}{5}} \\ &= 9\{3(17+2^6)\}^{\frac{2}{5}} \\ &= 9(3 \times 81)^{\frac{2}{5}} \\ &= 9 \times (3^5)^{\frac{2}{5}} \\ &= 9 \times 9 \\ &= 81 \end{aligned}$$

따라서 $\sqrt[5]{(17a^2+6b)^2}$ 의 최솟값은 81이다.

STEP 1 핵심 문제

| 26~27쪽

01 56	02 ⑤	03 ②	04 18	05 ①	06 ③
07 ⑤	08 75	09 ①	10 16	11 10	12 ②

01 답 56

(밑)>0, (밑)≠1이어야 하므로

$$a-3>0, a-3\neq 1$$

$$\therefore a>3, a\neq 4 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

(진수)>0이어야 하므로

$$ax^2+ax+3>0$$

이때 ①에서 $a>3(a\neq 4)$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 이 부등식이 성립하려면 이차방정식 $ax^2+ax+3=0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$$D=a^2-12a<0$$

$$a(a-12)<0 \quad \therefore 0<a<12 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

①, ②에서 $3<a<4$ 또는 $4<a<12$

따라서 정수 a 의 값은 5, 6, 7, ..., 11이므로 그 합은

$$5+6+7+8+9+10+11=56 \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

개념 NOTE

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 D 라 할 때, 모든 실수 x 에 대하여 주어진 이차부등식이 성립할 조건은 다음과 같다.

- (1) $ax^2+bx+c>0 \Rightarrow a>0, D<0$
- (2) $ax^2+bx+c\geq 0 \Rightarrow a>0, D\leq 0$
- (3) $ax^2+bx+c<0 \Rightarrow a<0, D<0$
- (4) $ax^2+bx+c\leq 0 \Rightarrow a<0, D\leq 0$

02 답 ⑤

$$\log_6 3 = \log_6 \frac{6}{2} = \log_6 6 - \log_6 2 = 1 - \log_6 2$$

$$\frac{1}{\log_6 4} = \log_6 4 = \log_6 2^2 = 2 \log_6 2$$

$$\begin{aligned} \therefore (2 \log_6 3)^2 + \frac{1+3 \log_6 3 + \log_6 2}{\log_6 4} &= 4(1-\log_6 2)^2 + \{1+3(1-\log_6 2) + \log_6 2\} \times 2 \log_6 2 \\ &= 4-8 \log_6 2 + 4(\log_6 2)^2 + (4-2 \log_6 2) \times 2 \log_6 2 \\ &= 4-8 \log_6 2 + 4(\log_6 2)^2 + 8 \log_6 2 - 4(\log_6 2)^2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\frac{1}{\log_6 4} = \log_6 4 = \log_6 2^2 = 2 \log_6 2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} (2 \log_6 3)^2 + \frac{1+3 \log_6 3 + \log_6 2}{\log_6 4} &= (2 \log_6 3)^2 + (1+3 \log_6 3 + \log_6 2) \times 2 \log_6 2 \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ \log_6 3 &= X, \log_6 2 = Y \text{로 놓으면} \\ X+Y &= \log_6 3 + \log_6 2 = \log_6 (3 \times 2) = \log_6 6 = 1 \text{이므로 } \textcircled{1} \text{에서} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2 \log_6 3)^2 + \frac{1+3 \log_6 3 + \log_6 2}{\log_6 4} &= (2X)^2 + (X+Y+3X+Y) \times 2Y \\ &= 4X^2 + 8XY + 4Y^2 \\ &= 4(X+Y)^2 = 4 \times 1^2 = 4 \end{aligned}$$

03 답 ②

$$f(n) = \log_{\sqrt{2}} \frac{1}{n} + \frac{1}{\log_{n+1} 2} - \log_{\frac{1}{4}} (n^2 - 2n + 1)$$

$$= \log_{2^{\frac{1}{2}}} n^{-1} + \log_2 (n+1) - \log_{2^{-2}} (n-1)^2$$

$$= -2 \log_2 n + \log_2 (n+1) + \log_2 (n-1)$$

$$= \log_2 n^{-2} + \log_2 (n+1) + \log_2 (n-1)$$

$$= \log_2 \frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$\therefore f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(16)$$

$$= \log_2 \frac{1 \times 3}{2 \times 2} + \log_2 \frac{2 \times 4}{3 \times 3} + \log_2 \frac{3 \times 5}{4 \times 4} + \dots + \log_2 \frac{15 \times 17}{16 \times 16}$$

$$= \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{15}{16} \times \frac{17}{16} \right)$$

$$= \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{17}{16} \right) = \log_2 \frac{17}{32}$$

$$= \log_2 17 - \log_2 32 = \log_2 17 - \log_2 2^5$$

$$= -5 + \log_2 17$$

04 답 18

$$\log_a b = 81 \text{에서 } \frac{\log_c b}{\log_c a} = 81 \text{이므로}$$

$$\log_c a = \frac{1}{81} \log_c b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_c \sqrt{a} = \log_{\sqrt{b}} c \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} \log_c a = \frac{1}{\log_c \sqrt{b}} = \frac{1}{\frac{1}{2} \log_c b} \text{이므로}$$

$$\log_c a = \frac{4}{\log_c b} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{1}{81} \log_c b = \frac{4}{\log_c b} \quad \therefore (\log_c b)^2 = 4 \times 81 = 18^2$$

이때 $b>1, c>1$ 이므로 $\log_c b>0$

$$\therefore \log_c b = 18$$

05 답 ①

$$a = \log_9 (3-2\sqrt{2}) = \log_{3^2} (\sqrt{2}-1)^2 = \log_3 (\sqrt{2}-1) \text{이므로}$$

$$3^a = 3^{\log_3 (\sqrt{2}-1)} = \sqrt{2}-1$$

$$3^{-a} = \frac{1}{3^a} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1$$

$$\therefore 3^a - 3^{-a} = (\sqrt{2}-1) - (\sqrt{2}+1) = -2$$

$$\text{또 } 3^a + 3^{-a} = (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{2}+1) = 2\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$3^a + 3^{-a} = 2\sqrt{2} \text{의 양변을 세제곱하면}$$

$$(3^a + 3^{-a})^3 = (2\sqrt{2})^3$$

$$3^{3a} + 3^{-3a} + 3(3^a + 3^{-a}) = 16\sqrt{2}$$

$$3^{3a} + 3^{-3a} + 3 \times 2\sqrt{2} = 16\sqrt{2} \quad \therefore 3^{3a} + 3^{-3a} = 10\sqrt{2}$$

$$\therefore \frac{3^{3a} + 3^{-3a}}{3^a - 3^{-a}} = \frac{10\sqrt{2}}{-2} = -5\sqrt{2}$$

06 답 ③

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2a - \log_2 9}{3}, \frac{-\log_2 9 + \log_2 7 + a}{3} \right) \text{이고, 이 점이 점 } (b, \log_8 7) \text{과 일}$$

치하므로

$$\frac{2a - \log_2 9}{3} = b \text{에서 } 3b = 2a - \log_2 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \frac{-\log_2 9 + \log_2 7 + a}{3} &= \log_8 7 = \log_{2^3} 7 = \frac{1}{3} \log_2 7 \text{에서} \\ -\log_2 9 + \log_2 7 + a &= \log_2 7 \text{이므로} \\ a &= \log_2 9 \quad \dots\dots \textcircled{A} \\ \textcircled{A} \text{을 } \textcircled{A} \text{에 대입하면} \\ 3b &= 2 \log_2 9 - \log_2 9 = \log_2 9 \\ \text{따라서 } a + 3b &= \log_2 9 + \log_2 9 = \log_2 81 \text{이므로} \\ 2^{a+3b} &= 2^{\log_2 81} = 81^{\log_2 2} = 81 \end{aligned}$$

07 답 ⑤

$$\begin{aligned} 3^a &= 5 \text{에서 } a = \log_3 5 \\ 4^b &= 3 \text{에서 } b = \log_4 3 = \log_{2^2} 3 = \frac{1}{2} \log_2 3 \\ \text{즉, } 2b &= \log_2 3 \text{이므로 } \log_3 2 = \frac{1}{2b} \\ \therefore \log_{24} 450 &= \frac{\log_3 450}{\log_3 24} \\ &= \frac{\log_3 (2 \times 3^2 \times 5^2)}{\log_3 (2^3 \times 3)} \\ &= \frac{\log_3 2 + \log_3 3^2 + \log_3 5^2}{\log_3 2^3 + \log_3 3} \\ &= \frac{2 + \log_3 2 + 2 \log_3 5}{1 + 3 \log_3 2} \\ &= \frac{2 + \frac{1}{2b} + 2a}{1 + \frac{3}{2b}} \\ &= \frac{4ab + 4b + 1}{2b + 3} \end{aligned}$$

08 답 75

$$\begin{aligned} \textcircled{A} \text{에서 } 3^a &= 5^b = k^c = m \ (m > 1) \text{으로 놓으면} \\ 3^a &= m \text{에서 } a = \log_3 m \quad \dots\dots \textcircled{A} \\ 5^b &= m \text{에서 } b = \log_5 m \quad \dots\dots \textcircled{B} \\ k^c &= m \text{에서 } c = \log_k m \quad \dots\dots \textcircled{C} \\ \textcircled{A} \text{의 } \log c &= \log (2ab) - \log (2a + b) \text{에서} \\ \log c &= \log \frac{2ab}{2a+b} \\ \text{즉, } c &= \frac{2ab}{2a+b} \text{이므로} \\ \frac{1}{c} &= \frac{2a+b}{2ab} \quad \therefore \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{2a} \\ \textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C} \text{을 위의 식에 대입하면} \\ \frac{1}{\log_k m} &= \frac{1}{\log_5 m} + \frac{1}{2 \log_3 m} \\ \log_m k &= \log_m 5 + \frac{1}{2} \log_m 3 \\ \log_m k &= \log_m 5 + \log_m \sqrt{3} \\ \log_m k &= \log_m 5\sqrt{3} \\ \text{따라서 } k &= 5\sqrt{3} \text{이므로} \\ k^2 &= (5\sqrt{3})^2 = 75 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} \textcircled{A} \text{에서 } 3^a &= 5^b = k^c = m \ (m > 1) \text{으로 놓으면} \\ 3^a &= m \text{에서 } 3 = m^{\frac{1}{a}} \quad \dots\dots \textcircled{A} \\ 5^b &= m \text{에서 } 5 = m^{\frac{1}{b}} \quad \dots\dots \textcircled{B} \\ k^c &= m \text{에서 } k = m^{\frac{1}{c}} \quad \dots\dots \textcircled{C} \end{aligned}$$

$$\textcircled{A} \text{에서 } \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{2a} \text{이므로}$$

$$m^{\frac{1}{c}} = m^{\frac{1}{b} + \frac{1}{2a}} = m^{\frac{1}{b}} \times (m^{\frac{1}{a}})^{\frac{1}{2}}$$

①, ②, ③을 위의 식에 대입하면

$$\begin{aligned} k &= 5 \times 3^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{3} \\ \therefore k^2 &= (5\sqrt{3})^2 = 75 \end{aligned}$$

09 답 ①

$$\begin{aligned} \log_n 4 \times \log_2 9 &= \frac{\log_2 4}{\log_2 n} \times \log_2 9 \\ &= \frac{\log_2 2^2}{\log_2 n} \times \log_2 3^2 \\ &= \frac{2}{\log_2 n} \times 2 \log_2 3 \\ &= 4 \times \frac{\log_2 3}{\log_2 n} \\ &= 4 \log_n 3 \end{aligned}$$

$4 \log_n 3 = k$ (k 는 자연수)로 놓으면

$$\log_n 3 = \frac{k}{4}$$

$$\text{즉, } n^{\frac{k}{4}} = 3 \text{이므로 } n = 3^{\frac{4}{k}}$$

이때 n 이 2 이상의 자연수이므로 $\frac{4}{k}$ 가 자연수이어야 한다.

즉, k 는 4의 양의 약수이어야 하므로 1, 2, 4이다.

$$k=1 \text{일 때, } n=3^4=81$$

$$k=2 \text{일 때, } n=3^2=9$$

$$k=4 \text{일 때, } n=3^1=3$$

따라서 모든 n 의 값의 합은

$$81 + 9 + 3 = 93$$

10 답 16

$$\frac{\log_3 25}{\log_3 4} = \frac{\log_3 5^2}{\log_3 2^2} = \frac{2 \log_3 5}{2 \log_3 2} = \frac{\log_3 5}{\log_3 2} = \log_2 5$$

$\log_2 4 = 2$, $\log_2 8 = 3$ 이므로 $\log_2 5$ 의 정수 부분은 2이고, 소수 부분은 $\log_2 5 - 2$ 이다.

따라서 $a = 2$, $b = \log_2 5 - 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{a-b}{a+b} &= \frac{2 - (\log_2 5 - 2)}{2 + (\log_2 5 - 2)} = \frac{4 - \log_2 5}{\log_2 5} \\ &= -1 + \frac{4}{\log_2 5} = -1 + 4 \log_5 2 \\ &= -1 + \log_5 2^4 \\ &= -1 + \log_5 16 \end{aligned}$$

$$\therefore n = 16$$

11 답 10

①에서 $\log a$ 와 $\log a^{3n}$ 의 소수 부분이 같으므로

$$\log a^{3n} - \log a = 3n \log a - \log a = (3n - 1) \log a \text{가 정수이다.}$$

②의 $(2n+1) \log a = 10n^2 + n + 4$ 에서

$$\begin{aligned} \log a &= \frac{10n^2 + n + 4}{2n + 1} \\ &= \frac{(2n+1)(5n-2) + 6}{2n+1} \\ &= 5n - 2 + \frac{6}{2n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore (3n-1)\log a &= (5n-2)(3n-1) + \frac{6(3n-1)}{2n+1} \\
&= (5n-2)(3n-1) + \frac{18n-6}{2n+1} \\
&= (5n-2)(3n-1) + \frac{9(2n+1)-15}{2n+1} \\
&= (5n-2)(3n-1) + 9 - \frac{15}{2n+1}
\end{aligned}$$

이때 n 은 자연수이므로 $(3n-1)\log a$ 가 정수이려면 $\frac{15}{2n+1}$ 가 정수이어야 한다.

즉, $2n+1$ 은 15의 양의 약수이어야 하고, $n \geq 1$ 에서 $2n+1 \geq 3$ 이므로 $2n+1=3$ 또는 $2n+1=5$ 또는 $2n+1=15$

$\therefore n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=7$

따라서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$1+2+7=10$$

12 답 ②

두 약물 A, B의 흡수율을 각각 K_A, K_B , 배설률을 각각 E_A, E_B 라 하자.

두 약물 A, B의 흡수율은 같고, 배설률은 각각 흡수율의 $\frac{1}{2}$ 배, $\frac{1}{4}$ 배이므로

$$K_A = K_B, E_A = \frac{1}{2}K_A, E_B = \frac{1}{4}K_B = \frac{1}{4}K_A$$

약물 A를 투여한 지 3시간 후에 혈중농도가 최고치에 도달하므로

$$3 = c \times \frac{\log K_A - \log E_A}{K_A - E_A} = c \times \frac{\log K_A - \log \frac{1}{2}K_A}{K_A - \frac{1}{2}K_A}$$

$$= c \times \frac{\log 2}{\frac{1}{2}K_A} = \frac{c}{K_A} \times 2 \log 2$$

$$\therefore \frac{c}{K_A} = \frac{3}{2 \log 2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

약물 B를 투여한 지 a 시간 후에 혈중농도가 최고치에 도달하므로

$$a = c \times \frac{\log K_B - \log E_B}{K_B - E_B} = c \times \frac{\log K_A - \log \frac{1}{4}K_A}{K_A - \frac{1}{4}K_A}$$

$$= c \times \frac{\log 4}{\frac{3}{4}K_A} = \frac{c}{K_A} \times \frac{4 \times 2 \log 2}{3}$$

$$= \frac{3}{2 \log 2} \times \frac{8 \log 2}{3} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 4$$

01 답 0

$\log_{16} a = \log_6 b = \log_{81} (a+b^2) = k$ (k 는 실수)로 놓으면

$$\log_{16} a = k \text{에서 } a = 16^k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_6 b = k \text{에서 } b = 6^k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\log_{81} (a+b^2) = k \text{에서 } a+b^2 = 81^k$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 위의 식에 대입하면

$$16^k + (6^k)^2 = 81^k, \quad 16^k + (6^2)^k = 81^k$$

$$\therefore 16^k + 36^k = 81^k \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \log_{12} \left(\frac{b^2}{a} - \frac{a}{b^2} \right) &= \log_{12} \left\{ \frac{(6^k)^2}{16^k} - \frac{16^k}{(6^k)^2} \right\} \\
&= \log_{12} \left\{ \left(\frac{36}{16} \right)^k - \left(\frac{16}{36} \right)^k \right\} \\
&= \log_{12} \left\{ \left(\frac{9}{4} \right)^k - \left(\frac{4}{9} \right)^k \right\} \\
&= \log_{12} \left(\frac{9^k}{4^k} - \frac{4^k}{9^k} \right) \\
&= \log_{12} \frac{9^{2k} - 4^{2k}}{4^k \times 9^k} \\
&= \log_{12} \frac{81^k - 16^k}{36^k} \\
&= \log_{12} \frac{36^k}{36^k} \quad (\because \textcircled{3}) \\
&= \log_{12} 1 = 0
\end{aligned}$$

02 답 ①

(i) m, n 이 모두 홀수일 때,

mn 도 홀수이므로

$$\begin{aligned}
f(mn) &= \log_3 mn \\
&= \log_3 m + \log_3 n \\
&= f(m) + f(n)
\end{aligned}$$

즉, 모든 m, n 에 대하여 $f(mn) = f(m) + f(n)$ 을 만족시킨다.

이때 20 이하의 자연수 중 홀수의 개수는 10이므로 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$10 \times 10 = 100$$

(ii) m 은 홀수, n 은 짝수일 때,

mn 은 짝수이므로 $f(mn) = f(m) + f(n)$ 에서

$$\log_2 mn = \log_3 m + \log_2 n$$

$$\log_2 m + \log_2 n = \log_3 m + \log_2 n$$

$$\therefore \log_2 m = \log_3 m$$

이를 만족시키는 자연수 m 의 값은 1뿐이고, 20 이하의 자연수 중 짝수의 개수는 10이므로 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$1 \times 10 = 10$$

(iii) m 은 짝수, n 은 홀수일 때,

(ii)와 같은 방법으로 하면

$$\log_2 n = \log_3 n$$

이를 만족시키는 자연수 n 의 값은 1뿐이고, 20 이하의 자연수 중 짝수의 개수는 10이므로 순서쌍 (m, n) 의 개수는

$$10 \times 1 = 10$$

(iv) m, n 이 모두 짝수일 때,

mn 도 짝수이므로

$$\begin{aligned}
f(mn) &= \log_2 mn \\
&= \log_2 m + \log_2 n \\
&= f(m) + f(n)
\end{aligned}$$

STEP 2

고난도 문제

| 28~31쪽

01 0	02 ①	03 3	04 ⑤	05 22	06 36
07 ①	08 54	09 ②	10 45	11 6	12 $\frac{1}{2}$
13 1	14 ④	15 -5	16 ②	17 426	18 30
19 7120	20 ②	21 7	22 71,6 %	23 1,66	

즉, 모든 m, n 에 대하여 $f(mn)=f(m)+f(n)$ 을 만족시킨다.
 이때 20 이하의 자연수 중 짝수의 개수는 10이므로 순서쌍 (m, n) 의 개수는
 $10 \times 10 = 100$
 (i)~(iv)에서 순서쌍 (m, n) 의 개수는
 $100 + 10 + 10 + 100 = 220$

03 답 3

$$\begin{aligned} & \log_3 \left(1 + \frac{2a+2}{a^2+a+1} \right) + \log_3 \left\{ 1 + \frac{2(a+1)+2}{(a+1)^2+(a+1)+1} \right\} \\ & \quad + \log_3 \left\{ 1 + \frac{2(a+2)+2}{(a+2)^2+(a+2)+1} \right\} \\ & \quad + \cdots + \log_3 \left\{ 1 + \frac{2(b-1)+2}{(b-1)^2+(b-1)+1} \right\} \\ &= \log_3 \left(1 + \frac{2a+2}{a^2+a+1} \right) + \log_3 \left(1 + \frac{2a+4}{a^2+3a+3} \right) \\ & \quad + \log_3 \left(1 + \frac{2a+6}{a^2+5a+7} \right) + \cdots + \log_3 \left\{ 1 + \frac{2(b-1)+2}{(b-1)^2+(b-1)+1} \right\} \\ &= \log_3 \frac{a^2+3a+3}{a^2+a+1} + \log_3 \frac{a^2+5a+7}{a^2+3a+3} + \log_3 \frac{a^2+7a+13}{a^2+5a+7} \\ & \quad + \cdots + \log_3 \frac{(b-1)^2+3(b-1)+3}{(b-1)^2+(b-1)+1} \\ &= \log_3 \left\{ \frac{a^2+3a+3}{a^2+a+1} \times \frac{a^2+5a+7}{a^2+3a+3} \times \frac{a^2+7a+13}{a^2+5a+7} \right. \\ & \quad \left. \times \cdots \times \frac{(b-1)^2+3(b-1)+3}{(b-1)^2+(b-1)+1} \right\} \\ &= \log_3 \frac{(b-1)^2+3(b-1)+3}{a^2+a+1} \\ &= \log_3 \frac{b^2+b+1}{a^2+a+1} \\ &\text{즉, } \log_3 \frac{b^2+b+1}{a^2+a+1} = \log_3 \frac{(a^3+1)(a-1)}{b-1} \text{이므로} \\ & \frac{b^2+b+1}{a^2+a+1} = \frac{(a^3+1)(a-1)}{b-1} \\ & (b-1)(b^2+b+1) = (a^3+1)(a-1)(a^2+a+1) \\ & b^3-1 = (a^3+1)(a^3-1) \\ & b^3-1 = a^6-1 \\ & \therefore b^3 = a^6 \\ & \text{이때 } a, b \text{는 자연수이므로} \\ & b = a^2 \\ & \text{그런데 } 1 < a < b \leq 20 \text{이므로 순서쌍 } (a, b) \text{는 } (2, 4), (3, 9), (4, 16) \\ & \text{의 3개이다.} \end{aligned}$$

04 답 ⑤

$$\begin{aligned} & -4 \log_a b = 54 \log_b c = \log_c a = k \quad (k \text{는 실수}) \text{로 놓으면} \\ & k^3 = -4 \log_a b \times 54 \log_b c \times \log_c a \\ & = -\frac{4 \log b}{\log a} \times \frac{54 \log c}{\log b} \times \frac{\log a}{\log c} \\ & = -216 \\ & \therefore k = -6 \\ & -4 \log_a b = -6 \text{에서 } \log_a b = \frac{3}{2} \quad \therefore b = a^{\frac{3}{2}} \quad \cdots \cdots ㉠ \\ & \log_c a = -6 \text{에서 } a = c^{-6} \quad \therefore c = a^{-\frac{1}{6}} \quad \cdots \cdots ㉡ \\ & ㉠, ㉡에서 } b \times c = a^{\frac{3}{2}} \times a^{-\frac{1}{6}} = a^{\frac{3}{2} - \frac{1}{6}} = a^{\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

이때 a 가 1이 아닌 자연수이므로 $b \times c$ 의 값, 즉 $a^{\frac{4}{3}}$ 의 값이 300 이하의 자연수이려면 $a = n^3$ (n 은 1보다 큰 자연수) 꼴이어야 하고,
 $a^{\frac{4}{3}} = (n^3)^{\frac{4}{3}} = n^4$ 에서 $n^4 \leq 300$
 $4^4 = 256, 5^4 = 625$ 이므로 n 의 값은 2, 3, 4이다.
 따라서 모든 자연수 a 의 값의 합은
 $2^3 + 3^3 + 4^3 = 8 + 27 + 64 = 99$

05 답 22

$$\begin{aligned} & \frac{\log_c b}{\log_a b} = \frac{1}{2} \text{에서} \\ & \frac{\frac{1}{\log_b c}}{\frac{1}{\log_b a}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\log_b a}{\log_b c} = \frac{1}{2} \\ & \log_c a = \frac{1}{2}, \quad a = c^{\frac{1}{2}} \\ & \therefore c = a^2 \quad \cdots \cdots \text{배점 30\%} \\ & \frac{\log_b c}{\log_a c} = \frac{1}{4} \text{에서} \\ & \frac{\frac{1}{\log_c b}}{\frac{1}{\log_c a}} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{1}{4} \\ & \log_b a = \frac{1}{4}, \quad a = b^{\frac{1}{4}} \\ & \therefore b = a^4 \quad \cdots \cdots \text{배점 30\%} \\ & \text{이때 } a, b, c \text{는 1보다 크고 20보다 작은 자연수이므로} \\ & 1 < a < c = a^2 < b = a^4 < 20 \\ & \therefore a = 2, \quad c = 2^2 = 4, \quad b = 2^4 = 16 \\ & \therefore a + b + c = 22 \quad \cdots \cdots \text{배점 40\%} \end{aligned}$$

06 답 36

$$\begin{aligned} & 10 < a < 100 \text{에서 } 1 < \log a < 2 \\ & \log_a 10 = \frac{1}{\log a} \text{이고 } \frac{1}{2} < \frac{1}{\log a} < 1 \text{이므로 } \frac{1}{2} < \log_a 10 < 1 \\ & \log 10a = \log 10 + \log a = 1 + \log a \text{이고 } 2 < 1 + \log a < 3 \text{이므로} \\ & 2 < \log 10a < 3 \quad \cdots \cdots ㉠ \\ & \log \frac{10}{a} = \log 10 - \log a = 1 - \log a \text{이고 } -2 < -\log a < -1 \text{에서} \\ & -1 < 1 - \log a < 0 \text{이므로} \\ & -1 < \log \frac{10}{a} < 0 \quad \cdots \cdots ㉡ \\ & \log_a 10a = \log_a 10 + \log_a a = \log_a 10 + 1 \text{이고 } \frac{3}{2} < \log_a 10 + 1 < 2 \text{이므로} \\ & \frac{3}{2} < \log_a 10a < 2 \quad \cdots \cdots ㉢ \\ & \log_a \frac{a}{10} = \log_a a - \log_a 10 = 1 - \log_a 10 \text{이고 } -1 < -\log_a 10 < -\frac{1}{2} \text{에} \\ & \text{서 } 0 < 1 - \log_a 10 < \frac{1}{2} \text{이므로 } 0 < \log_a \frac{a}{10} < \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots ㉣ \\ & ㉠ \sim ㉣에서 } \log \frac{10}{a} < \log_a \frac{a}{10} < \log_a 10a < \log 10a \text{이므로} \\ & p = \log \frac{10}{a}, \quad q = \log_a \frac{a}{10}, \quad r = \log_a 10a, \quad s = \log 10a \\ & \therefore \overline{\text{PS}} = s - p = \log 10a - \log \frac{10}{a} \\ & = \log \left(10a \times \frac{a}{10} \right) = \log a^2 \\ & = 2 \log a \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2\log a = \frac{10}{3} \text{ 이므로 } \log a = \frac{5}{3}$$

따라서

$$\overline{QR} = r - q = \log_a 10a - \log_a \frac{a}{10}$$

$$= \log_a \left(10a \times \frac{10}{a} \right) = \log_a 10^2 = 2\log_a 10$$

$$= \frac{2}{\log a} = 2 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\text{이므로 } 30 \times \overline{QR} = 30 \times \frac{6}{5} = 36$$

idea 07 답 ①

$\log_4 a_1 + \log_4 a_2 + \log_4 a_3 + \cdots + \log_4 a_n = 14$ 에서

$$\log_4 (a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n) = 14$$

$$\therefore a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n = 4^{14} = 2^{28}$$

이때 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 은 자연수 N 의 모든 양의 약수이고 곱이 2^{28} 이므로 N 은 2^k (k 는 자연수) 꼴이다.

$N = 2^k$ 의 양의 약수는 $1, 2, 2^2, \dots, 2^k$ 이므로

$$1 \times 2 \times 2^2 \times \cdots \times 2^k = 2^{28}$$

$$2^{1+2+3+\cdots+k} = 2^{28}$$

$$\text{즉, } 1+2+3+\cdots+k = 28 \text{ 이므로}$$

$$k=7 \quad \therefore N=2^7$$

08 답 54

$$\frac{3}{2} \log_{a+b} c = 1 \text{ 에서}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{\log_{a+b} c} \quad \therefore \log_c (a+b) = \frac{3}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{2} \log_{a-b} c = 1 \text{ 에서}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\log_{a-b} c} \quad \therefore \log_c (a-b) = \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$\log_c (a+b) + \log_c (a-b) = 2$$

$$\log_c (a+b)(a-b) = 2$$

$$\log_c (a^2 - b^2) = 2$$

$$\text{즉, } a^2 - b^2 = c^2 \text{ 이므로}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 a, b, c 를 세 변의 길이로 하는 삼각형은 길이가 a 인 변을 빗변으로 하는 직각삼각형이므로 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} \times 108 = 54$$

09 답 ②

두 점 $(a, \log_2 a), (b, \log_2 b)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{\log_2 b - \log_2 a}{b - a} (x - a) + \log_2 a$$

이므로 이 직선의 y 절편은

$$-\frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a} + \log_2 a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

두 점 $(a, \log_4 a), (b, \log_4 b)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{\log_4 b - \log_4 a}{b - a} (x - a) + \log_4 a$$

이므로 이 직선의 y 절편은

$$-\frac{a(\log_4 b - \log_4 a)}{b - a} + \log_4 a$$

$$= -\frac{1}{2} \times \frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a} + \frac{1}{2} \log_2 a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 이 같으므로

$$-\frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a} + \log_2 a = -\frac{1}{2} \times \frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a} + \frac{1}{2} \log_2 a$$

$$\frac{1}{2} \log_2 a = \frac{1}{2} \times \frac{a(\log_2 b - \log_2 a)}{b - a}, \quad (b - a) \log_2 a = a \log_2 \frac{b}{a}$$

$$\log_2 a^{b-a} = \log_2 \left(\frac{b}{a} \right)^a \text{ 에서 } a^{b-a} = \frac{b^a}{a^a} \quad \therefore a^b = b^a \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

이때 $f(x) = a^{bx} + b^{ax}$ 이고 $f(1) = 40$ 이므로 $a^b + b^a = 40$

$\textcircled{3}$ 을 위의 식에 대입하여 풀면 $a^b = 20, b^a = 20$

$$\therefore f(2) = a^{2b} + b^{2a} = (a^b)^2 + (b^a)^2 = 20^2 + 20^2 = 800$$

10 답 45

$$\log_2 a - [\log_2 a] = \log_2 b - [\log_2 b] \text{ 에서}$$

$$\log_2 b - \log_2 a = [\log_2 b] - [\log_2 a]$$

$$\log_2 \frac{b}{a} = [\log_2 b] - [\log_2 a]$$

이때 $[\log_2 b] - [\log_2 a]$ 는 정수이므로 $\log_2 \frac{b}{a}$ 도 정수이다.

$$\log_2 \frac{b}{a} = m \quad (m \text{은 정수}) \text{으로 놓으면}$$

$$\frac{b}{a} = 2^m \quad \therefore b = 2^m \times a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \log_2 a - [\log_2 a] = \log_2 a^3 - [\log_2 a^3] \text{ 에서}$$

$$\log_2 a^3 - \log_2 a = [\log_2 a^3] - [\log_2 a]$$

$$\log_2 a^2 = [\log_2 a^3] - [\log_2 a]$$

이때 $[\log_2 a^3] - [\log_2 a]$ 는 정수이므로 $\log_2 a^2$ 도 정수이다.

$$\log_2 a^2 = n \quad (n \text{은 정수}) \text{으로 놓으면}$$

$$a^2 = 2^n \quad \therefore a = 2^{\frac{n}{2}} \quad (\because a > 0)$$

a 는 1보다 큰 자연수이므로 $a = 2^t$ (t 는 자연수)이라 하고 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$b = 2^m \times 2^t = 2^{m+t}$$

즉, 자연수 a, b 는 모두 2의 거듭제곱 꼴이다.

$$1 < a \leq b < 1000 \text{ 이므로}$$

$a = 2$ 일 때, b 의 값은 $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^9$ 이다.

$a = 2^2$ 일 때, b 의 값은 $2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^9$ 이다.

$a = 2^3$ 일 때, b 의 값은 $2^3, 2^4, 2^5, \dots, 2^9$ 이다.

$\vdots$

$a = 2^9$ 일 때, b 의 값은 2^9 이다.

따라서 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$9 + 8 + 7 + \cdots + 1 = 45$$

11 답 6

$$\log a^2 b = 15 \text{ 에서 } 2\log a + \log b = 15 \text{ 이므로}$$

$$\log b = 15 - 2\log a$$

$$\log^n \sqrt{a^3 b} = \frac{1}{n} \log a^3 b = \frac{1}{n} (3\log a + \log b)$$

$$= \frac{1}{n} (3\log a + 15 - 2\log a) = \frac{1}{n} (\log a + 15)$$

이때 $0 \leq \log a \leq 5$ 에서 $15 \leq \log a + 15 \leq 20$ 이고 $n > 1$ 이므로

$$\frac{15}{n} \leq \frac{1}{n} (\log a + 15) \leq \frac{20}{n}$$

$$\therefore \frac{15}{n} \leq \log^n \sqrt{a^3 b} \leq \frac{20}{n}$$

(i) $n=2$ 일 때,

$$\frac{15}{2} \leq \log \sqrt{a^3 b} \leq 10 \text{이므로 } \log \sqrt{a^3 b} \text{의 정수 부분은 8 또는 9 또는 10}$$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=3$ 일 때,

$$5 \leq \log^3 \sqrt{a^3 b} \leq \frac{20}{3} \text{이므로 } \log^3 \sqrt{a^3 b} \text{의 정수 부분은 5 또는 6}$$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $n=4$ 일 때,

$$\frac{15}{4} \leq \log^4 \sqrt{a^3 b} \leq 5 \text{이므로 } \log^4 \sqrt{a^3 b} \text{의 정수 부분은 4 또는 5}$$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $n=5$ 일 때,

$$3 \leq \log^5 \sqrt{a^3 b} \leq 4 \text{이므로 } \log^5 \sqrt{a^3 b} \text{의 정수 부분은 3 또는 4}$$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(v) $n=6$ 일 때,

$$\frac{5}{2} \leq \log^6 \sqrt{a^3 b} \leq \frac{10}{3} \text{이므로 } \log^6 \sqrt{a^3 b} \text{의 정수 부분은 항상 3이므로 조}$$

건을 만족시킨다.

(i)~(v)에서 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

12 $\frac{1}{2}$

$\log_{11} x = n + a$ 이므로 $(\log_{11} x)^2 + a^2 = 10$ 에서

$$(n+a)^2 + a^2 = 10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$n^2 + 2na + 2a^2 = 10, \quad n^2 + 2a(n+a) = 10$$

$$n^2 + 2a \log_{11} x = 10$$

이때 $2a \geq 0, \log_{11} x > 0$ 이므로

$$n^2 \leq 10$$

또 $\log_{11} x$ 가 양수이므로 n 은 음이 아닌 정수이다.

따라서 n 의 값은 0, 1, 2, 3이다.

(i) $n=0$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } a^2 + a^2 = 10, \quad a^2 = 5 \quad \therefore a = \pm\sqrt{5}$$

그런데 $0 \leq a < 1$ 이므로 a 의 값이 존재하지 않는다.

(ii) $n=1$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } (1+a)^2 + a^2 = 10$$

$$2a^2 + 2a - 9 = 0 \quad \therefore a = \frac{-1 \pm \sqrt{19}}{2}$$

그런데 $0 \leq a < 1$ 이므로 a 의 값이 존재하지 않는다.

(iii) $n=2$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } (2+a)^2 + a^2 = 10$$

$$2a^2 + 4a - 6 = 0, \quad a^2 + 2a - 3 = 0$$

$$(a+3)(a-1) = 0 \quad \therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 1$$

그런데 $0 \leq a < 1$ 이므로 a 의 값이 존재하지 않는다.

(iv) $n=3$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } (3+a)^2 + a^2 = 10$$

$$2a^2 + 6a - 1 = 0 \quad \therefore a = \frac{-3 \pm \sqrt{11}}{2}$$

$$\text{그런데 } 0 \leq a < 1 \text{이므로 } a = \frac{-3 + \sqrt{11}}{2}$$

(i)~(iv)에서 $n=3, a = \frac{-3 + \sqrt{11}}{2}$ 이므로

$$\log_{11} (n+2a) = \log_{11} (3-3+\sqrt{11}) = \log_{11} \sqrt{11}$$

$$= \log_{11} 11^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

13 1

$a^3 b^2 = 243$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\log_3 a^3 b^2 = \log_3 243$$

$$\log_3 a^3 + \log_3 b^2 = \log_3 3^5$$

$$3 \log_3 a + 2 \log_3 b = 5$$

$$3 \log_3 a = a, \quad 2 \log_3 b = \beta \text{로 놓으면}$$

$$a + \beta = 5$$

$$\log_3 a \times \log_3 b = -14 \text{에서}$$

$$a\beta = 3 \log_3 a \times 2 \log_3 b$$

$$= 6 \times \log_3 a \times \log_3 b$$

$$= 6 \times (-14)$$

$$= -84$$

따라서 a, β 는 이차방정식 $x^2 - 5x - 84 = 0$ 의 두 근이다.

$$x^2 - 5x - 84 = 0 \text{에서 } (x+7)(x-12) = 0$$

$$\therefore x = -7 \text{ 또는 } x = 12$$

이때 $\log_3 a > \log_3 b$ 이므로

$$a = 12, \beta = -7$$

$$3 \log_3 a = 12 \text{에서 } \log_3 a = 4$$

$$2 \log_3 b = -7 \text{에서 } \log_3 b = -\frac{7}{2}$$

$$\therefore 2 \log_3 ab = 2(\log_3 a + \log_3 b)$$

$$= 2 \times \left(4 - \frac{7}{2}\right)$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

개념 NOTE

두 수 a, β 를 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2 - (a+\beta)x + a\beta = 0$$

다른 풀이

$\log_3 a = A, \log_3 b = B$ 로 놓으면 $\log_3 a > \log_3 b$ 이므로 $A > B$

$$\log_3 a \times \log_3 b = -14 \text{에서 } AB = -14 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a^3 b^2 = 243 \text{에서 } \log_3 a^3 b^2 = \log_3 243, \log_3 a^3 + \log_3 b^2 = \log_3 3^5$$

$$3 \log_3 a + 2 \log_3 b = 5 \quad \therefore 3A + 2B = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } B = -\frac{14}{A} \text{이므로 } \textcircled{2} \text{에 대입하면}$$

$$3A - \frac{28}{A} = 5, \quad 3A^2 - 5A - 28 = 0$$

$$(3A+7)(A-4) = 0$$

$$\therefore A = -\frac{7}{3} \text{ 또는 } A = 4$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 각각 대입하여 풀면

$$A = -\frac{7}{3}, B = 6 \text{ 또는 } A = 4, B = -\frac{7}{2}$$

$$\text{그런데 } A > B \text{이므로 } A = 4, B = -\frac{7}{2}$$

$$\therefore 2 \log_3 ab = 2(\log_3 a + \log_3 b)$$

$$= 2(A+B)$$

$$= 2 \times \left(4 - \frac{7}{2}\right) = 1$$

14 4

$a = \log_2 n$ 이므로

$$\beta = \log_n \frac{1}{2} = \log_n 2^{-1} = -\log_n 2 = -\frac{1}{\log_2 n} = -\frac{1}{a}$$

$$\therefore \beta + \frac{1}{\beta} = -\frac{1}{\alpha} - \alpha = -\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$$

즉, 이차방정식 $x^2 - kx - 4 = 0$ 의 두 근이 $\alpha + \frac{1}{\alpha}$, $-\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)$ 이므로 이

차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합은

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} - \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = k$$

$$\therefore k = 0$$

두 근의 곱은

$$-\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 = -4, \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 = 4$$

$$\therefore \alpha + \frac{1}{\alpha} = -2 \text{ 또는 } \alpha + \frac{1}{\alpha} = 2$$

(i) $\alpha + \frac{1}{\alpha} = -2$ 일 때,

$$\alpha^2 + 2\alpha + 1 = 0$$

$$(\alpha + 1)^2 = 0$$

$$\therefore \alpha = -1$$

즉, $\log_2 n = -1$ 이므로

$$n = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

그런데 n 은 1보다 큰 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\alpha + \frac{1}{\alpha} = 2$ 일 때,

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0$$

$$(\alpha - 1)^2 = 0$$

$$\therefore \alpha = 1$$

즉, $\log_2 n = 1$ 이므로

$$n = 2$$

(i), (ii)에서 $n = 2$

$$\therefore k + n = 2$$

15 답 -5

$\log_a b = \alpha$, $\log_b c = \beta$, $\log_c a = \gamma$ 로 놓으면

$$a\beta\gamma = \log_a b \times \log_b c \times \log_c a$$

$$= \frac{\log b}{\log a} \times \frac{\log c}{\log b} \times \frac{\log a}{\log c}$$

$$= 1$$

$\log_a b + \log_b c + \log_c a = 3$ 에서

$$\alpha + \beta + \gamma = 3$$

$\log_a b + \log_b c + \log_c a = -5$ 에서

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b c} + \frac{1}{\log_c a} = -5$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = -5$$

$$\frac{\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma} = -5$$

$$\therefore \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -5$$

따라서 α , β , γ 는 삼차방정식 $x^3 - 3x^2 - 5x - 1 = 0$ 의 세 근이다.

$x^3 - 3x^2 - 5x - 1 = 0$ 에서

$$(x+1)(x^2 - 4x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2 \pm \sqrt{5}$$

$\log_a b < \log_b c < \log_c a$ 에서 $\alpha < \beta < \gamma$ 이므로

$$\alpha = -1, \beta = 2 - \sqrt{5}, \gamma = 2 + \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned} \log_{a^b} a + \log_{b^c} b + \log_{c^a} c &= \frac{1}{\log_a a^b} + \frac{1}{\log_b b^c} + \frac{1}{\log_c c^a} \\ &= \frac{1}{2 + \log_a b} + \frac{1}{1 + \log_b c} + \frac{1}{1 + \log_c a} \\ &= \frac{1}{2 + \alpha} + \frac{1}{1 + \beta} + \frac{1}{1 + \gamma} \\ &= 1 + \frac{1}{3 - \sqrt{5}} + \frac{1}{3 + \sqrt{5}} \\ &= 1 + \frac{3 + \sqrt{5} + 3 - \sqrt{5}}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} \\ &= 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{a^b} b + \log_{b^c} c + \log_{c^a} a &= \frac{1}{\log_b a^b} + \frac{1}{\log_c b^c} + \frac{1}{\log_a c^a} \\ &= \frac{1}{2 \log_a b + 1} + \frac{1}{\log_c b + 1} + \frac{1}{\log_a c + 1} \\ &= \frac{1}{\frac{2}{\log_a b} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{\log_b c} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{\log_c a} + 1} \\ &= \frac{1}{\frac{2}{\alpha} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{\beta} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{\gamma} + 1} \\ &= \frac{\alpha}{2 + \alpha} + \frac{\beta}{1 + \beta} + \frac{\gamma}{1 + \gamma} \\ &= -1 + \frac{2 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} + \frac{2 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \\ &= -1 + \frac{(2 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5}) + (2 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} \\ &= -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\log_{a^b} a + \log_{b^c} b + \log_{c^a} c}{\log_{a^b} b + \log_{b^c} c + \log_{c^a} a} = \frac{\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = -5$$

개념 NOTE

세 수 α , β , γ 를 근으로 하고 삼차항의 계수가 1인 삼차방정식은

$$x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$$

16 답 ②

자연수 a , b 에 대하여 $a \log_5 b$ 가 자연수이려면 $b = 5^n$ (n 은 자연수) 꼴이어야 하므로

$$a \log_5 b = a \log_5 5^n = an$$

즉, $an = k$ 를 만족시키는 두 자연수 a , n 의 순서쌍 (a, n) 의 개수가 순서쌍 (a, b) 의 개수와 같고, 순서쌍 (a, n) 의 개수는 k 의 양의 약수의 개수와 같으므로

$f(k) = (k \text{의 양의 약수의 개수})$

$$f(2^p) + f(3^p) + f(6^p) = 35 \text{에서}$$

$$f(2^p) + f(3^p) + f(2^p \times 3^p) = 35$$

$$(p+1) + (p+1) + (p+1) \times (p+1) = 35$$

$$p^2 + 4p - 32 = 0, (p+8)(p-4) = 0$$

$$\therefore p = -8 \text{ 또는 } p = 4$$

그런데 p 는 자연수이므로 $p = 4$

방법 NOTE

자연수 N 이 $N = p^a q^b r^c$ (p , q , r 는 서로 다른 소수, a , b , c 는 자연수) 꼴로 소인수 분해 될 때, N 의 양의 약수의 개수는

$$(a+1)(b+1)(c+1)$$

17 답 426

$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right) = 4\log_{2^6}\left(\frac{3}{4n+16}\right) = \frac{2}{3}\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right)$ 이므로 이 값이 정수가 되려면 $\log_2\left(\frac{3}{4n+16}\right) = 3k$ (k 는 정수) 꼴이어야 한다.

즉, $\frac{3}{4n+16} = 2^{3k}$ 에서 $\frac{3}{4n+16} = 8^k$

$\frac{4n+16}{3} = 8^{-k} \quad \therefore n = \frac{3}{4} \times 8^{-k} - 4$

그런데 $1 \leq n \leq 1000$ 이므로

$1 \leq \frac{3}{4} \times 8^{-k} - 4 \leq 1000, \quad \frac{20}{3} \leq \left(\frac{1}{8}\right)^k \leq \frac{4016}{3}$

이때 $\left(\frac{1}{8}\right)^0 = 1, \left(\frac{1}{8}\right)^{-1} = 8, \dots, \left(\frac{1}{8}\right)^{-3} = 512, \left(\frac{1}{8}\right)^{-4} = 4096$ 이므로 k 의 값은 $-1, -2, -3$ 이다.

(i) $k = -1$ 일 때, $n = \frac{3}{4} \times 8 - 4 = 2$

(ii) $k = -2$ 일 때, $n = \frac{3}{4} \times 8^2 - 4 = 44$

(iii) $k = -3$ 일 때, $n = \frac{3}{4} \times 8^3 - 4 = 380$

(i), (ii), (iii)에서 모든 n 의 값의 합은

$2 + 44 + 380 = 426$

18 답 30

$\log_2(-x^2+ax+4)$ 에서 $f(x) = -x^2+ax+4$ 라 하면 진수의 조건에서 $f(x) > 0$

$\log_2 f(x) = n$ (n 은 자연수)으로 놓으면

$f(x) = 2^n$

$\log_2 f(x)$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 x 의 개수는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 2^n$ 이 만나는 점의 개수와 같다.

$f(x) = -x^2 + ax + 4$
 $= -\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} + 4$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 위로 볼록하고, 꼭짓점 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{4} + 4\right)$ 는 제1사분면 위에 있다.

이때 $\log_2 f(x)$ 의 값이 자연수가 되도록 하는 실수 x 의 개수가 6이려면 함수

$y = f(x)$ 의 그래프가 세 직선 $y = 2,$

$y = 2^2, y = 2^3$ 과 각각 서로 다른 두 점에서 만나고, 직선 $y = 2^4$ 과는 만나지 않아야 한다.

따라서 $2^3 < \frac{a^2}{4} + 4 < 2^4$ 이므로

$4 < \frac{a^2}{4} < 12 \quad \therefore 16 < a^2 < 48$

이를 만족시키는 모든 자연수 a 의 값은 5, 6이므로 그 곱은

$5 \times 6 = 30$

19 답 7120

$a^{50} = 10^3$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$\log a^{50} = \log 10^3$

$50 \log a = 3 \quad \therefore \log a = \frac{3}{50}$

$b^{80} = 10^7$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$\log b^{80} = \log 10^7$

$80 \log b = 7 \quad \therefore \log b = \frac{7}{80}$

$N = a^{19}b^{31}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$\log N = \log a^{19}b^{31}$

$= 19 \log a + 31 \log b$

$= 19 \times \frac{3}{50} + 31 \times \frac{7}{80}$

$= 1.14 + 2.7125 = 3.8525$

$= 3 + 0.8525$

$= \log 10^3 + \log 7.12$

$= \log 7120$

$\therefore N = 7120$

20 답 ②

$\log a + \log b = 3$ 에서

$\log ab = 3 \quad \therefore ab = 10^3 = 1000$

$0 < \log a - \log b < 1$ 에서 $0 < \log \frac{a}{b} < 1$

$\log 1 = 0, \log 10 = 1$ 이므로

$\log 1 < \log \frac{a}{b} < \log 10 \quad \therefore 1 < \frac{a}{b} < 10$

$b > 0$ 이므로 $b < a < 10b$

$a < 10b$ 에서 $ab < 10b^2$

$1000 < 10b^2, b^2 > 100$

$\therefore b > 10$ ($\because b > 0$)

$ab = 1000 = 2^3 \times 5^3$ 이고 $10 < b < a$ 이므로

두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는

$(2^3 \times 5, 5^2), (2 \times 5^2, 2^2 \times 5)$

즉, $a = 40, b = 25$ 또는 $a = 50, b = 20$ 이므로

$a + b = 65$ 또는 $a + b = 70$

따라서 $a + b$ 의 최댓값은 70이다.

21 답 7

(i) $1 \leq n < 10$ 일 때,

$0 \leq \log n < 1$ 이므로 $f(n) = 0$

$f(3n+1) = 2f(n) + 1$ 에서 $f(3n+1) = 1$

즉, $\log(3n+1)$ 의 정수 부분이 1이므로

$1 \leq \log(3n+1) < 2$

$\log 10 = 1, \log 100 = 2$ 이므로

$\log 10 \leq \log(3n+1) < \log 100$

따라서 $10 \leq 3n+1 < 100$ 이므로

$9 \leq 3n < 99$

$\therefore 3 \leq n < 33$

그런데 $1 \leq n < 10$ 이므로

$3 \leq n < 10$

(ii) $10 \leq n < 100$ 일 때,

$1 \leq \log n < 2$ 이므로 $f(n) = 1$

$f(3n+1) = 2f(n) + 1$ 에서 $f(3n+1) = 3$

즉, $\log(3n+1)$ 의 정수 부분이 3이므로

$3 \leq \log(3n+1) < 4$

$\log 1000 = 3, \log 10000 = 4$ 이므로

$\log 1000 \leq \log(3n+1) < \log 10000$

따라서 $1000 \leq 3n+1 < 10000$ 이므로

$$999 \leq 3n < 9999$$

$$\therefore 333 \leq n < 3333$$

그런데 $10 \leq n < 100$ 이므로 n 의 값이 존재하지 않는다.

(iii) $n=100$ 일 때,

$$\log n = \log 100 = 2 \text{이므로 } f(n) = 2$$

$$\log(3n+1) = \log 301 \text{이고 } \log 100 < \log 301 < \log 1000 \text{이므로}$$

$$2 < \log 301 < 3$$

$$\therefore f(3n+1) = 2$$

이는 $f(3n+1) = 2f(n) + 1$ 을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $3 \leq n < 10$

따라서 자연수 n 은 3, 4, 5, ..., 9의 7개이다.

22 답 71.6 %

두 지반 A, B의 유효수직응력을 각각 S_A , S_B 라 하면 $S_A = 2.56S_B$

시험기가 두 지반 A, B에 들어가면서 받는 저항력을 각각 R_A , R_B 라

하면 $R_A = 2R_B$

지반 B의 상대밀도가 65 %이므로

$$65 = -98 + 66 \log \frac{R_B}{\sqrt{S_B}} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

지반 A의 상대밀도를 D_A 라 하면

$$D_A = -98 + 66 \log \frac{R_A}{\sqrt{S_A}} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$D_A - 65 = 66 \left(\log \frac{R_A}{\sqrt{S_A}} - \log \frac{R_B}{\sqrt{S_B}} \right)$$

$$\therefore D_A = 66 \log \left(\frac{R_A}{R_B} \times \frac{\sqrt{S_B}}{\sqrt{S_A}} \right) + 65$$

$$= 66 \log \left(\frac{2R_B}{R_B} \times \frac{\sqrt{S_B}}{\sqrt{2.56S_B}} \right) + 65$$

$$= 66 \log \frac{2}{1.6} + 65$$

$$= 66 \log \frac{10}{8} + 65$$

$$= 66(\log 10 - 3 \log 2) + 65$$

$$= 66 \times (1 - 0.9) + 65$$

$$= 6.6 + 65$$

$$= 71.6(\%)$$

23 답 1.66

유소년층 인구수는 매년 2 %씩 감소하므로 현재 유소년층 인구수를 a 라

하면 30년 후 유소년층 인구수는

$$a \left(1 - \frac{2}{100} \right)^{30} = a \times 0.98^{30}$$

노년층 인구수는 매년 3 %씩 증가하므로 현재 노년층 인구수를 b 라 하

면 30년 후 노년층 인구수는

$$b \left(1 + \frac{3}{100} \right)^{30} = b \times 1.03^{30} \quad \cdots \cdots \text{배점 20\%}$$

30년 후 노령화 지수가 현재의 k^3 배이므로

$$\frac{b \times 1.03^{30}}{a \times 0.98^{30}} = k^3 \times \frac{b}{a} \rightarrow (\text{노령화 지수}) = \frac{(\text{노년층 인구수})}{(\text{유소년층 인구수})}$$

$$\therefore k^3 = \frac{1.03^{30}}{0.98^{30}} \quad \cdots \cdots \text{배점 30\%}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log k^3 = \log \frac{1.03^{30}}{0.98^{30}}$$

$$3 \log k = 30 \log 1.03 - 30 \log 0.98$$

$$\log k = 10 \log 1.03 - 10 \log 0.98$$

$$= 10 \log 1.03 - 10 \log \frac{9.8}{10}$$

$$= 10 \log 1.03 - 10(\log 9.8 - 1)$$

$$= 10 \times 0.013 - 10 \times (0.991 - 1)$$

$$= 0.13 + 0.09 = 0.22$$

$$= \log 1.66$$

$$\therefore k = 1.66 \quad \cdots \cdots \text{배점 50\%}$$

방법 NOTE

상용로그의 실생활에서의 활용 $\Rightarrow$ 일정하게 증가, 감소하는 경우

예) 올해의 양은 A 이고 매년 r %씩 증가할 때, n 년 후의 양은

$$A \left(1 + \frac{r}{100} \right)^n$$

임을 이용하여 식을 세운다.

STEP 3 최고난도 문제

| 32~33쪽

01 ②

02 -1

03 72

04 78

05 79

06 ③

07 4

08 ③

01 답 ②

1단계 $\log_2 a$ 의 조건 알기

(*)에서

$$\log_a n \times \log_n (n \times a^2) = \log_a n \times \frac{\log_a (n \times a^2)}{\log_a n}$$

$$= \log_a (n \times a^2)$$

$$= \log_a n + \log_a a^2$$

$$= \frac{\log_2 n}{\log_2 a} + 2$$

즉, $\frac{\log_2 n}{\log_2 a} + 2$ 가 자연수이므로 $\frac{\log_2 n}{\log_2 a}$ 은 -1 이상의 정수이다.

(*)에서 $\log_2 a$ 는 0이 아닌 정수이고 $\log_2 n$ 은 자연수이므로 $\log_2 a$ 는 $-\log_2 n$ 이거나 $\log_2 n$ 의 양의 약수이어야 한다.

2단계 n 의 최솟값 구하기

$f(n) = 5$ 이면 $\log_2 n$ 의 양의 약수의 개수가 4이다.

양의 약수의 개수가 4인 자연수 중 가장 작은 값은 $2^1 \times 3^1 = 6$ 이므로

$$\log_2 n = 6 \text{에서 } n = 2^6 = 64$$

따라서 n 의 최솟값은 64이다.

idea

02 답 -1

1단계 $4(\log_x y - \log_y x)$ 의 값의 범위 구하기

$\log_x y = t$ 로 놓으면

$$4(\log_x y - \log_y x) = 4 \left(\log_x y - \frac{1}{\log_x y} \right) = 4 \left(t - \frac{1}{t} \right)$$

$$\log_x y = 2 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_{100}}{2^{100}} = t \text{ (} t \text{는 유리수)에서}$$

$$2 \leq \log_x y < 3 \quad \therefore 2 \leq t < 3$$

$$\text{또 } \frac{1}{3} < \frac{1}{t} \leq \frac{1}{2} \text{ 이므로 } \frac{3}{2} \leq t - \frac{1}{t} < \frac{8}{3}$$

$$\therefore 6 \leq 4\left(t - \frac{1}{t}\right) < \frac{32}{3} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

2단계 $\log_x y$ 의 값 구하기

$$4(\log_x y - \log_x x) = 4\left(t - \frac{1}{t}\right) \text{은 자연수이므로}$$

$$4\left(t - \frac{1}{t}\right) = m \quad (m \text{은 자연수}) \text{으로 놓으면}$$

$$4t^2 - mt - 4 = 0$$

$$\therefore t = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 64}}{8} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 t 는 유리수이므로 $m^2 + 64$ 는 제곱수이어야 한다.

$$m^2 + 64 = s^2 \quad (s \text{는 자연수}) \text{으로 놓으면}$$

$$s^2 - m^2 = 64$$

$$(s+m)(s-m) = 64$$

$$m^2 < s^2 \text{이고 } m, s \text{는 자연수이므로 } 0 < s-m < s+m$$

즉, 순서쌍 $(s+m, s-m)$ 은

$$(64, 1), (32, 2), (16, 4)$$

$$(i) \ s+m=64, \ s-m=1 \text{일 때,}$$

두 식을 연립하여 풀면

$$s = \frac{65}{2}, \ m = \frac{63}{2}$$

이는 s, m 이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$$(ii) \ s+m=32, \ s-m=2 \text{일 때,}$$

두 식을 연립하여 풀면

$$s=17, \ m=15$$

그런데 $\textcircled{7}$ 에서 $6 \leq m < \frac{32}{3}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$(iii) \ s+m=16, \ s-m=4 \text{일 때,}$$

두 식을 연립하여 풀면

$$s=10, \ m=6$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } m=6$$

$m=6$ 을 $\textcircled{8}$ 에 대입하면

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36+64}}{8}$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } t=2$$

그런데 $2 \leq t < 3$ 이므로 $t=2$

3단계 $(a_1-b_1) + (a_2-b_2) + (a_3-b_3) + \dots + (a_{100}-b_{100})$ 의 값 구하기

따라서 $\log_x y = 2$ 이므로

$$a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_{100} = 0$$

$$\log_y x = \frac{1}{\log_x y} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$b_1 = 1, \ b_2 = b_3 = b_4 = \dots = b_{100} = 0$$

$$\therefore (a_1-b_1) + (a_2-b_2) + (a_3-b_3) + \dots + (a_{100}-b_{100}) = -b_1 = -1$$

다른 풀이

2단계 $\log_x y$ 의 값 구하기

$$\textcircled{7} \text{에서 } 4\left(t - \frac{1}{t}\right) \text{은 자연수이므로}$$

$$(i) \ 4\left(t - \frac{1}{t}\right) = 6 \text{일 때,}$$

$$4t^2 - 6t - 4 = 0, \ 2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$(2t+1)(t-2) = 0 \quad \therefore t = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } t=2$$

그런데 $2 \leq t < 3$ 이므로 $t=2$

$$(ii) \ 4\left(t - \frac{1}{t}\right) = 7 \text{일 때,}$$

$$4t^2 - 7t - 4 = 0 \quad \therefore t = \frac{7 \pm \sqrt{113}}{8}$$

이는 t 가 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$$(iii) \ 4\left(t - \frac{1}{t}\right) = 8 \text{일 때,}$$

$$4t^2 - 8t - 4 = 0, \ t^2 - 2t - 1 = 0$$

$$\therefore t = 1 \pm \sqrt{2}$$

이는 t 가 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$$(iv) \ 4\left(t - \frac{1}{t}\right) = 9 \text{일 때,}$$

$$4t^2 - 9t - 4 = 0 \quad \therefore t = \frac{9 \pm \sqrt{145}}{8}$$

이는 t 가 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$$(v) \ 4\left(t - \frac{1}{t}\right) = 10 \text{일 때,}$$

$$4t^2 - 10t - 4 = 0, \ 2t^2 - 5t - 2 = 0$$

$$\therefore t = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{4}$$

이는 t 가 유리수라는 조건을 만족시키지 않는다.

$$(i) \sim (v) \text{에서 } t=2$$

03 답 72

1단계 집합 $A_4 \cap A_b$ 의 원소의 개수가 나타내는 의미 알기

$A_4 = \{\log_4 x \mid x \text{는 } 100 \text{ 이하의 자연수}\}$ 이고 10 이하의 자연수 k 에 대하여 $b = 2^k$ 이므로 $A_b = A_{2^k} = \{\log_{2^k} y \mid y \text{는 } 100 \text{ 이하의 자연수}\}$ 이다.

집합 $A_4 \cap A_b$ 의 원소의 개수는 $\log_4 x = \log_{2^k} y$ 를 만족시키는

$1 \leq x \leq 100, 1 \leq y \leq 100$ 인 두 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수와 같다.

$$\text{이때 } \log_4 x = \log_{2^k} y \text{에서 } \frac{1}{2} \log_2 x = \frac{1}{k} \log_2 y, \ k \log_2 x = 2 \log_2 y$$

$$\log_2 x^k = \log_2 y^2 \quad \therefore x^k = y^2$$

2단계 $k=1, 2, 3, \dots, 10$ 일 때, $n(A_4 \cap A_b)$ 의 값 구하기

$$(i) \ k=1 \text{일 때, } x=y^2 \text{이므로 순서쌍 } (x, y) \text{는}$$

$$(1^2, 1), (2^2, 2), (3^2, 3), \dots, (10^2, 10)$$

$$\therefore n(A_4 \cap A_{2^1}) = 10$$

$$(ii) \ k=2 \text{일 때, } x^2 = y^2, \text{ 즉 } x=y \text{이므로 순서쌍 } (x, y) \text{는}$$

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots, (10, 10)$$

$$\therefore n(A_4 \cap A_{2^2}) = 10$$

$$(iii) \ k=3 \text{일 때, } x^3 = y^2 \text{이므로 순서쌍 } (x, y) \text{는}$$

$$(1^2, 1^3), (2^2, 2^3), (3^2, 3^3), (4^2, 4^3)$$

$$\therefore n(A_4 \cap A_{2^3}) = 4$$

$$(iv) \ k=4 \text{일 때, } x^4 = y^2, \text{ 즉 } x^2 = y \text{이므로 순서쌍 } (x, y) \text{는}$$

$$(1, 1^2), (2, 2^2), (3, 3^2), \dots, (10, 10^2)$$

$$\therefore n(A_4 \cap A_{2^4}) = 10$$

$$(v) \ k=5 \text{일 때, } x^5 = y^2 \text{이므로 순서쌍 } (x, y) \text{는}$$

$$(1^2, 1^5), (2^2, 2^5)$$

$$\therefore n(A_4 \cap A_{2^5}) = 2$$

$$(vi) \ k=6 \text{일 때, } x^6 = y^2, \text{ 즉 } x^3 = y \text{이므로 순서쌍 } (x, y) \text{는}$$

$$(1, 1^3), (2, 2^3), (3, 3^3), (4, 4^3)$$

$$\therefore n(A_4 \cap A_{2^6}) = 4$$

$$(vii) \ k=7 \text{일 때, } x^7 = y^2 \text{이므로 순서쌍 } (x, y) \text{는}$$

$$(1^2, 1^7)$$

$$\therefore n(A_4 \cap A_{2^7}) = 1$$

(viii) $k=8$ 일 때, $x^8=y^2$, 즉 $x^4=y$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

$$(1, 1^4), (2, 2^4), (3, 3^4)$$

$$\therefore n(A_4 \cap A_{2^8})=3$$

(ix) $k=9$ 일 때, $x^9=y^2$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

$$(1^2, 1^9)$$

$$\therefore n(A_4 \cap A_{2^9})=1$$

(x) $k=10$ 일 때, $x^{10}=y^2$, 즉 $x^5=y$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는

$$(1, 1^5), (2, 2^5)$$

$$\therefore n(A_4 \cap A_{2^{10}})=2$$

3단계 모든 b 의 값의 합 구하기

(i)~(x)에서 $k=3$ 또는 $k=6$ 이므로 조건을 만족시키는 집합 B 의 원소는 $2^3, 2^6$

따라서 모든 b 의 값의 합은 $8+64=72$

04 답 78

1단계 a 의 값의 범위 구하기

$$\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2) \text{이므로}$$

$$na-a^2=nb-b^2$$

$$b^2-a^2-n(b-a)=0$$

$$(b-a)(b+a)-n(b-a)=0$$

$$(b-a)(b+a-n)=0$$

$$\text{이때 } b-a>0 \text{이므로 } b+a-n=0 \quad \therefore b=n-a$$

$$0 < b-a \leq \frac{n}{2} \text{에서}$$

$$0 < (n-a)-a \leq \frac{n}{2}, \quad 0 < n-2a \leq \frac{n}{2}$$

$$-n < -2a \leq -\frac{n}{2} \quad \therefore \frac{n}{4} \leq a < \frac{n}{2}$$

2단계 n^2 의 값의 범위 구하기

한편 $\log_2(na-a^2)$ 이 자연수이므로

$$\log_2(na-a^2)=k \text{ (} k \text{는 자연수)로 놓으면}$$

$$na-a^2=2^k, \quad a^2-na+2^k=0$$

$$\therefore a = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4 \times 2^k}}{2} = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 2^{k+2}}}{2}$$

$$\text{그런데 } \frac{n}{4} \leq a < \frac{n}{2} \text{이므로 } a = \frac{n - \sqrt{n^2 - 2^{k+2}}}{2}$$

$$\text{이를 } \frac{n}{4} \leq a < \frac{n}{2} \text{에 대입하면}$$

$$\frac{n}{4} \leq \frac{n - \sqrt{n^2 - 2^{k+2}}}{2} < \frac{n}{2}$$

$$\frac{n}{2} \leq n - \sqrt{n^2 - 2^{k+2}} < n$$

$$-\frac{n}{2} \leq -\sqrt{n^2 - 2^{k+2}} < 0$$

$$0 < \sqrt{n^2 - 2^{k+2}} \leq \frac{n}{2}$$

각 변을 제곱하면

$$0 < n^2 - 2^{k+2} \leq \frac{n^2}{4}$$

$$0 < n^2 - 2^{k+2} \text{에서 } n^2 > 2^{k+2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$n^2 - 2^{k+2} \leq \frac{n^2}{4} \text{에서 } \frac{3}{4}n^2 \leq 2^{k+2}$$

$$\therefore n^2 \leq \frac{2^{k+4}}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 2^{k+2} < n^2 \leq \frac{2^{k+4}}{3} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

3단계 모든 n 의 값의 합 구하기

k 는 자연수, n 은 20 이하의 자연수이므로

(i) $k=1$ 일 때,

$$\textcircled{3} \text{에서 } 8 < n^2 \leq \frac{32}{3} \text{이므로 } n \text{의 값은 } 3 \text{이다.}$$

(ii) $k=2$ 일 때,

$$\textcircled{3} \text{에서 } 16 < n^2 \leq \frac{64}{3} \text{이므로 이를 만족시키는 자연수 } n \text{은 존재하지 않는다.}$$

(iii) $k=3$ 일 때,

$$\textcircled{3} \text{에서 } 32 < n^2 \leq \frac{128}{3} \text{이므로 } n \text{의 값은 } 6 \text{이다.}$$

(iv) $k=4$ 일 때,

$$\textcircled{3} \text{에서 } 64 < n^2 \leq \frac{256}{3} \text{이므로 } n \text{의 값은 } 9 \text{이다.}$$

(v) $k=5$ 일 때,

$$\textcircled{3} \text{에서 } 128 < n^2 \leq \frac{512}{3} \text{이므로 } n \text{의 값은 } 12, 13 \text{이다.}$$

(vi) $k=6$ 일 때,

$$\textcircled{3} \text{에서 } 256 < n^2 \leq \frac{1024}{3} \text{이므로 } n \text{의 값은 } 17, 18 \text{이다.}$$

(vii) $k \geq 7$ 일 때,

$$\textcircled{3} \text{에서 } n^2 > 512 \text{이므로 이를 만족시키는 } 20 \text{ 이하의 자연수 } n \text{은 존재하지 않는다.}$$

(i)~(vii)에서 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$3+6+9+12+13+17+18=78$$

다른 풀이

2단계 n^2 의 값의 범위 구하기

$\log_2(na-a^2)$ 과 $\log_2(nb-b^2)$ 은 같은 자연수이므로

$$\log_2(na-a^2)=\log_2(nb-b^2)=k \text{ (} k \text{는 자연수)로 놓으면}$$

$$na-a^2=nb-b^2=2^k$$

이때 a, b 는 이차방정식 $nx-x^2=2^k$, 즉 $x^2-nx+2^k=0$ 의 서로 다른

두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a+b=n, \quad ab=2^k$$

$$(b-a)^2=(a+b)^2-4ab=n^2-2^{k+2} \text{이고}$$

$$0 < b-a \leq \frac{n}{2} \text{에서 } 0 < (b-a)^2 \leq \frac{n^2}{4}$$

$$\therefore 0 < n^2 - 2^{k+2} \leq \frac{n^2}{4}$$

$$0 < n^2 - 2^{k+2} \text{에서 } n^2 > 2^{k+2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$n^2 - 2^{k+2} \leq \frac{n^2}{4} \text{에서 } n^2 \leq \frac{2^{k+4}}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 2^{k+2} < n^2 \leq \frac{2^{k+4}}{3} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

05 답 79

1단계 $f(a), g(b)$ 의 값 구하기

$$10^{f(k)+g(k)}=k \text{의 양변에 상용로그를 취하면}$$

$$\log 10^{f(k)+g(k)}=\log k$$

$$\therefore \log k=f(k)+g(k)$$

이때 $f(k)$ 는 정수이고 $0 \leq g(k) < 1$ 이므로 $f(k)$ 는 $\log k$ 의 정수 부분,

$g(k)$ 는 $\log k$ 의 소수 부분이다.

$$\textcircled{2} \text{의 } f(a)+g(b)=\frac{9}{4} \text{에서 } f(a)+g(b)=2+\frac{1}{4}$$

$$\therefore f(a)=2, \quad g(b)=\frac{1}{4}$$

2단계 $\log a$ 의 소수 부분 구하기

$\log a = 2 + \alpha$ ($0 \leq \alpha < 1$), $\log b = n + \frac{1}{4}$ (n 은 정수)이라 하자.

$$\log \frac{1}{a} = -\log a = -2 - \alpha = -3 + (1 - \alpha) \text{이므로}$$

$$(나)의 g(a) = g\left(\frac{1}{a}\right) + g(b) \text{에서}$$

$$\alpha = (1 - \alpha) + \frac{1}{4}$$

$$2\alpha = \frac{5}{4} \quad \therefore \alpha = \frac{5}{8}$$

3단계 $\log b$ 의 정수 부분 구하기

$$\log a^5 = 5 \log a = 5\left(2 + \frac{5}{8}\right) = \frac{105}{8} = 13 + \frac{1}{8},$$

$$\log \frac{1}{b} = -\log b = -n - \frac{1}{4} = -n - 1 + \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$(다)의 f(b) = f(a^5) + f\left(\frac{1}{b}\right) \text{에서}$$

$$n = 13 + (-n - 1)$$

$$2n = 12 \quad \therefore n = 6$$

4단계 $p+q$ 의 값 구하기

$$\text{즉, } \log a = 2 + \frac{5}{8}, \log b = 6 + \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$\log ab = \log a + \log b = 2 + \frac{5}{8} + 6 + \frac{1}{4} = \frac{71}{8}$$

따라서 $p=8, q=71$ 이므로

$$p+q=79$$

idea
06 답 ③

1단계 $[\log_{ab} a^4] + [\log_{ab} a^6] + [\log_{ab} b^4] + [\log_{ab} b^6] = 10$ 을 만족시키는 경우 파악하기

$$\log_{ab} a^4 + \log_{ab} a^6 + \log_{ab} b^4 + \log_{ab} b^6 = \log_{ab} (ab)^{10} = 10$$

$$\text{이때 } [\log_{ab} a^4] \leq \log_{ab} a^4, [\log_{ab} a^6] \leq \log_{ab} a^6, [\log_{ab} b^4] \leq \log_{ab} b^4, [\log_{ab} b^6] \leq \log_{ab} b^6 \text{이므로}$$

$$[\log_{ab} a^4] + [\log_{ab} a^6] + [\log_{ab} b^4] + [\log_{ab} b^6] = 10 \text{을 만족시키려면}$$

$$\log_{ab} a^4, \log_{ab} a^6, \log_{ab} b^4, \log_{ab} b^6 \text{은 모두 정수이어야 한다.}$$

2단계 순서쌍 (a, b) 의 개수 구하기

$$\log_{ab} a^4 = m, \log_{ab} a^6 = n \text{ (m, n 은 정수, $m \leq n$)으로 놓으면}$$

$$a^4 = (ab)^m, a^6 = (ab)^n$$

$$\text{이때 } \frac{a^6}{a^4} = \frac{(ab)^n}{(ab)^m} \text{이므로 } a^2 = (ab)^{n-m} \quad \dots\dots ①$$

$$a, b \text{는 자연수이고 } a \leq ab \text{이므로 } 0 \leq n-m \leq 2$$

$$\text{이때 } m, n \text{이 정수이므로 } n-m \text{도 정수이다.}$$

(i) $n-m=0$ 일 때,

$$① \text{에서 } a^2 = 1 \quad \therefore a = 1 \text{ ($\because a$ 는 자연수)}$$

$$\text{그런데 (밀)} \neq 1 \text{이어야 하므로 } ab \neq 1 \quad \therefore b \neq 1$$

따라서 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 2), (1, 3), (1, 4), \dots, (1, 9)$ 의 8개이다.

(ii) $n-m=1$ 일 때,

$$① \text{에서 } a^2 = ab, a^2 - ab = 0$$

$$a(a-b) = 0 \quad \therefore a = b \text{ ($\because a$ 는 자연수)}$$

$$\text{그런데 (밀)} \neq 1 \text{이어야 하므로 } ab \neq 1$$

따라서 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 2), (3, 3), (4, 4), \dots, (9, 9)$ 의 8개이다.

(iii) $n-m=2$ 일 때,

$$① \text{에서 } a^2 = (ab)^2, a^2 - a^2 b^2 = 0$$

$$a^2(1-b^2) = 0 \quad \therefore b^2 = 1 \text{ ($\because a$ 는 자연수)}$$

$$\therefore b = 1 \text{ ($\because b$ 는 자연수)}$$

$$\text{그런데 (밀)} \neq 1 \text{이어야 하므로 } ab \neq 1 \quad \therefore a \neq 1$$

따라서 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 1), (3, 1), (4, 1), \dots, (9, 1)$ 의 8개이다.

(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$8 + 8 + 8 = 24$$

07 답 4

1단계 m, k 의 값의 범위 구하기

$\log_3 m = a + \alpha$ (a 는 정수, $0 \leq \alpha < 1$), $\log_3 k = b + \beta$ (b 는 정수, $0 \leq \beta < 1$)로 놓으면 $P_m(a, \alpha), P_k(b, \beta)$ 이다.

$$(나) \text{에서 } \overline{P_k P_m}^2 = (a-b)^2 + (\alpha-\beta)^2 = 1 + (\log_3 2)^2 \text{이고,}$$

$$(a-b)^2 \text{은 정수, } 0 \leq (\alpha-\beta)^2 < 1 \text{이므로}$$

$$(a-b)^2 = 1 \text{에서 } a-b = \pm 1 \text{이고, } (\alpha-\beta)^2 = (\log_3 2)^2 \text{에서}$$

$$\alpha-\beta = \pm \log_3 2$$

$$\text{이때 } m > k \text{이므로 } a \geq b$$

$$\therefore a-b=1$$

$$(가)의 1 < k < m < 27 \text{에서 } \log_3 1 = 0, \log_3 27 = 3 \text{이므로}$$

$$0 < \log_3 k < \log_3 m < 3$$

$$\therefore a=2, b=1$$

$$\text{즉, } 2 \leq \log_3 m < 3, 1 \leq \log_3 k < 2 \text{에서}$$

$$9 \leq m < 27 \quad \dots\dots ㉠$$

$$3 \leq k < 9 \quad \dots\dots ㉡$$

2단계 순서쌍 (k, m) 의 개수 구하기

$$\text{이때 } \log_3 m - \log_3 k = 1 + (\alpha - \beta) \text{에서}$$

$$\log_3 \frac{m}{k} = 1 + (\alpha - \beta)$$

(i) $\alpha - \beta = \log_3 2$ 일 때,

$$\log_3 \frac{m}{k} = 1 + \log_3 2 = \log_3 6 \text{에서 } \frac{m}{k} = 6, \text{ 즉 } m = 6k$$

$$\text{이때 } ㉠ \text{에서 } 9 \leq 6k < 27$$

$$\therefore \frac{3}{2} \leq k < \frac{9}{2} \quad \dots\dots ㉢$$

$$㉡, ㉢ \text{에서 } 3 \leq k < \frac{9}{2}$$

따라서 자연수 k 의 값은 3, 4이므로 순서쌍 (k, m) 은

$(3, 18), (4, 24)$ 의 2개이다.

(ii) $\alpha - \beta = -\log_3 2$ 일 때,

$$\log_3 \frac{m}{k} = 1 - \log_3 2 = \log_3 \frac{3}{2} \text{에서 } \frac{m}{k} = \frac{3}{2}, \text{ 즉 } m = \frac{3}{2}k$$

$$\text{이때 } ㉠ \text{에서 } 9 \leq \frac{3}{2}k < 27$$

$$\therefore 6 \leq k < 18 \quad \dots\dots ㉣$$

$$㉡, ㉣ \text{에서 } 6 \leq k < 9$$

따라서 자연수 k 의 값은 6, 7, 8이므로 순서쌍 (k, m) 은

$(6, 9), (8, 12)$ 의 2개이다.

$\hookrightarrow k=7$ 이면 $m=\frac{21}{2}$ 이므로 m 이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 순서쌍 (k, m) 의 개수는

$$2 + 2 = 4$$

08 답 ③

1단계 $ab=100$ 일 때, 순서쌍 (a, b) 의 개수 구하기

(가)에서 $\log ab$ 의 정수 부분이 2이므로

$$2 \leq \log ab < 3, 10^2 \leq ab < 10^3$$

$$\therefore 100 \leq ab < 1000$$

(i) $ab=100$ 일 때,

$$\log \frac{1}{ab} = \log \frac{1}{100} = -2 \text{이므로}$$

$$\left\lceil \log \frac{1}{ab} \right\rceil = -2$$

$$(나)의 [\log a] - [\log b] + \left\lceil \log \frac{1}{ab} \right\rceil = -2 \text{에서}$$

$$[\log a] - [\log b] - 2 = -2$$

$$\therefore [\log a] = [\log b] \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

① $1 \leq a < 10$ 일 때,

$$0 \leq \log a < 1 \text{이므로 } [\log a] = 0$$

$$ab=100 \text{에서 } 10 < b \leq 100 \text{이므로}$$

$$1 < \log b \leq 2$$

$$\therefore [\log b] = 1 \text{ 또는 } [\log b] = 2$$

이는 ①을 만족시키지 않는다.

② $a=10$ 일 때,

$$\log a = \log 10 = 1 \text{이므로 } [\log a] = 1$$

$$ab=100 \text{에서 } b=10 \text{이므로}$$

$$\log b = \log 10 = 1$$

$$\therefore [\log b] = 1$$

이는 ①을 만족시킨다.

③ $10 < a < 100$ 일 때,

$$1 < \log a < 2 \text{이므로 } [\log a] = 1$$

$$ab=100 \text{에서 } 1 < b < 10 \text{이므로}$$

$$0 < \log b < 1$$

$$\therefore [\log b] = 0$$

이는 ①을 만족시키지 않는다.

④ $a=100$ 일 때,

$$\log a = \log 100 = 2 \text{이므로 } [\log a] = 2$$

$$ab=100 \text{에서 } b=1 \text{이므로}$$

$$\log b = \log 1 = 0$$

$$\therefore [\log b] = 0$$

이는 ①을 만족시키지 않는다.

①~④에서 순서쌍 (a, b) 는 $(10, 10)$ 의 1개이다.

2단계 $100 < ab < 1000$ 일 때, 순서쌍 (a, b) 의 개수 구하기

(ii) $100 < ab < 1000$ 일 때,

$$2 < \log ab < 3 \text{이므로}$$

$$-3 < -\log ab < -2$$

$$\therefore -3 < \log \frac{1}{ab} < -2$$

$$\therefore \left\lceil \log \frac{1}{ab} \right\rceil = -3$$

$$(나)의 [\log a] - [\log b] + \left\lceil \log \frac{1}{ab} \right\rceil = -2 \text{에서}$$

$$[\log a] - [\log b] - 3 = -2$$

$$\therefore [\log b] = [\log a] - 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

자연수 b 에 대하여 $[\log b] \geq 0$ 이므로

$$[\log a] - 1 \geq 0 \quad \therefore [\log a] \geq 1$$

그런데 $[\log a] \geq 2$ 이면 $[\log b] \geq 1$ 이므로

$$a \geq 100, b \geq 10$$

이는 $100 < ab < 1000$ 을 만족시키지 않는다.

따라서 $[\log a] = 1$ 이므로

$$1 \leq \log a < 2 \quad \therefore 10 \leq a < 100$$

또 ②에서 $[\log b] = 0$ 이므로

$$0 \leq \log b < 1 \quad \therefore 1 \leq b < 10$$

① $b=1$ 일 때,

$$100 < ab < 1000 \text{에서 } 100 < a < 1000$$

그런데 $10 \leq a < 100$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수 a 는 존재하지 않는다.

② $b=2$ 일 때,

$$100 < ab < 1000 \text{에서 } 100 < 2a < 1000 \quad \therefore 50 < a < 500$$

그런데 $10 \leq a < 100$ 이므로

$$50 < a < 100$$

a 의 값은 51, 52, ..., 99이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 49이다.

③ $b=3$ 일 때,

②와 같은 방법으로 하면

$$\frac{100}{3} < a < 100$$

a 의 값은 34, 35, ..., 99이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 66이다.

④ $b=4$ 일 때,

②와 같은 방법으로 하면

$$25 < a < 100$$

a 의 값은 26, 27, ..., 99이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 74이다.

⑤ $b=5$ 일 때,

②와 같은 방법으로 하면

$$20 < a < 100$$

a 의 값은 21, 22, ..., 99이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 79이다.

⑥ $b=6$ 일 때,

②와 같은 방법으로 하면

$$\frac{50}{3} < a < 100$$

a 의 값은 17, 18, ..., 99이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 83이다.

⑦ $b=7$ 일 때,

②와 같은 방법으로 하면

$$\frac{100}{7} < a < 100$$

a 의 값은 15, 16, ..., 99이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 85이다.

⑧ $b=8$ 일 때,

②와 같은 방법으로 하면

$$\frac{25}{2} < a < 100$$

a 의 값은 13, 14, ..., 99이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 87이다.

⑨ $b=9$ 일 때,

②와 같은 방법으로 하면

$$\frac{100}{9} < a < 100$$

a 의 값은 12, 13, ..., 99이므로 순서쌍 (a, b) 의 개수는 88이다.

①~⑨에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$49 + 66 + 74 + 79 + 83 + 85 + 87 + 88 = 611$$

3단계 조건을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수 구하기

(i), (ii)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는 $1 + 611 = 612$

STEP 1

핵심 문제

| 34~35쪽

01 ① 02 ③ 03 4 04 ② 05 128 06 ⑤
07 20 08 ④ 09 5 10 ① 11 $2\sqrt{5}$ 12 ②

01 답 ①

$f(\alpha)=3, f(\beta)=12$ 에서 $a^\alpha=3, a^\beta=12$ 이므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{5\alpha+3\beta}{n}\right) &= a^{\frac{5\alpha+3\beta}{n}} = a^{\frac{5\alpha}{n}} \times a^{\frac{3\beta}{n}} \\ &= (a^\alpha)^{\frac{5}{n}} \times (a^\beta)^{\frac{3}{n}} \\ &= 3^{\frac{5}{n}} \times 12^{\frac{3}{n}} = 3^{\frac{5}{n}} \times (2^2 \times 3)^{\frac{3}{n}} \\ &= 3^{\frac{5}{n}} \times 2^{\frac{6}{n}} \times 3^{\frac{3}{n}} = 2^{\frac{6}{n}} \times 3^{\frac{8}{n}} \end{aligned}$$

$f\left(\frac{5\alpha+3\beta}{n}\right)$ 의 값이 자연수가 되려면 $2^{\frac{6}{n}}, 3^{\frac{8}{n}}$ 이 모두 자연수이어야 한다.

즉, $\frac{6}{n}, \frac{8}{n}$ 이 모두 자연수이어야 하므로 n 은 6과 8의 공약수이어야 한다.

따라서 자연수 n 의 값은 1, 2이므로 그 합은

$$1+2=3$$

02 답 ③

함수 $y=\frac{1}{16} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하고,

함수 $y=2^x+1$ 은 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

곡선 $y=2^x+1$ 이 점 $(0, 2)$ 를 지나

므로 곡선 $y=\frac{1}{16} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}$ 이 곡선

$y=2^x+1$ 과 제1사분면에서 만나려면

곡선 $y=\frac{1}{16} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-m}$ 이 y 축과 만

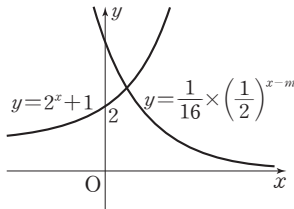
나는 점의 y 좌표가 2보다 커야 한다.

즉, $x=0$ 일 때, $\frac{1}{16} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{0-m} > 2, 2^{m-4} > 2$

밀이 1보다 크므로

$$m-4 > 1 \quad \therefore m > 5$$

따라서 자연수 m 의 최솟값은 6이다.



03 답 4

$A(a, 4^a), B(b, 4^b)$ 이고, 직선 AB 의 기울기가 2이므로

$$\frac{4^b - 4^a}{b - a} = 2$$

$$\therefore b - a = \frac{1}{2}(4^b - 4^a) \quad \dots\dots ①$$

또 $\overline{AB} = 2\sqrt{5}$ 에서 $\overline{AB}^2 = 20$ 이므로

$$(b-a)^2 + (4^b - 4^a)^2 = 20$$

위의 식에 ①을 대입하면

$$\frac{1}{4}(4^b - 4^a)^2 + (4^b - 4^a)^2 = 20$$

$$\frac{5}{4}(4^b - 4^a)^2 = 20 \quad \therefore (4^b - 4^a)^2 = 16$$

이때 $a < b$ 에서 $4^a < 4^b$ 이므로 $4^b - 4^a = 4$

04 답 ②

$a > 0$ 이므로 $a < ab$ 에서 양변을 a 로 나누면

$$1 < b \quad \therefore 0 < a < 1 < b$$

$$0 < a < 1 \text{이고 } a < b \text{이므로 } a^b < a^a \quad \dots\dots ㉠$$

$$b > 1 \text{이고 } a < b \text{이므로 } b^a < b^b \quad \dots\dots ㉡$$

$$a > 0, b > 0 \text{이고 } a < b \text{이므로 } a^a < b^a \quad \dots\dots ㉢$$

㉠, ㉡, ㉢에서 $a^b < a^a < b^a < b^b$

05 답 128

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left(\frac{1}{2}\right)^{g(x)-a}$$

$$g(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$$

이므로 $0 \leq x \leq 5$ 에서 $-1 \leq g(x) \leq 8$

따라서 함수 $h(x)$ 는 $g(x) = -1$ 일 때 최대이고 최댓값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1-a}$,

$$g(x) = 8 \text{일 때 최소이고 최솟값은 } \left(\frac{1}{2}\right)^{8-a}$$

$$\text{즉, } \left(\frac{1}{2}\right)^{8-a} = \frac{1}{4} \text{이므로 } \left(\frac{1}{2}\right)^{8-a} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

따라서 $8-a=2$ 이므로 $a=6$

$$\therefore M = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-a} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-7} = 128$$

06 답 ⑤

$$y = 2^{x+3} - 4^{x+1} = -4 \times (2^x)^2 + 8 \times 2^x$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면 } -1 \leq x \leq 2 \text{에서}$$

$$2^{-1} \leq 2^x \leq 2^2 \quad \therefore \frac{1}{2} \leq t \leq 4$$

이때 주어진 함수는

$$y = -4t^2 + 8t = -4(t-1)^2 + 4$$

따라서 $\frac{1}{2} \leq t \leq 4$ 에서 $t=1$ 일 때 최댓값이 4, $t=4$ 일 때 최솟값이 -32

이므로

$$M=4, m=-32$$

$$\therefore M-m=36$$

07 답 20

$$\text{방정식 } (3\sqrt{3})^{-x^2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}} \text{에서 } (3^{\frac{3}{2}})^{-x^2} = (3^{-2})^{\frac{5}{2}x - \frac{3}{4}}$$

$$\therefore 3^{-\frac{3}{2}x^2} = 3^{-5x + \frac{3}{2}}$$

$$\text{즉, } -\frac{3}{2}x^2 = -5x + \frac{3}{2} \text{이므로 } 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$(3x-1)(x-3) = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 3$$

$$\therefore a = \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$$

방정식 $x^{x^2-6} = x^{2x+9}$ 에서

(i) $x=1$ 일 때, 주어진 방정식은 $1^{-5} = 1^{11}$ 이므로 성립한다.

(ii) $x \neq 1$ 일 때, $x^2-6=2x+9$ 에서 $x^2-2x-15=0$

$$(x+3)(x-5) = 0 \quad \therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 5$$

그런데 $x > 0$ 이므로 $x=5$

(i), (ii)에서 $x=1$ 또는 $x=5$ 이므로

$$b=1+5=6$$

$$\therefore ab=20$$

08 답 ④

$$4^x - k \times 2^{x+1} + 16 = 0 \text{에서 } (2^x)^2 - 2k \times 2^x + 16 = 0$$

$$2^x = t (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 - 2kt + 16 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식이 오직 하나의 실근 α 를 가지므로 이차방정식 ①은 $t > 0$ 에서 한 실근만 갖는다. 즉, 이차방정식 ①은 양수인 중근을 갖거나 양수인 근과 음수인 근을 각각 1개씩 갖는다.

↳ $2^x = t > 0$ 이므로 t 에 대한 이차방정식이 음수인 근을 가져도 주어진 지수방정식은 근을 갖지 않는다.

이때 이차방정식 ①에서 근과 계수의 관계에 의하여 (두 근의 곱) $= 16 > 0$ 이므로 ①은 양수인 중근을 갖는다.

↳ 두 근의 부호가 같다.

즉, 이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = k^2 - 16 = 0$$

$$(k+4)(k-4) = 0 \quad \therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 4$$

이때 이차방정식 ①에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합 $2k$ 가 양수이어야 하므로

$$k > 0 \quad \therefore k = 4$$

이를 ①에 대입하면 $t^2 - 8t + 16 = 0$

$$(t-4)^2 = 0 \quad \therefore t = 4$$

$$\text{즉, } 2^x = 2^2 \text{이므로 } x = 2 \quad \therefore \alpha = 2$$

$$\therefore k + \alpha = 6$$

개념 NOTE

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 $D = b^2 - 4ac$ 라 할 때,

- (1) $D > 0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
- (2) $D = 0$ 이면 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.
- (3) $D < 0$ 이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

09 답 5

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x > \left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}x+6} \text{에서 } \left(\frac{1}{5}\right)^x > \left\{\left(\frac{1}{5}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}x+6}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{5}\right)^x > \left(\frac{1}{5}\right)^{x+12}$$

밑이 1보다 작으므로

$$x^2 < x + 12, x^2 - x - 12 < 0$$

$$(x+3)(x-4) < 0 \quad \therefore -3 < x < 4$$

$$\therefore A = \{x \mid -3 < x < 4\}$$

$$3^{|x-2|} \leq 3^a \text{에서 밑이 1보다 크므로}$$

$$|x-2| \leq a$$

$$-a \leq x-2 \leq a \quad \therefore -a+2 \leq x \leq a+2$$

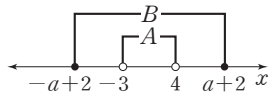
$$\therefore B = \{x \mid -a+2 \leq x \leq a+2\}$$

이때 $A \cap B = A$, 즉 $A \subset B$ 를 만족시키려면

$$-a+2 \leq -3, a+2 \geq 4$$

$$\therefore a \geq 5$$

따라서 양수 a 의 최솟값은 5이다.



10 답 ①

$$(2^{2x} - 2^{x+1} - 8)(3^{2x} - 2 \times 3^{x+2} - 243) \leq 0 \text{에서}$$

$$\{(2^x)^2 - 2 \times 2^x - 8\} \{(3^x)^2 - 18 \times 3^x - 243\} \leq 0$$

$$2^x = s (s > 0), 3^x = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$(s^2 - 2s - 8)(t^2 - 18t - 243) \leq 0$$

$$(s+2)(s-4)(t+9)(t-27) \leq 0$$

$$\text{이때 } s+2 > 0, t+9 > 0 \text{이므로}$$

$$(s-4)(t-27) \leq 0$$

$$\therefore s-4 \geq 0, t-27 \leq 0 \text{ 또는 } s-4 \leq 0, t-27 \geq 0$$

$$\therefore s \geq 4, t \leq 27 \text{ 또는 } s \leq 4, t \geq 27$$

(i) $s \geq 4, t \leq 27$ 일 때,

$$s \geq 4 \text{에서 } 2^x \geq 2^2$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$t \leq 27 \text{에서 } 3^x \leq 3^3$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 2 \leq x \leq 3$$

(ii) $s \leq 4, t \geq 27$ 일 때,

$$s \leq 4 \text{에서 } 2^x \leq 2^2$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x \leq 2 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$t \geq 27 \text{에서 } 3^x \geq 3^3$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x \geq 3 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

③, ④의 공통부분은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $2 \leq x \leq 3$

따라서 자연수 x 의 값은 2, 3이므로 그 합은 $2+3=5$

11 답 $2\sqrt{5}$

두 함수 $f(x) = 3^x + 2$, $g(x) = 3^{x+1}$ 의 그래프가 만나는 점 P의 x 좌표를 구하면

$$3^x + 2 = 3^{x+1}, 3^x + 2 = 3 \times 3^x$$

$$3^x = 1 \quad \therefore x = 0$$

$$\therefore P(0, 3)$$

두 점 $A(a, 3^a + 2)$, $B(b, 3^{b+1})$ 에 대하여 선분 AB의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{3^a + 2 + 3^{b+1}}{2}\right)$$

이 점이 점 P(0, 3)과 일치하므로

$$\frac{a+b}{2} = 0 \text{에서 } a+b=0 \quad \therefore b=-a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{3^a + 2 + 3^{b+1}}{2} = 3 \text{에서 } 3^a + 3 \times 3^b - 4 = 0$$

$$\therefore 3^a + 3 \times 3^{-a} - 4 = 0 (\because \textcircled{1})$$

$$3^a = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t + \frac{3}{t} - 4 = 0, t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$(t-1)(t-3) = 0 \quad \therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

$$\text{즉, } 3^a = 1 \text{ 또는 } 3^a = 3 \text{이므로}$$

$$a=0 \text{ 또는 } a=1$$

그런데 $a=0$ 이면 세 점 A, B, P의 좌표가 모두 같으므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore a=1$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } b=-1$$

$$\text{따라서 } A(1, 5), B(-1, 1) \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = 2\sqrt{5}$$

12 답 ②

$$\frac{Q(4)}{Q(2)} = \frac{Q_0(1-2^{-\frac{4}{a}})}{Q_0(1-2^{-\frac{2}{a}})} = \frac{1-(2^{-\frac{2}{a}})^2}{1-2^{-\frac{2}{a}}}$$

$$= \frac{(1+2^{-\frac{2}{a}})(1-2^{-\frac{2}{a}})}{1-2^{-\frac{2}{a}}} = 1+2^{-\frac{2}{a}}$$

즉, $1+2^{-\frac{2}{a}}=\frac{3}{2}$ 이므로 $2^{-\frac{2}{a}}=\frac{1}{2}$, $2^{-\frac{2}{a}}=2^{-1}$

따라서 $-\frac{2}{a}=-1$ 이므로 $a=2$

STEP 2 고난도 문제 36~40쪽					
01 130	02 49	03 ⑤	04 ③	05 $\sqrt{2}$	06 ④
07 8	08 ①	09 ⑤	10 $-\frac{1}{2}$	11 ②	12 2
13 ③	14 ⑤	15 2	16 ④	17 81	18 ②
19 12	20 3	21 $\sqrt{2}<a<8$	22 ②	23 ①	
24 14	25 ②				

01 답 130

$f(p)f(q)=14$ 에서 $(a^{2p}+a^{-2p})(a^{2q}+a^{-2q})=14$
 $a^{2p+2q}+a^{2p-2q}+a^{-2p+2q}+a^{-2p-2q}=14$ 배점 20%
 $g(p)g(q)=8$ 에서 $(a^{2p}-a^{-2p})(a^{2q}-a^{-2q})=8$
 $a^{2p+2q}-a^{2p-2q}-a^{-2p+2q}+a^{-2p-2q}=8$ 배점 20%
 ㉠+㉡을 하면 $2a^{2p+2q}+2a^{-2p-2q}=22$
 $a^{2(p+q)}+a^{-2(p+q)}=11$ $\therefore f(p+q)=11$ 배점 20%
 ㉠-㉡을 하면 $2a^{2p-2q}+2a^{-2p+2q}=6$
 $a^{2(p-q)}+a^{-2(p-q)}=3$ $\therefore f(p-q)=3$ 배점 20%
 $\therefore \{f(p-q)\}^2+\{f(p+q)\}^2=3^2+11^2=9+121=130$ 배점 20%

02 답 49

$f(x)=\frac{9^x}{9^x-3}$ 에서
 $f(1-x)=\frac{9^{1-x}}{9^{1-x}-3}=\frac{9}{9-3 \times 9^x}=\frac{3}{3-9^x}=-\frac{3}{9^x-3}$
 $\therefore f(x)+f(1-x)=\frac{9^x}{9^x-3}+\left(-\frac{3}{9^x-3}\right)=\frac{9^x-3}{9^x-3}=1$
 따라서 $f\left(\frac{1}{99}\right)+f\left(\frac{98}{99}\right)=1$, $f\left(\frac{2}{99}\right)+f\left(\frac{97}{99}\right)=1$,
 $f\left(\frac{3}{99}\right)+f\left(\frac{96}{99}\right)=1$, ..., $f\left(\frac{49}{99}\right)+f\left(\frac{50}{99}\right)=1$ 이므로
 $f\left(\frac{1}{99}\right)+f\left(\frac{2}{99}\right)+f\left(\frac{3}{99}\right)+\cdots+f\left(\frac{98}{99}\right)=49 \times 1=49$

다른 풀이

$$f\left(\frac{1}{99}\right)+f\left(\frac{98}{99}\right)=\frac{\frac{9}{99}}{\frac{9}{99}-3}+\frac{\frac{9^{98}}{99}}{\frac{9^{98}}{99}-3}=\frac{\frac{1}{99}(\frac{9^{98}}{99}-3)+\frac{9^{98}}{99}(\frac{1}{99}-3)}{(\frac{1}{99}-3)(\frac{9^{98}}{99}-3)}$$

$$=\frac{9-3 \times \frac{1}{99}+9-3 \times \frac{9^{98}}{99}}{9-3 \times \frac{1}{99}-3 \times \frac{9^{98}}{99}}=1$$

같은 방법으로 하면

$$\frac{\frac{2}{99}}{\frac{2}{99}-3}+\frac{\frac{97}{99}}{\frac{97}{99}-3}=\cdots=\frac{\frac{49}{99}}{\frac{49}{99}-3}+\frac{\frac{50}{99}}{\frac{50}{99}-3}=1$$

03 답 ⑤

ㄱ. $x=-x'$ ($x'>0$)으로 놓으면

$$f(x)=a^x=a^{-x'}=\left(\frac{1}{a}\right)^{x'}, g(x)=b^x=b^{-x'}=\left(\frac{1}{b}\right)^{x'}$$

$0<a<b$ 이면 $0<\frac{1}{b}<\frac{1}{a}$ 이므로

$$\left(\frac{1}{b}\right)^{x'}<\left(\frac{1}{a}\right)^{x'} \therefore g(x)<f(x)$$

양수 a, b, n 에 대하여 $a<b \Leftrightarrow a^n<b^n$

ㄴ. $f(2)<1$ 에서 $a^2<1$, $a^2-1<0$

$$(a+1)(a-1)<0 \therefore -1<a<1$$

그런데 $a>0$ 이므로 $0<a<1$ ㉠

$$1<g(2) \text{에서 } 1<b^2, b^2-1>0$$

$$(b+1)(b-1)>0 \therefore b<-1 \text{ 또는 } b>1$$

그런데 $b>0$ 이므로 $b>1$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a<1<b$

ㄷ. $f(-x)=g(x)$ 에서 $a^{-x}=b^x \therefore \left(\frac{1}{a}\right)^x=b^x$

이 식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로 $\frac{1}{a}=b$

$$0<a<b \text{에서 } 0<a<\frac{1}{a}$$

$$a<\frac{1}{a} \text{에서 } a^2<1, a^2-1<0$$

$$(a+1)(a-1)<0 \therefore -1<a<1$$

그런데 $a>0$ 이므로 $0<a<1$

$$b=\frac{1}{a} \text{이므로 } b>1$$

$$\therefore 0<a<1<b$$

$$f(-a)=a^{-a}=\left(\frac{1}{a}\right)^a=b^a, g(b)=b^b \text{이고 } b^a<b^b \text{이므로}$$

$$f(-a)<g(b)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

04 답 ③

두 점 A, C의 x 좌표를 각각 k ($k>0$), m 이라 하면

$$A(k, 1-2^{-k}), B(k, 2^k), C(m, 2^m), D(m, 1-2^{-m})$$

두 점 A, C의 y 좌표가 같으므로

$$1-2^{-k}=2^m \text{ ㉠}$$

$$\overline{AB}=2^k-(1-2^{-k})=2^k+2^{-k}-1$$

$$\overline{CD}=2^m-(1-2^{-m})=2^m+2^{-m}-1$$

이고 $\overline{AB}=2\overline{CD}$ 이므로

$$2^k+2^{-k}-1=2(2^m+2^{-m}-1) \text{ ㉡}$$

㉠에 ㉡을 대입하면

$$2^k+2^{-k}-1=2\left(1-2^{-k}+\frac{1}{1-2^{-k}}-1\right)$$

$$\therefore 2^k+2^{-k}-1=2\left(-2^{-k}+\frac{1}{1-2^{-k}}\right)$$

이때 $2^k=a$ ($a>0$)로 놓으면

$$a+\frac{1}{a}-1=2\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{1-\frac{1}{a}}\right)$$

$$a+\frac{1}{a}-1=2\left(-\frac{1}{a}+\frac{a}{a-1}\right)$$

$$\frac{a^2-a+1}{a}=\frac{2(a^2-a+1)}{a(a-1)}$$

이때 $a \neq 0$, $a^2-a+1 \neq 0$ 이므로

$$a^2-a+1=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

$$1=\frac{2}{a-1}, a-1=2$$

$$\therefore a=3$$

따라서 $x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}k$, $y_1 = \frac{3}{2}k$ 이므로

$$A\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k, \frac{3}{2}k\right)$$

직선 AB가 직선 $y = -\sqrt{3}x$ 에 수직이므로 직선 AB의 기울기는

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{이다.}$$

즉, 직선 AB와 x 축이 이루는 예각의 크기는 30° 이다.

점 A에서 선분 BG에 내린 수선의 발을 C
라 하면 그림과 같이 직각삼각형 ABC에서
 $\angle BAC = 30^\circ$ 이므로

$$x_2 - x_1 = 4k \cos 30^\circ = 4k \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}k \text{에서}$$

$$x_2 = x_1 + 2\sqrt{3}k = -\frac{\sqrt{3}}{2}k + 2\sqrt{3}k = \frac{3\sqrt{3}}{2}k$$

$$y_2 - y_1 = 4k \sin 30^\circ = 4k \times \frac{1}{2} = 2k \text{에서}$$

$$y_2 = y_1 + 2k = \frac{3}{2}k + 2k = \frac{7}{2}k$$

$$\therefore B\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}k, \frac{7}{2}k\right)$$

점 A는 곡선 $y = a^{-2x} - 1$ 위의 점이므로

$$\frac{3}{2}k = a^{\sqrt{3}k} - 1 \text{에서 } a^{\sqrt{3}k} = \frac{3}{2}k + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 B는 곡선 $y = a^x - 1$ 위의 점이므로

$$\frac{7}{2}k = a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k} - 1 \text{에서 } a^{\frac{3\sqrt{3}}{2}k} = \frac{7}{2}k + 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \left(\frac{3}{2}k + 1\right)^3 = \left(\frac{7}{2}k + 1\right)^2$$

$$27k^3 - 44k^2 - 20k = 0, k(k-2)(27k+10) = 0$$

$$\therefore k = -\frac{10}{27} \text{ 또는 } k = 0 \text{ 또는 } k = 2$$

그런데 $k > 0$ 이므로 $k = 2$

따라서 선분 AB의 길이는 $\overline{AB} = 4k = 8$

다른 풀이

y_1, y_2 는 다음과 같은 방법으로도 구할 수 있다.

그림과 같이 직선 AB가 x 축과 만나는 점을 P
라 하면 직각삼각형 APH에서

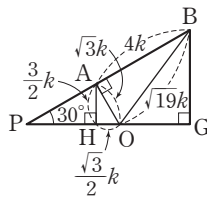
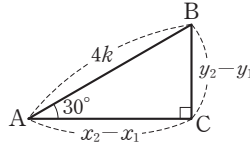
$$\overline{AP} = \frac{\frac{3}{2}k}{\sin 30^\circ} = \frac{3}{2}k \times 2 = 3k$$

$\overline{BP} = 3k + 4k = 7k$ 이므로 직각삼각형 BPG에

$$\text{서 } \overline{BG} = 7k \sin 30^\circ = 7k \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2}k$$

따라서 직각삼각형 BOG에서

$$\overline{OG} = \sqrt{(\sqrt{19}k)^2 - \left(\frac{7}{2}k\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}k$$



08 답 ①

$f(x) = a^x - 3$ 이므로 $|f(x)| = |a^x - 3|$
에서

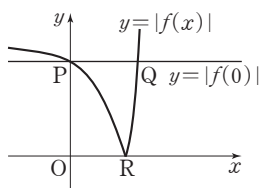
$$|f(0)| = |1 - 3| = 2$$

$$\therefore P(0, 2)$$

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 x 축이 만나
는 점 R의 x 좌표를 구하면

$$a^x - 3 = 0, a^x = 3 \quad \therefore x = \log_a 3$$

$$\therefore R(\log_a 3, 0)$$



함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y = |f(0)|$, 즉 $y = 2$ 가 만나는 점 Q
의 x 좌표가 α 이므로

$$a^\alpha - 3 = 2, a^\alpha = 5 \quad \therefore \alpha = \log_a 5$$

$$\therefore Q(\log_a 5, 2)$$

$\overline{PR} = 2\overline{PQ}$ 에서 $\overline{PR}^2 = 4\overline{PQ}^2$ 이므로

$$(\log_a 3)^2 + (-2)^2 = 4(\log_a 5)^2$$

$$\left(\frac{\log_5 3}{\log_5 a}\right)^2 + 4 = 4\left(\frac{1}{\log_5 a}\right)^2 \rightarrow \text{구하는 식이 } \log_5 a \text{를 포함하고 있으므로}$$

$\log_5 a = t$ 로 놓으면

$$\frac{(\log_5 3)^2}{t^2} + 4 = \frac{4}{t^2}, \frac{(\log_5 3)^2 - 4}{t^2} = -4$$

$$t^2 = -\frac{(\log_5 3)^2 - 4}{4} = -\frac{(\log_5 3)^2}{4} + 1$$

$$\therefore 1 - t^2 = \frac{(\log_5 3)^2}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{(1 + \log_5 a)(1 - \log_5 a)} &= \sqrt{1 - (\log_5 a)^2} = \sqrt{1 - t^2} \\ &= \sqrt{\frac{(\log_5 3)^2}{4}} = \frac{1}{2} \log_5 3 \end{aligned}$$

09 답 ⑤

$P(\alpha, 2^\alpha)$, $Q(\beta, 2^\beta)$ 이므로

$$P_1(\alpha, 0), Q_1(\beta, 0), P_2(0, 2^\alpha), Q_2(0, 2^\beta)$$

$$\therefore S_1 + S_2 = \square OQ_1QQ_2 - \square OP_1PP_2 = \beta \times 2^\beta - \alpha \times 2^\alpha$$

이때 $S_1 = S_2$ 이므로

$$2S_1 = \beta \times 2^\beta - \alpha \times 2^\alpha$$

$$\therefore S_1 = S_2 = \frac{\beta \times 2^\beta - \alpha \times 2^\alpha}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore S_1 = \frac{1}{2}(2^\alpha + 2^\beta)(\beta - \alpha)$$

$$= \frac{1}{2}(\beta \times 2^\alpha - \alpha \times 2^\alpha + \beta \times 2^\beta - \alpha \times 2^\beta)$$

$$S_2 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(2^\beta - 2^\alpha)$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha \times 2^\beta - \alpha \times 2^\alpha + \beta \times 2^\beta - \beta \times 2^\alpha)$$

$S_1 = S_2$ 에서 $S_2 - S_1 = 0$ 이므로

$$\alpha \times 2^\beta - \beta \times 2^\alpha = 0$$

$$\alpha \times 2^\beta = \beta \times 2^\alpha \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore \frac{2^\alpha}{\alpha} = \frac{2^\beta}{\beta}$$

이때 $\frac{2^\alpha}{\alpha}$ 은 직선 OP의 기울기이고, $\frac{2^\beta}{\beta}$ 은 직선 OQ의 기울기이다.

따라서 두 직선 OP, OQ의 기울기가 서로 같으므로 세 점 O, P, Q
는 한 직선 위에 있다.

ㄷ. $\beta = \alpha + 1$ 을 ②에 대입하면

$$\alpha \times 2^{\alpha+1} = (\alpha + 1) \times 2^\alpha$$

$$2\alpha \times 2^\alpha = (\alpha + 1) \times 2^\alpha$$

$$2^\alpha(\alpha - 1) = 0$$

$$\therefore \alpha = 1 (\because 2^\alpha > 0)$$

$$\beta = \alpha + 1 \text{이므로 } \beta = 2$$

$\alpha = 1, \beta = 2$ 를 ①에 대입하면

$$S_1 = \frac{2 \times 2^2 - 1 \times 2}{2} = 3$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 답 $-\frac{1}{2}$

(i) $0 < a < 1$ 일 때,

$a^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $-3 \leq x \leq 0$ 에서

$$a^0 \leq a^x \leq a^{-3} \quad \therefore 1 \leq t \leq a^{-3}$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 4t + 3 = (t-2)^2 - 1$$

$a^{-3} \leq 3$ 이면 $1 \leq t \leq a^{-3}$ 에서 $t=1$ 일 때 최댓값이 0이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore a^{-3} > 3$$

$1 \leq t \leq a^{-3}$ 에서 $t=a^{-3}$ 일 때 최댓값이 35이므로

$$(a^{-3})^2 - 4a^{-3} + 3 = 35$$

$$(a^{-3})^2 - 4a^{-3} - 32 = 0$$

$$(a^{-3} + 4)(a^{-3} - 8) = 0$$

$$\therefore a^{-3} = 8 \quad (\because a^{-3} > 3)$$

$$\therefore a = 8^{-\frac{1}{3}} = (2^3)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

따라서 함수 $y = t^2 - 4t + 3 = (t-2)^2 - 1$ 은 $1 \leq t \leq 8$ 에서 $t=2$ 일 때 최솟값이 -1 이므로

$$m = -1 \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

(ii) $a=1$ 일 때,

주어진 함수는 $y=0$ 이므로 최댓값이 35일 수 없다. $\dots\dots\dots$ 배점 20%

(iii) $a > 1$ 일 때,

$a^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $-3 \leq x \leq 0$ 에서

$$a^{-3} \leq a^x \leq a^0 \quad \therefore a^{-3} \leq t \leq 1$$

이때 주어진 함수는

$$y = t^2 - 4t + 3 = (t-2)^2 - 1$$

$a^{-3} \leq t \leq 1$ 에서 $t=a^{-3}$ 일 때 최댓값을 갖는다.

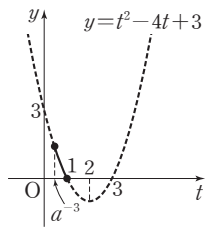
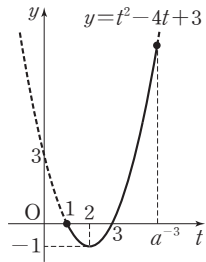
그런데 $a^{-3} > 0$ 이므로 최댓값은 3보다 작다.

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

$$\dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

(i), (ii), (iii)에서 $a = \frac{1}{2}$, $m = -1$ 이므로

$$a + m = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$



12 답 2

$$5(6^x + 4^x) = 4(9^x - 4^x) \text{에서}$$

$$5 \times 6^x + 5 \times 4^x = 4 \times 9^x - 4 \times 4^x$$

$$9 \times 4^x + 5 \times 6^x - 4 \times 9^x = 0$$

양변을 9^x 으로 나누면

$$9 \times \left(\frac{4}{9}\right)^x + 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0$$

$$9 \times \left\{\left(\frac{2}{3}\right)^x\right\}^2 + 5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^x - 4 = 0$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = t \quad (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$9t^2 + 5t - 4 = 0$$

$$(t+1)(9t-4) = 0 \quad \therefore t = \frac{4}{9} \quad (\because t > 0)$$

$$\text{따라서 } \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \text{이므로}$$

$$x = 2$$

다른 풀이

$$5(6^x + 4^x) = 4(9^x - 4^x) \text{에서}$$

$$5\{(2 \times 3)^x + 2^{2x}\} = 4(3^{2x} - 2^{2x})$$

$$5 \times 2^x(3^x + 2^x) = 4(3^x + 2^x)(3^x - 2^x)$$

$$3^x + 2^x > 0 \text{이므로}$$

$$5 \times 2^x = 4(3^x - 2^x)$$

$$5 \times 2^x = 4 \times 3^x - 4 \times 2^x$$

$$9 \times 2^x = 4 \times 3^x$$

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{4}{9}, \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \therefore x = 2$$

13 답 ③

$2^x = 3^y$ 에서 양변을 제곱하면

$$2^{2x} = 3^{2y}$$

$$2^{2x} = 3^{2y} > 0 \text{이므로 } 3^{2x-2} = 2^{2y+2} \text{에서}$$

$$\frac{3^{2x-2}}{3^{2y}} = \frac{2^{2y+2}}{2^{2x}}, 3^{2x-2y-2} = 2^{-2x+2y+2}$$

$$3^{2x-2y-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-2y-2}$$

밑이 서로 다르고 지수가 같으므로

$$2x - 2y - 2 = 0, 2x - 2y = 2$$

$$\therefore x - y = 1$$

다른 풀이

$2^x = 3^y$ 에서 양변을 제곱하면

$$2^{2x} = 3^{2y}$$

$$3^{2x-2} = 2^{2y+2} \text{에서}$$

$$\frac{1}{9} \times 3^{2x} = 4 \times 2^{2y}$$

$$\text{이때 } 2^{2x} = 3^{2y} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{3^{2y}} \times \frac{1}{9} \times 3^{2x} = \frac{1}{2^{2x}} \times 4 \times 2^{2y}$$

$$\frac{1}{9} \times 3^{2x-2y} = 4 \times \frac{1}{2^{2x-2y}}$$

$$3^{2x-2y} \times 2^{2x-2y} = 36$$

$$6^{2x-2y} = 6^2$$

$$\text{따라서 } 2x - 2y = 2 \text{이므로}$$

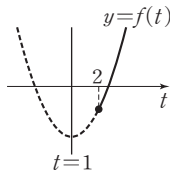
$$x - y = 1$$

14 답 ⑤

$9^{2x} + 9^{2y} + k^2(x^2 + y^2) - 2k(x \times 9^x + y \times 9^y) = 0$ 에서
 $\{(9^x)^2 - 2kx \times 9^x + k^2x^2\} + \{(9^y)^2 - 2ky \times 9^y + k^2y^2\} = 0$
 $(9^x - kx)^2 + (9^y - ky)^2 = 0$
 $(9^x - kx)^2 \geq 0, (9^y - ky)^2 \geq 0$ 이므로
 $9^x - kx = 0, 9^y - ky = 0 \quad \therefore k = \frac{9^x}{x}, k = \frac{9^y}{y}$
 $\therefore \frac{9^x}{x} = \frac{9^y}{y}$ 이고 $x = 3y$ 이므로
 $\frac{9^{3y}}{3y} = \frac{9^y}{y}, 9^{3y} = 3 \times 9^y$
 $3^{6y} = 3 \times 3^{2y}, 3^{6y} = 3^{2y+1}$
 따라서 $6y = 2y + 1$ 이므로 $4y = 1 \quad \therefore y = \frac{1}{4}$
 $\therefore k = \frac{9^y}{y} = 4 \times 9^{\frac{1}{4}} = 4 \times 3^{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{3}$

15 답 2

$a^{2x} + a^{-2x} - 2(a^x + a^{-x}) + n = 0$ 에서 $a^x + a^{-x} = t$ 로 놓으면 $a^x > 0$,
 $a^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $a^x + a^{-x} \geq 2\sqrt{a^x \times a^{-x}} = 2$ (단, 등호는 $a^x = a^{-x}$, 즉 $x = 0$ 일 때 성립)
 $\therefore t \geq 2$ 배점 30%
 $a^{2x} + a^{-2x} = (a^x + a^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2$ 이므로 주어진 방정식은
 $t^2 - 2t + n - 2 = 0$ ①
 주어진 방정식이 적어도 하나의 실근을 가지려면
 이차방정식 ①이 $t \geq 2$ 에서 적어도 하나의 실근을
 가져야 한다.
 $f(t) = t^2 - 2t + n - 2 = (t-1)^2 + n - 3$ 이라 하면
 함수 $y = f(t)$ 의 그래프의 축이 직선 $t = 1$ 이므로
 $f(2) \leq 0$ 이어야 한다.배점 40%
 $f(2) \leq 0$ 에서 $n - 2 \leq 0 \quad \therefore n \leq 2$
 따라서 자연수 n 은 1, 2의 2개이다.배점 30%



16 답 ④

$p = \sqrt{2} - 1$ 이라 하면 $0 < p < 1$ 이고
 $p^2 = (\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$
 $(\sqrt{2} - 1)^m \geq (3 - 2\sqrt{2})^{5-n}$ 에서 $p^m \geq (p^2)^{5-n} \quad \therefore p^m \geq p^{10-2n}$
 밑이 1보다 작으므로 $m \leq 10 - 2n$ ①
 (i) $n = 1$ 일 때,
 ①에서 $m \leq 8$ 이므로 자연수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 은 (1, 1),
 (2, 1), (3, 1), ..., (8, 1)의 8개이다.
 (ii) $n = 2$ 일 때,
 ①에서 $m \leq 6$ 이므로 자연수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 은 (1, 2),
 (2, 2), (3, 2), ..., (6, 2)의 6개이다.
 (iii) $n = 3$ 일 때,
 ①에서 $m \leq 4$ 이므로 자연수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 은 (1, 3),
 (2, 3), (3, 3), (4, 3)의 4개이다.
 (iv) $n = 4$ 일 때,
 ①에서 $m \leq 2$ 이므로 자연수 m, n 의 순서쌍 (m, n) 은 (1, 4),
 (2, 4)의 2개이다.
 (v) $n \geq 5$ 일 때,
 ①을 만족시키는 자연수 m 은 존재하지 않는다.

(i)~(v)에서 순서쌍 (m, n) 의 개수는
 $8 + 6 + 4 + 2 = 20$

17 답 81

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 $(3^{-1})^2 \leq 3^{-x} \leq (3^{-1})^{-2}$
 $3^{-x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $\frac{1}{9} \leq t \leq 9$ ①
 $a \times 3^{-x} \leq 3^{-2x+1} \leq b \times 27^{-x}$ 에서
 $a \times 3^{-x} \leq 3 \times (3^{-x})^2 \leq b \times (3^{-x})^3$
 $\therefore at \leq 3t^2 \leq bt^3$
 $at \leq 3t^2$ 에서 $3t^2 - at \geq 0$
 $t(3t - a) \geq 0 \quad \therefore t \geq \frac{a}{3}$ ($\because t > 0$) ②
 또 $3t^2 \leq bt^3$ 에서
 $bt^3 - 3t^2 \geq 0, t^2(bt - 3) \geq 0$
 $\therefore bt - 3 \geq 0$ ($\because t^2 > 0$)
 이때 $b \leq 0$ 이면 ①에서 $bt - 3 < 0$ 이므로 $b > 0$
 $\therefore 9b \leq bt \leq \frac{1}{9}b$ 이므로 $9b - 3 \leq bt - 3 \leq \frac{1}{9}b - 3 < 0$
 $\therefore t \geq \frac{3}{b}$ ③
 ①에서 t 의 최솟값이 $\frac{1}{9}$ 이므로 ②, ③이 성립하려면
 $\frac{a}{3} \leq \frac{1}{9}, \frac{3}{b} \leq \frac{1}{9} \quad \therefore a \leq \frac{1}{3}, b \geq 27$
 $\therefore \frac{1}{a} \geq \frac{3}{b}$
 따라서 $\frac{b}{a} \geq 3 \times 27 = 81$ 이므로 $\frac{b}{a}$ 의 최솟값은 81이다.

18 답 ②

$f(35)g(85) = 2^{365}$ 에서 $a^{35} \times b^{85} = 2^{365}$ 이므로 자연수 a, b 의 소인수는 2
 뿐이다.
 즉, $a = 2^m, b = 2^n$ (m, n 은 자연수)이라 하면 $a^{35} \times b^{85} = 2^{365}$ 에서
 $(2^m)^{35} \times (2^n)^{85} = 2^{365}, 2^{35m+85n} = 2^{365}$
 이때 $35m + 85n = 365$ 이므로
 $7m + 17n = 73$ ①
 (i) $n = 1$ 일 때,
 ①에서 $7m = 56$ 이므로 $m = 8$
 (ii) $n = 2$ 일 때,
 ①에서 $7m = 39$ 이므로 자연수 m 은 존재하지 않는다.
 (iii) $n = 3$ 일 때,
 ①에서 $7m = 22$ 이므로 자연수 m 은 존재하지 않는다.
 (iv) $n = 4$ 일 때,
 ①에서 $7m = 5$ 이므로 자연수 m 은 존재하지 않는다.
 (v) $n \geq 5$ 일 때,
 ①에서 $7m \leq -12$ 이므로 자연수 m 은 존재하지 않는다.
 (i)~(v)에서 $m = 8, n = 1$ 이므로
 $a = 2^8, b = 2 \quad \therefore f(x) = 2^{8x}, g(x) = 2^x$
 $f(x) \geq g(x^2 + x - 60)$ 에서
 $2^{8x} \geq 2^{x^2+x-60}$
 밑이 1보다 크므로
 $8x \geq x^2 + x - 60, x^2 - 7x - 60 \leq 0$
 $(x+5)(x-12) \leq 0 \quad \therefore -5 \leq x \leq 12$
 따라서 정수 x 는 $-5, -4, -3, \dots, 12$ 의 18개이다.

19 답 12

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - (3n+16) \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 48n \leq 0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\} - (3n+16) \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 48n \leq 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - (3n+16)t + 48n \leq 0$$

$$(t-3n)(t-16) \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(i) $3n < 16$ 일 때,

부등식 ⑦의 해는 $3n \leq t \leq 16$ 이므로

$$3n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 16, \quad 3n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

이를 만족시키는 정수 x 가 2개이어야 하므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} < 3n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$4 < 3n \leq 8$$

$$\therefore \frac{4}{3} < n \leq \frac{8}{3}$$

따라서 자연수 n 은 2의 1개이다.

(ii) $3n > 16$ 일 때,

부등식 ⑦의 해는 $16 \leq t \leq 3n$ 이므로

$$16 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 3n, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 3n$$

이를 만족시키는 정수 x 가 2개이어야 하므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \leq 3n < \left(\frac{1}{2}\right)^{-6}$$

$$32 \leq 3n < 64$$

$$\therefore \frac{32}{3} \leq n < \frac{64}{3}$$

따라서 자연수 n 은 11, 12, 13, ..., 21의 11개이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 의 개수는

$$1 + 11 = 12$$

idea
20 답 3

$x^{ax+7} \geq x^{4x^2+6}$ 에서 $x=1$ 이면 $1 \geq 1$ 이므로 항상 성립한다.

이때 주어진 부등식을 만족시키는 양수 x 가 오직 한 개만 존재하므로

$x \neq 1, x > 0$ 일 때 부등식이 성립하지 않아야 한다.

(i) $0 < x < 1$ 일 때,

$$x^{ax+7} \geq x^{4x^2+6} \text{에서 밑이 1보다 작으므로}$$

$$ax+7 \leq 4x^2+6$$

$$4x^2 - ax - 1 \geq 0$$

이때 $0 < x < 1$ 에서 이 부등식이 성립하지 않아야 하므로 $0 < x < 1$ 에서 부등식 $4x^2 - ax - 1 < 0$ 이 항상 성립해야 한다.

따라서 $f(x) = 4x^2 - ax - 1$ 이라 하면 $f(0) \leq 0, f(1) \leq 0$ 이어야 한다.

$$f(0) \leq 0 \text{에서 } -1 \leq 0$$

$$f(1) \leq 0 \text{에서 } 3 - a \leq 0$$

$$\therefore a \geq 3$$

(ii) $x > 1$ 일 때,

$$x^{ax+7} \geq x^{4x^2+6} \text{에서 밑이 1보다 크므로}$$

$$ax+7 \geq 4x^2+6$$

$$4x^2 - ax - 1 \leq 0$$

이때 $x > 1$ 에서 이 부등식이 성립하지 않아야 하므로 $x > 1$ 에서 부등식 $4x^2 - ax - 1 > 0$ 이 항상 성립해야 한다.

이차방정식 $4x^2 - ax - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면 $D = a^2 + 16 > 0$

이므로 이차방정식 $4x^2 - ax - 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 $f(x) = 4x^2 - ax - 1 = 4\left(x - \frac{a}{8}\right)^2 - 1 - \frac{a^2}{16}$ 이라 하면 함수

$y = f(x)$ 의 그래프의 축이 직선 $x = \frac{a}{8}$ 이므로 $\frac{a}{8} < 1$ 이어야 하고,

$f(1) \geq 0$ 이어야 한다.

$$\frac{a}{8} < 1 \text{에서 } a < 8 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$f(1) \geq 0 \text{에서 } 3 - a \geq 0 \quad \therefore a \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

⑧, ⑨에서 $a \leq 3$

(i), (ii)에서 $a \geq 3, a \leq 3$ 이므로

$$a = 3$$

21 답 $\sqrt{2} < a < 8$

$f(x) = 2^{3|x-1|} + 1, g(x) = a^{x+1}$ 이라 하면

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-3(x-1)} + 1 & (x < 1) \\ 2^{3(x-1)} + 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

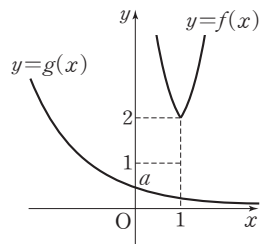
$$= \begin{cases} \left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} + 1 & (x < 1) \\ 8^{x-1} + 1 & (x \geq 1) \end{cases}$$

방정식 $2^{3|x-1|} + 1 = a^{x+1}$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 두 함수

$y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

(i) $0 < a < 1$ 일 때,

두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프는 그림과 같고 $g(1) = a^2 < 1$ 이므로 두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프는 $x \geq 1$ 에서 만나지 않고 $x < 1$ 에서 한 점에서 만나거나 만나지 않는다.



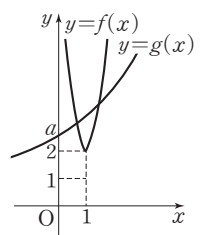
(ii) $a = 1$ 일 때,

$g(x) = 1$ 이고, 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 2이므로 두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프는 만나지 않는다.

(iii) $a > 1$ 일 때,

두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나려면 그림과 같이 $g(1) > 2$ 이고, $a < 8$ 이어야 한다.

$g(1) > 2$ 에서 $a^2 > 2$ $\rightarrow a \geq 8$ 이면 두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프는 한 점에서 만난다.
 $a^2 - 2 > 0, (a + \sqrt{2})(a - \sqrt{2}) > 0$
 $\therefore a > \sqrt{2} \ (\because a > 1)$



이때 $a < 8$ 이므로 $\sqrt{2} < a < 8$

(i), (ii), (iii)에서 $\sqrt{2} < a < 8$

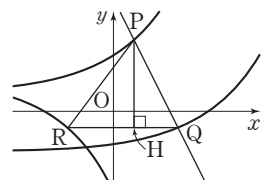
22 답 ②

점 P에서 직선 QR에 내린 수선의 발을

H라 하고, $\overline{HQ} = t \ (t > 0)$ 라 하면 직선

PQ의 기울기가 -2 이므로

$$\overline{PH} = 2t, \overline{HR} = 5 - t$$



$\overline{PR}=5$ 이므로 직각삼각형 PRH에서

$$5^2=(5-t)^2+(2t)^2, 25=5t^2-10t+25$$

$$t^2-2t=0, t(t-2)=0 \quad \therefore t=2 (\because t>0)$$

$$\therefore \overline{PH}=4, \overline{HR}=3$$

점 R의 x좌표를 m 이라 하면 점 P의 x좌표는 $m+3$, 점 Q의 x좌표는 $m+5$ 이므로

$$P(m+3, a^{m+4}+1), Q(m+5, a^{m+2}-\frac{7}{4}), R(m, -a^{m+4}+\frac{3}{2})$$

$\overline{PH}=4$ 에서 점 P의 y좌표는 점 R의 y좌표보다 4만큼 크므로

$$a^{m+4}+1=(-a^{m+4}+\frac{3}{2})+4 \quad \therefore a^{m+4}=\frac{9}{4} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 두 점 Q, R의 y좌표가 같으므로

$$a^{m+2}-\frac{7}{4}=-a^{m+4}+\frac{3}{2}$$

위의 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$a^{m+2}-\frac{7}{4}=-\frac{9}{4}+\frac{3}{2} \quad \therefore a^{m+2}=1$$

$$\text{이때 } a>1 \text{이므로 } m+2=0 \quad \therefore m=-2$$

$$m=-2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } a^2=\frac{9}{4} \quad \therefore a=\frac{3}{2} (\because a>1)$$

점 P($1, \frac{13}{4}$)이 직선 $y=-2x+k$ 위의 점이므로

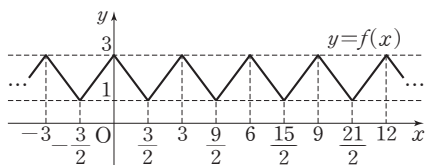
$$\frac{13}{4}=-2 \times 1+k \quad \therefore k=\frac{21}{4}$$

$$\therefore a+k=\frac{27}{4}$$

23 답 ①

$$f(x)=\left|\frac{4}{3}x-2\right|+1=\begin{cases} -\frac{4}{3}x+3 & (0 \leq x < \frac{3}{2}) \\ \frac{4}{3}x-1 & (\frac{3}{2} \leq x < 3) \end{cases}$$

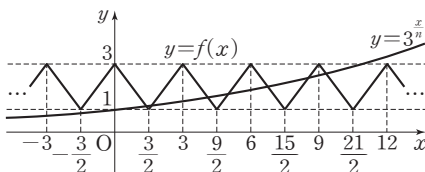
모든 실수 x 에 대하여 $f(x+3)=f(x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



자연수 n 에 대하여 함수 $y=3^{\frac{x}{n}}$ 의 그래프는 두 점 $(0, 1), (n, 3)$ 을 지나므로 $x \leq 0, x > n$ 일 때 두 함수 $y=3^{\frac{x}{n}}, y=f(x)$ 의 그래프는 만나지 않는다.

$n=9$ 일 때 두 함수 $y=3^{\frac{x}{9}}, y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 점은 6개이고,

$n=12$ 일 때 두 함수 $y=3^{\frac{x}{12}}, y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 점은 8개이므로 두 함수 $y=3^{\frac{x}{n}}, y=f(x)$ 의 그래프가 만나는 점이 7개가 되려면 그림과 같아야 한다.



$$\text{즉, } f(9) > 3^{\frac{9}{9}}, f(12) < 3^{\frac{12}{12}} \text{이어야 하고, } f(9)=f(12)=3 \text{이므로}$$

$$3^{\frac{9}{n}} < 3 < 3^{\frac{12}{n}}$$

밑이 1보다 크므로

$$\frac{9}{n} < 1 < \frac{12}{n}$$

$$\therefore 9 < n < 12 (\because n > 0)$$

따라서 자연수 n 의 값은 10, 11이므로 그 합은 $10+11=21$

24 답 14

$f(x)=|8^x-3|, g(x)=2^{x+k}$ 이라 하자.

$$f(0)=|1-3|=2,$$

$$f(3)=|512-3|=509 \text{이므로 두 함수}$$

$y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 만나는

두 점의 x좌표 α, β 에 대하여 그림과 같

이 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 $\textcircled{1}$ 보다 위

쪽에 있으면 $\beta > 3$ 이고, $\textcircled{1}$ 보다 아래쪽에

있으면 $\alpha > 0$ 이다.

따라서 $\alpha < 0, 0 < \beta < 3$ 을 만족시키려면

함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 $\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 사이에 있어야 한다.

즉, $g(0) > f(0), g(3) < f(3)$ 이어야 한다.

(i) $g(0) > f(0)$ 일 때,

$$g(0) > 2 \text{에서 } 2^k > 2$$

밑이 1보다 크므로

$$k > 1$$

(ii) $g(3) < f(3)$ 일 때,

$$g(3) < 509 \text{에서 } 2^{3+k} < 509$$

$$8 \times 2^k < 509$$

$$2^k < 63.625$$

이때 k 는 자연수이므로

$$2^k \leq 2^5 < 63.625 < 2^6$$

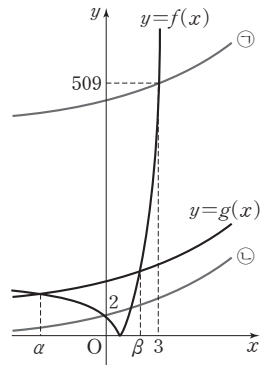
밑이 1보다 크므로

$$k \leq 5$$

(i), (ii)에서 $1 < k \leq 5$

따라서 자연수 k 의 값은 2, 3, 4, 5이므로 그 합은

$$2+3+4+5=14$$

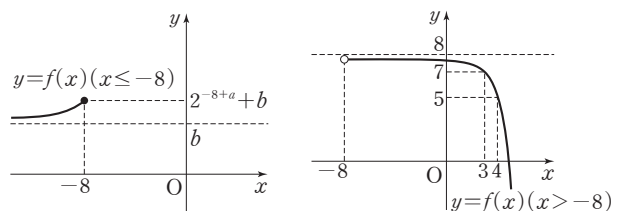


25 답 ②

함수 $y=2^{x+a}+b$ 의 그래프의 점근선은 직선 $y=b$

함수 $y=-3^{x-3}+8$ 의 그래프의 점근선은 직선 $y=8$ 이고 그래프는 두 점 $(3, 7), (4, 5)$ 를 지난다.

따라서 두 함수 $y=2^{x+a}+b (x \leq -8), y=-3^{x-3}+8 (x > -8)$ 의 그래프는 각각 그림과 같다.



또 주어진 조건에서 $3 < k < 4$ 이므로 $x > -8$ 인 경우에 정수 $f(x)$ 는 $f(x)=6$ 또는 $f(x)=7$

따라서 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $x \leq -8$ 인 경우에 정수 $f(x)$ 는 6뿐이어야 한다.

즉, $b=5$ 이고 $6 \leq f(-8) < 7$ 이어야 하므로
 $6 \leq 2^{-8+a} + 5 < 7$, $1 \leq 2^{-8+a} < 2$
 밑이 1보다 크므로
 $0 \leq -8+a < 1 \quad \therefore 8 \leq a < 9$
 이때 a 는 자연수이므로 $a=8$
 $\therefore a+b=13$

STEP 3		최고난도 문제		41~43쪽	
01 ②	02 5	03 220	04 ⑤	05 49	06 ①
07 ④	08 ②	09 $4+\sqrt{3}$	10 2	11 ⑤	

01 답 ②

1단계 $h(x)$ 의 식 구하기

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= a^{g(x)} = a^{x^2+2x-8}$$

2단계 $y=g(x)$ 의 그래프 그리기

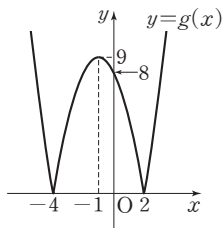
$$g(x) = |x^2+2x-8|$$

$$= |(x+4)(x-2)|$$

$$= \begin{cases} x^2+2x-8 & (x \leq -4 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x^2-2x+8 & (-4 < x < 2) \end{cases}$$

$$-x^2-2x+8 = -(x+1)^2+9 \text{이므로 함수}$$

$$y=g(x) \text{의 그래프는 그림과 같다.}$$



3단계 a 의 값의 범위 구하기

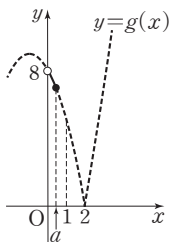
(i) $0 < a < 1$ 일 때,

함수 $h(x) = a^{g(x)}$ 은 $g(x)$ 의 값이 최소일 때 최댓값을 갖고, $g(x)$ 의 값이 최대일 때 최솟값을 갖는다.

즉, 함수 $h(x)$ 가 $0 < x \leq a$ 에서 최솟값을 갖고 최댓값을 갖지 않으려면 함수 $g(x)$ 가 $0 < x \leq a$ 에서 최댓값을 갖고 최솟값을 갖지 않아야 한다.

이때 $0 < x \leq a$ 에서 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 일 때 최솟값을 갖고 최댓값은 갖지 않는다.

즉, 조건을 만족시키지 않는다.



(ii) $a > 1$ 일 때,

함수 $h(x) = a^{g(x)}$ 은 $g(x)$ 의 값이 최대일 때 최댓값을 갖고, $g(x)$ 의 값이 최소일 때 최솟값을 갖는다.

즉, 함수 $h(x)$ 가 $0 < x \leq a$ 에서 최솟값을 갖고 최댓값을 갖지 않으려면 함수 $g(x)$ 가 $0 < x \leq a$ 에서 최솟값을 갖고 최댓값을 갖지 않아야 한다.

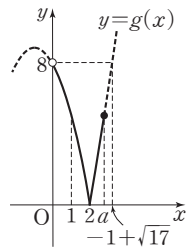
$g(0)=8$ 이므로 $x \geq 2$ 에서 $g(a)=8$ 을 만족시키는 a 의 값을 구하면

$$a^2+2a-8=8$$

$$a^2+2a-16=0$$

$$\therefore a = -1 + \sqrt{17} \quad (\because a \geq 2)$$

함수 $g(x)$ 가 $0 < x \leq a$ 에서 최솟값을 갖고 최댓값을 갖지 않으려면
 $a < -1 + \sqrt{17}$
 이때 $a > 1$ 이므로
 $1 < a < -1 + \sqrt{17}$



(i), (ii)에서 양수 a 의 값의 범위는

$$1 < a < -1 + \sqrt{17}$$

4단계 $m+n$ 의 값 구하기

따라서 $m=1$, $n=-1+\sqrt{17}$ 이므로 $m+n=\sqrt{17}$

02 답 5

1단계 x 의 값에 따른 함수 $g(x)$ 구하기

$$f(x) = \begin{cases} -x+k-4 & (x < k) \\ x-k-4 & (x \geq k) \end{cases}$$

이고, $f(x) < 0$ 이려면 $|x-k|-4 < 0$ 에서

$$|x-k| < 4, -4 < x-k < 4 \quad \therefore k-4 < x < k+4$$

$f(x) \geq 0$ 이려면 $|x-k|-4 \geq 0$ 에서

$$|x-k| \geq 4, x-k \leq -4 \text{ 또는 } x-k \geq 4$$

$$\therefore x \leq k-4 \text{ 또는 } x \geq k+4$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} a^{-f(x)} & (k-4 < x < k+4) \\ a^{f(x)} & (x \leq k-4 \text{ 또는 } x \geq k+4) \end{cases}$$

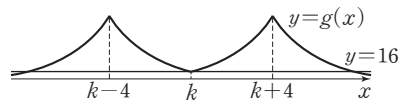
$$= \begin{cases} a^{-x+k-4} & (x \leq k-4) \\ a^{x-k+4} & (k-4 < x < k+4) \\ a^{-x+k+4} & (k \leq x < k+4) \\ a^{x-k-4} & (x \geq k+4) \end{cases}$$

2단계 양의 실수 a 의 값 구하기

(i) $0 < a < 1$ 일 때,

$k-4 < x < k$ 또는 $x \geq k+4$ 이면 x 의 값이 증가할 때 $g(x)$ 의 값은 감소하고, $x \leq k-4$ 또는 $k \leq x < k+4$ 이면 x 의 값이 증가할 때 $g(x)$ 의 값도 증가한다.

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같고, $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=16$ 의 교점의 개수가 3이므로 $g(k)=16$ 이어야 한다.



$$\text{즉, } g(k) = a^4 = 16 \quad \therefore a = 2$$

그런데 $0 < a < 1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a > 1$ 일 때,

$k-4 < x < k$ 또는 $x \geq k+4$ 이면 x 의 값이 증가할 때 $g(x)$ 의 값도 증가하고, $x \leq k-4$ 또는 $k \leq x < k+4$ 이면 x 의 값이 증가할 때 $g(x)$ 의 값은 감소한다.

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프

의 개형은 그림과 같고,

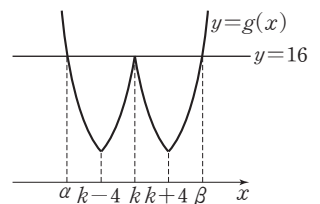
$y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=16$

의 교점의 개수가 3이므로

$g(k)=16$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } g(k) = a^4 = 16$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 1)$$



3단계 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 모두 구하기

함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=16$ 의 서로 다른 세 교점의 x 좌표를 α, k, β ($\alpha < k < \beta$)라 하면 $g(1)=16$ 이므로 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어 함수 $f(x)$ 를 구할 수 있다.

① $\alpha=1$ 일 때, $g(1)=g(k)=g(\beta)$ 이므로

$$2^{-1+k-4}=2^4=2^{\beta-k-4}$$

따라서 $-1+k-4=4$ 이므로 $k=9$

$$\therefore f(x)=|x-9|-4$$

② $k=1$ 일 때, $f(x)=|x-1|-4$

③ $\beta=1$ 일 때, $g(\alpha)=g(k)=g(1)$ 이므로

$$2^{-\alpha+k-4}=2^4=2^{1-k-4}$$

따라서 $4=1-k-4$ 이므로 $k=-7$

$$\therefore f(x)=|x+7|-4$$

4단계 모든 $f(a-2)$ 의 값의 합 구하기

(i), (ii)에서 $a=2$ 이므로 $f(a-2)=f(0)$ 이고

①, ②, ③에서 모든 $f(0)$ 의 값의 합은

$$5-3+3=5$$

03 답 220

1단계 직선 AB의 방정식 구하기

그림과 같이 두 점 P, Q에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.

$\overline{PB}=k$ 라 하면

$$\overline{AP}=\overline{AB}-\overline{PB}=4\overline{PB}-\overline{PB}$$

$$=3\overline{PB}=3k$$

$$\overline{CQ}=3\overline{AB}=3 \times 4\overline{PB}=12\overline{PB}=12k \text{ 이므로}$$

로

$$\overline{AP} : \overline{CQ} = 3k : 12k = 1 : 4$$

이때 $\triangle PDA$ 와 $\triangle QEC$ 는 서로 닮음이므로

$$\overline{PD} : \overline{QE} = \overline{AP} : \overline{CQ} = 1 : 4$$

즉, $2^a : 2^b = 1 : 4$ 이므로

$$2^b = 4 \times 2^a = 2^{a+2}$$

$$\therefore b = a + 2 \quad \dots\dots ㉑$$

$$\therefore m = \frac{2^b - 2^a}{b - a} = \frac{2^{a+2} - 2^a}{(a+2) - a}$$

$$= \frac{3 \times 2^a}{2} = 3 \times 2^{a-1}$$

따라서 직선 AB의 방정식은

$$y - 2^a = -3 \times 2^{a-1}(x - a) \quad \dots\dots ㉒$$

2단계 a, b 의 값 구하기

$y=0$ 을 ㉒에 대입하면

$$-2^a = -3 \times 2^{a-1}(x - a)$$

$$\therefore x = a + \frac{2}{3}$$

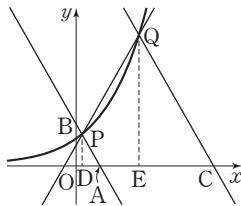
따라서 점 A의 x 좌표는 $a + \frac{2}{3}$ 이다.

이때 원점 O에 대하여 $\triangle APD$ 와 $\triangle ABO$ 는 서로 닮음이므로

$$\overline{AO} : \overline{DO} = \overline{AB} : \overline{PB} = 4 : 1$$

$$\text{즉, } \left(a + \frac{2}{3}\right) : a = 4 : 1 \text{ 이므로 } 4a = a + \frac{2}{3}$$

$$\therefore a = \frac{2}{9}$$



$a = \frac{2}{9}$ 를 ㉒에 대입하면

$$b = \frac{2}{9} + 2 = \frac{20}{9}$$

3단계 $90 \times (a+b)$ 의 값 구하기

$$\therefore 90 \times (a+b) = 90 \times \left(\frac{2}{9} + \frac{20}{9}\right) = 90 \times \frac{22}{9} = 220$$

04 답 ⑤

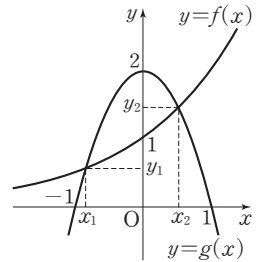
1단계 두 곡선 $y=2^x, y=-2x^2+2$ 그리기

$f(x)=2^x, g(x)=-2x^2+2$ 라 하면

$$g(x) = -2(x+1)(x-1)$$

따라서 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 는

그림과 같다.



2단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg$. 그림에서 $0 < x < x_2$ 일 때 $f(x) < g(x)$ 이고, $x_2 < x < 1$ 일 때

$f(x) > g(x)$ 이다.

$$x = \frac{1}{2} \text{ 일 때,}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2} = \sqrt{2.25}$$

따라서 $f\left(\frac{1}{2}\right) < g\left(\frac{1}{2}\right)$ 이므로 $x = \frac{1}{2}$ 은 $0 < x < x_2$ 에 속한다.

$$\therefore x_2 > \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉑$$

3단계 $\angle$ 이 옳은지 확인하기

$\angle$. 그림에서 $-1 < x < x_1$ 일 때 $f(x) > g(x)$ 이고, $x_1 < x < 0$ 일 때

$f(x) < g(x)$ 이다.

$$x = -\frac{1}{2} \text{ 일 때,}$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

이때 $f\left(-\frac{1}{2}\right) < g\left(-\frac{1}{2}\right)$ 이므로 $x = -\frac{1}{2}$ 은 $x_1 < x < 0$ 에 속한다.

$$\therefore x_1 < -\frac{1}{2}$$

따라서 $-1 < x_1 < -\frac{1}{2}$ 이고, ㉑에서 $\frac{1}{2} < x_2 < 1$ 이므로

$$-\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉒$$

두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$$y_2 - y_1 - (x_2 - x_1) = (-2x_2^2 + 2) - (-2x_1^2 + 2) + x_1 - x_2$$

$$= 2(x_1^2 - x_2^2) + x_1 - x_2$$

$$= 2(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + x_1 - x_2$$

$$= (x_1 - x_2)\{2(x_1 + x_2) + 1\}$$

이때 $x_1 < x_2$ 이므로 $x_1 - x_2 < 0$

㉒에서 $0 < 2(x_1 + x_2) + 1 < 2$ 이므로

$$y_2 - y_1 - (x_2 - x_1) < 0$$

$$\therefore y_2 - y_1 < x_2 - x_1$$

4단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. 그림에서 $y_2 > y_1$ 이므로 $y_2 - y_1 > 0$

$$\begin{aligned} \therefore y_2 - y_1 &= (-2x_2^2 + 2) - (-2x_1^2 + 2) \\ &= 2(x_1^2 - x_2^2) = 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0 \end{aligned}$$

이때 $x_1 - x_2 < 0$ 이므로

$$x_1 + x_2 < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{ㄷ}$$

ㄴ, ㄹ에서

$$-\frac{1}{2} < x_1 + x_2 < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{ㄹ}$$

두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$y_1 y_2 = 2^{x_1} \times 2^{x_2} = 2^{x_1 + x_2}$$

ㄹ에서 $2^{-\frac{1}{2}} < 2^{x_1 + x_2} < 2^0$ 이므로

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < y_1 y_2 < 1$$

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

05 답 49

1단계 $y=g(x)$ 의 그래프 이해하기

$$g(x) = |f(x) - k| + k = \begin{cases} -f(x) + 2k & (f(x) < k) \\ f(x) & (f(x) \geq k) \end{cases}$$

$f(x) < k$ 에서 함수 $y = -f(x) + 2k$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 직선 $y=k$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=k$ 와 만나거나 위쪽에 있는 부분은 그대로 두고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=k$ 보다 아래쪽에 있는 부분은 직선 $y=k$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.

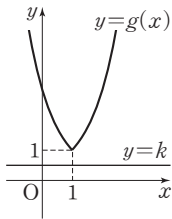
2단계 $k \leq 1$ 일 때, 정수 k 의 개수 구하기

(i) $k \leq 1$ 일 때,

$$f(x) \geq 1 \text{이므로 } f(x) \geq k$$

$$\therefore g(x) = f(x)$$

즉, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 x 축에 평행한 직선 $y=h(k)$ 와 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 존재하지 않는다. 따라서 조건을 만족시키는 정수 k 는 존재하지 않는다.



3단계 $k > 1$ 일 때, 정수 k 의 개수 구하기

(ii) $k > 1$ 일 때,

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같으므로 x 축에 평행한 직선 $y=h(k)$ 와 서로 다른 세 점에서 만나려면 $h(k) = g(1)$ 이어야 한다.

$$\therefore h(k) = g(1) = -f(1) + 2k = 2k - 1$$

$$h(k) < 100 \text{에서 } 2k - 1 < 100$$

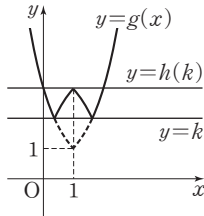
$$\therefore k < \frac{101}{2}$$

$$\text{그런데 } k > 1 \text{이므로 } 1 < k < \frac{101}{2}$$

따라서 정수 k 는 2, 3, 4, ..., 50의 49개이다.

4단계 정수 k 의 개수 구하기

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 정수 k 는 49개이다.



개념 NOTE

함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 직선 $y=k$ (k 는 상수)에 대하여 대칭이동한 그래프의 식을 $y=g(x)$ 라 하면

$$\frac{f(x) + g(x)}{2} = k \quad \therefore g(x) = 2k - f(x)$$

06 답 ①

1단계 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 알아보기

두 함수 $f_1(x), f_2(x)$ 를 $f_1(x) = 2^{x+3} + b, f_2(x) = 2^{-x+5} + 3b$ 라 하자.

함수 $y=f_1(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하고, 함수

$y=f_2(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

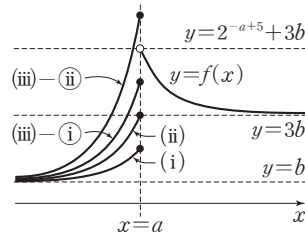
또 두 함수 $y=f_1(x), y=f_2(x)$ 의 그래프의 점근선이 각각 $y=b,$

$y=3b$ 이므로

$$\{f_1(x) | x \leq a\} = \{y | b < y \leq 2^{a+3} + b\},$$

$$\{f_2(x) | x > a\} = \{y | 3b < y < 2^{-a+5} + 3b\}$$

이때 $b < 3b < 2^{-a+5} + 3b$ 이므로 $2^{a+3} + b$ 와 $3b, 2^{-a+5} + 3b$ 의 대소 관계에 따라 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



2단계 조건을 만족시키는 실수 k 의 최댓값 알아보기

(i) $2^{a+3} + b < 3b$ 일 때,

$2^{a+3} + b < t < 3b$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 0이므로 조건을 만족시키는 k 의 최댓값이 $4b+8$ 이 아니다.

(ii) $2^{a+3} + b = 3b$ 일 때,

$b < t < 2^{-a+5} + 3b$ 인 모든 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 1이다.

또 $t \geq 2^{-a+5} + 3b$ 인 모든 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 는 만나지 않는다.

(iii) $2^{a+3} + b > 3b$ 일 때,

① $2^{a+3} + b \leq 2^{-a+5} + 3b$ 일 때,

$3b < t < 2^{a+3} + b$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 2이므로 조건을 만족시키는 k 의 최댓값이 $4b+8$ 이 아니다.

② $2^{a+3} + b > 2^{-a+5} + 3b$ 일 때,

$3b < t < 2^{-a+5} + 3b$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 2이므로 조건을 만족시키는 k 의 최댓값이 $4b+8$ 이 아니다.

3단계 $a+b$ 의 값 구하기

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } 2^{a+3} + b = 3b \quad \therefore b = 2^{a+2} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

이때 조건을 만족시키는 실수 k 의 최댓값은 $4b+8$ 이므로

$$2^{-a+5} + 3b = 4b + 8$$

$$\therefore b = 2^{-a+5} - 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$2^{a+2} = 2^{-a+5} - 8, \quad 2^a - 8 \times 2^{-a} + 2 = 0$$

$$(2^a)^2 + 2 \times 2^a - 8 = 0, \quad (2^a + 4)(2^a - 2) = 0$$

이때 $2^a > 0$ 이므로 $2^a = 2$

$$\therefore a = 1$$

이를 ㉠에 대입하면 $b = 2^{1+2} = 8$

$$\therefore a + b = 9$$

07 답 ④

1단계 주어진 방정식을 치환하여 나타내기

$$9^x + 2^{-2y} = 11 + 2 \times 3^{x+1} + 2^{3-y} \text{에서}$$

$$(3^x)^2 + \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^y \right\}^2 = 11 + 6 \times 3^x + 8 \times \left(\frac{1}{2} \right)^y$$

$$3^x = X, \left(\frac{1}{2} \right)^y = Y \ (X > 0, Y > 0) \text{로 놓으면}$$

$$X^2 + Y^2 = 11 + 6X + 8Y$$

$$X^2 - 6X + Y^2 - 8Y = 11$$

$$\therefore (X-3)^2 + (Y-4)^2 = 36$$

2단계 α 의 값 구하기

$X > 0, Y > 0$ 이므로 점 (X, Y) 는 그림과 같이 제1사분면에서 원

$(X-3)^2 + (Y-4)^2 = 36$ 위에 있다.

$X = 3^x$ 이므로 x 의 값이 최대이면 X 의 값도 최대이다.

이때 $0 < X \leq 9$ 이므로 X 의 최댓값은 9이다.

$$\text{즉, } 3^x = 3^2 \text{이므로}$$

$$x = 2 \quad \therefore \alpha = 2$$

3단계 β 의 값 구하기

$Y = \left(\frac{1}{2} \right)^y$ 이므로 y 의 값이 최소이면 Y 의 값은 최대이다.

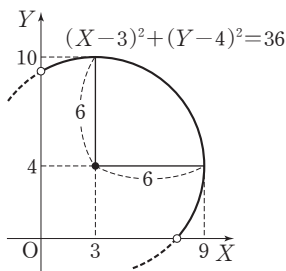
이때 $0 < Y \leq 10$ 이므로 Y 의 최댓값은 10이다.

$$\text{즉, } \left(\frac{1}{2} \right)^y = 10 \text{이므로}$$

$$y = -\log_2 10 \quad \therefore \beta = -\log_2 10$$

4단계 $\alpha^{-\beta}$ 의 값 구하기

$$\therefore \alpha^{-\beta} = 2^{\log_2 10} = 10$$



idea 08 답 ②

1단계 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만날 조건 알기

두 함수 $f(x) = 4^x + 4^{-x} + 11$, $g(x) = a(2^x + 2^{-x})$ 의 그래프가 서로 다른 네 점에서 만나려면 방정식

$$4^x + 4^{-x} + 11 = a(2^x + 2^{-x}) \quad \dots\dots ㉠$$

의 서로 다른 실근이 4개이어야 한다.

㉠에서 $2^x + 2^{-x} = t$ 로 놓으면 $2^x > 0, 2^{-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2^x + 2^{-x} \geq 2\sqrt{2^x \times 2^{-x}} = 2 \text{ (단, 등호는 } 2^x = 2^{-x} \text{, 즉 } x = 0 \text{일 때 성립)}$$

$$\therefore t \geq 2$$

$$4^x + 4^{-x} = (2^x + 2^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2 \text{이므로 방정식 ㉠에서}$$

$$(2^x + 2^{-x})^2 - a(2^x + 2^{-x}) + 9 = 0$$

$$\therefore t^2 - at + 9 = 0 \quad \dots\dots ㉡$$

방정식 ㉠이 서로 다른 네 실근을 가지려면 이차방정식 ㉡은 $t \geq 2$ 에서 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근에 대하여 방정식 $2^x + 2^{-x} = t$ 가 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 ㉡의 실근을 k 라 하고 $2^x + 2^{-x} = k$ 에서 $2^x = s \ (s > 0)$ 로 놓으면

$$s + \frac{1}{s} = k \quad \therefore s^2 - ks + 1 = 0$$

이 이차방정식이 $s > 0$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D_1 이라 하면

$$D_1 = k^2 - 4 > 0, (k+2)(k-2) > 0$$

$$\therefore k < -2 \text{ 또는 } k > 2 \quad \dots\dots ㉢$$

$$\text{두 근의 합이 양수이어야 하므로 } k > 0 \quad \dots\dots ㉣$$

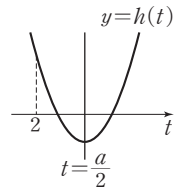
$$\text{㉢, ㉣에서 } k > 2$$

따라서 이차방정식 ㉡은 2보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

2단계 a 의 값의 범위 구하기

$$h(t) = t^2 - at + 9 = \left(t - \frac{a}{2} \right)^2 + 9 - \frac{a^2}{4} \text{이라 할 때,}$$

이차방정식 ㉡의 서로 다른 두 실근이 2보다 크려면 이차함수 $y = h(t)$ 의 그래프가 그림과 같아야 한다.



(i) 이차방정식 $t^2 - at + 9 = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$D_2 = a^2 - 36 > 0, (a+6)(a-6) > 0$$

$$\therefore a < -6 \text{ 또는 } a > 6$$

(ii) $h(2) > 0$ 이어야 하므로

$$13 - 2a > 0 \quad \therefore a < \frac{13}{2}$$

(iii) 함수 $y = h(t)$ 의 그래프의 축이 직선 $t = \frac{a}{2}$ 이므로

$$\frac{a}{2} > 2 \quad \therefore a > 4$$

(i), (ii), (iii)에서 $6 < a < \frac{13}{2}$

3단계 $\alpha\beta$ 의 값 구하기

$$\text{따라서 } \alpha = 6, \beta = \frac{13}{2} \text{이므로}$$

$$\alpha\beta = 39$$

09 답 $4 + \sqrt{3}$

1단계 α 의 값 구하기

$\log_{\alpha}(4^t - 2 \times 6^t - 2 \times 9^t)$ 이 정의되려면 $4^t - 2 \times 6^t - 2 \times 9^t > 0$ 이어야 한다.

양변을 9^t 으로 나누면

$$\left(\frac{4}{9} \right)^t - 2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^t - 2 > 0$$

$$\left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^t \right\}^2 - 2 \times \left(\frac{2}{3} \right)^t - 2 > 0$$

$$\left(\frac{2}{3} \right)^t = s \ (s > 0) \text{로 놓으면}$$

$$s^2 - 2s - 2 > 0$$

$$\therefore s > 1 + \sqrt{3} \ (\because s > 0)$$

$$\text{즉, } \left(\frac{2}{3} \right)^t > 1 + \sqrt{3} \text{이므로}$$

$$\left(\frac{2}{3} \right)^t > \left(\frac{2}{3} \right)^{\log_{\frac{2}{3}}(1 + \sqrt{3})}$$

밑이 1보다 작으므로

$$t < \log_{\frac{2}{3}}(1 + \sqrt{3})$$

$$\therefore \alpha = 1 + \sqrt{3}$$

2단계 β 의 값 구하기

$\log_a(4^t - 2 \times 6^t - 2 \times 9^t) = \log_b 4^t = \log_{ab} 6^t = k$ (k 는 실수)로 놓으면
 $(a^2)^k = 4^t - 2 \times 6^t - 2 \times 9^t$ 이므로
 $a^{2k} = (2^t)^2 - 2 \times 2^t \times 3^t - 2 \times (3^t)^2$ ㉠
 $(b^2)^k = 4^t$ 이므로 $b^{2k} = (2^t)^2$ ㉡
 $(ab)^k = 6^t$ 이므로 $a^k b^k = 2^t \times 3^t$ ㉢
 $2^t = p, 3^t = q$ ($p > 0, q > 0$)로 놓으면 ㉠, ㉡, ㉢에서
 $a^{2k} = p^2 - 2pq - 2q^2, b^{2k} = p^2, a^k b^k = pq$
 $a^{2k} b^{2k} = (a^k b^k)^2$ 이므로
 $(p^2 - 2pq - 2q^2) \times p^2 = p^2 q^2$
 $p^2(p^2 - 2pq - 3q^2) = 0, p^2(p+q)(p-3q) = 0$
 이때 $p > 0, q > 0$ 이므로 $p = 3q$
 $p = 2^t, q = 3^t$ 이므로 $2^t = 3 \times 3^t$
 양변을 3^t 으로 나누면
 $\left(\frac{2}{3}\right)^t = 3 \quad \therefore t = \log_{\frac{2}{3}} 3$
 $\therefore \beta = 3$

3단계 $\alpha + \beta$ 의 값 구하기

$\therefore \alpha + \beta = 4 + \sqrt{3}$

10 답 2

1단계 주어진 부등식을 이용하여 x 에 대한 부등식 세우기

$2x^2 + 2x - b \leq 3^{x^2 + 2x}$ 에서 $3^{x^2 + 2x} = (2^{\log_2 3})^{x^2 + 2x}$ 이므로
 $2x^2 + 2x - b \leq 2^{(\log_2 3)(x^2 + 2x)}$

밑이 1보다 크므로

$$x^2 + 2x - b \leq (\log_2 3)(x^2 + 2x)$$

$$(\log_2 3 - 1)x^2 + 2(\log_2 3 - 1)x + b \geq 0$$

이때 $\log_2 3 - 1 = \log_2 \frac{3}{2} > 0$ 이므로 양변을 $\log_2 3 - 1$ 로 나누면

$$x^2 + 2x + \frac{b}{\log_2 3 - 1} \geq 0$$

2단계 α 의 값 구하기

$g(x) = x^2 + 2x + \frac{b}{\log_2 3 - 1} = (x+1)^2 + \frac{b}{\log_2 3 - 1} - 1$ 이라 하면 함수

$y = g(x)$ 의 그래프의 축은 직선 $x = -1$ 이므로 $a \leq x \leq a+1$ 에서
 $g(x) \geq 0$ 이 성립할 조건을 확인하자.

(i) $a+1 \leq -1$, 즉 $a \leq -2$ 일 때, ($g(x)$ 의 최솟값) ≥ 0 이어야 한다.

$g(a+1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$(a+2)^2 + \frac{b}{\log_2 3 - 1} - 1 \geq 0$$

$$\frac{b}{\log_2 3 - 1} \geq -(a+2)^2 + 1$$

$$b \geq -(\log_2 3 - 1)(a^2 + 4a + 3)$$

$$\therefore f(a) = -(\log_2 3 - 1)(a^2 + 4a + 3)$$

이때 $f(a) = 0$ 에서 $a^2 + 4a + 3 = 0$

$$(a+3)(a+1) = 0 \quad \therefore a = -3 \quad (\because a \leq -2)$$

(ii) $a \leq -1 < a+1 \leq 0$, 즉 $-2 < a \leq -1$ 일 때,

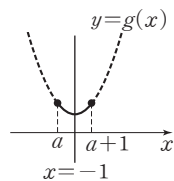
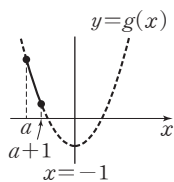
$g(-1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{b}{\log_2 3 - 1} - 1 \geq 0$$

$$b \geq \log_2 3 - 1$$

$$\therefore f(a) = \log_2 3 - 1$$

이때 $f(a) = 0$ 을 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.



(iii) $a+1 > 0$, 즉 $a > -1$ 일 때,

$g(a) \geq 0$ 이어야 하므로

$$a^2 + 2a + \frac{b}{\log_2 3 - 1} \geq 0$$

$$\frac{b}{\log_2 3 - 1} \geq -(a^2 + 2a)$$

$$b \geq -(\log_2 3 - 1)(a^2 + 2a)$$

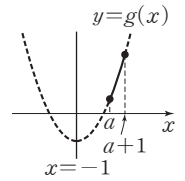
$$\therefore f(a) = -(\log_2 3 - 1)(a^2 + 2a)$$

이때 $f(a) = 0$ 에서 $a^2 + 2a = 0$

$$a(a+2) = 0 \quad \therefore a = 0 \quad (\because a > -1)$$

3단계 α 의 개수 구하기

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 a 는 $-3, 0$ 의 2개이다.



11 답 ⑤

1단계 주어진 부등식을 치환하여 나타내기

$2^{2x} - 13(n-2)2^x - n^2 + 7n \leq 0$ 에서 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 13(n-2)t - n^2 + 7n \leq 0 \quad \dots\dots ㉠$$

2단계 n 의 값 구하기

주어진 부등식의 해가 $\alpha \leq x \leq \beta$ 이므로

$$2^\alpha \leq 2^x \leq 2^\beta \quad \therefore 2^\alpha \leq t \leq 2^\beta$$

이때 $\alpha < 0 < \beta$ 이므로 $0 < 2^\alpha < 1 < 2^\beta$ ㉡

따라서 $f(t) = t^2 - 13(n-2)t - n^2 + 7n$ 이라 하면 이차방정식 $f(t) = 0$ 의 두 근이 $2^\alpha, 2^\beta$ 이고

㉡을 만족시켜야 하므로 그림과 같이

$f(0) > 0, f(1) < 0$ 이어야 한다.

$f(0) > 0$ 에서 $-n^2 + 7n > 0$

$$n^2 - 7n < 0, n(n-7) < 0$$

$$\therefore 0 < n < 7 \quad \dots\dots ㉢$$

$$f(1) < 0 \text{에서 } -n^2 - 6n + 27 < 0$$

$$n^2 + 6n - 27 > 0, (n+9)(n-3) > 0$$

$$\therefore n < -9 \text{ 또는 } n > 3 \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣에서 $3 < n < 7$

따라서 정수 n 의 값은 4, 5, 6이다.

3단계 n 의 값에 따라 $\alpha + \beta$ 의 값 구하기

(i) $n = 4$ 일 때,

㉠에서 $t^2 - 26t + 12 \leq 0$ 이고, 이 부등식의 해가 $2^\alpha \leq t \leq 2^\beta$ 이므로 이차방정식 $t^2 - 26t + 12 = 0$ 의 두 근은 $2^\alpha, 2^\beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$$2^\alpha \times 2^\beta = 12, 2^{\alpha+\beta} = 12 \quad \therefore \alpha + \beta = \log_2 12$$

(ii) $n = 5$ 일 때,

㉠에서 $t^2 - 39t + 10 \leq 0$ 이고, 이 부등식의 해가 $2^\alpha \leq t \leq 2^\beta$ 이므로 이차방정식 $t^2 - 39t + 10 = 0$ 의 두 근은 $2^\alpha, 2^\beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$$2^\alpha \times 2^\beta = 10, 2^{\alpha+\beta} = 10 \quad \therefore \alpha + \beta = \log_2 10$$

(iii) $n = 6$ 일 때,

㉠에서 $t^2 - 52t + 6 \leq 0$ 이고, 이 부등식의 해가 $2^\alpha \leq t \leq 2^\beta$ 이므로 이차방정식 $t^2 - 52t + 6 = 0$ 의 두 근은 $2^\alpha, 2^\beta$ 이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$$2^\alpha \times 2^\beta = 6, 2^{\alpha+\beta} = 6 \quad \therefore \alpha + \beta = \log_2 6$$

4단계 모든 $\alpha + \beta$ 의 값의 합 구하기

(i), (ii), (iii)에서 모든 $\alpha + \beta$ 의 값의 합은

$$\log_2 12 + \log_2 10 + \log_2 6 = \log_2 (12 \times 10 \times 6) = \log_2 720$$

STEP 1

핵심 문제

44~45쪽

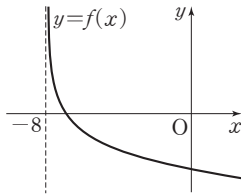
01 10	02 3	03 ⑤	04 $C < A < B$	05 $-\frac{11}{3}$
06 $\frac{5}{2}$	07 33	08 ④	09 ①	10 2
11 ①				
12 6	13 5			

01 답 10

$$\begin{aligned}
 & f(a) + f(2a) + f(3a) + \cdots + f(99a) \\
 &= \log(a+a) + \log\left(a+\frac{a}{2}\right) + \log\left(a+\frac{a}{3}\right) + \cdots + \log\left(a+\frac{a}{99}\right) \\
 &= \log 2a + \log \frac{3}{2}a + \log \frac{4}{3}a + \cdots + \log \frac{100}{99}a \\
 &= \log\left(2a \times \frac{3}{2}a \times \frac{4}{3}a \times \cdots \times \frac{100}{99}a\right) \\
 &= \log 100a^{99} \\
 &= 2 + 99\log a \\
 &\text{즉, } 2 + 99\log a = 101 \text{ 이므로 } 99\log a = 99 \\
 &\log a = 1 \quad \therefore a = 10
 \end{aligned}$$

02 답 3

함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -8 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y = -\log_2(x+8) + k$
 $f(x) = -\log_2(x+8) + k$ 라 할 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 제1사분면을 지나지 않으려면 $f(0) \leq 0$ 이어야 하므로 $-\log_2 8 + k \leq 0$
 $k - 3 \leq 0 \quad \therefore k \leq 3$
 따라서 정수 k 의 최댓값은 3이다.



03 답 ⑤

두 점 A, B의 좌표를 각각 $A(a, \log_2 2a)$, $B(b, \log_2 4b)$ ($a < b$)라 하자. 직선 AB의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로 $\frac{\log_2 4b - \log_2 2a}{b - a} = \frac{1}{2}$ 에서

$$\begin{aligned}
 \log_2 4b - \log_2 2a &= \frac{1}{2}(b - a) \\
 \overline{AB} &= \sqrt{(b-a)^2 + (\log_2 4b - \log_2 2a)^2} \\
 &= \sqrt{(b-a)^2 + \frac{1}{4}(b-a)^2} \\
 &= \frac{\sqrt{5}}{2}(b-a) = 2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } b-a=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_2 4b - \log_2 2a = \frac{1}{2}(b-a) = 2 \text{ 이므로}$$

$$\log_2 4b - \log_2 2a = \log_2 \frac{2b}{a} = 2, \quad b=2a \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=4, b=8$$

$$\therefore A(4, 3), B(8, 5), C(4, 0)$$

$$\text{따라서 삼각형 ACB의 넓이는 } \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

04 답 $C < A < B$

$2 < a < x < a^2$ 에서 각 변에 밑이 a 인 로그를 취하면 밑이 1보다 크므로 $\log_a 2 < 1 < \log_a x < 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

$1 < \log_a x < 2$ 에서 각 변에 밑이 a 인 로그를 취하면 밑이 1보다 크므로 $0 < \log_a(\log_a x) < \log_a 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $C < \log_a 2 < 1 < A < 2$ 이므로 $C < A$

$A - B = \log_a x - (\log_a x)^2 = (\log_a x)(1 - \log_a x) < 0$ 이므로 $A < B$
 $\hookrightarrow 1 < \log_a x$ 이므로 $\log_a x > 0, 1 - \log_a x < 0$

$$\therefore C < A < B$$

05 답 $-\frac{11}{3}$

$$\begin{aligned}
 & (g \circ g \circ g)(a) = 243 \text{에서 } g(g(g(a))) = 243 \\
 & \text{이때 } g(g(a)) = b \text{로 놓으면 } g(b) = 243 \text{에서 } f(243) = b \\
 & \therefore b = f(243) = \log_3 243 - 2 = 5 - 2 = 3 \quad \therefore g(g(a)) = 3 \\
 & \text{이때 } g(a) = c \text{로 놓으면 } g(c) = 3 \text{에서 } f(3) = c \\
 & \therefore c = f(3) = \frac{1}{3} \times 3 - 3 = -2 \quad \therefore g(a) = -2
 \end{aligned}$$

즉, $f(-2) = a$ 이므로

$$a = f(-2) = \frac{1}{3} \times (-2) - 3 = -\frac{11}{3}$$

개념 NOTE

함수 f 의 역함수가 f^{-1} 일 때,

$$f^{-1}(a) = b \iff f(b) = a$$

06 답 $\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned}
 y &= \log_a 2x \times \log_a \frac{4}{x} \\
 &= (\log_a 2 + \log_a x)(2\log_a 2 - \log_a x) \\
 &= -(\log_a x)^2 + \log_a 2 \times \log_a x + 2(\log_a 2)^2 \\
 \log_a x &= t \text{로 놓으면} \\
 y &= -t^2 + (\log_a 2)t + 2(\log_a 2)^2 \\
 &= -\left(t - \frac{1}{2}\log_a 2\right)^2 + \frac{9}{4}(\log_a 2)^2 \\
 &= -(t - \log_a \sqrt{2})^2 + \frac{9}{4}(\log_a 2)^2
 \end{aligned}$$

따라서 주어진 함수는 $t = \log_a \sqrt{2}$ 일 때 최댓값을 갖는다.

$t = \log_a x$ 이므로

$$\log_a x = \log_a \sqrt{2} \quad \therefore x = \sqrt{2}$$

$$\therefore a = \sqrt{2}$$

이때 최댓값이 $\frac{9}{4}(\log_a 2)^2$ 이므로

$$M = \frac{9}{4}(\log_a 2)^2$$

$a^4 M = 9$ 에서

$$(\sqrt{2})^4 \times \frac{9}{4}(\log_a 2)^2 = 9, \quad (\log_a 2)^2 = 1$$

$$\therefore \log_a 2 = 1 \text{ 또는 } \log_a 2 = -1$$

$$\therefore a = 2 \text{ 또는 } a = \frac{1}{2}$$

따라서 모든 양수 a 의 값의 합은

$$2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

07 답 33

$y = \{\log_2(x^2 - 4x + 20)\}^2 - \log_2(x^2 - 4x + 20)^2 + 5$
 $= \{\log_2(x^2 - 4x + 20)\}^2 - 2\log_2(x^2 - 4x + 20) + 5$
 $f(x) = x^2 - 4x + 20 = (x-2)^2 + 16$ 이라 하면 $-2 \leq x \leq 3$ 에서 함수
 $f(x)$ 는 $x = -2$ 일 때 최댓값이 32, $x = 2$ 일 때 최솟값이 16이므로
 $16 \leq f(x) \leq 32$
 위의 식에 밑이 2인 로그를 취하고 $\log_2 f(x) = t$ 로 놓으면 로그의 밑이
 1보다 크므로
 $\log_2 16 \leq t \leq \log_2 32$
 $\therefore 4 \leq t \leq 5$
 이때 주어진 함수는
 $y = t^2 - 2t + 5 = (t-1)^2 + 4$
 따라서 $4 \leq t \leq 5$ 에서 $t = 5$ 일 때 최댓값이 20, $t = 4$ 일 때 최솟값이 13이
 므로 최댓값과 최솟값의 합은
 $20 + 13 = 33$

08 답 ④

$\log_n 4 \times \left(\frac{4}{\log_m 2} + \log_2 n \right)$
 $= 2\log_n 2 \times (4\log_m 2 + \log_2 n)$
 $= 8\log_n 2 \times \log_2 m + 2\log_n 2 \times \log_2 n$
 $= 8 \times \frac{1}{\log_2 n} \times \log_2 m + 2 \times \frac{1}{\log_2 n} \times \log_2 n$
 $= 8\log_n m + 2$
 즉, $8\log_n m + 2 = 8$ 이므로
 $\log_n m = \frac{3}{4}$ 에서 $m = n^{\frac{3}{4}}$
 $n^{\frac{3}{4}}$ 이 자연수가 되기 위해서는 어떤 자연수 k 에 대하여 $n = k^4$ 이어야 한
 다.
 $1 < n < 100$ 이므로 $n = 2^4$ 또는 $n = 3^4$ 이다.
 (i) $n = 2^4$ 일 때, $m = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$ 이므로
 $m + n = 8 + 16 = 24$
 (ii) $n = 3^4$ 일 때, $m = (3^4)^{\frac{3}{4}} = 3^3 = 27$ 이므로
 $m + n = 27 + 81 = 108$
 (i), (ii)에서 $m + n$ 의 최댓값은 108이다.

09 답 ①

$2\log_4 8x \times \log_2 \frac{x}{4} = 6$ 에서
 $\log_2 8x \times \log_2 \frac{x}{4} = 6$
 $(3 + \log_2 x)(\log_2 x - 2) = 6$
 $(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 12 = 0$
 $\log_2 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 + t - 12 = 0$
 $(t+4)(t-3) = 0$
 $\therefore t = -4$ 또는 $t = 3$
 즉, $\log_2 x = -4$ 또는 $\log_2 x = 3$ 이므로
 $x = 2^{-4} = \frac{1}{16}$ 또는 $x = 2^3 = 8$
 따라서 $\alpha = \frac{1}{16}$, $\beta = 8$ 또는 $\alpha = 8$, $\beta = \frac{1}{16}$ 이므로
 $2\alpha\beta = 1$

다른 풀이

$2\log_4 8x \times \log_2 \frac{x}{4} = 6$ 에서
 $\log_2 8x \times \log_2 \frac{x}{4} = 6$
 $(3 + \log_2 x)(\log_2 x - 2) = 6$
 $(\log_2 x)^2 + \log_2 x - 12 = 0$
 $\log_2 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 + t - 12 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 주어진 방정식의 두 근이 α , β 이므로 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은
 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$
 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 합은
 $\log_2 \alpha + \log_2 \beta = -1$
 $\log_2 \alpha\beta = -1$
 $\therefore \alpha\beta = 2^{-1} = \frac{1}{2}$
 $\therefore 2\alpha\beta = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

개념 NOTE

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 두 근을 α , β 라 하면

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

10 답 2

이차방정식 $x^2 + kx + 4 = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지므로 이차방정식
 $x^2 + kx + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = k^2 - 16 > 0$
 $(k+4)(k-4) > 0$
 $\therefore k < -4$ 또는 $k > 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$ 배점 20%
 이차방정식 $x^2 + kx + 4 = 0$ 의 두 실근이 α , β 이므로 이차방정식의 근과
 계수의 관계에 의하여
 $\alpha + \beta = -k$, $\alpha\beta = 4 \quad \dots\dots$ 배점 10%
 따라서 $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = k^2 - 8$ 이므로 주어진 부등식의 좌변
 에서
 $\log_3(\alpha^2 + \alpha + 3) + \log_3(\beta^2 + \beta + 3)$
 $= \log_3(\alpha^2 + \alpha + 3)(\beta^2 + \beta + 3)$
 $= \log_3(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\beta + 3\alpha^2 + \alpha\beta^2 + \alpha\beta + 3\alpha + 3\beta^2 + 3\beta + 9)$
 $= \log_3\{(\alpha\beta)^2 + \alpha\beta(\alpha + \beta) + 3(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta + 3(\alpha + \beta) + 9\}$
 $= \log_3\{16 - 4k + 3(k^2 - 8) + 4 - 3k + 9\}$
 $= \log_3(3k^2 - 7k + 5)$
 즉, $\log_3(3k^2 - 7k + 5) < 4$ 이므로
 $\log_3(3k^2 - 7k + 5) < \log_3 3^4$
 로그의 밑이 1보다 크므로
 $3k^2 - 7k + 5 < 81$
 $3k^2 - 7k - 76 < 0$
 $(k+4)(3k-19) < 0$
 $\therefore -4 < k < \frac{19}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$ 배점 40%
 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서
 $4 < k < \frac{19}{3}$
 따라서 자연수 k 는 5, 6의 2개이다.배점 30%

11 답 ①

$[\log_2 x] = t$ (t 는 정수)로 놓으면 $t^2 - 2t - 8 < 0$

$(t-4)(t+2) < 0 \quad \therefore -2 < t < 4$

$[\log_2 x] = -1$ 일 때, $-1 \leq \log_2 x < 0$ 이므로 $\log_2 2^{-1} \leq \log_2 x < \log_2 2^0$

로그의 밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{2} \leq x < 1$

$[\log_2 x] = 0$ 일 때, $0 \leq \log_2 x < 1$ 이므로 $\log_2 2^0 \leq \log_2 x < \log_2 2^1$

로그의 밑이 1보다 크므로 $1 \leq x < 2$

$[\log_2 x] = 1$ 일 때, $1 \leq \log_2 x < 2$ 이므로 $\log_2 2^1 \leq \log_2 x < \log_2 2^2$

로그의 밑이 1보다 크므로 $2 \leq x < 4$

$[\log_2 x] = 2$ 일 때, $2 \leq \log_2 x < 3$ 이므로 $\log_2 2^2 \leq \log_2 x < \log_2 2^3$

로그의 밑이 1보다 크므로 $4 \leq x < 8$

$[\log_2 x] = 3$ 일 때, $3 \leq \log_2 x < 4$ 이므로 $\log_2 2^3 \leq \log_2 x < \log_2 2^4$

로그의 밑이 1보다 크므로 $8 \leq x < 16$

즉, 주어진 부등식을 만족시키는 x 의 값의 범위는 $\frac{1}{2} \leq x < 16$ 이므로 자

연수 x 는 1, 2, 3, ..., 15이다.

따라서 모든 자연수 x 의 값의 합은

$$1+2+3+\dots+15=120$$

12 답 6

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $3x^2 - 2(\log_2 n)x + \log_2 n > 0$ 이 성립하려면 이차방정식 $3x^2 - 2(\log_2 n)x + \log_2 n = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$$\frac{D}{4} = (\log_2 n)^2 - 3\log_2 n < 0 \text{이어야 한다.}$$

$\log_2 n = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 3t < 0, t(t-3) < 0 \quad \therefore 0 < t < 3$$

즉, $0 < \log_2 n < 3$ 이므로 $\log_2 2^0 < \log_2 n < \log_2 2^3$

로그의 밑이 1보다 크므로 $1 < n < 8$

따라서 자연수 n 은 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다.

13 답 5

$K=160$ 일 때 $S=6$ 이므로

$$6 = c \log 160 + m \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$K=10$ 일 때 $S=4$ 이므로

$$4 = c + m \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면 $2 = c(\log 160 - 1)$

$$2 = c \log 16$$

$$\therefore c = \frac{2}{\log 16} = \frac{2}{4 \log 2} = \frac{1}{2 \log 2}$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$4 = \frac{1}{2 \log 2} + m \quad \therefore m = 4 - \frac{1}{2 \log 2}$$

$K=x$ 일 때 $S=1.5$ 이므로

$$1.5 = \frac{1}{2 \log 2} \times \log x + 4 - \frac{1}{2 \log 2}$$

$$\frac{3}{2} \times 2 \log 2 = \log x + 4 \times 2 \log 2 - 1$$

$$\log x = 3 \log 2 - 8 \log 2 + 1 = 1 - 5 \log 2$$

$$= \log \frac{10}{2^5} = \log \frac{5}{16}$$

$$\therefore x = \frac{5}{16}$$

$$\therefore 16x = 5$$

STEP 2 고난도 문제

| 46~50쪽

01 ④

02 5

03 4

04 9

05 ⑤

06 $\frac{11}{4}$

07 9

08 4

09 ②

10 ②

11 45

12 ②

13 ②

14 12

15 ②

16 ①

17 -7

18 $-\frac{31}{32}$

19 ④

20 5

21 ⑤

22 8

23 10

24 ①

25 ③

26 110

01 답 ④

$$\begin{aligned} \neg. \left\{ f\left(\frac{m}{n}\right) \right\}^2 &= \left(\log_a \frac{m}{n} \right)^2 = (\log_a m - \log_a n)^2 \\ &= (\log_a n - \log_a m)^2 \\ &= \left(\log_a \frac{n}{m} \right)^2 \\ &= \left\{ f\left(\frac{n}{m}\right) \right\}^2 \end{aligned}$$

$$\neg. f(m+1) - f(m) = \log_a(m+1) - \log_a m$$

$$= \log_a \frac{m+1}{m}$$

$$= \log_a \left(1 + \frac{1}{m} \right)$$

$$f(m+2) - f(m+1) = \log_a(m+2) - \log_a(m+1)$$

$$= \log_a \frac{m+2}{m+1}$$

$$= \log_a \left(1 + \frac{1}{m+1} \right)$$

$m > 0$ 에서 $\frac{1}{m} > \frac{1}{m+1}$ 이므로

$$1 + \frac{1}{m} > 1 + \frac{1}{m+1}$$

이때 $a > 1$ 이므로

$$\log_a \left(1 + \frac{1}{m} \right) > \log_a \left(1 + \frac{1}{m+1} \right)$$

$$\therefore f(m+1) - f(m) > f(m+2) - f(m+1)$$

$$\neg. f\left(\frac{m+n}{2}\right) = \log_a \frac{m+n}{2}$$

$$\frac{f(m) + f(n)}{2} = \frac{\log_a m + \log_a n}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \log_a mn$$

$$= \log_a \sqrt{mn}$$

$m > 0, n > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{m+n}{2} \geq \sqrt{mn} \quad (\text{단, 등호는 } m=n \text{일 때 성립})$$

이때 $a > 1$ 이므로

$$\log_a \frac{m+n}{2} \geq \log_a \sqrt{mn}$$

$$\therefore f\left(\frac{m+n}{2}\right) \geq \frac{f(m) + f(n)}{2}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

개념 NOTE

$a > 0, b > 0$ 일 때, 산술평균과 기하평균의 관계는 다음과 같다.

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립})$$

02 답 5

함수 $h(x) = \log_{f(x)} g(x)$ 에서 $\log_{f(x)} g(x)$ 가 정의되려면

$$f(x) > 0, f(x) \neq 1, g(x) > 0$$

$f(x) > 0$ 에서

$$\frac{1}{6}(x-3)(10-x) > 0$$

$$(x-3)(x-10) < 0$$

$$\therefore 3 < x < 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$f(x) \neq 1$ 에서

$$\frac{1}{6}(x-3)(10-x) \neq 1$$

$$(x-3)(x-10) \neq -6, x^2 - 13x + 36 \neq 0$$

$$(x-4)(x-9) \neq 0$$

$$\therefore x \neq 4, x \neq 9 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$g(x) > 0$ 에서

$$(x-2)(10-x) > 0$$

$$(x-2)(x-10) < 0$$

$$\therefore 2 < x < 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}$ 에서

$$3 < x < 4 \text{ 또는 } 4 < x < 9 \text{ 또는 } 9 < x < 10$$

$$\therefore A = \{5, 6, 7, 8\}$$

$$\text{이때 } h(5) = \log_{\frac{5}{3}} 15, h(6) = \log_2 16, h(7) = \log_2 15, h(8) = \log_{\frac{5}{3}} 12$$

이므로

$$B = \{\log_{\frac{5}{3}} 15, \log_2 16, \log_2 15, \log_{\frac{5}{3}} 12\}$$

이때 $\log_{\frac{5}{3}} 12 < \log_{\frac{5}{3}} 15, \log_2 15 < \log_2 16$ 이므로 최댓값을 찾기 위하여

$\log_{\frac{5}{3}} 15$ 와 $\log_2 16 = 4$ 의 대소를 비교해 보자.

$$125 = 5^3 < 3^5 = 243 \text{에서}$$

$$\frac{5^3}{3^4} < 3$$

$$\therefore \left(\frac{5}{3}\right)^4 < 15$$

양변에 밑이 $\frac{5}{3}$ 인 로그를 취하면

$$4 < \log_{\frac{5}{3}} 15$$

따라서 집합 B 의 원소 중 최댓값은 $h(5) = \log_{\frac{5}{3}} 15$ 이므로

$$n = 5$$

03 답 4

진수의 조건에서 $[x] > 0 \quad \therefore x \geq 1$

$$1 \leq x < 2 \text{일 때, } [x] = 1 \quad \therefore f(x) = 2 \log_2 1 = 0$$

$$2 \leq x < 3 \text{일 때, } [x] = 2 \quad \therefore f(x) = 2 \log_2 2 = 2$$

$$3 \leq x < 4 \text{일 때, } [x] = 3 \quad \therefore f(x) = 2 \log_2 3$$

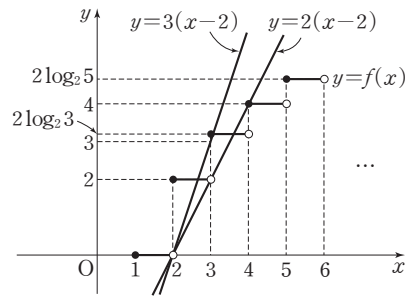
$$4 \leq x < 5 \text{일 때, } [x] = 4 \quad \therefore f(x) = 2 \log_2 4 = 4$$

$$5 \leq x < 6 \text{일 때, } [x] = 5 \quad \therefore f(x) = 2 \log_2 5$$

$\vdots$

$$\therefore f(x) = 2 \log_2 [x] = \begin{cases} 0 & (1 \leq x < 2) \\ 2 & (2 \leq x < 3) \\ 2 \log_2 3 & (3 \leq x < 4) \\ 4 & (4 \leq x < 5) \\ 2 \log_2 5 & (5 \leq x < 6) \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



이때 직선 $g(x) = n(x-2)$ 는 n 의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 0)$ 을 지난다.

(i) $n=2$ 일 때,

$$g(x) = 2(x-2) \text{이므로}$$

$$g(3) = 2, g(4) = 4, g(5) = 6 > 2 \log_2 5$$

$$\therefore h(2) = 2 \quad \text{--- } \log_2 2^6 > \log_2 5^2$$

(ii) $n=3$ 일 때,

$$g(x) = 3(x-2) \text{이므로}$$

$$g(3) = 3 < 2 \log_2 3, g(4) = 6 > 4$$

$$\therefore h(3) = 2 \quad \text{--- } \log_2 2^3 < \log_2 3^2$$

(i), (ii)에서 $h(2) + h(3) = 4$

04 답 9

$P(p, -\log_a p), Q(q, -\log_a q)$ ($p < q$)라 하면 선분 PQ가 원 C 의 지름이므로 선분 PQ의 중점은 원의 중심 $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ 과 같다.

선분 PQ의 중점의 좌표는 $\left(\frac{p+q}{2}, \frac{-\log_a p - \log_a q}{2}\right)$

$$\frac{p+q}{2} = \frac{5}{3} \text{에서 } p+q = \frac{10}{3}$$

$$\frac{-\log_a p - \log_a q}{2} = 0 \text{에서 } \log_a pq = 0$$

$$\therefore pq = 1 \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

따라서 p, q 는 이차방정식 $t^2 - \frac{10}{3}t + 1 = 0$ 의 두 근이다.

$$t^2 - \frac{10}{3}t + 1 = 0 \text{에서}$$

$$3t^2 - 10t + 3 = 0$$

$$(3t-1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{3} \text{ 또는 } t = 3$$

$$p < q \text{이므로 } p = \frac{1}{3}, q = 3 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

점 $P\left(\frac{1}{3}, -\log_a \frac{1}{3}\right)$ 은 원 C 위의 점이므로

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\log_a \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{73}{36}$$

$$\frac{16}{9} + (\log_a 3)^2 = \frac{73}{36}$$

$$(\log_a 3)^2 = \frac{1}{4}$$

이때 $a > 1$ 에서 $\log_a 3 > \log_a 1 = 0$ 이므로

$$\log_a 3 = \frac{1}{2}$$

$$3 = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore a = 3^2 = 9 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

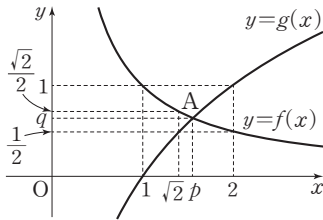
05 ⑤

$f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \log_a x$ 라 하자.

ㄱ. 점 $A(p, q)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로 $q = \frac{1}{p}$

$$\therefore pq=1$$

ㄴ. $f(x) > g(x)$ 이면 $0 < x < p$ 이고, $f(x) < g(x)$ 이면 $x > p$ 이다.



$$f(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{이고, } a=2 \text{이므로 } g(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } f(\sqrt{2}) > g(\sqrt{2}) \quad \therefore p > \sqrt{2}$$

ㄷ. 점 $B(p+q, 0)$ 에 대하여 삼각형 AOB의 넓이 $S(p)$ 는

$$S(p) = \frac{1}{2} \times (p+q) \times q = \frac{pq}{2} + \frac{q^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p^2} \quad (\because pq=1)$$

$$\text{한편 } f(\sqrt{a}) = \frac{1}{\sqrt{a}} \text{이고 } g(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \text{이다.}$$

$$1 < a < 4 \text{에서 } 1 < \sqrt{a} < 2 \text{이므로 } f(\sqrt{a}) > g(\sqrt{a})$$

$$\text{따라서 } p > \sqrt{a} \text{이고 } \frac{1}{p} < \frac{1}{\sqrt{a}} \text{이다.}$$

$$\therefore S(p) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p^2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} = \frac{a+1}{2a}$$

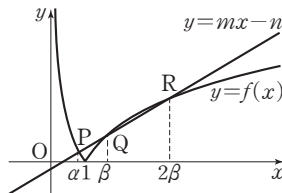
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

06 ⑥ $\frac{11}{4}$

$$f(x) = |\log_2 x|$$

$$= \begin{cases} -\log_2 x & (0 < x < 1) \\ \log_2 x & (x \geq 1) \end{cases}$$

이므로 함수 $f(x) = |\log_2 x|$ 의 그래프와 직선 $y=mx-n$ 이 서로 다른 세 점에서 만나려면 그림과 같이 $m > 0$ 이고 $0 < \alpha < 1 < \beta$ 이어야 한다.



$$\therefore P(\alpha, -\log_2 \alpha), Q(\beta, \log_2 \beta), R(2\beta, \log_2 2\beta)$$

이때 세 점 P, Q, R가 한 직선 위에 있고, $2PQ = QR$ 이므로 점 Q는 선분 PR를 1 : 2로 내분하는 점이다.

선분 PR를 1 : 2로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2\beta + 2\alpha}{3}, \frac{\log_2 2\beta - 2\log_2 \alpha}{3} \right)$$

$$\frac{2\beta + 2\alpha}{3} = \beta \text{에서 } \beta = 2\alpha \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\log_2 2\beta - 2\log_2 \alpha}{3} = \log_2 \beta \text{에서 } \textcircled{1} \text{을 대입하면}$$

$$\frac{\log_2 4\alpha - 2\log_2 \alpha}{3} = \log_2 2\alpha, \quad 2 + \log_2 \alpha - 2\log_2 \alpha = 3(1 + \log_2 \alpha)$$

$$4\log_2 \alpha = -1, \quad \log_2 \alpha = -\frac{1}{4} \quad \therefore \alpha = 2^{-\frac{1}{4}}$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \beta = 2 \times 2^{-\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$$

두 점 Q, R를 지나는 직선의 기울기 m 은

$$m = \frac{\log_2 2\beta - \log_2 \beta}{2\beta - \beta} = \frac{1}{\beta} = 2^{-\frac{3}{4}}$$

점 $P(2^{-\frac{1}{4}}, \frac{1}{4})$ 은 직선 $y=2^{-\frac{3}{4}}x-n$ 위의 점이므로

$$\frac{1}{4} = 2^{-\frac{3}{4}} \times 2^{-\frac{1}{4}} - n \quad \therefore n = \frac{1}{4} = 2^{-2}$$

$$\therefore f(mn) = f(2^{-\frac{3}{4}} \times 2^{-2}) = f(2^{-\frac{11}{4}})$$

$$= |\log_2 2^{-\frac{11}{4}}| = \frac{11}{4}$$

개념 NOTE

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 에 대하여 선분 AB를

$m : n$ ($m > 0$, $n > 0$)으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$$

07 ⑨

함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} + 3$ 의 역함수를 구하면

$$y-3 = 2^{-x+4} \text{에서 } -x+4 = \log_2(y-3)$$

$$x = -\log_2(y-3) + 4$$

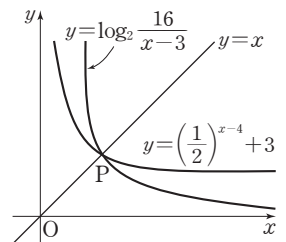
x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y = -\log_2(x-3) + 4 = \log_2 \frac{16}{x-3}$$

$$\text{즉, 두 함수 } y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} + 3,$$

$y = \log_2 \frac{16}{x-3}$ 은 서로 역함수 관계이므로 그 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이다.

이때 점 P는 두 곡선 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} + 3$,



$y = \log_2 \frac{16}{x-3}$ 이 만나는 점이므로 직선

$y=x$ 위의 점이다.

$$\therefore \beta = \alpha \quad \therefore P(\alpha, \alpha)$$

두 곡선 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} + 3$, $y = \log_2 \frac{16}{x-3} = -\log_2(x-3) + 4$ 를 각각 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}, \quad y = -\log_2 x + 1$$

또 점 P를 x 축의 방향으로 -3만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 점을 P'이라 하면

$$P'(\alpha-3, \alpha-3)$$

두 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$, $y = -\log_2 x + 1$ 은 서로 역함수 관계이므로 그 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이다.

이때 점 P'은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 두 곡선 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$,

$y = -\log_2 x + 1$ 이 만나는 점은 P'이다.

곡선 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 과 직선 $y=x$ 가 만나는 점의

좌표는 (1, 1)이므로

$$\alpha - 3 = 1 \quad \therefore \alpha = 4$$

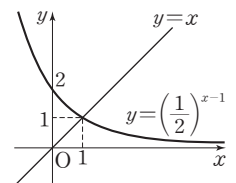
점 P(4, 4)는 곡선 $y = a \log_2 x + 2a$ 위의 점

이므로

$$4 = a \log_2 4 + 2a$$

$$4a = 4 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a + \alpha + \beta = 1 + 4 + 4 = 9$$



08 답 4

두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$ 는 서로 역함수 관계이므로 그 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이다.

(i) $n(M_1)=1$, $n(M_2)=2$, $n(M_1 \cap M_2)=0$ 일 때,

$n(M_1)=1$ 이려면 곡선 $y=a^x$ 이

점 $B(2, 4)$ 를 지나야 하므로

$$a^2=4 \quad \therefore a=2 \quad (\because a>1)$$

이때 곡선 $y=\log_2 x$ 는 두 점

$(4, 2)$, $(5, \log_2 5)$ 를 지나고

$2 < \log_2 5 < 3$ 이므로 그림과 같이

$n(M_2)=2$ 이고,

$n(M_1 \cap M_2)=0$ 이다.

따라서 $a=2$ 일 때, $n(M_1 \cup M_2)=3$

(ii) $n(M_1)=2$, $n(M_2)=1$, $n(M_1 \cap M_2)=0$ 일 때,

$n(M_2)=1$ 이려면 곡선 $y=\log_a x$

가 점 $B(2, 4)$ 를 지나야 하므로

$$\log_a 2=4 \quad \therefore a=2^{\frac{1}{4}}$$

이때 곡선 $y=2^{\frac{x}{4}}$ 은 두 점 $(4, 2)$,

$(5, 2^{\frac{5}{4}})$ 을 지나고 $2 < 2^{\frac{5}{4}} < 3$ 이므로

그림과 같이 $n(M_1)=2$ 이고,

$n(M_1 \cap M_2)=0$ 이다.

따라서 $a=2^{\frac{1}{4}}$ 일 때, $n(M_1 \cup M_2)=3$

(iii) $n(M_1)=2$, $n(M_2)=2$, $n(M_1 \cap M_2)=1$ 일 때,

$n(M_1 \cap M_2) \neq 0$ 이므로 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$ 가 만나는 점이 존재하고 이 점은 직선 $y=x$ 위의 점이므로 다음과 같은 경우가 있다.

① 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$ 가 모두 점 $C(4, 4)$ 를 지날 때,

곡선 $y=a^x$ 이 점 C 를 지나므로

$$a^4=4 \quad \therefore a=\sqrt[4]{2} \quad (\because a>1)$$

이때 곡선 $y=\log_{\sqrt[4]{2}} x$ 도 점 C

를 지나므로 그림과 같이

$a=\sqrt[4]{2}$ 일 때,

$n(M_1 \cup M_2)=3$

② 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$ 가

모두 직선 $y=x$ 와 직선 AB 가 만나는 점을 지날 때,

직선 AB 의 방정식을 구하면

$$y=\frac{4-1}{2-5}(x-5)+1 \quad \therefore y=-x+6$$

두 직선 $y=-x+6$, $y=x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$-x+6=x, 2x=6 \quad \therefore x=3$$

따라서 두 직선 $y=-x+6$, $y=x$ 가 만나는 점의 좌표는

$(3, 3)$

곡선 $y=a^x$ 이 점 $(3, 3)$ 을 지

나므로 $a^3=3$

$$\therefore a=\sqrt[3]{3} \quad (\because a \text{는 실수})$$

이때 곡선 $y=\log_{\sqrt[3]{3}} x$ 도 점

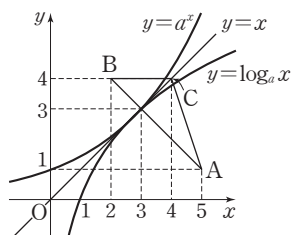
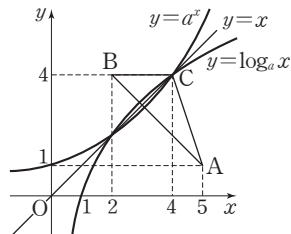
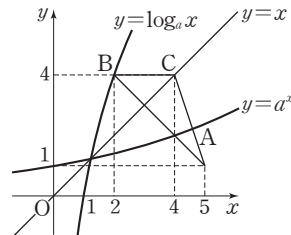
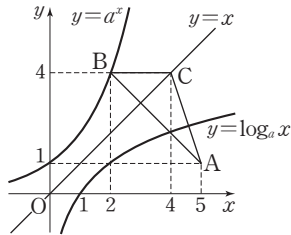
$(3, 3)$ 을 지나므로 그림과 같

이 $a=\sqrt[3]{3}$ 일 때,

$n(M_1 \cup M_2)=3$

①, ②에서 $a=\sqrt[4]{2}$ 또는 $a=\sqrt[3]{3}$

(i), (ii), (iii)에서 실수 a 는 $2^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, 2의 4개이다.



09 답 ②

$\overline{AB}=\overline{AD}$ 이므로 점 A 는 선분 BD 의 중점이다.

점 A 의 좌표를 $A(p, 3p+2)$ 라 하고, 점 B 의 좌표는 $B(x, y)$ 라 하자.

점 D 의 좌표는 $D(0, 2)$ 이므로

$$\frac{x+0}{2}=p, \frac{y+2}{2}=3p+2, \text{ 즉 } x=2p, y=6p+2$$

따라서 점 B 의 좌표는 $B(2p, 6p+2)$ 이다.

함수 $y=a^x+k$ 의 역함수를 구하면 $y-k=a^x$, $x=\log_a(y-k)$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=\log_a(x-k)$

즉, 두 함수 $y=a^x+k$, $y=\log_a(x-k)$ 는 서로 역함수 관계이므로 그 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이고, 곡선 $y=a^x+k$ 위의 점 B 와 곡선 $y=\log_a(x-k)$ 위의 점 C 를 지나는 직선이 직선 $y=x$ 와 서로 수직이므로 점 C 는 점 B 를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동시킨 점이다. 따라서 점 C 의 좌표는 $C(6p+2, 2p)$ 이다.

삼각형 CBD 는 이등변삼각형이므로 두 직선 BD , AC 는 서로 수직이다.

직선 BD 의 기울기가 3이므로 직선 AC 의 기울기는

$$\frac{2p-(3p+2)}{(6p+2)-p}=\frac{-p-2}{5p+2}=-\frac{1}{3} \text{에서 } p=2$$

$$\therefore A(2, 8), B(4, 14)$$

두 점 A, B 가 곡선 $y=a^x+k$ 위의 점이므로

$$a^2+k=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a^4+k=14 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하면 } a^4-a^2-6=0$$

$$(a^2+2)(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})=0$$

이때 $a>1$ 이므로 $a=\sqrt{3}$, $k=5$

$$\therefore a \times k=5\sqrt{3}$$

다른 풀이

$\overline{AB}=\overline{AD}$ 이므로 점 A 는 선분 BD 의 중점이다.

점 A 의 좌표를 $A(p, 3p+2)$ 라 하고, 점 B 의 좌표는 $B(x, y)$ 라 하자.

점 D 의 좌표는 $D(0, 2)$ 이므로

$$\frac{x+0}{2}=p, \frac{y+2}{2}=3p+2, \text{ 즉 } x=2p, y=6p+2$$

따라서 점 B 의 좌표는 $B(2p, 6p+2)$ 이다.

점 B 가 곡선 $y=a^x+k$ 위의 점이므로

$$6p+2=a^{2p}+k, \text{ 즉 } a^{2p}=(6p+2)-k \text{에서}$$

$$2p=\log_a \{(6p+2)-k\} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

그리고 점 B 를 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y=-(x-2p)+6p+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 점 $(6p+2, 2p)$ 는 곡선 $y=\log_a(x-k)$ 위의 점이면서 직선 $y=-(x-2p)+6p+2$ 위의 점이므로 점 C 의 좌표는 $C(6p+2, 2p)$ 이다.

삼각형 CBD 는 이등변삼각형이므로 두 직선 BD , AC 는 서로 수직이다.

직선 BD 의 기울기가 3이므로 직선 AC 의 기울기는

$$\frac{2p-(3p+2)}{(6p+2)-p}=\frac{-p-2}{5p+2}=-\frac{1}{3} \text{에서 } p=2$$

$$\therefore A(2, 8), B(4, 14)$$

두 점 A, B 가 곡선 $y=a^x+k$ 위의 점이므로

$$a^2+k=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$a^4+k=14 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{을 연립하면 } a^4-a^2-6=0$$

$$(a^2+2)(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})=0$$

이때 $a>1$ 이므로 $a=\sqrt{3}$, $k=5 \quad \therefore a \times k=5\sqrt{3}$

10 답 ②

함수 $y=3^{-x+4}$ 의 역함수를 구하면 $-x+4=\log_3 y$, $x=-\log_3 y+4$
 x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=-\log_3 x+4$
 즉, 두 함수 $y=-\log_3 x+4$, $y=3^{-x+4}$ 은 서로 역함수 관계이므로 그 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이다.

따라서 $\overline{AB}=\overline{CD}$ 이고 $\overline{AD}-\overline{BC}=4\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$

점 A를 지나고 y 축에 평행한 직선과
 점 B를 지나고 x 축에 평행한 직선이
 만나는 점을 H라 하자.

직선 AB의 기울기가 -1 이므로 삼각
 형 AHB는 직각이등변삼각형이 되어
 $\overline{AH}=\overline{BH}=2$

점 A의 좌표를 $(a, -a+k)$ 라 하면

점 B의 좌표는 $(a+2, -a+k-2)$ 이다.

두 점 A, B는 함수 $y=-\log_3 x+4$ 의 그래프 위의 점이므로

$$-a+k=-\log_3 a+4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

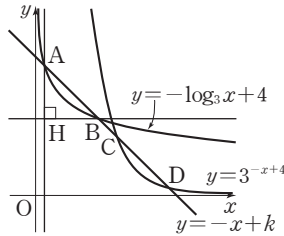
$$-a+k-2=-\log_3 (a+2)+4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}-\textcircled{2}\text{을 하면 } 2=\log_3 \frac{a+2}{a}$$

$$\frac{a+2}{a}=9, a+2=9a \quad \therefore a=\frac{1}{4}$$

$$\text{이를 } \textcircled{1}\text{에 대입하면 } -\frac{1}{4}+k=-\log_3 \frac{1}{4}+4$$

$$\therefore k=\frac{17}{4}+2\log_3 2$$



11 답 45

함수 $g(x)=2^x+3$ 의 역함수를 구하면

$$y=2^x+3\text{에서 } y-3=2^x, x=\log_2 (y-3)$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=\log_2 (x-3)$

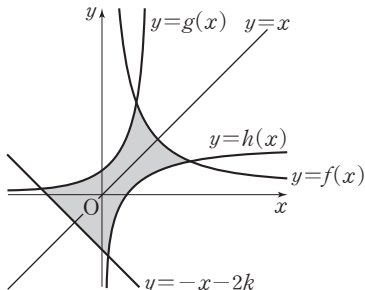
즉, 두 함수 $y=g(x)$, $y=h(x)$ 는 서로 역함수 관계이므로 그 그래프는
 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이다.

또 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이고 직선

$y=-x-2k$ 도 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 세 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=h(x)$ 의 그래프와 직선

$y=-x-2k$ 로 둘러싸인 부분을 S라 하면 S는 그림과 같이 직선 $y=x$
 에 대하여 대칭이다.



즉, S의 경계 및 내부에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점 중 직선
 $y=x$ 위의 점을 제외한 점의 개수는 짝수이다.

따라서 S의 경계 및 내부의 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점
 의 개수가 홀수가 되려면 S의 경계 및 내부에서 x 좌표와 y 좌표가 모두
 정수인 점 중 직선 $y=x$ 위의 점의 개수가 홀수이어야 한다.

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{100}{x}=x, x^2=100 \quad \therefore x=10 (\because x>0)$$

두 직선 $y=-x-2k$, $y=x$ 가 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$-x-2k=x, 2x=-2k \quad \therefore x=-k$$

즉, S의 경계 및 내부에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점 중 직선
 $y=x$ 위의 점은 $(-k, -k)$, $(-k+1, -k+1)$, ..., $(0, 0)$, $(1, 1)$,
 ..., $(10, 10)$ 이므로 그 개수는 $k+11$ 이다.

따라서 $k+11$ 이 홀수가 되려면 k 는 짝수이어야 하므로 두 자리의 자연수
 k 는 10, 12, 14, ..., 98의 45개이다.

12 답 ②

$$\begin{aligned} y &= |\log_2 x - 1| + |\log_2 4x^2 - 1| + |\log_2 8x^3 - 1| \\ &\quad + |\log_2 16x^4 - 1| + |\log_2 32x^5 - 1| \\ &= |\log_2 x - 1| + |2\log_2 x + 1| + |3\log_2 x + 2| \\ &\quad + |4\log_2 x + 3| + |5\log_2 x + 4| \end{aligned}$$

$\log_2 x=t$ 로 놓으면

$$y=|t-1|+|2t+1|+|3t+2|+|4t+3|+|5t+4| \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $t < -\frac{4}{5}$ 일 때,

$$\begin{aligned} y &= -(t-1) - (2t+1) - (3t+2) - (4t+3) - (5t+4) \\ &= -15t-9 \end{aligned}$$

이때 t 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

(ii) $-\frac{4}{5} \leq t < -\frac{3}{4}$ 일 때,

$$\begin{aligned} y &= -(t-1) - (2t+1) - (3t+2) - (4t+3) + (5t+4) \\ &= -5t-1 \end{aligned}$$

이때 t 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

(iii) $-\frac{3}{4} \leq t < -\frac{2}{3}$ 일 때,

$$\begin{aligned} y &= -(t-1) - (2t+1) - (3t+2) + (4t+3) + (5t+4) \\ &= 3t+5 \end{aligned}$$

이때 t 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

(iv) $-\frac{2}{3} \leq t < -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$\begin{aligned} y &= -(t-1) - (2t+1) + (3t+2) + (4t+3) + (5t+4) \\ &= 9t+9 \end{aligned}$$

이때 t 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

(v) $-\frac{1}{2} \leq t < 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} y &= -(t-1) + (2t+1) + (3t+2) + (4t+3) + (5t+4) \\ &= 13t+11 \end{aligned}$$

이때 t 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

(vi) $t \geq 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} y &= (t-1) + (2t+1) + (3t+2) + (4t+3) + (5t+4) \\ &= 15t+9 \end{aligned}$$

이때 t 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

(i)~(vi)에서 ①은 $t=-\frac{3}{4}$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$$\begin{aligned} t &= \log_2 x \text{이므로} & t &= -\frac{3}{4} \text{에서 직선의 기울기의} \\ \log_2 x &= -\frac{3}{4} & \therefore x &= 2^{-\frac{3}{4}} & \therefore a &= 2^{-\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

부호가 음에서 양으로 바뀐다.

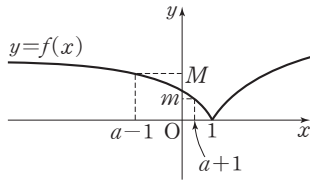
이때 최솟값이 m 이므로

$$m=3 \times \left(-\frac{3}{4}\right) + 5 = \frac{11}{4}$$

$$\therefore a \times 2^m = 2^{-\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{11}{4}} = 2^2 = 4$$

13 답 ②

$a-1 \leq x \leq a+1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 하자.
(i) $a < 0$ 인 경우



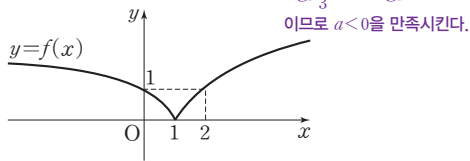
$a-1 < a+1 < 1$ 이므로

$$M = f(a-1) = -2^{a-1} + 2$$

$$m = f(a+1) = -2^{a+1} + 2$$

$$M - m = (-2^{a-1} + 2) - (-2^{a+1} + 2) = \frac{3}{2} \times 2^a = 1 \text{에서 } a = \log_2 \frac{2}{3}$$

(ii) $0 \leq a \leq 2$ 인 경우



$a-1 \leq 1 \leq a+1$ 이므로

① 최댓값이 $f(a-1)$ 인 경우

$$M = f(a-1) = -2^{a-1} + 2$$

$$m = f(1) = \log_2 1 = 0$$

$$M - m = (-2^{a-1} + 2) - 0 = 1 \text{에서 } a = 1$$

② 최댓값이 $f(a+1)$ 인 경우

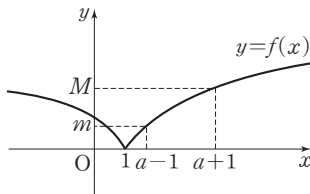
$$M = f(a+1) = \log_2(a+1)$$

$$m = f(1) = \log_2 1 = 0$$

$$M - m = \log_2(a+1) - 0 = 1 \text{에서 } a = 1$$

①, ②에서 $a = 1$

(iii) $a > 2$ 인 경우



$1 < a-1 < a+1$ 이므로

$$M = f(a+1) = \log_2(a+1)$$

$$m = f(a-1) = \log_2(a-1)$$

$$M - m = \log_2(a+1) - \log_2(a-1) = 1 \text{에서}$$

$$\log_2 \frac{a+1}{a-1} = 1, \frac{a+1}{a-1} = 2$$

$$\therefore a = 3$$

(i), (ii), (iii)에서 모든 실수 a 의 값은 $\log_2 \frac{2}{3}$, 1, 3이고 그 합은

$$\log_2 \frac{2}{3} + 1 + 3 = \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 16 = \log_2 \frac{32}{3}$$

14 답 12

$$(\log_3 x)^2 + \log_3 y = 3 \text{에서 } (\log_3 x)^2 + \frac{\log_3 y}{\log_3 x} = 3$$

$$\log_3 x \times \log_3 y = 4 \text{에서 } \log_3 x \times 2 \log_3 y = 4$$

$$\therefore \log_3 x \times \log_3 y = 2$$

$\log_3 x = X$, $\log_3 y = Y$ 로 놓으면 주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} X^2 + \frac{Y}{X} = 3 & \dots\dots ㉠ \\ XY = 2 & \dots\dots ㉡ \end{cases}$$

㉡에서 $Y = \frac{2}{X}$ 이므로 이를 ㉠에 대입하면

$$X^2 + \frac{2}{X^2} = 3, X^4 - 3X^2 + 2 = 0$$

$$(X^2 - 1)(X^2 - 2) = 0$$

$$(X + \sqrt{2})(X + 1)(X - 1)(X - \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore X = -\sqrt{2} \text{ 또는 } X = -1 \text{ 또는 } X = 1 \text{ 또는 } X = \sqrt{2}$$

$$Y = \frac{2}{X} \text{이므로}$$

$$X = -\sqrt{2} \text{일 때 } Y = -\sqrt{2}, X = -1 \text{일 때 } Y = -2,$$

$$X = 1 \text{일 때 } Y = 2, X = \sqrt{2} \text{일 때 } Y = \sqrt{2}$$

(i) $X = -\sqrt{2}$, $Y = -\sqrt{2}$ 일 때,

$$\log_3 x = -\sqrt{2}, \log_3 y = -\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$x = 3^{-\sqrt{2}}, y = 3^{-\sqrt{2}} \therefore x + y = 2 \times 3^{-\sqrt{2}}$$

(ii) $X = -1$, $Y = -2$ 일 때,

$$\log_3 x = -1, \log_3 y = -2 \text{이므로}$$

$$x = 3^{-1} = \frac{1}{3}, y = 3^{-2} = \frac{1}{9} \therefore x + y = \frac{4}{9}$$

(iii) $X = 1$, $Y = 2$ 일 때,

$$\log_3 x = 1, \log_3 y = 2 \text{이므로}$$

$$x = 3, y = 3^2 = 9 \therefore x + y = 12$$

(iv) $X = \sqrt{2}$, $Y = \sqrt{2}$ 일 때,

$$\log_3 x = \sqrt{2}, \log_3 y = \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$x = 3^{\sqrt{2}}, y = 3^{\sqrt{2}} \therefore x + y = 2 \times 3^{\sqrt{2}}$$

(i)~(iv)에서 $x+y$ 의 값은 $2 \times 3^{-\sqrt{2}}$, $\frac{4}{9}$, 12, $2 \times 3^{\sqrt{2}}$

이때 $\frac{4}{9} < 12$, $2 \times 3^{-\sqrt{2}} < 2 \times 3^{\sqrt{2}}$ 이므로 최댓값을 찾기 위하여 12와 $2 \times 3^{\sqrt{2}}$

의 대소를 비교해 보자.

$$27 = 3^3 < 6^2 = 36 \text{에서 } 3^{\frac{3}{2}} < 6 \text{이고, } 3^{\sqrt{2}} < 3^{\frac{3}{2}} \text{이므로}$$

$$3^{\sqrt{2}} < 6 \therefore 2 \times 3^{\sqrt{2}} < 12$$

따라서 $x+y$ 의 최댓값은 12이다.

15 답 ②

$(\log_3 x)^2 - a \log_3 x + 2a + 1 = 0$ 에서 $\log_3 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - at + 2a + 1 = 0 \dots\dots ㉠$$

이때 주어진 방정식의 두 실근이 α , β 이므로 이차방정식 ㉠의 두 실근은 $\log_3 \alpha$, $\log_3 \beta$ 이다.

$$\frac{1}{9} < \alpha < \frac{1}{3} \text{에서 } \log_3 \frac{1}{9} < \log_3 \alpha < \log_3 \frac{1}{3}$$

$$\therefore -2 < \log_3 \alpha < -1$$

$$1 < \beta < 3 \text{에서 } \log_3 1 < \log_3 \beta < \log_3 3$$

$$\therefore 0 < \log_3 \beta < 1$$

따라서 $f(t) = t^2 - at + 2a + 1$ 이라 할 때,

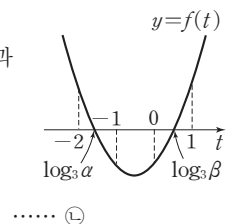
$$-2 < \log_3 \alpha < -1, 0 < \log_3 \beta < 1 \text{이라면 그림과}$$

$$\text{같이 } f(-2) > 0, f(-1) < 0, f(0) < 0,$$

$$f(1) > 0 \text{이어야 한다.}$$

$$f(-2) > 0 \text{에서 } 4a + 5 > 0$$

$$\therefore a > -\frac{5}{4}$$



$$f(-1) < 0 \text{에서 } 3a+2 < 0 \quad \therefore a < -\frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$f(0) < 0 \text{에서 } 2a+1 < 0 \quad \therefore a < -\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$$f(1) > 0 \text{에서 } a+2 > 0 \quad \therefore a > -2 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

①~③에서

$$-\frac{5}{4} < a < -\frac{2}{3}$$

따라서 정수 a 의 값은 -1 이다.

16 답 ①

$$\log_n(7a+n) = \log_n(a^2+2) + 1 \text{에서}$$

$$\log_n(7a+n) = \log_n n(a^2+2)$$

$$\text{즉, } 7a+n = n(a^2+2) \text{이므로}$$

$$na^2 - 7a + n = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식을 만족시키는 양수 a 가 존재하려면 이차방정식 ①을 만족시키는 양의 실근이 존재해야 한다.

$$f(a) = na^2 - 7a + n = n\left(a - \frac{7}{2n}\right)^2 + n - \frac{49}{4n} \text{라 하면 함수 } y=f(a) \text{의}$$

그래프의 축은 직선 $a = \frac{7}{2n}$ 이고, n 은 자연수이므로

$$\frac{7}{2n} > 0$$

이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$D = 49 - 4n^2 \geq 0$$

$$4n^2 - 49 \leq 0$$

$$(2n+7)(2n-7) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{7}{2} \leq n \leq \frac{7}{2}$$

그런데 n 은 1이 아닌 자연수이므로

$$1 < n \leq \frac{7}{2}$$

따라서 자연수 n 의 값은 2, 3이므로 그 합은

$$2+3=5$$

개념 NOTE

계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 판별식을 $D=b^2-4ac$ 라 할 때,

(1) $D > 0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $D = 0$ 이면 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.

(3) $D < 0$ 이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

17 답 -7

$(x^2+y^2-3)^{\log_2(x^2+y^2-3)} \times 2^{\{\log_2(x-y+k)\}^2} = 1$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 \{(x^2+y^2-3)^{\log_2(x^2+y^2-3)} \times 2^{\{\log_2(x-y+k)\}^2}\} = 0$$

$$3\{\log_2(x^2+y^2-3)\}^2 + \{\log_2(x-y+k)\}^2 = 0$$

이때 $\{\log_2(x^2+y^2-3)\}^2 \geq 0$, $\{\log_2(x-y+k)\}^2 \geq 0$ 이므로

$$\log_2(x^2+y^2-3) = 0, \log_2(x-y+k) = 0$$

$$x^2+y^2-3=1, x-y+k=1$$

$$\therefore x^2+y^2-4=0, y=x+k-1$$

$y=x+k-1$ 을 $x^2+y^2-4=0$ 에 대입하면

$$x^2+(x+k-1)^2-4=0$$

$$2x^2+2(k-1)x+k^2-2k-3=0$$

이때 이 이차방정식의 실근이 존재하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 2(k^2-2k-3) \geq 0$$

$$k^2-2k-7 \leq 0$$

$$\therefore 1-2\sqrt{2} \leq k \leq 1+2\sqrt{2}$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 $1+2\sqrt{2}$, 최솟값은 $1-2\sqrt{2}$ 이므로 그 곱은

$$(1+2\sqrt{2})(1-2\sqrt{2}) = 1-8 = -7$$

18 답 $-\frac{31}{32}$

$$(\log_2 x)^2 - |\log_2 x^4| + \log_{\sqrt{2}} x = a \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - |4\log_2 x| + 2\log_2 x = a$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - |4t| + 2t = a$$

$f(t) = t^2 - |4t| + 2t$ 라 하면 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지므로 함수 $y=f(t)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$$f(t) = \begin{cases} t^2+6t & (t < 0) \\ t^2-2t & (t \geq 0) \end{cases} = \begin{cases} (t+3)^2-9 & (t < 0) \\ (t-1)^2-1 & (t \geq 0) \end{cases}$$

함수 $y=f(t)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가

서로 다른 세 점에서 만나려면 그림과 같이 $a = -1$ 또는 $a = 0$ 이어야 한다.

(i) $a = -1$ 일 때,

$t < 0$ 이면 $t^2+6t = -1$ 에서

$$t^2+6t+1=0$$

$$\therefore t = -3-2\sqrt{2} \text{ 또는 } t = -3+2\sqrt{2}$$

$t \geq 0$ 이면 $t^2-2t = -1$ 에서

$$t^2-2t+1=0$$

$$(t-1)^2=0$$

$$\therefore t=1$$

$t = \log_2 x$ 이고 주어진 방정식의 세 실근이 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)이므로

$$\log_2 \alpha = -3-2\sqrt{2}, \log_2 \beta = -3+2\sqrt{2}, \log_2 \gamma = 1$$

이때 $\log_2 \alpha + \log_2 \beta + \log_2 \gamma = -5$ 이므로

$$\log_2 \alpha \beta \gamma = -5 \quad \therefore \alpha \beta \gamma = 2^{-5} = \frac{1}{32}$$

$$\therefore \alpha \beta \gamma + a = -\frac{31}{32}$$

(ii) $a = 0$ 일 때,

$t < 0$ 이면 $t^2+6t = 0$ 에서

$$t(t+6) = 0$$

$$\therefore t = -6 \quad (\because t < 0)$$

$t \geq 0$ 이면 $t^2-2t = 0$ 에서

$$t(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 2$$

$t = \log_2 x$ 이고 주어진 방정식의 세 실근이 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$)이므로

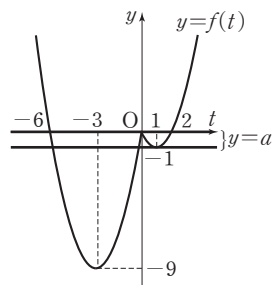
$$\log_2 \alpha = -6, \log_2 \beta = 0, \log_2 \gamma = 2$$

이때 $\log_2 \alpha + \log_2 \beta + \log_2 \gamma = -4$ 이므로

$$\log_2 \alpha \beta \gamma = -4 \quad \therefore \alpha \beta \gamma = 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

$$\therefore \alpha \beta \gamma + a = \frac{1}{16}$$

(i), (ii)에서 $\alpha \beta \gamma + a$ 의 최솟값은 $-\frac{31}{32}$ 이다.



19 답 ④

진수의 조건에서

$$\sqrt{-n^2+10n+75}>0, 75-kn>0$$

$$\text{즉, } n^2-10n-75<0, kn<75 \text{에서}$$

$$(n+5)(n-15)<0, n<\frac{75}{k} \text{이므로}$$

$$1\leq n<15, n<\frac{75}{k} (\because n \text{은 자연수}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_2 \sqrt{-n^2+10n+75} - \log_4 (75-kn) > 0 \text{에서}$$

$$\log_4 (-n^2+10n+75) > \log_4 (75-kn)$$

로그의 밑이 1보다 크므로

$$-n^2+10n+75 > 75-kn, n(n-k-10) < 0$$

$$\therefore 1\leq n < k+10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$(i) k+10 > \frac{75}{k} \text{일 때, } k(k+10)-75 > 0 \text{에서}$$

$$k^2+10k-75 > 0, (k+15)(k-5) > 0$$

$$\therefore k > 5 (\because k \text{는 자연수})$$

$$k > 5 \text{이면 } \frac{75}{k} < 15, k+10 > 15 \text{이므로 } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 1\leq n < \frac{75}{k} \text{이다.}$$

이를 만족시키는 자연수 n 의 개수가 12가 되려면

$$12 < \frac{75}{k} \leq 13 \quad \therefore \frac{75}{13} \leq k < \frac{75}{12}$$

따라서 이를 만족시키는 자연수 k 의 값은 6이다.

$$(ii) k+10 \leq \frac{75}{k} \text{일 때, } k(k+10)-75 \leq 0 \text{에서}$$

$$k^2+10k-75 \leq 0, (k+15)(k-5) \leq 0$$

$$\therefore 1\leq k \leq 5 (\because k \text{는 자연수})$$

$$1\leq k \leq 5 \text{이면 } \frac{75}{k} \geq 15, 11\leq k+10 \leq 15 \text{이므로 } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서}$$

$$1\leq n < k+10 \text{이다.}$$

이를 만족시키는 자연수 n 의 개수가 12가 되려면

$$12 < k+10 \leq 13 \quad \therefore 2 < k \leq 3$$

따라서 이를 만족시키는 자연수 k 의 값은 3이다.

$$(i), (ii) \text{에서 구하는 모든 자연수 } k \text{의 값의 합은}$$

$$6+3=9$$

20 답 5

$$\log_2 (x-1) + \log_2 (a-2x) < \log_2 \left(\frac{a^2}{8} - x \right) \text{에서}$$

$$\log_2 (x-1)(a-2x) < \log_2 \left(\frac{a^2}{8} - x \right)$$

로그의 밑이 1보다 크므로

$$(x-1)(a-2x) < \frac{a^2}{8} - x$$

$$\therefore 2x^2 - (a+3)x + \frac{a^2}{8} + a > 0 \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$f(x) = 2x^2 - (a+3)x + \frac{a^2}{8} + a = 2 \left(x - \frac{a+3}{4} \right)^2 - \frac{(a+3)^2}{8} + \frac{a^2}{8} + a$$

라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 축은 직선 $x=\frac{a+3}{4}$ 이다.

$$(i) 1 < x < \frac{a}{2} \text{에 } x=\frac{a+3}{4} \text{이 속할 때,}$$

$$\frac{a+3}{4} < \frac{a}{2} \text{이므로 } a+3 < 2a$$

$$\hookrightarrow a > 2 \text{이므로 } \frac{a+3}{4} > 1 \text{이 항상 성립한다.}$$

$$\therefore a > 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$1 < x < \frac{a}{2}$ 에서 부등식 $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f\left(\frac{a+3}{4}\right) > 0$ 이어야 하므로

$$-\frac{(a+3)^2}{8} + \frac{a^2}{8} + a > 0$$

$$-(a+3)^2 + a^2 + 8a > 0$$

$$2a-9 > 0 \quad \therefore a > \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a > \frac{9}{2}$$

$$(ii) 1 < x < \frac{a}{2} \text{에 } x=\frac{a+3}{4} \text{이 속하지 않을 때,}$$

$$\frac{a+3}{4} \geq \frac{a}{2} \text{이므로 } a+3 \geq 2a \quad \therefore a \leq 3$$

$$\hookrightarrow a > 2 \text{이므로 } \frac{a+3}{4} > 1 \text{이 항상 성립한다.}$$

$$\text{그런데 } a > 2 \text{이므로 } 2 < a \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$1 < x < \frac{a}{2}$ 에서 부등식 $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f\left(\frac{a}{2}\right) \geq 0$ 이어야 하므로

$$\frac{a^2}{2} - \frac{a}{2}(a+3) + \frac{a^2}{8} + a \geq 0$$

$$\frac{a^2}{8} - \frac{a}{2} \geq 0, a^2 - 4a \geq 0, a(a-4) \geq 0$$

$$\therefore a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq 4$$

$$\text{그런데 } a > 2 \text{이므로 } a \geq 4 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{의 공통부분은 존재하지 않는다.}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a > \frac{9}{2} \quad \dots\dots \text{배점 50\%}$$

$$\text{따라서 자연수 } a \text{의 최솟값은 5이다.} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

21 답 ⑤

$$2\log_2 x - 3 = 0 \text{에서 } \log_2 x = \frac{3}{2} \quad \therefore x = 2^{\frac{3}{2}}$$

이때 $8=2^3 < 3^2=9$ 에서 $2^{\frac{3}{2}} < 3$ 이고, x 는 자연수이므로

$$(\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 - |2\log_2 x - 3|$$

$$= \begin{cases} (\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 + 2\log_2 x - 3 & (x=1, 2) \\ (\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 - 2\log_2 x + 3 & (x \geq 3) \end{cases}$$

$$(i) x=1 \text{일 때,}$$

$$\log_2 x = 0 \text{이므로 주어진 부등식은}$$

$$(\log_2 y)^2 - 3 \leq 1$$

$$(\log_2 y)^2 \leq 4, -2 \leq \log_2 y \leq 2$$

$$\log_2 2^{-2} \leq \log_2 y \leq \log_2 2^2$$

$$\text{로그의 밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{4} \leq y \leq 4$$

따라서 자연수 y 의 값은 1, 2, 3, 4이므로 순서쌍 (x, y) 는 (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4)의 4개이다.

$$(ii) x=2 \text{일 때,}$$

$$\log_2 x = 1 \text{이므로 주어진 부등식은}$$

$$(\log_2 y)^2 \leq 1, -1 \leq \log_2 y \leq 1$$

$$\log_2 2^{-1} \leq \log_2 y \leq \log_2 2$$

$$\text{로그의 밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{2} \leq y \leq 2$$

따라서 자연수 y 의 값은 1, 2이므로 순서쌍 (x, y) 는 (2, 1), (2, 2)의 2개이다.

$$(iii) x \geq 3 \text{일 때,}$$

$$\text{주어진 부등식은 } (\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 - 2\log_2 x + 3 \leq 1$$

$$(\log_2 x - 1)^2 + (\log_2 y)^2 + 2 \leq 1$$

$$\therefore (\log_2 x - 1)^2 + (\log_2 y)^2 \leq -1$$

이때 $(\log_2 x - 1)^2 \geq 0$, $(\log_2 y)^2 \geq 0$ 이므로 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x, y 는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 (x, y) 의 개수는 $4+2=6$

22 답 8

$$(\log_5 x)^2 + (\log_5 y)^2 = \log_5 5x^2 + \log_{\sqrt{5}} y^2 \text{에서}$$

$$(\log_5 x)^2 + (\log_5 y)^2 = 1 + 2\log_5 x + 4\log_5 y$$

$$(\log_5 x)^2 + (\log_5 y)^2 - 2\log_5 x - 4\log_5 y - 1 = 0$$

$$\log_5 x = X, \log_5 y = Y \text{로 놓으면}$$

$$X^2 + Y^2 - 2X - 4Y - 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_5 x^2 y = k \text{라 하면}$$

$$2\log_5 x + \log_5 y = k$$

$$2X + Y = k \quad \therefore Y = -2X + k$$

이를 ①에 대입하면

$$X^2 + (-2X + k)^2 - 2X - 4(-2X + k) - 1 = 0$$

$$5X^2 - 2(2k - 3)X + k^2 - 4k - 1 = 0$$

이 이차방정식의 실근이 존재하므로 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2k - 3)^2 - 5(k^2 - 4k - 1) \geq 0$$

$$k^2 - 8k - 14 \leq 0$$

$$\therefore 4 - \sqrt{30} \leq k \leq 4 + \sqrt{30}$$

$$\text{즉, } 4 - \sqrt{30} \leq \log_5 x^2 y \leq 4 + \sqrt{30} \text{이므로}$$

$$\log_5 5^{4-\sqrt{30}} \leq \log_5 x^2 y \leq \log_5 5^{4+\sqrt{30}}$$

로그의 밑이 1보다 크므로

$$5^{4-\sqrt{30}} \leq x^2 y \leq 5^{4+\sqrt{30}}$$

따라서 $x^2 y$ 의 최댓값은 $5^{4+\sqrt{30}}$, 최솟값은 $5^{4-\sqrt{30}}$ 이므로 그 곱은

$$5^{4+\sqrt{30}} \times 5^{4-\sqrt{30}} = 5^8$$

$$\therefore a = 8$$

다른 풀이

$$(\log_5 x)^2 + (\log_5 y)^2 = \log_5 5x^2 + \log_{\sqrt{5}} y^2 \text{에서}$$

$$(\log_5 x)^2 + (\log_5 y)^2 - 2\log_5 x - 4\log_5 y - 1 = 0$$

$$\log_5 x = X, \log_5 y = Y \text{로 놓으면}$$

$$X^2 + Y^2 - 2X - 4Y - 1 = 0$$

$$\therefore (X - 1)^2 + (Y - 2)^2 = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\log_5 x^2 y = k \text{라 하면}$$

$$2\log_5 x + \log_5 y = k \quad \therefore 2X + Y - k = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

원 ①과 직선 ②이 서로 만나려면 원 ①의 중심 $(1, 2)$ 와 직선 ② 사이의 거리가 원 ①의 반지름의 길이 $\sqrt{6}$ 보다 작거나 같아야 하므로

$$\frac{|2 + 2 - k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \leq \sqrt{6}$$

$$|4 - k| \leq \sqrt{30}$$

$$-\sqrt{30} \leq 4 - k \leq \sqrt{30}$$

$$\therefore 4 - \sqrt{30} \leq k \leq 4 + \sqrt{30}$$

$$\text{즉, } 4 - \sqrt{30} \leq \log_5 x^2 y \leq 4 + \sqrt{30} \text{이므로}$$

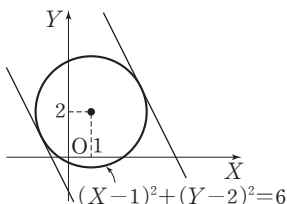
$$\log_5 5^{4-\sqrt{30}} \leq \log_5 x^2 y \leq \log_5 5^{4+\sqrt{30}}$$

로그의 밑이 1보다 크므로

$$5^{4-\sqrt{30}} \leq x^2 y \leq 5^{4+\sqrt{30}}$$

따라서 $x^2 y$ 의 최댓값은 $5^{4+\sqrt{30}}$, 최솟값은 $5^{4-\sqrt{30}}$ 이므로 그 곱은

$$5^{4+\sqrt{30}} \times 5^{4-\sqrt{30}} = 5^8 \quad \therefore a = 8$$



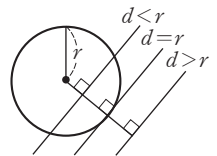
개념 NOTE

반지름의 길이가 r 인 원의 중심과 직선 사이의 거리를 d 라 하면 원과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

(1) $d < r$ 이면 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) $d = r$ 이면 한 점에서 만난다(접한다).

(3) $d > r$ 이면 만나지 않는다.



23 답 10

처음 햄버거 한 개의 무게를 A g, 가격을 B 원이라 하자.

무게를 4%씩 n 번 줄인 후 햄버거의 무게는

$$(1 - 0.04)^n A = 0.96^n A \text{ (g)}$$

한편 처음 햄버거 1g의 가격은 $\frac{B}{A}$ 원이고, 햄버거 한 개의 가격은 변함없이

없으므로 무게를 n 번 줄인 후 햄버거 1g의 가격은 $\frac{B}{0.96^n A}$ 원이다.

무게를 n 번 줄인 후 햄버거 1g의 가격이 처음의 1.5배 이상이 되어야

$$\text{하므로 } \frac{B}{0.96^n A} \geq 1.5 \times \frac{B}{A}, 0.96^n \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{양변에 상용로그를 취하면 } \log 0.96^n \leq \log \frac{2}{3}$$

$$n \log \frac{2^5 \times 3}{100} \leq \log \frac{2}{3}$$

$$n(5 \log 2 + \log 3 - 2) \leq \log 2 - \log 3$$

$$n(5 \times 0.301 + 0.4771 - 2) \leq 0.301 - 0.4771$$

$$-0.0179n \leq -0.1761 \quad \therefore n \geq \frac{1761}{179} = 9.8 \cdots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10이다.

24 답 ①

$y = \log_3 9x = 2 + \log_3 x$ 이므로 함수 $y = \log_3 9x$ 의 그래프는 함수

$y = \log_3 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 선분 AC가 y 축에 평행하므로 정삼각형 ABC의 한 변 AC의 길이는 2이다.

점 B에서 선분 AC에 내린 수선의

발을 H라 하면 선분 BH는 선분

AC의 수직이등분선이므로

$$\overline{CH} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$\overline{BC} = 2 \text{이므로}$$

$$\overline{BH} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

즉, 점 C는 점 B(p, q)를 x 축의

방향으로 $\sqrt{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것과 같으므로

$$C(p + \sqrt{3}, q - 1)$$

점 C는 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$q - 1 = \log_3 (p + \sqrt{3}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 B는 함수 $y = \log_3 9x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$q = \log_3 9p \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

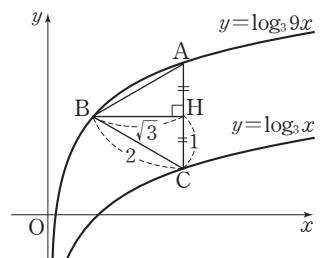
$$\textcircled{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \log_3 9p - 1 = \log_3 (p + \sqrt{3})$$

$$\log_3 3p = \log_3 (p + \sqrt{3})$$

$$\text{즉, } 3p = p + \sqrt{3} \text{이므로 } 2p = \sqrt{3} \quad \therefore p = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } q = \log_3 \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore p \times 3^q = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3^{\log_3 \frac{9\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{9\sqrt{3}}{2} = \frac{27}{4}$$



25 답 ③

$$y = |\log_2(-x+k)|$$

$$= \begin{cases} \log_2(-x+k) & (x < k-1) \\ -\log_2(-x+k) & (k-1 \leq x < k) \end{cases}$$

$$y = |\log_2 x| = \begin{cases} -\log_2 x & (0 < x < 1) \\ \log_2 x & (x \geq 1) \end{cases}$$

점 P는 두 곡선 $y = \log_2(-x+k)$, $y = -\log_2 x$ 가 만나는 점이고 x 좌표가 x_1 이므로

$$\log_2(-x_1+k) = -\log_2 x_1, \log_2(-x_1+k) = \log_2 \frac{1}{x_1}$$

$$\text{즉, } -x_1+k = \frac{1}{x_1} \text{이므로 } x_1^2 - kx_1 + 1 = 0 \quad \cdots \cdots ㉠$$

점 R는 두 곡선 $y = -\log_2(-x+k)$, $y = \log_2 x$ 가 만나는 점이고 x 좌표가 x_3 이므로

$$-\log_2(-x_3+k) = \log_2 x_3, \log_2 \frac{1}{-x_3+k} = \log_2 x_3$$

$$\text{즉, } \frac{1}{-x_3+k} = x_3 \text{이므로 } x_3^2 - kx_3 + 1 = 0 \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 x_1, x_3 은 이차방정식 $x^2 - kx + 1 = 0$ 의 서로 다른 두 실근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$$x_1 x_3 = 1$$

$$\text{이때 } x_3 - x_1 = 2\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$(x_1 + x_3)^2 = (x_3 - x_1)^2 + 4x_1 x_3 = (2\sqrt{3})^2 + 4 \times 1 = 16$$

$$\therefore x_1 + x_3 = 4 \quad (\because 0 < x_1 < x_3)$$

26 답 110

ㄱ. 곡선 $y = t - \log_2 x$ 는 곡선 $y = \log_2 x$ 를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 t 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

또 곡선 $y = 2^{x-t}$ 은 곡선 $y = 2^x$ 을 x 축의 방향으로 t 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

즉, 두 곡선 $y = t - \log_2 x$, $y = 2^{x-t}$ 은 한 점에서 만난다.

$t=1$ 일 때, 곡선 $y = 1 - \log_2 x$ 는 $x=1$ 일 때 $y=1$ 이므로 점 $(1, 1)$ 을 지난다.

또 곡선 $y = 2^{x-1}$ 은 $x=1$ 일 때 $y=1$ 이므로 점 $(1, 1)$ 을 지난다.

즉, 두 곡선 $y = 1 - \log_2 x$, $y = 2^{x-1}$ 의 교점의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로 $f(1)=1$ 이다.

$t=2$ 일 때, 곡선 $y = 2 - \log_2 x$ 는 $x=2$ 일 때 $y=1$ 이므로 점 $(2, 1)$ 을 지난다.

또 곡선 $y = 2^{x-2}$ 은 $x=2$ 일 때 $y=1$ 이므로 점 $(2, 1)$ 을 지난다.

즉, 두 곡선 $y = 2 - \log_2 x$, $y = 2^{x-2}$ 의 교점의 좌표는 $(2, 1)$ 이므로 $f(2)=2$ 이다. (참)

$$\therefore A=100$$

ㄴ. 곡선 $y = t - \log_2 x$ 는 곡선 $y = -\log_2 x$ 를 y 축의 방향으로 t 만큼 평행이동한 것이다. 이때 t 의 값이 증가하면 두 곡선 $y = t - \log_2 x$, $y = 2^x$ 의 교점의 x 좌표는 증가한다.

그런데 곡선 $y = 2^{x-t}$ 은 곡선 $y = 2^x$ 을 x 축의 방향으로 t 만큼 평행이동한 것이므로 t 의 값이 증가하면 두 곡선 $y = t - \log_2 x$, $y = 2^{x-t}$ 의 교점의 x 좌표는 두 곡선 $y = t - \log_2 x$, $y = 2^x$ 의 교점의 x 좌표보다 커진다. 즉, t 의 값이 증가하면 $f(t)$ 의 값도 증가한다. (참)

$$\therefore B=10$$

ㄷ. [반례] $t=\sqrt{2}$ 일 때, 두 함수

$$y = \sqrt{2} - \log_2 x, y = 2^{x-\sqrt{2}}$$

$x=\sqrt{2}$ 에 대한 함수값은 각각

$$\sqrt{2} - \log_2 \sqrt{2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2}, 2^{\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 1$$

고, $\sqrt{2} - \frac{1}{2} < 1$ 이다. 즉,

$$\sqrt{2} - \log_2 \sqrt{2} < 2^{\sqrt{2}-\sqrt{2}} \text{이므로 } x=\sqrt{2}$$

는 두 함수의 그래프의 교점의 x 좌표보다 큰 곳에 있다.

즉, $f(\sqrt{2}) < \sqrt{2}$ (거짓)

$$\therefore C=0$$

$$\therefore A+B+C=110$$

다른 풀이

ㄷ. 모든 양의 실수 t 에 대하여

$f(t) \geq t$ 가 성립하려면 그림과

같이 $t - \log_2 t \geq 1$

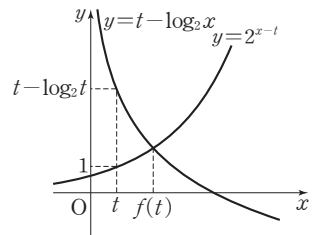
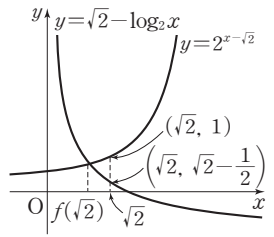
$$\text{즉, } t - 1 \geq \log_2 t \quad \cdots \cdots ㉠$$

두 함수 $y = \log_2 t$, $y = t - 1$ 의

그래프는 두 점 $(1, 0)$, $(2, 1)$

에서 만나고, $1 < t < 2$ 일 때 함수

$y = \log_2 t$ 의 그래프가 직선 $y = t - 1$ 보다 위쪽에 있으므로 ㉠을 만족시키지 않는다. 즉, $1 < t < 2$ 일 때, $f(t) < t$ 이다. (거짓)



STEP 3 최고난도 문제

| 51~53쪽

01 12	02 -1	03 15	04 ⑤	05 ④	06 1021
07 39	08 ④	09 ③			

01 답 12

1단계 네 점 A, B, C, D의 좌표 구하기

A(x_1, k)라 하면 점 A가 곡선 $y = 2 \log_a x + k$ 위에 있으므로

$$2 \log_a x_1 + k = k, \log_a x_1 = 0 \quad \therefore x_1 = 1 \quad \therefore A(1, k)$$

B(x_2, k)라 하면 점 B가 곡선 $y = a^{x-k}$ 위에 있으므로

$$a^{x_2-k} = k \quad \therefore x_2 = \log_a k + k \quad \therefore B(\log_a k + k, k)$$

또 두 점 C, D의 x 좌표가 k 이므로 C($k, 2 \log_a k + k$), D($k, 1$)

2단계 AE, BE의 값 구하기

사각형 ADBC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{CD} = \frac{85}{2} \text{이고,}$$

삼각형 CAD의 넓이는 35이므로

삼각형 CDB의 넓이는

$$\frac{85}{2} - 35 = \frac{15}{2}$$

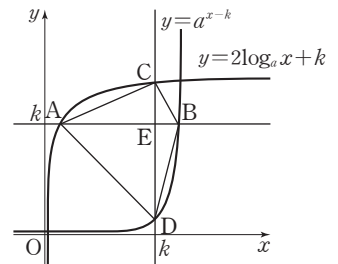
한편 두 선분 AB, CD가 만나는

점을 E라 하면 E(k, k)이므로

$$\overline{AE} = k - 1, \overline{BE} = \log_a k, \overline{CE} = 2 \log_a k, \overline{DE} = k - 1$$

$\overline{AE} = p$, $\overline{BE} = q$ 라 하면 두 삼각형 CAD, CDB의 넓이의 비는

$$p : q = 35 : \frac{15}{2} = 14 : 3, \text{ 즉 } q = \frac{3}{14} p \quad \cdots \cdots ㉠$$



이때 $\overline{CE}=2q$, $\overline{DE}=p$ 이므로 삼각형 CAD의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \times \overline{AE} \times \overline{CD} &= \frac{1}{2} \times \overline{AE} \times (\overline{CE} + \overline{DE}) \\ &= \frac{1}{2} \times p \times (2q + p) \\ &= \frac{p}{2} \times \left(\frac{3}{7}p + p\right) (\because \textcircled{1}) \\ &= \frac{5}{7}p^2 = 35\end{aligned}$$

$p^2=49$ 이고 $p>0$ 이므로 $p=7$, $q=\frac{3}{2}$

3단계 $a+k$ 의 값 구하기

$k-1=p$ 이므로 $k=p+1=8$

$q=\log_a k = \log_a 8 = \frac{3}{2}$ 에서 $a^{\frac{3}{2}}=8$, 즉 $a=4$

$\therefore a+k=12$

02 답 -1

1단계 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=n$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이 구하기

$g(x)=\begin{cases} 2^x-1 & (0 \leq x \leq 1) \\ \log_2(3-x) & (1 < x \leq 2) \end{cases}$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 것이다.

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $y=2^x-1$ 의 역함수를 구하면 $y=\log_2(x+1)$ 이다.

즉, 두 함수 $y=2^x-1$, $y=\log_2(x+1)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이므로 함수 $y=2^x-1$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하면 함수 $y=\log_2(x+1)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 부분의 넓이도 S 이다.

함수 $y=\log_2(x+1)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 를 각각 y 축에 대하여 대칭 이동한 후 x 축의 방향으로 2만큼 평행이동하면

$y=\log_2(-x+3)$, $y=-x+2$

즉, 함수 $y=\log_2(3-x)$ 의 그래프와 직선 $y=-x+2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 S 와 같다.

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 두 직선 $y=x$,

$y=-x+2$ 와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$

평행이동하여도 도형의 넓이는 변하지 않으므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=n$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이도 1이다.

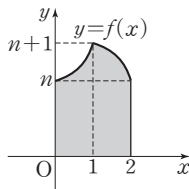
2단계 n 의 값 구하기

(i) $n>0$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, y 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 $1+2 \times n$ 이므로

$1+2n=21$

$\therefore n=10$

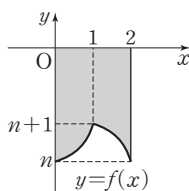


(ii) $n<0$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, y 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 $2 \times (-n) - 1$ 이므로

$-2n-1=21$

$\therefore n=-11$



3단계 정수 n 의 값의 합 구하기

(i), (ii)에서 모든 정수 n 의 값의 합은

$10 + (-11) = -1$

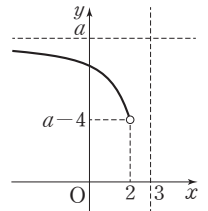
03 답 15

1단계 $x<2$ 에서 함수 $y=\frac{4}{x-3}+a$ 의 그래프의 개형 파악하기

함수 $y=\frac{4}{x-3}+a$ 의 그래프는 함수 $y=\frac{4}{x}$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 3만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이므로 $x<2$ 에서

함수 $y=\frac{4}{x-3}+a$ 의 그래프는 그림과 같다.

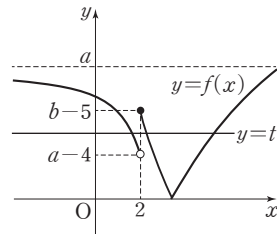


2단계 a , b 의 값 또는 값의 범위의 구하기

한편 함수 $y=5\log_2 x - b$ 의 그래프는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하고 $f(2)=|5-b|$ 이므로 $5-b$ 의 값에 따라 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같은 경우가 있다.

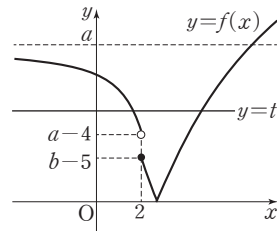
(i) $5-b<0$, 즉 $b>5$ 인 경우

① $a-4<b-5$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수가 3인 경우가 있으므로 (가)를 만족시키지 않는다.

② $a-4 \geq b-5$ 일 때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 (나)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수가 2인 자연수 t 의 개수가 6이어야 하고 그림에서 교점의 개수가 2인 자연수 t 는 $a-1$, $a-2$, $a-3$ 과 $b-5$ 이하의 자연수이므로 $b-5$ 이하의 자연수의 개수가 3이 되려면

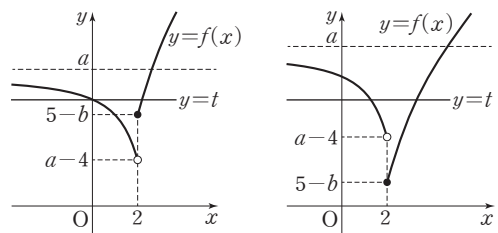
$b-5=3 \quad \therefore b=8$

한편 $a-4 \geq b-5$ 에서 $a-4 \geq 3$ 이므로

$a \geq 7$

(ii) $5-b \geq 0$, 즉 $b \leq 5$ 인 경우

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 교점의 개수가 2인 자연수 t 는 최대 $a-1, a-2, a-3$ 의 3개
이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

3단계 $a+b$ 의 최솟값 구하기

(i), (ii)에서 $a \geq 7, b=8$ 이므로 $a+b \geq 15$

따라서 $a+b$ 의 최솟값은 15이다.

04 답 ⑤

1단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg$. 두 함수 $y=2^x, y=\log_2 x$ 는 서로 역함수 관계이므로 그 그래프는
직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이다.

$$\text{즉, } x_1=y_2, y_1=x_2, \overline{OA}=\overline{OB}$$

삼각형 OAB의 넓이가 삼각형 OAC의 넓이의 2배이므로

$$\overline{OC}=\frac{1}{2}\overline{OB}=\frac{1}{2}\overline{OA}$$

2단계 $\perp$ 이 옳은지 확인하기

$\perp$. 점 C는 선분 OB의 중점이므로

$$x_3=\frac{1}{2}x_2 \text{에서 } x_2=2x_3$$

$$\neg \text{에서 } y_1=x_2=2x_3$$

$$\therefore x_2+y_1=2y_1=4x_3$$

3단계 $\div$ 이 옳은지 확인하기

$\div$. 점 B는 곡선 $y=2^x$ 위에 있고, 점 C는 곡선 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 위에 있으므로

$$\text{로 } y_2=2^{x_2}, y_3=\left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}$$

세 점 O, B, C는 직선 l 위의 점이므로 직선 l 의 기울기는

$$\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_3}{x_3}, \frac{2^{x_2}}{x_2}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}}{x_3}$$

$$\perp \text{에서 } x_2=2x_3 \text{이므로 } \frac{2^{2x_3}}{2x_3}=\frac{2^{-x_3}}{x_3}, 2^{2x_3-1}=2^{-x_3}$$

$$2x_3-1=-x_3 \text{이므로 } x_3=\frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 직선 } l \text{의 기울기는 } \frac{y_3}{x_3}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{x_3}}{x_3}=3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \perp, \div$ 이다.

05 답 ④

1단계 $f(a), f(b)$ 를 각각 $\log a, \log b$ 에 대하여 나타내기

$1 \leq a < 10$ 일 때, $0 \leq \log a < 1$ 이므로 $f(a)=\log a$

$10 \leq a < 100$ 일 때, $1 \leq \log a < 2$ 이므로 $f(a)=\log a-1$

$1 \leq b < 10$ 일 때, $0 \leq \log b < 1$ 이므로 $f(b)=\log b$

$10 \leq b < 100$ 일 때, $1 \leq \log b < 2$ 이므로 $f(b)=\log b-1$

2단계 순서쌍 (a, b) 의 개수 구하기

(i) $1 \leq a \leq b < 10$ 일 때,

$$f(a)=\log a, f(b)=\log b \text{이므로}$$

$$\log b - \log a = f(a) - f(b) \text{에서}$$

$$\log b - \log a = \log a - \log b$$

$$2 \log b = 2 \log a \quad \therefore b=a$$

따라서 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots$

$(9, 9)$ 의 9개이다.

(ii) $1 \leq a < 10, 10 \leq b \leq 20$ 일 때,

$$f(a)=\log a, f(b)=\log b-1 \text{이므로}$$

$$\log b - \log a = f(a) - f(b) \text{에서}$$

$$\log b - \log a = \log a - (\log b - 1)$$

$$2 \log b = 2 \log a + 1$$

$$\log b^2 = \log 10a^2$$

$$b^2 = 10a^2 \quad \therefore b = \sqrt{10}a$$

이를 만족시키는 자연수 a, b 는 존재하지 않는다.

(iii) $10 \leq a \leq b \leq 20$ 일 때,

$$f(a)=\log a-1, f(b)=\log b-1 \text{이므로}$$

$$\log b - \log a = f(a) - f(b) \text{에서}$$

$$\log b - \log a = \log a - 1 - (\log b - 1)$$

$$2 \log b = 2 \log a \quad \therefore b=a$$

따라서 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(10, 10), (11, 11),$

$(12, 12), \dots, (20, 20)$ 의 11개이다.

(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$9+11=20$$

idea

06 답 1021

1단계 $\log_2(x^2+nx+y^2)-\log_2(x^2-xy+y^2)$ 이 최댓값을 갖는 조건

알기

$$\log_2(x^2+nx+y^2)-\log_2(x^2-xy+y^2)=\log_2 \frac{x^2+nx+y^2}{x^2-xy+y^2}$$

$t=\frac{x^2+nx+y^2}{x^2-xy+y^2}$ 이라 하면 $\log_2 t$ 에서 로그의 밑이 1보다 크므로 t 가 최

댓값을 가질 때 $\log_2 t$ 도 최댓값을 갖는다.

2단계 $f(n)$ 구하기

$$t=\frac{x^2-xy+y^2+(n+1)xy}{x^2-xy+y^2}=1+\frac{(n+1)xy}{x^2-xy+y^2}$$

$$=1+\frac{n+1}{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}}$$

$xy>0$ 에서 $\frac{x}{y}>0, \frac{y}{x}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t=1+\frac{n+1}{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}} \leq 1+\frac{n+1}{2\sqrt{\frac{x}{y} \times \frac{y}{x}-1}}=n+2$$

(단, 등호는 $\frac{x}{y}=\frac{y}{x}$, 즉 $x=y$ 일 때 성립)

따라서 $x=y$ 일 때 t 의 최댓값이 $n+2$ 이므로

$$f(n)=\log_2(n+2)$$

3단계 자연수 n 의 최댓값 구하기

$$f(n)<10 \text{에서 } \log_2(n+2)<10$$

$$\log_2(n+2)<\log_2 2^{10}$$

로그의 밑이 1보다 크므로

$$n+2<2^{10} \quad \therefore n<1022$$

따라서 자연수 n 의 최댓값은 1021이다.

07 답 39

1단계 x 의 값의 범위 구하기

(밑) $\neq 1$ 이어야 하므로 자연수 a 의 값의 범위는 $a>1$

$2(\log_a x)^2-5\log_a x+3<0$ 에서 $\log_a x=t$ 로 놓으면

$$2t^2-5t+3<0, (t-1)(2t-3)<0$$

$$\therefore 1 < t < \frac{3}{2}$$

$$\text{즉, } 1 < \log_a x < \frac{3}{2} \text{ 이므로 } \log_a a < \log_a x < \log_a a^{\frac{3}{2}}$$

로그의 밑이 1보다 크므로 $a < x < a^{\frac{3}{2}}$

2단계 $a^{\frac{3}{2}}$ 이 자연수일 때, a 의 값 구하기

(i) $a^{\frac{3}{2}}$ 이 자연수일 때,

a 는 제곱수이어야 하므로 $a=n^2$ (n 은 1보다 큰 자연수)이라 하면

$$f(a) = a^{\frac{3}{2}} - a - 1 \rightarrow m < x < n \text{을 만족시키는 정수 } x \text{의 개수는}$$

$$= n^3 - n^2 - 1 \quad n-m-1 \text{이므로 } f(a) = a^{\frac{3}{2}} - a - 1$$

$$3 \leq f(a) \leq 17 \text{에서 } 3 \leq n^3 - n^2 - 1 \leq 17$$

$$n^3 - n^2 - 1 \geq 3 \text{에서 } n^3 - n^2 - 4 \geq 0$$

$$\text{즉, } (n-2)(n^2+n+2) \geq 0$$

$$\text{그런데 } n > 1 \text{이므로 } n^2+n+2 > 0$$

$$\therefore n \geq 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$n^3 - n^2 - 1 \leq 17 \text{에서 } n^3 - n^2 - 18 \leq 0$$

$$\text{즉, } (n-3)(n^2+2n+6) \leq 0$$

$$\text{그런데 } n > 1 \text{이므로 } n^2+2n+6 > 0 \quad \therefore n-3 \leq 0$$

$$\therefore 1 < n \leq 3 \quad (\because n > 1) \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $2 \leq n \leq 3$ 이므로 n 의 값은 2, 3이다.

따라서 자연수 a 의 값은 $2^2, 3^2$, 즉 4, 9이다.

3단계 $a^{\frac{3}{2}}$ 이 자연수가 아닐 때, a 의 값 구하기

(ii) $a^{\frac{3}{2}}$ 이 자연수가 아닐 때,

$a^{\frac{3}{2}}$ 이 자연수가 아니면 $a < x < a^{\frac{3}{2}}$ 을 만족시키는 정수 x 의 개수는

$$f(a) = [a^{\frac{3}{2}}] - a \quad (\text{단, } [x] \text{는 } x \text{보다 크지 않은 최대의 정수})$$

$$a^{\frac{3}{2}} - 1 < [a^{\frac{3}{2}}] < a^{\frac{3}{2}} \text{이므로 } a^{\frac{3}{2}} - a - 1 < [a^{\frac{3}{2}}] - a < a^{\frac{3}{2}} - a$$

$$\therefore a^{\frac{3}{2}} - a - 1 < f(a) < a^{\frac{3}{2}} - a \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

$$3 \leq f(a) \leq 17 \text{에서 } f(a) \text{는 정수이므로 } 3 \leq f(a) < 18$$

$\textcircled{9}$ 이 이 부등식을 만족시키려면

$$a^{\frac{3}{2}} - a - 1 > 3, a^{\frac{3}{2}} - a < 18 \quad \left[\begin{array}{l} a^{\frac{3}{2}} - a - 1 \text{은 자연수가 아니므로} \\ 3 \text{을 포함하지 않는다.} \end{array} \right.$$

① $a^{\frac{3}{2}} - a - 1 > 3$ 일 때, $a^{\frac{1}{2}} = s$ ($s > 1$)로 놓으면

$$s^3 - s^2 - 1 > 3, s^3 - s^2 - 4 > 0$$

$$\text{즉, } (s-2)(s^2+s+2) > 0$$

$$\text{그런데 } s > 1 \text{이므로 } s^2+s+2 > 0$$

$$\therefore s > 2$$

$$\text{즉, } a^{\frac{1}{2}} > 2 \text{이므로 } a > 4$$

② $a^{\frac{3}{2}} - a < 18$ 일 때, $a^{\frac{1}{2}} = s$ ($s > 1$)로 놓으면

$$s^3 - s^2 < 18, s^3 - s^2 - 18 < 0$$

$$\text{즉, } (s-3)(s^2+2s+6) < 0$$

$$\text{그런데 } s > 1 \text{이므로 } s^2+2s+6 > 0 \quad \therefore s-3 < 0$$

$$\therefore 1 < s < 3 \quad (\because s > 1)$$

$$\text{즉, } 1 < a^{\frac{1}{2}} < 3 \text{이므로 } 1 < a < 9$$

①, ②에서 $4 < a < 9$

이때 $a^{\frac{3}{2}}$ 이 자연수가 아니므로 a 는 제곱수가 아니어야 한다.

따라서 자연수 a 의 값은 5, 6, 7, 8이다.

4단계 자연수 a 의 값의 합 구하기

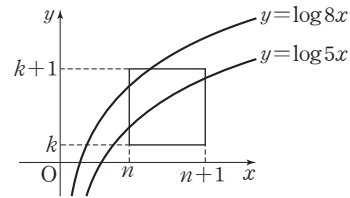
(i), (ii)에서 모든 자연수 a 의 값의 합은

$$4+5+6+7+8+9=39$$

08 답 ④

1단계 주어진 조건을 이용하여 부등식 세우기

(가), (나)에서 자연수 n, k 에 대하여 한 변의 길이가 1인 정사각형의 네 꼭짓점의 좌표를 $(n, k), (n, k+1), (n+1, k), (n+1, k+1)$ 이라 할 때, 정사각형이 두 함수 $y=\log 5x, y=\log 8x$ 의 그래프와 모두 만나려면 그림과 같아야 한다.



따라서 $\log 8n \leq k+1, \log 5(n+1) \geq k$ 이어야 한다.

$$\log 8n \leq k+1 \text{에서 } \log 8n \leq \log 10^{k+1}$$

로그의 밑이 1보다 크므로

$$8n \leq 10^{k+1} \quad \therefore n \leq \frac{10^{k+1}}{8} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log 5(n+1) \geq k \text{에서 } \log 5(n+1) \geq \log 10^k$$

로그의 밑이 1보다 크므로

$$5(n+1) \geq 10^k \quad \therefore n \geq \frac{10^k}{5} - 1 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } \frac{10^k}{5} - 1 \leq n \leq \frac{10^{k+1}}{8} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

(나)에서 x 좌표가 200 이하이므로

$$n+1 \leq 200 \quad \therefore n \leq 199 \quad \dots\dots \textcircled{10}$$

2단계 정사각형의 개수 구하기

$x=200$ 을 $y=\log 8x$ 에 대입하면

$$y = \log 1600 = \log 16 + 2$$

이때 $1 < \log 16 < 2$ 이므로

$$3 < \log 16 + 2 < 4$$

따라서 자연수 k 가 될 수 있는 값은 1, 2, 3이므로 k 의 값에 따라 자연수 n 의 값을 구하면 다음과 같다.

(i) $k=1$ 일 때,

$\textcircled{9}$ 에서 $1 \leq n \leq 12.5$ 이므로 자연수 n 은 1, 2, 3, ..., 12의 12개이다.

(ii) $k=2$ 일 때,

$\textcircled{9}$ 에서 $19 \leq n \leq 125$ 이므로 자연수 n 은 19, 20, 21, ..., 125의 107개이다.

(iii) $k=3$ 일 때,

$\textcircled{9}$ 에서 $199 \leq n \leq 1250$

이때 $\textcircled{10}$ 에서 $n \leq 199$ 이므로 자연수 n 은 199의 1개이다.

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 정사각형의 개수는 자연수 n 의 개수와 같으므로

$$12+107+1=120$$

09 답 ③

1단계 $y=\log_2 |kx|$ 를 x 의 값의 범위에 따라 나타내기

$k > 1$ 이므로

$$y = \log_2 |kx| = \begin{cases} \log_2 (-kx) & (x < 0) \\ \log_2 kx & (x > 0) \end{cases}$$

2단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg$. 점 A는 두 곡선 $y=\log_2 (-kx), y=\log_2 (x+4)$ 가 만나는 점이고 x 좌표가 x_1 이므로

$$\log_2 (-kx_1) = \log_2 (x_1+4)$$

즉, $-kx_1 = x_1 + 4$ 이므로

$$x_1 = -\frac{4}{k+1} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

점 B는 두 곡선 $y = \log_2 kx$, $y = \log_2 (x+4)$ 가 만나는 점이고 x 좌표가 x_2 이므로

$$\log_2 kx_2 = \log_2 (x_2 + 4)$$

즉, $kx_2 = x_2 + 4$ 이므로

$$x_2 = \frac{4}{k-1} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$x_2 = -2x_1 \text{에서 } \frac{4}{k-1} = \frac{8}{k+1}$$

$$k+1 = 2k-2 \quad \therefore k=3$$

3단계 ㄴ이 옳은지 확인하기

ㄴ. 점 B는 두 곡선 $y = \log_2 (-x+m)$, $y = \log_2 kx$ 가 만나는 점이고 x 좌표가 x_2 이므로

$$\log_2 (-x_2+m) = \log_2 kx_2$$

즉, $-x_2+m = kx_2$ 이므로

$$m = (k+1)x_2 = \frac{4(k+1)}{k-1} \quad (\because \textcircled{8}) \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

점 C는 두 곡선 $y = \log_2 (-x+m)$, $y = \log_2 (-kx)$ 가 만나는 점이고 x 좌표가 x_3 이므로

$$\log_2 (-x_3+m) = \log_2 (-kx_3)$$

즉, $-x_3+m = -kx_3$ 이므로

$$x_3 = -\frac{m}{k-1} = -\frac{4(k+1)}{(k-1)^2} \quad (\because \textcircled{9})$$

$$\begin{aligned} \therefore x_1 x_3 &= -\frac{4}{k+1} \times \left\{ -\frac{4(k+1)}{(k-1)^2} \right\} \quad (\because \textcircled{7}) \\ &= \left(\frac{4}{k-1} \right)^2 = x_2^2 \quad (\because \textcircled{8}) \quad \dots\dots \textcircled{10} \end{aligned}$$

4단계 ㄷ이 옳은지 확인하기

ㄷ. ㉔에서 $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2}$ 이므로

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{4}{k-1}}{-\frac{4}{k+1}} \quad (\because \textcircled{7}, \textcircled{8})$$

$$= -\frac{k+1}{k-1} = -1 - \frac{2}{k-1} < -1 \quad (\because k > 1)$$

이때 $\frac{x_2}{x_1} = l$ ($l < -1$)이라 하면

$$x_2 = lx_1 \quad \dots\dots \textcircled{11}$$

이를 $x_2^2 = x_1 x_3$ 에 대입하면

$$l^2 x_1^2 = x_1 x_3 \quad \therefore x_3 = l^2 x_1$$

세 점 A, B, C의 y 좌표를 각각 y_1 , y_2 , y_3 이라 하면

$$y_1 = \log_2 (-kx_1), y_2 = \log_2 kx_2, y_3 = \log_2 (-kx_3)$$

두 직선 AB, AC의 기울기의 합이 0이므로

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1} = 0$$

$$\frac{\log_2 kx_2 - \log_2 (-kx_1)}{l x_1 - x_1} + \frac{\log_2 (-kx_3) - \log_2 (-kx_1)}{l^2 x_1 - x_1} = 0$$

$$\frac{\log_2 \left(-\frac{x_2}{x_1} \right)}{(l-1)x_1} + \frac{\log_2 \frac{x_3}{x_1}}{(l^2-1)x_1} = 0$$

$$\frac{\log_2 (-l)}{(l-1)x_1} + \frac{\log_2 l^2}{(l^2-1)x_1} = 0$$

$$\frac{\log_2 (-l)}{(l-1)x_1} + \frac{2\log_2 (-l)}{(l^2-1)x_1} = 0$$

$$\frac{(l+3)\log_2 (-l)}{(l^2-1)x_1} = 0$$

$(l+3)\log_2 (-l) = 0$ 에서 $\log_2 (-l) > \log_2 1 = 0$ 이므로

$$l+3=0 \quad \therefore l=-3$$

이를 ㉔에 대입하면

$$x_2 = -3x_1$$

$$\frac{4}{k-1} = \frac{12}{k+1} \quad (\because \textcircled{7}, \textcircled{8})$$

$$k+1 = 3k-3, 2k=4$$

$$\therefore k=2$$

이를 ㉔에 대입하면

$$m = \frac{4(2+1)}{2-1} = 12$$

$$\therefore m+k^2 = 12+4=16$$

5단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

기출 변형 문제로 단원 마스터

| 54~57쪽

01 ④	02 -70	03 ③	04 ④	05 12	06 28
07 ③	08 4	09 ④	10 21	11 ②	12 30
13 24	14 ③				

01 답 ④

(i) p, q 가 모두 홀수일 때,

$$\begin{aligned} f(p) \times f(q) &= \sqrt[6]{8 \times 3^p} \times \sqrt[6]{8 \times 3^q} \\ &= \sqrt[6]{2^6 \times 3^p \times 3^q} = 2 \times \sqrt[6]{3^{p+q}} \\ &= 2 \times 3^{\frac{p+q}{6}} \end{aligned}$$

$f(p) \times f(q)$ 가 자연수가 되려면 $3^{\frac{p+q}{6}}$ 이 자연수이어야 하므로 $p+q$ 가 6의 배수이어야 한다.

p, q 는 10 이하의 홀수이므로

$p+q=6$ 일 때, 순서쌍 (p, q) 는 (1, 5), (3, 3), (5, 1)의 3개이다.

$p+q=12$ 일 때, 순서쌍 (p, q) 는 (3, 9), (5, 7), (7, 5), (9, 3)의 4개이다.

$p+q=18$ 일 때, 순서쌍 (p, q) 는 (9, 9)의 1개이다.

따라서 순서쌍 (p, q) 의 개수는

$$3+4+1=8$$

(ii) p 는 홀수, q 는 짝수일 때,

$$\begin{aligned} f(p) \times f(q) &= \sqrt[6]{8 \times 3^p} \times \sqrt[6]{27 \times 2^{q+3}} \\ &= \sqrt[6]{2^3 \times 3^p \times 3^3 \times 2^{q+3}} = \sqrt[6]{2^{q+6} \times 3^{p+3}} \\ &= 2^{\frac{q+6}{6}} \times 3^{\frac{p+3}{6}} \end{aligned}$$

$f(p) \times f(q)$ 가 자연수가 되려면 $2^{\frac{q+6}{6}}$, $3^{\frac{p+3}{6}}$ 이 모두 자연수이어야 하므로 $p+3, q+6$ 이 모두 6의 배수이어야 한다.

따라서 p 의 값은 3, 9이고, q 의 값은 6이므로 순서쌍 (p, q) 의 개수는 $2 \times 1 = 2$

(iii) p 는 짝수, q 는 홀수일 때,

(ii)와 같은 방법으로 하면 순서쌍 (p, q) 의 개수는

$$1 \times 2 = 2$$

(iv) p, q 가 모두 짝수일 때,

$$\begin{aligned} f(p) \times f(q) &= \sqrt[6]{27 \times 2^{p+3}} \times \sqrt[6]{27 \times 2^{q+3}} \\ &= \sqrt[6]{3^6 \times 2^{p+3} \times 2^{q+3}} = 3 \times \sqrt[6]{2^{p+q+6}} \\ &= 3 \times 2^{\frac{p+q+6}{6}} \end{aligned}$$

$f(p) \times f(q)$ 가 자연수가 되려면 $2^{\frac{p+q+6}{6}}$ 이 자연수이어야 하므로 $p+q+6$ 이 6의 배수이어야 한다.

p, q 는 10 이하의 짝수이므로

$p+q+6=12$, 즉 $p+q=6$ 일 때, 순서쌍 (p, q) 는 $(2, 4), (4, 2)$ 의 2개이다.

$p+q+6=18$, 즉 $p+q=12$ 일 때, 순서쌍 (p, q) 는 $(2, 10), (4, 8), (6, 6), (8, 4), (10, 2)$ 의 5개이다.

$p+q+6=24$, 즉 $p+q=18$ 일 때, 순서쌍 (p, q) 는 $(8, 10), (10, 8)$ 의 2개이다.

따라서 순서쌍 (p, q) 의 개수는 $2+5+2=9$

(i)~(iv)에서 순서쌍 (p, q) 의 개수는

$$8+2+2+9=21$$

02 답 -70

이차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 -1이고 (㉠)에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 양수이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다. 따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이때 (㉡)에서 방정식 $(x^n-32)f(x)=0$ 이 중근인 서로 다른 두 실근을 가지므로 두 방정식 $x^n-32=0, f(x)=0$ 은 각각 서로 다른 두 실근을 갖고, 이 두 실근이 서로 같아야 한다.

(i) n 이 홀수일 때,

방정식 $x^n-32=0$, 즉 $x^n=32$ 의 실근은 $\sqrt[n]{32}$ 의 1개이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) n 이 짝수일 때,

방정식 $x^n-32=0$, 즉 $x^n=32$ 의 실근은 $-\sqrt[n]{32}, \sqrt[n]{32}$ 이다.

이는 방정식 $f(x)=0$ 의 두 실근과 같으므로

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x+\sqrt[n]{32})(x-\sqrt[n]{32}) = -x^2 + (\sqrt[n]{32})^2 \\ &= -x^2 + \sqrt[n]{32^2} = -x^2 + \sqrt[n]{2^{10}} \\ &= -x^2 + 2^{\frac{10}{n}} \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최댓값이 $2^{\frac{10}{n}}$ 이다.

(㉠)에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 자연수이므로 $\frac{10}{n}$ 이 자연수이어야 한다. 즉, n 은 10의 양의 약수이고 짝수이므로 n 의 값은 2, 10이다.

(i), (ii)에서 $n=2$ 또는 $n=10$

$n=2$ 일 때, $f(x)=-x^2+2^5$ 이므로

$$f(n)=f(2)=-4+32=28$$

$n=10$ 일 때, $f(x)=-x^2+2$ 이므로

$$f(n)=f(10)=-100+2=-98$$

따라서 모든 $f(n)$ 의 값의 합은

$$28+(-98)=-70$$

03 답 ③

ㄱ. 집합 A_{27} 은 $3^a = \frac{27}{b}$, 즉 $3^a \times b = 27$ 을 만족시키는 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 를 원소로 갖는다.

이때 $3^1 \times 9 = 27, 3^2 \times 3 = 27, 3^3 \times 1 = 27$ 이므로

$$A_{27} = \{(1, 9), (2, 3), (3, 1)\}$$

ㄴ. $m=9^k$ 이면 $3^a = \frac{m}{b}$ 에서

$$3^a = \frac{9^k}{b} \quad \therefore b = \frac{9^k}{3^a} = 3^{2k-a}$$

따라서 $A_m = \{(1, 3^{2k-1}), (2, 3^{2k-2}), (3, 3^{2k-3}), \dots, (2k, 1)\}$ 이므로

$$n(A_m) = 2k$$

ㄷ. 집합 A_m 은 $3^a = \frac{m}{b}$, 즉 $3^a \times b = m$ 을 만족시키는 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 를 원소로 가지므로 $n(A_m)=1$ 을 만족시키는 원소를 (a', b') 이라 하면

$$3^{a'} \times b' = m$$

이때 $a' > 1$ 이면

$$m = 3 \times 3 \times \dots \times b'$$

즉, 순서쌍 $(1, 3^{a'-1}b'), (2, 3^{a'-2}b'), \dots$ 이 원소이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore a' = 1$$

이때 b' 이 3의 배수, 즉 $b' = 3k$ (k 는 자연수) 꼴이면

$$m = 3^1 \times 3k = 3^2k$$

즉, 순서쌍 $(1, 3k)$ 가 원소이면 순서쌍 $(2, k)$ 도 원소이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 b' 은 3의 배수가 아니어야 한다. $\rightarrow b' = 1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots$

$m = 3^1 \times b'$ 꼴이므로 한 자리의 자연수 m 은 $3 \times 1, 3 \times 2$ 의 2개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

04 답 ④

$-8 \log_a b = 27 \log_b c = \log_c a = k$ (k 는 실수)로 놓으면

$$k^3 = -8 \log_a b \times 27 \log_b c \times \log_c a$$

$$= -\frac{8 \log b}{\log a} \times \frac{27 \log c}{\log b} \times \frac{\log a}{\log c}$$

$$= -216$$

$$\therefore k = -6$$

$$-8 \log_a b = k \text{에서 } \log_a b = -\frac{k}{8} \quad \therefore b = a^{-\frac{k}{8}} = a^{\frac{3}{4}}$$

$$\log_c a = k \text{에서 } c^k = a \quad \therefore c = a^{\frac{1}{k}} = a^{-\frac{1}{6}}$$

$$\therefore b^2 \times c^4 = (a^{\frac{3}{4}})^2 \times (a^{-\frac{1}{6}})^4 = a^{\frac{3}{2}} \times a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{5}{6}}$$

이때 a 가 1이 아닌 자연수이므로 $a^{\frac{5}{6}}$ 의 값이 1000 이하의 자연수이려면 $a = n^6$ (n 은 1보다 큰 자연수) 꼴이어야 하고

$$a^{\frac{5}{6}} = (n^6)^{\frac{5}{6}} = n^5 \leq 1000$$

$$3^5 = 729, 4^5 = 1024 \text{이므로 } n \text{의 값은 } 2, 3 \text{이다.}$$

따라서 모든 자연수 a 의 값의 합은

$$2^6 + 3^6 = 64 + 729 = 793$$

05 답 12

$A_{27} = \{\log_{27} x \mid x \text{는 } 250 \text{ 이하의 자연수}\}$ 이고 10 이하의 자연수 k 에 대하여 $b = 3^k$ 이므로 $A_b = \{\log_{3^k} y \mid y \text{는 } 250 \text{ 이하의 자연수}\}$ 이다.

집합 $A_{27} \cap A_b$ 의 원소의 개수는 $\log_{27} x = \log_{3^k} y$ 를 만족시키는

$1 \leq x \leq 250, 1 \leq y \leq 250$ 인 순서쌍 (x, y) 의 개수와 같다.

$$\text{이때 } \log_{27} x = \log_{3^k} y \text{에서 } \frac{1}{3} \log_3 x = \frac{1}{k} \log_3 y$$

$$\log_3 x^k = \log_3 y^3 \quad \therefore x^k = y^3$$

따라서 $1 \leq x \leq 250, 1 \leq y \leq 250$ 에서 $x^k = y^3$ 이 성립하는 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하면 된다.

- (i) $k=1$ 이면 $x=y^3$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(1^3, 1), (2^3, 2), (3^3, 3), \dots, (6^3, 6)$
 $\therefore n(A_{27} \cap A_{3^1}) = 6$
- (ii) $k=2$ 이면 $x^2=y^3$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(1^3, 1^2), (2^3, 2^2), (3^3, 3^2), \dots, (6^3, 6^2)$
 $\therefore n(A_{27} \cap A_{3^2}) = 6$
- (iii) $k=3$ 이면 $x^3=y^3$, 즉 $x=y$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(1, 1), (2, 2), (3, 3), \dots, (250, 250)$
 $\therefore n(A_{27} \cap A_{3^3}) = 250$
- (iv) $k=4$ 이면 $x^4=y^3$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(1^3, 1^4), (2^3, 2^4), (3^3, 3^4) \quad \therefore n(A_{27} \cap A_{3^4}) = 3$
- (v) $k=5$ 이면 $x^5=y^3$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(1^3, 1^5), (2^3, 2^5), (3^3, 3^5) \quad \therefore n(A_{27} \cap A_{3^5}) = 3$
- (vi) $k=6$ 이면 $x^6=y^3$, 즉 $x^2=y$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(1, 1^2), (2, 2^2), (3, 3^2), \dots, (15, 15^2)$
 $\therefore n(A_{27} \cap A_{3^6}) = 15$
- (vii) $k=7$ 이면 $x^7=y^3$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(1^3, 1^7), (2^3, 2^7) \quad \therefore n(A_{27} \cap A_{3^7}) = 2$
- (viii) $k=8$ 이면 $x^8=y^3$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(1^3, 1^8) \quad \therefore n(A_{27} \cap A_{3^8}) = 1$
- (ix) $k=9$ 이면 $x^9=y^3$, 즉 $x^3=y$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(1, 1^3), (2, 2^3), (3, 3^3), \dots, (6, 6^3)$
 $\therefore n(A_{27} \cap A_{3^9}) = 6$
- (x) $k=10$ 이면 $x^{10}=y^3$ 이므로 순서쌍 (x, y) 는
 $(1^3, 1^{10}) \quad \therefore n(A_{27} \cap A_{3^{10}}) = 1$
- (i)~(x)에서 $k=1$ 또는 $k=2$ 또는 $k=9$ 이므로 조건을 만족시키는 집합 B 의 원소는 $3^1, 3^2, 3^9$
따라서 모든 $\log_3 b$ 의 값의 합은
 $1+2+9=12$

06 답 28

$$\log_2(na+2a^2) = \log_2(nb+2b^2) \text{이므로}$$

$$na+2a^2 = nb+2b^2$$

$$n(a-b) + 2(a^2-b^2) = 0$$

$$n(a-b) + 2(a+b)(a-b) = 0$$

$$(a-b)(n+2a+2b) = 0$$

$$\therefore a=b \text{ 또는 } n+2a+2b=0$$

$$(i) a=b \text{ 일 때,}$$

$$-\frac{3n}{4} \leq b+2a \leq -\frac{n}{4} \text{에서}$$

$$-\frac{3n}{4} \leq 3a \leq -\frac{n}{4}$$

$$\therefore -\frac{n}{4} \leq a \leq -\frac{n}{12}$$

한편 $\log_2(na+2a^2)$ 이 자연수이므로

$$\log_2(na+2a^2) = k \text{ (} k \text{는 자연수)로 놓으면}$$

$$na+2a^2 = 2^k$$

$$2a^2+na-2^k=0$$

$$\therefore a = \frac{-n \pm \sqrt{n^2+8 \times 2^k}}{4} = \frac{-n \pm \sqrt{n^2+2^{k+3}}}{4}$$

$$\text{그런데 } -\frac{n}{4} \leq a \leq -\frac{n}{12} \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

$$\frac{-n - \sqrt{n^2+2^{k+3}}}{4} < -\frac{n}{4}, \frac{-n + \sqrt{n^2+2^{k+3}}}{4} > 0$$

$$(ii) n+2a+2b=0 \text{ 일 때,}$$

$$2b = -2a - n \quad \therefore b = -a - \frac{n}{2}$$

$$-\frac{3n}{4} \leq b+2a \leq -\frac{n}{4} \text{에서}$$

$$-\frac{3n}{4} \leq \left(-a - \frac{n}{2}\right) + 2a \leq -\frac{n}{4}$$

$$\therefore -\frac{n}{4} \leq a \leq \frac{n}{4}$$

한편 $\log_2(na+2a^2)$ 이 자연수이므로

$$\log_2(na+2a^2) = k \text{ (} k \text{는 자연수)로 놓으면}$$

$$na+2a^2 = 2^k$$

$$2a^2+na-2^k=0$$

$$\therefore a = \frac{-n \pm \sqrt{n^2+8 \times 2^k}}{4} = \frac{-n \pm \sqrt{n^2+2^{k+3}}}{4}$$

$$\text{그런데 } -\frac{n}{4} \leq a \leq \frac{n}{4} \text{이므로 } a = \frac{-n + \sqrt{n^2+2^{k+3}}}{4}$$

$$\text{이를 } -\frac{n}{4} \leq a \leq \frac{n}{4} \text{에 대입하면}$$

$$-\frac{n}{4} \leq \frac{-n + \sqrt{n^2+2^{k+3}}}{4} \leq \frac{n}{4}$$

$$0 \leq \sqrt{n^2+2^{k+3}} \leq 2n$$

각 변을 제곱하면

$$0 \leq n^2+2^{k+3} \leq 4n^2 \rightarrow 0 \leq n^2+2^{k+3} \text{은 항상 성립하므로}$$

$$n^2+2^{k+3} \leq 4n^2 \text{에서 } n^2+2^{k+3} \leq 4n^2 \text{인 경우만 확인한다.}$$

$$2^{k+3} \leq 3n^2$$

$$\text{이때 } n \leq 20 \text{이므로 } 2^{k+3} \leq 1200 \quad \therefore 2^k \leq 150$$

이를 만족시키는 자연수 k 의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7이다.

$$(i), (ii) \text{에서 모든 } \log_2(na+2a^2) \text{의 값의 합은}$$

$$1+2+3+4+5+6+7=28$$

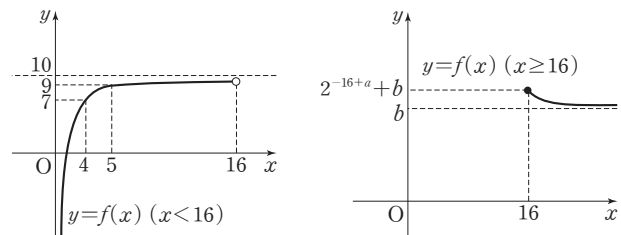
07 답 ③

함수 $y = -3^{-x+5} + 10$ ($x < 16$)의 그래프의 점근선은 직선 $y=10$ 이고

그래프는 두 점 (4, 7), (5, 9)를 지난다.

함수 $y = 2^{-x+a} + b$ ($x \geq 16$)의 그래프의 점근선은 직선 $y=b$ 이다.

따라서 두 함수 $y = -3^{-x+5} + 10$ ($x < 16$), $y = 2^{-x+a} + b$ ($x \geq 16$)의 그래프는 그림과 같다.



또 주어진 조건에서 $4 < k \leq 5$ 이므로 $x < 16$ 인 경우에 정수 $f(x)$ 는

$f(x)=8$ 또는 $f(x)=9$ 이다.

이때 $x < 16$ 에서 $4 < k \leq 5$ 인 실수 k 에 대하여 집합 $\{f(x) | x \geq k\}$ 의 원소 중 9는 포함되지만 8은 포함될 수도 있고 포함되지 않을 수도 있다.

따라서 주어진 조건을 만족시키려면 $x \geq 16$ 인 경우에 정수 $f(x)$ 는 8뿐이어야 한다.

즉, $b=7$ 이고 $8 \leq f(16) < 9$ 이어야 하므로

$$8 \leq 2^{-16+a} + 7 < 9, 1 \leq 2^{-16+a} < 2, 2^0 \leq 2^{-16+a} < 2^1$$

밀이 1보다 크므로

$$0 \leq -16+a < 1 \quad \therefore 16 \leq a < 17$$

이때 a 는 자연수이므로 $a=16$

$$\therefore a+b=23$$

08 답 4

$$f(x) = \begin{cases} 2x-k+6 & (x < \frac{k}{2}) \\ -2x+k+6 & (x \geq \frac{k}{2}) \end{cases}$$

이고, $f(x) < 0$ 이라면 $6 - |2x-k| < 0$ 에서 $|2x-k| > 6$

$$2x-k < -6 \text{ 또는 } 2x-k > 6 \quad \therefore x < \frac{k}{2}-3 \text{ 또는 } x > \frac{k}{2}+3$$

$f(x) \geq 0$ 이라면 $6 - |2x-k| \geq 0$ 에서 $|2x-k| \leq 6$

$$-6 \leq 2x-k \leq 6 \quad \therefore \frac{k}{2}-3 \leq x \leq \frac{k}{2}+3$$

$$\therefore g(x) = \begin{cases} a^{f(x)} & (x < \frac{k}{2}-3 \text{ 또는 } x > \frac{k}{2}+3) \\ a^{-f(x)} & (\frac{k}{2}-3 \leq x \leq \frac{k}{2}+3) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a^{2x-k+6} & (x < \frac{k}{2}-3) \\ a^{-2x+k-6} & (\frac{k}{2}-3 \leq x < \frac{k}{2}) \\ a^{2x-k-6} & (\frac{k}{2} \leq x \leq \frac{k}{2}+3) \\ a^{-2x+k+6} & (x > \frac{k}{2}+3) \end{cases}$$

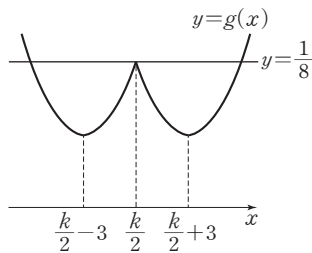
(i) $0 < a < 1$ 일 때,

$x < \frac{k}{2}-3$ 또는 $\frac{k}{2} \leq x \leq \frac{k}{2}+3$ 이면 x 의 값이 증가할 때 $g(x)$ 의 값은 감소하고, $\frac{k}{2}-3 \leq x < \frac{k}{2}$ 또는 $x > \frac{k}{2}+3$ 이면 x 의 값이 증가할 때 $g(x)$ 의 값도 증가한다.

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같고, 함수

$y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{8}$ 의 교점의 개수가 3이므로

$$g\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{1}{8} \text{ 이어야 한다.}$$



$$\text{즉, } g\left(\frac{k}{2}\right) = a^{-6} = \frac{1}{8} \quad \therefore a = \sqrt{2}$$

그런데 $0 < a < 1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

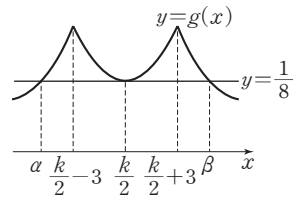
(ii) $a > 1$ 일 때,

$x < \frac{k}{2}-3$ 또는 $\frac{k}{2} \leq x \leq \frac{k}{2}+3$ 이면 x 의 값이 증가할 때 $g(x)$ 의 값도 증가하고, $\frac{k}{2}-3 \leq x < \frac{k}{2}$ 또는 $x > \frac{k}{2}+3$ 이면 x 의 값이 증가할 때 $g(x)$ 의 값도 감소한다.

따라서 함수 $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같고, 함수

$y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{8}$ 의 교점의 개수가 3이므로

$$g\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{1}{8} \text{ 이어야 한다.}$$



$$\text{즉, } g\left(\frac{k}{2}\right) = a^{-6} = \frac{1}{8} \quad \therefore a = \sqrt{2}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{8}$ 의 서로 다른 세 교점의 x 좌표를 $\alpha, \frac{k}{2}, \beta$ ($\alpha < \frac{k}{2} < \beta$)로 놓으면 $g(1) = \frac{1}{8}$ 이므로 다음과 같은 세 가지 경우로 나누어 $f(x)$ 를 구할 수 있다.

① $\alpha=1$ 일 때, $g(1) = g\left(\frac{k}{2}\right) = g(\beta)$ 이므로

$$(\sqrt{2})^{2-k+6} = 2^{-3} = (\sqrt{2})^{-2\beta+k+6}$$

$$\text{따라서 } \frac{2-k+6}{2} = -3 \text{ 이므로 } k=14$$

$$\therefore f(x) = 6 - |2x-14|$$

② $\frac{k}{2}=1$ 일 때, $f(x) = 6 - |2x-2|$

③ $\beta=1$ 일 때, $g(\alpha) = g\left(\frac{k}{2}\right) = g(1)$ 이므로

$$(\sqrt{2})^{2\alpha-k+6} = 2^{-3} = (\sqrt{2})^{-2+k+6}$$

$$\text{따라서 } -3 = \frac{-2+k+6}{2} \text{ 이므로 } k=-10$$

$$\therefore f(x) = 6 - |2x+10|$$

①, ②, ③에서 $f(-6)$ 의 값은 -20 또는 -8 또는 4 이므로 $f(-6)$ 의 최댓값은 4 이다.

09 답 4

$f(x) = 4^x$, $g(x) = -2x^2 + 8$ 이라 하면

$$g(x) = -2(x+2)(x-2)$$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 그림과 같다.

ㄱ. 그림에서 $0 < x < x_2$ 일 때

$f(x) < g(x)$ 이고, $x_2 < x < 2$ 일 때

$f(x) > g(x)$ 이다.

$x=1$ 일 때,

$$f(1) = 4, g(1) = -2 + 8 = 6$$

따라서 $f(1) < g(1)$ 이므로 $x=1$ 은 $0 < x < x_2$ 에 속한다.

$$\therefore x_2 > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

ㄴ. 그림에서 $-2 < x < x_1$ 일 때 $f(x) > g(x)$ 이고, $x_1 < x < 0$ 일 때

$f(x) < g(x)$ 이다.

$x=-1$ 일 때,

$$f(-1) = 4^{-1} = \frac{1}{4}, g(-1) = -2 + 8 = 6$$

따라서 $f(-1) < g(-1)$ 이므로 $x=-1$ 은 $x_1 < x < 0$ 에 속한다.

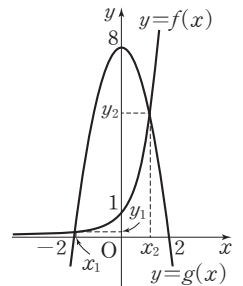
$$\therefore x_1 < -1$$

따라서 $-2 < x_1 < -1$ 이고, ①에서 $1 < x_2 < 2$ 이므로

$$-1 < x_1 + x_2 < 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

그림에서 $y_2 > y_1$ 이므로 $y_2 - y_1 > 0$ 이고 두 점 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 는 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로

$$y_2 - y_1 = (-2x_2^2 + 8) - (-2x_1^2 + 8) = 2x_1^2 - 2x_2^2 = 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) > 0$$



이때 $x_1 - x_2 < 0$ 이므로 $x_1 + x_2 < 0$ ㉔

㉓, ㉔에서 $-1 < x_1 + x_2 < 0$ ㉕

㉔. 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$y_1 y_2 = 4^{x_1} \times 4^{x_2} = 4^{x_1 + x_2}$$

㉕에서 $4^{-1} < 4^{x_1 + x_2} < 4^0$ 이므로 $\frac{1}{4} < y_1 y_2 < 1$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㉒, ㉔이다.

10 답 21

두 함수 $f_1(x), f_2(x)$ 를 $f_1(x) = 3^{x+4} + 4b, f_2(x) = 3^{-x+1} + 2b$ 라 하자.

함수 $y=f_1(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하고, 함수

$y=f_2(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

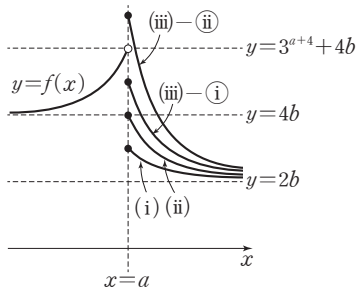
또 두 함수 $y=f_1(x), y=f_2(x)$ 의 그래프의 점근선이 각각 $y=4b,$

$y=2b$ 이므로

$$\{f_1(x) | x < a\} = \{y | 4b < y < 3^{a+4} + 4b\},$$

$$\{f_2(x) | x \geq a\} = \{y | 2b < y \leq 3^{-a+1} + 2b\}$$

이때 $2b < 4b < 3^{a+4} + 4b$ 이므로 $3^{-a+1} + 2b$ 와 $4b, 3^{a+4} + 4b$ 의 대소 관계에 따라 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



(i) $3^{-a+1} + 2b < 4b$ 일 때,

$3^{-a+1} + 2b < t \leq 4b$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 0이므로 조건을 만족시키는 k 의 최댓값이 $8b+9$ 가 아니다.

(ii) $3^{-a+1} + 2b = 4b$ 일 때,

$2b < t < 3^{a+4} + 4b$ 인 모든 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 1이다.

또 $t \geq 3^{a+4} + 4b$ 인 모든 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 는 만나지 않는다.

(iii) $3^{-a+1} + 2b > 4b$ 일 때,

① $3^{-a+1} + 2b \leq 3^{a+4} + 4b$ 일 때,

$4b < t \leq 3^{-a+1} + 2b$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 2이므로 조건을 만족시키는 k 의 최댓값이 $8b+9$ 가 아니다.

② $3^{-a+1} + 2b > 3^{a+4} + 4b$ 일 때,

$4b < t < 3^{a+4} + 4b$ 인 실수 t 에 대하여 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수는 2이므로 조건을 만족시키는 k 의 최댓값이 $8b+9$ 가 아니다.

(i), (ii), (iii)에서 $3^{-a+1} + 2b = 4b$ ㉑

이때 조건을 만족시키는 실수 k 의 최댓값은 $8b+9$ 이므로

$$3^{a+4} + 4b = 8b + 9, 4b = 3^{a+4} - 9 \quad \dots\dots ㉒$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 2 \times 3^{-a+1} = 3^{a+4} - 9$$

$$3^{a+4} - 2 \times 3^{-a+1} - 9 = 0, 3^{a+3} - 2 \times 3^{-a} - 3 = 0$$

$$27 \times (3^a)^2 - 3 \times 3^a - 2 = 0, (3 \times 3^a - 1)(9 \times 3^a + 2) = 0$$

이때 $3^a > 0$ 이므로 $3^a = \frac{1}{3}$ ㉓ $\therefore a = -1$

$$a = -1 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = \frac{3^{1+1}}{2} - \frac{9}{2}$$

$$\therefore 6(a+b) = 6 \times \left(-1 + \frac{9}{2}\right) = 6 \times \frac{7}{2} = 21$$

11 답 ②

함수 $y = (\sqrt{3})^{-x+k}$ 의 역함수를 구하면 $-x+k = \log_{\sqrt{3}} y,$

$$x = -\log_{\sqrt{3}} y + k$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y = -\log_{\sqrt{3}} x + k$

즉, 두 함수 $y = -\log_{\sqrt{3}} x + k, y = (\sqrt{3})^{-x+k}$ 은 서로 역함수 관계이므로

그 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 서로 대칭이다.

따라서 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 이고 $\overline{AD} - \overline{BC} = 8\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{AB} = 4\sqrt{2}$

점 A를 지나고 y 축에 평행한 직선과

점 B를 지나고 x 축에 평행한 직선이

만나는 점을 H라 하자.

직선 AB의 기울기가 -1 이므로 삼각

형 AHB는 직각이등변삼각형이 되어

$$\overline{AH} = \overline{BH} = 4$$

점 A의 좌표를 $(a, -a+5)$ 라 하면

점 B의 좌표는 $(a+4, -a+1)$ 이다.

두 점 A, B는 함수 $y = -\log_{\sqrt{3}} x + k$ 의 그래프 위의 점이므로

$$-a+5 = -\log_{\sqrt{3}} a + k \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$-a+1 = -\log_{\sqrt{3}} (a+4) + k \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면 } 4 = \log_{\sqrt{3}} \frac{a+4}{a}, \frac{a+4}{a} = 9, a+4 = 9a \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \frac{9}{2} = -\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{2} + k$$

$$\therefore k = \frac{9}{2} - 2\log_3 2$$

12 답 30

$A\left(x_1, \frac{k}{2}\right)$ 라 하면 점 A가 직선 $y = 3\log_a x + \frac{k}{2}$ 위에 있으므로

$$3\log_a x_1 + \frac{k}{2} = \frac{k}{2}, \log_a x_1 = 0 \quad \therefore x_1 = 1 \quad A\left(1, \frac{k}{2}\right)$$

$B\left(x_2, \frac{k}{2}\right)$ 라 하면 점 B가 직선 $y = a^{x-2k}$ 위에 있으므로

$$a^{x_2-2k} = \frac{k}{2} \quad \therefore x_2 = \log_a \frac{k}{2} + 2k \quad \therefore B\left(\log_a \frac{k}{2} + 2k, \frac{k}{2}\right)$$

두 점 C, D의 x 좌표가 $2k$ 이므로 $C\left(2k, 3\log_a 2k + \frac{k}{2}\right), D(2k, 1)$

또 $E\left(2k, \frac{k}{2}\right)$ 이므로

$$\overline{AE} = 2k - 1, \overline{BE} = \log_a \frac{k}{2}, \overline{CE} = 3\log_a 2k, \overline{DE} = \frac{k}{2} - 1$$

$$\overline{AE} : \overline{DE} = 5 : 1 \text{이므로 } (2k-1) : \left(\frac{k}{2}-1\right) = 5 : 1$$

$$\text{즉, } \frac{5}{2}k - 5 = 2k - 1 \text{에서 } k = 8$$

삼각형 CDB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{BE} = \frac{1}{2} \times \left(3\log_a 2k + \frac{k}{2} - 1\right) \times \log_a \frac{k}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \times (3\log_a 16 + 3) \times \log_a 4$$

$$= \frac{1}{2} \times (6\log_a 4 + 3) \times \log_a 4$$

$$= 3(\log_a 4)^2 + \frac{3}{2} \log_a 4$$

$$\text{즉, } 3(\log_a 4)^2 + \frac{3}{2} \log_a 4 = 54 \text{에서 } 2(\log_a 4)^2 + \log_a 4 - 36 = 0$$

$$(\log_a 4 - 4)(2\log_a 4 + 9) = 0 \quad \therefore \log_a 4 = 4 \text{ 또는 } \log_a 4 = -\frac{9}{2}$$

그런데 $a > 1$ 이므로 $\log_a 4 > 0$

$$\text{따라서 } \log_a 4 = 4 \text{이므로 } a^4 = 4, a^2 = 2 \quad \therefore a = \sqrt{2}$$

$$\text{즉, } k = 8, a = \sqrt{2}$$

$$\overline{AE} = 2k - 1 = 15, \overline{BE} = \log_a \frac{k}{2} = \log_{\sqrt{2}} 4 = 4,$$

$$\overline{CE} = 3 \log_a 2k = 3 \log_{\sqrt{2}} 16 = 24, \overline{DE} = \frac{k}{2} - 1 = 3$$

이므로

$$(\text{삼각형 CAE의 넓이}) = \frac{1}{2} \times \overline{AE} \times \overline{CE} = \frac{1}{2} \times 15 \times 24 = 180,$$

$$(\text{삼각형 BED의 넓이}) = \frac{1}{2} \times \overline{BE} \times \overline{DE} = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$

$$\therefore \frac{(\text{삼각형 CAE의 넓이})}{(\text{삼각형 BED의 넓이})} = 30$$

13 답 24

함수 $y = -\frac{3}{x-5} + a$ 의 그래프는 함수

$y = -\frac{3}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 5만큼,

y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 것이므로

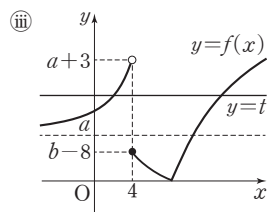
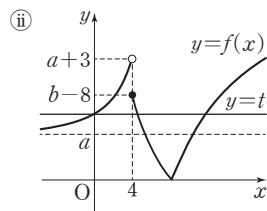
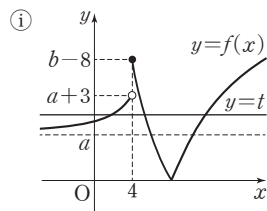
$x < 4$ 에서 함수 $y = -\frac{3}{x-5} + a$ 의 그래프는 그

림과 같다.

한편 함수 $y = 4 \log_2 x - b$ 의 그래프는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하고 $f(4) = |8 - b|$ 이므로 $8 - b$ 의 값에 따라 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같은 경우가 있다.

(i) $8 - b < 0$, 즉 $b > 8$ 인 경우

$b - 8$ 과 a 또는 $a + 3$ 과의 대소 관계에 따라 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



이때 ①, ②의 경우 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 의 교점의 개수가 3인 경우가 있으므로 ㉞를 만족시키지 않는다.

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 ③이 되어야 한다.

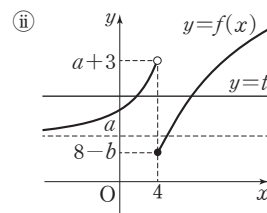
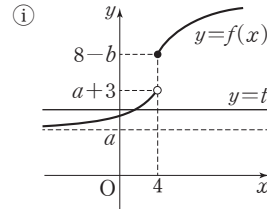
㉞에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 의 교점의 개수가 2인 자연수 t 의 개수가 10이어야 하고 자연수 t 는 $a + 1$, $a + 2$ 와 $b - 8$ 이하의 자연수이므로 $b - 8$ 이하의 자연수의 개수가 8이 되려면

$$b - 8 = 8 \quad \therefore b = 16$$

$$\text{한편 } b - 8 \leq a \text{에서 } 16 - 8 \leq a \quad \therefore a \geq 8$$

(ii) $8 - b \geq 0$, 즉 $b \leq 8$ 인 경우

함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



①의 경우, 교점의 개수가 2인 경우는 존재하지 않으므로 ㉞를 만족시키지 않는다.

②의 경우, 교점의 개수가 2인 자연수 t 는 최대 $a + 1$, $a + 2$ 의 2개이므로 ㉞를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a \geq 8$, $b = 16$ 이므로 $a + b \geq 24$

따라서 $a + b$ 의 최솟값은 24이다.

14 답 ③

ㄱ. 두 함수 $y = 3^x$, $y = \log_3 x$ 는 서로 역함수 관계이므로 그 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 서로 대칭이다.

$$\text{즉, } x_1 = y_2, y_1 = x_2, \overline{OA} = \overline{OB}$$

삼각형 OAB의 넓이가 삼각형 OAC의 넓이의 3배이므로

$$\overline{OC} = \frac{1}{3} \overline{OB} = \frac{1}{3} \overline{OA}$$

ㄴ. 점 C는 선분 OB를 1 : 2로 내분하는 점이므로

$$x_3 = \frac{1}{3} x_2, y_3 = \frac{1}{3} y_2 \text{에서 } x_2 = 3x_3, y_2 = 3y_3$$

$$\neg \text{에서 } x_1 = y_2 = 3y_3$$

$$\therefore x_1 + y_2 = 2y_2 = 6y_3$$

ㄷ. $y_2 = 3^{x_2}$, $y_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x_3}$ 이고, 세 점 O, B, C는 직선 l 위의 점이므로

직선 l 의 기울기는

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{y_3}{x_3}, \quad 3^{x_2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x_3}$$

$$\neg \text{에서 } x_2 = 3x_3 \text{이므로 } \frac{3^{3x_3}}{3x_3} = \frac{3^{-x_3}}{x_3}, \quad 3^{3x_3-1} = 3^{-x_3}$$

$$3x_3 - 1 = -x_3 \text{이므로 } x_3 = \frac{1}{4}$$

따라서 직선 l 의 기울기는

$$\frac{y_3}{x_3} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x_3}}{x_3} = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{4}} = 4 \times 3^{-\frac{1}{4}}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

STEP 1 핵심 문제

| 60~61쪽

- 01 2 02 ⑤ 03 ④ 04 ① 05 $\frac{11\sqrt{3}}{7}$ 06 $\frac{1}{3}$
 07 ③ 08 $\cos \theta - \tan \theta$ 09 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 10 ③
 11 ⑤ 12 $\frac{1}{3}$

01 답 2

(i) $\frac{n}{11}\pi$ 가 제3사분면의 각이므로

$$2l\pi + \pi < \frac{n}{11}\pi < 2l\pi + \frac{3}{2}\pi \quad (l \text{은 정수})$$

$$l=0 \text{일 때, } \pi < \frac{n}{11}\pi < \frac{3}{2}\pi \text{이므로 } 11 < n < \frac{33}{2}$$

$$\therefore n=12, 13, 14, 15, 16$$

$$l=1 \text{일 때, } 3\pi < \frac{n}{11}\pi < \frac{7}{2}\pi \text{이므로 } 33 < n < \frac{77}{2}$$

$$\therefore n=34, 35, 36, 37, 38$$

$$l=2 \text{일 때, } 5\pi < \frac{n}{11}\pi < \frac{11}{2}\pi \text{이므로 } 55 < n < \frac{121}{2}$$

그런데 $1 \leq n \leq 50$ 이므로 이를 만족시키는 n 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $\frac{n}{8}\pi$ 가 제2사분면의 각이므로

$$2m\pi + \frac{\pi}{2} < \frac{n}{8}\pi < 2m\pi + \pi \quad (m \text{은 정수})$$

$$m=0 \text{일 때, } \frac{\pi}{2} < \frac{n}{8}\pi < \pi \text{이므로 } 4 < n < 8$$

$$\therefore n=5, 6, 7$$

$$m=1 \text{일 때, } \frac{5}{2}\pi < \frac{n}{8}\pi < 3\pi \text{이므로 } 20 < n < 24$$

$$\therefore n=21, 22, 23$$

$$m=2 \text{일 때, } \frac{9}{2}\pi < \frac{n}{8}\pi < 5\pi \text{이므로 } 36 < n < 40$$

$$\therefore n=37, 38, 39$$

$$m=3 \text{일 때, } \frac{13}{2}\pi < \frac{n}{8}\pi < 7\pi \text{이므로 } 52 < n < 56$$

그런데 $1 \leq n \leq 50$ 이므로 이를 만족시키는 n 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $\frac{n}{11}\pi$, $\frac{n}{8}\pi$ 가 각각 제3사분면, 제2사분면의 각이 되도록 하는 자연수 n 은 37, 38의 2개이다.

02 답 ⑤

각의 크기 θ 를 나타내는 동경과 각의 크기 7θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$7\theta = \theta + 2n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

$$\therefore \theta = \frac{n}{3}\pi$$

이때 점 P는 제1사분면 위의 점이므로 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$\text{즉, } 0 < \frac{n}{3}\pi < \frac{\pi}{2} \text{에서 } n=1 \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

점 P의 x 좌표를 a ($a > 0$)라 하면 점 P의 좌표는 $P(a, a+1)$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \frac{a+1}{a} \text{에서 } \sqrt{3}a = a+1, \text{ 즉 } (\sqrt{3}-1)a=1$$

$$\therefore a = \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

방법 NOTE

정수 n 에 대하여 두 각 θ_1, θ_2 를 나타내는 동경이

$$(1) \text{ 일치한다. } \Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = 2n\pi$$

$$(2) x\text{축에 대하여 대칭이다. } \Leftrightarrow \theta_1 + \theta_2 = 2n\pi$$

$$(3) y\text{축에 대하여 대칭이다. } \Leftrightarrow \theta_1 + \theta_2 = (2n+1)\pi$$

$$(4) \text{ 원점에 대하여 대칭이다. } \Leftrightarrow \theta_1 - \theta_2 = (2n+1)\pi$$

03 답 ④

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면 둘레의 길이가 8이므로

$$2r + l = 8 \quad \therefore l = 8 - 2r$$

이때 $r > 0$, $8 - 2r > 0$ 이므로 $0 < r < 4$

부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(8-2r) = -r^2 + 4r = -(r-2)^2 + 4$$

따라서 부채꼴의 넓이는 $0 < r < 4$ 에서 $r=2$ 일 때 최댓값 4를 가지므로

이때의 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\frac{1}{2} \times 2^2 \times \theta = 4$$

$$\therefore \theta = 2$$

04 답 ①

그림과 같이 원 O_1 의 중심을 I라 하면

원 O_1 은 삼각형 AOP의 내접원이므로

$$\angle IRO = \frac{\pi}{2}, \angle ISO = \frac{\pi}{2}$$

사각형 IROS에서

$$\angle ROS = \pi - \angle RIS \text{이므로}$$

$$\angle POB = \pi - \angle ROS = \angle RIS$$

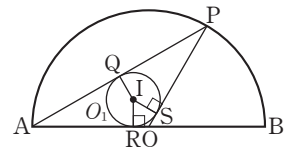
$$\widehat{QR} : \widehat{RS} : \widehat{SQ} = 5 : 2 : 5 \text{이므로}$$

$$\angle RIS = \frac{2}{12} \times 2\pi = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \angle POB = \frac{\pi}{3}$$

이때 $\overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 2$ 이므로 부채꼴 POB의 호의 길이는

$$2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$



05 답 $\frac{11\sqrt{3}}{7}$

그림과 같이 점 A, B, C, D, E를 정하면 두

삼각형 ADE, ABC는 서로 닮음이므로

$$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{DE} : \overline{BC} = 1 : 2$$

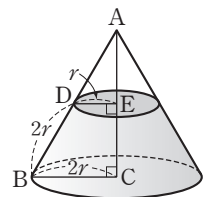
$$\therefore \overline{AD} = \overline{DE} = 2r$$

직각삼각형 ADE에서

$$\begin{aligned} \overline{AE} &= \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DE}^2} \\ &= \sqrt{(2r)^2 - (r)^2} = \sqrt{3}r \end{aligned}$$

이때 $\overline{AE} : \overline{AC} = 1 : 2$ 이므로

$$\overline{AC} = 2\overline{AE} = 2\sqrt{3}r$$



따라서 원뿔대의 옆면의 넓이는 반지름의 길이가 $4r$ 이고 호의 길이가 $4\pi r$ 인 부채꼴의 넓이에서 반지름의 길이가 $2r$ 이고 호의 길이가 $2\pi r$ 인 부채꼴의 넓이를 뺀 값이므로

$$\frac{1}{2} \times 4r \times 4\pi r - \frac{1}{2} \times 2r \times 2\pi r = 6\pi r^2$$

$$\therefore S = \pi r^2 + \pi(2r)^2 + 6\pi r^2 = 11\pi r^2$$

원뿔대의 부피는 밑면의 반지름의 길이가 $2r$ 이고 높이가 $2\sqrt{3}r$ 인 원뿔의 부피에서 밑면의 반지름의 길이가 r 이고 높이가 $\sqrt{3}r$ 인 원뿔의 부피를 뺀 값이므로

$$V = \frac{1}{3} \times \pi(2r)^2 \times 2\sqrt{3}r - \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times \sqrt{3}r$$

$$= \frac{7\sqrt{3}}{3} \pi r^3$$

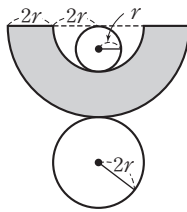
$$\text{이때 } S=V \text{ 이므로 } 11\pi r^2 = \frac{7\sqrt{3}}{3} \pi r^3$$

$$\therefore r = \frac{33}{7\sqrt{3}} = \frac{11\sqrt{3}}{7}$$

개념 NOTE

밑면의 반지름의 길이가 r , 모선의 길이가 a , 높이가 h 인 원뿔의 겉넓이를 S , 부피를 V 라 하면

$$S = \pi r^2 + \pi r a, V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$



06 답 $\frac{1}{3}$

점 $P(3, k)$ 에 대하여 $\tan \theta = -\frac{2}{3}$ 이므로

삼각함수의 정의에 의하여

$$\frac{k}{3} = -\frac{2}{3} \quad \therefore k = -2$$

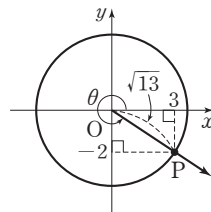
즉, $P(3, -2)$ 이므로

$$OP = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{13}$$

따라서 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{13}}, \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\therefore \frac{k}{13 \sin \theta \cos \theta} = \frac{-2}{13 \times \left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \times \frac{3}{\sqrt{13}}} = \frac{1}{3}$$



07 답 ③

점 A의 좌표를 $(-2, a)$ ($a > 0$)라 하면 점

B의 좌표는 $(-2, -a)$ 이고 $OA = OB = r$

이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\cos \alpha = -\frac{2}{r}, \sin \beta = -\frac{a}{r}$$

$2 \cos \alpha = 3 \sin \beta$ 에서

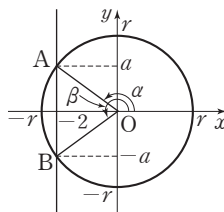
$$2 \times \left(-\frac{2}{r}\right) = 3 \times \left(-\frac{a}{r}\right) \quad \therefore a = \frac{4}{3}$$

이때 $\sin \alpha = \frac{a}{r}, \cos \beta = -\frac{2}{r}$ 이므로

$$r(\sin \alpha + \cos \beta) = r \left\{ \frac{a}{r} + \left(-\frac{2}{r}\right) \right\}$$

$$= a + (-2)$$

$$= \frac{4}{3} + (-2) = -\frac{2}{3}$$



08 답 $\cos \theta - \tan \theta$

(i) $\sin \theta \cos \theta < 0$ 일 때,

$\sin \theta, \cos \theta$ 의 값의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\cos \theta \tan \theta < 0$ 일 때,

$\cos \theta, \tan \theta$ 의 값의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제4사분면의 각이다.

$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$ 에서 $\sin \theta - \cos \theta < 0$ 이므로

$$\sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} = |\sin \theta - \cos \theta| = \cos \theta - \sin \theta$$

또 $\tan \theta < 0$ 에서 $\tan \theta - 1 < 0$ 이므로

$$\sqrt[4]{(\tan \theta - 1)^4} = |\tan \theta - 1| = 1 - \tan \theta$$

$$\therefore \sqrt{(\sin \theta - \cos \theta)^2} + \sqrt[4]{(\tan \theta - 1)^4} + \sqrt[3]{(\sin \theta - 1)^3}$$

$$= (\cos \theta - \sin \theta) + (1 - \tan \theta) + (\sin \theta - 1)$$

$$= \cos \theta - \tan \theta$$

09 답 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$\sin \theta + \cos \theta = \alpha$ 라 하고 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \alpha^2$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \alpha^2$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \alpha^2 - 1$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{\alpha^2 - 1}{2}$$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta \cos \theta < 0$$

$$\text{즉, } \frac{\alpha^2 - 1}{2} < 0 \text{ 이므로 } \alpha^2 - 1 < 0$$

$$(\alpha + 1)(\alpha - 1) < 0 \quad \therefore -1 < \alpha < 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = 2 \text{ 에서 } \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 2 \text{ 이므로}$$

$$\frac{\alpha}{\frac{\alpha^2 - 1}{2}} = 2, \alpha = \alpha^2 - 1$$

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

$$\therefore \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \quad (\because \textcircled{1})$$

10 답 ③

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 1 + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{9}{5}$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{3\sqrt{5}}{5} \quad \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\therefore \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{\cos \theta - \cos^2 \theta + \sin \theta - \sin^2 \theta}{(1 - \sin \theta)(1 - \cos \theta)}$$

$$= \frac{\sin \theta + \cos \theta - 1}{1 - (\sin \theta + \cos \theta) + \sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{\frac{3\sqrt{5}}{5} - 1}{1 - \frac{3\sqrt{5}}{5} + \frac{2}{5}} = \frac{3\sqrt{5} - 5}{7 - 3\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(3\sqrt{5} - 5)(7 + 3\sqrt{5})}{(7 - 3\sqrt{5})(7 + 3\sqrt{5})}$$

$$= \frac{3\sqrt{5} + 5}{2}$$

11 답 ⑤

$$\begin{aligned}\sin^4 \theta + \cos^4 \theta &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= 1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= \frac{23}{32}\end{aligned}$$

에서 $\sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{9}{64}$

즉, $\sin \theta \cos \theta = \pm \frac{3}{8}$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 에서 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

따라서 $(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{7}{4}$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{7}}{2}$$

이때 $\sin \theta - \cos \theta > 0$ 이므로 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$

12 답 $\frac{1}{3}$

이차방정식 $5x^2 + mx - 3 = 0$ 의 두 근이 $\cos \theta$, $\tan \theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\cos \theta + \tan \theta = -\frac{m}{5} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\cos \theta \times \tan \theta = -\frac{3}{5}, \quad \cos \theta \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{3}{5}$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{3}{5}$$

따라서 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.배점 20%

(i) θ 가 제3사분면의 각일 때,

$$\cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5} \text{이므로}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{4}$$

이때 $\frac{1}{\tan \theta} = \frac{4}{3}$, $-\frac{1}{\sin \theta} = \frac{5}{3}$ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인

이차방정식 $f(x) = 0$ 에서 두 근의 합은 $\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3$, 두 근의 곱은

$$\frac{4}{3} \times \frac{5}{3} = \frac{20}{9} \text{이므로 } f(x) = x^2 - 3x + \frac{20}{9}$$

이때 $f(0) = \frac{20}{9} > 0$ 이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) θ 가 제4사분면의 각일 때,

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5} \text{이므로}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{3}{4}$$

이때 $\frac{1}{\tan \theta} = -\frac{4}{3}$, $-\frac{1}{\sin \theta} = \frac{5}{3}$ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인

이차방정식 $f(x) = 0$ 에서 두 근의 합은 $-\frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$, 두 근의 곱은

$$-\frac{4}{3} \times \frac{5}{3} = -\frac{20}{9} \text{이므로 } f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{20}{9}$$

그런데 $f(0) = -\frac{20}{9} < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(x) = x^2 - 3x + \frac{20}{9}$ 배점 50%

이때 $\cos \theta = -\frac{4}{5}$, $\tan \theta = \frac{3}{4}$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$-\frac{4}{5} + \frac{3}{4} = -\frac{m}{5} \quad \therefore m = \frac{1}{4}$$

$$\therefore m \times f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \quad \dots \text{배점 30\%}$$

STEP 2 고난도 문제

| 62~65쪽

01 제2사분면 또는 제4사분면 02 $\frac{34}{3}\pi$ 03 12 04 ④

05 $3\sqrt{3}$ 06 $\frac{2}{3}\pi$ 07 ④ 08 6 09 ③ 10 ③

11 17 12 2 13 $\neg, \perp$ 14 9 15 $\frac{11}{9}$

16 $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ 17 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 18 $\frac{\sqrt{7}}{4}$ 19 ① 20 20

21 ④ 22 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

01 답 제2사분면 또는 제4사분면

θ 가 제1사분면의 각이므로

$$\theta = 2n\pi + \alpha \quad (n \text{은 정수}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

$$\therefore \frac{\theta}{2} = n\pi + \frac{\alpha}{2}$$

(i) $n = 2m$ (m 은 정수)일 때,

$$\frac{\theta}{2} = 2m\pi + \frac{\alpha}{2} \text{에서 } 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4} \text{이므로 } \frac{\theta}{2} \text{는 제1사분면의 각이다.}$$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n = 2m + 1$ (m 은 정수)일 때,

$$\frac{\theta}{2} = (2m + 1)\pi + \frac{\alpha}{2} = 2m\pi + \pi + \frac{\alpha}{2} \text{에서 } \pi < \pi + \frac{\alpha}{2} < \frac{5}{4}\pi \text{이므로}$$

$$\frac{\theta}{2} \text{는 제3사분면의 각이다.}$$

(i), (ii)에서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면의 각이고 $\frac{\theta}{2} = 2m\pi + \pi + \frac{\alpha}{2}$ 이므로

$$\frac{\theta}{4} = m\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4}$$

① $m = 2k$ (k 는 정수)일 때,

$$\frac{\theta}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4} \text{에서 } \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4} < \frac{5}{8}\pi \text{이므로 } \frac{\theta}{4} \text{는 제2사분면}$$

의 각이다.

② $m = 2k + 1$ (k 는 정수)일 때,

$$\frac{\theta}{4} = (2k + 1)\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{4} = 2k\pi + \frac{3}{2}\pi + \frac{\alpha}{4} \text{에서}$$

$$\frac{3}{2}\pi < \frac{3}{2}\pi + \frac{\alpha}{4} < \frac{13}{8}\pi \text{이므로 } \frac{\theta}{4} \text{는 제4사분면의 각이다.}$$

①, ②에서 θ , $\frac{\theta}{2}$, $\frac{\theta}{4}$ 가 모두 다른 사분면의 각일 때, $\frac{\theta}{4}$ 가 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면 또는 제4사분면이다.

다른 풀이

$$\frac{\theta}{4} = 2n\pi + \alpha \quad (n \text{은 정수}, 0 < \alpha < 2\pi) \text{라 하면}$$

$$\frac{\theta}{2} = 4n\pi + 2\alpha, \quad \theta = 8n\pi + 4\alpha$$

$0 < 4\alpha < 8\pi$ 이고 θ 가 제1사분면의 각이므로

$0 < 4\alpha < \frac{\pi}{2}$ 또는 $2\pi < 4\alpha < \frac{5\pi}{2}$ 또는 $4\pi < 4\alpha < \frac{9\pi}{2}$ 또는

$6\pi < 4\alpha < \frac{13\pi}{2}$

(i) $0 < 4\alpha < \frac{\pi}{2}$ 일 때,

$0 < 2\alpha < \frac{\pi}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{8}$ 이므로 $\frac{\theta}{2}$, $\frac{\theta}{4}$ 도 제1사분면의 각이다.

이는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $2\pi < 4\alpha < \frac{5\pi}{2}$ 일 때,

$\pi < 2\alpha < \frac{5\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{5\pi}{8}$ 이므로 $\frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면, $\frac{\theta}{4}$ 는 제2사분면의 각이다.

(iii) $4\pi < 4\alpha < \frac{9\pi}{2}$ 일 때,

$2\pi < 2\alpha < \frac{9\pi}{4}$, $\pi < \alpha < \frac{9\pi}{8}$ 이므로 $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면, $\frac{\theta}{4}$ 는 제3사분면의 각이다.

이는 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $6\pi < 4\alpha < \frac{13\pi}{2}$ 일 때,

$3\pi < 2\alpha < \frac{13\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{13\pi}{8}$ 이므로 $\frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면, $\frac{\theta}{4}$ 는 제4사분면의 각이다.

(i)~(iv)에서 θ , $\frac{\theta}{2}$, $\frac{\theta}{4}$ 가 모두 다른 사분면의 각일 때, $\frac{\theta}{4}$ 가 존재할 수 있는 사분면은 제2사분면 또는 제4사분면이다.

02 답 $\frac{34}{3}\pi$

각 θ_1 을 나타내는 동경과 각 θ_2 를 나타내는 동경이 직선 $y = \sqrt{3}x$ 에 대하여 대칭이므로 각 $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ 를 나타내는 동경은 직선 $y = \sqrt{3}x$ 위에 있다.

이때 $\theta_2 = 2\theta_1$ 에서 $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{3}{2}\theta_1$ 이고 $0 < \theta_1 < 4\pi$ 이므로

$$0 < \frac{3}{2}\theta_1 < 6\pi$$

직선 $y = \sqrt{3}x$ 의 기울기는 $\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 이므로 각 $\frac{3}{2}\theta_1$ 이 될 수 있는 각의 크기는

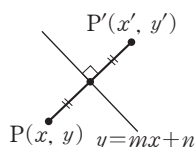
$$\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \pi, \frac{\pi}{3} + 2\pi, \frac{\pi}{3} + 3\pi, \frac{\pi}{3} + 4\pi, \frac{\pi}{3} + 5\pi$$

따라서 모든 각 $\frac{3}{2}\theta_1$ 의 크기의 합은 17π 이므로 모든 각 θ_1 의 크기의 합은

$$\frac{2}{3} \times 17\pi = \frac{34}{3}\pi$$

개념 NOTE

- (1) 점 $P(x, y)$ 를 직선 $y = mx + n$ 에 대하여 대칭이동한 점을 $P'(x', y')$ 이라 하면 선분 PP' 의 중점은 직선 $y = mx + n$ 위에 있다.



- (2) 직선 $y = ax + b$ 가 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면 $\tan \theta = a$

03 답 12

동경 OP_n 이 나타내는 각의 크기를 θ_n 이라 하면

$$\theta_1 = 3\pi - \frac{1}{3}\pi = 2\pi + \frac{2}{3}\pi,$$

$$\theta_2 = 5\pi + \frac{2}{3}\pi = 4\pi + \frac{5}{3}\pi,$$

$$\theta_3 = 7\pi - \pi = 6\pi + 0,$$

$$\theta_4 = 9\pi + \frac{4}{3}\pi = 10\pi + \frac{1}{3}\pi,$$

$$\theta_5 = 11\pi - \frac{5}{3}\pi = 8\pi + \frac{4}{3}\pi,$$

$$\theta_6 = 13\pi + 2\pi = 14\pi + \pi,$$

$$\theta_7 = 15\pi - \frac{7}{3}\pi = 12\pi + \frac{2}{3}\pi,$$

$\vdots$

즉, 동경 OP_n 은 6개씩 반복된다.

또 동경 OQ_n 이 나타내는 각의 크기를 ϕ_n 이라 하면

$$\phi_1 = \pi + \frac{1}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi,$$

$$\phi_2 = 3\pi - \frac{1}{3}\pi = 2\pi + \frac{2}{3}\pi,$$

$$\phi_3 = 5\pi + \frac{1}{2}\pi = 4\pi + \frac{3}{2}\pi,$$

$$\phi_4 = 7\pi - \frac{2}{3}\pi = 6\pi + \frac{1}{3}\pi,$$

$$\phi_5 = 9\pi + \frac{5}{6}\pi = 8\pi + \frac{11}{6}\pi,$$

$$\phi_6 = 11\pi - \pi = 10\pi + 0,$$

$$\phi_7 = 13\pi + \frac{7}{6}\pi = 14\pi + \frac{\pi}{6},$$

$$\phi_8 = 15\pi - \frac{4}{3}\pi = 12\pi + \frac{5}{3}\pi,$$

$$\phi_9 = 17\pi + \frac{3}{2}\pi = 18\pi + \frac{1}{2}\pi,$$

$$\phi_{10} = 19\pi - \frac{5}{3}\pi = 16\pi + \frac{4}{3}\pi,$$

$$\phi_{11} = 21\pi + \frac{11}{6}\pi = 22\pi + \frac{5}{6}\pi,$$

$$\phi_{12} = 23\pi - 2\pi = 20\pi + \pi,$$

$$\phi_{13} = 25\pi + \frac{13}{6}\pi = 26\pi + \frac{7}{6}\pi,$$

$\vdots$

즉, 동경 OQ_n 은 12개씩 반복된다.

이때 동경 OP_4 와 동경 OQ_4 가 나타내는 각의 크기는 $\frac{1}{3}\pi$ 로 서로 같고,

동경 OP_8 과 동경 OQ_8 이 나타내는 각의 크기는 $\frac{5}{3}\pi$ 로 서로 같다. 또 동경 OP_{12} 과 동경 OQ_{12} 가 나타내는 각의 크기는 π 로 서로 같다.

따라서 $n = 4m$ (m 은 자연수)일 때, 동경 OP_n 과 동경 OQ_n 이 일치한다.

이때 $1 \leq n \leq 50$ 이므로 $n = 4, 8, 12, \dots, 48$

따라서 구하는 n 의 개수는 12이다.

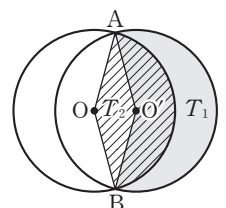
04 답 ④

마름모 $AOBO'$ 에서

$$\angle AO'B = \angle AOB = \frac{5}{6}\pi$$

원 O' 에서 중심각의 크기가 $2\pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{7}{6}\pi$ 인

부채꼴 $AO'B$ 의 넓이를 T_1 , 원 O 에서 중심각



의 크기가 $\frac{5}{6}\pi$ 인 부채꼴 AOB의 넓이를 T_2 라 하면

$$S_1 = T_1 + S_2 - T_2$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{7}{6}\pi \right) + S_2 - \left(\frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{5}{6}\pi \right)$$

$$= \frac{3}{2}\pi + S_2$$

$$\therefore S_1 - S_2 = \frac{3}{2}\pi$$

05 답 $3\sqrt{3}$

그림과 같이 육각형의 변의 연장선을 긋고
두 점 G, H를 정하자.

삼각형 EHF는 정삼각형이므로

$$\angle HFE = \angle HEF = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \angle GFH = \pi - \angle HFE = \frac{2}{3}\pi$$

이때 빗금 친 부분의 넓이는

(부채꼴 GFH의 넓이) - 2{ (부채꼴 FEH의 넓이) - $\triangle FEH$ }

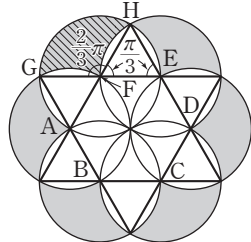
$$= \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{2}{3}\pi - 2 \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} - 2 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$



개념 NOTE

한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 넓이 S 는

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

06 답 $\frac{2}{3}\pi$

$\widehat{AP} = \frac{2}{3}\pi$, $\overline{OA} = 2$ 이므로 $\angle AOP = \theta$ 라 하면

$$2\theta = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

따라서 $\angle POB = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$ 이고, $\overline{OP} = \overline{OB}$ 이므로 삼각형 OBP는
정삼각형이다.

$\angle POB = \frac{\pi}{3}$ 이므로 호 PB와 선분 PB로 둘러싸인 부분의 넓이는

(부채꼴 POB의 넓이) - $\triangle OBP$

$$= \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2$$

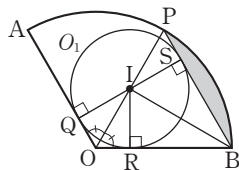
$$= \frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$$

원 O_1 의 중심을 I, 원 O_1 의 반지름의 길이를 r 라 하자.

직각삼각형 IOR에서 $\overline{IR} = r$, $\angle IOR = \frac{\pi}{3}$

이므로

$$\overline{OR} = \frac{\overline{IR}}{\tan \frac{\pi}{3}} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$



$\triangle BIR \equiv \triangle BIS$ (RHS 합동)이므로

$$\angle IBR = \frac{1}{2} \angle PBO = \frac{\pi}{6}$$

직각삼각형 IRB에서

$$\overline{RB} = \frac{\overline{IR}}{\tan \frac{\pi}{6}} = \sqrt{3}r$$

이때 $\overline{OB} = \overline{OR} + \overline{RB}$ 이므로

$$2 = \frac{r}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}r, \quad 2 = \frac{4}{\sqrt{3}}r$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 호 PB와 선분 PB로 둘러싸인 부분의 넓이와 원 O_1 의 지름의 길이의 합은

$$\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3} + 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3}\pi$$

07 답 ④

반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{5}{12}\pi$ 인 부채꼴 AOB의 호의
길이는

$$6 \times \frac{5}{12}\pi = \frac{5}{2}\pi$$

원 C의 둘레의 길이는 부채꼴 AOB의 호의 길이의 $\frac{8}{5}$ 배이므로

$$\frac{5}{2}\pi \times \frac{8}{5} = 4\pi$$

원 C의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$2\pi r = 4\pi \quad \therefore r = 2$$

원 C의 중심을 I라 하고 원 C가 직선 OQ와

만나는 점 중 Q가 아닌 점을 R라 하자.

원 C는 호 AB와 점 Q에서 접하므로 점 I는
직선 OQ 위에 있다.

$$\overline{QI} = \overline{PI} = 2$$
이므로

$$\overline{OI} = \overline{OQ} - \overline{QI} = 6 - 2 = 4$$

직각삼각형 IPO에서

$$\overline{OP} = \sqrt{\overline{OI}^2 - \overline{PI}^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$$

이때 직각삼각형 IPO에서 $\overline{PI} : \overline{OI} : \overline{OP} = 1 : 2 : \sqrt{3}$ 이므로

$$\angle POI = \frac{\pi}{6}, \quad \angle PIO = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore \angle QOB = \frac{5}{12}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

(부채꼴 QOB의 넓이) - $\frac{1}{2}$ (원 C의 넓이)

+ $\triangle IPO$ - (부채꼴 RIP의 넓이)

$$= \frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \times 4\pi + \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{3}$$

$$= \frac{9}{2}\pi - 2\pi + 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$

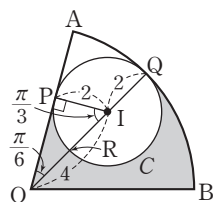
$$= \frac{11}{6}\pi + 2\sqrt{3}$$

따라서 $a = 11$, $b = 2$ 이므로 $a + b = 13$

개념 NOTE

세 내각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형의 세 변의 길이의 비는

$$1 : \sqrt{3} : 2$$



08 답 6

반지름의 길이가 10이고 중심각의 크기가 θ 인 부채꼴의 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$l=10\theta, S=\frac{1}{2} \times 10^2 \times \theta=50\theta$$

$$l+S=54\pi \text{이므로}$$

$$10\theta+50\theta=54\pi, 60\theta=54\pi$$

$$\therefore \theta=\frac{9}{10}\pi \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

각 θ 와 각 $n\theta$ 를 나타내는 동경이 서로 수직이므로

$$n\theta-\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } n\theta-\theta=2k\pi-\frac{\pi}{2} \quad (k \text{는 정수})$$

$$\therefore \theta=\frac{2\pi}{n-1}k+\frac{\pi}{2(n-1)} \text{ 또는 } \theta=\frac{2\pi}{n-1}k-\frac{\pi}{2(n-1)} \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$(i) \theta=\frac{2\pi}{n-1}k+\frac{\pi}{2(n-1)} \text{일 때,}$$

$$\frac{2\pi}{n-1}k+\frac{\pi}{2(n-1)}=\frac{9}{10}\pi \text{에서}$$

$$k=\frac{n-1}{2}\left\{\frac{9}{10}-\frac{1}{2(n-1)}\right\}=\frac{9n-14}{20}$$

k 는 정수이므로 $9n-14=20p$ (p 는 정수)가 되는 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

$$(ii) \theta=\frac{2\pi}{n-1}k-\frac{\pi}{2(n-1)} \text{일 때,}$$

$$\frac{2\pi}{n-1}k-\frac{\pi}{2(n-1)}=\frac{9}{10}\pi \text{에서}$$

$$k=\frac{n-1}{2}\left\{\frac{9}{10}+\frac{1}{2(n-1)}\right\}=\frac{9n-4}{20}$$

k 는 정수이므로 $9n-4=20q$ (q 는 정수)가 되는 자연수 n 의 최솟값은 16이다.

$$(i), (ii) \text{에서 자연수 } n \text{의 최솟값은 6이다.} \dots\dots\dots \text{배점 50\%}$$

09 답 ③

점 P의 좌표를 $P(t, \sqrt{t})$ ($t>0$)라 하자.

$OP=\sqrt{t^2+(\sqrt{t})^2}=\sqrt{t^2+t}$ 이므로 삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin \theta=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t^2+t}}=\frac{1}{\sqrt{t+1}},$$

$$\cos \theta=\frac{t}{\sqrt{t^2+t}}=\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}}$$

이때 $\cos^2 \theta-2\sin^2 \theta=-1$ 이므로

$$\left(\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}}\right)^2-2\left(\frac{1}{\sqrt{t+1}}\right)^2=-1$$

$$\text{즉, } \frac{t-2}{t+1}=-1 \text{이므로 } t-2=-t-1 \text{에서 } t=\frac{1}{2}$$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 이다.

$$\therefore OP=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

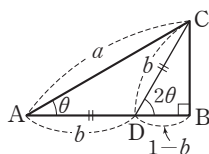
10 답 ③

그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{AD}=\overline{CD}$ 를 만족시키는 점 D를 잡으면 $\angle ACD=\angle CAD=\theta$

이므로

$$\angle CDB=\angle ACD+\angle CAD=2\theta$$

$\overline{CD}=b$ 라 하면 $\overline{AD}=b$ 이므로



$$\overline{BD}=1-b$$

직각삼각형 BCD에서

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{CD}^2 - \overline{BD}^2 \\ &= b^2 - (1-b)^2 = 2b-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

또 직각삼각형 ABC에서

$$\begin{aligned}\overline{BC}^2 &= \overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 \\ &= a^2 - 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $2b-1=a^2-1$ 이므로

$$2b=a^2 \quad \therefore b=\frac{a^2}{2}$$

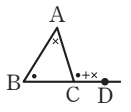
따라서 직각삼각형 BCD에서

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = \frac{1-b}{b} \\ &= \frac{1}{b} - 1 = \frac{2}{a^2} - 1\end{aligned}$$

개념 NOTE

삼각형의 한 외각의 크기는 그와 이웃하지 않는 두 내각의 크기의 합과 같다.

$$\Rightarrow \angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$$



idea 11 답 17

$\overline{MA}=\overline{MB}=\overline{MC}=\overline{MD}=5$ 이므로 그림과 같이 등변사다리꼴 ABCD는 점 M을 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 원에 내접한다.

이 원의 지름이 선분 AB이므로

$$\angle BCA=\frac{\pi}{2}$$

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC}=\overline{AB}\cos \theta=10\cos \theta$$

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발

$$\text{을 H라 하면 직각삼각형 AHC에서 } 10\cos \theta \sin \theta$$

$$\overline{CH}=\overline{AC}\sin \theta=10\cos \theta \sin \theta$$

$$\overline{AH}=\overline{AC}\cos \theta=10\cos^2 \theta$$

이때 $\overline{HB}=\overline{AB}-\overline{AH}=10-10\cos^2 \theta$ 이므로

$$\overline{DC}=\overline{AB}-2\overline{HB}$$

$$=10-2(10-10\cos^2 \theta)$$

$$=20\cos^2 \theta-10$$

등변사다리꼴 ABCD의 넓이가 $5\sqrt{34}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times \{(20\cos^2 \theta-10)+10\} \times 10\cos \theta \sin \theta=5\sqrt{34}$$

$$100\sin \theta \cos^3 \theta=5\sqrt{34}, 20\sin \theta \cos^3 \theta=\sqrt{34}$$

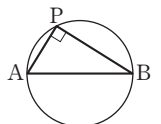
$$\therefore 200\sin^2 \theta \cos^6 \theta=\frac{1}{2}(20\sin \theta \cos^3 \theta)^2$$

$$=\frac{1}{2} \times 34=17$$

개념 NOTE

선분 AB를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여

$$\angle APB=\frac{\pi}{2}$$



12 답 2

(i) θ 가 제1사분면의 각일 때,

$$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0, \tan \theta > 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta \cos \theta > 0$$

$$\begin{aligned} \therefore f(\sin \theta) - f(\cos \theta) + 2f(\sin \theta \cos \theta) + f(\tan \theta) \\ = 1 - 1 + 2 \times 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

(ii) θ 가 제2사분면의 각일 때,

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta \cos \theta < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore f(\sin \theta) - f(\cos \theta) + 2f(\sin \theta \cos \theta) + f(\tan \theta) \\ = 1 - (-1) + 2 \times (-1) - 1 = -1 \end{aligned}$$

(iii) θ 가 제3사분면의 각일 때,

$$\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta \cos \theta > 0$$

$$\begin{aligned} \therefore f(\sin \theta) - f(\cos \theta) + 2f(\sin \theta \cos \theta) + f(\tan \theta) \\ = -1 - (-1) + 2 \times 1 + 1 = 3 \end{aligned}$$

(iv) θ 가 제4사분면의 각일 때,

$$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0 \text{이므로}$$

$$\sin \theta \cos \theta < 0$$

$$\begin{aligned} \therefore f(\sin \theta) - f(\cos \theta) + 2f(\sin \theta \cos \theta) + f(\tan \theta) \\ = -1 - 1 + 2 \times (-1) - 1 = -5 \end{aligned}$$

(i)~(iv)에서 θ 는 제2사분면의 각이므로

$$n=2$$

13 답 ㄱ, ㄴ

$$\text{ㄱ. } \sin \theta \neq 0, \frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{\cos \theta}} = -\sqrt{\tan \theta} = -\sqrt{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \text{이므로}$$

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$$

따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.

$$\text{ㄴ. } \sin \theta \tan \theta < 0 \text{에서 } \sin \theta, \tan \theta \text{의 값의 부호가 서로 다르고}$$

$$\tan \theta > \sin \theta \text{이므로}$$

$$\tan \theta > 0, \sin \theta < 0$$

따라서 θ 는 제3사분면의 각이므로

$$\cos \theta < 0$$

$$\therefore |\sin \theta| + |\cos \theta| = -\sin \theta - \cos \theta$$

$$\text{ㄷ. } \sin \theta < 0, \tan \theta < 0 \text{에서 } \theta \text{는 제4사분면의 각이므로}$$

$$\theta = 2n\pi - \alpha \left(n \text{은 정수, } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right) \text{로 놓으면}$$

$$\frac{\theta}{2} = n\pi - \frac{\alpha}{2}$$

$$0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{4} \text{이므로 } \frac{\theta}{2} \text{는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.}$$

$$\text{이때 } \frac{\theta}{2} \text{가 제2사분면의 각이면 } \sin \frac{\theta}{2} > 0, \tan \frac{\theta}{2} < 0 \text{이므로}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta}{2} < 0$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

개념 NOTE

음수의 제곱근의 성질

$$(1) a > 0, b < 0 \text{일 때, } \sqrt{\frac{a}{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$(2) \sqrt{\frac{a}{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \text{이면 } a > 0, b < 0 \text{ 또는 } a = 0, b \neq 0$$

14 답 9

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{5}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{5}{4}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{8}$$

$$\sin \theta = -\cos \theta + \frac{\sqrt{5}}{2} \text{이므로}$$

$$64 \sin^3 \theta \cos \theta + 32 \sqrt{5} \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$= 32 \sin \theta \cos \theta (2 \sin^2 \theta + \sqrt{5} \cos \theta)$$

$$= 32 \sin \theta \cos \theta \{ 2(1 - \cos^2 \theta) + \sqrt{5} \cos \theta \}$$

$$= 32 \sin \theta \cos \theta \left\{ 2 + 2 \cos \theta \left(-\cos \theta + \frac{\sqrt{5}}{2} \right) \right\}$$

$$= 32 \sin \theta \cos \theta (2 + 2 \cos \theta \sin \theta)$$

$$= 64 \sin \theta \cos \theta + 64 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$= 64 \times \frac{1}{8} + 64 \times \left(\frac{1}{8} \right)^2$$

$$= 8 + 1 = 9$$

15 답 $\frac{11}{9}$

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

$$\sin^5 \theta + \cos^5 \theta = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)$$

$$= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= \sin^3 \theta + \cos^3 \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta)$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta)$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta)$$

$$\therefore \frac{\sin^5 \theta + \cos^5 \theta}{\sin \theta + \cos \theta} = \frac{(\sin \theta + \cos \theta)(1 - \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta)}{\sin \theta + \cos \theta}$$

$$= 1 - \sin \theta \cos \theta - \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$= 1 - \left(-\frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{1}{3} \right)^2$$

$$= \frac{11}{9}$$

16 답 $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$

$$\log_{\sin \theta} \cos \theta + \log_{\cos \theta} \sqrt{\tan \theta} = 1 \text{에서}$$

$$\log_{\sin \theta} \cos \theta + \frac{1}{2} \log_{\cos \theta} \tan \theta = 1$$

$$\log_{\sin \theta} \cos \theta + \frac{1}{2} \log_{\cos \theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 1$$

$$\log_{\sin \theta} \cos \theta + \frac{1}{2} (\log_{\cos \theta} \sin \theta - 1) = 1$$

$$\log_{\sin \theta} \cos \theta + \frac{1}{2} \log_{\cos \theta} \sin \theta = \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $\log_{\sin \theta} \cos \theta = t$ 로 놓으면 $\log_{\cos \theta} \sin \theta = \frac{1}{t}$ 이므로

$$\textcircled{1} \text{에서 } t + \frac{1}{2t} = \frac{3}{2}, \text{ 즉 } 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$(2t-1)(t-1)=0 \text{에서 } t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t=1 \text{이므로}$$

$$\log_{\sin \theta} \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ 또는 } \log_{\sin \theta} \cos \theta = 1$$

(i) $\log_{\sin \theta} \cos \theta = \frac{1}{2}$ 일 때,

$$\cos \theta = (\sin \theta)^{\frac{1}{2}}, \cos^2 \theta = \sin \theta, 1 - \sin^2 \theta = \sin \theta$$

$$\text{즉, } \sin^2 \theta + \sin \theta - 1 = 0 \text{에서 } \sin \theta = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{이때 } 0 < \sin \theta < 1 \text{이므로 } \sin \theta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} = \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{\tan \theta} &= \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta} - \sin \theta \\ &= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} - \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 1 \end{aligned}$$

(ii) $\log_{\sin \theta} \cos \theta = 1$ 일 때,

$$\cos \theta = \sin \theta \text{이므로 } \theta = \frac{\pi}{4} \text{에서 } \sin \theta = \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{따라서 } \tan \theta = 1 \text{이므로 } \frac{\cos \theta}{\tan \theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(i), (ii)에서 $\frac{\cos \theta}{\tan \theta}$ 의 모든 값의 합은 $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ 이다.

17 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

그림과 같이 두 점 D, E에서 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 D₁, E₁이라 하고, 변 AB에 내린 수선의 발을 각각 D₂, E₂라 하자.

$\overline{BC} = 3a$, $\overline{AB} = 3b$ 라 하면

$$\overline{BD_1} = \overline{D_1E_1} = \overline{E_1C} = a,$$

$$\overline{BE_2} = \overline{E_2D_2} = \overline{D_2A} = b$$

$\overline{BD} = \sin \theta$, $\overline{DD_1} = \overline{D_2B} = 2b$ 이고 직각삼각형 BD₁D에서

$$\overline{BD}^2 = \overline{BD_1}^2 + \overline{DD_1}^2 \text{이므로}$$

$$\sin^2 \theta = a^2 + (2b)^2$$

$$\therefore \sin^2 \theta = a^2 + 4b^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{BE} = \cos \theta$, $\overline{BE_1} = 2a$, $\overline{EE_1} = \overline{E_2B} = b$ 이고 직각삼각형 BE₁E에서

$$\overline{BE}^2 = \overline{BE_1}^2 + \overline{EE_1}^2 \text{이므로}$$

$$\cos^2 \theta = (2a)^2 + b^2$$

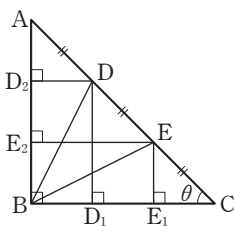
$$\therefore \cos^2 \theta = 4a^2 + b^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = a^2 + 4b^2 + 4a^2 + b^2$$

$$1 = 5(a^2 + b^2)$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{1}{5} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$



직각삼각형 ABC에서 $\tan \theta = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{b}{a}$ 이므로

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{b}{a}$$

$$\therefore a \sin \theta = b \cos \theta$$

양변을 제곱하면

$$a^2 \sin^2 \theta = b^2 \cos^2 \theta$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 대입하면

$$a^2(a^2 + 4b^2) = b^2(4a^2 + b^2)$$

$$a^4 - b^4 = 0$$

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = 0$$

$$(a+b)(a-b)(a^2+b^2) = 0$$

$$\therefore a = b \quad (\because a > 0, b > 0)$$

이를 $\textcircled{3}$ 에 대입하면

$$a^2 + a^2 = \frac{1}{5}$$

$$a^2 = \frac{1}{10}$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{10}}{10} \quad (\because a > 0)$$

$$a = b \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = \overline{BC} = 3a = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

또 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \sin \theta = \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \overline{BC} \sin \theta + \overline{AB} \cos \theta = 2 \overline{BC} \sin \theta$$

$$= 2 \times \frac{3\sqrt{10}}{10} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

18 $\frac{\sqrt{7}}{4}$

점 P는 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점이므로

$P(\cos \theta, \sin \theta)$ ($\cos \theta > 0, \sin \theta > 0$)

그림과 같이 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 P', Q'이라 하면

$\triangle OP'P \cong \triangle QQ'O$ (RHA 합동)이고

점 Q는 제2사분면 위의 점이므로

$Q(-\sin \theta, \cos \theta)$

두 점 P, Q를 지나는 직선의 방정식은

$$y - \sin \theta = \frac{\cos \theta - \sin \theta}{-\sin \theta - \cos \theta} (x - \cos \theta)$$

$$\therefore y = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} (x - \cos \theta) + \sin \theta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

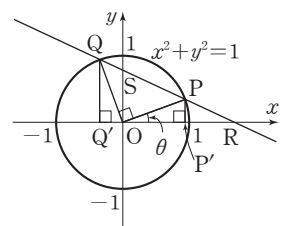
$\textcircled{1}$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$y = \frac{-\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta + \cos \theta} + \sin \theta$$

$$= \frac{-\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta}$$

$$= \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$$

$$\therefore S\left(0, \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}\right)$$



㉠에 $y=0$ 을 대입하면

$$0 = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} (x - \cos \theta) + \sin \theta$$

$$\frac{\sin \theta - \cos \theta}{\sin \theta + \cos \theta} (x - \cos \theta) = -\sin \theta$$

$$x - \cos \theta = \frac{-\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta - \cos \theta}$$

$$x = \frac{-\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta}{\sin \theta - \cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta - \sin \theta}$$

$$\therefore R\left(\frac{1}{\cos \theta - \sin \theta}, 0\right)$$

삼각형 ORS의 넓이가 4이므로

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{\cos \theta - \sin \theta} \times \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta} = 4$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta} = 8, \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{1}{8}$$

$$\cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = \frac{1}{8}, 2\cos^2 \theta = \frac{9}{8}$$

$$\cos^2 \theta = \frac{9}{16} \quad \therefore \cos \theta = \frac{3}{4} (\because \cos \theta > 0)$$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4} (\because \sin \theta > 0)$$

따라서 점 P의 y좌표는 $\frac{\sqrt{7}}{4}$ 이다.

19 답 ①

그림과 같이 부채꼴 OBP에 내접하는 원의 중심을 O_1 이라 하고, 이 원이 호 BP와 만나는 점을 C, 선분 OB와 만나는 점을 D라 하면

$$\overline{O_1D} = \overline{O_1C} = r_1$$

$$\angle BAP = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right) \text{라 하면 } \angle BOP = 2\angle BAP = 2\theta$$

중심이 점 O_1 인 원이 선분 OP와 만나는 점을 D_1 이라 하면

$\triangle ODO_1 \cong \triangle OD_1O_1$ (RHS 합동)이므로 $\angle DOO_1 = \angle D_1OO_1$ 에서

$$\angle BOC = \frac{1}{2} \angle BOP = \theta$$

삼각형 O_1OD 는 직각삼각형이므로

$$\sin \theta = \frac{\overline{O_1D}}{\overline{OO_1}} = \frac{r_1}{1 - r_1}$$

$$\text{이때 } \cos \theta = \frac{4}{5} \text{이고 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5} \quad \dots\dots ㉠$$

$$\therefore \frac{r_1}{1 - r_1} = \frac{3}{5} \text{이므로}$$

$$5r_1 = 3 - 3r_1, 8r_1 = 3 \quad \therefore r_1 = \frac{3}{8}$$

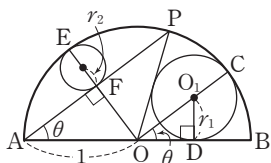
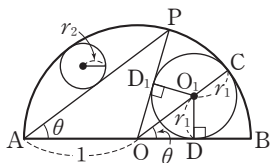
그림과 같이 호 AP를 이등분하는 점을 E, 선분 AP의 중점을 F라 하면 삼각형 OFA는 직각삼각형이므로

$$\overline{OF} = \overline{OA} \sin \theta = \sin \theta = \frac{3}{5} (\because ㉠)$$

이때 $\overline{OE} = \overline{OF} + \overline{EF}$ 이므로

$$1 = \frac{3}{5} + 2r_2, 2r_2 = \frac{2}{5} \quad \therefore r_2 = \frac{1}{5}$$

$$\therefore r_1 r_2 = \frac{3}{40}$$



개념 NOTE

한 호에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이다.

$$\Rightarrow \angle AOB = 2\angle APB$$



20 답 20

이차방정식 $x^2 - k = 0$ 의 두 근이 $6\cos \theta, 5\tan \theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$6\cos \theta + 5\tan \theta = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$$6\cos \theta \times 5\tan \theta = -k \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠ \text{에서 } 6\cos \theta = -5\tan \theta$$

$$6\cos \theta = -\frac{5\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$6\cos^2 \theta = -5\sin \theta$$

$$\therefore \cos^2 \theta = -\frac{5}{6}\sin \theta \quad \dots\dots ㉢$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{이므로 } 1 - \sin^2 \theta = -\frac{5}{6}\sin \theta$$

$$6\sin^2 \theta - 5\sin \theta - 6 = 0$$

$$(3\sin \theta + 2)(2\sin \theta - 3) = 0$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } \sin \theta = \frac{3}{2}$$

$$\text{이때 } ㉢ \text{에서 } \sin \theta < 0 \text{이므로 } \sin \theta = -\frac{2}{3}$$

$$㉡ \text{에서 } 6\cos \theta \times \frac{5\sin \theta}{\cos \theta} = -k$$

$$\therefore k = -30\sin \theta = -30 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = 20$$

21 답 ④

세 수 $2\sin^2 \theta, 2\cos^2 \theta, k$ 가 서로 다르므로

$$2\sin^2 \theta \neq 2\cos^2 \theta, 2\sin^2 \theta \neq k, 2\cos^2 \theta \neq k$$

$$x^3 - ax^2 - bx + a + b - 1 = 0 \text{에서}$$

$$(x-1)\{x^2 + (-a+1)x - a-b+1\} = 0$$

즉, 방정식은 $x=1$ 을 근으로 갖는다.

$$\text{이때 } 2\sin^2 \theta = 1 \text{이면 } \sin^2 \theta = \frac{1}{2}, \text{ 즉 } 1 - \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \text{에서 } \cos^2 \theta = \frac{1}{2} \text{이}$$

$$\text{므로 } 2\sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta \text{이다.}$$

$$\text{이는 } 2\sin^2 \theta \neq 2\cos^2 \theta \text{에 모순이므로 } 2\sin^2 \theta \neq 1 \text{이다.}$$

같은 방법으로 하면 $2\cos^2 \theta \neq 1$ 이므로 $k=1$ 이다.

따라서 이차방정식 $x^2 + (-a+1)x - a-b+1=0$ 의 두 근이 $2\sin^2 \theta,$

$2\cos^2 \theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2\sin^2 \theta + 2\cos^2 \theta = a-1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$2\sin^2 \theta \times 2\cos^2 \theta = -a-b+1 \quad \dots\dots ㉡$$

$$㉠ \text{에서 } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$2 = a-1 \quad \therefore a=3$$

$$\text{이때 } k+a+b = \frac{16}{9} \text{이므로}$$

$$1+3+b = \frac{16}{9} \quad \therefore b = -\frac{20}{9}$$

따라서 ㉡에서

$$4\sin^2 \theta \cos^2 \theta = -a-b+1$$

$$= -3 - \left(-\frac{20}{9}\right) + 1 = \frac{2}{9}$$

22 답 $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$x \neq 0$ 이므로 $x^4 - x^3 - 6x^2 + 2x + 4 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 - x - 6 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$$

$$x^2 + \frac{4}{x^2} - \left(x - \frac{2}{x}\right) - 6 = 0$$

$$\therefore \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 - \left(x - \frac{2}{x}\right) - 2 = 0$$

$$x - \frac{2}{x} = t \text{로 놓으면 } t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 2$$

$$\therefore x - \frac{2}{x} = -1 \text{ 또는 } x - \frac{2}{x} = 2 \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$(i) x - \frac{2}{x} = -1 \text{ 일 때,}$$

$x^2 + x - 2 = 0$ 이고 이차방정식 $x^2 - (3\sin\theta)x - 2 = 0$ 과 공통인 근이 존재하므로

$$x^2 + x - 2 = x^2 - (3\sin\theta)x - 2$$

$$1 = -3\sin\theta$$

$$\therefore \sin\theta = -\frac{1}{3}$$

$$(ii) x - \frac{2}{x} = 2 \text{ 일 때,}$$

$x^2 - 2x - 2 = 0$ 이고 이차방정식 $x^2 - (3\sin\theta)x - 2 = 0$ 과 공통인 근이 존재하므로

$$x^2 - 2x - 2 = x^2 - (3\sin\theta)x - 2$$

$$2 = 3\sin\theta$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{2}{3}$$

그런데 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $\sin\theta < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$(i), (ii) \text{에서 } \sin\theta = -\frac{1}{3} \dots\dots\dots \text{배점 50\%}$$

$$\therefore \cos\theta = -\sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

$$= -\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\because \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi\right) \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

01 답 13

1단계 원 O_1 과 원 O_2 의 공통부분의 넓이 구하기

원 O_1 의 중심을 O_1 , 원 O_2 의 중심을 O_2 라 할 때, 직선 O_1O_2 가 선분 AB 와 만나는 점을 M , 직선 O_1O_2 가 원 O_1 과 만나는 두 점 중에서 점 M 에 가까운 점을 N 이라 하면

$$\overline{O_1A} = 6, \overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AB} = 3\sqrt{2}$$

직각삼각형 AO_1M 에서

$$\overline{O_1M} = \sqrt{\overline{O_1A}^2 - \overline{AM}^2} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{2}$$

즉, $\overline{AM} = \overline{O_1M}$ 이므로 삼각형 AO_1M 은 직각이등변삼각형이다.

$$\therefore \angle AO_1M = \frac{\pi}{4}$$

따라서 부채꼴 AO_1N 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{9}{2}\pi$$

원 O_2 는 정삼각형 ACB 의 외접원이므로

$$\angle AO_2C = 2\angle ABC = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore \angle AO_2M = \pi - \angle AO_2C = \frac{\pi}{3}$$

직각삼각형 AO_2M 에서 $\angle O_2AM = \frac{\pi}{2} - \angle AO_2M = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\overline{AO_2} = \frac{\overline{AM}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{6}$$

$$\overline{O_2M} = \overline{AM} \tan \frac{\pi}{6} = 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{6}$$

따라서 원 O_2 에서 점 B 를 포함하지 않는 부채꼴 AO_2C 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (2\sqrt{6})^2 \times \frac{2}{3}\pi = 8\pi$$

또 $\overline{O_1O_2} = \overline{O_1M} - \overline{O_2M} = 3\sqrt{2} - \sqrt{6}$ 이므로 삼각형 AO_1O_2 의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \overline{O_1O_2} \times \overline{AM} &= \frac{1}{2} \times (3\sqrt{2} - \sqrt{6}) \times 3\sqrt{2} \\ &= 9 - 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

따라서 원 O_1 과 원 O_2 의 공통부분의 넓이는

$$2\{(\text{부채꼴 } AO_1N \text{의 넓이}) + (\text{부채꼴 } AO_2C \text{의 넓이}) - \triangle AO_1O_2\}$$

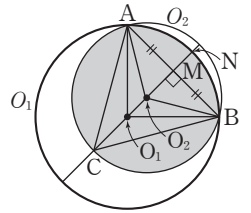
$$= 2\left\{\frac{9}{2}\pi + 8\pi - (9 - 3\sqrt{3})\right\}$$

$$= -18 + 6\sqrt{3} + 25\pi$$

2단계 $p+q+r$ 의 값 구하기

따라서 $p = -18$, $q = 6$, $r = 25$ 이므로

$$p+q+r = 13$$



idea

02 답 ③

1단계 두 원 $x^2 + (y-1)^2 = 4$, $x^2 + (y+1)^2 = 4$ 가 겹치는 영역의 넓이 구하기

그림과 같이 두 원 $x^2 + (y-1)^2 = 4$,

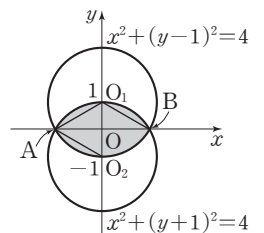
$x^2 + (y+1)^2 = 4$ 의 중심을 각각 O_1 , O_2 라

하고, 이 두 원이 겹치는 영역, 즉 색칠한 부분을 S 라 하자.

두 원이 만나는 두 점을 A , B 라 하면

$$\overline{O_1A} = \overline{O_2A} = \overline{O_1O_2} = 2 \text{이므로 삼각형}$$

O_1AO_2 는 정삼각형이다.



STEP 3 최고난도 문제

| 66~67쪽

01 13 02 ③ 03 9 04 8 05 82 06 ③

07 ①

즉, $\angle AO_1O = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\angle AO_1B = 2\angle AO_1O = \frac{2}{3}\pi$

직각삼각형 O_1AO 에서

$$\begin{aligned} \overline{AO} &= \sqrt{\overline{O_1A}^2 - \overline{O_1O}^2} \\ &= \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = 2\overline{AO} = 2\sqrt{3}$$

따라서 영역 S 의 넓이는

$$2\{(\text{부채꼴 } AO_1B \text{의 넓이}) - \triangle O_1AB\}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 1\right)$$

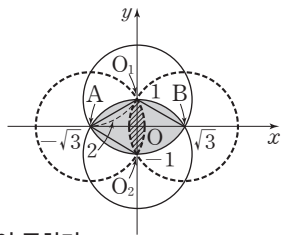
$$= \frac{8}{3}\pi - 2\sqrt{3}$$

2단계 점 $P(a, b)$ 의 위치 파악하기

두 원 $x^2 + (y-1)^2 = 4$, $x^2 + (y+1)^2 = 4$ 가 겹치는 영역의 넓이와 세 원이 동시에 겹치는 영역의 넓이가 같으므로 원 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 4$ 는 영역 S 를 모두 포함해야 한다.

따라서 그림과 같이 점 $P(a, b)$ 는 점

$A(-\sqrt{3}, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 $(x+\sqrt{3})^2 + y^2 = 4$ 와 점 $B(\sqrt{3}, 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 $(x-\sqrt{3})^2 + y^2 = 4$ 가 겹치는 영역에 존재해야 한다.



3단계 점 $P(a, b)$ 가 나타내는 도형의 넓이 구하기

두 원 $(x+\sqrt{3})^2 + y^2 = 4$, $(x-\sqrt{3})^2 + y^2 = 4$ 가 겹치는 영역, 즉 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는

$$2\{(\text{부채꼴 } AO_2O_1 \text{의 넓이}) - \triangle O_1AO_2\}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}$$

즉, 점 $P(a, b)$ 가 나타내는 도형의 넓이는 $\frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ 이다.

4단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p = \frac{4}{3}$, $q = -2$ 이므로

$$p+q = -\frac{2}{3}$$

03 답 9

1단계 $f(2)+f(3)+f(4)+\dots+f(4n)$ 이 나타내는 의미 파악하기

$P_2(\cos \theta, \sin \theta)$, $P_3(\cos 2\theta, \sin 2\theta)$, $P_4(\cos 3\theta, \sin 3\theta)$, ...에서 $P_{n+1}(\cos n\theta, \sin n\theta)$ (n 은 자연수)이므로

$$f(n) = (\cos n\theta - \cos \theta)^2 + (\sin n\theta - \sin \theta)^2$$

$$= \overline{P_2P_{n+1}}^2$$

$$\therefore f(2)+f(3)+f(4)+\dots+f(4n)$$

$$= \overline{P_2P_3}^2 + \overline{P_2P_4}^2 + \overline{P_2P_5}^2 + \dots + \overline{P_2P_{4n}}^2 + \overline{P_2P_1}^2$$

2단계 $f(2)+f(3)+f(4)+\dots+f(4n)$ 구하기

자연수 k 에 대하여 $\overline{P_kP_{2n+k}}$ 는 원의 지름이므로

$$\overline{P_kP_{2n+k}} = 2$$

이때 지름을 한 변으로 하고 원에 내접하는 삼각형은 직각삼각형이므로

$$\overline{P_2P_3}^2 + \overline{P_2P_{2n+3}}^2 = \overline{P_3P_{2n+3}}^2 = 4$$

$$\overline{P_2P_4}^2 + \overline{P_2P_{2n+4}}^2 = \overline{P_4P_{2n+4}}^2 = 4$$

$\vdots$

$$\overline{P_2P_n}^2 + \overline{P_2P_{3n}}^2 = \overline{P_nP_{3n}}^2 = 4$$

$$\overline{P_2P_{n+1}}^2 + \overline{P_2P_{3n+1}}^2 = \overline{P_{n+1}P_{3n+1}}^2 = 4$$

$\vdots$

$$\overline{P_2P_{2n}}^2 + \overline{P_2P_{4n}}^2 = \overline{P_{2n}P_{4n}}^2 = 4$$

$$\overline{P_2P_{2n+1}}^2 + \overline{P_2P_1}^2 = \overline{P_{2n+1}P_1}^2 = 4$$

$$\overline{P_2P_{2n+2}}^2 = 4$$

$$\therefore f(2)+f(3)+f(4)+\dots+f(4n) = 4\{(2n+2)-3+1\}$$

$$= 8n$$

3단계 자연수 n 의 값 구하기

즉, $8n = 72$ 이므로 $n = 9$

04 답 8

1단계 집합 A 구하기

$$A = \left\{ n \mid \sin\left(\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2^n}\right) < 0 \right\} \text{에서 } \pi + (-1)^n \frac{\pi}{2^n} \text{는}$$

n 이 짝수이면 $\pi + \frac{\pi}{2^n}$ 이고 $\pi < \pi + \frac{\pi}{2^n} \leq \frac{5}{4}\pi$ 이므로

$$\sin\left(\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2^n}\right) < 0$$

n 이 홀수이면 $\pi - \frac{\pi}{2^n}$ 이고 $\frac{\pi}{2} \leq \pi - \frac{\pi}{2^n} < \pi$ 이므로

$$\sin\left(\pi + (-1)^n \frac{\pi}{2^n}\right) > 0$$

따라서 n 은 짝수이므로

$$A = \{2, 4, 6, \dots, 50\}$$

2단계 집합 B 구하기

$$\theta_n = \frac{14-n}{3}\pi \text{라 하면 음이 아닌 정수 } m \text{에 대하여}$$

(i) $n = 6m+1$ 일 때,

$$\theta_n = \frac{14-(6m+1)}{3}\pi = \frac{\pi}{3} + 2(2-m)\pi \text{에서 } \theta_n \text{은 제1사분면의 각}$$

이므로 $\tan \theta_n > 0$

(ii) $n = 6m+2$ 또는 $n = 6m+5$ 일 때,

$$\theta_n = \frac{14-(6m+2)}{3}\pi = 2(2-m)\pi \text{ 또는}$$

$$\theta_n = \frac{14-(6m+5)}{3}\pi = \pi + 2(1-m)\pi$$

$$\therefore \tan \theta_n = 0$$

(iii) $n = 6m+3$ 일 때,

$$\theta_n = \frac{14-(6m+3)}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi + 2(1-m)\pi \text{에서 } \theta_n \text{은 제4사분면의 각}$$

이므로 $\tan \theta_n < 0$

(iv) $n = 6m+4$ 일 때,

$$\theta_n = \frac{14-(6m+4)}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi + 2(1-m)\pi \text{에서 } \theta_n \text{은 제3사분면의 각}$$

이므로 $\tan \theta_n > 0$

(v) $n = 6m+6$ 일 때,

$$\theta_n = \frac{14-(6m+6)}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi + 2(1-m)\pi \text{에서 } \theta_n \text{은 제2사분면의 각}$$

이므로 $\tan \theta_n < 0$

(i)~(v)에서 $n = 6m+3$ 또는 $n = 6m+6$

$$\therefore B = \{3, 9, 15, \dots, 45\} \cup \{6, 12, 18, \dots, 48\}$$

3단계 $n(A \cap B)$ 의 값 구하기

따라서 $A \cap B = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48\}$ 이므로

$$n(A \cap B) = 8$$

05 답 82

1단계 세 점 P, Q, R의 좌표 구하기

시간 t 에 대하여 점 P의 좌표는 $P\left(\cos\frac{2}{3}\pi t, \sin\frac{2}{3}\pi t\right)$ 이고, 점 Q의 좌표는 $Q\left(\cos\frac{4}{3}\pi t, \sin\frac{4}{3}\pi t\right)$ 이다.

그리고 점 R는 점 P와 같은 속력으로 이동하므로 동경 OR가 나타내는 각의 크기는 $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\pi t = \frac{1}{3}\pi t$ 이다.

즉, 점 R의 좌표는 $R\left(2\cos\frac{1}{3}\pi t, 2\sin\frac{1}{3}\pi t\right)$ 이다.

2단계 두 점 P, Q의 y좌표가 같아지는 횟수 구하기

출발 후 50초가 될 때까지 두 점 P, Q의 y좌표가 같아지는 경우는

$$\frac{\frac{2}{3}\pi t + \frac{4}{3}\pi t}{2} = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, \dots, \frac{99}{2}\pi \text{ 일 때이다.}$$

즉, $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{99}{2}$ 일 때 두 점 P, Q의 y좌표는 같으므로 t 의 개수는 50이다.

또 t 가 3의 배수인 경우 두 점 P, Q는 모두 점 (1, 0)에 위치하므로 두 점 P, Q의 y좌표는 같다.

즉, $t = 3, 6, 9, \dots, 48$ 이므로 t 의 개수는 16이다.

$$\therefore a = 50 + 16 = 66$$

3단계 세 점 O, P, R가 일직선 위에 있게 되는 횟수 구하기

한편 세 점 O, P, R가 일직선 위에 있으려면 두 동경 OP, OR가 이루는 각의 크기 $\frac{1}{3}\pi t$ 에 대하여 $\frac{1}{3}\pi t = n\pi$ (n 은 자연수)이다.

즉, $t = 3, 6, 9, \dots, 48$ 이므로 t 의 개수는 16이다.

$$\therefore b = 16$$

4단계 $a+b$ 의 값 구하기

$$\therefore a+b=82$$

06 답 ③

1단계 $\cos\theta=t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식의 근 판별하기

$2\cos^2\theta - 2a\cos\theta + a^2 - 1 = 0$ 에서 $\cos\theta=t$ 로 놓으면 $\cos\theta$ 는 t 에 대한 이차방정식 $2t^2 - 2at + a^2 - 1 = 0$ 의 근이다.

이차방정식 $2t^2 - 2at + a^2 - 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2(a^2 - 1) = 2 - a^2$$

$$1 < a < \sqrt{2} \text{에서 } 1 < a^2 < 2 \text{이므로}$$

$$\frac{D}{4} = 2 - a^2 > 0$$

따라서 이차방정식 $2t^2 - 2at + a^2 - 1 = 0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

2단계 a 의 값 구하기

이차방정식 $2t^2 - 2at + a^2 - 1 = 0$ 의 두 근을 $\alpha, \cos\theta$ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \cos\theta = a \quad \dots\dots ㉠$$

$$\alpha \cos\theta = \frac{a^2 - 1}{2} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$a^2 + 2\alpha \cos\theta + \cos^2\theta = a^2$$

㉡을 대입하면

$$a^2 + 2 \times \frac{a^2 - 1}{2} + \cos^2\theta = a^2$$

$$a^2 + a^2 - 1 + \cos^2\theta = a^2$$

$$\therefore a^2 + \cos^2\theta = 1$$

이때 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ 에서 $a^2 = \sin^2\theta$ 이므로

$$\alpha = -\sin\theta \text{ 또는 } \alpha = \sin\theta$$

이때 $1 < a^2 < 2$ 이므로 ㉡에서 $\alpha \cos\theta > 0$ 이고, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 $\cos\theta > 0$

이므로 $\alpha > 0$

$$\therefore \alpha = \sin\theta \quad \dots\dots ㉢$$

따라서 $\sin\theta$ 는 이차방정식 $2t^2 - 2at + a^2 - 1 = 0$ 의 근이므로

$$2\sin^2\theta - 2a\sin\theta + a^2 - 1 = 0$$

$$\therefore \sin^2\theta - a\sin\theta = \frac{1-a^2}{2}$$

이를 $\sin^2\theta - a\sin\theta + a^4 - 2 = 0$ 에 대입하면

$$\frac{1-a^2}{2} + a^4 - 2 = 0, 2a^4 - a^2 - 3 = 0$$

$$(2a^2 - 3)(a^2 + 1) = 0$$

$$\therefore a^2 = \frac{3}{2} \quad (\because a^2 > 0)$$

$$\therefore a = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (\because 1 < a < \sqrt{2})$$

3단계 $a + \sin\theta + \cos\theta$ 의 값 구하기

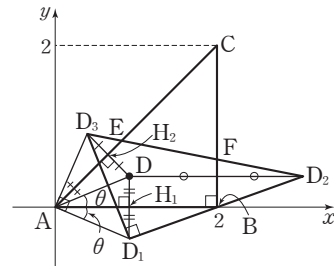
㉢에서 $a = a + \cos\theta = \sin\theta + \cos\theta$ ($\because$ ㉢)이므로

$$a + \sin\theta + \cos\theta = 2a = \sqrt{6}$$

07 답 ①

1단계 $\overline{D_1D_3}$ 의 길이 구하기

그림과 같이 점 D에서 두 선분 AB, AC에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 라 하자.



$\triangle AH_1D \equiv \triangle AH_1D_1$ (SAS 합동)이므로

$$\angle DAH_1 = \angle D_1AH_1$$

$\triangle AH_2D \equiv \triangle AH_2D_3$ (SAS 합동)이므로

$$\angle DAH_2 = \angle D_3AH_2$$

삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로

$$\angle BAC = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \angle D_3AD_1 = 2\angle BAC = \frac{\pi}{2}$$

또 $\overline{AD} = 1$ 에서 $\overline{AD_1} = \overline{AD_3} = 1$ 이므로 삼각형 D_3AD_1 은 직각이등변삼각형이다.

$$\therefore \overline{D_1D_3} = \sqrt{2} \overline{AD_1} = \sqrt{2}$$

2단계 세 점 D_1, D_2, D_3 의 좌표 구하기

한편 $\overline{AD} = 1, \angle DAB = \theta$ 이므로 $D(\cos\theta, \sin\theta)$

선분 AB는 x 축 위에 있으므로 점 D_1 은 점 D를 x 축에 대하여 대칭이동한 점이다.

$$\therefore D_1(\cos\theta, -\sin\theta)$$

선분 BC는 직선 $x=2$ 위에 있으므로 점 D_2 는 점 D를 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이동한 점이다.

$$\therefore D_2(4 - \cos\theta, \sin\theta)$$

선분 AC는 직선 $y=x$ 위에 있으므로 점 D_3 은 점 D를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점이다.

$$\therefore D_3(\sin \theta, \cos \theta)$$

3단계 $\overline{D_2D_3}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned}\overline{D_1D_2}^2 &= (4 - \cos \theta - \cos \theta)^2 + (\sin \theta + \sin \theta)^2 \\ &= (4 - 2\cos \theta)^2 + (2\sin \theta)^2 \\ &= 16 - 16\cos \theta + 4\cos^2 \theta + 4\sin^2 \theta \\ &= 16 - 16\cos \theta + 4(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \\ &= 20 - 16\cos \theta \\ \overline{D_2D_3}^2 &= (\sin \theta - 4 + \cos \theta)^2 + (\cos \theta - \sin \theta)^2 \\ &= (\sin \theta + \cos \theta - 4)^2 + (\cos \theta - \sin \theta)^2 \\ &= \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta - 8(\sin \theta + \cos \theta) + 16 \\ &\quad + \cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \\ &= 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - 8(\sin \theta + \cos \theta) + 16 \\ &= 18 - 8(\sin \theta + \cos \theta)\end{aligned}$$

직각삼각형 $D_1D_2D_3$ 에서 $\overline{D_2D_3}^2 = \overline{D_1D_2}^2 + \overline{D_1D_3}^2$ 이므로

$$18 - 8(\sin \theta + \cos \theta) = 20 - 16\cos \theta + (\sqrt{2})^2$$

$$8\cos \theta - 8\sin \theta = 4$$

$$\therefore \cos \theta - \sin \theta = \frac{1}{2}$$

양변을 제곱하면

$$\cos^2 \theta - 2\cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 - 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$2\sin \theta \cos \theta = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{8}$$

$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2\sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \times \frac{3}{8} = \frac{7}{4}$ 이고 θ 는 제1사분면의 각이므로

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\therefore \overline{D_2D_3}^2 = 18 - 8 \times \frac{\sqrt{7}}{2} = 18 - 4\sqrt{7}$$

4단계 $(\overline{DE} + \overline{EO})^2 + (\overline{DF} + \overline{FO})^2$ 의 값 구하기

직각삼각형의 외심은 빗변의 중점과 같으므로 점 O는 선분 D_2D_3 의 중점이다.

이때 $\overline{DE} = \overline{D_3E}$, $\overline{DF} = \overline{D_2F}$ 이므로

$$\overline{DE} + \overline{EO} = \overline{D_3E} + \overline{EO} = \overline{D_3O} = \frac{1}{2}\overline{D_2D_3}$$

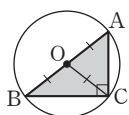
$$\overline{DF} + \overline{FO} = \overline{D_2F} + \overline{FO} = \overline{D_2O} = \frac{1}{2}\overline{D_2D_3}$$

$$\begin{aligned}\therefore (\overline{DE} + \overline{EO})^2 + (\overline{DF} + \overline{FO})^2 &= 2 \times \left(\frac{1}{2}\overline{D_2D_3}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\overline{D_2D_3}^2 \\ &= \frac{1}{2}(18 - 4\sqrt{7}) \\ &= 9 - 2\sqrt{7}\end{aligned}$$

개념 NOTE

직각삼각형의 외심은 빗변의 중점이다.

$$\Rightarrow \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$$



06 삼각함수의 그래프

STEP 1 핵심 문제

| 68~69쪽

01 ②	02 ⑤	03 ②	04 ③	05 $\frac{2}{3}$	06 -1
07 $\frac{3}{2}$	08 ④	09 ④	10 ④	11 32	12 ①

01 답 ②

$a > 0$ 이므로 함수 $f(x) = \cos(ax) + 1$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$ 이다.

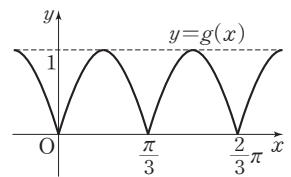
함수 $y = \sin 3x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{3}$ 이고, 함

수 $g(x) = |\sin 3x|$ 의 그래프는

$y = \sin 3x$ 의 그래프에서 $y < 0$ 인 부분

을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로

함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 그림과 같



다. 따라서 함수 $g(x) = |\sin 3x|$ 의 주기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

이때 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 의 주기가 서로 같으므로

$$\frac{2\pi}{a} = \frac{\pi}{3} \quad \therefore a = 6$$

02 답 ⑤

(나)의 $f(-x) = f(x)$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

① 함수 $f(x) = \sin x$ 의 주기는 2π 이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

또 최댓값과 최솟값의 차는 $1 - (-1) = 2$ 이다.

② 함수 $f(x) = 2\cos x$ 의 주기는 2π 이고, 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

또 최댓값과 최솟값의 차는 $2 - (-2) = 4$ 이다.

③ 함수 $f(x) = 2\tan x$ 의 주기는 π 이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

또 최댓값과 최솟값은 없다.

④ 함수 $f(x) = 2\sin 2x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이고, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

또 최댓값과 최솟값의 차는 $2 - (-2) = 4$ 이다.

⑤ 함수 $f(x) = 2\cos 2x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이고, 그래프는 y 축에 대하여 대칭이다.

또 최댓값과 최솟값의 차는 $2 - (-2) = 4$ 이다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 는 ⑤이다.

개념 NOTE

함수 $f(x)$ 에 대하여

(1) 주기가 p 이다. $\Rightarrow f(x + np) = f(x)$ (n 은 정수)

(2) 그래프가 y 축에 대하여 대칭이다. $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$

(3) 그래프가 원점에 대하여 대칭이다. $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$

참고 주기가 p 가 아니더라도 $f(x + p) = f(x)$ 를 만족시킬 수 있다.

$$\Rightarrow \text{함수 } f(x) \text{의 주기가 } \frac{p}{3} \text{이면 } f(x) = f\left(x + \frac{p}{3}\right) = f\left(x + \frac{2}{3}p\right) = f(x + p)$$

03 답 ②

$f(x) = a \tan \frac{\pi}{4} x$ 에 대하여 점 $A(3, -2)$

는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$\begin{aligned} f(3) &= a \tan \frac{3}{4} \pi = a \tan \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) \\ &= -a \tan \frac{\pi}{4} = -a \end{aligned}$$

에서 $-a = -2 \quad \therefore a = 2$

점 $A(3, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 점은

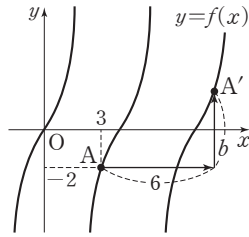
$$A'(9, -2+b)$$

점 A' 이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로

$$f(9) = 2 \tan \frac{9}{4} \pi = 2 \tan \left(2\pi + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \tan \frac{\pi}{4} = 2$$

에서 $-2+b=2 \quad \therefore b=4$

$$\therefore a+b=6$$



04 답 ③

$\overline{AO} = \overline{AB}$ 이므로 삼각형 OAB 는 직각이등변삼각형이다.

삼각형 OAB 의 넓이가 4이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{AO}^2 = 4$$

$$\overline{AO}^2 = 8$$

$$\therefore \overline{AO} = 2\sqrt{2} \quad (\because \overline{AO} > 0)$$

직각이등변삼각형 OAB 에서

$$\overline{OB} = \sqrt{2} \overline{AO} = 4$$

점 A 에서 변 OB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면

$$\overline{AH} = \overline{OH} = \overline{BH} = \frac{1}{2} \overline{OB} = 2$$

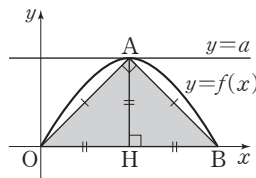
$$\therefore a = 2$$

한편 $b > 0$ 이므로 함수 $f(x) = a \sin bx$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$ 이다.

변 OB 의 길이는 함수 $f(x) = a \sin bx$ 의 주기의 $\frac{1}{2}$ 과 같으므로

$$\frac{2\pi}{b} \times \frac{1}{2} = 4 \quad \therefore b = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore a+b = 2 + \frac{\pi}{4}$$



05 답 2/3

원의 지름에 대한 원주각의 크기는 $\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\angle APB = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \alpha + \beta = \pi - \angle APB = \frac{\pi}{2}$$

직각삼각형 PAB 에서

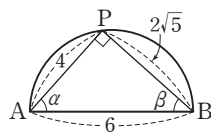
$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2} = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{5})^2} = 6$$

$$\therefore \sin(2\alpha + \beta) = \sin\{(\alpha + \beta) + \alpha\}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

$$= \cos \alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{AB}}$$

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$



06 답 -1

$\theta = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ 에서 $6\theta = \pi$ 이므로

$$\cos 7\theta = \cos(6\theta + \theta) = \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\cos 8\theta = \cos(6\theta + 2\theta) = \cos(\pi + 2\theta) = -\cos 2\theta$$

$$\cos 9\theta = \cos(6\theta + 3\theta) = \cos(\pi + 3\theta) = -\cos 3\theta$$

$$\cos 10\theta = \cos(6\theta + 4\theta) = \cos(\pi + 4\theta) = -\cos 4\theta$$

$$\cos 11\theta = \cos(6\theta + 5\theta) = \cos(\pi + 5\theta) = -\cos 5\theta$$

$$\therefore \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots + \cos 11\theta$$

$$= \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta$$

$$- \cos \theta - \cos 2\theta - \cos 3\theta - \cos 4\theta - \cos 5\theta$$

$$= \cos 6\theta$$

$$= \cos \pi$$

$$= -1$$

07 답 3/2

$$y = \frac{2 \sin(\pi - x)}{\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - 3} = \frac{2 \sin x}{\sin x - 3} \text{이므로 } \sin x = t \text{로 놓으면}$$

$$y = \frac{2t}{t-3} = \frac{6}{t-3} + 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로

$$-1 \leq t \leq 1$$

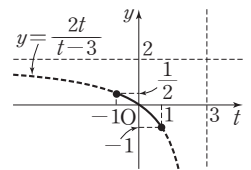
따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $\textcircled{1}$ 의 그래프는

그림과 같으므로

$$t = -1 \text{ 일 때, } M = \frac{1}{2}$$

$$t = 1 \text{ 일 때, } m = -1$$

$$\therefore M - m = \frac{3}{2}$$



08 답 ④

$\theta - \frac{\pi}{3} = \alpha$ 로 놓으면

$$3 \sin^2\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = 3 \sin^2(\pi + \alpha) = 3 \sin^2 \alpha = 3 - 3 \cos^2 \alpha,$$

$$8 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 8 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 8 \cos \alpha$$

$$\text{이므로 } 3 \sin^2\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = 8 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \text{에서}$$

$$3 - 3 \cos^2 \alpha = 8 \cos \alpha$$

$$3 \cos^2 \alpha + 8 \cos \alpha - 3 = 0$$

$$(3 \cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 3) = 0$$

이때 $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ 이므로 $\cos \alpha = \frac{1}{3}$

$$\therefore \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \alpha$$

$$= \frac{1}{3}$$

09 답 ④

$$2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin^2 x = \cos^2 x - 2 \text{에서}$$

$$-2\sqrt{2} \sin x + \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - 2$$

$$2 \sin^2 x - 2\sqrt{2} \sin x + 1 = 0$$

$$(\sqrt{2}\sin x - 1)^2 = 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

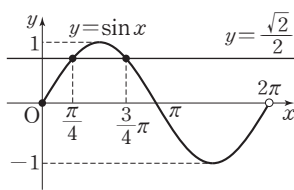
$0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의 x 좌표

는 $\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi$ 이므로 주어진 방정식의

해는 $x = \frac{\pi}{4}$ 또는 $x = \frac{3}{4}\pi$

이때 $\alpha < \beta$ 이므로 $\alpha = \frac{\pi}{4}, \beta = \frac{3}{4}\pi$

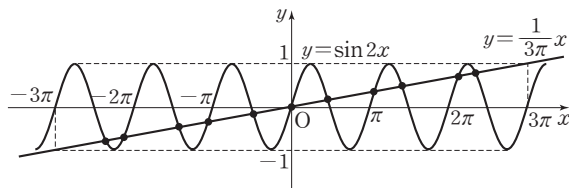
$$\therefore \beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$$



10 답 ④

방정식 $\sin 2x = \frac{1}{3\pi}x$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y = \sin 2x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{3\pi}x$ 의 교점의 개수와 같다.

함수 $y = \sin 2x$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 -1 , 주기는 $\frac{2\pi}{2} = \pi$ 이고, 직선 $y = \frac{1}{3\pi}x$ 는 세 점 $(-3\pi, -1), (0, 0), (3\pi, 1)$ 을 지나므로 함수 $y = \sin 2x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{3\pi}x$ 는 그림과 같다.



따라서 함수 $y = \sin 2x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{3\pi}x$ 의 교점의 개수는 11이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 11이다.

11 답 32

$$f(2+x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right) = \cos \frac{\pi}{4}x,$$

$$f(2-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x\right) = \cos \frac{\pi}{4}x$$

이므로 주어진 부등식은 $\cos^2 \frac{\pi}{4}x < \frac{1}{4}$

$$\text{즉, } -\frac{1}{2} < \cos \frac{\pi}{4}x < \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$0 < x < 16$ 에서 $0 < \frac{\pi}{4}x < 4\pi$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{4}x < \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{4}{3}\pi < \frac{\pi}{4}x < \frac{5}{3}\pi \text{ 또는}$$

$$\frac{7}{3}\pi < \frac{\pi}{4}x < \frac{8}{3}\pi \text{ 또는 } \frac{10}{3}\pi < \frac{\pi}{4}x < \frac{11}{3}\pi \text{이다.}$$

$$\text{즉, } \frac{4}{3} < x < \frac{8}{3} \text{ 또는 } \frac{16}{3} < x < \frac{20}{3} \text{ 또는}$$

$$\frac{28}{3} < x < \frac{32}{3} \text{ 또는 } \frac{40}{3} < x < \frac{44}{3}$$

이므로 자연수 x 의 값은 2, 6, 10, 14이다.

따라서 구하는 모든 자연수 x 의 값의 합은

$$2+6+10+14=32$$

다른 풀이

$f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4}$ 에서

$$\sin\left\{\frac{\pi}{4}(2+x)\right\} \sin\left\{\frac{\pi}{4}(2-x)\right\} < \frac{1}{4}$$

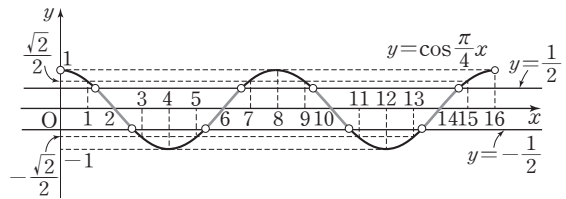
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x\right) < \frac{1}{4}$$

$$\cos^2 \frac{\pi}{4}x < \frac{1}{4} \quad \leftarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}x\right) = \cos \frac{\pi}{4}x, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}x\right) = \cos \frac{\pi}{4}x$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < \cos \frac{\pi}{4}x < \frac{1}{2}$$

따라서 $0 < x < 16$ 에서 부등식 $f(2+x)f(2-x) < \frac{1}{4}$ 의 해는 함수

$y = \cos \frac{\pi}{4}x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 보다 위쪽에 있고 직선 $y = \frac{1}{2}$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같다.



따라서 주어진 부등식을 만족시키는 자연수 x 의 값은 2, 6, 10, 14이므로 구하는 합은

$$2+6+10+14=32$$

12 답 ①

이차방정식 $x^2 - (2\sin \theta)x - 3\cos^2 \theta - 5\sin \theta + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-\sin \theta)^2 - (-3\cos^2 \theta - 5\sin \theta + 5) \geq 0$$

$$\sin^2 \theta + 3\cos^2 \theta + 5\sin \theta - 5 \geq 0$$

$$\sin^2 \theta + 3(1 - \sin^2 \theta) + 5\sin \theta - 5 \geq 0$$

$$2\sin^2 \theta - 5\sin \theta + 2 \leq 0$$

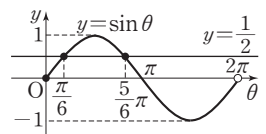
$$(2\sin \theta - 1)(\sin \theta - 2) \leq 0$$

이때 $\sin \theta - 2 < 0$ 이므로

$$2\sin \theta - 1 \geq 0 \quad \therefore \sin \theta \geq \frac{1}{2}$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ 에서 함수 $y = \sin \theta$ 의 그래프

와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은 그림과 같다.



따라서 부등식 $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$$

이때 θ 의 최솟값은 $\frac{\pi}{6}$, 최댓값은 $\frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore 4\beta - 2\alpha = 4 \times \frac{5}{6}\pi - 2 \times \frac{\pi}{6} = 3\pi$$

개념 NOTE

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을 $D = b^2 - 4ac$ 라 할 때

(1) $D > 0 \iff$ 서로 다른 두 실근을 갖는다.

(2) $D = 0 \iff$ 중근(서로 같은 두 실근)을 갖는다.

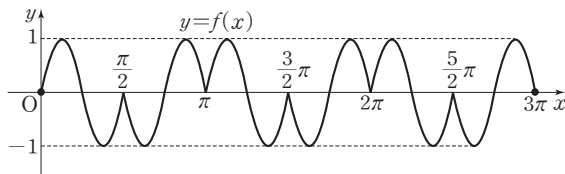
(3) $D < 0 \iff$ 서로 다른 두 허근을 갖는다.

- 01 $\frac{93}{2}\pi$ 02 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 03 ③ 04 ④ 05 ④ 06 ⑤
 07 ④ 08 16 09 ④ 10 $\frac{1}{36}$ 11 $\frac{3}{2}\pi$
 12 $0 < \alpha \leq 2$ 13 35 14 $\frac{1}{3}$ 15 $\sqrt{3}$ 16 2
 17 $\frac{4}{3}\pi$ 18 $-2\sqrt{2}$ 19 ② 20 15 21 ⑤
 22 $\frac{14}{3}$ 23 $\frac{\pi}{2}$ 24 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \overline{PQ} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 25 9
 26 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$

01 답 $\frac{93}{2}\pi$

$$f(x) = \begin{cases} \sin 4x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \\ -\sin 4x & (\frac{\pi}{2} < x \leq \pi) \end{cases} \text{이고 (가)에서 함수 } f(x) \text{의 주기는 } \pi \text{이}$$

므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=\frac{3}{2}\pi$ 에 대하여 대칭이다.

(i) $\alpha=1$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 이 만나는 점의 x 좌표를 작은 것부터 차례로 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 이라 하면

$$\frac{a_1+a_6}{2} = \frac{3}{2}\pi, \frac{a_2+a_5}{2} = \frac{3}{2}\pi, \frac{a_3+a_4}{2} = \frac{3}{2}\pi$$

즉, $a_1+a_6=3\pi, a_2+a_5=3\pi, a_3+a_4=3\pi$ 이므로

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=9\pi \quad \therefore g(1)=9\pi$$

(ii) $\alpha=\frac{1}{3}$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{3}$ 이 만나는 점의 x 좌표를 작은 것부터 차례로 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{12}$ 라 하면

$$\frac{b_1+b_{12}}{2} = \frac{3}{2}\pi, \frac{b_2+b_{11}}{2} = \frac{3}{2}\pi, \frac{b_3+b_{10}}{2} = \frac{3}{2}\pi, \frac{b_4+b_9}{2} = \frac{3}{2}\pi,$$

$$\frac{b_5+b_8}{2} = \frac{3}{2}\pi, \frac{b_6+b_7}{2} = \frac{3}{2}\pi$$

즉, $b_1+b_{12}=3\pi, b_2+b_{11}=3\pi, b_3+b_{10}=3\pi, b_4+b_9=3\pi,$

$b_5+b_8=3\pi, b_6+b_7=3\pi$ 이므로

$$b_1+b_2+b_3+\dots+b_{12}=18\pi$$

$$\therefore g\left(\frac{1}{3}\right)=18\pi$$

(iii) $\alpha=0$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점의 x 좌표를 작은 것부터 차례로 $c_1, c_2, c_3, \dots, c_{13}$ 이라 하면

$$\frac{c_1+c_{13}}{2} = \frac{3}{2}\pi, \frac{c_2+c_{12}}{2} = \frac{3}{2}\pi, \frac{c_3+c_{11}}{2} = \frac{3}{2}\pi, \frac{c_4+c_{10}}{2} = \frac{3}{2}\pi,$$

$$\frac{c_5+c_9}{2} = \frac{3}{2}\pi, \frac{c_6+c_8}{2} = \frac{3}{2}\pi, c_7 = \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{즉, } c_1+c_{13}=3\pi, c_2+c_{12}=3\pi, c_3+c_{11}=3\pi, c_4+c_{10}=3\pi,$$

$$c_5+c_9=3\pi, c_6+c_8=3\pi, c_7=\frac{3}{2}\pi \text{이므로}$$

$$c_1+c_2+c_3+\dots+c_{13}=\frac{39}{2}\pi$$

$$\therefore g(0)=\frac{39}{2}\pi$$

(i), (ii), (iii)에서

$$g(1)+g\left(\frac{1}{3}\right)+g(0)=9\pi+18\pi+\frac{39}{2}\pi=\frac{93}{2}\pi$$

▶ **비법** NOTE

(1) 함수 $f(x)=\sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$)에서

$$f(a)=f(b) (a \neq b) \text{이면 } \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore a+b=\pi$$

(2) 함수 $f(x)=\cos x$ ($0 \leq x \leq 2\pi$)에서

$$f(a)=f(b) (a \neq b) \text{이면 } \Rightarrow \frac{a+b}{2} = \pi \quad \therefore a+b=2\pi$$

(3) 함수 $f(x)=\tan x$ 에서

$$f(a)=f(b) \text{이면 } \Rightarrow a-b=n\pi \quad (n \text{은 정수})$$

02 답 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$b>0$ 이므로 함수 $y=a \sin b\pi x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{b\pi} = \frac{2}{b} \quad \therefore B\left(\frac{2}{b}, 0\right)$$

$$\therefore C\left(\frac{1}{2b}, a\right), A\left(\frac{3}{2b}, -a\right)$$

$$\text{직선 OC의 기울기는 } \frac{a}{\frac{1}{2b}} = 2ab$$

$$\text{직선 OA의 기울기는 } \frac{-a}{\frac{3}{2b}} = -\frac{2ab}{3}$$

$$\text{직선 OC와 직선 OA는 서로 수직이므로 } 2ab \times \left(-\frac{2ab}{3}\right) = -1$$

$$\frac{4}{3}a^2b^2=1 \quad \therefore a^2b^2=\frac{3}{4}$$

$$\therefore ab=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because a>0, b>0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{직각삼각형 OAB에서 } \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{OB}^2$$

$$\text{직각삼각형 OBC에서 } \overline{BC}^2 + \overline{CO}^2 = \overline{OB}^2$$

직사각형 OABC의 네 변의 길이의 제곱의 합이 $16a$ 이므로

$$\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CO}^2 = 16a$$

$$2\overline{OB}^2 = 16a, \overline{OB}^2 = 8a$$

$$\text{이때 } \overline{OB}^2 = \frac{4}{b^2} \text{이므로 } \frac{4}{b^2} = 8a$$

$$\therefore ab^2 = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 위의 식에 대입하면 } \frac{\sqrt{3}}{2}b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

03 답 ③

$a > 0$ 이므로 함수 $f(x) = \tan \frac{\pi x}{a}$ 의 주기는 $\frac{\pi}{\frac{\pi}{a}} = a$

이때 변 AC의 길이는 함수 $f(x) = \tan \frac{\pi x}{a}$ 의 주기와 같으므로

$$\overline{AC} = a$$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로

$$\overline{OB} = \overline{OA} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{a}{2} \rightarrow \text{삼각형 ABC는 한 변의 길이가 } a \text{인 정삼각형이다.}$$

점 B에서 x 축에 내린 수선의 발을 B'이라 하면 삼각형 ABC는 정삼각형이고 변 AC는 x 축에 평행하므로

$$\angle BOB' = \frac{\pi}{3}$$

직각삼각형 BOB'에서

$$\overline{OB'} = \overline{OB} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{a}{4}$$

$$\overline{BB'} = \overline{OB} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{a}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a$$

$$\therefore B\left(\frac{a}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} a\right)$$

이때 점 B는 함수 $y = \tan \frac{\pi x}{a}$ 의 그래프 위에 있으므로

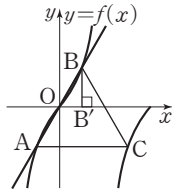
$$\frac{\sqrt{3}}{4} a = \tan \left(\frac{\pi}{a} \times \frac{a}{4} \right), \frac{\sqrt{3}}{4} a = \tan \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a = 1$$

$$\therefore a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{AC}^2 &= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{16}{3} \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$



04 답 ④

n 이 자연수이므로 함수 $f(x) = 3 \sin 2nx$

의 주기는 $\frac{2\pi}{2n} = \frac{\pi}{n}$ 이다.

원점을 지나고 기울기가 양수인 직선이 $-\frac{\pi}{2n} < x < \frac{\pi}{2n}$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 만나는 원점이 아닌 두 점 A, B는 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 실수 $t \left(-\frac{\pi}{2n} < t < \frac{\pi}{2n}, t \neq 0 \right)$ 에 대하여 점 A의 좌표를 $(t, 3 \sin 2nt)$ 라 하면 점 B의 좌표는 $(-t, -3 \sin 2nt)$ 이다.

삼각형 ABC의 넓이는

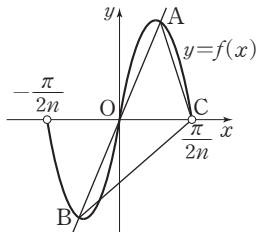
$$2 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2n} \times 3 |\sin 2nt| \right) = \frac{\pi}{2n} \rightarrow \triangle ABC = \triangle AOC + \triangle OBC = 2\triangle AOC$$

$$\text{이므로 } |\sin 2nt| = \frac{n}{18}$$

$$\text{이때 } 0 < |\sin 2nt| \leq 1 \text{이므로 } 0 < \frac{n}{18} \leq 1$$

$$\therefore 0 < n \leq 18$$

따라서 n 의 최댓값은 18이다.

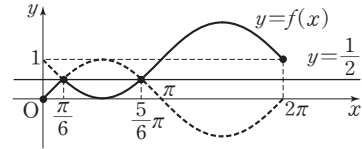


05 답 ④

(i) $k=1$ 일 때,

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{이므로 } f(x) = \begin{cases} \sin x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}) \\ 1 - \sin x & (\frac{\pi}{6} < x \leq 2\pi) \end{cases}$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은 그림과 같다.



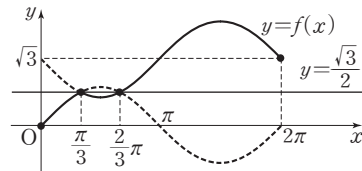
이때 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 개수는 2이므로

$$a_1 = 2$$

(ii) $k=2$ 일 때,

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로 } f(x) = \begin{cases} \sin x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}) \\ \sqrt{3} - \sin x & (\frac{\pi}{3} < x \leq 2\pi) \end{cases}$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 은 그림과 같다.



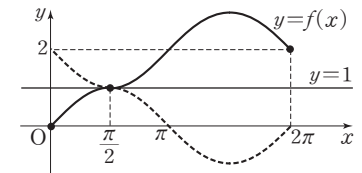
이때 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 개수는 2이므로

$$a_2 = 2$$

(iii) $k=3$ 일 때,

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \text{이므로 } f(x) = \begin{cases} \sin x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \\ 2 - \sin x & (\frac{\pi}{2} < x \leq 2\pi) \end{cases}$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 1$ 은 그림과 같다.



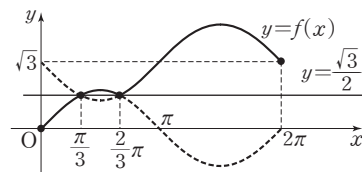
이때 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = 1$ 의 교점의 개수는 1이므로

$$a_3 = 1$$

(iv) $k=4$ 일 때,

$$\sin \frac{2}{3}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로 } f(x) = \begin{cases} \sin x & (0 \leq x \leq \frac{2}{3}\pi) \\ \sqrt{3} - \sin x & (\frac{2}{3}\pi < x \leq 2\pi) \end{cases}$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 은 그림과 같다.



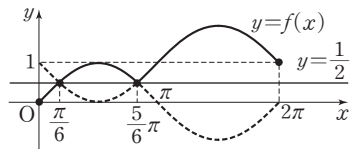
이때 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 개수는 2이므로

$$a_4=2$$

(v) $k=5$ 일 때,

$$\sin \frac{5}{6}\pi = \frac{1}{2} \text{이므로 } f(x) = \begin{cases} \sin x & (0 \leq x \leq \frac{5}{6}\pi) \\ 1 - \sin x & (\frac{5}{6}\pi < x \leq 2\pi) \end{cases}$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}$ 은 그림과 같다.



이때 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}$ 의 교점의 개수는 2이므로

$$a_5=2$$

(i)~(v)에서

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 9$$

06 답 ⑤

$$\neg. \tan x^\circ \times \tan(90^\circ - x^\circ) = \tan x^\circ \times \frac{1}{\tan x^\circ} = 1 \text{이므로}$$

$$\tan 1^\circ \times \tan 89^\circ = 1, \tan 2^\circ \times \tan 88^\circ = 1, \tan 3^\circ \times \tan 87^\circ = 1, \dots, \tan 44^\circ \times \tan 46^\circ = 1, \tan 45^\circ = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_2 \tan 1^\circ + \log_2 \tan 2^\circ + \log_2 \tan 3^\circ + \dots + \log_2 \tan 89^\circ \\ = \log_2 (\tan 1^\circ \times \tan 2^\circ \times \tan 3^\circ \times \dots \times \tan 89^\circ) \\ = \log_2 \{(\tan 1^\circ \times \tan 89^\circ) \times \dots \times (\tan 44^\circ \times \tan 46^\circ) \times \tan 45^\circ\} \\ = \log_2 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\neg. f(x+1) = \cos \frac{\pi}{2}(x+1) = \cos \left(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \frac{\pi}{2}x$$

$$\begin{aligned} f(x-1) &= \cos \frac{\pi}{2}(x-1) = \cos \left(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \cos \left\{ -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x \right) \right\} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x \right) = \sin \frac{\pi}{2}x \\ \therefore f(x+1) &= -f(x-1) \end{aligned}$$

$$\neg. \alpha + \beta + \gamma = \pi \text{이므로 } \alpha + \gamma = \pi - \beta$$

$$\therefore \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} = \sin \frac{\pi - \beta}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} \right) = \cos \frac{\beta}{2}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

07 답 ④

$\angle COD = \pi - \theta$ 이고 $\overline{OB} = 1$ 이므로 직각삼각형 OCB에서 $\overline{BC} = \overline{OB} \tan(\pi - \theta) = -\tan \theta$

삼각형 OAD는 $\angle OAD = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이고 $\overline{OA} = 1$ 이므로

$$\overline{OD} = \frac{\overline{OA}}{\cos(\pi - \theta)} = -\frac{1}{\cos \theta}$$

따라서 어두운 부분의 넓이는

$$\triangle OCD - (\text{부채꼴 OAB의 넓이})$$

$$= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{OD} - \frac{1}{2} \times 1^2 \times (\pi - \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \times (-\tan \theta) \times \left(-\frac{1}{\cos \theta} \right) - \frac{1}{2}(\pi - \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} - \pi + \theta \right) \quad \text{tan } \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

08 답 16

$$\begin{aligned} y &= \cos^2 x - 2 \sin^2 x + |6 \cos x - 3| \\ &= \cos^2 x - 2(1 - \cos^2 x) + |6 \cos x - 3| \\ &= 3 \cos^2 x - 2 + |6 \cos x - 3| \end{aligned}$$

$$\cos x = t \text{로 놓으면 } y = 3t^2 - 2 + |6t - 3|$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$ 배점 30%

(i) $-1 \leq t < \frac{1}{2}$ 일 때,

$$y = 3t^2 - 2 - (6t - 3) = 3t^2 - 6t + 1 = 3(t-1)^2 - 2$$

(ii) $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$ 일 때,

$$y = 3t^2 - 2 + 6t - 3 = 3t^2 + 6t - 5 = 3(t+1)^2 - 8$$

(i), (ii)에서 함수

$$y = 3t^2 - 2 + |6t - 3| \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

의 그래프는 그림과 같으므로 $t = -1$ 에서 최댓값

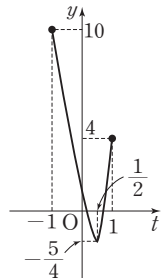
10을 갖고, $t = \frac{1}{2}$ 에서 최솟값 $-\frac{5}{4}$ 를 갖는다.

.....배점 50%

$$\text{따라서 } \cos \alpha = -1, M = 10, \cos \beta = \frac{1}{2}, m = -\frac{5}{4}$$

이므로

$$\frac{\cos \alpha \times M}{\cos \beta \times m} = \frac{(-1) \times 10}{\frac{1}{2} \times \left(-\frac{5}{4} \right)} = 16 \quad \text{.....배점 20\%}$$



09 답 ④

임의의 실수 a, b 에 대하여 $f(a) \leq g(b)$ 를 만족시키려면 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 함수 $f(x)$ 의 최댓값보다 크거나 같아야 한다.

$$y = \frac{2 \cos x + 2}{\cos x + 3} \text{에서 } \cos x = t \text{로 놓으면}$$

$$y = \frac{2t + 2}{t + 3} = -\frac{4}{t + 3} + 2$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq t \leq 1$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $y = -\frac{4}{t+3} + 2$ 의 그래프는 그림과 같으므로 $t=1$ 에서 최댓값 1을 갖는다.

따라서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 1이다.

$$y = (\sin x)^2 + 2k \sin x + 3 + k \text{에서 } \sin x = s \text{로 놓으면}$$

$$y = s^2 + 2ks + 3 + k = (s+k)^2 - k^2 + k + 3$$

이때 $-1 \leq \sin x \leq 1$ 이므로 $-1 \leq s \leq 1$

(i) $-k < -1$, 즉 $k > 1$ 일 때,

$s = -1$ 에서 최솟값 $4 - k$ 를 갖는다.

$g(x)$ 의 최솟값이 $f(x)$ 의 최댓값보다 크거나 같아야 하므로

$$4 - k \geq 1 \quad \therefore k \leq 3$$

그런데 $k > 1$ 이므로 $1 < k \leq 3$

(ii) $-1 \leq -k \leq 1$, 즉 $-1 \leq k \leq 1$ 일 때,

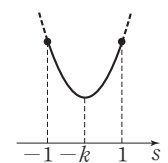
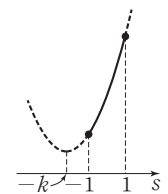
$s = -k$ 에서 최솟값 $-k^2 + k + 3$ 을 갖는다.

$g(x)$ 의 최솟값이 $f(x)$ 의 최댓값보다 크거나 같아야 하므로

$$-k^2 + k + 3 \geq 1, k^2 - k - 2 \leq 0$$

$$(k+1)(k-2) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq k \leq 2$$

그런데 $-1 \leq k \leq 1$ 이므로 $-1 \leq k \leq 1$



(iii) $-k > 1$, 즉 $k < -1$ 일 때,

$s=1$ 에서 최솟값 $3k+4$ 를 갖는다.

$g(x)$ 의 최솟값이 $f(x)$ 의 최댓값보다 크거나 같아야 하므로

$$3k+4 \geq 1, 3k \geq -3$$

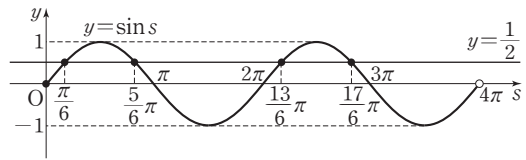
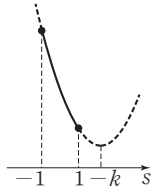
$$\therefore k \geq -1$$

그런데 $k < -1$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $-1 \leq k \leq 3$

따라서 실수 k 의 최댓값은 3, 최솟값은 -1 이므로 최댓값과 최솟값의 합은

$$3 + (-1) = 2$$



$$\therefore s = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } s = \frac{5\pi}{6} \text{ 또는 } s = \frac{13\pi}{6} \text{ 또는 } s = \frac{17\pi}{6}$$

$$t = \frac{s}{4} \text{ 이므로 } t = \frac{\pi}{24} \text{ 또는 } t = \frac{5\pi}{24} \text{ 또는 } t = \frac{13\pi}{24} \text{ 또는 } t = \frac{17\pi}{24}$$

따라서 모든 실수 t 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{24} + \frac{5\pi}{24} + \frac{13\pi}{24} + \frac{17\pi}{24} = \frac{3\pi}{2}$$

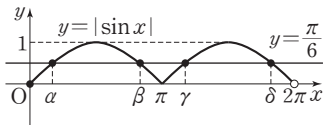
10 답 $\frac{1}{36}$

$$6|\sin x|^2 - 7\pi|\sin x| + \pi^2 = 0 \text{에서}$$

$$(6|\sin x| - \pi)(|\sin x| - \pi) = 0$$

$$\therefore |\sin x| = \frac{\pi}{6} \quad (\because 0 \leq |\sin x| \leq 1)$$

함수 $y = |\sin x|$ 의 그래프는 $y = \sin x$ 의 그래프에서 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 함수 $y = |\sin x|$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\pi}{6}$ 는 그림과 같다.



함수 $y = |\sin x|$ 의 그래프는 직선 $x = \pi$ 에 대하여 대칭이므로 함수

$y = |\sin x|$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\pi}{6}$ 가 만나는 네 점 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 에 대하여

$$\frac{\alpha + \delta}{2} = \pi, \frac{\beta + \gamma}{2} = \pi$$

$$\therefore \alpha + \delta = 2\pi, \beta + \gamma = 2\pi$$

따라서 $\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta) - \alpha = 8\pi - \alpha$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2(\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta)}{36 - \pi^2} &= \frac{\cos^2(8\pi - \alpha)}{36 - \pi^2} \\ &= \frac{\cos^2 \alpha}{36 - \pi^2} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{36 - \pi^2} \end{aligned}$$

이때 $|\sin \alpha| = \frac{\pi}{6}$ 에서 $\sin^2 \alpha = \frac{\pi^2}{36}$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{\cos^2(\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta)}{36 - \pi^2} &= \frac{1 - \sin^2 \alpha}{36 - \pi^2} \\ &= \frac{1 - \frac{\pi^2}{36}}{36 - \pi^2} = \frac{1}{36} \end{aligned}$$

11 idea 답 $\frac{3}{2}\pi$

$$f(\cos x) = \sin 4x \text{이므로}$$

$$f(\sin x) = f\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) = \sin 4\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= \sin(2\pi - 4x) = -\sin 4x$$

$$f(\cos t) - f(\sin t) = 1 \text{에서}$$

$$\sin 4t + \sin 4t = 1 \quad \therefore \sin 4t = \frac{1}{2}$$

$4t = s$ 로 놓으면 $0 \leq t < \pi$ 에서 $0 \leq s < 4\pi$ 이고 방정식은

$$\sin s = \frac{1}{2}$$

12 답 $0 < a \leq 2$

$$f(x) = 2\sin 6x, g(x) = \sqrt{4 - x^2} \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{4 - (2\sin 6x)^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 6x}$$

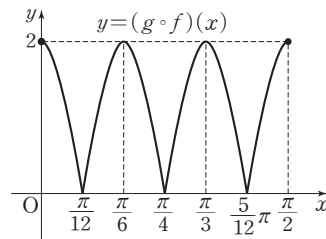
$$= \sqrt{4(1 - \sin^2 6x)} = \sqrt{4\cos^2 6x} = 2|\cos 6x|$$

함수 $y = 2\cos 6x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, 최댓값은 2, 최솟값은 -2 이고,

$(g \circ f)(x) = 2|\cos 6x|$ 의 그래프는 $y = 2\cos 6x$ 의 그래프에서 $y < 0$ 인

부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 함수

$y = (g \circ f)(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y = (g \circ f)(x)$ 의 그래프는 직선 $x = \frac{\pi}{4}$ 에 대하여 대칭이다.

(i) $a = 2$ 일 때,

함수 $y = (g \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = 2$ 가 만나는 점의 x 좌표가

$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ 이므로 방정식 $(g \circ f)(x) = 2$ 의 근은 $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$

이고, 그 합은

$$0 + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

(ii) $0 < a < 2$ 일 때,

함수 $y = (g \circ f)(x)$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 만나는 점의 x 좌표를

작은 것부터 차례로 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 이라 하면

$$\frac{a_1 + a_6}{2} = \frac{\pi}{4}, \frac{a_2 + a_5}{2} = \frac{\pi}{4}, \frac{a_3 + a_4}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{즉, } a_1 + a_6 = \frac{\pi}{2}, a_2 + a_5 = \frac{\pi}{2}, a_3 + a_4 = \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \frac{3}{2}\pi$$

따라서 방정식 $(g \circ f)(x) = a$ 의 모든 실근의 합은 $\frac{3}{2}\pi$ 이다.

(iii) $a = 0$ 일 때,

함수 $y = (g \circ f)(x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점의 x 좌표가 $\frac{\pi}{12},$

$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}$ 이므로 방정식 $(g \circ f)(x) = 0$ 의 근은 $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{12}$ 이고,

그 합은

$$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12} = \frac{3\pi}{4}$$

(i), (ii), (iii)에서 방정식 $(g \circ f)(x) = a$ 의 모든 실근의 합이 π 이상이 되도록 하는 a 의 값의 범위는
 $0 < a \leq 2$

13 답 35

자연수 n 에 대하여 $0 \leq x \leq 4$ 일 때, x 에 대한 방정식

$\sin \pi x - \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$, 즉 $\sin \pi x = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 의 모든 실근의 합은 함수 $y = \sin \pi x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 과 만나는 점의 x 좌표의 합과 같다.

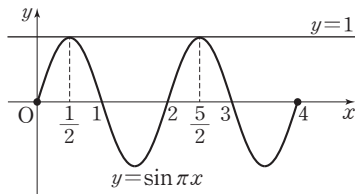
함수 $y = \sin \pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이다.

(i) $n=1$ 일 때,

함수 $y = \sin \pi x$ 의 그래프가 직선 $y=1$ 과 만나는 점의 x 좌표가 $\frac{1}{2}$,

$\frac{5}{2}$ 이므로 그 합은 $\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$

$\therefore f(1) = 3$



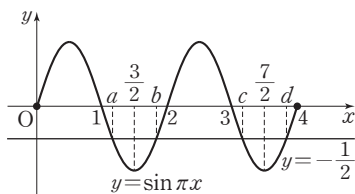
(ii) $n=2$ 일 때,

함수 $y = \sin \pi x$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{2}$ 과 만나는 점의 x 좌표를

작은 것부터 차례로 a, b, c, d 라 하면 $\frac{a+b}{2} = \frac{3}{2}, \frac{c+d}{2} = \frac{7}{2}$ 이므로

$a+b=3, c+d=7 \quad \therefore a+b+c+d=10$

$\therefore f(2) = 10$



(iii) $n=3$ 일 때,

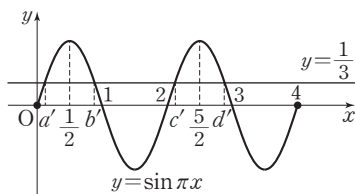
함수 $y = \sin \pi x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{1}{3}$ 과 만나는 점의 x 좌표를 작

은 것부터 차례로 a', b', c', d' 이라 하면 $\frac{a'+b'}{2} = \frac{1}{2}, \frac{c'+d'}{2} = \frac{5}{2}$

이므로

$a'+b'=1, c'+d'=5 \quad \therefore a'+b'+c'+d'=6$

$\therefore f(3) = 6$



(iv) $n \geq 4$ 일 때,

(ii), (iii)과 같은 방법으로 하면 n 이 짝수일 때 $f(n) = 10$, n 이 1이 아닌 홀수일 때 $f(n) = 6$ 이다.

(i)~(iv)에서

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 3 + 10 + 6 + 10 + 6 = 35$$

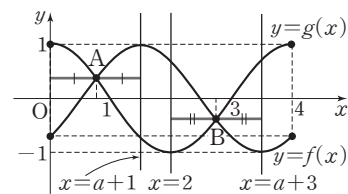
14 답 $\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin \frac{\pi(x-a)}{2} \\ &= \sin \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(x-a-1)}{2} \right) \\ &= \cos \frac{\pi\{x-(a+1)\}}{2} \end{aligned}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $a+1$ 만큼 평행이동한 것이다. ㉠

함수 $g(x)$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이고, 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래

프는 그림과 같다.



두 점 A, B의 좌표를 각각 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ($0 < x_1 < 1 < x_2$)라 하면

$$x_1 = \frac{a+1}{2}, x_2 = \frac{2+a+3}{2} = \frac{a+5}{2}, y_2 = -y_1$$

직선 AB의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{-y_1 - y_1}{\frac{a+5}{2} - \frac{a+1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore y_1 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi x_1}{2} \text{에서 } 0 < x_1 < 1 \text{이므로}$$

$$\frac{\pi x_1}{2} = \frac{\pi}{3} \quad \therefore x_1 = \frac{2}{3}$$

따라서 $x_1 = \frac{a+1}{2}$ 에서

$$a = 2x_1 - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

15 답 $\sqrt{3}$

$a=0$ 이면 $f(x)=0$ 이므로 $f(x)=g(x)$ 에서

$$\left| \cos \frac{x}{2} \right| = 0 \quad \therefore \cos \frac{x}{2} = 0$$

$0 \leq x \leq 5\pi$ 에서 $0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{5}{2}\pi$ 이므로

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{x}{2} = \frac{3}{2}\pi \text{ 또는 } \frac{x}{2} = \frac{5}{2}\pi$$

$$\therefore x = \pi \text{ 또는 } x = 3\pi \text{ 또는 } x = 5\pi$$

이때 서로 다른 실근의 합이 $\pi + 3\pi + 5\pi = 9\pi$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$\therefore a \neq 0$ 배점 20%

$$f(x) = g(x) \text{에서 } a \left| \sin \frac{x}{2} \right| = \left| \cos \frac{x}{2} \right|$$

이때 $\cos \frac{x}{2} = 0$ 이면 $\sin \frac{x}{2} = 0$ 이어야 하는데 이를 동시에 만족시키는

x 의 값은 존재하지 않으므로 $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ 이고 $\sin \frac{x}{2} \neq 0$

또 $\left| \sin \frac{x}{2} \right| > 0$, $\left| \cos \frac{x}{2} \right| > 0$ 이므로 $a > 0$

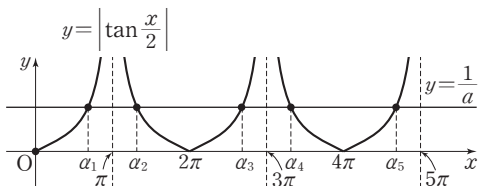
따라서 $\frac{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}{\left| \cos \frac{x}{2} \right|} = \frac{1}{a}$ 이므로 방정식 $\left| \tan \frac{x}{2} \right| = \frac{1}{a}$ ($a > 0$)의 서로 다른

실근의 합이 $\frac{37}{3}\pi$ 가 되는 a 의 값을 구하면 된다.배점 20%

함수 $y = \tan \frac{x}{2}$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2} = 2\pi$ 이고, 함수 $y = \left| \tan \frac{x}{2} \right|$ 의 그래프는

$y = \tan \frac{x}{2}$ 의 그래프에서 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

따라서 $0 \leq x \leq 5\pi$ 에서 함수 $y = \left| \tan \frac{x}{2} \right|$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y = \left| \tan \frac{x}{2} \right|$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{a}$ 이 만나는 점의 x 좌표를 작은

것부터 차례로 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 라 하면

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \pi, \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} = 3\pi, \alpha_5 = 4\pi + \alpha_1$$

$$\text{즉, } \alpha_1 + \alpha_2 = 2\pi, \alpha_3 + \alpha_4 = 6\pi, \alpha_5 = 4\pi + \alpha_1 \text{이므로}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 2\pi + 6\pi + 4\pi + \alpha_1 = 12\pi + \alpha_1$$

이때 서로 다른 실근의 합이 $\frac{37}{3}\pi$ 이므로

$$12\pi + \alpha_1 = \frac{37}{3}\pi \quad \therefore \alpha_1 = \frac{\pi}{3} \quad \dots\dots\text{배점 40\%}$$

$$\text{따라서 } \left| \tan \frac{\alpha_1}{2} \right| = \left| \tan \frac{\pi}{6} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{a} \text{이므로}$$

$$a = \sqrt{3} \quad \dots\dots\text{배점 20\%}$$

16 답 2

함수 $f(x)$ 의 주기가 3π 이므로

$$f(x + 3\pi) = f(x)$$

$$x = 0 \text{을 대입하면 } f(3\pi) = f(0)$$

$$f(3\pi) = \frac{\cos 6\pi}{\sqrt{1 + \cos 6\pi}} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi}{n+1} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin^2 \frac{n-8}{3(n+1)}\pi$$

$$f(0) = \frac{\cos 0}{\sqrt{1 + \cos 0}} + \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4}$$

$$\text{즉, } \frac{\sqrt{2}}{2} + \sin^2 \frac{n-8}{3(n+1)}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$\sin^2 \frac{n-8}{3(n+1)}\pi = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sin \frac{n-8}{3(n+1)}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 또는 } \sin \frac{n-8}{3(n+1)}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\frac{n-8}{3(n+1)}\pi$ 에 $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$-\frac{7}{6}\pi, -\frac{2}{3}\pi, -\frac{5}{12}\pi, -\frac{4}{15}\pi, -\frac{\pi}{6}, \dots \text{이고,}$$

$$\sin \left(-\frac{2}{3}\pi \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{이다.}$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 2이다.

17 답 $\frac{4}{3}\pi$

$$(2 + \cos \theta)(x^3 - 1) - \{2 - 2(2 + \sqrt{3} \sin \theta) + \cos \theta\}(x^2 - x) = 0 \text{에서}$$

$$(2 + \cos \theta)(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$$- \{2 - 2(2 + \sqrt{3} \sin \theta) + \cos \theta\}x(x - 1) = 0,$$

$$(x - 1)[(2 + \cos \theta)(x^2 + x + 1)$$

$$- \{2 - 2(2 + \sqrt{3} \sin \theta) + \cos \theta\}x] = 0,$$

$$(x - 1)\{(2 + \cos \theta)x^2 + 2(2 + \sqrt{3} \sin \theta)x + 2 + \cos \theta\} = 0 \text{이므로}$$

$x = 1$ 또는

$$(2 + \cos \theta)x^2 + 2(2 + \sqrt{3} \sin \theta)x + 2 + \cos \theta = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $\textcircled{1}$ 이 $x = 1$ 을 근으로 가질 때,

$$2 + \cos \theta + 2(2 + \sqrt{3} \sin \theta) + 2 + \cos \theta = 0,$$

$$2 + \cos \theta + 2 + \sqrt{3} \sin \theta = 0$$

$$\text{즉, } \sqrt{3} \sin \theta = -4 - \cos \theta \text{에서}$$

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1, -1 \leq \cos \theta \leq 1 \text{이므로}$$

$$-\sqrt{3} \leq \sqrt{3} \sin \theta \leq \sqrt{3}, -5 \leq -4 - \cos \theta \leq -3$$

따라서 $\sqrt{3} \sin \theta = -4 - \cos \theta$ 를 만족시키는 θ 는 존재하지 않는다.

(ii) $\textcircled{1}$ 이 $x \neq 1$ 인 중근을 가질 때,

$\textcircled{1}$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2 + \sqrt{3} \sin \theta)^2 - (2 + \cos \theta)^2$$

$$= (4 + 4\sqrt{3} \sin \theta + 3 \sin^2 \theta) - (4 + 4 \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= 4\sqrt{3} \sin \theta + 3 \sin^2 \theta - 4 \cos \theta - \cos^2 \theta$$

$$= 4(\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta) + (\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta)(\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta)$$

$$= (\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta)(4 + \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta) = 0$$

$$\text{이때 } 4 + \sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta > 0 \text{이므로 } \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = 0$$

$$\sqrt{3} \sin \theta = \cos \theta$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \text{에서 방정식 } \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{의 해는}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \theta = \frac{7}{6}\pi$$

(i), (ii)에서 모든 θ 의 값의 합은

$$\frac{\pi}{6} + \frac{7}{6}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

18 답 $-2\sqrt{2}$

$$\left(x - \frac{3}{2} \right) \{ 4x^2 + (-4\sqrt{2} \sin \theta)x + 3 \cos \theta \} = 0 \text{에서}$$

$$g(x) = 4x^2 + (-4\sqrt{2} \sin \theta)x + 3 \cos \theta \text{라 하자.}$$

(i) $g(x) = 0$ 이 중근을 가질 때,

이차방정식 $g(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2\sqrt{2} \sin \theta)^2 - 4 \times 3 \cos \theta = 0$$

$$8 \sin^2 \theta - 12 \cos \theta = 0, 8(1 - \cos^2 \theta) - 12 \cos \theta = 0$$

$$2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 2 = 0, (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 2) = 0$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{2} (\because -1 \leq \cos \theta \leq 1)$$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ 에서 방정식 $\cos \theta = \frac{1}{2}$ 의 해는 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 또는 $\theta = \frac{5}{3}\pi$

$$\therefore \tan \theta = \sqrt{3} \text{ 또는 } \tan \theta = -\sqrt{3}$$

(ii) $g(x)=0$ 이 $x=\frac{3}{2}$ 을 근으로 가질 때,

$$g\left(\frac{3}{2}\right)=0 \text{에서 } 4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\sqrt{2} \sin \theta \times \frac{3}{2} + 3 \cos \theta = 0$$

$$9 - 6\sqrt{2} \sin \theta + 3 \cos \theta = 0$$

$$\therefore \cos \theta = 2\sqrt{2} \sin \theta - 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이를 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 대입하면

$$\sin^2 \theta + (2\sqrt{2} \sin \theta - 3)^2 = 1, \quad 9 \sin^2 \theta - 12\sqrt{2} \sin \theta + 8 = 0$$

$$(3 \sin \theta - 2\sqrt{2})^2 = 0 \quad \therefore \sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\cos \theta = 2\sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} - 3 = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2}$$

(i), (ii)에서 모든 $\tan \theta$ 의 값의 합은

$$\sqrt{3} - \sqrt{3} - 2\sqrt{2} = -2\sqrt{2}$$

19 답 ②

$4x=t$ 로 놓으면 $0 < x < \frac{n}{12}\pi$ 에서 $0 < t < \frac{n}{3}\pi$ 이고 방정식은

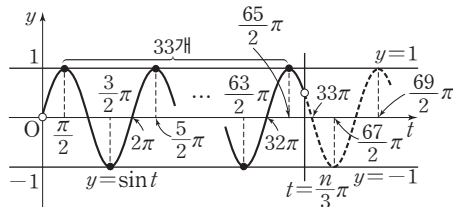
$$\sin^2 t - 1 = 0$$

$$(\sin t + 1)(\sin t - 1) = 0$$

$$\therefore \sin t = -1 \text{ 또는 } \sin t = 1$$

즉, $f(n)=33$ 이 되려면 $0 < t < \frac{n}{3}\pi$ 에서 함수 $y=\sin t$ 의 그래프와 두

직선 $y=-1, y=1$ 이 만나는 점의 개수가 33이어야 한다.



이때 $0 < t \leq 2\pi$ 에서 함수 $y=\sin t$ 의 그래프와 두 직선 $y=-1, y=1$ 이 만나는 점의 개수가 2이므로 $0 < t \leq 32\pi$ 에서 함수 $y=\sin t$ 의 그래프와 두 직선 $y=-1, y=1$ 이 만나는 점의 개수는 32이다.

따라서 $0 < t < \frac{n}{3}\pi$ 에서 함수 $y=\sin t$ 의 그래프와 두 직선 $y=-1, y=1$ 이 만나는 점의 개수가 33이려면

$$\frac{65}{2}\pi < \frac{n}{3}\pi \leq \frac{67}{2}\pi$$

$$\therefore 97.5 < n \leq 100.5$$

따라서 자연수 n 의 값은 98, 99, 100이므로 모든 n 의 값의 합은

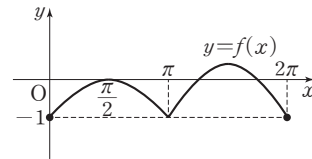
$$98 + 99 + 100 = 297$$

20 답 15

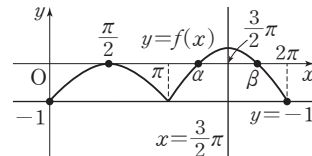
$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 정의된 함수

$$f(x) = \begin{cases} \sin x - 1 & (0 \leq x < \pi) \\ -\sqrt{2} \sin x - 1 & (\pi \leq x \leq 2\pi) \end{cases}$$

에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 $0 \leq x < \pi$ 에서 $y=\sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이고 $\pi \leq x \leq 2\pi$ 에서 $y=\sqrt{2} \sin x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 그림과 같다.



따라서 방정식 $f(x)=f(t)$ 의 서로 다른 실근은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=f(t)$ 의 교점의 x 좌표와 같다.



교점의 개수가 3인 경우는 $f(t)=0$ 또는 $f(t)=-1$

$f(t)=-1$ 에서 $t=0$ 또는 $t=\pi$ 또는 $t=2\pi$

$\pi \leq x \leq 2\pi$ 에서 $-\sqrt{2} \sin x - 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 하면

$f(t)=0$ 에서

$$t = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } t = \alpha \text{ 또는 } t = \beta$$

$$\text{이때 } \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{2}\pi \text{이므로 } \alpha + \beta = 3\pi$$

따라서 모든 t 의 값의 합은

$$0 + \frac{\pi}{2} + \pi + 2\pi + 3\pi = \frac{13}{2}\pi$$

$$\therefore p + q = 2 + 13 = 15$$

21 답 ⑤

$f(x)=\sqrt{3}|\sin x|+\sqrt{3}\sin x, g(x)=|\cos x|+\cos x$ 라 하면 주어진 부등식은 $f(x) \leq g(x)$

(i) $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 일 때,

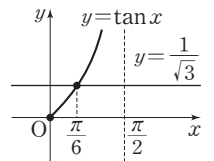
$$f(x) \leq g(x) \text{에서 } 2\sqrt{3} \sin x \leq 2 \cos x$$

이때 $\cos x > 0$ 이므로 양변을 $2\sqrt{3} \cos x$ 로 나누면

$$\tan x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 에서 주어진 부등식의 해는

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$$



(ii) $\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ 일 때,

$$f(x) > 0, g(x)=0 \text{이므로 } f(x) > g(x)$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키지 않는다.

(iii) $\pi \leq x \leq 2\pi$ 일 때,

$$f(x)=0, g(x) \geq 0 \text{이므로 } f(x) \leq g(x)$$

$$\therefore \pi \leq x \leq 2\pi$$

(i), (ii), (iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \pi \leq x \leq 2\pi$$

따라서 $\alpha=0, \beta=\frac{\pi}{6}, \gamma=\pi, \delta=2\pi$ 이므로

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{19}{6}\pi$$

22 답 $\frac{14}{3}$

a 가 양수이고 (φ) 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값이 2이므로 $a=2$

$f(x)=2\sin bx, g(x)=x^2-(\sqrt{3}-1)x-\sqrt{3}=(x+1)(x-\sqrt{3})$ 이므로

$g(f(x))\geq 0$ 에서

$$\{f(x)+1\}\{f(x)-\sqrt{3}\}\geq 0$$

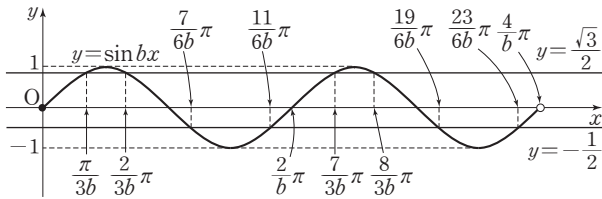
$$\therefore f(x)\leq -1 \text{ 또는 } f(x)\geq \sqrt{3}$$

$$2\sin bx\leq -1 \text{ 또는 } 2\sin bx\geq \sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$\sin bx\leq -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin bx\geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$b>0$ 에서 함수 $y=\sin bx$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$ 이므로 $0\leq x<\frac{4}{b}\pi$ 에서 함수

$y=\sin bx$ 의 그래프와 두 직선 $y=\frac{\sqrt{3}}{2}, y=-\frac{1}{2}$ 은 그림과 같다.



$$\therefore \frac{\pi}{3b}\leq x\leq \frac{2}{3b}\pi \text{ 또는 } \frac{7}{6b}\pi\leq x\leq \frac{11}{6b}\pi \text{ 또는 } \frac{7}{3b}\pi\leq x\leq \frac{8}{3b}\pi \text{ 또는 } \frac{19}{6b}\pi\leq x\leq \frac{23}{6b}\pi$$

따라서 $q-p$ 의 최댓값은 $\frac{2}{3b}\pi$ 이므로

$$\frac{2}{3b}\pi=\frac{\pi}{4} \quad \therefore b=\frac{8}{3}$$

$$\therefore a+b=\frac{14}{3}$$

23 답 $\frac{\pi}{2}$

(φ) 에서 $a^2+b^2=4ab\cos\alpha$ 이므로

$$\cos\alpha=\frac{a^2+b^2}{4ab}=\frac{a}{4b}+\frac{b}{4a}=\frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

이때 $a>0, b>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}}=2 \quad (\text{단, 등호는 } \frac{a}{b}=\frac{b}{a} \text{ 일 때 성립})$$

$$\therefore \cos\alpha\geq \frac{1}{4}\times 2=\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 α 는 삼각형의 내각의 크기이므로 $0<\alpha<\pi$

한편 (ψ) 에서 $2\sin^2(\pi+\beta+\gamma)+\sqrt{3}\cos\alpha\geq 2$ 이고, $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ 이므로

$$2\sin^2(2\pi-\alpha)+\sqrt{3}\cos\alpha\geq 2$$

$$2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha\geq 2$$

$$2(1-\cos^2\alpha)+\sqrt{3}\cos\alpha\geq 2$$

$$2\cos^2\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha\leq 0$$

$$\cos\alpha(2\cos\alpha-\sqrt{3})\leq 0$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \cos\alpha\geq \frac{1}{2} \text{ 이므로 } 2\cos\alpha-\sqrt{3}\leq 0$$

$$\therefore \cos\alpha\leq \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{1}{2}\leq \cos\alpha\leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $0<\alpha<\pi$ 에서 α 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{6}\leq \alpha\leq \frac{\pi}{3}$$

즉, α 의 최솟값과 최댓값의 합은

$$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$$

24 답 $\frac{\sqrt{2}}{2}\leq \overline{PQ}\leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2} \text{에서 } \beta=\frac{\pi}{2}-\alpha \text{ 이므로}$$

$$\sin^2\beta=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos^2\alpha$$

$$4\leq \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\tan^2\alpha+2\tan\alpha\leq 4+2\sqrt{3} \text{에서}$$

$$4\leq \sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\tan^2\alpha+2\tan\alpha\leq 4+2\sqrt{3}$$

$$4\leq 1+\tan^2\alpha+2\tan\alpha\leq 4+2\sqrt{3}$$

$$\therefore 3\leq \tan^2\alpha+2\tan\alpha\leq 3+2\sqrt{3}$$

$$3\leq \tan^2\alpha+2\tan\alpha \text{에서}$$

$$\tan^2\alpha+2\tan\alpha-3\geq 0$$

$$(\tan\alpha+3)(\tan\alpha-1)\geq 0$$

$$\therefore \tan\alpha\leq -3 \text{ 또는 } \tan\alpha\geq 1$$

그런데 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\tan\alpha>0$

$$\therefore \tan\alpha\geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\tan^2\alpha+2\tan\alpha\leq 3+2\sqrt{3} \text{에서}$$

$$\tan^2\alpha+2\tan\alpha-\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)\leq 0$$

$$(\tan\alpha+\sqrt{3}+2)(\tan\alpha-\sqrt{3})\leq 0$$

$$\therefore -\sqrt{3}-2\leq \tan\alpha\leq \sqrt{3}$$

그런데 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\tan\alpha>0$

$$\therefore 0<\tan\alpha\leq \sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 1\leq \tan\alpha\leq \sqrt{3}$$

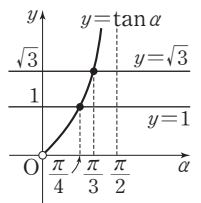
따라서 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 에서 α 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{4}\leq \alpha\leq \frac{\pi}{3}$$

이때 $\overline{PQ}=\sin\alpha$ 이고

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\leq \overline{PQ}\leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$



25 답 9

점 P는 원 $x^2+y^2=1$ 위를 시계 반대 방향으로 1초에 $\frac{\pi}{12}$ 만큼 이동하므로 n 초 후의 점 P의 좌표는

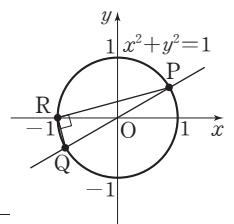
$$P\left(\cos\frac{n}{12}\pi, \sin\frac{n}{12}\pi\right)$$

점 Q는 점 P와 원점에 대하여 대칭이므로

$$Q\left(-\cos\frac{n}{12}\pi, -\sin\frac{n}{12}\pi\right)$$

$R(-1, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{QR} &= \sqrt{\left(-1+\cos\frac{n}{12}\pi\right)^2 + \left(\sin\frac{n}{12}\pi\right)^2} \\ &= \sqrt{1-2\cos\frac{n}{12}\pi + \cos^2\frac{n}{12}\pi + \sin^2\frac{n}{12}\pi} \\ &= \sqrt{2\left(1-\cos\frac{n}{12}\pi\right)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\overline{PR} &= \sqrt{\left(-1 - \cos \frac{n}{12}\pi\right)^2 + \left(-\sin \frac{n}{12}\pi\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + 2\cos \frac{n}{12}\pi + \cos^2 \frac{n}{12}\pi + \sin^2 \frac{n}{12}\pi} \\ &= \sqrt{2\left(1 + \cos \frac{n}{12}\pi\right)}\end{aligned}$$

이때 삼각형 PQR는 $\angle PRQ = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로

$$\begin{aligned}f(n) &= \frac{1}{2} \times \overline{QR} \times \overline{PR} \\ &= \frac{1}{2} \times \sqrt{2\left(1 - \cos \frac{n}{12}\pi\right)} \times \sqrt{2\left(1 + \cos \frac{n}{12}\pi\right)} \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{\left(1 - \cos^2 \frac{n}{12}\pi\right)} \\ &= \sqrt{\sin^2 \frac{n}{12}\pi} = \left|\sin \frac{n}{12}\pi\right|\end{aligned}$$

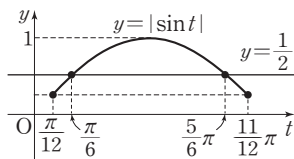
이때 $2f(n) \geq 1$ 에서

$$2\left|\sin \frac{n}{12}\pi\right| \geq 1, \left|\sin \frac{n}{12}\pi\right| \geq \frac{1}{2}$$

$\frac{n}{12}\pi = t$ 로 놓으면 $|\sin t| \geq \frac{1}{2}$ 이고 $1 \leq n \leq 11$ 에서

$$\frac{\pi}{12} \leq \frac{n}{12}\pi \leq \frac{11}{12}\pi \text{이므로 } \frac{\pi}{12} \leq t \leq \frac{11}{12}\pi$$

함수 $y = |\sin t|$ 의 그래프는 $y = \sin t$ 의 그래프에서 $y < 0$ 인 부분을 t 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $\frac{\pi}{12} \leq t \leq \frac{11}{12}\pi$ 에서 함수 $y = |\sin t|$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 은 그림과 같다.



$|\sin t| \geq \frac{1}{2}$ 을 만족시키는 t 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{즉, } \frac{\pi}{6} \leq \frac{n}{12}\pi \leq \frac{5}{6}\pi \text{이므로 } 2 \leq n \leq 10$$

따라서 자연수 n 의 값은 2, 3, 4, ..., 10의 9개이다.

26 [답] $0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$

원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 $(\cos \theta, \sin \theta)$ 에서의 접선의 방정식은 $x \cos \theta + y \sin \theta = 1$

$$\therefore y = \frac{1}{\sin \theta}(1 - x \cos \theta)$$

이를 $(x+1)^2 + y^2 = 4$ 에 대입하면

$$(x+1)^2 + \left\{\frac{1}{\sin \theta}(1 - x \cos \theta)\right\}^2 = 4$$

$$\sin^2 \theta (x+1)^2 + (1 - x \cos \theta)^2 = 4 \sin^2 \theta$$

$$\sin^2 \theta (x^2 + 2x - 3) + 1 - 2x \cos \theta + x^2 \cos^2 \theta = 0$$

$$x^2 + 2(\sin^2 \theta - \cos \theta)x - 3 \sin^2 \theta + 1 = 0$$

이 x 에 대한 이차방정식의 근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -2(\sin^2 \theta - \cos \theta)$$

$$\therefore f(\theta) = -2(\sin^2 \theta - \cos \theta)$$

$$f(\theta) \geq -\frac{1}{2} \text{에서 } -2(\sin^2 \theta - \cos \theta) \geq -\frac{1}{2}$$

$$\sin^2 \theta - \cos \theta \leq \frac{1}{4}, 1 - \cos^2 \theta - \cos \theta - \frac{1}{4} \leq 0$$

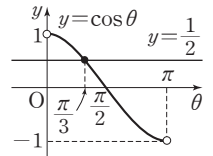
$$4 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta - 3 \geq 0, (2 \cos \theta + 3)(2 \cos \theta - 1) \geq 0$$

그런데 $2 \cos \theta + 3 > 0$ 이므로

$$2 \cos \theta - 1 \geq 0 \quad \therefore \cos \theta \geq \frac{1}{2}$$

따라서 $0 < \theta < \pi$ 에서 구하는 θ 의 값의 범위는

$$0 < \theta \leq \frac{\pi}{3}$$



STEP 3 최고난도 문제

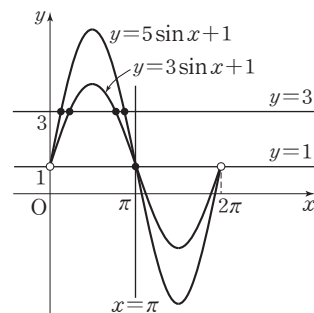
| 75~77쪽

01 24	02 5	03 ②	04 15	05 ④	06 48
07 $\frac{5}{2}\pi$	08 ①	09 ②	10 $-\frac{1}{8}$	11 59	

01 [답] 24

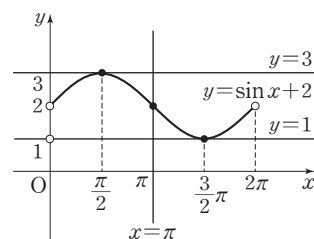
[1단계] b 의 값에 따라 $n(A \cup B \cup C) = 3$ 을 만족시키는 $a + b$ 의 값의 범위를 구하기

(i) $b = 1$ 일 때,



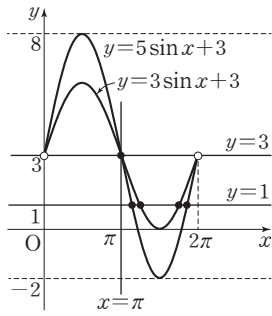
$n(A \cup B \cup C) = 3$ 을 만족시키는 a 의 값의 범위는 $3 \leq a \leq 5$ 이므로 $4 \leq a + b \leq 6$

(ii) $b = 2$ 일 때,



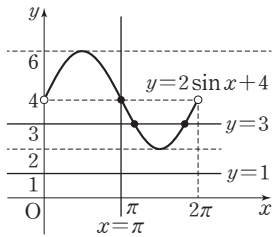
$n(A \cup B \cup C) = 3$ 을 만족시키는 a 의 값은 1이므로 $a + b = 1 + 2 = 3$

(iii) $b=3$ 일 때,



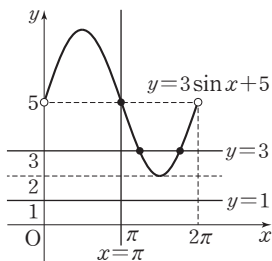
$n(A \cup B \cup C) = 3$ 을 만족시키는 a 의 값의 범위는 $3 \leq a \leq 5$ 이므로
 $6 \leq a + b \leq 8$

(iv) $b=4$ 일 때,



$n(A \cup B \cup C) = 3$ 을 만족시키는 a 의 값은 2이므로
 $a + b = 2 + 4 = 6$

(v) $b=5$ 일 때,



$n(A \cup B \cup C) = 3$ 을 만족시키는 a 의 값은 3이므로
 $a + b = 3 + 5 = 8$

2단계 $M \times m$ 의 값 구하기

(i)~(v)에서 $M=8$, $m=3$ 이므로

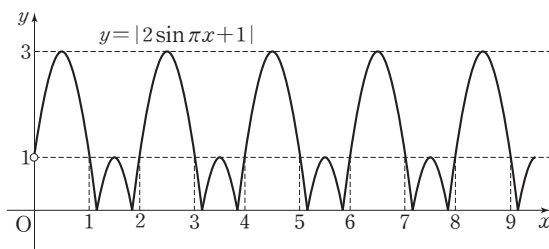
$$M \times m = 24$$

idea 02 답 5

1단계 함수 $f(x) = |2 \sin \pi x + 1|$ 의 그래프 그리기

함수 $y = 2 \sin \pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$, 최댓값은 2, 최솟값은 -2 이고,

함수 $y = |2 \sin \pi x + 1|$ 의 그래프는 $y = 2 \sin \pi x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 후 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 함수 $y = |2 \sin \pi x + 1|$ 의 그래프는 그림과 같다.



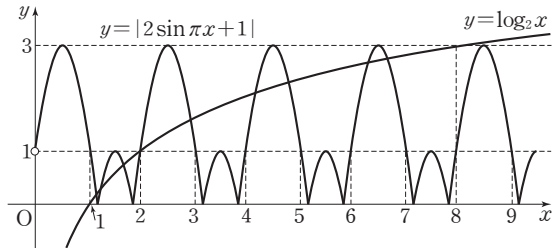
2단계 a 가 짝수일 때, 교점의 개수 구하기

함수 $f(x)$ 의 최댓값은 3이고, $a > 1$ 인 자연수 a 에 대하여

$g(a^3) = \log_a a^3 = 3$ 이므로 $x \geq a^3$ 인 경우 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 만나지 않는다.

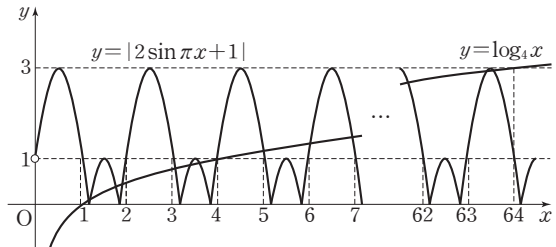
(i) a 가 짝수일 때,

두 함수 $f(x) = |2 \sin \pi x + 1|$, $g(x) = \log_2 x$ 의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $f(x) = |2 \sin \pi x + 1|$, $g(x) = \log_2 x$ 의 그래프는 $0 < x < 2$ 일 때 세 점에서 만나고, $2 \leq x < 4$, $4 < x < 6$, $6 < x < 8$ 일 때 각각 두 점에서 만난다.

또 두 함수 $f(x) = |2 \sin \pi x + 1|$, $g(x) = \log_4 x$ 의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $f(x) = |2 \sin \pi x + 1|$, $g(x) = \log_4 x$ 의 그래프는 $0 < x < 4$ 일 때 7개의 점에서 만나고, $4 \leq x < 6$, $6 < x < 8$, ..., $62 < x < 64$ 일 때 각각 두 점에서 만난다.

$0 < x < a$ 일 때 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를 M 이라 하면 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 $a \leq x < a+2$, $a+2 < x < a+4$, ..., $a^3-2 < x < a^3$ 일 때 각각 두 점에서 만나므로 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수는

$$M + 2 \left\{ \frac{a^3 - (a+2)}{2} + 1 \right\} = M + a^3 - a$$

$a=2$ 이면 $M=3$ 이고 $a^3 - a = 6$ 이므로 $3 + 6 \neq 129$

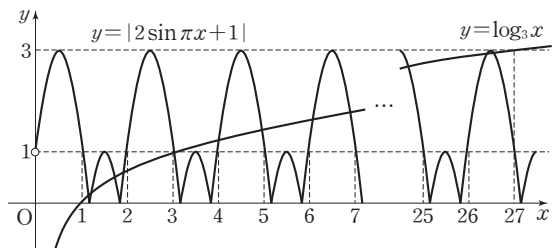
$a=4$ 이면 $M=7$ 이고 $a^3 - a = 60$ 이므로 $7 + 60 \neq 129$

$a \geq 6$ 이면 $a^3 - a \geq 210 > 129$

3단계 a 가 홀수일 때, 교점의 개수 구하기

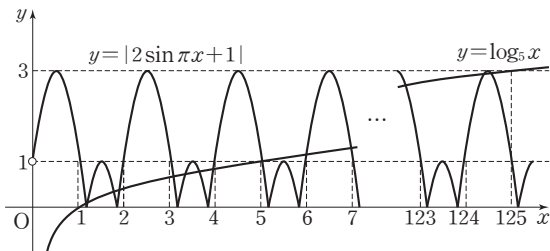
(ii) a 가 홀수일 때,

두 함수 $f(x) = |2 \sin \pi x + 1|$, $g(x) = \log_3 x$ 의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $f(x) = |2 \sin \pi x + 1|$, $g(x) = \log_3 x$ 의 그래프는 $0 < x < 3$

일 때 네 점에서 만나고, $x=3$ 일 때 한 점에서 만나며, $3 < x < 5$, $5 < x < 7$, ..., $25 < x < 27$ 일 때 각각 두 점에서 만난다.
또 두 함수 $f(x) = |2\sin \pi x + 1|$, $g(x) = \log_5 x$ 의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $f(x) = |2\sin \pi x + 1|$, $g(x) = \log_5 x$ 의 그래프는 $0 < x < 5$ 일 때 8개의 점에서 만나고, $x=5$ 일 때 한 점에서 만나며, $5 < x < 7$, $7 < x < 9$, ..., $123 < x < 125$ 일 때 각각 두 점에서 만난다.
 $0 < x < a$ 일 때 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수를 M 이라 하면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 $x=a$ 일 때 한 점에서 만나고, $a < x < a+2$, $a+2 < x < a+4$, ..., $a^3-2 < x < a^3$ 일 때 각각 두 점에서 만나므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개수는

$$M+1+2\left\{\frac{a^3-(a+2)}{2}+1\right\}=M+a^3-a+1$$

$a=3$ 이면 $M=4$ 이고 $a^3-a+1=25$ 이므로 $4+25=29 \neq 129$

$a=5$ 이면 $M=8$ 이고 $a^3-a+1=121$ 이므로 $8+121=129$

4단계 자연수 a 의 값 구하기

(i), (ii)에서 자연수 a 의 값은 5이다.

03 답 ②

1단계 $f(x)+a=0$ 의 의미 파악하기

$0 \leq x < k$ 에서 $f(x) = \frac{1}{2}\sin \pi x$ 이므로 $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ 이고,

함수 $y = \frac{1}{2}\sin \pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이다.

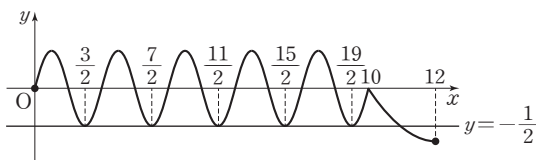
$f(k) = \left(\frac{2}{3}\right)^{k-k} - 1 = 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(k, 0)$ 을 지난다.

방정식 $f(x)+a=0$, 즉 $f(x)=-a$ 의 실근은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-a$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

$0 \leq x \leq 12$ 에서 방정식 $f(x)+a=0$ 의 실근의 최댓값이 12이므로 모든 실근의 합이 46이기 위하여 실근의 개수는 4 이상이어야 한다.

2단계 a 의 값 또는 값의 범위에 따라 방정식 $f(x)+a=0$ 의 모든 실근의 합 구하기

(i) $a = \frac{1}{2}$ 인 경우



$k=10$ 일 때 방정식 $f(x)+a=0$ 의 모든 실근의 합이 최대이다.

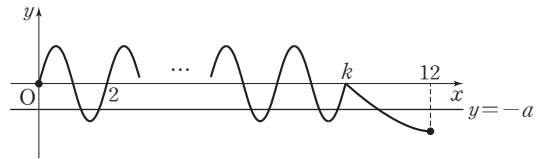
$0 \leq x < 10$ 에서 모든 실근의 합은

$$\frac{3}{2} + \frac{7}{2} + \frac{11}{2} + \frac{15}{2} + \frac{19}{2} = \frac{55}{2} = 27.5 \text{이고}$$

$f(12) = \left(\frac{2}{3}\right)^{12-10} - 1 = \frac{4}{9} - 1 = -\frac{5}{9} < -\frac{1}{2}$ 이므로 $10 \leq x \leq 12$ 에서

방정식 $f(x)+a=0$ 은 오직 하나의 실근을 갖고 그 값은 12보다 작다. 따라서 방정식 $f(x)+a=0$ 의 모든 실근의 합은 39.5보다 작으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0 < a < \frac{1}{2}$ 인 경우



$k \leq x \leq 12$ 에서 방정식 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-k} - 1 + a = 0$ 의 실근의 개수는 최대 1이고 그 값은 12 이하이다.

$0 \leq x \leq 12$ 에서 방정식 $f(x)+a=0$ 의 모든 실근의 합이 46이기 위하여 $0 \leq x < k$ 에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin \pi x + a = 0$ 의 모든 실근의 합이 34 이상이어야 한다.

$0 \leq x < 2$ 에서 함수 $y = \frac{1}{2}\sin \pi x$ 의 그래프와 직선 $y = -a$ 가 만나는

두 점의 x 좌표를 각각 α_1, α_2 라 할 때, $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{3}{2}$, 즉 $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$ 이다.

또 함수 $y = \frac{1}{2}\sin \pi x$ 의 주기가 2이므로

$2 \leq x < 4$ 에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin \pi x + a = 0$ 의 모든 실근의 합은 7,

$4 \leq x < 6$ 에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin \pi x + a = 0$ 의 모든 실근의 합은 11,

$6 \leq x < 8$ 에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin \pi x + a = 0$ 의 모든 실근의 합은 15,

$8 \leq x < 10$ 에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin \pi x + a = 0$ 의 모든 실근의 합은 19,

$10 \leq x < 11$ 에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin \pi x + a = 0$ 은 실근을 갖지 않는다.

따라서 다음 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

① $k \leq 7$ 일 때,

$0 \leq x < k$ 에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin \pi x + a = 0$ 의 모든 실근의 합이 34 미만이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $k=8$ 또는 $k=9$ 일 때,

$0 \leq x < k$ 에서 방정식 $\frac{1}{2}\sin \pi x + a = 0$ 의 모든 실근의 합은

$3+7+11+15=36$ 이므로 $k \leq x \leq 12$ 에서 실근이 10이면 조건을 만족시킨다.

$k=8$ 이면 $f(10)+a = \left(\frac{2}{3}\right)^{10-8} - 1 + a = 0$ 에서 $a = \frac{5}{9}$ 이므로

$0 < a < \frac{1}{2}$ 에 모순이다.

$k=9$ 이면 $f(10)+a = \left(\frac{2}{3}\right)^{10-9} - 1 + a = 0$ 에서 $a = \frac{1}{3}$ 이므로

$0 < a < \frac{1}{2}$ 을 만족시킨다.

③ $k=10$ 또는 $k=11$ 일 때,

$0 \leq x < k$ 에서 모든 실근의 합은 $3+7+11+15+19=55 > 46$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

3단계 $\frac{k}{a}$ 의 값 구하기

(i), (ii)에서 $a = \frac{1}{3}$, $k=9$ 이므로 $\frac{k}{a} = 27$

1단계 a 의 값 구하기

함수 $y = a \sin \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{3} \right) + a - 2$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$$y = a \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) + a - 2 = \frac{a}{2} - 2$$

따라서 함수 $y = a \sin \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{3} \right) + a - 2$ 의 그래프는 점 $\left(0, \frac{a}{2} - 2 \right)$ 를

지나고, 이 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$, 최댓값은 $a + a - 2 = 2a - 2$, 최솟값

은 $-a + a - 2 = -2$ 이다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = a \sin \frac{\pi}{2} x$ 의 그래프를 x 축의 방향

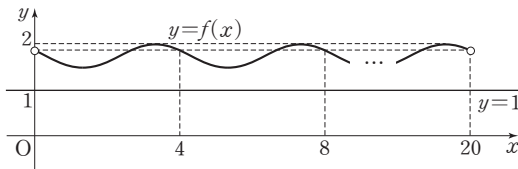
으로 $\frac{1}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 $a - 2$ 만큼 평행이동한 후 $y < 0$ 인 부분을

x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

$2a - 2$ 의 값의 범위에 따라 함수 $y = f(x)$ 의 그래프를 그려 보자.

(i) $2a - 2 < -1$, 즉 $0 < a < \frac{1}{2}$ 일 때,

$-2 < \frac{a}{2} - 2 < -\frac{7}{4}$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 은 그림과 같다.

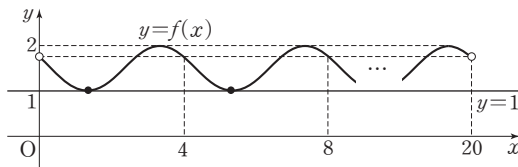


함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 은 만나지 않으므로

$$g(20) = 0$$

(ii) $2a - 2 = -1$, 즉 $a = \frac{1}{2}$ 일 때,

$\frac{a}{2} - 2 = -\frac{7}{4}$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 은 그림과 같다.

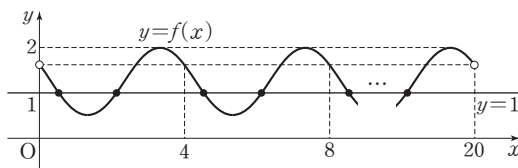


$0 < x < 4$, $4 < x < 8$, ..., $16 < x < 20$ 일 때 직선 $y=1$ 과 각각 한 점에서 만나므로

$$g(20) = 5 \times 1 = 5$$

(iii) $-1 < 2a - 2 \leq 0$, 즉 $\frac{1}{2} < a \leq 1$ 일 때,

$-\frac{7}{4} < \frac{a}{2} - 2 \leq -\frac{3}{2}$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 은 그림과 같다.

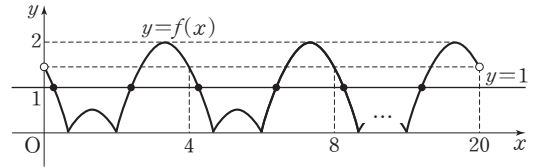


$0 < x < 4$, $4 < x < 8$, ..., $16 < x < 20$ 일 때 직선 $y=1$ 과 각각 두 점에서 만나므로

$$g(20) = 5 \times 2 = 10$$

(iv) $0 < 2a - 2 < 1$, 즉 $1 < a < \frac{3}{2}$ 일 때,

$-\frac{3}{2} < \frac{a}{2} - 2 < -\frac{5}{4}$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 은 그림과 같다.

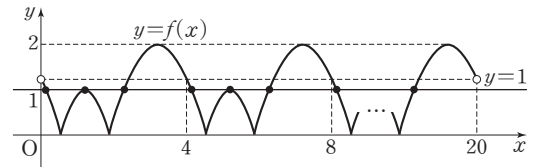


$0 < x < 4$, $4 < x < 8$, ..., $16 < x < 20$ 일 때 직선 $y=1$ 과 각각 두 점에서 만나므로

$$g(20) = 5 \times 2 = 10$$

(v) $2a - 2 = 1$, 즉 $a = \frac{3}{2}$ 일 때,

$\frac{a}{2} - 2 = -\frac{5}{4}$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 은 그림과 같다.

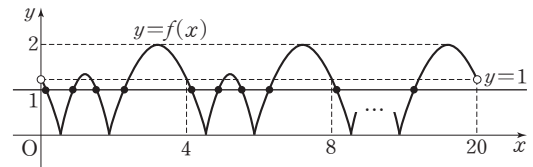


$0 < x < 4$, $4 < x < 8$, ..., $16 < x < 20$ 일 때 직선 $y=1$ 과 각각 세 점에서 만나므로

$$g(20) = 5 \times 3 = 15$$

(vi) $1 < 2a - 2 < 2$, 즉 $\frac{3}{2} < a < 2$ 일 때,

$-\frac{5}{4} < \frac{a}{2} - 2 < -1$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 은 그림과 같다.

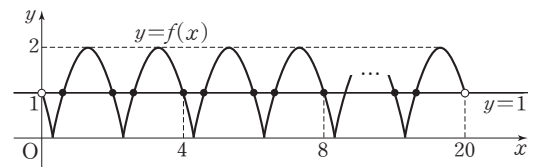


$0 < x < 4$, $4 < x < 8$, ..., $16 < x < 20$ 일 때 직선 $y=1$ 과 각각 네 점에서 만나므로

$$g(20) = 5 \times 4 = 20$$

(vii) $2a - 2 = 2$, 즉 $a = 2$ 일 때,

$\frac{a}{2} - 2 = -1$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 은 그림과 같다.



$0 < x \leq 4$, $4 < x \leq 8$, $8 < x \leq 12$, $12 < x \leq 16$ 일 때 직선 $y=1$ 과 각각 네 점에서 만나고, $16 < x < 20$ 일 때 직선 $y=1$ 과 세 점에서 만나므로

$$g(20) = 4 \times 4 + 3 = 19$$

(viii) $2a - 2 > 2$, 즉 $a > 2$ 일 때,

(vi)의 경우와 마찬가지로 $0 < x < 4$, $4 < x < 8$, ..., $16 < x < 20$ 일 때

직선 $y=1$ 과 각각 네 점에서 만나므로

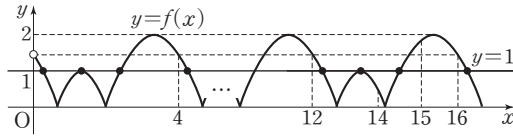
$$g(20)=5 \times 4=20$$

$$(i) \sim (viii) \text{에서 } a = \frac{3}{2}$$

2단계 $g(a)=8a$ 를 만족시키는 자연수 a 의 최솟값 구하기

$$a = \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$g(a)=8a=8 \times \frac{3}{2}=12$$



그림과 같이 함수 $f(x) = \left| \frac{3}{2} \sin \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{3} \right) - \frac{1}{2} \right|$ 의 그래프는

$0 < x < 4$, $4 < x < 8$, $8 < x < 12$, $12 < x < 16$ 일 때 직선 $y=1$ 과 각각 세 점에서 만나고 $g(14)=11$, $g(15)=12$ 이므로 자연수 a 의 최솟값은 15이다.

05 답 ④

1단계 $\sin x=t$ 로 놓고 t 에 대한 방정식이 실근을 갖는 경우 파악하기

$\sin x=t$ 로 놓으면

$$\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\sqrt{1-t^2} \quad \left(\because \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi \right)$$

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi \text{에서 } -1 \leq \sin x \leq 1 \text{이므로}$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

따라서 주어진 방정식은

$$-\sqrt{1-t^2} - at - 3a - 1 = 0 \quad (-1 \leq t \leq 1)$$

이때 $-\sqrt{1-t^2} = a(t+3) + 1$ 을 만족시키는 실수 t 가 존재해야 하므로

$$f(t) = -\sqrt{1-t^2}, g(t) = a(t+3) + 1 \text{이라 하면 두 함수 } y=f(t),$$

$y=g(t)$ 의 그래프가 만나야 한다.

2단계 a 의 값이 최대, 최소가 되는 경우 파악하기

$f(t) = -\sqrt{1-t^2}$ 에서 $y = -\sqrt{1-t^2}$ 의 양변을 제곱하면

$$y^2 = 1 - t^2 \quad \therefore t^2 + y^2 = 1 \quad (y \leq 0)$$

따라서 함수 $f(t) = -\sqrt{1-t^2}$ 의 그래프는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원의 일부이다.

함수 $g(t) = a(t+3) + 1$ 의 그래프는 t 의 값에 관계없이 항상 점 $(-3, 1)$ 을 지나는 직선이다.

그림과 같이 두 함수 $y=f(t)$, $y=g(t)$

의 그래프가 만나려면 $a < 0$ 이어야 하

고, 함수 $y=g(t)$ 의 그래프가 점 $(1, 0)$

을 지날 때 a 의 값은 최대이고, 함수

$y=g(t)$ 의 그래프가 원 $t^2 + y^2 = 1$ 과 제 3사분면에서 접할 때 a 의 값은 최소이다.

3단계 실수 a 의 값의 범위 구하기

a 의 최댓값은 $g(1)=0$ 에서

$$4a+1=0 \quad \therefore a = -\frac{1}{4}$$

a 의 최솟값은 원의 중심 $(0, 0)$ 과 직선 $y=a(t+3)+1$, 즉

$at - y + 3a + 1 = 0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이 1과 같을 때이므로

$$\frac{|3a+1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} = 1, |3a+1| = \sqrt{a^2+1}$$

양변을 제곱하면

$$9a^2 + 6a + 1 = a^2 + 1$$

$$8a^2 + 6a = 0, 2a(4a+3) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3}{4} \quad (\because a < 0)$$

따라서 실수 a 의 값의 범위는

$$-\frac{3}{4} \leq a \leq -\frac{1}{4}$$

06 답 48

1단계 $\frac{1}{4}k = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k$ 인 경우 방정식의 서로 다른 해의 개수가 2가

되도록 하는 정수 k 의 값 구하기

$$\frac{1}{4}k = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k \text{에서 } k(k-2)=0 \text{이므로 } k=0 \text{ 또는 } k=2$$

(i) $k=0$ 또는 $k=2$ 일 때,

$$\text{방정식 } \left(\sin x - \frac{1}{4}k \right) \left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k \right) = 0 \text{의 서로 다른 해의 개}$$

수는 방정식 $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수와 같다.

방정식 $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수는 $k=0$ 일 때 3이고,

$k=2$ 일 때 2이다.

따라서 방정식 $\left(\sin x - \frac{1}{4}k \right) \left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k \right) = 0$ 의 서로 다른

해의 개수가 2가 되도록 하는 k 의 값은 2이다.

2단계 $\frac{1}{4}k \neq -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k$ 인 경우 방정식의 서로 다른 해의 개수가 2가 되

도록 하는 정수 k 의 값 구하기

(ii) $k \neq 0$ 이고 $k \neq 2$ 일 때,

$$\text{방정식 } \left(\sin x - \frac{1}{4}k \right) \left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k \right) = 0 \text{의 서로 다른 해의 개}$$

수는 방정식 $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수와 방정식

$$\sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k \text{의 서로 다른 해의 개수의 합과 같다.}$$

① 방정식 $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수가 0일 때 $|k| > 4$ 이고,

$|k| > 4$ 일 때 방정식 $\sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수는 0이다.

따라서 방정식 $\left(\sin x - \frac{1}{4}k \right) \left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k \right) = 0$ 의 서로 다른 해의 개수는 0이다.

② 방정식 $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수가 1일 때 $|k|=4$ 이므로

$$k=4 \text{ 또는 } k=-4$$

$$\text{방정식 } \sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k \text{의 서로 다른 해의 개수는 } k=4 \text{일 때}$$

1이고, $k=-4$ 일 때 0이므로 방정식

$$\left(\sin x - \frac{1}{4}k \right) \left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k \right) = 0 \text{의 서로 다른 해의 개수가}$$

2가 되도록 하는 k 의 값은 4이다.

③ 방정식 $\sin x = \frac{1}{4}k$ 의 서로 다른 해의 개수가 2일 때

$$|k| < 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{방정식 } \left(\sin x - \frac{1}{4}k \right) \left(\sin x + \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{4}k \right) = 0 \text{의 서로 다른 해의}$$

개수가 2가 되기 위해서는 방정식 $\sin x = -\frac{1}{4}k^2 + \frac{3}{4}k$ 의 서로 다

른 해의 개수가 0이어야 하므로

$$k < -1, k > 4 \quad \dots\dots \textcircled{c}$$

①, ②을 동시에 만족시키는 정수 k 의 값은 $-3, -2$ 이다.

3단계 모든 정수 k 의 값의 곱 구하기

(i), (ii)에서 구하는 정수 k 는 $-3, -2, 2, 4$ 이므로 모든 정수 k 의 값의 곱은

$$(-3) \times (-2) \times 2 \times 4 = 48$$

07 답 $\frac{5}{2}\pi$

1단계 $\sin a$ 의 값 구하기

$$f(x) = \sin x, g(x) = \frac{25x^2 + 9}{5x} = 5x + \frac{9}{5x} \text{이므로}$$

$$(g \circ f)(x) = 5 \sin x + \frac{9}{5 \sin x}$$

$0 < x < \pi$ 에서 $\sin x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= 5 \sin x + \frac{9}{5 \sin x} \\ &\geq 2\sqrt{5 \sin x \times \frac{9}{5 \sin x}} = 2 \times 3 = 6 \\ &\quad \left(\text{단, 등호는 } 5 \sin x = \frac{9}{5 \sin x} \text{일 때 성립} \right) \end{aligned}$$

즉, $5 \sin x = \frac{9}{5 \sin x}$ 일 때 $(g \circ f)(x)$ 가 최솟값을 가지므로

$$25 \sin^2 x = 9, \sin^2 x = \frac{9}{25}$$

$$\therefore \sin x = \frac{3}{5} \quad (\because \sin x > 0)$$

함수 $(g \circ f)(x)$ 가 $x=a$ 에서 최솟값을 가지므로

$$\sin a = \frac{3}{5}$$

2단계 $f(4\theta) = \frac{\tan a}{\cos a}(\sin a - 1)$ 을 θ 에 대한 방정식으로 나타내기

$$\begin{aligned} \frac{\tan a}{\cos a}(\sin a - 1) &= \frac{\sin a}{\cos^2 a}(\sin a - 1) \\ &= \frac{\sin a}{1 - \sin^2 a}(\sin a - 1) \\ &= \frac{\sin a}{-\sin a - 1} \\ &= \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{3}{5} - 1} = -\frac{3}{8} \end{aligned}$$

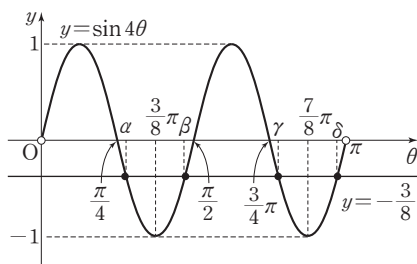
$$\text{즉, } f(4\theta) = -\frac{3}{8} \text{에서}$$

$$\sin 4\theta = -\frac{3}{8}$$

3단계 모든 θ 의 값의 합 구하기

$0 < \theta < \pi$ 이고 함수 $y = \sin 4\theta$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ 이므로 함수

$y = \sin 4\theta$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{3}{8}$ 은 그림과 같다.



함수 $y = \sin 4\theta$ 의 그래프와 직선 $y = -\frac{3}{8}$ 이 만나는 점의 θ 좌표를 작은

것부터 차례로 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 라 하면 사인함수의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{3}{8}\pi, \frac{\gamma + \delta}{2} = \frac{7}{8}\pi$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{3}{4}\pi, \gamma + \delta = \frac{7}{4}\pi$$

따라서 모든 θ 의 값의 합은

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \frac{3}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = \frac{5}{2}\pi$$

08 답 ①

1단계 $f(x) = g\left(\frac{3}{2}\right)$ 을 만족시키는 자연수 a 의 값 구하기

$$g(x) = a^2 \sin \pi x + 2a \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{3}{2}\right) &= a^2 \sin \frac{3}{2}\pi + 2a \\ &= -a^2 + 2a \end{aligned}$$

$$f(x) = |\tan \pi(a^2 x + 2a)| \text{이므로 } f(x) = g\left(\frac{3}{2}\right) \text{에서}$$

$$|\tan \pi(a^2 x + 2a)| = -a^2 + 2a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $|\tan \pi(a^2 x + 2a)| \geq 0$ 이므로 $-a^2 + 2a \geq 0$

$$a^2 - 2a \leq 0, a(a - 2) \leq 0$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 2$$

이때 a 는 자연수이므로

$$a = 1 \text{ 또는 } a = 2$$

2단계 $f(x) = g\left(\frac{3}{2}\right)$ 의 서로 다른 실근의 개수가 짝수가 되는 a 의 값 구하기

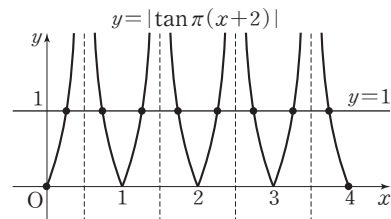
(i) $a = 1$ 일 때,

$$0 \leq x \leq 4a,$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } |\tan \pi(x + 2)| = 1 \quad (0 \leq x \leq 4)$$

함수 $y = \tan \pi(x + 2)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{\pi} = 1$ 이고, $y = |\tan \pi(x + 2)|$ 의

그래프는 $y = \tan \pi x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 후 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $y = |\tan \pi(x + 2)|$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 은 그림과 같다.



따라서 방정식 $|\tan \pi(x + 2)| = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는 8이다.

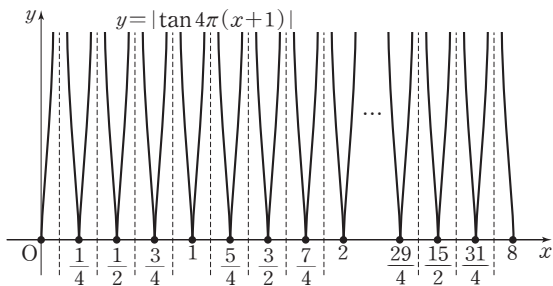
(ii) $a = 2$ 일 때,

$$0 \leq x \leq 4a,$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } |\tan 4\pi(x + 1)| = 0 \quad (0 \leq x \leq 8)$$

함수 $y = \tan 4\pi(x + 1)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{4\pi} = \frac{1}{4}$ 이고, 함수

$y = |\tan 4\pi(x + 1)|$ 의 그래프는 $y = \tan 4\pi x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 후 $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 $0 \leq x \leq 8$ 에서 함수 $y = |\tan 4\pi(x + 1)|$ 의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y = \tan |4\pi(x+1)|$ 의 그래프는 x 축과 $x=0$ 일 때 한 점에서 만나고, $0 < x \leq 1$, $1 < x \leq 2$, ..., $7 < x \leq 8$ 일 때 각각 네 점에서 만나므로 방정식 $|\tan 4\pi(x+1)| = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 $1 + 4 \times 8 = 33$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

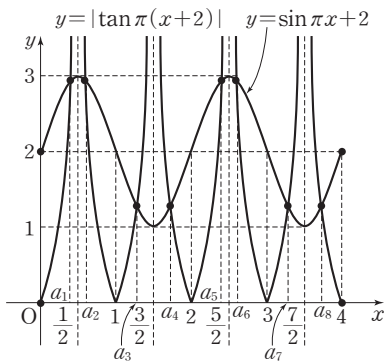
(i), (ii)에서 $a=1$

3단계 $0 \leq x \leq 4a$ 일 때, $f(x) = g(x)$ 의 서로 다른 실근의 합 구하기

$a=1$ 일 때 $f(x) = |\tan \pi(x+2)|$, $g(x) = \sin \pi x + 2$ 이므로 $0 \leq x \leq 4$ 일 때 방정식 $|\tan \pi(x+2)| = \sin \pi x + 2$ 의 해를 구하면 된다.

이때 함수 $y = \sin \pi x + 2$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi} = 2$ 이고, 최댓값은 3, 최솟값은 1이다.

따라서 $0 \leq x \leq 4$ 에서 두 함수 $y = |\tan \pi(x+2)|$, $y = \sin \pi x + 2$ 의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $y = |\tan \pi(x+2)|$, $y = \sin \pi x + 2$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표를 작은 것부터 차례로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_8$ 이라 하면 사인함수의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{1}{2}, \frac{a_3 + a_4}{2} = \frac{3}{2}, \frac{a_5 + a_6}{2} = \frac{5}{2}, \frac{a_7 + a_8}{2} = \frac{7}{2}$$

$$\therefore a_1 + a_2 = 1, a_3 + a_4 = 3, a_5 + a_6 = 5, a_7 + a_8 = 7$$

따라서 서로 다른 실근의 합은

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

09 답 ②

1단계 함수 $h(a)$ 의 의미 파악하기

$f(x) = g(x)$ 에서

$$4 \sin^2 x = -4 \cos x + a$$

$$4(1 - \cos^2 x) = -4 \cos x + a$$

$$\therefore a = -4 \cos^2 x + 4 \cos x + 4$$

$\cos x = t$ 로 놓으면 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

$$-1 \leq t \leq 1$$

따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $y = -4t^2 + 4t + 4$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 만나는 점의 t 좌표를 s 라 할 때, $\cos x = s$ 를 만족시키는 x 의 값의 개수가 $h(a)$ 이다.

2단계 함수 $h(a)$ 구하기

$$y = -4t^2 + 4t + 4 = -4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 5$$

$-1 \leq t \leq 1$ 에서 함수 $y = -4t^2 + 4t + 4$ 의 그래프는 그림과 같으므로 함수

$y = -4t^2 + 4t + 4$ 의 최댓값은 5, 최솟값은 -4이다.

(i) $a < -4$ 또는 $a > 5$ 일 때,

함수 $y = -4t^2 + 4t + 4$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 는 만나지 않는다.

$$\therefore h(a) = 0$$

(ii) $a = -4$ 일 때,

$t = -1$ 이므로 $\cos x = -1$ 에서

$$x = \pi \quad (\because 0 \leq x < 2\pi)$$

$$\therefore h(a) = 1$$

(iii) $-4 < a < 4$ 일 때,

함수 $y = -4t^2 + 4t + 4$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 는 한 점에서 만난다.

이 점의 t 좌표를 a 라 하면 $-1 < a < 0$ 이고, $\cos x = a$ 를 만족시키는 x 의 값 α_1 , α_2 ($\alpha_1 < \alpha_2$)가 존재한다.

$$\therefore h(a) = 2$$

(iv) $a = 4$ 일 때,

$t = 0$ 또는 $t = 1$ 이므로

$\cos x = 0$ 또는 $\cos x = 1$ 에서

$$x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3\pi}{2} \quad (\because 0 \leq x < 2\pi)$$

$$\therefore h(a) = 3$$

(v) $4 < a < 5$ 일 때,

함수 $y = -4t^2 + 4t + 4$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 는 두 점에서 만난다.

이 점의 t 좌표를 β_1, β_2 라 하면

$0 < \beta_1 < \frac{1}{2} < \beta_2 < 1$ 이고, $\cos x = \beta_1$ 을 만

족시키는 x 의 값 γ_1, γ_2 ($\gamma_1 < \gamma_2$), $\cos x = \beta_2$ 를 만족시키는 x 의 값 γ_3, γ_4 ($\gamma_3 < \gamma_4$)가 존재한다.

$$\therefore h(a) = 4$$

(vi) $a = 5$ 일 때,

$t = \frac{1}{2}$ 이므로 $\cos x = \frac{1}{2}$ 에서

$$x = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{3} \quad (\because 0 \leq x < 2\pi)$$

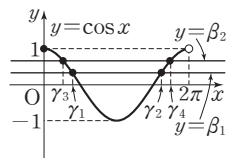
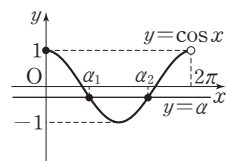
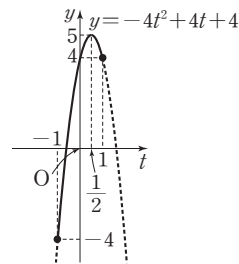
$$\therefore h(a) = 2$$

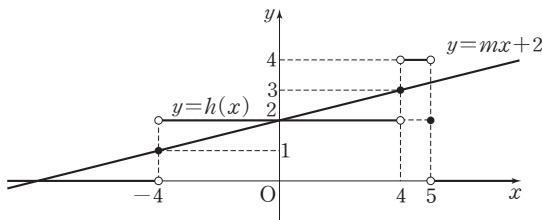
(i)~(vi)에서

$$h(a) = \begin{cases} 0 & (a < -4 \text{ 또는 } a > 5) \\ 1 & (a = -4) \\ 2 & (-4 < a < 4 \text{ 또는 } a = 5) \\ 3 & (a = 4) \\ 4 & (4 < a < 5) \end{cases}$$

3단계 상수 m 의 값 구하기

따라서 직선 $y = mx + 2$ 는 m 의 값에 관계없이 항상 점 $(0, 2)$ 를 지나므로 함수 $y = h(x)$ 의 그래프와 직선 $y = mx + 2$ 가 네 점에서 만나려면 그림과 같이 직선 $y = mx + 2$ 가 두 점 $(-4, 1), (4, 3)$ 을 지나야 한다.





따라서 $y=mx+2$ 에 $x=-4$, $y=1$ 을 대입하면

$$1 = -4m + 2 \quad \therefore m = \frac{1}{4}$$

idea 10 답 $-\frac{1}{8}$

1단계 $\sin(\pi \cos \alpha)$, $\cos \pi\left(\frac{1}{2} - \sin \beta\right)$ 의 값 구하기

$$-\pi \leq \alpha \leq \pi \text{에서 } -1 \leq \cos \alpha \leq 1 \text{이므로}$$

$$-\pi \leq \pi \cos \alpha \leq \pi$$

$$-1 \leq \sin(\pi \cos \alpha) \leq 1$$

$$\therefore -5 \leq 5 \sin(\pi \cos \alpha) \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$0 \leq \beta \leq \pi \text{에서 } 0 \leq \sin \beta \leq 1 \text{이므로}$$

$$-1 \leq -\sin \beta \leq 0$$

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \sin \beta \leq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \pi\left(\frac{1}{2} - \sin \beta\right) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \cos \pi\left(\frac{1}{2} - \sin \beta\right) \leq 1$$

$$\therefore 0 \leq 3 \cos \pi\left(\frac{1}{2} - \sin \beta\right) \leq 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$-5 \leq 5 \sin(\pi \cos \alpha) + 3 \cos \pi\left(\frac{1}{2} - \sin \beta\right) \leq 8$$

$$\text{그런데 } 5 \sin(\pi \cos \alpha) + 3 \cos \pi\left(\frac{1}{2} - \sin \beta\right) \geq 8 \text{이므로}$$

$$5 \sin(\pi \cos \alpha) + 3 \cos \pi\left(\frac{1}{2} - \sin \beta\right) = 8$$

$$\therefore \sin(\pi \cos \alpha) = 1, \cos \pi\left(\frac{1}{2} - \sin \beta\right) = 1$$

2단계 α , β 의 값 구하기

$$\sin(\pi \cos \alpha) = 1 \text{에서 } -\pi \leq \pi \cos \alpha \leq \pi \text{이므로}$$

$$\pi \cos \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

$$-\pi \leq \alpha \leq \pi \text{이므로}$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \pi\left(\frac{1}{2} - \sin \beta\right) = 1 \text{에서 } -\frac{\pi}{2} \leq \pi\left(\frac{1}{2} - \sin \beta\right) \leq \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\pi\left(\frac{1}{2} - \sin \beta\right) = 0 \quad \therefore \sin \beta = \frac{1}{2}$$

$$0 \leq \beta \leq \pi \text{이므로}$$

$$\beta = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \beta = \frac{5}{6}\pi$$

3단계 $\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ 의 값이 될 수 있는 모든 값의 곱 구하기

$$(i) \alpha = -\frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{6} \text{일 때,}$$

$$\alpha + \beta = -\frac{\pi}{6}, \alpha - \beta = -\frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$$

$$(ii) \alpha = -\frac{\pi}{3}, \beta = \frac{5}{6}\pi \text{일 때,}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \alpha - \beta = -\frac{7}{6}\pi \text{이므로}$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(iii) \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{6} \text{일 때,}$$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}, \alpha - \beta = \frac{\pi}{6} \text{이므로}$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$(iv) \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{5}{6}\pi \text{일 때,}$$

$$\alpha + \beta = \frac{7}{6}\pi, \alpha - \beta = -\frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$$

(i)~(iv)에서 $\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$ 의 값이 될 수 있는 모든 값의 곱은

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

11 답 59

1단계 $h(c) = h(c + \pi) = \frac{1}{2}$ 을 만족시키는 c 의 값 구하기

$f(x) = \sin x$, $g(x) = a \cos x + b$ 이므로 함수 $h(x)$ 는

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & (f(x) \leq g(x)) \\ f(x) & (f(x) > g(x)) \end{cases}$$

④에서 $0 < c < \frac{\pi}{2}$ 인 어떤 실수 c 에 대하여 $h(c) = h(c + \pi) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$f(c) = \frac{1}{2} \text{ 또는 } g(c) = \frac{1}{2} \text{이고 } f(c + \pi) = \frac{1}{2} \text{ 또는 } g(c + \pi) = \frac{1}{2} \text{이다.}$$

한편 $0 < c < \frac{\pi}{2}$ 이면 $f(c + \pi) = \sin(c + \pi) = -\sin c < 0$ 이므로

$$f(c + \pi) \neq \frac{1}{2} \text{이다. } \therefore g(c + \pi) = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $x = \pi$ 에 대하여 대칭이므로

$$g(\pi - c) = \frac{1}{2} \text{이다.} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

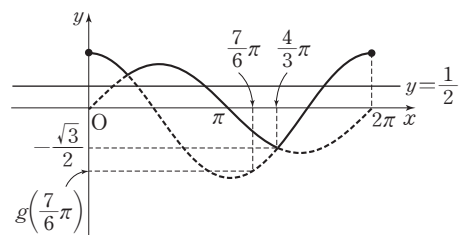
$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 방정식 $g(x) = \frac{1}{2}$ 의 실근의 개수는 최대 2이므로 ①, ②

에서 $g(c) \neq \frac{1}{2}$ 이다. 따라서 $f(c) = \frac{1}{2}$ 이고 $\sin c = \frac{1}{2}$ 에서 $c = \frac{\pi}{6}$ 이다.

$$\textcircled{1} \text{에서 } g\left(\frac{7}{6}\pi\right) = \frac{1}{2} \text{이다.} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

2단계 a 의 값에 따라 함수 $y = g(x)$ 의 그래프를 그린 후, 함수 $g(x)$ 구하기

(i) $a > 0$ 일 때,



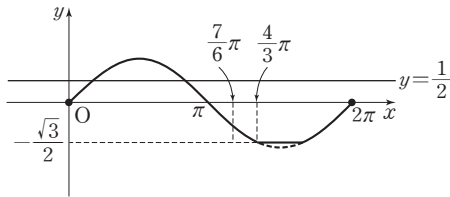
함수 $h(x)$ 의 최솟값이 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이 되기 위하여 함수 $y = g(x)$ 의 그래

프가 점 $\left(\frac{4}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 을 지나야 한다.

$$g\left(\frac{4}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{이고 } a > 0 \text{ 일 때 } g\left(\frac{4}{3}\pi\right) > g\left(\frac{7}{6}\pi\right) \text{이므로}$$

$$g\left(\frac{7}{6}\pi\right) < -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{이다. 이는 ㉔에 모순이다.}$$

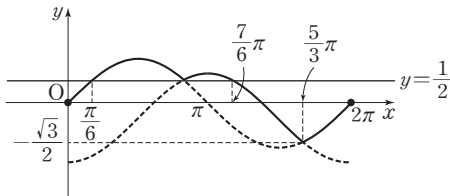
(ii) $a=0$ 일 때,



함수 $h(x)$ 의 최솟값이 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이 되기 위하여 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{4}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 을 지나야 하므로 $g(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.

함수 $g(x)$ 가 상수함수이므로 $g\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다. 이는 ㉔에 모순이다.

(iii) $a < 0$ 일 때,



함수 $h(x)$ 의 최솟값이 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이 되기 위하여 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{5}{3}\pi, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 을 지나야 한다.

$$\text{즉, } g\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{이다.} \quad \dots\dots \text{㉔}$$

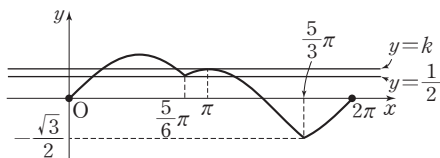
$$\text{㉔, ㉔에서 연립방정식 } \begin{cases} a \cos \frac{7}{6}\pi + b = \frac{1}{2} \\ a \cos \frac{5}{3}\pi + b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{을 풀면}$$

$$a = -1, b = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{따라서 } g(x) = -\cos x + \frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{이다.}$$

3단계 $a + 20\left(\frac{k}{b}\right)^2$ 의 값 구하기

(i), (ii), (iii)에서 방정식 $h(x) = k$ ($k > \frac{1}{2}$)가 서로 다른 세 실근을 가지는 경우는 그림과 같이 직선 $y=k$ 가 점 $(\pi, g(\pi))$ 를 지날 때이다.



$$g(\pi) = -\cos \pi + \frac{1-\sqrt{3}}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}, \text{ 즉 } k = \frac{3-\sqrt{3}}{2} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } \frac{k}{b} = \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}{\frac{1-\sqrt{3}}{2}} = -\sqrt{3} \text{이므로}$$

$$a + 20\left(\frac{k}{b}\right)^2 = -1 + 20 \times 3 = 59$$

01 $\frac{16}{25}$

02 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

03 ②

04 $2\sqrt{6}$

05 $20\sqrt{2} \text{ m}$

06 ⑤

07 ①

08 71

09 ②

10 $\frac{40\sqrt{3}}{9}$

11 $\frac{7\sqrt{15}}{4}$

01 답 $\frac{16}{25}$

두 삼각형 ABC, ABD의 외접원이 같으므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin(\angle ABC)} = \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ABD)}$$

$$\text{즉, } \frac{4}{\sin(\angle ABC)} = \frac{5}{\frac{4}{5}} \text{이므로 } \sin(\angle ABC) = \frac{16}{25}$$

02 답 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = \frac{\overline{AC}}{\sin 30^\circ} \text{이므로 } \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{\overline{AC}}{\frac{1}{2}} \quad \therefore \overline{AC} = \frac{3}{2}$$

직각삼각형 ABH에서 $\angle ABH = 30^\circ$ 이므로

$$\overline{AB} : \overline{AH} = 2 : 1 \text{에서 } 2 : \overline{AH} = 2 : 1 \quad \therefore \overline{AH} = 1$$

따라서 직각삼각형 AHC에서

$$\overline{CH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

다른 풀이

직각삼각형 ABH에서 $\angle ABH = 30^\circ$ 이므로

$$\overline{AB} : \overline{AH} = 2 : 1 \text{에서 } 2 : \overline{AH} = 2 : 1 \quad \therefore \overline{AH} = 1$$

$$\text{직각삼각형 AHC에서 } \overline{AC} = \frac{\overline{AH}}{\sin C} \text{이므로 } \overline{AC} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore \overline{CH} = \sqrt{\overline{AC}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

03 답 ②

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

$$\therefore \frac{\sin A \sin C}{\sin^2 B} = \frac{\frac{a}{2R} \times \frac{c}{2R}}{\left(\frac{b}{2R}\right)^2} = \frac{ac}{b^2}$$

$$ab : ca = 8 : 6 \text{에서 } b : c = 8 : 6$$

$$8c = 6b \quad \therefore c = \frac{3}{4}b$$

$$bc : ca = 9 : 6 \text{에서 } b : a = 9 : 6$$

$$9a = 6b \quad \therefore a = \frac{2}{3}b$$

$$\therefore \frac{\sin A \sin C}{\sin^2 B} = \frac{ac}{b^2} = \frac{\frac{2}{3}b \times \frac{3}{4}b}{b^2} = \frac{1}{2}$$

04 답 $2\sqrt{6}$

$$5c^2 = 5a^2 + 2ab + 5b^2 \text{에서}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 + \frac{2}{5}ab \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{2}{5}ab = -2ab \cos C$$

$$\therefore \cos C = -\frac{1}{5} \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

$$\text{이때 } \cos C < 0 \text{이므로 } \frac{\pi}{2} < C < \pi$$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

삼각형 ABC에서 $A+B+C=\pi$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan(A+B) &= \tan(\pi - C) = -\tan C \\ &= -\frac{\sin C}{\cos C} = -\frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{-\frac{1}{5}} \\ &= 2\sqrt{6} \quad \dots\dots \text{배점 40\%} \end{aligned}$$

05 답 $20\sqrt{2} \text{ m}$

$PQ = x \text{ m}$ 라 하면

$$\text{직각삼각형 PAQ에서 } \overline{PA} = \frac{\overline{PQ}}{\sin 45^\circ} = \sqrt{2}x$$

$$\text{직각삼각형 PQB에서 } \overline{PB} = \frac{\overline{PQ}}{\sin 30^\circ} = 2x$$

삼각형 PAB에서 코사인법칙에 의하여

$$40^2 = (\sqrt{2}x)^2 + (2x)^2 - 2 \times \sqrt{2}x \times 2x \times \cos 45^\circ$$

$$1600 = 6x^2 - 4\sqrt{2}x^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1600 = 2x^2, x^2 = 800$$

$$\therefore x = 20\sqrt{2} \text{ (m)}$$

따라서 건물의 높이 PQ는 $20\sqrt{2} \text{ m}$ 이다.

06 답 ⑤

$$\overline{AD} = \overline{AB} = 6 \text{이므로}$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{6^2 + 6^2 - (\sqrt{15})^2}{2 \times 6 \times 6} = \frac{19}{24}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \frac{19}{24} = 41$$

$$\therefore \overline{BC} = \sqrt{41} \quad (\because \overline{BC} > 0)$$

07 답 ①

$$\angle BAC = \angle CAD = \theta \text{라 하자.}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= 5^2 + (3\sqrt{5})^2 - 2 \times 5 \times 3\sqrt{5} \times \cos \theta \\ &= 70 - 30\sqrt{5} \cos \theta \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{CD}^2 &= 7^2 + (3\sqrt{5})^2 - 2 \times 7 \times 3\sqrt{5} \times \cos \theta \\ &= 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta \end{aligned}$$

$$\text{한편 } \angle BAC = \angle CAD \text{이므로 } \overline{BC} = \overline{CD}$$

$$\text{즉, } \overline{BC}^2 = \overline{CD}^2 \text{이므로}$$

$$70 - 30\sqrt{5} \cos \theta = 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta$$

$$12\sqrt{5} \cos \theta = 24$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

이를 ①에 대입하면

$$\overline{BC}^2 = 70 - 30\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 10$$

$$\therefore \overline{BC} = \sqrt{10} \quad (\because \overline{BC} > 0)$$

$$\text{한편 } \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{이므로}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

이때 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에

$$\text{의하여 } \frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = 2R \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2R \quad \therefore R = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

08 답 71

삼각형 ABC에서 $\overline{AB} : \overline{AC} = 2 : 1$, $\overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 1$ 이므로

$\overline{AB} = 2a$, $\overline{AC} = a$, $\overline{BD} = 3b$, $\overline{DC} = b$ ($a > 0$, $b > 0$)라 하자.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$(2a)^2 = (\sqrt{2})^2 + (3b)^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 3b \times \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$4a^2 = 9b^2 - 3b + 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\angle ADC = \pi - \theta$ 이므로 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = (\sqrt{2})^2 + b^2 - 2 \times \sqrt{2} \times b \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \quad (\because \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta)$$

$$a^2 = b^2 + b + 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②를 ①에 대입하면

$$4(b^2 + b + 2) = 9b^2 - 3b + 2$$

$$4b^2 + 4b + 8 = 9b^2 - 3b + 2$$

$$5b^2 - 7b - 6 = 0$$

$$(5b+3)(b-2) = 0$$

$$\therefore b = 2 \quad (\because b > 0)$$

이를 ②에 대입하면

$$a^2 = 2^2 + 2 + 2 = 8$$

$$\therefore a = 2\sqrt{2} \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore \overline{AB} = 4\sqrt{2}$$

한편 θ 는 예각이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

이때 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에

$$\text{의하여 } \frac{\overline{AB}}{\sin \theta} = 2R \text{이므로}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{14}}{4}} = 2R \quad \therefore R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

$$\text{따라서 삼각형 ABD의 외접원의 넓이는 } \pi \times \left(\frac{8\sqrt{7}}{7}\right)^2 = \frac{64}{7}\pi \text{이므로}$$

$$p = 7, q = 64$$

$$\therefore p + q = 71$$

09 답 ②

$A+B+C=\pi$ 이므로

$$\sin(A+C)=\sin(\pi-B)=\sin B$$

$$2\cos A \sin(A+C)=\sin C \text{에서}$$

$$2\cos A \sin B=\sin C$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$2 \times \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \times \frac{b}{2R} = \frac{c}{2R}$$

$$b^2+c^2-a^2=c^2, a^2=b^2$$

$$\therefore a=b (\because a>0, b>0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

10 답 $\frac{40\sqrt{3}}{9}$

$$\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ$$

$$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2} \times 10 \times 8 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 10 \times \overline{AD} \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times 8 \times \sin 30^\circ$$

$$40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\overline{AD} \times \frac{1}{2} + 4\overline{AD} \times \frac{1}{2}$$

$$20\sqrt{3} = \frac{9}{2}\overline{AD} \quad \therefore \overline{AD} = \frac{40\sqrt{3}}{9}$$

11 답 $\frac{7\sqrt{15}}{4}$

$\angle BAD = \theta (0 < \theta < \pi)$ 라 하면 사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$$\angle BAD + \angle DCB = \pi$$

$$\therefore \angle DCB = \pi - \theta$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \cos \theta \\ &= 20 - 16 \cos \theta \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos(\pi - \theta) \\ &= 13 + 12 \cos \theta \quad \dots\dots ㉡ \end{aligned}$$

$$㉠, ㉡ \text{에서 } 20 - 16 \cos \theta = 13 + 12 \cos \theta$$

$$28 \cos \theta = 7 \quad \therefore \cos \theta = \frac{1}{4}$$

이때 $0 < \theta < \pi$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \sin \theta + \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \times \sin(\pi - \theta)$$

$$= 4 \sin \theta + 3 \sin \theta$$

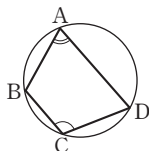
$$= 7 \sin \theta$$

$$= 7 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{7\sqrt{15}}{4}$$

개념 NOTE

원에 내접하는 사각형에서 마주 보는 두 내각의 크기의 합은 π 이다.

$$\Rightarrow \angle BAD + \angle BCD = \pi$$



STEP 2 고난도 문제

| 80~84쪽

01 $\frac{40}{13}$

02 ①

03 $12\sqrt{2}$

04 17

05 $8+4\sqrt{2}$

06 ④

07 2

08 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

09 $\sqrt{34}-\sqrt{2}$

10 ②

11 ⑤

12 ④

13 2

14 $\sqrt{15}$

15 $\frac{9\sqrt{15}}{5}$

16 ①

17 $6+4\sqrt{2}$

18 $\frac{23}{27}$

19 $6\sqrt{2}$

20 $4\sqrt{6}+6\sqrt{2}$

21 30

22 24π

23 ③

24 ⑤

25 $\frac{5}{2}$

01 답 $\frac{40}{13}$

$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$ 이므로 삼각형 ABC는 $\angle B = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이다.

$\angle CQP = \angle CRP = \frac{\pi}{2}$ 이므로 그림과 같이 사각형 CQPR는 선분 CP를 지름으로 하는 원에 내접한다.

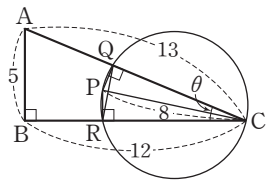
삼각형 CQR에서 $\angle QCR = \theta$ 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{QR}}{\sin \theta} = 8 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 직각삼각형 ABC에서 $\sin \theta = \frac{5}{13}$

이를 ㉠에 대입하면 $\frac{\overline{QR}}{\frac{5}{13}} = 8$

$$\therefore \overline{QR} = \frac{40}{13}$$



02 답 ①

삼각형 ABC에 내접하는 원이 세 선분

CA, AB, BC와 만나는 점을 각각 P, Q, R라 하자.

$$\overline{RB} = \overline{OR} = \overline{OQ} = 3 \text{이므로}$$

$$\overline{DR} = \overline{DB} - \overline{RB} = 4 - 3 = 1$$

직각삼각형 DOR에서

$$\overline{DO} = \sqrt{\overline{OR}^2 + \overline{DR}^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$\therefore \sin(\angle DOR) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

한편 $\triangle DAB \sim \triangle DOR$ (AA 닮음)이므로

$$\angle DAB = \angle DOR \quad \dots\dots ㉠$$

또 $\triangle OAQ \sim \triangle DOR$ (AA 닮음)이므로

$$\overline{OQ} : \overline{DR} = \overline{AQ} : \overline{OR} \text{에서 } 3 : 1 = \overline{AQ} : 3 \quad \therefore \overline{AQ} = 9$$

이때 점 O가 삼각형 ABC의 내심이므로

$$\overline{AP} = \overline{AQ} = 9$$

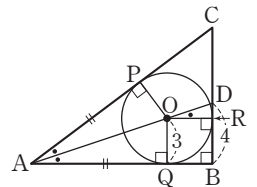
$$\angle CAD = \angle DAB \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\angle CAD = \angle DOR$ 이므로

$$\sin(\angle CAD) = \sin(\angle DOR) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$\overline{CD} = x$ 라 하면

$$\overline{CP} = \overline{CR} = \overline{CD} + \overline{DR} = x + 1 \text{이고,}$$



$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{AQ} + \overline{QB} = 9 + 3 = 12, \quad \overline{AC} = \overline{AP} + \overline{CP} = 9 + (x+1) = x+10, \\ \overline{CB} &= \overline{CD} + \overline{DB} = x+4 \text{이므로 직각삼각형 ABC에서} \\ (x+10)^2 &= 12^2 + (x+4)^2 \\ x^2 + 20x + 100 &= x^2 + 8x + 160 \\ 12x &= 60 \quad \therefore x = 5\end{aligned}$$

즉, $\overline{CD} = 5$ 이므로 삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$$\text{사인법칙에 의하여 } \frac{\overline{CD}}{\sin(\angle CAD)} = 2R \text{이므로}$$

$$\frac{5}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = 2R \quad \therefore R = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

따라서 삼각형 ADC의 외접원의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{5\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{125}{2}\pi$$

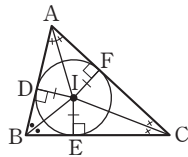
개념 NOTE

(1) 삼각형의 내접원의 중심(내심)은 세 내각의 이등분선의 교점이다.

$$\Rightarrow \angle IAD = \angle IAF, \angle IBD = \angle IBE, \angle ICE = \angle ICF$$

(2) 내심에서 삼각형의 세 변에 이르는 거리는 내접원의 반지름의 길이와 같다.

$$\Rightarrow \overline{ID} = \overline{IE} = \overline{IF} = (\text{내접원의 반지름의 길이})$$



03 답 12√2

삼각형 ABC는 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 인 이등변삼각형이므로 선분 BC의 중점을 D라 하면 선분 AD는 변 BC의 수직이등분선이고 두 점 O, I는 선분 AD 위에 있다.

$\overline{AB} = 3x, \overline{BC} = 2x, \overline{CA} = 3x$ 라 하면 직각삼각형 ABD에서

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2} = \sqrt{(3x)^2 - x^2} = 2\sqrt{2}x$$

이때 점 I는 삼각형 ABC의 내심이므로 선분 BI는 $\angle ABD$ 의 이등분선이다.

$$\text{즉, } \overline{AI} : \overline{ID} = \overline{AB} : \overline{BD} = 3 : 1 \text{이므로 } \overline{ID} = \frac{1}{4}\overline{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

한편 직각삼각형 ABD에서 $\sin B = \frac{2\sqrt{2}x}{3x} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이고, 이때 삼각형

ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CA}}{\sin B} = 2R \text{이므로 } \frac{3x}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 2R \quad \therefore R = \frac{9\sqrt{2}}{8}x$$

$$\text{즉, } \overline{AO} = \frac{9\sqrt{2}}{8}x \text{이므로}$$

$$\overline{OI} = \overline{AD} - \overline{ID} - \overline{AO} = 2\sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{9\sqrt{2}}{8}x = \frac{3\sqrt{2}}{8}x$$

$$\text{따라서 } \frac{3\sqrt{2}}{8}x = 3 \text{이므로 } x = 4\sqrt{2}$$

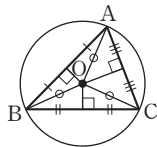
$$\therefore \overline{AB} = 3x = 12\sqrt{2}$$

개념 NOTE

(1) 삼각형 ABC의 외접원의 중심(외심)은 세 변의 수직이등분선의 교점이다.

(2) 외심에서 삼각형의 세 꼭짓점에 이르는 거리는 외접원의 반지름의 길이와 같다.

$$\Rightarrow \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = (\text{외접원의 반지름의 길이})$$



04 답 17

$$\angle CDF = \theta \text{라 하면 } \angle BDE = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\overline{AE} = \overline{DE} \text{이므로 } \overline{BE} = 1 - \overline{AE} = 1 - \overline{DE}$$

$$\overline{AF} = \overline{DF} \text{이므로 } \overline{CF} = 1 - \overline{AF} = 1 - \overline{DF}$$

삼각형 BDE와 삼각형 DCF의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\text{삼각형 BDE에서 } \frac{1 - \overline{DE}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\overline{DE}}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2r_1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{삼각형 DCF에서 } \frac{1 - \overline{DF}}{\sin \theta} = \frac{\overline{DF}}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2r_2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{이때 } r_1 = 2r_2 \text{이므로 } \overline{DF} = x \text{라 하면 } \overline{DE} = 2\overline{DF} = 2x$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{1 - 2x}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{2x}{\sin \frac{\pi}{4}} \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 2x) = 2x \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 2x) = 2x \cos \theta$$

$$\text{양변을 제곱하여 정리하면 } (1 - 2x)^2 = 8x^2 \cos^2 \theta \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{에서 } \frac{1 - x}{\sin \theta} = \frac{x}{\sin \frac{\pi}{4}} \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - x) = x \sin \theta$$

$$\text{양변을 제곱하여 정리하면 } (1 - x)^2 = 2x^2 \sin^2 \theta \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} + 4 \times \textcircled{4} \text{을 하면}$$

$$(1 - 2x)^2 + 4(1 - x)^2 = 8x^2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$$

$$(1 - 2x)^2 + 4(1 - x)^2 = 8x^2, \quad 8x^2 - 12x + 5 = 8x^2$$

$$-12x + 5 = 0 \quad \therefore x = \frac{5}{12}$$

$$\text{따라서 } \overline{DF} = \frac{5}{12} \text{이므로 } p = 12, q = 5$$

$$\therefore p + q = 17$$

다른 풀이

$$\angle AED = \theta \text{라 하면 } \angle AFD = \pi - \theta, \angle BED = \pi - \theta, \angle CFD = \theta$$

삼각형 BDE와 삼각형 DCF의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r_1, r_2 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\text{삼각형 BDE에서 } \frac{\overline{BD}}{\sin(\pi - \theta)} &= \frac{\overline{BD}}{\sin \theta} = 2r_1 \\ \therefore \overline{BD} &= 2r_1 \sin \theta \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{삼각형 DCF에서 } \frac{\overline{CD}}{\sin \theta} &= 2r_2 \\ \therefore \overline{CD} &= 2r_2 \sin \theta \quad \dots\dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \overline{BD} : \overline{CD} = r_1 : r_2 = 2 : 1$$

$$\text{이때 } \overline{AB} = \overline{AC} = 1 \text{이고, } \angle BAC = \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \overline{BC} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{CD} = \frac{1}{3}\overline{BC} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\overline{DF} = x \text{라 하면 } \overline{CF} = 1 - x \text{이므로}$$

삼각형 DCF에서 코사인법칙에 의하여

$$x^2 = (1 - x)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 2 \times (1 - x) \times \frac{\sqrt{2}}{3} \times \cos \frac{\pi}{4} \rightarrow \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x^2 = x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{9} - \frac{4}{3}x + \frac{5}{9} = 0 \quad \therefore x = \frac{5}{12}$$

$$\text{따라서 } \overline{DF} = \frac{5}{12} \text{이므로 } p = 12, q = 5$$

$$\therefore p + q = 17$$

05 답 8+4√2

점 R를 선분 OA에 대하여 대칭이동한 점을 R', 선분 OB에 대하여 대칭이동한 점을 R''이라 하면

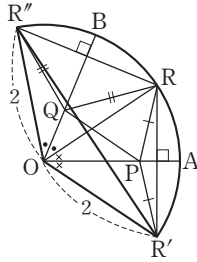
$$\begin{aligned} l &= \overline{RP} + \overline{PQ} + \overline{QR} \\ &= \overline{R'P} + \overline{PQ} + \overline{QR''} \\ &\geq \overline{R'R''} \end{aligned}$$

이때 $\angle R'OR'' = 2\angle AOB = \frac{3}{4}\pi$,

$\overline{OR'} = \overline{OR''} = 2$ 이므로 삼각형 R'R''O에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{R'R''}^2 &= 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos \frac{3}{4}\pi \\ &= 8 - 8 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow \cos \frac{3}{4}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 8 + 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 l의 최솟값은 8+4√2이다.



06 답 ④

그림에서 $\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OE} = 1$ 이고,

$\angle COE = \frac{\pi}{2}$ 이므로 직각삼각형 COE에서

$$\overline{CE} = \sqrt{2}$$

사각형 COED에서

$$\angle OCD + \angle CDE + \angle OED = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$$

이때 $\angle OCD = \angle ODC$, $\angle ODE = \angle OED$ 에서
 $\angle OCD + \angle OED = \angle CDE$ 이므로

$$2\angle CDE = \frac{3}{2}\pi \quad \therefore \angle CDE = \frac{3}{4}\pi$$

한편 $\overline{CD} : \overline{DE} = 1 : \sqrt{2}$ 이므로

$\overline{CD} = a$, $\overline{DE} = \sqrt{2}a$ ($a > 0$)라 하면

삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{CE}^2 &= a^2 + (\sqrt{2}a)^2 - 2 \times a \times \sqrt{2}a \times \cos \frac{3}{4}\pi \\ &= 3a^2 - 2\sqrt{2}a^2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5a^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{CE} = \sqrt{5}a \quad (\because \overline{CE} > 0)$$

$$\text{즉, } \sqrt{5}a = \sqrt{2} \text{이므로 } a = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\therefore \overline{EB} = \overline{DE} = \sqrt{2}a = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$\angle OBE = \theta$ 라 하고, 점 O에서 선분 EB에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overline{BH}}{\overline{OB}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{EB}}{\overline{OB}} = \frac{1}{2} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

다른 풀이

$\triangle OBE$ 와 $\triangle ODE$ 에서

$$\overline{OB} = \overline{OD}, \overline{EB} = \overline{ED},$$

$\overline{OE}$ 는 공통이므로

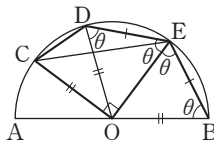
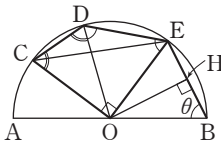
$\triangle OBE \equiv \triangle ODE$ (SSS 합동)

$\angle OBE = \theta$ 라 하면

$\angle OEB = \angle ODE = \angle OED = \angle OBE = \theta$ 이므로

$$\angle EOB = \angle EOD = \pi - 2\theta$$

$$\therefore \angle COD = \frac{\pi}{2} - \angle EOD = \frac{\pi}{2} - (\pi - 2\theta) = 2\theta - \frac{\pi}{2}$$



또 삼각형 COD에서

$$\angle ODC = \frac{1}{2}(\pi - \angle COD) = \frac{1}{2}\left\{\pi - \left(2\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right\} = \frac{3}{4}\pi - \theta \text{이므로}$$

$$\angle CDE = \angle ODC + \angle ODE = \left(\frac{3}{4}\pi - \theta\right) + \theta = \frac{3}{4}\pi$$

한편 $\overline{OC} = \overline{OE} = 1$ 이고, $\angle COE = \frac{\pi}{2}$ 이므로

직각삼각형 COE에서 $\overline{CE} = \sqrt{2}$

이때 $\overline{CD} : \overline{DE} = 1 : \sqrt{2}$ 이므로

$\overline{CD} = a$, $\overline{DE} = \sqrt{2}a$ ($a > 0$)라 하면

삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{CE}^2 &= a^2 + (\sqrt{2}a)^2 - 2 \times a \times \sqrt{2}a \times \cos \frac{3}{4}\pi \\ &= 3a^2 - 2\sqrt{2}a^2 \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 5a^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{CE} = \sqrt{5}a \quad (\because \overline{CE} > 0)$$

$$\text{즉, } \sqrt{5}a = \sqrt{2} \text{이므로 } a = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

$$\text{따라서 } \overline{EB} = \overline{DE} = \sqrt{2}a = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{이므로}$$

삼각형 OBE에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{1^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 1^2}{2 \times 1 \times \frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

07 답 2

$\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$ 라 하고, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름을 R라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{a}{2R}}{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{abc}{R(b^2 + c^2 - a^2)}$$

$$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\frac{b}{2R}}{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}} = \frac{abc}{R(a^2 + c^2 - b^2)}$$

$$\tan C = \frac{\sin C}{\cos C} = \frac{\frac{c}{2R}}{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}} = \frac{abc}{R(a^2 + b^2 - c^2)}$$

$$\frac{\tan B}{\tan A} = 9 \text{에서 } \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + c^2 - b^2} = 9 \text{이므로}$$

$$9(a^2 + c^2 - b^2) = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\therefore 5a^2 - 5b^2 + 4c^2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{\tan C}{\tan A} = \frac{5}{3} \text{에서 } \frac{b^2 + c^2 - a^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{5}{3} \text{이므로}$$

$$5(a^2 + b^2 - c^2) = 3(b^2 + c^2 - a^2)$$

$$\therefore 4a^2 + b^2 - 4c^2 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$9a^2 - 4b^2 = 0$$

$$9a^2 = 4b^2, 3a = 2b \quad (\because a > 0, b > 0)$$

$$\therefore b = \frac{3}{2}a$$

$\textcircled{1} + 5 \times \textcircled{2}$ 을 하면

$$25a^2 - 16c^2 = 0$$

$$25a^2 = 16c^2, 5a = 4c \quad (\because a > 0, c > 0)$$

$$\therefore c = \frac{5}{4}a$$

$$\therefore \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{\frac{a}{2R} + \frac{b}{2R}}{\frac{c}{2R}} = \frac{a+b}{c} = \frac{a + \frac{3}{2}a}{\frac{5}{4}a} = 2$$

08 답 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{OA} = x (0 < x < 1)$, $\overline{AB} = y$ 라 하면

삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{y^2 + 1^2 - x^2}{2y} = \frac{1}{2} \left(y + \frac{1-x^2}{y} \right) \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

이때 $0 < x < 1$ 에서 $1-x^2 > 0$, $y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left(y + \frac{1-x^2}{y} \right) \geq \frac{1}{2} \times 2 \sqrt{y \times \frac{1-x^2}{y}} = \sqrt{1-x^2}$$

(단, 등호는 $y = \frac{1-x^2}{y}$ 일 때 성립) $\dots\dots\dots \text{배점 40\%}$

따라서 $\cos \theta$ 의 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}, \quad 1-x^2 = \frac{1}{4}$$

$$x^2 = \frac{3}{4} \quad \therefore x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\because 0 < x < 1)$$

$$\therefore \overline{OA} = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

개념 NOTE

$a > 0$, $b > 0$ 일 때, 산술평균과 기하평균의 관계는 다음과 같다.

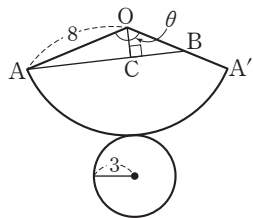
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

idea 09 답 $\sqrt{34} - \sqrt{2}$

주어진 원뿔의 전개도를 그리면 그림과 같다.

부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면 부채꼴의 호의 길이는 밑면의 둘레의 길이와 같으므로

$$8\theta = 2\pi \times 3 \quad \therefore \theta = \frac{3}{4}\pi$$



점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 C라 하면 $\overline{AC}$ 는 오르막길의 길이이고, $\overline{BC}$ 는 내리막길의 길이이다.

$\overline{OB} = x$, $\overline{BC} = y$ 라 하면 오르막길의 길이가 내리막길의 길이의 2배이므로 $\overline{AC} = 2y$ $\therefore \overline{AB} = 3y$

삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의하여

$$(3y)^2 = 8^2 + x^2 - 2 \times 8 \times x \times \cos \frac{3}{4}\pi$$

$$9y^2 = 64 + x^2 - 16x \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\therefore 9y^2 = x^2 + 8\sqrt{2}x + 64 \quad \dots\dots\dots \text{㉠}$$

두 직각삼각형 OAC, OBC에서

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{BC}^2 \text{이므로}$$

$$64 - 4y^2 = x^2 - y^2 \quad \therefore 3y^2 = 64 - x^2$$

이를 ㉠에 대입하면

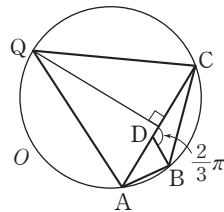
$$3(64 - x^2) = x^2 + 8\sqrt{2}x + 64$$

$$x^2 + 2\sqrt{2}x - 32 = 0 \quad \therefore x = -\sqrt{2} + \sqrt{34} \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore \overline{OB} = \sqrt{34} - \sqrt{2}$$

10 답 ②

점 P가 점 B를 지나지 않는 호 AC와 선분 AC의 수직이등분선의 교점일 때, 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되므로 이때의 점 P가 점 Q이다.



$$\cos(\angle ABC) = -\frac{5}{8} \text{이므로}$$

$$\cos(\angle CQA) = \cos(\pi - \angle ABC) = -\cos(\angle ABC) = \frac{5}{8}$$

삼각형 QAC는 $\overline{QA} = \overline{QC}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\overline{QC} = \overline{QA} = 6\sqrt{10}$$

즉, 삼각형 QAC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = (6\sqrt{10})^2 + (6\sqrt{10})^2 - 2 \times 6\sqrt{10} \times 6\sqrt{10} \times \frac{5}{8}$$

$$= 360 + 360 - 450 = 270 \quad \dots\dots\dots \text{㉠}$$

한편 $\overline{AB} = a (a > 0)$ 라 하면 $\overline{BC} = 2\overline{AB} = 2a$

즉, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = a^2 + (2a)^2 - 2 \times a \times 2a \times \left(-\frac{5}{8}\right)$$

$$= a^2 + 4a^2 + \frac{5}{2}a^2 = \frac{15}{2}a^2 \quad \dots\dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $\frac{15}{2}a^2 = 270$ 이므로

$$a^2 = 36 \quad \therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore \overline{BC} = 2a = 2 \times 6 = 12$$

이때 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \frac{2}{3}\pi} = 2R \text{이므로 } \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R \quad \therefore R = 4\sqrt{3}$$

따라서 구하는 외접원의 반지름의 길이는 $4\sqrt{3}$ 이다.

11 답 ⑤

$$\angle CED = \pi - \angle CEA = \frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

삼각형 ECD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2 = 4^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 4 \times 3\sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= 34 - 24\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10$$

$$\therefore \overline{CD} = \sqrt{10} \quad (\because \overline{CD} > 0)$$

반원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\overline{OD} = R, \overline{OE} = R - 4 \text{이므로}$$

삼각형 ODE에서 코사인법칙에 의하여

$$R^2 = (3\sqrt{2})^2 + (R-4)^2$$

$$-2 \times 3\sqrt{2} \times (R-4) \times \cos \frac{3}{4}\pi$$

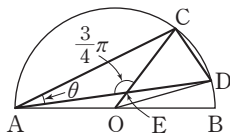
$$R^2 = R^2 - 8R + 34 - 6\sqrt{2}(R-4) \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$-2R + 10 = 0 \quad \therefore R = 5$$

한편 $\angle CAD = \theta$ 라 하면 삼각형 ADC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin \theta} = 2R \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{\sin \theta} = 10 \quad \therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$$



따라서 삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AC}}{\sin \frac{3}{4}\pi} = \frac{\overline{CE}}{\sin \theta}$ 이므로

$$\overline{AC} = \frac{\overline{CE} \sin \frac{3}{4}\pi}{\sin \theta} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{10}}{10}} = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{AC} \times \overline{CD} = 4\sqrt{5} \times \sqrt{10} = 20\sqrt{2}$$

다른 풀이

$$\angle CED = \pi - \angle CEA = \frac{\pi}{4} \text{ 이므로}$$

삼각형 ECD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{CD}^2 &= 4^2 + (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 4 \times 3\sqrt{2} \times \cos \frac{\pi}{4} \\ &= 34 - 24\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{CD} = \sqrt{10} \quad (\because \overline{CD} > 0)$$

$$\angle CDE = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \text{라 하면}$$

삼각형 CED에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{(\sqrt{10})^2 + (3\sqrt{2})^2 - 4^2}{2 \times \sqrt{10} \times 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{이때 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

삼각형 ADC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \theta} = 2R \text{ 이므로}$$

$$\frac{\overline{AC}}{2} = 2R \quad \therefore \overline{AC} = \frac{4}{\sqrt{5}} R$$

한편 호 AC에 대한 원주각의 크기는 같으므로

$$\angle CBA = \angle CDA = \theta$$

$$\text{이때 } \angle ACB = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \angle BAC = \frac{\pi}{2} - \theta$$

삼각형 AOC는 $\overline{OA} = \overline{OC}$ 인 이등변삼각형이므로

$$\angle OCA = \angle OAC = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\angle ACE = \frac{\pi}{2} - \theta \text{ 이므로 삼각형 AEC에서 사인법칙에 의하여}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \frac{3}{4}\pi} = \frac{\overline{AE}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}, \quad \frac{\overline{AC}}{\sin \frac{3}{4}\pi} = \frac{\overline{AE}}{\cos \theta}$$

$$\therefore \overline{AE} = \frac{\overline{AC} \cos \theta}{\sin \frac{3}{4}\pi} = \frac{\frac{4}{\sqrt{5}} R \times \frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{5} R$$

따라서 삼각형 AEC에서 코사인법칙에 의하여

$$\left(\frac{4}{\sqrt{5}} R\right)^2 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{5} R\right)^2 + 4^2 - 2 \times \frac{4\sqrt{2}}{5} R \times 4 \times \cos \frac{3}{4}\pi$$

$$\frac{16}{5} R^2 = \frac{32}{25} R^2 + 16 - \frac{32\sqrt{2}}{5} R \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\frac{16}{5} R^2 = \frac{32}{25} R^2 + 16 + \frac{32}{5} R$$

$$3R^2 - 10R - 25 = 0, \quad (3R+5)(R-5) = 0$$

$$\therefore R = 5 \quad (\because R > 0)$$

$$\therefore \overline{AC} = \frac{4}{\sqrt{5}} \times 5 = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{AC} \times \overline{CD} = 4\sqrt{5} \times \sqrt{10} = 20\sqrt{2}$$

12 답 ④

$$b \cos^2 B = c \cos^2 C + (b-c) \cos^2 A \text{에서}$$

$$b(1 - \sin^2 B) = c(1 - \sin^2 C) + (b-c)(1 - \sin^2 A)$$

$$b - b \sin^2 B = c - c \sin^2 C + b - c - (b-c) \sin^2 A$$

$$b \sin^2 B = c \sin^2 C + (b-c) \sin^2 A$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$b \times \frac{b^2}{4R^2} = c \times \frac{c^2}{4R^2} + (b-c) \times \frac{a^2}{4R^2}$$

$$b^3 = c^3 + (b-c)a^2$$

$$b^3 - c^3 - (b-c)a^2 = 0$$

$$(b-c)(b^2 + bc + c^2) - (b-c)a^2 = 0$$

$$(b-c)(b^2 + bc + c^2 - a^2) = 0$$

$$\therefore b = c \text{ 또는 } b^2 + bc + c^2 = a^2$$

(i) $b = c$ 인 경우

삼각형 ABC는 $b = c$ 인 이등변삼각형이다.

(ii) $b^2 + bc + c^2 = a^2$ 인 경우

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \text{ 이므로}$$

$$b^2 + bc + c^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$bc = -2bc \cos A$$

$$\cos A = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore A = 120^\circ \quad (\because 0^\circ < A < 180^\circ)$$

(i), (ii)에서 삼각형 ABC가 될 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

13 답 2

주어진 방정식이 이차방정식이므로

$$2 \cos A \neq 0 \quad \therefore A \neq \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < A < \pi)$$

이때 삼각형 ABC는 직각삼각형이고, $\overline{AB} > \overline{AC}$ 이므로

$$B \neq \frac{\pi}{2} \quad \therefore C = \frac{\pi}{2}$$

이차방정식 $(2 \cos A)x^2 - (2t \sin B)x + \sin B \sin C = 0$ 의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = t^2 \sin^2 B - 2 \cos A \sin B \sin C = 0$$

$$\sin B(t^2 \sin B - 2 \cos A \sin C) = 0$$

$$\therefore \sin B = 0 \text{ 또는 } t^2 \sin B = 2 \cos A \sin C$$

$$\text{이때 } 0 < B < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$\sin B \neq 0$$

$$\therefore t^2 \sin B = 2 \cos A \sin C$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하고, $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$ 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$t^2 \times \frac{b}{2R} = 2 \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \times \frac{c}{2R}$$

$$\therefore b^2 t^2 = b^2 + c^2 - a^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 삼각형 ABC가 $C = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로

$$a^2 + b^2 = c^2$$

이를 ①에 대입하면

$$b^2 t^2 = 2b^2, \quad t^2 = 2$$

$$\therefore t = -\sqrt{2} \text{ 또는 } t = \sqrt{2}$$

따라서 실수 t는 $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ 의 2개이다.

14 답 $\sqrt{15}$

$\overline{BC}=x$ 라 하면 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=10$ 에서

$$2+x+\overline{CA}=10 \quad \therefore \overline{CA}=8-x$$

삼각형 ABC에서 $\angle B=\theta$ ($0<\theta<\pi$)라 하면

코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{2^2+x^2-(8-x)^2}{2 \times 2 \times x} = \frac{16x-60}{4x} = \frac{4x-15}{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin \theta &= \sqrt{1-\cos^2 \theta} = \sqrt{1-\left(\frac{4x-15}{x}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{-15x^2+120x-225}{x^2}} = \frac{\sqrt{-15(x-4)^2+15}}{x} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

한편 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 2 \times x \times \sin \theta = x \sin \theta$

이때 $\textcircled{1}$ 에서 $x \sin \theta = \sqrt{-15(x-4)^2+15}$ 이므로 $x=4$ 일 때 $x \sin \theta$ 의 최댓값은 $\sqrt{15}$ 이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 $\sqrt{15}$ 이다.

다른 풀이 헤론의 공식

$\overline{BC}=x$ 라 하면 $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=10$ 에서

$$2+x+\overline{CA}=10 \quad \therefore \overline{CA}=8-x$$

헤론의 공식에서 $s=\frac{10}{2}=5$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\begin{aligned} \sqrt{5 \times 3 \times (5-x) \times (-3+x)} &= \sqrt{-15(x^2-8x+15)} \\ &= \sqrt{-15(x-4)^2+15} \end{aligned}$$

따라서 $x=4$ 일 때 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값은 $\sqrt{15}$ 이다.

15 답 $\frac{9\sqrt{15}}{5}$

삼각형 ABC에서 $\angle ABC=\theta$ ($\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$)라 하면

사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin \theta} = 2 \times \frac{4\sqrt{10}}{5}, \quad \frac{2\sqrt{6}}{\sin \theta} = \frac{8\sqrt{10}}{5}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{2\sqrt{6}}{\frac{8\sqrt{10}}{5}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

이때 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 이므로

$$\cos \theta = -\sqrt{1-\sin^2 \theta} = -\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^2} = -\frac{1}{4} \quad (\because \cos \theta < 0)$$

한편 사각형 ABCD가 원에 내접하므로

삼각형 ACD에서 $\angle ADC=\pi-\theta$

$$\therefore \cos(\angle ADC) = \cos(\pi-\theta) = -\cos \theta = \frac{1}{4}$$

이때 $2\overline{AD}=3\overline{CD}$ 에서 $\overline{AD}:\overline{CD}=3:2$ 이므로

$\overline{AD}=3k$, $\overline{CD}=2k$ ($k>0$)라 하면

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

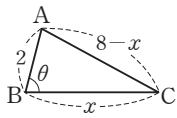
$$(2\sqrt{6})^2 = (3k)^2 + (2k)^2 - 2 \times 3k \times 2k \times \cos(\pi-\theta)$$

$$24 = 13k^2 - 12k^2 \times \frac{1}{4}$$

$$24 = 10k^2 \quad \therefore k^2 = \frac{12}{5}$$

따라서 삼각형 ACD의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times 3k \times 2k \times \sin(\pi-\theta) &= 3k^2 \times \sin \theta \\ &= 3 \times \frac{12}{5} \times \frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{9\sqrt{15}}{5} \end{aligned}$$



16 답 ①

$\overline{AC}=x$ ($x>0$)라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{13})^2 = 3^2 + x^2 - 2 \times 3 \times x \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$13 = 9 + x^2 - 6x \times \frac{1}{2}, \quad x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x+1)(x-4) = 0 \quad \therefore x = 4 \quad (\because x > 0)$$

즉, $\overline{AC}=4$ 이므로

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin \frac{\pi}{3} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

또 $\overline{AD} \times \overline{CD}=9$ 이므로

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \overline{AD} \times \overline{CD} \times \sin(\angle ADC) = \frac{9}{2} \sin(\angle ADC)$$

이때 $S_2 = \frac{5}{6} S_1$ 이므로

$$\frac{9}{2} \sin(\angle ADC) = \frac{5}{6} \times 3\sqrt{3} \quad \therefore \sin(\angle ADC) = \frac{5\sqrt{3}}{9}$$

따라서 삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin(\angle ADC)} = 2R \quad \therefore R = \frac{2}{\sin(\angle ADC)}$$

$$\therefore \frac{R}{\sin(\angle ADC)} = \frac{2}{\sin^2(\angle ADC)} = \frac{2}{\left(\frac{5\sqrt{3}}{9}\right)^2} = \frac{54}{25}$$

17 답 $6+4\sqrt{2}$

$\overline{AB}=x$ 라 하면 $\textcircled{1}$ 에서 $\overline{BC}=2x$, $\overline{CA}=2\sqrt{2}x$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{x^2 + (2x)^2 - (2\sqrt{2}x)^2}{2 \times x \times 2x} = -\frac{3}{4}$$

이때 $0<B<\pi$ 이므로

$$\sin B = \sqrt{1-\cos^2 B} = \sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \text{배점 40\%}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times x \times 2x \times \sin B = x^2 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{4} x^2 \quad \dots\dots \textcircled{3} \quad \text{배점 20\%}$$

또 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 $\sqrt{7}$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{7} \times (x+2x+2\sqrt{2}x) = \frac{\sqrt{7}(3+2\sqrt{2})}{2} x \quad \dots\dots \textcircled{4} \quad \text{배점 20\%}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{에서 } \frac{\sqrt{7}}{4} x^2 = \frac{\sqrt{7}(3+2\sqrt{2})}{2} x$$

$x>0$ 이므로 양변을 x 로 나누면

$$\frac{\sqrt{7}}{4} x = \frac{\sqrt{7}(3+2\sqrt{2})}{2} \quad \therefore x = 6+4\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{AB}=6+4\sqrt{2} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

18 답 $\frac{23}{27}$

$\overline{AC}=x$ 라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\sin B = \frac{x}{2R}$$

이때 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin B = 12 \times \frac{x}{2R} = \frac{6x}{R} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $r \times R=3$ 에서 $r=\frac{3}{R}$ 이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times r \times (6+4+x) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{R} \times (10+x) = \frac{30+3x}{2R} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

22 답 24π

원의 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의하여

$$\angle CBD = \angle CAB = \frac{\pi}{6}$$

$$\angle BCD = \angle BAC = \frac{\pi}{6}$$

삼각형 BCD에서 $\angle BDC = \pi - \angle CBD - \angle BCD = \frac{2}{3}\pi$

원 O_1 의 반지름의 길이를 R_1 , 원 O_2 의 반지름의 길이를 R_2 라 하고, $\overline{BC} = x$ 라 하면
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{x}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2R_1, \quad \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2R_1$$

$$\therefore R_1 = x$$

삼각형 BDC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{x}{\sin \frac{2}{3}\pi} = 2R_2, \quad \frac{x}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R_2$$

$$\therefore R_2 = \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{R_1}{\sqrt{3}} \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

그림과 같이 원 O_1 의 중심을 O_1 이라 하면

$$\angle CO_1B = 2\angle A = \frac{\pi}{3}$$

$\overline{O_1C} = \overline{O_1B}$ 이므로 삼각형 O_1BC 는 정삼각형이다.

$$\text{이때 } \angle CO_1B + \angle BDC = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi = \pi \text{이}$$

므로 점 O_1 은 원 O_2 위에 있다.

원 O_2 의 중심을 O_2 라 하면 $\angle CO_2B = 2\angle CO_1B = \frac{2}{3}\pi$ 이므로 점 O_1 을 포함하는 부채꼴 O_2CB 의 중심각의 크기는

$$2\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

따라서 두 원 O_1, O_2 의 공통부분의 넓이는 반지름의 길이가 R_1 이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 O_1BC 의 넓이에서 정삼각형 O_1BC 의 넓이를

빼고 반지름의 길이가 R_2 이고 중심각의 크기가 $\frac{4}{3}\pi$ 인 부채꼴 O_2CB 의 넓이와 삼각형 O_2BC 의 넓이를 더하면 된다.

$$\left(\frac{1}{2} \times R_1^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} R_1^2 \right) + \frac{1}{2} \times R_2^2 \times \frac{4}{3}\pi + \frac{1}{2} \times R_2^2 \times \sin \frac{2}{3}\pi$$

$$= \frac{\pi}{6} R_1^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} R_1^2 + \frac{2}{3}\pi R_2^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} R_2^2$$

$$= \frac{\pi}{6} R_1^2 - \frac{\sqrt{3}}{4} R_1^2 + \frac{2}{9}\pi R_1^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} R_1^2 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \frac{7}{18}\pi R_1^2 - \frac{\sqrt{3}}{6} R_1^2$$

$$= \frac{R_1^2}{18} (7\pi - 3\sqrt{3})$$

$$\therefore \frac{R_1^2}{18} (7\pi - 3\sqrt{3}) = 7\pi - 3\sqrt{3} \text{이므로}$$

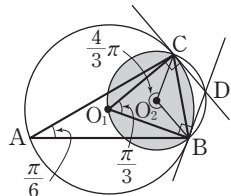
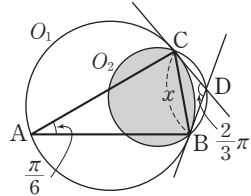
$$\frac{R_1^2}{18} = 1 \quad \therefore R_1 = 3\sqrt{2} \quad (\because R_1 > 0) \quad \dots\dots \text{배점 50\%}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$R_2 = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{6} \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

그러므로 두 원 O_1, O_2 의 넓이의 합은

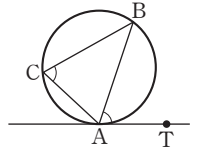
$$\pi \times (3\sqrt{2})^2 + \pi \times (\sqrt{6})^2 = 18\pi + 6\pi = 24\pi \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$



개념 NOTE

원의 접선과 그 접점을 지나는 현이 이루는 각의 크기는
그 각의 내부에 있는 호에 대한 원주각의 크기와 같다.

$$\Rightarrow \angle BAT = \angle BCA$$



23 답 ③

그림과 같이 두 점 A, D에서 변 BC에
내린 수선의 발을 각각 A', D'이라 하자.

직각삼각형 ABA'에서 $\angle ABA' = \frac{\pi}{3}$ 이

므로

$$\overline{BA'} = \overline{AB} \cos \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} = 1, \quad \overline{AA'} = \overline{AB} \sin \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

직각삼각형 DD'C에서 $\angle DCD' = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\overline{D'C} = \overline{CD} \cos \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3, \quad \overline{DD'} = \overline{CD} \sin \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

이때 $\overline{AA'} = \overline{DD'}$ 에서 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 이므로

$$\overline{AD} = \overline{A'D'} = \overline{BC} - \overline{BA'} - \overline{D'C} = 6 - 1 - 3 = 2$$

$$\therefore \square ABCD = \frac{1}{2} \times (\overline{AD} + \overline{BC}) \times \overline{AA'}$$

$$= \frac{1}{2} \times (2 + 6) \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{A'C} = \overline{BC} - \overline{BA'} = 6 - 1 = 5$ 이므로 직각삼각형 AA'C에서

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{AA'}^2 + \overline{A'C}^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 5^2} = 2\sqrt{7}$$

$\overline{BD'} = \overline{BC} - \overline{D'C} = 6 - 3 = 3$ 이므로 직각삼각형 BD'D에서

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{DD'}^2 + \overline{BD'}^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = 2\sqrt{3}$$

$\angle CED = \theta$ 라 하면

$$\square ABCD = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \times 2\sqrt{3} \times \sin \theta$$

$$= 2\sqrt{21} \sin \theta \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 4\sqrt{3} = 2\sqrt{21} \sin \theta \text{이므로 } \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{4}{7}$$

다른 풀이

그림과 같이 선분 BA의 연장선과 선분 CD
의 연장선의 교점을 F라 하면

$$\angle BFC = \pi - (\angle B + \angle C) = \frac{\pi}{2}$$

즉, 삼각형 BCF는 $\angle F = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형

이므로

$$\overline{FB} = \overline{BC} \cos \frac{\pi}{3} = 6 \times \frac{1}{2} = 3, \quad \overline{FC} = \overline{BC} \sin \frac{\pi}{6} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

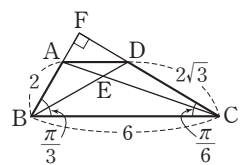
$$\text{이때 } \overline{FA} = \overline{FB} - \overline{AB} = 3 - 2 = 1, \quad \overline{FD} = \overline{FC} - \overline{CD} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

이므로 직각삼각형 FAD에서

$$\overline{AD} = \sqrt{\overline{FA}^2 + \overline{FD}^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

이때 $\triangle FAD \sim \triangle FBC$ (SAS 닮음)이므로 $\angle FAD = \frac{\pi}{3}$

$$\therefore \angle BAD = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$



$$\therefore \square ABCD = \triangle ABD + \triangle DBC$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin \frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{3} \times \sin \frac{\pi}{6}$$

$$= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 6\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 4\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

직각삼각형 FAC에서

$$\overline{AC} = \sqrt{\overline{FA}^2 + \overline{FC}^2} = \sqrt{1^2 + (3\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{7}$$

직각삼각형 FBD에서

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{FB}^2 + \overline{FD}^2} = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$$

$\angle CED = \theta$ 라 하면

$$\square ABCD = \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{7} \times 2\sqrt{3} \times \sin \theta$$

$$= 2\sqrt{21} \sin \theta \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } 4\sqrt{3} = 2\sqrt{21} \sin \theta \text{ 이므로 } \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$\therefore \sin^2 \theta = \frac{4}{7}$$

24 답 ⑤

ㄱ. $\angle CBA = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하면 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\text{직각삼각형 ABC에서 } \cos \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{10}}{7} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

ㄴ. 사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $\theta + \angle ADC = \pi$

$$\therefore \angle ADC = \pi - \theta$$

⑨에서 $\sin \theta = \frac{2\sqrt{10}}{7}$ 이므로 직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AC} = \overline{AB} \sin \theta = 14 \times \frac{2\sqrt{10}}{7} = 4\sqrt{10}$$

$\overline{CD} = 7$ 일 때, $\overline{AD} = a$ ($a > 0$)라 하면

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$(4\sqrt{10})^2 = a^2 + 7^2 - 2 \times a \times 7 \times \cos(\pi - \theta)$$

$$160 = a^2 + 49 - 14a \times \left(-\frac{3}{7}\right) \quad \leftarrow -\cos \theta$$

$$a^2 + 6a - 111 = 0$$

$$\therefore a = -3 + 2\sqrt{30} \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore \overline{AD} = -3 + 2\sqrt{30}$$

ㄷ. 사각형 ABCD의 넓이가 최대가 되려면 삼각형 ACD의 넓이가 최대가 되어야 하므로 점 D는 선분 AC의 수직이등분선이 호 AC와 만나는 점이어야 한다.

그림과 같이 반원의 중심을 O라 하면

$\triangle AOD \equiv \triangle COD$ 이므로

$$\overline{AD} = \overline{CD}$$

$\overline{AD} = b$ ($b > 0$)라 하면

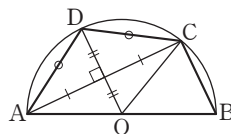
삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$(4\sqrt{10})^2 = b^2 + b^2 - 2 \times b \times b \times \cos(\pi - \theta)$$

$$160 = 2b^2 - 2b^2 \times \left(-\frac{3}{7}\right), \quad \frac{20}{7}b^2 = 160$$

$$b^2 = 56 \quad \therefore b = 2\sqrt{14} \quad (\because b > 0)$$

$$\therefore \overline{AD} = 2\sqrt{14}$$



$$\therefore \square ABCD = \triangle ACD + \triangle ABC$$

$$= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{14} \times 2\sqrt{14} \times \sin(\pi - \theta) + \frac{1}{2} \times 4\sqrt{10} \times 6$$

$$= 28 \times \frac{2\sqrt{10}}{7} + 12\sqrt{10}$$

$$= 8\sqrt{10} + 12\sqrt{10} = 20\sqrt{10}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

25 답 5/2

그림과 같이 사각형 CODE의 두 대각

선 CD, OE가 이루는 각의 크기를 θ 라

하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{OE} \times \overline{CD} \times \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times \overline{CD} \times \sin \theta$$

$$= 3 \sin \theta \times \overline{CD}$$

$$\therefore S^2 = 9 \sin^2 \theta \times \overline{CD}^2$$

이때 $0 < \theta < \pi$ 에서 $0 < \sin \theta \leq 1$, 즉 $0 < \sin^2 \theta \leq 1$ 이므로

$$S^2 = 9 \sin^2 \theta \times \overline{CD}^2 \leq 9 \overline{CD}^2$$

즉, S^2 의 최댓값은 $9 \overline{CD}^2$ 이므로

$$9 \overline{CD}^2 = 36(5 + 2\sqrt{2}) \quad \therefore \overline{CD}^2 = 20 + 8\sqrt{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{OA} = \overline{OB}$ 이므로 $\overline{CA} = \overline{OD}$, $\overline{OC} = \overline{DB}$

$\overline{OC} = x$ 라 하면 $\overline{OD} = \overline{CA} = 6 - x$

삼각형 COD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2 = x^2 + (6 - x)^2 - 2 \times x \times (6 - x) \times \cos \frac{3}{4}\pi$$

$$= 2x^2 - 12x + 36 - (12x - 2x^2) \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= (2 - \sqrt{2})x^2 - 6(2 - \sqrt{2})x + 36 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서

$$20 + 8\sqrt{2} = (2 - \sqrt{2})x^2 - 6(2 - \sqrt{2})x + 36$$

$$(2 - \sqrt{2})x^2 - 6(2 - \sqrt{2})x + 8(2 - \sqrt{2}) = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0, \quad (x - 2)(x - 4) = 0$$

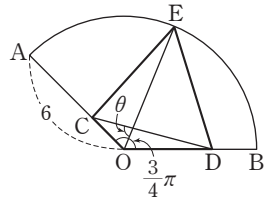
$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 4$$

$$\text{이때 } \overline{OC} = \frac{m}{1+m} \overline{AO} = \frac{6m}{1+m} \text{이므로}$$

$$\frac{6m}{1+m} = 2 \text{ 또는 } \frac{6m}{1+m} = 4 \quad \therefore m = \frac{1}{2} \text{ 또는 } m = 2$$

따라서 모든 m 의 값의 합은

$$\frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$



STEP 3 최고난도 문제

| 85~87쪽

01 $3\sqrt{2}\pi$ 02 6 03 ① 04 22 05 ④ 06 $\frac{13\sqrt{2}}{2}$

07 $\frac{1+\sqrt{3}}{8}$ 08 15 09 28 10 ④ 11 -1

12 $\frac{87}{10}$

01 답 $3\sqrt{2}\pi$

1단계 두 삼각형 ABC, BCD의 외접원의 반지름의 길이 구하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 $\overline{BC}=2$,

$\angle BAC = \frac{3}{4}\pi$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{2}{\sin \frac{3}{4}\pi} = 2R, \quad \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \quad \therefore R = \sqrt{2}$$

즉, 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이는 $\sqrt{2}$ 이다.

2단계 $\angle BDC$ 의 크기 구하기

$\overline{BC}=2$ 이고, $\cos(\angle BDC) > 0$ 이므로 $\angle BDC = \theta$ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)라 하면

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{2}{\sin \theta} = 2\sqrt{2} \quad \therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\theta = \frac{\pi}{4}$

3단계 점 D가 나타내는 곡선의 길이 구하기

삼각형 BCD의 외접원의 중심을 O 라 하면 $\angle BDC = \frac{\pi}{4}$ 이므로 원주각의 성질에 의하여

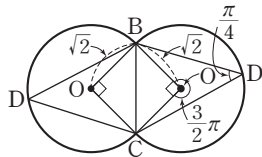
$$\angle BOC = 2\angle BDC = \frac{\pi}{2}$$

따라서 점 D는 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 이고

중심각의 크기가 $2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi$ 인 부채

꼴의 호 위에 있고, 그림과 같이 선분 BC를 기준으로 양쪽에 2개의 부채꼴을 그릴 수 있으므로 점 D가 나타내는 곡선의 길이는

$$2\left(\sqrt{2} \times \frac{3}{2}\pi\right) = 3\sqrt{2}\pi$$



02 답 6

1단계 $\angle DCA$ 의 크기 구하기

삼각형 ABD에서 $\angle ABD = \frac{5}{18}\pi$, $\angle BAD = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{9} = \frac{4}{9}\pi$ 이므로

$$\angle ADB = \pi - \frac{5}{18}\pi - \frac{4}{9}\pi = \frac{5}{18}\pi$$

즉, $\angle ABD = \angle ADB$ 이므로 삼각형 ABD는 $\overline{AB} = \overline{AD}$ 인 이등변삼각형이다.

한편 선분 BC 위에 $\angle ABE = \angle AEB = \frac{4}{9}\pi$

가 되도록 점 E를 잡으면

$$\angle BAE = \pi - \frac{4}{9}\pi - \frac{4}{9}\pi = \frac{\pi}{9}$$

$$\therefore \angle EAD = \angle BAD - \angle BAE$$

$$= \frac{4}{9}\pi - \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{3}$$

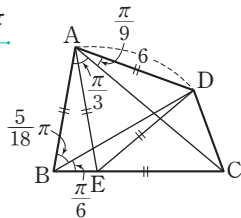
이때 $\overline{AB} = \overline{AE}$, $\overline{AB} = \overline{AD}$ 에서 $\overline{AE} = \overline{AD}$ 이므로 삼각형 AED는 정삼각형이다.

$$\therefore \overline{ED} = \overline{AE} = \overline{AD}$$

삼각형 AEC에서 $\angle EAC = \angle BAC - \angle BAE = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{9} = \frac{2}{9}\pi$ 이고,

$$\angle AEC = \frac{\pi}{9} + \frac{4}{9}\pi = \frac{5}{9}\pi$$
이므로

$$\angle ACE = \pi - \frac{2}{9}\pi - \frac{5}{9}\pi = \frac{2}{9}\pi$$



즉, $\angle EAC = \angle ACE$ 이므로 삼각형 AEC는 $\overline{AE} = \overline{EC}$ 인 이등변삼각형이다.

이때 $\overline{DE} = \overline{AE} = \overline{EC}$ 이므로 삼각형 DEC도 이등변삼각형이다.

삼각형 DEC에서

$$\angle CED = \angle AEC - \angle AED = \frac{5}{9}\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{9}\pi$$

$$\therefore \angle DCE = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2}{9}\pi\right) = \frac{7}{18}\pi$$

$$\therefore \angle DCA = \angle DCE - \angle ACE = \frac{7}{18}\pi - \frac{2}{9}\pi = \frac{\pi}{6}$$

2단계 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이 구하기

따라서 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

사인법칙에 의하여

$$\frac{6}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2R \text{이므로 } \frac{6}{\frac{1}{2}} = 2R \quad \therefore R = 6$$

03 답 ①

1단계 사각형 $P_1P_2P_3P_4$ 가 한 원에 내접함을 알기

$\sin \alpha = \sin \beta$ 에서 $\alpha \neq \beta$ 이므로

사인함수의 그래프의 대칭성에 의하여

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \alpha + \beta = \pi$$

즉, 사각형 $P_1P_2P_3P_4$ 는 한 원에 내접한다.

2단계 $\overline{AD}$ 와 점 P, $\overline{AB}$ 와 점 P 사이의 거리 구하기

선분 AD와 점 P 사이의 거리를 x ,

선분 AB와 점 P 사이의 거리를 y

라 하고, 사각형 $P_1P_2P_3P_4$ 의 외접원의 중심을 O , 반지름의 길이를 R 라 하자.

$$\overline{P_1P_3} = \overline{P_1P} + \overline{PP_3} = 2\overline{AD} = 4$$

$$\overline{P_2P_4} = \overline{P_2P} + \overline{PP_4} = 2\overline{AB} = 4$$

사각형 $P_1P_2P_3P_4$ 의 외접원과 삼각

형 $P_1P_3P_4$ 의 외접원이 같으므로 삼

각형 $P_1P_3P_4$ 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{P_1P_3}}{\sin \alpha} = 2R \text{이므로 } \frac{4}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = 2R \quad \therefore R = \sqrt{5}$$

이때 점 O 는 삼각형 $P_1P_3P_4$ 의 외접원의 중심이므로 선분 P_1P_3 의 수직이

등분선 위에 있고, 삼각형 $P_1P_2P_4$ 의 외접원의 중심이므로 선분 P_2P_4 의

수직이등분선 위에 있다.

두 선분 P_1P_3 , P_2P_4 의 중점을 각각 M , N 이라 하면

$$\overline{P_1M} = 2, \quad \overline{P_4N} = 2 \text{이므로}$$

$$\overline{MO} = \overline{PN} = \overline{P_4N} - \overline{P_4P} = 2 - 2x$$

$$\overline{NO} = \overline{PM} = \overline{P_1M} - \overline{P_1P} = 2 - 2y$$

직각삼각형 P_1OM 에서

$$\overline{OP_1}^2 = \overline{P_1M}^2 + \overline{MO}^2 = 4 + (2 - 2x)^2$$

이때 $\overline{OP_1}$ 은 사각형 $P_1P_2P_3P_4$ 의 외접원의 반지름이므로

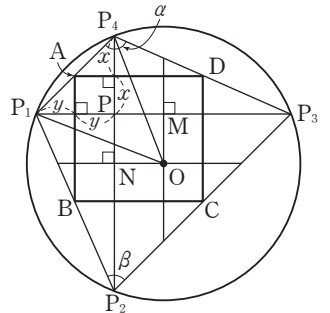
$$\overline{OP_1} = \sqrt{5} \text{에서 } \overline{OP_1}^2 = 5$$

$$\text{즉, } 4 + (2 - 2x)^2 = 5 \text{이므로 } 4x^2 - 8x + 3 = 0$$

$$(2x - 1)(2x - 3) = 0 \quad \therefore x = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}$$

직각삼각형 P_4NO 에서

$$\overline{OP_4}^2 = \overline{P_4N}^2 + \overline{NO}^2 = 4 + (2 - 2y)^2$$



점 P는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$$\overline{CP} : \overline{PM} = 2 : 1 \quad \therefore \overline{CM} = \frac{3}{2} \overline{CP}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{3}{2} \overline{CP} \times \overline{CP} = 72$$

$$\overline{CP}^2 = 48 \quad \therefore \overline{CP} = 4\sqrt{3}$$

2단계 $\overline{AC}$ 의 길이 구하기

$\angle ABC = \theta$ 라 하면

$\angle APC = \angle MPN = \pi - \theta$

삼각형 MBN에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6^2 - \overline{MN}^2}{2 \times \frac{5}{2} \times 6} = \frac{169 - \overline{MN}^2}{30} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

삼각형 APC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (4\sqrt{3})^2 - \overline{AC}^2}{2 \times \frac{5\sqrt{3}}{3} \times 4\sqrt{3}} = \frac{\frac{169}{3} - \overline{AC}^2}{40}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\overline{AC}^2 - \frac{169}{3}}{40} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉡, ㉢에서

$$\frac{\frac{169}{4} - \overline{MN}^2}{30} = \frac{\overline{AC}^2 - \frac{169}{3}}{40}$$

이때 $\overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{AC}$ 이므로

$$\frac{\frac{169}{4} - \frac{1}{4} \overline{AC}^2}{30} = \frac{\overline{AC}^2 - \frac{169}{3}}{40}$$

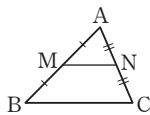
$$169 - \overline{AC}^2 = 3\overline{AC}^2 - 169, \overline{AC}^2 = \frac{169}{2}$$

$$\therefore \overline{AC} = \frac{13\sqrt{2}}{2}$$

개념 NOTE

삼각형 ABC에서 두 선분 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하면

$$\overline{MN} \parallel \overline{BC}, \overline{MN} = \frac{1}{2} \overline{BC}$$



07 답 $\frac{1+\sqrt{3}}{8}$

1단계 $\overline{AP} = x$ 로 놓고, $\cos \theta$ 의 값을 x 에 대한 식으로 나타내기

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \times 2 \times 2 \times \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= 8 - 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 8 - 4\sqrt{3}$$

$\overline{AP} = x$ 라 하면 $\angle PAB = \frac{\pi}{6}$ 이므로

삼각형 ABP에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BP}^2 = 2^2 + x^2 - 2 \times 2 \times x \times \cos \frac{\pi}{6}$$

$$= 4 + x^2 - 4x \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= x^2 - 2\sqrt{3}x + 4$$

삼각형 PBC는 $\overline{BP} = \overline{CP}$ 인 이등변삼각형이므로 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overline{BP}^2 + \overline{CP}^2 - \overline{BC}^2}{2 \times \overline{BP} \times \overline{CP}} \\ &= \frac{\overline{BP}^2 + \overline{BP}^2 - \overline{BC}^2}{2 \times \overline{BP} \times \overline{BP}} \\ &= \frac{2\overline{BP}^2 - \overline{BC}^2}{2\overline{BP}^2} = 1 - \frac{\overline{BC}^2}{2\overline{BP}^2} \\ &= 1 - \frac{4 - 2\sqrt{3}}{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4} \end{aligned}$$

2단계 $\cos \theta$ 의 최솟값 구하기

이때 $x^2 - 2\sqrt{3}x + 4 = (x - \sqrt{3})^2 + 1$ 은 $x = \sqrt{3}$ 일 때 최솟값 1을 가지므로

$$\cos \theta = 1 - \frac{4 - 2\sqrt{3}}{x^2 - 2\sqrt{3}x + 4} \geq 1 - (4 - 2\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} - 3$$

따라서 $\cos \theta$ 의 최솟값은 $2\sqrt{3} - 3$ 이므로

$$\cos(\angle BP_0C) = 2\sqrt{3} - 3$$

3단계 R^2 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sin^2(\angle BP_0C) &= 1 - \cos^2(\angle BP_0C) \\ &= 1 - (2\sqrt{3} - 3)^2 \\ &= 12\sqrt{3} - 20 \end{aligned}$$

삼각형 P_0BC 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle BP_0C)} = 2R$$

$$\begin{aligned} \therefore R^2 &= \frac{\overline{BC}^2}{4 \sin^2(\angle BP_0C)} \\ &= \frac{8 - 4\sqrt{3}}{4(12\sqrt{3} - 20)} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4(3\sqrt{3} - 5)} \\ &= \frac{(2 - \sqrt{3})(3\sqrt{3} + 5)}{4(3\sqrt{3} - 5)(3\sqrt{3} + 5)} \\ &= \frac{1 + \sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

08 답 15

1단계 $\angle CAB = \theta$ 로 놓고, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ 를 r , R , θ 에 대한 식으로 나타내기

$\angle CAB = \theta$ 라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = 2r \quad \therefore \overline{BC} = 2r \sin \theta \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 이므로 $\angle ABD = \pi - \theta$

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin(\pi - \theta)} = 2R \text{이므로 } \frac{\overline{AD}}{\sin \theta} = 2R$$

$$\therefore \overline{AD} = 2R \sin \theta \quad \dots\dots \text{㉡}$$

2단계 $\overline{AC} = k$ 로 놓고, $\overline{BC}^2$, $\overline{AD}^2$ 을 k 에 대한 식으로 나타내기

$\overline{AH} : \overline{HB} = 1 : 3$ 이므로

$$\overline{AH} = \frac{1}{4} \overline{AB} = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$$

$\overline{AC} = k$ 라 하면 $\overline{BD} = 2k$ 이므로

$$\text{직각삼각형 AHC에서 } \cos \theta = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2k}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = 2^2 + k^2 - 2 \times 2 \times k \times \cos \theta$$

$$= 4 + k^2 - 4k \times \frac{1}{2k}$$

$$= k^2 + 2 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{AD}^2 &= 2^2 + (2k)^2 - 2 \times 2 \times 2k \times \cos(\pi - \theta) \\ &= 4 + 4k^2 - 8k \times \left(-\frac{1}{2k}\right) \quad \leftarrow -\cos \theta \\ &= 4k^2 + 8 \quad \dots\dots \textcircled{e}\end{aligned}$$

3단계 $\overline{AC}^2$ 의 값 구하기

①을 ②에 대입하면 $4r^2 \sin^2 \theta = k^2 + 2 \quad \dots\dots \textcircled{f}$

①을 ③에 대입하면 $4R^2 \sin^2 \theta = 4k^2 + 8 \quad \dots\dots \textcircled{g}$

③-②을 하면 $4(R^2 - r^2) \sin^2 \theta = 3k^2 + 6$

따라서 $4(R^2 - r^2) \times \sin^2 \theta = 51$ 이므로 $3k^2 + 6 = 51$

$\therefore k^2 = 15 \quad \therefore \overline{AC}^2 = 15$

09 답 28

1단계 점 M의 위치 알기

그림과 같이 무대 앞에 $\overline{AC} = \overline{BC}$.

$\angle ACB = \frac{5}{6}\pi$ 를 만족시키는 점 C를 잡고,

삼각형 ACB의 외접원의 중심을 O라 하자.

점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{AC}$ 인 원 위의 점 C'에 대하여

$$\angle AC'B = \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{5}{12}\pi$$

삼각형 ACB의 외접원에서 점 C를 포함하지 않는 호 AB 위의 점 P에 대하여 사각형

ACBP는 원에 내접하므로

$$\angle APB = \pi - \angle ACB = \pi - \frac{5}{6}\pi = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \angle AOB = 2\angle APB = \frac{\pi}{3}$$

이때 $\overline{OA} = \overline{OB}$ 이므로 삼각형 OAB는 정삼각형이다.

$$\therefore \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{AB} = 4$$

따라서 R석에 해당하는 부분의 넓이는 그림의 색칠한 부분의 넓이와 같으므로 반지름의 길이가 $\overline{AC}$ 이고 중심각의 크기가 $\frac{7}{6}\pi$ 인 부채꼴 CAB의 넓이에 사각형 OACB의 넓이를 더하고 반지름의 길이가 4이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{3}$ 인 부채꼴 OAB의 넓이를 빼면 된다.

2단계 R석에 해당하는 부분의 넓이 구하기

$\overline{AC} = \overline{CB} = x$ 라 하면 삼각형 ACB에서 코사인법칙에 의하여

$$4^2 = x^2 + x^2 - 2 \times x \times x \times \cos \frac{5}{6}\pi$$

$$16 = 2x^2 - 2x^2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), (2 + \sqrt{3})x^2 = 16$$

$$\therefore x^2 = \frac{16}{2 + \sqrt{3}} = \frac{16(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = 32 - 16\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

그러므로 R석에 해당하는 부분의 넓이는

$$\left(\frac{1}{2} \times x^2 \times \frac{7}{6}\pi\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 + \frac{1}{2} \times x^2 \times \sin \frac{5}{6}\pi\right) - \left(\frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{3}\right)$$

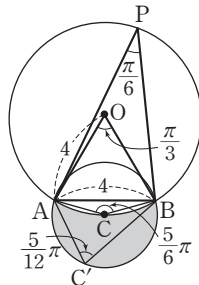
이 식에 ①을 대입하면

$$\frac{7}{12}\pi(32 - 16\sqrt{3}) + \left\{4\sqrt{3} + (16 - 8\sqrt{3}) \times \frac{1}{2}\right\} - \frac{8}{3}\pi$$

$$= \frac{48 - 28\sqrt{3}}{3}\pi + 8$$

3단계 $a + b + c$ 의 값 구하기

즉, $a = 48$, $b = -28$, $c = 8$ 이므로 $a + b + c = 28$



10 답 ④

1단계 $\overline{AD} = 3k$, $\overline{DB} = 2k$ 로 놓고, $\overline{BC}$ 의 길이를 k 에 대한 식으로 나타내기

$$\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 2 \text{이므로}$$

$$\overline{AD} = 3k, \overline{DB} = 2k (k > 0) \text{라 하면}$$

$$\overline{AB} = 3k + 2k = 5k$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{BC} : \overline{AB} = \sin A : \sin C = 8 : 5 \text{이므로}$$

$$\overline{BC} : 5k = 8 : 5 \quad \therefore \overline{BC} = 8k$$

2단계 $\overline{AC}$ 의 길이를 k 에 대한 식으로 나타내기

이때 $\overline{AE} = \overline{AD} = 3k$ 이므로

$$\triangle ADE = \frac{1}{2} \times 3k \times 3k \times \sin A = \frac{9}{2}k^2 \sin A$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 5k \times \overline{AC} \times \sin A = \frac{5}{2}k \overline{AC} \sin A$$

$$\therefore \triangle ADE : \triangle ABC = \frac{9}{2}k^2 \sin A : \frac{5}{2}k \overline{AC} \sin A$$

$$= 9k : 5 \overline{AC}$$

$$\triangle ADE : \triangle ABC = 9 : 35 \text{이므로}$$

$$9k : 5 \overline{AC} = 9 : 35 \quad \therefore \overline{AC} = 7k$$

3단계 $\sin B$ 의 값 구하기

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{(5k)^2 + (8k)^2 - (7k)^2}{2 \times 5k \times 8k} = \frac{1}{2}$$

이때 $0 < B < \pi$ 이므로

$$\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

4단계 k 의 값 구하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B} = 2R \text{에서 } \frac{7k}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \times 7 \quad \therefore k = \sqrt{3}$$

5단계 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값 구하기

점 A에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼각형 ABH에서 $\overline{AB} = 5\sqrt{3}$ 이므로

$$\overline{AH} = \overline{AB} \sin B = 5\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15}{2}$$

한편 직선 AH와 원 O가 만나는 점 중 점 H로

부터 더 멀리 떨어진 점이 P일 때, 삼각형

PBC의 넓이는 최대가 된다.

따라서 $\overline{BC} = 8\sqrt{3}$, $\overline{AP} = \overline{AD} = 3\sqrt{3}$ 이므로 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times \left(3\sqrt{3} + \frac{15}{2}\right) = 36 + 30\sqrt{3}$$

다른 풀이

1단계 원 O의 반지름의 길이를 r 로 놓고, $\overline{AC}$ 의 길이를 r 에 대한 식으로 나타내기

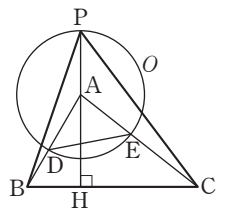
원 O의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$\overline{AD} = \overline{AE} = r \text{이고, } \overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 2 \text{이므로 } \overline{BD} = \frac{2}{3}r$$

또 $\overline{CE} = x$ 라 하면

$$\triangle ADE = \frac{1}{2} \times r \times r \times \sin A = \frac{1}{2}r^2 \sin A$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \frac{5}{3}r \times (r + x) \times \sin A = \frac{5}{6}r(r + x) \sin A$$



이때 $\triangle ADE : \triangle ABC = 9 : 35$ 이므로

$$\frac{1}{2}r^2 \sin A : \frac{5}{6}r(r+x) \sin A = 9 : 35$$

$$3r + 3x = 7r \quad \therefore x = \frac{4}{3}r$$

$$\therefore \overline{CE} = \frac{4}{3}r \text{이므로}$$

$$\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{CE} = r + \frac{4}{3}r = \frac{7}{3}r$$

2단계 $\overline{BC}$ 의 길이를 r 에 대한 식으로 나타내기

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{BC} : \overline{AB} = \sin A : \sin C = 8 : 5 \text{이므로}$$

$$\overline{BC} : \frac{5}{3}r = 8 : 5 \quad \therefore \overline{BC} = \frac{8}{3}r$$

3단계 $\sin C$ 의 값 구하기

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{\left(\frac{8}{3}r\right)^2 + \left(\frac{7}{3}r\right)^2 - \left(\frac{5}{3}r\right)^2}{2 \times \frac{8}{3}r \times \frac{7}{3}r} = \frac{11}{14}$$

이때 $0 < C < \pi$ 이므로

$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

4단계 원 O의 반지름의 길이 구하기

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin C} = 2R \text{에서 } \frac{\frac{5}{3}r}{\frac{5\sqrt{3}}{14}} = 2 \times 7 \quad \therefore r = 3\sqrt{3}$$

5단계 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값 구하기

점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{AH} = \overline{AC} \sin C = 7\sqrt{3} \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{15}{2}$$

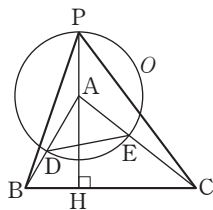
한편 직선 AH와 원 O가 만나는 점 중 점 H로

부터 더 멀리 떨어진 점 P일 때, 삼각형

PBC의 넓이는 최대가 된다.

따라서 $\overline{AP} = 3\sqrt{3}$, $\overline{BC} = 8\sqrt{3}$ 이므로 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times \left(3\sqrt{3} + \frac{15}{2}\right) = 36 + 30\sqrt{3}$$



11 답 -1

1단계 $\overline{AO} = a$, $\overline{BO} = b$, $\overline{CO} = c$, $\overline{DO} = d$, $\angle AOD = \theta$ 로 놓고, $\sin \theta$ 의 값을 a, b, c, d 에 대한 식으로 나타내기

$\overline{AO} = a$, $\overline{BO} = b$, $\overline{CO} = c$, $\overline{DO} = d$ 라 하고, $\angle AOD = \theta$ 라 하면 사각형 ABCD의 넓이

가 $\frac{49}{6}$ 이므로

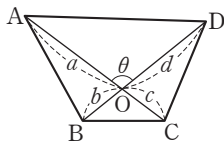
$$\frac{1}{2}(a+c)(b+d)\sin \theta = \frac{49}{6}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{49}{3(ab+bc+cd+ad)} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

2단계 $\triangle ABO + \triangle DOC$ 의 값을 a, b, c, d 에 대한 식으로 나타내기

삼각형 AOD의 넓이가 삼각형 BCO의 넓이의 $\frac{9}{2}$ 배이므로

$$\frac{1}{2}ad \sin \theta = \frac{9}{2} \times \frac{1}{2}bc \sin \theta \quad \therefore ad = \frac{9}{2}bc \quad \dots\dots \textcircled{2}$$



삼각형 ABO의 넓이와 삼각형 DOC의 넓이의 합은

$$\frac{1}{2}ab \sin(\pi - \theta) + \frac{1}{2}cd \sin(\pi - \theta)$$

$$= \frac{1}{2}ab \sin \theta + \frac{1}{2}cd \sin \theta$$

$$= \frac{(ab+cd) \sin \theta}{2}$$

$$= \frac{49(ab+cd)}{6(ab+bc+cd+ad)} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \frac{49}{6} \times \frac{ab+cd}{ab+cd+bc+\frac{9}{2}bc} \quad (\because \textcircled{2})$$

$$= \frac{49}{6} \times \frac{1}{\frac{ab+cd+bc+\frac{9}{2}bc}{ab+cd}}$$

$$= \frac{49}{6} \times \frac{1}{1 + \frac{11bc}{2(ab+cd)}}$$

3단계 $\triangle ABO + \triangle DOC$ 의 최솟값 구하기

$ab > 0$, $cd > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$ab+cd \geq 2\sqrt{abcd}$ (단, 등호는 $ab=cd$ 일 때 성립)

$$\therefore \frac{bc}{ab+cd} \leq \frac{bc}{2\sqrt{abcd}} = \frac{bc}{2\sqrt{\frac{9}{2}(bc)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{6} \quad (\because \textcircled{2})$$

즉, $\frac{bc}{ab+cd}$ 의 최댓값이 $\frac{\sqrt{2}}{6}$ 이므로

$$\frac{49}{6} \times \frac{1}{1 + \frac{11bc}{2(ab+cd)}} \geq \frac{49}{6} \times \frac{1}{1 + \frac{11}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{6}}$$

$$= \frac{98}{12+11\sqrt{2}}$$

$$= \frac{98(12-11\sqrt{2})}{(12+11\sqrt{2})(12-11\sqrt{2})}$$

$$= -12+11\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 ABO의 넓이와 삼각형 DOC의 넓이의 합의 최솟값은 $-12+11\sqrt{2}$ 이다.

4단계 $m+n$ 의 값 구하기

즉, $m = -12$, $n = 11$ 이므로

$$m+n = -1$$

12 답 $\frac{87}{10}$

1단계 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이 구하기

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \times 6 \times 12 \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 180 - 144 \times \frac{1}{2} = 108$$

$$\therefore \overline{AC} = 6\sqrt{3} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r' 이라 하면 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times r' \times (6+12+6\sqrt{3}) = (9+3\sqrt{3})r' \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 12 \times \sin \frac{\pi}{3} = 36 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } (9+3\sqrt{3})r' = 18\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore r' &= \frac{18\sqrt{3}}{9+3\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} \\ &= \frac{6\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} \\ &= 3\sqrt{3}-3\end{aligned}$$

2단계 $\overline{EF}-2r$ 의 값을 m, n 에 대한 식으로 나타내기

두 삼각형 ABC, EBF가 닮음이고, 닮음비는 $(m+n):n$ 이므로

$$r':r=(m+n):n$$

$$\therefore r=r' \times \frac{n}{m+n}$$

$$\therefore 2r=2r' \times \frac{n}{m+n} = \frac{(6\sqrt{3}-6)n}{m+n}$$

또 $\overline{AC}:\overline{EF}=(m+n):n$ 이므로

$$\overline{EF}=\frac{n}{m+n}\overline{AC}=\frac{6\sqrt{3}n}{m+n}$$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{EF}-2r &= \frac{6\sqrt{3}n}{m+n} - \frac{(6\sqrt{3}-6)n}{m+n} \\ &= \frac{6n}{m+n} \\ &= \frac{6}{\frac{m}{n}+1}\end{aligned}$$

3단계 $\overline{EF}-2r$ 의 값이 자연수가 되는 경우 구하기

$$\overline{EF}-2r \text{의 값이 자연수가 되려면 } \frac{6}{\frac{m}{n}+1}=k \text{라 할 때, } k\left(\frac{m}{n}+1\right)=6$$

인 자연수 k 가 존재해야 한다.

$$\text{이때 } k>5 \text{이면 } \frac{mk}{n}+k \geq \frac{6m}{n}+6>6 \text{이므로 } 1 \leq k \leq 5 \text{이다.}$$

$$k=1 \text{일 때, } \frac{m}{n}=5$$

$$k=2 \text{일 때, } \frac{m}{n}=2$$

$$k=3 \text{일 때, } \frac{m}{n}=1$$

$$k=4 \text{일 때, } \frac{m}{n}=\frac{1}{2}$$

$$k=5 \text{일 때, } \frac{m}{n}=\frac{1}{5}$$

3단계 모든 $\frac{m}{n}$ 의 값의 합 구하기

따라서 모든 $\frac{m}{n}$ 의 값의 합은

$$5+2+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{87}{10}$$

01 답 ③

점 P의 좌표를 $P\left(t, \frac{1}{t}\right) (t>0)$ 라 하자.

$$\overline{OP}=\sqrt{t^2+\left(\frac{1}{t}\right)^2}=\sqrt{t^2+\frac{1}{t^2}}=\frac{1}{t}\sqrt{t^4+1} \text{이므로}$$

삼각함수의 정의에 의하여

$$\sin \theta = \frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}\sqrt{t^4+1}} = \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}, \quad \cos \theta = \frac{t}{\frac{1}{t}\sqrt{t^4+1}} = \frac{t^2}{\sqrt{t^4+1}}$$

이때 $2\cos^2 \theta - 3\sin^2 \theta = -2$ 이므로

$$2\left(\frac{t^2}{\sqrt{t^4+1}}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{\sqrt{t^4+1}}\right)^2 = -2$$

$$\text{즉, } \frac{2t^4-3}{t^4+1} = -2 \text{이므로}$$

$$2t^4-3=-2(t^4+1), \quad t^4=\frac{1}{4} \quad \therefore t=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because t>0)$$

따라서 점 P의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ 이므로

$$\overline{OP}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(\sqrt{2})^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

02 답 4

그림과 같이 부채꼴 OBP에 내접하는 원의 중심을 O_1 이라 하고, 이 원이 호 BP와 만나는 점을 C, 선분 OB와 만나는 점을 D라 하면

$$\overline{O_1C}=\overline{O_1D}=r_1$$

$$\angle BAP=\theta \quad (0<\theta<\frac{\pi}{2}) \text{라 하면}$$

$$\angle BOP=2\angle BAP=2\theta$$

중심이 점 O_1 인 원이 선분 OP와 만나는 점을 D_1 이라 하면

$\triangle ODO_1 \cong \triangle OD_1O_1$ (RHS 합동)이므로

$$\angle DOO_1=\angle D_1OO_1 \text{에서}$$

$$\angle BOC=\frac{1}{2}\angle BOP=\theta$$

삼각형 O_1OD 는 직각삼각형이므로

$$\sin \theta = \frac{\overline{O_1D}}{\overline{OO_1}} = \frac{r_1}{1-r_1} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

그림과 같이 호 AP를 이등분하는 점을 E, 선분 AP의 중점을 F라 하면 삼각형 OFA는 직각삼각형이므로

$$\overline{OF}=\overline{OA} \sin \theta = \sin \theta$$

이때 $\overline{OE}=\overline{OF}+\overline{EF}$ 이므로

$$1=\sin \theta+2r_2 \quad \therefore \sin \theta=1-2r_2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } \frac{r_1}{1-r_1}=1-2r_2 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

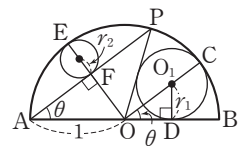
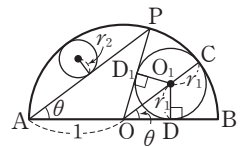
$$r_1+2r_2=\frac{31}{40} \text{에서 } 2r_2=\frac{31}{40}-r_1 \text{이므로 이를 } \textcircled{9} \text{에 대입하면}$$

$$\frac{r_1}{1-r_1}=1-\left(\frac{31}{40}-r_1\right), \quad \frac{r_1}{1-r_1}=\frac{9+40r_1}{40}$$

$$40r_1^2+9r_1-9=0, \quad (8r_1-3)(5r_1+3)=0$$

$$\therefore r_1=\frac{3}{8} \quad (\because r_1>0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } \sin \theta = \frac{\frac{3}{8}}{1-\frac{3}{8}} = \frac{3}{5}$$



기출 변형 문제로 단원 마스터				88~91쪽	
01 ③	02 4	03 ①	04 $\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$	05 7	
06 11	07 ③	08 8	09 $16\sqrt{2}$	10 43	11 31
12 $\frac{3}{2}$	13 $2\sqrt{3}$	14 $3\sqrt{6}$	15 ③		

이때 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore 5 \cos(\angle BAP) = 5 \times \frac{4}{5} = 4$$

03 답 ①

이차방정식 $x^2 + x + k = 0$ 의 두 근이 $2 \cos \theta, \sin \theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2 \cos \theta + \sin \theta = -1 \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$2 \cos \theta \sin \theta = k \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$4 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$4 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta \sin \theta + 1 - \cos^2 \theta = 1$$

$$3 \cos^2 \theta + 4 \cos \theta \sin \theta = 0$$

$$\cos \theta (3 \cos \theta + 4 \sin \theta) = 0$$

$$\therefore \cos \theta = 0 \text{ 또는 } \cos \theta = -\frac{4}{3} \sin \theta$$

이때 $\cos \theta = 0$ 이면 이차방정식 $x^2 + x + k = 0$ 이 $x = 0$ 을 근으로 가지므로 $k = 0$ 이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore \cos \theta = -\frac{4}{3} \sin \theta \quad \cdots \cdots ㉢$$

㉢을 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에 대입하면

$$\sin^2 \theta + \left(-\frac{4}{3} \sin \theta\right)^2 = 1$$

$$\frac{25}{9} \sin^2 \theta = 1, \sin^2 \theta = \frac{9}{25}$$

$$\therefore \sin \theta = -\frac{3}{5} \text{ 또는 } \sin \theta = \frac{3}{5}$$

이를 ㉢에 대입하면

$$\sin \theta = -\frac{3}{5} \text{ 일 때 } \cos \theta = \frac{4}{5}, \sin \theta = \frac{3}{5} \text{ 일 때 } \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25}$$

$$\text{따라서 ㉡에서 } k = 2 \cos \theta \sin \theta = 2 \times \left(-\frac{12}{25}\right) = -\frac{24}{25}$$

04 답 $\frac{10\sqrt{2}}{3}\pi$

원 O_1 의 중심을 O_1 , 원 O_2 의 중심을 O_2 라 하면 삼각형 O_1AB 에서 $\overline{O_1A} = \overline{O_1B} = a$, $\overline{AB} = \sqrt{2}a$ 이므로 삼각형 O_1AB 는 직각이등변삼각형이다.

원 O_2 에서 $\angle AO_2B = 2\angle ACB = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 이고, $\overline{O_2A} = \overline{O_2B}$ 이므로 삼각형 O_2AB 는 정삼각형이다.

$$\therefore \overline{O_2A} = \overline{AB} = \sqrt{2}a$$

그림에서 원 O_1 과 원 O_2 의 공통부분의 넓이는

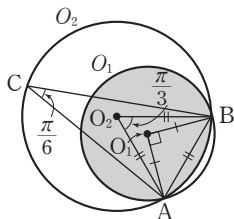
$$(\text{부채꼴 } O_2AB \text{의 넓이}) - \triangle O_2AB$$

$$+ \frac{3}{4}(\text{원 } O_1 \text{의 넓이}) + \triangle O_1AB$$

$$= \frac{1}{2} \times (\sqrt{2}a)^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2}a)^2$$

$$+ \frac{3}{4} \times \pi \times a^2 + \frac{1}{2} \times a \times a$$

$$= a^2 \left(\frac{13}{12} \pi - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right)$$



$$\text{이때 } \frac{13}{3} \pi - 2(\sqrt{3}-1) = 4 \left(\frac{13}{12} \pi - \frac{\sqrt{3}-1}{2} \right) \text{이므로}$$

$$a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

$$\text{즉, 원 } O_2 \text{의 반지름의 길이는 } \overline{O_2A} = \sqrt{2}a = 2\sqrt{2}$$

따라서 점 C가 나타내는 곡선은 중심각의 크기가 $2\pi - \angle AO_2B = \frac{5}{3}\pi$

이고, 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$ 인 부채꼴의 호와 같으므로 구하는 곡선의 길이는

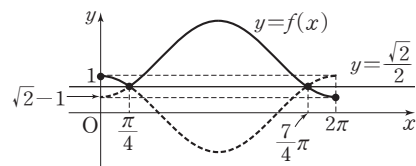
$$2\sqrt{2} \times \frac{5}{3} \pi = \frac{10\sqrt{2}}{3} \pi$$

05 답 7

(i) $k=1$ 일 때,

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{이므로 } f(x) = \begin{cases} \cos x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}) \\ \sqrt{2} - \cos x & (\frac{\pi}{4} < x \leq 2\pi) \end{cases}$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 는 그림과 같다.



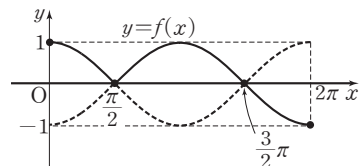
이때 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의 개수는 2이므로

$$a_1 = 2$$

(ii) $k=2$ 일 때,

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \text{이므로 } f(x) = \begin{cases} \cos x & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}) \\ -\cos x & (\frac{\pi}{2} < x \leq 2\pi) \end{cases}$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=0$ 은 그림과 같다.



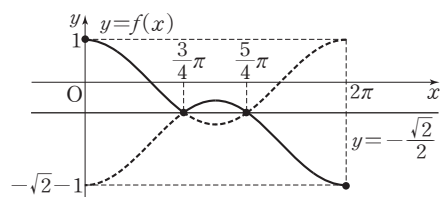
이때 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=0$ 의 교점의 개수는 2이므로

$$a_2 = 2$$

(iii) $k=3$ 일 때,

$$\cos \frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{이므로 } f(x) = \begin{cases} \cos x & (0 \leq x \leq \frac{3}{4}\pi) \\ -\sqrt{2} - \cos x & (\frac{3}{4}\pi < x \leq 2\pi) \end{cases}$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 는 그림과 같다.



이때 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 교점의 개수는 2이므로

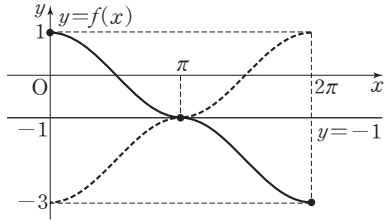
$$a_3 = 2$$

(iv) $k=4$ 일 때,

$$\cos \pi = -1 \text{ 이므로}$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & (0 \leq x \leq \pi) \\ -2 - \cos x & (\pi < x \leq 2\pi) \end{cases}$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-1$ 은 그림과 같다.



이때 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-1$ 의 교점의 개수는 1이므로

$$a_4 = 1$$

(i)~(iv)에서

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 2 + 2 + 1 = 7$$

06 답 11

자연수 n 에 대하여 $0 \leq x \leq 4$ 일 때, x 에 대한 방정식

$$\sin \pi \left(x - \frac{1}{6} \right) - \frac{(-1)^n}{n} = 0 \text{의 실근의 합은 함수 } y = \sin \pi \left(x - \frac{1}{6} \right) \text{의}$$

그래프와 직선 $y = \frac{(-1)^n}{n}$ 가 만나는 점의 x 좌표의 합과 같다.

함수 $y = \sin \pi \left(x - \frac{1}{6} \right)$ 의 그래프의 주기는 2이고, 함수

$y = \sin \pi \left(x - \frac{1}{6} \right)$ 의 그래프는 함수 $y = \sin \pi x$ 의 그래프를 x 축의 방향

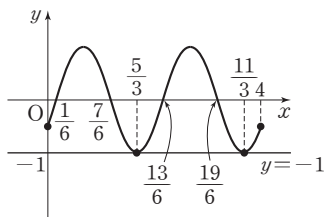
으로 $\frac{1}{6}$ 만큼 평행이동한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때,

함수 $y = \sin \pi \left(x - \frac{1}{6} \right)$ 의 그래프가 직선 $y=-1$ 과 만나는 점의 x 좌

표는 $\frac{5}{3}, \frac{11}{3}$ 이므로

$$f(1) = \frac{5}{3} + \frac{11}{3} = \frac{16}{3}$$



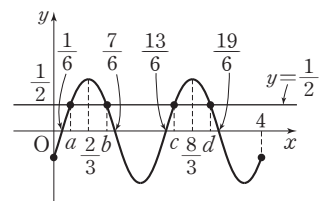
(ii) $n=2$ 일 때,

함수 $y = \sin \pi \left(x - \frac{1}{6} \right)$ 의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$ 과 만나는 점의 x 좌

표를 a, b, c, d 라 하면

$$\frac{a+b}{2} = \frac{2}{3}, \frac{c+d}{2} = \frac{8}{3} \text{에서 } a+b = \frac{4}{3}, c+d = \frac{16}{3}$$

$$\therefore f(2) = \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = \frac{20}{3}$$



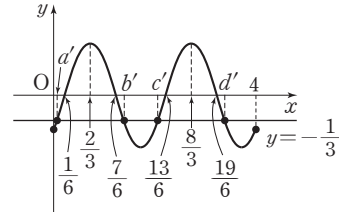
(iii) $n=3$ 일 때,

함수 $y = \sin \pi \left(x - \frac{1}{6} \right)$ 의 그래프가 직선 $y = -\frac{1}{3}$ 과 만나는 점의 x

좌표를 a', b', c', d' 이라 하면

$$\frac{a'+b'}{2} = \frac{2}{3}, \frac{c'+d'}{2} = \frac{8}{3} \text{에서 } a'+b' = \frac{4}{3}, c'+d' = \frac{16}{3}$$

$$\therefore f(3) = \frac{4}{3} + \frac{16}{3} = \frac{20}{3}$$



(iv) $n \geq 4$ 일 때, (ii), (iii)과 같은 방법으로 하면

$$f(n) = \frac{20}{3}$$

(i)~(iv)에서 $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) = \frac{16}{3} + \frac{20}{3}(n-1)$ 이므로

$$\frac{16}{3} + \frac{20}{3}(n-1) = 72, \frac{20}{3}(n-1) = \frac{200}{3}$$

$$n-1 = 10 \quad \therefore n = 11$$

07 답 ③

$2x=t$ 로 놓으면

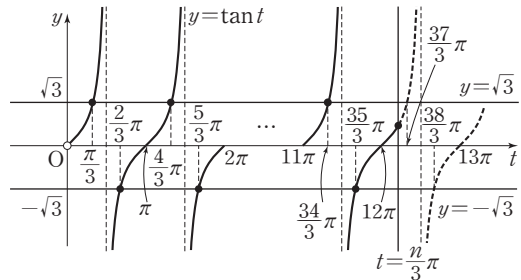
$0 < x \leq \frac{n}{6}\pi$ 에서 $0 < t \leq \frac{n}{3}\pi$ 이고 방정식은 $\tan^2 t - 3 = 0$

$$(\tan t + \sqrt{3})(\tan t - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore \tan t = -\sqrt{3} \text{ 또는 } \tan t = \sqrt{3}$$

즉, $f(n)=24$ 가 되려면 $0 < t \leq \frac{n}{3}\pi$ 에서 함수 $y = \tan t$ 의 그래프와 두

직선 $y = -\sqrt{3}, y = \sqrt{3}$ 이 만나는 점의 개수가 24이어야 한다.



이때 $0 < t \leq \pi$ 에서 함수 $y = \tan t$ 의 그래프와 두 직선 $y = -\sqrt{3}, y = \sqrt{3}$

이 만나는 점의 개수가 2이므로 $0 < t \leq 12\pi$ 에서 함수 $y = \tan t$ 의 그래

프와 두 직선 $y = -\sqrt{3}, y = \sqrt{3}$ 이 만나는 점의 개수는 24이다.

즉, $0 < t \leq \frac{n}{3}\pi$ 에서 함수 $y = \tan t$ 의 그래프와 두 직선 $y = -\sqrt{3},$

$y = \sqrt{3}$ 이 만나는 점의 개수가 24이려면

$$\frac{35}{3}\pi \leq \frac{n}{3}\pi < \frac{37}{3}\pi \quad \therefore 35 \leq n < 37$$

따라서 자연수 n 의 값은 35, 36이므로 모든 n 의 값의 합은

$$35 + 36 = 71$$

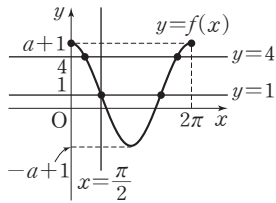
08 답 8

$f(x) = a \cos x + b$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 주기는 2π 이고, 최댓값과 최솟값은 각각 $a+b, -a+b$ 이다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $x=\frac{\pi}{2}$ 의 교점의 좌표는 $(\frac{\pi}{2}, b)$ 이고, b 는 5 이하의 자연수이므로 b 의 값에 따라 조건을 만족시키는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 다음과 같다.

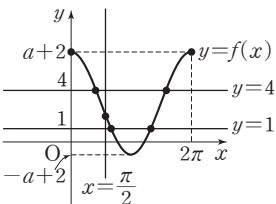
(i) $b=1$ 일 때,

그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 세 직선 $x=\frac{\pi}{2}, y=1, y=4$ 의 교점의 개수가 5가 되도록 하는 자연수 a, b 의 값은 존재하지 않는다.



(ii) $b=2$ 일 때,

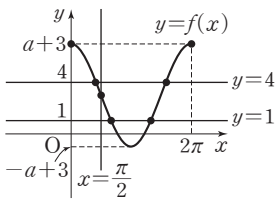
그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 두 직선 $y=1, y=4$ 의 교점의 개수가 각각 2가 되어야 하므로 $a+2 \geq 4$ 에서 $a \geq 2$
 $-a+2 < 1$ 에서 $a > 1$
 $\therefore a \geq 2$



즉, 5 이하의 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2)$ 의 4개이다.

(iii) $b=3$ 일 때,

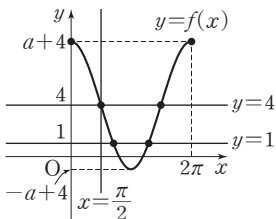
그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 두 직선 $y=1, y=4$ 의 교점의 개수가 각각 2가 되어야 하므로 $a+3 \geq 4$ 에서 $a \geq 1$
 $-a+3 < 1$ 에서 $a > 2$
 $\therefore a > 2$



즉, 5 이하의 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(3, 3), (4, 3), (5, 3)$ 의 3개이다.

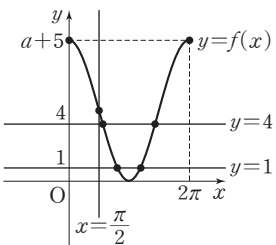
(iv) $b=4$ 일 때,

그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 세 직선 $x=\frac{\pi}{2}, y=1, y=4$ 의 교점의 개수가 5가 되도록 하는 a, b 의 값은 존재하지 않는다.



(v) $b=5$ 일 때,

그림과 같이 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 의 교점의 개수가 2가 되어야 하므로 $-a+5 < 1 \therefore a > 4$
 즉, 5 이하의 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(5, 5)$ 의 1개이다.



(i)~(v)에서 $n(A \cup B \cup C)=5$ 가 되도록 하는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$4+3+1=8$$

09 답 16√2

$0 \leq x < k$ 에서 $f(x) = -\frac{1}{2} \sin \pi x$ 이므로 $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ 이고,

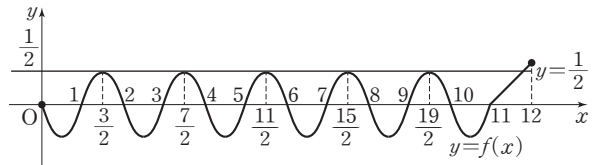
함수 $y = -\frac{1}{2} \sin \pi x$ 의 그래프의 주기는 2이다.

또 $f(k) = \log_3 2^{k-k} = 0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 점 $(k, 0)$ 을 지난다.

방정식 $f(x)=a$ 의 실근은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

$0 \leq x < 12$ 에서 방정식 $f(x)=a$ 의 실근의 최댓값이 12이므로 모든 실근의 합이 $\frac{91}{2}$ 이기 위하여 실근의 개수는 4 이상이어야 한다.

(i) $a = \frac{1}{2}$ 인 경우



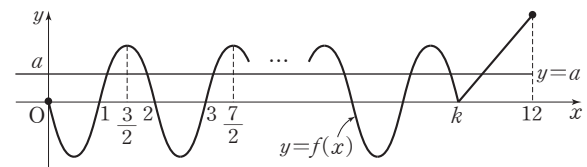
$k=11$ 일 때, 방정식 $f(x)=a$ 의 모든 실근의 합이 최대이다.

$0 \leq x < 11$ 에서 모든 실근의 합은 $\frac{3}{2} + \frac{7}{2} + \frac{11}{2} + \frac{15}{2} + \frac{19}{2} = \frac{55}{2}$ 이고,

$f(12) = \log_3 2^{12-11} = \log_3 2 > \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$ 이므로 $11 \leq x < 12$ 에서 방정식 $f(x)=a$ 는 오직 하나의 실근을 갖고 그 값은 12보다 작다.

따라서 방정식 $f(x)=a$ 의 모든 실근의 합이 $\frac{79}{2}$ 보다 작으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0 < a < \frac{1}{2}$ 인 경우



$k \leq x < 12$ 에서 방정식 $\log_3 2^{x-k} = a$ 의 실근의 개수는 최대 1이고, 그 값은 12 이하이다.

$0 \leq x < 12$ 에서 방정식 $f(x)=a$ 의 모든 실근의 합이 $\frac{91}{2}$ 이기 위하여

$0 \leq x < k$ 에서 방정식 $-\frac{1}{2} \sin \pi x = a$ 의 모든 실근의 합이 $\frac{67}{2}$ 이상이어야 한다.

$0 \leq x < 2$ 에서 함수 $y = -\frac{1}{2} \sin \pi x$ 의 그래프와 직선 $y=a$ 가 만나는 두 점의 x 좌표를 각각 α_1, α_2 라 할 때, $\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \frac{3}{2}$, 즉 $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$ 이다.

또 함수 $y = -\frac{1}{2} \sin \pi x$ 의 그래프의 주기가 2이므로

$2 \leq x < 4$ 에서 방정식 $-\frac{1}{2} \sin \pi x = a$ 의 모든 실근의 합은 7,

$4 \leq x < 6$ 에서 방정식 $-\frac{1}{2} \sin \pi x = a$ 의 모든 실근의 합은 11,

$6 \leq x < 8$ 에서 방정식 $-\frac{1}{2} \sin \pi x = a$ 의 모든 실근의 합은 15,

$8 \leq x < 10$ 에서 방정식 $-\frac{1}{2} \sin \pi x = a$ 의 모든 실근의 합은 19,

$10 \leq x < 11$ 에서 방정식 $-\frac{1}{2} \sin \pi x = a$ 는 실근을 갖지 않는다.

따라서 다음 세 가지 경우로 나누어 생각할 수 있다.

① $k \leq 7$ 일 때,

$0 \leq x < k$ 에서 방정식 $-\frac{1}{2} \sin \pi x = a$ 의 모든 실근의 합은 21 이하이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $k=8$ 또는 $k=9$ 일 때,

$0 \leq x < k$ 에서 방정식 $-\frac{1}{2}\sin \pi x = a$ 의 모든 실근의 합은

$3+7+11+15=36$ 이므로 $k \leq 12$ 에서 실근이 $\frac{19}{2}$ 이면 조건을 만족시킨다.

③ $k=8$ 이면 $f\left(\frac{19}{2}\right) = \log_3 2^{\frac{19}{2}-8} = \log_3 2\sqrt{2} = a$ 에서

$$a = \log_3 2\sqrt{2}$$

이때 $2\sqrt{2} > \sqrt{3}$ 이므로 $\log_3 2\sqrt{2} > \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$

그런데 $a > \frac{1}{2}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

④ $k=9$ 이면 $f\left(\frac{19}{2}\right) = \log_3 2^{\frac{19}{2}-9} = \log_3 \sqrt{2} = a$ 에서

$$a = \log_3 \sqrt{2}$$

이때 $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ 이므로 $\log_3 \sqrt{2} < \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$

즉, $0 < a < \frac{1}{2}$ 을 만족시킨다.

⑤ $k=10$ 또는 $k=11$ 일 때,

$0 \leq x < k$ 에서 방정식 $-\frac{1}{2}\sin \pi x = a$ 의 모든 실근의 합은

$3+7+11+15+19=55 > \frac{91}{2}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a = \log_3 \sqrt{2}$, $k=9$ 이므로

$$ak = 9 \log_3 \sqrt{2} = \log_3 16\sqrt{2} \quad \therefore 3^{ak} = 16\sqrt{2}$$

10 답 43

$\angle CDF = \theta$ 라 하면 $\angle BDE = \frac{\pi}{2} - \theta$

$$\overline{AE} = \overline{DE} \text{이므로 } \overline{BE} = 1 - \overline{AE} = 1 - \overline{DE}$$

$$\overline{AF} = \overline{DF} \text{이므로 } \overline{CF} = 1 - \overline{AF} = 1 - \overline{DF}$$

삼각형 BDE와 삼각형 DCF의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r_1 , r_2 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\text{삼각형 BDE에서 } \frac{1 - \overline{DE}}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\overline{DE}}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2r_1 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$\text{삼각형 DCF에서 } \frac{1 - \overline{DF}}{\sin \theta} = \frac{\overline{DF}}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2r_2 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

이때 $2r_1 = 3r_2$ 이므로 $\overline{DF} = 2x$ 라 하면 $\overline{DE} = \frac{3}{2}\overline{DF} = 3x$

$$\textcircled{㉑} \text{에서 } \frac{1-3x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{3x}{\sin \frac{\pi}{4}} \text{이므로}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1-3x) = 3x \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right), \frac{\sqrt{2}}{2}(1-3x) = 3x \cos \theta$$

$$\text{양변을 제곱하여 정리하면 } (1-3x)^2 = 18x^2 \cos^2 \theta \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

$$\textcircled{㉒} \text{에서 } \frac{1-2x}{\sin \theta} = \frac{2x}{\sin \frac{\pi}{4}} \text{이므로 } \frac{\sqrt{2}}{2}(1-2x) = 2x \sin \theta$$

$$\text{양변을 제곱하여 정리하면 } (1-2x)^2 = 8x^2 \sin^2 \theta \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$\textcircled{㉓} \times 4 + \textcircled{㉔} \times 9 \text{를 하면 } 4(1-3x)^2 + 9(1-2x)^2 = 72x^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$4(1-3x)^2 + 9(1-2x)^2 = 72x^2, 72x^2 - 60x + 13 = 72x^2$$

$$-60x + 13 = 0 \quad \therefore x = \frac{13}{60}$$

따라서 $\overline{DF} = 2x = \frac{13}{30}$ 이므로 $p=30$, $q=13$

$$\therefore p+q=43$$

11 답 31

그림에서 $\overline{OC} = \overline{OD} = \overline{OE} = 1$ 이고,

$$\angle COE = \frac{2}{3}\pi \text{이므로}$$

삼각형 OCE에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CE}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos \frac{2}{3}\pi$$

$$= 2 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$\therefore \overline{CE} = \sqrt{3} \quad (\because \overline{CE} > 0)$$

$$\text{사각형 COED에서 } \angle OCD + \angle CDE + \angle OED = 2\pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

이때 $\angle OCD = \angle ODC$, $\angle ODE = \angle OED$ 에서

$$\angle OCD + \angle OED = \angle CDE \text{이므로}$$

$$2\angle CDE = \frac{4}{3}\pi \quad \therefore \angle CDE = \frac{2}{3}\pi$$

한편 $\overline{CD} : \overline{DE} = 1 : 2$ 이므로 $\overline{CD} = a$, $\overline{DE} = 2a$ ($a > 0$)라 하면

삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CE}^2 = a^2 + (2a)^2 - 2 \times a \times 2a \times \cos \frac{2}{3}\pi$$

$$= 5a^2 - 4a^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 7a^2$$

$$\therefore \overline{CE} = \sqrt{7}a \quad (\because \overline{CE} > 0)$$

$$\text{즉, } \sqrt{7}a = \sqrt{3} \text{이므로 } a = \frac{\sqrt{21}}{7} \quad \therefore \overline{BE} = \overline{CD} = a = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

$\angle OBE = \theta$ 라 하고, 점 O에서 선분 BE에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\cos \theta = \frac{\overline{BH}}{\overline{OB}} = \frac{\frac{1}{2}\overline{BE}}{\overline{OB}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{21}}{7} = \frac{\sqrt{21}}{14}$$

따라서 $\cos^2 \theta = \frac{3}{28}$ 이므로 $p=28$, $q=3$

$$\therefore p+q=31$$

12 답 $\frac{3}{2}$

점 P가 점 B를 지나지 않는 호 AC와 선분 AC의 수직이등분선의 교점일 때, 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되므로 이때의 점 P가 점 Q이다.

$$\cos(\angle ABC) = -\frac{5}{8} \text{이므로}$$

$$\cos(\angle CQA) = \cos(\pi - \angle ABC)$$

$$= -\cos(\angle ABC) = \frac{5}{8}$$

삼각형 QAC가 $\overline{QA} = \overline{QC}$ 인 이등변삼각형이므로 $\overline{QC} = \overline{QA} = 3\sqrt{5}$

즉, 삼각형 QAC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = (3\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2 - 2 \times 3\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} \times \frac{5}{8}$$

$$= 45 + 45 - \frac{225}{4} = \frac{135}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

한편 $\overline{AB} = a$ ($a > 0$)라 하면 $\overline{BC} = 2\overline{AB} = 2a$

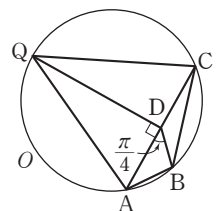
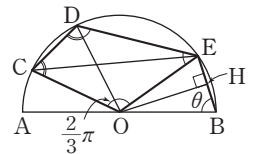
즉, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = a^2 + (2a)^2 - 2 \times a \times 2a \times \left(-\frac{5}{8}\right)$$

$$= a^2 + 4a^2 + \frac{5}{2}a^2 = \frac{15}{2}a^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

$$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒} \text{에서 } \frac{15}{2}a^2 = \frac{135}{4} \text{이므로}$$

$$a^2 = \frac{9}{2} \quad \therefore a = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad (\because a > 0) \quad \therefore \overline{AB} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$



따라서 삼각형 ADB의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \frac{\pi}{4}} = 2R \text{ 이므로 } \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \quad \therefore R = \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{3}{2}$ 이다.

13 답 $2\sqrt{3}$

$\angle CED = \pi - \angle CEB = \frac{\pi}{3}$ 이므로

삼각형 ECD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{CD}^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} = 13 - 12 \times \frac{1}{2} = 7$$

$\therefore \overline{CD} = \sqrt{7}$ ($\because \overline{CD} > 0$)

반원의 반지름의 길이를 R 라 하면

$\overline{OD} = R$, $\overline{OE} = R - 2$ 이므로

삼각형 ODE에서 코사인법칙에 의하여

$$R^2 = 3^2 + (R - 2)^2 - 2 \times 3 \times (R - 2) \times \cos \frac{2}{3}\pi$$

$$R^2 = R^2 - 4R + 13 - 6(R - 2) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$-R + 7 = 0 \quad \therefore R = 7$$

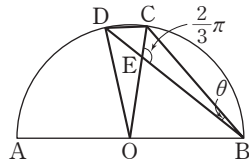
한편 $\angle CBD = \theta$ 라 하면 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{CD}}{\sin \theta} = 2R \text{ 이므로 } \frac{\sqrt{7}}{\sin \theta} = 14 \quad \therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{7}}{14}$$

따라서 삼각형 BCE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin \frac{2}{3}\pi} = \frac{\overline{CE}}{\sin \theta} \text{ 이므로 } \overline{BC} = \frac{\overline{CE} \sin \frac{2}{3}\pi}{\sin \theta} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{14}} = 2\sqrt{21}$$

$$\therefore \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} = \frac{2\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = 2\sqrt{3}$$



14 답 $3\sqrt{6}$

$\angle DBA = \theta$ 라 하면 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AD}}{\sin \theta} = 2R \quad \therefore \overline{AD} = 2R \sin \theta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\overline{AC} \parallel \overline{BD}$ 이므로 $\angle CAB = \pi - \theta$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BC}}{\sin(\pi - \theta)} = 2r \text{ 에서 } \frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = 2r \quad \therefore \overline{BC} = 2r \sin \theta \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\overline{AH} : \overline{HB} = 1 : 2$ 이므로

$$\overline{AH} = \frac{1}{3} \overline{AB} = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$\overline{AC} = x$ 라 하면 $\overline{BD} = 3x$ 이므로

$$\text{직각삼각형 AHC에서 } \cos(\pi - \theta) = \frac{\overline{AH}}{\overline{AC}} = \frac{\sqrt{3}}{x}$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{x} \rightarrow \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AD}^2 &= (3\sqrt{3})^2 + (3x)^2 - 2 \times 3\sqrt{3} \times 3x \times \cos \theta \\ &= 27 + 9x^2 - 18\sqrt{3}x \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{x}\right) \\ &= 9x^2 + 81 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= (3\sqrt{3})^2 + x^2 - 2 \times 3\sqrt{3} \times x \times \cos(\pi - \theta) \\ &= 27 + x^2 - 6\sqrt{3}x \times \frac{\sqrt{3}}{x} \\ &= x^2 + 9 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{4} \text{에 대입하면 } 4R^2 \sin^2 \theta = 9x^2 + 81 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{2} \text{을 } \textcircled{4} \text{에 대입하면 } 4r^2 \sin^2 \theta = x^2 + 9 \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5} + \textcircled{6} \text{을 하면 } 4(R^2 + r^2) \sin^2 \theta = 10x^2 + 90$$

따라서 $4(R^2 + r^2) \times \sin^2 \theta = 150$ 이므로

$$10x^2 + 90 = 150, x^2 = 6 \quad \therefore x = \sqrt{6} \quad (\because x > 0)$$

$$\therefore \overline{BD} = 3x = 3\sqrt{6}$$

15 답 ③

$\overline{AD} : \overline{DB} = 1 : 2$ 이므로 $\overline{AD} = k$, $\overline{DB} = 2k$ ($k > 0$)라 하면

$$\overline{AB} = k + 2k = 3k$$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\overline{BC} : \overline{AB} = \sin A : \sin C = 5 : 3 \text{ 이므로}$$

$$\overline{BC} : 3k = 5 : 3 \quad \therefore \overline{BC} = 5k$$

이때 $\overline{AE} = \overline{AD} = k$ 이므로

$$\triangle ADE = \frac{1}{2} \times k \times k \times \sin A = \frac{1}{2} k^2 \sin A$$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 3k \times \overline{AC} \times \sin A = \frac{3}{2} k \overline{AC} \sin A$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ADE : \triangle ABC &= \frac{1}{2} k^2 \sin A : \frac{3}{2} k \overline{AC} \sin A \\ &= k : 3 \overline{AC} \end{aligned}$$

$$\triangle ADE : \triangle ABC = 1 : 12 \text{ 이므로}$$

$$k : 3 \overline{AC} = 1 : 12 \quad \therefore \overline{AC} = 4k$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(3k)^2 + (4k)^2 - (5k)^2}{2 \times 3k \times 4k} = 0$$

$$\text{이때 } 0 < A < \pi \text{ 이므로 } \angle A = \frac{\pi}{2}$$

즉, 삼각형 ABC는 $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 삼각형 ABC의 외접원의 중심은 $\overline{BC}$ 의 중점이 된다.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $\frac{5}{2}k$ 이므로

$$\frac{5}{2}k = 5\sqrt{2} \quad \therefore k = 2\sqrt{2}$$

점 A에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼각형 ABH에서 $\overline{AB} = 6\sqrt{2}$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \overline{AB} \sin(\angle ABH) \\ &= 6\sqrt{2} \sin(\angle ABH) \end{aligned}$$

이때 삼각형 ABC가 직각삼각형이고,

$$\overline{AC} = 8\sqrt{2}, \overline{BC} = 10\sqrt{2} \text{ 이므로}$$

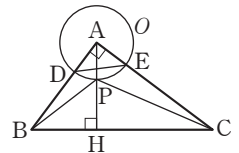
$$\sin(\angle ABH) = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{8\sqrt{2}}{10\sqrt{2}} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \overline{AH} = 6\sqrt{2} \times \frac{4}{5} = \frac{24\sqrt{2}}{5}$$

즉, 직선 AH와 원 O가 만나는 점 중 점 H로부터 더 가까운 점이 P일 때, 삼각형 PBC의 넓이는 최소가 된다.

$$\text{따라서 } \overline{PH} = \frac{24\sqrt{2}}{5} - 2\sqrt{2} = \frac{14\sqrt{2}}{5} \text{ 이므로 삼각형 PBC의 넓이의 최솟값은}$$

$$\frac{1}{2} \times 10\sqrt{2} \times \frac{14\sqrt{2}}{5} = 28$$



STEP 1

핵심 문제

| 94~95쪽

01 86	02 18	03 93	04 ④	05 22	06 ①
07 ⑤	08 9	09 36	10 25400원	11 86	
12 ⑤					

01 답 86

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 = -12 \text{에서}$$

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = -12$$

$$3a_1 + 3d = -12$$

$$\therefore a_1 + d = -4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 34 \text{에서}$$

$$(a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 5d) = 34$$

$$4a_1 + 14d = 34$$

$$\therefore 2a_1 + 7d = 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a_1 = -9, d = 5$$

$$\therefore a_{20} = a_1 + 19d = -9 + 19 \times 5 = 86$$

02 답 18

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 자연수이므로 $d > 0$

$$\textcircled{7} \text{에서 } a_1 + 7d = 2(a_1 + 4d) + 10$$

$$\therefore a_1 = -d - 10 < 0$$

즉, 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < a_{n+1}$ 이므로 $a_n < 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값을 k 라 하면

$$a_{k+1} \geq 0 \quad \therefore a_k \times a_{k+1} \leq 0$$

그런데 ④에서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \times a_{n+1} \geq 0$ 이므로

$$a_{k+1} = 0$$

$$\text{이때 } a_{k+1} = (-d - 10) + kd \text{이므로}$$

$$(-d - 10) + kd = 0, kd = 10 + d$$

$$\therefore k = \frac{10}{d} + 1$$

한편 k 가 자연수이므로 d 는 10의 약수이다.따라서 조건을 만족시키는 d 의 값은 1, 2, 5, 10이므로 구하는 합은

$$1 + 2 + 5 + 10 = 18$$

03 답 93

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 첫째항이 x , 제 $(m+2)$ 항이 y 이므로

$$y = x + (m+2-1)d$$

$$\therefore y - x = (m+1)d$$

$$a_m - a_{m-4} = \{a + (m-1)d\} - \{a + (m-4-1)d\} = 4d$$

이때 $x \neq y$ 이므로 $d \neq 0$

$$\therefore \frac{a_m - a_{m-4}}{y - x} = \frac{4d}{(m+1)d} = \frac{4}{m+1}$$

$$\text{즉, } \frac{4}{m+1} = \frac{2}{47} \text{이므로}$$

$$m+1=94 \quad \therefore m=93$$

04 답 ④

세 수 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b = a + c$$

$$a + b + c = 12 \text{에서 } 2b + b = 12 \quad \therefore b = 4$$

주어진 등차수열의 공차를 d ($d > 0$)라 하면

$$a = 4 - d, c = 4 + d$$

이때 $abc = -420$ 이므로

$$(4-d) \times 4 \times (4+d) = -420 \text{에서 } 16 - d^2 = -105$$

$$d^2 = 121 \quad \therefore d = 11 (\because d > 0)$$

따라서 $a = -7, b = 4, c = 15$ 이므로

$$c - a - b = 18$$

05 답 22

세 수 a_k, a_{k+1}, a_{k+2} 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2a_{k+1} = a_k + a_{k+2}$$

$$\text{즉, } a_k + a_{k+1} + a_{k+2} = 21 \text{에서 } 2a_{k+1} + a_{k+1} = 21 \quad \therefore a_{k+1} = 7$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d (d 는 자연수)라 하면

$$a_{k+1} = a_1 + kd \text{에서 } a_1 = a_{k+1} - kd = 7 - kd \text{이고,}$$

$$a_{k+4} = a_{k+1} + 3d = 7 + 3d \text{이므로}$$

$$S_{k+4} = \frac{(k+4)(a_1 + a_{k+4})}{2} = \frac{(k+4)\{14 + (3-k)d\}}{2}$$

$$\text{따라서 } \frac{(k+4)\{14 + (3-k)d\}}{2} = 11 \text{이므로}$$

$$(k+4)\{14 + (3-k)d\} = 22$$

이때 $k+4$ 는 4보다 큰 자연수이므로

$$k+4=11 \text{ 또는 } k+4=22 \quad \therefore k=7 \text{ 또는 } k=18$$

(i) $k=7$ 일 때,

$$14 + (3-7)d = 2 \text{에서 } -4d = -12 \quad \therefore d = 3$$

(ii) $k=18$ 일 때,

$$14 + (3-18)d = 1 \text{에서 } -15d = -13 \quad \therefore d = \frac{13}{15}$$

그런데 d 는 자연수이므로 $d=3$

$$\therefore a_{k+6} = a_{k+1} + 5d = 7 + 5 \times 3 = 22$$

06 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$2a_{n+2} - a_n = 2ar^{n+1} - ar^{n-1} = (2ar^2 - a)r^{n-1}$$

이때 수열 $\{2a_{n+2} - a_n\}$ 은 첫째항이 12, 공비가 $\sqrt{2}$ 인 등비수열이므로

$$2ar^2 - a = 12, r = \sqrt{2}$$

$$r = \sqrt{2} \text{를 } 2ar^2 - a = 12 \text{에 대입하면}$$

$$4a - a = 12 \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore a_3 = ar^2 = 4 \times (\sqrt{2})^2 = 8$$

07 답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a < 0$), 공비를 r ($r \neq 0$)라 하면

$$a_3 a_5 = 8a_8 \text{에서 } ar^2 \times ar^4 = 8ar^7$$

$$a^2 r^6 = 8ar^7 \quad \therefore a = 8r$$

그런데 $a < 0$ 이므로 $8r < 0 \quad \therefore r < 0$

$$\therefore a_n = 8r \times r^{n-1} = 8r^n$$

이때 $a_2 = 8r^2 > 0, a_3 = 8r^3 < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} a_1 + |a_2| + |2a_3| &= a_1 + a_2 - 2a_3 \\ &= 8r + 8r^2 - 16r^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{즉, } 8r+8r^2-16r^3=0 \text{ 이므로 } 2r^2-r-1=0 \\ &(2r+1)(r-1)=0 \quad \therefore r=-\frac{1}{2} \quad (\because r<0) \\ &\therefore a_2=8r^2=8 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2=2 \end{aligned}$$

08 답 9

다항식 $f(x)=x^2+ax+b$ 를 $x+1$, x , $x-1$ 로 각각 나누었을 때의 나머지는

$$f(-1)=1-a+b, f(0)=b, f(1)=1+a+b$$

세 수 $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$\{f(0)\}^2=f(-1) \times f(1)$$

$$\text{즉, } b^2=(1-a+b)(1+a+b) \text{ 이므로}$$

$$b^2=(1+b)^2-a^2, b^2=1+2b+b^2-a^2$$

$$\therefore a^2=2b+1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 다항식 $f(x)=x^2+ax+b$ 를 $x-2$ 로 나누었을 때의 나머지가 $\frac{3}{2}$

$$\text{이므로 } f(2)=\frac{3}{2} \text{에서}$$

$$4+2a+b=\frac{3}{2} \quad \therefore b=-2a-\frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$a^2=2\left(-2a-\frac{5}{2}\right)+1, a^2=-4a-4$$

$$a^2+4a+4=0, (a+2)^2=0 \quad \therefore a=-2$$

이를 ②에 대입하면

$$b=4-\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$$

$$\therefore 2b-3a=2 \times \frac{3}{2}-3 \times (-2)=9$$

개념 NOTE

다항식 $f(x)$ 를 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라 하면 $R=f(a)$ 이다.

09 답 36

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 첫째항이 2이므로

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=12 \text{에서}$$

$$\frac{2(r^5-1)}{r-1}=12 \quad \dots\dots \textcircled{1} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

$$a_1+a_2+\dots+a_{20}=180 \text{에서}$$

$$\frac{2(r^{20}-1)}{r-1}=180, \frac{2(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=180$$

$$\therefore \frac{2(r^5-1)(r^5+1)(r^{10}+1)}{r-1}=180 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } (r^5+1)(r^{10}+1)=15$$

$$r^5=X \text{로 놓으면 } (X+1)(X^2+1)=15$$

$$X^3+X^2+X-14=0$$

$$(X-2)(X^2+3X+7)=0$$

이때 X 는 실수이므로 $X=2$

$$\therefore r^5=2 \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\therefore a_1+a_2+\dots+a_{10}=\frac{2(r^{10}-1)}{r-1}$$

$$=\frac{2(r^5-1)(r^5+1)}{r-1}$$

$$=\frac{2(r^5-1)}{r-1} \times (r^5+1)$$

$$=12(2+1)=36 \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

10 답 25400원

54만 원의 24개월 동안의 원리합계는

$$54(1+0.01)^{24}=54 \times 1.01^{24}=54 \times 1.27(\text{만 원})$$

또 이달 말부터 매달 a 만 원씩 24개월 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$a+a(1+0.01)+a(1+0.01)^2+\dots+a(1+0.01)^{23}$$

$$=\frac{a\{(1+0.01)^{24}-1\}}{(1+0.01)-1}=\frac{a(1.27-1)}{0.01}=27a(\text{만 원})$$

이때 적립금의 원리합계가 (54×1.27) 만 원이어야 하므로

$$27a=54 \times 1.27 \quad \therefore a=2.54$$

따라서 매달 지불해야 하는 금액은 25400원이다.

11 답 86

$$S_n=an^2-2n+b \text{에서 } a_1=S_1=a-2+b$$

$$\text{이때 } a_1=3 \text{이므로 } a-2+b=3$$

$$\therefore a+b=5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_6=S_6-S_5$$

$$=(a \times 6^2-2 \times 6+b)-(a \times 5^2-2 \times 5+b)$$

$$=11a-2$$

$$\text{즉, } 11a-2=31 \text{이므로 } a=3$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } 3+b=5 \quad \therefore b=2$$

$$\therefore S_n=3n^2-2n+2$$

$$\therefore a_{15}=S_{15}-S_{14}$$

$$=(3 \times 15^2-2 \times 15+2)-(3 \times 14^2-2 \times 14+2)$$

$$=85$$

$$\therefore a-b+a_{15}=3-2+85=86$$

다른 풀이

$$S_n=an^2-2n+b \text{에서 } a_1=S_1=a-2+b$$

$$\text{이때 } a_1=3 \text{이므로 } a-2+b=3$$

$$\therefore a+b=5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=an^2-2n+b-\{a(n-1)^2-2(n-1)+b\}$$

$$=2an-a-2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{이때 } a_6=31 \text{이므로 } 12a-a-2=31$$

$$11a=33 \quad \therefore a=3$$

$$a=3 \text{을 ①에 대입하면 } 3+b=5 \quad \therefore b=2$$

$$a=3 \text{을 ②에 대입하면 } a_n=6n-5 \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_{15}=6 \times 15-5=85$$

$$\therefore a-b+a_{15}=3-2+85=86$$

12 답 ⑤

$$S_n=3^{n+1}+18 \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n=S_n-S_{n-1}$$

$$=(3^{n+1}+18)-(3^n+18)$$

$$=3^n(3-1)=2 \times 3^n \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1=S_1=3^2+18=27 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 ②은 ①에 $n=1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로 일반항 a_n 은

$$a_1=27, a_n=2 \times 3^n \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{a_9}{a_1+a_3} &= \frac{2 \times 3^9}{27+2 \times 3^3} = \frac{2 \times 3^9}{3^3(1+2)} \\ &= \frac{2 \times 3^9}{3^4} = 2 \times 3^5 = 486\end{aligned}$$

STEP 2 고난도 문제 96~100쪽					
01 ⑤	02 ⑤	03 117	04 $\frac{32}{3}$	05 ④	06 ④
07 $\frac{1}{144}$	08 $\frac{3}{4}$	09 26	10 ①	11 80	12 65
13 448	14 18	15 ②	16 ①	17 ⑤	18 117
19 3	20 ③	21 $\sqrt{3}+1$	22 ①	23 5	
24 ①	25 ③				

01 답 ⑤

부등식 $(x-a_n)^2 \leq (x-a_{n+2})^2$ 에서

$$(x-a_n)^2 - (x-a_{n+2})^2 \leq 0$$

$$\{(x-a_n) - (x-a_{n+2})\} \{(x-a_n) + (x-a_{n+2})\} \leq 0$$

$$(a_{n+2}-a_n)\{2x-(a_n+a_{n+2})\} \leq 0$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 음수인 등차수열이므로

$$a_{n+2} < a_n \quad \therefore a_{n+2}-a_n < 0$$

$$\text{즉, } 2x - (a_n + a_{n+2}) \geq 0 \text{ 이므로 } x \geq \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 x 의 최솟값은 $\frac{a_n + a_{n+2}}{2}$ 이므로

$$b_n = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 첫째항이 1이므로

$$a_n = 1 + (n-1)d$$

$$\therefore b_n = \frac{a_n + a_{n+2}}{2}$$

$$= \frac{\{1 + (n-1)d\} + \{1 + (n+1)d\}}{2}$$

$$= 1 + nd$$

이때 $b_{49} + b_{51} = -198$ 이므로

$$(1+49d) + (1+51d) = -198$$

$$2+100d = -198 \quad \therefore d = -2$$

$$\therefore \frac{a_6}{a_3} = \frac{1+5d}{1+2d} = \frac{1+5 \times (-2)}{1+2 \times (-2)} = 3$$

02 답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d \neq 0$)라 하면

$$a_1 = -4-d, a_2 = -4, a_3 = -4+d, a_4 = -4+2d, a_5 = -4+3d$$

$$\therefore A = \{-4-d, -4, -4+d, -4+2d, -4+3d\}$$

$a_n = a_1 + (n-1)d$ 이므로

$$b_n = a_n + a_{n+1} = \{a_1 + (n-1)d\} + \{a_1 + nd\}$$

$$= 2a_1 + 2nd - d = (2a_1 + d) + (n-1)2d$$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $2a_1+d$ 이고, 공차가 $2d$ 인 등차수열이므로

$$b_1 = 2a_1 + d = 2(-4-d) + d = -8-d,$$

$$b_2 = -8+d, b_3 = -8+3d, b_4 = -8+5d, b_5 = -8+7d$$

$$\therefore B = \{-8-d, -8+d, -8+3d, -8+5d, -8+7d\}$$

이때 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차가 각각 d , $2d$ 이므로 $n(A \cap B) = 3$ 이라면 $A \cap B = \{a_1, a_3, a_5\} = \{b_i, b_{i+1}, b_{i+2}\}$ ($i=1, 2, 3$)이어야 한다.

(i) $\{a_1, a_3, a_5\} = \{b_1, b_2, b_3\}$ 일 때,

$a_1 = b_1$, 즉 $-4-d = -8-d$ 를 만족시키는 d 의 값은 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\{a_1, a_3, a_5\} = \{b_2, b_3, b_4\}$ 일 때,

$a_1 = b_2$, 즉 $-4-d = -8+d$ 이어야 하므로

$$2d = 4 \quad \therefore d = 2$$

$$\therefore a_{20} = -6 + 19 \times 2 = 32$$

(iii) $\{a_1, a_3, a_5\} = \{b_3, b_4, b_5\}$ 일 때,

$a_1 = b_3$, 즉 $-4-d = -8+3d$ 이어야 하므로

$$4d = 4 \quad \therefore d = 1$$

$$\therefore a_{20} = -5 + 19 \times 1 = 14$$

(i), (ii), (iii)에서 $a_{20} = 32$ 또는 $a_{20} = 14$

따라서 구하는 a_{20} 의 값의 합은

$$32 + 14 = 46$$

03 답 117

(i) 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차를 각각 d_1 , d_2 라 하면

$$a_n = a_1 + (n-1)d_1, b_n = b_1 + (n-1)d_2$$

$$\therefore a_n + 2b_n = a_1 + 2b_1 + (n-1)(d_1 + 2d_2)$$

즉, 수열 $\{a_n + 2b_n\}$ 은 공차가 $d_1 + 2d_2$ 인 등차수열이다.

$a_n + 2b_n = p_n$ 이라 하고, 수열 $\{p_n\}$ 의 첫째항을 p , 공차를 d_3 이라 하면

$$p_n = p + (n-1)d_3$$

이때 (가)에서 $p_3 = 4$, $p_9 = 34$ 이므로

$$p + 2d_3 = 4, p + 8d_3 = 34$$

두 식을 연립하여 풀면

$$p = -6, d_3 = 5$$

따라서 $p_n = -6 + (n-1) \times 5 = 5n - 11$ 이므로

$$a_n + 2b_n = 5n - 11$$

(ii) (i)과 같은 방법으로 하면 수열 $\{a_n + 2c_n\}$ 도 등차수열이므로

$a_n + 2c_n = q_n$ 이라 하고, 수열 $\{q_n\}$ 의 첫째항을 q , 공차를 d_4 라 하면

$$q_n = q + (n-1)d_4$$

이때 (나)에서 $q_4 = 2$, $q_{10} = 26$ 이므로

$$q + 3d_4 = 2, q + 9d_4 = 26$$

두 식을 연립하여 풀면

$$q = -10, d_4 = 4$$

따라서 $q_n = -10 + (n-1) \times 4 = 4n - 14$ 이므로

$$a_n + 2c_n = 4n - 14$$

(i), (ii)에서

$$3a_n + 2b_n + 4c_n = (a_n + 2b_n) + 2(a_n + 2c_n)$$

$$= (5n - 11) + 2(4n - 14)$$

$$= 13n - 39$$

$$\therefore 3a_{12} + 2b_{12} + 4c_{12} = 13 \times 12 - 39 = 117$$

04 답 $\frac{32}{3}$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 -12 , 공차가 d 이므로

$$a_1 = -12, a_2 = -12+d, a_3 = -12+2d, a_4 = -12+3d$$

이때 $d \leq 0$ 이면 $|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq |a_4|$ 이므로

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| \geq 4 \times 12 = 48$$

$$\therefore d > 0$$

(i) $a_2 \geq 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} -12+d \geq 0 \text{에서 } d &\geq 12 \\ |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| \\ &= 12 + (-12+d) + (-12+2d) + (-12+3d) \\ &= -24+6d \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -24+6d=32 \text{이므로 } d=\frac{28}{3}$$

이는 $d \geq 12$ 를 만족시키지 않는다.

(ii) $a_2 < 0 \leq a_3$ 일 때,

$$\begin{aligned} -12+d < 0 \leq -12+2d \text{에서 } 6 \leq d < 12 \\ |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| \\ &= 12 + (12-d) + (-12+2d) + (-12+3d) \\ &= 4d \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 4d=32 \text{이므로 } d=8$$

(iii) $a_3 < 0 \leq a_4$ 일 때,

$$\begin{aligned} -12+2d < 0 \leq -12+3d \text{에서 } 4 \leq d < 6 \\ |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| \\ &= 12 + (12-d) + (12-2d) + (-12+3d) \\ &= 24 \neq 32 \end{aligned}$$

즉, 주어진 조건을 만족시키는 실수 d 의 값은 존재하지 않는다.

(iv) $a_4 < 0$ 일 때,

$$\begin{aligned} -12+3d < 0 \text{에서 } d < 4 \\ |a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| \\ &= 12 + (12-d) + (12-2d) + (12-3d) \\ &= 48-6d \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 48-6d=32 \text{이므로 } d=\frac{8}{3}$$

(i)~(iv)에서 모든 실수 d 의 값의 합은 $8+\frac{8}{3}=\frac{32}{3}$

05 답 ④

이차방정식 $x^2-3x+1=0$ 의 두 근이 α, β 이므로

근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3, \alpha\beta=1$

$\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}, \frac{1}{\beta}$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d 라 하면

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + 3d, 3d = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} \quad \therefore d = \frac{\alpha-\beta}{3\alpha\beta}$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + d = \frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha-\beta}{3\alpha\beta} = \frac{3\beta+\alpha-\beta}{3\alpha\beta}$$

$$= \frac{\alpha+2\beta}{3\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)+\beta}{3\alpha\beta} = \frac{3+\beta}{3}$$

$$\text{즉, } \gamma = \frac{3}{3+\beta}$$

$$\frac{1}{\delta} = \frac{1}{\alpha} + 2d = \frac{1}{\alpha} + \frac{2(\alpha-\beta)}{3\alpha\beta} = \frac{3\beta+2\alpha-2\beta}{3\alpha\beta}$$

$$= \frac{2\alpha+\beta}{3\alpha\beta} = \frac{(\alpha+\beta)+\alpha}{3\alpha\beta} = \frac{3+\alpha}{3}$$

$$\text{즉, } \delta = \frac{3}{3+\alpha}$$

$$\begin{aligned} \therefore \gamma + \delta &= \frac{3}{3+\beta} + \frac{3}{3+\alpha} = \frac{3(\alpha+\beta+6)}{(3+\alpha)(3+\beta)} \\ &= \frac{3(\alpha+\beta+6)}{9+3(\alpha+\beta)+\alpha\beta} = \frac{3(3+6)}{9+3 \times 3+1} = \frac{27}{19} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma\delta &= \frac{3}{3+\beta} \times \frac{3}{3+\alpha} = \frac{9}{(3+\alpha)(3+\beta)} \\ &= \frac{9}{9+3(\alpha+\beta)+\alpha\beta} = \frac{9}{9+3 \times 3+1} = \frac{9}{19} \end{aligned}$$

이때 γ, δ 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 19인 이차방정식은

$$19\left(x^2 - \frac{27}{19}x + \frac{9}{19}\right) = 0 \quad \therefore 19x^2 - 27x + 9 = 0$$

따라서 $a = -27, b = 9$ 이므로 $b-a = 36$

06 답 ④

세 수 $\log a, \log b, \log c$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\log b = \log a + \log c$$

$$\log abc = 15 \text{에서 } \log a + \log b + \log c = 15 \text{이므로}$$

$$2\log b + \log b = 15$$

$$3\log b = 15$$

$$\therefore \log b = 5$$

즉, 공차가 자연수인 등차수열 $\log a, \log b, \log c$ 를 순서쌍

$(\log a, \log b, \log c)$ 로 나타내면

$$(4, 5, 6), (3, 5, 7), (2, 5, 8), (1, 5, 9)$$

$$\therefore \log \frac{ac^2}{b} = \log a + 2\log c - \log b$$

$$= \log a + \log c + \log c - \log b$$

$$= 2\log b + \log c - \log b$$

$$= \log b + \log c$$

$$= 5 + \log c$$

따라서 $\log \frac{ac^2}{b}$ 의 최댓값은 $\log c = 9$ 일 때이므로

$$5+9=14$$

07 답 $\frac{1}{144}$

$x^2=t$ 로 놓으면 이차방정식 $t^2 - \frac{16a+1}{4}t + a = 0$ 이 서로 다른 두 양의

실근을 가져야 한다.

이때 두 양의 실근을 α, β ($0 < \alpha < \beta$)라 하면 $t=\alpha, t=\beta$ 에서

$$x = \pm\sqrt{\alpha}, x = \pm\sqrt{\beta}$$

네 실근을 크기가 작은 것부터 차례로 나열하면

$$-\sqrt{\beta}, -\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}$$

이 네 수가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\sqrt{\alpha} = -\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}, \sqrt{\beta} = 3\sqrt{\alpha}$$

$$\therefore \beta = 9\alpha \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 이차방정식 $t^2 - \frac{16a+1}{4}t + a = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = \frac{16a+1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}, \alpha\beta = a \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1}$ 을 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 에 각각 대입하면

$$10\alpha = \frac{16a+1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{4}, 9\alpha^2 = a \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4} \text{을 } \textcircled{5} \text{에 대입하면 } 10\alpha = \frac{144\alpha^2+1}{4}$$

$$144\alpha^2 - 40\alpha + 1 = 0, (36\alpha-1)(4\alpha-1) = 0$$

$$\therefore \alpha = \frac{1}{36} \text{ 또는 } \alpha = \frac{1}{4}$$

(i) $\alpha = \frac{1}{36}$ 일 때,

$$\beta = \frac{1}{4} \text{이므로 네 실근은 } -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}$$

이때 공차는 $\frac{1}{3}$ 이므로 정수가 아니다.

(ii) $\alpha = \frac{1}{4}$ 일 때,

$$\beta = \frac{9}{4} \text{이므로 네 실근은 } -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$$

이때 공차는 1이므로 공차는 정수가 아니라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $\alpha = \frac{1}{36}$

$$\text{따라서 } \textcircled{\text{a}} \text{에서 } a = 9\alpha^2 = 9 \times \left(\frac{1}{36}\right)^2 = \frac{1}{144}$$

08 답 3/4

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항을 각각 a , b , 공차를 각각 d_1 , d_2 라 하면

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d_1\}}{2}$$

$$T_n = \frac{n\{2b + (n-1)d_2\}}{2}$$

$$\therefore \frac{T_n}{S_n} = \frac{\frac{n\{2b + (n-1)d_2\}}{2}}{\frac{n\{2a + (n-1)d_1\}}{2}} = \frac{2b + (n-1)d_2}{2a + (n-1)d_1}$$

$$\frac{T_n}{S_n} = \frac{4n+27}{7n+1} \text{에서 } \frac{2b + (n-1)d_2}{2a + (n-1)d_1} = \frac{4n+27}{7n+1} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $a_{11} = a + 10d_1$, $b_{11} = b + 10d_2$ 에서 $\frac{b_{11}}{a_{11}} = \frac{b + 10d_2}{a + 10d_1}$ 이므로

$\textcircled{1}$ 에 $n=21$ 을 대입하면

$$\frac{2b + 20d_2}{2a + 20d_1} = \frac{111}{148} \quad \therefore \frac{b + 10d_2}{a + 10d_1} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \frac{b_{11}}{a_{11}} = \frac{b + 10d_2}{a + 10d_1} = \frac{3}{4}$$

09 답 26

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하자.

$a_{k+1} = S_{k+1} - S_k$ 이므로 $(\forall k)$ 에서 $S_k > S_{k+1}$, 즉 $S_{k+1} - S_k < 0$ 을 만족시키는 가장 작은 자연수 k 는 $a_{k+1} < 0$ 을 만족시키는 가장 작은 자연수이다.

즉, $n \leq k$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n \geq 0$ 이고, $d < 0$ 이어야 한다.

$$(\text{나}) \text{의 } a_8 = -\frac{5}{4}a_5 \text{에서 } a_5 > 0, a_8 < 0$$

$$a_5 a_6 a_7 < 0 \text{에서 } a_5 > 0 \text{이므로 } a_6 > 0, a_7 < 0$$

$$\text{따라서 } a_{k+1} = a_7 \text{이므로 } k=6$$

$$(\text{ㄷ}) \text{에서 } S_6 = 102 \text{이므로 } \frac{6(2a+5d)}{2} = 102$$

$$\therefore 2a+5d=34 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(\text{나}) \text{의 } a_8 = -\frac{5}{4}a_5 \text{에서 } a+7d = -\frac{5}{4}(a+4d)$$

$$\therefore 3a+16d=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=32, d=-6$$

$$\therefore a_2 = a + d = 32 + (-6) = 26$$

10 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a > 0$), 공차를 d 라 하자.

$d \geq 0$ 이면 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$$\therefore d < 0$$

$$|S_3| = |S_6| \text{에서 } S_3 = S_6 \text{ 또는 } S_3 = -S_6$$

(i) $S_3 = S_6$ 일 때,

$$\frac{3\{2a + (3-1)d\}}{2} = \frac{6\{2a + (6-1)d\}}{2} \text{에서}$$

$$a+d=2a+5d \quad \therefore a=-4d$$

$$\text{이때 } S_3 = S_6 = \frac{3(2a+2d)}{2} = -9d > 0,$$

$$S_{11} = \frac{11\{2a + (11-1)d\}}{2} = 11d < 0 \text{이므로}$$

$$|S_3| = |S_{11}| - 3 \text{에서 } -9d = -11d - 3 \quad \therefore d = -\frac{3}{2}$$

$$\therefore a = -4d = -4 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 6$$

(ii) $S_3 = -S_6$ 일 때,

$$\frac{3\{2a + (3-1)d\}}{2} = -\frac{6\{2a + (6-1)d\}}{2} \text{에서}$$

$$a+d=-2a-5d \quad \therefore a=-2d$$

$$\text{이때 } S_3 = -S_6 = \frac{3(2a+2d)}{2} = -3d > 0,$$

$$S_{11} = \frac{11\{2a + (11-1)d\}}{2} = 33d < 0 \text{이므로}$$

$$|S_3| = |S_{11}| - 3 \text{에서 } -3d = -33d - 3 \quad \therefore d = -\frac{1}{10}$$

$$\therefore a = -2d = -2 \times \left(-\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{5}$$

(i), (ii)에서 모든 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항의 합은

$$6 + \frac{1}{5} = \frac{31}{5}$$

idea 11 답 80

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 8, 공차가 -2 이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 8 + (n-1) \times (-2) = -2n + 10$$

즉, $a_{2m-1} = -2(2m-1) + 10 = -4m + 12$ 이므로

$$\begin{aligned} a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2m-1} &= \frac{m(a_1 + a_{2m-1})}{2} \\ &= \frac{m\{8 + (-4m + 12)\}}{2} \\ &= -2m^2 + 10m \end{aligned}$$

$$\text{또 } a_{2m} = -2 \times 2m + 10 = -4m + 10 \text{이므로}$$

$$a_2 = -4 + 10 = 6$$

$$\begin{aligned} \therefore a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2m} &= \frac{m(a_2 + a_{2m})}{2} \\ &= \frac{m\{6 + (-4m + 10)\}}{2} \\ &= -2m^2 + 8m \end{aligned}$$

$$(a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2m-1})(a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2m}) = p \times m^2 \text{에서}$$

$$(-2m^2 + 10m)(-2m^2 + 8m) = p \times m^2$$

$$4m^4 - 36m^3 + 80m^2 = p \times m^2$$

$$\therefore m^2 - 9m + 20 - \frac{p}{4} = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이를 만족시키는 자연수 m 의 개수가 2이므로 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근을

α , β 라 하면 α , β 는 모두 자연수이다.

이때 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 9, \alpha\beta = 20 - \frac{p}{4}$$

(i) $\alpha=1, \beta=8$ 또는 $\alpha=8, \beta=1$ 일 때,

$$8 = 20 - \frac{p}{4} \quad \therefore p = 48$$

(ii) $\alpha=2, \beta=7$ 또는 $\alpha=7, \beta=2$ 일 때,

$$14=20-\frac{p}{4} \quad \therefore p=24$$

(iii) $\alpha=3, \beta=6$ 또는 $\alpha=6, \beta=3$ 일 때,

$$18=20-\frac{p}{4} \quad \therefore p=8$$

(iv) $\alpha=4, \beta=5$ 또는 $\alpha=5, \beta=4$ 일 때,

$$20=20-\frac{p}{4} \quad \therefore p=0$$

(i)~(iv)에서 모든 상수 p 의 값의 합은

$$48+24+8+0=80$$

12 답 65

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 일반항 a_n 은

$$a_n=97+(n-1)d$$

$|S_{32}| < |S_{33}|, |S_{33}| > |S_{34}|$ 에서 $a_{33} > 0, a_{34} < 0$ 이므로

$$97+32d > 0, 97+33d < 0 \quad \therefore -\frac{97}{32} < d < -\frac{97}{33}$$

그런데 d 는 정수이므로 $d=-3$

$$\therefore a_n=97+(n-1) \times (-3) = -3n+100 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

이때 첫째항이 97이므로

$$S_n = \frac{n\{97+(-3n+100)\}}{2} = \frac{n(197-3n)}{2}$$

$$S_n > 0 \text{에서 } \frac{n(197-3n)}{2} > 0$$

$$n(3n-197) < 0 \quad \therefore 0 < n < \frac{197}{3}$$

그런데 n 은 자연수이므로 $1 \leq n \leq 65$ $\dots\dots\dots$ 배점 30%

이때 $a_{33} > 0, a_{34} < 0$ 이므로

(i) $1 \leq n \leq 32$ 일 때,

$$a_{n+1} > 0 \text{이므로 } 0 < S_n < S_{n+1} \quad \therefore |S_n| < |S_{n+1}|$$

(ii) $33 \leq n \leq 64$ 일 때,

$$a_{33} > 0, a_{n+1} < 0 \text{이므로 } 0 < S_{n+1} < S_n \quad \therefore |S_n| > |S_{n+1}|$$

(iii) $n=65$ 일 때,

$$S_{65} = \frac{65(197-3 \times 65)}{2} = 65, S_{66} = \frac{66(197-3 \times 66)}{2} = -33 \text{이므로}$$

$$|S_n| > |S_{n+1}|$$

(iv) $n \geq 66$ 일 때,

$$a_n < 0 \text{이므로 } S_{n+1} < S_n < 0 \quad \therefore |S_n| < |S_{n+1}|$$

(i)~(iv)에서 $|S_n| > |S_{n+1}|$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값은 65이다.
 $\dots\dots\dots$ 배점 40%

13 답 448

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r > 0$)라 하면 (㉠)에서

$$a_1r^9 + a_1r^{11} + a_1r^{13} + \dots + a_1r^{19} = (a_1r^4)^2 + (a_1r^5)^2 + (a_1r^6)^2 + \dots + (a_1r^9)^2$$

$$a_1r(r^8 + r^{10} + r^{12} + \dots + r^{18}) = a_1^2(r^8 + r^{10} + r^{12} + \dots + r^{18})$$

$$\therefore a_1r = a_1^2 \quad (\because r > 0)$$

$$\text{이때 } a_1 \text{은 자연수, 즉 } a_1 \neq 0 \text{이므로 } a_1 = r \quad \dots\dots\dots \text{㉡}$$

(㉢)에서 $2 < a_1 + a_1r \leq 6$ 이므로

$$2 < a_1 + a_1^2 \leq 6 \quad (\because \text{㉡})$$

(i) 부등식 $a_1 + a_1^2 > 2$ 에서 $a_1^2 + a_1 - 2 > 0$

$$(a_1+2)(a_1-1) > 0 \quad \therefore a_1 < -2 \text{ 또는 } a_1 > 1$$

(ii) 부등식 $a_1 + a_1^2 \leq 6$ 에서 $a_1^2 + a_1 - 6 \leq 0$

$$(a_1+3)(a_1-2) \leq 0 \quad \therefore -3 \leq a_1 \leq 2$$

(i), (ii)에서 $-3 \leq a_1 < -2$ 또는 $1 < a_1 \leq 2$

그런데 a_1 은 자연수이므로 $a_1=2$

따라서 $r=a_1=2$ 이므로

$$a_9 - a_6 = a_1r^8 - a_1r^5 = 2^9 - 2^6 = 448$$

14 답 18

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1 + a_8 = a_1 + (a_1 + 7d) = (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = a_4 + a_5$$

$$\therefore a_4 + a_5 = 8 \quad \dots\dots\dots \text{㉠}$$

등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$b_2b_7 = b_1r \times b_1r^6 = b_1r^3 \times b_1r^4 = b_4b_5$$

$$\therefore b_4b_5 = 12$$

이때 $a_4 = b_4, a_5 = b_5$ 이므로

$$a_4a_5 = b_4b_5 = 12 \quad \dots\dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 a_4, a_5 를 두 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은

$$x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x-2)(x-6) = 0 \quad \therefore x=2 \text{ 또는 } x=6$$

이때 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비가 1보다 작으므로

$$b_4 > b_5 \quad \therefore a_4 > a_5$$

$$\therefore a_4 = 6, a_5 = 2$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차 d 는

$$d = a_5 - a_4 = 2 - 6 = -4$$

따라서 $a_4 = 6$ 에서 $a_1 + 3d = 6$ 이므로

$$a_1 + 3 \times (-4) = 6 \quad \therefore a_1 = 18$$

15 답 ②

(㉠)에서 a, c, b 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r ($r \neq 0$)라 하면

$$c = ar, b = ar^2 \quad \dots\dots\dots \text{㉡}$$

(㉢)에서 $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$$

$$\text{이 식에 ㉡을 대입하면 } \frac{2}{ar^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{ar}$$

$$\frac{2}{ar^2} = \frac{r^2+r}{ar^2} \text{에서 } r^2+r-2=0 \quad (\because a > 0, r \neq 0)$$

$$(r+2)(r-1) = 0 \quad \therefore r = -2 \text{ 또는 } r = 1$$

(i) $r = -2$ 일 때,

$$c = -2a, b = 4a \text{이므로}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 + 4ax - 2a = a(x+2)^2 - 6a$$

(㉣)에서 $-1 \leq x \leq 0$ 일 때 $f(x)$ 의 최댓값은 -3 이므로

$$f(0) = -3$$

$$\text{즉, } -2a = -3 \text{이므로 } a = \frac{3}{2}$$

(ii) $r = 1$ 일 때,

$$a = b = c \text{이므로}$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = ax^2 + ax + a = a\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}a$$

(㉣)에서 $-1 \leq x \leq 0$ 일 때 $f(x)$ 의 최댓값은 -3 이므로

$$f(-1) = f(0) = -3$$

$$\therefore a = -3$$

그런데 a 가 양수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a = \frac{3}{2}$

따라서 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 6x - 3$ 이므로

$$f(2) = \frac{3}{2} \times 2^2 + 6 \times 2 - 3 = 15$$

16 답 ①

(가)에서 $A_1(1, 0)$, $B_1(0, 1)$, $C_1(1, 1)$ 이므로 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2} \quad \therefore a_1 = \frac{1}{2}$$

(나)에서 점 C_1 은 $\overline{A_2B_2}$ 의 중점이므로

$A_2(2, 0)$, $B_2(0, 2)$, $C_2(2, 2)$

이때 삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2 \quad \therefore a_2 = 2$$

두 직각이등변삼각형 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ 는

닮음이고, 넓이의 비가 $\frac{1}{2} : 2 = 1 : 4$ 이므로

두 직각이등변삼각형 $A_nB_nC_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ 도 닮음이고, 넓이의 비는

$1 : 4$ 이다.

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 4인

등비수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{1}{2} \times 4^{n-1}$$

또 그림과 같이 삼각형 $A_1B_1C_1$ 의 세 변 위에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은 3개이므로

$$b_1 = 3$$

삼각형 $A_2B_2C_2$ 의 세 변 위에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은 6개이므로

$$b_2 = 6$$

삼각형 $A_3B_3C_3$ 의 세 변 위에 있는 점 중에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점은 12개이므로

$$b_3 = 12$$

⋮

따라서 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 일반항 b_n 은

$$b_n = 3 \times 2^{n-1}$$

$$\therefore \frac{b_8 + b_{10}}{a_4 + a_5} = \frac{3 \times 2^7 + 3 \times 2^9}{\frac{1}{2} \times 4^3 + \frac{1}{2} \times 4^4} = \frac{6(2^6 + 2^8)}{\frac{1}{2}(2^6 + 2^8)} = 12$$

17 답 ⑤

이차방정식 $a_n x^2 + 2a_{n+1}x + a_{n+2} = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} \quad \dots\dots ①$$

ㄱ. 수열 $\{a_n^2\}$ 이 등차수열이면 $a_{n+1}^2 = \frac{a_n^2 + a_{n+2}^2}{2}$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \frac{a_n^2 + a_{n+2}^2}{2} - a_n a_{n+2} \\ &= \frac{a_n^2 - 2a_n a_{n+2} + a_{n+2}^2}{2} \\ &= \frac{(a_n - a_{n+2})^2}{2} \end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 서로 다르므로 $a_n \neq a_{n+2}$

즉, $\frac{D}{4} = \frac{(a_n - a_{n+2})^2}{2} > 0$ 이므로 주어진 이차방정식은 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄴ. 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 이 등비수열이면

$$\left(\frac{1}{a_{n+1}}\right)^2 = \frac{1}{a_n} \times \frac{1}{a_{n+2}} \quad \therefore a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$$

이를 ①에 대입하면

$$\frac{D}{4} = a_n a_{n+2} - a_n a_{n+2} = 0$$

즉, 주어진 이차방정식은 항상 중근을 갖는다.

ㄷ. 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 이 등차수열이면

$$\frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}}, \quad \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{a_n + a_{n+2}}{a_n a_{n+2}}$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{2a_n a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \left(\frac{2a_n a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}\right)^2 - a_n a_{n+2} \\ &= \frac{(2a_n a_{n+2})^2 - a_n a_{n+2}(a_n + a_{n+2})^2}{(a_n + a_{n+2})^2} \\ &= \frac{a_n a_{n+2} \{4a_n a_{n+2} - (a_n + a_{n+2})^2\}}{(a_n + a_{n+2})^2} \\ &= -a_n a_{n+2} \left(\frac{a_n - a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}}\right)^2 \end{aligned}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로 $a_n > 0$, $a_{n+2} > 0$ 이고, 모든 항이 서로 다르므로 $a_n \neq a_{n+2}$

즉, $\frac{D}{4} < 0$ 이므로 주어진 이차방정식은 항상 서로 다른 두 허근을 갖는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

18 답 117

모든 항이 자연수이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차는 자연수이다.

첫째항이 a_1 , 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

(가)에서 세 항 a_2 , a_k , a_{3k-1} 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a_k^2 = a_2 a_{3k-1} \text{에서}$$

$$\{a_1 + (k-1)d\}^2 = (a_1 + d)\{a_1 + (3k-2)d\}$$

$$a_1^2 + 2(k-1)a_1 d + (k-1)^2 d^2 = a_1^2 + (3k-1)a_1 d + (3k-2)d^2$$

$$(k^2 - 5k + 3)d^2 = (k+1)a_1 d$$

$$\therefore (k^2 - 5k + 3)d = (k+1)a_1 \quad (\because d \text{는 자연수}) \quad \dots\dots ①$$

(나)에서 $a_1 \leq d$ 의 양변에 $k+1$ 을 곱하면

$$(k+1)a_1 \leq (k+1)d$$

$$(k^2 - 5k + 3)d \leq (k+1)d \quad (\because ①)$$

$$k^2 - 5k + 3 \leq k+1 \quad (\because d \text{는 자연수})$$

$$k^2 - 6k + 2 \leq 0$$

$$\therefore 3 - \sqrt{7} \leq k \leq 3 + \sqrt{7}$$

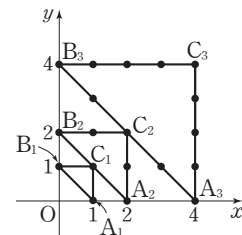
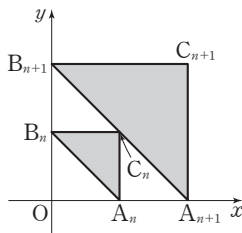
그런데 $k \geq 3$ 이므로 $3 \leq k \leq 3 + \sqrt{7}$

즉, 자연수 k 의 값은 3, 4, 5이다.

이때 ①에서 $k^2 - 5k + 3 > 0$ 이어야 하므로 $k=5$

이를 ①에 대입하면

$$3d = 6a_1 \quad \therefore d = 2a_1$$



따라서 $a_{16}=a_1+15d=31a_1$ 이므로 $90 \leq a_{16} \leq 100$ 에서
 $90 \leq 31a_1 \leq 100$
 이때 a_1 은 자연수이므로 $a_1=3$
 $\therefore d=2a_1=2 \times 3=6$
 $\therefore a_{20}=a_1+19d=3+19 \times 6=117$

19 답 3

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항과 공차가 모두 $a(a \neq 0)$ 인 등차수열이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_l=\frac{l\{2a+(l-1)a\}}{2}=\frac{al(l+1)}{2}$$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 a , 공비가 9인 등비수열이므로

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_m=\frac{a(9^m-1)}{9-1}=\frac{a(9^m-1)}{8}$$

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_l=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_m \text{에서}$$

$$\frac{al(l+1)}{2}=\frac{a(9^m-1)}{8}$$

$$4l(l+1)=9^m-1 \quad (\because a \neq 0)$$

$$4l^2+4l-(9^m-1)=0$$

$$4l^2+4l-(3^m+1)(3^m-1)=0$$

$$\{2l+(3^m+1)\}\{2l-(3^m-1)\}=0$$

$$\text{이때 } 2l+(3^m+1)>0 \text{이므로 } 2l-(3^m-1)=0$$

$$\therefore l=\frac{3^m-1}{2}=\frac{1}{2} \times 3^m - \frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } p=\frac{1}{2}, q=3, r=-\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$p+q+r=3$$

20 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 $a(a > 0)$, 공비를 $r(r > 0)$ 라 하고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면 $r \neq 1$ 이므로

$$S_m=\frac{a(r^m-1)}{r-1}=52 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$S_{2m}=\frac{a(r^{2m}-1)}{r-1}=1456$$

$$\therefore \frac{a(r^m+1)(r^m-1)}{r-1}=1456 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$r^m+1=28 \quad \therefore r^m=27 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \frac{a(27-1)}{r-1}=52$$

$$\therefore a=2(r-1) \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

(i) $0 < r < 1$ 일 때,

$\textcircled{4}$ 에서 $a < 0$ 이므로 첫째항이 양수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $r > 1$ 일 때,

$$\text{제 } m \text{항이 } 36 \text{이므로 } ar^{m-1}=36, ar^m=36r$$

$$\text{이 식에 } \textcircled{4} \text{을 대입하면 } 27a=36r$$

$$\therefore a=\frac{4}{3}r \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$\textcircled{5}$ 을 $\textcircled{4}$ 에 대입하면

$$\frac{4}{3}r=2(r-1), \frac{2}{3}r=2 \quad \therefore r=3$$

$$r=3 \text{을 } \textcircled{4} \text{에 대입하면 } 3^m=27 \quad \therefore m=3$$

$$r=3 \text{을 } \textcircled{5} \text{에 대입하면 } a=4$$

(i), (ii)에서 $m=3, a=4$

$$\therefore m+a_2=m+ar=3+4 \times 3=15$$

21 답 $\sqrt{3}+1$

두 등비수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 의 첫째항을 각각 $a, b(a \neq 0, b \neq 0)$, 공비를 각각 $r_1, r_2(r_1 > 0, r_2 > 0)$ 라 하면

$$\textcircled{a} \text{에서 } \frac{a(r_1^4-1)}{r_1-1}=10 \times \frac{a(r_1^2-1)}{r_1-1}$$

$$(r_1^2+1)(r_1^2-1)=10(r_1^2-1)$$

$$r_1^2+1=10, r_1^2=9$$

$$\therefore r_1=3 \quad (\because r_1 > 0) \quad \cdots \cdots \text{배점 } 30\%$$

$$\textcircled{b} \text{에서 } \frac{b(r_2^6-1)}{r_2-1}=13 \times \frac{b(r_2^2-1)}{r_2-1}$$

$$(r_2^2-1)(r_2^4+r_2^2+1)=13(r_2^2-1)$$

$$r_2^4+r_2^2+1=13, r_2^4+r_2^2-12=0$$

$$(r_2^2+4)(r_2^2-3)=0 \quad \therefore r_2^2=3 \quad (\because r_2^2 > 0)$$

$$\therefore r_2=\sqrt{3} \quad (\because r_2 > 0) \quad \cdots \cdots \text{배점 } 30\%$$

$$\textcircled{a} \text{에서 } \frac{a(r_1^8-1)}{r_1-1}=\frac{b(r_2^{16}-1)}{r_2-1} \text{이므로}$$

$$\frac{a(3^8-1)}{3-1}=\frac{b\{(\sqrt{3})^{16}-1\}}{\sqrt{3}-1}$$

$$\therefore \frac{a}{b}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}=\sqrt{3}+1 \quad \cdots \cdots \text{배점 } 30\%$$

$$\therefore \frac{a_{10}}{b_{19}}=\frac{ar_1^9}{br_2^{18}}=\frac{a \times 3^9}{b \times (\sqrt{3})^{18}}=\frac{a}{b}=\sqrt{3}+1 \quad \cdots \cdots \text{배점 } 10\%$$

idea

22 답 ①

$$f(x)=2+x+x^2+x^3+\cdots+x^9 \text{에서}$$

$$x=1 \text{일 때, } f(1)=11$$

$$x \neq 1 \text{일 때, } f(x)=2+\frac{x(x^9-1)}{x-1}$$

$$(f \circ f)(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_{81}x^{81} \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \text{에서}$$

$$\textcircled{1} \text{의 양변에 } x=0 \text{을 대입하면 } f(f(0))=a_0$$

$$\text{이때 } f(0)=2 \text{이므로}$$

$$a_0=f(2)=2+\frac{2(2^9-1)}{2-1}=2^{10}=1024$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$f(f(-1))=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{80}-a_{81}$$

$$\text{이때 } f(-1)=2+\frac{(-1) \times \{(-1)^9-1\}}{-1-1}=1 \text{이므로}$$

$$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{80}-a_{81}=f(1)=11$$

$$\therefore (2a_0+a_2+a_4+\cdots+a_{80})-(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{81})$$

$$=a_0+(a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots+a_{80}-a_{81})$$

$$=1024+11=1035$$

23 답 5

직선 AP_1 은 직선 $x+y=12$, 즉 $y=-x+12$ 와 수직이므로 기울기가 1이다.

점 $A(0, 6)$ 을 지나고 기울기가 1인 직선 AP_1 의 방정식은

$$y=x+6$$

이때 점 P_1 은 두 직선 $y=-x+12, y=x+6$ 의 교점이므로

$$-x+12=x+6 \text{에서}$$

$$2x=6 \quad \therefore x=3$$

$$\text{이를 } y=-x+12 \text{에 대입하여 풀면 } y=9$$

$$\therefore P_1(3, 9) \quad \therefore \overline{P_1Q_1}=9$$

직선 Q_1P_2 는 점 $Q_1(3, 0)$ 을 지나고 기울기가 1이므로 직선 Q_1P_2 의 방정식은

$$y=x-3$$

이때 점 P_2 는 두 직선 $y=-x+12$, $y=x-3$ 의 교점이므로

$$-x+12=x-3 \text{에서 } 2x=15 \quad \therefore x=\frac{15}{2}$$

$$\text{이를 } y=-x+12 \text{에 대입하여 풀면 } y=\frac{9}{2}$$

$$\therefore P_2\left(\frac{15}{2}, \frac{9}{2}\right) \quad \therefore \overline{P_2Q_2}=\frac{9}{2}$$

직선 Q_2P_3 은 점 $Q_2\left(\frac{15}{2}, 0\right)$ 을 지나고 기울기가 1이므로 직선 Q_2P_3 의 방정식은

$$y=x-\frac{15}{2}$$

이때 점 P_3 은 두 직선 $y=-x+12$, $y=x-\frac{15}{2}$ 의 교점이므로

$$-x+12=x-\frac{15}{2} \text{에서 } 2x=\frac{39}{2} \quad \therefore x=\frac{39}{4}$$

$$\text{이를 } y=-x+12 \text{에 대입하여 풀면 } y=\frac{9}{4}$$

$$\therefore P_3\left(\frac{39}{4}, \frac{9}{4}\right) \quad \therefore \overline{P_3Q_3}=\frac{9}{4}$$

⋮

즉, 수열 $\{l_n\}$ 은 첫째항이 9, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$l_1+l_2+l_3+\cdots+l_n=\frac{9\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}}=18\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$l_1+l_2+l_3+\cdots+l_n>17 \text{에서}$$

$$18\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}>17, 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n>\frac{17}{18} \quad \therefore \left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{1}{18}$$

따라서 $2^n>18$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 5이다.

24 답 ①

임의의 두 자연수 i, j 에 대하여 $i \neq j$ 이면 $S_i \neq S_j$ 이므로

$$S_i - S_j \neq 0$$

$$\text{즉, } pi^2 - 36i + q - (pj^2 - 36j + q) \neq 0 \text{이므로}$$

$$p(i^2 - j^2) - 36(i - j) \neq 0$$

$$(i - j)(pi + pj - 36) \neq 0$$

이때 $i \neq j$ 에서 $i - j \neq 0$ 이므로

$$pi + pj - 36 \neq 0 \quad \therefore i + j \neq \frac{36}{p}$$

그런데 i, j 는 자연수이므로 p 는 36의 약수가 아니다.

즉, 조건을 만족시키는 p 의 최솟값은 5이므로

$$p_1=5$$

한편 $p=5$ 일 때, $S_n=5n^2-36n+q$ 에 대하여

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (5n^2 - 36n + q) - \{5(n-1)^2 - 36(n-1) + q\} \\ &= 10n - 41 \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = q - 31$$

(i), (ii)에서 $a_1 = q - 31$, $a_2 = -21$, $a_3 = -11$, $a_4 = -1$, $a_5 = 9$,

$a_6 = 19$, $a_7 = 29$, ...이므로

$$|a_2| = 21, |a_3| = 11, |a_4| = 1, |a_5| = 9, |a_6| = 19, |a_7| = 29, \dots$$

이때 $|a_k| < a_1$ 을 만족시키는 자연수 k 의 개수가 3이 되려면 k 의 값은 3,

4, 5이어야 하므로 $11 < a_1 \leq 19$

$$11 < q - 31 \leq 19 \quad \therefore 42 < q \leq 50$$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 q 의 값은 43, 44, 45, ..., 50이므로 그 합은

$$\frac{8(43+50)}{2} = 372$$

25 답 ③

$S_n = an^2 + bn$ 에 대하여

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (an^2 + bn) - \{a(n-1)^2 + b(n-1)\} \\ &= 2an - a + b \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = a + b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2an - a + b$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $a+b$, 공차가 $2a$ 인 등차수열이다.

(*)의 $a_6=26$ 에서

$$12a - a + b = 26$$

$$\therefore 11a + b = 26 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(*)에서

$$(S_1 + S_3 + S_5 + \cdots + S_{19}) - (S_2 + S_4 + S_6 + \cdots + S_{18})$$

$$= S_1 + (S_3 - S_2) + (S_5 - S_4) + \cdots + (S_{19} - S_{18})$$

$$= a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{19} = \frac{10(a_1 + a_{19})}{2}$$

$$= \frac{10\{(a+b) + (37a+b)\}}{2} = 10(19a+b)$$

따라서 $10(19a+b)=580$ 이므로

$$19a + b = 58 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3}$, $\textcircled{4}$ 을 연립하여 풀면 $a=4$, $b=-18$

$$\therefore a - b = 22$$

STEP 3 최고난도 문제

| 101~103쪽

01 ④ 02 -9 03 273 04 ③ 05 ④ 06 477

07 84 08 ④ 09 10 10 750 11 ㄱ, ㄴ

01 답 ④

1단계 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $a_1, \beta_1, a_2, \beta_2$ 에 대한 식 세우기

네 수 $a_1, a_2, \beta_1, \beta_2$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\beta_1 - a_1 = \beta_2 - a_2$$

$$\text{즉, } (\beta_1 - a_1)^2 = (\beta_2 - a_2)^2 \text{이므로}$$

$$(a_1 + \beta_1)^2 - 4a_1\beta_1 = (a_2 + \beta_2)^2 - 4a_2\beta_2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 a_1, β_1 은 이차방정식 $x^2 + px + q = 0$ 의 두 근이므로

근과 계수의 관계에 의하여

$$a_1 + \beta_1 = -p, a_1\beta_1 = q \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

또 α_2, β_2 는 이차방정식 $x^2+qx+p=0$ 의 두 근이므로
근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_2+\beta_2=-q, \alpha_2\beta_2=p \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

2단계 p, q 의 값 구하기

$\textcircled{㉓}, \textcircled{㉔}$ 을 $\textcircled{㉑}$ 에 대입하면

$$(-p)^2-4q=(-q)^2-4p$$

$$p^2-q^2+4(p-q)=0$$

$$(p+q)(p-q)+4(p-q)=0$$

$$(p-q)(p+q+4)=0$$

이때 $p \neq q$ 이므로 $p+q+4=0$

$$\therefore q=-p-4 \quad \dots\dots \textcircled{㉕}$$

한편 α_2 는 α_1, β_1 의 등차중항이므로 $2\alpha_2=\alpha_1+\beta_1$ 에서

$$2\alpha_2=-p \quad \therefore \alpha_2=-\frac{p}{2}$$

α_2 는 $x^2+qx+p=0$ 의 근이므로 $x=-\frac{p}{2}$ 를 $x^2+qx+p=0$ 에 대입하면

$$\left(-\frac{p}{2}\right)^2+q\left(-\frac{p}{2}\right)+p=0$$

$$\frac{p^2}{4}-\frac{pq}{2}+p=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉖}$$

$\textcircled{㉕}$ 을 $\textcircled{㉖}$ 에 대입하면

$$\frac{p^2}{4}-\frac{p(-p-4)}{2}+p=0$$

$$p^2+2p(p+4)+4p=0, 3p^2+12p=0$$

$$3p(p+4)=0 \quad \therefore p=-4 \text{ 또는 } p=0$$

이를 $\textcircled{㉕}$ 에 대입하면

$$p=-4 \text{ 일 때 } q=0, p=0 \text{ 일 때 } q=-4$$

3단계 두 이차방정식의 해 구하기

이때 두 이차방정식은

$$x^2-4x=0, x^2-4=0$$

$$x^2-4x=0 \text{ 에서 } x(x-4)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=4$$

$$x^2-4=0 \text{ 에서 } (x+2)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

4단계 $\beta_2-2\alpha_1$ 의 값 구하기

따라서 $\alpha_1=-2, \beta_1=2, \alpha_2=0, \beta_2=4$ 이므로

$$\beta_2-2\alpha_1=4-2 \times (-2)=8$$

02 답 -9

1단계 a_{m+1} 을 m, d 에 대한 식으로 나타내기

(가)의 $a_{m+1}=7$ 에서

$$a_1+md=7 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

2단계 md 의 값 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차 d 가 양수이므로

$$a_n < a_{n+1}$$

$$\text{즉, } M = \frac{y_1+y_2+\dots+y_{m-k}}{m-k} - \frac{x_1+x_2+\dots+x_k}{k} \text{의 값이 최대가 되는 경}$$

우는 $x_i (i=1, 2, \dots, k)$ 의 값보다 $y_j (j=1, 2, \dots, m-k)$ 의 값이 더 클 때이므로

$$x_1+x_2+\dots+x_k=a_1+a_2+\dots+a_k$$

$$y_1+y_2+\dots+y_{m-k}=a_{k+1}+a_{k+2}+\dots+a_m$$

(나)에서 M 의 최댓값은 8이므로

$$\frac{a_{k+1}+a_{k+2}+\dots+a_m}{m-k} - \frac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k} = 8$$

$$\frac{1}{m-k} \times \frac{(m-k)(a_{k+1}+a_m)}{2} - \frac{1}{k} \times \frac{k(a_1+a_k)}{2} = 8$$

$$\frac{a_{k+1}+a_m-a_1-a_k}{2} = 8$$

$$\frac{(a_{k+1}-a_k)+(a_m-a_1)}{2} = 8$$

$$\frac{d+\{a_1+(m-1)d-a_1\}}{2} = 8$$

$$\therefore md=16 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

3단계 a_1 의 값 구하기

$\textcircled{㉒}$ 을 $\textcircled{㉑}$ 에 대입하면 $a_1+16=7$

$$\therefore a_1=-9$$

03 답 273

1단계 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차에 대한 식 세우기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 $a(a \neq 0)$, 공차를 d 라 하면 $S_9=S_{18}$ 에서

$$\frac{9(2a+8d)}{2} = \frac{18(2a+17d)}{2}$$

$$2a+8d=2(2a+17d)$$

$$2a=-26d \quad \therefore a=-13d$$

2단계 같은 값을 갖는 S_n 의 규칙 찾기

$$S_n = \frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2} = \frac{n\{-26d+(n-1)d\}}{2}$$

$$= \frac{n(-27d+nd)}{2} = \frac{d}{2}n(n-27)$$

이므로

$$S_1=S_{26}=-13d \rightarrow S_1=\frac{d}{2} \times 1 \times (-26)=\frac{d}{2} \times 26 \times (-1)=S_{26}$$

$$S_2=S_{25}=-25d \rightarrow S_2=\frac{d}{2} \times 2 \times (-25)=\frac{d}{2} \times 25 \times (-2)=S_{25}$$

$$S_3=S_{24}=-36d \rightarrow S_3=\frac{d}{2} \times 3 \times (-24)=\frac{d}{2} \times 24 \times (-3)=S_{24}$$

$\vdots$

$$S_{13}=S_{14}=-91d \rightarrow S_{13}=\frac{d}{2} \times 13 \times (-14)=\frac{d}{2} \times 14 \times (-13)=S_{14}$$

$$S_{27}=0, S_{28}=14d, S_{29}=29d, \dots$$

3단계 자연수 n 의 값의 합 구하기

이때 $S_k (k=1, 2, 3, \dots, n)$ 의 값이 같은 경우에는 집합 T_n 의 원소가 중복되므로

$$T_{13}=T_{14}=T_{15}=\dots=T_{26}=\{S_1, S_2, S_3, \dots, S_{13}\}$$

따라서 집합 T_n 의 원소의 개수가 13이 되도록 하는 자연수 n 의 값은

13, 14, 15, ..., 26이므로 모든 자연수 n 의 값의 합은

$$13+14+15+\dots+26=\frac{14(13+26)}{2}=273$$

04 답 ③

1단계 두 항 a_m, a_{m+2} 사이의 관계 이해하기

조건에서 $|a_m|=2|a_{m+2}|$ 이므로

$$a_m=2a_{m+2} \text{ 또는 } a_m=-2a_{m+2}$$

2단계 $a_m=2a_{m+2}$ 일 때, a_1 의 값 구하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 $d (d < 0)$ 라 하자.

(i) $a_m=2a_{m+2}$ 일 때,

$$a_{m+2}=a_m+2d \text{ 이므로 } a_m=2(a_m+2d)$$

$$a_m=2a_m+4d \quad \therefore a_m=-4d \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$\therefore a_{m+1}=-3d, a_{m+2}=-2d$$

$$\text{한편 } S_{m+1}=S_m+a_{m+1}=S_m+(-3d)>S_m,$$

$$S_{m+2}=S_{m+1}+a_{m+2}=S_{m+1}+(-2d)>S_{m+1} \text{ 이므로}$$

$$S_{m+2}>S_{m+1}>S_m$$

즉, $S_{m+2}=460$, $S_m=450$ 이므로

$S_{m+2}-S_m=a_{m+1}+a_{m+2}$ 에서

$$460-450=-3d+(-2d)$$

$$-5d=10 \quad \therefore d=-2$$

이때 $a_m=a_1+(m-1)\times(-2)=8$ ($\because$ ㉠)이므로

$$a_1=2m+6$$

$$\text{따라서 } S_m=\frac{m(a_1+a_m)}{2}=\frac{m(2m+14)}{2}=450 \text{이므로}$$

$$m^2+7m-450=0$$

$$(m+25)(m-18)=0$$

$$\therefore m=18 \quad (\because m \text{은 자연수})$$

$$\therefore a_1=2\times 18+6=42$$

3단계 $a_m=-2a_{m+2}$ 일 때, a_1 의 값 구하기

(ii) $a_m=-2a_{m+2}$ 일 때,

$$a_{m+2}=a_m+2d \text{이므로 } a_m=-2(a_m+2d)$$

$$a_m=-2a_m-4d \quad \therefore a_m=-\frac{4}{3}d$$

$$\therefore a_{m+1}=-\frac{d}{3}, a_{m+2}=\frac{2}{3}d \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

$$\text{한편 } S_{m+1}=S_m+a_{m+1}=S_m+\left(-\frac{d}{3}\right)>S_m,$$

$$S_{m+2}=S_m+a_{m+1}+a_{m+2}=S_m+\frac{d}{3}<S_m \text{이므로}$$

$$S_{m+1}>S_m>S_{m+2}$$

즉, $S_{m+1}=460$, $S_{m+2}=450$ 이므로

$S_{m+2}-S_{m+1}=a_{m+2}$ 에서

$$450-460=\frac{2}{3}d$$

$$\frac{2}{3}d=-10 \quad \therefore d=-15$$

이때 $a_{m+1}=a_1+m\times(-15)=5$ ($\because$ ㉡)이므로

$$a_1=15m+5$$

$$\text{따라서 } S_{m+1}=\frac{(m+1)(a_1+a_{m+1})}{2}=\frac{(m+1)(15m+10)}{2}=460$$

이므로

$$3m^2+5m-182=0$$

$$(3m+26)(m-7)=0$$

$$\therefore m=7 \quad (\because m \text{은 자연수})$$

$$\therefore a_1=15\times 7+5=110$$

4단계 모든 a_1 의 값의 합 구하기

(i), (ii)에서 모든 a_1 의 값의 합은 $42+110=152$

05 답 ④

1단계 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항 각각 구하기

$$(7) \text{에서 } S_1-T_1=-3 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

(4)에서 $S_n^2=T_n^2+n^2(n-7)$ 의 양변에 $n=1$ 을 대입하면

$$S_1^2=T_1^2-6, S_1^2-T_1^2=-6$$

$$(S_1+T_1)(S_1-T_1)=-6$$

$$-3(S_1+T_1)=-6 \quad (\because \textcircled{A})$$

$$\therefore S_1+T_1=2 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$S_1=-\frac{1}{2}, T_1=\frac{5}{2}$$

$$\therefore a_1=-\frac{1}{2}, b_1=\frac{5}{2}$$

2단계 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차 각각 구하기

(4)에서 $S_n^2-T_n^2=n^2(n-7)$ 이므로

$$(S_n+T_n)(S_n-T_n)=n^2(n-7) \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차를 각각 d_1 , d_2 ($d_1 \neq d_2$)라 하면

$$S_n+T_n=\frac{n\{2a_1+(n-1)d_1\}}{2}+\frac{n\{2b_1+(n-1)d_2\}}{2}$$

$$=\frac{n\{4+(n-1)(d_1+d_2)\}}{2}$$

$$S_n-T_n=\frac{n\{2a_1+(n-1)d_1\}}{2}-\frac{n\{2b_1+(n-1)d_2\}}{2}$$

$$=\frac{n\{-6+(n-1)(d_1-d_2)\}}{2}$$

㉢에서 $(S_n+T_n)(S_n-T_n)$ 은 n 에 대한 삼차식이므로 S_n+T_n 또는

S_n-T_n 은 n 에 대한 일차식이다.

그런데 $d_1 \neq d_2$ 에서 S_n-T_n 은 n 에 대한 이차식이므로 S_n+T_n 은 n 에 대한 일차식이다.

$$\therefore d_1+d_2=0 \quad \dots\dots \textcircled{D}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_n^2-T_n^2 &= (S_n+T_n)(S_n-T_n) \\ &= 2n \times \frac{n\{-6+(n-1)(d_1-d_2)\}}{2} \\ &= n^2\{-6+(n-1)(d_1-d_2)\} \end{aligned}$$

이때 $S_n^2-T_n^2=n^2(n-7)$ 이므로

$$-6+(n-1)(d_1-d_2)=n-7$$

$$\therefore d_1-d_2=1 \quad \dots\dots \textcircled{E}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$d_1=\frac{1}{2}, d_2=-\frac{1}{2}$$

3단계 $(a_8-b_8)(a_8+b_8)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore (a_8-b_8)(a_8+b_8) &= a_8^2-b_8^2 \\ &= (a_1+7d_1)^2-(b_1+7d_2)^2 \\ &= 3^2-(-1)^2=8 \end{aligned}$$

06 답 477

1단계 공비의 조건 파악하기

$A(200)$ 은 첫째항이 3, 공비가 2 이상의 자연수인 등비수열의 제 k 항이 3×2^{200} 이 되는 모든 자연수 k 의 값의 합이다.

첫째항이 3이므로 등비수열의 공비는 2의 거듭제곱 꼴이어야 한다.

이때 공비를 2^p (p 는 자연수)이라 하면 $2^{200}=(2^p)^{\frac{200}{p}}$ 이고,

$$2^{200}=(2^2)^{100}=(2^4)^{50}=(2^5)^{40}=\dots=(2^{200})^1 \text{이므로 } \frac{200}{p} \text{은 자연수이어야}$$

한다. 즉, p 는 200의 약수이어야 한다.

2단계 $A(200)$ 의 값 구하기

$3 \times 2^{200}=3 \times (2^p)^{\frac{200}{p}}=3 \times (2^p)^{\frac{200}{p}+1-1}$ 이므로 3×2^{200} 은 첫째항이 3, 공비가 2^p 인 등비수열의 제 $\left(\frac{200}{p}+1\right)$ 항이다.

$p=1$ 일 때, 3×2^{200} 은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열의 제201항이다.

$$\therefore k=201$$

$p=2$ 일 때, $3 \times (2^2)^{100}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2^2 인 등비수열의 제101항이다.

$$\therefore k=101$$

$p=4$ 일 때, $3 \times (2^4)^{50}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2^4 인 등비수열의 제51항이다.

$$\therefore k=51$$

$p=5$ 일 때, $3 \times (2^5)^{40}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2^5 인 등비수열의 제41항이다.

$$\therefore k=41$$

$p=8$ 일 때, $3 \times (2^8)^{25}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2^8 인 등비수열의 제26항이다.
 $\therefore k=26$
 $p=10$ 일 때, $3 \times (2^{10})^{20}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2^{10} 인 등비수열의 제21항이다.
 $\therefore k=21$
 $p=20$ 일 때, $3 \times (2^{20})^{10}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2^{20} 인 등비수열의 제11항이다.
 $\therefore k=11$
 $p=25$ 일 때, $3 \times (2^{25})^8$ 은 첫째항이 3, 공비가 2^{25} 인 등비수열의 제9항이다.
 $\therefore k=9$
 $p=40$ 일 때, $3 \times (2^{40})^5$ 은 첫째항이 3, 공비가 2^{40} 인 등비수열의 제6항이다.
 $\therefore k=6$
 $p=50$ 일 때, $3 \times (2^{50})^4$ 은 첫째항이 3, 공비가 2^{50} 인 등비수열의 제5항이다.
 $\therefore k=5$
 $p=100$ 일 때, $3 \times (2^{100})^2$ 은 첫째항이 3, 공비가 2^{100} 인 등비수열의 제3항이다.
 $\therefore k=3$
 $p=200$ 일 때, $3 \times (2^{200})^1$ 은 첫째항이 3, 공비가 2^{200} 인 등비수열의 제2항이다.
 $\therefore k=2$
 $\therefore A(200) = 201 + 101 + 51 + 41 + 26 + 21 + 11 + 9 + 6 + 5 + 3 + 2 = 477$

07 답 84

1단계 (a, b) 를 이용하여 a, b 의 부호 판단하기

$ab < 0$ 이므로 a 와 b 의 부호가 서로 다르다.

2단계 a 의 값 구하기

(i) $a < 0, b > 0$ 일 때,

세 수 a, b, ab 에서 a 와 ab 는 음수, b 는 양수이고, 음수 두 개와 양수 한 개가 등비수열이 되는 배열은 (음수, 양수, 음수)이므로 세 수의 배열은 a, b, ab 또는 ab, b, a 이다.

이때 b 가 등비중항이므로 $b^2 = a \times ab \quad \therefore b = a^2$

즉, 세 수 a, b, ab 는 a, a^2, a^3 이다.

$a < 0, a^2 > 0, a^3 < 0$ 이므로 세 수를 배열하여 등차수열이 되는 배열은 (음수, 음수, 양수) 또는 (양수, 음수, 음수)이다.

이때 등차중항은 음수인 a 또는 a^3 이다.

① a 가 등차중항인 경우

$$2a = a^2 + a^3, a^2 + a - 2 = 0$$

$$(a+2)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = -2 (\because a < 0)$$

② a^3 이 등차중항인 경우

$$2a^3 = a + a^2, 2a^2 - a - 1 = 0$$

$$(2a+1)(a-1) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2} (\because a < 0)$$

①, ②에서 $a = -2$ 또는 $a = -\frac{1}{2}$

(ii) $a > 0, b < 0$ 일 때,

세 수 a, b, ab 에서 a 는 양수, b 와 ab 는 음수이고, 음수 두 개와 양수 한 개가 등비수열이 되는 배열은 (음수, 양수, 음수)이므로 세 수의 배열은 b, a, ab 또는 ab, a, b 이다.

이때 a 가 등비중항이므로

$$a^2 = b \times ab \quad \therefore a = b^2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

즉, 세 수 a, b, ab 는 b^2, b, b^3 이다.

$b < 0, b^2 > 0, b^3 < 0$ 이므로 세 수를 배열하여 등차수열이 되는 배열은 (음수, 음수, 양수) 또는 (양수, 음수, 음수)이다.

이때 등차중항은 음수인 b 또는 b^3 이다.

(i)의 ①, ②와 같은 방법으로 하면

$$b = -2 \text{ 또는 } b = -\frac{1}{2}$$

이를 각각 ⑦에 대입하여 풀면

$$a = 4 \text{ 또는 } a = \frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서 $a = -2$ 또는 $a = -\frac{1}{2}$ 또는 $a = \frac{1}{4}$ 또는 $a = 4$

3단계 $48k$ 의 값 구하기

따라서 $k = -2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} + 4 = \frac{7}{4}$ 이므로

$$48k = 48 \times \frac{7}{4} = 84$$

08 답 ④

1단계 $\overline{AQ}, \overline{QP}, \overline{PR}$ 를 식으로 나타내기

②에서 $\overline{AQ}, \overline{QP}, \overline{PR}$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d , $\overline{AQ} = a$ 라 하면 $\overline{QP} = a + d$, $\overline{PR} = a + 2d$

2단계 선분 QP 의 길이 구하기

$\overline{AB} \parallel \overline{PR}$, $\overline{QP} \parallel \overline{BC}$ 에서 사각형 PQBR는 평행사변형이므로

$$\overline{PR} = \overline{QB}$$

$$\therefore \overline{AQ} + \overline{PR} = \overline{AQ} + \overline{QB} = \overline{AB} = 6$$

$$\text{즉, } a + (a + 2d) = 6 \text{이므로 } a + d = 3$$

$$\therefore \overline{QP} = 3$$

3단계 선분 PR 의 길이 구하기

두 삼각형 AQP, ABC에서 $\overline{QP} \parallel \overline{BC}$ 이므로

$$\overline{AQ} : \overline{AB} = \overline{QP} : \overline{BC}$$

이때 $\overline{AB} = 6$, $\overline{QP} = 3$ 이므로

$$a : 6 = 3 : \overline{BC} \quad \therefore \overline{BC} = \frac{18}{a}$$

②에서 $\overline{AQ}, \overline{PR}, \overline{BC}$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$\overline{PR}^2 = \overline{AQ} \times \overline{BC}$$

이때 $\overline{PR} = \overline{QB} = 6 - a$ 이므로

$$(6 - a)^2 = a \times \frac{18}{a}$$

$$6 - a = \pm 3\sqrt{2}$$

$$\therefore a = 6 + 3\sqrt{2} \text{ 또는 } a = 6 - 3\sqrt{2}$$

그런데 $0 < a < 6$ 이므로 $a = 6 - 3\sqrt{2}$

$$\therefore \overline{PR} = 6 - a = 6 - (6 - 3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$$

4단계 사각형 PQBR의 둘레의 길이 구하기

사각형 PQBR의 둘레의 길이는

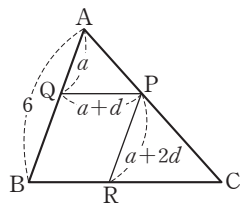
$$2(\overline{QP} + \overline{PR}) = 2(3 + 3\sqrt{2})$$

$$= 6 + 6\sqrt{2} = 6 + \sqrt{72}$$

5단계 $p + q$ 의 값 구하기

따라서 $p = 6$, $q = 72$ 이므로

$$p + q = 78$$



09 답 10

1단계 $\overline{A_1D_1}$, $\overline{A_1B_1}$ 의 길이 구하기

그림과 같이 두 선분 AB, DC의 중점을 각각 E, F라 하고, 선분 EF의 중점을 O라 하자.
또 선분 A_1B_1 의 중점을 P라 하고, $\overline{A_1D_1}=x$ 라 하면 $\overline{A_1B_1}=2\overline{A_1D_1}=2x$ 이므로

$$\begin{aligned}\overline{A_1P} &= x \\ \overline{EP} &= \overline{OE} - \overline{OP} \\ &= \frac{1}{2}\overline{AD} - \frac{1}{2}\overline{A_1D_1} \\ &= \frac{5}{6} - \frac{1}{2}x \\ \overline{FP} &= \overline{AD} - \overline{EP} \\ &= \frac{5}{3} - \left(\frac{5}{6} - \frac{1}{2}x\right) \\ &= \frac{5}{6} + \frac{1}{2}x\end{aligned}$$

$$\text{이때 } \overline{A_1F} = \overline{EF} = \overline{AD} = \frac{5}{3} \text{이고,}$$

직사각형 A_1PF 에서 $\overline{A_1P}^2 + \overline{PF}^2 = \overline{A_1F}^2$ 이므로

$$x^2 + \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2}x\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2, \quad \frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{6}x - \frac{25}{12} = 0$$

$$3x^2 + 2x - 5 = 0, \quad (3x+5)(x-1) = 0 \quad \therefore x=1 \quad (\because x>0)$$

$$\therefore \overline{A_1D_1}=1, \quad \overline{A_1B_1}=2$$

2단계 l_n 구하기

즉, 직사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 에서

$$l_1 = 2(\overline{A_1D_1} + \overline{A_1B_1}) = 2(1+2) = 6$$

두 직사각형 ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ 은 닮은 도형이고, 이때의 닮음비가

$\overline{AD} : \overline{A_1D_1} = \frac{5}{3} : 1 = 5 : 3$ 이므로 두 직사각형 ABCD, $A_1B_1C_1D_1$ 의 둘레의 길이의 비는 5 : 3이다.

즉, 두 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$, $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$ 의 둘레의 길이의 비도 5 : 3이다.

따라서 수열 $\{l_n\}$ 은 첫째항이 6, 공비가 $\frac{3}{5}$ 인 등비수열이므로 일반항 l_n 은

$$l_n = 6 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}$$

3단계 n 의 최솟값 구하기

$$l_n < \frac{1}{10} \text{에서 } 6 \times \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} < \frac{1}{10}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 6 + (n-1)(\log 3 - \log 5) < \log 10^{-1}$$

$$\log 2 + \log 3 + (n-1)\{\log 3 - (1 - \log 2)\} < -1$$

$$0.3 + 0.48 + (n-1)\{0.48 - (1 - 0.3)\} < -1$$

$$-0.22n < -2 \quad \therefore n > \frac{2}{0.22} = 9.09 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10이다.

10 답 750

1단계 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 제3항을 a , 공차를 d ($d < 0$)라 하면

$$a_1 = a - 2d, \quad a_2 = a - d, \quad a_3 = a, \quad a_4 = a + d, \quad a_5 = a + 2d$$

또 등비수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항을 b , 공비를 r ($r < 0$)라 하면

$$b_1 = b, \quad b_2 = br, \quad b_3 = br^2, \quad b_4 = br^3, \quad b_5 = br^4$$

이때 $a - 2d$, b 는 자연수이다.

2단계 조건을 만족시키는 수열 $\{b_n\}$ 의 공비 구하기

(㉞), (㉟)에서 $(S_5 + T_5^*) - (S_5 + T_5) = 93 - 33$ 이므로

$$T_5^* - T_5 = 60$$

그런데 $b_1 > 0$, $b_3 > 0$, $b_5 > 0$ 이고, $b_2 < 0$, $b_4 < 0$ 이므로

$$T_5^* - T_5 = -2(b_2 + b_4) = 60 \quad \therefore b_2 + b_4 = -30$$

즉, $br + br^3 = -30$ 이므로

$$br(1+r^2) = -30 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 r 는 음의 정수이므로 가능한 $1+r^2$ 의 값은 2 또는 5 또는 10이다.

즉, $r^2=1$ 또는 $r^2=4$ 또는 $r^2=9$ 이므로

$$r = -1 \text{ 또는 } r = -2 \text{ 또는 } r = -3$$

3단계 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 일반항 구하기

(i) $r = -1$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } -2b = -30 \text{이므로 } b = 15$$

$$\text{이때 } T_5 = \frac{15\{1 - (-1)^5\}}{1 - (-1)} = 15 \text{이므로}$$

$$\textcircled{㉞} \text{에서 } S_5 + 15 = 33 \quad \therefore S_5 = 18$$

즉, $S_5 = 5a$ 이므로

$$5a = 18 \quad \therefore a = \frac{18}{5}$$

그런데 a 는 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $r = -2$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } -10b = -30 \text{이므로 } b = 3$$

$$\text{이때 } T_5 = \frac{3\{1 - (-2)^5\}}{1 - (-2)} = 33 \text{이므로}$$

$$\textcircled{㉞} \text{에서 } S_5 + 33 = 33 \quad \therefore S_5 = 0$$

즉, $S_5 = 5a$ 이므로

$$5a = 0 \quad \therefore a = 0$$

한편 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제5항까지를 차례로 나타내면

$$-2d, -d, 0, d, 2d \rightarrow a=0$$

이고, $S_5 = 0$ 이므로

$$\textcircled{㉞} \text{에서 } T_5^* = 93, \quad \textcircled{㉟} \text{에서 } S_5^* = 111 - 93 = 18$$

$$\text{따라서 } S_5^* = -2d - d + 0 - d - 2d = -6d = 18 \text{이므로 } d = -3$$

즉, $a = 0$, $d = -3$, $b = 3$, $r = -2$ 이므로

$$a_n = 6 + (n-1) \times (-3) = -3n + 9, \quad b_n = 3 \times (-2)^{n-1}$$

(iii) $r = -3$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } -30b = -30 \text{이므로 } b = 1$$

$$\text{이때 } T_5 = \frac{1 \times \{1 - (-3)^5\}}{1 - (-3)} = 61 \text{이므로}$$

$$\textcircled{㉞} \text{에서 } S_5 + 61 = 33 \quad \therefore S_5 = -28$$

즉, $S_5 = 5a$ 이므로

$$5a = -28 \quad \therefore a = -\frac{28}{5}$$

그런데 a 는 정수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

4단계 $a_9 + b_9$ 의 값 구하기

(i), (ii), (iii)에서 $a_n = -3n + 9$, $b_n = 3 \times (-2)^{n-1}$ 이므로

$$a_9 + b_9 = -18 + 768 = 750$$

11 답 7, 1

1단계 $S_5 = S_4 + 2$ 를 이용하여 a_5 의 값 구하기

$$a_n = S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \text{이므로}$$

$$S_5 = S_4 + 2 \text{에서 } S_5 - S_4 = 2 \quad \therefore a_5 = 2$$

2단계 a_5 의 값을 이용하여 a_1, a_3, a_7, a_9 를 d 에 대한 식으로 나타내기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차가 d 이므로

$$a_1=2-4d, a_3=2-2d, a_7=2+2d, a_9=2+4d$$

3단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$$\begin{aligned} \neg. A &= a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + a_7^2 \\ &= (2-4d)^2 + (2-2d)^2 + 2^2 + (2+2d)^2 \\ &= 24d^2 - 16d + 16 \\ &= 24\left(d - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{40}{3} \end{aligned}$$

즉, A 는 $d = \frac{1}{3}$ 일 때 최솟값을 갖는다.

4단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$$\begin{aligned} \neg. B &= |a_3| + |a_5| + |a_7| + |a_9| \\ &= |2-2d| + 2 + |2+2d| + |2+4d| \\ &= 2(|d+1| + |2d+1| + |d-1| + 1) \end{aligned}$$

(i) $d \leq -1$ 일 때,

$$B = 2\{-(d+1) - (2d+1) - (d-1) + 1\} = -8d$$

즉, $-8d \geq 8$ 이므로 $B \geq 8$

(ii) $-1 < d \leq -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$B = 2\{(d+1) - (2d+1) - (d-1) + 1\} = -4d + 4$$

즉, $6 \leq -4d + 4 < 8$ 이므로 $6 \leq B < 8$

(iii) $-\frac{1}{2} < d \leq 1$ 일 때,

$$B = 2\{(d+1) + (2d+1) - (d-1) + 1\} = 4d + 8$$

즉, $6 < 4d + 8 \leq 12$ 이므로 $6 < B \leq 12$

(iv) $d > 1$ 일 때,

$$B = 2\{(d+1) + (2d+1) + (d-1) + 1\} = 8d + 4$$

즉, $8d + 4 > 12$ 이므로 $B > 12$

(i)~(iv)에서 $B \geq 6$ 이므로 B 의 최솟값은 6이다.

5단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg$. (i) $-1 < d \leq -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$\begin{aligned} A &= 24d^2 - 16d + 16, B = -4d + 4 \\ \therefore A + 8B &= 24d^2 - 16d + 16 + 8(-4d + 4) \\ &= 24d^2 - 48d + 48 \\ &= 24(d-1)^2 + 24 \end{aligned}$$

즉, $A + 8B$ 는 $d = -\frac{1}{2}$ 일 때 최솟값 78을 갖는다.

(ii) $-\frac{1}{2} < d < 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} A &= 24d^2 - 16d + 16, B = 4d + 8 \\ \therefore A + 8B &= 24d^2 - 16d + 16 + 8(4d + 8) \\ &= 24d^2 + 16d + 80 \\ &= 24\left(d + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{232}{3} \end{aligned}$$

즉, $A + 8B$ 는 $d = -\frac{1}{3}$ 일 때 최솟값 $\frac{232}{3}$ 을 갖는다.

(i), (ii)에서 $-1 < d < 1$ 일 때, $A + 8B$ 의 최솟값은 $\frac{232}{3}$ 이다.

6단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

STEP 1 핵심 문제

| 104~105쪽

01 ②	02 ⑤	03 700	04 21	05 ②	06 1541
07 ⑤	08 ④	09 ④	10 $\sqrt{2}$	11 ④	

01 답 ②

$$\begin{aligned} a_n &= \log_2 \left(1 + \frac{2}{n}\right) = \log_2 \frac{n+2}{n} \\ \therefore \sum_{k=1}^m a_k &= \sum_{k=1}^m \log_2 \frac{k+2}{k} \\ &= \log_2 \frac{3}{1} + \log_2 \frac{4}{2} + \log_2 \frac{5}{3} + \log_2 \frac{6}{4} \\ &\quad + \dots + \log_2 \frac{m+1}{m-1} + \log_2 \frac{m+2}{m} \\ &= \log_2 \left(\frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{6}{4} \times \dots \times \frac{m+1}{m-1} \times \frac{m+2}{m}\right) \\ &= \log_2 \frac{(m+1)(m+2)}{2} \\ \sum_{k=1}^m a_k &> 9 \text{에서 } \log_2 \frac{(m+1)(m+2)}{2} > 9 \\ \frac{(m+1)(m+2)}{2} &> 2^9 \quad \therefore (m+1)(m+2) > 1024 \end{aligned}$$

따라서 $31 \times 32 = 992$, $32 \times 33 = 1056$ 이므로 자연수 m 의 최솟값은 31이다.

02 답 ⑤

자연수 n 에 대하여 a_n 의 값은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	...
a_n	10	10	-19	10	10	-19	...

$$\text{즉, 음이 아닌 정수 } m \text{에 대하여 } \sum_{k=1}^n a_k = \begin{cases} m & (n=3m) \\ m+10 & (n=3m+1) \\ m+20 & (n=3m+2) \end{cases}$$

따라서 $\sum_{k=1}^{3n} a_k = n$ 이므로 $\sum_{k=1}^n a_k = n$

(i) $n=3m$ 일 때,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{3m} a_k = m, \quad \sum_{k=1}^{3n} a_k = n = 3m$$

즉, $m=3m$ 에서 $m=0$ 이므로

조건을 만족시키는 자연수 n 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $n=3m+1$ 일 때,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{3m+1} a_k = m+10, \quad \sum_{k=1}^{3n} a_k = n = 3m+1$$

즉, $m+10=3m+1$ 에서 $m=\frac{9}{2}$ 이므로

조건을 만족시키는 자연수 n 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $n=3m+2$ 일 때,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^{3m+2} a_k = m+20, \quad \sum_{k=1}^{3n} a_k = n = 3m+2$$

즉, $m+20=3m+2$ 에서 $m=9$ 이므로

조건을 만족시키는 자연수 n 의 값은 29이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수 n 의 값은 29이다.

03 답 700

x 에 대한 이차방정식 $x^2 - n^2x - 2n = 0$ 의 두 근이 a_n, b_n 이므로 근과 계수의 관계에 의하여 $a_n + b_n = n^2, a_nb_n = -2n$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10} (a_k + 2)(b_k + 2) &= \sum_{k=1}^{10} \{a_kb_k + 2(a_k + b_k) + 4\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} (2k^2 - 2k + 4) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k + 4 \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 2 \times \frac{10 \times 11}{2} + 4 \times 10 \\ &= 700\end{aligned}$$

04 답 21

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^6 k^2 + \sum_{k=2}^6 k^2 + \sum_{k=3}^6 k^2 + \sum_{k=4}^6 k^2 + \sum_{k=5}^6 k^2 + \sum_{k=6}^6 k^2 \\ &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) \\ &\quad + (2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) \\ &\quad + (3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) \\ &\quad + (4^2 + 5^2 + 6^2) \\ &\quad + (5^2 + 6^2) \\ &\quad + 6^2 \\ &= 1^2 \times 1 + 2^2 \times 2 + 3^2 \times 3 + \dots + 6^2 \times 6 \\ &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 6^3 \\ &= \sum_{k=1}^6 k^3 = \left(\frac{6 \times 7}{2}\right)^2 = 21^2 \\ \therefore N &= 21\end{aligned}$$

05 답 ②

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^4 \left(\sum_{j=1}^6 ij \right) + \sum_{i=1}^6 \left\{ \sum_{j=1}^4 (i+j) \right\} &= \sum_{i=1}^4 \left(i \sum_{j=1}^6 j \right) + \sum_{i=1}^6 \left(i \sum_{j=1}^4 1 + \sum_{j=1}^4 j \right) \\ &= \sum_{i=1}^4 \left(i \times \frac{6 \times 7}{2} \right) + \sum_{i=1}^6 \left(4i + \frac{4 \times 5}{2} \right) \\ &= 21 \sum_{i=1}^4 i + 4 \sum_{i=1}^6 i + 10 \sum_{i=1}^6 1 \\ &= 21 \times \frac{4 \times 5}{2} + 4 \times \frac{6 \times 7}{2} + 10 \times 6 \\ &= 354\end{aligned}$$

06 답 1541

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 3n + 1$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} = (n^2 + 3n + 1) - \{(n-1)^2 + 3(n-1) + 1\} \\ &= 2n + 2\end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 3 \times 1 + 1 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 ②은 ①에 $n=1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로 일반항 a_n 은

$$a_1 = 5, a_n = 2n + 2 \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots \text{배점 50\%}$$

따라서 $k \geq 2$ 에서 $ka_{2k-1} = k\{2(2k-1) + 2\} = 4k^2 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{10} ka_{2k-1} &= a_1 + \sum_{k=2}^{10} ka_{2k-1} = 5 + \sum_{k=2}^{10} 4k^2 = 5 + 4 \sum_{k=2}^{10} k^2 \\ &= 5 + 4 \left(\sum_{k=1}^{10} k^2 - 1 \right) = 5 + 4 \left(\frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 1 \right) \\ &= 1541 \quad \dots\dots \text{배점 40\%}\end{aligned}$$

07 답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_{11} = 5a_2 \text{에서 } 5 + 10d = 5(5 + d)$$

$$5d = 20$$

$$\therefore d = 4$$

$$\therefore a_n = 5 + (n-1) \times 4 = 4n + 1$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=2}^{10} \frac{8}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=2}^{10} \frac{8}{(4k+1)(4k+5)} \\ &= 2 \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{4k+1} - \frac{1}{4k+5} \right) \\ &= 2 \left\{ \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{13} \right) + \left(\frac{1}{13} - \frac{1}{17} \right) + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{21} \right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + \left(\frac{1}{41} - \frac{1}{45} \right) \right\} \\ &= 2 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{45} \right) \\ &= \frac{8}{45}\end{aligned}$$

08 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차가 같으므로 $a_1 = a$ 라 하면

$$a_n = a + (n-1) \times a = an$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} &= \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{ak} + \sqrt{a(k+1)}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{ak} - \sqrt{a(k+1)}}{\{\sqrt{ak} + \sqrt{a(k+1)}\} \{\sqrt{ak} - \sqrt{a(k+1)}\}} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \frac{\sqrt{a(k+1)} - \sqrt{ak}}{a} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{k=1}^{15} (\sqrt{a(k+1)} - \sqrt{ak}) \\ &= \frac{1}{a} \{ (\sqrt{2a} - \sqrt{a}) + (\sqrt{3a} - \sqrt{2a}) \\ &\quad + \dots + (\sqrt{16a} - \sqrt{15a}) \} \\ &= \frac{1}{a} (4\sqrt{a} - \sqrt{a}) \\ &= \frac{3\sqrt{a}}{a} \\ &= \frac{3}{\sqrt{a}}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = 2 \text{에서 } \frac{3}{\sqrt{a}} = 2 \text{이므로}$$

$$2\sqrt{a} = 3$$

$$\therefore a = \frac{9}{4}$$

$$\therefore a_4 = 4a = 9$$

09 답 ④

집합 A 의 원소 중 1보다 작은 수는

$$m=2 \text{일 때, } \frac{1}{2}$$

$$m=3 \text{일 때, } \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$$

$$m=4 \text{일 때, } \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$$

$\vdots$

$$m=11 \text{일 때, } \frac{1}{11}, \frac{2}{11}, \frac{3}{11}, \dots, \frac{10}{11}$$

따라서 구하는 모든 수의 합은

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{11} \frac{1+2+3+\cdots+(k-1)}{k} - \left(\frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6} + \frac{2}{8} + \frac{4}{8} + \frac{6}{8} \right. \\ & \quad \left. + \frac{3}{9} + \frac{6}{9} + \frac{2}{10} + \frac{4}{10} + \frac{5}{10} + \frac{6}{10} + \frac{8}{10} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{11} \left\{ \frac{1}{k} \times \frac{(k-1)k}{2} \right\} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{11} (k-1) - 7 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} k - 7 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{10 \times 11}{2} - 7 \\ &= \frac{41}{2} \end{aligned}$$

10 답 $\sqrt{2}$

함수 $y = \log_a(x+1)$ 의 그래프와 직선 $y = n-1$ 이 만나는 점 A_n 의 x 좌표를 구하면

$$\log_a(x+1) = n-1$$

$$x+1 = a^{n-1}$$

$$\therefore x = a^{n-1} - 1 \quad \therefore A_n(a^{n-1} - 1, n-1)$$

함수 $y = \log_a(x+1)$ 의 그래프와 직선 $y = n$ 이 만나는 점 B_n 의 x 좌표를 구하면

$$\log_a(x+1) = n$$

$$x+1 = a^n$$

$$\therefore x = a^n - 1 \quad \therefore B_n(a^n - 1, n)$$

선분 $A_n B_n$ 을 대각선으로 하는 직사각형의 넓이는

$$S_n = \{(a^n - 1) - (a^{n-1} - 1)\} \times \{n - (n-1)\}$$

$$= a^n - a^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^8 S_n = \sum_{n=1}^8 (a^n - a^{n-1})$$

$$= (a^1 - a^0) + (a^2 - a^1) + (a^3 - a^2) + \cdots + (a^8 - a^7)$$

$$= a^8 - 1$$

따라서 $\sum_{n=1}^8 S_n = 15$ 에서 $a^8 - 1 = 15$ 이므로

$$a^8 = 16 \quad \therefore a = \sqrt[4]{2} \quad (\because a > 1)$$

11 답 ④

n 행에 나열된 모든 수의 합은

$$a_n = n + 2n + 3n + \cdots + n^2$$

$$= n(1+2+3+\cdots+n)$$

$$= n \sum_{k=1}^n k$$

$$= n \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{2}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^8 a_k = \sum_{k=1}^8 \left(\frac{k^3}{2} + \frac{k^2}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 k^3 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^8 k^2$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{8 \times 9}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \times \frac{8 \times 9 \times 17}{6}$$

$$= 750$$

STEP 2 고난도 문제

| 106~110쪽

01 0	02 -3	03 ⑤	04 ③	05 406	06 ①
07 8	08 ④	09 ⑤	10 ③	11 136	12 $\frac{108}{55}$
13 696	14 ②	15 ①	16 ④	17 66	18 ⑤
19 ③	20 ⑤	21 15	22 650	23 553	24 725
25 93	26 1156	27 ③			

idea 01 답 0

$\sum_{k=2}^{n+1} k a_k$ 에서 $k-1=i$ 라 하면

$$\sum_{k=2}^{n+1} k a_k = \sum_{i=1}^n (i+1) a_{i+1}$$

$\sum_{k=3}^{n+2} k(k-1) a_k$ 에서 $k-2=j$ 라 하면

$$\sum_{k=3}^{n+2} k(k-1) a_k = \sum_{j=1}^n (j+1)(j+2) a_{j+2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=2}^{n+1} k a_k + \sum_{k=3}^{n+2} k(k-1) a_k \\ &= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{i=1}^n (i+1) a_{i+1} + \sum_{j=1}^n (j+1)(j+2) a_{j+2} \\ &= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n (k+1) a_{k+1} + \sum_{k=1}^n (k+1)(k+2) a_{k+2} \\ &= \sum_{k=1}^n \{a_k + (k+1) a_{k+1} + (k+1)(k+2) a_{k+2}\} \end{aligned}$$

이때 $a_n = pn + q$ 이므로

$$(pk+q) + (k+1)(pk+p+q) + (k+1)(k+2)(pk+2p+q)$$

$$= k^3 + 5k^2 + 7k + 1$$

이 등식에서 삼차항의 계수를 비교하면 $p=1$

상수항을 비교하면 $q + (p+q) + 2(2p+q) = 1$

$$5p + 4q = 1 \quad \therefore q = -1 \quad (\because p=1)$$

$$\therefore p+q=0$$

02 답 -3

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 ①에서

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) = 30$$

$$3a_1 + 3d = 30 \quad \therefore a_1 + d = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

②의 $a_{m-2} + a_{m-1} + a_m = 6$ 에서

$$(a_m - 2d) + (a_m - d) + a_m = 6$$

$$3a_m - 3d = 6 \quad \therefore a_m - d = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{을 하면 } a_1 + a_m = 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{3} \text{에서 } \sum_{k=1}^m a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m = \frac{m(a_1 + a_m)}{2}$$

$$\text{즉, } \frac{m(a_1 + a_m)}{2} = 66 \text{이므로}$$

$$\frac{m}{2} \times 12 = 66 \quad (\because \textcircled{3}) \quad \therefore m = 11$$

이를 ②에 대입하면

$$a_{11} - d = 2, (a_1 + 10d) - d = 2$$

$$\therefore a_1 + 9d = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{4} \text{을 연립하여 풀면 } a_1 = 11, d = -1$$

$$\therefore a_{15} = a_1 + 14d = 11 + 14 \times (-1) = -3$$

03 답 ⑤

(7)에서 상수 $a(a \neq 0)$, $r(r > 0)$ 에 대하여

$$a_1 = a, a_3 = ar, a_5 = ar^2, a_7 = ar^3$$

(4)에서

$$a_2 = \frac{75}{a_7} = \frac{75}{ar^3}, a_4 = \frac{75}{a_5} = \frac{75}{ar^2}, a_6 = \frac{75}{a_3} = \frac{75}{ar}, a_8 = \frac{75}{a_1} = \frac{75}{a}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^8 a_k &= (a_1 + a_3 + a_5 + a_7) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8) \\ &= (a + ar + ar^2 + ar^3) + \left(\frac{75}{ar^3} + \frac{75}{ar^2} + \frac{75}{ar} + \frac{75}{a} \right) \\ &= a(1 + r + r^2 + r^3) + \frac{75}{ar^3}(1 + r + r^2 + r^3) \\ &= \left(a + \frac{75}{ar^3} \right) (1 + r + r^2 + r^3) \\ &= (a_1 + a_2)(1 + r + r^2 + r^3) \end{aligned}$$

$$\text{이때 } a_1 + a_2 = \frac{10}{3}, \sum_{k=1}^8 a_k = \frac{400}{3} \text{ 이므로}$$

$$\frac{10}{3}(1 + r + r^2 + r^3) = \frac{400}{3}$$

$$1 + r + r^2 + r^3 = 40$$

$$r^3 + r^2 + r - 39 = 0$$

$$(r - 3)(r^2 + 4r + 13) = 0$$

$$\therefore r = 3 \quad (\because r \text{는 실수})$$

$$\therefore a_1 + a_2 = a + \frac{75}{ar^3} = a + \frac{75}{27a} \text{ 이므로}$$

$$a + \frac{75}{27a} = \frac{10}{3}$$

$$9a^2 - 30a + 25 = 0$$

$$(3a - 5)^2 = 0$$

$$\therefore a = \frac{5}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_3 + a_8 &= ar + \frac{75}{a} \\ &= 5 + 45 = 50 \end{aligned}$$

04 답 ③

$\sum_{k=2}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = 2n^2 + 2$ 의 양변에 $n=2$ 를 대입하면

$$a_2 - a_1 = 10$$

두 식 $a_1 + a_2 = 8$, $a_2 - a_1 = 10$ 을 연립하여 풀면

$$a_1 = -1, a_2 = 9$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=2}^n a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k &= (a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) \\ &= a_n - a_1 = a_n + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a_n + 1 = 2n^2 + 2 \text{ 이므로}$$

$$a_n = 2n^2 + 1 \quad (n \geq 2)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = -1$, $a_n = 2n^2 + 1 \quad (n \geq 2)$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= a_1 + \sum_{k=2}^{10} a_k \\ &= -1 + \sum_{k=2}^{10} (2k^2 + 1) \\ &= -1 + \sum_{k=1}^{10} (2k^2 + 1) - 3 \\ &= -4 + 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= -4 + 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 10 \\ &= 776 \end{aligned}$$

05 답 406

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=1}^n \left(a_k x - \frac{b_k}{n} \right)^2 = \sum_{k=1}^n \left(a_k^2 x^2 - \frac{2a_k b_k}{n} x + \frac{b_k^2}{n^2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(kx^2 - \frac{6k^2}{n} x + \frac{9k^3}{n^2} \right) \\ &= x^2 \sum_{k=1}^n k - \frac{6x}{n} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{9}{n^2} \sum_{k=1}^n k^3 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} x^2 - \left\{ \frac{6}{n} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} x + \frac{9}{n^2} \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \left\{ x^2 - \frac{2(2n+1)}{n} x + \frac{9(n+1)}{2n} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \left\{ \left(x - \frac{2n+1}{n} \right)^2 + \frac{n^2 + n - 2}{2n^2} \right\} \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n^2 + n - 2}{2n^2} = \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{4n} \\ \therefore \sum_{n=2}^{15} \frac{n}{n-1} p_n &= \sum_{n=2}^{15} \left\{ \frac{n}{n-1} \times \frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{4n} \right\} \\ &= \sum_{n=2}^{15} \frac{(n+1)(n+2)}{4} \\ &= \sum_{n=1}^{15} \frac{(n+1)(n+2)}{4} - \frac{2 \times 3}{4} \\ &= \sum_{n=1}^{15} \frac{n^2 + 3n + 2}{4} - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{15} n^2 + \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{15} n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{15} 1 - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{15 \times 16 \times 31}{6} + \frac{3}{4} \times \frac{15 \times 16}{2} + \frac{1}{2} \times 15 - \frac{3}{2} \\ &= 406 \end{aligned}$$

06 답 ①

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)a_k} = n^2 + 2n \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2n-1)a_n} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)a_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(2k-1)a_k} \\ &= n^2 + 2n - \{ (n-1)^2 + 2(n-1) \} = 2n + 1 \\ \therefore (2n-1)a_n &= \frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$\frac{1}{a_1} = 3 \quad \therefore a_1 = \frac{1}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{2}$ 은 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ \therefore \sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{20}{21} \\ &= \frac{10}{21} \end{aligned}$$

07 답 8

$$\sum_{k=1}^n (k+1)a_k = \frac{n(n-1)(2n+p)}{6} \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} (n+1)a_n &= \sum_{k=1}^n (k+1)a_k - \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)a_k \\ &= \frac{n(n-1)(2n+p)}{6} - \frac{(n-1)(n-2)(2n-2+p)}{6} \\ &= \frac{(n-1)(6n+2p-4)}{6} \\ \therefore a_n &= \frac{(n-1)(6n+2p-4)}{6(n+1)} \quad \dots\dots \textcircled{㉑} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$2a_1=0 \quad \therefore a_1=0 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

이때 ㉑은 ㉒에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 a_n 은

$$a_n = \frac{(n-1)(6n+2p-4)}{6(n+1)} \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k} = qn \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} \frac{b_n}{n} &= \sum_{k=1}^n \frac{b_k}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{b_k}{k} \\ &= qn - q(n-1) = q \\ \therefore b_n &= qn \quad \dots\dots \textcircled{㉓} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$b_1 = q \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

이때 ㉓은 ㉔에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 b_n 은

$$b_n = qn \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = n(n-1)(n+1) \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n b_n &= \sum_{k=1}^n a_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k \\ &= n(n-1)(n+1) - (n-1)(n-2)n \\ &= 3n(n-1) \quad \dots\dots \textcircled{㉕} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 b_1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉖}$$

이때 ㉕은 ㉖에 $n=1$ 을 대입한 값과 같으므로 일반항 $a_n b_n$ 은

$$a_n b_n = 3n(n-1) \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\text{즉, } \frac{(n-1)(6n+2p-4)}{6(n+1)} \times qn = 3n(n-1) \text{이므로}$$

$$q(6n+2p-4) = 18(n+1)$$

$$\text{따라서 } p=5, q=3 \text{이므로 } p+q=8 \quad \dots\dots \text{배점 10\%}$$

08 답 4

$$\sum_{k=1}^n a_{2k} = n^2 + 3n \text{에서}$$

$$\begin{aligned} a_{2n} &= \sum_{k=1}^n a_{2k} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k} \\ &= (n^2 + 3n) - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} \\ &= 2n + 2 \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n a_{2k-1} = -n^2 + n \text{에서}$$

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= \sum_{k=1}^n a_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k-1} \\ &= (-n^2 + n) - \{-(n-1)^2 + (n-1)\} \\ &= -2n + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{이때 } S_{2m} &= \sum_{k=1}^m a_{2k-1} + \sum_{k=1}^m a_{2k} \\ &= (-m^2 + m) + (m^2 + 3m) \\ &= 4m \end{aligned}$$

이므로

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1} = 4m + \{-2(m+1) + 2\} = 2m$$

$$S_{2m-1} = S_{2m} - a_{2m} = 4m - (2m + 2) = 2m - 2$$

(i) $n=2m$ 일 때,

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{S_{n+1}} &= \frac{S_{2m}}{S_{2m+1}} \\ &= \frac{4m}{2m} = 2 > \frac{49}{100} \end{aligned}$$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=2m-1$ 일 때,

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{S_{2m-1}}{S_{2m}} = \frac{2m-2}{4m} = \frac{m-1}{2m}$$

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} < \frac{49}{100} \text{에서}$$

$$\frac{m-1}{2m} < \frac{49}{100}$$

$$100m - 100 < 98m$$

$$2m < 100$$

$$\therefore m < 50$$

따라서 자연수 m 의 최댓값은 49이므로 자연수 n 의 최댓값은

$$2 \times 49 - 1 = 97$$

(i), (ii)에서 자연수 n 의 최댓값은 97이다.

09 답 5

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = 3n^2 + 1 \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n^2 &= \sum_{k=1}^n a_k^2 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 \\ &= (3n^2 + 1) - \{3(n-1)^2 + 1\} \\ &= 6n - 3 \\ \therefore a_n &= \sqrt{6n-3} \quad (\because a_n > 0) \quad \dots\dots \textcircled{㉑} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_1^2 &= 3 \times 1^2 + 1 = 4 \\ \therefore a_1 &= 2 \quad (\because a_1 > 0) \quad \dots\dots \textcircled{㉒} \end{aligned}$$

이때 ㉑은 ㉒에 $n=1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로 일반항 a_n 은

$$a_1 = 2, a_n = \sqrt{6n-3} \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{37} \frac{1}{a_k + a_{k+1}} &= \frac{1}{a_1 + a_2} + \sum_{k=2}^{37} \frac{1}{\sqrt{6k-3} + \sqrt{6k+3}} \\ &= \frac{1}{2+3} + \sum_{k=2}^{37} \frac{\sqrt{6k-3} - \sqrt{6k+3}}{(\sqrt{6k-3} + \sqrt{6k+3})(\sqrt{6k-3} - \sqrt{6k+3})} \\ &= \frac{1}{5} + \sum_{k=2}^{37} \frac{\sqrt{6k+3} - \sqrt{6k-3}}{6} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \{(\sqrt{15} - \sqrt{9}) + (\sqrt{21} - \sqrt{15}) + (\sqrt{27} - \sqrt{21}) \\ &\quad + \dots + (\sqrt{225} - \sqrt{219})\} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{6}(-3 + 15) \\ &= \frac{11}{5} \end{aligned}$$

10 **답** ③

$$1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{k^2(k+1)^2 + (k+1)^2 + k^2}{k^2(k+1)^2}$$

$$= \frac{(k^2+k)^2 + 2(k^2+k) + 1}{k^2(k+1)^2}$$

$$= \frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}$$

이므로

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{1 + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{(k^2+k+1)^2}{k^2(k+1)^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2+k+1}{k(k+1)}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ 1 + \frac{1}{k(k+1)} \right\}$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ (n-1) + \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right\} \right\}$$

$$= \frac{1}{n} \left\{ (n-1) + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right\}$$

$$= 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$\therefore a_2 \times a_3 \times a_4 \times \cdots \times a_m$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \times \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \times \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) \times \cdots \times \left(1 - \frac{1}{m^2} \right)$$

$$= \frac{2^2-1}{2^2} \times \frac{3^2-1}{3^2} \times \frac{4^2-1}{4^2} \times \cdots \times \frac{m^2-1}{m^2}$$

$$= \frac{1 \times 3}{2 \times 2} \times \frac{2 \times 4}{3 \times 3} \times \frac{3 \times 5}{4 \times 4} \times \cdots \times \frac{(m-1)(m+1)}{m \times m}$$

$$= \frac{m+1}{2m}$$

$$\therefore \frac{m+1}{2m} = \frac{31}{60} \text{ 이므로 } 60m + 60 = 62m$$

$$2m = 60 \quad \therefore m = 30$$

11 **답** 136

수열 $1 \times n, 2 \times (n-1), 3 \times (n-2), \dots, n \times 1$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = k \times \{n - (k-1)\} = -k^2 + (n+1)k \text{ 이므로}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \{-k^2 + (n+1)k\}$$

$$= -\sum_{k=1}^n k^2 + (n+1) \sum_{k=1}^n k$$

$$= -\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1) \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^9 \frac{1}{S_k} = \sum_{k=1}^9 \frac{6}{k(k+1)(k+2)}$$

$$= 3 \sum_{k=1}^9 \left\{ \frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right\}$$

$$= 3 \left\{ \left(\frac{1}{1 \times 2} - \frac{1}{2 \times 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 4} \right) + \left(\frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{4 \times 5} \right) \right.$$

$$\left. + \cdots + \left(\frac{1}{9 \times 10} - \frac{1}{10 \times 11} \right) \right\}$$

$$= 3 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{110} \right) = \frac{81}{55}$$

따라서 $p=55, q=81$ 이므로 $p+q=136$

개념 NOTE

$$\frac{1}{ABC} = \frac{1}{C-A} \left(\frac{1}{AB} - \frac{1}{BC} \right) \quad (\text{단, } A \neq C)$$

12 **답** $\frac{108}{55}$

카드에 적힌 모든 수의 합은 1부터 n 까지의 자연수의 합과 같으므로

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

카드에 적힌 모든 수의 제곱의 합은 1부터 n 까지의 자연수의 제곱의 합과 같으므로

$$\sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore a_n = \sum_{k=1}^n (x_k - k)^2 + \sum_{k=1}^n (x_k - n + k - 1)^2$$

$$= \sum_{k=1}^n [(x_k - k)^2 + \{(x_k + k) - (n+1)\}^2]$$

$$= \sum_{k=1}^n [(x_k - k)^2 + \{(x_k + k)^2 - 2(x_k + k)(n+1) + (n+1)^2\}]$$

$$= \sum_{k=1}^n \{2(x_k^2 + k^2) - 2(x_k + k)(n+1) + (n+1)^2\}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^n x_k^2 + 2 \sum_{k=1}^n k^2 - 2(n+1) \sum_{k=1}^n x_k - 2(n+1) \sum_{k=1}^n k$$

$$+ (n+1)^2 \sum_{k=1}^n 1$$

$$= 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4(n+1) \times \frac{n(n+1)}{2} + n(n+1)^2$$

$$= \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1) - n(n+1)^2$$

$$= n(n+1) \left\{ \frac{2(2n+1)}{3} - (n+1) \right\}$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)}{3}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{10} \frac{n}{a_n} = \sum_{n=2}^{10} \frac{3}{(n-1)(n+1)}$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{n=2}^{10} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{3}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right.$$

$$\left. + \cdots + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) \right\}$$

$$= \frac{3}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right)$$

$$= \frac{108}{55}$$

13 **답** 696

첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$$

부등식 $3|x - a_{n+1}| \leq 2|x - a_n|$ 에서

$$3|x - (3n+2)| \leq 2|x - (3n-1)|$$

(i) $x \geq 3n+2$ 일 때,

$$3\{x - (3n+2)\} \leq 2\{x - (3n-1)\}$$

$$3x - 9n - 6 \leq 2x - 6n + 2$$

$$\therefore x \leq 3n + 8$$

그런데 $x \geq 3n+2$ 이므로

$$3n+2 \leq x \leq 3n+8$$

(ii) $3n-1 \leq x < 3n+2$ 일 때,

$$-3\{x-(3n+2)\} \leq 2\{x-(3n-1)\}$$

$$-3x+9n+6 \leq 2x-6n+2$$

$$5x \geq 15n+4$$

$$\therefore x \geq 3n + \frac{4}{5}$$

그런데 $3n-1 \leq x < 3n+2$ 이므로

$$3n + \frac{4}{5} \leq x < 3n+2$$

(iii) $x < 3n-1$ 일 때,

$$-3\{x-(3n+2)\} \leq -2\{x-(3n-1)\}$$

$$-3x+9n+6 \leq -2x+6n-2$$

$$\therefore x \geq 3n+8$$

그런데 $x < 3n-1$ 이므로 이를 만족시키는 x 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $3n + \frac{4}{5} \leq x \leq 3n+8$

따라서 $b_n = 3n + \frac{4}{5}$, $c_n = 3n+8$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} (3c_k - 2b_k) &= \sum_{k=1}^{15} \left\{ 3\left(3k+8\right) - 2\left(3k + \frac{4}{5}\right) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{15} \left(3k + \frac{112}{5} \right) \\ &= 3 \sum_{k=1}^{15} k + \frac{112}{5} \sum_{k=1}^{15} 1 \\ &= 3 \times \frac{15 \times 16}{2} + \frac{112}{5} \times 15 \\ &= 696 \end{aligned}$$

14 답 ②

$$\begin{aligned} (1+x+x^2+\cdots+x^9)^2 &= (1+x+x^2+\cdots+x^9)(1+x+x^2+\cdots+x^9) \\ &= (1+x+x^2+\cdots+x^8+x^9) \\ &\quad + (x+x^2+\cdots+x^8+x^9+x^{10}) \\ &\quad + (x^2+\cdots+x^8+x^9+x^{10}+x^{11}) \\ &\quad + \cdots + (x^9+x^{10}+x^{11}+\cdots+x^{18}) \\ &= 1+2x+3x^2+\cdots+9x^8+10x^9+9x^{10}+\cdots+x^{18} \end{aligned}$$

$$\therefore a_1=2, a_2=3, a_3=4, \dots, a_8=9, a_9=10, a_{10}=9, \dots, a_{18}=1$$

$$\sum_{k=1}^{18} a_k = 2(2+3+4+\cdots+9) + 10 + 1$$

$$= 2 \sum_{k=2}^9 k + 11 = 2 \left(\sum_{k=1}^9 k - 1 \right) + 11$$

$$= 2 \left(\frac{9 \times 10}{2} - 1 \right) + 11$$

$$= 99$$

$$\sum_{k=1}^{18} a_k^2 = 2(2^2+3^2+4^2+\cdots+9^2) + 10^2 + 1^2$$

$$= 2 \sum_{k=2}^9 k^2 + 101$$

$$= 2 \left(\sum_{k=1}^9 k^2 - 1 \right) + 101$$

$$= 2 \left(\frac{9 \times 10 \times 19}{6} - 1 \right) + 101$$

$$= 669$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{18} a_k(a_k-2) = \sum_{k=1}^{18} (a_k^2 - 2a_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{18} a_k^2 - 2 \sum_{k=1}^{18} a_k$$

$$= 669 - 2 \times 99$$

$$= 471$$

15 답 ①

$36=2^2 \times 3^2$ 의 양의 약수는 1, 2, 3, 2^2 , 2×3 , 3^2 , $2^2 \times 3$, 2×3^2 , $2^2 \times 3^2$ 이므로

$$f(1)=1, f(2)=f(3)=2, f(2^2)=f(3^2)=3,$$

$$f(2 \times 3)=4, f(2^2 \times 3)=f(2 \times 3^2)=6, f(2^2 \times 3^2)=9$$

이때 $f(1)$, $f(2^2)$, $f(3^2)$, $f(2^2 \times 3^2)$ 의 값은 홀수이고, $f(2)$, $f(3)$,

$f(2 \times 3)$, $f(2^2 \times 3)$, $f(2 \times 3^2)$ 의 값은 짝수이므로

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^9 \{ (-1)^{f(a_k)} \times \log a_k \} \\ &= -\log 1 + \log 2 + \log 3 - \log 2^2 + \log (2 \times 3) - \log 3^2 \\ &\quad + \log (2^2 \times 3) + \log (2 \times 3^2) - \log (2^2 \times 3^2) \\ &= -\{ \log 1 + \log 2^2 + \log 3^2 + \log (2^2 \times 3^2) \} \\ &\quad + \{ \log 2 + \log 3 + \log (2 \times 3) + \log (2^2 \times 3) + \log (2 \times 3^2) \} \\ &= -\log (2^4 \times 3^4) + \log (2^5 \times 3^5) \\ &= \log \frac{2^5 \times 3^5}{2^4 \times 3^4} = \log (2 \times 3) \\ &= \log 2 + \log 3 \end{aligned}$$

16 답 ④

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \frac{n\{2b + (n-1) \times (-4)\}}{2}$$

$$= -n(2n-b-2)$$

$$= -2n \left(n - \frac{b+2}{2} \right)$$

모든 자연수 n 에 대하여 $|S_n| \geq 14$ 이므로 $|S_1| = |b| \geq 14$

이때 b 가 자연수이므로 $b \geq 14$

..... ㉠

(i) b 가 짝수일 때,

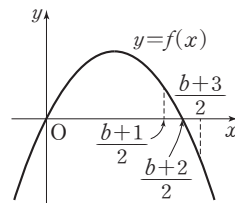
$\frac{b+2}{2}$ 가 자연수이므로 $S_{\frac{b+2}{2}} = 0$ 이 되어 조건 $|S_n| \geq 14$ 를 만족시키

지 않는다.

(ii) b 가 홀수일 때,

S_n 을 n 에 대한 이차함수라 생각하고, $f(n) = -2n \left(n - \frac{b+2}{2} \right)$ 라 하

면 이차함수 $f(x) = -2x \left(x - \frac{b+2}{2} \right)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$|f(x)| \geq 14$ 이므로 $f\left(\frac{b+1}{2}\right) \geq 14$, $f\left(\frac{b+3}{2}\right) \leq -14$ 를 동시에 만족시켜야 한다.

$$f\left(\frac{b+1}{2}\right) = -2 \times \frac{b+1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \geq 14 \text{에서 } b \geq 27 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$f\left(\frac{b+3}{2}\right) = -2 \times \frac{b+3}{2} \times \frac{1}{2} \leq -14 \text{에서 } b \geq 25 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에서 $b \geq 27$

(i), (ii)에서 $b_1=27$, $b_2=29$, $b_3=31$, ... 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{10} b_m &= \frac{10\{2 \times 27 + (10-1) \times 2\}}{2} \\ &= \frac{10(54+18)}{2} = 360 \end{aligned}$$

17 답 66

$$\begin{aligned}
 f(n) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1}} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{(\sqrt{2k+1} + \sqrt{2k-1})(\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})} \\
 &= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1}}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \{ (\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) \\
 &\quad + \cdots + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \} \\
 &= \frac{1}{2} (\sqrt{2n+1} - 1)
 \end{aligned}$$

즉, $f(n)$ 이 정수가 되려면 $\sqrt{2n+1}$ 이 홀수이어야 하므로
 $\sqrt{2n+1} = 2p+1$ (p 는 자연수) $\therefore 2n+1 = (2p+1)^2$
 $1 \leq n \leq 300$ 에서 $3 \leq 2n+1 \leq 601$ 이고 $23^2 = 529$, $25^2 = 625$ 이므로
 $3 \leq 2p+1 \leq 23$ ($\therefore p$ 는 자연수) $\therefore 1 \leq p \leq 11$

이때 $f(n) = \frac{1}{2}(\sqrt{2n+1} - 1) = \frac{1}{2}\{(2p+1) - 1\} = p$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m f(a_i) &= f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + \cdots + f(a_{11}) \\
 &= 1 + 2 + 3 + \cdots + 11 = \frac{11 \times 12}{2} = 66
 \end{aligned}$$

idea
18 답 ⑤

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = \left\lfloor \frac{2}{3} \right\rfloor = 0 \text{이므로 } r_1 = 0$$

(ii) $n=2m$ ($m=1, 2, 3, \dots$)일 때,

$$\begin{aligned}
 a_{2m} &= \left\lfloor \frac{4^m}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4^m - 1}{4 - 1} + \frac{1}{3} \right\rfloor \\
 &= \left\lfloor \frac{(1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{m-1}) + \frac{1}{3}}{3} \right\rfloor \quad \text{첫째항이 1, 공비가 4인 등비수열의} \\
 &\quad \text{첫째항부터 제 } m \text{항까지의 합이다.} \\
 &= 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{m-1}
 \end{aligned}$$

이때 $4, 4^2, \dots, 4^{m-1}$ 은 각각 4로 나누어떨어지므로

$$r_{2m} = 1$$

(iii) $n=2m+1$ ($m=1, 2, 3, \dots$)일 때,

$$\begin{aligned}
 a_{2m+1} &= \left\lfloor \frac{2^{2m+1}}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 2 \times \frac{4^m}{3} \right\rfloor \\
 &= \left\lfloor 2 \times \frac{4^m - 1}{4 - 1} + \frac{2}{3} \right\rfloor \\
 &= \left\lfloor \frac{2(1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{m-1}) + \frac{2}{3}}{3} \right\rfloor \\
 &= 2(1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{m-1})
 \end{aligned}$$

$$\therefore r_{2m+1} = 2$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^{30} r_k &= r_1 + \sum_{k=1}^{15} r_{2k} + \sum_{k=1}^{14} r_{2k+1} \\
 &= 0 + 15 \times 1 + 14 \times 2 = 43
 \end{aligned}$$

19 답 ③

함수 $y = x^2 - 2ax + b = (x-a)^2 - a^2 + b$ 의 최솟값은 $-a^2 + b$ 이므로
 $-a^2 + b > n \quad \therefore b > a^2 + n$

$a=1$ 일 때, b 가 될 수 있는 값은

$$n+2, n+3, \dots, n^2$$

$a=2$ 일 때, b 가 될 수 있는 값은

$$n+5, n+6, \dots, n^2$$

$\vdots$

$a=k$ 일 때, b 가 될 수 있는 값은

$$n+k^2+1, n+k^2+2, \dots, n^2$$

$\vdots$

$a=n-1$ 일 때, b 가 될 수 있는 값은

$$n+(n-1)^2+1, n+(n-1)^2+2, \dots, n^2$$

$a \geq n$ 일 때, $b > a^2 + n$ 을 만족시키는 b 의 값은 존재하지 않는다.

즉, $b > a^2 + n$ 을 만족시키는 순서쌍 (a, b) 의 개수는

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^{n-1} \{n^2 - (n+k^2+1) + 1\} &= \sum_{k=1}^{n-1} (n^2 - n - k^2) \\
 &= (n^2 - n) \sum_{k=1}^{n-1} 1 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\
 &= (n^2 - n)(n-1) - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \\
 &= n(n-1) \left(\frac{2}{3}n - \frac{5}{6} \right) \\
 &= \frac{2}{3}n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{6}n
 \end{aligned}$$

따라서 $p = \frac{2}{3}$, $q = -\frac{3}{2}$, $r = \frac{5}{6}$ 이므로

$$6(p-q+r) = 18$$

20 답 ⑤

원 $x^2 + y^2 = n$ 이 직선 $y = \sqrt{3}x$ 와 제1사분면에서 만나는 점의 좌표를 (x_n, y_n) 이라 하면

$$x_n^2 + y_n^2 = n, y_n = \sqrt{3}x_n$$

$$\text{즉, } x_n^2 + (\sqrt{3}x_n)^2 = n \text{이므로 } x_n^2 = \frac{n}{4}$$

$$\text{이때 } x_n > 0 \text{이므로 } x_n = \frac{\sqrt{n}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{x_k + x_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{80} \frac{1}{\frac{\sqrt{k}}{2} + \frac{\sqrt{k+1}}{2}} = \sum_{k=1}^{80} \frac{2}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\
 &= \sum_{k=1}^{80} \frac{2(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\
 &= \sum_{k=1}^{80} \frac{2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})}{(k+1) - k} = 2 \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\
 &= 2\{(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{81} - \sqrt{80})\} \\
 &= 2(\sqrt{81} - 1) = 2 \times 8 = 16
 \end{aligned}$$

21 답 15

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 C 의 방정식은

$$C: x^2 + y^2 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

원 C 를 y 축의 방향으로 $\frac{1}{n}$ 만큼 평행이동한 원 C_n 의 방정식은

$$C_n: x^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \text{배점 20\%}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면 } y^2 - \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 = 0$$

$$\frac{2}{n}y - \frac{1}{n^2} = 0 \quad \therefore y = \frac{1}{2n}$$

$$\text{이를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } x^2 + \left(\frac{1}{2n}\right)^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{4n^2 - 1}{4n^2} \quad \therefore x = \pm \frac{\sqrt{4n^2 - 1}}{2n} \quad \cdots \cdots \text{배점 30\%}$$

즉, 두 원 C, C_n 의 공통인 현의 길이는

$$a_n = \frac{\sqrt{4n^2 - 1}}{2n} - \left(-\frac{\sqrt{4n^2 - 1}}{2n}\right) = \frac{\sqrt{4n^2 - 1}}{n} \quad \cdots \cdots \text{배점 20\%}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{ka_k} \right)^2 &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2m+1} \right) = \frac{m}{2m+1}\end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{m}{2m+1} = \frac{15}{31} \text{ 이므로}$$

$$31m = 30m + 15 \quad \therefore m = 15 \quad \cdots \cdots \text{배점 30\%}$$

개념 NOTE

- 중심이 (a, b) 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$
- 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x-a, y-b) = 0$

22 답 650

- (i) 점 P_n 을 지나는 현 중에서 길이가 가장 짧은 현은 점 P_n 을 지나고 x 축과 수직인 현이다.

원 C_n 과 직선 $x = \sqrt{5}n$ 의 교점의 y 좌표를 구하면

$$5n^2 + y^2 = 9n^2, y^2 = 4n^2$$

$$\therefore y = \pm 2n$$

즉, 현의 길이는 $2 \times 2n = 4n$ 이고 현의 개수는 1이다.

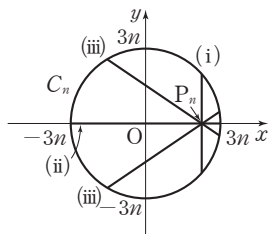
- (ii) 점 P_n 을 지나는 현 중에서 길이가 가장 긴 현은 원의 지름이다.

즉, 현의 길이는 $6n$ 이고 현의 개수는 1이다.

- (iii) 점 P_n 을 지나는 현 중에서 길이가 $4n+1, 4n+2, 4n+3, \dots, 6n-1$ 인 현은 2개씩 있다.

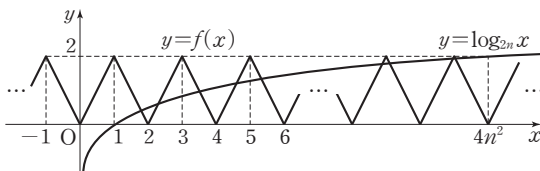
- (i), (ii), (iii)에서 $a_n = 1 + 1 + 2\{(6n-1) - (4n+1) + 1\} = 4n$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^{25} \frac{a_k}{2} &= \sum_{k=1}^{25} 2k = 2 \sum_{k=1}^{25} k \\ &= 2 \times \frac{25 \times 26}{2} = 650\end{aligned}$$



23 답 553

(나)에서 함수 $y=f(x)$ 는 주기가 2인 주기함수이고, 함수 $y=\log_{2n} x$ 의 그래프는 두 점 $(1, 0), (4n^2, 2)$ 를 지나므로 두 함수 $y=f(x), y=\log_{2n} x$ 의 그래프는 그림과 같다.



$n=1$ 일 때, $y=\log_2 x$ 의 그래프는 점 $(4, 2)$ 를 지나므로 교점의 개수는

$$a_1 = 3 = 4 - 1 \rightarrow 1 \leq x \leq 2 \text{에서 1개, } 2 < x \leq 4 \text{에서 2개이다.}$$

$n=2$ 일 때, $y=\log_4 x$ 의 그래프는 점 $(16, 2)$ 를 지나므로 교점의 개수는

$$a_2 = 15 = 16 - 1 \rightarrow 1 \leq x \leq 2 \text{에서 1개, } 2 < x \leq 4, 4 < x \leq 6, \dots, 14 < x \leq 16 \text{에서 각각 2개이다.}$$

⋮

$n=k$ 일 때, $y=\log_{2k} x$ 의 그래프는 점 $(4k^2, 2)$ 를 지나므로 교점의 개수는

$$a_k = 4k^2 - 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^7 a_n = \sum_{n=1}^7 (4n^2 - 1) = 4 \sum_{n=1}^7 n^2 - \sum_{n=1}^7 1 = 4 \times \frac{7 \times 8 \times 15}{6} - 7 = 553$$

24 답 725

원 $x^2 + y^2 = \frac{n^2}{2}$ 에 접하고 기울기가 1, y 절편이 양수인 접선의 방정식은

$$y = x + \frac{n}{\sqrt{2}} \sqrt{1^2 + 1} \quad \therefore y = x + n$$

이 직선이 x 축, y 축과 만나는 점은 각각

$$A_n(-n, 0), B_n(0, n)$$

점 A_n 을 지나고 기울기가 -2 인 직선의 방정식은

$$y = -2(x + n) \quad \therefore y = -2x - 2n$$

이 직선이 y 축과 만나는 점은 $C_n(0, -2n)$

삼각형 $A_n C_n B_n$ 과 그 내부의 점들 중 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수 a_n 은

- (i) $n=1$ 일 때,

x 좌표가 -1 인 점의 개수는 1, x 좌표가 0인 점의 개수는 4이므로

$$a_1 = 1 + 4 = 5$$

- (ii) $n=2$ 일 때,

x 좌표가 -2 인 점의 개수는 1, x 좌표가 -1 인 점의 개수는 4, x 좌표가 0인 점의 개수는 7이므로

$$a_2 = 1 + 4 + 7 = 12$$

- (iii) $n=3$ 일 때,

x 좌표가 -3 인 점의 개수는 1, x 좌표가 -2 인 점의 개수는 4, x 좌표가 -1 인 점의 개수는 7, x 좌표가 0인 점의 개수는 10이므로

$$a_3 = 1 + 4 + 7 + 10 = 22$$

⋮

$$\therefore a_n = 1 + \{4 + 7 + 10 + \cdots + (3n + 1)\}$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n (3k + 1)$$

$$= 1 + 3 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1$$

$$= 1 + 3 \times \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{2}n + 1 \right)$$

$$= \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{10} n^2 + \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{10} n + \sum_{n=1}^{10} 1$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{5}{2} \times \frac{10 \times 11}{2} + 10$$

$$= 725$$

개념 NOTE

원 $x^2 + y^2 = r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인 직선의 방정식은

$$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$$

25 답 93

$$\{a_n\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

수열 $\{a_n\}$ 은 분모가 2인 수 1개, 분모가 3인 수 2개, 분모가 4인 수 3개, ...를 나열한 수열이다.

$$\{b_n\}: \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{3}{6}, \frac{5}{6}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{6}{7}, \dots$$

수열 $\{b_n\}$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 각 항 중에서 분자와 분모의 합이 홀수인 항을 순서대로 나열한 수열이므로 분모가 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...일 때,

수열 $\{b_n\}$ 의 항의 수는 각각 1, 1, 2, 2, 3, 3, ...이다.

즉, 수열 $\{b_n\}$ 의 항의 수는

$$1+1+2+2+3+3+\dots+k+k$$

$$=2(1+2+3+\dots+k)$$

$$=2\sum_{n=1}^k n = 2 \times \frac{k(k+1)}{2} = k^2 + k$$

이때 $k=6$ 이면 $k^2+k=42$ 이고, $k=7$ 이면 $k^2+k=56$ 이므로

$$b_{43} = \frac{1}{14}, b_{44} = \frac{3}{14}, \dots, b_{49} = \frac{13}{14}, b_{50} = \frac{2}{15}$$

따라서 $a_m = \frac{2}{15}$ 일 때 m 의 값은

$$\sum_{n=1}^{13} n + 2 = \frac{13 \times 14}{2} + 2 = 93$$

26 답 1156

n 행에 나열된 모든 수의 합은

$$a_n = 1+3+5+\dots+(2n-3)+(2n-1)+(2n-3)+\dots+5+3+1$$

$$=2\{1+3+5+\dots+(2n-1)\} - (2n-1)$$

$$=2\left\{\sum_{k=1}^n (2k-1)\right\} - (2n-1) = 2\left(2\sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1\right) - (2n-1)$$

$$=2\left\{2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n\right\} - (2n-1) = 2n^2 - 2n + 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{12} a_k = \sum_{k=1}^{12} (2k^2 - 2k + 1) = 2\sum_{k=1}^{12} k^2 - 2\sum_{k=1}^{12} k + \sum_{k=1}^{12} 1$$

$$=2 \times \frac{12 \times 13 \times 25}{6} - 2 \times \frac{12 \times 13}{2} + 12 = 1156$$

27 답 ③

$$1 \odot 1 = 1, 2 \odot 1 = 2^2, 3 \odot 1 = 3^2, \dots \text{이므로 } m \odot 1 = m^2$$

즉, 수열 $\{1 \odot n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열, 수열 $\{2 \odot n\}$ 은 첫째항이 2^2 , 공차가 4인 등차수열, 수열 $\{3 \odot n\}$ 은 첫째항이 3^2 , 공차가 6인 등차수열, ...이므로 n 에 대한 수열 $\{m \odot n\}$ 은 첫째항이 m^2 , 공차가 $2m$ 인 등차수열이다.

따라서 n 에 대한 수열 $\{m \odot n\}$ 의 일반항은

$$m \odot n = m^2 + (n-1) \times 2m = 2mn + m^2 - 2m$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{10} (m \odot n) = \sum_{n=2}^{10} (2mn + m^2 - 2m)$$

$$= 2m \sum_{n=2}^{10} n + (m^2 - 2m) \sum_{n=2}^{10} 1$$

$$= 2m \left(\sum_{n=1}^{10} n - 1 \right) + (m^2 - 2m) \times (10 - 1)$$

$$= 2m \left(\frac{10 \times 11}{2} - 1 \right) + 9(m^2 - 2m)$$

$$= 9m^2 + 90m$$

$$\therefore \frac{1}{90} \sum_{m=3}^{10} \left\{ \sum_{n=2}^{10} (m \odot n) \right\} = \frac{1}{90} \sum_{m=3}^{10} (9m^2 + 90m)$$

$$= \frac{1}{10} \sum_{m=3}^{10} m^2 + \sum_{m=3}^{10} m$$

$$= \frac{1}{10} \left\{ \sum_{m=1}^{10} m^2 - (1+4) \right\} + \sum_{m=1}^{10} m - (1+2)$$

$$= \frac{1}{10} \left(\frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 5 \right) + \frac{10 \times 11}{2} - 3$$

$$= 90$$

STEP 3 최고난도 문제

| 111~113쪽

01 ③

02 $\frac{957}{1024}$

03 ⑤

04 ③

05 ④

06 5

07 8

08 5

09 3433

10 ⑤

idea

01 답 ③

1단계 집합 A의 원소 파악하기

(가)에서 집합 A의 임의의 두 원소 $a_i, a_j (i \neq j)$ 에 대하여 $a_i + a_j \neq 20$ 이므로 $a_j \neq 20 - a_i$

즉, 원소 $20 - a_i (1 \leq i \leq 5)$ 는 집합 A에 속하지 않는다.

2단계 $\sum_{i=1}^5 a_i^2$ 의 값 구하기

$\sum_{i=1}^5 a_i^2$ 과 $\sum_{i=1}^5 (20 - a_i)^2$ 의 합은 집합 U의 모든 원소의 제곱의 합과 같으

므로

$$\sum_{i=1}^5 a_i^2 + \sum_{i=1}^5 (20 - a_i)^2 = \sum_{k=1}^{10} (2k-1)^2$$

$$\sum_{i=1}^5 a_i^2 + \sum_{i=1}^5 (a_i^2 - 40a_i + 400) = \sum_{k=1}^{10} (4k^2 - 4k + 1)$$

$$\sum_{i=1}^5 a_i^2 + \sum_{i=1}^5 a_i^2 - 40 \sum_{i=1}^5 a_i + 400 \sum_{i=1}^5 1 = 4 \sum_{k=1}^{10} k^2 - 4 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1$$

이때 (나)에서 $\sum_{i=1}^5 a_i = 51$ 이므로

$$2 \sum_{i=1}^5 a_i^2 - 40 \times 51 + 400 \times 5 = 4 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 4 \times \frac{10 \times 11}{2} + 10$$

$$2 \sum_{i=1}^5 a_i^2 - 40 = 1330$$

$$\therefore \sum_{i=1}^5 a_i^2 = 685$$

idea

02 답 $\frac{957}{1024}$

1단계 $\sum_{k=1}^{10} a_k, \sum_{k=1}^{10} a_k^2$ 의 값 구하기

$\sum_{k=1}^{10} a_k = p, \sum_{k=1}^{10} a_k^2 = q$ 라 하면 (가)에서 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 의 값은 $-1, 0, 1$

중 하나이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k^3 = p, \sum_{k=1}^{10} a_k^4 = q$$

(나)에서 $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} a_k^3 = 8$ 이므로

$$p + q = 8 \quad \text{..... ㉠}$$

(다)의 $\left(\sum_{k=1}^{10} a_k \right) \left(\sum_{k=1}^{10} a_k^4 \right) = 12$ 에서

$$pq = 12 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$p=2, q=6 \text{ 또는 } p=6, q=2$$

이때 $p \leq q$ 이므로 $p=2, q=6$

2단계 $a_k=1, a_k=0, a_k=-1$ 인 항의 개수 구하기

$a_1, a_2, \dots, a_{10}$ 중에서 $a_k=1$ 인 항의 개수를 $l, a_k=-1$ 인 항의 개수를 m 이라 하면 $p=l-m, q=l+m$ 이므로

$$l-m=2, l+m=6$$

두 식을 연립하여 풀면 $l=4, m=2$

즉, $a_k=1$ 인 항의 개수는 4, $a_k=-1$ 인 항의 개수는 2이므로 $a_k=0$ 인 항의 개수는 4이다.

3단계 $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{2^k}$ 의 최댓값 구하기

따라서 $a_1=a_2=a_3=a_4=1$, $a_5=a_6=a_7=a_8=0$, $a_9=a_{10}=-1$ 일 때,

$\sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{2^k}$ 의 값이 최대이므로 최댓값은

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^9} - \frac{1}{2^{10}} = \frac{2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 - 2 - 1}{2^{10}} = \frac{957}{1024}$$

03 답 ⑤

1단계 a_n 구하기

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{n-k}}{2^k} = \frac{1}{n+2}$ 에서

$$a_n + \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{2^2} + \cdots + \frac{a_1}{2^{n-1}} = \frac{1}{n+2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } a_1 = \frac{1}{3}$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$\textcircled{1}$ 의 양변에 n 대신 $n-1$ 을 대입하면

$$a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{2} + \frac{a_{n-3}}{2^2} + \cdots + \frac{a_1}{2^{n-2}} = \frac{1}{n+1}$$

양변에 $\frac{1}{2}$ 을 곱하면

$$\frac{a_{n-1}}{2} + \frac{a_{n-2}}{2^2} + \frac{a_{n-3}}{2^3} + \cdots + \frac{a_1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2(n+1)} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2(n+1)} \\ &= \frac{n}{2(n+1)(n+2)} \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

이때 a_1 의 값은 $\textcircled{3}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 같지 않으므로 일반항 a_n 은

$$a_1 = \frac{1}{3}, a_n = \frac{n}{2(n+1)(n+2)} \quad (n \geq 2)$$

2단계 $\sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{k}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} \frac{a_k}{k} &= a_1 + \sum_{k=2}^{10} \frac{k}{2k(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) \right] \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12} \right) \\ &= \frac{11}{24} \end{aligned}$$

3단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p=24$, $q=11$ 이므로 $p+q=35$

04 답 ③

1단계 a_n, b_n 구하기

$$a_n = a + (n-1)d, b_n = a + (n-1)(-2d)$$

(*)에서 $|a_1| = |b_7|$ 이므로 $|a| = |a-12d|$

$$a = a-12d \text{ 또는 } a = -a+12d$$

그런데 $d \neq 0$ 이므로 $a = -a+12d \quad \therefore a=6d$

$$\therefore a_n = 6d + (n-1)d = (n+5)d,$$

$$b_n = 6d + (n-1)(-2d) = (-2n+8)d$$

2단계 $|a_n| - |b_n|, S_n$ 구하기

이때 a 는 양수이므로 $d > 0$

즉, 수열 $\{c_n\}$ 을 $c_n = |a_n| - |b_n|$ 이라 하면 모든 자연수 n 에 대하여 a_n, b_n, c_n, S_n 은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	$6d$	$7d$	$8d$	$9d$	$10d$	$11d$	$12d$	$13d$	$14d$	$15d$
b_n	$6d$	$4d$	$2d$	0	$-2d$	$-4d$	$-6d$	$-8d$	$-10d$	$-12d$
c_n	0	$3d$	$6d$	$9d$	$8d$	$7d$	$6d$	$5d$	$4d$	$3d$
S_n	0	$3d$	$9d$	$18d$	$26d$	$33d$	$39d$	$44d$	$48d$	$51d$

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	$16d$	$17d$	$18d$	$19d$	$20d$	$21d$	$22d$	$23d$	$24d$	$25d$
b_n	$-14d$	$-16d$	$-18d$	$-20d$	$-22d$	$-24d$	$-26d$	$-28d$	$-30d$	$-32d$
c_n	$2d$	d	0	$-d$	$-2d$	$-3d$	$-4d$	$-5d$	$-6d$	$-7d$
S_n	$53d$	$54d$	$54d$	$53d$	$51d$	$48d$	$44d$	$39d$	$33d$	$26d$

n	21	22	23	...
a_n	$26d$	$27d$	$28d$	...
b_n	$-34d$	$-36d$	$-38d$	...
c_n	$-8d$	$-9d$	$-10d$	...
S_n	$18d$	$9d$	$-d$	...

3단계 d 의 값 구하기

이때 $S_n = \sum_{k=1}^n c_k$ 의 값이 최대가 되는 n 의 값은 12 또는 13이므로

$$S_{12} = S_{13} = 54d = 108$$

$$\therefore d=2$$

4단계 a_m 의 값 구하기

따라서 $S_n \geq 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값은 $m=22$ 이므로

$$a_m = a_{22} = 27d = 54$$

05 답 ④

1단계 a 의 값 구하기

S_n 을 n 에 대한 이차함수라 생각하고 $f(n) = n^2 - 28n + 45$ 라 하면

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{15} a_n &= \sum_{n=1}^{15} a_n - \sum_{n=1}^{k-1} a_n = S_{15} - S_{k-1} \\ &= f(15) - f(k-1) \end{aligned}$$

즉, $\sum_{n=k}^{15} a_n > 0$ 에서 $f(15) - f(k-1) > 0$

$$\therefore f(k-1) < f(15)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 28x + 45 \\ &= (x-13)(x-15) - 150 \end{aligned}$$

이므로

$$f(13) = f(15) = -150$$

따라서 그림에서 $f(k-1) < f(15)$ 를 만족

시키는 자연수 $k-1$ 의 값은

$$k-1=14 \quad \therefore k=15$$

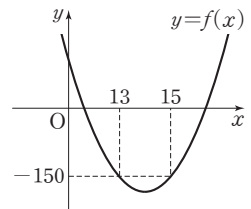
$$\therefore a=15$$

2단계 b 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \sum_{n=m}^{20} a_n &= \sum_{n=1}^{20} a_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n = S_{20} - S_{m-1} \\ &= f(20) - f(m-1) \end{aligned}$$

즉, $\sum_{n=m}^{20} a_n > 0$ 에서 $f(20) - f(m-1) > 0$

$$\therefore f(m-1) < f(20)$$



$$f(x) = x^2 - 28x + 45$$

$$= (x-8)(x-20) - 115$$

$$\therefore f(8) = f(20) = -115$$

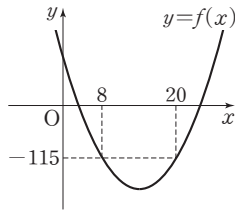
따라서 그림에서 $f(m-1) < f(20)$ 을 만족시키는 자연수 $m-1$ 의 값은 9, 10, 11, ..., 19이므로 m 의 값은 10, 11, 12, ..., 20이다.

그러므로 모든 자연수 m 의 값의 합은

$$\frac{11(10+20)}{2} = 165 \quad \therefore b = 165$$

3단계 $a+b$ 의 값 구하기

$$\therefore a+b = 180$$



06 답 5

1단계 A_n 구하기

$$\left\lceil \log_2 \frac{x}{y} \right\rceil = 2n-1 \text{ 이므로}$$

$$2n-1 \leq \log_2 \frac{x}{y} < 2n$$

$$\therefore 2^{2n-1} \leq \frac{x}{y} < 2^{2n}$$

이때 $x > 0, y > 0$ 이므로

$$\frac{1}{2^{2n}} < \frac{y}{x} \leq \frac{1}{2^{2n-1}}$$

$$\therefore \frac{1}{2^{2n}} x < y \leq \frac{1}{2^{2n-1}} x$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2^{2n}}, b_n = \frac{1}{2^{2n-1}}$$

직선 $y = \frac{1}{2^{2n}}x$ 와 직선 $x=1$ 의 교점의 y 좌표는 $y = \frac{1}{2^{2n}}$

직선 $y = \frac{1}{2^{2n-1}}x$ 와 직선 $x=1$ 의 교점의 y 좌표는 $y = \frac{1}{2^{2n-1}}$

즉, 세 직선 $y = \frac{1}{2^{2n}}x$,

$y = \frac{1}{2^{2n-1}}x$, $x=1$ 로 둘러싸인 도형

의 넓이는

$$A_n = \frac{1}{2} \times 1 \times \left(\frac{1}{2^{2n-1}} - \frac{1}{2^{2n}} \right)$$

$$= \frac{1}{2^{2n}} \left(1 - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

2단계 자연수 n 의 최솟값 구하기

$$\therefore \sum_{k=1}^n A_k = \frac{\frac{1}{8} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right\}$$

$$\sum_{k=1}^n A_k > \frac{333}{2000} \text{에서}$$

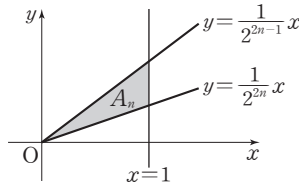
$$\frac{1}{6} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n \right\} > \frac{333}{2000}$$

$$1 - \left(\frac{1}{4} \right)^n > \frac{999}{1000}$$

$$\left(\frac{1}{4} \right)^n < \frac{1}{1000} \quad \therefore 4^n > 1000$$

이때 $4^4 = 256$, $4^5 = 1024$ 이므로 $n \geq 5$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 5이다.



07 답 8

1단계 점 A_0 에서 점 A_n 까지 점 P가 이동한 거리 구하기

점 A_0 에서 점 A_1 까지 점 P가 이동한 거리는 $\frac{1}{25}$

점 A_0 에서 점 A_2 까지 점 P가 이동한 거리는 $\frac{1}{25} + \frac{3}{25}$

점 A_0 에서 점 A_3 까지 점 P가 이동한 거리는 $\frac{1}{25} + \frac{3}{25} + \frac{5}{25}$

⋮

점 A_0 에서 점 A_n 까지 점 P가 이동한 거리는

$$\begin{aligned} \frac{1}{25} + \frac{3}{25} + \frac{5}{25} + \dots + \frac{2n-1}{25} &= \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{25} = \frac{2}{25} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{25} \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{2}{25} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{25} \\ &= \frac{n^2}{25} = \left(\frac{n}{5} \right)^2 \quad \dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

2단계 a 의 값 구하기

점 A_n 의 x 좌표와 y 좌표의 합은 점 P가 점 A_0 에서 점 A_n 까지 경로를 따라 이동한 거리와 같으므로 점 A_n 이 직선 $y=x$ 위에 있으려면 점 A_0 에서 점 A_n 까지 점 P가 이동한 거리는 짝수이어야 한다.

즉, $\left(\frac{n}{5} \right)^2$ 이 짝수이어야 하므로 $\frac{n}{5}$ 도 짝수이어야 한다.

$$\frac{n}{5} = 2m \quad (m \text{은 자연수}) \text{이라 하면 } n = 10m$$

따라서 점 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때 두 번째 점은 $m=2$, 즉 $n=20$ 일 때이므로 점 A_{20} 이다.

점 A_0 에서 점 A_{20} 까지 점 P가 이동한 거리는 ⑦에서

$$\left(\frac{20}{5} \right)^2 = 4^2 = 16 \text{이므로 점 } A_{20} \text{의 } x \text{좌표는 } 8 \text{이다.} \quad \therefore a = 8$$

↳ 점 A_{20} 의 좌표는 (8, 8)

08 답 5

1단계 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지 구하기

②에서 실수 a_k (k 는 자연수)는 x 에 대한 방정식

$$x^2 + 3x + (8-k)(k-5) = 0, \text{ 즉 } (x+8-k)(x+k-5) = 0 \text{의 근이므로}$$

$$a_k = k-8 \text{ 또는 } a_k = 5-k$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지는 다음 표의 값 중 하나의 값을 가진다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n-8$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$5-n$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5

2단계 a_5, a_8 의 값에 따른 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 최댓값 구하기

②에서 $a_n \times a_{n+1} \leq 0$ 을 만족시키는 10 이하의 자연수 n 의 개수가 2이고, $a_5 = -3$ 또는 $a_5 = 0$, $a_8 = 0$ 또는 $a_8 = -3$ 이므로 a_5, a_8 의 값에 따라

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 최댓값은 다음과 같다.

(i) $a_5 = a_8 = 0$ 인 경우

$$a_4 a_5 = a_5 a_6 = a_7 a_8 = a_8 a_9 = 0 \text{이므로 ②를 만족시키지 않는다.}$$

(ii) $a_5 = 0, a_8 = -3$ 인 경우

$a_4 a_5 = a_5 a_6 = 0$ 에서 ②를 만족시키므로 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최대가 되는 경우를 생각한다.

$6 \leq n \leq 10$ 에서 $a_n \times a_{n+1} > 0$ 이라면 a_n 의 부호는 모두 동일하고

$a_8 = -3 < 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최대가 되는 경우는 $a_6 = -1$,

$a_7 = -1, a_9 = -4, a_{10} = -5$ 일 때이다.

$1 \leq n \leq 4$ 에서 $a_n \times a_{n+1} > 0$ 이라면 a_n 의 부호는 모두 동일하고
 $a_1 = -7$ 또는 $a_1 = 4$ 이므로 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최대가 되는 경우는 $a_1 = 4$,
 $a_2 = 3, a_3 = 2, a_4 = 1$ 일 때이다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n-8$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$5-n$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{10} a_n &= 4+3+2+1+0+(-1)+(-1)+(-3)+(-4) \\ &\quad +(-5) \\ &= -4 \end{aligned}$$

(iii) $a_5 = -3, a_8 = 0$ 인 경우

$a_7 a_8 = a_8 a_9 = 0$ 에서 (4)를 만족시키므로 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최대가 되는 경우를 생각한다.

$1 \leq n \leq 7$ 에서 $a_n \times a_{n+1} > 0$ 이라면 a_n 의 부호는 모두 동일하고
 $a_5 = -3 < 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최대가 되는 경우는 $a_1 = -7$,
 $a_2 = -6, a_3 = -5, a_4 = -4, a_6 = -1, a_7 = -1$ 일 때이다.
 $9 \leq n \leq 10$ 에서 $a_n \times a_{n+1} > 0$ 이라면 a_n 의 부호는 모두 동일하고
 $a_9 = 1$ 또는 $a_9 = -4$ 이므로 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최대가 되는 경우는 $a_9 = 1$,
 $a_{10} = 2$ 일 때이다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n-8$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$5-n$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{10} a_n &= (-7)+(-6)+(-5)+(-4)+(-3)+(-1) \\ &\quad +(-1)+0+1+2 \\ &= -24 \end{aligned}$$

(iv) $a_5 = -3, a_8 = -3$ 인 경우

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최대가 되는 경우는 $1 \leq n \leq 4$ 에서 $a_n > 0$ 이고,
 $9 \leq n \leq 10$ 에서 $a_n > 0$ 일 때이다.
 이때 $a_4 a_5 < 0, a_8 a_9 < 0$ 에서 (4)를 만족시키고, $a_6 = -2$ 또는
 $a_6 = -1$ 이고, $a_7 = -1$ 또는 $a_7 = -2$ 이므로 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최대가 되는 것은 $a_6 = -1, a_7 = -1$ 일 때이다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n-8$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$5-n$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^{10} a_n &= 4+3+2+1+(-3)+(-1)+(-1)+(-3)+1+2 \\ &= 5 \end{aligned}$$

3단계 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 최댓값 구하기

(i)~(iv)에서 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 최댓값은 5이다.

09 답 3433

1단계 점 P가 이동한 점의 좌표를 구하여 x 좌표가 같은 순서쌍끼리 묶기
 점 P(0, 1)을 i 번 이동한 점의 좌표 (x_i, y_i) 를 차례로 구하면
 (0, 1)에서 $x < y$ 이므로 점의 좌표 (x_1, y_1) 은 (1, 0)

(1, 0)에서 $x \geq y$ 이므로 점의 좌표 (x_2, y_2) 는 (1, 1)
 (1, 1)에서 $x \geq y$ 이므로 점의 좌표 (x_3, y_3) 은 (1, 2)
 (1, 2)에서 $x < y$ 이므로 점의 좌표 (x_4, y_4) 는 (2, 1)
 (2, 1)에서 $x \geq y$ 이므로 점의 좌표 (x_5, y_5) 는 (2, 2)
 (2, 2)에서 $x \geq y$ 이므로 점의 좌표 (x_6, y_6) 은 (2, 3)
 (2, 3)에서 $x < y$ 이므로 점의 좌표 (x_7, y_7) 은 (3, 2)
 :

즉, 점 P가 이동한 점의 좌표를 차례로 나열한 후 x 좌표가 같은 순서쌍끼리 묶으면

$\{(1, 0), (1, 1), (1, 2)\}, \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\},$
 $\{(3, 2), (3, 3), (3, 4)\}, \{(4, 3), (4, 4), (4, 5)\}, \dots$

2단계 제 n 군의 점의 x 좌표와 y 좌표의 합 구하기

각 군의 항의 개수는 3이므로 제1군부터 제 n 군까지의 항의 개수는 $3n$ 이때 $100 = 3 \times 33 + 1$ 이므로 제100항인 점의 좌표 (x_{100}, y_{100}) 은 (34, 33)이다.

제 n 군에 속하는 점의 좌표는 $(n, n-1), (n, n), (n, n+1)$ 이므로 제 n 군의 점의 x 좌표와 y 좌표의 합을 a_n 이라 하면

$$a_n = n + (n-1) + n + n + n + (n+1) = 6n$$

3단계 $\sum_{i=1}^{100} (x_i + y_i)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{i=1}^{100} (x_i + y_i) &= \sum_{k=1}^{33} 6k + (34 + 33) \\ &= 6 \sum_{k=1}^{33} k + 67 \\ &= 6 \times \frac{33 \times 34}{2} + 67 = 3433 \end{aligned}$$

10 답 ⑤

1단계 m 행의 일반항 구하기

1행은 첫째항이 1, 공차가 1인 등차수열, 2행은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열, 3행은 첫째항이 1, 공차가 5인 등차수열, ...이므로 m 행은 첫째항이 1, 공차가 $2m-1$ 인 등차수열이다.

즉, m 행의 n 번째 수는

$$1 + (2m-1)(n-1)$$

2단계 71이 나타나는 위치 구하기

$1 + (2m-1)(n-1) = 71$ 에서 $(2m-1)(n-1) = 70$
 $(2m-1)(n-1) = 1 \times 2 \times 5 \times 7$ 이고, $2m-1$ 은 홀수이므로 순서쌍 $(2m-1, n-1)$ 은

(1, 70), (5, 14), (7, 10), (35, 2)

따라서 순서쌍 (m, n) 은

(1, 71), (3, 15), (4, 11), (18, 3)

3단계 a_n 의 값 구하기

(i) $m=1, n=71$ 일 때,

$$1+2+3+\dots+71 = \frac{71(1+71)}{2} = 2556$$

(ii) $m=3, n=15$ 일 때,

$$1+6+11+\dots+71 = \frac{15(1+71)}{2} = 540$$

(iii) $m=4, n=11$ 일 때,

$$1+8+15+\dots+71 = \frac{11(1+71)}{2} = 396$$

(iv) $m=18, n=3$ 일 때,

$$1+36+71=108$$

(i)~(iv)에서 $a_{71} = 2556 + 540 + 396 + 108 = 3600$

STEP 1

핵심 문제

| 114~115쪽

- 01 ④ 02 12 03 ③ 04 ② 05 ③ 06 6
 07 ④ 08 8 09 ④ 10 ③ 11 ⑤

01 답 ④

(가)에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a > 0$), 공차를 d ($d > 0$)라 하면 (나)에서

$$a_3 \times a_{22} = (a + 2d)(a + 21d) = a^2 + 23ad + 42d^2$$

$$a_7 \times a_8 + 10 = (a + 6d)(a + 7d) + 10 = a^2 + 13ad + 42d^2 + 10$$

$$\text{즉, } a^2 + 23ad + 42d^2 = a^2 + 13ad + 42d^2 + 10 \text{ 이므로}$$

$$10ad = 10$$

$$\therefore ad = 1$$

이때 (가)에서 $a_4 + a_6 = 2a_5$ 이므로

$$a_4 + a_6 = 2(a + 4d) = 2a + 8d$$

$a > 0$, $d > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a_4 + a_6 = 2a + 8d \geq 2\sqrt{2a \times 8d} = 2\sqrt{16ad} = 2\sqrt{16} = 8$$

(단, 등호는 $2a = 8d$ 일 때 성립)

따라서 $a_4 + a_6$ 의 최솟값은 8이다.

다른 풀이

(가)에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이다.

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d > 0$)라 하면 $a_4 + a_6 = 2a_5$ 이고,

(나)에서

$$a_3 \times a_{22} = (a_5 - 2d)(a_5 + 17d)$$

$$a_7 \times a_8 + 10 = (a_5 + 2d)(a_5 + 3d) + 10$$

$$\text{즉, } (a_5 - 2d)(a_5 + 17d) = (a_5 + 2d)(a_5 + 3d) + 10 \text{ 이므로}$$

$$a_5^2 + 15da_5 - 34d^2 = a_5^2 + 5da_5 + 6d^2 + 10$$

$$10da_5 = 40d^2 + 10$$

이때 $d \neq 0$ 이므로 양변을 $10d$ 로 나누면

$$a_5 = 4d + \frac{1}{d}$$

$d > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a_4 + a_6 = 2a_5 = 2\left(4d + \frac{1}{d}\right) = 8d + \frac{2}{d} \geq 2\sqrt{8d \times \frac{2}{d}} = 2\sqrt{16} = 8$$

(단, 등호는 $8d = \frac{2}{d}$ 일 때 성립)

따라서 $a_4 + a_6$ 의 최솟값은 8이다.

02 답 12

이차방정식 $a_n x^2 - 2a_{n+1}x + a_{n+2} = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a_{n+1})^2 - a_n a_{n+2} = 0$$

즉, $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_4 = 12 \text{에서 } ar^3 = 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_9 = 384 \text{에서 } ar^8 = 384 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} \div \textcircled{1}$ 을 하면

$$r^5 = 32$$

$$\therefore r = 2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면

$$a = \frac{3}{2} \quad \therefore a_n = \frac{3}{2} \times 2^{n-1} = 3 \times 2^{n-2}$$

$a_k > 3000$ 에서

$$3 \times 2^{k-2} > 3000 \quad \therefore 2^{k-2} > 1000$$

이때 $2^9 = 512$, $2^{10} = 1024$ 이므로

$$k - 2 \geq 10 \quad \therefore k \geq 12$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 12이다.

03 답 ③

$a_{n+1} = a_n + 3n$ 에 $n=1$ 을 대입하면

$$a_2 = a_1 + 3$$

이를 $2a_1 = a_2 + 3$ 에 대입하면

$$2a_1 = a_1 + 6 \quad \therefore a_1 = 6$$

$a_{n+1} = a_n + 3n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$a_2 = a_1 + 3 \times 1$$

$$a_3 = a_2 + 3 \times 2$$

$$a_4 = a_3 + 3 \times 3$$

$\vdots$

$$+) a_{10} = a_9 + 3 \times 9$$

$$a_{10} = a_1 + 3 \sum_{k=1}^9 k = 6 + 3 \times \frac{9 \times 10}{2} = 141$$

다른 풀이

$a_{n+1} = a_n + 3n$ 에 $n=1$ 을 대입하면

$$a_2 = a_1 + 3$$

이를 $2a_1 = a_2 + 3$ 에 대입하면

$$2a_1 = a_1 + 6 \quad \therefore a_1 = 6$$

$a_{n+1} = a_n + 3n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 3 \times 1 = 6 + 3 = 9$$

$$a_3 = a_2 + 3 \times 2 = 9 + 6 = 15$$

$$a_4 = a_3 + 3 \times 3 = 15 + 9 = 24$$

$$a_5 = a_4 + 3 \times 4 = 24 + 12 = 36$$

$$a_6 = a_5 + 3 \times 5 = 36 + 15 = 51$$

$$a_7 = a_6 + 3 \times 6 = 51 + 18 = 69$$

$$a_8 = a_7 + 3 \times 7 = 69 + 21 = 90$$

$$a_9 = a_8 + 3 \times 8 = 90 + 24 = 114$$

$$\therefore a_{10} = a_9 + 3 \times 9 = 114 + 27 = 141$$

04 답 ②

$a_{n+1} = \frac{3n+2}{3n-1} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 11을 차례로 대입하여 변끼리

모두 곱하면

$$a_2 = \frac{5}{2} a_1$$

$$a_3 = \frac{8}{5} a_2$$

$$a_4 = \frac{11}{8} a_3$$

$\vdots$

$$\times) a_{12} = \frac{35}{32} a_{11}$$

$$a_{12} = \frac{35}{2} a_1 = \frac{35}{2} \times 4 = 70$$

다른 풀이

$$a_1 = 4 \text{이므로}$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \times 4 = 10$$

$$a_3 = \frac{8}{5} \times 10 = 16$$

$$a_4 = \frac{11}{8} \times 16 = 22$$

∴

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $a_1=4$, 공차가 $d=6$ 인 등차수열이므로

$$a_{12} = a_1 + 11d = 4 + 11 \times 6 = 70$$

05 답 ③

$a_{n+1} = 2a_n + 1$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3 = 2^2 - 1$$

$$a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \times 3 + 1 = 7 = 2^3 - 1$$

$$a_4 = 2a_3 + 1 = 2 \times 7 + 1 = 15 = 2^4 - 1$$

∴

$$\text{또 } a_1 = 1 = 2^1 - 1$$

$$\therefore a_n = 2^n - 1$$

$$\neg, a_5 = 2^5 - 1 = 31$$

$$\neg, a_9 = 2^9 - 1 = 511, a_{10} = 2^{10} - 1 = 1023 \text{이므로}$$

$$a_{10} - a_9 = 512$$

$$\neg, a_n = 2^n - 1 \text{이므로}$$

$$a_n + 1 = 2^n$$

즉, 수열 $\{a_n + 1\}$ 은 공비가 2인 등비수열이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

06 답 6

$a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n + 1}$ 이고, $a_1 > 0$ 에서 $a_2 > 0, a_3 > 0, \dots$ 이므로

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 1}{a_n} \quad \therefore \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 3$$

즉, 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{a_1} = 1$, 공차가 $d=3$ 인 등차수열이므로

$$\frac{1}{a_{10}} = \frac{1}{a_1} + 9d = 1 + 9 \times 3 = 28$$

$$\frac{1}{a_8} = \frac{1}{a_1} + 7d = 1 + 7 \times 3 = 22$$

$$\therefore \frac{1}{a_{10}} - \frac{1}{a_8} = 6$$

07 답 ④

$$a_1 = 2 < 8 \text{이므로}$$

$$a_2 = 2 \times a_1 - 1 = 2 \times 2 - 1 = 3$$

$$a_2 < 8 \text{이므로}$$

$$a_3 = 2 \times a_2 - 1 = 2 \times 3 - 1 = 5$$

$$a_3 < 8 \text{이므로}$$

$$a_4 = 2 \times a_3 - 1 = 2 \times 5 - 1 = 9$$

$$a_4 > 8 \text{이므로}$$

$$a_5 = \frac{1}{3} \times a_4 = \frac{1}{3} \times 9 = 3 = a_2$$

$$a_6 = a_3$$

$$a_7 = a_4$$

∴

$$\therefore a_{n+3} = a_n \quad (n \geq 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{16} a_k &= a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + \dots + (a_{14} + a_{15} + a_{16}) \\ &= 2 + (3 + 5 + 9) \times 5 = 87 \end{aligned}$$

08 답 8

$$a_1 = 6 > 0 \text{이므로}$$

$$a_2 = 2 - a_1 = 2 - 6 = -4$$

$$a_2 < 0 \text{이므로}$$

$$a_3 = a_2 + p = -4 + p$$

$$(i) -4 + p \geq 0, \text{ 즉 } p \geq 4 \text{일 때,}$$

$$a_4 = 2 - a_3 = 2 - (-4 + p) = 6 - p$$

$$\text{즉, } 6 - p = 0 \text{이므로 } p = 6$$

$$(ii) -4 + p < 0, \text{ 즉 } p < 4 \text{일 때,}$$

$$a_4 = a_3 + p = (-4 + p) + p = -4 + 2p$$

$$\text{즉, } -4 + 2p = 0 \text{이므로 } p = 2$$

$$(i), (ii) \text{에서 } p = 2 \text{ 또는 } p = 6$$

따라서 모든 실수 p 의 값의 합은

$$2 + 6 = 8$$

09 답 ④

$a_{n+1} = 2a_n + b_n, b_{n+1} = -3a_n - 2b_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = 2a_1 + b_1 = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$b_2 = -3a_1 - 2b_1 = -3 \times 3 - 2 \times 1 = -11$$

$$a_3 = 2a_2 + b_2 = 2 \times 7 + (-11) = 3$$

$$b_3 = -3a_2 - 2b_2 = -3 \times 7 - 2 \times (-11) = 1$$

$$a_4 = 2a_3 + b_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$b_4 = -3a_3 - 2b_3 = -3 \times 3 - 2 \times 1 = -11$$

∴

$$\therefore a_{2n-1} = 3, a_{2n} = 7, b_{2n-1} = 1, b_{2n} = -11 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

따라서 $a_{100} = 7, b_{100} = -11$ 이므로

$$a_{100} - 3b_{100} = 7 - 3 \times (-11) = 40$$

10 답 ③

$n=1$ 은 홀수이므로

$$a_2 = \frac{3a_1}{5a_1 + 2} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2 + 2} = \frac{1}{2}$$

$n=2$ 는 짝수이므로

$$a_3 = a_2 - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$n=3$ 은 홀수이므로

$$a_4 = \frac{3a_3}{5a_3 + 2} = \frac{3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)}{5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 2} = 3$$

$n=4$ 는 짝수이므로

$$a_5 = a_4 - 1 = 3 - 1 = 2$$

∴

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 $2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 3$ 이 이 순서대로 반복하여 나타난다.

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 4개의 수가 반복되므로 $a_k = 3$ 을 만족시키는 20 이하의 자연수 k 는 4, 8, 12, 16, 20의 5개이다.

11 답 ⑤

- (i) $n=2$ 일 때,
 $2^3+3 \times 2^2-2=18$ 은 3의 배수이다.
- (ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때,
 $k^3+3k^2-k=3m$ (m 은 자연수)이라 하면
 $(k+1)^3+3(k+1)^2-(k+1)$
 $=k^3+3k^2+3k+1+3k^2+6k+3-k-1$
 $=\boxed{6k^3+6k^2+8k+3}$
 $=(k^3+3k^2-k)+3k^2+9k+3$
 $=3m+3 \times (\boxed{6k^2+3k+1})$
- 따라서 $n=k+1$ 일 때도 n^3+3n^2-n 은 3의 배수이다.
- (i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 n^3+3n^2-n 은 3의 배수이다.
- 따라서 $f(k)=k^3+6k^2+8k+3$, $g(k)=k^2+3k+1$ 이므로
 $f(1)+g(2)=18+11=29$

STEP 2 고난도 문제 116~120쪽					
01 16	02 ①	03 9	04 120	05 49	06 ④
07 8	08 17	09 616	10 1	11 ⑤	12 ③
13 ④	14 -2	15 ㄴ, ㄷ, ㄹ	16 132	17 ①	
18 ⑤	19 ③	20 64	21 풀이 참조	22 ③	

01 답 16

- (가)에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$, 즉 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.
- 이때 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r ($r > 0$)라 하면
- (나)에서 $a_1 r^3 + a_1 r^4 + a_1 r^5 = 14$
 $\therefore a_1 r^3(1+r+r^2) = 14 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
- (다)에서 $a_1 r^3 \times a_1 r^4 \times a_1 r^5 = 64$
 $a_1^3 r^{12} = 64 \quad \therefore a_1 r^4 = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
- $\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면
 $\frac{a_1 r^3(1+r+r^2)}{a_1 r^4} = \frac{14}{4}$
 $\frac{1+r+r^2}{r} = \frac{7}{2}$
 $2+2r+2r^2=7r, 2r^2-5r+2=0$
 $(2r-1)(r-2)=0$
 $\therefore r=\frac{1}{2}$ 또는 $r=2$
- 이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 풀면
 $a_1=64$ 또는 $a_1=\frac{1}{4}$
- 따라서 모든 a_i 의 값의 곱은
 $64 \times \frac{1}{4} = 16$

02 답 ①

- 자연수 k 에 대하여
- (i) $a_1=4k$ 일 때,
 a_1 은 짝수이므로
 $a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{4k}{2}=2k$
 a_2 도 짝수이므로
 $a_3=\frac{1}{2}a_2=\frac{2k}{2}=k$
- ① k 가 홀수인 경우
 a_3 은 홀수이므로 $a_4=a_3+1=k+1$
 이때 $a_2+a_4=2k+(k+1)=3k+1$ 이므로
 $3k+1=40$ 에서 $k=13$
 $\therefore a_1=4k=4 \times 13=52$
- ② k 가 짝수인 경우
 a_3 은 짝수이므로 $a_4=\frac{1}{2}a_3=\frac{k}{2}$
 이때 $a_2+a_4=2k+\frac{k}{2}=\frac{5}{2}k$ 이므로 $\frac{5}{2}k=40$ 에서 $k=16$
 $\therefore a_1=4k=4 \times 16=64$
- (ii) $a_1=4k-1$ 일 때,
 a_1 은 홀수이므로
 $a_2=a_1+1=(4k-1)+1=4k$
 a_2 는 짝수이므로
 $a_3=\frac{1}{2}a_2=\frac{4k}{2}=2k$
 a_3 도 짝수이므로
 $a_4=\frac{1}{2}a_3=\frac{2k}{2}=k$
 이때 $a_2+a_4=4k+k=5k$ 이므로 $5k=40$ 에서 $k=8$
 $\therefore a_1=4k-1=4 \times 8-1=31$
- (iii) $a_1=4k-2$ 일 때,
 a_1 은 짝수이므로
 $a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{4k-2}{2}=2k-1$
 a_2 는 홀수이므로
 $a_3=a_2+1=(2k-1)+1=2k$
 a_3 은 짝수이므로
 $a_4=\frac{1}{2}a_3=\frac{2k}{2}=k$
 이때 $a_2+a_4=(2k-1)+k=3k-1$ 이므로 $3k-1=40$ 에서 $k=\frac{41}{3}$
 즉, 조건을 만족시키지 않는다.
- (iv) $a_1=4k-3$ 일 때,
 a_1 은 홀수이므로
 $a_2=a_1+1=(4k-3)+1=4k-2$
 a_2 는 짝수이므로
 $a_3=\frac{1}{2}a_2=\frac{4k-2}{2}=2k-1$
 a_3 은 홀수이므로
 $a_4=a_3+1=(2k-1)+1=2k$
 이때 $a_2+a_4=(4k-2)+2k=6k-2$ 이므로 $6k-2=40$ 에서 $k=7$
 $\therefore a_1=4k-3=4 \times 7-3=25$
- (i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 모든 a_i 의 값의 합은
 $52+64+31+25=172$

03 답 9

$$S_n = \frac{1}{8}(a_n + 2)^2 \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{1}{8}(a_n + 2)^2 - \frac{1}{8}(a_{n-1} + 2)^2 \\ &= \frac{1}{8}\{(a_n^2 + 4a_n + 4) - (a_{n-1}^2 + 4a_{n-1} + 4)\} \\ &= \frac{1}{8}\{a_n^2 - a_{n-1}^2 + 4(a_n - a_{n-1})\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8a_n &= a_n^2 - a_{n-1}^2 + 4(a_n - a_{n-1}) \\ (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1}) - 4(a_n - a_{n-1}) &= 0 \\ (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 4) &= 0 \\ \therefore a_n + a_{n-1} &= 0 \text{ 또는 } a_n - a_{n-1} - 4 = 0 \end{aligned}$$

이때 $a_n > 0$ 이므로 $a_n - a_{n-1} - 4 = 0$

$$\therefore a_n = a_{n-1} + 4 \quad (n \geq 2) \quad \dots \text{배점 30\%}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 \text{이므로}$$

$$a_1 = \frac{1}{8}(a_1 + 2)^2$$

$$8a_1 = a_1^2 + 4a_1 + 4$$

$$a_1^2 - 4a_1 + 4 = 0$$

$$(a_1 - 2)^2 = 0$$

$$\therefore a_1 = 2 \quad \dots \text{배점 20\%}$$

(i), (ii)에서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 4인 등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 2 + (n-1) \times 4 = 4n - 2 \quad \dots \text{배점 20\%}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m (4k - 2)$$

$$= 4 \sum_{k=1}^m k - 2 \sum_{k=1}^m 1$$

$$= 4 \times \frac{m(m+1)}{2} - 2m = 2m^2 \quad \dots \text{배점 20\%}$$

즉, $2m^2 = 162$ 이므로

$$m^2 = 81 \quad \therefore m = 9 \quad (\because m \text{은 자연수}) \quad \dots \text{배점 10\%}$$

04 답 120

$n \geq 2$ 일 때, $a_n = S_n - S_{n-1}$ 이므로 $\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} = 2a_n$ 에서

$$\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} = 2(S_n - S_{n-1})$$

$$\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} = 2(\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}})$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로 $\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} \neq 0$

$$\therefore \sqrt{S_n} - \sqrt{S_{n-1}} = \frac{1}{2} \quad (n \geq 2)$$

즉, 수열 $\{\sqrt{S_n}\}$ 은 첫째항이 $\sqrt{S_1} = \sqrt{a_1} = \sqrt{9} = 3$, 공차가 $\frac{1}{2}$ 인 등차수열이므로

$$\sqrt{S_n} = 3 + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}n + \frac{5}{2}$$

$$\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}} = 2a_n \text{에서 } n \geq 2 \text{일 때,}$$

$$a_n = \frac{1}{2}(\sqrt{S_n} + \sqrt{S_{n-1}})$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2}n + \frac{5}{2} \right) + \left\{ \frac{1}{2}(n-1) + \frac{5}{2} \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{2}n + \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{25} &= 9 + \left(\frac{15}{4} + \frac{19}{4} + \frac{23}{4} + \dots + \frac{59}{4} \right) \\ &= 9 + \frac{12 \left(\frac{15}{4} + \frac{59}{4} \right)}{2} \quad \leftarrow \text{첫째항이 } \frac{15}{4}, \text{ 공차가 1인} \\ &= 120 \quad \text{등차수열의 첫째항부터 제12항까지의 합이다.} \end{aligned}$$

05 답 49

x 에 대한 이차방정식 $a_n x^2 + 2a_{n+1}x + a_{n+2} = 0$ 의 한 근이 -1 이므로

$$a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} = 0$$

$$\therefore 2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} \quad \dots \text{㉠}$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1인 등차수열이므로 공차를 d 라 하면

$$a_n = 1 + (n-1)d = nd + 1 - d$$

그런데 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로 $d > 0$

이때 $a_n x^2 + 2a_{n+1}x + a_{n+2} = 0$ 에서

$$a_n x^2 + (a_n + a_{n+2})x + a_{n+2} = 0 \quad (\because \text{㉠})$$

$$(x+1)(a_n x + a_{n+2}) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = -\frac{a_{n+2}}{a_n}$$

$$\therefore b_n = -\frac{a_{n+2}}{a_n} = -\frac{(n+2)d + 1 - d}{nd + 1 - d}$$

$$\therefore b_n + 1 = -\frac{(n+2)d + 1 - d}{nd + 1 - d} + 1 = -\frac{2d}{nd + 1 - d}$$

$$\text{이때 } d > 0 \text{이므로 } |b_n + 1| = \frac{2d}{nd + 1 - d}$$

$$\therefore \left| \frac{1}{b_n + 1} \right| = \frac{nd + 1 - d}{2d} = \frac{n}{2} + \frac{1-d}{2d}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} \left| \frac{1}{b_k + 1} \right| &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{k}{2} + \frac{1-d}{2d} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} k + \frac{1-d}{2d} \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{10 \times 11}{2} + \frac{1-d}{2d} \times 10 = \frac{55}{2} + \frac{5(1-d)}{d} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{55}{2} + \frac{5(1-d)}{d} = 25 \text{이므로 } \frac{1-d}{d} = -\frac{1}{2} \text{에서 } d = 2$$

따라서 $a_n = 2n - 1$ 이므로 $a_{25} = 49$

06 답 ④

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1} \text{이고, } a_1 > 0 \text{에서 } a_2 > 0, a_3 > 0, \dots \text{이므로 } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{n+1}{a_n}$$

이 식의 n 에 1, 2, 3, 4, ...를 차례로 대입하면

$$\frac{1}{a_2} = \frac{2}{a_1} = 2$$

$$\frac{1}{a_3} = \frac{3}{a_2} = 2 \times 3$$

$$\frac{1}{a_4} = \frac{4}{a_3} = 2 \times 3 \times 4$$

$$\frac{1}{a_5} = \frac{5}{a_4} = 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

:

이때 $20 = 4 \times 5$ 이므로 $n \geq 5$ 일 때, $\frac{1}{a_n}$ 의 값은 20으로 나누어떨어진다.

즉, $\sum_{k=1}^{30} \frac{1}{a_k}$ 을 20으로 나누었을 때의 나머지는 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}$ 을 20으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = 1 + 2 + 6 + 24 = 33 \text{이므로 33을 20으로 나누었을 때의 나머지는 13이다.}$$

따라서 $\sum_{k=1}^{30} \frac{1}{a_k}$ 을 20으로 나누었을 때의 나머지는 13이다.

07 답 8

공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면 일반항 a_n 은

$$a_n = a \times 2^{n-1}$$

$$\therefore b_{n+1} - b_n = a \times 2^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$b_{n+1} = b_n + a \times 2^{n-1}$ 의 n 에 1, 2, 3, 4, 5, 6을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$b_2 = b_1 + a \times 1$$

$$b_3 = b_2 + a \times 2$$

$$b_4 = b_3 + a \times 2^2$$

$$b_5 = b_4 + a \times 2^3$$

$$b_6 = b_5 + a \times 2^4$$

$$+) b_7 = b_6 + a \times 2^5$$

$$b_7 = b_1 + a(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)$$

$$= 7 + a \times \frac{2^6 - 1}{2 - 1}$$

$$= 63a + 7$$

즉, $63a + 7 = 70$ 이므로

$$63a = 63 \quad \therefore a = 1$$

따라서 $a_n = 2^{n-1}$ 이므로

$$a_4 = 8$$

08 답 17

$(n+1)a_{n+1} = (n+3)a_n$, 즉 $a_{n+1} = \frac{n+3}{n+1}a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., $n-1$

을 차례로 대입하여 변끼리 모두 곱하면

$$a_2 = \frac{4}{2}a_1$$

$$a_3 = \frac{5}{3}a_2$$

$$a_4 = \frac{6}{4}a_3$$

$$a_5 = \frac{7}{5}a_4$$

$\vdots$

$$a_{n-1} = \frac{n+1}{n-1}a_{n-2}$$

$$\times) a_n = \frac{n+2}{n}a_{n-1}$$

$$a_n = \left(\frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{6}{4} \times \frac{7}{5} \times \dots \times \frac{n+1}{n-1} \times \frac{n+2}{n} \right) a_1$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{6} \times 30$$

$$= 5(n+1)(n+2)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{5(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{1}{5} \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right)$$

$$= \frac{1}{5} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2} \right) \right\}$$

$$= \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2} \right) = \frac{m}{10(m+2)}$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{1}{a_k} < \frac{9}{100} \text{에서}$$

$$\frac{m}{10(m+2)} < \frac{9}{100}, \quad \frac{m}{m+2} < \frac{9}{10}$$

$$10m < 9(m+2) \quad \therefore m < 18$$

따라서 자연수 m 의 최댓값은 17이다.

idea

09 답 616

집합 A_i 의 원소는 크기 순서대로 공차가 2인 등차수열을 이루므로 (가)에

서 집합 A_i 의 가장 작은 원소를 b_i 라 하면 집합 A_i 의 가장 큰 원소는

$$b_i + 2(i-1)$$

(나)에서 집합 A_i 의 모든 원소의 평균은 b_{i+1} 이므로

$$b_{i+1} = \frac{i\{2b_i + 2(i-1)\}}{i}$$

$$\therefore b_{i+1} = b_i + i - 1$$

이 식의 i 에 1, 2, 3, ..., 10을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$b_2 = b_1$$

$$b_3 = b_2 + 1$$

$$b_4 = b_3 + 2$$

$\vdots$

$$+) b_{11} = b_{10} + 9$$

$$b_{11} = b_1 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9$$

$$= b_1 + \frac{9 \times 10}{2}$$

$$= b_1 + 45$$

이때 $b_1 = a_1 = 1$ 이므로 $b_{11} = 46$

따라서 집합 A_{11} 의 모든 원소의 합은 첫째항이 46이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제11항까지의 합이므로

$$\frac{11\{2 \times 46 + (11-1) \times 2\}}{2} = 616$$

10 답 1

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 에서 $a_n = a_{n+2} - a_{n+1}$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^4 \frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}} &= \sum_{k=1}^4 \frac{a_{k+2} - a_{k+1}}{a_{k+1}a_{k+2}} \\ &= \sum_{k=1}^4 \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+2}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \left(\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} \right) + \left(\frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_5} \right) + \left(\frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_6} \right) \\ &= \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_6} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^4 \frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}} = \frac{20}{11} \text{에서}$$

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_6} = \frac{20}{11}$$

$$2 - \frac{1}{a_6} = \frac{20}{11}$$

$$\frac{1}{a_6} = \frac{2}{11}$$

$$\therefore a_6 = \frac{11}{2} \quad \dots \dots \textcircled{+}$$

한편 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_3 = a_2 + a_1 = \frac{1}{2} + a_1$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = \frac{1}{2} + a_1 + \frac{1}{2} = 1 + a_1$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 1 + a_1 + \frac{1}{2} + a_1 = \frac{3}{2} + 2a_1$$

$$a_6 = a_5 + a_4 = \frac{3}{2} + 2a_1 + 1 + a_1 = \frac{5}{2} + 3a_1$$

$$\textcircled{+} \text{에서 } \frac{5}{2} + 3a_1 = \frac{11}{2} \text{이므로}$$

$$3a_1 = 3 \quad \therefore a_1 = 1$$

11 답 ⑤

$a_{n+1} = -a_n + (-1)^{n-1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = -a_1 + (-1)^0 = 0 + 1 = 1$$

$$a_3 = -a_2 + (-1)^1 = -1 - 1 = -2$$

$$a_4 = -a_3 + (-1)^2 = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = -a_4 + (-1)^3 = -3 - 1 = -4$$

$$a_6 = -a_5 + (-1)^4 = 4 + 1 = 5$$

$$a_7 = -a_6 + (-1)^5 = -5 - 1 = -6$$

⋮

$$\therefore a_{2n-1} = -2n + 2, a_{2n} = 2n - 1$$

$$\begin{aligned} \neg. \sum_{n=1}^{20} a_n &= \sum_{n=1}^{10} (a_{2n-1} + a_{2n}) \\ &= \sum_{n=1}^{10} \{(-2n + 2) + (2n - 1)\} \\ &= \sum_{n=1}^{10} 1 = 10 \end{aligned}$$

⊥. $a_{2n-1} = -2n + 2$ 이므로 수열 $\{a_{2n-1}\}$ 은 등차수열이다.

⊃. $a_{2n} = 2n - 1$ 이므로

$$b_n = 2^{a_{2n}} = 2^{2n-1} = \frac{1}{2} \times 4^n$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^5 b_n &= \sum_{n=1}^5 \left(\frac{1}{2} \times 4^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4(4^5 - 1)}{4 - 1} \\ &= 682 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\perp$, $\supset$ 이다.

12 답 ③

$$a_1 \geq 2 \text{이므로 } a_2 = \frac{1}{2} a_1$$

$$a_2 \geq 1 \text{이므로 } a_3 = \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{4} a_1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

⋮

모든 자연수 n 에 대하여 $a_n > 0$ 임을 알 수 있다.

$$a_5 < 1 \text{이라 하면 } a_6 = \frac{1}{2}(a_5 + a_1) \text{이고 } a_1 \geq 2 \text{이므로 } a_6 > 1$$

이것은 $a_5 + 2a_6 = 2$ 에 모순이다.

$$\text{즉, } a_5 \geq 1 \text{이므로 } a_6 = \frac{1}{2} a_5 \text{이고 } a_5 + 2a_6 = 2a_5 = 2 \text{에서 } a_5 = 1$$

$$a_4 < 1 \text{이라 하면 } a_5 = \frac{1}{2}(a_4 + a_1) = 1 \text{이고 } a_1 \geq 2 \text{이므로 } a_5 > 1$$

이것은 $a_5 = 1$ 에 모순이다.

$$\text{즉, } a_4 \geq 1 \text{이므로 } a_5 = \frac{1}{2} a_4$$

이때 $a_5 = 1$ 이므로 $a_4 = 2$

ⓐ에서

(i) $a_1 \geq 4$ 일 때,

$$a_3 = \frac{1}{4} a_1 \geq 1 \text{이므로 } a_4 = \frac{1}{2} a_3 = \frac{1}{8} a_1$$

이때 $a_4 = 2$ 이므로 $a_1 = 16$

(ii) $a_1 < 4$ 일 때,

$$a_3 = \frac{1}{4} a_1 < 1 \text{이므로 } a_4 = \frac{1}{2}(a_3 + a_1) = \frac{5}{8} a_1$$

$$\text{이때 } a_4 = 2 \text{이므로 } a_1 = \frac{16}{5}$$

(i), (ii)에서 모든 a_1 의 값의 합은

$$16 + \frac{16}{5} = \frac{96}{5}$$

13 답 ④

(나)에서

a_n 이 홀수이고 a_{n+1} 이 홀수이면 a_{n+2} 는 짝수

a_n 이 홀수이고 a_{n+1} 이 짝수이면 a_{n+2} 는 홀수

a_n 이 짝수이고 a_{n+1} 이 홀수이면 a_{n+2} 는 홀수

a_n 이 짝수이고 a_{n+1} 이 짝수이면 a_{n+2} 는 짝수이다.

㉠에서 a_5 가 홀수이므로 a_3 과 a_4 중 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이어야 한다.

(i) a_3 이 홀수이고 a_4 가 짝수인 경우

a_2 는 홀수이고 a_1 은 짝수이다.

$a_1 = 2k, a_2 = 2l - 1$ (k, l 은 자연수)이라 하면 (나)에서

$$a_1 \times a_2 \text{는 짝수이므로 } a_3 = 2k + 2l - 3$$

$$a_2 \times a_3 \text{은 홀수이므로 } a_4 = 2k + 4l - 4$$

$$a_3 \times a_4 \text{는 짝수이므로 } a_5 = 4k + 6l - 9$$

$$4k + 6l - 9 = 63 \text{에서 } a_1 = 2k = 36 - 3l \text{이므로 가능한 } a_1 \text{의 값은 } 6, 12, 18, 24, 30 \text{이다.}$$

(ii) a_3 이 짝수이고 a_4 가 홀수인 경우

a_2 는 홀수이고 a_1 도 홀수이다.

$a_1 = 2p - 1, a_2 = 2q - 1$ (p, q 는 자연수)이라 하면 (나)에서

$$a_1 \times a_2 \text{는 홀수이므로 } a_3 = 2p + 2q - 2$$

$$a_2 \times a_3 \text{은 짝수이므로 } a_4 = 2p + 4q - 5$$

$$a_3 \times a_4 \text{는 짝수이므로 } a_5 = 4p + 6q - 9$$

$$4p + 6q - 9 = 63 \text{에서 } a_1 = 2p - 1 = 35 - 3q \text{이므로 가능한 } a_1 \text{의 값은 } 5, 11, 17, 23, 29 \text{이다.}$$

(i), (ii)에서 a_1 의 최댓값은 30, 최솟값은 5이므로

$$M - m = 30 - 5 = 25$$

14 답 -2

$a_{n+5} = a_n$ 에서 $a_{13} = a_8 = a_3$ 이고, $a_{13} = 2$ 이므로 $a_3 = 2$

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 d 라 하면

$$a_1 = 2 - 2d, a_2 = 2 - d, a_4 = 2 + d, a_5 = 2 + 2d$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 은 5개의 수가 반복되어 나타나므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{15} (-1)^k a_k &= \sum_{k=1}^5 (-1)^k a_k + \sum_{k=6}^{10} (-1)^k a_k + \sum_{k=11}^{15} (-1)^k a_k \\ &= \sum_{k=1}^5 (-1)^k a_k - \sum_{k=1}^5 (-1)^k a_k + \sum_{k=1}^5 (-1)^k a_k \\ &= \sum_{k=1}^5 (-1)^k a_k \\ &= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 \\ &= -(2 - 2d) + (2 - d) - 2 + (2 + d) - (2 + 2d) \\ &= -2 \end{aligned}$$

15 답 ⊥, ⊃, ⊂

$a_n = a_{n+1} - a_{n+2}$, 즉 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_3 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = 2 - 3 = -1$$

$$a_5 = a_4 - a_3 = -1 - 2 = -3$$

$$a_6 = a_5 - a_4 = -3 - (-1) = -2$$

$$a_7 = a_6 - a_5 = -2 - (-3) = 1$$

$$a_8 = a_7 - a_6 = 1 - (-2) = 3$$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 3, 2, -1, -3, -2가 이 순서대로 반복하여 나타난다.

$$\therefore a_{n+6} = a_n$$

$$\neg. a_{n+3} = -a_n \text{ 이므로}$$

$$a_{n+3} + a_n = 0$$

$$\neg. 90 = 15 \times 6 \text{ 이므로}$$

$$a_{90} = a_6 = -2$$

$$\neg. 1000 = 166 \times 6 + 4 \text{ 이고}$$

$$\sum_{k=1}^6 a_k = 1 + 3 + 2 + (-1) + (-3) + (-2) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{1000} a_k = 166 \sum_{k=1}^6 a_k + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 3 + 2 + (-1) = 5$$

$$\neg. |a_1| = 1, |a_2| = 3, |a_3| = 2, |a_4| = 1, |a_5| = 3, |a_6| = 2, \dots$$

즉, 수열 $\{|a_n|\}$ 은 1, 3, 2가 이 순서대로 반복하여 나타난다.

$$\text{이때 } 122 = 40 \times 3 + 2 \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{122} |a_k| = 40 \sum_{k=1}^3 |a_k| + a_1 + a_2 = 40(1 + 3 + 2) + 1 + 3 = 244$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

16 답 132

두 점 Q_1, Q_2 의 좌표가 각각 $(0, 0), (1, -1)$ 이고 점 Q_3 의 좌표를 (a_3, b_3) 이라 하면 삼각형 $Q_1Q_2Q_3$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{0+1+a_3}{3}, \frac{0-1+b_3}{3} \right)$$

이때 점 P_1 이 삼각형 $Q_1Q_2Q_3$ 의 무게중심이고, 점 P_1 의 좌표가 $(1, 0)$ 이므로

$$\frac{1+a_3}{3} = 1, \frac{-1+b_3}{3} = 0 \quad \therefore a_3 = 2, b_3 = 1$$

즉, 점 Q_3 의 좌표는 $(2, 1)$

두 점 Q_2, Q_3 의 좌표가 각각 $(1, -1), (2, 1)$ 이고 점 Q_4 의 좌표를 (a_4, b_4) 라 하면 삼각형 $Q_2Q_3Q_4$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{1+2+a_4}{3}, \frac{-1+1+b_4}{3} \right)$$

이때 점 P_2 가 삼각형 $Q_2Q_3Q_4$ 의 무게중심이고, 점 P_2 의 좌표가 $(2, a)$ 이므로

$$\frac{3+a_4}{3} = 2, \frac{b_4}{3} = a \quad \therefore a_4 = 3, b_4 = 3a$$

즉, 점 Q_4 의 좌표는 $(3, 3a)$

두 점 Q_3, Q_4 의 좌표가 각각 $(2, 1), (3, 3a)$ 이고 점 Q_5 의 좌표를 (a_5, b_5) 라 하면 삼각형 $Q_3Q_4Q_5$ 의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{2+3+a_5}{3}, \frac{1+3a+b_5}{3} \right)$$

이때 점 P_3 이 삼각형 $Q_3Q_4Q_5$ 의 무게중심이고, 점 P_3 의 좌표가 $(3, 2a)$ 이므로

$$\frac{5+a_5}{3} = 3, \frac{1+3a+b_5}{3} = 2a \quad \therefore a_5 = 4, b_5 = 3a - 1$$

즉, 점 Q_5 의 좌표는 $(4, 3a - 1)$

같은 방법으로 하면 두 점 Q_4, Q_5 의 좌표가 각각 $(3, 3a), (4, 3a - 1)$ 이고 점 P_4 의 좌표가 $(4, 3a)$ 이므로 점 Q_6 의 좌표는 $(5, 3a + 1)$

두 점 Q_5, Q_6 의 좌표가 각각 $(4, 3a - 1), (5, 3a + 1)$ 이고 점 P_5 의 좌표가 $(5, 4a)$ 이므로 점 Q_7 의 좌표는 $(6, 6a)$

두 점 Q_6, Q_7 의 좌표가 각각 $(5, 3a + 1), (6, 6a)$ 이고 점 P_6 의 좌표가 $(6, 5a)$ 이므로 점 Q_8 의 좌표는 $(7, 6a - 1)$

두 점 Q_7, Q_8 의 좌표가 각각 $(6, 6a), (7, 6a - 1)$ 이고 점 P_7 의 좌표가 $(7, 6a)$ 이므로 점 Q_9 의 좌표는 $(8, 6a + 1)$

두 점 Q_8, Q_9 의 좌표가 각각 $(7, 6a - 1), (8, 6a + 1)$ 이고 점 P_8 의 좌표가 $(8, 7a)$ 이므로 점 Q_{10} 의 좌표는 $(9, 9a)$

:

즉, 자연수 k 에 대하여 점 Q_{3k+1} 의 좌표는 $(3k, 3ka)$

이때 점 Q_{10} 의 좌표가 $(9, 90)$ 이므로

$$9a = 90 \quad \therefore a = 10$$

$$\therefore Q_{3k+1}(3k, 30k)$$

이 좌표에 $k = 4$ 를 대입하면 점 Q_{13} 의 좌표는 $(12, 120)$

따라서 $p = 12, q = 120$ 이므로 $p + q = 132$

개념 NOTE

좌표평면 위의 세 점 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심을 G라 하면

$$G\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

17 답 ①

두 점 P_1, Q_1 의 x 좌표는 x_1 로 같다.

두 점 A와 P_1 의 y 좌표가 같으므로

$$2^{64} = 16^{x_1}, 2^{64} = 2^{4x_1}$$

$$4x_1 = 64 \quad \therefore x_1 = 16$$

같은 방법으로 모든 자연수 n 에 대하여 두 점 P_n, Q_n 의 x 좌표는 x_n 으로 서로 같고, 두 점 Q_n, P_{n+1} 의 y 좌표는 같으므로

$$2^{x_n} = 16^{x_{n+1}}, 2^{x_n} = 2^{4x_{n+1}}$$

$$\therefore x_{n+1} = \frac{1}{4}x_n$$

따라서 수열 $\{x_n\}$ 은 첫째항이 16, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$x_n = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 2^4 \times 2^{-2n+2} = 2^{6-2n}$$

한편 $x_n < \frac{1}{k}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값이 6이므로

$$x_5 \geq \frac{1}{k} \text{이고 } x_6 < \frac{1}{k} \text{이어야 한다.}$$

$$x_5 \geq \frac{1}{k} \text{에서 } 2^{-4} \geq \frac{1}{k}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{16} \geq \frac{1}{k} \text{이므로}$$

$$k \geq 16 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$x_6 < \frac{1}{k} \text{에서 } 2^{-6} < \frac{1}{k}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{64} < \frac{1}{k} \text{이므로}$$

$$k < 64 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 $16 \leq k < 64$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수 k 의 개수는

$$64 - 16 = 48$$

18 답 ⑤

(i) $n = 1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = a_1, (\text{우변}) = a_2 - \left[\frac{1}{2}\right] = \left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left[\frac{1}{2}\right] = 1 = a_1$$

이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n = m$ 일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + ma_m = \frac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1} - 1) \text{이다.}$$

$n = m + 1$ 일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned}
& a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + ma_m + (m+1)a_{m+1} \\
&= \frac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1) + (m+1)a_{m+1} \\
&= (m+1)a_{m+1} \left(\frac{m}{2} + 1 \right) - \frac{m(m+1)}{4} \\
&= \frac{(m+1)(m+2)}{2} \left(a_{m+2} - \frac{1}{m+2} \right) - \frac{m(m+1)}{4} \\
&= \frac{(m+1)(m+2)}{4}(2a_{m+2}-1)
\end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 (★)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \cdots + na_n = \frac{n(n+1)}{4}(2a_{n+1}-1) \text{이 성립한다.}$$

$$\text{따라서 } p = \frac{1}{2}, f(m) = \frac{m}{2}, g(m) = \frac{1}{m+2} \text{이므로}$$

$$p + \frac{f(5)}{g(3)} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{5}} = 13$$

19 답 ③

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k}, T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \text{이라 하자.}$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$S_1 = \sum_{k=1}^2 (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$T_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}$$

$$S_1 = \left[\frac{1}{2} \right] = T_1 \text{이므로 (★)이 성립한다.}$$

(ii) $n=m$ 일 때,

(★)이 성립한다고 가정하면 $S_m = T_m$ 이다.

$n=m+1$ 일 때, (★)이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned}
S_{m+1} &= \sum_{k=1}^{2m+2} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{2m} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} + (-1)^{(2m+1)-1} \times \frac{1}{2m+1} \\
&\quad + (-1)^{(2m+2)-1} \times \frac{1}{2m+2}
\end{aligned}$$

$$= S_m + \frac{1}{2m+1} + \left[-\frac{1}{2m+2} \right]$$

$$\begin{aligned}
T_{m+1} &= \sum_{k=1}^{m+1} \frac{1}{m+1+k} \\
&= \sum_{k=1}^{m+2} \frac{1}{m+k} - \frac{1}{m+1} \\
&= \sum_{k=1}^m \frac{1}{m+k} + \frac{1}{m+(m+1)} + \frac{1}{m+(m+2)} - \frac{1}{m+1} \\
&= T_m + \left[-\frac{1}{m+1} \right] + \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{2m+2}
\end{aligned}$$

$$S_{m+1} - T_{m+1} = S_m - T_m \text{이고, } S_m = T_m \text{이므로 } S_{m+1} = T_{m+1} \text{이다.}$$

따라서 $n=m+1$ 일 때도 (★)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 (★)이 성립한다.

$$\text{따라서 } a = \frac{1}{2}, f(m) = -\frac{1}{2m+2}, g(m) = -\frac{1}{m+1} \text{이므로}$$

$$a + \frac{g(5)}{f(14)} = \frac{1}{2} + \frac{-\frac{6}{5}}{-\frac{1}{30}} = \frac{11}{2}$$

20 답 64

(i) $n=6$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 3^6 = 729$$

$$(\text{우변}) = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 6$)일 때,

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\left(\frac{k}{2} \right)^k > k(k-1)(k-2) \times \cdots \times 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \left(\frac{k+1}{2} \right)^{k+1} &= \frac{(k+1)^{k+1}}{2^{k+1}} = \frac{(k+1)(k+1)^k}{2^{k+1}} \\
&= \frac{k+1}{2^{k+1}} \times \frac{(k+1)^k}{k^k} \times k^k \\
&= \frac{k+1}{2} \times \frac{1}{2^k} \times \left(\frac{k+1}{k} \right)^k \times k^k \\
&= \frac{k+1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{k} \right)^k \times \left[\left(\frac{k}{2} \right)^k \right] \quad \cdots \cdots \textcircled{2}
\end{aligned}$$

이때 $\left(1 + \frac{1}{k} \right)^k > 2$ 이므로 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$\begin{aligned}
\left(\frac{k+1}{2} \right)^{k+1} &> \frac{k+1}{2} \times \left[2k(k-1)(k-2) \times \cdots \times 1 \right] \\
&= (k+1) \times k \times (k-1) \times \cdots \times 1
\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 6$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

$$\text{따라서 } f(k) = \left(\frac{k}{2} \right)^k, g(k) = 2k(k-1)(k-2) \times \cdots \times 1 \text{이므로}$$

$$f(4) + g(4) = 16 + 48 = 64$$

21 답 풀이 참조

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$$

$$(\text{우변}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

따라서 $n=2$ 일 때 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다. 배점 30%

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때,

부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

이 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$ 을 더하면

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} &< 2 - \frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} \\
&= 2 - \frac{(k+1)^2 - k}{k(k+1)^2} \\
&= 2 - \frac{k(k+1) + 1}{k(k+1)^2} \\
&= 2 - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k(k+1)^2} \\
&< 2 - \frac{1}{k+1} \left(\because \frac{1}{k(k+1)^2} > 0 \right)
\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다. 배점 60%

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $\textcircled{1}$ 이 성립한다.

..... 배점 10%

22 답 ③

(i) $n=1$ 일 때

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{4}} \text{이므로 } (\star) \text{이 성립한다.}$$

(ii) $n=k$ 일 때 $(\star)$ 이 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{2k-1}{2k} \times \frac{2k+1}{2k+2} \\ \leq \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \times \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2k+1}} \\ = \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \times \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right)^2}} \\ = \frac{1}{\sqrt{3k+1}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{2k+1} + \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2}} \\ = \frac{1}{\sqrt{3k+1 + 2(3k+1) \times \left(\frac{1}{2k+1}\right) + (3k+1) \times \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2}} \\ < \frac{1}{\sqrt{3k+1 + 2(3k+1) \times \left(\frac{1}{2k+1}\right) + (2k+1) \times \left(\frac{1}{2k+1}\right)^2}} \\ = \frac{1}{\sqrt{3k+1 + \frac{2(3k+1)+1}{2k+1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{6k^2+11k+4}{2k+1}}} \\ = \frac{1}{\sqrt{3(k+1)+1}} \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $(\star)$ 이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 $(\star)$ 이 성립한다.

따라서 $f(k) = \frac{1}{2k+1}$, $g(k) = 2k+1$ 이므로

$$f(4) \times g(13) = \frac{1}{9} \times 27 = 3$$

STEP 3 최고난도 문제

| 121~123쪽

01 ③ 02 150 03 6 04 ③ 05 48 06 ①

07 20 08 41 09 64 10 25 11 $\frac{633}{260}$ 12 ④

01 답 ③

1단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg$. $\sum_{k=1}^n \frac{4S_k}{a_k+2} = S_n$ 의 양변에 $n=1$ 을 대입하면

$$\frac{4S_1}{a_1+2} = S_1$$

$$a_1 = S_1 \text{이므로 } \frac{4a_1}{a_1+2} = a_1$$

$$\text{이때 } a_1 > 0 \text{이므로 } \frac{4}{a_1+2} = 1 \quad \therefore a_1 = 2$$

또 $\sum_{k=1}^n \frac{4S_k}{a_k+2} = S_n$ 의 양변에 $n=2$ 를 대입하면

$$\frac{4S_1}{a_1+2} + \frac{4S_2}{a_2+2} = S_2, \quad 2 + \frac{4(2+a_2)}{a_2+2} = 2 + a_2 \quad \therefore a_2 = 4$$

2단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg$. (i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{4S_k}{a_k+2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{4S_k}{a_k+2} \\ &= \frac{4S_n}{a_n+2} \\ \therefore 4S_n &= a_n(a_n+2) \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입하면

$$4S_1 = a_1(a_1+2)$$

$$4 \times 2 = 2 \times 4 \quad (\because \textcircled{2})$$

즉, 모든 자연수 n 에 대하여

$$4S_n = a_n(a_n+2)$$

3단계 $\neg$ 이 옳은지 확인하기

$\neg$. $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} 4a_n &= 4S_n - 4S_{n-1} \\ &= a_n(a_n+2) - a_{n-1}(a_{n-1}+2) \\ &= (a_n^2 - a_{n-1}^2) + 2(a_n - a_{n-1}) \\ (a_n^2 - a_{n-1}^2) - 2(a_n - a_{n-1}) &= 0 \\ (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1} - 2) &= 0 \\ \text{이때 } a_n + a_{n-1} > 0 \text{이므로 } a_n - a_{n-1} - 2 &= 0 \\ a_1 = 2, a_2 = 4 \text{이므로 모든 자연수 } n \text{에 대하여} \\ a_{n+1} - a_n &= 2 \end{aligned}$$

4단계 옳은 것 구하기

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

02 답 150

1단계 a_1 의 값 구하기

주어진 식의 양변에 $n=1$ 을 대입하면

$$a_1^3 = 3a_1^2 \quad \therefore a_1 = 3 \quad (\because a_1 > 0)$$

2단계 a_2 의 값 구하기

주어진 식의 양변에 $n=2$ 를 대입하면

$$a_1^3 + a_2^3 = 3(a_1 + a_2)^2$$

$$27 + a_2^3 = 3(3 + a_2)^2 \quad (\because a_1 = 3)$$

$$a_2^3 - 3a_2^2 - 18a_2 = 0$$

이때 $a_2 > 0$ 이므로

$$a_2^2 - 3a_2 - 18 = 0, \quad (a_2 + 3)(a_2 - 6) = 0$$

$$\therefore a_2 = 6 \quad (\because a_2 > 0)$$

3단계 a_{50} 의 값 구하기

주어진 식의 양변에 $n=k$ 를 대입하면

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_k^3 = 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

주어진 식의 양변에 $n=k-1$ 을 대입하면

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_{k-1}^3 = 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$\begin{aligned} a_k^3 &= 3\{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^2 - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})^2\} \\ &= 3\{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})\} \\ &\quad \times \{(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1})\} \\ &= 3a_k\{2(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) + a_k\} \end{aligned}$$

이때 $a_k > 0$ 이므로

$$a_k^2 = 6(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1}) + 3a_k \quad (k \geq 2) \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

이 식의 양변에 k 대신 $k-1$ 을 대입하면

$$a_{k-1}^2 = 6(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-2}) + 3a_{k-1} \quad (k \geq 3) \quad \text{..... ㉞}$$

㉞ - ㉝을 하면

$$\begin{aligned} a_k^2 - a_{k-1}^2 &= 6a_{k-1} + 3(a_k - a_{k-1}) \\ &= 3(a_k + a_{k-1}) \end{aligned}$$

이때 $(a_k + a_{k-1})(a_k - a_{k-1}) = 3(a_k + a_{k-1})$ 에서 $a_k + a_{k-1} > 0$ 이므로

$$a_k - a_{k-1} = 3 \quad (k \geq 3)$$

따라서 $a_1 = 3$, $a_2 = 6$ 이고 $n \geq 3$ 일 때, $a_n - a_{n-1} = 3$, 즉 $a_n = a_{n-1} + 3$ 이

므로 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공차가 3인 등차수열이다.

$$\therefore a_{50} = a_1 + 49d = 3 + 49 \times 3 = 150$$

03 답 6

1단계 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기

$$\sum_{k=1}^n a_k = S_n \text{이라 하면}$$

$$S_n = 2n - \frac{2}{3}a_{n+1} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

(i) $n=1$ 일 때,

$$S_1 = 2 - \frac{2}{3}a_2$$

$$\therefore a_1 = 2 - \frac{2}{3}a_2$$

(ii) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n - \frac{2}{3}a_{n+1} - \left\{ 2(n-1) - \frac{2}{3}a_n \right\} \\ &= 2 - \frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n) \end{aligned}$$

$$\therefore a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + 3$$

2단계 $|a_2|$ 의 값 구하기

이때 $b_n = a_n - 2$ 라 하면 $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} - 2 \\ &= \left(-\frac{1}{2}a_n + 3 \right) - 2 \\ &= -\frac{1}{2}(a_n - 2) \\ &= -\frac{1}{2}b_n \end{aligned}$$

즉, $n \geq 2$ 일 때 수열 $\{b_n\}$ 은 등비수열이고,

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 - 2 \\ &= \left(2 - \frac{2}{3}a_2 \right) - 2 \\ &= -\frac{2}{3}a_2 \end{aligned}$$

$$b_2 = a_2 - 2$$

$$b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n \text{의 } n \text{에 } 2, 3, 4, 5, 6 \text{을 차례로 대입하면}$$

$$b_3 = -\frac{1}{2}b_2 = -\frac{1}{2}(a_2 - 2)$$

$$b_4 = -\frac{1}{2}b_3 = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 (a_2 - 2)$$

$$b_5 = -\frac{1}{2}b_4 = \left(-\frac{1}{2} \right)^3 (a_2 - 2)$$

$$b_6 = -\frac{1}{2}b_5 = \left(-\frac{1}{2} \right)^4 (a_2 - 2)$$

$$b_7 = -\frac{1}{2}b_6 = \left(-\frac{1}{2} \right)^5 (a_2 - 2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^7 |a_k - 2| &= \sum_{k=1}^7 |b_k| \\ &= \left| -\frac{2}{3}a_2 \right| + |a_2 - 2| + \left| -\frac{1}{2}(a_2 - 2) \right| + \left| \left(-\frac{1}{2} \right)^2 (a_2 - 2) \right| \\ &\quad + \left| \left(-\frac{1}{2} \right)^3 (a_2 - 2) \right| + \left| \left(-\frac{1}{2} \right)^4 (a_2 - 2) \right| + \left| \left(-\frac{1}{2} \right)^5 (a_2 - 2) \right| \\ &= -\frac{2}{3}a_2 - (a_2 - 2) \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \left(\frac{1}{2} \right)^4 + \left(\frac{1}{2} \right)^5 \right\} \end{aligned}$$

($\because a_2 < 0$)

$$= -\frac{2}{3}a_2 - (a_2 - 2) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^6}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= -\frac{2}{3}a_2 - \frac{63}{32}(a_2 - 2)$$

$$= -\frac{253}{96}a_2 + \frac{63}{16}$$

$$\text{따라서 } -\frac{253}{96}a_2 + \frac{63}{16} = \frac{79}{4} \text{이므로 } a_2 = -6$$

$$\therefore |a_2| = 6$$

04 답 ③

1단계 수열 $\{a_n\}$ 의 규칙 파악하기

(*)의 $a_{2n-1} + a_{2n} = 1$ 에서 $a_{2n} = 1 - a_{2n-1}$ 이고,

$$a_{2n} \times a_{2n+1} = 1 \text{에서 } a_{2n+1} = \frac{1}{a_{2n}} \text{이므로}$$

$$a_2 = 1 - a_1$$

$$a_3 = \frac{1}{a_2} = \frac{1}{1 - a_1}$$

$$a_4 = 1 - a_3 = -\frac{a_1}{1 - a_1}$$

$$a_5 = \frac{1}{a_4} = 1 - \frac{1}{a_1}$$

$$a_6 = 1 - a_5 = \frac{1}{a_1}$$

$$a_7 = \frac{1}{a_6} = a_1$$

$$a_8 = 1 - a_7 = 1 - a_1 = a_2$$

:

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+6} = a_n$ 을 만족시킨다.

2단계 a_1 의 값 구하기

$$\text{이때 } |a_n| - a_n = \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n & (a_n < 0) \end{cases} \text{이므로 } \sum_{n=1}^{14} (|a_n| - a_n) = 10 \text{이 되기}$$

위해서는 $a_1, a_2, \dots, a_{14}$ 중에서 음수인 모든 항의 합이 -5 이어야 한다.

(i) $0 < a_1 < 1$ 일 때,

$$a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 < 0, a_5 < 0, a_6 > 0 \text{이므로}$$

$$a_4 + a_5 + a_{10} + a_{11} = -5$$

$$a_4 = s \text{라 하면 } a_4 + a_5 + a_{10} + a_{11} = s + \frac{1}{s} + s + \frac{1}{s} = 2s + \frac{2}{s} = -5$$

즉, $2s^2 + 5s + 2 = 0$ 에서

$$(2s+1)(s+2) = 0 \quad \therefore s = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } s = -2$$

$$s = -\frac{a_1}{1-a_1} \text{이므로 } a_1 = \frac{1}{3} \text{ 또는 } a_1 = \frac{2}{3}$$

(ii) $a_1 > 1$ 일 때,

$$a_2 < 0, a_3 < 0, a_4 > 0, a_5 > 0, a_6 > 0 \text{이므로}$$

$$a_2 + a_3 + a_8 + a_9 + a_{14} = -5$$

$a_2=t$ 라 하면

$$a_2+a_3+a_8+a_9+a_{14}=t+\frac{1}{t}+t+\frac{1}{t}+t=3t+\frac{2}{t}=-5$$

즉, $3t^2+5t+2=0$ 에서

$$(3t+2)(t+1)=0$$

$$\therefore t=-\frac{2}{3} \text{ 또는 } t=-1$$

$$t=1-a_1 \text{이므로 } a_1=\frac{5}{3} \text{ 또는 } a_1=2$$

3단계 모든 a_1 의 값의 합 구하기

(i), (ii)에서 모든 a_1 의 값의 합은

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{5}{3}+2=\frac{14}{3}$$

idea 05 답 48

1단계 수열 $\{a_n+b_n\}$ 의 일반항 구하기

$$2a_{n+1}=b_n+b_{n+2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$2b_{n+1}=a_n+a_{n+2} \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}+\textcircled{2}$ 을 하면

$$2(a_{n+1}+b_{n+1})=(a_n+b_n)+(a_{n+2}+b_{n+2})$$

이때 $a_n+b_n=A_n$ 이라 하면

$$2A_{n+1}=A_n+A_{n+2}$$

즉, 수열 $\{A_n\}$ 은 등차수열이다.

$A_1=a_1+b_1=2$, $A_2=a_2+b_2=5$ 이므로 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수

열 $\{A_n\}$ 의 일반항 A_n 은

$$A_n=2+(n-1)\times 3=3n-1$$

2단계 수열 $\{a_n-b_n\}$ 의 일반항 구하기

$\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면

$$2(a_{n+1}-b_{n+1})=-(a_n-b_n)-(a_{n+2}-b_{n+2})$$

$$\therefore a_{n+2}-b_{n+2}=-2(a_{n+1}-b_{n+1})-(a_n-b_n)$$

이때 $a_n-b_n=B_n$ 이라 하면

$$B_{n+2}=-2B_{n+1}-B_n \quad \cdots \textcircled{3}$$

$B_1=a_1-b_1=0$, $B_2=a_2-b_2=-1$ 이므로 $\textcircled{3}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$B_3=-2B_2-B_1=-2\times(-1)-0=2$$

$$B_4=-2B_3-B_2=-2\times 2-(-1)=-3$$

$$B_5=-2B_4-B_3=-2\times(-3)-2=4$$

$\vdots$

$$\therefore B_n=(-1)^{n-1}(n-1)$$

3단계 $f(n)$, $g(n)$ 구하기

$$\text{즉, } a_n=\frac{1}{2}(A_n+B_n)=\frac{1}{2}\{(3n-1)+(-1)^{n-1}(n-1)\} \text{이므로}$$

$$f(n)=3n-1, g(n)=n-1$$

4단계 $f(10)+g(20)$ 의 값 구하기

따라서 $f(10)=29$, $g(20)=19$ 이므로

$$f(10)+g(20)=48$$

06 답 ①

1단계 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기

$$(n+2)a_{n+2}+pa_n=(n+1+p)a_{n+1}, \text{ 즉}$$

$(n+2)a_{n+2}+pa_n=(n+1)a_{n+1}+pa_{n+1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., n 을 차례로 대입하여 변끼리 모두 더하면

$$3a_3+pa_1=2a_2+pa_2$$

$$4a_4+pa_2=3a_3+pa_3$$

$$5a_5+pa_3=4a_4+pa_4$$

$\vdots$

$$+ \quad (n+2)a_{n+2}+pa_n=(n+1)a_{n+1}+pa_{n+1}$$

$$(n+2)a_{n+2}+pa_1=2a_2+pa_{n+1}$$

$$(n+2)a_{n+2}+2p=2p+pa_{n+1} (\because a_1=2, a_2=p)$$

$$\therefore a_{n+2}=\frac{p}{n+2}a_{n+1} (n \geq 1)$$

$$\text{즉, } a_{n+1}=\frac{p}{n+1}a_n (n \geq 2) \text{이고 } a_1=2, a_2=p \text{이므로}$$

$$a_{n+1}=\frac{p}{n+1}a_n (n \geq 1)$$

2단계 $\frac{a_{n+2}}{a_n}$ 구하기

$$\text{따라서 } a_{n+2}=\frac{p}{n+2} \times \frac{p}{n+1}a_n=\frac{p^2}{(n+1)(n+2)}a_n \text{이므로}$$

$$\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{p^2}{(n+1)(n+2)} (n \geq 1)$$

3단계 p 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{18} \frac{a_{k+2}}{a_k} &= \sum_{k=1}^{18} \frac{p^2}{(k+1)(k+2)} \\ &= p^2 \sum_{k=1}^{18} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= p^2 \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{20} \right) \right\} \\ &= p^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{20} \right) \\ &= \frac{9}{20}p^2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{9}{20}p^2=45 \text{이므로}$$

$$p^2=100 \quad \therefore p=10 (\because p>0)$$

07 답 20

1단계 S_n 이 최댓값을 가지는 경우 파악하기

$$a_n=a+(n-1)(-3)=a+3-3n$$

$a_k \geq 0$, $a_{k+1} < 0$ 이라 하면

$n \leq k$ 일 때, $a_n \geq 0$ 이므로 $b_n=a_n-n=a+3-4n \rightarrow$ 공차가 -4인 등차수열

$n \geq k+1$ 일 때, $a_n < 0$ 이므로 $b_n=a_n+n=a+3-2n \rightarrow$ 공차가 -2인 등차수열

즉, $n \leq k$ 일 때 n 이 점점 커지면 b_n 은 점점 작아지고, $b_k < 0$ 이다.

또 $b_{k+1} > 0$ 이고 $n \geq k+1$ 일 때 n 이 점점 커지면 b_n 은 점점 작아진다.

이때 $b_i > 0$, $b_{i+1} < 0 (i < k)$, $b_m > 0$, $b_{m+1} < 0 (m > k)$ 이라 하면

a_n , b_n 의 부호는 다음과 같다.

n	1	2	...	i	$i+1$	...	k	$k+1$	...	m	$m+1$	...
a_n	+	+	...	+	+	...	+	-	...	-	-	...
b_n	+	+	...	+	-	...	-	+	...	+	-	...

└─ 공차가 -4인 등차수열 ─┘

└─ 공차가 -2인 등차수열 ─┘

따라서 S_n 의 최댓값이 S_{11} 이므로 $i=11$ 또는 $m=11$ 이다.

2단계 a 의 값 구하기

(i) $i=11$ 일 때,

$$b_{11}=a-41 > 0, b_{12}=a-45 < 0 \text{이므로 } 41 < a < 45$$

$$\therefore S_{11}=\sum_{n=1}^{11} b_n=\sum_{n=1}^{11} (a+3-4n)=(a+3)\sum_{n=1}^{11} 1-4\sum_{n=1}^{11} n$$

$$=11(a+3)-4 \times \frac{11 \times 12}{2}=11a-231$$

$$S_{11}=65 \text{에서 } 11a-231=65$$

$$11a=296 \quad \therefore a=\frac{296}{11}$$

이는 $41 < a < 45$ 를 만족시키지 않는다.

(ii) $m=11$ 일 때,

$$b_{11}=a-19 > 0, \quad b_{12}=a-21 < 0 \text{이므로 } 19 < a < 21$$

$$a_k=a+3-3k > 0, \quad a_{k+1}=a-3k < 0 \text{에서 } k=7$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{11} &= \sum_{n=1}^{11} b_n = \sum_{n=1}^7 (a+3-4n) + \sum_{n=8}^{11} (a+3-2n) \\ &= (a+3) \sum_{n=1}^7 1 - 4 \sum_{n=1}^7 n + (a+3) \sum_{n=8}^{11} 1 - 2 \sum_{n=8}^{11} n \\ &= 7(a+3) - 4 \times \frac{7 \times 8}{2} + 4(a+3) - 2(8+9+10+11) \\ &= 11a - 155 \end{aligned}$$

$$S_{11}=65 \text{에서 } 11a-155=65$$

$$11a=220 \quad \therefore a=20$$

이는 $19 < a < 21$ 을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a=20$

08 답 41

1단계 a_1, a_2 의 값 구하기

$$\begin{cases} a_{3n}=4a_n+n & \cdots \textcircled{A} \\ a_{3n+1}=a_n+2 & \cdots \textcircled{B} \\ a_{3n+2}=-3a_n-2 & \cdots \textcircled{C} \end{cases}$$

$\textcircled{A} + \textcircled{B} + \textcircled{C}$ 을 하면 $a_{3n}+a_{3n+1}+a_{3n+2}=2a_n+n$

이 식의 n 에 1, 2, 3, ..., 14를 차례로 대입하여 번끼리 모두 더하면

$$a_3+a_4+a_5=2a_1+1$$

$$a_6+a_7+a_8=2a_2+2$$

$$a_9+a_{10}+a_{11}=2a_3+3$$

$\vdots$

$$\begin{aligned} +) \quad & a_{42}+a_{43}+a_{44}=2a_{14}+14 \\ & \sum_{k=3}^{44} a_k = 2 \sum_{k=1}^{14} a_k + \frac{14 \times 15}{2} \\ & = 2 \sum_{k=1}^{14} a_k + 105 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{14} a_k &= (a_1+a_2) + (a_3+a_4+a_5) + (a_6+a_7+a_8) + (a_9+a_{10}+a_{11}) \\ &\quad + (a_{12}+a_{13}+a_{14}) \end{aligned}$$

$$= (a_1+a_2) + (2a_1+1) + (2a_2+2) + (2a_3+3) + (2a_4+4)$$

$$= (a_1+a_2) + (2a_1+1) + (2a_2+2)$$

$$+ \{2(4a_1+1)+3\} + \{2(a_1+2)+4\}$$

$$= 13a_1+3a_2+16$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{44} a_k &= a_1+a_2 + \sum_{k=3}^{44} a_k \\ &= a_1+a_2 + \{2(13a_1+3a_2+16)+105\} \\ &= 27a_1+7a_2+137 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 27a_1+7a_2+137=124 \text{이므로 } 27a_1+7a_2=-13$$

따라서 두 식 $a_1+2a_2=3$, $27a_1+7a_2=-13$ 을 연립하여 풀면

$$a_1=-1, \quad a_2=2$$

2단계 a_{100} 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore a_{100} &= a_{33}+2 = (4a_{11}+11)+2 \\ &= 4a_{11}+13 = 4(-3a_3-2)+13 = -12a_3+5 \\ &= -12(4a_1+1)+5 = -48a_1-7 \\ &= 48-7=41 \end{aligned}$$

09 답 64

1단계 a_1 의 값 구하기

(*)에서 $|a_3|=|a_5|$ 이므로 a_3 의 값에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다. $\rightarrow |a_2| \neq |a_4|, |a_1| \neq |a_3|$

(i) $a_3=4k$ (k 는 정수)일 때,

$$a_3=0 \text{ 또는 } |a_3| \text{은 짝수이므로 } a_4=\frac{1}{2}a_3=2k$$

$$a_4=0 \text{ 또는 } |a_4| \text{는 짝수이므로 } a_5=\frac{1}{2}a_4=k$$

$$|a_3|=|a_5| \text{에서}$$

$$|4k|=|k| \quad \therefore k=0$$

$$\therefore a_3=0, \quad a_4=0, \quad a_5=0$$

① $|a_2|$ 가 홀수일 때,

$$a_3=a_2-3 \text{이므로 } 0=a_2-3 \quad \therefore a_2=3$$

이때 $|a_2|$ 가 홀수이므로 $a_1=0$ 또는 $|a_1|$ 은 짝수이다.

$\rightarrow |a_1|$ 이 홀수인 경우 $a_2=a_1-3$ 이므로 $a_2=0$ 또는 $|a_2|$ 는 짝수가 된다.

$$\text{즉, } a_2=\frac{1}{2}a_1 \text{이므로 } 3=\frac{1}{2}a_1 \quad \therefore a_1=6$$

② $a_2=0$ 또는 $|a_2|$ 가 짝수일 때,

$$a_3=\frac{1}{2}a_2 \text{이므로 } 0=\frac{1}{2}a_2 \quad \therefore a_2=0$$

이는 (*)의 $|a_2| \neq |a_4|$ 를 만족시키지 않는다.

(ii) $a_3=4k+1$ (k 는 정수)일 때,

$$|a_3| \text{은 홀수이므로 } a_4=a_3-3=4k-2$$

$$|a_4| \text{는 짝수이므로 } a_5=\frac{1}{2}a_4=2k-1$$

$$|a_3|=|a_5| \text{에서}$$

$$|4k+1|=|2k-1|, \quad 4k+1=\pm(2k-1)$$

$$\therefore k=-1 \text{ 또는 } k=0$$

① $k=-1$ 일 때,

$$a_3=-3, \quad a_4=-6, \quad a_5=-3$$

이때 $|a_3|$ 이 홀수이므로 $a_2=0$ 또는 $|a_2|$ 는 짝수이다.

$$\text{즉, } a_3=\frac{1}{2}a_2 \text{이므로 } -3=\frac{1}{2}a_2 \quad \therefore a_2=-6$$

이는 (*)의 $|a_2| \neq |a_4|$ 를 만족시키지 않는다.

② $k=0$ 일 때,

$$a_3=1, \quad a_4=-2, \quad a_5=-1$$

이때 $|a_3|$ 이 홀수이므로 $a_2=0$ 또는 $|a_2|$ 는 짝수이다.

$$\text{즉, } a_3=\frac{1}{2}a_2 \text{이므로 } 1=\frac{1}{2}a_2 \quad \therefore a_2=2$$

이는 (*)의 $|a_2| \neq |a_4|$ 를 만족시키지 않는다.

(iii) $a_3=4k+2$ (k 는 정수)일 때,

$$|a_3| \text{은 짝수이므로 } a_4=\frac{1}{2}a_3=2k+1$$

$$|a_4| \text{는 홀수이므로 } a_5=a_4-3=2k-2$$

$$|a_3|=|a_5| \text{에서}$$

$$|4k+2|=|2k-2|, \quad 4k+2=\pm(2k-2)$$

$$\therefore k=-2 \text{ 또는 } k=0$$

① $k=-2$ 일 때,

$$a_3=-6, \quad a_4=-3, \quad a_5=-6$$

② $|a_2|$ 가 홀수일 때,

$$a_3=a_2-3 \text{이므로 } -6=a_2-3 \quad \therefore a_2=-3$$

이는 (*)의 $|a_2| \neq |a_4|$ 를 만족시키지 않는다.

③ $a_2=0$ 또는 $|a_2|$ 가 짝수일 때,

$$a_3=\frac{1}{2}a_2 \text{이므로 } -6=\frac{1}{2}a_2 \quad \therefore a_2=-12$$

① $|a_1|$ 이 홀수일 때,

$$a_2 = a_1 - 3 \text{이므로 } -12 = a_1 - 3 \quad \therefore a_1 = -9$$

② $a_1 = 0$ 또는 $|a_1|$ 이 짝수일 때,

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 \text{이므로 } -12 = \frac{1}{2}a_1 \quad \therefore a_1 = -24$$

③ $k=0$ 일 때,

$$a_3 = 2, a_4 = 1, a_5 = -2$$

④ $|a_2|$ 가 홀수일 때,

$$a_3 = a_2 - 3 \text{이므로 } 2 = a_2 - 3 \quad \therefore a_2 = 5$$

이때 $|a_2|$ 가 홀수이므로 $a_1 = 0$ 또는 $|a_1|$ 은 짝수이다.

$$\text{즉, } a_2 = \frac{1}{2}a_1 \text{이므로 } 5 = \frac{1}{2}a_1 \quad \therefore a_1 = 10$$

⑤ $a_2 = 0$ 또는 $|a_2|$ 가 짝수일 때,

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 \text{이므로 } 2 = \frac{1}{2}a_2 \quad \therefore a_2 = 4$$

① $|a_1|$ 이 홀수일 때,

$$a_2 = a_1 - 3 \text{이므로 } 4 = a_1 - 3 \quad \therefore a_1 = 7$$

② $a_1 = 0$ 또는 $|a_1|$ 이 짝수일 때,

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 \text{이므로 } 4 = \frac{1}{2}a_1 \quad \therefore a_1 = 8$$

(iv) $a_3 = 4k + 3$ (k 는 정수)일 때,

$$|a_3| \text{은 홀수이므로 } a_4 = a_3 - 3 = 4k$$

$$a_4 = 0 \text{ 또는 } |a_4| \text{는 짝수이므로 } a_5 = \frac{1}{2}a_4 = 2k$$

$$|a_3| = |a_5| \text{에서 } |4k + 3| = |2k|$$

이를 만족시키는 정수 k 는 존재하지 않는다.

(i)~(iv)에서

$$a_1 = 6 \text{ 또는 } a_1 = -9 \text{ 또는 } a_1 = -24 \text{ 또는 } a_1 = 10 \text{ 또는 } a_1 = 7 \text{ 또는}$$

$$a_1 = 8$$

2단계 $|a_1|$ 의 값의 합 구하기

따라서 $|a_1|$ 의 값의 합은

$$|6| + |-9| + |-24| + |10| + |7| + |8| = 64$$

10 답 25

1단계 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식 구하기

$x_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ($i=1, 2, 3, \dots, n$)이므로 모든 순서쌍

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 의 개수는

$$4^n$$

a_{n+1} 은 $x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}$ 이 5의 배수인 순서쌍

$(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})$ 의 개수이다.

이때 $x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}$ 이 5의 배수이려면 $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ 이 5의 배수가 아니어야 하므로

$$a_{n+1} = 4^n - a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

2단계 수열 $\{a_{2k+1}\}$ 의 일반항 구하기

한편 $a_1 = 0$ 이므로

$$a_2 = 4 - a_1 = 4$$

$$a_3 = 4^2 - a_2 = 4^2 - 4$$

$$a_4 = 4^3 - a_3 = 4^3 - 4^2 + 4$$

$$a_5 = 4^4 - a_4 = 4^4 - 4^3 + 4^2 - 4$$

$$a_6 = 4^5 - a_5 = 4^5 - 4^4 + 4^3 - 4^2 + 4$$

$$a_7 = 4^6 - a_6 = 4^6 - 4^5 + 4^4 - 4^3 + 4^2 - 4$$

$\vdots$

이때

$$a_1 = 0$$

$$a_3 = 4^2 - 4 = 12 \times 1$$

$$a_5 = (4^2 - 4)(4^2 + 1) = 12(1 + 4^2)$$

$$a_7 = (4^2 - 4)(4^4 + 4^2 + 1) = 12\{1 + 4^2 + (4^2)^2\}$$

$\vdots$

이므로

$$a_{2k+1} = 12\{1 + 4^2 + (4^2)^2 + \dots + (4^2)^{k-1}\}$$

$$= 12 \times \frac{(4^2)^k - 1}{4^2 - 1}$$

$$= \frac{4}{5}(2^{4k} - 1)$$

3단계 $5a_{2k+1} > 2^{100}$ 을 만족시키는 자연수 k 의 최솟값 구하기

$$\text{즉, } 5a_{2k+1} = 4(2^{4k} - 1) = 2^{4k+2} - 4 \text{이므로}$$

$$5a_{2k+1} > 2^{100} \text{에서 } 2^{4k+2} - 4 > 2^{100}$$

$$2^{4k+2} > 2^{100} + 4$$

$$\text{이때 } 2^{100} < 2^{100} + 4 < 2^{101} \text{이므로}$$

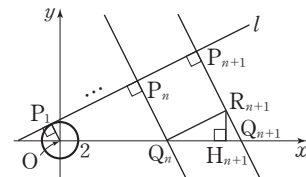
$$4k + 2 \geq 101 \quad \therefore k \geq \frac{99}{4} = 24.75$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 25이다.

11 답 $\frac{633}{260}$

1단계 $\overline{P_n Q_n}$ 구하기

그림과 같이 점 Q_n 을 지나고 직선 l 과 평행한 직선이 선분 $\overline{P_{n+1}Q_{n+1}}$ 과 만나는 점을 R_{n+1} 이라 하면 사각형 $P_n Q_n R_{n+1} P_{n+1}$ 은 정사각형이고, 직선 l 의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로 직선 $Q_n R_{n+1}$ 의 기울기도 $\frac{1}{2}$ 이다.



즉, 점 R_{n+1} 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H_{n+1} 이라 하면

$$\overline{Q_n H_{n+1}} : \overline{H_{n+1} R_{n+1}} = 2 : 1$$

직각삼각형 $Q_n R_{n+1} Q_{n+1}$ 과 직각삼각형 $Q_n H_{n+1} R_{n+1}$ 은 서로 닮음이므로

$$\overline{Q_n R_{n+1}} : \overline{R_{n+1} Q_{n+1}} = \overline{Q_n H_{n+1}} : \overline{H_{n+1} R_{n+1}} = 2 : 1 \text{에서}$$

$$\overline{R_{n+1} Q_{n+1}} = \frac{1}{2} \overline{Q_n R_{n+1}}$$

$$\text{이때 } \overline{Q_n R_{n+1}} = \overline{P_{n+1} R_{n+1}} \text{이므로 } \overline{R_{n+1} Q_{n+1}} = \frac{1}{2} \overline{P_{n+1} R_{n+1}}$$

$$\text{따라서 } \overline{P_{n+1} Q_{n+1}} = \frac{3}{2} \overline{P_{n+1} R_{n+1}}, \text{ 즉 } \overline{P_{n+1} Q_{n+1}} = \frac{3}{2} \overline{P_n Q_n} \text{이고 } \overline{P_1 Q_1} = 2 \text{이}$$

므로 선분 $P_n Q_n$ 의 길이는 첫째항이 2, 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이다.

$$\therefore \overline{P_n Q_n} = 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}$$

2단계 $\overline{P_1 P_n}$ 구하기

$$\overline{P_n P_{n+1}} = \overline{P_n Q_n} \text{이므로}$$

$$\overline{P_1 P_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \overline{P_k P_{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \overline{P_k Q_k} = \frac{2 \times \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^n - 1 \right\}}{\frac{3}{2} - 1}$$

$$= 4 \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^n - 1 \right\}$$

3단계 S_n 구하기

이때 삼각형 OQ_nP_n 의 넓이는 삼각형 $P_1Q_nP_n$ 의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \times \overline{P_nQ_n} \times \overline{P_1P_n} \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} \times 4 \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} - 1 \right\} \\ &= 4 \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1} - 1 \right\} \end{aligned}$$

4단계 $\frac{S_6}{S_5}$ 의 값 구하기

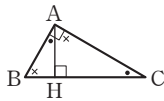
따라서 $S_5 = 4 \left(\frac{3}{2} \right)^4 \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^4 - 1 \right\}$, $S_6 = 4 \left(\frac{3}{2} \right)^5 \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^5 - 1 \right\}$ 이므로

$$\frac{S_6}{S_5} = \frac{4 \left(\frac{3}{2} \right)^5 \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^5 - 1 \right\}}{4 \left(\frac{3}{2} \right)^4 \left\{ \left(\frac{3}{2} \right)^4 - 1 \right\}} = \frac{633}{260}$$

개념 NOTE

$\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 빗변 BC에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

$\triangle ABC \sim \triangle HBA \sim \triangle HAC$ (AA 닮음)



12 답 ④

1단계 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 구하기

(점 A_{n+1} 까지 갈 수 있는 경로의 수)

= (점 A_n 을 거쳐 왼쪽에서 갈 수 있는 경로의 수)

+ (위쪽에서 갈 수 있는 경로의 수)

$$= a_n \times 2 + 1 \times 2 = 2a_n + 2$$

즉, $a_{n+1} = 2a_n + 2$ 이고 $a_1 = 1$ 이므로

$$a_2 = 2^1 + 2^1$$

$$a_3 = 2^1 + 2^2 + 2^2$$

$$a_4 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^3$$

$$a_5 = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^4$$

⋮

$$\therefore a_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-2} + 2^{n-1} + 2^{n-1}$$

$$= \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} + 2^{n-1}$$

$$= 2 \times 2^{n-1} - 2 + 2^{n-1}$$

$$= 3 \times 2^{n-1} - 2 \quad (n \geq 2)$$

이때 $a_1 = 1$ 이므로 $a_n = 3 \times 2^{n-1} - 2$

2단계 자연수 k 의 최솟값 구하기

$$a_k > 10000 \text{에서 } 3 \times 2^{k-1} - 2 > 10000$$

$$3 \times 2^{k-1} > 10002 \quad \therefore 2^{k-1} > 3334$$

이때 $2^{11} = 2048$, $2^{12} = 4096$ 이므로

$$k-1 \geq 12 \quad \therefore k \geq 13$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 13이다.

01 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d \neq 0$)라 하면

$$a_1 = -6-d, a_2 = -6, a_3 = -6+d, a_4 = -6+2d, a_5 = -6+3d,$$

$$a_6 = -6+4d$$

$$\therefore A = \{-6-d, -6, -6+d, -6+2d, -6+3d, -6+4d\}$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \text{이므로}$$

$$b_n = a_n + a_{n+1} = \{a_1 + (n-1)d\} + \{a_1 + nd\}$$

$$= 2a_1 + 2nd - d = (2a_1 + d) + (n-1)2d$$

즉, 수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $2a_1 + d$ 이고, 공차가 $2d$ 인 등차수열이므로

$$b_1 = 2a_1 + d = 2(-6-d) + d = -12-d,$$

$$b_2 = -12+d, b_3 = -12+3d, b_4 = -12+5d$$

$$\therefore B = \{-12-d, -12+d, -12+3d, -12+5d\}$$

이때 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차가 각각 d , $2d$ 이므로 $n(A \cap B) = 3$ 이라면

$$A \cap B = \{a_1, a_3, a_5\} = \{b_i, b_{i+1}, b_{i+2}\} \quad (i=1, 2)$$

또는 $A \cap B = \{a_2, a_4, a_6\} = \{b_i, b_{i+1}, b_{i+2}\} \quad (i=1, 2)$ 이어야 한다.

(i) $\{a_1, a_3, a_5\} = \{b_1, b_2, b_3\}$ 일 때,

$a_1 = b_1$, 즉 $-6-d = -12-d$ 를 만족시키는 d 의 값은 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\{a_1, a_3, a_5\} = \{b_2, b_3, b_4\}$ 일 때,

$$a_1 = b_2, \text{ 즉 } -6-d = -12+d \text{ 이어야 하므로}$$

$$2d = 6 \quad \therefore d = 3$$

$$\therefore a_{15} = -9 + 14 \times 3 = 33$$

(iii) $\{a_2, a_4, a_6\} = \{b_1, b_2, b_3\}$ 일 때,

$$a_2 = b_1, \text{ 즉 } -6 = -12-d \text{ 이어야 하므로 } d = -6$$

$$\therefore a_{15} = 0 + 14 \times (-6) = -84$$

(iv) $\{a_2, a_4, a_6\} = \{b_2, b_3, b_4\}$ 일 때,

$$a_2 = b_2, \text{ 즉 } -6 = -12+d \text{ 이어야 하므로 } d = 6$$

$$\therefore a_{15} = -12 + 14 \times 6 = 72$$

(i)~(iv)에서 $a_{15} = 33$ 또는 $a_{15} = -84$ 또는 $a_{15} = 72$

따라서 구하는 a_{15} 의 값의 합은

$$33 + (-84) + 72 = 21$$

02 답 156

모든 항이 자연수이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공차는 자연수이다.

첫째항이 a_1 , 공차가 d 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

(*)에서 세 항 a_3, a_k, a_{3k-1} 이 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a_k^2 = a_3 a_{3k-1} \text{에서}$$

$$\{a_1 + (k-1)d\}^2 = (a_1 + 2d)\{a_1 + (3k-2)d\}$$

$$a_1^2 + 2(k-1)a_1d + (k-1)^2d^2 = a_1^2 + 3ka_1d + 2(3k-2)d^2$$

$$(k^2 - 8k + 5)d^2 = (k+2)a_1d$$

$$\therefore (k^2 - 8k + 5)d = (k+2)a_1 \quad (\because d \text{는 자연수}) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(*)에서 $a_1 \leq d$ 의 양변에 $k+2$ 를 곱하면

$$(k+2)a_1 \leq (k+2)d$$

$$(k^2 - 8k + 5)d \leq (k+2)d \quad (\because \textcircled{1})$$

$$k^2 - 8k + 5 \leq k + 2 \quad (\because d \text{는 자연수})$$

$$k^2 - 9k + 3 \leq 0$$

$$\therefore \frac{9-\sqrt{69}}{2} \leq k \leq \frac{9+\sqrt{69}}{2}$$

그런데 $k \geq 4$ 이므로

$$4 \leq k \leq \frac{9+\sqrt{69}}{2}$$

기출 변형 문제로 단원 마스터

| 124~127쪽

01 ① 02 156 03 ① 04 ② 05 ② 06 28

07 1330 08 ⑤ 09 ② 10 -4 11 ⑤ 12 ③

13 ④ 14 24

즉, 자연수 k 의 값은 4, 5, 6, 7, 8이다.

이때 ㉠에서 $k^2 - 8k + 5 > 0$ 이어야 하므로 $k=8$

이를 ㉠에 대입하면

$$5d = 10a_1 \quad \therefore d = 2a_1$$

따라서 $a_{16} = a_1 + 15d = 31a_1$ 이므로 $120 \leq a_{16} \leq 130$ 에서

$$120 \leq 31a_1 \leq 130$$

이때 a_1 은 자연수이므로 $a_1 = 4$

$$\therefore d = 2a_1 = 2 \times 4 = 8$$

$$\therefore a_{20} = a_1 + 19d = 4 + 19 \times 8 = 156$$

03 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a ($a \neq 0$), 공차를 d 라 하면 $S_{13} = S_{26}$ 에서

$$\frac{13(2a + 12d)}{2} = \frac{26(2a + 25d)}{2}$$

$$2a + 12d = 2(2a + 25d)$$

$$2a = -38d \quad \therefore a = -19d$$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2} \\ &= \frac{n\{-38d + (n-1)d\}}{2} \\ &= \frac{n(-39d + nd)}{2} \\ &= \frac{d}{2}n(n-39) \end{aligned}$$

이므로

$$S_1 = S_{38} = -19d \rightarrow S_1 = \frac{d}{2} \times 1 \times (-38) = \frac{d}{2} \times 38 \times (-1) = S_{38}$$

$$S_2 = S_{37} = -37d \rightarrow S_2 = \frac{d}{2} \times 2 \times (-37) = \frac{d}{2} \times 37 \times (-2) = S_{37}$$

$$S_3 = S_{36} = -54d \rightarrow S_3 = \frac{d}{2} \times 3 \times (-36) = \frac{d}{2} \times 36 \times (-3) = S_{36}$$

⋮

$$S_{19} = S_{20} = -190d \rightarrow S_{19} = \frac{d}{2} \times 19 \times (-20) = \frac{d}{2} \times 20 \times (-19) = S_{20}$$

$$S_{39} = 0, S_{40} = 20d, S_{41} = 41d, \dots$$

이때 S_k ($k=1, 2, 3, \dots, n$)의 값이 같은 경우에는 집합 T_n 의 원소가 중복되므로

$$T_{19} = T_{20} = T_{21} = \dots = T_{38} = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_{19}\}$$

따라서 집합 T_n 의 원소의 개수가 19가 되도록 하는 자연수 n 의 값은

$$19, 20, 21, \dots, 38 \text{이므로 모든 자연수 } n \text{의 값의 합은}$$

$$19 + 20 + 21 + \dots + 38 = \frac{20(19+38)}{2} = 570$$

04 답 ②

조건에서 $|a_m| = 3|a_{m+3}|$ 이므로

$$a_m = 3a_{m+3} \text{ 또는 } a_m = -3a_{m+3}$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d ($d < 0$)라 하자.

(i) $a_m = 3a_{m+3}$ 일 때,

$$a_{m+3} = a_m + 3d \text{이므로 } a_m = 3(a_m + 3d)$$

$$a_m = 3a_m + 9d \quad \therefore a_m = -\frac{9}{2}d \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore a_{m+1} = -\frac{7}{2}d, a_{m+2} = -\frac{5}{2}d, a_{m+3} = -\frac{3}{2}d$$

$$\text{한편 } S_{m+2} = S_{m+1} + a_{m+2} = S_{m+1} + \left(-\frac{5}{2}d\right) > S_{m+1},$$

$$S_{m+3} = S_{m+2} + a_{m+3} = S_{m+2} + \left(-\frac{3}{2}d\right) > S_{m+2} \text{이므로}$$

$$S_{m+3} > S_{m+2} > S_{m+1}$$

즉, $S_{m+3} - S_{m+1} = 24$ 이므로

$$S_{m+3} - S_{m+1} = a_{m+2} + a_{m+3} \text{에서 } 24 = \left(-\frac{5}{2}d\right) + \left(-\frac{3}{2}d\right)$$

$$-4d = 24 \quad \therefore d = -6$$

$$\therefore a_m = -\frac{9}{2}d = -\frac{9}{2} \times (-6) = 27 \quad (\because \textcircled{1})$$

(ii) $a_m = -3a_{m+3}$ 일 때,

$$a_{m+3} = a_m + 3d \text{이므로 } a_m = -3(a_m + 3d)$$

$$a_m = -3a_m - 9d \quad \therefore a_m = -\frac{9}{4}d \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore a_{m+1} = -\frac{5}{4}d, a_{m+2} = -\frac{1}{4}d, a_{m+3} = \frac{3}{4}d$$

$$\text{한편 } S_{m+2} = S_{m+1} + a_{m+2} = S_{m+1} + \left(-\frac{1}{4}d\right) > S_{m+1},$$

$$S_{m+3} = S_{m+2} + a_{m+3} = S_{m+2} + \left(-\frac{1}{4}d + \frac{3}{4}d\right)$$

$$= S_{m+2} + \frac{1}{2}d < S_{m+2}$$

$$\text{이므로 } S_{m+2} > S_{m+1} > S_{m+3}$$

즉, $S_{m+2} - S_{m+3} = 24$ 이므로

$$S_{m+2} - S_{m+3} = -a_{m+3} \text{에서 } 24 = -\frac{3}{4}d$$

$$\therefore d = -32$$

$$\therefore a_m = -\frac{9}{4}d = -\frac{9}{4} \times (-32) = 72 \quad (\because \textcircled{2})$$

(i), (ii)에서 모든 a_m 의 값의 합은

$$27 + 72 = 99$$

05 답 ②

$A(80)$ 은 첫째항이 5, 공비가 3 이상의 자연수인 등비수열의 제 n 항이 5×3^{80} 이 되는 모든 자연수 n 의 값의 합이다.

첫째항이 5이므로 등비수열의 공비는 3의 거듭제곱이어야 한다.

이때 공비를 3^p (p 는 자연수)이라 하면 $3^{80} = (3^p)^{\frac{80}{p}}$ 이고,

$$3^{80} = (3^2)^{40} = (3^4)^{20} = (3^5)^{16} = \dots = (3^{80})^1 \text{이므로 } \frac{80}{p} \text{은 자연수이어야 한다.}$$

즉, p 는 80의 약수이어야 한다.

$$5 \times 3^{80} = 5 \times (3^p)^{\frac{80}{p}} = 5 \times (3^p)^{\frac{80}{p} + 1 - 1} \text{이므로 } 5 \times 3^{80} \text{은 첫째항이 5, 공비가 } 3^p \text{인 등비수열의 제 } \left(\frac{80}{p} + 1\right) \text{항이다.}$$

$p=1$ 일 때, $5 \times (3^1)^{80}$ 은 첫째항이 5, 공비가 3인 등비수열의 제81항이다.

$$\therefore n=81$$

$p=2$ 일 때, $5 \times (3^2)^{40}$ 은 첫째항이 5, 공비가 3^2 인 등비수열의 제41항이다.

$$\therefore n=41$$

$p=4$ 일 때, $5 \times (3^4)^{20}$ 은 첫째항이 5, 공비가 3^4 인 등비수열의 제21항이다.

$$\therefore n=21$$

$p=5$ 일 때, $5 \times (3^5)^{16}$ 은 첫째항이 5, 공비가 3^5 인 등비수열의 제17항이다.

$$\therefore n=17$$

$p=8$ 일 때, $5 \times (3^8)^{10}$ 은 첫째항이 5, 공비가 3^8 인 등비수열의 제11항이다.

$$\therefore n=11$$

$p=10$ 일 때, $5 \times (3^{10})^8$ 은 첫째항이 5, 공비가 3^{10} 인 등비수열의 제9항이다.

$$\therefore n=9$$

$p=16$ 일 때, $5 \times (3^{16})^5$ 은 첫째항이 5, 공비가 3^{16} 인 등비수열의 제6항이다.

$$\therefore n=6$$

$p=20$ 일 때, $5 \times (3^{20})^4$ 은 첫째항이 5, 공비가 3^{20} 인 등비수열의 제5항이다.

$$\therefore n=5$$

$p=40$ 일 때, $5 \times (3^{40})^2$ 은 첫째항이 5, 공비가 3^{40} 인 등비수열의 제3항이다.
 $\therefore n=3$
 $p=80$ 일 때, $5 \times (3^{80})^1$ 은 첫째항이 5, 공비가 3^{80} 인 등비수열의 제2항이다.
 $\therefore n=2$
 $\therefore A(80)=81+41+21+17+11+9+6+5+3+2=196$

06 답 28

$ab < 0$ 이므로 a 와 b 의 부호가 서로 다르다.

(i) $a < 0$, $b > 0$ 일 때,

세 수 a , b , $2ab$ 에서 a 와 $2ab$ 는 음수, b 는 양수이고, 음수 두 개와 양수 한 개가 등비수열이 되는 배열은 (음수, 양수, 음수)이므로 세 수의 배열은 a , b , $2ab$ 또는 $2ab$, b , a 이다.

이때 b 가 등비중항이므로

$$b^2 = a \times 2ab$$

$$\therefore b = 2a^2$$

즉, 세 수 a , b , $2ab$ 는 a , $2a^2$, $4a^3$ 이다.

$a < 0$, $2a^2 > 0$, $4a^3 < 0$ 이므로 세 수를 배열하여 등차수열이 되는 배열은 (음수, 음수, 양수) 또는 (양수, 음수, 음수)이다.

이때 등차중항은 음수인 a 또는 $4a^3$ 이다.

① a 가 등차중항인 경우

$$2a = 2a^2 + 4a^3, 2a^2 + a - 1 = 0$$

$$(2a-1)(a+1) = 0$$

$$\therefore a = -1 (\because a < 0)$$

② $4a^3$ 이 등차중항인 경우

$$8a^3 = a + 2a^2, 8a^2 - 2a - 1 = 0$$

$$(4a+1)(2a-1) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{1}{4} (\because a < 0)$$

$$\text{①, ②에서 } a = -1 \text{ 또는 } a = -\frac{1}{4}$$

(ii) $a > 0$, $b < 0$ 일 때,

세 수 a , b , $2ab$ 에서 a 는 양수, b 와 $2ab$ 는 음수이고, 음수 두 개와 양수 한 개가 등비수열이 되는 배열은 (음수, 양수, 음수)이므로 세 수의 배열은 b , a , $2ab$ 또는 $2ab$, a , b 이다.

이때 a 가 등비중항이므로

$$a^2 = b \times 2ab$$

$$\therefore a = 2b^2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

즉, 세 수 a , b , $2ab$ 는 $2b^2$, b , $4b^3$ 이다.

$2b^2 > 0$, $b < 0$, $4b^3 < 0$ 이므로 세 수를 배열하여 등차수열이 되는 배열은 (음수, 음수, 양수) 또는 (양수, 음수, 음수)이다.

이때 등차중항은 음수인 b 또는 $4b^3$ 이다.

① b 가 등차중항인 경우

$$2b = 2b^2 + 4b^3, 2b^2 + b - 1 = 0$$

$$(2b-1)(b+1) = 0$$

$$\therefore b = -1 (\because b < 0)$$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a = 2$

② $4b^3$ 이 등차중항인 경우

$$8b^3 = b + 2b^2, 8b^2 - 2b - 1 = 0$$

$$(4b+1)(2b-1) = 0$$

$$\therefore b = -\frac{1}{4} (\because b < 0)$$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $a = \frac{1}{8}$

$$\text{①, ②에서 } a = 2 \text{ 또는 } a = \frac{1}{8}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } a = -1 \text{ 또는 } a = -\frac{1}{4} \text{ 또는 } a = 2 \text{ 또는 } a = \frac{1}{8}$$

$$\text{따라서 } k = -1 + \left(-\frac{1}{4}\right) + 2 + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \text{이므로}$$

$$32k = 28$$

07 답 1330

원 $x^2 + y^2 = \frac{n^2}{5}$ 에 접하고 기울기가 2, y 절편이 양수인 접선의 방정식은

$$y = 2x + \frac{n}{\sqrt{5}}\sqrt{2^2+1} \quad \therefore y = 2x + n$$

이 직선이 x 축, y 축과 만나는 점은 각각

$$A_n\left(-\frac{n}{2}, 0\right), B_n(0, n)$$

점 A_n 을 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식은

$$y = -\left(x + \frac{n}{2}\right) \quad \therefore y = -x - \frac{n}{2}$$

이 직선이 y 축과 만나는 점은

$$C_n\left(0, -\frac{n}{2}\right)$$

삼각형 $A_n C_n B_n$ 과 그 내부의 점들 중 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점의 개수 a_n 은

(i) $n=1$ 일 때,

x 좌표가 0인 점의 개수는 2이므로

$$a_1 = 2$$

(ii) $n=2$ 일 때,

x 좌표가 -1 인 점의 개수는 1, x 좌표가 0인 점의 개수는 4이므로

$$a_2 = 1 + 4 = 5$$

(iii) $n=3$ 일 때,

x 좌표가 -1 인 점의 개수는 2, x 좌표가 0인 점의 개수는 5이므로

$$a_3 = 2 + 5 = 7$$

(iv) $n=4$ 일 때,

x 좌표가 -2 인 점의 개수는 1, x 좌표가 -1 인 점의 개수는 4, x 좌표가 0인 점의 개수는 7이므로

$$a_4 = 1 + 4 + 7 = 12$$

(v) $n=5$ 일 때,

x 좌표가 -2 인 점의 개수는 2, x 좌표가 -1 인 점의 개수는 5, x 좌표가 0인 점의 개수는 8이므로

$$a_5 = 2 + 5 + 8 = 15$$

(vi) $n=6$ 일 때,

x 좌표가 -3 인 점의 개수는 1, x 좌표가 -2 인 점의 개수는 4, x 좌표가 -1 인 점의 개수는 7, x 좌표가 0인 점의 개수는 10이므로

$$a_6 = 1 + 4 + 7 + 10 = 22$$

$\vdots$

따라서 n 이 홀수, 즉 $n = 2k - 1$ (k 는 자연수)일 때,

$$a_{2k-1} = 2 + 5 + 8 + \dots + (3k - 1)$$

$$= \sum_{m=1}^k (3m - 1)$$

$$= 3 \sum_{m=1}^k m - \sum_{m=1}^k 1$$

$$= 3 \times \frac{k(k+1)}{2} - k$$

$$= \frac{3}{2}k^2 + \frac{1}{2}k$$

n 이 짝수, 즉 $n=2k$ (k 는 자연수)일 때,

$$\begin{aligned} a_{2k} &= 1 + \{4+7+\cdots+(3k+1)\} \\ &= 1 + \sum_{m=1}^k (3m+1) \\ &= 1 + 3 \sum_{m=1}^k m + \sum_{m=1}^k 1 \\ &= 1 + 3 \times \frac{k(k+1)}{2} + k \\ &= \frac{3}{2}k^2 + \frac{5}{2}k + 1 \\ \therefore \sum_{n=1}^{20} a_n &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{3}{2}k^2 + \frac{1}{2}k \right) + \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{3}{2}k^2 + \frac{5}{2}k + 1 \right) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (3k^2 + 3k + 1) \\ &= 3 \sum_{k=1}^{10} k^2 + 3 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= 3 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 3 \times \frac{10 \times 11}{2} + 10 \\ &= 1330 \end{aligned}$$

08 답 ⑤

$$a_n = a + (n-1)d, \quad b_n = a + (n-1)(-3d)$$

(가)에서 $|a_1| = |b_9|$ 이므로 $|a| = |a-24d|$

$$a = a-24d \text{ 또는 } a = -a+24d$$

그런데 $d \neq 0$ 이므로 $a = -a+24d$

$$\therefore a = 12d$$

$$\therefore a_n = 12d + (n-1)d = (n+11)d,$$

$$b_n = 12d + (n-1)(-3d) = (-3n+15)d$$

이때 a 는 양수이므로 $d > 0$

즉, 수열 $\{c_n\}$ 을 $c_n = |a_n| - |b_n|$ 이라 하면 모든 자연수 n 에 대하여 a_n, b_n, c_n, S_n 의 값은 다음과 같다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	$12d$	$13d$	$14d$	$15d$	$16d$	$17d$	$18d$	$19d$	$20d$	$21d$
b_n	$12d$	$9d$	$6d$	$3d$	0	$-3d$	$-6d$	$-9d$	$-12d$	$-15d$
c_n	0	$4d$	$8d$	$12d$	$16d$	$14d$	$12d$	$10d$	$8d$	$6d$
S_n	0	$4d$	$12d$	$24d$	$40d$	$54d$	$66d$	$76d$	$84d$	$90d$

n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	$22d$	$23d$	$24d$	$25d$	$26d$	$27d$	$28d$	$29d$	$30d$	$31d$
b_n	$-18d$	$-21d$	$-24d$	$-27d$	$-30d$	$-33d$	$-36d$	$-39d$	$-42d$	$-45d$
c_n	$4d$	$2d$	0	$-2d$	$-4d$	$-6d$	$-8d$	$-10d$	$-12d$	$-14d$
S_n	$94d$	$96d$	$96d$	$94d$	$90d$	$84d$	$76d$	$66d$	$54d$	$40d$

n	21	22	23	...
a_n	$32d$	$33d$	$34d$	...
b_n	$-48d$	$-51d$	$-54d$	...
c_n	$-16d$	$-18d$	$-20d$	...
S_n	$24d$	$6d$	$-14d$	...

이때 $S_n = \sum_{k=1}^n c_k$ 의 값이 최대가 되는 n 의 값은 12 또는 13이므로

$$S_{12} = S_{13} = 96d = 144$$

$$\therefore d = \frac{3}{2}$$

따라서 $S_n \geq 0$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최댓값은 $m=22$ 이므로

$$a_m = a_{22} = 33d = \frac{99}{2}$$

09 답 ②

점 A_0 에서 점 A_1 까지 점 P 가 이동한 거리는 $\frac{1}{49}$

점 A_0 에서 점 A_2 까지 점 P 가 이동한 거리는 $\frac{1}{49} + \frac{3}{49}$

점 A_0 에서 점 A_3 까지 점 P 가 이동한 거리는 $\frac{1}{49} + \frac{3}{49} + \frac{5}{49}$

⋮

점 A_0 에서 점 A_n 까지 점 P 가 이동한 거리는

$$\begin{aligned} \frac{1}{49} + \frac{3}{49} + \frac{5}{49} + \cdots + \frac{2n-1}{49} &= \sum_{k=1}^n \frac{2k-1}{49} = \frac{2}{49} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{49} \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{2}{49} \times \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{49} \\ &= \frac{n^2}{49} = \left(\frac{n}{7} \right)^2 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

점 A_n 의 x 좌표와 y 좌표의 합은 점 P 가 점 A_0 에서 점 A_n 까지 경로를 따라 이동한 거리와 같으므로 점 A_n 이 직선 $y=x$ 위에 있으려면 점 A_0 에서 점 A_n 까지 점 P 가 이동한 거리는 짝수이어야 한다.

즉, $\left(\frac{n}{7} \right)^2$ 이 짝수이어야 하므로 $\frac{n}{7}$ 도 짝수이어야 한다.

$$\frac{n}{7} = 2m \quad (m \text{은 자연수}) \text{이라 하면 } n = 14m$$

따라서 점 A_n 중 직선 $y=x$ 위에 있는 점을 원점에서 가까운 순서대로 나열할 때 세 번째 점은 $m=3$, 즉 $n=42$ 일 때이므로 점 A_{42} 이다.

점 A_0 에서 점 A_{42} 까지 점 P 가 이동한 거리는 ①에서

$$\left(\frac{42}{7} \right)^2 = 6^2 = 36 \text{이므로 점 } A_{42} \text{의 } x \text{좌표는 } 18 \text{이다.}$$

$\therefore a = 18$ └ 점 A_{42} 의 좌표는 (18, 18)

10 답 -4

(가)에서 실수 a_k (k 는 자연수)는 x 에 대한 방정식

$$x^2 - 3x + (7-k)(k-4) = 0, \quad \text{즉 } (x-7+k)(x-k+4) = 0 \text{의 근이므로}$$

$$a_k = 7-k \text{ 또는 } a_k = k-4$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지는 다음 표의 값 중 하나의 값을 가진다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$7-n$	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
$n-4$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

(나)에서 $a_n \times a_{n+1} \leq 0$ 을 만족시키는 10 이하의 자연수 n 의 개수가 2이고,

$a_4 = 3$ 또는 $a_4 = 0$, $a_7 = 0$ 또는 $a_7 = 3$ 이므로 a_4, a_7 의 값에 따라

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 최솟값은 다음과 같다.

(i) $a_4 = a_7 = 0$ 인 경우

$$a_3a_4 = a_4a_5 = a_6a_7 = a_7a_8 = 0 \text{이므로 (나)를 만족시키지 않는다.}$$

(ii) $a_4 = 0, a_7 = 3$ 인 경우

$a_3a_4 = a_4a_5 = 0$ 에서 (나)를 만족시키므로 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최소가 되는 경우를 생각한다.

$5 \leq n \leq 10$ 에서 $a_n \times a_{n+1} > 0$ 이라면 a_n 의 부호는 모두 동일하고

$a_7 = 3 > 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최소가 되는 경우는 $a_5 = 1, a_6 = 1,$

$a_8 = 4, a_9 = 5, a_{10} = 6$ 일 때이다.

$1 \leq n \leq 3$ 에서 $a_n \times a_{n+1} > 0$ 이라면 a_n 의 부호는 모두 동일하고 $a_1 = 6$

또는 $a_1 = -3$ 이므로 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최소가 되는 경우는 $a_1 = -3,$

$a_2 = -2, a_3 = -1$ 일 때이다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$7-n$	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
$n-4$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = -3 + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 1 + 3 + 4 + 5 + 6 = 14$$

(iii) $a_4=3, a_7=0$ 인 경우

$a_6a_7=a_7a_8=0$ 에서 (나)를 만족시키므로 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최소가 되는 경우를 생각한다.

$1 \leq n \leq 6$ 에서 $a_n \times a_{n+1} > 0$ 이라면 a_n 의 부호는 모두 동일하고

$a_4=3 > 0$ 이므로 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최소가 되는 경우는 $a_1=6, a_2=5,$

$a_3=4, a_5=1, a_6=1$ 일 때이다.

$8 \leq n \leq 10$ 에서 $a_n \times a_{n+1} > 0$ 이라면 a_n 의 부호는 모두 동일하고

$a_8=-1$ 또는 $a_8=4$ 이므로 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최소가 되는 경우는

$a_8=-1, a_9=-2, a_{10}=-3$ 일 때이다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$7-n$	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
$n-4$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = 6 + 5 + 4 + 3 + 1 + 1 + 0 + (-1) + (-2) + (-3)$$

$$= 14$$

(iv) $a_4=3, a_7=3$ 인 경우

$\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최소가 되는 경우는 $1 \leq n \leq 3$ 에서 $a_n < 0$ 이고,

$8 \leq n \leq 10$ 에서 $a_n < 0$ 일 때이다.

이때 $a_3a_4 < 0, a_7a_8 < 0$ 에서 (나)를 만족시키고, $a_5=2$ 또는 $a_5=1$ 이고,

$a_6=1$ 또는 $a_6=2$ 이므로 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값이 최소가 되는 것은 $a_5=1,$

$a_6=1$ 일 때이다.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$7-n$	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
$n-4$	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

$$\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = -3 + (-2) + (-1) + 3 + 1 + 1 + 3 + (-1) + (-2)$$

$$+ (-3)$$

$$= -4$$

(i)~(iv)에서 $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 최솟값은 -4 이다.

11 답 ⑤

(나)에서

a_n 이 홀수이고 a_{n+1} 이 홀수이면 a_{n+2} 는 짝수

a_n 이 홀수이고 a_{n+1} 이 짝수이면 a_{n+2} 는 홀수

a_n 이 짝수이고 a_{n+1} 이 홀수이면 a_{n+2} 는 홀수

a_n 이 짝수이고 a_{n+1} 이 짝수이면 a_{n+2} 는 짝수이다.

(가)에서 a_6 이 짝수이므로 a_4 와 a_5 는 모두 홀수이거나 모두 짝수이어야 한다.

(i) a_4 와 a_5 가 모두 홀수인 경우

a_3 은 짝수이고, a_2 는 홀수, a_1 은 홀수이다.

$a_1=2k-1, a_2=2l-1$ (k, l 은 자연수)이라 하면 (나)에서

$a_1 \times a_2$ 는 홀수이므로 $a_3=2k+2l-2$

$a_2 \times a_3$ 은 짝수이므로 $a_4=2k+4l-7$

$a_3 \times a_4$ 는 짝수이므로 $a_5=4k+6l-13$

$a_4 \times a_5$ 는 홀수이므로 $a_6=6k+10l-20$

$6k+10l-20=74$ 에서 $3k+5l=47$ 이므로 가능한 k, l 의 순서쌍

(k, l) 은 $(4, 7), (9, 4), (14, 1)$

따라서 $a_1=2k-1$ 이므로 가능한 a_1 의 값은 7, 17, 27이다.

(ii) a_4 와 a_5 가 모두 짝수인 경우

a_3 은 짝수이고, a_2 는 짝수, a_1 은 짝수이다.

$a_1=2p, a_2=2q$ (p, q 는 자연수)라 하면 (나)에서

$a_1 \times a_2$ 는 짝수이므로 $a_3=2p+2q-4$

$a_2 \times a_3$ 은 짝수이므로 $a_4=2p+4q-8$

$a_3 \times a_4$ 는 짝수이므로 $a_5=4p+6q-16$

$a_4 \times a_5$ 는 짝수이므로 $a_6=6p+10q-28$

$6p+10q-28=74$ 에서 $3p+5q=51$ 이므로 가능한 p, q 의 순서쌍

(p, q) 는 $(2, 9), (7, 6), (12, 3)$

따라서 $a_1=2p$ 이므로 가능한 a_1 의 값은 4, 14, 24이다.

(i), (ii)에서 가능한 모든 a_1 의 값의 합은

$$7 + 17 + 27 + 4 + 14 + 24 = 93$$

12 답 ③

두 점 P_1, Q_1 의 y 좌표는 y_1 로 같다.

두 점 A 와 P_1 의 x 좌표가 같으므로

$$3^{81} = 27^{y_1}, 3^{81} = 3^{3y_1}$$

$$3y_1 = 81 \quad \therefore y_1 = 27$$

같은 방법으로 모든 자연수 n 에 대하여 두 점 P_n, Q_n 의 y 좌표는 y_n 으로

서로 같고, 두 점 Q_n, P_{n+1} 의 x 좌표는 같으므로

$$3^{y_n} = 27^{y_{n+1}}, 3^{y_n} = 3^{3y_{n+1}} \quad \therefore y_{n+1} = \frac{1}{3}y_n$$

따라서 수열 $\{y_n\}$ 은 첫째항이 27, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로

$$y_n = 27 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 3^3 \times 3^{-n+1} = 3^{-n+4}$$

한편 $y_n < \frac{1}{k}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값이 8이므로

$$y_7 \geq \frac{1}{k} \text{이고 } y_8 < \frac{1}{k} \text{이어야 한다.}$$

$$y_7 \geq \frac{1}{k} \text{에서 } 3^{-3} \geq \frac{1}{k}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{27} \geq \frac{1}{k} \text{이므로 } k \geq 27 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$y_8 < \frac{1}{k} \text{에서 } 3^{-4} < \frac{1}{k}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{81} < \frac{1}{k} \text{이므로 } k < 81 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $27 \leq k < 81$ 이므로 조건을 만족시키는 자연수 k 의 개수는

$$81 - 27 = 54$$

13 답 ④

(나)의 $a_{2n-1} \times a_{2n} = 1$ 에서 $a_{2n} = \frac{1}{a_{2n-1}}$ 이고,

$a_{2n} + a_{2n+1} = 1$ 에서 $a_{2n+1} = 1 - a_{2n}$ 이므로

$$a_2 = \frac{1}{a_1}$$

$$a_3 = 1 - a_2 = \frac{a_1 - 1}{a_1}$$

$$a_4 = \frac{1}{a_3} = \frac{a_1}{a_1 - 1}$$

$$a_5 = 1 - a_4 = -\frac{1}{a_1 - 1}$$

$$a_6 = \frac{1}{a_5} = 1 - a_1$$

$$a_7 = 1 - a_6 = a_1$$

$$a_8 = \frac{1}{a_7} = \frac{1}{a_1} = a_2$$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+6} = a_n$ 을 만족시킨다.

이때 $a_n - |a_n| = \begin{cases} 0 & (a_n \geq 0) \\ 2a_n & (a_n < 0) \end{cases}$ 이므로 $\sum_{n=1}^{15} (a_n - |a_n|) = -10$ 이 되기

위해서는 $a_1, a_2, \dots, a_{15}$ 중에서 음수인 모든 항의 합이 -5 이어야 한다.

(i) $0 < a_1 < 1$ 일 때,

$$a_2 > 0, a_3 < 0, a_4 < 0, a_5 > 0, a_6 > 0 \text{이므로}$$

$$a_3 + a_4 + a_9 + a_{10} + a_{15} = -5$$

$$a_3 = s \text{라 하면}$$

$$a_3 + a_4 + a_9 + a_{10} + a_{15} = s + \frac{1}{s} + s + \frac{1}{s} + s = 3s + \frac{2}{s} = -5$$

$$\text{즉, } 3s^2 + 5s + 2 = 0 \text{에서}$$

$$(s+1)(3s+2) = 0 \quad \therefore s = -1 \text{ 또는 } s = -\frac{2}{3}$$

$$s = \frac{a_1 - 1}{a_1} \text{이므로 } a_1 = \frac{1}{2} \text{ 또는 } a_1 = \frac{3}{5}$$

(ii) $a_1 > 1$ 일 때,

$$a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_5 < 0, a_6 < 0 \text{이므로}$$

$$a_5 + a_6 + a_{11} + a_{12} = -5$$

$$a_5 = t \text{라 하면}$$

$$a_5 + a_6 + a_{11} + a_{12} = t + \frac{1}{t} + t + \frac{1}{t} = 2t + \frac{2}{t} = -5$$

$$\text{즉, } 2t^2 + 5t + 2 = 0 \text{에서}$$

$$(t+2)(2t+1) = 0 \quad \therefore t = -2 \text{ 또는 } t = -\frac{1}{2}$$

$$t = -\frac{1}{a_1 - 1} \text{이므로 } a_1 = \frac{3}{2} \text{ 또는 } a_1 = 3$$

(i), (ii)에서 모든 a_1 의 값의 합은 $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{3}{2} + 3 = \frac{28}{5}$

따라서 $p=5, q=28$ 이므로

$$p+q=33$$

14 답 24

(나)에서 $|a_4| = |a_6|$ 이므로 a_4 의 값에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다. $\rightarrow |a_3| \neq |a_5|, |a_2| \neq |a_4|, |a_1| \neq |a_5|$

(i) $a_4 = 4k$ (k 는 정수)일 때,

$$a_4 = 0 \text{ 또는 } |a_4| \text{는 짝수이므로 } a_5 = \frac{1}{2}a_4 = 2k$$

$$a_5 = 0 \text{ 또는 } |a_5| \text{는 짝수이므로 } a_6 = \frac{1}{2}a_5 = k$$

$$|a_4| = |a_6| \text{에서 } |4k| = |k| \quad \therefore k = 0$$

$$\therefore a_4 = 0, a_5 = 0, a_6 = 0$$

① $|a_3|$ 이 홀수일 때,

$$a_4 = a_3 - 9 \text{이므로 } 0 = a_3 - 9 \quad \therefore a_3 = 9$$

이때 $|a_3|$ 이 홀수이므로 $a_2 = 0$ 또는 $|a_2|$ 는 짝수이다.

$\rightarrow |a_2|$ 가 홀수인 경우 $a_3 = a_2 - 9$ 이므로 $a_3 = 0$ 또는 $|a_3|$ 은 짝수가 된다.

$$\text{즉, } a_3 = \frac{1}{2}a_2 \text{이므로 } 9 = \frac{1}{2}a_2 \quad \therefore a_2 = 18$$

② $|a_1|$ 이 홀수일 때,

$$a_2 = a_1 - 9 \text{이므로 } 18 = a_1 - 9 \quad \therefore a_1 = 27$$

③ $a_1 = 0$ 또는 $|a_1|$ 이 짝수일 때,

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 \text{이므로 } 18 = \frac{1}{2}a_1 \quad \therefore a_1 = 36$$

④ $a_3 = 0$ 또는 $|a_3|$ 이 짝수일 때,

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 \text{이므로 } 0 = \frac{1}{2}a_3 \quad \therefore a_3 = 0$$

이는 (나)의 $|a_3| \neq |a_5|$ 를 만족시키지 않는다.

(ii) $a_4 = 4k + 1$ (k 는 정수)일 때,

$$|a_4| \text{는 홀수이므로 } a_5 = a_4 - 9 = 4k - 8$$

$$a_5 = 0 \text{ 또는 } |a_5| \text{는 짝수이므로 } a_6 = \frac{1}{2}a_5 = 2k - 4$$

$$|a_4| = |a_6| \text{에서 } |4k + 1| = |2k - 4|$$

이를 만족시키는 정수 k 는 존재하지 않는다.

(iii) $a_4 = 4k + 2$ (k 는 정수)일 때,

$$|a_4| \text{는 짝수이므로 } a_5 = \frac{1}{2}a_4 = 2k + 1$$

$$|a_5| \text{는 홀수이므로 } a_6 = a_5 - 9 = 2k - 8$$

$$|a_4| = |a_6| \text{에서 } |4k + 2| = |2k - 8|$$

$$4k + 2 = \pm(2k - 8) \quad \therefore k = -5 \text{ 또는 } k = 1$$

① $k = -5$ 일 때,

$$a_4 = -18, a_5 = -9, a_6 = -18$$

② $|a_3|$ 이 홀수일 때,

$$a_4 = a_3 - 9 \text{이므로 } -18 = a_3 - 9 \quad \therefore a_3 = -9$$

이는 (나)의 $|a_3| \neq |a_5|$ 를 만족시키지 않는다.

③ $a_3 = 0$ 또는 $|a_3|$ 이 짝수일 때,

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 \text{이므로 } -18 = \frac{1}{2}a_3 \quad \therefore a_3 = -36$$

④ $|a_2|$ 가 홀수일 때,

$$a_3 = a_2 - 9 \text{이므로 } -36 = a_2 - 9 \quad \therefore a_2 = -27$$

이때 $|a_2|$ 가 홀수이므로 $a_1 = 0$ 또는 $|a_1|$ 은 짝수이다.

$$\text{즉, } a_2 = \frac{1}{2}a_1 \text{이므로}$$

$$-27 = \frac{1}{2}a_1 \quad \therefore a_1 = -54$$

⑤ $a_2 = 0$ 또는 $|a_2|$ 가 짝수일 때,

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 \text{이므로 } -36 = \frac{1}{2}a_2 \quad \therefore a_2 = -72$$

⑥ $|a_1|$ 이 홀수일 때,

$$a_2 = a_1 - 9 \text{이므로 } -72 = a_1 - 9 \quad \therefore a_1 = -63$$

⑦ $a_1 = 0$ 또는 $|a_1|$ 이 짝수일 때,

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 \text{이므로 } -72 = \frac{1}{2}a_1 \quad \therefore a_1 = -144$$

⑧ $k = 1$ 일 때,

$$a_4 = 6, a_5 = 3, a_6 = -6$$

⑨ $|a_3|$ 이 홀수일 때,

$$a_4 = a_3 - 9 \text{이므로 } 6 = a_3 - 9 \quad \therefore a_3 = 15$$

이때 $|a_3|$ 이 홀수이므로 $a_2 = 0$ 또는 $|a_2|$ 는 짝수이다.

$$\text{즉, } a_3 = \frac{1}{2}a_2 \text{이므로 } 15 = \frac{1}{2}a_2 \quad \therefore a_2 = 30$$

⑩ $|a_1|$ 이 홀수일 때,

$$a_2 = a_1 - 9 \text{이므로 } 30 = a_1 - 9 \quad \therefore a_1 = 39$$

⑪ $a_1 = 0$ 또는 $|a_1|$ 이 짝수일 때,

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 \text{이므로 } 30 = \frac{1}{2}a_1 \quad \therefore a_1 = 60$$

⑫ $a_3 = 0$ 또는 $|a_3|$ 이 짝수일 때,

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 \text{이므로 } 6 = \frac{1}{2}a_3 \quad \therefore a_3 = 12$$

① $|a_2|$ 가 홀수일 때,

$$a_3 = a_2 - 9 \text{이므로 } 12 = a_2 - 9 \quad \therefore a_2 = 21$$

이때 $|a_2|$ 가 홀수이므로 $a_1 = 0$ 또는 $|a_1|$ 은 짝수이다.

$$\text{즉, } a_2 = \frac{1}{2}a_1 \text{이므로 } 21 = \frac{1}{2}a_1 \quad \therefore a_1 = 42$$

② $a_2 = 0$ 또는 $|a_2|$ 가 짝수일 때,

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 \text{이므로 } 12 = \frac{1}{2}a_2 \quad \therefore a_2 = 24$$

㉠ $|a_1|$ 이 홀수일 때,

$$a_2 = a_1 - 9 \text{이므로 } 24 = a_1 - 9 \quad \therefore a_1 = 33$$

㉡ $a_1 = 0$ 또는 $|a_1|$ 이 짝수일 때,

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 \text{이므로 } 24 = \frac{1}{2}a_1 \quad \therefore a_1 = 48$$

(iv) $a_4 = 4k + 3$ (k 는 정수)일 때,

$$|a_4| \text{는 홀수이므로 } a_5 = a_4 - 9 = 4k - 6$$

$$|a_5| \text{는 짝수이므로 } a_6 = \frac{1}{2}a_5 = 2k - 3$$

$$|a_4| = |a_6| \text{에서 } |4k + 3| = |2k - 3|$$

$$4k + 3 = \pm(2k - 3)$$

$$\therefore k = -3 \text{ 또는 } k = 0$$

① $k = -3$ 일 때,

$$a_4 = -9, a_5 = -18, a_6 = -9$$

이때 $|a_4|$ 가 홀수이므로 $a_3 = 0$ 또는 $|a_3|$ 은 짝수이다.

$$\text{즉, } a_4 = \frac{1}{2}a_3 \text{이므로}$$

$$-9 = \frac{1}{2}a_3 \quad \therefore a_3 = -18$$

이는 ㉡의 $|a_3| \neq |a_5|$ 를 만족시키지 않는다.

② $k = 0$ 일 때,

$$a_4 = 3, a_5 = -6, a_6 = -3$$

이때 $|a_4|$ 가 홀수이므로 $a_3 = 0$ 또는 $|a_3|$ 은 짝수이다.

$$\text{즉, } a_4 = \frac{1}{2}a_3 \text{이므로}$$

$$3 = \frac{1}{2}a_3 \quad \therefore a_3 = 6$$

이는 ㉡의 $|a_3| \neq |a_5|$ 를 만족시키지 않는다.

(i)~(iv)에서

$$a_1 = 27 \text{ 또는 } a_1 = 36 \text{ 또는 } a_1 = -54 \text{ 또는 } a_1 = -63 \text{ 또는 } a_1 = -144$$

$$\text{또는 } a_1 = 39 \text{ 또는 } a_1 = 60 \text{ 또는 } a_1 = 42 \text{ 또는 } a_1 = 33 \text{ 또는 } a_1 = 48$$

따라서 a_1 의 값의 합은

$$27 + 36 + (-54) + (-63) + (-144) + 39 + 60 + 42 + 33 + 48 = 24$$

ME MO

MEMO