

확률과 통계



수학의 신



정답과 해설

바른 정답

01

여러 가지 순열

STEP 1 핵심 문제 | 18~19쪽

01 ② 02 5 03 60 04 ⑤ 05 115 06 ③
07 23 08 840 09 ⑤ 10 ⑤ 11 115 12 ④

STEP 2 고난도 문제 | 20~24쪽

01 295 02 210 03 40 04 50 05 ④ 06 127
07 ⑤ 08 97 09 190 10 31 11 45 12 ②
13 ④ 14 43 15 ① 16 161 17 580 18 60
19 38 20 ③ 21 ① 22 ③ 23 ⑤ 24 224
25 ②

STEP 3 최고난도 문제 | 25~27쪽

01 ② 02 188 03 342 04 ① 05 20 06 ②
07 720 08 119 09 ② 10 132 11 40

02

중복조합과 이항정리

STEP 1 핵심 문제 | 28~29쪽

01 ③ 02 20 03 ③ 04 117 05 21 06 ⑤
07 100 08 120 09 ④ 10 ④ 11 ① 12 18
13 660

STEP 2 고난도 문제 | 30~34쪽

01 ① 02 ③ 03 96 04 55 05 96 06 114
07 162 08 ④ 09 49 10 135 11 69 12 168
13 398 14 120 15 ④ 16 440 17 ③ 18 25
19 35 20 126 21 ② 22 198 23 90 24 14
25 6 26 ④ 27 ③ 28 2

STEP 3 최고난도 문제 | 35~37쪽

01 36 02 730 03 ② 04 93 05 720 06 108
07 75 08 ③ 09 330 10 60 11 852

기출 변형 문제로 **단원 마스터**

| 38~39쪽

01 1020 02 96 03 675 04 2160 05 80 06 133
07 108 08 2074

03

확률의 뜻과 활용

STEP 1 핵심 문제 | 42~43쪽

01 233 02 6개 03 ⑤ 04 ② 05 6 06 $\frac{2}{35}$
07 ⑤ 08 $\frac{9}{16}$ 09 $\frac{2}{9}$ 10 ③ 11 ④ 12 $\frac{71}{84}$

STEP 2 고난도 문제 | 44~48쪽

01 ④ 02 $\frac{11}{27}$ 03 $\frac{\pi}{16}$ 04 ③ 05 $\frac{75}{1024}$ 06 ②
07 ④ 08 ⑤ 09 $\frac{1}{7}$ 10 $\frac{23}{108}$ 11 $\frac{3}{5}$ 12 $\frac{16}{105}$
13 51 14 $\frac{4}{11}$ 15 $\frac{5}{33}$ 16 ④ 17 ③ 18 ③
19 ② 20 $\frac{89}{91}$ 21 ② 22 $\frac{35}{36}$ 23 47 24 $\frac{66}{91}$
25 ③ 26 ⑤

STEP 3 최고난도 문제 | 49~51쪽

01 ② 02 61 03 $\frac{23}{525}$ 04 ② 05 ③ 06 37
07 ② 08 $\frac{9}{25}$ 09 ⑤

04

조건부확률

STEP 1 핵심 문제 | 52~53쪽

01 $\frac{9}{40}$ 02 ② 03 $\frac{4}{35}$ 04 $\frac{5}{54}$ 05 ④ 06 $\frac{7}{46}$
07 $\frac{3}{14}$ 08 $\frac{19}{25}$ 09 ④ 10 $\frac{9}{17}$ 11 62 12 $\frac{4}{9}$

STEP 2 고난도 문제 | 54~58쪽

01 $\frac{32}{81}$ 02 ① 03 9 04 $\frac{20}{81}$ 05 $\frac{16}{25}$ 06 $\frac{11}{32}$
07 ⑤ 08 $\frac{19}{27}$ 09 131 10 ③ 11 ② 12 8
13 ⑤ 14 ③ 15 19 16 $\frac{8}{81}$ 17 ③ 18 25
19 49 20 $\frac{1}{3}$ 21 21

STEP 3 **최고난도** 문제 | 59~61쪽

01 ① 02 ② 03 $\frac{3}{7}$ 04 $\frac{11}{28}$ 05 $\frac{20}{61}$ 06 ④
07 ④ 08 ④ 09 61

기출 변형 문제로 **단원 마스터** | 62~63쪽

01 ② 02 $\frac{15}{56}$ 03 ① 04 $\frac{18}{25}$ 05 $\frac{13}{25}$ 06 127
07 ④

05 이산확률변수와 이항분포

STEP 1 **핵심** 문제 | 66~67쪽

01 ⑤ 02 2 03 ④ 04 ② 05 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 06 ③
07 35 08 ① 09 20 10 $67\sqrt{3}$ 11 ④ 12 11

STEP 2 **고난도** 문제 | 68~72쪽

01 ⑤ 02 ⑤ 03 $\frac{3}{4}$ 04 ② 05 37 06 $\frac{7}{10}$
07 $\frac{12}{7}$ 08 $\frac{4}{3}$ 09 78 10 5 11 ③ 12 5
13 27 14 10 15 154 16 117 17 $\frac{45}{2}$ 18 ②
19 ② 20 $\frac{8}{5}$ 21 ③ 22 15 23 ③ 24 24
25 300 26 ①

STEP 3 **최고난도** 문제 | 73~75쪽

01 ③ 02 3 03 25 04 ③ 05 7 06 $\frac{1}{5}$
07 ② 08 ① 09 ① 10 ② 11 30

06 연속확률변수와 정규분포

STEP 1 **핵심** 문제 | 76~77쪽

01 ② 02 ④ 03 $\frac{1}{4}$ 04 ③ 05 ⑤ 06 19
07 ① 08 ④ 09 $\neg, \cup, \cap$ 10 ② 11 ③

STEP 2 **고난도** 문제 | 78~83쪽

01 $\frac{3}{4}$ 02 $\frac{3}{2}$ 03 $\frac{68}{45}$ 04 $\neg, \cup, \cap$ 05 24
06 35 07 19 08 154 09 ④ 10 ① 11 ②
12 ② 13 $\frac{3}{2}$ 14 25 15 70 16 ② 17 ⑤
18 32 19 ⑤ 20 ④ 21 404명 22 80 23 ③
24 994 25 ③ 26 159

STEP 3 **최고난도** 문제 | 84~85쪽

01 $\frac{11}{4}$ 02 $\frac{5}{16}$ 03 ⑤ 04 987 05 673 06 ③
07 ②

07 통계적 추정

STEP 1 **핵심** 문제 | 86~87쪽

01 $\frac{13}{64}$ 02 11 03 ③ 04 ⑤ 05 0.1587 06 106
07 ③ 08 159 09 25 10 ③ 11 625 12 81

STEP 2 **고난도** 문제 | 88~93쪽

01 ② 02 $\frac{32}{3}$ 03 ① 04 ① 05 24 06 ③
07 ④ 08 606 09 ⑤ 10 ③ 11 16 12 0.07
13 ② 14 0.001 15 ③ 16 ② 17 ② 18 ④
19 ⑤ 20 356 21 ③ 22 64 23 ③ 24 ⑤

STEP 3 **최고난도** 문제 | 94쪽

01 ⑤ 02 472500원 03 125

기출 변형 문제로 **단원 마스터** | 95~98쪽

01 ③ 02 36 03 $\frac{32}{3}$ 04 $\frac{29}{81}$ 05 3750 06 105
07 ④ 08 520 09 815 10 948 11 ① 12 ③
13 ②

STEP 1 핵심 문제

| 18~19쪽

01 ②	02 5	03 60	04 ⑤	05 115	06 ③
07 23	08 840	09 ⑤	10 ⑤	11 115	12 ④

01 답 ②

전체집합 U 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 1, 3은 집합 $A \cap B$ 의 원소이고, 2, 4, 5, 6은 각각 세 집합 $A-B$, $B-A$, $(A \cup B)^c$ 중 어느 한 집합의 원소이다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 세 집합에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

02 답 5

깃발을 1번, 2번, 3번, ..., n 번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 ${}_3\Pi_1$, ${}_3\Pi_2$, ${}_3\Pi_3$, ..., ${}_3\Pi_n$ 이므로 깃발을 1번 이상 n 번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 서로 다른 신호의 개수는

$${}_3\Pi_1 + {}_3\Pi_2 + {}_3\Pi_3 + \cdots + {}_3\Pi_n = 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n$$

$$n=4일 때, 3+3^2+3^3+3^4=120$$

$$n=5일 때, 3+3^2+3^3+3^4+3^5=363$$

따라서 신호가 300개 이상이 되도록 하는 n 의 최솟값은 5이다.

03 답 60

3, 6, 9를 제외한 일곱 개의 숫자 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8을 중복을 허용하여 만들 수 있는 100 이하의 수는

(i) 한 자리의 수

0을 제외한 6개

(ii) 두 자리의 수

십의 자리에 0이 올 수 없으므로

$$6 \times {}_7\Pi_1 = 6 \times 7 = 42(\text{개})$$

(iii) 세 자리의 수

100뿐이므로 1개

따라서 100 이하의 수 중에서 3, 6, 9가 들어 있는 수는

$$100 - (6 + 42 + 1) = 51(\text{개})$$

이 중에서 3, 6, 9가 두 번 들어 있는 수는

$${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9(\text{개})$$

따라서 박수를 치는 횟수는

$$(51 - 9) + 9 \times 2 = 60$$

↳ 3, 6, 9가 한 번 들어 있는 수의 개수

다른 풀이

구하는 횟수는 1부터 100까지의 수를 배열하였을 때 숫자 3, 6, 9의 개수의 합과 같다.

즉, 0을 00에, 1을 01에, 2를 02에, ..., 9를 09에 대응시킨 후 00, 01, 02, ..., 99를 배열하였을 때 숫자 3, 6, 9의 개수의 합과 같다.

00부터 99까지의 수는 모두 100개이므로 수 100개를 이루는 숫자는

$$100 \times 2 = 200(\text{개})\text{이다.}$$

↳ 각 수를 이루는 숫자가 모두 2개이다.

200개의 숫자에 0부터 9까지의 숫자가 각각 같은 개수만큼 들어 있으므로 각 숫자는 20개씩 들어 있다.

따라서 숫자 3, 6, 9의 개수의 합은 $20 \times 3 = 60$ 이므로 박수를 치는 횟수는 60이다.

참고

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

↳ 예를 들어 숫자 9의 개수는 20개이다.

04 답 ⑤

$f(1)+f(2)=4$ 를 만족시키는 경우는 $f(1)=1, f(2)=3$ 또는

$f(1)=f(2)=2$ 또는 $f(1)=3, f(2)=1$ 의 3가지이다.

(i) $f(1)=1, f(2)=3$ 또는 $f(1)=3, f(2)=1$ 인 경우

$f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3 = 4^3 = 64$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$2 \times 64 = 128$$

(ii) $f(1)=f(2)=2$ 인 경우

$f(3), f(4), f(5)$ 의 값 중 적어도 하나는 1이어야 하므로 $f(3),$

$f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수에서 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수를 뺀 것과 같다.

따라서 함수 f 의 개수는

$${}_4\Pi_3 - {}_3\Pi_3 = 4^3 - 3^3 = 64 - 27 = 37$$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$128 + 37 = 165$$

05 답 115

구하는 모든 자연수의 개수는 숫자 0, 1, 2 중에서 중복을 허용하여 5개를 선택한 후 일렬로 배열하여 만든 모든 다섯 자리의 자연수의 개수에서 숫자 0 또는 1을 선택하지 않고 만든 자연수의 개수를 뺀 것과 같다.

(i) 0, 1, 2 중에서 중복을 허용하여 5개를 선택한 후 일렬로 배열하여 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1 또는 2이므로 경우의 수는

$$2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

남은 네 자리의 수를 정하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}에서 2 \times 81 = 162$$

(ii) 숫자 0을 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

1, 2의 2개에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$$

(iii) 숫자 1을 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우

만의 자리에 올 수 있는 숫자는 2뿐이므로 경우의 수는

$$1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

남은 네 자리의 수를 정하는 경우의 수는 0, 2의 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}, \textcircled{4}에서 1 \times 16 = 16$$

- (iv) 숫자 0, 1을 모두 선택하지 않고 다섯 자리의 자연수를 만드는 경우
22222의 1개
(i)~(iv)에서 구하는 자연수의 개수는
 $162 - (32 + 16 - 1) = 115$

06 답 ③

$108 = 2^2 \times 3^3$ 이므로 조건을 만족시키는 a, b, c, d 는 그중 2개의 수가 서로 같거나 3개의 수가 서로 같아야 한다.

(i) 2개의 수가 서로 같은 경우

$108 = 2 \times 2 \times 3 \times 9 = 3 \times 3 \times 2 \times 6 = 6 \times 6 \times 1 \times 3$ 이므로 2개의 수가 서로 같은 경우는 2, 2, 3, 9 또는 3, 3, 2, 6 또는 6, 6, 1, 3이다.
이 각각에 대하여 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 곱해진 4개의 수를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$3 \times 12 = 36$$

(ii) 3개의 수가 서로 같은 경우

$108 = 3 \times 3 \times 3 \times 4$ 이므로 3개의 수가 서로 같은 경우는

3, 3, 3, 4

따라서 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 3, 3, 3, 4를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$36 + 4 = 40$$

07 답 23

세 계단을 올라가는 횟수에 따라 분류하면 다음과 같다.

(i) 세 계단을 올라가는 횟수가 0인 경우

① 한 계단씩 6번 올라가는 경우의 수는 1

② 한 계단씩 4번, 두 계단씩 1번 올라가는 경우의 수는 1, 1, 1, 1, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

③ 한 계단씩 2번, 두 계단씩 2번 올라가는 경우의 수는 1, 1, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

④ 두 계단씩 3번 올라가는 경우의 수는 1

①~④에서 그 방법의 수는 $1 + 5 + 6 + 1 = 13$

(ii) 세 계단을 올라가는 횟수가 1인 경우

① 한 계단씩 3번, 세 계단씩 1번 올라가는 경우의 수는 1, 1, 1, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

② 한 계단씩 1번, 두 계단씩 1번, 세 계단씩 1번 올라가는 경우의 수는 1, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$3! = 6$$

①, ②에서 그 방법의 수는 $4 + 6 = 10$

(i), (ii)에서 구하는 방법의 수는

$$13 + 10 = 23$$

08 답 840

제1행의 각 칸에 문자 a, a, a, b, b, b, c 를 하나씩 배열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{3! \times 3!} = 140$$

이때 a, a, a 밑에는 b, b, b 를 배열하거나 b, b, c 를 배열할 수 있다.

(i) a, a, a 밑에 b, b, b 를 배열하는 경우

a	a	a	b	b	b	c
b	b	b				a

b, b, b 를 배열하는 경우의 수는 1

c 밑에는 a 를 배열해야 하므로 경우의 수는 1

나머지 세 칸에 a, a, c 를 배열해야 하므로 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} = 3$

따라서 그 경우의 수는 $1 \times 1 \times 3 = 3$

(ii) a, a, a 밑에 b, b, c 를 배열하는 경우

a	a	a	b	b	b	c
b	b	c				b

b, b, c 를 배열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} = 3$

c 밑에는 b 를 배열해야 하므로 경우의 수는 1

나머지 세 칸에 a, a, a 를 배열해야 하므로 경우의 수는 1

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 1 \times 1 = 3$

(i), (ii)에서 제2행에 배열하는 경우의 수는 $3 + 3 = 6$

따라서 구하는 경우의 수는

$$140 \times 6 = 840$$

09 답 ⑤

이웃하는 두 장의 카드에 적힌 수의 곱이 모두 1 이하가 되려면 2의 옆에는 0이 와야 하고, 1의 옆에는 0 또는 1이 와야 한다.

즉, 0, 0, 0을 일렬로 배열한 다음 그 사이사이와 양 끝의 네 자리 중 두 자리에 2를 넣고 남은 두 자리에 1을 넣거나, 네 자리 중 두 자리에 2를 넣고 남은 두 자리 중 한 자리에 1을 같이 넣으면 된다.

(i) 네 자리 중 두 자리에 2를 넣고 남은 두 자리에 1을 넣는 경우

1, 1, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

(ii) 네 자리 중 두 자리에 2를 넣고 남은 두 자리 중 한 자리에 1을 같이 넣는 경우

네 자리 중 두 자리에 2를 넣는 경우의 수는 ${}_4C_2 = 6$

남은 두 자리 중 한 자리에 1을 같이 넣는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$

따라서 그 경우의 수는 $6 \times 2 = 12$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$6 + 12 = 18$$

10 답 ⑤

1, 3, 5와 2, 4의 순서가 각각 정해져 있으므로 1, 3, 5를 모두 A로, 2, 4를 모두 B로 생각하여 A, B, A, B, A, 6을 일렬로 배열한 후 첫 번째 A는 1로, 두 번째 A는 3으로, 세 번째 A는 5로 바꾸고, 첫 번째 B는 2로, 두 번째 B는 4로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

11 답 115

그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

A → P → B 또는 A → Q → B
또는 A → R → B

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{4! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 15 \times 6 = 90$$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{5!} \times \frac{4!}{3!} = 6 \times 4 = 24$$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

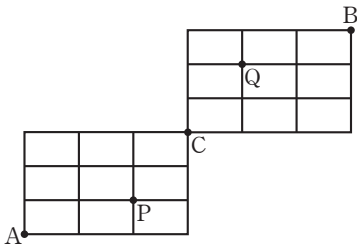
1

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$90 + 24 + 1 = 115$$

12 답 ④

그림과 같이 지점 C를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는 항상 C 지점을 지난다.



A 지점에서 P 지점을 지나 C 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 3 \times 3 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

C 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

C 지점에서 Q 지점을 지나 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 3 \times 3 = 9$$

따라서 C 지점에서 B 지점까지 Q 지점을 지나지 않고 최단 거리로 가는 경우의 수는

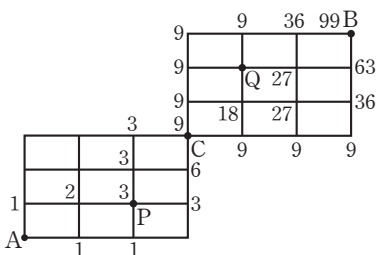
$$20 - 9 = 11 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 구하는 경우의 수는

$$9 \times 11 = 99$$

다른 풀이

각 지점까지 오는 경우의 수를 아래쪽에서 오는 경우와 왼쪽에서 오는 경우의 더하여 나타내면 그림과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는 99

STEP 2 고난도 문제

| 20~24쪽

01 295	02 210	03 40	04 50	05 ④	06 127
07 ⑤	08 97	09 190	10 31	11 45	12 ②
13 ④	14 43	15 ①	16 161	17 580	18 60
19 38	20 ③	21 ①	22 ③	23 ⑤	24 224
25 ②					

01 답 295

$f(1) \times f(2) + f(3)$ 의 값이 짝수이려면 $f(1) \times f(2)$, $f(3)$ 의 값이 모두 짝수이거나 $f(1) \times f(2)$, $f(3)$ 의 값이 모두 홀수이어야 한다.

(i) $f(1) \times f(2)$, $f(3)$ 의 값이 모두 짝수일 때,

$f(1) \times f(2)$ 의 값이 짝수이므로 $f(1)$, $f(2)$ 의 값 중 적어도 하나는 짝수이어야 한다.

$f(1)$, $f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같고, $f(1)$, $f(2)$ 의 값이 모두 홀수인 경우의 수는 1, 3, 5 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 $f(1)$, $f(2)$ 의 값 중 적어도 하나가 짝수인 경우의 수는

$${}_5\Pi_2 - {}_3\Pi_2 = 5^2 - 3^2 = 16$$

$f(3)$ 의 값이 될 수 있는 수는 2, 4의 2가지

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

따라서 함수 f 의 개수는 $16 \times 2 \times 5 = 160$

(ii) $f(1) \times f(2)$, $f(3)$ 의 값이 모두 홀수일 때,

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 의 값이 모두 홀수이어야 한다.

이때 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 3, 5 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

$f(4)$ 의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

따라서 함수 f 의 개수는 $27 \times 5 = 135$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$160 + 135 = 295$$

02 답 210

9개의 공을 세 상자 A, B, C에 3개씩 나누어 담으려면 세 상자 A, B, C에 자연수가 적혀 있는 공을 각각 3개 이하로 넣고, 자연수가 적혀 있는 공이 3개 미만으로 들어간 상자에는 숫자가 적혀 있지 않은 공을 넣어 3개를 채우면 된다.

즉, 구하는 경우의 수는 세 상자 A, B, C에 자연수가 적혀 있는 공을 각각 3개 이하로 넣는 경우의 수와 같으므로 세 상자에 5개의 공을 나누어 담는 경우의 수에서 한 상자에 3개보다 많이 들어가는 경우의 수를 빼면 된다.

자연수가 적혀 있는 공 5개를 세 상자 A, B, C에 넣는 경우의 수는 3개의 상자에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_5 = 3^5 = 243$$

자연수가 적혀 있는 공 4개가 한 상자에 들어가는 경우의 수는

$${}_5C_4 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 = {}_5C_1 \times 3 \times 2 = 5 \times 3 \times 2 = 30$$

↳ 남은 2개의 상자 중에서 1개의 공을 넣을 상자를 택하는 경우의 수
↳ 3개의 상자 중에서 공 4개가 들어갈 상자를 택하는 경우의 수
↳ 5개의 공 중에서 한 상자에 넣을 4개의 공을 택하는 경우의 수

자연수가 적혀 있는 공 5개가 한 상자에 들어가는 경우의 수는

$${}_3C_1=3$$

→ 3개의 상자 중에서 공 5개가 들어갈 상자를 택하는 경우의 수

따라서 구하는 경우의 수는

$$243 - (30 + 3) = 210$$

다른 풀이

구하는 경우의 수는 세 상자 A, B, C에 자연수가 적혀 있는 공을 각각 3개 이하로 넣는 경우의 수와 같다.

(i) 3개, 2개, 0개로 나누어 담는 경우의 수는

$$({}_5C_3 \times {}_2C_2) \times 3! = 10 \times 6 = 60$$

(ii) 3개, 1개, 1개로 나누어 담는 경우의 수는

$$\frac{{}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1}{2!} \times 3! = 10 \times 6 = 60$$

(iii) 2개, 2개, 1개로 나누어 담는 경우의 수는

$$\frac{{}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1}{2!} \times 3! = 15 \times 6 = 90$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$60 + 60 + 90 = 210$$

03 답 40

a 의 값에 따라 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 구하면 다음과 같다.

(i) $a=0$ 일 때,

$\frac{bc}{a}$ 가 정의되지 않으므로 정수가 되는 경우는 존재하지 않는다.

(ii) $a=1$ 일 때,

$\frac{bc}{a} = \frac{bc}{1} = bc$ 는 항상 정수이므로 b, c 의 값을 정하는 경우의 수는

0, 1, 2, 3의 4개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복 순열의 수와 같다.

$$\therefore {}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

(iii) $a=2$ 일 때,

$\frac{bc}{a} = \frac{bc}{2}$ 가 정수가 되려면 bc 의 값은 0 또는 2의 배수이어야 하므로

모든 경우의 수에서 b, c 의 값이 모두 홀수인 경우의 수를 빼면 된다.

$${}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

b, c 의 값이 모두 홀수인 경우의 수는 1, 3의 2개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$$

따라서 $a=2$ 일 때, 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$16 - 4 = 12$$

(iv) $a=3$ 일 때,

$\frac{bc}{a} = \frac{bc}{3}$ 가 정수가 되려면 bc 의 값은 0 또는 3의 배수이어야 하므로

모든 경우의 수에서 b, c 의 값이 모두 1, 2 중 하나인 경우의 수를 빼면 된다.

$$\text{모든 경우의 수는 } {}_4\Pi_2 = 4^2 = 16$$

b, c 의 값이 모두 1, 2 중 하나인 경우의 수는 1, 2의 2개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$$

따라서 $a=3$ 일 때, 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$16 - 4 = 12$$

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$16 + 12 + 12 = 40$$

04 답 50

주어진 조건에 맞도록 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.

이때 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 이므로

$B - A = X$ 라 하면 숫자 4, 5, 6, 7을 세 집합 A, X, C 에 대응시킬 때, $A \neq \emptyset, C \neq \emptyset$ 이 되도록 하면 된다.

즉, 4, 5, 6, 7을 세 집합 A, X, C 에 대응시키는 모든 경우의 수에서 집합 A 또는 집합 C 가 공집합인 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 4, 5, 6, 7을 세 집합 A, X, C 에 대응시키는 경우

이 경우의 수는 세 집합 A, X, C 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

(ii) 집합 A 가 공집합인 경우

이 경우의 수는 두 집합 X, C 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$$

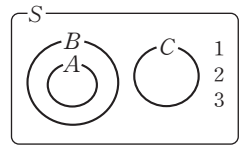
(iii) 집합 C 가 공집합인 경우

이 경우의 수는 두 집합 A, X 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$$

(iv) 두 집합 A, C 가 모두 공집합인 경우의 수는 1

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는 $81 - (16 + 16 - 1) = 50$



05 답 ④

학생 B가 받는 사탕의 개수에 따라 분류하면 다음과 같다.

(i) 학생 B가 2개의 사탕을 받는 경우

학생 B가 받는 사탕을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_2 = 10$

남은 3개의 사탕을 두 명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는 A, C에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_3 = 2^3 = 8$$

이때 학생 A가 사탕을 받지 못하는 경우의 수는 1

따라서 그 경우의 수는

$$10 \times (8 - 1) = 70$$

(ii) 학생 B가 1개의 사탕을 받는 경우

학생 B가 받는 사탕을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_1 = 5$

남은 4개의 사탕을 두 명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는 A, C에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$$

이때 학생 A가 사탕을 받지 못하는 경우의 수는 1

따라서 그 경우의 수는

$$5 \times (16 - 1) = 75$$

(iii) 학생 B가 사탕을 받지 못하는 경우

5개의 사탕을 두 명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는 A, C에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$$

이때 학생 A가 사탕을 받지 못하는 경우의 수는 1

따라서 그 경우의 수는

$$32 - 1 = 31$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $70 + 75 + 31 = 176$

06 답 127

$8=1+1+1+1+1+1+1+1$ 에서 +의 기호의 위치에 다음과 같이 $\vee$ 표를 하자.

$$1+\vee 1+\vee 1+\vee 1+\vee 1+\vee 1+\vee 1$$

예를 들어 $1+4+2+1$ 은 $1+\vee 1+1+1+1+\vee 1+1+\vee 1$ 과 같이 나타낼 수 있다. 이때 8을 두 개 이상의 자연수의 합으로 나타내는 방법은 7개의 $\vee$ 중에서 하나 이상 택하는 방법과 일대일대응이 된다.

각각의 $\vee$ 에 대하여 $\vee$ 를 택하는 경우와 택하지 않는 경우 2가지씩 있으므로 2개에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_2\Pi_7=2^7=128$$

이때 $\vee$ 를 하나도 택하지 않는 경우의 수는 1

따라서 8을 두 개 이상의 자연수의 합으로 나타내는 모든 경우의 수는 $128-1=127$

다른 풀이

$8=1+1+1+1+1+1+1+1$ 에서 +의 기호의 위치에 다음과 같이 $\vee$ 표를 하자.

$$1+\vee 1+\vee 1+\vee 1+\vee 1+\vee 1+\vee 1$$

8을 2개, 3개, 4개, ..., 8개의 자연수의 합으로 나타내는 경우의 수는 7개의 $\vee$ 중에서 1개, 2개, 3개, ..., 7개를 택하는 경우의 수와 같으므로 각각 ${}_7C_1, {}_7C_2, {}_7C_3, \dots, {}_7C_7$ 이다.

$$\therefore {}_7C_1+{}_7C_2+{}_7C_3+\dots+{}_7C_7=2^7-{}_7C_0=128-1=127$$

개념 NOTE

n 이 자연수일 때,

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\dots+{}_nC_n=2^n$$

07 답 ⑤

(가)에서 $f(1), f(3), f(5)$ 의 값은 모두 홀수이므로 함수 f 의 치역의 홀수인 원소의 개수는 1 또는 2 또는 3이다.

(i) 홀수인 원소의 개수가 1인 경우

함수 f 의 치역의 원소의 개수가 3이므로 치역이 될 수 있는 집합은 $\{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 4, 5\}$

① 치역이 $\{1, 2, 4\}$ 인 경우

$f(2)=2, f(4)=4$ 이고, $f(1)=f(3)=f(5)=1$ 이므로 함수 f 의 개수는 1

② 치역이 $\{2, 3, 4\}$ 또는 $\{2, 4, 5\}$ 인 경우

①과 같은 방법으로 하면 함수 f 의 개수는 각각 1이다.

③, ④에서 함수 f 의 개수는 $1 \times 3=3$

(ii) 홀수인 원소의 개수가 2인 경우

함수 f 의 치역의 원소의 개수가 3이므로 치역이 될 수 있는 집합은 $\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 3, 5\}, \{3, 4, 5\}$

① 치역이 $\{1, 2, 3\}$ 인 경우

③ $f(2)=1, f(4)=2$ 일 때,

$f(1), f(3), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 3 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_3=2^3=8$$

이때 $f(1), f(3), f(5)$ 의 값이 모두 1이 되는 경우를 제외해야 하므로 함수 f 의 개수는 $8-1=7$

④ $f(2)=2, f(4)=3$ 일 때,

$f(1), f(3), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 3 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_3=2^3=8$$

이때 $f(1), f(3), f(5)$ 의 값이 모두 3이 되는 경우를 제외해야 하므로 함수 f 의 개수는 $8-1=7$

③, ④에서 함수 f 의 개수는 $7+7=14$

② 치역이 $\{1, 2, 5\}$ 또는 $\{1, 3, 4\}$ 또는 $\{1, 4, 5\}$ 또는 $\{2, 3, 5\}$ 또는 $\{3, 4, 5\}$ 인 경우

①과 같은 방법으로 하면 함수 f 의 개수는 각각 14이다.

③, ④에서 함수 f 의 개수는 $14 \times 6=84$

(iii) 홀수인 원소의 개수가 3인 경우

함수 f 의 치역의 원소의 개수가 3이므로 치역이 될 수 있는 집합은 $\{1, 3, 5\}$

① $f(2)=1, f(4)=3$ 일 때,

$f(1), f(3), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 3, 5 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_3=3^3=27$$

이때 $f(1), f(3), f(5)$ 의 값이 1, 3이 되는 경우를 제외해야 한다. 1, 3 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수는

$${}_2\Pi_3=2^3=8$$

이므로 함수 f 의 개수는 $27-8=19$

② $f(2)=1, f(4)=5$ 또는 $f(2)=3, f(4)=5$ 일 때,

①과 같은 방법으로 하면 함수 f 의 개수는 각각 19이다.

③, ④에서 함수 f 의 개수는 $19 \times 3=57$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$3+84+57=144$$

다른 풀이

공역 X 의 원소 중에서 홀수는 1, 3, 5의 세 개이고, (가)에서 $f(1), f(3), f(5)$ 는 모두 홀수이다.

$f(1), f(3), f(5)$ 중에서 서로 다른 홀수의 개수에 따라 분류하면 다음과 같다.

(i) $f(1), f(3), f(5)$ 가 세 개의 서로 다른 홀수인 경우

$f(1), f(3), f(5)$ 를 정하는 경우의 수는 $3!=6$

(가)에서 $f(2), f(4)$ 도 모두 홀수이다.

(나)에서 3개의 홀수 중에서 2개를 선택하여 작은 순서대로 $f(2), f(4)$ 를 대응시키면 되므로 ${}_3C_2=3$

따라서 함수 f 의 개수는 $6 \times 3=18$

(ii) $f(1), f(3), f(5)$ 가 두 개의 서로 다른 홀수인 경우

$f(1), f(3), f(5)$ 를 정하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times ({}_2\Pi_3-2)=3 \times (2^3-2)=18$$

$f(1)=f(3)=f(5)$ 가 되는 경우의 수
2개의 홀수에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수
3개의 홀수에서 2개를 선택하는 경우의 수

(나), (가)에서 $f(1), f(3), f(5)$ 로 대응된 수 중 하나와 $f(1), f(3), f(5)$ 로 대응된 수를 제외한 세 수 중에서 하나를 골라서 작은 순서대로 $f(2), f(4)$ 를 대응시키면 되므로 ${}_2C_1 \times {}_3C_1=6$

따라서 함수 f 의 개수는 $18 \times 6=108$

(iii) $f(1), f(3), f(5)$ 가 모두 하나의 홀수인 경우

$f(1), f(3), f(5)$ 를 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

(나), (가)에서 $f(1), f(3), f(5)$ 로 대응된 수를 제외한 네 수 중에서 두 수를 골라서 작은 순서대로 $f(2), f(4)$ 를 대응시키면 되므로

$${}_4C_2=6$$

따라서 함수 f 의 개수는 $3 \times 6=18$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$18+108+18=144$$

08 답 97

1이 나오는 횟수에 따라 분류하면 다음과 같다. 이때 (ㄴ)에서 1, 4는 서로 이웃할 수 없다.

(i) 1이 한 번 나오는 경우

① $1\square\square\square, \square\square\square 1$ 꼴인 경우

1의 옆에 올 수 있는 숫자는 2, 3의 2개이고, 나머지 자리에는 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$$2 \times {}_3\P_2 + {}_3\P_2 \times 2 = 2 \times 2 \times 3^2 = 36$$

② $1\square\square\square, \square\square 1\square$ 꼴인 경우

1의 양옆에는 2, 3 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하고, 나머지 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 4의 3개이므로 그 경우의 수는

$${}_2\P_2 \times 3 + 3 \times {}_2\P_2 = 2 \times 2^2 \times 3 = 24$$

①, ②에서 그 경우의 수는

$$36 + 24 = 60$$

(ii) 1이 두 번 나오는 경우

① $1\square 1\square, 1\square\square 1, \square 11\square, \square 1\square 1$ 꼴인 경우

1의 옆에는 2, 3 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$$4 \times {}_2\P_2 = 4 \times 2^2 = 16$$

② $11\square\square, \square\square 11$ 꼴인 경우

1의 옆에 올 수 있는 숫자는 2, 3의 2개이고, 나머지 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 3, 4의 3개이므로 그 경우의 수는

$$2 \times 3 + 3 \times 2 = 12$$

①, ②에서 그 경우의 수는

$$16 + 12 = 28$$

(iii) 1이 세 번 나오는 경우

1, 1, 1, 2 또는 1, 1, 1, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{3!} = 4 + 4 = 8$$

(iv) 1이 네 번 나오는 경우

1111의 1개

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$60 + 28 + 8 + 1 = 97$$

09 답 190

검은 바둑돌을 1개 꺼내는 것을 A, 흰 바둑돌을 1개 꺼내는 것을 B, 흰 바둑돌을 2개 꺼내는 것을 C라 하자. 흰 바둑돌을 2개씩 꺼내는 횟수에 따라 분류하면 다음과 같다.

(i) 흰 바둑돌을 한 번에 2개씩 꺼내는 경우가 없을 때,

A 4개, B 4개를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 그 경우의 수는 $\frac{8!}{4! \times 4!} = 70$

(ii) 흰 바둑돌을 한 번에 2개씩 꺼내는 경우가 1번 있을 때,

A 4개, B 2개, C 1개를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 그 경우의 수는 $\frac{7!}{4! \times 2!} = 105$

(iii) 흰 바둑돌을 한 번에 2개씩 꺼내는 경우가 2번 있을 때,

A 4개, C 2개를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 그 경우의 수는 $\frac{6!}{4! \times 2!} = 15$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$70 + 105 + 15 = 190$$

10 답 31

$f(1) + f(3) + f(5) + f(7) = 12$ 를 만족시키는 $f(1), f(3), f(5), f(7)$ 의 값은

1, 1, 3, 7 또는 1, 1, 5, 5 또는 1, 3, 3, 5 또는 3, 3, 3, 3

(i) 1, 1, 3, 7 또는 1, 3, 3, 5인 경우

$f(1), f(3), f(5), f(7)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 1, 3, 7 또는 1, 3, 3, 5를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2!} \times 2 = 24$$

(ii) 1, 1, 5, 5인 경우

$f(1), f(3), f(5), f(7)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 1, 5, 5를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

(iii) 3, 3, 3, 3인 경우

$f(1), f(3), f(5), f(7)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1가지

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f 의 개수는 $24 + 6 + 1 = 31$

11 답 45

영어를 공부하는 4일을 먼저 일렬로 배열한 다음 그 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 수학을 공부하는 6일을 배열하면 된다.

이때 수학은 3일 이상 연속으로 공부하지 않으므로 5개의 자리에 올 수 있는 수학을 공부하는 일수는

0, 0, 2, 2, 2 또는 0, 1, 1, 2, 2 또는 1, 1, 1, 1, 2

(i) 0, 0, 2, 2, 2일 때,

0, 0, 2, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

(ii) 0, 1, 1, 2, 2일 때,

0, 1, 1, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

(iii) 1, 1, 1, 1, 2일 때,

1, 1, 1, 1, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $10 + 30 + 5 = 45$

12 답 ②

(ㄴ)을 만족시키려면 a, a, c, c, c 를 일렬로 배열하고 그 사이사이와 양 끝의 6개의 자리 중에서 2개에 b 를 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} \times {}_6C_2 = 10 \times 15 = 150$$

이때 (ㄹ)을 만족시키지 않으려면 a, a, c, c, c 를 a 끼리 서로 이웃하도록 배열한 후 그 사이사이와 양 끝의 6개의 자리 중에서 2개에 b 를 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} \times {}_6C_2 = 4 \times 15 = 60$$

따라서 구하는 경우의 수는 $150 - 60 = 90$

다른 풀이

(가)에서 a 와 a 사이에 c 가 1개 오는 경우는 $acacc$, $cacac$, $ccaca$ 의 3가지, a 와 a 사이에 c 가 2개 오는 경우는 $accac$, $cacca$ 의 2가지, a 와 a 사이에 c 가 3개 오는 경우는 $accca$ 의 1가지이므로 그 경우의 수는 $3+2+1=6$

(나)에서 b 끼리는 서로 이웃하지 않으므로 각각의 경우에 대하여 문자 사이사이와 양 끝의 6개의 자리 중에서 2개를 택하여 b 를 배열하면 되므로 그 경우의 수는 ${}^6C_2=15$

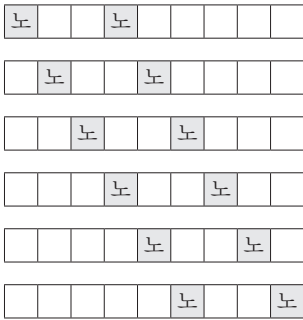
따라서 구하는 경우의 수는 $6 \times 15=90$

13 답 ④

2개의 노란 공 사이에 오는 다른 색 공의 개수에 따라 분류하면 다음과 같다.

(i) 노란 공 사이에 2개의 공이 오는 경우

9개의 공을 일렬로 배열할 때, 노란 공 사이에 2개의 공이 오도록 노란 공을 배열하는 경우는 다음과 같이 6가지이다.



각각의 경우에 대하여 나머지 자리에 파란 공 4개, 빨간 공 3개를 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$$6 \times \frac{7!}{4! \times 3!} = 6 \times 35 = 210$$

(ii) 노란 공 사이에 4개의 공이 오는 경우

9개의 공을 일렬로 배열할 때, 노란 공 사이에 4개의 공이 오도록 노란 공을 배열하는 경우는 다음과 같이 4가지이다.

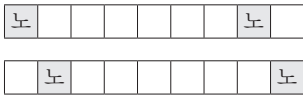


각각의 경우에 대하여 나머지 자리에 파란 공 4개, 빨간 공 3개를 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$$4 \times \frac{7!}{4! \times 3!} = 4 \times 35 = 140$$

(iii) 노란 공 사이에 6개의 공이 오는 경우

9개의 공을 일렬로 배열할 때, 노란 공 사이에 6개의 공이 오도록 노란 공을 배열하는 경우는 다음과 같이 2가지이다.



각각의 경우에 대하여 나머지 자리에 파란 공 4개, 빨간 공 3개를 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$$2 \times \frac{7!}{4! \times 3!} = 2 \times 35 = 70$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $210+140+70=420$

14 답 43

가장 큰 숫자인 3이 적혀 있는 카드의 장수에 따라 분류하면 다음과 같다.

(i) 숫자 3이 적혀 있는 카드가 2장인 경우

숫자 1이 적혀 있는 카드가 1장, 숫자 3이 적혀 있는 카드가 2장인 경우이므로 이 3장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}=3$$

(ii) 숫자 3이 적혀 있는 카드가 1장인 경우

① 숫자 1이 적혀 있는 카드가 4장, 숫자 3이 적혀 있는 카드가 1장일 때,

$$5\text{장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 } \frac{5!}{4!}=5$$

② 숫자 1이 적혀 있는 카드가 2장, 숫자 2가 적혀 있는 카드가 1장, 숫자 3이 적혀 있는 카드가 1장일 때,

$$4\text{장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 } \frac{4!}{2!}=12$$

③ 숫자 2가 적혀 있는 카드가 2장, 숫자 3이 적혀 있는 카드가 1장일 때,

$$3\text{장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 } \frac{3!}{2!}=3$$

①, ②, ③에서 숫자 3이 적혀 있는 카드가 1장인 경우의 수는

$$5+12+3=20$$

(iii) 숫자 3이 적혀 있는 카드가 없는 경우

① 숫자 1이 적혀 있는 카드가 5장, 숫자 2가 적혀 있는 카드가 1장일 때,

$$6\text{장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 } \frac{6!}{5!}=6$$

② 숫자 1이 적혀 있는 카드가 3장, 숫자 2가 적혀 있는 카드가 2장일 때,

$$5\text{장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 } \frac{5!}{3! \times 2!}=10$$

③ 숫자 1이 적혀 있는 카드가 1장, 숫자 2가 적혀 있는 카드가 3장일 때,

$$4\text{장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 } \frac{4!}{3!}=4$$

①, ②, ③에서 숫자 3이 적혀 있는 카드가 없는 경우의 수는

$$6+10+4=20$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $3+20+20=43$

15 답 ①

숫자 1, 2, 3 중에서 적어도 2개 이상의 숫자를 사용하여 네 자리의 자연수를 만들려면 2개의 숫자를 사용하거나 3개의 숫자를 사용해야 한다.

(i) 2개의 숫자를 사용하는 경우

2개의 숫자를 택하는 경우의 수는

$${}_3C_2=3$$

이때 각각의 경우에 대하여 같은 숫자는 연속하여 나올 수 없으므로 2개씩 같은 4개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수는 2개이다.

예를 들어 숫자 1, 2를 사용하는 경우 1212, 2121의 2개

따라서 자연수의 개수는

$$3 \times 2=6$$

(ii) 3개의 숫자를 사용하는 경우

1, 2, 3을 1개씩 택한 후 1개의 숫자를 더 택하는 경우는 1, 2, 3의 3가지이다.

이때 각각의 경우에 대하여 같은 숫자는 연속으로 나올 수 없으므로 2개의 같은 숫자를 포함한 4개의 숫자를 사용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 숫자 4개를 일렬로 배열하는 경우의 수에서 같은 숫자 2개가 연속하여 나오는 경우의 수를 빼면

$$\frac{4!}{2!} - 3! = 12 - 6 = 6$$

← 같은 숫자 2개를 한 묶음으로 생각하여 일렬로 배열하는 경우의 수

따라서 자연수의 개수는

$$3 \times 6 = 18$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$6 + 18 = 24$$

16 답 161

모든 숫자열의 개수에서 암호로 사용할 수 없는 숫자열의 개수를 빼면 된다.

0과 1로 이루어진 8자리 숫자열의 암호의 총개수는

$$2\pi_8 = 2^8 = 256$$

(i) 1이 5개인 암호의 개수

1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{8!}{5! \times 3!} = 56$$

(ii) 1이 6개인 암호의 개수

1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{8!}{6! \times 2!} = 28$$

(iii) 처음 4자리가 1001인 암호의 개수

처음 4자리는 1001이고, 나머지 4자리를 0 또는 1로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$2\pi_4 = 2^4 = 16$$

(iv) (i)과 (iii)이 중복되는 암호의 개수

처음 4자리는 1001이고, 나머지 4자리는 1, 1, 1, 0을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

(v) (ii)와 (iii)이 중복되는 암호의 개수

처음 4자리는 1001이고, 나머지 4자리는 1, 1, 1, 1을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$1$$

(i)~(v)에서 이 회사에서 암호로 사용할 수 있는 숫자열의 개수는

$$256 - (56 + 28 + 16 - 4 - 1) = 161$$

17 답 580

네 평행이동 f_1, f_2, f_3, f_4 를 이용하여 점을 이동하는 것을 각각 a, b, c, d 라 하자.

점 P가 움직인 전체 횟수는 6회이므로 마지막에 가능한 위치는 (1, 3), (-1, -3), (0, 0)이다.

(i) 점 P의 최종 위치가 (1, 3)인 경우

① a 가 1번, b 가 0번, c 가 4번, d 가 1번일 때,

$$a, c, c, c, c, d \text{를 일렬로 배열하는 경우의 수는 } \frac{6!}{4!} = 30$$

② a 가 2번, b 가 1번, c 가 3번, d 가 0번일 때,

$$a, a, b, c, c, c \text{를 일렬로 배열하는 경우의 수는 } \frac{6!}{2! \times 3!} = 60$$

①, ②에서 그 경우의 수는 $30 + 60 = 90$

(ii) 점 P의 최종 위치가 (-1, -3)인 경우

① a 가 0번, b 가 1번, c 가 1번, d 가 4번일 때,

$$b, c, d, d, d, d \text{를 일렬로 배열하는 경우의 수는 } \frac{6!}{4!} = 30$$

② a 가 1번, b 가 2번, c 가 0번, d 가 3번일 때,

$$a, b, b, d, d, d \text{를 일렬로 배열하는 경우의 수는 } \frac{6!}{2! \times 3!} = 60$$

①, ②에서 그 경우의 수는 $30 + 60 = 90$

(iii) 점 P의 최종 위치가 (0, 0)인 경우

① a 가 0번, b 가 0번, c 가 3번, d 가 3번일 때,

$$c, c, c, d, d, d \text{를 일렬로 배열하는 경우의 수는 } \frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

② a 가 1번, b 가 1번, c 가 2번, d 가 2번일 때,

$$a, b, c, c, d, d \text{를 일렬로 배열하는 경우의 수는 } \frac{6!}{2! \times 2!} = 180$$

③ a 가 2번, b 가 2번, c 가 1번, d 가 1번일 때,

$$a, a, b, b, c, d \text{를 일렬로 배열하는 경우의 수는 } \frac{6!}{2! \times 2!} = 180$$

④ a 가 3번, b 가 3번, c 가 0번, d 가 0번일 때,

$$a, a, a, b, b, b \text{를 일렬로 배열하는 경우의 수는 } \frac{6!}{3! \times 3!} = 20$$

①~④에서 그 경우의 수는 $20 + 180 + 180 + 20 = 400$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$90 + 90 + 400 = 580$$

18 답 60

각 칸에 자연수가 들어가므로 각 열에 적혀 있는 수의 합은 4보다 크거나 같다.

이때 8개의 칸에 적혀 있는 수의 합이 11이고 제1열에 적혀 있는 수의 합이 제2열에 적혀 있는 수의 합보다 작으므로 제1열과 제2열에 적혀 있는 수의 합은 각각 4, 7 또는 5, 6이어야 한다.

(i) 제1열에 적혀 있는 수의 합이 4이고 제2열에 적혀 있는 수의 합이 7인 경우

제1열에 1, 1, 1, 1을 배열하는 경우의 수는 1

제2열에 1, 1, 1, 4 또는 1, 1, 2, 3 또는 1, 2, 2, 2를 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!} = 4 + 12 + 4 = 20$$

따라서 그 경우의 수는 $1 \times 20 = 20$

(ii) 제1열에 적혀 있는 수의 합이 5이고 제2열에 적혀 있는 수의 합이 6인 경우

제1열에 1, 1, 1, 2를 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

제2열에 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 2, 2를 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2! \times 2!} = 4 + 6 = 10$$

따라서 그 경우의 수는 $4 \times 10 = 40$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $20 + 40 = 60$

다른 풀이

자연수 8개의 합이 11이 되도록 8개의 칸에 자연수를 한 칸에 한 개씩 중복을 허용하여 써넣는 모든 경우를 생각해 보자.

이때 자연수 8개의 합이 11이므로 제1열에 적혀 있는 수의 합과 제2열에 적혀 있는 수의 합이 같은 경우는 없고, 제1열에 적혀 있는 수의 합

이 더 작은 경우의 수와 제2열에 적혀 있는 수의 합이 더 작은 경우의 수는 서로 같다.

자연수 8개의 합이 11이 되도록 8개의 칸에 자연수를 써넣는 모든 경우의 수를 구하면 다음과 같다.

(i) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4를 써넣는 경우의 수는 $\frac{8!}{7!}=8$

(ii) 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3을 써넣는 경우의 수는 $\frac{8!}{6!}=56$

(iii) 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2를 써넣는 경우의 수는 $\frac{8!}{5! \times 3!}=56$

따라서 $8+56+56=120$ 이므로 제1열에 적혀 있는 수의 합이 더 작은 경우의 수는

$$\frac{120}{2}=60$$

19 답 38

x 축의 양의 방향으로 1만큼 이동하는 것을 a , x 축의 음의 방향으로 1만큼 이동하는 것을 b , y 축의 양의 방향으로 1만큼 이동하는 것을 c , y 축의 음의 방향으로 1만큼 이동하는 것을 d 라 하자. 배점 10%

(i) a 가 1번, b 가 0번, c 가 3번, d 가 1번인 경우

a, c, c, c, d 를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!}=20$$

이때 a, c, c 가 먼저 일렬로 배열되면 3번 이동한 후 점 P의 좌표가 (1, 2)가 되므로 이 경우를 제외해야 한다.

a, c, c 를 먼저 일렬로 배열하고, c, d 를 배열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times 2! = 6$$

따라서 그 경우의 수는

$$20-6=14 \quad \dots \dots \dots \text{배점 } 40\%$$

(ii) a 가 2번, b 가 1번, c 가 2번, d 가 0번인 경우

a, a, b, c, c 를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

이때 a, c, c 가 먼저 일렬로 배열되면 3번 이동한 후 점 P의 좌표가 (1, 2)가 되므로 이 경우를 제외해야 한다.

a, c, c 를 먼저 일렬로 배열하고, a, b 를 배열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times 2! = 6$$

따라서 그 경우의 수는

$$30-6=24 \quad \dots \dots \dots \text{배점 } 40\%$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$14+24=38 \quad \dots \dots \dots \text{배점 } 10\%$$

20 답 ③

문자 A가 적혀 있는 카드가 들어간 3개의 상자에 적혀 있는 수의 합이 홀수가 되는 경우는 3개의 상자에 적혀 있는 수 중 홀수가 1개이거나 홀수가 3개인 경우이다.

(i) 홀수가 적혀 있는 상자가 1개인 경우

홀수가 적혀 있는 상자 1개와 짝수가 적혀 있는 상자 2개를 선택하여 문자 A가 적혀 있는 카드를 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_3C_2 = 4 \times 3 = 12$$

나머지 4개의 상자에 남은 4장의 카드를 나누어 넣는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

따라서 그 경우의 수는

$$12 \times 12 = 144$$

(ii) 홀수가 적혀 있는 상자가 3개인 경우

홀수가 적혀 있는 상자 3개를 선택하여 문자 A가 적혀 있는 카드를 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

나머지 4개의 상자에 남은 4장의 카드를 나누어 넣는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

따라서 그 경우의 수는

$$4 \times 12 = 48$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$144+48=192$$

21 답 ①

서로 이웃한 2장의 카드에 적혀 있는 수의 곱이 모두 짝수가 되려면 홀수가 적혀 있는 카드끼리 이웃하지 않아야 한다. 이때 짝수가 적혀 있는 카드를 먼저 일렬로 배열한 후, 그 사이사이와 양 끝에 홀수가 적혀 있는 카드를 배열하면 된다. 이를 만족하려면 짝수가 적혀 있는 카드는 4장 또는 3장이어야 한다.

(i) 짝수가 적혀 있는 카드가 4장인 경우

2, 2, 2, 4가 적혀 있는 4장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

짝수가 적혀 있는 4장의 카드를 □로 나타내면 그림과 같이 V로 표시된 다섯 곳 중 세 곳에 홀수가 적혀 있는 3장의 카드가 배열되어야 한다.

$$V \square V \square V \square V \square V$$

홀수가 적혀 있는 3장의 카드는 1, 3, 3이 적혀 있는 카드이거나 1, 1, 3이 적혀 있는 카드이므로 홀수가 적혀 있는 3장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_5C_3 \times \frac{3!}{2!} \times 2 = {}_5C_2 \times 3 \times 2 = 10 \times 3 \times 2 = 60$$

따라서 그 경우의 수는

$$4 \times 60 = 240$$

(ii) 짝수가 적혀 있는 카드가 3장인 경우

짝수가 적혀 있는 3장의 카드는 2, 2, 2가 적혀 있는 카드이거나 2, 2, 4가 적혀 있는 카드이므로 짝수가 적혀 있는 3장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$1 + \frac{3!}{2!} = 4$$

이 각각에 대하여 짝수가 적혀 있는 3장의 카드를 □로 나타내면 그림과 같이 V로 표시된 네 곳에 홀수가 적혀 있는 4장의 카드가 배열되어야 한다.

$$V \square V \square V \square V$$

1, 1, 3, 3이 적혀 있는 4장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

따라서 그 경우의 수는

$$4 \times 6 = 24$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

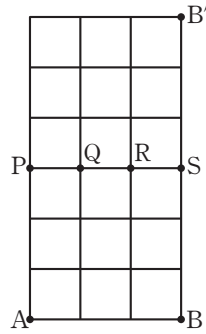
$$240+24=264$$

22 답 ③

그림과 같이 선분 PS에 대하여 주어진 도로망을 대칭이동하면 B 지점은 B' 지점에 위치한다. A 지점에서 네 지점 P, Q, R, S 중 한 지점 이상을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 A 지점에서 B' 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수와 같다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{9!}{6! \times 3!} = 84$$



다른 풀이

그림과 같이 네 지점 P', Q', R', S'을 잡자.

(i) 네 지점 P, Q, R, S 중 한 지점을 거쳐서 이동하는 경우

① A → P → B로 이동하는 경우

A → P → P' → B로 이동하므로 그 경우의 수는

$$1 \times 1 \times \frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

② A → Q → B로 이동하는 경우

A → Q' → Q → Q' → B로 이동하므로 그 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times 1 \times 1 \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 3 \times 1 \times 1 \times 6 = 18$$

③ A → R → B로 이동하는 경우

A → R' → R → R' → B로 이동하므로 그 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times 1 \times 1 \times \frac{3!}{2!} = 6 \times 1 \times 1 \times 3 = 18$$

④ A → S → B로 이동하는 경우

A → S' → S → B로 이동하므로 그 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} \times 1 \times 1 = 10$$

①~④에서 한 지점을 거쳐서 이동하는 경우의 수는

$$10 + 18 + 18 + 10 = 56$$

(ii) 네 지점 P, Q, R, S 중 두 지점을 거쳐서 이동하는 경우

① A → P → Q → B로 이동하는 경우

A → P → Q → Q' → B로 이동하므로 그 경우의 수는

$$1 \times 1 \times 1 \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

② A → Q → R → B로 이동하는 경우

A → Q' → Q → R → R' → B로 이동하므로 그 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times 1 \times 1 \times 1 \times \frac{3!}{2!} = 3 \times 1 \times 1 \times 1 \times 3 = 9$$

③ A → R → S → B로 이동하는 경우

A → R' → R → S → B로 이동하므로 그 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times 1 \times 1 \times 1 = 6$$

①, ②, ③에서 두 지점을 거쳐서 이동하는 경우의 수는

$$6 + 9 + 6 = 21$$

(iii) 네 지점 P, Q, R, S 중 세 지점을 거쳐서 이동하는 경우

① A → P → Q → R → B로 이동하는 경우

A → P → Q → R → R' → B로 이동하므로 그 경우의 수는

$$1 \times 1 \times 1 \times 1 \times \frac{3!}{2!} = 3$$

② A → Q → R → S → B로 이동하는 경우

A → Q' → Q → R → S → B로 이동하므로 그 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 3$$

①, ②에서 세 지점을 거쳐서 이동하는 경우의 수는

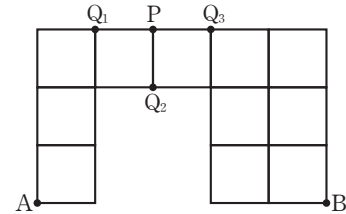
$$3 + 3 = 6$$

(iv) 네 지점 P, Q, R, S를 모두 거쳐서 이동하는 경우

A → P → Q → R → S → B로 이동하는 경우의 수는 1

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는 56 + 21 + 6 + 1 = 84

23 답 ⑤



그림과 같이 세 지점 Q₁, Q₂, Q₃을 정하면 A 지점에서 출발하여 P 지점까지 가기 위해서는 Q₁ 지점 또는 Q₂ 지점 중 한 지점을 지나야 하고, P 지점에서 출발하여 B 지점까지 가기 위해서는 Q₂ 지점 또는 Q₃ 지점 중 한 지점을 지나야 한다.

따라서 A 지점에서 출발하여 P 지점을 지나 B 지점으로 갈 때, 한 번 지난 도로는 다시 지나지 않으면서 최단 거리로 가는 경우는

A → Q₁ → P → Q₂ → B 또는

A → Q₁ → P → Q₃ → B 또는

A → Q₂ → P → Q₃ → B

(i) A → Q₁ → P → Q₂ → B로 이동하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} \times 1 \times 1 \times 1 \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 4 \times 1 \times 1 \times 1 \times 6 = 24$$

(ii) A → Q₁ → P → Q₃ → B로 이동하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} \times 1 \times 1 \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 4 \times 1 \times 1 \times 10 = 40$$

(iii) A → Q₂ → P → Q₃ → B로 이동하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} \times 1 \times 1 \times 1 \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 3 \times 1 \times 1 \times 1 \times 10 = 30$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$24 + 40 + 30 = 94$$

다른 풀이

그림과 같이 직선 PQ에 대하여 주어진 도로망을 대칭이동하면

B 지점은 B' 지점에 위치한다.

이때 한 번 지난 도로는 다시 지

날 수 없고 선분 PR과 선분 PS

는 같은 도로이므로 S 지점까지

오려면 R → P → S로 올 수 없

고 Q → P → S로 와야 한다.

즉, S 지점까지 오는 경우의 수

는 Q 지점까지 오는 경우의 수

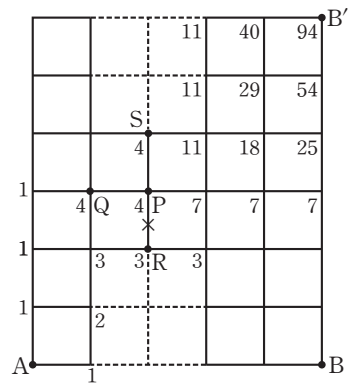
와 같다. 그 외의 지점까지 오는

경우의 수는 아래쪽에서 오는 경우의 수와 왼쪽에서 오는 경우의 수를

더하면 된다.

따라서 각 지점까지 오는 경우의 수는 그림과 같으므로 구하는 경우의

수는 94이다.

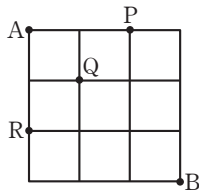


24 답 224

모든 경우의 수에서 두 사람이 만나는 경우의 수를 빼면 된다.
모든 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 3!} \times \frac{6!}{3! \times 3!} = 20 \times 20 = 400$$

지수의 속력이 인성이의 속력의 2배이므로 두 사람이 만날 수 있는 지점은 그림에서 세 지점 P, Q, R이다.



(i) P 지점에서 만나는 경우

인성이가 $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 이동하는 경우의

$$\text{수는 } 1 \times \frac{4!}{3!} = 4$$

지수가 $B \rightarrow P \rightarrow A$ 로 이동하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!} \times 1 = 4$

따라서 P 지점에서 만나는 경우의 수는 $4 \times 4 = 16$

(ii) Q 지점에서 만나는 경우

인성이가 $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 이동하는 경우의 수는

$$2! \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 2 \times 6 = 12$$

지수가 $B \rightarrow Q \rightarrow A$ 로 이동하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times 2! = 6 \times 2 = 12$$

따라서 Q 지점에서 만나는 경우의 수는 $12 \times 12 = 144$

(iii) R 지점에서 만나는 경우

인성이가 $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 이동하는 경우의 수는 $1 \times \frac{4!}{3!} = 4$

지수가 $B \rightarrow R \rightarrow A$ 로 이동하는 경우의 수는 $\frac{4!}{3!} \times 1 = 4$

따라서 R 지점에서 만나는 경우의 수는 $4 \times 4 = 16$

(i), (ii), (iii)에서 두 사람이 만나는 경우의 수는

$$16 + 144 + 16 = 176$$

따라서 구하는 경우의 수는 $400 - 176 = 224$

25 답 ②

P 지점에서 R 지점까지 이동하는 횟수를 x 라 하면 $3 \leq x \leq 6$ 이고, R 지점에서 Q 지점까지 이동하는 횟수를 y 라 하면 $2 \leq y \leq 4$ 이므로 P 지점에서 Q 지점까지 이동한 횟수가 8인 경우는

$$x=4, y=4 \text{ 또는 } x=5, y=3 \text{ 또는 } x=6, y=2$$

오른쪽으로 1칸 가는 것을 a , 위쪽으로 1칸 가는 것을 b , 대각선으로 1칸 가는 것을 c 라 하자.

(i) $x=4, y=4$ 인 경우

P 지점에서 R 지점까지 4번 이동하여 가는 경우는 a, b, c, c 를 일렬로 배열하는 것과 같으므로 그 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$

R 지점에서 Q 지점까지 4번 이동하여 가는 경우는 a, a, b, b 를 일렬로 배열하는 것과 같으므로 그 경우의 수는 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$

따라서 $x=4, y=4$ 인 경우의 수는 $12 \times 6 = 72$

(ii) $x=5, y=3$ 인 경우

P 지점에서 R 지점까지 5번 이동하여 가는 경우는 a, a, b, b, c 를 일렬로 배열하는 것과 같으므로 그 경우의 수는 $\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$

R 지점에서 Q 지점까지 3번 이동하여 가는 경우는 a, b, c 를 일렬로 배열하는 것과 같으므로 그 경우의 수는 $3! = 6$

따라서 $x=5, y=3$ 인 경우의 수는 $30 \times 6 = 180$

(iii) $x=6, y=2$ 인 경우

P 지점에서 R 지점까지 6번 이동하여 가는 경우는 a, a, a, b, b, b 를 일렬로 배열하는 것과 같으므로 그 경우의 수는 $\frac{6!}{3! \times 3!} = 20$

R 지점에서 Q 지점까지 2번 이동하여 가는 경우는 c, c 를 일렬로 배열하는 것과 같으므로 그 경우의 수는 1

따라서 $x=6, y=2$ 인 경우의 수는 $20 \times 1 = 20$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$72 + 180 + 20 = 272$$

STEP 3 최난도 문제

| 25~27쪽

01 ②	02 188	03 342	04 ①	05 20	06 ②
07 720	08 119	09 ②	10 132	11 40	

01 답 ②

1단계 b 가 될 수 있는 수 구하기

$720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ 이고, (n) 에서 b 가 될 수 있는 수는

$$1, 2, 3, 2^2=4, 2 \times 3=6, 2^2 \times 3=12$$

2단계 b 의 값에 따라 순서쌍 (a, c) 의 개수 구하기

(i) $b=1$ 인 경우

$ac = 2^4 \times 3^2 \times 5$ 이므로 a, c 는 $2^4 \times 3^2 \times 5$ 의 약수이다.

이때 a 가 정해지면 c 는 자동으로 정해지므로 가능한 순서쌍 (a, c) 의 개수는 $2^4 \times 3^2 \times 5$ 의 약수의 개수와 같다.

$$\text{즉, } (4+1) \times (2+1) \times (1+1) = 5 \times 3 \times 2 = 30$$

이 중 a 와 c 가 서로소인 경우는 a 와 c 의 공약수가 1뿐인 경우이므로 2^4 이 a 와 c 중 어느 하나의 약수, 3^2 이 a 와 c 중 어느 하나의 약수, 5가 a 와 c 중 어느 하나의 약수이어야 한다.

따라서 a 와 c 가 서로소인 순서쌍 (a, c) 의 개수는

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

그러므로 서로소가 아닌 자연수 a, c 의 모든 순서쌍 (a, c) 의 개수는 $30 - 8 = 22$

(ii) $b=2$ 인 경우

$ac = 2^2 \times 3^2 \times 5$ 이므로 a, c 는 $2^2 \times 3^2 \times 5$ 의 약수이다.

이때 a 가 정해지면 c 는 자동으로 정해지므로 가능한 순서쌍 (a, c) 의 개수는 $2^2 \times 3^2 \times 5$ 의 약수의 개수와 같다.

$$\text{즉, } (2+1) \times (2+1) \times (1+1) = 3 \times 3 \times 2 = 18$$

이 중 a 와 c 가 서로소인 경우는 a 와 c 의 공약수가 1뿐인 경우이므로 2^2 이 a 와 c 중 어느 하나의 약수, 3^2 이 a 와 c 중 어느 하나의 약수, 5가 a 와 c 중 어느 하나의 약수이어야 한다.

따라서 a 와 c 가 서로소인 순서쌍 (a, c) 의 개수는

$$2 \times 2 \times 2 = 8$$

그러므로 서로소가 아닌 자연수 a, c 의 모든 순서쌍 (a, c) 의 개수는 $18 - 8 = 10$

(iii) $b=3$ 인 경우

$ac = 2^4 \times 5$ 이므로 a, c 는 $2^4 \times 5$ 의 약수이다.

이때 a 가 정해지면 c 는 자동으로 정해지므로 가능한 순서쌍 (a, c) 의 개수는 $2^4 \times 5$ 의 약수의 개수와 같다.

즉, $(4+1) \times (1+1) = 5 \times 2 = 10$

이 중 a 와 c 가 서로소인 경우는 a 와 c 의 공약수가 1뿐인 경우이므로 2^4 이 a 와 c 중 어느 하나의 약수이고 5가 a 와 c 중 어느 하나의 약수이어야 한다.

따라서 a 와 c 가 서로소인 순서쌍 (a, c) 의 개수는 ${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$

그러므로 서로소가 아닌 자연수 a, c 의 모든 순서쌍 (a, c) 의 개수는 $10 - 4 = 6$

(iv) $b=4$ 인 경우

$ac = 3^2 \times 5$ 이므로 a 와 c 가 서로소가 아닌 모든 순서쌍 (a, c) 는 $(3, 15)$ 또는 $(15, 3)$ 의 2개이다.

(v) $b=6$ 인 경우

$ac = 2^2 \times 5$ 이므로 a 와 c 가 서로소가 아닌 모든 순서쌍 (a, c) 는 $(2, 10)$ 또는 $(10, 2)$ 의 2개이다.

(vi) $b=12$ 인 경우

조건을 만족시키는 순서쌍 (a, c) 는 존재하지 않는다.

3단계 순서쌍 (a, b, c) 의 개수 구하기

(i)~(vi)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$22 + 10 + 6 + 2 + 2 = 42$$

02 답 188

1단계 (가), (나)를 만족시키는 경우 구하기

문자열 aaa 와 이웃한 자리를 $\triangle$, 문자열 aaa 와 이웃하지 않는 자리를 $\square$ 로 나타내면 (가)를 만족시키는 문자열의 형태는

$$aaa\triangle\square\square\square, \triangle aaa\triangle\square\square, \square\triangle aaa\triangle\square, \\ \square\square\triangle aaa\triangle, \square\square\square\triangle aaa$$

의 5가지이고 (나)에서 $\triangle$ 에 배열될 수 있는 문자는 b 또는 c 이다.

2단계 문자열 aaa 를 놓는 자리에 따라 만들 수 있는 문자열의 개수 구하기

(i) $aaa\triangle\square\square\square$ 일 때,

① $\triangle$ 에 b 가 배열된 경우

3개의 $\square$ 에 세 문자를 배열하는 경우의 수는 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$$

이때 조건을 만족시키지 않는 문자열은 $aaabbbba, aaabbbb, aaabbbbc, aaabaaaa, aaabcccc$ 의 5가지이다.

따라서 만들 수 있는 문자열의 개수는 $27 - 5 = 22$

② $\triangle$ 에 c 가 배열된 경우

①과 같은 방법으로 하면 만들 수 있는 문자열의 개수는 22

①, ②에서 만들 수 있는 문자열의 개수는 $22 + 22 = 44$

(ii) $\triangle aaa\triangle\square\square$ 일 때,

2개의 $\triangle$ 에 a 가 아닌 두 문자를 배열하는 경우의 수는 b, c 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$$

2개의 $\square$ 에 세 문자를 배열하는 경우의 수는 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$$

이때 조건을 만족시키지 않는 문자열은 $baaabbb, baaaccc, caaabbb, caaaccc$ 의 4가지이다.

따라서 만들 수 있는 문자열의 개수는

$$4 \times 9 - 4 = 32$$

(iii) $\square\triangle aaa\triangle\square$ 일 때,

2개의 $\triangle$ 에 a 가 아닌 두 문자를 배열하는 경우의 수는 b, c 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_2 = 2^2 = 4$$

2개의 $\square$ 에 세 문자를 배열하는 경우의 수는 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$$

따라서 만들 수 있는 문자열의 개수는

$$4 \times 9 = 36$$

(iv) $\square\square\triangle aaa\triangle$ 일 때,

(ii)와 같은 방법으로 하면 만들 수 있는 문자열의 개수는 32

(v) $\square\square\square\triangle aaa$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면 만들 수 있는 문자열의 개수는 44

3단계 모든 문자열의 개수 구하기

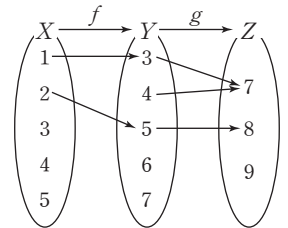
(i)~(v)에서 만들 수 있는 모든 문자열의 개수는

$$44 + 32 + 36 + 32 + 44 = 188$$

03 답 342

1단계 $g(6), g(7)$ 의 값에 따라 순서쌍 $(f(3), f(4), f(5), g(6), g(7))$ 의 개수 구하기

(가), (나)를 만족시키려면 $g(6), g(7)$ 의 값 중 적어도 하나는 집합 Z 의 원소 9이어야 한다.



(i) $g(6)=g(7)=9$ 인 경우

(나)를 만족시키려면 $f(3), f(4), f(5)$ 의 값 중 적어도 하나는 집합 Y 의 원소 6 또는 7이어야 한다.

따라서 $f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 5, 6, 7 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수에서 3, 4, 5

중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수를 빼면 되므로 ${}_5\Pi_3 - {}_3\Pi_3 = 5^3 - 3^3 = 125 - 27 = 98$

따라서 순서쌍 $(f(3), f(4), f(5), g(6), g(7))$ 의 개수는

$$1 \times 98 = 98$$

(ii) $g(6)=9, g(7) \neq 9$ 인 경우

$g(7)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 7, 8 중에서 1개를 택하면 되므로 ${}_2C_1 = 2$

(나)를 만족시키려면 $f(3), f(4), f(5)$ 의 값 중 적어도 하나는 집합 Y 의 원소 6이어야 한다.

따라서 $f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 5, 6, 7 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수에서 3, 4, 5

중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수를 빼면 되므로 ${}_5\Pi_3 - {}_4\Pi_3 = 5^3 - 4^3 = 125 - 64 = 61$

따라서 순서쌍 $(f(3), f(4), f(5), g(6), g(7))$ 의 개수는

$$2 \times 61 = 122$$

(iii) $g(6) \neq 9, g(7)=9$ 인 경우

(ii)와 같은 방법으로 하면 순서쌍 $(f(3), f(4), f(5), g(6), g(7))$ 의 개수는 122

2단계 순서쌍 $(f(3), f(4), f(5), g(6), g(7))$ 의 개수 구하기

(i), (ii), (iii)에서 순서쌍 $(f(3), f(4), f(5), g(6), g(7))$ 의 개수는
 $98 + 122 + 122 = 342$

04 답 ①

1단계 $f(n)$ 구하기

숫자 0을 한 개 이하로 사용하여 만든 n 자리의 자연수 중에서 각 자리의 숫자의 합이 n 인 경우는 0이 0개인 경우와 0이 1개인 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) 0이 0개인 경우

0이 0개이면 1이 n 개이어야 하므로 n 자리의 자연수의 개수는 1

(ii) 0이 1개인 경우

0이 1개이면 2가 1개, 1이 $(n-2)$ 개이어야 하므로 n 자리의 자연수의 개수는 n 개의 수를 일렬로 배열하는 경우의 수에서 0이 맨 앞에 오는 경우의 수를 빼면 되므로

$$\frac{n!}{(n-2)!} - \frac{(n-1)!}{(n-2)!} = n(n-1) - (n-1) = (n-1)^2$$

(i), (ii)에서 $f(n) = 1 + (n-1)^2 = n^2 - 2n + 2$

2단계 n 의 값 구하기

이때 $f(n) = 82$ 이므로 $n^2 - 2n + 2 = 82$

$$n^2 - 2n - 80 = 0, (n+8)(n-10) = 0$$

$\therefore n = 10$ ($\because n$ 은 자연수)

idea
05 답 20

1단계 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ 의 값이 될 수 있는 수 구하기

$a_n = 1$ 이면 $b_n = 0$ 이고 $a_n = 0$ 이면 $b_n = 1$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 6$$

이때 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = k$ ($k \leq 6$)라 하면

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 6 - k$$

$$k \geq 6 - k \text{에서 } 2k \geq 6 \quad \therefore k \geq 3$$

이때 $k \leq 6$ 이므로 k 의 값은 3, 4, 5, 6이다.

2단계 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ 의 값에 따라 순서쌍

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수 구하기

$a_1 \geq b_1$ 을 만족시키려면 $a_1 = 1$

(i) $k = 3$ 일 때,

① $a_2 = 1$ 인 경우

순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는 1, 0, 0, 0을 일렬로 배열하는 경우에서 0, 0, 0, 1인 경우를 제외하면 되므로

$$\frac{4!}{3!} - 1 = 4 - 1 = 3$$

② $a_2 = 0$ 인 경우

$a_3 = 0$ 이면 $a_1 + a_2 + a_3 < b_1 + b_2 + b_3$ 이므로 $a_3 = 1$

따라서 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는 1, 0, 0을 일렬로 배열하는 경우에서 0, 0, 1인 경우를 제외하면 되므로

$$\frac{3!}{2!} - 1 = 3 - 1 = 2$$

③ ②에서 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는 $3 + 2 = 5$

(ii) $k = 4$ 일 때,

① $a_2 = 1$ 인 경우

순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는 1, 1, 0, 0을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$

② $a_2 = 0$ 인 경우

$a_3 = 0$ 이면 $a_1 + a_2 + a_3 < b_1 + b_2 + b_3$ 이므로 $a_3 = 1$

따라서 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는 1, 1, 0을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

③ ②에서 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는

$$6 + 3 = 9$$

(iii) $k = 5$ 일 때,

순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는 1, 1, 1, 1, 0을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

(iv) $k = 6$ 일 때,

순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 은 (1, 1, 1, 1, 1, 1)의 1개

3단계 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수 구하기

(i)~(iv)에서 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는

$$5 + 9 + 5 + 1 = 20$$

다른 풀이1

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 6$ 이므로

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = k$ ($k \leq 6$)라 하면

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 = 6 - k$$

$$k \geq 6 - k \text{에서 } 2k \geq 6 \quad \therefore k \geq 3$$

이때 $k \leq 6$ 이므로 k 의 값은 3, 4, 5, 6이다.

$a_1 \geq b_1$ 을 만족시키려면 $a_1 = 1$

6 이하의 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq b_1 + b_2 + \dots + b_n \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

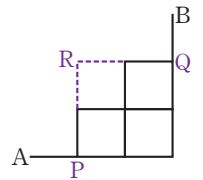
을 만족시키는 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수를 구하면 다음과 같다.

(i) $k = 3$ 일 때,

1, 1, 1, 0, 0, 0을 ①을 만족시키도록 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 그림과 같은 도로망에서 오른쪽으로 1칸 가는 것을 1, 위로 1칸 가는 것을 0이라 하면 A에서 B로 가는 최단 경로의 수와 같다.

$$\therefore 1 \times \left(\frac{4!}{2! \times 2!} - 1 \right) \times 1 = 6 - 1 = 5$$

$\hookrightarrow (P \rightarrow Q \text{ 가는 최단 경로의 수}) - (P \rightarrow R \rightarrow Q \text{ 가는 최단 경로의 수})$

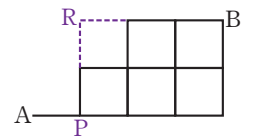


(ii) $k = 4$ 일 때,

1, 1, 1, 1, 0, 0을 ①을 만족시키도록 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 그림과 같은 도로망에서 오른쪽으로 1칸 가는 것을 1, 위로 1칸 가는 것을 0이라 하면 A에서 B로 가는 최단 경로의 수와 같다.

$$\therefore 1 \times \left(\frac{5!}{3! \times 2!} - 1 \right) = 10 - 1 = 9$$

$\hookrightarrow (P \rightarrow B \text{ 가는 최단 경로의 수}) - (P \rightarrow R \rightarrow B \text{ 가는 최단 경로의 수})$



(iii) $k = 5$ 일 때,

1, 1, 1, 1, 1, 0을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

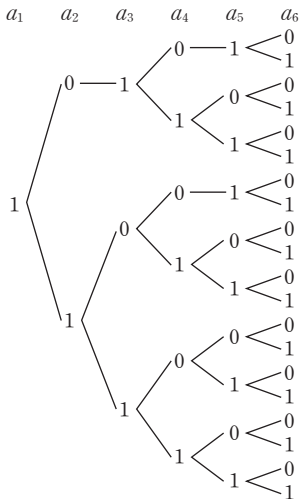
(iv) $k = 6$ 일 때, (1, 1, 1, 1, 1, 1)의 1개

(i)~(iv)에서 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는

$$5 + 9 + 5 + 1 = 20$$

다른 풀이2

그림과 같이 나타내어 풀 수 있다.



따라서 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ 의 개수는 20이다.

06 답 ②

1단계 x, y, z 의 값에 따라 순서쌍 (x, y, z) 의 개수 구하기

서로 다른 세 자연수 a, b, c 에 대하여

(i) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 0^2 + 0^2$ 꼴일 때,

순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 $a^2, 0^2, 0^2$ 을 일렬로 배열한 후 a^2 대신 $\pm a$ 를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} \times 2 = 3 \times 2 = 6$$

(ii) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + a^2 + 0^2$ 꼴일 때,

순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 $a^2, a^2, 0^2$ 을 일렬로 배열한 후 a^2, a^2 각각에 $\pm a, \pm a$ 를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} \times 2^2 = 3 \times 4 = 12$$

(iii) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + 0^2$ 꼴일 때,

순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 $a^2, b^2, 0^2$ 을 일렬로 배열한 후 a^2 대신 $\pm a$ 를, b^2 대신 $\pm b$ 를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$3! \times 2^2 = 6 \times 4 = 24$$

(iv) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + a^2 + a^2$ 꼴일 때,

순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 a^2, a^2, a^2 을 일렬로 배열한 후 a^2, a^2, a^2 각각에 $\pm a, \pm a, \pm a$ 를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$1 \times 2^3 = 1 \times 8 = 8$$

(v) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + a^2 + b^2$ 꼴일 때,

순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 a^2, a^2, b^2 을 일렬로 배열한 후 a^2, a^2, b^2 각각에 $\pm a, \pm a, \pm b$ 를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{3!}{2!} \times 2^3 = 3 \times 8 = 24$$

(vi) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2$ 꼴일 때,

순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 a^2, b^2, c^2 을 일렬로 배열한 후 a^2, b^2, c^2 각각에 $\pm a, \pm b, \pm c$ 를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$3! \times 2^3 = 6 \times 8 = 48$$

2단계 순서쌍 (x, y, z) 의 개수가 30이 되는 경우 찾기

따라서 순서쌍 (x, y, z) 의 개수가 30이 되려면 자연수 n 은 (i), (iii) 또는 (i), (v) 꼴로 동시에 표현되어야 한다.

즉, $n = a^2 + 0^2 + 0^2$ 과 $n = a^2 + b^2 + 0^2$ 꼴로 동시에 표현되거나 $n = a^2 + 0^2 + 0^2$ 과 $n = a^2 + a^2 + b^2$ 꼴로 동시에 표현되어야 한다.

3단계 모든 n 의 값의 합 구하기

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + 0^2 + 0^2$ 에서 $n = a^2$ 이고, n 은 50 이하의 자연수이므로 n 의 값이 될 수 있는 수는 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49이다.

이 중 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + 0^2$ 꼴로 표현될 수 있는 자연수는 25이고,

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + a^2 + b^2$ 꼴로 표현될 수 있는 자연수는 9, 36이므로 구하는 모든 n 의 값의 합은

$$25 + 9 + 36 = 70$$

07 답 720

1단계 함숫값 중 홀수의 개수에 따라 함수 f 의 개수 구하기

(㉞)에서 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 중 홀수의 개수를 n 이라 하면 $n=0$ 또는 $n=2$ 또는 $n=4$ 이다.

(i) $n=0$ 일 때,

지역의 세 원소는 모두 짝수이고 집합 X 의 원소 중 짝수는 2개뿐이므로 (㉞)을 만족시키지 않는다.

(ii) $n=2$ 일 때,

(㉞)에서 홀수인 두 함숫값이 서로 같으면 지역의 세 원소 중 홀수인 원소가 1개, 짝수인 원소가 2개이고, 홀수인 두 함숫값이 서로 다른 지역의 세 원소 중 홀수인 원소가 2개, 짝수인 원소가 1개이다.

① 지역의 원소가 홀수 1개, 짝수 2개인 경우

집합 X 의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서 홀수 1개와 짝수 2개를 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_2C_2 = 3 \times 1 = 3 \quad \dots\dots ㉠$$

지역의 세 원소 중 홀수를 a , 두 짝수를 b, c 라 하면 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 문자 a, a, b, c, c 또는 a, a, b, b, c 를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{2! \times 2!} + \frac{5!}{2! \times 2!} = 30 + 30 = 60 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡에서 함수 f 의 개수는 $3 \times 60 = 180$

② 지역의 원소가 홀수 2개, 짝수 1개인 경우

집합 X 의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서 홀수 2개와 짝수 1개를 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_2C_1 = 3 \times 2 = 6 \quad \dots\dots ㉢$$

지역의 세 원소 중 두 홀수를 a, b , 짝수를 c 라 하면 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 문자 a, b, c, c, c 를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{3!} = 20 \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣에서 함수 f 의 개수는 $6 \times 20 = 120$

①, ②에서 함수 f 의 개수는 $180 + 120 = 300$

(iii) $n=4$ 일 때,

짝수인 함숫값이 1개이므로 (㉞)에서 지역의 원소는 홀수 2개, 짝수 1개이다.

집합 X 의 원소인 1, 2, 3, 4, 5 중에서 홀수 2개와 짝수 1개를 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_2C_1 = 3 \times 2 = 6 \quad \dots\dots ㉤$$

지역의 세 원소 중 두 홀수를 a, b , 짝수를 c 라 하면 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 문자 a, b, b, b, c 또는 문자 a, a, b, b, c 또는 문자 a, a, a, b, c 를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2! \times 2!} + \frac{5!}{3!} = 20 + 30 + 20 = 70 \quad \dots\dots ㉥$$

㉤, ㉥에서 함수 f 의 개수는 $6 \times 70 = 420$

2단계 함수 f 의 개수 구하기

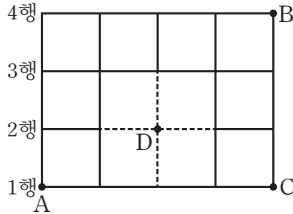
(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$300 + 420 = 720$$

08 답 119

1단계 각 행에서 연락을 받았을 때, 경우의 수 구하기

그림과 같이 비어 있는 교차로를 D라 하고, 아래에서부터 1행, 2행, 3행, 4행이라 하자.

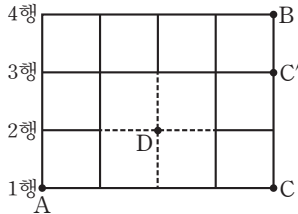


(i) 1행에서 연락을 받은 경우

그 경우의 수는 1

(ii) 2행에서 연락을 받은 경우

그림과 같이 점 C를 2행에 대칭시킨 점을 C' 이라 하자.



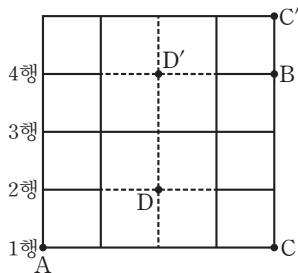
구하는 경우의 수는 A 지점에서 C' 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수와 같다. 먼저 D 지점이 있다고 생각하고 A 지점에서 C' 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{6!}{4! \times 2!} = 15$

이때 A 지점에서 D 지점을 거쳐 C' 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 3 \times 3 = 9$

따라서 그 경우의 수는 $15 - 9 = 6$

(iii) 3행에서 연락을 받은 경우

그림과 같이 두 점 C, D를 3행에 대칭시킨 점을 각각 C' , D' 이라 하자.



구하는 경우의 수는 A 지점에서 C' 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수와 같다. 먼저 두 지점 D와 D' 이 있다고 생각하고 A 지점에서 C' 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{8!}{4! \times 4!} = 70$

이때 A 지점에서 D 지점을 거쳐 C' 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 3 \times 10 = 30$

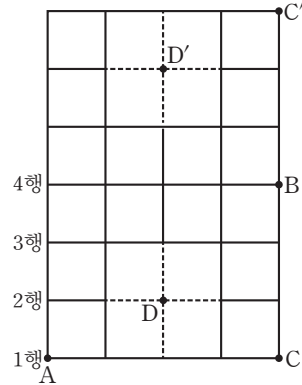
A 지점에서 D' 지점을 거쳐 C' 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{5!}{2! \times 3!} \times \frac{3!}{2!} = 10 \times 3 = 30$

A 지점에서 두 지점 D, D' 을 모두 거쳐 C' 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} \times 1 \times \frac{3!}{2!} = 3 \times 1 \times 3 = 9$

따라서 그 경우의 수는 $70 - (30 + 30 - 9) = 19$

(iv) 4행에서 연락을 받은 경우

그림과 같이 두 점 C, D를 4행에 대칭시킨 점을 각각 C' , D' 이라 하자.



구하는 경우의 수는 A 지점에서 C' 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수와 같다.

먼저 두 지점 D와 D' 이 있다고 생각하고 A 지점에서 C' 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{10!}{4! \times 6!} = 210$

이때 A 지점에서 D 지점을 거쳐 C' 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} \times \frac{7!}{2! \times 5!} = 3 \times 21 = 63$

A 지점에서 D' 지점을 거쳐 C' 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{7!}{2! \times 5!} \times \frac{3!}{2!} = 21 \times 3 = 63$

A 지점에서 두 지점 D, D' 을 모두 거쳐 C' 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} \times 1 \times \frac{3!}{2!} = 3 \times 1 \times 3 = 9$

따라서 그 경우의 수는 $210 - (63 + 63 - 9) = 93$

2단계 경우의 수 구하기

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$1 + 6 + 19 + 93 = 119$$

09 답 ②

1단계 a_i 의 값에 따라 자연수의 개수 구하기

$a_{i+1} - a_i = b_i$ ($i = 1, 2, 3$)라 하면 $a_2 - a_1 = b_1$, $a_3 - a_2 = b_2$, $a_4 - a_3 = b_3$

이므로 $0 < a_2 - a_1 \leq 3$, $0 < a_3 - a_2 \leq 3$, $0 < a_4 - a_3 \leq 3$ 에서

$0 < b_1 \leq 3$, $0 < b_2 \leq 3$, $0 < b_3 \leq 3$

즉, b_1, b_2, b_3 은 3 이하의 자연수이다.

또 $a_1 + b_1 + b_2 + b_3 = a_4$ 이고 $a_4 \leq 9$ 이므로

$a_1 + b_1 + b_2 + b_3 \leq 9$ ㉠ 천의 자리의 숫자는 9 이하이다.

네 자리의 자연수의 개수는 부등식 ㉠을 만족시키는 순서쌍 (a_1, b_1, b_2, b_3) 의 개수와 같다.

(i) $a_1 = 0$ 일 때,

㉠에서 $b_1 + b_2 + b_3 \leq 9$ 이므로 이를 만족시키는 3 이하의 자연수 $b_1,$

b_2, b_3 의 순서쌍 (b_1, b_2, b_3) 의 개수는 ${}_3\Pi_3 = 3^3 = 27$

(ii) $a_1 = 1$ 일 때,

㉠에서 $b_1 + b_2 + b_3 \leq 8$ 이므로 이를 만족시키는 3 이하의 자연수 $b_1,$

b_2, b_3 의 순서쌍 (b_1, b_2, b_3) 은 (i)에서 구한 순서쌍에서 $(3, 3, 3)$ 을 제외하면 되므로 그 개수는 $27 - 1 = 26$

(iii) $a_1=2$ 일 때,

㉠에서 $b_1+b_2+b_3 \leq 7$ 이므로 이를 만족시키는 3 이하의 자연수 b_1, b_2, b_3 의 순서쌍 (b_1, b_2, b_3) 의 개수는 (ii)에서 구한 순서쌍의 개수에서 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수를 제외하면 되므로

$$26 - \frac{3!}{2!} = 26 - 3 = 23$$

(iv) $a_1=3$ 일 때,

㉠에서 $b_1+b_2+b_3 \leq 6$ 이므로 이를 만족시키는 3 이하의 자연수 b_1, b_2, b_3 의 순서쌍 (b_1, b_2, b_3) 의 개수는 (iii)에서 구한 순서쌍의 개수에서 1, 3, 3 또는 2, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수를 제외하면 되므로

$$23 - \frac{3!}{2!} \times 2 = 23 - 6 = 17$$

(v) $a_1=4$ 일 때,

㉠에서 $b_1+b_2+b_3 \leq 5$ 이므로 이를 만족시키는 3 이하의 자연수 b_1, b_2, b_3 의 순서쌍 (b_1, b_2, b_3) 의 개수는 1, 1, 1 또는 1, 1, 2 또는 1, 1, 3 또는 1, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$1 + \frac{3!}{2!} \times 3 = 1 + 9 = 10$$

(vi) $a_1=5$ 일 때,

㉠에서 $b_1+b_2+b_3 \leq 4$ 이므로 이를 만족시키는 3 이하의 자연수 b_1, b_2, b_3 의 순서쌍 (b_1, b_2, b_3) 의 개수는 1, 1, 1 또는 1, 1, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$1 + \frac{3!}{2!} = 1 + 3 = 4$$

(vii) $a_1=6$ 일 때,

㉠에서 $b_1+b_2+b_3 \leq 3$ 이므로 이를 만족시키는 3 이하의 자연수 b_1, b_2, b_3 의 순서쌍 (b_1, b_2, b_3) 은 (1, 1, 1)의 1개

2단계 자연수의 개수 구하기

(i)~(vii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$27 + 26 + 23 + 17 + 10 + 4 + 1 = 108$$

다른 풀이

주어진 조건을 만족시키는 네 자리의 자연수는 천의 자리에서 일의 자리로 내려갈수록 숫자가 점점 작아지고, 이웃한 두 숫자의 차가 3 이하이어야 하므로 이웃한 두 숫자 사이에 포함되는 숫자의 개수는 최대 2개이다.

따라서 ○ 4개와 □ 6개를 일렬로 배열하는 상황을 생각하여

$$\bigcirc \vee \bigcirc \vee \bigcirc \vee \bigcirc$$

와 같이 ○ 4개의 사이사이 세 자리에 각각 □를 2개 이하로 배열하고 나머지 □를 양 끝에 배열한 후 맨 왼쪽부터 차례로 9, 8, 7, ..., 0을 대응시키면 ○ 4개에 대응되는 숫자로 이루어진 네 자리의 자연수가 조건을 만족시키는 자연수이다.

이때 ○ 사이사이에 들어가는 □의 총개수에 따라 분류하면 다음과 같다.

(i) □가 0개일 때, ○ 4개의 양 끝에 □ 6개를 배열하는 경우의 수는 7이다.

$$\hookrightarrow (0, 6), (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1), (6, 0) \text{의 } 7\text{가지}$$

(ii) □가 1개일 때, ○ 4개의 사이사이 세 자리에 □가 1개 들어가는 경우의 수는 세 자리 중 하나를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1=3$ 나머지 □ 5개를 양 끝에 배열하는 경우의 수는 6

$$\hookrightarrow (0, 5), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (5, 0) \text{의 } 6\text{가지}$$

(iii) □가 2개일 때, ○ 4개의 사이사이 세 자리에 □가 2개, 0개, 0개 들어가는 경우의 수는 3, 1개, 1개, 0개 들어가는 경우의 수는 3이므로 $3+3=6$

나머지 □ 4개를 양 끝에 배열하는 경우의 수는 5

$$\hookrightarrow (0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0) \text{의 } 5\text{가지}$$

(iv) □가 3개일 때, ○ 4개의 사이사이 세 자리에 □가 1개씩 들어가는 경우의 수는 1, □가 2개, 1개, 0개 들어가는 경우의 수는 $3!=6$ 이므로 $1+6=7$

나머지 □ 3개를 양 끝에 배열하는 경우의 수는 4

$$\hookrightarrow (0, 3), (1, 2), (2, 1), (3, 0) \text{의 } 4\text{가지}$$

$$\text{따라서 } 7 \times 4 = 28$$

(v) □가 4개일 때, ○ 4개의 사이사이 세 자리에 □가 2개, 2개, 0개 들어가는 경우의 수는 3, □가 2개, 1개, 1개 들어가는 경우의 수는 3이므로 $3+3=6$

나머지 □ 2개를 양 끝에 배열하는 경우의 수는 3

$$\hookrightarrow (0, 2), (1, 1), (2, 0) \text{의 } 3\text{가지}$$

$$\text{따라서 } 6 \times 3 = 18$$

(vi) □가 5개일 때, ○ 4개의 사이사이 세 자리에 □가 2개, 2개, 1개 들어가는 경우의 수는 3이고, 나머지 □ 1개를 양 끝에 배열하는 경우의 수는 2이므로 $3 \times 2 = 6$

(vii) □가 6개일 때, ○ 4개의 사이사이 세 자리에 □가 2개, 2개, 2개 들어가는 경우의 수는 1

(i)~(vii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$7 + 18 + 30 + 28 + 18 + 6 + 1 = 108$$

10 답 132

1단계 이동 경로의 길이가 4인 경우의 수 구하기

(i) 이동 경로의 길이가 4인 경우

그림에서 \ 방향으로 2번, / 방향으로 2번 이동하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

이와 같은 경로로 이동할 수 있는 면이 4개이고 모서리를 따라 이동하는 경우는 경로가 중복되므로 이동 경로의 길이가 4인 경우의 수는

$$6 \times 4 - 4 = 20$$



2단계 이동 경로의 길이가 5인 경우의 수 구하기

(ii) 이동 경로의 길이가 5인 경우

이동 경로에 가로로 1칸 이동하는 경우가 1번 포함되어야 한다.

① 정팔면체의 모서리에서 가로로 1칸 이동하는 경우

$A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 이동하는 경우는

그림에서 $A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow S \rightarrow B$,

$A \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow T \rightarrow B$ 의 2가지

$A \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow B$, $A \rightarrow Q \rightarrow P \rightarrow B$,

$A \rightarrow R \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 이동하는 경우도 같은 방법으로 하면 각각 2가지

이때 이와 같은 경로로 이동할 수 있는 면이

4개이므로 경로의 수는

$$(2+2+2+2) \times 4 = 32$$

② 한 면 안에서 가로로 1칸 이동하는 경우

$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B$ 로 이동하는 경우는

그림에서 $A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow B$,

$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow B$,

$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow B$,

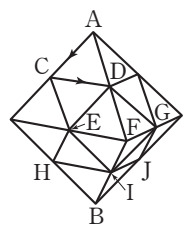
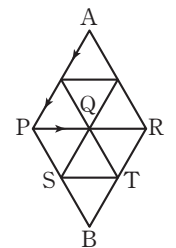
$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow I \rightarrow B$,

$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow J \rightarrow B$ 의 5가지

$A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$, $A \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow B$, $A \rightarrow I \rightarrow H \rightarrow B$ 로

이동하는 경우도 같은 방법으로 하면 각각 5가지

이동하는 경우도 같은 방법으로 하면 각각 5가지



이때 이와 같은 경로로 이동할 수 있는 면이 4개이므로 경로의 수는 $(5+5+5+5) \times 4 = 80$

①, ②에서 이동 경로의 길이가 5인 경우의 수는

$$32 + 80 = 112$$

3단계 경우의 수 구하기

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

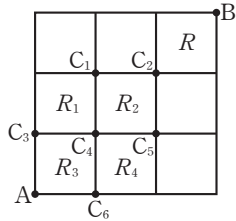
$$20 + 112 = 132$$

11 답 40

1단계 조건을 만족시키는 경우 구하기

그림과 같이 6개의 지점 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$ 을 잡고 4개의 정사각형을 R_1, R_2, R_3, R_4 라 하자.

이때 ㉑를 만족시키려면 $A \rightarrow C_2 \rightarrow B \rightarrow C_2 \rightarrow A$ 로 이동해야 하고 ㉒를 만족시키려면 정사각형 R_1, R_2, R_3, R_4 중 네 변을 모두 지나는 정사각형은 없어야 한다.



2단계 각각의 경우의 수 구하기

(i) $C_2 \rightarrow B, B \rightarrow C_2$ 로 이동하는 경우

정사각형 R 의 모든 변을 다 지나야 하므로

(C_2 지점에서 B 지점으로 이동하는 경우의 수)

$\times$ (B 지점에서 C_2 지점으로 이동하는 경우의 수)

$$= 2 \times 1 = 2$$

(ii) $A \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow A$ 로 이동하는 경우

(A 지점에서 C_2 지점으로 이동하는 경우의 수)

$\times$ (C_2 지점에서 A 지점으로 이동하는 경우의 수)

$$= \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!}$$

$$= 6 \times 6 = 36$$

① 정사각형 R_1 의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \rightarrow C_3 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_3 \rightarrow A$ 로 이동하는 경우의 수이므로

$$(1 \times 2 \times 1) \times (1 \times 1 \times 1) = 2$$

② 정사각형 R_2 의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \rightarrow C_4 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow A$ 로 이동하는 경우의 수이므로

$$(2 \times 2) \times (1 \times 2) = 8$$

③ 정사각형 R_3 의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \rightarrow C_4 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow A$ 로 이동하는 경우의 수이므로

$$(2 \times 2) \times (2 \times 1) = 8$$

④ 정사각형 R_4 의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \rightarrow C_6 \rightarrow C_5 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_5 \rightarrow C_6 \rightarrow A$ 로 이동하는 경우의 수이므로

$$(1 \times 2 \times 1) \times (1 \times 1 \times 1) = 2$$

⑤ 두 정사각형 R_2, R_3 의 네 변을 모두 지나는 경우

$A \rightarrow C_4 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow A$ 로 이동하는 경우의 수이므로

$$(2 \times 2) \times (1 \times 1) = 4$$

①~⑤에서 $A \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow A$ 로 이동할 때, 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나는 정사각형이 없는 경우의 수는

$$36 - \{(2+8+8+2)-4\} = 20$$

3단계 경우의 수 구하기

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$2 \times 20 = 40$$

02

중복조합과 이항정리

STEP 1

핵심 문제

| 28~29쪽

01 ③	02 20	03 ③	04 117	05 21	06 ⑤
07 100	08 120	09 ④	10 ④	11 ①	12 18
13 660					

01 답 ③

서로 다른 5개의 문자 중에서 3개를 택하는 경우의 수는

$${}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

그 3개의 문자에서 중복을 허용하여 10개를 뽑되 각 문자가 적어도 하나씩 포함되어야 하므로

$${}_3H_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

따라서 구하는 서로 다른 항의 개수는

$$10 \times 36 = 360$$

02 답 20

전화기가 놓인 책상을 ●, 전화기가 놓이지 않은 책상을 ○라 하자.

전화기가 놓인 책상 사이에 2개의 빈 책상 $\underline{\quad \bullet \circ \circ \bullet \circ \circ \quad}$

상을 놓은 후 그림의 밑줄 친 네 부분에

서 남은 3개의 책상을 놓을 세 부분을 중복을 허용하여 택하는 경우의 수는

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

03 답 ③

3명의 학생 중에서 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생 1명을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

1명의 학생이 3가지 색의 카드를 각각 1장씩 갖고 남은 빨간색 카드 3장, 파란색 카드 1장을 3명의 학생에게 나누어 주면 되므로 빨간색 카드 3장을 중복을 허용하여 3명의 학생에게 나누어 주고 파란색 카드 1장을 받을 학생 1명을 택하는 경우의 수는

$${}_3H_3 \times {}_3C_1 = {}_5C_3 \times 3 = {}_5C_2 \times 3 = 10 \times 3 = 30$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$3 \times 30 = 90$$

04 답 117

초콜릿을 받지 못하는 학생 수에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) 1명의 학생이 초콜릿을 받지 못하는 경우

초콜릿을 받지 못하는 1명을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

남은 2명의 학생에게 초콜릿을 각각 2개, 1개씩 나누어 주는 경우의 수는 ${}_3C_2 \times {}_1C_1 \times 2! = 3 \times 1 \times 2 = 6$

㉑를 만족시키도록 초콜릿을 받지 못한 1명의 학생에게 사탕 2개, 초콜릿 1개를 받은 학생에게 사탕 1개를 나누어 주고, 남은 사탕 2개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

따라서 그 경우의 수는

$$3 \times 6 \times 6 = 108$$

- (ii) 2명의 학생이 초콜릿을 받지 못하는 경우
초콜릿을 받지 못하는 2명을 택하는 경우의 수는
 ${}_3C_2=3$
 남은 1명의 학생에게 초콜릿 3개를 나누어 주는 경우의 수는
 ${}_3C_3=1$
 (ㄴ)을 만족시키도록 초콜릿을 받지 못한 2명의 학생에게 사탕을 각각 2개 나누어 주고, 남은 사탕 1개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는
 ${}_3C_1=3$
 따라서 그 경우의 수는
 $3 \times 1 \times 3 = 9$
- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
 $108 + 9 = 117$

05 답 21

- (㉞)에서 $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 3$ 이므로 $a' = a - 1, b' = b - 2, c' = c - 3$ 으로 놓으면 a', b', c' 은 음이 아닌 정수이다.
 이때 (ㄴ)의 $a + b + c = 11$ 에서
 $(a' + 1) + (b' + 2) + (c' + 3) = 11$
 $\therefore a' + b' + c' = 5$
 따라서 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 순서쌍 (a', b', c') 의 개수와 같으므로
 ${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$

06 답 ⑤

- a, b, c, d, e 가 자연수이므로 $(a+b)(c+d+e) = 21$ 에서
 $a+b=3, c+d+e=7$ 또는 $a+b=7, c+d+e=3$
 이때 a, b, c, d, e 가 자연수이므로 $a' = a - 1, b' = b - 1, c' = c - 1, d' = d - 1, e' = e - 1$ 로 놓으면 a', b', c', d', e' 은 음이 아닌 정수이다.
 (i) $a+b=3, c+d+e=7$ 일 때,
 $(a'+1) + (b'+1) = 3, (c'+1) + (d'+1) + (e'+1) = 7$
 $\therefore a' + b' = 1, c' + d' + e' = 4$
 따라서 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는 두 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d', e' 의 순서쌍 (a', b', c', d', e') 의 개수와 같으므로
 ${}_2H_1 \times {}_3H_4 = {}_2C_1 \times {}_6C_4 = 2 \times {}_6C_2 = 2 \times 15 = 30$
- (ii) $a+b=7, c+d+e=3$ 일 때,
 $(a'+1) + (b'+1) = 7, (c'+1) + (d'+1) + (e'+1) = 3$
 $\therefore a' + b' = 5, c' + d' + e' = 0$
 따라서 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는 두 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c', d', e' 의 순서쌍 (a', b', c', d', e') 의 개수와 같으므로
 ${}_2H_5 \times {}_3H_0 = {}_6C_5 \times 1 = {}_6C_1 \times 1 = 6 \times 1 = 6$
- (i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는
 $30 + 6 = 36$

07 답 100

- 네 자리 자연수의 천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 각각 a, b, c, d 라 하면 3000보다 작은 네 자리 자연수의 각 자리의 수의 합이 10이므로 $1 \leq a \leq 2$ 이고 $a + b + c + d = 10$

- (i) $a=1$ 일 때,
 $a + b + c + d = 10$ 에서
 $b + c + d = 9$
 즉, 자연수의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d 의 순서쌍 (b, c, d) 의 개수와 같으므로
 ${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$
- (ii) $a=2$ 일 때,
 $a + b + c + d = 10$ 에서
 $b + c + d = 8$
 즉, 자연수의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 b, c, d 의 순서쌍 (b, c, d) 의 개수와 같으므로
 ${}_3H_8 = {}_{10}C_8 = {}_{10}C_2 = 45$
- (i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는
 $55 + 45 = 100$

08 답 120

- (㉞)에서 $f(1), f(3), f(5)$ 의 값은 1, 3, 5, 7 중 하나이고, $f(2), f(4)$ 의 값은 2, 4, 6 중 하나이다.
 (㉞)에서 $f(1), f(3), f(5)$ 의 값은 1, 3, 5, 7 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 그 값이 작거나 같은 수부터 차례로 대응시키면 되므로 그 경우의 수는
 ${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$
 (ㄴ)에서 $f(2), f(4)$ 의 값은 2, 4, 6 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 그 값이 작거나 같은 수부터 차례로 대응시키면 되므로 그 경우의 수는
 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$
 따라서 구하는 함수 f 의 개수는
 $20 \times 6 = 120$

09 답 ④

- $\left(ax - \frac{2}{ax}\right)^7$ 의 전개식에서 각 항의 계수의 총합은 $\left(ax - \frac{2}{ax}\right)^7$ 에 $x=1$ 을 대입한 값과 같으므로
 $\left(a - \frac{2}{a}\right)^7 = 1, a - \frac{2}{a} = 1$
 $a^2 - a - 2 = 0, (a+1)(a-2) = 0$
 $\therefore a = 2 (\because a > 0)$
 $\left(2x - \frac{1}{x}\right)^7$ 의 전개식의 일반항은
 ${}_7C_r (2x)^{7-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_7C_r (-1)^r 2^{7-r} x^{7-2r}$
 따라서 $\frac{1}{x}$ 항은 $7-2r = -1$ 에서 $r=4$ 일 때이므로 $\frac{1}{x}$ 의 계수는
 ${}_7C_4 \times (-1)^4 \times 2^3 = {}_7C_3 \times 1 \times 8 = 35 \times 1 \times 8 = 280$

10 답 ④

- $\left(3x^2 + \frac{2}{x^3}\right)^n$ 의 전개식의 일반항은
 ${}_nC_r (3x^2)^{n-r} \left(\frac{2}{x^3}\right)^r = {}_nC_r 3^{n-r} 2^r x^{2n-5r}$
 x^3 항이 존재하려면 $2n-5r=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 r 가 존재해야 한다.
 이때 $r = \frac{2n-3}{5}$ 이므로 $2n-3$ 은 5의 배수이어야 한다.
 따라서 구하는 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

11 답 ①

$(1+x)^n$ 의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^r$
 $(1+x^3)^6$ 의 전개식의 일반항은 ${}_6C_s (x^3)^s = {}_6C_s x^{3s}$
따라서 $(1+x)^n(1+x^3)^6$ 의 전개식의 일반항은
 ${}_nC_r x^r \times {}_6C_s x^{3s} = {}_nC_r \times {}_6C_s x^{r+3s}$
 x^3 항은 $r+3s=3$ (r, s 는 각각 $0 \leq r \leq n, 0 \leq s \leq 6$ 인 정수)이므로 이를 만족시키는 r, s 의 순서쌍 (r, s) 는 $(0, 1), (3, 0)$
이때 x^3 의 계수가 41이므로
 ${}_nC_0 \times {}_6C_1 + {}_nC_3 \times {}_6C_0 = 41$
 $6 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 41$
 $n(n-1)(n-2) = 210$
따라서 $210 = 7 \times 6 \times 5$ 이므로
 $n = 7$

12 답 18

$(1+x)^m = {}_mC_0 + {}_mC_1 x + {}_mC_2 x^2 + \cdots + {}_mC_m x^m$ 의 양변에 $x = -9, m = 6$ 을 대입하면
 $(1-9)^6 = {}_6C_0 - 9{}_6C_1 + 9^2{}_6C_2 - 9^3{}_6C_3 + \cdots + 9^6{}_6C_6$
 $\therefore {}_6C_0 - 9{}_6C_1 + 9^2{}_6C_2 - 9^3{}_6C_3 + \cdots + 9^6{}_6C_6 = (-8)^6 = (-2^3)^6 = 2^{18}$
 $\therefore n = 18$

13 답 660

$(1+2x)^n$ 의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r (2x)^r = 2^r {}_nC_r x^r$
 x^2 항은 $r=2$ 일 때이고, $2 \leq n \leq 10$ 인 경우에만 x^2 항이 존재하므로 구하는 x^2 의 계수는
 $2^2({}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{10}C_2) = 4({}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + \cdots + {}_{10}C_2)$
 $= 4({}_4C_3 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{10}C_2)$
 $= 4({}_5C_3 + {}_5C_2 + {}_6C_2 + \cdots + {}_{10}C_2)$
 $= 4({}_6C_3 + {}_6C_2 + {}_7C_2 + \cdots + {}_{10}C_2)$
 $= 4({}_7C_3 + {}_7C_2 + {}_8C_2 + {}_9C_2 + {}_{10}C_2)$
 $= 4({}_8C_3 + {}_8C_2 + {}_9C_2 + {}_{10}C_2)$
 $= 4({}_9C_3 + {}_9C_2 + {}_{10}C_2)$
 $= 4({}_{10}C_3 + {}_{10}C_2)$
 $= 4 \times {}_{11}C_3$
 $= 4 \times 165 = 660$

01 답 ①

버터맛 쿠키 4개, 초코맛 쿠키 3개, 아몬드맛 쿠키 2개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는
 ${}_3H_4 \times {}_3H_3 \times {}_3H_2 = {}_6C_4 \times {}_5C_3 \times {}_4C_2$
 $= {}_6C_2 \times {}_5C_2 \times 6$
 $= 15 \times 10 \times 6$
 $= 900$

이때 1명의 학생이 쿠키를 받지 못하거나 2명의 학생이 쿠키를 받지 못하는 경우를 제외해야 한다.

(i) 1명의 학생이 쿠키를 받지 못하는 경우

3명의 학생 중에서 쿠키를 하나도 받지 못하는 1명의 학생을 택하는 경우의 수는
 ${}_3C_1 = 3$
버터맛 쿠키 4개, 초코맛 쿠키 3개, 아몬드맛 쿠키 2개를 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는
 ${}_2H_4 \times {}_2H_3 \times {}_2H_2 = {}_5C_4 \times {}_4C_3 \times {}_3C_2$
 $= {}_5C_1 \times {}_4C_1 \times {}_3C_1$
 $= 5 \times 4 \times 3$
 $= 60$

이때 모든 쿠키를 1명의 학생에게만 주는 경우의 수가 2이므로 1명의 학생이 쿠키를 받지 못하는 경우의 수는

$$3 \times (60 - 2) = 174$$

(ii) 2명의 학생이 쿠키를 받지 못하는 경우

쿠키를 1명의 학생에게 모두 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

(i), (ii)에서 쿠키를 받지 못하는 학생이 존재하는 경우의 수는

$$174 + 3 = 177$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$900 - 177 = 723$$

02 답 ③

빨간 구슬 3개를 먼저 일렬로 배열한 후 그 사이사이와 양 끝의 4개의 자리를 차례로 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣이라 하자.
이때 ㉡, ㉢에 파란 구슬을 홀수 개 배열하고, 남은 파란 구슬을 ㉠, ㉣에 나누어 배열하면 된다.

(i) ㉡, ㉢에 각각 파란 구슬 1개를 배열하는 경우

㉠, ㉣의 2개의 자리에 중복을 허용하여 남은 5개의 파란 구슬을 배열하는 경우의 수는

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

(ii) ㉡에 파란 구슬 1개, ㉢에 파란 구슬 3개를 배열하는 경우

㉠, ㉣의 2개의 자리에 중복을 허용하여 남은 3개의 파란 구슬을 배열하는 경우의 수는

$${}_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

(iii) ㉡에 파란 구슬 1개, ㉣에 파란 구슬 5개를 배열하는 경우

㉠, ㉢의 2개의 자리에 남은 1개의 파란 구슬을 배열하는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

(iv) ㉡에 파란 구슬 3개, ㉢에 파란 구슬 1개를 배열하는 경우

㉠, ㉣의 2개의 자리에 중복을 허용하여 남은 3개의 파란 구슬을 배열하는 경우의 수는

$${}_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

STEP 2		고난도 문제		30~34쪽	
01 ①	02 ③	03 96	04 55	05 96	06 114
07 162	08 ④	09 49	10 135	11 69	12 168
13 398	14 120	15 ④	16 440	17 ③	18 25
19 35	20 126	21 ②	22 198	23 90	24 14
25 6	26 ④	27 ③	28 2		

- (v) ㉠에 파란 구슬 3개, ㉡에 파란 구슬 3개를 배열하는 경우
 ㉠, ㉡의 2개의 자리에 남은 1개의 파란 구슬을 배열하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$
 (vi) ㉠에 파란 구슬 5개, ㉡에 파란 구슬 1개를 배열하는 경우
 ㉠, ㉡의 2개의 자리에 남은 1개의 파란 구슬을 배열하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$
 (i)~(vi)에서 구하는 경우의 수는
 $6+4+2+4+2+2=20$

03 답 96

- (가)에서 $abc=180=2^2 \times 3^2 \times 5$
 a, b, c 의 3개의 숫자에서 2를 인수로 갖는 2개의 숫자를 중복을 허용하여 택하는 경우의 수는
 ${}_3H_2={}_4C_2=6$
 a, b, c 의 3개의 숫자에서 3을 인수로 갖는 2개의 숫자를 중복을 허용하여 택하는 경우의 수는
 ${}_3H_2={}_4C_2=6$
 a, b, c 의 3개의 숫자에서 5를 인수로 갖는 1개의 숫자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$
 따라서 (가)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는
 $6 \times 6 \times 3=108$
 (나)에서 $a \neq b, b \neq c, c \neq a$ 이므로 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 (가)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수에서 $a=b$ 또는 $b=c$ 또는 $c=a$ 인 순서쌍 (a, b, c) 의 개수를 빼 것과 같다.
 이때 $a=b=c$ 인 경우는 존재하지 않고 a, b, c 중에서 두 수가 같은 순서쌍 (a, b, c) 는
 $(1, 1, 180), (2, 2, 45), (3, 3, 20), (6, 6, 5),$
 $(1, 180, 1), (2, 45, 2), (3, 20, 3), (6, 5, 6),$
 $(180, 1, 1), (45, 2, 2), (20, 3, 3), (5, 6, 6)$
 의 12개이다.
 따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는
 $108-12=96$

04 답 55

- c 가 5 이하의 자연수이므로 $1 \leq b \leq 4$ 이다.
 b 의 값에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.
 (i) $b=1$ 인 경우
 $a \leq 2 \leq c \leq d$ 에서 a 를 택하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$ 이고, c, d 를 택하는 경우의 수는
 ${}_4H_2={}_5C_2=10$
 따라서 그 경우의 수는 $2 \times 10=20$
 (ii) $b=2$ 인 경우
 $a \leq 3 \leq c \leq d$ 에서 a 를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$ 이고, c, d 를 택하는 경우의 수는
 ${}_3H_2={}_4C_2=6$
 따라서 그 경우의 수는 $3 \times 6=18$
 (iii) $b=3$ 인 경우
 $a \leq 4 \leq c \leq d$ 에서 a 를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$ 이고, c, d 를 택하는 경우의 수는
 ${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$
 따라서 그 경우의 수는 $4 \times 3=12$

- (iv) $b=4$ 인 경우
 $a \leq 5 \leq c \leq d$ 에서 a 를 택하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$ 이고, c, d 를 택하는 경우의 수는 1
 따라서 그 경우의 수는 $5 \times 1=5$
 (i)~(iv)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는
 $20+18+12+5=55$

다른 풀이

- $b+1=k$ 라 하면 $a \leq b+1 \leq c \leq d$ 에서 $1 \leq a \leq k \leq c \leq d \leq 5$
 $1 \leq a \leq k \leq c \leq d \leq 5$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, k, c, d) 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 자연수 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례로 a, k, c, d 의 값으로 정하면 되므로 그 개수는
 ${}_5H_4={}_6C_4=70$
 이때 b 는 5 이하의 자연수이므로 $k \neq 1$ 이어야 한다.
 따라서 $k=1$ 인 경우를 제외해야 한다.
 $k=1$ 인 경우는 $a=1$ 이고, c, d 의 값은 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 자연수 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례로 c, d 의 값으로 정하면 되므로 그 개수는
 $1 \times {}_5H_2={}_6C_2=15$
 따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는
 $70-15=55$

05 답 96

- (가)를 만족시키는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 숫자 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 작거나 같은 수부터 차례로 a_1, a_2, a_3, a_4 의 값으로 정하면 되므로 그 개수는
 ${}_6H_4={}_9C_4=126$
 (나)를 만족시키는 순서쌍의 개수는 (가)를 만족시키는 순서쌍의 개수에서 $a_1 \times a_4$ 의 값이 홀수인 순서쌍의 개수를 빼면 된다.
 $a_1 \times a_4$ 의 값이 홀수이려면 a_1, a_4 의 값이 모두 홀수이어야 한다.
 (i) $a_1=a_4$ 일 때,
 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 는 (1, 1, 1, 1), (3, 3, 3, 3), (5, 5, 5, 5)의 3개이다.
 (ii) $a_1 < a_4$ 일 때,
 ① 순서쌍 (a_1, a_4) 가 (1, 3)일 때,
 a_2, a_3 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
 ${}_3H_2={}_4C_2=6$
 ② 순서쌍 (a_1, a_4) 가 (1, 5)일 때,
 a_2, a_3 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
 ${}_5H_2={}_6C_2=15$
 ③ 순서쌍 (a_1, a_4) 가 (3, 5)일 때,
 a_2, a_3 의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 5에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
 ${}_3H_2={}_4C_2=6$
 ①, ②, ③에서 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는
 $6+15+6=27$
 (i), (ii)에서 $a_1 \times a_4$ 의 값이 홀수인 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는
 $3+27=30$
 따라서 구하는 순서쌍 (a_1, a_2, a_3, a_4) 의 개수는
 $126-30=96$

06 답 114

검은색 볼펜의 선택 여부에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) 검은색 볼펜을 선택하는 경우

① 검은색 볼펜 1자루와 다른 한 색깔의 볼펜 4자루를 선택하는 경우

4자루를 선택하는 볼펜의 색깔을 정하는 경우의 수는

$${}_2C_1=2$$

선택한 볼펜을 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_1 \times {}_2H_4 = {}_2C_1 \times {}_5C_4 = 2 \times {}_5C_1 = 2 \times 5 = 10$$

따라서 그 경우의 수는

$$2 \times 10 = 20$$

② 검은색 볼펜 1자루와 파란색, 빨간색 볼펜을 각각 2자루씩 선택하는 경우

선택한 볼펜을 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_2H_1 \times {}_2H_2 \times {}_2H_2 &= {}_2C_1 \times {}_3C_2 \times {}_3C_2 \\ &= 2 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 \\ &= 2 \times 3 \times 3 = 18 \end{aligned}$$

③ 검은색 볼펜 1자루와 다른 두 색깔의 볼펜을 각각 1자루, 3자루 선택하는 경우

1자루를 선택하는 볼펜의 색깔을 정하는 경우의 수는

$${}_2C_1=2$$

선택한 볼펜을 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_2H_1 \times {}_2H_1 \times {}_2H_3 &= {}_2C_1 \times {}_2C_1 \times {}_4C_3 \\ &= 2 \times 2 \times {}_4C_1 \\ &= 2 \times 2 \times 4 = 16 \end{aligned}$$

따라서 그 경우의 수는

$$2 \times 16 = 32$$

①, ②, ③에서 검은색 볼펜을 1자루 선택하는 경우의 수는

$$20 + 18 + 32 = 70$$

(ii) 검은색 볼펜을 선택하지 않는 경우

① 검은색 볼펜을 제외한 나머지 두 색깔의 볼펜을 각각 1자루, 4자루 선택하는 경우

1자루를 선택하는 볼펜의 색깔을 정하는 경우의 수는

$${}_2C_1=2$$

선택한 볼펜을 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_2H_1 \times {}_2H_4 &= {}_2C_1 \times {}_5C_4 = 2 \times {}_5C_1 \\ &= 2 \times 5 = 10 \end{aligned}$$

따라서 그 경우의 수는

$$2 \times 10 = 20$$

② 검은색 볼펜을 제외한 나머지 두 색깔의 볼펜을 각각 2자루, 3자루 선택하는 경우

2자루를 선택하는 볼펜의 색깔을 정하는 경우의 수는

$${}_2C_1=2$$

선택한 볼펜을 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_2H_2 \times {}_2H_3 &= {}_3C_2 \times {}_4C_3 = {}_3C_1 \times {}_4C_1 \\ &= 3 \times 4 = 12 \end{aligned}$$

따라서 그 경우의 수는

$$2 \times 12 = 24$$

①, ②에서 검은색 볼펜을 선택하지 않는 경우의 수는

$$20 + 24 = 44$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$70 + 44 = 114$$

07 답 162

공의 색깔의 변화가 짝수 번 일어날 때, 그 횟수에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) 색깔의 변화가 2번 일어나는 경우

① (흰 공-검은 공-흰 공)의 순서대로 배열하는 경우

흰 공이 놓이는 자리에 흰 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 2개의 흰 공을 중복을 허용하여 흰 공이 놓이는 두 자리에 놓는 경우의 수는

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

검은 공이 놓이는 자리에 7개의 검은 공을 모두 놓는 경우의 수는 1

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 1 = 3$

② (검은 공-흰 공-검은 공)의 순서대로 배열하는 경우

검은 공이 놓이는 자리에 검은 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 5개의 검은 공을 중복을 허용하여 검은 공이 놓이는 두 자리에 놓는 경우의 수는

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

흰 공이 놓이는 자리에 4개의 흰 공을 모두 놓는 경우의 수는 1

따라서 그 경우의 수는 $6 \times 1 = 6$

①, ②에서 색깔의 변화가 2번 일어나는 경우의 수는

$$3 + 6 = 9$$

(ii) 색깔의 변화가 4번 일어나는 경우

① (흰 공-검은 공-흰 공-검은 공-흰 공)의 순서대로 배열하는 경우

흰 공이 놓이는 자리에 흰 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 1개의 흰 공을 흰 공이 놓이는 자리 중 한 곳에 놓는 경우의 수는 3

검은 공이 놓이는 자리에 검은 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 5개의 검은 공을 중복을 허용하여 검은 공이 놓이는 두 자리에 놓는 경우의 수는

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 6 = 18$

② (검은 공-흰 공-검은 공-흰 공-검은 공)의 순서대로 배열하는 경우

흰 공이 놓이는 자리에 흰 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 2개의 흰 공을 중복을 허용하여 흰 공이 놓이는 두 자리에 놓는 경우의 수는

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

검은 공이 놓이는 자리에 검은 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 4개의 검은 공을 중복을 허용하여 검은 공이 놓이는 세 자리에 놓는 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 15 = 45$

①, ②에서 색깔의 변화가 4번 일어나는 경우의 수는

$$18 + 45 = 63$$

(iii) 색깔의 변화가 6번 일어나는 경우

① (흰 공-검은 공-흰 공-검은 공-흰 공-검은 공-흰 공)의 순서대로 배열하는 경우

흰 공이 놓이는 자리에 흰 공을 1개씩 놓는 경우의 수는 1

검은 공이 놓이는 자리에 검은 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 4개의 검은 공을 중복을 허용하여 검은 공이 놓이는 세 자리에 놓는 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

따라서 그 경우의 수는 $1 \times 15 = 15$

② (검은 공-흰 공-검은 공-흰 공-검은 공-흰 공-검은 공)의 순서대로 배열하는 경우

흰 공이 놓이는 자리에 흰 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 1개의 흰 공을 흰 공이 놓이는 자리 중 한 곳에 놓는 경우의 수는 3

검은 공이 놓이는 자리에 검은 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 3개의 검은 공을 중복을 허용하여 검은 공이 놓이는 네 자리에 놓는 경우의 수는

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 20 = 60$

①, ②에서 색깔의 변화가 6번 일어나는 경우의 수는

$$15 + 60 = 75$$

(iv) 색깔의 변화가 8번 일어나는 경우

(검은 공-흰 공-검은 공-흰 공-검은 공-흰 공-검은 공-흰 공-검은 공)의 순서대로 배열해야 한다.

흰 공이 놓이는 자리에 흰 공을 1개씩 놓는 경우의 수는 1

검은 공이 놓이는 자리에 검은 공을 1개씩 먼저 놓고, 남은 2개의 검은 공을 중복을 허용하여 검은 공이 놓이는 다섯 자리에 놓는 경우의 수는 ${}_5H_2 = {}_6C_2 = 15$

따라서 색깔의 변화가 8번 일어나는 경우의 수는

$$1 \times 15 = 15$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$9 + 63 + 75 + 15 = 162$$

08 답 ④

(가)를 만족시키려면 3개의 상자에 빨간 공을 1개씩 먼저 넣고, 남은 빨간 공 4개를 3개의 상자에 나누어 넣으면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

(나)를 만족시키는 경우의 수는 파란 공 4개를 3개의 상자에 나누어 넣는 모든 경우의 수에서 각 상자에 적어도 1개의 파란 공을 넣는 경우의 수를 빼면 된다.

파란 공 4개를 3개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

이때 각 상자에 적어도 1개의 파란 공을 넣는 경우의 수는 3개의 상자에 파란 공을 1개씩 먼저 넣고, 남은 파란 공 1개를 3개의 상자 중 1개의 상자에 넣는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_1 = 3$

즉, (나)를 만족시키는 경우의 수는 $15 - 3 = 12$

따라서 구하는 경우의 수는

$$15 \times 12 = 180$$

09 답 49

연필을 나누어 주는 경우와 볼펜을 나누어 주는 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) 연필을 나누어 주는 경우

① 여학생이 연필 1자루씩 받는 경우의 수

여학생 3명에게 연필 1자루씩 먼저 주고, 남은 연필 4자루를 남학생 2명에게 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

② 여학생이 연필 2자루씩 받는 경우의 수

여학생 3명에게 연필 2자루씩 먼저 주고, 남은 연필 1자루를 남학생 2명에게 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

①, ②에서 그 경우의 수는 $5 + 2 = 7$

(ii) 볼펜을 나누어 주는 경우

① 남학생이 볼펜 1자루씩 받는 경우의 수

남학생 2명에게 볼펜 1자루씩 먼저 주고, 남은 볼펜 2자루를 여학생 3명에게 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

② 남학생이 볼펜 2자루씩 받는 경우의 수는 1

①, ②에서 그 경우의 수는 $6 + 1 = 7$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$7 \times 7 = 49$$

다른 풀이

여학생이 받는 연필의 개수에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) 여학생이 연필을 각각 1자루씩 받는 경우

① 남학생이 볼펜을 각각 1자루씩 받는 경우

여학생 3명에게 남은 볼펜 2자루, 남학생 2명에게 남은 연필 4자루를 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_2 \times {}_2H_4 = {}_4C_2 \times {}_5C_4 = 6 \times {}_5C_1 = 6 \times 5 = 30$$

② 남학생이 볼펜을 각각 2자루씩 받는 경우

남학생 2명에게 남은 연필 4자루를 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

①, ②에서 그 경우의 수는 $30 + 5 = 35$

(ii) 여학생이 연필을 각각 2자루씩 받는 경우

① 남학생이 볼펜을 각각 1자루씩 받는 경우

여학생 3명에게 남은 볼펜 2자루, 남학생 2명에게 남은 연필 1자루를 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_2 \times {}_2C_1 = {}_4C_2 \times 2 = 6 \times 2 = 12$$

② 남학생이 볼펜을 각각 2자루씩 받는 경우

남학생 2명에게 남은 연필 1자루를 주는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$

①, ②에서 그 경우의 수는 $12 + 2 = 14$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$35 + 14 = 49$$

10 답 135

사과를 받는 학생의 수에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) 2명의 학생이 사과를 받는 경우

사과를 받을 2명의 학생을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

2명의 학생에게 사과를 1개씩 먼저 주고, 남은 사과 2개를 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

이때 꿀 1개를 사과를 받지 못한 학생 1명에게 주고, 남은 꿀 3개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

따라서 그 경우의 수는

$$3 \times 3 \times 10 = 90 \quad \text{배점 40\%}$$

(ii) 3명의 학생이 사과를 받는 경우

3명의 학생에게 사과를 1개씩 먼저 주고, 남은 사과 1개를 3명의 학생 중 1명에게 주는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

꿀 4개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

따라서 그 경우의 수는

$$3 \times 15 = 45 \quad \text{배점 40\%}$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$90 + 45 = 135 \quad \text{배점 20\%}$$

(7), (8)에서 주머니 A에는 딸기우유가 반드시 들어간다.

따라서 먼저 주머니 A에 딸기우유를 1개 넣고 남은 딸기우유 3개, 바나나우유 3개를 3개의 주머니에 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_3H_3 \times {}_3H_3 = {}_5C_3 \times {}_5C_3 = {}_5C_2 \times {}_5C_2 = 10 \times 10 = 100$$

이때 주머니 B 또는 주머니 C가 비어 있는 경우는 제외해야 한다.

(i) 주머니 B가 비어 있는 경우

남은 딸기우유 3개, 바나나우유 3개를 주머니 A, C에 나누어 넣는 경우이므로 그 경우의 수는

$${}_2H_3 \times {}_2H_3 = {}_4C_3 \times {}_4C_3 = {}_4C_1 \times {}_4C_1 = 4 \times 4 = 16$$

(ii) 주머니 C가 비어 있는 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 16

(iii) 주머니 B, C가 모두 비어 있는 경우

남은 딸기우유 3개, 바나나우유 3개를 모두 주머니 A에 넣는 경우이므로 그 경우의 수는 1

(i), (ii), (iii)에서 주머니 B 또는 주머니 C가 비어 있는 경우의 수는

$$16 + 16 - 1 = 31$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$100 - 31 = 69$$

12 답 168

세 상자에 흰 공 4개를 남김없이 나누어 넣는 경우 각 상자에 들어가는 흰 공의 개수는

4, 0, 0 또는 3, 1, 0 또는 2, 2, 0 또는 2, 1, 1

(i) 세 상자에 들어가는 흰 공의 개수가 4, 0, 0인 경우

세 상자 A, B, C 중에서 흰 공 4개를 넣을 1개의 상자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

이때 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가야 하므로 2개의 빈 상자에는 검은 공을 각각 2개씩 넣은 후 남은 검은 공 2개를 3개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 6 = 18$

(ii) 세 상자에 들어가는 흰 공의 개수가 3, 1, 0인 경우

세 상자 A, B, C 중에서 흰 공 3개, 1개를 넣을 2개의 상자를 택하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

이때 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가야 하므로 흰 공이 1개 들어 있는 상자에 검은 공 1개를, 빈 상자에 검은 공 2개를 넣은 후 남은 검은 공 3개를 3개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

따라서 그 경우의 수는 $6 \times 10 = 60$

(iii) 세 상자에 들어가는 흰 공의 개수가 2, 2, 0인 경우

세 상자 A, B, C 중에서 흰 공을 각각 2개씩 넣을 2개의 상자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

이때 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가야 하므로 빈 상자에 검은 공 2개를 넣은 후 남은 검은 공 4개를 3개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 15 = 45$

(iv) 세 상자에 들어가는 흰 공의 개수가 2, 1, 1인 경우

한 상자에 흰 공 2개를 넣으면 나머지 두 상자에 흰 공이 각각 1개씩 들어가므로 세 상자 A, B, C 중에서 흰 공 2개를 넣을 1개의 상자를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$

이때 각 상자에 공이 2개 이상씩 들어가야 하므로 흰 공이 1개 들어 있는 두 상자에 검은 공을 각각 1개씩 넣은 후 남은 검은 공 4개를 3개의 상자에 나누어 넣는 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 15 = 45$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$18 + 60 + 45 + 45 = 168$$

13 답 398

a, b, c, d 는 모두 홀수이므로

$$a = 2a' + 1, b = 2b' + 1, c = 2c' + 1 \quad (a', b', c' \text{은 음이 아닌 정수})$$

로 놓으면 (4)의 $21 \leq a + b + c \leq 25$ 에서

$$21 \leq (2a' + 1) + (2b' + 1) + (2c' + 1) \leq 25$$

$$\therefore 9 \leq a' + b' + c' \leq 11$$

(i) $a' + b' + c' = 9$ 일 때,

순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 순서쌍 (a', b', c') 의 개수와 같으므로

$${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

(ii) $a' + b' + c' = 10$ 일 때,

순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 순서쌍 (a', b', c') 의 개수와 같으므로

$${}_3H_{10} = {}_{12}C_{10} = {}_{12}C_2 = 66$$

(iii) $a' + b' + c' = 11$ 일 때,

순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 순서쌍 (a', b', c') 의 개수와 같으므로

$${}_3H_{11} = {}_{13}C_{11} = {}_{13}C_2 = 78$$

(i), (ii), (iii)에서 (4)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$55 + 66 + 78 = 199$$

이때 (7)에서 $d = c$ 또는 $d = c + 2$ 이므로 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$2 \times 199 = 398$$

14 답 120

$|a - b| \geq 0$ 이므로 (4)에서

$$|a - b| = 0 \text{ 또는 } |a - b| = 1 \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

(i) $|a - b| = 0$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)$ 의 4개이다.

이때 (4)에서 $c + d + e = 5$ 이므로 순서쌍 (c, d, e) 의 개수는

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$4 \times 21 = 84 \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

(ii) $|a - b| = 1$ 일 때,

$$a - b = 1 \text{ 또는 } a - b = -1$$

따라서 순서쌍 (a, b) 는 $(0, 1), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)$ 의 6개이다.

이때 (4)에서 $c + d + e = 2$ 이므로 순서쌍 (c, d, e) 의 개수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

따라서 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$6 \times 6 = 36 \quad \dots\dots\dots \text{배점 40\%}$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$84 + 36 = 120 \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

15 답 ④

(ㄴ)에서 $-2 \leq a-b+c-d+e \leq 2$ ㉠

(ㄷ)에서 $a+b+c+d+e=10$ 이므로 ㉠의 각 변에 $a+b+c+d+e$ 를 더하면 $8 \leq 2a+2c+2e \leq 12$

$$\therefore 4 \leq a+c+e \leq 6$$

(i) $a+c+e=4$ 일 때,

$$\text{순서쌍 } (a, c, e) \text{의 개수는 } {}_3\text{H}_4 = {}_6\text{C}_4 = {}_6\text{C}_2 = 15$$

(ㄷ)에서 $b+d=6$ 이므로 순서쌍 (b, d) 의 개수는 ${}_2\text{H}_6 = {}_7\text{C}_6 = {}_7\text{C}_1 = 7$ 따라서 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$15 \times 7 = 105$$

(ii) $a+c+e=5$ 일 때,

$$\text{순서쌍 } (a, c, e) \text{의 개수는 } {}_3\text{H}_5 = {}_7\text{C}_5 = {}_7\text{C}_2 = 21$$

(ㄷ)에서 $b+d=5$ 이므로 순서쌍 (b, d) 의 개수는 ${}_2\text{H}_5 = {}_6\text{C}_5 = {}_6\text{C}_1 = 6$ 따라서 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$21 \times 6 = 126$$

(iii) $a+c+e=6$ 일 때,

$$\text{순서쌍 } (a, c, e) \text{의 개수는 } {}_3\text{H}_6 = {}_8\text{C}_6 = {}_8\text{C}_2 = 28$$

(ㄷ)에서 $b+d=4$ 이므로 순서쌍 (b, d) 의 개수는 ${}_2\text{H}_4 = {}_5\text{C}_4 = {}_5\text{C}_1 = 5$ 따라서 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$28 \times 5 = 140$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$105 + 126 + 140 = 371$$

16 답 440

$|a|=A, |b|=B, |c|=C, |d|=D$ 로 놓으면 (ㄴ)에서

$$A+B+C+D=10 \quad \dots\dots ㉠$$

(ㄷ)에서 $A \geq 3, B \geq 2, C \geq 1$ 이고 $D \geq 0$ 이므로

$A'=A-3, B'=B-2, C'=C-1$ 로 놓으면 ㉠에서

$$(A'+3)+(B'+2)+(C'+1)+D=10$$

$$\therefore A'+B'+C'+D=4 \quad (A', B', C', D \text{는 음이 아닌 정수}) \quad \dots\dots ㉡$$

(i) $D=0$ 일 때,

$$㉡ \text{에서 } A'+B'+C'=4$$

순서쌍 (A, B, C, D) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A', B', C' 의 순서쌍 (A', B', C') 의 개수와 같으므로

$${}_3\text{H}_4 = {}_6\text{C}_4 = {}_6\text{C}_2 = 15$$

이때 각각의 A, B, C 에 대하여 a, b, c 의 값은 음의 정수 또는 양의 정수가 될 수 있으므로 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$15 \times 2^3 = 120$$

(ii) $D \geq 1$ 일 때,

$$D'=D-1 \text{이라 하면 } ㉡ \text{에서}$$

$$A'+B'+C'+(D'+1)=4$$

$$\therefore A'+B'+C'+D'=3 \quad (A', B', C', D' \text{은 음이 아닌 정수})$$

따라서 순서쌍 (A, B, C, D) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 A', B', C', D' 의 순서쌍 (A', B', C', D') 의 개수와 같으므로

$${}_4\text{H}_3 = {}_6\text{C}_3 = 20$$

이때 각각의 A, B, C, D 에 대하여 a, b, c, d 의 값은 음의 정수 또는 양의 정수가 될 수 있으므로 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$20 \times 2^4 = 320$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$120 + 320 = 440$$

idea
17 답 ③

3의 배수가 아닌 세 자연수를 더하여 15, 즉 3의 배수가 되려면 더하는 세 수를 각각 3으로 나누었을 때의 나머지가 서로 같아야 한다.

(i) x, y, z 를 각각 3으로 나누었을 때의 나머지가 모두 1인 경우

$$x=3x'+1, y=3y'+1, z=3z'+1 \quad (x', y', z' \text{은 음이 아닌 정수})$$

$$\text{놓으면 } x+y+z=15 \text{에서}$$

$$(3x'+1)+(3y'+1)+(3z'+1)=15$$

$$\therefore x'+y'+z'=4$$

따라서 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z' 의 순서쌍 (x', y', z') 의 개수와 같으므로

$${}_3\text{H}_4 = {}_6\text{C}_4 = {}_6\text{C}_2 = 15$$

(ii) x, y, z 를 각각 3으로 나누었을 때의 나머지가 모두 2인 경우

$$x=3x'+2, y=3y'+2, z=3z'+2 \quad (x', y', z' \text{은 음이 아닌 정수})$$

$$\text{놓으면 } x+y+z=15 \text{에서}$$

$$(3x'+2)+(3y'+2)+(3z'+2)=15$$

$$\therefore x'+y'+z'=3$$

따라서 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x', y', z' 의 순서쌍 (x', y', z') 의 개수와 같으므로

$${}_3\text{H}_3 = {}_5\text{C}_3 = {}_5\text{C}_2 = 10$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$$15 + 10 = 25$$

18 답 25

(ㄷ), (ㄴ)을 만족시키는 경우의 수를 찾아보자.



첫 번째 검은색 카드 왼쪽에 있는 흰색 카드의 개수를 a , 첫 번째 검은색 카드와 두 번째 검은색 카드 사이에 있는 흰색 카드의 개수를 b , 두 번째 검은색 카드 오른쪽에 있는 흰색 카드의 개수를 c 라 하면 $a+b+c=8$ ($b \geq 2$)을 만족시켜야 한다.

$$b=b'+2 \text{로 놓으면 } a+b'+c=6 \quad (a, b', c \text{는 음이 아닌 정수})$$

이 방정식을 만족시키는 경우의 수는

$${}_3\text{H}_6 = {}_8\text{C}_6 = {}_8\text{C}_2 = 28$$

이 중에서 (ㄷ)을 만족시키지 않는 경우의 수를 제외해야 한다.

연속한 세 자연수 중에는 반드시 3의 배수가 있으므로 $b \geq 3$ 이면 항상 (ㄷ)을 만족시킨다.

따라서 $b=2$ 일 때, 3의 배수가 없는 경우는 가운데 두 장의 흰색 카드가 1, 2 또는 4, 5 또는 7, 8인 경우의 3가지이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$28 - 3 = 25$$

다른 풀이

왼쪽에 놓을 검은색 카드를 [A], 오른쪽에 놓을 검은색 카드를 [B]라 하고, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8이 적힌 흰색 카드를 각각 [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8]이라 하자.

(i) [A]가 [1]의 왼쪽에 있는 경우

[B]가 놓이는 위치는 [3]의 오른쪽이므로 경우의 수는 6

(ii) [A]가 [1]과 [2]의 사이에 있는 경우

[B]가 놓이는 위치는 [3]의 오른쪽이므로 경우의 수는 6

- (iii) [A]가 [2]와 [3] 사이에 있는 경우
[B]가 놓이는 위치는 [4]의 오른쪽이므로 경우의 수는 5
- (iv) [A]가 [3]과 [4] 사이에 있는 경우
[B]가 놓이는 위치는 [6]의 오른쪽이므로 경우의 수는 3
- (v) [A]가 [4]와 [5]의 사이에 있는 경우
[B]가 놓이는 위치는 [6]의 오른쪽이므로 경우의 수는 3
- (vi) [A]가 [5]와 [6]의 사이에 있는 경우
[B]가 놓이는 위치는 [7]의 오른쪽이므로 경우의 수는 2
- (i)~(vi)에서 구하는 경우의 수는
 $6+6+5+3+3+2=25$

19 답 35

A역과 첫 번째 정착한 역 사이의 역의 개수를 a , 첫 번째 정착한 역과 두 번째 정착한 역 사이의 역의 개수를 b , 두 번째 정착한 역과 세 번째 정착한 역 사이의 역의 개수를 c , 세 번째 정착한 역과 B역 사이의 역의 개수를 d 라 하자.

두 기차역 A, B 사이에 10개의 역이 있으므로

$$a+b+c+d+3=10$$

$$\therefore a+b+c+d=7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 a, b, c, d 는 음이 아닌 정수이고, (나)에서 $b \geq 1$, (다)에서 $c \geq 2$ 이므로 $b'=b-1, c'=c-2$ 로 놓으면 (1)에서

$$a+(b'+1)+(c'+2)+d=7$$

$$\therefore a+b'+c'+d=4 \quad (a, b', c', d \text{는 음이 아닌 정수})$$

따라서 구하는 경우의 수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b', c', d 의 순서쌍 (a, b', c', d) 의 개수와 같으므로

$${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$$

다른 풀이

A역과 B역 사이의 10개의 역 중에서 정착하는 3개의 역을 ○, 출발 후 첫 번째, 두 번째, 세 번째 정착한 역 사이에 있는 역을 ●라 하자.

(나), (다)에서 출발 후 첫 번째 정착한 역과 두 번째 정착한 역 사이에는 적어도 1개의 역이 있고, 두 번째 정착한 역과 세 번째 정착한 역 사이에는 적어도 2개의 역이 있으므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

○●○●●○

그림의 밑줄 친 네 부분에서 남은 4개의 역을 놓을 네 부분을 중복을 허용하여 택하는 경우의 수는

$${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$$

20 답 126

$f(1)<f(2)\leq f(3)\leq f(4)<f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수는

$f(1)\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)\leq f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수에서

$f(1)=f(2)\leq f(3)\leq f(4)\leq f(5)$ 또는

$f(1)\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)=f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수를 빼면 된다.

(i) $f(1)\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)\leq f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수

집합 Y 의 원소 7개 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 함수의 개수는 ${}_7H_5={}_{11}C_5=462$

(ii) $f(1)=f(2)\leq f(3)\leq f(4)\leq f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수

집합 Y 의 원소 7개 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 함수의 개수는 ${}_7H_4={}_{10}C_4=210$

(iii) $f(1)\leq f(2)\leq f(3)\leq f(4)=f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수

(ii)와 같은 방법으로 하면 함수의 개수는 210

(iv) $f(1)=f(2)\leq f(3)\leq f(4)=f(5)$ 를 만족시키는 함수의 개수

집합 Y 의 원소 7개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 함수의 개수는

$${}_7H_3={}_9C_3=84$$

(i)~(iv)에서 구하는 함수의 개수는

$$462-(210+210-84)=126$$

21 답 ②

$f(3)\leq 7$ 이므로 (가)에서 $2f(6)\leq 7$

$$f(6)\leq \frac{7}{2}$$

$$\therefore f(6)=2 \text{ 또는 } f(6)=3$$

(i) $f(6)=2$ 일 때,

(가)에서 $f(3)=4$ 이므로 (나)에서

$$f(2)\geq 4\geq f(4)\geq f(5)\geq 2\geq f(7)$$

$$\quad \quad \quad \underset{f(3)}{f(2)} \quad \quad \quad \underset{f(6)}{f(7)}$$

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 수는 4, 5, 6, 7의 4가지

$f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2={}_4C_2=6$$

$f(7)$ 의 값이 될 수 있는 수는 2의 1가지

따라서 함수 f 의 개수는

$$4 \times 6 \times 1=24$$

(ii) $f(6)=3$ 일 때,

(가)에서 $f(3)=6$ 이므로 (나)에서

$$f(2)\geq 6\geq f(4)\geq f(5)\geq 3\geq f(7)$$

$$\quad \quad \quad \underset{f(3)}{f(2)} \quad \quad \quad \underset{f(6)}{f(7)}$$

$f(2)$ 의 값이 될 수 있는 수는 6, 7의 2가지

$f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_4H_2={}_5C_2=10$$

$f(7)$ 의 값이 될 수 있는 수는 3의 2가지

따라서 함수 f 의 개수는

$$2 \times 10 \times 2=40$$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$24+40=64$$

22 답 198

(가)에서 $0\leq f(2)-f(1)\leq f(3)\leq f(4)$

(나)에서 $f(1)+f(2)$ 가 짝수이므로 두 수 $f(1)$ 과 $f(2)$ 는 모두 홀수이거나 모두 짝수이다.

즉, $f(2)-f(1)$ 의 값은 0 또는 2 또는 4이다.

(i) $f(2)-f(1)=0$ 인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2))$ 는 (1, 1) 또는 (2, 2) 또는 (3, 3) 또는 (4, 4) 또는 (5, 5) 또는 (6, 6)의 6가지

$0\leq f(3)\leq f(4)$ 이므로 $f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6H_2={}_7C_2=21$$

따라서 함수 f 의 개수는 $6 \times 21=126$

(ii) $f(2)-f(1)=2$ 인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2))$ 는 $(1, 3)$ 또는 $(2, 4)$ 또는 $(3, 5)$ 또는 $(4, 6)$ 의 4가지
 $2 \leq f(3) \leq f(4)$ 이므로 $f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_5H_2 = {}_6C_2 = 15$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$4 \times 15 = 60$$

(iii) $f(2)-f(1)=4$ 인 경우

순서쌍 $(f(1), f(2))$ 는 $(1, 5)$ 또는 $(2, 6)$ 의 2가지
 $4 \leq f(3) \leq f(4)$ 이므로 $f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 4, 5, 6 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$2 \times 6 = 12$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$126 + 60 + 12 = 198$$

23 답 90

(*)를 만족시키는 a, b 에 대하여 $a < b$ 라 하자.

(i) $a \in \{1, 2, 3\}, b \in \{1, 2, 3\}$ 인 경우

$f(a)=b, f(b)=a$ 이므로 $a < b$ 이면 $f(a) > f(b)$ 가 되어 (*)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a \in \{1, 2, 3\}, b \in \{4, 5\}$ 인 경우

가능한 (a, b) 의 순서쌍은 $(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)$

이 중 (*)를 만족시키는 순서쌍은 $(2, 5), (3, 4), (3, 5)$ 뿐이다.

① $f(2)=5, f(5)=2$ 인 경우 $\rightarrow f(5) \geq 2, f(4) \geq 3$ 이어야 한다.

(*)를 만족시키도록 $f(1), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$$5 \times 1 = 5$$

(*)를 만족시키도록 $f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$5 \times 3 = 15$$

② $f(3)=4, f(4)=3$ 인 경우

(*)를 만족시키도록 $f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

(*)를 만족시키도록 $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1

따라서 함수 f 의 개수는

$$10 \times 1 = 10$$

한편 $f(2)=5, f(5)=2$ 이고 $f(3)=4, f(4)=3$ 이면 (*)를 만족시키지 않으므로 ①과 ②의 경우에서 중복되는 경우는 없다.

③ $f(3)=5, f(5)=3$ 인 경우

(*)를 만족시키도록 $f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_5H_2 = {}_6C_2 = 15$$

(*)를 만족시키도록 $f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$15 \times 2 = 30$$

(iii) $a \in \{4, 5\}, b \in \{4, 5\}$ 인 경우

$f(4)=5, f(5)=4$ 이므로 (*)를 만족시킨다.

(*)를 만족시키도록 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f 의 개수는 $15 + 10 + 30 + 35 = 90$

24 답 14

(*)에서 $f(1) < f(2) < f(3)$ 이므로 (*)에 의하여 $f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값이 될 수 있는 수는

1, 2, 3, 6 또는 1, 2, 4, 8 또는 2, 3, 4, 6 또는 3, 4, 6, 8

(i) $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=3, f(4)=6$ 일 때,

$f(4)=6$ 이므로 (*)에서

$$6 \leq f(5) \leq f(6)$$

따라서 $f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 6, 7, 8 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

(ii) $f(1)=1, f(2)=2, f(3)=4, f(4)=8$ 일 때,

$f(4)=8$ 이므로 $f(5)=f(6)=8$ 의 1가지

(iii) $f(1)=2, f(2)=3, f(3)=4, f(4)=6$ 일 때,

$f(4)=6$ 이므로 (i)과 같은 방법으로 하면 $f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 6

(iv) $f(1)=3, f(2)=4, f(3)=6, f(4)=8$ 일 때,

$f(4)=8$ 이므로 $f(5)=f(6)=8$ 의 1가지

(i)~(iv)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$6 + 1 + 6 + 1 = 14$$

25 답 6

$(x+1)^m$ 의 전개식의 일반항은 ${}_mC_r x^r$, $(x+1)^n$ 의 전개식의 일반항은

${}_nC_s x^s$ 이므로 $(x+1)^m + (x+1)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_mC_r x^r + {}_nC_s x^s \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

x 항은 $r=1, s=1$ 일 때이므로 x 의 계수는

$${}_mC_1 + {}_nC_1 = m + n$$

즉, $m+n=12$ 이므로 $n=12-m \dots\dots \textcircled{1} \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$

또 x^2 항은 $r=2, s=2$ 일 때이므로 x^2 의 계수는

$${}_mC_2 + {}_nC_2 = \frac{1}{2}\{m(m-1) + n(n-1)\}$$

$$= \frac{1}{2}\{m^2 + n^2 - (m+n)\} \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$\frac{1}{2}\{m^2 + n^2 - (m+n)\} = \frac{1}{2}\{m^2 + (12-m)^2 - 12\}$$

$$= \frac{1}{2}(2m^2 - 24m + 132)$$

$$= m^2 - 12m + 66$$

$$= (m-6)^2 + 30 \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

따라서 x^2 의 계수가 최소가 되도록 하는 m 의 값은 6이다. $\dots\dots \text{배점 10\%}$

26 답 ④

$$f(n) = {}_nC_{n-2} + 2{}_nC_{n-1} + {}_nC_n$$

$$= ({}_nC_{n-2} + {}_nC_{n-1}) + ({}_nC_{n-1} + {}_nC_n)$$

$$= {}_{n+1}C_{n-1} + {}_{n+1}C_n$$

$$= {}_{n+2}C_n$$

$$\begin{aligned}
 \therefore f(2)+f(3)+f(4)+\cdots+f(10) &= {}_4C_2+{}_5C_3+{}_6C_4+\cdots+{}_{12}C_{10} \\
 &= {}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{12}C_{10}-{}_4C_1 \\
 &= {}_5C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{12}C_{10}-{}_4C_1 \\
 &= {}_6C_3+{}_6C_4+\cdots+{}_{12}C_{10}-{}_4C_1 \\
 &= {}_7C_4+{}_7C_5+\cdots+{}_{12}C_{10}-{}_4C_1 \\
 &= {}_8C_5+{}_8C_6+\cdots+{}_{12}C_{10}-{}_4C_1 \\
 &= {}_9C_6+{}_9C_7+{}_{10}C_8+{}_{11}C_9+{}_{12}C_{10}-{}_4C_1 \\
 &= {}_{10}C_7+{}_{10}C_8+{}_{11}C_9+{}_{12}C_{10}-{}_4C_1 \\
 &= {}_{11}C_8+{}_{11}C_9+{}_{12}C_{10}-{}_4C_1 \\
 &= {}_{12}C_9+{}_{12}C_{10}-{}_4C_1 \\
 &= {}_{13}C_{10}-{}_4C_1={}_{13}C_3-4 \\
 &= 286-4=282
 \end{aligned}$$

27 답 ③

오늘로부터 7일 후는 오늘과 같은 요일이므로 $15^7, 23^7$ 을 7로 나눈 나머지를 구하면 오늘로부터 $15^7, 23^7$ 일 후의 요일을 알 수 있다.

$$15^7=(1+14)^7$$

$$= {}_7C_0+{}_7C_1 \times 14+{}_7C_2 \times 14^2+\cdots+{}_7C_6 \times 14^6+{}_7C_7 \times 14^7$$

이때 ${}_7C_0=1$ 이고, ${}_7C_0$ 을 제외한 나머지 항은 모두 7의 배수이다.

따라서 오늘로부터 15^7 일 후, 즉 1일 후는 화요일이므로 오늘은 월요일이다.

$$23^7=(2+21)^7$$

$$= {}_7C_0 \times 2^7+{}_7C_1 \times 2^6 \times 21+{}_7C_2 \times 2^5 \times 21^2+\cdots+{}_7C_6 \times 2 \times 21^6+{}_7C_7 \times 21^7$$

이때 ${}_7C_0 \times 2^7=128$ 이고, ${}_7C_0 \times 2^7$ 을 제외한 나머지 항은 모두 7의 배수이다.

$128=7 \times 18+2$ 이므로 오늘로부터 23^7 일 후의 요일은 오늘로부터 2일 후의 요일이다.

따라서 수요일이다.

28 답 2

$$23^{20}=(3+20)^{20}={}_{20}C_0 3^{20}+{}_{20}C_1 3^{19} 20^1+{}_{20}C_2 3^{18} 20^2+\cdots+{}_{20}C_{20} 20^{20}$$

${}_{20}C_1 3^{19} 20^1, {}_{20}C_2 3^{18} 20^2, \dots, {}_{20}C_{20} 20^{20}$ 은 모두 10으로 나누어떨어지므로

23^{20} 을 10으로 나눈 나머지는 ${}_{20}C_0 3^{20}=3^{20}=9^{10}$ 을 10으로 나눈 나머지와 같다. 이때

$$9^{10}=(10-1)^{10}$$

$$= {}_{10}C_0 10^{10}+{}_{10}C_1 10^9(-1)^1+{}_{10}C_2 10^8(-1)^2+\cdots+{}_{10}C_{10}(-1)^{10}$$

이고 ${}_{10}C_0 10^{10}, {}_{10}C_1 10^9(-1)^1, {}_{10}C_2 10^8(-1)^2, \dots, {}_{10}C_9 10^1(-1)^9$ 은 모두 10으로 나누어떨어지므로 9^{10} 을 10으로 나눈 나머지는 ${}_{10}C_{10}(-1)^{10}=1$ 이다. 따라서 23^{20} 의 일의 자리의 숫자는 1이다.

${}_{20}C_1 3^{19} 20^1, {}_{20}C_2 3^{18} 20^2, \dots, {}_{20}C_{20} 20^{20}$ 은 모두 400으로 나누어떨어지므로 23^{20} 을 400으로 나눈 나머지는 ${}_{20}C_0 3^{20}=3^{20}=9^{10}$ 을 400으로 나눈 나머지와 같다. 이때

$$9^{10}=(10-1)^{10}$$

$$= {}_{10}C_0 10^{10}+{}_{10}C_1 10^9(-1)^1+{}_{10}C_2 10^8(-1)^2+\cdots+{}_{10}C_{10}(-1)^{10}$$

이고 ${}_{10}C_0 10^{10}, {}_{10}C_1 10^9(-1)^1, \dots, {}_{10}C_7 10^3(-1)^7$ 은 모두 400으로 나누어떨어지므로 9^{10} 을 400으로 나눈 나머지는

$${}_{10}C_8 10^2(-1)^8+{}_{10}C_9 10^1(-1)^9+{}_{10}C_{10}(-1)^{10}$$

$$= {}_{10}C_2 \times 100-{}_{10}C_1 \times 10+1=4500-100+1=4401$$

을 400으로 나눈 나머지와 같다.

따라서 23^{20} 을 400으로 나눈 나머지는 1이다.

$$\therefore a+b=1+1=2$$

STEP 3 최고난도 문제

| 35~37쪽

01 36	02 730	03 ②	04 93	05 720	06 108
07 75	08 ③	09 330	10 60	11 852	

01 답 36

1단계 경우에 따라 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수 구하기

(*)에서 $x=2, 5, 8, \dots, y=1, 4, 7, \dots$ 이 된다.

이때 $x+y \leq 8$ 이어야 하므로 $x=2, y=1$ 또는 $x=2, y=4$ 또는 $x=5, y=1$ 이다.

(i) $x=2, y=1$ 인 경우

(*)에서 $|z|+|w|=5$

① $z=0$ 또는 $w=0$ 일 때,

$(0, 5), (0, -5), (5, 0), (-5, 0)$ 의 4개이다.

② $z \neq 0$ 이고 $w \neq 0$ 일 때,

$|z| \geq 1, |w| \geq 1$ 이므로 $z'=|z|-1, w'=|w|-1$ 로 놓으면

$z'+w'=3$ (z', w' 은 음이 아닌 정수)이므로 순서쌍 (z, w) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 z', w' 의 순서쌍 (z', w') 의 개수와 같으므로 ${}_2H_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

이때 z, w 의 값은 음의 정수 또는 양의 정수가 될 수 있으므로 $4 \times 2 \times 2=16$ (개)

①, ②에서 그 경우의 수는 $4+16=20$

(ii) $x=2, y=4$ 인 경우

(*)에서 $|z|+|w|=2$

① $z=0$ 또는 $w=0$ 일 때, $(0, 2), (0, -2), (2, 0), (-2, 0)$ 의 4개이다.

② $z \neq 0$ 또는 $w \neq 0$ 일 때, $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$ 의 4개이다.

①, ②에서 그 경우의 수는 $4+4=8$

(iii) $x=5, y=1$ 인 경우

(*)에서 $|z|+|w|=2$

(ii)와 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 8

2단계 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수 구하기

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는

$$20+8+8=36$$

02 답 730

1단계 a_n 구하기

주머니에서 1개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인하고 다시 넣는 7번의 과정 중 m 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 $f(m)$ 이라 하자.

(*)에서 $f(7) \leq f(6) \leq f(5) \leq f(4) \leq f(3) \leq f(2) \leq f(1)$

(*)에서 $f(3)=f(7)+2$

$$f(7)=k(k=0, 1, \dots, n-2) \text{라 하면 } f(3)=f(7)+2=k+2$$

$$\therefore k \leq f(6) \leq f(5) \leq f(4) \leq k+2 \leq f(2) \leq f(1)$$

이때 $f(3)$ 의 값은 적어도 2 이상이어야 한다. 따라서 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 0, 1을 제외한 $(n-1)$ 개의 공에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_{n-1}H_3={}_{n+1}C_3=\frac{(n+1)n(n-1)}{6}$$

각 $f(3)$ 의 값에 $f(7)$ 의 값은 $f(3)-2$ 로 하나씩 정해지므로 그 경우의 수는 1

$f(4), f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $f(3), f(3)-1, f(3)-2$ 의 3개의 값 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하면 되므로
 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$
 $\therefore a_n = \frac{(n+1)n(n-1)}{6} \times 1 \times 10$

$$= \frac{5}{3}n(n+1)(n-1)$$

2단계 $\sum_{n=2}^{10} \frac{a_n}{n-1}$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=2}^{10} \frac{a_n}{n-1} &= \sum_{n=2}^{10} \frac{5}{3} \times \frac{n(n+1)(n-1)}{n-1} = \frac{5}{3} \sum_{n=2}^{10} (n^2+n) \\ &= \frac{5}{3} \left\{ \sum_{n=1}^{10} (n^2+n) - 2 \right\} = \frac{5}{3} \left(\sum_{n=1}^{10} n^2 + \sum_{n=1}^{10} n - 2 \right) \\ &= \frac{5}{3} \times \left(\frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} - 2 \right) \\ &= \frac{5}{3} \times (385 + 55 - 2) \\ &= \frac{5}{3} \times 438 = 730 \end{aligned}$$

개념 NOTE

자연수 n 에 대하여

$$(1) \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad (2) \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

03 답 ②

1단계 숫자 카드부터 시작하는 경우의 수 구하기

(i) 숫자 카드부터 시작하는 경우

(㉠)을 만족시키려면 (숫자 카드 - 그림 카드 - 숫자 카드 - 그림 카드 - 숫자 카드)의 순서대로 배열해야 한다.

① 숫자 카드를 배열하는 경우

숫자 카드가 놓이는 자리에 숫자 카드를 1장씩 먼저 놓고, 남은 4장의 숫자 카드를 중복을 허용하여 숫자 카드가 놓이는 자리에 배열하는 경우의 수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

각각의 경우에 대하여 (㉠), (㉡)을 만족시키려면 숫자 2, 4, 3, 5, 7을 순서대로 배열하고 숫자 1은 숫자 3보다 왼쪽에, 숫자 6은 숫자 4보다 오른쪽에 배열하면 된다.

숫자 1이 올 수 있는 자리가 3개, 숫자 6이 올 수 있는 자리가 4개이므로 그 경우의 수는

$$3 \times 4 = 12$$

이때 숫자 1, 6이 모두 숫자 4와 3 사이에 오면 숫자 1, 6이 서로 자리를 바꾸는 경우가 한 가지 더 생기므로 그 경우의 수는

$$12 + 1 = 13$$

따라서 숫자 카드를 배열하는 경우의 수는

$$15 \times 13 = 195$$

② 그림 카드를 배열하는 경우

그림 카드가 놓이는 자리에 그림 카드를 1장씩 먼저 놓고, 남은 4장의 그림 카드를 중복을 허용하여 그림 카드가 놓이는 자리에 배열하는 경우의 수는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

①, ②에서 숫자 카드부터 시작하는 경우의 수는 $195 \times 5 = 975$

2단계 그림 카드부터 시작하는 경우의 수 구하기

(ii) 그림 카드부터 시작하는 경우

(㉠)을 만족시키려면 (그림 카드 - 숫자 카드 - 그림 카드 - 숫자 카드 - 그림 카드)의 순서대로 배열해야 한다.

① 숫자 카드를 배열하는 경우

숫자 카드가 놓이는 자리에 숫자 카드를 1장씩 먼저 놓고, 남은 5장의 숫자 카드를 중복을 허용하여 숫자 카드가 놓이는 자리에 배열하는 경우의 수는 ${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$

각각의 경우에 대하여 (㉠), (㉡)을 만족시키려면 숫자 2, 4, 3, 5, 7을 순서대로 배열하고 숫자 1은 숫자 3보다 왼쪽에, 숫자 6은 숫자 4보다 오른쪽에 배열하면 된다.

숫자 1이 올 수 있는 자리가 3개, 숫자 6이 올 수 있는 자리가 4개이므로 그 경우의 수는 $3 \times 4 = 12$

이때 숫자 1, 6이 모두 숫자 4와 3 사이에 오면 숫자 1, 6이 서로 자리를 바꾸는 경우가 한 가지 더 생기므로 그 경우의 수는

$$12 + 1 = 13$$

따라서 숫자 카드를 배열하는 경우의 수는 $6 \times 13 = 78$

② 그림 카드를 배열하는 경우

그림 카드가 놓이는 자리에 그림 카드를 1장씩 먼저 놓고, 남은 3장의 그림 카드를 중복을 허용하여 그림 카드가 놓이는 자리에 배열하는 경우의 수는 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

①, ②에서 그림 카드부터 시작하는 경우의 수는 $78 \times 10 = 780$

3단계 경우의 수 구하기

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$975 + 780 = 1755$$

다른 풀이

숫자 카드를 배열하는 경우는 숫자 2, 4, 3, 5, 7을 순서대로 배열하고 숫자 1은 숫자 3보다 왼쪽에, 숫자 6은 숫자 4보다 오른쪽에 배열하면 된다.

숫자 1이 올 수 있는 자리가 3개, 숫자 6이 올 수 있는 자리가 4개이므로 그 경우의 수는

$$3 \times 4 = 12$$

이때 숫자 1, 6이 모두 숫자 4와 3 사이에 오면 숫자 1, 6이 서로 자리를 바꾸는 경우가 한 가지 더 생기므로 그 경우의 수는

$$12 + 1 = 13$$

이 각각에 대하여 그림 카드를 배열하는 경우는 (㉠)에서

숫자 | 그림 | 숫자 | 그림 | 숫자 |, | 그림 | 숫자 | 그림 | 숫자 | 그림 |

의 두 가지 경우를 생각하면 된다.

(i) 숫자 | 그림 | 숫자 | 그림 | 숫자 |인 경우

숫자 카드 사이에 그림 카드를 놓을 두 자리를 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$

남은 4장의 그림 카드를 중복을 허용하여 그림 카드가 놓이는 자리에 배열하는 경우의 수는 ${}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$

따라서 그 경우의 수는 $15 \times 5 = 75$

(ii) 그림 | 숫자 | 그림 | 숫자 | 그림 |인 경우

양 끝에 그림 카드 2장이 놓이므로 숫자 카드 사이에 그림 카드를 놓을 한 자리를 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_1 = 6$

남은 3장의 그림 카드를 중복을 허용하여 그림 카드가 놓이는 자리에 배열하는 경우의 수는 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

따라서 그 경우의 수는 $6 \times 10 = 60$

(i), (ii)에서 그림 카드를 배열하는 경우의 수는 $75 + 60 = 135$

따라서 구하는 경우의 수는

$$13 \times 135 = 1755$$

1단계 학생 A가 받는 공의 개수에 따라 경우의 수 구하기

(가)에서 학생 A가 받는 공의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

(i) 학생 A가 받는 공의 개수가 0인 경우

두 학생 B, C에게 흰 공과 검은 공을 모두 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_4 \times {}_2H_4 = {}_5C_4 \times {}_5C_4 = {}_5C_1 \times {}_5C_1 = 5 \times 5 = 25$$

이때 학생 B가 받는 공의 개수가 0 또는 1인 경우의 수는

$$1 + {}_2C_1 = 1 + 2 = 3$$

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 0인 경우의 수는

$$25 - 3 = 22$$

(ii) 학생 A가 받는 공의 개수가 1인 경우

학생 A가 흰 공 또는 검은 공 중 하나를 받는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

나머지 공을 두 학생 B, C에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_3 \times {}_2H_4 = {}_4C_3 \times {}_5C_4 = {}_4C_1 \times {}_5C_1 = 4 \times 5 = 20$$

이때 학생 B가 받는 공의 개수가 0 또는 1인 경우의 수는

$$1 + {}_2C_1 = 1 + 2 = 3$$

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 1인 경우의 수는

$$2 \times (20 - 3) = 34$$

(iii) 학생 A가 받는 공의 개수가 2인 경우

① 학생 A가 같은 색의 공을 받는 경우

학생 A가 받는 공의 색을 정하는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$

나머지 공을 두 학생 B, C에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_2 \times {}_2H_4 = {}_3C_2 \times {}_5C_4 = {}_3C_1 \times {}_5C_1 = 3 \times 5 = 15$$

이때 학생 B가 받는 공의 개수가 0 또는 1인 경우의 수는

$$1 + {}_2C_1 = 1 + 2 = 3$$

따라서 학생 A가 같은 색의 공 2개를 받는 경우의 수는

$$2 \times (15 - 3) = 24$$

② 학생 A가 다른 색의 공을 받는 경우

두 학생 B, C에게 흰 공 3개와 검은 공 3개를 나누어 주는 경우

의 수는

$${}_2H_3 \times {}_2H_3 = {}_4C_3 \times {}_4C_3 = {}_4C_1 \times {}_4C_1 = 4 \times 4 = 16$$

이때 학생 B가 받는 공의 개수가 0 또는 1인 경우의 수는

$$1 + {}_2C_1 = 1 + 2 = 3$$

따라서 학생 A가 다른 색의 공 2개를 받는 경우의 수는

$$16 - 3 = 13$$

①, ②에서 그 경우의 수는

$$24 + 13 = 37$$

2단계 경우의 수 구하기

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$22 + 34 + 37 = 93$$

다른 풀이

(가)에서 학생 A가 받는 공의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

(i) 학생 A가 받는 공의 개수가 0인 경우

학생 B가 받는 공의 개수가 2, 3, 4인 경우의 수는 서로 다른 2개에

서 중복을 허용하여 2개, 3개, 4개를 선택하는 경우의 수와 같고 나머지 학생 C에게 주면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_2H_2 + {}_2H_3 + {}_2H_4 = {}_3C_2 + {}_4C_3 + {}_5C_4 = {}_3C_1 + {}_4C_1 + {}_5C_1 = 3 + 4 + 5 = 12$$

학생 B가 받는 공의 개수가 5, 6, 7, 8인 경우의 수는 학생 C가 받는 공의 개수가 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개, 2개, 1개, 0개를 선택하는 경우의 수와 같으므로 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_2H_3 + {}_2H_2 + {}_2H_1 + {}_2H_0 &= {}_4C_3 + {}_3C_2 + {}_2C_1 + {}_1C_0 \\ &= {}_4C_1 + {}_3C_1 + 2 + 1 \\ &= 4 + 3 + 2 + 1 = 10 \end{aligned}$$

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 0인 경우의 수는

$$12 + 10 = 22$$

(ii) 학생 A가 받는 공의 개수가 1인 경우

학생 A가 흰 공 또는 검은 공 중 하나를 받는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

학생 B가 받는 공의 개수가 2, 3인 경우의 수는

$${}_2H_2 + {}_2H_3 = {}_3C_2 + {}_4C_3 = {}_3C_1 + {}_4C_1 = 3 + 4 = 7$$

학생 B가 받는 공의 개수가 4, 5, 6, 7인 경우의 수는 학생 C가 받는 공의 개수가 3, 2, 1, 0인 경우의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} {}_2H_3 + {}_2H_2 + {}_2H_1 + {}_2H_0 &= {}_4C_3 + {}_3C_2 + {}_2C_1 + {}_1C_0 \\ &= {}_4C_1 + {}_3C_1 + 2 + 1 \\ &= 4 + 3 + 2 + 1 = 10 \end{aligned}$$

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 1인 경우의 수는

$$2 \times (7 + 10) = 34$$

(iii) 학생 A가 받는 공의 개수가 2인 경우

① 학생 A가 같은 색의 공을 받는 경우

학생 A가 받는 공의 색을 정하는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$ 학생 B가 받는 공의 개수가 2인 경우의 수는 ${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

학생 B가 받는 공의 개수가 3인 경우의 수는 학생 A가 받는 공과 같은 색의 공의 개수가 0, 1, 2인 경우 3가지

학생 B가 받는 공의 개수가 4, 5, 6인 경우의 수는 학생 C가 받는 공의 개수가 2, 1, 0인 경우의 수와 같으므로

$${}_2H_2 + {}_2H_1 + {}_2H_0 = {}_3C_2 + {}_2C_1 + {}_1C_0 = {}_3C_1 + 2 + 1 = 3 + 2 + 1 = 6$$

따라서 학생 A가 같은 색의 공 2개를 받는 경우의 수는

$$2 \times (3 + 3 + 6) = 24$$

② 학생 A가 다른 색의 공을 받는 경우

학생 B가 받는 공의 개수가 2, 3인 경우의 수는

$${}_2H_2 + {}_2H_3 = {}_3C_2 + {}_4C_3 = {}_3C_1 + {}_4C_1 = 3 + 4 = 7$$

학생 B가 받는 공의 개수가 4, 5, 6인 경우의 수는 학생 C가 받는 공의 개수가 2, 1, 0인 경우의 수와 같으므로

$${}_2H_2 + {}_2H_1 + {}_2H_0 = {}_3C_2 + {}_2C_1 + {}_1C_0 = {}_3C_1 + 2 + 1 = 3 + 2 + 1 = 6$$

따라서 학생 A가 다른 색의 공 2개를 받는 경우의 수는

$$7 + 6 = 13$$

①, ②에서 그 경우의 수는

$$24 + 13 = 37$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는 $22 + 34 + 37 = 93$

05 답 720

1단계 (가)를 만족시키는 경우의 수 구하기

(가)에서 함수 f 의 치역의 원소를 택하는 경우의 수는 집합 Y 의 원소 4개 중에서 3개를 택하면 되므로

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

2단계 (나)를 만족시키는 경우의 수 구하기

(나)를 만족시키는 각각의 치역에 대하여 (나)의 $f(a) \leq f(b)$ 를 만족시키는 함수 f 의 개수는 치역의 원소 3개를 각각 1개씩 먼저 택하고 치역의 원소 3개 중에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 그 값이 작거나 같은 순서대로 정의역 X 의 원소에 차례로 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

(4)의 $(g \circ f)(a) \geq (g \circ f)(b)$ 에서 $g(f(a)) \geq g(f(b))$

이때 $f(a) \leq f(b)$ 이므로 이를 만족시키는 함수 g 의 개수는 집합 Z 의 원소 3개 중에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 그 값이 크거나 같은 순서대로 함수 f 의 치역에 차례로 대응시키고 함수 f 의 치역이 아닌 집합 Y 의 나머지 원소 1개에는 집합 Z 의 3개의 원소 중 1개에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_3H_3 \times {}_3C_1 = {}_5C_3 \times 3 = {}_5C_2 \times 3 = 10 \times 3 = 30$$

3단계 순서쌍 (f, g) 의 개수 구하기

따라서 구하는 순서쌍 (f, g) 의 개수는

$$4 \times 6 \times 30 = 720$$

06 답 108

1단계 $(\textcircled{A})$ 를 만족시키지 않는 $f(x)$ 의 값 구하기

$(\textcircled{A})$ 에서 $f(-2) \neq -2, f(-2) \neq -1, f(-1) \neq -2, f(1) \neq 2, f(2) \neq 1, f(2) \neq 2$ 이므로 이를 표로 나타내면 다음과 같다.

	-2	-1	0	1	2
$f(-2)$	×	×	○	○	○
$f(-1)$	×	○	○	○	○
$f(0)$	○	○	○	○	○
$f(1)$	○	○	○	○	×
$f(2)$	○	○	○	×	×

2단계 $f(0)$ 의 값에 따른 함수 f 의 개수 구하기

(i) $f(0)=2$ 인 경우

$f(-2), f(-1)$ 의 값을 정하는 경우는 $f(-2)=f(-1)=2$ 의 1가지

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $-2, -1, 0, 1$ 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수에서 $f(2)=1$ 인 경우를 제외하면 되므로

$${}_4H_2 - 1 = {}_5C_2 - 1 = 10 - 1 = 9$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$1 \times 9 = 9$$

(ii) $f(0)=1$ 인 경우

$f(-2), f(-1)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $1, 2$ 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $-2, -1, 0, 1$ 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수에서 $f(2)=1$ 인 경우를 제외하면 되므로

$${}_4H_2 - 1 = {}_5C_2 - 1 = 10 - 1 = 9$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$3 \times 9 = 27$$

(iii) $f(0)=0$ 인 경우

$f(-2), f(-1)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $0, 1, 2$ 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $-2, -1, 0$ 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$6 \times 6 = 36$$

(iv) $f(0)=-1$ 인 경우

$f(-2), f(-1)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $-1, 0, 1, 2$ 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수에서 $f(-2)=-1$ 인 경우를 제외하면 되므로

$${}_4H_2 - 1 = {}_5C_2 - 1 = 10 - 1 = 9$$

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $-2, -1$ 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$9 \times 3 = 27$$

(v) $f(0)=-2$ 인 경우

$f(-2), f(-1)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 $-1, 0, 1, 2$ 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수에서 $f(-2)=-1$ 인 경우를 제외하면 되므로

$${}_4H_2 - 1 = {}_5C_2 - 1 = 10 - 1 = 9$$

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우는 $f(1)=f(2)=-2$ 의 1가지

따라서 함수 f 의 개수는

$$9 \times 1 = 9$$

3단계 경우의 수 구하기

(i)~(v)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$9 + 27 + 36 + 27 + 9 = 108$$

다른 풀이1

$(\textcircled{A})$ 에서 $f(-2) \neq -2, f(-2) \neq -1, f(-1) \neq -2, f(1) \neq 2, f(2) \neq 1, f(2) \neq 2$

$(\textcircled{B})$ 에서 $f(-2) \geq f(-1) \geq f(0) \geq f(1) \geq f(2)$

(i) $f(-2)=0$ 인 경우

$f(-1), f(0), f(1), f(2)$ 의 값이 될 수 있는 경우의 수는 $-2, -1, 0$ 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수에서

$f(-1)=-2$ 인 경우 1가지를 제외하면 되므로

$${}_3H_4 - 1 = {}_6C_4 - 1 = {}_6C_2 - 1 = 15 - 1 = 14$$

(ii) $f(-2)=1$ 인 경우

$f(-1), f(0), f(1), f(2)$ 의 값이 될 수 있는 경우의 수는 $-2, -1, 0, 1$ 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수에서

$f(-1)=-2$ 인 경우 1가지와 $f(2)=1$ 인 경우 1가지를 제외하면 되므로

$${}_4H_4 - 1 - 1 = {}_7C_4 - 2 = {}_7C_3 - 2 = 35 - 2 = 33$$

(iii) $f(-2)=2$ 인 경우

$f(-1), f(0), f(1), f(2)$ 의 값이 될 수 있는 경우의 수는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수에서 다음 경우의 수를 제외하면 된다.

① $f(-1)=-2$ 인 경우 $\Rightarrow$ 1가지

② $f(1)=2$ 인 경우

$f(2)=-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5가지

③ $f(1) \neq 2, f(2)=1$ 인 경우

$f(1)=1$ 이어야 하므로 $f(0)=1, f(-1)=1$ 또는 $f(0)=1,$

$f(-1)=2$ 또는 $f(0)=2, f(-1)=2$ 의 3가지

④ $f(2)=2$ 인 경우 $\Rightarrow$ ②에 포함된다.

①~④에서 $f(-2)=2$ 인 경우의 수는

$${}_5H_4 - 1 - 5 - 3 = {}_8C_4 - 9 = 70 - 9 = 61$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$14 + 33 + 61 = 108$$

다른 풀이2

(4)에서 $f(-2) \geq f(-1) \geq f(0) \geq f(1) \geq f(2)$ 이므로 $-2, -1, 0, 1, 2$ 에서 (4)를 만족시키도록 $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$ 의 함숫값을 정하는 경우의 수는 ${}_5H_5 = {}_5C_5 = {}_5C_4 = 126$

이때 (7)에서 $f(-2) \neq -2, f(-2) \neq -1, f(-1) \neq -2, f(1) \neq 2, f(2) \neq 1, f(2) \neq 2$ 이므로 다음 경우를 제외해야 한다.

(i) $f(-2) = -2$ 인 경우

$f(-1) = f(0) = f(1) = f(2) = -2$ 이어야 하므로 이 경우의 수는 1

(ii) $f(-2) = -1$ 인 경우

$f(-1), f(0), f(1), f(2)$ 의 값은 $-2, -1$ 중에서만 택할 수 있으므로 이 경우의 수는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

(iii) $f(-2) \neq -2, f(-2) \neq -1, f(-1) = -2$ 인 경우

$f(-2)$ 의 값은 $0, 1, 2$ 중에서 택할 수 있고,

$f(0) = f(1) = f(2) = -2$ 이어야 하므로 이 경우의 수는 3

(iv) $f(2) = 2$ 인 경우

$f(-2) = f(-1) = f(0) = f(1) = 2$ 이어야 하므로 이 경우의 수는 1

(v) $f(2) = 1$ 인 경우

$f(-2), f(-1), f(0), f(1)$ 의 값은 $1, 2$ 중에서만 택할 수 있으므로 이 경우의 수는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

(vi) $f(2) \neq 2, f(2) \neq 1, f(1) = 2$ 인 경우

$f(2)$ 의 값은 $-2, -1, 0$ 중에서 택할 수 있고,

$f(-2) = f(-1) = f(0) = 2$ 이어야 하므로 이 경우의 수는 3

(i)~(vi)에서 중복되는 경우는 없으므로 구하는 함수 f 의 개수는

$$126 - (1 + 5 + 3 + 1 + 5 + 3) = 108$$

07 답 75

1단계 (7), (4)를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수 구하기

구하는 a, b, c, d, e 의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는 (7), (4)를 모두 만족시키는 순서쌍 (a, b, c, d, e) 에서 a, b, c, d, e 중 짝수가 2개 미만인 순서쌍 (a, b, c, d, e) 를 제외한 것의 개수와 같다.

(i) $a+b+c+d+e=11, a+b$ 는 짝수인 경우

$c=c'+1, d=d'+1, e=e'+1$ (c', d', e' 은 음이 아닌 정수)로 놓으면 $a+b+c+d+e=11$ 에서

$$a+b+(c'+1)+(d'+1)+(e'+1)=11$$

$$\therefore a+b+c'+d'+e'=8$$

① $a+b=2$ 인 경우

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 1)$ 의 1가지이고,

$c'+d'+e'=6$ 인 순서쌍 (c', d', e') 의 개수는

$${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = 28$$

따라서 그 경우의 수는 $1 \times 28 = 28$

② $a+b=4$ 인 경우

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ 의 3가지이고,

$c'+d'+e'=4$ 인 순서쌍 (c', d', e') 의 개수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

따라서 그 경우의 수는 $3 \times 15 = 45$

③ $a+b=6$ 인 경우

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ 의 5가지이고, $c'+d'+e'=2$ 인 순서쌍 (c', d', e') 의 개수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

따라서 그 경우의 수는 $5 \times 6 = 30$

④ $a+b=8$ 인 경우

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1)$ 의 7가지이고, $c'+d'+e'=0$ 인 순서쌍 (c', d', e') 의 개수는 1

따라서 그 경우의 수는 $7 \times 1 = 7$

①~④에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$28 + 45 + 30 + 7 = 110$$

2단계 (4)를 만족시키지 않는 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수 구하기

(ii) a, b, c, d, e 중 짝수가 2개 미만이면 $a+b+c+d+e=11$ 이고 $a+b$ 는 짝수인 경우

a, b, c, d, e 는 모두 홀수이어야 하므로 $a=2a''+1, b=2b''+1, c=2c''+1, d=2d''+1, e=2e''+1$ (a'', b'', c'', d'', e'' 은 음이 아닌 정수)로 놓으면 $a+b+c+d+e=11$ 에서

$$(2a''+1)+(2b''+1)+(2c''+1)+(2d''+1)+(2e''+1)=11$$

$$\therefore a''+b''+c''+d''+e''=3$$

즉, 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 a'', b'', c'', d'', e'' 의 순서쌍 $(a'', b'', c'', d'', e'')$ 의 개수와 같으므로

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$$

3단계 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수 구하기

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d, e) 의 개수는

$$110 - 35 = 75$$

idea
08 답 3

1단계 경우에 따라 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수 구하기

(4)에서 음이 아닌 정수 x, y, z, w 에 대하여

$$a=x, b=x+y, c=x+y+z, d=x+y+z+w$$

로 놓으면 (7)의 $3a+b+c+d=30$ 에서

$$3x+(x+y)+(x+y+z)+(x+y+z+w)=30$$

$$\therefore 6x+3y+2z+w=30 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

음이 아닌 정수 y, z, w 를

$$y=2y_1+y_2 \quad (y_1 \text{은 음이 아닌 정수, } y_2=0, 1),$$

$$z=3z_1+z_2 \quad (z_1 \text{은 음이 아닌 정수, } z_2=0, 1, 2),$$

$$w=6w_1+w_2 \quad (w_1 \text{은 음이 아닌 정수, } w_2=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

로 놓으면 ①에서

$$6x+3(2y_1+y_2)+2(3z_1+z_2)+6w_1+w_2=30$$

$$6(x+y_1+z_1+w_1)+(3y_2+2z_2+w_2)=30 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

(i) $w_2=0$ 일 때,

②에서 $y_2=0, z_2=0$ 이어야 하므로

$$x+y_1+z_1+w_1=5$$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y_1, z_1, w_1 의 순서쌍 (x, y_1, z_1, w_1) 의 개수는

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$$

(ii) $w_2=1$ 일 때,

②에서 $y_2=1, z_2=1$ 이어야 하므로

$$x+y_1+z_1+w_1=4$$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y_1, z_1, w_1 의 순서쌍 (x, y_1, z_1, w_1) 의 개수는

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$$

(iii) $w_2=2$ 일 때,

㉠에서 $y_2=0$, $z_2=2$ 이어야 하므로

$$x+y_1+z_1+w_1=4$$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y_1, z_1, w_1 의 순서쌍 (x, y_1, z_1, w_1) 의 개수는

$${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$$

(iv) $w_2=3$ 일 때,

㉠에서 $y_2=1$, $z_2=0$ 이어야 하므로

$$x+y_1+z_1+w_1=4$$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y_1, z_1, w_1 의 순서쌍 (x, y_1, z_1, w_1) 의 개수는

$${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$$

(v) $w_2=4$ 일 때,

㉠에서 $y_2=0$, $z_2=1$ 이어야 하므로

$$x+y_1+z_1+w_1=4$$

이를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y_1, z_1, w_1 의 순서쌍 (x, y_1, z_1, w_1) 의 개수는

$${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$$

(vi) $w_2=5$ 일 때,

㉠에서 $y_2=1$, $z_2=2$ 이어야 하므로

$$x+y_1+z_1+w_1=3$$

이를 만족시키는 음의 아닌 정수 x, y_1, z_1, w_1 의 순서쌍 (x, y_1, z_1, w_1) 의 개수는

$${}_4H_3={}_6C_3=20$$

2단계 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수 구하기

(i)~(vi)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$56+35+35+35+35+20=216$$

09 답 330

1단계 (가), (나)를 만족시키는 식 세우기

학생 A, B, C, D, E가 받는 검은 공의 개수를 각각 a, b, c, d, e 라 하고, 학생 A, B, C, D, E가 받는 흰 공의 개수를 각각 a', b', c', d', e' 이라 하자.

$a+b+c+d+e=4$, $a'+b'+c'+d'+e'=4$ 이고, 이때 $a, b, c, d, e, a', b', c', d', e'$ 은 모두 음이 아닌 정수이다.

공이 모두 8개이고, (가)에서 학생 A, B, C가 받는 공의 개수의 합이 홀수이므로 학생 D, E가 받는 공의 개수의 합 $(d+d')+(e+e')$ 은 홀수이다. 이때 (나)를 만족시키는 $d+d', e+e'$ 의 값은 $d+d'=2, e+e'=1$ 뿐이다.

2단계 경우에 따라 순서쌍 (a, b, c, a', b', c') 의 개수 구하기

(i) (d, d', e, e') 이 $(2, 0, 1, 0)$ 인 경우

$a+b+c=1$, $a'+b'+c'=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c' 의 순서쌍 (a, b, c, a', b', c') 의 개수는

$${}_3H_1 \times {}_3H_4={}_3C_1 \times {}_6C_4=3 \times {}_6C_2=3 \times 15=45$$

(ii) (d, d', e, e') 이 $(2, 0, 0, 1)$ 인 경우

$a+b+c=2$, $a'+b'+c'=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c' 의 순서쌍 (a, b, c, a', b', c') 의 개수는

$${}_3H_2 \times {}_3H_3={}_4C_2 \times {}_5C_3=6 \times {}_5C_2=6 \times 10=60$$

(iii) (d, d', e, e') 이 $(1, 1, 1, 0)$ 인 경우

$a+b+c=2$, $a'+b'+c'=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a, b, c,$

a', b', c' 의 순서쌍 (a, b, c, a', b', c') 의 개수는

$${}_3H_2 \times {}_3H_3={}_4C_2 \times {}_5C_3=6 \times {}_5C_2=6 \times 10=60$$

(iv) (d, d', e, e') 이 $(1, 1, 0, 1)$ 인 경우

$a+b+c=3$, $a'+b'+c'=2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c' 의 순서쌍 (a, b, c, a', b', c') 의 개수는

$${}_3H_3 \times {}_3H_2={}_5C_3 \times {}_4C_2={}_5C_2 \times 6=10 \times 6=60$$

(v) (d, d', e, e') 이 $(0, 2, 1, 0)$ 인 경우

$a+b+c=3$, $a'+b'+c'=2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c' 의 순서쌍 (a, b, c, a', b', c') 의 개수는

$${}_3H_3 \times {}_3H_2={}_5C_3 \times {}_4C_2={}_5C_2 \times 6=10 \times 6=60$$

(vi) (d, d', e, e') 이 $(0, 2, 0, 1)$ 인 경우

$a+b+c=4$, $a'+b'+c'=1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c' 의 순서쌍 (a, b, c, a', b', c') 의 개수는

$${}_3H_1 \times {}_3H_1={}_6C_4 \times {}_3C_1={}_6C_2 \times 3=15 \times 3=45$$

3단계 경우의 수 구하기

(i)~(vi)에서 구하는 경우의 수는

$$45+60+60+60+60+45=330$$

10 답 60

1단계 순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수 구하기

x_1, y_1, x_2, y_2 가 자연수이므로

$$x_1'=x_1-1, y_1'=y_1-1, x_2'=x_2-1, y_2'=y_2-1$$

로 놓으면 $x_1+y_1+x_2+y_2=12$ 에서

$$(x_1'+1)+(y_1'+1)+(x_2'+1)+(y_2'+1)=12$$

$\therefore x_1'+y_1'+x_2'+y_2'=8$ (x_1', y_1', x_2', y_2' 은 음이 아닌 정수)

순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1', y_1', x_2', y_2' 의 순서쌍 (x_1', y_1', x_2', y_2') 의 개수와 같으므로

$${}_4H_8={}_{11}C_8={}_{11}C_3=165$$

2단계 삼각형이 만들어지지 않는 순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수 구하기

세 점을 $A(3, 3), B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ 라 하면 삼각형이 만들어지지 않는 경우는 세 점 중에서 두 점 이상이 일치하거나 세 점이 서로 다르면서 한 직선 위에 있는 경우이다.

(i) 두 점 이상이 일치하는 경우

① $x_1=3, y_1=3$ 일 때,

$$x_1+y_1+x_2+y_2=12 \text{에서}$$

$$x_2+y_2=6$$

이를 만족시키는 자연수 x_2, y_2 의 순서쌍 (x_2, y_2) 는

$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ 의 5개이다.

② $x_2=3, y_2=3$ 일 때,

$$x_1+y_1+x_2+y_2=12 \text{에서}$$

$$x_1+y_1=6$$

이를 만족시키는 자연수 x_1, y_1 의 순서쌍 (x_1, y_1) 은

$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ 의 5개이다.

③ $x_1=x_2, y_1=y_2$ 일 때,

$$x_1+y_1+x_2+y_2=12 \text{에서}$$

$$x_1+y_1=6$$

이를 만족시키는 자연수 x_1, y_1 의 순서쌍 (x_1, y_1) 은

$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ 의 5개이다.

①, ②, ③에서 $x_1=3, y_1=3, x_2=3, y_2=3$ 인 경우가 3번 겹치므로 두 점 이상이 일치할 때, 순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수는 $5+5+5-2=13$

(ii) 세 점이 서로 다르면서 한 직선 위에 있는 경우

직선의 기울기를 m 이라 하면 $\frac{y_1-3}{x_1-3} = \frac{y_2-3}{x_2-3} = m$ 이므로

$$y_1-3=m(x_1-3), y_2-3=m(x_2-3)$$

두 식을 변끼리 더하면

$$y_1+y_2-6=m(x_1+x_2-6) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $x_1+y_1+x_2+y_2=12$ 에서 $y_1+y_2=12-x_1-x_2$ 이므로 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$12-x_1-x_2-6=m(x_1+x_2-6)$$

$$m(x_1+x_2-6)+(x_1+x_2-6)=0$$

$$\therefore (m+1)(x_1+x_2-6)=0$$

① $m=-1$ 일 때,

$$\frac{y_1-3}{x_1-3}=-1 \text{에서 } y_1-3=3-x_1$$

$$\therefore x_1+y_1=6$$

이를 만족시키는 자연수 x_1, y_1 의 순서쌍 (x_1, y_1) 은

$(1, 5), (2, 4), (4, 2), (5, 1)$ 의 4개이다. $\rightarrow (3, 3)$ 은 (i)의 경우
이므로 제외한다.

$$\text{또 } \frac{y_2-3}{x_2-3}=-1 \text{에서 } y_2-3=3-x_2$$

$$\therefore x_2+y_2=6$$

이를 만족시키는 자연수 x_2, y_2 의 순서쌍 (x_2, y_2) 는

$(1, 5), (2, 4), (4, 2), (5, 1)$ 의 4개이다. $\rightarrow (3, 3)$ 은 (i)의 경우
이므로 제외한다.

따라서 순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수는

$$4 \times 4 = 16$$

이때 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 가 일치하는 경우는 제외해야 하므로
 $16-4=12$

② $m \neq -1$ 일 때,

$$x_1+x_2=6 \text{이므로 } x_1+y_1+x_2+y_2=12 \text{에서}$$

$$y_1+y_2=6$$

$x_1+x_2=6$ 을 만족시키는 자연수 x_1, x_2 의 순서쌍 (x_1, x_2) 는

$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ 의 5개이다.

$y_1+y_2=6$ 을 만족시키는 자연수 y_1, y_2 의 순서쌍 (y_1, y_2) 는

$(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)$ 의 5개이다.

따라서 순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수는

$$5 \times 5 = 25$$

이때 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 가 $(a, b), (b, a)$ 인 경우, 즉 순서쌍 $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ 가 $(a, b), (b, a)$ 인 경우에는 두 점을 이은 직선의 기울기가 -1 이므로 제외해야 한다.

또 두 점 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 가 $(3, 3), (3, 3)$ 인 경우도 (i)과 겹치므로 제외해야 한다.

따라서 순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수는

$$25-5=20$$

①, ②에서 세 점이 한 직선 위에 있을 때, 순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수는

$$12+20=32$$

(i), (ii)에서 삼각형이 만들어지지 않는 순서쌍 (x_1, y_1, x_2, y_2) 의 개수는 $13+32=45$

3단계 삼각형의 개수 구하기

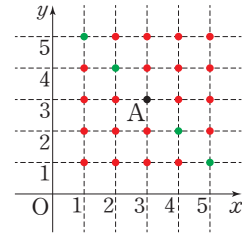
따라서 세 점 $A(3, 3), B(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 개수는 $165-45=120$

이때 B와 C가 바뀌어도 같은 삼각형이므로 구하는 삼각형의 개수는

$$\frac{120}{2}=60$$

다른 풀이

(ii) 세 점이 서로 다르면서 한 직선 위에 있는 경우



점 B가 빨간색 점 중의 하나일 때, 점 C는 점 B를 점 A에 대하여 대칭이동한 점이므로 된다. 즉, 20가지이다.

점 B가 초록색 점 중의 하나일 때, 점 C는 나머지 초록색 점 중의 하나이면 된다. 즉, ${}_4P_2=12$ (가지)이다.

따라서 세 점이 서로 다르면서 한 직선 위에 있는 경우의 수는 $20+12=32$

11 답 852

1단계 $f(4)$ 의 값에 따라 함수의 개수 구하기

(㉞)에 의하여 함수 f 는 일대일함수이다.

함수 f 의 치역의 원소를 a, b, c, d ($a < b < c < d$)라 하자.

이때 a 보다 작은 수의 개수를 x_1 , a 보다 크고 b 보다 작은 수의 개수를 x_2 , b 보다 크고 c 보다 작은 수의 개수를 x_3 , c 보다 크고 d 보다 작은 수의 개수를 x_4 , d 보다 큰 수의 개수를 x_5 라 하면 (㉞)에서 $x_2 \geq 2, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2$ 이고 (㉞)에 의하여 a, b 는 $f(4)$ 의 값이 될 수 없다.

(i) $f(4)=c$ 일 때,

(㉞)을 만족시키는 d 가 존재하려면 $f(4)=12$ 이고 $d=15$

이때 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 2, x_3 \geq 2$ 이고 $x_1+x_2+x_3=9$ 이므로

$$x_2'=x_2-2, x_3'=x_3-2 \text{로 놓으면}$$

$$x_1+(x_2'+2)+(x_3'+2)=9$$

$$\therefore x_1+x_2'+x_3'=5 \quad (x_1, x_2', x_3' \text{은 음이 아닌 정수})$$

따라서 순서쌍 (x_1, x_2, x_3) 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2', x_3' 의 순서쌍 (x_1, x_2', x_3') 의 개수와 같으므로

$${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$$

이때 a, b, d 에 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값을 대응시키는 경우의 수는 $3!=6$

따라서 함수 f 의 개수는

$$21 \times 6 = 126$$

(ii) $f(4)=d$ 일 때,

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 2, x_3 \geq 2, x_4 \geq 2, 0 \leq x_5 \leq 3 \text{이고}$$

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=11 \text{이므로}$$

$$x_2'=x_2-2, x_3'=x_3-2, x_4'=x_4-2 \text{로 놓으면}$$

$$x_1+(x_2'+2)+(x_3'+2)+(x_4'+2)+x_5=11$$

$$\therefore x_1+x_2'+x_3'+x_4'+x_5=5$$

$$(x_1, x_2', x_3', x_4' \text{은 음이 아닌 정수}, 0 \leq x_5 \leq 3) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

① $x_5=0$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } x_1+x_2'+x_3'+x_4'=5$$

따라서 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ 의 개수는 이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2', x_3', x_4' 의 순서쌍 (x_1, x_2', x_3', x_4') 의 개수와 같으므로

$${}_4H_5={}_8C_5={}_8C_3=56$$

따라서 a 와 c 가 서로소인 순서쌍 (a, c) 의 개수는

$${}_2\Pi_3=2^3=8$$

그러므로 서로소가 아닌 자연수 a, c 의 모든 순서쌍 (a, c) 의 개수는

$$24-8=16$$

(iii) $b=3$ 인 경우

$ac=2^3 \times 3 \times 5^2$ 이므로 (ii)와 같은 방법으로 하면 순서쌍 (a, c) 의 개수는 16

(iv) $b=5$ 인 경우

$ac=2^3 \times 3^3$ 이므로 a, c 는 $2^3 \times 3^3$ 의 약수이다.

이때 a 가 정해지면 c 는 자동으로 정해지므로 가능한 순서쌍 (a, c) 의 개수는 $2^3 \times 3^3$ 의 약수의 개수와 같다.

$$\text{즉, } (3+1) \times (3+1) = 4 \times 4 = 16$$

이 중 a 와 c 가 서로소인 경우는 a 와 c 의 공약수가 1뿐인 경우이므로 2^3 이 a 와 c 중 어느 하나의 약수이고 3^3 이 a 와 c 중 어느 하나의 약수이어야 한다.

따라서 a 와 c 가 서로소인 순서쌍 (a, c) 의 개수는

$${}_2\Pi_2=2^2=4$$

그러므로 서로소가 아닌 자연수 a, c 의 모든 순서쌍 (a, c) 의 개수는

$$16-4=12$$

(v) $b=6$ 인 경우

$ac=2 \times 3 \times 5^2$ 이므로 a 와 c 가 서로소가 아닌 모든 순서쌍 (a, c) 는 (5, 30) 또는 (30, 5) 또는 (10, 15) 또는 (15, 10)의 4개이다.

(vi) $b=10$ 인 경우

$ac=2 \times 3^3$ 이므로 a 와 c 가 서로소가 아닌 모든 순서쌍 (a, c) 는 (3, 18) 또는 (18, 3) 또는 (6, 9) 또는 (9, 6)의 4개이다.

(vii) $b=15$ 인 경우

$ac=2^3 \times 3$ 이므로 (vi)와 같은 방법으로 하면 순서쌍 (a, c) 의 개수는 4

(viii) $b=30$ 인 경우

조건을 만족시키는 순서쌍 (a, c) 는 존재하지 않는다.

(i)~(viii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$40+16+16+12+4+4+4+4=96$$

03 답 675

문자열 aaa 와 이웃한 자리를 $\triangle$, 문자열 aaa 와 이웃하지 않는 자리를 $\square$ 로 나타내면 (㉞)를 만족시키는 문자열의 형태는

$$aaa\triangle\square\square\square, \triangle aaa\triangle\square\square, \square\triangle aaa\triangle\square,$$

$$\square\square\triangle aaa\triangle, \square\square\square\triangle aaa$$

의 5가지이고 (㉞)에서 $\triangle$ 에 배열될 수 있는 문자는 b 또는 c 또는 d 이다.

(i) $aaa\triangle\square\square\square$ 일 때,

① $\triangle$ 에 b 가 배열된 경우

3개의 $\square$ 에 네 문자를 배열하는 경우의 수는 a, b, c, d 중에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

이때 조건을 만족시키지 않는 문자열은

$$aaabaaa, aaabaab, aaababa, aaabbaa, aaabaac, aaabaca, aaabcaa, aaabaad, aaabada, aaabdaa, aaabbba, aaabbbb, aaabbbc, aaabbbd, aaabccc, aaabddd$$

의 16가지이다.

따라서 만들 수 있는 문자열의 개수는

$$64-16=48$$

② $\triangle$ 에 c 가 배열된 경우

①과 같은 방법으로 하면 만들 수 있는 문자열의 개수는 48

③ $\triangle$ 에 d 가 배열된 경우

①과 같은 방법으로 하면 만들 수 있는 문자열의 개수는 48

①, ②, ③에서 만들 수 있는 문자열의 개수는

$$48+48+48=144$$

(ii) $\triangle aaa\triangle\square\square$ 일 때,

2개의 $\triangle$ 에 a 가 아닌 세 문자를 배열하는 경우의 수는 b, c, d 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_2=3^2=9$$

2개의 $\square$ 에 네 문자를 배열하는 경우의 수는 a, b, c, d 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_2=4^2=16$$

이때 조건을 만족시키지 않는 문자열은

$$baaabaa, baaabbb, baaacaa, baaaccc, baaadaa, baaaddd, caaabaa, caaabbb, caaacaa, caaaccc, caaadaa, caaaddd, daaabaa, daaabbb, daaacaa, daaaccc, daaadaa, daaaddd$$

의 18가지이다.

따라서 만들 수 있는 문자열의 개수는

$$9 \times 16 - 18 = 126$$

(iii) $\square\triangle aaa\triangle\square$ 일 때,

2개의 $\triangle$ 에 a 가 아닌 세 문자를 배열하는 경우의 수는 b, c, d 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_2=3^2=9$$

2개의 $\square$ 에 네 문자를 배열하는 경우의 수는 a, b, c, d 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_2=4^2=16$$

이때 조건을 만족시키지 않는 문자열은

$$abaaaba, abaaaca, abaaada, acaaba, acaaca, acaada, adaaaba, adaaaca, adaaada$$

의 9가지이다.

따라서 만들 수 있는 문자열의 개수는

$$9 \times 16 - 9 = 135$$

(iv) $\square\square\triangle aaa\triangle$ 일 때,

(ii)와 같은 방법으로 하면 만들 수 있는 문자열의 개수는 126

(v) $\square\square\square\triangle aaa$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면 만들 수 있는 문자열의 개수는 144

(i)~(v)에서 만들 수 있는 모든 문자열의 개수는

$$144+126+135+126+144=675$$

04 답 2160

(㉞)에서 홀수인 세 함숫값이 서로 같으면 지역의 세 원소 중 홀수인 원소가 1개, 짝수인 원소가 2개이고, 홀수인 세 함숫값 중 두 함숫값이 서로 같고, 하나의 함숫값이 다르면 지역의 세 원소 중 홀수인 원소가 2개, 짝수인 원소가 1개이다. 그런데 홀수인 세 함숫값이 모두 다르면 (㉞)를 만족시키지 않는다.

(i) 지역의 원소가 홀수 1개, 짝수 2개인 경우

집합 X 의 원소인 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 홀수 1개와 짝수 2개를 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_3C_2 = 3 \times 3 = 3 \times 3 = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

지역의 세 원소 중 홀수를 a , 짝수를 b, c 라 하면 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는
문자 a, a, a, b, b, c 또는 a, a, a, b, c, c 를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$2 \times \frac{6!}{3! \times 2!} = 2 \times 60 = 120 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

㉠, ㉡에서 함수 f 의 개수는 $9 \times 120 = 1080$

(ii) 지역의 원소가 홀수 2개, 짝수 1개인 경우

집합 X 의 원소인 1, 2, 3, 4, 5, 6 중에서 홀수 2개와 짝수 1개를 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_3C_1 = {}_3C_1 \times 3 = 3 \times 3 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

지역의 세 원소 중 홀수를 a, b , 짝수를 c 라 하면 $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 문자 a, a, b, c, c, c 또는 a, b, b, c, c, c 를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$2 \times \frac{6!}{2! \times 3!} = 2 \times 60 = 120 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

㉢, ㉣에서 함수 f 의 개수는 $9 \times 120 = 1080$

(i), (ii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

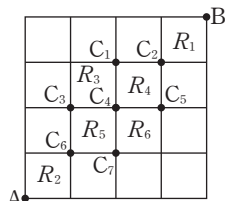
$$1080 + 1080 = 2160$$

05 답 80

그림과 같이 7개의 지점 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7$ 을 잡고 4개의 정사각형을 R_3, R_4, R_5, R_6 이라 하자.

이때 ㉞를 만족시키려면

$A \rightarrow C_6 \rightarrow C_2 \rightarrow B \rightarrow C_2 \rightarrow C_6 \rightarrow A$ 로 이동해야 하고 ㉞를 만족시키려면 정사각형



R_3, R_4, R_5, R_6 중 네 변을 모두 지나는 정사각형은 없어야 한다.

(i) $A \rightarrow C_6, C_2 \rightarrow B, B \rightarrow C_2, C_6 \rightarrow A$ 로 이동하는 경우

정사각형 R_1, R_2 의 모든 변을 다 지나야 하므로 경우의 수는

$$\begin{aligned} & (A \text{ 지점에서 } C_6 \text{ 지점으로 이동하는 경우의 수}) \\ & \times (C_2 \text{ 지점에서 } B \text{ 지점으로 이동하는 경우의 수}) \\ & \times (B \text{ 지점에서 } C_2 \text{ 지점으로 이동하는 경우의 수}) \\ & \times (C_6 \text{ 지점에서 } A \text{ 지점으로 이동하는 경우의 수}) \\ & = 2 \times 2 \times 1 \times 1 \\ & = 4 \end{aligned}$$

(ii) $C_6 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_6$ 으로 이동하는 경우

$$\begin{aligned} & (C_6 \text{ 지점에서 } C_2 \text{ 지점으로 이동하는 경우의 수}) \\ & \times (C_2 \text{ 지점에서 } C_6 \text{ 지점으로 이동하는 경우의 수}) \\ & = \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} \\ & = 6 \times 6 = 36 \end{aligned}$$

㉠ 정사각형 R_3 의 네 변을 모두 지나는 경우

$$\begin{aligned} & C_6 \rightarrow C_3 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_1 \rightarrow C_3 \rightarrow C_6 \text{으로 이동하는 경우의 수이므로} \\ & (1 \times 2 \times 1) \times (1 \times 1 \times 1) = 2 \end{aligned}$$

㉡ 정사각형 R_4 의 네 변을 모두 지나는 경우

$$\begin{aligned} & C_6 \rightarrow C_4 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow C_6 \text{으로 이동하는 경우의 수이므로} \\ & (2 \times 2) \times (1 \times 2) = 8 \end{aligned}$$

㉢ 정사각형 R_5 의 네 변을 모두 지나는 경우

$$\begin{aligned} & C_6 \rightarrow C_4 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow C_6 \text{으로 이동하는 경우의 수이므로} \\ & (2 \times 2) \times (2 \times 1) = 8 \end{aligned}$$

㉣ 정사각형 R_6 의 네 변을 모두 지나는 경우

$$\begin{aligned} & C_6 \rightarrow C_7 \rightarrow C_5 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_5 \rightarrow C_7 \rightarrow C_6 \text{으로 이동하는 경우의 수이므로} \\ & (1 \times 2 \times 1) \times (1 \times 1 \times 1) = 2 \end{aligned}$$

㉤ 두 정사각형 R_4, R_5 의 네 변을 모두 지나는 경우

$$\begin{aligned} & C_6 \rightarrow C_4 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_4 \rightarrow C_6 \text{으로 이동하는 경우의 수이므로} \\ & (2 \times 2) \times (1 \times 1) = 4 \end{aligned}$$

㉠~㉤에서 $C_6 \rightarrow C_2, C_2 \rightarrow C_6$ 으로 이동할 때, 한 변의 길이가 1인 정사각형 중 네 변을 모두 지나는 정사각형이 없는 경우의 수는

$$36 - \{(2+8+8+2)-4\} = 20$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 20 = 80$$

06 답 133

㉞에서 학생 A가 받는 공의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

(i) 학생 A가 받는 공의 개수가 0인 경우

두 학생 B, C에게 흰 공과 검은 공을 모두 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_5 \times {}_2H_5 = {}_6C_5 \times {}_6C_5 = {}_6C_1 \times {}_6C_1 = 6 \times 6 = 36$$

이때 학생 B가 받는 공의 개수가 0 또는 1 또는 2인 경우의 수는

$$1 + {}_2C_1 + {}_2H_2 = 1 + 2 + {}_3C_2 = 1 + 2 + 3 = 6$$

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 0인 경우의 수는

$$36 - 6 = 30$$

(ii) 학생 A가 받는 공의 개수가 1인 경우

학생 A가 흰 공 또는 검은 공 중 하나를 받는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$

나머지 공을 두 학생 B, C에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_4 \times {}_2H_5 = {}_5C_4 \times {}_6C_5 = {}_5C_1 \times {}_6C_1 = 5 \times 6 = 30$$

이때 학생 B가 받는 공의 개수가 0 또는 1 또는 2인 경우의 수는

$$1 + {}_2C_1 + {}_2H_2 = 1 + 2 + {}_3C_2 = 1 + 2 + 3 = 6$$

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 1인 경우의 수는

$$2 \times (30 - 6) = 48$$

(iii) 학생 A가 받는 공의 개수가 2인 경우

㉠ 학생 A가 같은 색의 공을 받는 경우

학생 A가 받는 공의 색을 정하는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$

나머지 공을 두 학생 B, C에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_3 \times {}_2H_5 = {}_4C_3 \times {}_6C_5 = {}_4C_1 \times {}_6C_1 = 4 \times 6 = 24$$

이때 학생 B가 받는 공의 개수가 0 또는 1 또는 2인 경우의 수는

$$1 + {}_2C_1 + {}_2H_2 = 1 + 2 + {}_3C_2 = 1 + 2 + 3 = 6$$

따라서 학생 A가 같은 색의 공 2개를 받는 경우의 수는

$$2 \times (24 - 6) = 36$$

㉡ 학생 A가 다른 색의 공을 받는 경우

두 학생 B, C에게 흰 공 4개와 검은 공 4개를 나누어 주는 경우의 수는

$${}_2H_4 \times {}_2H_4 = {}_5C_4 \times {}_5C_4 = {}_5C_1 \times {}_5C_1 = 5 \times 5 = 25$$

이때 학생 B가 받는 공의 개수가 0 또는 1 또는 2인 경우의 수는

$$1 + {}_2C_1 + {}_2H_2 = 1 + 2 + {}_3C_2 = 1 + 2 + 3 = 6$$

따라서 학생 A가 다른 색의 공 2개를 받는 경우의 수는

$$25 - 6 = 19$$

㉠, ㉡에서 그 경우의 수는

$$36 + 19 = 55$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$30 + 48 + 55 = 133$$

다른 풀이

(㉞)에서 학생 A가 받는 공의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

(i) 학생 A가 받는 공의 개수가 0인 경우

← 흰 공과 검은 공

학생 B가 받는 공의 개수가 3, 4, 5인 경우의 수는 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 3개, 4개, 5개를 선택하는 경우의 수와 같고 나머지는 학생 C에게 주면 되므로 그 경우의 수는

$${}_2H_3 + {}_2H_4 + {}_2H_5 = {}_4C_3 + {}_5C_4 + {}_6C_5 = {}_4C_1 + {}_5C_1 + {}_6C_1 = 4 + 5 + 6 = 15$$

학생 B가 받는 공의 개수가 6, 7, 8, 9, 10인 경우의 수는 학생 C가 받는 공의 개수가 서로 다른 2개에서 중복을 허용하여 4개, 3개, 2개, 1개, 0개를 선택하는 경우의 수와 같으므로 그 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_2H_4 + {}_2H_3 + {}_2H_2 + {}_2H_1 + {}_2H_0 &= {}_5C_4 + {}_4C_3 + {}_3C_2 + {}_2C_1 + {}_1C_0 \\ &= {}_5C_1 + {}_4C_1 + {}_3C_1 + 2 + 1 \\ &= 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 \end{aligned}$$

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 0인 경우의 수는

$$15 + 15 = 30$$

(ii) 학생 A가 받는 공의 개수가 1인 경우

학생 A가 흰 공 또는 검은 공 중 하나를 받는 경우의 수는

$${}_2C_1 = 2$$

학생 B가 받는 공의 개수가 3, 4인 경우의 수는

$${}_2H_3 + {}_2H_4 = {}_4C_3 + {}_5C_4 = {}_4C_1 + {}_5C_1 = 4 + 5 = 9$$

학생 B가 받는 공의 개수가 5, 6, 7, 8, 9인 경우의 수는 학생 C가 받는 공의 개수가 4, 3, 2, 1, 0인 경우의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} {}_2H_4 + {}_2H_3 + {}_2H_2 + {}_2H_1 + {}_2H_0 &= {}_5C_4 + {}_4C_3 + {}_3C_2 + {}_2C_1 + {}_1C_0 \\ &= {}_5C_1 + {}_4C_1 + {}_3C_1 + 2 + 1 \\ &= 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 \end{aligned}$$

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 1인 경우의 수는

$$2 \times (9 + 15) = 48$$

(iii) 학생 A가 받는 공의 개수가 2인 경우

① 학생 A가 같은 색의 공을 받는 경우

학생 A가 받는 공의 색을 정하는 경우의 수는 ${}_2C_1 = 2$

학생 B가 받는 공의 개수가 3인 경우의 수는

$${}_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

학생 B가 받는 공의 개수가 4인 경우의 수는 학생 A가 받는 공과 같은 색의 공의 개수가 0, 1, 2, 3인 경우 4가지

학생 B가 받는 공의 개수가 5, 6, 7, 8인 경우의 수는 학생 C가 받는 공의 개수가 3, 2, 1, 0인 경우의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} {}_2H_3 + {}_2H_2 + {}_2H_1 + {}_2H_0 &= {}_4C_3 + {}_3C_2 + {}_2C_1 + {}_1C_0 \\ &= {}_4C_1 + {}_3C_1 + 2 + 1 \\ &= 4 + 3 + 2 + 1 = 10 \end{aligned}$$

따라서 학생 A가 같은 색의 공 2개를 받는 경우의 수는

$$2 \times (4 + 4 + 10) = 36$$

② 학생 A가 다른 색의 공을 받는 경우

학생 B가 받는 공의 개수가 3, 4인 경우의 수는

$${}_2H_3 + {}_2H_4 = {}_4C_3 + {}_5C_4 = {}_4C_1 + {}_5C_1 = 4 + 5 = 9$$

학생 B가 받는 공의 개수가 5, 6, 7, 8인 경우의 수는 학생 C가 받는 공의 개수가 3, 2, 1, 0인 경우의 수와 같으므로

$$\begin{aligned} {}_2H_3 + {}_2H_2 + {}_2H_1 + {}_2H_0 &= {}_4C_3 + {}_3C_2 + {}_2C_1 + {}_1C_0 \\ &= {}_4C_1 + {}_3C_1 + 2 + 1 \\ &= 4 + 3 + 2 + 1 = 10 \end{aligned}$$

따라서 학생 A가 다른 색의 공 2개를 받는 경우의 수는

$$9 + 10 = 19$$

①, ②에서 그 경우의 수는

$$36 + 19 = 55$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$30 + 48 + 55 = 133$$

07 답 108

(㉞)에서 $f(0) \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$ 이고,

(㉞)에서 $f(0) \neq 3, f(0) \neq 4, f(1) \neq 4, f(3) \neq 0, f(4) \neq 0, f(4) \neq 1$ 이므로 이를 표로 나타내면 다음과 같다.

	0	1	2	3	4
$f(0)$	○	○	○	×	×
$f(1)$	○	○	○	○	×
$f(2)$	○	○	○	○	○
$f(3)$	×	○	○	○	○
$f(4)$	×	×	○	○	○

(i) $f(2)=0$ 인 경우

$f(0), f(1)$ 의 값을 정하는 경우는 $f(0)=f(1)=0$ 의 1가지

$f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수에서 $f(4)=1$ 인 경우를 제외하면 되므로

$${}_4H_2 - 1 = {}_5C_2 - 1 = 10 - 1 = 9$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$1 \times 9 = 9$$

(ii) $f(2)=1$ 인 경우

$f(0), f(1)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 0, 1 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

$f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수에서 $f(4)=1$ 인 경우를 제외하면 되므로

$${}_4H_2 - 1 = {}_5C_2 - 1 = 10 - 1 = 9$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$3 \times 9 = 27$$

(iii) $f(2)=2$ 인 경우

$f(0), f(1)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 0, 1, 2 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

$f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$6 \times 6 = 36$$

(iv) $f(2)=3$ 인 경우

$f(0), f(1)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수에서 $f(0)=3$ 인 경우를 제외하면 되므로

$${}_4H_2 - 1 = {}_5C_2 - 1 = 10 - 1 = 9$$

$f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

따라서 함수 f 의 개수는

$$9 \times 3 = 27$$

(v) $f(2)=4$ 인 경우

$f(0), f(1)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 0, 1, 2, 3 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복조합의 수에서 $f(0)=3$ 인 경우를 제외하면 되므로

$${}_4H_2 - 1 = {}_5C_2 - 1 = 10 - 1 = 9$$

$f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 경우는 $f(3)=f(4)=4$ 의 1가지

따라서 함수 f 의 개수는

$$9 \times 1 = 9$$

(i)~(v)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$9 + 27 + 36 + 27 + 9 = 108$$

다른 풀이1

(가)에서 $f(0) \neq 3, f(0) \neq 4, f(1) \neq 4, f(3) \neq 0, f(4) \neq 0, f(4) \neq 1$

(나)에서 $f(0) \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$

(i) $f(4)=4$ 인 경우

$f(0), f(1), f(2), f(3)$ 의 값이 될 수 있는 경우의 수는 0, 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수에서 다음 경우의 수를 제외하면 된다.

① $f(3)=0$ 인 경우

1가지

② $f(1)=4$ 인 경우

$f(0)=0, 1, 2, 3, 4$ 의 5가지

③ $f(0)=4$ 인 경우

②에 포함된다.

④ $f(1) \neq 4, f(0)=3$ 인 경우

$f(1)=3$ 이어야 하므로 $f(2)=3, f(3)=3$ 또는 $f(2)=3,$

$f(3)=4$ 또는 $f(2)=4, f(3)=4$ 의 3가지

①~④에서 $f(4)=4$ 인 경우의 수는

$${}_5H_4 - 1 - 5 - 3 = {}_8C_4 - 9 = 70 - 9 = 61$$

(ii) $f(4)=3$ 인 경우

$f(0), f(1), f(2), f(3)$ 의 값이 될 수 있는 경우의 수는 0, 1, 2, 3 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수에서 $f(3)=0$ 인 경우 1가지를 제외하면 되므로

$${}_4H_4 - 1 - 1 = {}_7C_4 - 2 = {}_7C_3 - 2 = 35 - 2 = 33$$

(iii) $f(4)=2$ 인 경우

$f(0), f(1), f(2), f(3)$ 의 값이 될 수 있는 경우의 수는 0, 1, 2 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수에서 $f(3)=0$ 인 경우 1가지를 제외하면 되므로

$${}_3H_4 - 1 = {}_6C_4 - 1 = {}_6C_2 - 1 = 15 - 1 = 14$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수 f 의 개수는

$$61 + 33 + 14 = 108$$

다른 풀이2

(나)에서 $f(0) \leq f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$ 이므로 0, 1, 2, 3, 4에서 (나)를 만족시키도록 $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 합을 정하는 경우의 수는

$${}_5H_5 = {}_9C_5 = {}_9C_4 = 126$$

이때 (가)에서 $f(0) \neq 3, f(0) \neq 4, f(1) \neq 4, f(3) \neq 0, f(4) \neq 0,$

$f(4) \neq 1$ 이므로 다음 경우를 제외해야 한다.

(i) $f(0)=3$ 인 경우

$f(1), f(2), f(3), f(4)$ 의 값은 3, 4 중에서만 택할 수 있으므로

이 경우의 수는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

(ii) $f(0)=4$ 인 경우

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=4$ 이어야 하므로 이 경우의 수는 1

(iii) $f(0) \neq 3, f(0) \neq 4, f(1)=4$ 인 경우

$f(0)$ 의 값은 0, 1, 2 중에서 택할 수 있고, $f(2)=f(3)=f(4)=4$

이어야 하므로 이 경우의 수는 3

(iv) $f(4)=0$ 인 경우

$f(0)=f(1)=f(2)=f(3)=0$ 이어야 하므로 이 경우의 수는 1

(v) $f(4)=1$ 인 경우

$f(0), f(1), f(2), f(3)$ 의 값은 0, 1 중에서 택할 수 있으므로 이 경우의 수는

$${}_2H_4 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

(vi) $f(4) \neq 0, f(4) \neq 1, f(3)=0$ 인 경우

$f(4)$ 의 값은 2, 3, 4 중에서 택할 수 있고, $f(0)=f(1)=f(2)=0$

이어야 하므로 이 경우의 수는 3

(i)~(vi)에서 중복되는 경우는 없으므로 구하는 함수 f 의 개수는

$$126 - (5 + 1 + 3 + 1 + 5 + 3) = 108$$

08 답 2074

학생 A, B, C, D, E, F가 받는 검은 공의 개수를 각각 a, b, c, d, e, f 라 하고, 학생 A, B, C, D, E, F가 받는 흰 공의 개수를 각각 a', b', c', d', e', f' 이라 하자.

$a+b+c+d+e+f=4, a'+b'+c'+d'+e'+f'=5$ 이고, 이때 $a, b, c, d, e, f, a', b', c', d', e', f'$ 은 모두 음이 아닌 정수이다.

공이 모두 9개이고, (가)에서 학생 C, D, E, F가 받는 공의 개수의 합이 짝수이므로 학생 A, B가 받는 공의 개수의 합 $(a+a')+(b+b')$ 은 홀수이다.

이때 (나)를 만족시키는 $a+a', b+b'$ 의 값은 $a+a'=1, b+b'=2$ 뿐이다.

(i) (a, a', b, b') 이 $(1, 0, 2, 0)$ 인 경우

$c+d+e+f=1, c'+d'+e'+f'=5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 $c, d, e, f, c', d', e', f'$ 의 순서쌍 $(c, d, e, f, c', d', e', f')$ 의 개수는

$${}_4H_1 \times {}_4H_5 = {}_4C_1 \times {}_8C_5 = 4 \times {}_8C_3 = 4 \times 56 = 224$$

(ii) (a, a', b, b') 이 $(1, 0, 0, 2)$ 또는 $(0, 1, 1, 1)$ 인 경우

각각에 대하여 $c+d+e+f=3, c'+d'+e'+f'=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 $c, d, e, f, c', d', e', f'$ 의 순서쌍

$(c, d, e, f, c', d', e', f')$ 의 개수는

$${}_4H_3 \times {}_4H_3 = {}_6C_3 \times {}_6C_3 = 20 \times 20 = 400$$

(iii) (a, a', b, b') 이 $(1, 0, 1, 1)$ 또는 $(0, 1, 2, 0)$ 인 경우

각각에 대하여 $c+d+e+f=2, c'+d'+e'+f'=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 $c, d, e, f, c', d', e', f'$ 의 순서쌍

$(c, d, e, f, c', d', e', f')$ 의 개수는

$${}_4H_2 \times {}_4H_4 = {}_5C_2 \times {}_7C_4 = 10 \times {}_7C_3 = 10 \times 35 = 350$$

(iv) (a, a', b, b') 이 $(0, 1, 0, 2)$ 인 경우

$c+d+e+f=4, c'+d'+e'+f'=2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 $c, d, e, f, c', d', e', f'$ 의 순서쌍 $(c, d, e, f, c', d', e', f')$ 의 개수는

$${}_4H_4 \times {}_4H_2 = {}_7C_4 \times {}_5C_2 = {}_7C_3 \times 10 = 35 \times 10 = 350$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$224 + 2 \times 400 + 2 \times 350 + 350 = 2074$$

STEP 1 핵심 문제

| 42~43쪽

01 233	02 6개	03 ⑤	04 ②	05 6	06 $\frac{2}{35}$
07 ⑤	08 $\frac{9}{16}$	09 $\frac{2}{9}$	10 ③	11 ④	12 $\frac{71}{84}$

01 답 233

한 개의 주사위를 3번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

주사위를 던져서 첫 번째, 두 번째, 세 번째에 나오는 눈의 수를 각각 x , y , z 라 하면 나오는 눈의 수의 총합이 세 번째 시행에서 처음으로 4 이상 되는 경우는

$$x+y < 4, x+y+z \geq 4$$

(i) $x=1, y=1, z \geq 2$ 일 때,

z 는 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 경우의 수는 5

(ii) $x=1, y=2, z \geq 1$ 일 때,

z 는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 경우의 수는 6

(iii) $x=2, y=1, z \geq 1$ 일 때,

z 는 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 그 경우의 수는 6

(i), (ii), (iii)에서 나오는 눈의 수의 총합이 세 번째 시행에서 처음으로 4 이상이 되는 경우의 수는

$$5+6+6=17$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{17}{216}$ 이므로 $p=216, q=17$

$$\therefore p+q=233$$

02 답 6개

상자에 들어 있는 검은 바둑돌의 개수를 n 이라 하면 10개의 바둑돌 중에서 3개를 꺼낼 때, 모두 검은 바둑돌이 나올 확률은

$$\frac{{}_n C_3}{{}_{10} C_3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{720}$$

이 시행에서 6번에 1번꼴로 3개가 모두 검은 바둑돌이었으므로 통계적 확률은 $\frac{1}{6}$

$$\therefore \frac{n(n-1)(n-2)}{720} = \frac{1}{6} \text{ 이므로}$$

$$n(n-1)(n-2)=120=6 \times 5 \times 4$$

$$\therefore n=6 (\because n \text{ 은 자연수})$$

따라서 상자에 검은 바둑돌은 6개가 들어 있다고 볼 수 있다.

03 답 ⑤

이차방정식 $x^2+2ax+3a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

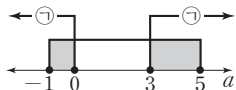
$$\frac{D}{4} = a^2 - 3a \geq 0, a(a-3) \geq 0$$

$$\therefore a \leq 0 \text{ 또는 } a \geq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $-1 \leq a \leq 5$ 와 $\textcircled{1}$ 을 수직선 위에 나타

내면 a 의 값의 공통부분은

$$-1 \leq a \leq 0 \text{ 또는 } 3 \leq a \leq 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$



따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\textcircled{2} \text{의 구간의 길이})}{(\text{전체 구간의 길이})} = \frac{\{0 - (-1)\} + \{5 - 3\}}{5 - (-1)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

04 답 ②

모든 경우의 수는 5개의 숫자 중에서 4개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수이므로

$${}_5 P_4 = 120$$

이때 자연수 N 이 네 자리의 짝수가 되려면 천의 자리에는 0이 올 수 없고, 일의 자리의 숫자는 0 또는 2 또는 4이어야 한다.

(i) 일의 자리의 숫자가 0인 경우

1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_4 P_3 = 24$

(ii) 일의 자리의 숫자가 2인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2를 제외한 1, 3, 4의 3개

백의 자리와 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리에 온 숫자와 2를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로

$${}_3 P_2 = 6$$

즉, 그 경우의 수는 $3 \times 6 = 18$

(iii) 일의 자리의 숫자가 4인 경우

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 4를 제외한 1, 2, 3의 3개

백의 자리와 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리에 온 숫자와 4를 제외한 3개의 숫자 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로

$${}_3 P_2 = 6$$

즉, 그 경우의 수는 $3 \times 6 = 18$

(i), (ii), (iii)에서 N 이 네 자리의 짝수가 되는 경우의 수는

$$24 + 18 + 18 = 60$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$$

다른 풀이

천의 자리의 숫자가 1 또는 3인 경우와 2 또는 4인 경우로 나누어 생각하면

(i) 천의 자리의 숫자가 1 또는 3인 경우

$$\text{천의 자리의 숫자가 1 또는 3일 확률은 } \frac{2}{5}$$

짝수가 되려면 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 0, 2, 4의 3개이므로 그 확률은 $\frac{3}{4}$

이때 백의 자리와 십의 자리에는 나머지 숫자 중 어떤 숫자도 올 수 있으므로 N 이 천의 자리의 숫자가 1 또는 3인 네 자리의 짝수가 될

$$\text{확률은 } \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

(ii) 천의 자리의 숫자가 2 또는 4인 경우

$$\text{천의 자리의 숫자가 2 또는 4일 확률은 } \frac{2}{5}$$

짝수가 되려면 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 천의 자리에 온 숫자를 제외한 4개의 숫자 중에서 1, 3을 제외한 2개이므로 그 확률은

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

이때 백의 자리와 십의 자리에는 나머지 숫자 중 어떤 숫자도 올 수 있으므로 N 이 천의 자리의 숫자가 2 또는 4인 네 자리의 짝수가 될

$$\text{확률은 } \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$$

$$(i), (ii) \text{에서 구하는 확률은 } \frac{3}{10} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2}$$

05 답 6

$p > 0$ 이므로 $p = q$ 에서 $q > 0$

40개의 공 중에서 흰 공의 개수를 n ($2 \leq n \leq 39$)이라 하면

검은 공의 개수는 $40 - n$ 이므로

$$p = \frac{nC_2}{40C_2}, q = \frac{nC_1 \times 40-nC_1}{40C_2}$$

이때 $p = q$ 이므로

$$nC_2 = nC_1 \times 40-nC_1$$

$$\text{즉, } \frac{n(n-1)}{2} = n \times (40-n) \text{이므로}$$

$$n-1 = 80-2n, 3n = 81$$

$$\therefore n = 27$$

따라서 검은 공의 개수는 $40 - 27 = 13$ 이므로

$$r = \frac{13C_2}{40C_2} = \frac{\frac{13 \times 12}{2}}{\frac{40 \times 39}{2}} = \frac{1}{10}$$

$$\therefore 60r = 60 \times \frac{1}{10} = 6$$

06 답 $\frac{2}{35}$

모든 경우의 수는 10장의 카드 중에서 4장을 뽑는 경우의 수이므로

$${}_{10}C_4 = 210 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

(i) $b - a = c - b = d - c = 1$ 인 경우

a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 는 $(1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 5), \dots,$
 $(7, 8, 9, 10)$ 의 7가지 $\dots\dots\dots \text{배점 20\%}$

(ii) $b - a = c - b = d - c = 2$ 인 경우

a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 는 $(1, 3, 5, 7), (2, 4, 6, 8),$
 $(3, 5, 7, 9), (4, 6, 8, 10)$ 의 4가지 $\dots\dots\dots \text{배점 20\%}$

(iii) $b - a = c - b = d - c = 3$ 인 경우

a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 는 $(1, 4, 7, 10)$ 의 1가지
 $\dots\dots\dots \text{배점 20\%}$

(i), (ii), (iii)에서 $b - a = c - b = d - c$ 인 경우의 수는

$$7 + 4 + 1 = 12 \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{12}{210} = \frac{2}{35} \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

07 답 ⑤

$$\neg. P(A \cap B) = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$P(A) \geq \frac{1}{2}, P(B) \geq \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(A)P(B) \geq \frac{1}{4}$$

$$\neg. P(A)P(B) \geq \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$P(A) + P(B) \geq 2\sqrt{P(A)P(B)} \geq 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

$$\text{ㄷ. } P(A) + P(B) = 1 \text{이므로}$$

$$P(B) = 1 - P(A)$$

$$\therefore P(A)P(B) = P(A)\{1 - P(A)\}$$

$$= -\{P(A)\}^2 + P(A)$$

$$= -\left\{P(A) - \frac{1}{2}\right\}^2 + \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

08 답 $\frac{9}{16}$

세 사건 A, B, C 에 대하여

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

㉠에서 $P(A \cup B \cup C) = 1,$

㉡에서 $P(A \cap C) = 0, P(A \cap B \cap C) = 0,$

㉢에서 $P(A \cap B) = \frac{1}{16}$ 이므로

$$\text{㉠에 대입하면 } 1 = P(A) + P(B) + P(C) - \frac{1}{16} - P(B \cap C)$$

$$P(C) - P(B \cap C) = \frac{17}{16} - \{P(A) + P(B)\}$$

그런데 $P(C) - P(B \cap C) = P(C \cap B^c)$ 이므로

$$P(C \cap B^c) = \frac{17}{16} - \{P(A) + P(B)\} \quad \dots\dots \text{㉣}$$

이때 $P(A) > 0, P(B) > 0$ 이므로

$$\begin{aligned} P(A) + P(B) &\geq 2\sqrt{P(A)P(B)} \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{16}} = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서 ㉣에서 $P(C \cap B^c) \leq \frac{17}{16} - \frac{1}{2} = \frac{9}{16}$ 이므로

$P(C \cap B^c)$ 의 최댓값은 $\frac{9}{16}$

09 답 $\frac{2}{9}$

모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

$f(a) = f(b)$ 에서 $f(a) - f(b) = 0$ 이므로

$$(a^2 - 4a + 3) - (b^2 - 4b + 3) = 0$$

$$(a^2 - b^2) - 4(a - b) = 0$$

$$(a - b)(a + b - 4) = 0$$

$$\therefore a = b \text{ 또는 } a + b = 4$$

(i) $a = b$ 인 경우

a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$

의 6가지이므로 그 확률은 $\frac{6}{36}$

(ii) $a + b = 4$ 인 경우

a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ 의 3가지이므로 그

확률은 $\frac{3}{36}$

(iii) $a = b$ 이고 $a + b = 4$ 인 경우

a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 2)$ 의 1가지이므로 그 확률은 $\frac{1}{36}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{6}{36} + \frac{3}{36} - \frac{1}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

다른 풀이

모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

함수 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ 에 대하여

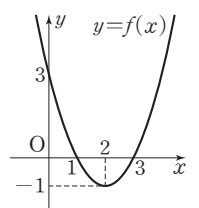
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \text{에서}$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

또 $f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1$ 이므로

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



즉, $f(a)=f(b)$ 에서

(i) $a=b$ 일 때,

a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ 의 6가지

(ii) $a \neq b$ 일 때,

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 $f(1)=f(3)$ 이므로 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 3), (3, 1)$ 의 2가지

(i), (ii)에서 $f(a)=f(b)$ 인 경우의 수는

$$6+2=8$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

10 답 ③

모든 경우의 수는 16명의 학생 중에서 임의로 3명의 학생을 택하는 경우의 수이므로

$${}_{16}C_3=560$$

선택한 3명의 학생 중에서 적어도 한 명이 과목 B를 선택한 학생인 사건의 여사건은 선택한 3명의 학생이 모두 과목 A를 선택한 학생인 사건이다. 선택한 3명의 학생이 모두 과목 A를 선택한 학생인 경우의 수는 과목 A를 선택한 9명의 학생 중에서 3명의 학생을 선택하면 되므로

$${}_9C_3=84$$

따라서 여사건의 확률은 $\frac{84}{560}=\frac{3}{20}$ 이므로 구하는 확률은

$$1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}$$

11 답 ④

모든 경우의 수는 7명의 학생이 7개의 의자에 앉는 경우의 수이므로 $7!$

2명 이상의 여학생이 서로 이웃하게 앉는 사건의 여사건은 여학생끼리 어느 2명도 서로 이웃하지 않게 앉는 사건이다.

즉, 남학생 4명이 먼저 앉은 후 남학생 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 여학생이 앉으면 되므로 그 경우의 수는

$$4! \times {}_5P_3$$

따라서 여사건의 확률은 $\frac{4! \times {}_5P_3}{7!}=\frac{2}{7}$ 이므로 구하는 확률은

$$1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

12 답 $\frac{71}{84}$

모든 경우의 수는 9개의 동전 중에서 임의로 3개를 꺼내는 경우의 수이므로

$${}_9C_3=84$$

꺼낸 3개의 동전의 금액의 합이 200원 미만인 사건의 여사건은 꺼낸 3개의 동전의 금액의 합이 200원 이상인 사건이다.

100원짜리 동전 2개와 다른 동전 1개를 꺼내거나 100원짜리 동전 1개와 50원짜리 동전 2개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는

$${}_2C_2 \times {}_7C_1 + {}_2C_1 \times {}_8C_2 = 7+6=13$$

따라서 여사건의 확률은 $\frac{13}{84}$ 이므로 구하는 확률은

$$1-\frac{13}{84}=\frac{71}{84}$$

STEP 2 고난도 문제

| 44~48쪽

01 ④	02 $\frac{11}{27}$	03 $\frac{\pi}{16}$	04 ③	05 $\frac{75}{1024}$	06 ②
07 ④	08 ⑤	09 $\frac{1}{7}$	10 $\frac{23}{108}$	11 $\frac{3}{5}$	12 $\frac{16}{105}$
13 51	14 $\frac{4}{11}$	15 $\frac{5}{33}$	16 ④	17 ③	18 ③
19 ②	20 $\frac{89}{91}$	21 ②	22 $\frac{35}{36}$	23 47	24 $\frac{66}{91}$
25 ③	26 ⑤				

01 답 ④

한 개의 주사위를 3번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

(i) $a=1$ 일 때,

$$(b-4)^2 + (c-6)^2 = 5 \text{이므로}$$

$$b-4 = \pm 1, c-6 = \pm 2 \text{ 또는 } b-4 = \pm 2, c-6 = \pm 1$$

① $b-4 = \pm 1, c-6 = \pm 2$ 일 때,

$$b-4 = \pm 1 \text{에서 } b=3 \text{ 또는 } b=5$$

$$c-6 = \pm 2 \text{에서 } c=4 \text{ (} \because 1 \leq c \leq 6 \text{)}$$

즉, b, c 의 값을 정하는 경우의 수는 $2 \times 1 = 2$

② $b-4 = \pm 2, c-6 = \pm 1$ 일 때,

$$b-4 = \pm 2 \text{에서 } b=2 \text{ 또는 } b=6$$

$$c-6 = \pm 1 \text{에서 } c=5 \text{ (} \because 1 \leq c \leq 6 \text{)}$$

즉, b, c 의 값을 정하는 경우의 수는 $2 \times 1 = 2$

①, ②에서 그 경우의 수는

$$2+2=4$$

(ii) $a=2$ 일 때,

$(b-4)^2 + (c-6)^2 = 6$ 이므로 이를 만족시키는 자연수 b, c 는 존재하지 않는다.

(iii) $a=3$ 일 때,

$(b-4)^2 + (c-6)^2 = 5$ 이므로 (i)과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 4

(iv) $a=4$ 일 때,

$$(b-4)^2 + (c-6)^2 = 2 \text{이므로 } b-4 = \pm 1, c-6 = \pm 1$$

$$b-4 = \pm 1 \text{에서 } b=3 \text{ 또는 } b=5$$

$$c-6 = \pm 1 \text{에서 } c=5 \text{ (} \because 1 \leq c \leq 6 \text{)}$$

즉, b, c 의 값을 정하는 경우의 수는 $2 \times 1 = 2$

(v) $a \geq 5$ 일 때,

$(a-2)^2 \geq 9$ 이므로 $(a-2)^2 + (b-4)^2 + (c-6)^2 = 6$ 을 만족시키지 않는다.

(i)~(v)에서 $(a-2)^2 + (b-4)^2 + (c-6)^2 = 6$ 인 경우의 수는

$$4+4+2=10$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{216}=\frac{5}{108}$

다른 풀이

한 개의 주사위를 3번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

$(a-2)^2 + (b-4)^2 + (c-6)^2 = 6$ 에서 좌변의 각 항의 값이 될 수 있는 수는 0, 1, 4, ...이므로 주어진 식을 만족시키는 경우는 $1+1+4$ 일 때이다.

- (i) $(a-2)^2=1$, $(b-4)^2=1$, $(c-6)^2=4$ 일 때,
 $a=1$ 또는 $a=3$, $b=3$ 또는 $b=5$, $c=4$ 이므로
 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 $2 \times 2 \times 1 = 4$
- (ii) $(a-2)^2=1$, $(b-4)^2=4$, $(c-6)^2=1$ 일 때,
 $a=1$ 또는 $a=3$, $b=2$ 또는 $b=6$, $c=5$ 이므로
 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 $2 \times 2 \times 1 = 4$
- (iii) $(a-2)^2=4$, $(b-4)^2=1$, $(c-6)^2=1$ 일 때,
 $a=4$, $b=3$ 또는 $b=5$, $c=5$ 이므로
 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 $1 \times 2 \times 1 = 2$
- (i), (ii), (iii)에서 $(a-2)^2 + (b-4)^2 + (c-6)^2 = 6$ 인 경우의 수는
 $4 + 4 + 2 = 10$
- 따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{216} = \frac{5}{108}$

02 답 $\frac{11}{27}$

서로 다른 3개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
 $6 \times 6 \times 6 = 216$

- (i) $c=1$ 일 때,
 $a+b$ 의 값에 관계없이 c 로 나누어떨어지므로 그 경우의 수는
 $6 \times 6 = 36$
- (ii) $c=2$ 일 때,
 $a+b$ 는 2의 배수이어야 한다.
 ① $a+b=2$ 가 되는 경우는 (1, 1)의 1가지
 ② $a+b=4$ 가 되는 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지
 ③ $a+b=6$ 이 되는 경우는 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지
 ④ $a+b=8$ 이 되는 경우는 (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지
 ⑤ $a+b=10$ 이 되는 경우는 (4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지
 ⑥ $a+b=12$ 가 되는 경우는 (6, 6)의 1가지
 ①~⑥에서 그 경우의 수는
 $1 + 3 + 5 + 5 + 3 + 1 = 18$
- (iii) $c=3$ 일 때,
 $a+b$ 는 3의 배수이어야 한다.
 ① $a+b=3$ 이 되는 경우는 (1, 2), (2, 1)의 2가지
 ② $a+b=6$ 이 되는 경우는 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지
 ③ $a+b=9$ 가 되는 경우는 (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)의 4가지
 ④ $a+b=12$ 가 되는 경우는 (6, 6)의 1가지
 ①~④에서 그 경우의 수는
 $2 + 5 + 4 + 1 = 12$
- (iv) $c=4$ 일 때,
 $a+b$ 는 4의 배수이어야 한다.
 ① $a+b=4$ 가 되는 경우는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지
 ② $a+b=8$ 이 되는 경우는 (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지
 ③ $a+b=12$ 가 되는 경우는 (6, 6)의 1가지
 ①, ②, ③에서 그 경우의 수는
 $3 + 5 + 1 = 9$
- (v) $c=5$ 일 때,
 $a+b$ 는 5의 배수이어야 한다.

- ① $a+b=5$ 가 되는 경우는 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지
 ② $a+b=10$ 이 되는 경우는 (4, 6), (5, 5), (6, 4)의 3가지
 ①, ②에서 그 경우의 수는
 $4 + 3 = 7$
- (vi) $c=6$ 일 때,
 $a+b$ 는 6의 배수이어야 한다.
 ① $a+b=6$ 이 되는 경우는 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지
 ② $a+b=12$ 가 되는 경우는 (6, 6)의 1가지
 ①, ②에서 그 경우의 수는
 $5 + 1 = 6$
- (i)~(vi)에서 $a+b$ 가 c 로 나누어떨어지는 경우의 수는
 $36 + 18 + 12 + 9 + 7 + 6 = 88$
- 따라서 구하는 확률은 $\frac{88}{216} = \frac{11}{27}$

03 답 $\frac{\pi}{16}$

정사각형 ABCD의 넓이는 $2 \times 2 = 4$

삼각형 PAB가 둔각삼각형이라면 점 P가 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 내부에 있어야 한다.

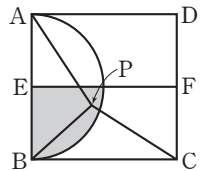
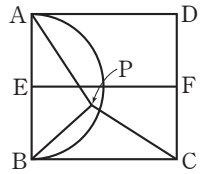
또 삼각형 PBC의 넓이가 1 이하가 되려면 삼각형의 높이가 1 이하이어야 하므로 두 변 AB, DC의 중점을 각각 E, F라 할 때, 점 P가 사각형 EBCF의 내부에 있어야 한다.

즉, 점 P는 그림의 색칠한 부분에 있어야 한다.

$$\pi \times 1^2 \times \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{\pi}{4}}{4} = \frac{\pi}{16}$$



04 답 ③

한 개의 주사위를 4번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1296$$

$a-2, b-2, c-2, d-2$ 는 모두 -1 이상 4 이하의 정수이므로

$$8 = 1 \times 1 \times 2 \times 4$$

$$= 1 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$= (-1) \times (-1) \times 2 \times 4$$

즉, $(a-2)(b-2)(c-2)(d-2) = 8$ 을 만족시키는 a, b, c, d 의 값은 3, 3, 4, 6 또는 3, 4, 4, 4 또는 1, 1, 4, 6

(i) a, b, c, d 의 값이 3, 3, 4, 6일 때,

3, 3, 4, 6을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

(ii) a, b, c, d 의 값이 3, 4, 4, 4일 때,

3, 4, 4, 4를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

(iii) a, b, c, d 의 값이 1, 1, 4, 6일 때,

1, 1, 4, 6을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

(i), (ii), (iii)에서 $(a-2)(b-2)(c-2)(d-2)=8$ 인 경우의 수는
 $12+4+12=28$

따라서 구하는 확률은 $\frac{28}{1296} = \frac{7}{324}$

05 답 75/1024

점 P가 상, 하, 좌, 우 방향으로 한 칸씩 이동한 횟수를 각각 a, b, c, d 라 하자.

$a+b+c+d=6$ 이므로 모든 경우의 수는 ${}_4P_6=4^6$

이때 $a-b=1, d-c=1$ 이므로

$$a=b+1, c=d-1$$

즉, $(b+1)+b+(d-1)+d=6$ 이므로

$$b+d=3 \quad \therefore d=3-b$$

따라서 $(a, b, c, d)=(b+1, b, 2-b, 3-b)$ 이므로

(i) $b=0$ 일 때,

$$(a, b, c, d) = (1, 0, 2, 3) \text{이므로 그 경우의 수는 } \frac{6!}{2! \times 3!} = 60$$

(ii) $b=1$ 일 때,

$$(a, b, c, d) = (2, 1, 1, 2) \text{이므로 그 경우의 수는 } \frac{6!}{2! \times 2!} = 180$$

(iii) $b=2$ 일 때,

$$(a, b, c, d) = (3, 2, 0, 1) \text{이므로 그 경우의 수는 } \frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

(i), (ii), (iii)에서 점 P가 6번 움직인 후 점 (2, 2)에 있을 경우의 수는
 $60+180+60=300$

따라서 구하는 확률은 $\frac{300}{4^6} = \frac{75}{1024}$

다른 풀이

모든 경우의 수는 ${}_4P_6=4^6$

6번의 움직임 중에서 상, 우 방향으로 반드시 1번씩 움직여야 하고,
 나머지 4번은 상, 하 방향으로 움직인 횟수가 같고 좌, 우 방향으로 움직인 횟수가 같아야 한다.

즉, 나머지 4번의 상, 하, 좌, 우 방향의 이동 횟수를 순서쌍으로 나타내면 (0, 0, 2, 2), (1, 1, 1, 1), (2, 2, 0, 0)

이 순서쌍의 상, 우 방향의 이동 횟수에 1씩 더하면

$$(1, 0, 2, 3), (2, 1, 1, 2), (3, 2, 0, 1)$$

(i) (1, 0, 2, 3)일 때, 그 경우의 수는 $\frac{6!}{2! \times 3!} = 60$

(ii) (2, 1, 1, 2)일 때, 그 경우의 수는 $\frac{6!}{2! \times 2!} = 180$

(iii) (3, 2, 0, 1)일 때, 그 경우의 수는 $\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$

(i), (ii), (iii)에서 점 P가 6번 움직인 후 점 (2, 2)에 있을 경우의 수는
 $60+180+60=300$

따라서 구하는 확률은 $\frac{300}{4^6} = \frac{75}{1024}$

06 답 ②

모든 경우의 수는 공집합이 아닌 15개의 부분집합 중에서 3개를 뽑아 일렬로 배열하는 경우의 수이므로

$${}_{15}P_3=2730$$

서로 다른 세 부분집합 A, B, C 에 대하여

$A \subset B \subset C$ 이라면 그림에서 ①, ②, ③ 영역에 각각 원소가 1개 이상 포함되어야 한다.

(i) 원소가 ①에 1개, ②에 1개, ③에 1개 있는 경우

1, 2, 3, 4 중에서 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_4P_3=24$$

(ii) 원소가 ①에 1개, ②에 1개, ③에 2개 있는 경우

1, 2, 3, 4 중에서 2개를 택하여 ①, ②에 일렬로 배열하면
 나머지 2개는 ③의 원소가 되므로 그 경우의 수는

$${}_4P_2=12$$

(iii) 원소가 ①에 1개, ②에 2개, ③에 1개 있는 경우

(ii)와 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 12

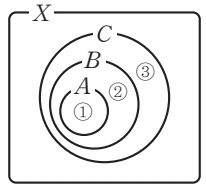
(iv) 원소가 ①에 2개, ②에 1개, ③에 1개 있는 경우

(ii)와 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 12

(i)~(iv)에서 $A \subset B \subset C$ 인 경우의 수는

$$24+12+12+12=60$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{2730} = \frac{2}{91}$



07 답 ④

모든 경우의 수는 집합 X 에서 집합 Y 로의 모든 일대일함수 f 의 개수와 같으므로 ${}_7P_4=840$

(*)에서 $f(2)=2$ 이므로 (**)를 만족시키려면 $f(1), f(3), f(4)$ 의 값 중에서 짝수가 적어도 하나 포함되어야 한다.

$f(1), f(3), f(4)$ 의 값을 정하는 모든 경우의 수는

$${}_6P_3=120$$

이때 $f(1), f(3), f(4)$ 의 값이 모두 홀수인 경우의 수는

$${}_4P_3=24$$

즉, $f(1), f(3), f(4)$ 의 값 중에서 짝수가 적어도 하나 포함되는 경우의 수는

$$120-24=96$$

따라서 조건을 만족시키는 일대일함수 f 의 개수가 96이므로

구하는 확률은 $\frac{96}{840} = \frac{4}{35}$

08 답 ⑤

모든 경우의 수는 서로 다른 8개의 숫자 중에서 4개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수이므로

$${}_8P_4=1680$$

(i) 6을 택하는 경우

① 6이 첫 번째 자리에 오는 경우

② 두 번째와 네 번째 자리에 3의 배수 3, 9를 일렬로 배열하고,
 세 번째 자리에 2의 배수 2, 4, 8 중에서 1개가 오면 되므로
 그 경우의 수는

$${}_2P_2 \times 3 = 2 \times 3 = 6$$

③ 두 번째와 네 번째 자리에 2의 배수 2, 4, 8 중에서 2개를 택하여 일렬로 배열하고,
 세 번째 자리에 3의 배수 3, 9 중에서 1개가 오면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3P_2 \times 2 = 6 \times 2 = 12$$

④ ②, ③에서 그 경우의 수는 $6+12=18$

② 6이 두 번째 자리에 오는 경우

세 번째와 네 번째 자리에 3의 배수 3, 9와 2의 배수 2, 4, 8 중에서 각각 1개씩을 택하여 일렬로 배열하고, 첫 번째 자리에는 나머지 5개의 숫자 중에서 1개가 오면 되므로 그 경우의 수는
 $2 \times 3 \times 2! \times 5 = 2 \times 3 \times 2 \times 5 = 60$

③ 6이 세 번째 자리에 오는 경우

②와 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 60

④ 6이 네 번째 자리에 오는 경우

①과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 18

①~④에서 6을 택하는 경우의 수는 $18 + 60 + 60 + 18 = 156$

(ii) 6을 택하지 않는 경우

6이 아닌 3의 배수 3, 9와 2의 배수 2, 4, 8이 교대로 오면 되므로 그 경우의 수는
 ${}_2P_2 \times {}_3P_2 \times 2! = 2 \times 6 \times 2 = 24$ 3의 배수가 먼저 오는 경우와 2의 배수가 먼저 오는 경우의 수이다.

(i), (ii)에서 이웃하는 두 수의 곱이 모두 6의 배수인 경우의 수는

$156 + 24 = 180$

따라서 구하는 확률은 $\frac{180}{1680} = \frac{3}{28}$

09 답 $\frac{1}{7}$

모든 선분의 개수는 6개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_6C_2 = 15$

15개의 선분 중에서 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_{15}C_2 = 105$ 배점 40%
 원 위의 서로 다른 4개의 점을 택하면 원 내부에서 교점이 생기는 두 선분을 그을 수 있으므로 택한 두 선분의 교점이 원 내부에서 생기는 경우의 수는 ${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$ 배점 40%
 따라서 구하는 확률은 $\frac{15}{105} = \frac{1}{7}$ 배점 20%

10 답 $\frac{23}{108}$

서로 다른 3개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 \times 6 = 216$

방정식 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ 이 나타내는 도형은 중심이 점 (a, b) 이고 반지름의 길이가 c 인 원이다.

이 원과 좌표축의 교점이 2개인 경우는 다음과 같다.

(i) x 축과 두 점에서 만나는 경우

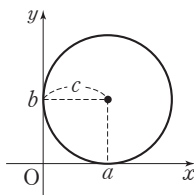
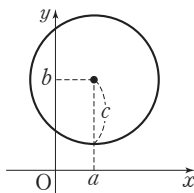
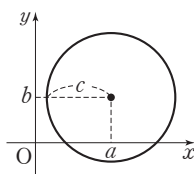
$b < c < a$ 인 경우는 1부터 6까지의 자연수 중에서 3개를 택하여 그 값이 작은 수부터 차례로 b, c, a 에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 ${}_6C_3 = 20$

(ii) y 축과 두 점에서 만나는 경우

$a < c < b$ 인 경우는 1부터 6까지의 자연수 중에서 3개를 택하여 그 값이 작은 수부터 차례로 a, c, b 에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는 ${}_6C_3 = 20$

(iii) x 축, y 축에 동시에 접하는 경우

$a = b = c$ 인 경우의 수는 6



(i), (ii), (iii)에서 원과 좌표축의 교점이 2개인 경우의 수는

$20 + 20 + 6 = 46$

따라서 구하는 확률은 $\frac{46}{216} = \frac{23}{108}$

개념 NOTE

중심이 점 (a, b) 이고 반지름의 길이가 r 인 원의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

11 답 $\frac{3}{5}$

모든 경우의 수는 주머니 A의 5개의 공 중에서 임의로 2개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣고, 다시 주머니 B의 4개의 공 중에서 임의로 2개의 공을 꺼내는 경우의 수이므로

$${}_5C_2 \times {}_4C_2 = 10 \times 6 = 60$$

(i) 주머니 A에서 1이 적혀 있는 공 2개를 꺼내는 경우

주머니 A에 남아 있는 3개의 공에 적혀 있는 수의 합은

$$1 + 2 + 2 = 5$$

이때 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공을 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 1이 적혀 있는 공 2개, 2가 적혀 있는 공 2개가 들어 있으므로 주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 합은 항상 5보다 작다.

즉, 그 경우의 수는 ${}_3C_2 \times {}_4C_2 = 3 \times 6 = 18$

(ii) 주머니 A에서 1이 적혀 있는 공 1개, 2가 적혀 있는 공 1개를 꺼내는 경우

주머니 A에 남아 있는 3개의 공에 적혀 있는 수의 합은

$$1 + 1 + 2 = 4$$

이때 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공을 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 1이 적혀 있는 공 1개, 2가 적혀 있는 공 3개가 들어 있으므로 주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 합이 4보다 작으려면 1이 적혀 있는 공 1개와 2가 적혀 있는 공 1개를 꺼내야 한다.

즉, 그 경우의 수는 $({}_3C_1 \times {}_2C_1) \times ({}_1C_1 \times {}_3C_1) = 6 \times 3 = 18$

(iii) 주머니 A에서 2가 적혀 있는 공 2개를 꺼내는 경우

주머니 A에 남아 있는 3개의 공에 적혀 있는 수의 합은

$$1 + 1 + 1 = 3$$

이때 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공을 주머니 B에 넣으면 주머니 B에는 2가 적혀 있는 공 4개가 들어 있으므로 주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 합이 3보다 작은 경우는 존재하지 않는다.

즉, 그 경우의 수는 0

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는 $18 + 18 + 0 = 36$

따라서 구하는 확률은 $\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$

12 답 $\frac{16}{105}$

k ($k=2, 3, 4, 5$)가 적혀 있는 공의 개수를 a_k 라 하면

$$P_k = \frac{a_k}{15}$$

$$P_{k+1} = \frac{1}{2} P_k \quad (k=2, 3, 4) \text{에서 } a_{k+1} = \frac{1}{2} a_k \text{이므로}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} a_2$$

$$a_4 = \frac{1}{2} a_3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{4} a_2$$

$$a_5 = \frac{1}{2} a_4 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} a_2 = \frac{1}{8} a_2$$

이때 주머니에 들어 있는 공의 개수는 15이므로

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 15 \text{에서}$$

$$a_2 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{8}a_2 = 15$$

$$\frac{15}{8}a_2 = 15 \quad \therefore a_2 = 8$$

$$\therefore a_3 = 4, a_4 = 2, a_5 = 1$$

즉, 주머니에는 숫자 2가 적혀 있는 공이 8개, 숫자 3이 적혀 있는 공이 4개, 숫자 4가 적혀 있는 공이 2개, 숫자 5가 적혀 있는 공이 1개 들어 있다.

모든 경우의 수는 15개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수이므로

$${}_{15}C_2 = 105$$

(i) 숫자 2가 적혀 있는 공 1개, 숫자 5가 적혀 있는 공 1개가 나오는 경우의 수는 ${}_8C_1 \times {}_1C_1 = 8 \times 1 = 8$

(ii) 숫자 3이 적혀 있는 공 1개, 숫자 4가 적혀 있는 공 1개가 나오는 경우의 수는 ${}_4C_1 \times {}_2C_1 = 4 \times 2 = 8$

(i), (ii)에서 두 공에 적혀 있는 숫자의 합이 7인 경우의 수는

$$8 + 8 = 16$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{105}$

13 답 51

모든 경우의 수는 8개의 공 중에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수이므로 ${}_8C_2 = 28$

(i) 꺼낸 두 공이 서로 다른 색인 경우

꺼낸 공이 서로 다른 색이면 12를 점수로 얻으므로 24 이하의 짝수이다.

즉, 4개의 흰 공 중에서 1개, 4개의 검은 공 중에서 1개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_4C_1 = 4 \times 4 = 16$$

(ii) 꺼낸 두 공이 서로 같은 색인 경우

① 꺼낸 두 공이 모두 흰 공인 경우

2개의 흰 공에 적힌 수의 곱이 24 이하의 짝수인 경우는

(1, 2), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)의 5가지

② 꺼낸 두 공이 모두 검은 공인 경우

2개의 검은 공에 적힌 수의 곱이 24 이하의 짝수인 경우는

(4, 5), (4, 6)의 2가지

①, ②에서 꺼낸 두 공이 서로 같은 색이고 얻은 점수가 24 이하의 짝수인 경우의 수는 $5 + 2 = 7$

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$16 + 7 = 23$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{23}{28}$ 이므로 $p = 28, q = 23$

$$\therefore p + q = 51$$

14 답 $\frac{4}{11}$

모든 경우의 수는 n 장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수이므로

$${}_nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

(i) 2개의 수가 연속인 경우

① 1, 2가 적혀 있는 카드를 뽑으면 나머지 1장은 3을 제외한

$(n-3)$ 장의 카드 중에서 뽑으면 되므로 그 경우의 수는

$$n-3$$

② $n-1, n$ 이 적혀 있는 카드를 뽑으면 나머지 1장은 $n-2$ 를 제외한 $(n-3)$ 장의 카드 중에서 뽑으면 되므로 그 경우의 수는

$$n-3$$

③ 2, 3 또는 3, 4 또는 ... 또는 $n-2, n-1$ 이 적혀 있는 카드를 뽑으면 나머지 1장은 양옆의 카드를 제외한 $(n-4)$ 장의 카드 중에서 뽑으면 되므로 그 경우의 수는

$$(n-3)(n-4)$$

①, ②, ③에서 2개의 수가 연속인 경우의 수는

$$n-3 + n-3 + (n-3)(n-4) = (n-3)(n-2)$$

(ii) 3개의 수가 연속인 경우

(1, 2, 3), (2, 3, 4), ..., $(n-2, n-1, n)$ 의 $(n-2)$ 가지

(i), (ii)에서 세 수 중 2개 이상의 수가 연속인 경우의 수는

$$(n-3)(n-2) + n-2 = (n-2)^2$$

$$\therefore p_n = \frac{(n-2)^2}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} = \frac{6(n-2)}{n(n-1)}$$

$$\therefore p_6 \times p_{12} = \frac{6 \times 4}{6 \times 5} \times \frac{6 \times 10}{12 \times 11} = \frac{4}{11}$$

다른 풀이

6장의 카드 중에서 임의로 3장을 동시에 뽑는 모든 경우의 수는

$${}_6C_3 = 20$$

(2개 이상의 수가 연속할 확률) = $1 - (\text{어느 두 수도 연속하지 않을 확률})$ 이고, 어느 두 수도 연속하지 않으려면 수 사이사이에 적어도 하나 이상의 수가 존재해야 한다.

즉, 다음과 같이 3개의 동그라미 사이사이와 양 끝의 4자리 중에서 3개를 골라 네모를 넣고 6개의 모양에 앞에서부터 차례로 1부터 6까지의 숫자를 넣으면 네모에 해당하는 3개의 수가 어느 2개의 수도 연속하지 않는 세 수가 된다.

$$\vee \bigcirc \vee \bigcirc \vee \bigcirc \vee$$

따라서 경우의 수는 ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$ 이므로 그 확률은 $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

$$\therefore p_6 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

같은 방법으로 하면

$$p_{12} = 1 - \frac{{}_{10}C_3}{{}_{12}C_3} = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$$

$$\therefore p_6 \times p_{12} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{11} = \frac{4}{11}$$

15 답 $\frac{5}{33}$

모든 경우의 수는 5개의 ●와 6개의 ▲를 일렬로 배열하는 경우의 수이

$$\text{므로 } \frac{11!}{5! \times 6!} = 462$$

●, ▲의 모양이 4번 바뀌기 위해서는 ●와 ▲를 같은 종류로 묶어서 다섯 모둠으로 나누면 된다.

(i) 맨 앞에 ●가 놓이는 경우

●(x개) ▲(y개) ●(y개) ▲(w개) ●(z개)의 순서대로 배열하면 되므로 양의 정수 x, y, w, z 의 순서쌍 (x, y, w, z) 의 개수가 구하는 경우의 수이다.

이때 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 $x + y + z = 5$ (x, y, z 는 1 이상의 정수)를 만족시키는 해의 개수와 같으므로 ${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$

또 순서쌍 (v, w) 의 개수는 $v + w = 6$ (v, w 는 1 이상의 정수)을 만족시키는 해의 개수와 같으므로 ${}_2H_1 = {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$

즉, 구하는 경우의 수는 $6 \times 5 = 30$

(ii) 맨 앞에 ▲가 놓이는 경우

▲(x개) ●(v개) ▲(y개) ●(w개) ▲(z개)의 순서대로 배열하면 되므로 양의 정수 x, v, y, w, z 의 순서쌍 (x, v, y, w, z) 의 개수가 구하는 경우의 수이다.

이때 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 $x+y+z=6$ (x, y, z 는 1 이상의 정수)을 만족시키는 해의 개수와 같으므로 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

또 순서쌍 (v, w) 의 개수는 $v+w=5$ (v, w 는 1 이상의 정수)를 만족시키는 해의 개수와 같으므로 ${}_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

즉, 구하는 경우의 수는 $10 \times 4 = 40$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $30 + 40 = 70$

따라서 구하는 확률은 $\frac{70}{462} = \frac{5}{33}$

비법 NOTE

방정식 $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = r$ (r 는 자연수)의 자연수인 해의 개수는 ${}_nH_{r-n}$ (단, $n \leq r$)

16 답 ④

모든 경우의 수는 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수의 개수이므로 ${}_5P_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

(i) 5의 배수인 경우

□□□5 꼴이므로 구하는 경우의 수는 ${}_4P_3 = 24$

즉, 5의 배수일 확률은 $\frac{24}{120} = \frac{1}{5}$

(ii) 3500 이상인 경우

5□□□, 4□□□, 35□□ 꼴이므로 구하는 경우의 수는

${}_4P_3 + {}_4P_3 + {}_3P_2 = 24 + 24 + 6 = 54$

즉, 3500 이상일 확률은 $\frac{54}{120} = \frac{9}{20}$

(iii) 5의 배수이고 3500 이상인 경우

4□□5 꼴이므로 구하는 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

즉, 5의 배수이고 3500 이상일 확률은 $\frac{6}{120} = \frac{1}{20}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{5} + \frac{9}{20} - \frac{1}{20} = \frac{3}{5}$

다른 풀이

(i) 5의 배수인 경우

□□□5 꼴이므로 일의 자리에 5가 올 확률은 $\frac{1}{5}$

(ii) 3500 이상인 경우

5□□□ 꼴이므로 천의 자리에 5가 올 확률은 $\frac{1}{5}$

4□□□ 꼴이므로 천의 자리에 4가 올 확률은 $\frac{1}{5}$

35□□ 꼴이므로 천의 자리에 3이 올 확률은 $\frac{1}{5}$, 백의 자리에 5가

올 확률은 $\frac{1}{4}$ 이므로 $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

즉, 3500 이상일 확률은 $\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$

(iii) 5의 배수이고 3500 이상인 경우

4□□5 꼴이므로 천의 자리에 4가 올 확률은 $\frac{1}{5}$, 일의 자리에 5가

올 확률은 $\frac{1}{4}$ 이므로 $\frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{5} + \frac{9}{20} - \frac{1}{20} = \frac{3}{5}$

17 답 ③

모든 경우의 수는 7개의 동아리가 모두 발표하도록 발표 순서를 임의로 정하는 경우의 수이므로 7!

(i) 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하는 경우

두 수학 동아리 A, B를 같은 동아리로 보고 발표하는 순서를 정하는 경우의 수는 $\frac{7!}{2!}$ 이므로 그 확률은

$$\frac{\frac{7!}{2!}}{7!} = \frac{1}{2}$$

(ii) 두 수학 동아리의 발표 사이에 2개의 과학 동아리만이 발표하는 경우
두 수학 동아리 사이에 발표할 과학 동아리 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5P_2$

두 수학 동아리와 그 사이에 발표할 과학 동아리 2개를 한 묶음으로 생각하여 4개 동아리의 발표 순서를 정하는 경우의 수는 4!

두 수학 동아리가 서로 순서를 바꾸는 경우의 수는 2!

즉, 두 수학 동아리의 발표 사이에 2개의 과학 동아리만이 발표하는 경우의 수는 ${}_5P_2 \times 4! \times 2!$ 이므로 그 확률은

$$\frac{{}_5P_2 \times 4! \times 2!}{7!} = \frac{4}{21}$$

(iii) 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하고, 두 수학 동아리의 발표 사이에 2개의 과학 동아리만이 발표하는 경우

두 수학 동아리 사이에 발표할 과학 동아리 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5P_2$

두 수학 동아리와 그 사이에 발표할 과학 동아리 2개를 한 묶음으로 생각하여 4개 동아리의 발표 순서를 정하는 경우의 수는 4!

즉, 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하고 두 수학 동아리의 발표 사이에 2개의 과학 동아리만이 발표하는 경우의 수는

$${}_5P_2 \times 4! \text{이므로 그 확률은 } \frac{{}_5P_2 \times 4!}{7!} = \frac{2}{21}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{2} + \frac{4}{21} - \frac{2}{21} = \frac{25}{42}$

다른 풀이

모든 경우의 수는 7개의 동아리가 모두 발표하도록 발표 순서를 임의로 정하는 경우의 수이므로 7!

(i) 수학 동아리 A가 수학 동아리 B보다 먼저 발표하는 경우

두 수학 동아리 A, B를 같은 동아리로 보고 발표하는 순서를 정하는 경우의 수는 $\frac{7!}{2!}$ 이므로 그 확률은

$$\frac{\frac{7!}{2!}}{7!} = \frac{1}{2}$$

(ii) 수학 동아리 B가 수학 동아리 A보다 먼저 발표하고, 두 수학 동아리의 발표 사이에 2개의 과학 동아리만이 발표하는 경우

두 수학 동아리 사이에 발표할 과학 동아리 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_5P_2$

두 수학 동아리와 그 사이에 발표할 과학 동아리 2개를 한 묶음으로 생각하여 4개 동아리의 발표 순서를 정하는 경우의 수는 4!

즉, 수학 동아리 B가 수학 동아리 A보다 먼저 발표하고, 두 수학 동아리의 발표 사이에 2개의 과학 동아리만이 발표하는 경우의 수는

$${}_5P_2 \times 4! \text{이므로 그 확률은 } \frac{{}_5P_2 \times 4!}{7!} = \frac{2}{21}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{2} + \frac{2}{21} = \frac{25}{42}$

18 답 ③

모든 경우의 수는 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허용하여 4개를 택해 일렬로 배열하는 경우의 수이므로

$${}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$$

(i) 문자 a 가 한 개만 포함되는 경우

문자 a 가 배열되는 한 곳을 선택하여 배열하고, 나머지 세 곳에는 b, c, d 중에서 중복을 허용하여 3개를 택해 일렬로 배열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_4P_1 \times {}_3\Pi_3 = 4 \times 3^3 = 108$$

즉, 문자 a 가 한 개만 포함되는 확률은

$$\frac{108}{256} = \frac{27}{64}$$

(ii) 문자 b 가 한 개만 포함되는 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 구하는 경우의 수는 108

즉, 문자 b 가 한 개만 포함되는 확률은

$$\frac{108}{256} = \frac{27}{64}$$

(iii) 문자 a, b 가 한 개만 포함되는 경우

두 문자 a, b 가 배열되는 두 곳을 선택하여 배열하고, 나머지 두 곳에는 c, d 중에서 중복을 허용하여 2개를 택해 일렬로 배열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_4P_2 \times {}_2\Pi_2 = (4 \times 3) \times 2^2 = 48$$

즉, 문자 a, b 가 한 개만 포함되는 확률은

$$\frac{48}{256} = \frac{3}{16}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 $\frac{27}{64} + \frac{27}{64} - \frac{3}{16} = \frac{21}{32}$

19 답 ②

모든 경우의 수는 7개의 원소 중에서 3개를 택하는 경우의 수이므로

$${}_7C_3 = 35$$

(i) b 가 a 의 배수인 경우

① $a=1$ 일 때,

$b=2$ 이면 $c=3, 4, 5, 6, 7$ 의 5가지

$b=3$ 이면 $c=4, 5, 6, 7$ 의 4가지

$b=4$ 이면 $c=5, 6, 7$ 의 3가지

$b=5$ 이면 $c=6, 7$ 의 2가지

$b=6$ 이면 $c=7$ 의 1가지

② $a=2$ 일 때,

$b=4$ 이면 $c=5, 6, 7$ 의 3가지

$b=6$ 이면 $c=7$ 의 1가지

③ $a=3$ 일 때,

$b=6$ 이면 $c=7$ 의 1가지

①, ②, ③에서 그 경우의 수는

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 1 + 1 = 20$$

즉, b 가 a 의 배수인 확률은 $\frac{20}{35} = \frac{4}{7}$

(ii) c 가 b 의 배수인 경우

① $b=2$ 일 때,

$a=1$ 이면 $c=4, 6$ 의 2가지

② $b=3$ 일 때,

$a=1$ 이면 $c=6$ 의 1가지

$a=2$ 이면 $c=6$ 의 1가지

①, ②에서 그 경우의 수는

$$2 + 1 + 1 = 4$$

즉, c 가 b 의 배수인 확률은 $\frac{4}{35}$

(iii) b 가 a 의 배수이고 c 가 b 의 배수인 경우

$a=1$ 일 때,

$b=2$ 이면 $c=4, 6$ 의 2가지

$b=3$ 이면 $c=6$ 의 1가지

즉, 그 경우의 수는 $2 + 1 = 3$

따라서 b 가 a 의 배수이고 c 가 b 의 배수인 확률은 $\frac{3}{35}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 $\frac{4}{7} + \frac{4}{35} - \frac{3}{35} = \frac{3}{5}$

20 답 $\frac{89}{91}$

$X = \{2, 3, 5, 7\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합의 개수는 $2^4 - 1 = 15$

모든 경우의 수는 15개의 부분집합 중에서 3개를 택하는 경우의 수이므로

$${}_{15}C_3 = 455$$

서로 다른 3개의 집합을 택할 때, 적어도 2개의 집합이 서로소가 아닌 사건의 여사건은 서로 다른 3개의 집합이 모두 서로소인 사건이다.

(i) 서로 다른 3개의 집합의 원소가 모두 1개인 경우의 수는

$${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$$

(ii) 서로 다른 3개의 집합의 원소가 1개, 1개, 2개인 경우의 수는

$${}_4C_2 = 6$$

(i), (ii)에서 서로 다른 3개의 집합이 모두 서로소인 경우의 수는

$$4 + 6 = 10$$

따라서 여사건의 확률은 $\frac{10}{455} = \frac{2}{91}$ 이므로 구하는 확률은

$$1 - \frac{2}{91} = \frac{89}{91}$$

21 답 ②

서로 다른 3개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

$M - m \geq 3$ 인 사건의 여사건은 $M - m < 3$ 인 사건이므로

$M - m = 0$ 또는 $M - m = 1$ 또는 $M - m = 2$

(i) $M - m = 0$ 인 경우

3개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 모두 같으므로 그 경우의 수는 6

(ii) $M - m = 1$ 인 경우

나오는 눈의 수가 $k, k, k+1$ 또는 $k, k+1, k+1$ ($k=1, 2, 3, 4, 5$) 이어야 하므로 그 경우의 수는

$$5 \times \left(\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} \right) = 30$$

(iii) $M - m = 2$ 인 경우

나오는 눈의 수가 $k, k, k+2$ 또는 $k, k+1, k+2$ 또는 $k, k+2, k+2$ ($k=1, 2, 3, 4$)이어야 하므로 그 경우의 수는

$$4 \times \left(\frac{3!}{2!} + 3! + \frac{3!}{2!} \right) = 48$$

(i), (ii), (iii)에서 $M - m < 3$ 인 경우의 수는 $6 + 30 + 48 = 84$

따라서 여사건의 확률은 $\frac{84}{216} = \frac{7}{18}$ 이므로 구하는 확률은

$$1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$$

22 답 35/36

모든 경우의 수는 X 에서 X 로의 모든 함수 f 의 개수와 같으므로

$${}_6\Pi_6 = 6^6$$

$\frac{(f \circ f)(1)}{f(1)}$ 의 값이 자연수이거나 2보다 작은 사건의 여사건은

$\frac{(f \circ f)(1)}{f(1)}$ 의 값이 2 이상인 정수가 아닌 유리수인 사건이다.

(i) $f(1)=1$ 일 때,

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(1) = 1 \text{이므로 } \frac{(f \circ f)(1)}{f(1)} = 1$$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(1)=2$ 일 때,

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2) \text{이므로 } \frac{(f \circ f)(1)}{f(1)} = \frac{f(2)}{2}$$

이 값이 2 이상인 정수가 아닌 유리수이려면 $f(2)=5$ 이어야 하므로 함수 f 의 개수는 ${}_6\Pi_4 = 6^4$

(iii) $f(1) \geq 3$ 일 때,

$\frac{(f \circ f)(1)}{f(1)}$ 의 값이 2 이상인 정수가 아닌 유리수인 경우는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{(f \circ f)(1)}{f(1)}$ 의 값이 2 이상인 정수가 아닌 유리수인 경우의 수는 6^4

따라서 여사건의 확률은 $\frac{6^4}{6^6} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$ 이므로 구하는 확률은

$$1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

다른 풀이

$\frac{(f \circ f)(1)}{f(1)}$ 의 값이 자연수이거나 2보다 작은 사건의 여사건은

$\frac{(f \circ f)(1)}{f(1)}$ 의 값이 2 이상인 정수가 아닌 유리수인 사건이다.

(i) $f(1)=1$ 일 때,

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(1) = 1 \text{이므로 } \frac{(f \circ f)(1)}{f(1)} = 1$$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(1)=2$ 일 때,

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f(2) \text{이므로 } \frac{(f \circ f)(1)}{f(1)} = \frac{f(2)}{2}$$

이 값이 2 이상인 정수가 아닌 유리수이려면 $f(2)=5$ 이어야 한다.

$$\text{이때 } f(1)=2, f(2)=5 \text{일 확률은 } \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

(iii) $f(1) \geq 3$ 일 때,

$\frac{(f \circ f)(1)}{f(1)}$ 의 값이 2 이상인 정수가 아닌 유리수인 경우는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $\frac{(f \circ f)(1)}{f(1)}$ 의 값이 2 이상인 정수가 아닌 유리수일

확률, 즉 여사건의 확률은 $\frac{1}{36}$ 이므로 구하는 확률은 $1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$

23 답 47

모든 경우의 수는 3개의 공 중에서 1개를 꺼내고 다시 넣는 시행을 5번 반복하는 경우의 수이므로 $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$

5개의 수의 곱이 6의 배수인 사건의 여사건은 5개의 수의 곱이 6의 배수가 아닌 사건이다.

이때 나오는 눈의 수의 곱이 6의 배수가 아니려면 2와 3이 동시에 나오지 않아야 한다.

(i) 2가 적혀 있는 공이 안 나오는 경우

1, 3이 적혀 있는 공이 나오는 경우의 수는 1, 3 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수이므로

$${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$$

(ii) 3이 적혀 있는 공이 안 나오는 경우

1, 2가 적혀 있는 공이 나오는 경우의 수는 1, 2 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수이므로

$${}_2\Pi_5 = 2^5 = 32$$

(iii) 2, 3이 적혀 있는 공이 둘 다 안 나오는 경우

1이 적혀 있는 공이 나오는 경우의 수는 1

(i), (ii), (iii)에서 5개의 수의 곱이 6의 배수가 아닌 경우의 수는

$$32 + 32 - 1 = 63$$

즉, 여사건의 확률은 $\frac{63}{3^5} = \frac{7}{27}$ 이므로 구하는 확률은 $1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$

따라서 $p=27, q=20$ 이므로 $p+q=47$

24 답 66/91

$a=a'+1, b=b'+1, c=c'+1$ (a', b', c' 은 음이 아닌 정수)로 놓으면

$a+b+c=15$ 에서

$$(a'+1) + (b'+1) + (c'+1) = 15$$

$$\therefore a' + b' + c' = 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

즉, 모든 경우의 수는 방정식 $\textcircled{1}$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 순서쌍 (a', b', c')의 개수와 같으므로

$${}_3H_{12} = {}_{14}C_{12} = {}_{14}C_2 = 91$$

$(a+b)(b+c)(c+a)$ 의 값이 3의 배수이려면 $a+b, b+c, c+a$ 중 적어도 하나가 3의 배수이어야 하므로 이 사건의 여사건은 $a+b, b+c, c+a$ 가 모두 3의 배수가 아닌 사건이다.

이때 $a+b=15-c, b+c=15-a, c+a=15-b$ 이므로 a, b, c 는 3의 배수가 아니어야 한다.

또 a, b, c 를 3으로 나눈 나머지가 모두 같아야 한다.

(i) $a=3l+1, b=3m+1, c=3n+1$ (l, m, n 은 음이 아닌 정수)인 경우

$$(3l+1) + (3m+1) + (3n+1) = 15$$

$$\therefore l + m + n = 4$$

즉, 그 경우의 수는 ${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$

(ii) $a=3l+2, b=3m+2, c=3n+2$ (l, m, n 은 음이 아닌 정수)인 경우

$$(3l+2) + (3m+2) + (3n+2) = 15$$

$$\therefore l + m + n = 3$$

즉, 그 경우의 수는 ${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$

(i), (ii)에서 $a+b, b+c, c+a$ 가 모두 3의 배수가 아닌 경우의 수는

$$15 + 10 = 25$$

따라서 여사건의 확률은 $\frac{25}{91}$ 이므로 구하는 확률은

$$1 - \frac{25}{91} = \frac{66}{91}$$

25 답 3

모든 경우의 수는 방정식 $x+y+z+w=9$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y, z, w 의 순서쌍 (x, y, z, w)의 개수와 같으므로

$${}_4H_9 = {}_{12}C_9 = {}_{12}C_3 = 220$$

x, y, z, w 의 합이 9이므로 어느 세 수의 합도 4보다 작지 않으려면 나머지 한 수가 5 이하이어야 하므로 이 사건의 여사건은 x, y, z, w 중 하나가 5보다 큰 사건이다.

(i) x, y, z, w 중 하나가 6인 경우

x, y, z, w 중 6인 수를 택하는 경우의 수는 4

나머지 세 수의 합이 3이므로 가능한 순서쌍의 개수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

즉, 그 경우의 수는 $4 \times 10 = 40$

(ii) x, y, z, w 중 하나가 7인 경우

x, y, z, w 중 7인 수를 택하는 경우의 수는 4

나머지 세 수의 합이 2이므로 가능한 순서쌍의 개수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

즉, 그 경우의 수는 $4 \times 6 = 24$

(iii) x, y, z, w 중 하나가 8인 경우

x, y, z, w 중 8인 수를 택하는 경우의 수는 4

나머지 세 수의 합이 1이므로 가능한 순서쌍의 개수는 3

즉, 그 경우의 수는 $4 \times 3 = 12$

(iv) x, y, z, w 중 하나가 9인 경우

x, y, z, w 중 9인 수를 택하는 경우의 수는 4이고, 나머지 수는 모두 0이므로 그 경우의 수는 $4 \times 1 = 4$

(i)~(iv)에서 x, y, z, w 중 하나가 5보다 큰 경우의 수는
 $40 + 24 + 12 + 4 = 80$

따라서 여사건의 확률은 $\frac{80}{220} = \frac{4}{11}$ 이므로 구하는 확률은

$$1 - \frac{4}{11} = \frac{7}{11}$$

26 답 ⑤

모든 경우의 수는 6장의 카드 중에서 2장을 꺼내고, 다시 넣는 시행을 2번 반복하는 경우의 수이므로

$${}_6C_2 \times {}_6C_2 = 15 \times 15 = 225$$

$A \cap B \neq \emptyset$ 인 사건의 여사건은 $A \cap B = \emptyset$ 인 사건이다.

이때 $A \cap B = \emptyset$ 이라면 $a_1 < a_2 < b_1 < b_2$ 또는 $b_1 < b_2 < a_1 < a_2$ 이어야 한다.

즉, 6개의 자연수 중에서 4개를 택하여 작은 것부터 크기순으로 배열할 때, a_1, a_2, b_1, b_2 가 되거나 b_1, b_2, a_1, a_2 가 되면 되므로 그 경우의 수는

$${}_6C_4 \times 2 = 15 \times 2 = 30$$

따라서 여사건의 확률은 $\frac{30}{225} = \frac{2}{15}$ 이므로 구하는 확률은

$$1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$$

STEP 3 최고난도 문제

| 49~51쪽

01 ② 02 61 03 $\frac{23}{525}$ 04 ② 05 ③ 06 37

07 ② 08 $\frac{9}{25}$ 09 ⑤

01 답 ②

1단계 모든 경우의 수 구하기

모든 경우의 수는 7장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수이므로 7!

2단계 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

(가)에서 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드는 5, 6, 7이 적혀 있는 3장의 카드 중 2장이다.

(i) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 6, 7이 적혀 있는 카드인 경우

4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 6, 7이 적혀 있는 카드가 오는 경우는 (6, 4, 7), (7, 4, 6)의 2가지

(나)에서 5가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드는 1, 2, 3이 적혀 있는 카드 중 2장을 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는 ${}_3P_2 = 6$

이 각각에 대하여 4가 적혀 있는 카드와 양옆에 있는 카드를 1장으로 생각하고, 5가 적혀 있는 카드와 양옆에 있는 카드를 1장으로 생각하여 남은 1장의 카드와 함께 3장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3! = 6$

즉, 그 경우의 수는 $2 \times 6 \times 6 = 72$

(ii) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 5, 6이 적혀 있는 카드인 경우

4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 5, 6이 적혀 있는 카드가 오는 경우는 (5, 4, 6), (6, 4, 5)의 2가지

(나)에서 5가 적혀 있는 카드의 바로 양옆 중 4가 적혀 있는 카드의 반대쪽에 있는 카드는 1, 2, 3이 적혀 있는 카드 중 1장이므로 그 경우의 수는 3

이 각각에 대하여 4가 적혀 있는 카드와 양옆에 있는 카드, 그리고 5가 적혀 있는 카드의 바로 양옆 중 4가 적혀 있는 카드의 반대쪽에 있는 카드를 1장으로 생각하여 남은 3장의 카드와 함께 4장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4! = 24$

즉, 그 경우의 수는 $2 \times 3 \times 24 = 144$

(iii) 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 5, 7이 적혀 있는 카드인 경우

(ii)와 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 144

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$72 + 144 + 144 = 360$$

3단계 확률 구하기

따라서 구하는 확률은 $\frac{360}{7!} = \frac{1}{14}$

02 답 61

1단계 모든 경우의 수 구하기

모든 경우의 수는 15개의 수 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 경우의 수이므로

$${}_{15}P_2 = 15^2 = 225$$

2단계 $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자가 3의 배수가 되는 경우 구하기

3^m 의 일의 자리의 숫자는 3, 9, 7, 1이 반복되고, 8^n 의 일의 자리의 숫자는 8, 4, 2, 6이 반복되므로 $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자는 다음과 같다.

+	3	9	7	1
8	1	7	5	9
4	7	3	1	5
2	5	1	9	3
6	9	5	3	7

↑
8"의 일의 자리의 숫자

이때 $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자가 3의 배수인 경우는 3 또는 9일 때이다.

3단계 $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자가 3의 배수인 경우의 수 구하기

(i) $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자가 3인 경우

3^m 과 8^n 의 일의 자리의 숫자가 각각 9와 4, 7과 6, 1과 2일 때이다.

① 3^m 의 일의 자리의 숫자가 9이고, 8^n 의 일의 자리의 숫자가 4인 경우

m 의 값은 2, 6, 10, 14이고, n 의 값은 2, 6, 10, 14이므로 그 경우의 수는 $4 \times 4 = 16$

② 3^m 의 일의 자리의 숫자가 7이고, 8^n 의 일의 자리의 숫자가 6인 경우

m 의 값은 3, 7, 11, 15이고, n 의 값은 4, 8, 12이므로 그 경우의 수는 $4 \times 3 = 12$

③ 3^m 의 일의 자리의 숫자가 1이고, 8^n 의 일의 자리의 숫자가 2인 경우

m 의 값은 4, 8, 12이고, n 의 값은 3, 7, 11, 15이므로 그 경우의 수는 $3 \times 4 = 12$

①, ②, ③에서 $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자가 3인 경우의 수는 $16 + 12 + 12 = 40$

(ii) $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자가 9인 경우

3^m 과 8^n 의 일의 자리의 숫자가 각각 3과 6, 7과 2, 1과 8일 때이다.

① 3^m 의 일의 자리의 숫자가 3이고, 8^n 의 일의 자리의 숫자가 6인 경우

m 의 값은 1, 5, 9, 13이고, n 의 값은 4, 8, 12이므로 그 경우의 수는 $4 \times 3 = 12$

② 3^m 의 일의 자리의 숫자가 7이고, 8^n 의 일의 자리의 숫자가 2인 경우

m 의 값은 3, 7, 11, 15이고, n 의 값은 3, 7, 11, 15이므로 그 경우의 수는 $4 \times 4 = 16$

③ 3^m 의 일의 자리의 숫자가 1이고, 8^n 의 일의 자리의 숫자가 8인 경우

m 의 값은 4, 8, 12이고, n 의 값은 1, 5, 9, 13이므로 그 경우의 수는 $3 \times 4 = 12$

①, ②, ③에서 $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자가 9인 경우의 수는 $12 + 16 + 12 = 40$

(i), (ii)에서 $3^m + 8^n$ 의 일의 자리의 숫자가 3의 배수인 경우의 수는 $40 + 40 = 80$

4단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 구하는 확률은 $\frac{80}{225} = \frac{16}{45}$ 이므로

$p=45$, $q=16$

$\therefore p+q=61$

03 답 $\frac{23}{525}$

1단계 모든 경우의 수 구하기

노란색 타일을 A, 파란색 타일을 B, 초록색 타일을 C라 하자.

모든 경우의 수는 A 4개, B 4개, C 2개를 일렬로 배열하는 경우의 수이므로

$$\frac{10!}{4! \times 4! \times 2!} = 3150$$

2단계 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

A, B가 항상 교대로 배열되는 경우와 C가 A와 A 사이에 있거나 B와 B 사이에 있는 경우, 즉 ACA나 BCB로 되어 있는 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) A, B가 항상 교대로 배열되는 경우

ABABABAB, BABABABA의 2가지

이때 2개의 C는 A와 B의 사이사이와 양 끝의 9개의 자리 중에서 2개를 택하여 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_9C_2 \times 2 = 36 \times 2 = 72$$

(ii) ACA나 BCB로 되어 있는 경우

① ACA가 1번 있고, BCB는 없는 경우

ABABABAB, BABABABA에서 A와 A 사이에 있는 B 하나를 C로 바꾸고 그 B를 같은 문자와 이웃하지 않게 끝으로 옮기면 되므로

BACABABAB, BABACABAB, BABABACAB의 3가지 나머지 C는 A 사이를 제외한 문자 사이사이와 양 끝의 8개의 자리 중에서 1개를 택하여 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$${}_8C_1 \times 3 = 8 \times 3 = 24$$

② ACA는 없고, BCB가 1번 있는 경우

①과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 24

③ ACA가 1번 있고, BCB가 1번 있는 경우

ABABAB, BABABA에서 A와 B 하나씩을 각각 ACA, BCB로 바꾸면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_3C_1 \times 2 = 3 \times 3 \times 2 = 18$$

④ ACA가 2번 있거나 BCB가 2번 있는 경우

같은 문자가 연속하지 않도록 10개를 배열할 수 없다.

(i), (ii)에서 어떤 색도 같은 색을 연속으로 칠하지 않는 경우의 수는

$$72 + 24 + 24 + 18 = 138$$

3단계 확률 구하기

따라서 구하는 확률은 $\frac{138}{3150} = \frac{23}{525}$

04 답 ②

1단계 모든 경우의 수 구하기

모든 경우의 수는 7명의 학생이 7개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉는 경우의 수이므로 $7!$

2단계 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

(i) A열의 좌석에 1학년 학생들이 이웃하여 앉는 경우

(ii)에 의하여 3학년 학생 3명 모두 B열의 좌석에 앉을 수 없으므로 3학년 학생 중 1명은 반드시 A열의 좌석에 앉아야 한다.

A열의 좌석에 1학년 두 학생이 이웃하여 앉는 경우의 수는

$$2 \times 2! = 4$$

A열의 남은 한 좌석에 앉을 3학년 학생 한 명을 정하는 경우의 수는

$${}_3C_1 = 3$$

즉, A열의 3개의 좌석에 학생들이 앉는 경우의 수는

$$4 \times 3 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

B열에는 2학년 학생 2명과 3학년 학생 2명이 앉아야 한다.

2학년 학생들이 앉는 자리를 $\triangle$, 3학년 학생들이 앉는 자리를 $\square$ 라 하면 같은 학년의 학생끼리 이웃하지 않아야 하므로

$$\triangle \square \triangle \square, \square \triangle \square \triangle$$

와 같이 앉아야 한다.

이 각각에 대하여 2개 학년의 학생 두 명씩 총 4명의 학생이 앉는 경우의 수는 $2! \times 2! = 4$

즉, B열의 4개의 좌석에 학생들이 앉는 경우의 수는

$$2 \times 4 = 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②에서 구하는 경우의 수는 $12 \times 8 = 96$

- (ii) A열의 좌석에 2학년 학생들이 이웃하여 앉는 경우
 (i)과 같은 방법으로 하면 구하는 경우의 수는 96
 (iii) A열의 좌석에 3학년 학생 2명이 이웃하여 앉는 경우

① A열의 좌석에 1학년 학생이 앉는 경우

A열의 좌석에 앉을 3학년 학생 2명을 선택하는 경우의 수는

$${}_3C_2=3$$

선택된 3학년 학생 2명이 A열의 좌석에 이웃하여 앉는 경우의 수는 $2 \times 2! = 4$

A열의 남은 한 좌석에 앉을 1학년 학생 한 명을 정하는 경우의 수는 ${}_2C_1=2$

즉, A열의 3개의 좌석에 학생들이 앉는 경우의 수는

$$3 \times 4 \times 2 = 24 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

B열에는 1학년 학생 1명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 1명이 있어야 한다.

4명의 학생이 B열의 4개의 좌석에 조건과 상관없이 앉는 경우의 수는 $4! = 24$

B열의 4개의 좌석에 2학년 학생 2명이 이웃하여 앉는 경우의 수는 $3! \times 2! = 12$

즉, B열의 4개의 좌석에 학생들이 앉는 경우의 수는

$$24 - 12 = 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

①, ②에서 구하는 경우의 수는 $24 \times 12 = 288$

② A열의 좌석에 2학년 학생이 앉는 경우

①과 같은 방법으로 하면 구하는 경우의 수는 288

①, ②에서 구하는 경우의 수는 $288 + 288 = 576$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는

$$96 + 96 + 576 = 768$$

3단계 확률 구하기

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{768}{7!} = \frac{16}{105}$$

05 답 ③

1단계 모든 함수의 개수 구하기

모든 함수 f 의 개수는 ${}_7\P_7 = 7!$

2단계 조건을 만족시키는 함수의 개수 구하기

(i) 집합 X 의 원소 x 에 대하여 $f(x) = x$ 일 때,

$$(f \circ f \circ f)(x) = x \text{ 이므로 구하는 함수의 개수는 1}$$

(ii) 집합 X 의 서로 다른 두 원소 x, y 에 대하여 $f(x) = y$ 일 때,

$$f(y) = x \text{ 이면}$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f)(f(x))$$

$$= (f \circ f)(y)$$

$$= f(f(y))$$

$$= f(x)$$

$$= y \neq x$$

즉, $f \circ f \circ f$ 는 항등함수가 아니므로 $f(y) \neq x$

또 $f(y) = y$ 이면

$$(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f)(f(x))$$

$$= (f \circ f)(y)$$

$$= f(f(y))$$

$$= f(y)$$

$$= y \neq x$$

즉, $f \circ f \circ f$ 는 항등함수가 아니므로 $f(y) \neq y$

이때 집합 X 의 x, y 가 아닌 원소 z 에 대하여 $f(y) = z$ 라 하면

$$(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f)(f(x))$$

$$= (f \circ f)(y)$$

$$= f(f(y))$$

$$= f(z)$$

즉, $f(z) = x$ 이어야 하므로 집합 X 의 서로 다른 세 원소 x, y, z 에 대하여 $f(x) = y, f(y) = z, f(z) = x \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$

① 7개의 원소 중에서 3개의 원소에 대하여 ①이 성립하고, 나머지 4개의 원소는 자기 자신에 대응하는 경우

7개의 원소 중에서 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_7C_3 = 35$ 이고, 택한 세 원소 x, y, z 에 대하여

$$f(x) = y, f(y) = z, f(z) = x \text{ 또는 } f(x) = z, f(z) = y, f(y) = x$$

가 성립하면 되므로 함수 f 의 개수는

$$35 \times 2 = 70$$

② 7개의 원소 중에서 6개의 원소에 대하여 ①이 성립하고, 나머지 한 원소는 자기 자신에 대응하는 경우

7개의 원소 중에서 자기 자신에 대응하는 원소 1개를 택하는 경우의 수는

$${}_7C_1 = 7$$

나머지 6개의 원소를 3개씩 2묶음으로 나누는 경우의 수는

$${}_6C_3 \times {}_3C_3 \times \frac{1}{2} = 20 \times 1 \times \frac{1}{2} = 10$$

이 각 묶음에 대하여 함수값을 정하는 방법이 2가지씩 존재하므로 함수 f 의 개수는

$$7 \times 10 \times 2 \times 2 = 280$$

①, ②에서 함수 f 의 개수는

$$70 + 280 = 350$$

(i), (ii)에서 $f \circ f \circ f$ 가 항등함수인 함수 f 의 개수는

$$1 + 350 = 351$$

3단계 확률 구하기

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{351}{7!}$$

개념 NOTE

함수 f 가 항등함수이면 $f(x) = x$ 이다.

06 답 37

1단계 모든 경우의 수 구하기

모든 경우의 수는 정사면체를 4번 던지는 경우의 수이므로

$${}_4\P_4 = 4! = 256$$

2단계 조건을 만족시키는 경우의 수 구하기

두 점 $(a, b), (c, -d)$ 의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b-d}{2}\right)$

이 점이 직선 $y = -x + 2$ 위의 점이므로

$$\frac{b-d}{2} = -\frac{a+c}{2} + 2$$

$$b-d = -(a+c) + 4 \quad \therefore a+b+c = d+4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 a, b, c, d 는 4 이하의 자연수이므로 $a = a' + 1, b = b' + 1,$

$c = c' + 1$ 로 놓으면 a', b', c' 은 모두 0 이상 3 이하의 정수이다.

(i) $d = 1$ 일 때,

①에서 $a+b+c = 5$ 이므로

$$(a'+1) + (b'+1) + (c'+1) = 5$$

$$\therefore a' + b' + c' = 2 \quad (a', b', c' \text{은 } 0 \text{ 이상 } 3 \text{ 이하의 정수})$$

이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c') 의 개수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

(ii) $d=2$ 일 때,

㉠에서 $a+b+c=6$ 이므로

$$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)=6$$

$\therefore a'+b'+c'=3$ (a', b', c' 은 0 이상 3 이하의 정수)

이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c') 의 개수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = 10$$

(iii) $d=3$ 일 때,

㉠에서 $a+b+c=7$ 이므로

$$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)=7$$

$\therefore a'+b'+c'=4$ (a', b', c' 은 0 이상 3 이하의 정수)

이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c') 은 $a'+b'+c'=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 순서쌍 (a', b', c') 에서 순서쌍 $(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 4)$ 를 제외한 것이므로 그 개수는

$${}_3H_4 - 3 = {}_6C_4 - 3 = {}_6C_2 - 3 = 15 - 3 = 12$$

(iv) $d=4$ 일 때,

㉠에서 $a+b+c=8$ 이므로

$$(a'+1)+(b'+1)+(c'+1)=8$$

$\therefore a'+b'+c'=5$ (a', b', c' 은 0 이상 3 이하의 정수)

이를 만족시키는 순서쌍 (a', b', c') 은 $a'+b'+c'=5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c' 의 순서쌍 (a', b', c') 에서 순서쌍 $(5, 0, 0)$, $(0, 5, 0)$, $(0, 0, 5)$, $(4, 1, 0)$, $(4, 0, 1)$, $(1, 4, 0)$, $(1, 0, 4)$, $(0, 4, 1)$, $(0, 1, 4)$ 를 제외한 것이므로 그 개수는

$${}_3H_5 - 9 = {}_7C_5 - 9 = {}_7C_2 - 9 = 21 - 9 = 12$$

(i)~(iv)에서 두 점 (a, b) , $(c, -d)$ 의 중점이 직선 $y=-x+2$ 위의 점인 경우의 수는

$$6+10+12+12=40$$

3단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 구하는 확률은 $\frac{40}{256} = \frac{5}{32}$ 이므로

$$p=32, q=5$$

$$\therefore p+q=37$$

다른 풀이

(i) $d=1$ 일 때,

㉠에서 $a+b+c=5$ 이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 는

$(1, 1, 3)$, $(1, 3, 1)$, $(3, 1, 1)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 1, 2)$, $(2, 2, 1)$ 의 6개

(ii) $d=2$ 일 때,

㉠에서 $a+b+c=6$ 이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 는

$(1, 1, 4)$, $(1, 4, 1)$, $(4, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 2, 2)$ 의 10개

(iii) $d=3$ 일 때,

㉠에서 $a+b+c=7$ 이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 는

$(1, 2, 4)$, $(1, 4, 2)$, $(2, 1, 4)$, $(2, 4, 1)$, $(4, 1, 2)$, $(4, 2, 1)$, $(1, 3, 3)$, $(3, 1, 3)$, $(3, 3, 1)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 3, 2)$, $(3, 2, 2)$ 의 12개

(iv) $d=4$ 일 때,

㉠에서 $a+b+c=8$ 이므로 이를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 는

$(1, 3, 4)$, $(1, 4, 3)$, $(3, 1, 4)$, $(3, 4, 1)$, $(4, 1, 3)$, $(4, 3, 1)$, $(2, 2, 4)$, $(2, 4, 2)$, $(4, 2, 2)$, $(2, 3, 3)$, $(3, 2, 3)$, $(3, 3, 2)$ 의 12개

개념 NOTE

두 점 (a, b) , (c, d) 의 중점의 좌표는

$$\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2} \right)$$

07 답 ②

1단계 모든 경우의 수 구하기

한 개의 주사위를 3번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 \times 6 = 216$$

2단계 여사건의 확률 구하기

6개의 접시 위에 각각 한 개 이상의 쿠키가 담겨 있는 사건의 여사건은 빈 접시가 생기는 사건이다.

빈 접시가 생기는 경우는 다음과 같이 주사위를 3번 던져 나온 눈의 수가 서로 같은지 다른지에 따라 나누어 생각할 수 있다.

(i) 3개의 수가 모두 다른 경우

빈 접시가 생기는 경우는 3개의 수가 서로 이웃하는 경우이다.

서로 이웃하는 3개의 수를 정하는 경우의 수는 6

이 3개의 수를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3! = 6$

즉, 그 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

(ii) 2개의 수는 같고, 1개의 수만 다른 경우

빈 접시가 생기는 경우는 1개의 다른 수가 서로 같은 수와 마주 보는 위치에 있지 않은 경우이다.

2개의 같은 수를 정하는 경우의 수는 ${}_6C_1 = 6$

1개의 다른 수를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1 = 4$

이 3개의 수를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} = 3$

즉, 그 경우의 수는 $6 \times 4 \times 3 = 72$

(iii) 3개의 수가 모두 같은 경우

3개의 수가 모두 같은 경우의 수는 6

(i), (ii), (iii)에서 빈 접시가 생기는 경우의 수는 $36 + 72 + 6 = 114$ 이므로 여사건의 확률은

$$\frac{114}{216} = \frac{19}{36}$$

3단계 확률 구하기

따라서 구하는 확률은

$$1 - \frac{19}{36} = \frac{17}{36}$$

08 답 $\frac{9}{25}$

1단계 모든 경우의 수 구하기

집합 A 의 원소의 개수는

$$5 \times 5 = 25$$

모든 경우의 수는 25개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의 수이므로

$${}_{25}C_2 = 300$$

2단계 원의 중심과 반지름의 길이 구하기

$x^2 + y^2 - 19 = 0$ 에서 $x^2 + y^2 = 19$ 이므로 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\sqrt{19}$ 인 원이다.

$x^2 + y^2 - 12x - 12y + 53 = 0$ 에서 $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 19$ 이므로 중심이 점 $(6, 6)$ 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{19}$ 인 원이다.

3단계 여사건의 확률 구하기

두 원과 각각 적어도 한 점에서 만나는 사건의 여사건은 두 원과 모두 만나지 않거나 오직 한 원과 만나는 사건이다.

(i) 두 원과 모두 만나지 않는 경우

각 원의 내부에서 점 (3, 3)을 제외한
10개의 점 중에서 2개를 택하는 경우의
수는

$$2 \times {}_{10}C_2 = 2 \times 45 = 90$$

두 점 (1, 5), (2, 4) 또는 두 점 (4, 2),
(5, 1)을 택하는 경우의 수는 2

즉, 두 원과 모두 만나지 않는 경우의
수는

$$90 + 2 = 92$$

(ii) 오직 한 원과 만나는 경우

5개의 점 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) 중 1개와 이 5개의
점을 제외한 20개의 점 중에서 1개를 택하는 경우의 수는

$$5 \times 20 = 100$$

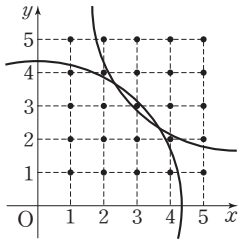
(i), (ii)에서 두 원과 모두 만나지 않거나 오직 한 원과 만나는 경우의
수는 $92 + 100 = 192$ 이므로 여사건의 확률은

$$\frac{192}{300} = \frac{16}{25}$$

4단계 확률 구하기

따라서 구하는 확률은

$$1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$



idea
09 답 ⑤

1단계 모든 경우의 수 구하기

모든 경우의 수는 27개의 상자 중에서 5개를 택하는 경우의 수이므로
 ${}_{27}C_5$

2단계 여사건의 확률 구하기

어떤 면에서도 빛이 통과하지 않는 사건의 여사건은 적어도 한 면에서
는 빛이 통과하는 사건이다.

어떤 면에서 빛이 통과하려면 작은 정육면체 상자 3개로 이루어진 한 줄
이 모두 유리 상자로 바뀌어야 한다.

큰 정육면체에서 작은 정육면체 3개로 이루어진 27개의 줄 중에서 한 줄
을 고르고, 나머지 24개의 상자 중에서 2개를 고르면 되므로 그 경우의
수는

$$27 \times {}_{24}C_2$$

이때 두 줄이 모두 유리 상자로 바뀌는 경우가 중복되므로 이 경우의 수
를 빼면 된다.

5개의 상자를 택하여 두 줄이 모두 유리 상자로 바뀌려면 두 줄이 하나
의 상자를 공유해야 한다. 하나의 줄을 택하였을 때, 그 줄과 하나의 상
자를 공유하는 다른 줄은 6개이고, 두 줄의 선택 순서에 따라 경우가 달
라지지 않으므로 그 경우의 수는

$$27 \times 6 \times \frac{1}{2} = 81$$

즉, 적어도 한 면에서 빛이 통과하는 경우의 수는 $27 \times {}_{24}C_2 - 81$ 이므로
여사건의 확률은

$$\frac{27 \times {}_{24}C_2 - 81}{{}_{27}C_5} = \frac{21}{230}$$

3단계 확률 구하기

따라서 구하는 확률은

$$1 - \frac{21}{230} = \frac{209}{230}$$

04 조건부확률

STEP 1 핵심 문제

| 52~53쪽

01 $\frac{9}{40}$ **02** ② **03** $\frac{4}{35}$ **04** $\frac{5}{54}$ **05** ④ **06** $\frac{7}{46}$

07 $\frac{3}{14}$ **08** $\frac{19}{25}$ **09** ④ **10** $\frac{9}{17}$ **11** 62 **12** $\frac{4}{9}$

01 답 $\frac{9}{40}$

$P(A \cup B^c) = \frac{7}{10}$ 에서 $P((A \cup B^c)^c) = 1 - P(A \cup B^c)$ 이므로

$$P(A^c \cap B) = 1 - \frac{7}{10} = \frac{3}{10}$$

$$P(B)P(B|A^c) = \frac{2}{5} \text{에서 } P(B) \times \frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{P(B)}{P(A^c)} \times \frac{3}{10} = \frac{2}{5} \quad \therefore \frac{P(B)}{P(A^c)} = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(A^c)P(A^c|B) &= P(A^c) \times \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A^c)}{P(B)} \times P(A^c \cap B) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{3}{10} = \frac{9}{40} \end{aligned}$$

02 답 ②

한 개의 주사위를 두 번 던질 때 $a \times b$ 가 4의 배수인 사건을 A ,
 $a + b \leq 7$ 인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

한 개의 주사위를 두 번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는
 $6 \times 6 = 36$

$a \times b$ 가 4의 배수인 경우의 수는

(i) a, b 가 모두 짝수일 때, $3 \times 3 = 9$

(ii) a, b 중 하나는 4이고, 다른 하나가 홀수일 때, $2 \times 3 = 6$

$$(i), (ii) \text{에서 } P(A) = \frac{9+6}{36} = \frac{5}{12}$$

$a \times b$ 가 4의 배수이고 $a + b \leq 7$ 인 경우는

(1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)의 7가지

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{7}{36}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{36}}{\frac{5}{12}} = \frac{7}{15}$$

03 답 $\frac{4}{35}$

첫 번째 시행에서 서로 다른 색의 공 2개를 꺼내는 사건을 A , 두 번째
시행에서 서로 같은 색의 공 2개를 꺼내는 사건을 B 라 하자.

첫 번째 시행에서 서로 다른 색의 공 2개를 꺼낼 확률은 4가지 색 중에
서 2가지 색을 정하고, 정한 색의 공을 각각 하나씩 꺼내면 되므로

$$P(A) = \frac{{}_4C_2 \times {}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_8C_2} = \frac{6}{7}$$

두 번째 시행에서 서로 같은 색의 공 2개를 꺼낼 확률은 남은 6개의 공
중에서 같은 색의 공이 2개인 경우가 2가지이므로

$$P(B|A) = \frac{2}{{}_6C_2} = \frac{2}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{6}{7} \times \frac{2}{15} = \frac{4}{35}$$

다른 풀이

첫 번째 2개의 공을 꺼낼 때, 하나가 어떤 색이든 상관없이 다른 하나는 그 색을 제외한 나머지 색을 꺼내면 되므로

$$1 \times \frac{6}{7} = \frac{6}{7}$$

두 번째 2개의 공을 꺼낼 때, 2개씩 남은 2가지 색 중에서 꺼내면 되므로

$$\frac{4}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{6}{7} \times \frac{2}{15} = \frac{4}{35}$$

04 답 5/54

한 개의 동전을 1번 던져서 앞면이 나오는 사건을 A , 나온 주사위의 눈의 수의 총합이 4 이하인 사건을 B 라 하자.

(i) 동전이 앞면이 나오고 주사위를 2번 던져서 나온 두 눈의 수의 총합이 4 이하일 확률

$P(A) = \frac{1}{2}$ 이고 주사위를 2번 던져서 나온 두 눈의 수의 총합이 4 이하인 경우는 (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)의 6가지이므로 $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{2} \times \frac{6}{6^2} = \frac{1}{12}$

(ii) 동전이 뒷면이 나오고 주사위를 3번 던져서 나온 세 눈의 수의 총합이 4 이하일 확률

$P(A^c) = \frac{1}{2}$ 이고 주사위를 3번 던져서 나온 세 눈의 수의 총합이 4 이하인 경우는 (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)의 4가지이므로 $P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{6^3} = \frac{1}{108}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{1}{12} + \frac{1}{108} = \frac{5}{54}$$

05 답 ④

주머니 B에서 꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공인 사건의 여사건은 주머니 B에서 꺼낸 3개의 공이 모두 검은 공인 사건이다.

(i) 주머니 A에서 흰 공 1개를 꺼내는 경우

흰 공 1개를 주머니 B에 넣으므로 주머니 B에는 흰 공 4개와 검은 공 3개가 들어 있다.

즉, 주머니 A에서 흰 공 1개를 꺼내고 주머니 B에서 검은 공 3개를 꺼낼 확률은

$$\frac{1}{3} \times \frac{{}_3C_3}{{}_7C_3} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{35} = \frac{1}{105}$$

(ii) 주머니 A에서 검은 공 1개를 꺼내는 경우

검은 공 1개를 주머니 B에 넣으므로 주머니 B에는 흰 공 3개와 검은 공 4개가 들어 있다.

즉, 주머니 A에서 검은 공 1개를 꺼내고 주머니 B에서 검은 공 3개를 꺼낼 확률은

$$\frac{2}{3} \times \frac{{}_4C_3}{{}_7C_3} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{35} = \frac{8}{105}$$

(i), (ii)에서 구한 여사건의 확률은 $\frac{1}{105} + \frac{8}{105} = \frac{3}{35}$

따라서 구하는 확률은 $1 - \frac{3}{35} = \frac{32}{35}$

06 답 7/46

3개의 입학 전형 A, B, C에 지원하여 합격할 확률이 각각 0.2, 0.3, 0.1이므로 불합격할 확률은 각각 0.8, 0.7, 0.9이다.

(i) 합격한 학생이 입학 전형 A와 B, 불합격한 학생이 입학 전형 C에 지원했을 확률은 $0.2 \times 0.3 \times 0.9 = 0.054$

(ii) 합격한 학생이 입학 전형 A와 C, 불합격한 학생이 입학 전형 B에 지원했을 확률은 $0.2 \times 0.7 \times 0.1 = 0.014$

(iii) 합격한 학생이 입학 전형 B와 C, 불합격한 학생이 입학 전형 A에 지원했을 확률은 $0.8 \times 0.3 \times 0.1 = 0.024$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{0.014}{0.054 + 0.014 + 0.024} = \frac{0.014}{0.092} = \frac{7}{46}$$

07 답 3/14

A가 2개 모두 '당첨'이 적혀 있는 공을 꺼내는 사건을 A, B가 2개 모두 '당첨'이 적혀 있는 공을 꺼내는 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(A|B)$ 이다.

(i) A가 '당첨'이 적혀 있는 공 2개를 꺼내고 B가 '당첨'이 적혀 있는 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{15} = \frac{2}{45}$$

(ii) A가 '당첨'이 적혀 있는 공 1개, '꽝'이 적혀 있는 공 1개를 꺼내고, B가 '당첨'이 적혀 있는 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_6C_1 \times {}_4C_1}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{8}{15} \times \frac{2}{9} = \frac{16}{135}$$

(iii) A가 '꽝'이 적혀 있는 공 2개를 꺼내고, B가 '당첨'이 적혀 있는 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} \times \frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{2}{15} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{45}$$

(i), (ii), (iii)에서 $P(B) = \frac{2}{45} + \frac{16}{135} + \frac{2}{45} = \frac{28}{135}$

(i)에서 $P(A \cap B) = \frac{2}{45}$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{45}}{\frac{28}{135}} = \frac{3}{14}$$

08 답 19/25

두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A, B^c 도 서로 독립이다.

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

$$\therefore P(A \cup B^c) = P(A) + P(B^c) - P(A \cap B^c) \\ = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{6}{25} = \frac{19}{25}$$

09 답 ④

ㄱ. 두 사건 A, B가 서로 배반사건이면 $A \cap B = \emptyset$ 에서

$$P(A \cap B) = 0$$

이때 $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ 이므로 $P(A)P(B) \neq 0$

즉, $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ 이므로 두 사건 A, B는 서로 독립이 아니다.

$$\begin{aligned} \therefore 1 - P(A^c|B) &= 1 - \frac{P(A^c \cap B)}{P(B)} = 1 - \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B) \end{aligned}$$

이때 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 $P(A|B^c) = P(A|B)$ 이므로 $P(A|B^c) = 1 - P(A^c|B)$

$$\begin{aligned} \therefore \text{두 사건 } A, B \text{가 서로 독립이면 } P(A \cap B) &= P(A)P(B) \text{이므로} \\ 1 - P(A \cup B) &= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\} \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= 1 - P(A) - P(B)\{1 - P(A)\} \\ &= \{1 - P(A)\}\{1 - P(B)\} \\ &= P(A^c)P(B^c) \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

다른 풀이

$$\begin{aligned} \therefore P(A|B^c) &= P(A), P(A^c|B) = P(A^c) \text{이고} \\ P(A) &= 1 - P(A^c) \text{이므로 } P(A|B^c) = 1 - P(A^c|B) \\ \therefore A^c, B^c \text{도 서로 독립이므로} \\ 1 - P(A \cup B) &= P((A \cup B)^c) = P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c) \end{aligned}$$

10 답 9/17

과학을 선택한 여학생을 x 명이라 하면 이 고등학교의 3학년 학생 수는 $180 + 160 + 45 + x = x + 385$ 이므로

$$P(A) = \frac{180 + 160}{x + 385} = \frac{340}{x + 385}$$

$$P(B) = \frac{180 + 45}{x + 385} = \frac{225}{x + 385}$$

$$P(A \cap B) = \frac{180}{x + 385}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 에서

$$\frac{180}{x + 385} = \frac{340}{x + 385} \times \frac{225}{x + 385}, x + 385 = 425 \quad \therefore x = 40$$

$$\therefore P(B) = \frac{225}{40 + 385} = \frac{9}{17}$$

11 답 62

문자 B가 보이도록 카드를 놓으려면 카드를 뒤집는 횟수가 홀수이어야 하므로 5번의 시행 중 앞면이 나온 횟수가 2인 경우가 1번 또는 3번 또는 5번이어야 한다.

한 개의 동전을 두 번 던질 때, 앞면이 나온 횟수가 2일 확률은

$${}_2C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{4}$$

$$\text{앞면이 나온 횟수가 0 또는 1일 확률은 } 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(i) 카드를 뒤집는 횟수가 1인 경우

$$\text{앞면이 나온 횟수가 2인 경우가 1번일 확률은 } {}_5C_1 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{405}{4^5}$$

(ii) 카드를 뒤집는 횟수가 3인 경우

$$\text{앞면이 나온 횟수가 2인 경우가 3번일 확률은 } {}_5C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{90}{4^5}$$

(iii) 카드를 뒤집는 횟수가 5인 경우

$$\text{앞면이 나온 횟수가 2인 경우가 5번일 확률은 } {}_5C_5 \left(\frac{1}{4}\right)^5 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = \frac{1}{4^5}$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 구하는 확률은 } \frac{405}{4^5} + \frac{90}{4^5} + \frac{1}{4^5} = \frac{31}{64}$$

$$\text{따라서 } p = \frac{31}{64} \text{이므로 } 128 \times p = 128 \times \frac{31}{64} = 62$$

12 답 4/9

정육면체 모양의 상자를 1번 던져서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 숫자가 3인 사건을 A , 동전의 앞면이 3번 이상 나오는 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(A|B)$ 이다.

한 개의 동전을 1번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

(i) 정육면체에서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 숫자가 3이고 동전을 3번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$$\frac{2}{6} \times {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{2}{6} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$$

(ii) 정육면체에서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 숫자가 4이고 동전을 4번 던져서 앞면이 3번 이상 나올 확률은

$$\frac{1}{6} \times \left\{ {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^1 + {}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \right\} = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right) = \frac{5}{96}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } P(B) = \frac{1}{24} + \frac{5}{96} = \frac{3}{32}, (i) \text{에서 } P(A \cap B) = \frac{1}{24}$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{24}}{\frac{3}{32}} = \frac{4}{9}$$

STEP 2 고난도 문제

| 54~58쪽

01 $\frac{32}{81}$	02 ①	03 9	04 $\frac{20}{81}$	05 $\frac{16}{25}$	06 $\frac{11}{32}$
07 ⑤	08 $\frac{19}{27}$	09 131	10 ③	11 ②	12 8
13 ⑤	14 ③	15 19	16 $\frac{8}{81}$	17 ③	18 25
19 49	20 $\frac{1}{3}$	21 21			

01 답 32/81

전체집합 U 의 부분집합의 개수는 2^6 이므로 두 부분집합 A, B 를 택하는 경우의 수는 $2^6 \times 2^6 = 2^{12}$

(i) $n(A \cap B) = 2$ 일 때,

집합 $A \cap B$ 의 원소 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2$ 이고 나머지 4개의 원소는 세 집합 $A - B, B - A, (A \cup B)^c$ 중 하나의 원소이므로 $n(A \cap B) = 2$ 인 두 부분집합 A, B 를 택하는 경우의 수는

$${}_6C_2 \times {}_3\Pi_4$$

$$\therefore P(Y) = \frac{{}_6C_2 \times {}_3\Pi_4}{2^{12}}$$

(ii) $n(A \cap B) = 2, n(A) = 3$ 일 때,

집합 $A \cap B$ 의 원소 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2$, 나머지 4개의 원소 중 집합 $A - B$ 의 원소 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1$ 이고, 나머지 3개의 원소는 두 집합 $B - A, (A \cup B)^c$ 중 하나의 원소이므로 $n(A \cap B) = 2, n(A) = 3$ 인 두 부분집합 A, B 를 택하는 경우의 수는 ${}_6C_2 \times {}_4C_1 \times {}_2\Pi_3$

$$\therefore P(X \cap Y) = \frac{{}_6C_2 \times {}_4C_1 \times {}_2\Pi_3}{2^{12}}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{\frac{{}_6C_2 \times {}_4C_1 \times {}_2\Pi_3}{2^{12}}}{\frac{{}_6C_2 \times {}_3\Pi_4}{2^{12}}} = \frac{32}{81}$$

02 답 ①

시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있는 사건을 A , 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

4개의 동전 중 임의로 한 개의 동전을 택하는 모든 경우의 수는 4^5

동전 4개를 왼쪽부터 차례로 X, Y, Z, W 라 하자.

(i) 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 경우

① 동전 W 를 5번 뒤집는 경우의 수는 1

② 동전 X, Y, Z 중에서 1개를 2번 뒤집고, 동전 W 를 3번 뒤집는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 3 \times 10 = 30$$

③ 동전 X, Y, Z 중에서 1개를 4번 뒤집고, 동전 W 를 1번 뒤집는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times \frac{5!}{4!} = 3 \times 5 = 15$$

④ 동전 X, Y, Z 중에서 서로 다른 2개를 각각 2번씩 뒤집고, 동전 W 를 1번 뒤집는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times \frac{5!}{2! \times 2!} = 3 \times 30 = 90$$

①~④에서 구하는 경우의 수는

$$1 + 30 + 15 + 90 = 136$$

(ii) 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 뒷면이 보이도록 놓여 있는 경우

① 동전 X, Y, Z 중에서 1개를 3번 뒤집고, 나머지 2개를 각각 1번씩 뒤집는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times \frac{5!}{3!} = 3 \times 20 = 60$$

② 동전 X, Y, Z 를 각각 1번씩 뒤집고, 동전 W 를 2번 뒤집는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

①, ②에서 구하는 경우의 수는

$$60 + 60 = 120$$

(i), (ii)에서 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있는 경우의 수는

$$136 + 120 = 256$$

$$\therefore P(A) = \frac{256}{4^5}$$

이때 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있는 경우의 수는 136이므로

$$P(A \cap B) = \frac{136}{4^5}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{136}{4^5}}{\frac{256}{4^5}} = \frac{17}{32}$$

03 답 9

$b-a \geq 5$ 인 사건을 A , $c-a \geq 10$ 인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

모든 경우의 수는 12개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수이므로

$${}_{12}C_3 = 220$$

$b-a \geq 5$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

(1, 6), (1, 7), (1, 8), (1, 9), (1, 10), (1, 11),
(2, 7), (2, 8), (2, 9), (2, 10), (2, 11),
(3, 8), (3, 9), (3, 10), (3, 11),
(4, 9), (4, 10), (4, 11),
(5, 10), (5, 11),
(6, 11)

이때 $a < b < c$ 이므로

(i) $a=1$ 일 때,

$b=6$ 이면 c 는 7, 8, ..., 12의 6개

$b=7$ 이면 c 는 8, 9, ..., 12의 5개

$b=8$ 이면 c 는 9, 10, 11, 12의 4개

$b=9$ 이면 c 는 10, 11, 12의 3개

$b=10$ 이면 c 는 11, 12의 2개

$b=11$ 이면 c 는 12의 1개

즉, c 의 개수는

$$6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$$

(ii) $a=2$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면 c 의 개수는

$$5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$$

(iii) $a=3$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면 c 의 개수는

$$4 + 3 + 2 + 1 = 10$$

(iv) $a=4$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면 c 의 개수는

$$3 + 2 + 1 = 6$$

(v) $a=5$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면 c 의 개수는

$$2 + 1 = 3$$

(vi) $a=6$ 일 때,

(i)과 같은 방법으로 하면 c 의 개수는 1

(i)~(vi)에서 $b-a \geq 5$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 56$$

$$\therefore P(A) = \frac{56}{220} = \frac{14}{55}$$

또 $b-a \geq 5$, $c-a \geq 10$ 에서

$b \geq a+5$, $c \geq a+10$ 이므로

① $a=1$, $c=11$ 일 때,

$b=6, 7, 8, 9, 10$ 의 5개

② $a=1$, $c=12$ 일 때,

$b=6, 7, 8, 9, 10, 11$ 의 6개

③ $a=2$, $c=12$ 일 때,

$b=7, 8, 9, 10, 11$ 의 5개

①, ②, ③에서 $b-a \geq 5$ 이고 $c-a \geq 10$ 을 만족시키는 순서쌍

(a, b, c) 의 개수는

$$5 + 6 + 5 = 16$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{16}{220} = \frac{4}{55}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{55}}{\frac{14}{55}} = \frac{2}{7}$$

따라서 $p=7$, $q=2$ 이므로 $p+q=9$

04 답 $\frac{20}{81}$

월요일에 연아와 진우가 각각 A, B 작업장에서 근무했으므로 화요일에 연아는 B, C, D 작업장 중 한 곳에서 근무하게 되고, 진우는 A, C, D 작업장 중 한 곳에서 근무하게 되므로 어느 날 서로 다른 작업장에서 근무한 후 다음 날 같은 작업장에서 근무할 확률은

$$\frac{2}{3 \times 3} = \frac{2}{9}$$

또 화요일에 연아와 진우가 모두 C 작업장에서 근무했다고 하면 수요일에 연아와 진우가 각각 A, B, D 작업장 중 한 곳에서 근무하게 되고, 같은 작업장에서 근무하는 경우는 A, B, D의 3가지이므로 어느 날 서로 같은 작업장에서 근무한 후 다음 날 같은 작업장에서 근무할 확률은

$$\frac{3}{3 \times 3} = \frac{1}{3}$$

화요일에 같은 작업장에서 근무하는 사건을 X, 수요일에 같은 작업장에서 근무하는 사건을 Y라 하면

$$P(X \cap Y) = P(X)P(Y|X) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

$$P(X^c \cap Y) = P(X^c)P(Y|X^c) = \frac{7}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{14}{81}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(Y) = P(X \cap Y) + P(X^c \cap Y) = \frac{2}{27} + \frac{14}{81} = \frac{20}{81}$$

05 답 $\frac{16}{25}$

(i) 첫 번째 시행에서 앞면인 동전 2개를 택하는 경우

앞면이 1개, 뒷면이 4개이므로 두 번째 시행에서는 뒷면인 동전 2개를 택해야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_3C_2 \times {}_4C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{9}{50} \quad \dots \text{배점 30\%}$$

(ii) 첫 번째 시행에서 앞면인 동전 1개와 뒷면인 동전 1개를 택하는 경우
앞면이 3개, 뒷면이 2개이므로 두 번째 시행에서는 앞면인 동전 1개와 뒷면인 동전 1개를 택해야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{9}{25} \quad \dots \text{배점 30\%}$$

(iii) 첫 번째 시행에서 뒷면인 동전 2개를 택하는 경우

앞면이 5개이므로 두 번째 시행에서는 앞면인 동전 2개를 택해야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_2C_2 \times {}_5C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10} \times 1 = \frac{1}{10} \quad \dots \text{배점 30\%}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{9}{50} + \frac{9}{25} + \frac{1}{10} = \frac{16}{25} \quad \dots \text{배점 10\%}$$

idea
06 답 $\frac{11}{32}$

최단 거리로 이동하려면 연지는 아래쪽으로 1번, 민우는 위쪽으로 1번 이동해야 하므로 두 사람은 AE, BF, CG, DH의 중점에서만 만날 수 있다.

(i) AE의 중점에서 만날 확률

연지가 A → E로 이동할 확률은 $\frac{1}{2}$

민우가 E → A로 이동할 확률은 $\frac{1}{2}$

따라서 그 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(ii) BF의 중점에서 만날 확률

연지가 A → B → F로 이동할 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

민우가 E → F → B로 이동할 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

따라서 그 확률은 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$

(iii) CG의 중점에서 만날 확률

연지가 A → B → C → G로 이동할 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

민우가 E → F → G → C로 이동할 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

따라서 그 확률은 $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

(iv) DH의 중점에서 만날 확률

연지가 A → B → C → D → H로 이동할 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

민우가 E → F → G → H → D로 이동할 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

따라서 그 확률은 $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

(i)~(iv)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{64} = \frac{11}{32}$$

07 답 ⑤

3개의 동전을 동시에 던질 때, 앞면이 3개 나올 확률은 $\frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

앞면이 2개 이하로 나올 확률은 $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

(i) 나온 동전의 앞면의 개수가 3인 경우

주머니 A에서 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수인 경우는 1, 1 또는 1, 2 또는 2, 3이므로 그 확률은

$$\frac{1}{8} \times \frac{{}_2C_2 + {}_2C_1 \times {}_2C_1 + {}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{1}{8} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{40}$$

(ii) 나온 동전의 앞면의 개수가 2 이하인 경우

주머니 B에서 꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 두 수의 합이 소수인 경우는 3, 4이므로 그 확률은

$$\frac{7}{8} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} = \frac{7}{8} \times \frac{4}{15} = \frac{7}{30}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{3}{40} + \frac{7}{30} = \frac{37}{120}$

08 답 $\frac{19}{27}$

(i) 첫 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있을 확률

주머니 A에서 검은 공을 꺼내거나, 주머니 A에서 흰 공을 꺼내고 주머니 B에서 다시 흰 공을 꺼낼 확률이므로

$$P(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(ii) 두 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있을 확률

① 첫 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있는 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 그 확률은

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

② 첫 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 없는 경우

첫 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 없을 확률은 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ 이고, 이때 두 번째 시행에서 주머니 A에서 검은 공을 꺼내고 주머니 B에서 흰 공을 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

①, ②에서 두 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있을 확률은

$$P(2) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

(iii) 세 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있을 확률

① 두 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있는 경우

(i), (ii)와 같은 방법으로 하면 그 확률은

$$\frac{5}{9} \times \frac{2}{3} = \frac{10}{27}$$

② 두 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 없는 경우

두 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 없을 확률은 $1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$ 이고, 이때 세 번째 시행에서 주머니 A에서 검은 공을 꺼내고 주머니 B에서 흰 공을 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{27}$$

①, ②에서 세 번째 시행 후 주머니 A에 흰 공이 들어 있을 확률은

$$P(3) = \frac{10}{27} + \frac{4}{27} = \frac{14}{27}$$

$$(i), (ii), (iii)에서 P(1) + P(2) - P(3) = \frac{2}{3} + \frac{5}{9} - \frac{14}{27} = \frac{19}{27}$$

09 답 131

(i) ★ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 2장 들어 있는 경우

2번의 시행에서 모두 ★ 모양의 스티커가 붙어 있는 카드를 2장 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

(ii) ★ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 1장 들어 있는 경우

① 첫 번째 시행에서 ★ 모양의 스티커가 붙어 있는 카드를 2장 꺼내면 두 번째 시행에서는 ★ 모양의 스티커가 붙어 있는 카드를 1장, 붙어 있지 않은 카드를 1장 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} \times \frac{{}_1C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{1}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{3}{50}$$

② 첫 번째 시행에서 ★ 모양의 스티커가 붙어 있는 카드를 1장, 붙어 있지 않은 카드를 1장 꺼내면 두 번째 시행에서는 ★ 모양의 스티커가 2장 붙어 있는 카드를 1장, 나머지 카드 중에서 1장 꺼내야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_1C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} \times \frac{{}_1C_1 \times {}_4C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10} \times \frac{4}{10} = \frac{6}{25}$$

①, ②에서 ★ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 1장 들어 있을 확률은 $\frac{3}{50} + \frac{6}{25} = \frac{3}{10}$

$$(i), (ii)에서 ★ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 들어 있을 확률은 $\frac{1}{100} + \frac{3}{10} = \frac{31}{100}$$$

따라서 $p=100$, $q=31$ 이므로 $p+q=131$

10 답 ③

처음 주머니 A에서 꺼낸 2개의 공 중 7이 적혀 있는 공이 포함되는 사건을 X , 주머니 A에 들어 있는 4개의 공에 적혀 있는 수 중 최댓값이 7인 사건을 Y 라 하면 구하는 확률은 $P(X|Y)$ 이다.

(i) 주머니 A에서 7이 적혀 있는 공을 포함하여 2개의 공을 꺼내어 주머니 B에 넣은 다음 다시 주머니 B에서 8이 적혀 있는 공을 제외한 공 중에서 7이 적혀 있는 공을 포함하여 2개를 꺼내어 주머니 A에 넣을 확률은

$$P(X \cap Y) = P(X)P(Y|X) \\ = \frac{{}_3C_1}{{}_4C_2} \times \frac{{}_4C_1}{{}_6C_2} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{15} = \frac{2}{15}$$

(ii) 주머니 A에서 7이 적혀 있는 공을 제외한 공 중에서 2개를 꺼내어 주머니 B에 넣은 다음 다시 주머니 B에서 8이 적혀 있는 공을 제외한 공 중에서 2개를 꺼내어 주머니 A에 넣을 확률은

$$P(X^c \cap Y) = P(X^c)P(Y|X^c) \\ = \frac{{}_3C_2}{{}_4C_2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_6C_2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$(i), (ii)에서 P(Y) = P(X \cap Y) + P(X^c \cap Y) = \frac{2}{15} + \frac{1}{3} = \frac{7}{15}$$

$$\therefore P(X|Y) = \frac{P(X \cap Y)}{P(Y)} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{7}{15}} = \frac{2}{7}$$

11 답 ②

(i) 4세트 이전에 K팀이 이겨 경기가 끝나는 경우

$$\textcircled{i} \text{ KKK의 순서대로 이길 확률은 } \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} \times \frac{6}{8} = \frac{15}{64}$$

$$\textcircled{ii} \text{ KKTK의 순서대로 이길 확률은 } \frac{1}{2} \times \frac{5}{8} \times \left(1 - \frac{6}{8}\right) \times \frac{5}{8} = \frac{25}{512}$$

$$\textcircled{iii} \text{ KTKK의 순서대로 이길 확률은 } \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{5}{8}\right) \times \frac{4}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{256}$$

$$\textcircled{iv} \text{ TKKK의 순서대로 이길 확률은 } \frac{1}{2} \times \frac{3}{8} \times \frac{4}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{15}{256}$$

$$\textcircled{i} \sim \textcircled{iv}에서 구하는 확률은 \frac{15}{64} + \frac{25}{512} + \frac{15}{256} + \frac{15}{256} = \frac{205}{512}$$

(ii) 4세트 이전에 T팀이 이겨 경기가 끝나는 경우

$$(i)과 같은 방법으로 하면 구하는 확률은 \frac{205}{512}$$

$$(i), (ii)에서 P(B) = \frac{205}{512} + \frac{205}{512} = \frac{205}{256}$$

$$\text{한편 K팀이 이길 때, 사건 } A \cap B \text{의 확률은 (i)의 } \textcircled{iii}, \textcircled{iv}에 의하여 \\ \frac{15}{256} + \frac{15}{256} = \frac{15}{128}$$

$$\text{같은 방법으로 하면 T팀이 이길 때, 사건 } A \cap B \text{의 확률은 } \frac{15}{128}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{15}{128} + \frac{15}{128} = \frac{15}{64}$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{15}{64}}{\frac{205}{256}} = \frac{12}{41}$$

12 답 8

$$\text{한 개의 주사위를 1번 던져서 홀수의 눈이 나올 확률은 } P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

두 사건 A 와 B 가 서로 독립이라면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이어야 한다.

(i) $m=1$ 일 때,

$$1 \text{의 약수의 눈은 } 1 \text{이므로 } P(B) = \frac{1}{6}$$

$$1 \text{의 약수 중 홀수의 눈은 } 1 \text{이므로 } P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

(ii) $m=2$ 일 때,

$$2\text{의 약수의 눈은 } 1, 2\text{의 2가지이므로 } P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$2\text{의 약수 중 홀수의 눈은 } 1\text{이므로 } P(A \cap B)=\frac{1}{6}$$

$$\therefore P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

(iii) $m=3$ 일 때,

$$3\text{의 약수의 눈은 } 1, 3\text{의 2가지이므로 } P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$3\text{의 약수 중 홀수의 눈은 } 1, 3\text{의 2가지이므로 } P(A \cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

(iv) $m=4$ 일 때,

$$4\text{의 약수의 눈은 } 1, 2, 4\text{의 3가지이므로 } P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

$$4\text{의 약수 중 홀수의 눈은 } 1\text{이므로 } P(A \cap B)=\frac{1}{6}$$

$$\therefore P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

(v) $m=5$ 일 때,

$$5\text{의 약수의 눈은 } 1, 5\text{의 2가지이므로 } P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$5\text{의 약수 중 홀수의 눈은 } 1, 5\text{의 2가지이므로 } P(A \cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$$

(vi) $m=6$ 일 때,

$$6\text{의 약수의 눈은 } 1, 2, 3, 6\text{의 4가지이므로 } P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$6\text{의 약수 중 홀수의 눈은 } 1, 3\text{의 2가지이므로 } P(A \cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

(i)~(vi)에서 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 를 만족시키는 m 의 값은 2, 6이다.

따라서 모든 m 의 값의 합은

$$2+6=8$$

13 답 ⑤

주머니에 들어 있는 카드의 개수를 표로 나타내면 다음과 같다.

색 \ 숫자	1	2	합계
노란색	4	$\frac{n}{4}-4$	$\frac{n}{4}$
빨간색	$\frac{n}{2}-a$	a	$\frac{n}{2}$
파란색	5	$\frac{n}{4}-5$	$\frac{n}{4}$
합계	$\frac{n}{2}-a+9$	$\frac{n}{2}+a-9$	n

$$P(A)=\frac{\frac{n}{2}}{n}=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{\frac{n}{2}+a-9}{n}=\frac{n+2a-18}{2n}, P(A \cap B)=\frac{a}{n}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이라면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이어야 하므로

$$\frac{a}{n} = \frac{1}{2} \times \frac{n+2a-18}{2n}$$

$$4a = n+2a-18$$

$$\therefore a = \frac{n}{2} - 9$$

$$\text{따라서 } f(n) = \frac{n}{2} - 9 \text{이므로}$$

$$f(20) + f(40) = 1 + 11 = 12$$

14 답 ③

20 이하의 소수는 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19의 8개이므로

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

20보다 작은 자연수 n 에 대하여 n 이하의 수가 나오는 사건이 B_n 이므로

$$P(B_n) = \frac{n}{20}$$

20보다 작은 자연수 n 에 대하여 두 사건 A 와 B_n 이 서로 독립이라면

$$P(A \cap B_n) = P(A)P(B_n) \text{이어야 한다.}$$

$$\text{집합 } A \cap B_n \text{의 원소의 개수를 } k \text{라 하면 } P(A \cap B_n) = \frac{k}{20} \text{이므로}$$

$$\frac{k}{20} = \frac{2}{5} \times \frac{n}{20} \quad \therefore k = \frac{2}{5}n$$

이때 k 는 자연수이므로 n 은 5의 배수이다.

(i) $n=5$ 일 때,

$$P(B_5) = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \text{이고, } 5 \text{ 이하의 소수는 } 2, 3, 5 \text{의 3개이므로}$$

$$P(A \cap B_5) = \frac{3}{20}$$

$$\therefore P(A \cap B_5) \neq P(A)P(B_5)$$

(ii) $n=10$ 일 때,

$$P(B_{10}) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} \text{이고, } 10 \text{ 이하의 소수는 } 2, 3, 5, 7 \text{의 4개이므로}$$

$$P(A \cap B_{10}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore P(A \cap B_{10}) = P(A)P(B_{10})$$

(iii) $n=15$ 일 때,

$$P(B_{15}) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} \text{이고, } 15 \text{ 이하의 소수는 } 2, 3, 5, 7, 11, 13 \text{의 6개}$$

$$\text{이므로 } P(A \cap B_{15}) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

$$\therefore P(A \cap B_{15}) = P(A)P(B_{15})$$

(i), (ii), (iii)에서 두 사건 A 와 B_n 이 서로 독립이 되도록 하는 n 의 값은

10, 15이므로 최댓값은 15이다.

15 답 19

3번의 시행 후 5개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있으려면 3번째, 4번째, 5번째 자리의 동전을 한 번씩 뒤집거나 모든 동전을 한 번씩 뒤집고 1번째, 2번째 자리의 동전을 뒤집어야 한다.

(i) 3번째, 4번째, 5번째 자리의 동전을 한 번씩 뒤집는 경우

주사위를 세 번 던질 때, 나오는 눈의 수가 3, 4, 5이어야 하므로

$$\text{그 확률은 } 3! \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

(ii) 모든 동전을 한 번씩 뒤집고 1번째, 2번째 자리의 동전을 뒤집는 경우

주사위를 세 번 던질 때, 나오는 눈의 수가 1, 2, 6이어야 하므로

$$\text{그 확률은 } 3! \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

(i), (ii)에서 5개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률은

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{18}$$

따라서 $p=18, q=1$ 이므로 $p+q=19$

16 답 $\frac{8}{81}$

(i) $a_1=1$ 일 때,

$$b_1=a_1=1 \text{이므로 } b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=3 \text{에서}$$

$$b_2+b_3+b_4+b_5=2$$

① $a_2=1$ 일 때,

$$b_2=b_1+1=2 \text{이므로 } b_2+b_3+b_4+b_5=2 \text{에서}$$

$$b_3+b_4+b_5=0$$

따라서 $b_3=b_4=b_5=0$ 이어야 하므로 $a_3=a_4=a_5=0$

② $a_2=0$ 일 때,

$$b_2=0 \text{이므로 } b_2+b_3+b_4+b_5=2 \text{에서}$$

$$b_3+b_4+b_5=2$$

③ $a_3=1$ 일 때,

$$b_3=b_2+1=1 \text{이므로 } b_3+b_4+b_5=2 \text{에서}$$

$$b_4+b_5=1$$

따라서 $b_4=0, b_5=1$ 이어야 하므로 $a_4=0, a_5=1$

④ $a_3=0$ 일 때,

$$b_3=0 \text{이므로 } b_3+b_4+b_5=2 \text{에서}$$

$$b_4+b_5=2$$

이를 만족시키는 b_4, b_5 의 값은 존재하지 않는다.

⑤, ⑥에서 $a_3=1, a_4=0, a_5=1$

(ii) $a_1=0$ 일 때,

$$b_1=a_1=0 \text{이므로 } b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=3 \text{에서}$$

$$b_2+b_3+b_4+b_5=3$$

① $a_2=1$ 일 때,

$$b_2=b_1+1=1 \text{이므로 } b_2+b_3+b_4+b_5=3 \text{에서}$$

$$b_3+b_4+b_5=2$$

② $a_3=1$ 일 때,

$$b_3=b_2+1=2 \text{이므로 } b_3+b_4+b_5=2 \text{에서}$$

$$b_4+b_5=0$$

따라서 $b_4=b_5=0$ 이어야 하므로 $a_4=a_5=0$

③ $a_3=0$ 일 때,

$$b_3=0 \text{이므로 } b_3+b_4+b_5=2 \text{에서}$$

$$b_4+b_5=2$$

이를 만족시키는 b_4, b_5 의 값은 존재하지 않는다.

④, ⑤에서 $a_3=1, a_4=0, a_5=0$

⑥ $a_2=0$ 일 때,

$$b_2=0 \text{이므로 } b_2+b_3+b_4+b_5=3 \text{에서}$$

$$b_3+b_4+b_5=3$$

⑦ $a_3=1$ 일 때,

$$b_3=b_2+1=1 \text{이므로 } b_3+b_4+b_5=3 \text{에서}$$

$$b_4+b_5=2$$

따라서 $b_4=2, b_5=0$ 이어야 하므로 $a_4=1, a_5=0$

⑧ $a_3=0$ 일 때,

$$b_3=0 \text{이므로 } b_3+b_4+b_5=3 \text{에서}$$

$$b_4+b_5=3$$

따라서 $b_4=1, b_5=2$ 이어야 하므로 $a_4=1, a_5=1$

⑨, ⑩에서 $a_3=1, a_4=1, a_5=0$ 또는 $a_3=0, a_4=1, a_5=1$

(i), (ii)에서 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 는

$$(1, 1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0),$$

$$(0, 0, 0, 1, 1)$$

이때 1이 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, 0이 적혀 있는 공을 꺼낼

확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 이므로 구하는 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{243}+\frac{16}{243}=\frac{8}{81}$$

다른 풀이

(가)에 의하여 b_1 은 0 또는 1이다.

또 (나)에 의하여 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 에서 0 다음의 수는 0 또는 1이고,

1 다음의 수는 0 또는 2이다.

따라서 $b_1+b_2+b_3+b_4+b_5=3$ 을 만족시키는 가능한 순서쌍

$$(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \text{는 } (1, 0, 1, 0, 1), (1, 2, 0, 0, 0),$$

$$(0, 1, 2, 0, 0), (0, 0, 1, 2, 0), (0, 0, 0, 1, 2) \text{이다.}$$

이때 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 는 $(1, 0, 1, 0, 1), (1, 1, 0, 0, 0),$

$$(0, 1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1, 1) \text{이다.}$$

이때 1이 적혀 있는 공을 꺼낼 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, 0이 적혀 있는 공을 꺼낼

확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 이므로 구하는 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{243}+\frac{16}{243}=\frac{8}{81}$$

17 답 ③

한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 2개가 나오는 사건을 A , 한 개의 주사위를 던져서 3의 배수의 눈이 1번 나오는 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(A|B)$ 이다.

한 개의 동전을 1번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이고, 주사위를 1번

던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(i) 동전을 3번 던져서 나오는 앞면의 개수가 1이고, 주사위를 1번 던져

$$\text{서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 } {}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$$

(ii) 동전을 3번 던져서 나오는 앞면의 개수가 2이고, 주사위를 2번 던져

서 3의 배수의 눈이 1번 나올 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times{}_2C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{1}{6}$$

(iii) 동전을 3번 던져서 나오는 앞면의 개수가 3이고, 주사위를 3번 던져

서 3의 배수의 눈이 1번 나올 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0\times{}_3C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}$$

(i), (ii), (iii)에서 $P(B)=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{25}{72}$, (ii)에서 $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$$\therefore P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{25}{72}}=\frac{12}{25}$$

18 답 25

주사위 A에서 홀수의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이고, 주사위 B에서 10

의 약수의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이다.

또 주사위 A에서 홀수의 눈의 수가 나오는 횟수를 a 라 하면 짝수의 눈의 수가 나오는 횟수는 $6-a$ 이고,

주사위 B에서 10의 약수의 눈의 수가 나오는 횟수를 b 라 하면 10의 약수가 아닌 눈의 수가 나오는 횟수는 $6-b$ 이다.

주어진 시행을 6번 반복한 후 점 P의 좌표는

$$(a-(6-a), b-(6-b)), \text{ 즉 } (2a-6, 2b-6)$$

한편 원점과 점 P 사이의 거리가 2 이하이어야 하므로

$$\sqrt{(2a-6)^2+(2b-6)^2}\leq 2$$

양변을 제곱하여 정리하면 $4(a-3)^2+4(b-3)^2\leq 4$

$$\therefore (a-3)^2+(b-3)^2\leq 1$$

이때 a, b 는 6 이하의 자연수이므로 순서쌍 $(a-3, b-3)$ 은 $(-1, 0), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, 0)$

따라서 순서쌍 (a, b) 는 $(2, 3), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 3)$ 이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} & {}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times {}_6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6 \\ & \quad + {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times {}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^6 + {}_6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^6 \times {}_6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^6 \\ & = \left(\frac{1}{2}\right)^{12} ({}_6C_2 \times {}_6C_3 + {}_6C_3 \times {}_6C_2 + {}_6C_3 \times {}_6C_3 + {}_6C_3 \times {}_6C_4 + {}_6C_4 \times {}_6C_3) \\ & = \left(\frac{1}{2}\right)^{12} (300 + 300 + 400 + 300 + 300) \\ & = \frac{1600}{2^{12}} = \frac{25}{64} \\ \therefore k & = 25 \end{aligned}$$

19 답 49

3번의 시행 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수인 사건을 A , 주사위의 1의 눈이 한 번만 나오는 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

(i) 사건 A 가 일어날 확률

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 홀수의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

주어진 시행을 3번 반복한 후 6장의 카드에 보이는 모든 수의 합이 짝수이려면 홀수가 보이는 카드의 개수가 0 또는 2이어야 하므로 한 개의 주사위를 3번 던질 때, 홀수의 눈의 수가 3번 나오거나 홀수의 눈의 수가 1번, 짝수의 눈의 수가 2번 나와야 한다.

① 홀수의 눈의 수가 3번 나올 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

② 홀수의 눈의 수가 1번, 짝수의 눈의 수가 2번 나올 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

$$\text{①, ②에서 } P(A) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

(ii) 사건 $A \cap B$ 가 일어날 확률

주사위의 1의 눈이 한 번만 나오는 경우는 ①에서 1의 눈의 수가 1번, 3 또는 5의 눈의 수가 2번 나오거나 ②에서 1의 눈의 수가 1번, 짝수의 눈의 수가 2번 나오는 경우이다.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때,

1의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{1}{6}$, 3 또는 5의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{1}{3}$.

짝수의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

① 1의 눈의 수가 1번, 3 또는 5의 눈의 수가 2번 나올 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1 \times {}_2C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{18}$$

② 1의 눈의 수가 1번, 짝수의 눈의 수가 2번 나올 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1 \times {}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\text{①, ②에서 } P(A \cap B) = \frac{1}{18} + \frac{1}{8} = \frac{13}{72}$$

$$\text{(i), (ii)에서 } P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{13}{72}}{\frac{1}{2}} = \frac{13}{36}$$

따라서 $p=36, q=13$ 이므로 $p+q=49$

20 답 $\frac{1}{3}$

정육면체 모양의 상자를 한 번 던져서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수가 짝수일 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, 홀수일 확률은 $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

시계 반대 방향으로 1만큼 이동하는 횟수를 a , 시계 방향으로 1만큼 이동하는 횟수를 b 라 하면 $a+b=7$

이때 시계 반대 방향을 양의 방향으로 생각하자.

(i) $a-b=1$ 인 경우

$a=4, b=3$ 이므로 정육면체 모양의 상자를 7번 던져서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수가 짝수가 4번, 홀수가 3번 나올 확률은

$${}_7C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{280}{3^7}$$

(ii) $a-b=7$ 인 경우

$a=7, b=0$ 이므로 정육면체 모양의 상자를 7번 던져서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수가 모두 짝수일 확률은

$${}_7C_7\left(\frac{1}{3}\right)^7\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{3^7}$$

(iii) $a-b=-5$ 인 경우

$a=1, b=6$ 이므로 정육면체 모양의 상자를 7번 던져서 바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수가 짝수가 1번, 홀수가 6번 나올 확률은

$${}_7C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{448}{3^7}$$

$$\text{(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은 } \frac{280+1+448}{3^7} = \frac{729}{3^7} = \frac{1}{3}$$

21 답 21

주머니에서 임의로 4개의 구슬을 동시에 꺼낼 때, a, b 의 순서쌍 (a, b) 는 $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$

한 번의 시행에서 $a > b$, 즉 $a=3, b=1$ 일 확률은 $\frac{{}_3C_3 \times {}_3C_1}{{}_6C_4} = \frac{1}{5}$ 이고,

이때 점 P는 x 축의 양의 방향으로 3만큼 이동한다.

또 한 번의 시행에서 $a \leq b$ 일 확률은 $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ 이고, 이때 점 P는 x 축

의 음의 방향으로 1만큼 이동한다.

5번의 시행 중에서 $a > b$ 인 사건이 일어나는 횟수를 m 이라 하면 $a \leq b$ 인 사건이 일어나는 횟수는 $(5-m)$ 이므로 5번의 시행 후 점 P의 좌표는

$$3m - (5-m) = 4m - 5$$

이때 점 P의 좌표가 10 이상이라면

$$4m - 5 \geq 10, 4m \geq 15 \quad \therefore m \geq \frac{15}{4}$$

그런데 m 은 5 이하의 음이 아닌 정수이므로

$m=4$ 또는 $m=5$

$$\therefore p = {}_5C_4\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^1 + {}_5C_5\left(\frac{1}{5}\right)^5\left(\frac{4}{5}\right)^0 = \frac{20}{5^5} + \frac{1}{5^5} = \frac{21}{5^5}$$

$$\therefore 5^5 \times p = 21$$

STEP 3 최고난도 문제

| 59~61쪽

01 ①	02 ②	03 $\frac{3}{7}$	04 $\frac{11}{28}$	05 $\frac{20}{61}$	06 ④
07 ④	08 ④	09 61			

01 답 ①

1단계 조건부확률 이용하기

$a_k \leq k$ 를 만족시키는 자연수 k ($1 \leq k \leq 5$)의 최솟값이 3인 사건을 A , $a_1 + a_2 = a_4 + a_5$ 인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

2단계 $P(A)$ 의 값 구하기

모든 경우의 수는 5개의 공을 순서대로 꺼내는 경우의 수이므로 $5! = 120$

$a_k \leq k$ 를 만족시키는 자연수 k 의 최솟값이 3이려면 $a_1 > 1$, $a_2 > 2$, $a_3 \leq 3$ 이어야 한다.

(i) $a_3 = 1$ 인 경우

a_2 는 3, 4, 5의 3개

a_1 은 2, 3, 4, 5 중에서 a_2 를 제외해야 하므로 3개

a_4 는 2, 3, 4, 5 중에서 a_1, a_2 를 제외해야 하므로 2개

a_5 는 2, 3, 4, 5 중에서 a_1, a_2, a_4 를 제외해야 하므로 1개

따라서 $a_3 = 1$ 인 경우의 수는 $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$

(ii) $a_3 = 2$ 인 경우

a_2 는 3, 4, 5의 3개

a_1 은 3, 4, 5 중에서 a_2 를 제외해야 하므로 2개

a_4 는 1, 3, 4, 5 중에서 a_1, a_2 를 제외해야 하므로 2개

a_5 는 1, 3, 4, 5 중에서 a_1, a_2, a_4 를 제외해야 하므로 1개

따라서 $a_3 = 2$ 인 경우의 수는 $3 \times 2 \times 2 \times 1 = 12$

(iii) $a_3 = 3$ 인 경우

a_2 는 4, 5의 2개

a_1 은 2, 4, 5 중에서 a_2 를 제외해야 하므로 2개

a_4 는 1, 2, 4, 5 중에서 a_1, a_2 를 제외해야 하므로 2개

a_5 는 1, 2, 4, 5 중에서 a_1, a_2, a_4 를 제외해야 하므로 1개

따라서 $a_3 = 3$ 인 경우의 수는 $2 \times 2 \times 2 \times 1 = 8$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$18 + 12 + 8 = 38$

$$\therefore P(A) = \frac{38}{120} = \frac{19}{60}$$

3단계 $P(A \cap B)$ 의 값 구하기

$a_1 + a_2 = a_4 + a_5 = m$ 이라 하면 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 15$ 에서

$a_3 = 15 - 2m$ 이므로 a_3 은 홀수이다.

이때 $a_3 \leq 3$ 이므로 $a_3 = 1$ 또는 $a_3 = 3$

(i) $a_3 = 1$ 인 경우

$1 = 15 - 2m$ 에서 $m = 7$

$a_1 + a_2 = a_4 + a_5 = 7$ 이고 $a_1 > 1$, $a_2 > 2$ 를 만족시키는 순서쌍

(a_1, a_2, a_4, a_5) 는 (2, 5, 3, 4), (2, 5, 4, 3), (3, 4, 2, 5),

(3, 4, 5, 2), (4, 3, 2, 5), (4, 3, 5, 2)의 6가지

(ii) $a_3 = 3$ 인 경우

$3 = 15 - 2m$ 에서 $m = 6$

$a_1 + a_2 = a_4 + a_5 = 6$ 이고 $a_1 > 1$, $a_2 > 2$ 를 만족시키는 순서쌍

(a_1, a_2, a_4, a_5) 는 (2, 4, 1, 5), (2, 4, 5, 1)의 2가지

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6 + 2 = 8$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{8}{120} = \frac{1}{15}$$

4단계 확률 구하기

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{19}{60}} = \frac{4}{19}$$

02 답 ②

1단계 조건부확률 이용하기

9개의 점 중에서 서로 다른 4개를 택할 때, 4개의 점을 꼭짓점으로 하는 사각형이 존재하는 사건을 X , 사각형에 외접하는 원이 존재하는 사건을 Y 라 하면 구하는 확률은 $P(Y|X)$ 이다.

2단계 $P(X)$ 의 값 구하기

모든 경우의 수는 9개의 점 중에서 서로 다른 4개를 택하는 경우의 수이므로

$${}_9C_4 = 126$$

사건 X 가 일어나지 않는 경우는 다음과 같다.

(i) 네 점이 한 직선 위에 있는 경우

삼각형의 한 변 위의 4개의 점을 택하는 경우의 수이므로

$$3 \times {}_4C_4 = 3 \times 1 = 3$$

(ii) 네 점 중 세 점이 한 직선 위에 있는 경우

삼각형의 한 변 위의 3개의 점과 그 변 위에 있지 않은 1개의 점을 택하는 경우의 수이므로

$$3 \times {}_4C_3 \times {}_5C_1 = 3 \times {}_4C_1 \times {}_5C_1 = 3 \times 4 \times 5 = 60$$

(i), (ii)에서 사건 X 가 일어나지 않는 경우의 수는

$$3 + 60 = 63$$

$$\therefore P(X) = 1 - \frac{63}{126} = \frac{1}{2}$$

3단계 $P(X \cap Y)$ 의 값 구하기

사건 $X \cap Y$ 가 일어나는 경우는 다음과 같다.

(i) 네 점 중 정삼각형의 꼭짓점이 없는 경우

6개의 삼등분점을 꼭짓점으로 하는 육각형은 정육각형이므로 6개의 삼등분점은 모두 한 원 위에 있다.

따라서 6개의 삼등분점 중에서 택한 4개의 점을 꼭짓점으로 하는 사각형은 외접하는 원이 항상 존재하므로 그 경우의 수는

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = 15$$

(ii) 네 점 중 정삼각형의 꼭짓점이 1개인 경우

정삼각형의 꼭짓점이 1개가 포함되면 사각형의 한 각이 60° 이거나 60° 보다 작은 경우로 나누어 생각할 수 있다.

① 사각형의 한 각이 60° 인 경우

삼각형의 외각의 성질에 의하여 사각형의 대각의 크기의 합이 180° 보다 크므로 사각형에 외접하는 원은 존재하지 않는다.

② 사각형의 한 각이 60° 보다 작은 경우

사각형에서 대각의 크기의 합이 180° 보다 작으므로 사각형에 외접하는 원은 존재하지 않는다.

즉, 네 점 중 정삼각형의 꼭짓점이 1개인 경우는 존재하지 않는다.

(iii) 네 점 중 정삼각형의 꼭짓점이 2개인 경우

택한 4개의 점 중 정삼각형의 꼭짓점이 아닌 나머지 2개의 점을 지나는 직선이 정삼각형의 꼭짓점을 지나는 변과 평행해야 하므로 그 경우의 수는

$${}_3C_2 \times 2 = {}_3C_1 \times 2 = 3 \times 2 = 6$$

(i), (ii), (iii)에서 사건 $X \cap Y$ 가 일어나는 경우의 수는

$$15 + 6 = 21$$

$$\therefore P(X \cap Y) = \frac{21}{126} = \frac{1}{6}$$

4단계 확률 구하기

$$\therefore P(Y|X) = \frac{P(X \cap Y)}{P(X)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

1단계 조건부확률 이용하기

기울기가 음수인 선분의 개수가 소수인 사건을 A , 기울기가 음수인 선분의 개수가 3인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

2단계 기울기가 음수가 되는 경우 파악하기

기울기가 음수인 선분의 개수가 n 인 경우의 수를 $N(n)$ 이라 하면
 $N(0)=N(6)$, $N(1)=N(5)$, $N(2)=N(4)$ 를 만족시킨다.
 $N(U)=N(0)+N(1)+N(2)+N(3)+N(4)+N(5)+N(6)$ 이라 하면

$$N(U)-N(3)=2\{N(0)+N(2)+N(5)\}$$

$$N(2)+N(5)=\frac{N(U)-N(3)}{2}-N(0)$$

$$\therefore N(2)+N(3)+N(5)=\frac{N(U)-N(3)}{2}-N(0)+N(3) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

즉, $N(U)$, $N(0)$, $N(3)$ 을 구하면 기울기가 음수인 선분의 개수가 소수인 경우의 수를 구할 수 있다.

3단계 $P(A \cap B)$ 의 값 구하기

$$N(U)={}_6P_4=360$$

기울기가 음수인 선분이 3개이려면 $c < a < d < b$, $b < d < a < c$,
 $a < d < c < b$, $b < c < d < a$, $c < b < a < d$, $d < a < b < c$ 를 만족시켜야
 하므로

$$N(3)={}_6C_4 \times 6={}_6C_2 \times 6=15 \times 6=90$$

$$\therefore P(A \cap B)=\frac{90}{360}=\frac{1}{4}$$

4단계 $P(A)$ 의 값 구하기

기울기가 음수인 선분이 존재하지 않으려면 $a < b < c < d$ 를 만족시켜야
 하므로

$$N(0)={}_6C_4={}_6C_2=15$$

따라서 ①에서 기울기가 음수인 선분의 개수가 소수인 경우의 수는

$$N(2)+N(3)+N(5)=\frac{360-90}{2}-15+90=210$$

$$\therefore P(A)=\frac{210}{360}=\frac{7}{12}$$

5단계 확률 구하기

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A \cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}}=\frac{3}{7}$$

NOTE

두 점 $A(a, b)$, $B(c, d)$ 에 대하여 $a < c$ 일 때, 선분 AB 의 기울기가 음수이려면
 $b > d$

1단계 $P(5)$ 의 값 구하기

5개의 상자를 확인한 후 검은 공이 들어 있는 3개의 상자를 모두 찾는
 경우는 4번째까지 확인한 상자가 검은 공이 들어 있는 상자 2개, 흰 공
 이 들어 있는 상자 2개이고 5번째에 검은 공이 들어 있는 상자를 확인하
 는 경우이거나, 확인한 5개의 상자가 모두 흰 공이 들어 있는 상자인 경
 우이므로 그 확률은

$$P(5)=\frac{{}_3C_2 \times {}_5C_2}{{}_8C_4} \times \frac{1}{4} + \frac{{}_5C_5}{{}_8C_5} = \frac{3}{28} + \frac{1}{56} = \frac{1}{8}$$

2단계 $P(6)$ 의 값 구하기

6개의 상자를 확인한 후 검은 공이 들어 있는 3개의 상자를 모두 찾는
 경우는 5번째까지 확인한 상자가 검은 공이 들어 있는 상자 2개, 흰 공
 이 들어 있는 상자 3개이고 6번째에 검은 공이 들어 있는 상자를 확인하
 는 경우이거나, 5번째까지 확인한 상자가 검은 공이 들어 있는 상자 1개,
 흰 공이 들어 있는 상자 4개이고 6번째에 흰 공이 들어 있는 상자를 확
 인하는 경우이므로 그 확률은

$$P(6)=\frac{{}_3C_2 \times {}_5C_3}{{}_8C_5} \times \frac{1}{3} + \frac{{}_3C_1 \times {}_5C_4}{{}_8C_5} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{28} + \frac{5}{56} = \frac{15}{56}$$

3단계 $P(5)+P(6)$ 의 값 구하기

$$\therefore P(5)+P(6)=\frac{1}{8} + \frac{15}{56} = \frac{11}{28}$$

1단계 조건부확률 이용하기

타일이 3개 이하의 영역으로 구분되는 사건을 A , 2개의 영역으로 구분
 되는 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

2단계 6의 약수의 눈의 수가 나올 확률과 나오지 않을 확률 구하기

6의 약수의 눈의 수가 나오는 경우는 1, 2, 3, 6의 4가지이므로 그 확률
 은 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

6의 약수가 아닌 눈의 수가 나올 확률은 $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

3단계 구분 영역의 개수에 따라 확률 구하기

(i) 구분 영역이 1개일 때,

모두 빨간색으로 칠하거나 모두 파란색으로 칠해야 하므로 그 확률은
 $\left(\frac{2}{3}\right)^5 + \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{11}{81}$

(ii) 구분 영역이 2개일 때,

(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)로 구분될 수 있고, 각각에 대하여
 빨간색으로 시작하는 경우와 파란색으로 시작하는 경우가 있으므로
 그 확률은

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^4 \right\} + \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \right\} \\ & + \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right\} + \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \frac{2}{3} \right\} \\ & = \frac{20}{81} \end{aligned}$$

(iii) 구분 영역이 3개일 때,

(1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 3, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (3, 1, 1)
 로 구분될 수 있다.

① (1, 1, 3) 또는 (2, 1, 2) 또는 (3, 1, 1)로 구분되는 경우

빨간색으로 시작하는 경우와 파란색으로 시작하는 경우가 있으
 므로 그 확률은

$$3 \times \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^4 \times \frac{2}{3} \right\} = \frac{2}{9}$$

② (1, 2, 2) 또는 (2, 2, 1)로 구분되는 경우

빨간색으로 시작하는 경우와 파란색으로 시작하는 경우가 있으
 므로 그 확률은

$$2 \times \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \right\} = \frac{8}{81}$$

③ (1, 3, 1)로 구분되는 경우

빨간색으로 시작하는 경우와 파란색으로 시작하는 경우가 있으
 므로 그 확률은

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{81}$$

①, ②, ③에서 구분 영역이 3개일 확률은

$$\frac{2}{9} + \frac{8}{81} + \frac{4}{81} = \frac{10}{27}$$

4단계 확률 구하기

$$(i), (ii), (iii)에서 P(A) = \frac{11}{81} + \frac{20}{81} + \frac{10}{27} = \frac{61}{81}$$

$$(ii)에서 P(A \cap B) = \frac{20}{81}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{20}{81}}{\frac{61}{81}} = \frac{20}{61}$$

06 답 ④

1단계 조건부확률 이용하기

a 가 b 의 약수이면 $f(a)$ 는 $f(b)$ 의 약수인 사건을 A , $f(4)$ 가 짝수인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

2단계 $n(A), n(A \cap B)$ 의 값 구하기

모든 경우의 수는 집합 X 에서 집합 X 로의 함수 f 의 개수와 같으므로 4^4

a 가 b 의 약수이면 b 는 a 의 배수이므로 주어진 조건은

‘ $a \in X, b \in X$ 에 대하여 b 가 a 의 배수이면 $f(b)$ 는 $f(a)$ 의 배수이다.’로 바꾸어 나타낼 수 있다.

이때 $f(1)$ 의 값에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

(i) $f(1)=1$ 일 때, — 집합 X 의 원소를 약수와 배수의 관계로 나누어 생각한다.

2, 3, 4는 모두 1의 배수이므로 $f(2), f(3), f(4)$ 는 모두 $f(1)$, 즉 1의 배수이어야 한다.

1의 배수인 집합 X 의 원소는 1, 2, 3, 4이므로 $f(2)=1$ 또는

$f(2)=2$ 또는 $f(2)=3$ 또는 $f(2)=4$ 이다.

이때 각각의 경우에 대하여 $f(4)$ 는 $f(2)$ 의 배수이어야 하므로

$f(2), f(4)$ 의 순서쌍 $(f(2), f(4))$ 는 (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)이다.

한편 위의 순서쌍 각각에 대하여 $f(3)=1$ 또는 $f(3)=2$ 또는

$f(3)=3$ 또는 $f(3)=4$ 이므로 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 $8 \times 4 = 32$ 이고, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는 $5 \times 4 = 20$ 이다.

(ii) $f(1)=2$ 일 때,

2, 3, 4는 모두 1의 배수이므로 $f(2), f(3), f(4)$ 는 모두 $f(1)$, 즉 2의 배수이어야 한다.

2의 배수인 집합 X 의 원소는 2, 4이므로 $f(2)=2$ 또는 $f(2)=4$ 이다.

이때 각각의 경우에 대하여 $f(4)$ 는 $f(2)$ 의 배수이어야 하므로

$f(2), f(4)$ 의 순서쌍 $(f(2), f(4))$ 는 (2, 2), (2, 4), (4, 4)이다.

한편 위의 순서쌍 각각에 대하여 $f(3)=2$ 또는 $f(3)=4$ 이므로 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 $3 \times 2 = 6$ 이고, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수도 6이다.

(iii) $f(1)=3$ 일 때,

2, 3, 4는 모두 1의 배수이므로 $f(2), f(3), f(4)$ 는 모두 $f(1)$, 즉 3의 배수이어야 한다.

이때 3의 배수인 집합 X 의 원소는 3뿐이므로

$f(2)=f(3)=f(4)=3$ 이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 1이고, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는 0이다.

(iv) $f(1)=4$ 일 때,

2, 3, 4는 모두 1의 배수이므로 $f(2), f(3), f(4)$ 는 모두 $f(1)$, 즉 4의 배수이어야 한다.

이때 4의 배수인 집합 X 의 원소는 4뿐이므로

$f(2)=f(3)=f(4)=4$ 이어야 한다.

따라서 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 1이고, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는 1이다.

$$(i) \sim (iv)에서 n(A) = 32 + 6 + 1 + 1 = 40, n(A \cap B) = 20 + 6 + 1 = 27$$

3단계 확률 구하기

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{27}{4^4}}{\frac{40}{4^4}} = \frac{27}{40}$$

다른 풀이

1단계 주어진 조건을 만족시키는 경우 알기

집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 $f: X \rightarrow X$ 인 모든 함수 f 에서 $a \in X, b \in X$ 에 대하여 a 가 b 의 약수이면 $f(a)$ 는 $f(b)$ 의 약수이므로 $f(1) \leq f(2) \leq f(4), f(1) \leq f(3)$ 을 만족시킨다.

2단계 주어진 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수 구하기

(i) $f(1)=1$ 일 때,

$f(2), f(4)$ 는 1, 2, 4에 대응되거나 1, 3에 대응되어야 하고, 모두 1에 대응되는 경우는 중복이므로 가능한 경우의 수는

$${}_3H_2 + {}_2H_2 - 1 = {}_4C_2 + {}_3C_2 - 1 = 8$$

한편 $f(3)$ 은 모든 원소에 대응될 수 있으므로 가능한 경우의 수는 4 따라서 함수 f 의 개수는 $8 \times 4 = 32$

이때 $f(4)$ 가 짝수인 경우는

$f(4)=2$ 일 때, $f(2)$ 의 값은 1, 2의 2가지

$f(4)=4$ 일 때, $f(2)$ 의 값은 1, 2, 4의 3가지

이므로 $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는 $(2+3) \times 4 = 20$

(ii) $f(1)=2$ 일 때,

$f(2), f(4)$ 는 2 또는 4에 대응될 수 있으므로 가능한 경우의 수는

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$$

한편 $f(3)$ 은 2 또는 4에 대응될 수 있으므로 가능한 경우의 수는 2

따라서 함수 f 의 개수는 $3 \times 2 = 6$

이때 $f(4)$ 는 항상 짝수이므로 $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는 6

(iii) $f(1)=3$ 일 때,

$f(2)=f(3)=f(4)=3$ 이어야 하므로 함수 f 의 개수는 1

이때 $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 는 존재하지 않는다.

(iv) $f(1)=4$ 일 때,

$f(2)=f(3)=f(4)=4$ 이어야 하므로 함수 f 의 개수는 1

이때 $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는 1

(i)~(iv)에서 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 $32 + 6 + 1 + 1 = 40$ 이고, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는 $20 + 6 + 1 = 27$

3단계 확률 구하기

따라서 구하는 확률은 $\frac{27}{40}$

07 답 ④

1단계 조건부확률 이용하기

주어진 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8인 사건을 A , 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

2단계 $P(A)$ 의 값 구하기

주머니에서 숫자 1이 적힌 카드를 꺼낼 확률은 $\frac{1}{4}$

주머니에서 숫자 2 또는 3이 적힌 카드를 꺼낼 확률은 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

주머니에서 숫자 4가 적힌 카드를 꺼낼 확률은 $\frac{1}{4}$

주어진 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 8이 되려면 숫자 1이 적힌 카드를 2번, 숫자 4가 적힌 카드를 2번 꺼내거나 숫자 1이 적힌 카드를 1번, 숫자 2 또는 3이 적힌 카드를 2번, 숫자 4가 적힌 카드를 1번 꺼내거나 숫자 2 또는 3이 적힌 카드를 4번 꺼내야 한다.

(i) 숫자 1이 적힌 카드를 2번, 숫자 4가 적힌 카드를 2번 꺼낼 확률은

$$\left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \frac{4!}{2! \times 2!} = \frac{3}{128} \quad \text{상자 B에 흰 공 6개, 검은 공 2개가 들어 있다.}$$

(ii) 숫자 1이 적힌 카드를 1번, 숫자 2 또는 3이 적힌 카드를 2번, 숫자 4가 적힌 카드를 1번 꺼낼 확률은

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{4!}{2!} = \frac{3}{16} \quad \text{상자 B에 흰 공 5개, 검은 공 3개가 들어 있다.}$$

(iii) 숫자 2 또는 3이 적힌 카드를 4번 꺼낼 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} \quad \text{상자 B에 흰 공 4개, 검은 공 4개가 들어 있다.}$$

(i), (ii), (iii)에서 $P(A) = \frac{3}{128} + \frac{3}{16} + \frac{1}{16} = \frac{35}{128}$

3단계 $P(A \cap B)$ 의 값 구하기

상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 2가 되는 경우는 숫자 1이 적힌 카드를 2번, 숫자 4가 적힌 카드를 2번 꺼내는 경우이므로 (i)에서

$$P(A \cap B) = \frac{3}{128}$$

4단계 확률 구하기

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{128}}{\frac{35}{128}} = \frac{3}{35}$$

08 답 ④

1단계 a_{2k} 구하기

(i) $n = 2k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)일 때,

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{2k-m}{2k}$$

이때 $P(A \cap B) = \frac{l}{2k}$ ($l = 1, 2, 3, \dots, k$)이라 하자.

두 사건 A, B 가 서로 독립이라면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이어야 하므로

$$\frac{l}{2k} = \frac{1}{2} \times \frac{2k-m}{2k} \quad \therefore m = 2k - 2l$$

따라서 m 의 값은 2, 4, 6, ..., $2(k-1)$

$$\therefore a_{2k} = 2 + 4 + 6 + \dots + 2(k-1) \\ = \sum_{l=1}^{k-1} 2l = 2 \times \frac{(k-1)k}{2} = k(k-1)$$

2단계 a_{2k+1} 구하기

(ii) $n = 2k+1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$)일 때,

$$P(A) = \frac{k}{2k+1}, P(B) = \frac{2k+1-m}{2k+1}$$

이때 $P(A \cap B) = \frac{l}{2k+1}$ ($l = 1, 2, 3, \dots, k$)이라 하자.

두 사건 A, B 가 서로 독립이라면 $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ 이어야 하므로

$$\frac{l}{2k+1} = \frac{k}{2k+1} \times \frac{2k+1-m}{2k+1}$$

$$l(2k+1) = 2k^2 + k - km \quad \therefore m = 2k+1 - 2l - \frac{l}{k}$$

이때 m 이 자연수이므로 $l = k$ 이어야 한다.

$$\therefore m = 2k+1 - 2k - 1 = 0$$

이는 m 이 자연수라는 조건을 만족시키지 않으므로 n 은 홀수가 될 수 없다.

$$\therefore a_{2k+1} = 0$$

3단계 $\sum_{n=2}^{20} a_n$ 의 값 구하기

$$\therefore \sum_{n=2}^{20} a_n = \sum_{n=1}^{10} a_{2n} = \sum_{n=1}^{10} n(n-1) = \sum_{n=1}^{10} (n^2 - n) \\ = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{10 \times 11}{2} \\ = 385 - 55 = 330$$

09 답 61

1단계 조건부확률 이용하기

주어진 시행을 4번 반복한 후 점 P의 좌표가 0 이상인 사건을 A , 확인한 4개의 수의 곱이 홀수인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

2단계 $P(A)$ 의 값 구하기

주머니에서 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

주머니에서 짝수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은 $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(i) 확인한 4개의 수가 모두 홀수인 경우

점 P의 좌표는 항상 0 이상이므로 이때의 확률은

$${}_4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

(ii) 확인한 4개의 수가 홀수 3개, 짝수 1개인 경우

확인한 4개의 수가 1, 1, 1, 4인 경우만 제외하면 점 P의 좌표는 0 이상이므로 이때의 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 - \frac{4!}{3!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$$

(iii) 확인한 4개의 수가 홀수 2개, 짝수 2개인 경우

확인한 4개의 수가 3, 3, 2, 4 또는 3, 3, 2, 2 또는 3, 1, 2, 2일 때, 점 P의 좌표가 0 이상이므로 확인한 4개의 수가

$$3, 3, 2, 4 \text{ 일 확률은 } \frac{4!}{2!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{12}{4^4}$$

$$3, 3, 2, 2 \text{ 일 확률은 } \frac{4!}{2! \times 2!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{6}{4^4}$$

$$3, 1, 2, 2 \text{ 일 확률은 } \frac{4!}{2!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{12}{4^4}$$

$$\text{즉, 구하는 확률은 } \frac{12}{4^4} + \frac{6}{4^4} + \frac{12}{4^4} = \frac{30}{4^4} = \frac{15}{128}$$

(iv) 확인한 4개의 수가 홀수 1개, 짝수 3개이거나 모두 짝수인 경우

점 P의 좌표는 항상 0 미만이므로 이때의 확률은 0

$$(i) \sim (iv) \text{에서 } P(A) = \frac{1}{16} + \frac{15}{64} + \frac{15}{128} = \frac{53}{128}$$

3단계 $P(A \cap B)$ 의 값 구하기

확인한 4개의 수의 곱이 홀수이려면 4개의 수가 모두 홀수이어야 하므로 (i)에서

$$P(A \cap B) = \frac{1}{16}$$

4단계 $P(B|A)$ 의 값 구하기

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{53}{128}} = \frac{8}{53}$$

5단계 $p+q$ 의 값 구하기

따라서 $p = 53, q = 8$ 이므로

$$p+q = 61$$

01 ② 02 $\frac{15}{56}$ 03 ① 04 $\frac{18}{25}$ 05 $\frac{13}{25}$ 06 127
07 ④

01 답 ②

모든 경우의 수는 집합 X 에서 집합 Y 로의 모든 일대일함수 f 의 개수와 같으므로 ${}_8P_5=6720$

(가)에서 $f(2)=2$ 이므로 (나)를 만족시키려면 $f(1) \times f(3) \times f(4) \times f(5)$ 는 4의 배수이어야 한다.

(i) $f(1), f(3), f(4), f(5)$ 의 값 중에서 짝수는 4만 포함되는 경우

짝수인 4의 함숫값을 정하는 경우의 수는 4

홀수인 원소 3개를 택하는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$

즉, 일대일함수 f 의 개수는 $4 \times 24=96$

(ii) $f(1), f(3), f(4), f(5)$ 의 값 중에서 짝수는 8만 포함되는 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 일대일함수 f 의 개수는 96

(iii) $f(1), f(3), f(4), f(5)$ 의 값 중에서 짝수는 4와 6만 포함되는 경우

짝수인 4와 6의 함숫값을 정하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

홀수인 원소 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_4P_2=12$

즉, 일대일함수 f 의 개수는 $12 \times 12=144$

(iv) $f(1), f(3), f(4), f(5)$ 의 값 중에서 짝수는 4와 8만 포함되는 경우

(iii)과 같은 방법으로 하면 일대일함수 f 의 개수는 144

(v) $f(1), f(3), f(4), f(5)$ 의 값 중에서 짝수는 6과 8만 포함되는 경우

(iii)과 같은 방법으로 하면 일대일함수 f 의 개수는 144

(vi) $f(1), f(3), f(4), f(5)$ 의 값 중에서 짝수 4, 6, 8이 모두 포함되는 경우

짝수인 4, 6, 8의 함숫값을 정하는 경우의 수는 ${}_4P_3=24$

홀수인 원소 1개를 택하는 경우의 수는 4

즉, 일대일함수 f 의 개수는 $24 \times 4=96$

(i)~(vi)에서 조건을 만족시키는 일대일함수 f 의 개수는

$$96+96+144+144+144+96=720$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{720}{6720}=\frac{3}{28}$

02 답 $\frac{15}{56}$

모든 경우의 수는 8개의 공 중에서 2개를 동시에 꺼내고, 다시 넣는 시행을 2번 반복하는 경우의 수이므로 ${}_8C_2 \times {}_8C_2=28 \times 28=784$

이때 $A \subset B$ 이라면 $b_1 \leq a_1 < a_2 \leq b_2$ 이어야 한다.

(i) $a_1=1$ 일 때,

$b_1=1$ 이고, a_2, b_2 의 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$$1 \times {}_7H_2=1 \times {}_8C_2=28$$

(ii) $a_1=2$ 일 때,

b_1 의 값은 1, 2의 2가지이고, a_2, b_2 의 값은 3, 4, 5, 6, 7, 8 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$$2 \times {}_6H_2=2 \times {}_7C_2=2 \times 21=42$$

(iii) $a_1=3$ 일 때,

b_1 의 값은 1, 2, 3의 3가지이고, a_2, b_2 의 값은 4, 5, 6, 7, 8 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$$3 \times {}_5H_2=3 \times {}_6C_2=3 \times 15=45$$

(iv) $a_1=4$ 일 때,

b_1 의 값은 1, 2, 3, 4의 4가지이고, a_2, b_2 의 값은 5, 6, 7, 8 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$$4 \times {}_4H_2=4 \times {}_5C_2=4 \times 10=40$$

(v) $a_1=5$ 일 때,

b_1 의 값은 1, 2, 3, 4, 5의 5가지이고, a_2, b_2 의 값은 6, 7, 8 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$$5 \times {}_3H_2=5 \times {}_4C_2=5 \times 6=30$$

(vi) $a_1=6$ 일 때,

b_1 의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지이고, a_2, b_2 의 값은 7, 8 중에서 중복을 허용하여 2개를 택하면 되므로 그 경우의 수는

$$6 \times {}_2H_2=6 \times {}_3C_2=6 \times {}_3C_1=6 \times 3=18$$

(vii) $a_1=7$ 일 때,

b_1 의 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7의 7가지이고, a_2, b_2 의 값은 8의 1가지이므로 그 경우의 수는 7

(i)~(vii)에서 $A \subset B$ 인 경우의 수는 $28+42+45+40+30+18+7=210$

따라서 구하는 확률은 $\frac{210}{784}=\frac{15}{56}$

03 답 ①

모든 경우의 수는 7장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수이므로 7!

(가)에서 3이 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드는 0, 1, 2가 적혀 있는 3장의 카드 중 2장이다.

(i) 3이 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 1, 2가 적혀 있는 카드인 경우

3이 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 1, 2가 적혀 있는 카드가 오는 경우는 (1, 3, 2), (2, 3, 1)의 2가지

(나)에서 4가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 5, 6이 적혀 있는 카드가 오면 되므로 그 경우는 (5, 4, 6), (6, 4, 5)의 2가지

이 각각에 대하여 3이 적혀 있는 카드와 양옆의 카드를 1장으로 생각하고, 4가 적혀 있는 카드와 양옆의 카드를 1장으로 생각하여 남은 1장의 카드와 함께 3장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$3!=6$$

즉, 그 경우의 수는 $2 \times 2 \times 6=24$

(ii) 3이 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 0, 1이 적혀 있는 카드인 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 24

(iii) 3이 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 있는 카드가 0, 2가 적혀 있는 카드인 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 그 경우의 수는 24

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는 $24+24+24=72$

따라서 구하는 확률은 $\frac{72}{7!}$ 이므로 $p=72$

04 답 $\frac{18}{25}$

모든 경우의 수는 5장의 카드 중에서 1장을 꺼내는 시행을 3번 반복하는 경우의 수이므로

$$5 \times 5 \times 5=125$$

5개의 접시에 각각 한 개 이상의 쿠키가 담겨 있는 사건의 여사건은 빈 접시가 생기는 사건이다.

빈 접시가 생기는 경우는 다음과 같이 주머니에서 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 서로 같은지 다른지에 따라 나누어 생각할 수 있다.

- (i) 2개의 수는 같고, 1개의 수만 다른 경우
빈 접시가 생기는 경우는 1개의 다른 수가 서로 같은 2개의 수와 이
웃하는 경우이다.
2개의 같은 수를 정하는 경우의 수는 ${}_5C_1=5$
1개의 다른 수를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$
이 3개의 수를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$
즉, 그 경우의 수는 $5 \times 2 \times 3=30$
- (ii) 3개의 수가 모두 같은 경우
3개의 수가 모두 같은 경우의 수는 5
- (i), (ii)에서 빈 접시가 생기는 경우의 수는 $30+5=35$ 이므로 여사건의
확률은 $\frac{35}{125}=\frac{7}{25}$
따라서 구하는 확률은 $1-\frac{7}{25}=\frac{18}{25}$

05 답 13

- (i) ☆ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 2장 들어 있는 경우
- ① 첫 번째 시행에서 ☆ 모양의 스티커가 2개 붙어 있는 카드를 1장,
☆ 모양의 스티커가 1개 붙어 있는 카드를 1장 꺼내면 두 번째
시행에서는 ☆ 모양의 스티커가 2개 붙어 있는 카드를 1장, ☆
모양의 스티커가 붙어 있지 않은 카드를 1장 꺼내야 하므로 그
확률은
$$\frac{{}_1C_1 \times {}_1C_1}{{}_6C_2} \times \frac{{}_1C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} = \frac{1}{15} \times \frac{4}{15} = \frac{4}{225}$$
- ② 첫 번째 시행에서 ☆ 모양의 스티커가 1개 붙어 있는 카드를 1장,
☆ 모양의 스티커가 붙어 있지 않은 카드를 1장 꺼내면 두 번째
시행에서는 ☆ 모양의 스티커가 2개 붙어 있는 카드를 2장 꺼내
야 하므로 그 확률은
$$\frac{{}_1C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{4}{15} \times \frac{1}{15} = \frac{4}{225}$$
- ①, ②에서 ☆ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 2장 들어 있
을 확률은 $\frac{4}{225} + \frac{4}{225} = \frac{8}{225}$
- (ii) ☆ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 1장 들어 있는 경우
- ① 첫 번째 시행에서 ☆ 모양의 스티커가 2개 붙어 있는 카드를 1장,
☆ 모양의 스티커가 1개 붙어 있는 카드를 1장 꺼내면 두 번째
시행에서 ☆ 모양의 스티커가 붙어 있지 않은 카드를 2장 꺼내거나
☆ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드를 1장, ☆ 모양의 스티
커가 2개 붙어 있는 카드를 1장 꺼내야 하므로 그 확률은
$$\frac{{}_1C_1 \times {}_1C_1}{{}_6C_2} \times \left(\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} + \frac{{}_1C_1 \times {}_1C_1}{{}_6C_2} \right) = \frac{1}{15} \times \left(\frac{6}{15} + \frac{1}{15} \right) = \frac{7}{225}$$
- ② 첫 번째 시행에서 ☆ 모양의 스티커가 2개 붙어 있는 카드를 1장,
☆ 모양의 스티커가 붙어 있지 않은 카드를 1장 꺼내면 두 번째
시행에서 ☆ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드를 제외한 나머
지 5장의 카드 중에서 2장을 꺼내야 하므로 그 확률은
$$\frac{{}_1C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} = \frac{4}{15} \times \frac{10}{15} = \frac{40}{225}$$
- ③ 첫 번째 시행에서 ☆ 모양의 스티커가 1개 붙어 있는 카드를 1장,
☆ 모양의 스티커가 붙어 있지 않은 카드를 1장 꺼내면 두 번째
시행에서 ☆ 모양의 스티커가 2개 붙어 있는 카드를 1장, ☆ 모
양의 스티커가 2개 붙어 있는 카드를 제외한 나머지 4장의 카드
중에서 1장을 꺼내야 하므로 그 확률은
$$\frac{{}_1C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} = \frac{4}{15} \times \frac{8}{15} = \frac{32}{225}$$

- ④ 첫 번째 시행에서 ☆ 모양의 스티커가 붙어 있지 않은 카드를 2장
꺼내면 두 번째 시행에서 ☆ 모양의 스티커가 2개 붙어 있는 카
드를 1장, 나머지 5장의 카드 중에서 1장을 꺼내야 하므로 그 확
률은

$$\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_1C_1 \times {}_5C_1}{{}_6C_2} = \frac{6}{15} \times \frac{5}{15} = \frac{30}{225}$$

- ①~④에서 ☆ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 1장 들어 있
을 확률은 $\frac{7}{225} + \frac{40}{225} + \frac{32}{225} + \frac{30}{225} = \frac{109}{225}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{8}{225} + \frac{109}{225} = \frac{13}{25}$

06 답 127

a 가 b 의 배수이면 $f(a)$ 는 $f(b)$ 의 배수인 사건을 A , $f(4)$ 가 짝수인 사
건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

모든 경우의 수는 집합 X 에서 집합 X 로의 함수 f 의 개수와 같으므로
 5^5

이때 $f(1)$ 의 값에 따라 경우를 나누면 다음과 같다.

- (i) $f(1)=1$ 일 때, — 집합 X 의 원소를 약수와 배수의 관계로 나누어 생각한다.

2, 3, 4, 5가 모두 1의 배수이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 는 모두
 $f(1)$, 즉 1의 배수이어야 한다.

1의 배수인 집합 X 의 원소는 1, 2, 3, 4, 5이므로 $f(2)=1$ 또는
 $f(2)=2$ 또는 $f(2)=3$ 또는 $f(2)=4$ 또는 $f(2)=5$ 이다.

이때 각각의 경우에 대하여 $f(4)$ 는 $f(2)$ 의 배수이어야 하므로
 $f(2)$, $f(4)$ 의 순서쌍 $(f(2), f(4))$ 는 (1, 1), (1, 2), (1, 3),
(1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4), (5, 5)이다.

한편 위의 순서쌍 각각에 대하여 $f(3)=1$ 또는 $f(3)=2$ 또는
 $f(3)=3$ 또는 $f(3)=4$ 또는 $f(3)=5$ 이고, $f(5)=1$ 또는 $f(5)=2$
또는 $f(5)=3$ 또는 $f(5)=4$ 또는 $f(5)=5$ 이므로 조건을 만족시키
는 함수 f 의 개수는 $10 \times 5 \times 5=250$ 이고, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의
개수는 $5 \times 5 \times 5=125$ 이다.

- (ii) $f(1)=2$ 일 때,

2, 3, 4, 5가 모두 1의 배수이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 는 모두
 $f(1)$, 즉 2의 배수이어야 한다.

2의 배수인 집합 X 의 원소는 2, 4이므로 $f(2)=2$ 또는 $f(2)=4$ 이다.

이때 각각의 경우에 대하여 $f(4)$ 는 $f(2)$ 의 배수이어야 하므로
 $f(2)$, $f(4)$ 의 순서쌍 $(f(2), f(4))$ 는 (2, 2), (2, 4), (4, 4)이다.

한편 위의 순서쌍 각각에 대하여 $f(3)=2$ 또는 $f(3)=4$ 이고,
 $f(5)=2$ 또는 $f(5)=4$ 이므로 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는
 $3 \times 2 \times 2=12$ 이고, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수도 12이다.

- (iii) $f(1)=3$ 일 때,

2, 3, 4, 5가 모두 1의 배수이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 는 모두
 $f(1)$, 즉 3의 배수이어야 한다.

이때 3의 배수인 집합 X 의 원소는 3뿐이므로

$f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=3$ 이어야 한다.

즉, 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 1이고, $f(4)$ 가 짝수인 함
수 f 의 개수는 0이다.

- (iv) $f(1)=4$ 일 때,

2, 3, 4, 5가 모두 1의 배수이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ 는 모두
 $f(1)$, 즉 4의 배수이어야 한다.

이때 4의 배수인 집합 X 의 원소는 4뿐이므로

$f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=4$ 이어야 한다.

즉, 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 1이고, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는 1이다.

(v) $f(1)=5$ 일 때,

2, 3, 4, 5가 모두 1의 배수이므로 $f(2), f(3), f(4), f(5)$ 는 모두 $f(1)$, 즉 5의 배수이어야 한다.

이때 5의 배수인 집합 X 의 원소는 5뿐이므로

$f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=5$ 이어야 한다.

즉, 조건을 만족시키는 함수 f 의 개수는 1이고, $f(4)$ 가 짝수인 함수 f 의 개수는 0이다.

(i)~(v)에서 $n(A)=250+12+1+1+1=265$,

$n(A \cap B)=125+12+1=138$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{138}{5^5}}{\frac{265}{5^5}} = \frac{138}{265}$$

따라서 $p=265$, $q=138$ 이므로 $p-q=127$

07 답 ④

주어진 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 9인 사건을 A, 상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 3인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

주머니에서 숫자 1이 적힌 카드를 꺼낼 확률은 $\frac{1}{5}$

주머니에서 숫자 2가 적힌 카드를 꺼낼 확률은 $\frac{1}{5}$

주머니에서 숫자 3 또는 4가 적힌 카드를 꺼낼 확률은 $\frac{2}{5}$

주머니에서 숫자 5가 적힌 카드를 꺼낼 확률은 $\frac{1}{5}$

주어진 시행을 4번 반복한 후 상자 B에 들어 있는 공의 개수가 9가 되려면 숫자 1이 적힌 카드를 1번, 숫자 5가 적힌 카드를 3번 꺼내거나 숫자 2가 적힌 카드를 1번, 숫자 3 또는 4가 적힌 카드를 1번, 숫자 5가 적힌 카드를 2번 꺼내거나 숫자 3 또는 4가 적힌 카드를 3번, 숫자 5가 적힌 카드를 1번 꺼내야 한다.

(i) 숫자 1이 적힌 카드를 1번, 숫자 5가 적힌 카드를 3번 꺼낼 확률은

$$\left(\frac{1}{5}\right)^4 \times \frac{4!}{3!} = \frac{4}{625} \quad \text{상자 B에 흰 공 6개, 검은 공 3개가 들어 있다.}$$

(ii) 숫자 2가 적힌 카드를 1번, 숫자 3 또는 4가 적힌 카드를 1번, 숫자

5가 적힌 카드를 2번 꺼낼 확률은

$$\left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \frac{2}{5} \times \frac{4!}{2!} = \frac{24}{625} \quad \text{상자 B에 흰 공 6개, 검은 공 3개가 들어 있다.}$$

(iii) 숫자 3 또는 4가 적힌 카드를 3번, 숫자 5가 적힌 카드를 1번 꺼낼

확률은

$$\left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \frac{1}{5} \times \frac{4!}{3!} = \frac{32}{625}$$

(i), (ii), (iii)에서 $P(A) = \frac{4}{625} + \frac{24}{625} + \frac{32}{625} = \frac{60}{625}$

상자 B에 들어 있는 검은 공의 개수가 3이 되는 경우는 숫자 1이 적힌 카드를 1번, 숫자 5가 적힌 카드를 3번 꺼내거나 숫자 2가 적힌 카드를 1번, 숫자 3 또는 4가 적힌 카드를 1번, 숫자 5가 적힌 카드를 2번 꺼내는 경우이므로 (i), (ii)에서

$$P(A \cap B) = \frac{4}{625} + \frac{24}{625} = \frac{28}{625}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{28}{625}}{\frac{60}{625}} = \frac{7}{15}$$

05 이산확률변수와 이항분포

STEP 1 핵심 문제

66~67쪽

01 ⑤	02 2	03 ④	04 ②	05 $\frac{\sqrt{5}}{3}$	06 ③
07 35	08 ①	09 20	10 $67\sqrt{3}$	11 ④	12 11

01 답 ⑤

$$P(X=x) = \frac{k}{4x^2-1} = \frac{k}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right)$$

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1$$

$$\frac{k}{2} \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9}\right) \right\} = 1$$

$$\frac{k}{2} \left(1 - \frac{1}{9}\right) = 1, \quad \frac{4}{9}k = 1 \quad \therefore k = \frac{9}{4}$$

$$\therefore P(X < k) = P\left(X < \frac{9}{4}\right) = P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{9}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15} \right) = \frac{9}{10}$$

02 답 2

$$X^2 \leq 2X \text{에서 } X^2 - 2X \leq 0, X(X-2) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq X \leq 2$$

$$\therefore P(X^2 \leq 2X) = P(0 \leq X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + a = a + \frac{1}{4}$$

$$\text{즉, } a + \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \text{이므로 } a = \frac{5}{12}$$

확률의 총합은 1이고 $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{2}{3}$ 이므로

$$\frac{2}{3} + b = 1 \quad \therefore b = \frac{1}{3}$$

따라서 확률변수 X 의 평균은

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{12} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{5}{12} + 3 \times \frac{1}{3} = 2$$

03 답 ④

$k=0$, $k=2$ 일 때, $P(X=0)=P(X=2)=P(X=4)$

$k=1$ 일 때, $P(X=1)=P(X=3)$

즉, $P(X=0)=a$, $P(X=1)=b$ 라 할 때,

이산확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	a	b	a	b	a	1

확률의 총합은 1이므로 $3a+2b=1$ ㉠

이때 $E(X^2)=0^2 \times a + 1^2 \times b + 2^2 \times a + 3^2 \times b + 4^2 \times a$ 이고

$$E(X^2) = \frac{35}{6} \text{이므로}$$

$$20a+10b = \frac{35}{6} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(X=0) = \frac{1}{6}$$

04 답 ②

$$P(Y=0)=P(X=0)={}_4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$$

$$P(Y=1)=P(X=1)={}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$$

$$P(Y=2)=1-P(Y=0)-P(Y=1) \\ =1-\frac{1}{16}-\frac{1}{4}=\frac{11}{16}$$

즉, 이산확률변수 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	0	1	2	합계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{16}$	1

$$\therefore E(Y)=0\times\frac{1}{16}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{11}{16}=\frac{13}{8}$$

05 답 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

(i) $X=0$ 일 때,

처음 A 상자에서 흰 공을 꺼낸 후 다시 A 상자에서 흰 공을 꺼내는 경우이므로

$$P(X=0)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$

(ii) $X=1$ 일 때,

처음 A 상자에서 흰 공을 꺼낸 후 다시 A 상자에서 빨간 공을 꺼내거나 처음 A 상자에서 빨간 공을 꺼낸 후 B 상자에서 흰 공을 꺼내는 경우이므로

$$P(X=1)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

(iii) $X=2$ 일 때,

처음 A 상자에서 빨간 공을 꺼낸 후 B 상자에서도 빨간 공을 꺼내는 경우이므로

$$P(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X)=0\times\frac{1}{2}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

$$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{6}=1$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

06 답 ③

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9이다.

5장의 카드 중에서 2장을 택하는 모든 경우의 수는

$${}_5C_2=10$$

(i) $X=3$ 일 때,

꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수는 1, 2의 1가지이므로

$$P(X=3)=\frac{1}{10}$$

(ii) $X=4$ 일 때,

꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수는 1, 3의 1가지이므로

$$P(X=4)=\frac{1}{10}$$

(iii) $X=5$ 일 때,

꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수는 1, 4 또는 2, 3의 2가지이므로

$$P(X=5)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

(iv) $X=6$ 일 때,

꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수는 1, 5 또는 2, 4의 2가지이므로

$$P(X=6)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

(v) $X=7$ 일 때,

꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수는 2, 5 또는 3, 4의 2가지이므로

$$P(X=7)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$

(vi) $X=8$ 일 때,

꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수는 3, 5의 1가지이므로

$$P(X=8)=\frac{1}{10}$$

(vii) $X=9$ 일 때,

꺼낸 카드에 적혀 있는 두 수는 4, 5의 1가지이므로

$$P(X=9)=\frac{1}{10}$$

(i)~(vii)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	6	7	8	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

$$E(X)=3\times\frac{1}{10}+4\times\frac{1}{10}+5\times\frac{1}{5}+6\times\frac{1}{5}+7\times\frac{1}{5}+8\times\frac{1}{10}+9\times\frac{1}{10} \\ =6$$

$$\therefore E(Y)=E(2X+3)=2E(X)+3=2\times 6+3=15$$

07 답 35

확률변수 X 가 이항분포 $B(3, p)$ 를 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_3C_x p^x (1-p)^{3-x} \quad (x=0, 1, 2, 3)$$

$$\therefore P(X=3)={}_3C_3 p^3 = p^3$$

확률변수 Y 가 이항분포 $B(4, 2p)$ 를 따르므로 Y 의 확률질량함수는

$$P(Y=y)={}_4C_y (2p)^y (1-2p)^{4-y} \quad (y=0, 1, 2, 3, 4)$$

$$\therefore P(Y\geq 3)=P(Y=3)+P(Y=4)$$

$$={}_4C_3 (2p)^3 (1-2p) + {}_4C_4 (2p)^4 \\ =32p^3(1-2p) + 16p^4 \\ =-48p^4 + 32p^3$$

이때 $10P(X=3)=P(Y\geq 3)$ 에서

$$10p^3 = -48p^4 + 32p^3, \quad 48p^4 - 22p^3 = 0$$

$$2p^3(24p-11)=0 \quad \therefore p=\frac{11}{24} \quad (\because p>0)$$

따라서 $m=24$, $n=11$ 이므로

$$m+n=35$$

08 답 ①

$$E(2X-1)=5 \text{에서 } 2E(X)-1=5$$

$$2E(X)=6 \quad \therefore E(X)=3$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2 \\ =11-3^2=2 \quad (\because E(X^2)=11)$$

$$E(X)=3 \text{에서 } np=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$V(X)=2 \text{에서 } np(1-p)=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

$$\textcircled{㉑} \text{을 } \textcircled{㉒} \text{에 대입하면 } 3(1-p)=2, 1-p=\frac{2}{3} \quad \therefore p=\frac{1}{3}$$

$$\text{이를 } \textcircled{㉑} \text{에 대입하면 } \frac{1}{3}n=3 \quad \therefore n=9$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(9, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_9C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{9-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 9)$$

$$\therefore \frac{P(X=5)}{P(X=6)} = \frac{{}_9C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^4}{{}_9C_6 \left(\frac{1}{3}\right)^6 \left(\frac{2}{3}\right)^3} = 3$$

09 답 20

한 개의 주사위를 2번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

$|a-b|=2$ 를 만족시키는 a, b 의 순서쌍 (a, b) 은 $(1, 3), (3, 1), (2, 4), (4, 2), (3, 5), (5, 3), (4, 6), (6, 4)$ 의 8가지이므로 그 확률은

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{9} \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(90, \frac{2}{9}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 90 \times \frac{2}{9} = 20, V(X) = 90 \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{9} = \frac{140}{9} \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

$$\therefore E(8X) - V(3X) = 8E(X) - 3^2 V(X) \\ = 8 \times 20 - 9 \times \frac{140}{9} = 20 \quad \dots\dots \text{배점 30\%}$$

10 답 67√3

2개의 동전을 동시에 던져서 모두 앞면이 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(64, \frac{1}{4}\right)$ 을 따른다. $\dots\dots \text{배점 20\%}$

$$\therefore E(X) = 64 \times \frac{1}{4} = 16, V(X) = 64 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 12 \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

한 변의 길이가 X 인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}X^2$ 이므로 정삼각형의 넓이

의 기댓값은 $E\left(\frac{\sqrt{3}}{4}X^2\right)$ 이다. $\dots\dots \text{배점 20\%}$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \text{에서}$$

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 12 + 16^2 = 268 \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

$$\therefore E\left(\frac{\sqrt{3}}{4}X^2\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}E(X^2) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 268 = 67\sqrt{3} \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

개념 NOTE

한 변의 길이가 a 인 정삼각형의 넓이 S 는

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

11 답 ④

확률변수 X 의 확률질량함수가

$$P(X=x) = {}_{45}C_x \frac{2^{45-x}}{3^{45}} = {}_{45}C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{45-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 45)$$

이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(45, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

$$\text{따라서 } V(X) = 45 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 10 \text{이므로}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{10}$$

12 답 11

서로 다른 2개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

나오는 두 눈의 수를 각각 a, b 라 하면 두 눈의 수의 합이 10보다 큰 경우의 a, b 의 순서쌍 (a, b) 은 $(5, 6), (6, 5), (6, 6)$ 의 3가지이므로

[게임 1]을 한 번 할 때, 당첨될 확률은

$$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

즉, 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(20, \frac{1}{12}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 20 \times \frac{1}{12} \times \frac{11}{12} = \frac{55}{36} \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

5개의 동전을 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

5개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 4개 이상 나오는 경우는 앞면이 4개 나오는 경우 5가지, 앞면이 5개 나오는 경우 1가지에서 그 경우의 수

$$\hookrightarrow {}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$$

는 $5+1=6$ 이므로 [게임 2]를 한 번 할 때, 당첨될 확률은

$$\frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

즉, 확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(n, \frac{3}{16}\right)$ 을 따르므로

$$V(Y) = n \times \frac{3}{16} \times \frac{13}{16} = \frac{39}{256}n \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

이때 확률변수 Y 의 표준편차가 확률변수 X 의 표준편차보다 크면 확률변수 Y 의 분산이 확률변수 X 의 분산보다 크므로

$$\frac{39}{256}n > \frac{55}{36} \quad \therefore n > \frac{3520}{351} = 10.02\dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 11이다. $\dots\dots \text{배점 20\%}$

STEP 2 고난도 문제

| 68~72쪽

01 ⑤	02 ⑤	03 $\frac{3}{4}$	04 ②	05 37	06 $\frac{7}{10}$
07 $\frac{12}{7}$	08 $\frac{4}{3}$	09 78	10 5	11 ③	12 5
13 27	14 10	15 154	16 117	17 $\frac{45}{2}$	18 ②
19 ②	20 $\frac{8}{5}$	21 ③	22 15	23 ③	24 24
25 300	26 ①				

01 답 ⑤

(i) $X=1$ 일 때,

꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 수가 모두 1인 경우이므로 1이 적혀 있는 카드 2장을 꺼내면 된다.

$$\therefore P(X=1) = \frac{{}_3C_2}{{}_9C_2} = \frac{1}{12}$$

(ii) $X=2$ 일 때,

꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 수가 1, 2 또는 2, 2인 경우이므로 1이 적혀 있는 카드 1장과 2가 적혀 있는 카드 1장을 꺼내거나 2가 적혀 있는 카드 2장을 꺼내면 된다.

$$\therefore P(X=2) = \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_3C_2}{9C_2} = \frac{1}{3}$$

이때 확률변수 X 의 확률질량함수가 $P(X=x)=ax+b$ ($x=1, 2, 3$)

이므로 $P(X=1)=\frac{1}{12}$, $P(X=2)=\frac{1}{3}$ 에서

$$a+b=\frac{1}{12}, 2a+b=\frac{1}{3}$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a=\frac{1}{4}, b=-\frac{1}{6} \quad \therefore a-b=\frac{5}{12}$$

참고 (iii) $X=3$ 일 때,

꺼낸 2장의 카드에 적혀 있는 수가 1, 3 또는 2, 3 또는 3, 3인 경우이므로 1이 적혀 있는 카드 1장과 3이 적혀 있는 카드 1장을 꺼내거나 2가 적혀 있는 카드 1장과 3이 적혀 있는 카드 1장을 꺼내거나 3이 적혀 있는 카드 2장을 꺼내면 된다.

$$\therefore P(X=3) = \frac{{}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_3C_1 \times {}_3C_1 + {}_3C_2}{9C_2} = \frac{7}{12}$$

다른 풀이

(ii) $X=2$ 일 때,

1 또는 2가 적혀 있는 카드에서만 2장을 꺼내는 경우에서 1이 적혀 있는 카드만 2장을 꺼내는 경우를 제외한 것과 같으므로

$$P(X=2) = \frac{{}_6C_2 - {}_3C_2}{9C_2} = \frac{1}{3}$$

(iii) $X=3$ 일 때,

9장의 카드 중에서 2장을 꺼내는 경우에서 1 또는 2가 적혀 있는 카드에서만 2장을 꺼내는 경우를 제외한 것과 같으므로

$$P(X=3) = \frac{{}_9C_2 - {}_6C_2}{9C_2} = \frac{7}{12}$$

02 답 ⑤

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{a-4}{12} + \frac{a-5}{12} + \frac{a-6}{12} = 1$$

$$\frac{3a-15}{12} = \frac{1}{2}, 3a-15=6$$

$$3a=21 \quad \therefore a=7$$

$$\therefore P(X=x) = \begin{cases} \frac{x}{12} & (x=1, 2, 3) \\ \frac{7-x}{12} & (x=4, 5, 6) \end{cases}$$

$\neg$. $f(1)=P(X \geq 1)=1$ — 확률의 총합은 1이다.

$$f(5)=P(X \geq 5)=P(X=5)+P(X=6)=\frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore f(1)=4f(5)$$

$$\neg$$
. $f(k)=P(X \geq k)=P(X=k)+P(X \geq k+1)$

$$=P(X=k)+f(k+1)$$

$$\therefore P(X=k)=f(k)-f(k+1) \quad (k=1, 2, 3, 4, 5)$$

$$\begin{aligned} \text{ㄷ. } E(X) &= P(X=1) + 2P(X=2) + 3P(X=3) + 4P(X=4) \\ &\quad + 5P(X=5) + 6P(X=6) \end{aligned}$$

$$= \{f(1)-f(2)\} + 2\{f(2)-f(3)\} + 3\{f(3)-f(4)\} + 4\{f(4)-f(5)\} + 5\{f(5)-f(6)\} + 6f(6) \quad (\because \neg)$$

$$= f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, ㄷ 이다.

03 답 $\frac{3}{4}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

한 개의 동전을 4번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$$

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하자.

(i) $X=0$ 일 때,

HTHT, THTH의 2가지이므로

$$P(X=0) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

(ii) $X=1$ 일 때,

HHTH, THHT, HTHH, TTHT, HTTH, THTT의 6가지이므로

$$P(X=1) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

(iii) $X=2$ 일 때,

HHHT, THHH, HTTT, TTTH, HHTT, TTHH의 6가지이므로

$$P(X=2) = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

(iv) $X=3$ 일 때,

HHHH, TTTT의 2가지이므로

$$P(X=3) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

(i)~(iv)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

04 답 ②

$n=3$ 일 때, 점 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 는 호 AB를

6등분 하므로 부채꼴 OAB를 6등분 한 부채

꼴 1개의 넓이는

$$\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{24}$$

(i) 점 P_1 또는 P_5 를 선택할 때,

X 는 6등분 한 부채꼴 5개의 넓이의 합에

서 6등분 한 부채꼴 1개의 넓이를 뺀 값과 같으므로

$$X = 5 \times \frac{\pi}{24} - \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{6}$$

(ii) 점 P_2 또는 P_4 를 선택할 때,

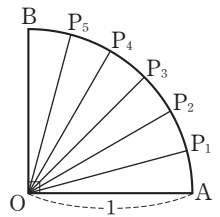
X 는 6등분 한 부채꼴 4개의 넓이의 합에서 6등분 한 부채꼴 2개의 넓이의 합을 뺀 값과 같으므로

$$X = 4 \times \frac{\pi}{24} - 2 \times \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$$

(iii) 점 P_3 를 선택할 때,

X 는 6등분 한 부채꼴 3개의 넓이의 합에서 6등분 한 부채꼴 3개의 넓이의 합을 뺀 값과 같으므로

$$X=0$$



(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + \frac{\pi}{12} \times \frac{2}{5} + \frac{\pi}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{\pi}{10}$$

05 답 37

5개의 공 중에서 4개를 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_5C_4 = {}_5C_1 = 5$

(i) $n=4$ 또는 $n=5$ 일 때,

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 n , 6이다.

① $X=n$ 일 때,

1, 2, 3, n 이 적혀 있는 공을 꺼내는 경우 1가지이므로

$$P(X=n) = \frac{1}{5}$$

② $X=6$ 일 때,

6이 적혀 있는 공을 꺼내고 나머지 1, 2, 3, n 이 적혀 있는 공 중에서 3개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는 ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

$$\therefore P(X=6) = \frac{4}{5}$$

①, ②에서 $f(n) = n \times \frac{1}{5} + 6 \times \frac{4}{5} = \frac{n+24}{5}$

(ii) $n > 6$ 일 때,

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 6, n 이다.

① $X=6$ 일 때,

1, 2, 3, 6이 적혀 있는 공을 꺼내는 경우 1가지이므로

$$P(X=6) = \frac{1}{5}$$

② $X=n$ 일 때,

n 이 적혀 있는 공을 꺼내고 나머지 1, 2, 3, 6이 적혀 있는 공 중에서 3개를 꺼내면 되므로 그 경우의 수는 ${}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

$$\therefore P(X=n) = \frac{4}{5}$$

①, ②에서 $f(n) = 6 \times \frac{1}{5} + n \times \frac{4}{5} = \frac{4n+6}{5}$

(i), (ii)에서

$$f(4) + f(5) + f(14) + f(15) = \frac{28}{5} + \frac{29}{5} + \frac{62}{5} + \frac{66}{5} = 37$$

06 답 $\frac{7}{10}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

(i) $X=0$ 일 때,

첫 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수와 두 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 모두 다른 경우이므로 두 번째에는 첫 번째 나온 공을 제외한 7개의 공 중에서 3개를 택하면 된다.

$$\therefore P(X=0) = 1 \times \frac{{}_7C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{24}$$

(ii) $X=1$ 일 때,

첫 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수와 두 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수 중 1개는 같고 나머지 2개는 다른 경우이므로 두 번째에는 첫 번째 나온 3개의 공 중에서 1개를 택하고 나머지 7개의 공 중에서 2개를 택하면 된다.

$$\therefore P(X=1) = 1 \times \frac{{}_3C_1 \times {}_7C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{21}{40}$$

(iii) $X=2$ 일 때,

첫 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수와 두 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수 중 2개는 같고 나머지 1개는 다른 경우이므로 두 번째에는 첫 번째 나온 3개의 공 중에서 2개를 택하고 나머지 7개의 공 중에서 1개를 택하면 된다.

$$\therefore P(X=2) = 1 \times \frac{{}_3C_2 \times {}_7C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{7}{40}$$

(iv) $X=3$ 일 때,

첫 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수와 두 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수가 모두 같은 경우이므로 두 번째에는 첫 번째 나온 공을 택하면 된다.

$$\therefore P(X=3) = 1 \times \frac{1}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{120}$$

(i)~(iv)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{24}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{120}$	1

배점 60%

$$E(X) = 0 \times \frac{7}{24} + 1 \times \frac{21}{40} + 2 \times \frac{7}{40} + 3 \times \frac{1}{120} = \frac{9}{10}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{7}{24} + 1^2 \times \frac{21}{40} + 2^2 \times \frac{7}{40} + 3^2 \times \frac{1}{120} = \frac{13}{10}$$

배점 20%

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{13}{10} - \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{49}{100}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{7}{10} \quad \text{배점 20\%}$$

07 답 $\frac{12}{7}$

오른쪽 방향으로 1칸 움직이는 것을 a , 위쪽 방향으로 1칸 움직이는 것을 b 라 하면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 이동하는 모든 경우의 수는 a, a, a, b, b, b 를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{7!}{3! \times 4!} = 35$$

이때 진행 방향이 오른쪽에서 위쪽으로 바뀌는 경우는 a 바로 뒤에 b 가 오는 경우이다.

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

(i) $X=0$ 일 때,

$$bbbaaa \text{의 1가지이므로 } P(X=0) = \frac{1}{35}$$

(ii) $X=1$ 일 때,

a 가 올 수 있는 자리를 $\bigcirc$, b 가 올 수 있는 자리를 $\times$ 로 나타내면 $\times \bigcirc ab \times \bigcirc$ 에서 $\bigcirc$ 의 자리에 2개의 a 를, $\times$ 의 자리에 3개의 b 를 중복을 허용하여 배열하는 경우의 수는

$${}_2H_2 \times {}_2H_3 = {}_3C_2 \times {}_4C_3 = {}_3C_1 \times {}_4C_1 = 3 \times 4 = 12 \quad \therefore P(X=1) = \frac{12}{35}$$

(iii) $X=2$ 일 때,

$\times \bigcirc ab \times \bigcirc ab \times \bigcirc$ 에서 $\bigcirc$ 의 자리에 1개의 a 를, $\times$ 의 자리에 2개의 b 를 중복을 허용하여 배열하는 경우의 수는

$${}_3H_1 \times {}_3H_2 = {}_3C_1 \times {}_4C_2 = 3 \times 6 = 18 \quad \therefore P(X=2) = \frac{18}{35}$$

(iv) $X=3$ 일 때,

$\times ab \times ab \times ab \times$ 에서 $\times$ 의 자리에 1개의 b 를 중복을 허용하여 배열하는 경우의 수는

$${}_4H_1 = {}_4C_1 = 4 \quad \therefore P(X=3) = \frac{4}{35}$$

(i)~(iv)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{4}{35}$	1

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{35} + 1 \times \frac{12}{35} + 2 \times \frac{18}{35} + 3 \times \frac{4}{35} = \frac{12}{7}$$

08 답 4

한 개의 주사위를 2번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

(i) 두 점 A, B가 서로 같을 때,

두 점 A, B 사이의 거리는 0이므로

$$X = 0^2 = 0$$

이때 두 점 A, B가 서로 같은 경우는 1, 2, ..., 6의 6가지이므로

$$P(X=0) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(ii) 두 점 A, B가 정팔면체의 한 모서리의 양 끝 점일 때,

두 점 A, B 사이의 거리는 1이므로

$$X = 1^2 = 1$$

이때 정팔면체의 모서리는 12개이고 한 모서리를 택하는 경우는 2개
주사위에서 나오는 두 눈의 수가 1, 3인 경우와 3, 1인 경우는 같은 모서리가 된다.

$$\therefore P(X=1) = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$$

(iii) (i), (ii)가 아닐 때,

① 두 점 3, 4 또는 5, 6을 택하는 경우

두 점 사이의 거리는 $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

② 두 점 1, 2를 택하는 경우

정팔면체를 반으로 잘랐을 때 생기는 정사각형의 높이는

$$\sqrt{1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{이므로 두 점 사이의 거리는 } \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}$$

①, ②에서 $X = (\sqrt{2})^2 = 2$

$$\therefore P(X=2) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{2}{3} + 2 \times \frac{1}{6} = 1$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{2}{3} + 2^2 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{4}{3} - 1^2 = \frac{1}{3}$$

$$\therefore E(X) + V(X) = \frac{4}{3}$$

다른 풀이

(i) 두 점 A, B가 서로 같은 점일 확률은

$$1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

(ii) 두 점 A, B가 이웃한 점일 확률은

$$1 \times \frac{4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(iii) 두 점 A, B가 마주 보는 점일 확률은

$$1 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

09 답 78

확률의 총합은 1이므로 $a+b+c+b+a=1$

$$\therefore 2a+2b+c=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$E(X) = 1 \times a + 3 \times b + 5 \times c + 7 \times b + 9 \times a$$

$$= 10a + 10b + 5c = 5(2a + 2b + c)$$

$$= 5 \times 1 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 5$$

$$E(X^2) = 1^2 \times a + 3^2 \times b + 5^2 \times c + 7^2 \times b + 9^2 \times a$$

$$= 82a + 58b + 25c$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \text{에서}$$

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2$$

$$\text{이때 } V(X) = \frac{31}{5} \text{이므로}$$

$$82a + 58b + 25c = \frac{31}{5} + 5^2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$E(Y) = 1 \times \left(a + \frac{1}{20}\right) + 3 \times b + 5 \times \left(c - \frac{1}{10}\right) + 7 \times b + 9 \times \left(a + \frac{1}{20}\right)$$

$$= 10a + 10b + 5c = 5(2a + 2b + c)$$

$$= 5 \times 1 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= 5$$

$$E(Y^2) = 1^2 \times \left(a + \frac{1}{20}\right) + 3^2 \times b + 5^2 \times \left(c - \frac{1}{10}\right) + 7^2 \times b$$

$$+ 9^2 \times \left(a + \frac{1}{20}\right)$$

$$= 82a + 58b + 25c + \frac{8}{5}$$

$$= \frac{31}{5} + 5^2 + \frac{8}{5} \quad (\because \textcircled{2})$$

$$= 25 + \frac{39}{5}$$

$$\therefore V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2$$

$$= 25 + \frac{39}{5} - 5^2$$

$$= \frac{39}{5}$$

$$\therefore 10 \times V(Y) = 78$$

10 답 5

$$kP(Y=k) = aP(X=k) + \frac{a}{4} \quad (k=1, 2, 3, 4) \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^4 kP(Y=k) = \sum_{k=1}^4 \left\{ aP(X=k) + \frac{a}{4} \right\}$$

$$\text{이때 } \sum_{k=1}^4 kP(Y=k) = E(Y) \text{이고,}$$

$$\sum_{k=1}^4 \left\{ aP(X=k) + \frac{a}{4} \right\} = a \sum_{k=1}^4 P(X=k) + \frac{a}{4} \sum_{k=1}^4 1$$

$$= a + \frac{a}{4} \times 4 \quad \xrightarrow{\text{확률의 총합은 1이므로}} \sum_{k=1}^4 P(X=k) = 1$$

$$= 2a$$

$$\text{이므로 } E(Y) = 2a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

한편 주어진 등식의 양변에 k 를 곱하면

$$k^2P(Y=k) = akP(X=k) + \frac{a}{4}k \quad (k=1, 2, 3, 4)$$

$$\sum_{k=1}^4 k^2P(Y=k) = \sum_{k=1}^4 \left\{ akP(X=k) + \frac{a}{4}k \right\}$$

$$\text{이때 } \sum_{k=1}^4 k^2P(Y=k) = E(Y^2) \text{이고,}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^4 \left\{ akP(X=k) + \frac{a}{4}k \right\} &= a \sum_{k=1}^4 kP(X=k) + \frac{a}{4} \sum_{k=1}^4 k \\ &= aE(X) + \frac{a}{4} \times 10 \\ &= \frac{a}{2} + \frac{5}{2}a \left(\because E(X) = \frac{1}{2} \right) \\ &= 3a\end{aligned}$$

이므로 $E(Y^2) = 3a$ ㉔

㉓, ㉔에서 $V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = 3a - (2a)^2 = 3a - 4a^2$

$E(Y) = V(Y)$ 에서

$$2a = 3a - 4a^2, \quad 4a^2 - a = 0$$

$$a(4a - 1) = 0 \quad \therefore a = 0 \text{ 또는 } a = \frac{1}{4}$$

그런데 $a = 0$ 이면 $P(Y = k) = 0$ ($k = 1, 2, 3, 4$)이므로 확률의 성질을 만족시키지 않는다.

따라서 $a = \frac{1}{4}$ 이므로 $20a = 5$

11 답 ③

$Y = 10X - 2.31$ 이라 하면

$X = 0.131$ 일 때, $Y = 10 \times 0.131 - 2.31 = -1$

$X = 0.231$ 일 때, $Y = 10 \times 0.231 - 2.31 = 0$

$X = 0.331$ 일 때, $Y = 10 \times 0.331 - 2.31 = 1$

이므로 확률변수 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	-1	0	1	합계
$P(Y=y)$	a	b	$\frac{1}{2}$	1

$$\therefore E(Y) = -1 \times a + 0 \times b + 1 \times \frac{1}{2} = -a + \frac{1}{2}$$

한편 $E(X) = 0.256$ 이므로

$$\begin{aligned}E(Y) &= E(10X - 2.31) = 10E(X) - 2.31 \\ &= 10 \times 0.256 - 2.31 = 0.25\end{aligned}$$

$$\text{즉, } -a + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{이므로 } a = \frac{1}{4}$$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{4} + b + \frac{1}{2} = 1 \quad \therefore b = \frac{1}{4}$$

$$\text{이때 } E(Y^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{4} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$V(Y) = E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{11}{16}$$

따라서 $V(Y) = V(10X - 2.31) = 10^2 V(X)$ 이므로

$$V(X) = \frac{1}{100} V(Y) = \frac{11}{1600}$$

12 5

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하지 않으려면 함숫값이 같은 경우가 존재해야 한다.

(i) $f(1) = f(2)$ 인 경우

$$\frac{1}{4} = a - \frac{3}{4}a^2, \quad 3a^2 - 4a + 1 = 0$$

$$(3a - 1)(a - 1) = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{3} \text{ 또는 } a = 1$$

이때 확률의 총합은 1이므로 $f(1) + f(2) + f(3) = 1$ 에서

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + b = 1 \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

(ii) $f(1) = f(3)$ 인 경우

확률의 총합은 1이므로 $f(1) + f(2) + f(3) = 1$ 에서

$$2f(1) + f(2) = 1, \quad \frac{1}{2} + a - \frac{3}{4}a^2 = 1$$

$$\therefore 3a^2 - 4a + 2 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = (-2)^2 - 3 \times 2 = -2 < 0$$

즉, 이를 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않는다.

(iii) $f(2) = f(3)$ 인 경우

확률의 총합은 1이므로 $f(1) + f(2) + f(3) = 1$ 에서

$$f(1) + 2f(2) = 1, \quad \frac{1}{4} + 2a - \frac{3}{2}a^2 = 1$$

$$\therefore 6a^2 - 8a + 3 = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = (-4)^2 - 6 \times 3 = -2 < 0$$

즉, 이를 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & (x=1) \\ \frac{1}{4} & (x=2) \\ \frac{1}{2} & (x=3) \end{cases}$$

$$\text{따라서 } E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4} \text{이므로}$$

$$E(2X + b) = E\left(2X + \frac{1}{2}\right) = 2E(X) + \frac{1}{2} = 2 \times \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = 5$$

13 27

n 개의 자연수 중에서 서로 다른 3개의 수를 동시에 택하는 모든 경우의 수는 ${}_nC_3$

이때 세 수 중 두 번째로 큰 수가 확률변수 X 이므로 $X = x$ 이면 나머지 두 수는 x 보다 큰 수 $(n-x)$ 개 중에서 하나를 택하고 x 보다 작은 수 $(x-1)$ 개 중에서 하나를 택하면 된다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X=x) &= \frac{{}_{n-x}C_1 \times {}_{x-1}C_1}{{}_nC_3} \\ &= \frac{(n-x)(x-1)}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \\ &= \frac{-6\{x^2 - (n+1)x + n\}}{n(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{-6}{n(n-1)(n-2)} \left\{ \left(x - \frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{(n-1)^2}{4} \right\} \\ &\quad (x=2, 3, 4, \dots, n-1)\end{aligned}$$

즉, $P(X=x)$ 는 $x = \frac{n+1}{2}$ 에서 최대이므로

$$\frac{n+1}{2} = 4 \quad \therefore n = 7$$

따라서 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = \frac{-x^2 + 8x - 7}{35} \quad (x=2, 3, 4, 5, 6)$$

$$\begin{aligned}\therefore E(X) &= 2P(X=2) + 3P(X=3) + 4P(X=4) + 5P(X=5) \\ &\quad + 6P(X=6)\end{aligned}$$

$$= 2 \times \frac{1}{7} + 3 \times \frac{8}{35} + 4 \times \frac{9}{35} + 5 \times \frac{8}{35} + 6 \times \frac{1}{7} = 4$$

$$\therefore E(7X - 1) = 7E(X) - 1 = 7 \times 4 - 1 = 27$$

14 답 10

4개의 공 중에서 1개의 공을 꺼내는 과정을 2번 반복하는 모든 경우의 수는 ${}_4C_1 \times {}_4C_1 = 4 \times 4 = 16$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ 이다.

(i) $X = -3$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 4)$ 의 1가지이므로

$$P(X = -3) = \frac{1}{16}$$

(ii) $X = -2$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 3), (2, 4)$ 의 2가지이므로

$$P(X = -2) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

(iii) $X = -1$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 2), (2, 3), (3, 4)$ 의 3가지이므로

$$P(X = -1) = \frac{3}{16}$$

(iv) $X = 0$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$ 의 4가지이므로

$$P(X = 0) = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

(v) $X = 1$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(2, 1), (3, 2), (4, 3)$ 의 3가지이므로

$$P(X = 1) = \frac{3}{16}$$

(vi) $X = 2$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(3, 1), (4, 2)$ 의 2가지이므로

$$P(X = 2) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

(vii) $X = 3$ 일 때,

순서쌍 (a, b) 는 $(4, 1)$ 의 1가지이므로

$$P(X = 3) = \frac{1}{16}$$

(i)~(vii)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-3	-2	-1	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	1

$$\begin{aligned} E(X) &= -3 \times \frac{1}{16} + (-2) \times \frac{1}{8} + (-1) \times \frac{3}{16} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{3}{16} \\ &\quad + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{1}{16} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= (-3)^2 \times \frac{1}{16} + (-2)^2 \times \frac{1}{8} + (-1)^2 \times \frac{3}{16} + 0^2 \times \frac{1}{4} \\ &\quad + 1^2 \times \frac{3}{16} + 2^2 \times \frac{1}{8} + 3^2 \times \frac{1}{16} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{5}{2}$$

$$\therefore V(Y) = V(2X+1) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{5}{2} = 10$$

15 답 154

A, B, C, D, E가 받은 카드의 숫자를 차례로 a, b, c, d, e 라 하자.

임의로 n 명의 숫자를 비교했을 때, 각자의 숫자가 가장 클 확률은 $\frac{1}{n}$ 으로 서로 같다.

(i) $X=0$ 일 때, 즉 A가 B에게 지는 경우

$$a, b \text{ 중 } b \text{가 커야 하므로 } P(X=0) = \frac{1}{2}$$

(ii) $X=1$ 일 때, 즉 A가 B를 이기고 C에게 지는 경우

a, b, c 중 c 가 가장 크고 나머지 중 a 가 커야 하므로

$$P(X=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

(iii) $X=2$ 일 때, 즉 A가 B, C를 이기고 D에게 지는 경우

a, b, c, d 중 d 가 제일 크고 나머지 중 a 가 가장 커야 하므로

$$P(X=2) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

(iv) $X=3$ 일 때, 즉 A가 B, C, D를 이기고 E에게 지는 경우

a, b, c, d, e 중 e 가 제일 크고 나머지 중 a 가 가장 커야 하므로

$$P(X=3) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

(v) $X=4$ 일 때, 즉 A가 B, C, D, E를 모두 이기는 경우

$$a, b, c, d, e \text{ 중 } a \text{가 가장 커야 하므로 } P(X=4) = \frac{1}{5}$$

즉, 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	1

따라서

$$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore p = \frac{3}{4}$$

$$\therefore E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{12} + 3 \times \frac{1}{20} + 4 \times \frac{1}{5} = \frac{77}{60}$$

$$\therefore E\left(\frac{90X}{p}\right) = \frac{90}{p} E(X) = 90 \times \frac{4}{3} \times \frac{77}{60} = 154$$

16 답 117

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5이다.

주머니에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적혀 있는 수가 2, 3, 4일

확률은 각각 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ 이다.

(i) $X=5$ 일 때,

네 번째 시행까지 모두 2가 적혀 있는 공을 꺼내면 공에 적혀 있는 수의 합이 8이고, 이때 다섯 번째 시행에서는 어떤 공을 꺼내도 공에 적혀 있는 수의 합이 9 이상이다.

$$\therefore P(X=5) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

(ii) $X=4$ 일 때,

① 세 번째 시행까지 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 합이 6인 경우

세 번째 시행까지 모두 2가 적혀 있는 공을 꺼내고 네 번째 시행에서 3 또는 4가 적혀 있는 공을 꺼내면 되므로 그 확률은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

② 세 번째 시행까지 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 합이 7인 경우

세 번째 시행까지 2가 적혀 있는 공을 2번, 3이 적혀 있는 공을 1번 꺼내고 네 번째 시행에서는 어떤 공을 꺼내도 된다.

이때 세 번째 시행까지 공을 꺼내는 순서를 정하는 경우의 수가

${}_3C_1$ 이므로 그 확률은

$${}_3C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

같은 것 2개를 포함한 3개의 순서를 정하는 경우이므로 $\frac{3!}{2!}$ 로 구할 수도 있다.

③ 세 번째 시행까지 꺼낸 공에 적혀 있는 수의 합이 8인 경우
세 번째 시행까지 2가 적혀 있는 공을 2번, 4가 적혀 있는 공을
1번 꺼내거나 2가 적혀 있는 공을 1번, 3이 적혀 있는 공을 2번
꺼내고, 네 번째 시행에서는 어떤 공을 꺼내도 된다.

이때 세 번째 시행까지 공을 꺼내는 순서를 정하는 경우의 수가
 ${}_3C_1$ 이므로 그 확률은

$${}_3C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{4} + {}_3C_1 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} + \frac{3}{32} = \frac{9}{32}$$

$$\textcircled{i}, \textcircled{ii}, \textcircled{iii} \text{에서 } P(X=4) = \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{9}{32} = \frac{17}{32}$$

(iii) $X=3$ 일 때,

$$\begin{aligned} P(X=3) &= 1 - \{P(X=5) + P(X=4)\} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{17}{32}\right) = \frac{13}{32} \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{13}{32}$	$\frac{17}{32}$	$\frac{1}{16}$	1

$$\therefore E(X) = 3 \times \frac{13}{32} + 4 \times \frac{17}{32} + 5 \times \frac{1}{16} = \frac{117}{32}$$

$$\therefore E(32X) = 32E(X) = 32 \times \frac{117}{32} = 117$$

17 답 $\frac{45}{2}$

가위바위보를 한 번 시행했을 때 A가 이길 확률은

$$(i) \text{ A는 가위, B는 보를 내는 경우 } \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$(ii) \text{ A는 바위, B는 가위를 내는 경우 } \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$$

$$(iii) \text{ A는 보, B는 바위를 내는 경우 } \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

$$(i), (ii), (iii) \text{에서 } \frac{1}{4} + \frac{1}{24} + \frac{1}{12} = \frac{3}{8}$$

가위바위보를 n 회 시행했을 때 A가 이기는 횟수를 확률변수 Y 라 하면
확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(n, \frac{3}{8}\right)$ 을 따른다.

이때 A는 Y 번 이기고 $(n-Y)$ 번 지거나 비겼으므로

$$A \text{가 얻는 점수의 합은 } X = 3Y + (n-Y) = n + 2Y$$

$$\text{즉, } E(X) = E(n + 2Y) = n + 2E(Y) \text{이고,}$$

$$E(Y) = n \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}n \text{이므로}$$

$$E(X) = n + 2 \times \frac{3}{8}n = \frac{7}{4}n$$

$$\text{그런데 } E(X) = 42 \text{이므로 } \frac{7}{4}n = 42 \text{에서 } n = 24$$

$$\therefore V(Y) = 24 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = \frac{45}{8}$$

$$\therefore V(X) = V(n + 2Y) = V(24 + 2Y) = 4V(Y) = 4 \times \frac{45}{8} = \frac{45}{2}$$

18 답 ②

화살을 한 번 쏠 때, 10점을 얻은 확률이 $\frac{2}{5}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분

포 $B\left(100, \frac{2}{5}\right)$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 100 \times \frac{2}{5} = 40, V(X) = 100 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = 24$$

$$\text{이때 } V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \text{에서}$$

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 24 + 40^2 = 1624$$

$$\therefore \sum_{k=0}^{100} (k-2)^2 P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{100} (k^2 - 4k + 4) P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{100} k^2 P(X=k) - 4 \sum_{k=0}^{100} k P(X=k) + 4 \sum_{k=0}^{100} P(X=k)$$

$$= E(X^2) - 4E(X) + 4 \times 1$$

$$= 1624 - 4 \times 40 + 4 = 1468$$

19 답 ②

확률변수 X 가 이항분포 $B(n, p)$ 를 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_nC_x p^x (1-p)^{n-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, n)$$

$$P(X=1) = \frac{4}{5} P(X=2) \text{에서}$$

$${}_nC_1 p (1-p)^{n-1} = \frac{4}{5} \times {}_nC_2 p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$np(1-p)^{n-1} = \frac{4}{5} \times \frac{n(n-1)}{2} \times p^2 (1-p)^{n-2}$$

$$1-p = \frac{2}{5}(n-1)p \quad (\because n \neq 0, 0 < p < 1)$$

$$\therefore \frac{2}{5}np + \frac{3}{5}p = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{한편 } E(X) = 2 \text{에서 } np = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{4}{5} + \frac{3}{5}p = 1, \frac{3}{5}p = \frac{1}{5} \quad \therefore p = \frac{1}{3}$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$\frac{n}{3} = 2 \quad \therefore n = 6$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(6, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore p \times V(nX) = \frac{1}{3} V(6X) = \frac{1}{3} \times 6^2 \times V(X)$$

$$= \frac{1}{3} \times 36 \times \frac{4}{3} = 16$$

20 답 $\frac{8}{5}$

확률변수 X 가 이항분포 $B(4, p)$ 를 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=k) = {}_4C_k p^k (1-p)^{4-k} = p_k \quad (k=0, 1, 2, 3, 4)$$

이때 p_k 중 최대인 것이 p_3 이므로

$$p_3 \geq p_2 \text{에서 } {}_4C_3 p^3 (1-p)^1 \geq {}_4C_2 p^2 (1-p)^2$$

$$\text{양변을 } p^2(1-p) \text{로 나누면 } 4p \geq 6(1-p) \quad \therefore p \geq \frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$p_3 \geq p_4 \text{에서 } {}_4C_3 p^3 (1-p)^1 \geq {}_4C_4 p^4 (1-p)^0$$

$$\text{양변을 } p^3 \text{으로 나누면 } 4(1-p) \geq p \quad \therefore p \leq \frac{4}{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{3}{5} \leq p \leq \frac{4}{5}$$

이때 $p_0 = (1-p)^4, p_1 = 4p(1-p)^3$ 이므로 $\frac{3}{5} \leq p \leq \frac{4}{5}$ 에서

$$4p^3(1-p) > (1-p)^4 \quad \therefore p_3 > p_0$$

$$4p^3(1-p) > 4p(1-p)^3 \quad \therefore p_3 > p_1$$

즉, p_k 중 최대인 것이 p_3 이 되는 p 의 값의 범위는 $\frac{3}{5} \leq p \leq \frac{4}{5}$

한편 $V(X) = 4 \times p \times (1-p) = -4(p^2 - p) = -4\left(p - \frac{1}{2}\right)^2 + 1$ 이므로

$p = \frac{3}{5}$ 일 때 최댓값 $4 \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{24}{25}$ 를 가지고,

$p = \frac{4}{5}$ 일 때 최솟값 $4 \times \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{16}{25}$ 을 가진다.

따라서 $V(X)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{24}{25} + \frac{16}{25} = \frac{8}{5}$

21 답 ③

바닥에 닿은 면에 적혀 있는 수가 자연수 k 의 약수일 확률을 p 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B(144, p)$ 를 따르므로

$$V(X) = 144p(1-p)$$

$$V\left(\frac{X}{3} + 1\right) = 3 \text{에서 } \left(\frac{1}{3}\right)^2 V(X) = 3 \quad \therefore V(X) = 27$$

$$\text{즉, } 144p(1-p) = 27 \text{이므로 } 16p(1-p) = 3$$

$$16p^2 - 16p + 3 = 0, (4p-1)(4p-3) = 0$$

$$\therefore p = \frac{1}{4} \text{ 또는 } p = \frac{3}{4}$$

(i) $p = \frac{1}{4}$ 일 때,

약수의 개수가 $12 \times \frac{1}{4} = 3$ 이므로 이를 만족시키는 12 이하의 자연수 k 의 값은 4, 9이다.

(ii) $p = \frac{3}{4}$ 일 때,

약수의 개수가 $12 \times \frac{3}{4} = 9$ 이므로 이를 만족시키는 12 이하의 자연수 k 는 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 k 의 값의 합은 $4 + 9 = 13$

22 답 15

(i) 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 2보다 크지 않은 경우

주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 2보다 크지 않을, 즉 2보다 작거나 같을 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

동전을 5번 던져서 동전의 앞면과 뒷면이 나오는 횟수가 같은 경우는 존재하지 않고, 동전의 앞면이 뒷면보다 많이 나올 확률과 동전의 뒷면이 앞면보다 많이 나올 확률은 같으므로 동전의 앞면이 뒷면보다 많이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

(ii) 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 2보다 큰 경우

주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 2보다 클 확률은 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

동전을 4번 던져서 동전의 앞면과 뒷면이 나오는 횟수가 같을 확률은 앞면과 뒷면이 각각 2번씩 나오면 되므로

$${}^4C_2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \times \frac{1}{16} = \frac{3}{8}$$

이때 동전의 앞면이 뒷면보다 많이 나올 확률과 동전의 뒷면이 앞면보다 많이 나올 확률은 같으므로 동전의 앞면이 뒷면보다 많이 나올 확률은 $\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{3}{8}\right) = \frac{5}{16}$

(i), (ii)에서 주어진 시행을 1회 할 때, 동전의 앞면이 뒷면보다 많이 나올 확률은 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{5}{16} = \frac{3}{8}$

즉, 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(n, \frac{3}{8}\right)$ 을 따르므로

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{n \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{15n}}{8}$$

따라서 $\sigma(X) = \frac{\sqrt{15n}}{8}$ 이 유리수가 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값은 15이다.

23 답 ③

주사위를 15번 던져서 2 이하의 눈의 수가 나오는 횟수를 확률변수 Y 라 하면 3 이상의 눈의 수가 나오는 횟수는 $15 - Y$ 이므로 주어진 시행을 15번 반복하여 이동된 점 P 의 좌표는 $(3Y, 15 - Y)$ 이다.

따라서 점 P 와 직선 $3x + 4y = 0$ 사이의 거리는

$$X = \frac{|9Y + 4(15 - Y)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|5Y + 60|}{5} = Y + 12 \quad (\because Y \geq 0)$$

주사위를 한 번 던져서 2 이하의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이므로

확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(15, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(Y) = 15 \times \frac{1}{3} = 5$$

$$\therefore E(X) = E(Y + 12) = E(Y) + 12 = 5 + 12 = 17$$

개념 NOTE

점 $P(x_1, y_1)$ 과 직선 $ax + by + c = 0$ 사이의 거리 d 는

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

24 답 24

주사위를 n 번 던져서 6의 약수의 눈의 수가 나오는 횟수를 확률변수 Y 라 하면 6의 약수가 아닌 눈의 수가 나오는 횟수는 $n - Y$ 이므로

$$X = 80 + 2Y - 3(n - Y) = 5Y + 80 - 3n$$

주사위를 한 번 던져서 6의 약수의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 이므로

확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(n, \frac{2}{3}\right)$ 를 따른다.

$$\therefore V(Y) = n \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}n$$

$$\therefore V(X) = V(5Y + 80 - 3n) = 5^2 V(Y) = 25 \times \frac{2}{9}n = \frac{50}{9}n$$

따라서 $\frac{50}{9}n = \frac{400}{3}$ 이므로 $n = 24$

25 답 300

주사위를 $2n$ 번 던질 때 홀수 번째 시행에서 짝수의 눈의 수가 나오는 횟수를 확률변수 X_1 이라 하면 주사위를 한 번 던져서 짝수의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로 확률변수 X_1 은 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X_1) = \frac{n}{2}$$

즉, n 번의 홀수 번째 시행에서 받을 수 있는 상금의 기댓값은

$$\frac{n}{2} \times 200 = 100n(\text{원})$$

또 주사위를 $2n$ 번 던질 때 짝수 번째 시행에서 3의 배수의 눈의 수가 나오는 횟수를 확률변수 X_2 라 하면 주사위를 한 번 던져서 3의 배수의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ 이므로 확률변수 X_2 는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X_2) = \frac{n}{3}$$

이때 n 번의 짝수 번째 시행에서 3의 배수가 아닌 눈의 수가 나오는 횟수는 $n - X_2$ 이므로 받을 수 있는 상금의 기댓값을 확률변수 Y 라 하면
 $Y = 300X_2 + 150(n - X_2) = 150X_2 + 150n$
 $\therefore E(Y) = E(150X_2 + 150n) = 150E(X_2) + 150n$
 $= 150 \times \frac{n}{3} + 150n = 200n(\text{원})$

따라서 $2n$ 번의 시행에서 받을 수 있는 상금의 기댓값은
 $100n + 200n = 300n(\text{원}) \quad \therefore a = 300$

26 답 ①

정사면체 모양의 상자를 10번 던져서 3이 적혀 있는 면이 바닥에 닿는 횟수를 확률변수 X 라 하면 정사면체를 한 번 던져서 3이 적혀 있는 면이 바닥에 닿을 확률은 $\frac{1}{4}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B(10, \frac{1}{4})$ 을 따른다.

이때 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_{10}C_x \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{10-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 10)$$

따라서 상금 9^k 원의 기댓값은

$$\begin{aligned} E(9^X) &= \sum_{x=0}^{10} 9^x P(X=x) = \sum_{x=0}^{10} 9^x {}_{10}C_x \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{10-x} \\ &= \sum_{x=0}^{10} {}_{10}C_x \left(\frac{9}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{10-x} = \left(\frac{9}{4} + \frac{3}{4}\right)^{10} = 3^{10}(\text{원}) \end{aligned}$$

STEP 3 최고난도 문제

| 73~75쪽

01 ③ 02 3 03 25 04 ③ 05 7 06 $\frac{1}{5}$
 07 ② 08 ① 09 ① 10 ② 11 30

01 답 ③

1단계 $E((X-a)^2 + (X-b)^2 + (X-c)^2)$ 식 정리하기

$$\begin{aligned} E((X-a)^2 + (X-b)^2 + (X-c)^2) &= E\left(\left(\frac{a+b+c}{3} - a\right)^2 + \left(\frac{a+b+c}{3} - b\right)^2 + \left(\frac{a+b+c}{3} - c\right)^2\right) \\ &= E\left(\left(\frac{-2a+b+c}{3}\right)^2 + \left(\frac{a-2b+c}{3}\right)^2 + \left(\frac{a+b-2c}{3}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{9}E((-2a+b+c)^2 + (a-2b+c)^2 + (a+b-2c)^2) \\ &= \frac{1}{9}E(6(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca)) \\ &= \frac{1}{3}E((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

2단계 $Y = (a-b)^2, Z = (b-c)^2, W = (c-a)^2$ 이라 할 때, $E(Y), E(Z), E(W)$ 의 값 구하기

$Y = (a-b)^2$ 이라 하면

$Y=0$ 인 경우는 $(a, b) = (1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)$ 의 6가지

$Y=1$ 인 경우는 $(a, b) = (1, 2), (2, 3), \dots, (5, 6), (6, 5), (5, 4), \dots, (2, 1)$ 의 10가지

$Y=4$ 인 경우는 $(a, b) = (1, 3), (2, 4), (3, 5), (4, 6), (6, 4), (5, 3), (4, 2), (3, 1)$ 의 8가지

$Y=9$ 인 경우는 $(a, b) = (1, 4), (2, 5), (3, 6), (6, 3), (5, 2), (4, 1)$ 의 6가지

$Y=16$ 인 경우는 $(a, b) = (1, 5), (2, 6), (6, 2), (5, 1)$ 의 4가지

$Y=25$ 인 경우는 $(a, b) = (1, 6), (6, 1)$ 의 2가지

즉, 확률변수 Y 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

Y	0	1	4	9	16	25	합계
$P(Y=y)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	1

$$E(Y) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{5}{18} + 4 \times \frac{2}{9} + 9 \times \frac{1}{6} + 16 \times \frac{1}{9} + 25 \times \frac{1}{18} = \frac{35}{6}$$

같은 방법으로 $Z = (b-c)^2, W = (c-a)^2$ 이라 하면

$$E(Z) = E(W) = \frac{35}{6}$$

3단계 $E((X-a)^2 + (X-b)^2 + (X-c)^2)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore E((X-a)^2 + (X-b)^2 + (X-c)^2) &= \frac{1}{3}E((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \frac{1}{3}E(Y+Z+W) = \frac{1}{3}\{E(Y)+E(Z)+E(W)\} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{35}{6} + \frac{35}{6} + \frac{35}{6}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{35}{6} \times 3 = \frac{35}{6} \end{aligned}$$

02 답 3

1단계 X 의 값에 따른 확률 구하기

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이고, 각각의 확률 $P(X=x) (x=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 는 다음과 같다.

(i) $1 \leq x \leq a$ 일 때,

첫 번째 꺼낸 카드에 적혀 있는 수는 a 이하이고 두 번째 꺼낸 카드에 적혀 있는 수는 x 이어야 하므로

$$P(X=x) = \frac{a}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{a}{36} \quad (x=1, 2, \dots, a)$$

(ii) $a < x \leq 6$ 일 때,

첫 번째 꺼낸 카드에 적혀 있는 수가 x 이거나 첫 번째 꺼낸 카드에 적혀 있는 수는 a 이하이고 두 번째 꺼낸 카드에 적혀 있는 수는 x 이어야 하므로

$$P(X=x) = \frac{1}{6} + \frac{a}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{a}{36} + \frac{1}{6} \quad (x=a+1, a+2, \dots, 6)$$

2단계 $E(X)$ 를 a 에 대한 식으로 나타내기

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^6 kP(X=k) = \sum_{k=1}^a kP(X=k) + \sum_{k=a+1}^6 kP(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^a \frac{a}{36}k + \sum_{k=a+1}^6 \left(\frac{a}{36} + \frac{1}{6}\right)k \\ &= \frac{a}{36} \sum_{k=1}^a k + \frac{a}{36} \sum_{k=a+1}^6 k + \frac{1}{6} \sum_{k=a+1}^6 k \\ &= \frac{a}{36} \left(\sum_{k=1}^a k + \sum_{k=a+1}^6 k\right) + \frac{1}{6} \left(\sum_{k=1}^6 k - \sum_{k=1}^a k\right) \\ &= \frac{a}{36} \sum_{k=1}^6 k + \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^a k \\ &= \left(\frac{a}{36} + \frac{1}{6}\right) \sum_{k=1}^6 k - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^a k \\ &= \frac{a+6}{36} \times \frac{6 \times 7}{2} - \frac{1}{6} \times \frac{a(a+1)}{2} \\ &= \frac{7}{12}(a+6) - \frac{1}{12}(a^2+a) \\ &= -\frac{1}{12}(a^2-6a-42) = -\frac{1}{12}(a-3)^2 + \frac{17}{4} \end{aligned}$$

3단계 $E(X)$ 의 값이 최대가 되도록 하는 자연수 a 의 값 구하기
따라서 $E(X)$ 의 값은 $a=3$ 에서 최대이다.

03 답 25

1단계 X 의 확률질량함수 구하기

3개의 검은 공에 1부터 n 까지의 자연수 중 3개를 적는 모든 경우의 수는 ${}_nC_3$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값을 $k(k=2, 3, \dots, n-1)$ 라 하자.

이때 검은 공에 적혀 있는 수 중 가장 작은 수를 1이라 하면 가장 큰 수는 $k+1$ 이므로 나머지 1개의 수는 1보다 크고 $k+1$ 보다 작다.

즉, 나머지 1개의 검은 공에 적혀 있는 수를 택하는 경우의 수는

$${}_{k-1}C_1$$

검은 공에 적혀 있는 수 중 가장 작은 수가 될 수 있는 수는 1, 2, ..., $n-k$ 이므로 확률변수 $X=k$ 인 경우의 수는

$${}_{k-1}C_1 \times (n-k) = (k-1)(n-k)$$

$$\therefore P(X=k) = \frac{(k-1)(n-k)}{{}_nC_3} \quad (k=2, 3, \dots, n-1)$$

2단계 $E(X)$ 를 n 에 대한 식으로 나타내기

$$\therefore E(X)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=2}^{n-1} kP(X=k) \\ &= \sum_{k=2}^{n-1} \frac{(k-1)(n-k)}{{}_nC_3} k \\ &= \frac{1}{{}_nC_3} \sum_{k=2}^{n-1} \{-k^3 + (n+1)k^2 - nk\} \\ &= \frac{1}{{}_nC_3} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \{-k^3 + (n+1)k^2 - nk\} - \{-1 + (n+1) - n\} \right] \\ &= \frac{1}{{}_nC_3} \left\{ -\sum_{k=1}^{n-1} k^3 + (n+1)\sum_{k=1}^{n-1} k^2 - n\sum_{k=1}^{n-1} k \right\} \\ &= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \\ &\quad \times \left[-\left\{ \frac{(n-1)n}{2} \right\}^2 + \frac{(n+1)(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{(n-1)n^2}{2} \right] \\ &= \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \times \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{12} \\ &= \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

3단계 n 의 값 구하기

$$\text{따라서 } \frac{n+1}{2} = 13 \text{ 이므로}$$

$$n+1=26$$

$$\therefore n=25$$

04 답 ③

1단계 $P(X=k)$ 구하기

$$\left\{ 9P(X=k) + \frac{2}{tk} \right\} \{ 9P(X=k) - 2tk \} = 0 \text{에서}$$

$$P(X=k) = -\frac{2}{9tk} \text{ 또는 } P(X=k) = \frac{2tk}{9}$$

2단계 $t > 0$ 일 때, $E(3X+4)$ 의 값 구하기

(i) $t > 0$ 일 때,

$$P(X=k) \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$k = -2, -1 \text{ 일 때,}$$

$$P(X=k) = -\frac{2}{9tk}$$

$k=1, 2$ 일 때,

$$P(X=k) = \frac{2tk}{9}$$

$$\therefore P(X=-2) = \frac{1}{9t}, P(X=-1) = \frac{2}{9t}, P(X=1) = \frac{2t}{9},$$

$$P(X=2) = \frac{4t}{9}$$

$$\text{확률의 총합은 1이므로 } \frac{1}{9t} + \frac{2}{9t} + \frac{2t}{9} + \frac{4t}{9} = 1$$

$$\frac{1}{3t} + \frac{2t}{3} = 1, 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$(2t-1)(t-1) = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{2} \text{ 또는 } t = 1$$

① $t = \frac{1}{2}$ 일 때,

$$P(X=-2) = \frac{2}{9}, P(X=-1) = \frac{4}{9}, P(X=1) = \frac{1}{9},$$

$$P(X=2) = \frac{2}{9} \text{ 이므로}$$

$$E(X) = -2 \times \frac{2}{9} + (-1) \times \frac{4}{9} + 1 \times \frac{1}{9} + 2 \times \frac{2}{9} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore E(3X+4) = 3E(X) + 4 = 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 4 = 3$$

② $t=1$ 일 때,

$$P(X=-2) = \frac{1}{9}, P(X=-1) = \frac{2}{9}, P(X=1) = \frac{2}{9},$$

$$P(X=2) = \frac{4}{9} \text{ 이므로}$$

$$E(X) = -2 \times \frac{1}{9} + (-1) \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{4}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore E(3X+4) = 3E(X) + 4 = 3 \times \frac{2}{3} + 4 = 6$$

3단계 $t < 0$ 일 때, $E(3X+4)$ 의 값 구하기

(ii) $t < 0$ 일 때,

$$P(X=k) \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$k = -2, -1 \text{ 일 때,}$$

$$P(X=k) = \frac{2tk}{9}$$

$$k = 1, 2 \text{ 일 때,}$$

$$P(X=k) = -\frac{2}{9tk}$$

$$\therefore P(X=-2) = -\frac{4t}{9}, P(X=-1) = -\frac{2t}{9}, P(X=1) = -\frac{2}{9t},$$

$$P(X=2) = -\frac{1}{9t}$$

확률의 총합은 1이므로

$$-\frac{4t}{9} - \frac{2t}{9} - \frac{2}{9t} - \frac{1}{9t} = 1$$

$$-\frac{2t}{3} - \frac{1}{3t} = 1, 2t^2 + 3t + 1 = 0$$

$$(t+1)(2t+1) = 0 \quad \therefore t = -1 \text{ 또는 } t = -\frac{1}{2}$$

① $t = -1$ 일 때,

$$P(X=-2) = \frac{4}{9}, P(X=-1) = \frac{2}{9}, P(X=1) = \frac{2}{9},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{9} \text{ 이므로}$$

$$E(X) = -2 \times \frac{4}{9} + (-1) \times \frac{2}{9} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{1}{9} = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore E(3X+4) = 3E(X) + 4 = 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 4 = 2$$

② $t = -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$P(X=-2)=\frac{2}{9}, P(X=-1)=\frac{1}{9}, P(X=1)=\frac{4}{9},$$

$$P(X=2)=\frac{2}{9} \text{이므로}$$

$$E(X)=-2 \times \frac{2}{9} + (-1) \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore E(3X+4)=3E(X)+4=3 \times \frac{1}{3} + 4 = 5$$

4단계 모든 $E(3X+4)$ 의 값의 곱 구하기

(i), (ii)에서 $E(3X+4)$ 의 값은 2, 3, 5, 6이므로 그 곱은 180이다.

05 답 7

1단계 X 가 가질 수 있는 값 구하기

원 $C_1: x^2+y^2=5$ 는 중심이 $(0, 0)$, 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$ 이고, 원

$C_2: (x-\frac{3}{2})^2+y^2=\frac{5}{4}$ 는 중심이 $(\frac{3}{2}, 0)$, 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 이다.

또 $y=-\frac{a}{2}x+a+1$ 에서 $y=a(-\frac{1}{2}x+1)+1$ 이므로 직선

$y=-\frac{a}{2}x+a+1$ 은 a 의 값에 관계없이 항상 점 $(2, 1)$ 을 지난다.

이때 점 $(2, 1)$ 은 두 원 C_1, C_2 위에 있으므로

직선 $y=-\frac{a}{2}x+a+1$ 과 두 원 C_1, C_2 는 점

하거나 두 점에서 만난다.

(i) 직선이 원 C_1 에 접할 때,

원 C_1 의 중심 $(0, 0)$ 과 점 $(2, 1)$ 을 지

나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{2}$ 이므로 원 C_1 위의 점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 -2 이다.

$$\text{즉, } -\frac{a}{2} = -2 \text{에서 } a=4$$

따라서 $a=4$ 일 때, 직선 $y=-2x+5$ 는 원 C_1 과 점 $(2, 1)$ 에서 접하고, 원 C_2 와 점 $(2, 1)$ 과 다른 한 점에서 만나므로 $X=2$

(ii) 직선이 원 C_2 에 접할 때,

원 C_2 의 중심 $(\frac{3}{2}, 0)$ 과 점 $(2, 1)$ 을 지나는 직선의 기울기가

$$\frac{1-0}{2-\frac{3}{2}}=2 \text{이므로 원 } C_2 \text{ 위의 점 } (2, 1) \text{에서의 접선의 기울기는 } -\frac{1}{2}$$

이다.

$$\text{즉, } -\frac{a}{2} = -\frac{1}{2} \text{에서 } a=1$$

따라서 $a=1$ 일 때, 직선 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 는 원 C_2 와 점 $(2, 1)$ 에서 접하고, 원 C_1 과 점 $(2, 1)$ 과 다른 한 점에서 만나므로 $X=2$

(iii) 직선이 두 원 C_1, C_2 에 접하지 않을 때,

(i), (ii)가 아닌 경우, 즉 $a=2, 3, 5, 6$ 일 때, 직선 $y=-\frac{a}{2}x+a+1$ 은 원 C_1 과 점 $(2, 1)$ 과 다른 한 점에서 만나고, 원 C_2 와 점 $(2, 1)$ 과 다른 한 점에서 만나므로 $X=3$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3이다.

2단계 $E(X), V(X)$ 의 값 구하기

$$P(X=2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}, P(X=3)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$E(X)=2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3}, E(X^2)=2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{2}{3} = \frac{22}{3}$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{22}{3}-\left(\frac{8}{3}\right)^2=\frac{2}{9}$$

3단계 $E(3X+1)-V(3X-1)$ 의 값 구하기

$$\begin{aligned} \therefore E(3X+1)-V(3X-1) &= 3E(X)+1-3^2V(X) \\ &= 3 \times \frac{8}{3} + 1 - 9 \times \frac{2}{9} = 7 \end{aligned}$$

06 답 $\frac{1}{5}$

1단계 X 가 가질 수 있는 값과 그때의 확률 구하기

주머니 A, B, C 중 1개를 택할 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

(i) 1개의 주머니만 3번 택하는 경우

추가하는 6개의 공이 한 주머니에 모두 들어가므로 공을 추가한 후 주머니에 들어 있는 공의 개수를 3으로 나누었을 때의 나머지는 공을 추가하기 전과 같다.

즉, $a=1, b=2, c=0$ 이므로

$$X=1+2+0=3$$

이때 1개의 주머니를 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$ 이므로 한 주머니만 3번 택할 확률은

$$3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}$$

(ii) 2개의 주머니만 택하는 경우

① A를 1번, B를 2번 택하는 경우

주머니 A, B, C에 들어 있는 공의 개수는 각각 3, 6, 3이므로

$$a=0, b=0, c=0$$

$$\therefore X=0$$

② A를 2번, B를 1번 택하는 경우

주머니 A, B, C에 들어 있는 공의 개수는 각각 5, 4, 3이므로

$$a=2, b=1, c=0$$

$$\therefore X=2+1+0=3$$

③ B를 1번, C를 2번 택하는 경우

주머니 A, B, C에 들어 있는 공의 개수는 각각 1, 4, 7이므로

$$a=1, b=1, c=1$$

$$\therefore X=1+1+1=3$$

④ B를 2번, C를 1번 택하는 경우

주머니 A, B, C에 들어 있는 공의 개수는 각각 1, 6, 5이므로

$$a=1, b=0, c=2$$

$$\therefore X=1+0+2=3$$

⑤ A를 1번, C를 2번 택하는 경우

주머니 A, B, C에 들어 있는 공의 개수는 각각 3, 2, 7이므로

$$a=0, b=2, c=1$$

$$\therefore X=0+2+1=3$$

⑥ A를 2번, C를 1번 택하는 경우

주머니 A, B, C에 들어 있는 공의 개수는 각각 5, 2, 5이므로

$$a=2, b=2, c=2$$

$$\therefore X=2+2+2=6$$

이때 ①~⑥ 각각에서 주머니를 택하는 순서를 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$ 이므로 각각의 경우의 확률은

$$3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{9}$$

(iii) 3개의 주머니를 각각 1번씩 택하는 경우

주머니 A, B, C에 들어 있는 공의 개수는 각각 3, 4, 5이므로

$$a=0, b=1, c=2$$

$$\therefore X=0+1+2=3$$

이때 주머니를 택하는 순서를 정하는 경우의 수는 $3!=6$ 이므로 주머니를 각각 1번씩 택할 확률은

$$6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{9}$$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 3, 6이고

$$P(X=0)=\frac{1}{9}, P(X=3)=\frac{1}{9}+4 \times \frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{7}{9}, P(X=6)=\frac{1}{9}$$

2단계 $E(X)$, $V(X)$ 의 값 구하기

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=0 \times \frac{1}{9}+3 \times \frac{7}{9}+6 \times \frac{1}{9}=3$$

$$E(X^2)=0^2 \times \frac{1}{9}+3^2 \times \frac{7}{9}+6^2 \times \frac{1}{9}=11$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=11-3^2=2$$

3단계 $\frac{E(4X-2)}{V(5X+1)}$ 의 값 구하기

$$E(4X-2)=4E(X)-2=4 \times 3-2=10$$

$$V(5X+1)=5^2 V(X)=25 \times 2=50$$

$$\therefore \frac{E(4X-2)}{V(5X+1)}=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$$

07 답 ②

1단계 $E(X)$ 의 값 구하기

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이다.

(i) $X=1$ 일 때,

첫 번째 시행에서 홀수가 적혀 있는 공이 나오면 되므로

$$P(X=1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

(ii) $X=2$ 일 때,

첫 번째 시행에서 짝수가 적혀 있는 공이 나오고 두 번째 시행에서 3 또는 5가 적혀 있는 공이 나오면 되므로

$$P(X=2)=\frac{3}{6} \times \frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

(iii) $X=3$ 일 때,

① 첫 번째, 두 번째 시행에서 각각 짝수가 적혀 있는 공이 나오고 세 번째 시행에서 3 또는 5가 적혀 있는 공이 나오는 경우 그 확률은

$$\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{2}{4}=\frac{1}{10}$$

② 첫 번째 시행에서 짝수가 적혀 있는 공이, 두 번째 시행에서 1이 적혀 있는 공이 나오고 세 번째 시행에서 3 또는 5가 적혀 있는 공이 나오는 경우 그 확률은

$$\frac{3}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{4}=\frac{1}{20}$$

①, ②에서

$$P(X=3)=\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=\frac{3}{20}$$

(iv) $X=4$ 일 때,

① 첫 번째, 두 번째, 세 번째 시행에서 각각 짝수가 적혀 있는 공이 나오고 네 번째 시행에서 5가 적혀 있는 공이 나오는 경우 그 확률은

$$\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}=\frac{1}{60}$$

② 첫 번째, 두 번째 시행에서 각각 짝수가 적혀 있는 공이, 세 번째 시행에서 1이 적혀 있는 공이 나오고, 네 번째 시행에서 3 또는 5가 적혀 있는 공이 나오는 경우 그 확률은

$$\frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}=\frac{1}{30}$$

③ 첫 번째 시행에서 짝수가 적혀 있는 공이, 두 번째 시행에서 1이 적혀 있는 공이 나오고 세 번째 시행에서 짝수가 적혀 있는 공이, 네 번째 시행에서 3 또는 5가 적혀 있는 공이 나오는 경우 그 확률은

$$\frac{3}{6} \times \frac{1}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3}=\frac{1}{30}$$

①, ②, ③에서

$$P(X=4)=\frac{1}{60}+\frac{1}{30}+\frac{1}{30}=\frac{1}{12}$$

(v) $X=5$ 일 때,

$$P(X=5)=1-\{P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)\}=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{3}{20}+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{15}$$

(i)~(v)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{15}$	1

$$E(X)=1 \times \frac{1}{2}+2 \times \frac{1}{5}+3 \times \frac{3}{20}+4 \times \frac{1}{12}+5 \times \frac{1}{15}=\frac{121}{60}$$

2단계 $E(120X-80)$ 의 값 구하기

$$\therefore E(120X-80)=120E(X)-80=120 \times \frac{121}{60}-80=162$$

08 답 ①

1단계 추가된 부품 중 S의 개수를 확률변수 X 로 놓고 X 의 확률질량함수 구하기

추가된 부품 중 S의 개수를 확률변수 X 라 하면 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(2, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_2C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{2-x}={}_2C_x\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{{}_2C_x}{4} \quad (x=0, 1, 2)$$

2단계 조건부확률 이용하기

이때 7개의 부품 중 임의로 선택한 1개가 T인 사건을 A , 추가된 부품이 모두 S인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

3단계 X 의 값에 따른 확률 구하기

(i) $X=0$ 일 때,

$$P(X=0)=\frac{{}_2C_0}{4}=\frac{1}{4}$$

추가된 부품 2개가 모두 T인 경우이므로 참고에는 부품 S가 3개, 부품 T가 4개 있고, 이 7개의 부품 중에서 임의로 선택한 1개의 부품이 T일 확률은 $\frac{4}{7}$ 이므로 $P(A)=\frac{1}{4} \times \frac{4}{7}=\frac{1}{7}$

(ii) $X=1$ 일 때,

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1}{4}=\frac{1}{2}$$

추가된 부품이 S, T 각각 1개인 경우이므로 참고에는 부품 S가 4개, 부품 T가 3개 있고, 이 7개의 부품 중에서 임의로 선택한 1개의 부품이 T일 확률은 $\frac{3}{7}$ 이므로 $P(A)=\frac{1}{2} \times \frac{3}{7}=\frac{3}{14}$

(iii) $X=2$ 일 때,

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2}{4} = \frac{1}{4}$$

추가된 부품 2개가 모두 S인 경우이므로 창고에는 부품 S가 5개,
부품 T가 2개 있고, 이 7개의 부품 중에서 임의로 선택한 1개의 부
품이 T일 확률은 $\frac{2}{7}$ 이므로 $P(A) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{1}{14}$

4단계 확률 구하기

$$(i), (ii), (iii)에서 P(A) = \frac{1}{7} + \frac{3}{14} + \frac{1}{14} = \frac{3}{7}$$

$$(iii)에서 P(A \cap B) = \frac{1}{14}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{14}}{\frac{3}{7}} = \frac{1}{6}$$

09 답 ①

1단계 X 의 확률질량함수 구하기

주사위를 36번 던져서 1의 눈의 수가 나오는 횟수를 확률변수 Y 라 하면
주사위를 한 번 던져서 1의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{1}{6}$ 이므로 확률변수

Y 는 이항분포 $B(36, \frac{1}{6})$ 을 따른다.

첫 번째 시행과 두 번째 시행에서 1의 눈의 수가 나오는 횟수의 합을 k 라
하면 첫 번째 시행에서 1의 눈의 수가 r 번 ($r=0, 1, 2, \dots, k$) 나오고
두 번째 시행에서 주사위를 $(36-r)$ 번 던져서 1의 눈의 수가 $(k-r)$
번 나올 확률은

$${}_{36}C_r \left(\frac{1}{6}\right)^r \left(\frac{5}{6}\right)^{36-r} \times {}_{36-r}C_{k-r} \left(\frac{1}{6}\right)^{k-r} \left(\frac{5}{6}\right)^{36-k}$$

$$= {}_{36}C_r \times {}_{36-r}C_{k-r} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{72-k-r} \dots \textcircled{1}$$

$${}_{36}C_r \times {}_{36-r}C_{k-r} = \frac{36!}{r!(36-r)!} \times \frac{(36-r)!}{(k-r)!(36-k)!}$$

$$= \frac{36!}{(36-k)!} \times \frac{1}{r!(k-r)!}$$

$$= \frac{36!}{k!(36-k)!} \times \frac{k!}{r!(k-r)!}$$

$$= {}_{36}C_k \times {}_kC_r$$

이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$${}_{36}C_r \times {}_{36-r}C_{k-r} \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{72-k-r} = {}_{36}C_k \times {}_kC_r \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{72-k-r}$$

즉, 확률변수 X 의 확률질량함수는

$$P(X=k) = \sum_{r=0}^k {}_{36}C_k \times {}_kC_r \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{72-k-r}$$

$$= \sum_{r=0}^k {}_{36}C_k \times {}_kC_r \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{72-2k} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-r}$$

$$= {}_{36}C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{72-2k} \sum_{r=0}^k {}_kC_r \times 1^r \times \left(\frac{5}{6}\right)^{k-r}$$

$$= {}_{36}C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{2(36-k)} \times \left(1 + \frac{5}{6}\right)^k$$

$$= {}_{36}C_k \left(\frac{1}{6} \times \frac{11}{6}\right)^k \left\{\left(\frac{5}{6}\right)^2\right\}^{36-k}$$

$$= {}_{36}C_k \left(\frac{11}{36}\right)^k \times \left(\frac{25}{36}\right)^{36-k}$$

2단계 $E(X)$ 의 값 구하기

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B(36, \frac{11}{36})$ 을 따르므로

$$E(X) = 36 \times \frac{11}{36} = 11$$

다른 풀이

첫 번째 시행에서 1의 눈의 수가 나오는 횟수의 평균은

$$36 \times \frac{1}{6} = 6$$

두 번째 시행에서 1의 눈의 수가 나오는 횟수의 평균은

$$(36-6) \times \frac{1}{6} = 5$$

따라서 첫 번째 시행과 두 번째 시행에서 1의 눈의 수가 나오는 횟수의
합의 평균은

$$6+5=11$$

idea 10 답 ②

1단계 $P(X=k)$ 의 값의 대소 파악하기

확률변수 X 가 이항분포 $B(n, \frac{2}{7})$ 를 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_nC_x \left(\frac{2}{7}\right)^x \left(\frac{5}{7}\right)^{n-x}$$

$$\therefore \frac{P(X=k+1)}{P(X=k)} = \frac{{}_nC_{k+1} \left(\frac{2}{7}\right)^{k+1} \left(\frac{5}{7}\right)^{n-k-1}}{{}_nC_k \left(\frac{2}{7}\right)^k \left(\frac{5}{7}\right)^{n-k}}$$

$$= \frac{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{2}{7}}{\frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{5}{7}}$$

$$= \frac{2(n-k)}{5(k+1)}$$

이때 $P(X=k) \leq P(X=k+1)$ 에서

$$\frac{2(n-k)}{5(k+1)} \geq 1, 2n-2k \geq 5k+5$$

$$\therefore k \leq \frac{2n-5}{7} \dots \textcircled{1}$$

또 $P(X=k) \geq P(X=k+1)$ 에서

$$k \geq \frac{2n-5}{7} \dots \textcircled{2}$$

따라서 $P(X=k)$ 의 값은 k 의 값이 커짐에 따라 커지다가 다시 작아진다.

2단계 $P(X=4) \geq P(X=5)$ 를 만족시키는 자연수 n 의 값 구하기

(i) $P(X=4) \geq P(X=5)$ 인 경우

$P(X=k) \geq P(X=5)$ 를 만족시키는 5가 아닌 정수 k 가 오직 1개
존재하므로 $P(X=4) \geq P(X=5) \geq P(X=3)$ 이어야 한다.

① $P(X=4) \geq P(X=5)$ 일 때,

$$\textcircled{1}에서 4 \geq \frac{2n-5}{7}, 2n-5 \leq 28$$

$$\therefore n \leq \frac{33}{2}$$

② $P(X=5) \geq P(X=3)$ 일 때,

$${}_nC_5 \left(\frac{2}{7}\right)^5 \left(\frac{5}{7}\right)^{n-5} \geq {}_nC_3 \left(\frac{2}{7}\right)^3 \left(\frac{5}{7}\right)^{n-3}$$

$${}_nC_5 \left(\frac{2}{7}\right)^2 \geq {}_nC_3 \left(\frac{5}{7}\right)^2, \frac{{}_nC_5}{{}_nC_3} \geq \frac{25}{4}$$

$$\frac{(n-3)(n-4)}{20} \geq \frac{25}{4}, (n-3)(n-4) \geq 125$$

이때 $12 \times 11 \geq 125 \geq 11 \times 10$ 이므로

$$n-3 \geq 12$$

$$\therefore n \geq 15$$

①, ②에서 $15 \leq n \leq \frac{33}{2}$ 이므로 이를 만족시키는 자연수 n 의 값은
15, 16이다.

3단계 $P(X=6) \geq P(X=5)$ 를 만족시키는 자연수 n 의 값 구하기

(ii) $P(X=6) \geq P(X=5)$ 인 경우

$P(X=k) \geq P(X=5)$ 를 만족시키는 5가 아닌 정수 k 가 오직 1개 존재하므로 $P(X=6) \geq P(X=5) \geq P(X=7)$ 이어야 한다.

① $P(X=6) \geq P(X=5)$ 일 때,

$$\textcircled{1} \text{에서 } 5 \leq \frac{2n-5}{7}, 2n-5 \geq 35$$

$$\therefore n \geq 20$$

② $P(X=5) \geq P(X=7)$ 일 때,

$${}_nC_5 \left(\frac{2}{7}\right)^5 \left(\frac{5}{7}\right)^{n-5} \geq {}nC_7 \left(\frac{2}{7}\right)^7 \left(\frac{5}{7}\right)^{n-7}$$

$${}_nC_5 \left(\frac{5}{7}\right)^2 \geq {}nC_7 \left(\frac{2}{7}\right)^2, \frac{{}_nC_7}{{}_nC_5} \leq \frac{25}{4}$$

$$\frac{(n-5)(n-6)}{42} \leq \frac{25}{4}, (n-5)(n-6) \leq \frac{525}{2}$$

$$\text{이때 } 16 \times 15 \leq \frac{525}{2} \leq 17 \times 16 \text{이므로}$$

$$n-5 \leq 16$$

$$\therefore n \leq 21$$

①, ②에서 $20 \leq n \leq 21$ 이므로 이를 만족시키는 자연수 n 의 값은 20, 21이다.

4단계 모든 자연수 n 의 값의 합 구하기

(i), (ii)에서 자연수 n 의 값은 15, 16, 20, 21이므로 그 합은 72이다.

11 답 30

1단계 한 상자에 포함된 불량품의 개수를 확률변수 X 로 놓고 $E(X)$ 의 값 구하기

50개의 제품 한 상자에 포함된 불량품의 개수를 확률변수 X , 1개의 제품이 불량품일 확률을 p 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B(50, p)$ 를 따르므로

$$E(X) = 50p, V(X) = 50p(1-p)$$

$$\text{이때 } E(X) = m \text{이므로 } 50p = m \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } V(X) = \frac{48}{25} \text{이므로 } 50p(1-p) = \frac{48}{25}$$

$$50p - 50p^2 = \frac{48}{25}, p^2 - p + \frac{24}{25^2} = 0$$

$$\left(p - \frac{1}{25}\right)\left(p - \frac{24}{25}\right) = 0$$

$$\therefore p = \frac{1}{25} \text{ 또는 } p = \frac{24}{25}$$

그런데 $p = \frac{24}{25}$ 이면 ①에서 $m = 48 > 5$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $p = \frac{1}{25}$ 이므로

$$E(X) = 50p = 50 \times \frac{1}{25} = 2$$

2단계 $\frac{a}{1000}$ 의 값 구하기

불량품 한 개에 필요한 애프터서비스 비용이 a 원이므로 불량품 X 개에 대한 애프터서비스 비용 aX 원의 기댓값은

$$E(aX) = aE(X) = 2a$$

한 상자의 제품을 모두 검사하는 비용과 애프터서비스로 인해 필요한 비용의 기댓값이 같으므로

$$60000 = 2a \quad \therefore a = 30000$$

$$\therefore \frac{a}{1000} = 30$$

06

연속확률변수와 정규분포

STEP 1

핵심 문제

| 76~77쪽

01 ②

02 ④

03 $\frac{1}{4}$

04 ③

05 ⑤

06 19

07 ①

08 ④

09 $\neg, \cup, \cap$

10 ②

11 ③

01 답 ②

$$P(0 \leq X \leq 3) = 1 \text{이므로}$$

$$P(0 \leq X \leq 1) + P(1 \leq X \leq 2) + P(2 \leq X \leq 3) = 1$$

$$k + k \times 2 + k \times 3 = 1$$

$$6k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{6}$$

$$\text{따라서 } P(x \leq X \leq x+1) = \frac{1}{6}(x+1) \text{이므로}$$

$$P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{5}{2}\right) = P\left(\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\right) + P\left(\frac{3}{2} \leq X \leq \frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{5}{2}$$

$$= \frac{2}{3}$$

02 답 ④

$P(0 \leq X \leq a) = 1$ 이므로 확률변수 X 의 확률밀도함수의 그래프에서

$$\frac{1}{2}ac = 1 \quad \therefore ac = 2$$

한편 $P(0 \leq X \leq a) = P(X \leq b) + P(X \geq b) = 1$ 이고,

$$P(X \leq b) - P(X \geq b) = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$P(X \leq b) = \frac{5}{8}, P(X \geq b) = \frac{3}{8}$$

즉, 확률변수 X 의 확률밀도함수의 그래프에서

$$\frac{1}{2}bc = \frac{5}{8} \quad \therefore bc = \frac{5}{4}$$

$$\text{그런데 } P(X \leq b) > \frac{1}{2} \text{이므로 } 0 < \sqrt{5} < b$$

이때 두 점 $(0, 0)$, (b, c) 를 지나는 직선의 방정식은 $y = \frac{c}{b}x$ 이므로

$$P(X \leq \sqrt{5}) = \frac{1}{2} \text{에서 } \frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \left(\frac{c}{b} \times \sqrt{5}\right) = \frac{5c}{2b} = \frac{1}{2} \quad \therefore b = 5c$$

$$\text{따라서 } bc = 5c^2 = \frac{5}{4} \text{이므로 } c = \frac{1}{2} (\because c > 0) \text{이고, } b = \frac{5}{2}, a = 4$$

$$\therefore a + b + c = 7$$

03 답 $\frac{1}{4}$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(-\frac{1}{2}x + 4a\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x + 4a\right) + a = -\frac{1}{4}x + 3a$$

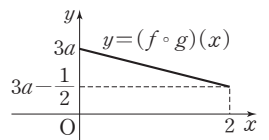
따라서 함수 $y = (f \circ g)(x)$ ($0 \leq x \leq 2$)

의 그래프는 그림과 같고, 함수

$y = (f \circ g)(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직

선 $x=0$, $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이

가 1이므로



$$\frac{1}{2} \times \left(3a + 3a - \frac{1}{2}\right) \times 2 = 1$$

$$6a - \frac{1}{2} = 1, \quad 6a = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a = \frac{1}{4}$$

04 답 ③

함수 $f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=4$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(4 \leq X \leq 6)$$

$$P(0 \leq X \leq 2) = P(6 \leq X \leq 8)$$

이때 $P(2 \leq X \leq 4) = a$, $P(0 \leq X \leq 2) = b$ 로 놓으면

$$3P(2 \leq X \leq 4) = 4P(6 \leq X \leq 8) \text{에서}$$

$$3a = 4b \quad \dots\dots ㉠$$

또 $P(0 \leq X \leq 8) = 1$ 이므로

$$P(0 \leq X \leq 2) + P(2 \leq X \leq 4) + P(4 \leq X \leq 6) + P(6 \leq X \leq 8) = 1$$

$$\therefore 2a + 2b = 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = \frac{2}{7}, \quad b = \frac{3}{14}$$

$$\therefore P(2 \leq X \leq 6) = P(2 \leq X \leq 4) + P(4 \leq X \leq 6)$$

$$= 2a = 2 \times \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$$

05 답 ⑤

정규분포곡선은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭

이므로 $P(40 \leq X \leq 45) = P(55 \leq X \leq 60)$

에서 두 직선 $x=45$, $x=55$ 는 직선 $x=m$

에 대하여 대칭이다. $\rightarrow$ 두 직선 $x=40$, $x=60$ 이

직선 $x=m$ 에 대하여 대칭임을 이용해도 된다.

$$\therefore m = \frac{45+55}{2} = 50$$

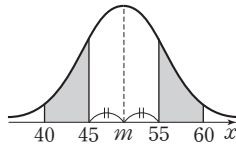
$$\therefore P(X \geq 40) - P(50 \leq X \leq 55)$$

$$= P(40 \leq X \leq 45) + P(X \geq 45) - P(50 \leq X \leq 55)$$

$$= P(40 \leq X \leq 45) + P(X \geq 45) - P(45 \leq X \leq 50)$$

$$= P(40 \leq X \leq 45) + P(X \geq 50)$$

$$= 0.1359 + 0.5 = 0.6359$$



06 답 19

$$P(X \leq k) = 0.7881 \text{에서}$$

$$P(X \leq m) + P(m \leq X \leq k) = 0.7881$$

$$0.5 + P(m \leq X \leq k) = 0.7881$$

$$\therefore P(m \leq X \leq k) = 0.2881 \quad \dots\dots ㉠ \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

$$P(X \leq m - 0.8\sigma) = 0.2119 \text{에서}$$

$$P(X \leq m) - P(m - 0.8\sigma \leq X \leq m) = 0.2119$$

$$P(X \leq m) - P(m \leq X \leq m + 0.8\sigma) = 0.2119$$

$$0.5 - P(m \leq X \leq m + 0.8\sigma) = 0.2119$$

$$\therefore P(m \leq X \leq m + 0.8\sigma) = 0.2881 \quad \dots\dots ㉡ \quad \dots\dots \text{배점 40\%}$$

㉠, ㉡에서 $P(m \leq X \leq k) = P(m \leq X \leq m + 0.8\sigma)$ 이므로

$$k = m + 0.8\sigma = 15 + 0.8 \times 5 = 19 \quad \dots\dots \text{배점 20\%}$$

07 답 ①

확률변수 X 가 정규분포 $N(40, 4^2)$ 을 따르므로 $Y = \frac{X-40}{4}$ 으로 놓으면

확률변수 Y 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P(|X - 39| \leq 5) = P(-5 \leq X - 39 \leq 5)$$

$$= P(34 \leq X \leq 44)$$

$$= P\left(\frac{34-40}{4} \leq Y \leq \frac{44-40}{4}\right)$$

$$= P(-1.5 \leq Y \leq 1)$$

$$= P(-1.5 \leq Y \leq 0) + P(0 \leq Y \leq 1)$$

$$= \frac{1}{2}P(-1.5 \leq Y \leq 1.5) + P(Y \leq 1) - P(Y \leq 0)$$

$$= \frac{1}{2} \times p_1 + p_2 - 0.5$$

$$= \frac{p_1 + 2p_2 - 1}{2}$$

08 답 ④

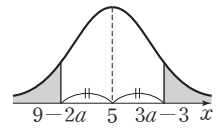
정규분포 $N(5, 2^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 정규분포곡선은 직선

$x=5$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $P(X \leq 9 - 2a) = P(X \geq 3a - 3)$ 을 만족

시키려면 그림과 같아야 하므로

$$\frac{(9-2a) + (3a-3)}{2} = 5$$



$$a + 6 = 10 \quad \therefore a = 4$$

한편 확률변수 X 가 정규분포 $N(5, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-5}{2}$ 로 놓으면

확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P(9 - 2a \leq X \leq 3a - 3) = P(1 \leq X \leq 9) = P\left(\frac{1-5}{2} \leq Z \leq \frac{9-5}{2}\right)$$

$$= P(-2 \leq Z \leq 2) = 2P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 2 \times 0.4772 = 0.9544$$

09 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(m, \sigma_1^2)$, $N(m, \sigma_2^2)$ 을 따르므로

$Z_X = \frac{X-m}{\sigma_1}$, $Z_Y = \frac{Y-m}{\sigma_2}$ 으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두

표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\text{ㄱ. } P(X \geq 2m) = P\left(Z_X \geq \frac{2m-m}{\sigma_1}\right) = P\left(Z_X \geq \frac{m}{\sigma_1}\right)$$

$$P(Y \geq 4m) = P\left(Z_Y \geq \frac{4m-m}{\sigma_2}\right) = P\left(Z_Y \geq \frac{3m}{\sigma_2}\right)$$

$$P(X \geq 2m) = P(Y \geq 4m) \text{에서 } P\left(Z_X \geq \frac{m}{\sigma_1}\right) = P\left(Z_Y \geq \frac{3m}{\sigma_2}\right) \text{이므로}$$

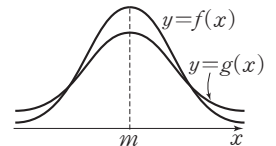
$$\frac{m}{\sigma_1} = \frac{3m}{\sigma_2} \quad \therefore \sigma_2 = 3\sigma_1$$

ㄴ. ㄱ에서 $\sigma_2 = 3\sigma_1$ 이므로 $\sigma_1 < \sigma_2$

그런데 두 확률변수 X, Y 의 평균이

m 으로 같으므로

$$f(m) > g(m)$$



$$\text{ㄷ. } P(X \leq m + \sigma_1) = P\left(Z_X \leq \frac{(m+\sigma_1)-m}{\sigma_1}\right) = P(Z_X \leq 1)$$

$$P(Y \geq m + 3\sigma_1) = P\left(Z_Y \geq \frac{(m+3\sigma_1)-m}{\sigma_2}\right)$$

$$= P\left(Z_Y \geq \frac{3\sigma_1}{\sigma_2}\right)$$

$$= P\left(Z_Y \geq \frac{3\sigma_1}{3\sigma_1}\right) (\because \text{ㄱ})$$

$$= P(Z_Y \geq 1)$$

$$\therefore P(X \leq m + \sigma_1) + P(Y \geq m + 3\sigma_1) = P(Z_X \leq 1) + P(Z_Y \geq 1) = 1$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

10 답 ②

참가자의 수학 점수를 X 점이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(58, 4^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-58}{4}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 상위 4% 안에 드는 학생의 최저 점수를 a 점이라 하면

$$P(X \geq a) = 0.04$$

$$P\left(Z \geq \frac{a-58}{4}\right) = 0.04$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-58}{4}\right) = 0.04$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-58}{4}\right) = 0.04$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-58}{4}\right) = 0.46$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.75) = 0.46$ 이므로

$$\frac{a-58}{4} = 1.75, a-58=7$$

$$\therefore a=65$$

따라서 상장을 받은 학생의 최저 점수는 65점이다.

11 답 ③

예약을 취소하거나 실제 탑승하지 않는 사람의 수를 X 명이라 하면 예약한 사람은 총 400명이고 좌석을 예약한 사람이 취소하거나 실제 탑승하지 않을 확률이 10%이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{10}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = 400 \times \frac{1}{10} = 40, V(X) = 400 \times \frac{1}{10} \times \frac{9}{10} = 36$$

이때 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(40, 6^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-40}{6}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

예약한 사람 중 실제 비행기를 타려고 공항에 나온 사람들이 모두 비행기에 탑승하려면 예약을 취소하거나 실제 탑승하지 않는 사람의 수가 31명 이상이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 31) &= P\left(Z \geq \frac{31-40}{6}\right) \\ &= P(Z \geq -1.5) = P(Z \leq 1.5) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 + 0.4332 \\ &= 0.9332 \end{aligned}$$

01 답 $\frac{3}{4}$

(㉞)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(0 \leq X \leq 2) = P(2 \leq X \leq 4)$$

$$\text{이때 } P(0 \leq X \leq 4) = 1 \text{이므로}$$

$$P(0 \leq X \leq 2) + P(2 \leq X \leq 4) = 1$$

$$2P(0 \leq X \leq 2) = 1$$

$$\therefore P(0 \leq X \leq 2) = \frac{1}{2}$$

(㉝)의 $P(0 \leq X \leq x) = ax^2$ 에 $x=2$ 를 대입하면

$$P(0 \leq X \leq 2) = 4a$$

$$\text{즉, } 4a = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$a = \frac{1}{8}$$

따라서 $0 \leq x \leq 2$ 에서

$$P(0 \leq X \leq x) = \frac{1}{8}x^2$$

또 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로

$$P(1 \leq X \leq 2) = P(2 \leq X \leq 3)$$

$$\therefore P(1 \leq X \leq 3) = P(1 \leq X \leq 2) + P(2 \leq X \leq 3)$$

$$= 2P(1 \leq X \leq 2)$$

$$= 2\{P(0 \leq X \leq 2) - P(0 \leq X \leq 1)\}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) = \frac{3}{4}$$

02 답 $\frac{3}{2}$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이므로

$$f(-1) \geq 0 \text{에서 } -a+b \geq 0 \quad \cdots \cdots \text{㉞}$$

$$f(0) \geq 0 \text{에서 } b \geq 0$$

$$f(1) \geq 0 \text{에서 } a+b+1 \geq 0 \quad \cdots \cdots \text{㉟}$$

또 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \{f(-1) + f(0)\} \times 1 \\ + \frac{1}{2} \times \{f(0) + f(1)\} \times 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \times \{(-a+b) + b\} + \frac{1}{2} \times \{b + (a+b+1)\} = 1$$

$$(-a+2b) + (a+2b+1) = 2$$

$$4b+1=2 \quad \therefore b=\frac{1}{4} \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉞을 ㉞에 대입하면

$$-a + \frac{1}{4} \geq 0 \quad \therefore a \leq \frac{1}{4} \quad \cdots \cdots \text{㉢}$$

㉡을 ㉡에 대입하면

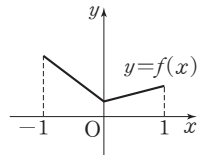
$$a + \frac{1}{4} + 1 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{5}{4} \quad \cdots \cdots \text{㉣}$$

$$\text{㉢, ㉣에서 } -\frac{5}{4} \leq a \leq \frac{1}{4} \quad \cdots \cdots \text{㉤}$$

즉, ㉢, ㉣에서 $-1 \leq a+b \leq \frac{1}{2}$ 이므로 $a+b$ 의 최댓값은 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 -1 이다.

$$\text{따라서 } M = \frac{1}{2}, m = -1 \text{이므로}$$

$$M-m = \frac{3}{2}$$

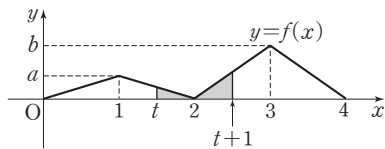


STEP 2 고난도 문제

| 78~83쪽

01 $\frac{3}{4}$	02 $\frac{3}{2}$	03 $\frac{68}{45}$	04 $\neg, \cup, \cap$	05 24
06 35	07 19	08 154	09 ④	10 ①
11 ②	12 ②	13 $\frac{3}{2}$	14 25	15 70
16 ②	17 ⑤	18 32	19 ⑤	20 ④
21 404명	22 80	23 ③	24 994	25 ③
26 159				

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로
 $\frac{1}{2} \times 2 \times a + \frac{1}{2} \times 2 \times b = 1$

$$a+b=1 \quad \therefore b=1-a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$P(t \leq X \leq t+1)$ 은 t 와 $t+1$ 사이에 2가 존재할 때 최소이므로

$$\begin{aligned} P(t \leq X \leq t+1) &= P(t \leq X \leq 2) + P(2 \leq X \leq t+1) \\ &= \frac{1}{2} \times (2-t) \times f(t) + \frac{1}{2} \times \{(t+1)-2\} \times f(t+1) \\ &= \frac{1}{2} \times (2-t) \times \{-a(t-2)\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \times (t-1) \times b\{(t+1)-2\} \\ &= \frac{1}{2} a(t-2)^2 + \frac{1}{2} b(t-1)^2 \\ &= \frac{1}{2} a(t-2)^2 + \frac{1}{2} (1-a)(t-1)^2 \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \frac{1}{2} t^2 - (a+1)t + \frac{1}{2} (3a+1) \\ &= \frac{1}{2} \{t - (a+1)\}^2 - \frac{1}{2} (a^2 - a) \end{aligned}$$

따라서 $P(t \leq X \leq t+1)$ 은 $t=a+1$ 에서 최솟값 $-\frac{1}{2}(a^2-a)$ 를 가지

$$\text{므로 } g(a) = a+1, h(a) = -\frac{1}{2}(a^2-a)$$

$$\therefore g\left(\frac{2}{5}\right) + h\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{7}{5} + \frac{1}{9} = \frac{68}{45}$$

04 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times 3a \times b = 1, ab = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\therefore a = \frac{2}{3b}$$

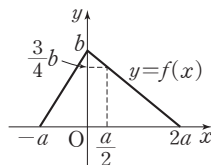
$$\text{즉, } a > \frac{3}{2} \text{이면 } \frac{2}{3b} > \frac{3}{2} \quad \therefore b < \frac{4}{9}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} \frac{b}{a}x + b & (-a \leq x \leq 0) \\ -\frac{b}{2a}x + b & (0 \leq x \leq 2a) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{a}{2} \leq X \leq 2a\right) &= \frac{1}{2} \times \left(2a - \frac{a}{2}\right) \times f\left(\frac{a}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}a \times \frac{3}{4}b = \frac{9}{16}ab \\ &= \frac{9}{16} \times \frac{2}{3} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\therefore P\left(-a \leq X \leq \frac{a}{2}\right) = 1 - P\left(\frac{a}{2} \leq X \leq 2a\right) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\therefore P\left(-a \leq X \leq \frac{a}{2}\right) > P\left(\frac{a}{2} \leq X \leq 2a\right)$$



$$\therefore X^2 < a^2 \text{에서 } X^2 - a^2 < 0$$

$$(X+a)(X-a) < 0$$

$$\therefore -a < X < a$$

$$\therefore P(A) = P(-a < X < a)$$

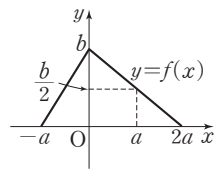
$$P(B) = P(X > 0) \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = P(0 < X < a)$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \{b + f(a)\} \times a}{\frac{1}{2} \times 2a \times b}$$

$$= \frac{\left(b + \frac{b}{2}\right) \times a}{2ab} = \frac{\frac{3b}{2}}{2b} = \frac{3}{4}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다



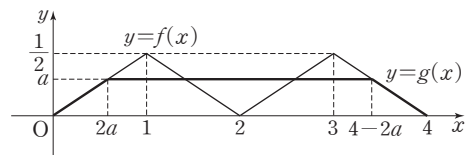
05 답 24

$\{g(x) - f(x)\} \{g(x) - a\} = 0$ 이므로 $g(x) = f(x)$ 또는 $g(x) = a$

$$0 \leq x \leq 1 \text{에서 } f(x) = \frac{1}{2}x$$

이때 $\frac{1}{2}x = a$ 에서 $x = 2a$ 이므로 $f(2a) = a$

$g(x)$ 는 확률밀도함수이고 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 연속이므로 (가), (나)를 만족시키는 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$$P(0 \leq Y \leq 4) = 1 \text{이므로 } \frac{1}{2} \times \{4 + (4 - 2a - 2a)\} \times a = 1$$

$$\frac{1}{2}a(8 - 4a) = 1, 2a^2 - 4a + 1 = 0 \quad \therefore a = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$$\text{이때 } 0 < a < \frac{1}{2} \text{이므로 } a = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \quad \therefore 1 < 5a < 2$$

$$\therefore P(0 \leq Y \leq 5a) = \frac{1}{2} \times (5a + 3a) \times a = 4a^2$$

$$= 4 \times \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2}\right)^2 = 6 - 4\sqrt{2}$$

따라서 $p=6, q=4$ 이므로 $p \times q = 24$

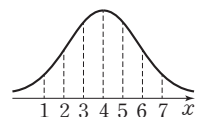
06 답 35

$$\sum_{n=1}^7 P(X \leq n) = P(X \leq 1) + P(X \leq 2) + P(X \leq 3) + P(X \leq 4)$$

$$+ P(X \leq 5) + P(X \leq 6) + P(X \leq 7)$$

이때 정규분포 $N(4, 3^2)$ 을 따르는 확률변수 X

의 정규분포곡선은 그림과 같이 직선 $x=4$ 에 대하여 대칭이므로



$$P(X \leq 1) + P(X \leq 7) = P(X \leq 1) + P(X \geq 1)$$

$$= 1$$

$$P(X \leq 2) + P(X \leq 6) = P(X \leq 2) + P(X \geq 2) = 1$$

$$P(X \leq 3) + P(X \leq 5) = P(X \leq 3) + P(X \geq 3) = 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^7 P(X \leq n)$$

$$= \{P(X \leq 1) + P(X \leq 7)\} + \{P(X \leq 2) + P(X \leq 6)\}$$

$$+ \{P(X \leq 3) + P(X \leq 5)\} + P(X \leq 4)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 0.5 = 3.5$$

따라서 $a=3.5$ 이므로 $10a=35$

07 답 19

$P(X \leq 23) + P(X \geq 20) = 1 + P(20 \leq X \leq 23)$ 이므로
 $1 + P(15 \leq X \leq 18) = P(X \leq 23) + P(X \geq 20)$ 에서
 $1 + P(15 \leq X \leq 18) = 1 + P(20 \leq X \leq 23)$

즉, $P(15 \leq X \leq 18) = P(20 \leq X \leq 23)$ 이므로 두 직선 $x=18$,
 $x=20$ 은 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭이다. $\rightarrow$ 두 직선 $x=15$, $x=23$ 이
 직선 $x=m$ 에 대하여 대칭
 $\therefore m = \frac{18+20}{2} = 19$ 임을 이용해도 된다.

$P(X \leq a) + P(X \leq a+b) = 1$ 에서

$P(X \leq a) = 1 - P(X \leq a+b)$

$P(X \leq a) = P(X \geq a+b)$

즉, 두 직선 $x=a$, $x=a+b$ 는 직선 $x=19$ 에 대하여 대칭이므로
 $\frac{a+(a+b)}{2} = 19 \quad \therefore 2a+b=38 \quad \dots\dots ①$

이때 $ab=10$ 에서 $b=\frac{10}{a}$ 이므로 이를 ①에 대입하면

$$2a + \frac{10}{a} = 38, \quad 2a^2 - 38a + 10 = 0$$

따라서 모든 a 의 값의 합은 $-\frac{-38}{2} = 19$

08 답 154

(가)에서 $P(X \geq 28) < 0.5$ 이므로 $m < 28 \quad \dots\dots ①$

(나)에서 $f(14) < f(38)$ 이므로 $|m-14| > |m-38|$

①에서 $m < 28$ 이므로

(i) $m < 14$ 일 때,

$$|m-14| > |m-38| \text{에서 } -m+14 > -m+38$$

즉, $14 > 38$ 이 되어 성립하지 않는다.

(ii) $14 \leq m < 28$ 일 때,

$$|m-14| > |m-38| \text{에서 } m-14 > -m+38$$

즉, $2m > 52$ 이므로 $m > 26$

(i), (ii)에서 $26 < m < 28$ 이므로 자연수 m 의 값은 27이다.

이때 $E(X^2) = 733$ 이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 733 - 27^2 = 4$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4} = 2$$

따라서 $m=27$, $\sigma=2$ 이므로

$$\begin{aligned} P(25 \leq X \leq 30) &= P(27-1 \times 2 \leq X \leq 27+1.5 \times 2) \\ &= P(m-\sigma \leq X \leq m+1.5\sigma) \\ &= P(m-\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m+1.5\sigma) \\ &= P(m \leq X \leq m+\sigma) + P(m \leq X \leq m+1.5\sigma) \\ &= 0.34 + 0.43 = 0.77 \end{aligned}$$

$$\therefore 200 \times P(25 \leq X \leq 30) = 200 \times 0.77 = 154$$

09 답 ④

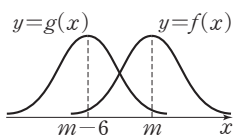
곡선 $y=g(x)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 를 x 축의 방향으로 -6 만큼 평행이동한
 것이므로 두 확률변수 X, Y 의 표준편차는 같다.

확률변수 X 의 평균을 m , 표준편차를 σ 라
 하면 확률변수 Y 의 평균은 $m-6$, 표준편
 차는 σ 이다.

즉, 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포

$$N(m, \sigma^2), N(m-6, \sigma^2) \text{을 따르므로 } Z_X = \frac{X-m}{\sigma}, Z_Y = \frac{Y-m+6}{\sigma}$$

으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따
 른다.



(가)의 $P(X \leq 11) = P(Y \geq 23)$ 에서

$$P\left(Z_X \leq \frac{11-m}{\sigma}\right) = P\left(Z_Y \geq \frac{23-m+6}{\sigma}\right)$$

$$P\left(Z_X \leq \frac{11-m}{\sigma}\right) = P\left(Z_Y \geq \frac{29-m}{\sigma}\right)$$

$$\therefore \frac{11-m}{\sigma} = -\frac{29-m}{\sigma} \text{이므로}$$

$$11-m = -29+m$$

$$40 = 2m \quad \therefore m = 20$$

(나)의 $P(X \leq k) + P(Y \leq k) = 1$ 에서

$$P\left(Z_X \leq \frac{k-20}{\sigma}\right) + P\left(Z_Y \leq \frac{k-20+6}{\sigma}\right) = 1$$

$$P\left(Z_X \leq \frac{k-20}{\sigma}\right) + P\left(Z_Y \leq \frac{k-14}{\sigma}\right) = 1$$

$$\therefore \frac{k-20}{\sigma} = -\frac{k-14}{\sigma} \text{이므로 } k-20 = -k+14$$

$$2k = 34 \quad \therefore k = 17$$

$$\therefore P(X \leq 17) + P(Y \geq 17)$$

$$= P\left(Z_X \leq \frac{17-20}{\sigma}\right) + P\left(Z_Y \geq \frac{17-20+6}{\sigma}\right)$$

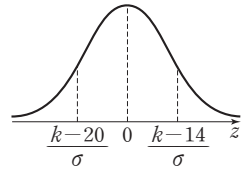
$$= P\left(Z_X \leq -\frac{3}{\sigma}\right) + P\left(Z_Y \geq \frac{3}{\sigma}\right) = 2P\left(Z \geq \frac{3}{\sigma}\right)$$

$$P(X \leq 17) + P(Y \geq 17) = 0.1336 \text{에서 } P\left(Z \geq \frac{3}{\sigma}\right) = 0.0668$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 에서 $P(Z \geq 1.5) = 0.0668$ 이므로

$$\frac{3}{\sigma} = 1.5 \quad \therefore \sigma = 2$$

$$\therefore E(X) + \sigma(Y) = m + \sigma = 22$$



10 답 ①

$E(X) = m_1$, $E(Y) = m_2$, $V(X) = V(Y) = \sigma^2$ 으로 놓으면

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=m_1$ 에 대하여 대칭이고,

$$f(a) = f(3a) \text{이므로 } m_1 = \frac{a+3a}{2} = 2a$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 평행이동하면 함수 $y=g(x)$

의 그래프와 일치하고, $f(a) = f(3a) = g(2a)$ 이므로

$$g(0) = g(2a) \text{ 또는 } g(2a) = g(4a)$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $x=m_2$ 에 대하여 대칭이므로

$$m_2 = \frac{0+2a}{2} = a \text{ 또는 } m_2 = \frac{2a+4a}{2} = 3a$$

한편 $P(Y \leq 2a) = 0.6915 > 0.5$ 이므로 $m_2 < 2a$ 이고,

$a > 0$ 이므로 $m_2 = a$

즉, 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(2a, \sigma^2)$, $N(a, \sigma^2)$ 을 따르

므로 $Z_X = \frac{X-2a}{\sigma}$, $Z_Y = \frac{Y-a}{\sigma}$ 로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모
 두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P(Y \leq 2a) = P\left(Z_Y \leq \frac{2a-a}{\sigma}\right) = P\left(Z_Y \leq \frac{a}{\sigma}\right)$$

$$= 0.5 + P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{a}{\sigma}\right) = 0.6915$$

$$\text{이때 } P(0 \leq Z \leq 0.5) = 0.1915 \text{이므로 } \frac{a}{\sigma} = 0.5 \quad \therefore \sigma = 2a$$

$$\therefore P(0 \leq X \leq 3a) = P\left(\frac{0-2a}{2a} \leq Z_X \leq \frac{3a-2a}{2a}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z_X \leq 0.5)$$

$$= P(-1 \leq Z_X \leq 0) + P(0 \leq Z_X \leq 0.5)$$

$$= P(0 \leq Z_X \leq 1) + P(0 \leq Z_X \leq 0.5)$$

$$= 0.3413 + 0.1915 = 0.5328$$

11 답 ②

두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(m, \sigma^2), N(2m, (2\sigma)^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-m}{\sigma}, Z_Y = \frac{Y-2m}{2\sigma}$ 으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$F(t) = P(X \geq m - \sigma t) \\ = P\left(Z_X \geq \frac{m - \sigma t - m}{\sigma}\right) = P(Z_X \geq -t)$$

$$G(t) = P(Y \leq 2m + \sigma t) \\ = P\left(Z_Y \leq \frac{2m + \sigma t - 2m}{2\sigma}\right) = P\left(Z_Y \leq \frac{t}{2}\right)$$

ㄱ. $F(1) = P(Z_X \geq -1), G(-2) = P(Z_Y \leq -1)$ 이므로

$$F(1) + G(-2) = P(Z_X \geq -1) + P(Z_Y \leq -1) = 1$$

ㄴ. $2t_1 < t_2$ 이면 $-t_1 > -\frac{t_2}{2}$ 이므로

$$P(Z \geq -t_1) < P\left(Z \geq -\frac{t_2}{2}\right)$$

$$\text{이때 } F(t_1) = P(Z_X \geq -t_1), G(t_2) = P\left(Z_Y \leq \frac{t_2}{2}\right) = P\left(Z_Y \geq -\frac{t_2}{2}\right)$$

$$\text{이므로 } F(t_1) < G(t_2)$$

ㄷ. 양수 t_3 에 대하여

$$F(t_3) = P(Z_X \geq -t_3) \\ = P(Z_X \leq t_3) \\ = P(Z_X \leq 0) + P(0 \leq Z_X \leq t_3) \\ = 0.5 + P(0 \leq Z_X \leq t_3)$$

$$G(4t_3) = P(Z_Y \leq 2t_3) \\ = P(Z_Y \leq 0) + P(0 \leq Z_Y \leq 2t_3) \\ = 0.5 + P(0 \leq Z_Y \leq 2t_3)$$

$$\therefore G(4t_3) + 0.5 - 2F(t_3) \\ = \{0.5 + P(0 \leq Z_Y \leq 2t_3)\} + 0.5 - 2\{0.5 + P(0 \leq Z_X \leq t_3)\} \\ = P(0 \leq Z_Y \leq 2t_3) - 2P(0 \leq Z_X \leq t_3) \\ = P(0 \leq Z_Y \leq t_3) + P(t_3 \leq Z_Y \leq 2t_3) - 2P(0 \leq Z_X \leq t_3) \\ = P(t_3 \leq Z_Y \leq 2t_3) - P(0 \leq Z_X \leq t_3) < 0 \quad \text{표준정규분포를 따르는 확률변수 } Z \text{의 확률밀도함수 } f(z) \text{는 } z=0 \text{에서 최대이고 } z=0 \text{에서 멀어질수록 } f(z) \text{의 값은 작아진다.}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

12 답 ②

그림에서 색칠한 부분의 넓이를 S 라 하면

$$P(35 \leq X \leq 50) = S_1 + S \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$P(35 \leq Y \leq 50) = S_2 + S \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

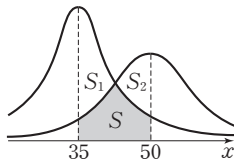
$$P(35 \leq X \leq 50) - P(35 \leq Y \leq 50) = S_1 - S_2$$

이때 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(35, 5^2), N(50, 10^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-35}{5}, Z_Y = \frac{Y-50}{10}$ 으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(35 \leq X \leq 50) = P\left(\frac{35-35}{5} \leq Z_X \leq \frac{50-35}{5}\right) \\ = P(0 \leq Z_X \leq 3) = 0.4987$$

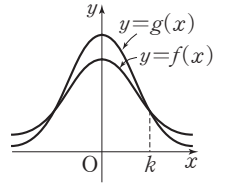
$$P(35 \leq Y \leq 50) = P\left(\frac{35-50}{10} \leq Z_Y \leq \frac{50-50}{10}\right) \\ = P(-1.5 \leq Z_Y \leq 0) \\ = P(0 \leq Z_Y \leq 1.5) = 0.4332$$

$$\therefore S_1 - S_2 = P(35 \leq X \leq 50) - P(35 \leq Y \leq 50) \\ = 0.4987 - 0.4332 = 0.0655$$



13 답 3/2

두 확률변수 X, Z 의 평균이 0으로 같고 확률변수 X 의 표준편차가 1보다 크므로 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다. 이때 $\textcircled{b}$ 에 의하여 $x>0$ 에서 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 x 좌표는 k 이다.



확률변수 X 는 정규분포 $N(0, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X}{\sigma}$ 로 놓으면 확률변수 Z_X 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\text{따라서 } \textcircled{a} \text{의 } P(0 \leq X \leq k) = 0.385 \text{에서 } P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{k}{\sigma}\right) = 0.385$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.2) = 0.385$ 이므로

$$\frac{k}{\sigma} = 1.2 \quad \therefore k = 1.2\sigma \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{b}$ 에서 $P(0 \leq Z \leq k) - P(0 \leq X \leq k) = 0.079$ 이므로

$$P(0 \leq Z \leq k) - 0.385 = 0.079$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq k) = 0.464$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.8) = 0.464$ 이므로 $k = 1.8$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$1.8 = 1.2\sigma \quad \therefore \sigma = \frac{3}{2}$$

14 답 25

두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(m_1, \sigma_1^2), N(m_2, \sigma_2^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-m_1}{\sigma_1}, Z_Y = \frac{Y-m_2}{\sigma_2}$ 로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \leq x) = P(X \geq 40 - x) \text{에서}$$

$$P\left(Z_X \leq \frac{x-m_1}{\sigma_1}\right) = P\left(Z_X \geq \frac{(40-x)-m_1}{\sigma_1}\right)$$

$$\text{즉, } \frac{x-m_1}{\sigma_1} = -\frac{(40-x)-m_1}{\sigma_1} \text{이므로}$$

$$x - m_1 = -40 + x + m_1$$

$$40 = 2m_1 \quad \therefore m_1 = 20$$

$$\text{또 } P(Y \leq x) = P(X \leq x + 10) \text{에서}$$

$$P\left(Z_Y \leq \frac{x-m_2}{\sigma_2}\right) = P\left(Z_X \leq \frac{(x+10)-m_1}{\sigma_1}\right)$$

$$P\left(Z_Y \leq \frac{x-m_2}{\sigma_2}\right) = P\left(Z_X \leq \frac{x-10}{\sigma_1}\right)$$

$$\text{즉, } \frac{x-m_2}{\sigma_2} = \frac{x-10}{\sigma_1} \text{이므로}$$

$$\sigma_1 x - m_2 \sigma_1 = \sigma_2 x - 10 \sigma_2$$

$$\text{이 식은 } x \text{에 대한 항등식이므로 } \sigma_1 = \sigma_2, -m_2 \sigma_1 = -10 \sigma_2$$

$$\therefore \sigma_1 = \sigma_2, m_2 = 10$$

$$\therefore P(15 \leq X \leq 20) + P(15 \leq Y \leq 20)$$

$$= P\left(\frac{15-20}{\sigma_1} \leq Z_X \leq \frac{20-20}{\sigma_1}\right) + P\left(\frac{15-10}{\sigma_2} \leq Z_Y \leq \frac{20-10}{\sigma_2}\right)$$

$$= P\left(-\frac{5}{\sigma_1} \leq Z_X \leq 0\right) + P\left(\frac{5}{\sigma_2} \leq Z_Y \leq \frac{10}{\sigma_2}\right)$$

$$= P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{5}{\sigma_1}\right) + P\left(\frac{5}{\sigma_2} \leq Z_Y \leq \frac{10}{\sigma_2}\right)$$

$$= P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{5}{\sigma_1}\right) + P\left(\frac{5}{\sigma_1} \leq Z_Y \leq \frac{10}{\sigma_1}\right) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma_1}\right)$$

$$P(15 \leq X \leq 20) + P(15 \leq Y \leq 20) = 0.4772 \text{에서}$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{10}{\sigma_1}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로 $\frac{10}{\sigma_1} = 2 \quad \therefore \sigma_1 = 5$

따라서 $m_1 = 20, \sigma_2 = \sigma_1 = 5$ 이므로 $m_1 + \sigma_2 = 25$

15 답 70

두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(m, 1^2), N(m^2 + 2m + 16, \sigma^2)$

을 따르므로 $Z_X = \frac{X-m}{1}, Z_Y = \frac{Y-(m^2+2m+16)}{\sigma}$ 으로 놓으면 두

확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(X \leq 0) = P(Y \leq 0)$ 에서

$$P\left(Z_X \leq \frac{0-m}{1}\right) = P\left(Z_Y \leq \frac{0-(m^2+2m+16)}{\sigma}\right)$$

$$P(Z_X \leq -m) = P\left(Z_Y \leq \frac{-(m^2+2m+16)}{\sigma}\right)$$

$$\therefore -m = \frac{-(m^2+2m+16)}{\sigma} \text{이므로}$$

$$\sigma = \frac{m^2+2m+16}{m}, \sigma = m+2 + \frac{16}{m}$$

이때 $m > 0, \frac{16}{m} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\sigma = m+2 + \frac{16}{m} \geq 2 + 2\sqrt{m \times \frac{16}{m}} = 10 \quad (\text{단, 등호는 } m = \frac{16}{m} \text{일 때 성립})$$

$$m = \frac{16}{m} \text{일 때, } \sigma \text{의 값이 최소이므로 } m_1 = 4$$

$$m = 4 \text{일 때, } \sigma = 4 + 2 + \frac{16}{4} = 10$$

즉, 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(4, 1^2), N(40, 10^2)$ 을 따르므로

$P(X \geq 1) = P(Y \leq k)$ 에서

$$P\left(Z_X \geq \frac{1-4}{1}\right) = P\left(Z_Y \leq \frac{k-40}{10}\right)$$

$$P(Z_X \geq -3) = P\left(Z_Y \leq \frac{k-40}{10}\right)$$

$$\therefore -3 = -\frac{k-40}{10} \text{이므로 } k = 70$$

16 답 2

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-m}{2}$ 으로 놓으

면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(a \leq X \leq a+6) = P\left(\frac{a-m}{2} \leq Z \leq \frac{a+6-m}{2}\right)$$

$$= P\left(\frac{a-m}{2} \leq Z \leq \frac{a-m}{2} + 3\right)$$

$$2P(0 \leq Z \leq 1.5) = P(-1.5 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(-1.5 \leq Z \leq -1.5 + 3)$$

$P(a \leq X \leq a+6) = 2P(0 \leq Z \leq 1.5)$ 에서

$$P\left(\frac{a-m}{2} \leq Z \leq \frac{a-m}{2} + 3\right) = P(-1.5 \leq Z \leq -1.5 + 3)$$

$$\therefore \frac{a-m}{2} = -1.5$$

$$a-m = -3 \quad \therefore a = m-3$$

$$\therefore P(a \leq X \leq a+1) = P(m-3 \leq X \leq m-2)$$

$$= P\left(\frac{m-3-m}{2} \leq Z \leq \frac{m-2-m}{2}\right)$$

$$= P(-1.5 \leq Z \leq -1)$$

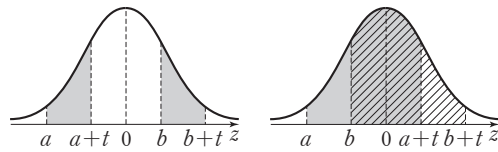
$$= P(1 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.5) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.4332 - 0.3413 = 0.0919$$

비법 NOTE

양수 t 에 대하여 $P(a \leq Z \leq a+t) = P(b \leq Z \leq b+t)$ 이면
 $a=b$ 또는 $a=-(b+t)$ 이다.



17 답 5

이 학교 3학년 학생의 A, B 과목 시험 점수를 각각 X 점, Y 점이라 하면 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(m, \sigma^2), N(m+3, \sigma^2)$ 을

따르므로 $Z_X = \frac{X-m}{\sigma}, Z_Y = \frac{Y-(m+3)}{\sigma}$ 으로 놓으면 두 확률변수

Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 A 과목 시험 점수가 80점 이상일 확률이 0.09이므로

$$P(X \geq 80) = 0.09 \text{에서 } P\left(Z_X \geq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.09$$

$$P(Z_X \geq 0) - P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.09$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.09$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.41$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.34) = 0.41$ 이므로

$$\frac{80-m}{\sigma} = 1.34 \quad \therefore m = 80 - 1.34\sigma \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 B 과목 시험 점수가 80점 이상일 확률이 0.15이므로

$$P(Y \geq 80) = 0.15 \text{에서 } P\left(Z_Y \geq \frac{80-(m+3)}{\sigma}\right) = 0.15$$

$$P(Z_Y \geq 0) - P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{77-m}{\sigma}\right) = 0.15$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{77-m}{\sigma}\right) = 0.15$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{77-m}{\sigma}\right) = 0.35$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.04) = 0.35$ 이므로

$$\frac{77-m}{\sigma} = 1.04 \quad \therefore m = 77 - 1.04\sigma \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{을 연립하여 풀면 } m = 66.6, \sigma = 10 \quad \therefore m + \sigma = 76.6$$

18 답 32

이 농장에서 수확한 사과 1개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(400, 20^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-400}{20}$ 으로 놓으면 확률변수

Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이 농장에서 수확한 사과 중에서 임의로 1개를 택할 때, 판매할 수 있는 사과일 확률은

$$P(X \geq 384) = P\left(Z \geq \frac{384-400}{20}\right) = P(Z \geq -0.8)$$

$$= P(Z \leq 0.8) = P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.8)$$

$$= 0.5 + 0.3 = 0.8 \quad \dots\dots\dots \text{배점 50\%}$$

즉, 이 농장에서 수확한 사과 1개가 판매할 수 있는 사과일 확률은

$$0.8 = \frac{4}{5} \text{이므로 임의로 택한 4개의 사과 중 판매할 수 있는 사과가 3개일}$$

$$\text{확률은 } {}_4C_3 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \left(\frac{1}{5}\right)^1 = 4 \times \frac{4^3}{5^4} = \frac{4^4}{5^4} = \frac{2^8}{5^4} \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\therefore p=4, q=8 \text{이므로 } pq=32 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

19 답 ⑤

이 회사 직원의 출근 시간을 X 분이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(66.4, 15^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-66.4}{15}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준 정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.
따라서 출근 시간이 73분 이상일 확률은

$$P(X \geq 73) = P\left(Z \geq \frac{73-66.4}{15}\right) = P(Z \geq 0.44)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.44)$$

$$= 0.5 - 0.17 = 0.33$$

$$\therefore P(X < 73) = 1 - P(X \geq 73) = 1 - 0.33 = 0.67$$
출근 시간이 73분 이상인 직원들 중에서 40%, 출근 시간이 73분 미만인 직원들 중에서 20%가 지하철을 이용하였으므로 구하는 확률은

$$P(X \geq 73) \times 0.4 + P(X < 73) \times 0.2 = 0.33 \times 0.4 + 0.67 \times 0.2$$

$$= 0.132 + 0.134$$

$$= 0.266$$

20 답 ④

이 고등학교 학생의 하루 수학 공부 시간을 X 분이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N(40, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-40}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.
이 고등학교 학생 중에서 임의로 1명을 택할 때, 하루 수학 공부 시간이 35분 이상일 확률은

$$P(X \geq 35) = P\left(Z \geq \frac{35-40}{5}\right)$$

$$= P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1)$$

$$= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 + 0.34 = 0.84$$

$$\therefore P(X < 35) = 1 - P(X \geq 35) = 1 - 0.84 = 0.16$$
이 고등학교 학생 중에서 임의로 택한 1명의 학생이 여학생인 사건을 A , 하루 수학 공부 시간이 35분 이상인 학생인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.
이때 하루 수학 공부 시간이 35분 이상인 학생의 40%가 남학생이므로 여학생은 60%이고, 하루 수학 공부 시간이 35분 미만인 학생의 70%가 여학생이므로

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

$$= 0.84 \times 0.6 = 0.504$$

$$P(A \cap B^c) = P(B^c)P(A|B^c)$$

$$= 0.16 \times 0.7 = 0.112$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A \cap B^c)}$$

$$= \frac{0.504}{0.504 + 0.112} = \frac{0.504}{0.616} = \frac{9}{11}$$

21 답 404명

수학 등급이 2등급, 3등급인 학생의 영어 점수를 각각 X 점, Y 점이라 하면 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(75, 5^2)$, $N(72, 4^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-75}{5}$, $Z_Y = \frac{Y-72}{4}$ 로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.
수학 등급이 2등급인 학생 중에서 임의로 1명을 택할 때, 영어 점수가 70점 이상 80점 이하일 확률은

$$P(70 \leq X \leq 80) = P\left(\frac{70-75}{5} \leq Z_X \leq \frac{80-75}{5}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z_X \leq 1)$$

$$= 2P(0 \leq Z_X \leq 1)$$

$$= 2 \times 0.34 = 0.68$$
수학 등급이 3등급인 학생 중에서 임의로 1명을 택할 때, 영어 점수가 70점 이상 80점 이하일 확률은

$$P(70 \leq Y \leq 80) = P\left(\frac{70-72}{4} \leq Z_Y \leq \frac{80-72}{4}\right)$$

$$= P(-0.5 \leq Z_Y \leq 2)$$

$$= P(-0.5 \leq Z_Y \leq 0) + P(0 \leq Z_Y \leq 2)$$

$$= P(0 \leq Z_Y \leq 0.5) + P(0 \leq Z_Y \leq 2)$$

$$= 0.19 + 0.48$$

$$= 0.67$$
이때 학생 1000명 중 수학 등급이 2등급, 3등급인 학생 수는 각각 $1000 \times 0.2 = 200$ (명), $1000 \times 0.4 = 400$ (명)이므로 구하는 학생 수는

$$200 \times 0.68 + 400 \times 0.67 = 136 + 268 = 404$$
(명)

22 답 80

주사위를 한 번 던져서 홀수의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(n^2, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X) = n^2 \times \frac{1}{2} = \frac{n^2}{2}, V(X) = n^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n^2}{4} \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$
이때 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N\left(\frac{n^2}{2}, \left(\frac{n}{2}\right)^2\right)$ 을 따르므로

$$Z = \frac{X - \frac{n^2}{2}}{\frac{n}{2}}$$
으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore f(n, k) = P\left(\left|\frac{X}{n^2} - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{k}\right)$$

$$= P\left(-\frac{1}{k} + \frac{1}{2} < \frac{X}{n^2} < \frac{1}{k} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= P\left(-n^2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\right) < X < n^2\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= P\left(\frac{-n^2\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\right) - \frac{n^2}{2}}{\frac{n}{2}} < Z < \frac{n^2\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\right) - \frac{n^2}{2}}{\frac{n}{2}}\right)$$

$$= P\left(-\frac{2n}{k} < Z < \frac{2n}{k}\right) \dots\dots\dots \text{배점 50\%}$$

이때 $f(40, 4) = f(n, 8)$ 에서

$$P(-20 < Z < 20) = P\left(-\frac{n}{4} < Z < \frac{n}{4}\right)$$
따라서 $20 = \frac{n}{4}$ 이므로 $n = 80 \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$

23 답 ③

두 확률변수 X, Y 가 각각 이항분포 $B(144, p_1)$, $B(576, p_2)$ 를 따르므로

$$E(X) = 144p_1, E(Y) = 576p_2$$

$$V(X) = 144p_1(1-p_1), V(Y) = 576p_2(1-p_2)$$

$$\therefore p_1 = p_2 = \frac{1}{6} \text{이면}$$

$$E(Y) - E(X) = 576p_1 - 144p_1 = 432p_1 = 432 \times \frac{1}{6} = 72$$

ㄴ. $p_1=4p_2$ 에서 $p_2=\frac{p_1}{4}$ 이므로

$$V(Y)=576 \times \frac{p_1}{4} \left(1-\frac{p_1}{4}\right) \\ =144p_1 \left(1-\frac{p_1}{4}\right)$$

$$\therefore V(X) \neq V(Y)$$

ㄷ. 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(144p_1, 144p_1(1-p_1))$ 을 따르므로 $Z_X=\frac{X-144p_1}{12\sqrt{p_1(1-p_1)}}$ 로 놓으면 확률변수 Z_X 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P\left(\left|\frac{X}{144}-p_1\right| \leq \frac{1}{24}\right) \\ =P\left(p_1-\frac{1}{24} \leq \frac{X}{144} \leq p_1+\frac{1}{24}\right) \\ =P(144p_1-6 \leq X \leq 144p_1+6) \\ =P\left(\frac{144p_1-6-144p_1}{12\sqrt{p_1(1-p_1)}} \leq Z_X \leq \frac{144p_1+6-144p_1}{12\sqrt{p_1(1-p_1)}}\right) \\ =P\left(-\frac{1}{2\sqrt{p_1(1-p_1)}} \leq Z_X \leq \frac{1}{2\sqrt{p_1(1-p_1)}}\right) \\ =2P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{1}{2\sqrt{p_1(1-p_1)}}\right)$$

또 확률변수 Y 는 근사적으로 정규분포 $N(576p_2, 576p_2(1-p_2))$ 를 따르므로 $Z_Y=\frac{Y-576p_2}{24\sqrt{p_2(1-p_2)}}$ 로 놓으면 확률변수 Z_Y 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P\left(\left|\frac{Y}{576}-p_2\right| \leq \frac{1}{48}\right) \\ =P\left(p_2-\frac{1}{48} \leq \frac{Y}{576} \leq p_2+\frac{1}{48}\right) \\ =P(576p_2-12 \leq Y \leq 576p_2+12) \\ =P\left(\frac{576p_2-12-576p_2}{24\sqrt{p_2(1-p_2)}} \leq Z_Y \leq \frac{576p_2+12-576p_2}{24\sqrt{p_2(1-p_2)}}\right) \\ =P\left(-\frac{1}{2\sqrt{p_2(1-p_2)}} \leq Z_Y \leq \frac{1}{2\sqrt{p_2(1-p_2)}}\right) \\ =2P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{1}{2\sqrt{p_2(1-p_2)}}\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$p_1+p_2=1$ 에서 $p_2=1-p_1$ 이고 $1-p_2=p_1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$2P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{1}{2\sqrt{p_2(1-p_2)}}\right) = 2P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{1}{2\sqrt{p_1(1-p_1)}}\right)$$

$$\therefore P\left(\left|\frac{X}{144}-p_1\right| \leq \frac{1}{24}\right) = P\left(\left|\frac{Y}{576}-p_2\right| \leq \frac{1}{48}\right)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

24 답 994

한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 4 이하일 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

5 이상일 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 이므로 주사위를 16200번 던졌을 때 5 이상의 눈

이 나오는 횟수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(16200, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X)=16200 \times \frac{1}{3}=5400, V(X)=16200 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}=3600$$

이때 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(5400, 60^2)$ 을 따르므로

$Z=\frac{X-5400}{60}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

점 A의 위치가 5700 이하이려면 주사위를 던져 나온 눈의 수가 4 이하인 횟수에서 5 이상인 횟수를 뺀 값이 5700 이하이어야 하므로

$$(16200-X)-X \leq 5700$$

$$-2X \leq -10500 \quad \therefore X \geq 5250$$

즉, 구하는 확률은

$$P(X \geq 5250) = P\left(Z \geq \frac{5250-5400}{60}\right) \\ =P(Z \geq -2.5) = P(-2.5 \leq Z \leq 0) + P(Z \geq 0) \\ =P(0 \leq Z \leq 2.5) + P(Z \geq 0) \\ =0.494 + 0.5 \\ =0.994$$

따라서 $k=0.994$ 이므로 $1000 \times k=994$

25 답 ③

한 개의 주사위를 1번 던져서 나오는 눈의 수가 3의 배수일 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ 이므로 주사위를 n 번 던져서 3의 배수의 눈의 수가 나오는 횟수

를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$ 을 따른다.

$$\therefore E(X)=n \times \frac{1}{3}=\frac{n}{3}, V(X)=n \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}=\frac{2}{9}n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

주사위를 n 번 던져서 3의 배수가 아닌 눈의 수가 나오는 횟수는 $n-X$

이므로 주사위를 n 번 던진 후 받은 구슬의 개수의 합을 Y 라 하면

$$Y=3X+(n-X)=2X+n$$

이때 받은 구슬의 개수의 합의 기댓값이 750이므로 $E(Y)=750$ 에서

$$E(2X+n)=750, 2E(X)+n=750$$

$$2 \times \frac{n}{3}+n=750 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\frac{5}{3}n=750 \quad \therefore n=450$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$E(X)=150, V(X)=100$$

$$\therefore V(Y)=V(2X+n)=2^2V(X)=4 \times 100=400$$

이때 확률변수 Y 는 근사적으로 정규분포 $N(750, 20^2)$ 을 따르므로

$Z=\frac{Y-750}{20}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 주사위를 n 번 던진 후 받은 구슬의 개수의 합이 780 이상일 확률은

$$P(Y \geq 780) = P\left(Z \geq \frac{780-750}{20}\right) \\ =P(Z \geq 1.5) \\ =P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ =0.5 - 0.4332 \\ =0.0668$$

26 답 159

A를 1번, B를 2번, C를 3번 차례로 던지는 시행에서 모두 짝수가 나올 확률은

$$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{16}$$

이므로 홀수가 적어도 한 번 나올 확률은

$$1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

즉, A를 1번, B를 2번, C를 3번 차례로 던지는 시행을 3840회 반복할 때, 홀수가 적어도 한 번 나오는 횟수를 X 라 하면 확률변수 X 는 이항

분포 $B\left(3840, \frac{15}{16}\right)$ 를 따른다.

$$\therefore E(X) = 3840 \times \frac{15}{16} = 3600, V(X) = 3840 \times \frac{15}{16} \times \frac{1}{16} = 225$$

이때 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(3600, 15^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-3600}{15}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X \geq 3615) &= P\left(Z \geq \frac{3615-3600}{15}\right) \\ &= P(Z \geq 1) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.341 \\ &= 0.159\end{aligned}$$

따라서 $p=0.159$ 이므로
 $1000p=159$

STEP 3 최고난도 문제

84~85쪽

01 $\frac{11}{4}$
02 $\frac{5}{16}$
03 ⑤
04 987
05 673
06 ③

07 ②

01 답 $\frac{11}{4}$

1단계 $f(x-2)$ 구하기

$$f(x) = \begin{cases} a & (x < a) \\ x & (x \geq a) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(x-2) = \begin{cases} a & (x-2 < a) \\ x-2 & (x-2 \geq a) \end{cases} = \begin{cases} a & (x < a+2) \\ x-2 & (x \geq a+2) \end{cases}$$

2단계 a 의 값 구하기

(i) $0 < a \leq 4$ 일 때,

$2 < a+2 \leq 6$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(a-a) & (0 \leq x < a) \\ \frac{2}{9}(x-a) & (a \leq x < a+2) \\ \frac{2}{9}\{x-(x-2)\} & (a+2 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

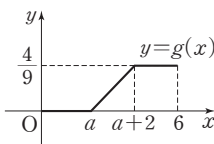
$$= \begin{cases} 0 & (0 \leq x < a) \\ \frac{2}{9}(x-a) & (a \leq x < a+2) \\ \frac{4}{9} & (a+2 \leq x \leq 6) \end{cases}$$

이때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

즉, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=6$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times [(6-a) + \{6-(a+2)\}] \times \frac{4}{9} = 1$$

$$5-a = \frac{9}{4} \quad \therefore a = \frac{11}{4}$$



(ii) $4 < a \leq 6$ 일 때,

$6 < a+2 \leq 8$ 이므로

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}(a-a) & (0 \leq x < a) \\ \frac{2}{9}(x-a) & (a \leq x \leq 6) \end{cases} = \begin{cases} 0 & (0 \leq x < a) \\ \frac{2}{9}(x-a) & (a \leq x \leq 6) \end{cases}$$

이때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.

즉, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=6$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times (6-a) \times \frac{2(6-a)}{9} = 1, a^2 - 12a + 36 = 9$$

$$a^2 - 12a + 27 = 0, (a-3)(a-9) = 0$$

$\therefore a=3$ 또는 $a=9$

그런데 $4 < a \leq 6$ 이므로 이를 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

(iii) $a > 6$ 일 때,

$$a+2 > 8 \text{이므로 } g(x) = \frac{2}{9}(a-a) = 0 \quad (0 \leq x \leq 6)$$

즉, 확률밀도함수의 성질을 만족시키지 않으므로 a 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $a = \frac{11}{4}$

idea
02 답 $\frac{5}{16}$

1단계 a 의 값 구하기

함수 $g(k)$ 에 대하여 $g(k) \geq g(5)$ 이므로 $g(k)$ 는 $k=5$ 에서 최솟값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=a$ 에 대하여 대칭이므로 함수

$$g(k) \text{의 최솟값이 } g(5) = P(4 \leq X \leq 8) \text{ 이려면 } a = \frac{4+8}{2} = 6$$

2단계 b 의 값 구하기

$$\begin{aligned}g(5) &= P(4 \leq X \leq 8) \\ &= P(4 \leq X \leq 6) + P(6 \leq X \leq 8) \\ &= 2P(6 \leq X \leq 8) \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times f(8) \\ &= 2f(8)\end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2f(8) = \frac{1}{4} \text{이므로 } f(8) = \frac{1}{8}$$

따라서 그림에서 삼각형의 닮음에 의하여

$$2 : \frac{1}{8} = b : f(6+b), 2f(6+b) = \frac{b}{8}$$

$$\therefore f(6+b) = \frac{b}{16} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

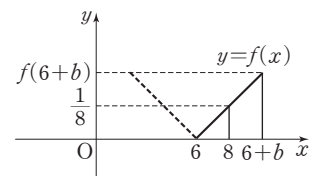
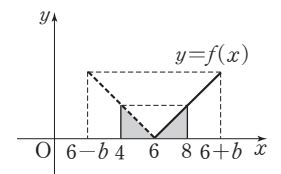
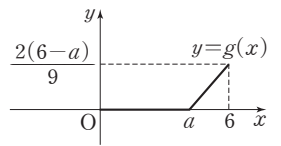
이때 $P(6 \leq X \leq 6+b) = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times b \times f(6+b) = \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \times b \times \frac{b}{16} = \frac{1}{2} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$b^2 = 16 \quad \therefore b = 4 \quad (\because b \geq 2)$$

3단계 $f(x)$ 구하기

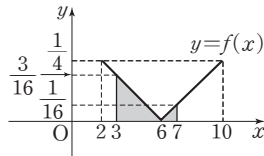
$$\therefore f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{16}(x-6) & (2 \leq x \leq 6) \\ \frac{1}{16}(x-6) & (6 \leq x \leq 10) \end{cases}$$



4단계 $P(3 \leq X \leq 7)$ 의 값 구하기

$$\therefore P(3 \leq X \leq 7)$$

$$\begin{aligned} &= P(3 \leq X \leq 6) + P(6 \leq X \leq 7) \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{16} + \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{16} \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$



03 답 ⑤

1단계 σ' 의 값 구하기

확률변수 X 는 정규분포 $N(k^2, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X - k^2}{\sigma}$ 으로 놓으

면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(3k \leq X \leq 3k+20) = 0.4778 \text{에서}$$

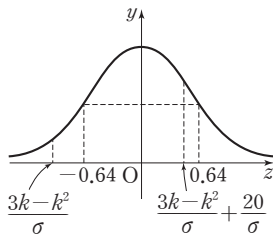
$$P\left(\frac{3k-k^2}{\sigma} \leq Z \leq \frac{3k+20-k^2}{\sigma}\right) = 0.4778$$

$$P\left(\frac{3k-k^2}{\sigma} \leq Z \leq \frac{3k-k^2}{\sigma} + \frac{20}{\sigma}\right) = 0.4778$$

이때 $P(-0.64 \leq Z \leq 0.64) = P(|Z| \leq 0.64) = 0.4778$ 이고

$$\left(\frac{3k-k^2}{\sigma} + \frac{20}{\sigma}\right) - \frac{3k-k^2}{\sigma} = \frac{20}{\sigma}, \quad 0.64 - (-0.64) = 1.28 \text{이므로}$$

$$\frac{20}{\sigma} \geq 1.28 \text{이어야 한다.}$$



이때 σ 의 값이 최대이려면 $\frac{20}{\sigma}$ 의 값이 최소가 되어야 하므로 σ 의 최댓값 σ' 에 대하여

$$\frac{20}{\sigma'} = 1.28 \quad \therefore \sigma' = \frac{125}{8}$$

2단계 k 의 값 구하기

두 직선 $x = \frac{3k-k^2}{\sigma'}$, $x = \frac{3k-k^2}{\sigma'} + \frac{20}{\sigma'}$ 이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\frac{3k-k^2}{\sigma'} = -0.64 \rightarrow \frac{3k-k^2}{\sigma'} + \frac{20}{\sigma'} = 0.64 \text{를 이용해도 된다.}$$

$$\frac{3k-k^2}{\frac{125}{8}} = -0.64, \quad 3k-k^2 = -10$$

$$k^2 - 3k - 10 = 0, \quad (k+2)(k-5) = 0$$

$$\therefore k = 5 \quad (\because k > 0)$$

3단계 $k+8\sigma'$ 의 값 구하기

$$\therefore k+8\sigma' = 5 + 8 \times \frac{125}{8} = 130$$

04 답 987

1단계 a_n 을 확률변수 Z 로 나타내기

확률변수 X 가 정규분포 $N(0, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X}{2}$ 로 놓으면 확률

변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= P\left(X \leq \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) - P\left(X \geq \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \\ &= P\left(Z \leq \left(-1\right)^n \frac{1}{2^{n+1}}\right) - P\left(Z \geq \left(-1\right)^{n+1} \frac{1}{2^{n+2}}\right) \end{aligned}$$

2단계 $\sum_{n=1}^8 (-1)^n a_n + P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2^9}\right)$ 의 값 구하기

$$a_1 = P\left(Z \leq -\frac{1}{2^2}\right) - P\left(Z \geq \frac{1}{2^3}\right)$$

$$a_2 = P\left(Z \leq \frac{1}{2^3}\right) - P\left(Z \geq -\frac{1}{2^4}\right)$$

$$a_3 = P\left(Z \leq -\frac{1}{2^4}\right) - P\left(Z \geq \frac{1}{2^5}\right)$$

$\vdots$

이므로

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^8 (-1)^n a_n \\ &= -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \cdots + a_8 \\ &= -P\left(Z \leq -\frac{1}{2^2}\right) + P\left(Z \geq \frac{1}{2^3}\right) + P\left(Z \leq \frac{1}{2^3}\right) - P\left(Z \geq -\frac{1}{2^4}\right) \\ &\quad - P\left(Z \leq -\frac{1}{2^4}\right) + P\left(Z \geq \frac{1}{2^5}\right) + \cdots + P\left(Z \leq \frac{1}{2^9}\right) - P\left(Z \geq -\frac{1}{2^{10}}\right) \\ &= -P\left(Z \leq -\frac{1}{2^2}\right) + \left\{P\left(Z \geq \frac{1}{2^3}\right) + P\left(Z \leq \frac{1}{2^3}\right)\right\} \\ &\quad - \left\{P\left(Z \geq -\frac{1}{2^4}\right) + P\left(Z \leq -\frac{1}{2^4}\right)\right\} \\ &\quad + \cdots + \left\{P\left(Z \geq \frac{1}{2^9}\right) + P\left(Z \leq \frac{1}{2^9}\right)\right\} - P\left(Z \geq -\frac{1}{2^{10}}\right) \end{aligned}$$

$$= -P\left(Z \leq -\frac{1}{4}\right) + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - P\left(Z \geq -\frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$= -P\left(Z \leq -\frac{1}{4}\right) + 1 - P\left(Z \geq -\frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$\therefore \sum_{n=1}^8 (-1)^n a_n + P\left(0 \leq X \leq \frac{1}{2^9}\right)$$

$$= -P\left(Z \leq -\frac{1}{4}\right) + 1 - P\left(Z \geq -\frac{1}{2^{10}}\right) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$= -P\left(Z \geq \frac{1}{4}\right) + 1 - P\left(Z \leq \frac{1}{2^{10}}\right) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$= -P\left(Z \geq \frac{1}{4}\right) + 1 - \left\{P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{2^{10}}\right)\right\}$$

$$+ P\left(0 \leq Z \leq \frac{1}{2^{10}}\right)$$

$$= -P(Z \geq 0.25) + 1 - 0.5$$

$$= -\{P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 0.25)\} + 0.5$$

$$= -(0.5 - 0.0987) + 0.5 = 0.0987$$

3단계 $10000p$ 의 값 구하기

따라서 $p = 0.0987$ 이므로 $10000p = 987$

05 답 673

1단계 t 의 값의 범위 구하기

확률변수 X 가 정규분포 $N(1, t^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-1}{t}$ 로 놓으면

확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \leq 5t) \geq \frac{1}{2} \text{에서 } P\left(Z \leq \frac{5t-1}{t}\right) \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } \frac{5t-1}{t} \geq 0 \text{이므로 } t \geq \frac{1}{5} \quad (\because t > 0)$$

2단계 $P(t^2 - t + 1 \leq X \leq t^2 + t + 1)$ 의 최댓값 구하기

$$P(t^2 - t + 1 \leq X \leq t^2 + t + 1)$$

$$= P\left(\frac{t^2 - t + 1 - 1}{t} \leq Z \leq \frac{t^2 + t + 1 - 1}{t}\right)$$

$$= P(t-1 \leq Z \leq t+1) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $(t+1) - (t-1) = 2$ 로 일정하므로 t 의 값이 확률변수 Z 의 평균 0에 가까울수록 $\textcircled{1}$ 의 값은 증가한다.

따라서 $P(t^2 - t + 1 \leq X \leq t^2 + t + 1)$ 은 $t = \frac{1}{5}$ 일 때 최댓값을 가지므로
 $P(-0.8 \leq Z \leq 1.2) = P(0 \leq Z \leq 0.8) + P(0 \leq Z \leq 1.2)$
 $= 0.288 + 0.385$
 $= 0.673$

$\therefore k = 0.673$

3단계 $1000 \times k$ 의 값 구하기

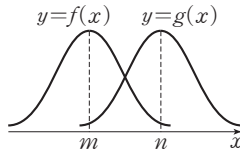
$\therefore 1000 \times k = 673$

06 답 ③

1단계 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 개형 파악하기

정규분포를 따르는 두 확률변수 X , Y 의 표준편차가 3으로 같으므로 두 확률밀도함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 모양이 같고 각각 직선 $x=m$, $x=n$ 에 대하여 대칭이다.

이때 $m < n$ 이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



2단계 $h(t)$ 구하기

$\{f(x)-f(t)\}\{g(x)-f(t)\}=0$ 에서

$f(x)=f(t)$ 또는 $g(x)=f(t)$

즉, $h(t)$ 는 직선 $y=f(t)$ 가 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 만나는 서로 다른 점의 개수이다.

그림과 같이

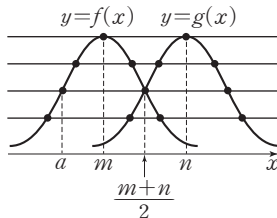
$f(a)=f\left(\frac{m+n}{2}\right)$ 이라 하면

$$a + \frac{m+n}{2} = 2m$$

$$2a + m + n = 4m$$

$$2a = 3m - n \quad \therefore a = \frac{3m-n}{2}$$

$$\therefore h(t) = \begin{cases} 2 & (t=m) \\ 3 & \left(t=\frac{3m-n}{2} \text{ 또는 } t=\frac{m+n}{2}\right) \\ 4 & \left(t \neq \frac{3m-n}{2}, t \neq m, t \neq \frac{m+n}{2}\right) \end{cases}$$



3단계 m , n 의 값 구하기

이때 $h(10) < h(13) < h(16)$ 이므로

$$h(10)=2, h(13)=3, h(16)=4$$

따라서 $m=10$, $\frac{m+n}{2}=13$ 이므로

$$n=16$$

4단계 $P(X \geq 4) + P(Y \leq 13)$ 의 값 구하기

두 확률변수 X , Y 는 각각 정규분포 $N(10, 3^2)$, $N(16, 3^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-10}{3}$, $Z_Y = \frac{Y-16}{3}$ 으로 놓으면 두 확률변수 Z_X , Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\therefore P(X \geq 4) + P(Y \leq 13)$$

$$= P\left(Z_X \geq \frac{4-10}{3}\right) + P\left(Z_Y \leq \frac{13-16}{3}\right)$$

$$= P(Z_X \geq -2) + P(Z_Y \leq -1)$$

$$= P(Z_X \leq 2) + P(Z_Y \geq 1)$$

$$= P(Z_X \leq 0) + P(0 \leq Z_X \leq 2) + P(Z_Y \geq 0) - P(0 \leq Z_Y \leq 1)$$

$$= 0.5 + 0.4772 + 0.5 - 0.3413$$

$$= 1.1359$$

07 답 ②

1단계 $E(X)=m_1$, $E(Y)=m_2$ 라 할 때, $m_1=m_2$ 이면 조건을 만족시키는지 확인하기

$E(X)=m_1$, $E(Y)=m_2$ 라 하면

두 확률변수 X , Y 는 각각 정규분포 $N(m_1, 1^2)$, $N(m_2, 1^2)$ 을 따른다. 이때 $m_1=m_2$ 이면 (ㄴ)을 만족시키지 않으므로 $m_1 \neq m_2$ 이다.

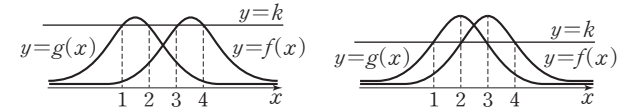
2단계 $E(X)=m_1$, $E(Y)=m_2$ 라 할 때, $m_1 > m_2$ 이면 조건을 만족시키는지 확인하기

(i) $m_1 > m_2$ 일 때,

(ㄴ)에 의하여 그림과 같이

$f(3)=f(4)=g(1)=g(2)$ 또는 $f(2)=f(4)=g(1)=g(3)$ 의 두 경우로 생각할 수 있다.

이때 두 경우 모두 $P(X \leq 2) - P(Y \leq 2) < 0$ 이므로 (ㄴ)을 만족시키지 않는다.

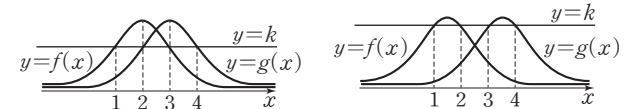


3단계 $E(X)=m_1$, $E(Y)=m_2$ 라 할 때, $m_1 < m_2$ 이면 조건을 만족시키는지 확인하기

(ii) $m_1 < m_2$ 일 때,

(ㄴ)에 의하여 그림과 같이

$f(1)=f(3)=g(2)=g(4)$ 또는 $f(1)=f(2)=g(3)=g(4)$ 의 두 경우로 생각할 수 있다.



① $f(1)=f(3)=g(2)=g(4)$ 인 경우

$$f(1)=f(3)=k \text{ 이므로 } m_1=2$$

$$\text{그런데 } P(X \leq 2) = 0.5 \text{ 이므로 } P(X \leq 2) - P(Y \leq 2) < 0.5$$

즉, (ㄴ)을 만족시키지 않는다.

② $f(1)=f(2)=g(3)=g(4)$ 인 경우

$$f(1)=f(2)=k \text{ 이므로 } m_1=1.5$$

$$g(3)=g(4)=k \text{ 이므로 } m_2=3.5$$

즉, 두 확률변수 X , Y 는 각각 정규분포 $N(1.5, 1^2)$, $N(3.5, 1^2)$

을 따르므로 $Z_X = \frac{X-1.5}{1}$, $Z_Y = \frac{Y-3.5}{1}$ 로 놓으면 두 확률변수 Z_X , Z_Y 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \leq 2) - P(Y \leq 2)$$

$$= P\left(Z_X \leq \frac{2-1.5}{1}\right) - P\left(Z_Y \leq \frac{2-3.5}{1}\right)$$

$$= P(Z_X \leq 0.5) - P(Z_Y \leq -1.5)$$

$$= P(Z_X \leq 0.5) - P(Z_Y \geq 1.5)$$

$$= P(Z_X \leq 0) + P(0 \leq Z_X \leq 0.5)$$

$$- P(Z_Y \geq 0) + P(0 \leq Z_Y \leq 1.5)$$

$$= 0.5 + 0.1915 - 0.5 + 0.4332$$

$$= 0.6247$$

따라서 (ㄴ)을 만족시킨다.

4단계 $P(X \geq 2.5)$ 의 값 구하기

(i), (ii)에서 $m_1=1.5$ 이므로

$$P(X \geq 2.5) = P\left(Z_X \geq \frac{2.5-1.5}{1}\right) = P(Z_X \geq 1)$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z_X \leq 1) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$

STEP 1

핵심 문제

| 86~87쪽

- 01 $\frac{13}{64}$ 02 11 03 ③ 04 ⑤ 05 0.1587
 06 106 07 ③ 08 159 09 25 10 ③ 11 625
 12 81

01 답 $\frac{13}{64}$

확률의 총합은 1이므로

$$a+b+b=1 \quad \therefore a=1-2b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 X_1, X_2 라 하면

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

 $\bar{X}=2$ 인 경우는 $\frac{X_1 + X_2}{2}=2$, 즉 $X_1 + X_2=4$ 인 경우이므로 순서쌍

 (X_1, X_2) 는 $(1, 3), (3, 1)$

$$\therefore P(\bar{X}=2) = ab + ba = 2ab$$

$$\text{즉, } 2ab = \frac{3}{16} \text{이므로 } ab = \frac{3}{32}$$

$$\textcircled{1} \text{을 대입하면 } (1-2b) \times b = \frac{3}{32}$$

$$64b^2 - 32b + 3 = 0, (8b-1)(8b-3) = 0$$

$$\therefore b = \frac{1}{8} \text{ 또는 } b = \frac{3}{8}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$b = \frac{1}{8} \text{일 때 } a = \frac{3}{4}, b = \frac{3}{8} \text{일 때 } a = \frac{1}{4}$$

$$\text{그런데 } a > b \text{이므로 } a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{8}$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

이때 $\bar{X}=3$ 인 경우는 $\frac{X_1 + X_2}{2}=3$, 즉 $X_1 + X_2=6$ 인 경우이므로 순서쌍

 (X_1, X_2) 는 $(1, 5), (3, 3), (5, 1)$

$$\therefore P(\bar{X}=3) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \times \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{13}{64}$$

02 답 11

$$E(X)=5 \text{이므로 } E(\bar{X})=E(X)=5$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=58-5^2=33$$

이때 표본의 크기가 n 이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{n} = \frac{33}{n}$$

$$\therefore E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + \{E(\bar{X})\}^2 = \frac{33}{n} + 5^2 = \frac{33}{n} + 25$$

$$\text{즉, } \frac{33}{n} + 25 \geq 28 \text{이므로}$$

$$\frac{33}{n} \geq 3 \quad \therefore n \leq 11$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최댓값은 11이다.

03 답 ③

모집단의 확률변수를 X 라 하고 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	5	7	9	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

 X 의 평균과 분산은

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{1}{5} + 7 \times \frac{1}{5} + 9 \times \frac{1}{5} = 5,$$

$$V(X) = 1^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 5^2 \times \frac{1}{5} + 7^2 \times \frac{1}{5} + 9^2 \times \frac{1}{5} - 5^2 = 8$$

이때 표본의 크기가 3이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\therefore V(a\bar{X}+6) = a^2 V(\bar{X}) = \frac{8}{3} a^2$$

$$\text{즉, } \frac{8}{3} a^2 = 24 \text{이므로 } a^2 = 9$$

$$\therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 3$$

따라서 양수 a 의 값은 3이다.

04 답 ⑤

모집단이 정규분포 $N(70, 10^2)$ 을 따르므로 크기가 25인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(70, \frac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(70, 2^2)$ 을 따르고, 크기가 100인

표본의 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(70, \frac{10^2}{100}\right)$, 즉 $N(70, 1^2)$ 을 따른다.

$$\text{ㄱ. } E(\bar{X}) = E(\bar{Y}) = 70$$

$$\text{ㄴ. } \sigma(\bar{X}) = 2, \sigma(\bar{Y}) = 1 \text{이므로 } \sigma(\bar{X}) > \sigma(\bar{Y})$$

$$\text{ㄷ. } Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-70}{2}, Z_{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y}-70}{1} \text{으로 놓으면 두 확률변수 } Z_{\bar{X}}, Z_{\bar{Y}} \text{는 모}$$

두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(\bar{X} \leq a) = P(\bar{Y} \leq b)$ 에서

$$P\left(Z_{\bar{X}} \leq \frac{a-70}{2}\right) = P(Z_{\bar{Y}} \leq b-70)$$

$$\text{따라서 } \frac{a-70}{2} = b-70 \text{이므로}$$

$$a-70 = 2b-140$$

$$\therefore 2b-a=70$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

05 답 0.1587

모집단이 정규분포 $N(10, 2^2)$ 을 따르므로 임의추출한 자동차 25대의 세차 시간의 평균을 $\bar{X}$ 분이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(10, \frac{2^2}{25}\right)$,

즉 $N\left(10, \left(\frac{2}{5}\right)^2\right)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X}-10}{\frac{2}{5}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로 구하는 확률은

$$P(25\bar{X} \leq 240) = P\left(\bar{X} \leq \frac{48}{5}\right) = P\left(Z \leq \frac{\frac{48}{5}-10}{\frac{2}{5}}\right)$$

$$= P(Z \leq -1) = P(Z \geq 1)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$

06 답 106

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(|X-m| \leq 12) = 0.9544 \text{에서}$$

$$P\left(\left|\frac{X-m}{\sigma}\right| \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.9544$$

$$P\left(\left|Z\right| \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.9544$$

$$P\left(-\frac{12}{\sigma} \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.9544$$

$$2P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.9544$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.4772 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{12}{\sigma} = 2 \quad \therefore \sigma = 6 \quad \dots\dots\dots \text{배점 20\%}$$

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, 6^2)$ 을 따르므로 크기가 9인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{6^2}{9}\right)$, 즉 $N(m, 2^2)$ 을 따른다. 배점 10%

이때 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-m}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로 $P(X \leq 112) = P(\bar{X} \geq 96)$ 에서

$$P\left(Z \leq \frac{112-m}{6}\right) = P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{96-m}{2}\right)$$

$$\text{따라서 } \frac{112-m}{6} = -\frac{96-m}{2} \text{이므로}$$

$$112-m = 3m-288$$

$$4m = 400$$

$$\therefore m = 100 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%}$$

$$\therefore m + \sigma = 106 \quad \dots\dots\dots \text{배점 10\%}$$

07 답 ③

확률변수 X 가 따르는 정규분포를 $N(m, \sigma^2)$ 이라 하면

$$P(X \geq 3.4) = \frac{1}{2} \text{에서 } m = 3.4$$

따라서 확률변수 X 는 정규분포 $N(3.4, \sigma^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-3.4}{\sigma}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \leq 3.9) + P(Z \leq -1) = 1 \text{에서}$$

$$P\left(Z \leq \frac{3.9-3.4}{\sigma}\right) + P(Z \leq -1) = 1$$

$$P\left(Z \leq \frac{0.5}{\sigma}\right) + P(Z \geq 1) = 1$$

$$\text{따라서 } \frac{0.5}{\sigma} = 1 \text{이므로 } \sigma = 0.5$$

즉, 확률변수 X 는 정규분포 $N(3.4, 0.5^2)$ 을 따르므로 크기가 25인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(3.4, \frac{0.5^2}{25}\right)$, 즉 $N(3.4, 0.1^2)$ 을 따른다.

이때 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-3.4}{0.1}$ 로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(\bar{X} \geq 3.55) = P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{3.55-3.4}{0.1}\right)$$

$$= P(Z_{\bar{X}} \geq 1.5)$$

$$= P(Z_{\bar{X}} \geq 0) - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 1.5)$$

$$= 0.5 - 0.4332$$

$$= 0.0668$$

08 답 159

임의추출한 소비자 600명 중에서 이 TV에 대해 만족하는 소비자의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 모비율이 0.4, 표본의 크기가 600이므로

$$E(\hat{p}) = 0.4,$$

$$V(\hat{p}) = \frac{0.4 \times 0.6}{600} = 0.0004 = 0.02^2$$

표본의 크기 600은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포 $N(0.4, 0.02^2)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\hat{p}-0.4}{0.02}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따

르므로 이 TV에 대해 만족한 소비자의 비율이 0.42 이상일 확률은

$$P(\hat{p} \geq 0.42) = P\left(Z \geq \frac{0.42-0.4}{0.02}\right) = P(Z \geq 1)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 - 0.341$$

$$= 0.159$$

따라서 $k = 0.159$ 이므로

$$1000 \times k = 1000 \times 0.159 = 159$$

09 답 25

표본평균을 $\bar{x}$ 라 하면 모표준편차가 10, 표본의 크기가 n 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

이 신뢰구간이 $63.22 \leq m \leq 73.54$ 와 같으므로

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 63.22 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\bar{x} + 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 73.54 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠-㉡을 하면

$$2 \times 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 10.32$$

$$\sqrt{n} = 5 \quad \therefore n = 25$$

다른 풀이

신뢰구간이 $63.22 \leq m \leq 73.54$ 이므로 신뢰구간의 길이는 $73.54 - 63.22 = 10.32$

이때 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \text{이므로}$$

$$2 \times 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 10.32$$

$$\sqrt{n} = 5 \quad \therefore n = 25$$

10 답 ③

표본평균이 $\bar{x}$, 모표준편차가 16, 표본의 크기가 64이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{16}{\sqrt{64}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{16}{\sqrt{64}}$$

$$\therefore \bar{x} - 3.92 \leq m \leq \bar{x} + 3.92$$

이 신뢰구간이 $240.12 \leq m \leq a$ 와 같으므로

$$\bar{x} - 3.92 = 240.12, \quad \bar{x} + 3.92 = a$$

$$\therefore \bar{x} = 240.12 + 3.92 = 244.04, \quad a = 244.04 + 3.92 = 247.96$$

$$\therefore \bar{x} + a = 492$$

다른 풀이

신뢰구간이 $240.12 \leq m \leq a$ 이므로 신뢰구간의 길이는

$$a - 240.12 = 2 \times 1.96 \times \frac{16}{\sqrt{64}}$$

$$\therefore a = 240.12 + 7.84 = 247.96$$

양과 64개를 임의추출하여 얻은 표본평균이 $\bar{x}$ 이고, 신뢰구간이

$$240.12 \leq m \leq 247.96 \text{이므로}$$

$$\bar{x} = \frac{240.12 + 247.96}{2} = 244.04$$

$$\therefore \bar{x} + a = 492$$

11 답 625

표본의 크기 n 으로 구한 표본비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 모비율 p 에 대한 신뢰도 92%의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 1.75 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = \frac{7}{2\sqrt{n}} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$$

$$\hat{p}(1-\hat{p}) = -\left(\hat{p} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \text{에서 } \hat{p} = \frac{1}{2} \text{일 때 최댓값을 가지므로 } n \text{이}$$

일정한 경우 신뢰구간의 길이의 최댓값은

$$\frac{7}{2\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{7}{4\sqrt{n}}$$

$$\text{즉, } \frac{7}{4\sqrt{n}} = 0.07 \text{이므로 } 28\sqrt{n} = 700, \sqrt{n} = 25$$

$$\therefore n = 625$$

12 답 81

Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100} (k > 0)$

라 하면 모비율에 대한 신뢰도 $\alpha\%$ 의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times k \times \sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{225}} = 0.09$$

$$\therefore k = 2.25$$

따라서 신뢰구간의 길이가 0.15가 되도록 하는 표본의 크기를 n 이라 하면

$$2 \times 2.25 \times \sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{n}} = 0.15, \sqrt{n} = 9$$

$$\therefore n = 81$$

01 답 ②

모집단에서 임의추출한 크기가 2인 표본을 X_1, X_2 라 하면

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

$\bar{X} < 2$ 인 경우는 $\frac{X_1 + X_2}{2} < 2$, 즉 $X_1 + X_2 < 4$ 인 경우이므로 순서쌍

(X_1, X_2) 는 $(1, 1), (1, 2), (2, 1)$

이 중에서 $\bar{X}$ 가 자연수인 경우는 $(1, 1)$ 이므로

$$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{12}} = \frac{3}{7}$$

02 답 32

주머니에서 임의로 꺼낸 1개의 공에 적혀 있는 수를 확률변수 X 라 하면 $\bar{X}$ 는 임의추출한 크기가 3인 표본의 표본평균이다.

$\bar{X} = 1$ 인 경우는 3번의 시행에서 모두 1이 적혀 있는 공을 꺼내는 경우이므로 그 확률은

$$P(\bar{X} = 1) = P(X = 1) \times P(X = 1) \times P(X = 1)$$

$$\text{즉, } \{P(X = 1)\}^3 = \frac{1}{8} \text{이므로 } P(X = 1) = \frac{1}{2}$$

$\bar{X} = 6$ 인 경우는 3번의 시행에서 모두 6이 적혀 있는 공을 꺼내는 경우이므로 그 확률은

$$P(\bar{X} = 6) = P(X = 6) \times P(X = 6) \times P(X = 6)$$

$$\text{즉, } \{P(X = 6)\}^3 = \frac{1}{27} \text{이므로 } P(X = 6) = \frac{1}{3}$$

확률의 총합은 1이므로

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= 1 - \{P(X = 1) + P(X = 6)\} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	3	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	1

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{2} + 3 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{3} = 3,$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{3} = 14 \text{이므로}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 14 - 3^2 = 5$$

$$\text{따라서 } E(\bar{X}) = E(X) = 3, V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{3} = \frac{5}{3} \text{이므로}$$

$$E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + \{E(\bar{X})\}^2 = \frac{5}{3} + 3^2 = \frac{32}{3}$$

03 답 ①

60장의 카드 중에서 임의추출한 1장의 카드에 적혀 있는 수를 확률변수 X 라 하고, 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1

STEP 2 고난도 문제

| 88~93쪽

01 ②	02 $\frac{32}{3}$	03 ①	04 ①	05 24	06 ③
07 ④	08 606	09 ⑤	10 ③	11 16	12 0.07
13 ②	14 0.001	15 ③	16 ②	17 ②	18 ④
19 ⑤	20 356	21 ③	22 64	23 ③	24 ⑤

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{3} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2},$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 3^2 \times \frac{1}{2} = 6 \text{이므로}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ = 6 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

따라서 이 모집단에서 크기가 10인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균을 $\bar{X}$ 라 하면

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{10} = \frac{1}{10} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{8}$$

이때 $Y = 10\bar{X}$ 이므로

$$V(Y) = V(10\bar{X}) = 10^2 V(\bar{X}) \\ = 100 \times \frac{1}{8} = \frac{25}{2}$$

04 답 ①

임의로 꺼낸 4장의 카드에 적혀 있는 수 중에서 가장 큰 수를 확률변수 X 라 하면 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 4, 5, 6, 7이다.

7장의 카드 중에서 4장을 꺼내는 모든 경우의 수는

$${}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$$

(i) $X=4$ 일 때,

1, 2, 3, 4가 적혀 있는 카드를 꺼내는 경우이므로

$$P(X=4) = \frac{1}{35}$$

(ii) $X=5$ 일 때,

1, 2, 3, 4가 적혀 있는 카드 중에서 3장을 꺼내고, 나머지는 5가 적혀 있는 카드를 꺼내는 경우이므로

$$P(X=5) = \frac{{}_4C_3}{{}_7C_3} = \frac{{}_4C_1}{{}_7C_3} = \frac{4}{35}$$

(iii) $X=6$ 일 때,

1, 2, 3, 4, 5가 적혀 있는 카드 중에서 3장을 꺼내고, 나머지는 6이 적혀 있는 카드를 꺼내는 경우이므로

$$P(X=6) = \frac{{}_5C_3}{{}_7C_3} = \frac{{}_5C_2}{{}_7C_3} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$

(iv) $X=7$ 일 때,

1, 2, 3, 4, 5, 6이 적혀 있는 카드 중에서 3장을 꺼내고, 나머지는 7이 적혀 있는 카드를 꺼내는 경우이므로

$$P(X=7) = \frac{{}_6C_3}{{}_7C_3} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}$$

(i)~(iv)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	4	5	6	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

$$E(X) = 4 \times \frac{1}{35} + 5 \times \frac{4}{35} + 6 \times \frac{2}{7} + 7 \times \frac{4}{7} = \frac{32}{5},$$

$$E(X^2) = 4^2 \times \frac{1}{35} + 5^2 \times \frac{4}{35} + 6^2 \times \frac{2}{7} + 7^2 \times \frac{4}{7} = \frac{208}{5} \text{이므로}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{208}{5} - \left(\frac{32}{5}\right)^2 = \frac{16}{5}$$

따라서 이 모집단에서 크기가 32인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\bar{X}$ 의 분산은

$$V(\bar{X}) = \frac{V(X)}{32} = \frac{1}{32} \times \frac{16}{5} = \frac{1}{50}$$

$$\therefore V(5\bar{X}+3) = 5^2 V(\bar{X}) = 25 \times \frac{1}{50} = \frac{1}{2}$$

05 답 24

임의로 뽑은 n 명의 학생 중에서 A 봉사활동의 경험이 있는 학생의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면

$$m = E(\hat{p}) = p$$

$$v = V(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$$

$$\therefore \frac{m}{48} + v = \frac{p}{48} + \frac{p(1-p)}{n} \\ = -\frac{1}{n} \left\{ p^2 - \left(1 + \frac{n}{48}\right)p \right\} \\ = -\frac{1}{n} \left(p - \frac{n+48}{96} \right)^2 + \frac{1}{n} \left(\frac{n+48}{96} \right)^2$$

(i) $\frac{n+48}{96} < \frac{2}{3}$, 즉 $n < 16$ 인 경우

$p = \frac{2}{3}$ 일 때, $\frac{m}{48} + v$ 의 값은 최대이므로 그 값은

$$\frac{p}{48} + \frac{p(1-p)}{n} = \frac{1}{48} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{n} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \\ = \frac{1}{72} + \frac{2}{9n}$$

즉, $\frac{1}{72} + \frac{2}{9n} = \frac{3}{128}$ 에서 $n = \frac{256}{11}$ 이므로 n 이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\frac{2}{3} \leq \frac{n+48}{96} < 1$, 즉 $16 \leq n < 48$ 인 경우

$p = \frac{n+48}{96}$ 일 때, $\frac{m}{48} + v$ 의 값은 최대이므로 그 값은 $\frac{1}{n} \left(\frac{n+48}{96} \right)^2$

$$\text{즉, } \frac{1}{n} \left(\frac{n+48}{96} \right)^2 = \frac{3}{128} \text{에서 } (n+48)^2 = 216n$$

$$(n-24)(n-96) = 0$$

$$\therefore n = 24 \text{ 또는 } n = 96$$

그런데 $16 \leq n < 48$ 이므로 $n = 24$

(i), (ii)에서 자연수 n 의 값은 24이다.

06 답 ③

정규분포 $N(m, 6^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{6^2}{9}\right)$, 즉 $N(m, 2^2)$ 을 따른다.

정규분포 $N(6, 2^2)$ 을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본의 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(6, \frac{2^2}{4}\right)$, 즉 $N(6, 1^2)$ 을 따른다.

이때 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-m}{2}$, $Z_{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y}-6}{1}$ 으로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\bar{X}}$, $Z_{\bar{Y}}$ 는

모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(\bar{X} \leq 12) + P(\bar{Y} \geq 8) = 1 \text{에서}$$

$$P\left(Z_{\bar{X}} \leq \frac{12-m}{2}\right) + P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{8-6}{1}\right) = 1$$

$$P\left(Z_{\bar{X}} \leq \frac{12-m}{2}\right) + P(Z_{\bar{Y}} \geq 2) = 1$$

따라서 $\frac{12-m}{2} = 2$ 이므로 $12-m=4$

$$\therefore m=8$$

07 답 ④

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 400 \times \frac{1}{5} = 80, V(X) = 400 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 64$$

따라서 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(80, 8^2)$ 을 따르므로 크기가 n_1 인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(80, \frac{8^2}{n_1}\right)$, 즉

$N\left(80, \left(\frac{8}{\sqrt{n_1}}\right)^2\right)$ 을 따르고, 크기가 n_2 인 표본의 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(80, \frac{8^2}{n_2}\right)$, 즉 $N\left(80, \left(\frac{8}{\sqrt{n_2}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

이때 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-80}{\frac{8}{\sqrt{n_1}}}$, $Z_{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y}-80}{\frac{8}{\sqrt{n_2}}}$ 으로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\bar{X}}$, $Z_{\bar{Y}}$ 는

모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

ㄱ. n_1, n_2 의 값에 관계없이 $E(\bar{X}) = E(\bar{Y})$ 이다.

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } P(\bar{X} \leq 70) &= P\left(Z_{\bar{X}} \leq \frac{70-80}{\frac{8}{\sqrt{n_1}}}\right) \\ &= P\left(Z_{\bar{X}} \leq -\frac{5\sqrt{n_1}}{4}\right) \\ &= P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{5\sqrt{n_1}}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\bar{Y} \geq 100) &= P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{100-80}{\frac{8}{\sqrt{n_2}}}\right) \\ &= P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{5\sqrt{n_2}}{2}\right) \end{aligned}$$

이때 $P(\bar{X} \leq 70) = P(\bar{Y} \geq 100)$ 에서

$$P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{5\sqrt{n_1}}{4}\right) = P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{5\sqrt{n_2}}{2}\right)$$

따라서 $\frac{5\sqrt{n_1}}{4} = \frac{5\sqrt{n_2}}{2}$ 이므로

$$\sqrt{n_1} = 2\sqrt{n_2} \quad \therefore n_1 = 4n_2$$

$$\text{ㄷ. } P(\bar{X} \geq a) = P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{a-80}{\frac{8}{\sqrt{n_1}}}\right) = P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{(a-80)\sqrt{n_1}}{8}\right)$$

$$P(\bar{Y} \geq a) = P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{a-80}{\frac{8}{\sqrt{n_2}}}\right) = P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{(a-80)\sqrt{n_2}}{8}\right)$$

$a > 80$ 에서 $a-80 > 0$ 이고, $n_1 < n_2$ 이므로

$$\frac{(a-80)\sqrt{n_1}}{8} < \frac{(a-80)\sqrt{n_2}}{8}$$

$$\therefore P(\bar{X} \geq a) > P(\bar{Y} \geq a)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

08 답 606

확률변수 X 가 정규분포 $N(m, 8^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-m}{8}$ 으로 놓으면

확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(2m-a \leq X \leq a) = 0.9544 \text{에서}$$

$$P\left(\frac{2m-a-m}{8} \leq Z \leq \frac{a-m}{8}\right) = 0.9544$$

$$P\left(-\frac{a-m}{8} \leq Z \leq \frac{a-m}{8}\right) = 0.9544$$

$$2P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-m}{8}\right) = 0.9544$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-m}{8}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{a-m}{8} = 2$$

$$\therefore a = 16 + m \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \quad \dots\dots \text{배점 50\%}$$

크기가 16인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $N(m, 2^2)$

을 따르므로 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-m}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(|\bar{X}-a+12| \leq 1) &= P(-1 \leq \bar{X}-a+12 \leq 1) \\ &= P(a-13 \leq \bar{X} \leq a-11) \\ &= P(m+3 \leq \bar{X} \leq m+5) \quad (\because \textcircled{㉠}) \\ &= P\left(\frac{m+3-m}{2} \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{m+5-m}{2}\right) \\ &= P(1.5 \leq Z_{\bar{X}} \leq 2.5) \\ &= P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 2.5) - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 1.5) \\ &= 0.4938 - 0.4332 = 0.0606 \quad \dots\dots \text{배점 40\%} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore 10000 \times P(|\bar{X}-a+12| \leq 1) &= 10000 \times 0.0606 \\ &= 606 \quad \dots\dots \text{배점 10\%} \end{aligned}$$

09 답 ⑤

확률변수 X 의 표준편차를 σ 라 하면 (ㄴ)에서 확률변수 Y 의 표준편차는 $\frac{3}{2}\sigma$ 이므로 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(220, \sigma^2)$,

$N\left(240, \left(\frac{3}{2}\sigma\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 크기가 n 인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(220, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, 즉

$N\left(220, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따르고, 크기가 $9n$ 인 표본의 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포

$N\left(240, \left(\frac{3}{2}\sigma\right)^2\right)$, 즉 $N\left(240, \left(\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따르므로 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$,

$Z_{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y}-240}{\frac{\sigma}{2\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\bar{X}}, Z_{\bar{Y}}$ 는 모두 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(\bar{X} \leq 215) = 0.1587 \text{에서 } P\left(Z_{\bar{X}} \leq \frac{215-220}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 0.1587$$

$$P\left(Z_{\bar{X}} \leq -\frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.1587, \quad P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.1587$$

$$P(Z_{\bar{X}} \geq 0) - P\left(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.1587$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.1587$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{5\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.3413$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{5\sqrt{n}}{\sigma} = 1 \quad \therefore \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5$$

$$\therefore \frac{\sigma}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$$

$$\therefore P(\bar{Y} \geq 235) = P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{235-240}{\frac{5}{2}}\right)$$

$$= P(Z_{\bar{Y}} \geq -2)$$

$$= P(Z_{\bar{Y}} \leq 2)$$

$$= P(Z_{\bar{Y}} \leq 0) + P(0 \leq Z_{\bar{Y}} \leq 2)$$

$$= 0.5 + 0.4772$$

$$= 0.9772$$

10 답 ③

모집단이 정규분포 $N(50, a^2)$ 을 따르므로 임의추출한 가전제품 9개의 무게의 평균을 $\bar{X}$ kg이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(50, \frac{a^2}{9}\right)$, 즉 $N\left(50, \left(\frac{a}{3}\right)^2\right)$ 을 따르고, $Z = \frac{\bar{X}-50}{\frac{a}{3}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

모평균과 표본평균의 차가 a^2 kg 이하일 확률이 0.92 이상이므로

$$P(|\bar{X}-50| \leq a^2) \geq 0.92$$

$$P\left(\left|\frac{\bar{X}-50}{\frac{a}{3}}\right| \leq \frac{a^2}{\frac{a}{3}}\right) \geq 0.92$$

$$P(|Z| \leq 3a) \geq 0.92$$

$$P(-3a \leq Z \leq 3a) \geq 0.92$$

$$2P(0 \leq Z \leq 3a) \geq 0.92$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq 3a) \geq 0.46 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{이때 } P(Z \leq 1.8) = 0.96 \text{에서}$$

$$P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.8) = 0.96$$

$$0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.8) = 0.96$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq 1.8) = 0.46$$

즉, ①을 만족시키려면

$$3a \geq 1.8 \quad \therefore a \geq 0.6$$

따라서 구하는 a 의 최솟값은 0.6이다.

11 답 16

A 제품에 대하여 모집단이 정규분포 $N\left(m, \left(\frac{m}{8}\right)^2\right)$ 을 따르므로 크기가

25인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{\left(\frac{m}{8}\right)^2}{25}\right)$, 즉 $N\left(m, \left(\frac{m}{40}\right)^2\right)$ 을 따른다.

이때 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X}-m}{\frac{m}{40}}$ 으로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P\left(\bar{X} \geq \frac{19}{20}m\right) &= P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{\frac{19}{20}m - m}{\frac{m}{40}}\right) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \geq -2) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \leq 2) \end{aligned}$$

또 B 제품에 대하여 모집단이 정규분포 $N\left(\frac{9}{10}m, \left(\frac{m}{10}\right)^2\right)$ 을 따르므로

크기가 n 인 표본의 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(\frac{9}{10}m, \frac{\left(\frac{m}{10}\right)^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(\frac{9}{10}m, \left(\frac{m}{10\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

이때 $Z_{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y} - \frac{9}{10}m}{\frac{m}{10\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{Y}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P\left(\bar{Y} \geq \frac{19}{20}m\right) = P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{\frac{19}{20}m - \frac{9}{10}m}{\frac{m}{10\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}\right)$$

$$P\left(\bar{X} \geq \frac{19}{20}m\right) + P\left(\bar{Y} \geq \frac{19}{20}m\right) = 1 \text{에서}$$

$$P(Z_{\bar{X}} \leq 2) + P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{\sqrt{n}}{2}\right) = 1$$

$$\text{따라서 } \frac{\sqrt{n}}{2} = 2 \text{이므로}$$

$$\sqrt{n} = 4 \quad \therefore n = 16$$

12 답 0.07

모집단이 정규분포 $N(120, 8^2)$ 을 따르므로 비누 4개의 무게의 평균을 $\bar{X}$ g이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(120, \frac{8^2}{4}\right)$, 즉 $N(120, 4^2)$ 을 따른다. 배점 20%

이때 $Z = \frac{\bar{X}-120}{4}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로 생산하는 비누 한 세트가 불량품일 확률은

$$\begin{aligned} P(4\bar{X} \leq 459.52) &= P(\bar{X} \leq 114.88) \\ &= P\left(Z \leq \frac{114.88-120}{4}\right) \\ &= P(Z \leq -1.28) = P(Z \geq 1.28) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.28) \\ &= 0.5 - 0.4 = 0.1 \quad \cdots \cdots \text{배점 30\%} \end{aligned}$$

따라서 비누 400세트 중에서 불량품인 세트의 수를 확률변수 Y 라 하면 Y 는 이항분포 $B(400, 0.1)$ 을 따르고

$$E(Y) = 400 \times 0.1 = 40, \quad V(Y) = 400 \times 0.1 \times 0.9 = 36$$

이므로 확률변수 Y 는 근사적으로 정규분포 $N(40, 6^2)$ 을 따른다.

배점 20%

이때 $Z_Y = \frac{Y-40}{6}$ 으로 놓으면 확률변수 Z_Y 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(Y \leq 31) &= P\left(Z_Y \leq \frac{31-40}{6}\right) = P(Z_Y \leq -1.5) \\ &= P(Z_Y \geq 1.5) = P(Z_Y \geq 0) - P(0 \leq Z_Y \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.43 = 0.07 \quad \cdots \cdots \text{배점 30\%} \end{aligned}$$

다른 풀이

모집단이 정규분포 $N(120, 8^2)$ 을 따르므로 비누 4개의 무게의 평균을 $\bar{X}$ g이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(120, \frac{8^2}{4}\right)$, 즉 $N(120, 4^2)$ 을 따른다. 배점 20%

이때 $Z = \frac{\bar{X}-120}{4}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로 생산하는 비누 한 세트가 불량품일 확률은

$$\begin{aligned} P(4\bar{X} \leq 459.52) &= P(\bar{X} \leq 114.88) \\ &= P\left(Z \leq \frac{114.88-120}{4}\right) \\ &= P(Z \leq -1.28) = P(Z \geq 1.28) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.28) \\ &= 0.5 - 0.4 = 0.1 \quad \cdots \cdots \text{배점 30\%} \end{aligned}$$

비누 400세트 중에서 불량품인 세트의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 $n=400$, $\hat{p}=0.1$ 이므로

$$E(\hat{p}) = 0.1, \quad \sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{400}} = \frac{3}{200}$$

이때 $np \geq 5$, $nq \geq 5$ 를 만족시키므로 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포

$N\left(0.1, \left(\frac{3}{200}\right)^2\right)$ 을 따른다. 배점 20%

비누 400세트 중에서 불량품인 세트가 31개 이하일 확률은

$$\begin{aligned} P\left(\hat{p} \leq \frac{31}{400}\right) &= P\left(Z \leq \frac{\frac{31}{400} - 0.1}{\frac{3}{200}}\right) = P(Z \leq -1.5) = P(Z \geq 1.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.43 = 0.07 \quad \dots\dots\dots \text{배점 30\%} \end{aligned}$$

13 답 ②

7시 45분에 집에서 출발하여 8시 10분까지 학교에 도착하려면 집에서 학교까지 가는 데 걸리는 시간이 25분 이하이어야 한다.

이때 집에서 A 정류장까지 걸어가는 데 걸리는 시간과 E 정류장에서 학교까지 걸어가는 데 걸리는 시간은 각각 5분, 7분으로 항상 일정하므로 버스를 타고 A 정류장에서 E 정류장까지 이동하는 데 걸리는 시간이 13분 이하이어야 한다.

버스를 이용하여 각 정류장 사이를 이동하는 데 걸리는 시간을 X 분이라 하면 확률변수 X 는 정규분포 $N\left(3, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따르므로 정류장 사이를 4번 이동하는 데 걸리는 시간의 평균을 $\bar{X}$ 분이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(3, \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4}\right)$, 즉 $N\left(3, \left(\frac{1}{4}\right)^2\right)$ 을 따른다.

이때 $Z = \frac{\bar{X} - 3}{\frac{1}{4}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따

르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(4\bar{X} > 13) &= P\left(\bar{X} > \frac{13}{4}\right) = P\left(Z > \frac{\frac{13}{4} - 3}{\frac{1}{4}}\right) \\ &= P(Z > 1) = P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 - 0.3413 = 0.1587 \end{aligned}$$

14 답 0.001

모집단이 정규분포 $N(200, 20^2)$ 을 따르므로 토마토 16개의 무게의 평균을 $\bar{X}$ g이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(200, \frac{20^2}{16}\right)$, 즉 $N(200, 5^2)$ 을 따른다.

이때 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - 200}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

우재가 수확한 토마토 12개의 무게의 합이 2400g이므로 상금을 받기 위해 수확해야 하는 나머지 토마토 4개의 무게의 합을 k g이라 하면

$$\begin{aligned} P(16\bar{X} \geq k + 2400) &\leq \frac{67}{1000} \\ P\left(\bar{X} \geq \frac{k}{16} + 150\right) &\leq 0.067 \\ P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{\frac{k}{16} + 150 - 200}{5}\right) &\leq 0.067 \\ P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{k}{80} - 10\right) &\leq 0.067 \\ P(Z_{\bar{X}} \geq 0) - P\left(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{k}{80} - 10\right) &\leq 0.067 \\ 0.5 - P\left(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{k}{80} - 10\right) &\leq 0.067 \\ \therefore P\left(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{k}{80} - 10\right) &\geq 0.433 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.433$ 이므로

$$\frac{k}{80} - 10 \geq 1.5 \quad \therefore k \geq 920$$

우재가 상금을 받으려면 나머지 토마토 4개의 무게의 합이 920g 이상이어야 한다.

한편 우재가 추가로 수확해야 하는 토마토 4개의 무게의 평균을 $\bar{Y}$ g이라 하면 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(200, \frac{20^2}{4}\right)$, 즉 $N(200, 10^2)$ 을 따르

로 $Z_{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y} - 200}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{Y}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(4\bar{Y} \geq 920) &= P(\bar{Y} \geq 230) = P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{230 - 200}{10}\right) \\ &= P(Z_{\bar{Y}} \geq 3) = P(Z_{\bar{Y}} \geq 0) - P(0 \leq Z_{\bar{Y}} \leq 3) \\ &= 0.5 - 0.499 = 0.001 \end{aligned}$$

15 답 ③

표본평균이 $\bar{X}$, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 n 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\begin{aligned} \bar{X} - 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}} \\ -\frac{3.92}{\sqrt{n}} \leq m - \bar{X} \leq \frac{3.92}{\sqrt{n}} \quad \therefore |m - \bar{X}| \leq \frac{3.92}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

$$\therefore f(n) = \frac{3.92}{\sqrt{n}}$$

$$\neg. f(16) = \frac{3.92}{\sqrt{16}} = 0.98 < 1$$

$$\neg. f(4n) = \frac{3.92}{\sqrt{4n}} = \frac{3.92}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}f(n)$$

$$\square. 0 < a < b \text{에서 } \frac{a}{b} < 1 \text{이므로}$$

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \frac{\frac{3.92}{\sqrt{b}}}{\frac{3.92}{\sqrt{a}}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} < 1 \quad \therefore f(a) > f(b)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\square$ 이다.

다른 풀이

$$\square. f(n) \text{은 } \sqrt{n} \text{에 반비례하므로 } a < b \text{이면 } f(a) > f(b) \text{이다.}$$

16 답 ②

표본의 크기가 16일 때, 표본평균을 $\bar{x}_1$ 라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

이 신뢰구간이 $746.1 \leq m \leq 755.9$ 와 같으므로

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} = 746.1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\bar{x}_1 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} = 755.9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{을 하면 } 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} = 9.8$$

$$\therefore \sigma = 10$$

표본의 크기가 n 일 때, 표본평균을 $\bar{x}_2$ 라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_2 - 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x}_2 + 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

이 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 와 같으므로

$$a = \bar{x}_2 - 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}}, b = \bar{x}_2 + 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore b - a = 2 \times 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = \frac{51.6}{\sqrt{n}}$$

$$\text{즉, } \frac{51.6}{\sqrt{n}} \leq 6 \text{이므로}$$

$$\sqrt{n} \geq \frac{51.6}{6}, \sqrt{n} \geq 8.6 \quad \therefore n \geq 73.96$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 74이다.

다른 풀이

표본의 크기가 16일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} = 755.9 - 746.1$$

$$0.98\sigma = 9.8 \quad \therefore \sigma = 10$$

표본의 크기가 n 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간의 길이는 $b - a$ 이고, $b - a$ 의 값이 6 이하이어야 하므로

$$2 \times 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \leq 6, \frac{51.6}{\sqrt{n}} \leq 6$$

$$\sqrt{n} \geq 8.6 \quad \therefore n \geq 73.96$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 74이다.

17 답 ②

모표준편차가 σ , 표본의 크기가 100이므로 표본평균이 $\bar{x}_1$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \leq m \leq \bar{x}_1 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{100}}$$

$$\therefore \bar{x}_1 - 0.196\sigma \leq m \leq \bar{x}_1 + 0.196\sigma$$

이 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 와 같으므로

$$a = \bar{x}_1 - 0.196\sigma, b = \bar{x}_1 + 0.196\sigma$$

또 모표준편차가 σ , 표본의 크기가 400이므로 표본평균이 $\bar{x}_2$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_2 - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}} \leq m \leq \bar{x}_2 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{400}}$$

$$\therefore \bar{x}_2 - 0.129\sigma \leq m \leq \bar{x}_2 + 0.129\sigma$$

이 신뢰구간이 $c \leq m \leq d$ 와 같으므로

$$c = \bar{x}_2 - 0.129\sigma, d = \bar{x}_2 + 0.129\sigma$$

$$a = c \text{에서 } \bar{x}_1 - 0.196\sigma = \bar{x}_2 - 0.129\sigma \text{이므로}$$

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 0.067\sigma$$

$$\text{이때 } \bar{x}_1 - \bar{x}_2 = 1.34 \text{이므로}$$

$$0.067\sigma = 1.34 \quad \therefore \sigma = 20$$

$$\therefore b - a = \bar{x}_1 + 0.196\sigma - (\bar{x}_1 - 0.196\sigma)$$

$$= 2 \times 0.196 \times 20 = 7.84$$

18 답 ④

확률변수 X 가 정규분포 $N(30, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-30}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(24 \leq X \leq 36) = \frac{\alpha}{100} \text{에서}$$

$$P\left(\frac{24-30}{2} \leq Z \leq \frac{36-30}{2}\right) = \frac{\alpha}{100} \quad \therefore P(-3 \leq Z \leq 3) = \frac{\alpha}{100}$$

이때 표본평균이 80, 모표준편차가 12, 표본의 크기가 81이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 $\alpha\%$ 의 신뢰구간은

$$80 - 3 \times \frac{12}{\sqrt{81}} \leq m \leq 80 + 3 \times \frac{12}{\sqrt{81}} \quad \therefore 76 \leq m \leq 84$$

따라서 추정된 신뢰구간에 속하는 자연수는 76, 77, 78, ..., 84의 9개이다.

19 답 ⑤

모표준편차가 25, 크기가 245인 표본의 표본평균을 $\bar{x}$ 라 할 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{25}{\sqrt{245}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{25}{\sqrt{245}}$$

$$\therefore \bar{x} - \frac{7}{\sqrt{5}} \leq m \leq \bar{x} + \frac{7}{\sqrt{5}}$$

이 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 와 같으므로

$$a = \bar{x} - \frac{7}{\sqrt{5}}, b = \bar{x} + \frac{7}{\sqrt{5}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 α, β 가 이차방정식 $5x^2 - 70x + 2k = 0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{-70}{5} = 14, \alpha\beta = \frac{2}{5}k$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \alpha + \beta = \bar{x} - \frac{7}{\sqrt{5}} + \bar{x} + \frac{7}{\sqrt{5}} = 2\bar{x}$$

$$\alpha + \beta = 14 \text{에서 } 2\bar{x} = 14 \quad \therefore \bar{x} = 7$$

또 $\textcircled{1}$ 에서

$$\alpha\beta = \left(\bar{x} - \frac{7}{\sqrt{5}}\right)\left(\bar{x} + \frac{7}{\sqrt{5}}\right) = \bar{x}^2 - \frac{49}{5} = 7^2 - \frac{49}{5} = \frac{196}{5}$$

$$\alpha\beta = \frac{2}{5}k \text{에서 } \frac{196}{5} = \frac{2}{5}k, 2k = 196 \quad \therefore k = 98$$

20 답 356

두 공장 A, B에서 생산하는 제품의 무게의 평균을 각각 m_1g, m_2g 이라 하자.

A 공장에서 생산하는 제품에 대하여 표본평균이 120, 표준편차가 3, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m_1 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$120 - 2.58 \times \frac{3}{\sqrt{36}} \leq m_1 \leq 120 + 2.58 \times \frac{3}{\sqrt{36}}$$

$$\therefore 118.71 \leq m_1 \leq 121.29$$

또 B 공장에서 생산하는 제품에 대하여 표본평균이 a , 표준편차가 1.5, 표본의 크기가 36이므로 모평균 m_2 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$a - 1.96 \times \frac{1.5}{\sqrt{36}} \leq m_2 \leq a + 1.96 \times \frac{1.5}{\sqrt{36}}$$

$$\therefore a - 0.49 \leq m_2 \leq a + 0.49$$

따라서 두 신뢰구간의 집합 A, B에 대하여 $A \cap B \neq \emptyset$ 이라면

$$118.71 \leq a + 0.49, a - 0.49 \leq 121.29$$

$$\therefore 118.22 \leq a \leq 121.78$$

따라서 $M = 121.78, m = 118.22$ 이므로

$$100(M - m) = 100 \times 3.56 = 356$$

21 답 ③

크기가 384인 표본의 표본비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 모비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{384}} \leq p \leq \hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{384}}$$

이 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 와 같으므로

$$a = \hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{384}}, b = \hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{384}}$$

$$\begin{aligned} \therefore b-a &= 2 \times 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{384}} \\ \text{즉, } 2 \times 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{384}} &\geq 0.098 \text{ 이므로 } \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{384}} \geq \frac{1}{40} \\ \hat{p}(1-\hat{p}) &\geq \frac{384}{1600} = \frac{6}{25}, \quad 25\hat{p}^2 - 25\hat{p} + 6 \leq 0 \\ (5\hat{p}-2)(5\hat{p}-3) &\leq 0 \quad \therefore \frac{2}{5} \leq \hat{p} \leq \frac{3}{5} \\ \text{그런데 } \hat{p} &= \frac{k}{384} \text{ 이므로 } \frac{2}{5} \leq \frac{k}{384} \leq \frac{3}{5} \quad \therefore \frac{768}{5} \leq k \leq \frac{1152}{5} \\ \text{따라서 자연수 } k &\text{는 } 154, 155, \dots, 230 \text{ 의 } 77 \text{ 개이다.} \end{aligned}$$

22 답 64

모표준편차가 1, 표본의 크기가 81이고, $P(0 \leq Z \leq 1.8) = 0.46$ 에서 $P(|Z| \leq 1.8) = 0.92$ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 92%의 신뢰구간의 길이는

$$l = 2 \times 1.8 \times \frac{1}{\sqrt{81}} = 0.4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

또 $P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ ($k > 0$)라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 $\alpha\%$ 의 신뢰구간의 길이가 $\frac{l}{2}$ 이므로

$$\frac{l}{2} = 2 \times k \times \frac{1}{\sqrt{81}}, \quad 0.2 = \frac{2}{9}k \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore k = 0.9$$

따라서 $P(|Z| \leq 0.9) = \frac{\alpha}{100}$ 이므로

$$2P(0 \leq Z \leq 0.9) = \frac{\alpha}{100}, \quad 2 \times 0.32 = \frac{\alpha}{100} \quad \therefore \alpha = 64$$

23 답 ③

ㄱ. $P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha_1}{100}$ ($k > 0$)이라 하면 $l_1 = 2k \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}$ 이고,

$$P\left(\bar{X} - k \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}} \leq m \leq \bar{X} + k \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}\right) = \frac{\alpha_1}{100} \text{이다.}$$

이때 $k \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}} = \frac{l_1}{2}$ 이므로

$$P\left(\bar{X} - \frac{l_1}{2} \leq m \leq \bar{X} + \frac{l_1}{2}\right) = \frac{\alpha_1}{100}$$

$$\therefore P\left(m - \frac{l_1}{2} \leq \bar{X} \leq m + \frac{l_1}{2}\right) = \frac{\alpha_1}{100}$$

ㄴ. $P(|Z| \leq k_1) = \frac{\alpha_1}{100}$ ($k_1 > 0$), $P(|Z| \leq k_2) = \frac{\alpha_2}{100}$ ($k_2 > 0$)라 하면

$$l_1 = 2k_1 \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}, \quad l_2 = 2k_2 \times \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}} = 2k_2 \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}$$

이때 $\alpha_1 < \alpha_2$ 이면 $k_1 < k_2$ 이므로 $l_1 < l_2$ 이다.

ㄷ. $\alpha_1 = \alpha_2$ 이므로 $P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha_1}{100} = \frac{\alpha_2}{100}$ ($k > 0$)라 하면

$$l_1 = 2k \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}, \quad l_2 = 2k \times \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}} = 2k \times \frac{2\sigma_1}{\sqrt{2n_1}} = 2\sqrt{2}k \times \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}$$

$$\therefore l_2 = \sqrt{2}l_1$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

다른 풀이

ㄴ. 모표준편차, 표본의 크기가 같으므로 신뢰도가 낮으면 신뢰구간의 길이는 짧아진다.
즉, $\alpha_1 < \alpha_2$ 이면 $l_1 < l_2$ 이다.

24 답 ⑤

모비율 p 에 대한 신뢰도 96%의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{4900}} = \frac{2}{35} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$$

$$\text{즉, } \frac{2}{35} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} = \frac{4}{175} \text{ 이므로 } \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} = \frac{2}{5}$$

$$25\hat{p}^2 - 25\hat{p} + 4 = 0, \quad (5\hat{p}-1)(5\hat{p}-4) = 0 \quad \therefore \hat{p} = \frac{1}{5} \text{ 또는 } \hat{p} = \frac{4}{5}$$

그런데 $0 < \hat{p} < 0.5$ 이므로 $\hat{p} = \frac{1}{5}$

이때 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{5}\right)$ 을 따르고

$$E(X) = 400 \times \frac{1}{5} = 80,$$

$$V(X) = 400 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 64$$

이므로 X 는 근사적으로 정규분포 $N(80, 8^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{X-80}{8}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$

을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 68) &= P\left(Z \geq \frac{68-80}{8}\right) \\ &= P(Z \geq -1.5) \\ &= P(Z \leq 1.5) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 + 0.43 \\ &= 0.93 \end{aligned}$$

다른 풀이

모비율 p 에 대한 신뢰도 96%의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2 \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{4900}} = \frac{2}{35} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$$

$$\text{즉, } \frac{2}{35} \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} = \frac{4}{175} \text{ 이므로 } \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})} = \frac{2}{5}$$

$$25\hat{p}^2 - 25\hat{p} + 4 = 0, \quad (5\hat{p}-1)(5\hat{p}-4) = 0 \quad \therefore \hat{p} = \frac{1}{5} \text{ 또는 } \hat{p} = \frac{4}{5}$$

그런데 $0 < \hat{p} < 0.5$ 이므로 $\hat{p} = \frac{1}{5}$

이때 표본의 크기 400은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$ 은 근사적으로

정규분포 $N\left(\frac{1}{5}, \frac{\frac{1}{5} \times \frac{4}{5}}{400}\right)$, 즉 $N(0.2, 0.02^2)$ 을 따른다.

따라서 $Z = \frac{\hat{p}-0.2}{0.02}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을

따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P\left(\hat{p} \geq \frac{68}{400}\right) &= P\left(Z \geq \frac{\frac{68}{400}-0.2}{0.02}\right) = P(Z \geq -1.5) \\ &= P(Z \leq 1.5) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 + 0.43 \\ &= 0.93 \end{aligned}$$

STEP 3 최난도 문제

01 ⑤

02 472500원

03 125

| 94쪽

01 답 ⑤

1단계 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내기

한 번의 시행에서 2개의 공에 적힌 수의 차를 확률변수 X 라 하자.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

(i) $X=1$ 일 때,

주머니 A에서 1, 2 또는 2, 3을 꺼내거나 주머니 B에서 1, 2 또는 2, 3 또는 3, 4를 꺼내야 하므로

$$P(X=1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{5}{9}$$

(ii) $X=2$ 일 때,

주머니 A에서 1, 3을 꺼내거나 주머니 B에서 1, 3 또는 2, 4를 꺼내야 하므로

$$P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{3}$$

(iii) $X=3$ 일 때,

주머니 B에서 1, 4를 꺼내야 하므로

$$P(X=3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	1

2단계 $P(\bar{X}=2)$ 의 값 구하기

2번의 시행 후 $\bar{X}=2$ 인 경우의 순서쌍은 (1, 3), (2, 2), (3, 1)이므로

$$P(\bar{X}=2) = \frac{5}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{19}{81}$$

다른 풀이 1

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 1일 확률은

$$\frac{2}{3C_2} = \frac{2}{3}$$

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 2일 확률은

$$\frac{1}{3C_2} = \frac{1}{3}$$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 1일 확률은

$$\frac{3}{4C_2} = \frac{1}{2}$$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 2일 확률은

$$\frac{2}{4C_2} = \frac{1}{3}$$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 3일 확률은

$$\frac{1}{4C_2} = \frac{1}{6}$$

첫 번째 시행에서 기록한 수를 X_1 , 두 번째 시행에서 기록한 수를 X_2 라

하면 $\bar{X}=2$ 인 경우는 $\frac{X_1+X_2}{2}=2$, 즉 $X_1+X_2=4$ 인 경우이므로 순서

쌍 (X_1, X_2) 는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)

(i) (X_1, X_2) 가 (1, 3)인 경우

첫 번째 시행에서 3의 배수의 눈이 나온 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{2}{81}$$

첫 번째 시행에서 3의 배수가 아닌 눈이 나온 경우의 확률은

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{27}$$

따라서 이 경우의 확률은 $\frac{2}{81} + \frac{1}{27} = \frac{5}{81}$

(ii) (X_1, X_2) 가 (3, 1)인 경우

(i)과 같은 방법으로 이 경우의 확률은 $\frac{5}{81}$

(iii) (X_1, X_2) 가 (2, 2)인 경우

① 주머니 A에서만 공을 꺼내는 경우

$$\text{이 경우의 확률은 } \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81}$$

② 주머니 B에서만 공을 꺼내는 경우

$$\text{이 경우의 확률은 } \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{81}$$

③ 주머니 A와 주머니 B에서 한 번씩 공을 꺼내는 경우

$$\text{이 경우의 확률은 } 2 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{81}$$

①, ②, ③에서 이 경우의 확률은 $\frac{1}{81} + \frac{4}{81} + \frac{4}{81} = \frac{1}{9}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{5}{81} + \frac{5}{81} + \frac{1}{9} = \frac{19}{81}$$

다른 풀이 2

주머니 A에서 꺼낼 수 있는 2개의 공은 (1, 2), (1, 3), (2, 3)이므로

주머니 A가 선택되고, 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 1, 2일

확률은 각각 $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$, $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

주머니 B에서 꺼낼 수 있는 2개의 공은 (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3),

(2, 4), (3, 4)이므로 주머니 B가 선택되고, 꺼낸 2개의 공에 적혀 있

는 두 수의 차가 1, 2, 3일 확률은 각각

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}, \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

구하는 확률은 2번의 시행에서 기록한 2개의 수의 합이 4일 확률과 같다.

(i) 첫 번째 시행에서 1, 두 번째 시행에서 3이 나오는 경우

주머니 A에서 1과 주머니 B에서 3, 주머니 B에서 1과 3이 나오는

경우이므로 그 확률은 $\frac{2}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{9} = \frac{5}{81}$

(ii) 첫 번째 시행에서 2, 두 번째 시행에서 2가 나오는 경우

주머니 A에서 2와 2, 주머니 B에서 2와 2, 두 주머니 A, B에서 각 2가 나오는 경우이므로 그 확률은

$$\frac{1}{9} \times \frac{1}{9} + \frac{2}{9} \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{1}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

(iii) 첫 번째 시행에서 3, 두 번째 시행에서 1이 나오는 경우

주머니 B에서 3과 1, 주머니 B에서 3과 주머니 A에서 1이 나오는

경우이므로 그 확률은 $\frac{1}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \times \frac{2}{9} = \frac{5}{81}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{5}{81} + \frac{1}{9} + \frac{5}{81} = \frac{19}{81}$$

02 답 472500원

1단계 날개로 판매할 때, 판매 이익 구하기

공장에서 생산하는 캔들 1개의 무게를 X g이라 하면 확률변수 X 는 정

규분포 $N(150, 10^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-150}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z

는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

캔들 1개가 판매될 확률은

$$P(X > 140) = P\left(Z > \frac{140-150}{10}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1)$$

$$= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.5 + 0.34 = 0.84$$

따라서 캔들 3000개 중 판매할 수 있는 캔들의 개수는
 $3000 \times 0.84 = 2520$ 이므로 캔들 3000개를 날개로 판매할 때, 판매 이익은
 $2520 \times 2000 - 3000 \times 500 = 3540000$ (원)

2단계 4개씩 한 세트로 묶어 판매할 때, 판매 이익 구하기

한 세트를 구성하는 캔들 4개의 무게의 평균을 $\bar{X}g$ 이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(150, \frac{10^2}{4}\right)$, 즉 $N(150, 5^2)$ 을 따르므로

$Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - 150}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

캔들 한 세트가 판매될 확률은

$$\begin{aligned} P(4\bar{X} > 560) &= P(\bar{X} > 140) = P\left(Z_{\bar{X}} > \frac{140 - 150}{5}\right) \\ &= P(Z_{\bar{X}} > -2) = P(Z_{\bar{X}} < 2) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \leq 0) + P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 2) \\ &= 0.5 + 0.48 = 0.98 \end{aligned}$$

캔들 3000개에서 세트의 수는 $\frac{3000}{4} = 750$ 이므로 판매할 수 있는 세트의 수는

$$750 \times 0.98 = 735$$

이때 캔들 한 세트의 정가는 $2000 \times 4 - 500 = 7500$ (원)이므로 캔들 3000개를 세트로 묶어 판매할 때, 판매 이익은

$$735 \times 7500 - 3000 \times 500 = 4012500 \text{ (원)}$$

3단계 판매 이익의 차 구하기

따라서 캔들 3000개를 모두 날개로 판매할 때와 모두 세트로 묶어 판매할 때의 판매 이익의 차는

$$4012500 - 3540000 = 472500 \text{ (원)}$$

다른 풀이

캔들 3000개를 모두 날개로 판매할 때와 모두 세트로 묶어 판매할 때에 드는 원가 총액은 $3000 \times 500 = 1500000$ (원)으로 동일하므로 구하는 판매 이익의 차는

$$\begin{aligned} &|(\text{모두 날개로 판매할 때의 판매 총액}) \\ &\quad - (\text{모두 세트로 묶어 판매할 때의 판매 총액})| \end{aligned}$$

캔들 1개의 무게를 Xg 이라 하면 X 는 정규분포 $N(150, 10^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X - 150}{10}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

캔들 1개가 판매될 확률은

$$\begin{aligned} P(X > 140) &= P\left(Z > \frac{140 - 150}{10}\right) = P(Z > -1) = P(Z < 1) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 + 0.34 = 0.84 \end{aligned}$$

캔들 3000개 중 판매할 수 있는 캔들의 개수는

$$3000 \times 0.84 = 2520$$

캔들 1개의 정가는 2000원이므로 판매 총액은

$$2520 \times 2000 = 5040000 \text{ (원)}$$

한 세트를 구성하는 캔들 4개의 무게의 평균을 $\bar{X}g$ 이라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(150, \frac{10^2}{4}\right)$, 즉 $N(150, 5^2)$ 을 따르므로

$Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - 150}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

캔들 한 세트가 판매될 확률은

$$\begin{aligned} P(4\bar{X} > 560) &= P(\bar{X} > 140) = P\left(Z_{\bar{X}} > \frac{140 - 150}{5}\right) = P(Z_{\bar{X}} > -2) \\ &= P(Z_{\bar{X}} < 2) = P(Z_{\bar{X}} \leq 0) + P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 2) \\ &= 0.5 + 0.48 = 0.98 \end{aligned}$$

캔들 3000개에서 세트의 수는 $\frac{3000}{4} = 750$ 이므로 판매할 수 있는 세트의 수는

$$750 \times 0.98 = 735$$

캔들 한 세트의 정가는 $2000 \times 4 - 500 = 7500$ (원)이므로 판매 총액은

$$735 \times 7500 = 5512500 \text{ (원)}$$

따라서 구하는 판매 이익의 차는

$$5512500 - 5040000 = 472500 \text{ (원)}$$

03 답 125

1단계 a 의 값 구하기

표본의 크기가 256일 때, 모비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\hat{p}_1 - 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{256}} \leq p \leq \hat{p}_1 + 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1 - \hat{p}_1)}{256}}$$

이 신뢰구간이 $\frac{1}{5} - a \leq p \leq \frac{1}{5} + a$ 와 같으므로 $\hat{p}_1 = \frac{1}{5}$ 이고

$$a = 1.96 \sqrt{\frac{\frac{1}{5} \times \frac{4}{5}}{256}} = 1.96 \times \frac{1}{40} = 0.049$$

2단계 b 의 값 구하기

한편 표본의 크기가 n 일 때, 모비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\hat{p}_2 - 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{n}} \leq p \leq \hat{p}_2 + 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}_2(1 - \hat{p}_2)}{n}}$$

이 신뢰구간이 $\frac{5}{6}\hat{p}_1 - b \leq p \leq \frac{5}{6}\hat{p}_1 + b$ 와 같으므로

$$\hat{p}_2 = \frac{5}{6}\hat{p}_1 = \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \text{ 이고}$$

$$b = 1.96 \sqrt{\frac{\frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}{n}} = 1.96 \sqrt{\frac{5}{36n}}$$

3단계 n 의 값 구하기

그런데 $4a = 3b$, 즉 $b = \frac{4}{3}a$ 이므로 $1.96 \sqrt{\frac{5}{36n}} = \frac{4}{3} \times 0.049$

$$\sqrt{\frac{5}{36n}} = \frac{1}{30}, \quad \frac{5}{36n} = \frac{1}{900} \quad \therefore n = 125$$

기술 변형 문제로 단원 마스터

| 95~98쪽

01 ③	02 36	03 $\frac{32}{3}$	04 $\frac{29}{81}$	05 3750	06 105
07 ④	08 520	09 815	10 948	11 ①	12 ③
13 ②					

01 답 ③

확률변수 X 의 확률분포에 대하여 확률의 총합은 1이므로

$$a + b + c + c + b + a = 1 \quad \therefore a + b + c = \frac{1}{2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
E(X) &= 1 \times a + 3 \times b + 5 \times c + 7 \times c + 9 \times b + 11 \times a \\
&= 12a + 12b + 12c \\
&= 12(a+b+c) \\
&= 12 \times \frac{1}{2} (\because \textcircled{v}) \\
&= 6 \\
E(X^2) &= 1^2 \times a + 3^2 \times b + 5^2 \times c + 7^2 \times c + 9^2 \times b + 11^2 \times a \\
&= 122a + 90b + 74c \\
\therefore V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 122a + 90b + 74c - 36 \\
\text{또 확률변수 } Y \text{의 확률분포에 대하여 확률의 총합은 1이므로} \\
(d-c) + (d-b) + (d-a) + (d-a) + (d-b) + (d-c) &= 1 \\
6d - 2(a+b+c) &= 1 \\
6d - 2 \times \frac{1}{2} &= 1 (\because \textcircled{v}) \\
\therefore d &= \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{v} \\
E(Y) &= (d-c) + 2(d-b) + 3(d-a) + 4(d-a) + 5(d-b) \\
&\quad + 6(d-c) \\
&= 21d - 7(a+b+c) \\
&= 21 \times \frac{1}{3} - 7 \times \frac{1}{2} (\because \textcircled{v}, \textcircled{v}) \\
&= \frac{7}{2} \\
E(Y^2) &= (d-c) + 2^2(d-b) + 3^2(d-a) + 4^2(d-a) + 5^2(d-b) \\
&\quad + 6^2(d-c) \\
&= 91d - 25a - 29b - 37c \\
&= \frac{91}{3} - 25a - 29b - 37c (\because \textcircled{v}) \\
\therefore V(Y) &= E(Y^2) - \{E(Y)\}^2 = \frac{91}{3} - 25a - 29b - 37c - \frac{49}{4} \\
V(Y) - \frac{1}{4}V(X) &= \frac{1}{3} \text{에서} \\
\left(\frac{91}{3} - 25a - 29b - 37c - \frac{49}{4}\right) - \frac{1}{4}(122a + 90b + 74c - 36) &= \frac{1}{3} \\
\frac{111}{2}a + \frac{103}{2}b + \frac{111}{2}c = \frac{107}{4}, \quad \frac{111}{2}(a+b+c) - 4b &= \frac{107}{4} \\
\frac{111}{4} - 4b &= \frac{107}{4} (\because \textcircled{v}) \\
4b &= 1 \\
\therefore b &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

02 답 36

5개의 공 중에서 1개를 꺼내는 시행을 2번 반복하는 모든 경우의 수는 ${}_5C_1 \times {}_5C_1 = 5 \times 5 = 25$
 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10이다.
 첫 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a , 두 번째 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 b 라 하자.

- (i) $X=2$ 일 때,
 순서쌍 (a, b) 는 (1, 1)의 1가지이므로 $P(X=2) = \frac{1}{25}$
- (ii) $X=3$ 일 때,
 순서쌍 (a, b) 는 (1, 2), (2, 1)의 2가지이므로 $P(X=3) = \frac{2}{25}$
- (iii) $X=4$ 일 때,
 순서쌍 (a, b) 는 (1, 3), (2, 2), (3, 1)의 3가지이므로
 $P(X=4) = \frac{3}{25}$

- (iv) $X=5$ 일 때,
 순서쌍 (a, b) 는 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지이므로
 $P(X=4) = \frac{4}{25}$
- (v) $X=6$ 일 때,
 순서쌍 (a, b) 는 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지
 이므로 $P(X=6) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$
- (vi) $X=7$ 일 때,
 순서쌍 (a, b) 는 (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2)의 4가지이므로
 $P(X=7) = \frac{4}{25}$
- (vii) $X=8$ 일 때,
 순서쌍 (a, b) 는 (3, 5), (4, 4), (5, 3)의 3가지이므로
 $P(X=8) = \frac{3}{25}$
- (viii) $X=9$ 일 때,
 순서쌍 (a, b) 는 (4, 5), (5, 4)의 2가지이므로 $P(X=9) = \frac{2}{25}$
- (ix) $X=10$ 일 때,
 순서쌍 (a, b) 는 (5, 5)의 1가지이므로 $P(X=10) = \frac{1}{25}$
- (i)~(ix)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{1}{25}$	1

$$\begin{aligned}
E(X) &= 2 \times \frac{1}{25} + 3 \times \frac{2}{25} + 4 \times \frac{3}{25} + 5 \times \frac{4}{25} + 6 \times \frac{1}{5} + 7 \times \frac{4}{25} \\
&\quad + 8 \times \frac{3}{25} + 9 \times \frac{2}{25} + 10 \times \frac{1}{25} \\
&= 6 \\
E(X^2) &= 2^2 \times \frac{1}{25} + 3^2 \times \frac{2}{25} + 4^2 \times \frac{3}{25} + 5^2 \times \frac{4}{25} + 6^2 \times \frac{1}{5} + 7^2 \times \frac{4}{25} \\
&\quad + 8^2 \times \frac{3}{25} + 9^2 \times \frac{2}{25} + 10^2 \times \frac{1}{25} \\
&= 40 \\
\therefore V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 40 - 6^2 = 4 \\
\therefore V(Y) &= V(3X+2) = 3^2 V(X) = 9 \times 4 = 36
\end{aligned}$$

03 답 $\frac{32}{3}$

주사위를 10번 던져서 4 이하의 눈의 수가 나오는 횟수를 확률변수 Y 라 하면 5 이상의 눈의 수가 나오는 횟수는 $10-Y$ 이므로 주어진 시행을 10번 반복하여 이동된 점 P 의 좌표는 $(2Y, 10-Y)$ 이다.
 따라서 점 P 와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리는

$$X = \frac{|6Y+4(10-Y)|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{|2Y+40|}{5} = \frac{2}{5}Y+8 \quad (\because Y \geq 0)$$

주사위를 한 번 던져서 4 이하의 눈의 수가 나올 확률은 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 이므로

확률변수 Y 는 이항분포 $B\left(10, \frac{2}{3}\right)$ 를 따른다.

$$\begin{aligned}
\therefore E(Y) &= 10 \times \frac{2}{3} = \frac{20}{3} \\
\therefore E(X) &= E\left(\frac{2}{5}Y+8\right) = \frac{2}{5}E(Y)+8 \\
&= \frac{2}{5} \times \frac{20}{3} + 8 = \frac{32}{3}
\end{aligned}$$

04 답 29/81

추가된 볼펜 중 파란색 볼펜의 개수를 확률변수 X 라 하면 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(3, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_3C_x \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{3-x} \quad (x=0, 1, 2, 3)$$

이때 9개의 볼펜 중에서 임의로 택한 1개가 파란색 볼펜인 사건을 A , 파란색 볼펜이 4개 이상인 사건을 B 라 하면 구하는 확률은 $P(B|A)$ 이다.

$$(i) X=0일 때, 즉 P(X=0) = {}_3C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

9개의 볼펜 중 파란색 볼펜은 2개이므로 임의로 택한 1개가 파란색 볼펜일 확률은

$$\frac{8}{27} \times \frac{2}{9} = \frac{16}{243}$$

$$(ii) X=1일 때, 즉 P(X=1) = {}_3C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

9개의 볼펜 중 파란색 볼펜은 3개이므로 임의로 택한 1개가 파란색 볼펜일 확률은

$$\frac{4}{9} \times \frac{3}{9} = \frac{4}{27}$$

$$(iii) X=2일 때, 즉 P(X=2) = {}_3C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{9}$$

9개의 볼펜 중 파란색 볼펜은 4개이므로 임의로 택한 1개가 파란색 볼펜일 확률은

$$\frac{2}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{8}{81}$$

$$(iv) X=3일 때, 즉 P(X=3) = {}_3C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{27}$$

9개의 볼펜 중 파란색 볼펜은 5개이므로 임의로 택한 1개가 파란색 볼펜일 확률은

$$\frac{1}{27} \times \frac{5}{9} = \frac{5}{243}$$

$$(i) \sim (iv)에서 P(A) = \frac{16}{243} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \frac{5}{243} = \frac{1}{3}$$

$$(iii), (iv)에서 P(A \cap B) = \frac{8}{81} + \frac{5}{243} = \frac{29}{243}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{29}{243}}{\frac{1}{3}} = \frac{29}{81}$$

05 답 3750

제품 한 상자에 포함된 불량품의 개수를 확률변수 X , 1개의 제품이 불량품일 확률을 p 라 하면 확률변수 X 는 이항분포 $B(30, p)$ 를 따르므로 $E(X) = 30p$, $V(X) = 30p(1-p)$

이때 $E(X) = m$ 에서 $30p = m$ ㉠

또 $V(X) = \frac{24}{5}$ 에서 $30p(1-p) = \frac{24}{5}$

$$30p - 30p^2 = \frac{24}{5}, \quad 25p^2 - 25p + 4 = 0$$

$$(5p-1)(5p-4) = 0 \quad \therefore p = \frac{1}{5} \text{ 또는 } p = \frac{4}{5}$$

그런데 $p = \frac{4}{5}$ 이면 ㉠에서 $m = 30 \times \frac{4}{5} = 24 > 10$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $p = \frac{1}{5}$ 이므로

$$E(X) = 30p = 30 \times \frac{1}{5} = 6$$

불량품 한 개에 필요한 애프터서비스 비용이 a 원이므로 불량품 X 개에 대한 애프터서비스 비용 aX 원의 기댓값은

$$E(aX) = aE(X) = 6a$$

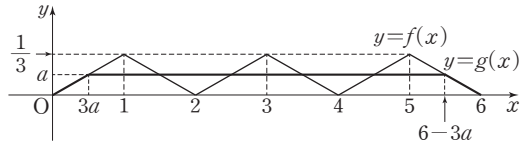
한 상자의 제품을 모두 검사하는 비용이 애프터서비스로 인해 필요한 비용의 기댓값의 2배이므로

$$45000 = 2 \times 6a \quad \therefore a = 3750$$

06 답 105

$\{g(x) - f(x)\} \{g(x) - a\} = 0$ 이므로 $g(x) = f(x)$ 또는 $g(x) = a$

(가), (나), (다)에서 확률밀도함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$P(0 \leq Y \leq 6) = 1 \text{이므로 } \frac{1}{2} \times \{(6 - 2 \times 3a) + 6\} \times a = 1$$

$$3a^2 - 6a + 1 = 0 \quad \therefore a = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$$

그런데 $0 < a < \frac{1}{3}$ 이므로 $a = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}$ 이고 $1 < 9a < 2$

$$\therefore P(0 \leq Y \leq 9a) = P(0 \leq Y \leq 3a) + P(3a \leq Y \leq 9a)$$

$$= \frac{1}{2} \times 3a \times a + 6a \times a = \frac{15}{2} a^2$$

$$= \frac{15}{2} \times \left(\frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{25}{2} - 5\sqrt{6}$$

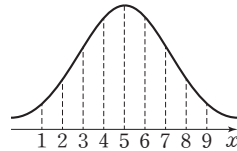
따라서 $p = \frac{25}{2}$, $q = 5$ 이므로

$$6(p+q) = 6 \times \left(\frac{25}{2} + 5\right) = 105$$

07 답 ④

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^9 P(X \leq n) &= P(X \leq 1) + P(X \leq 2) + P(X \leq 3) + P(X \leq 4) \\ &\quad + P(X \leq 5) + P(X \leq 6) + P(X \leq 7) + P(X \leq 8) \\ &\quad + P(X \leq 9) \end{aligned}$$

이때 정규분포 $N(5, 2^2)$ 을 따르는 확률변수 X 의 정규분포곡선은 직선 $x=5$ 에 대하여 대칭이므로



$$P(X \leq 1) + P(X \leq 9) = P(X \leq 1) + P(X \geq 1) = 1$$

$$P(X \leq 2) + P(X \leq 8) = P(X \leq 2) + P(X \geq 2) = 1$$

$$P(X \leq 3) + P(X \leq 7) = P(X \leq 3) + P(X \geq 3) = 1$$

$$P(X \leq 4) + P(X \leq 6) = P(X \leq 4) + P(X \geq 4) = 1$$

$$\therefore \sum_{n=1}^9 P(X \leq n)$$

$$= \{P(X \leq 1) + P(X \leq 9)\} + \{P(X \leq 2) + P(X \leq 8)\}$$

$$+ \{P(X \leq 3) + P(X \leq 7)\} + \{P(X \leq 4) + P(X \leq 6)\}$$

$$+ P(X \leq 5)$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 0.5 = 4.5$$

따라서 $a = 4.5$ 이므로 $20a = 90$

08 답 520

두 확률변수 X, Y 가 각각 정규분포 $N(m_1, \sigma_1^2), N(m_2, \sigma_2^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-m_1}{\sigma_1}, Z_Y = \frac{Y-m_2}{\sigma_2}$ 로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는 모두

표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(X \leq x) = P(X \geq 60-x)$ 에서

$$P\left(Z_X \leq \frac{x-m_1}{\sigma_1}\right) = P\left(Z_X \geq \frac{(60-x)-m_1}{\sigma_1}\right)$$

따라서 $\frac{x-m_1}{\sigma_1} = -\frac{(60-x)-m_1}{\sigma_1}$ 이므로

$$2m_1 = 60$$

$$\therefore m_1 = 30$$

또 $P(Y \leq x) = P(X \leq x+20)$ 에서

$$P\left(Z_Y \leq \frac{x-m_2}{\sigma_2}\right) = P\left(Z_X \leq \frac{(x+20)-m_1}{\sigma_1}\right)$$

$$\therefore P\left(Z_Y \leq \frac{x-m_2}{\sigma_2}\right) = P\left(Z_X \leq \frac{x-10}{\sigma_1}\right)$$

따라서 $\frac{x-m_2}{\sigma_2} = \frac{x-10}{\sigma_1}$ 이므로 $\sigma_1 x - m_2 \sigma_1 = \sigma_2 x - 10 \sigma_2$

이 식이 x 에 대한 항등식이므로 $\sigma_1 = \sigma_2, -m_2 \sigma_1 = -10 \sigma_2$

$$\therefore m_2 = 10$$

$$\therefore P(20 \leq X \leq 30) + P(20 \leq Y \leq 30)$$

$$= P\left(\frac{20-30}{\sigma_1} \leq Z_X \leq \frac{30-30}{\sigma_1}\right) + P\left(\frac{20-10}{\sigma_2} \leq Z_Y \leq \frac{30-10}{\sigma_2}\right)$$

$$= P\left(-\frac{10}{\sigma_1} \leq Z_X \leq 0\right) + P\left(\frac{10}{\sigma_2} \leq Z_Y \leq \frac{20}{\sigma_2}\right)$$

$$= P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{10}{\sigma_1}\right) + P\left(\frac{10}{\sigma_2} \leq Z_Y \leq \frac{20}{\sigma_2}\right)$$

$$= P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{10}{\sigma_1}\right) + P\left(\frac{10}{\sigma_1} \leq Z_Y \leq \frac{20}{\sigma_1}\right)$$

$$= P\left(0 \leq Z \leq \frac{20}{\sigma_1}\right) = 0.4332$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로 $\frac{20}{\sigma_1} = 1.5$

$$\therefore \sigma_1 = \frac{40}{3}$$

따라서 $\sigma_2 = \frac{40}{3}$ 이므로

$$12(m_1 + \sigma_2) = 12 \times \left(30 + \frac{40}{3}\right) = 520$$

09 답 815

A, B 과목 시험 점수를 각각 X 점, Y 점이라 하면 두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(m, \sigma^2), N\left(m+3, \left(\frac{\sigma}{3}\right)^2\right)$ 을 따르므로

$Z_X = \frac{X-m}{\sigma}, Z_Y = \frac{Y-(m+3)}{\frac{\sigma}{3}}$ 으로 놓으면 두 확률변수 Z_X, Z_Y 는

모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

이때 A 과목 시험 점수가 80점 이상일 확률이 0.2이므로

$$P(X \geq 80) = 0.2 \text{에서 } P\left(Z_X \geq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.2$$

$$P(Z_X \geq 0) - P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.2$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.2$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z_X \leq \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0.3$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 0.85) = 0.3$ 이므로 $\frac{80-m}{\sigma} = 0.85$

$$80-m = 0.85\sigma$$

$$\therefore m = 80 - 0.85\sigma \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

A 과목 시험 점수가 80점 이상일 확률이 0.2이고, A, B 두 과목의 시험 점수가 모두 80점 이상일 확률이 0.01이므로 B 과목 시험 점수가 80점 이상일 확률을 p 라 하면

$$0.2 \times p = 0.01 \quad \therefore p = 0.05$$

$$\text{즉, } P(Y \geq 80) = 0.05 \text{에서 } P\left(Z_Y \geq \frac{80-(m+3)}{\frac{\sigma}{3}}\right) = 0.05$$

$$P\left(Z_Y \geq \frac{3(77-m)}{\sigma}\right) = 0.05$$

$$P(Z_Y \geq 0) - P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{3(77-m)}{\sigma}\right) = 0.05$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{3(77-m)}{\sigma}\right) = 0.05$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z_Y \leq \frac{3(77-m)}{\sigma}\right) = 0.45$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.65) = 0.45$ 이므로 $\frac{3(77-m)}{\sigma} = 1.65$

$$77-m = 0.55\sigma$$

$$\therefore m = 77 - 0.55\sigma \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $80 - 0.85\sigma = 77 - 0.55\sigma$

$$0.3\sigma = 3 \quad \therefore \sigma = 10$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $m = 77 - 0.55 \times 10 = 71.5$

$$\therefore 10(m + \sigma) = 10 \times (71.5 + 10)$$

$$= 815$$

10 답 948

확률변수 X 가 정규분포 $N(2, t^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-2}{t}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(X \leq 8t) \geq \frac{1}{2} \text{에서 } P\left(Z \leq \frac{8t-2}{t}\right) \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } \frac{8t-2}{t} \geq 0 \text{이므로 } t \geq \frac{1}{4} (\because t > 0)$$

$$P(t^2 - 2t + 2 \leq X \leq t^2 + 2t + 2)$$

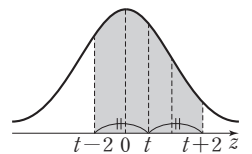
$$= P\left(\frac{(t^2 - 2t + 2) - 2}{t} \leq Z \leq \frac{(t^2 + 2t + 2) - 2}{t}\right)$$

$$= P(t - 2 \leq Z \leq t + 2) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $t + 2 - (t - 2) = 4$ 로 일정하므로

중앙값 $\frac{(t-2) + (t+2)}{2} = t$ 의 값이 확률

변수 Z 의 평균 0에 가까울수록 $\textcircled{1}$ 의 값은 커진다.



따라서 $P(t^2 - 2t + 2 \leq X \leq t^2 + 2t + 2)$ 는 $t = \frac{1}{4}$ 일 때 최댓값을 가지므로

로 $t = \frac{1}{4}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$P(-1.75 \leq Z \leq 2.25) = P(-1.75 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2.25)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.75) + P(0 \leq Z \leq 2.25)$$

$$= 0.460 + 0.488$$

$$= 0.948$$

따라서 $k = 0.948$ 이므로

$$1000 \times k = 1000 \times 0.948 = 948$$

11 답 ①

두 확률변수 X, Y 는 각각 정규분포 $N(330, \sigma^2)$, $N(345, (3\sqrt{2}\sigma)^2)$ 을 따르므로 크기가 n 인 표본의 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(330, \frac{\sigma^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(330, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따르고, 크기가 $8n$ 인 표본의 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(345, \frac{(3\sqrt{2}\sigma)^2}{8n}\right)$, 즉 $N\left(345, \left(\frac{3\sigma}{2\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

따라서 $Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - 330}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$, $Z_{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y} - 345}{\frac{3\sigma}{2\sqrt{n}}}$ 로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\bar{X}}, Z_{\bar{Y}}$

는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$P(330 \leq \bar{X} \leq 340) = 0.4772$ 에서

$$P\left(\frac{330 - 330}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{340 - 330}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 0.4772$$

$$P\left(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq \frac{10\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{10\sqrt{n}}{\sigma} = 2$$

$$\therefore \sigma = 5\sqrt{n}$$

$$\therefore \frac{3\sigma}{2\sqrt{n}} = \frac{3 \times 5\sqrt{n}}{2\sqrt{n}} = \frac{15}{2}$$

$$\therefore P(\bar{Y} \geq 360) = P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{360 - 345}{\frac{3\sigma}{2\sqrt{n}}}\right)$$

$$= P\left(Z_{\bar{Y}} \geq \frac{15}{2}\right)$$

$$= P(Z_{\bar{Y}} \geq 2)$$

$$= P(Z_{\bar{Y}} \geq 0) - P(0 \leq Z_{\bar{Y}} \leq 2)$$

$$= 0.5 - 0.4772$$

$$= 0.0228$$

12 답 ③

표본의 크기가 25일 때, 표본평균을 $\bar{x}_1$ 라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_1 - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{25}} \leq m \leq \bar{x}_1 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{25}}$$

이 신뢰구간이 $839.68 \leq m \leq 860.32$ 와 같으므로

$$\bar{x}_1 - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{25}} = 839.68 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\bar{x}_1 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{25}} = 860.32 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{을 하면 } 2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{25}} = 20.64$$

$$\therefore \sigma = 20$$

표본의 크기가 n 일 때, 표본평균을 $\bar{x}_2$ 라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x}_2 - 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x}_2 + 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{n}}$$

이 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 와 같으므로

$$a = \bar{x}_2 - 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{n}}, \quad b = \bar{x}_2 + 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore b - a = 2 \times 1.96 \times \frac{20}{\sqrt{n}} = \frac{78.4}{\sqrt{n}}$$

$$\text{즉, } \frac{78.4}{\sqrt{n}} \leq 8 \text{이므로}$$

$$\sqrt{n} \geq \frac{78.4}{8}, \quad \sqrt{n} \geq 9.8$$

$$\therefore n \geq 96.04$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 97이다.

13 답 ②

한 번의 시행에서 2개의 공에 적힌 수의 차를 확률변수 X 라 하자.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

(i) $X=1$ 일 때,

주머니 A에서 1, 2 또는 2, 3 또는 3, 4를 꺼내거나 주머니 B에서 1, 2 또는 2, 3 또는 3, 4 또는 4, 5를 꺼내야 하므로

$$\begin{aligned} P(X=1) &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4C_2} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5C_2} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{10} \\ &= \frac{7}{15} \end{aligned}$$

(ii) $X=2$ 일 때,

주머니 A에서 1, 3 또는 2, 4를 꺼내거나 주머니 B에서 1, 3 또는 2, 4 또는 3, 5를 꺼내야 하므로

$$\begin{aligned} P(X=2) &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{4C_2} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5C_2} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{29}{90} \end{aligned}$$

(iii) $X=3$ 일 때,

주머니 A에서 1, 4를 꺼내거나 주머니 B에서 1, 4 또는 2, 5를 꺼내야 하므로

$$\begin{aligned} P(X=3) &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{4C_2} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5C_2} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{10} \\ &= \frac{8}{45} \end{aligned}$$

(iv) $X=4$ 일 때,

주머니 B에서 1, 5를 꺼내야 하므로

$$P(X=4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5C_2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{30}$$

(i)~(iv)에서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{7}{15}$	$\frac{29}{90}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{30}$	1

2번의 시행 후 $\bar{X} = \frac{5}{2}$ 인 경우의 순서쌍은 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)이므로

$$P\left(\bar{X} = \frac{5}{2}\right) = \frac{7}{15} \times \frac{1}{30} + \frac{29}{90} \times \frac{8}{45} + \frac{8}{45} \times \frac{29}{90} + \frac{1}{30} \times \frac{7}{15} = \frac{59}{405}$$