



정답과 해설

미적분 I

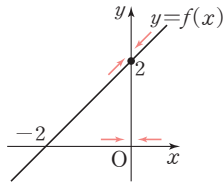
01 / 함수의 극한

A 개념 확인

8~11쪽

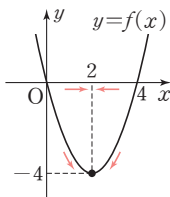
0001 답 2

$f(x)=x+2$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 0에 한없이 가까워질 때,
 $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} (x+2)=2$



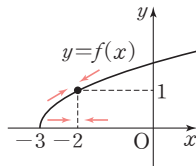
0002 답 -4

$f(x)=x^2-4x$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 2에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 -4에 한없이 가까워지므로
 $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-4x)=-4$



0003 답 1

$f(x)=\sqrt{x+3}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 -2에 한없이 가까워질 때,
 $f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로
 $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{x+3}=1$

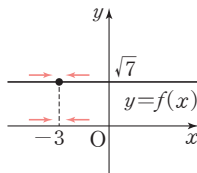


공통수학2 다시보기

무리함수 $y=\sqrt{a(x-p)}+q$ ($a \neq 0$)의 그래프는 무리함수 $y=\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이다.

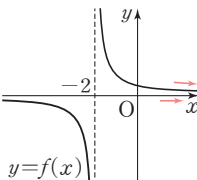
0004 답 $\sqrt{7}$

$f(x)=\sqrt{7}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 모든 실수 x 에서 함수값이 항상 $\sqrt{7}$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow -3} \sqrt{7}=\sqrt{7}$



0005 답 0

$f(x)=\frac{1}{x+2}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+2}=0$

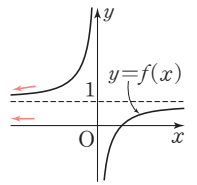


공통수학2 다시보기

유리함수 $y=\frac{k}{x-p}+q$ ($k \neq 0$)의 그래프는 유리함수 $y=\frac{k}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이다.

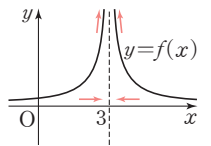
0006 답 1

$f(x)=1-\frac{1}{x}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)=1$



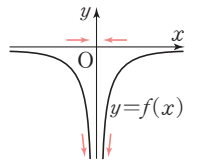
0007 답 ∞

$f(x)=\frac{1}{|x-3|}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 3에 한없이 가까워질 때,
 $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로
 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{|x-3|}=\infty$



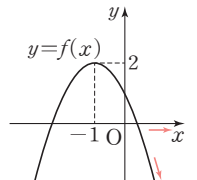
0008 답 $-\infty$

$f(x)=-\frac{1}{|x|}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 0에 한없이 가까워질 때,
 $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{|x|}\right)=-\infty$



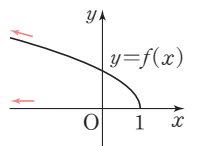
0009 답 $-\infty$

$f(x)=-x^2-2x+1$ 이라 하면
 $f(x)=-(x+1)^2+2$
따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2-2x+1)=-\infty$



0010 답 ∞

$f(x)=\sqrt{-x+1}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x+1}=\infty$



0011 답 (1) 2 (2) -1

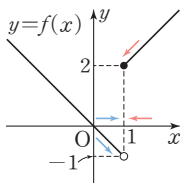
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

- (1) x 의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

- (2) x 의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$$



0012 답 (1) 1 (2) 1 (3) 1 (4) 2 (5) -1

(6) 존재하지 않는다.

- (1) x 의 값이 -1보다 크면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$$

- (2) x 의 값이 -1보다 작으면서 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$$

- (3) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$$

- (4) x 의 값이 1보다 크면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

- (5) x 의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$$

- (6) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

0013 답 존재하지 않는다.

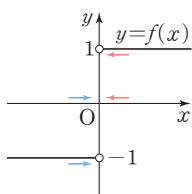
$$f(x) = \frac{|x|}{x} \text{라 하면 } f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, 즉 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ 의 값은 존재하지 않는다.



0014 답 존재하지 않는다.

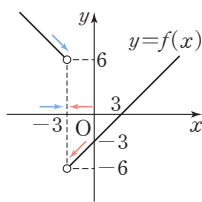
$$f(x) = \frac{x^2-9}{|x+3|} \text{라 하면 } f(x) = \begin{cases} x-3 & (x > -3) \\ -x+3 & (x < -3) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -6, \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 6$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$, 즉 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{|x+3|}$ 의 값은 존재하지 않는다.



0015 답 12

$$\lim_{x \rightarrow 1} 3f(x) = 3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \times 4 = 12$$

0016 답 2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4 + (-2) = 2$$

0017 답 10

$$\lim_{x \rightarrow 1} \{2f(x) - g(x)\} = 2 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2 \times 4 - (-2) = 10$$

0018 답 -8

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 4 \times (-2) = -8$$

0019 답 -2

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = \frac{4}{-2} = -2$$

0020 답 $\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{g(x)\}^2 - 1}{f(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 1} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x) - \lim_{x \rightarrow 1} 1}{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)} \\ &= \frac{(-2) \times (-2) - 1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

0021 답 -5

$$\lim_{x \rightarrow 3} (-2x+1) = -6+1 = -5$$

0022 답 7

$$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - x + 1) = 4 - (-2) + 1 = 7$$

0023 답 -10

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x+2)(x^2-5) = \lim_{x \rightarrow 0} (x+2) \times \lim_{x \rightarrow 0} (x^2-5) = 2 \times (-5) = -10$$

0024 답 1

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x+1}{x+3} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (-x+1)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x+3)} = \frac{1+1}{-1+3} = 1$$

0025 답 8

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+6x-7}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+7)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+7) = 8$$

0026 답 -1

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} x = -1$$

0027 답 $\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-5}-1}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{3x-5}-1)(\sqrt{3x-5}+1)}{(x-2)(\sqrt{3x-5}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{(x-2)(\sqrt{3x-5}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{(x-2)(\sqrt{3x-5}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{\sqrt{3x-5}+1} \\ &= \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

0028 답 $-\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+7}-4} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(\sqrt{x^2+7}-4)(\sqrt{x^2+7}+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}{x^2-9} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(\sqrt{x^2+7}+4)}{(x+3)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x^2+7}+4}{x-3} \\ &= \frac{4+4}{-6} = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

0029 답 ∞

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3x}{x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{1+\frac{2}{x}} = \infty$$

0030 답 3

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2x+1}{x^2+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{5}{x^2}} = 3$$

0031 답 0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x+1}{x^3-x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}} = 0$$

0032 답 4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2+2x}+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\frac{1}{x}} = 4$$

0033 답 3

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+6x}-x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+6x}-x)(\sqrt{x^2+6x}+x)}{\sqrt{x^2+6x}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2+6x}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{1+\frac{6}{x}}+1} = \frac{6}{1+1} = 3\end{aligned}$$

0034 답 2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{(\sqrt{x^2+x}-x)(\sqrt{x^2+x}+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1 \right) \\ &= 1+1=2\end{aligned}$$

0035 답 $\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{3}{x+3} - \frac{2}{x+2} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{3(x+2)-2(x+3)}{(x+3)(x+2)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{x}{(x+3)(x+2)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+3)(x+2)} \\ &= \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

0036 답 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}} - 1 \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-x}+x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

0037 답 -3

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
즉, $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2+ax) = 0$ 이므로
 $9+3a=0 \quad \therefore a=-3$

0038 답 2

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.
즉, $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2+3x+a) = 0$ 이므로
 $-2+a=0 \quad \therefore a=2$

0039 답 -2

$\lim_{x \rightarrow 1} (-x-1) = -2$, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2-3x) = -2$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$

0040 답 1

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여
 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

B 유형 완성

12~21쪽

0041 답 ⑤

$$f(-1) + \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2 + 1 + 0 = 3$$

0042 답 ③

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1)^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} x^2 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 5$$

0043 답 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{|x+1|}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{x+1}{x+1} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{|x+1|}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{-(x+1)}{x+1} = -1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 2$$

채점 기준

① $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)$ 의 값 구하기	40%
② $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$ 의 값 구하기	40%
③ $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$ 의 값 구하기	20%

0044 답 4

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} (kx+3) = 3k+3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} (x^2+2x) = 15$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \text{의 값이 존재하려면 } \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) \text{이어야 하므로}$$

$$3k+3=15 \quad \therefore k=4$$

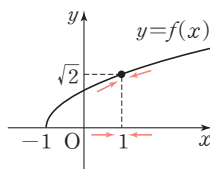
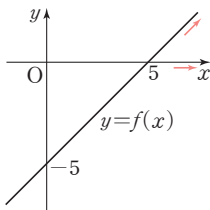
0045 답 ⑤

ㄱ. $f(x)=x-5$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값도 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x-5) = \infty$$

ㄴ. $f(x)=\sqrt{x+1}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 x 의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 $\sqrt{2}$ 에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$$



ㄷ. $f(x)=\frac{1}{x}+1$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로

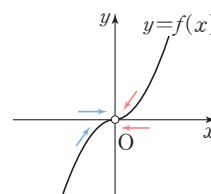
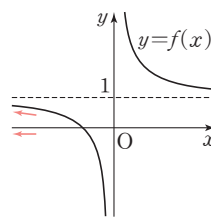
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) = 1$$

ㄹ. $f(x)=\frac{x^3}{|x|}$ 이라 하면 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x>0) \\ -x^2 & (x<0) \end{cases}$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$



따라서 보기에서 극한값이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

0046 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

ㄷ. $-1 < a < 1$ 인 임의의 실수 a 에 대하여

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 의 값이 존재한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0047 답 ④

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) = 2$$

$f(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0-$ 일 때 $s \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 1-} g(s) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) + \lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = 4$$

0048 답 ②

$$\text{ㄱ. } f(0) = 2$$

$$\text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (x-1) = -1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t=2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(f(x)) = f(2) = 2$$

ㄹ. $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1-$ 일 때 $t \rightarrow -2-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -2-} f(t) = \lim_{t \rightarrow -2-} (t-1) = -3$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

0049 답 2

$x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x+1) = \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$-x=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $s \rightarrow -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(-x) = \lim_{s \rightarrow -1^+} f(s) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x+1) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(-x) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

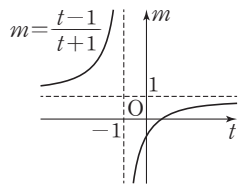
① $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x+1)$ 의 값 구하기	40%
② $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(-x)$ 의 값 구하기	40%
③ $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x+1) + \lim_{x \rightarrow 1^-} f(-x)$ 의 값 구하기	20%

0050 답 ③

$$\frac{t-1}{t+1} = m \text{으로 놓으면 } m = \frac{t+1-2}{t+1} = -\frac{2}{t+1} + 1$$

따라서 $m = \frac{t-1}{t+1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $t \rightarrow \infty$ 일 때 $m \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right) = \lim_{m \rightarrow 1^-} f(m) = 2$$

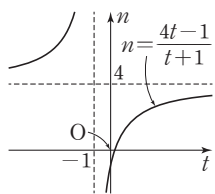


$$\frac{4t-1}{t+1} = n \text{으로 놓으면 } n = \frac{4(t+1)-5}{t+1} = -\frac{5}{t+1} + 4$$

따라서 $n = \frac{4t-1}{t+1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $t \rightarrow -\infty$ 일 때 $n \rightarrow 4$ 이므로

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right) = \lim_{n \rightarrow 4^+} f(n) = 3$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right) + \lim_{t \rightarrow -\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right) = 5$$



0051 답 ①

$2f(x) + g(x) = h(x)$ 라 하면

$$g(x) = h(x) - 2f(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = -3$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 3g(x)}{3f(x) + 2g(x) - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 3\{h(x) - 2f(x)\}}{3f(x) + 2\{h(x) - 2f(x)\} - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7f(x) - 3h(x)}{-f(x) + 2h(x) - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 3 \times \frac{h(x)}{f(x)}}{-1 + 2 \times \frac{h(x)}{f(x)} - \frac{1}{f(x)}} \\ &= -7 \end{aligned}$$

$$\left(\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{f(x)} = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f(x)} = 0 \right)$$

다른 풀이

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2f(x) + g(x)}{f(x)} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ 2 + \frac{g(x)}{f(x)} \right\} = 0 \quad \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = -2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 3g(x)}{3f(x) + 2g(x) - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 3 \times \frac{g(x)}{f(x)}}{3 + 2 \times \frac{g(x)}{f(x)} - \frac{1}{f(x)}} \\ &= \frac{1 - 3 \times (-2)}{3 + 2 \times (-2) - 0} \\ &= -7 \end{aligned}$$

0052 답 ⑤

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} \{f(x) + g(x)\} = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \{f(x) + g(x)\} = 2 + 0 = 2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \{f(x) + g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \{f(x) + g(x)\}$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\}$ 의 값은 존재하지 않는다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} \{g(x) - f(x)\} = 0 - 1 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \{g(x) - f(x)\} = 0 - 2 = -2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \{g(x) - f(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} \{g(x) - f(x)\}$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} \{g(x) - f(x)\}$ 의 값은 존재하지 않는다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)g(x) = 1 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)g(x) = 2 \times 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{0}{1} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

따라서 보기에서 극한값이 존재하는 것은 ㄷ, ㄹ이다.

0053 답 30

$$a = \lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 + 1)f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{2x^2 + 1}{x + 1} \times (x + 1)f(x) \right\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 1}{x + 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1)f(x)$$

$$= \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2}$$

$$\therefore 20a = 20 \times \frac{3}{2} = 30$$

0054 답 ④

$f(x) + 2g(x) = h(x)$ 라 하면

$$g(x) = \frac{h(x) - f(x)}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) - 6g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ f(x) - 6 \times \frac{h(x) - f(x)}{2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \{4f(x) - 3h(x)\} \\ &= 4 \times 4 - 3 \times 3 = 7 \end{aligned}$$

0055 답 3/2

$x-2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x-2)}{x-2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} \quad \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 3 \quad \dots \textcircled{i}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3x}{2g(x)-x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x}+3}{2 \times \frac{g(x)}{x}-x} \\ &= \frac{3+3}{2 \times 2-0} = \frac{3}{2} \quad \dots \textcircled{ii} \end{aligned}$$

채점 기준

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 의 값 구하기	50 %
② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+3x}{2g(x)-x^2}$ 의 값 구하기	50 %

만렙 Note

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x-a)}{x-a} = \alpha$ (α 는 실수) 꼴이 주어질 때, $x-a=t$ 로 놓으면

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x-a)}{x-a} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \alpha$ 임을 이용한다.

0056 답 2

$x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-2x-3}{f(x+1)} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-3)}{f(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{f(x+1)} \times \lim_{x \rightarrow -1} (x-3) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{f(t)} \times \lim_{x \rightarrow -1} (x-3) \\ &= -\frac{1}{2} \times (-4) = 2 \end{aligned}$$

0057 답 ①

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)+g(x)\} = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)-g(x)\} = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\{f(x)+g(x)\} + \{f(x)-g(x)\}}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\{f(x)+g(x)\} - \{f(x)-g(x)\}}{2} = \frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ g(x) \times \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \alpha\beta$$

ㄷ. [반례] $f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ -1 & (x < a) \end{cases}$ 이면 $f(x) - g(x) = 0$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = 0$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값은 모두 존재하지 않는다.

ㄹ. [반례] $f(x) = \begin{cases} 0 & (x \geq a) \\ 1 & (x < a) \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ 0 & (x < a) \end{cases}$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 와 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값은 모두 존재하지 않지만 $f(x) + g(x) = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = 1$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0058 답 ②

$-1 \leq x < 0$ 일 때 $0 \leq x+1 < 1$ 이므로 $[x+1] = 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} [x+1] = 0$$

$2 \leq x < 3$ 일 때 $[x] = 2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2+} [x] = 2$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} ([x]-3) = 2-3 = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} [x+1] + \lim_{x \rightarrow 2+} ([x]-3) = -1$$

0059 답 ④

$-1 \leq x < 0$ 일 때 $-2 \leq x-1 < -1$ 이므로

$$[x-1] = -2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} [x-1] = -2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{[x-1]}{x-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$-x^2+2x-1 = -(x-1)^2$ 이고 $1 < x < 2$ 일 때 $-1 < -(x-1)^2 < 0$ 이므로

$$[-x^2+2x-1] = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} [-x^2+2x-1] = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{[x-1]}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1+} [-x^2+2x-1] = 1$$

0060 답 ②

$-1 \leq x < 0$ 일 때 $[x] = -1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow -1+} [x] = -1$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} \{[x]^2 + (k+5)[x]\} \\ &= (-1)^2 + (k+5) \times (-1) \\ &= -k-4 \end{aligned}$$

$-2 \leq x < -1$ 일 때 $[x] = -2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow -1-} [x] = -2$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} \{[x]^2 + (k+5)[x]\} \\ &= (-2)^2 + (k+5) \times (-2) \\ &= -2k-6 \end{aligned}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하려면 $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$ 이어야

하므로

$$-k-4 = -2k-6 \quad \therefore k = -2$$

0061 답 16

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(\sqrt{x+2}+2) \\ &= 4(2+2) = 16 \end{aligned}$$

0062 답 ④

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x-2}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+2}{x+1} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

0063 **답 ④**

$$\begin{aligned}
 ① \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x+2} &= \sqrt{4} = 2 \\
 ② \lim_{x \rightarrow -1} (-x+2) &= 3 \\
 ③ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+4)(x-1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+4) = 5 \\
 ④ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+6}+3} \\
 &= \frac{1}{3+3} = \frac{1}{6} \\
 ⑤ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} 2(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}) \\
 &= 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0064 **답 8**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{(x^2-4)f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2+4)(x^2-4)}{(x^2-4)f(x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+4}{f(x)} = \frac{8}{f(2)}
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{8}{f(2)} = 1$ 이므로 $f(2) = 8$

0065 **답 6**

$x > -2$ 일 때 $x+2 > 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x^2-2x-8}{|x+2|} &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x^2-2x-8}{x+2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{(x+2)(x-4)}{x+2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2+} (x-4) = -6
 \end{aligned}$$

$\therefore a = -6$

$x < 1$ 일 때 $x-1 < 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2-x}{|x-1|} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2-x}{-(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x(x-1)}{-(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x) = -1
 \end{aligned}$$

$\therefore b = -1$

$\therefore ab = 6$

채점 기준

① a의 값 구하기	40%
② b의 값 구하기	40%
③ ab의 값 구하기	20%

0066 **답 4**

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-\sqrt{9x^2-1}}{x+1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t-\sqrt{9t^2-1}}{-t+1} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1-\sqrt{9-\frac{1}{t^2}}}{-1+\frac{1}{t}} \\
 &= \frac{-1-3}{-1} = 4
 \end{aligned}$$

0067 **답 ⑤**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)(3x+1)}{x^2+3x+2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x-1}{x^2+3x+2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} = 3
 \end{aligned}$$

0068 **답 ④**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2-x}+3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4-\frac{1}{x}}+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 2$$

0069 **답 ④**

$$\begin{aligned}
 ① \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+4}{x^2+5} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{5}{x^2}} = 0 \\
 ② \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-1}{x^2-x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 5 \\
 ③ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+5}-1}{3x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}-\frac{1}{x}}{3} = \frac{1}{3} \\
 ④ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}-3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{3}{x}} = \infty \\
 ⑤ $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2}}{3x+1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2+2}}{-3t+1} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{t^2}}}{-3+\frac{1}{t}} = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0070 **답 $\frac{5}{4}$**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2-x+4}-2}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}-\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}} = 1
 \end{aligned}$$

$\therefore a = 1$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2-x+4}-2}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2-x+4}-2)(\sqrt{x^2-x+4}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+4}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+4}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2-x+4}+2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x^2-x+4}+2} \\
 &= \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\therefore b = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a+b = \frac{5}{4}$$

채점 기준

❶ a의 값 구하기	40 %
❷ b의 값 구하기	50 %
❸ a+b의 값 구하기	10 %

0071 답 ①

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2-2x+3}-2x) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2-2x+3}-2x)(\sqrt{4x^2-2x+3}+2x)}{\sqrt{4x^2-2x+3}+2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x+3}{\sqrt{4x^2-2x+3}+2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2+\frac{3}{x}}{\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+2} = \frac{-2}{2+2} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

0072 답 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-2x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-2x}}{4x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}{4} = \frac{1+1}{4} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

0073 답 ①

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2-2x}+3x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{9t^2+2t}-3t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{9t^2+2t}-3t)(\sqrt{9t^2+2t}+3t)}{\sqrt{9t^2+2t}+3t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t}{\sqrt{9t^2+2t}+3t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{9+\frac{2}{t}}+3} = \frac{2}{3+3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

0074 답 8

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2-ax})(\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax})}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2ax}{\sqrt{x^2+ax}+\sqrt{x^2-ax}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2a}{\sqrt{1+\frac{a}{x}}+\sqrt{1-\frac{a}{x}}} \\
 &= \frac{2a}{1+1} = a \\
 \therefore a &= 8
 \end{aligned}$$

0075 답 ①

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x^2-4} \left(2 - \frac{2}{x+3} \right) &= \lim_{x \rightarrow -2} \left\{ \frac{1}{(x+2)(x-2)} \times \frac{2(x+2)}{x+3} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2}{(x-2)(x+3)} \\
 &= \frac{2}{-4 \times 1} \\
 &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

0076 답 -2

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-4x}} + 1 \right) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ -t \left(\frac{-t}{\sqrt{t^2+4t}} + 1 \right) \right\} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} t \left(\frac{t}{\sqrt{t^2+4t}} - 1 \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(t \times \frac{t-\sqrt{t^2+4t}}{\sqrt{t^2+4t}} \right) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ t \times \frac{(t-\sqrt{t^2+4t})(t+\sqrt{t^2+4t})}{\sqrt{t^2+4t}(t+\sqrt{t^2+4t})} \right\} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t \times (-4t)}{\sqrt{t^2+4t}(t+\sqrt{t^2+4t})} \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-4}{\sqrt{1+\frac{4}{t}}(1+\sqrt{1+\frac{4}{t}})} \\
 &= \frac{-4}{1 \times (1+1)} \\
 &= -2
 \end{aligned}$$

0077 답 ④

$$f(x) = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$$

$\frac{1}{x} = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} x \left\{ f\left(1+\frac{3}{x}\right) - f\left(1-\frac{2}{x}\right) \right\} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{t} \{ f(1+3t) - f(1-2t) \} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(3+3t)^2 - (3-2t)^2}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{5t^2 + 30t}{t} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0+} (5t + 30) \\
 &= 30
 \end{aligned}$$

0078 답 ①

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0$ 이므로

$$1 + a + b = 0 \quad \therefore b = -a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - (a+1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+a+1) = a+2 \end{aligned}$$

따라서 $a+2 = -1$ 이므로 $a = -3$

이를 ①에 대입하면 $b = 2$

$$\therefore a - b = -5$$

0079 답 2

$x \rightarrow -2$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + b) = 0$ 이므로

$$4 + b = 0 \quad \therefore b = -4 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + (a+2)x + 2a}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+a)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+a}{x-2} = \frac{-2+a}{-4} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{-2+a}{-4} = 5$ 이므로

$$-2 + a = -20 \quad \therefore a = -18 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore a - 5b = 2 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① b의 값 구하기	40 %
② a의 값 구하기	50 %
③ a-5b의 값 구하기	10 %

0080 답 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} (\sqrt{2x+a} - \sqrt{x+3}) = 0$ 이므로

$$\sqrt{-2+a} - \sqrt{2} = 0, \quad \sqrt{-2+a} = \sqrt{2}$$

$$-2 + a = 2 \quad \therefore a = 4$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+4} - \sqrt{x+3}}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{2x+4} - \sqrt{x+3})(\sqrt{2x+4} + \sqrt{x+3})}{(x^2 - 1)(\sqrt{2x+4} + \sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-1)(\sqrt{2x+4} + \sqrt{x+3})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x-1)(\sqrt{2x+4} + \sqrt{x+3})} \\ &= \frac{1}{-2 \times 2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{8} \\ \therefore b &= -\frac{\sqrt{2}}{8} \\ \therefore ab &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

0081 답 ③

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+a} - b) = 0$ 이므로

$$\sqrt{3+a} - b = 0 \quad \therefore b = \sqrt{3+a} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+a} - \sqrt{3+a}}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+a} - \sqrt{3+a})(\sqrt{x+a} + \sqrt{3+a})}{(x-3)(\sqrt{x+a} + \sqrt{3+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+a} + \sqrt{3+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+a} + \sqrt{3+a}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3+a}} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{2\sqrt{3+a}} = \frac{1}{4}$ 이므로

$$\sqrt{3+a} = 2, \quad 3+a = 4 \quad \therefore a = 1$$

이를 ①에 대입하면 $b = 2$

$$\therefore a - b = -1$$

0082 답 ①

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 6$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$ 이므로 $f(2) = 0$

따라서 $8 + 4a + 2b = 0$ 이므로

$$b = -2a - 4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + ax^2 - 2(a+2)x}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x+a+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} x(x+a+2) = 2a+8 \end{aligned}$$

따라서 $2a+8 = 6$ 이므로 $a = -1$

이를 ①에 대입하면 $b = -2$

즉, $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ 이므로

$$f(-2) = -8 - 4 + 4 = -8$$

0083 답 ③

$b \leq 0$ 이면 $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax + 2} - bx) = \infty$ 이므로

$b > 0$

주어진 등식의 좌변에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax + 2} - bx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + ax + 2} - bx)(\sqrt{x^2 + ax + 2} + bx)}{\sqrt{x^2 + ax + 2} + bx} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-b^2)x^2 + ax + 2}{\sqrt{x^2 + ax + 2} + bx} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

①의 극한값이 존재하므로

$$1 - b^2 = 0, \quad (1+b)(1-b) = 0$$

$$\therefore b = 1 \quad (\because b > 0)$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+2}{\sqrt{x^2+ax+2}+x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{a}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}$$

$$= \frac{a}{1+1} = \frac{a}{2}$$

따라서 $\frac{a}{2}=3$ 이므로 $a=6$

$\therefore a-b=5$

참고 $\infty + \infty$ 꼴이 발산함을 이용하여 b 의 부호를 구하고, $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴에서

(분자의 차수) > (분모의 차수)이면 발산함을 이용하여 $1-b^2=0$ 임을 구할 수 있다.

0084 답 ③

(가)에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

(나)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0$ 이므로 $f(1)=0$

$f(x)=2(x-1)(x+a)$ (a 는 상수)라 하면 (나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)(x+a)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} 2(x+a) = 2(1+a)$$

따라서 $2(1+a)=4$ 이므로

$1+a=2 \quad \therefore a=1$

즉, $f(x)=2(x-1)(x+1)$ 이므로

$f(2)=2 \times 1 \times 3=6$

공통수학1 다시보기

다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(a)=0$ 이면 $f(x)$ 는 $x-a$ 를 인수로 갖는다.

0085 답 0

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-x^3}{2x+1}=2$ 에서 $f(x)-x^3$ 은 최고차항의 계수가 4인 일차함수이므로 $f(x)-x^3=4x+a$ (a 는 상수)라 하면

$f(x)=x^3+4x+a$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^3+4x+a) = a$ 이므로 $a=-5$

따라서 $f(x)=x^3+4x-5$ 이므로

$f(1)=1+4-5=0$

0086 답 2

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3}=8$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)=0$ 이므로 $f(3)=0$ ㉠

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=0$ 이므로 $f(-1)=0$ ㉡ ㉢

㉠, ㉡에서 $f(x)=a(x+1)(x-3)$ (a 는 상수, $a \neq 0$)이라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(x+1)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} a(x+1) = 4a$$

따라서 $4a=8$ 이므로 $a=2$

$\therefore f(x)=2(x+1)(x-3)$ ㉢

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(x+1)(x-3)}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-4x-6}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{4}{x} - \frac{6}{x^2} \right) = 2$$
 ㉣

채점 기준

㉠ $f(3)=0$, $f(-1)=0$ 임을 알기	30 %
㉢ $f(x)$ 구하기	40 %
㉣ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2}$ 의 값 구하기	30 %

0087 답 11

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3}=0$ 에서 $f(x)$ 는 이차 이하의 함수이다.

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}=6$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=0$ 이므로 $f(2)=0$

$f(x)=(x-2)(ax+b)$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(ax+b)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (ax+b) = 2a+b$$

$\therefore 2a+b=6$ ㉠

이때 방정식 $f(x)=3x-4$, 즉 $(x-2)(ax+b)=3x-4$ 의 한 근이 $x=1$ 이므로

$-(a+b)=-1 \quad \therefore a+b=1$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=5, b=-4$

따라서 $f(x)=(x-2)(5x-4)$ 이므로

$f(3)=1 \times 11=11$

0088 답 ③

$\frac{1}{x}=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow \infty$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)}{3x+1} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{f(t)}{t^2}}{\frac{3}{t}+1} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{t^2+3t}$$

$\therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{t^2+3t}=3$ ㉠

$t \rightarrow 0+$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{t \rightarrow 0+} f(t)=0$ 이므로 $f(0)=0$ ㉡

한편 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-x^3}{x^2+4}=2$ 에서 $f(x)-x^3$ 은 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로 $f(x)-x^3=2x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$f(x)=x^3+2x^2+ax+b$

㉔에서 $f(0)=0$ 이므로 $b=0$

$$\therefore f(x)=x^3+2x^2+ax$$

㉕에서

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(t)}{t^2+3t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^3+2t^2+at}{t^2+3t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t(t^2+2t+a)}{t(t+3)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{t^2+2t+a}{t+3} = \frac{a}{3}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{3}=3$ 이므로 $a=9$

$$\text{즉, } f(x)=x^3+2x^2+9x \text{이므로}$$

$$f(1)=1+2+9=12$$

0089 답 3

모든 양의 실수 x 에 대하여 $x^2+1>0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2+1 로 나누면

$$\frac{3x^2-x+1}{x^2+1} < \frac{f(x)}{x^2+1} < \frac{3x^2+2x+4}{x^2+1}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-x+1}{x^2+1}=3$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2+2x+4}{x^2+1}=3$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2+1}=3$$

0090 답 ⑤

모든 실수 x 에 대하여 $x^2+3>0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2+3 으로 나누면

$$\frac{5x^2-1}{x^2+3} < f(x) < \frac{5x^2+2}{x^2+3}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-1}{x^2+3}=5$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+2}{x^2+3}=5$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)=5$$

0091 답 8

$$|f(x)-2x| < 1 \text{에서 } -1 < f(x)-2x < 1$$

$$\therefore 2x-1 < f(x) < 2x+1$$

각 변을 세제곱하면

$$(2x-1)^3 < \{f(x)\}^3 < (2x+1)^3$$

모든 양의 실수 x 에 대하여 $x^3+1>0$ 이므로 각 변을 x^3+1 로 나누면

$$\frac{(2x-1)^3}{x^3+1} < \frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1} < \frac{(2x+1)^3}{x^3+1}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-1)^3}{x^3+1}=8$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)^3}{x^3+1}=8$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1}=8$$

채점 기준

① $f(x)$ 에 대한 부등식 세우기	20 %
② $\frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1}$ 에 대한 부등식 세우기	40 %
③ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^3}{x^3+1}$ 의 값 구하기	40 %

0092 답 ③

$x>0$ 일 때, 주어진 부등식의 각 변을 x 로 나누면

$$-x+2 \leq \frac{f(x)}{x} \leq x+2$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 0+} (-x+2)=2$, $\lim_{x \rightarrow 0+} (x+2)=2$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} &= 2 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\{f(x)\}^2}{x\{2x+f(x)\}} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}^2}{2+\frac{f(x)}{x}} \\ &= \frac{4}{2+2}=1\end{aligned}$$

0093 답 $\frac{3}{2}$

$P(t, \sqrt{3t})$, $H(t, 0)$ 이므로

$$\overline{OP}=\sqrt{t^2+(\sqrt{3t})^2}=\sqrt{t^2+3t}, \overline{OH}=t$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{OP}-\overline{OH}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2+3t}-t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2+3t}-t)(\sqrt{t^2+3t}+t)}{\sqrt{t^2+3t}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t}{\sqrt{t^2+3t}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{t}}+1} \\ &= \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

0094 답 ⑤

$A(2, a^2)$, $B(a, 4)$ 이므로

$$\overline{PA}=|2-a|, \overline{PB}=|4-a^2|$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{a \rightarrow 2-} \frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} &= \lim_{a \rightarrow 2-} \frac{|4-a^2|}{|2-a|} \\ &= \lim_{a \rightarrow 2-} \frac{(2+a)(2-a)}{2-a} \\ &= \lim_{a \rightarrow 2-} (2+a)=4\end{aligned}$$

0095 답 $\sqrt{2}$

점 $P(a, b)$ 가 원 $x^2+y^2=1$ 위를 움직이는 제1사분면 위의 점이므로 $a^2+b^2=1$

$$\therefore b=\sqrt{1-a^2} \quad (\because 0 < a < 1, 0 < b < 1)$$

두 점 P , Q 는 y 축에 대하여 대칭이므로 $Q(-a, b)$

따라서 $\overline{PQ}=2a$ 이므로

$$S(a)=\frac{1}{2} \times 2a \times b=ab=a\sqrt{1-a^2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{a \rightarrow 1-} \frac{S(a)}{\sqrt{1-a}} &= \lim_{a \rightarrow 1-} \frac{a\sqrt{1-a^2}}{\sqrt{1-a}} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1-} \frac{a\sqrt{(1+a)(1-a)}}{\sqrt{1-a}} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1-} a\sqrt{1+a}=\sqrt{2}\end{aligned}$$

채점 기준

i b를 a에 대한 식으로 나타내기	20 %
ii S(a) 구하기	40 %
iii $\lim_{a \rightarrow 1-} \frac{S(a)}{\sqrt{1-a}}$ 의 값 구하기	40 %

0096 답 ②

$A(\alpha, \alpha^2)$, $B(\beta, \beta^2)$ ($\beta < 0 < \alpha$)이라 하면 이차방정식 $x^2 = x + t$, 즉 $x^2 - x - t = 0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -t$$

$H(\beta, \alpha^2)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{AH} &= \alpha - \beta = \sqrt{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} \\ &= \sqrt{1 + 4t} \end{aligned}$$

두 점 A, C는 y축에 대하여 대칭이므로 $C(-\alpha, \alpha^2)$

$$\therefore \overline{CH} = \beta - (-\alpha) = \alpha + \beta = 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\overline{AH} - \overline{CH}}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{1+4t} - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(\sqrt{1+4t} - 1)(\sqrt{1+4t} + 1)}{t(\sqrt{1+4t} + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{4t}{t(\sqrt{1+4t} + 1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{4}{\sqrt{1+4t} + 1} \\ &= \frac{4}{1+1} = 2 \end{aligned}$$

0097 답 $\frac{5}{2}$

점 Q의 좌표를 $(0, y)$, 점 P의 좌표를 $(x, x^2 + 2)$ 라 하면

$$\overline{QA} = \overline{QP}, \text{ 즉 } \overline{QA}^2 = \overline{QP}^2 \text{ 이므로}$$

$$(2 - y)^2 = x^2 + \{(x^2 + 2) - y\}^2$$

$$x^4 + 5x^2 - 2x^2y = 0, 2x^2y = x^4 + 5x^2$$

$$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2} \quad (\because x \neq 0)$$

점 P가 점 A에 한없이 가까워지면 $x \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2} \right) = \frac{5}{2}$$

따라서 점 Q는 점 $(0, \frac{5}{2})$ 에 한없이 가까워진다.

$$\therefore a = \frac{5}{2}$$

AB 유형 점검

22~24쪽

0098 답 ④

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 + 1 = 4$$

0099 답 10

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} (5x - 2) = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} (kx + 4) = 2k + 4$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하므로 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 에서

$$8 = 2k + 4 \quad \therefore k = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) \\ &= 8 + \lim_{x \rightarrow -2+} (2x + 4) + \lim_{x \rightarrow -2-} (2x^2 - 6) \\ &= 8 + 0 + 2 = 10 \end{aligned}$$

0100 답 3

$f(x) = t$ 로 놓으면

$x \rightarrow -1 -$ 일 때 $t \rightarrow -1 +$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x)) &= \lim_{t \rightarrow -1+} g(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow -1+} (t^2 - 2t) = 3 \end{aligned}$$

$x \rightarrow 1 +$ 일 때 $t \rightarrow 2 -$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) &= \lim_{t \rightarrow 2-} g(t) \\ &= \lim_{t \rightarrow 2-} (t^2 - 2t) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x)) + \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = 3$$

0101 답 ⑤

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{6f(x)}{x^2 + 2x} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{6f(x)}{x(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \left\{ \frac{f(x)}{x+2} \times \frac{6}{x} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x+2} \times \lim_{x \rightarrow -2} \frac{6}{x} \\ &= -4 \times \frac{6}{-2} = 12 \end{aligned}$$

0102 답 ②

$3f(x) + g(x) = h(x)$, $f(x) - 2g(x) = k(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2} k(x) = 5$$

$$f(x) = \frac{1}{7} \{2h(x) + k(x)\} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \frac{1}{7} \left\{ 2 \lim_{x \rightarrow 2} h(x) + \lim_{x \rightarrow 2} k(x) \right\} \\ &= \frac{1}{7} (2 \times 1 + 5) = 1 \end{aligned}$$

$$g(x) = \frac{1}{7} \{h(x) - 3k(x)\} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} g(x) &= \frac{1}{7} \left\{ \lim_{x \rightarrow 2} h(x) - 3 \lim_{x \rightarrow 2} k(x) \right\} \\ &= \frac{1}{7} (1 - 3 \times 5) = -2 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) = 1 \times (-2) = -2$$

0103 답 ㄱ

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} \{2f(x) + g(x)\} = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \{2f(x) + g(x) - 2f(x)\} = \beta - 2\alpha$$

ㄴ. [반례] $f(x)=0, g(x)=\begin{cases} 0 & (x \geq a) \\ 1 & (x < a) \end{cases}$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=0$,
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)=0$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. [반례] $f(x)=0, g(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ 2 & (x < a) \end{cases}$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=0$,
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}=0$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄹ. [반례] $f(x)=\frac{1}{(x-a)^2}, g(x)=\frac{1}{(x-a)^4}$ 이면 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow a} g(x)=\infty$ 이지만
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^2=0$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

0104 답 ③

① $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2-2)=9-2=7$

② $f(x)=\frac{1}{|x+1|}$ 이라 하면 $y=f(x)$ 의
 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이
 한없이 커질 때 $f(x)$ 의 값은 0에 한없이
 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{|x+1|}=0$$

③ $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2-4}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2-4}{x-2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2+} (x+2)=4$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2-4}{|x-2|} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2-4}{-(x-2)}$$

 $= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x+2)(x-2)}{-(x-2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 2-} \{-(x+2)\}=-4$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2-4}{|x-2|} \neq \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2-4}{|x-2|}$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{|x-2|}$ 의 값
 은 존재하지 않는다.

④ $x=-t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{|x|-2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t+1}{t-2}$$

 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-1+\frac{1}{t}}{1-\frac{2}{t}} = -1$

⑤ $2 \leq x < 3$ 일 때 $[x]=2$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2+} [x]=2$

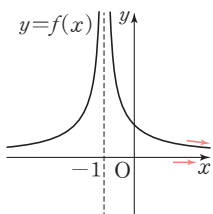
$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{[x]^2+x}{[x]} = \frac{4+2}{2}=3$$

$1 \leq x < 2$ 일 때 $[x]=1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2-} [x]=1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{[x]^2+x}{[x]} = \frac{1+2}{1}=3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x]^2+x}{[x]} = 3$$

따라서 극한값이 존재하지 않는 것은 ③이다.



0105 답 3

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)f(x)}{x^2-4x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)f(x)}{(x+1)(x-5)}$$

 $= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)}{x+1} = \frac{f(5)}{6}$

따라서 $\frac{f(5)}{6} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$2f(5)=6 \quad \therefore f(5)=3$$

0106 답 ④

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x}}$$

 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})}{(\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-x^2)(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x})}{(x-x^2)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+1}{1+1}=1$

0107 답 ⑤

① $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-2}{3x^2+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}{3+\frac{1}{x^2}}=0$

② $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2+4x}{2x^2-3x+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1+\frac{4}{x}}{2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}} = -\frac{1}{2}$

③ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+6}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1+\frac{6}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}}=1$

④ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2+3}{\sqrt{x^2+1}+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{2}{x}} = -\infty$

⑤ $x=-t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}-x}{2x-1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4t^2+1}+t}{-2t-1}$$

 $= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{t^2}}+1}{-2-\frac{1}{t}} = \frac{2+1}{-2} = -\frac{3}{2}$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

0108 답 2

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x+a)=a$$

 $\therefore a=2$

따라서 $f(x)=x^2+2x$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3+2f(x)}{xf(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+2(x^2+2x)}{x(x^2+2x)}$$

 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+2x^2+4x}{x^3+2x^2}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}{1+\frac{2}{x}}=2$

0109 답 4

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(-x)}\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{a(x+1)^2} - \sqrt{a(-x+1)^2}\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{\sqrt{a(x+1)^2} - \sqrt{a(-x+1)^2}\} \{\sqrt{a(x+1)^2} + \sqrt{a(-x+1)^2}\}}{\sqrt{a(x+1)^2} + \sqrt{a(-x+1)^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a(x+1)^2 - a(-x+1)^2}{\sqrt{a(x+1)^2} + \sqrt{a(-x+1)^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4ax}{\sqrt{a(x+1)^2} + \sqrt{a(-x+1)^2}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4a}{\sqrt{a\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt{a\left(-1+\frac{1}{x}\right)^2}} \\
 &= \frac{4a}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = 2\sqrt{a}
 \end{aligned}$$

따라서 $2\sqrt{a} = 4$ 이므로

$$\sqrt{a} = 2 \quad \therefore a = 4$$

0110 답 $\frac{1}{8}$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(1 - \frac{2x}{\sqrt{4x^2+1}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\frac{\sqrt{4x^2+1} - 2x}{\sqrt{4x^2+1}} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ x^2 \times \frac{(\sqrt{4x^2+1} - 2x)(\sqrt{4x^2+1} + 2x)}{\sqrt{4x^2+1}(\sqrt{4x^2+1} + 2x)} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{4x^2 + 1 + 2x\sqrt{4x^2+1}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4 + \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} \\
 &= \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

0111 답 ④

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - 4x + b}{x-1} = 2$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (ax^2 - 4x + b) = 0$ 이므로

$$a - 4 + b = 0 \quad \therefore b = -a + 4 \quad \dots\dots ㉠$$

㉠을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2 - 4x - (a-4)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(ax+a-4)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} (ax+a-4) \\
 &= 2a-4
 \end{aligned}$$

따라서 $2a-4=2$ 이므로 $a=3$

이를 ㉠에 대입하면 $b=1$

$$\therefore a-b=2$$

0112 답 15

$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-a}{\sqrt{x}-3} = b$ 에서 $x \rightarrow 9$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 9} (x-a) = 0$ 이므로

$$9-a=0 \quad \therefore a=9$$

이를 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x-9}{\sqrt{x}-3} &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x}+3) \\
 &= 3+3=6
 \end{aligned}$$

$$\therefore b=6$$

$$\therefore a+b=15$$

0113 답 ③

$x > 0$ 일 때, $\sqrt{9x+1} > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 제곱하면

$$9x+1 < \{f(x)\}^2 < 9x+4$$

$x > 0$ 일 때, $6x+2 > 0$ 이므로 각 변을 $6x+2$ 로 나누면

$$\frac{9x+1}{6x+2} < \frac{\{f(x)\}^2}{6x+2} < \frac{9x+4}{6x+2}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x+1}{6x+2} = \frac{3}{2}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x+4}{6x+2} = \frac{3}{2}$ 이므로 함수의 극한의 대소

관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{6x+2} = \frac{3}{2}$$

0114 답 -3

$\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\} = 1$ 에서 $\alpha + \beta = 1$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = -6$ 에서 $\alpha\beta = -6$ ㉠

$\alpha + \beta = 1$, $\alpha\beta = -6$ 이므로 α, β 를 두 근으로 하는 이차방정식을

$x^2 - x - 6 = 0$ 이라 하면

$$(x+2)(x-3) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 3$$

이때 $\alpha < \beta$ 이므로 $\alpha = -2$, $\beta = 3$ ㉡

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5f(x)+1}{2g(x)-3} = \frac{5 \times (-2)+1}{2 \times 3-3} = -3 \quad \dots\dots ㉢$$

채점 기준

㉠ $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 의 값 구하기	20 %
㉡ α, β 의 값 구하기	50 %
㉢ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5f(x)+1}{2g(x)-3}$ 의 값 구하기	30 %

공통수학1 다시보기

두 수 α, β 를 근으로 하고 x^2 의 계수가 1인 이차방정식은
 $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

0115 답 -2

(가)에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 -3인 이차함수이다.

(나)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ 이므로 $f(0) = 0$

$f(x) = -3x(x+a)$ (a 는 상수)라 하면 ❶

(나)에서

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 - x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x(x+a)}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3(x+a)}{x-1} = 3a\end{aligned}$$

따라서 $3a=1$ 이므로 $a=\frac{1}{3}$

$$\therefore f(x) = -3x\left(x + \frac{1}{3}\right) = -3x^2 - x \quad \dots\dots \text{❷}$$

$$\therefore f(-1) = -3 + 1 = -2 \quad \dots\dots \text{❸}$$

채점 기준

❶ $f(x)$ 의 식 세우기	40 %
❷ $f(x)$ 구하기	50 %
❸ $f(-1)$ 의 값 구하기	10 %

0116 답 8

두 점 $A(0, t)$, $B(-2, 0)$ 을 지나는 직선의 방정식은

$$y - t = \frac{-t}{-2}x \quad \therefore y = \frac{t}{2}x + t \quad \dots\dots \text{❶}$$

$x = \frac{2}{t}y - 2$ 이므로 $x^2 + y^2 = 4$ 에 대입하면 점 P의 y 좌표는

$$\left(\frac{2}{t}y - 2\right)^2 + y^2 = 4$$

$$\left(\frac{4}{t^2} + 1\right)y^2 - \frac{8}{t}y = 0$$

$$y\left\{\left(\frac{4}{t^2} + 1\right)y - \frac{8}{t}\right\} = 0$$

$$\therefore y = \frac{\frac{8}{t}}{\frac{4}{t^2} + 1} = \frac{8t}{4 + t^2} \quad (\because y \neq 0) \quad \dots\dots \text{❷}$$

$\hookrightarrow y=0$ 이면 두 점 B, P는 같은 점이다.

따라서 $\overline{OA} = t$, $\overline{PH} = \frac{8t}{4 + t^2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{OA} \times \overline{PH}) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(t \times \frac{8t}{4 + t^2}\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{8t^2}{4 + t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{8}{\frac{4}{t^2} + 1} = 8 \quad \dots\dots \text{❸}\end{aligned}$$

채점 기준

❶ 두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식 구하기	20 %
❷ 점 P의 y 좌표를 t 에 대한 식으로 나타내기	40 %
❸ $\lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{OA} \times \overline{PH})$ 의 값 구하기	40 %

다른 풀이

$P(a, b)$ 라 하면 $H(a, 0)$ 이므로 $\overline{PH} = b$

직선 BP의 방정식은

$$y = \frac{b}{a+2}(x+2) \quad \therefore y = \frac{b}{a+2}x + \frac{2b}{a+2}$$

점 A는 이 직선이 y 축과 만나는 점이므로

$$A\left(0, \frac{2b}{a+2}\right) \quad \therefore \overline{OA} = \frac{2b}{a+2}$$

점 P(a, b)는 원 $x^2 + y^2 = 4$ 위의 점이므로

$$a^2 + b^2 = 4 \quad \therefore b^2 = 4 - a^2$$

$t \rightarrow \infty$ 일 때 점 P는 점 B에 한없이 가까워지므로 $a \rightarrow -2+$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} (\overline{OA} \times \overline{PH}) &= \lim_{a \rightarrow -2+} \left(\frac{2b}{a+2} \times b\right) \\ &= \lim_{a \rightarrow -2+} \frac{2b^2}{a+2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -2+} \frac{2(4-a^2)}{a+2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -2+} \frac{2(2+a)(2-a)}{a+2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -2+} 2(2-a) = 8\end{aligned}$$

C 실력 향상

25쪽

0117 답 2

(나)에서 $x + f(x) = g(x)\{x - f(x)\}$ 이므로

$$x + f(x) = xg(x) - f(x)g(x)$$

$$f(x) + f(x)g(x) = xg(x) - x$$

$$f(x)\{1 + g(x)\} = x\{g(x) - 1\}$$

$x \neq 0$ 일 때, 양변을 x 로 나누면

$$\frac{f(x)}{x}\{1 + g(x)\} = g(x) - 1$$

$g(x) \neq -1$ 일 때, 양변을 $1 + g(x)$ 로 나누면

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{g(x) - 1}{1 + g(x)}$$

이때 (가)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 5$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - 1}{1 + g(x)} = \frac{5 - 1}{1 + 5} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - f(x)}{x^2 + f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \frac{f(x)}{x}}{x + \frac{f(x)}{x}} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$$

0118 답 7

$\lim_{x \rightarrow n+} [x] = n$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow n+} \frac{[x]^2 + 2x}{[x]} = \frac{n^2 + 2n}{n} = n + 2$$

$\lim_{x \rightarrow n-} [x] = n - 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow n-} \frac{[x]^2 + 2x}{[x]} = \frac{(n-1)^2 + 2n}{n-1} = \frac{n^2 + 1}{n-1}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow n} \frac{[x]^2 + 2x}{[x]}$ 의 값이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow n+} \frac{[x]^2 + 2x}{[x]} = \lim_{x \rightarrow n-} \frac{[x]^2 + 2x}{[x]} \text{에서}$$

$$n + 2 = \frac{n^2 + 1}{n - 1}, \quad n^2 + n - 2 = n^2 + 1$$

$$\therefore n = 3$$

따라서 $a = n + 2 = 5$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - nx - 2a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 3x - 10}{x - 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x+2)(x-5)}{x-5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} (x+2) = 7\end{aligned}$$

0119 답 ③

(가)에서 $f(x)g(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이다.

(나)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ 일 때 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$ 이므로 $f(x)g(x)$ 는 x^2 을 인수로 갖는다.

$f(x)g(x) = 2x^2(x+a)$ (a 는 상수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2(x+a)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2(x+a) = 2a$$

따라서 $2a = -4$ 이므로 $a = -2$

$\therefore f(x)g(x) = 2x^2(x-2)$

$f(2)$ 의 값이 최대이려면 $f(x)$ 는 $x-2$ 를 인수로 갖지 않고 2를 인수로 가져야 하므로 $\leftarrow x-2$ 를 인수로 가지면 $f(2)=0$ 이므로 최대가 아니다.

$f(x) = 2$ 또는 $f(x) = 2x$ 또는 $f(x) = 2x^2$

이때 $f(2)$ 의 값은 각각 2, 4, 8이므로 구하는 최댓값은 8이다.

0120 답 ②

오른쪽 그림과 같이 점 $P(t, t^2)$ 에서 $\overline{OQ}$ 에 내린 수선의 발을 M 이라 하면

(가)에서 $\triangle POM \cong \triangle PQM$ 이므로

$S(t) = 2\triangle POM$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2} \times t \times t^2 \right) = t^3$$

점 R 에서 $\overline{OP}$ 에 내린 수선의 발을 N 이라 하면 (나)에서 점 N 은 $\overline{OP}$ 의 중점이므로

$$N\left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{2}\right)$$

직선 OP 의 기울기는 $\frac{t^2}{t} = t$ 이므로 직선 NR 의 기울기는 $-\frac{1}{t}$ 이다.

따라서 직선 NR 의 방정식은

$$y - \frac{t^2}{2} = -\frac{1}{t}\left(x - \frac{t}{2}\right) \quad \therefore y = -\frac{1}{t}x + \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}$$

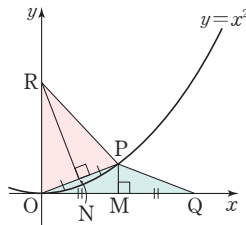
점 R 는 이 직선이 y -축과 만나는 점이므로

$$R\left(0, \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore T(t) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \times t = \frac{t^3+t}{4} \rightarrow \triangle PRO \text{에서 밑변이 } \overline{RO} \text{일 때}$$

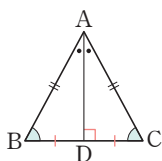
높이는 OM 의 길이와 같다.

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{T(t) - S(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{t^3+t}{4} - t^3}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(-\frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$



중2 다시보기

- 이등변삼각형의 꼭지각의 이등분선은 밑변을 수직이등분 한다.
 $\rightarrow \overline{AD} \perp \overline{BC}, \overline{BD} = \overline{CD}$
- 이등변삼각형에서 (꼭지각의 이등분선) = (밑변의 수직이등분선) = (꼭지각의 꼭짓점에서 밑변에 내린 수선) = (꼭지각의 꼭짓점과 밑변의 중점을 잇는 선분)



02 / 함수의 연속

A 개념 확인

26~29쪽

0121 답 L

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

0122 답 ㄱ

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 $x=0$ 에서 불연속이다.

0123 답 ㄷ

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

0124 답 연속

$$f(1) = 1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

0125 답 연속

$$f(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \{-(x-1)\} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

0126 답 불연속

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 정의되지 않으므로 $x=1$ 에서 불연속이다.

0127 답 불연속

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} x^2 = 1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x-2) = -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

0128 답 (2, 6)

0129 답 $[-1, 5]$

0130 답 (3, 7]

0131 답 $[-4, -2)$

0132 답 $(0, \infty)$

0133 답 $[-6, \infty)$

0134 답 $(-\infty, -5)$

0135 답 $(-\infty, 1]$

0136 답 $(-\infty, \infty)$

0137 답 $(-\infty, 3), (3, \infty)$

공통수학2 다시보기

유리함수 $y = \frac{k}{x-p} + q$ ($k \neq 0$)의 정의역 $\Rightarrow \{x | x \neq p \text{인 실수}\}$

0138 답 $[1, \infty)$

공통수학2 다시보기

무리함수 $y = \sqrt{a(x-p)} + q$ ($a > 0$)의 정의역 $\Rightarrow \{x | x \geq p\}$

0139 답 $(-\infty, \infty)$

함수 $f(x) = 10$ 은 모든 실수 x 에서 연속이므로 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다.

0140 답 $(-\infty, \infty)$

함수 $f(x) = -x^2 + 2x + 9$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다.

0141 답 $(-\infty, -2), (-2, \infty)$

함수 $f(x) = \frac{4}{x+2}$ 는 $x \neq -2$ 인 모든 실수 x 에서 연속이므로 구간 $(-\infty, -2), (-2, \infty)$ 에서 연속이다.

0142 답 $(-\infty, 5]$

함수 $f(x) = \sqrt{5-x}$ 는 구간 $(-\infty, 5)$ 에서 연속이고
 $\lim_{x \rightarrow 5^-} \sqrt{5-x} = f(5) = 0$ 이므로 구간 $(-\infty, 5]$ 에서 연속이다.

0143 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로 함수 $f(x)+g(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄴ. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로 함수 $f(x)-g(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄷ. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로 함수 $f(x)g(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄹ. [반례] 두 함수 $f(x)=1, g(x)=x-a$ 는 $x=a$ 에서 연속이지만
함수 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x-a}$ 은 $x=a$ 에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 $x=a$ 에서 항상 연속인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0144 답 $(-\infty, \infty)$

함수 $f(x) = 3x^2 - x - 2$ 는 다항함수이므로 연속함수의 성질에 따라 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다.

0145 답 $(-\infty, \infty)$

두 함수 $y = x+5, y = x^2 - 3x$ 는 다항함수이므로 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다.

따라서 연속함수의 성질에 따라 함수 $f(x) = (x+5)(x^2 - 3x)$ 는 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다.

0146 답 $(-\infty, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \infty)$

두 함수 $y = x+2, y = 3x-1$ 은 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

따라서 연속함수의 성질에 따라 함수 $f(x) = \frac{x+2}{3x-1}$ 는 $x \neq \frac{1}{3}$ 인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \infty)$ 에서 연속이다.

0147 답 $(-\infty, -2), (-2, 2), (2, \infty)$

두 함수 $y = 3x+1, y = x^2 - 4$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

따라서 연속함수의 성질에 따라 $f(x) = \frac{3x+1}{x^2-4}$ 은 $x \neq -2, x \neq 2$ 인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, -2), (-2, 2), (2, \infty)$ 에서 연속이다.

0148 답 (1) $(-\infty, \infty)$ (2) $(-\infty, \infty)$

(3) $(-\infty, -1), (-1, 2), (2, \infty)$

(4) $(-\infty, 0), (0, \infty)$

두 함수 $f(x), g(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

(1) 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수

$f(x)+g(x)$ 도 모든 실수 x 에서 연속이다.

즉, 함수 $f(x)+g(x)$ 가 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$ 이다.

(2) 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수

$f(x)g(x)$ 도 모든 실수 x 에서 연속이다.

즉, 함수 $f(x)g(x)$ 가 연속인 구간은 $(-\infty, \infty)$ 이다.

(3) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x^2-x-2} = \frac{x}{(x+1)(x-2)}$ 이므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $x \neq -1, x \neq 2$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.

즉, 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 가 연속인 구간은 $(-\infty, -1), (-1, 2), (2, \infty)$ 이다.

(4) $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2-x-2}{x}$ 이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 $x \neq 0$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.

즉, 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 가 연속인 구간은 $(-\infty, 0), (0, \infty)$ 이다.

0149 답 (1) 최댓값: 0, 최솟값: -1

(2) 최댓값: 1, 최솟값: -1

(3) 최댓값: 1 (4) 최솟값: 0

(1) 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, -1]$ 에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

이때 $x = -2$ 일 때 최댓값 0, $x = -1$ 일 때 최솟값 -1을 갖는다.

(2) 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 일 때 최댓값 1, $x = -1$ 일 때 최솟값 -1을 갖는다.

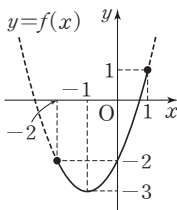
- (3) 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 일 때 최댓값 1을 갖고, 최솟값은 갖지 않는다.
 (4) 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 최댓값은 갖지 않고, $x=3$ 일 때 최솟값 0을 갖는다.

참고 (2) 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 $x=0$ 일 때 불연속이지만 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

0150 **답** 최댓값: 1, 최솟값: -3

함수 $f(x)=x^2+2x-2=(x+1)^2-3$ 은 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

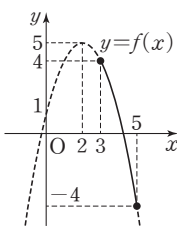
이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 $x=1$ 일 때 최댓값 1, $x=-1$ 일 때 최솟값 -3을 갖는다.



0151 **답** 최댓값: 4, 최솟값: -4

함수 $f(x)=-x^2+4x+1=-(x-2)^2+5$ 는 닫힌구간 $[3, 5]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

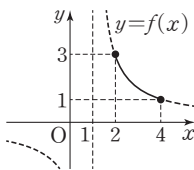
이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[3, 5]$ 에서 $x=3$ 일 때 최댓값 4, $x=5$ 일 때 최솟값 -4를 갖는다.



0152 **답** 최댓값: 3, 최솟값: 1

함수 $f(x)=\frac{3}{x-1}$ 은 닫힌구간 $[2, 4]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

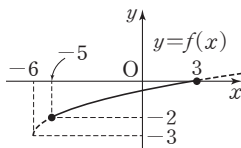
이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[2, 4]$ 에서 $x=2$ 일 때 최댓값 3, $x=4$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.



0153 **답** 최댓값: 0, 최솟값: -2

함수 $f(x)=\sqrt{x+6}-3$ 은 닫힌구간 $[-5, 3]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-5, 3]$ 에서 $x=3$ 일 때 최댓값 0, $x=-5$ 일 때 최솟값 -2를 갖는다.



0154 **답** (가) 연속 (나) 2 (다) 1 (라) 사잇값

함수 $f(x)=x^2-3x+2$ 는 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 (가) 연속이다.

또 $f(1)=0$, $f(3)=2$ 에서 $f(1) \neq f(3)$ 이고,

$f(1) < (다) 1 < f(3)$ 이므로 (라) 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=1$ 인 c 가 열린구간 $(1, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

0155 **답** 풀이 참조

$f(x)=x^3+x-4$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고 $f(1)=-2 < 0$, $f(2)=6 > 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $x^3+x-4=0$ 은 열린구간 $(1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

0156 **답** 풀이 참조

$f(x)=x^4-2x^2+x-1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 연속이고 $f(-2)=5 > 0$, $f(1)=-1 < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-2, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다. 따라서 방정식 $x^4-2x^2+x-1=0$ 은 열린구간 $(-2, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

B 유형 완성

30~35쪽

0157 **답** ㄱ, ㄴ

$$\text{ㄱ. } f(3)=7, \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (2x+1) = 7$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄴ. } 3 \leq x < 4 \text{ 일 때 } 0 \leq x-3 < 1 \text{ 이므로 } [x-3] = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} [x-3] = 0 \quad \cdots \cdots \text{㉞}$$

$$2 \leq x < 3 \text{ 일 때 } -1 \leq x-3 < 0 \text{ 이므로 } [x-3] = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} [x-3] = -1 \quad \cdots \cdots \text{㉟}$$

$$\text{㉞, ㉟에서 } \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 정의되지 않으므로 $x=3$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㄹ. } f(3)=5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} (x+2) = 5,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} (2x-1) = 5 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이다.

$$\text{ㅁ. } \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 $x=3$ 에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0158 **답** ㉔

$$\text{㉔ } f(2)=1, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x} = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

② $f(2)=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \{(x-2)+x\} = \lim_{x \rightarrow 2+} (2x-2) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \{-(x-2)+x\} = \lim_{x \rightarrow 2-} 2 = 2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

③ $f(2)=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \sqrt{x+2} = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} x = 2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

④ $f(2)=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

⑤ $f(2)=0$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-2)^2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} (x-2) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x-2)^2}{-(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2-} \{-(x-2)\} = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

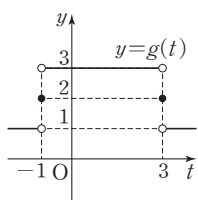
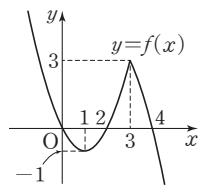
따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

0159 답 2

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (t < -1 \text{ 또는 } t > 3) \\ 2 & (t = -1 \text{ 또는 } t = 3) \\ 3 & (-1 < t < 3) \end{cases} \quad \dots \text{ ㉠}$$

따라서 함수 $y=g(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $g(t)$ 가 불연속인 t 의 값은 $-1, 3$ 의 2개이다. \dots \text{ ㉡}



채점 기준

㉠ $g(t)$ 구하기	60 %
㉡ $g(t)$ 가 불연속인 t 의 값의 개수 구하기	40 %

0160 답 ④

② $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$

③ $f(2)=0$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

④, ⑤ (i) $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는

$x=-1$ 에서 불연속이다.

(ii) $f(0)=1$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연

속이다.

(iii) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는

$x=1$ 에서 불연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 $-1, 0, 1$ 의 3개이고, 함수 $f(x)$ 의 극한값이 존재하지 않는 x 의 값은 $-1, 1$ 의 2개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0161 답 6

(i) $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는

$x=-1$ 에서 불연속이다.

(ii) $f(0)=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 2 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속

이다.

(iii) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$

에서 불연속이다.

(iv) $f(2)=-1$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 0 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속

이다.

(i)~(iv)에서 함수 $f(x)$ 의 극한값이 존재하지 않는 x 의 값은 $-1, 1$ 의 2개이므로 $m=2$

또 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 $-1, 0, 1, 2$ 의 4개이므로

$$n=4$$

$$\therefore m+n=6$$

0162 답 ④

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = 0 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = 1 \times 0 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)$ 의 값은 존재한다.

$$\neg. f(0)+g(0) = -1+2=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)+g(x)\} = 0+1=1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)+g(x)\} = -1+2=1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+g(x)\} = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + g(x)\} = f(0) + g(0)$ 이므로 함수

$f(x) + g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 2+} \{f(x) - g(x)\} = 1 - 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \{f(x) - g(x)\} = -1 - 1 = -2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} \{f(x) - g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 2-} \{f(x) - g(x)\}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - g(x)\}$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$f(x) - g(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0163 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) = -1 \times (-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) = 1 \times (-1) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

$$\text{ㄴ. } f(g(1)) = f(1) = -1$$

$g(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = f(1) = -1$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = -1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = f(g(1))$ 이므로 함수 $f(g(x))$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄷ. } f(x) = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow -1 \text{일 때 } t \rightarrow -1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} g(t) = -1$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 $t = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x)) = g(1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} g(f(x)) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x))$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} g(f(x))$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(f(x))$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0164 답 ④

$$\text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 1 + (-1) = 0$$

$$\text{ㄴ. } f(2) + f(-2) = -1 + (-1) = -2$$

$-x = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow -2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+} \{f(x) + f(-x)\} &= \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) + \lim_{t \rightarrow -2-} f(t) \\ &= -1 + 1 = 0 \end{aligned}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow -2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} \{f(x) + f(-x)\} &= \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) + \lim_{t \rightarrow -2+} f(t) \\ &= 1 + (-1) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) + f(-x)\} = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) + f(-x)\} \neq f(2) + f(-2)$ 이므로 함수

$f(x) + f(-x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㄷ. } f(0)f(2) = -1 \times (-1) = 1$$

$x-1 = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로,

$x+1 = s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $s \rightarrow 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} f(x-1)f(x+1) &= \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \times \lim_{s \rightarrow 2+} f(s) \\ &= -1 \times (-1) = 1 \end{aligned}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로, $x \rightarrow 1$ 일 때 $s \rightarrow 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x-1)f(x+1) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) \times \lim_{s \rightarrow 2-} f(s) = 1 \times 1 = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x-1)f(x+1) = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x-1)f(x+1) = f(0)f(2)$ 이므로 함수

$f(x-1)f(x+1)$ 은 $x=1$ 에서 연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0165 답 ③

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{x-1} = -4 \quad \dots\dots ㉠$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + ax + b) = 0$ 이므로

$$1 + a + b = 0 \quad \therefore b = -a - 1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax - (a+1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+a+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+a+1) = a+2 \end{aligned}$$

따라서 $a+2 = -4$ 이므로 $a = -6$

이를 ㉡에 대입하면 $b = 5$

$$\therefore a + 2b = 4$$

0166 답 ①

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} (ax-6) = a^2-6$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} (-2x+a) = -a$$

$$f(a) = -2a+a = -a$$

따라서 $a^2-6 = -a$ 이므로 $a^2+a-6=0$

$$(a+3)(a-2)=0 \quad \therefore a = -3 \text{ 또는 } a = 2$$

따라서 모든 a 의 값의 합은 $-3+2=-1$

0167 답 6

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) = -3+a$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = a-3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x+b}{\sqrt{x+3}-2} = a-3 \quad \dots\dots ㉠$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1+} (x+b) = 0$ 이므로

$$1+b=0 \quad \therefore b=-1$$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (\sqrt{x+3}+2) = 4\end{aligned}$$

따라서 $4=a-3$ 이므로 $a=7$

$$\therefore a+b=6$$

0168 답 ①

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & (x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -x^2+ax+b & (-1 < x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=-1, x=1$ 에서 연속이다.

(i) $x=-1$ 에서 연속이면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1) \\ \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} (-x^2+ax+b) = -1-a+b \\ \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} (x-1)^2 = 4 \\ f(-1) &= (-1-1)^2 = 4\end{aligned}$$

따라서 $-1-a+b=4$ 이므로

$$a-b=-5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x=1$ 에서 연속이면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x-1)^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x^2+ax+b) = -1+a+b \\ f(1) &= (1-1)^2 = 0\end{aligned}$$

따라서 $0=-1+a+b$ 이므로

$$a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡를 연립하여 풀면

$$a=-2, b=3$$

$$\therefore ab=-6$$

0169 답 5

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2+} \{a(x-1)^2+b\} = a+b \\ \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} 4x = 8 \\ f(2) &= a(2-1)^2+b = a+b\end{aligned}$$

$$\therefore a+b=8 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

한편 $f(x)=f(x+4)$ 이므로

$$\begin{aligned}f(0) &= f(4) \\ 4 \times 0 &= a(4-1)^2+b \\ \therefore 9a+b &= 0 \quad \dots\dots \textcircled{ii}\end{aligned}$$

㉠, ㉡를 연립하여 풀면 $a=-1, b=9$ 이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \begin{cases} 4x & (0 \leq x < 2) \\ -(x-1)^2+9 & (2 \leq x < 4) \end{cases} \\ \therefore f(19) &= f(15) = f(11) = f(7) = f(3) \\ &= -(3-1)^2+9 = 5\end{aligned}$$

채점 기준

㉠ $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속임을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	40 %
㉡ $f(x)=f(x+4)$ 임을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	20 %
㉢ $f(x)$ 구하기	20 %
㉣ $f(19)$ 의 값 구하기	20 %

0170 답 -2

$$f(x)g(x) = \begin{cases} (x+3)(x+k) & (x \geq 2) \\ (5-x)(x+k) & (x < 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) = f(2)g(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2+} (x+3)(x+k) = 5(2+k) \\ \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} (5-x)(x+k) = 3(2+k) \\ f(2)g(2) &= 5(2+k)\end{aligned}$$

따라서 $5(2+k)=3(2+k)$ 이므로

$$10+5k=6+3k \quad \therefore k=-2$$

0171 답 ⑤

함수 $(x-a)f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} (x-a)f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} (x-a)f(x) = (2-a)f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2+} (x-a)f(x) &= (2-a) \times 1 = 2-a \\ \lim_{x \rightarrow 2-} (x-a)f(x) &= (2-a) \times 3 = 3(2-a) \\ (2-a)f(2) &= 2-a\end{aligned}$$

따라서 $2-a=3(2-a)$ 이므로

$$2-a=6-3a \quad \therefore a=2$$

0172 답 ③

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이고, 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

함수 $g(f(x))$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) &= \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = g(f(1)) \\ f(x) &= t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 1+ \text{일 때 } t \rightarrow 0+ \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) &= \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = g(0) = 2 \\ x \rightarrow 1- \text{일 때 } t &\rightarrow -2- \text{이므로} \\ \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) &= \lim_{t \rightarrow -2-} g(t) = g(-2) = 4a-2b-6 \\ g(f(1)) &= g(-1) = a-b+1\end{aligned}$$

따라서 $2=4a-2b-6=a-b+1$ 이므로

$$2a-b=4, a-b=1$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=3, b=2 \quad \therefore ab=6$$

0173 답 6

$$x \neq 1 \text{일 때, } f(x) = \frac{x^2+ax-3}{x-1}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+ax-3}{x-1} = f(1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2+ax-3) = 0 \text{이므로}$$

$$1+a-3=0 \quad \therefore a=2$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore f(1) = 4$$

$$\therefore a+f(1) = 6$$

0174 답 ③

$$x \neq 3 \text{일 때, } f(x) = \frac{a\sqrt{x+6}+b}{x-3}$$

함수 $f(x)$ 가 $x \geq -6$ 인 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=3$ 에서 연속
이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a\sqrt{x+6}+b}{x-3} = -\frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} (a\sqrt{x+6}+b) = 0 \text{이므로}$$

$$3a+b=0 \quad \therefore b=-3a \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 ②의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a\sqrt{x+6}-3a}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(\sqrt{x+6}-3)(\sqrt{x+6}+3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a}{\sqrt{x+6}+3} = \frac{a}{6} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{a}{6} = -\frac{1}{3} \text{이므로 } a = -2$$

이를 ②에 대입하면 $b=6$

$$\therefore a+b = 4$$

0175 답 6

$$x^2-x-2=0 \text{에서 } (x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

$$x \neq -1, x \neq 2 \text{일 때, } f(x) = \frac{2x^3+ax+b}{x^2-x-2}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3+ax+b}{x^2-x-2} = f(-1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} (2x^3+ax+b) = 0 \text{이므로}$$

$$-2-a+b=0 \quad \therefore a-b=-2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3+ax+b}{x^2-x-2} = f(2) \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (2x^3+ax+b) = 0 \text{이므로}$$

$$16+2a+b=0 \quad \therefore 2a+b=-16 \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=-6, b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{5}$$

⑤을 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3-6x-4}{x^2-x-2} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x+1)^2(x-2)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} 2(x+1) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(-1) = 0$$

⑤을 ③의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3-6x-4}{x^2-x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+1)^2(x-2)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} 2(x+1) = 6 \end{aligned}$$

$$\therefore f(2) = 6$$

$$\therefore f(-1)+f(2) = 6$$

0176 답 ④

두 함수 $f(x), g(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄱ. 두 함수 $f(x), 3g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수

$$f(x)+3g(x) \text{도 모든 실수 } x \text{에서 연속이다.}$$

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수

$$f(x) \times f(x) = \{f(x)\}^2 \text{도 모든 실수 } x \text{에서 연속이다.}$$

ㄷ. $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+8}{x^2+2}$ 에서 $x^2+2 > 0$ 이므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 모든 실수 x
에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \text{ㄹ. } \frac{f(x)}{g(x)-f(x)} &= \frac{x+8}{x^2+2-(x+8)} = \frac{x+8}{x^2-x-6} \\ &= \frac{x+8}{(x+2)(x-3)} \end{aligned}$$

함수 $\frac{f(x)}{g(x)-f(x)}$ 는 $(x+2)(x-3) \neq 0$ 인 모든 실수, 즉

$x \neq -2, x \neq 3$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.

따라서 보기의 함수 중 모든 실수 x 에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0177 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. 두 함수 $2f(x), g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이므로 함수

$$2f(x)-g(x) \text{도 } x=a \text{에서 연속이다.}$$

ㄴ. 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이므로 함수

$$g(x) \times g(x) = \{g(x)\}^2 \text{도 } x=a \text{에서 연속이다.}$$

ㄷ. [반례] 두 함수 $f(x)=1, g(x)=x-a$ 는 $x=a$ 에서 연속이지만

$$\text{함수 } \frac{1}{f(x)g(x)} = \frac{1}{x-a} \text{은 } x=a \text{에서 불연속이다.}$$

ㄹ. [반례] 두 함수 $f(x)=x, g(x)=-a$ 는 $x=a$ 에서 연속이지만

$$\text{함수 } \frac{f(x)}{f(x)+g(x)} = \frac{x}{x-a} \text{는 } x=a \text{에서 불연속이다.}$$

따라서 보기의 함수 중 $x=a$ 에서 항상 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0178 답 7

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 이차방정식 $g(x)=0$, 즉

$$x^2+ax+4=0 \text{은 실근을 갖지 않는다.} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2+ax+4=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=a^2-16<0, (a+4)(a-4)<0$$

$$\therefore -4<a<4 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\text{따라서 정수 } a \text{는 } -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \text{의 7개이다.} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 가 모든 실수 x 에서 연속이도록 하는 조건 구하기	40%
② a 의 값의 범위 구하기	40%
③ 정수 a 의 개수 구하기	20%

0179 **답** ④

$$x<2 \text{에서 } f(x)=x^2-4x+6=(x-2)^2+2>0$$

$$x\geq 2 \text{에서 } f(x)=1>0$$

따라서 실수 전체의 집합에서 $f(x)>0$ 이다.

한편 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이고, 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(2)}{f(2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{ax+1}{1} = 2a+1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{ax+1}{x^2-4x+6} = \frac{2a+1}{2}$$

$$\frac{g(2)}{f(2)} = \frac{2a+1}{1} = 2a+1$$

$$\text{따라서 } 2a+1 = \frac{2a+1}{2} \text{이므로}$$

$$4a+2=2a+1 \quad \therefore a = -\frac{1}{2}$$

0180 **답** 24

함수 $\frac{x}{f(x)}$ 는 $f(x)=0$ 인 x 의 값에서 불연속이므로 (가)에서

$$f(1)=0, f(2)=0$$

$f(x)$ 는 이차함수이므로 $f(x)=a(x-1)(x-2)$ ($a \neq 0$)라 하면

(나)에서

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{a(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} a(x-1) = a$$

$$\therefore a=4$$

따라서 $f(x)=4(x-1)(x-2)$ 이므로

$$f(4)=4 \times 3 \times 2=24$$

0181 **답** ㄷ

ㄱ. [반례] $f(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ -1 & (x < a) \end{cases}$ 이면 $\{f(x)\}^2=1$ 이므로 함수

$\{f(x)\}^2$ 은 $x=a$ 에서 연속이지만 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이다.

ㄴ. [반례] $f(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ 0 & (x < a) \end{cases}, g(x)=\begin{cases} 0 & (x \geq a) \\ 1 & (x < a) \end{cases}$ 이면

$f(x)+g(x)=1$ 이므로 함수 $f(x)+g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이지만 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이다.

ㄷ. $h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면 $g(x)=f(x)-h(x)$

이때 두 함수 $f(x), h(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로 함수 $g(x)$ 도 $x=a$ 에서 연속이다.

ㄹ. [반례] $f(x)=0, g(x)=\begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ -1 & (x < a) \end{cases}$ 이면 $\frac{f(x)}{g(x)}=0$ 이므로 두

함수 $f(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $x=a$ 에서 연속이지만 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

0182 **답** ㄱ, ㄴ

함수 $f(x)=\frac{x+2}{2x-4}=\frac{2}{x-2}+\frac{1}{2}$ 의 그래

프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ, ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 0]$,

$[3, 4]$ 에서 연속이므로 각 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

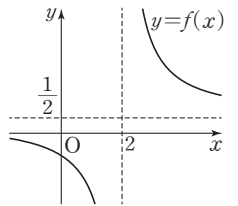
ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 반열린구간 $[0, 1)$ 에서

$x=0$ 일 때 최댓값 $-\frac{1}{2}$ 을 갖고, 최솟값은 갖지 않는다.

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 반열린구간 $[1, 3)$ 에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.

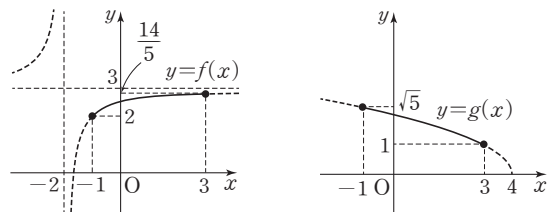
ㄹ. 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 최댓값은 갖지 않고, $x=3$ 일 때 최솟값 $\frac{5}{2}$ 를 갖는다.

따라서 보기의 구간에서 최댓값과 최솟값이 모두 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.



0183 **답** $\frac{19}{5}$

두 함수 $f(x)=\frac{3x+5}{x+2}=-\frac{1}{x+2}+3, g(x)=\sqrt{-x+4}$ 는 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다. 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 두 함수 $y=f(x), y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



$$\text{따라서 } M=f(3)=\frac{14}{5}, m=g(3)=1 \text{이므로 } M+m=\frac{19}{5}$$

0184 **답** ④

① $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)=-1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

② ①에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

$$f(2)=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 2 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

따라서 열린구간 $(-1, 4)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 1, 2의 2개이다.

- ③ 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 $x=-1$ 일 때 최댓값 3을 갖고, 최솟값은 갖지 않는다.
 ④ 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.
 ⑤ 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[3, 4]$ 에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

0185 답 ④

$f(x) = x^3 - 8x - 10$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고

$$f(0) = -10, f(1) = -17, f(2) = -18, f(3) = -7, f(4) = 22, f(5) = 75$$

따라서 $f(3)f(4) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 주어진 방정식은 열린구간 $(3, 4)$ 에서 실근을 갖는다.

0186 답 14

$f(x) = x^2 + 4x + a$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고

$$f(-1) = a - 3, f(2) = a + 12$$

이때 방정식 $f(x) = 0$ 이 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $f(-1)f(2) < 0$ 이어야 하므로

$$(a-3)(a+12) < 0 \quad \therefore -12 < a < 3$$

따라서 정수 a 는 $-11, -10, -9, \dots, 2$ 의 14개이다.

0187 답 ③

ㄱ. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 연속이고

$$f(2) = -1, f(3) = 3$$

따라서 $f(2)f(3) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$f(x) = 0$ 은 열린구간 $(2, 3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄴ. $f(x) = \frac{4}{2x-1} - 1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 $x \neq \frac{1}{2}$ 인 모든 실수 x 에서 연속이므로 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 연속이고

$$f(2) = \frac{1}{3}, f(3) = -\frac{1}{5}$$

따라서 $f(2)f(3) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$f(x) = 0$ 은 열린구간 $(2, 3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

ㄷ. $f(x) = \sqrt{x} - \frac{3}{x} - 1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 $x > 0$ 인 모든 실수 x 에서 연속이므로 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 연속이고

$$f(2) = \sqrt{2} - \frac{5}{2} < 0, f(3) = \sqrt{3} - 2 < 0$$

따라서 $f(2)f(3) > 0$ 이므로 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(2, 3)$ 에서 실근을 갖는지 알 수 없다.

따라서 보기의 방정식에서 열린구간 $(2, 3)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다고 할 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0188 답 3개

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이고

$$f(-2)f(-1) < 0, f(-1)f(0) < 0, f(1)f(2) < 0$$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간

$(-2, -1), (-1, 0), (1, 2)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

0189 답 4개

함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고 $f(1)f(2) < 0$,

$f(4)f(5) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간 $(1, 2), (4, 5)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

이때 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(-x)$ 이므로

$$f(-1)f(-2) < 0, f(-4)f(-5) < 0$$

즉, 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x) = 0$ 은 열린구간

$(-2, -1), (-5, -4)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x) = 0$ 은 적어도 4개의 실근을 갖는다.

0190 답 2개

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 네 점 $(-1, -2), (0, 2), (1, -3), (2, -2)$ 를 지나므로

$$f(-1) = -2, f(0) = 2, f(1) = -3, f(2) = -2$$

$g(x) = f(x) - x$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고

$$g(-1) = f(-1) - (-1) = -2 + 1 = -1$$

$$g(0) = f(0) - 0 = 2$$

$$g(1) = f(1) - 1 = -3 - 1 = -4$$

$$g(2) = f(2) - 2 = -2 - 2 = -4 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이때 $g(-1)g(0) < 0, g(0)g(1) < 0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x) = 0$ 은 열린구간 $(-1, 0), (0, 1)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x) = x$ 는 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 적어도 2개의 실근을 갖는다. $\dots\dots \textcircled{ii}$

채점 기준

① $g(x) = f(x) - x$ 로 놓고 $g(-1), g(0), g(1), g(2)$ 의 값 구하기	50 %
② 방정식 $f(x) = x$ 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 적어도 몇 개의 실근을 갖는지 구하기	50 %

0191 답 3개

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{이므로 } f(0) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 2$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{이므로 } f(2) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $f(x)=x(x-2)g(x)$ ($g(x)$ 는 다항함수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x-2)g(x) = -2g(0)$$

따라서 $-2g(0)=4$ 이므로 $g(0)=-2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)g(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} xg(x) = 2g(2)$$

따라서 $2g(2)=2$ 이므로 $g(2)=1$

함수 $g(x)$ 는 다항함수이므로 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고

$g(0)g(2)=-2<0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖고 $f(0)=0, f(2)=0$ 이므로 방정식 $f(x)=0$ 은 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

AB 유형 점검

36~38쪽

0192 답 ②

ㄱ. $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \geq 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이려면 $x=0$ 에서 연속이어야 한다.

$$f(0)=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x^2) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 정의되지 않으므로 $x=4$ 에서 불연속이다.

ㄷ. 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이려면 $x=1$ 에서 연속이어야 한다.

$$f(1)=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \sqrt{x-1} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x-1) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄹ. 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이려면 $x=2$ 에서 연속이어야 한다.

$$f(2)=2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2+2x+4) = 12$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 모든 실수 x 에서 연속인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0193 답 7

(i) $f(1)=2$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 3 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

(iii) $f(4)=1$

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = 2 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \neq f(4)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 불연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 1, 2, 4이므로 구하는 합은

$$1+2+4=7$$

0194 답 ㄴ

$$\text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)+g(x)\} = 1+0=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)+g(x)\} = -1+0=-1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)+g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)+g(x)\}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+g(x)\}$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)+g(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㄴ. } f(0)g(0)=0 \times 1=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) = 1 \times 0 = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) = -1 \times 0 = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = f(0)g(0)$ 이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄷ. } f(g(0))=f(1)=0$$

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = -1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) \neq f(g(0))$ 이므로 함수 $f(g(x))$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㄹ. } g(f(0))=g(0)=1$$

$f(x)=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $s \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow 1-} g(s) = -1$$

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $s \rightarrow -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = \lim_{s \rightarrow -1+} g(s) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = -1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) \neq g(f(0))$ 이므로 함수 $g(f(x))$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 $x=0$ 에서 연속인 것은 ㄴ이다.

0195 답 32

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+a}-2} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+a}-2) = 0 \text{이므로 } \sqrt{2+a}-2=0$$

$$\sqrt{2+a}=2, 2+a=4 \quad \therefore a=2$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{\sqrt{x+a}-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)(\sqrt{x+2}+2) = 16 \end{aligned}$$

따라서 $b=16$ 이므로 $ab=32$

0196 답 ⑤

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = f(0) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x < 0$ 일 때, $g(x) = -f(x) + x^2 + 4$

$x > 0$ 일 때, $g(x) = f(x) - x^2 - 2x - 8$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) - \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = 6 \text{에서}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \{-f(x) + x^2 + 4\} - \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x) - x^2 - 2x - 8\} = 6$$

$$- \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0-} (x^2 + 4) - \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 + 2x + 8) = 6$$

$$-f(0) + 4 - f(0) + 8 = 6 \quad (\because \textcircled{1}) \quad \therefore f(0) = 3$$

0197 답 ③

함수 $\{f(x)+a\}^2$ 이 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)+a\}^2 = \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)+a\}^2 = \{f(0)+a\}^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)+a\}^2 = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x^2+3+a)^2 = (3+a)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)+a\}^2 = \lim_{x \rightarrow 0-} \left(x - \frac{1}{2} + a\right)^2 = \left(-\frac{1}{2} + a\right)^2$$

$$\{f(0)+a\}^2 = (3+a)^2$$

$$\text{따라서 } (3+a)^2 = \left(-\frac{1}{2} + a\right)^2 \text{이므로}$$

$$a^2 + 6a + 9 = a^2 - a + \frac{1}{4} \quad \therefore a = -\frac{5}{4}$$

0198 답 6

함수 $f(x)g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$, $x=2$ 에서 연속이다.

(i) $x=1$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = f(1)g(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2+ax+b)(x-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2+ax+b)(x+1) = 2(1+a+b)$$

$$f(1)g(1) = (1+a+b) \times (1+1) = 2(1+a+b)$$

따라서 $0 = 2(1+a+b)$ 이므로

$$1+a+b=0 \quad \therefore a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x=2$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) = f(2)g(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2+ax+b)(-x+4) = 2(4+2a+b)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2+ax+b)(x-1) = 4+2a+b$$

$$f(2)g(2) = (4+2a+b) \times (-2+4) = 2(4+2a+b)$$

따라서 $2(4+2a+b) = 4+2a+b$ 이므로

$$4+2a+b=0 \quad \therefore 2a+b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=2$

따라서 $f(x) = x^2 - 3x + 2$ 이므로

$$f(-1) = 1 + 3 + 2 = 6$$

0199 답 2

함수 $f(x)f(x-1)$ 이 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)f(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)f(x-1) = f(1)f(0)$$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)f(x-1) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (-x+a) \times \lim_{t \rightarrow 0+} (-t+a) \\ &= (-1+a) \times a = a^2 - a \end{aligned}$$

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)f(x-1) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (-x+a) \times \lim_{t \rightarrow 0-} (t+2) \\ &= (-1+a) \times 2 = 2a - 2 \end{aligned}$$

$$f(1)f(0) = (-1+a) \times (0+2) = 2a - 2$$

따라서 $a^2 - a = 2a - 2$ 이므로 $a^2 - 3a + 2 = 0$

$$(a-1)(a-2) = 0 \quad \therefore a=1 \text{ 또는 } a=2$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 곱은 $1 \times 2 = 2$

0200 답 ②

$$x \neq a \text{일 때, } f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x-a}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad \therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2+2x+1}{x-a} = f(a) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow a} (x^2+2x+1) = 0 \text{이므로}$$

$$a^2+2a+1=0, (a+1)^2=0 \quad \therefore a=-1$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) = 0$$

$$\therefore f(a) = 0$$

$$\therefore a+f(a) = -1$$

0201 답 ⑤

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

① 두 함수 $3f(x)$, $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수

$$3f(x) - g(x) \text{도 모든 실수 } x \text{에서 연속이다.}$$

② 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수

$$\frac{f(x)g(x)}{3} \text{도 모든 실수 } x \text{에서 연속이다.}$$

- ③ $g(f(x))=g(3x)=9x^2-9$ 이므로 함수 $g(f(x))$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.
- ④ $f(g(x))=f(x^2-9)=3x^2-27$ 이므로 함수 $f(g(x))$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.
- ⑤ $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{3x}{x^2-9}=\frac{3x}{(x+3)(x-3)}$ 이므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $(x+3)(x-3)\neq 0$ 인 모든 실수, 즉 $x\neq -3, x\neq 3$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.

따라서 모든 실수 x 에서 연속인 함수가 아닌 것은 ⑤이다.

0202 답 3

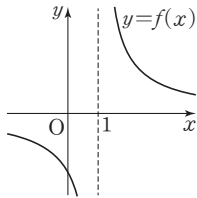
$$f(x)=\frac{1}{x-\frac{2}{x-1}}=\frac{1}{\frac{x^2-x-2}{x-1}}=\frac{x-1}{(x+1)(x-2)}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x-1=0, x+1=0, x-2=0$, 즉 $x=1, x=-1, x=2$ 에서 정의되지 않으므로 불연속이다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 $-1, 1, 2$ 의 3개이다.

0203 답 ③

함수 $f(x)=\frac{2}{x-1}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



- ①, ④, ⑤ 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 0], [2, 3], [3, 4]$ 에서 연속이므로 각 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.
- ② 함수 $f(x)$ 는 반열린구간 $[0, 1)$ 에서 $x=0$ 일 때 최댓값 -2 를 갖고, 최솟값은 갖지 않는다.
- ③ 함수 $f(x)$ 는 반열린구간 $(1, 2]$ 에서 최댓값은 갖지 않고, $x=2$ 일 때 최솟값 2 를 갖는다.

0204 답 10

$g(x)=f(x)-3x$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고

$g(0)=f(0)-0=k+2, g(2)=f(2)-6=(k-3)-6=k-9$
 이때 방정식 $f(x)=3x$, 즉 $g(x)=0$ 의 증거인 아닌 오직 하나의 실근이 열린구간 $(0, 2)$ 에 존재하려면 $g(0)g(2)<0$ 이어야 하므로
 $(k+2)(k-9)<0 \quad \therefore -2<k<9$

따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1, \dots, 8$ 의 10개이다.

0205 답 ④

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이고, $f(1)f(3)<0, f(3)f(5)<0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(1, 3), (3, 5)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

방정식 $f(x)=0$, 즉 $x(x-m)(x-n)=0$ 의 실근은

$x=0$ 또는 $x=m$ 또는 $x=n$

이때 열린구간 $(1, 3)$ 에 속하는 자연수는 2뿐이고, 열린구간 $(3, 5)$ 에 속하는 자연수는 4뿐이므로

$m=2, n=4$ 또는 $m=4, n=2$

따라서 $f(x)=x(x-2)(x-4)$ 이므로

$f(6)=6\times 4\times 2=48$

0206 답 3

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 네 점 $(-2, 1), (-1, -1), (0, 3), (1, 1)$ 을 지나므로

$$f(-2)=1, f(-1)=-1, f(0)=3, f(1)=1$$

$g(x)=f(x)-x-1$ 이라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 연속이고

$$g(-2)=f(-2)+2-1=1+1=2$$

$$g(-1)=f(-1)+1-1=-1$$

$$g(0)=f(0)-1=3-1=2$$

$$g(1)=f(1)-1-1=1-2=-1$$

이때 $g(-2)g(-1)<0, g(-1)g(0)<0, g(0)g(1)<0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$ 은 열린구간 $(-2, -1), (-1, 0), (0, 1)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=x+1$ 은 열린구간 $(-2, 1)$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

$$\therefore n=3$$

0207 답 ㄱ, ㄴ

자동차가 출발하기 전과 휴게소에 정차할 때의 속력은 0이다.

ㄱ. 사잇값 정리에 의하여 A 지점에서 휴게소까지 갈 때 속력이 시속 70km인 순간이 적어도 2번 존재한다.

ㄴ. 사잇값 정리에 의하여 A 지점에서 휴게소까지 갈 때 속력이 시속 50km인 순간이 적어도 2번, 휴게소에서 B 지점까지 갈 때 속력이 시속 50km인 순간이 적어도 2번 존재한다.

즉, 속력이 시속 50km인 순간이 적어도 4번 존재한다.

ㄷ. 최고 속력이 빠르다고 해서 평균 속력이 빠르다고 할 수 없다.

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0208 답 8

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=-1, x=1$ 에서 연속이다.

(i) $x=-1$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} (3x+3) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} (x+b) = -1+b$$

$$f(-1) = -3+3 = 0$$

$$\text{따라서 } 0 = -1+b \text{ 이므로 } b=1$$

..... ①

(ii) $x=1$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2+a) = 1+a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (3x+3) = 6$$

$$f(1) = 1+a$$

$$\text{따라서 } 1+a=6 \text{ 이므로 } a=5$$

..... ②

$$(i), (ii) \text{에서 } f(x) = \begin{cases} x^2+5 & (x \geq 1) \\ 3x+3 & (-1 \leq x < 1) \\ x+1 & (x < -1) \end{cases}$$

$$\therefore f(-2)+f(2) = (-2+1) + (4+5) = 8$$

..... ③

채점 기준

i b의 값 구하기	40%
ii a의 값 구하기	40%
iii f(-2)+f(2)의 값 구하기	20%

0209 답 -2

(가)에서 $x \neq -1$ 일 때, $f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx}{x+1}$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x = -1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + ax^2 + bx}{x+1} = f(-1) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + ax^2 + bx) = 0 \text{ 이므로}$$

$$-1 + a - b = 0 \quad \therefore a - b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{8} \quad \dots\dots \textbf{i}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x = 1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

이때 (나)에서 $f(1) = 4$

$$\text{따라서 } \frac{1+a+b}{2} = 4 \text{ 이므로}$$

$$1+a+b=8 \quad \therefore a+b=7 \quad \dots\dots \textcircled{9} \quad \dots\dots \textbf{ii}$$

⑧, ⑨를 연립하여 풀면 $a=4, b=3$

이를 ⑦의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 4x^2 + 3x}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+3)(x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} x(x+3) = -2 \end{aligned}$$

$$\therefore f(-1) = -2 \quad \dots\dots \textbf{iii}$$

채점 기준

i (가)를 만족시키는 a, b 사이의 관계식 구하기	40%
ii (나)를 만족시키는 a, b 사이의 관계식 구하기	30%
iii f(-1)의 값 구하기	30%

0210 답 5

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이므로 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = f(1) = 1+c$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1+c$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2 - ax + b}{x-1} = 1+c \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2 - ax + b) = 0 \text{ 이므로}$$

$$1 - a + b = 0 \quad \therefore b = a - 1 \quad \dots\dots \textbf{i}$$

이를 ⑦의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^2 - ax + a - 1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)(x-a+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (x-a+1) = 2-a \end{aligned}$$

따라서 $2-a=1+c$ 이므로 $a=1-c$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{x^2 - ax + b}{x-1} &= \frac{x^2 - ax + a - 1}{x-1} = x - a + 1 \\ &= x - (1-c) + 1 = x + c \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x+c & (-1 \leq x < 1) \\ x^2+c & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \quad \dots\dots \textbf{ii}$$

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이때 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $f(2) = 4+c$,

최솟값은 $f(-1) = -1+c$ 이므로 구하는 차는

$$4+c - (-1+c) = 5 \quad \dots\dots \textbf{iii}$$

채점 기준

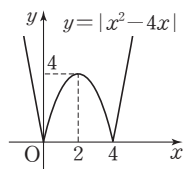
i b를 a에 대한 식으로 나타내기	30%
ii f(x)를 c를 사용하여 나타내기	40%
iii f(x)의 최댓값과 최솟값의 차 구하기	30%

C 실력 향상

39쪽

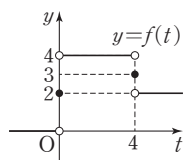
0211 답 9

곡선 $y = |x^2 - 4x| = |(x-2)^2 - 4|$ 는 오른쪽 그림과 같으므로



$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 2 & (t = 0 \text{ 또는 } t > 4) \\ 4 & (0 < t < 4) \\ 3 & (t = 4) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(t)$ 는 $t=0, t=4$ 에서 불연속이다.



$g(t) = t^2 + at + b$ (a, b 는 상수)라 하면 함수 $f(t)g(t)$ 가 모든 실수 t 에서 연속이므로

$t=0, t=4$ 에서 연속이다.

(i) $t=0$ 에서 연속이면

$$\lim_{t \rightarrow 0+} f(t)g(t) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t)g(t) = f(0)g(0)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} f(t)g(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} \{4 \times (t^2 + at + b)\} = 4b$$

$$\lim_{t \rightarrow 0-} f(t)g(t) = \lim_{t \rightarrow 0-} \{0 \times (t^2 + at + b)\} = 0$$

$$f(0)g(0) = 2 \times b = 2b$$

$$\text{따라서 } 4b = 0 = 2b \text{ 이므로 } b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(ii) $t=4$ 에서 연속이면

$$\lim_{t \rightarrow 4+} f(t)g(t) = \lim_{t \rightarrow 4-} f(t)g(t) = f(4)g(4)$$

$$\lim_{t \rightarrow 4+} f(t)g(t) = \lim_{t \rightarrow 4+} \{2 \times (t^2 + at + b)\} = 2(16 + 4a + b)$$

$$\lim_{t \rightarrow 4-} f(t)g(t) = \lim_{t \rightarrow 4-} \{4 \times (t^2 + at + b)\} = 4(16 + 4a + b)$$

$$f(4)g(4) = 3(16 + 4a + b)$$

따라서 $2(16 + 4a + b) = 4(16 + 4a + b) = 3(16 + 4a + b)$ 이므로

$$16 + 4a + b = 0$$

⑦을 대입하면

$$16 + 4a = 0 \quad \therefore a = -4$$

(i), (ii)에서 $g(t) = t^2 - 4t$

$$\therefore f(3) + g(5) = 4 + 5 = 9$$

0212 **답** ④

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이고 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속
이므로 함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속하려면 $x=0$,
 $x=a$ 에서도 연속이어야 한다.

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속하려면

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) = f(0)g(0)$$

(i) $a < 0$ 일 때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} (-2x+2)(2x-1) \\ &= 2 \times (-1) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} (-2x+3)(2x-1) \\ &= 3 \times (-1) = -3 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)g(x)$
는 $x=0$ 에서 불연속이다.

(ii) $a=0$ 일 때

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} (-2x+2)(2x-1) \\ &= 2 \times (-1) = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \{(-2x+3) \times 2x\} \\ &= 3 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)g(x)$
는 $x=0$ 에서 불연속이다.

(iii) $a > 0$ 일 때

$$f(0)g(0) = 2 \times 0 = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \{(-2x+2) \times 2x\} \\ &= 2 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \{(-2x+3) \times 2x\} \\ &= 3 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = f(0)g(0)$ 이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는
 $x=0$ 에서 연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 $a > 0$

함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속하려면

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) = f(a)g(a)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow a+} (-2x+2)(2x-1) \\ &= (-2a+2)(2a-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow a-} \{(-2x+2) \times 2x\} \\ &= (-2a+2) \times 2a \end{aligned}$$

$$f(a)g(a) = (-2a+2)(2a-1)$$

따라서 $(-2a+2)(2a-1) = (-2a+2) \times 2a$ 이므로

$$2a-2=0 \quad \therefore a=1$$

0213 **답** ①

(*)에서 $f(x)g(x) = x(x+3)$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $f(0)g(0) = 0$

이때 (*)에서 $g(0)=1$ 이므로 $f(0)=0$

따라서 $f(x) = x(x^2+ax+b)$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)g(x) = x(x+3) \text{에서}$$

$$x(x^2+ax+b)g(x) = x(x+3)$$

$x \neq 0, x^2+ax+b \neq 0$ 일 때,

$$g(x) = \frac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)} = \frac{x+3}{x^2+ax+b} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0)$$

이때 (*)에서 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$ 이므로 $\textcircled{1}$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x^2+ax+b} = 1$$

$$\frac{3}{b} = 1 \quad \therefore b=3$$

한편 $\textcircled{1}$ 에서 함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 이차방

정식 $x^2+ax+b=0$, 즉 $x^2+ax+3=0$ 은 실근을 갖지 않는다.

이차방정식 $x^2+ax+3=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 12 < 0$$

$$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3}) < 0$$

$$\therefore -2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$$

이때 $f(1) = a+4$ 가 자연수이므로 a 는 -4 보다 큰 정수이다.

따라서 a 의 값은 $-3, -2, \dots, 2, 3$ 이므로

$$g(2) = \frac{2+3}{4+2a+3} = \frac{5}{2a+7} \text{는 } a=3 \text{에서 최솟값 } \frac{5}{13} \text{를 갖는다.}$$

0214 **답** 99

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고

$$f(0)=a, f(2)=a-20$$

이때 (*)에서 $f(0)f(2) < 0$ 이어야 하므로

$$a(a-20) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 20 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(*)에서 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x) = f(a)g(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow a+} (x^2-12x+a)(2x+4a)$$

$$= a(a-11) \times 6a$$

$$= 6a^2(a-11)$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x)g(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a-} (x^2-12x+a)f(x+6)$$

$$= \lim_{x \rightarrow a-} (x^2-12x+a)\{(x+6)^2-12(x+6)+a\}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a-} (x^2-12x+a)(x^2+a-36)$$

$$= a(a-11)(a^2+a-36)$$

$$f(a)g(a) = a(a-11) \times 6a$$

$$= 6a^2(a-11)$$

따라서 $6a^2(a-11) = a(a-11)(a^2+a-36)$ 이므로

$$a(a+4)(a-9)(a-11) = 0$$

$$\therefore a=9 \text{ 또는 } a=11 (\because \textcircled{1})$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$9 \times 11 = 99$$

03 / 미분계수와 도함수

A 개념 확인

42~45쪽

0215 답 1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{5 - 3}{2} = 1$$

0216 답 8

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{18 - 2}{2} = 8$$

0217 답 -4

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-8 - 0}{2} = -4$$

0218 답 10

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{18 - (-2)}{2} = 10$$

0219 답 (1) -1 (2) $2 + \Delta x$

$$(1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(-3)}{2 - (-3)} = \frac{9 - 14}{5} = -1$$

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{(1 + \Delta x) - 1} = \frac{\{(1 + \Delta x)^2 + 5\} - 6}{\Delta x} \\ = \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x$$

0220 답 -2

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-2(1 + \Delta x) + 1\} - (-1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2\Delta x}{\Delta x} = -2$$

0221 답 1

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(1 + \Delta x)^2 - (1 + \Delta x)\} - 0}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \Delta x) = 1$$

0222 답 -6

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3(1 + \Delta x)^2 - (-3)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-6\Delta x - 3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-6 - 3\Delta x) = -6$$

0223 답 3

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \Delta x)^3 - 1}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x + 3(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{3 + 3\Delta x + (\Delta x)^2\} = 3$$

0224 답 3

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(a + \Delta x)^2 + 2\} - (a^2 + 2)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2a\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2a + \Delta x) = 2a$$

따라서 $2a = 6$ 이므로 $a = 3$

0225 답 1

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(a + \Delta x)^3 - 4\} - (2a^3 - 4)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6a^2\Delta x + 6a(\Delta x)^2 + 2(\Delta x)^3}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{6a^2 + 6a\Delta x + 2(\Delta x)^2\} = 6a^2$$

따라서 $6a^2 = 6$ 이므로 $a^2 = 1 \quad \therefore a = 1 (\because a > 0)$

0226 답 0

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-3(0 + \Delta x)^2 + 7\} - 7}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-3\Delta x) = 0$$

0227 답 -7

$$f'(-1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(-1 + \Delta x)^2 - 3(-1 + \Delta x) + 1\} - 6}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-7\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-7 + 2\Delta x) = -7$$

0228 답 -4

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-(1 + \Delta x)^3 - (1 + \Delta x)\} - (-2)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-4\Delta x - 3(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{-4 - 3\Delta x - (\Delta x)^2\} = -4$$

0229 **답** (1) $x=2$ 에서 연속이다.

(2) $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

$$(1) f(2) = 2 - 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x-1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (-x^2+5) = 1$$

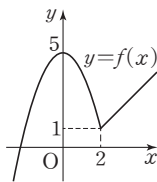
따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x-1)-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(-x^2+5)-1}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-(x+2)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} (-(x+2)) = -4 \end{aligned}$$

따라서 $f'(2)$ 가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

참고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=2$ 에서 꺾여 있다.



0230 **답** (1) $x=3$ 에서 연속이다.

(2) $x=3$ 에서 미분가능하지 않다.

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & (x \geq 3) \\ -x+3 & (x < 3) \end{cases}$$

$$(1) f(3) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} (x-3) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} (-x+3) = 0$$

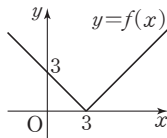
따라서 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이다.

$$(2) \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{(x-3)-0}{x-3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{(-x+3)-0}{x-3} = -1$$

따라서 $f'(3)$ 가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 미분가능하지 않다.

참고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 $x=3$ 에서 꺾여 있다.



0231 **답** $f'(x)=0$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8-8}{h} = 0$$

0232 **답** $f'(x)=1$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)+6\} - (x+6)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1 \end{aligned}$$

0233 **답** $f'(x)=-2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{-2(x+h)-1\} - (-2x-1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h}{h} = -2 \end{aligned}$$

0234 **답** $f'(x)=2x+5$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(x+h)^2+5(x+h)\} - (x^2+5x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2x+5)h+h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x+5+h) = 2x+5 \end{aligned}$$

0235 **답** $y'=3x^2$

$$y' = (x^3)' = 3x^2$$

0236 **답** $y'=9x^8$

$$y' = (x^9)' = 9x^8$$

0237 **답** $y'=-12x^{11}$

$$y' = (-x^{12})' = -12x^{11}$$

0238 **답** $y'=0$

$$y' = (-6)' = 0$$

0239 **답** $y'=-1$

$$y' = (-x+10)' = -(x)' + (10)' = -1+0 = -1$$

0240 **답** $y'=x+4$

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{1}{2}x^2+4x\right)' = \frac{1}{2}(x^2)' + 4(x)' \\ &= \frac{1}{2} \times 2x + 4 \times 1 = x+4 \end{aligned}$$

0241 **답** $y'=-3x^2+12x$

$$\begin{aligned} y' &= (-x^3+6x^2-2)' = -(x^3)' + 6(x^2)' + (-2)' \\ &= -3x^2 + 6 \times 2x + 0 = -3x^2 + 12x \end{aligned}$$

0242 **답** $y'=-x^5+6x^3+4x$

$$\begin{aligned} y' &= \left(-\frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{2}x^4 + 2x^2\right)' = -\frac{1}{6}(x^6)' + \frac{3}{2}(x^4)' + 2(x^2)' \\ &= -\frac{1}{6} \times 6x^5 + \frac{3}{2} \times 4x^3 + 2 \times 2x = -x^5 + 6x^3 + 4x \end{aligned}$$

0243 **답** (1) 2 (2) 18

(1) 함수 $f(x)+g(x)$ 의 $x=0$ 에서의 미분계수는

$$f'(0)+g'(0) = 6+(-4) = 2$$

(2) 함수 $f(x)-3g(x)$ 의 $x=0$ 에서의 미분계수는

$$f'(0)-3g'(0) = 6-3 \times (-4) = 18$$

0244 답 $y' = 2x - 9$

$$y' = (x)'(x-9) + x(x-9)'$$

$$= (x-9) + x = 2x-9$$

0245 답 $y' = 2x + 3$

$$y' = (x+5)'(x-2) + (x+5)(x-2)'$$

$$= (x-2) + (x+5) = 2x+3$$

0246 답 $y' = 9x^2 - 8x - 3$

$$y' = (3x-4)'(x^2-1) + (3x-4)(x^2-1)'$$

$$= 3(x^2-1) + (3x-4) \times 2x$$

$$= 3x^2 - 3 + 6x^2 - 8x$$

$$= 9x^2 - 8x - 3$$

0247 답 $y' = 3x^2 + 14x - 2$

$$y' = (x^2+6x-8)'(x+1) + (x^2+6x-8)(x+1)'$$

$$= (2x+6)(x+1) + (x^2+6x-8)$$

$$= 2x^2 + 8x + 6 + x^2 + 6x - 8$$

$$= 3x^2 + 14x - 2$$

0248 답 $y' = 3x^2 + 2x - 6$

$$y' = x'(x-2)(x+3) + x(x-2)'(x+3) + x(x-2)(x+3)'$$

$$= (x-2)(x+3) + x(x+3) + x(x-2)$$

$$= x^2 + x - 6 + x^2 + 3x + x^2 - 2x$$

$$= 3x^2 + 2x - 6$$

0249 답 $y' = -6x^2 + 26x - 13$

$$y' = (-x+5)'(x-2)(2x+1) + (-x+5)(x-2)'(2x+1) + (-x+5)(x-2)(2x+1)'$$

$$= -(x-2)(2x+1) + (-x+5)(2x+1) + (-x+5)(x-2) \times 2$$

$$= -2x^2 + 3x + 2 - 2x^2 + 9x + 5 - 2x^2 + 14x - 20$$

$$= -6x^2 + 26x - 13$$

0250 답 $y' = 18x - 30$

$$y' = 2(3x-5) \times (3x-5)'$$

$$= 2(3x-5) \times 3$$

$$= 18x - 30$$

0251 답 $y' = 6(2x+1)^2$

$$y' = 3(2x+1)^2 \times (2x+1)'$$

$$= 3(2x+1)^2 \times 2$$

$$= 6(2x+1)^2$$

0252 답 $y' = (4x-1)(12x+23)$

$$y' = (x+3)'(4x-1)^2 + (x+3)\{(4x-1)^2\}'$$

$$= (4x-1)^2 + (x+3) \times 2(4x-1) \times (4x-1)'$$

$$= (4x-1)^2 + (x+3) \times 2(4x-1) \times 4$$

$$= (4x-1)^2 + 8(x+3)(4x-1)$$

$$= (4x-1)\{(4x-1) + 8(x+3)\}$$

$$= (4x-1)(12x+23)$$

B 유형 완성

46~57쪽

0253 답 ②

함수 $f(x) = x^2 - x + 2$ 에서 x 의 값이 a 에서 $a+1$ 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+1) - f(a)}{(a+1) - a}$$

$$= \{(a+1)^2 - (a+1) + 2\} - (a^2 - a + 2) = 2a$$

따라서 $2a = 4$ 이므로 $a = 2$

0254 답 ④

함수 $f(x) = x^3 + ax + 1$ 에서 x 의 값이 -2 에서 3 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)}$$

$$= \frac{(27 + 3a + 1) - (-8 - 2a + 1)}{5}$$

$$= \frac{35 + 5a}{5} = 7 + a$$

따라서 $7 + a = 10$ 이므로 $a = 3$

0255 답 2

함수 $f(x) = x(x-1)(x+2)$ 에서 x 의 값이 -3 에서 0 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(0) - f(-3)}{0 - (-3)} = \frac{0 - (-12)}{3} = 4 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

x 의 값이 0 에서 a 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{a(a-1)(a+2)}{a} = (a-1)(a+2) \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 $4 = (a-1)(a+2)$ 이므로

$$a^2 + a - 6 = 0, (a+3)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 (\because a > 0) \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① x 의 값이 -3 에서 0 까지 변할 때의 평균변화율 구하기	40 %
② x 의 값이 0 에서 a 까지 변할 때의 평균변화율 구하기	40 %
③ 양수 a 의 값 구하기	20 %

0256 답 0

함수 $f(x) = -x^2 + x + 2$ 에서 x 의 값이 -1 에서 1 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = \frac{2 - 0}{2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수는

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{-(a+h)^2 + (a+h) + 2\} - (-a^2 + a + 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2a+1)h - h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (-2a+1-h)$$

$$= -2a+1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } 1 = -2a+1 \quad \therefore a = 0$$

0257 답 ④

함수 $f(x) = x^2 - 4x + 1$ 에서 x 의 값이 0에서 a 까지 변할 때의 평균 변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a) - f(0)}{a - 0} = \frac{(a^2 - 4a + 1) - 1}{a} \\ &= \frac{a^2 - 4a}{a} = a - 4 \quad \dots\dots ㉠\end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 $x=3$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(3+h)^2 - 4(3+h) + 1\} - (-2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) = 2 \quad \dots\dots ㉡\end{aligned}$$

㉠, ㉡에서 $a - 4 = 2 \quad \therefore a = 6$

0258 답 -3

함수 $f(x) = 2x^2 + ax + 1$ 에서 x 의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균 변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{(3a + 19) - (a + 3)}{2} \\ &= \frac{2a + 16}{2} = a + 8 \quad \dots\dots \textcircled{i}\end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 $x=1$ 에서의 순간변화율은

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{2(1+h)^2 + a(1+h) + 1\} - (a + 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+a)h + 2h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (4 + a + 2h) = 4 + a \quad \dots\dots \textcircled{ii}\end{aligned}$$

따라서 $a + 8 = 5(4 + a)$ 이므로

$$4a = -12 \quad \therefore a = -3 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① x 의 값이 1에서 3까지 변할 때의 평균변화율 구하기	40 %
② $x=1$ 에서의 순간변화율 구하기	40 %
③ a 의 값 구하기	20 %

0259 답 ⑤

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 1에서 $1+h$ 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1}, \text{ 즉 } \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= h^2 + 2h + 3 \\ \therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (h^2 + 2h + 3) = 3\end{aligned}$$

0260 답 10

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+5h) - f(2)}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+5h) - f(2)}{5h} \times \frac{5}{2} \\ &= \frac{5}{2} f'(2) = \frac{5}{2} \times 4 = 10\end{aligned}$$

0261 답 ⑤

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-4h)}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-4h)}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \times \frac{1}{3} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-4h) - f(a)}{-4h} \times \left(-\frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} f'(a) + \frac{4}{3} f'(a) = \frac{5}{3} f'(a)\end{aligned}$$

0262 답 6

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+ah) - f(3)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+ah) - f(3)}{ah} \times a \\ &= f'(3) \times a = 2a\end{aligned}$$

따라서 $2a = 12$ 이므로 $a = 6$

0263 답 3

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - 1}{h} = 9$ 에서 $h \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{h \rightarrow 0} \{f(2+3h) - 1\} = 0$ 이므로 $f(2) = 1$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h) - f(2)}{3h} \times 3 = 3f'(2)\end{aligned}$$

따라서 $3f'(2) = 9$ 이므로 $f'(2) = 3$

0264 답 ①

$\frac{1}{t} = h$ 로 놓으면 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} t \left\{ f\left(1 + \frac{2}{t}\right) - f\left(1 + \frac{1}{t}\right) \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{f(1+2h) - f(1+h)\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= 2f'(1) - f'(1) = f'(1) = 3\end{aligned}$$

0265 답 4

(*)의 좌변에서

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h) - f(a) - g(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h) - f(a)}{-2h} \times (-2) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} \\ &= -2f'(a) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} \\ &= -2 \times (-2) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} \quad (\because *) \\ &= 4 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h}\end{aligned}$$

따라서 $4 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 0$ 이므로 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h)}{h} = 4$

0266 답 ④

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(2) - 4f(x)}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 f(2) - 4f(2) + 4f(2) - 4f(x)}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-4)f(2)}{x-2} - \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4\{f(x)-f(2)\}}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)f(2)}{x-2} - 4 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+2)f(2) - 4f'(2) \\
 &= 4f(2) - 4f'(2) \\
 &= 4 \times (-1) - 4 \times (-3) = 8
 \end{aligned}$$

0267 답 ⑤

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) - f(1)}{x^2 - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1} \times \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \right\} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x+1)(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} \\
 &= \frac{3}{2} f'(1) = \frac{3}{2} \times 2 = 3
 \end{aligned}$$

0268 답 -1

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-3h)}{2h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) + f(1) - f(1-3h)}{2h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \times \frac{1}{2} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h) - f(1)}{-3h} \times \left(-\frac{3}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} f'(1) + \frac{3}{2} f'(1) = 2f'(1) \\
 &\text{따라서 } 2f'(1) = -6 \text{ 이므로 } f'(1) = -3 \quad \dots \textcircled{i} \\
 &\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x-1)(x^2+x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2+x+1} \\
 &= \frac{1}{3} f'(1) = \frac{1}{3} \times (-3) = -1 \quad \dots \textcircled{ii}
 \end{aligned}$$

채점 기준

① $f'(1)$ 의 값 구하기	50%
② $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^3 - 1}$ 의 값 구하기	50%

0269 답 $\frac{3}{8}$

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(3)}}{x^2 - 9} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(3)}\} \{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(3)}\}}{(x+3)(x-3) \{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(3)}\}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x+3) \{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(3)}\}} \\
 &= f'(3) \times \frac{1}{12\sqrt{f(3)}} = 9 \times \frac{1}{24} = \frac{3}{8}
 \end{aligned}$$

0270 답 ③

(가)에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - g(x)\} = 0$ 이므로

$$f(1) - g(1) = 0 \quad \therefore f(1) = g(1) \quad \dots \textcircled{a}$$

$$\begin{aligned}
 & \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - g(x)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1) + g(1) - g(x)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} \\
 &= f'(1) - g'(1)
 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(1) - g'(1) = 5 \quad \dots \textcircled{b}$$

(나)에서

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + g(x) - 2f(1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1) + g(x) - f(1)}{x-1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1) + g(x) - g(1)}{x-1} \quad (\because \textcircled{a}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} \\
 &= f'(1) + g'(1)
 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(1) + g'(1) = 7 \quad \dots \textcircled{c}$$

②, ③을 연립하여 풀면

$$f'(1) = 6, g'(1) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - a}{x-1} = b \times g(1)$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - a\} = 0$ 이므로 $f(1) = a$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - a}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1)$$

따라서 $f'(1) = b \times g(1)$ 이므로

$$f'(1) = b \times f(1) \quad (\because \textcircled{c})$$

$$\therefore ab = f'(1) = 6$$

0271 답 9

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 3xy - 1$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 0 - 1 \quad \therefore f(0) = 1 \quad \dots \textcircled{a}$$

$$\begin{aligned}
 & \therefore f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2) + f(h) + 6h - 1 - f(2)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} + 6 \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + 6 \quad (\because \textcircled{a}) \\
 &= f'(0) + 6 \\
 &= 3 + 6 = 9
 \end{aligned}$$

0272 답 3

$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 0 \quad \therefore f(0) = 0 \quad \dots \textcircled{a} \quad \dots \textcircled{b}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2)+f(h)+2h-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 2 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 2 \quad (\because \textcircled{v}) \\ &= f'(0) + 2 \\ \text{따라서 } f'(0) + 2 &= 4 \text{이므로 } f'(0) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{ii} \\ \therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)+f(h)+h-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 1 = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 1 \quad (\because \textcircled{v}) \\ &= f'(0) + 1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{iii}\end{aligned}$$

채점 기준

① $f(0)$ 의 값 구하기	20 %
② $f'(0)$ 의 값 구하기	40 %
③ $f'(1)$ 의 값 구하기	40 %

0273 답 ⑤

$f(x+y)=2f(x)f(y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면
 $f(0)=2f(0)f(0)$

$$\therefore f(0) = \frac{1}{2} \quad (\because f(0) \neq 0) \quad \dots\dots \textcircled{v}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2f(1)f(h)-f(1)}{h} \\ &= 2f(1) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-\frac{1}{2}}{h} \\ &= 2f(1) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \quad (\because \textcircled{v}) \\ &= 2f(1)f'(0) \\ &= 2f(1) \times 2 \\ &= 4f(1)\end{aligned}$$

따라서 $f'(1)=4f(1)$ 이므로

$$\frac{f'(1)}{f(1)} = 4 \quad (\because f(1) \neq 0)$$

0274 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 원점 및 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 가 직선 $y=x$ 위의 점이므로
 원점과 점 $(a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기와 원점과 점
 $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기는 모두 1이다.

$$\therefore \frac{f(a)}{a} = \frac{f(b)}{b} = 1$$

ㄴ. $f'(a), f'(b)$ 는 각각 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 두 점
 $(a, f(b)), (b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기이고, 점 $(a, f(a))$
 에서의 접선의 기울기가 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기보다
 크므로

$$f'(a) > f'(b)$$

ㄷ. 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기가 두 점 $(a, f(a)),$
 $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기보다 작으므로

$$f'(b) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0275 답 6

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로
 $f'(2)=3$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2-5h)}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)+f(2)-f(2-5h)}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} \times \frac{1}{3} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-5h)-f(2)}{-5h} \times \left(-\frac{5}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}f'(2) + \frac{5}{3}f'(2) \\ &= 2f'(2) = 2 \times 3 = 6\end{aligned}$$

0276 답 $b < x < c$

$f'(k)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(k, f(k))$ 에서의 접선의
 기울기이고, $g'(k)$ 는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프 위의 점 $(k, g(k))$ 에
 서의 접선의 기울기이다.

부등식 $f'(x)g'(x) > 0$ 의 해는

$$f'(x) > 0, g'(x) > 0 \text{ 또는 } f'(x) < 0, g'(x) < 0$$

(i) $f'(x) > 0, g'(x) > 0$ 일 때

$f'(x) > 0$ 인 x 의 값의 범위는 $x > c$ 이고, $g'(x) > 0$ 인 x 의 값의
 범위는 $x < b$ 이므로 공통부분이 없다.

(ii) $f'(x) < 0, g'(x) < 0$ 일 때

$f'(x) < 0$ 인 x 의 값의 범위는 $x < c$ 이고, $g'(x) < 0$ 인 x 의 값의
 범위는 $x > b$ 이므로 공통부분은 $b < x < c$

(i), (ii)에서 구하는 부등식의 해는

$$b < x < c$$

0277 답 ②

$f'(a), f'(b), f'(c)$ 는 각각 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 세 점
 $(a, f(a)), (b, f(b)), (c, f(c))$ 에서의 접선의 기울기이므로
 $f'(a) > 0, f'(b) < 0, f'(c) > 0$

$$\neg. f'(a) + f'(c) > 0$$

$$\neg. f'(a)f'(b)f'(c) < 0$$

ㄷ. 원점과 점 $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기가 원점과 점

$(c, f(c))$ 를 지나는 직선의 기울기보다 크므로

$$\frac{f(b)}{b} > \frac{f(c)}{c}$$

ㄹ. 두 점 $(0, f(0)), (c, f(c))$ 를 지나는 직선의 기울기는 0보다
 작고, $f'(a) > 0$ 이므로

$$\frac{f(c)-f(0)}{c} < f'(a)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0278 답 ③

① $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)-0}{x-1} = 1\end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

② $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|(x-1) - 0}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} |x| = 1$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

③ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x^2 - x) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x(x-1)}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1+} x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(-x^2 + x) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-x(x-1)}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x) = -1$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

④ 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 정의되지 않으므로 $x=1$ 에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

⑤ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(2x-1) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

따라서 $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ③이다.

0279 [답] ①

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

ㄴ. $g(x) = xf(x)$ 라 하면

$$g(x) = \begin{cases} x(x-2) & (x \geq 2) \\ -x(x-2) & (x < 2) \end{cases} \\ \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x(x-2) - 0}{x - 2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2+} x = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-x(x-2) - 0}{x - 2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2-} (-x) = -2$$

따라서 함수 $xf(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $h(x) = x(x-2)f(x)$ 라 하면

$$h(x) = \begin{cases} x(x-2)^2 & (x \geq 2) \\ -x(x-2)^2 & (x < 2) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = h(2) = 0$ 이므로 함수 $x(x-2)f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x(x-2)^2 - 0}{x - 2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2+} x(x-2) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{-x(x-2)^2 - 0}{x - 2} \\ = \lim_{x \rightarrow 2-} \{-x(x-2)\} = 0$$

따라서 함수 $x(x-2)f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

0280 [답] ㄱ, ㄴ

ㄱ. $f(1) + g(1) = -1 + 1 = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x) + g(x)\} = -1 + 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x) + g(x)\} = 1 + (-1) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) + g(x)\} = f(1) + g(1)$ 이므로 함수

$f(x) + g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow -1+} \{f(x) - g(x)\} = -1 - 0 = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} \{f(x) - g(x)\} = 1 - 0 = 1$$

따라서 함수 $f(x) - g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.

ㄷ. $h(x) = f(x)g(x)$ 라 하면 구간 $(-1, 1)$ 에서 함수 $h(x)$ 는

$$h(x) = \begin{cases} -x^2 & (0 < x < 1) \\ 0 & (x = 0) \\ x(x+1) & (-1 < x < 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-x^2 - 0}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x(x+1) - 0}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0-} (x+1) = 1$$

따라서 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0281 [답] ⑤

① $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$ 이고, 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울

기가 음수이므로 $f'(1) < 0$

② $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재한다.

③ 미분가능하면서 접선의 기울기가 0인 x 의 값은 -1 의 1개이다.

④ 불연속인 x 의 값은 0, 3의 2개이다.

⑤ 미분가능하지 않은 x 의 값은 0, 2, 3의 3개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

0282 [답] ②

불연속인 x 의 값은 1, 4의 2개이므로

$m = 2$

미분가능하지 않은 x 의 값은 1, 2, 3, 4, 5의 5개이므로

$n = 5$

$\therefore m + n = 7$

0283 [답] (가) $x+h$ (나) $3x^2h$ (다) $3x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\boxed{\text{가}}) (x+h)^3 - x^3}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\boxed{\text{나}}) 3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} (\boxed{\text{다}}) 3x^2 + 3xh + h^2 \\ = \boxed{\text{다}} 3x^2$$

0284 [답] ㄱ, ㄴ

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h)-f(x)}{2h} &= f'(x) \\ \text{ㄴ. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(x-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = f'(x) \\ \text{ㄷ. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{3h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)+f(x)-f(x-h)}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \times \frac{1}{3} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3}f'(x) + \frac{1}{3}f'(x) \\ &= \frac{2}{3}f'(x) \end{aligned}$$

따라서 보기에서 $f'(x)$ 와 같은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0285 [답] ⑤

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) + f(y) + 6xy - 1 \text{의 양변에 } x=0, y=0 \text{을 대입하면} \\ f(0) &= f(0) + f(0) + 0 - 1 \\ \therefore f(0) &= 1 \quad \dots\dots \text{㉠} \\ \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+6xh-1-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-1}{h} + 6x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 6x \quad (\because \text{㉠}) \\ &= f'(0) + 6x \\ &= 6x + 2 \end{aligned}$$

0286 [답] ②

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 8x + 3 \text{이므로} \\ f'(2) &= 12 - 16 + 3 = -1 \end{aligned}$$

0287 [답] ⑤

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + 2x - 3x^2 + \dots + 10x^9 \text{이므로} \\ f'(0) &= -1 \\ f'(1) &= -1 + 2 - 3 + \dots + 10 = 5 \\ \therefore f'(0) + f'(1) &= 4 \end{aligned}$$

0288 [답] -2

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 + 2ax - (a+1) \text{이므로 } f'(2) = 5 \text{에서} \\ 12 + 4a - a - 1 &= 5, 3a = -6 \\ \therefore a &= -2 \end{aligned}$$

0289 [답] 24

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2ax + b \text{이므로} \\ f'(1) &= 2 \text{에서 } 2a + b = 2 \quad \dots\dots \text{㉠} \\ f'(2) &= 8 \text{에서 } 4a + b = 8 \quad \dots\dots \text{㉡} \\ \text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } a &= 3, b = -4 \\ \therefore f(x) &= 3x^2 - 4x + c \end{aligned}$$

$$f(2) = 2 \text{에서}$$

$$\begin{aligned} 12 - 8 + c &= 2 \quad \therefore c = -2 \\ \therefore abc &= 24 \end{aligned}$$

$\dots\dots$ ㉠
 $\dots\dots$ ㉡

채점 기준

㉠ a, b 의 값 구하기	60 %
㉡ c 의 값 구하기	30 %
㉢ abc 의 값 구하기	10 %

0290 [답] ⑤

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2 - 8x - f'(1) \text{이므로 양변에 } x=1 \text{을 대입하면} \\ f'(1) &= 6 - 8 - f'(1) \\ 2f'(1) &= -2 \quad \therefore f'(1) = -1 \\ \text{따라서 } f'(x) &= 6x^2 - 8x + 1 \text{이므로} \\ f'(2) &= 24 - 16 + 1 = 9 \end{aligned}$$

0291 [답] ③

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x^2+1)'(x^3+x^2-1) + (2x^2+1)(x^3+x^2-1)' \\ &= 4x(x^3+x^2-1) + (2x^2+1)(3x^2+2x) \\ \therefore f'(1) &= 4 \times 1 + 3 \times 5 = 19 \end{aligned}$$

0292 [답] -6

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2+3x)'(x+1)(x-2) + (x^2+3x)(x+1)'(x-2) \\ &\quad + (x^2+3x)(x+1)(x-2)' \\ &= (2x+3)(x+1)(x-2) + (x^2+3x)(x-2) \\ &\quad + (x^2+3x)(x+1) \\ \therefore f'(1) &= 5 \times 2 \times (-1) + 4 \times (-1) + 4 \times 2 = -6 \end{aligned}$$

0293 [답] ⑤

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3+1)'(x^2+k) + (x^3+1)(x^2+k)' \\ &= 3x^2(x^2+k) + (x^3+1) \times 2x \\ f'(-1) &= 9 \text{에서} \\ 3(1+k) &= 9, 1+k=3 \quad \therefore k=2 \end{aligned}$$

0294 [답] ③

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^2)'f(x) + x^2f'(x) \\ &= 2xf(x) + x^2f'(x) \\ \therefore g'(2) &= 4f(2) + 4f'(2) \\ &= 4 \times 1 + 4 \times 3 = 16 \end{aligned}$$

0295 [답] ②

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{(3x-2)^3\}'(x^2+x)^2 + (3x-2)^3\{(x^2+x)^2\}' \\ &= 9(3x-2)^2(x^2+x)^2 + (3x-2)^3 \times 2(x^2+x)(2x+1) \\ \therefore f'(1) &= 9 \times 1 \times 4 + 1 \times 2 \times 2 \times 3 = 48 \end{aligned}$$

0296 [답] 24

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-4}{x^2-4} &= 2 \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재하} \\ \text{므로 (분자)} &\rightarrow 0 \text{이다.} \end{aligned}$$

$\dots\dots$ ㉠

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 4\} = 0$ 이므로 $f(2) = 4$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 4}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{4} f'(2) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{4} f'(2) = 2$ 이므로

$$f'(2) = 8$$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) + 1}{x - 2} = 8$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{g(x) + 1\} = 0$ 이므로 $g(2) = -1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) + 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} = g'(2)$$

$$\therefore g'(2) = 8$$

$$h(x) = f(x)g(x) \text{에서}$$

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore h'(2) &= f'(2)g(2) + f(2)g'(2) \\ &= 8 \times (-1) + 4 \times 8 = 24 \end{aligned}$$

0297 답 ⑤

$f(x) = -x^3 + 2ax^2 + bx - 1$ 이라 하면 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로 $f(-1) = 2$ 에서

$$1 + 2a - b - 1 = 2$$

$$\therefore 2a - b = 2 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$f'(x) = -3x^2 + 4ax + b$ 이고 점 $(-1, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(-1) = 3$ 에서

$$-3 - 4a + b = 3$$

$$\therefore 4a - b = -6 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -4, b = -10$$

$$\therefore a - b = 6$$

0298 답 -2

$f(x) = x^2 + ax + 5$ 라 하면 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(2, 3)$ 을 지나므로 $f(2) = 3$ 에서

$$4 + 2a + 5 = 3 \quad \therefore a = -3 \quad \cdots \textcircled{i}$$

따라서 $f(x) = x^2 - 3x + 5$ 이므로

$$f'(x) = 2x - 3$$

점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 기울기가 m 이므로 $f'(2) = m$ 에서

$$4 - 3 = m \quad \therefore m = 1 \quad \cdots \textcircled{ii}$$

$$\therefore a + m = -2 \quad \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① a 의 값 구하기	40 %
② m 의 값 구하기	50 %
③ $a + m$ 의 값 구하기	10 %

0299 답 -10

$f(x) = x^3 - 9x^2 + 17x + 5$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 17 = 3(x-3)^2 - 10$$

m 의 최솟값은 $f'(x)$ 의 최솟값과 같고, $f'(x)$ 는 $x=3$ 에서 최솟값 -10 을 가지므로 m 의 최솟값은 -10 이다.

0300 답 3

$$f(x) = (x-k)^2 \text{에서 } f'(x) = 2(x-k)$$

$$h(x) = f(x)g(x) \text{라 하면}$$

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$x=1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 -16 이므로 $h'(1) = -16$ 에서

$$f'(1)g(1) + f(1)g'(1) = -16$$

$$2(1-k) \times 1 + (1-k)^2 \times (-3) = -16$$

$$3k^2 - 4k - 15 = 0, (3k+5)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = 3 (\because k > 0)$$

0301 답 21

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h) - f(1)}{2h} \times 2 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \times (-1)$$

$$= 2f'(1) + f'(1) = 3f'(1)$$

$$f'(x) = 3x^2 + 4 \text{이므로 } f'(1) = 3 + 4 = 7$$

따라서 구하는 값은

$$3f'(1) = 3 \times 7 = 21$$

0302 답 ④

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+2h) - f(0)}{2h} \times 2$$

$$= 2f'(0)$$

$$f'(x) = 6x^2 + 3 \text{이므로 } f'(0) = 3$$

따라서 구하는 값은

$$2f'(0) = 2 \times 3 = 6$$

0303 답 3

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \times \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

$$= \frac{1}{3} f'(-1) \quad \cdots \textcircled{i}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x \text{이므로}$$

$$f'(-1) = 3 + 6 = 9 \quad \cdots \textcircled{ii}$$

따라서 구하는 값은

$$\frac{1}{3} f'(-1) = \frac{1}{3} \times 9 = 3 \quad \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 주어진 극한을 미분계수로 나타내기	50 %
② $f'(-1)$ 의 값 구하기	30 %
③ 극한값 구하기	20 %

0304 답 -5

$2x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(2x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)+f(1)-f(2x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(2x-1)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)-f(1)}{\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{2}\right)-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)-f(1)}{\frac{1}{2}(t-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - 2 \lim_{t \rightarrow 1} \frac{f(t)-f(1)}{t-1} \\ &= f'(1) - 2f'(1) \\ &= -f'(1) \\ f'(x) &= 8x^3 - 3 \text{이므로} \\ f'(1) &= 8 - 3 = 5 \\ \text{따라서 구하는 값은} \\ -f'(1) &= -5 \end{aligned}$$

0305 답 ②

$$\begin{aligned} f(2) &= g(2) = -8 \text{이므로} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)-g(2-3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)-f(2)+g(2)-g(2-3h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)-f(2)}{2h} \times 2 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(2-3h)-g(2)}{-3h} \times (-3) \\ &= 2f'(2) + 3g'(2) \\ f'(x) &= 5x^4 - 15x^2, g'(x) = 4x^3 - 12x \text{이므로} \\ f'(2) &= 80 - 60 = 20, g'(2) = 32 - 24 = 8 \\ \text{따라서 구하는 값은} \\ 2f'(2) + 3g'(2) &= 2 \times 20 + 3 \times 8 = 64 \end{aligned}$$

0306 답 ①

$$\begin{aligned} \text{(나)에서 } f(1)+g(1) &= 2-1+1=2 \\ \text{이때 (㉠)에서 } f(1) &= 5 \text{이므로} \\ 5+g(1) &= 2 \quad \therefore g(1) = -3 \\ \text{(나)에서 } f'(x)+g'(x) &= 6x^2-1 \text{이므로} \\ f'(1)+g'(1) &= 6-1=5 \\ \text{이때 (㉡)에서 } f'(1) &= 9 \text{이므로} \\ 9+g'(1) &= 5 \quad \therefore g'(1) = -4 \\ k(x) &= f(x)g(x) \text{라 하면} \\ k'(x) &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \\ \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)g(1+h)-f(1)g(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k(1+h)-k(1)}{h} \\ &= k'(1) \\ &= f'(1)g(1)+f(1)g'(1) \\ &= 9 \times (-3) + 5 \times (-4) \\ &= -47 \end{aligned}$$

0307 답 ①

$f(x)=x^{10}-x^3+3x$ 라 하면 $f(-1)=1+1-3=-1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^{10}-x^3+3x+1}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} \\ &= f'(-1) \\ f'(x) &= 10x^9-3x^2+3 \text{이므로 구하는 값은} \\ f'(-1) &= -10-3+3 = -10 \end{aligned}$$

0308 답 18

$f(x)=x^n+2x$ 라 하면 $f(1)=1+2=3$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n+2x-3}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}f'(1) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{2}f'(1)=10$ 이므로 $f'(1)=20$

$$\begin{aligned} f'(x) &= nx^{n-1}+2 \text{이므로 } f'(1)=20 \text{에서} \\ n+2 &= 20 \quad \therefore n=18 \end{aligned}$$

0309 답 ③

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}=7$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0$ 이므로 $f(1)=0$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) \\ \therefore f'(1) &= 7 \end{aligned}$$

$f(x)=x^3+ax^2+b$ 에서 $f'(x)=3x^2+2ax$

$f(1)=0$ 에서

$$1+a+b=0 \quad \therefore a+b=-1 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$f'(1)=7$ 에서

$$3+2a=7 \quad \therefore a=2$$

이를 ㉠에 대입하면

$$2+b=-1 \quad \therefore b=-3$$

$$\therefore a-b=5$$

0310 답 ②

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+4h)-f(1+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+4h)-f(1)+f(1)-f(1+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+4h)-f(1)}{4h} \times 4 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= 4f'(1)-f'(1)=3f'(1) \end{aligned}$$

따라서 $3f'(1)=6$ 이므로 $f'(1)=2$

$f'(x)=6x^2-2x+a$ 이므로 $f'(1)=2$ 에서

$$6-2+a=2 \quad \therefore a=-2$$

0311 답 30

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x+1)+1}{x^2-4} = 2$ 에서 $x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -2} \{f(x+1)+1\} = 0$ 이므로 $f(-1) = -1$ ①

$x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -2$ 일 때 $t \rightarrow -1$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x+1)+1}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x+1)-f(-1)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{f(t)-f(-1)}{(t+1)(t-3)} \\ &= \lim_{t \rightarrow -1} \frac{f(t)-f(-1)}{t-(-1)} \times \lim_{t \rightarrow -1} \frac{1}{t-3} \\ &= -\frac{1}{4}f'(-1)\end{aligned}$$

따라서 $-\frac{1}{4}f'(-1) = 2$ 이므로 $f'(-1) = -8$ ②

$f(x) = x^4 + ax + b$ 에서 $f'(x) = 4x^3 + a$

$f(-1) = -1$ 에서

$$1 - a + b = -1 \quad \therefore a - b = 2 \quad \dots\dots ③$$

$f'(-1) = -8$ 에서

$$-4 + a = -8 \quad \therefore a = -4$$

이를 ③에 대입하면

$$-4 - b = 2 \quad \therefore b = -6 \quad \dots\dots ④$$

따라서 $f(x) = x^4 - 4x - 6$, $f'(x) = 4x^3 - 4$ 이므로

$$f(2) + f'(2) = (16 - 8 - 6) + (32 - 4) = 30 \quad \dots\dots ⑤$$

채점 기준

① $f(-1)$ 의 값 구하기	20%
② $f'(-1)$ 의 값 구하기	30%
③ a, b 의 값 구하기	30%
④ $f(2) + f'(2)$ 의 값 구하기	20%

0312 답 4

(가)에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 삼차함수이므로

$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

(나)에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0 \text{이므로 } f'(0) = 0 \quad \therefore b = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^2 + 2ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (6x + 2a) = 2a$$

따라서 $2a = 2$ 이므로 $a = 1$

즉, $f'(x) = 6x^2 + 2x$ 이므로

$$f'(-1) = 6 - 2 = 4$$

0313 답 8

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{이므로 } f(0) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) \quad \therefore f'(0) = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = 5$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-2\} = 0 \text{이므로 } f(2) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2) \quad \therefore f'(2) = 5$$

$f(0) = 0$ 이므로

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$f'(0) = 1 \text{에서 } c = 1$$

$$f(2) = 2 \text{에서 } 8a + 4b + 2c = 2, \quad 8a + 4b + 2 = 2$$

$$\therefore 2a + b = 0 \quad \dots\dots ①$$

$$f'(2) = 5 \text{에서 } 12a + 4b + c = 5, \quad 12a + 4b + 1 = 5$$

$$\therefore 3a + b = 1 \quad \dots\dots ②$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 1, b = -2$

따라서 $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$ 이므로

$$f'(-1) = 3 + 4 + 1 = 8$$

0314 답 ③

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 2ax + b$$

$f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 주어진 식에 대입하면

$$x(2ax + b) - 2(ax^2 + bx + c) = x + 2$$

$$\therefore -bx - 2c = x + 2$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$-b = 1, \quad -2c = 2 \quad \therefore b = -1, \quad c = -1$$

$$f(1) = 2 \text{에서 } a + b + c = 2$$

$$a - 1 - 1 = 2 \quad \therefore a = 4$$

따라서 $f'(x) = 8x - 1$ 이므로

$$f'(2) = 16 - 1 = 15$$

0315 답 16

$f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면 $f'(x) = 2x + a$

$f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 주어진 식에 대입하면

$$2(x^2 + ax + b) = (x+1)(2x+a)$$

$$\therefore 2x^2 + 2ax + 2b = 2x^2 + (a+2)x + a$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$2a = a + 2, \quad 2b = a \quad \therefore a = 2, \quad b = 1$$

따라서 $f(x) = x^2 + 2x + 1$ 이므로

$$f(3) = 9 + 6 + 1 = 16$$

0316 답 ⑤

$f(x)$ 를 n 차함수라 하면 $f'(x)$ 는 $(n-1)$ 차함수이다.

$\{f'(x)\}^2 = 4f(x) + 1$ 에서 $n=1$ 이면 좌변은 상수함수이고, 우변은 일차함수가 되어 등식이 성립하지 않는다. 즉, $n \geq 2$ 이다.

좌변의 차수는 $2(n-1)$, 우변의 차수는 n 이므로

$$2(n-1) = n \quad \therefore n = 2$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 2ax + b$$

$f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 주어진 식에 대입하면

$$(2ax+b)^2=4(ax^2+bx+c)+1$$

$$\therefore 4a^2x^2+4abx+b^2=4ax^2+4bx+4c+1$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$4a^2=4a, 4ab=4b, b^2=4c+1$$

$$4a^2=4a \text{에서 } a=1 (\because a \neq 0)$$

$$f'(1)=5 \text{에서 } 2a+b=5, 2+b=5 \quad \therefore b=3$$

$$\text{이를 } b^2=4c+1 \text{에 대입하면 } 9=4c+1 \quad \therefore c=2$$

따라서 $f(x)=x^2+3x+2$ 이므로

$$f(3)=9+9+2=20$$

0317 답 8

함수 $f(x)$ 가 $x=-1$ 에서 미분가능하면 $x=-1$ 에서 연속이고 미분계수 $f'(-1)$ 이 존재한다.

(i) $x=-1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)=f(-1)$ 에서

$$-4=-a+b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $f'(-1)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{(ax+b)-(-a+b)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{a(x+1)}{x+1} = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)} &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{(x^3+3x)-(-4)}{x+1} (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{(x+1)(x^2-x+4)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1-} (x^2-x+4)=6 \end{aligned}$$

$$\therefore a=6$$

$$a=6 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } -4=-6+b \quad \therefore b=2$$

$$\therefore a+b=8$$

다른 풀이

$$g(x)=ax+b, h(x)=x^3+3x \text{라 하면}$$

$$g'(x)=a, h'(x)=3x^2+3$$

(i) $x=-1$ 에서 연속이므로 $g(-1)=h(-1)$ 에서

$$-a+b=-4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $f'(-1)$ 이 존재하므로 $g'(-1)=h'(-1)$ 에서

$$a=6$$

$$a=6 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } -6+b=-4 \quad \therefore b=2$$

$$\therefore a+b=8$$

0318 답 2

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x=a$ 에서 미분가능하므로 $x=a$ 에서 연속이고 미분계수 $f'(a)$ 가 존재한다.

(i) $x=a$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)=f(a)$ 에서

$$a^2-2a=2a+b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $f'(a)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{(2x+b)-(2a+b)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{2(x-a)}{x-a} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{(x^2-2x)-(a^2-2a)}{x-a} (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{x^2-2x-a(a-2)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{(x-a)(x+a-2)}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a-} (x+a-2)=2a-2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 2=2a-2 \text{이므로 } a=2$$

$$a=2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 0=4+b \quad \therefore b=-4$$

$$\text{따라서 } f(x)=\begin{cases} 2x-4 & (x \geq 2) \\ x^2-2x & (x < 2) \end{cases} \text{이므로 } f(3)=6-4=2$$

다른 풀이

$$g(x)=2x+b, h(x)=x^2-2x \text{라 하면}$$

$$g'(x)=2, h'(x)=2x-2$$

(i) $x=a$ 에서 연속이므로 $g(a)=h(a)$ 에서

$$2a+b=a^2-2a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $f'(a)$ 가 존재하므로 $g'(a)=h'(a)$ 에서

$$2=2a-2 \quad \therefore a=2$$

$$a=2 \text{를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 4+b=0 \quad \therefore b=-4$$

$$\text{따라서 } f(x)=\begin{cases} 2x-4 & (x \geq 2) \\ x^2-2x & (x < 2) \end{cases} \text{이므로 } f(3)=6-4=2$$

0319 답 ③

$f(x)=\begin{cases} (x-1)(x-2a) & (x \geq 1) \\ -(x-1)(x-2a) & (x < 1) \end{cases}$ 이고 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 미분가능하므로 미분계수 $f'(1)$ 이 존재한다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(x-2a)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x-2a)=1-2a \\ \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x-1)(x-2a)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \{-(x-2a)\}=-1+2a \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 1-2a=-1+2a \text{이므로 } a=\frac{1}{2}$$

0320 답 -6

$0 \leq x < 1$ 에서 $[x]=0$, $1 \leq x < 2$ 에서 $[x]=1$ 이므로

$$f(x)=\begin{cases} x^3+ax+b & (1 \leq x < 2) \\ 0 & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속이고 미분계수 $f'(1)$ 이 존재한다.

(i) $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)=f(1)$ 에서

$$0=1+a+b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x^3+ax+b)-(1+a+b)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^3-1+a(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(x^2+x+1+a)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2+x+1+a)=a+3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{0-0}{x-1} (\because \text{㉑})$$

$$= 0$$

즉, $a+3=0$ 이므로 $a=-3$

$a=-3$ 을 ㉑에 대입하면

$$0=1-3+b \quad \therefore b=2$$

$$\therefore ab=-6$$

0321 답 6

다항식 $x^{10}+x^5+1$ 을 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$ 를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$x^{10}+x^5+1=(x+1)^2Q(x)+ax+b \quad \dots\dots \text{㉑}$$

㉑의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$1-1+1=-a+b \quad \therefore a-b=-1 \quad \dots\dots \text{㉒}$$

㉑의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$10x^9+5x^4=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+a$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-10+5=a \quad \therefore a=-5$$

이를 ㉒에 대입하면

$$-5-b=-1 \quad \therefore b=-4$$

따라서 $R(x)=-5x-4$ 이므로

$$R(-2)=10-4=6$$

공통수학1 다시보기

x 에 대한 다항식 A 를 다항식 $B(B \neq 0)$ 로 나누었을 때의 몫을 Q , 나머지를 R 라 하면

$$A=BQ+R \quad (R \text{는 상수 또는 } (R \text{의 차수}) < (B \text{의 차수}))$$

이고, 이는 x 에 대한 항등식이다.

0322 답 ④

다항식 x^7-ax^3+bx+2 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 0이므로

$$x^7-ax^3+bx+2=(x-1)^2Q(x) \quad \dots\dots \text{㉑}$$

㉑의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1-a+b+2=0 \quad \therefore a-b=3 \quad \dots\dots \text{㉒}$$

㉑의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$7x^6-3ax^2+b=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$7-3a+b=0 \quad \therefore 3a-b=7 \quad \dots\dots \text{㉓}$$

㉒, ㉓을 연립하여 풀면

$$a=2, b=-1$$

$$\therefore a+b=1$$

0323 답 ①

다항식 x^6+2x^3+ax+b 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $3x-4$ 이므로

$$x^6+2x^3+ax+b=(x+1)^2Q(x)+3x-4 \quad \dots\dots \text{㉑}$$

㉑의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$1-2-a+b=-3-4 \quad \therefore a-b=6 \quad \dots\dots \text{㉒}$$

㉑의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$6x^5+6x^2+a=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)+3$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-6+6+a=3 \quad \therefore a=3$$

이를 ㉒에 대입하면

$$3-b=6 \quad \therefore b=-3$$

$$\therefore ab=-9$$

0324 답 2

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)+3}{x+2}=1$ 에서 $x \rightarrow -2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -2} \{f(x)+3\}=0$ 이므로

$$f(-2)=-3 \quad \dots\dots \text{㉑} \quad \dots\dots \text{㉒}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)+3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = f'(-2)$$

$$\therefore f'(-2)=1 \quad \dots\dots \text{㉓} \quad \dots\dots \text{㉔}$$

다항식 $f(x)$ 를 $(x+2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $ax+b$ 이므로

$$f(x)=(x+2)^2Q(x)+ax+b \quad \dots\dots \text{㉕}$$

$$\text{㉑에서 } -2a+b=-3 \quad \dots\dots \text{㉖}$$

㉕의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2(x+2)Q(x)+(x+2)^2Q'(x)+a$$

㉓에서 $a=1$

이를 ㉖에 대입하면

$$-2+b=-3 \quad \therefore b=-1 \quad \dots\dots \text{㉗}$$

$$\therefore a-b=2 \quad \dots\dots \text{㉘}$$

채점 기준

㉒ $f(-2)$ 의 값 구하기	20 %
㉓ $f'(-2)$ 의 값 구하기	30 %
㉗ a, b 의 값 구하기	40 %
㉘ $a-b$ 의 값 구하기	10 %

AB 유형 점검

58~60쪽

0325 답 ③

함수 $f(x)=2x^2-3x+1$ 에서 x 의 값이 a 에서 b 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ &= \frac{(2b^2-3b+1)-(2a^2-3a+1)}{b-a} \\ &= \frac{2(b+a)(b-a)-3(b-a)}{b-a} \\ &= 2(a+b)-3 \end{aligned}$$

따라서 $2(a+b)-3=-1$ 이므로

$$a+b=1$$

0326 답 1/2

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 1에서 $1+h$ 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1}, \text{ 즉 } \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \text{ 이므로}$$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4-h}}{h}$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+h}-\sqrt{4-h}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4+h}-\sqrt{4-h})(\sqrt{4+h}+\sqrt{4-h})}{h(\sqrt{4+h}+\sqrt{4-h})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h(\sqrt{4+h}+\sqrt{4-h})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{4+h}+\sqrt{4-h}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

0327 답 ④

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 \\ &= 2f'(1) = 2 \times 3 = 6 \\ \textcircled{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h)-f(1)}{3h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-3h)-f(1)}{-3h} \times (-1) \\ &= -f'(1) = -3 \\ \textcircled{3} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h)-f(1)}{-h} \times (-1) \\ &= 2f'(1) + f'(1) = 3f'(1) = 3 \times 3 = 9 \\ \textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}f'(1) = \frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2} \\ \textcircled{5} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(1)-f(x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(1)-f(1)+f(1)-f(x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)f(1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)f(1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)f(1) - f'(1) \\ &= 2f(1) - f'(1) = 2 \times 2 - 3 = 1 \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0328 답 8

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-2}{x^2-9} = 1$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)-2\} = 0 \text{ 이므로 } f(3) = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-2}{x^2-9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{(x+3)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}f'(3) \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{6}f'(3) = 1 \text{ 이므로 } f'(3) = 6$$

$$\therefore f(3) + f'(3) = 8$$

0329 답 ⑤

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 는 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 이은 직선의 기울기

이고, $f'(a), f'(b)$ 는 각각 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기이므로

$$f'(b) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(a)$$

0330 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. $0 \leq x < 1$ 에서 $[x] = 0$, $1 \leq x < 2$ 에서 $[x] = 1$ 이므로

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & (1 \leq x < 2) \\ 0 & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)-0}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{0-0}{x-1} = 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

$$\text{ㄴ. } f(x) = \begin{cases} 0 & (x \geq 1) \\ -2x+2 & (x < 1) \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{0-0}{x-1} = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(-2x+2)-0}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-2(x-1)}{x-1} = -2 \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^3-1}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2+x+1) = 3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(3x-2)-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{3(x-1)}{x-1} = 3$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

따라서 보기의 함수 중 $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0331 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄴ. 점 $(-1, f(-1))$ 에서의 접선의 기울기가 양수이므로 $f'(-1) > 0$

ㄷ. 불연속인 x 의 값은 0, 4의 2개이다.

ㄹ. 연속이지만 미분가능하지 않은 x 의 값은 2, 3의 2개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0332 [답] ③

$f(x-y)=f(x)+f(y)-xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)-0$$

$$\therefore f(0)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x-y)=f(x)+f(y)-xy$ 의 양변에 y 대신 $-y$ 를 대입하면

$$f(x+y)=f(x)+f(-y)+xy$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(-h)+xh-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h)}{h} + x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h)-f(0)}{-h} \times (-1) + x \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= -f'(0) + x = x \end{aligned}$$

0333 [답] 2

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f(0)=2 \text{에서 } c=2$$

$$f(1)=8 \text{에서 } a+b+c=8, a+b+2=8$$

$$\therefore a+b=6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(x)=2ax+b \text{이므로 } f'(-1)=0 \text{에서}$$

$$-2a+b=0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=2, b=4$$

따라서 $f(x)=2x^2+4x+2$ 이므로

$$f(-2)=8-8+2=2$$

0334 [답] 27

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 3)$ 을 지나므로 $f(2)=3$

접선 l 의 기울기는 $f'(2)$ 와 같고, 접선 l 은 두 점 $(-1, 0), (2, 3)$

을 지나므로

$$f'(2) = \frac{3-0}{2-(-1)} = 1$$

$$g(x) = (x^2+2x+1)f(x) \text{에서}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^2+2x+1)'f(x) + (x^2+2x+1)f'(x) \\ &= (2x+2)f(x) + (x^2+2x+1)f'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore g'(2) &= 6f(2) + 9f'(2) \\ &= 6 \times 3 + 9 \times 1 = 27 \end{aligned}$$

0335 [답] 5

$f(x)=2x^2+ax+b$ 라 하면 $f'(x)=4x+a$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 2이다.

$$f'(1)=2 \text{에서 } 4+a=2 \quad \therefore a=-2$$

$$f(1)=1 \text{에서 } 2+a+b=1, 2-2+b=1$$

$$\therefore b=1$$

$$\therefore a^2+b^2=5$$

0336 [답] ③

함수 $f(x)=2x^2-3x+5$ 에서 x 의 값이 a 에서 $a+1$ 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a+1)-f(a)}{(a+1)-a} \\ &= \{2(a+1)^2-3(a+1)+5\} - (2a^2-3a+5) \\ &= 4a-1 \end{aligned}$$

따라서 $4a-1=7$ 이므로 $a=2$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+2h)-f(a)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)-f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+2h)-f(2)}{2h} \times 2 \\ &= 2f'(2) \end{aligned}$$

$$f'(x)=4x-3 \text{이므로 } f'(2)=8-3=5$$

따라서 구하는 값은

$$2f'(2)=2 \times 5=10$$

0337 [답] -16

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x)\}^2 - \{f(2)\}^2}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\{f(x)+f(2)\}\{f(x)-f(2)\}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)+f(2)\} \\ &= f'(2) \times 2f(2) = 2f'(2)f(2) \end{aligned}$$

$$f(x)=x^4-2x^3-1 \text{에서 } f'(x)=4x^3-6x^2 \text{이므로}$$

$$f(2)=16-16-1=-1, f'(2)=32-24=8$$

따라서 구하는 값은

$$2f'(2)f(2)=-16$$

0338 [답] 34

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^n-2x-12}{x-2}=k$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (x^n-2x-12)=0 \text{이므로}$$

$$2^n-4-12=0, 2^n=16 \quad \therefore n=4$$

$$f(x)=x^4-2x \text{라 하면 } f(2)=16-4=12 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-2x-12}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$$

$$\therefore f'(2)=k$$

$$f'(x)=4x^3-2 \text{이므로}$$

$$k=f'(2)=32-2=30$$

$$\therefore n+k=34$$

0339 [답] ④

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-g(x)}{x-3}=1$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} \{f(x)-g(x)\}=0 \text{이므로}$$

$$f(3)-g(3)=0, 2-g(3)=0 \quad \therefore g(3)-2=0$$

이차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$g(x)-2=(x-3)(x+a) \text{ (} a \text{는 상수)라 하면}$$

$$g(x)=(x-3)(x+a)+2$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-g(x)}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-(x-3)(x+a)-2}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)-(x-3)(x+a)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} - \lim_{x \rightarrow 3} (x+a) \\ &= f'(3) - (3+a) \\ &= 1-3-a = -a-2\end{aligned}$$

따라서 $-a-2=1$ 이므로 $a=-3$

즉, $g(x)=(x-3)^2+2$ 이므로

$$g(1)=4+2=6$$

0340 답 8

$$f(x)=ax^2+b \text{에서 } f'(x)=2ax$$

$f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 주어진 식에 대입하면

$$8(ax^2+b)=(2ax)^2+4x^2-8$$

$$\therefore 8ax^2+8b=(4a^2+4)x^2-8$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$8a=4a^2+4, 8b=-8$$

$$8a=4a^2+4 \text{에서 } 4a^2-8a+4=0$$

$$(a-1)^2=0 \quad \therefore a=1$$

$$8b=-8 \text{에서 } b=-1$$

따라서 $f(x)=x^2-1$ 이므로

$$f(3)=9-1=8$$

0341 답 ④

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이고 미분계수 $f'(1)$ 이 존재한다.

(i) $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)$ 에서

$$1+a+b=b+4 \quad \therefore a=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(bx+4)-(b+4)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{b(x-1)}{x-1} = b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x^3+ax+b)-(b+4)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{x^3+3x-4}{x-1} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(x-1)(x^2+x+4)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2+x+4)=6\end{aligned}$$

$$\therefore b=6$$

$$\therefore a+b=9$$

다른 풀이

$g(x)=x^3+ax+b$, $h(x)=bx+4$ 라 하면

$$g'(x)=3x^2+a, h'(x)=b$$

(i) $x=1$ 에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$ 에서

$$1+a+b=b+4 \quad \therefore a=3$$

(ii) 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로 $g'(1)=h'(1)$ 에서

$$3+a=b \quad \therefore b=6$$

$$\therefore a+b=9$$

0342 답 13

$f(x+y)=f(x)+f(y)+4xy+1$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0+1$$

$$\therefore f(0)=-1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)+f(h)+4h+1-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+1}{h} + 4 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 4 \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= f'(0) + 4\end{aligned}$$

따라서 $f'(0)+4=5$ 이므로 $f'(0)=1$

$$\begin{aligned}\therefore f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3)+f(h)+12h+1-f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+1}{h} + 12 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 12 \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= f'(0) + 12 = 13\end{aligned}$$

채점 기준

① $f(0)$ 의 값 구하기	20 %
② $f'(0)$ 의 값 구하기	40 %
③ $f'(3)$ 의 값 구하기	40 %

0343 답 11

$h(x)=f(x)g(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)-f(1)g(1)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)-h(1)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)-h(1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}h'(1) \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이므로

$$h'(1)=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$$

$f(x)=-x^2+3x+2$ 에서 $f'(x)=-2x+3$ 이므로

$$f(1)=-1+3+2=4, f'(1)=-2+3=1$$

$g(x)=2x^3-x^2+2x-5$ 에서 $g'(x)=6x^2-2x+2$ 이므로

$$g(1)=2-1+2-5=-2, g'(1)=6-2+2=6$$

$$\therefore h'(1)=1 \times (-2) + 4 \times 6 = 22 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

따라서 구하는 값은

$$\frac{1}{2}h'(1)=\frac{1}{2} \times 22=11 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

채점 기준

① 주어진 극한을 미분계수로 나타내기	50 %
② 미분계수의 값 구하기	40 %
③ 극한값 구하기	10 %

0344 **답 8**

다항식 $x^3 - 3x^2 + b$ 를 $(x-a)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 0이므로

$$x^3 - 3x^2 + b = (x-a)^2 Q(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=a$ 를 대입하면

$$a^3 - 3a^2 + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

①의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2 - 6x = 2(x-a)Q(x) + (x-a)^2 Q'(x)$$

양변에 $x=a$ 를 대입하면

$$3a^2 - 6a = 0, \quad a(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a \neq 0)$$

이를 ②에 대입하면

$$8 - 12 + b = 0 \quad \therefore b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore ab = 8 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① a, b 사이의 관계식 구하기	40%
② a, b 의 값 구하기	50%
③ ab 의 값 구하기	10%

C 실력 향상

61쪽

0345 **답 28**

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 세 점의 x 좌표가 각각 a, b, c 이고 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)$$

$$\therefore f'(x) = (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b)$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 A에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$ 와 같으므로

$$\begin{aligned} f'(a) &= (a-b)(a-c) = (b-a)(c-a) \\ &= \overline{AB} \times \overline{AC} = 4 \times (4+3) = 28 \end{aligned}$$

0346 **답 ②**

일차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 a 이고 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 대칭축이 직선 $x=1$ 이므로 $f(x)=a(x-1)^2+b$ (b 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 2a(x-1) = 2ax - 2a$$

$$|f'(x)| \leq 4x^2 + 5 \text{에서 } |2ax - 2a| \leq 4x^2 + 5$$

$$\therefore -4x^2 - 5 \leq 2ax - 2a \leq 4x^2 + 5$$

$$(i) -4x^2 - 5 \leq 2ax - 2a \text{에서}$$

$$4x^2 + 2ax - 2a + 5 \geq 0$$

모든 실수 x 에 대하여 이 부등식이 성립하려면 이차방정식

$$4x^2 + 2ax - 2a + 5 = 0 \text{의 판별식을 } D_1 \text{이라 할 때,}$$

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - 4(-2a+5) \leq 0$$

$$a^2 + 8a - 20 \leq 0, \quad (a+10)(a-2) \leq 0 \quad \therefore -10 \leq a \leq 2$$

$$(ii) 2ax - 2a \leq 4x^2 + 5 \text{에서}$$

$$4x^2 - 2ax + 2a + 5 \geq 0$$

모든 실수 x 에 대하여 이 부등식이 성립하려면 이차방정식

$$4x^2 - 2ax + 2a + 5 = 0 \text{의 판별식을 } D_2 \text{라 할 때,}$$

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - 4(2a+5) \leq 0$$

$$a^2 - 8a - 20 \leq 0, \quad (a+2)(a-10) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq a \leq 10$$

$$(i), (ii) \text{에서 } -2 \leq a \leq 2$$

그런데 $a \neq 0$ 이므로 $-2 \leq a < 0$ 또는 $0 < a \leq 2$

따라서 a 의 최댓값은 2이다.

공통수학1 다시보기

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$)의 판별식을 D 라 할 때, 모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2 + bx + c \geq 0$ 이 성립하려면

$$\Rightarrow D \leq 0$$

다른 풀이

$f(x) = a(x-1)^2 + b$ (b 는 상수)라 하면 $f'(x) = 2a(x-1)$

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프는 점 $(1, 0)$ 을 지나
는 직선이므로 a 는 오른쪽 그림과 같이

$y=|f'(x)|$ 의 그래프에서 $x < 1$ 인 부분이 함수 $y=4x^2+5$ 의 그래프와 접할 때

$|f'(x)| \leq 4x^2 + 5$ 를 만족시키는 최댓값을 갖는다.

$a > 0, x < 1$ 일 때 $|f'(x)| = 4x^2 + 5$ 에서

$$-2a(x-1) = 4x^2 + 5 \quad \therefore 4x^2 + 2ax + 5 - 2a = 0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

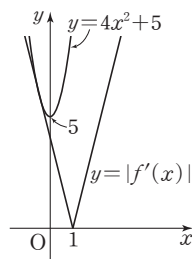
$$\frac{D}{4} = a^2 - 4(5-2a) = 0$$

$$a^2 + 8a - 20 = 0, \quad (a+10)(a-2) = 0 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

따라서 a 의 최댓값은 2이다.

참고 $a < 0$ 인 경우도 같은 방법으로 하면 $a = -2$

이때 a 의 최댓값을 구하는 것이므로 $a > 0$ 인 경우만 생각한다.

0347 **답 9**

$f(x)f'(x) + g(x)g'(x) = 5x$ 에서 $f(x), g(x)$ 는 모두 일차함수이거나 하나는 일차함수이고 하나는 상수함수이다.

$f(0)=g(0)=0$ 이므로 $f(x)=ax, g(x)=bx$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f'(x)=a, \quad g'(x)=b$$

$$f(x)+g(x)=x \text{에서}$$

$$ax+bx=x, \quad (a+b)x=x \quad \therefore a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(x)f'(x)+g(x)g'(x)=5x \text{에서}$$

$$a^2x+b^2x=5x, \quad (a^2+b^2)x=5x \quad \therefore a^2+b^2=5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①에서 $b=1-a$ 이므로 이를 ②에 대입하면

$$a^2 + (1-a)^2 = 5, \quad a^2 - a - 2 = 0, \quad (a+1)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \quad (\because f(3) < 0)$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } -1+b=1 \quad \therefore b=2$$

따라서 $f(x)=-x, g(x)=2x$ 이므로

$$g(3)-f(3)=6-(-3)=9$$

참고 $a=2$ 이면 $f(x)=2x$ 이므로 $f(3)=6 > 0$

0348 ②

ㄱ. 함수 $p(x)f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속
이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0+} p(x)f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} p(x)f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0+} p(x)f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} (x-1)p(x) = -p(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0-} p(x)f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \{-xp(x)\} = 0 \\ \text{즉, } -p(0) &= 0 \text{이므로 } p(0) = 0\end{aligned}$$

ㄴ. 함수 $p(x)f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=2$ 에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{p(x)f(x) - p(2)f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(2x-3)p(x) - p(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(2x-3)p(x) - p(x) + p(x) - p(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{2(x-2)p(x)}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{p(x) - p(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} 2p(x) + p'(2) = 2p(2) + p'(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{p(x)f(x) - p(2)f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x-1)p(x) - p(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x-1)p(x) - p(x) + p(x) - p(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x-2)p(x)}{x-2} + \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{p(x) - p(2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} p(x) + p'(2) = p(2) + p'(2) \\ \text{즉, } 2p(2) + p'(2) &= p(2) + p'(2) \text{이므로 } p(2) = 0\end{aligned}$$

ㄷ. [반례] $g(x) = p(x)\{f(x)\}^2$ 이라 할 때, $p(x) = x^2(x-2)$ 이면

$$g(x) = \begin{cases} x^4(x-2) & (x \leq 0) \\ x^2(x-1)^2(x-2) & (0 < x \leq 2) \\ x^2(2x-3)^2(x-2) & (x > 2) \end{cases}$$

이때 함수 $g(x)$ 는 $x \neq 0, x \neq 2$ 인 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$$\begin{aligned}\text{(i)} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x) - g(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2(x-1)^2(x-2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} x(x-1)^2(x-2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x) - g(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^4(x-2)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} x^3(x-2) = 0\end{aligned}$$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

$$\begin{aligned}\text{(ii)} \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x^2(2x-3)^2(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} x^2(2x-3)^2 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^2(x-1)^2(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} x^2(x-1)^2 = 4\end{aligned}$$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x) = p(x)\{f(x)\}^2$ 은 실수 전체의 집합에서 미분가능하지만 $p(x)$ 는 $x^2(x-2)^2$ 으로 나누어떨어지지 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

04 / 도함수의 활용(1)

A 개념 확인

62~63쪽

0349 ② $y = -4x - 1$

$f(x) = x^2 - 2x$ 라 하면 $f'(x) = 2x - 2$

점 $(-1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(-1) = -2 - 2 = -4$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - 3 = -4(x + 1) \quad \therefore y = -4x - 1$$

0350 ② $y = 3x - 7$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1$ 이라 하면 $f'(x) = x - 1$

점 $(4, 5)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(4) = 4 - 1 = 3$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - 5 = 3(x - 4) \quad \therefore y = 3x - 7$$

0351 ② $y = -7x + 2$

$f(x) = x^3 - 7x + 2$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 7$

점 $(0, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = -7$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y - 2 = -7x \quad \therefore y = -7x + 2$$

0352 ② $y = -5x - 1$

$f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 5$ 라 하면 $f'(x) = -9x^2 + 4x$

점 $(1, -6)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1) = -9 + 4 = -5$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y + 6 = -5(x - 1) \quad \therefore y = -5x - 1$$

0353 ② $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

$f(x) = x^3 - 2$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2$

점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 3$

따라서 점 $(1, -1)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3}$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \quad \therefore y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

0354 ② $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

$f(x) = -x^3 + 8x + 9$ 라 하면 $f'(x) = -3x^2 + 8$

점 $(-2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(-2) = -12 + 8 = -4$$

따라서 점 $(-2, 1)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{4}$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y - 1 = \frac{1}{4}(x + 2) \quad \therefore y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

0355 답 $y=2x+3$

$$f(x)=-x^2+2 \text{라 하면 } f'(x)=-2x$$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+2)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2
이므로 $f'(t)=2$ 에서

$$-2t=2 \quad \therefore t=-1$$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 1)$ 이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y-1=2(x+1) \quad \therefore y=2x+3$$

0356 답 $y=2x+18$ 또는 $y=2x-18$

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-7x \text{라 하면 } f'(x)=x^2-7$$

접점의 좌표를 $(t, \frac{1}{3}t^3-7t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2
이므로 $f'(t)=2$ 에서

$$t^2-7=2, t^2=9 \quad \therefore t=-3 \text{ 또는 } t=3$$

따라서 접점의 좌표는 $(-3, 12)$ 또는 $(3, -12)$ 이므로 구하는 접
선의 방정식은

$$y-12=2(x+3) \text{ 또는 } y+12=2(x-3)$$

$$\therefore y=2x+18 \text{ 또는 } y=2x-18$$

0357 답 $y=4x-1$

$$f(x)=x^2+3 \text{이라 하면 } f'(x)=2x$$

직선 $y=4x$ 에 평행한 직선의 기울기는 4이므로 접점의 좌표를
 (t, t^2+3) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 4이다.

$$f'(t)=4 \text{에서 } 2t=4 \quad \therefore t=2$$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 7)$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-7=4(x-2) \quad \therefore y=4x-1$$

0358 답 $y=x-2$ 또는 $y=x+2$

$$f(x)=-x^3+4x \text{라 하면 } f'(x)=-3x^2+4$$

직선 $y=-x+1$ 에 수직인 직선의 기울기는 1이므로 접점의 좌표를
 $(t, -t^3+4t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 1이다.

$$f'(t)=1 \text{에서 } -3t^2+4=1, t^2=1$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1$$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, -3)$ 또는 $(1, 3)$ 이므로 구하는 직선
의 방정식은

$$y+3=x+1 \text{ 또는 } y-3=x-1$$

$$\therefore y=x-2 \text{ 또는 } y=x+2$$

0359 답 $y=-3x$ 또는 $y=5x$

$$f(x)=x^2+x+4 \text{라 하면 } f'(x)=2x+1$$

접점의 좌표를 (t, t^2+t+4) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=2t+1 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^2+t+4)=(2t+1)(x-t)$$

$$\therefore y=(2t+1)x-t^2+4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0=-t^2+4, t^2=4 \quad \therefore t=-2 \text{ 또는 } t=2$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=-3x \text{ 또는 } y=5x$$

0360 답 $y=3x+5$

$$f(x)=x^3+7 \text{이라 하면 } f'(x)=3x^2$$

접점의 좌표를 (t, t^3+7) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
 $f'(t)=3t^2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3+7)=3t^2(x-t)$$

$$\therefore y=3t^2x-2t^3+7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

직선 $\textcircled{1}$ 이 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$2=-3t^2-2t^3+7, 2t^3+3t^2-5=0$$

$$(t-1)(2t^2+5t+5)=0$$

$$\therefore t=1 (\because t \text{는 실수})$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=3x+5$$

0361 답 0

함수 $f(x)=x^2$ 은 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 연속이고 열린구간

$(-3, 3)$ 에서 미분가능하며 $f(-3)=f(3)=9$ 이므로 롤의 정리에
의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-3, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서

$$2c=0 \quad \therefore c=0$$

0362 답 1

함수 $f(x)=-x^2+2x$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린구간
 $(0, 2)$ 에서 미분가능하며 $f(0)=f(2)=0$ 이므로 롤의 정리에 의하

여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=-2x+2$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서

$$-2c+2=0 \quad \therefore c=1$$

0363 답 3

함수 $f(x)=x^2+x$ 는 닫힌구간 $[1, 5]$ 에서 연속이고 열린구간
 $(1, 5)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c) \text{인 } c \text{가 열린구간 } (1, 5) \text{에 적어도 하나 존재한다.}$$

$$\text{이때 } f'(x)=2x+1 \text{이므로 } \frac{f(5)-f(1)}{5-1}=f'(c) \text{에서}$$

$$\frac{30-2}{5-1}=2c+1$$

$$2c+1=7 \quad \therefore c=3$$

0364 답 $-\frac{1}{2}$

함수 $f(x)=-x^2+5x$ 는 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 연속이고 열린구간
 $(-2, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=f'(c) \text{인 } c \text{가 열린구간 } (-2, 1) \text{에 적어도 하나 존}$$

재한다.

$$\text{이때 } f'(x)=-2x+5 \text{이므로 } \frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=f'(c) \text{에서}$$

$$\frac{4-(-14)}{1-(-2)}=-2c+5$$

$$-2c+5=6 \quad \therefore c=-\frac{1}{2}$$

0365 답 ②

$f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + 1$ 이라 하면 $f'(x) = 3x^2 + 4x + a$
 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(-1, 3)$ 을 지나므로 $f(-1) = 3$ 에서
 $-1 + 2 - a + 1 = 3 \quad \therefore a = -1$
 점 $(-1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1) = -2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - 3 = -2(x + 1) \quad \therefore y = -2x + 1$
 따라서 $b = -2, c = 1$ 이므로
 $a + b + c = -2$

0366 답 ④

$f(x) = 2x^2 + x - 1$ 이라 하면 $f'(x) = 4x + 1$
 점 $(2, 9)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2) = 9$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - 9 = 9(x - 2) \quad \therefore y = 9x - 9$
 따라서 구하는 y 절편은 -9 이다.

0367 답 3

$f(x) = 2x^3 + ax + b$ 라 하면 $f'(x) = 6x^2 + a$
 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(1, 1)$ 을 지나므로 $f(1) = 1$ 에서
 $2 + a + b = 1 \quad \therefore a + b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 6 + a$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - 1 = (6 + a)(x - 1)$
 이 직선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로
 $-1 = -(6 + a) \quad \therefore a = -5$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $-5 + b = -1 \quad \therefore b = 4$
 $\therefore a + 2b = 3$

0368 답 ①

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 2$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x) - 1\} = 0$ 이므로 $f(1) = 1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$
 $\therefore f'(1) = 2$
 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - 1 = 2(x - 1) \quad \therefore y = 2x - 1$
 따라서 $g(x) = 2x - 1$ 이므로
 $g(-1) = -2 - 1 = -3$

0369 답 ④

곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(1, 2)$ 를 지나므로 $f(1) = 2$
 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기가 3이므로 $f'(1) = 3$

$g(x) = (x^3 - 2x)f(x)$ 라 하면
 $g'(x) = (3x^2 - 2)f(x) + (x^3 - 2x)f'(x)$
 $\therefore g'(1) = f(1) - f'(1) = 2 - 3 = -1$
 이때 $g(1) = -f(1) = -2$ 이므로 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(1, -2)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y + 2 = -(x - 1) \quad \therefore y = -x - 1$
 따라서 $a = -1, b = -1$ 이므로
 $ab = 1$

0370 답 $\frac{9}{2}$

$f(x) = x^3 - 2x + 1$ 이라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 2$
 점 $A(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 1$ 이므로 접선의 방정식은
 $y = x - 1 \quad \dots\dots \textcircled{i}$
 곡선 $y = x^3 - 2x + 1$ 과 접선 $y = x - 1$ 의 교점의 x 좌표는
 $x^3 - 2x + 1 = x - 1$ 에서 $x^3 - 3x + 2 = 0$
 $(x + 2)(x - 1)^2 = 0 \quad \therefore x = -2$ 또는 $x = 1$
 따라서 점 B의 좌표는 $(-2, -3)$ 이므로
 $H(-2, 0) \quad \dots\dots \textcircled{ii}$
 따라서 삼각형 AHB의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{BH} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

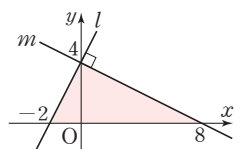
① 점 A에서의 접선의 방정식 구하기	30 %
② 두 점 B, H의 좌표 구하기	40 %
③ 삼각형 AHB의 넓이 구하기	30 %

0371 답 4

$f(x) = -3x^3 + 3x^2 + 2$ 라 하면 $f'(x) = -9x^2 + 6x$
 점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -3$
 따라서 점 $(1, 2)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $\frac{1}{3}$ 이므로 직선의 방정식은
 $y - 2 = \frac{1}{3}(x - 1) \quad \therefore x - 3y + 5 = 0$
 따라서 $a = 1, b = -3$ 이므로
 $a - b = 4$

0372 답 ④

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 4$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$
 점 $P(0, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = 2$ 이므로 접선 l 의 방정식은
 $y - 4 = 2x \quad \therefore y = 2x + 4$
 직선 l 에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이므로 직선 m 의 방정식은
 $y - 4 = -\frac{1}{2}x \quad \therefore y = -\frac{1}{2}x + 4$
 따라서 오른쪽 그림에서 두 직선 l, m 및 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 10 \times 4 = 20$



0373 답 $\frac{1}{2}$

$g(x)=x^3+x^2$ 이라 하면 $g'(x)=3x^2+2x$

점 $P(t, t^3+t^2)$ 에서의 접선의 기울기는 $g'(t)=3t^2+2t$

따라서 점 P 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{3t^2+2t}$ 이므로 직선의 방정식은

$$y-(t^3+t^2)=-\frac{1}{3t^2+2t}(x-t)$$

$$\therefore y=-\frac{1}{3t^2+2t}x+\frac{1}{3t+2}+t^3+t^2$$

$x=0$ 일 때 $y=\frac{1}{3t+2}+t^3+t^2$ 이므로

$$f(t)=\frac{1}{3t+2}+t^3+t^2$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3t+2} + t^3 + t^2 \right) = \frac{1}{2}$$

0374 답 5

$f(x)=-x^2-x+4$ 라 하면 $f'(x)=-2x-1$

직선 $y=3x+2$ 에 평행한 직선의 기울기는 3이므로 접점의 좌표를 $(t, -t^2-t+4)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 3이다.

$$f'(t)=3 \text{에서 } -2t-1=3 \quad \therefore t=-2$$

따라서 접점의 좌표는 $(-2, 2)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-2=3(x+2) \quad \therefore y=3x+8$$

따라서 $a=3, b=8$ 이므로

$$b-a=5$$

0375 답 -1

$f(x)=-x^3+6x^2-10x+7$ 이라 하면

$$f'(x)=-3x^2+12x-10=-3(x-2)^2+2$$

따라서 접선의 기울기는 $x=2$ 에서 최댓값 2를 갖는다. ❶

이때 접점의 좌표는 $(2, 3)$ 이고 접선의 기울기는 2이므로 접선의 방정식은

$$y-3=2(x-2) \quad \therefore y=2x-1 \quad \dots\dots \text{❷}$$

따라서 구하는 y 절편은 -1이다. ❸

채점 기준

❶ 접선의 기울기의 최댓값과 그때의 x 의 값 구하기	50 %
❷ 기울기가 최대인 접선의 방정식 구하기	40 %
❸ y 절편 구하기	10 %

0376 답 ②

$f(x)=x^3-x+2$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 (t, t^3-t+2) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 2이므로 $f'(t)=2$ 에서

$$3t^2-1=2, t^2=1 \quad \therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1$$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, 2)$ 또는 $(1, 2)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-2=2(x+1) \text{ 또는 } y-2=2(x-1)$$

$$\therefore y=2x+4 \text{ 또는 } y=2x$$

$$\therefore k=4 (\because k>0)$$

0377 답 ①

$f(x)=x^3-4x+5$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-4$

점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=-1$ 이므로 접선의 방정식은 $y-2=-(x-1) \quad \therefore y=-x+3 \quad \dots\dots \text{㉠}$

$g(x)=x^4+3x+a$ 라 하면 $g'(x)=4x^3+3$

직선 ㉠과 곡선 $y=g(x)$ 의 접점의 좌표를 (t, t^4+3t+a) 라 하면 이

점에서의 접선의 기울기가 -1이므로 $g'(t)=-1$ 에서

$$4t^3+3=-1, t^3=-1 \quad \therefore t=-1 (\because t \text{는 실수})$$

따라서 점 $(-1, a-2)$ 는 직선 ㉠ 위의 점이므로

$$a-2=4 \quad \therefore a=6$$

0378 답 ④

$f(x)=x^3+2x+1$ 이라 하면 $f'(x)=3x^2+2$

접점의 좌표를 (t, t^3+2t+1) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2+2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(t^3+2t+1)=(3t^2+2)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2+2)x-2t^3+1 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

직선 ㉠이 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3=-2t^3+1, t^3=-1 \quad \therefore t=-1 (\because t \text{는 실수})$$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=5x+3$

따라서 $a=5, b=3$ 이므로

$$a-b=2$$

0379 답 -16

$f(x)=x^4+3$ 이라 하면 $f'(x)=4x^3$

접점의 좌표를 (t, t^4+3) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=4t^3 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^4+3)=4t^3(x-t)$$

$$\therefore y=4t^3x-3t^4+3$$

이 직선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0=-3t^4+3, t^4-1=0$$

$$(t+1)(t-1)(t^2+1)=0$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1 (\because t \text{는 실수})$$

따라서 두 접선의 기울기의 곱은

$$f'(-1)f'(1)=-4 \times 4=-16$$

0380 답 ③

$f(x)=x^3-x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-1$

접점의 좌표를 (t, t^3-t) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2-1 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-1)x-2t^3 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

직선 ㉠이 점 $(1, 4)$ 를 지나므로

$$4=3t^2-1-2t^3, 2t^3-3t^2+5=0$$

$$(t+1)(2t^2-5t+5)=0 \quad \therefore t=-1 (\because t \text{는 실수})$$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은 $y=2x+2$

이 직선이 점 $(k, 6)$ 을 지나므로

$$6=2k+2 \quad \therefore k=2$$

0381 **답** ④

$$f(x)=x^2+4 \text{라 하면 } f'(x)=2x$$

접점의 좌표를 (t, t^2+4) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=2t \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^2+4)=2t(x-t)$$

$$\therefore y=2tx-t^2+4$$

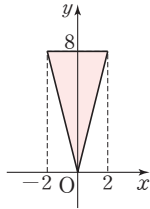
이 직선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0=-t^2+4, t^2=4 \quad \therefore t=-2 \text{ 또는 } t=2$$

따라서 두 접점의 좌표는 $(-2, 8), (2, 8)$ 이므로

구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 8 = 16$$



0382 **답** 6

$$f(x)=x^3-3x^2+2 \text{라 하면 } f'(x)=3x^2-6x$$

접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+2) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2-6t \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^3-3t^2+2)=(3t^2-6t)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+2$$

이 직선이 점 $(3, 0)$ 을 지나므로

$$0=9t^2-18t-2t^3+3t^2+2$$

$$\therefore t^3-6t^2+9t-1=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 x_1, x_2, x_3 은 삼차방정식 $\textcircled{1}$ 의 세 실근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$x_1+x_2+x_3=6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

채점 기준

① 접점의 좌표를 t 라 하고 접선의 방정식 세우기	30%
② t 에 대한 방정식 구하기	40%
③ $x_1+x_2+x_3$ 의 값 구하기	30%

공통수학1 다시보기

삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 의 세 근을 α, β, γ 라 하면

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}, \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

0383 **답** $\frac{13}{2}$

$$f(x)=-x^2+5x \text{라 하면 } f'(x)=-2x+5$$

접점의 좌표를 $(t, -t^2+5t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=-2t+5 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(-t^2+5t)=(-2t+5)(x-t)$$

$$\therefore y=(-2t+5)x+t^2$$

이 직선이 점 $(0, k)$ 를 지나므로

$$k=t^2 \quad \therefore t=-\sqrt{k} \text{ 또는 } t=\sqrt{k}$$

두 접선이 서로 수직이므로 $f'(-\sqrt{k})f'(\sqrt{k})=-1$ 에서

$$(2\sqrt{k}+5)(-2\sqrt{k}+5)=-1$$

$$-4k+25=-1 \quad \therefore k=\frac{13}{2}$$

0384 **답** $\frac{16}{9}$

$$f(x)=x^3+4x^2+5 \text{라 하면 } f'(x)=3x^2+8x$$

접점의 좌표를 (t, t^3+4t^2+5) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2+8t \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^3+4t^2+5)=(3t^2+8t)(x-t)$$

$$\therefore y=(3t^2+8t)x-2t^3-4t^2+5$$

이 직선이 점 $(a, 5)$ 를 지나므로

$$5=(3t^2+8t)a-2t^3-4t^2+5$$

$$t\{2t^2+(4-3a)t-8a\}=0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } 2t^2+(4-3a)t-8a=0$$

접선이 오직 한 개 존재하려면 이차방정식 $2t^2+(4-3a)t-8a=0$

이 $t=0$ 을 중근으로 갖거나 실근을 갖지 않아야 한다.

(i) $2t^2+(4-3a)t-8a=0$ 이 $t=0$ 을 중근으로 가지려면

$$4-3a=0, -8a=0$$

이를 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $2t^2+(4-3a)t-8a=0$ 이 실근을 갖지 않으려면

이차방정식 $2t^2+(4-3a)t-8a=0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$$D=(4-3a)^2-4 \times 2 \times (-8a) < 0$$

$$9a^2+40a+16 < 0, (a+4)(9a+4) < 0$$

$$\therefore -4 < a < -\frac{4}{9}$$

(i), (ii)에서 $-4 < a < -\frac{4}{9}$

따라서 $m=-4, n=-\frac{4}{9}$ 이므로

$$mn=\frac{16}{9}$$

0385 **답** -3

$$f(x)=x^3+1, g(x)=3x^2-3 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2, g'(x)=6x$$

두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

(i) $x=t$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$ 에서

$$t^3+1=3t^2-3, t^3-3t^2+4=0$$

$$(t+1)(t-2)^2=0$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=2$$

(ii) $x=t$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(t)=g'(t) \text{에서}$$

$$3t^2=6t, t(t-2)=0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=2$$

(i), (ii)에서 $t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 9)$ 이고, 접선의 기울기는 12이므로 공통인 접선의 방정식은

$$y-9=12(x-2) \quad \therefore y=12x-15$$

따라서 $a=12, b=-15$ 이므로

$$a+b=-3$$

0386 **답** ③

$$f(x)=-x^3+ax+3, g(x)=bx^2+2 \text{라 하면}$$

$$f'(x)=-3x^2+a, g'(x)=2bx$$

- (i) $x=1$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(1)=g(1)$ 에서
 $2+a=b+2 \quad \therefore a=b \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
- (ii) $x=1$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로
 $f'(1)=g'(1)$ 에서
 $-3+a=2b \quad \therefore a-2b=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
- $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=-3, b=-3$
 $\therefore ab=9$

0387 답 8

$f(x)=x^3+a, g(x)=-x^2+bx+c$ 라 하면
 $f'(x)=3x^2, g'(x)=-2x+b$

- (i) 점 $(1, 2)$ 에서 두 곡선이 만나므로
 $f(1)=2$ 에서 $1+a=2 \quad \therefore a=1 \quad \dots\dots \textcircled{i}$
 $g(1)=2$ 에서 $-1+b+c=2$
 $\therefore b+c=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
- (ii) 점 $(1, 2)$ 에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로
 $f'(1)=g'(1)$ 에서
 $3=-2+b \quad \therefore b=5 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$
 $b=5$ 를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면
 $5+c=3 \quad \therefore c=-2 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$
 $\therefore a+b-c=8 \quad \dots\dots \textcircled{iv}$

채점 기준

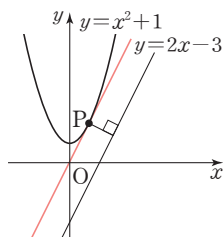
i a의 값 구하기	20 %
ii b의 값 구하기	40 %
iii c의 값 구하기	30 %
iv a+b-c의 값 구하기	10 %

0388 답 -1

- $f(x)=x^3+ax, g(x)=x^2-1$ 이라 하면
 $f'(x)=3x^2+a, g'(x)=2x$
- 두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면
- (i) $x=t$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$ 에서
 $t^3+at=t^2-1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
- (ii) $x=t$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로
 $f'(t)=g'(t)$ 에서
 $3t^2+a=2t \quad \therefore a=2t-3t^2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
- $\textcircled{㉡}$ 을 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하면
 $t^3+(2t-3t^2)t=t^2-1$
 $2t^3-t^2-1=0, (t-1)(2t^2+t+1)=0$
 $\therefore t=1 (\because t \text{는 실수})$
 이를 $\textcircled{㉡}$ 에 대입하면 $a=2-3=-1$

0389 답 ②

곡선 $y=x^2+1$ 에 접하고 직선 $y=2x-3$ 에 평행한 접선의 접점을 $P(t, t^2+1)$ 이라 하면 구하는 거리의 최솟값은 점 P와 직선 $y=2x-3$ 사이의 거리와 같다.
 $f(x)=x^2+1$ 이라 하면
 $f'(x)=2x$



접선의 기울기가 2이므로 $f'(t)=2$ 에서
 $2t=2 \quad \therefore t=1$

따라서 P(1, 2)이므로 점 P와 직선 $y=2x-3$, 즉 $2x-y-3=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2-2-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

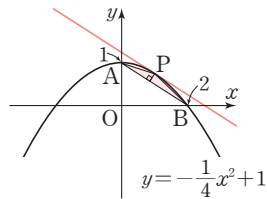
공통수학2 다시보기

점 (x_1, y_1) 과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

0390 답 $\frac{1}{4}$

삼각형 PAB의 넓이가 최대가 될 때는 곡선 $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ 에 접하고 직선 AB에 평행한 접선의 접점이 P일 때이다.



$f(x)=-\frac{1}{4}x^2+1$ 이라 하면

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x$$

직선 AB의 기울기는 $-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ 이므로 점 P의 좌표를

$(t, -\frac{1}{4}t^2+1)$ 이라 하면 $f'(t)=-\frac{1}{2}$ 에서

$$-\frac{1}{2}t=-\frac{1}{2} \quad \therefore t=1$$

따라서 점 P의 좌표는 $(1, \frac{3}{4})$ 이다.

직선 AB의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}(x-2) \quad \therefore x+2y-2=0$$

점 P와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{|1+\frac{3}{2}-2|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{\sqrt{5}}{10}$$

$AB=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{10} = \frac{1}{4}$$

0391 답 ③

곡선 $y=x^2$ 에 접하고 직선 $y=2tx-1$ 에 평행한 접선의 접점이 점 P이다.

$f(x)=x^2$ 이라 하면 $f'(x)=2x$

점 P의 좌표를 (s, s^2) 이라 하면 점 P에서의 접선의 기울기가 $2t$ 이므로 $f'(s)=2t$ 에서

$$2s=2t \quad \therefore s=t$$

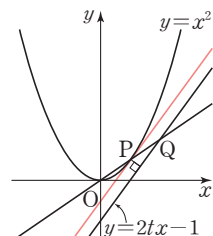
$$\therefore P(t, t^2)$$

직선 OP의 방정식은 $y=tx$

두 직선 $y=tx, y=2tx-1$ 의 교점의 x 좌표는 $tx=2tx-1$ 에서

$$tx=1 \quad \therefore x=\frac{1}{t}$$

$$\therefore Q\left(\frac{1}{t}, 1\right)$$



$$\begin{aligned}
\therefore \overline{PQ} &= \sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2 + (1-t^2)^2} = \sqrt{\frac{(1-t^2)^2}{t^2} + (1-t^2)^2} \\
&= \sqrt{(1-t^2)^2 \left(\frac{1}{t^2} + 1\right)} = \sqrt{\frac{(1-t^2)^2(1+t^2)}{t^2}} \\
&= \frac{1-t^2}{t} \sqrt{1+t^2} \quad (\because 0 < t < 1) \\
&= \frac{(1+t)(1-t)}{t} \sqrt{1+t^2} \\
\therefore \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\overline{PQ}}{1-t} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{\frac{(1+t)(1-t)}{t} \sqrt{1+t^2}}{1-t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{(1+t)(1-t) \sqrt{1+t^2}}{t(1-t)} \\
&= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{(1+t) \sqrt{1+t^2}}{t} \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

0392 답 $\sqrt{17}$

$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ 이라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 4x$

점 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2) = 4$

원의 중심이 x 축 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면 두 점 $(2, 1)$, $(a, 0)$ 을 지나는 직선은 점 $(2, 1)$ 에서의 접선과 서로 수직이다.

따라서 $\frac{-1}{a-2} \times 4 = -1$ 이므로

$$a-2=4 \quad \therefore a=6$$

이때 원의 반지름의 길이는 두 점 $(2, 1)$, $(6, 0)$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(6-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

0393 답 $y=2x-2$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2$ 이라 하면 $f'(x) = x$

원과 곡선의 접점을 $P\left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$ 이라 하면 점 P 에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{2}t^2 = t(x - t)$$

$$\therefore y = tx - \frac{1}{2}t^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

원의 중심을 C 라 하면 직선 CP 는 접선 $\textcircled{1}$ 과 서로 수직이므로

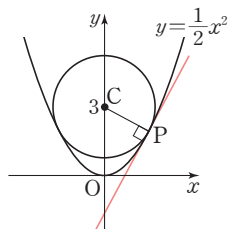
$$\frac{\frac{1}{2}t^2 - 3}{t} \times t = -1, \quad t^2 = 4$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 2$$

이때 기울기가 양수이므로 $t = 2$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 구하는 접선의 방정식은

$$y = 2x - 2$$



0394 답 ②

함수 $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 2$ 는 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 0)$ 에서 미분가능하며 $f(-1) = f(0) = -2$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 0)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서

$$3c^2 + 4c + 1 = 0, \quad (c+1)(3c+1) = 0$$

$$\therefore c = -\frac{1}{3} \quad (\because -1 < c < 0)$$

0395 답 ②

함수 $f(x) = x^3 - 6x + 1$ 은 닫힌구간 $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$ 에서 미분가능하며 $f(-\sqrt{6}) = f(\sqrt{6}) = 1$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(-\sqrt{6}, \sqrt{6})$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 3x^2 - 6$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서

$$3c^2 - 6 = 0, \quad c^2 = 2 \quad \therefore c = -\sqrt{2} \text{ 또는 } c = \sqrt{2}$$

따라서 모든 실수 c 의 값의 곱은

$$-\sqrt{2} \times \sqrt{2} = -2$$

0396 답 $\frac{1}{2}$

함수 $f(x) = x^2 - kx + 1$ 은 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 미분가능하다.

$f(-1) = f(2)$ 에서

$$1 + k + 1 = 4 - 2k + 1 \quad \therefore k = 1 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

따라서 $f(x) = x^2 - x + 1$ 에 대하여 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 2x - 1$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서

$$2c - 1 = 0 \quad \therefore c = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

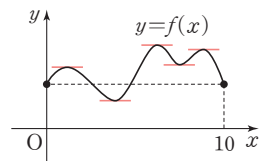
채점 기준

① k 의 값 구하기	50 %
② c 의 값 구하기	50 %

0397 답 5

$f(0) = f(10)$ 이므로 닫힌구간 $[0, 10]$ 에서 롤의 정리를 만족시키는 실수 c 는 x 축에 평행한 접선을 갖는 점의 x 좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 x 축에 평행한 접선을 5개 그을 수 있으므로 구하는 실수 c 의 개수는 5이다.



0398 답 1

함수 $f(x) = x^3 + x - 1$ 은 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 3x^2 + 1$ 이므로 $\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = f'(c)$ 에서

$$\frac{9 - (-3)}{2 - (-1)} = 3c^2 + 1$$

$$3c^2 + 1 = 4, \quad c^2 = 1$$

$$\therefore c = 1 \quad (\because -1 < c < 2)$$

0399 답 ①

함수 $f(x) = -x^2 + 3x$ 는 닫힌구간 $[1, k]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, k)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(k) - f(1)}{k - 1} = f'(c) \text{인 } c \text{가 열린구간 } (1, k) \text{에 적어도 하나 존재한다.}$$

이때 $f'(x) = -2x + 3$ 이고, $c = 2$ 이므로 $\frac{f(k) - f(1)}{k - 1} = f'(c)$ 에서

$$\frac{(-k^2 + 3k) - 2}{k - 1} = -1$$

$$k^2 - 4k + 3 = 0, (k - 1)(k - 3) = 0$$

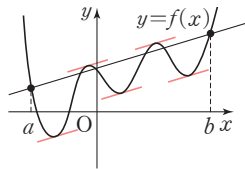
$$\therefore k = 3 (\because k > 2)$$

0400 답 5

닫힌구간 $[a, b]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c 는 열린구간 (a, b) 에서 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 를 지나는 직선에 평행한 접선을 갖는 점의 x 좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점

$(a, f(a))$, $(b, f(b))$ 를 지나는 직선에 평행한 접선을 5개 그을 수 있으므로 구하는 실수 c 의 개수는 5이다.



0401 답 ③

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 2x - 2$ 이므로

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 2c - 2 \quad \therefore k = 2c - 2$$

a, b ($a < b$)는 구간 $[-3, 0]$ 에 속하는 임의의 실수이므로

$$-3 < c < 0 \quad \therefore -8 < 2c - 2 < -2$$

따라서 $-8 < k < -2$ 이므로 모든 정수 k 의 값의 합은

$$-7 + (-6) + (-5) + (-4) + (-3) = -25$$

0402 답 ⑤

함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(2, 3)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} = f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(2, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 (4)에서 $|f'(x)| \leq 2$ 이므로

$$\left| \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} \right| \leq 2$$

$$|4 - f(2)| \leq 2 (\because (7))$$

$$-2 \leq 4 - f(2) \leq 2, -6 \leq -f(2) \leq -2$$

$$\therefore 2 \leq f(2) \leq 6$$

따라서 $f(2)$ 의 최댓값은 6, 최솟값은 2이므로 구하는 합은

$$6 + 2 = 8$$

AB 유형 점검

70~72쪽

0403 답 1

$f(x) = x^3 - x^2 + 8$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

점 $(-1, 6)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1) = 5$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 6 = 5(x + 1)$$

$$\therefore y = 5x + 11$$

이 직선이 점 $(-2, a)$ 를 지나므로

$$a = -10 + 11 = 1$$

0404 답 ①

점 $(0, f(0))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(0) = f'(0)x$$

$$\therefore y = f'(0)x + f(0)$$

이 접선의 방정식이 $y = 3x - 1$ 과 일치하므로

$$f'(0) = 3, f(0) = -1$$

$$g(x) = (x + 2)f(x) \text{에서}$$

$$g'(x) = f(x) + (x + 2)f'(x)$$

$$\therefore g'(0) = f(0) + 2f'(0)$$

$$= -1 + 2 \times 3 = 5$$

0405 답 ⑤

삼차함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이고 $f(0) = 0$ 이므로

$$f(x) = x^3 + px^2 + qx \text{ (} p, q \text{는 상수)라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2px + q$$

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 1}{x - a} = 3$ 에서 $x \rightarrow a$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - 1\} = 0 \text{이므로 } f(a) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - 1}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

$$\therefore f'(a) = 3$$

따라서 점 $(a, 1)$ 에서의 접선의 기울기가 $f'(a) = 3$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = 3(x - a)$$

$$\therefore y = 3x - 3a + 1$$

이 접선의 y 절편이 4이므로

$$-3a + 1 = 4$$

$$\therefore a = -1$$

따라서 $f(-1) = 1$, $f'(-1) = 3$ 이므로

$$-1 + p - q = 1, 3 - 2p + q = 3$$

$$\therefore p - q = 2, 2p - q = 0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$p = -2, q = -4$$

따라서 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x$ 이므로

$$f(1) = 1 - 2 - 4 = -5$$

0406 **답** ①

$f(x)=x^3-3x^2+2x+2$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-6x+2$
 점 A(0, 2)에서의 접선의 기울기는 $f'(0)=2$
 따라서 점 A에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{2}$ 이므로 직선의 방정식은
 $y-2=-\frac{1}{2}x \quad \therefore y=-\frac{1}{2}x+2$
 $0=-\frac{1}{2}x+2$ 에서 $x=4$
 따라서 구하는 x 절편은 4이다.

0407 **답** 2

$f(x)=x^3+x+k$ 라 하면 $f'(x)=3x^2+1$
 점 (1, a)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=4$
 따라서 점 (1, a)에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{4}$ 이므로 직선의 방정식은
 $y-a=-\frac{1}{4}(x-1) \quad \therefore y=-\frac{1}{4}x+a+\frac{1}{4}$
 이 직선이 점 (-3, 2)를 지나므로
 $2=-\frac{3}{4}+a+\frac{1}{4} \quad \therefore a=1$
 따라서 곡선 $y=f(x)$ 가 점 (1, 1)을 지나므로 $f(1)=1$ 에서
 $1+1+k=1 \quad \therefore k=-1$
 $\therefore a-k=2$

0408 **답** 4

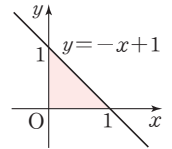
$f(x)=x^4-2x+a$ 라 하면 $f'(x)=4x^3-2$
 점점의 좌표를 (t, t^4-2t+a) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 2이므로 $f'(t)=2$ 에서
 $4t^3-2=2, t^3=1$
 $\therefore t=1$ ($\because t$ 는 실수)
 따라서 점점의 좌표는 (1, a-1)이고 이 점이 직선 $y=2x+1$ 위의 점이므로
 $a-1=3 \quad \therefore a=4$

0409 **답** $2\sqrt{2}$

$f(x)=x^3-4x+5$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-4$
 직선 $x+y+1=0$, 즉 $y=-x-1$ 에 평행한 직선의 기울기는 -1이므로 점점의 좌표를 (t, t^3-4t+5) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 -1이다.
 $f'(t)=-1$ 에서
 $3t^2-4=-1, t^2=1$
 $\therefore t=-1$ 또는 $t=1$
 따라서 점점의 좌표는 (-1, 8) 또는 (1, 2)이므로 접선의 방정식은
 $y-8=-(x+1)$ 또는 $y-2=-(x-1)$
 $\therefore x+y-7=0$ 또는 $x+y-3=0$
 따라서 두 직선 사이의 거리는 직선 $x+y-7=0$ 위의 점 (0, 7)과 직선 $x+y-3=0$ 사이의 거리와 같으므로
 $\frac{|7-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

0410 **답** $\frac{1}{2}$

$f(x)=x^3-3x^2+2x$ 라 하면
 $f'(x)=3x^2-6x+2=3(x-1)^2-1$
 따라서 접선의 기울기는 $x=1$ 에서 최솟값 -1을 갖는다.
 이때 점점의 좌표는 (1, 0)이고 접선의 기울기가 -1이므로 접선의 방정식은
 $y=-(x-1) \quad \therefore y=-x+1$
 따라서 구하는 삼각형의 넓이는
 $\frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$

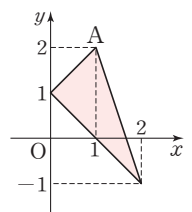


0411 **답** 6

$f(x)=x^2-2x$ 라 하면 $f'(x)=2x-2$
 점점의 좌표를 (t, t^2-2t) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는
 $f'(t)=2t-2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(t^2-2t)=(2t-2)(x-t)$
 $\therefore y=(2t-2)x-t^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 직선 $\textcircled{1}$ 이 점 (0, -4)를 지나므로
 $-4=-t^2, t^2=4 \quad \therefore t=-2$ 또는 $t=2$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 접선의 방정식은
 $y=-6x-4$ 또는 $y=2x-4$
 이때 접선의 기울기가 양수이므로
 $a=2, b=-4$
 $\therefore a-b=6$

0412 **답** 2

$f(x)=-x^2+x+1$ 이라 하면 $f'(x)=-2x+1$
 점점의 좌표를 $(t, -t^2+t+1)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=-2t+1$ 이므로 접선의 방정식은
 $y-(-t^2+t+1)=(-2t+1)(x-t)$
 $\therefore y=(-2t+1)x+t^2+1$
 이 직선이 점 (1, 2)를 지나므로
 $2=-2t+1+t^2+1, t^2-2t=0, t(t-2)=0$
 $\therefore t=0$ 또는 $t=2$
 따라서 두 점점의 좌표는 (0, 1), (2, -1)이므로 구하는 삼각형 ABC의 넓이는
 $2 \times 3 - \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 3 \right) = 2$



0413 **답** ④

$f(x)=x^3+a, g(x)=-x^2+bx+c$ 라 하면
 $f'(x)=3x^2, g'(x)=-2x+b$
 점점의 좌표를 $(t, 3t-1)$ 이라 하면 이 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 3이므로
 $f'(t)=3$ 에서 $3t^2=3, t^2=1$
 $\therefore t=1$ ($\because t>0$)

$$g'(t)=3 \text{에서 } -2t+b=3, -2+b=3$$

$$\therefore b=5$$

따라서 점점의 좌표가 (1, 2)이므로

$$f(1)=2 \text{에서 } 1+a=2 \quad \therefore a=1$$

$$g(1)=2 \text{에서 } -1+b+c=2, -1+5+c=2$$

$$\therefore c=-2$$

$$\therefore a+b-c=8$$

0414 답 ①

$$f(x)=-x^3+5x-3 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=-3x^2+5$$

점 P(1, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-1=2(x-1) \quad \therefore y=2x-1$$

따라서 점 R의 좌표는 (0, -1)이다.

곡선 $y=-x^3+5x-3$ 과 접선 $y=2x-1$ 의 교점의 x 좌표는

$$-x^3+5x-3=2x-1 \text{에서}$$

$$x^3-3x+2=0, (x+2)(x-1)^2=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 점 Q의 좌표는 (-2, -5)이다.

한편 삼각형 ARQ의 넓이가 최대가 될 때는 곡선 $y=-x^3+5x-3$ 에 접하고 직선 QR에 평행한 접선의 접점이 A일 때이다.

점 A의 좌표를 $(t, -t^3+5t-3)$ 이라 하면 점 A에서의 접선의 기울기가 2

이므로 $f'(t)=2$ 에서

$$-3t^2+5=2, t^2=1$$

$$\therefore t=-1 \quad (\because -2 < t < 1)$$

따라서 점 A의 좌표는 (-1, -7)이므로 점 A와 직선 $y=2x-1$,

즉 $2x-y-1=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-2+7-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$QR=\sqrt{2^2+(-1+5)^2}=2\sqrt{5}$ 이므로 삼각형 ARQ의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{4\sqrt{5}}{5} = 4$$

0415 답 (2, 2)

$$f(x)=-x^2+2x+2 \text{라 하면}$$

$$f'(x)=-2x+2$$

원과 곡선의 접점을 $P(t, -t^2+2t+2)$ 라

하면 점 P에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=-2t+2$$

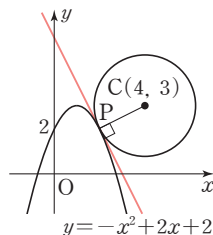
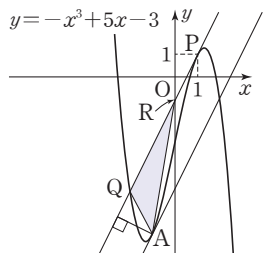
원의 중심을 C라 하면 직선 CP의 기울기는

$$\frac{(-t^2+2t+2)-3}{t-4} = \frac{t^2-2t+1}{4-t}$$

점 P에서의 접선은 직선 CP와 서로 수직이므로

$$(-2t+2) \times \frac{t^2-2t+1}{4-t} = -1$$

$$(-2t+2)(t^2-2t+1)=t-4$$



$$2t^3-6t^2+7t-6=0, (t-2)(2t^2-2t+3)=0$$

$$\therefore t=2 \quad (\because t \text{는 실수})$$

따라서 구하는 점점의 좌표는 (2, 2)이다.

0416 답 3

함수 $f(x)=x^4-8x^2+5$ 는 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-3, 3)$ 에서 미분가능하며 $f(-3)=f(3)=14$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-3, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=4x^3-16x$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서

$$4c^3-16c=0$$

$$c(c+2)(c-2)=0$$

$$\therefore c=-2 \text{ 또는 } c=0 \text{ 또는 } c=2$$

따라서 구하는 실수 c 의 개수는 3이다.

0417 답 ③

함수 $f(x)=x^2+ax+1$ 은 닫힌구간 $[1, 5]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$ 에서 미분가능하다.

$$f(1)=f(5) \text{에서}$$

$$1+a+1=25+5a+1 \quad \therefore a=-6$$

따라서 $f(x)=x^2-6x+1$ 이므로

$$f'(x)=2x-6$$

$$f'(c_1)=0 \text{에서}$$

$$2c_1-6=0 \quad \therefore c_1=3$$

함수 $f(x)=x^2-6x+1$ 은 닫힌구간 $[1, 6]$ 에서 연속이고 열린구간

$(1, 6)$ 에서 미분가능하므로 $\frac{f(6)-f(1)}{6-1}=f'(c_2)$ 에서

$$\frac{1-(-4)}{6-1}=2c_2-6$$

$$2c_2-6=1 \quad \therefore c_2=\frac{7}{2}$$

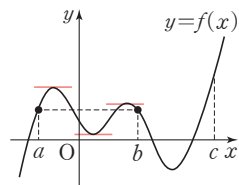
$$\therefore c_2-c_1=\frac{1}{2}$$

0418 답 7

$f(a)=f(b)$ 이므로 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 롤의 정리를 만족시키는 실수 c_1 은 x 축에 평행한 접선을 갖는 점의 x 좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 x 축에 평행한 접선을 3개 그을 수 있으므로 실수 c_1 의 개수는 3이다.

$$\therefore p=3$$



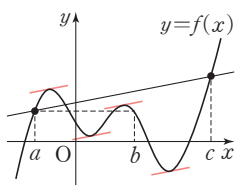
닫힌구간 $[a, c]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c_2 는 두 점 $(a, f(a)), (c, f(c))$ 를 지나는 직선에 평행한 접선을 갖는 점의 x 좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점

$(a, f(a)), (c, f(c))$ 를 지나는 직선에 평행한 접선을 4개 그을 수 있으므로 실수 c_2 의 개수는 4이다.

$$\therefore q=4$$

$$\therefore p+q=7$$



0419 답 ③

함수 $f(x)=4x^2-3x+10$ 은 닫힌구간 $[n, n+2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(n, n+2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(n+2)-f(n)}{(n+2)-n}=f'(a_n)$ 인 a_n 이 열린구간 $(n, n+2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\begin{aligned} \text{이때 } f'(x) &= 8x-3 \text{이므로 } \frac{f(n+2)-f(n)}{(n+2)-n} = f'(a_n) \text{에서} \\ \frac{4(n+2)^2-3(n+2)+10}{(n+2)-n} - (4n^2-3n+10) &= 8a_n-3 \\ \frac{16n+10}{2} &= 8a_n-3 \\ \therefore a_n &= n+1 \\ \therefore a_1+a_3+a_5 &= 2+4+6=12 \end{aligned}$$

0420 답 $y=9x-32$

$f(x)=x^3-6x^2+9x$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-12x+9$
점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=0$ 이므로 접선의 방정식은 $y-4=0 \times (x-1) \quad \therefore y=4$ ①
곡선 $y=x^3-6x^2+9x$ 와 접선 $y=4$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3-6x^2+9x=4$ 에서 $x^3-6x^2+9x-4=0, (x-1)^2(x-4)=0$
 $\therefore x=1$ 또는 $x=4$
따라서 점 P의 좌표는 $(4, 4)$ 이다. ②
이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(4)=9$ 이므로 구하는 접선의 방정식은 $y-4=9(x-4) \quad \therefore y=9x-32$ ③

채점 기준

① 점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 방정식 구하기	30 %
② 점 P의 좌표 구하기	40 %
③ 점 P에서의 접선의 방정식 구하기	30 %

0421 답 8

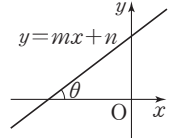
$f(x)=-2x^3+7x+1$ 이라 하면 $f'(x)=-6x^2+7$
 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기가 45° 인 접선의 기울기는 $\tan 45^\circ=1$ 이므로 접점의 좌표를 $(t, -2t^3+7t+1)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 1이다.
 $f'(t)=1$ 에서 $-6t^2+7=1, t^2=1$
 $\therefore t=-1$ 또는 $t=1$ ①
따라서 접점의 좌표는 $(-1, -4)$ 또는 $(1, 6)$ 이므로 접선의 방정식은 $y+4=x+1$ 또는 $y-6=x-1$
 $\therefore y=x-3$ 또는 $y=x+5$ ②
따라서 $A(0, -3), B(0, 5)$ 또는 $A(0, 5), B(0, -3)$ 이므로 $\overline{AB}=5-(-3)=8$ ③

채점 기준

① 접점의 x 좌표 구하기	40 %
② 접선의 방정식 구하기	30 %
③ 선분 AB의 길이 구하기	30 %

중3 다시보기

직선 $y=mx+n$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는
예각의 크기를 θ 라 할 때, 직선의 기울기 m 은
 $m=\tan \theta$



0422 답 -4

$f(x)=\frac{1}{2}x^2$ 이라 하면 $f'(x)=x$
점점의 좌표를 $(t, \frac{1}{2}t^2)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=t$ 이므로 접선의 방정식은 $y-\frac{1}{2}t^2=t(x-t)$
 $\therefore y=tx-\frac{1}{2}t^2$ ①
원의 중심 $(0, 3)$ 과 점점 $(t, \frac{1}{2}t^2)$ 을 지나는 직선은 그 점점에서의 접선과 서로 수직이다.
따라서 $\frac{\frac{1}{2}t^2-3}{t} \times t = -1$ 이므로 $\frac{1}{2}t^2-3=-1, t^2=4$
 $\therefore t=-2$ 또는 $t=2$ ②
따라서 두 직선 l, m 의 기울기의 곱은 $-2 \times 2 = -4$ ③

채점 기준

① 접선의 방정식 세우기	30 %
② 점점의 x 좌표 구하기	50 %
③ 두 직선 l, m 의 기울기의 곱 구하기	20 %

C 실력 향상

73쪽

0423 답 $\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{1}{2}x^2+k$ 라 하면 $f'(x)=x$
수직인 두 접선의 접점의 좌표를 각각 $(\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2+k), (\beta, \frac{1}{2}\beta^2+k)$
라 하면 두 접선의 기울기는 각각 $f'(\alpha)=\alpha, f'(\beta)=\beta$
두 접선이 서로 수직이므로 $\alpha\beta=-1$ ㉠
점 $(\alpha, \frac{1}{2}\alpha^2+k)$ 에서의 접선의 방정식은 $y-(\frac{1}{2}\alpha^2+k)=\alpha(x-\alpha)$
 $\therefore y=\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2+k$

점 $(\beta, \frac{1}{2}\beta^2 + k)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - \left(\frac{1}{2}\beta^2 + k\right) = \beta(x - \beta) \quad \therefore y = \beta x - \frac{1}{2}\beta^2 + k$$

두 접선의 교점의 x 좌표는 $\alpha x - \frac{1}{2}\alpha^2 + k = \beta x - \frac{1}{2}\beta^2 + k$ 에서

$$(\alpha - \beta)x = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2), (\alpha - \beta)x = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

$$\therefore x = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad (\because \alpha \neq \beta)$$

따라서 두 접선의 교점의 좌표는 $(\frac{\alpha + \beta}{2}, \frac{\alpha\beta}{2} + k)$ 이고, 이 점이 항상 x 축 위에 있으려면

$$\frac{\alpha\beta}{2} + k = 0, -\frac{1}{2} + k = 0 \quad (\because \text{㉠})$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

0424 [답] ③

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + 1 \text{에서 } f'(x) = x^2 - 2kx$$

기울기가 $3k^2$ 인 접선의 접점의 좌표를 $(t, \frac{1}{3}t^3 - kt^2 + 1)$ 이라 하면

접선의 기울기는 $f'(t) = t^2 - 2kt$ 이므로 $f'(t) = 3k^2$ 에서

$$t^2 - 2kt = 3k^2, t^2 - 2kt - 3k^2 = 0$$

$$(t + k)(t - 3k) = 0 \quad \therefore t = -k \text{ 또는 } t = 3k$$

이때 $A(-k, 1 - \frac{4}{3}k^3)$, $B(3k, 1)$ 이라 하자.

점 A에서의 접선 l 의 방정식은

$$y - \left(1 - \frac{4}{3}k^3\right) = 3k^2(x + k) \quad \therefore y = 3k^2x + \frac{5}{3}k^3 + 1$$

점 B에서의 접선 m 의 방정식은

$$y - 1 = 3k^2(x - 3k) \quad \therefore y = 3k^2x - 9k^3 + 1$$

x 축에 평행한 접선의 기울기는 0이므로 접점의 좌표를

$(s, \frac{1}{3}s^3 - ks^2 + 1)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 0이다.

$f'(s) = s^2 - 2ks$ 이므로 $f'(s) = 0$ 에서

$$s^2 - 2ks = 0, s(s - 2k) = 0$$

$$\therefore s = 0 \text{ 또는 } s = 2k$$

접점의 좌표는 $(0, 1)$, $(2k, 1 - \frac{4}{3}k^3)$ 이므로 x 축에 평행한 두 접선의 방정식은

$$y = 1, y = 1 - \frac{4}{3}k^3$$

점 A의 y 좌표가 $1 - \frac{4}{3}k^3$ 이므로 점 A는 직선 l 과 직선 $y = 1 - \frac{4}{3}k^3$ 의 교점이고, 점 B의 y 좌표가 1이므로 점 B는 직선 m 과 직선 $y = 1$ 의 교점이다.

이때 직선 l 과 직선 $y = 1$ 의 교점을 C,

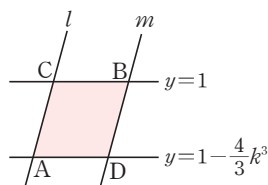
직선 m 과 직선 $y = 1 - \frac{4}{3}k^3$ 의 교점을

D라 하면 사각형 AD BC는 평행사변형이다.

점 D의 x 좌표는

$$3k^2x - 9k^3 + 1 = 1 - \frac{4}{3}k^3 \text{에서}$$

$$3k^2x = \frac{23}{3}k^3 \quad \therefore x = \frac{23}{9}k \quad (\because k > 0)$$



따라서 $D(\frac{23}{9}k, 1 - \frac{4}{3}k^3)$ 이므로

$$\overline{AD} = \frac{23}{9}k - (-k) = \frac{32}{9}k$$

두 직선 $y = 1 - \frac{4}{3}k^3$, $y = 1$ 사이의 거리는

$$1 - \left(1 - \frac{4}{3}k^3\right) = \frac{4}{3}k^3$$

이때 평행사변형 AD BC의 넓이가 24이므로

$$\frac{32}{9}k \times \frac{4}{3}k^3 = 24, k^4 = \frac{81}{16}$$

$$\therefore k = \frac{3}{2} \quad (\because k > 0)$$

0425 [답] ⑤

곡선 $y = 4x^3$ 은 원점에 대하여 대칭이므로 평행한 두 접선과 그때의 접점도 각각 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 점 $(a, 0)$ 에서 곡선 $y = 4x^3$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를

$(t, 4t^3)$ 이라 하면 점 $(0, a)$ 에서 곡선 $y = 4x^3$ 에 그은 접선의 접점의 좌표는 $(-t, -4t^3)$ 이다.

$$f(x) = 4x^3 \text{이라 하면 } f'(x) = 12x^2$$

점 $(t, 4t^3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = 12t^2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 4t^3 = 12t^2(x - t) \quad \therefore y = 12t^2x - 8t^3$$

이 직선이 점 $(a, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 12t^2a - 8t^3 \quad \therefore a = \frac{2}{3}t \quad \dots\dots \text{㉠}$$

점 $(-t, -4t^3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-t) = 12t^2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y + 4t^3 = 12t^2(x + t) \quad \therefore y = 12t^2x + 8t^3$$

이 직선이 점 $(0, a)$ 를 지나므로

$$a = 8t^3 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡에서 } \frac{2}{3}t = 8t^3, t = 12t^3$$

$$t(12t^2 - 1) = 0$$

이때 $a > 0$ 이므로 ㉠에서 $t > 0$

$$\text{따라서 } 12t^2 - 1 = 0 \text{이므로 } t = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}t = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

0426 [답] 9

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

따라서 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[x-1, x+2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(x-1, x+2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{f(x+2) - f(x-1)}{(x+2) - (x-1)} = f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(x-1, x+2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $x-1 < c < x+2$ 에서 $x \rightarrow \infty$ 이면 $c \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x-1) - f(x+2)\} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x+2) - f(x-1)}{(x+2) - (x-1)} \times (-3) \\ &= \lim_{c \rightarrow \infty} f'(c) \times (-3) \\ &= -3 \times (-3) = 9 \end{aligned}$$

05 / 도함수의 활용 (2)

A 개념 확인

74~75쪽

0427 답 감소

$0 \leq x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= -x_1^2 - (-x_2^2) \\ &= -(x_1^2 - x_2^2) \\ &= -(\underbrace{x_1 + x_2}_{+})(\underbrace{x_1 - x_2}_{-}) > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x_1) > f(x_2)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 감소한다.

0428 답 증가

$-1 \leq x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^2 + 2x_1 + 3 - (x_2^2 + 2x_2 + 3) \\ &= (x_1^2 - x_2^2) + 2(x_1 - x_2) \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2) \end{aligned}$$

이때 $x_1 \geq -1, x_2 > -1$ 에서 $x_1 + x_2 + 2 > 0$ 이므로

$$(\underbrace{x_1 - x_2}_{-})(\underbrace{x_1 + x_2 + 2}_{+}) < 0$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-1, \infty)$ 에서 증가한다.

0429 답 증가

$x_1 < x_2 \leq 3$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= 6x_1 - x_1^2 - (6x_2 - x_2^2) \\ &= 6(x_1 - x_2) - (x_1^2 - x_2^2) \\ &= (x_1 - x_2)(6 - x_1 - x_2) \end{aligned}$$

이때 $x_1 < 3, x_2 \leq 3$ 에서 $6 - x_1 - x_2 > 0$ 이므로

$$(\underbrace{x_1 - x_2}_{-})(\underbrace{6 - x_1 - x_2}_{+}) < 0$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 3]$ 에서 증가한다.

0430 답 증가

$x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$$

이때 $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0$ 이므로

$$(\underbrace{x_1 - x_2}_{-})(\underbrace{x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2}_{+}) < 0$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가한다.

0431 답 구간 $[-2, \infty)$ 에서 증가, 구간 $(-\infty, -2]$ 에서 감소

$$f(x) = x^2 + 4x \text{에서}$$

$$f'(x) = 2x + 4 = 2(x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-2, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -2]$ 에서 감소한다.

0432 답 구간 $(-\infty, 3]$ 에서 증가, 구간 $[3, \infty)$ 에서 감소

$$f(x) = -x^2 + 6x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = -2x + 6 = -2(x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	12	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 3]$ 에서 증가하고, 구간 $[3, \infty)$ 에서 감소한다.

0433 답 구간 $(-\infty, -1], [0, \infty)$ 에서 증가, 구간 $[-1, 0]$ 에서 감소

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x + 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1], [0, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $[-1, 0]$ 에서 감소한다.

0434 답 구간 $[0, 2]$ 에서 증가, 구간 $(-\infty, 0], [2, \infty)$ 에서 감소

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -x^2 + 2x = -x(x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, 2]$ 에서 증가하고, 구간 $(-\infty, 0], [2, \infty)$ 에서 감소한다.

0435 답 극댓값: 1, 극솟값: -3

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $x = -1$ 에서 극대이고 극댓값은 $f(-1) = 1$ 이다.

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $x=1$ 에서 극소이고 극솟값은 $f(1)=-3$ 이다.

0436 **답** (1) a, c, f (2) b, e, g

- (1) 함수 $f(x)$ 는 $x=a, x=c, x=f$ 의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $x=a, x=c, x=f$ 에서 극댓값을 갖는다.
 (2) 함수 $f(x)$ 는 $x=b, x=e, x=g$ 의 좌우에서 감소하다가 증가하므로 $x=b, x=e, x=g$ 에서 극솟값을 갖는다.

0437 **답** 극댓값: 9, 극솟값: 5

$f(x)=x^3-6x^2+9x+5$ 에서
 $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	9 극대	↘	5 극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 9, $x=3$ 에서 극솟값 5를 갖는다.

0438 **답** 극댓값: 16, 극솟값: 0

$f(x)=-x^4+8x^2$ 에서
 $f'(x)=-4x^3+16x=-4x(x+2)(x-2)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은
 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	16 극대	↘	0 극소	↗	16 극대	↘

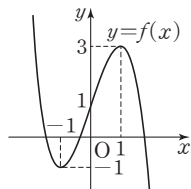
따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 또는 $x=2$ 에서 극댓값 16, $x=0$ 에서 극솟값 0을 갖는다.

0439 **답** 풀이 참조

$f(x)=-x^3+3x+1$ 에서
 $f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=1$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	-1 극소	↗	3 극대	↘

또 $f(0)=1$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

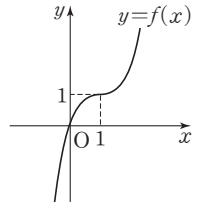


0440 **답** 풀이 참조

$f(x)=x^3-3x^2+3x$ 에서
 $f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=1$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	1	↗

또 $f(0)=0$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

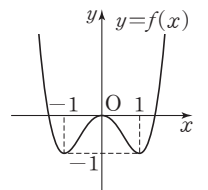


0441 **답** 풀이 참조

$f(x)=x^4-2x^2$ 에서
 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-1 극소	↗	0 극대	↘	-1 극소	↗

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

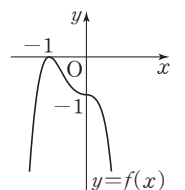


0442 **답** 풀이 참조

$f(x)=-3x^4-4x^3-1$ 에서
 $f'(x)=-12x^3-12x^2=-12x^2(x+1)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	↗	0 극대	↘	-1	↘

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0443 **답** 최댓값: 23, 최솟값: -9

$f(x)=-x^3+6x^2-9x$ 에서
 $f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=4$

구간 $[0, 5]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	4	...	5
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	-9	↗	23 극대	↘	16

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 최댓값 23, $x=0$ 에서 최솟값 -9를 갖는다.

0444 답 최댓값: $\frac{5}{4}$, 최솟값: -4

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + x^3 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^3 + 3x^2 = x^2(x+3)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ (} \because -2 \leq x \leq 1 \text{)}$$

구간 $[-2, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	0	...	1
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	-4	↗	0	↗	$\frac{5}{4}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $\frac{5}{4}$, $x=-2$ 에서 최솟값 -4를 갖는다.

B 유형 완성

76~83쪽

0445 답 ①

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 4 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘	-1	↗	31	↘

따라서 함수 $f(x)$ 가 증가하는 구간은 $[-1, 3]$ 이므로 $a=-1, b=3 \therefore a+b=2$

다른 풀이

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 4 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x+1)(x-3)$$

이때 $f'(x) \geq 0$ 인 구간에서 함수 $f(x)$ 가 증가하므로 $-3(x+1)(x-3) \geq 0$

$$(x+1)(x-3) \leq 0 \therefore -1 \leq x \leq 3$$

따라서 $a=-1, b=3$ 이므로 $a+b=2$

0446 답 10

$$f(x) = x^3 + 6x^2 + ax - 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 12x + a$$

함수 $f(x)$ 가 감소하는 x 의 값의 범위가 $-3 \leq x \leq b$ 이므로 $-3, b$ 는 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-3+b=-4, -3 \times b = \frac{a}{3} \therefore a=9, b=-1$$

$$\therefore a-b=10$$

0447 답 39

$$f(x) = -2x^3 + ax^2 + bx - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, -2], [3, \infty)$ 에서 감소하고, 구간

$[-2, 3]$ 에서 증가하므로 $-2, 3$ 은 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-2+3=\frac{a}{3}, -2 \times 3 = -\frac{b}{6} \therefore a=3, b=36$$

$$\therefore a+b=39$$

0448 답 -3

$$f(x) = -x^3 + ax^2 - 3x + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax - 3$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 9 \leq 0$$

$$(a+3)(a-3) \leq 0 \therefore -3 \leq a \leq 3$$

따라서 a 의 최솟값은 -3이다.

0449 답 ⑤

$$f(x) = ax^3 + x^2 + 4x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2x + 4$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$a > 0 \dots\dots \textcircled{7}$$

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - 12a \leq 0 \therefore a \geq \frac{1}{12} \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } a \geq \frac{1}{12}$$

0450 답 3

$$f(x) = -x^3 + 3ax^2 + (a-4)x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6ax + a - 4$$

$x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) > f(x_2)$ 가 성립하려면 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다. $\dots\dots \textcircled{i}$

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9a^2 + 3(a-4) \leq 0$$

$$(3a+4)(a-1) \leq 0 \therefore -\frac{4}{3} \leq a \leq 1 \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 정수 a 는 -1, 0, 1의 3개이다. $\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

❶ $f'(x)$ 의 조건 구하기	40%
❷ a 의 값의 범위 구하기	40%
❸ 정수 a 의 개수 구하기	20%

0451 답 -8

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + 4x^2 - kx - 1 \text{에서 } f'(x) = 2x^2 + 8x - k$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하고 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 16 + 2k \leq 0 \quad \therefore k \leq -8$$

따라서 k 의 최댓값은 -8 이다.

0452 답 2

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + 12x + 1 \text{에서 } f'(x) = -3x^2 + 2ax + 12$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[-1, 3]$ 에서 증가하려면

$-1 \leq x \leq 3$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$f'(-1) \geq 0, f'(3) \geq 0$$

$$f'(-1) \geq 0 \text{에서}$$

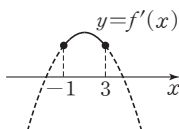
$$-3 - 2a + 12 \geq 0 \quad \therefore a \leq \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(3) \geq 0 \text{에서}$$

$$-27 + 6a + 12 \geq 0 \quad \therefore a \geq \frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{5}{2} \leq a \leq \frac{9}{2}$$

따라서 정수 a 는 3, 4의 2개이다.



0453 답 ③

$$f(x) = x^3 - x^2 - ax + 2 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 2x - a$$

함수 $f(x)$ 가 $0 \leq x \leq 1$ 에서 감소하려면

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$f'(0) \leq 0, f'(1) \leq 0$$

$$f'(0) \leq 0 \text{에서}$$

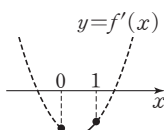
$$-a \leq 0 \quad \therefore a \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(1) \leq 0 \text{에서}$$

$$3 - 2 - a \leq 0 \quad \therefore a \geq 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } a \geq 1$$

따라서 a 의 최솟값은 1이다.



0454 답 $0 \leq a \leq 6$

$$f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + ax + 5 \text{에서 } f'(x) = 3x^2 - 9x + a$$

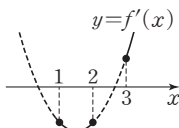
함수 $f(x)$ 가 구간 $[1, 2]$ 에서 감소하려면

$1 \leq x \leq 2$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하고, 구간

$[3, \infty)$ 에서 증가하려면 $x \geq 3$ 에서

$f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$f'(1) \leq 0, f'(2) \leq 0, f'(3) \geq 0$$



$$f'(1) \leq 0 \text{에서 } 3 - 9 + a \leq 0 \quad \therefore a \leq 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f'(2) \leq 0 \text{에서 } 12 - 18 + a \leq 0 \quad \therefore a \leq 6 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f'(3) \geq 0 \text{에서 } 27 - 27 + a \geq 0 \quad \therefore a \geq 0 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3} \text{에서 } 0 \leq a \leq 6$$

0455 답 ⑤

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	28 극대	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극댓값 28, $x = 1$ 에서 극솟값 -4 를 가지므로

$$M = 28, m = -4$$

$$\therefore M - m = 32$$

0456 답 11

$$f(x) = x^3 - 3x + 12 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	14 극대	$\searrow$	10 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극소이므로 $a = 1$

$$\therefore a + f(a) = 1 + f(1) = 1 + 10 = 11$$

0457 답 28

$$f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 24x = -12x(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	2 극대	$\searrow$	-3 극소	$\nearrow$	29 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값 2, $x = 2$ 에서 극댓값 29,

$x = 0$ 에서 극솟값 -3 을 가지므로 모든 극값의 합은

$$2 + 29 + (-3) = 28$$

0458 답 $2\sqrt{5}$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

$\dots\dots$ ❶

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	1 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 5, $x=3$ 에서 극솟값 1을 가지므로
A(1, 5), B(3, 1) ②

따라서 선분 AB의 길이는

$$\sqrt{(3-1)^2 + (1-5)^2} = 2\sqrt{5} \quad \text{..... ③}$$

채점 기준

① $f'(x)=0$ 인 x 의 값 구하기	30%
② 두 점 A, B의 좌표 구하기	40%
③ 선분 AB의 길이 구하기	30%

0459 답 3

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + 3 \text{에서 } f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 -1을 가지므로

$$f'(1)=0, f(1)=-1$$

$$f'(1)=0 \text{에서 } -3+2a+b=0$$

$$\therefore 2a+b=3 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f(1)=-1 \text{에서 } -1+a+b+3=-1$$

$$\therefore a+b=-3 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=6, b=-9$

$$\therefore f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3,$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극댓값 3을 갖는다.

0460 답 $-\frac{19}{2}$

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + a \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$a+\frac{7}{2}$ 극대	$\searrow$	$a-10$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 $a+\frac{7}{2}$ 을 가지므로

$$a+\frac{7}{2}=4 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$a-10=\frac{1}{2}-10=-\frac{19}{2}$$

0461 답 ②

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + a$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극대이므로 $f'(1)=0$ 에서

$$6-18+a=0 \quad \therefore a=12$$

$$\therefore f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이므로 $b=2$

$$\therefore a+b=14$$

0462 답 -22

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 극댓값, $x=1$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(-2)=0, f'(1)=0$$

$$f'(-2)=0 \text{에서 } 24-4a+b=0$$

$$\therefore 4a-b=24 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f'(1)=0 \text{에서 } 6+2a+b=0$$

$$\therefore 2a+b=-6 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=3, b=-12$

$$\therefore f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + c$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 극댓값 5를 가지므로 $f(-2)=5$ 에서

$$-16+12+24+c=5 \quad \therefore c=-15$$

따라서 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 15$ 이므로 극솟값은

$$f(1) = 2+3-12-15 = -22$$

0463 답 1

$$f(x) = 2x^3 + 3ax^2 - 12a^2x + a^3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 6ax - 12a^2 = 6(x+2a)(x-a)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-2a$ 또는 $x=a$

$a>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$-2a$	...	a	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$21a^3$ 극대	$\searrow$	$-6a^3$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2a$ 에서 극댓값 $21a^3$, $x=a$ 에서 극솟값 $-6a^3$ 을 갖고 그 합이 15이므로

$$21a^3 + (-6a^3) = 15, a^3 = 1$$

$$\therefore a=1 (\because a \text{는 실수})$$

0464 답 -4

$$f(x) = -2x^3 + (a+2)x^2 + 6x + b \text{에서}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 2(a+2)x + 6$$

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극대이고 $x=\beta$ 에서 극소라 하면 a, β 는 이

차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근이다.

이때 극대인 점과 극소인 점이 원점에 대하여 대칭이므로

$$a = -\beta \quad \therefore a + \beta = 0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + \beta = \frac{2(a+2)}{6} = 0$$

$$a + 2 = 0 \quad \therefore a = -2$$

$$\therefore f(x) = -2x^3 + 6x + b,$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6 = -6(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		$b-4$ 극소		$b+4$ 극대	

이때 극대인 점과 극소인 점이 원점에 대하여 대칭이므로

$$b-4 = -(b+4) \quad \therefore b = 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$b-4 = -4$$

채점 기준

❶ a 의 값 구하기	40 %
❷ b 의 값 구하기	40 %
❸ $f(x)$ 의 극솟값 구하기	20 %

0465 답 -4

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

점 $(0, 1)$ 이 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이고, 점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 방정식이 $y = -9x + 1$ 이므로

$$f(0) = 1, f'(0) = -9$$

$$f(0) = 1 \text{에서 } d = 1$$

$$f'(0) = -9 \text{에서 } c = -9$$

$$\therefore f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x + 1, f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 9$$

함수 $f(x)$ 가 $x = -3$ 에서 극댓값 28을 가지므로

$$f'(-3) = 0, f(-3) = 28$$

$$f'(-3) = 0 \text{에서 } 27a - 6b - 9 = 0$$

$$\therefore 9a - 2b = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$f(-3) = 28 \text{에서 } -27a + 9b + 27 + 1 = 28$$

$$\therefore 3a - b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

㉑, ㉒을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 3$$

$$\therefore f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1,$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -3$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		28 극대		-4 극소	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극솟값 -4를 갖는다.

0466 답 4

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

㉑에서 $f'(1-x) = f'(1+x)$ 의 양변에 $x = 1$ 을 대입하면

$$f'(0) = f'(2)$$

㉒에서 $f'(2) = 0$ 이므로 $f'(0) = f'(2) = 0$

$$f'(0) = 0 \text{에서 } b = 0$$

$$f'(2) = 0 \text{에서 } 12 + 4a = 0 \quad \therefore a = -3$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x^2 + c,$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 0$ 또는 $x = 2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		c 극대		$c-4$ 극소	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극댓값 c , $x = 2$ 에서 극솟값 $c-4$ 를 가지므로 구하는 차는

$$c - (c-4) = 4$$

0467 답 $\frac{3}{2}$

$y = f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 -2, 1이므로 주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		극대		극소	

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(-2) = 0, f'(1) = 0 \text{에서}$$

$$12 - 4a + b = 0, 3 + 2a + b = 0 \quad \therefore 4a - b = 12, 2a + b = -3$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = \frac{3}{2}, b = -6$

$$\therefore f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + c$$

함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극댓값 15를 가지므로 $f(-2) = 15$ 에서 $-8 + 6 + 12 + c = 15 \quad \therefore c = 5$

따라서 $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x + 5$ 이고 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$f(1) = 1 + \frac{3}{2} - 6 + 5 = \frac{3}{2}$$

0468 답 ③

$y = f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 -1, 0이므로 주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$		극소		극대	

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$f'(-1)=0, f'(0)=0 \text{에서}$$

$$3a-2b+c=0, c=0 \quad \therefore 3a-2b=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\therefore f(x)=ax^3+bx^2+d$$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 1, $x=-1$ 에서 극솟값 0을 가지므로

$$f(0)=1, f(-1)=0 \text{에서}$$

$$d=1, -a+b+d=0 \quad \therefore a-b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=-2, b=-3$$

$$\text{따라서 } f(x)=-2x^3-3x^2+1 \text{이므로}$$

$$f(-2)=16-12+1=5$$

0469 답 $\frac{32}{3}$

$y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 $-1, 3$ 이므로 주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

주어진 그래프에서 $f'(0)=3$ 이므로 $c=3$

$$\therefore f'(x)=3ax^2+2bx+3$$

$$f'(-1)=0, f'(3)=0 \text{에서 } 3a-2b+3=0, 27a+6b+3=0$$

$$\therefore 3a-2b=-3, 9a+2b=-1$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a=-\frac{1}{3}, b=1$$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+d$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극댓값 $d+9$, $x=-1$ 에서 극솟값

$d-\frac{5}{3}$ 를 가지므로 극댓값과 극솟값의 차는

$$(d+9)-\left(d-\frac{5}{3}\right)=\frac{32}{3}$$

0470 답 ②

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

① 함수 $f(x)$ 는 구간 $[2, 3]$ 에서 증가하고, 구간 $[3, 4]$ 에서 감소한다.

② $f'(1)=0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

③ $x=2$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극값을 갖지 않는다.

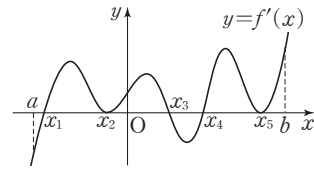
④ 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극대이다.

⑤ 구간 $(-1, 5)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 극값을 가지므로 극값은 1개이다.

따라서 옳은 것은 ②이다.

0471 답 -1

다음 그림과 같이 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 차례대로 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 라 하자.



주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	a	$\cdots$	x_1	$\cdots$	x_2	$\cdots$	x_3	$\cdots$	x_4	$\cdots$	x_5	$\cdots$	b
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=x_3$ 에서 극대, $x=x_1, x=x_4$ 에서 극소이므로 $m=1, n=2$

$$\therefore m-n=-1$$

0472 답 c

$h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ 인 x 의 값은 두 함수 $y=f'(x), y=g'(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같으므로

$$x=b \text{ 또는 } x=c \text{ 또는 } x=f$$

주어진 그래프에서 $h'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	b	$\cdots$	c	$\cdots$	f	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $h(x)$ 는 $x=c$ 에서 극소이므로 구하는 x 의 값은 c 이다.

0473 답 ③

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ③이다.

0474 답 ①

$f(x)=x^4-6x^2+5$ 라 하면

$$f'(x)=4x^3-12x=4x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x=-\sqrt{3} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=\sqrt{3}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

0475 답 ㄱ, ㄴ

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=\alpha$ 에서 극대, $x=\beta$ 에서 극소이므로

$$f'(\alpha) = 0, f'(\beta) = 0$$

따라서 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 근은 α, β 이고, $\alpha < 0, \beta > 0$,

$|\beta| > |\alpha|$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = -\frac{2a}{3} > 0, \alpha\beta = \frac{b}{3} < 0$$

$$\therefore \alpha < 0, \beta < 0$$

또 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 $x=0$ 일 때 y 축의 양의 부분과 만나므로

$$f(0) > 0 \quad \therefore c > 0$$

$$\text{ㄱ. } \alpha < 0, \beta < 0, c > 0 \text{이므로 } abc > 0$$

$$\text{ㄴ. } \alpha < 0, \beta c < 0 \text{이므로 } a + bc < 0$$

$$\text{ㄷ. } \frac{|\alpha|}{a} + \frac{|\beta|}{b} + \frac{|c|}{c} = \frac{-\alpha}{a} + \frac{-\beta}{b} + \frac{c}{c} \\ = -1 + (-1) + 1 = -1$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0476 답 $-1 \leq a \leq 3$

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 + (a-1)x^2 + 2x - 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 2x^2 + 2(a-1)x + 2$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - 4 \leq 0$$

$$a^2 - 2a - 3 \leq 0, (a+1)(a-3) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq a \leq 3$$

0477 답 ④

$$f(x) = x^3 + ax^2 + (a^2 - 4a)x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a^2 - 4a$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3(a^2 - 4a) > 0$$

$$a^2 - 6a < 0, a(a-6) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 6$$

따라서 모든 정수 a 의 값의 합은

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

0478 답 5

$$f(x) = ax^3 - 6x^2 + (a-1)x - 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 12x + (a-1) \quad \dots\dots \text{㉠}$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 36 - 3a(a-1) > 0$$

$$a^2 - a - 12 < 0, (a+3)(a-4) < 0$$

$$\therefore -3 < a < 4 \text{ 또는 } 0 < a < 4 \quad (\because a \neq 0) \quad \dots\dots \text{㉡}$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 1, 2, 3$ 의 5개이다. $\dots\dots \text{㉢}$

채점 기준

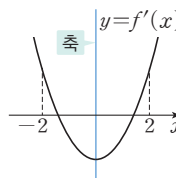
㉠ $f'(x)$ 구하기	20 %
㉡ a 의 값의 범위 구하기	60 %
㉢ 정수 a 의 개수 구하기	20 %

0479 답 $-2 < a < 0$

$$f(x) = x^3 - ax^2 + 2ax + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + 2a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-2, 2)$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 $-2 < x < 2$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 6a > 0$$

$$a(a-6) > 0 \quad \therefore a < 0 \text{ 또는 } a > 6 \quad \dots\dots \text{㉣}$$

(ii) $f'(-2) > 0$ 이어야 하므로

$$12 + 4a + 2a > 0 \quad \therefore a > -2 \quad \dots\dots \text{㉤}$$

$f'(2) > 0$ 이어야 하므로

$$12 - 4a + 2a > 0 \quad \therefore a < 6 \quad \dots\dots \text{㉥}$$

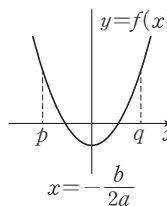
(iii) $y=f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x = \frac{a}{3}$ 이므로

$$-2 < \frac{a}{3} < 2 \quad \therefore -6 < a < 6 \quad \dots\dots \text{㉦}$$

㉣~㉦에서 $-2 < a < 0$

공통수학1 다시보기

이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a > 0$)의 판별식을 D 라 하고 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 라 하면 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 서로 다른 두 실근이 모두 p, q ($p < q$) 사이에 있을 때, 다음을 모두 만족시킨다.



(i) $D > 0$

(ii) $f(p) > 0, f(q) > 0$

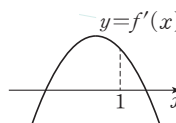
(iii) $p < -\frac{b}{2a} < q$

0480 답 ⑤

$$f(x) = -x^3 + (a+1)x^2 - x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2(a+1)x - 1$$

함수 $f(x)$ 가 $x < 1$ 에서 극솟값을 갖고, $x > 1$ 에서 극댓값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 서로 다른 두 실근 중 한 근은 1보다 작고, 다른 한 근은 1보다 커야 하므로 $f'(1) > 0$ 에서



$$-3 + 2(a+1) - 1 > 0$$

$$\therefore a > 1$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 2이다.

0481 답 2

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (a^2 - 1)x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 2ax + a^2 - 1$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-1, 2)$ 에서 극댓값을 갖고, 구간 $(2, \infty)$ 에서 극솟값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 서로 다른 두 실근 중 한 근은 -1 과 2 사이에 있고, 다른 한 근은 2 보다 커야 한다.

$$f'(-1) > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$1 + 2a + a^2 - 1 > 0$$

$$a^2 + 2a > 0, a(a+2) > 0$$

$$\therefore a < -2 \text{ 또는 } a > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(2) < 0 \text{이어야 하므로}$$

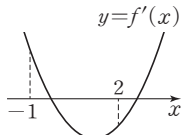
$$4 - 4a + a^2 - 1 < 0$$

$$a^2 - 4a + 3 < 0, (a-1)(a-3) < 0$$

$$\therefore 1 < a < 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } 1 < a < 3$$

따라서 정수 a 의 값은 2 이다.



0482 답 $a < 0$ 또는 $a > \frac{2}{3}$

$$f(x) = x^4 - 4ax^3 + 3ax^2 + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12ax^2 + 6ax = 2x(2x^2 - 6ax + 3a)$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식

$$f'(x) = 0 \text{이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식}$$

$$2x^2 - 6ax + 3a = 0 \text{이 } 0 \text{이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.}$$

$$x=0 \text{이 이차방정식 } 2x^2 - 6ax + 3a = 0 \text{의 근이 아니어야 하므로}$$

$$a \neq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $2x^2 - 6ax + 3a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9a^2 - 6a > 0$$

$$a(3a - 2) > 0 \quad \therefore a < 0 \text{ 또는 } a > \frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서}$$

$$a < 0 \text{ 또는 } a > \frac{2}{3}$$

만렙 Note

(1) 최고차항의 계수가 양수인 사차함수 $f(x)$ 는 항상 극솟값을 갖는다.

① 사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖는다.

$$\Leftrightarrow \text{사차함수 } f(x) \text{가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.}$$

② 사차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않는다.

$$\Leftrightarrow \text{사차함수 } f(x) \text{가 극값을 하나만 갖는다.}$$

(2) 최고차항의 계수가 음수인 사차함수 $f(x)$ 는 항상 극댓값을 갖는다.

① 사차함수 $f(x)$ 가 극솟값을 갖는다.

$$\Leftrightarrow \text{사차함수 } f(x) \text{가 극댓값과 극솟값을 모두 갖는다.}$$

② 사차함수 $f(x)$ 가 극솟값을 갖지 않는다.

$$\Leftrightarrow \text{사차함수 } f(x) \text{가 극값을 하나만 갖는다.}$$

0483 답 ①

$$f(x) = -x^4 + 4x^3 + 2ax^2 \text{에서}$$

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 + 4ax = -4x(x^2 - 3x - a)$$

함수 $f(x)$ 가 극솟값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2 - 3x - a = 0$ 이 0 이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$$x=0 \text{이 이차방정식 } x^2 - 3x - a = 0 \text{의 근이 아니어야 하므로}$$

$$a \neq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2 - 3x - a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 9 + 4a > 0 \quad \therefore a > -\frac{9}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서}$$

$$-\frac{9}{4} < a < 0 \text{ 또는 } a > 0$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 -2 이다.

0484 답 12

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 3(a+4)x^2 + 12ax \text{에서}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 6(a+4)x + 12a$$

$$= 6(x-2)(2x^2 + 2x - a)$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $2x^2 + 2x - a = 0$ 의 한 근이 2 이거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $2x^2 + 2x - a = 0$ 의 한 근이 2 인 경우

$$8 + 4 - a = 0 \quad \therefore a = 12$$

(ii) 이차방정식 $2x^2 + 2x - a = 0$ 이 중근 또는 허근을 갖는 경우

이차방정식 $2x^2 + 2x - a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 + 2a \leq 0 \quad \therefore a \leq -\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서

$$a \leq -\frac{1}{2} \text{ 또는 } a = 12$$

따라서 a 의 최댓값은 12 이다.

0485 답 ⑤

$$f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 10 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x - 9 = -3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

구간 $[0, 5]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3	...	5
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	10	\	6 극소	/	10 극대	\	-10

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 또는 $x=3$ 에서 최댓값 10 , $x=5$ 에서 최솟값 -10 을 가지므로

$$M = 10, m = -10$$

$$\therefore M - m = 20$$

0486 답 -7

$$f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 15 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x - 8 = 4(x+1)^2(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	\	18	\	-9 극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 -9를 가지므로

$$a=2, m=-9$$

$$\therefore a+m=-7$$

0487 답 -10

$$f(x)=-x^2(x+3)에서$$

$$f'(x)=-2x(x+3)-x^2$$

$$=-3x^2-6x=-3x(x+2)$$

$$f'(x)=0인\ x의\ 값은\ x=-2\ 또는\ x=0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	-4 극소	/	0 극대	\

..... i

구간 $[-3, -2]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 일 때 최솟값 -4를 가지므로

$$g(-3)=-4$$

구간 $[-1, 0]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 일 때 최솟값 -2를 가지므로

$$g(-1)=-2$$

구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 일 때 최솟값 -4를 가지므로

$$g(0)=-4$$

..... ii

$$\therefore g(-3)+g(-1)+g(0)=-10$$

..... iii

채점 기준

i $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내기	30 %
ii $g(-3), g(-1), g(0)$ 의 값 구하기	60 %
iii $g(-3)+g(-1)+g(0)$ 의 값 구하기	10 %

0488 답 21

$$g(x)=-x^2+6x-6=-(x-3)^2+3이므로\ g(x)=t로\ 놓으면\ t\leq 3$$

$$\therefore (f\circ g)(x)=f(g(x))=f(t)\ (단,\ t\leq 3)$$

$$f(t)=t^3-3t+3에서$$

$$f'(t)=3t^2-3=3(t+1)(t-1)$$

$$f'(t)=0인\ t의\ 값은\ t=-1\ 또는\ t=1$$

$t\leq 3$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	-1	...	1	...	3
$f'(t)$	+	0	-	0	+	
$f(t)$	/	5 극대	\	1 극소	/	21

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=3$ 에서 최댓값 21을 가지므로 함수

$(f\circ g)(x)$ 의 최댓값은 21이다.

0489 답 ②

$$f(x)=ax^4-2ax^2+b+1에서$$

$$f'(x)=4ax^3-4ax=4ax(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0인\ x의\ 값은$$

$$x=-1\ 또는\ x=0\ (\because -2\leq x\leq 0)$$

$a>0$ 이므로 구간 $[-2, 0]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	0
$f'(x)$		-	0	+	0
$f(x)$	$8a+b+1$	\	$-a+b+1$ 극소	/	$b+1$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 최댓값 $8a+b+1$, $x=-1$ 에서 최솟값 $-a+b+1$ 을 가지므로

$$8a+b+1=11, -a+b+1=2$$

$$\therefore 8a+b=10, a-b=-1$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=2$

$$\therefore a+b=3$$

0490 답 -3

$$f(x)=-2x^3+6x^2+a에서$$

$$f'(x)=-6x^2+12x=-6x(x-2)$$

$$f'(x)=0인\ x의\ 값은\ x=0\ 또는\ x=2$$

구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$a+8$	\	a 극소	/	$a+8$ 극대	\	a

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 또는 $x=2$ 에서 최댓값 $a+8$ 을 가지므로

$$a+8=5 \quad \therefore a=-3$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 또는 $x=3$ 에서 최소이므로 최솟값은

$$a=-3$$

0491 답 ④

$$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x+a에서$$

$$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12$$

$$=4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0인\ x의\ 값은\ x=1\ 또는\ x=3\ (\because 0\leq x\leq 4)$$

구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3	...	4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	a	/	$a+7$ 극대	\	$a-9$ 극소	/	$a+16$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 최댓값 $a+16$, $x=3$ 에서 최솟값 $a-9$ 를 갖고 그 합이 11이므로

$$(a+16)+(a-9)=11$$

$$\therefore a=2$$

0492 답 $\frac{64\sqrt{3}}{9}$

직사각형의 꼭짓점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하고 점 P의 x 좌표를 a 라 하면

$$P(a, -a^2+4) \text{ (단, } 0 < a < 2\text{)}$$

직사각형의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a) = 2a \times 2(-a^2+4) = -4a^3 + 16a$$

$$\therefore S'(a) = -12a^2 + 16 = -12\left(a + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\left(a - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$S'(a) = 0 \text{인 } a \text{의 값은 } a = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (}\because 0 < a < 2\text{)}$$

$0 < a < 2$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	...	2
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		↗	$\frac{64\sqrt{3}}{9}$ 극대	↘	

따라서 직사각형의 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 $\frac{64\sqrt{3}}{9}$ 이다.

0493 답 ③

점 P의 좌표를 (a, a^2) 이라 하면

$$AP = \sqrt{(a-3)^2 + a^4} = \sqrt{a^4 + a^2 - 6a + 9}$$

$$f(a) = a^4 + a^2 - 6a + 9 \text{라 하면}$$

$$f'(a) = 4a^3 + 2a - 6 = 2(a-1)(2a^2 + 2a + 3)$$

$$f'(a) = 0 \text{인 } a \text{의 값은 } a = 1 \text{ (}\because a \text{는 실수)}$$

함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	...	1	...
$f'(a)$	-	0	+
$f(a)$	↘	5 극소	↗

따라서 $f(a)$ 는 $a=1$ 에서 최솟값 5를 가지므로 선분 AP의 길이의 최솟값은 $\sqrt{5}$ 이다.

0494 답 8

$$f(x) = x^2 - 6x + 9 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 2x - 6$$

점 P의 좌표는 $(a, a^2 - 6a + 9)$ 이고 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(a) = 2a - 6 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - (a^2 - 6a + 9) = (2a - 6)(x - a)$$

$$\therefore y = 2(a-3)x - a^2 + 9 \text{ ①}$$

따라서 $\overline{OA} = \frac{a+3}{2}$, $\overline{OB} = -a^2 + 9$ 이므로 삼각형 OAB의 넓이를

$S(a)$ 라 하면

$$S(a) = \frac{1}{2} \times \frac{a+3}{2} \times (-a^2 + 9)$$

$$= -\frac{1}{4}(a^3 + 3a^2 - 9a - 27) \text{ ②}$$

$$\therefore S'(a) = -\frac{1}{4}(3a^2 + 6a - 9) = -\frac{3}{4}(a+3)(a-1)$$

$$S'(a) = 0 \text{인 } a \text{의 값은 } a = 1 \text{ (}\because 0 < a < 3\text{)}$$

$0 < a < 3$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	1	...	3
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		↗	8 극대	↘	

따라서 삼각형 OAB의 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 8이다. ③

채점 기준

① 접선의 방정식 구하기	30 %
② 삼각형 OAB의 넓이를 함수로 나타내기	40 %
③ 삼각형 OAB의 넓이의 최댓값 구하기	30 %

0495 답 16

잘라 낸 정사각형의 한 변의 길이를 x 라 하면 상자의 밑면인 정사각형의 한 변의 길이는

$$6 - 2x$$

$$\text{이때 } x > 0, 6 - 2x > 0 \text{이므로 } 0 < x < 3$$

상자의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = x(6 - 2x)^2 = 4x^3 - 24x^2 + 36x$$

$$\therefore V'(x) = 12x^2 - 48x + 36 = 12(x-1)(x-3)$$

$$V'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 \text{ (}\because 0 < x < 3\text{)}$$

$0 < x < 3$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	16 극대	↘	

따라서 상자의 부피 $V(x)$ 의 최댓값은 16이다.

0496 답 $3\sqrt{3}$

자른 단면은 오른쪽 그림과 같이 가로 길이가 $2r$, 세로 길이가 h 인 직사각형이고, 이 직사각형의 대각선의 길이가 9이므로

$$(2r)^2 + h^2 = 81$$

$$\therefore r^2 = \frac{1}{4}(81 - h^2)$$

$$\text{이때 } h > 0, \frac{1}{4}(81 - h^2) > 0 \text{이므로 } 0 < h < 9$$

원기둥의 부피를 $V(h)$ 라 하면

$$V(h) = \pi r^2 h = \frac{1}{4}\pi(81 - h^2)h$$

$$= \frac{1}{4}\pi(81h - h^3)$$

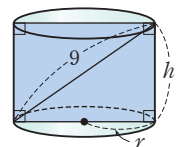
$$\therefore V'(h) = \frac{1}{4}\pi(81 - 3h^2) = -\frac{3}{4}\pi(h + 3\sqrt{3})(h - 3\sqrt{3})$$

$$V'(h) = 0 \text{인 } h \text{의 값은 } h = 3\sqrt{3} \text{ (}\because 0 < h < 9\text{)}$$

$0 < h < 9$ 에서 함수 $V(h)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	0	...	$3\sqrt{3}$	...	9
$V'(h)$		+	0	-	
$V(h)$		↗	극대	↘	

따라서 원기둥의 부피 $V(h)$ 가 최대가 되도록 하는 높이 h 의 값은 $3\sqrt{3}$ 이다.



0497 **답** $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$

오른쪽 그림과 같이 구에 내접하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 $2x$ 라 하면

$$r^2 = 1 - x^2$$

이때 $x > 0$, $1 - x^2 > 0$ 이므로

$$0 < x < 1$$

원기둥의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = \pi r^2 \times 2x = \pi(1 - x^2) \times 2x$$

$$= 2\pi(x - x^3)$$

$$\therefore V'(x) = 2\pi(1 - 3x^2)$$

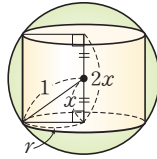
$$= -6\pi\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$V'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\because 0 < x < 1)$$

$0 < x < 1$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	...	1
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	$\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$ 극대	↘	

따라서 원기둥의 부피 $V(x)$ 의 최댓값은 $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi$ 이다.



0498 **답** $16\sqrt{2}$

오른쪽 그림과 같이 사각뿔에 내접하는 직육면체의 밑면은 정사각형이므로 직육면체의 밑면의 한 변의 길이를 x , 높이를 y 라 하자. 사각뿔의 밑면의 대각선의 길이는 $6\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{DE} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

직육면체의 밑면의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}x$ 이므로

$$\overline{BC} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

직각삼각형 ADE는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\begin{aligned} \overline{AE} &= \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{DE}^2} \\ &= \sqrt{36 - 18} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 $\triangle ADE$ 가 직각이등변삼각형이므로 $\triangle ABC$ 도 직각이등변삼각형이다.

$$\therefore \overline{AC} = \overline{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

$$\begin{aligned} \therefore y &= \overline{AE} - \overline{AC} \\ &= 3\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2}(6 - x) \end{aligned}$$

$$\text{이때 } x > 0, \frac{\sqrt{2}}{2}(6 - x) > 0 \text{ 이므로}$$

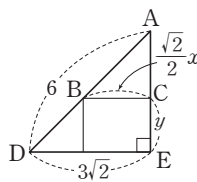
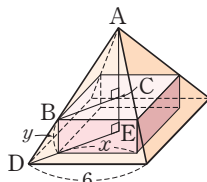
$$0 < x < 6$$

직육면체의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = x^2 y = \frac{\sqrt{2}}{2} x^2 (6 - x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (6x^2 - x^3)$$

$$\therefore V'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (12x - 3x^2) = \frac{3\sqrt{2}}{2} x (4 - x)$$

$$V'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 4 \quad (\because 0 < x < 6)$$



$0 < x < 6$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	4	...	6
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	$16\sqrt{2}$ 극대	↘	

따라서 직육면체의 부피 $V(x)$ 의 최댓값은 $16\sqrt{2}$ 이다.

AB 유형 점검

84~86쪽

0499 **답** ③

$$f(x) = x^4 - 2x^2 - 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	↘	-3	↗	-2	↘	-3	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1]$, $[0, 1]$ 에서 감소한다.

0500 **답** 6

$$f(x) = x^3 + ax^2 - (a^2 - 8a)x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - (a^2 - 8a)$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 + 3(a^2 - 8a) \leq 0$$

$$a(a - 6) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq 6$$

따라서 a 의 최댓값은 6이다.

0501 **답** ⑤

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 - 4ax + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax - 4a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[-2, 1]$ 에서 감소하려면

$-2 \leq x \leq 1$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$f'(-2) \leq 0, f'(1) \leq 0$$

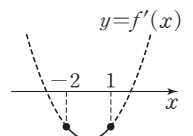
$$f'(-2) \leq 0 \text{에서}$$

$$24 - 4a - 4a \leq 0 \quad \therefore a \geq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f'(1) \leq 0 \text{에서}$$

$$6 + 2a - 4a \leq 0 \quad \therefore a \geq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a \geq 3$$



0502 답 ⑤

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 감소하는 구간이 $[-1, 1]$ 이므로 $-1, 1$ 은 이차방정식 $3x^2 + 2ax + b = 0$ 의 두 근이다.

따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1 + 1 = -\frac{2a}{3}, \quad -1 \times 1 = \frac{b}{3}$$

$$\therefore a = 0, \quad b = -3$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x + 1,$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극댓값 3, $x = 1$ 에서 극솟값 -1을 가지므로

$$M = 3, \quad m = -1$$

$$\therefore M + m = 2$$

0503 답 16

$$g(x) = (x^3 + 2)f(x) \text{에서}$$

$$g'(x) = 3x^2 f(x) + (x^3 + 2)f'(x)$$

함수 $g(x)$ 가 $x = 1$ 에서 극솟값 24를 가지므로

$$g'(1) = 0, \quad g(1) = 24$$

$$g(1) = 24 \text{에서}$$

$$3f(1) = 24 \quad \therefore f(1) = 8$$

$$g'(1) = 0 \text{에서}$$

$$3f(1) + 3f'(1) = 0$$

$$24 + 3f'(1) = 0 \quad \therefore f'(1) = -8$$

$$\therefore f(1) - f'(1) = 16$$

0504 답 ⑤

$$x < -3 \text{일 때, } f(x) = ax + 54 \text{에서}$$

$$f'(x) = a > 0$$

$$x > -3 \text{일 때, } f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3a \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+		-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	$-3a+54$ 극대	$\searrow$	$-3a$ 극소	$\nearrow$	$-3a+4$ 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극댓값 $-3a + 54$, $x = 2$ 에서 극댓값 $-3a + 4$, $x = 0$ 에서 극솟값 $-3a$ 를 갖고 그 합이 13이므로

$$(-3a + 54) + (-3a + 4) + (-3a) = 13$$

$$\therefore a = 5$$

0505 답 3

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$(\text{㉞}) \text{에서 } f'(1) = 0, \quad f'(a) = 0, \quad f'(\beta) = 0 \text{이}$$

고 $a < 1 < \beta$ 이므로 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

$f'(x)$ 의 최고차항의 계수가 1이므로

$$f'(x) = (x-1)(x-a)(x-\beta)$$

$$(\text{㉞}) \text{에서 } f'(-1) = 6 \text{이므로}$$

$$(-1-1)(-1-a)(-1-\beta) = 6$$

$$(1+a)(1+\beta) = -3, \quad 1+a+\beta+a\beta = -3$$

$$a+\beta = -4-a\beta \quad \cdots \cdots \text{㉟}$$

$$\text{이때 } (a-\beta)^2 = (a+\beta)^2 - 4a\beta \text{이므로}$$

$$16 = (-4-a\beta)^2 - 4a\beta \quad (\because \text{㉟}, \text{㉞})$$

$$(a\beta)^2 + 4a\beta = 0, \quad a\beta(a\beta + 4) = 0$$

$$\therefore a\beta = -4 \text{ 또는 } a\beta = 0$$

(i) $a\beta = -4$ 일 때

$$\text{㉟에서 } a+\beta = 0 \text{이므로 } (\text{㉞}) \text{와 연립하여 풀면}$$

$$a = -2, \quad \beta = 2$$

(ii) $a\beta = 0$ 일 때

$$\text{㉟에서 } a+\beta = -4 \text{이므로 } (\text{㉞}) \text{와 연립하여 풀면}$$

$$a = -4, \quad \beta = 0$$

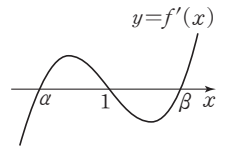
이는 $a < 1 < \beta$ 를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a = -2, \quad \beta = 2$

$$\therefore f'(x) = (x-1)(x+2)(x-2) = x^3 - x^2 - 4x + 4$$

따라서 $a = -1, \quad b = -4, \quad c = 4$ 이므로

$$a + b + 2c = 3$$



0506 답 ㄱ, ㄴ

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-2, -1]$ 에서 감소한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 구간 $[3, 4]$ 에서 감소하고, 구간 $[4, \infty)$ 에서 증가한다.

ㄷ. $x = 1$ 의 좌우에서 $f'(x)$ 의 부호가 바뀌지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극값을 갖지 않는다.

ㄹ. 함수 $f(x)$ 는 $x = 4$ 에서 극소이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

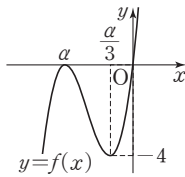
0507 답 15

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 x 좌표가 a ($a \neq 0$)인 점에서 x 축에 접한다고 하면 이 그래프는 원점을 지나므로

$$f(x) = x(x-a)^2$$

$$\therefore f'(x) = (x-a)^2 + 2x(x-a) = (x-a)(3x-a)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=a$ 또는 $x=\frac{a}{3}$
 이때 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 -4 이므로 함수
 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과
 같다.



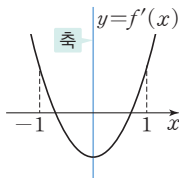
함수 $f(x)$ 는 $x=\frac{a}{3}$ 일 때 극솟값 -4 를 가지
 므로 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-4$ 에서
 $\frac{a}{3}\left(\frac{a}{3}-a\right)^2=-4, \frac{4}{27}a^3=-4$
 $a^3=-27 \quad \therefore a=-3 (\because a \text{는 실수})$
 $\therefore f(x)=x(x+3)^2=x^3+6x^2+9x$
 따라서 $a=6, b=9$ 이므로 $a+b=15$

0508 답 5

$f(x)=-\frac{1}{3}x^3-ax^2+(2a-3)x-1$ 에서
 $f'(x)=-x^2-2ax+2a-3$
 함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두
 실근을 가져야 한다.
 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면
 $\frac{D_1}{4}=a^2+2a-3>0$
 $(a+3)(a-1)>0 \quad \therefore a<-3 \text{ 또는 } a>1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $g(x)=\frac{4}{3}x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x+1$ 에서
 $g'(x)=4x^2-2(a+2)x+2a+1$
 함수 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $g'(x)=0$ 이 중근 또
 는 허근을 가져야 한다.
 이차방정식 $g'(x)=0$ 의 판별식을 D_2 라 하면
 $\frac{D_2}{4}=(a+2)^2-4(2a+1)\leq 0$
 $a^2-4a\leq 0, a(a-4)\leq 0 \quad \therefore 0\leq a\leq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $1\leq a\leq 4$
 따라서 $\alpha=1, \beta=4$ 이므로 $\alpha+\beta=5$

0509 답 $-\frac{1}{5}<k<0$

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-kx^2+3kx+7$ 에서
 $f'(x)=x^2-2kx+3k$
 함수 $f(x)$ 가 $-1<x<1$ 에서 극댓값과 극솟값
 을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이
 $-1<x<1$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한
 다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=k^2-3k>0$$

$$k(k-3)>0 \quad \therefore k<0 \text{ 또는 } k>3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $f'(-1)>0$ 이어야 하므로

$$1+2k+3k>0 \quad \therefore k>-\frac{1}{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$f'(1)>0$ 이어야 하므로

$$1-2k+3k>0 \quad \therefore k>-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(iii) $y=f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=k$ 이므로
 $-1<k<1 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$

$\textcircled{1}\sim\textcircled{4}$ 에서 $-\frac{1}{5}<k<0$

0510 답 ②

$f(x)=x^4+4x^3+2ax^2+a$ 에서
 $f'(x)=4x^3+12x^2+4ax=4x(x^2+3x+a)$
 함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근
 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2+3x+a=0$ 의 한 근이 0
 이거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2+3x+a=0$ 의 한 근이 0인 경우

$$a=0$$

(ii) 이차방정식 $x^2+3x+a=0$ 이 중근 또는 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2+3x+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=9-4a\leq 0 \quad \therefore a\geq \frac{9}{4}$$

(i), (ii)에서 $a=0$ 또는 $a\geq \frac{9}{4}$

따라서 a 의 값이 될 수 없는 것은 ②이다.

0511 답 13

$f(x)=x^4-2x^2+3$ 에서
 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
 구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음
 과 같다.

x	-1	...	0	...	1	...	2
$f'(x)$	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	2	/	3 극대	\	2 극소	/	11

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 11, $x=-1$ 또는 $x=1$ 에서
 최솟값 2를 가지므로 구하는 합은
 $11+2=13$

0512 답 12

$f(x)=ax^3-3ax^2+b$ 에서
 $f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$
 $a>0$ 이므로 구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타
 내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...	4
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	b	\	$-4a+b$ 극소	/	$16a+b$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 최댓값 $16a+b$, $x=2$ 에서 최솟값
 $-4a+b$ 를 가지므로

$$16a+b=5, -4a+b=-15$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-11$

$$\therefore a-b=12$$

0513 **답** 256

오른쪽 그림과 같이 잘라 낸 사각형의 긴 변의 길이를 x 라 하면 상자의 밑면인 정삼각형의 한 변의 길이는

$$24-2x$$

이때 $x > 0$, $24-2x > 0$ 이므로

$$0 < x < 12$$

상자의 밑면의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(24-2x)^2 = \sqrt{3}(x-12)^2$$

$$\text{상자의 높이는 } x \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

상자의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = \sqrt{3}(x-12)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}x = x(x-12)^2 \\ = x^3 - 24x^2 + 144x$$

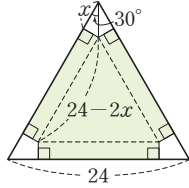
$$\therefore V'(x) = 3x^2 - 48x + 144 = 3(x-4)(x-12)$$

$$V'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=4 \quad (\because 0 < x < 12)$$

$0 < x < 12$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	4	...	12
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	256 극대	↘	

따라서 상자의 부피 $V(x)$ 의 최대값은 256이다.



0514 **답** ③

오른쪽 그림과 같이 원뿔에 내접하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면

$$r : 4 = (8-h) : 8$$

$$\therefore h = 8-2r$$

이때 $r > 0$, $8-2r > 0$ 이므로

$$0 < r < 4$$

원기둥의 부피를 $V(r)$ 라 하면

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 (8-2r) = \pi (8r^2 - 2r^3)$$

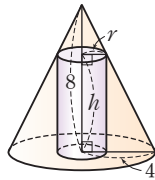
$$\therefore V'(r) = \pi (16r - 6r^2) = 2\pi r(8-3r)$$

$$V'(r) = 0 \text{인 } r \text{의 값은 } r = \frac{8}{3} \quad (\because 0 < r < 4)$$

$0 < r < 4$ 에서 함수 $V(r)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	...	$\frac{8}{3}$	...	4
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		↗	극대	↘	

따라서 원기둥의 부피 $V(r)$ 가 최대인 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는 $\frac{8}{3}$ 이다.



0515 **답** -2

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

..... **i**

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$		+	-	0	+
$f(x)$		↗	$a+4$ 극대	↘	a 극소

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 $a+4$, $x=3$ 에서 극솟값 a 를 갖는다. **ii**

이때 극댓값과 극솟값의 절댓값이 같고 그 부호가 서로 다르므로

$$a+4 = -a \quad \therefore a = -2$$

..... **iii**

채점 기준

i $f'(x)=0$ 인 x 의 값 구하기	30 %
ii $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값을 a 에 대한 식으로 나타내기	40 %
iii a 의 값 구하기	30 %

0516 **답** -25

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{에서 } f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\text{주어진 그래프에서 } f'(-1)=0, f'(3)=0 \text{이므로}$$

$$3-2a+b=0, 27+6a+b=0$$

$$\therefore 2a-b=3, 6a+b=-27$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a=-3, b=-9$$

..... **i**

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + c$$

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 구간 $[-2, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	3	...	4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$c-2$	↗	$c+5$ 극대	↘	$c-27$ 극소	↗	$c-20$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극댓값 $c+5$ 를 가지므로

$$c+5=7 \quad \therefore c=2$$

..... **ii**

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 최소이므로 최소값은

$$c-27=2-27=-25$$

..... **iii**

채점 기준

i a, b 의 값 구하기	30 %
ii c 의 값 구하기	50 %
iii $f(x)$ 의 최솟값 구하기	20 %

0517 **답** 256

곡선 $y = -x^2 + 8x + 20$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는

$$-x^2 + 8x + 20 = 0 \text{에서}$$

$$(x+2)(x-10) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 10$$

$$\therefore A(-2, 0), B(10, 0)$$

..... **i**

점 C의 좌표는

$$(a, -a^2 + 8a + 20) \quad (4 < a < 10) \text{이라 하면}$$

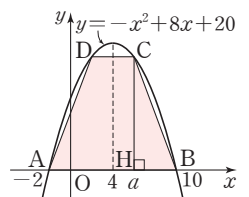
오른쪽 그림과 같이 점 C에서 x 축에

내린 수선의 발을 H라 할 때 곡선

$$y = -x^2 + 8x + 20 \text{의 축의 방정식이}$$

$$x=4 \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = 12, \overline{CD} = 2(a-4) = 2a-8, \overline{CH} = -a^2 + 8a + 20$$



사다리꼴 ABCD의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(a) &= \frac{1}{2}(2a-8+12)(-a^2+8a+20) \\ &= (a+2)(-a^2+8a+20) \\ &= -a^3+6a^2+36a+40 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore S'(a) = -3a^2+12a+36 = -3(a+2)(a-6)$$

$$S'(a)=0 \text{인 } a \text{의 값은 } a=6 \quad (\because 4 < a < 10)$$

$4 < a < 10$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	4	...	6	...	10
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		↗	256 극대	↘	

따라서 사다리꼴 ABCD의 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 256이다.

..... $\textcircled{iii}$

채점 기준

$\textcircled{i}$ 두 점 A, B의 좌표 구하기	20 %
$\textcircled{ii}$ 사다리꼴 ABCD의 넓이를 함수로 나타내기	40 %
$\textcircled{iii}$ 사다리꼴 ABCD의 넓이의 최댓값 구하기	40 %

C 실력 향상

87쪽

0518 답 ④

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

(가)에서 $x_1 \neq x_2$ 인 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 가 성립하려면 $f(x)$ 는 일대일함수이어야 하고 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3b \leq 0 \quad \dots \textcircled{7}$$

(나)에서 접선의 방정식은

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

이 접선이 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$1 - f(1) = -f'(1)$$

$$1 - (1 + a + b + c) = -(3 + 2a + b)$$

$$\therefore c = a + 3$$

$$\therefore f(-3) = -27 + 9a - 3b + c$$

$$= -27 + 9a - 3b + (a + 3)$$

$$= 10a - 3b - 24$$

이때 $\textcircled{7}$ 에서 $-3b \leq -a^2$ 이므로

$$f(-3) \leq -a^2 + 10a - 24 = -(a-5)^2 + 1$$

따라서 $f(-3)$ 의 최댓값은 1이다.

0519 답 10

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극값을 가지면 $g'(2)=0$ 이므로 $g(x)$ 는 $(x-2)^2$ 을 인수로 갖는다.

이때 $f(x)g(x) = (x-1)^2(x-2)^2(x-3)^2$ 이고 삼차함수 $g(x)$ 의 최고차항의 계수가 3이므로

$$g(x) = 3(x-1)(x-2)^2 \text{ 또는 } g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$$

(i) $g(x) = 3(x-1)(x-2)^2$ 일 때

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3(x-2)^2 + 3(x-1) \times 2(x-2) \\ &= 3(x-2)(3x-4) \end{aligned}$$

$$g'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=\frac{4}{3} \text{ 또는 } x=2$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$\frac{4}{3}$	...	2	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값을 가지므로 $x=2$ 에서 극댓값을 갖는다는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$ 일 때

$$\begin{aligned} g'(x) &= 3 \times 2(x-2)(x-3) + 3(x-2)^2 \\ &= 3(x-2)(3x-8) \end{aligned}$$

$$g'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=2 \text{ 또는 } x=\frac{8}{3}$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	2	...	$\frac{8}{3}$	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

이때 함수 $g(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 가지므로 조건을 만족시킨다.

$$(i), (ii) \text{에서 } g(x) = 3(x-2)^2(x-3)$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^2(x-3) \text{이므로}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x-1)(x-3) + \frac{1}{3}(x-1)^2$$

$$\therefore f'(0) = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\text{따라서 } p=3, q=7 \text{이므로 } p+q=10$$

0520 답 ⑤

$$f(x) = x^2 + 2x + k = (x+1)^2 + k - 1 \text{이므로 } f(x) = t \text{로 놓으면 } t \geq k - 1$$

$$\therefore (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(t) \quad (\text{단, } t \geq k - 1)$$

$$g(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 2 \text{에서}$$

$$g'(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t-1)(t-2)$$

$$g'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=1 \text{ 또는 } t=2$$

함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	1	...	2	...
$g'(t)$	+	0	-	0	+
$g(t)$	↗	3 극대	↘	2 극소	↗

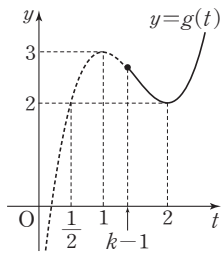
함수 $(g \circ f)(x)$ 의 최솟값이 2이어야 하므로 $g(t)=2$ 에서
 $2t^3-9t^2+12t-2=2$, $2t^3-9t^2+12t-4=0$

$$(2t-1)(t-2)^2=0 \quad \therefore t=\frac{1}{2} \text{ 또는 } t=2$$

$t \geq k-1$ 에서 함수 $g(t)$ 의 최솟값이 2가
 되려면 함수 $y=g(t)$ 의 그래프는 오른쪽
 그림과 같아야 하므로

$$\frac{1}{2} \leq k-1 \leq 2 \quad \therefore \frac{3}{2} \leq k \leq 3$$

따라서 k 의 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이다.



0521 답 370

점 B를 원점으로 하고 직선 BC를 x
 축, 직선 AB를 y 축으로 하는 좌표
 평면 위에 정사각형 ABCD를 나타
 내면 오른쪽 그림과 같다.

포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(4, 8)$ 이
 므로 포물선의 방정식을

$$y=a(x-4)^2+8 \quad (a<0) \text{이라 하자.}$$

이 곡선이 점 $(0, 0)$ 을 지나므로

$$0=16a+8 \quad \therefore a=-\frac{1}{2}$$

따라서 포물선의 방정식은

$$y=-\frac{1}{2}(x-4)^2+8=-\frac{1}{2}x^2+4x$$

또 직선 BF의 방정식은 $y=\frac{1}{2}x$

포물선 $y=-\frac{1}{2}x^2+4x$ 와 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 의 교점의 x 좌표는

$$-\frac{1}{2}x^2+4x=\frac{1}{2}x \text{에서 } x(x-7)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=7$$

즉, 점 G의 x 좌표는 7이다.

점 P의 좌표를 $(t, \frac{1}{2}t)$ ($0 < t < 7$)라 하면 점 Q의 좌표는

$$(t, -\frac{1}{2}t^2+4t)$$

따라서 삼각형 BPQ의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t)=\frac{1}{2}t(-\frac{1}{2}t^2+4t-\frac{1}{2}t)=-\frac{1}{4}(t^3-7t^2)$$

$$\therefore S'(t)=-\frac{1}{4}(3t^2-14t)=-\frac{1}{4}t(3t-14)$$

$$S'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=\frac{14}{3} \quad (\because 0 < t < 7)$$

$0 < t < 7$ 에서 함수 $S(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\frac{14}{3}$	...	7
$S'(t)$		+	0	-	
$S(t)$		$\nearrow$	$\frac{343}{27}$ 극대	$\searrow$	

따라서 넓이 $S(t)$ 의 최댓값은 $\frac{343}{27}$ 이므로

$$p=27, q=343 \quad \therefore p+q=370$$

06 / 도함수의 활용 (3)

A 개념 확인

88~89쪽

0522 답 3

$f(x)=x^3-6x^2+9x-3$ 이라 하면

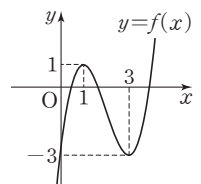
$$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$	-3 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그
 림과 같이 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나므
 로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는
 3이다.



0523 답 1

$f(x)=2x^3-3x^2-1$ 이라 하면

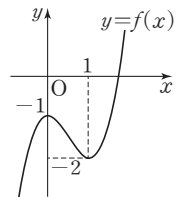
$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	-1 극대	$\searrow$	-2 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림
 과 같이 x 축과 한 점에서 만나므로 주어진 방
 정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



0524 답 3

$f(x)=x^4+4x^3+4x^2-1$ 이라 하면

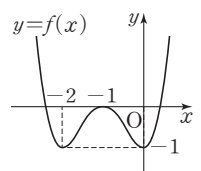
$$f'(x)=4x^3+12x^2+8x=4x(x+2)(x+1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-2 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그
 림과 같이 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나므
 로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는
 3이다.



0525 **답 4**

$$x^4 + 3x^2 - 1 = 3x^4 - x^2 \text{에서}$$

$$2x^4 - 4x^2 + 1 = 0$$

$$f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1 \text{이라 하면}$$

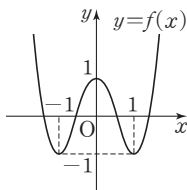
$$f'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 네 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.



0526 **답** (1) $-4 < k < 0$

(2) $k = -4$ 또는 $k = 0$

(3) $k < -4$ 또는 $k > 0$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

(1) 삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$f(0)f(2) < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$-k(-4-k) < 0, k(k+4) < 0$$

$$\therefore -4 < k < 0$$

(2) 삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$$f(0)f(2) = 0 \text{이어야 하므로}$$

$$-k(-4-k) = 0, k(k+4) = 0$$

$$\therefore k = -4 \text{ 또는 } k = 0$$

(3) 삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 한 개의 실근을 가지려면

$$f(0)f(2) > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$-k(-4-k) > 0, k(k+4) > 0$$

$$\therefore k < -4 \text{ 또는 } k > 0$$

0527 **답** (가) 1 (나) 3

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$	4	$\searrow$	3 극소	$\nearrow$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = \boxed{\text{가}} 1$ 일 때 최솟값 $\boxed{\text{나}} 3$ 을 가지므로

$$f(x) > 0$$

따라서 $x \geq 0$ 일 때, 부등식 $2x^3 - 3x^2 + 4 > 0$ 이 성립한다.

0528 **답** 풀이 참조

$$f(x) = x^4 - 4x + 3 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2+x+1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 (\because x \text{는 실수})$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 0이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^4 - 4x + 3 \geq 0$ 이 성립한다.

0529 **답** 풀이 참조

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0 (\because x > -2)$$

$x > -2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	0	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	1 극소	$\nearrow$

$x > -2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 1이므로 $x > -2$ 일 때,

$$f(x) > 0$$

따라서 $x > -2$ 일 때, 부등식 $x^3 + 3x^2 + 1 > 0$ 이 성립한다.

0530 **답** (1) 5 (2) -22 (3) 3 (4) 1

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -3t^2 + 8t, a = \frac{dv}{dt} = -6t + 8$$

(1) $t = 1$ 에서의 점 P의 속도는

$$-3 \times 1^2 + 8 \times 1 = 5$$

(2) $t = 5$ 에서의 점 P의 가속도는

$$-6 \times 5 + 8 = -22$$

(3) $v = -3$ 에서

$$-3t^2 + 8t = -3, 3t^2 - 8t - 3 = 0$$

$$(3t+1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 3 (\because t > 0)$$

(4) $a = 2$ 에서

$$-6t + 8 = 2 \quad \therefore t = 1$$

0531 **답 6**

$$\frac{dl}{dt} = 6t - 6 \text{이므로 } t = 2 \text{에서의 물체의 길이의 변화율은}$$

$$6 \times 2 - 6 = 6$$

0532 **답** (1) 16π (2) 36π

(1) 구의 겉넓이를 S 라 하면

$$S = 4\pi t^2 \quad \therefore \frac{dS}{dt} = 8\pi t$$

따라서 $t = 2$ 에서의 구의 겉넓이의 변화율은

$$8\pi \times 2 = 16\pi$$

(2) 구의 부피를 V 라 하면

$$V = \frac{4}{3}\pi t^3 \quad \therefore \frac{dV}{dt} = 4\pi t^2$$

따라서 $t=3$ 에서의 구의 부피의 변화율은

$$4\pi \times 3^2 = 36\pi$$

B 유형 완성

90~97쪽

0533 답 $-\frac{19}{2}$

$$\frac{3}{2}x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 12x - k = 0 \text{에서}$$

$$\frac{3}{2}x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 12x = k$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^4 + 4x^3 - 3x^2 - 12x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^3 + 12x^2 - 6x - 12 = 6(x+2)(x+1)(x-1)$$

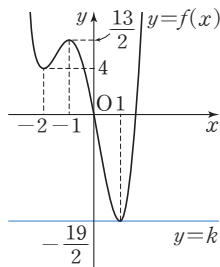
$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	4 극소	$\nearrow$	$\frac{13}{2}$ 극대	$\searrow$	$-\frac{19}{2}$ 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 오직 하나의 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 한 점에서 만나야 하므로

$$k = -\frac{19}{2}$$



0534 답 ③

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + k = 0 \text{에서}$$

$$2x^3 - 3x^2 - 12x = -k$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

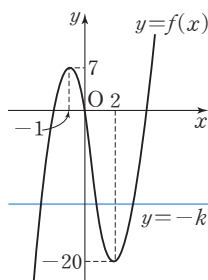
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	7 극대	$\searrow$	-20 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$-20 < -k < 7 \quad \therefore -7 < k < 20$$

따라서 정수 k 는 $-6, -5, -4, \dots, 19$ 의 26개이다.



0535 답 -4

$$2f(x) - k = 0 \text{에서 } f(x) = \frac{k}{2}$$

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2 극대	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$

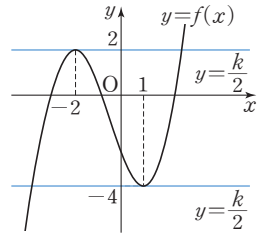
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=\frac{k}{2}$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$\frac{k}{2} = 2 \text{ 또는 } \frac{k}{2} = -4$$

$$\therefore k = 4 \text{ 또는 } k = -8$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$4 + (-8) = -4$$



0536 답 4

$$x^3 - 6x^2 + 9x - k = 0 \text{에서}$$

$$x^3 - 6x^2 + 9x = k$$

$$g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \text{라 하면}$$

$$g'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$g'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	3	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	4 극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $f(k)$ 는 곡선 $y=g(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같으므로

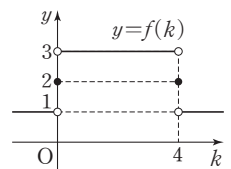
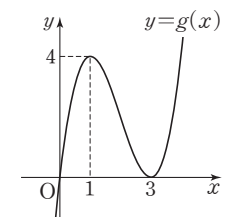
$$f(k) = \begin{cases} 1 & (k < 0 \text{ 또는 } k > 4) \\ 2 & (k = 0 \text{ 또는 } k = 4) \\ 3 & (0 < k < 4) \end{cases}$$

함수 $y=f(k)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(k)$ 는 $k=0, k=4$ 에서 불연속이다.

$$\therefore a = 0 \text{ 또는 } a = 4$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$0 + 4 = 4$$



0537 답 $5 < k < 7$

$$f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 5 \text{에서}$$

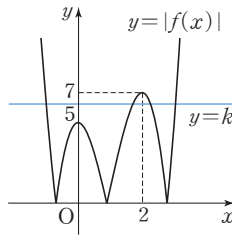
$$f'(x) = 9x^2 - 18x = 9x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		5 극대		-7 극소	

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로
 $5 < k < 7$



0538 답 4

$x^3 - 3x^2 - 9x - k = 0$ 에서 $x^3 - 3x^2 - 9x = k$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ 라 하면

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 3$

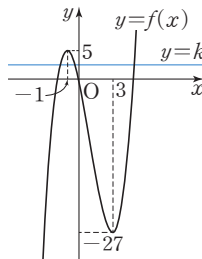
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		5 극대		-27 극소	

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표가 한 개는 양수이고 두 개는 음수이려면

$0 < k < 5$

따라서 정수 k 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.



0539 답 -4

$x^3 - 3x + a = 0$ 에서 $x^3 - 3x = -a$

$f(x) = x^3 - 3x$ 라 하면

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		2 극대		-2 극소	

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

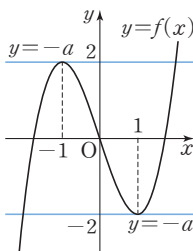
곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-a$ 의 교점의 x 좌표가 한 개는 양수이고 한 개는 음수이려면

$-a = 2$ 또는 $-a = -2$

$\therefore a = -2$ 또는 $a = 2$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$-2 \times 2 = -4$



채점 기준

i 주어진 방정식을 $f(x) = -a$ 로 정리하기	10 %
ii $y=f(x)$ 의 그래프 그리기	40 %
iii a 의 값 구하기	40 %
iv a 의 값의 곱 구하기	10 %

0540 답 $0 < k < 9$

$4x^3 - 12x = x^4 - 2x^2 + k$ 에서

$-x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 12x = k$

$f(x) = -x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 12x$ 라 하면

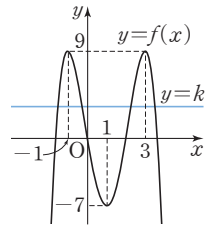
$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 + 4x - 12 = -4(x+1)(x-1)(x-3)$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 1$ 또는 $x = 3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$		9 극대		-7 극소		9 극대	

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표가 두 개는 양수이고 두 개는 음수이려면
 $0 < k < 9$



0541 답 $-5 < k < 27$

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - k$ 라 하면

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -3$ 또는 $x = 1$

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-3)f(1) < 0$ 이어야 하므로

$(-k+27)(-k-5) < 0, (k+5)(k-27) < 0$

$\therefore -5 < k < 27$

0542 답 ①

$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 6 + k$ 라 하면

$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4)$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 1$ 또는 $x = 4$

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$f(1)f(4) = 0$ 이어야 하므로

$(k+17)(k-10) = 0$

$\therefore k = -17$ 또는 $k = 10$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$-17 + 10 = -7$

0543 답 $0 < a < \frac{1}{4}$

$f(x) = x^3 - 3ax + a$ 에서 $f'(x) = 3x^2 - 3a$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$3x^2 - 3a = 0$ 에서 $x^2 = a$ 이므로 이 이차방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$a > 0$ ㉠

$f'(x) = 3x^2 - 3a = 3(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a})$ 이므로

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -\sqrt{a}$ 또는 $x = \sqrt{a}$

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 오직 하나의 실근을 가지려면

$f(-\sqrt{a})f(\sqrt{a}) > 0$ 이어야 하므로

$(a + 2a\sqrt{a})(a - 2a\sqrt{a}) > 0$

$a^2 - 4a^3 > 0, a^2(1 - 4a) > 0$

$1 - 4a > 0$ ($\because a^2 > 0$)

$\therefore a < \frac{1}{4}$ ㉡

㉠, ㉡에서 $0 < a < \frac{1}{4}$ ㉢

채점 기준

㉠ $f(x)$ 가 극값을 갖는 a 의 값의 범위 구하기	30 %
㉡ 방정식 $f(x) = 0$ 이 오직 하나의 실근을 갖는 a 의 값의 범위 구하기	50 %
㉢ a 의 값의 범위 구하기	20 %

0544 답 20

주어진 곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식 $2x^3 + 3x^2 - 10x = 2x + k$, 즉 $2x^3 + 3x^2 - 12x - k = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - k$ 라 하면

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x - 1)$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -2$ 또는 $x = 1$

삼차방정식 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$f(-2)f(1) = 0$ 이어야 하므로

$(-k + 20)(-k - 7) = 0$

$\therefore k = 20$ ($\because k > 0$)

0545 답 ③

두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 가 오직 한 점에서 만나려면 방정식

$f(x) = g(x)$, 즉 $h(x) = 0$ 이 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

주어진 그래프에서 $h'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	α	...	β	...
$h'(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	\	극소	/	극대	\

삼차방정식 $h(x) = 0$ 이 오직 하나의 실근을 가지려면

$h(\alpha)h(\beta) > 0$

0546 답 ④

주어진 두 곡선이 오직 한 점에서 만나려면 방정식

$-x^4 + 2x - k = x^2 + 8x + k$, 즉 $x^4 + x^2 + 6x = -2k$ 가 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

$f(x) = x^4 + x^2 + 6x$ 라 하면

$f'(x) = 4x^3 + 2x + 6 = 2(x + 1)(2x^2 - 2x + 3)$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ ($\because x$ 는 실수)

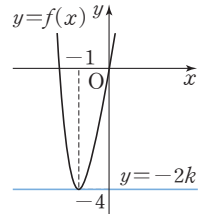
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\	-4 극소	/

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 방정식 $f(x) = -2k$ 가 오직 하나의 실근을 가지려면 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = -2k$

가 한 점에서 만나야 하므로

$-2k = -4 \quad \therefore k = 2$



0547 답 2

$y = x^3 + 2$ 에서 $y' = 3x^2$

점 $(1, a)$ 에서 곡선 $y = x^3 + 2$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를

$(t, t^3 + 2)$ 라 하면 접선의 방정식은

$y - (t^3 + 2) = 3t^2(x - t)$

이 직선이 점 $(1, a)$ 를 지나므로

$a - (t^3 + 2) = 3t^2(1 - t)$

$\therefore 2t^3 - 3t^2 + a - 2 = 0$ ㉠

점 $(1, a)$ 에서 주어진 곡선에 서로 다른 두 개의 접선을 그을 수 있으려면 t 에 대한 삼차방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(t) = 2t^3 - 3t^2 + a - 2$ 라 하면

$f'(t) = 6t^2 - 6t = 6t(t - 1)$

$f'(t) = 0$ 인 t 의 값은 $t = 0$ 또는 $t = 1$

삼차방정식 $f(t) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 $f(0)f(1) = 0$ 이어야 하므로

$(a - 2)(a - 3) = 0 \quad \therefore a = 2$ ($\because a \neq 3$)

참고 $a = 3$ 일 때 점 $(1, a)$, 즉 점 $(1, 3)$ 은 곡선 $y = x^3 + 2$ 위의 점이다.

0548 답 $a < -4$ 또는 $a > 0$

$y = x^3 + ax + 1$ 에서 $y' = 3x^2 + a$

점 $(2, 1)$ 에서 곡선 $y = x^3 + ax + 1$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를

$(t, t^3 + at + 1)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$y - (t^3 + at + 1) = (3t^2 + a)(x - t)$ ㉠

이 직선이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$1 - (t^3 + at + 1) = (3t^2 + a)(2 - t)$

$\therefore t^3 - 3t^2 - a = 0$ ㉡

점 $(2, 1)$ 에서 주어진 곡선에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 t 에 대한 삼차방정식 ㉡이 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

$f(t) = t^3 - 3t^2 - a$ 라 하면

$f'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t - 2)$

$f'(t) = 0$ 인 t 의 값은 $t = 0$ 또는 $t = 2$

삼차방정식 $f(t) = 0$ 이 오직 하나의 실근을 가지려면 $f(0)f(2) > 0$ 이어야 하므로

$-a(-a - 4) > 0, a(a + 4) > 0$

$\therefore a < -4$ 또는 $a > 0$ ㉢

채점 기준

i 접선의 방정식 구하기	30%
ii 접점의 x 좌표에 대한 방정식 구하기	30%
iii a 의 값의 범위 구하기	40%

0549 답 5

$$y = x^3 - 6x^2 - 5x + 10 \text{에서}$$

$$y' = 3x^2 - 12x - 5$$

점 $(0, n)$ 에서 곡선 $y = x^3 - 6x^2 - 5x + 10$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, t^3 - 6t^2 - 5t + 10)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$y - (t^3 - 6t^2 - 5t + 10) = (3t^2 - 12t - 5)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 - 12t - 5)x - 2t^3 + 6t^2 + 10$$

이 직선이 점 $(0, n)$ 을 지나므로

$$n = -2t^3 + 6t^2 + 10$$

$$g(t) = -2t^3 + 6t^2 + 10 \text{이라 하면}$$

$$g'(t) = -6t^2 + 12t = -6t(t - 2)$$

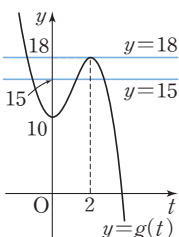
$$g'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은 } t = 0 \text{ 또는 } t = 2$$

함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	0	...	2	...
$g'(t)$	-	0	+	0	-
$g(t)$	\	10 극소	\	18 극대	\

함수 $y = g(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $f(n)$ 의 값은 곡선 $y = g(t)$ 와 직선 $y = n$ 의 교점의 개수와 같으므로

$$f(15) + f(18) = 3 + 2 = 5$$



0550 답 ③

$$f(x) = x^4 - 6x^2 - 8x + 10 + k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x - 8 = 4(x+1)^2(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	-	0	+
$f(x)$	\	$k+13$	\	$k-14$ 극소	\

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $k-14$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이 성립하려면

$$k - 14 > 0 \quad \therefore k > 14$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 15이다.

0551 답 -32

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 \geq a \text{에서}$$

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - a \geq 0$$

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - a \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x = 12x(x+2)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	$-a-32$ 극소	\	$-a$ 극대	\	$-a-5$ 극소	\

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-a-32$ 이므로 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-a - 32 \geq 0 \quad \therefore a \leq -32$$

따라서 a 의 최댓값은 -32이다.

0552 답 $k \leq -3$

$$f(x) \leq g(x) \text{에서 } f(x) - g(x) \leq 0$$

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{라 하면}$$

$$h(x) = -3x^4 + 16x^3 - 14x^2 - 24 - (4x^2 - k)$$

$$= -3x^4 + 16x^3 - 18x^2 - 24 + k$$

$$\therefore h'(x) = -12x^3 + 48x^2 - 36x = -12x(x-1)(x-3)$$

$$h'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...	3	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$h(x)$	\	$k-24$ 극대	\	$k-29$ 극소	\	$k+3$ 극대	\

함수 $h(x)$ 의 최댓값은 $k+3$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$h(x) = f(x) - g(x) \leq 0 \text{이 성립하려면}$$

$$k + 3 \leq 0 \quad \therefore k \leq -3$$

0553 답 -6

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 함수 $y = g(x)$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > g(x)$, 즉 $f(x) - g(x) > 0$ 이어야 한다.

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{라 하면}$$

$$h(x) = x^4 + 3x^2 + 4x - (x^2 - 4x + a) = x^4 + 2x^2 + 8x - a$$

$$\therefore h'(x) = 4x^3 + 4x + 8 = 4(x+1)(x^2 - x + 2)$$

$$h'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 (\because x \text{는 실수})$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	\	$-a-5$ 극소	\

함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $-a-5$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$h(x) = f(x) - g(x) > 0 \text{이 성립하려면}$$

$$-a - 5 > 0 \quad \therefore a < -5$$

따라서 정수 a 의 최댓값은 -6이다.

0554 답 ②

$$x^3 + 3x^2 - 24x + 40 > k \text{에서}$$

$$x^3 + 3x^2 - 24x + 40 - k > 0$$

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 40 - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24 = 3(x+4)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=2$ ($\because x \geq 0$)

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	2	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$-k+40$	$\searrow$	$-k+12$ 극소	$\nearrow$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-k+12$ 이므로 $x \geq 0$ 일 때,

$f(x) > 0$ 이 성립하려면

$$-k+12 > 0 \quad \therefore k < 12$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 11이다.

0555 답 $k < -17$

$x^3 - x^2 + x + 3 > 2x^2 + x + k$ 에서

$$x^3 - 3x^2 + 3 - k > 0$$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3 - k$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

$x \geq -2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	0	...	2	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-k-17$	$\nearrow$	$-k+3$ 극대	$\searrow$	$-k-1$ 극소	$\nearrow$

$x \geq -2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-k-17$ 이므로 $x \geq -2$ 일 때,

$f(x) > 0$ 이 성립하려면

$$-k-17 > 0 \quad \therefore k < -17$$

0556 답 3

$f(x) \geq 3g(x)$ 에서 $f(x) - 3g(x) \geq 0$

$h(x) = f(x) - 3g(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} h(x) &= x^3 + 3x^2 - k - 3(2x^2 + 3x - 10) \\ &= x^3 - 3x^2 - 9x + 30 - k \end{aligned}$$

$$\therefore h'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$h'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=3$

구간 $[-1, 4]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	3	...	4
$h'(x)$	0	-	0	+	
$h(x)$	$-k+35$	$\searrow$	$-k+3$ 극소	$\nearrow$	$-k+10$

구간 $[-1, 4]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $-k+3$ 이므로 구간

$[-1, 4]$ 에서 $h(x) = f(x) - 3g(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$-k+3 \geq 0 \quad \therefore k \leq 3$$

따라서 k 의 최댓값은 3이다.

0557 답 5

$|x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + k| \leq 10$ 에서

$$-10 \leq x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + k \leq 10$$

$f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + k$ 라 하면

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12 = 4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$ ($\because 0 \leq x \leq 3$)

$0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	k	$\nearrow$	$k+7$ 극대	$\searrow$	$k-9$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $k-9$, 최댓값은 $k+7$ 이므로

$0 \leq x \leq 3$ 일 때, $-10 \leq f(x) \leq 10$ 이 성립하려면

$$k-9 \geq -10, k+7 \leq 10$$

$$\therefore -1 \leq k \leq 3$$

따라서 정수 k 는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 의 5개이다.

0558 답 $k \geq 8$

$x^3 + 16x < 8x^2 + k$ 에서

$$x^3 - 8x^2 + 16x - k < 0$$

$f(x) = x^3 - 8x^2 + 16x - k$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 16x + 16 = (3x-4)(x-4)$$

$2 < x < 4$ 일 때, $f'(x) < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(2, 4)$ 에서 감소한다.

따라서 $2 < x < 4$ 일 때, $f(x) < 0$ 이 성립하려면 $f(2) \leq 0$ 이어야 하므로

$$8 - k \leq 0 \quad \therefore k \geq 8$$

0559 답 ③

$f(x) = x^3 + 5x - a(a-1)$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 5$$

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(1, \infty)$ 에서 증가한다.

따라서 $x > 1$ 일 때, $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$1 + 5 - a(a-1) \geq 0, a^2 - a - 6 \leq 0$$

$$(a+2)(a-3) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq a \leq 3$$

따라서 $M=3, m=-2$ 이므로

$$M+m=1$$

0560 답 32

$x > 2$ 일 때, 곡선 $y = x^3 + 3x^2$ 이 직선 $y = -6x + k$ 보다 항상 위쪽에 있으려면 $x > 2$ 일 때, 부등식 $x^3 + 3x^2 > -6x + k$, 즉

$$x^3 + 3x^2 + 6x - k > 0 \text{이 성립해야 한다.} \quad \dots\dots \text{①}$$

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x - k$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 6 = 3(x+1)^2 + 3 \geq 3$$

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(2, \infty)$ 에서 증가한다. \dots\dots \text{②}

따라서 $x > 2$ 일 때, $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f(2) \geq 0$ 이어야 하므로

$$8 + 12 + 12 - k \geq 0 \quad \therefore k \leq 32$$

$$\text{따라서 } k \text{의 최댓값은 32이다.} \quad \dots\dots \text{③}$$

채점 기준

① $x > 2$ 일 때, 항상 성립하는 부등식 구하기	30 %
② $x > 2$ 일 때, 함수의 증가와 감소 조사하기	30 %
③ k 의 최댓값 구하기	40 %

0561 답 ④

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 2t^2 - 2t$$

점 P의 속도가 4이면

$$2t^2 - 2t = 4, \quad t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t-2) = 0 \quad \therefore t = 2 \quad (\because t > 0)$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 4t - 2$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 가속도는

$$4 \times 2 - 2 = 6$$

0562 답 1

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -12t^2 + 24t = -12(t-1)^2 + 12$$

따라서 $t=1$ 에서의 점 P의 속도가 최대이다.

0563 답 -4

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + 2$$

점 P의 속도가 -1이면

$$3t^2 - 6t + 2 = -1, \quad t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$(t-1)^2 = 0 \quad \therefore t = 1$$

$t=1$ 에서의 점 P의 위치가 -4이므로

$$1 - 3 + 2 + k = -4$$

$$\therefore k = -4$$

0564 답 -2

점 P가 원점을 지나는 순간의 위치는 0이므로

$$t^3 - 4t^2 + 3t = 0, \quad t(t-1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 3 \quad (\because t > 0)$$

따라서 점 P가 출발 후 처음으로 다시 원점을 지나는 시각은 $t=1$ 이다. ①

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 8t + 3, \quad a = \frac{dv}{dt} = 6t - 8 \quad \dots\dots \text{②}$$

따라서 $t=1$ 에서의 점 P의 가속도는

$$6 \times 1 - 8 = -2 \quad \dots\dots \text{③}$$

채점 기준

① 점 P가 출발 후 처음으로 다시 원점을 지나는 시각 구하기	40 %
② 시각 t 에서의 점 P의 속도와 가속도 구하기	30 %
③ 점 P가 출발 후 처음으로 다시 원점을 지나는 순간의 가속도 구하기	30 %

0565 답 27

시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_1, v_2 라 하면

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 3t^2 - 4t + 3, \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} = 2t + 12$$

두 점 P, Q의 속도가 같으면 $v_1 = v_2$ 에서

$$3t^2 - 4t + 3 = 2t + 12$$

$$3t^2 - 6t - 9 = 0, \quad (t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 3 \quad (\because t \geq 0)$$

$t=3$ 에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$x_1 = 3^3 - 2 \times 3^2 + 3 \times 3 = 18$$

$$x_2 = 3^2 + 12 \times 3 = 45$$

따라서 구하는 거리는

$$45 - 18 = 27$$

0566 답 ③

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 18t + 24$$

점 P의 속도가 0이면

$$3t^2 - 18t + 24 = 0, \quad (t-2)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 4 \quad \therefore \alpha = 2, \beta = 4$$

$$\neg. \alpha + \beta = 6$$

ㄴ. 시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 18$$

$t=4$ 에서의 점 P의 가속도는

$$6 \times 4 - 18 = 6$$

ㄷ. $t=2$ 에서의 점 P의 위치는

$$2^3 - 9 \times 2^2 + 24 \times 2 + 1 = 21$$

$t=4$ 에서의 점 P의 위치는

$$4^3 - 9 \times 4^2 + 24 \times 4 + 1 = 17$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 위치가 $t=4$ 에서의 점 P의 위치보다 원점에서 더 멀다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0567 답 15

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = 4t^3 - 24t^2 + 36t, \quad v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = m$$

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 순간이 세 번 있으려면 $v_P = v_Q$ 를 만족시키는 양수 t 가 세 개 존재해야 하므로 방정식 $4t^3 - 24t^2 + 36t = m$ 이 $t > 0$ 에서 서로 다른 세 개의 실근을 가져야 한다.

$f(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t$ 라 하면

$$f'(t) = 12t^2 - 48t + 36 = 12(t-1)(t-3)$$

$$f'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은 } t = 1 \text{ 또는 } t = 3$$

$t > 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	1	...	3	...
$f'(t)$		+	0	-	0	+
$f(t)$		↗	16 극대	↘	0 극소	↗

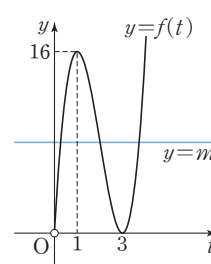
$t > 0$ 에서 함수 $y = f(t)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같으므로 곡선 $y = f(t)$ 와 직선

$y = m$ 이 서로 다른 세 점에서 만나려면

$$0 < m < 16$$

따라서 정수 m 은 1, 2, 3, ..., 15의 15개이다.



0568 [답] 12

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 12t$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$6t^2 - 12t = 0, t(t-2) = 0 \quad \therefore t=2 (\because t>0)$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 12$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 가속도는

$$12 \times 2 - 12 = 12$$

0569 [답] $2 < t < 3$

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = 2t - 6, v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = 4t - 8$$

두 점 P, Q가 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호가 서로 반대이므로 $v_P v_Q < 0$ 에서

$$(2t-6)(4t-8) < 0, (t-2)(t-3) < 0$$

$$\therefore 2 < t < 3$$

0570 [답] 64 m

제동을 건 지 t 초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 32 - 8t$$

열차가 정지하는 순간의 속도는 0이므로

$$32 - 8t = 0 \quad \therefore t = 4$$

따라서 4초 동안 열차가 움직인 거리는

$$32 \times 4 - 4 \times 4^2 = 64(\text{m})$$

채점 기준

i t 초 후의 열차의 속도 구하기	30 %
ii 열차가 정지하는 순간의 시각 구하기	40 %
iii 열차가 정지할 때까지 움직인 거리 구하기	30 %

0571 [답] 6

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2mt + n$$

$t=1$ 에서 점 P가 운동 방향을 바꾸므로

$$3 + 2m + n = 0 \quad \therefore 2m + n = -3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$t=1$ 에서의 점 P의 위치는 4이므로

$$1 + m + n = 4 \quad \therefore m + n = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$m = -6, n = 9$$

$$\therefore v = 3t^2 - 12t + 9$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$3t^2 - 12t + 9 = 0, (t-1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

따라서 점 P가 $t=1$ 이외에 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=3$ 이다.

시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 12$$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의 가속도는

$$6 \times 3 - 12 = 6$$

0572 [답] 3

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + a = 3(t-1)^2 + a - 3$$

점 P의 운동 방향이 바뀌지 않으려면 $t>0$ 에서 $v \geq 0$ 이어야 한다.

이때 $t>0$ 에서 v 의 최솟값이 $a-3$ 이므로 $t>0$ 에서 $v \geq 0$ 이려면

$$a-3 \geq 0 \quad \therefore a \geq 3$$

따라서 a 의 최솟값은 3이다.

0573 [답] ①

물체가 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로

$$25t - 5t^2 = 0, t(t-5) = 0 \quad \therefore t=5 (\because t>0)$$

t 초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 25 - 10t$$

따라서 $t=5$ 에서의 물체의 속도는

$$25 - 10 \times 5 = -25(\text{m/s})$$

0574 [답] ③

t 초 후의 공의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 20 - 10t$$

공이 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이므로

$$20 - 10t = 0 \quad \therefore t = 2$$

따라서 $t=2$ 에서의 공의 높이는

$$30 + 20 \times 2 - 5 \times 2^2 = 50(\text{m})$$

0575 [답] 35

물체가 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은 3초이고 그때의 높이가 85 m이므로

$$40 + 3a + 9b = 85 \quad \therefore a + 3b = 15 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

t 초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = a + 2bt$$

물체가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이므로

$$a + 6b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = 30, b = -5$$

$$\therefore a - b = 35$$

0576 [답] ③

시각 t 에서의 속도는 $x'(t)$ 이므로 위치 $x(t)$ 의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

ㄱ. $x'(4) = 0$ 이므로 $t=4$ 에서의 점 P의 속도는 0이다.

ㄴ. $x'(1) > 0, x'(2) = 0$ 이므로 점 P의 $t=1$ 에서의 속도는 $t=2$ 에서의 속도보다 빠르다.

ㄷ. $x'(t) = 0$ 이고 그 좌우에서 $x'(t)$ 의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀐다.

이때 $x'(3) \neq 0$ 이므로 $t=3$ 에서 점 P는 운동 방향을 바꾸지 않는다.

르. $0 < t < 2$ 에서 $x'(t) > 0$ 이고 $2 < t < 4$ 에서 $x'(t) < 0$ 이므로
 $0 < t < 2$ 에서와 $2 < t < 4$ 에서의 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0577 답 ⑤

시간 t 에서의 가속도는 $v'(t)$ 이므로 속도 $v(t)$ 의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

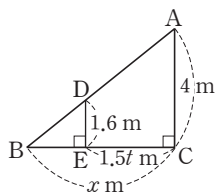
- ① $v'(a) = 0$ 이므로 $t = a$ 에서의 점 P의 가속도는 0이다.
- ② $v'(b) > 0$ 이므로 $t = b$ 에서의 점 P의 가속도는 양의 값이다.
- ③ $v(b) < 0$, $v(d) > 0$ 이므로 $t = b$ 에서와 $t = d$ 에서의 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.
- ④ $c < t < d$ 에서 점 P의 속도는 증가한다.
- ⑤ $v(t) = 0$ 이고 그 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 $0 < t < c$ 에서 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t = c$ 이다.
 따라서 $0 < t < c$ 에서 점 P는 운동 방향을 한 번 바꾼다.
 따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

0578 답 ㄱ, ㄷ

- ㄱ. $f'(t) = 0$ 이고 그 좌우에서 $f'(t)$ 의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 $0 < t < 5$ 에서 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t = 2$ 이다.
 따라서 $0 < t < 5$ 에서 점 P는 운동 방향을 한 번 바꾼다.
- ㄴ. $f'(3) > 0$, $g'(3) = 0$ 이므로 $t = 3$ 에서 점 Q의 속도는 점 P의 속도보다 느리다.
- ㄷ. $f(5) = g(5)$ 이므로 $t = 5$ 에서 두 점 P, Q는 만난다.
- 르. $4 < t < 5$ 에서 $f'(t) > 0$, $g'(t) < 0$ 이므로 두 점 P, Q의 운동 방향은 서로 반대이다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0579 답 1 m/s

사람이 t 초 동안 움직이는 거리는 $1.5t$ m
 t 초 후 가로등의 바로 밑에서 그림자 끝까지의 거리를 x m라 하면 오른쪽 그림에서



$\triangle ABC \sim \triangle DBE$ 이므로

$$4 : 1.6 = x : (x - 1.5t)$$

$$1.6x = 4x - 6t$$

$$\therefore x = 2.5t$$

그림자의 길이를 l m라 하면

$$l = \overline{BE} = 2.5t - 1.5t = t$$

$$\therefore \frac{dl}{dt} = 1$$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 1 m/s이다.

0580 답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

t 초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(t, 0)$, $(0, 2t)$

두 점 A, B를 1 : 2로 내분하는 점 P의 좌표는

$$\left(\frac{1 \times 0 + 2 \times t}{1 + 2}, \frac{1 \times 2t + 2 \times 0}{1 + 2} \right) \therefore \left(\frac{2t}{3}, \frac{2t}{3} \right)$$

선분 OP의 길이를 l 이라 하면

$$l = \sqrt{\left(\frac{2t}{3}\right)^2 + \left(\frac{2t}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}t \quad (\because t > 0)$$

따라서 선분 OP의 길이의 변화율은

$$\frac{dl}{dt} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

공통수학2 다시보기

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 에 대하여 선분 AB를 $m : n$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n} \right)$$

0581 답 3.2

t 초 후의 풍선의 반지름의 길이는 $(1 + 0.2t)$ cm이므로 풍선의 겉넓이를 S cm²라 하면

$$S = 4\pi(1 + 0.2t)^2$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 4\pi \times 2(1 + 0.2t) \times 0.2 = 1.6\pi(1 + 0.2t)$$

따라서 $t = 5$ 에서의 풍선의 겉넓이의 변화율은

$$1.6\pi(1 + 0.2 \times 5) = 3.2\pi(\text{cm}^2/\text{s})$$

$$\therefore a = 3.2$$

0582 답 ①

t 초 후의 직사각형의 가로의 길이는 $(10 + 2t)$ cm, 세로의 길이는 $(10 - t)$ cm이므로

$$0 < t < 10$$

직사각형의 넓이를 S cm²라 하면

$$S = (10 + 2t)(10 - t) = -2t^2 + 10t + 100$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = -4t + 10$$

직사각형의 넓이가 88 cm²이면

$$-2t^2 + 10t + 100 = 88, t^2 - 5t - 6 = 0$$

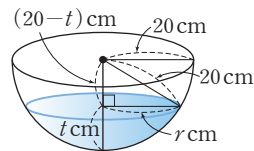
$$(t + 1)(t - 6) = 0 \quad \therefore t = 6 \quad (\because 0 < t < 10)$$

따라서 $t = 6$ 에서의 직사각형의 넓이의 변화율은

$$-4 \times 6 + 10 = -14(\text{cm}^2/\text{s})$$

0583 답 20π cm²/s

t 초 후의 수면의 높이는 t cm이므로 수면의 반지름의 길이를 r cm라 하면 오른쪽 그림에서



$$r = \sqrt{20^2 - (20 - t)^2} = \sqrt{-t^2 + 40t}$$

수면의 넓이를 S cm²라 하면

$$S = \pi(-t^2 + 40t)$$

..... ①

$$\therefore \frac{dS}{dt} = \pi(-2t + 40)$$

..... ②

따라서 $t = 10$ 에서의 수면의 넓이의 변화율은

$$\pi(-2 \times 10 + 40) = 20\pi(\text{cm}^2/\text{s})$$

..... ③

채점 기준

① t 초 후의 수면의 넓이 구하기	50 %
② 시각 t 에서의 수면의 넓이의 변화율 구하기	30 %
③ 10초 후의 수면의 넓이의 변화율 구하기	20 %

0584 **답** $18\pi \text{ cm}^3/\text{s}$

t 초 후의 수면의 높이는 $2t \text{ cm}$ 이므로 수면의 반지름의 길이를 $r \text{ cm}$ 라 하면 오른쪽 그림에서

$$10 : r = 20 : 2t \quad \therefore r = t$$

물의 부피를 $V \text{ cm}^3$ 라 하면

$$V = \frac{\pi}{3} \times r^2 \times 2t = \frac{\pi}{3} \times t^2 \times 2t = \frac{2}{3}\pi t^3$$

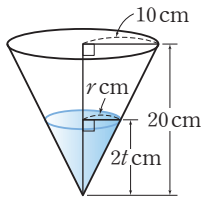
$$\therefore \frac{dV}{dt} = 2\pi t^2$$

수면의 높이가 6 cm 이면

$$2t = 6 \quad \therefore t = 3$$

따라서 $t=3$ 에서의 물의 부피의 변화율은

$$2\pi \times 3^2 = 18\pi (\text{cm}^3/\text{s})$$



0585 **답** ④

t 초 후의 밑면의 반지름의 길이는 $(2+2t) \text{ cm}$, 높이는 $(4+t) \text{ cm}$ 이므로 원기둥의 부피를 $V \text{ cm}^3$ 라 하면

$$V = \pi(2+2t)^2(4+t)$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \pi \{2(2+2t) \times 2 \times (4+t) + (2+2t)^2\}$$

$$= \pi(2+2t)\{4(4+t) + (2+2t)\}$$

$$= 12\pi(t+1)(t+3)$$

따라서 $t=1$ 에서의 원기둥의 부피의 변화율은

$$12\pi \times 2 \times 4 = 96\pi (\text{cm}^3/\text{s})$$

AB 유형 점검

98~100쪽

0586 **답** 5

$$\frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 5 + k = 0 \text{에서}$$

$$\frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 5 = -k$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 5 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 2x^3 - 12x^2 + 16x = 2x(x-2)(x-4)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=4$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

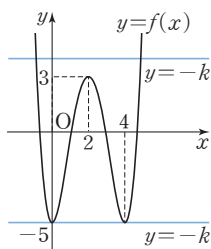
x	...	0	...	2	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-5 극소	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$	-5 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$-k > 3 \text{ 또는 } -k = -5$$

$$\therefore k < -3 \text{ 또는 } k = 5$$

따라서 양수 k 의 값은 5이다.



0587 **답** ④

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

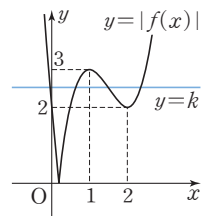
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$	2 극소	$\nearrow$

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $g(k)$ 는 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같으므로

$$g(k) = \begin{cases} 0 & (k < 0) \\ 1 & (k = 0) \\ 2 & (0 < k < 2 \text{ 또는 } k > 3) \\ 3 & (k = 2 \text{ 또는 } k = 3) \\ 4 & (2 < k < 3) \end{cases}$$

$$\therefore g(0) + g(1) + g(2) + g(3) = 1 + 2 + 3 + 3 = 9$$



0588 **답** 7

$$2x^3 - 6x^2 + k = 0 \text{에서}$$

$$2x^3 - 6x^2 = -k$$

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

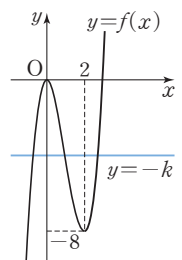
x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$	-8 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-k$ 의 교점의 x 좌표 중 두 개가 양수이려면

$$-8 < -k < 0$$

$$\therefore 0 < k < 8$$

따라서 정수 k 는 1, 2, 3, ..., 7의 7개이다.



0589 **답** ⑤

$$f(x) = x^3 - 12x - a \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 오직 하나의 실근을 가지려면

$$f(-2)f(2) > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$(-a+16)(-a-16) > 0$$

$$(a+16)(a-16) > 0$$

$$\therefore a < -16 \text{ 또는 } a > 16$$

따라서 정수 a 의 값이 될 수 있는 것은 ⑤이다.

0590 **답** $3 \leq k < 10$

두 점 A(-5, 0), B(2, 7)을 지나는 직선의 방정식은

$$y = \frac{7}{2+5}(x+5) \quad \therefore y = x+5$$

곡선 $y = x^3 + 3x^2 - 8x + k$ 가 선분 AB와 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식 $x^3 + 3x^2 - 8x + k = x + 5$, 즉 $x^3 + 3x^2 - 9x - 5 = -k$ 가 $-5 \leq x \leq 2$ 에서 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 5 \text{라 하면}$$

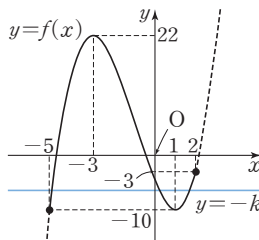
$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

$-5 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-5	...	-3	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-10	↗	22 극대	↘	-10 극소	↗	-3

$-5 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = -k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나려면
 $-10 < -k \leq -3$
 $\therefore 3 \leq k < 10$



0591 **답** $-\frac{1}{27} < a < 0$

$$y = x^3 + x^2 \text{에서 } y' = 3x^2 + 2x$$

점 (0, a)에서 곡선 $y = x^3 + x^2$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, t^3 + t^2)$ 이라 하면 접선의 방정식은

$$y - (t^3 + t^2) = (3t^2 + 2t)(x - t)$$

이 직선이 점 (0, a)를 지나므로

$$a - (t^3 + t^2) = (3t^2 + 2t)(-t)$$

$$\therefore 2t^3 + t^2 + a = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 (0, a)에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 t에 대한 삼차방정식 ①이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$f(t) = 2t^3 + t^2 + a \text{라 하면}$$

$$f'(t) = 6t^2 + 2t = 2t(3t + 1)$$

$$f'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은 } t = -\frac{1}{3} \text{ 또는 } t = 0$$

삼차방정식 $f(t) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)f(0) < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$a\left(a + \frac{1}{27}\right) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{27} < a < 0$$

0592 **답** $6 < a < 8$

$$f(x) = x^4 - 32x - a^2 + 14a \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 32 = 4(x-2)(x^2 + 2x + 4)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 2 (\because x \text{는 실수})$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$-a^2 + 14a - 48$ 극소	↗

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-a^2 + 14a - 48$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이 성립하려면

$$-a^2 + 14a - 48 > 0$$

$$a^2 - 14a + 48 < 0, (a-6)(a-8) < 0$$

$$\therefore 6 < a < 8$$

0593 **답** ⑤

$$f(x) \geq g(x) \text{에서 } f(x) - g(x) \geq 0$$

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{라 하면}$$

$$h(x) = x^3 - x + 6 - (x^2 + a)$$

$$= x^3 - x^2 - x + 6 - a$$

$$\therefore h'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$$

$$h'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 (\because x \geq 0)$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$	$-a+6$	↘	$-a+5$ 극소	↗

$x \geq 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $-a+5$ 이므로 $x \geq 0$ 일 때,

$$h(x) = f(x) - g(x) \geq 0 \text{이 성립하려면}$$

$$-a+5 \geq 0 \quad \therefore a \leq 5$$

따라서 a의 최댓값은 5이다.

0594 **답** 7

구간 [0, 2]에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 함수 $y = g(x)$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 $f(x) > g(x)$, 즉 $f(x) - g(x) > 0$ 이어야 한다.

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{라 하면}$$

$$h(x) = x^4 + 2x^2 - 6x + a - (-x^2 + 4x)$$

$$= x^4 + 3x^2 - 10x + a$$

$$\therefore h'(x) = 4x^3 + 6x - 10$$

$$= 2(x-1)(2x^2 + 2x + 5)$$

$$h'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 (\because x \text{는 실수})$$

구간 [0, 2]에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$h'(x)$		-	0	+	
$h(x)$	a	↘	$a-6$ 극소	↗	$a+8$

구간 [0, 2]에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $a-6$ 이므로 구간 [0, 2]에서 $h(x) = f(x) - g(x) > 0$ 이 성립하려면

$$a-6 > 0 \quad \therefore a > 6$$

따라서 정수 a의 최솟값은 7이다.

0595 [답 11]

$$f(x) = 2x^3 + 9x^2 - k \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 18x = 6x(x+3)$$

$1 < x < 3$ 일 때, $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(1, 3)$ 에서 증가한다.

따라서 $1 < x < 3$ 일 때, $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$11 - k \geq 0 \quad \therefore k \leq 11$$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3, ..., 11의 11개이다.

0596 [답 ①]

시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_1, v_2 라 하면

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = 2t + 1, v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -3t^2 + 14t$$

시각 t 에서의 두 점 P, Q의 가속도를 각각 a_1, a_2 라 하면

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = 2, a_2 = \frac{dv_2}{dt} = -6t + 14$$

두 점 P, Q의 위치가 같으면 $x_1 = x_2$ 에서

$$t^2 + t - 6 = -t^3 + 7t^2$$

$$t^3 - 6t^2 + t - 6 = 0$$

$$(t-6)(t^2+1)=0$$

$$\therefore t=6 \quad (\because t \text{ 는 실수})$$

따라서 $t=6$ 에서의 두 점 P, Q의 가속도가 각각 p, q 이므로

$$p=2, q=-6 \times 6 + 14 = -22$$

$$\therefore p - q = 24$$

0597 [답 ⑤]

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 18t + 15$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$3t^2 - 18t + 15 = 0$$

$$(t-1)(t-5) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=5$$

따라서 점 P가 출발 후 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=5$ 이다.

시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 18$$

따라서 $t=5$ 에서의 점 P의 가속도는

$$6 \times 5 - 18 = 12$$

0598 [답 ①]

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 18t + 12$$

$$\neg, t=0 \text{ 에서의 점 P의 속도는 12이다.}$$

$$\neg, \text{ 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로}$$

$$6t^2 - 18t + 12 = 0, (t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=2$$

따라서 점 P가 움직이는 동안 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=1, t=2$ 이므로 운동 방향을 두 번 바꾼다.

ㄷ. 시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 18$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 가속도는

$$12 \times 2 - 18 = 6$$

ㄹ. 점 P가 원점을 지나면 $x=0$ 이므로

$$2t^3 - 9t^2 + 12t = 0$$

$$\therefore t(2t^2 - 9t + 12) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $t > 0$ 이고, 방정식 $2t^2 - 9t + 12 = 0$ 은 실근을 갖지 않으므로

①을 만족시키는 $t > 0$ 인 실수 t 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 점 P는 출발 후 원점을 다시 지나지 않는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

0599 [답 50 m]

t 초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 30 - 10t$$

물체가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이므로

$$30 - 10t = 0 \quad \therefore t = 3$$

따라서 $t=3$ 에서의 물체의 높이는

$$5 + 30 \times 3 - 5 \times 3^2 = 50(\text{m})$$

0600 [답 ③]

시각 t 에서의 속도는 $x'(t)$ 이므로 위치 $x(t)$ 의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

$$\neg, x'(a) = 0 \text{ 이므로 } t=a \text{ 에서의 점 P의 속도는 0이다.}$$

$$\neg, x'(c) = 0 \text{ 이고, } a < t < c \text{ 또는 } d < t < e \text{ 에서 } x'(t) > 0 \text{ 이므로}$$

$$t=c \text{ 에서의 점 P의 속도는 최대가 아니다.}$$

$$\neg, x'(t) = 0 \text{ 이고 그 좌우에서 } x'(t) \text{ 의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 } 0 < t < e \text{ 에서 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은}$$

$$t=a, t=c, t=d \text{ 이다.}$$

따라서 $0 < t < e$ 에서 점 P는 운동 방향을 세 번 바꾼다.

$$\neg, x(b) = 0, x(d) = 0 \text{ 이므로 } 0 < t < e \text{ 에서 점 P는 } t=b, t=d \text{ 일 때 원점을 지난다.}$$

따라서 $0 < t < e$ 에서 점 P는 원점을 두 번 지난다.

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

0601 [답 36]

t 초 후의 점 P의 좌표는 $(2t, 0)$ 이므로 점 Q의 좌표는

$$(2t, 8t^3 - 16t^2 + 4t + 5)$$

선분 PQ의 길이를 l 이라 하면

$$l = 8t^3 - 16t^2 + 4t + 5$$

$$\therefore \frac{dl}{dt} = 24t^2 - 32t + 4$$

따라서 $t=2$ 에서의 선분 PQ의 길이의 변화율은

$$24 \times 2^2 - 32 \times 2 + 4 = 36$$

0602 답 ⑤

t 초 후의 구의 반지름의 길이는 $(3+2t)$ cm이므로 구의 부피를 V cm³라 하면

$$V = \frac{4}{3}\pi(3+2t)^3$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \times 3(3+2t)^2 \times 2$$

$$= 8\pi(3+2t)^2$$

따라서 $t=3$ 에서의 구의 부피의 변화율은
 $8\pi(3+2 \times 3)^2 = 648\pi(\text{cm}^3/\text{s})$

0603 답 -1

$f(x) = x^3 + 3x^2$ 이라 하면
 $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$
 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -2$ 또는 $x = 0$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗ 극대	↘	↘ 극소	↗

함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ①

주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y = k^3 + 3k^2$ 이 서로 다른 세 점에 서 만나야 하므로

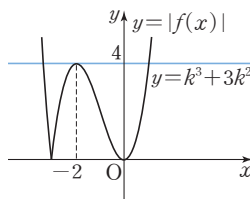
$$k^3 + 3k^2 = 4, k^3 + 3k^2 - 4 = 0$$

$$(k+2)^2(k-1) = 0$$

$$\therefore k = -2 \text{ 또는 } k = 1$$

따라서 구하는 합은

$$-2 + 1 = -1$$



채점 기준

① $f(x) = x^3 + 3x^2$ 이라 하고 $y = f(x) $ 의 그래프 그리기	50 %
② k 의 값 구하기	40 %
③ k 의 값의 합 구하기	10 %

0604 답 3

$$(x+2)(x-1)^2 - k = 0 \text{에서}$$

$$x^3 - 3x + 2 = k$$

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

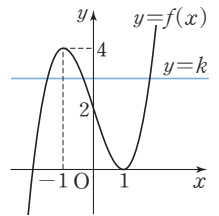
x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗ 극대	↘	↘ 극소	↗

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. ②

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = k$ 의 교점의 x 좌표가 한 개는 양수이고 두 개는 음수이려면

$$2 < k < 4$$

따라서 정수 k 의 값은 3이다. ④



채점 기준

① 주어진 방정식을 $f(x) = k$ 로 정리하기	10 %
② $y = f(x)$ 의 그래프 그리기	40 %
③ k 의 값의 범위 구하기	40 %
④ 정수 k 의 값 구하기	10 %

0605 답 76

점 P가 출발한 지 t 초 후의 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(2t, 0), (0, 3(t-3))$ (단, $t \geq 3$)

선분 PQ를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \overline{PQ}^2 = (-2t)^2 + (3t-9)^2$$

$$= 13t^2 - 54t + 81$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 26t - 54$$

따라서 $t=5$ 에서의 정사각형의 넓이의 변화율은

$$26 \times 5 - 54 = 76$$

채점 기준

① t 초 후의 두 점 P, Q의 좌표 구하기	30 %
② t 초 후의 정사각형의 넓이 구하기	30 %
③ 시각 t 에서의 정사각형의 넓이의 변화율 구하기	20 %
④ 5초 후의 정사각형의 넓이의 변화율 구하기	20 %

C 실력 향상

101쪽

0606 답 -1

(㉞)에서 삼차함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지므로 반드시 극솟값을 갖는다.

(㉞)에서 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y = 1$ 이 서로 다른 5개의 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 -1 이어야 한다.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{ (} a, b, c \text{는 상수)}$$

라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

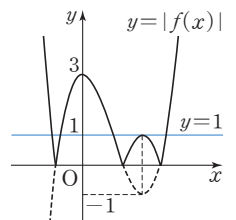
$$(㉞)에서 f'(0) = 0, f(0) = 3 \text{이므로}$$

$$b = 0, c = 3$$

$$\therefore f(x) = x^3 + ax^2 + 3,$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0 \text{ 또는 } x = -\frac{2}{3}a$$



함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{2}{3}a$ 에서 극솟값 -1 을 가지므로

$$f\left(-\frac{2}{3}a\right) = -1 \text{에서}$$

$$-\frac{8}{27}a^3 + \frac{4}{9}a^3 + 3 = -1$$

$$\frac{4}{27}a^3 = -4, a^3 = -27$$

$$\therefore a = -3 (\because a \text{는 실수})$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ 이므로

$$f(-1) = -1 - 3 + 3 = -1$$

0607 답 ④

$f(x) = x^3 + 3kx^2 + 1$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 6kx = 3x(x + 2k)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 0$ 또는 $x = -2k$

(i) $k > 0$ 일 때

$x \geq k$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 구간 $[k, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

이때 $f(0) = 1$ 이므로 $x \geq k$ 일 때 $f(x) \geq 0$, 즉 부등식

$$x^3 + 3kx^2 + 1 \geq 0 \text{이 성립한다.}$$

$$\therefore k^3 > 0$$

(ii) $k = 0$ 일 때

$x \geq 0$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이므로 구간 $[0, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

이때 $f(0) = 1$ 이므로 $x \geq k$ 일 때 $f(x) \geq 0$, 즉 부등식

$$x^3 + 3kx^2 + 1 \geq 0 \text{이 성립한다.}$$

$$\therefore k^3 = 0$$

(iii) $k < 0$ 일 때

$x \geq k$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	k	...	0	...	$-2k$	...
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$4k^3 + 1$	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$	$4k^3 + 1$ 극소	$\nearrow$

$x \geq k$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $4k^3 + 1$ 이므로 $x \geq k$ 일 때,

$f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$4k^3 + 1 \geq 0 \quad \therefore k^3 \geq -\frac{1}{4}$$

그런데 $k < 0$ 이므로 $-\frac{1}{4} \leq k^3 < 0$

(i), (ii), (iii)에서 $k^3 \geq -\frac{1}{4}$

따라서 k^3 의 최솟값은 $-\frac{1}{4}$ 이다.

0608 답 2

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

(㉞)에서 $f(0) = f'(0)$ 이므로 $c = b$

$$\therefore g(x) = f(x) - f'(x)$$

$$= x^3 + ax^2 + bx + c - (3x^2 + 2ax + b)$$

$$= x^3 + (a-3)x^2 + (b-2a)x$$

$$\therefore g'(x) = 3x^2 + 2(a-3)x + b - 2a$$

이때 $g(0) = f(0) - f'(0) = 0$ 이고 (㉞)에서

$x \geq -1$ 인 모든 실수 x 에 대하여

$f(x) \geq f'(x)$, 즉 $g(x) \geq 0$ 이므로 함수

$y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림

과 같아야 한다.

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극소이므로

$$g'(0) = 0 \text{에서 } b - 2a = 0$$

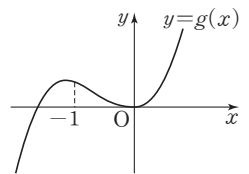
$$\therefore g(x) = x^3 + (a-3)x^2$$

(㉞)에서 $g(-1) \geq 0$ 이므로

$$-1 + a - 3 \geq 0 \quad \therefore a \geq 4$$

$$\therefore g(1) = 1 + a - 3 = a - 2 \geq 2$$

따라서 $g(1)$ 의 최솟값은 2이다.



0609 답 44

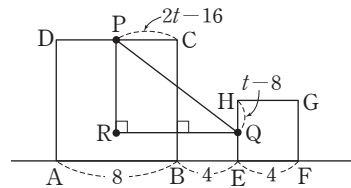
두 점 P, Q가 t 초 동안 움직이는 거리는 각각 $2t, t$ 이다.

$8 < t \leq 12$ 일 때 점 P는 $\overline{CD}$ 위를 움직이므로

$$\overline{CP} = 2t - 16$$

또 점 Q는 $\overline{HE}$ 위를 움직이므로

$$\overline{HQ} = t - 8$$



위의 그림에서

$$\overline{PR} = 4 + (t - 8) = t - 4$$

$$\overline{RQ} = (2t - 16) + 4 = 2t - 12$$

직각삼각형 PRQ에서

$$\overline{PQ}^2 = (t - 4)^2 + (2t - 12)^2$$

$$= 5t^2 - 56t + 160$$

$$\therefore \frac{d\overline{PQ}^2}{dt} = 10t - 56$$

따라서 $t = 10$ 에서의 $\overline{PQ}^2$ 의 변화율은

$$10 \times 10 - 56 = 44$$

07 / 부정적분

A 개념 확인

104~105쪽

0610 답 $5x+C$

$(5x)'=5$ 이므로 $\int 5 dx=5x+C$

0611 답 $-x^2+C$

$(-x^2)'=-2x$ 이므로 $\int (-2x) dx=-x^2+C$

0612 답 x^3+C

$(x^3)'=3x^2$ 이므로 $\int 3x^2 dx=x^3+C$

0613 답 x^6+C

$(x^6)'=6x^5$ 이므로 $\int 6x^5 dx=x^6+C$

0614 답 $f(x)=3$

$f(x)=(3x+C)'=3$

0615 답 $f(x)=4x+7$

$f(x)=(2x^2+7x+C)'=4x+7$

0616 답 $f(x)=-x^2+8x-1$

$f(x)=\left(-\frac{1}{3}x^3+4x^2-x+C\right)'=-x^2+8x-1$

0617 답 $f(x)=4x^3-6x^2+5$

$f(x)=(x^4-2x^3+5x+C)'=4x^3-6x^2+5$

0618 답 x^2

0619 답 x^2+C

0620 답 x^3-2x

0621 답 x^3-2x+C

0622 답 $x+C$

0623 답 $\frac{1}{4}x^4+C$

$\int x^3 dx=\frac{1}{3+1}x^{3+1}+C=\frac{1}{4}x^4+C$

0624 답 $\frac{1}{21}x^{21}+C$

$\int x^{20} dx=\frac{1}{20+1}x^{20+1}+C=\frac{1}{21}x^{21}+C$

0625 답 $\frac{1}{100}x^{100}+C$

$\int x^{99} dx=\frac{1}{99+1}x^{99+1}+C=\frac{1}{100}x^{100}+C$

0626 답 $3x^2+C$

$\int 6x dx=6\int x dx=3x^2+C$

0627 답 $\frac{3}{2}x^2+5x+C$

$\int (3x+5) dx=3\int x dx+5\int dx=\frac{3}{2}x^2+5x+C$

0628 답 $\frac{1}{3}x^3-2x^2+7x+C$

$\int (x^2-4x+7) dx=\int x^2 dx-4\int x dx+7\int dx$
 $=\frac{1}{3}x^3-2x^2+7x+C$

0629 답 $\frac{1}{2}x^4+4x^2+C$

$\int (2x^3+8x) dx=2\int x^3 dx+8\int x dx$
 $=\frac{1}{2}x^4+4x^2+C$

0630 답 $2x^3-\frac{5}{2}x^2-6x+C$

$\int (3x+2)(2x-3) dx=\int (6x^2-5x-6) dx$
 $=6\int x^2 dx-5\int x dx-6\int dx$
 $=2x^3-\frac{5}{2}x^2-6x+C$

0631 답 $\frac{1}{4}x^4-x+C$

$\int (x-1)(x^2+x+1) dx=\int (x^3-1) dx=\int x^3 dx-\int dx$
 $=\frac{1}{4}x^4-x+C$

0632 답 $\frac{1}{2}x^2-2x+C$

$\int \frac{x^2-4}{x+2} dx=\int \frac{(x+2)(x-2)}{(x+2)} dx=\int (x-2) dx$
 $=\int x dx-2\int dx=\frac{1}{2}x^2-2x+C$

0633 답 $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

$\int \frac{x^3}{x-1} dx-\int \frac{1}{x-1} dx=\int \frac{x^3-1}{x-1} dx$
 $=\int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} dx$
 $=\int (x^2+x+1) dx$
 $=\int x^2 dx+\int x dx+\int dx$
 $=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$

0634 답 ⑤

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3 - 2x^2 + x + C)' \\ &= 3x^2 - 4x + 1 \\ \therefore f(2) &= 12 - 8 + 1 = 5 \end{aligned}$$

0635 답 ③

- ① $(x^4 - 1)' = 4x^3$
- ② $(x^4)' = 4x^3$
- ③ $(2x^4)' = 8x^3$
- ④ $(x^4 + 1)' = 4x^3$
- ⑤ $(x^4 + 2)' = 4x^3$

따라서 $4x^3$ 의 부정적분이 아닌 것은 ③이다.

0636 답 8

$$\begin{aligned} 8x^3 - ax^2 + 1 &= (bx^4 - 2x^3 + x + C)' \\ &= 4bx^3 - 6x^2 + 1 \end{aligned}$$

따라서 $8 = 4b$, $-a = -6$ 이므로

$$a = 6, b = 2$$

$$\therefore a + b = 8$$

0637 답 ①

$$\begin{aligned} (x-2)f(x) &= (-x^4 + 2x^3 + 2x^2 + C)' \\ &= -4x^3 + 6x^2 + 4x \\ &= -2x(2x+1)(x-2) \end{aligned}$$

따라서 $f(x) = -2x(2x+1)$ 이므로

$$f(1) = -2 \times 3 = -6$$

0638 답 3

$$f(x) = F'(x) = (x^3 + ax^2)' = 3x^2 + 2ax \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$f(2) = -4 \text{에서}$$

$$12 + 4a = -4 \quad \therefore a = -4 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 8x$ 이므로

$$f(3) = 27 - 24 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $f(x)$ 를 a 에 대한 식으로 나타내기	40 %
② a 의 값 구하기	40 %
③ $f(3)$ 의 값 구하기	20 %

0639 답 ③

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-2h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) + f(1) - f(1-2h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-2h) - f(1)}{-2h} \times (-2) \\ &= f'(1) + 2f'(1) = 3f'(1) \end{aligned}$$

$$f(x) = \int (x^2 + x) dx \text{에서 } f'(x) = x^2 + x \text{이므로}$$

$$f'(1) = 1 + 1 = 2$$

따라서 구하는 값은

$$3f'(1) = 3 \times 2 = 6$$

0640 답 8

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \left\{ \frac{d}{dx}(x^3 + 3x^2 - 5x) \right\} dx \\ &= x^3 + 3x^2 - 5x + C \end{aligned}$$

$f(1) = 0$ 에서

$$1 + 3 - 5 + C = 0 \quad \therefore C = 1$$

따라서 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ 이므로

$$f(-1) = -1 + 3 + 5 + 1 = 8$$

0641 답 ②

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \int (2x^3 - x^2 + 5) dx \right\} = 2x^3 - x^2 + 5 \text{이므로} \\ f(2) &= 16 - 4 + 5 = 17 \end{aligned}$$

0642 답 12

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \left\{ \frac{d}{dx}(x^2 - 6x) \right\} dx = x^2 - 6x + C \\ &= (x-3)^2 - 9 + C \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 8이므로

$$-9 + C = 8 \quad \therefore C = 17$$

따라서 $f(x) = x^2 - 6x + 17$ 이므로

$$f(1) = 1 - 6 + 17 = 12$$

0643 답 4

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \left\{ \frac{d}{dx}(x^3 + ax) \right\} dx = x^3 + ax + C \\ \therefore f'(x) &= 3x^2 + a \end{aligned}$$

$f(2) = 6$ 에서

$$8 + 2a + C = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$f'(0) = -2$ 에서 $a = -2$

이를 ㉠에 대입하면

$$8 - 4 + C = 6 \quad \therefore C = 2$$

$$\therefore f(x) = x^3 - 2x + 2, f'(x) = 3x^2 - 2 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore f(-1) + f'(-1) = (-1 + 2 + 2) + (3 - 2) = 4 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① a 의 값 구하기	40 %
② $f(x), f'(x)$ 구하기	40 %
③ $f(-1) + f'(-1)$ 의 값 구하기	20 %

0644 답 ㄷ

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. } \int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx &= f(x) + C, \frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} = f(x) \text{이므로} \\ \int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx &\neq \frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} \\ \text{ㄴ. } \frac{d}{dx} \left[\int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx \right] &= \frac{d}{dx} \{ f(x) + C \} = f'(x) \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} = f(x), \int \left\{ \frac{d}{dx} g(x) \right\} dx = g(x) + C \text{이므로}$$

$$f(x) = g(x) + C$$

양변을 x 에 대하여 미분하면 $f'(x) = g'(x)$

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄷ이다.

0645 답 -2

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{x^2}{x-2} dx - \int \frac{5x-6}{x-2} dx \\ &= \int \frac{x^2-5x+6}{x-2} dx \\ &= \int \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} dx \\ &= \int (x-3) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 3x + C \end{aligned}$$

$$f(-2) = 10 \text{에서}$$

$$2+6+C=10 \quad \therefore C=2$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2 \text{이므로}$$

$$f(4) = 8 - 12 + 2 = -2$$

0646 답 2

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1) dx \\ &= x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + C \end{aligned}$$

$$f(0) = -3 \text{에서 } C = -3$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 3 \text{이므로}$$

$$f(1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 3 = 2$$

0647 답 10

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (x+1)(x^2-x+1) dx + \int (x-1)(x^2+x+1) dx \\ &= \int (x^3+1) dx + \int (x^3-1) dx \\ &= \int \{(x^3+1) + (x^3-1)\} dx \\ &= \int 2x^3 dx \\ &= \frac{1}{2}x^4 + C \end{aligned}$$

$$f(0) = 2 \text{에서 } C = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2 \text{이므로}$$

$$f(2) = 8 + 2 = 10$$

0648 답 4

$$(가) \text{에서 } f(x) = \int (2x-4) dx = x^2 - 4x + C$$

(나)에서 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 - 4x + C \geq 0$ 이므로 이차방정식 $x^2 - 4x + C = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4 - C \leq 0 \quad \therefore C \geq 4$$

이때 $f(0) = C$ 이므로 $f(0) \geq 4$

따라서 $f(0)$ 의 최솟값은 4이다.

0649 답 ④

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 6) dx \\ &= x^3 - 6x + C \end{aligned}$$

$$f(0) = 8 \text{에서 } C = 8$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - 6x + 8 \text{이므로}$$

$$f(-1) = -1 + 6 + 8 = 13$$

0650 답 ②

$$f'(x) = 6x + 8 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (6x + 8) dx \\ &= 3x^2 + 8x + C_1 \end{aligned}$$

$$f(0) = 3 \text{에서 } C_1 = 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3x^2 + 8x + 3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int (3x^2 + 8x + 3) dx \\ &= x^3 + 4x^2 + 3x + C \end{aligned}$$

0651 답 ②

$$f'(x) = 6x^2 + 2x + 5 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (6x^2 + 2x + 5) dx \\ &= 2x^3 + x^2 + 5x + C \end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로 $f(0) = 3$ 에서 $C = 3$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x^3 + x^2 + 5x + 3 \text{이므로}$$

$$f(-1) = -2 + 1 - 5 + 3 = -3$$

0652 답 $-\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (4x + a) dx \\ &= 2x^2 + ax + C \end{aligned}$$

방정식 $f(x) = 0$, 즉 $2x^2 + ax + C = 0$ 의 모든 근의 곱이 -5 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{C}{2} = -5 \quad \therefore C = -10 \quad \dots \textcircled{i}$$

$$f(2) = 4 \text{에서}$$

$$8 + 2a + C = 4, \quad 8 + 2a - 10 = 4 \quad \therefore a = 3 \quad \dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore f(x) = 2x^2 + 3x - 10$$

따라서 방정식 $f(x) = 0$, 즉 $2x^2 + 3x - 10 = 0$ 의 모든 근의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{3}{2}$ 이다. $\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 적분상수 구하기	40 %
② a 의 값 구하기	30 %
③ 방정식 $f(x) = 0$ 의 모든 근의 합 구하기	30 %

0653 **답** ⑤

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + f(x) - f(x-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \times (-1) \\ &= f'(x) + f'(x) = 2f'(x) \end{aligned}$$

따라서 $2f'(x) = 4x^2 - 6x + 2$ 이므로

$$f'(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2x^2 - 3x + 1) dx \\ &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C \end{aligned}$$

$$f(0) = 1 \text{에서 } C = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + 1 \text{이므로}$$

$$f(1) = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1 + 1 = \frac{7}{6}$$

0654 **답** ④

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int \{6x^2 - 2f(1)x\} dx \\ &= 2x^3 - f(1)x^2 + C \end{aligned}$$

$$f(0) = 4 \text{에서 } C = 4$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 - f(1)x^2 + 4$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = 2 - f(1) + 4$$

$$2f(1) = 6 \quad \therefore f(1) = 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4 \text{이므로}$$

$$f(2) = 16 - 12 + 4 = 8$$

0655 **답** -6

(가)에서

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x^2 + 2x) dx \\ &= x^3 + x^2 + C \end{aligned}$$

$$f(1) = 1 + 1 + C = C + 2, \quad f'(1) = 3 + 2 = 5 \text{이므로 곡선 } y = f(x)$$

위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (C + 2) = 5(x - 1)$$

$$\therefore y = 5x - 3 + C$$

(나)에서 이 접선의 x 절편이 1이므로 $x=1, y=0$ 을 대입하면

$$0 = 5 - 3 + C \quad \therefore C = -2$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 + x^2 - 2 \text{이므로}$$

$$f(-2) = -8 + 4 - 2 = -6$$

0656 **답** 3

$F(x) = xf(x) - 2x^3 + x^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 6x^2 + 2x$$

$$xf'(x) = 6x^2 - 2x = x(6x - 2)$$

$$\therefore f'(x) = 6x - 2$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (6x - 2) dx \\ &= 3x^2 - 2x + C \end{aligned}$$

$$f(1) = -1 \text{에서}$$

$$3 - 2 + C = -1 \quad \therefore C = -2$$

$$\text{따라서 } f(x) = 3x^2 - 2x - 2 \text{이므로}$$

$$f(-1) = 3 + 2 - 2 = 3$$

0657 **답** -18

$F(x) + \int (x-1)f(x) dx = x^4 - 8x^3 + 9x^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + (x-1)f(x) = 4x^3 - 24x^2 + 18x$$

$$xf(x) = x(4x^2 - 24x + 18)$$

$$\therefore f(x) = 4x^2 - 24x + 18$$

$$= 4(x-3)^2 - 18$$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 -18이다.

0658 **답** $\frac{5}{4}$

$\int xf(x) dx = \{f(x)\}^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$xf(x) = 2f(x)f'(x)$$

$$f'(x)f(x) = \frac{1}{2}xf(x)$$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2}x \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int \frac{1}{2}x dx \\ &= \frac{1}{4}x^2 + C \end{aligned}$$

$$f(0) = 1 \text{에서 } C = 1 \text{이므로}$$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore f(1) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $f'(x)$ 구하기	40 %
② $f(x)$ 구하기	40 %
③ $f(1)$ 의 값 구하기	20 %

0659 **답** 5

$f(x) + \int xf(x) dx = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) + xf(x) = 3x^2 - 4x + 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(x)$ 를 n 차함수라 하면 $xf(x)$ 는 $(n+1)$ 차함수이므로 ①에서

$$n+1=2 \quad \therefore n=1$$

따라서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 일차함수이므로

$$f(x) = 3x + a \quad (a \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3$$

$f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 ①에 대입하면

$$3 + x(3x + a) = 3x^2 - 4x + 3$$

$$3x^2+ax+3=3x^2-4x+3$$

$$\therefore a=-4$$

따라서 $f(x)=3x-4$ 이므로

$$f(3)=9-4=5$$

0660 [답] ⑤

$$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x-4 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\} \right] dx = \int (4x-4) dx$$

$$\therefore f(x)-g(x)=2x^2-4x+C_1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=6x^2+6x-5 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} \right] dx = \int (6x^2+6x-5) dx$$

$$\therefore f(x)g(x)=2x^3+3x^2-5x+C_2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f(0)=4, g(0)=3 \text{이므로 } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서}$$

$$f(0)-g(0)=C_1 \quad \therefore C_1=1$$

$$f(0)g(0)=C_2 \quad \therefore C_2=12$$

$$\therefore f(x)-g(x)=2x^2-4x+1,$$

$$f(x)g(x)=2x^3+3x^2-5x+12 \\ = (x+3)(2x^2-3x+4)$$

이때 $f(0)=4, g(0)=3$ 이므로

$$f(x)=2x^2-3x+4, g(x)=x+3$$

$$\therefore f(2)-g(1)=(8-6+4)-(1+3)=2$$

0661 [답] -1

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} \right] dx = \int 2 dx$$

$$\therefore f(x)+g(x)=2x+C_1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\} \right] dx = \int 4x dx$$

$$\therefore f(x)-g(x)=2x^2+C_2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$f(0)=-4, g(0)=3 \text{이므로 } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서}$$

$$f(0)+g(0)=C_1 \quad \therefore C_1=-1$$

$$f(0)-g(0)=C_2 \quad \therefore C_2=-7$$

$$\therefore f(x)+g(x)=2x-1, f(x)-g(x)=2x^2-7$$

두 식을 연립하여 풀면

$$f(x)=x^2+x-4, g(x)=-x^2+x+3$$

$$\therefore f(-1)+g(1)=(1-1-4)+(-1+1+3)=-1$$

다른 풀이

$$f(x)+g(x)=\int 2 dx \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(x)-g(x)=\int 4x dx \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}+\textcircled{2}$ 을 하면

$$2f(x)=\int (4x+2) dx=2\int (2x+1) dx$$

$$\therefore f(x)=\int (2x+1) dx=x^2+x+C_1$$

$$f(0)=-4 \text{에서 } C_1=-4$$

$$\therefore f(x)=x^2+x-4$$

$\textcircled{1}-\textcircled{2}$ 을 하면

$$2g(x)=\int (2-4x) dx=2\int (-2x+1) dx$$

$$\therefore g(x)=\int (-2x+1) dx=-x^2+x+C_2$$

$$g(0)=3 \text{에서 } C_2=3$$

$$\therefore g(x)=-x^2+x+3$$

$$\therefore f(-1)+g(1)=(1-1-4)+(-1+1+3)=-1$$

0662 [답] 4

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} \right] dx = \int 3x^2 dx$$

$$\therefore f(x)g(x)=x^3+C$$

$$f(1)=-1, g(1)=7 \text{에서}$$

$$f(1)g(1)=1+C$$

$$-7=1+C$$

$$\therefore C=-8$$

$$\therefore f(x)g(x)=x^3-8$$

$$=(x-2)(x^2+2x+4)$$

$\dots\dots \textcircled{i}$

이때 $f(1)=-1, g(1)=7$ 이므로

$$f(x)=x-2, g(x)=x^2+2x+4$$

$\dots\dots \textcircled{ii}$

$$\therefore f(3)+g(-1)=(3-2)+(1-2+4)=4$$

$\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① $f(x)g(x)$ 구하기	50 %
② $f(x), g(x)$ 구하기	40 %
③ $f(3)+g(-1)$ 의 값 구하기	10 %

0663 [답] 2

(i) $x \geq 0$ 일 때

$$f(x)=\int f'(x) dx=\int (2x-1) dx \\ =x^2-x+C_1$$

(ii) $x < 0$ 일 때

$$f(x)=\int f'(x) dx=\int (3x^2-1) dx \\ =x^3-x+C_2$$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+C_1 & (x \geq 0) \\ x^3-x+C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

$$f(1)=2 \text{에서}$$

$$1-1+C_1=2 \quad \therefore C_1=2$$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)=f(0)$ 에서

$$C_2=C_1 \quad \therefore C_2=2$$

$$\text{따라서 } f(x)=\begin{cases} x^2-x+2 & (x \geq 0) \\ x^3-x+2 & (x < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(-1)=-1+1+2=2$$

0664 **답** ⑤

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & (x \geq 1) \\ -2x+1 & (x < 1) \end{cases}$$

(i) $x \geq 1$ 일 때

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-1) dx \\ = -x + C_1$$

(ii) $x < 1$ 일 때

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-2x+1) dx \\ = -x^2 + x + C_2$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} -x + C_1 & (x \geq 1) \\ -x^2 + x + C_2 & (x < 1) \end{cases}$$

$f(2)=3$ 에서

$$-2 + C_1 = 3 \quad \therefore C_1 = 5$$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ 에서

$$-1 + 1 + C_2 = -1 + C_1$$

$$-1 + 1 + C_2 = -1 + 5 \quad \therefore C_2 = 4$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} -x + 5 & (x \geq 1) \\ -x^2 + x + 4 & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(0) = 4$$

0665 **답** 8

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서

$$f'(x) = \begin{cases} -x+1 & (x \geq 0) \\ x+1 & (x < 0) \end{cases}$$

(i) $x \geq 0$ 일 때

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-x+1) dx \\ = -\frac{1}{2}x^2 + x + C_1$$

(ii) $x < 0$ 일 때

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x+1) dx \\ = \frac{1}{2}x^2 + x + C_2$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x + C_1 & (x \geq 0) \\ \frac{1}{2}x^2 + x + C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(0, 4)$ 를 지나므로 $f(0)=4$ 에서

$$C_1 = 4$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \text{에서}$$

$$C_2 = C_1 \quad \therefore C_2 = 4$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 & (x \geq 0) \\ \frac{1}{2}x^2 + x + 4 & (x < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(1) + f(-1) = \left(-\frac{1}{2} + 1 + 4\right) + \left(\frac{1}{2} - 1 + 4\right) = 8$$

0666 **답** ③

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-3x^2 + 12x) dx \\ = -x^3 + 6x^2 + C$$

$$f'(x) = -3x^2 + 12x = -3x(x-4) \text{이므로}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=4$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이고 극솟값이 -15 이므로 $f(0) = -15$ 에서

$$C = -15$$

$$\therefore f(x) = -x^3 + 6x^2 - 15$$

함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$f(4) = -64 + 96 - 15 = 17$$

0667 **답** ④

$f(x)$ 가 삼차함수이면 $f'(x)$ 는 이차함수이고 주어진 그래프에서

$f'(-1) = f'(1) = 0$ 이므로 $f'(x) = a(x+1)(x-1)$ ($a > 0$)이라 하면

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int a(x+1)(x-1) dx \\ = \int (ax^2 - a) dx \\ = \frac{a}{3}x^3 - ax + C$$

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대이고 극댓값이 4이므로 $f(-1) = 4$ 에서

$$\frac{2}{3}a + C = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이고 극솟값이 0이므로 $f(1) = 0$ 에서

$$-\frac{2}{3}a + C = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 3, C = 2$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ 이므로

$$f(3) = 27 - 9 + 2 = 20$$

0668 **답** 8

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int 3(x+1)(x-2) dx \\ = \int (3x^2 - 3x - 6) dx \\ = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$$

$f'(x)=3(x+1)(x-2)$ 이므로 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대이고 극댓값은

$$f(-1)=-1-\frac{3}{2}+6+C=C+\frac{7}{2}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이고 극솟값은

$$f(2)=8-6-12+C=C-10 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 x 축에 접하므로 극댓값 또는 극솟값이 0이다.

$$\text{즉, } C+\frac{7}{2}=0 \text{ 또는 } C-10=0 \text{이므로}$$

$$C=-\frac{7}{2} \text{ 또는 } C=10$$

이때 $f(0)>0$ 이므로 $C>0$

$$\therefore C=10 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+10$ 이므로

$$f(-2)=-8-6+12+10=8 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값을 적분상수를 이용하여 나타내기	60 %
② 적분상수 구하기	30 %
③ $f(-2)$ 의 값 구하기	10 %

0669 답 ③

$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy(x+y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+3xh(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h)}{h} + 3x(x+h) \right\} \\ &= 3x^2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \\ &= 3x^2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 3x^2 + f'(0) \end{aligned}$$

$f'(1)=4$ 에서

$$3+f'(0)=4 \quad \therefore f'(0)=1$$

따라서 $f'(x)=3x^2+1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x^2+1) dx \\ &= x^3+x+C \end{aligned}$$

①에서 $C=0$

따라서 $f(x)=x^3+x$ 이므로

$$f(2)=8+2=10$$

0670 답 ①

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0) \quad \therefore f(0)=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int dx = x + C$$

①에서 $C=0$

따라서 $f(x)=x$ 이므로 $f(3)=3$

0671 답 -2

$f(x+y)=f(x)+f(y)-3$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)-3 \quad \therefore f(0)=3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)-3-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= f'(0) \end{aligned}$$

$f'(0)=k$ (k 는 상수)라 하면 $f'(x)=k$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int k dx = kx + C$$

①에서 $C=3$

$$\therefore f(x)=kx+3$$

$f(3)=-3$ 에서

$$3k+3=-3 \quad \therefore k=-2$$

$$\therefore f'(0)=k=-2$$

AB 유형 점검

112~114쪽

0672 답 ⑤

$$\begin{aligned} (x+1)f(x) &= \left(x^3 + \frac{9}{2}x^2 + 6x + C \right)' \\ &= 3x^2 + 9x + 6 \\ &= 3(x+2)(x+1) \end{aligned}$$

따라서 $f(x)=3(x+2)$ 이므로

$$f(3)=3 \times 5 = 15$$

0673 [답] ④

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int \{f(x) - x^2 + 4\} dx &= \int \frac{d}{dx} \{2f(x) - 3x + 1\} dx \text{에서} \\ f(x) - x^2 + 4 &= 2f(x) - 3x + 1 + C \\ \therefore f(x) &= -x^2 + 3x + 3 - C \\ f(1) &= 3 \text{에서} \\ -1 + 3 + 3 - C &= 3 \quad \therefore C = 2 \\ \text{따라서 } f(x) &= -x^2 + 3x + 1 \text{이므로} \\ f(0) &= 1 \end{aligned}$$

0674 [답] 10

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx - \int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx \\ &= \int \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) dx - \int \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) dx \\ &= \int \left\{ \left(x + 2 + \frac{1}{x} \right) - \left(x - 2 + \frac{1}{x} \right) \right\} dx \\ &= \int 4 dx = 4x + C \\ f(1) &= 2 \text{에서 } 4 + C = 2 \quad \therefore C = -2 \\ \text{따라서 } f(x) &= 4x - 2 \text{이므로} \\ f(3) &= 12 - 2 = 10 \end{aligned}$$

0675 [답] 1

$$\begin{aligned} f(x) &= \int (1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}) dx \\ &= x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + C \\ f(0) &= 1 \text{에서 } C = 1 \\ f(1) &= 5 \text{에서} \\ \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{개}} + C &= 5 \\ n + 1 &= 5 \quad \therefore n = 4 \\ \text{따라서 } f(x) &= x + x^2 + x^3 + x^4 + 1 \text{이므로} \\ f(-1) &= -1 + 1 - 1 + 1 + 1 = 1 \end{aligned}$$

0676 [답] ③

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x^2 - ax) dx \\ &= x^3 - \frac{a}{2}x^2 + C \\ f(1) &= 6 \text{에서 } 1 - \frac{a}{2} + C = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ f(2) &= 4 \text{에서 } 8 - 2a + C = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \textcircled{1} - \textcircled{2} \text{을 하면} \\ -7 + \frac{3}{2}a &= 2 \quad \therefore a = 6 \end{aligned}$$

0677 [답] ②

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (12x^2 + 6x - 2) dx \\ &= 4x^3 + 3x^2 - 2x + C_1 \\ f(1) &= 2 \text{에서} \\ 4 + 3 - 2 + C_1 &= 2 \quad \therefore C_1 = -3 \\ \therefore f(x) &= 4x^3 + 3x^2 - 2x - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore F(x) &= \int f(x) dx = \int (4x^3 + 3x^2 - 2x - 3) dx \\ &= x^4 + x^3 - x^2 - 3x + C_2 \\ F(1) &= 3 \text{에서} \\ 1 + 1 - 1 - 3 + C_2 &= 3 \quad \therefore C_2 = 5 \\ \text{따라서 } F(x) &= x^4 + x^3 - x^2 - 3x + 5 \text{이므로} \\ F(-1) &= 1 - 1 - 1 + 3 + 5 = 7 \end{aligned}$$

0678 [답] 5

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x + 3 \text{이므로} \\ f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-2x + 3) dx \\ &= -x^2 + 3x + C \\ \text{곡선 } y=f(x) &\text{가 점 } (1, 5) \text{를 지나므로 } f(1)=5 \text{에서} \\ -1 + 3 + C &= 5 \quad \therefore C = 3 \\ \therefore f(x) &= -x^2 + 3x + 3 \\ \text{곡선 } y=f(x) &\text{가 점 } (2, k) \text{를 지나므로 } f(2)=k \text{에서} \\ -4 + 6 + 3 &= k \quad \therefore k = 5 \end{aligned}$$

0679 [답] 11

$$\begin{aligned} \textcircled{7} \text{에서 } f'(x) &= 3x^2 + 2x + a \text{이므로} \\ f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x^2 + 2x + a) dx \\ &= x^3 + x^2 + ax + C \\ \textcircled{4} \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} &\rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재하므로} \\ \text{(분자)} &\rightarrow 0 \text{이다.} \\ \text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= 0 \text{이므로 } f(1) = 0 \text{에서} \\ 1 + 1 + a + C &= 0 \quad \therefore a + C = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \textcircled{4} \text{의 좌변에서} \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) \\ \text{따라서 } f'(1) &= 2a + 4 \text{이므로} \\ 3 + 2 + a &= 2a + 4 \quad \therefore a = 1 \\ \text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면} \\ 1 + C &= -2 \quad \therefore C = -3 \\ \text{따라서 } f(x) &= x^3 + x^2 + x - 3 \text{이므로} \\ f(2) &= 8 + 4 + 2 - 3 = 11 \end{aligned}$$

0680 [답] ⑤

$$\begin{aligned} \int \{f(x) + 6x\} dx &= xf(x) + 2x^3 - 3x^2 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분} \\ \text{하면} \\ f(x) + 6x &= f(x) + xf'(x) + 6x^2 - 6x \\ xf'(x) &= -6x^2 + 12x = x(-6x + 12) \\ \therefore f'(x) &= -6x + 12 \\ \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-6x + 12) dx \\ &= -3x^2 + 12x + C \\ f(0) &= 3 \text{에서 } C = 3 \\ \therefore f(x) &= -3x^2 + 12x + 3 = -3(x-2)^2 + 15 \\ \text{따라서 함수 } f(x) &\text{의 최댓값은 } 15 \text{이다.} \end{aligned}$$

0681 **답 9**

$F(x) = (x+2)f(x) - x^3 + 12x$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면
 $F(0) = 30$ 에서
 $30 = 2f(0) \quad \therefore f(0) = 15 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $F(x) = (x+2)f(x) - x^3 + 12x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면
 $f(x) = f(x) + (x+2)f'(x) - 3x^2 + 12$
 $(x+2)f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$
 $\therefore f'(x) = 3(x-2) = 3x - 6$
 $\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x - 6) dx$
 $= \frac{3}{2}x^2 - 6x + C$

$\textcircled{7}$ 에서 $C = 15$
 따라서 $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + 15$ 이므로
 $f(2) = 6 - 12 + 15 = 9$

0682 **답 ④**

$\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} = 2x + 1$ 에서
 $\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x) + g(x)\} \right] dx = \int (2x + 1) dx$
 $\therefore f(x) + g(x) = x^2 + x + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{7}$
 $\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} = 3x^2 - 2x + 1$ 에서
 $\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} \right] dx = \int (3x^2 - 2x + 1) dx$
 $\therefore f(x)g(x) = x^3 - x^2 + x + C_2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$
 $f(0) = -1, g(0) = 1$ 이므로 $\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서
 $f(0) + g(0) = C_1 \quad \therefore C_1 = 0$
 $f(0)g(0) = C_2 \quad \therefore C_2 = -1$
 $\therefore f(x) + g(x) = x^2 + x,$
 $f(x)g(x) = x^3 - x^2 + x - 1$
 $= (x-1)(x^2+1)$
 이때 $f(0) = -1, g(0) = 1$ 이므로
 $f(x) = x-1, g(x) = x^2+1$
 $\therefore f(4) + g(2) = (4-1) + (4+1) = 8$

0683 **답 -1**

$f'(x) = \begin{cases} 6x^2 + x & (x \geq 0) \\ 6x^2 - x & (x < 0) \end{cases}$ 이므로
 (i) $x \geq 0$ 일 때
 $f(x) = \int f'(x) dx = \int (6x^2 + x) dx$
 $= 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1$
 (ii) $x < 0$ 일 때
 $f(x) = \int f'(x) dx = \int (6x^2 - x) dx$
 $= 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_2$
 (i), (ii)에서
 $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_1 & (x \geq 0) \\ 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_2 & (x < 0) \end{cases}$

$f(1) = 2$ 에서
 $2 + \frac{1}{2} + C_1 = 2 \quad \therefore C_1 = -\frac{1}{2}$
 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ 에서
 $C_2 = C_1 \quad \therefore C_2 = -\frac{1}{2}$
 따라서 $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} & (x \geq 0) \\ 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} & (x < 0) \end{cases}$ 이므로
 $f(2) + f(-2) = \left(16 + 2 - \frac{1}{2}\right) + \left(-16 - 2 - \frac{1}{2}\right) = -1$

0684 **답 2**

$f(x)$ 가 삼차함수이면 $f'(x)$ 는 이차함수이고 주어진 그래프에서
 $f'(-1) = f'(2) = 0$ 이므로 $f'(x) = a(x+1)(x-2)$ ($a > 0$)라 하자.
 또 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프가 점 $(0, -4)$ 를 지나므로 $f'(0) = -4$
 에서
 $-2a = -4 \quad \therefore a = 2$
 $\therefore f'(x) = 2(x+1)(x-2) = 2x^2 - 2x - 4$
 $\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (2x^2 - 2x - 4) dx$
 $= \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + C$
 주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소
 소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이고 극솟값이 -7 이므로 $f(2) = -7$
 에서
 $\frac{16}{3} - 4 - 8 + C = -7 \quad \therefore C = -\frac{1}{3}$
 $\therefore f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x - \frac{1}{3}$
 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극대이므로 극댓값은
 $f(-1) = -\frac{2}{3} - 1 + 4 - \frac{1}{3} = 2$

0685 **답 4**

$\textcircled{7}$ 에서 $f'(x) = a(x-1)(x-3)$ ($a > 0$)이라 하면
 $f(x) = \int f'(x) dx = \int a(x-1)(x-3) dx$
 $= \int (ax^2 - 4ax + 3a) dx$
 $= \frac{a}{3}x^3 - 2ax^2 + 3ax + C$
 $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

$f(0) = C$
 $f(1) = \frac{a}{3} - 2a + 3a + C = \frac{4}{3}a + C$
 $f(3) = 9a - 18a + 9a + C = C$

(나)에서 최댓값이 4, 최솟값이 0이므로

$$\frac{4}{3}a + C = 4, C = 0 \quad \therefore a = 3$$

따라서 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ 이므로

$$f(4) = 64 - 96 + 36 = 4$$

0686 답 ④

$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y) - 2$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 0 - 2 \quad \therefore f(0) = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1) + f(h) + h(1+h) - 2 - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 2 + h(1+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h} + 1 + h \right\} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= f'(0) + 1 \end{aligned}$$

따라서 $f'(0) + 1 = 3$ 이므로 $f'(0) = 2$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + xh(x+h) - 2 - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 2 + xh(x+h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(h) - f(0)}{h} + x(x+h) \right\} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= f'(0) + x^2 = x^2 + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (x^2 + 2) dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 + 2x + C \end{aligned}$$

①에서 $C = 2$

따라서 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x + 2$ 이므로

$$f(3) = 9 + 6 + 2 = 17$$

0687 답 -6

$$\int \left[\frac{d}{dx} \{x^2 f(x)\} \right] dx = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1 \text{에서}$$

$$x^2 f(x) + C = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $C = 1$

따라서 $x^2 f(x) + 1 = x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 1$ 이므로

$$x^2 f(x) = x^4 - 2x^3 - 6x^2 = x^2(x^2 - 2x - 6)$$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2x - 6$$

따라서 방정식 $f(x) = 0$, 즉 $x^2 - 2x - 6 = 0$ 의 모든 근의 곱은 이차 방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -6 이다.

채점 기준

① 적분상수 구하기	40 %
② $f(x)$ 구하기	40 %
③ 방정식 $f(x) = 0$ 의 모든 근의 곱 구하기	20 %

0688 답 5

(i) $x > 2$ 일 때

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (x+a) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 + ax + C_1 \end{aligned}$$

(ii) $x < 2$ 일 때

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-2x) dx \\ &= -x^2 + C_2 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + ax + C_1 & (x > 2) \\ -x^2 + C_2 & (x < 2) \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$f(0) = -1 \text{에서 } C_2 = -1$$

$$f(3) = \frac{5}{2} \text{에서}$$

$$\frac{9}{2} + 3a + C_1 = \frac{5}{2} \quad \therefore C_1 = -3a - 2 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ 에서

$$2 + 2a + C_1 = -4 + C_2$$

$$2 + 2a - 3a - 2 = -4 - 1$$

$$\therefore a = 5$$

채점 기준

① $f(x)$ 를 a 와 적분상수를 포함한 식으로 나타내기	40 %
② 적분상수 구하기	40 %
③ a 의 값 구하기	20 %

0689 답 4

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int 3x(x-2) dx \\ &= \int (3x^2 - 6x) dx \\ &= x^3 - 3x^2 + C \end{aligned}$$

$f'(x) = 3x(x-2)$ 이므로 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	극대	\	극소	/

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이고 극댓값은

$$f(0) = C$$

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이고 극솟값은

$$f(2) = 8 - 12 + C = C - 4$$

이때 극댓값이 극솟값의 2배이므로

$$C = 2(C - 4) \quad \therefore C = 8$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8$ 이므로

$$f(-1) = -1 - 3 + 8 = 4$$

채점 기준

① $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값을 적분상수를 이용하여 나타내기	60 %
② 적분상수 구하기	30 %
③ $f(-1)$ 의 값 구하기	10 %

0690 답 ②

$f(x)g(x) = -2x^4 + 8x^3$ 에서 $f(x)$ 가 이차함수이므로 $g(x)$ 도 이차함수이다.

$$g(x) = \int \{x^2 + f(x)\} dx \text{에서}$$

$$g'(x) = x^2 + f(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $g'(x)$ 는 일차함수이므로 $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 -1 이다.

$$f(x)g(x) = -2x^4 + 8x^3 = -2x^3(x-4) \text{에서}$$

(i) $f(x) = -x^2$ 인 경우

$$g(x) = 2x(x-4) = 2x^2 - 8x \text{이므로}$$

$$g'(x) = 4x - 8$$

이는 $\textcircled{1}$ 을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x) = -x(x-4) = -x^2 + 4x$ 인 경우

$$g(x) = 2x^2 \text{이므로 } g'(x) = 4x$$

이는 $\textcircled{1}$ 을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $g(x) = 2x^2$

$$\therefore g(1) = 2$$

0691 답 9

(가)에서 $\{xf(x)\}' = f(x) + xf'(x)$ 이므로

$$\{xf(x)\}' = 4x^3 + 6x^2 - 8x + 1$$

$$xf(x) = \int (4x^3 + 6x^2 - 8x + 1) dx$$

$$\therefore xf(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x + C_1$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $0=C_1$

따라서 $xf(x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x = x(x^3 + 2x^2 - 4x + 1)$ 이므로

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 1$$

$$\therefore f(0) = 1$$

(나)에서 $\{f(x) + g(x)\}' = f'(x) + g'(x)$ 이므로

$$\{f(x) + g(x)\}' = 6x + 2$$

$$f(x) + g(x) = \int (6x + 2) dx$$

$$\therefore f(x) + g(x) = 3x^2 + 2x + C_2$$

이때 $f(0) = g(0) = 1$ 이므로 양변에 $x=0$ 을 대입하면

$$f(0) + g(0) = C_2 \quad \therefore C_2 = 2$$

따라서 $f(x) + g(x) = 3x^2 + 2x + 2$ 이므로

$$g(x) = 3x^2 + 2x + 2 - (x^3 + 2x^2 - 4x + 1)$$

$$= -x^3 + x^2 + 6x + 1$$

$$\therefore g(2) = -8 + 4 + 12 + 1 = 9$$

0692 답 ①

$f(x)$ 가 사차함수이면 $f'(x)$ 는 삼차함수이고

$$f'(-\sqrt{2}) = f'(0) = f'(\sqrt{2}) = 0 \text{이므로}$$

$$f'(x) = ax(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) = ax^3 - 2ax \quad (a>0) \text{라 하면}$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (ax^3 - 2ax) dx$$

$$= \frac{a}{4}x^4 - ax^2 + C$$

$$f(0) = 1 \text{에서 } C = 1$$

$$f(\sqrt{2}) = -3 \text{에서}$$

$$a - 2a + C = -3$$

$$a - 2a + 1 = -3 \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -\sqrt{2}$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = \sqrt{2}$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	$-\sqrt{2}$	$\dots$	0	$\dots$	$\sqrt{2}$	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-3 극소	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$	-3 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림

과 같으므로 $m \leq -3$ 또는 $m \geq 2$ 일 때

$$f(m)f(m+1) > 0$$

$$\text{또 } f(-2) > 0, f(-1) < 0,$$

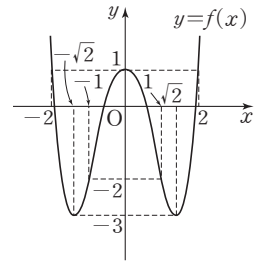
$$f(0) > 0, f(1) < 0, f(2) > 0 \text{이므로}$$

$f(m)f(m+1) < 0$ 을 만족시키는 정수 m 의 값은

$$-2, -1, 0, 1$$

따라서 구하는 모든 정수 m 의 값의 합은

$$-2 + (-1) + 0 + 1 = -2$$



0693 답 30

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 0 \quad \therefore f(0) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 4xh - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 4xh}{h} = 4x + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \\ &= 4x + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 4x + f'(0) \end{aligned}$$

$f'(0) = k$ (k 는 상수)라 하면 $f'(x) = 4x + k$ 이므로

$$F(x) = \int (x-1)f'(x) dx = \int (x-1)(4x+k) dx$$

$$\therefore F'(x) = (x-1)(4x+k)$$

이때 함수 $F(x)$ 의 극값이 존재하지 않으므로 이차방정식

$$F'(x) = 0 \text{은 중근 또는 허근을 가져야 한다.}$$

그런데 방정식 $F'(x) = 0$ 의 한 근이 1 이므로 방정식 $4x+k=0$ 의 근도 1 이어야 한다.

$$\text{즉, } 4+k=0 \text{이어야 하므로 } k = -4$$

$$\therefore f'(x) = 4x - 4$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (4x-4) dx \\ &= 2x^2 - 4x + C \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $C=0$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x^2 - 4x \text{이므로}$$

$$f(5) = 50 - 20 = 30$$

08 / 정적분

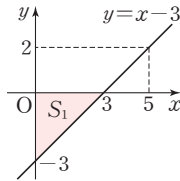
A 개념 확인

116~119쪽

0694 답 $-\frac{9}{2}$

직선 $y=x-3$ 과 x 축 및 두 직선 $x=0$, $x=3$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

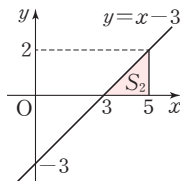
$$\begin{aligned}\int_0^3 (x-3) dx &= -S_1 \\ &= -\left(\frac{1}{2} \times 3 \times 3\right) = -\frac{9}{2}\end{aligned}$$



0695 답 2

직선 $y=x-3$ 과 x 축 및 두 직선 $x=3$, $x=5$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned}\int_3^5 (x-3) dx &= S_2 \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2\end{aligned}$$



0696 답 $-\frac{5}{2}$

$$\int_0^5 (x-3) dx = -S_1 + S_2 = -\frac{9}{2} + 2 = -\frac{5}{2}$$

0697 답 $7x-2$

0698 답 $6x^2+x-8$

0699 답 $(x-1)(x^2+3x+1)$

0700 답 $2x^2+3x-2$

0701 답 $3x^3+x^2-7x+4$

0702 답 $(x+1)(x-1)$

0703 답 2

$$\int_0^1 6x^2 dx = \left[2x^3\right]_0^1 = 2$$

0704 답 18

$$\begin{aligned}\int_0^3 (2x+3) dx &= \left[x^2+3x\right]_0^3 \\ &= 9+9=18\end{aligned}$$

0705 답 3

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 (y^2-2y+1) dy &= \left[\frac{1}{3}y^3-y^2+y\right]_{-1}^2 \\ &= \left(\frac{8}{3}-4+2\right) - \left(-\frac{1}{3}-1-1\right) = 3\end{aligned}$$

0706 답 $-\frac{15}{4}$

$$\begin{aligned}\int_1^2 (t^3-3t^2+t-2) dt &= \left[\frac{1}{4}t^4-t^3+\frac{1}{2}t^2-2t\right]_1^2 \\ &= (4-8+2-4) - \left(\frac{1}{4}-1+\frac{1}{2}-2\right) \\ &= -\frac{15}{4}\end{aligned}$$

0707 답 0

$$\int_5^5 (3x^3-x^2+5x-1) dx = 0$$

0708 답 $-\frac{27}{2}$

$$\begin{aligned}\int_1^{-2} (x^2-x+3) dx &= -\int_{-2}^1 (x^2-x+3) dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x\right]_{-2}^1 \\ &= -\left\{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+3\right) - \left(-\frac{8}{3}-2-6\right)\right\} \\ &= -\frac{27}{2}\end{aligned}$$

0709 답 0

$$\begin{aligned}\int_0^3 x(x-2) dx &= \int_0^3 (x^2-2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_0^3 \\ &= 9-9=0\end{aligned}$$

0710 답 -16

$$\begin{aligned}\int_{-3}^1 x(x+1)(x-1) dx &= \int_{-3}^1 (x^3-x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-3}^1 \\ &= \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{81}{4}-\frac{9}{2}\right) = -16\end{aligned}$$

0711 답 -20

$$\begin{aligned}\int_{-2}^0 (x-1)^3 dx &= \int_{-2}^0 (x^3-3x^2+3x-1) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x\right]_{-2}^0 \\ &= -(4+8+6+2) = -20\end{aligned}$$

0712 답 $\frac{26}{3}$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \frac{t^3-8}{t-2} dt &= \int_{-1}^1 \frac{(t-2)(t^2+2t+4)}{t-2} dt \\ &= \int_{-1}^1 (t^2+2t+4) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3+t^2+4t\right]_{-1}^1 \\ &= \left(\frac{1}{3}+1+4\right) - \left(-\frac{1}{3}+1-4\right) = \frac{26}{3}\end{aligned}$$

0713 **답 5**

$$\begin{aligned}
& \int_1^2 (3x^2+2x-5) dx + \int_1^2 (-2x+3) dx \\
&= \int_1^2 \{ (3x^2+2x-5) + (-2x+3) \} dx \\
&= \int_1^2 (3x^2-2) dx \\
&= \left[x^3-2x \right]_1^2 \\
&= (8-4) - (1-2) = 5
\end{aligned}$$

0714 **답 -12**

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^3 (2x^3+x-1) dx - \int_{-1}^3 (2y^3+3) dy \\
&= \int_{-1}^3 (2x^3+x-1) dx - \int_{-1}^3 (2x^3+3) dx \\
&= \int_{-1}^3 \{ (2x^3+x-1) - (2x^3+3) \} dx \\
&= \int_{-1}^3 (x-4) dx \\
&= \left[\frac{1}{2}x^2-4x \right]_{-1}^3 \\
&= \left(\frac{9}{2}-12 \right) - \left(\frac{1}{2}-4 \right) = -12
\end{aligned}$$

0715 **답 0**

$$\begin{aligned}
& \int_{-2}^1 (x^2-3x+2) dx + 3 \int_{-2}^1 (x-1) dx \\
&= \int_{-2}^1 (x^2-3x+2) dx + \int_{-2}^1 (3x-3) dx \\
&= \int_{-2}^1 \{ (x^2-3x+2) + (3x-3) \} dx \\
&= \int_{-2}^1 (x^2-1) dx \\
&= \left[\frac{1}{3}x^3-x \right]_{-2}^1 \\
&= \left(\frac{1}{3}-1 \right) - \left(-\frac{8}{3}+2 \right) = 0
\end{aligned}$$

0716 **답 4**

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (x+2) dx + \int_1^0 (x-2) dx \\
&= \int_0^1 (x+2) dx - \int_0^1 (x-2) dx \\
&= \int_0^1 \{ (x+2) - (x-2) \} dx \\
&= \int_0^1 4 dx \\
&= \left[4x \right]_0^1 = 4
\end{aligned}$$

0717 **답 -9**

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^0 (2x-4) dx + \int_0^2 (2x-4) dx = \int_{-1}^2 (2x-4) dx \\
&= \left[x^2-4x \right]_{-1}^2 \\
&= (4-8) - (1+4) = -9
\end{aligned}$$

0718 **답 0**

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^0 (x^3+2x+5) dx + \int_0^{-1} (x^3+2x+5) dx \\
&= \int_{-1}^{-1} (x^3+2x+5) dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

0719 **답 $\frac{52}{3}$**

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 (3x^3-x^2+2x+2) dx - \int_2^1 (3x^3-x^2+2x+2) dx \\
&= \int_0^1 (3x^3-x^2+2x+2) dx + \int_1^2 (3x^3-x^2+2x+2) dx \\
&= \int_0^2 (3x^3-x^2+2x+2) dx \\
&= \left[\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x \right]_0^2 \\
&= 12 - \frac{8}{3} + 4 + 4 \\
&= \frac{52}{3}
\end{aligned}$$

0720 **답 39**

$$\begin{aligned}
& \int_{-2}^3 (5x^4-2x+1) dx - \int_1^3 (5y^4-2y+1) dy \\
&= \int_{-2}^3 (5x^4-2x+1) dx - \int_1^3 (5x^4-2x+1) dx \\
&= \int_{-2}^3 (5x^4-2x+1) dx + \int_3^1 (5x^4-2x+1) dx \\
&= \int_{-2}^1 (5x^4-2x+1) dx \\
&= \left[x^5 - x^2 + x \right]_{-2}^1 \\
&= (1-1+1) - (-32-4-2) \\
&= 39
\end{aligned}$$

0721 **답 $\frac{5}{2}$**

$$\begin{aligned}
& |x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x \leq 0) \end{cases} \text{이므로} \\
& \int_{-1}^2 |x| dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 x dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^2 \\
&= -\left(-\frac{1}{2} \right) + 2 = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

0722 **답 1**

$$\begin{aligned}
& |x-2| = \begin{cases} x-2 & (x \geq 2) \\ -x+2 & (x \leq 2) \end{cases} \text{이므로} \\
& \int_1^3 |x-2| dx \\
&= \int_1^2 (-x+2) dx + \int_2^3 (x-2) dx \\
&= \left[-\frac{1}{2}x^2+2x \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2}x^2-2x \right]_2^3 \\
&= (-2+4) - \left(-\frac{1}{2}+2 \right) + \left(\frac{9}{2}-6 \right) - (2-4) \\
&= 1
\end{aligned}$$

0723 **답 4**

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (x^5 - 2x^3 + 3x^2 + 1) dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^5 - 2x^3) dx + \int_{-1}^1 (3x^2 + 1) dx \\ &= 0 + 2 \int_0^1 (3x^2 + 1) dx \\ &= 2 \left[x^3 + x \right]_0^1 \\ &= 2(1+1) = 4 \end{aligned}$$

0724 **답 16**

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^2 (5x^4 - 7x^3 - 6x^2 + x - 4) dx \\ &= \int_{-2}^2 (-7x^3 + x) dx + \int_{-2}^2 (5x^4 - 6x^2 - 4) dx \\ &= 0 + 2 \int_0^2 (5x^4 - 6x^2 - 4) dx \\ &= 2 \left[x^5 - 2x^3 - 4x \right]_0^2 \\ &= 2(32 - 16 - 8) = 16 \end{aligned}$$

0725 **답 -24**

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^3 (2x^7 + x^5 - x^2 + 5x - 1) dx \\ &= \int_{-3}^3 (2x^7 + x^5 + 5x) dx + \int_{-3}^3 (-x^2 - 1) dx \\ &= 0 + 2 \int_0^3 (-x^2 - 1) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 - x \right]_0^3 \\ &= 2(-9 - 3) = -24 \end{aligned}$$

0726 **답 $-\frac{2}{3}$**

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 (x+1)(2x-1) dx &= \int_{-1}^1 (2x^2 + x - 1) dx \\ &= \int_{-1}^1 x dx + \int_{-1}^1 (2x^2 - 1) dx \\ &= 0 + 2 \int_0^1 (2x^2 - 1) dx \\ &= 2 \left[\frac{2}{3}x^3 - x \right]_0^1 \\ &= 2\left(\frac{2}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

0727 **답 $f(x) = 2x + 3$**

주어진 등식의 양변을 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^x f(t) dt &= \frac{d}{dx} (x^2 + 3x) \\ \therefore f(x) &= 2x + 3 \end{aligned}$$

0728 **답 $f(x) = 6x^2 + 10x - 1$**

주어진 등식의 양변을 미분하면

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{-2}^x f(t) dt &= \frac{d}{dx} (2x^3 + 5x^2 - x - 6) \\ \therefore f(x) &= 6x^2 + 10x - 1 \end{aligned}$$

0729 **답 12**

$f(t) = t^2 + 5t + 6$ 이라 하고 함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x (t^2 + 5t + 6) dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left[F(t) \right]_1^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \\ &= F'(1) = f(1) \\ &= 1 + 5 + 6 = 12 \end{aligned}$$

0730 **답 6**

$f(x) = x^2 - x + 4$ 라 하고 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} (x^2 - x + 4) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} f(x) dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[F(x) \right]_2^{2+h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h} \\ &= F'(2) = f(2) \\ &= 4 - 2 + 4 = 6 \end{aligned}$$

B 유형 완성

120~129쪽

0731 **답 -9**

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^1 2(x+2)(x-1) dx + \int_3^3 (2x-1)^3 dx \\ &= \int_{-2}^1 (2x^2 + 2x - 4) dx + 0 \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x \right]_{-2}^1 \\ &= \left(\frac{2}{3} + 1 - 4 \right) - \left(-\frac{16}{3} + 4 + 8 \right) = -9 \end{aligned}$$

0732 **답 ③**

$$\begin{aligned} \int_0^1 (2x+a) dx &= \left[x^2 + ax \right]_0^1 = 1 + a \\ \text{따라서 } 1 + a &= 4 \text{이므로} \\ a &= 3 \end{aligned}$$

0733 **답 ④**

$$\begin{aligned} \int_{-1}^a (x^2 + 2x) dx &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_{-1}^a \\ &= \left(\frac{1}{3}a^3 + a^2 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{3}a^3 + a^2 - \frac{2}{3} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{3}a^3 + a^2 - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ 이므로

$$a^3 + 3a^2 - 4 = 0, (a-1)(a+2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 1 (\because a > -1)$$

0734 답 ④

$$\begin{aligned}\int_1^3 \{2f'(x) - 4x\} dx &= \left[2f(x) - 2x^2 \right]_1^3 \\ &= \{2f(3) - 18\} - \{2f(1) - 2\} \\ &= 2f(3) - 22 \quad (\because f(1)=3)\end{aligned}$$

따라서 $2f(3) - 22 = 6$ 이므로
 $f(3) = 14$

0735 답 ③

$$\begin{aligned}\int_0^1 (5x^2 - a)^2 dx &= \int_0^1 (25x^4 - 10ax^2 + a^2) dx \\ &= \left[5x^5 - \frac{10}{3}ax^3 + a^2x \right]_0^1 \\ &= a^2 - \frac{10}{3}a + 5 = \left(a - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{20}{9}\end{aligned}$$

따라서 $\int_0^1 (5x^2 - a)^2 dx$ 는 $a = \frac{5}{3}$ 일 때 최솟값이 $\frac{20}{9}$ 이므로

$$m = \frac{5}{3}, n = \frac{20}{9} \quad \therefore m + n = \frac{35}{9}$$

중3 다시보기

이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$ ($a > 0$)는 $x=p$ 일 때 최솟값 q 를 갖는다.

0736 답 -12

$f(x) = ax + b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하자.

(가)에서

$$\int_0^1 (ax + b) dx = \left[\frac{a}{2}x^2 + bx \right]_0^1 = \frac{a}{2} + b$$

따라서 $\frac{a}{2} + b = 3$ 이므로 $a + 2b = 6$ ㉠

(나)에서

$$\begin{aligned}\int_0^1 x(ax + b) dx &= \int_0^1 (ax^2 + bx) dx \\ &= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{a}{3} + \frac{b}{2}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 1$ 이므로 $2a + 3b = 6$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -6, b = 6$ ㉢

따라서 $f(x) = -6x + 6$ 이므로

$$f(3) = -18 + 6 = -12 \quad \text{..... ㉣}$$

채점 기준

㉠ $f(x) = ax + b$ 라 하고 a, b 에 대한 식 구하기	60 %
㉢ a, b 의 값 구하기	20 %
㉣ $f(3)$ 의 값 구하기	20 %

0737 답 ④

$$\begin{aligned}\int_0^5 (x+1)^2 dx - \int_0^5 (x-1)^2 dx \\ &= \int_0^5 \{(x^2 + 2x + 1) - (x^2 - 2x + 1)\} dx \\ &= \int_0^5 4x dx = \left[2x^2 \right]_0^5 = 50\end{aligned}$$

0738 답 -16

$$\begin{aligned}\int_{-1}^3 \frac{4x^2}{x+2} dx + \int_3^{-1} \frac{16}{t+2} dt &= \int_{-1}^3 \frac{4x^2}{x+2} dx - \int_{-1}^3 \frac{16}{x+2} dx \\ &= \int_{-1}^3 \frac{4x^2 - 16}{x+2} dx \\ &= \int_{-1}^3 \frac{4(x+2)(x-2)}{x+2} dx \\ &= \int_{-1}^3 (4x - 8) dx \\ &= \left[2x^2 - 8x \right]_{-1}^3 \\ &= (18 - 24) - (2 + 8) = -16\end{aligned}$$

0739 답 4

$$\begin{aligned}\int_0^2 (3x^3 + 2x) dx + \int_0^2 (k + 2x - 3x^3) dx \\ &= \int_0^2 \{(3x^3 + 2x) + (k + 2x - 3x^3)\} dx \\ &= \int_0^2 (4x + k) dx \\ &= \left[2x^2 + kx \right]_0^2 \\ &= 8 + 2k\end{aligned}$$

따라서 $8 + 2k = 16$ 이므로

$$k = 4$$

0740 답 ②

$$\begin{aligned}\int_1^k (8x + 4) dx + 4 \int_k^1 (1 + x - x^3) dx \\ &= \int_1^k (8x + 4) dx - \int_1^k 4(1 + x - x^3) dx \\ &= \int_1^k \{(8x + 4) - 4(1 + x - x^3)\} dx \\ &= \int_1^k (4x^3 + 4x) dx \\ &= \left[x^4 + 2x^2 \right]_1^k \\ &= (k^4 + 2k^2) - (1 + 2) \\ &= k^4 + 2k^2 - 3\end{aligned}$$

따라서 $k^4 + 2k^2 - 3 = 0$ 이므로

$$(k^2 + 3)(k + 1)(k - 1) = 0$$

$\therefore k = -1$ 또는 $k = 1$ ($\because k$ 는 실수)

따라서 모든 실수 k 의 값의 곱은

$$-1 \times 1 = -1$$

0741 답 -8

$$\int_{-1}^3 \{3f(x) - 2g(x)\} dx = 1 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\int_{-1}^3 \{f(x) - 2g(x)\} dx = 7 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠ - ㉡을 하면

$$\int_{-1}^3 \{3f(x) - 2g(x)\} dx - \int_{-1}^3 \{f(x) - 2g(x)\} dx = -6$$

$$\int_{-1}^3 [\{3f(x) - 2g(x)\} - \{f(x) - 2g(x)\}] dx = -6$$

$$2 \int_{-1}^3 f(x) dx = -6 \quad \therefore \int_{-1}^3 f(x) dx = -3 \quad \text{..... ㉢}$$

이때 ㉠에서 $3 \int_{-1}^3 f(x) dx - 2 \int_{-1}^3 g(x) dx = 1$ 이므로

$$3 \times (-3) - 2 \int_{-1}^3 g(x) dx = 1$$

$$\therefore \int_{-1}^3 g(x) dx = -5 \quad \dots\dots \text{ii}$$

$$\therefore \int_{-1}^3 \{f(x) + g(x)\} dx = \int_{-1}^3 f(x) dx + \int_{-1}^3 g(x) dx = -8 \quad \dots\dots \text{iii}$$

채점 기준

❶ $\int_{-1}^3 f(x) dx$ 의 값 구하기	40 %
❷ $\int_{-1}^3 g(x) dx$ 의 값 구하기	40 %
❸ $\int_{-1}^3 \{f(x) + g(x)\} dx$ 의 값 구하기	20 %

0742 답 ④

$$\begin{aligned} & \int_0^2 f(x) dx - \int_{-3}^2 f(x) dx + \int_{-3}^3 f(x) dx \\ &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^{-3} f(x) dx + \int_{-3}^3 f(x) dx \\ &= \int_0^{-3} f(x) dx + \int_{-3}^3 f(x) dx \\ &= \int_0^3 f(x) dx \\ &= \int_0^3 (x^2 - x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^3 \\ &= 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

0743 답 ④

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 f(x) dx &= \int_{-3}^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx \\ &= \int_{-3}^2 f(x) dx + \left\{ \int_2^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx \right\} \\ &= \int_{-3}^2 f(x) dx - \int_0^2 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx \\ &= 5 - 8 + 6 = 3 \end{aligned}$$

0744 답 ①

$$\begin{aligned} & \int_0^2 (2x+1)^2 dx - \int_{-1}^2 (2x+1)^2 dx + \int_{-1}^0 (2x-1)^2 dx \\ &= \int_0^2 (2x+1)^2 dx + \int_2^{-1} (2x+1)^2 dx + \int_{-1}^0 (2x-1)^2 dx \\ &= \int_0^{-1} (2x+1)^2 dx + \int_{-1}^0 (2x-1)^2 dx \\ &= - \int_{-1}^0 (2x+1)^2 dx + \int_{-1}^0 (2x-1)^2 dx \\ &= \int_{-1}^0 \{ (4x^2 - 4x + 1) - (4x^2 + 4x + 1) \} dx \\ &= \int_{-1}^0 (-8x) dx \\ &= \left[-4x^2 \right]_{-1}^0 \\ &= -(-4) = 4 \end{aligned}$$

0745 답 ①

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx \text{에서} \\ & \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx \text{이므로} \\ & \int_{-1}^0 f(x) dx = 0 \\ & \therefore \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx = 0 \\ & f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수, } a \neq 0) \text{라 하면 } f(0) = -1 \text{에서} \\ & c = -1 \\ & \therefore f(x) = ax^2 + bx - 1 \\ & \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (ax^2 + bx - 1) dx \\ &= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 - x \right]_{-1}^0 \\ &= - \left(-\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{a}{3} - \frac{b}{2} - 1 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{3} - \frac{b}{2} - 1 = 0$ 이므로

$$2a - 3b = 6 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (ax^2 + bx - 1) dx \\ &= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 - x \right]_0^1 \\ &= \frac{a}{3} + \frac{b}{2} - 1 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} - 1 = 0$ 이므로

$$2a + 3b = 6 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 3, b = 0$$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 1$ 이므로

$$f(2) = 12 - 1 = 11$$

0746 답 $\frac{46}{3}$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^2 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 (x^2 + 4) dx + \int_1^2 (-x^2 + 6x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_{-1}^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} - 4 \right) + \left(-\frac{8}{3} + 12 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 3 \right) \\ &= \frac{46}{3} \end{aligned}$$

0747 답 ③

주어진 그래프에서 $f(x) = \begin{cases} 2 & (x \geq 0) \\ 2x + 2 & (x \leq 0) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-3}^1 f(x) dx &= \int_{-3}^0 (2x + 2) dx + \int_0^1 2 dx \\ &= \left[x^2 + 2x \right]_{-3}^0 + \left[2x \right]_0^1 \\ &= -(9 - 6) + 2 = -1 \end{aligned}$$

0748 [답] 3

$k > 1$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^k f(x) dx &= \int_{-2}^{-1} (3x^2 + 3) dx + \int_{-1}^k (4 - 2x) dx \\ &= \left[x^3 + 3x \right]_{-2}^{-1} + \left[4x - x^2 \right]_{-1}^k \\ &= (-1 - 3) - (-8 - 6) + (4k - k^2) - (-4 - 1) \\ &= -k^2 + 4k + 15 \quad \dots \textcircled{i}\end{aligned}$$

따라서 $-k^2 + 4k + 15 = 18$ 이므로

$$k^2 - 4k + 3 = 0, (k-1)(k-3) = 0$$

$$\therefore k = 3 (\because k > 1) \quad \dots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① $\int_{-2}^k f(x) dx$ 를 k 에 대한 식으로 나타내기	60 %
② k 의 값 구하기	40 %

0749 [답] 43

$0 \leq a \leq 4$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_a^{a+4} f(x) dx &= \int_a^4 \{-x(x-4)\} dx + \int_4^{a+4} (x-4) dx \\ &= \int_a^4 (-x^2 + 4x) dx + \int_4^{a+4} (x-4) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_a^4 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x \right]_4^{a+4} \\ &= \left(-\frac{64}{3} + 32 \right) - \left(-\frac{1}{3}a^3 + 2a^2 \right) \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2}(a+4)^2 - 4(a+4) \right\} - (8 - 16) \\ &= \frac{1}{3}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{32}{3}\end{aligned}$$

$$g(a) = \frac{1}{3}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{32}{3} \text{라 하면}$$

$$g'(a) = a^2 - 3a = a(a-3)$$

$g'(a) = 0$ 인 a 의 값은 $a = 0$ 또는 $a = 3$

$0 \leq a \leq 4$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	3	...	4
$g'(a)$	0	-	0	+	
$g(a)$			$\frac{37}{6}$ 극소		

$0 \leq a \leq 4$ 에서 함수 $g(a)$ 는 $a = 3$ 일 때 최솟값 $\frac{37}{6}$ 을 가지므로

$$p = 6, q = 37$$

$$\therefore p + q = 43$$

0750 [답] ①

$$|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 1) \\ -x^2 + x & (0 \leq x \leq 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\int_0^2 |x^2 - x| dx &= \int_0^1 (-x^2 + x) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^2 \\ &= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{8}{3} - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = 1\end{aligned}$$

0751 [답] ⑤

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & (x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x^2 + 4 & (-2 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\int_0^3 \frac{|x^2 - 4|}{x + 2} dx &= \int_0^2 \frac{-x^2 + 4}{x + 2} dx + \int_2^3 \frac{x^2 - 4}{x + 2} dx \\ &= \int_0^2 \frac{-(x+2)(x-2)}{x+2} dx + \int_2^3 \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} dx \\ &= \int_0^2 (-x+2) dx + \int_2^3 (x-2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_2^3 \\ &= (-2 + 4) + \left(\frac{9}{2} - 6 \right) - (2 - 4) = \frac{5}{2}\end{aligned}$$

0752 [답] 4

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & (x \geq 3) \\ -x+3 & (x \leq 3) \end{cases} \text{이고, } a > 3 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\int_1^a |x-3| dx &= \int_1^3 (-x+3) dx + \int_3^a (x-3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_1^3 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x \right]_3^a \\ &= \left(-\frac{9}{2} + 9 \right) - \left(-\frac{1}{2} + 3 \right) + \left(\frac{1}{2}a^2 - 3a \right) - \left(\frac{9}{2} - 9 \right) \\ &= \frac{1}{2}a^2 - 3a + \frac{13}{2}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{2}a^2 - 3a + \frac{13}{2} = \frac{5}{2}$ 이므로

$$a^2 - 6a + 8 = 0, (a-2)(a-4) = 0$$

$$\therefore a = 4 (\because a > 3)$$

0753 [답] $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$|x-a| = \begin{cases} x-a & (x \geq a) \\ -x+a & (x \leq a) \end{cases} \text{이고, } 0 < a < 1 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x|x-a| dx &= \int_0^a x(-x+a) dx + \int_a^1 x(x-a) dx \\ &= \int_0^a (-x^2 + ax) dx + \int_a^1 (x^2 - ax) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 \right]_0^a + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 \right]_a^1 \\ &= \left(-\frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^3 \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}a \right) - \left(\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^3 \right) \\ &= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} \quad \dots \textcircled{i}\end{aligned}$$

$$f(a) = \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3} \text{이라 하면}$$

$$f'(a) = a^2 - \frac{1}{2} = \left(a + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(a - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$f'(a) = 0 \text{인 } a \text{의 값은 } a = \frac{\sqrt{2}}{2} (\because 0 < a < 1)$$

$0 < a < 1$ 에서 함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	1
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$			극소		

$0 < a < 1$ 에서 함수 $f(a)$ 는 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때 최소이므로 구하는 a 의 값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이다. ②

채점 기준

① $\int_0^1 x x-a dx$ 를 a 에 대한 식으로 나타내기	50 %
② a 의 값 구하기	50 %

0754 답 ②

$$|t-x| = \begin{cases} t-x & (x \leq t \leq 2) \\ -t+x & (0 \leq t \leq x) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x (-t+x) dt + \int_x^2 (t-x) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^2 + xt \right]_0^x + \left[\frac{1}{2}t^2 - xt \right]_x^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + x^2 \right) + (2-2x) - \left(\frac{1}{2}x^2 - x^2 \right) \\ &= x^2 - 2x + 2 \end{aligned}$$

0755 답 ②

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a (x^3 + 2x + 3) dx &= 2 \int_0^a 3 dx = 2 \left[3x \right]_0^a \\ &= 2 \times 3a = 6a \end{aligned}$$

따라서 $6a = 12$ 이므로 $a = 2$

0756 답 ⑤

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^0 (x^3 - 3x^2 + 5x + 6) dx + \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + 5x + 6) dx \\ &= \int_{-2}^2 (x^3 - 3x^2 + 5x + 6) dx \\ &= 2 \int_0^2 (-3x^2 + 6) dx \\ &= 2 \left[-x^3 + 6x \right]_0^2 \\ &= 2(-8 + 12) = 8 \end{aligned}$$

0757 답 $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (x^2 + ax + b) dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^2 + b) dx = 2 \left[\frac{1}{3}x^3 + bx \right]_0^1 \\ &= 2 \left(\frac{1}{3} + b \right) = \frac{2}{3} + 2b \end{aligned}$$

따라서 $\frac{2}{3} + 2b = 1$ 이므로 $b = \frac{1}{6}$ ①

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 xf(x) dx &= \int_{-1}^1 (x^3 + ax^2 + bx) dx \\ &= 2 \int_0^1 ax^2 dx = 2 \left[\frac{1}{3}ax^3 \right]_0^1 \\ &= 2 \times \frac{1}{3}a = \frac{2}{3}a \end{aligned}$$

따라서 $\frac{2}{3}a = 2$ 이므로 $a = 3$ ②

$\therefore ab = \frac{1}{2}$ ③

채점 기준

① b 의 값 구하기	40 %
② a 의 값 구하기	50 %
③ ab 의 값 구하기	10 %

0758 답 ②

$$\begin{aligned} xf(x) - f(x) &= 3x^4 - 3x \text{에서} \\ (x-1)f(x) &= 3x(x-1)(x^2+x+1) \\ \therefore f(x) &= 3x(x^2+x+1) = 3x^3 + 3x^2 + 3x \\ \therefore \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^2 (3x^3 + 3x^2 + 3x) dx \\ &= 2 \int_0^2 3x^2 dx = 2 \left[x^3 \right]_0^2 \\ &= 2 \times 8 = 16 \end{aligned}$$

0759 답 -16

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x) \text{이므로 } \int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx \\ &\int_{-2}^2 (3x^3 + 5x - 2)f(x) dx \\ &= 3 \int_{-2}^2 x^3 f(x) dx + 5 \int_{-2}^2 x f(x) dx - 2 \int_{-2}^2 f(x) dx \quad \dots\dots \text{㉠} \end{aligned}$$

이때 $g(x) = x^3 f(x)$, $h(x) = x f(x)$ 라 하면 $f(-x) = f(x)$ 이므로

$$g(-x) = -x^3 f(-x) = -x^3 f(x) = -g(x)$$

$$h(-x) = -x f(-x) = -x f(x) = -h(x)$$

$$\therefore \int_{-2}^2 g(x) dx = 0, \int_{-2}^2 h(x) dx = 0$$

따라서 ㉠에서

$$\begin{aligned} &\int_{-2}^2 (3x^3 + 5x - 2)f(x) dx \\ &= 3 \int_{-2}^2 g(x) dx + 5 \int_{-2}^2 h(x) dx - 2 \int_{-2}^2 f(x) dx \\ &= -4 \int_0^2 f(x) dx \\ &= -4 \times 4 = -16 \end{aligned}$$

0760 답 ②

$$\begin{aligned} f(-x) &= f(x) \text{이므로 } \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx \\ g(-x) &= -g(x) \text{이므로 } \int_{-1}^1 g(x) dx = 0 \\ \therefore \int_{-1}^1 \{g(x) - f(x)\} dx &= \int_{-1}^1 g(x) dx - \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= -2 \int_0^1 f(x) dx \\ &= -2 \times 3 = -6 \end{aligned}$$

0761 답 18

$$\begin{aligned} f(-x) &= -f(x) \text{이므로 } \int_{-1}^1 f(x) dx = 0 \\ \int_{-1}^3 f(x) dx &= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \text{이므로} \\ \int_1^3 f(x) dx &= 15 \\ \therefore \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \\ &= 3 + 15 = 18 \end{aligned}$$

0762 답 2

$h(x)=f(x)g(x)+f(x)$ 에서 $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=g(x)$ 이므로

$$h(-x)=f(-x)g(-x)+f(-x)=-f(x)g(x)-f(x)=-h(x)$$

$$\therefore \int_{-3}^3 h(x) dx = 0 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 (12x+1)h(x) dx \\ = 12 \int_{-3}^3 xh(x) dx + \int_{-3}^3 h(x) dx \quad \dots\dots \textcircled{ii} \end{aligned}$$

이때 $p(x)=xh(x)$ 라 하면

$$p(-x)=-xh(-x)=xh(x)=p(x) \text{ 이므로}$$

$$\int_{-3}^3 p(x) dx = 2 \int_0^3 p(x) dx$$

따라서 $\textcircled{ii}$ 에서

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 (12x+1)h(x) dx &= 12 \int_{-3}^3 p(x) dx + \int_{-3}^3 h(x) dx \\ &= 24 \int_0^3 p(x) dx \\ &= 24 \int_0^3 xh(x) dx \quad \dots\dots \textcircled{iii} \end{aligned}$$

따라서 $24 \int_0^3 xh(x) dx = 48$ 이므로

$$\int_0^3 xh(x) dx = 2 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $\int_{-3}^3 h(x) dx$ 의 값 구하기	30 %
② $\int_{-3}^3 (12x+1)h(x) dx$ 를 $\int_0^3 xh(x) dx$ 에 대한 식으로 나타내기	50 %
③ $\int_0^3 xh(x) dx$ 의 값 구하기	20 %

0763 답 5

$f(x+2)=f(x)$ 이므로

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_2^3 f(x) dx$$

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_1^2 f(x) dx = \int_3^4 f(x) dx$$

$$\therefore \int_2^4 f(x) dx = \int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 (4x+1) dx + \int_{-1}^0 (1-4x^3) dx$$

$$= \left[2x^2 + x \right]_0^1 + \left[x - x^4 \right]_{-1}^0$$

$$= (2+1) - (-1-1) = 5$$

0764 답 9

(가)에서 $f(x+3)=f(x)$ 이므로

$$\int_1^4 f(x) dx = \int_4^7 f(x) dx = \int_7^{10} f(x) dx$$

$$\therefore \int_1^{10} f(x) dx = \int_1^4 f(x) dx + \int_4^7 f(x) dx + \int_7^{10} f(x) dx$$

$$= 3 \int_1^4 f(x) dx = 3 \times 3 = 9 \quad (\because \text{가})$$

0765 답 $\frac{41}{3}$

$f(x+4)=f(x)$ 이므로

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = \int_2^6 f(x) dx$$

$$\int_{-2}^1 f(x) dx = \int_2^5 f(x) dx = \int_6^9 f(x) dx$$

$$\therefore \int_{-2}^9 f(x) dx = \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx + \int_6^9 f(x) dx$$

$$= \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_{-2}^1 f(x) dx$$

$$= 2 \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_{-2}^1 f(x) dx$$

$$= 4 \int_0^2 x^2 dx + \int_{-2}^1 x^2 dx$$

$$= 4 \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-2}^1$$

$$= 4 \times \frac{8}{3} + \frac{1}{3} - \left(-\frac{8}{3} \right) = \frac{41}{3}$$

0766 답 11

$\int_0^2 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면 $f(x)=3x^2+2kx$ 이므로

$$\int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 (3t^2+2kt) dt$$

$$= \left[t^3 + kt^2 \right]_0^2$$

$$= 8 + 4k$$

따라서 $8+4k=k$ 이므로 $k=-\frac{8}{3}$

$$\text{즉, } f(x)=3x^2-\frac{16}{3}x \text{ 이므로}$$

$$f(3)=27-16=11$$

0767 답 ②

$\int_{-1}^2 f'(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면 $f(x)=x^3-2x+k$ 이므로

$$f'(x)=3x^2-2$$

$$\therefore \int_{-1}^2 f'(t) dt = \int_{-1}^2 (3t^2-2) dt$$

$$= \left[t^3 - 2t \right]_{-1}^2$$

$$= (8-4) - (-1+2) = 3$$

따라서 $f(x)=x^3-2x+3$ 이므로

$$f(-2)=-8+4+3=-1$$

0768 답 1

$\int_0^1 f(t) dt = a$, $\int_{-1}^0 f(t) dt = b$ (a, b 는 상수)로 놓으면 $\dots\dots \textcircled{i}$

$$f(x)=-6x^2+4ax+b \text{ 이므로}$$

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (-6t^2+4at+b) dt$$

$$= \left[-2t^3 + 2at^2 + bt \right]_0^1$$

$$= -2 + 2a + b$$

따라서 $-2+2a+b=a$ 이므로

$$a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 f(t) dt &= \int_{-1}^0 (-6t^2 + 4at + b) dt \\ &= \left[-2t^3 + 2at^2 + bt \right]_{-1}^0 \\ &= -(2 + 2a - b) = -2 - 2a + b\end{aligned}$$

따라서 $-2 - 2a + b = b$ 이므로 $a = -1$

이를 ①에 대입하면

$$-1 + b = 2 \quad \therefore b = 3$$

즉, $f(x) = -6x^2 - 4x + 3$ 이므로

$$f(-1) = -6 + 4 + 3 = 1$$

..... ②

..... ③

채점 기준

① $\int_0^1 f(t) dt = a, \int_{-1}^0 f(t) dt = b$ 로 놓기	20 %
② a, b 의 값 구하기	60 %
③ $f(-1)$ 의 값 구하기	20 %

0769 답 ⑤

$$f(x) = -4x^3 + \int_0^1 (2x+1)f(t) dt \text{에서}$$

$$f(x) = -4x^3 + 2x \int_0^1 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt$$

$$\int_0^1 f(t) dt = k \text{ (} k \text{는 상수)로 놓으면 } f(x) = -4x^3 + 2kx + k \text{이므로}$$

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (-4t^3 + 2kt + k) dt$$

$$= \left[-t^4 + kt^2 + kt \right]_0^1$$

$$= -1 + k + k = 2k - 1$$

따라서 $2k - 1 = k$ 이므로 $k = 1$

$$\therefore f(x) = -4x^3 + 2x + 1 \text{이므로 } f(0) = 1$$

0770 답 3

$$\int_2^x f(t) dt = x^3 + ax^2 + 8 \text{의 양변에 } x=2 \text{를 대입하면}$$

$$0 = 8 + 4a + 8 \quad \therefore a = -4$$

$$\int_2^x f(t) dt = x^3 - 4x^2 + 8 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = 3x^2 - 8x$$

$$\therefore f(3) = 27 - 24 = 3$$

0771 답 4

$$f(x) = \int_3^x (3t^2 - 2t) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$\therefore \int_0^2 f'(x) dx = \int_0^2 (3x^2 - 2x) dx = \left[x^3 - x^2 \right]_0^2$$

$$= 8 - 4 = 4$$

다른 풀이

$$f(x) = \int_3^x (3t^2 - 2t) dt = \left[t^3 - t^2 \right]_3^x$$

$$= x^3 - x^2 - (27 - 9) = x^3 - x^2 - 18$$

$$\therefore \int_0^2 f'(x) dx = \left[f(x) \right]_0^2 = f(2) - f(0)$$

$$= (8 - 4 - 18) - (-18) = 4$$

0772 답 ③

$$\int_a^x f(t) dt = 2x^2 - 5x - 3 \text{의 양변에 } x=a \text{를 대입하면}$$

$$0 = 2a^2 - 5a - 3$$

$$(2a+1)(a-3) = 0 \quad \therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

$$\int_3^x f(t) dt = 2x^2 - 5x - 3 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = 4x - 5$$

$$\therefore f(5) = 20 - 5 = 15$$

$$\therefore a + f(5) = 18$$

0773 답 ⑤

$$\int_1^x \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} dt = x^3 + ax^2 - 2 \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$0 = 1 + a - 2 \quad \therefore a = 1$$

$$\int_1^x \left\{ \frac{d}{dt} f(t) \right\} dt = x^3 + x^2 - 2 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$

$$\therefore f'(a) = f'(1) = 3 + 2 = 5$$

0774 답 $\frac{22}{3}$

$$\int_1^x f(t) dt = xf(x) - \frac{4}{3}x^3 \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$0 = f(1) - \frac{4}{3} \quad \therefore f(1) = \frac{4}{3}$$

..... ①

$$\int_1^x f(t) dt = xf(x) - \frac{4}{3}x^3 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = f(x) + xf'(x) - 4x^2$$

$$xf'(x) = 4x^2 \quad \therefore f'(x) = 4x$$

..... ②

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int 4x dx = 2x^2 + C$$

$$f(1) = \frac{4}{3} \text{에서 } 2 + C = \frac{4}{3} \quad \therefore C = -\frac{2}{3}$$

$$\therefore f(x) = 2x^2 - \frac{2}{3}$$

..... ③

$$f(2) = 8 - \frac{2}{3} = \frac{22}{3}$$

..... ④

채점 기준

① $f(1)$ 의 값 구하기	30 %
② $f'(x)$ 구하기	30 %
③ $f(x)$ 구하기	30 %
④ $f(2)$ 의 값 구하기	10 %

0775 답 ①

$$g(x) + \int_1^x f(t) dt = -4x^2 + 9x + 5 \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$g(1) = -4 + 9 + 5 \quad \therefore g(1) = 10$$

$$g(x) + \int_1^x f(t) dt = -4x^2 + 9x + 5 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$g'(x) + f(x) = -8x + 9$$

이때 $f(x)g'(x) = -20x^2 + 54x - 36 = -2(2x-3)(5x-6)$ 이므로

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 3 \\ g'(x) = -10x + 12 \end{cases} \text{ 또는 } \begin{cases} f(x) = -10x + 12 \\ g'(x) = 2x - 3 \end{cases}$$

(i) $g'(x) = -10x + 12$ 일 때

$$g(x) = \int g'(x) dx = \int (-10x + 12) dx$$

$$= -5x^2 + 12x + C_1$$

$g(1) = 10$ 에서

$$-5 + 12 + C_1 = 10 \quad \therefore C_1 = 3$$

따라서 $g(x) = -5x^2 + 12x + 3$ 이므로

$$g(2) = -20 + 24 + 3 = 7$$

(ii) $g'(x) = 2x - 3$ 일 때

$$g(x) = \int g'(x) dx = \int (2x - 3) dx$$

$$= x^2 - 3x + C_2$$

$g(1) = 10$ 에서

$$1 - 3 + C_2 = 10 \quad \therefore C_2 = 12$$

따라서 $g(x) = x^2 - 3x + 12$ 이므로

$$g(2) = 4 - 6 + 12 = 10$$

이는 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $g(x) = -5x^2 + 12x + 3$ 이므로

$$g(3) = -45 + 36 + 3 = -6$$

0776 답 0

$\int_2^x (x-t)f(t) dt = x^3 + ax^2 + 4x$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$0 = 8 + 4a + 8 \quad \therefore a = -4$$

$\int_2^x (x-t)f(t) dt = x^3 - 4x^2 + 4x$ 에서

$$x \int_2^x f(t) dt - \int_2^x tf(t) dt = x^3 - 4x^2 + 4x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 3x^2 - 8x + 4$$

$$\therefore \int_2^x f(t) dt = 3x^2 - 8x + 4$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x - 8$$

$$\therefore f(2) = 12 - 8 = 4$$

$$\therefore a + f(2) = 0$$

0777 답 ⑤

$$F(x) = \int_1^x x(3t+1) dt \text{에서 } F(x) = x \int_1^x (3t+1) dt$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \int_1^x (3t+1) dt + x(3x+1)$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1) = 0 + 1 \times (3+1) = 4$$

0778 답 10

$$\int_1^x (x-t)f(t) dt = x^3 - x^2 - x + 1 \text{에서}$$

$$x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x tf(t) dt = x^3 - x^2 - x + 1$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt = 3x^2 - 2x - 1$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x - 2$$

$$\therefore f(2) = 12 - 2 = 10$$

0779 답 9

$$\int_0^x (x-t)f'(t) dt = x^4 - x^3 \text{에서}$$

$$x \int_0^x f'(t) dt - \int_0^x tf'(t) dt = x^4 - x^3$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f'(t) dt + xf'(x) - xf'(x) = 4x^3 - 3x^2$$

$$\therefore \int_0^x f'(t) dt = 4x^3 - 3x^2$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 12x^2 - 6x$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (12x^2 - 6x) dx$$

$$= 4x^3 - 3x^2 + C$$

$$f(0) = 2 \text{에서 } C = 2$$

따라서 $f(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2$ 이므로

$$f'(1) + f(1) = (12 - 6) + (4 - 3 + 2) = 9$$

0780 답 14

$\int_{-1}^x (x-t)f(t) dt = 2x^3 + ax^2 + bx$ 의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$0 = -2 + a - b \quad \therefore a - b = 2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$\int_{-1}^x (x-t)f(t) dt = 2x^3 + ax^2 + bx$ 에서

$$x \int_{-1}^x f(t) dt - \int_{-1}^x tf(t) dt = 2x^3 + ax^2 + bx$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

$$\therefore \int_{-1}^x f(t) dt = 6x^2 + 2ax + b$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$0 = 6 - 2a + b \quad \therefore 2a - b = 6 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=4, b=2$

$\cdots \textcircled{i}$

$$\therefore \int_{-1}^x f(t) dt = 6x^2 + 8x + 2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 12x + 8$$

$\cdots \textcircled{ii}$

$$\therefore \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (12x + 8) dx = \left[6x^2 + 8x \right]_0^1$$

$$= 6 + 8 = 14$$

$\cdots \textcircled{iii}$

채점 기준

① a, b 의 값 구하기	60 %
② $f(x)$ 구하기	20 %
③ $\int_0^1 f(x) dx$ 의 값 구하기	20 %

0781 **답** $\frac{29}{2}$

$f(x) = \int_{-2}^x (t^2 - 3t + 2) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x=1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_{-2}^1 (t^2 - 3t + 2) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t \right]_{-2}^1 \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 6 - 4 \right) \\ &= \frac{27}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=\frac{27}{2}$ 이므로

$$\alpha + \beta = \frac{29}{2}$$

0782 **답** ⑤

$f(x) = \int_0^x (t^2 + at + b) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = x^2 + ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값 $\frac{2}{3}$ 를 가지므로

$$f'(2) = 0, f(2) = \frac{2}{3}$$

$f'(2) = 0$ 에서

$$4 + 2a + b = 0$$

$$\therefore 2a + b = -4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$f(2) = \frac{2}{3}$ 에서

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_0^2 (t^2 + at + b) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + bt \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} + 2a + 2b \end{aligned}$$

따라서 $\frac{8}{3} + 2a + 2b = \frac{2}{3}$ 이므로

$$a + b = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -3, b = 2$$

$$\therefore b - a = 5$$

0783 **답** ④

$f(x) = \int_x^{x+1} (2t^3 - 2t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{2(x+1)^3 - 2(x+1)\} - (2x^3 - 2x) \\ &= 6x^2 + 6x = 6x(x+1) \end{aligned}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대이므로

$$\begin{aligned} M = f(-1) &= \int_{-1}^0 (2t^3 - 2t) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^4 - t^2 \right]_{-1}^0 \\ &= -\left(\frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극소이므로

$$\begin{aligned} m = f(0) &= \int_0^1 (2t^3 - 2t) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^4 - t^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore M - m = 1$$

0784 **답** 1

$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x)$$

즉, $f(x)$ 는 $F(x)$ 의 도함수이다.

주어진 그래프에서 $f(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $F(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$F'(x)$	+	0	-	0	+
$F(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

주어진 그래프에서 $f(x) = \begin{cases} x-3 & (x \geq 2) \\ -x+1 & (x \leq 2) \end{cases}$ 이고, 함수 $F(x)$ 는

$x=3$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$\begin{aligned} F(3) &= \int_{-1}^3 f(t) dt \\ &= \int_{-1}^2 (-t+1) dt + \int_2^3 (t-3) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^2 + t \right]_{-1}^2 + \left[\frac{1}{2}t^2 - 3t \right]_2^3 \\ &= (-2+2) - \left(-\frac{1}{2} - 1 \right) + \left(\frac{9}{2} - 9 \right) - (2-6) = 1 \end{aligned}$$

0785 **답** ③

$f(x) = \int_{-1}^x (6t^3 - 6t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 6x^3 - 6x = 6x(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 1$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최대이므로 최댓값은

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_{-1}^0 (6t^3 - 6t) dt \\ &= \left[\frac{3}{2}t^4 - 3t^2 \right]_{-1}^0 \\ &= -\left(\frac{3}{2} - 3 \right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

0786 [답] ①

$f(x) = \int_{-1}^x (1 - |t|) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 1 - |x|$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \quad (\because 0 \leq x \leq 4)$$

$0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		/	극대	\	

$1 - |t| = \begin{cases} 1-t & (t \geq 0) \\ 1+t & (t \leq 0) \end{cases}$ 이고, 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최대이므로 최댓값은

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_{-1}^1 (1 - |t|) dt \\ &= \int_{-1}^0 (1+t) dt + \int_0^1 (1-t) dt \\ &= \left[t + \frac{1}{2}t^2 \right]_{-1}^0 + \left[t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 \\ &= -\left(-1 + \frac{1}{2} \right) + \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$g(t) = 1 - |t| \text{라 하면}$$

$$g(-t) = 1 - |-t| = 1 - |t| = g(t)$$

$$\begin{aligned} \therefore f(1) &= \int_{-1}^1 (1 - |t|) dt = 2 \int_0^1 (1 - |t|) dt \\ &= 2 \int_0^1 (1-t) dt = 2 \left[t - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2} \right) = 1 \end{aligned}$$

0787 [답] ④

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x)$$

즉, $f(x)$ 는 $F(x)$ 의 도함수이다.

주어진 그래프에서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극대, $x=2$ 에서 극소이므로

$$f'(-2) = 0, f'(2) = 0$$

$$f'(x) = a(x+2)(x-2) \quad (a > 0) \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int a(x+2)(x-2) dx \\ &= \int a(x^2 - 4) dx = a \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x \right) + C \end{aligned}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점을 지나므로 $f(0)=0$ 에서 $C=0$

$$\therefore f(x) = a \left(\frac{1}{3}x^3 - 4x \right) = \frac{1}{3}ax(x+2\sqrt{3})(x-2\sqrt{3})$$

$$F'(x) = f(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=2\sqrt{3} \quad (\because 0 \leq x \leq 4)$$

구간 $[0, 4]$ 에서 함수 $F(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$2\sqrt{3}$	...	4
$F'(x)$	0	-	0	+	
$F(x)$		\	극소	/	

따라서 함수 $F(x)$ 는 $x=2\sqrt{3}$ 에서 최소이므로 최솟값은 $F(2\sqrt{3})$

0788 [답] -1

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = f(x)$$

즉, $f(x)$ 는 $F(x)$ 의 도함수이다.

주어진 그래프에서 $0 \leq x \leq 3$ 일 때, $F'(x) = f(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x=1$ 또는 $x=3$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $F(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3
$F'(x)$		+	0	-	0
$F(x)$		/	극대	\	

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = \int_0^1 f(t) dt = 1$$

$$F(3) = \int_0^3 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^3 f(t) dt = 1 + (-2) = -1$$

따라서 $0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $F(x)$ 의 최댓값은 1, 최솟값은 -1이므로 구하는 곱은

$$1 \times (-1) = -1$$

0789 [답] 6

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_1^{1+2h} f(x) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[F(x) \right]_1^{1+2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(1+2h) - F(1)}{2h} \times 2 \\ &= 2F'(1) = 2f(1) \\ &= 2(-2+5) = 6 \end{aligned}$$

0790 [답] 2

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2-9} \int_3^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2-9} \left[F(t) \right]_3^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{F(x) - F(3)}{x^2-9} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{F(x) - F(3)}{x-3} \times \frac{1}{x+3} \right\} \\ &= \frac{1}{6} F'(3) = \frac{1}{6} f(3) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{6}f(3)=2$ 이므로 $f(3)=12$

$$9+3a-3=12$$

$$\therefore a=2$$

0791 답 22

$xf(x)-x^3=\int_1^x \{f(t)-t\} dt$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$f(1)-1=0$$

$$\therefore f(1)=1$$

$xf(x)-x^3=\int_1^x \{f(t)-t\} dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)-3x^2=f(x)-x$$

$$xf'(x)=3x^2-x=x(3x-1)$$

$$\therefore f'(x)=3x-1 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x) dx=\int (3x-1) dx$$

$$=\frac{3}{2}x^2-x+C$$

$f(1)=1$ 에서

$$\frac{3}{2}-1+C=1 \quad \therefore C=\frac{1}{2}$$

$$\therefore f(x)=\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{3-h}^{3+h} f(x) dx$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[F(x) \right]_{3-h}^{3+h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(3+h)-F(3-h)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(3+h)-F(3)+F(3)-F(3-h)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(3+h)-F(3)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(3)-F(3-h)}{-h} \times (-1)$$

$$=2F'(3)=2f(3)$$

$$=2\left(\frac{27}{2}-3+\frac{1}{2}\right)$$

$$=22 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $f'(x)$ 구하기	30%
② $f(x)$ 구하기	30%
③ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{3-h}^{3+h} f(x) dx$ 의 값 구하기	40%

0792 답 ①

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f(t) dt - f(x)}{x^2-1} = 2$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \int_1^x f(t) dt - f(x) \right\} = 0 \text{에서}$$

$$\int_1^1 f(t) dt - f(1) = 0$$

$$\therefore f(1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x f(t) dt - f(x)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left[F(t) \right]_1^x - f(x)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1) - f(x)}{x^2-1}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1) - f(x) + f(1)}{(x+1)(x-1)} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$=\lim_{x \rightarrow 1} \left[\left\{ \frac{F(x) - F(1)}{x-1} - \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \right\} \times \frac{1}{x+1} \right]$$

$$=\{F'(1) - f'(1)\} \times \frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}f'(1)$$

$$=-\frac{1}{2}f'(1) \quad (\because \textcircled{1})$$

따라서 $-\frac{1}{2}f'(1)=2$ 이므로

$$f'(1)=-4$$

AB 유형 점검

130~132쪽

0793 답 ①

$$\int_0^2 (x^2+2x+4)f(x) dx = \int_0^2 (x^2+2x+4)(x-2) dx$$

$$=\int_0^2 (x^3-8) dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4 - 8x \right]_0^2$$

$$=4-16=-12$$

0794 답 ③

$$\int_{-1}^2 (9x^2-2kx+3) dx = \left[3x^3 - kx^2 + 3x \right]_{-1}^2$$

$$=(24-4k+6) - (-3-k-3)$$

$$=36-3k$$

즉, $36-3k > 6$ 이므로 $k < 10$

따라서 정수 k 의 최댓값은 9이다.

0795 답 2

$$\int_{-1}^k (x^2-2x) dx - 2 \int_k^{-1} (x^2+x+3) dx$$

$$=\int_{-1}^k (x^2-2x) dx + \int_{-1}^k 2(x^2+x+3) dx$$

$$=\int_{-1}^k \{ (x^2-2x) + 2(x^2+x+3) \} dx$$

$$=\int_{-1}^k (3x^2+6) dx = \left[x^3+6x \right]_{-1}^k$$

$$=(k^3+6k) - (-1-6)$$

$$=k^3+6k+7$$

따라서 $k^3+6k+7=9k+9$ 이므로
 $k^3-3k-2=0$, $(k+1)^2(k-2)=0$
 $\therefore k=2$ ($\because k \neq -1$)

0796 [답] 28

$$\begin{aligned} & \int_2^4 (\sqrt{x}+2)^2 dx - \int_4^8 (\sqrt{t}-2)^2 dt + \int_2^8 (\sqrt{y}-2)^2 dy \\ &= \int_2^4 (\sqrt{x}+2)^2 dx + \int_8^4 (\sqrt{x}-2)^2 dx + \int_2^8 (\sqrt{x}-2)^2 dx \\ &= \int_2^4 (\sqrt{x}+2)^2 dx + \int_2^4 (\sqrt{x}-2)^2 dx \\ &= \int_2^4 \{(x+4\sqrt{x}+4) + (x-4\sqrt{x}+4)\} dx \\ &= \int_2^4 (2x+8) dx \\ &= \left[x^2+8x \right]_2^4 \\ &= (16+32) - (4+16) = 28 \end{aligned}$$

0797 [답] ⑤

$$\begin{aligned} \int_3^4 f(x) dx &= \int_3^{-4} f(x) dx + \int_{-4}^4 f(x) dx \\ &= -\int_{-4}^3 f(x) dx + \left\{ \int_{-4}^0 f(x) dx + \int_0^4 f(x) dx \right\} \\ &= -7+3+5=1 \\ \therefore \int_3^4 \{f(x)+4x\} dx &= \int_3^4 f(x) dx + \int_3^4 4x dx \\ &= 1 + \left[2x^2 \right]_3^4 \\ &= 1 + (32-18) = 15 \end{aligned}$$

0798 [답] $\frac{1}{6}$

주어진 그래프에서 $f(x) = \begin{cases} -2x+4 & (x \geq 1) \\ x+1 & (x \leq 1) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^3 xf(x) dx \\ &= \int_{-2}^1 (x^2+x) dx + \int_1^3 (-2x^2+4x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^1 + \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_1^3 \\ &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{8}{3} + 2 \right) + (-18+18) - \left(-\frac{2}{3} + 2 \right) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

0799 [답] ②

$$\begin{aligned} |x| + |x-1| &= \begin{cases} 2x-1 & (x \geq 1) \\ 1 & (0 \leq x \leq 1) \\ -2x+1 & (x \leq 0) \end{cases} \text{이므로} \\ & \int_{-1}^2 (|x| + |x-1|) dx \\ &= \int_{-1}^0 (-2x+1) dx + \int_0^1 dx + \int_1^2 (2x-1) dx \\ &= \left[-x^2+x \right]_{-1}^0 + \left[x \right]_0^1 + \left[x^2-x \right]_1^2 \\ &= -(-1-1) + 1 + (4-2) - (1-1) = 5 \end{aligned}$$

0800 [답] ②

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (1+2x+3x^2+\cdots+20x^{19}) dx \\ &= \int_{-1}^1 (1+3x^2+5x^4+\cdots+19x^{18}) dx \\ &\quad + \int_{-1}^1 (2x+4x^3+6x^5+\cdots+20x^{19}) dx \\ &= 2 \int_0^1 (1+3x^2+5x^4+\cdots+19x^{18}) dx \\ &= 2 \left[x+x^3+x^5+\cdots+x^{19} \right]_0^1 \\ &= 2 \times 10 = 20 \end{aligned}$$

0801 [답] ②

$f(-x) = -f(x)$ 이므로 $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 (x^4+x+1)f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 x^4 f(x) dx + \int_{-1}^1 x f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx \quad \cdots \textcircled{1} \\ & \text{이때 } g(x) = x^4 f(x), h(x) = x f(x) \text{라 하면} \\ & g(-x) = (-x)^4 f(-x) = -x^4 f(x) = -g(x) \\ & h(-x) = -x f(-x) = x f(x) = h(x) \\ & \therefore \int_{-1}^1 g(x) dx = 0, \int_{-1}^1 h(x) dx = 2 \int_0^1 h(x) dx \\ & \text{따라서 } \textcircled{1} \text{에서} \\ & \int_{-1}^1 (x^4+x+1)f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 g(x) dx + \int_{-1}^1 h(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx \\ &= 2 \int_0^1 h(x) dx = 2 \int_0^1 x f(x) dx \\ &= 2 \times 3 = 6 \end{aligned}$$

0802 [답] 1

(㉞)에서 $f(x+1) = f(x-1)$ 의 x 대신 $x+1$ 을 대입하면
 $f(x+2) = f(x)$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_1^3 f(x) dx = \int_3^5 f(x) dx = \int_5^7 f(x) dx \\ \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \text{이므로 (나)에서} \\ 2 &= \int_{-1}^0 f(x) dx + 5 \quad \therefore \int_{-1}^0 f(x) dx = -3 \\ \int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_1^2 f(x) dx = \cdots = \int_7^8 f(x) dx \text{이므로} \\ \int_3^8 f(x) dx &= \int_3^5 f(x) dx + \int_5^7 f(x) dx + \int_7^8 f(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx \\ &= 2 \times 2 - 3 = 1 \end{aligned}$$

0803 [답] ②

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = f(2)$
 즉, $-8+2=4-4+a$ 이므로 $a=-6$

$$f(x)=f(x+4)\circlearrowleft\text{므로}$$

$$\begin{aligned}\int_9^{11} f(x) dx &= \int_5^7 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx \\ &= \int_1^2 (-4x+2) dx + \int_2^3 (x^2-2x-6) dx \\ &= \left[-2x^2+2x\right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3-x^2-6x\right]_2^3 \\ &= (-8+4) - (-2+2) + (9-9-18) - \left(\frac{8}{3}-4-12\right) \\ &= -\frac{26}{3}\end{aligned}$$

0804 답 8

$$\begin{aligned}f(x) &= 12x^2 + \int_0^1 (6x-4t)f(t) dt \text{에서} \\ f(x) &= 12x^2 + 6x \int_0^1 f(t) dt - 4 \int_0^1 tf(t) dt \\ \int_0^1 f(t) dt &= a, \int_0^1 tf(t) dt = b \text{ (} a, b \text{는 상수)로 놓으면} \\ f(x) &= 12x^2 + 6ax - 4b \text{이므로} \\ \int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 (12t^2 + 6at - 4b) dt \\ &= \left[4t^3 + 3at^2 - 4bt\right]_0^1 = 4 + 3a - 4b \\ \text{따라서 } 4 + 3a - 4b &= a \text{이므로 } a - 2b = -2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \int_0^1 tf(t) dt &= \int_0^1 (12t^3 + 6at^2 - 4bt) dt \\ &= \left[3t^4 + 2at^3 - 2bt^2\right]_0^1 = 3 + 2a - 2b \\ \text{따라서 } 3 + 2a - 2b &= b \text{이므로 } 2a - 3b = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a &= 0, b = 1 \\ \text{즉, } f(x) &= 12x^2 - 4 \text{이므로} \\ f(1) &= 12 - 4 = 8\end{aligned}$$

0805 답 ④

$$\begin{aligned}xf(x) &= 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t) dt \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면} \\ f(1) &= 2 + a + 3a \quad \therefore f(1) = 4a + 2 \\ xf(x) &= 2x^3 + ax^2 + 3a + \int_1^x f(t) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f(x) + xf'(x) &= 6x^2 + 2ax + f(x) \\ xf'(x) &= 6x^2 + 2ax = x(6x + 2a) \\ \therefore f'(x) &= 6x + 2a \\ \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (6x + 2a) dx = 3x^2 + 2ax + C \\ f(1) &= 4a + 2 \text{에서 } 3 + 2a + C = 4a + 2 \quad \therefore C = 2a - 1 \\ \therefore f(x) &= 3x^2 + 2ax + 2a - 1 \\ \text{또 } f(1) &= \int_0^1 f(t) dt \text{에서 } 4a + 2 = \int_0^1 f(t) dt \\ \int_0^1 f(t) dt &= \int_0^1 (3t^2 + 2at + 2a - 1) dt \\ &= \left[t^3 + at^2 + (2a-1)t\right]_0^1 = 3a \\ \text{따라서 } 4a + 2 &= 3a \text{이므로 } a = -2 \\ \text{즉, } f(x) &= 3x^2 - 4x - 5 \text{이므로} \\ f(3) &= 27 - 12 - 5 = 10 \\ \therefore a + f(3) &= 8\end{aligned}$$

0806 답 9

$$\begin{aligned}x^2f(x) &= x^3 + \int_0^x (x^2+t)f'(t) dt \text{에서} \\ x^2f(x) &= x^3 + x^2 \int_0^x f'(t) dt + \int_0^x tf'(t) dt \\ \text{이때 } \int_0^x f'(t) dt &= \left[f(t)\right]_0^x = f(x) - f(0) = f(x) - 3 \text{이므로} \\ x^2f(x) &= x^3 + x^2\{f(x) - 3\} + \int_0^x tf'(t) dt \\ \therefore \int_0^x tf'(t) dt &= -x^3 + 3x^2 \\ \text{양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ xf'(x) &= -3x^2 + 6x = x(-3x + 6) \\ \therefore f'(x) &= -3x + 6 \\ \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-3x + 6) dx \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + 6x + C \\ f(0) &= 3 \text{에서 } C = 3 \\ \text{따라서 } f(x) &= -\frac{3}{2}x^2 + 6x + 3 \text{이므로} \\ f(2) &= -6 + 12 + 3 = 9\end{aligned}$$

0807 답 ③

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_1^x (-3t^2 + 6t + 9) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f'(x) &= -3x^2 + 6x + 9 = -3(x+1)(x-3) \\ f'(x) &= 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3 \\ \text{함수 } f(x) \text{의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.}\end{aligned}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

$$\begin{aligned}\text{함수 } f(x) \text{는 } x=3 \text{에서 극대이므로 극댓값은} \\ f(3) &= \int_1^3 (-3t^2 + 6t + 9) dt \\ &= \left[-t^3 + 3t^2 + 9t\right]_1^3 \\ &= (-27 + 27 + 27) - (-1 + 3 + 9) = 16 \\ \text{함수 } f(x) \text{는 } x=-1 \text{에서 극소이므로 극솟값은} \\ f(-1) &= \int_1^{-1} (-3t^2 + 6t + 9) dt \\ &= \int_{-1}^1 (3t^2 - 6t - 9) dt = 2 \int_0^1 (3t^2 - 9) dt \\ &= 2 \left[t^3 - 9t\right]_0^1 \\ &= 2(1 - 9) = -16 \\ \text{따라서 극댓값과 극솟값의 합은} \\ 16 + (-16) &= 0\end{aligned}$$

0808 답 18

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_{x-1}^{x+1} (t^2 - 2t) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f'(x) &= \{(x+1)^2 - 2(x+1)\} - \{(x-1)^2 - 2(x-1)\} \\ &= 4x - 4 \\ f'(x) &= 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1\end{aligned}$$

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		\	극소	/	

$$f(-2) = \int_{-3}^{-1} (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_{-3}^{-1} \\ = \left(-\frac{1}{3} - 1 \right) - \left(-9 - 9 \right) = \frac{50}{3}$$

$$f(1) = \int_0^2 (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 4 = -\frac{4}{3}$$

$$f(2) = \int_1^3 (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_1^3 = (9 - 9) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{2}{3}$$

따라서 $M = \frac{50}{3}$, $m = -\frac{4}{3}$ 이므로 $M - m = 18$

0809 답 ①

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[F(t) \right]_0^x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} \\ = F'(0) = f(0)$$

$$\therefore f(0) = 1$$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 4x + 1) dx = x^3 - 2x^2 + x + C$$

$$f(0) = 1 \text{에서 } C = 1$$

따라서 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ 이므로

$$f(2) = 8 - 8 + 2 + 1 = 3$$

0810 답 -5

$$\int_{-2}^1 (x+k)^2 dx + \int_1^{-2} (x-k)^2 dx$$

$$= \int_{-2}^1 (x+k)^2 dx - \int_{-2}^1 (x-k)^2 dx$$

$$= \int_{-2}^1 \{ (x^2 + 2kx + k^2) - (x^2 - 2kx + k^2) \} dx$$

$$= \int_{-2}^1 4kx dx$$

$$= \left[2kx^2 \right]_{-2}^1 = 2k - 8k = -6k$$

따라서 $-6k = 30$ 이므로 $k = -5$

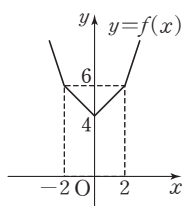
채점 기준

① 정적분의 합을 하나의 정적분으로 나타내기	60 %
② 정적분의 합을 k 에 대한 식으로 나타내기	20 %
③ k 의 값 구하기	20 %

0811 답 28

$$f(x) = \begin{cases} 3x & (x \geq 2) \\ x+4 & (0 \leq x \leq 2) \\ -x+4 & (-2 \leq x \leq 0) \\ -3x & (x \leq -2) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값 4를 갖는다.



$$\therefore a = 4$$

$$\therefore \int_0^a f(x) dx = \int_0^4 f(x) dx \\ = \int_0^2 (x+4) dx + \int_2^4 3x dx \\ = \left[\frac{1}{2}x^2 + 4x \right]_0^2 + \left[\frac{3}{2}x^2 \right]_2^4 \\ = (2+8) + (24-6) \\ = 28$$

채점 기준

① a 의 값 구하기	60 %
② $\int_0^a f(x) dx$ 의 값 구하기	40 %

0812 답 $\frac{2}{3}$

$\int_0^1 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$\int_0^x f(t) dt = -3x^3 + 2x^2 - 2kx$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = -9x^2 + 4x - 2k$$

$$\therefore \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (-9t^2 + 4t - 2k) dt \\ = \left[-3t^3 + 2t^2 - 2kt \right]_0^1 \\ = -3 + 2 - 2k = -2k - 1$$

따라서 $-2k - 1 = k$ 이므로 $k = -\frac{1}{3}$

$$\text{즉, } f(x) = -9x^2 + 4x + \frac{2}{3} \text{이므로}$$

$$f(0) = \frac{2}{3}$$

채점 기준

① $\int_0^1 f(t) dt = k$ 로 놓고 $f(x)$ 를 k 에 대한 식으로 나타내기	40 %
② k 의 값 구하기	40 %
③ $f(0)$ 의 값 구하기	20 %

C 실력 향상

133쪽

0813 답 6

(*)에서

$$\int_n^{n+2} f(x) dx = \int_n^{n+1} 2x dx = \left[x^2 \right]_n^{n+1} \\ = (n+1)^2 - n^2 \\ = 2n + 1$$

$$\therefore \int_0^8 f(x) dx \\ = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx + \int_6^8 f(x) dx \\ = 1 + 5 + 9 + 13 = 28$$

(7)에서 $\int_0^1 f(x) dx = 1$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^7 f(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx + \int_5^7 f(x) dx \\ &= 1 + 3 + 7 + 11 = 22 \\ &\therefore \int_7^8 f(x) dx = \int_7^0 f(x) dx + \int_0^8 f(x) dx \\ &= \int_0^8 f(x) dx - \int_0^7 f(x) dx \\ &= 28 - 22 = 6 \end{aligned}$$

0814 답 -4

$f(x) = 2x^3 - 6x$ 에서
 $f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x+1)(x-1)$
 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 1$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	4 극대	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$

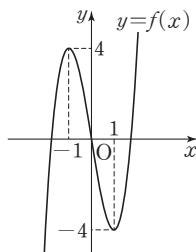
따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$-1 \leq t \leq 1$ 일 때, $g(t) = f(t) = 2t^3 - 6t$

$t \geq 1$ 일 때, $g(t) = f(1) = -4$

$$\therefore g(t) = \begin{cases} 2t^3 - 6t & (-1 \leq t \leq 1) \\ -4 & (t \geq 1) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \therefore \int_{-1}^2 g(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 g(t) dt + \int_1^2 g(t) dt \\ &= \int_{-1}^1 (2t^3 - 6t) dt + \int_1^2 (-4) dt \\ &= \int_{-1}^2 (-4) dt = \left[-4t \right]_1^2 \\ &= -8 - (-4) = -4 \end{aligned}$$



0815 답 28

$$\int_0^1 |f(t)| dt = k \text{ (} k \text{는 상수)} \text{로 놓으면 } k > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) = 4x^3 - 4kx \text{이므로 } f(1) = 4 - 4k > 0 \text{에서 } k < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $0 < k < 1$

$$f(x) = 4x^3 - 4kx = 4x(x^2 - k) = 4x(x + \sqrt{k})(x - \sqrt{k})$$

이때 $0 < x < \sqrt{k}$ 일 때 $f(x) < 0$, $x \geq \sqrt{k}$ 일 때 $f(x) \geq 0$ 이고,

$0 < k < 1$ 에서 $0 < \sqrt{k} < 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(t)| dt &= \int_0^{\sqrt{k}} \{-f(t)\} dt + \int_{\sqrt{k}}^1 f(t) dt \\ &= \int_0^{\sqrt{k}} (-4t^3 + 4kt) dt + \int_{\sqrt{k}}^1 (4t^3 - 4kt) dt \\ &= \left[-t^4 + 2kt^2 \right]_0^{\sqrt{k}} + \left[t^4 - 2kt^2 \right]_{\sqrt{k}}^1 \\ &= (-k^2 + 2k^2) + (1 - 2k) - (k^2 - 2k^2) \\ &= 2k^2 - 2k + 1 \end{aligned}$$

따라서 $2k^2 - 2k + 1 = k$ 이므로 $2k^2 - 3k + 1 = 0$

$$(2k-1)(k-1) = 0 \quad \therefore k = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < k < 1)$$

즉, $f(x) = 4x^3 - 2x$ 이므로

$$f(2) = 32 - 4 = 28$$

0816 답 ④

(7)에서 $f(-x) = -f(x)$ 이므로

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$$

또 $f(x+2) = f(x)$ 이므로

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx = \int_3^5 f(x) dx = \int_5^7 f(x) dx = 0$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_2^3 f(x) dx$$

한편 $g(x) = f(x-2) + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_2^7 g(x) dx &= \int_2^7 \{f(x-2) + 1\} dx \\ &= \int_2^7 f(x-2) dx + \int_2^7 dx \\ &= \int_2^7 f(x-2) dx + \left[x \right]_2^7 \\ &= \int_2^7 f(x-2) dx + 5 \end{aligned}$$

$f(x+2) = f(x)$ 의 양변에 $x = t-2$ 를 대입하면

$$f(t) = f(t-2) \text{이므로 } f(x-2) = f(x)$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_2^7 f(x-2) dx &= \int_2^7 f(x) dx \\ &= \int_2^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx + \int_5^7 f(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) dx + 0 + 0 = 2 \quad (\because \textcircled{4}) \end{aligned}$$

$$\therefore \int_2^7 g(x) dx = \int_2^7 f(x-2) dx + 5 = 7$$

0817 답 7

(7)에서 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = \frac{1}{2} \{f(x) + f(1)\} + \frac{x-1}{2} f'(x)$$

$$\therefore f(x) = f(1) + (x-1)f'(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 의 최고차항을 ax^n ($a \neq 0$)이라 하면 $f'(x)$ 의 최고차항은 anx^{n-1} 이다.

이때 $\textcircled{1}$ 에서 좌변의 최고차항은 ax^n 이고 우변의 최고차항은 anx^n 이므로

$$a = an \quad \therefore n = 1 \quad (\because a \neq 0)$$

따라서 $f(x)$ 는 일차함수이고 $f(0) = 1$ 이므로

$$f(x) = ax + 1$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \int_0^2 (ax+1) dx = 5 \Rightarrow \int_{-1}^1 x(ax+1) dx$$

$$\int_0^2 (ax+1) dx = 10 \Rightarrow \int_0^1 ax^2 dx$$

$$\left[\frac{a}{3} x^3 + x \right]_0^2 = 10 \Rightarrow \left[\frac{a}{3} x^3 \right]_0^1$$

$$2a + 2 = \frac{10}{3} a \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{3}{2}x + 1 \text{이므로 } f(4) = 6 + 1 = 7$$

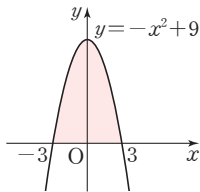
09 / 정적분의 활용

A 개념 확인

134~135쪽

0818 답 36

곡선 $y = -x^2 + 9$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $-x^2 + 9 = 0$ 에서 $(x+3)(x-3) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = 3$
 $-3 \leq x \leq 3$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

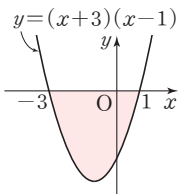


$$S = \int_{-3}^3 (-x^2 + 9) dx = 2 \int_0^3 (-x^2 + 9) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + 9x \right]_0^3 = 36$$

0819 답 $\frac{32}{3}$

곡선 $y = (x+3)(x-1)$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $(x+3)(x-1) = 0$ 에서 $x = -3$ 또는 $x = 1$
 $-3 \leq x \leq 1$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

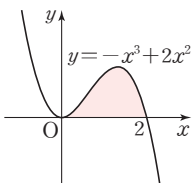


$$S = \int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right]_{-3}^1 = \frac{32}{3}$$

0820 답 $\frac{4}{3}$

곡선 $y = -x^3 + 2x^2$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $-x^3 + 2x^2 = 0$ 에서 $x^2(x-2) = 0$ $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
 $0 \leq x \leq 2$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

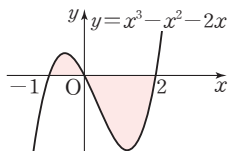


$$S = \int_0^2 (-x^3 + 2x^2) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

0821 답 $\frac{37}{12}$

곡선 $y = x^3 - x^2 - 2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^3 - x^2 - 2x = 0$ 에서 $x(x+1)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 2$
 $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $y \geq 0$ 이고, $0 \leq x \leq 2$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면



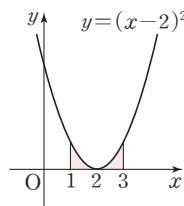
$$S = \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (-x^3 + x^2 + 2x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{37}{12}$$

0822 답 $\frac{2}{3}$

곡선 $y = (x-2)^2$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $(x-2)^2 = 0$ 에서 $x = 2$
 $1 \leq x \leq 3$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면



$$S = \int_1^3 (x-2)^2 dx$$

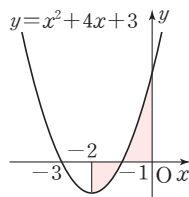
$$= \int_1^3 (x^2 - 4x + 4) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x \right]_1^3$$

$$= \frac{2}{3}$$

0823 답 2

곡선 $y = x^2 + 4x + 3$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2 + 4x + 3 = 0$ 에서 $(x+3)(x+1) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = -1$
 $-2 \leq x \leq -1$ 에서 $y \leq 0$ 이고, $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면



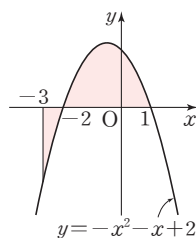
$$S = \int_{-2}^{-1} (-x^2 - 4x - 3) dx + \int_{-1}^0 (x^2 + 4x + 3) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x \right]_{-1}^0$$

$$= 2$$

0824 답 $\frac{19}{3}$

곡선 $y = -x^2 - x + 2$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $-x^2 - x + 2 = 0$ 에서 $(x+2)(x-1) = 0$
 $\therefore x = -2$ 또는 $x = 1$
 $-3 \leq x \leq -2$ 에서 $y \leq 0$ 이고, $-2 \leq x \leq 1$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면



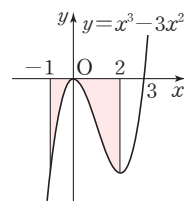
$$S = \int_{-3}^{-2} (x^2 + x - 2) dx + \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-3}^{-2} + \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1$$

$$= \frac{19}{3}$$

0825 답 $\frac{21}{4}$

곡선 $y = x^3 - 3x^2$ 과 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^3 - 3x^2 = 0$ 에서 $x^2(x-3) = 0$ $\therefore x = 0$ 또는 $x = 3$
 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면



$$S = \int_{-1}^2 (-x^3 + 3x^2) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_{-1}^2$$

$$= \frac{21}{4}$$

0826 **답** $\frac{9}{2}$

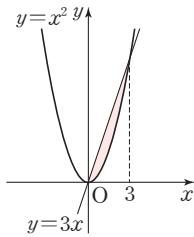
곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=3x$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2=3x$ 에서

$$x^2-3x=0, x(x-3)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $3x \geq x^2$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 (3x - x^2) dx \\ &= \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$



0827 **답** $\frac{1}{3}$

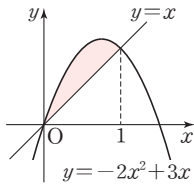
곡선 $y=-2x^2+3x$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 $-2x^2+3x=x$ 에서

$$x^2-x=0, x(x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $-2x^2+3x \geq x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(-2x^2+3x) - x\} dx \\ &= \int_0^1 (-2x^2+2x) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$



0828 **답** $\frac{32}{3}$

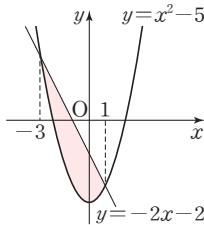
곡선 $y=x^2-5$ 와 직선 $y=-2x-2$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2-5=-2x-2$ 에서

$$x^2+2x-3=0, (x+3)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

$-3 \leq x \leq 1$ 에서 $-2x-2 \geq x^2-5$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^1 \{(-2x-2) - (x^2-5)\} dx \\ &= \int_{-3}^1 (-x^2-2x+3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right]_{-3}^1 = \frac{32}{3} \end{aligned}$$



0829 **답** $\frac{8}{3}$

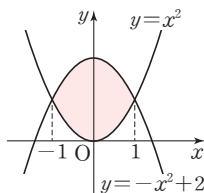
두 곡선 $y=x^2, y=-x^2+2$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2=-x^2+2$ 에서

$$x^2-1=0, (x+1)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $-x^2+2 \geq x^2$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 \{(-x^2+2) - x^2\} dx \\ &= 2 \int_0^1 (-x^2+2) dx \\ &= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$



0830 **답** $\frac{4}{3}$

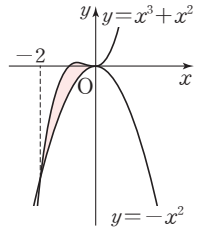
두 곡선 $y=x^3+x^2, y=-x^2$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3+x^2=-x^2$ 에서

$$x^3+2x^2=0, x^2(x+2)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

$-2 \leq x \leq 0$ 에서 $x^3+x^2 \geq -x^2$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 \{(x^3+x^2) - (-x^2)\} dx \\ &= \int_{-2}^0 (x^3+2x^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_{-2}^0 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$



0831 **답** $\frac{1}{4}$

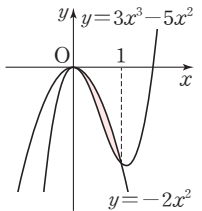
두 곡선 $y=3x^3-5x^2, y=-2x^2$ 의 교점의 x 좌표는 $3x^3-5x^2=-2x^2$ 에서

$$x^3-x^2=0, x^2(x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $-2x^2 \geq 3x^3-5x^2$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{-2x^2 - (3x^3-5x^2)\} dx \\ &= \int_0^1 (-3x^3+3x^2) dx \\ &= \left[-\frac{3}{4}x^4 + x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$



0832 **답** -9

$$\begin{aligned} 6 + \int_0^3 (2t-8) dt &= 6 + \left[t^2 - 8t \right]_0^3 \\ &= 6 + (-15) = -9 \end{aligned}$$

0833 **답** -8

$$\int_1^5 (2t-8) dt = \left[t^2 - 8t \right]_1^5 = -8$$

0834 **답** 10

$1 \leq t \leq 4$ 에서 $2t-8 \leq 0$ 이고, $4 \leq t \leq 5$ 에서 $2t-8 \geq 0$ 이므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned} \int_1^5 |2t-8| dt &= \int_1^4 (-2t+8) dt + \int_4^5 (2t-8) dt \\ &= \left[-t^2 + 8t \right]_1^4 + \left[t^2 - 8t \right]_4^5 \\ &= 10 \end{aligned}$$

0835 **답** 4

$$0 + \int_0^2 (6t-3t^2) dt = \left[3t^2 - t^3 \right]_0^2 = 4$$

0836 답 -2

$$\int_1^3 (6t-3t^2) dt = \left[3t^2 - t^3 \right]_1^3 = -2$$

0837 답 6

$1 \leq t \leq 2$ 에서 $6t-3t^2 \geq 0$ 이고, $2 \leq t \leq 3$ 에서 $6t-3t^2 \leq 0$ 이므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned} \int_1^3 |6t-3t^2| dt &= \int_1^2 (6t-3t^2) dt + \int_2^3 (-6t+3t^2) dt \\ &= \left[3t^2 - t^3 \right]_1^2 + \left[-3t^2 + t^3 \right]_2^3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

B 유형 완성

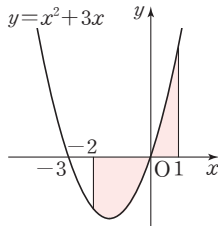
136~144쪽

0838 답 $\frac{31}{6}$

곡선 $y=x^2+3x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2+3x=0$ 에서 $x(x+3)=0$
 $\therefore x=-3$ 또는 $x=0$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-2}^1 |x^2+3x| dx &= \int_{-2}^0 (-x^2-3x) dx + \int_0^1 (x^2+3x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{31}{6} \end{aligned}$$



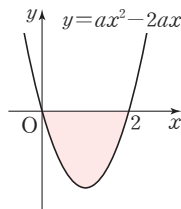
0839 답 ③

곡선 $y=ax^2-2ax$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $ax^2-2ax=0$ 에서 $x(x-2)=0$ ($\because a>0$)
 $\therefore x=0$ 또는 $x=2$

$a>0$ 이므로 곡선 $y=ax^2-2ax$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^2 |ax^2-2ax| dx &= \int_0^2 (-ax^2+2ax) dx \\ &= \left[-\frac{a}{3}x^3 + ax^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3}a \end{aligned}$$

따라서 $\frac{4}{3}a=4$ 이므로 $a=3$



0840 답 $\frac{20}{3}$

$$y=x^2-|x|-2 = \begin{cases} x^2-x-2 & (x \geq 0) \\ x^2+x-2 & (x \leq 0) \end{cases} \text{이므로 함수 } y=x^2-|x|-2$$

의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는

(i) $x \geq 0$ 일 때

$$x^2-x-2=0 \text{에서 } (x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=2 \quad (\because x \geq 0)$$

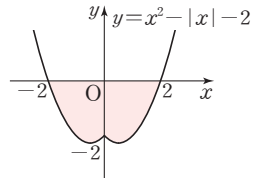
(ii) $x \leq 0$ 일 때

$$x^2+x-2=0 \text{에서 } (x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-2 \quad (\because x \leq 0)$$

(i), (ii)에서 함수 $y=x^2-|x|-2$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \int_0^2 |x^2-x-2| dx &= 2 \int_0^2 (-x^2+x+2) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^2 \\ &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$



0841 답 2

$$S_2 = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$S_1 + S_2 = 1$ 이므로

$$S_1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2$$

0842 답 ④

곡선 $y=x^2-kx$ 와 x 축 및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(k)$ 라 하면

$$\begin{aligned} S(k) &= \int_0^1 |x^2-kx| dx \\ &= \int_0^k (-x^2+kx) dx + \int_k^1 (x^2-kx) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2 \right]_0^k + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{k}{2}x^2 \right]_k^1 \\ &= \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$S'(k) = k^2 - \frac{1}{2} = \left(k + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(k - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$S'(k)=0 \text{인 } k \text{의 값은 } k=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because 0 < k < 1)$$

$0 < k < 1$ 에서 함수 $S(k)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	0	...	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	...	1
$S'(k)$		-	0	+	
$S(k)$		\	극소	/	

따라서 $S(k)$ 는 $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 에서 최소이다.

0843 [답] 7

$\int_3^x f(t) dt = x^3 - ax^2$ 의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$0 = 27 - 9a \quad \therefore a = 3 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$\int_3^x f(t) dt = x^3 - 3x^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 3x^2 - 6x \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

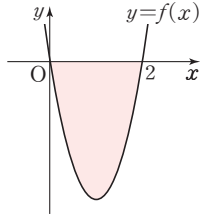
$$3x^2 - 6x = 0 \text{에서}$$

$$x(x-2) = 0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 |3x^2 - 6x| dx \\ &= \int_0^2 (-3x^2 + 6x) dx \\ &= \left[-x^3 + 3x^2 \right]_0^2 = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore a + S = 7$$



채점 기준

① a 의 값 구하기	20%
② $f(x)$ 구하기	20%
③ S 의 값 구하기	50%
④ $a+S$ 의 값 구하기	10%

0844 [답] 9

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=-2$, $x=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 , 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하자.

(가)에서

$$\begin{aligned} 2 \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx &= 0 \\ 2 \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^4 \{-f(x)\} dx &= 0 \\ \therefore 2S_1 - S_2 &= 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(나)에서

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 f(x) dx &= \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^4 f(x) dx \\ &= \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_1^4 \{-f(x)\} dx \\ \therefore S_1 - S_2 &= -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \end{aligned}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $S_1=3$, $S_2=6$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축 및 직선 $x=-2$, $x=4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

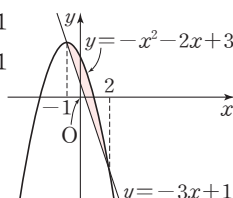
$$S_1 + S_2 = 9$$

0845 [답] ⑤

곡선 $y = -x^2 - 2x + 3$ 과 직선 $y = -3x + 1$ 의 교점의 x 좌표는 $-x^2 - 2x + 3 = -3x + 1$ 에서

$$x^2 - x - 2 = 0, (x+1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \{(-x^2 - 2x + 3) - (-3x + 1)\} dx &= \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

0846 [답] 8

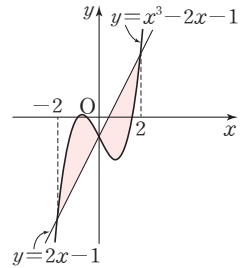
곡선 $y=x^3-2x-1$ 과 직선 $y=2x-1$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3-2x-1=2x-1$ 에서 $x^3-4x=0$

$$x(x+2)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \{(x^3 - 2x - 1) - (2x - 1)\} dx &+ \int_0^2 \{(2x - 1) - (x^3 - 2x - 1)\} dx \\ &= \int_{-2}^0 (x^3 - 4x) dx + \int_0^2 (-x^3 + 4x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2 \right]_0^2 \\ &= 8 \end{aligned}$$



0847 [답] ④

곡선 $y = -2x^2 + ax$ 과 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 $-2x^2 + ax = x$ 에서

$$2x^2 - (a-1)x = 0$$

$$x\{2x - (a-1)\} = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x = \frac{a-1}{2}$$

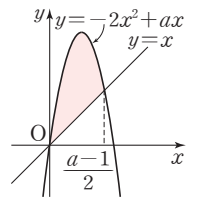
따라서 곡선 $y = -2x^2 + ax$ 과 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{a-1}{2}} \{(-2x^2 + ax) - x\} dx &= \int_0^{\frac{a-1}{2}} \{-2x^2 + (a-1)x\} dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{a-1}{2}x^2 \right]_0^{\frac{a-1}{2}} \\ &= -\frac{(a-1)^3}{12} + \frac{(a-1)^3}{8} \\ &= \frac{(a-1)^3}{24} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{(a-1)^3}{24} = 9$ 이므로

$$(a-1)^3 = 216$$

$$a-1=6 \quad (\because a \text{는 실수}) \quad \therefore a=7$$



0848 [답] 14

$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x$, $g(x) = \begin{cases} x-2 & (x \geq 1) \\ -x & (x \leq 1) \end{cases}$ 이므로 두 함수

$y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표는

(i) $x \geq 1$ 일 때

$$-\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x = x - 2 \text{에서}$$

$$x^2 - x - 6 = 0, (x+2)(x-3) = 0$$

$$\therefore x=3 \quad (\because x \geq 1)$$

(ii) $x \leq 1$ 일 때

$$-\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x = -x \text{에서}$$

$$x^2 - 7x = 0, x(x-7) = 0$$

$$\therefore x = 0 \quad (\because x \leq 1)$$

$$\therefore S = \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - (-x) \right\} dx$$

$$+ \int_1^3 \left\{ -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x - (x-2) \right\} dx$$

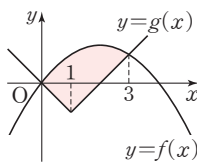
$$= \int_0^1 \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{3}x \right) dx$$

$$+ \int_1^3 \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 2 \right) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{7}{6}x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{6}x^2 + 2x \right]_1^3$$

$$= \frac{7}{2}$$

$$\therefore 4S = 14$$



0849 [답] 32

두 곡선 $y = x^2 - x - 2$,
 $y = -2x^2 + 5x + 7$ 의 교점의 x 좌표는
 $x^2 - x - 2 = -2x^2 + 5x + 7$ 에서
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x+1)(x-3) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 3$

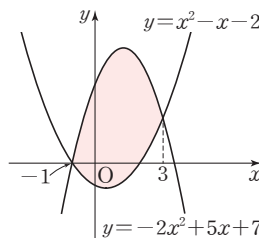
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_{-1}^3 \{ (-2x^2 + 5x + 7) - (x^2 - x - 2) \} dx$$

$$= \int_{-1}^3 (-3x^2 + 6x + 9) dx$$

$$= \left[-x^3 + 3x^2 + 9x \right]_{-1}^3$$

$$= 32$$



0850 [답] 37/12

두 곡선 $y = x^3 - 2x$, $y = x^2$ 의 교점의
 x 좌표는 $x^3 - 2x = x^2$ 에서
 $x^3 - x^2 - 2x = 0$
 $x(x+1)(x-2) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 0$ 또는 $x = 2$

따라서 구하는 도형의 넓이는

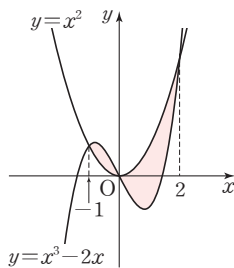
$$\int_{-1}^0 \{ (x^3 - 2x) - x^2 \} dx$$

$$+ \int_0^2 \{ x^2 - (x^3 - 2x) \} dx$$

$$= \int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x) dx + \int_0^2 (-x^3 + x^2 + 2x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2$$

$$= \frac{37}{12}$$



0851 [답] ③

$$y = -f(x-1) - 1 = -\{ (x-1)^2 - 2(x-1) \} - 1$$

$$= -x^2 + 4x - 4$$

두 곡선 $y = f(x)$, $y = -f(x-1) - 1$ 의
 교점의 x 좌표는 $x^2 - 2x = -x^2 + 4x - 4$
 에서

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0$$

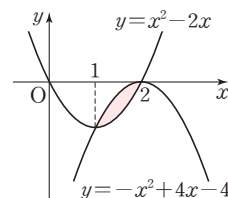
$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_1^2 \{ (-x^2 + 4x - 4) - (x^2 - 2x) \} dx = \int_1^2 (-2x^2 + 6x - 4) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x \right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3}$$



0852 [답] -8

$$\int_{-3}^9 \{ f(x) - g(x) \} dx$$

$$= \int_{-3}^1 \{ f(x) - g(x) \} dx + \int_1^5 \{ f(x) - g(x) \} dx$$

$$+ \int_5^9 \{ f(x) - g(x) \} dx$$

$$= -\int_{-3}^1 \{ g(x) - f(x) \} dx + \int_1^5 \{ f(x) - g(x) \} dx$$

$$- \int_5^9 \{ g(x) - f(x) \} dx$$

$$= -A + B - C$$

$$= -6 + 8 - 10$$

$$= -8$$

0853 [답] ④

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

점 (0, 1)에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = 2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - 1 = 2x \quad \therefore y = 2x + 1$

곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ 과 직선

$y = 2x + 1$ 의 교점의 x 좌표는

$$x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 2x + 1 \text{에서}$$

$$x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x-3) = 0$$

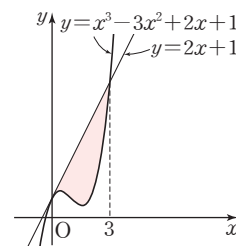
$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^3 \{ (2x+1) - (x^3 - 3x^2 + 2x + 1) \} dx = \int_0^3 (-x^3 + 3x^2) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 \right]_0^3$$

$$= \frac{27}{4}$$



0854 [답] 1/3

$f(x) = -x^2 + x + 2$ 라 하면

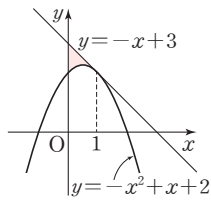
$$f'(x) = -2x + 1$$

점 (1, 2)에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -1$ 이므로 접선의 방정
 식은

$$y - 2 = -(x - 1) \quad \therefore y = -x + 3$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \{(-x+3) - (-x^2+x+2)\} dx \\ &= \int_0^1 (x^2-2x+1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$



0855 답 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

$f(x) = x^2 + 2$ 라 하면 $f'(x) = 2x$

점점의 좌표를 $(t, t^2 + 2)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$f'(t) = 2t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (t^2 + 2) = 2t(x - t) \quad \therefore y = 2tx - t^2 + 2$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = -t^2 + 2, \quad t^2 - 2 = 0$$

$$(t + \sqrt{2})(t - \sqrt{2}) = 0 \quad \therefore t = -\sqrt{2} \text{ 또는 } t = \sqrt{2}$$

따라서 접선의 방정식은

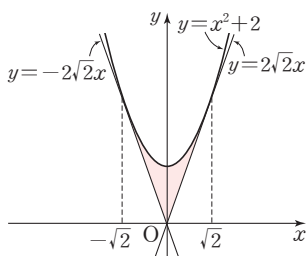
$$y = -2\sqrt{2}x \text{ 또는 } y = 2\sqrt{2}x$$

곡선과 두 접선으로 둘러싸인 도

형이 y 축에 대하여 대칭이므로 구

하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & 2 \int_0^{\sqrt{2}} \{(x^2 + 2) - 2\sqrt{2}x\} dx \\ &= 2 \int_0^{\sqrt{2}} (x^2 - 2\sqrt{2}x + 2) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - \sqrt{2}x^2 + 2x \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$



채점 기준

❶ 두 접선의 방정식 구하기

40 %

❷ 곡선과 두 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기

60 %

0856 답 ②

$f(x) = -x^2$ 이라 하면 $f'(x) = -2x$

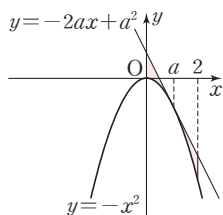
점 $(a, -a^2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(a) = -2a$ 이므로 접선 l 의

방정식은

$$y - (-a^2) = -2a(x - a) \quad \therefore y = -2ax + a^2$$

$0 \leq a \leq 2$ 이므로

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^2 \{(-2ax + a^2) - (-x^2)\} dx \\ &= \int_0^2 (x^2 - 2ax + a^2) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 + a^2x \right]_0^2 \\ &= 2a^2 - 4a + \frac{8}{3} \\ &= 2(a-1)^2 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$



따라서 $0 \leq a \leq 2$ 에서 $S(a)$ 의 최솟값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

0857 답 ③

구하는 도형의 넓이를 S 라 하면

$$S = \int_0^2 \{g(x) - f(x)\} dx \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

삼차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = g(x)$ 가 $x=2$ 인 점에서 접

하고 $x=0$ 인 점에서 만나므로 방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 은 삼차방정

식이고 $x=2$ 를 중근, $x=1$ 을 한 근으로 갖는다.

이때 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 -3 이므로

$$f(x) - g(x) = -3x(x-2)^2$$

$$\therefore g(x) - f(x) = 3x(x-2)^2 = 3x^3 - 12x^2 + 12x$$

따라서 ①에서

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (3x^3 - 12x^2 + 12x) dx \\ &= \left[\frac{3}{4}x^4 - 4x^3 + 6x^2 \right]_0^2 = 4 \end{aligned}$$

0858 답 $\frac{3}{2}$

$A=B$ 이므로

$$\int_0^2 (x^3 - ax^2) dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{3}x^3 \right]_0^2 = 0$$

$$4 - \frac{8}{3}a = 0 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

0859 답 ⑤

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^1 x(x-a)(x-1) dx = 0$$

$$\int_0^1 \{x^3 - (a+1)x^2 + ax\} dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^1 = 0$$

$$\frac{1}{6}a - \frac{1}{12} = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

0860 답 6

$A=B$ 이므로

$$\int_0^k (x^2 - 4x) dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 \right]_0^k = 0, \quad \frac{1}{3}k^3 - 2k^2 = 0$$

$$k^2(k-6) = 0 \quad \therefore k = 6 \quad (\because k > 4)$$

0861 답 ④

$A=B$ 이므로

$$\int_0^2 \{(-x^2 + k) - (x^3 + x^2)\} dx = 0$$

$$\int_0^2 (-x^3 - 2x^2 + k) dx = 0$$

$$\left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + kx \right]_0^2 = 0$$

$$2k - \frac{28}{3} = 0 \quad \therefore k = \frac{14}{3}$$

0862 **답 -6**

$A : B = 1 : 2$ 에서 $B = 2A$

곡선 $y = -x^2 + 6x + k$ 는 직선 $x = 3$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}B$ 이다.

즉, 빗금 친 부분의 넓이는 A 와 같다.

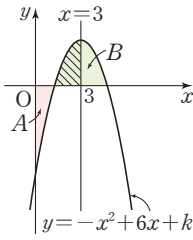
따라서 구간 $[0, 3]$ 에서 곡선

$y = -x^2 + 6x + k$ 와 x 축, y 축 및 직선 $x = 3$ 으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^3 (-x^2 + 6x + k) dx = 0$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + kx \right]_0^3 = 0$$

$$18 + 3k = 0 \quad \therefore k = -6$$



0863 **답 4**

곡선 $y = -x^2 + 2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $-x^2 + 2x = 0$ 에서

$$x(x-2) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

곡선 $y = -x^2 + 2x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

곡선 $y = -x^2 + 2x$ 와 직선 $y = ax$ 의 교점의 x 좌표는 $-x^2 + 2x = ax$ 에서

$$x^2 + (a-2)x = 0, \quad x(x+a-2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2-a$$

곡선 $y = -x^2 + 2x$ 와 직선 $y = ax$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \int_0^{2-a} \{(-x^2 + 2x) - ax\} dx$$

$$= \int_0^{2-a} \{-x^2 + (2-a)x\} dx$$

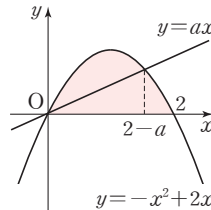
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{2-a}{2}x^2 \right]_0^{2-a}$$

$$= -\frac{(2-a)^3}{3} + \frac{(2-a)^3}{2}$$

$$= \frac{(2-a)^3}{6}$$

이때 $S_1 = 2S_2$ 이므로

$$\frac{4}{3} = 2 \times \frac{(2-a)^3}{6} \quad \therefore (2-a)^3 = 4$$



0864 **답 8**

곡선 $y = 2x^2$ ($x \geq 0$)과 직선 $y = 2$ 의 교점의 x 좌표는 $2x^2 = 2$ 에서 $x^2 = 1 \quad \therefore x = 1$ ($\because x \geq 0$)

곡선 $y = 2x^2$ ($x \geq 0$)과 y 축 및 직선 $y = 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^1 (2 - 2x^2) dx$$

$$= \left[2x - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

..... ①

곡선 $y = ax^2$ ($x \geq 0$)과 직선 $y = 2$ 의 교점의 x 좌표는 $ax^2 = 2$ 에서

$$x^2 = \frac{2}{a} \quad \therefore x = \sqrt{\frac{2}{a}} \quad (\because a > 0, x \geq 0)$$

곡선 $y = ax^2$ ($x \geq 0$)과 y 축 및 직선 $y = 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \int_0^{\sqrt{\frac{2}{a}}} (2 - ax^2) dx$$

$$= \left[2x - \frac{a}{3}x^3 \right]_0^{\sqrt{\frac{2}{a}}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{a}}$$

..... ②

이때 $S_1 = 2S_2$ 이므로

$$\frac{4}{3} = 2 \times \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{a}}, \quad \sqrt{a} = 2\sqrt{2} \quad \therefore a = 8$$

..... ③

채점 기준

① 곡선 $y = 2x^2$ ($x \geq 0$)과 y 축 및 직선 $y = 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	40 %
② 곡선 $y = ax^2$ ($x \geq 0$)과 y 축 및 직선 $y = 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	40 %
③ a 의 값 구하기	20 %

0865 **답 ⑤**

곡선 $y = x^2 - 4x + 2$ 와 직선 $y = x - 2$

의 교점의 x 좌표는

$$x^2 - 4x + 2 = x - 2 \text{에서}$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0, \quad (x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

따라서 곡선 $y = x^2 - 4x + 2$ 와 직선

$y = x - 2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_1^4 \{(x-2) - (x^2 - 4x + 2)\} dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx$$

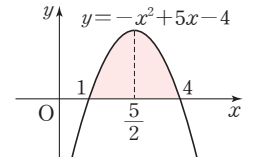
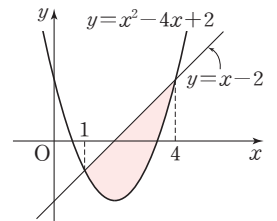
이 넓이는 곡선

$$y = -x^2 + 5x - 4 = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \text{와}$$

x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같으므로

대칭축 $x = \frac{5}{2}$ 에 의하여 이등분된다.

$$\therefore a = \frac{5}{2}$$



0866 **답 ②**

두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 는 직선

$y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선

$y = f(x)$, $y = g(x)$ 로 둘러싸인 도형의

넓이는 곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 로

둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y = f(x)$ 와 직선 $y = x$ 의 교점의

x 좌표는 $x^2 - 2x + 2 = x$ 에서

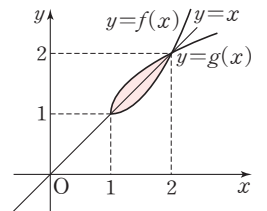
$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad (x-1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$2 \int_1^2 \{x - (x^2 - 2x + 2)\} dx = 2 \int_1^2 (-x^2 + 3x - 2) dx$$

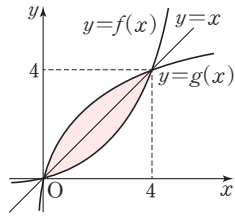
$$= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x \right]_1^2$$

$$= 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$



0867 **답 4**

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \int_0^4 \{x-f(x)\} dx &= \int_0^4 2x dx - 2 \int_0^4 f(x) dx \\ &= \left[x^2 \right]_0^4 - 2 \times 6 \\ &= 16 - 12 = 4 \end{aligned}$$

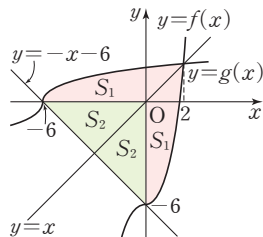
0868 **답 38**

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 와 직선 $y=-x-6$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 두 직선 $y=x$, $y=-x-6$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3-6=x$ 에서 $x^3-x-6=0$, $(x-2)(x^2+2x+3)=0$
 $\therefore x=2$ ($\because x$ 는 실수)

구하는 도형의 넓이를 S 라 하면 오른쪽 그림에서

$$\begin{aligned} S &= 2(S_1 + S_2) = 2S_1 + 2S_2 \\ 2S_1 &= 2 \int_0^2 \{x - (x^3 - 6)\} dx \\ &= 2 \int_0^2 (-x^3 + x + 6) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_0^2 \\ &= 20 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 2S_2 &= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 = 18 \\ \therefore S &= 38 \end{aligned}$$

0869 **답 ③**

$f(0)=2$, $f(1)=3$ 이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

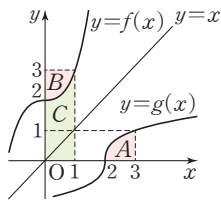
$$A=B$$

$$\therefore \int_0^1 f(x) dx + \int_2^3 g(x) dx = C + A$$

$$= C + B$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 = 3$$

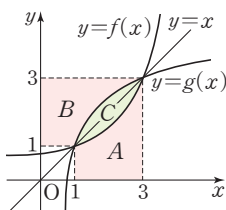
직사각형의 넓이



0870 **답 ③**

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같다고 하면

$$A=B$$



$$\begin{aligned} \therefore \int_1^3 g(x) dx &= A + C \\ &= 3 \times 3 - 1 \times 1 - B \\ &= 8 - B = 8 - A \\ &= 8 - \int_1^3 f(x) dx \\ &= 8 - \frac{7}{2} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

0871 **답 $\frac{65}{12}$**

$g(9)=a$ 라 하면 $f(a)=9$ 이므로

$$a(a+2)^2=9, a^3+4a^2+4a-9=0$$

$$(a-1)(a^2+5a+9)=0 \quad \therefore a=1 \quad (\because a \text{는 실수}) \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

$$A=B$$

$$\therefore \int_0^9 g(x) dx = A$$

$$= B$$

$$= 1 \times 9 - (\text{빛금 친 도형의 넓이})$$

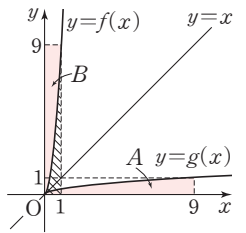
$$= 9 - \int_0^1 f(x) dx$$

$$= 9 - \int_0^1 x(x+2)^2 dx$$

$$= 9 - \int_0^1 (x^3 + 4x^2 + 4x) dx$$

$$= 9 - \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^1$$

$$= 9 - \frac{43}{12} = \frac{65}{12} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$



채점 기준

① $g(9)$ 의 값 구하기	30 %
② $\int_0^9 g(x) dx$ 와 넓이가 같은 도형 찾기	30 %
③ $\int_0^9 g(x) dx$ 의 값 구하기	40 %

0872 **답 48**

시각 $t=1$ 에서의 점 P의 위치가 6이므로

$$0 + \int_0^1 (3t^2 + 4t + k) dt = 6$$

$$\left[t^3 + 2t^2 + kt \right]_0^1 = 6$$

$$3 + k = 6 \quad \therefore k = 3$$

따라서 시각 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3 (3t^2 + 4t + 3) dt = \left[t^3 + 2t^2 + 3t \right]_1^3 = 48$$

0873 **답 ③**

$t \geq 3$ 에서 $2t-6 \geq 0$ 이므로 시각 $t=3$ 에서 $t=k$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_3^k |2t-6| dt = \int_3^k (2t-6) dt$$

$$= \left[t^2 - 6t \right]_3^k = k^2 - 6k + 9$$

따라서 $k^2 - 6k + 9 = 25$ 이므로
 $k^2 - 6k - 16 = 0, (k+2)(k-8) = 0$
 $\therefore k = 8$ ($\because k > 3$)

0874 답 17

$v'(t) = a(t)$ 이므로 (4)에서 $t \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} v(t) &= \int v'(t) dt = \int a(t) dt \\ &= \int (6t+4) dt = 3t^2 + 4t + C \end{aligned}$$

(7)에서 $v(2) = 16 - 16 = 0$ 이므로

$$12 + 8 + C = 0 \quad \therefore C = -20$$

$$\therefore v(t) = \begin{cases} 2t^3 - 8t & (0 \leq t \leq 2) \\ 3t^2 + 4t - 20 & (t \geq 2) \end{cases}$$

$0 \leq t \leq 2$ 일 때, $2t^3 - 8t = 0$ 에서

$$t(t+2)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 2 \quad (\because 0 \leq t \leq 2)$$

$t \geq 2$ 일 때, $3t^2 + 4t - 20 = 0$ 에서

$$(3t+10)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 2 \quad (\because t \geq 2)$$

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^3 |v(t)| dt &= \int_0^2 (-2t^3 + 8t) dt + \int_2^3 (3t^2 + 4t - 20) dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}t^4 + 4t^2 \right]_0^2 + \left[t^3 + 2t^2 - 20t \right]_2^3 \\ &= 17 \end{aligned}$$

0875 답 -9

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t) = 0$ 이므로

$$t^2 - 2t - 3 = 0, (t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 3 \quad (\because t > 0)$$

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^3 (t^2 - 2t - 3) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t \right]_0^3 = -9$$

0876 답 25 m

자동차가 정지할 때 $v(t) = 0$ 이므로

$$10 - 2t = 0 \quad \therefore t = 5$$

따라서 자동차가 정지할 때까지 달린 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^5 |10 - 2t| dt &= \int_0^5 (10 - 2t) dt \\ &= \left[10t - t^2 \right]_0^5 \\ &= 25(\text{m}) \end{aligned}$$

채점 기준

i 자동차가 정지하는 시각 구하기	30 %
ii 자동차가 정지할 때까지 달린 거리 구하기	70 %

0877 답 ③

점 P가 출발 후 다시 원점을 지나는 시각을 $t=a$ 라 하면

$$\int_0^a (t^3 - 3t^2) dt = 0$$

$$\left[\frac{1}{4}t^4 - t^3 \right]_0^a = 0, \frac{1}{4}a^4 - a^3 = 0$$

$$a^3(a-4) = 0 \quad \therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^4 |t^3 - 3t^2| dt &= \int_0^3 (-t^3 + 3t^2) dt + \int_3^4 (t^3 - 3t^2) dt \\ &= \left[-\frac{1}{4}t^4 + t^3 \right]_0^3 + \left[\frac{1}{4}t^4 - t^3 \right]_3^4 \\ &= \frac{27}{2} \end{aligned}$$

0878 답 ③

두 점 P, Q가 만나려면 위치가 같아야 하므로 두 점이 다시 만나는

시각을 $t=a$ 라 하면

$$\int_0^a (2t^2 - 4t + 1) dt = \int_0^a (-t^2 + 8t - 8) dt$$

$$\left[\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 + t \right]_0^a = \left[-\frac{1}{3}t^3 + 4t^2 - 8t \right]_0^a$$

$$\frac{2}{3}a^3 - 2a^2 + a = -\frac{1}{3}a^3 + 4a^2 - 8a$$

$$a^3 - 6a^2 + 9a = 0, a(a-3)^2 = 0$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 0)$$

따라서 두 점 P, Q가 출발 후 다시 만나는 시각은 $t=3$ 이다.

0879 답 16

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t) = 0$ 이다.

$0 \leq t \leq 3$ 일 때, $-t^2 + t + 2 = 0$ 에서

$$(t+1)(t-2) = 0 \quad \therefore t = 2 \quad (\because 0 \leq t \leq 3)$$

$t > 3$ 일 때, $k(t-3) - 4 = 0$ 에서

$$kt = 3k + 4 \quad \therefore t = 3 + \frac{4}{k} \quad (\because k > 0)$$

따라서 출발 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각은

$$t = 3 + \frac{4}{k}$$

시각 $t = 3 + \frac{4}{k}$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} &\int_0^{3+\frac{4}{k}} v(t) dt \\ &= \int_0^3 (-t^2 + t + 2) dt + \int_3^{3+\frac{4}{k}} (kt - 3k - 4) dt \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 2t \right]_0^3 + \left[\frac{1}{2}kt^2 - (3k+4)t \right]_3^{3+\frac{4}{k}} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{8}{k} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{3}{2} - \frac{8}{k} = 1$ 이므로

$$k = 16$$

0880 답 3

두 점 P, Q가 만나려면 위치가 같아야 하므로 두 점이 만나는 시각

을 $t=a$ 라 하면

$$\int_0^a (4t+7) dt = -3 + \int_0^a (3t^2 - 8t + 16) dt$$

$$\left[2t^2 + 7t \right]_0^a = -3 + \left[t^3 - 4t^2 + 16t \right]_0^a$$

$$2a^2 + 7a = -3 + a^3 - 4a^2 + 16a$$

$$\therefore a^3 - 6a^2 + 9a - 3 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$f(a) = a^3 - 6a^2 + 9a - 3 \text{이라 하면}$$

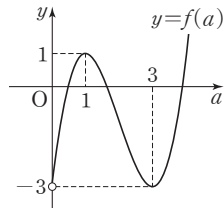
$$f'(a) = 3a^2 - 12a + 9 = 3(a-1)(a-3)$$

$$f'(a) = 0 \text{인 } a \text{의 값은 } a=1 \text{ 또는 } a=3$$

$a > 0$ 에서 함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	1	...	3	...
$f'(a)$		+	0	-	0	+
$f(a)$		↗	1 극대	↘	-3 극소	↗

따라서 $a > 0$ 에서 함수 $y=f(a)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 함수 $y=f(a)$ 의 그래프는 a 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 삼차방정식 $\textcircled{7}$ 의 실근은 3개이다.
즉, 두 점 P, Q가 만나는 횟수는 3이다.



0881 답 65 m

공이 최고 높이에 도달했을 때 $v(t)=0$ 이므로

$$30 - 10t = 0 \quad \therefore t = 3$$

따라서 공을 쏘아 올린 지 3초 후에 최고 높이에 도달하므로 구하는 높이는

$$\begin{aligned} 20 + \int_0^3 (30 - 10t) dt &= 20 + \left[30t - 5t^2 \right]_0^3 \\ &= 20 + 45 \\ &= 65(\text{m}) \end{aligned}$$

0882 답 ④

물체가 지면으로부터 60m 높이에 도달하는 시각을 $t=a$ 라 하면

$$25 + \int_0^a (40 - 10t) dt = 60$$

$$25 + \left[40t - 5t^2 \right]_0^a = 60$$

$$-5a^2 + 40a + 25 = 60$$

$$a^2 - 8a + 7 = 0, (a-1)(a-7) = 0$$

$$\therefore a=1 \text{ 또는 } a=7$$

따라서 물체가 두 번째로 지면으로부터 60m 높이에 도달하는 시각은 $t=7$ 이다.

따라서 시각 $t=0$ 에서 $t=7$ 까지 물체가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^7 |40 - 10t| dt &= \int_0^4 (40 - 10t) dt + \int_4^7 (-40 + 10t) dt \\ &= \left[40t - 5t^2 \right]_0^4 + \left[-40t + 5t^2 \right]_4^7 \\ &= 125(\text{m}) \end{aligned}$$

0883 답 9초

공이 처음 쏘아 올린 위치로 다시 돌아오는 것은 8초 후이므로

$$\int_0^8 (a - 10t) dt = 0$$

$$\left[at - 5t^2 \right]_0^8 = 0$$

$$8a - 320 = 0 \quad \therefore a = 40$$

공이 지면에 떨어지는 시각을 $t=k$ 라 하면 공이 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로

$$45 + \int_0^k (40 - 10t) dt = 0$$

$$45 + \left[40t - 5t^2 \right]_0^k = 0$$

$$45 + 40k - 5k^2 = 0$$

$$k^2 - 8k - 9 = 0, (k+1)(k-9) = 0$$

$$\therefore k=9 (\because k>0)$$

따라서 공을 쏘아 올린 후 지면에 떨어질 때까지 걸리는 시간은 9초이다. ①

채점 기준

① a 의 값 구하기

30 %

② 공을 쏘아 올린 후 지면에 떨어질 때까지 걸리는 시간 구하기

70 %

0884 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 시각 $t=5$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^5 v(t) dt &= \int_0^3 v(t) dt + \int_3^5 v(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times (1+3) \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

따라서 $t=5$ 일 때 점 P는 원점을 지나지 않는다.

ㄴ. 시각 $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned} \int_0^6 v(t) dt &= \int_0^3 v(t) dt + \int_3^5 v(t) dt + \int_5^6 v(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times (1+3) \times 2 - \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 3 \end{aligned}$$

ㄷ. $v(t)=0$ 이고 그 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 점 P는 시각 $t=3, t=5$ 에서 운동 방향을 바꾼다.

따라서 점 P는 출발 후 $t=7$ 까지 운동 방향을 두 번 바꾼다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0885 답 ①

점 P는 $t=4$ 일 때 원점으로부터 가장 멀리 떨어져 있고 그때의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^4 v(t) dt = -\frac{1}{2} \times 4 \times 4 = -8$$

0886 답 8초

원점을 지날 때의 시각을 $t=a$ 라 하면

$$\int_0^a v(t) dt = 0$$

$$\text{이때 } \int_0^4 v(t) dt = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6,$$

$$\int_4^6 v(t) dt = -\frac{1}{2} \times 2 \times 2 = -2,$$

$$\int_6^8 v(t) dt = -2 \times 2 = -4 \text{이므로}$$

$$\int_0^4 v(t) dt + \int_4^6 v(t) dt + \int_6^8 v(t) dt = 0$$

$$\therefore \int_0^8 v(t) dt = 0$$

따라서 점 P가 출발 후 처음으로 다시 원점을 지날 때까지 걸리는 시간은 8초이다.

0887 답 1

시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |v(t)| dt = \int_0^2 |v(t)| dt + \int_2^3 |v(t)| dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times (-a) = 2 - \frac{a}{2}$$

즉, $2 - \frac{a}{2} = \frac{5}{2}$ 이므로 $a = -1$

따라서 시각 $t=6$ 에서의 점 P의 위치는

$$\int_0^6 v(t) dt = \int_0^2 v(t) dt + \int_2^5 v(t) dt + \int_5^6 v(t) dt$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times (3+1) \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1$$

0888 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 시각 t 에서의 점 P의 속력은 $|v(t)|$ 이다.

$t=3$ 일 때 $|v(t)|$ 의 값이 가장 크므로 $t=3$ 일 때 점 P의 속력이 가장 크다.

ㄴ. $\int_2^3 v(t) dt = -\int_0^2 v(t) dt$ 이므로 시각 $t=3$ 에서의 점 P의 위치는

$$\int_0^3 v(t) dt = \int_0^2 v(t) dt + \int_2^3 v(t) dt$$

$$= \int_0^2 v(t) dt - \int_0^2 v(t) dt = 0$$

따라서 $t=3$ 일 때 점 P는 원점에 있다.

ㄷ. 시각 t 에서의 점 P의 가속도는 $v'(t)$ 이다.

$t=1$ 일 때 $v'(1)=0$ 이므로 가속도는 0이다.

ㄹ. 시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P는 양의 방향으로 이동하다가

$t=2$ 에서 운동 방향을 바꿔서 $t=2$ 에서 $t=3$ 까지 음의 방향으로 이동하여 $t=3$ 에서 원점으로 돌아온다.

따라서 $t=2$ 일 때 점 P는 원점에서 가장 멀리 떨어져 있다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

AB 유형 점검

145~147쪽

0889 답 2

곡선 $y=2x^3$ 과 x 축 및 두 직선 $x=-2$,

$x=a$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^a |2x^3| dx$$

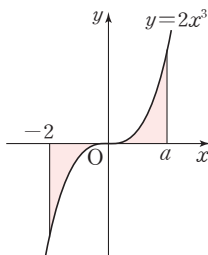
$$= \int_{-2}^0 (-2x^3) dx + \int_0^a 2x^3 dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^4 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{2}x^4 \right]_0^a$$

$$= 8 + \frac{1}{2}a^4$$

따라서 $8 + \frac{1}{2}a^4 = 16$ 이므로

$$a^4 = 16 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$



0890 답 ②

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $kx(x-2)(x-3)=0$ 에서

$x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$

$\therefore P(2, 0), Q(3, 0)$

$$(A \text{의 넓이}) - (B \text{의 넓이}) = \int_0^2 f(x) dx - \int_2^3 \{-f(x)\} dx$$

$$= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx$$

$$= \int_0^3 f(x) dx$$

$$= \int_0^3 kx(x-2)(x-3) dx$$

$$= k \int_0^3 (x^3 - 5x^2 + 6x) dx$$

$$= k \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^3$$

$$= \frac{9}{4}k$$

따라서 $\frac{9}{4}k = 3$ 이므로 $k = \frac{4}{3}$

0891 답 8

$y = x|x-2| = \begin{cases} x^2-2x & (x \geq 2) \\ -x^2+2x & (x \leq 2) \end{cases}$ 이므로 곡선 $y = x|x-2|$ 와 직선 $y=2x$ 의 교점의 x 좌표는

(i) $x \geq 2$ 일 때

$$x^2 - 2x = 2x \text{에서}$$

$$x^2 - 4x = 0, x(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 4 \quad (\because x \geq 2)$$

(ii) $x \leq 2$ 일 때

$$-x^2 + 2x = 2x \text{에서}$$

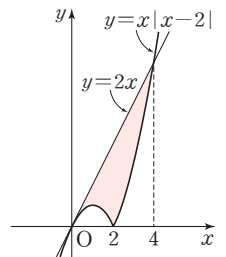
$$x^2 = 0 \quad \therefore x = 0$$

(i), (ii)에서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^2 \{2x - (-x^2 + 2x)\} dx + \int_2^4 \{2x - (x^2 - 2x)\} dx$$

$$= \int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 (-x^2 + 4x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^2 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 \right]_2^4 = 8$$



0892 답 $\frac{1}{2}$

두 곡선 $y=x^3-2x^2$, $y=x^2-2x$ 의 교점의

x 좌표는 $x^3-2x^2=x^2-2x$ 에서

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x-1)(x-2) = 0$$

$\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$

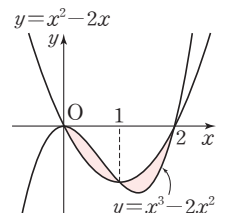
따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^1 \{(x^3 - 2x^2) - (x^2 - 2x)\} dx$$

$$+ \int_1^2 \{(x^2 - 2x) - (x^3 - 2x^2)\} dx$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 \right]_1^2 = \frac{1}{2}$$



0893 답 $\frac{8}{3}$

곡선 $y=x^2$ 을 원점에 대하여 대칭이동하면

$$-y=(-x)^2 \quad \therefore y=-x^2$$

이 곡선을 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 4만큼 평행이동하면

$$y-4=-(x-2)^2 \quad \therefore y=-x^2+4x$$

$$\therefore f(x)=-x^2+4x$$

두 곡선 $y=x^2$, $y=-x^2+4x$ 의 교점의

x 좌표는 $x^2=-x^2+4x$ 에서

$$x^2-2x=0, x(x-2)=0$$

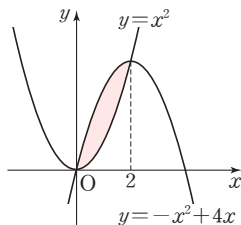
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^2+4x)-x^2\} dx$$

$$= \int_0^2 (-2x^2+4x) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2 \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$



0894 답 18

$a>0$ 이므로

$$S(a) = \int_0^3 \{a^2x^2 - (-x^2)\} dx$$

$$= \int_0^3 (a^2+1)x^2 dx$$

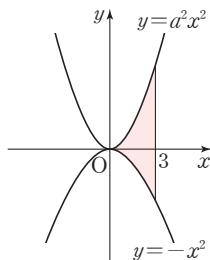
$$= \left[\frac{a^2+1}{3}x^3 \right]_0^3 = 9(a^2+1)$$

$$\therefore \frac{S(a)}{a} = \frac{9(a^2+1)}{a} = 9\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

이때 $a>0$, $\frac{1}{a}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$9\left(a + \frac{1}{a}\right) \geq 9 \times 2\sqrt{a \times \frac{1}{a}} = 18 \quad (\text{단, 등호는 } a=1 \text{ 일 때 성립})$$

따라서 구하는 최솟값은 18이다.



공통수학2 다시보기

산술평균과 기하평균의 관계

→ $a>0, b>0$ 일 때, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)

0895 답 ②

$$f(x)=x^2-3x+4 \text{ 라 하면 } f'(x)=2x-3$$

접점의 좌표를 (t, t^2-3t+4) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=2t-3 \text{ 이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^2-3t+4)=(2t-3)(x-t)$$

$$\therefore y=(2t-3)x-t^2+4$$

이 직선이 점 $(2, 1)$ 을 지나므로

$$1=2(2t-3)-t^2+4$$

$$t^2-4t+3=0, (t-1)(t-3)=0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=3$$

즉, 접선의 방정식은

$$y=-x+3 \text{ 또는 } y=3x-5$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_1^2 \{(x^2-3x+4)-(-x+3)\} dx$$

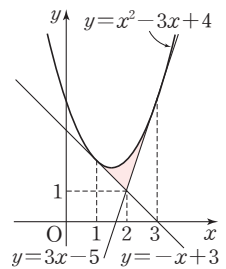
$$+ \int_2^3 \{(x^2-3x+4)-(3x-5)\} dx$$

$$= \int_1^2 (x^2-2x+1) dx$$

$$+ \int_2^3 (x^2-6x+9) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3-x^2+x \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x \right]_2^3$$

$$= \frac{2}{3}$$



0896 답 3

$A=B$ 이므로

$$\int_0^a (-2x^2+4x) dx=0$$

$$\left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2 \right]_0^a = 0, -\frac{2}{3}a^3+2a^2=0$$

$$a^2(a-3)=0 \quad \therefore a=3 \quad (\because a>2)$$

0897 답 ④

곡선 $y=f(x)$ 는 y 축에 대하여 대칭이므로

오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}A \text{ 이다.}$$

이때 $A=2B$ 이므로 빗금 친 부분의 넓이는

B 와 같다.

따라서 구간 $[0, k]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 와

x 축, y 축 및 직선 $x=k$ 로 둘러싸인 두 도

형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^k (-x^2+2x+6) dx=0$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+6x \right]_0^k = 0$$

$$-\frac{1}{3}k^3+k^2+6k=0, k(k+3)(k-6)=0$$

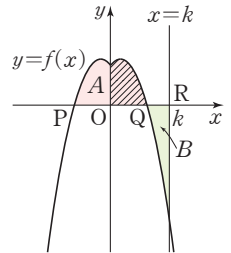
$$\therefore k=6 \quad (\because k>4)$$

참고 $x \geq 0$ 일 때, 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 교점이 Q이면 점 Q의 x 좌표는

$$-x^2+2x+6=0 \text{ 에서 } x^2-2x-6=0$$

$$\therefore x=1+\sqrt{7} < k \quad (\because x \geq 0, k>4)$$

따라서 점 Q의 x 좌표는 점 R의 x 좌표보다 작다.



0898 답 32

곡선 $y=x^2-4x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

$$x^2-4x=0 \text{ 에서}$$

$$x(x-4)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=4$$

곡선 $y=x^2-4x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도

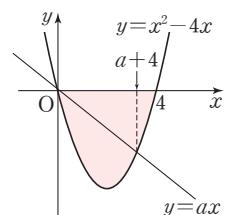
형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^4 (-x^2+4x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2 \right]_0^4 = \frac{32}{3}$$

곡선 $y=x^2-4x$ 와 직선 $y=ax$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2-4x=ax$ 에서

$$x\{x-(a+4)\}=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=a+4$$



곡선 $y=x^2-4x$ 와 직선 $y=ax$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{a+4} \{ax - (x^2 - 4x)\} dx \\ &= \int_0^{a+4} \{-x^2 + (a+4)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a+4}{2}x^2\right]_0^{a+4} \\ &= \frac{(a+4)^3}{6} \end{aligned}$$

이때 $S_1=2S_2$ 이므로

$$\frac{32}{3} = 2 \times \frac{(a+4)^3}{6} \quad \therefore (a+4)^3 = 32$$

0899 답 ①

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

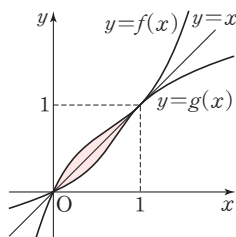
곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3-2x^2+2x=x$ 에서

$$x^3-2x^2+x=0, \quad x(x-1)^2=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \int_0^1 \{(x^3-2x^2+2x)-x\} dx &= 2 \int_0^1 (x^3-2x^2+x) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

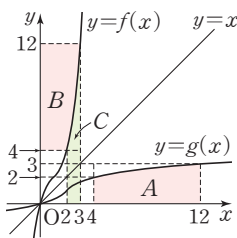


0900 답 28

$f(2)=4$, $f(3)=12$ 이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

$$A=B$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_2^3 f(x) dx + \int_4^{12} g(x) dx \\ &= C+A \\ &= C+B \\ &= 3 \times 12 - 2 \times 4 = 28 \end{aligned}$$



참고 $f'(x)=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

0901 답 12

두 점 P, Q의 속도가 같아지는 시각은 $v_1(t)=v_2(t)$ 에서

$$3t^2+t=2t^2+3t$$

$$t^2-2t=0, \quad t(t-2)=0$$

$$\therefore t=2 \quad (\because t>0)$$

시각 $t=2$ 에서의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^2 (3t^2+t) dt = \left[t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^2 = 10$$

시각 $t=2$ 에서의 점 Q의 위치는

$$0 + \int_0^2 (2t^2+3t) dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{3}{2}t^2\right]_0^2 = \frac{34}{3}$$

$$\text{따라서 } a = \frac{34}{3} - 10 = \frac{4}{3} \text{ 이므로}$$

$$9a=12$$

0902 답 2

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$ 이므로

$$3t^2-6at=0, \quad t(t-2a)=0$$

$$\therefore t=2a \quad (\because t>0)$$

$0 \leq t \leq 2a$ 에서 $3t^2-6at \leq 0$ 이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=2a$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^{2a} |3t^2-6at| dt &= \int_0^{2a} (-3t^2+6at) dt \\ &= \left[-t^3+3at^2\right]_0^{2a} = 4a^3 \end{aligned}$$

따라서 $4a^3=32$ 이므로

$$a^3=8 \quad \therefore a=2 \quad (\because a \text{는 실수})$$

0903 답 10 m

$$\begin{aligned} \int_0^8 \frac{1}{4}t dt + \int_8^{10} (10-t) dt &= \left[\frac{1}{8}t^2\right]_0^8 + \left[10t - \frac{1}{2}t^2\right]_8^{10} \\ &= 10(\text{m}) \end{aligned}$$

0904 답 ①

ㄱ. 시각 $t=5$ 에서의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^5 v(t) dt = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times (3+1) \times 1 = 0$$

따라서 $t=5$ 일 때 점 P는 원점을 다시 지난다.

ㄴ. 시각 t 에서의 점 P의 속력은 $|v(t)|$ 이다.

$t=1$ 일 때 $|v(t)|$ 의 값이 최대이므로 $t=1$ 일 때 점 P의 속력이 최대이다.

ㄷ. $v(t)=0$ 이고 그 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 점 P는 시각 $t=2$, $t=5$ 에서 운동 방향을 바꾼다.

따라서 점 P는 출발 후 $t=7$ 까지 운동 방향을 2번 바꾼다.

ㄹ. 시각 $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^6 |v(t)| dt &= \int_0^2 |v(t)| dt + \int_2^5 |v(t)| dt + \int_5^6 |v(t)| dt \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times (3+1) \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0905 답 $\frac{11}{12}$

$f(x)=x^3-x$, $g(x)=x^2+ax+b$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2-1, \quad g'(x)=2x+a$$

(i) $x=1$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(1)=g(1)$ 에서

$$0=1+a+b \quad \therefore a+b=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $x=1$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(1)=g'(1) \text{에서}$$

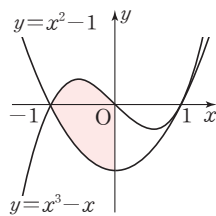
$$2=2+a \quad \therefore a=0$$

$a=0$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b=-1$

$$\therefore g(x)=x^2-1$$

..... ①

두 곡선 $y=x^3-x$, $y=x^2-1$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3-x=x^2-1$ 에서
 $x^3-x^2-x+1=0$
 $(x+1)(x-1)^2=0$
 $\therefore x=-1$ 또는 $x=1$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \{(x^3-x)-(x^2-1)\} dx &= \int_{-1}^0 (x^3-x^2-x+1) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{11}{12} \end{aligned} \quad \dots\dots \text{ii}$$

채점 기준

i a, b의 값 구하기	40 %
ii 두 곡선의 교점의 x좌표 구하기	20 %
iii $x \leq 0$ 인 부분에서 두 곡선과 y축으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	40 %

0906 답 -1

두 곡선 $y=x^2+3x+1$, $y=-2x^2-3x+10$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2+3x+1=-2x^2-3x+10$ 에서
 $x^2+2x-3=0$
 $(x+3)(x-1)=0$
 $\therefore x=-3$ 또는 $x=1$

두 곡선 $y=x^2+3x+1$, $y=-2x^2-3x+10$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-3}^1 \{(-2x^2-3x+10)-(x^2+3x+1)\} dx \\ &= \int_{-3}^1 (-3x^2-6x+9) dx \\ &= \left[-x^3-3x^2+9x \right]_{-3}^1 \\ &= 32 \end{aligned} \quad \dots\dots \text{ii}$$

두 곡선 $y=x^2+3x+1$, $y=-2x^2-3x+10$ 과 두 직선 $x=-3$, $x=k$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-3}^k \{(-2x^2-3x+10)-(x^2+3x+1)\} dx \\ &= \int_{-3}^k (-3x^2-6x+9) dx \\ &= \left[-x^3-3x^2+9x \right]_{-3}^k \\ &= -k^3-3k^2+9k+27 \end{aligned} \quad \dots\dots \text{iii}$$

이때 $S_1=2S_2$ 이므로

$$\begin{aligned} 32 &= 2(-k^3-3k^2+9k+27) \\ k^3+3k^2-9k-11 &= 0 \\ (k+1)(k^2+2k-11) &= 0 \\ \therefore k &= -1 \quad (\because -3 < k < 1) \end{aligned} \quad \dots\dots \text{iv}$$

채점 기준

i 두 곡선의 교점의 x좌표 구하기	20 %
ii 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	30 %
iii 두 곡선과 두 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	30 %
iv k의 값 구하기	20 %

0907 답 24

시각 t 에서의 점 P의 좌표는

$$\begin{aligned} \int_0^t (6t^2+4t-15) dt &= \left[2t^3+2t^2-15t \right]_0^t \\ &= 2t^3+2t^2-15t \end{aligned}$$

시각 t 에서의 점 Q의 좌표는

$$\begin{aligned} \int_0^t (-6t^2+8t-9) dt &= \left[-2t^3+4t^2-9t \right]_0^t \\ &= -2t^3+4t^2-9t \end{aligned}$$

선분 PQ의 중점 R의 시각 t 에서의 위치를 $x_R(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned} x_R(t) &= \frac{(2t^3+2t^2-15t) + (-2t^3+4t^2-9t)}{2} \\ &= 3t^2-12t \end{aligned} \quad \dots\dots \text{i}$$

점 R가 원점을 지날 때 $x_R(t)=0$ 이므로

$$\begin{aligned} 3t^2-12t &= 0, \quad t(t-4)=0 \\ \therefore t &= 4 \quad (\because t > 0) \end{aligned} \quad \dots\dots \text{ii}$$

시각 t 에서의 점 R의 속도는 $x_R'(t)=6t-12$ 이므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^4 |6t-12| dt &= \int_0^2 (-6t+12) dt + \int_2^4 (6t-12) dt \\ &= \left[-3t^2+12t \right]_0^2 + \left[3t^2-12t \right]_2^4 \\ &= 24 \end{aligned} \quad \dots\dots \text{iii}$$

채점 기준

i 시각 t 에서의 점 R의 위치 구하기	50 %
ii 점 R가 원점을 지날 때의 시각 구하기	20 %
iii 점 R가 출발 후 원점을 지날 때까지 움직인 거리 구하기	30 %

C 실력 향상

148쪽

0908 답 ③

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표가 0, 1, 2이므로 삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$ 의 세 근은 0, 1, 2이다.

이때 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x)-g(x)$ 의 최고차항의 계수도 양수이다.

$f(x)-g(x)=ax(x-1)(x-2)=a(x^3-3x^2+2x)$ ($a>0$)라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \{f(x)-g(x)\} dx + \int_1^2 \{g(x)-f(x)\} dx \\ &= \int_0^1 a(x^3-3x^2+2x) dx + \int_1^2 a(-x^3+3x^2-2x) dx \\ &= a \left[\frac{1}{4}x^4-x^3+x^2 \right]_0^1 + a \left[-\frac{1}{4}x^4+x^3-x^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{a}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{2}=2$ 이므로 $a=4$

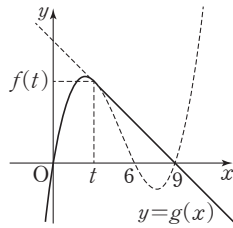
즉, $f(x)-g(x)=4(x^3-3x^2+2x)$ 이므로

$$f(-1)-g(-1)=4(-1-3-2)=-24$$

0909 답 ③

함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(t, f(t))$ ($0 < t < 6$)에 대하여
 $x < t$ 일 때, $g(x) = f(x)$
 $x \geq t$ 일 때, $g(x)$ 는 점 $(t, f(t))$ 를 지나고 기울기가 -1 인 직선의 방정식이다.

이때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 영역의 넓이가 최대가 되려면 오른쪽 그림과 같이 $x=t$ ($0 < t < 6$)에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-(x-t)+f(t)$ 가 접해야 한다.



$$f(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + 6x \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{10}{3}x + 6$$

$x=t$ ($0 < t < 6$)에서의 접선의 기울기가 -1 이므로 $f'(t) = -1$ 에서
 $\frac{1}{3}t^2 - \frac{10}{3}t + 6 = -1$

$$t^2 - 10t + 21 = 0, (t-3)(t-7) = 0$$

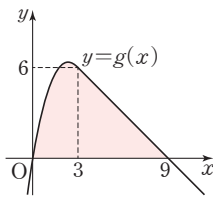
$$\therefore t = 3 \quad (\because 0 < t < 6)$$

따라서 접점의 좌표는 $(3, 6)$ 이고 접선의 방정식은

$$y = -(x-3) + 6 \quad \therefore y = -x + 9$$

따라서 구하는 넓이의 최댓값은

$$\begin{aligned} & \int_0^3 \left(\frac{1}{9}x^3 - \frac{5}{3}x^2 + 6x \right) dx + \frac{1}{2} \times 6 \times 6 \\ &= \left[\frac{1}{36}x^4 - \frac{5}{9}x^3 + 3x^2 \right]_0^3 + 18 \\ &= \frac{57}{4} + 18 \\ &= \frac{129}{4} \end{aligned}$$



0910 답 8/3

$$\int_{2-t}^2 f(x) dx + \int_{2+t}^2 f(x) dx = 0 \text{에서}$$

$$\int_{2-t}^2 f(x) dx = -\int_{2+t}^2 f(x) dx$$

$$\therefore \int_{2-t}^2 f(x) dx = \int_2^{2+t} f(x) dx$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이므로

$$f(x) = (x-2)^2 + k = x^2 - 4x + 4 + k \quad (k \text{는 상수}) \text{라 하자.}$$

오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는

$\frac{1}{2}S_2$ 이고, $S_2 = 2S_1$ 이므로 빗금 친 부분의 넓이는 S_1 과 같다.

따라서 구간 $[0, 2]$ 에서 곡선

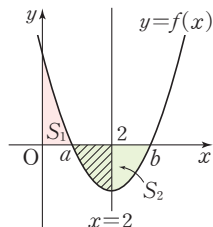
$y = x^2 - 4x + 4 + k$ 와 x 축, y 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 (x^2 - 4x + 4 + k) dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + (4+k)x \right]_0^2 = 0$$

$$2k + \frac{8}{3} = 0 \quad \therefore k = -\frac{4}{3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^2 - 4x + \frac{8}{3} \text{ 이므로 } f(0) = \frac{8}{3}$$



0911 답 ③

$v(t)=0$ 인 t 의 값은

$$t=0 \text{ 또는 } t=1 \text{ 또는 } t=a \text{ 또는 } t=2a$$

점 P가 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸려면 $t > 0$ 에서 $v(t)=0$ 이고 그 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀌는 t 의 값이 1개이어야 하므로

$$a=0 \text{ 또는 } a=\frac{1}{2} \text{ 또는 } a=1$$

시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

(i) $a=0$ 일 때

$$v(t) = -t^3(t-1) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \{-t^3(t-1)\} dt &= \int_0^2 (-t^4 + t^3) dt \\ &= \left[-\frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{4}t^4 \right]_0^2 \\ &= -\frac{12}{5} \end{aligned}$$

(ii) $a=\frac{1}{2}$ 일 때

$$v(t) = -t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left\{ -t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2 \right\} dt &= \int_0^2 \left(-t^4 + \frac{5}{2}t^3 - 2t^2 + \frac{1}{2}t \right) dt \\ &= \left[-\frac{1}{5}t^5 + \frac{5}{8}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{4}t^2 \right]_0^2 \\ &= -\frac{11}{15} \end{aligned}$$

(iii) $a=1$ 일 때

$$v(t) = -t(t-1)^2(t-2) \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \{-t(t-1)^2(t-2)\} dt &= \int_0^2 (-t^4 + 4t^3 - 5t^2 + 2t) dt \\ &= \left[-\frac{1}{5}t^5 + t^4 - \frac{5}{3}t^3 + t^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은 $\frac{4}{15}$ 이다.

01 / 함수의 극한

2~7쪽

중단원 기출문제 ①

1 답 ⑤

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0 + 1 + 1 = 2$$

2 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$ 라 하면 $x \neq -1$ 일 때,

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 2)}{x + 1} = x - 2$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 x 의 값이 -1 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 -3 에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1} = -3$$

ㄴ. $f(x) = \frac{1}{|x - 4|}$ 이라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고 x 의 값이 4 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{|x - 4|} = \infty$$

ㄷ. $f(x) = x + |x|$ 라 하면

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

ㄹ. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ 이라 하면

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & (x > 1) \\ -x - 1 & (x < 1) \end{cases}$$

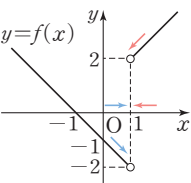
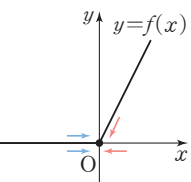
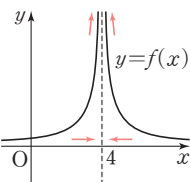
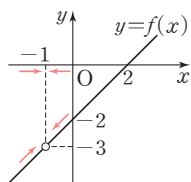
따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.



3 답 3

$$a > 0 \text{일 때, } \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x - a) = 2 - a < 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(f(x)) = (2 - a)^2 - 1 = a^2 - 4a + 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2 - 1) = 3 > 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(f(x)) = 3 - a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(f(x)) \text{이어야 하므로}$$

$$a^2 - 4a + 3 = 3 - a$$

$$a^2 - 3a = 0, a(a - 3) = 0$$

$$\therefore a = 3 (\because a > 0)$$

4 답 -1

$$f(x) = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 1+ \text{일 때 } t \rightarrow 1- \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = -2$$

$$x \rightarrow 0+ \text{일 때 } t \rightarrow -1- \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1-} f(t) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) + \lim_{x \rightarrow 0+} f(f(x)) = -1$$

5 답 $-\frac{1}{4}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) + \{g(x)\}^2}{2f(x) + g(x)} = \frac{-3 + 2^2}{2 \times (-3) + 2} = -\frac{1}{4}$$

6 답 ②

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4f(x)}{(x + 1)(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4}{x + 1}$$

$$= -3 \times \frac{4}{2} = -6$$

7 답 2

$$x - 1 = t \text{로 놓으면 } x \rightarrow 1 \text{일 때 } t \rightarrow 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 4x - 5}{f(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 5)(x - 1)}{f(x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{f(x - 1)} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x + 5)$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{f(t)} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x + 5)$$

$$= \frac{1}{3} \times 6 = 2$$

8 답 $\frac{5}{2}$

$$2 \leq x < 3 \text{일 때 } [x] = 2 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2+} [x] = 2$$

$$1 \leq x < 2 \text{일 때 } [x] = 1 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 2-} [x] = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} ([x]^2 - x) + \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{[x]}{x} = (4 - 2) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

9 답 ⑤

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{x+8}-3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(\sqrt{x+8}+3)}{\sqrt{x^2+3}+2} \\ &= \frac{2(3+3)}{2+2} = 3\end{aligned}$$

10 답 4

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{f(x)\}^2}{f(x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(x + \frac{4}{x}\right)^2}{x^2 + \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 8 + \frac{16}{x^2}}{x^2 + \frac{4}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 8x^2 + 16}{x^4 + 4} = \frac{16}{4} = 4\end{aligned}$$

11 답 ②

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+4x}+x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{t^2-4t}-t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{t^2-4t}-t)(\sqrt{t^2-4t}+t)}{\sqrt{t^2-4t}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-4t}{\sqrt{t^2-4t}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-4}{\sqrt{1-\frac{4}{t}}+1} \\ &= \frac{-4}{1+1} = -2\end{aligned}$$

12 답 -15

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-2x+1}{x^2+5x-7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{5}{x}-\frac{7}{x^2}} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{25x^2-2x}-5x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{25x^2-2x}+5x}{(\sqrt{25x^2-2x}-5x)(\sqrt{25x^2-2x}+5x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{25x^2-2x}+5x}{-2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{25-\frac{2}{x}}+5}{-2} \\ &= \frac{5+5}{-2} = -5 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \\ &= 3 \times (-5) = -15\end{aligned}$$

13 답 2

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2-3}-1) \left(2 + \frac{1}{x-2}\right) &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{(\sqrt{x^2-3}-1)(\sqrt{x^2-3}+1)}{\sqrt{x^2-3}+1} \times \frac{2x-3}{x-2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2-3}+1} \times \frac{2x-3}{x-2} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{(x+2)(x-2)}{\sqrt{x^2-3}+1} \times \frac{2x-3}{x-2} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(2x-3)}{\sqrt{x^2-3}+1} \\ &= \frac{4 \times 1}{1+1} = 2\end{aligned}$$

14 답 ②

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2+ax+b) = 0$ 이므로

$$9+3a+b=0 \quad \therefore b = -3a-9 \quad \dots\dots ①$$

①을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+ax-3(a+3)}{6-2x} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+a+3)}{-2(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \left(-\frac{x+a+3}{2} \right) \\ &= -\frac{a+6}{2}\end{aligned}$$

따라서 $-\frac{a+6}{2} = -2$ 이므로

$$a+6=4 \quad \therefore a=-2$$

이를 ①에 대입하면 $b=-3$

$$\therefore a+b=-5$$

15 답 ③

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로

(분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x^2+a}-b) = 0$ 이므로

$$\sqrt{4+a}-b=0 \quad \therefore b=\sqrt{4+a} \quad \dots\dots ①$$

①을 주어진 등식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+a}-\sqrt{4+a}} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}{(\sqrt{x^2+a}-\sqrt{4+a})(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}{x^2-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a})}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2+a}+\sqrt{4+a}}{x+2} = \frac{\sqrt{4+a}}{2}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{\sqrt{4+a}}{2} = 2$ 이므로

$$\sqrt{4+a}=4, 4+a=16 \quad \therefore a=12$$

이를 ①에 대입하면 $b=4$

$$\therefore a+b=16$$

16 **답** -11

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = 7$ 에서 $f(x) - x^3$ 은 최고차항의 계수가 7인 이차 함수이므로 $f(x) - x^3 = 7x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = x^3 + 7x^2 + ax + b$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 20$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{이므로 } f(1) = 0$$

$$1 + 7 + a + b = 0 \quad \therefore b = -a - 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 7x^2 + ax - (a+8)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 8x + a + 8)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 8x + a + 8) = a + 17 \end{aligned}$$

따라서 $a + 17 = 20$ 이므로 $a = 3$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $b = -11$

$$\text{즉, } f(x) = x^3 + 7x^2 + 3x - 11 \text{이므로}$$

$$f(0) = -11$$

17 **답** ③

$$x^3 + 3x^2 - 4 < f(x) < x^3 + 3x^2 + 7 \text{에서}$$

$$3x^2 - 4 < f(x) - x^3 < 3x^2 + 7$$

모든 실수 x 에 대하여 $5x^2 + 1 > 0$ 이므로 각 변을 $5x^2 + 1$ 로 나누면

$$\frac{3x^2 - 4}{5x^2 + 1} < \frac{f(x) - x^3}{5x^2 + 1} < \frac{3x^2 + 7}{5x^2 + 1}$$

이때 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4}{5x^2 + 1} = \frac{3}{5}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7}{5x^2 + 1} = \frac{3}{5}$ 이므로 함수의 극한의 대

소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{5x^2 + 1} = \frac{3}{5}$$

18 **답** ④

(i) $x > 1$ 일 때

$x - 1 > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x - 1$ 로 나누면

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} \leq \frac{f(x)}{x - 1} \leq \frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1}$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{(3x-1)(x-1)}{x-1}$$

$$\therefore x + 1 \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq 3x - 1$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 1+} (x+1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1+} (3x-1) = 2$ 이므로 함수의 극한의 대

소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{x-1} = 2$$

(ii) $x < 1$ 일 때

$x - 1 < 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x - 1$ 로 나누면

$$\frac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1} \leq \frac{f(x)}{x - 1} \leq \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$\frac{(3x-1)(x-1)}{x-1} \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq \frac{(x+1)(x-1)}{x-1}$$

$$\therefore 3x - 1 \leq \frac{f(x)}{x-1} \leq x + 1$$

이때 $\lim_{x \rightarrow 1-} (3x-1) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1-} (x+1) = 2$ 이므로 함수의 극한의 대

소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{x-1} = 2$$

$$(i), (ii) \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$$

19 **답** $\frac{5}{2}$

$P(a, \sqrt{a})$, $H(0, \sqrt{a})$ 이므로

$$\overline{PH} = a, \overline{PA} = \sqrt{(3-a)^2 + (-\sqrt{a})^2} = \sqrt{a^2 - 5a + 9}$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow \infty} (\overline{PH} - \overline{PA}) = \lim_{a \rightarrow \infty} (a - \sqrt{a^2 - 5a + 9})$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(a - \sqrt{a^2 - 5a + 9})(a + \sqrt{a^2 - 5a + 9})}{a + \sqrt{a^2 - 5a + 9}}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{5a - 9}{a + \sqrt{a^2 - 5a + 9}}$$

$$= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{9}{a}}{1 + \sqrt{1 - \frac{5}{a} + \frac{9}{a^2}}}$$

$$= \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2}$$

20 **답** $\frac{1}{2}$

중심이 원점이고 반지름의 길이가 a 인 원의 방정식은

$$x^2 + y^2 = a^2$$

이 원이 직선 $y = 2ax$ 와 제1사분면에서 만나는 점 P 의 x 좌표는

$$x^2 + (2ax)^2 = a^2, x^2 = \frac{a^2}{4a^2 + 1}$$

$$\therefore x = \frac{a}{\sqrt{4a^2 + 1}} \quad (\because a > 0, x > 0)$$

$$\text{따라서 } f(a) = \frac{a}{\sqrt{4a^2 + 1}} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} f(a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{4a^2 + 1}} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{a^2}}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

중단원 기출문제 2회

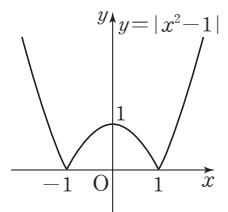
1 **답** ④

함수 $y = |x^2 - 1|$ 의 그래프는 오른쪽 그림

과 같으므로

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ 2 & (t = 0 \text{ 또는 } t > 1) \\ 4 & (0 < t < 1) \\ 3 & (t = 1) \end{cases}$$

$$\therefore f(0) + \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) + \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) = 2 + 4 + 2 = 8$$



2 답 -1

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2 - 2k) = 4 - 2k$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (kx + 8) = 2k + 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \text{ 이므로}$$

$$4 - 2k = 2k + 8, \quad -4k = 4$$

$$\therefore k = -1$$

3 답 ②

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2 \text{ 이므로 } a = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a-} f(x-3) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x-3)$$

$$x-3 = t \text{ 로 놓으면 } x \rightarrow 2- \text{ 일 때 } t \rightarrow -1- \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x-3) = \lim_{t \rightarrow -1-} f(t) = -1$$

4 답 4

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 1)f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{x^2 + 1}{x + 2} \times (x + 2)f(x) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 2} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x + 2)f(x) \\ &= \frac{2}{3} \times 6 = 4 \end{aligned}$$

5 답 3

$$2f(x) - 3g(x) = h(x) \text{ 라 하면}$$

$$3g(x) = 2f(x) - h(x), \quad \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 2 \text{ 이고,}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ (또는 } -\infty \text{) 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8f(x) - 3g(x)}{3g(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8f(x) - \{2f(x) - h(x)\}}{2f(x) - h(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6f(x) + h(x)}{2f(x) - h(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{h(x)}{f(x)}}{2 - \frac{h(x)}{f(x)}} \\ &= 3 \left(\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{f(x)} = 0 \right) \end{aligned}$$

6 답 ③

$$\textcircled{1} \quad -1 \leq x < 0 \text{ 일 때 } [x] = -1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} [x] = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{[x]}{x+1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\textcircled{2} \quad 2 \leq x < 3 \text{ 일 때 } 1 \leq x-1 < 2 \text{ 이므로}$$

$$[x-1] = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} [x-1] = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x}{[x-1]} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\textcircled{3} \quad 0 \leq x < 1 \text{ 일 때 } -2 \leq x-2 < -1 \text{ 이므로}$$

$$[x-2] = -2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1-} [x-2] = -2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{[x-2]}{x-2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$\textcircled{4} \quad 3 \leq x < 4 \text{ 일 때 } [x] = 3 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} [x] = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{[x]^2 + 1}{[x]} = \frac{9 + 1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\textcircled{5} \quad -1 < x < 0 \text{ 일 때 } -1 < x^2 - 1 < 0 \text{ 이므로}$$

$$[x^2 - 1] = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} [x^2 - 1] = -1$$

따라서 옳은 것은 ③이다.

7 답 8

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{(x+a)(x-a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + ax + a^2}{x+a} \\ &= \frac{3a^2}{2a} = \frac{3a}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{3a}{2} = 3 \text{ 이므로 } a = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - ax^2 + a^2x - a^3}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 4)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4) = 8 \end{aligned}$$

8 답 ①

$$x = -t \text{ 로 놓으면 } x \rightarrow -\infty \text{ 일 때 } t \rightarrow \infty \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 5} - 4}{x + 2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9t^2 + 5} - 4}{-t + 2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9 + \frac{5}{t^2}} - 4}{-1 + \frac{2}{t}} \\ &= \frac{3}{-1} = -3 \end{aligned}$$

9 답 7

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + xf(x)}{x^2 - f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{f(x)}{x}}{1 - \frac{f(x)}{x} \times \frac{1}{x}} = \frac{3 + 4}{1 - 4 \times 0} = 7$$

10 답 ③

$$\begin{aligned} \neg. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^3 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\hook. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = -1$$

$$\begin{aligned} \sqsubset. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x+4} - \sqrt{2x+1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{2x+4} - \sqrt{2x+1})(\sqrt{2x+4} + \sqrt{2x+1})}{\sqrt{2x+4} + \sqrt{2x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{2x+4} + \sqrt{2x+1}} = 0 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

11 답 ①

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - x} \left(\frac{1}{\sqrt{x+9}} - \frac{1}{3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2 - x} \times \frac{3 - \sqrt{x+9}}{3\sqrt{x+9}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x^2 - x} \times \frac{(3 - \sqrt{x+9})(3 + \sqrt{x+9})}{3\sqrt{x+9}(3 + \sqrt{x+9})} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x(x-1)} \times \frac{-x}{3\sqrt{x+9}(3 + \sqrt{x+9})} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x-1} \times \frac{-1}{3\sqrt{x+9}(3 + \sqrt{x+9})} \right\} \\ &= -1 \times \frac{-1}{3 \times 3 \times (3+3)} = \frac{1}{54} \end{aligned}$$

12 답 $\frac{1}{6}$

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{6x^2} \right] &= \frac{1}{6x^2} - \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1) \text{라 하면} \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left[\frac{1}{6x^2} \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left(\frac{1}{6x^2} - \alpha \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{6} - \alpha x^2 \right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

13 답 32

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a\sqrt{x-2}+b}{x-3} &= 2 \text{에서 } x \rightarrow 3 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이 존재} \\ &\text{하므로 (분자)} \rightarrow 0 \text{이다.} \\ \text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} (a\sqrt{x-2}+b) &= 0 \text{이므로} \\ a+b &= 0 \quad \therefore b = -a \quad \dots\dots \textcircled{1} \\ \textcircled{1} \text{을 주어진 등식의 좌변에 대입하면} \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a\sqrt{x-2}-a}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(\sqrt{x-2}-1)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a(x-3)}{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{a}{\sqrt{x-2}+1} \\ &= \frac{a}{1+1} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{a}{2} = 2 \text{이므로 } a = 4$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } b = -4$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 32$$

14 답 ⑤

$$x = -t \text{로 놓으면 } x \rightarrow -\infty \text{일 때 } t \rightarrow \infty \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{ax^2+2x}+x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{at^2-2t}-t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{at^2-2t}-t)(\sqrt{at^2-2t}+t)}{\sqrt{at^2-2t}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(a-1)t^2-2t}{\sqrt{at^2-2t}+t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(a-1)t-2}{\sqrt{a-\frac{2}{t}}+1} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

①의 극한값이 존재하므로

$$a-1=0 \quad \therefore a=1$$

이를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-2}{\sqrt{1-\frac{2}{t}}+1} &= \frac{-2}{1+1} = -1 \\ \therefore b &= -1 \\ \therefore a-b &= 2 \end{aligned}$$

15 답 -24

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xg(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-9x}{f(x)} = 1$ 에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다.

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{xg(x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{3x(x-3)} = 2$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \text{이므로 } f(3) = 0$$

$f(x) = 3(x-3)(x+a)$ (a 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{xg(x)} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3(x-3)(x+a)}{3x(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+a}{x} \\ &= \frac{3+a}{3} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{3+a}{3} = 2 \text{이므로 } a = 3$$

$$\text{즉, } f(x) = 3(x-3)(x+3) \text{이므로}$$

$$f(1) = 3 \times (-2) \times 4 = -24$$

16 답 9

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ 에서 $f(x), g(x)$ 의 차수가 같고, $f(x)$ 의 최고차항의 계수는 $g(x)$ 의 최고차항의 계수의 2배이다.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-g(x)}{x-4} = 3$ 에서 $f(x)-g(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 일차함수이므로 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 모두 일차함수이다.

$f(x) = 2ax+b, g(x) = ax+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f(x) - g(x) = ax + b - c$$

$$\therefore a = 3$$

$$\therefore f(x) + g(x) = 9x + b + c$$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+g(x)}{x+1} = a$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} \{f(x)+g(x)\} = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} (9x+b+c) = 0$$

$$-9+b+c=0 \quad \therefore b+c=9$$

따라서 $f(x)+g(x) = 9x+9$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)+g(x)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9x+9}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{9(x+1)}{x+1} = 9 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 9$$

17 답 ①

$$\begin{aligned} \neg. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} \{g(x) - f(x)\} = \beta (\alpha, \beta \text{는 실수}) \text{라 하면} \\ \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \{g(x) - f(x) + f(x)\} \\ = \lim_{x \rightarrow a} \{g(x) - f(x)\} + \lim_{x \rightarrow a} f(x) \\ = \beta + \alpha \end{aligned}$$

$$\neg. [\text{반례}] f(x) = g(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ -1 & (x < a) \end{cases} \text{이면 } \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 1 \text{ 이지만 } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{와 } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{의 값은 모두 존재하지 않는다.}$$

$$\neg. [\text{반례}] f(x) = \frac{1}{x^2+2}, g(x) = \frac{1}{x^2+1} \text{이면 모든 실수 } x \text{에 대하여 } f(x) < g(x) \text{이지만 } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \text{ 이다.}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$ 이다.

18 답 -5

$$\lim_{x \rightarrow -1} (x-6) = -5, \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x - 5) = -5 \text{ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -5$$

19 답 ③

모든 양의 실수 x 에 대하여 $x^2 > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 x^2 으로 나누면

$$\frac{2x^2+1}{x^2} < \frac{1}{xf(x)} < \frac{2x^2+x+3}{x^2}$$

$$\therefore \frac{2x^2+1}{10x^2} < \frac{1}{10xf(x)} < \frac{2x^2+x+3}{10x^2}$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+1}{10x^2} = \frac{1}{5}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x+3}{10x^2} = \frac{1}{5} \text{ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{10xf(x)} = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow \infty} 10xf(x) = 5$$

20 답 2

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{BC} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore \overline{BQ} = 4\sqrt{2} - t$$

삼각형 ABC에서 $\angle C = 45^\circ$ 이므로 삼각형 QCP는 $\overline{QC} = \overline{QP}$ 인 직각이등변삼각형이다.

$$\text{따라서 } \overline{QP} = t, \overline{PC} = \sqrt{t^2 + t^2} = \sqrt{2}t \text{ 이므로}$$

$$S = \frac{1}{2} \times (4\sqrt{2} - t) \times t = \frac{1}{2}t(4\sqrt{2} - t)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{S}{\overline{PC}} &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{2}t(4\sqrt{2} - t)}{\sqrt{2}t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{2\sqrt{2}t - \frac{1}{2}t^2}{\sqrt{2}t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \left(2 - \frac{t}{2\sqrt{2}} \right) = 2 \end{aligned}$$

02 / 함수의 연속

8~13쪽

중단원 기출문제 1회

1 답 ①

$$\neg. f(0) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x+3) = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x+3) = 3 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\neg. f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2+1) = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 $x=0$ 에서 연속인 것은 $\neg$ 이다.

2 답 0

$$f(x) = \begin{cases} 5 - \frac{1}{2}x & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ 1 & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$f(-x) = \begin{cases} 5 + \frac{1}{2}x & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ 1 & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

$$\therefore f(x) - f(-x) = \begin{cases} -x & (x < -1 \text{ 또는 } x > 1) \\ 0 & (-1 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

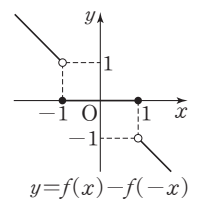
따라서 함수 $y = f(x) - f(-x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x) - f(-x)$

가 불연속인 x 의 값은 $-1, 1$ 이다.

따라서 구하는 합은

$$-1 + 1 = 0$$



3 답 $\neg, \neg$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1$$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = -1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극한값이 존재하지 않는다.

$$\neg. f(1) = -1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

4 답 2

(i) $f(1)g(1)=1 \times 1=1$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x)=0 \times 1=0$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) \neq f(1)g(1)$ 이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

(ii) $f(2)g(2)=-1 \times 1=-1$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x)=-1 \times 0=0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x)=1 \times 0=0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x)=0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) = f(2)g(2)$ 이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

(iii) $f(3)g(3)=0 \times 2=0$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x)g(x)=0 \times 2=0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x)g(x)=0 \times 1=0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x)=0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)g(x) = f(3)g(3)$ 이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)g(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 1, 2의 2개이다.

5 답 ②

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2-1)f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)f(x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)f(x) \\ &= 2f(1) \end{aligned}$$

따라서 $2f(1)=6$ 이므로 $f(1)=3$

6 답 ④

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (4x-4) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (3x-a)^2 = (6-a)^2$$

$$f(2) = 8 - 4 = 4$$

따라서 $4 = (6-a)^2$ 이므로

$$a^2 - 12a + 32 = 0, (a-4)(a-8) = 0$$

$$\therefore a=4 \text{ 또는 } a=8$$

따라서 모든 상수 a 의 값의 곱은

$$4 \times 8 = 32$$

참고 이차방정식 $a^2 - 12a + 32 = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 a 의 값의 곱이 32임을 알 수도 있다.

7 답 ⑤

함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2+ax-3}{x-3} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} (x^2+ax-3) = 0 \text{이므로}$$

$$9+3a-3=0 \quad \therefore a=-2$$

이를 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-2x-3}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)(x-3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x+1) = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore b=4$$

$$\therefore a+b=2$$

8 답 -2

함수 $f(x)g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=-2$, $x=1$ 에서 연속이다.

(i) $x=-2$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x)g(x) = f(-2)g(-2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow -2+} (ax^2+x+b)(-x+5) \\ &= 7(4a-2+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow -2-} (ax^2+x+b)(x^2+1) \\ &= 5(4a-2+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-2)g(-2) &= (4a-2+b) \times (4+1) \\ &= 5(4a-2+b) \end{aligned}$$

따라서 $7(4a-2+b) = 5(4a-2+b)$ 이므로

$$4a-2+b=0 \quad \therefore 4a+b=2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x=1$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) = f(1)g(1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} (ax^2+x+b)(2x+1) \\ &= 3(a+1+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} (ax^2+x+b)(-x+5) \\ &= 4(a+1+b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1)g(1) &= (a+1+b) \times (2+1) \\ &= 3(a+1+b) \end{aligned}$$

따라서 $3(a+1+b) = 4(a+1+b)$ 이므로

$$a+1+b=0 \quad \therefore a+b=-1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$

$$\therefore ab=-2$$

9 답 2

함수 $\{f(x)\}^2$ 이 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a-} \{f(x)\}^2 = \{f(a)\}^2$$

$$\lim_{x \rightarrow a+} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a+} (5x-2)^2 = (5a-2)^2$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} \{f(x)\}^2 = \lim_{x \rightarrow a-} (-5x+a)^2 = (-4a)^2 = 16a^2$$

$$\{f(a)\}^2 = (5a-2)^2$$

따라서 $(5a-2)^2 = 16a^2$ 이므로

$$9a^2 - 20a + 4 = 0, (9a-2)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = \frac{2}{9} \text{ 또는 } a=2$$

그런데 a 는 정수이므로 $a=2$

10 답 7

$$x \neq 2 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{x^3 - kx + 2}{x - 2}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - kx + 2}{x - 2} = f(2) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - kx + 2) = 0 \text{ 이므로}$$

$$8 - 2k + 2 = 0 \quad \therefore k = 5$$

이를 ⑦의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x + 2}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x - 1)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 1) = 7 \end{aligned}$$

$$\therefore f(2) = 7$$

11 답 -4

$$x^2 - 4 = 0 \text{ 에서 } (x+2)(x-2) = 0 \quad \therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

$x \neq -2, x \neq 2$ 일 때,

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^2 - 4} = \frac{(x+2)(x-2)^2}{(x+2)(x-2)} = x - 2$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x = -2$ 에서 연속이므로

$$f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x - 2) = -4$$

또 함수 $f(x)$ 가 $x = 2$ 에서 연속이므로

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 0$$

$$\therefore f(-2) + f(2) = -4$$

12 답 ⑤

$$\frac{f(x)}{f(x) + g(x)} = \frac{x^2 - x - 5}{x^2 - 4x - 5} = \frac{x^2 - x - 5}{(x+1)(x-5)}$$

함수 $\frac{f(x)}{f(x) + g(x)}$ 는 $(x+1)(x-5) \neq 0$ 인 모든 실수, 즉 $x \neq -1, x \neq 5$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.

따라서 구하는 구간은 $(-\infty, -1), (-1, 5), (5, \infty)$ 이다.

13 답 ①

함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 이차방정식 $g(x) = 0$, 즉

$$x^2 + 2ax - 2a + 3 = 0 \text{ 은 실근을 갖지 않는다.}$$

이차방정식 $x^2 + 2ax - 2a + 3 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2a + 3) < 0$$

$$a^2 + 2a - 3 < 0, (a+3)(a-1) < 0 \quad \therefore -3 < a < 1$$

따라서 모든 정수 a 의 값의 합은

$$-2 + (-1) + 0 = -3$$

14 답 ㄷ

$$\neg. \text{ [반례]} f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ -1 & (x < a) \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -1 & (x \geq a) \\ 1 & (x < a) \end{cases} \text{ 이면}$$

$f(x) + g(x) = 0$ 이므로 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이지만 함수 $f(x) + g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

$$\neg. \text{ [반례]} f(x) = 0, g(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ -1 & (x < a) \end{cases} \text{ 이면 } f(x)g(x) = 0 \text{ 이므로}$$

로 두 함수 $f(x), f(x)g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이지만 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이다.

ㄷ. 두 함수 $f(x) + g(x), f(x) - g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = f(a) + g(a)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = f(a) - g(a)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{2} [\{f(x) + g(x)\} + \{f(x) - g(x)\}]$$

$$= \frac{1}{2} [\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} + \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\}]$$

$$= \frac{1}{2} [\{f(a) + g(a)\} + \{f(a) - g(a)\}]$$

$$= f(a)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.

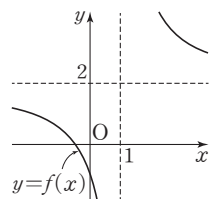
$$\equiv. \text{ [반례]} f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq a) \\ -1 & (x < a) \end{cases} \text{ 이면 } |f(x)| = 1 \text{ 이므로 함수}$$

$|f(x)|$ 는 $x=a$ 에서 연속이지만 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

15 답 ③

함수 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{3}{x-1} + 2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



①, ④ 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, -1]$,

$[2, 3]$ 에서 연속이므로 각 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

② 함수 $f(x)$ 는 반열린구간 $(-1, 0]$ 에서 최댓값을 갖지 않고, $x=0$ 일 때 최솟값 -1 을 갖는다.

③ 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 $x=0$ 일 때 최댓값 -1 을 갖고, 최솟값은 갖지 않는다.

⑤ 함수 $f(x)$ 는 반열린구간 $(3, 4]$ 에서 최댓값을 갖지 않고, $x=4$ 일 때 최솟값 3 을 갖는다.

따라서 최솟값이 존재하지 않는 구간은 ③이다.

16 답 ㄱ, ㄴ

ㄱ. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이므로 함수

$$f(x) - g(x) \text{ 도 닫힌구간 } [a, b] \text{ 에서 연속이다.}$$

따라서 함수 $f(x) - g(x)$ 는 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이므로 함수

$$f(x) \times f(x) = \{f(x)\}^2 \text{ 도 닫힌구간 } [a, b] \text{ 에서 연속이다.}$$

따라서 함수 $\{f(x)\}^2$ 은 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

ㄷ. [반례] 두 함수 $f(x) = 1, g(x) = x$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서

연속이지만 함수 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{x}$ 은 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.

ㄷ. [반례] 두 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$, $g(x)=x-1$ 은 닫힌구간

$[1, 2]$ 에서 연속이지만 함수 $f(g(x))=\begin{cases} (x-1)^2 & (x \neq 1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$ 은 닫

힌구간 $[1, 2]$ 에서 최솟값을 갖지 않는다.

따라서 보기의 함수 중 최댓값과 최솟값을 모두 갖는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

17 답 ⑤

$f(x)=2x^3-5x-9$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고

$f(-2)=-15$, $f(-1)=-6$, $f(0)=-9$, $f(1)=-12$,

$f(2)=-3$, $f(3)=30$

따라서 $f(2)f(3)<0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 주어진 방정식은 열린구간 $(2, 3)$ 에서 실근을 갖는다.

18 답 ①

$f(x)=g(x)$ 에서

$2x^2-x-k=x^2+2x-1 \quad \therefore x^2-3x+1-k=0$

$h(x)=x^2-3x+1-k$ 라 하면 함수 $h(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 연속이고

$h(-1)=5-k$, $h(0)=1-k$

이때 방정식 $h(x)=0$, 즉 $f(x)=g(x)$ 가 열린구간 $(-1, 0)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $h(-1)h(0)<0$ 이어야 하므로

$(5-k)(1-k)<0 \quad \therefore 1<k<5$

따라서 정수 k 는 2, 3, 4의 3개이다.

19 답 ③

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 4]$ 에서 연속이고

$f(-1)f(0)<0$, $f(0)f(1)<0$, $f(2)f(3)<0$, $f(3)f(4)<0$

이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간

$(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ 에서 각각 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(-1, 4)$ 에서 적어도 4개의 실근을 갖는다.

20 답 1개

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 네 점 $(-3, 2)$, $(-2, -1)$, $(-1, 3)$, $(0, 4)$ 를 지나므로

$f(-3)=2$, $f(-2)=-1$, $f(-1)=3$, $f(0)=4$

$g(x)=f(x)+2x$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[-3, 0]$ 에서 연속이고

$g(-3)=f(-3)+2 \times (-3)=2-6=-4$

$g(-2)=f(-2)+2 \times (-2)=-1-4=-5$

$g(-1)=f(-1)+2 \times (-1)=3-2=1$

$g(0)=f(0)+2 \times 0=4$

따라서 $g(-2)g(-1)<0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$g(x)=0$, 즉 $f(x)+2x=0$ 은 열린구간 $(-3, 0)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

중단원 기출 문제 2회

1 답 ⑤

① $f(-1)=\sqrt{2}$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=\lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+3}=\sqrt{2}$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=f(-1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

② $f(-1)=1$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x+2}=1$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=f(-1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

③ $f(-1)=0$

$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)=\lim_{x \rightarrow -1+} (x+1)=0$,

$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)=\lim_{x \rightarrow -1-} (-x-1)=0$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=0$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=f(-1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

④ $f(-1)=1$

$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x)=\lim_{x \rightarrow -1+} (-x)=1$,

$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x)=\lim_{x \rightarrow -1-} x^2=1$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=1$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=f(-1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

⑤ $f(-1)=1$

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x}{x+1}=\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x+1}=\lim_{x \rightarrow -1} x=-1$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \neq f(-1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.

2 답 5

(i) $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)=3$, $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)=1$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

(ii) $f(2)=1$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=2$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

(iii) $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x)=2$, $\lim_{x \rightarrow 3-} f(x)=1$ 이므로

$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$ 의 극한값이 존재하지 않는 x 의 값은 1, 3의 2개이므로

$a=2$

또 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 1, 2, 3의 3개이므로

$b=3$

$\therefore a+b=5$

3 답 ㄱ

- ㄱ. $\lim_{x \rightarrow -1+} \{f(x)+g(x)\} = 1+2=3$
 $\lim_{x \rightarrow -1-} \{f(x)+g(x)\} = 1+(-1)=0$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} \{f(x)+g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow -1-} \{f(x)+g(x)\}$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} \{f(x)+g(x)\}$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)+g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.
- ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)-g(x)\} = -2-2=-4$
 $\lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)-g(x)\} = 0-2=-2$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)-g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)-g(x)\}$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)-g(x)\}$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)-g(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.
- ㄷ. $f(2)g(2)=0 \times 1=0$
 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x)g(x)=0 \times 1=0,$
 $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x)g(x)=0 \times 2=0$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x)=0$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x)=f(2)g(2)$ 이므로 함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

4 답 ④

- ㄱ. $f(g(1))=f(0)=1$
 $g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t)=1$
 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 1+} f(t)=1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(g(x))=1$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x))=f(g(1))$ 이므로 함수 $f(g(x))$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.
- ㄴ. $f(g(1))=f(1)=1$
 $g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} f(t)=-1$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) \neq f(g(1))$ 이므로 함수 $f(g(x))$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.
- ㄷ. $f(g(1))=f(1)=1$
 $g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t=1$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x))=f(1)=1$
 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로
 $\lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t)=1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(g(x))=1$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x))=f(g(1))$ 이므로 함수 $f(g(x))$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.
 따라서 보기에서 함수 $f(g(x))$ 가 $x=1$ 에서 연속이 되도록 하는 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 ㄱ, ㄷ이다.

5 답 9

- 함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 연속이므로
 $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = f(3)$
 $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$ 에서
 $2a-3 = -a+9$
 $\therefore a=4$
 따라서 $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = 2a-3 = 8-3=5$ 이므로
 $a+f(3)=9$

6 답 1

- 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=a$ 에서 연속이므로
 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$
 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} (3-x^2) = 3-a^2$
 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} (x^2-2x) = a^2-2a$
 $f(a) = 3-a^2$
 따라서 $3-a^2 = a^2-2a$ 이므로
 $2a^2-2a-3=0$
 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 모든 실수 a 의 값의 합은 1이다.

7 답 4

- 함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 연속이므로
 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{\sqrt{x^2-a}+b} = -1 \quad \dots\dots ㉠$
 $x \rightarrow -2$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.
 즉, $\lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x^2-a}+b) = 0$ 이므로
 $\sqrt{4-a}+b=0$
 $\therefore b = -\sqrt{4-a} \quad \dots\dots ㉡$
 ㉡을 ㉠의 좌변에 대입하면
 $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+4}{\sqrt{x^2-a}-\sqrt{4-a}}$
 $= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2x+4)(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{4-a})}{(\sqrt{x^2-a}-\sqrt{4-a})(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{4-a})}$
 $= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2x+4)(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{4-a})}{x^2-4}$
 $= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(x+2)(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{4-a})}{(x+2)(x-2)}$
 $= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2(\sqrt{x^2-a}+\sqrt{4-a})}{x-2}$
 $= -\sqrt{4-a}$
 따라서 $-\sqrt{4-a} = -1$ 이므로
 $\sqrt{4-a}=1, 4-a=1$
 $\therefore a=3$
 이를 ㉡에 대입하면 $b=-1$
 $\therefore a-b=4$

8 답 ②

함수 $(x^2+ax+b)f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (x^2+ax+b)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (x^2+ax+b)f(x) \\ = (1+a+b)f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} (x^2+ax+b)f(x) = (1+a+b) \times 2 \\ = 2(1+a+b)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} (x^2+ax+b)f(x) = (1+a+b) \times 1 \\ = 1+a+b$$

$$(1+a+b)f(1) = (1+a+b) \times 1 = 1+a+b$$

따라서 $2(1+a+b) = 1+a+b$ 이므로

$$1+a+b=0 \quad \therefore a+b=-1$$

9 답 -2

함수 $f(x)\{f(x)+2k\}$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)\{f(x)+2k\} = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)\{f(x)+2k\} \\ = f(0)\{f(0)+2k\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x)\{f(x)+2k\} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-4x)(-4x+2k) \\ = 0 \times 2k = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x)\{f(x)+2k\} = \lim_{x \rightarrow 0-} (x+4)(x+4+2k) \\ = 4(4+2k)$$

$$f(0)\{f(0)+2k\} = 0 \times 2k = 0$$

따라서 $0 = 4(4+2k)$ 이므로

$$4+2k=0 \quad \therefore k=-2$$

10 답 ④

$$x \neq 0 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{4x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$$

함수 $f(x)$ 가 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\therefore f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})$$

$$= 4\sqrt{2}$$

11 답 8

$$(\text{가}) \text{에서 } x \neq 1 \text{ 일 때, } g(x) = \frac{f(x)-x^2}{x-1}$$

(나)에서 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-x^2}{x-1} = 2$ 이므로 $f(x)-x^2$ 은 최고차항의 계수가 2인 일차함수이다.

$f(x)-x^2=2x+a$ (a 는 상수)라 하면

$$f(x) = x^2 + 2x + a, \quad g(x) = \frac{2x+a}{x-1}$$

함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+a}{x-1} = g(1) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} (2x+a) = 0 \text{ 이므로}$$

$$2+a=0 \quad \therefore a=-2$$

이를 ⑦의 좌변에 대입하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x-1)}{x-1} = 2 \quad \therefore g(1) = 2$$

또 $f(x) = x^2 + 2x - 2$ 이므로

$$f(2) = 4 + 4 - 2 = 6$$

$$\therefore f(2) + g(1) = 8$$

12 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

두 함수 $f(x), g(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄱ. 함수 $f(x)+g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄷ. $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{x^2-3x}{x+2}$ 이므로 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 $x+2 \neq 0$ 인 모든 실수,

즉 $x \neq -2$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.

$$\text{ㄹ. } \frac{1}{g(x)+3} = \frac{1}{x^2-3x+3} \text{에서}$$

$$x^2-3x+3 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

따라서 함수 $\frac{1}{g(x)+3}$ 은 모든 실수 x 에서 연속이다.

따라서 보기의 함수 중 모든 실수 x 에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

13 답 ⑤

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{1}{x}}} = 1 - \frac{1}{x - \frac{x}{x^2-1}}$$

$$= 1 - \frac{x^2-1}{x^3-2x}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0, x^2-1=0, x^3-2x=0$ 인 x 의 값에서 정의되지 않으므로 불연속이다.

$$x^2-1=0 \text{에서 } (x+1)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

$$x^3-2x=0 \text{에서 } x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$$

$$\therefore x=-\sqrt{2} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=\sqrt{2}$$

따라서 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값이 아닌 것은 ⑤이다.

14 답 2

$$x \geq -1 \text{에서 } f(x) = 5 > 0$$

$$x < -1 \text{에서 } x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 > 0$$

따라서 모든 실수 x 에서 $f(x) > 0$ 이다.

한편 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이고, 함수 $g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{g(-1)}{f(-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{ax+2}{5} = \frac{-a+2}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{ax+2}{x^2+2x+3} = \frac{-a+2}{2}$$

$$\frac{g(-1)}{f(-1)} = \frac{-a+2}{5}$$

$$\text{따라서 } \frac{-a+2}{5} = \frac{-a+2}{2} \text{ 이므로}$$

$$-2a+4 = -5a+10 \quad \therefore a=2$$

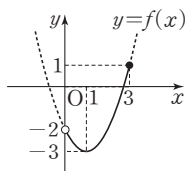
15 답 ④

① 함수 $f(x)=x+5$ 는 닫힌구간 $[-1, 0]$ 에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

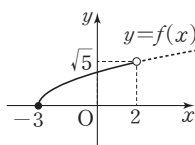
② 함수 $f(x)=\frac{x}{x-2}=\frac{2}{x-2}+1$ 은 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

③ $f(x)=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$

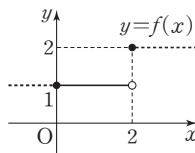
반열린구간 $(0, 3]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 일 때 최댓값 1, $x=1$ 일 때 최솟값 -3을 갖는다.



④ 반열린구간 $[-3, 2)$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-3$ 일 때 최솟값 0을 갖고, 최댓값은 갖지 않는다.



⑤ 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 일 때 최댓값 2, $0 \leq x < 2$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.



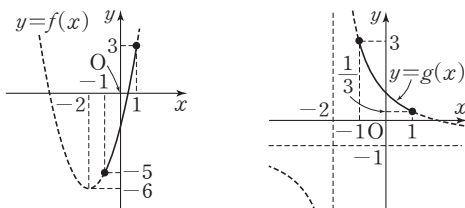
따라서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는 함수가 아닌 것은 ④이다.

16 답 1

두 함수 $f(x)=x^2+4x-2=(x+2)^2-6$,

$g(x)=\frac{2-x}{x+2}=\frac{4}{x+2}-1$ 은 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



따라서 $M=f(1)=3$, $m=g(1)=\frac{1}{3}$ 이므로

$$Mm=1$$

17 답 ④

$f(x)=x^3-2x^2-x+a$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[2, 3]$ 에서 연속이고

$$f(2)=a-2, f(3)=a+6$$

이때 방정식 $f(x)=0$ 이 열린구간 $(2, 3)$ 에서 오직 하나의 실근을 가지려면 $f(2)f(3)<0$ 이어야 하므로

$$(a-2)(a+6)<0$$

$$\therefore -6 < a < 2$$

따라서 $a=-6$, $\beta=2$ 이므로

$$\beta-a=8$$

18 답 ⑤

$g(x)=f(x)-x$ 라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 연속이고

$$g(1)=f(1)-1=-a^2+5a-3-1=-a^2+5a-4$$

$$g(2)=f(2)-2=1-2=-1$$

이때 방정식 $f(x)-x=0$, 즉 $g(x)=0$ 의 중근이 아닌 오직 하나의 실근이 열린구간 $(1, 2)$ 에 존재하려면 $g(1)g(2)<0$ 이어야 하므로

$$-a^2+5a-4 < 0$$

$$(a-1)(a-4) < 0$$

$$\therefore 1 < a < 4$$

따라서 모든 정수 a 의 값의 합은

$$2+3=5$$

19 답 2

$g(x)=x^2f(x)-3x+1$ 이라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 1]$ 에서 연속이고

$$g(-2)=4f(-2)+6+1=4 \times (-2)+7=-1$$

$$g(-1)=f(-1)+3+1=-4+4=0$$

$$g(0)=1$$

$$g(1)=f(1)-3+1=0-2=-2$$

이때 $g(0)g(1)<0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$ 은 열린구간 $(0, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖고, $g(-1)=0$ 이므로 방정식 $g(x)=0$, 즉 $x^2f(x)=3x-1$ 은 열린구간 $(-2, 1)$ 에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

$$\therefore n=2$$

20 답 2

사잇값 정리에 의하여 오전 10시에서 오후 12시 사이에 기온이 12°C 인 순간이 적어도 한 번 존재한다.

또 사잇값 정리에 의하여 오후 4시에서 오후 6시 사이에 기온이 12°C 인 순간이 적어도 한 번 존재한다.

따라서 오전 10시부터 오후 6시까지 A 도시의 기온이 12°C 인 순간이 적어도 2번 존재하므로

$$k=2$$

중단원 기출문제 ①

1 답 5

함수 $f(x)=x^2-3x$ 에서 x 의 값이 2에서 a 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a)-f(2)}{a-2} = \frac{(a^2-3a)-(-2)}{a-2} \\ &= \frac{a^2-3a+2}{a-2} = \frac{(a-1)(a-2)}{a-2} \\ &= a-1\end{aligned}$$

따라서 $a-1=4$ 이므로 $a=5$

2 답 -5

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 1에서 a 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a)-f(1)}{a-1} = \frac{f(a)-5}{a-1} \\ \text{즉, } \frac{f(a)-5}{a-1} &= -a \text{이므로}\end{aligned}$$

$$f(a) = -a^2 + a + 5 \quad (a > 1)$$

따라서 $x=3$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned}f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{-(3+h)^2 + (3+h) + 5\} - (-1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-5h - h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-5 - h) = -5\end{aligned}$$

3 답 ⑤

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-f(1)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h)-f(1)}{3h} \times 3 \\ &= 3f'(1) \\ &= 3 \times 3 = 9\end{aligned}$$

4 답 1

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h)-f(2-4h)}{2h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h)-f(2)+f(2)-f(2-4h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+3h)-f(2)}{3h} \times \frac{3}{2} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-4h)-f(2)}{-4h} \times (-2) \\ &= \frac{3}{2}f'(2) + 2f'(2) = \frac{7}{2}f'(2)\end{aligned}$$

따라서 $\frac{7}{2}f'(2)=14$ 이므로 $f'(2)=4$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{4}f'(2) = \frac{1}{4} \times 4 = 1\end{aligned}$$

5 답 -4

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-3x}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)+f(1)-3x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)-3x+3}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)}{x-1} \\ &= f'(1) - 3 = -1 - 3 = -4\end{aligned}$$

6 답 ④

$f(x+y)=f(x)+f(y)+5xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0 \quad \dots\dots ⑦$$

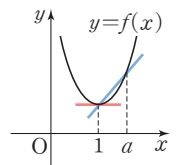
$$\begin{aligned}\therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)+f(h)+5h-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 5 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 5 \quad (\because ⑦) \\ &= f'(0) + 5 = 1 + 5 = 6\end{aligned}$$

7 답 ②

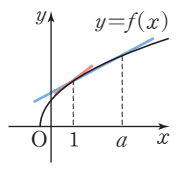
$x > 1$ 일 때 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ 은 $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여 두 점

$(1, f(1)), (a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기와 같고, $f'(1)$ 은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기와 같다.

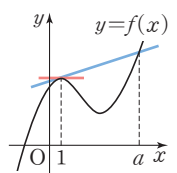
ㄱ. 오른쪽 그림에서 두 점 $(1, f(1)), (a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기가 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기보다 크므로 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} > f'(1)$ 이 항상 성립한다.



ㄴ. 오른쪽 그림에서 두 점 $(1, f(1)), (a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기가 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기보다 작으므로 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} < f'(1)$ 이 항상 성립한다.



ㄷ. 오른쪽 그림에서 두 점 $(1, f(1)), (a, f(a))$ 를 지나는 직선의 기울기가 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선의 기울기보다 크므로 $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} > f'(1)$ 인 경우가 있다.



따라서 보기의 함수의 그래프 중 조건을 항상 만족시키는 것은 ㄴ이다.

8 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $f(x)=\sqrt{x^2}=|x|$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=f(0)=0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x-0}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x-0}{x} = -1$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 3$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(x^2 - 2x + 3) - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} (x - 2) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(x^2 + 2x + 3) - 3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (x + 2) = 2$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x) = 0$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

ㄹ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2x - 0}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-2x - 0}{x} = -2$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 보기의 함수 중 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

9 답 5

불연속인 x 의 값은 $-1, 2$ 의 2개이므로

$$m = 2$$

미분가능하지 않은 x 의 값은 $-1, 1, 2$ 의 3개이므로

$$n = 3$$

$$\therefore m + n = 5$$

10 답 ㉞ (가) $(x+h)^2$ (나) $2x+3$ (다) $2x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(\text{가}) (x+h)^2\} + 3(x+h) - (x^2 + 3x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\text{나}) 2x+3}{h} h + h^2 = \lim_{h \rightarrow 0} (\text{다}) 2x+3 + h \\ &= (\text{다}) 2x + 3 \end{aligned}$$

11 답 ⑤

$$f'(x) = 6x^2 - 8x - 5 \text{이므로}$$

$$f'(-1) = 6 + 8 - 5 = 9$$

12 답 4

$$f(x) = (1+x-x^2)(1-x+x^2) \text{에서}$$

$$f(2) = -1 \times 3 = -3$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1+x-x^2)'(1-x+x^2) + (1+x-x^2)(1-x+x^2)' \\ &= (1-2x)(1-x+x^2) + (1+x-x^2)(-1+2x) \end{aligned}$$

$$\therefore f'(2) = -3 \times 3 + (-1) \times 3 = -12$$

$$\therefore \frac{f'(2)}{f(2)} = 4$$

13 답 ④

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x^3 + x + 1)'f(x) + (x^3 + x + 1)f'(x) \\ &= (3x^2 + 1)f(x) + (x^3 + x + 1)f'(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore g'(1) &= 4f(1) + 3f'(1) \\ &= 4 \times 4 + 3 \times 1 = 19 \end{aligned}$$

14 답 1

$f(x) = x^4 + ax^2 + b$ 라 하면 곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(1, -2)$ 를 지나므로 $f(1) = -2$ 에서

$$1 + a + b = -2 \quad \therefore a + b = -3 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$f'(x) = 4x^3 + 2ax$ 이고 점 $(1, -2)$ 에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(1) = 2$ 에서

$$4 + 2a = 2 \quad \therefore a = -1$$

$$\text{이를 ㉠에 대입하면 } -1 + b = -3 \quad \therefore b = -2$$

$$\therefore a - b = 1$$

15 답 ②

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \times (-1) \\ &= f'(1) + f'(1) = 2f'(1) \\ f'(x) &= 3x^2 - 4x + 3 \text{이므로} \\ f'(1) &= 3 - 4 + 3 = 2 \\ \text{따라서 구하는 값은} \\ 2f'(1) &= 2 \times 2 = 4 \end{aligned}$$

16 답 ⑤

$f(x) = x^9 + x^2 + x$ 라 하면 $f(1) = 1 + 1 + 1 = 3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^9 + x^2 + x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

$f'(x) = 9x^8 + 2x + 1$ 이므로 구하는 값은

$$f'(1) = 9 + 2 + 1 = 12$$

17 답 ①

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1) - 3}{x^2 - 1} = 4$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x+1) - 3\} = 0 \text{이므로 } f(2) = 3$$

$x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1) - 3}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x+1) - f(2)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t) - f(2)}{t(t-2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t) - f(2)}{t-2} \times \lim_{t \rightarrow 2} \frac{1}{t} \\ &= \frac{1}{2} f'(2) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{2} f'(2) = 4$ 이므로 $f'(2) = 8$

$$f(x)=x^3+ax+b \text{에서 } f'(x)=3x^2+a$$

$$f(2)=3 \text{에서 } 8+2a+b=3$$

$$\therefore 2a+b=-5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(2)=8 \text{에서}$$

$$12+a=8 \quad \therefore a=-4$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면}$$

$$-8+b=-5 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore ab=-12$$

18 답 4

$$f(x)=ax^2+bx+c \text{ (} a, b, c \text{는 상수, } a \neq 0 \text{)라 하면}$$

$$f'(x)=2ax+b$$

$$f(x) \text{와 } f'(x) \text{를 주어진 식에 대입하면}$$

$$ax^2+bx+c+x(2ax+b)=3x^2+4x-3$$

$$\therefore 3ax^2+2bx+c=3x^2+4x-3$$

$$\text{이 등식이 모든 실수 } x \text{에 대하여 성립하므로}$$

$$3a=3, 2b=4, c=-3$$

$$\therefore a=1, b=2, c=-3$$

$$\text{따라서 } f'(x)=2x+2 \text{이므로}$$

$$f'(1)=2+2=4$$

19 답 ④

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하면 $x=1$ 에서 연속이고 미분계수 $f'(1)$ 이 존재한다.

(i) $x=1$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)=f(1)$ 에서

$$b+3=a+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(ax^2+2x)-(a+2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(ax+a+2)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax+a+2) = 2a+2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(bx+3)-(b+3)}{x-1} \quad (\because \textcircled{1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{b(x-1)}{x-1} = b$$

$$\text{즉, } 2a+2=b \text{이므로 } 2a-b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $a-b=1$ 이므로 $\textcircled{2}$ 과 연립하여 풀면

$$a=-3, b=-4$$

$$\therefore a^2+b^2=25$$

다른 풀이

$$g(x)=ax^2+2x, h(x)=bx+3 \text{이라 하면}$$

$$g'(x)=2ax+2, h'(x)=b$$

(i) $x=1$ 에서 연속이므로 $g(1)=h(1)$ 에서

$$a+2=b+3 \quad \therefore a-b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $f'(1)$ 이 존재하므로 $g'(1)=h'(1)$ 에서

$$2a+2=b \quad \therefore 2a-b=-2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=-3, b=-4$$

$$\therefore a^2+b^2=25$$

20 답 -5

다항식 $f(x)$ 를 $(x-2)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지

$R(x)$ 를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)=(x-2)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$9=2a+b \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x)=2(x-2)Q(x)+(x-2)^2Q'(x)+a$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면 $a=14$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$9=28+b \quad \therefore b=-19$$

따라서 $R(x)=14x-19$ 이므로

$$R(1)=14-19=-5$$

중단원 기출문제 2회

1 답 5

함수 $f(x)=x^2+4x-3$ 에서 x 의 값이 -1 에서 2 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{9-(-6)}{3} = 5$$

2 답 ③

함수 $g(x)$ 에서 x 의 값이 b 에서 c 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{g(c)-g(b)}{c-b} = \frac{f^{-1}(c)-f^{-1}(b)}{c-b}$$

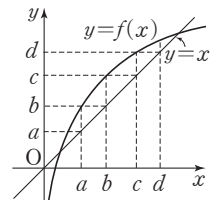
오른쪽 그림에서 $f(b)=c$ 이므로

$$f^{-1}(c)=b$$

또 $f(a)=b$ 이므로 $f^{-1}(b)=a$

따라서 구하는 평균변화율은

$$\frac{f^{-1}(c)-f^{-1}(b)}{c-b} = \frac{b-a}{c-b}$$



3 답 1

함수 $f(x)=x^2-5x+4$ 에서 x 의 값이 a 에서 $a+2$ 까지 변할 때의

평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+2)-f(a)}{(a+2)-a}$$

$$= \frac{\{(a+2)^2-5(a+2)+4\}-(a^2-5a+4)}{2}$$

$$= \frac{4a-6}{2} = 2a-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분계수는

$$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{(2+h)^2-5(2+h)+4\}-(-2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h+h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (-1+h) = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 에서 $2a-3=-1 \quad \therefore a=1$

4 답 ②

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-3}{h} = -4$ 에서 $h \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{h \rightarrow 0} \{f(1+2h)-3\} = 0$ 이므로 $f(1)=3$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-3}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+2h)-f(1)}{2h} \times 2 = 2f'(1) \end{aligned}$$

따라서 $2f'(1) = -4$ 이므로 $f'(1) = -2$

5 답 3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(1)-f(x)}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf(1)-f(1)+f(1)-f(x)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(1)}{(x+1)(x-1)} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(1)}{x+1} - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{1}{2}f(1) - \frac{1}{2}f'(1) \\ &= \frac{1}{2} \times 4 - \frac{1}{2} \times (-2) = 3 \end{aligned}$$

6 답 4

$f(x+y) = f(x) + f(y) - 2xy + 1$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면 $f(0) = f(0) + f(0) - 0 + 1 \quad \therefore f(0) = -1 \quad \dots \dots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} \therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1)+f(h)-2h+1-f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+1}{h} - 2 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} - 2 \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= f'(0) - 2 \end{aligned}$$

따라서 $f'(0) - 2 = 2$ 이므로 $f'(0) = 4$

7 답 ④

ㄱ. 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기가 직선 $y=2x$ 의 기울기보다 작으므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < 2 \quad \therefore f(b)-f(a) < 2(b-a) \quad (\because b-a > 0)$$

ㄴ. $f'(a)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기이고 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기가 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선의 기울기보다 작으므로

$$\begin{aligned} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} &< f'(a) \\ \therefore f(b)-f(a) &< (b-a)f'(a) \quad (\because b-a > 0) \end{aligned}$$

ㄷ. $f'(b)$ 는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기이고 원점과 점 $(b, f(b))$ 를 지나는 직선의 기울기가 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기보다 크므로

$$\frac{f(b)}{b} > f'(b) \quad \therefore f(b) > bf'(b) \quad (\because b > 0)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

8 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow -1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x)f(-x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{t \rightarrow -1} f(t) = 0 \times (-1) = 0$$

ㄴ. $f(-1)f(1) = 0 \times 1 = 0$

$-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)f(-x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 1} f(t) = -1 \times 0 = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)f(-x) = f(-1)f(1)$ 이므로 함수 $f(x)f(-x)$

는 $x=-1$ 에서 연속이다.

ㄷ. $g(x) = f(x)f(-x)$ 라 하면 구간 $(-1, 1)$ 에서 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - x & (0 < x < 1) \\ 0 & (x=0) \\ x^2 + x & (-1 < x < 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(x^2-x)-0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} (x-1) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{g(x)-g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{(x^2+x)-0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (x+1) = 1$$

따라서 함수 $f(x)f(-x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

다른 풀이

함수 $y=f(-x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$

의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이

므로 오른쪽 그림과 같다.

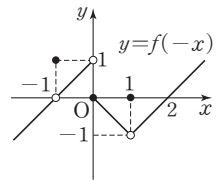
$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)f(-x) = 0 \times (-1) = 0$$

$$\therefore f(-1)f(1) = 0 \times 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x)f(-x) = -1 \times 0 = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)f(-x) = f(-1)f(1)$ 이므로 함수 $f(x)f(-x)$

는 $x=-1$ 에서 연속이다.



9 답 ③

① 점 $(0, f(0))$ 에서의 접선의 기울기가 양수이므로 $f'(0) > 0$

② $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재한다.

③ 미분가능하면서 접선의 기울기가 0인 x 의 값은 존재하지 않는다.

④ 불연속인 x 의 값은 1, 3의 2개이다.

⑤ 미분가능하지 않은 x 의 값은 1, 2, 3의 3개이다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

10 답 (가) $(x+h)^2$ (나) $2x+h$ (다) $2xf(x)$

$g(x) = x^2f(x)$ 라 하면 $y=g(x)$ 에서

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2f(x+h)-x^2f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2f(x+h)-(x+h)^2f(x)+(x+h)^2f(x)-x^2f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2\{f(x+h)-f(x)\}+f(x)\{(x+h)^2-x^2\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \boxed{(가) (x+h)^2} \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &\quad + f(x) \times \lim_{h \rightarrow 0} \boxed{(나) 2x+h} \\ &= x^2f'(x) + \boxed{(다) 2xf(x)} \end{aligned}$$

11 답 ④

$f(x+y)=f(x)+f(y)+3xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+3xh-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 3x \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + 3x \quad (\because \textcircled{㉠}) \\ &= f'(0) + 3x = 3x + 1 \end{aligned}$$

12 답 3

$f'(x)=3x^2+2kx+1$ 이므로 $f'(-2)=1$ 에서

$$12-4k+1=1 \quad \therefore k=3$$

13 답 51

$f(x)=2x^2+5x-2$ 에서 $f'(x)=4x+5$

$g(x)=x^3+3$ 에서 $g'(x)=3x^2$

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 이므로 함수 $f(x)g(x)$ 의 $x=1$ 에서의 미분계수는

$$f'(1)g(1)+f(1)g'(1)=9 \times 4 + 5 \times 3 = 51$$

14 답 2

$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ 라 하면 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(2, 4)$ 를 지나므로 $f(2)=4$ 에서

$$(2-a)(2-b)(2-c)=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$f'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$ 이고

점 $(2, 4)$ 에서의 접선의 기울기가 8이므로 $f'(2)=8$ 에서

$$(2-b)(2-c)+(2-a)(2-c)+(2-a)(2-b)=8 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \\ &= \frac{(2-b)(2-c) + (2-a)(2-c) + (2-a)(2-b)}{(2-a)(2-b)(2-c)} \\ &= \frac{8}{4} \quad (\because \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

15 답 ③

$f(-1)=0$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h)}{4h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} f'(-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2-1)'(x^3+x^2+3x+1) + (x^2-1)(x^3+x^2+3x+1)' \\ &= 2x(x^3+x^2+3x+1) + (x^2-1)(3x^2+2x+3) \end{aligned}$$

$$\therefore f'(-1) = -2 \times (-2) = 4$$

따라서 구하는 값은

$$\frac{1}{4} f'(-1) = \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

16 답 ③

$f(x)=x^{3n}-x^{2n}+x^n$ 이라 하면 $f(1)=1-1+1=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{3n}-x^{2n}+x^n-1}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1) \\ \therefore f'(1) &= 12 \end{aligned}$$

$f'(x)=3nx^{3n-1}-2nx^{2n-1}+nx^{n-1}$ 이므로 $f'(1)=12$ 에서

$$3n-2n+n=12, 2n=12 \quad \therefore n=6$$

17 답 -6

(가)에서 $f(x)-x^3$ 은 최고차항의 계수가 -3 인 이차함수이므로

$f(x)-x^3=-3x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x)=x^3-3x^2+ax+b$$

$$\therefore f'(x)=3x^2-6x+a$$

(나)에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)+5\} = 0 \text{이므로 } f(2) = -5$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)+5}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = f'(2)$$

$$\therefore f'(2) = -2$$

$$f'(2) = -2 \text{에서}$$

$$12-12+a=-2 \quad \therefore a=-2$$

$$f(2) = -5 \text{에서}$$

$$8-12+2a+b=-5, 8-12-4+b=-5$$

$$\therefore b=3$$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2-2x+3, f'(x)=3x^2-6x-2$ 이므로

$$f(1)+f'(1)=(1-3-2+3)+(3-6-2)=-6$$

18 답 -6

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x)=2ax+b$$

$f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 주어진 식에 대입하면

$$x(2ax+b)=ax^2+bx+c-3x^2+2$$

$$\therefore 2ax^2+bx=(a-3)x^2+bx+c+2$$

이 등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$2a=a-3, 0=c+2$$

$$\therefore a=-3, c=-2$$

$$f(1)=-1 \text{에서 } a+b+c=-1$$

$$-3+b-2=-1 \quad \therefore b=4$$

따라서 $f(x)=-3x^2+4x-2$ 이므로

$$f(2)=-12+8-2=-6$$

19 답 -9

$$g(x) = \begin{cases} -x^3-3x^2+9x+m & (x \geq a) \\ x^3+3x^2-9x & (x < a) \end{cases}$$

함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 미분가능하면 $x=a$ 에서 미분가능하므로 $x=a$ 에서 연속이고 미분계수 $g'(a)$ 가 존재한다.

(i) $x=a$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow a-} g(x)=g(a)$ 에서

$$a^3+3a^2-9a=-a^3-3a^2+9a+m \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) 미분계수 $g'(a)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow a+} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{(-x^3 - 3x^2 + 9x + m) - (-a^3 - 3a^2 + 9a + m)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{-(x-a)(x^2 + ax + a^2) - 3(x+a)(x-a) + 9(x-a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{-(x-a)\{x^2 + (a+3)x + a^2 + 3a - 9\}}{x - a} \\ &= - \lim_{x \rightarrow a+} \{x^2 + (a+3)x + a^2 + 3a - 9\} \\ &= -3a^2 - 6a + 9 \\ & \lim_{x \rightarrow a-} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{(x^3 + 3x^2 - 9x) - (a^3 + 3a^2 - 9a)}{x - a} (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2) + 3(x+a)(x-a) - 9(x-a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{(x-a)\{x^2 + (a+3)x + a^2 + 3a - 9\}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a-} \{x^2 + (a+3)x + a^2 + 3a - 9\} \\ &= 3a^2 + 6a - 9 \\ & \text{즉, } -3a^2 - 6a + 9 = 3a^2 + 6a - 9 \text{이므로} \\ & a^2 + 2a - 3 = 0, (a+3)(a-1) = 0 \quad \therefore a = 1 (\because a > 0) \end{aligned}$$

$a=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$1 + 3 - 9 = -1 - 3 + 9 + m \quad \therefore m = -10$$

$$\therefore a + m = -9$$

다른 풀이

$$h(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + m, k(x) = x^3 + 3x^2 - 9x \text{라 하면}$$

$$h'(x) = -3x^2 - 6x + 9, k'(x) = 3x^2 + 6x - 9$$

(i) $x=a$ 에서 연속이므로 $h(a) = k(a)$ 에서

$$-a^3 - 3a^2 + 9a + m = a^3 + 3a^2 - 9a$$

$$\therefore m = 2a^3 + 6a^2 - 18a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $g'(a)$ 가 존재하므로 $h'(a) = k'(a)$ 에서

$$-3a^2 - 6a + 9 = 3a^2 + 6a - 9, a^2 + 2a - 3 = 0$$

$$(a+3)(a-1) = 0 \quad \therefore a = 1 (\because a > 0)$$

$a=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $m = -10$

$$\therefore a + m = -9$$

20 답 ⑤

다항식 $x^8 + x^4 + x^3 + 2$ 를 $x^2(x-1)$ 로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

나머지 $R(x)$ 를 $ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$x^8 + x^4 + x^3 + 2 = x^2(x-1)Q(x) + ax^2 + bx + c \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=0$ 을 대입하면 $c=2$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1 + 1 + 1 + 2 = a + b + c, 5 = a + b + 2$$

$$\therefore a + b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$8x^7 + 4x^3 + 3x^2$$

$$= 2x(x-1)Q'(x) + x^2Q'(x) + x^2(x-1)Q''(x) + 2ax + b$$

양변에 $x=0$ 을 대입하면 $b=0$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $a=3$

따라서 $R(x) = 3x^2 + 2$ 이므로 $R(3) = 27 + 2 = 29$

04 / 도함수의 활용(1)

20~25쪽

중단원 기출문제 ①

1 답 1

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \text{라 하면 } f'(x) = 2x - 3$$

점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -1$ 이므로 접선의 방정식

$$y = -(x-1) \quad \therefore y = -x + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 $(3, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(3) = 3$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 2 = 3(x-3) \quad \therefore y = 3x - 7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$x = 2, y = -1$$

따라서 교점의 좌표는 $(2, -1)$ 이므로

$$a = 2, b = -1$$

$$\therefore a + b = 1$$

2 답 ③

$$f(x) = -x^3 + ax + 3 \text{이라 하면 } f'(x) = -3x^2 + a$$

곡선 $y = f(x)$ 가 점 $(1, 4)$ 를 지나므로 $f(1) = 4$ 에서

$$-1 + a + 3 = 4 \quad \therefore a = 2$$

점 $(1, 4)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 4 = -(x-1) \quad \therefore y = -x + 5$$

따라서 $b = -1, c = 5$ 이므로

$$abc = -10$$

3 답 $(-3, 19)$

$$f(x) = -x^3 - x^2 + x + 4 \text{라 하면 } f'(x) = -3x^2 - 2x + 1$$

점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = -4$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 3 = -4(x-1) \quad \therefore y = -4x + 7$$

곡선 $y = -x^3 - x^2 + x + 4$ 와 접선 $y = -4x + 7$ 의 교점의 x 좌표는

$$-x^3 - x^2 + x + 4 = -4x + 7 \text{에서}$$

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0, (x+3)(x-1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 점 P의 좌표는 $(-3, 19)$ 이다.

4 답 13

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x+3) - 5}{x^2 - 1} = 2 \text{에서 } x \rightarrow -1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극한값이}$$

존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} \{f(x+3) - 5\} = 0 \text{이므로 } f(2) = 5$$

$x+3=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1$ 일 때 $t \rightarrow 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x+3) - 5}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x+3) - f(2)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t) - f(2)}{(t-2)(t-4)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t) - f(2)}{t-2} \times \lim_{t \rightarrow 2} \frac{1}{t-4} \\ &= -\frac{1}{2} f'(2) \end{aligned}$$

따라서 $-\frac{1}{2}f'(2)=2$ 이므로 $f'(2)=-4$

점 (2, 5)에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-4$ 이므로 접선의 방정식은 $y-5=-4(x-2)$ $\therefore y=-4x+13$

따라서 구하는 y 절편은 13이다.

5 답 ⑤

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (0, 0)에서의 접선의 기울기는 $f'(0)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y=f'(0)x \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$g(x)=(x+1)f(x)$ 라 하면 점 (1, 4)가 곡선 $y=g(x)$ 위의 점이므로 $g(1)=4$ 에서

$$2f(1)=4 \quad \therefore f(1)=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$g'(x)=f(x)+(x+1)f'(x)$ 이므로 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 (1, 4)에서의 접선의 기울기는

$$g'(1)=f(1)+2f'(1)=2+2f'(1) \quad (\because \textcircled{㉡})$$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 (1, 4)에서의 접선의 방정식은

$$y-4=\{2+2f'(1)\}(x-1)$$

$$\therefore y=\{2+2f'(1)\}x+2-2f'(1) \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

두 직선 ㉠, ㉢이 일치하므로

$$f'(0)=2+2f'(1), 0=2-2f'(1)$$

$$\therefore f'(1)=1, f'(0)=4 \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

$f(0)=0$ 이므로 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$\textcircled{㉠}\text{에서 } a+b+c=2$$

$$\textcircled{㉢}\text{에서 } 3a+2b+c=1, c=4$$

$$\therefore a+b=-2, 3a+2b=-3$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=1, b=-3$

따라서 $f'(x)=3x^2-6x+4$ 이므로

$$f'(-2)=12+12+4=28$$

6 답 16

$$f(x)=x^3+2x+1\text{이라 하면 } f'(x)=3x^2+2$$

$$\text{점 } (-1, -2)\text{에서의 접선의 기울기는 } f'(-1)=5$$

따라서 점 $(-1, -2)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{5}$ 이므로 직선의 방정식은

$$y+2=-\frac{1}{5}(x+1) \quad \therefore x+5y+11=0$$

따라서 $a=5, b=11$ 이므로

$$a+b=16$$

7 답 10

$$f(x)=-x^2+3x+1\text{이라 하면 } f'(x)=-2x+3$$

직선 $y=-\frac{1}{5}x+1$ 에 수직인 직선의 기울기는 5이므로 접점의 좌표를 $(t, -t^2+3t+1)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 5이다.

$$f'(t)=5\text{에서}$$

$$-2t+3=5 \quad \therefore t=-1$$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, -3)$ 이므로 접선의 방정식은 $y+3=5(x+1)$

$$\therefore y=5x+2$$

따라서 $a=5, b=2$ 이므로

$$ab=10$$

8 답 $\frac{32\sqrt{5}}{5}$

$$f(x)=x^3-10x-4\text{라 하면 } f'(x)=3x^2-10$$

접점의 좌표를 $(t, t^3-10t-4)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 2이므로 $f'(t)=2$ 에서

$$3t^2-10=2, t^2=4$$

$$\therefore t=-2 \text{ 또는 } t=2$$

따라서 접점의 좌표는 $(-2, 8)$ 또는 $(2, -16)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-8=2(x+2) \text{ 또는 } y+16=2(x-2)$$

$$\therefore 2x-y+12=0 \text{ 또는 } 2x-y-20=0$$

따라서 두 접선 사이의 거리는 직선 $2x-y+12=0$ 위의 점

$(-6, 0)$ 과 직선 $2x-y-20=0$ 사이의 거리와 같으므로

$$\frac{|-12-20|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{32\sqrt{5}}{5}$$

9 답 ④

$$f(x)=x^3+3\text{이라 하면 } f'(x)=3x^2$$

접점의 좌표를 (t, t^3+3) 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=3t^2\text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(t^3+3)=3t^2(x-t)$$

$$\therefore y=3t^2x-2t^3+3 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이 직선이 점 (0, 1)을 지나므로

$$1=-2t^3+3, t^3=1$$

$$\therefore t=1 \quad (\because t\text{는 실수})$$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$$y=3x+1$$

따라서 $a=3, b=1$ 이므로

$$a+2b=5$$

10 답 2

$$f(x)=-x^4-3\text{이라 하면 } f'(x)=-4x^3$$

접점의 좌표를 $(t, -t^4-3)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t)=-4t^3\text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y-(-t^4-3)=-4t^3(x-t)$$

$$\therefore y=-4t^3x+3t^4-3$$

이 직선이 점 (0, 0)을 지나므로

$$0=3t^4-3, t^4=1$$

$$(t+1)(t-1)(t^2+1)=0$$

$$\therefore t=-1 \text{ 또는 } t=1 \quad (\because t\text{는 실수})$$

따라서 접점의 좌표는 $(-1, -4)$ 또는 $(1, -4)$ 이므로

$$\overline{AB}=1-(-1)=2$$

11 답 ④

$$f(x) = -x^2 - 2x + a \text{라 하면 } f'(x) = -2x - 2$$

접점의 좌표를 $(t, -t^2 - 2t + a)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = -2t - 2 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - (-t^2 - 2t + a) = (-2t - 2)(x - t)$$

$$\therefore y = (-2t - 2)x + t^2 + a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g(x) = x^2 - 2x - 3 \text{이라 하면 } g'(x) = 2x - 2$$

$$\text{점 } (-1, 0) \text{에서의 접선의 기울기는 } g'(-1) = -4$$

$$f'(t) = g'(-1) \text{이므로 } -2t - 2 = -4 \quad \therefore t = 1$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } y = -4x + 1 + a$$

이 직선이 점 $(2, -3)$ 을 지나므로

$$-3 = -8 + 1 + a \quad \therefore a = 4$$

12 답 1

$$f(x) = x^3 + a, g(x) = bx^2 - 6 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2, g'(x) = 2bx$$

(i) $x=2$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(2)=g(2)$ 에서

$$8 + a = 4b - 6 \quad \therefore a - 4b = -14 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x=2$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(2) = g'(2) \text{에서 } 12 = 4b \quad \therefore b = 3$$

$b=3$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a - 12 = -14 \quad \therefore a = -2$$

$$\therefore a + b = 1$$

13 답 ①

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6, g(x) = -x^2 + 4x - 2 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x, g'(x) = -2x + 4$$

두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 공통인 접선을 갖는다고 하면

(i) $x=t$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$ 에서

$$t^3 - 3t^2 + 6 = -t^2 + 4t - 2$$

$$t^3 - 2t^2 - 4t + 8 = 0, (t+2)(t-2)^2 = 0$$

$$\therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 2$$

(ii) $x=t$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(t) = g'(t) \text{에서 } 3t^2 - 6t = -2t + 4$$

$$3t^2 - 4t - 4 = 0, (3t+2)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } t = 2$$

(i), (ii)에서 $t=2$

따라서 접점의 좌표는 $(2, 2)$ 이고 접선의 기울기는 0이므로 공통인 접선의 방정식은

$$y - 2 = 0 \times (x - 2) \quad \therefore y = 2$$

14 답 ①

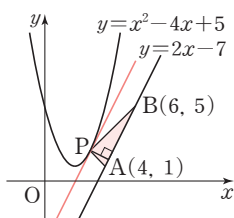
삼각형 PAB의 넓이가 최소가 될 때는

곡선 $y = x^2 - 4x + 5$ 에 접하고 직선

$y = 2x - 7$ 에 평행한 접선의 접점이 P일 때이다.

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 2x - 4$$



점 P의 좌표를 $(t, t^2 - 4t + 5)$ 라 하면 점 P에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(t) = 2$ 에서

$$2t - 4 = 2 \quad \therefore t = 3$$

따라서 점 P의 좌표는 $(3, 2)$ 이므로 점 P와 직선 $y = 2x - 7$, 즉

$2x - y - 7 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|6 - 2 - 7|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$AB = \sqrt{(6-4)^2 + (5-1)^2} = 2\sqrt{5}$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{3\sqrt{5}}{5} = 3$$

15 답 $\frac{\sqrt{26}}{5}$

$$f(x) = x^3 + x^2 - 2 \text{라 하면 } f'(x) = 3x^2 + 2x$$

$$\text{점 } (1, 0) \text{에서의 접선의 기울기는 } f'(1) = 5$$

원의 중심이 y 축 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(0, a)$ 라 하면 두 점 $(1, 0), (0, a)$ 를 지나는 직선은 점 $(1, 0)$ 에서의 접선과 서로 수직이다.

$$\text{따라서 } -\frac{a}{1} \times 5 = -1 \text{이므로 } a = \frac{1}{5}$$

이때 원의 반지름의 길이는 두 점 $(1, 0), (0, \frac{1}{5})$ 사이의 거리와 같으므로

$$\sqrt{(-1)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{5}$$

16 답 $\frac{2}{3}$

함수 $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ 는 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$ 에서 미분가능하며 $f(0) = f(2) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

$$\text{이때 } f'(x) = 3x^2 - 8x + 4 \text{이므로 } f'(c) = 0 \text{에서}$$

$$3c^2 - 8c + 4 = 0, (3c-2)(c-2) = 0$$

$$\therefore c = \frac{2}{3} (\because 0 < c < 2)$$

17 답 4

함수 $f(x) = (x+1)(x-a)$ 는 닫힌구간 $[-1, a]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, a)$ 에서 미분가능하며 $f(-1) = f(a) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(-1, a)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = (x-a) + (x+1) = 2x - a + 1$ 이고 롤의 정리를 만족시키는 c 의 값이 $\frac{3}{2}$ 이므로 $f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ 에서

$$3 - a + 1 = 0 \quad \therefore a = 4$$

18 답 ③

ㄱ. 함수 $f(x) = |x|$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않으므로 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 롤의 정리가 성립하지 않는다.

ㄴ. 함수 $f(x) = x^2 + 4x + 1$ 에서 $f(-1) = -2, f(1) = 6$ 이므로 $f(-1) \neq f(1)$

따라서 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 는 롤의 정리가 성립하지 않는다.

ㄷ. 함수 $f(x)=x^3-x+20$ 은 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능하며 $f(-1)=f(1)=20$ 이므로 롤의 정리가 성립한다.
따라서 보기의 함수 중 롤의 정리가 성립하는 것은 ㄷ이다.

19 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

함수 $f(x)=x^3+2x$ 는 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(0, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=3x^2+2$ 이므로 $\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$ 에서

$$\frac{3-0}{1-0}=3c^2+2$$

$$3c^2+2=3, c^2=\frac{1}{3}$$

$$\therefore c=\frac{\sqrt{3}}{3} (\because 0 < c < 1)$$

20 ③

함수 $f(x)=x^2-7x+2$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x)=2x-7$ 이고, $c=3$ 이므로 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ 에서

$$\frac{(b^2-7b+2)-(a^2-7a+2)}{b-a}=-1$$

$$\frac{(b^2-a^2)-7(b-a)}{b-a}=-1$$

$$\frac{(b-a)(b+a-7)}{b-a}=-1$$

$$b+a-7=-1$$

$$\therefore a+b=6$$

중단원 기출문제 2회

1 26

$f(x)=-x^3+2x^2+x+5$ 라 하면 $f'(x)=-3x^2+4x+1$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(3, a)$ 를 지나므로 $f(3)=a$ 에서

$$-27+18+3+5=a \quad \therefore a=-1$$

점 $(3, -1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=-14$ 이므로 접선의 방정식은

$$y+1=-14(x-3) \quad \therefore y=-14x+41$$

따라서 $m=-14, n=41$ 이므로

$$a+m+n=26$$

2 ②

$f(x)=x^3+ax+b$ 라 하면 $f'(x)=3x^2+a$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, 2)$ 를 지나므로 $f(1)=2$ 에서

$$1+a+b=2 \quad \therefore a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 기울기는 1이므로 $f'(1)=1$ 에서

$$3+a=1 \quad \therefore a=-2$$

이를 ①에 대입하면

$$-2+b=1 \quad \therefore b=3$$

점 $(1, 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y-2=x-1 \quad \therefore y=x+1$$

따라서 $c=1$ 이므로

$$abc=-6$$

3 ③

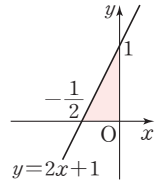
$f(x)=x^4-3x^2+1$ 이라 하면 $f'(x)=4x^3-6x$

점 $(-1, -1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y+1=2(x+1) \quad \therefore y=2x+1$$

따라서 구하는 삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}$$



4 $y=-3x+2$

㉞에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)g(x)-3\}=0$ 이므로

$$f(1)g(1)=3$$

이때 ㉞에서 $f(1)=-3$ 이므로

$$-3g(1)=3 \quad \therefore g(1)=-1$$

$h(x)=f(x)g(x)$ 라 하면

$$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)g(x)-3}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x)-h(1)}{x-1} = h'(1)$$

$$=f'(1)g(1)+f(1)g'(1)$$

$$=-6 \times (-1) + (-3) \times g'(1)$$

$$=6-3g'(1)$$

따라서 $6-3g'(1)=15$ 이므로 $g'(1)=-3$

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1, -1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$g'(1)=-3 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y+1=-3(x-1) \quad \therefore y=-3x+2$$

5 20

$f(x)=x^3-11x+k$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-11$

점 $(2, a)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=1$

따라서 점 $(2, a)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 -1 이므로 직선의 방정식은

$$y-a=-(x-2) \quad \therefore y=-x+a+2$$

이 직선이 점 (1, 4)를 지나므로

$$4 = -1 + a + 2 \quad \therefore a = 3$$

따라서 곡선 $y = f(x)$ 가 점 (2, 3)을 지나므로 $f(2) = 3$ 에서

$$8 - 22 + k = 3 \quad \therefore k = 17$$

$$\therefore a + k = 20$$

6 답 ①

$$f(x) = 5x^2 - 1 \text{이라 하면 } f'(x) = 10x$$

$$\text{점 } P(a, 5a^2 - 1) \text{에서의 접선의 기울기는 } f'(a) = 10a$$

따라서 점 P에서의 접선에 수직인 직선의 기울기는 $-\frac{1}{10a}$ 이므로
직선의 방정식은

$$y - (5a^2 - 1) = -\frac{1}{10a}(x - a)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{10a}x + 5a^2 - \frac{9}{10}$$

$$\text{따라서 } f(a) = 5a^2 - \frac{9}{10} \text{이므로}$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} f(a) = \lim_{a \rightarrow 0} \left(5a^2 - \frac{9}{10} \right) = -\frac{9}{10}$$

7 답 7

두 점 $(-2, 3)$, $(0, 7)$ 을 지나는 직선의 기울기는 $\frac{7-3}{-(-2)} = 2$ 이

므로 이 직선에 평행한 직선의 기울기는 2이다.

$$f(x) = 3x^2 - 4x - 2 \text{라 하면 } f'(x) = 6x - 4$$

접점의 좌표를 $(t, 3t^2 - 4t - 2)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 2이므로 $f'(t) = 2$ 에서

$$6t - 4 = 2 \quad \therefore t = 1$$

따라서 접점의 좌표는 $(1, -3)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y + 3 = 2(x - 1) \quad \therefore y = 2x - 5$$

따라서 $a = 2$, $b = -5$ 이므로

$$a - b = 7$$

8 답 ⑤

$$f(x) = -4x^3 + 12x^2 - 8x - 1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = -12x^2 + 24x - 8 = -12(x-1)^2 + 4$$

따라서 접선의 기울기는 $x=1$ 에서 최댓값 4를 갖는다.

이때 접점의 좌표는 $(1, -1)$ 이고 접선의 기울기는 4이므로 접선의 방정식은

$$y + 1 = 4(x - 1) \quad \therefore y = 4x - 5$$

이 직선이 점 $(k, 3)$ 을 지나므로

$$3 = 4k - 5 \quad \therefore k = 2$$

9 답 -15

$$f(x) = x^3 + ax \text{에서 } f'(x) = 3x^2 + a$$

접점의 좌표를 $(t, t^3 + at)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = 3t^2 + a \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - (t^3 + at) = (3t^2 + a)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 + a)x - 2t^3$$

이 직선이 점 $(0, 2)$ 를 지나므로

$$2 = -2t^3, t^3 = -1 \quad \therefore t = -1 (\because t \text{는 실수})$$

따라서 $x = -1$ 인 점에서의 접선의 기울기가 -1 이므로

$$f'(-1) = -1 \text{에서}$$

$$3 + a = -1 \quad \therefore a = -4$$

따라서 $f(x) = x^3 - 4x$ 이므로

$$f(a+1) = f(-3) = -27 + 12 = -15$$

10 답 ④

$$f(x) = x^3 + 4 \text{라 하면 } f'(x) = 3x^2$$

점 Q의 좌표를 $(t, t^3 + 4)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = 3t^2 \text{이므로 접선의 방정식은}$$

$$y - (t^3 + 4) = 3t^2(x - t)$$

$$\therefore y = 3t^2x - 2t^3 + 4$$

이 직선이 점 $P(-1, -1)$ 을 지나므로

$$-1 = -3t^2 - 2t^3 + 4$$

$$2t^3 + 3t^2 - 5 = 0, (t-1)(2t^2 + 5t + 5) = 0$$

$$\therefore t = 1 (\because t \text{는 실수})$$

따라서 $Q(1, 5)$ 이므로

$$\overline{PQ} = \sqrt{(1+1)^2 + (5+1)^2} = 2\sqrt{10}$$

11 답 ④

$$f(x) = -x^3 + ax + b, g(x) = x^2 + c \text{라 하면}$$

$$f'(x) = -3x^2 + a, g'(x) = 2x$$

(i) 점 $(-1, 3)$ 에서 두 곡선이 만나므로

$$f(-1) = 3 \text{에서}$$

$$1 - a + b = 3 \quad \therefore a - b = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$g(-1) = 3 \text{에서}$$

$$1 + c = 3 \quad \therefore c = 2$$

(ii) 점 $(-1, 3)$ 에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(-1) = g'(-1) \text{에서}$$

$$-3 + a = -2 \quad \therefore a = 1$$

$a = 1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$1 - b = -2 \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore a + b + c = 6$$

12 답 ①

$$f(x) = -x^2 - 1, g(x) = ax^2 - 2 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = -2x, g'(x) = 2ax$$

두 곡선의 교점의 x 좌표를 t 라 하면

(i) $x = t$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t) = g(t)$ 에서

$$-t^2 - 1 = at^2 - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x = t$ 인 점에서의 두 접선이 서로 수직이므로

$$f'(t)g'(t) = -1 \text{에서}$$

$$-2t \times 2at = -1 \quad \therefore at^2 = \frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-t^2 - 1 = \frac{1}{4} - 2 \quad \therefore t^2 = \frac{3}{4}$$

$$t^2 = \frac{3}{4} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면}$$

$$\frac{3}{4}a = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

13 답 (0, 2)

곡선 $y = -x^2 + x + 2$ 에 접하고 직선 $y = x + 5$ 에 평행한 접선의 접점이 P일 때 곡선 $y = -x^2 + x + 2$ 와 직선 $y = x + 5$ 사이의 거리가 최소가 된다.

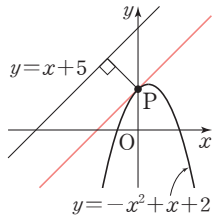
$$f(x) = -x^2 + x + 2 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = -2x + 1$$

접점의 좌표를 $(t, -t^2 + t + 2)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 1이므로 $f'(t) = 1$ 에서

$$-2t + 1 = 1 \quad \therefore t = 0$$

따라서 구하는 점 P의 좌표는 (0, 2)이다.



14 답 $\frac{27}{8}$

삼각형 PAB의 넓이가 최대가 될 때는 곡선 $y = -x^2 + 4$ 에 접하고 직선 AB에 평행한 접선의 접점이 P일 때이다.

$$f(x) = -x^2 + 4 \text{라 하면}$$

$$f'(x) = -2x$$

직선 AB의 기울기는 $\frac{3}{-1-2} = -1$ 이므로 점 P의 좌표를

$(t, -t^2 + 4)$ 라 하면 $f'(t) = -1$ 에서

$$-2t = -1 \quad \therefore t = \frac{1}{2}$$

따라서 점 P의 좌표는 $(\frac{1}{2}, \frac{15}{4})$ 이다.

직선 AB의 방정식은

$$y = -(x - 2)$$

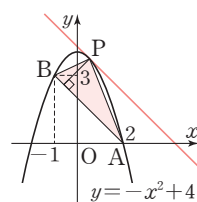
$$\therefore x + y - 2 = 0$$

점 P와 직선 AB 사이의 거리는

$$\frac{\left| \frac{1}{2} + \frac{15}{4} - 2 \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{9\sqrt{2}}{8}$$

$\overline{AB} = \sqrt{(-1-2)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 3\sqrt{2} \times \frac{9\sqrt{2}}{8} = \frac{27}{8}$$



15 답 $\frac{17}{8}$

$$f(x) = x^3 - 4x \text{라 하면 } f'(x) = 3x^2 - 4$$

원점에서의 접선의 기울기는 $f'(0) = -4$

따라서 원점에서의 접선에 수직이고 원점을 지나는 직선의 기울기는

$\frac{1}{4}$ 이므로 직선의 방정식은

$$y = \frac{1}{4}x$$

원 C의 중심의 좌표를 $(a, a^3 - 4a)$ 라 하면 직선 $y = \frac{1}{4}x$ 가 이 점을 지나므로

$$a^3 - 4a = \frac{1}{4}a$$

$$4a^3 - 17a = 0, a(4a^2 - 17) = 0$$

$$\therefore a = -\frac{\sqrt{17}}{2} \text{ 또는 } a = \frac{\sqrt{17}}{2} (\because a \neq 0)$$

따라서 원 C의 중심의 좌표는

$$\left(-\frac{\sqrt{17}}{2}, -\frac{\sqrt{17}}{8}\right) \text{ 또는 } \left(\frac{\sqrt{17}}{2}, \frac{\sqrt{17}}{8}\right)$$

이때 원 C의 반지름의 길이는 원점과 원 C의 중심 사이의 거리이므로

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{17}}{8}\right)^2} = \frac{17}{8}$$

16 답 -1

함수 $f(x) = 2x^3 - 6x - 1$ 은 닫힌구간 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 에서 미분가능하며 $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = -1$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 6x^2 - 6$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서

$$6c^2 - 6 = 0, (c+1)(c-1) = 0$$

$$\therefore c = -1 \text{ 또는 } c = 1$$

따라서 구하는 모든 실수 c 의 값의 곱은

$$-1 \times 1 = -1$$

17 답 ③

함수 $f(x) = 3(x-a)(x-b) + 2$ 는 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하며 $f(a) = f(b) = 2$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$ 인 c 가 열린구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 3\{(x-b) + (x-a)\} = 6x - 3(a+b)$ 이므로

$$f'(c) = 0 \text{에서 } 6c - 3(a+b) = 0$$

$$\therefore c = \frac{a+b}{2}$$

18 답 ②

함수 $f(x) = ax^2 + bx + 6$ 은 닫힌구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(a) \text{인 } a \text{가 열린구간 } (0, 2) \text{에 존재한다.}$$

이때 $f'(x) = 2ax + b$ 이므로 $\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(a)$ 에서

$$\frac{(4a + 2b + 6) - 6}{2 - 0} = 2a^2 + b$$

$$2a + b = 2a^2 + b, a(a-1) = 0$$

$$\therefore a = 1 (\because 0 < a < 2)$$

$$f(3) = 9 \text{에서 } 9 + 3b + 6 = 9 \quad \therefore b = -2$$

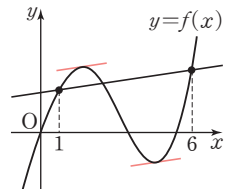
따라서 $f(x) = x^2 - 2x + 6$ 이므로

$$f(-2) = 4 + 4 + 6 = 14$$

19 답 2

닫힌구간 $[1, 6]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c 는 열린구간 $(1, 6)$ 에서 두 점 $(1, f(1)), (6, f(6))$ 을 지나는 직선에 평행한 접선을 갖는 점의 x 좌표이다.

이때 오른쪽 그림과 같이 두 점 $(1, f(1)), (6, f(6))$ 을 지나는 직선에 평행한 접선을 2개 그을 수 있으므로 구하는 실수 c 의 개수는 2이다.



20 답 ④

함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 미분가능하므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(1, 4)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 ㄴ에서 $0 \leq f'(x) \leq 3$ 이므로

$$0 \leq \frac{f(4)-f(1)}{4-1} \leq 3$$

$$0 \leq \frac{f(4)-2}{3} \leq 3 \quad (\because ㄱ)$$

$$0 \leq f(4)-2 \leq 9 \quad \therefore 2 \leq f(4) \leq 11$$

따라서 $f(4)$ 의 최댓값은 11이다.

3 답 ④

$$f(x)=x^3-(a+2)x^2+ax-1 \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2-2(a+2)x+a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[1, 2]$ 에서 감소하려면

$1 \leq x \leq 2$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로

$$f'(1) \leq 0, f'(2) \leq 0$$

$$f'(1) \leq 0 \text{에서}$$

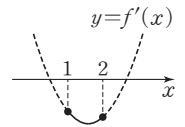
$$3-2(a+2)+a \leq 0 \quad \therefore a \geq -1 \quad \cdots \cdots ㉠$$

$$f'(2) \leq 0 \text{에서}$$

$$12-4(a+2)+a \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{4}{3} \quad \cdots \cdots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{에서 } a \geq \frac{4}{3}$$

따라서 a 의 최솟값은 $\frac{4}{3}$ 이다.



4 답 3

함수 $f(x)$ 는 $x=a, x=c, x=e$ 의 좌우에서 증가하다가 감소하므로 $x=a, x=c, x=e$ 에서 극댓값을 갖는다.

따라서 구하는 x 의 값의 개수는 3이다.

5 답 ⑤

$$f(x)=-x^3+6x^2+5 \text{에서}$$

$$f'(x)=-3x^2+12x=-3x(x-4)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=4$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	5 극소	$\nearrow$	37 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 극댓값 37, $x=0$ 에서 극솟값 5를 가지므로

$$M=37, m=5$$

$$\therefore M+m=42$$

6 답 3

$$f(x)=x^3+ax^2+bx+c \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 극댓값, $x=2$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(0)=0, f'(2)=0 \text{에서}$$

$$b=0, 12+4a+b=0$$

$$\therefore a=-3, b=0$$

$$\therefore f(x)=x^3-3x^2+c$$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 극솟값 -1을 가지므로 $f(2)=-1$ 에서

$$8-12+c=-1$$

$$\therefore c=3$$

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3$ 이므로 극댓값은

$$f(0)=3$$

05 / 도함수의 활용 (2)

26~31쪽

중단원 기출문제 1회

1 답 ③

$$f(x)=-x^3+6x^2-9x \text{에서}$$

$$f'(x)=-3x^2+12x-9=-3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[1, 3]$ 에서 증가한다.

2 답 $a \geq \frac{1}{6}$

$$f(x)=2ax^3-x^2+6ax+5 \text{에서}$$

$$f'(x)=6ax^2-2x+6a$$

$x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_1) < f(x_2)$ 가 성립하려면 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$6a > 0 \quad \therefore a > 0 \quad \cdots \cdots ㉠$$

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=1-36a^2 \leq 0$$

$$(6a+1)(6a-1) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -\frac{1}{6} \text{ 또는 } a \geq \frac{1}{6} \quad \cdots \cdots ㉡$$

$$㉠, ㉡ \text{에서 } a \geq \frac{1}{6}$$

7 답 ③

$$f(x) = x^3 - 3(a+1)x^2 + 3(a^2+2a)x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6(a+1)x + 3(a^2+2a)$$

$$= 3(x-a)\{x-(a+2)\}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x=a \text{ 또는 } x=a+2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	a	$\cdots$	$a+2$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 극댓값 2를 가지므로 $f(a)=2$ 에서

$$a^3 - 3a^2(a+1) + 3a(a^2+2a) = 2$$

$$a^3 + 3a^2 - 2 = 0$$

$$(a+1)(a^2+2a-2) = 0$$

$$\therefore a = -1 \text{ 또는 } a = -1 \pm \sqrt{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

한편 $f(3) < 0$ 에서

$$27 - 27(a+1) + 9(a^2+2a) < 0$$

$$a(a-1) < 0 \quad \therefore 0 < a < 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } a = -1 + \sqrt{3}$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 6x \text{이므로}$$

$$f(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 0$$

8 답 -1

$y=f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 0, 2이므로 주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

$$f(x) = -2x^3 + ax^2 + bx + c \text{에서}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 2ax + b$$

$$f'(0)=0, f'(2)=0 \text{에서}$$

$$b=0, -24+4a+b=0$$

$$\therefore a=6, b=0$$

$$\therefore f(x) = -2x^3 + 6x^2 + c$$

$$\text{함수 } f(x) \text{는 } x=0 \text{에서 극솟값 } -7 \text{을 가지므로 } f(0)=-7 \text{에서}$$

$$c=-7$$

$$\therefore a+b+c=-1$$

9 답 ②

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

따라서 보기에서 함수 $f(x)$ 가 증가하는 구간은 ㄴ, ㄹ이다.

10 답 ①

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

11 답 ⑤

$$f(x) = x^3 + ax^2 - (a-6)x + 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - (a-6)$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 + 3(a-6) \leq 0$$

$$a^2 + 3a - 18 \leq 0, (a+6)(a-3) \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq a \leq 3$$

따라서 정수 a 는 -6, -5, -4, ..., 3의 10개이다.

12 답 25

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + ax \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + a$$

함수 $f(x)$ 가 $x < -2$ 에서 극솟값을 갖고,

$x > -2$ 에서 극댓값을 가지려면 이차방정식

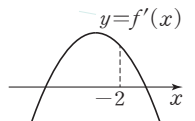
$f'(x)=0$ 의 서로 다른 두 실근 중 한 근은 -2

보다 작고, 다른 한 근은 -2보다 커야 하므로

$$f'(-2) > 0 \text{에서}$$

$$-12 - 12 + a > 0 \quad \therefore a > 24$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 25이다.



13 답 -5

$$f(x) = x^3 - (a+2)x^2 + 3ax + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2(a+2)x + 3a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-1, 2)$ 에서 극댓값과 극

솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이

$-1 < x < 2$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야

한다.

(i) 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (a+2)^2 - 9a > 0$$

$$a^2 - 5a + 4 > 0, (a-1)(a-4) > 0$$

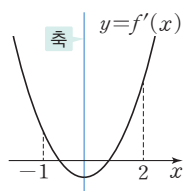
$$\therefore a < 1 \text{ 또는 } a > 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) $f'(-1) > 0$ 이어야 하므로

$$3 + 2(a+2) + 3a > 0 \quad \therefore a > -\frac{7}{5} \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$f'(2) > 0$ 이어야 하므로

$$12 - 4(a+2) + 3a > 0 \quad \therefore a < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$



(iii) $y=f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=\frac{a+2}{3}$ 이므로

$$-1 < \frac{a+2}{3} < 2 \quad \therefore -5 < a < 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$\textcircled{A} \sim \textcircled{B} \text{에서 } -\frac{7}{5} < a < 1$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{7}{5}, \beta = 1 \text{이므로}$$

$$5a + 2\beta = -7 + 2 = -5$$

14 답 $a < -8$ 또는 $a > 8$

$$f(x) = 3x^4 + ax^3 + 6x^2 - 5 \text{에서}$$

$$f'(x) = 12x^3 + 3ax^2 + 12x = 3x(4x^2 + ax + 4)$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 이차방정식 $4x^2 + ax + 4 = 0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이때 $x=0$ 은 이차방정식 $4x^2 + ax + 4 = 0$ 의 근이 아니므로 이차방정식 $4x^2 + ax + 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 64 > 0$$

$$(a+8)(a-8) > 0 \quad \therefore a < -8 \text{ 또는 } a > 8$$

15 답 ⑤

$$f(x) = -x^4 + 8x^2 + 7 \text{에서}$$

$$f'(x) = -4x^3 + 16x = -4x(x+2)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \quad (\because -3 \leq x \leq 1)$$

구간 $[-3, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	...	-2	...	0	...	1
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	23 극대	$\searrow$	7 극소	$\nearrow$	14

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 최댓값 23, $x = -3$ 에서 최솟값 -2를 가지므로

$$M = 23, m = -2$$

$$\therefore M - m = 25$$

16 답 -17

$$x+1=t \text{로 놓으면 } -1 \leq x \leq 3 \text{에서}$$

$$0 \leq t \leq 4$$

$$g(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 5 \text{라 하면}$$

$$g'(t) = 3t^2 - 6t - 9 = 3(t+1)(t-3)$$

$$g'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=3 \quad (\because 0 \leq t \leq 4)$$

$0 \leq t \leq 4$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	3	...	4
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$	5	$\searrow$	-22 극소	$\nearrow$	-15

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t=0$ 에서 최댓값 5, $t=3$ 에서 최솟값 -22를 가지므로 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은

$$5 + (-22) = -17$$

17 답 -1

$$f(x) = -x^3 - 3x^2 + 9x + a \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 - 6x + 9 = -3(x+3)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \quad (\because -1 \leq x \leq 2)$$

구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$a-11$	$\nearrow$	$a+5$ 극대	$\searrow$	$a-2$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $a+5$, $x=-1$ 에서 최솟값 $a-11$ 을 가지므로

$$a+5=10, a-11=m \quad \therefore a=5, m=-6$$

$$\therefore a+m=-1$$

18 답 4

점 A의 x 좌표를 a 라 하면

$$A(a, -a^2+3) \text{ (단, } 0 < a < \sqrt{3})$$

직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a) = 2a(-a^2+3) = -2a^3+6a$$

$$\therefore S'(a) = -6a^2+6 = -6(a+1)(a-1)$$

$$S'(a)=0 \text{인 } a \text{의 값은 } a=1 \quad (\because 0 < a < \sqrt{3})$$

$0 < a < \sqrt{3}$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	1	...	$\sqrt{3}$
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	4 극대	$\searrow$	

따라서 직사각형 ABCD의 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 4이다.

19 답 27

직육면체의 밑면인 정사각형의 한 변의 길이를 x , 직육면체의 높이를 y 라 하면 모든 모서리의 길이의 합이 36이므로

$$8x + 4y = 36 \quad \therefore y = 9 - 2x$$

$$\text{이때 } x > 0, 9 - 2x > 0 \text{이므로 } 0 < x < \frac{9}{2}$$

직육면체의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = x^2y = x^2(9-2x) = 9x^2 - 2x^3$$

$$\therefore V'(x) = 18x - 6x^2 = 6x(3-x)$$

$$V'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=3 \quad (\because 0 < x < \frac{9}{2})$$

$0 < x < \frac{9}{2}$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	3	...	$\frac{9}{2}$
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		$\nearrow$	27 극대	$\searrow$	

따라서 직육면체의 부피 $V(x)$ 의 최댓값은 27이다.

20 답 ⑤

오른쪽 그림과 같이 원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면

$$r^2 = 144 - h^2 \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $h > 0$, $144 - h^2 > 0$ 이므로

$$0 < h < 12$$

원뿔의 부피를 $V(h)$ 라 하면

$$\begin{aligned} V(h) &= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(144 - h^2)h \\ &= \frac{1}{3}\pi(144h - h^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore V'(h) &= \frac{1}{3}\pi(144 - 3h^2) \\ &= -\pi(h + 4\sqrt{3})(h - 4\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$V'(h) = 0$ 인 h 의 값은 $h = 4\sqrt{3}$ ($\because 0 < h < 12$)

$0 < h < 12$ 에서 함수 $V(h)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

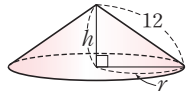
h	0	...	$4\sqrt{3}$	...	12
$V'(h)$		+	0	-	
$V(h)$		↗	극대	↘	

따라서 원뿔의 부피 $V(h)$ 가 최대가 되도록 하는 원뿔의 높이는 $h = 4\sqrt{3}$

이를 ㉠에 대입하면

$$r^2 = 144 - 48 = 96 \quad \therefore r = 4\sqrt{6} \quad (\because r > 0)$$

$$\therefore r : h = 4\sqrt{6} : 4\sqrt{3} = \sqrt{2} : 1$$



중단원 기출문제 2회

1 답 ②

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 1$ 또는 $x = 4$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	11	↘	-16	↗

따라서 함수 $f(x)$ 가 감소하는 구간은 $[1, 4]$ 이므로

$$a = 1, b = 4$$

$$\therefore b - a = 3$$

다른 풀이

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6(x-1)(x-4)$$

이때 $f'(x) \leq 0$ 인 구간에서 함수 $f(x)$ 가 감소하므로

$$6(x-1)(x-4) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq x \leq 4$$

따라서 $a = 1, b = 4$ 이므로

$$b - a = 3$$

2 답 ②

$$f(x) = x^3 + ax^2 + ax - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3a \leq 0$$

$$a(a-3) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq 3$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, 3의 4개이다.

3 답 1

$$f(x) = -x(x^2 - 3ax + 3a) = -x^3 + 3ax^2 - 3ax \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6ax - 3a$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하고 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 음수이므로 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9a^2 - 9a \leq 0$$

$$a(a-1) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq 1$$

따라서 a 의 최댓값은 1이다.

4 답 $a \geq 3$

$$f(x) = -x^3 + 2ax^2 - 3ax + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 4ax - 3a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[2, 3]$ 에서 증가하려면

$2 \leq x \leq 3$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이어야 하므로

$$f'(2) \geq 0, f'(3) \geq 0$$

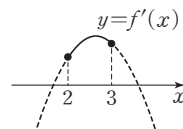
$$f'(2) \geq 0 \text{에서}$$

$$-12 + 8a - 3a \geq 0 \quad \therefore a \geq \frac{12}{5}$$

$$f'(3) \geq 0 \text{에서}$$

$$-27 + 12a - 3a \geq 0 \quad \therefore a \geq 3$$

㉠, ㉡에서 $a \geq 3$



5 답 ②

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 16x + 11 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16 = 4(x+1)(x-2)^2$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	↘	0 극소	↗	27	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극솟값 0을 가지므로

$$a = -1, m = 0$$

$$\therefore a + m = -1$$

6 답 ①

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x = -1$ 에서 극댓값 8을 가지므로

$$f'(-1) = 0, f(-1) = 8$$

$$f'(-1) = 0 \text{에서 } 6 - 2a + b = 0$$

$$\therefore 2a - b = 6 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(-1) = 8 \text{에서 } -2 + a - b + 1 = 8$$

$$\therefore a - b = 9 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -3, b = -12$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1,$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	2	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	8 극대	$\searrow$	-19 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = 2$ 에서 극솟값 -19를 갖는다.

7 답 -8

(㉠)에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 원점을 지나므로

$$f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx \text{ (} a, b, c \text{는 상수)라 하면}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c$$

(㉡)에서 $f(2+x) = f(2-x)$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 직선 $x = 2$ 에 대하여 대칭이고, (㉢)에서 $x = 1$ 에서 극소이므로 $x = 3$ 에서 극소이고 $x = 2$ 에서 극대이다.

따라서 $f'(1) = 0, f'(2) = 0, f'(3) = 0$ 이고, $f'(x)$ 의 최고차항의 계수가 4이므로

$$f'(x) = 4(x-1)(x-2)(x-3) = 4x^3 - 24x^2 + 44x - 24$$

$$\text{즉, } 3a = -24, 2b = 44, c = -24 \text{이므로}$$

$$a = -8, b = 22, c = -24$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x \text{이므로 극댓값은}$$

$$f(2) = 16 - 64 + 88 - 48 = -8$$

8 답 4

$y = f'(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표가 -1, 1이므로 주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-1	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \text{ (} a, b, c \text{는 상수)라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(-1) = 0, f'(1) = 0 \text{에서}$$

$$3 - 2a + b = 0, 3 + 2a + b = 0$$

$$\therefore 2a - b = 3, 2a + b = -3$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 0, b = -3$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x + c$$

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극솟값 0을 가지므로 $f(1) = 0$ 에서

$$1 - 3 + c = 0 \quad \therefore c = 2$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ 이고 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$f(-1) = -1 + 3 + 2 = 4$$

9 답 ⑤

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-4	$\dots$	-3	$\dots$	1	$\dots$	3	$\dots$	4
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	

① 함수 $f(x)$ 는 $-1 \leq x \leq 1$ 에서 감소한다.

② 함수 $f(x)$ 는 $2 \leq x \leq 3$ 에서 증가하고, $3 \leq x \leq 4$ 에서 감소한다.

③ 함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 극대이다.

④ 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극소이다.

⑤ 함수 $f(x)$ 는 $x = -3, x = 1, x = 3$ 에서 극값을 가지므로 극값을 갖는 x 의 값은 3개이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

10 답 ①

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	-2	$\dots$	0	$\dots$
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$		$\nearrow$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ①이다.

11 답 ②

$$f(x) = -x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + 7 \text{에서}$$

$$f'(x) = -4x^3 + 8x^2 - 4x = -4x(x-1)^2$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	0	$\dots$	1	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	7 극대	$\searrow$	$\frac{20}{3}$	$\searrow$

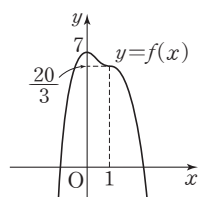
따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극값을 갖지 않는다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 감소한다.

ㄷ. 함수 $y = f(x)$ 의 치역은 $\{y | y \leq 7\}$ 이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.



12 답 3

$$f(x)=3x^3+2(a+1)x^2+4x+11 \text{에서}$$

$$f'(x)=9x^2+4(a+1)x+4$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=4(a+1)^2-36>0$$

$$a^2+2a-8>0, (a+4)(a-2)>0$$

$$\therefore a<-4 \text{ 또는 } a>2$$

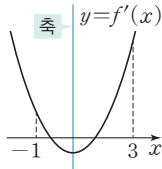
따라서 자연수 a 의 최솟값은 3이다.

13 답 $4<a<\frac{25}{6}$

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3-(a-2)x^2+4x \text{에서}$$

$$f'(x)=x^2-2(a-2)x+4$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 극대인 점과 극소인 점이 모두 두 직선 $x=-1$, $x=3$ 사이에 존재하려면 함수 $f(x)$ 가 구간 $(-1, 3)$ 에서 극댓값과 극솟값을 모두 가져야 하므로 이차방정식 $f'(x)=0$ 이 $-1<x<3$ 에서 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=(a-2)^2-4>0$$

$$a^2-4a>0, a(a-4)>0$$

$$\therefore a<0 \text{ 또는 } a>4 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

(ii) $f'(-1)>0$ 이어야 하므로

$$1+2(a-2)+4>0 \quad \therefore a>-\frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$$f'(3)>0 \text{이어야 하므로}$$

$$9-6(a-2)+4>0 \quad \therefore a<\frac{25}{6} \quad \cdots \cdots \textcircled{9}$$

(iii) $y=f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $x=a-2$ 이므로

$$-1<a-2<3 \quad \therefore 1<a<5 \quad \cdots \cdots \textcircled{10}$$

$$\textcircled{7} \sim \textcircled{10} \text{에서 } 4<a<\frac{25}{6}$$

14 답 $\frac{1}{4}$

$$f(x)=-x^4-2(a-1)x^2-4ax+1 \text{에서}$$

$$f'(x)=-4x^3-4(a-1)x-4a$$

$$=-4(x+1)(x^2-x+a)$$

함수 $f(x)$ 가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이차방정식 $x^2-x+a=0$ 의 한 근이 -1 이거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2-x+a=0$ 의 한 근이 -1 인 경우

$$1+1+a=0 \quad \therefore a=-2$$

(ii) 이차방정식 $x^2-x+a=0$ 이 중근 또는 허근을 갖는 경우

이차방정식 $x^2-x+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=1-4a\leq 0 \quad \therefore a\geq \frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서

$$a=-2 \text{ 또는 } a\geq \frac{1}{4}$$

따라서 양수 a 의 최솟값은 $\frac{1}{4}$ 이다.

15 답 $-\frac{2}{3}$

$$f(x)=-\frac{2}{3}x^3+ax^2-a \text{에서}$$

$$f'(x)=-2x^2+2ax=-2x(x-a)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=a$$

$0<a<2$ 이므로 구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	a	...	2
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	$-a$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}a^3-a$ 극대	$\searrow$	$3a-\frac{16}{3}$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 최댓값 $\frac{1}{3}a^3-a$ 를 가지므로

$$g(a)=\frac{1}{3}a^3-a$$

$$\therefore g'(a)=a^2-1=(a+1)(a-1)$$

$$g'(a)=0 \text{인 } a \text{의 값은}$$

$$a=1 (\because 0<a<2)$$

$0<a<2$ 에서 함수 $g(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	1	...	2
$g'(a)$		-	0	+	
$g(a)$		$\searrow$	$-\frac{2}{3}$ 극소	$\nearrow$	

따라서 함수 $g(a)$ 는 $a=1$ 에서 최솟값 $-\frac{2}{3}$ 를 갖는다.

16 답 8

$$f(x)=x^3-3x+a \text{에서}$$

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

구간 $[-2, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$a-2$	$\nearrow$	$a+2$ 극대	$\searrow$	$a-2$ 극소	$\nearrow$	$a+2$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 또는 $x=2$ 에서 최댓값 $a+2$, $x=-2$ 또는 $x=1$ 에서 최솟값 $a-2$ 를 가지므로

$$(a+2)(a-2)=60, a^2-64=0$$

$$(a+8)(a-8)=0$$

$$\therefore a=8 (\because a>0)$$

17 답 90

점 P의 좌표를 (t, t^2+1) 이라 하면

$$\overline{OP}^2 + \overline{AP}^2 = t^2 + (t^2+1)^2 + (t-10)^2 + (t^2+1)^2 \\ = 2t^4 + 6t^2 - 20t + 102$$

$f(t) = 2t^4 + 6t^2 - 20t + 102$ 라 하면

$$f'(t) = 8t^3 + 12t - 20 = 4(t-1)(2t^2+2t+5)$$

$f'(t) = 0$ 인 t 의 값은 $t=1$ ($\because t$ 는 실수)

함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	1	...
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$	$\searrow$	90 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=1$ 에서 최솟값 90을 가지므로 $\overline{OP}^2 + \overline{AP}^2$ 의 최솟값은 90이다.

18 답 252 π

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면

$$r+h=9 \quad \therefore h=9-r$$

이때 $r>0$, $9-r>0$ 이므로

$$0<r<9$$

원기둥의 부피를 $V(r)$ 라 하면

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 (9-r) \\ = \pi (9r^2 - r^3)$$

$$\therefore V'(r) = \pi (18r - 3r^2) = 3\pi r(6-r)$$

$$V'(r) = 0 \text{인 } r \text{의 값은 } r=6 \quad (\because 0<r<9)$$

$0<r<9$ 에서 함수 $V(r)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	...	6	...	9
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		$\nearrow$	108 π 극대	$\searrow$	

따라서 원기둥의 부피 $V(r)$ 는 $r=6$ 에서 최댓값 108 π 를 갖는다.

이때 밑면의 반지름의 길이가 6인 반구의 부피는

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3} \pi \times 6^3 \right) = 144\pi$$

따라서 구하는 전체 입체도형의 부피는

$$108\pi + 144\pi = 252\pi$$

중! 다시보기

$$\text{반지름의 길이가 } r \text{인 구의 부피} \Rightarrow \frac{4}{3}\pi r^3$$

19 답 ①

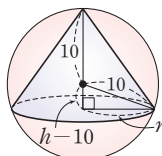
오른쪽 그림과 같이 구에 내접하는 원뿔의 밑면의

반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면

$$r^2 = 10^2 - (h-10)^2 = 20h - h^2$$

이때 $h-10>0$, $h<20$ 이므로

$$10<h<20$$



원뿔의 부피를 $V(h)$ 라 하면

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi (20h - h^2)h \\ = \frac{1}{3}\pi (20h^2 - h^3)$$

$$\therefore V'(h) = \frac{1}{3}\pi (40h - 3h^2) = \frac{1}{3}\pi h(40-3h)$$

$$V'(h) = 0 \text{인 } h \text{의 값은 } h = \frac{40}{3} \quad (\because 10<h<20)$$

$10<h<20$ 에서 함수 $V(h)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	10	...	$\frac{40}{3}$	...	20
$V'(h)$		+	0	-	
$V(h)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 원뿔의 부피 $V(h)$ 가 최대인 원뿔의 높이는 $\frac{40}{3}$ 이다.

20 답 30 kg

제품 A를 x kg 판매하여 얻은 이익을 $g(x)$ 원이라 하면

$$g(x) = 5000x - f(x) \\ = -2x^3 + 90x^2 - 2000 \quad (\text{단, } x>0)$$

$$\therefore g'(x) = -6x^2 + 180x = -6x(x-30)$$

$$g'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=30 \quad (\because x>0)$$

$x>0$ 에서 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	30	...
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x=30$ 일 때 최대이므로 이익을 최대하기 위해 하루에 생산해야 할 제품 A는 30 kg이다.

06 / 도함수의 활용 (3)

32~37쪽

중단원 기출문제 1회

1 답 2

$f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ 이라 하면

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

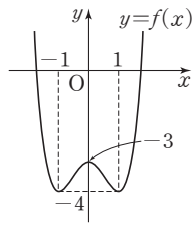
$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$	-3 극대	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



2 답 ③

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 - k = 0 \text{에서}$$

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = k$$

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

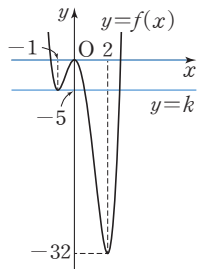
x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	-5 극소	/	0 극대	\	-32 극소	/

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$k = -5 \text{ 또는 } k = 0$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-5 + 0 = -5$$



3 답 ④

$$2x^3 - 3x^2 - 12x + k = 0 \text{에서}$$

$$2x^3 - 3x^2 - 12x = -k$$

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

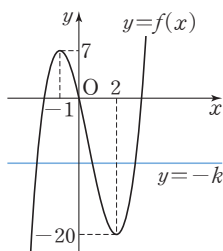
x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	7 극대	\	-20 극소	/

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-k$ 의 교점의 x 좌표가 두 개는 양수이고 한 개는 음수이려면

$$-20 < -k < 0$$

$$\therefore 0 < k < 20$$

따라서 정수 k 는 1, 2, 3, ..., 19의 19개 이다.



4 답 ③

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x+1)(x-3)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 중근과 다른 한 실근을 가지려면

$$f(-1)f(3)=0 \text{이어야 하므로}$$

$$(-k+10)(-k-54)=0$$

$$\therefore k=10 \quad (\because k>0)$$

5 답 -17 < k < 15

주어진 두 곡선이 서로 다른 세 점에서 만나려면 방정식

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 12 = -x^2 + 4x + k, \text{ 즉 } x^3 + 3x^2 - 9x - 12 - k = 0 \text{이}$$

서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 12 - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -3 \text{ 또는 } x = 1$$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$$f(-3)f(1) < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$(-k+15)(-k-17) < 0$$

$$(k+17)(k-15) < 0$$

$$\therefore -17 < k < 15$$

6 답 ③

$$y = x^3 + kx \text{에서 } y' = 3x^2 + k$$

점 (2, 4)에서 곡선 $y = x^3 + kx$ 에 그은 접선의 점점의 좌표를

$$(t, t^3 + kt) \text{라 하면 접선의 방정식은}$$

$$y - (t^3 + kt) = (3t^2 + k)(x - t)$$

이 직선이 점 (2, 4)를 지나므로

$$4 - (t^3 + kt) = (3t^2 + k)(2 - t)$$

$$\therefore t^3 - 3t^2 - k + 2 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

점 (2, 4)에서 주어진 곡선에 오직 하나의 접선을 그을 수 있으려면 t 에 대한 삼차방정식 ①이 오직 하나의 실근을 가져야 한다.

$$f(t) = t^3 - 3t^2 - k + 2 \text{라 하면}$$

$$f'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t-2)$$

$$f'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=0 \text{ 또는 } t=2$$

삼차방정식 $f(t)=0$ 이 오직 하나의 실근을 가지려면 $f(0)f(2) > 0$

이어야 하므로

$$(-k+2)(-k-2) > 0$$

$$(k+2)(k-2) > 0$$

$$\therefore k < -2 \text{ 또는 } k > 2$$

따라서 k 의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

7 답 ⑤

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 10x + k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 6x - 10 = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 5)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \quad (\because x \text{는 실수})$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$k-6$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $k-6$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > 0$ 이 성립하려면

$$k-6 > 0 \quad \therefore k > 6$$

따라서 정수 k 의 최솟값은 7이다.

8 답 k > 28

$$f(x) > g(x) \text{에서 } f(x) - g(x) > 0$$

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{라 하면}$$

$$h(x) = 2x^3 + x + k - (9x^2 + x + 1)$$

$$= 2x^3 - 9x^2 + k - 1$$

$$\therefore h'(x) = 6x^2 - 18x = 6x(x-3)$$

$$h'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=3 (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	3	...
$h'(x)$		-	0	+
$h(x)$		$\searrow$	$k-28$ 극소	$\nearrow$

$x > 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $k-28$ 이므로 $x > 0$ 일 때,

$$h(x) = f(x) - g(x) > 0 \text{이 성립하려면}$$

$$k-28 > 0 \quad \therefore k > 28$$

9 답 ②

$$f(x) = x^3 - 3x + k^2 + k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	1	...	2
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	k^2+k+2	$\searrow$	k^2+k-2 극소	$\nearrow$	k^2+k+2

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 k^2+k-2 , 최댓값은 k^2+k+2 이므로 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때, $0 \leq f(x) \leq 4$ 가 성립하려면

$$k^2+k-2 \geq 0, \quad k^2+k+2 \leq 4$$

$$\text{즉, } k^2+k \geq 2, \quad k^2+k \leq 2 \text{이므로}$$

$$k^2+k=2, \quad k^2+k-2=0$$

$$(k+2)(k-1)=0 \quad \therefore k=-2 \text{ 또는 } k=1$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은

$$-2+1=-1$$

10 답 -7

$$f(x) = 2x^3 - 6x^2 - k + 1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 12x = 6x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

$2 < x < 3$ 일 때, $f'(x) > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 구간 $(2, 3)$ 에서 증가한다.

따라서 $2 < x < 3$ 일 때, $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f(2) \geq 0$ 이어야 하므로

$$-k-7 \geq 0 \quad \therefore k \leq -7$$

따라서 k 의 최댓값은 -7 이다.

11 답 4

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2at - 8$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t + 2a$$

$t=2$ 에서의 점 P의 가속도가 20이면

$$6 \times 2 + 2a = 20 \quad \therefore a = 4$$

12 답 -16

점 P가 원점을 지나는 순간의 위치는 0이므로

$$-t^3 + 4t^2 = 0, \quad t^2(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 4 (\because t > 0)$$

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -3t^2 + 8t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -6t + 8$$

따라서 $t=4$ 에서의 점 P의 가속도는

$$-6 \times 4 + 8 = -16$$

13 답 ⑤

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = t^2 + 9, \quad v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = 6t$$

두 점 P, Q의 속도가 같으면 $v_P = v_Q$ 에서

$$t^2 + 9 = 6t, \quad t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t-3)^2 = 0 \quad \therefore t = 3$$

$t=3$ 에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$x_P = \frac{1}{3} \times 3^3 + 9 \times 3 - 6 = 30$$

$$x_Q = 3 \times 3^2 - 7 = 20$$

따라서 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$30 - 20 = 10$$

14 답 ③

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 18t + 15$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$3t^2 - 18t + 15 = 0, \quad (t-1)(t-5) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 5$$

따라서 $\alpha = 1, \beta = 5$ 이므로

$$\beta - \alpha = 4$$

15 [답] ④

제동을 건 지 t 초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 75 - 3t^2$$

열차가 정지하는 순간의 속도는 0이므로

$$75 - 3t^2 = 0, t^2 = 25$$

$$\therefore t = 5 (\because t > 0)$$

5초 동안 열차가 움직인 거리는

$$75 \times 5 - 5^3 = 250(\text{m})$$

따라서 역으로부터 250m 떨어진 지점에서 제동을 걸어야 한다.

16 [답] -40m/s

물 로켓이 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로

$$35 + 30t - 5t^2 = 0, (t+1)(t-7) = 0$$

$$\therefore t = 7 (\because t > 0)$$

t 초 후의 물 로켓의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 30 - 10t$$

따라서 $t=7$ 에서의 물 로켓의 속도는

$$30 - 10 \times 7 = -40(\text{m/s})$$

17 [답] ②

시각 t 에서의 속도는 $x'(t)$ 이므로 위치 $x(t)$ 의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

① $x'(a)=0$ 이므로 $t=a$ 에서의 점 P의 속도는 0이다.

② $x'(c)=0$ 이고, $a < t < c$ 에서 $x'(t) < 0$ 이므로 $t=c$ 에서의 점 P의 속도는 최소가 아니다.

③ $x'(t)=0$ 이고 그 좌우에서 $x'(t)$ 의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 $0 < t < d$ 에서 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=a, t=c$ 이다.

따라서 $0 < t < d$ 에서 점 P는 운동 방향을 두 번 바꾼다.

④ $b < t < c$ 에서 $x'(t) < 0$ 이므로 점 P는 음의 방향으로 움직인다.

⑤ $x(b)=0, x(d)=0$ 이므로 $0 < t < e$ 에서 점 P는 $t=b, t=d$ 일 때 원점을 지난다.

따라서 $0 < t < e$ 에서 점 P는 원점을 두 번 지난다.

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.

18 [답] ③

학생이 t 초 동안 움직이는 거리는 $2t$ m

t 초 후 가로등의 바로 밑에서 그림자 끝

까지의 거리를 x m라 하면 오른쪽 그림에서 $\triangle ABC \sim \triangle DEC$ 이므로

$$3.4 : 1.7 = x : (x - 2t)$$

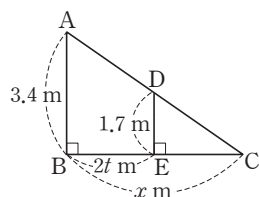
$$1.7x = 3.4x - 6.8t \quad \therefore x = 4t$$

그림자의 길이를 l m라 하면

$$l = \overline{EC} = 4t - 2t = 2t$$

$$\therefore \frac{dl}{dt} = 2$$

따라서 그림자의 길이의 변화율은 2 m/s이다.



19 [답] $13.5\pi \text{ m}^2/\text{s}$

t 초 후의 원의 반지름의 길이는 $1.5t$ m이므로 원의 넓이를 $S \text{ m}^2$ 라 하면

$$S = \pi(1.5t)^2 = 2.25\pi t^2$$

$$\therefore \frac{dS}{dt} = 4.5\pi t$$

따라서 $t=3$ 에서의 원의 넓이의 변화율은

$$4.5\pi \times 3 = 13.5\pi(\text{m}^2/\text{s})$$

20 [답] $68 \text{ cm}^3/\text{s}$

t 초 후의 사각뿔의 밑면인 정사각형의 한 변의 길이는 $(2+t)$ cm,

높이는 $(3+2t)$ cm이므로 사각뿔의 부피를 $V \text{ cm}^3$ 라 하면

$$V = \frac{1}{3}(2+t)^2(3+2t)$$

$$\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{1}{3}\{2(2+t)(3+2t) + (2+t)^2 \times 2\}$$

$$= \frac{2}{3}(2+t)\{(3+2t) + (2+t)\}$$

$$= \frac{2}{3}(2+t)(5+3t)$$

따라서 $t=4$ 에서의 사각뿔의 부피의 변화율은

$$\frac{2}{3}(2+4)(5+3 \times 4) = 68(\text{cm}^3/\text{s})$$

중단원 기출문제 2회

1 [답] 6

$$3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x - k = 0 \text{에서}$$

$$3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x = k$$

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 24x^2 - 48x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 48x - 48 = 12(x+2)(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-2 \text{ 또는 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

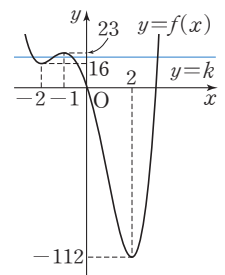
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	16 극소	$\nearrow$	23 극대	$\searrow$	-112 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가지려면 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로

$$16 < k < 23$$

따라서 정수 k 는 17, 18, 19, 20, 21, 22의 6개이다.



2 [답] ⑤

$$f(x) = x^3 - 12x + 6 \text{이라 하면}$$

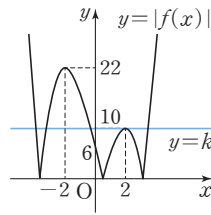
$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗ 극대	↘	↘ 극소	↗

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 주어진 방정식이 서로 다른 5개의 실근을 가지려면 함수 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 5개의 점에서 만나야 하므로 $k=10$



3 답 ②

$x^3-3x^2+3-k=0$ 에서 $x^3-3x^2+3=k$

$f(x)=x^3-3x^2+3$ 이라 하면

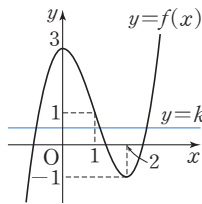
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		↗ 3 극대	↘	↘ -1 극소	↗

$f(1)=1$ 이고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표가 두 개는 1보다 크고 한 개는 1보다 작으려면 $-1 < k < 1$



따라서 $\alpha=-1, \beta=1$ 이므로

$\alpha\beta=-1$

4 답 ④

$f(x)=x^3+6x^2+9x+k$ 라 하면

$f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-3$ 또는 $x=-1$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-3)f(-1)<0$ 이어야 하므로

$k(k-4)<0 \quad \therefore 0 < k < 4$

5 답 33

$f(x)=x^3-6x^2+k$ 라 하면

$f'(x)=3x^2-12x=3x(x-4)$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=4$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 한 실근과 두 허근을 가지려면 $f(0)f(4)>0$ 이어야 하므로

$k(k-32)>0 \quad \therefore k<0 \text{ 또는 } k>32$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 33이다.

6 답 1

주어진 곡선과 직선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 방정식

$-x^3+x^2=-x+k$, 즉 $x^3-x^2-x+k=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$f(x)=x^3-x^2-x+k$ 라 하면

$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-\frac{1}{3}$ 또는 $x=1$

삼차방정식 $f(x)=0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면

$f(-\frac{1}{3})f(1)=0$ 이어야 하므로

$(k+\frac{5}{27})(k-1)=0$

$\therefore k=1 (\because k>0)$

7 답 $4 < a < 5$

$y=-x^3+4$ 에서 $y'=-3x^2$

점 $(-1, a)$ 에서 곡선 $y=-x^3+4$ 에 그은 접선의 접점의 좌표를 $(t, -t^3+4)$ 라 하면 접선의 방정식은

$y-(-t^3+4)=-3t^2(x-t)$

이 직선이 점 $(-1, a)$ 를 지나므로

$a-(-t^3+4)=-3t^2(-1-t)$

$\therefore 2t^3+3t^2-a+4=0 \quad \dots\dots ⑦$

점 $(-1, a)$ 에서 주어진 곡선에 서로 다른 세 개의 접선을 그을 수 있으려면 t 에 대한 삼차방정식 ⑦이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$f(t)=2t^3+3t^2-a+4$ 라 하면

$f'(t)=6t^2+6t=6t(t+1)$

$f'(t)=0$ 인 t 의 값은 $t=-1$ 또는 $t=0$

삼차방정식 $f(t)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가지려면

$f(-1)f(0)<0$ 이어야 하므로

$(-a+5)(-a+4)<0$

$(a-4)(a-5)<0$

$\therefore 4 < a < 5$

8 답 $k \leq -32$

$f(x) \leq g(x)$ 에서 $f(x)-g(x) \leq 0$

$h(x)=f(x)-g(x)$ 라 하면

$h(x)=-x^4+6x^2+k-(2x^4-4x^3-6x^2)$

$=-3x^4+4x^3+12x^2+k$

$\therefore h'(x)=-12x^3+12x^2+24x$

$=-12x(x+1)(x-2)$

$h'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	2	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$h(x)$		↗ $k+5$ 극대	↘	↘ k 극소	↗	↗ $k+32$ 극대	↘

함수 $h(x)$ 의 최댓값은 $k+32$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$h(x)=f(x)-g(x) \leq 0$ 이 성립하려면

$k+32 \leq 0 \quad \therefore k \leq -32$

9 답 ②

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + k \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x - 24 = 6(x+1)(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 인 } x \text{ 의 값은 } x = -1 \text{ (} \because x < 0 \text{)}$$

$x < 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\nearrow$	$k+13$ 극대	$\searrow$	

$x < 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 $k+13$ 이므로 $x < 0$ 일 때, $f(x) \leq 0$ 이 성립하려면

$$k+13 \leq 0 \quad \therefore k \leq -13$$

따라서 k 의 최댓값은 -13 이다.

10 답 4

$$x^n + n(n-3) > nx + 1 \text{ 에서}$$

$$x^n - nx + n(n-3) - 1 > 0$$

$$f(x) = x^n - nx + n(n-3) - 1 \text{ 이라 하면}$$

$$f'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$$

이때 $n \geq 2$ 이므로 $x > 1$ 일 때, $f'(x) > 0$ 이다.

즉, 함수 $f(x)$ 는 구간 $(1, \infty)$ 에서 증가한다.

따라서 $x > 1$ 일 때, $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하므로

$$1 - n + n(n-3) - 1 \geq 0$$

$$n^2 - 4n \geq 0, n(n-4) \geq 0$$

$$\therefore n \geq 4 \text{ (} \because n \geq 2 \text{)}$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

11 답 18

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 6t - 10$$

점 P의 속도가 2이면

$$6t^2 - 6t - 10 = 2, t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t-2) = 0 \quad \therefore t = 2 \text{ (} \because t > 0 \text{)}$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 6$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 P의 가속도는

$$12 \times 2 - 6 = 18$$

12 답 3

점 P의 속도를 $v(t)$ 라 하면

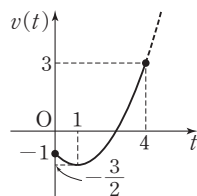
$$v(t) = x'(t) = \frac{1}{2}t^2 - t - 1 = \frac{1}{2}(t-1)^2 - \frac{3}{2}$$

$0 \leq t \leq 4$ 에서 $v(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$-\frac{3}{2} \leq v(t) \leq 3$$

시각 t 에서의 점 P의 속력은 $|v(t)|$ 이고

$0 \leq |v(t)| \leq 3$ 이므로 구하는 최댓값은 3이다.



13 답 $\frac{1}{6}$

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = 4t^3 + 2kt, v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = 8t$$

두 점 P, Q의 가속도를 각각 a_P, a_Q 라 하면

$$a_P = \frac{dv_P}{dt} = 12t^2 + 2k, a_Q = \frac{dv_Q}{dt} = 8$$

두 점 P, Q의 가속도가 같으면 $a_P = a_Q$ 에서

$$12t^2 + 2k = 8 \quad \therefore 12t^2 = 8 - 2k$$

이때 $t > 0$ 에서 $12t^2 > 0$ 이므로 두 점 P, Q의 가속도가 같아지는 순간 이 존재하려면

$$8 - 2k > 0 \quad \therefore k < 4$$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3이고 각 경우의 t^2 의 값은 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ 이므로

모든 t 의 값의 곱은

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

14 답 ④

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t - 9$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$3t^2 - 6t - 9 = 0, (t+1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 3 \text{ (} \because t > 0 \text{)}$$

시각 t 에서의 점 P의 가속도를 a 라 하면

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 6$$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의 가속도는

$$6 \times 3 - 6 = 12$$

15 답 64

선분 AB의 중점 M의 좌표를 x 라 하면

$$x = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{(t^3 - 8t^2 + 12t) + (t^3 - 10t^2 + 36t)}{2} \\ = t^3 - 9t^2 + 24t$$

시각 t 에서의 점 M의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 18t + 24$$

점 M이 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$3t^2 - 18t + 24 = 0, (t-2)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 4$$

따라서 점 M이 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=4$ 이므로 그때의 두 점 A, B의 위치는 각각

$$x_A = 4^3 - 8 \times 4^2 + 12 \times 4 = -16, x_B = 4^3 - 10 \times 4^2 + 36 \times 4 = 48$$

따라서 선분 AB의 길이는

$$48 - (-16) = 64$$

16 답 16

t 초 후의 물체의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 10 - 10t$$

물체가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이므로

$$10 - 10t = 0 \quad \therefore t = 1$$

$t=1$ 에서의 물체의 높이는
 $10+10 \times 1 - 5 \times 1^2 = 15(\text{m})$
 따라서 $a=1$, $b=15$ 이므로
 $a+b=16$

17 답 ④

시각 t 에서의 가속도는 $v'(t)$ 이므로 속도 $v(t)$ 의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.
 ㄱ. $v'(b) < 0$ 이므로 $t=b$ 에서의 점 P의 가속도는 음의 값이다.
 ㄴ. $a < t < c$ 에서 $v(t)$ 는 직선이므로 $v'(t)$ 의 값이 일정하다.
 따라서 $a < t < c$ 에서 점 P의 가속도는 일정하다.
 ㄷ. $v(t)=0$ 이고 그 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 $0 < t < e$ 에서 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=c$ 이다.
 따라서 $0 < t < e$ 에서 점 P는 운동 방향을 한 번 바꾼다.
 ㄹ. $v(a) > 0$, $v(d) < 0$ 이므로 $t=a$ 에서와 $t=d$ 에서의 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

18 답 ④

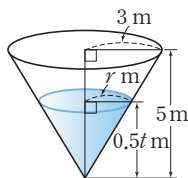
선분 AB의 길이를 l 이라 하면
 $l = |t^3 + t^2 + t - (t^2 - 2t)| = t^3 + 3t \quad (\because t > 0)$
 $\therefore \frac{dl}{dt} = 3t^2 + 3$
 따라서 $t=2$ 에서의 선분 AB의 길이의 변화율은
 $3 \times 2^2 + 3 = 15$

19 답 ②

t 초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(5+0.1t)$ cm이므로 정사각형의 넓이를 $S \text{ cm}^2$ 라 하면
 $S = (5+0.1t)^2$
 $\therefore \frac{dS}{dt} = 2(5+0.1t) \times 0.1 = 0.2(5+0.1t)$
 따라서 $t=5$ 에서의 정사각형의 넓이의 변화율은
 $0.2(5+0.1 \times 5) = 1.1(\text{cm}^2/\text{s})$

20 답 $\frac{9}{2}\pi \text{ m}^3/\text{s}$

t 초 후의 수면의 높이는 $0.5t \text{ m}$ 이므로 수면의 반지름의 길이를 $r \text{ m}$ 라 하면 오른쪽 그림에서
 $3:r=5:0.5t \quad \therefore r=0.3t$
 물의 부피를 $V \text{ m}^3$ 라 하면
 $V = \frac{\pi}{3} \times r^2 \times 0.5t = \frac{\pi}{3} \times (0.3t)^2 \times 0.5t$



$= \frac{3}{200} \pi t^3$
 $\therefore \frac{dV}{dt} = \frac{9}{200} \pi t^2$
 물탱크에 물이 가득 차는 순간의 수면의 높이는 5 m 이므로
 $0.5t=5 \quad \therefore t=10$
 따라서 $t=10$ 에서의 물의 부피의 변화율은
 $\frac{9}{200} \pi \times 10^2 = \frac{9}{2} \pi (\text{m}^3/\text{s})$

07 / 부정적분

38~43쪽

중단원 기출문제 1회

1 답 ②

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x + C \right)' \\ &= x^3 - 6x^2 + 8x + 2 \\ \therefore f(1) &= 1 - 6 + 8 + 2 = 5 \end{aligned}$$

2 답 ⑤

$$\begin{aligned} f(x) &= F'(x) = (ax^3 - x^2)' \\ &= 3ax^2 - 2x \\ f(1) &= 4 \text{에서} \\ 3a - 2 &= 4 \quad \therefore a = 2 \\ \text{따라서 } f(x) &= 6x^2 - 2x \text{이므로} \\ f(2) &= 24 - 4 = 20 \end{aligned}$$

3 답 16

$$\begin{aligned} f(x) &= \int xg(x) dx \text{에서} \\ f'(x) &= xg(x) \\ \frac{d}{dx}\{f(x) - g(x)\} &= 6x^3 - 2x \text{에서} \\ f'(x) - g'(x) &= 6x^3 - 2x \\ \therefore xg'(x) - g'(x) &= 6x^3 - 2x \quad \dots\dots ㉠ \\ g(x) \text{를 } n\text{차함수라 하면 } xg(x) &\text{는 } (n+1)\text{차함수이므로 ㉠에서} \\ n+1 &= 3 \quad \therefore n=2 \\ \text{따라서 } g(x) &\text{는 최고차항의 계수가 6인 이차함수이므로} \\ g(x) &= 6x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면} \\ g'(x) &= 12x + a \\ g(x) \text{와 } g'(x) \text{를 ㉠에 대입하면} \\ x(6x^2 + ax + b) - (12x + a) &= 6x^3 - 2x \\ \therefore 6x^3 + ax^2 + (b-12)x - a &= 6x^3 - 2x \\ \text{따라서 } a=0, b-12 &= -2 \text{이므로 } a=0, b=10 \\ \text{즉, } g(x) &= 6x^2 + 10 \text{이므로} \\ g(1) &= 6 + 10 = 16 \end{aligned}$$

4 답 29

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \left\{ \frac{d}{dx}(x^4 + 5x) \right\} dx = x^4 + 5x + C \\ \therefore f'(x) &= 4x^3 + 5 \\ f(1) &= f'(1) \text{에서} \\ 1 + 5 + C &= 4 + 5 \quad \therefore C = 3 \\ \text{따라서 } f(x) &= x^4 + 5x + 3 \text{이므로} \\ f(2) &= 16 + 10 + 3 = 29 \end{aligned}$$

5 답 1

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\int \{2f(x) + 2x^2 - 3x\} dx \right] &= \int \left[\frac{d}{dx} \{f(x) + x^2 - 1\} \right] dx \text{에서} \\ 2f(x) + 2x^2 - 3x &= f(x) + x^2 - 1 + C \\ \therefore f(x) &= -x^2 + 3x - 1 + C \end{aligned}$$

$$f(2)=3\text{에서}$$

$$-4+6-1+C=3 \quad \therefore C=2$$

$$\text{따라서 } f(x)=-x^2+3x+1\text{이므로}$$

$$f(3)=-9+9+1=1$$

6 답 ④

$$\begin{aligned} \int (2x^3-6x^2+3) dx &= 2 \int x^3 dx - 6 \int x^2 dx + 3 \int dx \\ &= \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 3x + C \end{aligned}$$

7 답 ①

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x^2-4x+1) dx \\ &= x^3-2x^2+x+C \end{aligned}$$

$$f(1)=2\text{에서}$$

$$1-2+1+C=2 \quad \therefore C=2$$

$$\text{따라서 } f(x)=x^3-2x^2+x+2\text{이므로}$$

$$f(-1)=-1-2-1+2=-2$$

8 답 13

$$f(x)=\int (2ax-5) dx\text{에서}$$

$$f'(x)=2ax-5$$

$$\text{곡선 } y=f(x) \text{ 위의 점 } (2, -1)\text{에서의 접선의 기울기가 3이므로}$$

$$f'(2)=3\text{에서}$$

$$4a-5=3 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore f(x)=\int (4x-5) dx=2x^2-5x+C$$

$$\text{곡선 } y=f(x) \text{가 점 } (2, -1)\text{을 지나므로 } f(2)=-1\text{에서}$$

$$8-10+C=-1 \quad \therefore C=1$$

$$\text{따라서 } f(x)=2x^2-5x+1\text{이므로}$$

$$f(4)=32-20+1=13$$

9 답 1

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h)-f(x-3h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h)-f(x)+f(x)-f(x-3h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \times (-1) - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-3h)-f(x)}{-3h} \times (-3)$$

$$= -f'(x) + 3f'(x)$$

$$= 2f'(x)$$

$$\text{따라서 } 2f'(x)=-8x^3+4x-4\text{이므로}$$

$$f'(x)=-4x^3+2x-2$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-4x^3+2x-2) dx \\ &= -x^4+x^2-2x+C \end{aligned}$$

$$f(-1)=5\text{에서}$$

$$-1+1+2+C=5 \quad \therefore C=3$$

$$\text{따라서 } f(x)=-x^4+x^2-2x+3\text{이므로}$$

$$f(1)=-1+1-2+3=1$$

10 답 ④

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int 12x dx \\ &= 6x^2+C_1 \end{aligned}$$

$$f(x)\text{의 한 부정적분이 } F(x)\text{이므로}$$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int (6x^2+C_1) dx \\ &= 2x^3+C_1x+C_2 \end{aligned}$$

$$f(0)=F(0)\text{에서}$$

$$C_1=C_2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$f(1)=F(1)\text{에서}$$

$$6+C_1=2+C_1+C_2 \quad \therefore C_2=4$$

$$\text{㉠에서 } C_1=4$$

$$\text{따라서 } F(x)=2x^3+4x+4\text{이므로}$$

$$F(2)=16+8+4=28$$

11 답 -4

$$f'(x)=3x^2-6x+a\text{이므로}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x^2-6x+a) dx \\ &= x^3-3x^2+ax+C \end{aligned}$$

$$\text{곡선 } y=f(x) \text{가 점 } (1, 0)\text{을 지나므로 } f(1)=0\text{에서}$$

$$1-3+a+C=0 \quad \therefore a+C=2 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\text{곡선 } y=f(x) \text{가 점 } (-1, 0)\text{을 지나므로 } f(-1)=0\text{에서}$$

$$-1-3-a+C=0 \quad \therefore a-C=-4 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면}$$

$$a=-1, C=3$$

$$\therefore f(x)=x^3-3x^2-x+3$$

$$\therefore a+f(2)=-1+(8-12-2+3)=-4$$

12 답 -10

$$F(x)=xf(x)+2x^3\text{의 양변을 } x\text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+6x^2$$

$$xf'(x)=-6x^2 \quad \therefore f'(x)=-6x$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-6x) dx \\ &= -3x^2+C \end{aligned}$$

$$f(1)=-1\text{에서}$$

$$-3+C=-1 \quad \therefore C=2$$

$$\text{따라서 } f(x)=-3x^2+2\text{이므로}$$

$$f(2)=-12+2=-10$$

13 답 ⑤

$$F(x)+\int (2x-1)f(x) dx=-x^4+8x^3-x^2\text{의 양변을 } x\text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x)+(2x-1)f(x)=-4x^3+24x^2-2x$$

$$2xf(x)=2x(-2x^2+12x-1)$$

$$\therefore f(x)=-2x^2+12x-1$$

$$=-2(x-3)^2+17$$

$$\text{따라서 함수 } f(x)\text{의 최댓값은 } 17\text{이다.}$$

14 답 ⑤

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+2\text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} \right] dx = \int (2x+2) dx$$

$$\therefore f(x)+g(x)=x^2+2x+C_1 \quad \dots\dots ㉑$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2-2x-1\text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} \right] dx = \int (3x^2-2x-1) dx$$

$$\therefore f(x)g(x)=x^3-x^2-x+C_2 \quad \dots\dots ㉒$$

$$f(1)=3, g(1)=-1\text{이므로 } ㉑, ㉒\text{에서}$$

$$f(1)+g(1)=1+2+C_1$$

$$2=3+C_1 \quad \therefore C_1=-1$$

$$f(1)g(1)=1-1-1+C_2$$

$$-3=-1+C_2 \quad \therefore C_2=-2$$

$$\therefore f(x)+g(x)=x^2+2x-1,$$

$$f(x)g(x)=x^3-x^2-x-2=(x-2)(x^2+x+1)$$

$$\text{이때 } f(1)=3, g(1)=-1\text{이므로}$$

$$f(x)=x^2+x+1, g(x)=x-2$$

$$\therefore f(3)-g(3)=(9+3+1)-(3-2)=12$$

15 답 ②

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=4x\text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} \right] dx = \int 4x dx$$

$$\therefore f(x)g(x)=2x^2+C$$

$$f(1)=6, g(1)=-1\text{에서}$$

$$f(1)g(1)=2+C$$

$$-6=2+C \quad \therefore C=-8$$

$$\therefore f(x)g(x)=2x^2-8=2(x+2)(x-2)$$

$$\text{이때 } f(1)=6, g(1)=-1\text{이므로}$$

$$f(x)=2x+4, g(x)=x-2$$

$$\therefore f(-1)+g(3)=(-2+4)+(3-2)=3$$

16 답 ①

(i) $x \geq 1$ 일 때

$$f(x)=\int f'(x) dx = \int (-4x) dx$$

$$=-2x^2+C_1$$

(ii) $x < 1$ 일 때

$$f(x)=\int f'(x) dx = \int (4x^3-8x) dx$$

$$=x^4-4x^2+C_2$$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases} -2x^2+C_1 & (x \geq 1) \\ x^4-4x^2+C_2 & (x < 1) \end{cases}$$

$$f(0)=3\text{에서 } C_2=3$$

함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)=f(1)$ 에서

$$1-4+C_2=-2+C_1$$

$$1-4+3=-2+C_1 \quad \therefore C_1=2$$

$$\text{따라서 } f(x)=\begin{cases} -2x^2+2 & (x \geq 1) \\ x^4-4x^2+3 & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(2)=-8+2=-6$$

17 답 8

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서

$$f'(x)=\begin{cases} x-2 & (x \geq 0) \\ -2 & (x < 0) \end{cases}$$

(i) $x \geq 0$ 일 때

$$f(x)=\int f'(x) dx = \int (x-2) dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-2x+C_1$$

(ii) $x < 0$ 일 때

$$f(x)=\int f'(x) dx = \int (-2) dx$$

$$=-2x+C_2$$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-2x+C_1 & (x \geq 0) \\ -2x+C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점을 지나므로 $f(0)=0$ 에서

$$C_1=0$$

함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)=f(0)$ 에서

$$C_2=C_1 \quad \therefore C_2=0$$

$$\text{따라서 } f(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}x^2-2x & (x \geq 0) \\ -2x & (x < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(6)+f(-1)=(18-12)+2=8$$

18 답 ⑤

$$f(x)=\int f'(x) dx = \int (6x^2-6x) dx$$

$$=2x^3-3x^2+C$$

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)\text{이므로 } f'(x)=0\text{인 } x\text{의 값은}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이고 극댓값이 6이므로 $f(0)=6$ 에서

$$C=6$$

$$\therefore f(x)=2x^3-3x^2+6$$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$f(1)=2-3+6=5$$

19 답 ④

$f(x)$ 가 삼차함수이면 $f'(x)$ 는 이차함수이고 주어진 그래프에서

$$f'(0)=f'(3)=0\text{이므로 } f'(x)=ax(x-3) \ (a < 0)\text{이라 하면}$$

$$f(x)=\int f'(x) dx = \int ax(x-3) dx$$

$$=\int (ax^2-3ax) dx = \frac{a}{3}x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + C$$

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극대이고 극댓값이 5이므로 $f(3)=5$ 에서

$$9a - \frac{27}{2}a + C = 5 \quad \therefore -\frac{9}{2}a + C = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이고 극솟값이 -4이므로 $f(0)=-4$ 에서

$$C = -4$$

이를 ①에 대입하면

$$-\frac{9}{2}a - 4 = 5 \quad \therefore a = -2$$

따라서 $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4$ 이므로

$$f(-1) = \frac{2}{3} + 3 - 4 = -\frac{1}{3}$$

20 답 $f(x)=x^2-2x$

$f(x+y)=f(x)+f(y)+2xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)+0 \quad \therefore f(0)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+2xh-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} + 2x \\ &= 2x + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= 2x + f'(0) = 2x - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2x-2) dx \\ &= x^2 - 2x + C \end{aligned}$$

①에서 $C=0$

$$\therefore f(x) = x^2 - 2x$$

중단원 기출문제 2회

1 답 ③

$$\begin{aligned} xf(x) &= (2x^3 + 3x^2 + C)' = 6x^2 + 6x \\ &= x(6x+6) \end{aligned}$$

따라서 $f(x)=6x+6$ 이므로

$$f(1)+f(-1)=(6+6)+(-6+6)=12$$

2 답 4

$$\begin{aligned} ax^2 - 4x - 3 &= (2x^3 + bx^2 - 3x + C)' \\ &= 6x^2 + 2bx - 3 \end{aligned}$$

따라서 $a=6, -4=2b$ 이므로

$$a=6, b=-2 \quad \therefore a+b=4$$

3 답 ②

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{d}{dx} \left\{ \int (3x^2 - 2x) dx \right\} + \int \left\{ \frac{d}{dx} (2x^2 - x) \right\} dx \\ &= (3x^2 - 2x) + (2x^2 - x + C) \\ &= 5x^2 - 3x + C \end{aligned}$$

$f(0)=4$ 에서 $C=4$

따라서 $f(x)=5x^2-3x+4$ 이므로

$$f(2)=20-6+4=18$$

4 답 15

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^2 - 4x) \right\} dx = x^2 - 4x + C \\ &= (x-2)^2 - 4 + C \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -1이므로

$$-4 + C = -1 \quad \therefore C = 3$$

따라서 $f(x)=x^2-4x+3$ 이므로

$$f(-2)=4+8+3=15$$

5 답 ②

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{2x^2}{x-1} dx + \int \frac{3x}{x-1} dx - \int \frac{5}{x-1} dx \\ &= \int \frac{2x^2+3x-5}{x-1} dx \\ &= \int \frac{(2x+5)(x-1)}{x-1} dx \\ &= \int (2x+5) dx \\ &= x^2 + 5x + C \end{aligned}$$

$f(1)=4$ 에서

$$1+5+C=4 \quad \therefore C=-2$$

따라서 $f(x)=x^2+5x-2$ 이므로

$$f(-1)=1-5-2=-6$$

6 답 6

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (ax^2 - 2x + 3) dx \\ &= \frac{a}{3}x^3 - x^2 + 3x + C \end{aligned}$$

$f(0)=1$ 에서 $C=1$

$$f(2)=19 \text{에서 } \frac{8}{3}a - 4 + 6 + C = 19$$

$$\frac{8}{3}a - 4 + 6 + 1 = 19 \quad \therefore a = 6$$

7 답 -4

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (-2x+4) dx = -x^2 + 4x + C$$

$f(1)=7$ 에서

$$-1+4+C=7 \quad \therefore C=4$$

$$\therefore f(x) = -x^2 + 4x + 4$$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $-x^2+4x+4=0$ 의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -4이다.

8 답 7

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}) dx \\ &= x+x^2+x^3+\cdots+x^n+C \\ f(0) &= -2 \text{에서 } C = -2 \\ f(1) &= 5 \text{에서} \\ \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n\text{개}}+C &= 5 \\ n-2=5 \quad \therefore n &= 7 \end{aligned}$$

9 답 15

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x+6 \text{이므로} \\ f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2x+6) dx \\ &= x^2+6x+C \\ \text{다항식 } f(x) \text{가 } x+2 \text{로 나누어 떨어지므로 } f(-2) &= 0 \text{에서} \\ 4-12+C &= 0 \quad \therefore C=8 \\ \text{따라서 } f(x) &= x^2+6x+8 \text{이므로} \\ f(1) &= 1+6+8=15 \end{aligned}$$

10 답 ③

$$\begin{aligned} F(x) &= xf(x)-3x^4+x^2 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ f(x) &= f(x)+xf'(x)-12x^3+2x \\ xf'(x) &= 12x^3-2x \\ &= x(12x^2-2) \\ \therefore f'(x) &= 12x^2-2 \\ \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (12x^2-2) dx \\ &= 4x^3-2x+C \\ f(1) &= 5 \text{에서} \\ 4-2+C &= 5 \quad \therefore C=3 \\ \text{따라서 } f(x) &= 4x^3-2x+3 \text{이므로 } f(x) \text{의 상수항은 } 3 \text{이다.} \end{aligned}$$

11 답 -40

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (x-1)f(x) dx + x^4-4x^3+4x^2 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여} \\ &\text{미분하면} \\ f(x) &= (x-1)f(x)+4x^3-12x^2+8x \\ (x-2)f(x) &= -4x^3+12x^2-8x \\ &= -4x(x-1)(x-2) \\ \therefore f(x) &= -4x(x-1) = -4x^2+4x \\ \therefore F(x) &= \int f(x) dx = \int (-4x^2+4x) dx \\ &= -\frac{4}{3}x^3+2x^2+C \\ F(0) &= 2 \text{에서 } C=2 \\ \text{따라서 } F(x) &= -\frac{4}{3}x^3+2x^2+2 \text{이므로} \\ f(3)+F(3) &= (-36+12)+(-36+18+2) = -40 \end{aligned}$$

12 답 18

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} &= 2x+5 \text{에서} \\ \int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} \right] dx &= \int (2x+5) dx \\ \therefore f(x)+g(x) &= x^2+5x+C_1 \\ \frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\} &= 6x+1 \text{에서} \\ \int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\} \right] dx &= \int (6x+1) dx \\ \therefore f(x)-g(x) &= 3x^2+x+C_2 \\ f(0) &= -2, g(0)=5 \text{에서} \\ f(0)+g(0) &= C_1 \quad \therefore C_1=3 \\ f(0)-g(0) &= C_2 \quad \therefore C_2=-7 \\ \therefore f(x)+g(x) &= x^2+5x+3, f(x)-g(x)=3x^2+x-7 \\ \text{두 식을 연립하여 풀면} \\ f(x) &= 2x^2+3x-2, g(x) = -x^2+2x+5 \\ \therefore f(1)g(1) &= (2+3-2) \times (-1+2+5) = 18 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} f(x)+g(x) &= \int (2x+5) dx \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ f(x)-g(x) &= \int (6x+1) dx \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \textcircled{1}+\textcircled{2} \text{을 하면} \\ 2f(x) &= \int (8x+6) dx = 2 \int (4x+3) dx \\ \therefore f(x) &= \int (4x+3) dx = 2x^2+3x+C_1 \\ f(0) &= -2 \text{에서 } C_1 = -2 \\ \therefore f(x) &= 2x^2+3x-2 \\ \textcircled{1}-\textcircled{2} \text{을 하면} \\ 2g(x) &= \int (-4x+4) dx = 2 \int (-2x+2) dx \\ \therefore g(x) &= \int (-2x+2) dx = -x^2+2x+C_2 \\ g(0) &= 5 \text{에서 } C_2 = 5 \\ \therefore g(x) &= -x^2+2x+5 \\ \therefore f(1)g(1) &= (2+3-2) \times (-1+2+5) = 18 \end{aligned}$$

13 답 8

$$\begin{aligned} g(x) &= \int \{4x-f'(x)\} dx \text{에서} \\ g(x) &= 2x^2-f(x)+C_1 \\ \therefore f(x)+g(x) &= 2x^2+C_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} &= 6x^2+10x-1 \text{에서} \\ \int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} \right] dx &= \int (6x^2+10x-1) dx \\ \therefore f(x)g(x) &= 2x^3+5x^2-x+C_2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \\ f(0) &= 3, g(0)=2 \text{이므로 } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서} \\ f(0)+g(0) &= C_1 \quad \therefore C_1=5 \\ f(0)g(0) &= C_2 \quad \therefore C_2=6 \\ \therefore f(x)+g(x) &= 2x^2+5, \\ f(x)g(x) &= 2x^3+5x^2-x+6 \\ &= (x+3)(2x^2-x+2) \end{aligned}$$

이때 $f(0)=3, g(0)=2$ 이므로
 $f(x)=x+3, g(x)=2x^2-x+2$
 $\therefore f(2)+g(1)=(2+3)+(2-1+2)=8$

14 [답] 12

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-3 & (x \geq 3) \\ 3 & (x < 3) \end{cases} \text{이므로}$$

(i) $x \geq 3$ 일 때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (2x-3)dx \\ =x^2-3x+C_1$$

(ii) $x < 3$ 일 때

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int 3dx \\ =3x+C_2$$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+C_1 & (x \geq 3) \\ 3x+C_2 & (x < 3) \end{cases}$$

$f(1)=2$ 에서

$$3+C_2=2 \quad \therefore C_2=-1$$

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)=f(3)$ 에서

$$9+C_2=9-9+C_1$$

$$9-1=9-9+C_1 \quad \therefore C_1=8$$

$$\text{따라서 } f(x)=\begin{cases} x^2-3x+8 & (x \geq 3) \\ 3x-1 & (x < 3) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(4)=16-12+8=12$$

15 [답] ②

(i) $x > 0$ 일 때

$$F(x)=\int f(x)dx=\int \{kx(x+1)-1\}dx \\ =\int (kx^2+kx-1)dx \\ =\frac{k}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2-x+C_1$$

(ii) $x < 0$ 일 때

$$F(x)=\int f(x)dx=\int (2x+1)dx \\ =x^2+x+C_2$$

(i), (ii)에서

$$F(x)=\begin{cases} \frac{k}{3}x^3+\frac{k}{2}x^2-x+C_1 & (x > 0) \\ x^2+x+C_2 & (x < 0) \end{cases}$$

함수 $F(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)=\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) \text{에서}$$

$$C_1=C_2$$

$$F(1)-F(-2)=2 \text{에서}$$

$$\left(\frac{k}{3}+\frac{k}{2}-1+C_1\right)-(4-2+C_2)=2$$

$$\frac{5}{6}k=5 \quad \therefore k=6$$

16 [답] -3

$$f'(x)=a(x^2-1) \text{이므로}$$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int a(x^2-1)dx$$

$$=\int (ax^2-a)dx=\frac{a}{3}x^3-ax+C$$

$$f'(x)=a(x^2-1)=a(x+1)(x-1) \text{이므로 } f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$x=-1$ 또는 $x=1$
 $a < 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이고 극댓값이 3이므로 $f(1)=3$ 에서

$$\frac{a}{3}-a+C=3 \quad \therefore -\frac{2}{3}a+C=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 극소이고 극솟값이 -1 이므로

$$f(-1)=-1 \text{에서}$$

$$-\frac{a}{3}+a+C=-1 \quad \therefore \frac{2}{3}a+C=-1 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}-\textcircled{8}$ 을 하면

$$-\frac{4}{3}a=4 \quad \therefore a=-3$$

17 [답] ⑤

$f(x)$ 가 삼차함수이면 $f'(x)$ 는 이차함수이고 주어진 그래프에서

$$f'(0)=f'(2)=0 \text{이므로 } f'(x)=ax(x-2) \quad (a > 0) \text{라 하자.}$$

또 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 점 $(1, -2)$ 를 지나므로 $f'(1)=-2$ 에서

$$-a=-2 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore f'(x)=2x(x-2)=2x^2-4x$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x)dx=\int (2x^2-4x)dx$$

$$=\frac{2}{3}x^3-2x^2+C$$

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이고 극댓값이 6이므로 $f(0)=6$ 에서

$$C=6$$

$$\therefore f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+6$$

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$f(2)=\frac{16}{3}-8+6=\frac{10}{3}$$

18 [답] ④

$f(x)$ 의 최고차항이 x^3 이므로 $f'(x)$ 의 최고차항은 $3x^2$ 이다.

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } f'(-3)=f'(3)=0$$

$$\text{따라서 } f'(x)=3(x+3)(x-3)=3x^2-27 \text{이므로}$$

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int (3x^2-27)dx=x^3-27x+C$$

(나)에서 $f(3) = -4$ 이므로
 $27 - 81 + C = -4 \quad \therefore C = 50$
 따라서 $f(x) = x^3 - 27x + 50$ 이므로
 $f(2) = 8 - 54 + 50 = 4$

19 답 3

$f(x-y) = f(x) - f(y) + xy(x-y)$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) - f(0) + 0 \quad \therefore f(0) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x - (-h)) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-h) - xh(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(-h)}{-h} - x(x+h) \right\} \\ &= -x^2 + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-h) - f(0)}{-h} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= -x^2 + f'(0) \\ &= -x^2 + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-x^2 + 4) dx \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + 4x + C \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $C=0$

따라서 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$ 이므로

$$f(3) = -9 + 12 = 3$$

20 답 4

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 2 \quad \therefore f(0) = -2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 2 - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= f'(0) \end{aligned}$$

$f'(0) = k$ (k 는 상수)라 하면 $f'(x) = k$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int k dx \\ &= kx + C \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ 에서 $C = -2$

$$\therefore f(x) = kx - 2$$

$f(2) = 6$ 에서

$$2k - 2 = 6 \quad \therefore k = 4$$

$$\therefore f'(0) = k = 4$$

08 / 정적분

44~49쪽

중단원 기출문제 1회

1 답 ②

$$\begin{aligned} \int_0^1 f'(x) dx &= [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0) \\ &= -1 - 1 = -2 \end{aligned}$$

2 답 10

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (4x^3 - 3x^2 + a) dx &= [x^4 - x^3 + ax]_{-1}^0 \\ &= -(1 + 1 - a) \\ &= a - 2 \end{aligned}$$

따라서 $a - 2 = 8$ 이므로 $a = 10$

3 답 ⑤

$$\begin{aligned} &\int_1^2 \left(4x^3 + \frac{1}{x} \right) dx - \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - 4 \right) dx \\ &= \int_1^2 \left\{ \left(4x^3 + \frac{1}{x} \right) - \left(\frac{1}{x} - 4 \right) \right\} dx \\ &= \int_1^2 (4x^3 + 4) dx \\ &= [x^4 + 4x]_1^2 \\ &= (16 + 8) - (1 + 4) = 19 \end{aligned}$$

4 답 62

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^3 f(x) dx - \int_4^3 f(x) dx + \int_2^{-1} f(x) dx \\ &= \int_{-1}^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx + \int_2^{-1} f(x) dx \\ &= \int_{-1}^4 f(x) dx + \int_2^{-1} f(x) dx \\ &= \int_2^4 f(x) dx \\ &= \int_2^4 (x^3 + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + x \right]_2^4 \\ &= (64 + 4) - (4 + 2) = 62 \end{aligned}$$

5 답 ④

$$\begin{aligned} \int_3^8 f(x) dx &= \int_3^2 f(x) dx + \int_2^8 f(x) dx \\ &= -\int_2^3 f(x) dx + \left\{ \int_2^6 f(x) dx + \int_6^8 f(x) dx \right\} \\ &= -5 + 6 + 8 = 9 \end{aligned}$$

6 답 ③

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^0 (2 - 4x) dx + \int_0^2 (3x^2 + 2) dx \\ &= [2x - 2x^2]_{-2}^0 + [x^3 + 2x]_0^2 \\ &= -(-4 - 8) + (8 + 4) = 24 \end{aligned}$$

7 답 ①

$$\begin{aligned}
 x|x-2| &= \begin{cases} x^2-2x & (x \geq 2) \\ -x^2+2x & (x \leq 2) \end{cases} \text{이므로} \\
 \int_1^3 x|x-2| dx &= \int_1^2 (-x^2+2x) dx + \int_2^3 (x^2-2x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^3 \\
 &= \left(-\frac{8}{3} + 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) + (9-9) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

8 답 4

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (3x^5 + 5x^4 - 4x^3 + x + 1) dx &= 2 \int_0^1 (5x^4 + 1) dx \\
 &= 2 \left[x^5 + x \right]_0^1 \\
 &= 2(1+1) = 4
 \end{aligned}$$

9 답 4

$$\begin{aligned}
 \int_0^3 f(x) dx &= \int_0^3 (x^2 + ax + b) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2 + bx \right]_0^3 \\
 &= 9 + \frac{9}{2}a + 3b
 \end{aligned}$$

따라서 $9 + \frac{9}{2}a + 3b = 3$ 이므로

$$3a + 2b = -4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (x^2 + ax + b) dx \\
 &= 2 \int_0^1 (x^2 + b) dx \\
 &= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 + bx \right]_0^1 \\
 &= 2 \left(\frac{1}{3} + b \right) \\
 &= \frac{2}{3} + 2b
 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{2}{3} + 2b = \frac{8}{3}$ 이므로 $b = 1$

이를 ①에 대입하면

$$3a + 2 = -4 \quad \therefore a = -2$$

따라서 $f(x) = x^2 - 2x + 1$ 이므로

$$f(3) = 9 - 6 + 1 = 4$$

10 답 ③

$$\begin{aligned}
 f(-x) &= -f(x) \text{이므로} \\
 \int_{-4}^4 f(x) dx &= 0 \\
 g(-x) &= g(x) \text{이므로} \\
 \int_{-4}^4 g(x) dx &= 2 \int_0^4 g(x) dx \\
 \therefore \int_{-4}^4 \{f(x) + g(x)\} dx &= \int_{-4}^4 f(x) dx + \int_{-4}^4 g(x) dx \\
 &= 2 \int_0^4 g(x) dx \\
 &= 2 \times 3 = 6
 \end{aligned}$$

11 답 4

$$\begin{aligned}
 f(x+3) &= f(x) \text{이므로} \\
 \int_0^1 f(x) dx &= \int_3^4 f(x) dx \\
 \therefore \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx \\
 &= 2 \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \\
 &= 2 \int_0^1 2x dx + \int_1^3 (3-x) dx \\
 &= 2 \left[x^2 \right]_0^1 + \left[3x - \frac{1}{2}x^2 \right]_1^3 \\
 &= 2 \times 1 + \left(9 - \frac{9}{2} \right) - \left(3 - \frac{1}{2} \right) = 4
 \end{aligned}$$

12 답 12

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 f(x) dx &= k \text{ (} k \text{는 상수)로 놓으면 } f(x) = 12x^2 + 10kx + k^2 \text{이므로} \\
 \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 (12x^2 + 10kx + k^2) dx \\
 &= \left[4x^3 + 5kx^2 + k^2x \right]_0^1 \\
 &= 4 + 5k + k^2
 \end{aligned}$$

따라서 $4 + 5k + k^2 = k$ 이므로

$$k^2 + 4k + 4 = 0, \quad (k+2)^2 = 0$$

$$\therefore k = -2$$

즉, $f(x) = 12x^2 - 20x + 4$ 이므로

$$f(2) = 48 - 40 + 4 = 12$$

13 답 ⑤

$$\begin{aligned}
 \int_1^x f(t) dt &= -2x^2 + ax + 5 \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면} \\
 0 &= -2 + a + 5 \quad \therefore a = -3 \\
 \int_1^x f(t) dt &= -2x^2 - 3x + 5 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\
 f(x) &= -4x - 3 \\
 \therefore f(-2) &= 8 - 3 = 5
 \end{aligned}$$

14 답 2

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^x (3t^2 - 2t + 1) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\
 f'(x) &= 3x^2 - 2x + 1 \\
 \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{2h} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \times (-1) \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \{ f'(1) + f'(1) \} \\
 &= f'(1) = 3 - 2 + 1 = 2
 \end{aligned}$$

15 답 -6

$$\begin{aligned}
 \int_0^x (x-t)f(t) dt &= \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 \text{에서} \\
 x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x tf(t) dt &= \frac{1}{2}x^4 - 3x^2
 \end{aligned}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 2x^3 - 6x$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = 2x^3 - 6x$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x^2 - 6$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최솟값 -6 을 갖는다.

16 답 ②

$$\int_1^x (x-t)f(t) dt = x^3 + ax^2 + bx \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$0 = 1 + a + b \quad \therefore a + b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\int_1^x (x-t)f(t) dt = x^3 + ax^2 + bx \text{에서}$$

$$x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x tf(t) dt = x^3 + ax^2 + bx$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt = 3x^2 + 2ax + b$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = 3 + 2a + b \quad \therefore 2a + b = -3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = -2, b = 1$$

$$\therefore ab = -2$$

17 답 81

$$f(x) = \int_0^x (-t^2 + t + a) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = -x^2 + x + a$$

함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 극댓값을 가지므로 $f'(3)=0$ 에서

$$-9 + 3 + a = 0 \quad \therefore a = 6$$

$$\therefore M = f(3) = \int_0^3 (-t^2 + t + 6) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + 6t \right]_0^3$$

$$= -9 + \frac{9}{2} + 18 = \frac{27}{2}$$

$$\therefore aM = 81$$

18 답 ㄱ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } h(x) = \int_1^x \{f(t) - g(t)\} dt \text{의 양변에 } x=1 \text{을 대입하면}$$

$$h(1) = 0$$

$$\text{ㄷ. } h(x) = \int_1^x \{f(t) - g(t)\} dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$h'(x) = f(x) - g(x)$$

$$h'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=a \text{ 또는 } x=\beta$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	a	$\dots$	β	$\dots$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $h(x)$ 는 $x=a$ 에서 극소이고, $x=\beta$ 에서 극대이다.

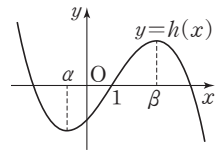
ㄷ. ㄱ에서 $h(1)=0$ 이므로 함수 $y=h(x)$

의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

따라서 방정식 $h(x)=0$ 은 두 개의 양

의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.



19 답 ③

$$f(x) = \int_1^x t(t-2) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

$0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\dots$	2	$\dots$	4
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

$$f(0) = \int_1^0 (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_1^0$$

$$= -\left(\frac{1}{3} - 1\right) = \frac{2}{3}$$

$$f(2) = \int_1^2 (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 4\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3}$$

$$f(4) = \int_1^4 (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_1^4$$

$$= \left(\frac{64}{3} - 16\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right) = 6$$

따라서 $0 \leq x \leq 4$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값은 6 , 최솟값은 $-\frac{2}{3}$ 이므로

$$M = 6, m = -\frac{2}{3} \quad \therefore Mm = -4$$

다른 풀이

$$f(x) = \int_1^x (t^2 - 2t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 \right]_1^x$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^3 - x^2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{2}{3}$$

$$\therefore f(0) = \frac{2}{3},$$

$$f(2) = \frac{8}{3} - 4 + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3},$$

$$f(4) = \frac{64}{3} - 16 + \frac{2}{3} = 6$$

20 답 -2

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[F(t) \right]_x^{x+h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= F'(x) = f(x)$$

$$= 2x - 4$$

$$\begin{aligned}\therefore g(x) &= \int g'(x) dx = \int (2x-4) dx \\ &= x^2 - 4x + C\end{aligned}$$

$$g(1) = -1 \text{에서}$$

$$1 - 4 + C = -1 \quad \therefore C = 2$$

따라서 $g(x) = x^2 - 4x + 2$ 이므로

$$g(2) = 4 - 8 + 2 = -2$$

중단원 기출문제 2회

1 답 ④

$$\begin{aligned}\int_2^2 (x^4 - 3) dx + \int_0^2 (3x^2 + 6x) dx &= 0 + \int_0^2 (3x^2 + 6x) dx \\ &= \left[x^3 + 3x^2 \right]_0^2 \\ &= 8 + 12 = 20\end{aligned}$$

2 답 1

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{2a} (3x^2 + 2x) dx &= \left[x^3 + x^2 \right]_{-a}^{2a} \\ &= (8a^3 + 4a^2) - (-a^3 + a^2) \\ &= 9a^3 + 3a^2\end{aligned}$$

따라서 $9a^3 + 3a^2 = 12$ 이므로

$$3a^3 + a^2 - 4 = 0, (a-1)(3a^2 + 4a + 4) = 0$$

$$\therefore a = 1 \quad (\because a \text{는 실수})$$

3 답 11

두 함수 $F(x)$, $G(x)$ 가 모두 함수 $f(x)$ 의 부정적분이므로

$$F(x) = G(x) + C \quad (C \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

(㉗)에서 $C = 2$

$$\therefore F(x) = G(x) + 2$$

(㉘)에서 $G(6) = 12$ 이므로

$$F(6) = G(6) + 2 = 14$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_2^6 f(x) dx &= \left[F(x) \right]_2^6 \\ &= F(6) - F(2) = 14 - 3 = 11\end{aligned}$$

4 답 ⑤

$$\begin{aligned}\int_0^3 (2x^2 - 3) dx + 2 \int_0^3 (2x - x^2) dx \\ &= \int_0^3 \{ (2x^2 - 3) + 2(2x - x^2) \} dx \\ &= \int_0^3 (4x - 3) dx \\ &= \left[2x^2 - 3x \right]_0^3 \\ &= 18 - 9 = 9\end{aligned}$$

5 답 7

$$\begin{aligned}\int_{-2}^0 f(x) dx &= \int_{-2}^5 f(x) dx + \int_5^0 f(x) dx \\ &= \left\{ \int_{-2}^4 f(x) dx + \int_4^5 f(x) dx \right\} - \int_0^5 f(x) dx \\ &= 5 + 4 - 6 = 3 \\ \therefore \int_{-2}^0 \{ f(x) - 2x \} dx &= \int_{-2}^0 f(x) dx - \int_{-2}^0 2x dx \\ &= 3 - \left[x^2 \right]_{-2}^0 \\ &= 3 - (-4) = 7\end{aligned}$$

6 답 ③

$f(0) = f(1) = f(2) = 3$ 이므로

$f(x) - 3 = ax(x-1)(x-2)$ ($a > 0$)라 하면

$$f(x) = ax(x-1)(x-2) + 3$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^4 f(x) dx - \int_2^4 f(x) dx &= \int_0^4 f(x) dx + \int_4^2 f(x) dx \\ &= \int_0^2 f(x) dx \\ &= \int_0^2 \{ ax(x-1)(x-2) + 3 \} dx \\ &= \int_0^2 \{ a(x^3 - 3x^2 + 2x) + 3 \} dx \\ &= \left[a \left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right) + 3x \right]_0^2 \\ &= a(4 - 8 + 4) + 6 = 6\end{aligned}$$

7 답 $\frac{5}{2}$

$$\text{주어진 그래프에서 } f(x) = \begin{cases} x-1 & (x \geq 1) \\ -x+1 & (0 \leq x \leq 1) \\ x+1 & (x \leq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^3 f(x) dx \\ &= \int_{-2}^0 (x+1) dx + \int_0^1 (-x+1) dx + \int_1^3 (x-1) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-2}^0 + \left[-\frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^3 \\ &= -(2-2) + \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) + \left(\frac{9}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

8 답 4

$$|x^2 - 2x| = \begin{cases} x^2 - 2x & (x \leq 0 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x^2 + 2x & (0 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{이고, } a > 2 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\int_0^a |x^2 - 2x| dx &= \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx + \int_2^a (x^2 - 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^a \\ &= \left(-\frac{8}{3} + 4 \right) + \left(\frac{1}{3}a^3 - a^2 \right) - \left(\frac{8}{3} - 4 \right) \\ &= \frac{1}{3}a^3 - a^2 + \frac{8}{3}\end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{3}a^3 - a^2 + \frac{8}{3} = 8$ 이므로

$$a^3 - 3a^2 - 16 = 0, (a-4)(a^2+a+4) = 0$$

$\therefore a=4$ ($\because a$ 는 실수)

9 답 3

$$\int_{-1}^1 (x^4 + 3x^3 - ax^2 + 5x + a) dx$$

$$= 2 \int_0^1 (x^4 - ax^2 + a) dx$$

$$= 2 \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{a}{3}x^3 + ax \right]_0^1$$

$$= 2 \left(\frac{1}{5} - \frac{a}{3} + a \right) = \frac{2}{5} + \frac{4}{3}a$$

따라서 $\frac{2}{5} + \frac{4}{3}a = \frac{22}{5}$ 이므로 $a=3$

10 답 ⑤

$$\int_{-3}^3 \{f(x)\}^2 dx = \int_{-3}^3 (x-1)^2 dx = \int_{-3}^3 (x^2 - 2x + 1) dx$$

$$= 2 \int_0^3 (x^2 + 1) dx = 2 \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^3$$

$$= 2(9+3) = 24$$

$$\int_{-3}^3 f(x) dx = \int_{-3}^3 (x-1) dx = 2 \int_0^3 (-1) dx$$

$$= 2 \left[-x \right]_0^3 = 2 \times (-3) = -6$$

따라서 $\int_{-3}^3 \{f(x)\}^2 dx = k \left\{ \int_{-3}^3 f(x) dx \right\}^2 - 6$ 에서

$$24 = 36k - 6 \quad \therefore k = \frac{5}{6}$$

11 답 ③

$$f(-x) = f(x) \text{이므로 } \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx$$

$$\int_{-1}^0 (x+1)f(x) dx + \int_0^1 (x+2)f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^0 xf(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 xf(x) dx + 2 \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^0 xf(x) dx + \int_0^1 xf(x) dx$$

$$+ \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 xf(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx \quad \dots\dots ㉠$$

이때 $g(x) = xf(x)$ 라 하면

$$g(-x) = -xf(-x) = -xf(x) = -g(x) \text{이므로}$$

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = 0$$

따라서 ㉠에서

$$\int_{-1}^0 (x+1)f(x) dx + \int_0^1 (x+2)f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^1 g(x) dx + \int_{-1}^1 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$$

$$= 2 \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx$$

$$= 3 \int_0^1 f(x) dx$$

$$= 3 \times 4 = 12$$

12 답 15

㉠에서 $f(-x) = f(x)$ 이므로

$$\int_{-2}^2 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx$$

따라서 $2 \int_0^2 f(x) dx = 3$ 이므로

$$\int_0^2 f(x) dx = \frac{3}{2}$$

㉡에서 $f(x+2) = f(x)$ 이므로

$$\int_0^2 f(x) dx = \int_2^4 f(x) dx = \int_4^6 f(x) dx$$

$$= \int_6^8 f(x) dx = \int_8^{10} f(x) dx$$

$$\therefore \int_{-10}^{10} f(x) dx$$

$$= 2 \int_0^{10} f(x) dx$$

$$= 2 \left\{ \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx + \int_4^6 f(x) dx \right.$$

$$\left. + \int_6^8 f(x) dx + \int_8^{10} f(x) dx \right\}$$

$$= 2 \times 5 \int_0^2 f(x) dx$$

$$= 2 \times 5 \times \frac{3}{2} = 15$$

13 답 10

$$f(x) = 24x^2 + \int_0^1 (-6x + 2t)f(t) dt \text{에서}$$

$$f(x) = 24x^2 - 6x \int_0^1 f(t) dt + 2 \int_0^1 tf(t) dt$$

$$\int_0^1 f(t) dt = a, \int_0^1 tf(t) dt = b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{로 놓으면}$$

$$f(x) = 24x^2 - 6ax + 2b \text{이므로}$$

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (24t^2 - 6at + 2b) dt$$

$$= \left[8t^3 - 3at^2 + 2bt \right]_0^1$$

$$= 8 - 3a + 2b$$

따라서 $8 - 3a + 2b = a$ 이므로 $2a - b = 4 \quad \dots\dots ㉠$

$$\int_0^1 tf(t) dt = \int_0^1 (24t^3 - 6at^2 + 2bt) dt$$

$$= \left[6t^4 - 2at^3 + bt^2 \right]_0^1$$

$$= 6 - 2a + b$$

따라서 $6 - 2a + b = b$ 이므로 $a = 3$

이를 ㉠에 대입하면 $6 - b = 4 \quad \therefore b = 2$

따라서 $f(x) = 24x^2 - 18x + 4$ 이므로

$$f(1) = 24 - 18 + 4 = 10$$

14 답 6

$$\int_a^x f(t) dt = x^2 + ax - 8 \text{의 양변에 } x=a \text{를 대입하면}$$

$$0 = a^2 + a^2 - 8, a^2 = 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

$$\int_2^x f(t) dt = x^2 + 2x - 8 \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f(x) = 2x + 2 \quad \therefore f(1) = 2 + 2 = 4$$

$$\therefore a + f(1) = 6$$

15 **답 4**

$$\int_1^x (x-t)f(t) dt = 2x^3 - 4x^2 + 2x \text{에서}$$

$$x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t f(t) dt = 2x^3 - 4x^2 + 2x$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = 6x^2 - 8x + 2$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt = 6x^2 - 8x + 2$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 12x - 8$$

$$\therefore f(1) = 12 - 8 = 4$$

16 **답 -14**

$$x^2 f(x) = 2x^3 + \int_1^x (x^2 + t) f'(t) dt \text{에서}$$

$$x^2 f(x) = 2x^3 + x^2 \int_1^x f'(t) dt + \int_1^x t f'(t) dt$$

이때 $\int_1^x f'(t) dt = [f(t)]_1^x = f(x) - f(1) = f(x) - 2$ 이므로

$$x^2 f(x) = 2x^3 + x^2 \{f(x) - 2\} + \int_1^x t f'(t) dt$$

$$\therefore \int_1^x t f'(t) dt = -2x^3 + 2x^2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$x f'(x) = -6x^2 + 4x = x(-6x + 4)$$

$$\therefore f'(x) = -6x + 4$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (-6x + 4) dx$$

$$= -3x^2 + 4x + C$$

$f(1) = 2$ 에서

$$-3 + 4 + C = 2 \quad \therefore C = 1$$

따라서 $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$ 이므로

$$f(3) = -27 + 12 + 1 = -14$$

17 **답 ①**

$$f(x) = \int_2^x (3t^2 + 3t - 6) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3x - 6 = 3(x+2)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -2$ 또는 $x = 1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = -2$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$f(-2) = \int_2^{-2} (3t^2 + 3t - 6) dt = -\int_{-2}^2 (3t^2 + 3t - 6) dt$$

$$= -2 \int_0^2 (3t^2 - 6) dt = -2 \left[t^3 - 6t \right]_0^2$$

$$= -2(8 - 12) = 8$$

함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$f(1) = \int_2^1 (3t^2 + 3t - 6) dt = \left[t^3 + \frac{3}{2}t^2 - 6t \right]_2^1$$

$$= \left(1 + \frac{3}{2} - 6 \right) - (8 + 6 - 12) = -\frac{11}{2}$$

따라서 극댓값과 극솟값의 곱은

$$8 \times \left(-\frac{11}{2} \right) = -44$$

18 **답 $\frac{1}{4}$**

$$f(x) = \int_x^{x+1} (t^3 - t) dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면}$$

$$f'(x) = \{(x+1)^3 - (x+1)\} - (x^3 - x)$$

$$= 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 0$

$-2 \leq x \leq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		$\nearrow$	극대	$\searrow$	

따라서 $-2 \leq x \leq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최대이므로 최댓값은

$$f(-1) = \int_{-1}^0 (t^3 - t) dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 \right]_{-1}^0$$

$$= -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4}$$

19 **답 ⑤**

$$f(x) = \int_0^x t(x-t) dt \text{에서}$$

$$f(x) = x \int_0^x t dt - \int_0^x t^2 dt$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \int_0^x t dt + x^2 - x^2 = \int_0^x t dt = \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_0^x = \frac{1}{2}x^2$$

ㄱ. $f'(0) = 0$

ㄴ. $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 \geq 0$ 이므로 모든 실수 x 에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

ㄷ. 모든 실수 x 에서 함수 $f(x)$ 가 증가하므로 $-1 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 최소이고 최솟값은

$$f(-1) = \int_0^{-1} t(-1-t) dt = \int_0^{-1} (-t^2 - t) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 \right]_0^{-1}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

20 **답 ②**

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} \int_2^x f(t) dt = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4} \left[F(t) \right]_2^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x) - F(2)}{x^2 - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{F(x) - F(2)}{x - 2} \times \frac{1}{x + 2} \right\}$$

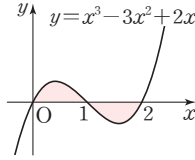
$$= \frac{1}{4} F'(2) = \frac{1}{4} f(2)$$

$$= \frac{1}{4} (8 + 12 - 4) = 4$$

중단원 기출문제 ①

1 답 1/2

곡선 $y=x^3-3x^2+2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^3-3x^2+2x=0$ 에서
 $x(x-1)(x-2)=0$
 $\therefore x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_0^2 |x^3-3x^2+2x| dx \\ &= \int_0^1 (x^3-3x^2+2x) dx + \int_1^2 (-x^3+3x^2-2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2 답 ③

(가)에서 $f'(x) = -3x^2 - 6x + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (-3x^2 - 6x + 1) dx \\ &= -x^3 - 3x^2 + x + C \end{aligned}$$

(나)에서 $f(-2) = -3$ 이므로

$$8 - 12 - 2 + C = -3$$

$$\therefore C = 3$$

$$\therefore f(x) = -x^3 - 3x^2 + x + 3$$

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는

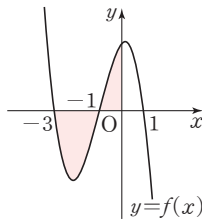
$$-x^3 - 3x^2 + x + 3 = 0$$

$$(x+3)(x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^0 |-x^3-3x^2+x+3| dx \\ &= \int_{-3}^{-1} (x^3+3x^2-x-3) dx + \int_{-1}^0 (-x^3-3x^2+x+3) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x \right]_{-3}^{-1} + \left[-\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{23}{4} \end{aligned}$$



3 답 ④

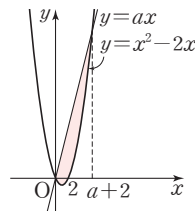
곡선 $y=x^2-2x$ 와 직선 $y=ax$ 의 교점의

x 좌표는 $x^2-2x=ax$ 에서

$$x^2 - (a+2)x = 0$$

$$x\{x-(a+2)\} = 0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=a+2$$



따라서 곡선 $y=x^2-2x$ 와 직선 $y=ax$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^{a+2} \{ax - (x^2-2x)\} dx &= \int_0^{a+2} \{-x^2 + (a+2)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a+2}{2}x^2 \right]_0^{a+2} \\ &= \frac{(a+2)^3}{6} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{(a+2)^3}{6} = 36$ 이므로

$$(a+2)^3 = 216, a+2 = 6 (\because a \text{는 실수})$$

$$\therefore a = 4$$

4 답 11/3

곡선 $y=-2x^2+6x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $-2x^2+6x=0$ 에서

$$x(x-3)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$

곡선 $y=-2x^2+6x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^3 (-2x^2+6x) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^3 = 9$$

곡선 $y=-2x^2+6x$ 와 직선 $y=2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$-2x^2+6x=2x \text{에서}$$

$$x^2-2x=0, x(x-2)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

$$\therefore S_1 = \int_0^2 \{(-2x^2+6x) - 2x\} dx$$

$$= \int_0^2 (-2x^2+4x) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x^2 \right]_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$S_1 + S_2 = 9 \text{이므로}$$

$$S_2 = 9 - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}$$

$$\therefore S_2 - S_1 = \frac{11}{3}$$

5 답 ⑤

두 곡선 $y=x^2-3x+4$, $y=-x^2+7x-4$

의 교점의 x 좌표는

$$x^2-3x+4 = -x^2+7x-4 \text{에서}$$

$$x^2-5x+4=0$$

$$(x-1)(x-4)=0$$

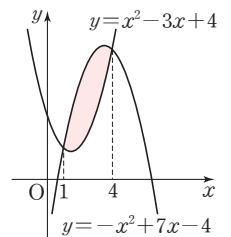
$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\int_1^4 \{(-x^2+7x-4) - (x^2-3x+4)\} dx$$

$$= \int_1^4 (-2x^2+10x-8) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - 8x \right]_1^4 = 9$$



6 답 4/3

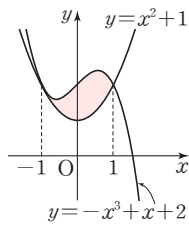
곡선 $y=-x^3+x+a$ 가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$2 = 1 - 1 + a \quad \therefore a = 2$$

곡선 $y=x^2+b$ 가 점 $(-1, 2)$ 를 지나므로

$$2 = 1 + b \quad \therefore b = 1$$

두 곡선 $y = -x^3 + x + 2$, $y = x^2 + 1$ 의 교점의
 x 좌표는 $-x^3 + x + 2 = x^2 + 1$ 에서
 $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$
 $(x+1)^2(x-1) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 1$



따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \{(-x^3 + x + 2) - (x^2 + 1)\} dx &= \int_{-1}^1 (-x^3 - x^2 + x + 1) dx \\ &= 2 \int_0^1 (-x^2 + 1) dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 \\ &= 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

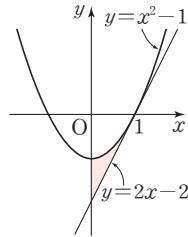
7 답 $\frac{1}{3}$

$f(x) = x^2 - 1$ 이라 하면 $f'(x) = 2x$

점 $(1, 0)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 2$ 이므로 접선의 방정식은
 $y = 2(x - 1) \quad \therefore y = 2x - 2$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{(x^2 - 1) - (2x - 2)\} dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$



8 답 ③

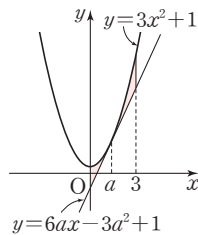
$f(x) = 3x^2 + 1$ 이라 하면 $f'(x) = 6x$

점 $(a, 3a^2 + 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(a) = 6a$ 이므로 접선 l 의
 방정식은

$$\begin{aligned} y - (3a^2 + 1) &= 6a(x - a) \\ \therefore y &= 6ax - 3a^2 + 1 \end{aligned}$$

$0 \leq a \leq 3$ 이므로

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^3 \{(3x^2 + 1) - (6ax - 3a^2 + 1)\} dx \\ &= \int_0^3 (3x^2 - 6ax + 3a^2) dx \\ &= \left[x^3 - 3ax^2 + 3a^2x \right]_0^3 \\ &= 9a^2 - 27a + 27 \\ &= 9\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{27}{4} \end{aligned}$$



따라서 $0 \leq a \leq 3$ 에서 $S(a)$ 의 최솟값은 $\frac{27}{4}$ 이다.

9 답 3

곡선 $y = -x^2 - 6x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $-x^2 - 6x = 0$ 에서
 $x(x + 6) = 0$
 $\therefore x = -6$ 또는 $x = 0$

$A = B$ 이므로

$$\int_{-6}^k (-x^2 - 6x) dx = 0$$

$$\left[-\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 \right]_{-6}^k = 0$$

$$-\frac{1}{3}k^3 - 3k^2 + 36 = 0$$

$$k^3 + 9k^2 - 108 = 0, (k + 6)^2(k - 3) = 0$$

$$\therefore k = 3 (\because k > 0)$$

10 답 $\frac{7}{6}$

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 \{a(x - 2)^2 - (-x^2 + 2x)\} dx = 0$$

$$\int_0^2 \{(a + 1)x^2 - 2(2a + 1)x + 4a\} dx = 0$$

$$\left[\frac{a + 1}{3}x^3 - (2a + 1)x^2 + 4ax \right]_0^2 = 0$$

$$\frac{8}{3}a - \frac{4}{3} = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

두 곡선 $y = \frac{1}{2}(x - 2)^2$, $y = -x^2 + 2x$ 의 교점의 x 좌표는

$$\frac{1}{2}(x - 2)^2 = -x^2 + 2x \text{에서}$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0, (3x - 2)(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = \frac{2}{3} \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 $k = \frac{2}{3}$ 이므로

$$a + k = \frac{7}{6}$$

11 답 54

곡선 $y = x^2 - 3x$ 와 직선 $y = ax$ 의 교점의

x 좌표는 $x^2 - 3x = ax$ 에서

$$x^2 - (a + 3)x = 0, x\{x - (a + 3)\} = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = a + 3$$

곡선 $y = x^2 - 3x$ 와 직선 $y = ax$ 로 둘러싸인

도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{a+3} \{ax - (x^2 - 3x)\} dx \\ &= \int_0^{a+3} \{-x^2 + (a + 3)x\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a + 3}{2}x^2 \right]_0^{a+3} \\ &= \frac{(a + 3)^3}{6} \end{aligned}$$

곡선 $y = x^2 - 3x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2 - 3x = 0$ 에서

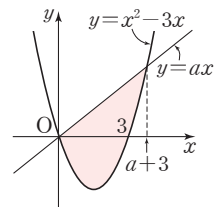
$$x(x - 3) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

곡선 $y = x^2 - 3x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^3 (-x^2 + 3x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

이때 $S_1 = 2S_2$ 이므로

$$\frac{(a + 3)^3}{6} = 2 \times \frac{9}{2} \quad \therefore (a + 3)^3 = 54$$



12 답 1/2

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

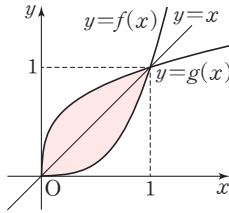
곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3=x$ 에서

$$x^3-x=0, x(x+1)(x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1 \quad (\because x \geq 0)$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$2 \int_0^1 (x-x^3) dx = 2 \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$



13 답 4

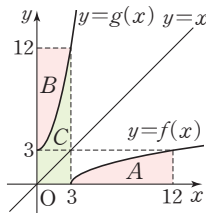
$f(3)=0$, $f(12)=3$ 이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

$$A=B$$

$$\therefore \int_3^{12} f(x) dx + \int_0^3 g(x) dx$$

$$= A + C = B + C$$

$$= 3 \times 12 = 36$$



14 답 45/4

$f(1)=4$, $f(2)=11$ 이므로 $g(4)=1$, $g(11)=2$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서

$$A=B$$

$$\therefore \int_4^{11} g(x) dx$$

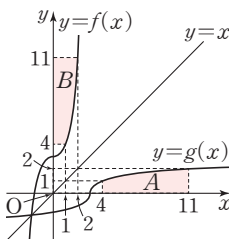
$$= A = B$$

$$= 2 \times 11 - 1 \times 4 - \int_1^2 f(x) dx$$

$$= 18 - \int_1^2 (x^3 + 3) dx$$

$$= 18 - \left[\frac{1}{4}x^4 + 3x \right]_1^2$$

$$= 18 - \frac{27}{4} = \frac{45}{4}$$



15 답 5

시각 $t=0$ 에서 $t=2$ 까지 물체가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^2 |2-2t^3| dt &= \int_0^1 (2-2t^3) dt + \int_1^2 (-2+2t^3) dt \\ &= \left[2t - \frac{1}{2}t^4 \right]_0^1 + \left[-2t + \frac{1}{2}t^4 \right]_1^2 = 7 \end{aligned}$$

16 답 4

시각 $t=6$ 에서의 점 P의 위치가 19이므로

$$1 + \int_0^6 (t^2 + at + 3) dt = 19$$

$$1 + \left[\frac{1}{3}t^3 + \frac{a}{2}t^2 + 3t \right]_0^6 = 19$$

$$91 + 18a = 19 \quad \therefore a = -4$$

17 답 3/2

두 점 P, Q가 만나려면 위치가 같아야 하므로 두 점이 다시 만나는 시각을 $t=a$ 라 하면

$$\int_0^a (2t^2 + t) dt = \int_0^a (t^2 + 2t) dt$$

$$\left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^a = \left[\frac{1}{3}t^3 + t^2 \right]_0^a$$

$$\frac{2}{3}a^3 + \frac{1}{2}a^2 = \frac{1}{3}a^3 + a^2, \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a^2 = 0$$

$$a^2(2a-3)=0 \quad \therefore a = \frac{3}{2} \quad (\because a > 0)$$

따라서 두 점 P, Q가 출발 후 다시 만나는 시각은 $t = \frac{3}{2}$ 이다.

18 답 2

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$ 이므로 점 P가 운동 방향을 두 번째로 바꿀 때의 시각을 $t=k$ 라 하면 $v(k)=0$ 에서

$$k^4 - 2k^2 + 1 - a = 0$$

$$\therefore a = k^4 - 2k^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

시각 $t=0$ 에서 $t=k$ 까지 점 P의 위치의 변화량이 0이므로

$$\int_0^k (t^4 - 2t^2 + 1 - a) dt = 0$$

$$\left[\frac{1}{5}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + (1-a)t \right]_0^k = 0$$

$$\frac{1}{5}k^5 - \frac{2}{3}k^3 + (1-a)k = 0$$

$$\frac{1}{5}k^4 - \frac{2}{3}k^2 + 1 - a = 0 \quad (\because k > 0)$$

$$\therefore a = \frac{1}{5}k^4 - \frac{2}{3}k^2 + 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$k^4 - 2k^2 + 1 = \frac{1}{5}k^4 - \frac{2}{3}k^2 + 1$$

$$3k^4 - 5k^2 = 0, k^2(3k^2 - 5) = 0$$

$$\therefore k^2 = \frac{5}{3} \quad (\because k > 0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a = \left(\frac{5}{3} \right)^2 - 2 \times \frac{5}{3} + 1 = \frac{4}{9}$$

참고 $v(t) = t^4 - 2t^2 + 1 - a$ 에서

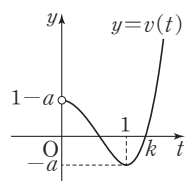
$$v'(t) = 4t^3 - 4t = 4t(t+1)(t-1)$$

$t > 0$ 에서 $v'(t)=0$ 인 t 의 값은 $t=1$

t	0	...	1	...
$v'(t)$		-	0	+
$v(t)$			$-a$ 극소	

$0 < a < 10$ 이므로 $t > 0$ 에서 함수 $y=v(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나고 그 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀐다.

따라서 점 P는 출발 후 운동 방향을 두 번 바꾼다.



19 [답] 145 m

공이 최고 높이에 도달했을 때 $v(t)=0$ 이므로

$$50-10t=0 \quad \therefore t=5$$

따라서 공을 쏘아 올린 지 5초 후에 최고 높이에 도달하므로 구하는 높이는

$$\begin{aligned} 20 + \int_0^5 (50-10t) dt &= 20 + \left[50t - 5t^2 \right]_0^5 \\ &= 20 + 125 \\ &= 145(\text{m}) \end{aligned}$$

20 [답] ㄴ, ㄷ

ㄱ. 시각 $t=4$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^4 v(t) dt &= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^4 v(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times (1+2) \times 1 \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

ㄴ. $v(t)=0$ 이고 그 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 점 P는 시각 $t=5$ 에서 운동 방향을 바꾼다.

따라서 점 P는 출발 후 $t=8$ 까지 운동 방향을 한 번 바꾼다.

ㄷ. $t=8$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^8 v(t) dt &= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^5 v(t) dt + \int_5^8 v(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1 - \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

따라서 $t=8$ 일 때 점 P는 원점에 있다.

ㄹ. 시각 $t=1$ 에서 $t=7$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_1^7 |v(t)| dt &= \int_1^2 |v(t)| dt + \int_2^5 |v(t)| dt + \int_5^7 |v(t)| dt \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

중단원 기출문제 2회

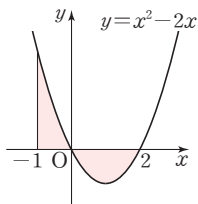
1 [답] ④

곡선 $y=x^2-2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표는 $x^2-2x=0$ 에서

$$x(x-2)=0 \quad \therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 |x^2-2x| dx &= \int_{-1}^0 (x^2-2x) dx + \int_0^2 (-x^2+2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$



2 [답] ③

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 f'(x) dx &= \int_{-2}^1 f'(x) dx + \int_1^3 f'(x) dx \\ &= \int_{-2}^1 f'(x) dx - \int_1^3 \{-f'(x)\} dx \\ &= A - B \\ &= 7 - 4 = 3 \end{aligned}$$

이때 $\int_{-2}^3 f'(x) dx = [f(x)]_{-2}^3 = f(3) - f(-2)$ 이므로

$$f(3) - f(-2) = 3$$

$$f(-2) = 2 \text{ 이므로}$$

$$f(3) - 2 = 3 \quad \therefore f(3) = 5$$

3 [답] $\frac{9}{2}$

$\int_0^2 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면 $f(x) = x^3 - 3x + k$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(t) dt &= \int_0^2 (t^3 - 3t + k) dt \\ &= \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 + kt \right]_0^2 = 2k - 2 \end{aligned}$$

따라서 $2k - 2 = k$ 이므로 $k = 2$

$$\therefore f(x) = x^3 - 3x + 2$$

곡선 $y = x^3 - 3x + 2$ 와 직선 $y = 2$ 의 교

점의 x 좌표는 $x^3 - 3x + 2 = 2$ 에서

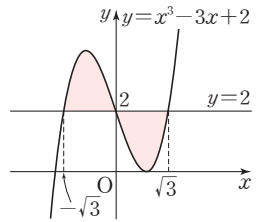
$$x^3 - 3x = 0, \quad x(x^2 - 3) = 0$$

$$x(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore x = -\sqrt{3} \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = \sqrt{3}$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} \int_{-\sqrt{3}}^0 \{(x^3 - 3x + 2) - 2\} dx + \int_0^{\sqrt{3}} \{2 - (x^3 - 3x + 2)\} dx \\ = \int_{-\sqrt{3}}^0 (x^3 - 3x) dx + \int_0^{\sqrt{3}} (-x^3 + 3x) dx \\ = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-\sqrt{3}}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^{\sqrt{3}} \\ = \frac{9}{2} \end{aligned}$$



4 [답] $\frac{5}{6}$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$ 의 교점의 x 좌표가 $-1, 1, 2$ 이므로 삼차방정식 $f(x) - g(x) = 0$ 의 세 근은 $-1, 1, 2$ 이다.

이때 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 $f(x) - g(x)$ 의 최고차항의 계수도 양수이다.

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= a(x+1)(x-1)(x-2) \\ &= a(x^3 - 2x^2 - x + 2) \quad (a > 0) \end{aligned}$$

라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{-1}^1 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_{-1}^1 a(x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \\ &= 2a \int_0^1 (-2x^2 + 2) dx \\ &= 2a \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 = \frac{8}{3}a \end{aligned}$$

따라서 $\frac{8}{3}a = \frac{16}{3}$ 이므로 $a = 2$

$$\begin{aligned}\therefore S_2 &= \int_1^2 \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_1^2 \{-2(x^3 - 2x^2 - x + 2)\} dx \\ &= -2 \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_1^2 \\ &= -2 \times \left(-\frac{5}{12} \right) = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

5 답 ④

두 곡선 $y=x^3-3x$, $y=2x^2$ 의 교점의 x 좌표

는 $x^3-3x=2x^2$ 에서

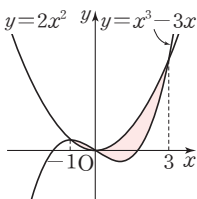
$$x^3-2x^2-3x=0$$

$$x(x+1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^0 \{(x^3-3x)-2x^2\} dx + \int_0^3 \{2x^2-(x^3-3x)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (x^3-2x^2-3x) dx + \int_0^3 (-x^3+2x^2+3x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 \\ &= \frac{71}{6}\end{aligned}$$



6 답 9

곡선 $y=x^2+1$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$-y=x^2+1 \quad \therefore y=-x^2-1$$

이 곡선을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 7 만큼 평행이동하면

$$y-7=-(x+1)^2-1$$

$$\therefore y=-x^2-2x+5$$

$$\therefore f(x)=-x^2-2x+5$$

두 곡선 $y=x^2+1$, $y=-x^2-2x+5$ 의 교

점의 x 좌표는 $x^2+1=-x^2-2x+5$ 에서

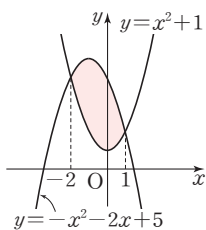
$$x^2+x-2=0$$

$$(x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^1 \{(-x^2-2x+5)-(x^2+1)\} dx \\ &= \int_{-2}^1 (-2x^2-2x+4) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3 - x^2 + 4x \right]_{-2}^1 \\ &= 9\end{aligned}$$



7 답 ②

$$f(x)=x^3+2 \text{ 라 하면 } f'(x)=3x^2$$

점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1)=3$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-3=3(x-1) \quad \therefore y=3x$$

곡선 $y=x^3+2$ 와 직선 $y=3x$ 의 교점의 x 좌

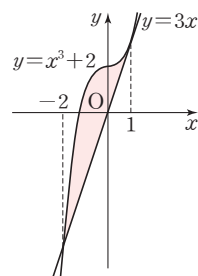
표는 $x^3+2=3x$ 에서

$$x^3-3x+2=0, (x+2)(x-1)^2=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned}&\int_{-2}^1 \{(x^3+2)-3x\} dx \\ &= \int_{-2}^1 (x^3-3x+2) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{27}{4}\end{aligned}$$



8 답 16/3

$$f(x)=-x^2+2x \text{ 라 하면 } f'(x)=-2x+2$$

점 $(-1, -3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1)=4$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(-3)=4(x+1)$$

$$\therefore y=4x+1$$

점 $(3, -3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(3)=-4$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(-3)=-4(x-3)$$

$$\therefore y=-4x+9$$

두 직선 $y=4x+1$, $y=-4x+9$ 의 교점

의 x 좌표는 $4x+1=-4x+9$ 에서

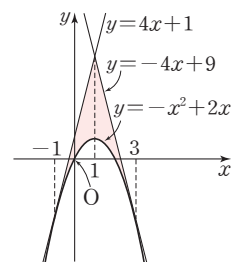
$$x=1$$

곡선과 두 접선으로 둘러싸인 도형이 직선

$x=1$ 에 대하여 대칭이므로 구하는 도형의

넓이는

$$\begin{aligned}&2 \int_{-1}^1 \{(4x+1)-(-x^2+2x)\} dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 (x^2+2x+1) dx \\ &= 4 \int_0^1 (x^2+1) dx \\ &= 4 \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 \\ &= 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{3}\end{aligned}$$



9 답 14/3

$$g(x)=\begin{cases} 6x+k & (x \geq 0) \\ -6x+k & (x < 0) \end{cases} \text{ 이고 함수 } y=f(x)$$

의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 두 함수

$y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프가 만나는 점의 개

수가 2이면 $x > 0$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프

와 직선 $y=6x+k$ 가 접한다.

$$f(x)=2x^3+x^2-2x \text{ 에서}$$

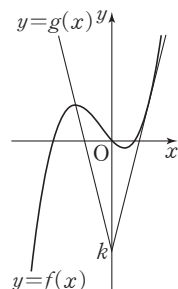
$$f'(x)=6x^2+2x-2$$

접점의 좌표를 $(t, 2t^3+t^2-2t)$ ($t > 0$)라 하면 접선의 기울기는

$$f'(t)=6t^2+2t-2 \text{ 이므로 } f'(t)=6 \text{ 에서}$$

$$6t^2+2t-2=6, 3t^2+t-4=0$$

$$(3t+4)(t-1)=0 \quad \therefore t=1 \quad (\because t > 0)$$



따라서 점점의 좌표는 $(1, 1)$ 이고 이 점이 직선 $y=6x+k$ 위의 점
이므로

$$1=6+k \quad \therefore k=-5$$

$x < 0$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-6x-5$ 의 교점의 x
좌표는 $2x^3+x^2-2x=-6x-5$ 에서

$$2x^3+x^2+4x+5=0, (x+1)(2x^2-x+5)=0$$

$$\therefore x=-1 (\because x \text{는 실수})$$

따라서 구하는 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^0 \{(2x^3+x^2-2x)-(-6x-5)\} dx \\ & \quad + \int_0^1 \{(2x^3+x^2-2x)-(6x-5)\} dx \\ &= \int_{-1}^0 (2x^3+x^2+4x+5) dx + \int_0^1 (2x^3+x^2-8x+5) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x \right]_{-1}^0 + \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 5x \right]_0^1 \\ &= \frac{14}{3} \end{aligned}$$

10 답 1

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - a \right) dx = 0, \left[\frac{1}{8}x^4 - ax \right]_0^2 = 0$$

$$2-2a=0 \quad \therefore a=1$$

11 답 $\frac{2}{3}$

곡선 $y=x^2-2x+k$ 는 직선 $x=1$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}B$ 이고, $B=2A$ 이므로 빗금 친 부분의 넓이는 A 와 같다.

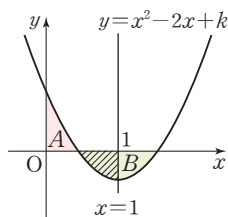
따라서 구간 $[0, 1]$ 에서 곡선

$$y=x^2-2x+k \text{와 } x\text{-축, } y\text{-축 및 직선 } x=1$$

로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^1 (x^2-2x+k) dx = 0, \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + kx \right]_0^1 = 0$$

$$-\frac{2}{3}+k=0 \quad \therefore k=\frac{2}{3}$$



12 답 $\frac{4}{3}$

곡선 $y=2x^2-k^2$ 과 y -축 및 직선 $y=k^2$ 으로

둘러싸인 도형의 넓이를 A , 두 직선

$y=2x-k^2$, $y=k^2$ 과 y -축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 B 라 하자.

(i) $x < 0$ 일 때

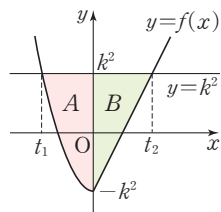
곡선 $y=2x^2-k^2$ 과 직선 $y=k^2$ 의 교점의 x 좌표를 t_1 이라 하면

$$2t_1^2-k^2=k^2, t_1^2=k^2 \quad \therefore t_1=-k (\because t_1 < 0)$$

$$\therefore A = \int_{-k}^0 \{k^2 - (2x^2 - k^2)\} dx$$

$$= \int_{-k}^0 (-2x^2 + 2k^2) dx$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2k^2x \right]_{-k}^0 = \frac{4}{3}k^3$$



(ii) $x \geq 0$ 일 때

두 직선 $y=2x-k^2$, $y=k^2$ 의 교점의 x 좌표를 t_2 라 하면

$$2t_2-k^2=k^2 \quad \therefore t_2=k^2$$

$$\therefore B = \frac{1}{2} \times k^2 \times 2k^2 = k^4$$

(i), (ii)에서 $A=B$ 이므로

$$\frac{4}{3}k^3 = k^4 \quad \therefore k = \frac{4}{3} (\because k > 0)$$

13 답 ①

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에

대하여 대칭이므로 두 곡선 $y=f(x)$,

$y=g(x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선

$y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표는 $x^3-x^2+x=x$ 에서

$$x^3-x^2=0, x^2(x-1)=0$$

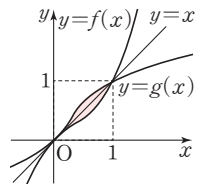
$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 구하는 넓이는

$$2 \int_0^1 \{x - (x^3 - x^2 + x)\} dx = 2 \int_0^1 (-x^3 + x^2) dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1$$

$$= 2 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$



14 답 17

$f(1)=1$, $f(2)=9$ 이고, 두 함수

$y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직선

$y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림

에서

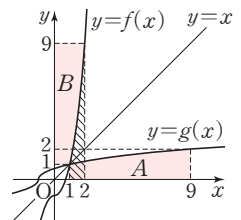
$$A=B$$

$$\therefore \int_1^2 f(x) dx + \int_1^9 g(x) dx$$

$$= (\text{빗금 친 도형의 넓이}) + A$$

$$= (\text{빗금 친 도형의 넓이}) + B$$

$$= 2 \times 9 - 1 \times 1 = 17$$



15 답 ②

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프는 직

선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 함수

$y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같다고

하면

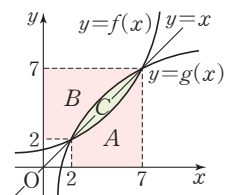
$$B = A = \int_2^7 f(x) dx = S$$

$$\therefore \int_2^7 g(x) dx = A + C$$

$$= 7 \times 7 - 2 \times 2 - B$$

$$= 45 - S$$

$$\therefore a=45$$



16 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. 시각 $t=2$ 에서의 점 P의 위치는

$$2 + \int_0^2 (-3t^2 + 4t + 4) dt = 2 + \left[-t^3 + 2t^2 + 4t \right]_0^2 \\ = 2 + 8 = 10$$

ㄴ. 시각 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3 (-3t^2 + 4t + 4) dt = \left[-t^3 + 2t^2 + 4t \right]_1^3 = -2$$

ㄷ. 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^3 |-3t^2 + 4t + 4| dt \\ = \int_0^2 (-3t^2 + 4t + 4) dt + \int_2^3 (3t^2 - 4t - 4) dt \\ = \left[-t^3 + 2t^2 + 4t \right]_0^2 + \left[t^3 - 2t^2 - 4t \right]_2^3 \\ = 13$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

17 답 19

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$ 이므로

$$12 - 3t = 0 \quad \therefore t = 4$$

따라서 시각 $t=4$ 에서의 점 P의 위치는

$$-5 + \int_0^4 (12 - 3t) dt = -5 + \left[12t - \frac{3}{2}t^2 \right]_0^4 \\ = -5 + 24 = 19$$

18 답 4초

t 초 후의 두 점 P, Q의 속도는

$$f(t) = 2t - 2, g(t) = -t + 4$$

t 초 후의 두 점 P, Q의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$ 라 하면

$$x_P(t) = \int (2t - 2) dt = t^2 - 2t + C_1$$

$$x_Q(t) = \int (-t + 4) dt = -\frac{1}{2}t^2 + 4t + C_2$$

$t=0$ 일 때 $x_P(t)=0$, $x_Q(t)=0$ 이므로

$$C_1=0, C_2=0$$

$$\therefore x_P(t) = t^2 - 2t, x_Q(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 4t$$

두 점 P, Q가 만나려면 위치가 같아야 하므로 $x_P(t) = x_Q(t)$ 에서

$$t^2 - 2t = -\frac{1}{2}t^2 + 4t$$

$$t^2 - 4t = 0, t(t - 4) = 0$$

$$\therefore t = 4 (\because t > 0)$$

따라서 두 점 P, Q가 출발 후 다시 만날 때까지 걸리는 시간은 4초이다.

19 답 ②

공이 처음 쏘아 올린 위치로 다시 돌아오는 것은 4초 후이므로

$$\int_0^4 (a - 10t) dt = 0$$

$$\left[at - 5t^2 \right]_0^4 = 0$$

$$4a - 80 = 0 \quad \therefore a = 20$$

공이 지면에 떨어지는 시각을 $t=k$ 라 하면 공이 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로

$$25 + \int_0^k (20 - 10t) dt = 0$$

$$25 + \left[20t - 5t^2 \right]_0^k = 0$$

$$25 + 20k - 5k^2 = 0$$

$$k^2 - 4k - 5 = 0, (k+1)(k-5) = 0$$

$$\therefore k = 5 (\because k > 0)$$

따라서 공을 쏘아 올린 후 지면에 떨어질 때까지 공이 움직인 거리는

$$\int_0^5 |20 - 10t| dt = \int_0^2 (20 - 10t) dt + \int_2^5 (-20 + 10t) dt \\ = \left[20t - 5t^2 \right]_0^2 + \left[-20t + 5t^2 \right]_2^5 \\ = 65(\text{m})$$

20 답 4

시각 $t=4$ 에서의 점 P의 위치는 $\int_0^4 v(t) dt$ 이므로

$$\int_0^4 v(t) dt = 4$$

이때 $\int_0^4 v(t) dt = \int_0^3 v(t) dt + \int_3^4 v(t) dt$ 이므로

$$4 = 6 + \int_3^4 v(t) dt$$

$$\therefore \int_3^4 v(t) dt = -2$$

따라서 시각 $t=4$ 에서 $t=6$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_4^6 |v(t)| dt = \int_3^6 |v(t)| dt - \int_3^4 |v(t)| dt \\ = 6 - 2 = 4$$

memo ✨

Handwriting practice lines consisting of 20 horizontal dotted lines.