



정답과 해설

미적분I

I. 함수의 극한과 연속

I-1. 함수의 극한

01 함수의 극한

개념 확인

11쪽

001 ㉠ (1) 2 (2) 2 (3) 1

- (1) x 의 값이 -1 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 2 에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$
- (2) x 의 값이 0 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 2 에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$
- (3) x 의 값이 1 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 1 에 한없이 가까워지므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

002 ㉠ (1) 2 (2) 0 (3) -5 (4) 9

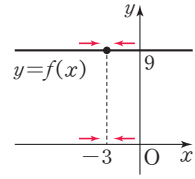
- (1) $f(x) = -x + 3$ 이라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 1 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 2 에 한없이 가까워지므로
 $\lim_{x \rightarrow 1} (-x + 3) = 2$
- (2) $f(x) = 2x + 4$ 이라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 -2 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 0 에 한없이 가까워지므로
 $\lim_{x \rightarrow -2} (2x + 4) = 0$
- (3) $f(x) = x^2 - 5$ 이라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 0 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 -5 에 한없이 가까워지므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 5) = -5$

- (4) $f(x) = 9$ 라 하면 함수

$y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 모든 실수 x 에서 함수값이 항상 9 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -3} 9 = 9$$



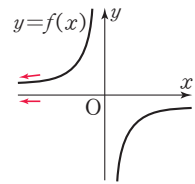
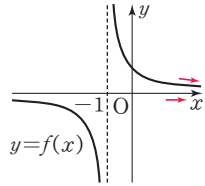
003 ㉠ (1) 0 (2) 0

- (1) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ 이라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 0 에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

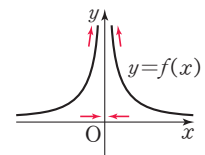
- (2) $f(x) = -\frac{2}{x}$ 라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 0 에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{2}{x}\right) = 0$$



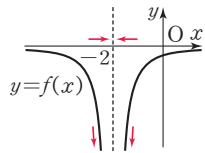
004 ㉠ (1) ∞ (2) $-\infty$

- (1) $f(x) = \frac{1}{|x|}$ 이라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 0 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$



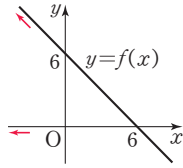
- (2) $f(x) = -\frac{1}{(x+2)^2}$ 이라 하면 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 -2 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left\{ -\frac{1}{(x+2)^2} \right\} = -\infty$$



005 ㉡ (1) ∞ (2) $-\infty$

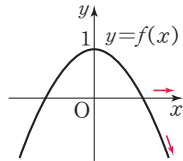
- (1) $f(x) = -x + 6$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 6) = \infty$$

- (2) $f(x) = -x^2 + 1$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
- 따라서 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2 + 1) = -\infty$$

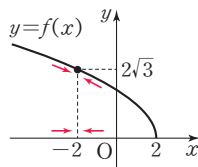


유제

13-15쪽

006 ㉡ (1) $2\sqrt{3}$ (2) 8 (3) ∞ (4) $-\infty$

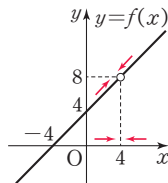
- (1) $f(x) = \sqrt{6-3x}$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
- 따라서 x 의 값이 -2 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 $2\sqrt{3}$ 에 한없이 가까워지므로
- $$\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{6-3x} = 2\sqrt{3}$$



- (2) $f(x) = \frac{x^2-16}{x-4}$ 이라 하면 $x \neq 4$ 일 때,

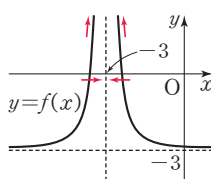
$$f(x) = \frac{(x+4)(x-4)}{x-4} = x+4$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 8에 한없이 가까워지므로



$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x-4} = 8$$

- (3) $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2} - 3$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

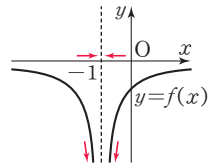


따라서 x 의 값이 -3 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow -3} \left\{ \frac{1}{(x+3)^2} - 3 \right\} = \infty$$

- (4) $f(x) = -\frac{1}{|x+1|}$ 이라

하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x 의 값이 -1 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

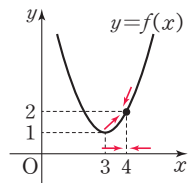
$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(-\frac{1}{|x+1|} \right) = -\infty$$

007 ㉡ ㄱ, ㄷ, ㄹ

- ㄱ. 주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 x 의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 2에 수렴한다.
- ㄴ. 주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 x 의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로 발산한다.
- ㄷ. 주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 x 의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 0에 수렴한다.
- ㄹ. 주어진 함수 $y=f(x)$ 의 그래프에서 x 의 값이 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 1에 수렴한다.
- 따라서 보기에서 수렴하는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

008 ㉡ ⑤

- ① $f(x) = x^2 - 6x + 10$ 이라 하면 $f(x) = (x-3)^2 + 1$ 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



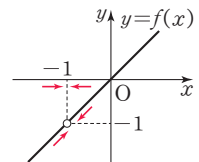
따라서 x 의 값이 4에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 4} (x^2 - 6x + 10) = 2$$

- ② $f(x) = \frac{x^2+x}{x+1}$ 라 하면 $x \neq -1$ 일 때,

$$f(x) = \frac{x(x+1)}{x+1} = x$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 -1 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 -1 에 한없이 가까워지므로

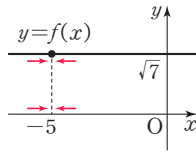


$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x}{x+1} = -1$$

- ③ $f(x) = \sqrt{7}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 모든 실수 x 에서 함수값이 항상 $\sqrt{7}$ 이므로

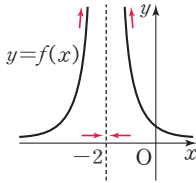
$$\lim_{x \rightarrow -5} \sqrt{7} = \sqrt{7}$$



- ④ $f(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 x 의 값이 -2 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로

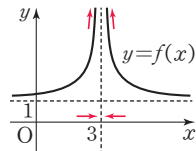
$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3}{(x+2)^2} = \infty$$



- ⑤ $f(x) = \frac{1}{|x-3|} + 1$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 x 의 값이 3 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{|x-3|} + 1 \right) = \infty$$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.



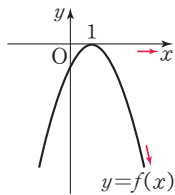
009 ㉠ (1) $-\infty$ (2) 3 (3) ∞ (4) -2

- (1) $f(x) = -x^2 + 2x - 1$ 이라 하면

$$f(x) = -(x-1)^2$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (-x^2 + 2x - 1) = -\infty$$

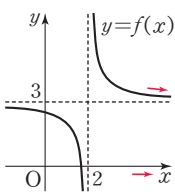


- (2) $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$ 라 하면

$$f(x) = \frac{3(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 3$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 3 에 한없이 가까워지므로

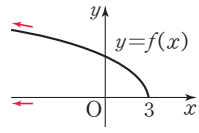
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-5}{x-2} = 3$$



- (3) $f(x) = \sqrt{9-3x}$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로

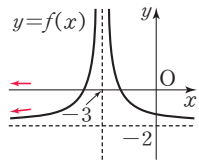
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{9-3x} = \infty$$



- (4) $f(x) = \frac{2}{|x+3|} - 2$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 -2 에 한없이 가까워지므로

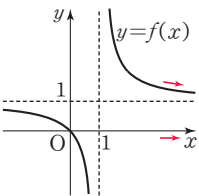
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{|x+3|} - 2 \right) = -2$$



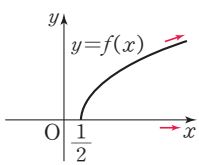
010 ㉠ ㉡, ㉢, ㉣

$$\begin{aligned} \text{㉠. } f(x) &= \frac{x}{x-1} = \frac{(x-1)+1}{x-1} \\ &= \frac{1}{x-1} + 1 \end{aligned}$$

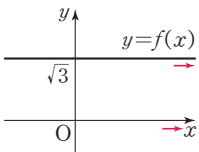
함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 1 에 수렴한다.



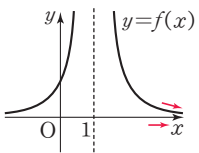
- ㉡. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값도 한없이 커진다. 즉, 발산한다.



- ㉢. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 $\sqrt{3}$ 에 수렴한다.



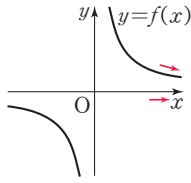
- ㉣. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 0 에 수렴한다.



따라서 수렴하는 것은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

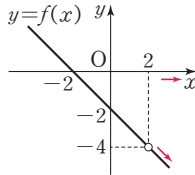
011 ㉔ ⑤

- ① $f(x) = \frac{3}{x}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x} = 0$$



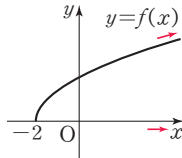
- ② $f(x) = \frac{-x^2+4}{x-2}$ 라 하면 $x \neq 2$ 일 때,
- $$f(x) = \frac{-(x+2)(x-2)}{x-2} = -x-2$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

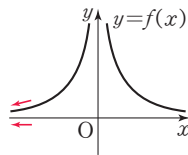


$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2+4}{x-2} = -\infty$$

- ③ $f(x) = \sqrt{x+2}$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값도 한없이 커지므로
- $$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} = \infty$$

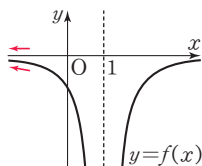


- ④ $f(x) = \frac{5}{|x|}$ 라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.
따라서 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{|x|} = 0$$

- ⑤ $f(x) = -\frac{1}{(x-1)^2}$ 이라 하면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



따라서 x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left\{ -\frac{1}{(x-1)^2} \right\} = 0$$

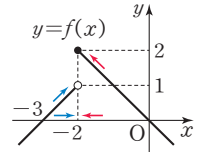
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

개념 확인

17쪽

012 ㉔ (1) 2 (2) 1

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



- (1) x 의 값이 -2 보다 크면서 -2 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로

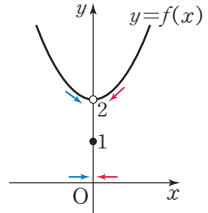
$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = 2$$

- (2) x 의 값이 -2 보다 작으면서 -2 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = 1$$

013 ㉔ (1) 2 (2) 2 (3) 2

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



- (1) x 의 값이 0보다 크면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 2$$

- (2) x 의 값이 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 2$$

- (3) $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

유제

19~23쪽

014 ㉔ (1) 2 (2) 3 (3) 2 (4) 1

- (1) x 의 값이 -2 보다 크면서 -2 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = 2$$

- (2) x 의 값이 -2 보다 작으면서 -2 에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = 3$$

(3) x 의 값이 0보다 크면서 0에 한없이 가까워질 때,
 $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 2$$

(4) x 의 값이 0보다 작으면서 0에 한없이 가까워질 때,
 $f(x)$ 의 값은 1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1$$

015 ㉡ ①

x 의 값이 -2보다 크면서 -2에 한없이 가까워질 때,
 $f(x)$ 의 값은 -2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = -2$$

x 의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때,
 $f(x)$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -2$$

016 ㉡ 6

x 의 값이 -1보다 크면서 -1에 한없이 가까워질 때,
 $f(x)$ 의 값은 2에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 2$$

x 의 값이 1보다 작으면서 1에 한없이 가까워질 때,
 $f(x)$ 의 값은 -1에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = -1$$

또 $f(2) = 3$ 이므로

$$f(2) + \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 6$$

017 ㉡ -2

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는
 오른쪽 그림과 같다.

x 의 값이 2보다 크면서 2
 에 한없이 가까워질 때,

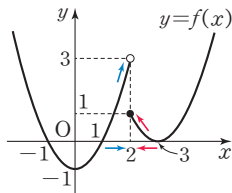
$f(x)$ 의 값은 1에 한없이
 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 1$$

x 의 값이 2보다 작으면서 2에 한없이 가까워질 때,
 $f(x)$ 의 값은 3에 한없이 가까워지므로

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = -2$$



018 ㉡ (1) 존재하지 않는다.

(2) 존재하지 않는다.

(1) $x > -1$ 일 때,

$$\frac{x^2-3x-4}{|x+1|} = \frac{(x+1)(x-4)}{x+1} = x-4$$

$x < -1$ 일 때,

$$\frac{x^2-3x-4}{|x+1|} = \frac{(x+1)(x-4)}{-(x+1)} = -x+4$$

$$f(x) = \frac{x^2-3x-4}{|x+1|} \text{라 하면}$$

$$f(x) = \begin{cases} x-4 & (x > -1) \\ -x+4 & (x < -1) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오
 른쪽 그림과 같으므로

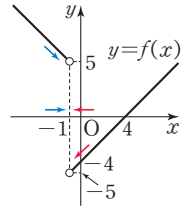
$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = -5,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 5$$

따라서

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \text{ 즉}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-3x-4}{|x+1|} \text{의 값은 존재하지 않는다.}$$



(2) 정수 n 에 대하여 $n \leq x < n+1$ 일 때,

$$n-1 \leq x-1 < n \text{이므로}$$

$$[x-1] = n-1$$

$f(x) = [x-1]$ 이라 하면

함수 $y=f(x)$ 의 그래프
 는 오른쪽 그림과 같다.

즉, $3 \leq x < 4$ 일 때

$$2 \leq x-1 < 3 \text{이므로}$$

$$[x-1] = 2$$

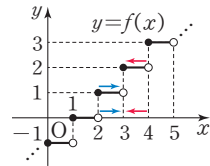
$$2 \leq x < 3 \text{일 때 } 1 \leq x-1 < 2 \text{이므로}$$

$$[x-1] = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$,

즉 $\lim_{x \rightarrow 3} [x-1]$ 의 값은 존재하지 않는다.



019 ㉡ ㄱ, ㄴ

$$\text{ㄱ. } \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$$

$$\text{ㄴ. } \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

$$\text{ㄹ. } \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

따라서 보기에서 극한값이 존재하는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

020 ㉞ ㄷ

ㄱ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

$$\text{ㄴ. } x > 0 \text{ 일 때, } \frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

$$x < 0 \text{ 일 때, } \frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

ㄷ. $x \geq 0$ 일 때,

$$x + |x| = x + x = 2x$$

$x < 0$ 일 때,

$$x + |x| = x - x = 0$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같으므로

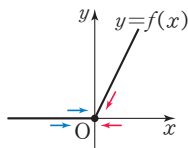
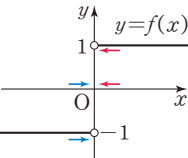
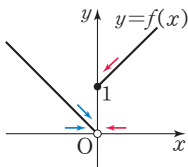
$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

따라서 보기에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하는 것은 ㄷ이다.



021 ㉞ 7

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재하려면

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) \text{ 이어야}$$

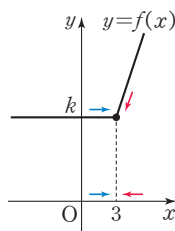
하므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3+} (3x-2) = 7,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} k = k \text{ 이므로}$$

$$k = 7$$



022 ㉞ (1) 1 (2) 0 (3) 1 (4) 0 (5) 1 (6) 1

(1) $g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = 1$$

(2) $g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = 0$$

(3) $g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x)) = f(1) = 1$$

(4) $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1-$ 일 때 $t=-1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1-} g(f(x)) = g(-1) = 0$$

(5) $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} g(t) = 1$$

(6) $f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = 1$$

023 ㉞ ⑤

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 3-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 3-} f(t) = 3$$

$x \rightarrow 2+$ 일 때 $t=3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(f(x)) = f(3) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(f(x)) + \lim_{x \rightarrow 2+} f(f(x)) = 5$$

024 ㉞ 4

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

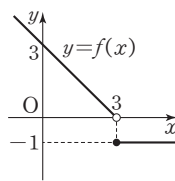
$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 3-$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = 3$$

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 3+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 3+} f(t) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3-} f(f(x)) - \lim_{x \rightarrow 0-} f(f(x)) = 4$$



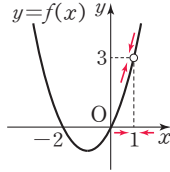
025 ㉠ ㉡

㉠. $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x-1}$ 라 하면 $x \neq 1$ 일 때,

$$f(x) = \frac{x(x+2)(x-1)}{x-1} = x(x+2)$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 3에 한없이 가까워지므로

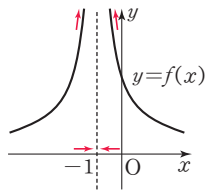
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x-1} = 3$$



㉡. $f(x) = \frac{3}{|x+1|}$ 이라 하면

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다. 따라서 x 의 값이 -1에 한없이 가까워질 때, $f(x)$ 의 값은 한없이 커지므로

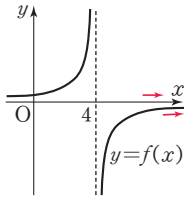
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3}{|x+1|} = \infty$$



㉢. $f(x) = -\frac{2}{x-4}$ 라 하면 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 4에 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값은 0에 한없이 가까워지므로

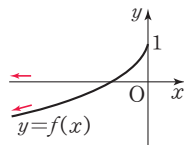
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{2}{x-4}\right) = 0$$



㉣. $f(x) = 1 - \sqrt{-x}$ 라 하면 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, x 의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커질 때, $f(x)$ 의 값도 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지므로

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - \sqrt{-x}) = -\infty$$



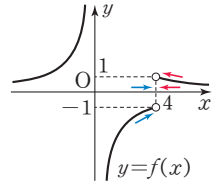
따라서 보기에서 수렴하는 것은 ㉠, ㉡이다.

026 ㉢ 2

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x} & (x > 4) \\ -\frac{4}{x} & (x < 4) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = 1 - (-1) = 2$$



027 ㉢ ④

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 0 + 2 = 2$$

028 ㉢ ⑤

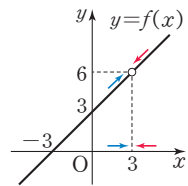
① $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x-3}$ 라 하면 $x \neq 3$ 일 때,

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = x+3$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 6$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$



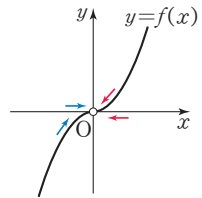
② $f(x) = \frac{x^3}{|x|}$ 이라 하면

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & (x > 0) \\ -x^2 & (x < 0) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$



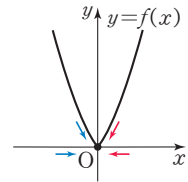
③ $f(x) = x^2 + |x|$ 라 하면

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & (x \geq 0) \\ x^2 - x & (x < 0) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$



④ $f(x) = \frac{(x+1)^2}{|x+1|}$ 이라 하면 $x \neq -1$ 일 때,

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x > -1) \\ -x-1 & (x < -1) \end{cases}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

- ⑤ 정수 n 에 대하여 $n \leq x < n+1$ 일 때,
 $n+1 \leq x+1 < n+2$ 이므로 $[x+1] = n+1$
 $f(x) = [x+1]$ 이라 하면
 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는
 오른쪽 그림과 같다.
 즉, $1 \leq x < 2$ 일 때
 $2 \leq x+1 < 3$ 이므로
 $[x+1] = 2$
 $0 \leq x < 1$ 일 때 $1 \leq x+1 < 2$ 이므로 $[x+1] = 1$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$
 의 값은 존재하지 않는다.
 따라서 극한값이 존재하지 않는 것은 ⑤이다.

029 ㉠-5

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하려면
 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$ 이어야

하므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.
 이때

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (2x+a) = 4+a,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (-x^2+3) = -1 \text{이므로}$$

$$4+a = -1 \quad \therefore a = -5$$

030 ㉠-ㄴ

- ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1$
 따라서 $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
 의 값은 존재하지 않는다.
 ㄴ. $-3 < k < -1$ 인 모든 실수 k 에 대하여
 $\lim_{x \rightarrow k+} f(x) = \lim_{x \rightarrow k-} f(x)$ 이므로 $\lim_{x \rightarrow k} f(x)$ 의 값이
 존재한다.
 ㄷ. $\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1 - 0 = 1$ 이므로 $a = 1$
 $\therefore a + \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$
 $= 1 + 2 = 3$
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

031 ㉠ 10

$$f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b & (x < -2 \text{ 또는 } x > 2) \\ -x(x-2) & (-2 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{이므로}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 극한값이 존재하면
 $\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x), \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같아야 한다.

이때

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} \{-x(x-2)\} = -8,$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} (x^2+ax+b)$$

$$= 4 - 2a + b$$

이므로

$$-8 = 4 - 2a + b \quad \therefore 2a - b = 12 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또 $\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2+ax+b) = 4 + 2a + b,$
 $\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \{-x(x-2)\} = 0$ 이므로

$$4 + 2a + b = 0 \quad \therefore 2a + b = -4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = 2, b = -8$$

$$\therefore a - b = 10$$

032 ㉠ ②

$f(x) = t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) = f(2) = 1$$

$x \rightarrow 3+$ 일 때 $t \rightarrow 3-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 3-} f(t) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(f(x)) - \lim_{x \rightarrow 3+} f(f(x)) = -1$$

033 ㉠ 1

$x+1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x+1) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = -1 \quad \gggggg \textcircled{1}$$

$-x=s$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $s \rightarrow 0-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(-x) = \lim_{s \rightarrow 0-} f(s) = 2 \quad \gggggg \textcircled{2}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0-} f(x+1) + \lim_{x \rightarrow 0+} f(-x) = 1 \quad \gggggg \textcircled{3}$$

단계	채점 기준	비율
①	$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x+1)$ 의 값 구하기	40 %
②	$\lim_{x \rightarrow 0+} f(-x)$ 의 값 구하기	40 %
③	$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x+1) + \lim_{x \rightarrow 0+} f(-x)$ 의 값 구하기	20 %

034 ㉡ ①

| 접근 방법 | $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭임을 이용하여 $-2 \leq x \leq 2$ 에서의 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 그려 본다.

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 $f(-x) = -f(x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

따라서 주어진 그래프를 원

점에 대하여 대칭이동하면

$-2 \leq x \leq 2$ 에서의 함수

$y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽

그림과 같다.

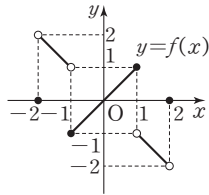
$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) \\ = -1 + (-2) = -3 \end{aligned}$$

| 다른 풀이 |

$-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -1+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} \{-f(-x)\} = -\lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = -1 + (-2) = -3$$



035 ㉡ 3

| 접근 방법 | $\frac{t+3}{t-2}$, $\frac{4t+2}{t+3}$ 를 각각 m , n 으로 치환하여 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $f(m)$, $f(n)$ 의 극한값을 구한다.

$$\frac{t+3}{t-2} = m \text{으로 놓으면}$$

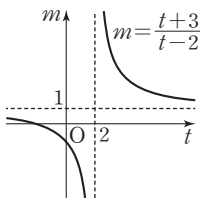
$$m = \frac{(t-2)+5}{t-2} = \frac{5}{t-2} + 1$$

따라서 $m = \frac{t+3}{t-2}$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같다.

$t \rightarrow \infty$ 일 때 $m \rightarrow 1+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{t+3}{t-2}\right) &= \lim_{m \rightarrow 1+} f(m) \\ &= 2 \end{aligned}$$



$$\frac{4t+2}{t+3} = n \text{으로 놓으면}$$

$$n = \frac{4(t+3)-10}{t+3} = \frac{-10}{t+3} + 4$$

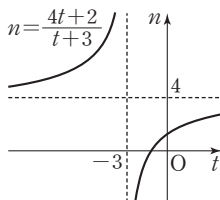
따라서 $n = \frac{4t+2}{t+3}$ 의 그래프

프는 오른쪽 그림과 같다.

$t \rightarrow \infty$ 일 때 $n \rightarrow 4-$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{4t+2}{t+3}\right) \\ = \lim_{n \rightarrow 4-} f(n) = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{t+3}{t-2}\right) + \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\frac{4t+2}{t+3}\right) = 3$$



02 함수의 극한값의 계산

개념 확인

27쪽

$$036 \text{ ㉡ (1) } 4 \text{ (2) } -6 \text{ (3) } 9 \text{ (4) } -\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 1} \{2f(x) + g(x)\} &= 2\lim_{x \rightarrow 1} f(x) + \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \\ &= 2 \times 3 + (-2) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} g(x) \\ &= 3 \times (-2) = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)\}^2 &= \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\ &= 3 \times 3 = 9 \end{aligned}$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x)} = -\frac{3}{2}$$

유제

29~37쪽

037 ㉡ 1

$$h(x) = f(x) - 2g(x) \text{라 하면 } \lim_{x \rightarrow 3} h(x) = 6$$

$$f(x) = h(x) + 2g(x) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 3g(x)}{2f(x) + g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{h(x) + 2g(x) - 3g(x)}{2\{h(x) + 2g(x)\} + g(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{h(x) - g(x)}{2h(x) + 5g(x)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 3} h(x) - \lim_{x \rightarrow 3} g(x)}{2\lim_{x \rightarrow 3} h(x) + 5\lim_{x \rightarrow 3} g(x)} \\ &= \frac{6 - (-1)}{2 \times 6 + 5 \times (-1)} = 1 \end{aligned}$$

038 ㉡ 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 2f(x)}{2x - 3f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + 2 \times \frac{f(x)}{x}}{2 - 3 \times \frac{f(x)}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1 + 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} 2 - 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}} \\ &= \frac{1 + 2 \times \frac{1}{5}}{2 - 3 \times \frac{1}{5}} = 1 \end{aligned}$$

039 $\frac{3}{2}$

$h(x) = f(x) - 5g(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$$

$f(x) = h(x) + 5g(x)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4f(x) + g(x)}{3f(x) - g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4\{h(x) + 5g(x)\} + g(x)}{3\{h(x) + 5g(x)\} - g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4h(x) + 21g(x)}{3h(x) + 14g(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \times \frac{h(x)}{g(x)} + 21}{3 \times \frac{h(x)}{g(x)} + 14}$$

$$= \frac{4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{g(x)} + \lim_{x \rightarrow \infty} 21}{3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(x)}{g(x)} + \lim_{x \rightarrow \infty} 14}$$

$$= \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$$

040 $\frac{1}{5}$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x-1)}{x-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-f(x)}{x-4f(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{f(x)}{x}}{1 - 4 \times \frac{f(x)}{x}} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} 1 - 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}} \\ &= \frac{1-4}{1-4 \times 4} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

041 $\frac{1}{2}$ (1) 1 (2) 2 (3) 6 (4) $-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-5x+6}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)(x-3)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (x-2) \\ &= 3-2=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x^3-x} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+3)(x-1)}{x(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{x(x+1)} \\ &= \frac{4}{1 \times 2} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{\sqrt{x-1}-1} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3x-6)(\sqrt{x-1}+1)}{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}{x-2} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x-1}+1) \\ &= 3 \times (1+1) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}+2} \\ &= \frac{-2}{2+2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

042 -2

$x \rightarrow -2$ 일 때 $|x+2| = x+2$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x^2+2x}{|x+2|} &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{x(x+2)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+} x \\ &= -2 \end{aligned}$$

043 12

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)f(x)}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)f(x)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)f(x)}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2)f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{x}+2) \times \lim_{x \rightarrow 4} f(x) \\ &= (2+2) \times 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

044 ㉠ (1) -2 (2) ∞ (3) 0 (4) 4 (5) 0 (6) $-\frac{1}{5}$

$$(1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3}{-2x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{3}{x^2}}{-2 - \frac{1}{x}} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2}{x^2 + 9x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \frac{2}{x^2}}{1 + \frac{9}{x} - \frac{1}{x^2}} = \infty$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}} = 0$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 6} + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{6}{x^2}} + \frac{2}{x}} = 4$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3} + 2x}{x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^4}} + \frac{2}{x}}{1 + \frac{5}{x^2}} = 0$$

(6) $x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{5x - 1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2 + 2t}}{-5t - 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{t}}}{-5 - \frac{1}{t}} = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

045 ㉠ 6

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x-1)(3x+2)}{2x^2+x+1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12x^2+5x-2}{2x^2+x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12 + \frac{5}{x} - \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &= \frac{12}{2} = 6 \end{aligned}$$

046 ㉠ $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(x-1)}{4x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (x-1)^2}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - (x^2 - 2x + 1)}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{4} \\ &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

047 ㉠ (1) $-\frac{1}{6}$ (2) $\frac{4}{3}$

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow \infty} (3x - \sqrt{9x^2 + x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x - \sqrt{9x^2 + x})(3x + \sqrt{9x^2 + x})}{3x + \sqrt{9x^2 + x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{3x + \sqrt{9x^2 + x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{3 + \sqrt{9 + \frac{1}{x}}} \\ &= \frac{-1}{3+3} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{4x^2 + 6x} - 2x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{4x^2 + 6x} + 2x)}{(\sqrt{4x^2 + 6x} - 2x)(\sqrt{4x^2 + 6x} + 2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{4x^2 + 6x} + 2x)}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 + 6x} + 2x}{3x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4 + \frac{6}{x}} + 2}{3} \\ &= \frac{2+2}{3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

048 ㉠ (1) -1 (2) $\frac{1}{16}$

$$\begin{aligned} (1) \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(1 - \frac{x}{x-1} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \times \frac{x-1-x}{x-1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{1 - \frac{1}{x}} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{x+3}} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x+3} - 2}{2\sqrt{x+3}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{1}{x-1} \times \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{2\sqrt{x+3}(\sqrt{x+3} + 2)} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)\{2\sqrt{x+3}(\sqrt{x+3} + 2)\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2\sqrt{x+3}(\sqrt{x+3} + 2)} \\ &= \frac{1}{2 \times 2(2+2)} = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

049 ㉠ -1

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t^2-t}-\sqrt{t^2+t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2-t}+\sqrt{t^2+t}}{(\sqrt{t^2-t}-\sqrt{t^2+t})(\sqrt{t^2-t}+\sqrt{t^2+t})} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2-t}+\sqrt{t^2+t}}{-2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{t}}+\sqrt{1+\frac{1}{t}}}{-2} = \frac{1+1}{-2} = -1 \end{aligned}$$

050 ㉠ $\frac{3}{8}$

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 + \frac{2x}{\sqrt{4x^2+3}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 \left(1 - \frac{2t}{\sqrt{4t^2+3}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(t^2 \times \frac{\sqrt{4t^2+3}-2t}{\sqrt{4t^2+3}} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ t^2 \times \frac{(\sqrt{4t^2+3}-2t)(\sqrt{4t^2+3}+2t)}{\sqrt{4t^2+3}(\sqrt{4t^2+3}+2t)} \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3t^2}{4t^2+3+2t\sqrt{4t^2+3}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{3}{4+\frac{3}{t^2}+2\sqrt{4+\frac{3}{t^2}}} = \frac{3}{4+2 \times 2} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

051 ㉠ $\frac{1}{2}$

$A(t, 4\sqrt{t}), B(t, 2\sqrt{t}), C(t, 0)$ 이므로

$$\overline{OA} = \sqrt{t^2 + (4\sqrt{t})^2} = \sqrt{t^2 + 16t}, \overline{AC} = 4\sqrt{t}$$

$$\overline{OB} = \sqrt{t^2 + (2\sqrt{t})^2} = \sqrt{t^2 + 4t}, \overline{BC} = 2\sqrt{t}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\overline{OA} - \overline{AC}}{\overline{OB} - \overline{BC}} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t^2+16t} - 4\sqrt{t}}{\sqrt{t^2+4t} - 2\sqrt{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t}(\sqrt{t+16} - 4)}{\sqrt{t}(\sqrt{t+4} - 2)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t+16} - 4}{\sqrt{t+4} - 2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{t+16} - 4)(\sqrt{t+16} + 4)(\sqrt{t+4} + 2)}{(\sqrt{t+4} - 2)(\sqrt{t+4} + 2)(\sqrt{t+16} + 4)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t(\sqrt{t+4} + 2)}{t(\sqrt{t+16} + 4)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{t+4} + 2}{\sqrt{t+16} + 4} \\ &= \frac{2+2}{4+4} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

052 ㉠ ③

점 $P(t, t+1)$ 을 지나고 직선 $y=x+1$ 에 수직인 직선의 기울기는 -1 이므로 직선 PQ 의 방정식은

$$y - (t+1) = -(x-t) \quad \therefore y = -x + 2t + 1$$

$$\therefore Q(0, 2t+1)$$

$$\overline{AP}^2 = (t+1)^2 + (t+1)^2 = 2t^2 + 4t + 2,$$

$$\overline{AQ}^2 = 1^2 + (2t+1)^2 = 4t^2 + 4t + 2 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\overline{AQ}^2}{\overline{AP}^2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{4t^2 + 4t + 2}{2t^2 + 4t + 2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^2 + 2t + 1}{t^2 + 2t + 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}}{1 + \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}} = 2 \end{aligned}$$

053 ㉠ $4\sqrt{3}$

$A(t, \sqrt{3t}), B(t+3, \sqrt{3t+9}), C(t+3, \sqrt{3t})$ 이므로

$$\overline{AC} = t+3-t=3, \overline{BC} = \sqrt{3t+9} - \sqrt{3t}$$

$$\begin{aligned} \therefore S(t) &= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BC} \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times (\sqrt{3t+9} - \sqrt{3t}) \\ &= \frac{3(\sqrt{3t+9} - \sqrt{3t})}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{27}{\sqrt{t} \times S(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{18}{\sqrt{t}(\sqrt{3t+9} - \sqrt{3t})} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{18(\sqrt{3t+9} + \sqrt{3t})}{\sqrt{t}(\sqrt{3t+9} - \sqrt{3t})(\sqrt{3t+9} + \sqrt{3t})} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{18(\sqrt{3t+9} + \sqrt{3t})}{9\sqrt{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2(\sqrt{3t+9} + \sqrt{3t})}{\sqrt{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} 2\left(\sqrt{3 + \frac{9}{t}} + \sqrt{3}\right) \\ &= 2(\sqrt{3} + \sqrt{3}) = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

054 ㉠ $\frac{1}{2}$

점 P 의 좌표를 (x, x^2) , 점 Q 의 좌표를 $(0, y)$ 라 하면

$$\overline{QO} = \overline{QP}, \text{ 즉 } \overline{QO}^2 = \overline{QP}^2 \text{ 이므로}$$

$$y^2 = x^2 + (x^2 - y)^2, y^2 = x^4 + x^2 - 2x^2y + y^2$$

$$2x^2y = x^4 + x^2 \quad \therefore y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \quad (\because x \neq 0)$$

점 P가 점 O에 한없이 가까워지면 $x \rightarrow 0$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

따라서 점 Q는 점 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 에 한없이 가까워지므로

$$a = \frac{1}{2}$$

개념 확인

39쪽

055 ㉡ (1) -2 (2) 1

(1) $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + ax) = 0 \text{이므로}$$

$$4 + 2a = 0 \quad \therefore a = -2$$

(2) $x \rightarrow -1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - a) = 0 \text{이므로}$$

$$1 - a = 0 \quad \therefore a = 1$$

056 ㉡ 1

$\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x - 1) = 1$ 이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

유제

41~43쪽

057 ㉡ $a=5, b=6$

$x \rightarrow -3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -3} (x^2 + ax + b) = 0 \text{이므로}$$

$$9 - 3a + b = 0 \quad \therefore b = 3a - 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + ax + b}{x + 3} &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + ax + 3a - 9}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + ax + 3(a - 3)}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(x + a - 3)}{x + 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} (x + a - 3) \\ &= a - 6 \end{aligned}$$

따라서 $a - 6 = -1$ 이므로 $a = 5$

이를 ㉠에 대입하면 $b = 6$

058 ㉡ $a=1, b=-4$

$x \rightarrow 4$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 4} (ax + b) = 0 \text{이므로}$$

$$4a + b = 0 \quad \therefore b = -4a \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

㉠을 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{ax+b} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{ax-4a} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}{a(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{a(x-4)(\sqrt{x+5}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{a(\sqrt{x+5}+3)} \\ &= \frac{1}{a(3+3)} = \frac{1}{6a} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{6a} = \frac{1}{6} \text{이므로 } a = 1$$

이를 ㉠에 대입하면 $b = -4$

059 ㉡ $a=-1, b=2$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{3x^2-8} + ax) = 0 \text{이므로}$$

$$2 + 2a = 0 \quad \therefore a = -1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x^2-8} + ax}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x^2-8} - x}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{3x^2-8} - x)(\sqrt{3x^2-8} + x)}{(x-2)(\sqrt{3x^2-8} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{(x-2)(\sqrt{3x^2-8} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+2)(x-2)}{(x-2)(\sqrt{3x^2-8} + x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+2)}{\sqrt{3x^2-8} + x} \\ &= \frac{2 \times 4}{2 + 2} = 2 \\ \therefore b &= 2 \end{aligned}$$

060 ㉡ $a=7, b=1$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분자) $\rightarrow 0$ 이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - b) = 0$ 이므로

$$1 - b = 0 \quad \therefore b = 1$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + (a+1)x + a}{x^2 - b} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + (a+1)x + a}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+a)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+a}{x-1} \\ &= \frac{-1+a}{-2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{-1+a}{-2} = -3$ 이므로

$$-1 + a = 6 \quad \therefore a = 7$$

061 ㉡ 1

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2 + 1} = -1$ 에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가
-1인 이차함수이다. ㉠

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} = 1$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고
극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$ 이므로

$$f(-1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡에서 $f(x) = -(x+1)(x+a)$ (a 는 상수)라
하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x+1)(x+a)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x+a)}{x-1} = \frac{a-1}{2} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a-1}{2} = 1$ 이므로

$$a - 1 = 2 \quad \therefore a = 3$$

즉, $f(x) = -(x+1)(x+3)$ 이므로

$$f(-2) = -(-1) \times 1 = 1$$

062 ㉡ (1) $\frac{1}{5}$ (2) 4

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{5x^2 + 3} = \frac{1}{5}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 4}{5x^2 + 3} = \frac{1}{5}$ 이므
로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{1}{5}$$

(2) $x > 0$ 일 때 $2x + 3 > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각
변을 제곱하면

$$(2x+3)^2 < \{f(x)\}^2 < (2x+5)^2$$

$$\therefore 4x^2 + 12x + 9 < \{f(x)\}^2 < 4x^2 + 20x + 25$$

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 1 > 0$ 이므로 이 부등식
의 각 변을 $x^2 + 1$ 로 나누면

$$\frac{4x^2 + 12x + 9}{x^2 + 1} < \frac{\{f(x)\}^2}{x^2 + 1} < \frac{4x^2 + 20x + 25}{x^2 + 1}$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 12x + 9}{x^2 + 1} = 4,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 20x + 25}{x^2 + 1} = 4 \text{이므로 함수의 극한의 대}$$

소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{x^2 + 1} = 4$$

063 ㉡ 7

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - x^3}{x^2} = 2$ 에서 $f(x) - x^3$ 은 최고차항의 계

수가 2인 이차함수이므로

$f(x) - x^3 = 2x^2 + ax + b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 4$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한

값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{이므로 } f(0) = 0 \quad \therefore b = 0$$

따라서 $f(x) = x^3 + 2x^2 + ax$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 + ax}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + 2x + a) = a \end{aligned}$$

$$\therefore a = 4$$

따라서 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x$ 이므로

$$f(1) = 1 + 2 + 4 = 7$$

064 ㉡ 4

모든 양의 실수 x 에 대하여 $x^2 > 0$ 이므로 주어진 부등
식의 각 변을 x^2 으로 나누면

$$4 - \frac{3}{x} < f(x) < 4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 - \frac{3}{x}\right) = 4, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 4 \text{이므}$$

로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$$

연습문제

44~46쪽

065 ㉡ 5

$5f(x) + g(x) = h(x)$, $f(x) - g(x) = k(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 4} h(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 4} k(x) = -7$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \lim_{x \rightarrow 4} \{f(x) + g(x)\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{5f(x) + g(x) - 2\{f(x) - g(x)\}}{3} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{h(x) - 2k(x)}{3} \\
&= \frac{1}{3} \{ \lim_{x \rightarrow 4} h(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 4} k(x) \} \\
&= \frac{1}{3} \{1 - 2 \times (-7)\} = 5
\end{aligned}$$

| 다른 풀이 |

$$5f(x) + g(x) = h(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f(x) - g(x) = k(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 4} h(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 4} k(x) = -7$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{을 하면 } 6f(x) = h(x) + k(x)$$

$$\therefore f(x) = \frac{h(x) + k(x)}{6}$$

$$\textcircled{1} - 5 \times \textcircled{2} \text{을 하면}$$

$$6g(x) = h(x) - 5k(x)$$

$$\therefore g(x) = \frac{h(x) - 5k(x)}{6}$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \lim_{x \rightarrow 4} \{f(x) + g(x)\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \left\{ \frac{h(x) + k(x)}{6} + \frac{h(x) - 5k(x)}{6} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{h(x) - 2k(x)}{3} \\
&= \frac{1}{3} \{ \lim_{x \rightarrow 4} h(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 4} k(x) \} \\
&= \frac{1}{3} \{1 - 2 \times (-7)\} = 5
\end{aligned}$$

066 ㉮ 3

$x-2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2$ 일 때 $t \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{f(x-2)} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+4)}{f(x-2)} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(t+6)}{f(t)} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{f(t)} \times \lim_{t \rightarrow 0} (t+6) \\
&= \frac{1}{2} \times 6 = 3
\end{aligned}$$

067 ㉮ 4

$$\begin{aligned}
\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 - 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x-4)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+2} - 1}{x+1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+2} - 1)(\sqrt{x+2} + 1)}{(x+1)(\sqrt{x+2} + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x+1)(\sqrt{x+2} + 1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x}}{3 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \infty$$

$\textcircled{5} x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2 - 2}{x^2 + 4x + 1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{5t^2 - 2}{t^2 - 4t + 1} \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{2}{t^2}}{1 - \frac{4}{t} + \frac{1}{t^2}} = 5
\end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 $\textcircled{4}$ 이다.

068 ㉮ 4

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3f(x)}{x^2 - f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 3 \times \frac{f(x)}{x} \times \frac{1}{x}}{1 - \frac{f(x)}{x} \times \frac{1}{x}} = 4$$

069 ㉮ 4

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 2x}) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 2x})(\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 - 2x})}{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 - 2x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 4x} + \sqrt{x^2 - 2x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{\sqrt{1 + \frac{4}{x}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \\
&= \frac{6}{1+1} = 3 \\
&\therefore a = 3
\end{aligned}$$

▶▶▶▶▶ ①

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{3x-2} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{x} \times \frac{4x}{(x+2)(3x-2)} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{(x+2)(3x-2)} \\
&= \frac{4}{2 \times (-2)} = -1
\end{aligned}$$

$$\therefore b = -1 \quad \text{▶▶▶▶▶ ②}$$

$$\therefore a - b = 4 \quad \text{▶▶▶▶▶ ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	a의 값 구하기	50%
②	b의 값 구하기	40%
③	a-b의 값 구하기	10%

070 ㉮ 5

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 4x + a) = 0 \text{이므로}$$

$$1 - 4 + a = 0 \quad \therefore a = 3$$

이를 주어진 식의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + a}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 3)(x + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x + 3) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\therefore b = 2$$

$$\therefore a + b = 5$$

071 ㉮ ④

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2} = 2$ 에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다. ㉮

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} = 3$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{이므로}$$

$$f(1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

㉮, ㉮에서 $f(x) = 2(x - 1)(x + a)$ (a 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1)(x + a)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} 2(x + a) \\ &= 2 + 2a \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 2 + 2a = 3 \text{이므로 } a = \frac{1}{2}$$

$$\text{즉, } f(x) = 2(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) \text{이므로}$$

$$f(3) = 2 \times 2 \times \frac{7}{2} = 14$$

072 ㉮ 4

$x > 1$ 일 때 $x - 1 > 0$ 이므로 주어진 부등식의 각 변을 $x - 1$ 로 나누면

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} < \frac{f(x)}{x - 1} < \frac{2x^2 - 2}{x - 1}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x + 3)(x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x + 3) = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2x^2 - 2}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{2(x + 1)(x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} 2(x + 1) = 4 \end{aligned}$$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{x - 1} = 4$$

073 ㉮ ㄱ, ㄷ

$$\neg. \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \alpha,$$

$\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - g(x)\} = \beta$ (α, β 는 실수)라 하면

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow a} g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\{f(x) + g(x)\} - \{f(x) - g(x)\}}{2} \\ &= \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

$$\vee. [\text{반례}] f(x) = x, g(x) = \frac{1}{x} \text{이면 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0,$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 1$ 이지만 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

$$\text{ㄷ. } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \beta \quad (\alpha, \beta \text{는 실수}) \text{라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left\{ g(x) \times \frac{f(x)}{g(x)} \right\} = \alpha\beta$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

074 ㉮ 8

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 - 2x & (x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x^2 + 2x & (0 \leq x < 2) \\ -x^2 - 2x & (-2 < x < 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{-x^2 + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x + 2) = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{f(x)}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x(x + 2)(x - 1)}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2-} x(x - 1) = -2 \times (-3) = 6 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{x} + \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{f(x)}{x + 2} = 8$$

075 ㉔ ③

$x = -t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -\infty$ 일 때 $t \rightarrow \infty$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - ax} + 2x) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\sqrt{4t^2 + at} - 2t) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4t^2 + at} - 2t)(\sqrt{4t^2 + at} + 2t)}{\sqrt{4t^2 + at} + 2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{at}{\sqrt{4t^2 + at} + 2t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{a}{\sqrt{4 + \frac{a}{t}} + 2} \\ &= \frac{a}{2+2} \\ &= \frac{a}{4} \end{aligned}$$

따라서 $\frac{a}{4} = \frac{1}{2}$ 이므로

$$a = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x^2 - a^2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x^2 - 2^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x+2} \\ &= \frac{12}{4} = 3 \end{aligned}$$

076 ㉔ $\frac{7}{8}$

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - (1+ax)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\{\sqrt{1+x+x^2} - (1+ax)\} \{\sqrt{1+x+x^2} + (1+ax)\}}{x^2 \{\sqrt{1+x+x^2} + (1+ax)\}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x+x^2 - (1+2ax+a^2x^2)}{x^2(\sqrt{1+x+x^2} + 1+ax)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\{(1-a^2)x + (1-2a)\}}{x^2(\sqrt{1+x+x^2} + 1+ax)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a^2)x + (1-2a)}{x(\sqrt{1+x+x^2} + 1+ax)} \quad \dots\dots ① \end{aligned}$$

①에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \{(1-a^2)x + (1-2a)\} = 0 \text{ 이므로}$$

$$1-2a=0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

▶▶▶▶▶ ①

$a = \frac{1}{2}$ 을 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-a^2)x + (1-2a)}{x(\sqrt{1+x+x^2} + 1+ax)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{4}x}{x(\sqrt{1+x+x^2} + 1 + \frac{1}{2}x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{4(\sqrt{1+x+x^2} + 1 + \frac{1}{2}x)} \\ &= \frac{3}{4(1+1)} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\therefore b = \frac{3}{8}$$

▶▶▶▶▶ ②

$$\therefore a+b = \frac{7}{8}$$

▶▶▶▶▶ ③

단계	채점 기준	비율
①	a 의 값 구하기	50 %
②	b 의 값 구하기	40 %
③	$a+b$ 의 값 구하기	10 %

077 ㉔ $f(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 6$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한

값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0 \text{ 이므로 } f(3) = 0$$

이때 $f(x)$ 는 이차함수이므로

$f(x) = (x-3)(ax+b)$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(ax+b)}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} (ax+b) \\ &= 3a+b \end{aligned}$$

$$\therefore 3a+b=6 \quad \dots\dots ①$$

$f(0) = 9$ 에서

$$-3b=9 \quad \therefore b=-3$$

이를 ①에 대입하면

$$3a-3=6 \quad \therefore a=3$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= (x-3)(3x-3) \\ &= 3x^2 - 12x + 9 \end{aligned}$$

078 ㉔ ③

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^3} = 1$ 에서 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인

삼차함수이다. $\dots\dots ①$

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$ 이므로

$$f(-1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 에서

$f(x) = (x+1)(x^2+ax+b)$ (a, b 는 상수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2+ax+b)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x^2+ax+b) \\ &= 1-a+b \end{aligned}$$

따라서 $1-a+b=2$ 이므로

$$b=a+1$$

$$\therefore f(x) = (x+1)(x^2+ax+a+1)$$

$f(1) \leq 12$ 에서

$$2(2a+2) \leq 12, 2a+2 \leq 6 \quad \therefore a \leq 2$$

$$\therefore f(2) = 3(3a+5)$$

$$= 9a+15$$

$$\leq 9 \times 2 + 15 = 33$$

따라서 $f(2)$ 의 최댓값은 33이다.

079 ㉮ $\frac{3}{2}$

$$\left| \frac{1}{3}f(x) - x \right| < 1 \text{에서 } -1 < \frac{1}{3}f(x) - x < 1$$

$$\therefore 3(x-1) < f(x) < 3(x+1)$$

$x > 1$ 일 때 $3(x-1) > 0$ 이므로 각 변을 제곱하면

$$9x^2 - 18x + 9 < \{f(x)\}^2 < 9x^2 + 18x + 9$$

모든 실수 x 에 대하여 $6x^2 + 2 > 0$ 이므로 이 부등식의

각 변을 $6x^2 + 2$ 로 나누면

$$\frac{9x^2 - 18x + 9}{6x^2 + 2} < \frac{\{f(x)\}^2}{6x^2 + 2} < \frac{9x^2 + 18x + 9}{6x^2 + 2}$$

$$\text{이때 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 18x + 9}{6x^2 + 2} = \frac{3}{2}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 + 18x + 9}{6x^2 + 2} = \frac{3}{2}$$

이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{6x^2 + 2} = \frac{3}{2}$$

080 ㉮ $\textcircled{2}$

$$\left[\frac{x}{3} \right] = \frac{x}{3} - \alpha \quad (0 \leq \alpha < 1) \text{라 하면}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left[\frac{x}{3} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left(\frac{x}{3} - \alpha \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{x} \right) = \frac{1}{3}$$

081 ㉮ $\textcircled{4}$

| 접근 방법 | 기울기와 y 절편을 이용하여 직선 l 의 방정식을 세우고, 두 점 A, B의 x 좌표는 직선 l 의 방정식과 $y=x^2$ 을 연결한 이차방정식의 두 실근임을 이용한다.

직선 l 의 기울기가 1이고 y 절편이 $g(t)$ 이므로 직선 l 의 방정식은

$$y = x + g(t)$$

$A(\alpha, \alpha + g(t)), B(\beta, \beta + g(t))$ 라 하면 x 에 대한 이차방정식 $x^2 = x + g(t)$, 즉 $x^2 - x - g(t) = 0$ 의 두 실근이 α, β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -g(t)$$

이때 $\overline{AB} = 2t$ 에서 $\overline{AB}^2 = 4t^2$ 이므로

$$(\beta - \alpha)^2 + (\beta - \alpha)^2 = 4t^2$$

$$(\alpha - \beta)^2 = 2t^2$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 2t^2$$

$$1 + 4g(t) = 2t^2$$

$$\therefore g(t) = \frac{2t^2 - 1}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g(t)}{t^2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t^2 - 1}{4t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4t^2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

082 ㉮ 24

| 접근 방법 | 주어진 두 극한값이 존재함을 이용하여

$f(x) = 0$ 을 만족시키는 x 의 값을 구하여 $f(x)$ 의 식을 세운다.

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = 2$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 \text{이므로 } f(-1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 10$ 에서 $x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극

한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 \text{이므로 } f(1) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 에서

$f(x) = (x+1)(x-1)g(x)$ ($g(x)$ 는 다항함수)라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-1)g(x)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x-1)g(x) \\ &= -2g(-1) \end{aligned}$$

따라서 $-2g(-1) = 2$ 이므로

$$g(-1) = -1 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)g(x)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+1)g(x) \\ &= 2g(1)\end{aligned}$$

따라서 $2g(1)=10$ 이므로

$$g(1)=5 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉔}}$$

㉔, ㉔을 만족시키는 함수 $g(x)$ 중 차수가 가장 낮은 것은 일차함수이므로

$g(x)=ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$\textcircled{\text{㉔}} \text{에서 } -a+b=-1$$

$$\therefore a-b=1$$

$$\textcircled{\text{㉔}} \text{에서 } a+b=5$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=3, b=2$$

따라서 $h(x)=(x+1)(x-1)(3x+2)$ 이므로

$$h(2)=3 \times 1 \times 8=24$$

083 ㉔ ④

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ 이면

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)} = \frac{f(a)-(a-a)}{f(a)+(a-a)} = 1$$

이는 주어진 조건을 만족시키지 않으므로

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)=0$$

$$\therefore f(a)=0$$

$f(x)$ 가 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$f(x)=(x-a)(x-b)$ (b 는 상수)라 하면

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x-b)-(x-a)}{(x-a)(x-b)+(x-a)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)\{(x-b)-1\}}{(x-a)\{(x-b)+1\}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x-b-1}{x-b+1}$$

$$= \frac{a-b-1}{a-b+1}$$

$$\text{따라서 } \frac{a-b-1}{a-b+1} = \frac{3}{5} \text{이므로}$$

$$5a-5b-5=3a-3b+3$$

$$2a-2b=8$$

$$\therefore a-b=4$$

이때 방정식 $f(x)=0$, 즉 $(x-a)(x-b)=0$ 의 두 근은 a, b 이므로

$$|a-b|=|a-b|=4$$

01 함수의 연속

유제

51~59쪽

084 ㉔ (1) 연속 (2) 연속

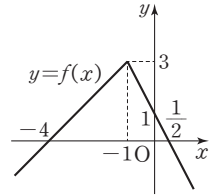
$$(1) (i) f(-1)=3$$

$$\begin{aligned}(ii) \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} (-2x+1) \\ &= 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} (x+4)=3 \\ \therefore \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= 3\end{aligned}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow -1} f(x)=f(-1)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

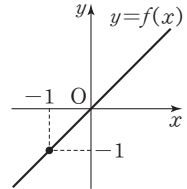


$$(2) (i) f(-1)=-1$$

$$\begin{aligned}(ii) \lim_{x \rightarrow -1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2+x}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x(x+1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} x = -1\end{aligned}$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow -1} f(x)=f(-1)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.



085 ㉔ (1) 불연속 (2) 불연속

$$(1) f(1)=1-1=0$$

$$1 \leq x < 2 \text{ 일 때 } [x]=1 \text{ 이므로}$$

$$f(x)=1-x$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (1-x) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉔}}$$

$$0 \leq x < 1 \text{ 일 때 } [x]=0 \text{ 이므로}$$

$$f(x)=0-x=-x$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x) = -1 \quad \dots\dots \textcircled{\text{㉔}}$$

$$\textcircled{\text{㉔}}, \textcircled{\text{㉔}} \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

$$(2) f(1)=1$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2-x}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} x = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - x}{-(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x-1)}{-(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x) = -1\end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

086 ㉠ ㄱ

$$\neg. f(2)=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 정의되지 않으므로 $x=2$ 에서 불연속이다.

$$\neg. f(2)=4$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+3) = 5\end{aligned}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 $x=2$ 에서 연속인 것은 ㄱ이다.

087 ㉠ ㄴ

$$\neg. f(3)=3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{-(x-3)} = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

$$\neg. f(3)=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x-3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (-x+3) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 연속이다.

$$\neg. f(3)=3 \times 3 = 9$$

$3 \leq x < 4$ 에서 $[x] = 3$ 이므로 $f(x) = 3x$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 3x = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$2 \leq x < 3$ 에서 $[x] = 2$ 이므로 $f(x) = 2x$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2x = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서 } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 $x=3$ 에서 연속인 것은 ㄴ이다.

088 ㉠ 6

$$(i) f(0)=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$$(ii) f(1)=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 \text{이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$(iii) f(2)=2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

$$(iv) f(3)=0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 불연속이다.

(i)~(iv)에서 함수 $f(x)$ 의 극한값이 존재하지 않는 x 의 값은 2, 3의 2개이고, 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 0, 2, 3의 3개이므로

$$a=2, b=3 \quad \therefore ab=6$$

089 ㉠ 4

$$(i) f(1)=2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

(ii) $f(2)=3$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 2 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \neq f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$x=2$ 에서 불연속이다.

(iii) $f(3)=3$

$$\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 3 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$x=3$ 에서 연속이다.

(iv) $f(4)=1$

$$\lim_{x \rightarrow 4+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4-} f(x) = 2 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \neq f(4)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$x=4$ 에서 불연속이다.

(i)~(iv)에서 함수 $f(x)$ 의 극한값이 존재하지 않는 x 의 값은 1의 1개이고, 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 1, 2, 4의 3개이므로

$$a=1, b=3 \quad \therefore a+b=4$$

090 ㉠ -2

(i) $f(-2)=1$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = 2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq f(-2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$x=-2$ 에서 불연속이다.

(ii) $f(-1)=3$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 불연속이다.

(iii) $f(0)=4$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 4 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$x=0$ 에서 연속이다.

(iv) $f(1)=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 3 \text{ 이므로 } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$x=1$ 에서 불연속이다.

(i)~(iv)에서 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 -2, -1, 1이므로 구하는 합은
 $-2 + (-1) + 1 = -2$

091 ㉠ L

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 2$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않는다.

ㄴ. $\lim_{x \rightarrow 3+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = 3$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3$$

ㄷ. (i) ㄱ에서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함

수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

(ii) $f(2)=3$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함

수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 1, 2의 2개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ이다.

092 ㉠ (1) 불연속 (2) 연속 (3) 연속 (4) 불연속

(1) $f(1)-g(1)=1-(-1)=2$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)-g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = 1 - (-1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)-g(x)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = -1 - 1 = -2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)-g(x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)-g(x)\}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)-g(x)\}$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)-g(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

(2) $\frac{f(1)}{g(1)} = \frac{1}{-1} = -1$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1+} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1+} g(x)} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1-} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1-} g(x)} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = -1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(1)}{g(1)}$ 이므로 함수 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

(3) $f(g(1))=f(-1)=-1$

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1$ +일 때 $t=-1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) = f(-1) = -1$$

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = -1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = -1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(g(x)) = f(g(1))$ 이므로 함수

$f(g(x))$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$(4) g(f(1)) = g(1) = -1$$

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) = g(1) = -1$$

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $t = -1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow -1+} g(t) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} g(f(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} g(f(x))$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} g(f(x))$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$g(f(x))$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

093 ㉠ ㄱ, ㄴ

$$\text{ㄱ. } f(0)+g(0)=1+0=1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x)+g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) \\ &= 0+1=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x)+g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) \\ &= 1+0=1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+g(x)\} = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} \{f(x)+g(x)\} = f(0)+g(0)$ 이므로

함수 $f(x)+g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄴ. } f(0)g(0)=1 \times 0=0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) \\ &= 0 \times 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) \\ &= 1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x) = f(0)g(0)$ 이므로 함수

$f(x)g(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄷ. } f(g(0)) = f(0) = 1$$

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = 1$$

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(g(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} f(g(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} f(g(x))$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x))$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$f(g(x))$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

$$\text{ㄹ. } g(f(0)) = g(1) = 0$$

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 0+} g(t) = 1$$

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1+} g(t) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0+} g(f(x)) \neq \lim_{x \rightarrow 0-} g(f(x))$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x))$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$g(f(x))$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

따라서 보기의 함수 중 $x=0$ 에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

094 ㉠ ③

$$\text{ㄱ. } f(-1)-g(-1)=1-1=0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} \{f(x)-g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) - \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) \\ &= 1-1=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} \{f(x)-g(x)\} &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) - \lim_{x \rightarrow -1-} g(x) \\ &= -1-(-1)=0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \{f(x)-g(x)\} = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} \{f(x)-g(x)\} = f(-1)-g(-1)$ 이

므로 함수 $f(x)-g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄴ. } f(-1)g(-1)=1 \times 1=1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1+} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1+} g(x) \\ &= 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -1-} g(x) \\ &= -1 \times (-1) = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x) = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)g(x) = f(-1)g(-1)$ 이므로

함수 $f(x)g(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$$\text{ㄷ. } (f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(0) = 0$$

$g(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t=1$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} (f \circ g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(g(x)) \\ &= f(1) = -1 \end{aligned}$$

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} (f \circ g)(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(g(x)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} (f \circ g)(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} (f \circ g)(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ g)(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로

함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

095 ㉡ $a=5, b=-4$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이다

므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + a}{x - 1} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 6x + a) = 0 \text{이므로}$$

$$1 - 6 + a = 0 \quad \therefore a = 5$$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + a}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-5)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x-5) = -4 \end{aligned}$$

$$\therefore b = -4$$

096 ㉡ $a=-3, b=\frac{1}{6}$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 연속이면 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이다

므로

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} + a}{x - 2} = b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{x+7} + a) = 0 \text{이므로}$$

$$3 + a = 0 \quad \therefore a = -3$$

이를 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} + a}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+7} - 3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x+7} - 3)(\sqrt{x+7} + 3)}{(x-2)(\sqrt{x+7} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7} + 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x+7} + 3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$\therefore b = \frac{1}{6}$$

097 ㉡ $a=3, b=2$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + ax + b}{x + 1} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + ax + b) = 0 \text{이므로}$$

$$1 - a + b = 0$$

$$\therefore b = a - 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠을 ㉠의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + ax + b}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + ax + a - 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x+a-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x+a-1) \\ &= a - 2 \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } a - 2 = 1 \text{이므로 } a = 3$$

$$\text{이를 ㉡에 대입하면 } b = 2$$

098 ㉡ -2

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ x^2 + ax + b & (-2 < x < 2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=-2$, $x=2$ 에서 연속이다.

(i) $x=-2$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = f(-2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2+} (x^2 + ax + b) \\ &= 4 - 2a + b \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} (x+1) = -1$$

$$f(-2) = -2 + 1 = -1$$

$$\text{따라서 } 4 - 2a + b = -1 \text{이므로}$$

$$2a - b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x=2$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x+1) = 3$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2-} (x^2 + ax + b) \\ &= 4 + 2a + b \end{aligned}$$

$$f(2) = 2 + 1 = 3$$

$$\text{따라서 } 3 = 4 + 2a + b \text{이므로}$$

$$2a + b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = -3$$

$$\therefore a + b = -2$$

099 ㉔ 2

$$x \neq -1 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{2x^2 + x + a}{x+1}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x = -1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x + a}{x+1} = f(-1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} (2x^2 + x + a) = 0 \text{ 이므로}$$

$$2(-1)^2 + (-1) + a = 0 \quad \therefore a = -1$$

이를 ㉔의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x + a}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (2x-1) = -3 \end{aligned}$$

$$\therefore f(-1) = -3$$

$$\therefore a - f(-1) = 2$$

100 ㉔ $\frac{1}{2}$

$$x \neq 3 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{\sqrt{x-2} + a}{x-3}$$

함수 $f(x)$ 가 $x \geq 2$ 인 모든 실수 x 에서 연속이면 $x = 3$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} + a}{x-3} = f(3) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x-2} + a) = 0 \text{ 이므로}$$

$$1 + a = 0 \quad \therefore a = -1$$

이를 ㉔의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} + a}{x-3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x-2} - 1)(\sqrt{x-2} + 1)}{(x-3)(\sqrt{x-2} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x-2} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x-2} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore f(3) = \frac{1}{2}$$

101 ㉔ ②

$x \neq 1$ 일 때,

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} = \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = x-2$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x = 1$ 에서 연속이므로

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-2) = -1$$

102 ㉔ 3

$$x^2 - 1 = 0 \text{ 에서 } (x+1)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

$x \neq -1, x \neq 1$ 일 때,

$$f(x) = \frac{x^3 + ax^2 + bx - 2}{x^2 - 1}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x = -1, x = 1$ 에서 연속이다.

(i) $x = -1$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + ax^2 + bx - 2}{x^2 - 1} = f(-1)$$

$x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + ax^2 + bx - 2) = 0 \text{ 이므로}$$

$$-1 + a - b - 2 = 0$$

$$\therefore a - b = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $x = 1$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 + bx - 2}{x^2 - 1} = f(1) \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + ax^2 + bx - 2) = 0 \text{ 이므로}$$

$$1 + a + b - 2 = 0$$

$$\therefore a + b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

㉔, ㉔을 연립하여 풀면

$$a = 2, b = -1$$

이를 ㉔의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + ax^2 + bx - 2}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - x - 2}{x^2 - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3 \end{aligned}$$

$$\therefore f(1) = 3$$

103 ㉠ (1) $(-\infty, \infty)$

(2) $(-\infty, \infty)$

(3) $(-\infty, -3), (-3, \infty)$

(4) $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$

(1) $f(x)=2x^2-3x+1$ 은 다항함수이므로 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다.

(2) 두 함수 $y=2x+1$, $y=x^2-2$ 는 다항함수이므로 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다. 따라서 함수 $f(x)=(2x+1)(x^2-2)$ 는 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 연속이다.

(3) $f(x)=\frac{2x}{x+3}$ 는 $x \neq -3$ 인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, -3), (-3, \infty)$ 에서 연속이다.

(4) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ 는 $x \neq -1$, $x \neq 1$ 인 모든 실수, 즉 구간 $(-\infty, -1), (-1, 1), (1, \infty)$ 에서 연속이다.

104 ㉠ (1) 최댓값: 2

(2) 최댓값: 2, 최솟값: 0

(3) 최댓값: 0, 최솟값: -1

(4) 최솟값: -1

(1) 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 $x=2$ 일 때 최댓값 2를 갖고 최솟값은 갖지 않는다.

(2) 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 $x=2$ 일 때 최댓값 2, $x=3$ 일 때 최솟값 0을 갖는다.

(3) 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[3, 4]$ 에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다. 이때 $x=3$ 일 때 최댓값 0, $x=4$ 일 때 최솟값 -1을 갖는다.

(4) 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[4, 6]$ 에서 최댓값은 갖지 않고, $x=4$ 일 때 최솟값 -1을 갖는다.

|참고| (2) 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 3]$ 에서 $x=2$ 일 때 불연속이지만 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

105 ㉠ (가) 연속 (나) 5 (다) 사잇값

함수 $f(x)=x^3-2x+1$ 은 닫힌구간 $[1, 2]$ 에서 $\boxed{\text{연속}}$ 이다.

또 $f(1)=0$, $f(2)=\boxed{\frac{5}{2}}$ 에서 $f(1) \neq f(2)$ 이고,

$f(1) < 3 < f(2)$ 이므로 $\boxed{\text{사잇값}}$ 정리에 의하여

$f(c)=3$ 인 c 가 열린구간 $(1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

106 ㉠ ㄱ, ㄴ

두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 는 다항함수이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄱ. 함수 $3g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이므로 함수 $f(x)-3g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄴ. 함수 $f(x) \times f(x) = \{f(x)\}^2$ 은 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄷ. 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 는 $f(x)=x-5 \neq 0$ 인 모든 실수, 즉 $x \neq 5$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.

ㄹ. 함수 $\frac{f(x)}{2-g(x)}$ 는 $2-g(x)=4-x^2 \neq 0$ 인 모든 실수, 즉 $x \neq -2$, $x \neq 2$ 인 모든 실수 x 에서 연속이다.

따라서 보기의 함수 중 모든 실수 x 에서 연속인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

107 ㉠ (1) 최댓값: 6, 최솟값: -3

(2) 최댓값: 3, 최솟값: $\sqrt{3}$

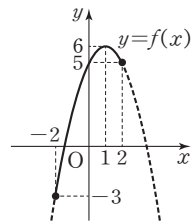
(3) 최댓값: 7, 최솟값: 2

(4) 최댓값: 5, 최솟값: 0

(1) $f(x)=-x^2+2x+5=-(x-1)^2+6$

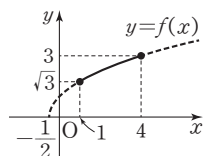
함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 $x=1$ 일 때 최댓값 6, $x=-2$ 일 때 최솟값 -3을 갖는다.



(2) 함수 $f(x)=\sqrt{2x+1}$ 은 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

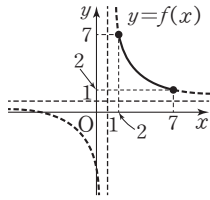
이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 $x=4$ 일 때 최댓값 3, $x=1$ 일 때 최솟값 $\sqrt{3}$ 을 갖는다.



(3) $f(x)=\frac{x+5}{x-1}=\frac{(x-1)+6}{x-1}=\frac{6}{x-1}+1$

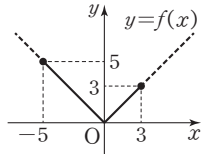
함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[2, 7]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌 구간 $[2, 7]$ 에서 $x=2$ 일 때 최댓값 7, $x=7$ 일 때 최솟값 2를 갖는다.



- (4) 함수 $f(x)=|x|$ 는 닫힌구간 $[-5, 3]$ 에서 연속
이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌 구간 $[-5, 3]$ 에서 $x=-5$ 일 때 최댓값 5, $x=0$ 일 때 최솟값 0을 갖는다.

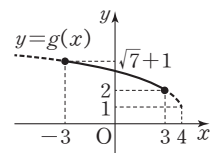
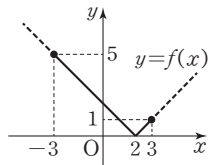


108 ㉠ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- ㄱ. 함수 $4g(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로 함수 $f(x)-4g(x)$ 는 $x=a$ 에서 연속이다.
ㄴ. 함수 $g(x) \times g(x) = \{g(x)\}^2$ 은 $x=a$ 에서 연속이다.
ㄷ. [반례] 두 함수 $f(x)=x-a$, $g(x)=1$ 은 각각 $x=a$ 에서 연속이지만 함수 $\frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a}$ 은 $x=a$ 에서 불연속이다.
ㄹ. $\{f(x)\}^2+1>0$ 이므로 함수 $\frac{1}{\{f(x)\}^2+1}$ 은 $x=a$ 에서 연속이다.
따라서 보기의 함수 중 $x=a$ 에서 항상 연속인 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

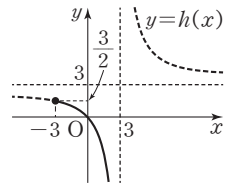
109 ㉠ ㄱ, ㄴ, ㄷ

- ㄱ. 함수 $f(x)=|x-2|$ 는 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 함수 $g(x)=\sqrt{4-x}+1$ 은 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.



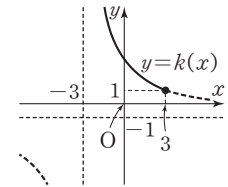
ㄷ. $h(x)=\frac{3x}{x-3}=\frac{3(x-3)+9}{x-3}=\frac{9}{x-3}+3$

함수 $h(x)$ 는 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 $x=3$ 일 때 불연속이고, 최솟값을 갖지 않는다.



ㄹ. $k(x)=\frac{9-x}{x+3}=\frac{-(x+3)+12}{x+3}=\frac{12}{x+3}-1$

함수 $k(x)$ 는 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 $x=-3$ 일 때 불연속이고, $x=3$ 일 때 최솟값 1을 갖는다.



따라서 보기의 함수 중 최솟값을 갖는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

110 ㉠ 풀이 참조

$f(x)=x^4-x^2+2x+1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 $f(-1)=-1<0$, $f(1)=3>0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 $f(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.
따라서 방정식 $x^4-x^2+2x+1=0$ 은 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

111 ㉠ 2개

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에서 연속이고
 $f(-1)f(0)=6>0$
 $f(0)f(1)=-3<0$
 $f(1)f(2)=2>0$
 $f(2)f(3)=-2<0$
사잇값 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$ 이 적어도 하나의 실근을 갖는 구간은 $(0, 1)$, $(2, 3)$
따라서 방정식 $f(x)=0$ 은 열린구간 $(-1, 3)$ 에서 적어도 2개의 실근을 갖는다.

112 ㉠ ⑤

$f(x)=x^3-2x^2-x-3$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고
 $f(-2)=-17$, $f(-1)=-5$, $f(0)=-3$,
 $f(1)=-5$, $f(2)=-5$, $f(3)=3$
따라서 $f(2)f(3)<0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 주어진 방정식의 실근이 존재하는 구간은 ⑤이다.

113 ㉡ $-6 < a < 0$

$f(x) = x^2 + x + a$ 라 하면 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간

$[0, 2]$ 에서 연속이고

$$f(0) = a, f(2) = a + 6$$

이때 방정식 $f(x) = 0$ 이 열린구간 $(0, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 $f(0)f(2) < 0$ 이어야 하므로

$$a(a+6) < 0 \quad \therefore -6 < a < 0$$

연습문제

68~70쪽

114 ㉡ ㉢

$$\neg. f(-3) = 6$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -3} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3} \\ &= \lim_{x \rightarrow -3} (x-3) = -6 \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) \neq f(-3)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x = -3$ 에서 불연속이다.

$$\neg. g(-2) = 4$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{2x^2 + 4x}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{2x(x+2)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+} 2x = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{2x^2 + 4x}{-(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{2x(x+2)}{-(x+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2-} (-2x) = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2+} g(x) \neq \lim_{x \rightarrow -2-} g(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$ 는 $x = -2$ 에서 불연속이다.

$$\neg. h(5) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 5+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 5+} (\sqrt{x-5} + 2) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 5-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 5-} 2 = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 5} h(x) = 2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 5} h(x) = h(5)$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 $x = 5$ 에서 연속이다.

이때 함수 $h(x)$ 는 $x > 5$, $x < 5$ 에서 모두 연속이므로 모든 실수 x 에서 연속이다.

따라서 보기의 함수 중 모든 실수 x 에서 연속인 것은 ㉡이다.

115 ㉡ $\neg, \neg$

$$\neg. \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\neg. f(1) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 0 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수

$f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 불연속이다.

$$\neg. (i) f(-1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = 3 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1-} f(x)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 불연속이다.

(ii) $\neg$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x = 1$ 에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 -1 , 1 의 2개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \neg$ 이다.

116 ㉡ 6

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x = 1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x-3)^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-x^2 + ax + b) = -1 + a + b$$

$$f(1) = (-2)^2 = 4$$

따라서 $4 = -1 + a + b$ 이므로

$$a + b = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(-1) = 0 \text{에서}$$

$$-1 - a + b = 0$$

$$\therefore a - b = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 2, b = 3$$

$$\therefore ab = 6$$

단계	채점 기준	비율
①	$f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 연속임을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	50 %
②	$f(-1) = 0$ 임을 이용하여 a, b 사이의 관계식 구하기	30 %
③	ab 의 값 구하기	20 %

117 ㉔ 21

$$f(x)g(x)=\begin{cases} (x+3)\{x-(2a+7)\} & (x\leq a) \\ (x^2-x)\{x-(2a+7)\} & (x>a) \end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$ 에서 연속이어야 한다.

따라서 $\lim_{x\rightarrow a} f(x)g(x)=f(a)g(a)$ 이어야 하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x\rightarrow a+} f(x)g(x) &= \lim_{x\rightarrow a+} f(x)g(x) = f(a)g(a) \\ \lim_{x\rightarrow a+} f(x)g(x) &= \lim_{x\rightarrow a+} (x^2-x)\{x-(2a+7)\} \\ &= (a^2-a)(-a-7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\rightarrow a-} f(x)g(x) &= \lim_{x\rightarrow a-} (x+3)\{x-(2a+7)\} \\ &= (a+3)(-a-7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(a)g(a) &= (a+3)\{a-(2a+7)\} \\ &= (a+3)(-a-7) \end{aligned}$$

따라서 $(a^2-a)(-a-7)=(a+3)(-a-7)$ 이므로

$$(a+7)\{a^2-a-(a+3)\}=0$$

$$(a+7)(a^2-2a-3)=0$$

$$(a+7)(a+1)(a-3)=0$$

$$\therefore a=-7 \text{ 또는 } a=-1 \text{ 또는 } a=3$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 곱은

$$-7 \times (-1) \times 3 = 21$$

118 ㉔ 4

$$x \neq 1 \text{ 일 때, } f(x) = \frac{ax^2+bx}{x-1}$$

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2+bx}{x-1} = f(1) \quad \cdots \textcircled{1}$$

$x \rightarrow 1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 1} (ax^2+bx) = 0$ 이므로

$$a+b=0 \quad \therefore b=-a \quad \cdots \textcircled{2}$$

②을 ①의 좌변에 대입하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2+bx}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax^2-ax}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{ax(x-1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} ax = a \end{aligned}$$

$$\therefore f(1)=a$$

이때 $f(1)=2$ 이므로 $a=2$

이를 ②에 대입하면 $b=-2$

$$\therefore a-b=4$$

119 ㉔ 5

두 함수 $f(x), g(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이므로

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$ 가 모든 실수 x 에서 연속이려면 $f(x)=0$

을 만족시키는 실수 x 의 값이 존재하지 않아야 한다.

즉, 방정식 $f(x)=0$ 이 실근을 갖지 않아야 하므로 이

차방정식 $x^2+ax+2=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=a^2-8<0$$

$$(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})<0$$

$$\therefore -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0, 1, 2$ 의 5개이다.

120 ㉔ ⑤

$$f(x) = \frac{x+4}{x-4} = \frac{(x-4)+8}{x-4} = \frac{8}{x-4} + 1$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같다.

- ① 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-4, 5]$ 에서 최댓값과 최솟값을 모두 갖지 않는다.

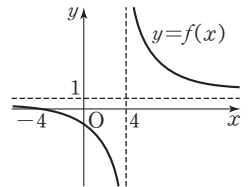
- ② 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 $x=0$ 일 때 최댓값 -1 을 갖고, 최솟값은 갖지 않는다.

- ③ 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[4, 6]$ 에서 최댓값은 갖지 않고, $x=6$ 일 때 최솟값 5를 갖는다.

- ④ 함수 $f(x)$ 는 반열린구간 $[5, 7)$ 에서 $x=5$ 일 때 최댓값 9를 갖고, 최솟값은 갖지 않는다.

- ⑤ 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[6, 8]$ 에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 모두 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값을 모두 갖는 구간은 ⑤이다.



121 ㉔ ㄴ, ㄷ, ㄹ

$f(x)=2x^3+x^2-4x-1$ 이라 하면 함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에서 연속이고

$$f(-3)=-34, f(-2)=-5, f(-1)=2,$$

$$f(0)=-1, f(1)=-2, f(2)=11, f(3)=50$$

따라서 $f(-2)f(-1)<0, f(-1)f(0)<0,$

$f(1)f(2)<0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식

$f(x)=0$ 의 실근이 존재하는 구간은

$$(-2, -1), (-1, 0), (1, 2)$$

따라서 보기의 구간에서 실근이 존재하는 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

122 ㉡ ㄱ, ㄷ

$$\neg. f(f(0))=f(1)=1$$

$f(x)=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 2-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 2-} f(t) = 1$$

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(f(x)) = \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(f(x)) = 1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(f(x)) = f(f(0))$ 이므로 함수

$f(f(x))$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\neg. f(1)+f(-1)=1+0=1$$

$-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 1+$ 일 때 $t \rightarrow -1-$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)+f(-x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) + \lim_{t \rightarrow -1-} f(t) \\ &= 0+0=0 \end{aligned}$$

$x \rightarrow 1-$ 일 때 $t \rightarrow -1+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)+f(-x)\} &= \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) + \lim_{t \rightarrow -1+} f(t) \\ &= 1+0=1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} \{f(x)+f(-x)\} \neq \lim_{x \rightarrow 1-} \{f(x)+f(-x)\}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+f(-x)\}$ 의 값이 존재하지 않

으므로 함수 $f(x)+f(-x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이다.

$$\neg. f(2)f(1)=0 \times 1=0$$

$x-1=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 2+$ 일 때 $t \rightarrow 1+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)f(x-1) &= \lim_{x \rightarrow 2+} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 1+} f(t) \\ &= 1 \times 0 = 0 \end{aligned}$$

$x \rightarrow 2-$ 일 때 $t \rightarrow 1-$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)f(x-1) &= \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) \times \lim_{t \rightarrow 1-} f(t) \\ &= 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2+} f(x)f(x-1) \neq \lim_{x \rightarrow 2-} f(x)f(x-1)$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)f(x-1)$ 의 값이 존재하지 않으

므로 함수 $f(x)f(x-1)$ 은 $x=2$ 에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

123 ㉡ 1

$g(x)=(x-a)f(x)$ 라 할 때, 함수 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에서 연속이면 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = g(1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x-a)f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} (x-a) \times \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2(1-a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 1-} (x-a)f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1-} (x-a) \times \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = 1-a \end{aligned}$$

$$g(1) = (1-a) \times 1 = 1-a$$

따라서 $2(1-a)=1-a$ 이므로

$$2-2a=1-a \quad \therefore a=1$$

124 ㉡ 2

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 연속이면

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$$

$a \leq x < a+1$ 일 때 $[x]=a$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a+} [x] = \lim_{x \rightarrow a+} a = a$$

$a-1 \leq x < a$ 일 때 $[x]=a-1$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow a-} [x] = \lim_{x \rightarrow a-} (a-1) = a-1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{[x]^2+x}{[x]} \\ &= \frac{a^2+a}{a} = a+1 \quad (\because a>1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{[x]^2+x}{[x]} \\ &= \frac{(a-1)^2+a}{a-1} = \frac{a^2-a+1}{a-1} \end{aligned}$$

$$f(a) = \frac{a^2+a}{a} = a+1 \quad (\because a>1)$$

$$\text{따라서 } a+1 = \frac{a^2-a+1}{a-1} \text{이므로}$$

$$a^2-1 = a^2-a+1$$

$$\therefore a=2$$

125 ㉡ ⑤

함수 $|f(x)|$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이면

$x=-1$, $x=3$ 에서 연속이다.

(i) $x=-1$ 에서 연속이면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} |f(x)| &= |f(-1)| \\ \therefore \lim_{x \rightarrow -1+} |f(x)| &= \lim_{x \rightarrow -1-} |f(x)| = |f(-1)| \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1+} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -1+} |x| = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1-} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow -1-} |x+a| = |a-1|$$

$$|f(-1)| = |-1| = 1$$

따라서 $1 = |a-1|$ 이므로

$$a-1 = \pm 1$$

$$\therefore a=0 \text{ 또는 } a=2$$

그런데 a 는 양수이므로 $a=2$

(ii) $x=3$ 에서 연속이면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} |f(x)| &= |f(3)| \\ \therefore \lim_{x \rightarrow 3+} |f(x)| &= \lim_{x \rightarrow 3-} |f(x)| = |f(3)| \\ \lim_{x \rightarrow 3+} |f(x)| &= \lim_{x \rightarrow 3+} |bx-2| = |3b-2| \\ \lim_{x \rightarrow 3-} |f(x)| &= \lim_{x \rightarrow 3-} |x| = 3 \\ |f(3)| &= |3b-2|\end{aligned}$$

따라서 $|3b-2|=3$ 이므로

$$3b-2=\pm 3$$

$$\therefore b=-\frac{1}{3} \text{ 또는 } b=\frac{5}{3}$$

그런데 b 는 양수이므로 $b=\frac{5}{3}$

(i), (ii)에서 $a+b=\frac{11}{3}$

126 ㉮ 5

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 - \frac{1}{x - \frac{1}{x - \frac{2}{x}}} = 1 - \frac{1}{x - \frac{x}{x^2 - 2}} \\ &= 1 - \frac{x^2 - 2}{x^3 - 3x}\end{aligned}$$

따라서 $x=0$, $x^2-2=0$, $x^3-3x=0$ 일 때, 함수

$f(x)$ 가 정의되지 않으므로 불연속이다.

$$x^2-2=0 \text{에서 } (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$$

$$\therefore x=-\sqrt{2} \text{ 또는 } x=\sqrt{2}$$

$$x^3-3x=0 \text{에서 } x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})=0$$

$$\therefore x=-\sqrt{3} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=\sqrt{3}$$

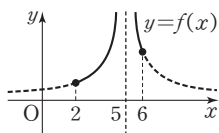
따라서 함수 $f(x)$ 가 불연속이 되는 x 의 값은 $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{2}$, 0 , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 의 5개이다.

127 ㉮ 3

(i) $a>0$ 일 때

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[2, 6]$ 에서 최

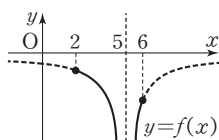
댓값을 갖지 않고, $x=2$ 일 때 최솟값을 갖는다.



(ii) $a<0$ 일 때

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[2, 6]$ 에서

$x=2$ 일 때 최댓값을 갖고 최솟값을 갖지 않는다.



따라서 닫힌구간 $[2, 6]$ 에서 함수 $f(x)=\frac{a}{|x-5|}$ 의

최솟값이 1이려면 $a>0$, $f(2)=1$ 이어야 하므로

$$\frac{a}{|2-5|}=1 \quad \therefore a=3$$

128 ㉮ 8

방정식 $f(x)=x^3$ 에서 $f(x)-x^3=0$

$g(x)=f(x)-x^3$ 이라 하면 함수 $g(x)$ 는 닫힌구간

$[-1, 1]$ 에서 연속이고

$$g(-1)=f(-1)+1=a+1$$

$$g(1)=f(1)-1=(a-7)-1=a-8$$

이때 방정식 $f(x)=x^3$, 즉 $g(x)=0$ 의 중근이 아닌

오직 하나의 실근이 열린구간 $(-1, 1)$ 에 존재하려면

$$g(-1)g(1)<0 \text{이어야 하므로}$$

$$(a+1)(a-8)<0 \quad \therefore -1<a<8$$

따라서 정수 a 는 0, 1, 2, ..., 7의 8개이다.

129 ㉮ 3개

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}=2$ 에서 $x \rightarrow -1$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x)=0 \text{이므로 } f(-1)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}=6$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한

값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)=0 \text{이므로 } f(2)=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{10}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{10}$ 에서

$f(x)=(x+1)(x-2)g(x)$ ($g(x)$ 는 다항함수)라 하면

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x-2)g(x)}{x+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} (x-2)g(x) \\ &= -3g(-1)\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } -3g(-1)=2 \text{이므로 } g(-1)=-\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)g(x)}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x+1)g(x) \\ &= 3g(2)\end{aligned}$$

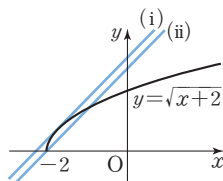
$$\text{따라서 } 3g(2)=6 \text{이므로 } g(2)=2$$

이때 $g(x)$ 는 다항함수이므로 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고 $g(-1)g(2)<0$ 이므로 사잇값 정리에 의하여 방정식 $g(x)=0$ 은 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $(x+1)(x-2)g(x)=0$ 은 두 실근 $x=-1, x=2$ 를 갖고, 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 적어도 하나의 실근을 가지므로 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 적어도 3개의 실근을 갖는다.

130 ㉡ $\frac{17}{4}$

▶ 접근 방법 ▶ $y=\sqrt{x+2}$ 의 그래프를 그린 후 직선 $y=x+k$ 를 움직여 보면서 직선과 곡선이 만나는 점의 개수를 파악한다.



(i) 직선 $y=x+k$ 과 $y=\sqrt{x+2}$ 의 그래프가 접할 때 $x+k=\sqrt{x+2}$ 에서

$$x^2+2kx+k^2=x+2$$

$$\therefore x^2+(2k-1)x+k^2-2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D=(2k-1)^2-4(k^2-2)=0$$

$$-4k+9=0 \quad \therefore k=\frac{9}{4}$$

(ii) 직선 $y=x+k$ 가 점 $(-2, 0)$ 을 지날 때

$$0=-2+k \quad \therefore k=2$$

(i), (ii)에서

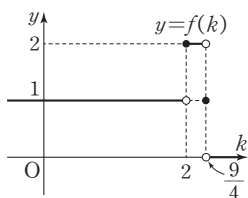
$$f(k)=\begin{cases} 0 & (k > \frac{9}{4}) \\ 1 & (k = \frac{9}{4} \text{ 또는 } k < 2) \\ 2 & (2 \leq k < \frac{9}{4}) \end{cases}$$

함수 $y=f(k)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $f(k)$ 가 불연속인 실수 k 의 값은

$$2, \frac{9}{4}$$

따라서 구하는 합은

$$2+\frac{9}{4}=\frac{17}{4}$$



131 ㉡ ③

▶ 접근 방법 ▶ 새롭게 정의된 함수의 $x=0$ 에서의 우극한, 좌극한, 함수값을 구하여 극한값과 함수의 연속을 조사한다.

$$\begin{aligned} \neg. \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x) + |f(x)|\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0+} |f(x)| \\ &= 0+0=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x) + |f(x)|\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0-} |f(x)| \\ &= -1+|-1|=0 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} g(x)=0 \quad \dots\dots \textcircled{\neg}$$

$$\begin{aligned} \neg. |h(0)| &= |f(0)+f(0)| \\ &= \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right| = 1 \quad \dots\dots \textcircled{\neg} \end{aligned}$$

$-x=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 0+$ 일 때 $t \rightarrow 0-$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0+} \{f(x) + f(-x)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) + \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) \\ &= 0+(-1)=-1 \end{aligned}$$

$x \rightarrow 0-$ 일 때 $t \rightarrow 0+$ 이므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 0-} \{f(x) + f(-x)\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) + \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) \\ &= -1+0=-1 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} h(x)=-1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} |h(x)|=1 \quad \dots\dots \textcircled{\neg}$$

㉡, ㉢에서 $\lim_{x \rightarrow 0} |h(x)|=|h(0)|$ 이므로 함수

$|h(x)|$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\begin{aligned} \neg. g(0) &= f(0) + |f(0)| \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore g(0)|h(0)|=1 \times 1 = 1 \quad (\because \textcircled{\neg})$$

㉡, ㉢에서

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x)|h(x)| &= \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \times \lim_{x \rightarrow 0} |h(x)| \\ &= 0 \times 1 = 0 \end{aligned}$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)|h(x)| \neq g(0)|h(0)|$ 이므로

함수 $g(x)|h(x)|$ 는 $x=0$ 에서 불연속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㉡, ㉣이다.

II. 미분

II-1. 미분계수와 도함수

01 미분계수

개념 확인

75쪽

132 답 (1) -1 (2) 3

$$(1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \\ = \frac{4 - 6}{2} = -1$$

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \\ = \frac{5 - (-1)}{2} = 3$$

133 답 (1) 6 (2) $4 + \Delta x$

$$(1) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{29 - 5}{4} = 6$$

$$(2) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{(1 + \Delta x) - 1} \\ = \frac{\{(1 + \Delta x)^2 + 2(1 + \Delta x) + 5\} - 8}{\Delta x} \\ = \frac{4\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 4 + \Delta x$$

134 답 (1) 4 (2) 1

$$(1) f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{4(1 + \Delta x) - 3\} - 1}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4\Delta x}{\Delta x} = 4$$

$$(2) f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{(1 + \Delta x)^2 - (1 + \Delta x)\} - 0}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + \Delta x) = 1$$

135 답 (1) 3 (2) -5

$$(1) f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-(\Delta x)^2 + 3\Delta x\} - 0}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-\Delta x + 3) = 3$$

(2) $f'(4)$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(4 + \Delta x) - f(4)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-(4 + \Delta x)^2 + 3(4 + \Delta x)\} - (-4)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-5\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-5 - \Delta x) = -5$$

136 답 (1) 5 (2) -3

(1) $f(x) = 2x^2 + x - 1$ 이라 하면 구하는 접선의 기울기는

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(1 + \Delta x)^2 + (1 + \Delta x) - 1\} - 2}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{5\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (5 + 2\Delta x) = 5$$

(2) $f(x) = -x^3$ 이라 하면 구하는 접선의 기울기는

$$f'(-1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(-1 + \Delta x) - f(-1)}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-(-1 + \Delta x)^3\} - 1}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-3\Delta x + 3(\Delta x)^2 - (\Delta x)^3}{\Delta x} \\ = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{-3 + 3\Delta x - (\Delta x)^2\} = -3$$

유제

77-83쪽

137 답 -3

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 a 에서 $a+1$ 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+1) - f(a)}{(a+1) - a} \\ = \{(a+1)^2 + 3(a+1) + 4\} - (a^2 + 3a + 4) \\ = 2a + 4$$

따라서 $2a + 4 = -2$ 이므로 $a = -3$

138 답 $\frac{1}{2}$

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 -1 에서 2 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{5 - (-1)}{3} = 2$$

함수 $f(x)$ 의 $x=a$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{2(a+\Delta x)^2 - 3\} - (2a^2 - 3)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{4a\Delta x + 2(\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (4a + 2\Delta x) = 4a \end{aligned}$$

따라서 $4a=2$ 이므로 $a=\frac{1}{2}$

139 ㉮ 5

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 -2 에서 2 까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} \\ &= \frac{(8+2a) - (-8-2a)}{4} \\ &= 4+a \end{aligned}$$

따라서 $4+a=9$ 이므로 $a=5$

140 ㉮ -2

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 0 에서 3 까지 변할 때의 평균 변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{(3a-3) - 6}{3} = a-3$$

따라서 $a-3=-1$ 이므로 $a=2$

즉, $f(x)=-x^2+2x+6$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 $x=2$ 에서의 미분계수는

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-(2+\Delta x)^2 + 2(2+\Delta x) + 6\} - 6}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-2 - \Delta x) = -2 \end{aligned}$$

141 ㉮ (1) 4 (2) 18

$$\begin{aligned} (1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+4h) - f(a)}{3h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+4h) - f(a)}{4h} \times \frac{4}{3} \\ &= f'(a) \times \frac{4}{3} \\ &= 3 \times \frac{4}{3} = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+5h) - f(a-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+5h) - f(a) + f(a) - f(a-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+5h) - f(a)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+5h) - f(a)}{5h} \times 5 \\ &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - f(a)}{-h} \times (-1) \\ &= f'(a) \times 5 - f'(a) \times (-1) \\ &= 6f'(a) = 6 \times 3 = 18 \end{aligned}$$

142 ㉮ (1) 1 (2) 3

$$\begin{aligned} (1) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h) - f(a)}{4h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h) - f(a)}{-2h} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= f'(a) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \\ (2) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a+6h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a) + f(a) - f(a+6h)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{2h} \\ &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+6h) - f(a)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h) - f(a)}{3h} \times \frac{3}{2} \\ &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+6h) - f(a)}{6h} \times 3 \\ &= f'(a) \times \frac{3}{2} - f'(a) \times 3 \\ &= -\frac{3}{2}f'(a) = -\frac{3}{2} \times (-2) = 3 \end{aligned}$$

143 ㉮ 20

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3)}{8h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+2h) - f(3)}{2h} \times \frac{1}{4} \\ &= f'(3) \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$

따라서 $f'(3) \times \frac{1}{4} = 5$ 이므로 $f'(3) = 20$

144 ㉮ 3

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+kh) - f(2)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+kh) - f(2)}{kh} \times k \\ &= f'(2) \times k = 3k \end{aligned}$$

따라서 $3k=9$ 이므로 $k=3$

145 ㉠ -5

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x^2 + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} \times \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \\ &= -1 \times f'(-1) = -1 \times 5 = -5 \end{aligned}$$

146 ㉠ 3

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{f(x) - f(2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{f(x) - f(2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\frac{f(x) - f(2)}{x - 2}} \times \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x + 4) \\ &= \frac{1}{f'(2)} \times 12 = \frac{1}{4} \times 12 = 3 \end{aligned}$$

147 ㉠ 5

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f(x) - xf(3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3f(x) - 3f(3) + 3f(3) - xf(3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3\{f(x) - f(3)\} - (x-3)f(3)}{x - 3} \\ &= 3 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} - \lim_{x \rightarrow 3} f(3) \\ &= 3f'(3) - f(3) \\ &= 3 \times 2 - 1 = 5 \end{aligned}$$

148 ㉠ -9

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -3 \text{ 이므로 } f'(1) = -3 \\ & \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1} \times (x^2 + x + 1) \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^3) - f(1)}{x^3 - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) \\ &= f'(1) \times 3 \\ &= (-3) \times 3 = -9 \end{aligned}$$

149 ㉠ 3

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 5$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 5 \quad \therefore f(0) = -5$$

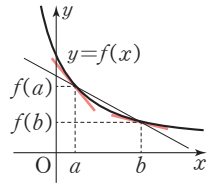
$$\begin{aligned} \therefore f'(2) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(2) + f(h) + 5\} - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 5}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= f'(0) = 3 \end{aligned}$$

150 ㉠ $f'(a) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(b)$

$f'(a), f'(b)$ 는 각각 곡선 $y=f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기이고 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 는 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를 지나 는 직선의 기울기이다.

따라서 오른쪽 그림에서

$$f'(a) < \frac{f(b)-f(a)}{b-a} < f'(b)$$



151 ㉠ 2

$f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy - 3$ 의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) - 3 \quad \therefore f(0) = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(1) + f(h) + 2h - 3\} - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 3 + 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + 2 \\ &= f'(0) + 2 \end{aligned}$$

따라서 $f'(0) + 2 = 1$ 이므로

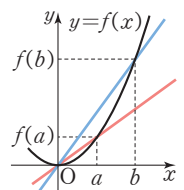
$$f'(0) = -1$$

$$\therefore f(0) + f'(0) = 2$$

152 ㉠ ㄴ, ㄷ

ㄴ. 원점과 점 $(a, f(a))$ 를 지나 는 직선의 기울기는 원점과 점 $(b, f(b))$ 를 지나 는 직선의 기울기보다 작으므로

$$\frac{f(a)}{a} < \frac{f(b)}{b}$$



ㄴ. 두 점 $(a, f(a)),$

$(b, f(b))$ 를 지나는 직선
의 기울기는 직선 $y=x$ 의
기울기보다 크므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} > 1$$

$$\therefore f(b)-f(a) > b-a \quad (\because b-a > 0)$$

ㄷ. $f'(a), f'(b)$ 는 각각 곡선

$y=f(x)$ 위의 두 점

$(a, f(a)), (b, f(b))$ 에서

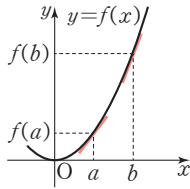
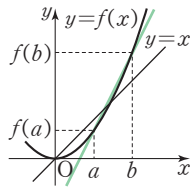
의 접선의 기울기이고, 점

$(a, f(a))$ 에서의 접선의

기울기가 점 $(b, f(b))$ 에서의 접선의 기울기보다 작으므로 $f'(a) < f'(b)$

$$\therefore f'(a) - f'(b) < 0$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.



개념 확인

85쪽

153 ㉡ $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

(i) $f(0)=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x^2) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는
 $x=0$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x) = 0$$

따라서 $f'(0)$ 이 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

154 ㉡ ㄷ

ㄱ. $x=a$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 꺾여 있으므로 미분가능하지 않다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

따라서 보기의 함수 중 $x=a$ 에서 미분가능한 것은 ㄷ이다.

유제

87~89쪽

155 ㉡ $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

(i) $f(0)=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} x^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x^2) = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는
 $x=0$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} (-x) = 0$$

따라서 $f'(0)$ 이 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고 미분가능하다.

156 ㉡ $x=2$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(i) $f(2)=2$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} (x^2 - x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} x = 2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는
 $x=2$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x^2-x)-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(x+1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+} (x+1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x-2}{x-2} = 1$$

따라서 $f'(2)$ 가 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는
 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

157 ㉡ (1) ㄱ, ㄷ (2) ㄱ

ㄱ. (i) $f(0)=0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는
 $x=0$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$$

따라서 $f'(0)$ 이 존재하므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이고 미분 가능하다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 정의되지 않으므로 불연속이고 미분가능하지 않다.

ㄷ. $f(0) = -3$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

ㄹ. (i) $f(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} (x^2 + 4x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} 2x = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^2 + 4x}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0+} (x + 4) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{2x}{x} = 2$$

따라서 $f'(0)$ 이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

(1) $x=0$ 에서 연속인 함수는 ㄱ, ㄹ이다.

(2) $x=0$ 에서 미분가능한 함수는 ㄱ이다.

158 ㄱ, ㄴ

ㄱ. (i) $f(1) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 - 1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \{-(x^2 - 1)\} = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{-(x+1)(x-1)}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1-} \{-(x+1)\} \\ = -2$$

따라서 $f'(1)$ 이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

ㄴ. (i) $g(1) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (x^2 + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (3x - 1) = 2$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = g(1)$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x^2 + 1) - 2}{x - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1+} (x+1) \\ = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{(3x - 1) - 2}{x - 1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{3(x-1)}{x-1} \\ = 3$$

따라서 $g'(1)$ 이 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않다.

ㄷ. (i) $h(1) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^3 = 0$$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = h(1)$ 이므로 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$$(ii) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^3}{x-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 = 0$$

따라서 $h'(1)$ 이 존재하므로 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 함수 $h(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이고 미분 가능하다.

따라서 보기의 함수 중 $x=1$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

159 ㉡ (1) 0 (2) -1, 0, 2 (3) -1, 2

(i) $x=-1$ 에서 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=f(-1)$ 이므로 함수 $f(x)$

는 $x=-1$ 에서 연속이다.

$x=-1$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 꺾여 있으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 미분가능하지 않다.

(ii) $x=0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

(iii) $x=2$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)=f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$x=2$ 에서 연속이다.

$x=2$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 꺾여 있으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

(1) 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 0이다.

(2) 함수 $f(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 값은 -1, 0, 2이다.

(3) 함수 $f(x)$ 가 연속이지만 미분가능하지 않은 x 의 값은 -1, 2이다.

160 ㉡ 3

(i) $x=1$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)=f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$x=1$ 에서 연속이다.

$x=1$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 꺾여 있으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

(ii) $x=4$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 4의 1개이고, 미분가능하지 않은 x 의 값은 1, 4의 2개이므로 $a=1, b=2 \quad \therefore a+b=3$

161 ㉡ ㄱ, ㄴ

ㄱ. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=-1$

ㄴ. $f(1)=1, \lim_{x \rightarrow 1} f(x)=0$

따라서 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는

$x=1$ 에서 불연속이다.

ㄷ. (i) $x=-1$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 꺾여 있으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 미분가능하지 않다.

(ii) $x=0$ 에서 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 의 값이 존재하지 않으므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

(iii) ㄴ에서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 불연속이므로 미분가능하지 않다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$ 가 미분가능하지 않은 x 의 값은 -1, 0, 1의 3개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

162 ㉡ ㄴ, ㄷ

ㄱ. $x=0$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 꺾여 있으므로 $f'(0)$ 은 존재하지 않는다.

ㄴ. $x=4$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 접선의 기울기가 음수이므로 $f'(4) < 0$ 이다.

ㄷ. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \neq f(-2), \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \neq f(3)$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 -2, 3의 2개이다.

ㄹ. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)=f(0), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)=f(2)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=0, x=2$ 에서 연속이다.

또 $x=0, x=2$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 꺾여 있으므로 미분가능하지 않다.

따라서 함수 $f(x)$ 가 연속이지만 미분가능하지 않은 x 의 값은 0, 2의 2개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

연습문제

90~91쪽

163 ㉡ 3

함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 1에서 a 까지 변할 때의 평균 변화율은

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(a)-f(1)}{a-1} = \frac{(a^3-3a^2+2a+1)-1}{a-1} \\ &= \frac{a^3-3a^2+2a}{a-1} = \frac{a(a-1)(a-2)}{a-1} \\ &= a(a-2) \end{aligned}$$

따라서 $a(a-2)=3$ 이므로 $a^2-2a-3=0$

$(a+1)(a-3)=0 \quad \therefore a=3 (\because a>1)$

164 ㉡ 30

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h)-f(a-2h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h)-f(a)+f(a)-f(a-2h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+3h)-f(a)}{3h} \times 3 \\ &\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h} \times (-2) \\ &= f'(a) \times 3 - f'(a) \times (-2) \\ &= 5f'(a) = 5 \times 6 = 30 \end{aligned}$$

165 ㉔ ④

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= 3 \text{ 이므로 } f'(2) = 3 \\ \therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2) + f(2) - f(2-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h} \times (-1) \\ &= f'(2) - f'(2) \times (-1) \\ &= 2f'(2) = 2 \times 3 = 6\end{aligned}$$

166 ㉔ -1

$f(x) = -x^2 + x + 3$ 이라 하면 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\begin{aligned}f'(1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\{-(1+\Delta x)^2 + (1+\Delta x) + 3\} - 3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x - (\Delta x)^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-1 - \Delta x) = -1\end{aligned}$$

167 ㉔ ⑤

① $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$ 이고, 점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 기울기가 양수이므로 $f'(2) > 0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} > 0$$

② $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않는다.

③ $3 < x < 4$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) = 0$ 이다.

④, ⑤ (i) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 의 값은 존재하지 않고,

$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) \neq f(5)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=1$, $x=5$ 에서 불연속이고 미분가능하지 않다.

(ii) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 $x=3$, $x=4$ 에서 연속이다.

또 $x=3$, $x=4$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 꺾여 있으므로 미분가능하지 않다.

(i), (ii)에서 함수 $f(x)$ 가 불연속인 x 의 값은 1, 5의 2개이고, 미분가능하지 않은 x 의 값은 1, 3, 4, 5의 4개이다.

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

168 ㉔ 11

함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5x$ 에서 x 의 값이 0에서 4까지 변할 때의 평균변화율은

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} \\ &= \frac{-12}{4} = -3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^3 + (3a-6)h^2 + (3a^2-12a+5)h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \{h^2 + (3a-6)h + (3a^2-12a+5)\} \\ &= 3a^2 - 12a + 5\end{aligned}$$

따라서 $3a^2 - 12a + 5 = -3$ 이라면

$$3a^2 - 12a + 8 = 0$$

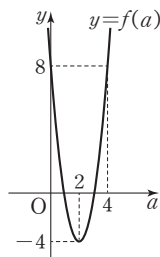
$$\therefore a = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

이때 $0 < a < 4$ 를 만족시키므로 모든 실수 a 의 값의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{8}{3}$ 이다.

따라서 $p=3$, $q=8$ 이므로 $p+q=11$

참고 $3a^2 - 12a + 8 = 0$ 에서 $f(a) = 3a^2 - 12a + 8$ 이라 하면 $f(a) = 3(a-2)^2 - 4$

함수 $y=f(a)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 이차방정식 $f(a)=0$ 의 두 실근은 $0 < a < 4$ 를 만족시킨다. 이와 같이 a 의 값을 구하지 않고 함수 $y=f(a)$ 의 그래프를 이용하여 $f(a)=0$ 을 만족시키는 a 의 값이 모두 $0 < a < 4$ 인지 확인할 수도 있다.



169 ㉔ 2

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x+2) + 4}{x - 3} = 6 \text{에서 } x \rightarrow 3 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이}$$

고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x+2) + 4\} = 0$ 이므로

$$f(5) + 4 = 0 \quad \therefore f(5) = -4$$

이때 $x+2=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow 3$ 일 때 $t \rightarrow 5$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x+2) + 4}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x+2) - f(5)}{x - 3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 5} \frac{f(t) - f(5)}{t - 5} \\ &= f'(5)\end{aligned}$$

$$\therefore f'(5) = 6$$

$$\therefore f(5) + f'(5) = 2$$

170 ㉓ 3

(가)의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0)=f(0)+f(0)$$

$$\therefore f(0)=0$$

$$\therefore f'(1)$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(1)+f(h)+h(1+h)-3h\}-f(1)}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+h^2-2h}{h}$$

$$=\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} (h-2)$$

$$=f'(0)-2$$

(나)에서 $f'(0)=5$ 이므로

$$f'(1)=5-2=3$$

단계	채점 기준	비율
①	$f(0)$ 의 값 구하기	30%
②	$f'(1)$ 을 $f'(0)$ 에 대한 식으로 나타내기	50%
③	$f'(1)$ 의 값 구하기	20%

171 ㉓ ㄱ, ㄷ

$x < 3$ 일 때 $\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ 은 $a < 3$ 인 실수 a 에 대하여 두 점 $(a, f(a)), (3, f(3))$ 을 지나는 직선의 기울기와 같고, $f'(3)$ 은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프 위의 점 $(3, f(3))$ 에서의 접선의 기울기와 같다.

$$\therefore \frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=0 \text{이 항상 성립한다.}$$

ㄴ. 오른쪽 그림에서 두 점

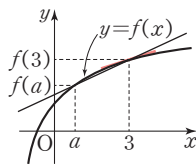
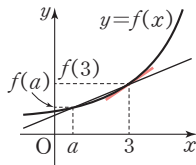
$(a, f(a)), (3, f(3))$ 을 지나는 직선의 기울기가 점 $(3, f(3))$ 에서의 접선의 기울기보다 작으므로

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3} < f'(3) \text{이 항상 성립한다.}$$

ㄷ. 오른쪽 그림에서 두 점

$(a, f(a)), (3, f(3))$ 을 지나는 직선의 기울기가 점 $(3, f(3))$ 에서의 접선의 기울기보다 크므로

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3} > f'(3) \text{이 항상 성립한다.}$$



ㄹ. 오른쪽 그림에서 두 점

$(a, f(a)), (3, f(3))$ 을

지나는 직선의 기울기가 점

$(3, f(3))$ 에서의 접선의

기울기보다 작으므로

$$\frac{f(x)-f(3)}{x-3} < f'(3) \text{인 경우가 있다.}$$

따라서 보기의 그래프에서 $x < 3$ 일 때 주어진 부등식이 항상 성립하는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

172 ㉓ ㄴ

ㄱ. $h(x)=f(x)+|f(x)|$ 라 하면

$$h(x)=\begin{cases} 2x+4 & (x \geq -2) \\ 0 & (x < -2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{h(x)-h(-2)}{x-(-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{(2x+4)-0}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{2(x+2)}{x+2} = 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} \frac{h(x)-h(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{0-0}{x+2} = 0$$

따라서 $h'(-2)$ 가 존재하지 않으므로 함수 $h(x)$ 는 $x=-2$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $p(x)=f(x)|f(x)|$ 라 하면

$$p(x)=\begin{cases} (x+2)^2 & (x \geq -2) \\ -(x+2)^2 & (x < -2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{p(x)-p(-2)}{x-(-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{(x+2)^2-0}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+} (x+2) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{p(x)-p(-2)}{x-(-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{-(x+2)^2-0}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2-} \{-(x+2)\} = 0 \end{aligned}$$

따라서 $p'(-2)$ 가 존재하므로 함수 $p(x)$ 는 $x=-2$ 에서 미분가능하다.

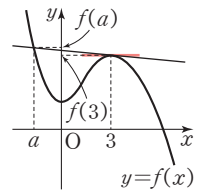
ㄷ. $q(x)=f(x)g(x)$ 라 하면

$$q(x)=\begin{cases} (x+2)(x-4) & (x \geq -2) \\ x(x+2) & (x < -2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{q(x)-q(-2)}{x-(-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{(x+2)(x-4)-0}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+} (x-4) = -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{q(x)-q(-2)}{x-(-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x(x+2)-0}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2-} x = -2 \end{aligned}$$

따라서 $q'(-2)$ 가 존재하지 않으므로 함수 $q(x)$ 는 $x=-2$ 에서 미분가능하지 않다.



따라서 보기의 함수 중 $x = -2$ 에서 미분가능한 것은 ㄴ이다.

173 ㉮ ⑤

| 접근 방법 | 주어진 조건과 두 점 사이의 거리를 구하는 공식을 이용하여 $f(a) - f(1)$ 을 구한다.

두 점 $(1, f(1)), (a, f(a))$ 사이의 거리가 $a^2 - 1$ 이므로

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-1)^2 + \{f(a) - f(1)\}^2} &= a^2 - 1 \\ (a-1)^2 + \{f(a) - f(1)\}^2 &= (a^2 - 1)^2 \\ \{f(a) - f(1)\}^2 &= (a^2 - 1)^2 - (a-1)^2 \\ &= (a+1)^2(a-1)^2 - (a-1)^2 \\ &= (a-1)^2(a^2 + 2a)\end{aligned}$$

이때 $a > 1$ 이고 $f(a) > f(1)$ 이므로

$$f(a) - f(1) = (a-1)\sqrt{a^2 + 2a}$$

$$\begin{aligned}\therefore f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{x^2 + 2x}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 2x} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

◀ 함수 $f(x)$ 는 양의 실수 전체의 집합에서 증가한다.

II-1. 미분계수와 도함수

02 도함수

개념 확인

95쪽

174 ㉮ (가) $x+h$ (나) $6xh$ (다) $6x+1$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{3(\overline{[6]x+h})^2 + (\overline{[6]x+h})\} - (3x^2 + x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(3x^2 + 6xh + 3h^2 + x + h) - 3x^2 - x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{[6]6xh} + 3h^2 + h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (\overline{[6]6x+1} + 3h) \\ &= \overline{[6]6x+1}\end{aligned}$$

175 ㉮ (1) $y' = 0$

$$(2) y' = 7x^6$$

$$(3) y' = 9x^2 + 2x - 6$$

$$(4) y' = 2x^3 - 8x$$

(1) $y = 8$ 에서

$$y' = (8)' = 0$$

(2) $y = x^7$ 에서

$$y' = (x^7)' = 7x^6$$

(3) $y = 3x^3 + x^2 - 6x$ 에서

$$\begin{aligned}y' &= 3(x^3)' + (x^2)' - 6(x)' \\ &= 3 \times 3x^2 + 2x - 6 \times 1 \\ &= 9x^2 + 2x - 6\end{aligned}$$

(4) $y = \frac{1}{2}x^4 - 4x^2 + 5$ 에서

$$\begin{aligned}y' &= \frac{1}{2}(x^4)' - 4(x^2)' + (5)' \\ &= \frac{1}{2} \times 4x^3 - 4 \times 2x + 0 \\ &= 2x^3 - 8x\end{aligned}$$

176 ㉮ (1) $y' = -2x + 9$

$$(2) y' = 5x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 4x - 2$$

$$(3) y' = 3x^2 - 18x + 14$$

$$(4) y' = 8(2x-1)^3$$

(1) $y = (x-3)(-x+6)$ 에서

$$\begin{aligned}y' &= (x-3)'(-x+6) + (x-3)(-x+6)' \\ &= 1 \times (-x+6) + (x-3) \times (-1) \\ &= -x+6-x+3 = -2x+9\end{aligned}$$

(2) $y = (x^3-2)(x^2+x-3)$ 에서

$$\begin{aligned}y' &= (x^3-2)'(x^2+x-3) + (x^3-2)(x^2+x-3)' \\ &= 3x^2(x^2+x-3) + (x^3-2)(2x+1) \\ &= 3x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 2x^4 + x^3 - 4x - 2 \\ &= 5x^4 + 4x^3 - 9x^2 - 4x - 2\end{aligned}$$

(3) $y = x(x-2)(x-7)$ 에서

$$\begin{aligned}y' &= (x)'(x-2)(x-7) + x(x-2)'(x-7) \\ &\quad + x(x-2)(x-7)' \\ &= (x-2)(x-7) + x(x-7) + x(x-2) \\ &= x^2 - 9x + 14 + x^2 - 7x + x^2 - 2x \\ &= 3x^2 - 18x + 14\end{aligned}$$

(4) $y = (2x-1)^4$ 에서

$$\begin{aligned}y' &= 4(2x-1)^3 \times (2x-1)' \\ &= 4(2x-1)^3 \times 2 \\ &= 8(2x-1)^3\end{aligned}$$

177 ㉡ (1) -1 (2) 33

$$\begin{aligned}
 (1) f'(x) &= -4(x^3)' - 5(x^2)' + (x)' + (2)' \\
 &= -4 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 1 \\
 &= -12x^2 - 10x + 1 \\
 \therefore f'(-1) &= -12 + 10 + 1 = -1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) f'(x) &= (2x-1)'(x^2+x+3) + (2x-1)(x^2+x+3)' \\
 &= 2(x^2+x+3) + (2x-1)(2x+1) \\
 &= 2x^2+2x+6+4x^2-1 \\
 &= 6x^2+2x+5 \\
 \therefore f'(2) &= 24+4+5=33
 \end{aligned}$$

178 ㉡ -5

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x-2)'(x+1)(x+3) + (x-2)(x+1)'(x+3) \\
 &\quad + (x-2)(x+1)(x+3)' \\
 &= (x+1)(x+3) + (x-2)(x+3) + (x-2)(x+1) \\
 \therefore f'(0) &= 3 + (-6) + (-2) = -5
 \end{aligned}$$

179 ㉡ 2

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (x^3)' - (x)' + (1)' = 3x^2 - 1 \text{ 이므로} \\
 f'(a) &= 3a^2 - 1 \\
 \text{따라서 } 3a^2 - 1 &= 11 \text{ 이므로} \\
 a^2 &= 4 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)
 \end{aligned}$$

180 ㉡ ①

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= (x^3+1)'f(x) + (x^3+1)f'(x) \\
 &= 3x^2f(x) + (x^3+1)f'(x) \\
 \text{이때 } f(1) &= 2, f'(1) = 3 \text{ 이므로} \\
 g'(1) &= 3f(1) + 2f'(1) \\
 &= 3 \times 2 + 2 \times 3 = 12
 \end{aligned}$$

181 ㉡ (1) -10 (2) a=4, b=3

$$\begin{aligned}
 (1) f(x) &= -x^3 + 2x + 3 \text{ 이라 하면} \\
 f'(x) &= -3x^2 + 2 \\
 \text{따라서 점 } (2, -1) \text{ 에서의 접선의 기울기는} \\
 f'(2) &= -12 + 2 = -10 \\
 (2) f(x) &= x^3 + 3x^2 + ax - b \text{ 라 하면} \\
 f'(x) &= 3x^2 + 6x + a
 \end{aligned}$$

점 $(-1, -5)$ 에서의 접선의 기울기가 1 이므로
 $f'(-1) = 1$ 에서

$$3 - 6 + a = 1 \quad \therefore a = 4$$

점 $(-1, -5)$ 는 곡선 $y = x^3 + 3x^2 + 4x - b$ 위의 점이므로

$$-5 = -1 + 3 - 4 - b$$

$$\therefore b = 3$$

182 ㉡ a=-1, b=-6

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 6x + a \\
 \text{점 } (1, f(1)) \text{ 에서의 접선의 기울기가 5 이므로} \\
 f'(1) &= 5 \text{ 에서} \\
 6 + a &= 5 \quad \therefore a = -1
 \end{aligned}$$

점 $(-2, 8)$ 은 곡선 $y = 3x^2 - x + b$ 위의 점이므로
 $8 = 12 + 2 + b \quad \therefore b = -6$

183 ㉡ 2

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 + 3x^2 - x - 2 \text{ 라 하면} \\
 f'(x) &= 3x^2 + 6x - 1 \\
 \text{점 } (a, b) \text{ 에서의 접선의 기울기가 } -4 \text{ 이므로} \\
 f'(a) &= -4 \text{ 에서} \\
 3a^2 + 6a - 1 &= -4 \\
 a^2 + 2a + 1 &= 0, (a+1)^2 = 0 \\
 \therefore a &= -1 \\
 \text{점 } (-1, b) \text{ 는 곡선 } y &= x^3 + 3x^2 - x - 2 \text{ 위의 점이므로} \\
 b &= -1 + 3 + 1 - 2 = 1 \\
 \therefore a^2 + b^2 &= (-1)^2 + 1^2 = 2
 \end{aligned}$$

184 ㉡ 27

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -2x^3 + ax^2 - bx \text{ 라 하면} \\
 f'(x) &= -6x^2 + 2ax - b \\
 \text{두 점 } (1, 5), (2, c) \text{ 에서의 접선이 서로 평행하므로} \\
 f'(1) &= f'(2) \text{ 에서} \\
 -6 + 2a - b &= -24 + 4a - b \\
 -2a &= -18 \quad \therefore a = 9 \\
 \text{점 } (1, 5) \text{ 는 곡선 } y &= -2x^3 + 9x^2 - bx \text{ 위의 점이므로} \\
 5 &= -2 + 9 - b \quad \therefore b = 2 \\
 \text{점 } (2, c) \text{ 는 곡선 } y &= -2x^3 + 9x^2 - 2x \text{ 위의 점이므로} \\
 c &= -16 + 36 - 4 = 16 \\
 \therefore a + b + c &= 27
 \end{aligned}$$

185 ㉡ 13

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{(x+3)(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{1}{6} f'(3)\end{aligned}$$

$$f'(x) = 9x^2 - 2x + 3 \text{ 이므로}$$

$$f'(3) = 81 - 6 + 3 = 78$$

따라서 구하는 값은

$$\frac{1}{6} f'(3) = \frac{1}{6} \times 78 = 13$$

186 ㉡ 3

$$f(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \text{ 이라 하면}$$

$$f(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 = -1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} \\ &= f'(-1)\end{aligned}$$

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 \text{ 이므로 구하는 값은}$$

$$f'(-1) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 = 3$$

187 ㉡ 12

$$f(-1) = 1 + 1 - 1 = 1 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1-3h) - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1-3h) - f(-1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1-3h) - f(-1)}{-3h} \times (-3) \\ &= -3f'(-1)\end{aligned}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + 1 \text{ 이므로}$$

$$f'(-1) = -3 - 2 + 1 = -4$$

따라서 구하는 값은

$$-3f'(-1) = -3 \times (-4) = 12$$

188 ㉡ 5

$$f(x) = 3x^n - 5x \text{ 라 하면 } f(1) = 3 - 5 = -2 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^n - 5x + 2}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= f'(1)\end{aligned}$$

$$\therefore f'(1) = 10$$

$$f'(x) = 3nx^{n-1} - 5 \text{ 이므로 } f'(1) = 10 \text{ 에서}$$

$$3n - 5 = 10 \quad \therefore n = 5$$

189 ㉡ -1

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{4} f'(2)\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{4} f'(2) = 3 \text{ 이므로 } f'(2) = 12$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - 8 \text{ 이므로 } f'(2) = 12 \text{ 에서}$$

$$12 + 4a - 8 = 12 \quad \therefore a = 2$$

$$\text{따라서 } f'(x) = 3x^2 + 4x - 8 \text{ 이므로}$$

$$f'(1) = 3 + 4 - 8 = -1$$

190 ㉡ 3

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = -6 \text{ 에서 } x \rightarrow -1 \text{ 일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{ 이고}$$

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 \text{ 이므로 } f(-1) = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = f'(-1)$$

$$\therefore f'(-1) = -6 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 2ax \text{ 이므로 } \textcircled{B} \text{ 에서}$$

$$-4 - 2a = -6 \quad \therefore a = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^4 + x^2 + b \text{ 이므로 } \textcircled{A} \text{ 에서}$$

$$1 + 1 + b = 0 \quad \therefore b = -2$$

$$\therefore a - b = 3$$

191 ㉡ 6

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2-h) - f(2)}{-h} \times (-1) \\ &= -f'(2)\end{aligned}$$

$$\text{따라서 } -f'(2) = -1 \text{ 이므로}$$

$$f'(2) = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

$$f(0) = 1 \text{ 이므로 } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 1}{h} = -3 \text{ 에서}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = -3$$

$$\therefore f'(0) = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \text{ 이므로 } \textcircled{B} \text{ 에서}$$

$$b = -3$$

$$\text{따라서 } f'(x) = 3x^2 + 2ax - 3 \text{ 이므로 } \textcircled{A} \text{ 에서}$$

$$12 + 4a - 3 = 1 \quad \therefore a = -2$$

$$\therefore ab = 6$$

192 ㉠ -9

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^2+3x+1} = 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$$f(x) = x^2 + ax + b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 2x + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = -3 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극}$$

한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{이므로 } f(0) = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

$$\therefore f'(0) = -3 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$ 에서 $b=0$, $\textcircled{8}$ 에서 $a=-3$ 이므로

$$f(x) = x^2 - 3x, \quad f'(x) = 2x - 3$$

$$\therefore f(1) + f'(-2) = (1-3) + (-4-3) = -9$$

193 ㉠ $a=2, b=1$

함수 $f(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하면 $x=2$ 에서 연속이고 미분계수 $f'(2)$ 가 존재한다.

$$(i) \quad x=2 \text{에서 연속이므로 } \lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = f(2) \text{에서}$$

$$8-8+9=4a+b \quad \therefore 4a+b=9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $f'(2)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{(ax^2 + b) - (4a + b)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{a(x+2)(x-2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2+} a(x+2) = 4a \\ & \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{(x^3 - 4x + 9) - (4a + b)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x^3 - 4x}{x - 2} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x(x+2)(x-2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2-} x(x+2) = 8 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 4a=8 \text{이므로 } a=2$$

$a=2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$8+b=9 \quad \therefore b=1$$

| 다른 풀이 |

$$g(x) = ax^2 + b, \quad h(x) = x^3 - 4x + 9 \text{라 하면}$$

$$g'(x) = 2ax, \quad h'(x) = 3x^2 - 4$$

(i) $x=2$ 에서 연속이므로 $g(2) = h(2)$ 에서

$$4a + b = 9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $f'(2)$ 가 존재하므로 $g'(2) = h'(2)$ 에서

$$4a = 8 \quad \therefore a = 2$$

$a=2$ 를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$8 + b = 9 \quad \therefore b = 1$$

194 ㉠ $a=2, b=6$

함수 $f(x)$ 가 $x=3$ 에서 미분가능하면 $x=3$ 에서 연속이고 미분계수 $f'(3)$ 이 존재한다.

(i) $x=3$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow 3-} f(x) = f(3)$ 에서

$$27 + 9 = 9a + 3b$$

$$\therefore 3a + b = 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $f'(3)$ 이 존재하므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{(ax^2 + bx) - (9a + 3b)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{ax^2 + bx - 3(3a + b)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3+} \frac{(x-3)(ax + 3a + b)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3+} (ax + 3a + b) = 6a + b \\ & \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{3x^2 + 9 - (9a + 3b)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{3x^2 - 27}{x - 3} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3-} \frac{3(x+3)(x-3)}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3-} 3(x+3) = 18 \\ &\therefore 6a + b = 18 \quad \dots\dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a=2, b=6$$

| 다른 풀이 |

$$g(x) = ax^2 + bx, \quad h(x) = 3x^2 + 9 \text{라 하면}$$

$$g'(x) = 2ax + b, \quad h'(x) = 6x$$

(i) $x=3$ 에서 연속이므로 $g(3) = h(3)$ 에서

$$9a + 3b = 27 + 9$$

$$\therefore 3a + b = 12 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $f'(3)$ 이 존재하므로 $g'(3) = h'(3)$ 에서

$$6a + b = 18 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a=2, b=6$

195 ㉔ -7

함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 미분가능하면 $x=a$ 에서 연속
이고 미분계수 $f'(a)$ 가 존재한다.

(i) $x=a$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$ 에서

$$6a+b=a^2+4a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $f'(a)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{(x^2+4x)-(a^2+4a)}{x-a} \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{x^2+4x-a(a+4)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a+} \frac{(x-a)(x+a+4)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a+} (x+a+4)$$

$$= 2a+4$$

$$\lim_{x \rightarrow a-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{(6x+b)-(a^2+4a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{6x-6a}{x-a} (\because \textcircled{1})$$

$$= \lim_{x \rightarrow a-} \frac{6(x-a)}{x-a}$$

$$= 6$$

즉, $2a+4=6$ 이므로 $a=1$

$a=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$6+b=5$$

$$\therefore b=-1$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} x^2+4x & (x \geq 1) \\ 6x-1 & (x < 1) \end{cases}$ 이므로

$$f(-1) = -6-1 = -7$$

| 다른 풀이 |

$$g(x) = x^2+4x, h(x) = 6x+b \text{라 하면}$$

$$g'(x) = 2x+4, h'(x) = 6$$

(i) $x=a$ 에서 연속이므로 $g(a) = h(a)$ 에서

$$a^2+4a=6a+b$$

$$\therefore b=a^2-2a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $f'(a)$ 가 존재하므로 $g'(a) = h'(a)$ 에서

$$2a+4=6 \quad \therefore a=1$$

$a=1$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$b=-1$$

따라서 $f(x) = \begin{cases} x^2+4x & (x \geq 1) \\ 6x-1 & (x < 1) \end{cases}$ 이므로

$$f(-1) = -6-1 = -7$$

196 ㉔ ③

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & (x \geq -3) \\ -(x+3) & (x < -3) \end{cases} \text{이므로}$$

$h(x) = f(x)g(x)$ 라 하면

$$h(x) = \begin{cases} (x+3)(2x+a) & (x \geq -3) \\ -(x+3)(2x+a) & (x < -3) \end{cases}$$

함수 $h(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면

$x=-3$ 에서 미분가능하므로 미분계수 $h'(-3)$ 이 존재한다.

$$\lim_{x \rightarrow -3+} \frac{h(x)-h(-3)}{x-(-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3+} \frac{(x+3)(2x+a)-0}{x+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3+} (2x+a) = -6+a$$

$$\lim_{x \rightarrow -3-} \frac{h(x)-h(-3)}{x-(-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3-} \frac{-(x+3)(2x+a)-0}{x+3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3-} \{-(2x+a)\} = 6-a$$

즉, $-6+a=6-a$ 이므로

$$2a=12 \quad \therefore a=6$$

197 ㉔ $a=8, b=7$

다항식 x^8+ax+b 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫
을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 0이므로

$$x^8+ax+b=(x+1)^2Q(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$1-a+b=0 \quad \therefore a-b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$8x^7+a=2(x+1)Q(x)+(x+1)^2Q'(x)$$

양변에 $x=-1$ 을 대입하면

$$-8+a=0 \quad \therefore a=8$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$8-b=1 \quad \therefore b=7$$

198 ㉔ 12

다항식 $x^{20}-5x^2+6$ 을 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의
몫을 $Q(x)$, 나머지 $R(x)$ 를 $ax+b$ (a, b 는 상수)라
하면

$$x^{20}-5x^2+6=(x-1)^2Q(x)+ax+b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1-5+6=a+b$$

$$\therefore a+b=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$20x^{19}-10x=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+a$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$20-10=a \quad \therefore a=10$$

이를 ㉡에 대입하면

$$10+b=2 \quad \therefore b=-8$$

따라서 $R(x)=10x-8$ 이므로

$$R(2)=20-8=12$$

199 ㉢ 36

다항식 x^3-6x^2+a 를 $(x-b)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 0이므로

$$x^3-6x^2+a=(x-b)^2Q(x) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

㉠의 양변에 $x=b$ 를 대입하면

$$b^3-6b^2+a=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2-12x=2(x-b)Q(x)+(x-b)^2Q'(x)$$

양변에 $x=b$ 를 대입하면

$$3b^2-12b=0, b(b-4)=0$$

$$\therefore b=4 (\because b \neq 0)$$

이를 ㉡에 대입하면

$$64-96+a=0$$

$$\therefore a=32$$

$$\therefore a+b=36$$

200 ㉢ -1

다항식 x^3+ax^2+bx+4 를 $(x-1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 $7x+1$ 이므로

$$x^3+ax^2+bx+4=(x-1)^2Q(x)+7x+1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

㉠의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$1+a+b+4=8$$

$$\therefore a+b=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3x^2+2ax+b=2(x-1)Q(x)+(x-1)^2Q'(x)+7$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$3+2a+b=7$$

$$\therefore 2a+b=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a=1, b=2$$

$$\therefore a-b=-1$$

연습문제

108~110쪽

201 ㉢ 5

$$f'(x)=2x(x^2+ax+3)+(x^2+1)(2x+a)$$

$$f'(1)=32 \text{에서 } 2(4+a)+2(2+a)=32$$

$$4a=20 \quad \therefore a=5$$

202 ㉢ ①

$$f(x)=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots-x^9+x^{10} \text{이므로}$$

$$f'(x)=-1+2x-3x^2+4x^3-\cdots-9x^8+10x^9$$

$$\therefore f'(1)=-1+2-3+4-\cdots-9+10=5$$

203 ㉢ ⑤

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f'(x)=2ax+b$$

$$f'(1)=1 \text{에서 } 2a+b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$f'(-1)=-7 \text{에서 } -2a+b=-7 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=2, b=-3$$

$$f(x)=2x^2-3x+c \text{이므로 } f(1)=4 \text{에서}$$

$$2-3+c=4 \quad \therefore c=5$$

따라서 $f(x)=2x^2-3x+5$ 이므로

$$f(2)=8-6+5=7$$

204 ㉢ -1

점 (2, 4)에서의 접선의 기울기가 -3이므로

$$f'(2)=-3$$

점 (2, 4)는 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f(2)=4$$

$$g'(x)=2x+f(x)+(x+1)f'(x) \text{이므로}$$

$$g'(2)=4+f(2)+3f'(2) \\ =4+4+3 \times (-3)=-1$$

205 ㉢ -12

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)\}^2 - \{f(1)\}^2}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\{f(x)+f(1)\}\{f(x)-f(1)\}}{x-1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \{f(x)+f(1)\}$$

$$= f'(1) \times \{f(1)+f(1)\}$$

$$= 2f'(1)f(1)$$

$$f'(x)=4x-1 \text{이므로 } f'(1)=4-1=3$$

또 $f(1)=2-1-3=-2$ 이므로 구하는 값은

$$2f'(1)f(1)=2 \times 3 \times (-2)=-12$$

206 ㉡ 25

$f(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3$ 이라 하면

$f(1) = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 - 5}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$$

$f'(x) = 7x^6 + 6x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2$ 이므로 구하는 값은

$$f'(1) = 7 + 6 + 5 + 4 + 3 = 25$$

207 ㉡ ⑤

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x^2 + 3x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{(x+4)(x-1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+4} \\ &= \frac{1}{5} f'(1) \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{5} f'(1) = 1$ 이므로 $f'(1) = 5$

$f'(x) = 3ax^2 - 4x$ 이므로 $f'(1) = 5$ 에서

$$3a - 4 = 5 \quad \therefore a = 3$$

208 ㉡ ⑤

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면

$x = -2$ 에서 미분가능하므로 $x = -2$ 에서 연속이고 미분계수 $f'(-2)$ 가 존재한다.

(i) $x = -2$ 에서 연속이므로 $\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = f(-2)$ 에서
 $-4 = 4 - 2a + b \quad \dots\dots \textcircled{1}$

(ii) 미분계수 $f'(-2)$ 가 존재하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{2x - (4 - 2a + b)}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{2x + 4}{x + 2} \quad (\because \textcircled{1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{2(x+2)}{x+2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x^2 + ax + b - (4 - 2a + b)}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{x^2 + ax + 2(a-2)}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{(x+2)(x+a-2)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2-} (x+a-2) = a-4 \end{aligned}$$

즉, $2 = a - 4$ 이므로 $a = 6$

$a = 6$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$-4 = 4 - 12 + b \quad \therefore b = 4$$

$$\therefore a + b = 10$$

| 다른 풀이 |

$g(x) = x^2 + ax + b$, $h(x) = 2x$ 라 하면

$$g'(x) = 2x + a, \quad h'(x) = 2$$

(i) $x = -2$ 에서 연속이므로 $g(-2) = h(-2)$ 에서

$$4 - 2a + b = -4$$

$$\therefore 2a - b = 8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 미분계수 $f'(-2)$ 가 존재하므로

$$g'(-2) = h'(-2) \text{에서}$$

$$-4 + a = 2 \quad \therefore a = 6$$

$a = 6$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$12 - b = 8 \quad \therefore b = 4$$

$$\therefore a + b = 10$$

209 ㉡ 200

다항식 $x^{100} + ax + b$ 를 $(x+1)^2$ 으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$ 라 하면 나머지가 0이므로

$$x^{100} + ax + b = (x+1)^2 Q(x) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$1 - a + b = 0 \quad \therefore a - b = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$100x^{99} + a = 2(x+1)Q(x) + (x+1)^2 Q'(x)$$

양변에 $x = -1$ 을 대입하면

$$-100 + a = 0$$

$$\therefore a = 100$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$100 - b = 1$$

$$\therefore b = 99$$

따라서 $f(x) = x^{100} + 100x + 99$ 를 $x-1$ 로 나누었을 때의 나머지는

$$f(1) = 1 + 100 + 99 = 200$$

| 참고 | 다항식 $f(x)$ 를 일차식 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라 하면

$$R = f(a)$$

210 ㉡ $f'(x) = x + 1$

$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy + 1$ 의 양변에 $x = 0$,

$y = 0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) + 1$$

$$\therefore f(0) = -1$$

$$\begin{aligned}
\therefore f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(1) + f(h) + h + 1\} - f(1)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 1 + h}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + 1 \\
&= f'(0) + 1
\end{aligned}$$

따라서 $f'(0) + 1 = 2$ 이므로 $f'(0) = 1$

$$\begin{aligned}
\therefore f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x) + f(h) + xh + 1\} - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + 1 + xh}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} x \\
&= f'(0) + x \\
&= x + 1
\end{aligned}$$

211 ㉡ 14

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{x - 3} = 2$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} \{f(x) - 2\} = 0$ 이므로

$$f(3) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = f'(3)$$

$$\therefore f'(3) = 2$$

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - 1}{x^2 - 9} = 1$ 에서 $x \rightarrow 3$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 3} \{g(x) - 1\} = 0$ 이므로

$$g(3) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - 1}{x^2 - 9}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{(x+3)(x-3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x) - g(3)}{x - 3} \times \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x + 3}$$

$$= \frac{1}{6} g'(3)$$

따라서 $\frac{1}{6} g'(3) = 1$ 이므로 $g'(3) = 6$

함수 $f(x)g(x)$ 의 $x=3$ 에서의 미분계수는

$$f'(3)g(3) + f(3)g'(3) = 2 \times 1 + 2 \times 6 = 14$$

212 ㉡ 45

$\frac{1}{t} = h$ 로 놓으면 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $h \rightarrow 0$ 이므로

$$\begin{aligned}
&\lim_{t \rightarrow \infty} t \left\{ f\left(1 + \frac{4}{t}\right) - f\left(1 - \frac{1}{t}\right) \right\} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+4h) - f(1-h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+4h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+4h) - f(1)}{4h} \times 4 \\
&\quad - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \times (-1)
\end{aligned}$$

$$= 4f'(1) - f'(1) \times (-1) = 5f'(1)$$

$$f'(x) = 8x^3 + 1 \text{이므로 } f'(1) = 8 + 1 = 9$$

따라서 구하는 값은

$$5f'(1) = 5 \times 9 = 45$$

213 ㉡ $\frac{3}{2}$

$f(1) = 1 + 3 = 4$ 이므로

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{\sqrt{f(x)} - 2}{x - 1} \times \frac{\sqrt{f(x)} + 2}{\sqrt{f(x)} + 2} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \left\{ \frac{f(x) - 4}{x - 1} \times \frac{1}{\sqrt{f(x)} + 2} \right\} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{f(x)} + 2} \\
&= f'(1) \times \frac{1}{\sqrt{f(1)} + 2} = \frac{1}{4} f'(1)
\end{aligned}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 3 \text{이므로 } f'(1) = 3 + 3 = 6$$

따라서 구하는 값은

$$\frac{1}{4} f'(1) = \frac{1}{4} \times 6 = \frac{3}{2}$$

214 ㉡ 36

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^n + x^3 - 3x^2 - 12}{x - 2} = a$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} (x^n + x^3 - 3x^2 - 12) = 0$ 이므로

$$2^n + 8 - 12 - 12 = 0$$

$$2^n = 16 \quad \therefore n = 4$$

▶▶▶▶▶ ①

$f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2$ 이라 하면

$$f(2) = 16 + 8 - 12 = 12 \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + x^3 - 3x^2 - 12}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

$$f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 6x \text{이므로}$$

$$f'(2) = 32 + 12 - 12 = 32$$

$$\therefore a = 32 \quad \text{▶▶▶▶▶ ②}$$

$$\therefore n + a = 36 \quad \text{▶▶▶▶▶ ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	n 의 값 구하기	40%
②	a 의 값 구하기	50%
③	$n+a$ 의 값 구하기	10%

215 ㉡ 16

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 5$ 에서 $x \rightarrow 0$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \text{이므로 } f(0) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

$$\therefore f'(0) = 5 \quad \text{..... ㉠}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = 1$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 2\} = 0 \text{이므로 } f(2) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

$$\therefore f'(2) = 1 \quad \text{..... ㉡}$$

$f(0) = 0$ 이므로 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ (a, b 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$$\text{㉠에서 } b = 5$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 5 \text{이므로 ㉡에서}$$

$$12 + 4a + 5 = 1 \quad \therefore a = -4$$

$$\text{따라서 } f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 \text{이므로}$$

$$f'(-1) = 3 + 8 + 5 = 16$$

216 ㉡ ④

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} = \frac{1}{4} \text{에서 } x \rightarrow 2 \text{일 때}$$

(분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0 \text{이므로 } f(2) = 0$$

$$\text{이때 } f(1) = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-a) \text{ (} a \text{는 상수)라 하면}$$

$$f'(x) = (x-2)(x-a) + (x-1)(x-a) + (x-1)(x-2)$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)(x-a)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-a)}{\{f'(x)\}^2} \\ &= \frac{2-a}{\{f'(2)\}^2} = \frac{2-a}{(2-a)^2} = \frac{1}{2-a} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{2-a} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$2-a=4 \quad \therefore a=-2$$

$$\text{즉, } f(x) = (x-1)(x-2)(x+2) \text{이므로}$$

$$f(3) = 2 \times 1 \times 5 = 10$$

217 ㉡ 4

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ (} a, b, c, d \text{는 상수, } a \neq 0 \text{)}$$

라 하면

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$\text{(㉠)에서 } f(-1) = 0, f'(-1) = 0 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\text{(㉡)에서 } f(0) + 1 = 0, f'(0) = 0$$

$$\therefore f(0) = -1, f'(0) = 0 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉡에서 } c = 0, d = -1$$

$$\therefore f(x) = ax^3 + bx^2 - 1, f'(x) = 3ax^2 + 2bx$$

㉠에서

$$-a + b - 1 = 0 \quad \therefore a - b = -1 \quad \text{..... ㉢}$$

$$3a - 2b = 0 \quad \text{..... ㉣}$$

$$\text{㉢, ㉣을 연립하여 풀면 } a = 2, b = 3$$

$$\text{따라서 } f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1 \text{이므로}$$

$$f(1) = 2 + 3 - 1 = 4$$

218 ㉡ ①

| 접근 방법 | 함수의 극한에 대한 성질과 미분계수의 정의를 이용하여 $f(0), g(0), f'(0), g'(0)$ 의 값을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{x} = 3 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{일 때 (분모) } \rightarrow 0 \text{이}$$

고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + g(x)\} = 0 \text{이므로}$$

$$f(0) + g(0) = 0 \quad \text{..... ㉠}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + g(x) - \{f(0) + g(0)\}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}$$

$$= f'(0) + g'(0)$$

$$\therefore f'(0) + g'(0) = 3 \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{xg(x)} = 2 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고 극}$$

한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) + 3\} = 0 \text{이므로}$$

$$f(0) = -3$$

이를 $\textcircled{C}$ 에 대입하면

$$-3 + g(0) = 0 \quad \therefore g(0) = 3$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + 3}{xg(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{xg(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)}$$

$$= f'(0) \times \frac{1}{g(0)}$$

$$= \frac{1}{3} f'(0)$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{3} f'(0) = 2 \text{이므로}$$

$$f'(0) = 6$$

이를 $\textcircled{C}$ 에 대입하면

$$6 + g'(0) = 3 \quad \therefore g'(0) = -3$$

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \text{이므로}$$

$$h'(0) = f'(0)g(0) + f(0)g'(0)$$

$$= 6 \times 3 + (-3) \times (-3)$$

$$= 27$$

219 ㉮ 6

| 접근 방법 | $f(x)$ 의 차수와 최고차항의 계수를 미지수로 놓고 좌변과 우변을 비교한다.

$f(x)$ 를 m 차함수라 하면 $f'(x)$ 는 $(m-1)$ 차함수이다.

$$(x^n - 2)f'(x) = f(x) \text{에서 좌변의 차수는 } n + m - 1,$$

우변의 차수는 m 이고 좌변과 우변의 차수는 같아야 하므로

$$n + m - 1 = m$$

$$\therefore n = 1$$

$$\therefore (x-2)f'(x) = f(x) \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$f(x)$ 의 최고차항을 ax^m ($a \neq 0$)이라 하면 $f'(x)$ 의

최고차항은 amx^{m-1} 이므로 $\textcircled{A}$ 의 좌변의 최고차항은

$$x \times amx^{m-1} = amx^m$$

좌변과 우변의 최고차항의 계수가 같아야 하므로

$$am = a$$

$$\therefore m = 1 (\because a \neq 0)$$

따라서 $f(x)$ 는 일차함수이므로

$$f(x) = ax + b \quad (a, b \text{는 상수, } a \neq 0) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = a$$

$f(x)$ 와 $f'(x)$ 를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$a(x-2) = ax + b$$

$$ax - 2a = ax + b$$

$$\therefore b = -2a$$

$$f(x) = ax - 2a \text{이므로 } f(4) = 3 \text{에서}$$

$$2a = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$$

이를 $b = -2a$ 에 대입하면

$$b = -3$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{3}{2}x - 3 \text{이므로}$$

$$f(6) = 9 - 3 = 6$$

220 ㉮ -5

| 접근 방법 | 함수 $f(x)$ 가 $x = -2$ 에서 연속이고

$f(x) = f(x+4)$ 임을 이용하여 $-2 \leq x \leq 2$ 에서의 $f(x)$ 를 구한 후 $f(3)$ 과 같은 함수값을 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 찾는다.

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면

$x = -2$ 에서 미분가능하므로 $x = -2$ 에서 연속이고 미분계수 $f'(-2)$ 가 존재한다.

(i) $x = -2$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x)$$

이때 $\textcircled{A}$ 에서 $f(x) = f(x+4)$ 이므로

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} f(x)$$

$$\text{따라서 } -8a + 4b - 15 = 8a + 4b + 17 \text{이므로}$$

$$16a = -32 \quad \therefore a = -2$$

$$\therefore f(x) = -2x^3 + bx^2 + 8x + 1 \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

(ii) 미분계수 $f'(-2)$ 가 존재하므로

$$\lim_{x \rightarrow -2+} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{(-2x^3 + bx^2 + 8x + 1) - (4b + 1)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{-2x^3 + bx^2 + 8x - 4b}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{-2x(x^2 - 4) + b(x^2 - 4)}{x + 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{-(x+2)(x-2)(2x-b)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2+} \{-(x-2)(2x-b)\}$$

$$= -4(b+4)$$

$x+4=t$ 로 놓으면 $x \rightarrow -2$ 일 때 $t \rightarrow 2$ 이므로

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t-4)-f(-2)}{t-2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t)-f(-2)}{t-2} \quad (\because \text{ㄴ}) \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(-2t^3+bt^2+8t+1)-(4b+1)}{t-2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{-2t^3+bt^2+8t-4b}{t-2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{-2t(t^2-4)+b(t^2-4)}{t-2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{-(t+2)(t-2)(2t-b)}{t-2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 2} \{-(t+2)(2t-b)\} \\ &= 4(b-4) \\ &\text{즉, } -4(b+4)=4(b-4) \text{ 이므로} \\ &\quad -b-4=b-4 \\ &\quad 2b=0 \quad \therefore b=0 \end{aligned}$$

따라서 $f(x)=-2x^3+8x+1$ ($-2 \leq x \leq 2$) 이므로
 $f(3)=f(-1)=2-8+1=-5$

| 다른 풀이 |

ㄴ에서 $f(-2)=f(2)$ 이므로
 $-8a+4b-15=8a+4b+17$
 $16a=-32 \quad \therefore a=-2$
 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 ㄴ에서
 $f'(x)=f'(x+4)$
 이때 $x=-2$, $x=2$ 에서 미분가능하므로 미분계수
 $f'(-2)$, $f'(2)$ 가 존재한다.
 $\therefore f'(-2)=f'(2)$
 $f'(x)=3ax^2+2bx+8$ 이므로 $f'(-2)=f'(2)$ 에서
 $12a-4b+8=12a+4b+8$
 $8b=0 \quad \therefore b=0$
 따라서 $f(x)=-2x^3+8x+1$ ($-2 \leq x \leq 2$) 이므로
 $f(3)=f(-1)=2-8+1=-5$

01 접선의 방정식과 평균값 정리

유제

115~121쪽

221 ㉡ $y=-8x+15$

$f(x)=-x^3+x^2+3$ 이라 하면 $f'(x)=-3x^2+2x$

점 $(2, -1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(2)=-12+4=-8$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y+1=-8(x-2) \quad \therefore y=-8x+15$$

222 ㉡ $y=-\frac{1}{3}x+3$

$f(x)=x^2-3x+2$ 라 하면 $f'(x)=2x-3$

점 $(3, 2)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(3)=6-3=3$$

따라서 점 $(3, 2)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기

는 $-\frac{1}{3}$ 이므로 구하는 직선의 방정식은

$$y-2=-\frac{1}{3}(x-3) \quad \therefore y=-\frac{1}{3}x+3$$

223 ㉡ $a=3, b=-7$

$f(x)=x^3+ax^2+bx$ 라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

점 $(-1, 9)$ 에서의 접선의 기울기는 -10 이므로

$$f'(-1)=-10 \text{에서}$$

$$3-2a+b=-10$$

$$\therefore 2a-b=13 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

곡선 $y=x^3+ax^2+bx$ 가 점 $(-1, 9)$ 를 지나므로

$$9=-1+a-b$$

$$\therefore a-b=10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=3, b=-7$$

224 ㉡ 5

$f(x)=-x^3+2x$ 라 하면 $f'(x)=-3x^2+2$

점 $(1, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=-3+2=-1$$

따라서 점 $(1, 1)$ 에서의 접선에 수직인 직선의 기울기

는 1이므로 이 직선의 방정식은

$$y-1=x-1 \quad \therefore y=x$$

이 직선이 점 $(5, a)$ 를 지나므로

$$a=5$$

225 $y = -x + 3$ 또는 $y = -x + 7$

$f(x) = -x^3 + 2x + 5$ 라 하면 $f'(x) = -3x^2 + 2$
 접점의 좌표를 $(t, -t^3 + 2t + 5)$ 라 하면 이 점에서의
 접선의 기울기가 -1 이므로 $f'(t) = -1$ 에서
 $-3t^2 + 2 = -1, t^2 = 1 \quad \therefore t = -1$ 또는 $t = 1$
 따라서 접점의 좌표는 $(-1, 4)$ 또는 $(1, 6)$ 이므로 구
 하는 접선의 방정식은
 $y - 4 = -(x + 1)$ 또는 $y - 6 = -(x - 1)$
 $\therefore y = -x + 3$ 또는 $y = -x + 7$

226 ㉡ 11

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x + 3$ 이라 하면
 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$
 접점의 좌표를 $(t, t^3 - 6t^2 + 8t + 3)$ 이라 하면 이 점에
 서의 접선의 기울기가 -4 이므로 $f'(t) = -4$ 에서
 $3t^2 - 12t + 8 = -4$
 $(t - 2)^2 = 0 \quad \therefore t = 2$
 따라서 접점의 좌표는 $(2, 3)$ 이므로 접선의 방정식은
 $y - 3 = -4(x - 2) \quad \therefore y = -4x + 11$
 $\therefore k = 11$

227 ㉡ 6

직선 $2x - y + 1 = 0$, 즉 $y = 2x + 1$ 에 평행한 직선의
 기울기는 2이다.
 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$ 라 하면
 $f'(x) = 3x^2 + 6x + 2$
 접점의 좌표를 $(t, t^3 + 3t^2 + 2t)$ 라 하면 이 점에서의
 접선의 기울기가 2이므로 $f'(t) = 2$ 에서
 $3t^2 + 6t + 2 = 2, t(t + 2) = 0$
 $\therefore t = -2$ 또는 $t = 0$
 따라서 접점의 좌표는 $(-2, 0)$ 또는 $(0, 0)$ 이므로 직
 선의 방정식은
 $y = 2(x + 2)$ 또는 $y = 2x$
 $\therefore y = 2x + 4$ 또는 $y = 2x$
 그런데 $b \neq 0$ 이므로 $a = 2, b = 4$
 $\therefore a + b = 6$

228 ㉡ 11

$f(x) = 2x^4 - 4x + k$ 라 하면 $f'(x) = 8x^3 - 4$
 접점의 좌표를 $(t, 2t^4 - 4t + k)$ 라 하면 이 점에서의
 접선의 기울기가 4이므로 $f'(t) = 4$ 에서
 $8t^3 - 4 = 4, t^3 = 1 \quad \therefore t = 1 (\because t \text{는 실수})$

따라서 접점의 좌표는 $(1, k - 2)$ 이고, 이 점이 직선
 $y = 4x + 5$ 위의 점이므로
 $k - 2 = 4 + 5 \quad \therefore k = 11$

229 $y = -2x - 1$ 또는 $y = 2x + 3$

$f(x) = x^2 + 2x + 3$ 이라 하면 $f'(x) = 2x + 2$
 접점의 좌표를 $(t, t^2 + 2t + 3)$ 이라 하면 이 점에서의
 접선의 기울기는
 $f'(t) = 2t + 2$
 점 $(t, t^2 + 2t + 3)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y - (t^2 + 2t + 3) = (2t + 2)(x - t)$
 $\therefore y = (2t + 2)x - t^2 + 3 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$
 직선 ㉠이 점 $(-1, 1)$ 을 지나므로
 $1 = -(2t + 2) - t^2 + 3$
 $t(t + 2) = 0 \quad \therefore t = -2$ 또는 $t = 0$
 이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
 $y = -2x - 1$ 또는 $y = 2x + 3$

230 $y = 3x - 4$

$f(x) = x^3 - 6$ 이라 하면 $f'(x) = 3x^2$
 접점의 좌표를 $(t, t^3 - 6)$ 이라 하면 이 점에서의 접선
 의 기울기는
 $f'(t) = 3t^2$
 점 $(t, t^3 - 6)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y - (t^3 - 6) = 3t^2(x - t)$
 $\therefore y = 3t^2x - 2t^3 - 6 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$
 직선 ㉠이 점 $(1, -1)$ 을 지나므로
 $-1 = 3t^2 - 2t^3 - 6$
 $2t^3 - 3t^2 + 5 = 0, (t + 1)(2t^2 - 5t + 5) = 0$
 $\therefore t = -1 (\because t \text{는 실수})$
 이를 ㉠에 대입하면 구하는 접선의 방정식은
 $y = 3x - 4$

231 ㉡ 1

$f(x) = -x^3 - 7$ 이라 하면 $f'(x) = -3x^2$
 접점의 좌표를 $(t, -t^3 - 7)$ 이라 하면 이 점에서의 접
 선의 기울기는
 $f'(t) = -3t^2$
 점 $(t, -t^3 - 7)$ 에서의 접선의 방정식은
 $y - (-t^3 - 7) = -3t^2(x - t)$
 $\therefore y = -3t^2x + 2t^3 - 7 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$
 직선 ㉠이 점 $(0, 9)$ 를 지나므로
 $9 = 2t^3 - 7, t^3 = 8 \quad \therefore t = 2 (\because t \text{는 실수})$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$$y = -12x + 9$$

이 접선이 점 $(k, -3)$ 을 지나므로

$$-3 = -12k + 9 \quad \therefore k = 1$$

232 ㉡ ④

$$f(x) = x^3 - x + 2 \text{라 하면 } f'(x) = 3x^2 - 1$$

접점의 좌표를 $(t, t^3 - t + 2)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = 3t^2 - 1$$

점 $(t, t^3 - t + 2)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - (t^3 - t + 2) = (3t^2 - 1)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 - 1)x - 2t^3 + 2 \quad \dots\dots ㉠$$

직선 ㉠이 점 $(0, 4)$ 를 지나므로

$$4 = -2t^3 + 2, t^3 = -1 \quad \therefore t = -1 (\because t \text{는 실수})$$

이를 ㉠에 대입하면 접선의 방정식은

$$y = 2x + 4$$

이 식에 $y = 0$ 을 대입하면

$$0 = 2x + 4 \quad \therefore x = -2$$

따라서 접선의 x 절편은 -2 이다.

233 ㉡ $a = -4, b = 2, c = 2$

$$f(x) = x^3 + ax + b, g(x) = cx^2 - 6 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + a, g'(x) = 2cx$$

두 곡선이 점 $(2, 2)$ 를 지나므로

$$f(2) = 2 \text{에서 } 8 + 2a + b = 2$$

$$\therefore 2a + b = -6 \quad \dots\dots ㉠$$

$$g(2) = 2 \text{에서 } 4c - 6 = 2 \quad \therefore c = 2$$

점 $(2, 2)$ 에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(2) = g'(2) \text{에서}$$

$$12 + a = 4c, 12 + a = 8 \quad \therefore a = -4$$

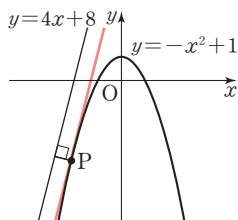
이를 ㉠에 대입하면

$$-8 + b = -6 \quad \therefore b = 2$$

234 ㉡ $\frac{3\sqrt{17}}{17}$

곡선 $y = -x^2 + 1$ 에 접하고 직선 $y = 4x + 8$ 에 평행한 접선의 접점을

$P(t, -t^2 + 1)$ 이라 하면 구하는 최솟값은 점 P와 직선 $y = 4x + 8$ 사이의 거리와 같다.



$$f(x) = -x^2 + 1 \text{이라 하면 } f'(x) = -2x$$

점 P에서의 접선의 기울기가 4이므로 $f'(t) = 4$ 에서

$$-2t = 4 \quad \therefore t = -2$$

따라서 $P(-2, -3)$ 이므로 점 P와 직선 $y = 4x + 8$,

즉 $4x - y + 8 = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|-8 + 3 + 8|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{3\sqrt{17}}{17}$$

235 ㉡ $y = 6x$

$$f(x) = x^3 + ax + 2, g(x) = bx^2 + 3 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + a, g'(x) = 2bx$$

$x = 1$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(1) = g(1)$ 에서

$$1 + a + 2 = b + 3 \quad \therefore a - b = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

$x = 1$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로

$$f'(1) = g'(1) \text{에서}$$

$$3 + a = 2b \quad \therefore a - 2b = -3 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = 3, b = 3$$

따라서 접점의 좌표는 $(1, 6)$ 이고 접선의 기울기는 6

이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y - 6 = 6(x - 1) \quad \therefore y = 6x$$

236 ㉡ 4

삼각형 PAB에서 밑변을

$\overline{AB}$ 라 하면 높이는 점 P

와 직선 AB 사이의 거리

와 같으므로 곡선에 접하

고 직선 $y = -x$ 에 평행

한 접선의 접점이 P일 때

삼각형 PAB의 넓이가 최소이다.

$$f(x) = x^2 - 5x + 8 \text{이라 하면 } f'(x) = 2x - 5$$

접점의 좌표를 $(t, t^2 - 5t + 8)$ 이라 하면 접선의 기울

기가 -1 이므로 $f'(t) = -1$ 에서

$$2t - 5 = -1 \quad \therefore t = 2$$

따라서 삼각형 PAB의 넓이가 최소일 때의 점 P의 좌

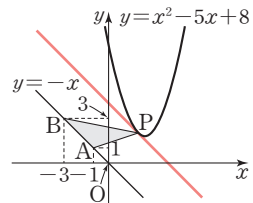
표는 $(2, 2)$ 이므로 이 점과 직선 $y = -x$, 즉 $x + y = 0$ 사이의 거리는

$$\frac{|2 + 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3 + 1)^2 + (3 - 1)^2} = 2\sqrt{2} \text{이므로 삼각형}$$

PAB의 넓이의 최솟값은

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = 4$$



237 ㉠ 0

함수 $f(x)=x^2+3$ 은 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능하며
 $f(-1)=f(1)=4$ 이므로 롤의 정리에 의하여
 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x)=2x$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서
 $2c=0 \quad \therefore c=0$

238 ㉠ 2

함수 $f(x)=2x^2-1$ 은 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 4)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(0, 4)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x)=4x$ 이므로 $\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=f'(c)$ 에서
 $\frac{31-(-1)}{4}=4c \quad \therefore c=2$

유제

239 ㉠ (1) 3 (2) 0

- (1) 함수 $f(x)=6x-x^2$ 은 닫힌구간 $[1, 5]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$ 에서 미분가능하며
 $f(1)=f(5)=5$ 이므로 롤의 정리에 의하여
 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(1, 5)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x)=6-2x$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서
 $6-2c=0 \quad \therefore c=3$
- (2) 함수 $f(x)=-2x^4+8x^2+1$ 은 닫힌구간 $[-1, 1]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 1)$ 에서 미분가능하며
 $f(-1)=f(1)=7$ 이므로 롤의 정리에 의하여
 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 1)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x)=-8x^3+16x$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서
 $-8c^3+16c=0$
 $c(c+\sqrt{2})(c-\sqrt{2})=0$
 $\therefore c=0 \quad (\because -1 < c < 1)$

240 ㉠ 3

함수 $f(x)=x^4-8x^2+1$ 은 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-3, 3)$ 에서 미분가능하며
 $f(-3)=f(3)=10$ 이므로 롤의 정리에 의하여
 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-3, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x)=4x^3-16x$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서
 $4c^3-16c=0, c(c+2)(c-2)=0$
 $\therefore c=-2$ 또는 $c=0$ 또는 $c=2$
 따라서 구하는 실수 c 의 개수는 3이다.

241 ㉠ $\frac{9}{2}$

함수 $f(x)=-x^2+ax$ 는 닫힌구간 $[0, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(0, 3)$ 에서 미분가능하다.
 $f(0)=f(3)$ 에서 $0=-9+3a \quad \therefore a=3$
 따라서 $f(x)=-x^2+3x$ 에 대하여 롤의 정리에 의하여
 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(0, 3)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x)=-2x+3$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서
 $-2c+3=0 \quad \therefore c=\frac{3}{2}$
 $\therefore ac=\frac{9}{2}$

242 ㉠ 3

함수 $f(x)=x^3-3x+2$ 는 닫힌구간 $[-1, a]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, a)$ 에서 미분가능하다.
 $f(-1)=f(a)$ 에서
 $-1+3+2=a^3-3a+2$
 $a^3-3a-2=0, (a+1)^2(a-2)=0$
 $\therefore a=2 \quad (\because a > -1)$
 따라서 롤의 정리에 의하여 $f'(c)=0$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.
 이때 $f'(x)=3x^2-3$ 이므로 $f'(c)=0$ 에서
 $3c^2-3=0, (c+1)(c-1)=0$
 $\therefore c=1 \quad (\because -1 < c < 2)$
 $\therefore a+c=3$

243 ㉠ (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\sqrt{7}$

- (1) 함수 $f(x)=x^2+4x$ 는 닫힌구간 $[-1, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-1, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(-1, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 2x + 4$ 이므로

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = f'(c) \text{에서}$$

$$\frac{12 - (-3)}{3} = 2c + 4 \quad \therefore c = \frac{1}{2}$$

- (2) 함수 $f(x) = x^3 - 2x + 2$ 는 닫힌구간 $[1, 4]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 4)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(1, 4)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 3x^2 - 2$ 이므로

$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = f'(c) \text{에서}$$

$$\frac{58 - 1}{3} = 3c^2 - 2$$

$$c^2 = 7 \quad \therefore c = \sqrt{7} \quad (\because 1 < c < 4)$$

244 ㉠ - $\frac{4}{3}$

- 함수 $f(x) = x^3 + x - 1$ 은 닫힌구간 $[-2, 2]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-2, 2)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여 $\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = f'(c)$ 인 c 가 열린구간 $(-2, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 3x^2 + 1$ 이므로

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = f'(c) \text{에서}$$

$$\frac{9 - (-11)}{4} = 3c^2 + 1$$

$$c^2 = \frac{4}{3} \quad \therefore c = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

따라서 모든 실수 c 의 값의 곱은

$$-\frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = -\frac{4}{3}$$

245 ㉠ 7

- 함수 $f(x) = -x^2 + 3x + 9$ 는 닫힌구간 $[1, a]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, a)$ 에서 미분가능하며 평균값 정리를 만족시키는 실수 c 의 값이 4이므로

$$\frac{f(a) - f(1)}{a - 1} = f'(4)$$

이때 $f'(x) = -2x + 3$ 이므로

$$\frac{(-a^2 + 3a + 9) - 11}{a - 1} = -5$$

$$-a^2 + 3a - 2 = -5a + 5$$

$$a^2 - 8a + 7 = 0, (a - 1)(a - 7) = 0$$

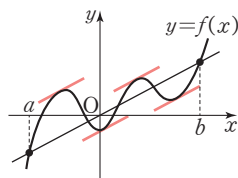
$$\therefore a = 7 \quad (\because a > 4)$$

246 ㉠ 4

닫힌구간 $[a, b]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는

실수 c 의 개수는 두 점 $(a, f(a)), (b, f(b))$ 를

지나는 직선과 기울기가 같은 접선의 개수와 같으므로 4이다.



연습문제

128~130쪽

247 ㉠ -5

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = 3$ 에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x) - 1\} = 0$ 이므로 $f(2) = 1$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

$$\therefore f'(2) = 3$$

점 $(2, f(2))$, 즉 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(2) = 3$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 1 = 3(x - 2)$$

$$\therefore y = 3x - 5$$

따라서 접선의 y 절편은 -5 이다.

248 ㉠ $3\sqrt{2}$

$f(x) = x^3 - 4x$ 라 하면 $f'(x) = 3x^2 - 4$

점 $A(-1, 3)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-1) = -1$

이므로 접선의 방정식은

$$y - 3 = -(x + 1)$$

$$\therefore y = -x + 2$$

곡선 $y = x^3 - 4x$ 와 직선 $y = -x + 2$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^3 - 4x = -x + 2$$

$$x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$(x + 1)^2(x - 2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 점 B의 좌표는 $(2, 0)$ 이다.

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{(2 + 1)^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}$$

249 ㉓ ③

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 3$ 이라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$

접점의 좌표를 $(t, t^3 - 3t^2 + 2t + 3)$ 이라 하면 이 점에서의 접선의 기울기가 2이므로 $f'(t) = 2$ 에서

$$3t^2 - 6t + 2 = 2, t(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = 2$$

따라서 접점의 좌표는 $(0, 3)$ 또는 $(2, 3)$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - 3 = 2x \text{ 또는 } y - 3 = 2(x - 2)$$

$$\therefore y = 2x + 3 \text{ 또는 } y = 2x - 1$$

따라서 양수 k 의 값은 3이다.

250 ㉓ -6

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3(x-1)^2 - 3$$

따라서 접선의 기울기는 $x=1$ 에서 최솟값 -3 을 갖는다.

이때 접점의 좌표가 $(1, 0)$ 이므로 이 점에서 접선의 기울기가 -3 인 접선의 방정식은

$$y = -3(x-1)$$

$$\therefore y = -3x + 3$$

따라서 $a = -3, b = 3$ 이므로

$$a - b = -6$$

251 ㉓ -35

$f(x) = 3x^2 - x$ 라 하면

$$f'(x) = 6x - 1$$

접점의 좌표를 $(t, 3t^2 - t)$ 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t) = 6t - 1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (3t^2 - t) = (6t - 1)(x - t)$$

$$\therefore y = (6t - 1)x - 3t^2 \quad \text{..... ①}$$

이 직선이 점 $(0, -3)$ 을 지나므로

$$-3 = -3t^2, t^2 = 1$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 1 \quad \text{..... ②}$$

따라서 구하는 두 접선의 기울기의 곱은

$$f'(-1)f'(1) = -7 \times 5 = -35 \quad \text{..... ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	접점의 x 좌표를 t 로 놓고 접선의 방정식 세우기	40%
②	t 의 값 구하기	30%
③	두 접선의 기울기의 곱 구하기	30%

252 ㉓ 7

$f(x) = x^3 + ax, g(x) = x^2 + x + b$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + a, g'(x) = 2x + 1$$

$x = -1$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로

$$f(-1) = g(-1) \text{에서}$$

$$-1 - a = 1 - 1 + b \quad \therefore a + b = -1 \quad \text{..... ①}$$

$x = -1$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으

므로 $f'(-1) = g'(-1)$ 에서

$$3 + a = -2 + 1 \quad \therefore a = -4$$

이를 ①에 대입하면

$$-4 + b = -1 \quad \therefore b = 3$$

$$\therefore b - a = 7$$

253 ㉓ 5

곡선 위의 점 P와 직

선 $x - y - 10 = 0$, 즉

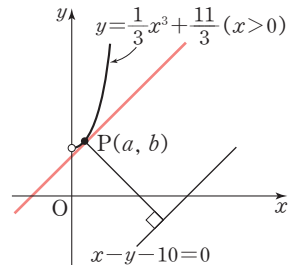
$y = x - 10$ 사이의 거

리가 최소이려면 점

P가 기울기가 1인 접

선의 접점이어야 한

다.



$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{11}{3} (x > 0)$ 이라 하면

$$f'(x) = x^2$$

점 (a, b) 에서의 접선의 기울기가 1이어야 하므로

$$f'(a) = 1 \text{에서}$$

$$a^2 = 1 \quad \therefore a = 1 (\because a > 0)$$

점 $(1, b)$ 는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점이므로

$$b = \frac{1}{3} + \frac{11}{3} = 4$$

$$\therefore a + b = 5$$

254 ㉓ ⑤

함수 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 1$ 은 닫힌구간 $[0, 4]$ 에서

연속이고 열린구간 $(0, 4)$ 에서 미분가능하며

$f(0) = f(4) = 1$ 이므로 롤의 정리에 의하여 $f'(c) = 0$

인 c 가 열린구간 $(0, 4)$ 에 적어도 하나 존재한다.

이때 $f'(x) = 3x^2 - 10x + 4$ 이므로 $f'(c) = 0$ 에서

$$3c^2 - 10c + 4 = 0 \quad \therefore c = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{3}$$

따라서 모든 실수 c 의 값의 합은

$$\frac{5 - \sqrt{13}}{3} + \frac{5 + \sqrt{13}}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\text{참고 } 0 = \frac{5-5}{3} < \frac{5-\sqrt{13}}{3} < \frac{5+\sqrt{13}}{3} < \frac{5+7}{3} = 4$$

255 ㉔ 2

함수 $f(x)=x^2-4x-6$ 은 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a, b) 에서 미분가능하며 평균값 정리를 만족시키는 실수 c 의 값이 1이므로

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(1)$$

이때 $f'(x)=2x-4$ 이므로

$$\frac{b^2-4b-6-(a^2-4a-6)}{b-a}=-2$$

$$\frac{b^2-4b-a^2+4a}{b-a}=-2$$

$$\frac{(b-a)(b+a-4)}{b-a}=-2$$

$$b+a-4=-2 \quad \therefore a+b=2$$

256 ㉔ 16

$f(x)=x^3-2x^2-5x+a$ 에서

$$f'(x)=3x^2-4x-5$$

점 $(2, f(2))$, 즉 $(2, a-10)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(2)=-1$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(a-10)=-(x-2)$$

$$\therefore y=-x+a-8 \quad \text{..... ①}$$

$$\therefore P(a-8, 0), Q(0, a-8) \quad \text{..... ②}$$

$\overline{PQ}=2\sqrt{2}$ 에서

$$\sqrt{(-a+8)^2+(a-8)^2}=2\sqrt{2}$$

$$2(a-8)^2=8, a-8=\pm 2$$

$$\therefore a=6 \text{ 또는 } a=10$$

따라서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$6+10=16 \quad \text{..... ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	점 $(2, f(2))$ 에서의 접선의 방정식 구하기	30 %
②	두 점 P, Q의 좌표 구하기	20 %
③	모든 실수 a 의 값의 합 구하기	50 %

257 ㉔ ③

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

점 $(-2, f(-2))$, 즉 $(-2, -8+4a-2b+c)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=12-4a+b$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-(-8+4a-2b+c)=(12-4a+b)(x+2)$$

이 직선이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$3-(-8+4a-2b+c)=3(12-4a+b)$$

$$\therefore 8a-b-c=25 \quad \text{..... ㉔}$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(2, 3)$ 을 지나므로 $f(2)=3$ 에서 $8+4a+2b+c=3$

$$\therefore 4a+2b+c=-5 \quad \text{..... ㉕}$$

㉔+㉕을 하면

$$12a+b=20 \quad \text{..... ㉖}$$

점 $(2, 3)$ 에서의 접선의 기울기는

$f'(2)=12+4a+b$ 이므로 접선의 방정식은

$$y-3=(12+4a+b)(x-2)$$

이 직선이 점 $(1, 3)$ 을 지나므로

$$0=-(12+4a+b)$$

$$\therefore 4a+b=-12 \quad \text{..... ㉗}$$

㉖, ㉗을 연립하여 풀면

$$a=4, b=-28$$

이를 ㉔에 대입하면

$$32+28-c=25 \quad \therefore c=35$$

따라서 $f(x)=x^3+4x^2-28x+35$ 이므로

$$f(0)=35$$

258 ㉔ 97

(나)에서 $x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} \{f(x)-g(x)\}=0$ 이므로

$$f(2)-g(2)=0 \quad \therefore f(2)=g(2)$$

$$(가)에서 g(2)=8f(2)-7$$

$$f(2)=8f(2)-7 \quad \therefore f(2)=1$$

$$\therefore g(2)=1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-g(x)}{x-2}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)+f(2)-g(x)}{x-2}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)-f(2)+g(2)-g(x)}{x-2}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x)-f(2)}{x-2} - \frac{g(x)-g(2)}{x-2} \right\}$$

$$=f'(2)-g'(2)$$

따라서 $f'(2)-g'(2)=2$ 이므로

$$f'(2)=g'(2)+2$$

$$g'(x)=3x^2f(x)+x^3f'(x) \text{이므로}$$

$$g'(2)=12f(2)+8f'(2)$$

$$=12 \times 1 + 8\{g'(2)+2\}$$

$$7g'(2)=-28$$

$$\therefore g'(2)=-4$$

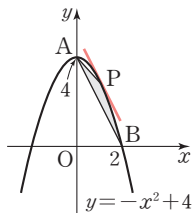
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$, 즉 $(2, 1)$ 에서의 접선의 기울기는 $g'(2)=-4$ 이므로 접선의 방정식은 $y-1=-4(x-2) \quad \therefore y=-4x+9$
따라서 $a=-4, b=9$ 이므로
 $a^2+b^2=97$

259 ㉡

$f(x)=-2x^2+8, g(x)=x^3+kx$ 라 하면
 $f'(x)=-4x, g'(x)=3x^2+k$
두 곡선이 $x=t$ 인 점에서 접한다고 하면
 $x=t$ 인 점에서 두 곡선이 만나므로 $f(t)=g(t)$ 에서
 $-2t^2+8=t^3+kt \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $x=t$ 인 점에서의 두 곡선의 접선의 기울기가 같으므로
 $f'(t)=g'(t)$ 에서
 $-4t=3t^2+k \quad \therefore k=-3t^2-4t \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{2}$ 을 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $-2t^2+8=t^3+(-3t^2-4t)t$
 $t^3+t^2+4=0, (t+2)(t^2-t+2)=0$
 $\therefore t=-2 (\because t \text{는 실수})$
이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면 $k=-4$

260 ㉡ 1

삼각형 PAB에서 밑변을 $\overline{AB}$ 라 하면 높이는 점 P와 직선 AB 사이의 거리와 같으므로 곡선에 접하고 직선 AB에 평행한 접선의 접점이 P일 때 삼각형 PAB의 넓이가 최대이다.



$f(x)=-x^2+4$ 라 하면
 $f'(x)=-2x$
직선 AB의 기울기가 $\frac{-4}{2}=-2$ 이므로 직선 AB의 방정식은
 $y-4=-2x \quad \therefore 2x+y-4=0$
접선의 접점의 좌표를 $(t, -t^2+4)$ 라 하면
 $f'(t)=-2$ 에서
 $-2t=-2 \quad \therefore t=1$
따라서 삼각형 PAB의 넓이가 최대일 때의 점 P의 좌표는 $(1, 3)$ 이므로 이 점과 직선 $2x+y-4=0$ 사이의 거리는

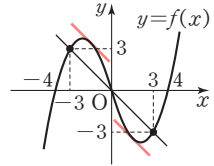
$$\frac{|2+3-4|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$\overline{AB}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$ 이므로 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = 1$$

261 ㉡ 2

함수 $f(x)$ 는 닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 연속이고 열린구간 $(-3, 3)$ 에서 미분가능하며 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



닫힌구간 $[-3, 3]$ 에서 평균값 정리를 만족시키는 실수 c 의 개수는 두 점 $(-3, 3), (3, -3)$ 을 지나는 직선과 기울기가 같은 접선의 개수와 같으므로 2이다.

262 ㉡ 1

접점 방법 | 접점의 x 좌표에 대한 방정식을 세운 후 이 방정식의 해가 오직 한 개임을 이용한다.

$f(x)=x^3-3x^2+2$ 라 하면 $f'(x)=3x^2-6x$
접점의 좌표를 (t, t^3-3t^2+2) 라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 $f'(t)=3t^2-6t$ 이므로 접선의 방정식은 $y-(t^3-3t^2+2)=(3t^2-6t)(x-t)$
 $\therefore y=(3t^2-6t)x-2t^3+3t^2+2$
이 직선이 점 $(a, 2)$ 를 지나므로
 $2=(3t^2-6t)a-2t^3+3t^2+2$
 $t\{2t^2-(3+3a)t+6a\}=0$
 $\therefore t=0$ 또는 $2t^2-(3+3a)t+6a=0$
접선이 오직 한 개 존재하려면 이차방정식 $2t^2-(3+3a)t+6a=0$ 이 $t=0$ 을 중근으로 갖거나 실근을 갖지 않아야 한다.

(i) $2t^2-(3+3a)t+6a=0$ 이 $t=0$ 을 중근으로 가지려면

$$3+3a=0, 6a=0$$

이를 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $2t^2-(3+3a)t+6a=0$ 이 실근을 갖지 않으려면

$$2t^2-(3+3a)t+6a=0 \text{의 판별식을 } D \text{라 할 때,}$$

$$D=(3+3a)^2-4 \times 2 \times 6a < 0$$

$$9a^2-30a+9 < 0, (3a-1)(a-3) < 0$$

$$\therefore \frac{1}{3} < a < 3$$

(i), (ii)에서 $\frac{1}{3} < a < 3$

따라서 $p=\frac{1}{3}, q=3$ 이므로 $pq=1$

263 ㉮ $\frac{19}{4}\pi$

| 접근 방법 | 원이 곡선과 접할 때, 원의 중심과 접점을 지나는 직선은 접선에 수직임을 이용한다.

$$f(x) = -x^2 + 5 \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = -2x$$

접점의 좌표를

$(t, -t^2 + 5)$ 라 하면 이 점

에서의 접선의 기울기는

$$f'(t) = -2t$$

두 점 $(0, 0)$, $(t, -t^2 + 5)$

를 지나는 직선은 접선에 수

직이므로

$$\frac{-t^2 + 5}{t} \times (-2t) = -1, t^2 = \frac{9}{2}$$

$$\therefore t = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \text{ 또는 } t = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

따라서 두 접점의 좌표는

$$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

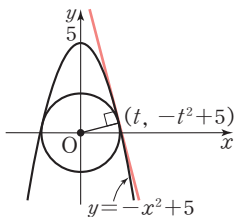
원의 반지름의 길이는 원점과 한 접점 사이의 거리와

같으므로

$$\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

따라서 구하는 원의 넓이는

$$\pi \times \left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2 = \frac{19}{4}\pi$$



264 ㉮ ③

| 접근 방법 | 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 닫힌구간 $[1, 5]$ 에서 연속이고 열린구간 $(1, 5)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리를 이용할 수 있다.

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[1, 5]$ 에서 연속이고 열린구간

$(1, 5)$ 에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = f'(c) \text{를 만족시키는 } c \text{가 열린구간}$$

$(1, 5)$ 에 적어도 하나 존재한다.

(나)에서 $f'(c) \geq 5$ 이므로

$$\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} \geq 5$$

$$\frac{f(5) - 3}{4} \geq 5 (\because 7\text{})$$

$$\therefore f(5) \geq 23$$

따라서 $f(5)$ 의 최솟값은 23이다.

01 함수의 증가와 감소, 극대와 극소

개념 확인

133쪽

265 ㉮ (1) 감소 (2) 증가

(1) $x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= -x_1^3 - (-x_2^3) = -(x_1^3 - x_2^3) \\ &= -(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) \end{aligned}$$

$$\text{이때 } x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = \left(x_1 + \frac{x_2}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x_2^2 > 0 \text{ 이}$$

므로

$$-(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) > 0$$

$$\therefore f(x_1) > f(x_2)$$

따라서 함수 $f(x) = -x^3$ 은 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소한다.

(2) $0 \leq x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \\ &= \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \\ &= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} < 0 \end{aligned}$$

$$\therefore f(x_1) < f(x_2)$$

따라서 함수 $f(x) = \sqrt{x}$ 는 구간 $[0, \infty)$ 에서 증가한다.

유제

135~137쪽

266 ㉮ (1) 구간 $(-\infty, -1], [3, \infty)$ 에서 증가,

구간 $[-1, 3]$ 에서 감소

(2) 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가

(3) 구간 $[-\sqrt{2}, 0], [\sqrt{2}, \infty)$ 에서 증가,

구간 $(-\infty, -\sqrt{2}], [0, \sqrt{2}]$ 에서 감소

(4) 구간 $(-\infty, 3]$ 에서 증가,

구간 $[3, \infty)$ 에서 감소

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	7	↘	-25	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -1], [3, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $[-1, 3]$ 에서 감소한다.

(2) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 3$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 12 = 3(x-2)^2$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	11	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가한다.

(3) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=\sqrt{2}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-\sqrt{2}, 0], [\sqrt{2}, \infty)$ 에서 증가하고, 구간 $(-\infty, -\sqrt{2}], [0, \sqrt{2}]$ 에서 감소한다.

(4) $f(x) = -x^4 + 4x^3$ 에서

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 = -4x^2(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	27	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, 3]$ 에서 증가하고, 구간 $[3, \infty)$ 에서 감소한다.

267 ㉓ 3

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 3(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{9}{2}$	$\searrow$	-9	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-1, 2]$ 에서 감소하므로 $a = -1, \beta = 2 \quad \therefore \beta - a = 3$

268 ㉓ -4

$$f(x) = x^3 - 12x - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	15	$\searrow$	-17	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 구간 $(-\infty, -2], [2, \infty)$ 에서 증가하므로

$$a = -2, b = 2 \quad \therefore ab = -4$$

269 ㉓ $-6 \leq a \leq 1$

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + ax^2 - (6-5a)x + 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = -x^2 + 2ax - (6-5a)$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 감소하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - (6-5a) \leq 0$$

$$(a+6)(a-1) \leq 0 \quad \therefore -6 \leq a \leq 1$$

270 ㉓ $a \geq 24$

$$f(x) = -2x^3 + ax - 7 \text{에서 } f'(x) = -6x^2 + a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[-1, 2]$ 에서 증가하려면 오른쪽 그림과 같이 $-1 \leq x \leq 2$ 에서

$$f'(x) \geq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$f'(-1) \geq 0, f'(2) \geq 0$$

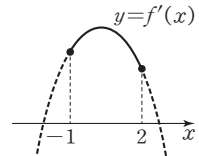
$$f'(-1) \geq 0 \text{에서}$$

$$-6 + a \geq 0 \quad \therefore a \geq 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉑}$$

$$f'(2) \geq 0 \text{에서}$$

$$-24 + a \geq 0 \quad \therefore a \geq 24 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉒}$$

$$\textcircled{㉑}, \textcircled{㉒} \text{에서 } a \geq 24$$



271 ㉔ ④

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 2ax \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 2a$$

함수 $f(x)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$ 에서 증가하려면 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 6a \leq 0$$

$$a(a-6) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq 6$$

따라서 $M=6$, $m=0$ 이므로

$$M-m=6$$

272 ㉔ 3

$$f(x) = -x^3 - 2ax^2 + 3ax - 4 \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 - 4ax + 3a$$

$x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여

$f(x_1) > f(x_2)$ 를 만족시키려면 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 감소해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \leq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 4a^2 + 9a \leq 0$$

$$a(4a+9) \leq 0 \quad \therefore -\frac{9}{4} \leq a \leq 0$$

따라서 정수 a 는 $-2, -1, 0$ 의 3개이다.

개념 확인

139쪽

273 ㉔ (1) $-2, 1$ (2) $-1, 3$

유제

141~143쪽

274 ㉔ (1) 극댓값: 17, 극솟값: -15

(2) 극댓값: 8, 극솟값: 4

(3) 극댓값: 30

(4) 극댓값: -2 , 극솟값: -3

(1) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 17$ 에서

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=4$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	17 극대	$\searrow$	-15 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 17, $x=4$ 에서 극솟값 -15 를 갖는다.

(2) $f(x) = -x^3 + 3x + 6$ 에서

$$f'(x) = -3x^2 + 3 = -3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	4 극소	$\nearrow$	8 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 8, $x=-1$ 에서 극솟값 4를 갖는다.

(3) $f(x) = -x^4 + 4x^3 + 3$ 에서

$$f'(x) = -4x^3 + 12x^2 = -4x^2(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\nearrow$	30 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극댓값 30을 갖는다.

(4) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 2$ 에서

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-3 극소	$\nearrow$	-2 극대	$\searrow$	-3 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 -2 , $x=-1$ 또는 $x=1$ 에서 극솟값 -3 을 갖는다.

275 ㉡ -17

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = -6x^2 - 6x + 12 = -6(x+2)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-2 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	-22 극소	$\nearrow$	5 극대	$\searrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극댓값 5, $x=-2$ 에서 극솟값 -22를 가지므로 극댓값과 극솟값의 합은 $5 + (-22) = -17$

276 ㉡ ⑤

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 12x + 4 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 4x - 12 = (x+2)(x-6)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-2 \text{ 또는 } x=6$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	6	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{52}{3}$ 극대	$\searrow$	-68 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값 $\frac{52}{3}$, $x=6$ 에서 극솟값 -68을 가지므로

$$a = -2, b = 6$$

$$\therefore b - a = 8$$

277 ㉡ 24

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 -8을 가지므로

$$f'(1)=0, f(1)=-8$$

$$f'(1)=0 \text{에서 } 3+2a+b=0$$

$$\therefore 2a+b=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(1)=-8 \text{에서 } 1+a+b-3=-8$$

$$\therefore a+b=-6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=3, b=-9$$

$$\therefore f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 3,$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	24 극대	$\searrow$	-8 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-3$ 에서 극댓값 24를 갖는다.

278 ㉡ -12

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수

$f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	4	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c \quad (a, b, c \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$$

$$f'(0)=0, f'(4)=0 \text{에서}$$

$$b=0, -48+8a+b=0$$

$$\therefore a=6, b=0$$

$$\therefore f(x) = -x^3 + 6x^2 + c$$

함수 $f(x)$ 가 $x=4$ 에서 극댓값 20을 가지므로

$$f(4)=20 \text{에서}$$

$$-64+96+c=20$$

$$\therefore c=-12$$

따라서 $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 12$ 이고 $f(x)$ 는 $x=0$ 에

서 극소이므로 극솟값은

$$f(0) = -12$$

279 ㉡ $a=3, b=-12, c=-9$

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-2, x=1$ 에서 극값을 가지므로

$$f'(-2)=0, f'(1)=0$$

$$24-4a+b=0, 6+2a+b=0$$

$$\therefore 4a-b=24, 2a+b=-6$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=3, b=-12$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + c$$

함수 $f(x)$ 가 $x=-2$ 에서 극댓값 11을 가지므로

$$f(-2)=11 \text{에서}$$

$$-16+12+24+c=11$$

$$\therefore c=-9$$

280 ㉡ 1

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	a	...	b	...	0	...	c	...	d	...	e
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$		\	극소	/		/	극대	\	극소	/	

따라서 함수 $f(x)$ 가 극대가 되는 x 의 값은 c 의 1개이고, 극소가 되는 x 의 값은 b, d 의 2개이므로
 $m=1, n=2$
 $\therefore n-m=1$

연습문제

144~146쪽

281 ㉡ 2

$f(x)=x^3-12x+5$ 에서
 $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-2$ 또는 $x=2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	21	\	-11	/

따라서 함수 $f(x)$ 가 감소하는 구간은 $[-2, 2]$ 이므로
 $a=2$

| 다른 풀이 |

$f(x)=x^3-12x+5$ 에서 $f'(x)=3x^2-12$
 이때 $f'(x) \leq 0$ 인 구간에서 함수 $f(x)$ 가 감소하므로
 $3x^2-12 \leq 0, (x+2)(x-2) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq x \leq 2$
 $\therefore a=2$

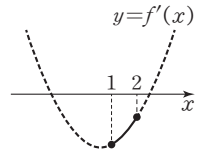
282 ㉡ 33

$f(x)=-x^3+ax^2+bx+5$ 에서
 $f'(x)=-3x^2+2ax+b$
 함수 $f(x)$ 가 증가하는 x 의 값의 범위가 $2 \leq x \leq 4$ 이므로 2, 4는 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근이다.
 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $2+4=\frac{2a}{3}, 2 \times 4=-\frac{b}{3}$
 $\therefore a=9, b=-24$
 $\therefore a-b=33$

283 ㉡ 5

$f(x)=x^3-2x^2-ax+3$ 에서
 $f'(x)=3x^2-4x-a$

함수 $f(x)$ 가 구간 $[1, 2]$ 에서 감소하려면 오른쪽 그림과 같이 $1 \leq x \leq 2$ 에서 $f'(x) \leq 0$ 이어야 하므로



$$f'(1) \leq 0, f'(2) \leq 0$$

$$f'(1) \leq 0 \text{에서}$$

$$3-4-a \leq 0 \quad \therefore a \geq -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$$f'(2) \leq 0 \text{에서}$$

$$12-8-a \leq 0 \quad \therefore a \geq 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서 $a \geq 4$

따라서 a 의 최솟값은 4이다.

284 ㉡ 1

$f(x)=-x^4+4x^3-4x^2+2$ 에서
 $f'(x)=-4x^3+12x^2-8x=-4x(x-1)(x-2)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=1$ 또는 $x=2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	/	2 극대	\	1 극소	/	2 극대	\

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 1을 가지므로 점 A의 좌표는 (1, 1)

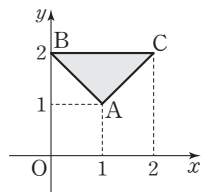
또 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 또는 $x=2$ 에서 극댓값 2를 가지므로 두 점 B, C의 좌표는

(0, 2), (2, 2)

따라서 오른쪽 그림에서 삼각

형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$



285 ㉡ 2

$f(x)=x^4+ax^2+b$ 에서 $f'(x)=4x^3+2ax$
 함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극소이므로 $f'(1)=0$ 에서
 $4+2a=0 \quad \therefore a=-2$
 $\therefore f(x)=x^4-2x^2+b$,
 $f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$
 $f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	$b-1$ 극소	/	b 극대	\	$b-1$ 극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 b 를 가지므로
 $b=4$

$$\therefore a+b=2$$

286 ㉡-4

$$f(x)=2x^3+6x^2+a \text{에서}$$

$$f'(x)=6x^2+12x=6x(x+2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-2 \text{ 또는 } x=0 \quad \text{..... ①}$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	$a+8$ 극대	\	a 극소	/

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값 $a+8$,

$x=0$ 에서 극솟값 a 를 갖는다. ②

이때 모든 극값의 곱이 -16 이므로

$$a(a+8)=-16, a^2+8a+16=0$$

$$(a+4)^2=0 \quad \therefore a=-4 \quad \text{..... ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	$f'(x)=0$ 인 x 의 값 구하기	20%
②	$f(x)$ 의 극댓값과 극솟값을 a 에 대한 식으로 나타내기	50%
③	a 의 값 구하기	30%

287 ㉡③

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-3	...	-2	...	1	...	4	...	6
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	+	
$f(x)$		/	극대	\	극소	/		/	

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 구간 $[-3, -2]$ 에서 증가한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 구간 $[4, 6]$ 에서 증가한다.

ㄷ. 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 극값을 갖지 않는다.

ㄹ. 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극대이고 $x=1$ 에서 극소이므로 극값은 2개이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

288 ㉡-3

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	극대	\	극소	/

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a, b, c, d \text{는 상수, } a \neq 0)$$

라 하면

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

$$f'(-3)=0, f'(0)=0 \text{에서}$$

$$27a-6b+c=0, c=0$$

$$\therefore 9a-2b=0 \quad \text{..... ㉠}$$

$f(x)=ax^3+bx^2+d$ 이고 함수 $f(x)$ 는 $x=-3$ 에서 극댓값 17, $x=0$ 에서 극솟값 -10 을 가지므로

$$f(-3)=17, f(0)=-10 \text{에서}$$

$$-27a+9b+d=17, d=-10$$

$$\therefore 3a-b=-3 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } a=2, b=9$$

따라서 $f(x)=2x^3+9x^2-10$ 이므로

$$f(-1)=-2+9-10=-3$$

289 ㉡④

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2-4ax \text{에서}$$

$$f'(x)=x^2+2ax-4a$$

함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 하므로 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하거나 감소해야 한다.

이때 함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수가 양수이므로 실수 전체의 집합에서 증가해야 한다.

즉, 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $f'(x)=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2+4a \leq 0$$

$$a(a+4) \leq 0 \quad \therefore -4 \leq a \leq 0$$

따라서 a 의 최솟값은 -4 이다.

290 ㉡30

$$g(x)=(2x^3-3)f(x) \text{에서}$$

$$g'(x)=6x^2f(x)+(2x^3-3)f'(x)$$

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 극솟값 6을 가지므로

$$g'(1)=0, g(1)=6 \quad \text{..... ①}$$

$$g'(1)=0 \text{에서 } 6f(1)-f'(1)=0 \quad \text{..... ㉠}$$

$g(1)=6$ 에서

$$-f(1)=6 \quad \therefore f(1)=-6$$

이를 ㉠에 대입하면

$$-36-f'(1)=0 \quad \therefore f'(1)=-36 \quad \text{..... ㉡}$$

$$\therefore f(1)-f'(1)=30 \quad \text{..... ㉢}$$

단계	채점 기준	비율
㉠	$g(1), g'(1)$ 의 값 구하기	40 %
㉡	$f(1), f'(1)$ 의 값 구하기	40 %
㉢	$f(1)-f'(1)$ 의 값 구하기	20 %

291 ㉡ -1

(가)에서 $f(0)=1$ 이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ (a, b 는 상수)이라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b$$

(나)에서 $-1, 1$ 은 이차방정식 $f'(x)=0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$-1+1=-\frac{2a}{3}, \quad -1 \times 1=\frac{b}{3}$$

$$\therefore a=0, b=-3$$

따라서 $f(x)=x^3-3x+1$ 이고 (나)에서 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$f(1)=1-3+1=-1$$

292 ㉡ ②

$$f(x)=x^3-3ax^2+3(a^2-1)x$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2-6ax+3(a^2-1) \\ &= 3\{x^2-2ax+(a-1)(a+1)\} \\ &= 3\{x-(a-1)\}\{x-(a+1)\} \end{aligned}$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=a-1$ 또는 $x=a+1$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	$a-1$	...	$a+1$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=a-1$ 에서 극댓값 4를 가지므로 $f(a-1)=4$ 에서

$$(a-1)^3-3a(a-1)^2+3(a^2-1)(a-1)=4$$

$$a^3-3a-2=0, (a+1)^2(a-2)=0$$

$$\therefore a=-1 \text{ 또는 } a=2$$

(i) $a=-1$ 일 때

$$f(x)=x^3+3x^2$$

이때 $f(-2)=-8+12=4>0$ 이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ii) $a=2$ 일 때

$$f(x)=x^3-6x^2+9x$$

$$\text{이때 } f(-2)=-8-24-18=-50<0 \text{이므로 주}$$

어진 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $f(x)=x^3+3x^2$

$$\therefore f(-1)=-1+3=2$$

293 ㉡ 32

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x)=3x^2+2ax+b, \quad f'(-x)=3x^2-2ax+b$$

(가)에서 $f'(x)=f'(-x)$ 이므로

$$3x^2+2ax+b=3x^2-2ax+b$$

$$\text{즉, } 2a=-2a \text{이므로 } 4a=0 \quad \therefore a=0$$

$$\therefore f'(x)=3x^2+b$$

(나)에서 $f'(2)=0$ 이므로

$$12+b=0 \quad \therefore b=-12$$

$$\therefore f(x)=x^3-12x+c,$$

$$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$$

$f'(x)=0$ 인 x 의 값은 $x=-2$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$c+16$ 극대	$\searrow$	$c-16$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값 $c+16$, $x=2$ 에서 극솟값 $c-16$ 을 가지므로 극댓값과 극솟값의 차는

$$c+16-(c-16)=32$$

294 ㉡ -20

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d 는 상수, $a \neq 0$)

라 하면

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c$$

(가)에서 $f(0)=-15, f'(0)=9$ 이므로

$$d=-15, c=9$$

$$\therefore f(x)=ax^3+bx^2+9x-15,$$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+9$$

(나)에서 $f'(3)=0, f(3)=12$

$$f'(3)=0 \text{에서 } 27a+6b+9=0$$

$$\therefore 9a+2b=-3 \quad \text{..... ㉠}$$

$$f(3)=12 \text{에서 } 27a+9b+27-15=12$$

$$\therefore 3a+b=0 \quad \text{..... ㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a = -1, b = 3$$

$$\therefore f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 15,$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x + 9 = -3(x+1)(x-3)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 3$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	\	-20 극소	/	12 극대	\

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극솟값 -20을 갖는다.

$$\text{295} \quad f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 8x + 2$$

$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 6x^2 + 2ax + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = 8 \text{에서 } x \rightarrow 0 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0 \text{이고}$$

극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 0} \{f(x) - 2\} = 0 \text{이므로 } f(0) = 2$$

$$\therefore c = 2$$

$$\text{따라서 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$$

이므로

$$f'(0) = 8 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또 함수 $f(x)$ 가 $x = 1$ 에서 극댓값을 가지므로

$$f'(1) = 0 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$b = 8, 6 + 2a + b = 0 \quad \therefore a = -7, b = 8$$

$$\therefore f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 8x + 2$$

$$\text{296} \quad \text{㉢} \quad \text{㉣}$$

$h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$ 인 x 의 값은 두 함수

$y = f'(x), y = g'(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같으므로

$$x = b \text{ 또는 } x = d \text{ 또는 } x = e$$

주어진 그래프에서 $h'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	b	...	d	...	e	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$h(x)$	/	극대	\	극소	/	극대	\

따라서 함수 $h(x)$ 는 $x = d$ 에서 극소이므로 구하는 x 의 값은 d 이다.

$$\text{297} \quad \text{㉤} \quad \text{㉥}$$

| 접근 방법 | (나)에서 도함수인 이차함수 $f'(x)$ 의 축의 방정식을 찾고 (다)에서 함수 $f(x)$ 의 증가, 감소를 파악한다.

(가)에서 $f(0) = 2$ 이므로

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2 \quad (a, b \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

(나)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq f'(-1)$ 이므로 이차함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식은 $x = -1$ 이다.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 3\left(x + \frac{a}{3}\right)^2 - \frac{a^2}{3} + b \text{이므로}$$

$$-\frac{a}{3} = -1 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore f(x) = x^3 + 3x^2 + bx + 2,$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + b$$

(다)에서 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이어야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - 3b \leq 0 \quad \therefore b \geq 3$$

따라서 $f(1) = b + 6 \geq 9$ 이므로 $f(1)$ 의 최솟값은 9이다.

$$\text{298} \quad \text{㉦} \quad \text{㉧}$$

| 접근 방법 | $a > 0, a = 0, a < 0$ 인 경우로 나누어 주어진 조건을 만족시키는지 확인한다.

(i) $a > 0$ 일 때

$$g(x) = a(3x - x^3) \quad (x < 0) \text{이라 하면}$$

$$g'(x) = a(3 - 3x^2) = -3a(x+1)(x-1)$$

$$g'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 \quad (\because x < 0)$$

$$h(x) = x^3 - ax \quad (x \geq 0) \text{라 하면}$$

$$h'(x) = 3x^2 - a = 3\left(x + \frac{\sqrt{3a}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3a}}{3}\right)$$

$$h'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \frac{\sqrt{3a}}{3} \quad (\because x \geq 0)$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	$\frac{\sqrt{3a}}{3}$	...
$f'(x)$	-	0	+		-	0	+
$f(x)$	\	극소	/	극대	\	극소	/

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$f(0) = 0$$

이는 극댓값이 5라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=0$ 일 때

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ x^3 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$h(x) = x^3 (x \geq 0) \text{이라 하면 } h'(x) = 3x^2 \geq 0$$

이는 극댓값이 5라는 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $a < 0$ 일 때

$$g(x) = a(3x - x^3) (x < 0) \text{이라 하면}$$

$$g'(x) = a(3 - 3x^2) = -3a(x+1)(x-1)$$

$$g'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -1 (\because x < 0)$$

$$h(x) = x^3 - ax (x \geq 0) \text{라 하면}$$

$$h'(x) = 3x^2 - a > 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-		+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$f(-1) = a(-3+1) = -2a$$

$$\text{따라서 } -2a = 5 \text{이므로 } a = -\frac{5}{2}$$

(i), (ii), (iii)에서 $a = -\frac{5}{2}$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} -\frac{5}{2}(3x - x^3) & (x < 0) \\ x^3 + \frac{5}{2}x & (x \geq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(2) = 8 + 5 = 13$$

II-3. 도함수의 활용 (2)

02 함수의 그래프

유제

151~165쪽

299 ㉠ 풀이 참조

(1) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ 에서

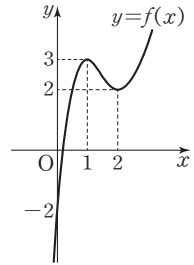
$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	3 극대	↘	2 극소	↗

또 $f(0) = -2$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 9x + 5$ 에서

$$f'(x) = -x^2 + 6x - 9 = -(x-3)^2$$

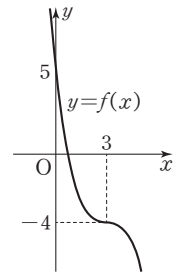
$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	3	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-4	$\searrow$

또 $f(0) = 5$ 이므로 함수

$y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



300 ㉠ 풀이 참조

(1) $f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 - 7$ 에서

$$f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 24x$$

$$= -12x(x+1)(x-2)$$

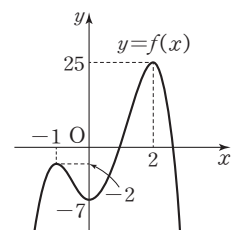
$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	↗	-2 극대	↘	-7 극소	↗	25 극대	↘

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



(2) $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 1$ 에서

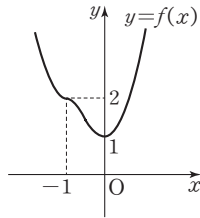
$$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 + 12x = 12x(x+1)^2$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 0$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\searrow$	1 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



301 $a < -3$ 또는 $a > 5$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - ax^2 + (2a+15)x \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - 2ax + 2a + 15$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - (2a+15) > 0$$

$$(a+3)(a-5) > 0$$

$$\therefore a < -3 \text{ 또는 } a > 5$$

302 $a \leq -1$ 또는 $a \geq 1$

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - 3a^2x \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 3a^2$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식

$f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - 9a^2 \leq 0$$

$$(a+1)(a-1) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -1 \text{ 또는 } a \geq 1$$

303 $a \neq 0$

$f(x)$ 는 삼차함수이므로 $a \neq 0$ ㉠

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 + ax - 7 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 6x + a$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 - 3a^2 > 0$$

$$(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3}) < 0$$

$$\therefore -\sqrt{3} < a < \sqrt{3} \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$-\sqrt{3} < a < 0 \text{ 또는 } 0 < a < \sqrt{3}$$

따라서 정수 a 는 $-1, 1$ 의 2개이다.

304 $a \leq 6$

$$f(x) = x^3 + ax^2 + ax + 6 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + a$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식

$f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 3a \leq 0$$

$$a(a-3) \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a \leq 3$$

따라서 자연수 a 의 값은 1, 2, 3이므로 구하는 합은

$$1+2+3=6$$

305 $-4 < a < -2$ 또는 $3 < a < 6$

$$f(x) = -4x^3 + ax^2 + 2a^2x - 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = -12x^2 + 2ax + 2a^2$$

함수 $f(x)$ 가 $-2 < x < -1$ 에서

극솟값을 갖고, $x > -1$ 에서 극

댓값을 가지려면 이차방정식

$f'(x) = 0$ 이 $-2 < x < -1$ 에서

한 실근을 갖고, $x > -1$ 에서 다른 한 실근을 가져야 한다.

$f'(-2) < 0$ 이어야 하므로

$$-48 - 4a + 2a^2 < 0$$

$$(a+4)(a-6) < 0$$

$$\therefore -4 < a < 6 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$f'(-1) > 0$ 이어야 하므로

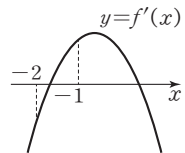
$$-12 - 2a + 2a^2 > 0$$

$$(a+2)(a-3) > 0$$

$$\therefore a < -2 \text{ 또는 } a > 3 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서

$$-4 < a < -2 \text{ 또는 } 3 < a < 6$$

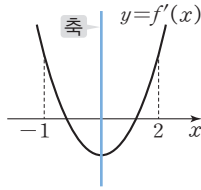


306 ㉠ $3 < a < \frac{15}{4}$

$$f(x) = x^3 - ax^2 + 3x - 4 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + 3$$

함수 $f(x)$ 가 $-1 < x < 2$ 에서
극댓값과 극솟값을 모두 가지
려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이
 $-1 < x < 2$ 에서 서로 다른 두
실근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 9 > 0, (a+3)(a-3) > 0$$

$$\therefore a < -3 \text{ 또는 } a > 3 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) $f'(-1) > 0$ 이어야 하므로

$$3 + 2a + 3 > 0 \quad \therefore a > -3 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$f'(2) > 0$ 이어야 하므로

$$12 - 4a + 3 > 0 \quad \therefore a < \frac{15}{4} \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

(iii) 이차함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이

$$x = \frac{a}{3} \text{이므로}$$

$$-1 < \frac{a}{3} < 2 \quad \therefore -3 < a < 6 \quad \cdots \textcircled{㉣}$$

$$\textcircled{㉠} \sim \textcircled{㉣} \text{에서 } 3 < a < \frac{15}{4}$$

307 ㉠ -2

$$f(x) = x^3 + kx^2 - k^2x + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2kx - k^2$$

함수 $f(x)$ 가 $-2 < x < 1$ 에서 극
댓값을 갖고, $1 < x < 3$ 에서 극솟
값을 가지려면 이차방정식

$$f'(x) = 0 \text{이 } -2 < x < 1 \text{에서 한}$$

실근을 갖고, $1 < x < 3$ 에서 다른 한 실근을 가져야 한다.

$$f'(-2) > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$12 - 4k - k^2 > 0, (k+6)(k-2) < 0$$

$$\therefore -6 < k < 2 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f'(1) < 0 \text{이어야 하므로}$$

$$3 + 2k - k^2 < 0, (k+1)(k-3) > 0$$

$$\therefore k < -1 \text{ 또는 } k > 3 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

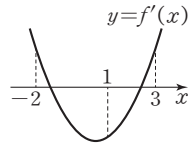
$$f'(3) > 0 \text{이어야 하므로}$$

$$27 + 6k - k^2 > 0, (k+3)(k-9) < 0$$

$$\therefore -3 < k < 9 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{에서 } -3 < k < -1$$

따라서 정수 k 의 값은 -2이다.

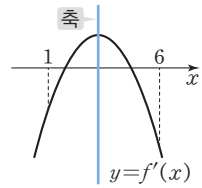


308 ㉠ 3

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + ax - 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = -x^2 + 6x + a$$

함수 $f(x)$ 가 $1 < x < 6$ 에서 극
댓값과 극솟값을 모두 가지려
면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이
 $1 < x < 6$ 에서 서로 다른 두 실
근을 가져야 한다.



(i) 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 9 + a > 0 \quad \therefore a > -9 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) $f'(1) < 0$ 이어야 하므로

$$-1 + 6 + a < 0 \quad \therefore a < -5 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$f'(6) < 0$ 이어야 하므로

$$-36 + 36 + a < 0 \quad \therefore a < 0 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

(iii) 이차함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 축의 방정식이

$x = 3$ 이고, 이때 $1 < 3 < 6$ 을 만족시킨다.

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}, \textcircled{㉢} \text{에서 } -9 < a < -5$$

따라서 정수 a 는 -8, -7, -6의 3개이다.

309 ㉠ $-\frac{1}{4} < a < 0$ 또는 $a > 0$

$$f(x) = -3x^4 - 4x^3 + 6ax^2 \text{에서}$$

$$f'(x) = -12x^3 - 12x^2 + 12ax = -12x(x^2 + x - a)$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차
방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므
로 $-12x(x^2 + x - a) = 0$ 에서 이차방정식
 $x^2 + x - a = 0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져
야 한다.

$x = 0$ 이 이차방정식 $x^2 + x - a = 0$ 의 근이 아니어야 하
므로

$$a \neq 0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

이차방정식 $x^2 + x - a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 1 + 4a > 0 \quad \therefore a > -\frac{1}{4} \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서}$$

$$-\frac{1}{4} < a < 0 \text{ 또는 } a > 0$$

310 ㉠ $a = 0$ 또는 $a \leq -\frac{3}{2}$

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 + 3ax^2 \text{에서}$$

$$f'(x) = -x^3 + 6x^2 + 6ax = -x(x^2 - 6x - 6a)$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 하나만 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $-x(x^2-6x-6a)=0$ 에서 이차방정식 $x^2-6x-6a=0$ 의 한 근이 0이거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2-6x-6a=0$ 의 한 근이 0이면 $a=0$

(ii) 이차방정식 $x^2-6x-6a=0$ 이 중근 또는 허근을 가지면 판별식을 D 라 할 때,

$$\frac{D}{4}=9+6a \leq 0 \quad \therefore a \leq -\frac{3}{2}$$

(i), (ii)에서

$$a=0 \text{ 또는 } a \leq -\frac{3}{2}$$

311 ㉮ 3

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-2x^3+ax^2-7 \text{에서}$$

$$f'(x)=2x^3-6x^2+2ax=2x(x^2-3x+a)$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값을 가지려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로 $2x(x^2-3x+a)=0$ 에서 이차방정식 $x^2-3x+a=0$ 이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. $x=0$ 이 이차방정식 $x^2-3x+a=0$ 의 근이 아니어야 하므로

$$a \neq 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

이차방정식 $x^2-3x+a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D=9-4a > 0 \quad \therefore a < \frac{9}{4} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 에서

$$a < 0 \text{ 또는 } 0 < a < \frac{9}{4}$$

따라서 자연수 a 의 값은 1, 2이므로 구하는 합은 $1+2=3$

312 ㉮ -1

$$f(x)=-3x^4+8x^3+6kx^2+3 \text{에서}$$

$$f'(x)=-12x^3+24x^2+12kx=-12x(x^2-2x-k)$$

함수 $f(x)$ 가 극솟값을 갖지 않으려면 삼차방정식 $f'(x)=0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 $-12x(x^2-2x-k)=0$ 에서 이차방정식 $x^2-2x-k=0$ 의 한 근이 0이거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2-2x-k=0$ 의 한 근이 0이면 $k=0$

(ii) 이차방정식 $x^2-2x-k=0$ 이 중근 또는 허근을 가지면 판별식을 D 라 할 때,

$$\frac{D}{4}=1+k \leq 0 \quad \therefore k \leq -1$$

(i), (ii)에서 $k=0$ 또는 $k \leq -1$

따라서 $a=0$, $\beta=-1$ 이므로

$$a+\beta=-1$$

313 ㉮ 최댓값: 7, 최솟값: -13

$$f(x)=-x^3+3x+5 \text{에서}$$

$$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

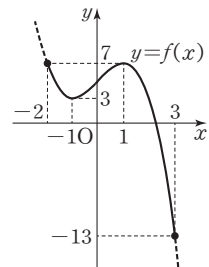
구간 $[-2, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	-1	...	1	...	3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	7	$\searrow$	3 극소	$\nearrow$	7 극대	$\searrow$	-13

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-2$

또는 $x=1$ 에서 최댓값 7,

$x=3$ 에서 최솟값 -13을 갖는다.



314 ㉮ 최댓값: 7, 최솟값: -2

$$f(x)=x^4-4x^3+4x^2-2 \text{에서}$$

$$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

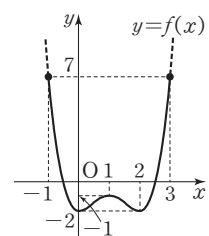
구간 $[-1, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	1	...	2	...	3
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$f(x)$	7	$\searrow$	-2 극소	$\nearrow$	-1 극대	$\searrow$	-2 극소	$\nearrow$	7

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$

또는 $x=3$ 에서 최댓값 7,

$x=0$ 또는 $x=2$ 에서 최솟값 -2를 갖는다.



315 ㉮ -1

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	-3	↗	2 극대	↘	1

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 2, $x=0$ 에서 최솟값 -3을 가지므로

$$M=2, m=-3 \quad \therefore M+m=-1$$

316 ㉮ $\frac{25}{4}$

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x-2)(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x=0 \text{ 또는 } x=2 \text{ 또는 } x=4$$

구간 $[-1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	2	...	4
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0
$f(x)$	$\frac{29}{4}$	↘	1 극소	↗	5 극대	↘	1

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 최댓값 $\frac{29}{4}$ 를 가지므로

$$a=-1, b=\frac{29}{4} \quad \therefore a+b=\frac{25}{4}$$

317 ㉮ $a=\frac{1}{3}, b=6$

$$f(x) = ax^4 - 4ax^3 + b \text{에서}$$

$$f'(x) = 4ax^3 - 12ax^2 = 4ax^2(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=3 \text{ } (\because 1 \leq x \leq 4)$$

$a > 0$ 이므로 구간 $[1, 4]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	1	...	3	...	4
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$-3a+b$	↘	$-27a+b$ 극소	↗	b

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=4$ 에서 최댓값 b , $x=3$ 에서 최솟값 $-27a+b$ 를 가지므로

$$b=6, -27a+b=-3 \quad \therefore a=\frac{1}{3}, b=6$$

318 ㉮ ④

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + a \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$

구간 $[0, 3]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3
$f'(x)$		+	0	-	0
$f(x)$	a	↗	$a+4$ 극대	↘	a

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $a+4$ 를 가지므로

$$a+4=12 \quad \therefore a=8$$

319 ㉮ -9

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + a \text{에서}$$

$$f'(x) = -6x^2 - 6x + 12 = -6(x+2)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \text{ } (\because 0 \leq x \leq 2)$$

구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	a	↗	$a+7$ 극대	↘	$a-4$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $a+7$ 을 가지므로

$$a+7=2 \quad \therefore a=-5$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최소이므로 최솟값은 $a-4=-5-4=-9$

320 ㉮ 5

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + a \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ } (\because -2 \leq x \leq 1)$$

구간 $[-2, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-2	...	0	...	1
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$a-20$	↗	a 극대	↘	$a-2$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최댓값 a , $x=-2$ 에서 최솟값 $a-20$ 을 가지므로
 $a+(a-20)=-10 \quad \therefore a=5$

321 ㉮ 24√3

점 A의 x 좌표를 a 라 하면

$A(a, -a^2+9)$ (단, $0 < a < 3$)

$\overline{AB}=2a$, $\overline{AD}=2(-a^2+9)$ 이므로 직사각형 ABCD의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a)=2a \times 2(-a^2+9)$$

$$=-4a^3+36a$$

$$\therefore S'(a)=-12a^2+36$$

$$=-12(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})$$

$$S'(a)=0 \text{인 } a \text{의 값은 } a=\sqrt{3} \quad (\because 0 < a < 3)$$

$0 < a < 3$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\sqrt{3}$	...	3
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		↗	$24\sqrt{3}$ 극대	↘	

따라서 직사각형 ABCD의 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 $24\sqrt{3}$ 이다.

322 ㉮ 4

오른쪽 그림과 같이 잘라 낸 사각형의 긴 변의 길이를 x 라 하면 상자의 밑면인 정삼각형의 한 변의 길이는

$$6-2x$$

이때 $x > 0$, $6-2x > 0$ 이므로

$$0 < x < 3$$

상자의 밑면의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(6-2x)^2 = \sqrt{3}(3-x)^2$$

상자의 높이는

$$x \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

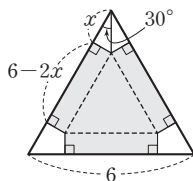
상자의 부피를 $V(x)$ 라 하면

$$V(x) = \sqrt{3}(3-x)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

$$=x^3-6x^2+9x$$

$$\therefore V'(x) = 3x^2-12x+9 = 3(x-1)(x-3)$$

$$V'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=1 \quad (\because 0 < x < 3)$$



$0 < x < 3$ 에서 함수 $V(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	3
$V'(x)$		+	0	-	
$V(x)$		↗	4 극대	↘	

따라서 상자의 부피 $V(x)$ 의 최댓값은 4이다.

323 ㉮ 1

점 P의 x 좌표를 a 라 하면

$$P(a, -4a^2+6a) \quad \left(\text{단, } 0 < a < \frac{3}{2} \right)$$

$\overline{OH}=a$, $\overline{PH}=-4a^2+6a$ 이므로 삼각형 OPH의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a) = \frac{1}{2}a(-4a^2+6a) = -2a^3+3a^2$$

$$\therefore S'(a) = -6a^2+6a = -6a(a-1)$$

$$S'(a)=0 \text{인 } a \text{의 값은 } a=1 \quad (\because 0 < a < \frac{3}{2})$$

$0 < a < \frac{3}{2}$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	1	...	$\frac{3}{2}$
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		↗	1 극대	↘	

따라서 삼각형 OPH의 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 1이다.

324 ㉮ 32π

원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면
 $r+h=6 \quad \therefore h=6-r$

이때 $r > 0$, $6-r > 0$ 이므로

$$0 < r < 6$$

원기둥의 부피를 $V(r)$ 라 하면

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2(6-r) = \pi(6r^2-r^3)$$

$$\therefore V'(r) = \pi(12r-3r^2) = 3\pi r(4-r)$$

$$V'(r)=0 \text{인 } r \text{의 값은 } r=4 \quad (\because 0 < r < 6)$$

$0 < r < 6$ 에서 함수 $V(r)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	...	4	...	6
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		↗	32π 극대	↘	

따라서 원기둥의 부피 $V(r)$ 의 최댓값은 32π 이다.

325 ㉓ ③

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$	\	극소	/		/

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형이 될 수 있는 것은 ③이다.

326 ㉓ -6 ≤ a < -3 또는 3 < a ≤ 6

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 4 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$$

함수 $f(x)$ 가 극값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 판별식을 D_1 이라 하면

$$\frac{D_1}{4} = a^2 - 9 > 0$$

$$(a+3)(a-3) > 0$$

$$\therefore a < -3 \text{ 또는 } a > 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1} \quad \text{>>>>> ①}$$

$$g(x) = x^3 + ax^2 + 12x - 9 \text{에서}$$

$$g'(x) = 3x^2 + 2ax + 12$$

함수 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않으려면 이차방정식

$$g'(x) = 0 \text{이 중근 또는 허근을 가져야 한다.}$$

이차방정식 $g'(x) = 0$ 의 판별식을 D_2 라 하면

$$\frac{D_2}{4} = a^2 - 36 \leq 0$$

$$(a+6)(a-6) \leq 0$$

$$\therefore -6 \leq a \leq 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \text{>>>>> ②}$$

①, ②에서

$$-6 \leq a < -3 \text{ 또는 } 3 < a \leq 6 \quad \text{>>>>> ③}$$

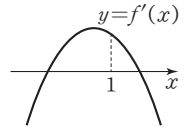
단계	채점 기준	비율
①	함수 $f(x)$ 가 극값을 갖는 a 의 값의 범위 구하기	40%
②	함수 $g(x)$ 가 극값을 갖지 않는 a 의 값의 범위 구하기	40%
③	a 의 값의 범위 구하기	20%

327 ㉓ 3

$$f(x) = -x^3 - 2ax^2 + (2a+10)x \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 - 4ax + 2a + 10$$

함수 $f(x)$ 가 $x < 1$ 에서 극솟값을 갖고, $x > 1$ 에서 극댓값을 가지려면 이차방정식 $f'(x) = 0$ 이 $x < 1$ 에서 한 실근을 갖고, $x > 1$ 에서 다른 한 실근을 가져야 한다.



$f'(1) > 0$ 이어야 하므로

$$-3 - 4a + 2a + 10 > 0 \quad \therefore a < \frac{7}{2}$$

따라서 자연수 a 는 1, 2, 3의 3개이다.

328 ㉓ ④

$$f(x) = -x^4 + 2x^3 - kx^2 \text{에서}$$

$$f'(x) = -4x^3 + 6x^2 - 2kx = -2x(2x^2 - 3x + k)$$

함수 $f(x)$ 가 극솟값을 가지려면 삼차방정식

$$f'(x) = 0 \text{이 서로 다른 세 실근을 가져야 하므로}$$

$$-2x(2x^2 - 3x + k) = 0 \text{에서 이차방정식}$$

$$2x^2 - 3x + k = 0 \text{이 0이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.}$$

$x = 0$ 이 이차방정식 $2x^2 - 3x + k = 0$ 의 근이 아니어야 하므로

$$k \neq 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이차방정식 $2x^2 - 3x + k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = 9 - 8k > 0 \quad \therefore k < \frac{9}{8} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } k < 0 \text{ 또는 } 0 < k < \frac{9}{8}$$

따라서 정수 k 의 최댓값은 1이다.

329 ㉓ ⑤

$$f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x+1)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 1$$

구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	$-\frac{1}{2}$	...	1	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	1	/	$\frac{15}{4}$ 극대	\	-3 극소	/	10

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 10을 가지므로 $a=2, b=10$

$$\therefore ab = 20$$

330 ㉡ 12

$$f(x) = x^3 + ax^2 - a^2x + 2 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax - a^2 = (x+a)(3x-a)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -a \text{ 또는 } x = \frac{a}{3}$$

$a > 0$ 이므로 구간 $[-a, a]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$-a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	a^3+2	$\searrow$	$-\frac{5}{27}a^3+2$ 극소	$\nearrow$	a^3+2

함수 $f(x)$ 는 $x = \frac{a}{3}$ 에서 최솟값 $-\frac{5}{27}a^3+2$ 를 가지므로

$$-\frac{5}{27}a^3+2 = \frac{14}{27}$$

$$a^3 = 8 \quad \therefore a = 2 (\because a \text{는 실수})$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x = -a$ 또는 $x = a$ 에서 최대이므로 최댓값은

$$M = a^3 + 2 = 8 + 2 = 10$$

$$\therefore a + M = 12$$

331 ㉡ 18 π

원뿔의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면 모선의 길이가 $3\sqrt{3}$ 이므로

$$r^2 = 27 - h^2$$

$$\text{이때 } h > 0, 27 - h^2 > 0 \text{이므로 } 0 < h < 3\sqrt{3}$$

원뿔의 부피를 $V(h)$ 라 하면

$$\begin{aligned} V(h) &= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(27 - h^2)h \\ &= \frac{1}{3}\pi(27h - h^3) \end{aligned}$$

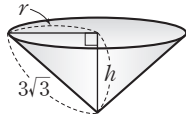
$$\therefore V'(h) = \frac{1}{3}\pi(27 - 3h^2) = -\pi(h+3)(h-3)$$

$$V'(h) = 0 \text{인 } h \text{의 값은 } h = 3 (\because 0 < h < 3\sqrt{3})$$

$0 < h < 3\sqrt{3}$ 에서 함수 $V(h)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

h	0	$\cdots$	3	$\cdots$	$3\sqrt{3}$
$V'(h)$		+	0	-	
$V(h)$		$\nearrow$	18π 극대	$\searrow$	

따라서 원뿔의 부피 $V(h)$ 의 최댓값은 18π 이다.



332 ㉡ 1

$$f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c \text{에서}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2ax + b$$

주어진 그래프에서 함수 $f(x)$ 가 $x=a$ 에서 극소이고, $x=\beta$ 에서 극대이므로

$$f'(a) = 0, f'(\beta) = 0$$

따라서 a, β 는 이차방정식 $f'(x) = 0$ 의 두 근이다.

이때 $0 < a < \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + \beta = \frac{2a}{3} > 0, a\beta = -\frac{b}{3} > 0$$

$$\therefore a > 0, b < 0$$

또 주어진 그래프에서 $f(0) > 0$ 이므로 $c > 0$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{|a|}{a} + \frac{|b|}{b} + \frac{|c|}{c} &= \frac{a}{a} + \frac{-b}{b} + \frac{c}{c} \\ &= 1 + (-1) + 1 = 1 \end{aligned}$$

333 ㉡ 7

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

$$f(1) < f(4) < 0 < f(-1) \text{이}$$

므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 구간 $[1, 4]$

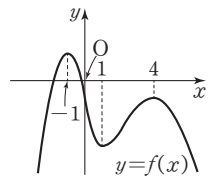
에서 증가하고 $f(4) < 0$

이므로 $f(3) < 0$

ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극값을 갖지 않는다.

ㄷ. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.



334 ㉡ ②

$$f(x) = x^4 + 2(a-1)x^2 - 4ax + 1 \text{에서}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 4(a-1)x - 4a$$

$$= 4(x-1)(x^2 + x + a)$$

함수 $f(x)$ 가 극댓값을 갖지 않으려면 삼차방정식

$f'(x) = 0$ 이 중근 또는 허근을 가져야 하므로

$4(x-1)(x^2 + x + a) = 0$ 에서 이차방정식

$x^2 + x + a = 0$ 의 한 근이 1이거나 중근 또는 허근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 $x^2+x+a=0$ 의 한 근이 1이면

$$1+1+a=0 \quad \therefore a=-2$$

(ii) 이차방정식 $x^2+x+a=0$ 이 중근 또는 허근을 가지면 판별식을 D 라 할 때,

$$D=1-4a \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{1}{4}$$

(i), (ii)에서

$$a=-2 \text{ 또는 } a \geq \frac{1}{4}$$

따라서 a 의 최솟값은 -2 이다.

335 ㉮ 20

$x+1=t$ 로 놓으면 $-2 \leq x \leq 3$ 에서 $-1 \leq t \leq 4$

$g(t)=t^3-3t^2-2$ 라 하면

$$g'(t)=3t^2-6t=3t(t-2)$$

$g'(t)=0$ 인 t 의 값은 $t=0$ 또는 $t=2$

$-1 \leq t \leq 4$ 에서 함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-1	...	0	...	2	...	4
$g'(t)$		+	0	-	0	+	
$g(t)$	-6	↗	-2 극대	↘	-6 극소	↗	14

따라서 함수 $g(t)$ 는 $t=4$ 에서 최댓값 14, $t=-1$ 또는 $t=2$ 에서 최솟값 -6 을 가지므로

$$M=14, m=-6$$

$$\therefore M-m=20$$

336 ㉮ -15

$g(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$ 이므로 $g(x)=t$ 로 놓으면

$$t \geq -2 \quad \text{..... ①}$$

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(t)$$

$$=t^3-12t+1 \quad \text{..... ②}$$

$$\therefore f'(t)=3t^2-12=3(t+2)(t-2)$$

$f'(t)=0$ 인 t 의 값은 $t=-2$ 또는 $t=2$

$t \geq -2$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	-2	...	2	...
$f'(t)$	0	-	0	+
$f(t)$	17	↘	-15 극소	↗

따라서 함수 $f(t)$ 는 $t=2$ 에서 최솟값 -15 를 가지므로 함수 $(f \circ g)(x)$ 의 최솟값은 -15 이다. ③

단계	채점 기준	비율
①	$g(x)=t$ 로 놓고 t 의 값의 범위 구하기	30 %
②	함수 $(f \circ g)(x)$ 를 t 에 대한 함수로 나타내기	20 %
③	함수 $(f \circ g)(x)$ 의 최솟값 구하기	50 %

337 ㉮ 77

$\overline{BP}=x$ ($0 \leq x \leq 1$), $\overline{DQ}=y$ ($0 \leq y \leq 2$)라 하면

$$\overline{PC}=2-x, \overline{QC}=2-y$$

$\overline{AP}=\overline{PQ}$ 에서 $\overline{AP}^2=\overline{PQ}^2$ 이므로

$$2^2+x^2=(2-x)^2+(2-y)^2$$

$$4x=(2-y)^2$$

$$\therefore x=\frac{(2-y)^2}{4}$$

따라서 삼각형 APQ의 넓이는

$$\square ABCD-(\triangle ABP+\triangle PCQ+\triangle AQD)$$

$$=4-\left\{\frac{1}{2} \times 2 \times x+\frac{1}{2}(2-x)(2-y)+\frac{1}{2} \times 2 \times y\right\}$$

$$=2-\frac{1}{2}xy$$

$$=2-\frac{1}{8}y(2-y)^2$$

$$=-\frac{1}{8}y^3+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}y+2$$

$$f(y)=-\frac{1}{8}y^3+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}y+2 \text{라 하면}$$

$$f'(y)=-\frac{3}{8}y^2+y-\frac{1}{2}$$

$$=-\frac{1}{8}(3y-2)(y-2)$$

$f'(y)=0$ 인 y 의 값은

$$y=\frac{2}{3} \text{ 또는 } y=2$$

$0 \leq y \leq 2$ 에서 함수 $f(y)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

y	0	...	$\frac{2}{3}$	...	2
$f'(y)$		-	0	+	0
$f(y)$	2	↘	$\frac{50}{27}$ 극소	↗	2

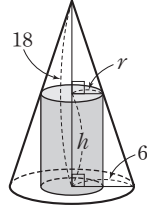
따라서 삼각형 APQ의 넓이 $f(y)$ 의 최솟값은 $\frac{50}{27}$ 이므로

$$m=27, n=50$$

$$\therefore m+n=77$$

338 ㉮ 96 π

오른쪽 그림과 같이 원뿔에 내접하는 원기둥의 밑면의 반지름의 길이를 r , 높이를 h 라 하면



$$6 : r = 18 : (18 - h)$$

$$3r = 18 - h$$

$$\therefore h = 18 - 3r$$

이때 $r > 0$, $18 - 3r > 0$ 이므로

$$0 < r < 6$$

원기둥의 부피를 $V(r)$ 라 하면

$$\begin{aligned} V(r) &= \pi r^2 h = \pi r^2 (18 - 3r) \\ &= 3\pi (6r^2 - r^3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore V'(r) &= 3\pi (12r - 3r^2) \\ &= 9\pi r (4 - r) \end{aligned}$$

$V'(r) = 0$ 인 r 의 값은 $r = 4$ ($\because 0 < r < 6$)

$0 < r < 6$ 에서 함수 $V(r)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

r	0	...	4	...	6
$V'(r)$		+	0	-	
$V(r)$		$\nearrow$	96 π 극대	$\searrow$	

따라서 원기둥의 부피 $V(r)$ 의 최댓값은 96 π 이다.

339 ㉮ ⑤

접근 방법 | 함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이고 미분가능함을 이용하여 삼차함수 $f(x)$ 의 식을 세운다.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수)라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

함수 $g(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면

$x=0$ 에서 미분가능하므로 $x=0$ 에서 연속이고 미분계수 $g'(0)$ 이 존재한다.

(i) $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = g(0) \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} = f(0) \quad \therefore c = \frac{1}{2}$$

(ii) 미분계수 $g'(0)$ 이 존재하므로

$$g'(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ f'(x) & (x > 0) \end{cases} \text{에서}$$

$$f'(0) = 0 \quad \therefore b = 0$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = x^3 + ax^2 + \frac{1}{2}$$

$$\neg. g(0) + g'(0) = f(0) + f'(0)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} + 0 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\neg. f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a) \text{이므로}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$x = 0 \text{ 또는 } x = -\frac{2}{3}a$$

그런데 $-\frac{2}{3}a \leq 0$ 이면 $x \geq 0$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

즉, $x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 일 때 최솟값 $\frac{1}{2}$ 을 가지므로 함수 $g(x)$ 의 최솟값은 $\frac{1}{2}$ 이다.

이는 $g(x)$ 의 최솟값이 $\frac{1}{2}$ 보다 작다는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $-\frac{2}{3}a > 0$ 이므로 $a < 0$

$$\therefore g(1) = f(1) = a + \frac{3}{2} < \frac{3}{2}$$

ㄷ. 함수 $g(x)$ 의 최솟값이 0이면 $x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0이다.

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	$-\frac{2}{3}a$	...
$f'(x)$	0	-	0	+
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$\frac{4}{27}a^3 + \frac{1}{2}$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x = -\frac{2}{3}a$ 에서 최솟값 $\frac{4}{27}a^3 + \frac{1}{2}$ 을 가지므로

$$\frac{4}{27}a^3 + \frac{1}{2} = 0$$

$$a^3 = -\frac{27}{8}$$

$$\therefore a = -\frac{3}{2} \quad (\because a \text{는 실수})$$

따라서 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ 이므로

$$g(2) = f(2)$$

$$= 8 - 6 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{2}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

| 접근 방법 | 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표를 (a, a^2) 이라 하고 구하는 넓이를 a 에 대한 식으로 나타낸다.

오른쪽 그림과 같이 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점의 좌표를 (a, a^2) 이라 하면 두 정사각형이 겹치는 부분은 가로, 세로의 길이가 각각

$$1 - (a - 1) = 2 - a,$$

$(a^2 + 1) - 1 = a^2$ 인 직사각형이다.

이때 정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점이 제1사분면에 있고 정사각형 ABCD와 겹치는 부분이 생기려면

$$0 < a < 2$$

겹치는 부분의 넓이를 $S(a)$ 라 하면

$$S(a) = (2 - a)a^2 = 2a^2 - a^3$$

$$\therefore S'(a) = 4a - 3a^2 = a(4 - 3a)$$

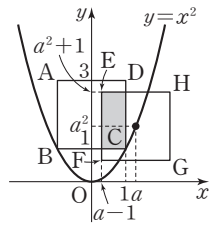
$S'(a) = 0$ 인 a 의 값은

$$a = \frac{4}{3} \quad (\because 0 < a < 2)$$

$0 < a < 2$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	$\frac{4}{3}$	...	2
$S'(a)$		+	0	-	
$S(a)$		$\nearrow$	$\frac{32}{27}$ 극대	$\searrow$	

따라서 겹치는 부분의 넓이 $S(a)$ 의 최댓값은 $\frac{32}{27}$ 이다.



01 방정식과 부등식에의 활용

유제

173~177쪽

341 (1) 1 (2) 2

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ 라 하면

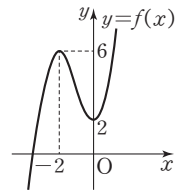
$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	6 극대	$\searrow$	2 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 한 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.



(2) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ 이라 하면

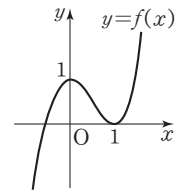
$$f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x - 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	1 극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



| 다른 풀이 |

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x + 2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

이때 함수 $f(x)$ 의 극값은 $f(-2)$, $f(0)$ 이고

$$f(-2)f(0) = 6 \times 2 = 12 > 0$$

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

(2) $f(x)=2x^3-3x^2+1$ 이라 하면

$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

이때 함수 $f(x)$ 의 극값은 $f(0)$, $f(1)$ 이고

$$f(0)f(1)=1 \times 0=0$$

따라서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

342 ㉡ (1) 2 (2) 3

(1) $f(x)=x^4-2x^2-3$ 이라 하면

$$f'(x)=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

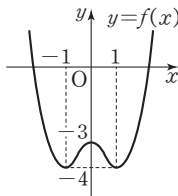
$$x=-1 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$	-3 극대	$\searrow$	-4 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



(2) $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-1$ 이라 하면

$$f'(x)=4x^3-12x^2+8x=4x(x-1)(x-2)$$

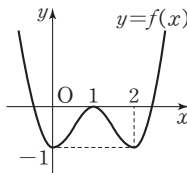
$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$	0 극대	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



343 ㉡ 5

$$f(x)=x^3+3x^2-9x-10 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$$

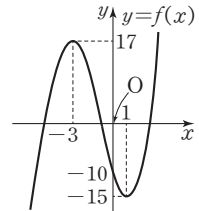
$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	17 극대	$\searrow$	-15 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



$$\therefore a=3$$

$$g(x)=x^3+6x^2+9x+4 \text{라 하면}$$

$$g'(x)=3x^2+12x+9=3(x+3)(x+1)$$

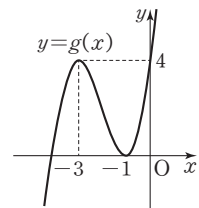
$$g'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-3 \text{ 또는 } x=-1$$

함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	-1	...
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\nearrow$	4 극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 오

른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 방정식 $g(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.



$$\therefore b=2$$

$$\therefore a+b=5$$

344 ㉡ 3

$$x^3-2x-1=x-2 \text{에서 } x^3-3x+1=0$$

$$f(x)=x^3-3x+1 \text{이라 하면}$$

$$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

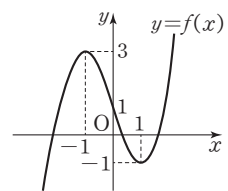
$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	3 극대	$\searrow$	-1 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.



345 ㉠ (1) $0 < k < 8$ (2) $k=0$ 또는 $k=8$

(3) $k < 0$ 또는 $k > 8$

$$2x^3 + 6x^2 - k = 0 \text{에서}$$

$$2x^3 + 6x^2 = k$$

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수

$y = 2x^3 + 6x^2$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 개수와 같다.

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 \text{이라 하면}$$

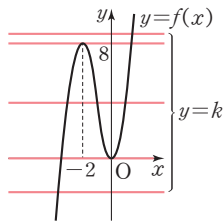
$$f'(x) = 6x^2 + 12x = 6x(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	8 극대	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와



(1) 직선 $y = k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$0 < k < 8$$

(2) 직선 $y = k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$k = 0 \text{ 또는 } k = 8$$

(3) 직선 $y = k$ 가 한 점에서 만나야 하므로

$$k < 0 \text{ 또는 } k > 8$$

▶ 다른 풀이

$$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 6x^2 + 12x = 6x(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 극값은 $f(-2) = -k + 8$, $f(0) = -k$

(1) $f(-2)f(0) < 0$ 이어야 하므로

$$(-k+8)(-k) < 0$$

$$k(k-8) < 0$$

$$\therefore 0 < k < 8$$

(2) $f(-2)f(0) = 0$ 이어야 하므로

$$(-k+8)(-k) = 0$$

$$k(k-8) = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ 또는 } k = 8$$

(3) $f(-2)f(0) > 0$ 이어야 하므로

$$(-k+8)(-k) > 0$$

$$k(k-8) > 0$$

$$\therefore k < 0 \text{ 또는 } k > 8$$

346 ㉠ (1) $8 < k < 13$

(2) $k=8$ 또는 $k=13$

(3) $-19 < k < 8$ 또는 $k > 13$

(4) $k = -19$

방정식 $3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x = k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 개수와 같다.

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24$$

$$= 12(x+1)(x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

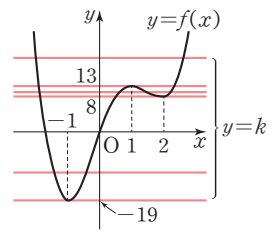
$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	-19 극소	$\nearrow$	13 극대	$\searrow$	8 극소	$\nearrow$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와



(1) 직선 $y = k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로

$$8 < k < 13$$

(2) 직선 $y = k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$k = 8 \text{ 또는 } k = 13$$

(3) 직선 $y = k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$-19 < k < 8 \text{ 또는 } k > 13$$

(4) 직선 $y = k$ 가 한 점에서 만나야 하므로

$$k = -19$$

347 ㉠ 4

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + k = 0 \text{에서}$$

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = -k$$

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수

$y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ 의 그래프와 직선 $y = -k$ 의 교점의 개수와 같다.

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$$

$$= 12x(x+1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

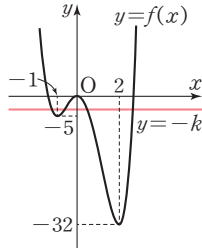
x	...	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		-5 극소		0 극대		-32 극소	

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와 직선 $y=-k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로

$$-5 < -k < 0$$

$$\therefore 0 < k < 5$$

따라서 자연수 k 는 1, 2, 3, 4의 4개이다.



348 ㉡ (1) $k < -4$ 또는 $k > 4$

$$(2) k = -4 \text{ 또는 } k = 4$$

곡선 $y=2x^3-5x$ 와 직선 $y=x+k$ 의 교점의 개수는 방정식 $2x^3-5x=x+k$, 즉 $2x^3-6x=k$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같고, 이는 곡선 $y=2x^3-6x$ 와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와 같다.

$$f(x)=2x^3-6x \text{ 라 하면}$$

$$f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$$

$$f'(x)=0 \text{ 인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		4 극대		-4 극소	

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와

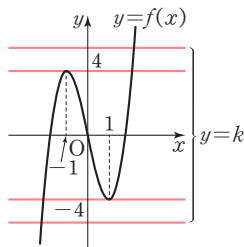
(1) 직선 $y=k$ 가 한 점에
서 만나야 하므로

$$k < -4 \text{ 또는 } k > 4$$

(2) 직선 $y=k$ 가 서로 다

른 두 점에서 만나야 하므로

$$k = -4 \text{ 또는 } k = 4$$



349 ㉡ (1) $-6 < k < 1$ (2) $1 < k < 21$

$$2x^3-3x^2-12x-1+k=0 \text{ 에서}$$

$$2x^3-3x^2-12x-1=-k$$

이 방정식의 실근은 함수 $y=2x^3-3x^2-12x-1$ 의 그래프와 직선 $y=-k$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x-1 \text{ 이라 하면}$$

$$f'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{ 인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$		6 극대		-21 극소	

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와

(1) 직선 $y=-k$ 의 교점의

x 좌표가 한 개는 양수,

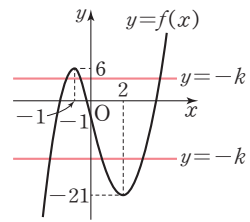
두 개는 음수이어야 하

므로

$$-1 < -k < 6 \quad \therefore -6 < k < 1$$

(2) 직선 $y=-k$ 의 교점의 x 좌표가 두 개는 양수, 한 개는 음수이어야 하므로

$$-21 < -k < -1 \quad \therefore 1 < k < 21$$



350 ㉡ $-16 < k < 0$

$$x^4-8x^2-k=0 \text{ 에서}$$

$$x^4-8x^2=k$$

이 방정식의 실근은 함수 $y=x^4-8x^2$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

$$f(x)=x^4-8x^2 \text{ 이라 하면}$$

$$f'(x)=4x^3-16x=4x(x+2)(x-2)$$

$$f'(x)=0 \text{ 인 } x \text{의 값은}$$

$$x=-2 \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

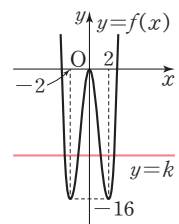
x	...	-2	...	0	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$		-16 극소		0 극대		-16 극소	

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표가 두 개

는 양수, 두 개는 음수이어야 하

므로

$$-16 < k < 0$$



351 ㉡ 4

$$x^3 - 4x^2 = 5x^2 - 24x + k \text{에서}$$

$$x^3 - 9x^2 + 24x = k$$

이 방정식의 실근은 함수 $y = x^3 - 9x^2 + 24x$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 = 3(x-2)(x-4)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=2 \text{ 또는 } x=4$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

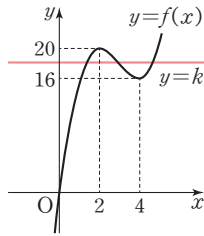
x	...	2	...	4	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	20 극대	$\searrow$	16 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 x 좌표가 양수 세 개이어야 하므로

$$16 < k < 20$$

따라서 $\alpha=16, \beta=20$ 이므로

$$\beta - \alpha = 4$$



352 ㉡ ①

$$f(x) = g(x) \text{에서}$$

$$3x^3 - x^2 - 3x = x^3 - 4x^2 + 9x + a$$

$$\therefore 2x^3 + 3x^2 - 12x = a$$

이 방정식의 실근은 함수 $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

$$h(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x \text{라 하면}$$

$$h'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x+2)(x-1)$$

$$h'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

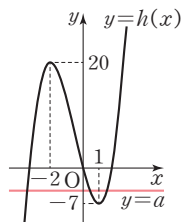
함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	$\nearrow$	20 극대	$\searrow$	-7 극소	$\nearrow$

함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와 직선 $y=a$ 의 교점의 x 좌표가 두 개는 양수, 한 개는 음수이어야 하므로

$$-7 < a < 0$$

따라서 정수 a 는 $-6, -5, \dots, -1$ 의 6개이다.



개념 확인

179쪽

353 ㉡ 풀이 참조

$$f(x) = x^4 - 4x + 3 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x-1)(x^2+x+1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = 1 (\because x \text{는 실수})$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

이때 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 0이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$

따라서 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^4 - 4x + 3 \geq 0$ 이 성립한다.

354 ㉡ 풀이 참조

$$f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 5 = (3x+5)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = 1 (\because x \geq 0)$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	3	$\searrow$	0 극소	$\nearrow$

이때 $x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 0이므로 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) \geq 0$

따라서 $x \geq 0$ 일 때, 부등식 $x^3 + x^2 - 5x + 3 \geq 0$ 이 성립한다.

유제

181~183쪽

355 ㉡ $k \geq 9$

$$f(x) = x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 4x + 12$$

$$= 4(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$k-9$ 극소	$\nearrow$	$k+7$ 극대	$\searrow$	$k-9$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $k-9$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$k-9 \geq 0$$

$$\therefore k \geq 9$$

356 ㉡ $k < -6$

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) > g(x)$ 가 성립하려면 $f(x) - g(x) > 0$ 이어야 한다.

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= x^4 + 2x^2 - 10x - (-x^2 - 20x + k) \\ &= x^4 + 3x^2 + 10x - k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore h'(x) &= 4x^3 + 6x + 10 \\ &= 2(x+1)(2x^2 - 2x + 5) \end{aligned}$$

$$h'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = -1 \quad (\because x \text{는 실수})$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...
$h'(x)$	-	0	+
$h(x)$	$\searrow$	$-k-6$ 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $-k-6$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $h(x) > 0$, 즉 $f(x) > g(x)$ 가 성립하려면

$$-k-6 > 0$$

$$\therefore k < -6$$

357 ㉡ ⑤

모든 실수 x 에 대하여 부등식 $f(x) \leq g(x)$ 가 성립하려면 $f(x) - g(x) \leq 0$ 이어야 한다.

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= -x^4 - x^3 + 2x^2 - \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + a\right) \\ &= -x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore h'(x) &= -4x^3 - 4x^2 + 8x \\ &= -4x(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

$$h'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	0	...	1	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+	0	-
$h(x)$	$\nearrow$	$-a + \frac{32}{3}$ 극대	$\searrow$	$-a$ 극소	$\nearrow$	$-a + \frac{5}{3}$ 극대	$\searrow$

따라서 함수 $h(x)$ 의 최댓값은 $-a + \frac{32}{3}$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $h(x) \leq 0$, 즉 $f(x) \leq g(x)$ 가 성립하려면

$$-a + \frac{32}{3} \leq 0 \quad \therefore a \geq \frac{32}{3}$$

따라서 a 의 최솟값은 $\frac{32}{3}$ 이다.

358 ㉡ $k > 11$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 함수 $y = g(x)$ 의 그래프보다 항상 위쪽에 있으려면 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) > g(x)$, 즉 $f(x) - g(x) > 0$ 이어야 한다.

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{라 하면}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= x^4 - 2x^3 + 4x + k - (2x^3 - 12x) \\ &= x^4 - 4x^3 + 16x + k \end{aligned}$$

$$\therefore h'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 16 = 4(x+1)(x-2)^2$$

$$h'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$h'(x)$	-	0	+	0	+
$h(x)$	$\searrow$	$k-11$ 극소	$\nearrow$	$k+16$	$\nearrow$

따라서 함수 $h(x)$ 의 최솟값은 $k-11$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $h(x) > 0$ 이 성립하려면

$$k-11 > 0 \quad \therefore k > 11$$

359 ㉡ $k < -17$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10 - k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x+1)(x-3)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 3 \quad (\because x > 0)$$

$x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	3	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$		$\searrow$	$-k-17$ 극소	$\nearrow$

따라서 $x > 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $-k-17$ 이므로 $x > 0$ 일 때, $f(x) > 0$ 이 성립하려면
 $-k-17 > 0$
 $\therefore k < -17$

360 ㉡ $k \leq -8$

$f(x) = 2x^3 + 6x^2 + k$ 라 하면
 $f'(x) = 6x^2 + 12x = 6x(x+2)$
 $-2 < x < 0$ 일 때, $f'(x) < 0$ 이므로 $-2 < x < 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는 감소한다.
 따라서 $-2 < x < 0$ 일 때, $f(x) < 0$ 이 성립하려면
 $f(-2) \leq 0$ 이어야 하므로
 $-16 + 24 + k \leq 0$
 $\therefore k \leq -8$

361 ㉡ 7

구간 $[0, 2]$ 에서 부등식 $f(x) \leq g(x)$ 가 성립하려면 $f(x) - g(x) \leq 0$ 이어야 한다.
 $h(x) = f(x) - g(x)$ 라 하면
 $h(x) = -4x^2 + 3x - (2x^3 - x^2 - 9x + k)$
 $= -2x^3 - 3x^2 + 12x - k$
 $\therefore h'(x) = -6x^2 - 6x + 12 = -6(x+2)(x-1)$
 $h'(x) = 0$ 인 x 의 값은
 $x = 1$ ($\because 0 \leq x \leq 2$)
 구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$h'(x)$		+	0	-	
$h(x)$	$-k$	↗	$-k+7$ 극대	↘	$-k-4$

따라서 구간 $[0, 2]$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최댓값은 $-k+7$ 이므로 $h(x) \leq 0$, 즉 $f(x) \leq g(x)$ 가 성립하려면
 $-k+7 \leq 0 \quad \therefore k \geq 7$
 따라서 k 의 최솟값은 7이다.

362 ㉡ $k \leq 0$

$x^3 - x^2 - 2x + 2 > -x^2 + x + k$ 에서
 $x^3 - 3x + 2 - k > 0$
 $f(x) = x^3 - 3x + 2 - k$ 라 하면
 $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$
 $x > 1$ 일 때, $f'(x) > 0$ 이므로 $x > 1$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

따라서 $x > 1$ 일 때, $f(x) > 0$ 이 성립하려면 $f(1) \geq 0$ 이어야 하므로
 $1 - 3 + 2 - k \geq 0 \quad \therefore k \leq 0$

연습문제

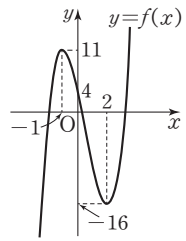
184~185쪽

363 ㉡ 3

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ 라 하면
 $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2)$
 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = -1$ 또는 $x = 2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	11 극대	↘	-16 극소	↗

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같이 x 축과 서로 다른 세 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

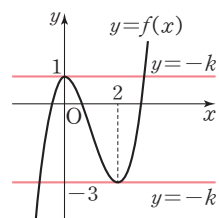


364 ㉡ ③

두 곡선 $y = 2x^2 - 1$, $y = x^3 - x^2 + k$ 의 교점의 개수는 방정식 $2x^2 - 1 = x^3 - x^2 + k$, 즉 $x^3 - 3x^2 + 1 = -k$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같고, 이는 곡선 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ 과 직선 $y = -k$ 의 교점의 개수와 같다.
 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 이라 하면
 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$
 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x = 0$ 또는 $x = 2$
 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	1 극대	↘	-3 극소	↗

함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와 직선 $y = -k$ 가 서로 다른 두 점에서 만나야 하므로
 $-k = 1$ 또는 $-k = -3$
 $\therefore k = 3$ ($\because k > 0$)



365 122

$$3x^4 + 8x^3 - 18x^2 - k = 0 \text{에서}$$

$$3x^4 + 8x^3 - 18x^2 = k$$

이 방정식의 실근은 함수 $y = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 x 좌표와 같다.

$$f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 36x$$

$$= 12x(x+3)(x-1)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = -3 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-3	...	0	...	1	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	-135 극소	\	0 극대	\	-7 극소	\

따라서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

▶▶▶▶▶ ①

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 x 좌표가 두 개는 양수, 두 개는 음수이려면

$$-7 < k < 0$$

이때 정수 k 는 $-6, -5, -4, \dots, -1$ 의 6개이므로

$$a = 6$$

▶▶▶▶▶ ②

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 x 좌표가 모두 음수이려면

$$-135 \leq k < -7$$

이때 정수 k 는 $-135, -134, -133, \dots, -8$ 의 128개이므로

$$b = 128$$

▶▶▶▶▶ ③

$$\therefore b - a = 122$$

▶▶▶▶▶ ④

단계	채점 기준	비율
①	$y = 3x^4 + 8x^3 - 18x^2$ 의 그래프 그리기	30%
②	a 의 값 구하기	30%
③	b 의 값 구하기	30%
④	$b - a$ 의 값 구하기	10%

366 0

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + k \text{라 하면}$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x-1)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x = 0 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	1	...	2	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	\	k 극소	\	$k+1$ 극대	\	k 극소	\

따라서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 k 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$k \geq 0$$

따라서 k 의 최솟값은 0이다.

367 ④

$x > 0$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 함수 $y = g(x)$ 의 그래프보다 항상 아래쪽에 있으려면 $x > 0$ 에서

$$f(x) < g(x), \text{ 즉 } f(x) - g(x) < 0 \text{이어야 한다.}$$

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{라 하면}$$

$$h(x) = x^3 + x^2 + 20x + 1 - (2x^3 + 4x^2 - 25x + k)$$

$$= -x^3 - 3x^2 + 45x - k + 1$$

$$\therefore h'(x) = -3x^2 - 6x + 45 = -3(x+5)(x-3)$$

$$h'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = 3 \text{ (} \because x > 0 \text{)}$$

$x > 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	3	...
$h'(x)$		+	0	-
$h(x)$		\	$-k+82$ 극대	\

따라서 $x > 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 최댓값은 $-k+82$ 이므로 $x > 0$ 일 때, $h(x) < 0$ 이 성립하려면

$$-k+82 < 0 \quad \therefore k > 82$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 83이다.

368 ③

$$h(x) = f(x) - g(x) \text{에서}$$

$$h'(x) = f'(x) - g'(x)$$

주어진 그래프에서 $h'(x) = 0$, 즉 $f'(x) = g'(x)$ 인 x 의 값은 0, 2이므로 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

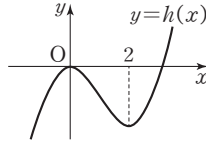
x	...	0	...	2	...
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	\	극대	\	극소	\

ㄱ. $0 < x < 2$ 에서 $h'(x) < 0$ 이므로 $h(x)$ 는 감소한다.

ㄴ. $h(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값을 갖는다.

ㄷ. $f(0)=g(0)$ 에서 $h(0)=f(0)-g(0)=0$

따라서 함수 $h(x)$ 는
 $x=0$ 에서 극댓값 0을 가
 지므로 함수 $y=h(x)$ 의
 그래프의 개형은 오른쪽
 그림과 같다.



함수 $y=h(x)$ 의 그래프는 x 축과 서로 다른 두
 점에서 만나므로 방정식 $h(x)=0$ 은 서로 다른
 두 실근을 갖는다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

369 ㉡ ⑤

$$4x^3 + 12x^2 - a = 0 \text{에서}$$

$$4x^3 + 12x^2 = a$$

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 이 방정식의 서로 다른 실근의 개수
 는 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y=4x^3+12x^2$ 의 그래프와
 직선 $y=a$ 의 교점의 개수와 같다.

$$f(x) = 4x^3 + 12x^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 12x^2 + 24x = 12x(x+2)$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-2 \text{ 또는 } x=0$$

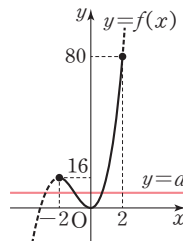
$-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나
 타내면 다음과 같다.

x	-2	...	0	...	2
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	16	\	0 극소	/	80

$-2 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y=f(x)$
 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고,
 이 그래프와 직선 $y=a$ 가 서로
 다른 두 점에서 만나야 하므로

$$0 < a \leq 16$$

따라서 자연수 a 는 1, 2, 3, ...,
 16의 16개이다.



370 ㉡ 19

방정식 $|f(x)|=k$ 의 서로 다른 실근의 개수는 함수
 $y=|f(x)|$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점의 개수와
 같다.

$$f(x) = x^3 - 12x + 10 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

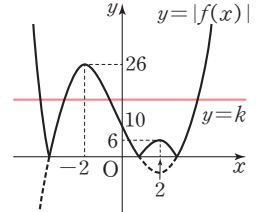
$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은}$$

$$x=-2 \text{ 또는 } x=2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	/	26 극대	\	-6 극소	/

함수 $y=|f(x)|$ 의 그래
 프는 오른쪽 그림과 같고,
 이 그래프와 직선 $y=k$ 가
 서로 다른 네 점에서 만나
 야 하므로



$$6 < k < 26$$

따라서 자연수 k 는 7, 8, 9, ..., 25의 19개이다.

371 ㉡ $0 < a < 8$

$$f(x) = x^3 - 6x^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

접점의 좌표를 $(t, t^3 - 6t^2)$ 이라 하면 이 점에서의 접
 선의 기울기는 $f'(t) = 3t^2 - 12t$ 이므로 접선의 방정
 식은

$$y - (t^3 - 6t^2) = (3t^2 - 12t)(x - t)$$

$$\therefore y = (3t^2 - 12t)x - 2t^3 + 6t^2$$

이 직선이 점 $(0, a)$ 를 지나므로

$$a = -2t^3 + 6t^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 점 $(0, a)$ 에서 곡선 $y=x^3-6x^2$ 에 그을 수 있는
 서로 다른 접선이 3개이려면 t 에 대한 방정식 $\textcircled{1}$ 은 서
 로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$g(t) = -2t^3 + 6t^2 \text{이라 하면}$$

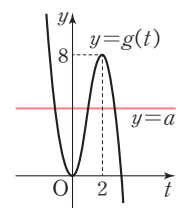
$$g'(t) = -6t^2 + 12t = -6t(t-2)$$

$$g'(t)=0 \text{인 } t \text{의 값은 } t=0 \text{ 또는 } t=2$$

함수 $g(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	...	0	...	2	...
$g'(t)$	-	0	+	0	-
$g(t)$	\	0 극소	/	8 극대	\

함수 $y=g(t)$ 의 그래프는 오른쪽
 그림과 같고, 이 그래프와 직선
 $y=a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나
 야 하므로



$$0 < a < 8$$

372 ㉓ ③

$f(x) = x^4 + 2(a-3)x^2 - 8(a+1)x + a^2 + 15$ 라 하면

$$f'(x) = 4x^3 + 4(a-3)x - 8(a+1)$$

$$= 4(x-2)(x^2 + 2x + a+1)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$x = 2 \quad (\because x \text{는 실수})$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	2	$\dots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$a^2 - 8a - 9$ 극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $a^2 - 8a - 9$ 이므로 모든 실수 x

에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$a^2 - 8a - 9 \geq 0, (a+1)(a-9) \geq 0$$

$$\therefore a \geq 9 \quad (\because a > 0)$$

따라서 양수 a 의 최솟값은 9이다.

|참고| 이차방정식 $x^2 + 2x + a + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때,

$$\frac{D}{4} = 1 - (a+1) = -a < 0 \text{이므로 실근을 갖지 않는다.}$$

373 ㉓ 21

|접근 방법| 함수 $y = f(x) + |f(x) + x| - 6x$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나야 함을 이용한다.

$$f(x) + |f(x) + x| = 6x + k \text{에서}$$

$$f(x) + |f(x) + x| - 6x = k$$

이 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 함수

$y = f(x) + |f(x) + x| - 6x$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의

교점의 개수와 같다.

$$\begin{aligned} f(x) + x &= \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 11x \\ &= \frac{1}{2}x(x^2 - 9x + 22) \end{aligned}$$

$$\text{이때 } x^2 - 9x + 22 = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0 \text{이므로}$$

$x \geq 0$ 일 때 $f(x) + x \geq 0$, $x < 0$ 일 때 $f(x) + x < 0$ 이다.

따라서 $g(x) = f(x) + |f(x) + x| - 6x$ 라 하면

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} 2f(x) - 5x & (x \geq 0) \\ -7x & (x < 0) \end{cases} \\ &= \begin{cases} x^3 - 9x^2 + 15x & (x \geq 0) \\ -7x & (x < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

$h(x) = x^3 - 9x^2 + 15x$ ($x \geq 0$)라 하면

$$h'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 3(x-1)(x-5)$$

$h'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$x = 1 \text{ 또는 } x = 5$$

$x \geq 0$ 에서 함수 $h(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\dots$	1	$\dots$	5	$\dots$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	0	$\nearrow$	7 극대	$\searrow$	-25 극소	$\nearrow$

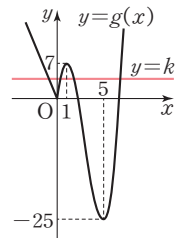
함수 $y = g(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나야 하므로

$$0 < k < 7$$

따라서 정수 k 의 값은 1, 2, 3, 4,

5, 6이므로 그 합은

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$



374 ㉓ $k \geq -1$

|접근 방법| $k > 0$, $k = 0$, $k < 0$ 인 경우로 나누어 주어진 부등식이 성립하는지 확인한다.

$f(x) = 2x^3 + 9kx^2 + 27$ 이라 하면

$$f'(x) = 6x^2 + 18kx = 6x(x + 3k)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$x = 0 \text{ 또는 } x = -3k$$

(i) $k > 0$ 일 때

$x \geq k$ 에서 $f'(x) > 0$ 이므로 $x \geq k$ 에서 함수 $f(x)$

는 증가한다.

따라서 $x \geq k$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$f(k) \geq 0$ 이어야 하므로

$$2k^3 + 9k^3 + 27 \geq 0 \quad \therefore 11k^3 + 27 \geq 0$$

이 부등식은 $k > 0$ 인 모든 실수 k 에 대하여 항상 성립한다.

(ii) $k = 0$ 일 때

$x \geq 0$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이므로 $x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$

는 증가한다.

이때 $f(0) = 27$ 이므로 $x \geq 0$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이 성립한다.

(iii) $k < 0$ 일 때

$x \geq k$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	k	$\dots$	0	$\dots$	$-3k$	$\dots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$11k^3 + 27$	$\nearrow$	27 극대	$\searrow$	$27k^3 + 27$ 극소	$\nearrow$

따라서 $x \geq k$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최솟값은 $27k^3 + 27$ 이므로 $x \geq k$ 일 때, $f(x) \geq 0$ 이 성립하려면

$$\begin{aligned} 27k^3 + 27 &\geq 0, \quad k^3 + 1 \geq 0 \\ (k+1)(k^2 - k + 1) &\geq 0 \\ k+1 &\geq 0 \quad (\because k^2 - k + 1 > 0) \\ \therefore k &\geq -1 \end{aligned}$$

그런데 $k < 0$ 이므로 $-1 \leq k < 0$

(i), (ii), (iii)에서 $k \geq -1$

II-4. 도함수의 활용 (3)

02 속도와 가속도

개념 확인

187쪽

375 ㉡ (1) 21 (2) 18 (3) 1 (4) 2

(1) $v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의 속도는 $v = 27 - 6 = 21$

(2) $a = \frac{dv}{dt} = 6t$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의 가속도는 $a = 18$

(3) 점 P의 속도가 -3 이면

$$\begin{aligned} 3t^2 - 6 &= -3, \quad t^2 = 1 \\ \therefore t &= 1 \quad (\because t > 0) \end{aligned}$$

(4) 점 P의 가속도가 12이면

$$6t = 12 \quad \therefore t = 2$$

유제

189~195쪽

376 ㉡ 2

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 10t + 3$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 12t - 10$$

점 P가 원점을 지나는 순간의 위치는 0이므로 $x=0$ 에서

$$2t^3 - 5t^2 + 3t = 0$$

$$t(t-1)(2t-3) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = \frac{3}{2} \quad (\because t > 0)$$

따라서 점 P가 출발 후 처음으로 다시 원점을 지나는 시각은 $t=1$ 이므로 구하는 가속도는

$$a = 12 - 10 = 2$$

377 ㉡ 3

시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = 3t^2 - 6t + 1$$

$$v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = -t + 3$$

두 점 P, Q의 속도가 같으면 $v_P = v_Q$ 에서

$$3t^2 - 6t + 1 = -t + 3$$

$$3t^2 - 5t - 2 = 0, \quad (3t+1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 2 \quad (\because t > 0)$$

$t=2$ 에서의 두 점 P, Q의 위치는 각각

$$x_P = 8 - 12 + 2 + 2 = 0$$

$$x_Q = -2 + 6 - 1 = 3$$

따라서 구하는 거리는

$$3 - 0 = 3$$

378 ㉡ 18

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t - 14$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 6$$

점 P의 속도가 10이면 $3t^2 - 6t - 14 = 10$ 에서

$$3t^2 - 6t - 24 = 0$$

$$(t+2)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = 4 \quad (\because t > 0)$$

따라서 $t=4$ 에서의 점 P의 가속도는

$$a = 24 - 6 = 18$$

379 ㉡ 6

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 6t + a$$

$t=3$ 에서의 점 P의 속도가 15이므로

$$27 - 18 + a = 15 \quad \therefore a = 6$$

380 ㉡ 6

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = t^2 - 9$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 2t$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$t^2 - 9 = 0, t^2 = 9 \quad \therefore t = 3 (\because t > 0)$$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의 가속도는

$$a = 6$$

381 ㉡ 1 < t < 5

시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = 2t - 10$$

$$v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = 6t - 6$$

두 점이 서로 반대 방향으로 움직이면 속도의 부호는 서로 반대이므로 $v_P v_Q < 0$ 에서

$$(2t - 10)(6t - 6) < 0, (t - 1)(t - 5) < 0$$

$$\therefore 1 < t < 5$$

382 ㉡ -13

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -3t^2 + 18t - 24$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$-3t^2 + 18t - 24 = 0, (t - 2)(t - 4) = 0$$

$$\therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 4$$

따라서 점 P가 출발 후 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=4$ 이므로 구하는 위치는

$$x = -64 + 144 - 96 + 3 = -13$$

383 ㉡ ④

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$3t^2 - 12 = 0, t^2 = 4 \quad \therefore t = 2 (\because t > 0)$$

이때 점 P의 운동 방향이 원점에서 바뀌므로 $t=2$ 에서의 위치가 0이다.

따라서 $8 - 24 + k = 0$ 이므로 $k = 16$

384 ㉡ (1) 5 m (2) -10 m/s

물 로켓의 t 초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 10 - 10t$$

(1) 물 로켓이 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$10 - 10t = 0 \quad \therefore t = 1$$

따라서 $t=1$ 에서의 물 로켓의 높이는

$$x = 10 - 5 = 5(\text{m})$$

(2) 물 로켓이 지면에 떨어지는 순간의 높이는 0이므로 $x=0$ 에서

$$10t - 5t^2 = 0, t(t - 2) = 0$$

$$\therefore t = 2 (\because t > 0)$$

따라서 $t=2$ 에서의 물 로켓의 속도는

$$v = 10 - 20 = -10(\text{m/s})$$

385 ㉡ ㄴ, ㄷ

점 P의 시각 t 에서의 속도는 $x'(t)$ 이므로 위치 $x(t)$ 의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

ㄱ. $a < t < b$ 에서 $x'(t) > 0$ 이므로 점 P는 양의 방향으로 움직인다.

ㄴ. $b < t < d$ 에서 $x'(c) = 0$ 이므로 $t=c$ 에서 점 P의 속도가 0이다.

ㄷ. $x'(d) = 0$ 이고 $t=d$ 의 좌우에서 $x'(t)$ 의 부호가 바뀌므로 $t=d$ 에서 점 P는 운동 방향을 바꾼다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

386 ㉡ 15

물체의 t 초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = a + 2bt$$

물체가 최고 높이에 도달할 때, 즉 $t=2$ 에서의 속도는 0이므로

$$a + 4b = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$t=2$ 에서의 물체의 높이가 50 m이므로

$$30 + 2a + 4b = 50$$

$$\therefore a + 2b = 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 20, b = -5$

$$\therefore a + b = 15$$

387 ㉡ ㄷ

ㄱ. 점 P의 시각 t 에서의 가속도는 $v'(t)$ 이므로 속도 $v(t)$ 의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

$0 < t < a$ 에서 $v'(t)$ 는 변하므로 점 P의 가속도는 일정하지 않다.

ㄴ. $v(t)=0$ 이고 그 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 $0 < t < c$ 에서 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시각은 $t=b$ 이다.

따라서 $0 < t < c$ 에서 점 P는 운동 방향을 한 번 바꾼다.

ㄷ. $v(a) > 0$, $v(c) < 0$ 이므로 $t=a$ 에서와 $t=c$ 에서의 점 P의 운동 방향은 서로 반대이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

388 ㉡ (1) 0.75 m/s (2) 0.25 m/s

사람이 t 초 동안 움직인 거리는 $0.5t$ m

t 초 후 가로등의 바로 밑

에서 그림자 끝까지의 거

리를 x m라 하면 오른쪽

그림에서

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$ 이므로

$$4.5 : 1.5 = x : (x - 0.5t)$$

$$x = 3(x - 0.5t) \quad \therefore x = 0.75t$$

(1) 그림자의 끝이 움직이는 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 0.75 \text{ (m/s)}$$

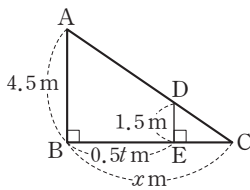
(2) t 초 후의 그림자의 길이를 l m라 하면

$$l = \overline{EC} = x - 0.5t$$

$$= 0.75t - 0.5t = 0.25t$$

따라서 그림자의 길이의 변화율은

$$\frac{dl}{dt} = 0.25 \text{ (m/s)}$$



389 ㉡ (1) $52\pi \text{ cm}^2/\text{s}$ (2) $160\pi \text{ cm}^3/\text{s}$

t 초 후의 원기둥의 밑면의 반지름의 길이는

$$(6+t) \text{ cm}$$

밑면의 반지름의 길이가 8 cm이면

$$6+t=8 \quad \therefore t=2$$

(1) t 초 후의 원기둥의 겉넓이를 $S \text{ cm}^2$ 라 하면

$$S = 2\pi(6+t)^2 + 2\pi(6+t) \times 10$$

$$= 2\pi(6+t)(16+t)$$

시각 t 에서의 원기둥의 겉넓이의 변화율은

$$\frac{dS}{dt} = 2\pi\{(16+t) + (6+t)\}$$

$$= 2\pi(2t+22)$$

따라서 $t=2$ 에서의 원기둥의 겉넓이의 변화율은

$$2\pi(4+22) = 52\pi \text{ (cm}^2/\text{s)}$$

(2) t 초 후의 원기둥의 부피를 $V \text{ cm}^3$ 라 하면

$$V = \pi(6+t)^2 \times 10 = 10\pi(6+t)^2$$

시각 t 에서의 원기둥의 부피의 변화율은

$$\frac{dV}{dt} = 20\pi(6+t)$$

따라서 $t=2$ 에서의 원기둥의 부피의 변화율은

$$20\pi(6+2) = 160\pi \text{ (cm}^3/\text{s)}$$

390 ㉡ $2\sqrt{2} \text{ cm/s}$

t 초 후의 정사각형의 한 변의 길이는 $(9+2t) \text{ cm}$ 이

므로 정사각형의 한 대각선의 길이를 $l \text{ cm}$ 라 하면

$$l = \sqrt{2}(9+2t) = 2\sqrt{2}t + 9\sqrt{2}$$

따라서 정사각형의 한 대각선의 길이의 변화율은

$$\frac{dl}{dt} = 2\sqrt{2} \text{ (cm/s)}$$

391 ㉡ $32\pi \text{ cm}^3/\text{s}$

t 초 후의 고무 풍선의 반지름의 길이는 $(2+0.5t) \text{ cm}$

이므로 고무 풍선의 부피를 $V \text{ cm}^3$ 라 하면

$$V = \frac{4}{3}\pi(2+0.5t)^3$$

시각 t 에서의 고무 풍선의 부피의 변화율은

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \times 3(2+0.5t)^2 \times 0.5$$

$$= 2\pi(2+0.5t)^2$$

따라서 $t=4$ 에서의 고무 풍선의 부피의 변화율은

$$2\pi(2+2)^2 = 32\pi \text{ (cm}^3/\text{s)}$$

연습문제

196~198쪽

392 ㉡ ②

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -2t + 8$$

점 P가 원점을 지나는 순간의 위치는 0이므로 $x=0$ 에서

$$-t^2 + 8t = 0, \quad t(t-8) = 0$$

$$\therefore t=8 \quad (\because t > 0)$$

따라서 $t=8$ 에서의 점 P의 속도는

$$v = -16 + 8 = -8$$

393 ㉔ 22

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = -t^2 + 6t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -2t + 6$$

점 P의 가속도가 0이면 $a=0$ 에서

$$-2t + 6 = 0 \quad \therefore t = 3$$

따라서 $t=3$ 에서의 점 P의 위치가 40이므로

$$-9 + 27 + k = 40 \quad \therefore k = 22$$

394 ㉔ 180 m

t 초 후의 열차의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 18 - 0.9t \quad \text{..... ①}$$

열차가 정지하는 순간의 속도는 0이므로 $v=0$ 에서

$$18 - 0.9t = 0 \quad \therefore t = 20 \quad \text{..... ②}$$

따라서 열차가 정지할 때까지 걸린 시간은 20초이므로 열차가 움직인 거리는

$$x = 360 - 180 = 180(\text{m}) \quad \text{..... ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	t 초 후의 열차의 속도 구하기	30 %
②	열차가 정지할 때까지 걸린 시간 구하기	40 %
③	열차가 정지할 때까지 움직인 거리 구하기	30 %

395 ㉔ 12

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 24t + 36$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 24$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$$v=0 \text{에서}$$

$$3t^2 - 24t + 36 = 0, (t-2)(t-6) = 0$$

$$\therefore t=2 \text{ 또는 } t=6$$

따라서 점 P가 출발 후 두 번째로 운동 방향을 바꾸는 시간은 $t=6$ 이므로 구하는 가속도는

$$a = 36 - 24 = 12$$

396 ㉔ ①

시간 t 에서의 점 P의 속도를 v , 가속도를 a 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 2at + b$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t + 2a$$

점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간의 속도는 0이므로

$t=1$ 에서의 점 P의 속도는 0이다.

$$\therefore 3 + 2a + b = 0 \quad \text{..... ①}$$

$t=2$ 에서의 점 P의 가속도는 0이므로

$$12 + 2a = 0 \quad \therefore a = -6$$

이를 ①에 대입하면

$$3 - 12 + b = 0 \quad \therefore b = 9$$

$$\therefore a + b = 3$$

397 ㉔ ②

물체의 t 초 후의 속도를 v m/s라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 40 - 10t$$

물체가 최고 높이에 도달하는 순간의 속도는 0이므로

$$v=0 \text{에서}$$

$$40 - 10t = 0 \quad \therefore t = 4$$

따라서 구하는 시간은 4초이다.

398 ㉔ ③

ㄱ. 시간 t 에서의 가속도는 $v'(t)$ 이므로 속도 $v(t)$ 의 그래프에서 그 점에서의 접선의 기울기와 같다.

따라서 $0 < t < g$ 에서 점 P의 가속도가 0인 시간은 $t=a, t=b, t=c, t=e$ 이므로 점 P의 가속도가 0인 순간은 4번이다.

ㄴ. $v(t)=0$ 이고 그 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 $0 < t < g$ 에서 점 P가 운동 방향을 바꾸는 시간은 $t=d, t=f$ 이다.

따라서 $0 < t < g$ 에서 점 P는 운동 방향을 2번 바꾼다.

ㄷ. $b < t < c$ 에서 t 의 값이 커질 때 $v(t)$ 의 값도 커지므로 점 P의 속도는 증가한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

399 ㉔ 53

t 초 후의 직사각형의 가로의 길이는 $5+t$, 세로의 길이는 $3+2t$ 이므로 직사각형의 넓이를 S 라 하면

$$S = (5+t)(3+2t) = 15 + 13t + 2t^2$$

시간 t 에서의 직사각형의 넓이의 변화율은

$$\frac{dS}{dt} = 13 + 4t$$

따라서 $t=10$ 에서의 직사각형의 넓이의 변화율은

$$13 + 40 = 53$$

400 ㉡ 7

점 P의 시각 t 에서의 속도를 $v(t)$ 라 하면

$$v(t) = x'(t) = 6t^2 - 12t - 1$$

$$= 6(t-1)^2 - 7$$

$0 \leq t \leq 2$ 에서 $v(t)$ 의 그래프는 오

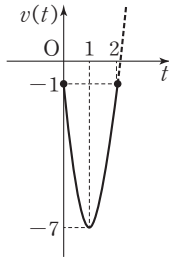
른쪽 그림과 같으므로

$$-7 \leq v(t) \leq -1$$

시각 t 에서의 점 P의 속력은

$$|v(t)| \text{ 이고 } 1 \leq |v(t)| \leq 7 \text{ 이므로}$$

구하는 최댓값은 7이다.



401 ㉡ 3

점 M의 시각 t 에서의 위치를 x_M 이라 하면

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2}$$

$$= \frac{(3t^2 - 7t + 10) + (t^2 - 3t + 2)}{2}$$

$$= 2t^2 - 5t + 6$$

점 M의 시각 t 에서의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx_M}{dt} = 4t - 5 \quad \text{..... ①}$$

점 Q가 원점을 지나는 순간의 위치는 0이므로 $x_Q = 0$ 에서

$$t^2 - 3t + 2 = 0, (t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=2$$

즉, 점 Q가 두 번째로 원점을 지나는 시각은

$$t=2 \quad \text{..... ②}$$

따라서 $t=2$ 에서의 점 M의 속도는

$$v = 8 - 5 = 3 \quad \text{..... ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	점 M의 시각 t 에서의 속도 구하기	40%
②	점 Q가 두 번째로 원점을 지나는 시각 구하기	40%
③	점 Q가 두 번째로 원점을 지나는 순간의 점 M의 속도 구하기	20%

402 ㉡ 1/6

두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = 8t^3 + 6kt, v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = 14t$$

두 점 P, Q의 가속도를 각각 a_P, a_Q 라 하면

$$a_P = \frac{dv_P}{dt} = 24t^2 + 6k, a_Q = \frac{dv_Q}{dt} = 14$$

두 점 P, Q의 가속도가 같으면 $a_P = a_Q$ 에서

$$24t^2 + 6k = 14 \quad \therefore 24t^2 = 14 - 6k \quad \text{..... ㉠}$$

이때 $t > 0$ 에서 $24t^2 > 0$ 이므로 두 점 P, Q의 가속도가 같아지는 순간이 존재하려면

$$14 - 6k > 0 \quad \therefore k < \frac{7}{3}$$

따라서 자연수 k 의 값은 1, 2이다.

이를 각각 ㉠에 대입하여 풀면

$$t = \sqrt{\frac{1}{3}}, t = \sqrt{\frac{1}{12}} \quad (\because t > 0)$$

$$\text{따라서 모든 } t \text{의 값의 곱은 } \sqrt{\frac{1}{3}} \times \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{6}$$

403 ㉡ ①

시각 t 에서의 점 P의 속도를 v 라 하면

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 10t + a = 3\left(t - \frac{5}{3}\right)^2 + a - \frac{25}{3}$$

점 P의 운동 방향이 바뀌지 않으려면 $t \geq 0$ 에서 $v \geq 0$ 이어야 한다.

이때 $t \geq 0$ 에서 v 의 최솟값이 $a - \frac{25}{3}$ 이므로 $t \geq 0$ 에서 $v \geq 0$ 이려면

$$a - \frac{25}{3} \geq 0 \quad \therefore a \geq \frac{25}{3}$$

따라서 자연수 a 의 최솟값은 9이다.

404 ㉡ ㄱ, ㄴ

ㄱ. 두 점 P, Q는 $t=3, t=6$ 에서 만나므로 2번 만난다.

ㄴ. $f'(2) = 0, g'(2) > 0$ 이므로 $t=2$ 에서의 점 P의 속도는 점 Q의 속도보다 느리다.

ㄷ. $f'(5) > 0, g'(5) < 0$ 이므로 $t=5$ 에서 두 점 P, Q는 서로 반대 방향으로 움직인다.

ㄹ. $3 \leq t \leq 4$ 에서 두 점 P, Q가 움직인 거리는 각각

$$|f(4) - f(3)|, |g(4) - g(3)|$$

주어진 그래프에서

$$|f(4) - f(3)| > |g(4) - g(3)| \text{ 이므로 점 P가}$$

움직인 거리는 점 Q가 움직인 거리보다 길다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

405 ㉡ ①

t 초 후의 두 점 A, B의 좌표는 각각 $(2t, 0), (0, 2t)$

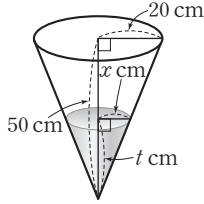
이므로 점 C의 좌표는 (t, t) 이다.

$$\overline{OC} = l \text{ 이라 하면 } l = \sqrt{t^2 + t^2} = \sqrt{2}t \quad (\because t > 0)$$

$$\text{따라서 } \overline{OC} \text{의 길이의 변화율은 } \frac{dl}{dt} = \sqrt{2}$$

406 $4\pi \text{ cm}^3/\text{s}$

t 초 후의 수면의 높이는 $t \text{ cm}$
이므로 수면의 반지름의 길이를
 $x \text{ cm}$ 라 하면 오른쪽 그림에서
 $20 : x = 50 : t$



$$2t = 5x \quad \therefore x = \frac{2}{5}t$$

수면의 높이가 5 cm 일 때의 시각은 $t = 5$

t 초 후의 물의 부피를 $V \text{ cm}^3$ 라 하면

$$V = \frac{1}{3}\pi x^2 t = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2}{5}t\right)^2 t = \frac{4\pi}{75}t^3$$

시각 t 에서의 물의 부피의 변화율은 $\frac{dV}{dt} = \frac{4\pi}{25}t^2$

따라서 $t = 5$ 에서의 물의 부피의 변화율은

$$\frac{4\pi}{25} \times 25 = 4\pi (\text{cm}^3/\text{s})$$

407 ④

|접근 방법| 두 점 P, Q의 속도가 3번 같아지려면 $x_P' = x_Q'$ 을 만족시키는 양수 t 의 값이 3개이어야 함을 이용한다.

시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = 4t^3 - 9t^2 + 20t$$

$$v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = 9t^2 - 4t + m$$

이때 속도가 3번 같아지려면 $v_P = v_Q$ 를 만족시키는 양수 t 가 3개 존재해야 하므로 t 에 대한 방정식

$$4t^3 - 9t^2 + 20t = 9t^2 - 4t + m, \text{ 즉}$$

$4t^3 - 18t^2 + 24t = m$ 이 $t > 0$ 에서 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$f(t) = 4t^3 - 18t^2 + 24t \text{라 하면}$$

$$f'(t) = 12t^2 - 36t + 24 = 12(t-1)(t-2)$$

$$f'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은 } t = 1 \text{ 또는 } t = 2$$

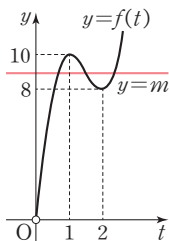
$t > 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	1	...	2	...
$f'(t)$		+	0	-	0	+
$f(t)$		$\nearrow$	10 극대	$\searrow$	8 극소	$\nearrow$

$t > 0$ 에서 함수 $y = f(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, 이 그래프와 직선 $y = m$ 이 서로 다른 세 점에서 만나야 하므로

$$8 < m < 10$$

따라서 정수 m 의 값은 9이다.



408 $\frac{125}{54}$

|접근 방법| 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 할 때, 두 점 P, Q가 서로 같은 방향으로 움직이면 $v_P v_Q > 0$ 임을 이용한다.

시각 t 에서의 두 점 P, Q의 속도를 각각 v_P, v_Q 라 하면

$$v_P = \frac{dx_P}{dt} = 2t^2 - 4t, \quad v_Q = \frac{dx_Q}{dt} = -t^2 + t$$

두 점 P, Q 사이의 거리는

$$\begin{aligned} |x_P - x_Q| &= \left| \left(\frac{2}{3}t^3 - 2t^2 \right) - \left(-\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right) \right| \\ &= \left| t^3 - \frac{5}{2}t^2 \right| \end{aligned}$$

$$f(t) = t^3 - \frac{5}{2}t^2 \text{이라 하면}$$

$$f'(t) = 3t^2 - 5t = t(3t - 5)$$

$$f'(t) = 0 \text{인 } t \text{의 값은 } t = \frac{5}{3} (\because t > 0)$$

$t > 0$ 에서 함수 $f(t)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	0	...	$\frac{5}{3}$	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		$\searrow$	$-\frac{125}{54}$ 극소	$\nearrow$

이때 함수 $y = f(t)$ 의 그래프와 t 축의 교점의 t 의 좌표를 구하면

$$t^3 - \frac{5}{2}t^2 = 0, \quad t^2 \left(t - \frac{5}{2} \right) = 0$$

$$\therefore t = 0 \text{ 또는 } t = \frac{5}{2}$$

따라서 $t > 0$ 에서 함수

$y = |f(t)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

두 점 P, Q가 서로 같은 방향으로 움직이면 속도의 부호가 서로 같으므로

$$v_P v_Q > 0 \text{에서}$$

$$(2t^2 - 4t)(-t^2 + t) > 0$$

$$t^2(t-1)(t-2) < 0$$

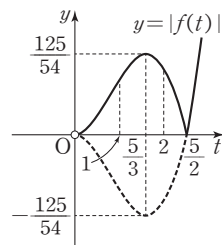
이때 $t^2 > 0$ 이므로

$$(t-1)(t-2) < 0$$

$$\therefore 1 < t < 2$$

따라서 $1 < t < 2$ 에서 함수 $|f(t)|$ 의 최댓값은 $\frac{125}{54}$ 이

므로 두 점 P, Q 사이의 거리의 최댓값은 $\frac{125}{54}$ 이다.



III. 적분

III-1. 부정적분

01 부정적분

개념 확인

201쪽

409 ㉠ (1) $x^2 + C$ (2) $-x^5 + C$

(1) $(x^2)' = 2x$ 이므로 $\int 2x dx = x^2 + C$

(2) $(-x^5)' = -5x^4$ 이므로 $\int (-5x^4) dx = -x^5 + C$

410 ㉠ (1) $2x^3 + x^2 - 4x$

(2) $2x^3 + x^2 - 4x + C$

유제

203-205쪽

411 ㉠ 6

$f(x) = (-x^4 + 2x^3 + 2x^2 + C)'$

$= -4x^3 + 6x^2 + 4x$

$\therefore f(-1) = 4 + 6 - 4 = 6$

412 ㉠ $a=6, b=2, c=-2$

$6x^2 + ax + 2 = (bx^3 + 3x^2 - cx + 4)'$

$= 3bx^2 + 6x - c$

따라서 $6 = 3b, a = 6, 2 = -c$ 이므로

$a = 6, b = 2, c = -2$

413 ㉠ 2

$(2x+1)f(x) = \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C\right)'$

$= 2x^2 + 3x + 1$

$= (x+1)(2x+1)$

따라서 $f(x) = x+1$ 이므로

$f(-1) + f(1) = (-1+1) + (1+1) = 2$

414 ㉠ 2

$f(x) = (x^3 + ax^2 + bx)'$

$= 3x^2 + 2ax + b$

$f(0) = 3$ 에서 $b = 3$

$f'(x) = 6x + 2a$ 이므로 $f'(0) = -2$ 에서

$2a = -2 \quad \therefore a = -1$

$\therefore a + b = 2$

415 ㉠ 20

$\frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} = f(x)$ 이므로

$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4$

$\therefore f(-2) = 8 + 8 + 4 = 20$

416 ㉠ -4

$f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (3x^3 + x^2) \right\} dx = 3x^3 + x^2 + C$

$f(1) = 2$ 에서 $3 + 1 + C = 2 \quad \therefore C = -2$

따라서 $f(x) = 3x^3 + x^2 - 2$ 이므로

$f(-1) = -3 + 1 - 2 = -4$

417 ㉠ -1

$\frac{d}{dx} \left\{ \int (x^2 - 3x) dx \right\} = x^2 - 3x,$

$\int \left\{ \frac{d}{dx} (2x^2) \right\} dx = 2x^2 + C$ 이므로

$f(x) = (x^2 - 3x) + (2x^2 + C) = 3x^2 - 3x + C$

$f(0) = -1$ 에서 $C = -1$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 3x - 1$ 이므로

$f(1) = 3 - 3 - 1 = -1$

418 ㉠ $f(x) = x^2 + 8x + 10$

$f(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} (x^2 + 8x) \right\} dx$

$= x^2 + 8x + C = (x+4)^2 + C - 16$

함수 $f(x)$ 의 최솟값이 -6 이므로

$C - 16 = -6 \quad \therefore C = 10$

$\therefore f(x) = x^2 + 8x + 10$

개념 확인

207쪽

419 ㉠ (1) $7x + C$ (2) $3x^3 + C$

(3) $\frac{1}{2}x^2 + 4x + C$

(4) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$

(2) $\int 9x^2 dx = 9 \int x^2 dx = 9 \times \frac{1}{3}x^3 + C = 3x^3 + C$

(3) $\int (x+4) dx = \int x dx + 4 \int dx = \frac{1}{2}x^2 + 4x + C$

(4) $\int (x^2 - 3x + 2) dx = \int x^2 dx - 3 \int x dx + 2 \int dx$

$= \frac{1}{3}x^3 - 3 \times \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$

$= \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$

420 ㉮ (1) $\frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + C$

(2) $\frac{3}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 5x^2 + C$

(3) $x^2t - xt^2 + \frac{1}{3}t^3 + C$

(4) $2x^2 + x + C$

(5) $x^2 + 2x + C$

(6) $\frac{1}{2}y^2 + 2y + C$

(1) $\int (x-1)^3 dx$

$$= \int (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) dx$$

$$= \int x^3 dx - 3 \int x^2 dx + 3 \int x dx - \int dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + C$$

(2) $\int 2x(x+1)(3x-5) dx$

$$= \int (6x^3 - 4x^2 - 10x) dx$$

$$= 6 \int x^3 dx - 4 \int x^2 dx - 10 \int x dx$$

$$= \frac{3}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 5x^2 + C$$

(3) $\int (x-t)^2 dt = \int (x^2 - 2xt + t^2) dt$

$$= x^2 \int dt - 2x \int t dt + \int t^2 dt$$

$$= x^2 t - xt^2 + \frac{1}{3}t^3 + C$$

(4) $\int \frac{4x^2 + 5x + 1}{x+1} dx = \int \frac{(x+1)(4x+1)}{x+1} dx$

$$= \int (4x+1) dx$$

$$= 4 \int x dx + \int dx$$

$$= 2x^2 + x + C$$

(5) $\int (\sqrt{x}+1)^2 dx + \int (\sqrt{x}-1)^2 dx$

$$= \int \{(\sqrt{x}+1)^2 + (\sqrt{x}-1)^2\} dx$$

$$= \int \{(x+2\sqrt{x}+1) + (x-2\sqrt{x}+1)\} dx$$

$$= \int (2x+2) dx$$

$$= 2 \int x dx + 2 \int dx$$

$$= x^2 + 2x + C$$

(6) $\int \frac{y^2+5y}{y+2} dy - \int \frac{y-4}{y+2} dy$

$$= \int \left(\frac{y^2+5y}{y+2} - \frac{y-4}{y+2} \right) dy$$

$$= \int \frac{y^2+4y+4}{y+2} dy$$

$$= \int \frac{(y+2)^2}{y+2} dy = \int (y+2) dy$$

$$= \int y dy + 2 \int dy$$

$$= \frac{1}{2}y^2 + 2y + C$$

421 ㉮ $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 16x + 3$

$$f(x) = \int (x-2)(x+2)(x^2+4) dx$$

$$= \int (x^2-4)(x^2+4) dx$$

$$= \int (x^4-16) dx = \int x^4 dx - 16 \int dx$$

$$= \frac{1}{5}x^5 - 16x + C$$

$$f(0) = 3 \text{에서 } C = 3$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{5}x^5 - 16x + 3$$

422 ㉮ ④

$$f(x) = \int \left(\frac{1}{2}x^3 + 2x + 1 \right) dx - \int \left(\frac{1}{2}x^3 + x \right) dx$$

$$= \int \left\{ \left(\frac{1}{2}x^3 + 2x + 1 \right) - \left(\frac{1}{2}x^3 + x \right) \right\} dx$$

$$= \int (x+1) dx = \int x dx + \int dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

$$f(0) = 1 \text{에서 } C = 1$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \text{이므로}$$

$$f(4) = 8 + 4 + 1 = 13$$

423 ㉮ -1

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (4x^3 - 2x - 5) dx$$

$$= x^4 - x^2 - 5x + C$$

$$f(2) = 6 \text{에서}$$

$$16 - 4 - 10 + C = 6$$

$$\therefore C = 4$$

$$\text{따라서 } f(x) = x^4 - x^2 - 5x + 4 \text{이므로}$$

$$f(1) = 1 - 1 - 5 + 4 = -1$$

424 ㉮ 15

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 $6x^2-4x+3$ 이므로

$$f'(x)=6x^2-4x+3$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (6x^2-4x+3) dx \\ &= 2x^3-2x^2+3x+C\end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1, 4)$ 를 지나므로 $f(1)=4$ 에서 $2-2+3+C=4 \quad \therefore C=1$

따라서 $f(x)=2x^3-2x^2+3x+1$ 이므로

$$f(2)=16-8+6+1=15$$

425 ㉮ 6

$$\begin{aligned}f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x^2-kx+2) dx \\ &= x^3-\frac{1}{2}kx^2+2x+C\end{aligned}$$

$$f(0)=2\text{에서 } C=2$$

$$f(2)=2\text{에서 } 8-2k+4+C=2$$

$$8-2k+4+2=2 \quad \therefore k=6$$

426 ㉮ -1

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 $2x+1$ 이므로

$$f'(x)=2x+1$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2x+1) dx \\ &= x^2+x+C\end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(2, 5)$ 를 지나므로 $f(2)=5$ 에서 $4+2+C=5 \quad \therefore C=-1$

또 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(-1, k)$ 를 지나므로

$$f(-1)=k\text{에서}$$

$$1-1+C=k$$

$$1-1-1=k \quad \therefore k=-1$$

427 ㉮ $f(x)=-6x^2+12x-1$

$xf(x)-F(x)=-4x^3+6x^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)-F'(x)=-12x^2+12x$$

$$F'(x)=f(x)\text{이므로}$$

$$f(x)+xf'(x)-f(x)=-12x^2+12x$$

$$xf'(x)=-12x^2+12x=x(-12x+12)$$

$$\therefore f'(x)=-12x+12$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-12x+12) dx \\ &= -6x^2+12x+C\end{aligned}$$

$$f(1)=5\text{에서}$$

$$-6+12+C=5 \quad \therefore C=-1$$

$$\therefore f(x)=-6x^2+12x-1$$

428 ㉮ 10

$$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=2x\text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\} \right] dx = \int 2x dx$$

$$\therefore f(x)-g(x)=x^2+C_1 \quad \dots\dots \textcircled{\Gamma}$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2+4x+2\text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} \right] dx = \int (3x^2+4x+2) dx$$

$$\therefore f(x)g(x)=x^3+2x^2+2x+C_2 \quad \dots\dots \textcircled{\Delta}$$

$$f(1)=3, g(1)=2\text{이므로 } \textcircled{\Gamma}, \textcircled{\Delta}\text{에서}$$

$$f(1)-g(1)=1+C_1$$

$$1=1+C_1 \quad \therefore C_1=0$$

$$f(1)g(1)=1+2+2+C_2$$

$$6=5+C_2 \quad \therefore C_2=1$$

$$\therefore f(x)-g(x)=x^2,$$

$$f(x)g(x)=x^3+2x^2+2x+1$$

$$=(x+1)(x^2+x+1)$$

$$\text{이때 } f(1)=3, g(1)=2\text{이므로}$$

$$f(x)=x^2+x+1, g(x)=x+1$$

$$\therefore f(2)+g(2)=(4+2+1)+(2+1)=10$$

429 ㉮ $-\frac{1}{2}$

$\int f(x) dx = (x-2)f(x) - x^3 + 2x^2 + 4x$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)=f(x)+(x-2)f'(x)-3x^2+4x+4$$

$$(x-2)f'(x)=3x^2-4x-4=(3x+2)(x-2)$$

$$\therefore f'(x)=3x+2$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (3x+2) dx \\ &= \frac{3}{2}x^2+2x+C\end{aligned}$$

$$f(2)=6\text{에서}$$

$$6+4+C=6 \quad \therefore C=-4$$

$$\text{따라서 } f(x)=\frac{3}{2}x^2+2x-4\text{이므로}$$

$$f(1)=\frac{3}{2}+2-4=-\frac{1}{2}$$

430 ㉮ 18

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=8x+5 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\} \right] dx = \int (8x+5) dx$$

$$\therefore f(x)+g(x)=4x^2+5x+C_1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x-3 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\} \right] dx = \int (4x-3) dx$$

$$\therefore f(x)-g(x)=2x^2-3x+C_2 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$f(0)=-1, g(0)=1 \text{이므로 } \textcircled{㉠}, \textcircled{㉡} \text{에서}$$

$$f(0)+g(0)=C_1 \quad \therefore C_1=0$$

$$f(0)-g(0)=C_2 \quad \therefore C_2=-2$$

$$\therefore f(x)+g(x)=4x^2+5x,$$

$$f(x)-g(x)=2x^2-3x-2$$

두 식을 연립하여 풀면

$$f(x)=3x^2+x-1$$

$$g(x)=x^2+4x+1$$

$$\therefore f(1)g(1)=(3+1-1) \times (1+4+1)=18$$

| 다른 풀이 |

$$f(x)+g(x)=\int (8x+5) dx \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(x)-g(x)=\int (4x-3) dx \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}+\textcircled{㉡}$ 을 하면

$$2f(x)=\int (12x+2) dx=2\int (6x+1) dx$$

$$\therefore f(x)=\int (6x+1) dx=3x^2+x+C_1$$

$$f(0)=-1 \text{에서 } C_1=-1$$

$$\therefore f(x)=3x^2+x-1$$

$\textcircled{㉠}-\textcircled{㉡}$ 을 하면

$$2g(x)=\int (4x+8) dx=2\int (2x+4) dx$$

$$\therefore g(x)=\int (2x+4) dx=x^2+4x+C_2$$

$$g(0)=1 \text{에서 } C_2=1$$

$$\therefore g(x)=x^2+4x+1$$

$$\therefore f(1)g(1)=(3+1-1) \times (1+4+1)=18$$

431 ㉮ 13

(i) $x \geq 1$ 일 때

$$f(x)=\int (-3x^2+2x+2) dx$$

$$=-x^3+x^2+2x+C_1$$

(ii) $x < 1$ 일 때

$$f(x)=\int (6x-5) dx=3x^2-5x+C_2$$

(i), (ii)에서

$$f(x)=\begin{cases} -x^3+x^2+2x+C_1 & (x \geq 1) \\ 3x^2-5x+C_2 & (x < 1) \end{cases}$$

$f(2)=1$ 에서

$$-8+4+4+C_1=1 \quad \therefore C_1=1$$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)=f(1) \text{에서}$$

$$3-5+C_2=-1+1+2+C_1$$

$$-2+C_2=3 \quad \therefore C_2=5$$

$$\text{따라서 } f(x)=\begin{cases} -x^3+x^2+2x+1 & (x \geq 1) \\ 3x^2-5x+5 & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(-1)=3+5+5=13$$

432 ㉮ $-\frac{2}{3}$

$$f(x)=\int f'(x) dx=\int (-x^2+2x+3) dx$$

$$=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+C$$

$$f'(x)=-x^2+2x+3=-(x+1)(x-3) \text{이므로}$$

$$f'(x)=0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=-1 \text{ 또는 } x=3$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극댓값 10을 가지므로

$$f(3)=10 \text{에서}$$

$$-9+9+9+C=10 \quad \therefore C=1$$

$$\text{따라서 } f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+1 \text{이고 } f(x) \text{는}$$

$x=-1$ 에서 극솟이므로 극솟값은

$$f(-1)=\frac{1}{3}+1-3+1=-\frac{2}{3}$$

433 ㉮ 2

(i) $x > -1$ 일 때

$$f(x)=\int k dx=kx+C_1$$

(ii) $x < -1$ 일 때

$$f(x)=\int (4x+2) dx=2x^2+2x+C_2$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} kx + C_1 & (x > -1) \\ 2x^2 + 2x + C_2 & (x < -1) \end{cases}$$

$f(3)=5$ 에서

$$3k + C_1 = 5 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$f(-2)=1$ 에서

$$8 - 4 + C_2 = 1 \quad \therefore C_2 = -3$$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) \text{에서}$$

$$-k + C_1 = 2 - 2 + C_2, \quad -k + C_1 = -3$$

$$\therefore k - C_1 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$4k = 8 \quad \therefore k = 2$$

434 ㉠ $f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 4$

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3ax^2 - 6ax) dx$$

$$= ax^3 - 3ax^2 + C$$

$$f'(x) = 3ax^2 - 6ax = 3ax(x-2) \text{이므로 } f'(x) = 0$$

인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=2$

$a > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	0	$\dots$	2	$\dots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극댓값 4를 가지므로

$$f(0) = 4 \text{에서}$$

$$C = 4$$

함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극솟값 -8을 가지므로

$$f(2) = -8 \text{에서}$$

$$8a - 12a + C = -8$$

$$8a - 12a + 4 = -8 \quad \therefore a = 3$$

$$\therefore f(x) = 3x^3 - 9x^2 + 4$$

연습문제

216~218쪽

435 ㉠ 13

$$f(x) = \left(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x + C \right)'$$

$$= 3x^2 - x + 3$$

$$\therefore f(2) = 12 - 2 + 3 = 13$$

436 ㉠ ①

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$- \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \times (-1)$$

$$= f'(1) + f'(1) = 2f'(1)$$

$$f(x) = \int (x^2 + 2x - 5) dx \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 + 2x - 5$$

$$\therefore f'(1) = 1 + 2 - 5 = -2$$

따라서 구하는 값은

$$2f'(1) = 2 \times (-2) = -4$$

437 ㉠ 1

$$g(x) = \int \left\{ \frac{d}{dx} f(x) \right\} dx \text{에서}$$

$$g(x) = f(x) + C = 3x^2 - 2x + C$$

$$g(1) = 5 \text{에서}$$

$$3 - 2 + C = 5 \quad \therefore C = 4$$

$$\therefore g(x) = 3x^2 - 2x + 4$$

$$h(x) = \frac{d}{dx} \left\{ \int f(x) dx \right\} \text{에서}$$

$$h(x) = f(x) = 3x^2 - 2x$$

$$\therefore g(-1) - h(2) = (3 + 2 + 4) - (12 - 4) = 1$$

438 ㉠ 7

$$f(x) = \int \frac{x^3 - 1}{x^2 + x + 1} dx + \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x + 1} dx$$

$$= \int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^2+x+1} dx$$

$$+ \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1} dx$$

$$= \int (x-1) dx + \int (x+1) dx$$

$$= \int 2x dx$$

$$= x^2 + C$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(2, 2)$ 를 지나므로 $f(2)=2$ 에서

$$4 + C = 2 \quad \therefore C = -2$$

따라서 $f(x) = x^2 - 2$ 이므로

$$f(3) = 9 - 2 = 7$$

439 ㉔ ④

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(x, f(x))$ 에서의 접선의 기울기가 $2x+a$ 이므로
 $f'(x)=2x+a$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2x+a) dx \\ &= x^2 + ax + C\end{aligned}$$

곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(0, -4)$ 를 지나므로 $f(0)=-4$ 에서

$$C=-4$$

또 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(2, 6)$ 을 지나므로 $f(2)=6$ 에서

$$4+2a+C=6$$

$$4+2a-4=6 \quad \therefore a=3$$

440 ㉔ $\frac{2}{3}$

$xf(x)-F(x)=2x^3-3x^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x)+xf'(x)-F'(x)=6x^2-6x$$

$$F'(x)=f(x) \text{이므로}$$

$$f(x)+xf'(x)-f(x)=6x^2-6x$$

$$xf'(x)=6x^2-6x=x(6x-6)$$

$$\therefore f'(x)=6x-6$$

$$\begin{aligned}\therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (6x-6) dx \\ &= 3x^2-6x+C\end{aligned}$$

$$f(1)=-1 \text{에서}$$

$$3-6+C=-1 \quad \therefore C=2$$

$$\therefore f(x)=3x^2-6x+2$$

따라서 방정식 $f(x)=0$, 즉 $3x^2-6x+2=0$ 의 모든 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\frac{2}{3}$ 이다.

441 ㉔ 1

$$\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=6x \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\} \right] dx = \int 6x dx$$

$$\therefore f(x)g(x)=3x^2+C$$

$$f(2)=1, g(2)=9 \text{이므로}$$

$$f(2)g(2)=12+C$$

$$9=12+C \quad \therefore C=-3$$

$$\therefore f(x)g(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$$

그런데 두 함수 $f(x), g(x)$ 는 상수함수가 아니고
 $f(2)=1, g(2)=9$ 이므로
 $f(x)=x-1, g(x)=3(x+1)=3x+3$
 $\therefore f(5)+g(-2)=(5-1)+(-6+3)=1$

442 ㉔ 9

(i) $x<0$ 일 때

$$F(x)=\int (-2x) dx=-x^2+C_1$$

(ii) $x\geq 0$ 일 때

$$F(x)=\int k(2x-x^2) dx=k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_2$$

(i), (ii)에서

$$F(x)=\begin{cases} -x^2+C_1 & (x<0) \\ k\left(x^2-\frac{1}{3}x^3\right)+C_2 & (x\geq 0) \end{cases}$$

함수 $F(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x)=F(0) \text{에서 } C_1=C_2$$

$$F(2)-F(-3)=21 \text{에서}$$

$$\left\{ k\left(4-\frac{8}{3}\right)+C_2 \right\} - (-9+C_1)=21$$

$$\frac{4}{3}k+9=21 \quad (\because C_1=C_2)$$

$$\therefore k=9$$

443 ㉔ 6

$f(x)$ 가 삼차함수이면 $f'(x)$ 는 이차함수이고 주어진 그래프에서 $f'(-2)=f'(1)=0$ 이므로

$$f'(x)=a(x+2)(x-1) \quad (a>0) \text{이라 하자.}$$

또 함수 $y=f'(x)$ 의 그래프가 점 $(0, -4)$ 를 지나므로 $f'(0)=-4$ 에서

$$-2a=-4 \quad \therefore a=2$$

$$\therefore f'(x)=2(x+2)(x-1)$$

$$\therefore f(x)=\int f'(x) dx = \int 2(x+2)(x-1) dx$$

$$= \int (2x^2+2x-4) dx$$

$$= \frac{2}{3}x^3+x^2-4x+C$$

주어진 그래프에서 $f'(x)$ 의 부호를 조사하여 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	1	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값 -3 을 가지므로

$$f(1) = -3 \text{에서}$$

$$\frac{2}{3} + 1 - 4 + C = -3 \quad \therefore C = -\frac{2}{3}$$

따라서 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + x^2 - 4x - \frac{2}{3}$ 이고 $f(x)$ 는

$x = -2$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$f(-2) = -\frac{16}{3} + 4 + 8 - \frac{2}{3} = 6$$

444 ㉠ ①

$$\begin{aligned} F(x) &= \int f(x) dx = \int (-4x + 9) dx \\ &= -2x^2 + 9x + C \end{aligned}$$

모든 실수 x 에 대하여 $-2x^2 + 9x + C < 0$ 이라면 이
차방정식 $-2x^2 + 9x + C = 0$ 의 판별식을 D 라 할 때,
 $D = 81 + 8C < 0$

$$\therefore C < -\frac{81}{8}$$

이때 $F(0) = C$ 이므로 $F(0)$ 의 값이 될 수 있는 것은
①이다.

445 ㉠ -30

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (6x^2 + 2x + a) dx \\ &= 2x^3 + x^2 + ax + C \end{aligned}$$

$f(x)$ 가 $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$ 으로 나누어떨
어지므로

$$f(1) = 0, f(3) = 0$$

$$f(1) = 0 \text{에서}$$

$$2 + 1 + a + C = 0$$

$$\therefore a + C = -3 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$f(3) = 0 \text{에서}$$

$$54 + 9 + 3a + C = 0$$

$$\therefore 3a + C = -63 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{B} - \textcircled{A}$ 을 하면

$$2a = -60 \quad \therefore a = -30$$

446 ㉠ 6

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}) dx \\ &= x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + C \\ f(0) &= 3 \text{에서 } C = 3 \end{aligned}$$

$$f(1) = 9 \text{에서}$$

$$\frac{1+1+1+\dots+1}{n\text{개}} + 3 = 9$$

$$n + 3 = 9 \quad \therefore n = 6$$

447 ㉠ ④

$f(x+y) = f(x) + f(y) - 3xy$ 의 양변에 $x=0, y=0$
을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0)$$

$$\therefore f(0) = 0$$

도함수의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) - 3xh - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - 3xh}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} - 3x \\ &= f'(0) - 3x \\ &= -3x + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (-3x + 4) dx \\ &= -\frac{3}{2}x^2 + 4x + C \end{aligned}$$

$$f(0) = 0 \text{에서 } C = 0$$

$$\text{따라서 } f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x \text{이므로}$$

$$f(2) = -6 + 8 = 2$$

448 ㉠ -3

$$F(x) = -3x^3(x-2) + xf(x) \text{에서}$$

$$F(x) = -3x^4 + 6x^3 + xf(x)$$

이 식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$F'(x) = -12x^3 + 18x^2 + f(x) + xf'(x)$$

$$F'(x) = f(x) \text{이므로}$$

$$f(x) = -12x^3 + 18x^2 + f(x) + xf'(x)$$

$$xf'(x) = 12x^3 - 18x^2 = x(12x^2 - 18x)$$

$$\therefore f'(x) = 12x^2 - 18x$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (12x^2 - 18x) dx \\ &= 4x^3 - 9x^2 + C \end{aligned}$$

$$f(1) = 0 \text{에서}$$

$$4 - 9 + C = 0 \quad \therefore C = 5$$

$$\therefore f(x) = 4x^3 - 9x^2 + 5$$

$f'(x) = 12x^2 - 18x = 6x(2x - 3)$ 이므로 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	...	0	...	$\frac{3}{2}$	...	2
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	-8	↗	5 극대	↘	$-\frac{7}{4}$ 극소	↗	1

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 최댓값 5, $x=-1$ 에서 최솟값 -8을 가지므로

$$M=5, m=-8$$

$$\therefore M+m=-3$$

449 ㉮ 5

$g(x) = \int \{4x - f'(x)\} dx$ 에서

$$g(x) = 2x^2 - f(x) + C_1$$

$$\therefore f(x) + g(x) = 2x^2 + C_1 \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

$$\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} = 6x^2 + 2x - 1 \text{에서}$$

$$\int \left[\frac{d}{dx} \{f(x)g(x)\} \right] dx = \int (6x^2 + 2x - 1) dx$$

$$\therefore f(x)g(x) = 2x^3 + x^2 - x + C_2 \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

$f(0)=1, g(0)=0$ 이므로 $\textcircled{㉮}, \textcircled{㉮}$ 에서

$$f(0) + g(0) = C_1 \quad \therefore C_1 = 1$$

$$f(0)g(0) = C_2 \quad \therefore C_2 = 0$$

$$\therefore f(x) + g(x) = 2x^2 + 1,$$

$$f(x)g(x) = 2x^3 + x^2 - x \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

이때 $f(0)=1, g(0)=0$ 이므로

$$f(x) = x+1, g(x) = x(2x-1) = 2x^2 - x \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

$$\therefore f(1) + g(-1) = (1+1) + (2+1) = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

단계	채점 기준	비율
①	$f(x)+g(x), f(x)g(x)$ 구하기	50 %
②	$f(x), g(x)$ 구하기	30 %
③	$f(1)+g(-1)$ 의 값 구하기	20 %

450 ㉮ -1

함수 $y=f'(x)$ 의 그래프에서

$$f'(x) = \begin{cases} -x+2 & (x \geq 1) \\ 1 & (x < 1) \end{cases}$$

(i) $x \geq 1$ 일 때

$$f(x) = \int (-x+2) dx = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + C_1$$

(ii) $x < 1$ 일 때

$$f(x) = \int dx = x + C_2$$

(i), (ii)에서

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 2x + C_1 & (x \geq 1) \\ x + C_2 & (x < 1) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 원점을 지나므로 $f(0)=0$ 에서

$$C_2 = 0$$

함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \text{에서}$$

$$1+0 = -\frac{1}{2} + 2 + C_1 \quad \therefore C_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{2} & (x \geq 1) \\ x & (x < 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(3) + f(-2) = \left(-\frac{9}{2} + 6 - \frac{1}{2}\right) + (-2) = -1$$

451 ㉮ ④

$f(x)$ 의 최고차항이 x^3 이므로 $f'(x)$ 의 최고차항은 $3x^2$ 이다.

$$(㉮), (㉮) \text{에서 } f'(-1) = f'(1) = 0$$

따라서 $f'(x) = 3(x+1)(x-1) = 3x^2 - 3$ 이므로

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x^2 - 3) dx = x^3 - 3x + C$$

(㉮)에서 $f(-1) = 4$ 이므로

$$-1 + 3 + C = 4 \quad \therefore C = 2$$

따라서 $f(x) = x^3 - 3x + 2$ 이므로

$$f(2) = 8 - 6 + 2 = 4$$

452 ㉮ 5

| 접근 방법 | 적분과 미분의 관계를 이용하여 함수 $g(x)$ 의 차수를 추론한다.

$$f(x) = \int xg(x) dx \text{에서}$$

$$f'(x) = xg(x)$$

$$\frac{d}{dx} \{f(x) - g(x)\} = 3x^3 - 4x \text{에서}$$

$$f'(x) - g'(x) = 3x^3 - 4x$$

$$\therefore xg(x) - g'(x) = 3x^3 - 4x \quad \dots\dots \textcircled{㉮}$$

$g(x)$ 를 n 차함수라 하면 $xg(x)$ 는 $(n+1)$ 차함수이고 $g'(x)$ 는 $(n-1)$ 차함수이므로 ㉠의 좌변의 차수는 $n+1$ 이다.

즉, $n+1=3$ 이므로 $n=2$

따라서 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로 $g(x)=3x^2+ax+b$ (a, b 는 상수)라 하면

$$g'(x)=6x+a$$

$g(x)$ 와 $g'(x)$ 를 ㉠에 대입하면

$$x(3x^2+ax+b)-(6x+a)=3x^3-4x$$

$$\therefore 3x^3+ax^2+(b-6)x-a=3x^3-4x$$

즉, $a=0, b-6=-4$ 이므로

$$a=0, b=2$$

따라서 $g(x)=3x^2+2$ 이므로

$$g(1)=3+2=5$$

453 ㉡ $\frac{5}{3}$

| 접근 방법 | 도함수를 이용하여 접점의 좌표를 구하고, 이 접점이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점임을 이용하여 적분상수를 구한다.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x) dx = \int (2x^2 - 5x - 1) dx \\ &= \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + C \end{aligned}$$

직선 $y=2x-9$ 와 곡선 $y=f(x)$ 의 접점의 좌표를 $(a, 2a-9)$ ($a>0$)라 하면 이 점에서의 접선의 기울기는 2이므로 $f'(a)=2$ 에서

$$2a^2 - 5a - 1 = 2, 2a^2 - 5a - 3 = 0$$

$$(2a+1)(a-3)=0$$

$$\therefore a=3 \quad (\because a>0)$$

따라서 접점의 좌표는 $(3, -3)$ 이므로 $f(3)=-3$ 에서

$$18 - \frac{45}{2} - 3 + C = -3$$

$$\therefore C = \frac{9}{2}$$

따라서 $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - x + \frac{9}{2}$ 이므로

$$f(1) = \frac{2}{3} - \frac{5}{2} - 1 + \frac{9}{2} = \frac{5}{3}$$

454 ㉡ ④

| 접근 방법 | 방정식 $f(x)=f(4)$ 가 서로 다른 두 실근을 가지면 함수 $y=f(x)-f(4)$ 의 그래프와 x 축이 서로 다른 두 개의 교점을 가짐을 이용하여 함수 $y=f(x)-f(4)$ 의 그래프의 개형을 추론한다.

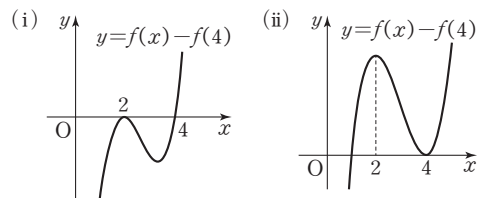
(다)에서 함수 $y=f(x)-f(4)$ 의 그래프와 x 축은 서로 다른 두 개의 교점을 갖는다.

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $f(4)$ 는 상수이므로 함수 $y=f(x)-f(4)$ 도 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

(나)에서 $f'(2)=0$ 이고 $\{f(x)-f(4)\}'=f'(x)$ 이므로 함수 $y=f(x)-f(4)$ 도 $x=2$ 에서 극댓값을 갖는다.

또 $y=f(4)-f(4)=0$ 이므로 함수 $y=f(x)-f(4)$ 의 그래프는 점 $(4, 0)$ 을 지난다.

따라서 함수 $y=f(x)-f(4)$ 의 그래프의 개형은 다음 그림과 같이 두 가지 경우가 있다.



(i) 함수 $y=f(x)-f(4)$ 의 그래프가 $x=2$ 에서 x 축에 접하는 경우

$f(x)-f(4)=(x-2)^2(x-4)$ 이므로 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-2)(x-4) + (x-2)^2 \\ &= (x-2)(3x-10) \end{aligned}$$

이때 $f'\left(\frac{11}{3}\right) = \frac{5}{3} \times 1 > 0$ 이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) 함수 $y=f(x)-f(4)$ 의 그래프가 $x=4$ 에서 x 축에 접하는 경우

$f'(2)=0, f'(4)=0$ 이고 $f'(x)$ 는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

$$f'(x)=3(x-2)(x-4)$$

이때 $f'\left(\frac{11}{3}\right) = 3 \times \frac{5}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) < 0$ 이므로 (가)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서

$$f'(x)=3(x-2)(x-4)=3x^2-18x+24$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx \\ &= \int (3x^2 - 18x + 24) dx \\ &= x^3 - 9x^2 + 24x + C \end{aligned}$$

(나)에서 $f(2)=35$ 이므로

$$8 - 36 + 48 + C = 35 \quad \therefore C = 15$$

따라서 $f(x)=x^3-9x^2+24x+15$ 이므로

$$f(0)=15$$

01 정적분 (1)

유제

225-237쪽

455 ㉡ 10

$f(x) = \int_1^x (3t^2 - t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = 3x^2 - x$$

$$\therefore f'(2) = 12 - 2 = 10$$

456 ㉡ (1) $\frac{27}{2}$ (2) $\frac{20}{3}$ (3) 0 (4) $-\frac{25}{3}$

$$(1) \int_{-2}^1 (6x^2 - x - 2) dx$$

$$= \left[2x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_{-2}^1$$

$$= \left(2 - \frac{1}{2} - 2 \right) - (-16 - 2 + 4)$$

$$= \frac{27}{2}$$

$$(2) \int_1^3 \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx$$

$$= \int_1^3 \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x+1} dx$$

$$= \int_1^3 (x^2 - x + 1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_1^3$$

$$= \left(9 - \frac{9}{2} + 3 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right)$$

$$= \frac{20}{3}$$

$$(3) \int_a^a f(x) dx = 0 \text{ 이므로}$$

$$\int_1^1 (y^4 + 3y^3 + 2y^2 + 4) dy = 0$$

$$(4) \int_{-1}^{-2} (2x+1)(2x-1) dx$$

$$= \int_{-1}^{-2} (4x^2 - 1) dx$$

$$= \left[\frac{4}{3}x^3 - x \right]_{-1}^{-2}$$

$$= \left(-\frac{32}{3} + 2 \right) - \left(-\frac{4}{3} + 1 \right) = -\frac{25}{3}$$

|참고| (4)의 경우

$$\int_{-1}^{-2} (2x+1)(2x-1) dx = -\int_{-2}^{-1} (2x+1)(2x-1) dx \text{ 임}$$

을 이용하여 풀 수도 있다.

457 ㉡ 4

$f(x) = \int_{-1}^x (t^3 - 3t^2 + 2t - 4) dt$ 의 양변을 x 에 대하여

미분하면

$$f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 4$$

$$\therefore \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3) + f(3) - f(3-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$- \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3-h) - f(3)}{-h} \times (-1)$$

$$= f'(3) + f'(3) = 2f'(3)$$

$$= 2(27 - 27 + 6 - 4) = 4$$

458 ㉡ ①

$$\int_0^a (3x^2 - 4) dx = \left[x^3 - 4x \right]_0^a = a^3 - 4a$$

따라서 $a^3 - 4a = 0$ 이므로

$$a(a+2)(a-2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

459 ㉡ (1) $\frac{56}{3}$ (2) $\frac{5}{6}$

$$(1) \int_2^4 (x-3)^2 dx + \int_2^4 (6x-9) dx$$

$$= \int_2^4 (x^2 - 6x + 9) dx + \int_2^4 (6x - 9) dx$$

$$= \int_2^4 \{ (x^2 - 6x + 9) + (6x - 9) \} dx$$

$$= \int_2^4 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_2^4$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{8}{3} = \frac{56}{3}$$

$$(2) \int_{-1}^0 \frac{x^3}{x-1} dx - \int_{-1}^0 \frac{1}{y-1} dy$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{x^3}{x-1} dx - \int_{-1}^0 \frac{1}{x-1} dx$$

$$= \int_{-1}^0 \left(\frac{x^3}{x-1} - \frac{1}{x-1} \right) dx = \int_{-1}^0 \frac{x^3 - 1}{x-1} dx$$

$$= \int_{-1}^0 \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1} dx$$

$$= \int_{-1}^0 (x^2 + x + 1) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^0$$

$$= -\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{5}{6}$$

460 ㉮ (1) $\frac{13}{3}$ (2) $\frac{9}{2}$

$$\begin{aligned}
 (1) & \int_2^3 (2x-1) dx - \int_3^2 (-t+2)^2 dt \\
 &= \int_2^3 (2x-1) dx + \int_2^3 (-x+2)^2 dx \\
 &= \int_2^3 (2x-1) dx + \int_2^3 (x^2-4x+4) dx \\
 &= \int_2^3 \{(2x-1) + (x^2-4x+4)\} dx \\
 &= \int_2^3 (x^2-2x+3) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 3x \right]_2^3 \\
 &= (9-9+9) - \left(\frac{8}{3} - 4 + 6 \right) \\
 &= \frac{13}{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) & \int_{-1}^2 \frac{x^3}{x^2-x+1} dx - \int_2^{-1} \frac{1}{x^2-x+1} dx \\
 &= \int_{-1}^2 \frac{x^3}{x^2-x+1} dx + \int_{-1}^2 \frac{1}{x^2-x+1} dx \\
 &= \int_{-1}^2 \left(\frac{x^3}{x^2-x+1} + \frac{1}{x^2-x+1} \right) dx \\
 &= \int_{-1}^2 \frac{x^3+1}{x^2-x+1} dx \\
 &= \int_{-1}^2 \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1} dx \\
 &= \int_{-1}^2 (x+1) dx \\
 &= \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_{-1}^2 \\
 &= (2+2) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \\
 &= \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

461 ㉮ 22

$$\begin{aligned}
 & \int_1^3 (x^2-x+4) dx + 2 \int_3^1 (-x^2+x) dx \\
 &= \int_1^3 (x^2-x+4) dx - \int_1^3 (-2x^2+2x) dx \\
 &= \int_1^3 \{(x^2-x+4) - (-2x^2+2x)\} dx \\
 &= \int_1^3 (3x^2-3x+4) dx \\
 &= \left[x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x \right]_1^3 \\
 &= \left(27 - \frac{27}{2} + 12 \right) - \left(1 - \frac{3}{2} + 4 \right) \\
 &= 22
 \end{aligned}$$

462 ㉮ 5

$$\begin{aligned}
 & \int_1^2 (x+k)^2 dx - \int_1^2 (x-k)^2 dx \\
 &= \int_1^2 (x^2+2kx+k^2) dx - \int_1^2 (x^2-2kx+k^2) dx \\
 &= \int_1^2 \{(x^2+2kx+k^2) - (x^2-2kx+k^2)\} dx \\
 &= \int_1^2 4kx dx \\
 &= \left[2kx^2 \right]_1^2 \\
 &= 8k - 2k = 6k \\
 &\text{따라서 } 6k = 30 \Rightarrow \text{므로} \\
 &k = 5
 \end{aligned}$$

463 ㉮ (1) -8 (2) 2

$$\begin{aligned}
 (1) & \int_{-1}^2 (3x^2-4x-5) dx + \int_2^3 (3x^2-4x-5) dx \\
 &= \int_{-1}^3 (3x^2-4x-5) dx \\
 &= \left[x^3 - 2x^2 - 5x \right]_{-1}^3 \\
 &= (27-18-15) - (-1-2+5) \\
 &= -8 \\
 (2) & \int_0^3 (2x-1) dx + \int_3^4 (2x-1) dx \\
 &\quad + \int_4^{-1} (2x-1) dx \\
 &= \int_0^4 (2x-1) dx + \int_4^{-1} (2x-1) dx \\
 &= \int_0^{-1} (2x-1) dx \\
 &= \left[x^2 - x \right]_0^{-1} \\
 &= 1 + 1 = 2
 \end{aligned}$$

464 ㉮ (1) 21 (2) 20

$$\begin{aligned}
 (1) & \int_{-2}^{-1} (6x^2-2x) dx - \int_1^{-1} (6x^2-2x) dx \\
 &= \int_{-2}^{-1} (6x^2-2x) dx + \int_{-1}^1 (6x^2-2x) dx \\
 &= \int_{-2}^1 (6x^2-2x) dx \\
 &= \left[2x^3 - x^2 \right]_{-2}^1 \\
 &= (2-1) - (-16-4) \\
 &= 21
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \int_1^5 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx &+ \int_5^2 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx \\
&- \int_1^0 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx \\
&= \int_1^2 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx - \int_1^0 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx \\
&= \int_0^1 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx + \int_1^2 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx \\
&= \int_0^2 (4x^3 + 3x^2 - 2) dx \\
&= \left[x^4 + x^3 - 2x \right]_0^2 \\
&= 16 + 8 - 4 = 20
\end{aligned}$$

465 $\square - \frac{9}{4}$

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 (x^3 - 4x) dx + \int_2^1 (-x^3 + 4x) dx \\
&= \int_{-1}^1 (x^3 - 4x) dx - \int_1^2 (-x^3 + 4x) dx \\
&= \int_{-1}^1 (x^3 - 4x) dx + \int_1^2 (x^3 - 4x) dx \\
&= \int_{-1}^2 (x^3 - 4x) dx \\
&= \left[\frac{1}{4} x^4 - 2x^2 \right]_{-1}^2 \\
&= (4 - 8) - \left(\frac{1}{4} - 2 \right) = -\frac{9}{4}
\end{aligned}$$

466 $\square 5$

$$\begin{aligned}
&\int_2^5 f(x) dx + \int_5^7 f(x) dx = \int_2^7 f(x) dx \text{ 이므로} \\
&\int_2^5 f(x) dx = \int_2^7 f(x) dx - \int_5^7 f(x) dx \\
&= 9 - 4 = 5
\end{aligned}$$

467 $\square \frac{43}{6}$

$0 \leq x \leq 1$ 일 때 $f(x) = -x^2 + 3x$ 이고, $1 \leq x \leq 3$ 일 때 $f(x) = x + 1$ 이므로

$$\begin{aligned}
\int_0^3 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx \\
&= \int_0^1 (-x^2 + 3x) dx + \int_1^3 (x + 1) dx \\
&= \left[-\frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2} x^2 + x \right]_1^3 \\
&= \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \right) + \left(\frac{9}{2} + 3 \right) - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \\
&= \frac{43}{6}
\end{aligned}$$

468 $\square (1) 3 (2) \frac{5}{2}$

(1) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값을 구하면

$$3 - x = 0 \quad \therefore x = 3$$

$$\text{따라서 } x|3-x| = \begin{cases} x^2 - 3x & (x \geq 3) \\ -x^2 + 3x & (x \leq 3) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}
&\int_2^4 x|3-x| dx \\
&= \int_2^3 (-x^2 + 3x) dx + \int_3^4 (x^2 - 3x) dx \\
&= \left[-\frac{1}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 \right]_2^3 + \left[\frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 \right]_3^4 \\
&= \left(-9 + \frac{27}{2} \right) - \left(-\frac{8}{3} + 6 \right) \\
&\quad + \left(\frac{64}{3} - 24 \right) - \left(9 - \frac{27}{2} \right) \\
&= 3
\end{aligned}$$

(2) 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값을 구하면

$$x^2 - 4 = 0, (x+2)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

$$\text{따라서 } |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & (x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 2) \\ -x^2 + 4 & (-2 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned}
&\int_1^4 \frac{|x^2 - 4|}{x + 2} dx \\
&= \int_1^2 \frac{-(x^2 - 4)}{x + 2} dx + \int_2^4 \frac{x^2 - 4}{x + 2} dx \\
&= \int_1^2 \frac{-(x+2)(x-2)}{x+2} dx \\
&\quad + \int_2^4 \frac{(x+2)(x-2)}{x+2} dx \\
&= \int_1^2 (-x+2) dx + \int_2^4 (x-2) dx \\
&= \left[-\frac{1}{2} x^2 + 2x \right]_1^2 + \left[\frac{1}{2} x^2 - 2x \right]_2^4 \\
&= (-2 + 4) - \left(-\frac{1}{2} + 2 \right) + (8 - 8) - (2 - 4) \\
&= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

469 $\square \frac{13}{2}$

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - 3x + 1 & (x \geq 0) \\ 3x + 1 & (x \leq 0) \end{cases} \text{이므로}$$

$$xf(x) = \begin{cases} 4x^3 - 3x^2 + x & (x \geq 0) \\ 3x^2 + x & (x \leq 0) \end{cases}$$

$-2 \leq x \leq 0$ 일 때 $xf(x) = 3x^2 + x$, $0 \leq x \leq 1$ 일 때 $xf(x) = 4x^3 - 3x^2 + x$ 이므로

$$\begin{aligned} & \int_{-2}^1 xf(x) dx \\ &= \int_{-2}^0 xf(x) dx + \int_0^1 xf(x) dx \\ &= \int_{-2}^0 (3x^2 + x) dx + \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + x) dx \\ &= \left[x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^0 + \left[x^4 - x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= -(-8 + 2) + \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

470 ㉮ 21

$$|x-1| + |x-5| = \begin{cases} 2x-6 & (x \geq 5) \\ 4 & (1 \leq x \leq 5) \\ -2x+6 & (x \leq 1) \end{cases} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^5 (|x-1| + |x-5|) dx \\ &= \int_0^1 (-2x+6) dx + \int_1^5 4 dx \\ &= \left[-x^2 + 6x \right]_0^1 + \left[4x \right]_1^5 \\ &= (-1 + 6) + 20 - 4 = 21 \end{aligned}$$

471 ㉮ 150

$$\begin{aligned} & \int_{-3}^3 (5x^3 + 9x^2 + 4x - 2) dx \\ &= \int_{-3}^3 (5x^3 + 4x) dx + \int_{-3}^3 (9x^2 - 2) dx \\ &= 0 + 2 \int_0^3 (9x^2 - 2) dx \\ &= 2 \left[3x^3 - 2x \right]_0^3 \\ &= 2(81 - 6) = 150 \end{aligned}$$

472 ㉮ 30

$$\begin{aligned} & \int_{-5}^5 (-4x^3 + 3x + 5)f(x) dx \\ &= -4 \int_{-5}^5 x^3 f(x) dx + 3 \int_{-5}^5 x f(x) dx + 5 \int_{-5}^5 f(x) dx \\ & \dots \dots \text{㉮} \end{aligned}$$

이때 $p(x) = x^3 f(x)$, $q(x) = x f(x)$ 라 하면

$$f(-x) = f(x) \text{이므로}$$

$$p(-x) = (-x)^3 f(-x) = -x^3 f(x) = -p(x)$$

$$q(-x) = -x f(-x) = -x f(x) = -q(x)$$

따라서 ㉮에서

$$\begin{aligned} & \int_{-5}^5 (-4x^3 + 3x + 5)f(x) dx \\ &= -4 \times 0 + 3 \times 0 + 5 \times 2 \int_0^5 f(x) dx \\ &= 10 \int_0^5 f(x) dx \\ &= 10 \times 3 = 30 \end{aligned}$$

473 ㉮ 2

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a (x^7 - 4x^5 - 3x^2 + 2x + 1) dx \\ &= \int_{-a}^a (x^7 - 4x^5 + 2x) dx + \int_{-a}^a (-3x^2 + 1) dx \\ &= 0 + 2 \int_0^a (-3x^2 + 1) dx \\ &= 2 \left[-x^3 + x \right]_0^a = 2(-a^3 + a) \end{aligned}$$

따라서 $2(-a^3 + a) = -12$ 이므로

$$a^3 - a - 6 = 0, (a-2)(a^2 + 2a + 3) = 0$$

$\therefore a = 2$ ($\because a$ 는 실수)

474 ㉮ 10

$f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-4}^4 \{f(x) + g(x)\} dx &= \int_{-4}^4 f(x) dx + \int_{-4}^4 g(x) dx \\ &= 2 \int_0^4 f(x) dx + 0 \\ &= 2 \times 5 = 10 \end{aligned}$$

475 ㉮ 96

$f(x+4) = f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_2^6 f(x) dx = \int_6^{10} f(x) dx \\ \therefore \int_{-2}^{10} f(x) dx \end{aligned}$$

$$= \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx + \int_6^{10} f(x) dx$$

$$= 3 \int_{-2}^2 f(x) dx$$

$$= 3 \int_{-2}^2 (3x^2 + 4) dx$$

$$= 6 \int_0^2 (3x^2 + 4) dx$$

$$= 6 \left[x^3 + 4x \right]_0^2$$

$$= 6(8 + 8) = 96$$

476 ㉡ 16

(㉡)에서 $f(x+3)=f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-4}^{-1} f(x) dx &= \int_{-1}^2 f(x) dx = \int_2^5 f(x) dx \\ &= \int_5^8 f(x) dx \\ \therefore \int_{-4}^8 f(x) dx &= \int_{-4}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^2 f(x) dx \\ &\quad + \int_2^5 f(x) dx + \int_5^8 f(x) dx \\ &= 4 \int_{-4}^{-1} f(x) dx \\ &= 4 \times 4 = 16 \quad (\because \text{㉡})\end{aligned}$$

477 ㉡ $\frac{10}{3}$

$$\begin{aligned}f(x+2)=f(x) \text{ 이므로 } \int_0^2 f(x) dx &= \int_2^4 f(x) dx \\ \therefore \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \\ &= 2 \int_0^2 f(x) dx\end{aligned}$$

이때 $\int_0^2 f(x) dx$ 의 값을 구하면

$$\begin{aligned}\int_0^2 f(x) dx &= \int_0^1 2x^2 dx + \int_1^2 (-2x+4) dx \\ &= \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[-x^2 + 4x \right]_1^2 \\ &= \frac{2}{3} + (-4+8) - (-1+4) = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^4 f(x) dx = 2 \int_0^2 f(x) dx = 2 \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$$

478 ㉡ ④

$f(x+5)=f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{-2} f(x) dx &= \int_2^3 f(x) dx = \int_7^8 f(x) dx \\ &= \int_{12}^{13} f(x) dx = \int_{17}^{18} f(x) dx\end{aligned}$$

따라서 $\int_2^3 f(x) dx$ 와 그 값이 항상 같은 것이 아닌 것은 ④이다.

연습문제

238~241쪽

479 ㉡ ①

$$\begin{aligned}\int_a^x f(t) dt &= x^2 - 3x \text{의 양변을 } x \text{에 대하여 미분하면} \\ \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt &= (x^2 - 3x)' \quad \therefore f(x) = 2x - 3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_2^4 f(x) dx &= \int_2^4 (2x-3) dx = \left[x^2 - 3x \right]_2^4 \\ &= (16-12) - (4-6) = 6\end{aligned}$$

480 ㉡ ②

$$\begin{aligned}\int_1^2 (4x^3 + 9x^2 + a) dx &+ \int_5^2 (2x^3 - 3x^2 + a) dx \\ &= \left[x^4 + 3x^3 + ax \right]_1^2 + 0 \\ &= (16+24+2a) - (1+3+a) \\ &= a+36\end{aligned}$$

따라서 $a+36=40$ 이므로 $a=4$

481 ㉡ 4

$$\begin{aligned}4 \int_1^k (x-1) dx - \int_1^k 4 dx &= \int_1^k (4x-4) dx - \int_1^k 4 dx \\ &= \int_1^k (4x-8) dx \\ &= \left[2x^2 - 8x \right]_1^k \\ &= (2k^2 - 8k) - (2 - 8) \\ &= 2k^2 - 8k + 6\end{aligned}$$

따라서 $2k^2 - 8k + 6 = 1$, 즉 $2k^2 - 8k + 5 = 0$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 합은 4이다.

482 ㉡ 3

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx - \int_2^1 f(x) dx &= \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= \int_0^2 f(x) dx \\ &= \int_0^2 (3x^2 + 2kx - 1) dx \\ &= \left[x^3 + kx^2 - x \right]_0^2 \\ &= 8 + 4k - 2 = 4k + 6\end{aligned}$$

따라서 $4k+6=18$ 이므로 $k=3$

483 ㉡ 6

$$\begin{aligned}\int_{-2}^3 f(x) dx \\ &= \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx \\ &= \left\{ \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^0 f(x) dx \right\} + \int_0^3 f(x) dx \\ &= \left\{ \int_{-2}^1 f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right\} + \int_0^3 f(x) dx \\ &= (2-3) + 7 = 6\end{aligned}$$

484 ㉔ 7/6

주어진 그래프에서 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ x+1 & (x \leq 0) \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} xf(x) &= \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ x^2+x & (x \leq 0) \end{cases} \\ \therefore \int_{-2}^1 xf(x) dx &= \int_{-2}^0 (x^2+x) dx + \int_0^1 x dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 \\ &= -\left(-\frac{8}{3} + 2\right) + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} \end{aligned}$$

485 ㉔ 3

$|x-2| = \begin{cases} x-2 & (x \geq 2) \\ -x+2 & (x \leq 2) \end{cases}$ 이고, $a > 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^a |x-2| dx &= \int_0^2 (-x+2) dx + \int_2^a (x-2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_0^2 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_2^a \\ &= (-2+4) + \left(\frac{1}{2}a^2 - 2a \right) - (-2+4) \\ &= \frac{1}{2}a^2 - 2a + 4 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{1}{2}a^2 - 2a + 4 = \frac{5}{2}$ 이므로

$$a^2 - 4a + 3 = 0, (a-1)(a-3) = 0$$

$$\therefore a = 3 \quad (\because a > 2)$$

486 ㉔ 24

$$\begin{aligned} 2x^3 + 6|x| &= \begin{cases} 2x^3 + 6x & (x \geq 0) \\ 2x^3 - 6x & (x \leq 0) \end{cases} \text{ 이므로} \\ \int_{-3}^2 (2x^3 + 6|x|) dx - \int_{-3}^{-2} (2x^3 - 6x) dx &= \int_{-3}^0 (2x^3 - 6x) dx + \int_0^2 (2x^3 + 6x) dx \\ &\quad - \int_{-3}^{-2} (2x^3 - 6x) dx \\ &= \int_{-2}^{-3} (2x^3 - 6x) dx + \int_{-3}^0 (2x^3 - 6x) dx \\ &\quad + \int_0^2 (2x^3 + 6x) dx \\ &= \int_{-2}^0 (2x^3 - 6x) dx + \int_0^2 (2x^3 + 6x) dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x^4 - 3x^2 \right]_{-2}^0 + \left[\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 \right]_{0}^2 \\ &= -(8-12) + (8+12) = 24 \end{aligned}$$

487 ㉔ ⑤

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(x) dx &= \int_{-1}^1 (1+2x+3x^2+\cdots+30x^{29}) dx \\ &= \int_{-1}^1 (1+3x^2+5x^4+\cdots+29x^{28}) dx \\ &\quad + \int_{-1}^1 (2x+4x^3+6x^5+\cdots+30x^{29}) dx \\ &= 2 \int_0^1 (1+3x^2+5x^4+\cdots+29x^{28}) dx \\ &= 2 \left[x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{29} \right]_0^1 \\ &= 2(1+1+1+\cdots+1) \\ &\quad \text{15개} \\ &= 2 \times 15 = 30 \end{aligned}$$

488 ㉔ 24

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 (2x^2+4x-5)f(x) dx &= 2 \int_{-3}^3 x^2 f(x) dx + 4 \int_{-3}^3 x f(x) dx - 5 \int_{-3}^3 f(x) dx \\ &\quad \dots \text{㉔} \end{aligned}$$

이때 $p(x) = x^2 f(x)$, $q(x) = x f(x)$ 라 하면

$f(-x) + f(x) = 0$ 에서 $f(-x) = -f(x)$ 이므로

$$p(-x) = (-x)^2 f(-x) = -x^2 f(x) = -p(x)$$

$$q(-x) = -x f(-x) = x f(x) = q(x)$$

따라서 ㉔ 에서

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 (2x^2+4x-5)f(x) dx &= 2 \times 0 + 4 \times 2 \int_0^3 x f(x) dx - 5 \times 0 \\ &= 8 \int_0^3 x f(x) dx = 8 \times 3 = 24 \end{aligned}$$

489 ㉔ 24

$f(x+4) = f(x)$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-3}^1 f(x) dx &= \int_1^5 f(x) dx = \int_5^9 f(x) dx \\ &= \int_9^{13} f(x) dx = \int_{13}^{17} f(x) dx \\ &= \int_{17}^{21} f(x) dx \\ \therefore \int_5^{21} f(x) dx &= \int_5^9 f(x) dx + \int_9^{13} f(x) dx \\ &\quad + \int_{13}^{17} f(x) dx + \int_{17}^{21} f(x) dx \\ &= 4 \int_{-3}^1 f(x) dx \end{aligned}$$

이때 $\int_{-3}^1 f(x) dx$ 의 값을 구하면

$$\begin{aligned}\int_{-3}^1 f(x) dx &= \int_{-3}^0 \left(-\frac{1}{3}x+1\right) dx + \int_0^1 (x+1) dx \\ &= \left[-\frac{1}{6}x^2+x\right]_{-3}^0 + \left[\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^1 \\ &= -\left(-\frac{3}{2}-3\right) + \left(\frac{1}{2}+1\right) \\ &= 6\end{aligned}$$

▶▶▶▶▶ ②

$$\begin{aligned}\therefore \int_5^{21} f(x) dx &= 4 \int_{-3}^1 f(x) dx \\ &= 4 \times 6 = 24\end{aligned}$$

▶▶▶▶▶ ③

단계	채점 기준	비율
①	$\int_5^{21} f(x) dx$ 를 $\int_{-3}^1 f(x) dx$ 에 대한 식으로 나타내기	50 %
②	$\int_{-3}^1 f(x) dx$ 의 값 구하기	40 %
③	$\int_5^{21} f(x) dx$ 의 값 구하기	10 %

490 ㉡ 18

이차방정식 $x^2-x-3=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=1, \alpha\beta=-3$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_a^{-\beta} (-6x^2+2) dx &= \left[-2x^3+2x\right]_a^{-\beta} \\ &= (2\beta^3-2\beta) - (-2\alpha^3+2\alpha) \\ &= 2(\alpha^3+\beta^3) - 2(\alpha+\beta) \\ &= 2\{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)\} - 2(\alpha+\beta) \\ &= 2(1+9) - 2 = 18\end{aligned}$$

491 ㉡ ③

$$\int_{-2}^4 f(x) dx = \alpha, \int_{-2}^4 g(x) dx = \beta \quad (\alpha, \beta \text{는 상수}) \text{라 하면}$$

$$\int_{-2}^4 \{f(x)-g(x)\} dx = -4 \text{에서}$$

$$\int_{-2}^4 f(x) dx - \int_{-2}^4 g(x) dx = -4$$

$$\therefore \alpha - \beta = -4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\int_{-2}^4 \{3f(x)+2g(x)\} dx = 3 \text{에서}$$

$$3 \int_{-2}^4 f(x) dx + 2 \int_{-2}^4 g(x) dx = 3$$

$$3\alpha + 2\beta = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $\alpha = -1, \beta = 3$

$$\begin{aligned}\therefore \int_{-2}^4 \{f(x)+g(x)\} dx &= \int_{-2}^4 f(x) dx + \int_{-2}^4 g(x) dx \\ &= \alpha + \beta = 2\end{aligned}$$

492 ㉡ -4

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx \text{에서}$$

$$\int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$$

$$\therefore \int_{-1}^0 f(x) dx = 0$$

$$\therefore \int_0^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx = 0$$

$f(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c 는 상수, $a \neq 0$)라 하면 $f(0) = 2$ 에서 $c = 2$

$$\therefore f(x) = ax^2 + bx + 2$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (ax^2 + bx + 2) dx$$

$$= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + 2x \right]_0^1$$

$$= \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 2$$

따라서 $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + 2 = 0$ 이므로

$$2a + 3b = -12 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (ax^2 + bx + 2) dx$$

$$= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^0$$

$$= -\left(-\frac{a}{3} + \frac{b}{2} - 2\right)$$

$$= \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + 2$$

따라서 $\frac{a}{3} - \frac{b}{2} + 2 = 0$ 이므로

$$2a - 3b = -12 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = -6, b = 0$

따라서 $f(x) = -6x^2 + 2$ 이므로

$$f(1) = -6 + 2 = -4$$

493 ㉡ ④

$$f(x) = \begin{cases} 4x-2 & (x \geq 3) \\ x^2+1 & (x \leq 3) \end{cases} \text{이므로}$$

$$f(x+1) = \begin{cases} 4x+2 & (x \geq 2) \\ x^2+2x+2 & (x \leq 2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \int_1^3 f(x+1) dx &= \int_1^2 (x^2+2x+2) dx + \int_2^3 (4x+2) dx \\
 &= \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x \right]_1^2 + \left[2x^2 + 2x \right]_2^3 \\
 &= \left(\frac{8}{3} + 4 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + 1 + 2 \right) + (18+6) - (8+4) \\
 &= \frac{58}{3}
 \end{aligned}$$

494 ㉓ ③

$$x|x-2a| = \begin{cases} x^2-2ax & (x \geq 2a) \\ -x^2+2ax & (x \leq 2a) \end{cases} \text{ 이고, } 0 < 2a < 4$$

이므로

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 x|x-2a| dx &= \int_0^{2a} (-x^2+2ax) dx + \int_{2a}^4 (x^2-2ax) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax^2 \right]_0^{2a} + \left[\frac{1}{3}x^3 - ax^2 \right]_{2a}^4 \\
 &= \left(-\frac{8}{3}a^3 + 4a^3 \right) + \left(\frac{64}{3} - 16a \right) - \left(\frac{8}{3}a^3 - 4a^3 \right) \\
 &= \frac{8}{3}a^3 - 16a + \frac{64}{3}
 \end{aligned}$$

$$f(a) = \frac{8}{3}a^3 - 16a + \frac{64}{3} \text{ 라 하면}$$

$$f'(a) = 8a^2 - 16 = 8(a + \sqrt{2})(a - \sqrt{2})$$

$$f'(a) = 0 \text{ 인 } a \text{ 의 값은 } a = \sqrt{2} \text{ (} \because 0 < a < 2 \text{)}$$

$0 < a < 2$ 에서 함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

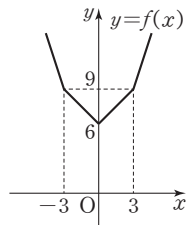
a	0	...	$\sqrt{2}$	...	2
$f'(a)$		-	0	+	
$f(a)$		\	극소	/	

따라서 함수 $f(a)$ 는 $a = \sqrt{2}$ 일 때 최소이다.

495 ㉓ 5

$$f(x) = \begin{cases} 3x & (x \geq 3) \\ x+6 & (0 \leq x \leq 3) \\ -x+6 & (-3 \leq x \leq 0) \\ -3x & (x \leq -3) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



$$\begin{aligned}
 \int_{-3}^0 f(x) dx &= \int_{-3}^0 (-x+6) dx = \left[-\frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{-3}^0 \\
 &= -\left(-\frac{9}{2} - 18 \right) = \frac{45}{2}
 \end{aligned}$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 y 축에 대하여 대칭이므로

$$\int_{-3}^3 f(x) dx = 2 \int_{-3}^0 f(x) dx = 2 \times \frac{45}{2} = 45$$

$$\text{따라서 } \int_{-3}^a f(x) dx = 69 \text{에서}$$

$$\int_{-3}^3 f(x) dx + \int_3^a f(x) dx = 69$$

$$45 + \int_3^a f(x) dx = 69 \quad \therefore \int_3^a f(x) dx = 24$$

$$\text{즉, } \int_3^a 3x dx = 24 \text{이므로}$$

$$\left[\frac{3}{2}x^2 \right]_3^a = 24, \quad \frac{3}{2}a^2 - \frac{27}{2} = 24$$

$$a^2 = 25 \quad \therefore a = 5 \text{ (} \because a > 0 \text{)}$$

496 ㉓ ②

$$h(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -h(x)$$

$$p(x) = xh(x) \text{라 하면}$$

$$p(-x) = -xh(-x) = xh(x) = p(x) \text{이므로}$$

$$\int_{-2}^2 (3x-2)h(x) dx = 3 \int_{-2}^2 xh(x) dx - 2 \int_{-2}^2 h(x) dx$$

$$= 3 \times 2 \int_0^2 xh(x) dx - 2 \times 0$$

$$= 6 \int_0^2 xh(x) dx$$

$$\text{따라서 } 6 \int_0^2 xh(x) dx = 12 \text{이므로 } \int_0^2 xh(x) dx = 2$$

497 ㉓ 0

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①의 양변에 $x=0, y=0$ 을 대입하면

$$f(0) = f(0) + f(0) \quad \therefore f(0) = 0 \quad \text{..... ①}$$

①의 양변에 y 대신 $-x$ 를 대입하면

$$f(0) = f(x) + f(-x), \quad 0 = f(x) + f(-x)$$

$$\therefore f(-x) = -f(x) \quad \text{..... ②}$$

$$\therefore \int_{-5}^3 f(x) dx + \int_{-3}^5 f(x) dx$$

$$= \int_{-5}^0 f(x) dx + \int_0^3 f(x) dx + \int_{-3}^0 f(x) dx$$

$$+ \int_0^5 f(x) dx$$

$$= \int_{-5}^0 f(x) dx + \int_0^5 f(x) dx + \int_{-3}^0 f(x) dx$$

$$+ \int_0^3 f(x) dx$$

$$= \int_{-5}^5 f(x) dx + \int_{-3}^3 f(x) dx$$

$$= 0 + 0 = 0$$

..... ③

단계	채점 기준	비율
①	$f(0)$ 의 값 구하기	30 %
②	$f(-x) = -f(x)$ 임을 알기	30 %
③	$\int_{-5}^3 f(x) dx + \int_{-3}^5 f(x) dx$ 의 값 구하기	40 %

498 ㉮ ⑤

(가)에서 $f(-x) = f(x)$ 이므로

$$\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 8$$

(나)에서 $f(x+2) = f(x)$ 이므로

$$\int_{-2}^{-1} f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 8$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_{-2}^0 f(x) dx &= \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^0 f(x) dx \\ &= 8 + 8 = 16 \end{aligned}$$

또 $\int_{-2}^0 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx = \int_2^4 f(x) dx$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_{-2}^4 f(x) dx &= \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \\ &= 3 \int_{-2}^0 f(x) dx \\ &= 3 \times 16 = 48 \end{aligned}$$

499 ㉮ 110

| 접근 방법 | $1 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $f(x)$ 를 구하여 정적분의 값을 구한다.

(가), (나)에서 $0 \leq x \leq 1$ 일 때,

$$\begin{aligned} f(x+1) &= xf(x) + ax + b \\ &= x^2 + ax + b \end{aligned}$$

$x+1=t$ 로 놓으면 $1 \leq t \leq 2$ 에서

$$\begin{aligned} f(t) &= (t-1)^2 + a(t-1) + b \\ &= t^2 + (a-2)t + 1 - a + b \end{aligned}$$

$f(1) = 1$ 이므로

$$1 + a - 2 + 1 - a + b = 1 \quad \therefore b = 1$$

$$\therefore f(x) = x^2 + (a-2)x - a + 2 \quad (\text{단, } 1 \leq x \leq 2)$$

함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면

$x=1$ 에서 미분가능하므로 미분계수 $f'(1)$ 이 존재한다.

$$\text{즉, } \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) \text{이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \{2x + (a-2)\} = \lim_{x \rightarrow 1-} 1$$

$$2 + a - 2 = 1 \quad \therefore a = 1$$

따라서 $1 \leq x \leq 2$ 에서 $f(x) = x^2 - x + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_1^2 f(x) dx &= \int_1^2 (x^2 - x + 1) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} - 2 + 2 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{11}{6} \end{aligned}$$

$$\therefore 60 \times \int_1^2 f(x) dx = 60 \times \frac{11}{6} = 110$$

500 ㉮ ②

| 접근 방법 | (나)를 이용하여 $\int_n^{n+3} f(x) dx$ 를 n 에 대한 식으로 나타낸 후 이 식을 이용하여 위끝과 아래끝의 차가 3인 정적분의 값을 구한다.

(나)에서

$$\begin{aligned} \int_n^{n+3} f(x) dx &= \int_n^{n+1} 4x dx \\ &= \left[2x^2 \right]_n^{n+1} \\ &= 2(n+1)^2 - 2n^2 \\ &= 4n + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^9 f(x) dx &= \int_0^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx + \int_6^9 f(x) dx \\ &= 2 + 14 + 26 = 42 \end{aligned}$$

(가)에서 $\int_0^2 f(x) dx = 4$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^8 f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx + \int_5^8 f(x) dx \\ &= 4 + 10 + 22 = 36 \end{aligned}$$

$$\int_0^9 f(x) dx = \int_0^8 f(x) dx + \int_8^9 f(x) dx \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \int_8^9 f(x) dx &= \int_0^9 f(x) dx - \int_0^8 f(x) dx \\ &= 42 - 36 = 6 \end{aligned}$$

501 ㉮ ②

| 접근 방법 | 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프를 그리고 t 의 값의 범위를 나누어 각 경우에서의 최댓값 $g(t)$ 를 구한다.

$$f(x) = x^3 - 12x \text{에서}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	-2	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	16 극대	$\searrow$	-16 극소	$\nearrow$

따라서 함수 $y = |f(x)|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

(i) $-2 \leq t \leq 4$ 일 때

$-2 \leq x \leq t$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값은 16이므로

$$g(t) = 16$$

(ii) $t \geq 4$ 일 때

$-2 \leq x \leq t$ 에서 함수 $|f(x)|$ 의 최댓값은 $f(t)$ 이므로

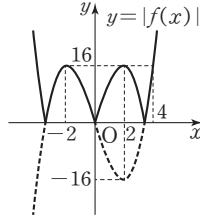
$$g(t) = t^3 - 12t$$

(i), (ii)에서

$$g(t) = \begin{cases} t^3 - 12t & (t \geq 4) \\ 16 & (-2 \leq t \leq 4) \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-2}^6 g(t) dt$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-2}^4 16 dt + \int_4^6 (t^3 - 12t) dt \\ &= \left[16t \right]_{-2}^4 + \left[\frac{1}{4}t^4 - 6t^2 \right]_4^6 \\ &= 64 - (-32) + (324 - 216) - (64 - 96) \\ &= 236 \end{aligned}$$



III-2. 정적분

02 정적분 (2)

유제

245~253쪽

502 ㉠ $f(x) = -6x^2 + 8x + 9$

$$\int_0^3 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \text{로 놓으면}$$

$$f(x) = -6x^2 + 8x + k$$

$$\text{이를 } \int_0^3 f(t) dt = k \text{에 대입하면}$$

$$\int_0^3 (-6t^2 + 8t + k) dt = k$$

$$\left[-2t^3 + 4t^2 + kt \right]_0^3 = k$$

$$-54 + 36 + 3k = k \quad \therefore k = 9$$

$$\therefore f(x) = -6x^2 + 8x + 9$$

503 ㉠ $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$$f(x) = 3x^2 + \int_0^1 (2x - 1)f(t) dt$$

$$= 3x^2 + (2x - 1) \int_0^1 f(t) dt$$

$$\int_0^1 f(t) dt = k \quad (k \text{는 상수}) \text{로 놓으면}$$

$$f(x) = 3x^2 + k(2x - 1) = 3x^2 + 2kx - k$$

$$\text{이를 } \int_0^1 f(t) dt = k \text{에 대입하면}$$

$$\int_0^1 (3t^2 + 2kt - k) dt = k$$

$$\left[t^3 + kt^2 - kt \right]_0^1 = k$$

$$1 + k - k = k \quad \therefore k = 1$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

504 ㉠ 8

$$\int_0^1 f(t) dt = a, \int_0^2 f(t) dt = b \quad (a, b \text{는 상수}) \text{로 놓으면}$$

$$f(x) = 6x^2 - 2ax + b \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \int_0^1 f(t) dt = a \text{에 대입하면}$$

$$\int_0^1 (6t^2 - 2at + b) dt = a$$

$$\left[2t^3 - at^2 + bt \right]_0^1 = a$$

$$2 - a + b = a$$

$$\therefore 2a - b = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \int_0^2 f(t) dt = b \text{에 대입하면}$$

$$\int_0^2 (6t^2 - 2at + b) dt = b$$

$$\left[2t^3 - at^2 + bt \right]_0^2 = b$$

$$16 - 4a + 2b = b$$

$$\therefore 4a - b = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{을 연립하여 풀면}$$

$$a = 7, b = 12$$

$$\text{따라서 } f(x) = 6x^2 - 14x + 12 \text{이므로}$$

$$f(2) = 24 - 28 + 12 = 8$$

505 ㉔ 20

$\int_0^2 t f'(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = 4x + k \quad \therefore f'(x) = 4$$

이를 $\int_0^2 t f'(t) dt = k$ 에 대입하면

$$\int_0^2 4t dt = k, \left[2t^2 \right]_0^2 = k \quad \therefore k = 8$$

따라서 $f(x) = 4x + 8$ 이므로

$$f(3) = 12 + 8 = 20$$

506 ㉔ $f(x) = 6x - 7$

$\int_3^x f(t) dt = 3x^2 + ax - 6$ 의 양변에 $x=3$ 을 대입하면

$$\int_3^3 f(t) dt = 27 + 3a - 6$$

$$0 = 3a + 21 \quad \therefore a = -7$$

$\int_3^x f(t) dt = 3x^2 - 7x - 6$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x - 7$$

507 ㉔ -1

$\int_2^x t f(t) dt = x^3 - ax^2$ 의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$\int_2^2 t f(t) dt = 8 - 4a$$

$$0 = 8 - 4a \quad \therefore a = 2$$

$\int_2^x t f(t) dt = x^3 - 2x^2$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$x f(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$$

따라서 $f(x) = 3x - 4$ 이므로

$$f(1) = 3 - 4 = -1$$

508 ㉔ -7

주어진 등식의 양변에 $x=a$ 를 대입하면

$$\int_a^a f(t) dt = 2a^2 + 5a - 3$$

$$0 = 2a^2 + 5a - 3$$

$$(a+3)(2a-1) = 0$$

$$\therefore a = -3 \quad (\because a < 0)$$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 4x + 5$$

$$\therefore f(a) = f(-3)$$

$$= -12 + 5 = -7$$

509 ㉔ 38

주어진 등식의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$2f(2) = 16 - 20 + \int_2^2 f(t) dt$$

$$2f(2) = 16 - 20 + 0$$

$$\therefore f(2) = -2$$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + x f'(x) = 6x^2 - 10x + f(x)$$

$$x f'(x) = 6x^2 - 10x = x(6x - 10)$$

$$\therefore f'(x) = 6x - 10$$

$$\begin{aligned} \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int (6x - 10) dx \\ &= 3x^2 - 10x + C \end{aligned}$$

$$f(2) = -2 \text{에서}$$

$$12 - 20 + C = -2 \quad \therefore C = 6$$

따라서 $f(x) = 3x^2 - 10x + 6$ 이므로

$$f(-2) = 12 + 20 + 6 = 38$$

510 ㉔ $f(x) = 6x - 4$

$\int_2^x (x-t)f(t) dt = x^3 + ax^2 - 4x + 8$ 의 양변에 $x=2$

를 대입하면

$$\int_2^2 (x-t)f(t) dt = 8 + 4a - 8 + 8$$

$$0 = 4a + 8 \quad \therefore a = -2$$

$$\int_2^x (x-t)f(t) dt = x^3 - 2x^2 - 4x + 8 \text{에서}$$

$$x \int_2^x f(t) dt - \int_2^x t f(t) dt = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = 3x^2 - 4x - 4$$

$$\therefore \int_2^x f(t) dt = 3x^2 - 4x - 4$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 6x - 4$$

511 ㉔ 8

$\int_{-1}^x (x-t)f(t) dt = x^4 - ax^2 + 1$ 의 양변에 $x=-1$ 을

대입하면

$$\int_{-1}^{-1} (x-t)f(t) dt = 1 - a + 1$$

$$0 = 2 - a \quad \therefore a = 2$$

$$\int_{-1}^x (x-t)f(t) dt = x^4 - 2x^2 + 1 \text{에서}$$

$$x \int_{-1}^x f(t) dt - \int_{-1}^x t f(t) dt = x^4 - 2x^2 + 1$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_{-1}^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = 4x^3 - 4x$$

$$\therefore \int_{-1}^x f(t) dt = 4x^3 - 4x$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 12x^2 - 4$$

$$\therefore f(1) = 12 - 4 = 8$$

512 ㉮ 5

$$\int_0^x (x-t)f(t) dt = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2 \text{에서}$$

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x$$

$$\therefore \int_0^x f(t) dt = \frac{1}{3}x^3 + x$$

양변을 다시 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$\therefore f(2) = 4 + 1 = 5$$

513 ㉮ 4

$$\int_1^x (x-t)f(t) dt = 2x^3 + ax^2 + 6x + b \text{의 양변에}$$

$x=1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 (x-t)f(t) dt = 2 + a + 6 + b$$

$$0 = 8 + a + b \quad \therefore a + b = -8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\int_1^x (x-t)f(t) dt = 2x^3 + ax^2 + 6x + b \text{에서}$$

$$x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x t f(t) dt = 2x^3 + ax^2 + 6x + b$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_1^x f(t) dt + x f(x) - x f(x) = 6x^2 + 2ax + 6$$

$$\therefore \int_1^x f(t) dt = 6x^2 + 2ax + 6$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\int_1^1 f(t) dt = 6 + 2a + 6$$

$$0 = 2a + 12 \quad \therefore a = -6$$

이를 ①에 대입하면

$$-6 + b = -8 \quad \therefore b = -2$$

$$\therefore b - a = 4$$

514 ㉮ 극댓값: -2 , 극솟값: $-\frac{9}{4}$

$$f(x) = \int_2^x (t^3 - t) dt \text{에서}$$

$$f'(x) = x^3 - x = x(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$f(0) = \int_2^0 (t^3 - t) dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 \right]_2^0 = -2$$

함수 $f(x)$ 는 $x=-1$ 또는 $x=1$ 에서 극소이므로 극솟값은

$$f(-1) = \int_2^{-1} (t^3 - t) dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 \right]_2^{-1} = -\frac{9}{4}$$

$$f(1) = \int_2^1 (t^3 - t) dt$$

$$= \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{2}t^2 \right]_2^1 = -\frac{9}{4}$$

515 ㉮ $-\frac{7}{6}$

$$f(x) = \int_1^x (t^2 - t - 2) dt \text{에서}$$

$$f'(x) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은 $x=2$ ($\because 0 \leq x \leq 3$)

$0 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$	

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최소이므로 최솟값은

$$f(2) = \int_1^2 (t^2 - t - 2) dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2t \right]_1^2 = -\frac{7}{6}$$

516 ㉠ $\frac{64}{3}$

$$f(x) = \int_{-1}^x (-t^2 + 2t - a) dt \text{에서}$$

$$f'(x) = -x^2 + 2x - a$$

함수 $f(x)$ 가 $x = -2$ 에서 극솟값을 가지므로

$$f'(-2) = 0 \text{에서}$$

$$-4 - 4 - a = 0 \quad \therefore a = -8$$

$$\therefore b = f(-2) = \int_{-1}^{-2} (-t^2 + 2t + 8) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 8t \right]_{-1}^{-2} = -\frac{8}{3}$$

$$\therefore ab = \frac{64}{3}$$

517 ㉠ 18

$$f(x) = \int_x^{x+1} (2t^2 + 2t) dt \text{에서}$$

$$f'(x) = \{2(x+1)^2 + 2(x+1)\} - (2x^2 + 2x)$$

$$= 4(x+1)$$

$-1 \leq x \leq 2$ 에서 $f'(x) \geq 0$ 이므로 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

따라서 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값을 갖고 $x=-1$ 에서 최솟값을 갖는다.

$$\therefore M = f(2) = \int_2^3 (2t^2 + 2t) dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}t^3 + t^2 \right]_2^3 = \frac{53}{3},$$

$$m = f(-1) = \int_{-1}^0 (2t^2 + 2t) dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}t^3 + t^2 \right]_{-1}^0 = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore M - m = 18$$

518 ㉠ (1) 28 (2) -3

(1) $f(t) = t^3 + t^2 - 3t + 1$ 이라 하고 함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \int_3^x (t^3 + t^2 - 3t + 1) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \int_3^x f(t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} \left[F(t) \right]_3^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{F(x) - F(3)}{x-3}$$

$$= F'(3) = f(3)$$

$$= 27 + 9 - 9 + 1 = 28$$

(2) $f(t) = t^3 - 3t^2 + t - 5$ 라 하고 함수 $f(t)$ 의 한 부정적분을 $F(t)$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \int_1^x (t^3 - 3t^2 + t - 5) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \int_1^x f(t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 - 1} \left[F(t) \right]_1^x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \times \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{1}{2} F'(1) = \frac{1}{2} f(1)$$

$$= \frac{1}{2} (1 - 3 + 1 - 5) = -3$$

519 ㉠ (1) 6 (2) 50

(1) $f(x) = 2x^2 + x - 4$ 라 하고 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} (2x^2 + x - 4) dx$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} f(x) dx$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[F(x) \right]_2^{2+h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h) - F(2)}{h}$$

$$= F'(2) = f(2)$$

$$= 8 + 2 - 4 = 6$$

(2) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 7$ 이라 하고 함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{3-h}^{3+h} (x^3 - 2x^2 + 3x + 7) dx$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{3-h}^{3+h} f(x) dx$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[F(x) \right]_{3-h}^{3+h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(3+h) - F(3-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(3+h) - F(3) + F(3) - F(3-h)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(3+h) - F(3)}{h}$$

$$- \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(3-h) - F(3)}{-h} \times (-1)$$

$$= F'(3) + F'(3)$$

$$= 2F'(3) = 2f(3)$$

$$= 2(27 - 18 + 9 + 7) = 50$$

520 ㉓ 3

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2-4} \int_2^x f(t) dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2-4} \left[F(t) \right]_2^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x)-F(2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{F(x)-F(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} \\ &= \frac{1}{4} F'(2) = \frac{1}{4} f(2) \\ &= \frac{1}{4} (-4+2a+6) = \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} \\ \text{따라서 } \frac{1}{2} a + \frac{1}{2} &= 2 \text{이므로 } a=3 \end{aligned}$$

521 ㉓ 4

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} f(x) dx &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[F(x) \right]_2^{2+h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(2+h)-F(2)}{h} \\ &= F'(2) = f(2) \\ &= 8+4+2a+1 \\ &= 2a+13 \end{aligned}$$

따라서 $2a+13=21$ 이므로 $a=4$

연습문제

254~256쪽

522 ㉓ ①

$$\int_{-1}^1 f(t) dt = k \text{ (} k \text{는 상수)로 놓으면}$$

$$f(x) = 6x^2 + 2x + k$$

이를 $\int_{-1}^1 f(t) dt = k$ 에 대입하면

$$\int_{-1}^1 (6t^2 + 2t + k) dt = k$$

$$2 \int_0^1 (6t^2 + k) dt = k$$

$$2 \left[2t^3 + kt \right]_0^1 = k$$

$$2(2+k) = k$$

$$\therefore k = -4$$

따라서 $f(x) = 6x^2 + 2x - 4$ 이므로

$$f(2) = 24 + 4 - 4 = 24$$

523 ㉓ 14

$$f(x) = \int_x^{x+1} (t^3 - t) dt \text{에서}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \{(x+1)^3 - (x+1)\} - (x^3 - x) \\ &= 3x^2 + 3x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_0^2 f'(x) dx &= \int_0^2 (3x^2 + 3x) dx \\ &= \left[x^3 + \frac{3}{2} x^2 \right]_0^2 \\ &= 8 + 6 = 14 \end{aligned}$$

524 ㉓ ⑤

주어진 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$3f(1) = 0 + 2 \quad \therefore f(1) = \frac{2}{3}$$

주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$3f(x) + 3xf'(x) = 9f(x) + 2$$

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2} xf'(x) - \frac{1}{3}$$

양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1}{2} f'(1) - \frac{1}{3}, \quad \frac{2}{3} = \frac{1}{2} f'(1) - \frac{1}{3} \\ \therefore f'(1) &= 2 \end{aligned}$$

525 ㉓ -11

$$\int_0^x (x-t)f'(t) dt = 2x^4 \text{에서}$$

$$x \int_0^x f'(t) dt - \int_0^x tf'(t) dt = 2x^4$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_0^x f'(t) dt + xf'(x) - xf'(x) = 8x^3$$

$$\int_0^x f'(t) dt = 8x^3$$

$$\left[f(x) \right]_0^x = 8x^3$$

$$f(x) - f(0) = 8x^3$$

$$\therefore f(x) = 8x^3 + f(0) = 8x^3 - 3$$

$$\therefore f(-1) = -8 - 3 = -11$$

526 ㉓ $\frac{4}{3}$

$$f(x) = \int_0^x (t-3)(t-a) dt \text{에서}$$

$$f'(x) = (x-3)(x-a)$$

$$f'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x=3 \text{ 또는 } x=a$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=3$ 에서 극솟값, $x=a$ 에서 극댓값을 갖는다.

이때 함수 $f(x)$ 의 극솟값이 0이므로 $f(3)=0$ 에서

$$\begin{aligned} \int_0^3 (t-3)(t-a) dt &= 0 \\ \int_0^3 \{t^2 - (a+3)t + 3a\} dt &= 0 \\ \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{a+3}{2}t^2 + 3at \right]_0^3 &= 0 \\ \frac{9a-9}{2} &= 0 \quad \therefore a=1 \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 극대이므로 극댓값은

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^1 (t-3)(t-1) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - 4t + 3) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

527 ㉔ ②

$f(x) = \int_{-1}^x (12t^2 - 6t - 6) dt$ 에서
 $f'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x+1)(x-1)$
 $f'(x) = 0$ 인 x 의 값은
 $x=1$ ($\because 0 \leq x \leq 2$)
 $0 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	...	1	...	2
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	극소	↗	

$$\begin{aligned} f(0) &= \int_{-1}^0 (12t^2 - 6t - 6) dt \\ &= \left[4t^3 - 3t^2 - 6t \right]_{-1}^0 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_{-1}^1 (12t^2 - 6t - 6) dt \\ &= 2 \int_0^1 (12t^2 - 6) dt \\ &= 2 \left[4t^3 - 6t \right]_0^1 = -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2) &= \int_{-1}^2 (12t^2 - 6t - 6) dt \\ &= \left[4t^3 - 3t^2 - 6t \right]_{-1}^2 = 9 \end{aligned}$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최댓값 9, $x=1$ 에서 최솟값 -4를 가지므로 구하는 합은

$$9 + (-4) = 5$$

528 ㉔ ④

함수 $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라 하면

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x f(t) dt &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left[F(t) \right]_1^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^3) - F(1)}{x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x^3) - F(1)}{x^3 - 1} \times \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) \\ &= 3F'(1) = 3f(1) \\ &= 3(2 - 6 + 1 + 5) = 6 \end{aligned}$$

529 ㉔ 32

$$\begin{aligned} f(x) &= 12x^2 + \int_0^1 (6x-t)f(t) dt \\ &= 12x^2 + 6x \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 t f(t) dt \end{aligned}$$

이때 $\int_0^1 f(t) dt = a$, $\int_0^1 t f(t) dt = b$ (a, b 는 상수)로 놓으면

$$f(x) = 12x^2 + 6ax - b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

①을 $\int_0^1 f(t) dt = a$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^1 (12t^2 + 6at - b) dt &= a \\ \left[4t^3 + 3at^2 - bt \right]_0^1 &= a \end{aligned}$$

$$4 + 3a - b = a \quad \therefore 2a - b = -4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①을 $\int_0^1 t f(t) dt = b$ 에 대입하면

$$\begin{aligned} \int_0^1 (12t^3 + 6at^2 - bt) dt &= b \\ \left[3t^4 + 2at^3 - \frac{b}{2}t^2 \right]_0^1 &= b \end{aligned}$$

$$3 + 2a - \frac{b}{2} = b \quad \therefore 4a - 3b = -6 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

②, ③을 연립하여 풀면

$$a = -3, b = -2$$

따라서 $f(x) = 12x^2 - 18x + 2$ 이므로

$$f(-1) = 12 + 18 + 2 = 32$$

530 ㉔ 40

$\int_0^1 f(t) dt = k$ (k 는 상수)로 놓으면

$$\int_0^x f(t) dt = x^3 - 2x^2 - 2kx$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) = 3x^2 - 4x - 2k$$

이를 $\int_0^1 f(t) dt = k$ 에 대입하면

$$\int_0^1 (3t^2 - 4t - 2k) dt = k$$

$$\left[t^3 - 2t^2 - 2kt \right]_0^1 = k$$

$$1 - 2 - 2k = k \quad \therefore k = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore f(x) = 3x^2 - 4x + \frac{2}{3}$$

$$f(0) = a \text{에서 } a = \frac{2}{3}$$

$$\therefore 60a = 60 \times \frac{2}{3} = 40$$

531 ㉔ 2

$xf(x) = g(x) + \int_0^x tf'(t) dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + xf'(x) = g'(x) + xf'(x)$$

$$\therefore f(x) = g'(x)$$

이때 $f(x)$ 는 일차함수이므로 $g(x)$ 는 이차함수이고

$$f(x)g(x) = 2x^3 + 3x^2 + x = x(x+1)(2x+1) \text{이므로}$$

$$f(x) = 2x+1, g(x) = x^2+x$$

$$\text{또는 } f(x) = -2x-1, g(x) = -x^2-x$$

$$(i) f(x) = 2x+1, g(x) = x^2+x \text{일 때}$$

$$f(0)g(1) = 1 \times 2 = 2$$

$$(ii) f(x) = -2x-1, g(x) = -x^2-x \text{일 때}$$

$$f(0)g(1) = -1 \times (-2) = 2$$

(i), (ii)에서

$$f(0)g(1) = 2$$

532 ㉔ 2

$$\int_2^x (x-t)f(t) dt = ax^3 - 2x^2 + bx + 8 \text{의 양변에}$$

$x=2$ 를 대입하면

$$0 = 8a - 8 + 2b + 8$$

$$\therefore 4a + b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\int_2^x (x-t)f(t) dt = ax^3 - 2x^2 + bx + 8 \text{에서}$$

$$x \int_2^x f(t) dt - \int_2^x tf(t) dt = ax^3 - 2x^2 + bx + 8$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\int_2^x f(t) dt + xf(x) - xf(x) = 3ax^2 - 4x + b$$

$$\therefore \int_2^x f(t) dt = 3ax^2 - 4x + b$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$0 = 12a - 8 + b$$

$$\therefore 12a + b = 8 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = -4$$

따라서 $\int_2^x f(t) dt = 3x^2 - 4x - 4$ 이므로

$$\int_2^3 f(t) dt = 27 - 12 - 4 = 11$$

533 ㉔ 16

$$x^2 f(x) = -x^3 + \int_0^x (x^2 + t)f'(t) dt \text{에서}$$

$$x^2 f(x) = -x^3 + x^2 \int_0^x f'(t) dt + \int_0^x tf'(t) dt$$

이때

$$\int_0^x f'(t) dt = \left[f(t) \right]_0^x = f(x) - f(0) = f(x) - 2$$

이므로

$$x^2 f(x) = -x^3 + x^2 \{f(x) - 2\} + \int_0^x tf'(t) dt$$

$$\therefore \int_0^x tf'(t) dt = x^3 + 2x^2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$xf'(x) = 3x^2 + 4x$$

$$= x(3x + 4)$$

$$\therefore f'(x) = 3x + 4$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x) dx = \int (3x + 4) dx$$

$$= \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$$

$f(0) = 2$ 에서 $C = 2$ 이므로

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 4x + 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\therefore f(2) = 6 + 8 + 2 = 16 \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

단계	채점 기준	비율
①	$\int_0^x tf'(t) dt$ 구하기	40 %
②	$f(x)$ 구하기	40 %
③	$f(2)$ 의 값 구하기	20 %

534 ㉮ 31

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ 에서

$$F'(x) = f(x) = x^3 - 12x + a$$

$F(x)$ 는 사차함수이므로 극댓값과 극솟값을 모두 가지려면 삼차방정식 $F'(x) = 0$, 즉 $f(x) = 0$ 이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x+2)(x-2) \text{이므로}$$

$f'(x) = 0$ 인 x 의 값은

$$x = -2 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 $f(-2)f(2) < 0$ 이어야 하므로

$$(a+16)(a-16) < 0$$

$$\therefore -16 < a < 16$$

따라서 정수 a 는 $-15, -14, -13, \dots, 15$ 의 31개이다.

535 ㉮ ②

주어진 그래프에서 $f(x) = a(x+2)(x-1)$ ($a < 0$)이라 하자.

$g(x) = \int_{x-2}^x f(t) dt$ 에서

$$\begin{aligned} g'(x) &= f(x) - f(x-2) \\ &= a(x+2)(x-1) - ax(x-3) \\ &= 4ax - 2a = 2a(2x-1) \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \text{인 } x \text{의 값은 } x = \frac{1}{2}$$

$a < 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\dots$	$\frac{1}{2}$	$\dots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$

따라서 함수 $g(x)$ 는 $x = \frac{1}{2}$ 에서 최댓값 $g\left(\frac{1}{2}\right)$ 을 갖는다.

536 ㉮ ⑤

$g(x) = \int_1^x (x-t)f(t) dt$ 라 하면

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x-2} = 3$$

$x \rightarrow 2$ 일 때 (분모) $\rightarrow 0$ 이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이다.

즉, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0$ 이므로 $g(2) = 0$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - g(2)}{x-2} = g'(2)$$

$$\therefore g'(2) = 3$$

$g(x) = \int_1^x (x-t)f(t) dt$ 에서

$$g(x) = x \int_1^x f(t) dt - \int_1^x tf(t) dt \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x) = \int_1^x f(t) dt + xf(x) - xf(x)$$

$$\therefore g'(x) = \int_1^x f(t) dt$$

양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$g'(2) = \int_1^2 f(t) dt$$

$$\therefore \int_1^2 f(t) dt = 3$$

①의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$$g(2) = 2 \int_1^2 f(t) dt - \int_1^2 tf(t) dt$$

$$0 = 2 \times 3 - \int_1^2 tf(t) dt \quad \therefore \int_1^2 tf(t) dt = 6$$

$$\begin{aligned} \therefore \int_1^2 (4x+1)f(x) dx &= 4 \int_1^2 xf(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \\ &= 4 \times 6 + 3 = 27 \end{aligned}$$

537 ㉮ ③

| 접근 방법 | 주어진 등식을 이용하여 함수 $f(x)$ 의 차수를 먼저 구한다.

함수 $f(x)$ 를 n 차함수라 하면 $f(f(x))$ 는 n^2 차함수이고, $\int_0^x f(t) dt - 2x^2 + 4x + 60$ 은 $(n+1)$ 차함수 또는 일차함수이다.

이때 $n^2 = n+1$ 을 만족시키는 자연수 n 은 존재하지 않고, n^2 차함수가 일차함수가 되는 자연수 n 은 1뿐이다. 따라서 $f(x)$ 는 일차함수이므로

$$f(x) = ax + b \quad (a, b \text{는 상수, } a \neq 0) \text{라 하면}$$

$$f(f(x)) = \int_0^x f(t) dt - 2x^2 + 4x + 60 \text{에서}$$

$$a^2x + ab + b = \int_0^x f(t) dt - 2x^2 + 4x + 60$$

양변을 x 에 대하여 미분하면

$$a^2 = f(x) - 4x + 4$$

$$\therefore f(x) = 4x + a^2 - 4$$

따라서 $ax + b = 4x + a^2 - 4$ 이므로

$$a = 4, b = a^2 - 4 = 12$$

따라서 $f(x) = 4x + 12$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_{-2}^2 f(x) dx &= \int_{-2}^2 (4x + 12) dx \\ &= 2 \int_0^2 12 dx \\ &= 2 \left[12x \right]_0^2 = 48\end{aligned}$$

538 ㉮ 10

1 점근 방법 1 (가)에서 $\frac{d}{dx} \int_1^x f(t) dt = f(x)$, $\int_1^1 f(t) dt = 0$ 임을 이용하여 $f(x)$ 를 구한 후 (나)의 양변의 계수를 비교하여 $G(x)$ 를 추론한다.

(가)의 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\begin{aligned}f(x) &= f(x) + xf'(x) - 4x \\ xf'(x) &= 4x \quad \therefore f'(x) = 4 \\ \therefore f(x) &= \int f'(x) dx = \int 4 dx = 4x + C_1\end{aligned}$$

(가)의 등식의 양변에 $x=1$ 을 대입하면

$$0 = f(1) - 2 - 1 \quad \therefore f(1) = 3$$

따라서 $4 + C_1 = 3$ 이므로 $C_1 = -1$

$$\therefore f(x) = 4x - 1$$

$$\begin{aligned}\therefore F(x) &= \int f(x) dx = \int (4x - 1) dx \\ &= 2x^2 - x + C_2\end{aligned}$$

(나)의 좌변에서

$$\begin{aligned}f(x)G(x) + F(x)g(x) &= F'(x)G(x) + F(x)G'(x) \\ &= \{F(x)G(x)\}' \\ \therefore \{F(x)G(x)\}' &= 8x^3 + 3x^2 + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore F(x)G(x) &= \int (8x^3 + 3x^2 + 1) dx \\ &= 2x^4 + x^3 + x + C_3 \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

이때 $F(x)$, $G(x)$ 가 모두 다항함수이고 $F(x)$ 는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이므로 $G(x)$ 는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$G(x) = x^2 + ax + b$ (a , b 는 상수)라 하면 $\textcircled{1}$ 에서 $(2x^2 - x + C_2)(x^2 + ax + b) = 2x^4 + x^3 + x + C_3$ 양변의 x^3 의 계수를 비교하면

$$2a - 1 = 1 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore G(x) = x^2 + x + b$$

$$\begin{aligned}\therefore \int_1^3 g(x) dx &= [G(x)]_1^3 = G(3) - G(1) \\ &= (9 + 3 + b) - (1 + 1 + b) \\ &= 10\end{aligned}$$

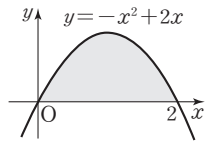
01 정적분의 활용

유제

261~281쪽

539 ㉮ (1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{1}{12}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{37}{12}$

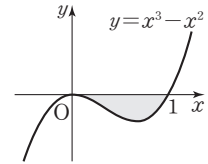
- (1) 곡선 $y = -x^2 + 2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면
 $-x^2 + 2x = 0$
 $x(x - 2) = 0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$



$0 \leq x \leq 2$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned}S &= \int_0^2 (-x^2 + 2x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 \\ &= \frac{4}{3}\end{aligned}$$

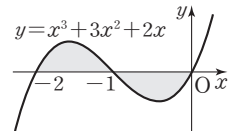
- (2) 곡선 $y = x^3 - x^2$ 과 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면
 $x^3 - x^2 = 0$
 $x^2(x - 1) = 0$
 $\therefore x = 0$ 또는 $x = 1$



$0 \leq x \leq 1$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned}S &= \int_0^1 (-x^3 + x^2) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

- (3) 곡선 $y = x^3 + 3x^2 + 2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면



$$x^3 + 3x^2 + 2x = 0$$

$$x(x + 2)(x + 1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = -1 \text{ 또는 } x = 0$$

$-2 \leq x \leq -1$ 에서 $y \geq 0$ 이고, $-1 \leq x \leq 0$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned}S &= \int_{-2}^{-1} (x^3 + 3x^2 + 2x) dx \\ &\quad + \int_{-1}^0 (-x^3 - 3x^2 - 2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 + x^2 \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{1}{4}x^4 - x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

(4) 곡선

$y = -x^3 + 2x^2 + x - 2$ 와
 x 축의 교점의 x 좌표를 구
 하면

$$-x^3 + 2x^2 + x - 2 = 0 \quad y = -x^3 + 2x^2 + x - 2$$

$$(x+1)(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 또는 } x = 2$$

$-1 \leq x \leq 1$ 에서 $y \leq 0$ 이고, $1 \leq x \leq 2$ 에서 $y \geq 0$ 이
 므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 (x^3 - 2x^2 - x + 2) dx \\ &\quad + \int_1^2 (-x^3 + 2x^2 + x - 2) dx \\ &= 2 \int_0^1 (-2x^2 + 2) dx \\ &\quad + \int_1^2 (-x^3 + 2x^2 + x - 2) dx \\ &= 2 \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 \\ &\quad + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right]_1^2 \\ &= \frac{37}{12} \end{aligned}$$

540 ㉮ (1) $\frac{19}{3}$ (2) $\frac{157}{12}$

(1) 곡선 $y = x^2 - 5x + 4$ 와 x 축

의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$(x-1)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 4$$

$1 \leq x \leq 4$ 에서 $y \leq 0$ 이고,

$4 \leq x \leq 5$ 에서 $y \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) dx + \int_4^5 (x^2 - 5x + 4) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 4x \right]_1^4 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 4x \right]_4^5 \\ &= \frac{19}{3} \end{aligned}$$

(2) 곡선 $y = -x^3 - x^2 + 6x$ 와 x 축

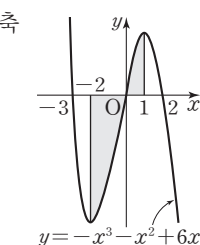
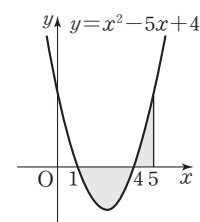
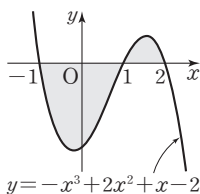
의 교점의 x 좌표를 구하면

$$-x^3 - x^2 + 6x = 0$$

$$x(x+3)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 0$$

$$\text{또는 } x = 2$$



$-2 \leq x \leq 0$ 에서 $y \leq 0$ 이고, $0 \leq x \leq 1$ 에서 $y \geq 0$ 이
 므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^0 (x^3 + x^2 - 6x) dx \\ &\quad + \int_0^1 (-x^3 - x^2 + 6x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 \right]_{-2}^0 \\ &\quad + \left[-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{157}{12} \end{aligned}$$

541 ㉮ 3

곡선 $y = 2x^2 - 4kx$ 와 x 축의

교점의 x 좌표를 구하면

$$2x^2 - 4kx = 0$$

$$x(x-2k) = 0$$

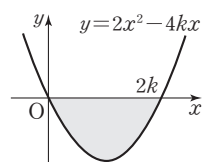
$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2k$$

$0 \leq x \leq 2k$ 에서 $y \leq 0$ 이므로 주어진 곡선과 x 축으로
 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^{2k} (-2x^2 + 4kx) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + 2kx^2 \right]_0^{2k} = \frac{8}{3}k^3$$

따라서 $\frac{8}{3}k^3 = 72$ 이므로

$$k^3 = 27 \quad \therefore k = 3 \quad (\because k \text{는 실수})$$



542 ㉮ (1) $\frac{9}{2}$ (2) 2

(1) 곡선 $y = -x^2 + 2$ 와 직선

$y = 3x + 2$ 의 교점의 x 좌

표를 구하면

$$-x^2 + 2 = 3x + 2$$

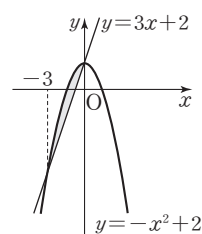
$$x^2 + 3x = 0$$

$$x(x+3) = 0$$

$$\therefore x = -3 \text{ 또는 } x = 0$$

$-3 \leq x \leq 0$ 에서 $-x^2 + 2 \geq 3x + 2$ 이므로 구하는
 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-3}^0 \{(-x^2 + 2) - (3x + 2)\} dx \\ &= \int_{-3}^0 (-x^2 - 3x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-3}^0 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$



(2) 곡선 $y=x^3-x$ 와 직선

$y=x$ 의 교점의 x 좌표를

구하면

$$x^3-x=x$$

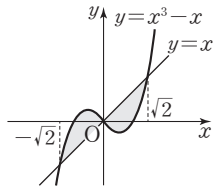
$$x^3-2x=0$$

$$x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$$

$$\therefore x=-\sqrt{2} \text{ 또는 } x=0 \text{ 또는 } x=\sqrt{2}$$

$-\sqrt{2} \leq x \leq 0$ 에서 $x^3-x \geq x$ 이고, $0 \leq x \leq \sqrt{2}$ 에서 $x \geq x^3-x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{2}}^0 \{(x^3-x)-x\} dx \\ &\quad + \int_0^{\sqrt{2}} \{x-(x^3-x)\} dx \\ &= \int_{-\sqrt{2}}^0 (x^3-2x) dx + \int_0^{\sqrt{2}} (-x^3+2x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - x^2 \right]_{-\sqrt{2}}^0 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^2 \right]_0^{\sqrt{2}} \\ &= 2 \end{aligned}$$



543 ㉡ (1) 9 (2) $\frac{37}{12}$

(1) 두 곡선 $y=x^2-6x+8$,

$y=-x^2+4x$ 의 교점의 x 좌

표를 구하면

$$x^2-6x+8=-x^2+4x$$

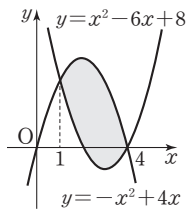
$$2x^2-10x+8=0$$

$$(x-1)(x-4)=0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

$1 \leq x \leq 4$ 에서 $-x^2+4x \geq x^2-6x+8$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 \{(-x^2+4x)-(x^2-6x+8)\} dx \\ &= \int_1^4 (-2x^2+10x-8) dx \\ &= \left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-8x \right]_1^4 \\ &= 9 \end{aligned}$$



(2) 두 곡선 $y=x^3-3x^2$,

$y=x^2-3x$ 의 교점의 x 좌표

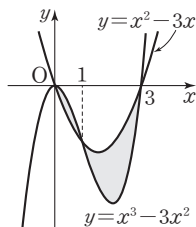
를 구하면

$$x^3-3x^2=x^2-3x$$

$$x^3-4x^2+3x=0$$

$$x(x-1)(x-3)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1 \text{ 또는 } x=3$$



$0 \leq x \leq 1$ 에서 $x^3-3x^2 \geq x^2-3x$ 이고,

$1 \leq x \leq 3$ 에서 $x^2-3x \geq x^3-3x^2$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(x^3-3x^2)-(x^2-3x)\} dx \\ &\quad + \int_1^3 \{(x^2-3x)-(x^3-3x^2)\} dx \\ &= \int_0^1 (x^3-4x^2+3x) dx + \int_1^3 (-x^3+4x^2-3x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_1^3 \\ &= \frac{37}{12} \end{aligned}$$

544 ㉡ 6

두 곡선 $y=3x^2$,

$y=-3x^2+6x$ 의 교점의

x 좌표를 구하면

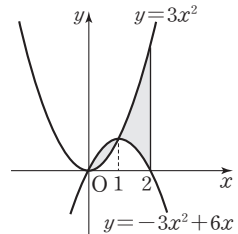
$$3x^2=-3x^2+6x$$

$$6x^2-6x=0, x(x-1)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=1$$

$0 \leq x \leq 1$ 에서 $-3x^2+6x \geq 3x^2$ 이고, $1 \leq x \leq 2$ 에서 $3x^2 \geq -3x^2+6x$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \{(-3x^2+6x)-3x^2\} dx \\ &\quad + \int_1^2 \{3x^2-(-3x^2+6x)\} dx \\ &= \int_0^1 (-6x^2+6x) dx + \int_1^2 (6x^2-6x) dx \\ &= \left[-2x^3+3x^2 \right]_0^1 + \left[2x^3-3x^2 \right]_1^2 \\ &= 6 \end{aligned}$$



545 ㉡ 2

곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=ax$ 의

교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2=ax, x^2-ax=0$$

$$x(x-a)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=a$$

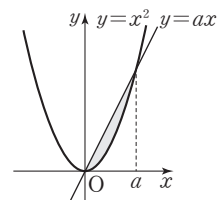
$0 \leq x \leq a$ 에서 $ax \geq x^2$ 이므로

곡선 $y=x^2$ 과 직선 $y=ax$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^a (ax-x^2) dx = \left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^a = \frac{1}{6}a^3$$

따라서 $\frac{1}{6}a^3 = \frac{4}{3}$ 이므로

$$a^3=8 \quad \therefore a=2 (\because a \text{는 실수})$$



546 ㉮ $\frac{27}{4}$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x$ 라 하면

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 10$$

점 (1, 5)에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 1$ 이므로
접선의 방정식은

$$y - 5 = x - 1 \quad \therefore y = x + 4$$

곡선 $y = x^3 - 6x^2 + 10x$ 와

직선 $y = x + 4$ 의 교점의 x

좌표를 구하면

$$x^3 - 6x^2 + 10x = x + 4$$

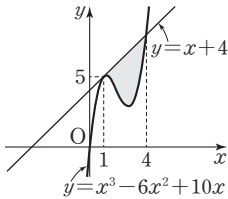
$$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$$

$$(x-1)^2(x-4) = 0$$

$$\therefore x=1 \text{ 또는 } x=4$$

$1 \leq x \leq 4$ 에서 $x+4 \geq x^3 - 6x^2 + 10x$ 이므로 구하는
넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 \{(x+4) - (x^3 - 6x^2 + 10x)\} dx \\ &= \int_1^4 (-x^3 + 6x^2 - 9x + 4) dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 2x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 4x \right]_1^4 = \frac{27}{4} \end{aligned}$$



547 ㉮ $\frac{2}{3}$

$f(x) = -x^2 - 1$ 이라 하면 $f'(x) = -2x$

점의 좌표를 $(t, -t^2 - 1)$ 이라 하면 이 점에서의 접
선의 기울기는 $f'(t) = -2t$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (-t^2 - 1) = -2t(x - t)$$

$$\therefore y = -2tx + t^2 - 1$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = t^2 - 1, (t+1)(t-1) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 1$$

따라서 접선의 방정식은 $y = 2x$ 또는 $y = -2x$

곡선과 두 접선으로 둘러싸인

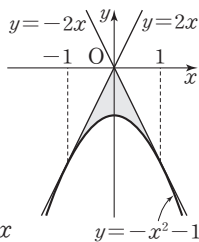
도형이 y 축에 대하여 대칭이

고, $0 \leq x \leq 1$ 에서

$$-2x \geq -x^2 - 1 \text{이므로 구하}$$

는 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^1 \{-2x - (-x^2 - 1)\} dx \\ &= 2 \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{2}{3} \end{aligned}$$



548 ㉮ ②

$f(x) = x^2 - 4x + 6$ 이라 하면 $f'(x) = 2x - 4$

점 A(3, 3)에서의 접선의 기울기는 $f'(3) = 2$ 이므로

접선의 방정식은

$$y - 3 = 2(x - 3) \quad \therefore y = 2x - 3$$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $x^2 - 4x + 6 \geq 2x - 3$ 이므로 구하는 넓
이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 \{(x^2 - 4x + 6) - (2x - 3)\} dx \\ &= \int_0^3 (x^2 - 6x + 9) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x \right]_0^3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

549 ㉮ $\frac{1}{2}$

$f(x) = ax^2$ 이라 하면 $f'(x) = 2ax$

점 (1, a)에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 2a$ 이므로
접선의 방정식은

$$y - a = 2a(x - 1) \quad \therefore y = 2ax - a$$

$-3 \leq x \leq 3$ 에서

$ax^2 \geq 2ax - a$ 이므로 곡선

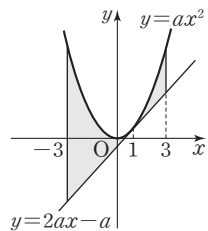
$y = ax^2$ 과 접선 $y = 2ax - a$

및 두 직선 $x = -3, x = 3$ 으

로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\begin{aligned} &\int_{-3}^3 \{ax^2 - (2ax - a)\} dx \\ &= \int_{-3}^3 (ax^2 - 2ax + a) dx \\ &= 2 \int_0^3 (ax^2 + a) dx \\ &= 2 \left[\frac{a}{3}x^3 + ax \right]_0^3 \\ &= 24a \end{aligned}$$

따라서 $24a = 12$ 이므로 $a = \frac{1}{2}$



550 ㉮ $\frac{8}{3}$

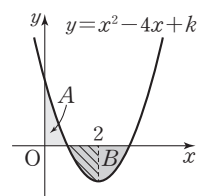
$A : B = 1 : 2$ 에서 $B = 2A$

곡선 $y = x^2 - 4x + k$ 는 직선

$x = 2$ 에 대하여 대칭이므로 오

른쪽 그림에서 빗금 친 부분의
넓이는

$$\frac{1}{2}B = A$$



따라서 구간 $[0, 2]$ 에서 곡선 $y=x^2-4x+k$ 와 x 축, y 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 (x^2-4x+k) dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + kx \right]_0^2 = 0$$

$$-\frac{16}{3} + 2k = 0 \quad \therefore k = \frac{8}{3}$$

551 ㉡ 4

곡선 $y=x^2-2x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2-2x=0, x(x-2)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=2$$

곡선 $y=x^2-2x$ 와 직선 $y=ax$

의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2-2x=ax, x\{x-(a+2)\}=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=a+2$$

곡선 $y=x^2-2x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 , 곡선 $y=x^2-2x$ 와 직선 $y=ax$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_1 = \int_0^2 (-x^2+2x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$S_2 = \int_0^{a+2} \{ax - (x^2-2x)\} dx$$

$$= \int_0^{a+2} \{-x^2 + (a+2)x\} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a+2}{2}x^2 \right]_0^{a+2} = \frac{(a+2)^3}{6}$$

$S_1=2S_2$ 이므로

$$\frac{4}{3} = 2 \times \frac{(a+2)^3}{6} \quad \therefore (a+2)^3 = 4$$

552 ㉡ 1

곡선 $y=x(x-a)(x-2)$

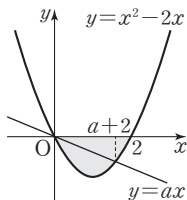
와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x(x-a)(x-2)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=a \text{ 또는 } x=2$$

곡선 $y=x(x-a)(x-2)$ 와 x 축으로 둘러싸인 두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^2 x(x-a)(x-2) dx = 0$$



$$\int_0^2 \{x^3 - (a+2)x^2 + 2ax\} dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+2}{3}x^3 + ax^2 \right]_0^2 = 0$$

$$4 - \frac{8a+16}{3} + 4a = 0 \quad \therefore a = 1$$

553 ㉡ 54

곡선 $y=x^2-3x$ 와 직선

$y=ax$ 의 교점의 x 좌표를 구

하면

$$x^2-3x=ax$$

$$x\{x-(a+3)\}=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=a+3$$

곡선 $y=x^2-3x$ 와 x 축의 교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2-3x=0, x(x-3)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$

곡선 $y=x^2-3x$ 와 직선 $y=ax$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 , 곡선 $y=x^2-3x$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_1 = \int_0^{a+3} \{ax - (x^2-3x)\} dx$$

$$= \int_0^{a+3} \{-x^2 + (a+3)x\} dx$$

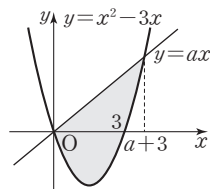
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{a+3}{2}x^2 \right]_0^{a+3} = \frac{(a+3)^3}{6}$$

$$S_2 = \int_0^3 (-x^2+3x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 = \frac{9}{2}$$

$S_1=2S_2$ 이므로

$$\frac{(a+3)^3}{6} = 2 \times \frac{9}{2} \quad \therefore (a+3)^3 = 54$$



554 ㉡ 36

곡선 $x=-y^2+9$ 와 y 축의 교

점의 y 좌표를 구하면

$$-y^2+9=0$$

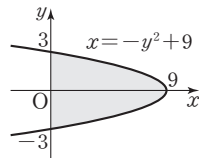
$$(y+3)(y-3)=0$$

$$\therefore y=-3 \text{ 또는 } y=3$$

$-3 \leq y \leq 3$ 에서 $-y^2+9 \geq 0$ 이므로 구하는 넓이를 S 라 하면

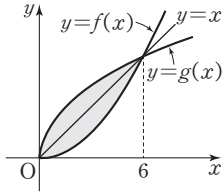
$$S = \int_{-3}^3 (-y^2+9) dy = 2 \int_0^3 (-y^2+9) dy$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{3}y^3 + 9y \right]_0^3 = 36$$



555 12

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.



곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면 $\frac{1}{6}x^2=x$, $x(x-6)=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=6$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S=2\int_0^6\left(x-\frac{1}{6}x^2\right)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{18}x^3\right]_0^6=12$$

556 9

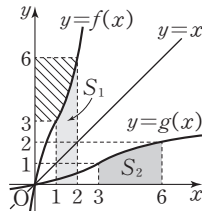
$f'(x)=3x^2-6x+5=3(x-1)^2+2>0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고

$f(1)=3$, $f(2)=6$ 이므로

$g(3)=1$, $g(6)=2$

$$\int_1^2 f(x) dx = S_1,$$

$\int_3^6 g(x) dx = S_2$ 라 하면 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 S_2 와 같다.

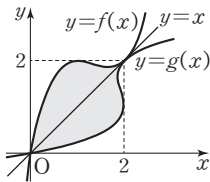


$$\therefore \int_1^2 f(x) dx + \int_3^6 g(x) dx = S_1 + S_2$$

$$= 2 \times 6 - 1 \times 3 = 9$$

557 8/3

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이의 2배와 같다.



곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면 $x^3-4x^2+5x=x$, $x^3-4x^2+4x=0$
 $x(x-2)^2=0 \quad \therefore x=0$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이를 S 라 하면

$$S=2\int_0^2\{(x^3-4x^2+5x)-x\}dx$$

$$=2\int_0^2(x^3-4x^2+4x)dx$$

$$=2\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+2x^2\right]_0^2$$

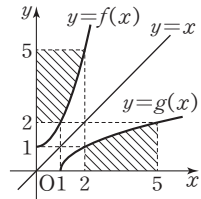
$$=\frac{8}{3}$$

558 14/3

$f(1)=2$, $f(2)=5$ 이므로

$g(2)=1$, $g(5)=2$

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같다.



$$\therefore \int_2^5 g(x) dx$$

$$= 2 \times 5 - 1 \times 2 - \int_1^2 f(x) dx$$

$$= 8 - \int_1^2 (x^2 + 1) dx$$

$$= 8 - \left[\frac{1}{3}x^3 + x\right]_1^2$$

$$= \frac{14}{3}$$

559 (1) 29 (2) 9 (3) 23

(1) 시각 $t=5$ 에서의 점 P의 위치는

$$4 + \int_0^5 (12t - 3t^2) dt = 4 + \left[6t^2 - t^3\right]_0^5$$

$$= 29$$

(2) 시각 $t=2$ 에서 $t=5$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_2^5 (12t - 3t^2) dt = \left[6t^2 - t^3\right]_2^5$$

$$= 9$$

(3) $2 \leq t \leq 4$ 에서 $v(t) \geq 0$, $4 \leq t \leq 5$ 에서 $v(t) \leq 0$ 이므로 시각 $t=2$ 에서 $t=5$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_2^4 (12t - 3t^2) dt + \int_4^5 (-12t + 3t^2) dt$$

$$= \left[6t^2 - t^3\right]_2^4 + \left[-6t^2 + t^3\right]_4^5$$

$$= 23$$

560 ㉮ $\frac{1}{2}$

시각 $t=3$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^3 v(t) dt &= \int_0^2 (t^2 - 2t) dt + \int_2^3 (t^2 - t - 2) dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 - t^2 \right]_0^2 + \left[\frac{1}{3} t^3 - \frac{1}{2} t^2 - 2t \right]_2^3 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

561 ㉮ 6

시각 $t=0$ 에서의 점 P의 위치가 0이고 시각 $t=1$ 에서의 점 P의 위치가 -3 이므로

$$0 + \int_0^1 (3t^2 - 4t + k) dt = -3$$

$$\left[t^3 - 2t^2 + kt \right]_0^1 = -3$$

$$k - 1 = -3 \quad \therefore k = -2$$

따라서 $v(t) = 3t^2 - 4t - 2$ 이므로 시각 $t=1$ 에서 $t=3$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^3 (3t^2 - 4t - 2) dt = \left[t^3 - 2t^2 - 2t \right]_1^3 = 6$$

562 ㉮ $\frac{27}{2}$

시각 t 에서의 점 P의 가속도는

$$v'(t) = -6t^2 + 12t$$

시각 $t=k$ 에서의 점 P의 가속도가 6이므로 $v'(k) = 6$ 에서

$$-6k^2 + 12k = 6, \quad k^2 - 2k + 1 = 0$$

$$(k-1)^2 = 0 \quad \therefore k = 1$$

$3 \leq t \leq 4$ 에서 $v(t) \leq 0$ 이므로 시각 $t=3$ 에서 $t=4$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_3^4 (2t^3 - 6t^2) dt = \left[\frac{1}{2} t^4 - 2t^3 \right]_3^4 = \frac{27}{2}$$

563 ㉮ (1) $-\frac{27}{4}$ (2) $\frac{27}{2}$

(1) 점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$$v(t) = 0 \text{에서}$$

$$t^3 - 3t^2 = 0, \quad t^2(t-3) = 0$$

$$\therefore t = 3 (\because t > 0)$$

따라서 점 P는 원점을 출발하여 시각 $t=3$ 에서 운동 방향을 바꾸므로 구하는 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^3 (t^3 - 3t^2) dt = \left[\frac{1}{4} t^4 - t^3 \right]_0^3 = -\frac{27}{4}$$

(2) 점 P가 원점으로 다시 돌아오는 시각을 $t=a$ 라 하면 시각 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 점 P의 위치의 변화량은 0이므로

$$\int_0^a (t^3 - 3t^2) dt = 0$$

$$\left[\frac{1}{4} t^4 - t^3 \right]_0^a = 0, \quad \frac{1}{4} a^4 - a^3 = 0$$

$$a^3(a-4) = 0 \quad \therefore a = 4 (\because a > 0)$$

$0 \leq t \leq 3$ 에서 $v(t) \leq 0$, $3 \leq t \leq 4$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이므로 점 P가 원점으로 다시 돌아올 때까지 움직인 거리는

$$\int_0^3 (-t^3 + 3t^2) dt + \int_3^4 (t^3 - 3t^2) dt$$

$$= \left[-\frac{1}{4} t^4 + t^3 \right]_0^3 + \left[\frac{1}{4} t^4 - t^3 \right]_3^4$$

$$= \frac{27}{2}$$

564 ㉮ 2

점 P가 운동 방향을 바꿀 때의 속도는 0이므로

$$v(t) = 0 \text{에서}$$

$$3t^2 - 9t + 6 = 0, \quad (t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 2$$

따라서 원점을 출발한 후 시각 $t=2$ 에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸므로 구하는 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^2 (3t^2 - 9t + 6) dt &= \left[t^3 - \frac{9}{2} t^2 + 6t \right]_0^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

565 ㉮ 150 m

자동차가 정지할 때의 속도는 0이므로 $v(t) = 0$ 에서

$$30 - 3t = 0 \quad \therefore t = 10$$

$0 \leq t \leq 10$ 에서 $v(t) \geq 0$ 이므로 브레이크를 밟고 10초 후까지 자동차가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^{10} (30 - 3t) dt &= \left[30t - \frac{3}{2} t^2 \right]_0^{10} \\ &= 150(\text{m}) \end{aligned}$$

566 ㉮ ⑤

점 P가 원점으로 다시 돌아오는 시각을 $t=a$ 라 하면 시각 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지의 위치의 변화량은 0이므로

$$\int_0^a (2-t) dt = 0$$

$$\left[2t - \frac{1}{2} t^2 \right]_0^a = 0, \quad 2a - \frac{1}{2} a^2 = 0$$

$$a(a-4) = 0 \quad \therefore a = 4 (\because a > 0)$$

$0 \leq t \leq 4$ 에서 $v_2(t) \geq 0$ 이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=4$ 까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^4 3t \, dt = \left[\frac{3}{2}t^2 \right]_0^4 = 24$$

567 ㉠ (1) 15 m (2) 25 m (3) 40 m

(1) 물체를 쏘아 올린 후 3초 동안 물체의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned} \int_0^3 (20-10t) \, dt &= \left[20t - 5t^2 \right]_0^3 \\ &= 15(\text{m}) \end{aligned}$$

(2) 물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$$v(t)=0 \text{에서}$$

$$20-10t=0 \quad \therefore t=2$$

따라서 5 m 높이에서 출발하여 시각 $t=2$ 에서 최고 높이에 도달하므로 구하는 물체의 높이는

$$\begin{aligned} 5 + \int_0^2 (20-10t) \, dt &= 5 + \left[20t - 5t^2 \right]_0^2 \\ &= 25(\text{m}) \end{aligned}$$

(3) $0 \leq t \leq 2$ 에서 $v(t) \geq 0$, $2 \leq t \leq 4$ 에서 $v(t) \leq 0$ 이므로 물체를 쏘아 올린 후 4초 동안 물체가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_0^2 (20-10t) \, dt + \int_2^4 (-20+10t) \, dt \\ = \left[20t - 5t^2 \right]_0^2 + \left[-20t + 5t^2 \right]_2^4 \\ = 40(\text{m}) \end{aligned}$$

568 ㉠ 35 m

$$\begin{aligned} \int_0^2 10t \, dt + \int_2^5 (40-10t) \, dt \\ = \left[5t^2 \right]_0^2 + \left[40t - 5t^2 \right]_2^5 \\ = 35(\text{m}) \end{aligned}$$

569 ㉠ 20 m

물체가 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$$v(t)=0 \text{에서}$$

$$50-10t=0 \quad \therefore t=5$$

따라서 물체는 시각 $t=5$ 에서 최고 높이에 도달하고,

$5 \leq t \leq 7$ 에서 $v(t) \leq 0$ 이므로 구하는 거리는

$$\begin{aligned} \int_5^7 (-50+10t) \, dt &= \left[-50t + 5t^2 \right]_5^7 \\ &= 20(\text{m}) \end{aligned}$$

570 ㉠ 10

공이 최고 높이에 도달할 때의 속도는 0이므로

$$v(t)=0 \text{에서 } 4a-10t=0 \quad \therefore t=\frac{2}{5}a$$

따라서 시각 $t=\frac{2}{5}a$ 에서의 공의 높이가 80 m이므로

$$\int_0^{\frac{2}{5}a} (4a-10t) \, dt = 80$$

$$\left[4at - 5t^2 \right]_0^{\frac{2}{5}a} = 80, \quad \frac{8}{5}a^2 - \frac{4}{5}a^2 = 80$$

$$a^2 = 100 \quad \therefore a = 10 (\because a > 0)$$

571 ㉠ (1) $\frac{3}{2}$ (2) 2

(1) 시각 $t=5$ 에서의 점

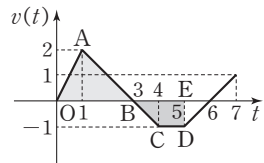
P의 위치는

$$0 + \int_0^5 v(t) \, dt$$

$$= \int_0^3 v(t) \, dt + \int_3^5 v(t) \, dt$$

$$= \triangle AOB - \square BCDE$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 2 - \frac{1}{2} \times (2+1) \times 1 = \frac{3}{2}$$



(2) $v(t)=0$ 이고 그 좌

우에서 $v(t)$ 의 부호

가 바뀔 때 운동 방

향이 바뀌므로 점 P

는 시각 $t=3$, $t=6$

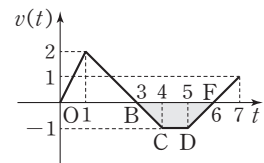
에서 운동 방향을 바꾼다.

따라서 점 P가 출발 후 시각 $t=3$ 에서 처음으로

운동 방향을 바꾸고 시각 $t=6$ 에서 두 번째로 운동

방향을 바꾸므로 구하는 거리는

$$\int_3^6 |v(t)| \, dt = \square BCDF = \frac{1}{2} \times (3+1) \times 1 = 2$$



572 ㉠ ⑤

점 P가 시각 $t=0$ 에서

$t=6$ 까지 움직인 거리는

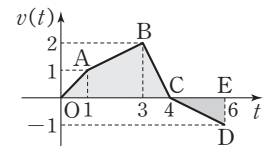
$$\int_0^6 |v(t)| \, dt$$

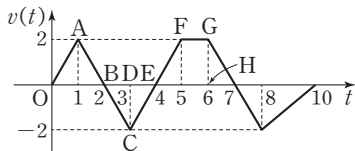
$$= \square AOCB + \triangle CDE$$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times (1+2) \times 2 + \frac{1}{2} \times 1 \times 2$$

$$+ \frac{1}{2} \times 2 \times 1$$

$$= \frac{11}{2}$$





ㄱ. 시각 $t=3$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^3 v(t) dt &= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^3 v(t) dt \\ &= \triangle AOB - \triangle BCD \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 - \frac{1}{2} \times 1 \times 2 = 1 \end{aligned}$$

ㄴ. 시각 $t=2$ 에서 $t=6$ 까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\begin{aligned} \int_2^6 v(t) dt &= \int_2^4 v(t) dt + \int_4^6 v(t) dt \\ &= -\triangle BCE + \square EFGH \\ &= -\frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times (1+2) \times 2 = 1 \end{aligned}$$

ㄷ. $v(t)=0$ 이고 그 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 점 P는 시각 $t=2, t=4, t=7$ 에서 운동 방향을 바꾼다.

따라서 $0 < t < 10$ 에서 점 P는 운동 방향을 세 번 바꾼다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

574 ㉡ 6

점 P가 원점으로 다시 돌아오는 시각을 $t=a$ 라 하면 시각 $t=0$ 에서 $t=a$ 까지 위치의 변화량은 0이므로

$$\int_0^a v(t) dt = 0 \text{ 이어야 한다.}$$

오른쪽 그림과 같이 속도 $v(t)$ 의 그래프와 t 축으로 둘러싸인 각 도형의 넓이를 S_1, S_2, S_3, S_4 라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$$

$$S_3 = 1 \times 3 = 3$$

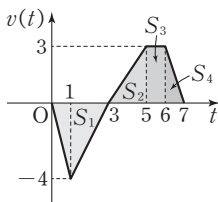
$$S_4 = \frac{1}{2} \times 1 \times 3 = \frac{3}{2}$$

이때 $S_1 = S_2 + S_3$ 이므로

$$-S_1 + (S_2 + S_3) = 0$$

$$\therefore \int_0^6 v(t) dt = 0$$

따라서 시각 $t=6$ 에서 물체가 원점으로 다시 돌아온다.



연습문제

282-285쪽

575 ㉡ ①

$$y = x^2 - 2|x| - 3 = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & (x \geq 0) \\ x^2 + 2x - 3 & (x \leq 0) \end{cases}$$

따라서 함수 $y = x^2 - 2|x| - 3$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표는

(i) $x \geq 0$ 일 때

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \text{에서 } (x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 3 \quad (\because x \geq 0)$$

(ii) $x \leq 0$ 일 때

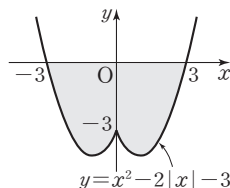
$$x^2 + 2x - 3 = 0 \text{에서 } (x+3)(x-1) = 0$$

$$\therefore x = -3 \quad (\because x \leq 0)$$

(i), (ii)에서 함수

$y = x^2 - 2|x| - 3$ 의 그래프

는 오른쪽 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는



$$\begin{aligned} 2 \int_0^3 (-x^2 + 2x + 3) dx \\ = 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x \right]_0^3 = 18 \end{aligned}$$

576 ㉡ 2

곡선 $y = -4x^3$ 과 x 축 및 두 직선 $x = -1, x = a$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

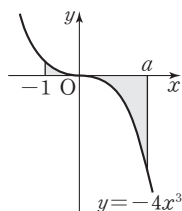
$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 (-4x^3) dx + \int_0^a 4x^3 dx \\ = \left[-x^4 \right]_{-1}^0 + \left[x^4 \right]_0^a = 1 + a^4 \end{aligned}$$

따라서 $1 + a^4 = 17$ 이므로

$$a^4 - 16 = 0$$

$$(a^2 + 4)(a + 2)(a - 2) = 0$$

$$\therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$



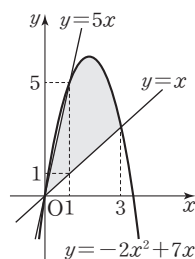
577 ㉡ ⑤

곡선 $y = -2x^2 + 7x$ 와 두 직선 $y = 5x, y = x$ 의 교점의 x 좌표를 각각 구하면

$$-2x^2 + 7x = 5x$$

$$x(x-1) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$



$$-2x^2+7x=x \text{에서 } x(x-3)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 구하는 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 1 + \int_1^3 \{(-2x^2+7x)-x\} dx$$

$$= 2 + \int_1^3 (-2x^2+6x) dx$$

$$= 2 + \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2 \right]_1^3 = \frac{26}{3}$$

578 ㉮ 9/2

$$A=B \text{이므로 } \int_0^k (x^2-3x) dx=0$$

$$\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^k = 0, \quad \frac{1}{3}k^3 - \frac{3}{2}k^2 = 0$$

$$k^2(2k-9)=0 \quad \therefore k=\frac{9}{2} \quad (\because k>3)$$

579 ㉮ 3/2

두 도형의 넓이가 서로 같으므로

$$\int_0^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - k \right) dx = 0$$

$$\left[\frac{1}{6}x^3 - kx \right]_0^3 = 0, \quad \frac{9}{2} - 3k = 0 \quad \therefore k = \frac{3}{2}$$

580 ㉮ ①

곡선 $y=x^2-5x$ 와 직선 $y=x$ 의

교점의 x 좌표를 구하면

$$x^2-5x=x, \quad x^2-6x=0$$

$$x(x-6)=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 또는 } x=6$$

곡선 $y=x^2-5x$ 와 직선 $y=x$ 로

둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$S_1 = \int_0^6 \{x - (x^2-5x)\} dx = \int_0^6 (-x^2+6x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^6 = 36$$

오른쪽 그림에서 색칠한 도형의

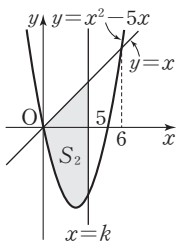
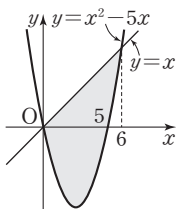
넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \int_0^k \{x - (x^2-5x)\} dx$$

$$= \int_0^k (-x^2+6x) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_0^k$$

$$= -\frac{1}{3}k^3 + 3k^2$$



$$S_1=2S_2 \text{이므로}$$

$$36=2\left(-\frac{1}{3}k^3+3k^2\right), \quad k^3-9k^2+54=0$$

$$(k-3)(k^2-6k-18)=0$$

$$\therefore k=3 \text{ 또는 } k=3 \pm 3\sqrt{3}$$

이때 $0 < k < 6$ 이므로 $k=3$

581 ㉮ 3

두 곡선 $y=f(x)$,

$y=g(x)$ 는 직선 $y=x$ 에

대하여 대칭이므로 두 곡선

으로 둘러싸인 도형의 넓이

는 곡선 $y=f(x)$ 와 직선

$y=x$ 로 둘러싸인 도형의

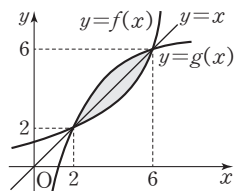
넓이의 2배와 같다.

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (2+6) \times 4 - \int_2^6 f(x) dx = 16 - \frac{29}{2} = \frac{3}{2}$$

따라서 구하는 넓이는

$$2 \times \frac{3}{2} = 3$$



582 ㉮ ④

시간 $t=2$ 에서의 점 P의 위치는

$$0 + \int_0^2 v(t) dt = \int_0^2 (3t^2 + at) dt$$

$$= \left[t^3 + \frac{a}{2}t^2 \right]_0^2 = 8 + 2a$$

점 P와 점 A 사이의 거리가 10이므로

$$|(8+2a) - 6| = 10$$

$$|2a+2| = 10, \quad 2a+2 = \pm 10$$

$$\therefore a=4 \quad (\because a>0)$$

583 ㉮ 4

두 점 P, Q가 만나려면 위치가 같아야 하므로 두 점이

다시 만나는 시각을 $t=a$, 그때의 두 점 P, Q의 위치

를 각각 x_P , x_Q 라 하면

$$x_P = 0 + \int_0^a (3t^2 - 2t - 7) dt$$

$$= \left[t^3 - t^2 - 7t \right]_0^a = a^3 - a^2 - 7a$$

$$x_Q = 0 + \int_0^a (1+2t) dt$$

$$= \left[t + t^2 \right]_0^a = a + a^2$$

▶▶▶▶▶ ①

$x_P = x_Q$ 이므로

$$a^3 - a^2 - 7a = a + a^2, a^3 - 2a^2 - 8a = 0$$

$$a(a+2)(a-4) = 0 \quad \therefore a = 4 (\because a > 0)$$

따라서 출발 후 두 점 P, Q가 다시 만나는 시각은

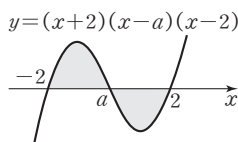
$$t = 4$$

▶▶▶▶▶ ②

단계	채점 기준	비율
①	두 점 P, Q가 만나는 시각에서의 위치에 대한 식 구하기	50 %
②	두 점 P, Q가 다시 만나는 시각 구하기	50 %

584 ㉠ 0

곡선 $y = (x+2)(x-a)(x-2)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(a)$ 라 하면



$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-2}^a (x+2)(x-a)(x-2) dx \\ &\quad + \int_a^2 \{-(x+2)(x-a)(x-2)\} dx \\ &= \int_{-2}^a (x^3 - ax^2 - 4x + 4a) dx \\ &\quad - \int_a^2 (x^3 - ax^2 - 4x + 4a) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{3}x^3 - 2x^2 + 4ax \right]_{-2}^a \\ &\quad - \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a}{3}x^3 - 2x^2 + 4ax \right]_a^2 \\ &= \left(-\frac{1}{12}a^4 + 2a^2 + \frac{16}{3}a + 4 \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{12}a^4 - 2a^2 + \frac{16}{3}a - 4 \right) \\ &= -\frac{1}{6}a^4 + 4a^2 + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore S'(a) &= -\frac{2}{3}a^3 + 8a \\ &= -\frac{2}{3}a(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$S'(a) = 0$ 인 a 의 값은 $a = 0$ ($\because -2 < a < 2$)

$-2 < a < 2$ 에서 함수 $S(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	-2	...	0	...	2
$S'(a)$		-	0	+	
$S(a)$		↘	극소	↗	

따라서 $S(a)$ 는 $a = 0$ 에서 최솟이다.

585 ㉠ ③

$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x$, $g(x) = mx + 2$ 라 하고 곡선

$y = f(x)$ 와 직선 $y = g(x)$ 의 교점의 x 좌표를 a 라 하면

$$A = \int_0^a \{g(x) - f(x)\} dx$$

$$B = \int_a^2 \{f(x) - g(x)\} dx$$

$$\therefore B - A$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^2 \{f(x) - g(x)\} dx - \int_0^a \{g(x) - f(x)\} dx \\ &= \int_a^2 \{f(x) - g(x)\} dx + \int_0^a \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^2 \{f(x) - g(x)\} dx \\ &= \int_0^2 \left\{ \left(\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x \right) - (mx + 2) \right\} dx \\ &= \int_0^2 \left\{ \frac{1}{4}x^3 + \left(\frac{1}{2} - m \right)x - 2 \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{16}x^4 + \left(\frac{1}{4} - \frac{m}{2} \right)x^2 - 2x \right]_0^2 \\ &= -2m - 2 \end{aligned}$$

따라서 $-2m - 2 = \frac{2}{3}$ 이므로

$$m = -\frac{4}{3}$$

586 ㉠ ④

$x > 0$ 일 때, 점 B에서 두 함수 $y = ax^2 + 2$, $y = 2x$ 의 그래프가 접하므로 이차방정식 $ax^2 + 2 = 2x$, 즉 $ax^2 - 2x + 2 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - 2a = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

점 B의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{2}x^2 + 2 = 2x, x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-2)^2 = 0$$

$$\therefore x = 2$$

두 함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$, $y = 2|x|$ 의 그래프로 둘러싸인 부분이 y 축에 대하여 대칭이므로 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \int_0^2 \left\{ \left(\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) - 2x \right\} dx &= 2 \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \right) dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

587 ㉡ 1

곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 과 직선 $y=2$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$\frac{1}{2}x^2 = 2 \quad \therefore x = 2 \quad (\because x \geq 0)$$

곡선 $y = 2ax^2$ 과 직선 $y=2$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$2ax^2 = 2 \quad \therefore x = \frac{1}{\sqrt{a}} \quad (\because a > 0, x \geq 0) \quad \text{..... ①}$$

곡선 $y = \frac{1}{2}x^2$ 과 y 축 및 직선 $y=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{2}x^2 \right) dx \\ &= \left[2x - \frac{1}{6}x^3 \right]_0^2 = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

곡선 $y = 2ax^2$ 과 y 축 및 직선 $y=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} (2 - 2ax^2) dx \\ &= \left[2x - \frac{2}{3}ax^3 \right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{a}} - \frac{2}{3\sqrt{a}} = \frac{4}{3\sqrt{a}} \quad \text{..... ②} \end{aligned}$$

$S_1 = 2S_2$ 이므로

$$\frac{8}{3} = 2 \times \frac{4}{3\sqrt{a}}, \quad \sqrt{a} = 1$$

$$\therefore a = 1 \quad \text{..... ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	각 곡선과 직선 $y=2$ 의 교점의 x 좌표 구하기	30%
②	각 곡선과 y 축 및 직선 $y=2$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 구하기	50%
③	a 의 값 구하기	20%

588 ㉡ 2

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$

는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭

이므로 곡선 $y=f(x)$ 과 직

선 $y=x$ 및 y 축으로 둘러싸

인 도형의 넓이는 곡선

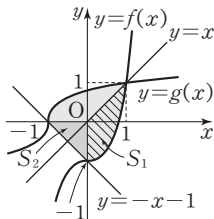
$y=g(x)$ 과 직선 $y=x$ 및 x

축으로 둘러싸인 도형의 넓이와 같다.

곡선 $y=f(x)$ 과 직선 $y=x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$2x^3 - 1 = x, \quad (x-1)(2x^2 + 2x + 1) = 0$$

$$\therefore x = 1 \quad (\because x \text{는 실수})$$



곡선 $y=f(x)$ 과 직선 $y=x$ 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하면

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^1 \{x - (2x^3 - 1)\} dx \\ &= \int_0^1 (-2x^3 + x + 1) dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

직선 $y=-x-1$ 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하면

$$S_2 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$$

따라서 구하는 넓이는

$$\begin{aligned} 2 \times S_1 + S_2 &= 2 \times 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

589 ㉡ 2

두 점 P, Q가 만나려면 위치가 같아야 하므로 두 점이

만나는 시각을 $t=a$, 그때의 두 점의 위치를 각각 x_P ,

x_Q 라 하면

$$\begin{aligned} x_P &= 0 + \int_0^a (3t^2 - 2t + 9) dt \\ &= \left[t^3 - t^2 + 9t \right]_0^a \\ &= a^3 - a^2 + 9a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_Q &= 6 + \int_0^a (6t^2 - 2t - 3) dt \\ &= 6 + \left[2t^3 - t^2 - 3t \right]_0^a \\ &= 2a^3 - a^2 - 3a + 6 \end{aligned}$$

$x_P = x_Q$ 이므로

$$a^3 - a^2 + 9a = 2a^3 - a^2 - 3a + 6$$

$$\therefore a^3 - 12a + 6 = 0 \quad \text{..... ㉠}$$

$f(a) = a^3 - 12a + 6$ 이라 하면

$$f'(a) = 3a^2 - 12 = 3(a+2)(a-2)$$

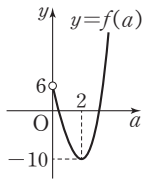
$f'(a) = 0$ 인 a 의 값은

$$a = 2 \quad (\because a > 0)$$

$a > 0$ 에서 함수 $f(a)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

a	0	...	2	...
$f'(a)$		-	0	+
$f(a)$		$\searrow$	-10 극소	$\nearrow$

함수 $y=f(a)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고, $a>0$ 에서 곡선 $y=f(a)$ 는 a 축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 삼차방정식 ㉠의 서로 다른 양의 실근의 개수는 2이다.



따라서 출발 후 두 점 P, Q가 만나는 횟수는 2이다.

590 ㉠ ①

공이 처음 쏘아 올린 위치로 다시 돌아오는 것은 6초 후이므로 시각 $t=0$ 에서 $t=6$ 까지 위치의 변화량은 0이다.

$$\text{즉, } \int_0^6 (a-10t) dt = 0 \text{ 이므로}$$

$$\left[at - 5t^2 \right]_0^6 = 0$$

$$6a - 180 = 0 \quad \therefore a = 30$$

공이 지면에 떨어지는 시각을 $t=k$ 라 하면 공이 지면에 떨어질 때의 높이는 0이므로

$$35 + \int_0^k (30-10t) dt = 0$$

$$35 + \left[30t - 5t^2 \right]_0^k = 0$$

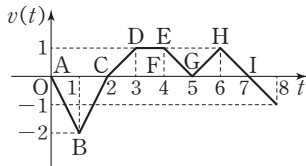
$$35 + 30k - 5k^2 = 0, \quad k^2 - 6k - 7 = 0$$

$$(k+1)(k-7) = 0$$

$$\therefore k = 7 \quad (\because k > 0)$$

따라서 공이 지면에 떨어질 때까지 걸리는 시간은 7초이다.

591 ㉠ ㄴ, ㄷ



ㄴ. 시각 $t=4$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^4 v(t) dt &= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^4 v(t) dt \\ &= -\triangle ABC + \square CFED \\ &= -\frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times (1+2) \times 1 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ㄷ. $v(t)=0$ 이고 그 좌우에서 $v(t)$ 의 부호가 바뀔 때 운동 방향이 바뀌므로 점 P는 출발 후 시각 $t=6$ 까지 시각 $t=2$ 에서 운동 방향을 한 번 바꾼다.

ㄷ. 시각 $t=5$ 에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^5 v(t) dt &= \int_0^2 v(t) dt + \int_2^5 v(t) dt \\ &= -\triangle ABC + \square CGED \\ &= -\frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

따라서 시각 $t=5$ 에서 점 P는 원점에 있다.

ㄷ. 점 P는 출발 후 시각 $t=2$ 에서 처음으로 운동 방향을 바꾸고, 시각 $t=7$ 에서 두 번째로 운동 방향을 바꾸므로 시각 $t=2$ 에서 $t=7$ 까지 움직인 거리는

$$\begin{aligned} \int_2^7 |v(t)| dt &= \square CGED + \triangle GIH \\ &= \frac{1}{2} \times (1+3) \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

|참고| 점 P는 원점에서 출발하여 $t=2$ 까지 음의 방향으로 좌표가 -2 인 점까지 이동하고, $t=2$ 에서 운동 방향을 바꾸어 양의 방향으로 이동하다 $t=5$ 일 때 원점을 지난 후 $t=7$ 까지 계속해서 양의 방향으로 좌표가 1 인 점까지 이동한다. 또 $t=7$ 에서 운동 방향을 바꾸어 $t=8$ 까지 음의 방향으로 좌표가 $\frac{1}{2}$ 인 점까지 이동한다.

따라서 $t=2$ 일 때 원점까지의 거리가 2로 가장 멀리 떨어져 있다.

592 ㉠ 18

|접근 방법| $\int_{k+2}^{k+4} f(x-2) dx = \int_k^{k+2} f(x) dx$ 임을 이용한다.

(ㄴ)의 좌변에서

$$\begin{aligned} &\int_0^4 f(x) dx \\ &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \quad \dots\dots \text{㉠} \\ &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 \{f(x-2) + 6\} dx \quad (\because \text{㉡}) \\ &= \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 \{f(x) + 6\} dx \\ &= \int_0^2 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + [6x]_0^2 \\ &= 2 \int_0^2 f(x) dx + 12 \end{aligned}$$

따라서 $2 \int_0^2 f(x) dx + 12 = 0$ 이므로

$$\int_0^2 f(x) dx = -6$$

이때 ㉠에서 $0 = -6 + \int_2^4 f(x) dx$ 이므로

$$\int_2^4 f(x) dx = 6$$

함수 $f(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 증가하고 (나)에서

$$\int_0^4 f(x) dx = 0 \text{이므로 } 4 \leq x \leq 6 \text{에서 } f(x) > 0 \text{이다.}$$

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=4$, $x=6$ 으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \int_4^6 f(x) dx = \int_4^6 \{f(x-2) + 6\} dx \\ &= \int_2^4 \{f(x) + 6\} dx = \int_2^4 f(x) dx + [6x]_2^4 \\ &= \int_2^4 f(x) dx + 12 = 6 + 12 = 18 \end{aligned}$$

593 ㉠ -6

㉠ 접근 방법 $f(-x) = -f(x)$ 를 만족시키는 다항함수는 홀수 차수의 항의 합으로만 나타낼 수 있음을 이용하여 삼차함수 $f(x)$ 의 식을 먼저 세운다.

함수 $f(x)$ 가 삼차함수이고 (가)에서 $f(-x) = -f(x)$ 이므로 $f(x) = ax^3 + bx$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면 $f'(x) = 3ax^2 + b$

(나)에서 이차함수 $f'(x)$ 의 최솟값이 2이므로 $a > 0, b = 2$

$$\therefore f(x) = ax^3 + 2x, f'(x) = 3ax^2 + 2$$

점 $(1, f(1))$, 즉 $(1, a+2)$ 에서의 접선의 기울기는 $f'(1) = 3a+2$ 이므로 접선의 방정식은

$$y - (a+2) = (3a+2)(x-1)$$

$$\therefore y = (3a+2)x - 2a$$

곡선 $y = ax^3 + 2x$ 와 접선 $y = (3a+2)x - 2a$ 의 교점의 x 좌표를 구하면

$$ax^3 + 2x = (3a+2)x - 2a$$

$$ax^3 - 3ax + 2a = 0, a(x+2)(x-1)^2 = 0$$

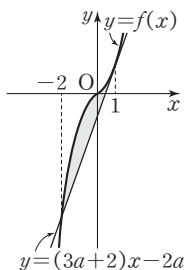
$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

(다)에서 곡선 $y=f(x)$ 와 이 곡선 위의 점 $(1, f(1))$ 에서의 접선으로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_{-2}^1 [(ax^3 + 2x) - \{(3a+2)x - 2a\}] dx$$

$$= a \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx$$

$$= a \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_{-2}^1 = \frac{27}{4}a$$



따라서 $\frac{27}{4}a = 27$ 이므로

$$a = 4$$

즉, $f(x) = 4x^3 + 2x$ 이므로

$$f(-1) = -4 - 2 = -6$$

594 ㉠ ㉡

시간 $t=k$ ($k \geq 0$)에서의 점 P의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^k (t^2 - 6t + 5) dt &= \left[\frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t \right]_0^k \\ &= \frac{1}{3}k^3 - 3k^2 + 5k \end{aligned}$$

시간 $t=k$ ($k \geq 0$)에서의 점 Q의 위치는

$$\begin{aligned} 0 + \int_0^k (2t - 7) dt &= \left[t^2 - 7t \right]_0^k \\ &= k^2 - 7k \end{aligned}$$

시간 $t=k$ ($k \geq 0$)에서의 두 점 P, Q 사이의 거리는

$$\begin{aligned} f(k) &= \left| \frac{1}{3}k^3 - 3k^2 + 5k - (k^2 - 7k) \right| \\ &= \left| \frac{1}{3}k^3 - 4k^2 + 12k \right| \end{aligned}$$

$$g(k) = \frac{1}{3}k^3 - 4k^2 + 12k \text{라 하면}$$

$$g'(k) = k^2 - 8k + 12 = (k-2)(k-6)$$

$$g'(k) = 0 \text{인 } k \text{의 값은 } k=2 \text{ 또는 } k=6$$

$k \geq 0$ 에서 함수 $g(k)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

k	0	...	2	...	6	...
$g'(k)$		+	0	-	0	+
$g(k)$	0	↗	$\frac{32}{3}$ 극대	↘	0 극소	↗

이때 $k \geq 0$ 에서 함수 $g(k)$ 의 최솟값이 0이므로

$$g(k) \geq 0$$

$$\therefore f(k) = g(k) (\because k \geq 0)$$

따라서 함수 $f(k)$ 는 구간 $[0, 2]$ 에서 증가하고, 구간 $[2, 6]$ 에서 감소하고, 구간 $[6, \infty)$ 에서 증가하므로 $a=2, b=6$

$$2 \leq t \leq \frac{7}{2} \text{에서 } v_2(t) \leq 0, \frac{7}{2} \leq t \leq 6 \text{에서 } v_2(t) \geq 0 \text{이}$$

므로 시간 $t=2$ 에서 $t=6$ 까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\begin{aligned} &\int_2^{\frac{7}{2}} (-2t + 7) dt + \int_{\frac{7}{2}}^6 (2t - 7) dt \\ &= \left[-t^2 + 7t \right]_2^{\frac{7}{2}} + \left[t^2 - 7t \right]_{\frac{7}{2}}^6 \\ &= \frac{17}{2} \end{aligned}$$