



정답과 해설

확률과 통계

I. 경우의 수

I-1. 중복순열과 같은 것이 있는 순열

01 중복순열과 같은 것이 있는 순열

개념 확인

13쪽

001 ㉠ (1) ${}_4\Pi_5$ (2) ${}_7\Pi_3$

002 ㉠ (1) 5 (2) 16 (3) 64 (4) 27

003 ㉠ (1) 13 (2) 6 (3) 5 (4) 5

(1) ${}_n\Pi_2=169$ 에서

$$n^2=13^2 \quad \therefore n=13$$

(2) ${}_n\Pi_3=216$ 에서

$$n^3=6^3 \quad \therefore n=6$$

(3) ${}_2\Pi_r=32$ 에서

$$2^r=2^5 \quad \therefore r=5$$

(4) ${}_3\Pi_r=243$ 에서

$$3^r=3^5 \quad \therefore r=5$$

004 ㉠ 64

구하는 경우의 수는

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

유제

15~24쪽

005 ㉠ 625

구하는 경우의 수는 서로 다른 5개의 우체통에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_4=5^4=625$$

006 ㉠ 243

구하는 경우의 수는 서로 다른 3명의 후보에서 중복을 허용하여 5명을 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_5=3^5=243$$

007 ㉠ 81

구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_4=3^4=81$$

008 ㉠ 5

n 명의 학생이 각각 축구, 농구, 배구, 피구 중에서 1가지씩 택하여 방과 후 체육 활동을 하는 경우의 수는 서로 다른 4가지의 체육 활동에서 중복을 허용하여 n 가지를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_n=1024$$

$$4^n=4^5$$

$$\therefore n=5$$

009 ㉠ 864

맨 앞자리에 올 수 있는 문자는 b, c, d, f 의 4가지 나머지 자리에 6개의 문자 a, b, c, d, e, f 에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_6\Pi_3=6^3=216$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 216=864$$

010 ㉠ 175

4명의 선거인이 기명으로 투표하는 모든 경우의 수에서 어느 1명의 선거인도 후보 A에게 투표하지 않는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 4명의 선거인이 기명으로 투표하는 모든 경우의 수는 서로 다른 4명의 후보에서 중복을 허용하여 4명을 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_4=4^4=256$$

(ii) 어느 1명의 선거인도 후보 A에게 투표하지 않는 경우의 수는 A를 제외한 나머지 3명의 후보에서 중복을 허용하여 4명을 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_4=3^4=81$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$256-81=175$$

011 ㉠ 256

문자 b 를 네 자리 중에서 한 자리에 배열하는 경우의 수는 4

나머지 자리에 b 를 제외한 4개의 문자 a, c, d, e 에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 64 = 256$$

012 ㉠ 126

연필을 필통에 나누어 담는 모든 경우의 수에서 1개의 필통에만 연필을 모두 담는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 연필을 필통에 나누어 담는 모든 경우의 수는 서로 다른 2개의 필통에서 중복을 허용하여 7개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_2\Pi_7=2^7=128$$

(ii) 1개의 필통에만 연필을 모두 담는 경우의 수는 2

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$128 - 2 = 126$$

013 ㉠ (1) 500 (2) 200

(1) 천의 자리에는 0이 올 수 없으므로 천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지

나머지 자리에 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_5\Pi_3=5^3=125$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$4 \times 125 = 500$$

(2) (i) 천의 자리의 숫자가 1인 경우

나머지 자리에 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_5\Pi_3=5^3=125$$

(ii) 천의 자리의 숫자가 2인 경우

20□□, 21□□, 22□□ 꼴인 경우에 대하여 생각한다.

각각의 경우에 대하여 나머지 자리에 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_5\Pi_2=5^2=25$$

따라서 자연수의 개수는 $3 \times 25 = 75$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$125 + 75 = 200$$

014 ㉠ ②

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 4, 5의 2가지

홀수의 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3, 5의 3가지

나머지 자리에 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_5\Pi_2=5^2=25$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$2 \times 3 \times 25 = 150$$

015 ㉠ 81

만의 자리의 숫자와 일의 자리의 숫자의 합이 6인 다섯 자리의 자연수는 2□□□4, 3□□□3, 4□□□2 꼴이다.

각각의 경우에 대하여 나머지 자리에 3개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_3=3^3=27$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$3 \times 27 = 81$$

016 ㉠ 175

만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수의 개수에서 1을 포함하지 않는 네 자리의 자연수의 개수를 빼면 된다.

(i) 1, 2, 3, 4로 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_4\Pi_4=4^4=256$$

(ii) 2, 3, 4로 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$${}_3\Pi_4=3^4=81$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$256 - 81 = 175$$

017 ㉠ 360

세 기호 ○, △, □를 2개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_3\Pi_2=3^2=9$$

세 기호 ○, △, □를 3개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_3\Pi_3=3^3=27$$

세 기호 ○, △, □를 4개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_3\Pi_4=3^4=81$$

세 기호 ○, △, □를 5개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_3\Pi_5=3^5=243$$

따라서 구하는 신호의 개수는

$$9+27+81+243=360$$

018 ㉠ 243

$A \cap B = \{1, 3, 5\}$ 이므로 전체집합 U 의 원소 중에서 1, 3, 5를 제외한 나머지 5개의 원소 2, 4, 6, 7, 8은 세 집합 $A \cap B^c$, $A^c \cap B$, $(A \cup B)^c$ 중에서 어느 하나의 원소이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_5=3^5=243$$

019 ㉠ 126

깃발을 1번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_1=2$$

깃발을 2번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_2=2^2=4$$

깃발을 3번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_3=2^3=8$$

깃발을 4번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_4=2^4=16$$

깃발을 5번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_5=2^5=32$$

깃발을 6번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_6=2^6=64$$

따라서 구하는 신호의 개수는

$$2+4+8+16+32+64=126$$

020 ㉠ 27

$A - B = \{1, 2, 3, 4\}$, 즉 $A \cap B^c = \{1, 2, 3, 4\}$ 이므로 전체집합 U 의 원소 중에서 1, 2, 3, 4를 제외한 나머지 3개의 원소 5, 6, 7은 세 집합 $A \cap B$, $A^c \cap B$, $(A \cup B)^c$ 중에서 어느 하나의 원소이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_3=3^3=27$$

021 ㉠ (1) 625 (2) 120 (3) 125

(1) 구하는 함수의 개수는 집합 Y 의 원소 a, b, c, d, e 의 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_4=5^4=625$$

(2) 구하는 일대일함수의 개수는 집합 Y 의 원소 a, b, c, d, e 의 5개에서 서로 다른 4개를 택하여 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_5P_4=5 \times 4 \times 3 \times 2=120$$

(3) $f(3)=d$ 로 정해졌으므로 집합 Y 의 원소 a, b, c, d, e 의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 X 의 나머지 원소 1, 2, 4에 대응시키면 된다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$${}_5\Pi_3=5^3=125$$

022 ㉠ 192

$f(1) \neq 4$ 이므로 $f(1)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3의 3가지

또 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 X 의 나머지 원소 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수는

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$3 \times 64=192$$

[다른 풀이]

X 에서 X 로의 함수의 개수에서 $f(1)=4$ 인 함수의 개수를 빼면 된다.

(i) X 에서 X 로의 함수의 개수는 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_4=4^4=256$$

(ii) $f(1)=4$ 인 함수의 개수는 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 X 의 나머지 원소 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_4\Pi_3=4^3=64$$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$256-64=192$$

023 ㉡ 81

$f(2)+f(3)=0$ 을 만족시키는 경우는

$f(2)=-2, f(3)=2$ 또는 $f(2)=0, f(3)=0$

또는 $f(2)=2, f(3)=-2$ 의 3가지

각각의 경우에 대하여 집합 Y 의 원소 $-2, 0, 2$ 의 3개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 X 의 나머지 원소 $1, 4, 5$ 에 대응시키는 경우의 수는

$${}_3\Pi_3=3^3=27$$

따라서 구하는 함수의 개수는

$$3 \times 27 = 81$$

024 ㉡ 40

$f(x_1)=f(x_2)$ 인 서로 다른 x_1, x_2 가 존재하면 함수 f 는 일대일함수가 아니다.

즉, X 에서 Y 로의 함수의 개수에서 X 에서 Y 로의 일대일함수의 개수를 빼면 된다.

(i) X 에서 Y 로의 함수의 개수는 집합 Y 의 원소 $5, 6, 7, 8$ 의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 X 의 원소 $1, 2, 3$ 에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

(ii) X 에서 Y 로의 일대일함수의 개수는 집합 Y 의 원소 $5, 6, 7, 8$ 의 4개에서 서로 다른 3개를 택하여 집합 X 의 원소 $1, 2, 3$ 에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 ${}_4P_3=4 \times 3 \times 2=24$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$64 - 24 = 40$$

025 ㉡ ⑤

① 4개의 자리를 p, q, r, s 라 하자.

4개의 자리는 각각 반드시 1개의 문자와 대응이 되어야 하므로 정의역 $X=\{p, q, r, s\}$ 로 생각할 수 있고, 3개의 문자 각각은 택하지 않을 수도 있으므로 공역 $Y=\{a, b, c\}$ 로 생각할 수 있다.

따라서 구하는 경우의 수는 X 에서 Y 로의 함수의 개수와 같으므로 ${}_3\Pi_4=3^4=81$

② 서로 다른 4송이의 꽃을 a, b, c, d , 서로 다른 3개의 꽃병을 p, q, r 라 하자.

4송이의 꽃은 각각 반드시 1개의 꽃병에 꽂아야 하므로 정의역 $X=\{a, b, c, d\}$ 로 생각할 수 있고, 3개의 꽃병 각각에 꽃을 꽂지 않을 수도 있으므로 공역 $Y=\{p, q, r\}$ 로 생각할 수 있다.

따라서 구하는 경우의 수는 X 에서 Y 로의 함수의 개수와 같으므로 ${}_3\Pi_4=3^4=81$

③ 서로 다른 4명의 학생을 a, b, c, d , 서로 다른 3개의 학급을 p, q, r 라 하자.

4명의 학생은 각각 반드시 1개의 학급에 배정되어야 하므로 정의역 $X=\{a, b, c, d\}$ 로 생각할 수 있고, 3개의 학급 각각에 학생을 배정하지 않을 수도 있으므로 공역 $Y=\{p, q, r\}$ 로 생각할 수 있다. 따라서 구하는 경우의 수는 X 에서 Y 로의 함수의 개수와 같으므로 ${}_3\Pi_4=3^4=81$

④ 서로 다른 4명의 여행자를 a, b, c, d , 서로 다른 3곳의 호텔을 p, q, r 라 하자.

4명의 여행자는 각각 반드시 1곳의 호텔에 투숙해야 하므로 정의역 $X=\{a, b, c, d\}$ 로 생각할 수 있고, 3곳의 호텔 각각에 투숙하지 않을 수도 있으므로 공역 $Y=\{p, q, r\}$ 로 생각할 수 있다.

따라서 구하는 경우의 수는 X 에서 Y 로의 함수의 개수와 같으므로 ${}_3\Pi_4=3^4=81$

⑤ 서로 다른 4명의 후보를 a, b, c, d , 서로 다른 3명의 선거인을 p, q, r 라 하자.

3명의 선거인은 각각 반드시 1명의 후보에게 기명으로 투표해야 하므로 정의역 $X=\{p, q, r\}$ 로 생각할 수 있고, 4명의 후보 각각은 표를 받지 않을 수도 있으므로 공역 $Y=\{a, b, c, d\}$ 로 생각할 수 있다.

따라서 구하는 경우의 수는 X 에서 Y 로의 함수의 개수와 같으므로 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 경우의 수가 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

개념 확인

27쪽

026 ㉡ (1) 15 (2) 56 (3) 90

027 ㉡ 60

d, e 를 모두 X 로 바꾸어 a, b, c, X, X 를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X 는 d , 두 번째 X 는 e 로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!}=60$$

028 ㉡ 10

029 ㉡ (1) 10080 (2) 360 (3) 2520

- (1) 8개의 문자 t, e, x, t, b, o, o, k를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{2! \times 2!} = 10080$$

- (2) 양 끝에 o를 고정시키고 그 사이에 t, e, x, t, b, k의 6개의 문자를 일렬로 배열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!} = 360$$

- (3) 2개의 t를 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자 e, x, b, o, o, k와 함께 일렬로 배열하면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2!} = 2520$$

030 ㉡ 560

구하는 신호의 개수는 $\frac{8!}{3! \times 2! \times 3!} = 560$

031 ㉡ 70

모든 구슬을 일렬로 배열하는 경우의 수에서 양 끝에 서로 같은 색의 구슬이 오도록 배열하는 경우의 수를 빼면 된다.

- (i) 파란 구슬 2개, 노란 구슬 4개, 초록 구슬 1개를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2! \times 4!} = 105$$

- (ii) 양 끝에 서로 같은 색의 구슬이 오도록 배열하는 경우

양 끝에 파란 구슬이 오는 경우의 수는 양 끝에 파란 구슬을 고정시키고 그 사이에 노란 구슬 4개, 초록 구슬 1개를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

양 끝에 노란 구슬이 오는 경우의 수는 양 끝에 노란 구슬을 고정시키고 그 사이에 파란 구슬 2개, 노란 구슬 2개, 초록 구슬 1개를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

따라서 양 끝에 서로 같은 색의 구슬이 오도록 배열하는 경우의 수는 $5 + 30 = 35$

- (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$105 - 35 = 70$$

| 다른 풀이 |

- (i) 양 끝에 파란 구슬, 노란 구슬이 오는 경우

파란 구슬과 노란 구슬 사이에 파란 구슬 1개, 노란 구슬 3개, 초록 구슬 1개를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!} = 20$$

파란 구슬과 노란 구슬이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 그 경우의 수는

$$20 \times 2 = 40$$

- (ii) 양 끝에 파란 구슬, 초록 구슬이 오는 경우

파란 구슬과 초록 구슬 사이에 파란 구슬 1개, 노란 구슬 4개를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{4!} = 5$$

파란 구슬과 초록 구슬이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 그 경우의 수는

$$5 \times 2 = 10$$

- (iii) 양 끝에 노란 구슬, 초록 구슬이 오는 경우

노란 구슬과 초록 구슬 사이에 파란 구슬 2개, 노란 구슬 3개를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

노란 구슬과 초록 구슬이 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! = 2$

따라서 그 경우의 수는

$$10 \times 2 = 20$$

- (i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$40 + 10 + 20 = 70$$

032 ㉡ ③

b, b, c, c를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

b, b, c, c 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 2개의 자리에 2개의 a를 배열하는 경우의 수는

$${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 10 = 60$$

| 다른 풀이 |

a, a, b, b, c, c 를 일렬로 배열하는 경우의 수에서 a 끼리 서로 이웃하도록 배열하는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) a, a, b, b, c, c 를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 2! \times 2!} = 90$$

(ii) a 끼리 서로 이웃하도록 배열하는 경우의 수는 2개의 a 를 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자 b, b, c, c 와 함께 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$90 - 30 = 60$$

033 ㉡ 3360

x, s 를 모두 X 로 바꾸어 e, X, e, r, c, i, X, e 의 8개의 문자를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X 는 s , 두 번째 X 는 x 로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{8!}{3! \times 2!} = 3360$$

034 ㉡ 3024

홀수 1, 3, 5, 7, 9가 적힌 카드를 모두 X 가 적힌 카드로 바꾸어 $X, 2, X, 4, X, 6, X, 8, X$ 가 각각 적힌 9장의 카드를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X 는 9, 두 번째 X 는 7, 세 번째 X 는 5, 네 번째 X 는 3, 다섯 번째 X 는 1로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{9!}{5!} = 3024$$

035 ㉡ 105

자음 l, g, b, r 를 모두 X 로 바꾸어 a, X, X, e, X, X, a 의 7개의 문자를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X 는 b , 두 번째 X 는 g , 세 번째 X 는 l , 네 번째 X 는 r 로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{7!}{2! \times 4!} = 105$$

036 ㉡ 30

a, b 를 모두 X 로 바꾸고, d, e 를 모두 Y 로 바꾸어 X, X, c, Y, Y 의 5개의 문자를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X 는 a , 두 번째 X 는 b 로 바꾸고, 첫 번째 Y 는 d , 두 번째 Y 는 e 로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

037 ㉡ 120

맨 앞자리에는 0이 올 수 없으므로 맨 앞자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3이다.

(i) 맨 앞자리에 1이 오는 경우

나머지 자리에 0, 0, 1, 2, 3의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

(ii) 맨 앞자리에 2가 오는 경우

나머지 자리에 0, 0, 1, 1, 3의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

(iii) 맨 앞자리에 3이 오는 경우

나머지 자리에 0, 0, 1, 1, 2의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!} = 30$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$60 + 30 + 30 = 120$$

| 다른 풀이 |

여섯 개의 숫자 0, 0, 1, 1, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수에서 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 여섯 개의 숫자 0, 0, 1, 1, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 2!} = 180$$

(ii) 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 나머지 자리에 0, 1, 1, 2, 3의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{5!}{2!} = 60$$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$180 - 60 = 120$$

038 ㉡ 46

1, 1, 1, 2, 2, 2, 3에서 4개의 숫자를 택하는 경우는

(1, 1, 1, 2) 또는 (1, 1, 1, 3) 또는 (1, 1, 2, 2)

또는 (1, 1, 2, 3) 또는 (1, 2, 2, 2)

또는 (1, 2, 2, 3) 또는 (2, 2, 2, 3)

(i) 1, 1, 1, 2를 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

- (ii) 1, 1, 1, 3을 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

- (iii) 1, 1, 2, 2를 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!}=6$$

- (iv) 1, 1, 2, 3을 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

- (v) 1, 2, 2, 2를 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

- (vi) 1, 2, 2, 3을 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{2!}=12$$

- (vii) 2, 2, 2, 3을 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는

$$\frac{4!}{3!}=4$$

- (i)~(vii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$4+4+6+12+4+12+4=46$$

039 ㉔ ②

홀수의 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3이다.

- (i) 일의 자리의 숫자가 1인 경우

나머지 자리에 1, 2, 2, 2, 3의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3!}=20$$

- (ii) 일의 자리의 숫자가 3인 경우

나머지 자리에 1, 1, 2, 2, 2의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!}=10$$

- (i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$20+10=30$$

040 ㉔ 9

4의 배수이려면 끝의 두 자리의 수가 4의 배수이어야 하므로 $\square\square\square 24$ 꼴 또는 $\square\square\square 32$ 꼴이어야 한다.

- (i) $\square\square\square 24$ 꼴인 경우

나머지 자리에 2, 3, 3의 3개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!}=3$$

- (ii) $\square\square\square 32$ 꼴인 경우

나머지 자리에 2, 3, 4의 3개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$3!=6$$

- (i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$3+6=9$$

041 ㉔ ①

A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!}=10$$

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{3! \times 3!}=20$$

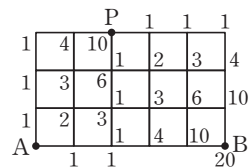
따라서 구하는 경우의 수는

$$10 \times 20=200$$

| 다른 풀이 |

합의 법칙을 이용하면 다음 그림과 같으므로 구하는

경우의 수는 $10 \times 20=200$



042 ㉔ 44

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수에서 A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수를 빼면 된다.

- (i) A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{9!}{6! \times 3!}=84$$

- (ii) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!}=10$$

P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!} = 4$$

따라서 A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$10 \times 4 = 40$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$84 - 40 = 44$$

043 ㉡ 36

A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

P 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{2!}{1! \times 1!} = 2$$

Q 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

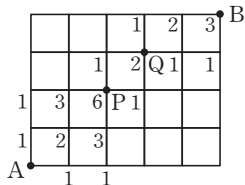
$$\frac{3!}{2! \times 1!} = 3$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 2 \times 3 = 36$$

| 다른 풀이 |

합의 법칙을 이용하면 다음 그림과 같으므로 구하는 경우의 수는 $6 \times 2 \times 3 = 36$



044 ㉡ 51

(i) A 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{7!}{4! \times 3!} = 35$$

A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

P 지점에서 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2! \times 1!} = 3$$

따라서 A 지점에서 P 지점을 거치지 않고 Q 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$35 - 6 \times 3 = 17$$

(ii) Q 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{3!}{2! \times 1!} = 3$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$17 \times 3 = 51$$

045 ㉡ 132

오른쪽 그림과 같이 네

지점 P, Q, R, S를 잡으

면 P, Q, R, S 중에서 어

느 한 지점은 반드시 거

치지만 두 지점 이상을

동시에 거쳐 최단 거리로

가는 경우는 없으므로 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

$A \rightarrow P \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow Q \rightarrow B$

또는 $A \rightarrow R \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow S \rightarrow B$

(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times \frac{6!}{5! \times 1!} = 6$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{1! \times 3!} \times \frac{6!}{4! \times 2!} = 4 \times 15 = 60$$

(iii) $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!} \times \frac{6!}{2! \times 4!} = 4 \times 15 = 60$$

(iv) $A \rightarrow S \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times \frac{6!}{1! \times 5!} = 6$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$6 + 60 + 60 + 6 = 132$$

| 다른 풀이 |

오른쪽 그림과 같이 지나

갈 수 없는 길을 점선으로

연결하여 그 교점을 C라

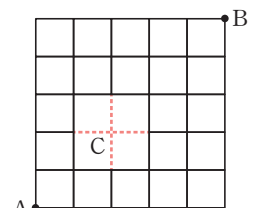
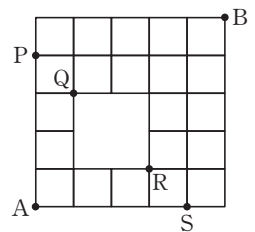
하면 구하는 경우의 수는

$A \rightarrow B$ 로 가는 경우의

수에서 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 로

가는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

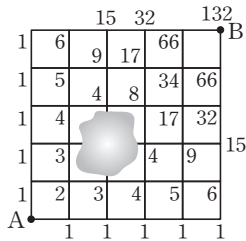
$$\frac{10!}{5! \times 5!} - \frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{6!}{3! \times 3!} = 252 - 6 \times 20 = 132$$



| 다른 풀이 |

합의 법칙을 이용하면 다음 그림과 같으므로 구하는 경우의 수는

132



046 ㉮ 26

오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 P, Q, R 중에서 어느 한 지점은 반드시 거치지만 두 지점 이상을 동시에 거쳐 최단 거리로 가는 경우는 없으므로 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

$A \rightarrow P \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow Q \rightarrow B$
또는 $A \rightarrow R \rightarrow B$

(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{1! \times 4!} \times \frac{3!}{2! \times 1!} = 5 \times 3 = 15$$

(iii) $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} \times 1 = 10$$

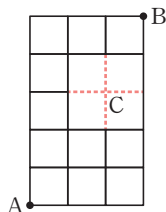
(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$1 + 15 + 10 = 26$$

| 다른 풀이 |

오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하여 그 교점을 C라 하면 구하는 경우의 수는 $A \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수에서 $A \rightarrow C \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

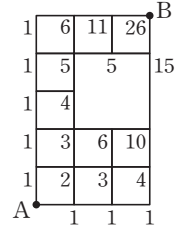
$$\frac{8!}{3! \times 5!} - \frac{5!}{2! \times 3!} \times \frac{3!}{1! \times 2!} = 56 - 10 \times 3 = 26$$



| 다른 풀이 |

합의 법칙을 이용하면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 경우의 수는

26



047 ㉮ 100

오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 P, Q 중에서 어느 한 지점은 반드시 거치지만 두 지점

이상을 동시에 거쳐 최단 거리로 가는 경우는 없으므로 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

$A \rightarrow P \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow Q \rightarrow B$

(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{5!}{3! \times 2!} = 6 \times 10 = 60$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 4 \times 10 = 40$$

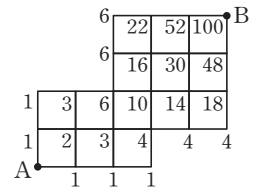
(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$60 + 40 = 100$$

| 다른 풀이 |

합의 법칙을 이용하면 오른쪽 그림과 같으므로 구하는 경우의 수는

100



048 ㉮ 50

오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 P, Q, R, S 중에서 어느 한 지점은 반드시 거치지만 두 지점 이상을 동시에 거쳐 최단 거리로 가는 경우는 없으므로 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

$A \rightarrow P \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow Q \rightarrow B$
또는 $A \rightarrow R \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow S \rightarrow B$

(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{5!}{3! \times 2!} = 6 \times 10 = 60$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

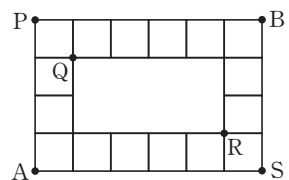
$$\frac{4!}{3! \times 1!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 4 \times 10 = 40$$

(iii) $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 4 \times 10 = 40$$

(iv) $A \rightarrow S \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 4 \times 10 = 40$$



(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{1! \times 3!} \times \frac{6!}{5! \times 1!} = 4 \times 6 = 24$$

(iii) $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{5! \times 1!} \times \frac{4!}{1! \times 3!} = 6 \times 4 = 24$$

(iv) $A \rightarrow S \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

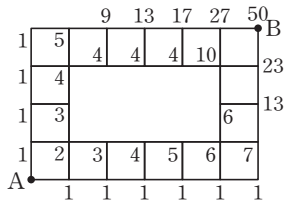
(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$1 + 24 + 24 + 1 = 50$$

| 다른 풀이 |

합의 법칙을 이용하면 다음 그림과 같으므로 구하는 경우의 수는

$$50$$



연습문제

38~40쪽

049 ㉡ 81

구하는 경우의 수는 서로 다른 3곳의 대학교에서 중복을 허용하여 4곳을 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

050 ㉡ ⑤

만의 자리에는 0이 올 수 없으므로 만의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

짜수의 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4의 3가지

나머지 자리에 6개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_6\Pi_3 = 6^3 = 216$$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$$5 \times 3 \times 216 = 3240$$

051 ㉡ ③

X 에서 Y 로의 함수의 개수는 집합 Y 의 n 개의 원소에 서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 X 의 3개의 원소에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_n\Pi_3 = n^3$$

즉, $n^3 = 216$ 이므로

$$n^3 = 6^3 \quad \therefore n = 6$$

052 ㉡ 5040

(i) 양 끝에 e가 오도록 배열하는 경우

양 끝에 e를 고정시키고 그 사이에 n, w, s, p, a, p, r의 7개의 문자를 일렬로 배열하면 되므로 그

$$\text{경우의 수는 } \frac{7!}{2!} = 2520$$

(ii) 양 끝에 p가 오도록 배열하는 경우

양 끝에 p를 고정시키고 그 사이에 n, e, w, s, a, e, r의 7개의 문자를 일렬로 배열하면 되므로 그

$$\text{경우의 수는 } \frac{7!}{2!} = 2520$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$2520 + 2520 = 5040$$

053 ㉡ 360

오늘 복습해야 할 과목을 A, B, C, D, E, F라 하면 A, B를 모두 X로 바꾸어 X, X, C, D, E, F의 6개의 과목을 일렬로 배열한 후 첫 번째 X는 A, 두 번째 X는 B로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!} = 360$$

054 ㉡ 100

집에서 학교까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$$

학교에서 도서관까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는 $10 \times 10 = 100$

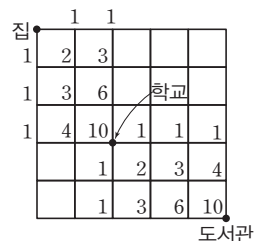
| 다른 풀이 |

합의 법칙을 이용하면

오른쪽 그림과 같으므로

구하는 경우의 수는

$$10 \times 10 = 100$$



055 ㉔ ③

(가)에서 양 끝에 2개의 문자 X, Y 에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 배열하는 경우의 수는

$${}_2\Pi_2=2^2=4$$

(나)에서 a 는 양 끝을 제외한 4개의 자리 중에서 한 자리에 올 수 있으므로 그 경우의 수는

$${}_4C_1=4$$

나머지 자리에 3개의 문자 b, X, Y 에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_3=3^3=27$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$4 \times 4 \times 27 = 432$$

056 ㉔ 720

서로 다른 6개의 공을 서로 다른 3개의 상자에 넣는 모든 경우의 수에서 한 상자에 넣은 공에 적힌 수의 합이 19보다 큰 경우의 수를 빼면 된다.

(i) 서로 다른 6개의 공을 서로 다른 3개의 상자에 넣는 경우의 수는 서로 다른 3개의 상자에서 중복을 허용하여 6개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_6=3^6=729 \quad \text{>>>>> ①}$$

(ii) 한 상자에 넣은 공에 적힌 수의 합이 19보다 큰 경우는

1, 2, 3, 4, 5, 6 또는 2, 3, 4, 5, 6

이 적힌 공을 한 상자에 넣는 경우이다.

① 한 상자에 1, 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 공을 넣는 경우

3개의 상자에서 1개를 택하여 모든 공을 넣으면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3C_1=3$$

② 한 상자에 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 공을 넣는 경우 3개의 상자에서 1개를 택하여 2, 3, 4, 5, 6이 적힌 공을 넣고, 나머지 2개의 상자에서 1개를 택하여 1이 적힌 공을 넣으면 되므로 그 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_2C_1=3 \times 2=6$$

①, ②에서 한 상자에 넣은 공에 적힌 수의 합이 19보다 큰 경우의 수는

$$3+6=9 \quad \text{>>>>> ②}$$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$$729-9=720 \quad \text{>>>>> ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	전체 경우의 수 구하기	30 %
②	한 상자에 넣은 공에 적힌 수의 합이 19보다 큰 경우의 수 구하기	50 %
③	각 상자에 넣은 공에 적힌 수의 합이 19 이하가 되는 경우의 수 구하기	20 %

057 ㉔ ⑤

(i) 한 자리의 자연수는 1, 2의 2가지

(ii) 두 자리의 자연수의 개수

십의 자리에는 0이 올 수 없으므로 십의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2의 2가지

일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2의 3가지

따라서 두 자리의 자연수의 개수는

$$2 \times 3 = 6$$

(iii) 세 자리의 자연수의 개수

백의 자리에는 0이 올 수 없으므로 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2의 2가지

나머지 자리에 3개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_2=3^2=9$$

따라서 세 자리의 자연수의 개수는

$$2 \times 9 = 18$$

(iv) 천의 자리의 숫자가 1인 네 자리의 자연수의 개수는 나머지 자리에 3개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3\Pi_3=3^3=27$$

(i)~(iv)에서 2000보다 작은 자연수의 개수는

$$2+6+18+27=53$$

따라서 2000은 54번째 수이다.

058 ㉔ 7

깃발을 1번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_1=2$$

깃발을 2번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_2=2^2=4$$

깃발을 3번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_3=2^3=8$$

깃발을 4번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_4=2^4=16$$

깃발을 5번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_5=2^5=32$$

깃발을 6번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_6=2^6=64$$

깃발을 7번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$${}_2\Pi_7=2^7=128$$

깃발을 6번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$$2+4+8+16+32+64=126<200$$

깃발을 7번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

$$2+4+8+16+32+64+128=254>200$$

따라서 서로 다른 신호가 200개 이상이 되도록 하는 n 의 최솟값은 7이다.

059 ㉡ 32

$A \cup B = U$, $A \cap B = \{1, 7\}$ 이므로 전체집합 U 의 원소 중에서 1, 7을 제외한 나머지 5개의 원소 2, 3, 4, 5, 6은 두 집합 $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ 중에서 어느 하나의 원소이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$${}_2\Pi_5=2^5=32$$

060 ㉡ ④

A, B, B, C, C, C가 각각 적힌 6장의 카드 중에서 5장을 택하는 경우는

(A, B, B, C, C) 또는 (A, B, C, C, C)

또는 (B, B, C, C, C)

(i) A, B, B, C, C가 적힌 카드를 일렬로 배열하는 경우

C가 적힌 카드 1장을 왼쪽에서 두 번째의 위치에 놓고, 나머지 자리에 A, B, B, C가 적힌 4장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

(ii) A, B, C, C, C가 적힌 카드를 일렬로 배열하는 경우

C가 적힌 카드 1장을 왼쪽에서 두 번째의 위치에 놓고, 나머지 자리에 A, B, C, C가 적힌 4장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

(iii) B, B, C, C, C가 적힌 카드를 일렬로 배열하는 경우

C가 적힌 카드 1장을 왼쪽에서 두 번째의 위치에 놓고, 나머지 자리에 B, B, C, C가 적힌 4장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2! \times 2!}=6$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$12+12+6=30$$

061 ㉡ ④

A, B, C를 모두 X로 바꾸어 6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{3!}=120$

첫 번째 X와 세 번째 X에 두 문자 B, C를 배열하는 경우의 수는 $2!=2$ 이고, 두 번째 X는 A로 바꾸면 되므로 구하는 경우의 수는

$$120 \times 2 = 240$$

062 ㉡ ③

각 자리의 숫자의 합이 8이 되도록 4개의 숫자를 택하는 경우는

(1, 1, 3, 3) 또는 (1, 2, 2, 3) 또는 (2, 2, 2, 2)

(i) 1, 1, 3, 3을 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수

$$\text{의 개수는 } \frac{4!}{2! \times 2!} = 6$$

(ii) 1, 2, 2, 3을 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수

$$\text{의 개수는 } \frac{4!}{2!} = 12$$

(iii) 2, 2, 2, 2를 일렬로 배열하여 만들 수 있는 자연수의 개수는 1

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$$6+12+1=19$$

063 ㉡ 53

오른쪽 그림과 같이 세 지점

P, Q, R를 잡으면 P, Q, R

중에서 어느 한 지점은 반드시 거치지만 두 지점 이상을

동시에 거쳐 최단 거리로 가는 경우는 없으므로 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

$A \rightarrow P \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow Q \rightarrow B$

또는 $A \rightarrow R \rightarrow B$

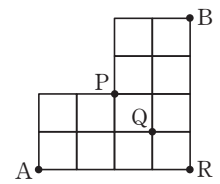
(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2! \times 2!} \times \frac{4!}{2! \times 2!} = 6 \times 6 = 36$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{4!}{3! \times 1!} \times \frac{4!}{1! \times 3!} = 4 \times 4 = 16$$

(iii) $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는 $1 \times 1 = 1$



(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$$36 + 16 + 1 = 53$$

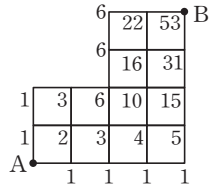
| 다른 풀이 |

합의 법칙을 이용하면 오른쪽

쪽 그림과 같으므로 구하는

경우의 수는

$$53$$



064 ㉮ 56

| 접근 방법 | 치역이 될 수 있는 집합을 먼저 구하고, 치역이 $\{p, q\}$ 인 함수의 개수는 공역이 $\{p, q\}$ 인 함수의 개수에서 치역이 $\{p\}$ 또는 $\{q\}$ 인 함수의 개수를 뺀 것과 같음을 이용한다.

(가), (나)에서 치역이 될 수 있는 집합은

$\{1, 3\}$ 또는 $\{1, 5\}$ 또는 $\{2, 4\}$ 또는 $\{3, 5\}$

(i) 치역이 $\{1, 3\}$ 인 경우

1, 3의 2개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 집합 X 의 원소 a, b, c, d 에 대응시키는 경우의 수는 ${}_2\Pi_4 = 2^4 = 16$

그런데 치역이 $\{1\}$ 또는 $\{3\}$ 인 함수를 빼야 하므로 치역이 $\{1, 3\}$ 인 함수의 개수는

$$16 - 2 = 14$$

(ii) 치역이 $\{1, 5\}$ 인 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 치역이 $\{1, 5\}$ 인 함수의 개수는 14

(iii) 치역이 $\{2, 4\}$ 인 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 치역이 $\{2, 4\}$ 인 함수의 개수는 14

(iv) 치역이 $\{3, 5\}$ 인 경우

(i)과 같은 방법으로 하면 치역이 $\{3, 5\}$ 인 함수의 개수는 14

(i)~(iv)에서 구하는 함수의 개수는

$$14 + 14 + 14 + 14 = 56$$

065 ㉮ ④

| 접근 방법 | 네 자연수의 곱이 8이 되는 경우 중에서 그 합이 10보다 작은 경우를 구한다.

(가)의 $a \times b \times c \times d = 8$ 을 만족시키는 경우는

1, 1, 1, 8 또는 1, 1, 2, 4 또는 1, 2, 2, 2

이때 (나)의 $a + b + c + d < 10$ 을 만족시키는 경우는

1, 1, 2, 4 또는 1, 2, 2, 2

(i) 1, 1, 2, 4인 경우

순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 1, 1, 2, 4를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

(ii) 1, 2, 2, 2인 경우

순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 1, 2, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$$12 + 4 = 16$$

066 ㉮ 162

오른쪽 그림과 같이 네

지점 P, Q, R, S를 잡으면

P, Q, R, S 중에서 어느 한 지점은 반드시 거

치지만 두 지점 이상을

동시에 거쳐 최단 거리로

가는 경우는 없으므로 A 지점에서 B 지점까지 최단

거리로 가는 경우는

$A \rightarrow P \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow Q \rightarrow B$

또는 $A \rightarrow R \rightarrow B$ 또는 $A \rightarrow S \rightarrow B$

(i) $A \rightarrow P \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

(ii) $A \rightarrow Q \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2! \times 4!} \times \frac{4!}{3! \times 1!} = 15 \times 4 = 60$$

(iii) $A \rightarrow R \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$\frac{5!}{3! \times 2!} \times \frac{5!}{2! \times 3!} = 10 \times 10 = 100$$

(iv) $A \rightarrow S \rightarrow B$ 로 가는 경우의 수는

$$1 \times 1 = 1$$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$1 + 60 + 100 + 1 = 162$$

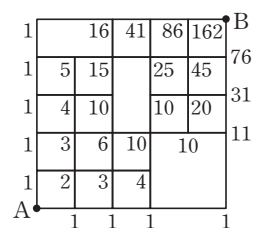
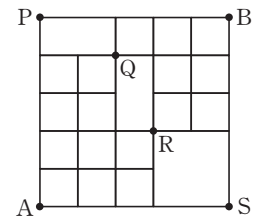
| 다른 풀이 |

합의 법칙을 이용하면 오

른쪽 그림과 같으므로 구

하는 경우의 수는

$$162$$



01 중복조합

개념 확인

45쪽

067 ㉡ (1) ${}_6H_4$ (2) ${}_3H_7$

068 ㉡ (1) 21 (2) 70 (3) 1 (4) 3

(1) ${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$

(2) ${}_5H_4 = {}_8C_4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$

(3) ${}_6H_0 = {}_5C_0 = 1$

(4) ${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

069 ㉡ (1) 13 (2) 8 (3) 5 (4) 2

(1) ${}_7H_7 = {}_{13}C_7$ 이므로 $n=13$

(2) ${}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2$ 이므로 $n=8$

(3) ${}_6H_r = {}_{5+r}C_r = {}_{5+r}C_5$ 이므로 ${}_{5+r}C_5 = {}_{10}C_5$ 에서
 $5+r=10 \quad \therefore r=5$

(4) ${}_5H_r = {}_{4+r}C_r$ 이므로 ${}_{4+r}C_r = {}_6C_2$ 에서
 $r=2$

070 ㉡ 84

${}_4H_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$

유제

47~56쪽

071 ㉡ 165

구하는 경우의 수는 서로 다른 4개의 접시에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4H_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$

072 ㉡ 91

구하는 경우의 수는 서로 다른 3명의 후보에서 중복을 허용하여 12명을 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_3H_{12} = {}_{14}C_{12} = {}_{14}C_2 = \frac{14 \times 13}{2 \times 1} = 91$

073 ㉡ 9

서로 다른 3종류의 과일에서 중복을 허용하여 n 개를 택하는 경우의 수가 55이므로

${}_3H_n = 55$

${}_{n+2}C_n = 55, {}_{n+2}C_2 = 55$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2 \times 1} = 55$$

$$(n+2)(n+1) = 110 = 11 \times 10$$

$$\therefore n=9 (\because n \text{은 자연수})$$

074 ㉡ ①

빨간색 볼펜 5자루를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4명의 학생에서 중복을 허용하여 5명을 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

파란색 볼펜 2자루를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 4명의 학생에서 중복을 허용하여 2명을 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$56 \times 10 = 560$$

075 ㉡ 171

각 종류의 우유를 적어도 1개씩은 사려면 각 종류의 우유를 1개씩 먼저 사고 나머지 17개의 우유를 사면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3종류의 우유에서 중복을 허용하여 17개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3H_{17} = {}_{19}C_{17} = {}_{19}C_2 = \frac{19 \times 18}{2 \times 1} = 171$$

076 ㉡ 495

그릇 A에는 3개 이상, 그릇 B에는 5개 이상의 사탕을 담으려면 그릇 A, B에 각각 3개, 5개의 사탕을 먼저 담고 나머지 8개의 사탕을 나누어 담으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개의 접시에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5H_8 = {}_{12}C_8 = {}_{12}C_4 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

077 ㉡ 84

각 색깔의 장미를 적어도 3송이씩은 포함하려면 각 색깔의 장미를 3송이씩 먼저 꺼내고 나머지 6송이의 장미를 꺼내면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4종류의 장미에서 중복을 허용하여 6송이를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

078 ㉑

각 학생이 적어도 1자루의 연필을 받으려면 각 학생에게 연필을 1자루씩 먼저 나누어 주고 나머지 3자루의 연필을 나누어 주면 된다.

따라서 그 경우의 수는 서로 다른 3명의 학생에서 중복을 허용하여 3명을 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

또 같은 종류의 지우개 5개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 서로 다른 3명에서 중복을 허용하여 5명을 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_7C_3 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

따라서 구하는 경우의 수는 $10 \times 21 = 210$

079 ㉒ 165

$(x+y+z+w)^8$ 의 전개식에서 각 항은 4개의 문자 x, y, z, w 에서 중복을 허용하여 8개를 택하여 곱한 것이므로 구하는 항의 개수는

$${}_4H_8 = {}_{11}C_8 = {}_{11}C_3 = \frac{11 \times 10 \times 9}{3 \times 2 \times 1} = 165$$

080 ㉒ 84

$3 \leq a \leq b \leq c \leq 9$ 에서 자연수 a, b, c 의 값을 정하는 경우의 수는 3, 4, 5, ..., 9의 7개의 자연수에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 a, b, c 에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$${}_7H_3 = {}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

081 ㉒ 560

$(x+y+z)^3(a+b+c+d)^5$ 의 전개식에서 각 항은 $(x+y+z)^3$ 의 항과 $(a+b+c+d)^5$ 의 항을 곱한 것이다.

$(x+y+z)^3$ 의 전개식에서 각 항은 3개의 문자 x, y, z 에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 곱한 것이므로 그 항의 개수는

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$(a+b+c+d)^5$ 의 전개식에서 각 항은 4개의 문자 a, b, c, d 에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 곱한 것이므로 그 항의 개수는

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

따라서 구하는 항의 개수는 $10 \times 56 = 560$

082 ㉒ 315

$1 \leq a \leq b \leq 6$ 에서 자연수 a, b 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, ..., 6의 6개의 자연수에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 a, b 에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_6H_2 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

$6 \leq c \leq d \leq 10$ 에서 자연수 c, d 의 값을 정하는 경우의 수는 6, 7, 8, 9, 10의 5개의 자연수에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 c, d 에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_5H_2 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는 $21 \times 15 = 315$

083 ㉒ 120

구하는 해의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_7 = {}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$$

084 ㉒ 78

$x-1=x', y-1=y', z-1=z'$ 이라 하면

$$x=x'+1, y=y'+1, z=z'+1$$

이를 방정식 $x+y+z=14$ 에 대입하면

$$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)=14$$

$$\therefore x'+y'+z'=11$$

x', y', z' 이 모두 음이 아닌 정수이므로 구하는 해의 개수는 3개의 문자 x', y', z' 에서 중복을 허용하여 11개를 택하는 경우의 수와 같다.

$$\therefore {}_3H_{11} = {}_{13}C_{11} = {}_{13}C_2 = \frac{13 \times 12}{2 \times 1} = 78$$

085 ㉒ 31

x, y, z 가 음이 아닌 정수이므로

$$x+y+z=2 \text{ 또는 } x+y+z=3 \text{ 또는 } x+y+z=4$$

(i) $x+y+z=2$ 를 만족시키는 순서쌍의 개수는 3개의 문자 x, y, z 에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

- (ii) $x+y+z=3$ 을 만족시키는 순서쌍의 개수는 3개의 문자 x, y, z 에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3H_3 = {}_5C_3 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

- (iii) $x+y+z=4$ 를 만족시키는 순서쌍의 개수는 3개의 문자 x, y, z 에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

- (i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는 $6+10+15=31$

086 ㉡ 105

$x+1=x', y+1=y', z+1=z'$ 이라 하면

$$x=x'-1, y=y'-1, z=z'-1$$

이를 방정식 $x+y+z=10$ 에 대입하면

$$(x'-1)+(y'-1)+(z'-1)=10$$

$$\therefore x'+y'+z'=13$$

x', y', z' 이 모두 음이 아닌 정수이므로 구하는 순서쌍의 개수는 3개의 문자 x', y', z' 에서 중복을 허용하여 13개를 택하는 경우의 수와 같다.

$$\therefore {}_3H_{13} = {}_{15}C_{13} = {}_{15}C_2 = \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 105$$

087 ㉡ (1) 15 (2) 126

- (1) 주어진 조건에 의하여

$$f(1) < f(2) < f(3) < f(4)$$

따라서 구하는 함수의 개수는 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 서로 다른 4개를 택하여 크기가 작은 것부터 순서대로 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

- (2) 주어진 조건에 의하여

$$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$$

따라서 구하는 함수의 개수는 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_6H_4 = {}_9C_4 = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126$$

088 ㉡ 35

주어진 조건에 의하여

$$f(1) \geq f(2) \geq f(3) \geq f(4)$$

따라서 구하는 함수의 개수는 집합 Y 의 원소 5, 6, 7, 8의 4개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 크기가 크거나 같은 것부터 순서대로 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

089 ㉡ 350

$f(1), f(3), f(5), f(7)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 집합 X 의 원소 1, 3, 5, 7, 9의 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X 의 원소 1, 3, 5, 7에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_5H_4 = {}_8C_4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

$f(9)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7, 9의 5가지
따라서 구하는 함수의 개수는

$$70 \times 5 = 350$$

090 ㉡ 45

주어진 조건에 의하여

$$f(2) \leq f(4) \leq f(6) = 5 \leq f(8)$$

$f(2), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 집합 Y 의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X 의 원소 2, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_5H_2 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

$f(8)$ 의 값이 될 수 있는 것은 5, 6, 7의 3가지
따라서 구하는 함수의 개수는

$$15 \times 3 = 45$$

091 ㉡ (1) 10 (2) 20 (3) 252 (4) 9 (5) 625

(6) 210

- (1) 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

- (2) 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로 ${}_5P_2 = 5 \times 4 = 20$

(3) 구하는 경우의 수는 서로 다른 6개에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_6H_5 = {}_{10}C_5 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252$$

(4) 구하는 경우의 수는 서로 다른 3개에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_3\Pi_2 = 3^2 = 9$

(5) 구하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_5\Pi_4 = 5^4 = 625$

(6) 구하는 경우의 수는 서로 다른 7개에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_7H_4 = {}_{10}C_4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

연습문제

57~58쪽

092 ㉡ 495

구하는 경우의 수는 서로 다른 5개의 상자에서 중복을 허용하여 8개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_5H_8 = {}_{12}C_8 = {}_{12}C_4 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$$

093 ㉡ ③

A와 B가 각각 2권 이상의 공책을 받으려면 A와 B에게 각각 2권의 공책을 먼저 나누어 주고 나머지 6권의 공책을 나누어 주면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4명의 학생에서 중복을 허용하여 6명을 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

094 ㉡ ④

$(x+y+z)^4(a+b)^5$ 의 전개식에서 각 항은 $(x+y+z)^4$ 의 항과 $(a+b)^5$ 의 항을 곱한 것이다. $(x+y+z)^4$ 의 전개식에서 각 항은 3개의 문자 x, y, z 에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 곱한 것이므로 그 항의 개수는

$${}_3H_4 = {}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15$$

$(a+b)^5$ 의 전개식에서 각 항은 2개의 문자 a, b 에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 곱한 것이므로 그 항의 개수는

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

따라서 구하는 항의 개수는

$$15 \times 6 = 90$$

095 ㉡ 30

$1 \leq a \leq b \leq 4$ 에서 a, b 의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4의 4개의 자연수에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 a, b 에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

c 는 6 이하의 자연수이므로 $4 \leq c$ 에서 c 의 값이 될 수 있는 것은 4, 5, 6의 3가지

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$10 \times 3 = 30$$

096 ㉡ 175

x, y, z, w 가 음이 아닌 정수이므로

$$x+y+z+w=4 \text{ 또는 } x+y+z+w=5$$

$$\text{또는 } x+y+z+w=6$$

(i) $x+y+z+w=4$ 를 만족시키는 순서쌍의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

(ii) $x+y+z+w=5$ 를 만족시키는 순서쌍의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$$

(iii) $x+y+z+w=6$ 을 만족시키는 순서쌍의 개수는 4개의 문자 x, y, z, w 에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_6 = {}_9C_6 = {}_9C_3 = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 84$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는 $35 + 56 + 84 = 175$

097 ㉡ 6

서로 다른 3종류의 과일에서 중복을 허용하여 n 개를 택하는 경우의 수가 21이므로

$${}_3H_n = 21$$

▶▶▶▶▶ ①

$${}_{n+2}C_n = 21, {}_{n+2}C_2 = 21$$

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2 \times 1} = 21, (n+2)(n+1) = 42 = 7 \times 6$$

$$\therefore n = 5 (\because n \text{은 자연수})$$

▶▶▶▶▶ ②

5개의 과일을 살 때, 각 종류의 과일을 적어도 1개씩은 사려면 각 종류의 과일을 1개씩 먼저 사고 나머지 2개의 과일을 사면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 3종류의 과일에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6 \quad \text{..... ㉓}$$

단계	채점 기준	비율
①	n 에 대한 식 세우기	20 %
②	n 의 값 구하기	40 %
③	경우의 수 구하기	40 %

098 ㉓ 20

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$ 이므로 택한 7개의 수의 곱이 90의 배수가 되려면 2를 1개, 3을 2개, 5를 1개씩 먼저 택하고 나머지 3개의 숫자를 택하면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 서로 다른 4개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

099 ㉓ 20

$(a+b+c+d+e)^{11}$ 의 전개식에서 a 를 포함하지 않는 항은 a 를 제외한 4개의 문자 b, c, d, e 에서 중복을 허용하여 11개를 택하여 곱한 것이므로 구하는 항의 개수는

$${}_4H_{11} = {}_{14}C_{11} = {}_{14}C_3 = \frac{14 \times 13 \times 12}{3 \times 2 \times 1} = 364$$

100 ㉓ 30

$x-1=x', y-1=y', z-1=z', w-1=w'$ 이라 하면

$$x=x'+1, y=y'+1, z=z'+1, w=w'+1$$

이를 방정식 $x+y+z+5w=14$ 에 대입하면

$$(x'+1)+(y'+1)+(z'+1)+5(w'+1)=14$$

$$\therefore x'+y'+z'+5w'=6$$

이 방정식에서 w' 의 계수가 가장 크므로 w' 이 될 수 있는 값을 구하면

$$5w' \leq 6$$

$$\therefore w'=0 \text{ 또는 } w'=1 (\because w' \text{은 음이 아닌 정수})$$

(i) $w'=0$ 일 때

$$x'+y'+z'+5w'=6 \text{에서 } x'+y'+z'=6$$

x', y', z' 이 모두 음이 아닌 정수이므로 그 순서쌍의 개수는 3개의 문자 x', y', z' 에서 중복을 허용하여 6개를 택하는 경우의 수와 같다.

$$\therefore {}_3H_6 = {}_8C_6 = {}_8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$$

(ii) $w'=1$ 일 때

$$x'+y'+z'+5w'=6 \text{에서 } x'+y'+z'=1$$

x', y', z' 이 모두 음이 아닌 정수이므로 그 순서쌍의 개수는 3개의 문자 x', y', z' 에서 1개를 택하는 경우의 수와 같다.

$$\therefore {}_3C_1 = 3$$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는

$$28+3=31$$

101 ㉓ 35

$f(1) \leq f(2) < f(3) \leq f(4)$ 인 함수의 개수는

$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$ 인 함수의 개수에서

$f(1) \leq f(2) = f(3) \leq f(4)$ 인 함수의 개수를 뺀 것과 같다.

(i) $f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4)$ 인 함수의 개수는 집합 Y 의 원소 5, 6, 7, 8, 9의 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X 의 원소 1, 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_5H_4 = {}_8C_4 = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

(ii) $f(1) \leq f(2) = f(3) \leq f(4)$ 인 함수의 개수는 집합 Y 의 원소 5, 6, 7, 8, 9의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 크기가 작거나 같은 것부터 순서대로 집합 X 의 원소 1, 2, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

$${}_5H_3 = {}_7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$$70-35=35$$

102 ㉓ 20

| 접근 방법 | 학생 A가 받는 초콜릿의 개수에 따라 경우를 나누어 학생 B가 받는 초콜릿의 개수를 생각한다.

(가)에서 각 학생이 적어도 1개의 초콜릿을 받으려면 각 학생에게 초콜릿을 1개씩 먼저 나누어 주고 나머지 4개의 초콜릿을 나누어 주면 된다.

나머지 4개의 초콜릿 중에서

(i) 학생 A가 초콜릿을 1개 받는 경우

(나)에서 학생 B는 초콜릿을 받지 않는다.

따라서 그 경우의 수는 서로 다른 2명의 학생 C, D에서 중복을 허용하여 3명을 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_2H_3 = {}_4C_3 = {}_4C_1 = 4$

(ii) 학생 A가 초콜릿을 2개 받는 경우

(나)에서 학생 B는 초콜릿을 받지 않거나 1개 받는다.

학생 B가 초콜릿을 받지 않는 경우의 수는 서로 다른 2명의 학생 C, D에서 중복을 허용하여 2명을 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_2H_2 = {}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

학생 B가 초콜릿을 1개 받는 경우의 수는 서로 다른 2명의 학생 C, D에서 1명을 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_2C_1 = 2$

따라서 그 경우의 수는

$$3+2=5$$

(iii) 학생 A가 초콜릿을 3개 받는 경우

(나)에서 학생 B는 초콜릿을 받지 않거나 1개 받는다.

학생 B가 초콜릿을 받지 않는 경우의 수는 서로 다른 2명의 학생 C, D에서 1명을 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_2C_1 = 2$

학생 B가 초콜릿을 1개 받는 경우의 수는 1

따라서 그 경우의 수는

$$2+1=3$$

(iv) 학생 A가 초콜릿을 4개 받는 경우의 수는 1

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$$4+5+3+1=13$$

103 ㉮ 63

I 접근 방법 I 음이 아닌 정수 x, y 에 대하여 홀수는 $2x+1$, 짝수는 $2y+2$ 꼴로 놓을 수 있음을 이용하여 (나)의 방정식을 변형한다.

(가)에서 a, b, c 중 홀수는 1개이므로 홀수를 정하는 경우의 수는 ${}_3C_1 = 3$ 한편 a 를 홀수, b, c 를 짝수라 하면 음이 아닌 정수 a', b', c' 에 대하여

$$a=2a'+1, b=2b'+2, c=2c'+2$$

이를 (나)의 방정식 $a+b+c=15$ 에 대입하면

$$(2a'+1)+(2b'+2)+(2c'+2)=15$$

$$2a'+2b'+2c'=10 \quad \therefore a'+b'+c'=5$$

 a', b', c' 이 모두 음이 아닌 정수이므로 그 순서쌍의 개수는 3개의 문자 a', b', c' 에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 경우의 수와 같다.

$$\therefore {}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$$

따라서 구하는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$$3 \times 21 = 63$$

02 이항정리

개념 확인

61쪽

$$104 \text{ ㉮ } (1) 16a^4 + 32a^3b + 24a^2b^2 + 8ab^3 + b^4$$

$$(2) x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$$

$$(1) (2a+b)^4$$

$$= {}_4C_0 (2a)^4 + {}_4C_1 (2a)^3 b^1 + {}_4C_2 (2a)^2 b^2 + {}_4C_3 (2a)^1 b^3 + {}_4C_4 b^4$$

$$= 16a^4 + 32a^3b + 24a^2b^2 + 8ab^3 + b^4$$

$$(2) (x-y)^6$$

$$= {}_6C_0 x^6 + {}_6C_1 x^5 (-y)^1 + {}_6C_2 x^4 (-y)^2 + {}_6C_3 x^3 (-y)^3 + {}_6C_4 x^2 (-y)^4 + {}_6C_5 x^1 (-y)^5 + {}_6C_6 (-y)^6$$

$$= x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$$

유제

63~73쪽

$$105 \text{ ㉮ } (1) 720 \quad (2) 448$$

(1) $(2x-3y)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r (2x)^{5-r} (-3y)^r = {}_5C_r 2^{5-r} (-3)^r x^{5-r} y^r$$

 x^3y^2 항은 $r=2$ 일 때이므로 구하는 x^3y^2 의 계수는

$${}_5C_2 2^3 (-3)^2 = 10 \times 8 \times 9 = 720$$

(2) $(x+2y^3)^8$ 의 전개식의 일반항은

$${}_8C_r x^{8-r} (2y^3)^r = {}_8C_r 2^r x^{8-r} y^{3r}$$

 x^5y^9 항은 $8-r=5, 3r=9$ 일 때이므로

$$r=3$$

따라서 구하는 x^5y^9 의 계수는

$${}_8C_3 2^3 = 56 \times 8 = 448$$

$$106 \text{ ㉮ } (1) 189 \quad (2) 270$$

(1) $\left(x^2 - \frac{3}{x}\right)^7$ 의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r (x^2)^{7-r} \left(-\frac{3}{x}\right)^r = {}_7C_r (-3)^r \frac{x^{14-2r}}{x^r}$$

 x^8 항은 $14-2r-r=8$ 일 때이므로

$$r=2$$

따라서 구하는 x^8 의 계수는

$${}_7C_2 (-3)^2 = 21 \times 9 = 189$$

(2) $\left(3x^2 + \frac{1}{x^3}\right)^5$ 의 전개식의 일반항은

$${}_5C_r (3x^2)^{5-r} \left(\frac{1}{x^3}\right)^r = {}_5C_r 3^{5-r} \frac{x^{10-2r}}{x^{3r}}$$

상수항은 $10-2r=3r$ 일 때이므로

$$r=2$$

따라서 구하는 상수항은

$${}_5C_2 3^3 = 10 \times 27 = 270$$

107 ㉠ $\frac{1}{2}$

$(x+2a)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r x^{6-r} (2a)^r = {}_6C_r 2^r a^r x^{6-r}$$

x^2 항은 $6-r=2$ 일 때이므로

$$r=4$$

따라서 x^2 의 계수는

$${}_6C_4 2^4 a^4 = {}_6C_2 2^4 a^4 = 15 \times 16 \times a^4 = 240a^4$$

x^4 항은 $6-r=4$ 일 때이므로

$$r=2$$

따라서 x^4 의 계수는

$${}_6C_2 2^2 a^2 = 15 \times 4 \times a^2 = 60a^2$$

이때 x^2 의 계수와 x^4 의 계수가 같으므로

$$240a^4 = 60a^2$$

$$a^2 = \frac{1}{4} (\because a > 0)$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} (\because a > 0)$$

108 ㉠ ①

$\left(2x + \frac{a}{x}\right)^7$ 의 전개식의 일반항은

$${}_7C_r (2x)^{7-r} \left(\frac{a}{x}\right)^r = {}_7C_r 2^{7-r} a^r \frac{x^{7-r}}{x^r}$$

x^3 항은 $7-r-r=3$ 일 때이므로

$$r=2$$

이때 x^3 의 계수가 42이므로

$${}_7C_2 2^5 a^2 = 42$$

$$21 \times 32 \times a^2 = 42, \quad 672a^2 = 42$$

$$a^2 = \frac{1}{16} \quad \therefore a = \frac{1}{4} (\because a > 0)$$

109 ㉠ 196

$\left(x - \frac{1}{x}\right)^8$ 의 전개식의 일반항은

$${}_8C_r x^{8-r} \left(-\frac{1}{x}\right)^r = {}_8C_r (-1)^r \frac{x^{8-r}}{x^r} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때

$$(2x^2 - 1) \left(x - \frac{1}{x}\right)^8 = 2x^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^8 - \left(x - \frac{1}{x}\right)^8$$

이므로 x^2 항이 나타나는 경우는 $2x^2 \times (\textcircled{1})$ 의 상수항

인 경우와 $-1 \times (\textcircled{1})$ 의 x^2 항인 경우가 있다.

(i) $\textcircled{1}$ 에서 상수항은 $8-r=r$ 일 때이므로

$$r=4$$

따라서 $\textcircled{1}$ 의 상수항은

$${}_8C_4 (-1)^4 = 70$$

(ii) $\textcircled{1}$ 에서 x^2 항은 $8-r-r=2$ 일 때이므로

$$r=3$$

따라서 $\textcircled{1}$ 의 x^2 항은

$${}_8C_3 (-1)^3 x^2 = 56 \times (-1) \times x^2 = -56x^2$$

(i), (ii)에서 구하는 x^2 의 계수는

$$2 \times 70 + (-1) \times (-56) = 196$$

110 ㉠ ①

$(x-1)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r (-1)^r x^{6-r}$$

$(2x+1)^7$ 의 전개식의 일반항은

$${}_7C_s (2x)^{7-s} = {}_7C_s 2^{7-s} x^{7-s}$$

따라서 $(x-1)^6(2x+1)^7$ 의 전개식의 일반항은

$${}_6C_r (-1)^r x^{6-r} \times {}_7C_s 2^{7-s} x^{7-s} \\ = {}_6C_r \times {}_7C_s (-1)^r 2^{7-s} x^{13-r-s} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

x^2 항은 $13-r-s=2$ (r, s 는 $0 \leq r \leq 6, 0 \leq s \leq 7$ 인

정수)일 때이므로 $r+s=11$ 에서

$$r=4, s=7 \text{ 또는 } r=5, s=6 \text{ 또는 } r=6, s=5$$

(i) $r=4, s=7$ 일 때

$\textcircled{1}$ 의 x^2 항은

$${}_6C_4 \times {}_7C_7 (-1)^4 x^2 = {}_6C_2 \times 1 \times 1 \times x^2 \\ = 15x^2$$

(ii) $r=5, s=6$ 일 때

$\textcircled{1}$ 의 x^2 항은

$${}_6C_5 \times {}_7C_6 (-1)^5 2x^2 = {}_6C_1 \times {}_7C_1 \times (-1) \times 2 \times x^2 \\ = 6 \times 7 \times (-1) \times 2 \times x^2 \\ = -84x^2$$

(iii) $r=6, s=5$ 일 때

$\textcircled{1}$ 의 x^2 항은

$${}_6C_6 \times {}_7C_5 (-1)^6 2^2 x^2 = 1 \times {}_7C_2 \times 1 \times 4 \times x^2 \\ = 84x^2$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 x^2 의 계수는

$$15 + (-84) + 84 = 15$$

111 ㉔ 4

$(a+x)^3$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r a^{3-r} x^r$$

$(1+x)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_s x^s$$

따라서 $(a+x)^3(1+x)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_3C_r a^{3-r} x^r \times {}_4C_s x^s = {}_3C_r \times {}_4C_s a^{3-r} x^{r+s} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

x^6 항은 $r+s=6$ (r, s 는 $0 \leq r \leq 3, 0 \leq s \leq 4$ 인 정수)

일 때이므로

$$r=2, s=4 \text{ 또는 } r=3, s=3$$

(i) $r=2, s=4$ 일 때

$\textcircled{1}$ 의 x^6 항은

$${}_3C_2 \times {}_4C_4 a x^6 = {}_3C_1 \times 1 \times a \times x^6 = 3a x^6$$

(ii) $r=3, s=3$ 일 때

$\textcircled{1}$ 의 x^6 항은

$${}_3C_3 \times {}_4C_3 x^6 = 1 \times {}_4C_1 \times x^6 = 4x^6$$

(i), (ii)에서 x^6 의 계수는

$$3a+4$$

따라서 $3a+4=16$ 이므로

$$a=4$$

112 ㉔ 2

$\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$ 의 전개식의 일반항은

$${}_4C_r x^{4-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r = {}_4C_r \frac{x^{4-r}}{x^r} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때

$$(ax^2+3)\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 = ax^2\left(x + \frac{1}{x}\right)^4 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$$

이므로 상수항이 나타나는 경우는

$$ax^2 \times \left(\textcircled{1} \text{의 } \frac{1}{x^2} \text{항}\right) \text{인 경우와 } 3 \times \left(\textcircled{1} \text{의 상수항}\right) \text{인}$$

경우가 있다.

(i) $\textcircled{1}$ 에서 $\frac{1}{x^2}$ 항은 $r-(4-r)=2$ 일 때이므로

$$r=3$$

따라서 $\textcircled{1}$ 의 $\frac{1}{x^2}$ 항은

$${}_4C_3 \frac{1}{x^2} = {}_4C_1 \frac{1}{x^2} = \frac{4}{x^2}$$

(ii) $\textcircled{1}$ 에서 상수항은 $4-r=r$ 일 때이므로

$$r=2$$

따라서 $\textcircled{1}$ 의 상수항은

$${}_4C_2=6$$

(i), (ii)에서 상수항은

$$ax^2 \times \frac{4}{x^2} + 3 \times 6 = 4a + 18$$

따라서 $4a+18=26$ 이므로

$$a=2$$

113 ㉔ ③

$${}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \dots + {}_{11}C_3$$

$$= {}_4C_4 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + \dots + {}_{11}C_3$$

$$= {}_5C_4 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + \dots + {}_{11}C_3$$

$$= {}_6C_4 + {}_6C_3 + {}_7C_3 + \dots + {}_{11}C_3$$

$\vdots$

$$= {}_{11}C_4 + {}_{11}C_3$$

$$= {}_{12}C_4$$

114 ㉔ ⑤

$${}_2C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \dots + {}_9C_7$$

$$= {}_3C_0 + {}_3C_1 + {}_4C_2 + \dots + {}_9C_7$$

$$= {}_4C_1 + {}_4C_2 + {}_5C_3 + \dots + {}_9C_7$$

$$= {}_5C_2 + {}_5C_3 + {}_6C_4 + \dots + {}_9C_7$$

$\vdots$

$$= {}_9C_6 + {}_9C_7$$

$$= {}_{10}C_7$$

115 ㉔ 18

$${}_7C_0 + {}_8C_1 + {}_9C_2 + \dots + {}_{17}C_{10}$$

$$= {}_8C_0 + {}_8C_1 + {}_9C_2 + \dots + {}_{17}C_{10}$$

$$= {}_9C_1 + {}_9C_2 + {}_{10}C_3 + \dots + {}_{17}C_{10}$$

$$= {}_{10}C_2 + {}_{10}C_3 + {}_{11}C_4 + \dots + {}_{17}C_{10}$$

$\vdots$

$$= {}_{17}C_9 + {}_{17}C_{10}$$

$$= {}_{18}C_{10}$$

$$\therefore n=18$$

116 ㉔ 209

$${}_4C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 + {}_7C_4 + {}_8C_5 + {}_9C_6$$

$$= ({}_4C_0 + {}_4C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 + {}_7C_4 + {}_8C_5 + {}_9C_6) - {}_4C_0$$

$$= ({}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 + {}_7C_4 + {}_8C_5 + {}_9C_6) - 1$$

$$= ({}_6C_2 + {}_6C_3 + {}_7C_4 + {}_8C_5 + {}_9C_6) - 1$$

$\vdots$

$$= ({}_9C_5 + {}_9C_6) - 1$$

$$= {}_{10}C_6 - 1 = {}_{10}C_4 - 1$$

$$= 210 - 1 = 209$$

117 ㉮ 792

$(1+x)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r x^r$$

x^6 항은 $(1+x)^6$ 의 전개식에서부터 나오므로

$$(1+x)^6 \text{의 전개식에서 } x^6 \text{의 계수는 } {}_6C_6$$

$$(1+x)^7 \text{의 전개식에서 } x^6 \text{의 계수는 } {}_7C_6$$

$$(1+x)^8 \text{의 전개식에서 } x^6 \text{의 계수는 } {}_8C_6$$

$$(1+x)^9 \text{의 전개식에서 } x^6 \text{의 계수는 } {}_9C_6$$

$$(1+x)^{10} \text{의 전개식에서 } x^6 \text{의 계수는 } {}_{10}C_6$$

$$(1+x)^{11} \text{의 전개식에서 } x^6 \text{의 계수는 } {}_{11}C_6$$

따라서 구하는 x^6 의 계수는

$$\begin{aligned} & {}_6C_6 + {}_7C_6 + {}_8C_6 + {}_9C_6 + {}_{10}C_6 + {}_{11}C_6 \\ &= {}_7C_7 + {}_7C_6 + {}_8C_6 + {}_9C_6 + {}_{10}C_6 + {}_{11}C_6 \\ &= {}_8C_7 + {}_8C_6 + {}_9C_6 + {}_{10}C_6 + {}_{11}C_6 \\ &= {}_9C_7 + {}_9C_6 + {}_{10}C_6 + {}_{11}C_6 \\ &= {}_{10}C_7 + {}_{10}C_6 + {}_{11}C_6 \\ &= {}_{11}C_7 + {}_{11}C_6 \\ &= {}_{12}C_7 \\ &= {}_{12}C_5 = 792 \end{aligned}$$

|다른 풀이| [대수]를 이수한 학생은 등비수열의 합을 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

$$\begin{aligned} & (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \cdots + (1+x)^{11} \\ &= \frac{(1+x)\{(1+x)^{11}-1\}}{(1+x)-1} \\ &= \frac{(1+x)^{12} - (1+x)}{x} \end{aligned}$$

즉, 주어진 전개식에서 x^6 의 계수는 $(1+x)^{12}$ 의 전개식에서 x^7 의 계수와 같다.

$(1+x)^{12}$ 의 전개식의 일반항은

$${}_{12}C_r x^r$$

따라서 $(1+x)^{12}$ 의 전개식에서 x^7 의 계수는 ${}_{12}C_7$ 이므로 구하는 x^6 의 계수는

$${}_{12}C_7 = {}_{12}C_5 = 792$$

118 ㉮ 126

주어진 항등식에서 a_3 의 값은 x^3 의 계수와 같다.

$(1+x)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r x^r$$

x^3 항은 $(1+x)^3$ 의 전개식에서부터 나오므로

$$(1+x)^3 \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_3C_3$$

$$(1+x)^4 \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_4C_3$$

$$(1+x)^5 \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_5C_3$$

$$(1+x)^6 \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_6C_3$$

$$(1+x)^7 \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_7C_3$$

$$(1+x)^8 \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_8C_3$$

따라서 x^3 의 계수는

$$\begin{aligned} & {}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + {}_7C_3 + {}_8C_3 \\ &= {}_4C_4 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + {}_7C_3 + {}_8C_3 \\ &= {}_5C_4 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + {}_7C_3 + {}_8C_3 \\ &= {}_6C_4 + {}_6C_3 + {}_7C_3 + {}_8C_3 \\ &= {}_7C_4 + {}_7C_3 + {}_8C_3 \\ &= {}_8C_4 + {}_8C_3 \\ &= {}_9C_4 = 126 \\ \therefore a_3 &= 126 \end{aligned}$$

|다른 풀이| [대수]를 이수한 학생은 등비수열의 합을 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

주어진 항등식에서 a_3 의 값은 x^3 의 계수와 같다.

$$\begin{aligned} & (1+x) + (1+x)^2 + (1+x)^3 + \cdots + (1+x)^8 \\ &= \frac{(1+x)\{(1+x)^8-1\}}{(1+x)-1} \\ &= \frac{(1+x)^9 - (1+x)}{x} \end{aligned}$$

즉, 주어진 전개식에서 x^3 의 계수는 $(1+x)^9$ 의 전개식에서 x^4 의 계수와 같다.

$(1+x)^9$ 의 전개식의 일반항은

$${}_9C_r x^r$$

따라서 $(1+x)^9$ 의 전개식에서 x^4 의 계수는 ${}_9C_4$ 이므로 x^3 의 계수는 ${}_9C_4$ 이다.

$$\therefore a_3 = {}_9C_4 = 126$$

119 ㉮ 660

$(1+2x)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r (2x)^r = {}_nC_r 2^r x^r$$

x^2 항은 $(1+2x)^2$ 의 전개식에서부터 나오므로

$$(1+2x)^2 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_2C_2 2^2$$

$$(1+2x)^3 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_3C_2 2^2$$

$$(1+2x)^4 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_4C_2 2^2$$

$$(1+2x)^5 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_5C_2 2^2$$

$$(1+2x)^6 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_6C_2 2^2$$

$$(1+2x)^7 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_7C_2 2^2$$

$$(1+2x)^8 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_8C_2 2^2$$

$$(1+2x)^9 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_9C_2 2^2$$

$$(1+2x)^{10} \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_{10}C_2 2^2$$

따라서 구하는 x^2 의 계수는

$$\begin{aligned} & {}_2C_2 2^2 + {}_3C_2 2^2 + {}_4C_2 2^2 + {}_5C_2 2^2 + {}_6C_2 2^2 + {}_7C_2 2^2 + {}_8C_2 2^2 \\ & \quad + {}_9C_2 2^2 + {}_{10}C_2 2^2 \\ &= 2^2({}_2C_2 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + {}_6C_2 + {}_7C_2 + {}_8C_2 + {}_9C_2 \\ & \quad + {}_{10}C_2) \\ &= 2^2({}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + {}_6C_2 + {}_7C_2 + {}_8C_2 + {}_9C_2 \\ & \quad + {}_{10}C_2) \\ &= 2^2({}_4C_3 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + {}_6C_2 + {}_7C_2 + {}_8C_2 + {}_9C_2 + {}_{10}C_2) \\ &= 2^2({}_5C_3 + {}_5C_2 + {}_6C_2 + {}_7C_2 + {}_8C_2 + {}_9C_2 + {}_{10}C_2) \\ & \quad \vdots \\ &= 2^2({}_{10}C_3 + {}_{10}C_2) \\ &= 2^2 \times {}_{11}C_3 = 4 \times 165 = 660 \end{aligned}$$

| 다른 풀이 | [대수]를 이수한 학생은 등비수열의 합을 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

$$\begin{aligned} & (1+2x) + (1+2x)^2 + (1+2x)^3 + \cdots + (1+2x)^{10} \\ &= \frac{(1+2x)\{(1+2x)^{10}-1\}}{(1+2x)-1} \\ &= \frac{(1+2x)^{11} - (1+2x)}{2x} \end{aligned}$$

즉, 주어진 전개식에서 x^2 의 계수는 $(1+2x)^{11}$ 의 전개식에서 $\frac{1}{2} \times (x^3$ 의 계수)와 같다.

$(1+2x)^{11}$ 의 전개식의 일반항은

$${}_{11}C_r (2x)^r = {}_{11}C_r 2^r x^r$$

따라서 $(1+2x)^{11}$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 ${}_{11}C_3 2^3$ 이므로 구하는 x^2 의 계수는

$$\frac{1}{2} \times {}_{11}C_3 2^3 = 660$$

120 ㉠ 252

$(1+x^2)^n$ 의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^{2r}$

x^8 항은 $(1+x^2)^4$ 의 전개식에서부터 나오므로

$(1+x^2)^4$ 의 전개식에서 x^8 의 계수는 ${}_4C_4$

$(1+x^2)^5$ 의 전개식에서 x^8 의 계수는 ${}_5C_4$

$(1+x^2)^6$ 의 전개식에서 x^8 의 계수는 ${}_6C_4$

$(1+x^2)^7$ 의 전개식에서 x^8 의 계수는 ${}_7C_4$

$(1+x^2)^8$ 의 전개식에서 x^8 의 계수는 ${}_8C_4$

$(1+x^2)^9$ 의 전개식에서 x^8 의 계수는 ${}_9C_4$

따라서 구하는 x^8 의 계수는

$$\begin{aligned} & {}_4C_4 + {}_5C_4 + {}_6C_4 + {}_7C_4 + {}_8C_4 + {}_9C_4 \\ &= {}_5C_5 + {}_5C_4 + {}_6C_4 + {}_7C_4 + {}_8C_4 + {}_9C_4 \\ &= {}_6C_5 + {}_6C_4 + {}_7C_4 + {}_8C_4 + {}_9C_4 \\ &= {}_7C_5 + {}_7C_4 + {}_8C_4 + {}_9C_4 = {}_8C_5 + {}_8C_4 + {}_9C_4 \\ &= {}_9C_5 + {}_9C_4 = {}_{10}C_5 = 252 \end{aligned}$$

| 다른 풀이 | [대수]를 이수한 학생은 등비수열의 합을 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

$$\begin{aligned} & (1+x^2) + (1+x^2)^2 + (1+x^2)^3 + \cdots + (1+x^2)^9 \\ &= \frac{(1+x^2)\{(1+x^2)^9-1\}}{(1+x^2)-1} \\ &= \frac{(1+x^2)^{10} - (1+x^2)}{x^2} \end{aligned}$$

즉, 주어진 전개식에서 x^8 의 계수는 $(1+x^2)^{10}$ 의 전개식에서 x^{10} 의 계수와 같다.

$(1+x^2)^{10}$ 의 전개식의 일반항은

$${}_{10}C_r x^{2r}$$

따라서 $(1+x^2)^{10}$ 의 전개식에서 x^{10} 의 계수는 ${}_{10}C_5$ 이

므로 구하는 x^8 의 계수는

$${}_{10}C_5 = 252$$

121 ㉠ (1) 11 (2) 2

(1) ${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n$ 이므로

$$\begin{aligned} & {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n = 2^n - {}_nC_0 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

$$2000 < {}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n < 3000 \text{에서}$$

$$2000 < 2^n - 1 < 3000$$

$$\therefore 2001 < 2^n < 3001$$

$$\text{이때 } 2^{10} = 1024, 2^{11} = 2048, 2^{12} = 4096 \text{이므로}$$

$$n = 11$$

(2) ${}_nC_0 - {}_nC_1 + {}_nC_2 - \cdots + (-1)^n {}_nC_n = 0$ 이므로

$${}_{30}C_0 - {}_{30}C_1 + {}_{30}C_2 - \cdots + {}_{30}C_{30} = 0$$

$${}_{30}C_0 - ({}_{30}C_1 - {}_{30}C_2 + \cdots + {}_{30}C_{29}) + {}_{30}C_{30} = 0$$

$$\therefore {}_{30}C_1 - {}_{30}C_2 + {}_{30}C_3 - {}_{30}C_4 + \cdots + {}_{30}C_{29}$$

$$= {}_{30}C_0 + {}_{30}C_{30}$$

$$= 1 + 1 = 2$$

122 ㉠ (1) 1024 (2) 5

(1) ${}_nC_1 + {}_nC_3 + {}_nC_5 + \cdots = 2^{n-1}$ 이므로

$${}_{11}C_1 + {}_{11}C_3 + {}_{11}C_5 + {}_{11}C_7 + {}_{11}C_9 + {}_{11}C_{11}$$

$$= 2^{11-1}$$

$$= 2^{10} = 1024$$

(2) ${}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots = 2^{n-1}$ 이므로

$${}_{2n}C_0 + {}_{2n}C_2 + {}_{2n}C_4 + \cdots + {}_{2n}C_{2n} = 2^{2n-1}$$

$$\text{즉, } 2^{2n-1} = 512 = 2^9 \text{이므로}$$

$$2n - 1 = 9$$

$$\therefore n = 5$$

123 ㉓ ③

$$\begin{aligned} {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n &= 2^n \text{이므로} \\ {}_{19}C_0 + {}_{19}C_1 + {}_{19}C_2 + \cdots + {}_{19}C_{19} &= 2^{19} \\ \text{이때 } {}_{19}C_0 &= {}_{19}C_{19}, {}_{19}C_1 = {}_{19}C_{18}, \dots, {}_{19}C_9 = {}_{19}C_{10} \text{이므로} \\ ({}_{19}C_0 + {}_{19}C_1 + {}_{19}C_2 + \cdots + {}_{19}C_9) &+ ({}_{19}C_{10} + {}_{19}C_{11} + {}_{19}C_{12} + \cdots + {}_{19}C_{19}) = 2^{19} \\ 2({}_{19}C_0 + {}_{19}C_1 + {}_{19}C_2 + \cdots + {}_{19}C_9) &= 2^{19} \\ \therefore {}_{19}C_0 + {}_{19}C_1 + {}_{19}C_2 + \cdots + {}_{19}C_9 &= 2^{18} \end{aligned}$$

124 ㉓ 9

$$\begin{aligned} {}_nC_0 + {}_nC_2 + {}_nC_4 + \cdots &= 2^{n-1} \text{이므로} \\ {}_{18}C_0 + {}_{18}C_2 + {}_{18}C_4 + \cdots + {}_{18}C_{18} &= 2^{18-1} = 2^{17} \\ \text{또 } {}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n &= 2^n \text{이므로} \\ {}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + \cdots + {}_9C_9 &= 2^9 \\ \text{이때 } {}_9C_0 &= {}_9C_9, {}_9C_1 = {}_9C_8, \dots, {}_9C_4 = {}_9C_5 \text{이므로} \\ ({}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + {}_9C_3 + {}_9C_4) &+ ({}_9C_5 + {}_9C_6 + {}_9C_7 + {}_9C_8 + {}_9C_9) = 2^9 \\ 2({}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + {}_9C_3 + {}_9C_4) &= 2^9 \\ \therefore {}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + {}_9C_3 + {}_9C_4 &= 2^8 \\ \text{따라서 } \frac{{}_{18}C_0 + {}_{18}C_2 + {}_{18}C_4 + \cdots + {}_{18}C_{18}}{{}_9C_0 + {}_9C_1 + {}_9C_2 + {}_9C_3 + {}_9C_4} &= \frac{2^{17}}{2^8} = 2^9 \text{이} \\ \text{므로 } n &= 9 \end{aligned}$$

125 ㉓ 40

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n \text{의 양변} \\ \text{에 } x=8, n=20 &\text{을 대입하면} \\ {}_{20}C_0 + 8{}_{20}C_1 + 8^2{}_{20}C_2 + \cdots + 8^{20}{}_{20}C_{20} &= 9^{20} \\ &= (3^2)^{20} = 3^{40} \\ \therefore n &= 40 \end{aligned}$$

126 ㉓ 221

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n \text{의 양변} \\ \text{에 } x=20, n=31 &\text{을 대입하면} \\ 21^{31} &= {}_{31}C_0 + 20{}_{31}C_1 + 20^2{}_{31}C_2 + \cdots + 20^{31}{}_{31}C_{31} \\ &= 1 + 20 \times 31 + 20^2({}_{31}C_2 + \cdots + 20^{29}{}_{31}C_{31}) \\ &= 1 + 20 \times (11 + 20) + 20^2({}_{31}C_2 + \cdots + 20^{29}{}_{31}C_{31}) \\ &= 1 + 220 + 20^2(1 + {}_{31}C_2 + \cdots + 20^{29}{}_{31}C_{31}) \\ &= 221 + 400(1 + {}_{31}C_2 + \cdots + 20^{29}{}_{31}C_{31}) \\ \text{따라서 구하는 나머지는 } &221 \text{이다.} \end{aligned}$$

127 ㉓ 15

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n \text{의 양변} \\ \text{에 } x=6, n=15 &\text{를 대입하면} \\ {}_{15}C_0 + 6{}_{15}C_1 + 6^2{}_{15}C_2 + \cdots + 6^{15}{}_{15}C_{15} &= 7^{15} \\ \therefore 6{}_{15}C_1 + 6^2{}_{15}C_2 + 6^3{}_{15}C_3 + \cdots + 6^{15}{}_{15}C_{15} &= 7^{15} - {}_{15}C_0 \\ &= 7^{15} - 1 \\ \therefore n &= 15 \end{aligned}$$

128 ㉓ 18

$$\begin{aligned} (1+x)^n &= {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n \text{의 양변} \\ \text{에 } x=2, n=6 &\text{을 대입하면} \\ {}_6C_0 + 2{}_6C_1 + 2^2{}_6C_2 + \cdots + 2^6{}_6C_6 &= 3^6 = 729 \\ \text{따라서 } N \text{의 각 자리의 숫자의 합은} &7 + 2 + 9 = 18 \end{aligned}$$

연습문제

75~76쪽

129 ㉓ $\frac{7}{4}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}x + y\right)^8 &\text{의 전개식의 일반항은} \\ {}_8C_r \left(\frac{1}{2}x\right)^{8-r} y^r &= {}_8C_r \left(\frac{1}{2}\right)^{8-r} x^{8-r} y^r \\ x^5y^3 \text{항은 } r=3 &\text{일 때이므로 구하는 } x^5y^3 \text{의 계수는} \\ {}_8C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^5 &= 56 \times \frac{1}{32} = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

130 ㉓ ⑤

$$\begin{aligned} (x-2)^5 &\text{의 전개식의 일반항은} \\ {}_5C_r (-2)^r x^{5-r} &\dots\dots \textcircled{1} \\ \text{이때} & \\ \left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^2 (x-2)^5 & \\ = \left(x^4 - 2x + \frac{1}{x^2}\right) (x-2)^5 & \\ = x^4(x-2)^5 - 2x(x-2)^5 + \frac{1}{x^2}(x-2)^5 & \\ \text{이므로 } x \text{항이 나타나는 경우는 } -2x \times (\textcircled{1} \text{의 상수항}) & \\ \text{인 경우와 } \frac{1}{x^2} \times (\textcircled{1} \text{의 } x^3 \text{항}) &\text{인 경우가 있다.} \end{aligned}$$

(i) ㉠에서 상수항은 $r=5$ 일 때이므로

㉠의 상수항은

$${}_5C_5(-2)^5 = 1 \times (-32) = -32$$

(ii) ㉠에서 x^3 항은 $5-r=3$ 일 때이므로

$$r=2$$

따라서 ㉠의 x^3 항은

$${}_5C_2(-2)^2 x^3 = 10 \times 4 \times x^3 = 40x^3$$

(i), (ii)에서 구하는 x 의 계수는

$$-2 \times (-32) + 40 = 104$$

131 ㉡ ㉢, ㉣, ㉤

$$\text{㉡. } {}_2C_0 + {}_2C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_3 + {}_5C_4$$

$$= {}_3C_1 + {}_3C_2 + {}_4C_3 + {}_5C_4$$

$$= {}_4C_2 + {}_4C_3 + {}_5C_4$$

$$= {}_5C_3 + {}_5C_4$$

$$= {}_6C_4$$

$$\text{㉢. } {}_3C_0 + {}_4C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 + {}_7C_4$$

$$= {}_4C_0 + {}_4C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 + {}_7C_4$$

$$= {}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 + {}_7C_4$$

$$= {}_6C_2 + {}_6C_3 + {}_7C_4$$

$$= {}_7C_3 + {}_7C_4$$

$$= {}_8C_4$$

$$\text{㉤. } {}_4C_4 + {}_5C_4 + {}_6C_4 + {}_7C_4 + {}_8C_4$$

$$= {}_5C_5 + {}_5C_4 + {}_6C_4 + {}_7C_4 + {}_8C_4$$

$$= {}_6C_5 + {}_6C_4 + {}_7C_4 + {}_8C_4$$

$$= {}_7C_5 + {}_7C_4 + {}_8C_4$$

$$= {}_8C_5 + {}_8C_4$$

$$= {}_9C_5 = {}_9C_4$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㉡, ㉢, ㉤이다.

132 ㉥ ⑤

$(x+1)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r x^r$$

x^5 항은 $(x+1)^5$ 의 전개식에서부터 나오므로

$(x+1)^5$ 의 전개식에서 x^5 의 계수는 ${}_5C_5$

$(x+1)^6$ 의 전개식에서 x^5 의 계수는 ${}_6C_5$

$(x+1)^7$ 의 전개식에서 x^5 의 계수는 ${}_7C_5$

$(x+1)^8$ 의 전개식에서 x^5 의 계수는 ${}_8C_5$

$(x+1)^9$ 의 전개식에서 x^5 의 계수는 ${}_9C_5$

$(x+1)^{10}$ 의 전개식에서 x^5 의 계수는 ${}_{10}C_5$

따라서 구하는 x^5 의 계수는

$${}_5C_5 + {}_6C_5 + {}_7C_5 + {}_8C_5 + {}_9C_5 + {}_{10}C_5$$

$$= {}_6C_6 + {}_6C_5 + {}_7C_5 + {}_8C_5 + {}_9C_5 + {}_{10}C_5$$

$$= {}_7C_6 + {}_7C_5 + {}_8C_5 + {}_9C_5 + {}_{10}C_5$$

$$= {}_8C_6 + {}_8C_5 + {}_9C_5 + {}_{10}C_5$$

$$= {}_9C_6 + {}_9C_5 + {}_{10}C_5$$

$$= {}_{10}C_6 + {}_{10}C_5$$

$$= {}_{11}C_6$$

$$= {}_{11}C_5 = 462$$

[다른 풀이] [대수]를 이수한 학생은 등비수열의 합을 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

$$(x+1) + (x+1)^2 + (x+1)^3 + \cdots + (x+1)^{10}$$

$$= \frac{(x+1)\{(x+1)^{10} - 1\}}{(x+1) - 1}$$

$$= \frac{(x+1)^{11} - (x+1)}{x}$$

즉, 주어진 전개식에서 x^5 의 계수는 $(x+1)^{11}$ 의 전개식에서 x^6 의 계수와 같다.

$(x+1)^{11}$ 의 전개식의 일반항은

$${}_{11}C_r x^r$$

따라서 $(x+1)^{11}$ 의 전개식에서 x^6 의 계수는 ${}_{11}C_6$ 이므로 구하는 x^5 의 계수는

$${}_{11}C_6 = {}_{11}C_5 = 462$$

133 ㉦ ③

$${}_nC_0 + {}_nC_1 + {}_nC_2 + \cdots + {}_nC_n = 2^n \text{이므로}$$

$${}_nC_1 + {}_nC_2 + {}_nC_3 + \cdots + {}_nC_n = 2^n - {}_nC_0 = 2^n - 1$$

즉, $2^n - 1 = 127$ 이므로

$$2^n = 128 = 2^7$$

$$\therefore n=7$$

134 ㉧ 540

$(1+3x)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r (3x)^r = {}_nC_r 3^r x^r \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

x^2 항은 $r=2$ 일 때이고, x^2 의 계수가 135이므로

$${}_nC_2 3^2 = 135$$

▶▶▶▶▶ ①

$${}_nC_2 = 15$$

$$\frac{n(n-1)}{2 \times 1} = 15$$

$$n(n-1) = 30 = 6 \times 5$$

$$\therefore n=6 (\because n \text{은 자연수})$$

▶▶▶▶▶ ②

㉠에서 $(1+3x)^6$ 의 전개식의 일반항은 ${}_6C_r 3^r x^r$ 이므로 구하는 x^3 의 계수는

$${}_6C_3 3^3 = 20 \times 27 = 540$$

▶▶▶▶▶ ㉡

단계	채점 기준	비율
①	n 에 대한 식 세우기	30 %
②	n 의 값 구하기	40 %
③	x^3 의 계수 구하기	30 %

135 ㉢ 282

$$\begin{aligned}
 & {}_3C_1 + {}_4C_1 + {}_5C_1 + \cdots + {}_{11}C_1 \\
 &= ({}_3C_2 + {}_3C_1 + {}_4C_1 + {}_5C_1 + \cdots + {}_{11}C_1) - {}_3C_2 \\
 &= ({}_4C_2 + {}_4C_1 + {}_5C_1 + \cdots + {}_{11}C_1) - 3 \\
 &= ({}_5C_2 + {}_5C_1 + {}_6C_1 + \cdots + {}_{11}C_1) - 3 \\
 &\vdots \\
 &= ({}_{11}C_2 + {}_{11}C_1) - 3 \\
 &= {}_{12}C_2 - 3 \\
 &{}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{11}C_2 \\
 &= ({}_3C_3 + {}_3C_2 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{11}C_2) - {}_3C_3 \\
 &= ({}_4C_3 + {}_4C_2 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{11}C_2) - 1 \\
 &= ({}_5C_3 + {}_5C_2 + \cdots + {}_{11}C_2) - 1 \\
 &\vdots \\
 &= ({}_{11}C_3 + {}_{11}C_2) - 1 \\
 &= {}_{12}C_3 - 1
 \end{aligned}$$

따라서 어두운 부분에 있는 모든 수의 합은

$$\begin{aligned}
 & ({}_{12}C_2 - 3) + ({}_{12}C_3 - 1) = {}_{12}C_2 + {}_{12}C_3 - 4 \\
 &= {}_{13}C_3 - 4 \\
 &= 286 - 4 = 282
 \end{aligned}$$

136 ㉢ 2

$(1+ax)^n$ 의 전개식의 일반항은

$${}_nC_r (ax)^r = {}_nC_r a^r x^r$$

x^3 항은 $(1+ax)^3$ 의 전개식에서부터 나오므로

$$\begin{aligned}
 & (1+ax)^3 \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_3C_3 a^3 \\
 & (1+ax)^4 \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_4C_3 a^3 \\
 & (1+ax)^5 \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_5C_3 a^3 \\
 & (1+ax)^6 \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_6C_3 a^3 \\
 & (1+ax)^7 \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_7C_3 a^3 \\
 & (1+ax)^8 \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_8C_3 a^3 \\
 & (1+ax)^9 \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_9C_3 a^3 \\
 & (1+ax)^{10} \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_{10}C_3 a^3
 \end{aligned}$$

따라서 x^3 의 계수는

$$\begin{aligned}
 & {}_3C_3 a^3 + {}_4C_3 a^3 + {}_5C_3 a^3 + {}_6C_3 a^3 + {}_7C_3 a^3 + {}_8C_3 a^3 \\
 & \quad + {}_9C_3 a^3 + {}_{10}C_3 a^3 \\
 &= a^3 ({}_3C_3 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + {}_7C_3 + {}_8C_3 + {}_9C_3 + {}_{10}C_3) \\
 &= a^3 ({}_4C_4 + {}_4C_3 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + {}_7C_3 + {}_8C_3 + {}_9C_3 + {}_{10}C_3) \\
 &= a^3 ({}_5C_4 + {}_5C_3 + {}_6C_3 + {}_7C_3 + {}_8C_3 + {}_9C_3 + {}_{10}C_3) \\
 &= a^3 ({}_6C_4 + {}_6C_3 + {}_7C_3 + {}_8C_3 + {}_9C_3 + {}_{10}C_3) \\
 &\vdots \\
 &= a^3 ({}_{10}C_4 + {}_{10}C_3) \\
 &= a^3 \times {}_{11}C_4 = 330a^3 \\
 &\text{즉, } 330a^3 = 2640 \text{이므로} \\
 &a^3 = 8 = 2^3 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a \text{는 실수})
 \end{aligned}$$

137 ㉢ 4096

원소의 개수가 1인 부분집합의 개수는 ${}_{13}C_1$
 원소의 개수가 3인 부분집합의 개수는 ${}_{13}C_3$
 원소의 개수가 5인 부분집합의 개수는 ${}_{13}C_5$
 $\vdots$
 원소의 개수가 13인 부분집합의 개수는 ${}_{13}C_{13}$
 따라서 원소의 개수가 홀수인 부분집합의 개수는

$$\begin{aligned}
 & {}_{13}C_1 + {}_{13}C_3 + {}_{13}C_5 + \cdots + {}_{13}C_{13} = 2^{13-1} = 2^{12} \\
 &= 4096
 \end{aligned}$$

138 ㉢ ㉢

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 x + {}_nC_2 x^2 + \cdots + {}_nC_n x^n$ 의 양변에 $x=9$, $n=7$ 을 대입하면

$$\begin{aligned}
 & {}_7C_0 + {}_7C_1 + {}_7C_2 9 + \cdots + {}_7C_7 9^7 = 10^7 \\
 &= (2 \times 5)^7 \\
 &= 2^7 \times 5^7
 \end{aligned}$$

따라서 N 의 양의 약수의 개수는

$$(7+1)(7+1) = 64$$

| 참고 | 자연수 N 이

$N = p^a q^b r^c$ (p, q, r 는 서로 다른 소수, a, b, c 는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, 자연수 N 의 양의 약수의 개수

$$\Rightarrow (a+1)(b+1)(c+1)$$

139 ㉢ 125

$(1+x)^n$ 의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^r$
 $(1+x)^4$ 의 전개식에서 x 의 계수는 ${}_4C_1$
 5 이상의 자연수 n 에 대하여 $\frac{(1+x)^n}{x^{n-4}}$ 의 전개식에서 x 의 계수는 $(1+x)^n$ 의 전개식에서 x^{n-3} 의 계수와 같다.

$$\begin{aligned}
& (1+x)^5 \text{의 전개식에서 } x^2 \text{의 계수는 } {}_5C_2 \\
& (1+x)^6 \text{의 전개식에서 } x^3 \text{의 계수는 } {}_6C_3 \\
& (1+x)^7 \text{의 전개식에서 } x^4 \text{의 계수는 } {}_7C_4 \\
& (1+x)^8 \text{의 전개식에서 } x^5 \text{의 계수는 } {}_8C_5 \\
& \text{따라서 구하는 } x \text{의 계수는} \\
& {}_4C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 + {}_7C_4 + {}_8C_5 \\
& = ({}_4C_0 + {}_4C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 + {}_7C_4 + {}_8C_5) - {}_4C_0 \\
& = ({}_5C_1 + {}_5C_2 + {}_6C_3 + {}_7C_4 + {}_8C_5) - 1 \\
& = ({}_6C_2 + {}_6C_3 + {}_7C_4 + {}_8C_5) - 1 \\
& = ({}_7C_3 + {}_7C_4 + {}_8C_5) - 1 \\
& = ({}_8C_4 + {}_8C_5) - 1 \\
& = {}_9C_5 - 1 = {}_9C_4 - 1 \\
& = 126 - 1 = 125
\end{aligned}$$

140 ㉡ ②

| 접근 방법 | $12=x$ 라 하면 $11=x-1$, $13=x+1$, $144=x^2$ 임을 이용한다.

$$\begin{aligned}
(-1+x)^n &= {}_nC_0(-1)^n + {}_nC_1(-1)^{n-1}x \\
&\quad + {}_nC_2(-1)^{n-2}x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n
\end{aligned}$$

의 양변에 $x=12$, $n=15$ 를 대입하면

$$\begin{aligned}
11^{15} &= {}_{15}C_0(-1)^{15} + {}_{15}C_1(-1)^{14}12 \\
&\quad + {}_{15}C_2(-1)^{13}12^2 + \cdots + {}_{15}C_{15}12^{15} \\
&= -{}_{15}C_0 + 12{}_{15}C_1 - 12^2{}_{15}C_2 + \cdots + 12^{15}{}_{15}C_{15} \\
&\quad \dots\dots \textcircled{㉠}
\end{aligned}$$

$(1+x)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1x + {}_nC_2x^2 + \cdots + {}_nC_nx^n$ 의 양변에 $x=12$, $n=15$ 를 대입하면

$$\begin{aligned}
13^{15} &= {}_{15}C_0 + 12{}_{15}C_1 + 12^2{}_{15}C_2 + \cdots + 12^{15}{}_{15}C_{15} \\
&\quad \dots\dots \textcircled{㉡}
\end{aligned}$$

①+②을 한 후 우변을 정리하면

$$\begin{aligned}
11^{15} + 13^{15} &= 2 \times (12{}_{15}C_1 + 12^3{}_{15}C_3 + 12^5{}_{15}C_5 + \cdots + 12^{15}{}_{15}C_{15}) \\
&= 2 \times (12 \times 15 + 12^3{}_{15}C_3 + 12^5{}_{15}C_5 + \cdots + 12^{15}{}_{15}C_{15}) \\
&= 2 \times \{12 \times (3+12) + 12^3{}_{15}C_3 + 12^5{}_{15}C_5 \\
&\quad + \cdots + 12^{15}{}_{15}C_{15}\} \\
&= 2 \times (36 + 12^2 + 12^3{}_{15}C_3 + 12^5{}_{15}C_5 \\
&\quad + \cdots + 12^{15}{}_{15}C_{15}) \\
&= 2 \times 36 + 2 \times (12^2 + 12^3{}_{15}C_3 + 12^5{}_{15}C_5 \\
&\quad + \cdots + 12^{15}{}_{15}C_{15}) \\
&= 72 + 2 \times 144(1 + 12{}_{15}C_3 + 12^3{}_{15}C_5 \\
&\quad + \cdots + 12^{13}{}_{15}C_{15})
\end{aligned}$$

따라서 구하는 나머지는 72이다.

II. 확률

II-1. 확률의 개념과 활용

01 확률의 개념

개념 확인

83쪽

- 141 ㉡ (1) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
 (2) {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}
 (3) {1, 3, 5, 7}

- 142 ㉡ (1) {1, 2, 3, 4, 5}
 (2) $\emptyset$
 (3) {1, 4}
 (4) 배반사건

$$A = \{2, 3, 5\}, B = \{1, 4\}$$

- (1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 (2) $A \cap B = \emptyset$
 (3) $A^C = \{1, 4\}$
 (4) $A \cap B = \emptyset$ 이므로 A 와 B 는 서로 배반사건이다.

- 143 ㉡ (1) $\frac{5}{8}$ (2) 1 (3) 0

- 144 ㉡ $\frac{297}{500}$

유제

85~100쪽

145 ㉡ ㄴ

표본공간을 S 라 하면 $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 이므로

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{2, 3, 5, 7\},$$

$$C = \{5, 10\}, D = \{1, 2, 4, 8\}$$

ㄱ. $A \cap B = \{2\}$ 이므로 A 와 B 는 서로 배반사건이 아니다.

ㄴ. $A^C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 이므로

$$A^C \cap C = \{5\}$$

따라서 A^C 와 C 는 서로 배반사건이 아니다.

ㄷ. $B^C = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$ 이므로

$$B^C \cap C = \{10\}$$

따라서 B^C 와 C 는 서로 배반사건이 아니다.

ㄹ. $C \cap D = \emptyset$ 이므로 C 와 D 는 서로 배반사건이다.

따라서 보기에서 서로 배반사건인 것은 ㄹ이다.

146 ㉡ 256

표본공간을 S 라 하면 $S = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ 이므로

$$A = \{1, 2, 5, 10\}$$

$$\therefore A^C = \{3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12\}$$

사건 A 와 서로 배반인 사건은 A^C 의 부분집합이고,

A^C 의 원소가 8개이므로 구하는 사건의 개수는

$$2^8 = 256$$

147 ㉡ 3

표본공간을 S 라 하면 $S = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ 이므로

$$A = \{2, 3, 5, 7\}$$

(i) $n=1$ 일 때, $B_1 = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ 이므로

$$A \cap B_1 = \{2, 3, 5, 7\}$$

따라서 A 와 B_1 은 서로 배반사건이 아니다.

(ii) $n=2$ 일 때, $B_2 = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로 $A \cap B_2 = \{2\}$

따라서 A 와 B_2 는 서로 배반사건이 아니다.

(iii) $n=3$ 일 때, $B_3 = \{3, 6\}$ 이므로 $A \cap B_3 = \{3\}$

따라서 A 와 B_3 은 서로 배반사건이 아니다.

(iv) $n=4$ 일 때, $B_4 = \{4, 8\}$ 이므로 $A \cap B_4 = \emptyset$

따라서 A 와 B_4 는 서로 배반사건이다.

(v) $n=5$ 일 때, $B_5 = \{5\}$ 이므로 $A \cap B_5 = \{5\}$

따라서 A 와 B_5 는 서로 배반사건이 아니다.

(vi) $n=6$ 일 때, $B_6 = \{6\}$ 이므로 $A \cap B_6 = \emptyset$

따라서 A 와 B_6 은 서로 배반사건이다.

(vii) $n=7$ 일 때, $B_7 = \{7\}$ 이므로 $A \cap B_7 = \{7\}$

따라서 A 와 B_7 은 서로 배반사건이 아니다.

(viii) $n=8$ 일 때, $B_8 = \{8\}$ 이므로 $A \cap B_8 = \emptyset$

따라서 A 와 B_8 은 서로 배반사건이다.

(i)~(viii)에서 사건 A 와 서로 배반인 사건은 B_4, B_6, B_8 이므로 자연수 n 은 4, 6, 8의 3개이다.

148 ㉡ 32

표본공간 S 는 $S = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$

사건 A 와 서로 배반인 사건은 A^C 의 부분집합이고, 사건 B 와 서로 배반인 사건은 B^C 의 부분집합이므로 두 사건 A, B 와 모두 배반인 사건은 $A^C \cap B^C$ 의 부분집합이다.

$$\text{이때 } A^C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\},$$

$$B^C = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11\} \text{이므로}$$

$$A^C \cap B^C = \{1, 5, 7, 9, 11\}$$

따라서 $A^C \cap B^C$ 의 원소가 5개이므로 구하는 사건의 개수는 $2^5 = 32$

149 ㉡ (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{7}{36}$

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$$6 \times 6 = 36$$

(1) 나오는 두 눈의 수의 차가 3인 경우는

$$(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3) \text{의 6가지}$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(2) 나오는 두 눈의 수의 곱이 12의 배수인 경우는

$$(2, 6), (3, 4), (4, 3), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6) \text{의 7가지}$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{7}{36}$$

150 ㉡ ①

두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 1장씩 꺼내는 모든 경우의 수는 $3 \times 5 = 15$

두 주머니 A, B에서 꺼낸 카드에 적힌 수의 차이가 1인 경우는

$$(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 4) \text{의 5가지}$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

151 ㉡ $\frac{5}{54}$

서로 다른 세 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 \times 6 = 216$

$a > b + c$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 는

$$(3, 1, 1), (4, 1, 1), (4, 1, 2), (4, 2, 1),$$

$$(5, 1, 1), (5, 1, 2), (5, 1, 3), (5, 2, 1),$$

$$(5, 2, 2), (5, 3, 1), (6, 1, 1), (6, 1, 2),$$

$$(6, 1, 3), (6, 1, 4), (6, 2, 1), (6, 2, 2),$$

$$(6, 2, 3), (6, 3, 1), (6, 3, 2), (6, 4, 1) \text{의 20개}$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{20}{216} = \frac{5}{54}$$

152 ㉡ $\frac{1}{4}$

한 개의 주사위를 2번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

이차방정식 $x^2 - ax + 2b = 0$ 이 서로 다른 두 실근을 가지려면 판별식을 D 라 할 때, $D > 0$ 이어야 하므로

$$D = a^2 - 8b > 0 \quad \therefore a^2 > 8b$$

이를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는
 $(3, 1), (4, 1), (5, 1), (5, 2), (5, 3),$
 $(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4)$ 의 9개
 따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

|참고| 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 판별식을
 $D = b^2 - 4ac$ 라 할 때
 (1) $D > 0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.
 (2) $D = 0$ 이면 중근을 갖는다.
 (3) $D < 0$ 이면 서로 다른 두 허근을 갖는다.

153 $\frac{5}{18}$

(i) 9명이 일렬로 서는 경우의 수는 $9!$
 (ii) 양 끝에 여학생이 서는 경우
 양 끝에 설 여학생 2명을 택하는 경우의 수는
 ${}_5P_2 = 20$
 나머지 자리에 남은 7명의 학생이 일렬로 서는 경
 우의 수는 $7!$
 따라서 양 끝에 여학생이 서는 경우의 수는
 $20 \times 7!$
 (i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{20 \times 7!}{9!} = \frac{5}{18}$

154 $\frac{1}{2}$

(i) 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는
 ${}_6P_5 = 720$
 (ii) 짝수의 개수
 짝수의 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6의
 3가지
 나머지 자리에 5개의 숫자에서 4개를 택하여 일렬
 로 배열하는 경우의 수는 ${}_5P_4 = 120$
 따라서 짝수의 개수는 $3 \times 120 = 360$
 (i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{360}{720} = \frac{1}{2}$

155 $\frac{1}{7}$

(i) 7개의 문자 j, u, s, t, i, c, e를 일렬로 배열하는
 경우의 수는 $7!$
 (ii) 모음끼리 서로 이웃하는 경우의 수
 모음 u, i, e를 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자
 j, s, t, c와 함께 일렬로 배열하는 경우의 수는 $5!$
 모음끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $3!$

따라서 모음끼리 서로 이웃하는 경우의 수는
 $5! \times 3!$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{5! \times 3!}{7!} = \frac{1}{7}$

156 $\frac{2}{5}$

(i) 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는 ${}_5P_3 = 60$
 (ii) 3의 배수의 개수
 3의 배수이려면 모든 자리의 숫자의 합이 3의 배수
 이어야 하므로 다섯 개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에
 서 서로 다른 3개를 택할 때, 그 합이 3의 배수가
 되는 경우는
 $(1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)$ 의 4가지
 각각의 경우에 대하여 만들 수 있는 자연수의 개수
 는 $3!$
 따라서 3의 배수의 개수는 $4 \times 3! = 24$
 (i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{24}{60} = \frac{2}{5}$

157 $\frac{3}{8}$

서로 다른 4개의 우체통에 서로 다른 3통의 편지를 넣
 는 경우의 수는 ${}_4\Pi_3 = 64$
 3통의 편지를 모두 다른 우체통에 넣는 경우의 수는
 ${}_4P_3 = 24$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{64} = \frac{3}{8}$

158 $\frac{24}{125}$

X에서 Y로의 함수의 개수는 ${}_5\Pi_4 = 625$
 X에서 Y로의 일대일함수의 개수는 ${}_5P_4 = 120$
 따라서 구하는 확률은 $\frac{120}{625} = \frac{24}{125}$

159 $\frac{2}{5}$

(i) 만들 수 있는 세 자리의 자연수
 백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지
 나머지 자리에 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 2
 개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는
 ${}_5\Pi_2 = 25$
 따라서 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는
 $4 \times 25 = 100$
 (ii) 홀수의 개수
 홀수의 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3의
 2가지

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지
십의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 1, 2, 3, 4의
5가지

따라서 홀수의 개수는

$$2 \times 4 \times 5 = 40$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

160 ㉠ $\frac{1}{4}$

X 에서 Y 로의 함수의 개수는 ${}_4\Pi_5 = 4^5$

$f(1)$, $f(3)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 3, 5, 7의 4가지

$f(2)$, $f(4)$, $f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_3$

즉, $f(1)=f(3)$ 을 만족시키는 함수의 개수는

$$4 \times {}_4\Pi_3 = 4^4$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4^4}{4^5} = \frac{1}{4}$

161 ㉠ $\frac{1}{14}$

8개의 문자 a, c, a, d, e, m, i, c를 일렬로 배열하는

경우의 수는 $\frac{8!}{2! \times 2!}$

2개의 a, 2개의 c를 각각 한 묶음으로 생각하여 나머지 문자 d, e, m, i와 함께 일렬로 배열하는 경우의 수는 6!

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{6!}{8!}}{\frac{6!}{2! \times 2!}} = \frac{1}{14}$$

162 ㉠ $\frac{1}{6}$

8개의 문자 n, e, i, g, h, b, o, r를 일렬로 배열하는 경우의 수는 8!

모음 e, i, o를 모두 X로 바꾸어 n, X, X, g, h, b, X, r의 8개의 문자를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X는 e, 두 번째 X는 i, 세 번째 X는 o로 바꾸는 경우의 수는

$$\frac{8!}{3!}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{8!}{3!}}{8!} = \frac{1}{6}$$

163 ㉠ ②

A, A, A, B, B, C가 하나씩 적힌 6장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{3! \times 2!}$

양 끝에 A가 적힌 카드를 배열하고 그 사이에 나머지 A, B, B, C가 적힌 카드를 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{4!}{2!}}{\frac{6!}{3! \times 2!}} = \frac{1}{5}$$

164 ㉠ $\frac{3}{10}$

(i) 만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$$\frac{5!}{2! \times 2!}$$

(ii) 4의 배수의 개수

4의 배수이려면 끝의 두 자리의 수가 4의 배수이어야 하므로 $\square\square\square 12$ 꼴 또는 $\square\square\square 32$ 꼴이어야 한다.

$\square\square\square 12$ 꼴인 자연수의 개수는 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{3!}{2!} = 3$

$\square\square\square 32$ 꼴인 자연수의 개수는 1, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로 $3! = 6$

따라서 4의 배수의 개수는 $3 + 6 = 9$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{9}{\frac{5!}{2! \times 2!}} = \frac{3}{10}$

165 ㉠ (1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{8}{15}$

(1) 10개의 과일 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = 120$$

사과 4개 중에서 1개, 딸기 6개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_6C_2 = 4 \times 15 = 60$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{120} = \frac{1}{2}$

(2) 10개의 과일 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}C_2 = 45$$

서로 다른 과일을 꺼내려면 사과 4개 중에서 1개, 딸기 6개 중에서 1개를 꺼내야 하므로 그 경우의 수는

$${}_4C_1 \times {}_6C_1 = 4 \times 6 = 24$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{45} = \frac{8}{15}$

166 $\text{㉠} \frac{10}{63}$

9대의 자전거 중에서 4대를 택하는 경우의 수는

$${}_9C_4=126$$

자전거 A, B는 포함하지 않고, 자전거 C는 포함하여 택하는 경우의 수는 C는 택하였다고 생각하고 A, B, C를 제외한 6대의 자전거 중에서 3대를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_6C_3=20$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{126} = \frac{10}{63}$

167 $\text{㉠} \frac{9}{91}$

14개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{14}C_3=364$$

공에 적힌 수 중에서 가장 큰 수가 10인 경우의 수는 10이 적힌 공을 꺼내고, 1, 2, 3, ..., 9가 적힌 9개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

$${}_9C_2=36$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{36}{364} = \frac{9}{91}$

168 $\text{㉠} 9$

배드민턴 동호회의 남자 회원의 수를 n 이라 하자.

12명의 회원 중에서 대표 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{12}C_2=66$$

n 명의 남자 회원 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

배드민턴 동호회에서 대표 2명을 뽑을 때, 남자 회원

2명을 뽑을 확률이 $\frac{6}{11}$ 이므로

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{66} = \frac{n(n-1)}{132} = \frac{6}{11}$$

$$n(n-1)=72=9 \times 8$$

$\therefore n=9$ ($\because n$ 은 자연수)

따라서 남자 회원의 수는 9이다.

169 $\text{㉠} \frac{5}{14}$

같은 종류의 빵 5개를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_4H_5 = {}_8C_5 = {}_8C_3 = 56$$

학생 A가 적어도 2개의 빵을 받는 경우의 수는 학생 A에게 빵 2개를 먼저 나누어 주고 나머지 빵 3개를 4명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{56} = \frac{5}{14}$

170 $\text{㉠} \frac{7}{27}$

X 에서 Y 로의 함수의 개수는

$${}_6\Pi_4=6^4$$

$f(a) \geq f(b) \geq f(c)$ 를 만족시키는 $f(a), f(b), f(c)$

의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_6H_3 = {}_8C_3 = 56$$

$f(d)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 3, ..., 6의 6가지 즉, $f(a) \geq f(b) \geq f(c)$ 를 만족시키는 함수의 개수는 56×6

따라서 구하는 확률은 $\frac{56 \times 6}{6^4} = \frac{7}{27}$

171 $\text{㉠} \frac{10}{91}$

방정식 $x+y+z=12$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수

x, y, z 의 순서쌍 (x, y, z) 의 개수는

$${}_3H_{12} = {}_{14}C_{12} = {}_{14}C_2 = 91$$

$z=3$ 이면 $x+y+z=12$ 에서

$$x+y=9$$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수는

$${}_2H_9 = {}_{10}C_9 = {}_{10}C_1 = 10$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{91}$

172 $\text{㉠} \frac{12}{35}$

$a \leq b \leq c \leq d \leq 4$ 를 만족시키는 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는

$${}_4H_4 = {}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$$

$b=2$ 이면 $a \leq 2 \leq c \leq d \leq 4$ 에서

a 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2의 2가지

$2 \leq c \leq d \leq 4$ 를 만족시키는 자연수 c, d 의 순서쌍 (c, d) 의 개수는

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

즉, $b=2$ 인 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 의 개수는
 $2 \times 6 = 12$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{35}$

173 $\frac{9}{20}$

전체 관광객 중에서 A 관광지를 선호하는 관광객 수는 180

따라서 구하는 확률은 $\frac{180}{400} = \frac{9}{20}$

174 7개

주머니에 들어 있는 흰 공의 개수를 n 이라 하자.

9개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_9C_2 = 36$ 서로 다른 색의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_nC_1 \times {}_{9-n}C_1 = n(9-n)$$

따라서 9개의 공 중에서 2개를 동시에 꺼낼 때, 서로 다른 색의 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{n(9-n)}{36} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

이 시행에서 18번에 7번 꼴로 서로 다른 색의 공을 꺼냈으므로 통계적 확률은 $\frac{7}{18} \quad \dots\dots \textcircled{8}$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}$ 에서

$$\frac{n(9-n)}{36} = \frac{7}{18}$$

$$n(9-n) = 14, \quad n^2 - 9n + 14 = 0$$

$$(n-2)(n-7) = 0$$

$$\therefore n=2 \text{ 또는 } n=7$$

그런데 흰 공이 빨간 공보다 많으므로 $n=7$

따라서 주머니에 흰 공이 7개 들어 있다고 볼 수 있다.

175 $\frac{17}{90}$

전체 경제 활동 인구 중에서 15세 이상 29세 이하인 인구 수는

$$2320 + 6180 = 8500$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8500}{45000} = \frac{17}{90}$

176 5개

파란색 지우개의 개수를 n 이라 하자.

10개의 지우개 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_{10}C_3 = 120$$

모두 다른 색의 공을 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_nC_1 \times {}_{7-n}C_1 = 3n(7-n)$$

따라서 10개의 지우개에서 3개를 동시에 꺼낼 때, 모두 다른 색의 지우개를 꺼낼 확률은

$$\frac{3n(7-n)}{120} = \frac{n(7-n)}{40} \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

이 시행에서 4번에 1번 꼴로 모두 다른 색의 지우개를 꺼냈으므로 통계적 확률은 $\frac{1}{4} \quad \dots\dots \textcircled{10}$

$\textcircled{9}, \textcircled{10}$ 에서

$$\frac{n(7-n)}{40} = \frac{1}{4}, \quad n(7-n) = 10$$

$$n^2 - 7n + 10 = 0, \quad (n-2)(n-5) = 0$$

$$\therefore n=2 \text{ 또는 } n=5$$

그런데 파란색 지우개가 검은색 지우개보다 많으므로 $n=5$

따라서 상자에 파란색 지우개가 5개 들어 있다고 볼 수 있다.

177 $\frac{8}{9}$

반지름의 길이가 1, 3인 두 원의 넓이는 각각

$$\pi, 9\pi$$

이때 어두운 부분의 넓이는 $9\pi - \pi = 8\pi$

따라서 화살이 어두운 부분에 맞을 확률은

$$\frac{(\text{어두운 부분의 넓이})}{(\text{과녁 전체의 넓이})} = \frac{8\pi}{9\pi} = \frac{8}{9}$$

연습문제

101~103쪽

178 $\perp$

표본공간을 S 라 하면 $S = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ 이므로

$$A = \{6, 7, 8\}, \quad B = \{1, 2, 4, 8\}, \quad C = \{4\}$$

ㄱ. $A \cap B = \{8\}$ 이므로 A 와 B 는 서로 배반사건이 아니다.

ㄴ. $A \cap C = \emptyset$ 이므로 A 와 C 는 서로 배반사건이다.

ㄷ. $C^c = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$ 이므로

$$B \cap C^c = \{1, 2, 8\}$$

따라서 B 와 C^c 는 서로 배반사건이 아니다.

ㄹ. $A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$ 이므로

$$C \cap (A \cup B) = \{4\}$$

따라서 C 와 $A \cup B$ 는 서로 배반사건이 아니다.

따라서 보기에서 서로 배반사건인 것은 $\perp$ 이다.

179 ㉔ 8

표본공간 S 는 $S = \{1, 2, 3, \dots, 7\}$ 이므로

$$A^c = \{2, 4, 6\}$$

사건 A 와 서로 배반인 사건은 A^c 의 부분집합이고,
 A^c 의 원소가 3개이므로 구하는 사건의 개수는

$$2^3 = 8$$

180 ㉔ $\frac{1}{14}$

(i) 8명이 일렬로 서는 경우의 수는 8!

(ii) 한국인끼리 서로 이웃하지 않도록 서는 경우의 수

미국인 4명이 일렬로 서는 경우의 수는 4!

미국인 사이사이와 양 끝의 5개의 자리 중에서 4개의 자리에 한국인 4명을 세우는 경우의 수는

$${}_5P_4 = 120$$

따라서 한국인끼리 서로 이웃하지 않도록 서는 경우의 수는 $4! \times 120$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{4! \times 120}{8!} = \frac{1}{14}$

181 ㉔ ②

(i) 4명이 가위바위보를 한 번 할 때, 나오는 모든 경우의 수는 ${}_3\Pi_4 = 81$

(ii) 이기는 사람이 1명인 경우의 수

이기는 1명을 정하는 경우는 4가지

1명이 이기는 경우는 (가위, 보, 보, 보),

(바위, 가위, 가위, 가위), (보, 바위, 바위, 바위)의 3가지

따라서 이기는 사람이 1명인 경우의 수는

$$4 \times 3 = 12$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{12}{81} = \frac{4}{27}$

182 ㉔ $\frac{1}{6}$

여섯 개의 숫자 1, 1, 1, 2, 3, 4를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{3!}$

2, 3, 4를 모두 X로 바꾸어 1, 1, 1, X, X, X를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X는 4, 두 번째 X는 3, 세 번째

X는 2로 바꾸는 경우의 수는 $\frac{6!}{3! \times 3!}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{6!}{3! \times 3!}}{\frac{6!}{3!}} = \frac{1}{6}$$

183 ㉔ ③

7개의 공 중에서 4개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_7C_4 = {}_7C_3 = 35$$

흰 공 3개 중에서 2개, 검은 공 4개 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_2 \times {}_4C_2 = {}_3C_1 \times {}_4C_2 = 3 \times 6 = 18$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{35}$

184 ㉔ $\frac{7}{55}$

같은 종류의 컵 9개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

$${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

학생 A가 3개의 컵을 받는 경우의 수는 학생 A에게 컵 3개를 먼저 나누어 주고 나머지 컵 6개를 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수와 같으므로

$${}_2H_6 = {}_7C_6 = {}_7C_1 = 7$$

따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{55}$

185 ㉔ ③

ㄱ. $\emptyset \subset A \subset S$ 이므로 $0 \leq P(A) \leq 1$

ㄴ. $(A \cap B) \subset A \subset (A \cup B)$ 이므로

$$P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$$

ㄷ. [반례] $S = \{1, 2, 3\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$ 일 때, $A \cup B = \{1, 2, 3\}$ 이므로

$$P(A \cup B) = 1 \text{이지만 } A \cap B = \{2\}$$

즉, A 와 B 는 서로 배반사건이 아니다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

186 ㉔ 25

표본공간을 S 라 하면

$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (6, 6)\}$ 이므로 그 원소의 개수는 36이다.

$$A = \{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$$

$$B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)\}$$

사건 A 와 서로 배반인 사건은 A^c 의 부분집합이고, 사건 B 와 서로 배반인 사건은 B^c 의 부분집합이므로 두 사건 A , B 와 모두 배반인 사건은 $A^c \cap B^c$ 의 부분집합이다.

이때 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이고,
 $A \cup B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3),$
 $(3, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5),$
 $(6, 4)\}$

이므로 $(A \cup B)^c$, 즉 $A^c \cap B^c$ 의 원소의 개수는
 $36 - 11 = 25$
 따라서 두 사건 A, B 와 모두 배반인 사건의 개수는
 2^{25} 이므로 $k = 25$

187 $\frac{17}{36}$

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는
 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

이차함수 $y = x^2 + 3ax + 2$ 의 그래프와 직선
 $y = 2ax + 2 - b$ 가 만나지 않으려면 이차방정식
 $x^2 + 3ax + 2 = 2ax + 2 - b$, 즉 $x^2 + ax + b = 0$ 이 허
 근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D 라 할 때, $D < 0$ 이어야
 하므로

$$D = a^2 - 4b < 0 \quad \therefore a^2 < 4b$$

이를 만족시키는 순서쌍 (a, b) 는

$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$
 $(2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3),$
 $(3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6)$ 의 17개

따라서 구하는 확률은 $\frac{17}{36}$

188 $\frac{2}{9}$

(i) X 에서 Y 로의 함수의 개수는 ${}_3\Pi_4 = 81$

(ii) $f(1) + f(2) + f(3) = 7$ 을 만족시키는 함수의 개수
 $f(1), f(2), f(3)$ 의 값이 1, 3, 3 또는 2, 2, 3인
 경우이므로 그 경우의 수는

$$\frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 3 + 3 = 6$$

각각의 경우에 대하여 $f(4)$ 의 값이 될 수 있는 것
 은 1, 2, 3의 3가지

따라서 $f(1) + f(2) + f(3) = 7$ 을 만족시키는 함
 수의 개수는 $6 \times 3 = 18$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{18}{81} = \frac{2}{9}$

189 8

남학생의 수를 n 이라 하자.

13명의 학생 중에서 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_{13}C_2 = 78$$

남학생 1명, 여학생 1명을 뽑는 경우의 수는

$${}_nC_1 \times {}_{13-n}C_1 = n(13-n)$$

남학생 2명을 뽑는 경우의 수는

$${}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\therefore P(A) = \frac{n(13-n)}{78},$$

$$P(B) = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{78} = \frac{n(n-1)}{156} \quad \text{..... ①}$$

$$P(A) = P(B) + \frac{2}{13} \text{에서}$$

$$\frac{n(13-n)}{78} = \frac{n(n-1)}{156} + \frac{2}{13}$$

$$2n(13-n) = n(n-1) + 24$$

$$3n^2 - 27n + 24 = 0, n^2 - 9n + 8 = 0$$

$$(n-1)(n-8) = 0$$

$$\therefore n = 1 \text{ 또는 } n = 8$$

그런데 남학생이 여학생보다 많으므로 $n = 8$

따라서 남학생의 수는 8이다. ②

단계	채점 기준	비율
①	남학생의 수를 n 이라 할 때, $P(A), P(B)$ 를 n 에 대하여 나타내기	40 %
②	남학생의 수 구하기	60 %

190 $\frac{1}{20}$

방정식 $x + y + z + w = 7$ 을 만족시키는 음이 아닌 정
 수 x, y, z, w 의 순서쌍 (x, y, z, w) 의 개수는

$${}_4H_7 = {}_{10}C_7 = {}_{10}C_3 = 120$$

$$y = 0, z = 2 \text{이면 } x + y + z + w = 7 \text{에서}$$

$$x + w = 5$$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 x, w 의 순서
 쌍 (x, w) 의 개수는

$${}_2H_5 = {}_6C_5 = {}_6C_1 = 6$$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

191 13 개

20타수에 나와 타율이 0.35이므로 현재 안타 개수는

$$20 \times 0.35 = 7$$

앞으로 30타수 동안 더 치는 안타의 개수를 k 라 하면

$$\frac{7+k}{20+30} = 0.4, 7+k = 20 \quad \therefore k = 13$$

따라서 안타를 13개 더 쳐야 한다.

192 ㉔ ④

| 접근 방법 | $f(a)f(b) < 0$ 이면 $f(a) > 0, f(b) < 0$ 또는 $f(a) < 0, f(b) > 0$ 이므로 경우를 나누어 a, b 가 될 수 있는 값을 구한다.

한 개의 주사위를 2번 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는 $6 \times 6 = 36$

a, b 의 값은 1부터 6까지의 자연수 중 하나이므로

$$f(x) = x^2 - 7x + 10 \text{에서}$$

$$f(1) = 1 - 7 + 10 = 4 > 0,$$

$$f(2) = 4 - 14 + 10 = 0,$$

$$f(3) = 9 - 21 + 10 = -2 < 0,$$

$$f(4) = 16 - 28 + 10 = -2 < 0,$$

$$f(5) = 25 - 35 + 10 = 0,$$

$$f(6) = 36 - 42 + 10 = 4 > 0$$

$f(a)f(b) < 0$ 에서

$f(a) > 0, f(b) < 0$ 또는 $f(a) < 0, f(b) > 0$

(i) $f(a) > 0, f(b) < 0$ 인 경우

a 의 값이 될 수 있는 것은 1, 6의 2가지이고 b 의 값이 될 수 있는 것은 3, 4의 2가지이므로 그 경우의 수는

$$2 \times 2 = 4$$

(ii) $f(a) < 0, f(b) > 0$ 인 경우

a 의 값이 될 수 있는 것은 3, 4의 2가지이고 b 의 값이 될 수 있는 것은 1, 6의 2가지이므로 그 경우의 수는

$$2 \times 2 = 4$$

(i), (ii)에서 $f(a)f(b) < 0$ 인 경우의 수는 $4 + 4 = 8$

따라서 구하는 확률은 $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

193 ㉔ $\frac{1}{5}$

| 접근 방법 | 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되도록 좌석을 2개씩 먼저 묶는다.

(i) 6명의 학생이 6개의 좌석에 앉는 모든 경우의 수는 $6!$

(ii) 같은 학년의 두 학생끼리는 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되도록 앉는 경우
학생들이 앉는 경우는 다음 그림과 같이 3가지 경우이다.

11	12	13
21	22	23

11	12	13
21	22	23

11	12	13
21	22	23

각각의 경우에 대하여 학년별로 앉을 좌석을 정하는 경우의 수는 $3!$

같은 학년의 학생끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2! \times 2! \times 2!$

따라서 같은 학년의 두 학생끼리는 좌석 번호의 차가 1 또는 10이 되도록 앉는 경우의 수는

$$3 \times 3! \times (2! \times 2! \times 2!)$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3 \times 3! \times (2! \times 2! \times 2!)}{6!} = \frac{1}{5}$$

194 ㉔ ①

주머니에 1이 적힌 공이 2개 있으므로 4개의 공을 동시에 꺼낼 때, 1이 적힌 공을 1개 꺼내는 경우와 2개 꺼내는 경우로 나눈다.

(i) 1이 적힌 공을 1개 꺼내는 경우

1, 2, 3, 4가 적힌 공을 꺼내어 일렬로 배열하는 경우의 수는

$$4! = 24$$

(ii) 1이 적힌 공을 2개 꺼내는 경우

2, 3, 4가 적힌 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$$

꺼낸 2개의 공과 1이 적힌 공 2개를 배열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

따라서 1이 적힌 공을 2개 꺼내는 경우의 수는

$$3 \times 12 = 36$$

(i), (ii)에서 모든 경우의 수는

$$24 + 36 = 60$$

$a \leq b \leq c \leq d$ 인 경우는

(1, 1, 2, 3), (1, 1, 2, 4), (1, 1, 3, 4), (1, 2, 3, 4)의 4가지

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{60} = \frac{1}{15}$

02 확률의 덧셈 정리

개념 확인

105쪽

195 $\square \frac{3}{5}$

확률의 덧셈 정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{3}{5}$$

196 $\square \frac{19}{24}$

두 사건 A, B 가 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈 정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \\ = \frac{1}{8} + \frac{2}{3} = \frac{19}{24}$$

197 $\square \frac{2}{3}$

여사건의 확률에 의하여

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

유제

107-113쪽

198 $\square \frac{3}{22}$

 $P(A^c) = \frac{6}{11}$ 에서 여사건의 확률에 의하여

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$$

확률의 덧셈 정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ \frac{9}{11} = \frac{5}{11} + \frac{1}{2} - P(A \cap B) \\ \therefore P(A \cap B) = \frac{3}{22}$$

199 $\square \frac{11}{30}$

 $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = \frac{1}{3}$ 에서 여사건의 확률에 의하여

$$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)^c) \\ = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

두 사건 A, B 가 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈 정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\frac{2}{3} = \frac{3}{10} + P(B)$$

$$\therefore P(B) = \frac{11}{30}$$

200 $\square \textcircled{4}$

확률의 덧셈 정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$1 = P(A) + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(A) = \frac{5}{6}$$

따라서 여사건의 확률에 의하여

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

201 $\square \frac{3}{4}$

 $P(A^c) = \frac{1}{3}$ 에서 여사건의 확률에 의하여

$$P(A) = 1 - P(A^c) \\ = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$4P(B) = \frac{1}{3} \text{에서 } P(B) = \frac{1}{12}$$

따라서 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈 정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \\ = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

202 $\square \frac{1}{3}$

뽑은 카드에 적힌 수가 5의 배수인 사건을 A , 6의 배수인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{30}{150}, P(B) = \frac{25}{150}$$

뽑은 카드에 적힌 수가 5와 6의 공배수, 즉 30의 배수인 사건은 $A \cap B$ 이므로

$$P(A \cap B) = \frac{5}{150}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{30}{150} + \frac{25}{150} - \frac{5}{150} = \frac{1}{3}$$

203 $\frac{34}{55}$

A를 포함하여 택하는 사건을 A, B를 포함하여 택하는 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{{}_{10}C_3}{{}_{11}C_4} = \frac{120}{330}, P(B) = \frac{{}_{10}C_3}{{}_{11}C_4} = \frac{120}{330}$$

A, B를 모두 포함하여 택하는 사건은 $A \cap B$ 이므로

$$P(A \cap B) = \frac{{}_9C_2}{{}_{11}C_4} = \frac{36}{330}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{120}{330} + \frac{120}{330} - \frac{36}{330} = \frac{34}{55} \end{aligned}$$

204 $\frac{18}{35}$

택한 가구가 강아지를 키우는 사건을 A, 고양이를 키우는 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{2}{7}$$

택한 가구가 강아지와 고양이를 모두 키우는 사건은

$$A \cap B \text{이므로 } P(A \cap B) = \frac{10}{140} = \frac{1}{14}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{3}{10} + \frac{2}{7} - \frac{1}{14} = \frac{18}{35} \end{aligned}$$

205 $\frac{2}{3}$

택한 수가 짝수인 사건을 A, 5의 배수인 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{5 \times 6 \times 3}{5 \times {}_6\Pi_2} = \frac{90}{180}$$

$$P(B) = \frac{5 \times 6 \times 2}{5 \times {}_6\Pi_2} = \frac{60}{180}$$

택한 수가 짝수이고 5의 배수인 사건, 즉 일의 자리의 수가 0인 사건은 $A \cap B$ 이므로

$$P(A \cap B) = \frac{5 \times 6 \times 1}{5 \times {}_6\Pi_2} = \frac{30}{180}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{90}{180} + \frac{60}{180} - \frac{30}{180} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

206 $\frac{19}{91}$

모두 같은 색의 연필을 꺼내는 경우는 모두 파란색 연필 또는 모두 검은색 연필을 꺼내는 경우이다.

꺼낸 3개의 연필이 모두 파란색 연필인 사건을 A, 모두 검은색 연필인 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{{}_6C_3}{{}_{14}C_3} = \frac{20}{364}$$

$$P(B) = \frac{{}_8C_3}{{}_{14}C_3} = \frac{56}{364}$$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{20}{364} + \frac{56}{364} = \frac{19}{91} \end{aligned}$$

207 $\frac{43}{45}$

꺼낸 카드에 적힌 두 수의 곱이 18이 아닌 사건을 A라 하면 A^c 는 두 수의 곱이 18인 사건이다.

두 수의 곱이 18인 경우는 (2, 9), (3, 6)의 2가지이므로

$$P(A^c) = \frac{2}{{}_{10}C_2} = \frac{2}{45}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{2}{45} = \frac{43}{45}$$

208 $\frac{4}{21}$

양 끝에 모두 1학년 학생이 서는 사건을 A, 모두 2학년 학생이 서는 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{{}_3P_2 \times 5!}{7!} = \frac{1}{7}$$

$$P(B) = \frac{{}_2P_2 \times 5!}{7!} = \frac{1}{21}$$

두 사건 A, B는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= \frac{1}{7} + \frac{1}{21} = \frac{4}{21} \end{aligned}$$

209 $\frac{7}{8}$

abc가 짝수인 사건을 A라 하면 A^c 는 abc가 홀수인 사건이다.

abc가 홀수이려면 a, b, c 모두 홀수이어야 하므로

$$P(A^c) = \frac{3 \times 3 \times 3}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{8}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

210 ㉮ ⑤

적어도 1개가 흰색 마스크인 사건을 A 라 하면 A^c 는 3개 모두 검은색 마스크인 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_9C_3}{{}_{14}C_3} = \frac{3}{13}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{3}{13} = \frac{10}{13}$$

211 ㉮ $\frac{23}{42}$

남학생을 2명 이하로 선발하는 사건을 A 라 하면 A^c 는 남학생을 3명 선발하거나 4명 선발하는 사건이다.

(i) 남학생을 3명 선발할 확률은

$$\frac{{}_6C_3 \times {}_4C_1}{{}_{10}C_4} = \frac{80}{210}$$

(ii) 남학생을 4명 선발할 확률은

$$\frac{{}_6C_4}{{}_{10}C_4} = \frac{15}{210}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } P(A^c) = \frac{80}{210} + \frac{15}{210} = \frac{19}{42}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{19}{42} = \frac{23}{42}$$

212 ㉮ $\frac{101}{125}$

적어도 2명이 같은 요일을 택하는 사건을 A 라 하면 A^c 는 4명이 모두 다른 요일을 택하는 사건이므로

$$P(A^c) = \frac{{}_5P_4}{{}_5\Pi_4} = \frac{24}{125}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{24}{125} = \frac{101}{125}$$

213 ㉮ $\frac{51}{55}$

꺼낸 동전의 금액의 합이 1100원 미만인 사건을 A 라 하면 A^c 는 1100원 이상인 사건이다.

(i) 100원짜리 동전 1개, 500원짜리 동전 2개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_5C_1 \times {}_3C_2}{{}_{12}C_3} = \frac{15}{220}$$

(ii) 500원짜리 동전 3개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_3C_3}{{}_{12}C_3} = \frac{1}{220}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } P(A^c) = \frac{15}{220} + \frac{1}{220} = \frac{4}{55}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{4}{55} = \frac{51}{55}$$

연습문제

114~116쪽

214 ㉮ $\frac{11}{16}$

$$2P(A) = \frac{5}{8} \text{에서 } P(A) = \frac{5}{16}$$

두 사건 A, B 가 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈 정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$\frac{5}{8} = \frac{5}{16} + P(B) \quad \therefore P(B) = \frac{5}{16}$$

따라서 여사건의 확률에 의하여

$$P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16}$$

215 ㉮ $\neg, \cup$

$\neg, 0 \leq P(A) \leq 1, 0 \leq P(B) \leq 1$ 이므로

$$0 \leq P(A) + P(B) \leq 2$$

$\cup$, 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이므로 확률의 덧셈 정리에 의하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

이때 $\emptyset \subset (A \cup B) \subset S$ 에서 $0 \leq P(A \cup B) \leq 1$ 이므로

$$0 \leq P(A) + P(B) \leq 1$$

$\cap$, [반례] $S = \{1, 2, 3\}, A = \{1, 2\}, B = \{1\}$ 이면

$$P(A) + P(B) = 1 \text{이지만}$$

$A \cap B = \{1\}$ 이므로 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이 아니다.

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \cup$ 이다.

216 ㉮ $\frac{14}{25}$

택한 학생이 콘서트를 관람한 경험이 있는 사건을 A , 뮤지컬을 관람한 경험이 있는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{20}{50}, P(B) = \frac{22}{50}$$

택한 학생이 콘서트와 뮤지컬을 모두 관람한 경험이 있는 사건은 $A \cap B$ 이므로

$$P(A \cap B) = \frac{14}{50}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{20}{50} + \frac{22}{50} - \frac{14}{50} = \frac{14}{25}$$

217 ㉮ ⑤

두 눈의 수의 합이 7인 사건을 A , 곱이 12인 사건을 B 라 하자.

(i) 두 눈의 수의 합이 7인 경우는 (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)의 6가지이므로

$$P(A) = \frac{6}{6 \times 6} = \frac{6}{36}$$

(ii) 두 눈의 수의 곱이 12인 경우는 (2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)의 4가지이므로

$$P(B) = \frac{4}{6 \times 6} = \frac{4}{36}$$

(iii) 두 눈의 수의 합이 7이고, 곱이 12인 경우는 (3, 4), (4, 3)의 2가지이므로

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6 \times 6} = \frac{2}{36}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} - \frac{2}{36} = \frac{2}{9}$$

218 ㉮ $\frac{16}{33}$

뽑은 카드에 적힌 세 수의 합이 홀수인 경우는 세 수가 모두 홀수이거나 홀수가 1개, 짝수가 2개인 경우이다. 뽑은 카드에 적힌 세 수가 모두 홀수인 사건을 A , 홀수가 1개, 짝수가 2개인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{{}_6C_3}{{}_{11}C_3} = \frac{20}{165}$$

$$P(B) = \frac{{}_6C_1 \times {}_5C_2}{{}_{11}C_3} = \frac{60}{165}$$

두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \\ = \frac{20}{165} + \frac{60}{165} = \frac{16}{33}$$

219 ㉮ ③

적어도 한쪽 끝에 모음이 오도록 배열하는 사건을 A 라 하면 A^c 는 양 끝에 모두 자음이 오도록 배열하는 사건이다.

자음 p, s, t, v의 4개 중에서 양 끝에 올 2개를 정하고, 나머지 6개의 문자를 일렬로 배열해야 하므로

$$P(A^c) = \frac{{}_4P_2 \times \frac{6!}{2!}}{\frac{8!}{2!}} = \frac{3}{14}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{3}{14} = \frac{11}{14}$$

220 ㉮ ③

흰색 손수건을 2장 이상 꺼내는 사건을 A 라 하면 A^c 는 흰색 손수건을 꺼내지 않거나 1장 꺼내는 사건이다.

(i) 검은색 손수건 4장을 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_5C_4}{{}_9C_4} = \frac{5}{126}$$

(ii) 흰색 손수건 1장, 검은색 손수건 3장을 꺼낼 확률

$$\text{은} \frac{{}_4C_1 \times {}_5C_3}{{}_9C_4} = \frac{40}{126}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } P(A^c) = \frac{5}{126} + \frac{40}{126} = \frac{5}{14}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14}$$

221 ㉮ $\frac{9}{20}$

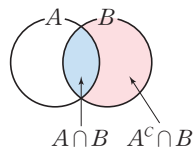
$B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$ 이므로

$$P(A \cap B) \\ = P(B) - P(A^c \cap B) \\ = \frac{7}{20} - \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

따라서 확률의 덧셈 정리에 의

하여

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{1}{5} + \frac{7}{20} - \frac{1}{10} = \frac{9}{20}$$



222 ㉮ $\frac{29}{50}$

$14x^2 - 9nx + n^2 = 0$ 에서

$$(7x - n)(2x - n) = 0 \quad \therefore x = \frac{n}{7} \text{ 또는 } x = \frac{n}{2}$$

즉, 이차방정식 $14x^2 - 9nx + n^2 = 0$ 이 자연수인 해를 가지려면 자연수 n 이 7의 배수 또는 2의 배수이어야 한다.

▶▶▶▶▶ ①

n 이 7의 배수인 사건을 A , 2의 배수인 사건을 B 라 하면 $P(A) = \frac{7}{50}$, $P(B) = \frac{25}{50}$

n 이 7과 2의 공배수, 즉 14의 배수인 사건은 $A \cap B$ 이므로 $P(A \cap B) = \frac{3}{50}$ ▶▶▶▶▶ ②

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{7}{50} + \frac{25}{50} - \frac{3}{50} = \frac{29}{50} \quad \text{▶▶▶▶▶ ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	$14x^2 - 9nx + n^2 = 0$ 이 자연수인 해를 갖는 조건 구하기	40 %
②	n 이 7의 배수, 2의 배수, 14의 배수일 확률 구하기	30 %
③	$14x^2 - 9nx + n^2 = 0$ 이 자연수인 해를 가질 확률 구하기	30 %

223 ㉮ $\frac{1}{5}$

$f(1)f(2)=6$ 을 만족시키는 함수인 사건을 A , $f(1)f(2)=15$ 를 만족시키는 함수인 사건을 B 라 하자.

(i) $f(1)f(2)=6$ 을 만족시키는 함수인 경우
 $f(1)f(2)=6$ 을 만족시키는 순서쌍 $(f(1), f(2))$ 는 $(2, 3), (3, 2)$ 의 2개
 $f(0)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 4, 5의 3가지
 $\therefore P(A) = \frac{2 \times 3}{{}_5P_3} = \frac{1}{10}$ └ 일대일함수이므로 2, 3은 제외한다.

(ii) $f(1)f(2)=15$ 를 만족시키는 함수인 경우
 $f(1)f(2)=15$ 를 만족시키는 순서쌍 $(f(1), f(2))$ 는 $(3, 5), (5, 3)$ 의 2개
 $f(0)$ 의 값이 될 수 있는 것은 1, 2, 4의 3가지
 $\therefore P(B) = \frac{2 \times 3}{{}_5P_3} = \frac{1}{10}$ └ 일대일함수이므로 3, 5는 제외한다.

(i), (ii)에서 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \\ = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

224 ㉮ $\frac{20}{27}$

$a < b$ 또는 $b < c$ 인 사건을 A 라 하면 A^C 는 $a \geq b \geq c$ 인 사건이다.

$a \geq b \geq c$ 를 만족시키는 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 ${}_6H_3 = {}_8C_3 = 56$ 이므로

$$P(A^C) = \frac{56}{6 \times 6 \times 6} = \frac{7}{27}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{7}{27} = \frac{20}{27}$$

225 ㉮ 4

바구니에 들어 있는 사과의 개수를 n 이라 하자.

배를 적어도 1개 꺼내는 사건을 A 라 하면 A^C 는 2개 모두 사과를 꺼내는 사건이므로

$$P(A^C) = \frac{{}_nC_2}{{}_{10}C_2} = \frac{n(n-1)}{90}$$

이때 $P(A) = \frac{13}{15}$ 이므로

$$P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{13}{15} = \frac{2}{15}$$

$$\therefore \frac{n(n-1)}{90} = \frac{2}{15} \text{ 이므로}$$

$$n(n-1) = 12 = 4 \times 3$$

$$\therefore n = 4 \quad (\because n \text{은 자연수})$$

따라서 사과의 개수는 4이다.

226 ㉮ $\frac{151}{165}$

두 종류 이상의 씨앗을 꺼내는 사건을 A 라 하면 A^C 는 한 종류의 씨앗을 꺼내는 사건이다.

$$(i) \text{ 소나무 씨앗을 3개 꺼낼 확률은 } \frac{{}_4C_3}{{}_{11}C_3} = \frac{4}{165}$$

$$(ii) \text{ 참나무 씨앗을 3개 꺼낼 확률은 } \frac{{}_5C_3}{{}_{11}C_3} = \frac{10}{165}$$

(i), (ii)에서

$$P(A^C) = \frac{4}{165} + \frac{10}{165} = \frac{14}{165}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^C) \\ = 1 - \frac{14}{165} = \frac{151}{165}$$

227 ㉮ ⑤

서로 다른 두 점 사이의 거리가 1보다 큰 사건을 A 라 하면 A^C 는 두 점 사이의 거리가 1인 사건이다.

두 점 사이의 거리가 1이려면 두 점의 x 좌표가 같고 y 좌표가 연속하는 두 자연수이거나 두 점의 y 좌표가 같고 x 좌표가 연속하는 두 자연수이어야 한다.

(i) 두 점의 x 좌표가 같고 y 좌표가 연속하는 두 자연수

$$\text{일 확률은 } \frac{{}_4C_1 \times 2}{{}_{12}C_2} = \frac{8}{66}$$

(ii) 두 점의 y 좌표가 같고 x 좌표가 연속하는 두 자연수

$$\text{일 확률은 } \frac{{}_3C_1 \times 3}{{}_{12}C_2} = \frac{9}{66}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } P(A^c) = \frac{8}{66} + \frac{9}{66} = \frac{17}{66}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{17}{66} = \frac{49}{66}$$

228 $\frac{13}{15}$

| 접근 방법 | $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ 이고

$P(A) \leq P(A \cup B)$, $P(B) \leq P(A \cup B)$,

$0 \leq P(A \cup B) \leq 1$ 임을 이용하여 부등식을 세운다.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 이므로

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - P(A \cup B)$$

$$= \frac{19}{15} - P(A \cup B)$$

즉, $P(A \cup B)$ 가 최소일 때 $P(A \cap B)$ 가 최대이고,

$P(A \cup B)$ 가 최대일 때 $P(A \cap B)$ 가 최소이다.

$P(A \cup B) \geq P(A)$ 이므로

$$P(A \cup B) \geq \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$P(A \cup B) \geq P(B)$ 이므로

$$P(A \cup B) \geq \frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{7}, \textcircled{8} \text{에서 } P(A \cup B) \geq \frac{2}{3}$$

이때 $0 \leq P(A \cup B) \leq 1$ 이므로

$$\frac{2}{3} \leq P(A \cup B) \leq 1$$

$$\frac{4}{15} \leq \frac{19}{15} - P(A \cup B) \leq \frac{3}{5}$$

$$\therefore \frac{4}{15} \leq P(A \cap B) \leq \frac{3}{5}$$

따라서 $M = \frac{3}{5}$, $m = \frac{4}{15}$ 이므로

$$M + m = \frac{13}{15}$$

229 $\frac{23}{40}$

| 접근 방법 | 자연수 N 이 $N = p^a q^b$ (p, q 는 서로 다른 소수, a, b 는 자연수) 꼴로 소인수분해될 때, N 과 서로소이려면 p 의 배수도 아니고 q 의 배수도 아니어야 함을 이용한다.

$21 = 3 \times 7$ 이므로 21과 서로소이려면 3의 배수도 아니고 7의 배수도 아니어야 한다.

택한 수가 3의 배수인 사건을 A , 7의 배수인 사건을 B 라 하면 3의 배수도 아니고 7의 배수도 아닌 사건은 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이다.

이때 $P(A) = \frac{26}{80}$, $P(B) = \frac{11}{80}$ 이고, 3과 7의 공배수, 즉 21의 배수인 사건은 $A \cap B$ 이므로

$$P(A \cap B) = \frac{3}{80}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{26}{80} + \frac{11}{80} - \frac{3}{80} = \frac{17}{40}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c)$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{17}{40} = \frac{23}{40}$$

230 $\frac{11}{13}$

| 접근 방법 | 택한 물건이 적어도 1개는 흰색이고, 적어도 1개는 키보드인 사건의 여사건은 택한 물건이 모두 검은색 또는 모두 마우스인 사건임을 이용한다.

택한 물건이 적어도 1개는 흰색인 사건을 A 라 하면 A^c 는 모두 검은색인 사건이고, 적어도 1개는 키보드인 사건을 B 라 하면 B^c 는 모두 마우스인 사건이다.

(i) 모두 검은색을 택할 확률은

$$P(A^c) = \frac{{}_5C_3}{{}_{13}C_3} = \frac{10}{286}$$

(ii) 모두 마우스를 택할 확률은

$$P(B^c) = \frac{{}_7C_3}{{}_{13}C_3} = \frac{35}{286}$$

(iii) 모두 검은색 마우스를 택할 확률은

$$P(A^c \cap B^c) = \frac{{}_3C_3}{{}_{13}C_3} = \frac{1}{286}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$P(A^c \cup B^c) = P(A^c) + P(B^c) - P(A^c \cap B^c)$$

$$= \frac{10}{286} + \frac{35}{286} - \frac{1}{286} = \frac{2}{13}$$

이때 적어도 1개는 흰색이고 적어도 1개는 키보드인 사건은 $A \cap B$ 이므로 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P((A^c \cup B^c)^c)$$

$$= 1 - P(A^c \cup B^c)$$

$$= 1 - \frac{2}{13} = \frac{11}{13}$$

01 조건부확률

개념 확인

121쪽

231 ㉠ (1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{5}{9}$

$$(1) P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$

$$(2) P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{9}$$

232 ㉠ $\frac{2}{3}$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{에서}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{3}}{P(A)}$$

$$\therefore P(A) = \frac{2}{3}$$

233 ㉠ (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$

$$A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{2, 3, 5\}$$

$$(1) A \cap B = \{2, 3\} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$(2) P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

234 ㉠ (1) $\frac{1}{20}$ (2) $\frac{1}{12}$

$$(1) P(A \cap B) = P(B)P(A|B) \\ = \frac{1}{6} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{20}$$

$$(2) P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{12}$$

유제

123~131쪽

235 ㉠ $\frac{1}{4}$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{이므로} \\ 0.5 = 0.4 + 0.2 - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = 0.1$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.4} = \frac{1}{4}$$

236 ㉠ $\frac{1}{5}$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$\frac{2}{3} = P(A) + \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$$

$$\therefore P(A) = \frac{5}{12}$$

$$\therefore P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{1}{5}$$

237 ㉠ ④

$$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ = \frac{2}{5} + \frac{7}{10} - \frac{1}{5} = \frac{9}{10}$$

$$\text{이때 } A^c \cap B^c = (A \cup B)^c \text{이므로}$$

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) \\ = 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$$

$$\therefore P(A^c|B^c) = \frac{P(A^c \cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{3}$$

238 ㉠ 0.14

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$= 0.7 \times 0.8 = 0.56$$

$$\text{이때 } P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) \text{이므로}$$

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) \\ = 0.7 - 0.56 = 0.14$$

239 $\frac{10}{19}$

시설에 만족한다고 응답한 방문객인 사건을 A , 남자인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{57}{120}, P(A \cap B) = \frac{30}{120}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{30}{120}}{\frac{57}{120}} = \frac{10}{19}$$

| 다른 풀이 |

구하는 확률은 시설에 만족한다고 응답한 방문객 중에서 남자를 택할 확률과 같으므로

$$\frac{(\text{만족한다고 응답한 남자 방문객의 수})}{(\text{만족한다고 응답한 방문객의 수})} = \frac{30}{57} = \frac{10}{19}$$

240 $\frac{8}{15}$

안경을 쓴 학생인 사건을 A , 여학생인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{3}{8}, P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{15}$$

| 다른 풀이 |

구하는 확률은 안경을 쓴 학생 중에서 여학생을 택할 확률과 같으므로 전체 신입생 수를 a 라 하면

$$\frac{(\text{안경을 쓴 여학생 수})}{(\text{안경을 쓴 학생 수})} = \frac{\frac{1}{5}a}{\frac{3}{8}a} = \frac{8}{15}$$

241 $\frac{4}{9}$

ab 가 홀수인 사건을 A , $a+b$ 가 4의 배수인 사건을 B 라 하자.

ab 가 홀수인 경우는

$(1, 1), (1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)$ 의 9가지

$$\therefore P(A) = \frac{9}{36}$$

ab 가 홀수이고, $a+b$ 가 4의 배수인 경우는

$(1, 3), (3, 1), (3, 5), (5, 3)$ 의 4가지

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{4}{36}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{4}{9}$$

242 $\frac{7}{9}$

조사한 전체 직장인 수는 $28 + 25 + x + 15 = x + 68$

아침 식사를 한 직장인인 사건을 A , 남자인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{x+28}{x+68}, P(A \cap B) = \frac{28}{x+68}$$

임의로 택한 1명이 아침 식사를 한 직장인일 때, 그 직장인이 남자일 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{28}{x+68}}{\frac{x+28}{x+68}} = \frac{28}{x+28}$$

$$\text{즉, } \frac{28}{x+28} = \frac{4}{5} \text{ 이므로}$$

$$35 = x + 28 \quad \therefore x = 7$$

243 $\frac{18}{35}$

A 가 딸기 맛 사탕을 꺼내는 사건을 A , B 가 포도 맛 사탕을 꺼내는 사건을 B 라 하면

A 가 딸기 맛 사탕을 꺼낼 확률은

$$P(A) = \frac{6}{15}$$

A 가 딸기 맛 사탕을 꺼냈을 때, B 가 포도 맛 사탕을 꺼낼 확률은

$$P(B|A) = \frac{9}{14}$$

$$\therefore p = P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$= \frac{6}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{9}{35}$$

$$\therefore 70p = 70 \times \frac{9}{35} = 18$$

244 $\frac{3}{7}$

국내 음반의 개수를 n 이라 하자.

미현이가 국내 음반을 택하는 사건을 A , 보영이가 해외 음반을 택하는 사건을 B 라 하면

미현이가 국내 음반을 택할 확률은

$$P(A) = \frac{n}{7}$$

미현이가 국내 음반을 택했을 때, 보영이가 해외 음반을 택할 확률은

$$P(B|A) = \frac{7-n}{6}$$

따라서 미현이가 국내 음반, 보영이가 해외 음반을 택할 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \\ = \frac{n}{7} \times \frac{7-n}{6} = \frac{n(7-n)}{42}$$

$$\text{즉, } \frac{n(7-n)}{42} = \frac{2}{7} \text{ 이므로}$$

$$n(7-n) = 12$$

$$n^2 - 7n + 12 = 0$$

$$(n-3)(n-4) = 0 \quad \therefore n=3 \text{ 또는 } n=4$$

그런데 국내 음반이 해외 음반보다 적으므로 $n=3$

따라서 국내 음반은 3개이다.

245 $\frac{4}{25}$

마라톤 대회에 출전한 남자 선수인 사건을 A , 완주한 선수인 사건을 B 라 하면

택한 1명이 마라톤 대회에 출전한 남자 선수일 확률은

$$P(A) = \frac{4}{5}$$

택한 1명이 마라톤 대회에 출전한 남자 선수일 때, 그

$$\text{선수가 완주할 확률은 } P(B|A) = \frac{20}{100}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \\ = \frac{4}{5} \times \frac{20}{100} = \frac{4}{25}$$

246 $\frac{27}{55}$

유진이가 검은 공을 꺼내는 사건을 A , 혜진이가 검은 공을 꺼내는 사건을 B 라 하자.

두 사람이 꺼낸 공 중에서 적어도 1개가 빨간 공인 사건은 $(A \cap B)^c$ 이고, 이때 $A \cap B$ 는 두 사람이 모두 검은 공을 꺼내는 사건이다.

유진이가 검은 공을 꺼낼 확률은

$$P(A) = \frac{8}{11}$$

유진이가 검은 공을 꺼냈을 때, 혜진이가 검은 공을 꺼낼 확률은

$$P(B|A) = \frac{7}{10}$$

따라서 두 사람이 모두 검은 공을 꺼낼 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \\ = \frac{8}{11} \times \frac{7}{10} = \frac{28}{55}$$

따라서 구하는 확률은

$$P((A \cap B)^c) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{28}{55} = \frac{27}{55}$$

247 0.68

오늘 비가 오는 사건을 A , 매출 목표액을 달성하는 사건을 B 라 하자.

(i) 오늘 비가 오고 매출 목표액을 달성할 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \\ = 0.4 \times 0.8 = 0.32$$

(ii) 오늘 비가 오지 않고 매출 목표액을 달성할 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) \\ = (1-0.4) \times 0.6 \\ = 0.6 \times 0.6 = 0.36$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ = 0.32 + 0.36 = 0.68$$

248 $\frac{3}{8}$

해리가 치즈 과자를 꺼내는 사건을 A , 민정이가 치즈 과자를 꺼내는 사건을 B 라 하자.

(i) 해리와 민정이가 모두 치즈 과자를 꺼낼 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \\ = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

(ii) 해리가 초코 과자를 꺼내고 민정이가 치즈 과자를 꺼낼 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) \\ = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ = \frac{3}{28} + \frac{15}{56} = \frac{3}{8}$$

249 $\frac{13}{50}$

독감에 걸린 사람인 사건을 A , 독감이라 진단하는 사건을 B 라 하자.

(i) 독감에 걸린 사람이고 그 사람을 독감이라 진단할 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \\ = \frac{40}{200} \times \frac{90}{100} = \frac{9}{50}$$

(ii) 독감에 걸리지 않은 사람이고 그 사람을 독감이라 진단할 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \frac{160}{200} \times \left(1 - \frac{90}{100}\right) \\ &= \frac{160}{200} \times \frac{10}{100} = \frac{2}{25} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{9}{50} + \frac{2}{25} \\ &= \frac{13}{50} \end{aligned}$$

250 $\square \frac{19}{70}$

상자 A를 택하는 사건을 A, 모두 파란 공을 꺼내는 사건을 B라 하자.

(i) 상자 A를 택하고 모두 파란 공을 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_6C_2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{15} = \frac{1}{30} \end{aligned}$$

(ii) 상자 B를 택하고 모두 파란 공을 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_7C_2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{10}{21} = \frac{5}{21} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{1}{30} + \frac{5}{21} \\ &= \frac{19}{70} \end{aligned}$$

251 $\square \frac{16}{31}$

주머니 A를 택하는 사건을 A, 검은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼내는 사건을 B라 하자.

(i) 주머니 A를 택하고 주머니 A에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{8}{15} = \frac{4}{15} \end{aligned}$$

(ii) 주머니 B를 택하고 주머니 B에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{{}_1C_1 \times {}_3C_1}{{}_4C_2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 검은 공 1개, 흰 공 1개를 꺼낼 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{4}{15} + \frac{1}{4} = \frac{31}{60} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{31}{60}} = \frac{16}{31}$$

252 $\square \frac{3}{13}$

동아리 A를 택하는 사건을 A, 발표자가 모두 2학년인 사건을 B라 하자.

(i) 동아리 A를 택하고 발표자가 모두 2학년일 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{{}_3C_2}{{}_6C_2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{3}{15} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

(ii) 동아리 B를 택하고 발표자가 모두 2학년일 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_6C_2} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{10}{15} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 발표자가 모두 2학년일 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{3} = \frac{13}{30} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{13}{30}} = \frac{3}{13}$$

253 $\square \frac{9}{34}$

홈 경기인 사건을 A, 경기에서 이기는 사건을 B라 하자.

(i) 홈 경기이고 그 경기에서 이길 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

(ii) 원정 경기이고 그 경기에서 이길 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \left(1 - \frac{1}{6}\right) \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{18} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 경기에서 이길 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{1}{10} + \frac{5}{18} = \frac{17}{45} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{17}{45}} = \frac{9}{34}$$

254 ㉡ $\frac{12}{47}$

기계 B가 생산한 제품인 사건을 A, 불량품인 사건을 B라 하자.

(i) 기계 B가 생산한 제품이고 그 제품이 불량품일 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= 0.3 \times 0.04 = 0.012 \end{aligned}$$

(ii) 기계 A가 생산한 제품이고 그 제품이 불량품일 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= 0.7 \times 0.05 = 0.035 \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 택한 제품이 불량품일 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= 0.012 + 0.035 = 0.047 \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.012}{0.047} = \frac{12}{47}$$

연습문제

132~135쪽

255 ㉡ ③

$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$ 이므로

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2}P(B) \quad \therefore P(B) = \frac{2}{5}$$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{7}{10}$$

256 ㉡ $\frac{1}{2}$

$P(A^c \cap B^c) = 0.3$ 에서 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ 이므로

$$P((A \cup B)^c) = 0.3$$

$$1 - P(A \cup B) = 0.3 \quad \therefore P(A \cup B) = 0.7$$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 이므로

$$0.7 = 0.5 + 0.4 - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = 0.2$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2}$$

257 ㉡ $\frac{1}{5}$

꺼낸 공에 적힌 수가 짝수인 사건을 A, 18의 약수인 사건을 B라 하면

$$A = \{2, 4, 6, \dots, 30\}, A \cap B = \{2, 6, 18\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{15}{30}, P(A \cap B) = \frac{3}{30}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{30}}{\frac{15}{30}} = \frac{1}{5}$$

258 ㉡ ①

생태연구를 선택한 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{110}{200}, P(A \cap B) = \frac{50}{200}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{50}{200}}{\frac{110}{200}} = \frac{5}{11}$$

| 다른 풀이 |

구하는 확률은 생태연구를 선택한 학생 중에서 여학생을 택할 확률과 같으므로

$$\frac{(\text{생태연구를 선택한 여학생의 수})}{(\text{생태연구를 선택한 학생의 수})} = \frac{50}{110} = \frac{5}{11}$$

259 ㉡ $\frac{1}{22}$

현우가 불량품을 꺼내는 사건을 A, 윤호가 불량품을 꺼내는 사건을 B라 하면

현우가 불량품을 꺼낼 확률은

$$P(A) = \frac{3}{12}$$

현우가 불량품을 꺼냈을 때, 윤호가 불량품을 꺼낼 확률은

$$P(B|A) = \frac{2}{11}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{3}{12} \times \frac{2}{11} = \frac{1}{22} \end{aligned}$$

260 ㉠ $\frac{4}{7}$

A가 고기만두를 먹는 사건을 A, B가 고기만두를 먹는 사건을 B라 하자.

A, B가 먹은 만두 중에서 적어도 1개가 김치만두인 사건은 $(A \cap B)^c$ 이고, 이때 $A \cap B$ 는 A, B가 모두 고기만두를 먹는 사건이다.

A가 고기만두를 먹을 확률은

$$P(A) = \frac{10}{15}$$

A가 고기만두를 먹었을 때, B가 고기만두를 먹을 확률은

$$P(B|A) = \frac{9}{14}$$

따라서 A, B가 모두 고기만두를 먹을 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P((A \cap B)^c) &= 1 - P(A \cap B) \\ &= 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

261 ㉠ $\frac{1}{4}$

재호가 당첨권을 뽑는 사건을 A, 창민이가 당첨권을 뽑는 사건을 B라 하자.

(i) 재호와 창민이가 모두 당첨권을 뽑을 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B|A) \\ &= \frac{4}{16} \times \frac{3}{15} = \frac{1}{20} \end{aligned}$$

(ii) 재호가 당첨권을 뽑지 않고 창민이가 당첨권을 뽑을 확률은

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B|A^c) \\ &= \frac{12}{16} \times \frac{4}{15} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

262 ㉠ ④

$$P(B|A) = \frac{1}{4} \text{에서 } \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A) = 4P(A \cap B)$$

$$P(A|B) = \frac{1}{3} \text{에서 } \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P(B) = 3P(A \cap B)$$

$$P(A) + P(B) = \frac{7}{10} \text{에서}$$

$$4P(A \cap B) + 3P(A \cap B) = \frac{7}{10}$$

$$7P(A \cap B) = \frac{7}{10}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{1}{10}$$

263 ㉠ ③

전체 학생이 200명이므로

$$10a + b + (48 - 2a) + (b - 8) = 200$$

$$\therefore 4a + b = 80 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

남학생인 사건을 A, 휴대폰 요금제 A를 선택한 학생인 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{10a + b}{200}, P(A \cap B) = \frac{10a}{200}$$

임의로 택한 1명이 남학생일 때, 그 학생이 휴대폰 요금제 A를 선택한 학생일 확률은

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{10a}{200}}{\frac{10a + b}{200}} = \frac{10a}{10a + b} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{10a}{10a + b} = \frac{5}{8} \text{이므로}$$

$$6a - b = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = 8, b = 48$

$$\therefore b - a = 40$$

264 ㉠ 300명

남학생의 수를 a라 하면 여학생의 수는 $450 - a$ 이고
현혈 경험 여부를 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	남학생	여학생	합계
현혈 경험 있음	$0.7a$	$0.4(450 - a)$	$180 + 0.3a$
현혈 경험 없음	$0.3a$	$0.6(450 - a)$	$270 - 0.3a$
합계	a	$450 - a$	450

헌혈 경험이 있는 학생인 사건을 A , 남학생인 사건을 B 라 하면

$$P(A) = \frac{180+0.3a}{450}, P(A \cap B) = \frac{0.7a}{450}$$

$$\begin{aligned} \therefore p = P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{0.7a}{450}}{\frac{180+0.3a}{450}} = \frac{0.7a}{180+0.3a} \end{aligned}$$

$$\text{또 } P(A \cap B^c) = \frac{0.4(450-a)}{450} \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} q = P(B^c|A) &= \frac{P(A \cap B^c)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{0.4(450-a)}{450}}{\frac{180+0.3a}{450}} = \frac{180-0.4a}{180+0.3a} \end{aligned}$$

이때 $2p = 7q$ 에서

$$2 \times \frac{0.7a}{180+0.3a} = 7 \times \frac{180-0.4a}{180+0.3a}$$

$$1.4a = 1260 - 2.8a, 4.2a = 1260$$

$$\therefore a = 300$$

따라서 이 학교의 남학생은 300명이다.

265 ㉠ $\frac{1}{4}$

$f(2) \leq f(3)$ 을 만족시키는 함수인 사건을 A ,

$f(1)+f(4)=5$ 를 만족시키는 함수인 사건을 B 라 하자.

(i) $f(2) \leq f(3)$ 을 만족시킬 확률

$f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

$f(1), f(4)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4\Pi_2 = 16$

따라서 $f(2) \leq f(3)$ 을 만족시키는 함수의 개수는

$$10 \times 16 = 160$$

$$\therefore P(A) = \frac{160}{{}_4\Pi_4} = \frac{5}{8}$$

(ii) $f(2) \leq f(3)$ 을 만족시키고, $f(1)+f(4)=5$ 를 만족시킬 확률

$f(2), f(3)$ 의 값을 정하는 경우의 수는

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

$f(1)+f(4)=5$ 를 만족시키는 경우는

$$f(1)=1, f(4)=4 \text{ 또는 } f(1)=2, f(4)=3$$

$$\text{또는 } f(1)=3, f(4)=2$$

$$\text{또는 } f(1)=4, f(4)=1 \text{의 4가지}$$

따라서 $f(2) \leq f(3)$ 을 만족시키고,

$f(1)+f(4)=5$ 를 만족시키는 함수의 개수는

$$10 \times 4 = 40$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{40}{{}_4\Pi_4} = \frac{5}{32}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{5}{32}}{\frac{5}{8}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

266 ㉠ 8

검은 볼펜의 개수를 n 이라 하자.

진우가 검은 볼펜을 꺼내는 사건을 A , 은지가 파란 볼펜을 꺼내는 사건을 B 라 하면

$$\text{진우가 검은 볼펜을 꺼낼 확률은 } P(A) = \frac{n}{12}$$

진우가 검은 볼펜을 꺼냈을 때, 은지가 파란 볼펜을

$$\text{꺼낼 확률은 } P(B|A) = \frac{12-n}{11}$$

따라서 진우가 검은 볼펜, 은지가 파란 볼펜을 꺼낼 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

$$= \frac{n}{12} \times \frac{12-n}{11}$$

$$= \frac{n(12-n)}{132}$$

▶▶▶▶▶ ①

$$\text{즉, } \frac{n(12-n)}{132} = \frac{8}{33} \text{ 이므로 } n(12-n) = 32$$

$$n^2 - 12n + 32 = 0, (n-4)(n-8) = 0$$

$$\therefore n=4 \text{ 또는 } n=8$$

그런데 검은 볼펜이 파란 볼펜보다 많으므로 $n=8$

따라서 검은 볼펜의 개수는 8이다.

▶▶▶▶▶ ②

단계	채점 기준	비율
①	검은 볼펜의 개수를 n 이라 할 때, 진우가 검은 볼펜, 은지가 파란 볼펜을 꺼낼 확률을 n 에 대하여 나타내기	40%
②	검은 볼펜의 개수 구하기	60%

267 ㉠ $\frac{17}{48}$

다음 날 비가 오는 사건을 A , 이틀 후 비가 오는 사건을 B 라 하자.

(i) 다음 날 비가 오고 이를 후 비가 올 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

(ii) 다음 날 비가 오지 않고 이를 후 비가 올 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) \\ = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ = \frac{1}{6} + \frac{3}{16} = \frac{17}{48}$$

268 ㉮ ⑤

암에 걸린 사람인 사건을 A , 암이라 진단하는 사건을 B 라 하자.

(i) 암에 걸린 사람이고 그 사람을 암이라 진단할 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) \\ = \frac{n}{n+800} \times \frac{85}{100} = \frac{17n}{20n+16000}$$

(ii) 암에 걸리지 않은 사람이고 그 사람을 암이라 진단할 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) \\ = \frac{800}{n+800} \times \left(1 - \frac{85}{100}\right) \\ = \frac{800}{n+800} \times \frac{15}{100} = \frac{2400}{20n+16000}$$

(i), (ii)에서

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ = \frac{17n}{20n+16000} + \frac{2400}{20n+16000} \\ = \frac{17n+2400}{20n+16000}$$

$$\therefore \frac{17n+2400}{20n+16000} = \frac{29}{100} \text{ 이므로}$$

$$1700n + 240000 = 580n + 464000$$

$$1120n = 224000 \quad \therefore n = 200$$

269 ㉮ $\frac{9}{23}$

남자가 작성한 후기인 사건을 A , 단어 ‘디자인’이 포함된 후기인 사건을 B 라 하자.

(i) 남자가 작성하고 단어 ‘디자인’이 포함된 후기일 확률은

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.6 \times 0.3 = 0.18$$

(ii) 여자가 작성하고 단어 ‘디자인’이 포함된 후기일 확률은

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B|A^c) \\ = (1 - 0.6) \times 0.7 = 0.4 \times 0.7 = 0.28$$

(i), (ii)에서 단어 ‘디자인’이 포함된 후기일 확률은

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ = 0.18 + 0.28 = 0.46$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.18}{0.46} = \frac{9}{23}$$

270 ㉮ ③

접근 방법 3이 적힌 공을 2개 꺼내는 경우와 4가 적힌 공을 2개 꺼내는 경우로 나누어 생각한다. 이때 3, 4가 적힌 공을 모두 꺼내는 경우가 중복됨에 유의한다.

꺼낸 공에 적힌 수가 같은 것이 있는 사건을 A , 꺼낸 공 중 검은 공이 2개인 사건을 B 라 하자.

(i) 꺼낸 공에 적힌 수가 같은 것이 있을 확률

3이 적힌 공 2개를 꺼낸 후 나머지 6개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$

4가 적힌 공 2개를 꺼낸 후 나머지 6개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_6C_2 = 15$

이때 3, 4가 적힌 흰 공 2개와 3, 4가 적힌 검은 공 2개를 꺼내는 경우가 중복되므로 그 경우의 수는 1

$$\therefore P(A) = \frac{15+15-1}{{}_8C_4} = \frac{29}{70}$$

(ii) 꺼낸 공에 적힌 수가 같은 것이 있고, 검은 공이 2개일 확률

3이 적힌 공 2개를 꺼낸 후 검은 공 3개 중에서 1개, 흰 공 3개 중에서 1개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_3C_1 = 9$$

4가 적힌 공 2개를 꺼낸 후 검은 공 3개 중에서 1개, 흰 공 3개 중에서 1개를 꺼내는 경우의 수는

$${}_3C_1 \times {}_3C_1 = 9$$

이때 3, 4가 적힌 흰 공 2개와 3, 4가 적힌 검은 공 2개를 꺼내는 경우가 중복되므로 그 경우의 수는 1

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{9+9-1}{{}_8C_4} = \frac{17}{70}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{17}{70}}{\frac{29}{70}} = \frac{17}{29}$$

271 ㉔ 47

| 접근 방법 | 전체 학생 수를 a 로 놓고 주어진 조건을 이용하여 표로 나타낸다.

전체 학생 수를 a 라 하자.

점심에 한식을 선택한 학생 수는 $0.6a$

점심에 양식을 선택한 학생 수는 $0.4a$

또 점심에 양식을 선택하고 저녁에도 양식을 선택한 학생 수는

$$0.4a \times 0.25 = 0.1a$$

점심에 한식을 선택하고 저녁에도 한식을 선택한 학생 수는

$$0.6a \times 0.3 = 0.18a$$

따라서 주어진 조건을 표로 나타내면 다음과 같다.

(단위: 명)

	저녁 한식	저녁 양식	합계
점심 한식	$0.18a$	$0.42a$	$0.6a$
점심 양식	$0.3a$	$0.1a$	$0.4a$
합계	$0.48a$	$0.52a$	a

저녁에 양식을 선택한 학생인 사건을 A , 점심에 한식을 선택한 학생인 사건을 B 라 하면

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{0.42a}{a}}{\frac{0.52a}{a}} = \frac{21}{26} \end{aligned}$$

따라서 $p=26$, $q=21$ 이므로

$$p+q=47$$

272 ㉔ $\frac{44}{105}$

| 접근 방법 | 진호가 수진에게 주는 파란 구슬이 2개, 1개, 0개인 경우로 나누어 수진이 갖게 되는 파란 구슬과 노란 구슬의 개수를 확인한다.

(i) 진호가 수진에게 파란 구슬 2개를 주는 경우

진호가 파란 구슬 2개를 주면 진호는 파란 구슬 2개, 노란 구슬 2개를 갖게 되고, 수진은 파란 구슬 4개, 노란 구슬 4개를 갖게 된다.

파란 구슬의 개수가 같으려면 수진은 파란 구슬 1개, 노란 구슬 1개를 진호에게 주어야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2} \times \frac{{}_4C_1 \times {}_4C_1}{{}_8C_2} = \frac{6}{15} \times \frac{16}{28} = \frac{8}{35}$$

(ii) 진호가 수진에게 파란 구슬 1개, 노란 구슬 1개를 주는 경우

진호가 파란 구슬 1개, 노란 구슬 1개를 주면 진호는 파란 구슬 3개, 노란 구슬 1개를 갖게 되고, 수진은 파란 구슬 3개, 노란 구슬 5개를 갖게 된다. 파란 구슬의 개수가 같으려면 수진은 노란 구슬 2개를 진호에게 주어야 하므로 그 확률은

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_2C_1}{{}_6C_2} \times \frac{{}_5C_2}{{}_8C_2} = \frac{8}{15} \times \frac{10}{28} = \frac{4}{21}$$

(iii) 진호가 수진에게 노란 구슬 2개를 주는 경우

진호가 노란 구슬 2개를 주면 진호는 파란 구슬 4개, 노란 구슬 0개를 갖게 되고, 수진은 파란 구슬 2개, 노란 구슬 6개를 갖게 된다.

이때 수진이 진호에게 어떤 구슬을 주어도 파란 구슬의 개수가 같아질 수 없다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{8}{35} + \frac{4}{21} = \frac{44}{105}$$

273 ㉔ ⑤

| 접근 방법 | a 의 값에 따라 경우를 나누어 b 의 값을 구하고 각각의 확률을 구한다.

$3a \leq b$ 인 사건을 A , 흰 공을 1개 꺼내는 사건을 B 라 하자.

$$a+b=4 \text{이므로 } b=4-a \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3a \leq b \text{에서 } 3a \leq 4-a \quad \therefore a \leq 1$$

(i) $a=0$ 인 경우

$$\textcircled{1} \text{에서 } b=4$$

따라서 검은 공 4개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_5C_4}{{}_9C_4} = \frac{5}{126}$$

(ii) $a=1$ 인 경우

$$\textcircled{1} \text{에서 } b=3$$

따라서 흰 공 1개, 검은 공 3개를 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_4C_1 \times {}_5C_3}{{}_9C_4} = \frac{40}{126} \quad \blacktriangleleft P(A \cap B) = \frac{40}{126}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } P(A) = \frac{5}{126} + \frac{40}{126} = \frac{5}{14}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{40}{126}}{\frac{5}{14}} = \frac{8}{9}$$

02 사건의 독립과 종속

개념 확인

137쪽

274 ㉡ (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{7}$

(1) $P(A|B) = P(A) = \frac{1}{4}$

(2) $P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7}$

유제

139~144쪽

275 ㉡ ㄱ, ㄴ

표본공간을 S 라 하면 $S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ 이므로
 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$, $C = \{5, 10\}$

$\therefore P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$,

$P(C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

ㄱ. $A \cap B = \{1, 3\}$ 이므로 $P(A \cap B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

$P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$ 이므로

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A, B 는 서로 독립이다.

ㄴ. $A \cap C = \{5\}$ 이므로 $P(A \cap C) = \frac{1}{10}$

$P(A)P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$ 이므로

$P(A \cap C) = P(A)P(C)$

따라서 두 사건 A, C 는 서로 독립이다.

ㄷ. $B \cap C = \emptyset$ 이므로 $P(B \cap C) = 0$

$P(B)P(C) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$ 이므로

$P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$

따라서 두 사건 B, C 는 서로 종속이다.

따라서 보기에서 서로 독립인 사건은 ㄱ, ㄴ이다.

276 ㉡ ㄴ

$S = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ 이므로 $A = \{1, 2, 4, 5\}$ 라 하면

$P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ㄱ. $B = \{1, 2\}$ 라 하면 $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$A \cap B = \{1, 2\}$ 이므로

$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(A)P(B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$ 이므로

$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A, B 는 서로 종속이다.

ㄴ. $C = \{4, 5, 10\}$ 이라 하면 $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$A \cap C = \{4, 5\}$ 이므로

$P(A \cap C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$P(A)P(C) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ 이므로

$P(A \cap C) = P(A)P(C)$

따라서 두 사건 A, C 는 서로 독립이다.

ㄷ. $D = \{5, 10, 20\}$ 이라 하면 $P(D) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$A \cap D = \{5\}$ 이므로

$P(A \cap D) = \frac{1}{6}$

$P(A)P(D) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$ 이므로

$P(A \cap D) \neq P(A)P(D)$

따라서 두 사건 A, D 는 서로 종속이다.

ㄹ. $E = \{1, 4, 5, 20\}$ 이라 하면 $P(E) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$A \cap E = \{1, 4, 5\}$ 이므로

$P(A \cap E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(A)P(E) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ 이므로

$P(A \cap E) \neq P(A)P(E)$

따라서 두 사건 A, E 는 서로 종속이다.

따라서 보기에서 서로 독립인 사건은 ㄴ이다.

277 ㉡ 종속

$P(A) = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$,

$P(A \cap B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ 이고

$P(A)P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$ 이므로

$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A, B 는 서로 종속이다.

278 ㉡ 2

표본공간을 S 라 하면 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 이므로
 $A = \{2, 3\}$

$$\therefore P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

(i) $k=1$ 일 때

$B_1 = \{2, 3, 4\}$, $A \cap B_1 = \{2, 3\}$ 이므로

$$P(B_1) = \frac{3}{4}, P(A \cap B_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A)P(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B_1) \neq P(A)P(B_1)$$

따라서 두 사건 A, B_1 은 서로 종속이다.

(ii) $k=2$ 일 때

$B_2 = \{3, 4\}$, $A \cap B_2 = \{3\}$ 이므로

$$P(B_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, P(A \cap B_2) = \frac{1}{4}$$

$$P(A)P(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B_2) = P(A)P(B_2)$$

따라서 두 사건 A, B_2 은 서로 독립이다.

(iii) $k=3$ 일 때

$B_3 = \{4\}$, $A \cap B_3 = \emptyset$ 이므로

$$P(B_3) = \frac{1}{4}, P(A \cap B_3) = 0$$

$$P(A)P(B_3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B_3) \neq P(A)P(B_3)$$

따라서 두 사건 A, B_3 은 서로 종속이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수 k 의 값은 2이다.

279 ㉡ $\frac{2}{15}$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(B|A) = P(B) = \frac{2}{3}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{이므로}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\frac{11}{15} = P(A) + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}P(A)$$

$$\frac{1}{3}P(A) = \frac{1}{15}$$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{5}$$

$$\therefore P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$= \frac{1}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{15}$$

280 ㉡ $\frac{2}{9}$

두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A^c, B 도 서로 독립이므로

$$P(A^c \cap B) = P(A^c)P(B)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

| 다른 풀이 |

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(B) - P(A)P(B)$$

$$= \frac{4}{9} - \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

281 ㉡ $\frac{5}{8}$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

이때 $P(A) = 2P(B)$ 이므로

$$P(A \cap B) = 2P(B) \times P(B)$$

$$= 2\{P(B)\}^2$$

$$\text{즉, } 2\{P(B)\}^2 = \frac{1}{8} \text{이므로}$$

$$P(B) = \frac{1}{4} \quad (\because P(B) > 0)$$

$$\therefore P(A) = 2P(B) = 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

282 ㉡ $\frac{1}{6}$

두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A^c, B^c 도 서로 독립이므로

$$P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c)$$

$$P(A^c \cap B^c) = \{1 - P(A)\}\{1 - P(B)\}$$

$$\frac{1}{2} = \left(1 - \frac{2}{5}\right)\{1 - P(B)\}$$

$$1 - P(B) = \frac{5}{6}$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{6}$$

| 다른 풀이 |

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = \frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)^c)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{에서}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{5} + P(B) - \frac{2}{5}P(B)$$

$$\frac{3}{5}P(B) = \frac{1}{10} \quad \therefore P(B) = \frac{1}{6}$$

283 $\frac{8}{15}$

야구 선수 A, B 가 안타를 치는 사건을 각각 A, B 라 하면 두 사건 A, B 는 서로 독립이다.

야구 선수 A, B 가 모두 안타를 치는 사건은 $A \cap B$ 이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A)P(B) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

284 $\frac{37}{56}$

총을 한 발씩 쏠 때, 지민이와 민재가 명중하는 사건을 각각 A, B 라 하면 두 사건 A, B 는 서로 독립이다.

(i) 지민이만 명중하는 경우

지민이가 명중하고 민재가 명중하지 못하는 사건은 $A \cap B^c$ 이다.

이때 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A, B^c 도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A)P(B^c) \\ &= \frac{5}{7} \times \left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{5}{8} \end{aligned}$$

(ii) 민재만 명중하는 경우

지민이가 명중하지 못하고 민재가 명중하는 사건은 $A^c \cap B$ 이다.

이때 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A^c, B 도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B) \\ &= \left(1 - \frac{5}{7}\right) \times \frac{1}{8} = \frac{1}{28} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = \frac{5}{8} + \frac{1}{28} = \frac{37}{56}$$

285 $\frac{0.94}{1}$

규민이와 가은이가 예선을 통과하는 사건을 각각 A, B 라 하면 두 사건 A, B 는 서로 독립이다.

두 사람 중 적어도 1명이 예선을 통과하는 사건은 $(A^c \cap B^c)^c$ 이고, 이때 $A^c \cap B^c$ 는 두 사람이 모두 예선을 통과하지 못하는 사건이다.

두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A^c, B^c 도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P(A^c)P(B^c) \\ &= (1 - 0.8) \times (1 - 0.7) = 0.06 \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P((A^c \cap B^c)^c) &= 1 - P(A^c \cap B^c) \\ &= 1 - 0.06 = 0.94 \end{aligned}$$

| 다른 풀이 |

규민이와 가은이가 예선을 통과하는 사건을 각각 A, B 라 하면 두 사건 A, B 는 서로 독립이다.

적어도 1명이 예선을 통과하는 사건은 $A \cup B$ 이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0.8 + 0.7 - 0.8 \times 0.7 = 0.94 \end{aligned}$$

286 $\frac{3}{4}$

해빈이와 영주가 시험에 합격하는 사건을 각각 A, B 라 하면 두 사건 A, B 는 서로 독립이다.

이때 두 사람이 모두 합격하지 못하는 사건은 $A^c \cap B^c$ 이고, 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A^c, B^c 도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B^c) &= P(A^c)P(B^c) \\ &= \left(1 - \frac{3}{5}\right) \times (1 - p) \\ &= \frac{2}{5}(1 - p) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{2}{5}(1 - p) = \frac{1}{10} \text{ 이므로}$$

$$1 - p = \frac{1}{4}$$

$$\therefore p = \frac{3}{4}$$

287 $\frac{7}{12}, \frac{1}{12}$

ㄱ. 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{에서}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$$

ㄴ. 사건 A 와 여사건 A^c 는 서로 배반사건이므로 서로 중속이다.

ㄷ. [반례] 표본공간 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여

$A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 이라 하면

$A \cap B = \{1, 2\}$ 이므로 두 사건 A, B 는 서로 배반사건이 아니다.

이때 $P(A)P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$,

$P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ 이므로

$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$

따라서 두 사건 A, B 는 서로 종속이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

개념 확인

145쪽

288 ㉠ (1) 0.6 (2) 0.4 (3) 0.432

(2) $P(A^C) = 1 - 0.6 = 0.4$

(3) ${}_3C_2(0.6)^2(0.4)^1 = 0.432$

유제

147~151쪽

289 ㉠ (1) $\frac{80}{243}$ (2) $\frac{11}{243}$

(1) 구하는 확률은

$${}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243}$$

(2) (i) 자유투를 4번 성공할 확률은

$${}_5C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{10}{243}$$

(ii) 자유투를 5번 성공할 확률은

$${}_5C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{10}{243} + \frac{1}{243} = \frac{11}{243}$$

290 ㉠ ③

한 개의 주사위를 던져서 소수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

따라서 구하는 확률은

$${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

291 ㉠ $\frac{40}{243}$

서로 다른 색의 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_2C_1}{{}_4C_2} = \frac{2}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$${}_5C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{40}{243}$$

292 ㉠ $\frac{67}{256}$

모두 같은 면이 적어도 2번 나오는 사건을 A 라 하면 A^C 는 모두 같은 면이 한 번도 나오지 않거나 한 번만 나오는 사건이다.

서로 다른 세 개의 동전을 동시에 던져서 모두 같은 면이 나오는 경우는 모두 앞면이 나오거나 모두 뒷면이 나

오는 경우의 2가지이므로 그 확률은 $\frac{2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} \therefore P(A^C) &= {}_4C_0\left(\frac{1}{4}\right)^4 + {}_4C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ &= \frac{81}{256} + \frac{108}{256} = \frac{189}{256} \end{aligned}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A) = 1 - \frac{189}{256} = \frac{67}{256}$$

293 ㉠ $\frac{5}{32}$

A 팀이 6번째 경기에서 우승하려면 5번째 경기까지는 먼저 4번을 이긴 팀이 없어야 한다.

즉, A 팀이 5번째 경기까지 3번 이겨야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{2}$ A 팀이 3번, B 팀이 2번 이겨야 한다.

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

6번째 경기에서 A 팀이 이길 확률은 $\frac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{5}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$$

294 ㉠ $\frac{32}{243}$

한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 3의 배수

$$\text{일 확률은 } \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- (i) 한 개의 동전을 던져서 앞면이 나오고, 한 개의 주사위를 4번 던져서 3의 배수의 눈이 3번 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times {}_4C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{1}{2} \times \frac{8}{81} = \frac{4}{81}$$

- (ii) 한 개의 동전을 던져서 뒷면이 나오고, 한 개의 주사위를 5번 던져서 3의 배수의 눈이 3번 나올 확률은

$$\frac{1}{2} \times {}_5C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{40}{243} = \frac{20}{243}$$

- (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{4}{81} + \frac{20}{243} = \frac{32}{243}$$

295 $\frac{189}{256}$

- (i) 선수 A가 3번째 경기에서 우승하는 경우
선수 A가 연속으로 3번 이겨야 하므로 그 확률은

$${}_3C_3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

- (ii) 선수 A가 4번째 경기에서 우승하는 경우
선수 A가 3번째 경기까지 2번 이기고, 4번째 경기에서 이겨야 하므로 그 확률은

$${}_3C_2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \frac{3}{4} = \frac{27}{64} \times \frac{3}{4} = \frac{81}{256}$$

- (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{27}{64} + \frac{81}{256} = \frac{189}{256}$$

296 $\frac{3}{8}$

주머니에서 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 서로 다른 색의 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{3}{5}$$

한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

- (i) 서로 다른 색의 공 2개를 꺼내고, 한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{3}{5} \times {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{9}{40}$$

- (ii) 서로 같은 색의 공 2개를 꺼내고, 한 개의 동전을 4번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\frac{2}{5} \times {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{20}$$

- (i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{9}{40} + \frac{3}{20} = \frac{3}{8}$$

297 $\frac{40}{243}$

한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 2 이하일 확률은

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

주사위를 5번 던져서 2 이하의 눈이 나오는 횟수를 x , 3 이상의 눈이 나오는 횟수를 y 라 하면

$$x + y = 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

주사위를 5번 던져서 점 P가 -3의 위치에 있으므로

$$x - 3y = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $x=3$, $y=2$

따라서 구하는 확률은 주사위를 5번 던져서 2 이하의 눈이 3번 나올 확률과 같으므로

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}$$

298 $\frac{8}{27}$

한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 6의 약수일 확률은

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

주사위를 4번 던져서 6의 약수의 눈이 나오는 횟수를 x , 6의 약수가 아닌 눈이 나오는 횟수를 y 라 하자.

점 P가 원점에서 점 (2, 4)까지 이동하려면 x 축으로 2칸, y 축으로 4칸 이동해야 하므로

$$x=2, 2y=4 \quad \therefore x=2, y=2$$

따라서 구하는 확률은 주사위를 4번 던져서 6의 약수의 눈이 2번 나올 확률과 같으므로

$${}_4C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}$$

299 $\frac{80}{243}$

상자에서 1개의 공을 꺼낼 때, 빨간 공을 꺼낼 확률은

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

6번의 시행을 해서 빨간 공이 나오는 횟수를 x , 파란 공이 나오는 횟수를 y 라 하면

$$x + y = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

6번의 시행을 한 후 8점을 얻어야 하므로

$$x + 2y = 8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=2$

따라서 구하는 확률은 6번의 시행에서 빨간 공이 4번 나올 확률과 같으므로

$${}^6C_4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$$

300 $\frac{5}{16}$

서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던져서 서로 다른 면이 나올 확률은

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

서로 다른 두 개의 동전을 동시에 5번 던져서 서로 다른 면이 나오는 횟수를 x , 서로 같은 면이 나오는 횟수를 y 라 하면

$$x + y = 5 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

서로 다른 두 개의 동전을 동시에 5번 던져서 6점을 얻어야 하므로

$$15x - 8y = 6 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=3$

따라서 구하는 확률은 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 5번 던져서 서로 다른 면이 2번 나올 확률과 같으므로

$${}^5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

연습문제

152~154쪽

301 $\neg, \kappa$

표본공간을 S 라 하면 $S = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ 이므로

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{4, 8, 12\},$$

$$C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}, D = \{1, 7\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, P(B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4},$$

$$P(C) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, P(D) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$\neg, A \cap B = \{4\}$ 이므로

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

$$P(A)P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

따라서 두 사건 A, B 는 서로 독립이다.

$\neg, A \cap D = \{1\}$ 이므로

$$P(A \cap D) = \frac{1}{12}$$

$$P(A)P(D) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18} \text{이므로}$$

$$P(A \cap D) \neq P(A)P(D)$$

따라서 두 사건 A, D 는 서로 종속이다.

$\neg, B \cap C = \{4, 12\}$ 이므로

$$P(B \cap C) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$P(B)P(C) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \text{이므로}$$

$$P(B \cap C) \neq P(B)P(C)$$

따라서 두 사건 B, C 는 서로 종속이다.

$\neg, C \cap D = \{1\}$ 이므로

$$P(C \cap D) = \frac{1}{12}$$

$$P(C)P(D) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \text{이므로}$$

$$P(C \cap D) = P(C)P(D)$$

따라서 두 사건 C, D 는 서로 독립이다.

따라서 보기에서 서로 독립인 사건은 $\neg, \kappa$ 이다.

302 $\frac{31}{36}$

$$P(B^c) = \frac{1}{6} \text{에서}$$

$$P(B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} - \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{31}{36} \end{aligned}$$

303 $\frac{1}{2}$

A, B 가 시험에 합격하는 사건을 각각 A, B 라 하자.

(i) A 만 합격하는 경우

A 가 시험에 합격하고 B 가 시험에 합격하지 못하는 사건은 $A \cap B^c$ 이다.

이때 두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A, B^c 도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A)P(B^c) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(ii) B만 합격하는 경우

A가 시험에 합격하지 못하고 B가 시험에 합격하는 사건은 $A^c \cap B$ 이다.

이때 두 사건 A, B가 서로 독립이면 두 사건 A^c , B도 서로 독립이므로

$$\begin{aligned} P(A^c \cap B) &= P(A^c)P(B) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

304 ㉮ ③

남학생인 사건을 A, 수시 모집을 선호하는 학생인 사건을 B라 하면

$$P(A) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{14}{32} = \frac{7}{16},$$

$$P(A \cap B) = \frac{a}{32}$$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \text{에서}$$

$$\frac{a}{32} = \frac{1}{2} \times \frac{7}{16} \quad \therefore a = 7$$

$$a + b = 16 \text{이므로 } b = 9$$

$$b + d = 18 \text{이므로 } d = 9$$

$$\therefore a + d = 7 + 9 = 16$$

305 ㉮ $\frac{256}{729}$

한 개의 주사위를 던져서 5의 약수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(i) 5의 약수의 눈이 나오지 않을 확률은

$${}_6C_0 \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$$

(ii) 5의 약수의 눈이 한 번 나올 확률은

$${}_6C_1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{192}{729}$$

$$(i), (ii) \text{에서 구하는 확률은 } \frac{64}{729} + \frac{192}{729} = \frac{256}{729}$$

306 ㉮ $\frac{3}{256}$

A 팀이 5번째 경기에서 우승하려면 4번째 경기까지는 먼저 4번 이긴 팀이 없어야 한다.

즉, A 팀이 4번째 경기까지 3번 이겨야 하므로 그 확률은

$${}_4C_3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{64}$$

5번째 경기에서 A 팀이 이길 확률은 $\frac{1}{4}$

$$\text{따라서 구하는 확률은 } \frac{3}{64} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{256}$$

307 ㉮ 45

표본공간을 S라 하면 $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ 이므로

$$A = \{3, 6, 9\}$$

$$\therefore P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\text{또 } n(A \cap B) = 1 \text{에서 } P(A \cap B) = \frac{1}{9}$$

두 사건 A, B가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\frac{1}{9} = \frac{1}{3}P(B) \quad \therefore P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{1}{3} = \frac{3}{9} \text{이므로 } n(B) = 3$$

따라서 사건 B는 사건 A의 원소 3개 중에서 1개, 여사건 A^c 의 원소 6개 중에서 2개를 택하면 되므로 구하는 사건 B의 개수는

$${}_3C_1 \times {}_6C_2 = 45$$

308 ㉮ ㄴ, ㄷ

$$\neg. [\text{반례}] P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

이면 $P(B|A) = P(A)$ 이지만

$P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ 이므로 A, B는 서로 종속이다.

$$\neg. A, B \text{가 서로 독립이면 } P(A|B) = P(A)$$

또 A, B가 서로 독립이면 A^c , B도 서로 독립이므로

$$P(A^c|B) = P(A^c)$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) \text{이므로}$$

$$P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$$

$$\neg. A, B \text{가 서로 배반사건이면 } P(A \cap B) = 0 \text{이므로}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0$$

$$\therefore P(A|B) = P(B|A)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

309 ㉔ ④

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이면 두 사건 A^c, B 도 서로 독립이므로

$$P(A^c \cap B) = \frac{1}{4} \text{에서}$$

$$P(A^c)P(B) = \frac{1}{4}$$

$$\{1 - P(A)\}P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) - P(A)P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore P(B) = \frac{3}{4}$$

따라서 ㉔에서

$$\frac{3}{4}P(A) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(A) = \frac{2}{3}$$

| 다른 풀이 |

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(A^c \cap B) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$P(A)P(B) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4}P(A) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(A) = \frac{2}{3}$$

310 ㉔ 0.19

스위치 A 가 닫히는 사건을 A , 두 스위치 B, C 가 모두 닫히는 사건을 B 라 하면

$$P(A) = 0.1, P(B) = 0.2 \times 0.5 = 0.1$$

전구에 불이 켜지는 사건은 스위치 A 가 닫히거나 두 스위치 B, C 가 모두 닫혀야 하므로 $A \cup B$

이때 두 사건 A, B 는 서로 독립이므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A)P(B) \\ &= 0.1 + 0.1 - 0.1 \times 0.1 = 0.19 \end{aligned}$$

311 ㉔ $\frac{512}{625}$

4개의 테이블 예약에 대하여 모두 예약을 취소하지 않거나 1개의 예약만 취소하면 테이블이 부족하다.

(i) 모두 예약을 취소하지 않을 확률은

$${}_4C_0 \left(\frac{4}{5} \right)^4 = \frac{256}{625}$$

(ii) 1개의 예약만 취소할 확률은

$${}_4C_1 \left(\frac{1}{5} \right)^1 \left(\frac{4}{5} \right)^3 = \frac{256}{625}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{256}{625} + \frac{256}{625} = \frac{512}{625}$$

312 ㉔ $\frac{1}{9}$

(i) 하은이가 4번째 세트에서 우승하는 경우

하은이가 이어진 3세트에서 연속으로 이겨야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$ (2~4번째 세트)

$${}_3C_3 \left(\frac{1}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}$$

(ii) 하은이가 5번째 세트에서 우승하는 경우

하은이가 이어진 3세트에서 2번 이기고, 5번째 세트에서 이겨야 하므로 그 확률은 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{243}$ (2~4번째 세트)

$${}_3C_2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 \left(\frac{2}{3} \right)^1 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{1}{27} + \frac{2}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$

313 ㉔ $\frac{3}{10}$

주머니에서 한 개의 공을 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적힌 수가 홀수일 확률은 $\frac{3}{5}$

한 개의 동전을 던져서 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

(i) 홀수가 적힌 공을 꺼내고, 한 개의 동전을 4번 던져서 뒷면이 한 번 나올 확률은

$$\frac{3}{5} \times {}_4C_1 \left(\frac{1}{2} \right)^1 \left(\frac{1}{2} \right)^3 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{20} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) 짝수가 적힌 공을 꺼내고, 한 개의 동전을 3번 던져서 뒷면이 한 번 나올 확률은

$$\frac{2}{5} \times {}_3C_1 \left(\frac{1}{2} \right)^1 \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{20} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{20} + \frac{3}{20} = \frac{3}{10} \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

단계	채점 기준	비율
①	홀수가 적힌 공을 꺼내고, 한 개의 동전을 4번 던져서 뒷면이 한 번 나올 확률 구하기	40%
②	짝수가 적힌 공을 꺼내고, 한 개의 동전을 3번 던져서 뒷면이 한 번 나올 확률 구하기	40%
③	동전의 뒷면이 한 번 나올 확률 구하기	20%

314 ㉮ $\frac{5}{324}$

| 접근 방법 | 1단계에서 3명이 통과하고 2단계에서 3명 모두 통과하는 경우와 1단계에서 4명 모두 통과하고 2단계에서 3명이 통과하는 경우로 나누어 구한다.

(i) 1단계에서 3명이 통과하는 경우

1단계에서 3명이 통과하고 2단계에서 3명이 모두 통과할 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{5}{6}\right)^3\left(\frac{1}{6}\right)^1 \times {}_3C_3\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{324}$$

(ii) 1단계에서 4명이 통과하는 경우

1단계에서 4명이 모두 통과하고 2단계에서 3명이 통과할 확률은

$${}_4C_4\left(\frac{5}{6}\right)^4 \times {}_3C_3\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{1}{81}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{324} + \frac{1}{81} = \frac{5}{324}$$

| 다른 풀이 |

1단계와 2단계 시험을 통과할 확률이 각각 $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{5}$ 이므로 1명의 지원자가 1, 2단계 시험을 모두 통과할 확률은 $\frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6}$

따라서 구하는 확률은

$${}_4C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{324}$$

315 ㉮ ⑤

| 접근 방법 | 꺼낸 공에 적힌 수의 합이 소수인 경우와 소수가 아닌 경우로 나누어 동전의 앞면이 2번 나올 확률을 구한다.

꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 합이 소수인 경우는

(1, 2), (1, 4), (2, 3), (3, 4)

이므로 그 확률은 $\frac{4}{{}_4C_2} = \frac{2}{3}$

한 개의 동전을 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$

꺼낸 2개의 공에 적힌 수의 합이 소수인 사건을 A, 앞면이 2번 나오는 사건을 B라 하자.

(i) 꺼낸 공에 적힌 수의 합이 소수이고, 한 개의 동전을 2번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{2}{3} \times {}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(ii) 꺼낸 공에 적힌 수의 합이 소수가 아니고, 한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 2번 나올 확률은

$$\begin{aligned} P(A^C \cap B) &= \frac{1}{3} \times {}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1 \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

(i), (ii)에서

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^C \cap B)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{7}{24}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{24}} = \frac{4}{7}$$

316 ㉮ $\frac{45}{512}$

| 접근 방법 | 점 P가 점 A로 다시 돌아오려면 4의 배수만큼 움직여야 한다.

서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던져서 적어도 앞면이 1개 나올 확률은

$$1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

서로 다른 두 개의 동전을 동시에 5번 던져서 적어도 앞면이 1개 나오는 횟수를 x, 2개 모두 뒷면이 나오는 횟수를 y라 하면

$$x + y = 5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 정사각형의 네 변의 길이의 합이 4이므로 점 P가 점 A로 다시 돌아오려면 4의 배수만큼 움직여야 한다. 이때 점 P가 움직인 거리의 최솟값은 5, 최댓값은 10이므로 점 P는 8만큼 움직여야 한다.

$$\therefore x + 2y = 8 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧을 연립하여 풀면 $x=2, y=3$

따라서 구하는 확률은 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 5번 던져서 적어도 앞면이 1개 나오는 횟수가 2일 확률과 같으므로

$${}_5C_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{45}{512}$$

III. 통계

III-1. 이산확률변수와 이항분포

01 이산확률변수와 이항분포

개념 확인

159쪽

317 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

318 답 (1) 0, 1, 2

$$(2) P(X=0)=\frac{4}{9}, P(X=1)=\frac{4}{9},$$

$$P(X=2)=\frac{1}{9}$$

(3)

X	0	1	2	합계
P(X=x)	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(1) 서로 다른 두 개의 주사위를 던지므로 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

(2) 한 개의 주사위를 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$, 3의 배수가 아닌 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{3}$ 이므로

$$P(X=0)=\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P(X=1)=\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$$

$$P(X=2)=\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

유제

161~163쪽

319 답 $\frac{2}{3}$

확률의 총합은 1이므로

$$a + \frac{a}{3} + \frac{1}{12} + \frac{7}{3}a = 1$$

$$\frac{11}{3}a = \frac{11}{12} \quad \therefore a = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{7}{3}a$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{7}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$$

320 답 $\frac{1}{2}$

확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	-1	0	1	2	합계
P(X=x)	$4k$	$3k$	$2k$	$3k$	$4k$	1

확률의 총합은 1이므로

$$4k + 3k + 2k + 3k + 4k = 1$$

$$16k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{16}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(-1 \leq X \leq 1) &= P(X=-1) + P(X=0) + P(X=1) \\ &= 3k + 2k + 3k = 8k \\ &= 8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

321 답 $\frac{7}{120}$

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1) + P(X=2) + \cdots + P(X=6) = 1$$

$$\frac{k}{1 \times 2} + \frac{k}{2 \times 3} + \cdots + \frac{k}{6 \times 7} = 1$$

$$k \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) \right\} = 1$$

$$k \left(1 - \frac{1}{7}\right) = 1, \quad \frac{6}{7}k = 1$$

$$\therefore k = \frac{7}{6}$$

$$\therefore P(X=4) = \frac{k}{4 \times 5} = \frac{1}{20} \times \frac{7}{6} = \frac{7}{120}$$

|참고| $\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right)$ (단, $A \neq B$, $AB \neq 0$)

322 답 $\frac{3}{7}$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{a}{4} + a + \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{3}{7}a = 1$$

$$2a = \frac{4}{7} \quad \therefore a = \frac{2}{7}$$

한편 $X^2 - 6X + 8 \leq 0$ 에서

$$(X-2)(X-4) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq X \leq 4$$

$$\begin{aligned} \therefore P(X^2 - 6X + 8 \leq 0) &= P(2 \leq X \leq 4) \\ &= P(X=2) + P(X=4) \end{aligned}$$

$$= a + \frac{a}{2} = \frac{3}{2}a$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$

323 $\square$ (1) $P(X=x) = \frac{{}_2C_x \times {}_4C_{2-x}}{{}_6C_2} \quad (x=0, 1, 2)$

(2) 풀이 참조 (3) $\frac{14}{15}$

(1) 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.
6명 중에서 2명의 대표를 뽑는 경우의 수는 ${}_6C_2$
뽑힌 학생 중에서 여학생이 x 명인 경우의 수는

$${}_2C_x \times {}_4C_{2-x}$$

따라서 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = \frac{{}_2C_x \times {}_4C_{2-x}}{{}_6C_2} \quad (x=0, 1, 2)$$

(2) 확률변수 X 가 가질 수 있는 각 값에 대한 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_2C_0 \times {}_4C_2}{{}_6C_2} = \frac{2}{5},$$

$$P(X=1) = \frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{{}_6C_2} = \frac{8}{15},$$

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2 \times {}_4C_0}{{}_6C_2} = \frac{1}{15}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

(3) 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \leq 1) &= P(X=0) + P(X=1) \\ &= \frac{2}{5} + \frac{8}{15} = \frac{14}{15} \end{aligned}$$

| 다른 풀이 |

$$(3) P(X \leq 1) = 1 - P(X=2) = 1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$$

324 $\square$ $\frac{4}{5}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 각 값의 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_4C_0 \times {}_6C_3}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{6},$$

$$P(X=1) = \frac{{}_4C_1 \times {}_6C_2}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{2},$$

$$P(X=2) = \frac{{}_4C_2 \times {}_6C_1}{{}_{10}C_3} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=3) = \frac{{}_4C_3 \times {}_6C_0}{{}_{10}C_3} = \frac{1}{30}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

한편 $X^2 - 3X + 2 \leq 0$ 에서

$$(X-1)(X-2) \leq 0 \quad \therefore 1 \leq X \leq 2$$

$$\therefore P(X^2 - 3X + 2 \leq 0) = P(1 \leq X \leq 2)$$

$$= P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{10} = \frac{4}{5}$$

325 $\square$ $\frac{2}{3}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이다.

$$X^2 - 5X + 6 = 0 \text{에서 } (X-2)(X-3) = 0$$

$$\therefore X=2 \text{ 또는 } X=3$$

(i) 약수의 개수가 2인 경우는 2, 3, 5의 3가지이므로

$$P(X=2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) 약수의 개수가 3인 경우는 4의 1가지이므로

$$P(X=3) = \frac{1}{6}$$

(i), (ii)에서

$$P(X^2 - 5X + 6 = 0) = P(X=2 \text{ 또는 } X=3)$$

$$= P(X=2) + P(X=3)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

326 $\square$ $\frac{3}{5}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9이다.

$$|X-6| \leq 1 \text{에서}$$

$$-1 \leq X-6 \leq 1 \quad \therefore 5 \leq X \leq 7$$

뽑은 카드에 적힌 두 수를 각각 a, b ($a < b$)라 하면
순서쌍 (a, b) 에 대하여 두 수의 합이

(i) 5인 경우는 (1, 4), (2, 3)의 2가지이므로

$$P(X=5) = \frac{2}{{}_5C_2} = \frac{1}{5}$$

(ii) 6인 경우는 (1, 5), (2, 4)의 2가지이므로

$$P(X=6) = \frac{2}{{}_5C_2} = \frac{1}{5}$$

(iii) 7인 경우는 (2, 5), (3, 4)의 2가지이므로

$$P(X=7) = \frac{2}{{}_5C_2} = \frac{1}{5}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$P(|X-6| \leq 1)$$

$$= P(5 \leq X \leq 7)$$

$$= P(X=5) + P(X=6) + P(X=7)$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

참고 $a > 0$ 일 때

• $|x| < a$ 이면 $-a < x < a$

• $|x| > a$ 이면 $x < -a$ 또는 $x > a$

개념 확인

167쪽

327 ㉡ (1) 2 (2) 7 (3) 3 (4) $\sqrt{3}$

$$(1) E(X) = 0 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{3}{8} = 2$$

$$(2) E(X^2) = 0^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{3}{8} = 7$$

$$(3) V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 7 - 2^2 = 3$$

$$(4) \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3}$$

328 ㉡ (1) 평균: 20, 분산: 64, 표준편차: 8

(2) 평균: $-\frac{5}{2}$, 분산: 1, 표준편차: 1

(3) 평균: 3, 분산: 16, 표준편차: 4

(4) 평균: -10, 분산: 36, 표준편차: 6

$$E(X) = 5, V(X) = 4, \sigma(X) = \sqrt{4} = 2 \text{ 이므로}$$

$$(1) E(4X) = 4E(X) = 4 \times 5 = 20$$

$$V(4X) = 4^2 V(X) = 16 \times 4 = 64$$

$$\sigma(4X) = |4| \sigma(X) = 4 \times 2 = 8$$

$$(2) E\left(-\frac{1}{2}X\right) = -\frac{1}{2}E(X) = -\frac{1}{2} \times 5 = -\frac{5}{2}$$

$$V\left(-\frac{1}{2}X\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 V(X) = \frac{1}{4} \times 4 = 1$$

$$\sigma\left(-\frac{1}{2}X\right) = \left|-\frac{1}{2}\right| \sigma(X) = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

$$(3) E(2X-7) = 2E(X) - 7 = 2 \times 5 - 7 = 3$$

$$V(2X-7) = 2^2 V(X) = 4 \times 4 = 16$$

$$\sigma(2X-7) = |2| \sigma(X) = 2 \times 2 = 4$$

$$(4) E(-3X+5) = -3E(X) + 5$$

$$= -3 \times 5 + 5 = -10$$

$$V(-3X+5) = (-3)^2 V(X) = 9 \times 4 = 36$$

$$\sigma(-3X+5) = |-3| \sigma(X) = 3 \times 2 = 6$$

329 ㉡ (1) 평균: 3, 분산: 12, 표준편차: $2\sqrt{3}$

(2) 평균: 10, 분산: 108, 표준편차: $6\sqrt{3}$

$$(1) E(X) = -3 \times \frac{1}{6} + 0 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

$$E(X^2)$$

$$= (-3)^2 \times \frac{1}{6} + 0^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 21$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 21 - 3^2 = 12$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$(2) E(3X+1) = 3E(X) + 1 = 3 \times 3 + 1 = 10$$

$$V(3X+1) = 3^2 V(X) = 9 \times 12 = 108$$

$$\sigma(3X+1) = |3| \sigma(X) = 3 \times 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

유제

169~177쪽

330 ㉡ (1) $a = \frac{3}{10}, b = \frac{1}{5}$ (2) $\frac{11}{5}$

(1) 확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{5} + a + \frac{3}{10} + b = 1$$

$$\therefore a + b = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$E(X) = 1 \text{ 에서}$$

$$-1 \times \frac{1}{5} + 0 \times a + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times b = 1$$

$$3b = \frac{3}{5} \quad \therefore b = \frac{1}{5}$$

이를 ①에 대입하면

$$a + \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \quad \therefore a = \frac{3}{10}$$

(2) 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X^2)$$

$$= (-1)^2 \times \frac{1}{5} + 0^2 \times \frac{3}{10} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 3^2 \times \frac{1}{5}$$

$$= \frac{16}{5}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{16}{5} - 1^2 = \frac{11}{5}$$

331 ㉡ ⑤

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{3} + a + b = 1$$

$$\therefore a + b = \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$E(X) = \frac{5}{18} \text{ 에서}$$

$$0 \times \frac{1}{3} + a \times a + b \times b = \frac{5}{18}$$

$$\therefore a^2 + b^2 = \frac{5}{18} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$ 이므로 ㉠, ㉡을 대입하면

$$\frac{4}{9}=\frac{5}{18}+2ab$$

$$2ab=\frac{1}{6} \quad \therefore ab=\frac{1}{12}$$

332 ㉢ - $\frac{3}{4}$

확률의 총합은 1이므로

$$a+\frac{3}{2}a+a+b=1$$

$$\therefore \frac{7}{2}a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$P(-1 \leq X \leq 0)=\frac{5}{8} \text{에서}$$

$$P(X=-1)+P(X=0)=\frac{5}{8}$$

$$\frac{3}{2}a+a=\frac{5}{8}, \quad \frac{5}{2}a=\frac{5}{8} \quad \therefore a=\frac{1}{4}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\frac{7}{8}+b=1 \quad \therefore b=\frac{1}{8}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-2	-1	0	1	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$\begin{aligned} E(X) &= -2 \times \frac{1}{4} + (-1) \times \frac{3}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{8} \\ &= -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

333 ㉢ 1

확률의 총합은 1이므로

$$k+2k+3k+4k=1 \quad \therefore k=\frac{1}{10}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{2}{5} = 2$$

$$E(X^2)=0^2 \times \frac{1}{10} + 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 3^2 \times \frac{2}{5} = 5$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-2^2=1$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1}=1$$

334 ㉢ (1) 풀이 참조 (2) 평균: $\frac{3}{2}$, 분산: $\frac{15}{28}$

(1) 확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 각각의 확률은

$$P(X=0)=\frac{{}_4C_0 \times {}_4C_3}{{}_8C_3}=\frac{1}{14},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_4C_1 \times {}_4C_2}{{}_8C_3}=\frac{3}{7},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_4C_2 \times {}_4C_1}{{}_8C_3}=\frac{3}{7},$$

$$P(X=3)=\frac{{}_4C_3 \times {}_4C_0}{{}_8C_3}=\frac{1}{14}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$	1

(2) 확률변수 X 에 대하여

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{1}{14} + 1 \times \frac{3}{7} + 2 \times \frac{3}{7} + 3 \times \frac{1}{14} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times \frac{1}{14} + 1^2 \times \frac{3}{7} + 2^2 \times \frac{3}{7} + 3^2 \times \frac{1}{14} \\ &= \frac{39}{14} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{39}{14} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{15}{28} \end{aligned}$$

335 ㉢ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면 뒷면이 나오는 동전의 개수가

(i) 0인 경우는 HHH의 1가지이므로

$$P(X=0)=\frac{1}{8}$$

(ii) 1인 경우는 HHT, HTH, THH의 3가지이므로

$$P(X=1)=\frac{3}{8}$$

(iii) 2인 경우는 HTT, THT, TTH의 3가지이므로

$$P(X=2)=\frac{3}{8}$$

(iv) 3인 경우는 TTT의 1가지이므로

$$P(X=3)=\frac{1}{8}$$

(i)~(iv)에서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{8} + 1^2 \times \frac{3}{8} + 2^2 \times \frac{3}{8} + 3^2 \times \frac{1}{8} = 3$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

336 400원

행운권 1장으로 받을 수 있는 금액을 확률변수 X 라 하면 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1000, 5000, 10000 이고, 각각의 확률은

$$P(X=0) = \frac{85}{100} = \frac{17}{20},$$

$$P(X=1000) = \frac{10}{100} = \frac{1}{10},$$

$$P(X=5000) = \frac{4}{100} = \frac{1}{25},$$

$$P(X=10000) = \frac{1}{100}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1000	5000	10000	합계
$P(X=x)$	$\frac{17}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{100}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X)$$

$$= 0 \times \frac{17}{20} + 1000 \times \frac{1}{10} + 5000 \times \frac{1}{25} + 10000 \times \frac{1}{100}$$

$$= 400$$

따라서 구하는 기댓값은 400원이다.

337 3

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 3, 4, 5, 6, 7이다.

꺼낸 공에 적힌 두 수를 각각 a, b ($a < b$)라 하면 순서쌍 (a, b) 에 대하여 두 수의 합이

(i) 3인 경우는 (1, 2)의 1가지이므로

$$P(X=3) = \frac{1}{4C_2} = \frac{1}{6}$$

(ii) 4인 경우는 (1, 3)의 1가지이므로

$$P(X=4) = \frac{1}{4C_2} = \frac{1}{6}$$

(iii) 5인 경우는 (1, 4), (2, 3)의 2가지이므로

$$P(X=5) = \frac{2}{4C_2} = \frac{1}{3}$$

(iv) 6인 경우는 (2, 4)의 1가지이므로

$$P(X=6) = \frac{1}{4C_2} = \frac{1}{6}$$

(v) 7인 경우는 (3, 4)의 1가지이므로

$$P(X=7) = \frac{1}{4C_2} = \frac{1}{6}$$

(i)~(v)에서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	6	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{3} + 6 \times \frac{1}{6} + 7 \times \frac{1}{6} = 5$$

$$E(X^2)$$

$$= 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{3} + 6^2 \times \frac{1}{6} + 7^2 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{80}{3}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{80}{3} - 5^2 = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \frac{E(X)}{V(X)} = \frac{5}{\frac{5}{3}} = 3$$

338 $a=2, b=-2$

$$E(X) = 6 \text{이므로 } E(Y) = 3 \text{에서}$$

$$E(bX+15) = 3, bE(X)+15 = 3$$

$$6b+15 = 3 \quad \therefore b = -2$$

$$V(X) = a \text{이므로 } V(Y) = 8 \text{에서}$$

$$V(-2X+15) = 8, (-2)^2 V(X) = 8$$

$$4a = 8 \quad \therefore a = 2$$

339 7

$$E(3X-1) = 8 \text{에서}$$

$$3E(X)-1 = 8 \quad \therefore E(X) = 3$$

$$\sigma(-4X+5) = 16 \text{에서}$$

$$|-4|\sigma(X) = 16 \quad \therefore \sigma(X) = 4$$

$$\therefore E(X) + \sigma(X) = 3 + 4 = 7$$

340 ㉡ -2

$E(X)=5$ 이므로 $E(aX+b)=9$ 에서

$$aE(X)+b=9$$

$$\therefore 5a+b=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$V(X)=3$ 이므로 $V(aX+b)=12$ 에서

$$a^2V(X)=12$$

$$3a^2=12, a^2=4 \quad \therefore a=2 \quad (\because a>0)$$

이를 ㉠에 대입하면

$$10+b=9 \quad \therefore b=-1$$

$$\therefore ab=2 \times (-1) = -2$$

341 ㉡ 70

$E(X)=m, \sigma(X)=\sigma$ 이고,

$$T=50+20 \times \frac{X-m}{\sigma} = \frac{20}{\sigma}X - \frac{20m}{\sigma} + 50$$

이므로

$$E(T)=E\left(\frac{20}{\sigma}X - \frac{20m}{\sigma} + 50\right)$$

$$= \frac{20}{\sigma}E(X) - \frac{20m}{\sigma} + 50$$

$$= \frac{20m}{\sigma} - \frac{20m}{\sigma} + 50 = 50$$

$$\sigma(T)=\sigma\left(\frac{20}{\sigma}X - \frac{20m}{\sigma} + 50\right)$$

$$= \left|\frac{20}{\sigma}\right| \sigma(X)$$

$$= \frac{20}{\sigma} \times \sigma = 20$$

$$\therefore E(T)+\sigma(T)=50+20=70$$

342 ㉡ 평균: 5, 분산: 20, 표준편차: $2\sqrt{5}$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{a}{4} + \frac{a}{2} + \frac{1}{8} + a = 1$$

$$\frac{7}{4}a = \frac{7}{8} \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	-1	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = -1 \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$E(X^2) = (-1)^2 \times \frac{1}{8} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{8} + 2^2 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{9}{4} - 1^2 = \frac{5}{4}$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

따라서 확률변수 Y 에 대하여

$$E(Y) = E(4X+1) = 4E(X) + 1 = 4 \times 1 + 1 = 5$$

$$V(Y) = V(4X+1) = 4^2V(X) = 16 \times \frac{5}{4} = 20$$

$$\sigma(Y) = \sigma(4X+1) = |4| \sigma(X) = 4 \times \frac{\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$$

343 ㉡ 29

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{k} + \frac{2}{k} + \frac{3}{k} + \frac{4}{k} + \frac{5}{k} = 1$$

$$\frac{15}{k} = 1 \quad \therefore k = 15$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	3	4	5	6	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 3 \times \frac{1}{15} + 4 \times \frac{2}{15} + 5 \times \frac{1}{5} + 6 \times \frac{4}{15} + 7 \times \frac{1}{3} = \frac{17}{3}$$

$$\therefore E(6X-5) = 6E(X) - 5 = 6 \times \frac{17}{3} - 5 = 29$$

344 ㉡ 9

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{4} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= \frac{17}{6} - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{19}{18}$$

$E(Y)=11$ 에서

$$E(aX+b)=11, aE(X)+b=11$$

$$\therefore \frac{4}{3}a+b=11 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$V(Y)=38$ 에서

$$V(aX+b)=38, a^2V(X)=38$$

$$\frac{19}{18}a^2=38, a^2=36 \quad \therefore a=6 \quad (\because a>0)$$

이를 ㉠에 대입하면

$$8+b=11 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore a+b=6+3=9$$

345 ㉡ 48

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{3}{10} + a + \frac{1}{10} + b = 1$$

$$\therefore a+b=\frac{3}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$E(3X-2)=10$ 에서

$$3E(X)-2=10 \quad \therefore E(X)=4$$

즉, $0 \times \frac{3}{10} + 2 \times a + 4 \times \frac{1}{10} + 8 \times b = 4$ 이므로

$$a+4b=\frac{9}{5} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=\frac{1}{5}, b=\frac{2}{5}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	2	4	8	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X^2)=0^2 \times \frac{3}{10} + 2^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{1}{10} + 8^2 \times \frac{2}{5} = 28$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=28-4^2=12$$

$$\therefore V(2X+3)=2^2V(X)=4 \times 12=48$$

346 ㉡ 평균: 10, 분산: 81, 표준편차: 9

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 각각의 확률은

$$P(X=0)=\frac{{}_2C_0 \times {}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2}=\frac{3}{5},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_2C_2 \times {}_3C_0}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2)=0^2 \times \frac{3}{10} + 1^2 \times \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{1}{10} = 1$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=1-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$$

따라서 확률변수 Y 에 대하여

$$E(Y)=E(15X-2)=15E(X)-2$$

$$=15 \times \frac{4}{5} - 2 = 10$$

$$V(Y)=V(15X-2)=15^2V(X)$$

$$=225 \times \frac{9}{25} = 81$$

$$\sigma(Y)=\sigma(15X-2)=|15|\sigma(X)$$

$$=15 \times \frac{3}{5} = 9$$

347 ㉡ 평균: 4, 분산: 5, 표준편차: $\sqrt{5}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 각각의 확률은

$$P(X=0)=\frac{{}_3C_0 \times {}_6C_4}{{}_9C_4}=\frac{5}{42},$$

$$P(X=1)=\frac{{}_3C_1 \times {}_6C_3}{{}_9C_4}=\frac{10}{21},$$

$$P(X=2)=\frac{{}_3C_2 \times {}_6C_2}{{}_9C_4}=\frac{5}{14},$$

$$P(X=3)=\frac{{}_3C_3 \times {}_6C_1}{{}_9C_4}=\frac{1}{21}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	합계
$P(X=x)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{1}{21}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X)=0 \times \frac{5}{42} + 1 \times \frac{10}{21} + 2 \times \frac{5}{14} + 3 \times \frac{1}{21} = \frac{4}{3}$$

$$E(X^2)=0^2 \times \frac{5}{42} + 1^2 \times \frac{10}{21} + 2^2 \times \frac{5}{14} + 3^2 \times \frac{1}{21} = \frac{7}{3}$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{7}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

$$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{5}{9}}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

따라서 확률변수 Y 에 대하여

$$E(Y)=E(-3X+8)=-3E(X)+8$$

$$=-3 \times \frac{4}{3} + 8 = 4$$

$$\begin{aligned} V(Y) &= V(-3X+8) = (-3)^2 V(X) \\ &= 9 \times \frac{5}{9} = 5 \\ \sigma(Y) &= \sigma(-3X+8) = |-3| \sigma(X) \\ &= 3 \times \frac{\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

348 ㉮ 54

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 각 값의 확률은

$$P(X=1) = \frac{1}{7}, P(X=2) = \frac{3}{7},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{7}, P(X=4) = \frac{2}{7}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{7} + 2 \times \frac{3}{7} + 3 \times \frac{1}{7} + 4 \times \frac{2}{7} = \frac{18}{7}$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{7} + 2^2 \times \frac{3}{7} + 3^2 \times \frac{1}{7} + 4^2 \times \frac{2}{7} = \frac{54}{7}$$

$$\begin{aligned} \therefore V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{54}{7} - \left(\frac{18}{7}\right)^2 = \frac{54}{49} \end{aligned}$$

$$\therefore V(7X+6) = 7^2 V(X) = 49 \times \frac{54}{49} = 54$$

349 ㉮ 40

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

(i) 나머지가 0인 경우는 3, 6의 2가지이므로

$$P(X=0) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(ii) 나머지가 1인 경우는 1, 4의 2가지이므로

$$P(X=1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(iii) 나머지가 2인 경우는 2, 5의 2가지이므로

$$P(X=2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

(i), (ii), (iii)에서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{3} + 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{5}{3} - 1^2 = \frac{2}{3}$$

$$\therefore E(12X+4) = 12E(X) + 4$$

$$= 12 \times 1 + 4 = 16$$

$$V(6X) = 6^2 V(X) = 36 \times \frac{2}{3} = 24$$

$$\therefore E(12X+4) + V(6X) = 16 + 24 = 40$$

개념 확인

181쪽

350 ㉮ (1) $B\left(6, \frac{1}{3}\right)$

(2) 이항분포를 따르지 않는다.

(3) $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$

(4) 이항분포를 따르지 않는다.

351 ㉮ (1) $P(X=x) = {}_4C_x \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{4-x}$ ($x=0, 1, 2, 3, 4$)

(2) $\frac{27}{64}$

(2) $P(X=3) = {}_4C_3 \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$

352 ㉮ (1) 평균: 24, 분산: 8, 표준편차: $2\sqrt{2}$

(2) 평균: 72, 분산: 45, 표준편차: $3\sqrt{5}$

(1) $E(X) = 36 \times \frac{2}{3} = 24$

$$V(X) = 36 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 8$$

$$\sigma(X) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

(2) $E(X) = 192 \times \frac{3}{8} = 72$

$$V(X) = 192 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = 45$$

$$\sigma(X) = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

353 ㉮ (1) 60 (2) 42

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(200, \frac{3}{10}\right)$ 을 따르므로

(1) $E(X) = 200 \times \frac{3}{10} = 60$

(2) $V(X) = 200 \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} = 42$

$$354 \text{ ㉡ (1) } P(X=x) = {}_4C_x \left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^{4-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

$$(2) \frac{297}{625}$$

(1) 자유투를 4번 하므로 4번의 독립시행이고, 자유투를 성공할 확률이 $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(4, \frac{3}{5}\right)$ 을 따른다.

이때 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_4C_x \left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^{4-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4)$$

(2) 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X=3) + P(X=4) \\ &= {}_4C_3 \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^1 + {}_4C_4 \left(\frac{3}{5}\right)^4 \\ &= \frac{216}{625} + \frac{81}{625} = \frac{297}{625} \end{aligned}$$

$$355 \text{ ㉡ (1) } 24 \quad (2) 1624$$

$$E(X) = 40 \text{에서 } 100p = 40 \quad \therefore p = \frac{2}{5}$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(100, \frac{2}{5}\right)$ 를 따른다.

$$(1) V(X) = 100 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = 24$$

$$\begin{aligned} (2) V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \text{이므로} \\ E(X^2) &= V(X) + \{E(X)\}^2 = 24 + 40^2 = 1624 \end{aligned}$$

$$356 \text{ ㉡ } \frac{41}{64}$$

동전을 6번 던지므로 6번의 독립시행이고, 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$ 이므로 확률변수 X 는 이항분포

$B\left(6, \frac{1}{2}\right)$ 을 따른다.

이때 X 의 확률질량함수는

$$\begin{aligned} P(X=x) &= {}_6C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{6-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 6) \\ \therefore P(1 \leq X \leq 3) &= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) \\ &= {}_6C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + {}_6C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ &\quad + {}_6C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ &= \frac{6}{64} + \frac{15}{64} + \frac{20}{64} = \frac{41}{64} \end{aligned}$$

$$357 \text{ ㉡ } 96$$

$$V(3X+6) = 45 \text{에서}$$

$$3^2 V(X) = 45, 9V(X) = 45 \quad \therefore V(X) = 5$$

이때 확률변수 X 가 이항분포 $B(36, p)$ 를 따르므로 $36p(1-p) = 5, 36p^2 - 36p + 5 = 0$

$$(6p-1)(6p-5) = 0 \quad \therefore p = \frac{5}{6} \quad \left(\because p > \frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore E(X) = 36 \times \frac{5}{6} = 30$$

$$\therefore E(3X+6) = 3E(X) + 6 = 3 \times 30 + 6 = 96$$

$$358 \text{ ㉡ 평균: 6, 분산: 5}$$

1개의 볼펜을 꺼내어 확인한 후 다시 넣는 시행을 36번 반복하므로 36번의 독립시행이고, 한 번의 시행에서 고장난 볼펜을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ 이다.

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(36, \frac{1}{6}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 36 \times \frac{1}{6} = 6$$

$$V(X) = 36 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = 5$$

$$359 \text{ ㉡ } 84$$

화살을 100발 쏘므로 100번의 독립시행이고, 화살을 10점 과녁에 맞힐 확률은 $\frac{70}{100} = \frac{7}{10}$ 이다.

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(100, \frac{7}{10}\right)$ 을 따르므로

$$V(X) = 100 \times \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} = 21$$

$$\therefore V(2X-3) = 2^2 V(X) = 4 \times 21 = 84$$

$$360 \text{ ㉡ } 19$$

서로 다른 두 개의 동전을 던지는 시행을 16번 반복하므로 16번의 독립시행이고, 한 번의 시행에서 두 개의 동전이 모두 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 이다.

즉, 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(16, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 16 \times \frac{1}{4} = 4$$

$$V(X) = 16 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 3$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 \text{이므로}$$

$$E(X^2) = V(X) + \{E(X)\}^2 = 3 + 4^2 = 19$$

361 ㉔ 20

한 개의 주사위를 72번 던지므로 72번의 독립시행이고, 주사위를 한 번 던질 때 6의 약수의 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ 이다.

즉, 확률변수 X 는 이항분포 $B\left(72, \frac{2}{3}\right)$ 를 따르므로

$$\sigma(X) = \sqrt{72 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3}} = 4$$

$$\therefore \sigma(-5X+1) = |-5|\sigma(X) = 5 \times 4 = 20$$

연습문제

187~190쪽

362 ㉔ 2

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$$

$$\frac{1}{8} + \frac{k+3}{24} + \frac{2k+3}{24} + \frac{3k+3}{24} = 1$$

$$\frac{1}{4}k = \frac{1}{2} \quad \therefore k = 2$$

363 ㉔ $\frac{1}{3}$

확률의 총합은 1이므로

$$a + \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + \frac{1}{4} + a = 1$$

$$\frac{5}{2}a = \frac{5}{12} \quad \therefore a = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} \therefore P(|X| < 3) &= P(-3 < X < 3) \\ &= P(X = -1) + P(X = 1) \\ &= \frac{a}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

364 ㉔ ②

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 5이므로

$$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

서로 다른 두 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수를 각각 a , b 라 하면 순서쌍 (a, b) 에 대하여 두 눈의 차가

(i) 3인 경우는 (1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 1), (5, 2), (6, 3)의 6가지이므로

$$P(X=3) = \frac{6}{6 \times 6} = \frac{1}{6}$$

(ii) 4인 경우는 (1, 5), (2, 6), (5, 1), (6, 2)의 4가지이므로

$$P(X=4) = \frac{4}{6 \times 6} = \frac{1}{9}$$

(iii) 5인 경우는 (1, 6), (6, 1)의 2가지이므로

$$P(X=5) = \frac{2}{6 \times 6} = \frac{1}{18}$$

(i), (ii), (iii)에서

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

365 ㉔ 2

확률의 총합은 1이므로

$$a + \frac{1}{4} + b = 1$$

$$\therefore a + b = \frac{3}{4} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$E(X) = 2$ 에서

$$1 \times a + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times b = 2$$

$$\therefore a + 4b = \frac{3}{2} \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ 을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2$$

366 ㉔ $\frac{3}{5}$

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 각각의 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_2C_0 \times {}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10},$$

$$P(X=1) = \frac{{}_2C_1 \times {}_3C_1}{{}_5C_2} = \frac{3}{5},$$

$$P(X=2) = \frac{{}_2C_2 \times {}_3C_0}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	합계
$P(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{4}{5}$$

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{3}{10} + 1^2 \times \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{1}{10} = 1$$

$$\begin{aligned}\therefore V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} \\ \therefore \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}\end{aligned}$$

367 ㉠ 8

$E(X) = 6$ 이므로 $E(aX - b) = 27$ 에서

$$aE(X) - b = 27$$

$$\therefore 6a - b = 27 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$V(X) = 7$ 이므로 $V(bX + a) = 63$ 에서

$$b^2 V(X) = 63, \quad 7b^2 = 63$$

$$b^2 = 9 \quad \therefore b = 3 \quad (\because b > 0)$$

이를 ㉠에 대입하면

$$6a - 3 = 27, \quad 6a = 30 \quad \therefore a = 5$$

$$\therefore a + b = 5 + 3 = 8$$

368 ㉠ ③

$E(X) = -1$ 에서

$$-3 \times \frac{1}{2} + 0 \times \frac{1}{4} + a \times \frac{1}{4} = -1$$

$$\frac{1}{4}a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = 2$$

$$E(X^2) = (-3)^2 \times \frac{1}{2} + 0^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} = \frac{11}{2}$$

이므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{11}{2} - (-1)^2 = \frac{9}{2}$$

$$\therefore V(aX) = V(2X) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{9}{2} = 18$$

369 ㉠ ③

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(3, \frac{2}{3}\right)$ 를 따르므로 X 의

확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_3C_x \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{3-x} \quad (x=0, 1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned}\therefore P(X > 1) &= P(X=2) + P(X=3) \\ &= {}_3C_2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + {}_3C_3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \\ &= \frac{12}{27} + \frac{8}{27} = \frac{20}{27}\end{aligned}$$

370 ㉠ 16

$$E(X) = 36 \times \frac{2}{3} = 24$$

$$V(X) = 36 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 8$$

$$\therefore E(2X - a) = 2E(X) - a = 2 \times 24 - a = 48 - a,$$

$$V(2X - a) = 2^2 V(X) = 4 \times 8 = 32$$

이때 $E(2X - a) = V(2X - a)$ 이므로

$$48 - a = 32 \quad \therefore a = 16$$

371 ㉠ $\frac{1}{3}$

확률의 총합은 1이므로

$$P(X=1) + P(X=2) + \dots + P(X=48) = 1$$

$$\frac{k}{2 \times 3} + \frac{k}{3 \times 4} + \dots + \frac{k}{49 \times 50} = 1$$

$$k \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{50} \right) \right] = 1$$

$$k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{50} \right) = 1 \quad \therefore k = \frac{25}{12}$$

$$\therefore P(4 \leq X \leq 23)$$

$$= P(X=4) + P(X=5) + \dots + P(X=23)$$

$$= \frac{k}{5 \times 6} + \frac{k}{6 \times 7} + \dots + \frac{k}{24 \times 25}$$

$$= \frac{25}{12} \left[\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) \right.$$

$$\left. + \dots + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{25} \right) \right]$$

$$= \frac{25}{12} \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} \right) = \frac{25}{12} \times \frac{4}{25} = \frac{1}{3}$$

372 ㉠ 2

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4이고,

각각의 확률은

$$P(X=0) = \frac{{}_5C_0 \times {}_5C_4}{{}_{10}C_4} = \frac{1}{42},$$

$$P(X=1) = \frac{{}_5C_1 \times {}_5C_3}{{}_{10}C_4} = \frac{5}{21},$$

$$P(X=2) = \frac{{}_5C_2 \times {}_5C_2}{{}_{10}C_4} = \frac{10}{21},$$

$$P(X=3) = \frac{{}_5C_3 \times {}_5C_1}{{}_{10}C_4} = \frac{5}{21},$$

$$P(X=4) = \frac{{}_5C_4 \times {}_5C_0}{{}_{10}C_4} = \frac{1}{42}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{42}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{1}{42}$	1

이때 $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \frac{31}{42}$ 이므로

$$P(X \leq 2) = \frac{31}{42} \quad \therefore a = 2$$

373 ㉔ ②

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 게임을 한 번 하여 나오는 모든 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

500원	100원	100원	받는 금액(원)
H	H	H	1400
H	H	T	1200
H	T	H	1200
H	T	T	1000
T	H	H	400
T	H	T	200
T	T	H	200
T	T	T	0

게임을 한 번 하여 받을 수 있는 금액을 확률변수 X 라 할 때, X 가 가질 수 있는 값은 0, 200, 400, 1000, 1200, 1400이고, 각각의 확률은

$$P(X=0)=\frac{1}{8}, P(X=200)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4},$$

$$P(X=400)=\frac{1}{8}, P(X=1000)=\frac{1}{8},$$

$$P(X=1200)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}, P(X=1400)=\frac{1}{8}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	200	400	1000	1200	1400	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X)$$

$$=0 \times \frac{1}{8} + 200 \times \frac{1}{4} + 400 \times \frac{1}{8} + 1000 \times \frac{1}{8} \\ + 1200 \times \frac{1}{4} + 1400 \times \frac{1}{8}$$

$$=700$$

따라서 구하는 기댓값은 700원이다.

374 ㉔ 36

$$E(X)=a, E(X^2)=4a+5 \text{이므로}$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=4a+5-a^2$$

$$\therefore V(2X+5)=2^2 V(X)$$

$$=4(4a+5-a^2)$$

$$=-4a^2+16a+20$$

$$=-4(a-2)^2+36 \quad (-1 \leq a \leq 5)$$

따라서 $V(2X+5)$ 는 $a=2$ 일 때 최댓값 36을 가진다.

|참고| 제한된 범위에서의 이차함수의 최대, 최소

x 의 값의 범위가 $a \leq x \leq \beta$ 일 때, 이차함수

$f(x)=a(x-p)^2+q$ 의 최대, 최소는 다음과 같다.

(1) $a \leq p \leq \beta$ 일 때, $f(a)$, $f(p)$, $f(\beta)$ 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.

(2) $p < a$ 또는 $p > \beta$ 일 때, $f(a)$, $f(\beta)$ 중 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이다.

375 ㉔ 21

확률의 총합은 1이므로 $\frac{2}{k} + \frac{3}{k} + \frac{4}{k} + \frac{5}{k} = 1$

$$\frac{14}{k} = 1 \quad \therefore k = 14 \quad \text{▶▶▶▶▶ ①}$$

따라서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{7} + 3 \times \frac{3}{14} + 4 \times \frac{2}{7} + 5 \times \frac{5}{14} = \frac{27}{7}$$

$$E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{7} + 3^2 \times \frac{3}{14} + 4^2 \times \frac{2}{7} + 5^2 \times \frac{5}{14} = 16$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 16 - \left(\frac{27}{7}\right)^2 = \frac{55}{49} \quad \text{▶▶▶▶▶ ②}$$

$$E(Y) = 30 \text{에서 } E(aX+b) = 30$$

$$aE(X)+b=30 \quad \therefore \frac{27}{7}a+b=30 \quad \text{..... ㉠}$$

$$V(Y) = 55 \text{에서 } V(aX+b) = 55$$

$$a^2 V(X) = 55, \frac{55}{49} a^2 = 55$$

$$a^2 = 49 \quad \therefore a = 7 \quad (\because a > 0)$$

$$\text{이를 ㉠에 대입하면 } 27+b=30 \quad \therefore b=3$$

$$\therefore ab = 7 \times 3 = 21 \quad \text{▶▶▶▶▶ ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	k 의 값 구하기	30 %
②	$E(X)$, $V(X)$ 구하기	30 %
③	ab 의 값 구하기	40 %

376 ㉔ 3

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이다.

뽑은 카드에 적힌 두 수를 각각 a , b ($a < b$)라 하면 순서쌍 (a, b) 에 대하여 두 수 중에서 큰 수가

(i) 2인 경우는 (1, 2)의 1가지이므로

$$P(X=2) = \frac{1}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

(ii) 3인 경우는 (1, 3), (2, 3)의 2가지이므로

$$P(X=3) = \frac{2}{{}_5C_2} = \frac{1}{5}$$

(iii) 4인 경우는 (1, 4), (2, 4), (3, 4)의 3가지이므로

$$P(X=4) = \frac{3}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

(iv) 5인 경우는 (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)의 4가지이므로

$$P(X=5) = \frac{4}{{}_5C_2} = \frac{2}{5}$$

(i)~(iv)에서 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{3}{10} + 5 \times \frac{2}{5} = 4$$

$$E(X^2) = 2^2 \times \frac{1}{10} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{3}{10} + 5^2 \times \frac{2}{5} = 17$$

$$\therefore V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = 17 - 4^2 = 1$$

따라서 $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1$ 이므로

$$\sigma(3X-8) = |3|\sigma(X) = 3 \times 1 = 3$$

377 ㉮ $\frac{2}{9}$

바닥에 놓인 면에 적힌 수가 소수일 확률은 $\frac{3}{4}$ 이므로

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(5, \frac{3}{4}\right)$ 을 따른다.

이때 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_5C_x \left(\frac{3}{4}\right)^x \left(\frac{1}{4}\right)^{5-x} \quad (x=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

$P(X=2) = kP(X=4)$ 에서

$${}_5C_2 \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = k \times {}_5C_4 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^1$$

$$2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = k \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$\therefore k = \frac{2}{9}$$

378 ㉮ 84

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(147, \frac{4}{7}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 147 \times \frac{4}{7} = 84$$

$$\sigma(X) = \sqrt{147 \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7}} = 6$$

$$\therefore E(X-12) = E(X) - 12 = 84 - 12 = 72,$$

$$\sigma(2X+5) = |2|\sigma(X) = 2 \times 6 = 12$$

$$\therefore E(X-12) + \sigma(2X+5) = 72 + 12 = 84$$

379 ㉮ 21

노란 구슬을 꺼낼 확률은 $\frac{3}{3+a}$ 이므로 확률변수 X 는

이항분포 $B\left(n, \frac{3}{3+a}\right)$ 을 따른다.

$E(2X+1) = 7$ 에서

$$2E(X) + 1 = 7$$

$$\therefore E(X) = 3$$

$$\therefore n \times \frac{3}{3+a} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 $\sigma(2X+1) = 3$ 에서

$$|2|\sigma(X) = 3$$

$$\therefore \sigma(X) = \frac{3}{2}$$

$$\text{즉, } \sqrt{n \times \frac{3}{3+a} \times \frac{a}{3+a}} = \frac{3}{2} \text{이므로}$$

$$n \times \frac{3}{3+a} \times \frac{a}{3+a} = \frac{9}{4} \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

㉮을 ㉮에 대입하면

$$3 \times \frac{a}{3+a} = \frac{9}{4}, \quad 4a = 9 + 3a$$

$$\therefore a = 9$$

이를 ㉮에 대입하면

$$\frac{1}{4}n = 3 \quad \therefore n = 12$$

$$\therefore a + n = 9 + 12 = 21$$

380 ㉮ 121

| 접근 방법 | 확률변수 Y 를 X 에 대하여 나타낸 후

$V(aX+b) = a^2V(X)$ 임을 이용한다.

$Y = 10X + 1$ 이므로

$$E(Y) = E(10X + 1) = 10E(X) + 1$$

$$= 10 \times 2 + 1 = 21$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 5 - 2^2 = 1$$

$$\therefore V(Y) = V(10X + 1) = 10^2V(X)$$

$$= 100 \times 1 = 100$$

$$\therefore E(Y) + V(Y) = 21 + 100 = 121$$

381 ㉔ ③

| 접근 방법 | 2번의 가위바위보를 하여 나오는 경우를 정리하여 얻을 수 있는 점수와 각각의 확률을 먼저 구한다.

한 번의 가위바위보에서 이길 확률은 $\frac{1}{3}$, 비길 확률은 $\frac{1}{3}$, 질 확률은 $\frac{1}{3}$ 이다.

A가 이기면 ○, 비기면 △, 지면 ×라 할 때, 2번의 가위바위보를 하여 나오는 경우에 따른 점수를 표로 나타내면 다음과 같다.

1회	2회	얻는 점수(점)
○	○	6
○	△	4
○	×	3
△	○	4
△	△	2
△	×	1
×	○	3
×	△	1
×	×	0

확률변수 X 가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3, 4, 6이고, 각각의 확률은

$$P(X=0) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

$$P(X=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9},$$

$$P(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9},$$

$$P(X=3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9},$$

$$P(X=4) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9},$$

$$P(X=6) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	6	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times \frac{1}{9} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{1}{9} + 3 \times \frac{2}{9} + 4 \times \frac{2}{9} + 6 \times \frac{1}{9} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 0^2 \times \frac{1}{9} + 1^2 \times \frac{2}{9} + 2^2 \times \frac{1}{9} + 3^2 \times \frac{2}{9} \\ &\quad + 4^2 \times \frac{2}{9} + 6^2 \times \frac{1}{9} \\ &= \frac{92}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore V(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \frac{92}{9} - \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{28}{9} \\ \therefore V(-3X+2) &= (-3)^2 V(X) \\ &= 9 \times \frac{28}{9} = 28 \end{aligned}$$

382 ㉔ ⑤

| 접근 방법 | 예약한 사람이 실제로 호텔에 방문하는 건수를 확률변수 X 로 놓고 확률질량함수를 구한 후 방이 부족하려면 $X > (\text{방의 개수})$ 임을 이용하여 확률을 구한다.

예약 취소율은 0.1이므로 예약한 사람이 호텔에 방문할 확률은 0.9이다.

즉, 예약한 사람이 실제로 호텔에 방문하는 건수를 확률변수 X 라 하면 X 는 이항분포 $B(30, 0.9)$ 를 따르므로 X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_{30}C_x 0.9^x \times 0.1^{30-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, 30)$$

이때 방이 부족하려면 실제로 방문하는 사람의 수가 28명을 초과해야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X > 28) &= P(X=29) + P(X=30) \\ &= {}_{30}C_{29} 0.9^{29} \times 0.1^1 + {}_{30}C_{30} 0.9^{30} \\ &= 30 \times 0.0471 \times 0.1 + 0.0424 \\ &= 0.1837 \end{aligned}$$

383 ㉔ 48

| 접근 방법 | X 의 확률질량함수를 이용하여 주어진 식을 n , p 에 대한 식으로 나타낸 후 n , p 의 값을 구한다.

X 의 확률질량함수는

$$P(X=x) = {}_n C_x p^x (1-p)^{n-x} \quad (x=0, 1, 2, \dots, n)$$

이므로

$$\begin{aligned} P(X=n) &= {}_n C_n p^n = p^n \\ P(X=n-1) &= {}_n C_{n-1} p^{n-1} (1-p)^1 \\ &= n p^{n-1} (1-p) \end{aligned}$$

이때 $E(X)=4$ 에서

$$np=4 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \text{또 } \frac{P(X=n)}{P(X=n-1)} &= \frac{1}{3} \text{에서} \\ \frac{p^n}{np^{n-1}(1-p)} &= \frac{1}{3}, \quad \frac{p}{n(1-p)} = \frac{1}{3} \\ 3p &= n(1-p) \quad \dots\dots \textcircled{A} \end{aligned}$$

①에서 $n = \frac{4}{p}$ 를 ①에 대입하면

$$\begin{aligned} 3p &= \frac{4}{p}(1-p), \quad 3p^2 + 4p - 4 = 0 \\ (3p-2)(p+2) &= 0 \\ \therefore p &= \frac{2}{3} \quad (\because p > 0) \end{aligned}$$

이를 ①에 대입하면

$$\frac{2}{3}n = 4 \quad \therefore n = 6$$

따라서 확률변수 X 는 이항분포 $B(6, \frac{2}{3})$ 를 따르므로

$$\begin{aligned} V(X) &= 6 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ \therefore V(6X) &= 6^2 V(X) \\ &= 36 \times \frac{4}{3} = 48 \end{aligned}$$

단계	채점 기준	비율
①	주어진 조건을 이용하여 n, p 에 대한 식 세우기	40%
②	n, p 의 값 구하기	30%
③	$V(6X)$ 구하기	30%

384 ㉠ -16

| 접근 방법 | 주사위를 24번 던질 때 3의 약수의 눈이 나오는 횟수를 새로운 확률변수 Y 로 놓고 X 를 Y 에 대하여 나타낸다.

주사위를 24번 던질 때 3의 약수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y 라 하면 3의 약수가 아닌 눈이 나오는 횟수는 $24-Y$ 이므로

$$X = 4Y - 3(24 - Y) = 7Y - 72$$

주사위를 한 번 던질 때 3의 약수의 눈이 나올 확률이 $\frac{1}{3}$ 이므로 확률변수 Y 는 이항분포 $B(24, \frac{1}{3})$ 을 따른다.

$$\text{따라서 } E(Y) = 24 \times \frac{1}{3} = 8 \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} E(X) &= E(7Y - 72) \\ &= 7E(Y) - 72 \\ &= 7 \times 8 - 72 = -16 \end{aligned}$$

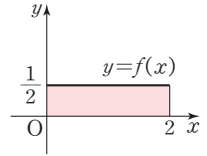
01 연속확률변수와 정규분포

개념 확인

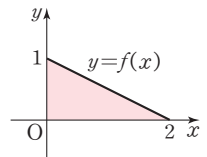
193쪽

385 ㉠ ㄱ, ㄴ

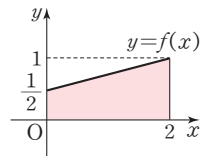
ㄱ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, y 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$2 \times \frac{1}{2} = 1$$


ㄴ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$$


ㄷ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, y 축 및 직선 $x=2$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + 1\right) \times 2 = \frac{3}{2}$$


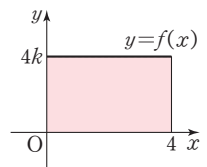
따라서 보기에서 확률밀도함수가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

386 ㉠ (1) $\frac{1}{16}$ (2) $\frac{25}{2}$

(1) $f(x) \geq 0$ 이므로 $k \geq 0$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, y 축 및 직선 $x=4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

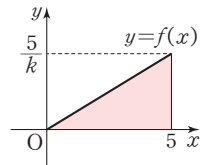
$$4 \times 4k = 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{16}$$


(2) $f(x) \geq 0$ 이므로 $k \geq 0$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=5$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

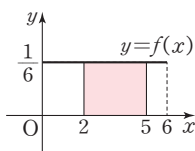
$$\frac{1}{2} \times 5 \times \frac{5}{k} = 1$$

$$\therefore k = \frac{25}{2}$$


387 ㉠ $\frac{1}{2}$

구하는 확률은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=2$, $x=5$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$$P(2 \leq X \leq 5) = 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$



유제

195쪽

388 ㉠ (1) $-\frac{1}{8}$ (2) $\frac{3}{16}$

(1) $f(x) \geq 0$ 이므로

$$f(0) = -4k \geq 0 \quad \therefore k \leq 0$$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

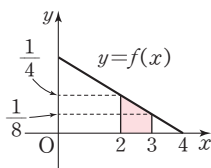
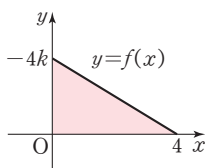
$$\frac{1}{2} \times 4 \times (-4k) = 1$$

$$-8k = 1 \quad \therefore k = -\frac{1}{8}$$

(2) 구하는 확률은 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=2$, $x=3$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$$P(2 \leq X \leq 3) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) \times 1 = \frac{3}{16}$$



389 ㉠ ③

연속확률변수 X 의 확률밀도함수의 그래프와 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \times a = 1$$

$$\frac{3}{4}a = 1 \quad \therefore a = \frac{4}{3}$$

390 ㉠ $\frac{2}{5}$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

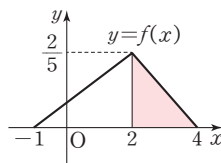
$$\frac{1}{2} \times 5 \times k = 1 \quad \therefore k = \frac{2}{5}$$

따라서 구하는 확률은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=2$, $x=4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$$P(X \geq 2) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

참고 함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{15}x + \frac{2}{15} & (-1 \leq x \leq 2) \\ -\frac{1}{5}x + \frac{4}{5} & (2 \leq x \leq 4) \end{cases}$$



391 ㉠ $\frac{2}{3}$

$f(x) \geq 0$ 이므로 $k \geq 0$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x=5$ 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

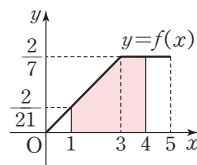
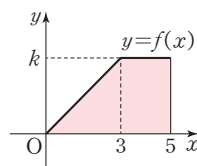
$$\frac{1}{2} \times (2+5) \times k = 1$$

$$\frac{7}{2}k = 1 \quad \therefore k = \frac{2}{7}$$

따라서 구하는 확률은 함수

$y=f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned} P(1 \leq X \leq 4) &= P(1 \leq X \leq 3) + P(3 \leq X \leq 4) \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{7} + \frac{2}{7} \right) \times 2 + 1 \times \frac{2}{7} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$



개념 확인

201쪽

392 ㉠ (1) $N(5, 4^2)$ (2) $N(24, 5^2)$

393 ㉠ ㄱ, ㄷ

ㄱ. 곡선 A의 대칭축이 가장 왼쪽에 있으므로 네 확률변수 중에서 평균이 가장 작은 것은 X_1 이다.

ㄴ. 곡선 A의 가운데 부분의 높이가 가장 낮고 양쪽으로 넓게 퍼져 있으므로 네 확률변수 중에서 표준편차가 가장 큰 것은 X_1 이다.

ㄷ. 두 곡선 B, C의 모양이 서로 같으므로

$$\sigma(X_2) = \sigma(X_3)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

394 ㉠ (1) 0.4938 (2) 0.4772 (3) 0.2417

(4) 0.6915 (5) 0.0062 (6) 0.6826

(2) $P(-2 \leq Z \leq 0) = P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$

(3) $P(-1.5 \leq Z \leq -0.5)$

$= P(0.5 \leq Z \leq 1.5)$

$= P(0 \leq Z \leq 1.5) - P(0 \leq Z \leq 0.5)$

$= 0.4332 - 0.1915 = 0.2417$

(4) $P(Z \leq 0.5) = P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.5)$

$= 0.5 + 0.1915 = 0.6915$

(5) $P(Z \geq 2.5) = P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2.5)$

$= 0.5 - 0.4938 = 0.0062$

(6) $P(-1 \leq Z \leq 1)$

$= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1)$

$= 2P(0 \leq Z \leq 1)$

$= 2 \times 0.3413 = 0.6826$

395 ㉠ (1) $Z = \frac{X-7}{2}$ (2) $Z = \frac{X+20}{3}$

(3) $Z = \frac{X-96}{12}$

유제

203~213쪽

396 ㉠ ㄴ, ㄷ

ㄱ. 두 곡선이 모두 직선 $x=0$ 에 대하여 대칭이므로

$E(X_1) = 0, E(X_2) = 0$

$\therefore E(X_1) = E(X_2)$

ㄴ. 표준편차가 클수록 곡선의 가운데 부분의 높이는

낮아지고 양쪽으로 넓게 퍼진 모양이므로

$\sigma(X_1) < \sigma(X_2)$

ㄷ. 곡선과 x 축 사이의 넓이는 1이고, 두 곡선이 모두

직선 $x=0$ 에 대하여 대칭이므로

$P(X_1 \leq 0) = 0.5, P(X_2 \geq 0) = 0.5$

$\therefore P(X_1 \leq 0) = P(X_2 \geq 0)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

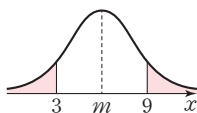
397 ㉠ 6

정규분포곡선은 직선 $x=m$ 에

대하여 대칭이고

$P(X \leq 3) = P(X \geq 9)$ 이므로

$m = \frac{3+9}{2} = 6$



398 ㉠ ㄱ

ㄱ. 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$ 가 모두 직선 $x=10$ 에 대하여 대칭이므로

$E(X_1) = 10, E(X_2) = 10$

$\therefore E(X_1) = E(X_2) = 10$

ㄴ. 표준편차가 클수록 곡선의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 양쪽으로 넓게 퍼진 모양이므로

$\sigma(X_1) < \sigma(X_3) < \sigma(X_2)$

ㄷ. 곡선과 x 축 사이의 넓이는 1이고, 두 곡선

$y=f(x), y=h(x)$ 는 각각 직선 $x=10, x=20$ 에 대하여 대칭이므로

$P(X_1 \geq 10) = 0.5, P(X_3 \geq 20) = 0.5$

$\therefore P(X_1 \geq 10) = P(X_3 \geq 20)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

399 ㉠ 12

정규분포곡선은 직선 $x=20$ 에 대하여 대칭이고

$P(X \geq 16) = P(X \leq a)$ 이므로

$\frac{16+a}{2} = 20$

$\therefore a = 24$

이때 곡선과 x 축 사이의 넓이는 1이므로

$P(X \leq 20) = \frac{1}{2}$

$\therefore aP(X \leq 20) = 24 \times \frac{1}{2} = 12$

400 ㉠ 0.82

$P(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma) = 0.68$ 에서

$P(m-\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m+\sigma) = 0.68$

$2P(m \leq X \leq m+\sigma) = 0.68$

$\therefore P(m \leq X \leq m+\sigma) = 0.34$

$P(m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma) = 0.96$ 에서

$P(m-2\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m+2\sigma) = 0.96$

$2P(m \leq X \leq m+2\sigma) = 0.96$

$\therefore P(m \leq X \leq m+2\sigma) = 0.48$

$\therefore P(m-\sigma \leq X \leq m+2\sigma)$

$= P(m-\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m+2\sigma)$

$= P(m \leq X \leq m+\sigma) + P(m \leq X \leq m+2\sigma)$

$= 0.34 + 0.48$

$= 0.82$

401 ㉠ 0.77

$$\begin{aligned}
 P(X \geq m-a) &= 0.885 \text{에서} \\
 P(m-a \leq X \leq m) + P(X \geq m) &= 0.885 \\
 P(m-a \leq X \leq m) + 0.5 &= 0.885 \\
 \therefore P(m-a \leq X \leq m) &= 0.385 \\
 \therefore P(m-a \leq X \leq m+a) \\
 &= P(m-a \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m+a) \\
 &= 2P(m-a \leq X \leq m) \\
 &= 2 \times 0.385 \\
 &= 0.77
 \end{aligned}$$

402 ㉠ 0.5-a+b

$$\begin{aligned}
 P(X \geq m+2\sigma) &= a \text{에서} \\
 P(X \geq m) - P(m \leq X \leq m+2\sigma) &= a \\
 0.5 - P(m \leq X \leq m+2\sigma) &= a \\
 \therefore P(m \leq X \leq m+2\sigma) &= 0.5-a \\
 P(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma) &= 2b \text{에서} \\
 P(m-\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m+\sigma) &= 2b \\
 2P(m \leq X \leq m+\sigma) &= 2b \\
 \therefore P(m \leq X \leq m+\sigma) &= b \\
 \therefore P(m-2\sigma \leq X \leq m+\sigma) \\
 &= P(m-2\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m+\sigma) \\
 &= P(m \leq X \leq m+2\sigma) + P(m \leq X \leq m+\sigma) \\
 &= 0.5-a+b
 \end{aligned}$$

403 ㉠ 0.6247

$$\begin{aligned}
 m=15, \sigma=4 \text{이므로} \\
 P(13 \leq X \leq 21) \\
 &= P(15-2 \leq X \leq 15+6) \\
 &= P(m-0.5\sigma \leq X \leq m+1.5\sigma) \\
 &= P(m-0.5\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m+1.5\sigma) \\
 &= P(m \leq X \leq m+0.5\sigma) + P(m \leq X \leq m+1.5\sigma) \\
 &= 0.1915 + 0.4332 \\
 &= 0.6247
 \end{aligned}$$

404 ㉠ (1) 0.8664 (2) 0.1525 (3) 0.6687

(4) 0.1587 (5) 0.9938

$$\begin{aligned}
 Z = \frac{X-63}{4} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포} \\
 \text{포 } N(0, 1) \text{을 따른다.}
 \end{aligned}$$

(1) $P(57 \leq X \leq 69)$

$$\begin{aligned}
 &= P\left(\frac{57-63}{4} \leq Z \leq \frac{69-63}{4}\right) \\
 &= P(-1.5 \leq Z \leq 1.5) \\
 &= P(-1.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\
 &= 2P(0 \leq Z \leq 1.5) \\
 &= 2 \times 0.4332 = 0.8664
 \end{aligned}$$

(2) $P(67 \leq X \leq 73)$

$$\begin{aligned}
 &= P\left(\frac{67-63}{4} \leq Z \leq \frac{73-63}{4}\right) \\
 &= P(1 \leq Z \leq 2.5) \\
 &= P(0 \leq Z \leq 2.5) - P(0 \leq Z \leq 1) \\
 &= 0.4938 - 0.3413 = 0.1525
 \end{aligned}$$

(3) $P(55 \leq X \leq 65)$

$$\begin{aligned}
 &= P\left(\frac{55-63}{4} \leq Z \leq \frac{65-63}{4}\right) \\
 &= P(-2 \leq Z \leq 0.5) \\
 &= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\
 &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 0.5) \\
 &= 0.4772 + 0.1915 = 0.6687
 \end{aligned}$$

(4) $P(X \leq 59) = P\left(Z \leq \frac{59-63}{4}\right)$

$$\begin{aligned}
 &= P(Z \leq -1) \\
 &= P(Z \geq 1) \\
 &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1) \\
 &= 0.5 - 0.3413 = 0.1587
 \end{aligned}$$

(5) $P(X \geq 53) = P\left(Z \geq \frac{53-63}{4}\right)$

$$\begin{aligned}
 &= P(Z \geq -2.5) \\
 &= P(Z \leq 2.5) \\
 &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2.5) \\
 &= 0.5 + 0.4938 = 0.9938
 \end{aligned}$$

405 ㉠ 0.0606

$$Z = \frac{X-30}{10} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned}
 P(|X-50| \leq 5) \\
 &= P(-5 \leq X-50 \leq 5) \\
 &= P(45 \leq X \leq 55) \\
 &= P\left(\frac{45-30}{10} \leq Z \leq \frac{55-30}{10}\right) \\
 &= P(1.5 \leq Z \leq 2.5) \\
 &= P(0 \leq Z \leq 2.5) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\
 &= 0.4938 - 0.4332 = 0.0606
 \end{aligned}$$

406 ㉠ 0.0013

$Z = \frac{X-16}{6}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$\begin{aligned} P(Y \geq 70) &= P(2X + 2 \geq 70) = P(X \geq 34) \\ &= P\left(Z \geq \frac{34-16}{6}\right) \\ &= P(Z \geq 3) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= 0.5 - 0.4987 \\ &= 0.0013 \end{aligned}$$

| 다른 풀이 |

$E(X) = 16, \sigma(X) = 6$ 이므로

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(2X + 2) = 2E(X) + 2 \\ &= 2 \times 16 + 2 = 34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(Y) &= \sigma(2X + 2) = |2| \sigma(X) \\ &= 2 \times 6 = 12 \end{aligned}$$

따라서 확률변수 Y 는 정규분포 $N(34, 12^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{Y-34}{12}$ 로 놓으면 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(Y \geq 70) &= P\left(Z \geq \frac{70-34}{12}\right) \\ &= P(Z \geq 3) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= 0.5 - 0.4987 \\ &= 0.0013 \end{aligned}$$

407 ㉠ 37

$Z = \frac{X-25}{4}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(31 \leq X \leq k) = 0.0655$ 에서

$$\begin{aligned} P\left(\frac{31-25}{4} \leq Z \leq \frac{k-25}{4}\right) &= 0.0655 \\ P\left(1.5 \leq Z \leq \frac{k-25}{4}\right) &= 0.0655 \\ P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-25}{4}\right) - P(0 \leq Z \leq 1.5) &= 0.0655 \\ P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-25}{4}\right) - 0.4332 &= 0.0655 \\ \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{k-25}{4}\right) &= 0.4987 \end{aligned}$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 3) = 0.4987$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{k-25}{4} &= 3, k-25 = 12 \\ \therefore k &= 37 \end{aligned}$$

408 ㉠ 66

$Z = \frac{X-72}{3}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(k \leq X \leq 78) = 0.9544$ 에서

$$\begin{aligned} P\left(\frac{k-72}{3} \leq Z \leq \frac{78-72}{3}\right) &= 0.9544 \\ P\left(\frac{k-72}{3} \leq Z \leq 2\right) &= 0.9544 \\ P\left(\frac{k-72}{3} \leq Z \leq 0\right) + P(0 \leq Z \leq 2) &= 0.9544 \\ P\left(0 \leq Z \leq \frac{72-k}{3}\right) + 0.4772 &= 0.9544 \\ \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{72-k}{3}\right) &= 0.4772 \\ \text{이때 } P(0 \leq Z \leq 2) &= 0.4772 \text{이므로} \\ \frac{72-k}{3} &= 2, 72-k = 6 \\ \therefore k &= 66 \end{aligned}$$

409 ㉠ 79

$Z = \frac{X-m}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(X \geq 84) = 0.1587$ 에서

$$\begin{aligned} P\left(Z \geq \frac{84-m}{5}\right) &= 0.1587 \\ P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{84-m}{5}\right) &= 0.1587 \\ 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{84-m}{5}\right) &= 0.1587 \\ \therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{84-m}{5}\right) &= 0.3413 \\ \text{이때 } P(0 \leq Z \leq 1) &= 0.3413 \text{이므로} \\ \frac{84-m}{5} &= 1, 84-m = 5 \\ \therefore m &= 79 \end{aligned}$$

410 ㉠ ④

$Z = \frac{X-m}{\frac{m}{3}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P\left(X \leq \frac{9}{2}\right) = 0.9987$ 에서

$$\begin{aligned} P\left(Z \leq \frac{\frac{9}{2}-m}{\frac{m}{3}}\right) &= 0.9987 \\ P\left(Z \leq \frac{27-6m}{2m}\right) &= 0.9987 \end{aligned}$$

$$P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{27-6m}{2m}\right) = 0.9987$$

$$0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{27-6m}{2m}\right) = 0.9987$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{27-6m}{2m}\right) = 0.4987$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 3) = 0.4987$ 이므로

$$\frac{27-6m}{2m} = 3, \quad 27-6m=6m$$

$$\therefore m = \frac{9}{4}$$

411 ㉠ 0.0668

성인의 평균 심박수를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(80, 8^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-80}{8}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 92) &= P\left(Z \geq \frac{92-80}{8}\right) \\ &= P(Z \geq 1.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = 0.0668 \end{aligned}$$

412 ㉠ 249

남학생의 몸무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(68, 4^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-68}{4}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 남학생의 몸무게가 64 kg 이상 78 kg 이하일 확률은 $P(64 \leq X \leq 78)$

$$\begin{aligned} &= P\left(\frac{64-68}{4} \leq Z \leq \frac{78-68}{4}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 2.5) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 0.34 + 0.49 = 0.83 \end{aligned}$$

따라서 구하는 남학생의 수는

$$300 \times 0.83 = 249$$

413 ㉠ ⑤

파프리카 1개의 무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(180, 20^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-180}{20}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} &P(190 \leq X \leq 210) \\ &= P\left(\frac{190-180}{20} \leq Z \leq \frac{210-180}{20}\right) \\ &= P(0.5 \leq Z \leq 1.5) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1.5) - P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.4332 - 0.1915 \\ &= 0.2417 \end{aligned}$$

414 ㉠ 456

소비자의 휴대폰의 사용 기간을 확률변수 X 라 하면 6개월은 0.5년이므로 X 는 정규분포 $N(2, 0.5^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{X-2}{0.5}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 소비자의 휴대폰의 사용 기간이 3년 이상일 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= P\left(Z \geq \frac{3-2}{0.5}\right) \\ &= P(Z \geq 2) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

따라서 구하는 소비자의 수는

$$20000 \times 0.0228 = 456$$

415 ㉠ 71점

2학년 학생의 수학 성적을 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(63, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-63}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다. 상위 11등 이내에 속하는 학생의 최저 점수를 a 점이라 하면 $P(X \geq a) = \frac{11}{200} = 0.055$ 이므로

$$\begin{aligned} &P\left(Z \geq \frac{a-63}{5}\right) = 0.055 \\ &P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-63}{5}\right) = 0.055 \end{aligned}$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-63}{5}\right) = 0.055$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-63}{5}\right) = 0.445$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.6) = 0.445$ 이므로

$$\frac{a-63}{5} = 1.6, \quad a-63=8$$

$$\therefore a=71$$

따라서 구하는 최저 점수는 71점이다.

416 ㉮ 231점

응시자의 점수를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(200, 20^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-200}{20}$ 으로 놓으면

확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

자격증을 취득한 응시자의 최저 점수를 a 점이라 하면

$$P(X \geq a) = 0.06 \text{이므로}$$

$$P\left(Z \geq \frac{a-200}{20}\right) = 0.06$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-200}{20}\right) = 0.06$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-200}{20}\right) = 0.06$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-200}{20}\right) = 0.44$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.55) = 0.44$ 이므로

$$\frac{a-200}{20} = 1.55, a-200 = 31$$

$$\therefore a = 231$$

따라서 구하는 최저 점수는 231점이다.

417 ㉮ 142점

지원자의 시험 점수를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(124, 15^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-124}{15}$ 로 놓으면

확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

합격자의 최저 점수를 a 점이라 하면

$$P(X \geq a) = \frac{115}{1000} = 0.115 \text{이므로}$$

$$P\left(Z \geq \frac{a-124}{15}\right) = 0.115$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-124}{15}\right) = 0.115$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-124}{15}\right) = 0.115$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-124}{15}\right) = 0.385$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.2) = 0.385$ 이므로

$$\frac{a-124}{15} = 1.2, a-124 = 18$$

$$\therefore a = 142$$

따라서 구하는 최저 점수는 142점이다.

418 ㉮ 110 g

옥수수 1개의 무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(180, 40^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-180}{40}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

알뜰 상품에 속하는 옥수수의 최고 무게를 a g이라 하면

$$P(X \leq a) = \frac{20}{500} = 0.04 \text{이므로}$$

$$P\left(Z \leq \frac{a-180}{40}\right) = 0.04, P\left(Z \geq \frac{180-a}{40}\right) = 0.04$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{180-a}{40}\right) = 0.04$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{180-a}{40}\right) = 0.04$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{180-a}{40}\right) = 0.46$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.75) = 0.46$ 이므로

$$\frac{180-a}{40} = 1.75, 180-a = 70 \quad \therefore a = 110$$

따라서 구하는 옥수수의 최고 무게는 110 g이다.

개념 확인

215쪽

419 ㉮ (1) $N(36, 3^2)$ (2) $N(80, 8^2)$

(3) $N(392, 7^2)$

$$(1) E(X) = 48 \times \frac{3}{4} = 36$$

$$V(X) = 48 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 9 = 3^2$$

이때 시행횟수 $n=48$ 은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(36, 3^2)$ 을 따른다.

$$(2) E(X) = 400 \times \frac{1}{5} = 80$$

$$V(X) = 400 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = 64 = 8^2$$

이때 시행횟수 $n=400$ 은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(80, 8^2)$ 을 따른다.

$$(3) E(X) = 448 \times \frac{7}{8} = 392$$

$$V(X) = 448 \times \frac{7}{8} \times \frac{1}{8} = 49 = 7^2$$

이때 시행횟수 $n=448$ 은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(392, 7^2)$ 을 따른다.

420 ㉮ (1) $N(192, 8^2)$ (2) $Z = \frac{X-192}{8}$

(3) 0.383

$$(1) E(X) = 288 \times \frac{2}{3} = 192$$

$$V(X) = 288 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 64 = 8^2$$

이때 시행횟수 $n=288$ 은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 $N(192, 8^2)$ 을 따른다.

$$(3) P(188 \leq X \leq 196)$$

$$\begin{aligned} &= P\left(\frac{188-192}{8} \leq Z \leq \frac{196-192}{8}\right) \\ &= P(-0.5 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 2 \times 0.1915 \\ &= 0.383 \end{aligned}$$

$$421 \quad (1) B\left(100, \frac{9}{10}\right) \quad (2) N(90, 3^2)$$

$$(3) 0.8413$$

$$(2) E(X) = 100 \times \frac{9}{10} = 90$$

$$V(X) = 100 \times \frac{9}{10} \times \frac{1}{10} = 9 = 3^2$$

이때 시행횟수 $n=100$ 은 충분히 크므로 확률변수 X 는 근사적으로 $N(90, 3^2)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} (3) P(X \geq 87) &= P\left(Z \geq \frac{87-90}{3}\right) \\ &= P(Z \geq -1) = P(Z \leq 1) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 + 0.3413 \\ &= 0.8413 \end{aligned}$$

유제

217~219쪽

$$422 \quad 0.0215$$

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(960, \frac{3}{8}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 960 \times \frac{3}{8} = 360$$

$$V(X) = 960 \times \frac{3}{8} \times \frac{5}{8} = 225 = 15^2$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 $N(360, 15^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-360}{15}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준

정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(390 \leq X \leq 405) &= P\left(\frac{390-360}{15} \leq Z \leq \frac{405-360}{15}\right) \\ &= P(2 \leq Z \leq 3) \\ &= P(0 \leq Z \leq 3) - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.4987 - 0.4772 \\ &= 0.0215 \end{aligned}$$

$$423 \quad 0.9772$$

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(432, \frac{1}{4}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 432 \times \frac{1}{4} = 108$$

$$V(X) = 432 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 81 = 9^2$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(108, 9^2)$

을 따르므로 $Z = \frac{X-108}{9}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는

표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(X \leq 126) &= P\left(Z \leq \frac{126-108}{9}\right) \\ &= P(Z \leq 2) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 + 0.4772 \\ &= 0.9772 \end{aligned}$$

$$424 \quad 0.8664$$

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(162, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 162 \times \frac{1}{3} = 54$$

$$V(X) = 162 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 36 = 6^2$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(54, 6^2)$ 을

따르므로 $Z = \frac{X-54}{6}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준

정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(45 \leq X \leq 63) &= P\left(\frac{45-54}{6} \leq Z \leq \frac{63-54}{6}\right) \\ &= P(-1.5 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 2 \times 0.4332 \\ &= 0.8664 \end{aligned}$$

$$425 \quad 253$$

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(600, \frac{2}{5}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 600 \times \frac{2}{5} = 240$$

$$V(X) = 600 \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = 144 = 12^2$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(240, 12^2)$

을 따르므로

$$a=240, b=12$$

$Z = \frac{X-240}{12}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(228 \leq X \leq 240)$$

$$= P\left(\frac{228-240}{12} \leq Z \leq \frac{240-240}{12}\right)$$

$$= P(-1 \leq Z \leq 0)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$\therefore c=1$$

$$\therefore a+b+c=240+12+1=253$$

426 0.9759

앞면이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하면 X 는 이항분포 $B\left(36, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 36 \times \frac{1}{2} = 18$$

$$V(X) = 36 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 9 = 3^2$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(18, 3^2)$ 을

따르므로 $Z = \frac{X-18}{3}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준

정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(12 \leq X \leq 27) &= P\left(\frac{12-18}{3} \leq Z \leq \frac{27-18}{3}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 3) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 3) \\ &= 0.4772 + 0.4987 \\ &= 0.9759 \end{aligned}$$

427 0.0668

A가 이기는 횟수를 확률변수 X 라 하면 X 는 이항분포 $B\left(72, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 72 \times \frac{1}{3} = 24$$

$$V(X) = 72 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 16 = 4^2$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(24, 4^2)$ 을

따르므로 $Z = \frac{X-24}{4}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준

정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \geq 30) &= P\left(Z \geq \frac{30-24}{4}\right) \\ &= P(Z \geq 1.5) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = 0.0668 \end{aligned}$$

428 0.2857

바닥에 놓인 면에 적힌 수가 4의 약수인 횟수를 확률변수 X 라 하면 X 는 이항분포 $B\left(192, \frac{3}{4}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 192 \times \frac{3}{4} = 144$$

$$V(X) = 192 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 36 = 6^2$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(144, 6^2)$

을 따르므로 $Z = \frac{X-144}{6}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는

표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(147 \leq X \leq 156) &= P\left(\frac{147-144}{6} \leq Z \leq \frac{156-144}{6}\right) \\ &= P(0.5 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 0.5) \\ &= 0.4772 - 0.1915 = 0.2857 \end{aligned}$$

429 0.9938

검은 공을 꺼내는 횟수를 확률변수 X 라 하면 X 는 이항분포 $B\left(162, \frac{2}{3}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 162 \times \frac{2}{3} = 108$$

$$V(X) = 162 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = 36 = 6^2$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(108, 6^2)$

을 따르므로 $Z = \frac{X-108}{6}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는

표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(X \leq 123) &= P\left(Z \leq \frac{123-108}{6}\right) \\ &= P(Z \leq 2.5) \\ &= P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 0.5 + 0.4938 = 0.9938 \end{aligned}$$

430 ㉡ ④

$E(X_1)=15, E(X_2)=E(X_3)=m$ 이므로
 $m > 15$

또 표준편차가 클수록 곡선의 가운데 부분의 높이는
 낮아지고 양쪽으로 넓게 퍼진 모양이므로

$$\sigma(X_2) < \sigma(X_1) < \sigma(X_3)$$

$$\therefore 3 < \sigma < 9$$

431 ㉡ ④

$$P(|X-m| \leq \sigma) = a \text{에서}$$

$$P(-\sigma \leq X-m \leq \sigma) = a$$

$$P(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma) = a$$

$$P(m-\sigma \leq X \leq m) + P(m \leq X \leq m+\sigma) = a$$

$$2P(m \leq X \leq m+\sigma) = a$$

$$\therefore P(m \leq X \leq m+\sigma) = \frac{a}{2}$$

$$P(m+\sigma \leq X \leq m+2\sigma) = b \text{에서}$$

$$P(m \leq X \leq m+2\sigma) - P(m \leq X \leq m+\sigma) = b$$

$$P(m \leq X \leq m+2\sigma) - \frac{a}{2} = b$$

$$\therefore P(m \leq X \leq m+2\sigma) = \frac{a+2b}{2}$$

$$\therefore P(X \geq m+2\sigma)$$

$$= P(X \geq m) - P(m \leq X \leq m+2\sigma)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{a+2b}{2} = \frac{1-a-2b}{2}$$

432 ㉡ 10

$Z = \frac{X-25}{5}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(X \leq k) = 0.0013$ 에서

$$P\left(Z \leq \frac{k-25}{5}\right) = 0.0013$$

$$P\left(Z \geq \frac{25-k}{5}\right) = 0.0013$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{25-k}{5}\right) = 0.0013$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{25-k}{5}\right) = 0.0013$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{25-k}{5}\right) = 0.4987$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 3) = 0.4987$ 이므로

$$\frac{25-k}{5} = 3, 25-k = 15 \quad \therefore k = 10$$

433 ㉡ ④

수하물의 무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포

$N(18, 2^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-18}{2}$ 로 놓으면 확률

변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(16 \leq X \leq 22) &= P\left(\frac{16-18}{2} \leq Z \leq \frac{22-18}{2}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 2) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.3413 + 0.4772 = 0.8185 \end{aligned}$$

434 ㉡ 0.9104

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(242, \frac{2}{11}\right)$ 를 따르므로

$$E(X) = 242 \times \frac{2}{11} = 44$$

$$V(X) = 242 \times \frac{2}{11} \times \frac{9}{11} = 36 = 6^2$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(44, 6^2)$ 을

따르므로 $Z = \frac{X-44}{6}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준

정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(32 \leq X \leq 53) &= P\left(\frac{32-44}{6} \leq Z \leq \frac{53-44}{6}\right) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 1.5) \\ &= P(-2 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.4772 + 0.4332 = 0.9104 \end{aligned}$$

435 ㉡ ④

연속확률변수 X 의 확률밀도함수의 그래프와 x 축으
 로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$$\frac{1}{2} \times \left(a - \frac{1}{3} + 2\right) \times \frac{3}{4} = 1, \quad \frac{3}{8}a = \frac{3}{8}$$

$$\therefore a = 1$$

따라서 구하는 확률은 X 의

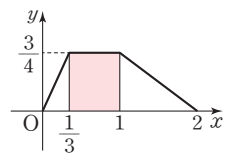
확률밀도함수의 그래프와 x

축 및 두 직선 $x = \frac{1}{3}, x = 1$

로 둘러싸인 부분의 넓이와

같으므로

$$P\left(\frac{1}{3} \leq X \leq 1\right) = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$



436 ㉮ ⑤

확률변수 X 의 평균이 60이므로 X 의 확률밀도함수는 $x=60$ 에서 최댓값을 갖고, 정규분포곡선은 직선 $x=60$ 에 대하여 대칭이다.

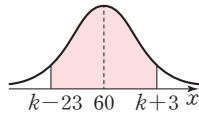
즉, $P(k-23 \leq X \leq k+3)$ 이

최대가 되려면 $k-23, k+3$

의 평균이 60이어야 하므로

$$\frac{k-23+k+3}{2}=60, k-10=60$$

$\therefore k=70$



437 ㉮ 음악, 체육, 미술

하준이네 학교 학생의 음악, 미술, 체육 수행 평가 성적을 각각 확률변수 X_A, X_B, X_C 라 하면 X_A, X_B, X_C 는 각각 정규분포 $N(26, 4^2), N(18, 3^2), N(38, 7^2)$ 을 따르므로

$$Z_A = \frac{X_A - 26}{4}, Z_B = \frac{X_B - 18}{3}, Z_C = \frac{X_C - 38}{7}$$

로 놓으면 세 확률변수 Z_A, Z_B, Z_C 는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

다른 학생보다 하준이의 음악, 미술, 체육 수행 평가 성적이 높을 확률은 각각

$$P(X_A < 32) = P\left(Z_A < \frac{32-26}{4}\right) = P\left(Z_A < \frac{3}{2}\right)$$

$$P(X_B < 20) = P\left(Z_B < \frac{20-18}{3}\right) = P\left(Z_B < \frac{2}{3}\right)$$

$$P(X_C < 45) = P\left(Z_C < \frac{45-38}{7}\right) = P(Z_C < 1)$$

이때 $P\left(Z_A < \frac{3}{2}\right) > P(Z_C < 1) > P\left(Z_B < \frac{2}{3}\right)$ 이므로

$$P(X_A < 32) > P(X_C < 45) > P(X_B < 20)$$

따라서 하준이의 성적이 상대적으로 높은 과목부터 순서대로 나열하면 음악, 체육, 미술이다.

438 ㉮ 79점

응시자의 점수를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(72, 5^2)$ 을 따르므로 $Z = \frac{X-72}{5}$ 로 놓으면 확률

변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

상장을 받는 응시자의 최저 점수를 a 점이라 하면

$$P(X \geq a) = \frac{32}{400} = 0.08 \text{이므로}$$

$$P\left(Z \geq \frac{a-72}{5}\right) = 0.08$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-72}{5}\right) = 0.08$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-72}{5}\right) = 0.08$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-72}{5}\right) = 0.42$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.4) = 0.42$ 이므로

$$\frac{a-72}{5} = 1.4, a-72=7 \quad \therefore a=79$$

따라서 구하는 최저 점수는 79점이다.

439 ㉮ 45

확률변수 X 는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 100 \times \frac{1}{2} = 50$$

$$V(X) = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25 = 5^2 \quad \text{▶▶▶▶▶ ①}$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 $N(50, 5^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-50}{5}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따른다. ▶▶▶▶▶ ②

$P(X \leq k) = 0.1587$ 에서

$$P\left(Z \leq \frac{k-50}{5}\right) = 0.1587, P\left(Z \geq \frac{50-k}{5}\right) = 0.1587$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{50-k}{5}\right) = 0.1587$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{50-k}{5}\right) = 0.1587$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{50-k}{5}\right) = 0.3413$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$\frac{50-k}{5} = 1, 50-k=5 \quad \therefore k=45 \quad \text{▶▶▶▶▶ ③}$$

단계	채점 기준	비율
①	$E(X), V(X)$ 구하기	30 %
②	확률변수 X 표준화하기	20 %
③	k 의 값 구하기	50 %

440 ㉮ $\frac{2}{9}$

| 접근 방법 | $f(2-x)=f(2+x)$ 이면 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭임을 이용한다.

$0 \leq x \leq 2$ 인 모든 x 에 대하여 $f(2-x)=f(2+x)$ 이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 직선 $x=2$ 에 대하여 대칭이다.

$$P(X \geq 2) = \frac{1}{2}, P(3 \leq X \leq 4) = \frac{7}{18} \text{이므로}$$

$$P(2 \leq X \leq 3) = P(X \geq 2) - P(3 \leq X \leq 4) \\ = \frac{1}{2} - \frac{7}{18} = \frac{1}{9}$$

$$\therefore P(1 \leq X \leq 3) = P(1 \leq X \leq 2) + P(2 \leq X \leq 3) \\ = 2P(2 \leq X \leq 3) \\ = 2 \times \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

441 ㉮ ③

| 접근 방법 | 주어진 등식을 m, σ 를 이용하여 표준화한다.

확률변수 X 는 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따르므로

$Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(m \leq X \leq m+12) - P(X \leq m-12) = 0.3664 \text{에서}$$

$$P\left(\frac{m-m}{\sigma} \leq Z \leq \frac{m+12-m}{\sigma}\right) - P\left(Z \leq \frac{m-12-m}{\sigma}\right) = 0.3664$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) - P\left(Z \leq -\frac{12}{\sigma}\right) = 0.3664$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) - P\left(Z \geq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.3664$$

$$P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) - \left\{P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right)\right\} \\ = 0.3664$$

$$2P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) - 0.5 = 0.3664$$

$$2P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.8664$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right) = 0.4332$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$\frac{12}{\sigma} = 1.5 \quad \therefore \sigma = 8$$

442 ㉮ 0.0228

| 접근 방법 | 5의 약수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하고 게임을 해서 얻은 점수를 X 를 이용하여 나타낸 후 확률을 구한다.

5의 약수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하면

X 는 이항분포 $B\left(18, \frac{1}{3}\right)$ 을 따르므로

$$E(X) = 18 \times \frac{1}{3} = 6$$

$$V(X) = 18 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = 4 = 2^2$$

즉, 확률변수 X 는 근사적으로 정규분포 $N(6, 2^2)$ 을

따르므로 $Z = \frac{X-6}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표

준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

한편 5의 약수가 아닌 눈이 나오는 횟수는 $18-X$ 이므로 최종 점수가 38점 이상이 되려면

$$3X + (18-X) \geq 38, 2X \geq 20 \quad \therefore X \geq 10$$

따라서 구하는 확률은

$$P(X \geq 10) = P\left(Z \geq \frac{10-6}{2}\right) = P(Z \geq 2) \\ = P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2) \\ = 0.5 - 0.4772 \\ = 0.0228$$

443 ㉮ 0.04

| 접근 방법 | 복숭아 1개의 무게와 특대 등급 상품의 개수를 각각 확률변수 X, Y 라 하면 $P(X \geq 290) = p$ 일 때, Y 는 이항분포 $B(400, p)$ 를 따름을 이용한다.

복숭아 1개의 무게를 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분

포 $N(269, 25^2)$ 을 따르므로 $Z_X = \frac{X-269}{25}$ 로 놓으

면 확률변수 Z_X 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

복숭아 1개의 무게가 290 g 이상일 확률은

$$P(X \geq 290) = P\left(Z_X \geq \frac{290-269}{25}\right) \\ = P(Z_X \geq 0.84) \\ = P(Z_X \geq 0) - P(0 \leq Z_X \leq 0.84) \\ = 0.5 - 0.3 = 0.2$$

이때 수확한 복숭아 400개 중에서 무게가 290 g 이상인 복숭아의 개수를 확률변수 Y 라 하면 Y 는 이항분포 $B(400, 0.2)$ 를 따르므로

$$E(Y) = 400 \times 0.2 = 80$$

$$V(Y) = 400 \times 0.2 \times 0.8 = 64 = 8^2$$

즉, 확률변수 Y 는 근사적으로 $N(80, 8^2)$ 을 따르므로

$Z_Y = \frac{Y-80}{8}$ 으로 놓으면 확률변수 Z_Y 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$P(Y \leq 66) = P\left(Z_Y \leq \frac{66-80}{8}\right) \\ = P(Z_Y \leq -1.75) \\ = P(Z_Y \geq 1.75) \\ = P(Z_Y \geq 0) - P(0 \leq Z_Y \leq 1.75) \\ = 0.5 - 0.46 = 0.04$$

01 표본평균과 표본비율의 분포

개념 확인

227쪽

444 ㉠ ㄴ, ㄷ

445 ㉠ (1) 125 (2) 60 (3) 10

- (1) 한 개씩 복원추출하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

$${}_5\Pi_3 = 5^3 = 125$$

- (2) 한 개씩 비복원추출하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 서로 다른 3개를 택하는 순열의 수와 같으므로

$${}_5P_3 = 60$$

- (3) 동시에 추출하는 경우의 수는 서로 다른 5개에서 서로 다른 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

$${}_5C_3 = 10$$

446 ㉠ (1) 평균: 15, 분산: 4, 표준편차: 2

(2) 평균: 15, 분산: 1, 표준편차: 1

(3) 평균: 15, 분산: $\frac{9}{25}$, 표준편차: $\frac{3}{5}$

모평균 $m=15$, 모분산 $\sigma^2=36=6^2$ 이므로

(1) $E(\bar{X})=m=15$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{36}{9} = 4$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = 2$$

(2) $E(\bar{X})=m=15$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{36}{36} = 1$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{36}} = 1$$

(3) $E(\bar{X})=m=15$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6}{\sqrt{100}} = \frac{3}{5}$$

447 ㉠ (1) $E(\bar{X})=10$, $V(\bar{X})=4$, $\sigma(\bar{X})=2$

(2) $N(10, 2^2)$

- (1) 모평균 $m=10$, 모표준편차 $\sigma=16$, 표본의 크기 $n=64$ 이므로

$$E(\bar{X})=m=10$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{16^2}{64} = 4$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{16}{\sqrt{64}} = 2$$

유제

229~235쪽

448 ㉠ 582

모평균이 24, 모표준편차가 8, 표본의 크기가 16이므로

$$E(\bar{X})=24$$

$$V(\bar{X}) = \frac{8^2}{16} = 4$$

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{8}{\sqrt{16}} = 2$$

$$V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2 \text{이므로}$$

$$E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + \{E(\bar{X})\}^2 = 4 + 24^2 = 580$$

$$\therefore \sigma(\bar{X}) + E(\bar{X}^2) = 2 + 580 = 582$$

449 ㉠ 81

모표준편차가 3, 표본의 크기가 n 이므로

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{3}{\sqrt{n}}$$

이때 표본평균 $\bar{X}$ 의 표준편차가 $\frac{1}{3}$ 이하이어야 하므로

$$\frac{3}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{3}, \sqrt{n} \geq 9$$

$$\therefore n \geq 81$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 81이다.

450 ㉠ 6

모평균이 18, 모표준편차가 2, 표본의 크기가 4이므로

$$E(\bar{X})=18$$

$$V(\bar{X}) = \frac{2^2}{4} = 1$$

$$E(3\bar{X}) = 3E(\bar{X}) = 3 \times 18 = 54,$$

$$V(3\bar{X}) = 3^2 V(\bar{X}) = 9 \times 1 = 9$$

이므로

$$\frac{E(3\bar{X})}{V(3\bar{X})} = \frac{54}{9} = 6$$

451 ㉠ 6

모분산이 225, 표본의 크기가 25이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{225}{25} = 9$$

$$V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2, E(\bar{X}^2) = 45 \text{이므로}$$

$$9 = 45 - m^2$$

$$m^2 = 36 \quad \therefore m = 6 \quad (\because m > 0)$$

452 ㉡ 2

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{5} + a + \frac{3}{5} = 1 \quad \therefore a = \frac{1}{5}$$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{3}{5} = \frac{7}{5}$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 0^2 \times \frac{1}{5} + 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{3}{5} - \left(\frac{7}{5}\right)^2$$

$$= \frac{13}{5} - \frac{49}{25} = \frac{16}{25}$$

이때 표본의 크기가 16이므로

$$E(\bar{X}) = \frac{7}{5}$$

$$V(\bar{X}) = \frac{\frac{16}{25}}{16} = \frac{1}{25}$$

$$V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2 \text{이므로}$$

$$E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + \{E(\bar{X})\}^2 = \frac{1}{25} + \left(\frac{7}{5}\right)^2 = 2$$

453 ㉡ $\sqrt{6}$

상자에서 임의로 1개의 공을 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 X 라 하고, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	5	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{5} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{5} + 5 \times \frac{1}{5}$$

$$= 3$$

$$V(X)$$

$$= E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 1^2 \times \frac{1}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{1}{5} + 5^2 \times \frac{1}{5} - 3^2$$

$$= 11 - 9 = 2$$

$$\therefore \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{2}$$

이때 표본의 크기가 3이므로

$$E(\bar{X}) = 3, \sigma(\bar{X}) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore E(\bar{X}) \times \sigma(\bar{X}) = 3 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}$$

454 ㉡ $\frac{1}{5}$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{6} + a + b = 1$$

$$\therefore a + b = \frac{5}{6} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 3a + 6b = 3a + 6b$$

이때 $E(X) = E(\bar{X}) = 4$ 이므로

$$3a + 6b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{2}$$

따라서 확률변수 X 에 대하여

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 0^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{3} + 6^2 \times \frac{1}{2} - 4^2$$

$$= 21 - 16 = 5$$

이때 표본의 크기가 25이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

455 ㉡ 4

임의로 1장의 카드를 뽑을 때, 카드에 적힌 숫자를 확률변수 X 라 하고, X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	1	2	3	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 1 \times \frac{2}{5} + 2 \times \frac{3}{10} + 3 \times \frac{1}{5} + 4 \times \frac{1}{10} = 2$$

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$= 1^2 \times \frac{2}{5} + 2^2 \times \frac{3}{10} + 3^2 \times \frac{1}{5} + 4^2 \times \frac{1}{10} - 2^2$$

$$= 5 - 4 = 1$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1} = 1$$

이때 표본의 크기가 4이므로

$$\sigma(\bar{X}) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \sigma(8\bar{X}+1) = |8|\sigma(\bar{X}) = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

456 ㉡ 0.0228

모집단이 정규분포 $N(45, 12^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 16이므로 16명의 통학 시간의 평균을 $\bar{X}$ 라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(45, \frac{12^2}{16})$, 즉 $N(45, 3^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X}-45}{3}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 39) &= P\left(Z \leq \frac{39-45}{3}\right) \\ &= P(Z \leq -2) = P(Z \geq 2) \\ &= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 = 0.0228 \end{aligned}$$

457 ㉡ ②

모집단이 정규분포 $N(14, 3.2^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 256이므로 256명의 1년 동안 병원을 이용한 횟수의 평균을 $\bar{X}$ 라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포

$N(14, \frac{3.2^2}{256})$, 즉 $N(14, 0.2^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X}-14}{0.2}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(13.7 \leq \bar{X} \leq 14.2) &= P\left(\frac{13.7-14}{0.2} \leq Z \leq \frac{14.2-14}{0.2}\right) \\ &= P(-1.5 \leq Z \leq 1) \\ &= P(-1.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1.5) + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.4332 + 0.3413 = 0.7745 \end{aligned}$$

458 ㉡ 0.9876

모집단이 정규분포 $N(27, 16)$ 을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(27, \frac{16}{25})$, 즉 $N(27, (\frac{4}{5})^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X}-27}{\frac{4}{5}}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(25 \leq \bar{X} \leq 29) &= P\left(\frac{25-27}{\frac{4}{5}} \leq Z \leq \frac{29-27}{\frac{4}{5}}\right) \\ &= P(-2.5 \leq Z \leq 2.5) \\ &= P(-2.5 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 2.5) \\ &= 2 \times 0.4938 = 0.9876 \end{aligned}$$

459 ㉡ 0.1815

모집단이 정규분포 $N(56, 6^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 9이므로 9개의 달걀의 무게의 평균을 $\bar{X}$ 라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(56, \frac{6^2}{9})$, 즉 $N(56, 2^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X}-56}{2}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 60) + P(\bar{X} < 54) &= P\left(Z \geq \frac{60-56}{2}\right) + P\left(Z < \frac{54-56}{2}\right) \\ &= P(Z \geq 2) + P(Z < -1) \\ &= P(Z \geq 2) + P(Z \leq -1) \\ &= P(Z \geq 2) + P(Z \geq 1) \\ &= \{P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2)\} \\ &\quad + \{P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 1)\} \\ &= (0.5 - 0.4772) + (0.5 - 0.3413) \\ &= 0.0228 + 0.1587 = 0.1815 \end{aligned}$$

460 ㉡ 36

모집단이 정규분포 $N(10, 1.2^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 n 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(10, \frac{1.2^2}{n})$,

즉 $N(10, (\frac{1.2}{\sqrt{n}})^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X}-10}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(\bar{X} \geq 9.5) = 0.9938$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{9.5-10}{\frac{1.2}{\sqrt{n}}}\right) = 0.9938$$

$$P\left(Z \geq -\frac{5\sqrt{n}}{12}\right) = 0.9938, P\left(Z \leq \frac{5\sqrt{n}}{12}\right) = 0.9938$$

$$P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{5\sqrt{n}}{12}\right) = 0.9938$$

$$0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{5\sqrt{n}}{12}\right) = 0.9938$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{5\sqrt{n}}{12}\right) = 0.4938$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2.5) = 0.4938$ 이므로

$$\frac{5\sqrt{n}}{12} = 2.5, \sqrt{n} = 6$$

$$\therefore n = 36$$

461 ㉠ 77

모집단이 정규분포 $N(80, 15^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포

$N\left(80, \frac{15^2}{100}\right)$, 즉 $N\left(80, \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X} - 80}{\frac{3}{2}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(\bar{X} \leq k) = 0.0228$ 에서

$$P\left(Z \leq \frac{k - 80}{\frac{3}{2}}\right) = 0.0228$$

$$P\left(Z \leq \frac{2k - 160}{3}\right) = 0.0228$$

$$P\left(Z \geq \frac{160 - 2k}{3}\right) = 0.0228$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{160 - 2k}{3}\right) = 0.0228$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{160 - 2k}{3}\right) = 0.0228$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{160 - 2k}{3}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{160 - 2k}{3} = 2, 160 - 2k = 6$$

$$\therefore k = 77$$

462 ㉠ 3

모집단이 정규분포 $N(m, 100)$ 을 따르고 표본의 크기가 n^2 이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{100}{n^2}\right)$,

즉 $N\left(m, \left(\frac{10}{n}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{10}{n}}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(m - 10 \leq \bar{X} \leq m + 5) = 0.9319 \text{에서}$$

$$P\left(\frac{m - 10 - m}{\frac{10}{n}} \leq Z \leq \frac{m + 5 - m}{\frac{10}{n}}\right) = 0.9319$$

$$P\left(-n \leq Z \leq \frac{n}{2}\right) = 0.9319$$

$$P(-n \leq Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{n}{2}\right) = 0.9319$$

$$P(0 \leq Z \leq n) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{n}{2}\right) = 0.9319$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 3) = 0.4987$,

$P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$P(0 \leq Z \leq 3) + P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$= 0.4987 + 0.4332$$

$$= 0.9319$$

$$\therefore n = 3$$

463 ㉠ $\frac{8}{5}$

제품 A 중에서 임의추출한 4개의 무게의 평균을 $\bar{X}_1$ 라 하면 모집단이 정규분포 $N(m, 2^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\bar{X}_1$ 는 정규분포

$N\left(m, \frac{2^2}{4}\right)$, 즉 $N(m, 1^2)$ 을 따른다.

제품 B 중에서 임의추출한 4개의 무게의 평균을 $\bar{X}_2$ 라 하면 모집단이 정규분포 $N(4m, 8^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 4이므로 표본평균 $\bar{X}_2$ 는 정규분포

$N\left(4m, \frac{8^2}{4}\right)$, 즉 $N(4m, 4^2)$ 을 따른다.

$Z_1 = \frac{\bar{X}_1 - m}{1}$, $Z_2 = \frac{\bar{X}_2 - 4m}{4}$ 으로 놓으면 두 확률

변수 Z_1, Z_2 는 각각 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(\bar{X}_1 \geq k) = P(\bar{X}_2 \leq k)$ 에서

$$P\left(Z_1 \geq \frac{k - m}{1}\right) = P\left(Z_2 \leq \frac{k - 4m}{4}\right)$$

$$P(Z_1 \geq k - m) = P\left(Z_2 \geq \frac{4m - k}{4}\right)$$

$$\text{즉, } k - m = \frac{4m - k}{4} \text{이므로}$$

$$4k - 4m = 4m - k$$

$$5k = 8m$$

$$\therefore \frac{k}{m} = \frac{8}{5}$$

464 $\square \frac{3}{10}$

$$\hat{p} = \frac{90}{300} = \frac{3}{10}$$

465 $\square E(\hat{p}) = \frac{1}{3}, V(\hat{p}) = \frac{1}{81}, \sigma(\hat{p}) = \frac{1}{9}$

모비율 $p = \frac{1}{3}$, 표본의 크기 $n = 18$ 이므로

$$E(\hat{p}) = p = \frac{1}{3}$$

$$V(\hat{p}) = \frac{pq}{n} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{18} = \frac{1}{81} \quad \leftarrow q = 1 - p$$

$$\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{1}{81}} = \frac{1}{9} \quad \leftarrow q = 1 - p$$

466 $\square (1) E(\hat{p}) = 0.4, V(\hat{p}) = 0.0004,$
 $\sigma(\hat{p}) = 0.02$

(2) $N(0.4, 0.02^2)$

(1) 모비율 $p = 0.4$, 표본의 크기 $n = 600$ 이므로

$$E(\hat{p}) = p = 0.4$$

$$V(\hat{p}) = \frac{pq}{n} = \frac{0.4 \times 0.6}{600} = 0.0004 \quad \leftarrow q = 1 - p$$

$$\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{0.0004} = 0.02 \quad \leftarrow q = 1 - p$$

유제

239쪽

467 $\square 0.0062$

임의추출한 400명 중에서 이 업체의 제품을 구매하는 소비자의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 모비율이 0.36, 표본의 크기가 400이므로

$$E(\hat{p}) = 0.36$$

$$V(\hat{p}) = \frac{0.36 \times 0.64}{400} = 0.000576 = 0.024^2$$

표본의 크기 400은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포 $N(0.36, 0.024^2)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{\hat{p} - 0.36}{0.024} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(\hat{p} \geq \frac{168}{400}) = P(\hat{p} \geq 0.42)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{0.42 - 0.36}{0.024}\right)$$

$$= P(Z \geq 2.5)$$

$$= P(Z \geq 0) - P(0 \leq Z \leq 2.5)$$

$$= 0.5 - 0.4938 = 0.0062$$

468 $\square 0.2661$

임의추출한 900명 중에서 일주일에 2회 이상 운동하는 주민의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 모비율이 0.5, 표본의 크기가 900이므로

$$E(\hat{p}) = 0.5$$

$$V(\hat{p}) = \frac{0.5 \times 0.5}{900} = \frac{1}{3600} = \left(\frac{1}{60}\right)^2$$

표본의 크기 900은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.5, \left(\frac{1}{60}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{\hat{p} - 0.5}{\frac{1}{60}} \text{로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$P(0.51 \leq \hat{p} \leq 0.54)$$

$$= P\left(\frac{0.51 - 0.5}{\frac{1}{60}} \leq Z \leq \frac{0.54 - 0.5}{\frac{1}{60}}\right)$$

$$= P(0.6 \leq Z \leq 2.4)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 2.4) - P(0 \leq Z \leq 0.6)$$

$$= 0.4918 - 0.2257 = 0.2661$$

469 $\square 100$

모비율이 0.1, 표본의 크기가 n 이므로

$$E(\hat{p}) = 0.1$$

$$V(\hat{p}) = \frac{0.1 \times 0.9}{n} = \frac{0.09}{n} = \left(\frac{0.3}{\sqrt{n}}\right)^2$$

표본의 크기 n 은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.1, \left(\frac{0.3}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{\hat{p} - 0.1}{\frac{0.3}{\sqrt{n}}} \text{로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(0.07 \leq \hat{p} \leq 0.13) = 0.6826$ 에서

$$P\left(\frac{0.07 - 0.1}{\frac{0.3}{\sqrt{n}}} \leq Z \leq \frac{0.13 - 0.1}{\frac{0.3}{\sqrt{n}}}\right) = 0.6826$$

$$P(-0.1\sqrt{n} \leq Z \leq 0.1\sqrt{n}) = 0.6826$$

$$P(-0.1\sqrt{n} \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 0.1\sqrt{n}) = 0.6826$$

$$2P(0 \leq Z \leq 0.1\sqrt{n}) = 0.6826$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq 0.1\sqrt{n}) = 0.3413$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1) = 0.3413$ 이므로

$$0.1\sqrt{n} = 1, \sqrt{n} = 10$$

$$\therefore n = 100$$

470 ㉔ ④

임의추출한 1600명 중에서 자격증 A를 가진 직원의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 모비율이 0.2, 표본의 크기가 1600이므로

$$E(\hat{p}) = 0.2$$

$$V(\hat{p}) = \frac{0.2 \times 0.8}{1600} = 0.0001 = 0.01^2$$

표본의 크기 1600은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포 $N(0.2, 0.01^2)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{\hat{p} - 0.2}{0.01} \text{로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

$$N(0, 1) \text{을 따르므로 } P\left(\hat{p} \geq \frac{a}{100}\right) = 0.9772 \text{에서}$$

$$P\left(Z \geq \frac{\frac{a}{100} - 0.2}{0.01}\right) = 0.9772$$

$$P(Z \geq a - 20) = 0.9772$$

$$P(Z \leq 20 - a) = 0.9772$$

$$P(Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 20 - a) = 0.9772$$

$$0.5 + P(0 \leq Z \leq 20 - a) = 0.9772$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq 20 - a) = 0.4772$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 2) = 0.4772$ 이므로

$$20 - a = 2$$

$$\therefore a = 18$$

연습문제

240~242쪽

471 ㉔ ㄴ, ㄷ

모평균이 25, 모분산이 36, 표본의 크기가 9이므로

ㄱ. 표본평균 $\bar{X}$ 의 값은 알 수 없다.

$$\text{ㄴ. } E(\bar{X}) = 25$$

$$\text{ㄷ. } V(\bar{X}) = \frac{36}{9} = 4$$

$$\text{ㄹ. } V(\bar{X}) = E(\bar{X}^2) - \{E(\bar{X})\}^2 \text{이므로}$$

$$E(\bar{X}^2) = V(\bar{X}) + \{E(\bar{X})\}^2 = 4 + 25^2 = 629$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

472 ㉔ 21

확률변수 X 에 대하여

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} \\ &\quad + 6 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

$$V(X)$$

$$= E(X^2) - \{E(X)\}^2$$

$$\begin{aligned} &= 1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} \\ &\quad + 6^2 \times \frac{1}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{91}{6} - \frac{49}{4}$$

$$= \frac{35}{12}$$

이때 표본의 크기가 5이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{\frac{35}{12}}{5} = \frac{7}{12}$$

$$\begin{aligned} \therefore V(6\bar{X} + 2) &= 6^2 V(\bar{X}) \\ &= 36 \times \frac{7}{12} = 21 \end{aligned}$$

473 ㉔ 0.1039

모집단이 정규분포 $N(30, 5^2)$ 을 따르고 표본의 크기

가 4이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(30, \frac{5^2}{4}\right)$, 즉 $N\left(30, \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{\bar{X} - 30}{\frac{5}{2}} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분포}$$

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(26 \leq \bar{X} \leq 27.5)$$

$$= P\left(\frac{26 - 30}{\frac{5}{2}} \leq Z \leq \frac{27.5 - 30}{\frac{5}{2}}\right)$$

$$= P(-1.6 \leq Z \leq -1)$$

$$= P(1 \leq Z \leq 1.6)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 1.6) - P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$= 0.4452 - 0.3413$$

$$= 0.1039$$

474 ㉔ ②

임의추출한 고등학생 100명 중에서 하루 평균 30통 이상의 문자 메시지를 보내는 학생의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 모비율이 0.2, 표본의 크기가 100이므로

$$E(\hat{p}) = 0.2$$

$$V(\hat{p}) = \frac{0.2 \times 0.8}{100} = 0.0016 = 0.04^2$$

표본의 크기 100은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포 $N(0.2, 0.04^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\hat{p}-0.2}{0.04}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} & P(0.16 \leq \hat{p} \leq 0.26) \\ &= P\left(\frac{0.16-0.2}{0.04} \leq Z \leq \frac{0.26-0.2}{0.04}\right) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 1.5) \\ &= P(-1 \leq Z \leq 0) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= P(0 \leq Z \leq 1) + P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.3413 + 0.4332 = 0.7745 \end{aligned}$$

475 ㉮ ⑤

$$\neg. E(\bar{X}_1) = E(\bar{X}_2) = m$$

$$\neg. 3V(n_1\bar{X}_1) = 3n_1^2V(\bar{X}_1) = 3n_1^2 \times \frac{\sigma^2}{n_1} = 3n_1\sigma^2$$

$$\begin{aligned} V(n_2\bar{X}_2) &= n_2^2V(\bar{X}_2) = n_2^2 \times \frac{\sigma^2}{n_2} \\ &= n_2\sigma^2 = 3n_1\sigma^2 \quad (\because 3n_1 = n_2) \end{aligned}$$

$$\therefore 3V(n_1\bar{X}_1) = V(n_2\bar{X}_2)$$

$$\begin{aligned} \neg. \sigma(4\bar{X}_1) &= |4|\sigma(\bar{X}_1) = 4 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} \\ &= 4 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16n_2}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}} \quad (\because n_1 = 16n_2) \end{aligned}$$

$$\sigma(\bar{X}_2) = \frac{\sigma}{\sqrt{n_2}}$$

$$\therefore \sigma(4\bar{X}_1) = \sigma(\bar{X}_2)$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$, $\neg$ 이다.

476 ㉮ 73

임의로 4장의 카드를 동시에 한 번 뽑을 때, 4장의 카드에 적힌 수 중에서 가장 큰 수를 확률변수 X 라 하면 X 의 확률분포는

$$P(X=4) = \frac{{}_3C_3}{{}_7C_4} = \frac{1}{35}, P(X=5) = \frac{{}_4C_3}{{}_7C_4} = \frac{4}{35},$$

$$P(X=6) = \frac{{}_5C_3}{{}_7C_4} = \frac{2}{7}, P(X=7) = \frac{{}_6C_3}{{}_7C_4} = \frac{4}{7}$$

이므로 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	4	5	6	7	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	1

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 4 \times \frac{1}{35} + 5 \times \frac{4}{35} + 6 \times \frac{2}{7} + 7 \times \frac{4}{7} = \frac{32}{5}$$

$$\therefore E(\bar{X}) = E(X) = \frac{32}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore E(10\bar{X}+9) &= 10E(\bar{X})+9 \\ &= 10 \times \frac{32}{5} + 9 = 73 \end{aligned}$$

477 ㉮ $\frac{13}{36}$

확률의 총합은 1이므로

$$\frac{1}{2} + a + b = 1 \quad \therefore a + b = \frac{1}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

확률변수 X 에 대하여

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{2} + 2a + 4b = 2a + 4b$$

$$\text{이때 } E(X) = E(\bar{X}) = \frac{5}{3} \text{이므로}$$

$$2a + 4b = \frac{5}{3} \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡을 연립하여 풀면 } a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{3}$$

따라서 확률변수 X 의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	2	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	1

크기가 2인 표본을 X_1, X_2 라 하면 순서쌍 (X_1, X_2) 에 대하여 $\bar{X}=2$ 인 경우는

$$(0, 4), (2, 2), (4, 0)$$

$$\therefore P(\bar{X}=2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{13}{36}$$

478 ㉮ 0.044

모집단이 정규분포 $N(20, 2^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 4이므로 임의추출한 배터리 4개의 수명의 평균을 $\bar{X}$ 라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(20, \frac{2^2}{4}\right)$, 즉 $N(20, 1^2)$ 을 따른다. ▶▶▶▶▶ ①

$Z = \frac{\bar{X}-20}{1}$ 으로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} & P(86 \leq 4\bar{X} \leq 88) \\ &= P(21.5 \leq \bar{X} \leq 22) \\ &= P\left(\frac{21.5-20}{1} \leq Z \leq \frac{22-20}{1}\right) \\ &= P(1.5 \leq Z \leq 2) \\ &= P(0 \leq Z \leq 2) - P(0 \leq Z \leq 1.5) \\ &= 0.4772 - 0.4332 = 0.044 \end{aligned}$$
▶▶▶▶▶ ②

단계	채점 기준	비율
①	임의추출한 배터리 4개의 수명의 평균을 $\bar{X}$ 로 놓고 표본평균 $\bar{X}$ 가 따르는 정규분포 구하기	40 %
②	$P(86 \leq 4\bar{X} \leq 88)$ 구하기	60 %

479 ㉡

모집단이 정규분포 $N\left(5, \frac{81}{4}\right)$ 을 따르고 표본의 크기

가 225이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(5, \frac{81}{225}\right)$,

즉 $N\left(5, \left(\frac{3}{10}\right)^2\right)$ 을 따른다.

또 모집단이 정규분포 $N(40, 9)$ 를 따르고 표본의 크

기가 16이므로 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(40, \frac{9}{16}\right)$,

즉 $N\left(40, \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - 5}{\frac{3}{10}}, \quad Z_{\bar{Y}} = \frac{\bar{Y} - 40}{\frac{3}{4}} \text{으로 놓으면 두 확률변}$$

수 $Z_{\bar{X}}, Z_{\bar{Y}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로

$$P(\bar{X} \geq 4) = P(\bar{Y} \leq a) \text{에서}$$

$$P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{4-5}{\frac{3}{10}}\right) = P\left(Z_{\bar{Y}} \leq \frac{a-40}{\frac{3}{4}}\right)$$

$$P\left(Z_{\bar{X}} \geq -\frac{10}{3}\right) = P\left(Z_{\bar{Y}} \leq \frac{4a-160}{3}\right)$$

$$P\left(Z_{\bar{X}} \leq \frac{10}{3}\right) = P\left(Z_{\bar{Y}} \leq \frac{4a-160}{3}\right)$$

$$\text{즉, } \frac{10}{3} = \frac{4a-160}{3} \text{이므로}$$

$$10 = 4a - 160, \quad 4a = 170$$

$$\therefore a = 42.5$$

480 ㉢

모집단이 정규분포 $N(m, 5^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 36이므로 36명의 일주일 근무 시간의 평균을 $\bar{X}$ 라

하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(m, \frac{5^2}{36}\right)$, 즉

$N\left(m, \left(\frac{5}{6}\right)^2\right)$ 을 따른다.

$$Z = \frac{\bar{X} - m}{\frac{5}{6}} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분}$$

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(\bar{X} \geq 38) = 0.9332$ 에서

$$P\left(Z \geq \frac{38-m}{\frac{5}{6}}\right) = 0.9332$$

$$P\left(Z \geq \frac{228-6m}{5}\right) = 0.9332$$

$$P\left(Z \leq \frac{6m-228}{5}\right) = 0.9332$$

$$P(Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{6m-228}{5}\right) = 0.9332$$

$$0.5 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{6m-228}{5}\right) = 0.9332$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{6m-228}{5}\right) = 0.4332$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5) = 0.4332$ 이므로

$$\frac{6m-228}{5} = 1.5, \quad 6m - 228 = 7.5$$

$$\therefore m = 39.25$$

481 ㉣

임의추출한 300명 중에서 도보로 등교하는 학생의 비율을 $\hat{p}$ 이라 하면 모비율이 0.75, 표본의 크기가 300이므로

$$E(\hat{p}) = 0.75$$

$$V(\hat{p}) = \frac{0.75 \times 0.25}{300} = 0.000625 = 0.025^2$$

표본의 크기 300은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$ 은 근사적으로 정규분포 $N(0.75, 0.025^2)$ 을 따른다.

$Z = \frac{\hat{p} - 0.75}{0.025}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포

$N(0, 1)$ 을 따르므로 $P\left(\hat{p} \leq \frac{a}{100}\right) = 0.1151$ 에서

$$P\left(Z \leq \frac{\frac{a}{100} - 0.75}{0.025}\right) = 0.1151$$

$$P\left(Z \leq \frac{a-75}{2.5}\right) = 0.1151$$

$$P\left(Z \geq \frac{75-a}{2.5}\right) = 0.1151$$

$$P(Z \geq 0) - P\left(0 \leq Z \leq \frac{75-a}{2.5}\right) = 0.1151$$

$$0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{75-a}{2.5}\right) = 0.1151$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{75-a}{2.5}\right) = 0.3849$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.2) = 0.3849$ 이므로

$$\frac{75-a}{2.5} = 1.2, \quad 75 - a = 3$$

$$\therefore a = 72$$

482 ㉡ 0.02

| 접근 방법 | 감귤 100개의 무게의 평균과 1등급 상품인 상자의 개수를 각각 확률변수 $\bar{X}$, Y 라 하면

$P(100\bar{X} \geq 12000) = p$ 일 때, Y 는 이항분포 $B(400, p)$ 를 따름을 이용한다.

모집단이 정규분포 $N(117.4, 20^2)$ 을 따르고 표본의 크기가 100이므로 100개의 감귤의 무게의 평균을 $\bar{X}$ 라 하면 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N(117.4, \frac{20^2}{100})$, 즉 $N(117.4, 2^2)$ 을 따른다.

$Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - 117.4}{2}$ 로 놓으면 확률변수 $Z_{\bar{X}}$ 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 한 상자가 1등급 상품으로 정해질 확률은

$$\begin{aligned} P(100\bar{X} \geq 12000) &= P(\bar{X} \geq 120) \\ &= P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{120 - 117.4}{2}\right) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \geq 1.3) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \geq 0) - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 1.3) \\ &= 0.5 - 0.4 = 0.1 \end{aligned}$$

1등급 상품인 상자의 개수를 확률변수 Y 라 하면 Y 는 이항분포 $B(400, 0.1)$ 을 따르므로

$$E(Y) = 400 \times 0.1 = 40$$

$$V(Y) = 400 \times 0.1 \times 0.9 = 36 = 6^2$$

이때 시행 횟수 400은 충분히 크므로 확률변수 Y 는 근사적으로 정규분포 $N(40, 6^2)$ 을 따른다.

$Z_Y = \frac{Y - 40}{6}$ 으로 놓으면 확률변수 Z_Y 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(Y \geq 52) &= P\left(Z_Y \geq \frac{52 - 40}{6}\right) = P(Z_Y \geq 2) \\ &= P(Z_Y \geq 0) - P(0 \leq Z_Y \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.48 = 0.02 \end{aligned}$$

483 ㉡ ③

| 접근 방법 | 주어진 등식을 이용하여 확률변수 X 의 평균과 표준편차를 구하여 X 가 따르는 정규분포를 구한다.

확률분포 X 가 따르는 정규분포를 $N(m, \sigma^2)$ 이라 하면 $P(X \geq 3.4) = \frac{1}{2}$ 에서 $m = 3.4$

$Z = \frac{X - 3.4}{\sigma}$ 로 놓으면 확률변수 Z 는 표준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(X \leq 3.9) + P(Z \leq -1) = 1$ 에서

$$P\left(Z \leq \frac{3.9 - 3.4}{\sigma}\right) + P(Z \leq -1) = 1$$

$$P\left(Z \leq \frac{0.5}{\sigma}\right) + P(Z \geq 1) = 1$$

$$\text{즉, } \frac{0.5}{\sigma} = 1 \text{ 이므로 } \sigma = 0.5$$

표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포

$$N\left(3.4, \frac{0.5^2}{25}\right), \text{ 즉 } N(3.4, 0.1^2) \text{을 따른다.}$$

$$Z_{\bar{X}} = \frac{\bar{X} - 3.4}{0.1} \text{로 놓으면 확률변수 } Z_{\bar{X}} \text{는 표준정규분}$$

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \geq 3.55) &= P\left(Z_{\bar{X}} \geq \frac{3.55 - 3.4}{0.1}\right) = P(Z_{\bar{X}} \geq 1.5) \\ &= P(Z_{\bar{X}} \geq 0) - P(0 \leq Z_{\bar{X}} \leq 1.5) \\ &= 0.5 - 0.4332 = 0.0668 \end{aligned}$$

484 ㉡ 102

| 접근 방법 | 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(a - x)$ 를 만족시키는 함수 $f(x)$ 는 직선 $x = \frac{a}{2}$ 에 대하여 대칭임을 이용하여 모집단의 모평균 m 을 구한다.

확률밀도함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) = f(200 - x) \text{를 만족시키므로}$$

$$m = \frac{200}{2} = 100$$

모평균이 100, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 64이

$$\text{므로 표본평균 } \bar{X} \text{는 정규분포 } N\left(100, \frac{5^2}{64}\right), \text{ 즉}$$

$$N\left(100, \left(\frac{5}{8}\right)^2\right) \text{을 따른다.}$$

$$Z = \frac{\bar{X} - 100}{\frac{5}{8}} \text{으로 놓으면 확률변수 } Z \text{는 표준정규분}$$

포 $N(0, 1)$ 을 따르므로 $P(99 \leq \bar{X} \leq k) = 0.9445$ 에서

$$P\left(\frac{99 - 100}{\frac{5}{8}} \leq Z \leq \frac{k - 100}{\frac{5}{8}}\right) = 0.9445$$

$$P(-1.6 \leq Z \leq \frac{8k - 800}{5}) = 0.9445$$

$$P(-1.6 \leq Z \leq 0) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{8k - 800}{5}\right) = 0.9445$$

$$P(0 \leq Z \leq 1.6) + P\left(0 \leq Z \leq \frac{8k - 800}{5}\right) = 0.9445$$

$$0.4452 + P\left(0 \leq Z \leq \frac{8k - 800}{5}\right) = 0.9445$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{8k - 800}{5}\right) = 0.4993$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 3.2) = 0.4993$ 이므로

$$\frac{8k - 800}{5} = 3.2, 8k - 800 = 16$$

$$\therefore k = 102$$

02 모평균과 모비율의 추정

개념 확인

245쪽

485 ㉡ (1) $8.04 \leq m \leq 11.96$

(2) $7.42 \leq m \leq 12.58$

표본의 크기 $n=9$, 표본평균 $\bar{x}=10$, 모표준편차 $\sigma=3$ 이므로

(1) 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$10 - 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{9}} \leq m \leq 10 + 1.96 \times \frac{3}{\sqrt{9}}$$

$$\therefore 8.04 \leq m \leq 11.96$$

(2) 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$10 - 2.58 \times \frac{3}{\sqrt{9}} \leq m \leq 10 + 2.58 \times \frac{3}{\sqrt{9}}$$

$$\therefore 7.42 \leq m \leq 12.58$$

486 ㉡ (1) 3,136 (2) 4,128

표본의 크기 $n=25$, 모표준편차 $\sigma=4$ 이므로

(1) 모평균 m 을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{25}} = 3,136$$

(2) 모평균 m 을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.58 \times \frac{4}{\sqrt{25}} = 4,128$$

유제

247~251쪽

487 ㉡ $26.84 \leq m \leq 37.16$

표본의 크기가 16, 표본평균이 32, 모표준편차가 8이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$32 - 2.58 \times \frac{8}{\sqrt{16}} \leq m \leq 32 + 2.58 \times \frac{8}{\sqrt{16}}$$

$$\therefore 26.84 \leq m \leq 37.16$$

488 ㉡ $10.04 \leq m \leq 13.96$

표본의 크기 81은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 9를 이용할 수 있고, 표본평균이 12이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$12 - 1.96 \times \frac{9}{\sqrt{81}} \leq m \leq 12 + 1.96 \times \frac{9}{\sqrt{81}}$$

$$\therefore 10.04 \leq m \leq 13.96$$

489 ㉡ ④

표본의 크기가 64, 표본평균이 $\bar{x}$, 모표준편차가 40이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{40}{\sqrt{64}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{40}{\sqrt{64}}$$

이 신뢰구간이 $\bar{x} - c \leq m \leq \bar{x} + c$ 와 같으므로

$$c = 2.58 \times \frac{40}{\sqrt{64}} = 12.9$$

490 ㉡ 7

표본의 크기 196은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 28을 이용할 수 있고, 표본평균이 250이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$250 - 1.96 \times \frac{28}{\sqrt{196}} \leq m \leq 250 + 1.96 \times \frac{28}{\sqrt{196}}$$

$$\therefore 246.08 \leq m \leq 253.92$$

따라서 신뢰구간에 속하는 자연수는 247, 248, 249, ..., 253의 7개이다.

491 ㉡ 64

표본의 크기가 n , 표본평균이 11, 모표준편차가 4이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$11 - 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}} \leq m \leq 11 + 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}}$$

이 신뢰구간이 $10.02 \leq m \leq 11.98$ 과 같으므로

$$11 - 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}} = 10.02, \quad 11 + 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}} = 11.98$$

$$\text{따라서 } 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{n}} = 0.98 \text{이므로}$$

$$\sqrt{n} = 8 \quad \therefore n = 64$$

492 ㉡ 256

표본의 크기가 n , 모표준편차가 20이므로 모평균 m 을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.58 \times \frac{20}{\sqrt{n}}$$

신뢰구간의 길이가 6.45 이하이어야 하므로

$$2 \times 2.58 \times \frac{20}{\sqrt{n}} \leq 6.45, \quad \sqrt{n} \geq 16$$

$$\therefore n \geq 256$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 256이다.

493 ㉡ 4500

표본의 크기가 n , 표본평균이 $\bar{x}$, 모표준편차가 300이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{300}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{300}{\sqrt{n}}$$

이 신뢰구간이 $3574.2 \leq m \leq 3625.8$ 과 같으므로

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{300}{\sqrt{n}} = 3574.2 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\bar{x} + 2.58 \times \frac{300}{\sqrt{n}} = 3625.8 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2} - \textcircled{1}$ 을 하면

$$2 \times 2.58 \times \frac{300}{\sqrt{n}} = 51.6$$

$$\sqrt{n} = 30 \quad \therefore n = 900$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$2\bar{x} = 7200 \quad \therefore \bar{x} = 3600$$

$$\therefore n + \bar{x} = 900 + 3600 = 4500$$

494 ㉡ 4

표본의 크기가 n , 모표준편차가 σ 인 모평균 m 을 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$l_1 = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

표본의 크기가 $16n$, 모표준편차가 σ 인 모평균 m 을 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$l_2 = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16n}} = 2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{4\sqrt{n}} = \frac{l_1}{4}$$

$$\therefore \frac{l_1}{l_2} = \frac{l_1}{\frac{l_1}{4}} = 4$$

495 ㉡ 324

모표준편차가 30이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 2.58 \times \frac{30}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 2.58 \times \frac{30}{\sqrt{n}}$$

$$-2.58 \times \frac{30}{\sqrt{n}} \leq m - \bar{x} \leq 2.58 \times \frac{30}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m - \bar{x}| \leq 2.58 \times \frac{30}{\sqrt{n}}$$

이때 모평균 m 과 표본평균 $\bar{x}$ 의 차가 4.3 이하이어야 하므로

$$2.58 \times \frac{30}{\sqrt{n}} \leq 4.3, \sqrt{n} \geq 18$$

$$\therefore n \geq 324$$

따라서 n 의 최솟값은 324이다.

496 ㉡ ㄱ, ㄴ

표본의 크기를 n , $P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 $\alpha\%$ 의 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 이므로 그 신뢰구간의 길이는 $b - a = 2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도를 높게 하면 k 의 값이 커지므로 $2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 의 값은 커진다.

즉, $b - a$ 의 값은 커진다.

ㄴ. 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기를 작게 하면 $\sqrt{n}$ 의 값이 작아지므로 $2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 의 값은 커진다.

즉, $b - a$ 의 값은 커진다.

ㄷ. 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기를 4배로 늘리면

$$2k \frac{\sigma}{\sqrt{4n}} = \frac{1}{2} \times 2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

즉, $b - a$ 의 값은 $\frac{1}{2}$ 배가 된다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

497 ㉡ 25

표본평균을 $\bar{x}$ 라 하면 모표준편차가 8이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{8}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{8}{\sqrt{n}}$$

$$-1.96 \times \frac{8}{\sqrt{n}} \leq m - \bar{x} \leq 1.96 \times \frac{8}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m - \bar{x}| \leq 1.96 \times \frac{8}{\sqrt{n}}$$

이때 모평균 m 과 표본평균 $\bar{x}$ 의 차가 모표준편차의 $\frac{2}{5}$ 이하이어야 하므로

$$1.96 \times \frac{8}{\sqrt{n}} \leq 8 \times \frac{2}{5}, \sqrt{n} \geq 4.9 \quad \therefore n \geq 24.01$$

따라서 n 의 최솟값은 25이다.

498 ㉡ ㉡

$P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라 하면 모평균 m 을 신뢰도 $\alpha\%$ 로 추정한 신뢰구간의 길이는 $2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

표본의 크기를 작게 하면 $\sqrt{n}$ 의 값이 작아지고 신뢰도를 높이면 k 의 값이 커지므로 $2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 의 값은 커진다.

즉, 신뢰구간의 길이는 길어진다.

따라서 신뢰구간의 길이가 가장 긴 것은 ㉡이다.

499 ㉠ (1) $0.1608 \leq p \leq 0.2392$ (2) $0.1484 \leq p \leq 0.2516$

표본의 크기 $n=400$, 표본비율 $\hat{p}=0.2$ 이고, n 은 충분히 크므로

(1) 모비율 p 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\begin{aligned} 0.2 - 1.96 \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{400}} &\leq p \\ &\leq 0.2 + 1.96 \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{400}} \\ \therefore 0.1608 &\leq p \leq 0.2392 \end{aligned}$$

(2) 모비율 p 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\begin{aligned} 0.2 - 2.58 \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{400}} &\leq p \\ &\leq 0.2 + 2.58 \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{400}} \\ \therefore 0.1484 &\leq p \leq 0.2516 \end{aligned}$$

500 ㉠ (1) 0.196 (2) 0.258

표본의 크기 $n=100$, 표본비율 $\hat{p}=0.5$ 이고, n 은 충분히 크므로

(1) 모비율 p 를 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 1.96 \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{100}} = 0.196$$

(2) 모비율 p 를 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.58 \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{100}} = 0.258$$

501 ㉠ (1) $0.7216 \leq p \leq 0.8784$ (2) $0.6968 \leq p \leq 0.9032$

표본의 크기가 100, 표본비율이 $\frac{80}{100}=0.8$ 이고, 표본의 크기는 충분히 크므로

(1) 모비율 p 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\begin{aligned} 0.8 - 1.96 \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{100}} &\leq p \\ &\leq 0.8 + 1.96 \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{100}} \\ \therefore 0.7216 &\leq p \leq 0.8784 \end{aligned}$$

(2) 모비율 p 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\begin{aligned} 0.8 - 2.58 \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{100}} &\leq p \\ &\leq 0.8 + 2.58 \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{100}} \\ \therefore 0.6968 &\leq p \leq 0.9032 \end{aligned}$$

502 ㉠ $0.3925 \leq p \leq 0.6075$

표본의 크기가 144, 표본비율이 0.5이고, 표본의 크기는 충분히 크므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\begin{aligned} 0.5 - 2.58 \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{144}} &\leq p \leq 0.5 + 2.58 \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{144}} \\ \therefore 0.3925 &\leq p \leq 0.6075 \end{aligned}$$

503 ㉠ 0.0245

표본의 크기가 1200, 표본비율이 0.25이고, 표본의 크기는 충분히 크므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\begin{aligned} 0.25 - 1.96 \sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{1200}} &\leq p \\ &\leq 0.25 + 1.96 \sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{1200}} \end{aligned}$$

이 신뢰구간이 $0.25 - k \leq p \leq 0.25 + k$ 와 같으므로

$$k = 1.96 \sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{1200}} = 0.0245$$

504 ㉠ 0.0681

표본의 크기가 400, 표본비율이 0.1이고, 표본의 크기는 충분히 크므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\begin{aligned} 0.1 - 1.96 \sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{400}} &\leq p \leq 0.1 + 1.96 \sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{400}} \\ \therefore 0.0706 &\leq p \leq 0.1294 \end{aligned}$$

 $\therefore a = 0.0706$ 모비율 p 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\begin{aligned} 0.1 - 2.58 \sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{400}} &\leq p \leq 0.1 + 2.58 \sqrt{\frac{0.1 \times 0.9}{400}} \\ \therefore 0.0613 &\leq p \leq 0.1387 \end{aligned}$$

 $\therefore d = 0.1387$ $\therefore d - a = 0.1387 - 0.0706 = 0.0681$

505 ㉡ 196

표본비율이 0.36이고, n 은 충분히 크므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.36 - 1.96 \sqrt{\frac{0.36 \times 0.64}{n}} \leq p \leq 0.36 + 1.96 \sqrt{\frac{0.36 \times 0.64}{n}}$$

이 신뢰구간이 $0.2928 \leq p \leq 0.4272$ 와 같으므로

$$0.36 - 1.96 \sqrt{\frac{0.36 \times 0.64}{n}} = 0.2928$$

$$0.36 + 1.96 \sqrt{\frac{0.36 \times 0.64}{n}} = 0.4272$$

$$\text{따라서 } 1.96 \sqrt{\frac{0.36 \times 0.64}{n}} = 0.0672 \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{n} = 14 \quad \therefore n = 196$$

506 ㉡ 600

표본비율이 0.6이고, n 은 충분히 크므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.58 \sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{n}}$$

신뢰구간의 길이가 0.1032 이하이어야 하므로

$$2 \times 2.58 \sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{n}} \leq 0.1032$$

$$\sqrt{\frac{n}{6}} \geq 10, \quad \frac{n}{6} \geq 100 \quad \therefore n \geq 600$$

따라서 n 의 최솟값은 600이다.

507 ㉡ 300

표본비율이 0.25이고, n 은 충분히 크므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.25 - 2.58 \sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{n}} \leq p \leq 0.25 + 2.58 \sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{n}}$$

이 신뢰구간이 $0.1855 \leq p \leq 0.3145$ 와 같으므로

$$0.25 - 2.58 \sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{n}} = 0.1855$$

$$0.25 + 2.58 \sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{n}} = 0.3145$$

$$\text{따라서 } 2.58 \sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{n}} = 0.0645 \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{\frac{n}{3}} = 10, \quad \frac{n}{3} = 100 \quad \therefore n = 300$$

508 ㉡ 256

표본비율이 0.8, n 은 충분히 크고, 모비율 p 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a \leq p \leq b$ 이므로 그 신뢰구간의 길이는

$$b - a = 2 \times 1.96 \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{n}}$$

이때 $b - a = 0.098$ 이므로

$$2 \times 1.96 \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{n}} = 0.098$$

$$\sqrt{n} = 16 \quad \therefore n = 256$$

연습문제

258~260쪽

509 ㉡ ④

표본의 크기가 1600, 모표준편차가 32일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 이므로 그 신뢰구간의 길이는

$$b - a = 2 \times 2.58 \times \frac{32}{\sqrt{1600}} = 4.128$$

510 ㉡ ④

표본의 크기가 n , 모표준편차가 2이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$-1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}} \leq m - \bar{x} \leq 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore |m - \bar{x}| \leq 1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}}$$

이때 $|m - \bar{x}| \leq 0.49$ 이어야 하므로

$$1.96 \times \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0.49$$

$$\sqrt{n} \geq 8 \quad \therefore n \geq 64$$

따라서 n 의 최솟값은 64이다.

511 ㉡ 0.785

표본의 크기가 108, 표본비율이 $\frac{27}{108} = 0.25$ 이고, 표본의 크기는 충분히 크므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.25 - 2.58 \sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{108}} \leq p$$

$$\leq 0.25 + 2.58 \sqrt{\frac{0.25 \times 0.75}{108}}$$

$$\therefore 0.1425 \leq p \leq 0.3575$$

따라서 $a=0.1425$, $b=0.3575$ 이므로
 $3a+b=3 \times 0.1425+0.3575=0.785$

512 ㉮ 150

표본비율이 0.6이고, n 은 충분히 크므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.6-1.96\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{n}} \leq p \leq 0.6+1.96\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{n}}$$

이 신뢰구간이 $0.5216 \leq p \leq 0.6784$ 와 같으므로

$$0.6-1.96\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{n}}=0.5216$$

$$0.6+1.96\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{n}}=0.6784$$

$$\text{따라서 } 1.96\sqrt{\frac{0.6 \times 0.4}{n}}=0.0784 \text{이므로}$$

$$\sqrt{\frac{n}{6}}=5, \quad \frac{n}{6}=25 \quad \therefore n=150$$

513 ㉮ 0.1376

표본의 크기가 225, 표본비율이 0.2이고, 표본의 크기는 충분히 크므로 모비율 p 를 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2 \times 2.58 \sqrt{\frac{0.2 \times 0.8}{225}}=0.1376$$

514 ㉮ 12

표본평균이 75, 표본의 크기가 16일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$75-1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \leq m \leq 75+1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

이 신뢰구간이 $a \leq m \leq b$ 와 같으므로

$$b=75+1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

또 표본평균이 77, 표본의 크기가 16일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$77-2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \leq m \leq 77+2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

이 신뢰구간이 $c \leq m \leq d$ 와 같으므로

$$d=77+2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

이때 $d-b=3.86$ 에서

$$77+2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} - \left(75+1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \right) = 3.86$$

$$0.155\sigma=1.86 \quad \therefore \sigma=12$$

515 ㉮ 20

표본평균을 $\bar{x}$ 라 하면 표본의 크기가 49, 모표준편차가 σ 이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\bar{x}-1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{49}} \leq m \leq \bar{x}+1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{49}} \quad \text{..... ①}$$

이 신뢰구간이 $a \leq m \leq a+11.2$ 와 같으므로

$$\bar{x}-1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{49}}=a \quad \text{..... ⑦}$$

$$\bar{x}+1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{49}}=a+11.2 \quad \text{..... ⑧}$$

⑧-⑦을 하면

$$2 \times 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{49}}=11.2$$

$$\therefore \sigma=20 \quad \text{..... ②}$$

단계	채점 기준	비율
①	모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 σ 에 대하여 나타내기	40 %
②	σ 의 값 구하기	60 %

516 ㉮ ⑤

표본평균이 67.27이고, 모표준편차가 0.5이므로 모평균 m 에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$67.27-1.96 \times \frac{0.5}{\sqrt{n}} \leq m \leq 67.27+1.96 \times \frac{0.5}{\sqrt{n}}$$

이 신뢰구간이 $a \leq m \leq 67.41$ 과 같으므로

$$67.27+1.96 \times \frac{0.5}{\sqrt{n}}=67.41$$

$$\sqrt{n}=7 \quad \therefore n=49$$

$$\therefore a=67.27-1.96 \times \frac{0.5}{\sqrt{49}}=67.13$$

$$\therefore n+a=49+67.13=116.13$$

517 ㉮ 93

표본의 크기가 81, 모표준편차가 72일 때,

$$P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100} \text{라 하면 모평균을 신뢰도 } \alpha \% \text{로}$$

추정한 신뢰구간의 길이는 28.96이므로

$$2 \times k \times \frac{72}{\sqrt{81}}=28.96$$

$$16k=28.96$$

$$\therefore k=1.81$$

$$\begin{aligned} \text{이때 } P(0 \leq Z \leq 1.81) &= 0.465 \text{이므로} \\ P(|Z| \leq 1.81) &= P(-1.81 \leq Z \leq 1.81) \\ &= 2P(0 \leq Z \leq 1.81) \\ &= 2 \times 0.465 = 0.93 \end{aligned}$$

따라서 $\frac{\alpha}{100} = 0.93$ 이므로 $\alpha = 93$

518 ㉮ ⑤

표본의 크기를 n , $P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 라 하면 모평균 m 을 신뢰도 $\alpha\%$ 로 추정한 신뢰구간의 길이는

$$2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ㄱ. 동일한 표본을 사용할 때, 표본평균의 값을 $\bar{x}$ 라 하면 모평균 m 에 대한 신뢰도 $\alpha\%$ 의 신뢰구간은

$$\bar{x} - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

신뢰도가 99%일 때의 k 의 값이 신뢰도가 95%일 때의 k 의 값보다 크므로 신뢰도 99%의 신뢰구간은 신뢰도 95%의 신뢰구간을 포함한다.

ㄴ. 신뢰도를 높이면 k 의 값이 커지고 표본의 크기를 작게 하면 $\sqrt{n}$ 의 값이 작아지므로 $2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 의 값은 커진다. 즉, 신뢰구간의 길이는 길어진다.

ㄷ. 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기를 9배로 늘리면

$$2k \frac{\sigma}{\sqrt{9n}} = \frac{1}{3} \times 2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

즉, 신뢰구간의 길이는 $\frac{1}{3}$ 배가 된다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

519 ㉮ ③

표본비율이 0.5이고, n 은 충분히 크므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$0.5 - 1.96 \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{n}} \leq p \leq 0.5 + 1.96 \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{n}}$$

$$-1.96 \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{n}} \leq p - 0.5 \leq 1.96 \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{n}}$$

$$\therefore |p - 0.5| \leq 1.96 \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{n}}$$

이때 모비율과 표본비율의 차가 0.07 이하이어야 하므로

$$1.96 \sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{n}} \leq 0.07$$

$$\sqrt{n} \geq 14 \quad \therefore n \geq 196$$

따라서 n 의 최솟값은 196이다.

520 ㉮ 100

| 접근 방법 | 표본의 크기가 n , 모표준편차가 σ ,

$P(|Z| \leq k) = \frac{\alpha}{100}$ 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 $\alpha\%$ 의

신뢰구간의 길이는 $2k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 임을 이용하여 식을 세운다.

모표준편차를 σ 라 하면

$$\begin{aligned} P(|Z| \leq 1.89) &= 2P(0 \leq Z \leq 1.89) \\ &= 2 \times 0.47 = 0.94 \end{aligned}$$

이고, 표본의 크기가 9일 때 모평균 m 에 대한 신뢰도 94%의 신뢰구간의 길이가 l 이므로

$$l = 2 \times 1.89 \times \frac{\sigma}{\sqrt{9}} = 1.26\sigma$$

$$\begin{aligned} P(|Z| \leq 2.52) &= 2P(0 \leq Z \leq 2.52) \\ &= 2 \times 0.49 = 0.98 \end{aligned}$$

이고, 표본의 크기가 n 일 때 모평균 m 에 대한 신뢰도 98%의 신뢰구간의 길이가 $\frac{2}{5}l$ 이므로

$$2 \times 2.52 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{5} \times 1.26\sigma$$

$$\sqrt{n} = 10 \quad \therefore n = 100$$

521 ㉮ 320

| 접근 방법 | 모비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 $\hat{p}$, n 에 대한 식으로 나타낸 후 주어진 신뢰구간을 이용하여 $\hat{p}$, n 의 값을 구한다.

표본비율이 $\hat{p}$ 이고, n 은 충분히 크므로 모비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$\hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq p \leq \hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

이 신뢰구간이 $0.7608 \leq p \leq 0.8392$ 와 같으므로

$$\hat{p} - 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.7608 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\hat{p} + 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.8392 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠ + ㉡을 하면

$$2\hat{p} = 1.6 \quad \therefore \hat{p} = 0.8$$

㉡ - ㉠을 하면

$$2 \times 1.96 \sqrt{\frac{0.8 \times 0.2}{n}} = 0.0784$$

$$\sqrt{n} = 20 \quad \therefore n = 400$$

따라서 구하는 학생의 수는

$$400 \times 0.8 = 320$$

Handwriting practice lines consisting of 20 horizontal dotted lines.

