유형 만렙

# 정답과 해설

## 확률과 통계

# 01 / 중복순열과 같은 것이 있는 순열

## A 개념 확인 8~9쪽

**0001** 답 6

${}_6\Pi_1=6^1=6$

**0002** 답 8

${}_2\Pi_3=2^3=8$

**0003** 답 25

${}_5\Pi_2=5^2=25$

**0004** 답 256

${}_4\Pi_4=4^4=256$

**0005** 답 12

${}_n\Pi_2=144$에서

$n^2=12^2$ $\therefore n=12$

**0006** 답 3

${}_n\Pi_3=27$에서

$n^3=3^3$ $\therefore n=3$

**0007** 답 7

${}_2\Pi_r=128$에서

$2^r=2^7$ $\therefore r=7$

**0008** 답 3

${}_5\Pi_r=125$에서

$5^r=5^3$ $\therefore r=3$

**0009** 답 243

구하는 경우의 수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$

**0010** 답 216

구하는 경우의 수는

${}_6\Pi_3=6^3=216$

**0011** 답 81

구하는 경우의 수는 3개의 문자에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$

**0012** 답 64

구하는 경우의 수는 2개에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_6=2^6=64$

**0013** 답 105

구하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\times4!}=105$

**0014** 답 30

구하는 경우의 수는 맨 앞자리에 $a$를 고정시키고 나머지 문자 $a$, $b$, $b$, $b$, $b$, $c$를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{6!}{4!}=30$

**0015** 답 60

구하는 자연수의 개수는

$\frac{6!}{2!\times3!}=60$

**0016** 답 20

구하는 자연수의 개수는 일의 자리에 1을 고정시키고 나머지 숫자 1, 2, 2, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{3!}=20$

**0017** 답 20

구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times3!}=20$

## B 유형 완성 10~17쪽

**0018** 답 ③

구하는 경우의 수는 4개의 접시에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

**0019** 답 128

구하는 경우의 수는 2종류의 아이스크림에서 7종류를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_7=2^7=128$

**0020** 답 ④

A 지역의 중학생 3명을 고등학교에 배정하는 경우의 수는 3곳의 고등학교에서 3곳을 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_3=3^3=27$

B 지역의 중학생 2명을 고등학교에 배정하는 경우의 수는 4곳의 고등학교에서 2곳을 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$27\times16=432$

## 0021 답 ⑤

5개의 문자에서 4개를 택하는 중복순열의 수는

${}_5\Pi_4=5^4=625$

문자 $a$를 포함하지 않는 경우의 수는 문자 $a$를 제외한 나머지 4개의 문자에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_4=4^4=256$

따라서 구하는 경우의 수는

$625-256=369$

## 0022 답 ③

A가 미국 또는 영국을 여행하는 경우의 수는 2

B, C가 여행하는 경우의 수는 5개의 나라에서 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 경우의 수는

$2\times25=50$

## 0023 답 62

6명의 학생을 2개의 반 A, B에 배정하는 경우의 수는 2개의 반에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_6=2^6=64$

6명의 학생을 모두 같은 반에 배정하는 경우의 수는 2

따라서 구하는 경우의 수는

$64-2=62$

## 0024 답 232

4명의 선거인이 1명의 후보에게 각각 기명으로 투표하는 경우의 수는 4명의 후보에서 4명을 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_4\Pi_4=4^4=256$ …… ⓘ

4명의 선거인이 모두 다른 후보에게 투표하는 경우의 수는 4명의 후보에서 4명을 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_4P_4=24$ …… ⓘⓘ

따라서 구하는 경우의 수는

$256-24=232$ …… ⓘⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ 전체 경우의 수 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ 4명의 선거인이 모두 다른 후보에게 투표하는 경우의 수 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ 적어도 2명의 선거인이 같은 후보에게 투표하는 경우의 수 구하기 | 20 % |

## 0025 답 ④

문자 V를 다섯 자리 중에서 두 자리에 배열하는 경우의 수는 5개의 자리에서 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로 ${}_5C_2=10$

나머지 자리에 문자를 배열하는 경우의 수는 문자 V를 제외한 나머지 3개의 문자에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_3=3^3=27$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times27=270$

## 0026 답 ⑤

서로 다른 6개의 공 중에서 주머니 A에 3개의 공을 넣는 경우의 수는 6개의 공에서 3개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_6C_3=20$

나머지 3개의 공을 두 주머니 B, C에 나누어 넣는 경우의 수는 2개의 주머니에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\times8=160$

## 0027 답 ④

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지

홀수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3의 2가지

나머지 자리에 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$4\times2\times25=200$

## 0028 답 48

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3의 3가지

나머지 자리에 4개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$3\times16=48$

## 0029 답 ①

(i) 천의 자리의 숫자가 1인 경우

나머지 자리에 4개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

(ii) 천의 자리의 숫자가 2이고, 백의 자리의 숫자가 0인 경우

나머지 자리에 4개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$64+16=80$

## 0030 답 52

(i) 0, 1, 2, 3, 4에서 택하여 자연수를 만드는 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지

나머지 자리에 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 세 자리의 자연수의 개수는

$4\times25=100$ …… ⓘ

(ii) 3을 제외하고 0, 1, 2, 4에서 택하여 자연수를 만드는 경우
백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 4의 3가지
나머지 자리에 4개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는
${}_4\Pi_2=4^2=16$
따라서 숫자 3을 포함하지 않는 세 자리의 자연수의 개수는
$3\times16=48$ …… ii
(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는
$100-48=52$ …… iii

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| i 세 자리의 자연수의 개수 구하기 | 40 % |
| ii 숫자 3을 포함하지 않는 세 자리의 자연수의 개수 구하기 | 40 % |
| iii 숫자 3을 적어도 1개는 포함하는 세 자리의 자연수의 개수 구하기 | 20 % |

## 0031 답 ⑤

(i) 0, 1, 2에서 택하여 자연수를 만드는 경우
천의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2의 2가지
나머지 자리에 3개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는
${}_3\Pi_3=3^3=27$
따라서 네 자리의 자연수의 개수는
$2\times27=54$
(ii) 각 자리의 수의 합이 7보다 큰 경우
2222의 1가지
(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는
$54-1=53$

## 0032 답 ②

두 부호를 3개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_2\Pi_3=2^3=8$
두 부호를 4개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_2\Pi_4=2^4=16$
두 부호를 5개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_2\Pi_5=2^5=32$
따라서 구하는 신호의 개수는
$8+16+32=56$

## 0033 답 340

네 기호를 1개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_4\Pi_1=4$
네 기호를 2개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_4\Pi_2=4^2=16$
네 기호를 3개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_4\Pi_3=4^3=64$
네 기호를 4개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_4\Pi_4=4^4=256$
따라서 구하는 신호의 개수는
$4+16+64+256=340$

## 0034 답 ②

세 기호를 1개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_3\Pi_1=3$
세 기호를 2개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_3\Pi_2=3^2=9$
세 기호를 3개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_3\Pi_3=3^3=27$
세 기호를 4개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_3\Pi_4=3^4=81$
세 기호를 5개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는
${}_3\Pi_5=3^5=243$
$n=4$일 때, 서로 다른 신호의 개수는
$3+9+27+81=120<300$
$n=5$일 때, 서로 다른 신호의 개수는
$3+9+27+81+243=363>300$
따라서 $n$의 최솟값은 5이다.

## 0035 답 27

전체집합 $U$의 원소 1, 2, 3, 4, 5 중에서 2, 4는 집합 $A\cap B$의 원소이고, 1, 3, 5는 세 집합 $A-B$, $B-A$, $(A\cup B)^C$ 중에서 어느 하나의 원소이다.
따라서 구하는 경우의 수는 3개의 집합에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_3\Pi_3=3^3=27$

## 0036 답 ③

$A\cup B=U$이므로 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4\}$
집합 $A\cap B$에 속하는 1개의 원소를 택하는 경우의 수는
${}_4C_1=4$
집합 $A\cap B$에 속하지 않는 나머지 3개의 원소는 두 집합 $A-B$, $B-A$ 중에서 어느 하나의 원소이다.
즉, 나머지 3개의 원소가 속하는 집합을 정하는 경우의 수는 2개의 집합에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로
${}_2\Pi_3=2^3=8$
따라서 구하는 경우의 수는
$4\times8=32$

## 0037 답 ④

$f(1)\neq1$이므로 $f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 2, 3, 4, 5의 4가지
또 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 $X$의 원소 2, 3에 대응시키는 경우의 수는
${}_5\Pi_2=5^2=25$
따라서 구하는 함수의 개수는
$4\times25=100$

다른 풀이

$X$에서 $Y$로의 함수의 개수는 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 $X$의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_5\Pi_3=5^3=125$

$X$에서 $Y$로의 함수 중에서 $f(1)=1$인 함수의 개수는 집합 $X$의 원소 1에 대응하는 집합 $Y$의 원소는 1로 고정시키고, 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 $X$의 원소 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 함수의 개수는

$125-25=100$

## 0038 답 4

$X$에서 $Y$로의 함수의 개수는 집합 $Y$의 원소 $a$, $b$, $c$, $d$의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 $X$의 원소 $-1$, 1에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16 \quad \therefore m=16$

$X$에서 $Y$로의 일대일함수의 개수는 집합 $Y$의 원소 $a$, $b$, $c$, $d$의 4개에서 서로 다른 2개를 택하여 집합 $X$의 원소 $-1$, 1에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{P}_2=12 \quad \therefore n=12$

$\therefore m-n=16-12=4$

## 0039 답 9

$X$에서 $Y$로의 함수 중에서 $f(-1)=4$, $f(3)=6$인 함수의 개수는 집합 $X$의 원소 $-1$과 3에 대응하는 집합 $Y$의 원소는 각각 4와 6으로 고정시키고, 집합 $Y$의 원소 2, 4, 6의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 $X$의 원소 $-3$, 1에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_3\Pi_2=3^2=9$

## 0040 답 ④

$X$에서 $Y$로의 함수의 개수는 집합 $Y$의 원소 1, 2의 2개에서 중복을 허용하여 5개를 택하여 집합 $X$의 원소 $a$, $b$, $c$, $d$, $e$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

이때 치역이 $\{1\}$인 함수의 개수는 1, 치역이 $\{2\}$인 함수의 개수는 1이므로 치역과 공역이 같은 함수의 개수는

$32-(1+1)=30$

## 0041 답 ④

양 끝에 p, n을 고정시키고 그 사이에 나머지 a, s, s, i, o의 5개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

p, n끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$60\times2=120$

## 0042 답 5040

구하는 경우의 수는

$\frac{8!}{2!\times2!\times2!}=5040$

## 0043 답 60

파란 공이 홀수 개 있으므로 가운데에 파란 공 1개를 놓아야 한다.

가운데에 놓은 파란 공을 기준으로 한쪽에 노란 공 2개, 파란 공 1개, 흰 공 3개를 일렬로 배열하면 반대쪽은 좌우 대칭이 되므로 공의 순서가 정해진다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times3!}=60$

## 0044 답 ③

모음 a, i, i를 한 문자 A로 생각하여 A, s, s, s, t, t, t, c를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{8!}{3!\times3!}=1120$

모음 a, i, i끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!}=3$

따라서 구하는 경우의 수는

$1120\times3=3360$

## 0045 답 ④

$b$와 $d$를 제외한 $a$, $a$, $c$, $c$, $c$, $e$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times3!}=60$

$a$, $a$, $c$, $c$, $c$, $e$의 사이사이와 양 끝의 7개의 자리에서 2개를 택하여 $b$와 $d$를 배열하는 경우의 수는

${}_7\mathrm{P}_2=42$

따라서 구하는 경우의 수는

$60\times42=2520$

다른 풀이

(i) $a$, $a$, $b$, $c$, $c$, $c$, $d$, $e$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{8!}{2!\times3!}=3360$

(ii) $b$와 $d$를 한 문자 B로 생각하여 $a$, $a$, B, $c$, $c$, $c$, $e$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\times3!}=420$

$b$, $d$끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

즉, $b$와 $d$가 서로 이웃하도록 배열하는 경우의 수는

$420\times2=840$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3360-840=2520$

## 0046 답 16

집합 $Y$의 원소 4, 5, 6의 3개에서 중복을 허용하여 4개를 택할 때, 그 합이 19인 경우는

(4, 4, 5, 6) 또는 (4, 5, 5, 5) …… ❶

(i) 함숫값이 4, 4, 5, 6인 함수의 개수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(ii) 함숫값이 4, 5, 5, 5인 함수의 개수는

$\frac{4!}{3!}=4$ …… ❷

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

12+4=16 …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=19$인 경우 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘ 함숫값이 4, 4, 5, 6 또는 4, 5, 5, 5인 함수의 개수 구하기 | 50 % |
| ⓘⓘⓘ $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=19$인 함수의 개수 구하기 | 20 % |

## 0047 답 ⑤

(i) 1단씩 0번, 2단씩 4번 오르는 경우의 수는 1

(ii) 1단씩 2번, 2단씩 3번 오르는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times 3!}=10$

(iii) 1단씩 4번, 2단씩 2번 오르는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!\times 2!}=15$

(iv) 1단씩 6번, 2단씩 1번 오르는 경우의 수는

$\frac{7!}{6!}=7$

(v) 1단씩 8번, 2단씩 0번 오르는 경우의 수는 1

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

1+10+15+7+1=34

다른 풀이

(i) 2단씩 오르는 횟수가 0인 경우

계단을 오르는 8번 중에서 2단을 오르는 경우는 없으므로 경우의 수는 1

(ii) 2단씩 오르는 횟수가 1인 경우

계단을 오르는 7번 중에서 2단을 오르는 1번을 고르는 경우의 수는 ${}_7C_1=7$

(iii) 2단씩 오르는 횟수가 2인 경우

계단을 오르는 6번 중에서 2단을 오르는 2번을 고르는 경우의 수는 ${}_6C_2=15$

(iv) 2단씩 오르는 횟수가 3인 경우

계단을 오르는 5번 중에서 2단을 오르는 3번을 고르는 경우의 수는 ${}_5C_3={}_5C_2=10$

(v) 2단씩 오르는 횟수가 4인 경우

계단을 오르는 4번 중에서 2단을 오르는 4번을 고르는 경우의 수는 1

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

1+7+15+10+1=34

## 0048 답 ②

(i) o끼리 서로 이웃하는 경우

2개의 o를 한 문자 O로 생각하여 f, O, l, l, w를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(ii) l끼리 서로 이웃하는 경우

2개의 l을 한 문자 L로 생각하여 f, o, L, o, w를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(iii) o끼리, l끼리 모두 서로 이웃하는 경우

2개의 o, 2개의 l을 각각 문자 O, L로 생각하여 f, O, L, w를 일렬로 배열하는 경우의 수는

4!=24

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

60+60−24=96

## 0049 답 1260

t, c의 순서가 정해져 있으므로 t, c를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, X, e, e, a, h, r를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X를 t로, 두 번째 X를 c로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\times 2!}=1260$

## 0050 답 ⑤

o, a, e의 순서가 정해져 있으므로 o, a, e를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, X, X, r, n, g를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X를 a로, 두 번째 X를 e로, 세 번째 X를 o로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!}=120$

## 0051 답 ④

빨간 구슬의 순서가 정해져 있으므로 빨간 구슬을 모두 같은 종류의 구슬로 바꾸어 생각하여 같은 종류의 빨간 구슬 6개와 같은 종류의 파란 구슬 3개를 일렬로 배열한 후 첫 번째 빨간 구슬부터 크기가 작은 순서대로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{9!}{6!\times 3!}=84$

## 0052 답 ②

1, 4와 3, 5의 순서가 각각 정해져 있으므로 1, 4를 모두 X로, 3, 5를 모두 Y로 바꾸어 생각하여 X, X, Y, Y, 2, 6을 일렬로 배열한 후 첫 번째 X는 1로, 두 번째 X는 4로 바꾸고, 첫 번째 Y는 5로, 두 번째 Y는 3으로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times 2!}=180$

## 0053 답 ④

모음 a, a, i를 한 문자로 바꾸어 생각하고, 자음 p, r, c, c, t, l을 다른 한 문자로 바꾸어 생각하여 모음이 자음보다 앞에 오도록 배열하는 경우의 수는 1

모음 a, a, i끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

자음 p, r, c, c, t, l끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!}=360$

따라서 구하는 경우의 수는 $1\times 3\times 360=1080$

## 0054 답 36

(i) 일의 자리에 2가 오는 경우

나머지 자리에 1, 2, 3, 4의 4개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$4!=24$

(ii) 일의 자리에 4가 오는 경우

나머지 자리에 1, 2, 2, 3의 4개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$24+12=36$

## 0055 답 ④

(i) 맨 앞자리에 1이 오는 경우

나머지 자리에 0, 1, 2, 3, 3의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(ii) 맨 앞자리에 2가 오는 경우

나머지 자리에 0, 1, 1, 3, 3의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

(iii) 맨 앞자리에 3이 오는 경우

나머지 자리에 0, 1, 1, 2, 3의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$60+30+60=150$

다른 풀이

0, 1, 1, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times2!}=180$

이때 맨 앞자리에 0이 오는 경우의 수는 나머지 자리에 1, 1, 2, 3, 3의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$180-30=150$

## 0056 답 ①

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리에 홀수 1, 1, 3을 배열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

나머지 자리에 2, 2, 2, 4, 4의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!\times2!}=10$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$3\times10=30$

## 0057 답 540

(i) 맨 앞자리에 3이 오는 경우

나머지 자리에 0, 1, 1, 2, 3, 4의 6개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!}=360$

(ii) 맨 앞자리에 4가 오는 경우

나머지 자리에 0, 1, 1, 2, 3, 3의 6개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times2!}=180$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$360+180=540$

## 0058 답 18

3의 배수이려면 각 자리의 숫자의 합이 3의 배수이어야 한다.

1, 1, 2, 2, 3, 3, 3에서 택한 4개의 숫자의 합이

6인 경우 ➡ 1, 1, 2, 2

9인 경우 ➡ 1, 2, 3, 3 …… ❶

(i) 1, 1, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

(ii) 1, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$ …… ❷

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$6+12=18$ …… ❸

채점 기준

| | |
|---|---|
| ❶ 택한 4개의 숫자의 합이 3의 배수가 되는 경우 구하기 | 30 % |
| ❷ 1, 1, 2, 2 또는 1, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수 구하기 | 40 % |
| ❸ 3의 배수의 개수 구하기 | 30 % |

## 0059 답 40

구하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\times\frac{5!}{2!\times3!}=4\times10=40$

## 0060 답 34

P 지점을 생각하지 않고 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{8!}{4!\times4!}=70$

A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=6\times6=36$

따라서 구하는 경우의 수는

$70-36=34$

## 0061 답 236

(i) A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\times\frac{7!}{4!\times3!}=4\times35=140$

(ii) A 지점에서 Q 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{8!}{5!\times3!}\times\frac{3!}{2!}=56\times3=168$

(iii) A 지점에서 P 지점과 Q 지점을 모두 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{3!}{2!}=4\times6\times3=72$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$140+168-72=236$

## 0062 답 ④

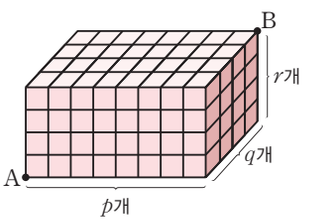
꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가려면 가로, 세로, 높이의 방향으로 각각 정육면체의 모서리를 3번, 2번, 4번 지나야 하므로 구하는 경우의 수는

$\frac{9!}{3!\times2!\times4!}=1260$

**만렙 Note**

오른쪽 그림과 같이 크기가 같은 정육면체를 가로, 세로, 높이의 칸의 개수가 각각 $p$, $q$, $r$가 되도록 쌓아 올려 직육면체를 만들었을 때, 각 정육면체의 모서리를 따라 꼭짓점 A에서 꼭짓점 B까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{(p+q+r)!}{p!\times q!\times r!}$

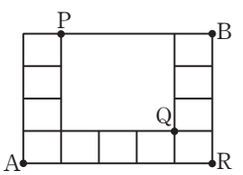



## 0063 답 26

오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

A → P → B 또는 A → Q → B

또는 A → R → B




(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{4!}\times1=5$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{4!}\times\frac{4!}{3!}=5\times4=20$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

$1\times1=1$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

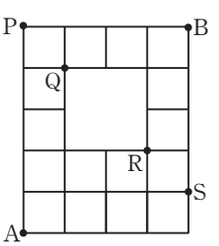
$5+20+1=26$

## 0064 답 ④

오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

A → P → B 또는 A → Q → B

또는 A → R → B 또는 A → S → B




(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$1\times1=1$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{4!}\times\frac{4!}{3!}=5\times4=20$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!\times2!}\times\frac{4!}{3!}=10\times4=40$

(iv) A → S → B로 가는 경우의 수는

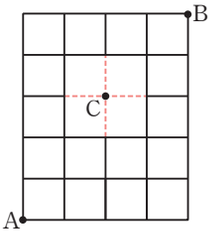
$\frac{5!}{4!}\times1=5$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$1+20+40+5=66$

**다른 풀이**

오른쪽 그림과 같이 지나갈 수 없는 길을 점선으로 연결하여 그 교점을 C라 하면 구하는 경우의 수는 A → B로 가는 경우의 수에서 A → C → B로 가는 경우의 수를 뺀 것과 같으므로

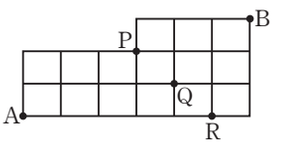



$\frac{9!}{4!\times5!}-\frac{5!}{2!\times3!}\times\frac{4!}{2!\times2!}$

$=126-10\times6=66$

## 0065 답 74

오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는




A → P → B 또는 A → Q → B

또는 A → R → B

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!\times2!}\times\frac{4!}{3!}=10\times4=40$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{4!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=5\times6=30$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

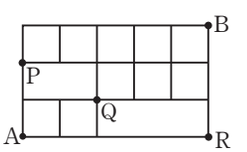
$1\times\frac{4!}{3!}=4$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$40+30+4=74$

## 0066 답 37

오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는




A → P → B 또는 A → Q → B

또는 A → R → B

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$1\times\frac{6!}{5!}=6$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\times\frac{5!}{3!\times2!}=3\times10=30$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는 $1\times1=1$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$6+30+1=37$

## AB 유형 점검 18~20쪽

### 0067 답 125

구하는 경우의 수는 5편의 영화에서 3편을 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$

### 0068 답 ④

마지막 자리에 올 수 있는 것은

$a$, $b$의 2가지

나머지 자리에 1, 3, $a$, $b$의 4개에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

따라서 구하는 암호의 개수는

$2\times256=512$

### 0069 답 ③

5의 배수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 5의 1가지

나머지 자리에 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 경우의 수는

$1\times125=125$

### 0070 답 ③

(i) 한 자리의 자연수인 경우

한 자리의 자연수는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

(ii) 두 자리의 자연수인 경우

십의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 2, 3, 4, 5의 5가지

일의 자리에 올 수 있는 숫자는

0, 1, 2, 3, 4, 5의 6가지

따라서 두 자리의 자연수의 개수는

$5\times6=30$

(iii) 세 자리의 자연수인 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는

1, 2, 3, 4, 5의 5가지

나머지 자리에 6개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_6\Pi_2=6^2=36$

따라서 세 자리의 자연수의 개수는

$5\times36=180$

(iv) 네 자리의 자연수 중에서 10□□, 11□□ 꼴인 경우

나머지 자리에 6개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$2\times{}_6\Pi_2=2\times6^2=72$

(i)~(iv)에서 1200보다 작은 자연수의 개수는

$5+30+180+72=287$

따라서 1200은 288번째 수이다.

### 0071 답 63

켜거나 끄는 것 2가지에서 6가지를 택하는 중복순열의 수는

${}_2\Pi_6=2^6=64$

이때 모든 전구가 꺼진 1가지 경우는 제외해야 하므로 구하는 신호의 개수는

$64-1=63$

### 0072 답 ⑤

전체집합 $U$의 6개의 원소 중에서 집합 $A\cup B$의 원소 5개를 택하는 경우의 수는

${}_6C_5={}_6C_1=6$

$A\cap B=\varnothing$이므로 집합 $A\cup B$의 5개의 원소는 두 집합 $A$, $B$ 중에서 어느 하나의 원소이다.

즉, 5개의 원소가 속하는 집합을 정하는 경우의 수는 2개의 집합에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 구하는 순서쌍 $(A, B)$의 개수는

$6\times32=192$

### 0073 답 180

$X$에서 $Y$로의 함수의 개수는 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 $X$의 원소 $a$, $b$, $c$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_6\Pi_3=6^3=216$ $\therefore m=216$

$X$에서 $Y$로의 함수 중에서 $f(b)=3$인 함수의 개수는 집합 $X$의 원소 $b$에 대응하는 집합 $Y$의 원소는 3으로 고정시키고, 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 $X$의 원소 $a$, $c$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_6\Pi_2=6^2=36$ $\therefore n=36$

$\therefore m-n=216-36=180$

### 0074 답 ③

$f(2)f(3)f(4)\neq0$이려면 $f(2)\neq0$, $f(3)\neq0$, $f(4)\neq0$이어야 한다.

$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $X$의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 $X$의 원소 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

$f(0)$, $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $X$의 원소 0, 1, 2, 3, 4의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 $X$의 원소 0, 1에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 함수의 개수는

$64\times25=1600$

### 0075 답 12

양 끝에 두 개의 m을 고정시키고 그 사이에 나머지 u, u, s, e의 4개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

## 0076 답 ⑤

$b$와 $c$를 한 문자 B로 생각하여 $a$, $a$, B, $d$, $d$, $d$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times 3!}=60$

$b$, $c$끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는

$2!=2$

따라서 구하는 경우의 수는

$60\times 2=120$

## 0077 답 ⑤

빨간 공 2개, 검은 공 4개를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times 4!}=15$

빨간 공 2개와 검은 공 4개의 사이사이와 양 끝의 7개의 자리에서 2개를 택하여 흰 공 2개를 배열하는 경우의 수는

${}_7C_2=21$

따라서 구하는 경우의 수는

$15\times 21=315$

다른 풀이

흰 공 2개, 빨간 공 2개, 검은 공 4개를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{8!}{2!\times 2!\times 4!}=420$

흰 공 2개를 한 묶음으로 생각하여 7개의 공을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!\times 4!}=105$

따라서 구하는 경우의 수는

$420-105=315$

## 0078 답 60

홀수 1, 3, 5의 순서가 정해져 있으므로 1, 3, 5를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, X, X, 2, 2, 4를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X를 1로, 두 번째 X를 3으로, 세 번째 X를 5로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times 2!}=60$

## 0079 답 ②

여섯 개의 숫자 1, 2, 2, 2, 3, 3에서 3개를 택하는 경우는

(1, 2, 2) 또는 (1, 2, 3) 또는 (1, 3, 3) 또는 (2, 2, 2)

또는 (2, 2, 3) 또는 (2, 3, 3)

(i) 1, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

(ii) 1, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$3!=6$

(iii) 1, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

(iv) 2, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는

1

(v) 2, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

(vi) 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}=3$

(i)~(vi)에서 구하는 자연수의 개수는

$3+6+3+1+3+3=19$

## 0080 답 ⑤

(i) 맨 앞자리에 1이 오고, 일의 자리에 3이 오는 경우

나머지 자리에 0, 0, 2, 2, 3의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

(ii) 맨 앞자리에 2가 오고, 일의 자리에 1이 오는 경우

나머지 자리에 0, 0, 2, 3, 3의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

(iii) 맨 앞자리에 2가 오고, 일의 자리에 3이 오는 경우

나머지 자리에 0, 0, 1, 2, 3의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

(iv) 맨 앞자리에 3이 오고, 일의 자리에 1이 오는 경우

나머지 자리에 0, 0, 2, 2, 3의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

(v) 맨 앞자리에 3이 오고, 일의 자리에 3이 오는 경우

나머지 자리에 0, 0, 1, 2, 2의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

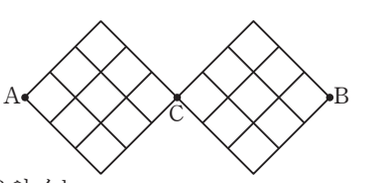
$\frac{5!}{2!\times 2!}=30$

(i)~(v)에서 구하는 자연수의 개수는

$30+30+60+30+30=180$

## 0081 답 ③

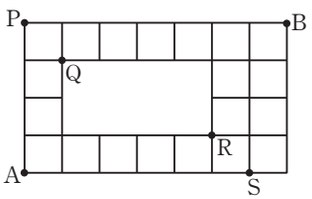
오른쪽 그림과 같이 두 마름모 모양의 도로망을 연결하는 지점을 C라 하면 A 지점에서 C 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는




$\frac{6!}{3!\times 3!}\times\frac{6!}{3!\times 3!}=20\times 20=400$

## 0082 답 94

오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는




A → P → B

또는 A → Q → B

또는 A → R → B

또는 A → S → B

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$1\times1=1$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}\times\frac{7!}{6!}=4\times7=28$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{5!}\times\frac{5!}{2!\times3!}=6\times10=60$

(iv) A → S → B로 가는 경우의 수는

$1\times\frac{5!}{4!}=5$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$1+28+60+5=94$

## 0083 답 300

(i) 천의 자리에 3이 오는 경우

백의 자리에 4 또는 5가 오고, 나머지 자리에 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

$2\times{}_5\Pi_2=2\times5^2=50$ …… ❶

(ii) 천의 자리에 4가 오는 경우

나머지 자리에 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$ …… ❷

(iii) 천의 자리에 5가 오는 경우

나머지 자리에 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$ …… ❸

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$50+125+125=300$ …… ❹

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ 천의 자리에 3이 오는 경우의 수 구하기 | 30 % |
| ❷ 천의 자리에 4가 오는 경우의 수 구하기 | 30 % |
| ❸ 천의 자리에 5가 오는 경우의 수 구하기 | 30 % |
| ❹ 3400보다 큰 자연수의 개수 구하기 | 10 % |

## 0084 답 32

(나)에서 $f(1)+f(3)=5$이므로

$f(1)=1$, $f(3)=4$ 또는 $f(1)=2$, $f(3)=3$

또는 $f(1)=3$, $f(3)=2$ 또는 $f(1)=4$, $f(3)=1$ …… ❶

(i) $f(1)=1$, $f(3)=4$일 때

(가)에서 치역의 원소의 개수가 2이므로 치역은 $\{1, 4\}$이다.

따라서 함수 $f$의 개수는 1, 4의 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 $X$의 원소 2, 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

(ii) $f(1)=2$, $f(3)=3$일 때

(가)에서 치역의 원소의 개수가 2이므로 치역은 $\{2, 3\}$이다.

따라서 함수 $f$의 개수는 2, 3의 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 $X$의 원소 2, 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

(iii) $f(1)=3$, $f(3)=2$일 때

(가)에서 치역의 원소의 개수가 2이므로 치역은 $\{2, 3\}$이다.

따라서 함수 $f$의 개수는 2, 3의 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 $X$의 원소 2, 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

(iv) $f(1)=4$, $f(3)=1$일 때

(가)에서 치역의 원소의 개수가 2이므로 치역은 $\{1, 4\}$이다.

따라서 함수 $f$의 개수는 1, 4의 2개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 $X$의 원소 2, 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$ …… ❷

(i)~(iv)에서 구하는 함수의 개수는

$8+8+8+8=32$ …… ❸

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ $f(1)+f(3)=5$를 만족시키는 $f(1)$, $f(3)$의 값 구하기 | 20 % |
| ❷ 각 경우에서 함수의 개수 구하기 | 60 % |
| ❸ 함수 $f$의 개수 구하기 | 20 % |

## 0085 답 192

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{10!}{5!\times5!}=252$ …… ❶

A 지점에서 P 지점과 Q 지점 사이의 도로를 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!}\times1\times\frac{6!}{3!\times3!}=3\times1\times20=60$ …… ❷

따라서 구하는 경우의 수는

$252-60=192$ …… ❸

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수 구하기 | 40 % |
| ❷ A 지점에서 P 지점과 Q 지점 사이의 도로를 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수 구하기 | 40 % |
| ❸ A 지점에서 P 지점과 Q 지점 사이의 도로를 거치지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수 구하기 | 20 % |

## C 실력 향상 21쪽

### 0086 답 ④

(i) B가 받는 사탕의 개수가 0인 경우

5개의 사탕을 2명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는 2명의 학생에서 5명을 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

이때 A가 사탕을 받지 못하는 경우의 수는 1

따라서 그 경우의 수는 $32-1=31$

(ii) B가 받는 사탕의 개수가 1인 경우

B가 받는 사탕을 정하는 경우의 수는

${}_5C_1=5$

남은 4개의 사탕을 2명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는 2명의 학생에서 4명을 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_4=2^4=16$

이때 A가 사탕을 받지 못하는 경우의 수는 1

따라서 그 경우의 수는 $5\times(16-1)=75$

(iii) B가 받는 사탕의 개수가 2인 경우

B가 받는 사탕을 정하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

남은 3개의 사탕을 2명의 학생 A, C에게 나누어 주는 경우의 수는 2명의 학생에서 3명을 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_3=2^3=8$

이때 A가 사탕을 받지 못하는 경우의 수는 1

따라서 그 경우의 수는 $10\times(8-1)=70$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$31+75+70=176$

### 0087 답 1200

(i) $a$를 택하지 않는 경우

5개의 문자 $b$, $c$, $d$, $e$, $f$에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_5\Pi_4=5^4=625$

(ii) $a$를 1번 택하는 경우

문자 $a$를 놓을 자리를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

나머지 자리에 5개의 문자 $b$, $c$, $d$, $e$, $f$에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 $a$를 1번 택하는 경우의 수는 $4\times125=500$

(iii) $a$를 2번 택하는 경우

문자 $a$가 연속으로 2번 오지 않도록 2개의 $a$를 배열하는 경우는 $a\square a\square$, $a\square\square a$, $\square a\square a$의 3가지

나머지 자리에 5개의 문자 $b$, $c$, $d$, $e$, $f$에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 $a$를 2번 택하는 경우의 수는 $3\times25=75$

(iv) $a$를 3번 택하는 경우

문자 $a$는 항상 2번 또는 3번 연속으로 온다.

(v) $a$를 4번 택하는 경우

$aaaa$이므로 문자 $a$는 항상 4번 연속으로 온다.

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$625+500+75=1200$

### 0088 답 ①

다섯 자리의 자연수를 만들 때 (가)에서 선택할 수 있는 홀수의 개수는 0, 1, 2, 3이고, (나)에서 선택할 수 있는 짝수의 개수는 0, 2, 4이다.

따라서 선택할 수 있는 다섯 개의 숫자는 홀수 1개, 짝수 4개 또는 홀수 3개, 짝수 2개이어야 한다.

(i) 홀수 1개, 짝수 4개를 선택하는 경우

홀수 1, 3, 5 중에서 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

짝수 2, 4, 6 중에서 2개를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

택한 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

따라서 자연수의 개수는 $3\times3\times30=270$

(ii) 홀수 3개, 짝수 2개를 선택하는 경우

홀수 1, 3, 5를 모두 선택하는 경우의 수는 ${}_3C_3=1$

짝수 2, 4, 6 중에서 1개를 선택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

택한 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

따라서 자연수의 개수는 $1\times3\times60=180$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$270+180=450$

### 0089 답 12

오른쪽으로 한 칸 가는 것을 $a$, 위쪽으로 한 칸 가는 것을 $b$, 대각선으로 한 칸 가는 것을 $c$라 하고, $a$와 $b$의 길이를 각각 1이라 하자.

(i) 대각선을 0번 이용하는 경우

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 것은 3개의 $a$와 3개의 $b$를 일렬로 배열하는 것과 같고, 이동한 거리는 6이다.

(ii) 대각선을 1번 이용하는 경우

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 것은 2개의 $a$와 2개의 $b$와 1개의 $c$를 일렬로 배열하는 것과 같고, 이동한 거리는 $4+\sqrt{2}$이다.

(iii) 대각선을 2번 이용하는 경우

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 것은 1개의 $a$와 1개의 $b$와 2개의 $c$를 일렬로 배열하는 것과 같고, 이동한 거리는 $2+2\sqrt{2}$이다.

(i), (ii), (iii)에서 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는 대각선을 2번 이용하는 경우이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $a$, $b$, $c$, $c$를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로

$\frac{4!}{2!}=12$

# 02 / 중복조합과 이항정리

## A 개념 확인 22~23쪽

**0090** 답 4

${}_2\mathrm{H}_3={}_4\mathrm{C}_3={}_4\mathrm{C}_1=4$

**0091** 답 6

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

**0092** 답 35

${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$

**0093** 답 495

${}_5\mathrm{H}_8={}_{12}\mathrm{C}_8={}_{12}\mathrm{C}_4=495$

**0094** 답 8

${}_2\mathrm{H}_7={}_8\mathrm{C}_7={}_8\mathrm{C}_1$이므로 ${}_8\mathrm{C}_1={}_n\mathrm{C}_1$에서 $n=8$

**0095** 답 3

${}_4\mathrm{H}_r={}_{3+r}\mathrm{C}_r={}_{3+r}\mathrm{C}_3$이므로 ${}_{3+r}\mathrm{C}_3={}_6\mathrm{C}_3$에서

$3+r=6 \quad \therefore r=3$

**0096** 답 10

구하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

**0097** 답 56

구하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_5={}_8\mathrm{C}_5={}_8\mathrm{C}_3=56$

**0098** 답 35

구하는 경우의 수는 4개의 문자에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=35$

**0099** 답 252

구하는 경우의 수는 6개의 숫자에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_6\mathrm{H}_5={}_{10}\mathrm{C}_5=252$

**0100** 답 $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^4={}_4\mathrm{C}_0a^4+{}_4\mathrm{C}_1a^3b+{}_4\mathrm{C}_2a^2b^2+{}_4\mathrm{C}_3ab^3+{}_4\mathrm{C}_4b^4$

$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

**0101** 답 $x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$

$(x-y)^5={}_5\mathrm{C}_0x^5+{}_5\mathrm{C}_1x^4(-y)+{}_5\mathrm{C}_2x^3(-y)^2+{}_5\mathrm{C}_3x^2(-y)^3$
$+{}_5\mathrm{C}_4x(-y)^4+{}_5\mathrm{C}_5(-y)^5$

$=x^5-5x^4y+10x^3y^2-10x^2y^3+5xy^4-y^5$

**0102** 답 $16a^4+96a^3b+216a^2b^2+216ab^3+81b^4$

$(2a+3b)^4={}_4\mathrm{C}_0(2a)^4+{}_4\mathrm{C}_1(2a)^3\cdot3b+{}_4\mathrm{C}_2(2a)^2(3b)^2+{}_4\mathrm{C}_3\cdot2a(3b)^3$
$+{}_4\mathrm{C}_4(3b)^4$

$=16a^4+96a^3b+216a^2b^2+216ab^3+81b^4$

**0103** 답 $x^5-10x^3+40x-\frac{80}{x}+\frac{80}{x^3}-\frac{32}{x^5}$

$\left(x-\frac{2}{x}\right)^5={}_5\mathrm{C}_0x^5+{}_5\mathrm{C}_1x^4\left(-\frac{2}{x}\right)+{}_5\mathrm{C}_2x^3\left(-\frac{2}{x}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_3x^2\left(-\frac{2}{x}\right)^3$
$+{}_5\mathrm{C}_4x\left(-\frac{2}{x}\right)^4+{}_5\mathrm{C}_5\left(-\frac{2}{x}\right)^5$

$=x^5-10x^3+40x-\frac{80}{x}+\frac{80}{x^3}-\frac{32}{x^5}$

**0104** 답 (1) 8 (2) 70 (3) 28

$(a+b)^8$의 전개식의 일반항은

${}_8\mathrm{C}_ra^{8-r}b^r$

(1) $a^7b$항은 $r=1$일 때이므로 그 계수는

${}_8\mathrm{C}_1=8$

(2) $a^4b^4$항은 $r=4$일 때이므로 그 계수는

${}_8\mathrm{C}_4=70$

(3) $a^2b^6$항은 $r=6$일 때이므로 그 계수는

${}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$

**0105** 답 32

${}_5\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_5=2^5=32$

**0106** 답 0

${}_6\mathrm{C}_0-{}_6\mathrm{C}_1+{}_6\mathrm{C}_2-\cdots+{}_6\mathrm{C}_6=0$

**0107** 답 64

${}_7\mathrm{C}_1+{}_7\mathrm{C}_3+{}_7\mathrm{C}_5+{}_7\mathrm{C}_7=2^{7-1}=2^6=64$

## B 유형 완성 24~31쪽

**0108** 답 ④

구하는 경우의 수는 5명의 학생에서 7명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{H}_7={}_{11}\mathrm{C}_7={}_{11}\mathrm{C}_4=330$

**0109** 답 ③

구하는 경우의 수는 4종류의 공에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_9={}_{12}\mathrm{C}_9={}_{12}\mathrm{C}_3=220$

**0110** 답 136

7명의 회원이 1개의 보드게임에 각각 무기명으로 투표하는 경우의 수는 2개의 보드게임에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_7={}_8\mathrm{C}_7={}_8\mathrm{C}_1=8 \quad \therefore a=8$

7명의 회원이 1개의 보드게임에 각각 기명으로 투표하는 경우의 수는 2개의 보드게임에서 7개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_7=2^7=128 \quad \therefore b=128$

$\therefore a+b=8+128=136$

## 0111 답 126

먼저 5종류의 과일을 각각 1개씩 사고, 나머지 5개의 과일을 사면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 5종류의 과일에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_5={}_9C_5={}_9C_4=126$

## 0112 답 ①

먼저 펜을 세 주머니 A, B, C에 각각 3개, 3개, 1개씩 넣고, 나머지 8개의 펜을 나누어 넣으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 3개의 주머니에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

## 0113 답 84

서로 다른 4개의 상자 중에서 빈 상자 1개를 택하는 경우의 수는

${}_4C_1=4$

나머지 3개의 상자에 먼저 공을 각각 1개씩 넣고, 나머지 5개의 공을 나누어 넣으면 된다.

나머지 5개의 공을 나누어 넣는 경우의 수는 3개의 상자에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

따라서 구하는 경우의 수는

$4\times21=84$

## 0114 답 460

8장의 엽서를 5명에게 나누어 주는 경우의 수는 5명에서 8명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_8={}_{12}C_8={}_{12}C_4=495$ …… ⓘ

5명이 모두 적어도 1장의 엽서를 받도록 하려면 먼저 5명에게 엽서를 1장씩 나누어 주고, 나머지 3장의 엽서를 나누어 주면 된다.

나머지 3장의 엽서를 나누어 주는 경우의 수는 5명에서 3명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_5H_3={}_7C_3=35$ …… ⓘⓘ

따라서 엽서를 1장도 받지 못하는 사람이 생기는 경우의 수는

$495-35=460$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ 8장의 엽서를 5명에게 나누어 주는 경우의 수 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ 5명이 모두 적어도 1장의 엽서를 받는 경우의 수 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ 엽서를 1장도 받지 못하는 사람이 생기는 경우의 수 구하기 | 20 % |

## 0115 답 ①

(i) 노란 구슬을 택하지 않는 경우

빨간 구슬과 파란 구슬 중에서 6개의 구슬을 택하면 되므로 그 경우의 수는 2종류의 구슬에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

∴ ${}_2H_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

(ii) 노란 구슬을 1개 택하는 경우

빨간 구슬과 파란 구슬 중에서 나머지 5개의 구슬을 택하면 되므로 그 경우의 수는 2종류의 구슬에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

∴ ${}_2H_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

(iii) 노란 구슬을 2개 택하는 경우

빨간 구슬과 파란 구슬 중에서 나머지 4개의 구슬을 택하면 되므로 그 경우의 수는 2종류의 구슬에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

∴ ${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

(iv) 노란 구슬을 3개 택하는 경우

빨간 구슬과 파란 구슬 중에서 나머지 3개의 구슬을 택하면 되므로 그 경우의 수는 2종류의 구슬에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

∴ ${}_2H_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는 $7+6+5+4=22$

다른 풀이

3종류의 구슬에서 6개를 택하는 중복조합의 수는

${}_3H_6={}_8C_6={}_8C_2=28$

노란 구슬을 4개 이상 택하려면 먼저 노란 구슬을 4개 택하고, 나머지 2개의 구슬을 택하면 된다.

나머지 2개의 구슬을 택하는 경우의 수는 3종류의 구슬에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3H_2={}_4C_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는 $28-6=22$

## 0116 답 ②

구하는 항의 개수는 3개의 문자 $a$, $b$, $c$에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

## 0117 답 140

$(x+y)^3$의 전개식의 항의 개수는 2개의 문자 $x$, $y$에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_3={}_4C_3={}_4C_1=4$

$(a+b+c+d)^4$의 전개식의 항의 개수는 4개의 문자 $a$, $b$, $c$, $d$에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$

따라서 구하는 항의 개수는 $4\times35=140$

## 0118 답 ③

$(x+y+z)^5$의 전개식의 항의 개수는 3개의 문자 $x$, $y$, $z$에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

$(x+y+z)^5$의 전개식에서 $x$를 포함하지 않는 항의 개수는 $x$를 제외한 2개의 문자 $y$, $z$에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_5={}_6C_5={}_6C_1=6$

따라서 구하는 항의 개수는 $21-6=15$

다른 풀이

$(x+y+z)^5$의 전개식에서 $x$를 포함하는 항의 개수는 먼저 $x$를 1개 택하고 3개의 문자 $x$, $y$, $z$에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로 ${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

## 0119 답 ②

$2 \le a \le b \le c$에서 $a$, $b$, $c$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5, 6의 5개의 자연수에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 $a$, $b$, $c$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 구하는 순서쌍의 개수는

${}_5H_3 = {}_7C_3 = 35$

## 0120 답 45

$1 \le a \le b \le 5$에서 $a$, $b$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5의 5개의 자연수에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 $a$, $b$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5H_2 = {}_6C_2 = 15$

$5 < c < d < 9$에서 $c$, $d$의 값을 정하는 경우의 수는 6, 7, 8의 3개의 자연수에서 2개를 택한 후 크기가 작은 수부터 순서대로 $c$, $d$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_3C_2 = {}_3C_1 = 3$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$15 \times 3 = 45$

## 0121 답 ⑤

㈎에서 $a$, $b$, $c$의 합이 짝수이므로 $a$, $b$, $c$가 모두 짝수이거나 $a$, $b$, $c$ 중에서 짝수는 1개, 홀수는 2개이어야 한다.

(i) $a$, $b$, $c$가 모두 짝수인 경우

㈏의 $a \le b \le c \le 15$에서 $a$, $b$, $c$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 4, 6, …, 14의 7개의 짝수에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 $a$, $b$, $c$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_7H_3 = {}_9C_3 = 84$

(ii) $a$, $b$, $c$ 중에서 짝수는 1개, 홀수는 2개인 경우

2, 4, 6, …, 14의 7개의 짝수에서 1개를 택하는 경우의 수는 ${}_7C_1 = 7$

1, 3, 5, …, 15의 8개의 홀수에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 경우의 수는 ${}_8H_2 = {}_9C_2 = 36$

이때 택한 짝수 1개와 홀수 2개를 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 $a$, $b$, $c$에 대응시키면 되므로 $a$, $b$, $c$의 값을 정하는 경우의 수는

$7 \times 36 = 252$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$84 + 252 = 336$

## 0122 답 ④

음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$의 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수는 3개의 문자 $x$, $y$, $z$에서 12개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{12} = {}_{14}C_{12} = {}_{14}C_2 = 91 \quad \therefore a = 91$

한편 $x$, $y$, $z$가 자연수일 때, $X = x - 1$, $Y = y - 1$, $Z = z - 1$이라 하면 $X$, $Y$, $Z$는 음이 아닌 정수이다.

$x = X + 1$, $y = Y + 1$, $z = Z + 1$을 방정식 $x + y + z = 12$에 대입하면

$(X + 1) + (Y + 1) + (Z + 1) = 12$

$\therefore X + Y + Z = 9$

따라서 자연수 $x$, $y$, $z$의 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수는 방정식 $X + Y + Z = 9$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $X$, $Y$, $Z$의 순서쌍 $(X, Y, Z)$의 개수, 즉 3개의 문자 $X$, $Y$, $Z$에서 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55 \quad \therefore b = 55$

$\therefore a + b = 91 + 55 = 146$

## 0123 답 ⑤

$x$, $y$, $z$, $w$가 음이 아닌 정수이므로 $x + y + z + w < 4$에서

$x + y + z + w = 0$ 또는 $x + y + z + w = 1$ 또는 $x + y + z + w = 2$ 또는 $x + y + z + w = 3$

(i) 방정식 $x + y + z + w = 0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$, $w$의 순서쌍 $(x, y, z, w)$는 $(0, 0, 0, 0)$의 1개

(ii) 방정식 $x + y + z + w = 1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$, $w$의 순서쌍 $(x, y, z, w)$의 개수는 4개의 문자 $x$, $y$, $z$, $w$에서 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_1 = {}_4C_1 = 4$

(iii) 방정식 $x + y + z + w = 2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$, $w$의 순서쌍 $(x, y, z, w)$의 개수는 4개의 문자 $x$, $y$, $z$, $w$에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$

(iv) 방정식 $x + y + z + w = 3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$, $w$의 순서쌍 $(x, y, z, w)$의 개수는 4개의 문자 $x$, $y$, $z$, $w$에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_3 = {}_6C_3 = 20$

(i)~(iv)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$1 + 4 + 10 + 20 = 35$

## 0124 답 105

$a \ge 1$, $b \ge 2$, $c \ge 3$인 자연수이므로 $A = a - 1$, $B = b - 2$, $C = c - 3$이라 하면 $A$, $B$, $C$는 음이 아닌 정수이다.

$a = A + 1$, $b = B + 2$, $c = C + 3$을 방정식 $a + b + c = 19$에 대입하면

$(A + 1) + (B + 2) + (C + 3) = 19$

$\therefore A + B + C = 13$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 방정식 $A + B + C = 13$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $A$, $B$, $C$의 순서쌍 $(A, B, C)$의 개수, 즉 3개의 문자 $A$, $B$, $C$에서 13개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{13} = {}_{15}C_{13} = {}_{15}C_2 = 105$

## 0125 답 7

방정식 $x + y + z = n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$의 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수는 3개의 문자 $x$, $y$, $z$에서 $n$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2$

즉, ${}_{n+2}C_2 = 36$이므로

$\dfrac{(n+2)(n+1)}{2 \times 1} = 36$

$(n+2)(n+1) = 72 = 9 \times 8$

$\therefore n = 7$ ($\because n$은 자연수)

## 0126 답 ②

$a$, $b$, $c$, $d$가 자연수이므로 $A=a-1$, $B=b-1$, $C=c-1$, $D=d-1$이라 하면 $A$, $B$, $C$, $D$는 음이 아닌 정수이다.

$a=A+1$, $b=B+1$, $c=C+1$, $d=D+1$을 방정식 $a+b+c+3d=10$에 대입하면

$(A+1)+(B+1)+(C+1)+3(D+1)=10$

$\therefore A+B+C+3D=4$

이때 $D$의 계수가 가장 크므로 $D$가 될 수 있는 수를 구하면

$D=0$ 또는 $D=1$

(i) $D=0$일 때

방정식 $A+B+C+3D=4$에서 $A+B+C=4$

따라서 자연수 $a$, $b$, $c$, $d$의 순서쌍 $(a, b, c, d)$의 개수는 방정식 $A+B+C=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $A$, $B$, $C$의 순서쌍 $(A, B, C)$의 개수, 즉 3개의 문자 $A$, $B$, $C$에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_4={}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=15$

(ii) $D=1$일 때

방정식 $A+B+C+3D=4$에서 $A+B+C=1$

따라서 자연수 $a$, $b$, $c$, $d$의 순서쌍 $(a, b, c, d)$의 개수는 방정식 $A+B+C=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $A$, $B$, $C$의 순서쌍 $(A, B, C)$의 개수, 즉 3개의 문자 $A$, $B$, $C$에서 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_1={}_3\mathrm{C}_1=3$

(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는 $15+3=18$

## 0127 답 56

집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 $-1$, 0, 1에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는

${}_6\mathrm{H}_3={}_8\mathrm{C}_3=56$

## 0128 답 ⑤

$f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

또 $f(2)\le f(3)\le f(4)$에서 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $X$의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

따라서 구하는 함수의 개수는 $4\times20=80$

## 0129 답 ③

㈎에서 $f(3)=4$, $f(5)=6$이므로 ㈏에 의하여

$f(1)\le f(2)\le4\le f(4)\le6$

$f(1)\le f(2)\le4$에서 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 1, 2에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

$4\le f(4)\le6$에서 $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 4, 5, 6의 3개이다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$10\times3=30$

## 0130 답 2

$\left(x^2-\frac{a}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r(x^2)^{5-r}\left(-\frac{a}{x}\right)^r={}_5\mathrm{C}_r(-a)^r\frac{x^{10-2r}}{x^r}$

$x^4$항은 $10-2r-r=4$일 때이므로

$r=2$

이때 $x^4$의 계수가 40이므로

${}_5\mathrm{C}_2\times(-a)^2=40$

$10a^2=40$, $a^2=4$

$\therefore a=2$ ($\because a>0$)

## 0131 답 ④

$(x+3y^2)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}(3y^2)^r={}_5\mathrm{C}_r 3^r x^{5-r}y^{2r}$

$x^3y^4$항은 $5-r=3$, $2r=4$일 때이므로

$r=2$

따라서 구하는 $x^3y^4$의 계수는

${}_5\mathrm{C}_2\times3^2=10\times9=90$

## 0132 답 ②

$(x+a)^{10}$의 전개식의 일반항은

${}_{10}\mathrm{C}_r x^{10-r}a^r={}_{10}\mathrm{C}_r a^r x^{10-r}$

$x^7$항은 $10-r=7$일 때이므로 $r=3$

따라서 $x^7$의 계수는

${}_{10}\mathrm{C}_3\times a^3=120a^3$

한편 $x^8$항은 $10-r=8$일 때이므로 $r=2$

따라서 $x^8$의 계수는

${}_{10}\mathrm{C}_2\times a^2=45a^2$

이때 $x^7$의 계수가 $x^8$의 계수의 8배이므로

$120a^3=8\times45a^2$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

## 0133 답 42

$\left(x^4+\frac{1}{x^3}\right)^n$의 전개식의 일반항은

${}_n\mathrm{C}_r(x^4)^{n-r}\left(\frac{1}{x^3}\right)^r={}_n\mathrm{C}_r\frac{x^{4n-4r}}{x^{3r}}$

상수항은 $4n-4r=3r$일 때이므로

$n=\frac{7}{4}r$ …… ❶

이때 $n$은 자연수이므로 $r$는 4의 배수이어야 한다.

즉, $r=4$일 때 $n$이 최소이므로 최솟값은

$m=\frac{7}{4}\times4=7$

이때의 상수항은

$k={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=35$ …… ❷

$\therefore m+k=42$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $n$, $r$의 관계식 구하기 | 40 % |
| ❷ $m$, $k$의 값 구하기 | 40 % |
| ❸ $m+k$의 값 구하기 | 20 % |

**0134** 답 160

$(1+2x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(2x)^r={}_5C_r2^rx^r$ …… ㉠

이때

$(1+x)(1+2x)^5=(1+2x)^5+x(1+2x)^5$

이므로 $x^4$항은 1과 ㉠의 $x^4$항을 곱하는 경우, $x$와 ㉠의 $x^3$항을 곱하는 경우에 나타난다.

(i) 1과 ㉠의 $x^4$항을 곱하는 경우

㉠의 $x^4$항은 $r=4$일 때이므로

${}_5C_4\times2^4\times x^4={}_5C_1\times2^4\times x^4$

$=5\times16\times x^4=80x^4$

따라서 1과 ㉠의 $x^4$항을 곱하면

$1\times80x^4=80x^4$

(ii) $x$와 ㉠의 $x^3$항을 곱하는 경우

㉠의 $x^3$항은 $r=3$일 때이므로

${}_5C_3\times2^3\times x^3={}_5C_2\times2^3\times x^3$

$=10\times8\times x^3=80x^3$

따라서 $x$와 ㉠의 $x^3$항을 곱하면

$x\times80x^3=80x^4$

(i), (ii)에서 구하는 $x^4$의 계수는

$80+80=160$

**0135** 답 ③

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_rx^{5-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_5C_r\frac{x^{5-r}}{x^r}$ …… ㉠

이때

$(2x^3+3)\left(x+\frac{1}{x}\right)^5=2x^3\left(x+\frac{1}{x}\right)^5+3\left(x+\frac{1}{x}\right)^5$

이므로 상수항은 $2x^3$과 ㉠의 $\frac{1}{x^3}$항을 곱하는 경우, 3과 ㉠의 상수항을 곱하는 경우에 나타난다.

(i) $2x^3$과 ㉠의 $\frac{1}{x^3}$항을 곱하는 경우

㉠의 $\frac{1}{x^3}$항은 $r-(5-r)=3$, 즉 $r=4$일 때이므로

${}_5C_4\times\frac{1}{x^3}={}_5C_1\times\frac{1}{x^3}=\frac{5}{x^3}$

따라서 $2x^3$과 ㉠의 $\frac{1}{x^3}$항을 곱하면

$2x^3\times\frac{5}{x^3}=10$

(ii) 3과 ㉠의 상수항을 곱하는 경우

㉠의 상수항은 $5-r=r$, 즉 $r=\frac{5}{2}$일 때이고 $r$는 $0\le r\le5$인 정수이므로 ㉠의 상수항은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 상수항은 10이다.

**0136** 답 ②

$\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_rx^{4-r}\left(\frac{a}{x^2}\right)^r={}_4C_ra^r\frac{x^{4-r}}{x^{2r}}$ …… ㉠

이때

$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4=x^2\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4-\frac{1}{x}\left(x+\frac{a}{x^2}\right)^4$

이므로 $x^3$항은 $x^2$과 ㉠의 $x$항을 곱하는 경우, $-\frac{1}{x}$과 ㉠의 $x^4$항을 곱하는 경우에 나타난다.

(i) $x^2$과 ㉠의 $x$항을 곱하는 경우

㉠의 $x$항은 $4-r-2r=1$, 즉 $r=1$일 때이므로

${}_4C_1\times a\times x=4ax$

따라서 $x^2$과 ㉠의 $x$항을 곱하면

$x^2\times4ax=4ax^3$

(ii) $-\frac{1}{x}$과 ㉠의 $x^4$항을 곱하는 경우

㉠의 $x^4$항은 $4-r-2r=4$, 즉 $r=0$일 때이므로

${}_4C_0\times x^4=x^4$

따라서 $-\frac{1}{x}$과 ㉠의 $x^4$항을 곱하면

$-\frac{1}{x}\times x^4=-x^3$

(i), (ii)에서 $x^3$의 계수는 $4a-1$

따라서 $4a-1=7$이므로

$a=2$

**0137** 답 −48

$(1+x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_rx^r$

$(2-x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_s2^{5-s}(-x)^s={}_5C_s(-1)^s2^{5-s}x^s$

따라서 $(1+x)^4(2-x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_4C_rx^r\times{}_5C_s(-1)^s2^{5-s}x^s={}_4C_r\times{}_5C_s(-1)^s2^{5-s}x^{r+s}$

$x^2$항은 $r+s=2$ ($r$, $s$는 $0\le r\le4$, $0\le s\le5$인 정수)일 때이므로 $r$, $s$의 순서쌍 $(r, s)$는

$(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$

따라서 $x^2$의 계수는

${}_4C_0\times{}_5C_2\times(-1)^2\times2^3+{}_4C_1\times{}_5C_1\times(-1)\times2^4+{}_4C_2\times{}_5C_0\times2^5$

$=80+(-320)+192=-48$

**0138** 답 2

$(x-a)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_rx^{3-r}(-a)^r={}_3C_r(-a)^rx^{3-r}$

$(x+2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_sx^{4-s}2^s={}_4C_s2^sx^{4-s}$

따라서 $(x-a)^3(x+2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r(-a)^rx^{3-r}\times{}_4C_s2^sx^{4-s}={}_3C_r\times{}_4C_s(-a)^r2^sx^{7-r-s}$ …… ❶

$x$항은 $7-r-s=1$, 즉 $r+s=6$ ($r$, $s$는 $0\le r\le3$, $0\le s\le4$인 정수)일 때이므로 $r$, $s$의 순서쌍 $(r, s)$는

$(2, 4)$, $(3, 3)$ …… ❷

이때 $x$의 계수가 $-64$이므로

${}_3C_2\times{}_4C_4\times(-a)^2\times2^4+{}_3C_3\times{}_4C_3\times(-a)^3\times2^3=-64$

$48a^2-32a^3=-64$

$2a^3-3a^2-4=0$

$(a-2)(2a^2+a+2)=0$

$\therefore\ a=2\ (\because\ a$는 실수) …… ⓘⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ $(x-a)^3(x+2)^4$의 전개식의 일반항 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ $r$, $s$가 될 수 있는 값 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘⓘ $a$의 값 구하기 | 30 % |

## 0139 답 ②

$(x^2+1)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(x^2)^r={}_4C_rx^{2r}$

$(x^3+1)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_s(x^3)^s={}_nC_sx^{3s}$

따라서 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$의 전개식의 일반항은

${}_4C_rx^{2r}\times{}_nC_sx^{3s}={}_4C_r\times{}_nC_sx^{2r+3s}$

$x^5$항은 $2r+3s=5$ ($r$, $s$는 $0\le r\le4$, $0\le s\le n$인 정수)일 때이므로 $r$, $s$의 순서쌍 $(r, s)$는

$(1, 1)$

이때 $x^5$의 계수가 12이므로

${}_4C_1\times{}_nC_1=12$

$4n=12$

$\therefore\ n=3$

또 $x^6$항은 $2r+3s=6$일 때이므로 $r$, $s$의 순서쌍 $(r, s)$는

$(0, 2)$, $(3, 0)$

따라서 구하는 $x^6$의 계수는

${}_4C_0\times{}_3C_2+{}_4C_3\times{}_3C_0=3+4=7$

## 0140 답 ②

$\dfrac{(x-2)^4(3x^2+1)^3}{x}$의 전개식에서 $x^4$의 계수는

$(x-2)^4(3x^2+1)^3$의 전개식에서 $x^5$의 계수와 같다.

$(x-2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_rx^{4-r}(-2)^r={}_4C_r(-2)^rx^{4-r}$

$(3x^2+1)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_s(3x^2)^{3-s}={}_3C_s3^{3-s}x^{6-2s}$

따라서 $(x-2)^4(3x^2+1)^3$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r(-2)^rx^{4-r}\times{}_3C_s3^{3-s}x^{6-2s}={}_4C_r\times{}_3C_s(-2)^r3^{3-s}x^{10-r-2s}$

$x^5$항은 $10-r-2s=5$, 즉 $r+2s=5$ ($r$, $s$는 $0\le r\le4$, $0\le s\le3$인 정수)일 때이므로 $r$, $s$의 순서쌍 $(r, s)$는

$(1, 2)$, $(3, 1)$

즉, $(x-2)^4(3x^2+1)^3$의 전개식에서 $x^5$의 계수는

${}_4C_1\times{}_3C_2\times(-2)\times3+{}_4C_3\times{}_3C_1\times(-2)^3\times3^2$

$=-72+(-864)$

$=-936$

따라서 구하는 $x^4$의 계수는 $-936$이다.

## 0141 답 ②

${}_1C_1={}_2C_2$이므로

${}_1C_1+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1={}_2C_2+{}_2C_1+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1$

$={}_3C_2+{}_3C_1+{}_4C_1+{}_5C_1$

$={}_4C_2+{}_4C_1+{}_5C_1$

$={}_5C_2+{}_5C_1$

$={}_6C_2$

## 0142 답 ③

${}_3C_0={}_4C_0$이므로

${}_3C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_{12}C_9={}_4C_0+{}_4C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_{12}C_9$

$={}_5C_1+{}_5C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_{12}C_9$

$={}_6C_2+{}_6C_3+\cdots+{}_{12}C_9$

$\vdots$

$={}_{12}C_8+{}_{12}C_9$

$={}_{13}C_9$

$={}_{13}C_4$

## 0143 답 ④

${}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_8={}_3C_0+{}_3C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_8-{}_3C_0$

$={}_4C_1+{}_4C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_8-1$

$={}_5C_2+{}_5C_3+\cdots+{}_{10}C_8-1$

$\vdots$

$={}_{10}C_7+{}_{10}C_8-1$

$={}_{11}C_8-1$

$={}_{11}C_3-1$

${}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+\cdots+{}_{10}C_9$

$={}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+\cdots+{}_{10}C_9-({}_2C_0+{}_2C_1)$

$={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+\cdots+{}_{10}C_9-(1+2)$

$={}_4C_2+{}_4C_3+{}_5C_4+\cdots+{}_{10}C_9-3$

$\vdots$

$={}_{10}C_8+{}_{10}C_9-3$

$={}_{11}C_9-3$

$={}_{11}C_2-3$

따라서 색칠한 부분에 있는 모든 수의 합은

${}_{11}C_3-1+{}_{11}C_2-3={}_{11}C_2+{}_{11}C_3-4$

$={}_{12}C_3-4$

$=220-4$

$=216$

## 0144 답 ④

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_rx^r$

$x^4$항은 $(1+x)^4$의 전개식부터 나오므로

$(1+x)^4$의 전개식에서 $x^4$의 계수는 ${}_4C_4$

$(1+x)^5$의 전개식에서 $x^4$의 계수는 ${}_5C_4$

$(1+x)^6$의 전개식에서 $x^4$의 계수는 ${}_6C_4$

$\vdots$

$(1+x)^{10}$의 전개식에서 $x^4$의 계수는 ${}_{10}C_4$

따라서 구하는 $x^4$의 계수는

$${}_4C_4+{}_5C_4+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_4={}_5C_5+{}_5C_4+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_4$$
$$={}_6C_5+{}_6C_4+\cdots+{}_{10}C_4$$
$$={}_7C_5+{}_7C_4+\cdots+{}_{10}C_4$$
$$\vdots$$
$$={}_{10}C_5+{}_{10}C_4$$
$$={}_{11}C_5=462$$

## 0145 답 715

$(1+x^3)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_rx^{3r}$

$x^9$항은 $(1+x^3)^3$의 전개식부터 나오므로

$(1+x^3)^3$의 전개식에서 $x^9$의 계수는 ${}_3C_3$

$(1+x^3)^4$의 전개식에서 $x^9$의 계수는 ${}_4C_3$

$(1+x^3)^5$의 전개식에서 $x^9$의 계수는 ${}_5C_3$

$\vdots$

$(1+x^3)^{12}$의 전개식에서 $x^9$의 계수는 ${}_{12}C_3$

따라서 구하는 $x^9$의 계수는

$${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_{12}C_3={}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+\cdots+{}_{12}C_3$$
$$={}_5C_4+{}_5C_3+\cdots+{}_{12}C_3$$
$$={}_6C_4+{}_6C_3+\cdots+{}_{12}C_3$$
$$\vdots$$
$$={}_{12}C_4+{}_{12}C_3$$
$$={}_{13}C_4=715$$

## 0146 답 ⑤

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_rx^r$

$x^2$항은 $(1+x)^2$의 전개식부터 나오므로

$(1+x)^2$의 전개식에서 $x^2$의 계수는 ${}_2C_2$

$(1+x)^3$의 전개식에서 $x^2$의 계수는 ${}_3C_2$

$(1+x)^4$의 전개식에서 $x^2$의 계수는 ${}_4C_2$

$\vdots$

$(1+x)^n$의 전개식에서 $x^2$의 계수는 ${}_nC_2$

따라서 $x^2$의 계수는

$${}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_nC_2={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_nC_2$$
$$={}_4C_3+{}_4C_2+\cdots+{}_nC_2$$
$$={}_5C_3+{}_5C_2+\cdots+{}_nC_2$$
$$\vdots$$
$$={}_nC_3+{}_nC_2={}_{n+1}C_3$$
$$=\frac{(n+1)n(n-1)}{3\times2\times1}$$

즉, $\frac{(n+1)n(n-1)}{6}=120$이므로

$(n+1)n(n-1)=720=10\times9\times8$

$\therefore n=9$ ($\because n$은 자연수)

## 0147 답 ③

${}_{20}C_0-{}_{20}C_1+{}_{20}C_2-{}_{20}C_3+{}_{20}C_4-\cdots-{}_{20}C_{19}+{}_{20}C_{20}=0$이므로

${}_{20}C_0-({}_{20}C_1-{}_{20}C_2+{}_{20}C_3-{}_{20}C_4+\cdots+{}_{20}C_{19})+{}_{20}C_{20}=0$

$\therefore {}_{20}C_1-{}_{20}C_2+{}_{20}C_3-{}_{20}C_4+\cdots+{}_{20}C_{19}={}_{20}C_0+{}_{20}C_{20}$
$$=1+1=2$$

## 0148 답 8

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-{}_nC_0$
$$=2^n-1$$

즉, $2^n-1=255$이므로

$2^n=256=2^8$ $\therefore n=8$

## 0149 답 ③

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_{n-1}=2^n-({}_nC_0+{}_nC_n)$
$$=2^n-2$$

따라서 주어진 부등식은

$100<2^n-2<1000$ $\therefore 102<2^n<1002$

이때 $2^6=64$, $2^7=128$, $2^8=256$, $2^9=512$, $2^{10}=1024$이므로

자연수 $n$은 7, 8, 9의 3개이다.

## 0150 답 4

${}_{17}C_1+{}_{17}C_3+{}_{17}C_5+\cdots+{}_{17}C_{17}=2^{17-1}=2^{16}$ …… ❶

또 ${}_{13}C_0+{}_{13}C_1+{}_{13}C_2+\cdots+{}_{13}C_6={}_{13}C_{13}+{}_{13}C_{12}+{}_{13}C_{11}+\cdots+{}_{13}C_7$이고

$({}_{13}C_0+{}_{13}C_1+{}_{13}C_2+\cdots+{}_{13}C_6)+({}_{13}C_{13}+{}_{13}C_{12}+{}_{13}C_{11}+\cdots+{}_{13}C_7)$
$=2^{13}$

이므로

$2({}_{13}C_0+{}_{13}C_1+{}_{13}C_2+\cdots+{}_{13}C_6)=2^{13}$

$\therefore {}_{13}C_0+{}_{13}C_1+{}_{13}C_2+\cdots+{}_{13}C_6=2^{12}$ …… ❷

따라서 $\frac{{}_{17}C_1+{}_{17}C_3+{}_{17}C_5+\cdots+{}_{17}C_{17}}{{}_{13}C_0+{}_{13}C_1+{}_{13}C_2+\cdots+{}_{13}C_6}=\frac{2^{16}}{2^{12}}=2^4$이므로

$n=4$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 분자의 값 구하기 | 40 % |
| ❷ 분모의 값 구하기 | 40 % |
| ❸ $n$의 값 구하기 | 20 % |

## 0151 답 ①

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=7$, $n=9$를 대입하면

$8^9={}_9C_0+{}_9C_1\times7+{}_9C_2\times7^2+{}_9C_3\times7^3+\cdots+{}_9C_9\times7^9$

$\therefore {}_9C_1\times7+{}_9C_2\times7^2+{}_9C_3\times7^3+\cdots+{}_9C_9\times7^9=(2^3)^9-{}_9C_0$
$$=2^{27}-1$$

## 0152 답 ③

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=30$, $n=50$을 대입하면

$$31^{50}={}_{50}C_0+{}_{50}C_1\times30+{}_{50}C_2\times30^2+\cdots+{}_{50}C_{50}\times30^{50}$$
$$=1+50\times30+30^2({}_{50}C_2+{}_{50}C_3\times30+\cdots+{}_{50}C_{50}\times30^{48})$$
$$=1501+30^2({}_{50}C_2+{}_{50}C_3\times30+\cdots+{}_{50}C_{50}\times30^{48})$$

이때 $30^2({}_{50}C_2+{}_{50}C_3\times30+\cdots+{}_{50}C_{50}\times30^{48})$은 900으로 나누어떨어지므로 $31^{50}$을 900으로 나누었을 때의 나머지는 1501을 900으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

이때 $1501=900\times1+601$이므로 $31^{50}$을 900으로 나누었을 때의 나머지는 601이다.

## 0153 답 10

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=10$, $n=12$를 대입하면

$11^{12}={}_{12}C_0+{}_{12}C_1\times10+{}_{12}C_2\times10^2+{}_{12}C_3\times10^3+\cdots+{}_{12}C_{12}\times10^{12}$

$=1+12\times10+66\times100+10^3({}_{12}C_3+{}_{12}C_4\times10+\cdots+{}_{12}C_{12}\times10^9)$

$=6721+10^3({}_{12}C_3+{}_{12}C_4\times10+\cdots+{}_{12}C_{12}\times10^9)$

이때 $10^3({}_{12}C_3+{}_{12}C_4\times10+\cdots+{}_{12}C_{12}\times10^9)$은 1000으로 나누어떨어지므로 $11^{12}$의 백의 자리의 숫자는 7, 십의 자리의 숫자는 2, 일의 자리의 숫자는 1이다.

따라서 $a=7$, $b=2$, $c=1$이므로

$a+b+c=10$

## 0154 답 24

$({}_{12}C_0)^2+({}_{12}C_1)^2+({}_{12}C_2)^2+\cdots+({}_{12}C_{12})^2$

$={}_{12}C_0\times{}_{12}C_0+{}_{12}C_1\times{}_{12}C_1+{}_{12}C_2\times{}_{12}C_2+\cdots+{}_{12}C_{12}\times{}_{12}C_{12}$

$={}_{12}C_0\times{}_{12}C_{12}+{}_{12}C_1\times{}_{12}C_{11}+{}_{12}C_2\times{}_{12}C_{10}+\cdots+{}_{12}C_{12}\times{}_{12}C_0$

이때 $(1+x)^{12}$의 전개식의 일반항은 ${}_{12}C_rx^r$이므로 위의 식은 $(1+x)^{12}(1+x)^{12}$의 전개식에서 $x^{12}$의 계수와 같다.

그런데 $(1+x)^{12}(1+x)^{12}=(1+x)^{24}$이므로 $(1+x)^{12}(1+x)^{12}$의 전개식에서 $x^{12}$의 계수는 $(1+x)^{24}$의 전개식에서 $x^{12}$의 계수와 같다.

$(1+x)^{24}$의 전개식의 일반항은 ${}_{24}C_sx^s$이므로 $x^{12}$의 계수는 ${}_{24}C_{12}$

따라서 $({}_{12}C_0)^2+({}_{12}C_1)^2+({}_{12}C_2)^2+\cdots+({}_{12}C_{12})^2={}_{24}C_{12}$이므로

$n=24$

## 0155 답 1

$\displaystyle\sum_{k=0}^{16}{}_{16}C_k\left(\frac{1}{4}\right)^{16-k}\left(\frac{3}{4}\right)^k$

$\displaystyle={}_{16}C_0\left(\frac{1}{4}\right)^{16}+{}_{16}C_1\left(\frac{1}{4}\right)^{15}\left(\frac{3}{4}\right)+{}_{16}C_2\left(\frac{1}{4}\right)^{14}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\cdots+{}_{16}C_{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{16}$

$\displaystyle=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)^{16}=1^{16}=1$

## 0156 답 21

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_rx^r$

즉, $x^4$, $x^5$, $x^6$의 계수는 각각

${}_nC_4$, ${}_nC_5$, ${}_nC_6$

이 세 수가 등차수열을 이루므로

$\displaystyle{}_nC_5=\frac{{}_nC_4+{}_nC_6}{2}$ $\quad\therefore\ 2{}_nC_5={}_nC_4+{}_nC_6$

$\displaystyle2\times\frac{n!}{5!(n-5)!}=\frac{n!}{4!(n-4)!}+\frac{n!}{6!(n-6)!}$

$2\times6(n-4)=6\times5+(n-4)(n-5)$

$n^2-21n+98=0$, $(n-7)(n-14)=0$

$\therefore\ n=7$ 또는 $n=14$

따라서 모든 자연수 $n$의 값의 합은

$7+14=21$

## 0157 답 $\frac{28}{27}$

$(x+a)^{10}$의 전개식의 일반항은 ${}_{10}C_rx^{10-r}a^r={}_{10}C_ra^rx^{10-r}$

즉, $x$, $x^2$, $x^4$의 계수는 각각

${}_{10}C_9a^9$, ${}_{10}C_8a^8$, ${}_{10}C_6a^6$

이 세 수가 등비수열을 이루므로

$({}_{10}C_8a^8)^2={}_{10}C_9a^9\times{}_{10}C_6a^6$

$({}_{10}C_2)^2a^{16}={}_{10}C_1\times{}_{10}C_4a^{15}$

$\therefore\ \displaystyle a=\frac{{}_{10}C_1\times{}_{10}C_4}{({}_{10}C_2)^2}=\frac{10\times210}{45^2}=\frac{28}{27}$ $(\because\ a\neq0)$

## 0158 답 ①

${}_{31}C_0+{}_{31}C_1+{}_{31}C_2+\cdots+{}_{31}C_{15}={}_{31}C_{31}+{}_{31}C_{30}+{}_{31}C_{29}+\cdots+{}_{31}C_{16}$이고

$({}_{31}C_0+{}_{31}C_1+{}_{31}C_2+\cdots+{}_{31}C_{15})+({}_{31}C_{31}+{}_{31}C_{30}+{}_{31}C_{29}+\cdots+{}_{31}C_{16})=2^{31}$

이므로

$2({}_{31}C_0+{}_{31}C_1+{}_{31}C_2+\cdots+{}_{31}C_{15})=2^{31}$

$\therefore\ {}_{31}C_0+{}_{31}C_1+{}_{31}C_2+\cdots+{}_{31}C_{15}=2^{30}$

$\therefore\ \log_4({}_{31}C_0+{}_{31}C_1+{}_{31}C_2+\cdots+{}_{31}C_{15})=\log_4 2^{30}$

$=\log_{2^2}2^{30}$

$\displaystyle=\frac{30}{2}=15$

## 0159 답 170

${}_{2k}C_0+{}_{2k}C_2+{}_{2k}C_4+\cdots+{}_{2k}C_{2k}=2^{2k-1}$이므로

$\displaystyle f(n)=\sum_{k=1}^{n}({}_{2k}C_0+{}_{2k}C_2+{}_{2k}C_4+\cdots+{}_{2k}C_{2k})$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{n}2^{2k-1}$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}4^k$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\times\frac{4(4^n-1)}{4-1}$

$\displaystyle=\frac{2}{3}(4^n-1)$

$\therefore\ \displaystyle f(4)=\frac{2}{3}(4^4-1)$

$\displaystyle=\frac{2}{3}\times255=170$

## 0160 답 ②

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}{}_{10}C_k\times8^k={}_{10}C_1\times8+{}_{10}C_2\times8^2+{}_{10}C_3\times8^3+\cdots+{}_{10}C_{10}\times8^{10}$ ····· ㉠

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=8$, $n=10$을 대입하면

$9^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1\times8+{}_{10}C_2\times8^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\times8^{10}$

$\therefore\ {}_{10}C_1\times8+{}_{10}C_2\times8^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\times8^{10}=9^{10}-{}_{10}C_0$

$=(3^2)^{10}-1$

$=3^{20}-1$

따라서 ㉠에서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}{}_{10}C_k\times8^k={}_{10}C_1\times8+{}_{10}C_2\times8^2+{}_{10}C_3\times8^3+\cdots+{}_{10}C_{10}\times8^{10}$

$=3^{20}-1$

## 0161 답 20

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=-3$, $n=20$을 대입하면

$(-2)^{20}={}_{20}C_0-{}_{20}C_1\times3+{}_{20}C_2\times3^2-\cdots+{}_{20}C_{20}\times3^{20}$

$\therefore\ {}_{20}C_0-{}_{20}C_1\times3+{}_{20}C_2\times3^2-\cdots+{}_{20}C_{20}\times3^{20}=2^{20}$

$\therefore\ \log_2({}_{20}C_0-{}_{20}C_1\times3+{}_{20}C_2\times3^2-\cdots+{}_{20}C_{20}\times3^{20})=\log_2 2^{20}=20$

## AB 유형 점검 32~34쪽

### 0162 답 ③

${}_2\mathrm{H}_5+{}_3\Pi_4+{}_6\mathrm{C}_2={}_6\mathrm{C}_5+3^4+15$

$={}_6\mathrm{C}_1+81+15$

$=6+81+15=102$

### 0163 답 ①

구하는 경우의 수는 3종류의 빵에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36$

### 0164 답 28

먼저 공책을 3명의 학생에게 각각 2권씩 나누어 주고, 나머지 6권의 공책을 나누어 주면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 3명의 학생에서 6명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_6={}_8\mathrm{C}_6={}_8\mathrm{C}_2=28$

### 0165 답 ②

$(x+y+z+w)^n$의 전개식의 항의 개수는 4개의 문자 $x$, $y$, $z$, $w$에서 $n$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_n={}_{n+3}\mathrm{C}_n={}_{n+3}\mathrm{C}_3$

즉, ${}_{n+3}\mathrm{C}_3=120$이므로

$\dfrac{(n+3)(n+2)(n+1)}{3\times2\times1}=120$

$(n+3)(n+2)(n+1)=720=10\times9\times8$

$\therefore n=7$ ($\because$ $n$은 자연수)

### 0166 답 84

$2\le a\le b\le c\le8$에서 $a$, $b$, $c$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 7개의 자연수에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 $a$, $b$, $c$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 구하는 순서쌍의 개수는

${}_7\mathrm{H}_3={}_9\mathrm{C}_3=84$

### 0167 답 ④

$x$, $y$, $z$, $w$가 자연수이므로 $X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$, $W=w-1$이라 하면 $X$, $Y$, $Z$, $W$는 음이 아닌 정수이다.

$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$, $w=W+1$을 부등식 $6\le x+y+z+w\le8$에 대입하면

$6\le(X+1)+(Y+1)+(Z+1)+(W+1)\le8$

$\therefore 2\le X+Y+Z+W\le4$

$\therefore X+Y+Z+W=2$ 또는 $X+Y+Z+W=3$ 또는 $X+Y+Z+W=4$

(i) 방정식 $X+Y+Z+W=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $X$, $Y$, $Z$, $W$의 순서쌍 $(X, Y, Z, W)$의 개수는 4개의 문자 $X$, $Y$, $Z$, $W$에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

(ii) 방정식 $X+Y+Z+W=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $X$, $Y$, $Z$, $W$의 순서쌍 $(X, Y, Z, W)$의 개수는 4개의 문자 $X$, $Y$, $Z$, $W$에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

(iii) 방정식 $X+Y+Z+W=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $X$, $Y$, $Z$, $W$의 순서쌍 $(X, Y, Z, W)$의 개수는 4개의 문자 $X$, $Y$, $Z$, $W$에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_4={}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=35$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$10+20+35=65$

### 0168 답 74

(가)의 $a+b+c+d=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a$, $b$, $c$, $d$의 순서쌍 $(a, b, c, d)$의 개수는 4개의 문자 $a$, $b$, $c$, $d$에서 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_6={}_9\mathrm{C}_6={}_9\mathrm{C}_3=84$

(나)를 만족시키지 않으려면 $a$, $b$, $c$, $d$가 모두 0이 아니어야 하므로 $a$, $b$, $c$, $d$는 양의 정수이다.

$A=a-1$, $B=b-1$, $C=c-1$, $D=d-1$이라 하면 $A$, $B$, $C$, $D$는 음이 아닌 정수이다.

$a=A+1$, $b=B+1$, $c=C+1$, $d=D+1$을 방정식 $a+b+c+d=6$에 대입하면

$(A+1)+(B+1)+(C+1)+(D+1)=6$

$\therefore A+B+C+D=2$

즉, 순서쌍 $(a, b, c, d)$의 개수는 방정식 $A+B+C+D=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $A$, $B$, $C$, $D$의 순서쌍 $(A, B, C, D)$의 개수, 즉 4개의 문자 $A$, $B$, $C$, $D$에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_2={}_5\mathrm{C}_2=10$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$84-10=74$

### 0169 답 ⑤

(나)에서 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$

(가)에서 $f(1)=1$인 경우와 $f(3)=3$인 경우가 있다.

(i) $f(1)=1$인 경우

$1\le f(2)\le f(3)\le f(4)$에서 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $Y$의 원소 1, 3, 5, 7, 9의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{H}_3={}_7\mathrm{C}_3=35$

(ii) $f(3)=3$인 경우

$f(1)\le f(2)\le3$에서 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $Y$의 원소 1, 3의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 1, 2에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_2\mathrm{H}_2={}_3\mathrm{C}_2={}_3\mathrm{C}_1=3$

$3\le f(4)$에서 $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 3, 5, 7, 9의 4개이다.

따라서 함수의 개수는 $3\times4=12$

(iii) $f(1)=1$, $f(3)=3$인 경우

$1\le f(2)\le 3$에서 $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 3의 2개이고, $3\le f(4)$에서 $f(4)$의 값이 될 수 있는 수는 3, 5, 7, 9의 4개이다.

따라서 함수의 개수는

$2\times 4=8$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수의 개수는 $35+12-8=39$

## 0170 답 6

$(ax+1)^6$의 전개식의 일반항은

${}_6C_r(ax)^r={}_6C_r a^r x^r$

$x$항은 $r=1$일 때이므로 $x$의 계수는

${}_6C_1 a=6a$

$x^3$항은 $r=3$일 때이므로 $x^3$의 계수는

${}_6C_3 a^3=20a^3$

이때 $x$의 계수와 $x^3$의 계수가 같으므로 $6a=20a^3$에서

$20a^2=6$ ($\because a>0$)

## 0171 답 10

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_r x^{4-r}\left(\frac{1}{x}\right)^r={}_4C_r\frac{x^{4-r}}{x^r}$ ····· ㉠

이때

$(x^2+x+1)\left(x+\frac{1}{x}\right)^4=x^2\left(x+\frac{1}{x}\right)^4+x\left(x+\frac{1}{x}\right)^4+\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$

이므로 $x^2$항은 $x^2$과 ㉠의 상수항을 곱하는 경우, $x$와 ㉠의 $x$항을 곱하는 경우, 1과 ㉠의 $x^2$항을 곱하는 경우에 나타난다.

(i) $x^2$과 ㉠의 상수항을 곱하는 경우

㉠의 상수항은 $4-r=r$, 즉 $r=2$일 때이므로

${}_4C_2=6$

따라서 $x^2$과 ㉠의 상수항을 곱하면

$x^2\times 6=6x^2$

(ii) $x$와 ㉠의 $x$항을 곱하는 경우

㉠의 $x$항은 $4-r-r=1$, 즉 $r=\frac{3}{2}$일 때이고 $r$는 $0\le r\le 4$인 정수이므로 ㉠의 $x$항은 존재하지 않는다.

(iii) 1과 ㉠의 $x^2$항을 곱하는 경우

㉠의 $x^2$항은 $4-r-r=2$, 즉 $r=1$일 때이므로

${}_4C_1\times x^2=4x^2$

따라서 1과 ㉠의 $x^2$항을 곱하면

$1\times 4x^2=4x^2$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 $x^2$의 계수는

$6+4=10$

## 0172 답 7

$(1+x)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r x^r$

$(1+x^2)^n$의 전개식의 일반항은

${}_nC_s(x^2)^s={}_nC_s x^{2s}$

따라서 $(1+x)^5(1+x^2)^n$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r x^r\times{}_nC_s x^{2s}={}_5C_r\times{}_nC_s x^{r+2s}$

$x^3$항은 $r+2s=3$ ($r$, $s$는 $0\le r\le 5$, $0\le s\le n$인 정수)일 때이므로 $r$, $s$의 순서쌍 $(r, s)$는

$(1, 1)$, $(3, 0)$

이때 $x^3$의 계수가 45이므로

${}_5C_1\times{}_nC_1+{}_5C_3\times{}_nC_0=45$

$5n+10=45$

$\therefore n=7$

## 0173 답 ③

${}_3C_3={}_4C_4$이므로

$$\begin{aligned}{}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3&={}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3\\&={}_5C_4+{}_5C_3+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3\\&={}_6C_4+{}_6C_3+\cdots+{}_{10}C_3\\&\ \ \vdots\\&={}_{10}C_4+{}_{10}C_3\\&={}_{11}C_4\end{aligned}$$

## 0174 답 56

주어진 다항식의 전개식에서 $x^5$항은 $x$와 $(1+x^2)^n$의 $x^4$항을 곱하는 경우에 나타나므로 $x^5$의 계수는 $(1+x^2)^n$의 전개식에서 $x^4$의 계수와 같다.

$(1+x^2)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^{2r}$

$x^4$항은 $(1+x^2)^2$의 전개식부터 나오므로

$(1+x^2)^2$의 전개식에서 $x^4$의 계수는 ${}_2C_2$

$(1+x^2)^3$의 전개식에서 $x^4$의 계수는 ${}_3C_2$

$(1+x^2)^4$의 전개식에서 $x^4$의 계수는 ${}_4C_2$

$\vdots$

$(1+x^2)^7$의 전개식에서 $x^4$의 계수는 ${}_7C_2$

따라서 구하는 $x^5$의 계수는

$$\begin{aligned}{}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_7C_2&={}_3C_3+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_7C_2\\&={}_4C_3+{}_4C_2+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2\\&={}_5C_3+{}_5C_2+{}_6C_2+{}_7C_2\\&\ \ \vdots\\&={}_7C_3+{}_7C_2\\&={}_8C_3=56\end{aligned}$$

## 0175 답 ④

ㄱ. ${}_{100}C_0+{}_{100}C_1+{}_{100}C_2+\cdots+{}_{100}C_{99}+{}_{100}C_{100}=2^{100}$에서

${}_{100}C_0+{}_{100}C_1+{}_{100}C_2+\cdots+{}_{100}C_{99}=2^{100}-{}_{100}C_{100}$

$=2^{100}-1$

ㄴ. ${}_6C_0-{}_6C_1+{}_6C_2-{}_6C_3+\cdots+{}_6C_6=0$

ㄷ. ${}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+\cdots+{}_{11}C_{11}={}_{11}C_5+{}_{11}C_4+{}_{11}C_3+\cdots+{}_{11}C_0$이고

$({}_{11}C_0+{}_{11}C_1+{}_{11}C_2+\cdots+{}_{11}C_5)+({}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+\cdots+{}_{11}C_{11})$

$=2^{11}$

이므로

$2({}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+\cdots+{}_{11}C_{11})=2^{11}$

$\therefore {}_{11}C_6+{}_{11}C_7+{}_{11}C_8+\cdots+{}_{11}C_{11}=2^{10}$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 0176 답 5

${}_{2n+1}C_1={}_{2n+1}C_{2n}$, ${}_{2n+1}C_3={}_{2n+1}C_{2n-2}$, …, ${}_{2n+1}C_n={}_{2n+1}C_{n+1}$

이므로 주어진 부등식의 좌변에서

${}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_1+{}_{2n+1}C_2+\cdots+{}_{2n+1}C_n$

$={}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_{2n}+{}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_{2n-2}+\cdots+{}_{2n+1}C_{n+1}$

$={}_{2n+1}C_0+{}_{2n+1}C_2+{}_{2n+1}C_4+\cdots+{}_{2n+1}C_{2n-2}+{}_{2n+1}C_{2n}$

$=2^{2n+1-1}=2^{2n}$

따라서 주어진 부등식은 $2^{2n}<1500$

이때 $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$이므로 $n$의 최댓값은 5이다.

## 0177 답 ④

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=5$, $n=8$을 대입하면

$6^8={}_8C_0+{}_8C_1\times5+{}_8C_2\times5^2+\cdots+{}_8C_8\times5^8$

$\therefore N=6^8=(2\times3)^8=2^8\times3^8$

따라서 $N=2^8\times3^8$의 양의 약수의 개수는

$(8+1)(8+1)=81$

## 0178 답 90

함수 $f$의 개수는 집합 $Y$의 원소 4, 5, 6, 7, 8의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 $X$의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\Pi_3=5^3=125$ $\therefore a=125$ …… ⓘ

$f(3)\le f(2)\le f(1)$을 만족시키는 함수 $f$의 개수는 집합 $Y$의 원소 4, 5, 6, 7, 8의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 크거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5H_3={}_7C_3=35$ $\therefore b=35$ …… ⓘⓘ

$\therefore a-b=125-35=90$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $a$의 값 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ $b$의 값 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ $a-b$의 값 구하기 | 20 % |

## 0179 답 4

$(3+x)^{15}$의 전개식의 일반항은

${}_{15}C_r3^{15-r}x^r$

$x^k$의 계수는 ${}_{15}C_k3^{15-k}$

$x^{k+1}$의 계수는 ${}_{15}C_{k+1}3^{14-k}$ …… ⓘ

$x^k$의 계수가 $x^{k+1}$의 계수보다 크려면

${}_{15}C_k3^{15-k}>{}_{15}C_{k+1}3^{14-k}$

$\dfrac{15!}{k!(15-k)!}\times3^{15-k}>\dfrac{15!}{(k+1)!(14-k)!}\times3^{14-k}$

$3(k+1)>15-k$

$4k>12$ $\therefore k>3$ …… ⓘⓘ

따라서 자연수 $k$의 최솟값은 4이다. …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $x^k$, $x^{k+1}$의 계수 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘ $k$의 값의 범위 구하기 | 50 % |
| ⓘⓘⓘ $k$의 최솟값 구하기 | 20 % |

## 0180 답 27

$(2x-1)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5C_r(-1)^{5-r}(2x)^r={}_5C_r(-1)^{5-r}2^rx^r$ …… ㉠

이때

$(ax+3)(2x-1)^5=ax(2x-1)^5+3(2x-1)^5$

이므로 $x^2$항은 $ax$와 ㉠의 $x$항을 곱하는 경우, 3과 ㉠의 $x^2$항을 곱하는 경우에 나타난다.

(i) $ax$와 ㉠의 $x$항을 곱하는 경우

㉠의 $x$항은 $r=1$일 때이므로

${}_5C_1\times(-1)^4\times2\times x=5\times1\times2\times x$

$=10x$

따라서 $ax$와 ㉠의 $x$항을 곱하면

$ax\times10x=10ax^2$ …… ⓘ

(ii) 3과 ㉠의 $x^2$항을 곱하는 경우

㉠의 $x^2$항은 $r=2$일 때이므로

${}_5C_2\times(-1)^3\times2^2\times x^2=10\times(-1)\times4\times x^2$

$=-40x^2$

따라서 3과 ㉠의 $x^2$항을 곱하면

$3\times(-40x^2)=-120x^2$ …… ⓘⓘ

(i), (ii)에서 $x^2$의 계수는

$10a-120$

따라서 $10a-120=150$이므로

$a=27$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $ax(2x-1)^5$의 전개식에서 $x^2$항 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ $3(2x-1)^5$의 전개식에서 $x^2$항 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ $a$의 값 구하기 | 20 % |

## 실력 향상 35쪽

## 0181 답 51

(i) 2종류의 과일을 2개씩 택하는 경우

3종류의 과일 중에서 2종류의 과일을 택하는 경우의 수는

${}_3C_2={}_3C_1=3$

택한 과일 중에서 1종류의 과일 2개를 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

나머지 1종류의 과일 2개를 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는

${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

한 학생이 4개의 과일을 모두 받는 경우의 수는 2

즉, 택한 과일을 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는
$3\times3-2=7$
따라서 2종류의 과일을 2개씩 택하는 경우의 수는
$3\times7=21$

(ii) 1종류의 과일을 2개 택하고 나머지 종류의 과일을 1개씩 택하는 경우
2개를 택하는 과일의 종류를 정하는 경우의 수는
${}_3C_1=3$
택한 과일 중에서 1종류의 과일 2개를 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는
${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$
1종류의 과일 1개를 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 각각 2
한 학생이 4개의 과일을 모두 받는 경우의 수는 2
즉, 택한 과일을 2명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는
$3\times2\times2-2=10$
따라서 1종류의 과일을 2개, 나머지 종류의 과일을 1개씩 택하는 경우의 수는
$3\times10=30$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는
$21+30=51$

## 0182 답 196

(i) $a\le b$인 경우
$a\le b\le c\le d$에서 $a$, $b$, $c$, $d$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 자연수에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 $a$, $b$, $c$, $d$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_6H_4={}_9C_4=126$

(ii) $b\le a$인 경우
$b\le a\le c\le d$에서 $a$, $b$, $c$, $d$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 자연수에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 $b$, $a$, $c$, $d$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_6H_4={}_9C_4=126$

(iii) $a=b$인 경우
$a=b\le c\le d$에서 $a$, $b$, $c$, $d$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 자연수에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 $a$, $c$, $d$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_6H_3={}_8C_3=56$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$126+126-56=196$

## 0183 답 170

(나)에서 $f(1)\ge f(2)\ge f(3)\ge f(4)$
(가)에서 $f(2)$의 값이 짝수이므로
$f(2)=2$ 또는 $f(2)=4$ 또는 $f(2)=6$ 또는 $f(2)=8$

(i) $f(2)=2$일 때
$f(1)\ge2$에서 $f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 7개이다.
$2\ge f(3)\ge f(4)$에서 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $Y$의 원소 1, 2의 2개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 크거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$
따라서 함수의 개수는
$7\times3=21$

(ii) $f(2)=4$일 때
$f(1)\ge4$에서 $f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 4, 5, 6, 7, 8의 5개이다.
$4\ge f(3)\ge f(4)$에서 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 크거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_4H_2={}_5C_2=10$
따라서 함수의 개수는
$5\times10=50$

(iii) $f(2)=6$일 때
$f(1)\ge6$에서 $f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 6, 7, 8의 3개이다.
$6\ge f(3)\ge f(4)$에서 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 크거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_6H_2={}_7C_2=21$
따라서 함수의 개수는
$3\times21=63$

(iv) $f(2)=8$일 때
$f(1)\ge8$에서 $f(1)$의 값은 8이다.
$8\ge f(3)\ge f(4)$에서 $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 8개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 크거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_8H_2={}_9C_2=36$
따라서 함수의 개수는
$1\times36=36$

(i)~(iv)에서 구하는 함수의 개수는
$21+50+63+36=170$

## 0184 답 ④

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=42$, $n=7$을 대입하면
$43^7={}_7C_0+{}_7C_1\times42+{}_7C_2\times42^2+\cdots+{}_7C_7\times42^7$
$=1+42({}_7C_1+{}_7C_2\times42+\cdots+{}_7C_7\times42^6)$
$=1+6\times7({}_7C_1+{}_7C_2\times42+\cdots+{}_7C_7\times42^6)$
즉, $43^7$을 7로 나누었을 때의 나머지는 1이다.
따라서 수요일로부터 $43^7$일째 되는 날은 목요일이다.

# 03 / 확률의 개념과 활용

## A 개념 확인 38~41쪽

**0185** 답 {1, 2, 3, 4}

**0186** 답 {1}, {2}, {3}, {4}

**0187** 답 {2, 4}

**0188** 답 {1, 2, 4}

**0189** 답 (1) {4, 5, 8, 10, 12} (2) ∅
(3) {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11}
(4) {1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12}

$A=\{4, 8, 12\}$, $B=\{5, 10\}$이므로
(1) $A\cup B=\{4, 5, 8, 10, 12\}$
(2) $A\cap B=\varnothing$
(3) $A^C=\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11\}$
(4) $B^C=\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12\}$

**0190** 답 (1) ∅ (2) {HT, TH}
(3) ∅ (4) $A$와 $B$, $C$와 $A$

$A=\{HH\}$, $B=\{HT, TH\}$, $C=\{HT, TH, TT\}$
(1) $A\cap B=\varnothing$
(2) $B\cap C=\{HT, TH\}$
(3) $C\cap A=\varnothing$
(4) $A\cap B=\varnothing$, $C\cap A=\varnothing$이므로 $A$와 $B$, $C$와 $A$는 서로 배반사건이다.

**0191** 답 $\frac{1}{2}$

짝수의 눈이 나오는 경우는 2, 4, 6이므로 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

**0192** 답 $\frac{1}{3}$

3의 배수의 눈이 나오는 경우는 3, 6이므로 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

**0193** 답 $\frac{2}{3}$

6의 약수의 눈이 나오는 경우는 1, 2, 3, 6이므로 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

**0194** 답 (1) 24 (2) 12 (3) $\frac{1}{2}$

(1) 4명이 일렬로 서는 경우의 수는 $4!=24$
(2) A, B를 한 사람으로 생각하여 3명이 일렬로 서는 경우의 수는 $3!=6$
A, B가 서로 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$
따라서 A, B가 서로 이웃하도록 서는 경우의 수는 $6\times2=12$
(3) A, B가 서로 이웃하도록 설 확률은 $\frac{12}{24}=\frac{1}{2}$

**0195** 답 $\frac{1}{500}$

구하는 확률은 $\frac{20}{10000}=\frac{1}{500}$

**0196** 답 $\frac{9}{10}$

구하는 확률은 $\frac{1800}{2000}=\frac{9}{10}$

**0197** 답 1

카드에 적힌 수가 5 이하인 사건은 반드시 일어나므로 구하는 확률은 1이다.

**0198** 답 0

카드에 적힌 수가 두 자리의 수인 사건은 절대로 일어날 수 없으므로 구하는 확률은 0이다.

**0199** 답 0

카드에 적힌 수가 6의 배수인 사건은 절대로 일어날 수 없으므로 구하는 확률은 0이다.

**0200** 답 0

나오는 두 눈의 수의 합이 15인 사건은 절대로 일어날 수 없으므로 구하는 확률은 0이다.

**0201** 답 1

나오는 두 눈의 수의 차가 5 이하인 사건은 반드시 일어나므로 구하는 확률은 1이다.

**0202** 답 0

나오는 두 눈의 수의 곱이 7인 사건은 절대로 일어날 수 없으므로 구하는 확률은 0이다.

**0203** 답 $\frac{3}{4}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

**0204** 답 $\frac{2}{15}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서
$\frac{4}{5}=\frac{3}{5}+\frac{1}{3}-P(A\cap B)$
$\therefore P(A\cap B)=\frac{3}{5}+\frac{1}{3}-\frac{4}{5}=\frac{2}{15}$

**0205** 답 $\frac{5}{8}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

**0206** 답 $\frac{4}{9}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$\frac{7}{9}=P(A)+\frac{1}{3}$

$\therefore P(A)=\frac{7}{9}-\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$

**0207** 답 $\frac{1}{3}$

$P(A^C)=1-P(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

**0208** 답 (1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{7}{8}$

(1) $A^C$는 모두 뒷면이 나오는 사건이므로

$P(A^C)=\frac{1}{2\times2\times2}=\frac{1}{8}$

(2) $P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

**0209** 답 (1) $\frac{4}{35}$ (2) $\frac{31}{35}$

(1) $A^C$는 모두 초록 구슬만 꺼내는 사건이므로

$P(A^C)=\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$

(2) $P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}$

## B 유형 완성 42~51쪽

**0210** 답 ㄱ, ㄷ

표본공간을 $S$라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

$A=\{1, 3\}$, $B=\{4, 12\}$, $C=\{2, 3\}$

ㄱ. $A\cap B=\varnothing$이므로 $A$와 $B$는 서로 배반사건이다.

ㄴ. $A\cap C=\{3\}$이므로 $A$와 $C$는 서로 배반사건이 아니다.

ㄷ. $B\cap C=\varnothing$이므로 $B$와 $C$는 서로 배반사건이다.

따라서 보기에서 서로 배반사건인 것은 ㄱ, ㄷ이다.

**0211** 답 ③

① 두 사건 $A$, $B$가 서로 배반사건이므로 $A\cap B=\varnothing$

② $A\cap A^C=\varnothing$

③ [반례] $S=\{1, 2, 3, 4\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{3\}$이면

$A^C=\{3, 4\}$, $B^C=\{1, 2, 4\}$이므로 $A^C\cap B^C=\{4\}$

④ $A\cap B=\varnothing$이므로 $A\subset B^C$

⑤ $A\cap B=\varnothing$이므로 $B\subset A^C$

$\therefore A^C\cup B=A^C$

**0212** 답 16

표본공간을 $S$라 하면 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 8\}$이므로

$A=\{1, 3, 5, 7\}$

사건 $A$와 서로 배반인 사건은 $A^C$의 부분집합이므로

$A^C=\{2, 4, 6, 8\}$

따라서 구하는 사건의 개수는 $A^C$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^4=16$

**0213** 답 4

사건 $A$와 서로 배반인 사건은 $A^C$의 부분집합이고, 사건 $B$와 서로 배반인 사건은 $B^C$의 부분집합이므로 두 사건 $A$, $B$와 모두 배반인 사건은 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다.

이때 $A^C=\{-3, -2, 2, 3\}$, $B^C=\{-2, -1, 1, 3\}$이므로

$A^C\cap B^C=\{-2, 3\}$

따라서 구하는 사건의 개수는 $A^C\cap B^C$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^2=4$

**0214** 답 ④

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던질 때, 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6=36$

나오는 두 눈의 수를 각각 $a$, $b$라 하면 순서쌍 $(a, b)$에 대하여 $a+b$를 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 경우는

(i) $a+b=3$인 경우

$(1, 2)$, $(2, 1)$의 2개

(ii) $a+b=7$인 경우

$(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$의 6개

(iii) $a+b=11$인 경우

$(5, 6)$, $(6, 5)$의 2개

(i), (ii), (iii)에서 두 눈의 수의 합을 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 경우의 수는

$2+6+2=10$

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{36}=\frac{5}{18}$

**0215** 답 $\frac{1}{4}$

집합 $A$의 부분집합의 개수는

$2^6=64$

집합 $A$의 부분집합 중에서 원소 5, 7을 모두 포함하는 부분집합의 개수는

$2^{6-2}=2^4=16$

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$

**0216** 답 ③

$360=2^3\times3^2\times5$이므로 360의 양의 약수의 개수는

$(3+1)(2+1)(1+1)=24$

짝수는 2를 소인수로 가지므로 360의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는 $2^2\times3^2\times5$의 양의 약수의 개수와 같다.

즉, 360의 양의 약수 중에서 짝수의 개수는

$(2+1)(2+1)(1+1)=18$

따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{24}=\frac{3}{4}$

## 0217 답 $\frac{14}{25}$

나오는 모든 경우의 수는

$5\times5=25$

이차방정식 $ax^2+bx+1=0$의 판별식을 $D$라 하면 이 방정식이 실근을 가질 조건은

$D=b^2-4a\geq0$ $\therefore 4a\leq b^2$

이 부등식을 만족시키는 경우는

(i) $a=1$일 때, $b=3, 5, 7, 9$의 4가지

(ii) $a=3$일 때, $b=5, 7, 9$의 3가지

(iii) $a=5$일 때, $b=5, 7, 9$의 3가지

(iv) $a=7$일 때, $b=7, 9$의 2가지

(v) $a=9$일 때, $b=7, 9$의 2가지

(i)~(v)에서 주어진 이차방정식이 실근을 갖는 경우의 수는

$4+3+3+2+2=14$

따라서 구하는 확률은 $\frac{14}{25}$

## 0218 답 $\frac{2}{7}$

7명이 일렬로 서는 경우의 수는

$7!=5040$

여학생이 일렬로 서는 경우의 수는

$4!=24$

4명의 여학생 사이사이와 양 끝의 5개의 자리에 남학생이 서는 경우의 수는

${}_5P_3=60$

즉, 남학생끼리 서로 이웃하지 않도록 서는 경우의 수는

$24\times60=1440$

따라서 구하는 확률은 $\frac{1440}{5040}=\frac{2}{7}$

## 0219 답 $\frac{2}{5}$

5명이 탑승하는 순서대로 일렬로 서는 경우의 수는

$5!=120$

부부를 한 사람으로 생각하여 4명이 일렬로 서는 경우의 수는

$4!=24$

부부끼리 순서를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

즉, 부부가 연이어 탑승하는 경우의 수는

$24\times2=48$

따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$

## 0220 답 $\frac{7}{20}$

만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는 ${}_5P_4=120$ …… ❶

42□□, 43□□, 45□□ 꼴의 자연수의 개수는 각각 ${}_3P_2=6$

5□□□ 꼴의 자연수의 개수는 ${}_4P_3=24$

즉, 4200 이상인 자연수의 개수는

$3\times6+24=42$ …… ❷

따라서 구하는 확률은 $\frac{42}{120}=\frac{7}{20}$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수 구하기 | 30 % |
| ❷ 4200 이상인 자연수의 개수 구하기 | 50 % |
| ❸ 4200 이상일 확률 구하기 | 20 % |

## 0221 답 $\frac{3}{10}$

6명이 일렬로 서는 경우의 수는 $6!=720$

첫 번째 자리에 서는 1학년 학생을 정하는 경우의 수는 3

마지막 자리에 서는 2학년 학생을 정하는 경우의 수는 3

나머지 자리에 1학년 학생 2명과 2학년 학생 2명이 서는 경우의 수는

$4!=24$

즉, 첫 번째 자리에 1학년 학생이 서고, 마지막 자리에 2학년 학생이 서는 경우의 수는

$3\times3\times24=216$

따라서 구하는 확률은 $\frac{216}{720}=\frac{3}{10}$

## 0222 답 ④

9장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $9!$

문자 A가 적힌 카드의 바로 양옆에 숫자가 적힌 카드를 놓는 경우의 수는

${}_4P_2=12$

문자 A가 적힌 카드와 그 양옆에 놓이는 카드를 1장으로 생각하여 7장의 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $7!$

즉, 문자 A가 적힌 카드의 바로 양옆에 각각 숫자가 적힌 카드를 놓는 경우의 수는

$12\times7!$

따라서 구하는 확률은 $\frac{12\times7!}{9!}=\frac{1}{6}$

## 0223 답 ③

맨 앞자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지이므로 만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의 개수는

$4\times{}_5\Pi_5=4\times5^5$

짝수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 2, 4의 3가지

맨 앞자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4의 4가지

즉, 짝수의 개수는

$4\times{}_5\Pi_4\times3=4\times5^4\times3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4\times5^4\times3}{4\times5^5}=\frac{3}{5}$

## 0224 답 $\frac{1}{4}$

$X$에서 $Y$로의 함수 $f$의 개수는 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

$f(a)+f(b)=5$를 만족시키는 경우는

$f(a)=1$, $f(b)=4$ 또는 $f(a)=2$, $f(b)=3$

또는 $f(a)=3$, $f(b)=2$ 또는 $f(a)=4$, $f(b)=1$의 4가지

$f(c)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4의 4개이다.

즉, $f(a)+f(b)=5$를 만족시키는 함수의 개수는

$4\times4=16$

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$

## 0225 답 $\frac{5}{32}$

4명의 학생에게 서로 다른 연필 5자루를 나누어 주는 경우의 수는
${}_4\Pi_5=4^5=1024$ …… ⓘ
연필 5자루 중에서 2자루를 택하여 A와 B에게 먼저 1자루씩 나누어 주는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$
2명의 학생 C, D에게 나머지 연필 3자루를 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2\Pi_3=2^3=8$
즉, A와 B가 각각 연필 1자루만 받는 경우의 수는
$20\times8=160$ …… ⓘⓘ
따라서 구하는 확률은 $\frac{160}{1024}=\frac{5}{32}$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ 4명의 학생에게 서로 다른 연필 5자루를 나누어 주는 경우의 수 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘ A와 B가 각각 연필 1자루만 받는 경우의 수 구하기 | 50 % |
| ⓘⓘⓘ A와 B가 각각 연필 1자루만 받을 확률 구하기 | 20 % |

## 0226 답 $\frac{1}{7}$

brother에 있는 7개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$\frac{7!}{2!}=2520$
자음 b, r, r, t, h를 한 문자 B로 생각하여 B, o, e를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $3!=6$
자음 b, r, r, t, h끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!}=60$
즉, 자음끼리 서로 이웃하도록 배열하는 경우의 수는 $6\times60=360$
따라서 구하는 확률은 $\frac{360}{2520}=\frac{1}{7}$

## 0227 답 ②

만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의 개수는 $\frac{6!}{3!\times2!}=60$
맨 앞자리에 2를 놓고 나머지 자리에 1, 1, 1, 2, 3의 5개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{3!}=20$
따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$

## 0228 답 $\frac{18}{35}$

A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\frac{7!}{4!\times3!}=35$ …… ⓘ
A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는
$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{3!}{2!}=6\times3=18$ …… ⓘⓘ
따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{35}$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ A 지점에서 P 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 갈 확률 구하기 | 20 % |

## 0229 답 $\frac{1}{6}$

9명의 학생이 일렬로 서는 경우의 수는 9!
주원, 민지, 태원이를 모두 X로 바꾸어 생각하여 9명의 학생이 일렬로 선 후 첫 번째 X를 주원이로, 두 번째 X를 민지로, 세 번째 X를 태원이로 바꾸면 되므로 그 경우의 수는 $\frac{9!}{3!}$
따라서 구하는 확률은 $\frac{\frac{9!}{3!}}{9!}=\frac{1}{6}$

## 0230 답 $\frac{5}{128}$

$X$에서 $X$로의 함수 $f$의 개수는
${}_4\Pi_4=4^4=256$
$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=6$을 만족시키는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 1, 1, 3 또는 1, 1, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수와 같으므로
$\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!\times2!}=4+6=10$
따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{256}=\frac{5}{128}$

## 0231 답 ④

7개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_7C_2=21$
흰 공 1개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_4C_1\times{}_3C_1=12$
따라서 구하는 확률은 $\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$

## 0232 답 $\frac{4}{15}$

6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는
${}_6C_4={}_6C_2=15$
A는 포함되고 B는 포함되지 않는 경우의 수는 A, B를 제외한 나머지 4명 중에서 3명을 뽑고 A를 포함시키는 경우의 수와 같으므로
${}_4C_3={}_4C_1=4$
따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{15}$

## 0233 답 ①

10명 중에서 대표 2명을 뽑는 경우의 수는
${}_{10}C_2=45$
남학생 수를 $x$라 하면 여학생 수는 $10-x$이므로 남학생 1명과 여학생 1명을 뽑는 경우의 수는
${}_xC_1\times{}_{10-x}C_1=x(10-x)$
따라서 남학생 1명과 여학생 1명을 뽑을 확률은 $\frac{x(10-x)}{45}$
즉, $\frac{x(10-x)}{45}=\frac{8}{15}$이므로
$x^2-10x+24=0$, $(x-4)(x-6)=0$
$\therefore x=4$ 또는 $x=6$
따라서 남학생 4명, 여학생 6명 또는 남학생 6명, 여학생 4명이므로 구하는 남학생 수와 여학생 수의 차는 2이다.

## 0234 답 $\frac{5}{28}$

8개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

${}_8C_3=56$

가장 작은 수가 3인 경우의 수는 3이 적힌 공을 꺼내고, 4, 5, 6, 7, 8이 적힌 5개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_2=10$

따라서 구하는 확률은 $\frac{10}{56}=\frac{5}{28}$

## 0235 답 $\frac{1}{2}$

9개의 점 중에서 2개를 택하여 만들 수 있는 선분의 개수는

${}_9C_2=36$

길이가 1인 선분의 개수는 가로, 세로마다 각각 2개씩 있으므로

$3\times2+3\times2=12$

길이가 2인 선분의 개수는 가로, 세로마다 각각 1개씩 있으므로

$3\times1+3\times1=6$

즉, 선분의 길이가 유리수인 선분의 개수는

$12+6=18$

따라서 구하는 확률은 $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$

## 0236 답 $\frac{10}{81}$

5명이 가위바위보를 한 번 할 때, 나오는 모든 경우의 수는

${}_3\Pi_5=3^5=243$

이기는 사람 2명을 정하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

각각의 경우에 대하여 이기는 경우는 (가위, 가위, 보, 보, 보), (바위, 바위, 가위, 가위, 가위), (보, 보, 바위, 바위, 바위)의 3가지

즉, 이기는 사람이 2명인 경우의 수는

$10\times3=30$

따라서 구하는 확률은 $\frac{30}{243}=\frac{10}{81}$

## 0237 답 $\frac{7}{12}$

방정식 $x+y+z=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$의 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수는

${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$

$x\geq2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$의 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수는

${}_3H_{7-2}={}_3H_5={}_7C_5={}_7C_2=21$

따라서 구하는 확률은 $\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$

## 0238 답 $\frac{1}{13}$

4명의 학생에게 음료수 12병을 나누어 주는 경우의 수는

${}_4H_{12}={}_{15}C_{12}={}_{15}C_3=455$ …… ⓘ

모든 학생이 2병 이상 받으려면 먼저 모든 학생에게 2병씩 나누어 주고, 나머지 4병을 4명의 학생에게 나누어 주면 되므로 그 경우의 수는

${}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$ …… ⓘⓘ

따라서 구하는 확률은 $\frac{35}{455}=\frac{1}{13}$ …… ⓘⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ 4명의 학생에게 음료수를 나누어 주는 경우의 수 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘ 모든 학생이 2병 이상 받도록 나누어 주는 경우의 수 구하기 | 50 % |
| ⓘⓘⓘ 모든 학생이 2병 이상 받도록 나누어 줄 확률 구하기 | 20 % |

## 0239 답 ③

$X$에서 $Y$로의 함수 $f$의 개수는 ${}_4\Pi_3=4^3=64$

$i<j$이면 $f(i)\leq f(j)$에서 $f(1)\leq f(2)\leq f(3)$

이를 만족시키는 함수 $f$는 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 1, 2, 3에 대응시키면 되므로 그 개수는

${}_4H_3={}_6C_3=20$

따라서 구하는 확률은 $\frac{20}{64}=\frac{5}{16}$

## 0240 답 $\frac{35}{216}$

한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

(i) $a_1\leq a_2\leq a_3$인 경우

6개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 $a_1$, $a_2$, $a_3$에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

${}_6H_3={}_8C_3=56$

(ii) $a_1\leq a_2=a_3$인 경우

6개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 $a_1$, $a_2$에 대응시키면 되므로 그 경우의 수는

${}_6H_2={}_7C_2=21$

(i), (ii)에서 $a_1\leq a_2<a_3$인 경우의 수는

$56-21=35$

따라서 구하는 확률은 $\frac{35}{216}$

## 0241 답 ②

15개의 구슬 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{15}C_2=105$

노란 구슬의 개수를 $n$이라 하면 2개의 구슬이 모두 노란 구슬인 경우의 수는 ${}_nC_2=\frac{n(n-1)}{2}$

따라서 2개의 구슬이 모두 노란 구슬일 확률은

$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{105}=\frac{n(n-1)}{210}$

즉, $\frac{n(n-1)}{210}=\frac{2}{10}$이므로

$n(n-1)=42=7\times6$ $\therefore n=7$ ($\because n$은 자연수)

따라서 주머니 속에 들어 있는 노란 구슬의 개수는 7이다.

## 0242 답 5

공장 A에서 생산한 장난감을 1개 택할 때, 불량품일 확률은

$a=\frac{4}{2000}=\frac{1}{500}$

공장 B에서 생산한 장난감을 1개 택할 때, 불량품일 확률은

$b=\frac{2}{5000}=\frac{1}{2500}$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{500}}{\frac{1}{2500}}=5$

## 0243 답 $\frac{5}{12}$

전체 학생 수는

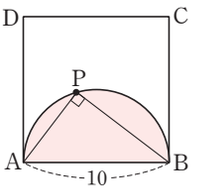
$300+150+180+90=720$

혈액형이 A형인 학생이 300명이므로 구하는 확률은

$\frac{300}{720}=\frac{5}{12}$

## 0244 답 $\frac{\pi}{8}$

오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원을 그리면 반원 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAB는 직각삼각형이므로 삼각형 PAB가 둔각삼각형이려면 점 P는 색칠한 부분에 있어야 한다.




따라서 구하는 확률은

$\frac{(\text{색칠한 반원의 넓이})}{(\square ABCD\text{의 넓이})}=\frac{\frac{25}{2}\pi}{100}=\frac{\pi}{8}$

## 0245 답 $\frac{5}{16}$

반지름의 길이가 4인 원의 넓이는 $16\pi$

색칠한 부분의 넓이는 $9\pi-4\pi=5\pi$

따라서 구하는 확률은

$\frac{5\pi}{16\pi}=\frac{5}{16}$

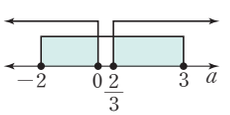
## 0246 답 ⑤

이차방정식 $x^2-6ax+6a=0$의 판별식을 $D$라 할 때, 이 방정식이 실근을 가지려면

$\frac{D}{4}=9a^2-6a\geq 0,\ 3a(3a-2)\geq 0$

$\therefore a\leq 0$ 또는 $a\geq\frac{2}{3}$

그런데 $-2\leq a\leq 3$이므로 오른쪽 그림에서 구하는 확률은




$\frac{\{0-(-2)\}+\left(3-\frac{2}{3}\right)}{3-(-2)}=\frac{13}{15}$

## 0247 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $0\leq P(A)\leq 1,\ 0\leq P(B)\leq 1$이므로

$-1\leq P(A)-P(B)\leq 1$

ㄴ. $(A\cap B)\subset(A\cup B)$이므로

$P(A\cap B)\leq P(A\cup B)$

ㄷ. $0\leq P(A)\leq 1,\ 0\leq P(B)\leq 1$이므로

$0\leq P(A)P(B)\leq 1$

이때 $P(S)=1$이므로

$P(A)P(B)\leq P(S)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

## 0248 답 ①

ㄱ. $P(S)=1,\ P(\varnothing)=0$이므로 $P(S)-P(\varnothing)=1$

ㄴ. [반례] $S=\{1, 2, 3, 4, 5\},\ A=\{1, 2, 3, 4\},\ B=\{4, 5\}$이면

$A\cup B=S$이지만 $P(A)+P(B)=\frac{4}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$

ㄷ. [반례] $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\},\ A=\{3, 6\},\ B=\{1, 2, 3, 6\}$이면 $P(A)+P(B)=\frac{2}{6}+\frac{4}{6}=1$이지만 $A\cap B=\{3, 6\}$이므로 두 사건 $A$, $B$는 서로 배반사건이 아니다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

## 0249 답 $\frac{4}{5}$

$P(A^C\cup B^C)=P((A\cap B)^C)=1-P(A\cap B)$이므로

$\frac{3}{5}=1-P(A\cap B)\qquad \therefore P(A\cap B)=\frac{2}{5}$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{7}{10}-\frac{2}{5}=\frac{4}{5}$

## 0250 답 ②

$P(A^C)=\frac{5}{6}$에서

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

$A$와 $B$가 서로 배반사건이므로 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서

$\frac{3}{4}=\frac{1}{6}+P(B)\qquad \therefore P(B)=\frac{7}{12}$

$\therefore P(B^C)=1-P(B)=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$

## 0251 답 ①

$P(A\cup B)-P(A\cap B)=P(A\cap B^C)+P(A^C\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

이때 $A$와 $B$가 서로 배반사건이면 $P(A\cap B)=0$이므로

$P(A\cup B)=\frac{7}{12}$

$\therefore P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)$

$=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$

다른 풀이

$A$와 $B$가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$A\cap B^C=A,\ A^C\cap B=B$

$\therefore P(A\cap B^C)=P(A)=\frac{1}{3},\ P(A^C\cap B)=P(B)=\frac{1}{4}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$에서 $P(A\cup B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}$

$\therefore P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)=1-P(A\cup B)$

$=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$

## 0252 답 ②

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{2}\mathrm{P}(A\cap B)$, $\mathrm{P}(B)=3\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{5}{2}\mathrm{P}(A\cap B)+3\mathrm{P}(A\cap B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{9}{2}\mathrm{P}(A\cap B)$$

$$\therefore \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cup B)}=\frac{2}{9}$$

## 0253 답 $\frac{3}{5}$

꺼낸 카드에 적힌 수가 2의 배수인 사건을 $A$, 5의 배수인 사건을 $B$라 하면 $A\cap B$는 10의 배수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{15}{30}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{6}{30}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{3}{30}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{15}{30}+\frac{6}{30}-\frac{3}{30}=\frac{3}{5}$$

## 0254 답 ⑤

택한 학생이 미술을 좋아하는 학생인 사건을 $A$, 음악을 좋아하는 학생인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.55$, $\mathrm{P}(B)=0.3$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{24}{120}=0.2$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=0.55+0.3-0.2=0.65$$

## 0255 답 $\frac{3}{4}$

A가 B보다 앞에 있도록 배열하는 사건을 $A$, D가 E보다 뒤에 있도록 배열하는 사건을 $B$라 하자.

(i) A가 B보다 앞에 있는 경우

A, B를 모두 X로 바꾸어 생각하여 일렬로 배열하는 경우와 같으므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{\frac{5!}{2!}}{5!}=\frac{1}{2}$$

(ii) D가 E보다 뒤에 있는 경우

D, E를 모두 Y로 바꾸어 생각하여 일렬로 배열하는 경우와 같으므로

$$\mathrm{P}(B)=\frac{\frac{5!}{2!}}{5!}=\frac{1}{2}$$

(iii) A가 B보다 앞에 있고, D가 E보다 뒤에 있는 경우

A, B를 모두 X로, D, E를 모두 Y로 바꾸어 생각하여 일렬로 배열하는 경우와 같으므로

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{\frac{5!}{2!\times 2!}}{5!}=\frac{1}{4}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

## 0256 답 ③

(i) 흰 공 1개, 검은 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{12}{20}$$

(ii) 2가 적힌 공 3개를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{4}{20}$$

(iii) 2가 적힌 흰 공 1개, 2가 적힌 검은 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{{}_1\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{3}{20}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{12}{20}+\frac{4}{20}-\frac{3}{20}=\frac{13}{20}$$

## 0257 답 $\frac{1}{2}$

$12x^2-7nx+n^2=0$을 풀면

$(4x-n)(3x-n)=0$ $\quad\therefore x=\frac{n}{4}$ 또는 $x=\frac{n}{3}$

이때 이차방정식이 정수해를 가지려면 자연수 $n$이 4의 배수 또는 3의 배수이어야 한다. …… ❶

$n$이 4의 배수인 사건을 $A$, 3의 배수인 사건을 $B$라 하면 $A\cap B$는 12의 배수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{20}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{6}{20}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{20}$ …… ❷

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\frac{5}{20}+\frac{6}{20}-\frac{1}{20}=\frac{1}{2}$$ …… ❸

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ 정수해를 갖는 조건 구하기 | 30 % |
| ❷ $n$이 4의 배수, 3의 배수, 12의 배수일 확률 구하기 | 30 % |
| ❸ 정수해를 가질 확률 구하기 | 40 % |

## 0258 답 ④

꺼낸 2개의 공이 모두 흰색인 사건을 $A$, 모두 검은색인 사건을 $B$라 하자.

(i) 흰 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{6}{36}$$

(ii) 검은 공 2개를 꺼낼 확률은

$$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{10}{36}$$

(i), (ii)에서 $A$와 $B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$$
$$=\frac{6}{36}+\frac{10}{36}=\frac{4}{9}$$

## 0259 답 ②

선생님이 맨 앞에 서는 사건을 $A$, 맨 뒤에 서는 사건을 $B$라 하자.

(i) 선생님이 맨 앞에 설 확률은

$$\mathrm{P}(A)=\frac{7!}{8!}=\frac{1}{8}$$

(ii) 선생님이 맨 뒤에 설 확률은

$$P(B)=\frac{7!}{8!}=\frac{1}{8}$$

(i), (ii)에서 $A$와 $B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

## 0260 답 $\frac{1}{4}$

두 눈의 수의 합이 5인 사건을 $A$, 합이 8인 사건을 $B$라 하자.

이때 나오는 두 눈의 수를 $a$, $b$라 하면 순서쌍 $(a, b)$에 대하여

$A=\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$,

$B=\{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$이므로

$$P(A)=\frac{4}{36},\ P(B)=\frac{5}{36}$$

$A$와 $B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{4}{36}+\frac{5}{36}=\frac{1}{4}$$

## 0261 답 $\frac{5}{14}$

남학생이 여학생보다 많으려면 5명의 학생 중에서 남학생이 3명 또는 4명이어야 한다.

남학생이 3명인 사건을 $A$, 4명인 사건을 $B$라 하면

$$P(A)=\frac{{}_4C_3\times{}_5C_2}{{}_9C_5}=\frac{40}{126}$$

$$P(B)=\frac{{}_4C_4\times{}_5C_1}{{}_9C_5}=\frac{5}{126}$$

$A$와 $B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{40}{126}+\frac{5}{126}=\frac{5}{14}$$

## 0262 답 ④

나오는 두 눈의 수의 곱이 6의 배수가 아닌 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 두 눈의 수의 곱이 6의 배수인 사건이다.

이때 나오는 두 눈의 수를 $a$, $b$라 하면 순서쌍 $(a, b)$에 대하여 $ab$가 6의 배수인 경우는

$\underbrace{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)}_{ab=6}$, $\underbrace{(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)}_{ab=12}$,

$\underbrace{(3, 6), (6, 3)}_{ab=18}$, $\underbrace{(4, 6), (6, 4)}_{ab=24}$, $\underbrace{(5, 6), (6, 5)}_{ab=30}$, $\underbrace{(6, 6)}_{ab=36}$의 15개

$$\therefore P(A^C)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$

## 0263 답 ②

모음끼리 서로 이웃하지 않도록 배열하는 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 모음끼리 서로 이웃하도록 배열하는 사건이다.

모음 o, u를 한 문자 O로 생각하여 r, O, n, d를 일렬로 배열한 후 o, u끼리 자리를 바꾸어야 하므로

$$P(A^C)=\frac{4!\times2!}{5!}=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

## 0264 답 $\frac{61}{125}$

치역에 2가 포함되는 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 치역에 2가 포함되지 않는 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_4\Pi_3}{{}_5\Pi_3}=\frac{4^3}{5^3}=\frac{64}{125}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{64}{125}=\frac{61}{125}$$

## 0265 답 $\frac{4}{9}$

$x$, $y$, $z$가 $(x-y)(y-z)(z-x)=0$을 만족시키는 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$, 즉 $x\neq y$, $y\neq z$, $z\neq x$를 만족시키는 사건이다. 즉, $A^C$는 주사위의 눈의 수가 모두 다른 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_6P_3}{6\times6\times6}=\frac{120}{216}=\frac{5}{9}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

## 0266 답 ④

꺼낸 2개의 공 중에서 적어도 1개는 3의 배수가 적힌 공인 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 2개 모두 3의 배수가 아닌 수가 적힌 공인 사건이다.

15개의 공 중에서 3의 배수가 적힌 공은 3, 6, 9, 12, 15의 5개이므로 3의 배수가 아닌 수가 적힌 공은 10개이다.

$$\therefore P(A^C)=\frac{{}_{10}C_2}{{}_{15}C_2}=\frac{45}{105}=\frac{3}{7}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$$

## 0267 답 $\frac{2}{3}$

어린이 사이에 적어도 1명의 어른이 서는 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 어린이끼리 서로 이웃하도록 서는 사건이다.

어린이를 한 사람으로 생각하여 5명이 일렬로 선 후 어린이끼리 자리를 바꾸어 서야 하므로

$$P(A^C)=\frac{5!\times2!}{6!}=\frac{1}{3}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

## 0268 답 ⑤

근무조 A와 근무조 B에서 적어도 1명씩 선택되는 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 3명이 모두 근무조 A에서 선택되거나 근무조 B에서 선택되는 사건이다.

근무조 A에서 3명을 선택하거나 근무조 B에서 3명을 선택해야 하므로

$$P(A^C)=\frac{{}_5C_3+{}_4C_3}{{}_9C_3}=\frac{14}{84}=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

## 0269 답 7

$(n+3)$개의 공 중에서 2개의 공을 꺼낼 때, 적어도 1개는 흰 공인 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 2개 모두 검은 공인 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}=\frac{6}{(n+3)(n+2)} \quad \cdots\cdots ❶$$

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{14}{15}$이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{14}{15}=\frac{1}{15}$$

즉, $\frac{6}{(n+3)(n+2)}=\frac{1}{15}$이므로 $\cdots\cdots ❷$

$(n+3)(n+2)=90=10\times 9$

$\therefore\ n=7\ (\because\ n$은 자연수) $\cdots\cdots ❸$

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 2개 모두 검은 공을 꺼낼 확률을 $n$에 대한 식으로 나타내기 | 40 % |
| ❷ 주어진 확률을 이용하여 등식 세우기 | 30 % |
| ❸ $n$의 값 구하기 | 30 % |

## 0270 답 $\frac{31}{32}$

앞면이 나온 동전의 개수와 뒷면이 나온 동전의 개수의 차가 4 이하인 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 앞면이 나온 동전의 개수와 뒷면이 나온 동전의 개수의 차가 5 이상인 사건이다.

이때 동전의 개수의 차는 5가 될 수 없으므로 $A^C$는 개수의 차가 6, 즉 모두 앞면만 나오거나 모두 뒷면만 나오는 사건이다.

$$\therefore\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{1+1}{2^6}=\frac{2}{64}=\frac{1}{32}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$$

## 0271 답 $\frac{65}{84}$

꺼낸 동전의 금액의 합이 200원 미만인 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 금액의 합이 200원 이상인 사건이다.

$A^C$는 100원짜리 동전 2개와 다른 금액의 동전 1개를 꺼내거나 100원짜리 동전 1개와 50원짜리 동전 2개를 꺼내는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2\times{}_7\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{19}{84}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{19}{84}=\frac{65}{84}$$

## 0272 답 ③

꺼낸 카드에 적힌 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 4 이하이거나 7 이상인 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 꺼낸 카드에 적힌 세 자연수 중에서 가장 작은 수가 5 또는 6인 사건이다.

$A^C$는 5가 적힌 카드를 꺼내고 6, 7, 8, 9, 10이 적힌 카드 5장 중에서 2장을 꺼내거나 6이 적힌 카드를 꺼내고 7, 8, 9, 10이 적힌 카드 4장 중에서 2장을 꺼내는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2+{}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{16}{120}=\frac{2}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{15}=\frac{13}{15}$$

# AB 유형 점검 52~54쪽

## 0273 답 ⑤

$A=\{2, 8, 10\}$, $B=\{2, 3, 5, 7\}$, $C=\{3, 9\}$

① $n(A)=3$

② $A\cap B=\{2\}$이므로 $A$와 $B$는 서로 배반사건이 아니다.

③ $A\cap C=\varnothing$이므로 $A$와 $C$는 서로 배반사건이다.

④ $B\cap C=\{3\}$이므로 $B$와 $C$는 서로 배반사건이 아니다.

⑤ $A\cap C=\varnothing$이므로 $A\subset C^C$

따라서 옳은 것은 ⑤이다.

## 0274 답 8

표본공간을 $S$라 하면 $S=\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$이므로

$A=\{1, 2, 5, 10\}$, $B=\{3, 6, 9\}$

사건 $A$와 서로 배반인 사건은 $A^C$의 부분집합이고, 사건 $B$와 서로 배반인 사건은 $B^C$의 부분집합이므로 두 사건 $A$, $B$와 모두 배반인 사건은 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다.

이때 $A^C=\{3, 4, 6, 7, 8, 9\}$, $B^C=\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$이므로

$A^C\cap B^C=\{4, 7, 8\}$

따라서 구하는 사건의 개수는 $A^C\cap B^C$의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^3=8$

## 0275 답 ②

두 수 $a$, $b$를 선택하는 모든 경우의 수는

$4\times 4=16$

(i) $a=1$일 때

$1<\frac{b}{1}<4$, 즉 $1<b<4$이므로 $b$의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $a=3$일 때

$1<\frac{b}{3}<4$, 즉 $3<b<12$이므로 $b=4, 6, 8, 10$의 4가지

(iii) $a=5$일 때

$1<\frac{b}{5}<4$, 즉 $5<b<20$이므로 $b=6, 8, 10$의 3가지

(iv) $a=7$일 때

$1<\frac{b}{7}<4$, 즉 $7<b<28$이므로 $b=8, 10$의 2가지

(i)~(iv)에서 $1<\frac{b}{a}<4$인 경우의 수는

$4+3+2=9$

따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{16}$

## 0276 답 $\frac{1}{5}$

만들 수 있는 다섯 자리의 자연수의 개수는

$5!=120$

5의 배수이면 일의 자리에 올 수 있는 숫자가 5뿐이므로 5의 배수의 개수는

$4!=24$

따라서 구하는 확률은 $\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$

## 0277 답 ③

만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

$3\times{}_4\Pi_3=3\times4^3=192$

22□□, 23□□ 꼴의 자연수의 개수는

$2\times{}_4\Pi_2=2\times4^2=32$

3□□□ 꼴의 자연수의 개수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

즉, 2133보다 큰 자연수의 개수는

$32+64=96$

따라서 구하는 확률은 $\frac{96}{192}=\frac{1}{2}$

## 0278 답 ①

destiny에 있는 7개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$7!$

t, s, y를 모두 X로 바꾸어 생각하여 d, e, X, X, i, n, X를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X를 y로, 두 번째 X를 t로, 세 번째 X를 s로 바꾸면 되므로 그 경우의 수는

$\frac{7!}{3!}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{\frac{7!}{3!}}{7!}=\frac{1}{6}$

## 0279 답 $\frac{1}{10}$

5장의 카드 중에서 3장을 뽑는 경우의 수는

${}_5C_3={}_5C_2=10$

카드에 적힌 세 숫자의 곱이 홀수인 경우는 세 숫자가 모두 홀수인 경우이므로 1, 3, 5가 적힌 카드를 뽑는 1가지이다.

따라서 구하는 확률은 $\frac{1}{10}$

## 0280 답 $\frac{7}{45}$

방정식 $x+y+z=8$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$의 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수는

${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

$z=2$이면 $x+y=6$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$의 순서쌍 $(x, y)$의 개수는

${}_2H_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{45}$

## 0281 답 7

10개의 바둑돌 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는

${}_{10}C_2=45$

흰 바둑돌의 개수를 $n$이라 하면 검은 바둑돌의 개수는 $10-n$이므로 서로 다른 색의 바둑돌이 나오는 경우의 수는

${}_nC_1\times{}_{10-n}C_1=n(10-n)$

따라서 서로 다른 색의 바둑돌이 나올 확률은

$\frac{n(10-n)}{45}$

즉, $\frac{n(10-n)}{45}=\frac{7}{15}$이므로

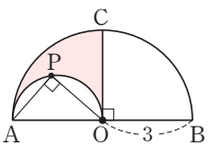
$n^2-10n+21=0$

$(n-3)(n-7)=0$ $\therefore n=3$ 또는 $n=7$

그런데 흰 바둑돌이 검은 바둑돌보다 많이 들어 있으므로 흰 바둑돌의 개수는 7이다.

## 0282 답 $\frac{1}{4}$

오른쪽 그림에서 삼각형 PAO가 직각삼각형이려면 선분 AO를 지름으로 하는 반원 위에 점 P가 있거나 $\angle BOC=90^\circ$인 점 C를 잡을 때 선분 OC 위에 점 P가 있어야 한다.




따라서 삼각형 PAO가 예각삼각형이 되려면 점 P가 색칠한 부분에 있어야 하므로 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\overline{AB}\text{를 지름으로 하는 반원의 넓이})}=\frac{\frac{9}{4}\pi-\frac{9}{8}\pi}{\frac{9}{2}\pi}=\frac{1}{4}$$

## 0283 답 ③

ㄱ. 두 사건 $A$, $B$가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\emptyset$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

ㄴ. $\emptyset\subset(A\cap B)\subset S$이므로 $0\le\mathrm{P}(A\cap B)\le1$

ㄷ. [반례] $S=\{1, 2, 3\}$, $A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$이면

$B^C=\{1\}$이므로 $A\cap B^C=\{1\}$

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{3}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)>\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

## 0284 답 ①

$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{2}{3}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}(A\cup B)-\mathrm{P}(A^C\cap B)\\&=\frac{3}{4}-\frac{2}{3}\\&=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

## 0285 답 $\frac{3}{10}$

$\mathrm{P}(B)=2\mathrm{P}(A)=2\times\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$이므로

$\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

$A$와 $B^C$가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=0$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B^C)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{10}+\frac{2}{5}=\frac{7}{10}$

$\therefore\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}((A\cup B^C)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B^C)$

$=1-\frac{7}{10}=\frac{3}{10}$

다른 풀이

$A$와 $B^C$가 서로 배반사건이므로

$A\cap B^C=\varnothing$ $\therefore A\subset B$

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(B)=2\mathrm{P}(A)=2\times\frac{3}{10}=\frac{3}{5}$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}-\frac{3}{10}=\frac{3}{10}$

## 0286 답 0.28

택한 학생이 축구를 좋아하는 학생인 사건을 $A$, 농구를 좋아하는 학생인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.2$, $\mathrm{P}(B)=0.13$, $\mathrm{P}(A\cap B)=0.05$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=0.2+0.13-0.05$

$=0.28$

## 0287 답 $\frac{1}{7}$

뽑은 학생이 모두 1학년 학생인 사건을 $A$, 모두 2학년 학생인 사건을 $B$라 하자.

(i) 모두 1학년 학생일 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{1}{28}$

(ii) 모두 2학년 학생일 확률은

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}=\frac{3}{28}$

(i), (ii)에서 $A$와 $B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{28}+\frac{3}{28}=\frac{1}{7}$

## 0288 답 $\frac{5}{9}$

$a$, $b$가 $f(a)f(b)=0$을 만족시키는 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 $f(a)f(b)\neq0$, 즉 $f(a)\neq0$, $f(b)\neq0$을 만족시키는 사건이다.

$f(a)=a^2-5a+4=(a-1)(a-4)\neq0$

$\therefore a\neq1$, $a\neq4$

$f(b)=b^2-5b+4=(b-1)(b-4)\neq0$

$\therefore b\neq1$, $b\neq4$

따라서 $a$, $b$의 값은 각각 2, 3, 5, 6이 될 수 있으므로 $f(a)\neq0$, $f(b)\neq0$을 만족시키는 $a$, $b$의 순서쌍 $(a, b)$의 개수는 $4\times4=16$

$\therefore \mathrm{P}(A^C)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$

## 0289 답 ③

상자에 $n$송이의 장미가 들어 있다고 하자.

꺼낸 3송이의 꽃 중에서 적어도 1송이는 장미인 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 모두 장미가 아닌 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_{10-n}\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{(10-n)(9-n)(8-n)}{720}$

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{29}{30}$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{29}{30}=\frac{1}{30}$

즉, $\frac{(10-n)(9-n)(8-n)}{720}=\frac{1}{30}$이므로

$(10-n)(9-n)(8-n)=24=4\times3\times2$

$\therefore n=6$ ($\because n$은 자연수)

따라서 장미는 6송이가 있다.

## 0290 답 $\frac{19}{49}$

적어도 2명이 같은 요일을 택하는 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 모두 다른 요일을 택하는 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_7\mathrm{P}_3}{{}_7\Pi_3}=\frac{210}{343}=\frac{30}{49}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{30}{49}=\frac{19}{49}$

## 0291 답 ⑤

양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10 이하가 되도록 카드가 놓이는 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 양 끝에 놓인 카드에 적힌 두 수의 합이 10 초과가 되도록 카드가 놓이는 사건, 즉 양 끝에 숫자 5, 6이 적힌 카드가 놓이는 사건이다.

양 끝에 숫자 5, 6이 적힌 카드를 배열하는 경우의 수는 2!

각각의 경우에 대하여 그 사이에 숫자 1, 2, 3, 4가 적힌 카드를 일렬로 배열하는 경우의 수는 4!이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2!\times4!}{6!}=\frac{1}{15}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{15}=\frac{14}{15}$

## 0292 답 $\frac{24}{125}$

만들 수 있는 네 자리의 자연수의 개수는

${}_5\Pi_4=5^4=625$ …… ⓘ

각 자리의 숫자가 모두 다르려면 5개의 숫자 중에서 서로 다른 4개를 택하여 자연수를 만들어야 하므로 자연수의 개수는

${}_5\mathrm{P}_4=120$ …… ⓘⓘ

따라서 구하는 확률은 $\frac{120}{625}=\frac{24}{125}$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ 만들 수 있는 모든 자연수의 개수 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ 각 자리의 숫자가 모두 다른 자연수의 개수 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ 각 자리의 숫자가 모두 다른 자연수일 확률 구하기 | 20 % |

## 0293 답 $\frac{11}{63}$

9장의 카드 중에서 4장을 꺼내는 경우의 수는

${}_9\mathrm{C}_4=126$ …… ⓘ

꺼낸 카드에 적힌 수 중에서 가장 작은 수를 $a$, 가장 큰 수를 $b$라 할 때, $a+b=9$인 경우는 다음과 같다.

(i) $a=1$, $b=8$인 경우

나머지 2장은 2, 3, 4, 5, 6, 7이 적힌 카드 중에서 꺼내야 하므로 그 경우의 수는

${}_6C_2=15$

(ii) $a=2$, $b=7$인 경우

나머지 2장은 3, 4, 5, 6이 적힌 카드 중에서 꺼내야 하므로 그 경우의 수는

${}_4C_2=6$

(iii) $a=3$, $b=6$인 경우

나머지 2장은 4, 5가 적힌 카드 중에서 꺼내야 하므로 그 경우의 수는

${}_2C_2=1$

(i), (ii), (iii)에서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합이 9인 경우의 수는

$15+6+1=22$ …… ii

따라서 구하는 확률은 $\frac{22}{126}=\frac{11}{63}$ …… iii

| 채점 기준 | |
|---|---|
| i 4장의 카드를 꺼내는 모든 경우의 수 구하기 | 20 % |
| ii 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합이 9인 경우의 수 구하기 | 70 % |
| iii 가장 큰 수와 가장 작은 수의 합이 9일 확률 구하기 | 10 % |

## 0294 답 $\frac{11}{20}$

뽑은 공에 적힌 수가 3의 배수인 사건을 $A$, 5의 배수인 사건을 $B$라 하면 $A\cap B$는 15의 배수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{6}{20}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{4}{20}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{20}$ …… i

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{6}{20}+\frac{4}{20}-\frac{1}{20}$

$=\frac{9}{20}$ …… ii

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$ …… iii

| 채점 기준 | |
|---|---|
| i 3의 배수, 5의 배수, 15의 배수일 확률 구하기 | 40 % |
| ii 3의 배수 또는 5의 배수일 확률 구하기 | 30 % |
| iii 3의 배수도 아니고 5의 배수도 아닐 확률 구하기 | 30 % |

## 실력 향상 55쪽

## 0295 답 $\frac{11}{32}$

만들 수 있는 여섯 자리의 자연수의 개수는

${}_2\Pi_6=2^6=64$

여섯 자리의 자연수의 각 자리의 숫자를 $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$라 할 때, 3의 배수이려면 $a+b+c+d+e+f$의 값이 3의 배수이어야 한다.

(i) $a+b+c+d+e+f=6$인 경우

$a=b=c=d=e=f=1$의 1가지

(ii) $a+b+c+d+e+f=9$인 경우

$1+1+1+2+2+2=9$이므로 3개의 숫자 1과 3개의 숫자 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!\times3!}=20$

(iii) $a+b+c+d+e+f=12$인 경우

$a=b=c=d=e=f=2$의 1가지

(i), (ii), (iii)에서 3의 배수의 개수는

$1+20+1=22$

따라서 구하는 확률은

$\frac{22}{64}=\frac{11}{32}$

## 0296 답 ④

$X$에서 $Y$로의 일대일함수 $f$의 개수는

${}_7P_4=840$

$f(2)=2$이므로 $f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)$가 4의 배수이려면 함수 $f$의 치역에 4 또는 6이 포함되어야 한다.

함수 $f$의 치역에 4가 포함된 사건을 $A$, 6이 포함된 사건을 $B$라 하자.

(i) 함수 $f$의 치역에 4가 포함되는 경우

2, 4를 포함하여 치역의 원소를 정하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

치역의 원소를 각각 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$에 대응시키는 경우의 수는 $3!=6$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{10\times6}{840}=\frac{60}{840}$

(ii) 함수 $f$의 치역에 6이 포함되는 경우

2, 6을 포함하여 치역의 원소를 정하는 경우의 수는 ${}_5C_2=10$

치역의 원소를 각각 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$에 대응시키는 경우의 수는 $3!=6$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{10\times6}{840}=\frac{60}{840}$

(iii) 함수 $f$의 치역에 4, 6이 포함되는 경우

2, 4, 6을 포함하여 치역의 원소를 정하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$

치역의 원소를 각각 $f(1)$, $f(3)$, $f(4)$에 대응시키는 경우의 수는 $3!=6$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4\times6}{840}=\frac{24}{840}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{60}{840}+\frac{60}{840}-\frac{24}{840}$

$=\frac{4}{35}$

## 0297 답 19

방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$의 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수는

${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$

$(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$인 사건을 $A$라 하면 $A^C$는
$(x-y)(y-z)(z-x)=0$인 사건이므로
$x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$
(i) $x=y$인 경우
방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$의 순서쌍 $(x, y, z)$는
$(0, 0, 10)$, $(1, 1, 8)$, …, $(5, 5, 0)$의 6개
(ii) $y=z$인 경우
(i)과 같은 방법으로 하면 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$의 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수는 6이다.
(iii) $z=x$인 경우
(i)과 같은 방법으로 하면 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$의 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수는 6이다.
(iv) $x=y=z$인 경우
방정식 $x+y+z=10$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$의 순서쌍 $(x, y, z)$는 존재하지 않는다.
(i)~(iv)에서 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수는
$6+6+6=18$
$\therefore P(A^C)=\frac{18}{66}=\frac{3}{11}$
따라서 순서쌍 $(x, y, z)$가 $(x-y)(y-z)(z-x)\neq0$을 만족시킬 확률은
$P(A)=1-P(A^C)$
$=1-\frac{3}{11}=\frac{8}{11}$
따라서 $p=11$, $q=8$이므로
$p+q=19$

### 0298 답 $\frac{21}{26}$

방정식 $x+y+z=14$를 만족시키는 자연수 $x$, $y$, $z$의 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수는
${}_3H_{14-3}={}_3H_{11}={}_{13}C_{11}={}_{13}C_2=78$
$x$, $y$, $z$ 중에서 적어도 하나가 홀수인 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 $x$, $y$, $z$가 모두 짝수인 사건이다.
$x$, $y$, $z$가 모두 짝수이므로 음이 아닌 정수 $X$, $Y$, $Z$에 대하여
$x=2X+2$, $y=2Y+2$, $z=2Z+2$
이를 방정식 $x+y+z=14$에 대입하면
$(2X+2)+(2Y+2)+(2Z+2)=14$
$2X+2Y+2Z=8$
$\therefore X+Y+Z=4$
방정식 $X+Y+Z=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $X$, $Y$, $Z$의 순서쌍 $(X, Y, Z)$의 개수는
${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$
$\therefore P(A^C)=\frac{15}{78}=\frac{5}{26}$
따라서 구하는 확률은
$P(A)=1-P(A^C)$
$=1-\frac{5}{26}=\frac{21}{26}$

# 04 / 조건부확률

## A 개념 확인 56~57쪽

### 0299 답 (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$

$A=\{2, 4, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$에서 $A\cap B=\{2, 6\}$
(1) $P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$
(2) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{6}}=\frac{1}{2}$
(3) $P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{6}}=\frac{2}{3}$

### 0300 답 (1) $\frac{1}{36}$ (2) $\frac{1}{9}$

(1) $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{36}$
(2) $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{9}$

### 0301 답 (1) $\frac{3}{8}$ (2) $\frac{3}{7}$ (3) 종속

(1) (i) 첫 번째에 검은 바둑돌, 두 번째에 흰 바둑돌을 꺼낼 확률은
$\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{56}$
(ii) 첫 번째에 흰 바둑돌, 두 번째에 흰 바둑돌을 꺼낼 확률은
$\frac{3}{8}\times\frac{2}{7}=\frac{3}{28}$
(i), (ii)에서 $P(B)=\frac{15}{56}+\frac{3}{28}=\frac{3}{8}$
(2) 사건 $A\cap B$는 첫 번째에 검은 바둑돌, 두 번째에 흰 바둑돌을 꺼내는 사건이므로
$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{15}{56}}{\frac{5}{8}}=\frac{3}{7}$
(3) $P(B)=\frac{3}{8}$, $P(B|A)=\frac{3}{7}$에서 $P(B)\neq P(B|A)$
따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 종속이다.

### 0302 답 독립

$P(A)P(B)=0.15\times0.4=0.06$, $P(A\cap B)=0.06$이므로
$P(A\cap B)=P(A)P(B)$
따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이다.

### 0303 답 종속

$P(A)P(B)=0.3\times0.6=0.18$, $P(A\cap B)=0.2$이므로
$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$
따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 종속이다.

**0304** 답 0.07

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.2\times0.35=0.07$

**0305** 답 0.28

두 사건 $A^C$, $B$가 서로 독립이므로

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B)=(1-0.2)\times0.35=0.28$

**0306** 답 0.2

두 사건 $A$, $B^C$가 서로 독립이므로

$P(A|B^C)=P(A)=0.2$

**0307** 답 0.65

두 사건 $A^C$, $B^C$가 서로 독립이므로

$P(B^C|A^C)=P(B^C)=1-0.35=0.65$

**0308** 답 0.48

갑이 시험에 합격하는 사건을 $A$, 을이 시험에 합격하는 사건을 $B$라 하면 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=0.6\times0.8=0.48$

**0309** 답 (1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{5}{72}$

(1) $P(A)=\frac{1}{6}$

(2) $P(A)=\frac{1}{6}$, $P(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$이고, 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

${}_3C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1=\frac{5}{72}$

**0310** 답 $\frac{4}{9}$

소수가 적힌 공을 꺼내는 사건을 $A$라 하면 $A=\{2, 3\}$

$P(A)=\frac{2}{3}$, $P(A^C)=\frac{1}{3}$이고, 각 시행은 서로 독립이므로 구하는 확률은

${}_3C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{4}{9}$

## B 유형 완성 58~65쪽

**0311** 답 $\frac{3}{5}$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$이므로

$\frac{3}{5}=\frac{2}{5}+P(B)-\frac{3}{10}$ $\therefore P(B)=\frac{1}{2}$

$\therefore P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{5}$

**0312** 답 ④

$P(A\cap B)=P(B)P(A|B)=0.4\times0.5=0.2$

$\therefore P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=0.3+0.4-0.2=0.5$

**0313** 답 $\frac{1}{2}$

$P(A^C\cap B)=P(B)P(A^C|B)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$이므로

$P(A\cap B)=P(B)-P(A^C\cap B)$

$=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

**0314** 답 ③

$P(A|B)=P(B|A)$에서

$\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$

$\therefore P(A)=P(B)$ …… ㉠

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$에서

$1=P(A)+P(B)-\frac{1}{4}$

$P(A)+P(B)=\frac{5}{4}$

㉠에서 $2P(A)=\frac{5}{4}$

$\therefore P(A)=\frac{5}{8}$

**0315** 답 $\frac{3}{10}$

$A$와 $B$가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$A^C\cap B=B$

$\therefore P(A^C\cap B)=P(B)=\frac{1}{5}$

$P(A)=\frac{1}{3}$에서

$P(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

$\therefore P(B|A^C)=\frac{P(A^C\cap B)}{P(A^C)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{10}$

**0316** 답 $\frac{5}{6}$

2학년 학생인 사건을 $A$, 남학생인 사건을 $B$라 하면

$P(A)=\frac{24}{40}=\frac{3}{5}$, $P(A\cap B)=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{5}}=\frac{5}{6}$

다른 풀이

구하는 확률은 2학년 학생 중에서 남학생을 택할 확률과 같으므로

$\frac{(\text{2학년 남학생 수})}{(\text{2학년 학생 수})}=\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$

## 0317 답 $\frac{5}{12}$

버스로 등교하는 학생인 사건을 $A$, 여학생인 사건을 $B$라 하면

$P(A)=0.6$, $P(A\cap B)=0.25$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.25}{0.6}=\frac{5}{12}$$

## 0318 답 2

조사 대상자 수는 $14+x+18+6=x+38$이므로 남자인 사건을 $A$, B 영화를 선호하는 사람인 사건을 $B$라 하면

$P(A)=\frac{x+14}{x+38}$, $P(A\cap B)=\frac{x}{x+38}$

따라서 임의로 택한 1명이 남자일 때, 그 사람이 B 영화를 선호할 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{x}{x+38}}{\frac{x+14}{x+38}}=\frac{x}{x+14}$$

즉, $\frac{x}{x+14}=\frac{1}{8}$이므로

$8x=x+14$ $\therefore x=2$

다른 풀이

임의로 택한 1명이 남자일 때, 그 사람이 B 영화를 선호할 확률은 남자 중에서 B 영화를 선호하는 사람을 택할 확률과 같으므로

$$\frac{(\text{B 영화를 선호하는 남자 수})}{(\text{남자 수})}=\frac{x}{x+14}$$

즉, $\frac{x}{x+14}=\frac{1}{8}$이므로

$8x=x+14$ $\therefore x=2$

## 0319 답 ④

당첨 제비를 1개 뽑는 사건을 $A$, 1등 당첨 제비를 뽑는 사건을 $B$라 하면

$$P(A)=\frac{{}_5C_1\times{}_5C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$$

$$P(A\cap B)=\frac{{}_2C_1\times{}_5C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{20}{120}=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}}=\frac{2}{5}$$

## 0320 답 ④

$ab$가 짝수인 사건을 $A$, $a$, $b$가 모두 짝수인 사건을 $B$라 하자.

$ab$가 짝수인 사건의 여사건은 $ab$가 홀수인 사건, 즉 $a$, $b$가 모두 홀수인 사건이므로

$$P(A)=1-\frac{3\times3}{6\times6}=\frac{3}{4}$$

$$P(A\cap B)=\frac{3\times3}{6\times6}=\frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}$$

## 0321 답 ③

첫 번째에 당첨권을 뽑지 못하는 사건을 $A$, 두 번째에 당첨권을 뽑지 못하는 사건을 $B$라 하면

$P(A)=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$, $P(B|A)=\frac{9}{14}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{3}\times\frac{9}{14}=\frac{3}{7}$$

## 0322 답 ③

남자인 사건을 $A$, 40대인 사건을 $B$라 하면

$P(A)=0.8$, $P(B|A)=0.6$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=0.8\times0.6=0.48$$

## 0323 답 $\frac{1}{6}$

노란색 필통을 택하는 사건을 $A$, 빨간색 볼펜을 꺼내는 사건을 $B$라 하면

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B|A)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

## 0324 답 $\frac{8}{15}$

채린이가 3의 배수가 아닌 수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 $A$, 정현이가 3의 배수가 아닌 수가 적힌 카드를 꺼내는 사건을 $B$라 하자.

두 사람 중에서 적어도 1명이 3의 배수가 적힌 카드를 꺼내는 사건은 $(A\cap B)^C$이고, 이때 $A\cap B$는 두 사람이 모두 3의 배수가 아닌 수가 적힌 카드를 꺼내는 사건이다.

$P(A)=\frac{7}{10}$, $P(B|A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{7}{10}\times\frac{2}{3}=\frac{7}{15}$$

따라서 구하는 확률은

$$P((A\cap B)^C)=1-P(A\cap B)$$
$$=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}$$

## 0325 답 7

첫 번째에 100원짜리 동전을 꺼내는 사건을 $A$, 두 번째에 500원짜리 동전을 꺼내는 사건을 $B$라 하면

$P(A)=\frac{4}{n+4}$, $P(B|A)=\frac{n}{n+3}$

따라서 첫 번째에 100원짜리 동전을, 두 번째에 500원짜리 동전을 꺼낼 확률은

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{4}{n+4}\times\frac{n}{n+3}$$

즉, $\frac{4}{n+4}\times\frac{n}{n+3}=\frac{2}{7}$이므로

$(n+3)(n+4)=14n$, $n^2-7n+12=0$

$(n-3)(n-4)=0$ $\therefore n=3$ 또는 $n=4$

따라서 모든 $n$의 값의 합은 $3+4=7$

## 0326 답 $\frac{5}{8}$

진아가 망고 푸딩을 꺼내는 사건을 $A$, 지원이가 망고 푸딩을 꺼내는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{8}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{8}$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{4}{7}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{5}{7}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{5}{14}+\frac{15}{56}=\frac{5}{8}$

## 0327 답 $\frac{7}{20}$

화요일에 비가 오는 사건을 $A$, 수요일에 비가 오는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{10}=\frac{7}{20}$

## 0328 답 0.125

암에 걸린 사람을 택하는 사건을 $A$, 암에 걸렸다고 진단하는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.1$, $\mathrm{P}(A^C)=1-0.1=0.9$

$\mathrm{P}(B|A)=0.8$, $\mathrm{P}(B|A^C)=0.05$ …… ⓘ

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.1\times0.8=0.08$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=0.9\times0.05=0.045$ …… ⓘⓘ

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=0.08+0.045=0.125$ …… ⓘⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ 택한 1명이 암에 걸린 사람일 확률과 암에 걸리지 않은 사람일 확률을 구하고 각각의 경우 암에 걸렸다고 진단할 확률 구하기 | 20 % |
| ⓘⓘ 암에 걸린 사람을 택하고 암에 걸렸다고 진단할 확률과 암에 걸리지 않은 사람을 택하고 암에 걸렸다고 진단할 확률 구하기 | 50 % |
| ⓘⓘⓘ 암에 걸렸다고 진단할 확률 구하기 | 30 % |

## 0329 답 $\frac{19}{30}$

주머니 A를 택하는 사건을 $A$, 서로 다른 색의 공을 꺼내는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_4\mathrm{C}_2}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{3}{10}=\frac{19}{30}$

## 0330 답 ③

흰 옷인 사건을 $A$, 로봇이 흰 옷이라 판별하는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

$\mathrm{P}(B|A)=1-p$, $\mathrm{P}(B|A^C)=p$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{5}(1-p)$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{3}{5}p$

따라서 로봇이 흰 옷이라 판별할 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{2}{5}(1-p)+\frac{3}{5}p$

$=\frac{1}{5}p+\frac{2}{5}$

즉, $\frac{1}{5}p+\frac{2}{5}=\frac{11}{25}$이므로 $p=\frac{1}{5}$

## 0331 답 $\frac{21}{29}$

중국어를 선택한 학생인 사건을 $A$, 안경을 쓴 학생인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A^C)=0.4$, $\mathrm{P}(A)=1-0.4=0.6$

$\mathrm{P}(B|A^C)=0.4$, $\mathrm{P}(B|A)=0.7$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.6\times0.7=0.42$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=0.4\times0.4=0.16$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

$=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)}$

$=\frac{0.42}{0.42+0.16}=\frac{21}{29}$

## 0332 답 $\frac{7}{8}$

갑이 당첨 제비를 뽑지 못하는 사건을 $A$, 을이 당첨 제비를 뽑는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{9}$, $\mathrm{P}(A)=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{8}$, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{7}{9}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{36}$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{36}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$
$$=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A^C\cap B)}$$
$$=\frac{\frac{7}{36}}{\frac{7}{36}+\frac{1}{36}}=\frac{7}{8}$$

## 0333 답 $\frac{9}{352}$

보석이 가품인 사건을 $A$, 진품으로 감별하는 사건을 $B$라 하면

$P(A^C)=0.7$, $P(A)=1-0.7=0.3$

$P(B|A)=0.06$, $P(B|A^C)=1-0.02=0.98$ …… ❶

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=0.3\times0.06=0.018$,

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=0.7\times0.98=0.686$ …… ❷

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$
$$=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A^C\cap B)}$$
$$=\frac{0.018}{0.018+0.686}=\frac{9}{352}$$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 감정 의뢰를 맡긴 보석이 가품일 확률과 진품일 확률을 구하고 각각의 경우 진품으로 감별할 확률 구하기 | 30 % |
| ❷ 가품을 감정 의뢰 맡기고 진품으로 감별할 확률과 진품을 감정 의뢰 맡기고 진품으로 감별할 확률 구하기 | 40 % |
| ❸ 진품으로 감별했을 때, 가품일 확률 구하기 | 30 % |

## 0334 답 $\frac{7}{17}$

상자 A를 택하는 사건을 $A$, 분홍 구슬 2개를 꺼내는 사건을 $B$라 하면

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(A^C)=\frac{1}{2}$

$P(B|A)=\frac{{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{5}$, $P(B|A^C)=\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{2}{7}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}$,

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{7}=\frac{1}{7}$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A^C\cap B)}$$
$$=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{7}}=\frac{7}{17}$$

## 0335 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고, 표본공간을 $S$라 하면

$S=\{HH, HT, TH, TT\}$이므로

$A=\{TH, TT\}$, $B=\{HT, TT\}$, $C=\{HT, TH\}$

$\therefore P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

ㄱ. $A\cap B=\{TT\}$이므로 $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)$

따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이다.

ㄴ. $A\cap C=\{TH\}$이므로 $P(A\cap C)=\frac{1}{4}$

$\therefore P(A\cap C)=P(A)P(C)$

따라서 두 사건 $A$, $C$는 서로 독립이다.

ㄷ. $B\cap C=\{HT\}$이므로 $P(B\cap C)=\frac{1}{4}$

$\therefore P(B\cap C)=P(B)P(C)$

따라서 두 사건 $B$, $C$는 서로 독립이다.

따라서 보기에서 서로 독립인 사건은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

## 0336 답 ④

$P(A)=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$

ㄱ. $A\cap B$는 10의 배수가 적힌 카드가 나오는 사건이므로

$P(A\cap B)=\frac{5}{50}=\frac{1}{10}$

ㄴ. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$

ㄷ. $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이므로 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 0337 답 8

표본공간을 $S$라 하면 $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이므로

$A=\{1, 3, 5\}$ $\therefore P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(i) $m=1$이면 $B=\{1\}$, $A\cap B=\{1\}$이므로

$P(B)=\frac{1}{6}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\therefore P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 종속이다.

(ii) $m=2$이면 $B=\{1, 2\}$, $A\cap B=\{1\}$이므로

$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)$

따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이다.

(iii) $m=3$이면 $B=\{1, 3\}$, $A\cap B=\{1, 3\}$이므로

$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 종속이다.

(iv) $m=4$이면 $B=\{1, 2, 4\}$, $A\cap B=\{1\}$이므로

$P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\therefore P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 종속이다.

(v) $m=5$이면 $B=\{1, 5\}$, $A\cap B=\{1, 5\}$이므로

$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 종속이다.

(vi) $m=6$이면 $B=\{1, 2, 3, 6\}$, $A\cap B=\{1, 3\}$이므로

$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이다.

(i)~(vi)에서 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이 되도록 하는 $m$의 값은 2, 6이므로 그 합은

$2+6=8$

## 0338 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이면 사건 $B$가 일어나거나 일어나지 않는 것이 사건 $A$가 일어날 확률에 아무런 영향을 주지 않으므로

$\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)$

ㄴ. 두 사건 $A$, $B$가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=0$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)$

ㄷ. 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이고 두 사건 $A^C$, $B$도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

## 0339 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$, $\mathrm{P}(A|B^C)=\mathrm{P}(A)$이므로

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^C)$

ㄴ. 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이면 두 사건 $A^C$, $B$도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A^C|B)=\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)$

ㄷ. 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이면 $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이고 두 사건 $A^C$, $B^C$도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(B^C|A^C)=\mathrm{P}(B^C)$

$\therefore \mathrm{P}(B^C|A^C)=\mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B|A)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

다른 풀이

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

ㄴ. $\mathrm{P}(A^C|B)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

$=\frac{\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}{\mathrm{P}(B)}=1-\mathrm{P}(A)$

ㄷ. $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$이므로

$\mathrm{P}(B^C|A^C)=\frac{\mathrm{P}(A^C\cap B^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{1-\mathrm{P}(A\cup B)}{1-\mathrm{P}(A)}$

$=\frac{1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}}{1-\mathrm{P}(A)}$

$=\frac{1-\{\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\}}{1-\mathrm{P}(A)}$

$=\frac{1-\mathrm{P}(A)-\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)}{1-\mathrm{P}(A)}$

$=1-\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B|A)$

## 0340 답 ④

ㄱ. $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(B|A)$이면

$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)$ 또는 $\mathrm{P}(A\cap B)=0$

그런데 이는 $A=B$를 의미하지는 않는다.

ㄴ. $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A|B^C)$에서

$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B^C)}{\mathrm{P}(B^C)}$

$\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)}{1-\mathrm{P}(B)}$

$\mathrm{P}(A\cap B)\{1-\mathrm{P}(B)\}=\mathrm{P}(B)\{\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이다.

ㄷ. $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

## 0341 답 $\frac{2}{3}$

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$에서

$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$ $\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

## 0342 답 ⑤

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{5}$에서

$\mathrm{P}(A)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{10}$

$\therefore \mathrm{P}(A^C\cup B^C)=\mathrm{P}((A\cap B)^C)$

$=1-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

## 0343 답 $\frac{1}{4}$

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이면 두 사건 $A^C$, $B$와 두 사건 $A$, $B^C$도 각각 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{6}$에서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{3}$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)+\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A)\{1-\mathrm{P}(B)\}+\{1-\mathrm{P}(A)\}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

$\mathrm{P}(A)\times\frac{5}{6}+\{1-\mathrm{P}(A)\}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6}$ $\therefore \mathrm{P}(A)=\frac{1}{4}$

## 0344 답 ①

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이면 두 사건 $A$, $B^C$도 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{1}{12}$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{12}$

$\frac{1}{4}\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{12}$ $\therefore \mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ …… ㉠

$\mathrm{P}(B^C\cap C^C)=\frac{2}{9}$에서

$\mathrm{P}(B^C\cap C^C)=\mathrm{P}((B\cup C)^C)=1-\mathrm{P}(B\cup C)$

즉, $1-\mathrm{P}(B\cup C)=\frac{2}{9}$이므로

$\mathrm{P}(B\cup C)=\frac{7}{9}$

두 사건 $B$, $C$가 서로 배반사건이면 $\mathrm{P}(B\cap C)=0$이므로

$\mathrm{P}(B\cup C)=\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(C)$

$\frac{7}{9}=\frac{2}{3}+\mathrm{P}(C)$ (∵ ㉠)

$\therefore \mathrm{P}(C)=\frac{1}{9}$

## 0345 답 $\frac{11}{15}$

A와 B가 그림을 완성하는 사건을 각각 $A$, $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

이때 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{3}{5}+\frac{1}{3}-\frac{3}{5}\times\frac{1}{3}=\frac{11}{15}$

## 0346 답 $\frac{3}{4}$

A와 B가 예선을 통과하는 사건을 각각 $A$, $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\frac{1}{2}$

이때 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로 두 사건 $A^C$, $B$도 서로 독립이다.

즉, $\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$이므로

$\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$

## 0347 답 5

여학생인 사건을 $A$, B 디자인을 선호하는 학생인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{x}{36}$

이때 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{x}{36}=\frac{1}{3}\times\frac{5}{12}$ $\therefore x=5$

## 0348 답 $\frac{1}{2}$

두 수의 합이 홀수이려면 하나는 홀수, 다른 하나는 짝수이어야 한다.

두 정육면체 모양의 주사위 A, B의 바닥에 놓인 면에 적힌 수가 홀수인 사건을 각각 $A$, $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

이때 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로 두 사건 $A$, $B^C$와 두 사건 $A^C$, $B$도 서로 독립이다.

(i) 두 정육면체 모양의 주사위 A, B의 바닥에 놓인 면에 적힌 수가 각각 홀수, 짝수일 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ …… ❶

(ii) 두 정육면체 모양의 주사위 A, B의 바닥에 놓인 면에 적힌 수가 각각 짝수, 홀수일 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ …… ❷

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ …… ❸

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ 두 정육면체 모양의 주사위 A, B의 바닥에 놓인 면에 적힌 수가 각각 홀수, 짝수일 확률 구하기 | 40 % |
| ❷ 두 정육면체 모양의 주사위 A, B의 바닥에 놓인 면에 적힌 수가 각각 짝수, 홀수일 확률 구하기 | 40 % |
| ❸ 바닥에 놓인 면에 적힌 두 수의 합이 홀수일 확률 구하기 | 20 % |

## 0349 답 $\frac{4}{5}$

세 학생 A, B, C가 음악 수행평가를 통과하지 못하는 사건을 각각 $A$, $B$, $C$라 하면

$\mathrm{P}(A)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(C)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

3명 중에서 적어도 1명이 통과하는 사건은 $(A\cap B\cap C)^C$이고, 이때 $A\cap B\cap C$는 3명이 모두 통과하지 못하는 사건이다.

이때 세 사건 $A$, $B$, $C$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

$=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}((A\cap B\cap C)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B\cap C)$

$=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

## 0350 답 $\frac{4}{81}$

동규가 이기는 경우를 ○, 지는 경우를 ×로 나타내자.

이때 동규가 이길 확률이 $\frac{1}{3}$이고 두 사람이 비기는 경우는 없으므로

승규가 이길 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

(i) 동규가 승자로 결정되는 경우

×○×○○이어야 하므로 그 확률은

$\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{243}$

(ii) 승규가 승자로 결정되는 경우

○×○××이어야 하므로 그 확률은

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{243}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{4}{243}+\frac{8}{243}=\frac{4}{81}$

## 0351 답 $\frac{80}{81}$

6의 약수의 눈이 1개 이상 나오는 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 6의 약수의 눈이 하나도 나오지 않는 사건이다.

한 개의 주사위를 던져서 6의 약수의 눈이 나오지 않을 확률이 $\frac{1}{3}$이므로

$P(A^C)={}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-\frac{1}{81}=\frac{80}{81}$

## 0352 답 ④

어느 질병에 걸린 환자 1명이 완치될 확률은

$\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$

따라서 구하는 확률은

${}_4C_3\left(\frac{4}{5}\right)^3\left(\frac{1}{5}\right)^1=\frac{256}{625}$

## 0353 답 ⑤

한 개의 동전과 한 개의 주사위를 동시에 던져서 동전은 뒷면이 나오고 주사위는 4 이하의 눈의 수가 나올 확률은

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

따라서 구하는 확률은

${}_6C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{80}{243}$

## 0354 답 ①

한 개의 주사위를 4번 던질 때, $a\times b\times c\times d$가 27의 배수이려면 3의 배수의 눈이 3번 또는 4번 나와야 한다.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{3}$

(i) 3의 배수의 눈이 3번 나올 확률은

${}_4C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$

(ii) 3의 배수의 눈이 4번 나올 확률은

${}_4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{8}{81}+\frac{1}{81}=\frac{1}{9}$

## 0355 답 $\frac{3}{8}$

4번째 경기에서 우승자가 결정되려면 우승자는 3번째 경기까지 2번 이기고 마지막 4번째 경기에서 이겨야 한다.

이때 한 번의 경기에서 선수 A가 이길 확률이 $\frac{1}{2}$이고 비기는 경우는 없으므로 선수 B가 이길 확률도 $\frac{1}{2}$이다.

(i) 선수 A가 우승할 확률은

${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

(ii) 선수 B가 우승할 확률은

${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{3}{16}+\frac{3}{16}=\frac{3}{8}$

## 0356 답 $\frac{32}{729}$

A 팀이 이길 확률이 $\frac{2}{3}$이고 두 팀이 비기는 경우는 없으므로 B 팀이 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이다.

4차전까지 2승 2패로 비길 확률은

${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

7차전에서 B 팀이 최종 우승하기 위해서는 B 팀이 5, 6차전 중에서 1번 이기고 7차전에서 이겨야 하므로 B 팀이 최종 우승할 확률은

$\frac{8}{27}\times{}_2C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\times\frac{1}{3}=\frac{32}{729}$

## 0357 답 ②

빨간 공이 나올 확률이 $\frac{3}{4}$이고, 노란 공이 나올 확률이 $\frac{1}{4}$이다.

(i) 빨간 공이 나오고, 한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$\frac{3}{4}\times{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{32}$

(ii) 노란 공이 나오고, 한 개의 동전을 4번 던져서 앞면이 3번 나올 확률은

$\frac{1}{4}\times{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{16}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{3}{32}+\frac{1}{16}=\frac{5}{32}$

## 0358 답 $\frac{152}{567}$

꺼낸 카드에 적힌 두 수가 서로 같을 확률은

$\frac{{}_4C_2+{}_3C_2}{{}_7C_2}=\frac{6+3}{21}=\frac{3}{7}$

꺼낸 카드에 적힌 두 수가 서로 다를 확률은

$1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7}$ …… ❶

(i) 꺼낸 카드에 적힌 두 수가 서로 같고, 한 개의 주사위를 5번 던져서 3의 약수의 눈이 2번 나올 확률은

$\frac{3}{7}\times{}_5C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{80}{567}$ …… ❷

(ii) 꺼낸 카드에 적힌 두 수가 서로 다르고, 한 개의 주사위를 3번 던져서 3의 약수의 눈이 2번 나올 확률은

$\frac{4}{7}\times{}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{63}$ …… ⓘⓘⓘ

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{80}{567}+\frac{8}{63}=\frac{152}{567}$ …… ⓘⓥ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ 꺼낸 카드에 적힌 두 수가 서로 같을 확률과 서로 다를 확률 구하기 | 20 % |
| ⓘⓘ 꺼낸 카드에 적힌 두 수가 서로 같고, 한 개의 주사위를 5번 던져서 3의 약수의 눈이 2번 나올 확률 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘⓘ 꺼낸 카드에 적힌 두 수가 서로 다르고, 한 개의 주사위를 3번 던져서 3의 약수의 눈이 2번 나올 확률 구하기 | 30 % |
| ⓘⓥ 3의 약수의 눈이 2번 나올 확률 구하기 | 20 % |

## 0359 답 $\frac{5}{16}$

A가 이기는 횟수를 $x$, 지는 횟수를 $y$라 하면 5번의 게임을 하므로

$x+y=5$ …… ㉠

위로 1계단 올라가는 것을 $+1$, 아래로 1계단 내려가는 것을 $-1$로 생각하면 5번의 게임을 하여 A가 1계단 내려가게 되므로

$x\times1+y\times(-1)=-1$

$\therefore x-y=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=2$, $y=3$

게임에서 A가 이길 확률은 $\frac{1}{2}$이고, A가 5번의 게임 중에서 2번 이기고 3번 져야 하므로 구하는 확률은

${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$

## 0360 답 $\frac{9}{2048}$

6번의 시행을 하여 빨간 공이 나오는 횟수를 $x$, 파란 공이 나오는 횟수를 $y$라 하면

$x+y=6$ …… ㉠

6번의 시행을 한 후 13점을 얻어야 하므로

$3x+2y=13$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=1$, $y=5$

빨간 공을 꺼낼 확률은 $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$이고, 6번의 시행에서 빨간 공이 1번 나와야 하므로 구하는 확률은

${}_6C_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{9}{2048}$

## 0361 답 ④

점 P의 좌표가 2 이상이려면 6의 약수의 눈이 2번 이상 나와야 한다.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(i) 6의 약수의 눈이 2번 나오는 경우

한 개의 주사위를 4번 던질 때, 6의 약수의 눈이 2번 나올 확률은

${}_4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$

(ii) 6의 약수의 눈이 3번 나오는 경우

한 개의 주사위를 4번 던질 때, 6의 약수의 눈이 3번 나올 확률은

${}_4C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{32}{81}$

(iii) 6의 약수의 눈이 4번 나오는 경우

한 개의 주사위를 4번 던질 때, 6의 약수의 눈이 4번 나올 확률은

${}_4C_4\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{16}{81}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{8}{27}+\frac{32}{81}+\frac{16}{81}=\frac{8}{9}$

**다른 풀이**

점 P의 좌표가 2 이상인 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 점 P의 좌표가 1 이하인 사건이다.

점 P의 좌표가 1 이하이려면 6의 약수의 눈이 1번 이하 나와야 한다.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(i) 6의 약수의 눈이 0번 나오는 경우

한 개의 주사위를 4번 던질 때, 6의 약수의 눈이 0번 나올 확률은

${}_4C_0\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{1}{81}$

(ii) 6의 약수의 눈이 1번 나오는 경우

한 개의 주사위를 4번 던질 때, 6의 약수의 눈이 1번 나올 확률은

${}_4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{8}{81}$

(i), (ii)에서 $P(A^C)=\frac{1}{81}+\frac{8}{81}=\frac{1}{9}$

따라서 구하는 확률은 $P(A^C)=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

## AB 유형 점검 66~68쪽

## 0362 답 $\frac{1}{2}$

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$이므로

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$

$\therefore P(A^C\cap B^C)=P((A\cup B)^C)$

$=1-P(A\cup B)$

$=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

## 0363 답 $\frac{7}{20}$

남학생인 사건을 $A$, 피아노를 선호하는 학생인 사건을 $B$라 하면

$P(A)=\frac{15}{50}=\frac{3}{10}$, $P(B)=\frac{36}{50}=\frac{18}{25}$, $P(A\cap B)=\frac{9}{50}$

$\therefore\ p_1=\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{9}{50}}{\frac{3}{10}}=\dfrac{3}{5}$,

$p_2=\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\frac{9}{50}}{\frac{18}{25}}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ p_1-p_2=\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{20}$

다른 풀이

$p_1$은 남학생 중에서 피아노를 선호하는 남학생을 택할 확률과 같으므로

$p_1=\dfrac{\text{(피아노를 선호하는 남학생 수)}}{\text{(남학생 수)}}=\dfrac{9}{15}=\dfrac{3}{5}$

$p_2$는 피아노를 선호하는 학생 중에서 남학생을 택할 확률과 같으므로

$p_2=\dfrac{\text{(피아노를 선호하는 남학생 수)}}{\text{(피아노를 선호하는 학생 수)}}=\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore\ p_1-p_2=\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{20}$

## 0364 답 ②

$a\times b$가 4의 배수인 사건을 $A$, $a+b\le 7$인 사건을 $B$라 하자.

$a\times b$가 4의 배수인 경우는

(i) $a\times b=4$일 때

(1, 4), (2, 2), (4, 1)의 3가지

(ii) $a\times b=8$일 때

(2, 4), (4, 2)의 2가지

(iii) $a\times b=12$일 때

(2, 6), (3, 4), (4, 3), (6, 2)의 4가지

(iv) $a\times b=16$일 때

(4, 4)의 1가지

(v) $a\times b=20$일 때

(4, 5), (5, 4)의 2가지

(vi) $a\times b=24$일 때

(4, 6), (6, 4)의 2가지

(vii) $a\times b=28$을 만족시키는 경우는 없다.

(viii) $a\times b=32$를 만족시키는 경우는 없다.

(ix) $a\times b=36$일 때

(6, 6)의 1가지

(i)~(ix)에서 $a\times b$가 4의 배수인 경우의 수는

$3+2+4+1+2+2+1=15$

$\therefore\ \mathrm{P}(A)=\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$

$a\times b$가 4의 배수이고 $a+b\le 7$인 경우는

(1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)의 7가지

이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{7}{36}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\frac{7}{36}}{\frac{5}{12}}=\dfrac{7}{15}$

## 0365 답 $\frac{1}{6}$

1학년 학생인 사건을 $A$, 여학생인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{30}{100}=\dfrac{3}{10}$, $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{5}{9}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)$

$=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{5}{9}=\dfrac{1}{6}$

## 0366 답 ③

첫 번째에 파란 공을 꺼내는 사건을 $A$, 두 번째에 파란 공을 꺼내는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{10}$, $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{7}{10}$

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{2}{9}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{15}$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{7}{10}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{30}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\dfrac{1}{15}+\dfrac{7}{30}$

$=\dfrac{3}{10}$

## 0367 답 4

공장 A에서 생산한 제품인 사건을 $A$, 불량품인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{2}{5}$

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{p}{100}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{2}{100}=\dfrac{1}{50}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{p}{100}=\dfrac{3p}{500}$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{50}=\dfrac{1}{125}$

따라서 제품이 불량품일 확률은

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\dfrac{3p}{500}+\dfrac{1}{125}=\dfrac{3p+4}{500}$

즉, $\dfrac{3p+4}{500}=\dfrac{4}{125}$이므로 $3p+4=16$ $\therefore\ p=4$

## 0368 답 ③

이 팀이 치르는 경기가 홈 경기인 사건을 $A$, 이 팀이 승리하는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.4$, $\mathrm{P}(A^C)=1-0.4=0.6$

$\mathrm{P}(B|A)=0.8$, $\mathrm{P}(B|A^C)=0.6$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.4\times 0.8=0.32$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=0.6\times 0.6=0.36$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A|B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)}$

$=\dfrac{0.32}{0.32+0.36}=\dfrac{8}{17}$

## 0369 답 ③

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하면

$A=\{HHH, TTT\}$, $B=\{HTT, THT, TTH, TTT\}$,

$A\cap B=\{TTT\}$

ㄱ. $P(A)=\frac{2}{2^3}=\frac{1}{4}$

ㄴ. $P(A\cap B)=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

ㄷ. $P(B)=\frac{4}{2^3}=\frac{1}{2}$이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

## 0370 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. $B\subset A$이면 $A\cap B=B$이므로

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$

ㄴ. 두 사건 $A$, $B$가 서로 배반사건이면 $A\cap B=\varnothing$이므로

$P(A\cap B)=0$

$\therefore P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0$

ㄷ. 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이면 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이므로

$\{1-P(A)\}\{1-P(B)\}=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$

$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$

$=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}$

$=1-P(A\cup B)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

## 0371 답 $\frac{1}{9}$

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$P(B|A)=P(B)$

이때 $P(B|A)=P(A)$에서

$P(A)=P(B)$ …… ㉠

$P(A\cup B)=\frac{5}{9}$에서

$P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{5}{9}$

$P(A)+P(B)-P(A)P(B)=\frac{5}{9}$

$P(A)+P(A)-P(A)P(A)=\frac{5}{9}$ ($\because$ ㉠)

$2P(A)-\{P(A)\}^2=\frac{5}{9}$

$9\{P(A)\}^2-18P(A)+5=0$

$\{3P(A)-1\}\{3P(A)-5\}=0$

$\therefore P(A)=\frac{1}{3}$ ($\because 0\le P(A)\le 1$)

$\therefore P(B)=P(A)=\frac{1}{3}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

## 0372 답 $\frac{1}{6}$

혜인이와 은별이가 이번 주 공연을 관람하는 사건을 각각 $A$, $B$라 하면

$P(A)=\frac{1}{6}$, $P(A^C)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

$P(B)=\frac{4}{5}$, $P(B^C)=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

이때 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로 두 사건 $A^C$, $B^C$도 서로 독립이다.

따라서 구하는 확률은

$P(A^C\cap B^C)=P(A^C)P(B^C)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{6}$

## 0373 답 ①

앞면이 나오는 횟수와 뒷면이 나오는 횟수의 곱이 6이려면 앞면이 2번, 뒷면이 3번 또는 앞면이 3번, 뒷면이 2번 나와야 한다.

(i) 앞면이 2번, 뒷면이 3번 나올 확률은

$${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$$

(ii) 앞면이 3번, 뒷면이 2번 나올 확률은

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{5}{16}+\frac{5}{16}=\frac{5}{8}$

## 0374 답 $\frac{175}{256}$

적어도 하루는 오로라를 관측하는 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 4일 동안 오로라를 관측하지 못하는 사건이므로

$$P(A^C)={}_4C_0\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-\frac{81}{256}=\frac{175}{256}$

## 0375 답 $\frac{53}{512}$

A 팀이 우승하려면 3번째 경기에서 우승하거나 4번째 경기에서 우승하거나 5번째 경기에서 우승해야 한다.

A 팀이 이길 확률이 $\frac{1}{4}$이고 두 팀이 비기는 경우는 없으므로 B 팀이 이길 확률은 $\frac{3}{4}$이다.

(i) A 팀이 3번째 경기에서 우승하는 경우

A 팀이 3번 연속하여 이길 확률은

$${}_3C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{64}$$

(ii) A 팀이 4번째 경기에서 우승하는 경우

A 팀이 3번째 경기까지 2번 이기고 4번째 경기에서 이길 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^1\times\frac{1}{4}=\frac{9}{256}$$

(iii) A 팀이 5번째 경기에서 우승하는 경우

A 팀이 4번째 경기까지 2번 이기고 5번째 경기에서 이길 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\frac{1}{4}=\frac{27}{512}$$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{64}+\frac{9}{256}+\frac{27}{512}=\frac{53}{512}$

## 0376 답 ③

서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던져서 모두 뒷면이 나올 확률이 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$이고 앞면이 적어도 1개 나올 확률이 $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$이다.

(i) 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던져서 모두 뒷면이 나오고, 한 개의 주사위를 4번 던져서 6의 약수의 눈이 3번 나올 확률은

$\frac{1}{4}\times{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$

(ii) 서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던져서 앞면이 적어도 1개 나오고, 한 개의 주사위를 5번 던져서 6의 약수의 눈이 3번 나올 확률은

$\frac{3}{4}\times{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{20}{81}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{8}{81}+\frac{20}{81}=\frac{28}{81}$

## 0377 답 ②

한 개의 동전을 8번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 $x$, 뒷면이 나오는 횟수를 $y$라 하면

$x+y=8$ …… ㉠

한 개의 동전을 8번 던져서 50점을 얻어야 하므로

$10x-5y=50$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=6,\ y=2$

따라서 한 개의 동전을 8번 던져서 앞면이 6번 나와야 하므로 구하는 확률은

${}_8\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{64}$

## 0378 답 13

채이가 당첨 제비를 뽑는 사건을 $A$, 한별이가 당첨 제비를 뽑지 못하는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{n},\ \mathrm{P}(B|A)=\frac{n-3}{n-1}$

따라서 채이는 당첨 제비를 뽑고 한별이는 당첨 제비를 뽑지 못할 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{n}\times\frac{n-3}{n-1}$ …… ❶

즉, $\frac{3}{n}\times\frac{n-3}{n-1}=\frac{1}{4}$이므로

$n(n-1)=12(n-3)$

$n^2-13n+36=0$

$(n-4)(n-9)=0$ $\therefore\ n=4$ 또는 $n=9$ …… ❷

따라서 모든 $n$의 값의 합은 $4+9=13$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 채이가 당첨 제비를 뽑고 한별이가 당첨 제비를 뽑지 못할 확률을 $n$에 대하여 나타내기 | 40 % |
| ❷ $n$의 값 구하기 | 40 % |
| ❸ 모든 $n$의 값의 합 구하기 | 20 % |

## 0379 답 $\frac{1}{2}$

두 수의 합이 짝수이려면 두 수 모두 짝수이거나 두 수 모두 홀수이어야 한다.

두 주머니 A, B에서 꺼낸 카드에 적힌 수가 짝수인 사건을 각각 $A$, $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{1}{6},\ \mathrm{P}(A^C)=\frac{5}{6},\ \mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ \mathrm{P}(B^C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

이때 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로 두 사건 $A^C$, $B^C$도 서로 독립이다.

(i) 두 주머니 A, B에서 모두 짝수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$ …… ❶

(ii) 두 주머니 A, B에서 모두 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$

$=\frac{5}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$ …… ❷

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{12}+\frac{5}{12}=\frac{1}{2}$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 두 주머니 A, B에서 모두 짝수가 적힌 카드를 꺼낼 확률 구하기 | 40 % |
| ❷ 두 주머니 A, B에서 모두 홀수가 적힌 카드를 꺼낼 확률 구하기 | 40 % |
| ❸ 꺼낸 카드에 적힌 두 수의 합이 짝수일 확률 구하기 | 20 % |

## 0380 답 $\frac{6}{11}$

꺼낸 카드에 적힌 수가 3의 배수일 확률이 $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$이고 3의 배수가 아닐 확률이 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$이다.

(i) 꺼낸 카드에 적힌 수가 3의 배수이고, 한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 1번 나올 확률은

$\frac{1}{3}\times{}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$ …… ❶

(ii) 꺼낸 카드에 적힌 수가 3의 배수가 아니고, 한 개의 동전을 5번 던져서 앞면이 1번 나올 확률은

$\frac{2}{3}\times{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{48}$ …… ❷

(i), (ii)에서 동전의 앞면이 1번 나올 확률은

$\frac{1}{8}+\frac{5}{48}=\frac{11}{48}$ …… ❸

따라서 구하는 확률은 $\frac{\frac{1}{8}}{\frac{11}{48}}=\frac{6}{11}$ …… ❹

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 꺼낸 카드에 적힌 수가 3의 배수이고, 한 개의 동전을 3번 던져서 앞면이 1번 나올 확률 구하기 | 30 % |
| ❷ 꺼낸 카드에 적힌 수가 3의 배수가 아니고, 한 개의 동전을 5번 던져서 앞면이 1번 나올 확률 구하기 | 30 % |
| ❸ 동전의 앞면이 1번 나올 확률 구하기 | 20 % |
| ❹ 동전의 앞면이 1번 나올 때, 꺼낸 카드에 적힌 수가 3의 배수일 확률 구하기 | 20 % |

## C 실력 향상 69쪽

### 0381 답 ⑤

$a+b+c$가 짝수인 사건을 $A$, $a$가 홀수인 사건을 $B$라 하자.

$a+b+c$가 짝수인 경우는

(i) 세 수 $a$, $b$, $c$가 모두 짝수인 경우

2, 4, 6, 8이 적힌 공 중에서 3개를 꺼내면 되므로 ${}_4C_3=4$

(ii) 세 수 $a$, $b$, $c$ 중에서 1개만 짝수인 경우

2, 4, 6, 8이 적힌 공 중에서 1개, 1, 3, 5, 7이 적힌 공 중에서 2개를 꺼내면 되므로 ${}_4C_1\times{}_4C_2=24$

(i), (ii)에서 $a+b+c$가 짝수인 경우의 수는

$4+24=28$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{28}{{}_8C_3}=\dfrac{28}{56}=\dfrac{1}{2}$

$a+b+c$가 짝수이고 $a$가 홀수인 경우는

(iii) $a=1$일 때

3, 5, 7이 적힌 공 중에서 1개, 2, 4, 6, 8이 적힌 공 중에서 1개를 꺼내면 되므로 ${}_3C_1\times{}_4C_1=12$

(iv) $a=3$일 때

5, 7이 적힌 공 중에서 1개, 4, 6, 8이 적힌 공 중에서 1개를 꺼내면 되므로 ${}_2C_1\times{}_3C_1=6$

(v) $a=5$일 때

7이 적힌 공을 뽑고, 6, 8이 적힌 공 중에서 1개를 꺼내면 되므로 $1\times{}_2C_1=2$

(iii), (iv), (v)에서 $a+b+c$가 짝수이고 $a$가 홀수인 경우의 수는

$12+6+2=20$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{20}{{}_8C_3}=\dfrac{20}{56}=\dfrac{5}{14}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{5}{14}}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{7}$$

### 0382 답 30

상자 A에서 검은색 볼펜을 꺼내는 사건을 $A$, 두 상자 A, B에서 서로 같은 색의 볼펜을 꺼내는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{n}{100}$, $\mathrm{P}(A^C)=\dfrac{100-n}{100}$

$\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{100-2n}{100}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{2n}{100}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{n}{100}\times\dfrac{100-2n}{100}=\dfrac{100n-2n^2}{10000}$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\dfrac{100-n}{100}\times\dfrac{2n}{100}=\dfrac{200n-2n^2}{10000}$

두 상자 A, B에서 각각 임의로 1개씩 꺼낸 볼펜의 색이 서로 같을 때, 그 색이 검은색일 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)}$$
$$=\frac{\frac{100n-2n^2}{10000}}{\frac{100n-2n^2}{10000}+\frac{200n-2n^2}{10000}}=\frac{n-50}{2n-150}$$

즉, $\dfrac{n-50}{2n-150}=\dfrac{2}{9}$이므로

$9n-450=4n-300$

$5n=150$ $\therefore n=30$

### 0383 답 ④

한 개의 주사위를 3번 던지므로

$m+n=3$ …… ㉠

이때 $m$, $n$은 $0\le m\le 3$, $0\le n\le 3$인 정수이므로

$|m-n|=1$ 또는 $|m-n|=3$

그런데 $i^{|m-n|}=i$이려면 $|m-n|=1$이어야 하므로

$m-n=-1$ 또는 $m-n=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=1$, $n=2$ 또는 $m=2$, $n=1$

(i) $m=1$, $n=2$인 경우

2가 1번, 2가 아닌 수가 2번 나와야 하므로 그 확률은

${}_3C_1\left(\dfrac{1}{4}\right)^1\left(\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{27}{64}$

(ii) $m=2$, $n=1$인 경우

2가 2번, 2가 아닌 수가 1번 나와야 하므로 그 확률은

${}_3C_2\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\left(\dfrac{3}{4}\right)^1=\dfrac{9}{64}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\dfrac{27}{64}+\dfrac{9}{64}=\dfrac{9}{16}$

**공통수학1 다시보기**

복소수 $i$에 대하여

$i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$, $i^{4n+4}=1$

(단, $n$은 음이 아닌 정수)

### 0384 답 ④

한 개의 주사위를 5번 던져서 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 $x$, 3의 배수가 아닌 눈이 나오는 횟수를 $y$라 하면

$x+y=5$

$\therefore y=5-x$ …… ㉠

점 P가 꼭짓점 A에 있으려면 $2x+y$가 3의 배수가 되어야 하므로

$2x+y=3k$ (단, $k$는 자연수)

이 식에 ㉠을 대입하면

$2x+5-x=3k$ $\therefore x+5=3k$

이때 $x$는 $0\le x\le 5$인 정수이므로

$x=1$ 또는 $x=4$

(i) 3의 배수의 눈이 1번 나올 확률은

${}_5C_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^1\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{80}{243}$

(ii) 3의 배수의 눈이 4번 나올 확률은

${}_5C_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^1=\dfrac{10}{243}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\dfrac{80}{243}+\dfrac{10}{243}=\dfrac{10}{27}$

# 05 / 이산확률변수와 이항분포

## A 개념 확인 72~75쪽

**0385** 답 ㄷ, ㄹ

**0386** 답 **0, 1, 2**

한 개의 동전을 2번 던지므로 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

**0387** 답 $\mathbf{P(X=0)=\frac{1}{4}}$, $\mathbf{P(X=1)=\frac{1}{2}}$, $\mathbf{P(X=2)=\frac{1}{4}}$

한 개의 동전을 한 번 던져서 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$, 뒷면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이므로

$P(X=0)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $P(X=1)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$P(X=2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

**0388** 답

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

**0389** 답 **4, $2-x$**

**0390** 답

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{5}{18}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

**0391** 답 $\frac{3}{8}$

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1 \quad \therefore a=\frac{3}{8}$

**0392** 답 $\frac{5}{8}$

$P(X=1 \text{ 또는 } X=4)=P(X=1)+P(X=4)$

$=\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$

**0393** 답 $\frac{3}{4}$

$P(1\le X\le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$

$=\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

다른 풀이

$P(1\le X\le 3)=1-P(X=4)$

$=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

**0394** 답 **4**

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=20-4^2=4$

**0395** 답 **2**

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{4}=2$

**0396** 답 **2**

$E(X)=0\times\frac{1}{7}+1\times\frac{2}{7}+2\times\frac{2}{7}+4\times\frac{2}{7}=2$

**0397** 답 **2**

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{7}+1^2\times\frac{2}{7}+2^2\times\frac{2}{7}+4^2\times\frac{2}{7}=6$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=6-2^2=2$

**0398** 답

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | 1 |

한 개의 주사위를 한 번 던져서 3의 배수의 눈이 나올 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$,

3의 배수가 아닌 눈이 나올 확률은 $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$이다.

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 각각의 확률은

$P(X=0)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$,

$P(X=1)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$,

$P(X=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | 1 |

**0399** 답 **평균: $\frac{2}{3}$, 분산: $\frac{4}{9}$, 표준편차: $\frac{2}{3}$**

$E(X)=0\times\frac{4}{9}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{1}{9}=\frac{2}{3}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{4}{9}+1^2\times\frac{4}{9}+2^2\times\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{8}{9}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{2}{3}$

**0400** 답 **평균: 2, 분산: $\frac{4}{25}$, 표준편차: $\frac{2}{5}$**

$E\left(\frac{1}{5}X\right)=\frac{1}{5}E(X)=\frac{1}{5}\times 10=2$

$V\left(\frac{1}{5}X\right)=\left(\frac{1}{5}\right)^2V(X)=\frac{1}{25}\times 4=\frac{4}{25}$

$\sigma\left(\frac{1}{5}X\right)=\left|\frac{1}{5}\right|\sigma(X)=\frac{1}{5}\times 2=\frac{2}{5}$

**0401** 답 **평균: 13, 분산: 4, 표준편차: 2**

$E(X+3)=E(X)+3=10+3=13$

$V(X+3)=V(X)=4$

$\sigma(X+3)=\sigma(X)=2$

**0402** 답 평균: 8, 분산: 1, 표준편차: 1

$\mathrm{E}\left(\frac{X+6}{2}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)+\frac{6}{2}=\frac{1}{2}\times 10+3=8$

$\mathrm{V}\left(\frac{X+6}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{V}(X)=\frac{1}{4}\times 4=1$

$\sigma\left(\frac{X+6}{2}\right)=\left|\frac{1}{2}\right|\sigma(X)=\frac{1}{2}\times 2=1$

**0403** 답 평균: 4, 분산: 36, 표준편차: 6

$\mathrm{E}(-2X)=-2\mathrm{E}(X)=-2\times(-2)=4$

$\mathrm{V}(-2X)=(-2)^2\mathrm{V}(X)=4\times 9=36$

$\sigma(-2X)=|-2|\sigma(X)=2\times 3=6$

**0404** 답 평균: $-1$, 분산: 81, 표준편차: 9

$\mathrm{E}(3X+5)=3\mathrm{E}(X)+5=3\times(-2)+5=-1$

$\mathrm{V}(3X+5)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times 9=81$

$\sigma(3X+5)=|3|\sigma(X)=3\times 3=9$

**0405** 답 평균: $-\frac{7}{3}$, 분산: 4, 표준편차: 2

$\mathrm{E}\left(\frac{2}{3}X-1\right)=\frac{2}{3}\mathrm{E}(X)-1=\frac{2}{3}\times(-2)-1=-\frac{7}{3}$

$\mathrm{V}\left(\frac{2}{3}X-1\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\mathrm{V}(X)=\frac{4}{9}\times 9=4$

$\sigma\left(\frac{2}{3}X-1\right)=\left|\frac{2}{3}\right|\sigma(X)=\frac{2}{3}\times 3=2$

**0406** 답 (1) 5 (2) $\frac{1}{2}$ (3) $2\sqrt{2}$

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}=2$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{2}$

$\therefore\ \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{9}{2}-2^2=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(1) $\mathrm{E}(2X+1)=2\mathrm{E}(X)+1=2\times 2+1=5$

(2) $\mathrm{V}(-X-5)=(-1)^2\mathrm{V}(X)=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(3) $\sigma(4X+10)=|4|\sigma(X)=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

**0407** 답 $\mathrm{B}\left(5,\ \frac{1}{2}\right)$

**0408** 답 이항분포를 따르지 않는다.

**0409** 답 $\mathrm{B}\left(10,\ \frac{2}{5}\right)$

**0410** 답 $\mathrm{P}(X=x)={}_4\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$

**0411** 답 $\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$

**0412** 답 $\mathrm{B}\left(3,\ \frac{1}{5}\right)$

**0413** 답 $\mathrm{P}(X=x)={}_3\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{5}\right)^x\left(\frac{4}{5}\right)^{3-x}$ $(x=0,\ 1,\ 2,\ 3)$

**0414** 답 $\frac{12}{125}$

$\mathrm{P}(X=2)={}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{12}{125}$

**0415** 답 평균: 50, 분산: 25, 표준편차: 5

$\mathrm{E}(X)=100\times\frac{1}{2}=50$

$\mathrm{V}(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$

$\sigma(X)=\sqrt{25}=5$

**0416** 답 평균: 32, 분산: 24, 표준편차: $2\sqrt{6}$

$\mathrm{E}(X)=128\times\frac{1}{4}=32$

$\mathrm{V}(X)=128\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=24$

$\sigma(X)=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

## B 유형 완성 76~87쪽

**0417** 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$4k+5k+6k+7k=1,\ 22k=1 \qquad \therefore\ k=\frac{1}{22}$

**0418** 답 $\frac{1}{2}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{4}a+\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a=1$

$2a^2+3a-2=0,\ (a+2)(2a-1)=0$

$\therefore\ a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

이때 $0\le\mathrm{P}(X=x)\le 1$이므로 $a=\frac{1}{2}$

**0419** 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\cdots+\mathrm{P}(X=99)=1$

$\frac{k}{2\times 3}+\frac{k}{3\times 4}+\frac{k}{4\times 5}+\cdots+\frac{k}{101\times 102}=1$

$k\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{101}-\frac{1}{102}\right)\right\}=1$

$k\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{102}\right)=1,\ \frac{25}{51}k=1 \qquad \therefore\ 25k=51$

## 0420 답 ⑤

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+2a+\frac{1}{4}=1,\ 3a=\frac{1}{2}\qquad \therefore\ a=\frac{1}{6}$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le X<2)=\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)$

$=\frac{1}{4}+2a=\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{6}=\frac{7}{12}$

## 0421 답 ③

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=1$

$\left(\frac{1}{5}+k\right)+\left(\frac{2}{5}+k\right)+k=1,\ 3k=\frac{2}{5}$

$\therefore\ k=\frac{2}{15}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=1\text{ 또는 }X=3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)$

$=\frac{1}{5}+k+k=\frac{1}{5}+2k$

$=\frac{1}{5}+2\times\frac{2}{15}=\frac{7}{15}$

다른 풀이

$\mathrm{P}(X=1\text{ 또는 }X=3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)$

$=1-\mathrm{P}(X=2)$

$=1-\left(\frac{2}{5}+k\right)$

$=1-\left(\frac{2}{5}+\frac{2}{15}\right)=\frac{7}{15}$

## 0422 답 $\frac{3}{8}$

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)=1$

이때 $\mathrm{P}(2\le X\le 5)+\mathrm{P}(X=6)=1$에서

$\mathrm{P}(2\le X\le 5)=\frac{3}{4}$이므로

$\frac{3}{4}+\mathrm{P}(X=6)=1\qquad \therefore\ \mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{4}$

또 $\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(3\le X\le 6)=1$에서

$\mathrm{P}(3\le X\le 6)=\frac{7}{8}$이므로

$\mathrm{P}(X=2)+\frac{7}{8}=1\qquad \therefore\ \mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{8}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=6)=\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

## 0423 답 $\frac{2-\sqrt{2}}{3}$

$\mathrm{P}(X=x)=\frac{k}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}=\frac{k(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})(\sqrt{x}-\sqrt{x+1})}$

$=k(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\cdots+\mathrm{P}(X=15)=1$

$k\{(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{16}-\sqrt{15})\}=1$

$k(\sqrt{16}-\sqrt{1})=1,\ 3k=1\qquad \therefore\ k=\frac{1}{3}$ …… ⓘ

$X^2-9X+8=0$에서

$(X-1)(X-8)=0\qquad \therefore\ X=1\text{ 또는 }X=8$

$\therefore\ \mathrm{P}(X^2-9X+8=0)=\mathrm{P}(X=1\text{ 또는 }X=8)$

$=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=8)$

$=k(\sqrt{2}-\sqrt{1})+k(\sqrt{9}-\sqrt{8})$

$=\frac{\sqrt{2}-1}{3}+\frac{3-2\sqrt{2}}{3}=\frac{2-\sqrt{2}}{3}$ …… ⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $k$의 값 구하기 | 50 % |
| ⓘⓘ $\mathrm{P}(X^2-9X+8=0)$ 구하기 | 50 % |

## 0424 답 ①

$\frac{3}{\mathrm{P}(X=k)}=\frac{k}{\mathrm{P}(X=k+1)}$에서

$\mathrm{P}(X=k+1)=\frac{k}{3}\mathrm{P}(X=k)$

$\mathrm{P}(X=1)=a$라 하면

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{3}\mathrm{P}(X=1)=\frac{1}{3}a$

$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}a=\frac{2}{9}a$

$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{3}\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{9}a$

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)=1$

$a+\frac{1}{3}a+\frac{2}{9}a+\frac{2}{9}a=1,\ \frac{16}{9}a=1\qquad \therefore\ a=\frac{9}{16}$

$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 3)=\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)$

$=\frac{2}{9}a+\frac{2}{9}a=\frac{4}{9}a$

$=\frac{4}{9}\times\frac{9}{16}=\frac{1}{4}$

## 0425 답 ⑤

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_4\mathrm{C}_0\times{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{1}{35}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_4\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{12}{35}$,

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_4\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{18}{35}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times{}_3\mathrm{C}_0}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{35}$ | $\frac{12}{35}$ | $\frac{18}{35}$ | $\frac{4}{35}$ | 1 |

$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge 2)=\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)=\frac{18}{35}+\frac{4}{35}=\frac{22}{35}$

## 0426 답 ②

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, …, 8이다.

바닥에 놓인 면에 적힌 수를 각각 $a$, $b$라 하면 순서쌍 $(a, b)$에 대하여 두 수의 합이

(i) 5인 경우는 (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)의 4가지이므로

$\mathrm{P}(X=5)=\frac{4}{4\times 4}=\frac{1}{4}$

(ii) 6인 경우는 (2, 4), (3, 3), (4, 2)의 3가지이므로

$\mathrm{P}(X=6)=\frac{3}{4\times 4}=\frac{3}{16}$

(i), (ii)에서

$P(X=5 \text{ 또는 } X=6)=P(X=5)+P(X=6)$

$=\frac{1}{4}+\frac{3}{16}=\frac{7}{16}$

참고 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | 1 |

## 0427 답 $\frac{1}{2}$

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 2, 4, 6이므로

$P(X>3)=P(X=4)+P(X=6)$

뽑은 카드에 적힌 수를 각각 $a$, $b$ $(a<b)$라 하면 순서쌍 $(a, b)$에 대하여 두 수의 차가

(i) 4인 경우는 (2, 6), (4, 8)의 2가지이므로

$P(X=4)=\frac{2}{{}_4C_2}=\frac{1}{3}$

(ii) 6인 경우는 (2, 8)의 1가지이므로

$P(X=6)=\frac{1}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$

(i), (ii)에서

$P(X>3)=P(X=4)+P(X=6)=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

참고 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 2 | 4 | 6 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

## 0428 답 ⑤

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이다.

$X^2-8X+15\le 0$에서 $(X-3)(X-5)\le 0$ $\therefore 3\le X\le 5$

나오는 눈의 수를 각각 $a$, $b$라 하면 순서쌍 $(a, b)$에 대하여 두 수 중에서 크지 않은 수가

(i) 3인 경우는 (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (5, 3), (6, 3)의 7가지이므로

$P(X=3)=\frac{7}{6\times 6}=\frac{7}{36}$

(ii) 4인 경우는 (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 4), (6, 4)의 5가지이므로

$P(X=4)=\frac{5}{6\times 6}=\frac{5}{36}$

(iii) 5인 경우는 (5, 5), (5, 6), (6, 5)의 3가지이므로

$P(X=5)=\frac{3}{6\times 6}=\frac{1}{12}$

(i), (ii), (iii)에서

$P(X^2-8X+15\le 0)=P(3\le X\le 5)$

$=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$=\frac{7}{36}+\frac{5}{36}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}$

참고 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{11}{36}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{36}$ | 1 |

## 0429 답 $\frac{11}{15}$

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이다.

$X^2-7X+12=0$에서 $(X-3)(X-4)=0$

$\therefore X=3$ 또는 $X=4$

(i) 두 수의 합이 3인 경우는 1, 2가 적힌 공을 꺼내는 경우이고, 1이 적힌 공이 2개, 2가 적힌 공이 3개이므로

$2\times 3=6$(가지)

$\therefore P(X=3)=\frac{6}{{}_6C_2}=\frac{2}{5}$

(ii) 두 수의 합이 4인 경우는 1, 3 또는 2, 2가 적힌 공을 꺼내는 경우이고, 1이 적힌 공이 2개, 2가 적힌 공이 3개, 3이 적힌 공이 1개이므로

$2\times 1+{}_3C_2=2+3=5$(가지)

$\therefore P(X=4)=\frac{5}{{}_6C_2}=\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서

$P(X^2-7X+12=0)=P(X=3)+P(X=4)=\frac{2}{5}+\frac{1}{3}=\frac{11}{15}$

참고 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{5}$ | 1 |

## 0430 답 2

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 각각의 확률은

$P(X=1)=\frac{{}_7C_1\times{}_3C_3}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{30}$, $P(X=2)=\frac{{}_7C_2\times{}_3C_2}{{}_{10}C_4}=\frac{3}{10}$,

$P(X=3)=\frac{{}_7C_3\times{}_3C_1}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{2}$, $P(X=4)=\frac{{}_7C_4\times{}_3C_0}{{}_{10}C_4}=\frac{1}{6}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

이때 $P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{30}+\frac{3}{10}=\frac{1}{3}$이므로

$P(X\le 2)=\frac{1}{3}$ $\therefore k=2$

## 0431 답 $\frac{8}{7}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{3}{7}+\frac{2}{7}+a+\frac{1}{7}=1$ $\therefore a=\frac{1}{7}$

따라서 확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=1\times\frac{3}{7}+2\times\frac{2}{7}+3\times\frac{1}{7}+4\times\frac{1}{7}=2$

$E(X^2)=1^2\times\frac{3}{7}+2^2\times\frac{2}{7}+3^2\times\frac{1}{7}+4^2\times\frac{1}{7}=\frac{36}{7}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{36}{7}-2^2=\frac{8}{7}$

## 0432 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$

$k+4k+9k+16k=1$, $30k=1$ $\therefore k=\frac{1}{30}$

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{30}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{8}{15}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{30}+2\times\frac{2}{15}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{8}{15}=\frac{10}{3}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{30}+2^2\times\frac{2}{15}+3^2\times\frac{3}{10}+4^2\times\frac{8}{15}=\frac{59}{5}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{59}{5}-\left(\frac{10}{3}\right)^2=\frac{31}{45}$

## 0433 답 ②

확률의 총합은 1이므로

$a+(a+b)+b=1,\ 2a+2b=1$

$\therefore a+b=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$E(X^2)=a+5$에서

$1^2\times a+2^2\times(a+b)+3^2\times b=a+5$

$a+4a+4b+9b=a+5 \quad \therefore 4a+13b=5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{1}{6},\ b=\frac{1}{3}$

$\therefore b-a=\frac{1}{6}$

## 0434 답 $\sqrt{11}$

확률의 총합은 1이므로

$b+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1 \quad \therefore b=\frac{1}{4}$ …… ⓘ

$E(X)=1$에서

$-a\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{4}+a\times\frac{1}{2}=1,\ \frac{1}{4}a=1 \quad \therefore a=4$ …… ⓘⓘ

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | $-4$ | 0 | 4 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X^2)=(-4)^2\times\frac{1}{4}+0^2\times\frac{1}{4}+4^2\times\frac{1}{2}=12$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=12-1^2=11$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{11}$ …… ⓘⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ $b$의 값 구하기 | 20 % |
| ⓘⓘ $a$의 값 구하기 | 20 % |
| ⓘⓘⓘ $\sigma(X)$ 구하기 | 60 % |

## 0435 답 $\frac{1}{4}$

확률의 총합이 1이므로

$a+b+c=1$ …… ㉠

$E(X)=\frac{5}{2}$에서

$0\times a+2\times b+4\times c=\frac{5}{2} \quad \therefore b+2c=\frac{5}{4}$ …… ㉡

$E(X^2)=0^2\times a+2^2\times b+4^2\times c=4b+16c$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=4b+16c-\left(\frac{5}{2}\right)^2$

이때 $V(X)=\frac{7}{4}$이므로

$4b+16c-\frac{25}{4}=\frac{7}{4} \quad \therefore b+4c=2$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$b=\frac{1}{2},\ c=\frac{3}{8}$

이를 ㉠에 대입하면

$a+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}=1 \quad \therefore a=\frac{1}{8}$

$\therefore a+b-c=\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$

## 0436 답 $\frac{7}{8}$

확률의 총합은 1이므로

$a+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+b=1 \quad \therefore a+b=\frac{5}{8}$ …… ㉠

$E(X)=0\times a+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+3\times b=3b+\frac{1}{2}$

$E(X^2)=0^2\times a+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times b=9b+\frac{3}{4}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=9b+\frac{3}{4}-\left(3b+\frac{1}{2}\right)^2=-9b^2+6b+\frac{1}{2}$

$=-9\left(b-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{3}{2}$

따라서 $X$의 분산은 $b=\frac{1}{3}$일 때 최댓값을 갖는다.

$b=\frac{1}{3}$을 ㉠에 대입하면

$a+\frac{1}{3}=\frac{5}{8} \quad \therefore a=\frac{7}{24}$

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{\frac{7}{24}}{\frac{1}{3}}=\frac{7}{8}$

## 0437 답 $\frac{4\sqrt{6}}{15}$

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 각각의 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\times{}_6C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{3},\ P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_6C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{8}{15},$

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_6C_0}{{}_{10}C_2}=\frac{2}{15}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{2}{15}=\frac{4}{5}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{8}{15}+2^2\times\frac{2}{15}=\frac{16}{15}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{16}{15}-\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{32}{75}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{32}{75}}=\frac{4\sqrt{6}}{15}$

## 0438 답 ④

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 각각의 확률은

$P(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$,

$P(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{12}$,

$P(X=2)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{12}+1\times\frac{5}{12}+2\times\frac{1}{2}=\frac{17}{12}$

## 0439 답 $\frac{5}{9}$

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이다.

뽑은 카드에 적힌 수를 각각 $a$, $b$ $(a<b)$라 하면 순서쌍 $(a, b)$에 대하여 두 수 중에서 작은 수가

(i) 1인 경우는 (1, 2), (1, 3), (1, 4)의 3가지이므로

$P(X=1)=\frac{3}{{}_4C_2}=\frac{1}{2}$

(ii) 2인 경우는 (2, 3), (2, 4)의 2가지이므로

$P(X=2)=\frac{2}{{}_4C_2}=\frac{1}{3}$

(iii) 3인 경우는 (3, 4)의 1가지이므로

$P(X=3)=\frac{1}{{}_4C_2}=\frac{1}{6}$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}=\frac{10}{3}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{10}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$

## 0440 답 ②

0, 1, 2의 숫자가 각각 $a$개, $b$개, $c$개씩 적힌 공이 총 6개이므로

$a+b+c=6$ ····· ㉠

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 각각의 확률은

$P(X=0)=\frac{a}{6}$, $P(X=1)=\frac{b}{6}$, $P(X=2)=\frac{c}{6}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{a}{6}$ | $\frac{b}{6}$ | $\frac{c}{6}$ | 1 |

$E(X)=\frac{3}{2}$에서

$0\times\frac{a}{6}+1\times\frac{b}{6}+2\times\frac{c}{6}=\frac{3}{2}$

$\therefore b+2c=9$ ····· ㉡

또 $E(X^2)=0^2\times\frac{a}{6}+1^2\times\frac{b}{6}+2^2\times\frac{c}{6}=\frac{b+4c}{6}$이므로

$V(X)=\frac{7}{12}$에서

$\frac{b+4c}{6}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{7}{12}$

$\therefore b+4c=17$ ····· ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$b=1$, $c=4$

이를 ㉠에 대입하면

$a+1+4=6$ $\therefore a=1$

$\therefore ab+c=1\times1+4=5$

## 0441 답 ②

행운권 1장으로 받을 수 있는 상금을 확률변수 $X$라 할 때, $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 5000 | 10000 | 100000 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{389}{500}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{50}$ | $\frac{1}{500}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=0\times\frac{389}{500}+5000\times\frac{1}{5}+10000\times\frac{1}{50}+100000\times\frac{1}{500}$

$=1400$

따라서 구하는 기댓값은 1400원이다.

## 0442 답 350원

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 할 때, 게임을 한 번 하여 나오는 모든 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

| 500원 | 100원 | 100원 | 받는 금액(원) |
|---|---|---|---|
| H | H | H | 0 |
| H | H | T | 100 |
| H | T | H | 100 |
| H | T | T | 200 |
| T | H | H | 500 |
| T | H | T | 600 |
| T | T | H | 600 |
| T | T | T | 700 |

게임을 한 번 하여 받을 수 있는 금액을 확률변수 $X$라 할 때, $X$가 가질 수 있는 값은 0, 100, 200, 500, 600, 700이고, 각각의 확률은

$P(X=0)=\frac{1}{8}$, $P(X=100)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, $P(X=200)=\frac{1}{8}$,

$P(X=500)=\frac{1}{8}$, $P(X=600)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$, $P(X=700)=\frac{1}{8}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 100 | 200 | 500 | 600 | 700 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$\mathrm{E}(X)$

$=0\times\frac{1}{8}+100\times\frac{1}{4}+200\times\frac{1}{8}+500\times\frac{1}{8}+600\times\frac{1}{4}+700\times\frac{1}{8}$

$=350$

따라서 구하는 기댓값은 350원이다.

## 0443 답 ④

게임을 한 번 하여 받을 수 있는 금액을 확률변수 $X$라 할 때, $X$가 가질 수 있는 값은 4900, $-2800$이고, 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=4900)=\frac{a}{a+3}$, $\mathrm{P}(X=-2800)=\frac{3}{a+3}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 4900 | $-2800$ | 합계 |
|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{a}{a+3}$ | $\frac{3}{a+3}$ | 1 |

이때 $\mathrm{E}(X)=1600$이므로

$4900\times\frac{a}{a+3}+(-2800)\times\frac{3}{a+3}=1600$

$\frac{49a-84}{a+3}=16$, $49a-84=16a+48$

$33a=132$ $\therefore a=4$

## 0444 답 6

$\mathrm{E}(X)=2$이므로 $\mathrm{E}(Y)=8$에서

$\mathrm{E}(aX+b)=8$, $a\mathrm{E}(X)+b=8$

$\therefore 2a+b=8$ …… ㉠

또 $\mathrm{V}(X)=5$이므로 $\mathrm{V}(Y)=45$에서

$\mathrm{V}(aX+b)=45$, $a^2\mathrm{V}(X)=45$

$5a^2=45$, $a^2=9$

$\therefore a=3$ ($\because a>0$)

이를 ㉠에 대입하면

$6+b=8$ $\therefore b=2$

$\therefore ab=3\times2=6$

## 0445 답 ④

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=29-5^2=4$이므로

$\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{4}=2$

$\therefore \sigma(Y)=\sigma(-3X+1)=|-3|\sigma(X)$

$=3\times2=6$

## 0446 답 31

$\mathrm{E}(2X+3)=13$에서

$2\mathrm{E}(X)+3=13$ $\therefore \mathrm{E}(X)=5$ …… ⓘ

$\mathrm{V}(2X+3)=24$에서

$2^2\mathrm{V}(X)=24$ $\therefore \mathrm{V}(X)=6$ …… ⓘⓘ

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=6+5^2=31$ …… ⓘⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ $\mathrm{E}(X)$ 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘ $\mathrm{V}(X)$ 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘⓘ $\mathrm{E}(X^2)$ 구하기 | 40 % |

## 0447 답 ③

$\mathrm{E}(X)=m$, $\sigma(X)=\sigma$이고,

$T=10\times\frac{X-m}{\sigma}+50=\frac{10}{\sigma}X-\frac{10m}{\sigma}+50$이므로

$\mathrm{E}(T)=\mathrm{E}\left(\frac{10}{\sigma}X-\frac{10m}{\sigma}+50\right)=\frac{10}{\sigma}\mathrm{E}(X)-\frac{10m}{\sigma}+50$

$=\frac{10}{\sigma}\times m-\frac{10m}{\sigma}+50=50$

$\sigma(T)=\sigma\left(\frac{10}{\sigma}X-\frac{10m}{\sigma}+50\right)=\left|\frac{10}{\sigma}\right|\sigma(X)$

$=\frac{10}{\sigma}\times\sigma=10$

따라서 확률변수 $T$의 평균과 표준편차의 합은

$\mathrm{E}(T)+\sigma(T)=50+10=60$

## 0448 답 ③

$\mathrm{E}(X)=a$, $\mathrm{E}(X^2)=2a+3$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=2a+3-a^2$

$\therefore \mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(2X-1)=2^2\mathrm{V}(X)$

$=4(2a+3-a^2)=-4a^2+8a+12$

$=-4(a-1)^2+16$ ($-1\le a\le3$)

따라서 $\mathrm{V}(Y)$는 $a=1$일 때 최댓값 16을 가지므로 $\sigma(Y)$의 최댓값은 $\sqrt{16}=4$

## 0449 답 $-2$

$\mathrm{V}(X)=\frac{4}{9}$에서

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(3X+8)=3^2\mathrm{V}(X)=9\times\frac{4}{9}=4$

$\mathrm{E}(Y)=a$라 하면 $\mathrm{E}(Y^2)=4a$이므로

$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{E}(Y^2)-\{\mathrm{E}(Y)\}^2=4a-a^2$

$4a-a^2=4$에서 $a^2-4a+4=0$

$(a-2)^2=0$ $\therefore a=2$

즉, $\mathrm{E}(Y)=2$이므로

$\mathrm{E}(3X+8)=2$, $3\mathrm{E}(X)+8=2$

$\therefore \mathrm{E}(X)=-2$

## 0450 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$a+2a+a=1$, $4a=1$ $\therefore a=\frac{1}{4}$

즉, 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로

$\sigma(4X-3)=|4|\sigma(X)=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

## 0451 답 ②

확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{20}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{10}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{3}{20}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{3}{10}=\frac{7}{2}$

$\therefore E(2X+5)=2E(X)+5=2\times\frac{7}{2}+5=12$

## 0452 답 189

확률의 총합은 1이므로

$\frac{2}{3}+b+b=1,\ 2b=\frac{1}{3}\qquad\therefore b=\frac{1}{6}$

$E(X)=3$에서

$0\times\frac{2}{3}+a\times\frac{1}{6}+2a\times\frac{1}{6}=3,\ \frac{a}{2}=3\qquad\therefore a=6$

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 6 | 12 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X^2)=0^2\times\frac{2}{3}+6^2\times\frac{1}{6}+12^2\times\frac{1}{6}=30$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=30-3^2=21$

$\therefore V(3X-5)=3^2V(X)=9\times21=189$

## 0453 답 $\frac{5}{4}$

$P(X<3)=\frac{9}{10}$에서

$P(X=1)+P(X=2)=\frac{9}{10}$

$a+\frac{3}{10}=\frac{9}{10}\qquad\therefore a=\frac{3}{5}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{3}{5}+\frac{3}{10}+b=1\qquad\therefore b=\frac{1}{10}$ …… ❶

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{3}{2}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{10}=\frac{27}{10}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{27}{10}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{20}$ …… ❷

$\therefore V\left(\frac{1}{a}X+10b\right)=V\left(\frac{5}{3}X+1\right)=\left(\frac{5}{3}\right)^2V(X)$

$=\frac{25}{9}\times\frac{9}{20}=\frac{5}{4}$ …… ❸

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ $a$, $b$의 값 구하기 | 20 % |
| ❷ $V(X)$ 구하기 | 50 % |
| ❸ $V\left(\frac{1}{a}X+10b\right)$ 구하기 | 30 % |

## 0454 답 7

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=0\times\frac{5}{12}+1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{12}=1$

$E(X^2)=0^2\times\frac{5}{12}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{12}=2$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=2-1^2=1$

$E(Y)=-1$에서

$E(aX+b)=-1,\ aE(X)+b=-1$

$\therefore a+b=-1$ …… ㉠

$V(Y)=16$에서

$V(aX+b)=16,\ a^2V(X)=16$

$a^2=16\qquad\therefore a=-4\ (\because a<0)$

이를 ㉠에 대입하면

$-4+b=-1\qquad\therefore b=3$

$\therefore b-a=3-(-4)=7$

## 0455 답 ②

$E(X)=3,\ E(X^2)=10$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=10-3^2=1$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{1}=1$

이때 $Y=4X+1$이므로

$E(Y)=E(4X+1)=4E(X)+1=4\times3+1=13$

$\sigma(Y)=\sigma(4X+1)=|4|\sigma(X)=4\times1=4$

$\therefore E(Y)+\sigma(Y)=13+4=17$

## 0456 답 ⑤

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 각각의 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\times{}_5C_2}{{}_9C_2}=\frac{5}{18}$,

$P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_5C_1}{{}_9C_2}=\frac{5}{9}$,

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_5C_0}{{}_9C_2}=\frac{1}{6}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{5}{18}$ | $\frac{5}{9}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=0\times\frac{5}{18}+1\times\frac{5}{9}+2\times\frac{1}{6}=\frac{8}{9}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{5}{18}+1^2\times\frac{5}{9}+2^2\times\frac{1}{6}=\frac{11}{9}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{11}{9}-\left(\frac{8}{9}\right)^2=\frac{35}{81}$

$\therefore V(Y)=V(9X-28)=9^2V(X)=81\times\frac{35}{81}=35$

## 0457 답 ①

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5, 6이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$

$\therefore E(2X-5)=2E(X)-5=2\times\frac{7}{2}-5=2$

## 0458 답 3

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3이고, 각각의 확률은

$P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_2C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$, $P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_2C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{5}$,

$P(X=3)=\frac{{}_3C_3\times{}_2C_0}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{3}{5}+3\times\frac{1}{10}=\frac{9}{5}$

$E(X^2)=1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{3}{5}+3^2\times\frac{1}{10}=\frac{18}{5}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{18}{5}-\left(\frac{9}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$이므로

$\sigma(5X+6)=|5|\sigma(X)=5\times\frac{3}{5}=3$

## 0459 답 ③

정사면체 모양의 주사위의 네 면에 적힌 숫자의 합은 $1+1+2+4=8$이므로 정사면체 모양의 주사위의 바닥에 놓인 면에 적힌 숫자를 $a$라 하면 나머지 세 면에 적힌 숫자의 합은 $8-a$이다.

$a$의 값이

(i) 1인 경우는 2가지이고 $X=8-1=7$이므로

$P(X=7)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

(ii) 2의 경우는 1가지이고 $X=8-2=6$이므로

$P(X=6)=\frac{1}{4}$

(iii) 4인 경우는 1가지이고 $X=8-4=4$이므로

$P(X=4)=\frac{1}{4}$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 4 | 6 | 7 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=4\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{4}+7\times\frac{1}{2}=6$,

$E(X^2)=4^2\times\frac{1}{4}+6^2\times\frac{1}{4}+7^2\times\frac{1}{2}=\frac{75}{2}$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{75}{2}-6^2=\frac{3}{2}$

$\therefore E(-3X+1)=-3E(X)+1=-3\times6+1=-17$

$V(4X-3)=4^2V(X)=16\times\frac{3}{2}=24$

$\therefore E(-3X+1)+V(4X-3)=-17+24=7$

## 0460 답 ③

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이다.

이차방정식 $x^2+2ax+7a=0$의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=a^2-7a$

이차방정식의 서로 다른 실근의 개수가

(i) 0인 경우는 $\frac{D}{4}<0$이어야 하므로

$a^2-7a<0$, $a(a-7)<0$

$\therefore 0<a<7$

즉, $a$는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6가지이므로

$P(X=0)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

(ii) 1인 경우는 $\frac{D}{4}=0$이어야 하므로

$a^2-7a=0$, $a(a-7)=0$

$\therefore a=7$ ($\because 1\le a\le9$)

즉, $a$는 7의 1가지이므로

$P(X=1)=\frac{1}{9}$

(iii) 2인 경우는 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$a^2-7a>0$, $a(a-7)>0$

$\therefore a>7$ ($\because 1\le a\le9$)

즉, $a$는 8, 9의 2가지이므로

$P(X=2)=\frac{2}{9}$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=0\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{9}+2\times\frac{2}{9}=\frac{5}{9}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{2}{3}+1^2\times\frac{1}{9}+2^2\times\frac{2}{9}=1$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=1-\left(\frac{5}{9}\right)^2=\frac{56}{81}$

따라서 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{56}{81}}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$이므로

$\sigma(9X-1)=|9|\sigma(X)=9\times\frac{2\sqrt{14}}{9}=2\sqrt{14}$

## 0461 답 10

확률변수 $X$가 될 수 있는 값은 $-3$, $-2$, $-1$, 0, 1, 2, 3이다.

순서쌍 $(a, b)$에 대하여 $a-b$의 값이

(i) $-3$인 경우는 $(1, 4)$의 1가지이므로

$$P(X=-3)=\frac{1}{4\times4}=\frac{1}{16}$$

(ii) $-2$인 경우는 $(1, 3)$, $(2, 4)$의 2가지이므로

$$P(X=-2)=\frac{2}{4\times4}=\frac{1}{8}$$

(iii) $-1$인 경우는 $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$의 3가지이므로

$$P(X=-1)=\frac{3}{4\times4}=\frac{3}{16}$$

(iv) 0인 경우는 $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$의 4가지이므로

$$P(X=0)=\frac{4}{4\times4}=\frac{1}{4}$$

(v) 1인 경우는 $(2, 1)$, $(3, 2)$, $(4, 3)$의 3가지이므로

$$P(X=1)=\frac{3}{4\times4}=\frac{3}{16}$$

(vi) 2인 경우는 $(3, 1)$, $(4, 2)$의 2가지이므로

$$P(X=2)=\frac{2}{4\times4}=\frac{1}{8}$$

(vii) 3인 경우는 $(4, 1)$의 1가지이므로

$$P(X=3)=\frac{1}{4\times4}=\frac{1}{16}$$

(i)~(vii)에서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$$E(X)=-3\times\frac{1}{16}+(-2)\times\frac{1}{8}+(-1)\times\frac{3}{16}+0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{16}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{16}$$

$$=0$$

$$E(X^2)=(-3)^2\times\frac{1}{16}+(-2)^2\times\frac{1}{8}+(-1)^2\times\frac{3}{16}+0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{3}{16}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{1}{16}$$

$$=\frac{5}{2}$$

$$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{5}{2}$$

$$\therefore V(Y)=V(2X+1)=2^2V(X)=4\times\frac{5}{2}=10$$

## 0462 답 ②

확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(20, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로 $X$의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{20}C_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{20-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 20)$$

$$\therefore P(X\geq1)=1-P(X=0)$$

$$=1-{}_{20}C_0\left(\frac{1}{5}\right)^{20}$$

$$=1-\left(\frac{1}{5}\right)^{20}$$

## 0463 답 2

확률변수 $X$의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_5C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{5-x}\ (x=0, 1, 2, 3, 4, 5)$$

이때 $P(X=1)=kP(X=3)$에서

$${}_5C_1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4=k\times{}_5C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2=2k\times\left(\frac{1}{3}\right)^2 \qquad \therefore k=2$$

## 0464 답 $\frac{15}{64}$

확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로 $X$의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{10}C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 10)$$

$X^2-10X+21=0$에서 $(X-3)(X-7)=0$

$\therefore X=3$ 또는 $X=7$

$$\therefore P(X^2-10X+21=0)=P(X=3 \text{ 또는 } X=7)$$

$$=P(X=3)+P(X=7)$$

$$={}_{10}C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^7+{}_{10}C_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$=\frac{15}{128}+\frac{15}{128}=\frac{15}{64}$$

## 0465 답 13

확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(6, \frac{1}{10}\right)$을 따르므로 $X$의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_6C_x\left(\frac{1}{10}\right)^x\left(\frac{9}{10}\right)^{6-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 6)$$

$$\therefore P(4<X\leq6)=P(X=5)+P(X=6)$$

$$={}_6C_5\left(\frac{1}{10}\right)^5\left(\frac{9}{10}\right)^1+{}_6C_6\left(\frac{1}{10}\right)^6$$

$$=\frac{54}{10^6}+\frac{1}{10^6}=\frac{11}{2\times10^5}$$

따라서 $a=11$, $b=2$이므로

$a+b=13$

## 0466 답 $\frac{8}{5}$

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나올 확률은

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

즉, 확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(8, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 $X$의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_8C_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{8-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 8)$$

$$\therefore \frac{P(X=3)}{P(X=4)}=\frac{{}_8C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^5}{{}_8C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^4}=\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{4}\times\frac{1}{3}}=\frac{8}{5}$$

## 0467 답 ⑤

실제로 항공기에 탑승하는 사람의 수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 이항분포 $B(27, 0.9)$를 따르므로 $X$의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_{27}C_x0.9^x\times0.1^{27-x}\ (x=0, 1, 2, \cdots, 27)$$

이때 좌석이 부족하려면 $X>25$이어야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X>25)&=P(X=26)+P(X=27)\\&={}_{27}C_{26}0.9^{26}\times0.1^{1}+{}_{27}C_{27}0.9^{27}\\&=2.7\times0.9^{26}+0.9^{27}\\&=3\times0.9^{27}+0.9^{27}\\&=4\times0.9^{27}\\&=4\times0.0581=0.2324\end{aligned}$$

## 0468 답 ①

$E(X)=20$에서

$np=20$ …… ㉠

$V(X)=\frac{50}{3}$에서

$np(1-p)=\frac{50}{3}$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$20(1-p)=\frac{50}{3}$, $1-p=\frac{5}{6}$

$\therefore p=\frac{1}{6}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{6}n=20$ $\therefore n=120$

## 0469 답 $\frac{3}{5}$

$V(X)=24$에서

$100p(1-p)=24$, $25p^2-25p+6=0$

$(5p-2)(5p-3)=0$

$\therefore p=\frac{3}{5}\left(\because p>\frac{1}{2}\right)$

## 0470 답 27

확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(75, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=75\times\frac{1}{5}=15$

$V(X)=75\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=12$

$\therefore E(X)+V(X)=15+12=27$

## 0471 답 5

$$\begin{aligned}V(X)&=10p(1-p)=-10p^2+10p\\&=-10\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}\end{aligned}$$

즉, $X$의 분산은 $p=\frac{1}{2}$일 때 최댓값을 갖는다.

따라서 이항분포 $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 $X$의 평균은

$E(X)=10\times\frac{1}{2}=5$

## 0472 답 18

확률변수 $X$의 확률질량함수는

${}_nC_xp^x(1-p)^{n-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, n)$

$P(X=n-1)=36P(X=n)$에서

${}_nC_{n-1}p^{n-1}(1-p)^1=36{}_nC_np^n$

$n(1-p)=36p$ …… ㉠

이때 $V(X)=9$이므로

$np(1-p)=9$ …… ㉡ …… ❶

㉠을 ㉡에 대입하면

$36p^2=9$, $p^2=\frac{1}{4}$ $\therefore p=\frac{1}{2}$ $(\because p>0)$

이를 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{4}n=9$ $\therefore n=36$ …… ❷

따라서 확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(36, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=36\times\frac{1}{2}=18$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 평균, 분산에 대한 식 세우기 | 40 % |
| ❷ $n$, $p$의 값 구하기 | 30 % |
| ❸ $E(X)$ 구하기 | 30 % |

## 0473 답 3620

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 6의 약수의 눈이 나올 확률은

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

즉, 확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(90, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$E(X)=90\times\frac{2}{3}=60$

$V(X)=90\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=20$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=20+60^2=3620$

## 0474 답 ③

확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$\sigma(X)=\sqrt{100\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}=3$

## 0475 답 ③

한 번의 시행에서 썩은 사과를 꺼낼 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로 $E(X)=16$에서

$n\times\frac{1}{4}=16$ $\therefore n=64$

따라서 확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(64, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$V(X)=64\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=12$

## 0476 답 17

한 개의 주사위를 한 번 던질 때, 3의 눈이 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이다.

즉, 확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(30, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$V(X)=30\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{6}$ …… ❶

한 개의 동전을 한 번 던질 때 앞면이 나올 확률은 $\frac{1}{2}$이다.

즉, 확률변수 $Y$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(Y)=n\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{n}{4}$ …… ⓘⓘ

이때 $\mathrm{V}(Y)>\mathrm{V}(X)$이어야 하므로

$\frac{n}{4}>\frac{25}{6}$ $\therefore n>\frac{50}{3}$

따라서 $n$의 최솟값은 17이다. …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $\mathrm{V}(X)$ 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ $\mathrm{V}(Y)$ 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ $n$의 최솟값 구하기 | 20 % |

## 0477 답 28

한 번의 시행에서 빨간 공을 꺼낼 확률은 $\frac{a}{a+4}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{a}{a+4}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=12$에서

$n\times\frac{a}{a+4}=12$ …… ㉠

$\mathrm{V}(X)=3$에서

$n\times\frac{a}{a+4}\times\frac{4}{a+4}=3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$12\times\frac{4}{a+4}=3$, $a+4=16$

$\therefore a=12$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{3}{4}n=12$ $\therefore n=16$

$\therefore a+n=12+16=28$

## 0478 답 ③

확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(50, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=50\times\frac{4}{5}=40$

$\therefore \mathrm{E}(4X-10)=4\mathrm{E}(X)-10$

$=4\times40-10=150$

## 0479 답 ④

$\mathrm{V}(2X)=40$에서

$2^2\mathrm{V}(X)=40$ $\therefore \mathrm{V}(X)=10$

이때 확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=10$ $\therefore n=45$

## 0480 답 73

한 번의 시행에서 당첨 제비를 뽑을 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

즉, 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(45, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=45\times\frac{1}{3}=15$

$\mathrm{V}(X)=45\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=10$

$\therefore \mathrm{E}(2X+3)=2\mathrm{E}(X)+3=2\times15+3=33$,

$\mathrm{V}(2X+3)=2^2\mathrm{V}(X)=4\times10=40$

$\therefore \mathrm{E}(2X+3)+\mathrm{V}(2X+3)=33+40=73$

## 0481 답 7

확률변수 $X$의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x p^x(1-p)^{10-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 10)$

$4\mathrm{P}(X=4)=5\mathrm{P}(X=5)$에서

${}4_{10}\mathrm{C}_4 p^4(1-p)^6={}5_{10}\mathrm{C}_5 p^5(1-p)^5$

$4(1-p)=5\times\frac{6}{5}p$, $2-2p=3p$

$5p=2$ $\therefore p=\frac{2}{5}$ …… ⓘ

따라서 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(10, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=10\times\frac{2}{5}=4$

$\therefore \mathrm{E}(3X-5)=3\mathrm{E}(X)-5$

$=3\times4-5=7$ …… ⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $p$의 값 구하기 | 50 % |
| ⓘⓘ $\mathrm{E}(3X-5)$ 구하기 | 50 % |

## 0482 답 ④

게임을 24번 할 때 동전의 앞면이 나오는 횟수를 확률변수 $Y$라 하면 뒷면이 나오는 횟수는 $24-Y$이므로

$X=4Y-2(24-Y)=6Y-48$

확률변수 $Y$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(24, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(Y)=24\times\frac{1}{2}=12$

$\therefore \mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(6Y-48)=6\mathrm{E}(Y)-48$

$=6\times12-48=24$

## 0483 답 ⑤

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)+\cdots+\mathrm{P}(X=7)=1$

$k\log_2 2+k\log_2\frac{3}{2}+k\log_2\frac{4}{3}+\cdots+k\log_2\frac{8}{7}=1$

$k\left(\log_2 2+\log_2\frac{3}{2}+\log_2\frac{4}{3}+\cdots+\log_2\frac{8}{7}\right)=1$

$k\log_2\left(2\times\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\cdots\times\frac{8}{7}\right)=1$

$k\log_2 8=1$, $k\log_2 2^3=1$

$3k=1$ $\therefore k=\frac{1}{3}$

## 0484 답 $\frac{2}{5}$

$p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$, $p_5$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 공차를 $d$라 하면

$p_1=p_3-2d$, $p_2=p_3-d$, $p_4=p_3+d$, $p_5=p_3+2d$

확률의 총합은 1이므로

$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1$

$(p_3-2d)+(p_3-d)+p_3+(p_3+d)+(p_3+2d)=1$

$5p_3=1 \quad \therefore p_3=\frac{1}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=5)=p_1+p_5$

$=(p_3-2d)+(p_3+2d)$

$=2p_3=2\times\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

## 0485 답 $\frac{1}{7}$

확률의 총합은 1이므로

$a+b+\frac{4}{7}=1 \quad \therefore a+b=\frac{3}{7} \quad \cdots\cdots$ ㉠

$a$, $b$, $\frac{4}{7}$가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$b^2=\frac{4}{7}a \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $a=\frac{3}{7}-b$를 ㉡에 대입하면

$b^2=\frac{4}{7}\left(\frac{3}{7}-b\right)$

$49b^2+28b-12=0$, $(7b-2)(7b+6)=0$

$\therefore b=\frac{2}{7}$ ($\because b>0$)

이를 ㉠에 대입하면

$a+\frac{2}{7}=\frac{3}{7} \quad \therefore a=\frac{1}{7}$

$\therefore b-a=\frac{2}{7}-\frac{1}{7}=\frac{1}{7}$

## 0486 답 ③

$a=\sum_{x=0}^{8} x\,{}_8\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{8-x}$은 이항분포 $\mathrm{B}\left(8, \frac{1}{2}\right)$을 따르는 확률변수 $X$의 평균이므로

$a=\mathrm{E}(X)=8\times\frac{1}{2}=4$

$b=\sum_{y=0}^{18} y\,{}_{18}\mathrm{C}_y\left(\frac{2}{3}\right)^y\left(\frac{1}{3}\right)^{18-y}$은 이항분포 $\mathrm{B}\left(18, \frac{2}{3}\right)$를 따르는 확률변수 $Y$의 평균이므로

$b=\mathrm{E}(Y)=18\times\frac{2}{3}=12$

$c=\sum_{w=0}^{36} w\,{}_{36}\mathrm{C}_w\left(\frac{1}{6}\right)^w\left(\frac{5}{6}\right)^{36-w}$은 이항분포 $\mathrm{B}\left(36, \frac{1}{6}\right)$을 따르는 확률변수 $W$의 평균이므로

$c=\mathrm{E}(W)=36\times\frac{1}{6}=6$

$\therefore a<c<b$

## 0487 답 206

확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(49, \frac{2}{7}\right)$를 따르므로

$\sum_{x=0}^{49} x^2\,{}_{49}\mathrm{C}_x\left(\frac{2}{7}\right)^x\left(\frac{5}{7}\right)^{49-x}$은 확률변수 $X^2$의 평균이다.

이때 $\mathrm{E}(X)=49\times\frac{2}{7}=14$, $\mathrm{V}(X)=49\times\frac{2}{7}\times\frac{5}{7}=10$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=10+14^2=206$

## 0488 답 395

확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(80, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\sum_{x=0}^{80}(x^2-x)\mathrm{P}(X=x)=\sum_{x=0}^{80}x^2\mathrm{P}(X=x)-\sum_{x=0}^{80}x\mathrm{P}(X=x)$에서

$\sum_{x=0}^{80}x^2\mathrm{P}(X=x)$는 확률변수 $X^2$의 평균, $\sum_{x=0}^{80}x\mathrm{P}(X=x)$는 확률변수 $X$의 평균이다.

이때 $\mathrm{E}(X)=80\times\frac{1}{4}=20$, $\mathrm{V}(X)=80\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=15$이므로

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=15+20^2=415$

$\therefore \sum_{x=0}^{80}(x^2-x)\mathrm{P}(X=x)=\sum_{x=0}^{80}x^2\mathrm{P}(X=x)-\sum_{x=0}^{80}x\mathrm{P}(X=x)$

$=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)$

$=415-20=395$

# AB 유형 점검 88~90쪽

## 0489 답 ⑤

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-2)+\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$

$\left(k+\frac{2}{11}\right)+\left(k+\frac{1}{11}\right)+k+\left(k+\frac{1}{11}\right)+\left(k+\frac{2}{11}\right)=1$

$5k+\frac{6}{11}=1$, $5k=\frac{5}{11} \quad \therefore k=\frac{1}{11}$

## 0490 답 $\frac{3}{4}$

확률의 총합은 1이므로

$a+2b+3b=1 \quad \therefore a+5b=1 \quad \cdots\cdots$ ㉠

$\mathrm{P}(X=1)=\frac{3}{2}\mathrm{P}(X=2)$에서

$a=\frac{3}{2}\times 2b \quad \therefore a=3b \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{3}{8}$, $b=\frac{1}{8}$

$\therefore \mathrm{P}(X=1 \text{ 또는 } X=3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)$

$=a+3b=\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

다른 풀이

$\mathrm{P}(X=1 \text{ 또는 } X=3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=3)$

$=1-\mathrm{P}(X=2)$

$=1-2b=1-2\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

## 0491 답 ②

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이고, 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=0)=\frac{{}_3\mathrm{C}_0\times{}_5\mathrm{C}_4}{{}_8\mathrm{C}_4}=\frac{1}{14}$, $\mathrm{P}(X=1)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_3}{{}_8\mathrm{C}_4}=\frac{3}{7}$

$\mathrm{P}(X=2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_4}=\frac{3}{7}$, $\mathrm{P}(X=3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_4}=\frac{1}{14}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{14}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{1}{14}$ | 1 |

한편 $X^2-2X=0$에서 $X(X-2)=0$

$\therefore X=0$ 또는 $X=2$

$\therefore P(X^2-2X=0)=P(X=0 \text{ 또는 } X=2)$

$=P(X=0)+P(X=2)$

$=\frac{1}{14}+\frac{3}{7}=\frac{1}{2}$

## 0492 답 ⑤

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{2}+a\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}a+\frac{1}{2}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{1}{2}+a^2\times\frac{2}{5}=\frac{2}{5}a^2+\frac{1}{2}$

$\sigma(X)=E(X)$에서 $V(X)=\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)-\{E(X)\}^2=\{E(X)\}^2$

$\therefore E(X^2)-2\{E(X)\}^2=0$

$\frac{2}{5}a^2+\frac{1}{2}-2\left(\frac{2}{5}a+\frac{1}{2}\right)^2=0$

$a^2-10a=0,\ a(a-10)=0$

$\therefore a=10\ (\because a>1)$

$\therefore E(X^2)+E(X)=\left(\frac{2}{5}\times10^2+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{5}\times10+\frac{1}{2}\right)=45$

## 0493 답 ②

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2, 3이다.

(i) 나머지가 0인 경우는 4의 1가지이므로

$P(X=0)=\frac{1}{6}$

(ii) 나머지가 1인 경우는 1, 5의 2가지이므로

$P(X=1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(iii) 나머지가 2인 경우는 2, 6의 2가지이므로

$P(X=2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

(iv) 나머지가 3인 경우는 3의 1가지이므로

$P(X=3)=\frac{1}{6}$

(i)~(iv)에서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{3}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{3}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{19}{6}-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{11}{12}$

## 0494 답 8625원

복권 1장으로 받을 수 있는 당첨금을 확률변수 $X$라 할 때, $X$가 가질 수 있는 값은 0, 5000, 20000, 300000이고, 각각의 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_7C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{7}{24}$,

$P(X=5000)=\frac{{}_3C_1\times{}_7C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{21}{40}$,

$P(X=20000)=\frac{{}_3C_2\times{}_7C_1}{{}_{10}C_3}=\frac{7}{40}$,

$P(X=300000)=\frac{{}_3C_3\times{}_7C_0}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{120}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 5000 | 20000 | 300000 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{7}{24}$ | $\frac{21}{40}$ | $\frac{7}{40}$ | $\frac{1}{120}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=0\times\frac{7}{24}+5000\times\frac{21}{40}+20000\times\frac{7}{40}+300000\times\frac{1}{120}$

$=8625$

따라서 구하는 최소 판매 금액은 8625원이다.

## 0495 답 48800

$E(X)=30000,\ \sigma(X)=8000$에서

$E(Y)=E\left(\frac{6}{5}X+3200\right)=\frac{6}{5}E(X)+3200$

$=\frac{6}{5}\times30000+3200=39200$

$\sigma(Y)=\sigma\left(\frac{6}{5}X+3200\right)=\left|\frac{6}{5}\right|\sigma(X)$

$=\frac{6}{5}\times8000=9600$

$\therefore E(Y)+\sigma(Y)=39200+9600=48800$

## 0496 답 ⑤

확률의 총합은 1이므로

$\frac{{}_4C_1}{k}+\frac{{}_4C_2}{k}+\frac{{}_4C_3}{k}+\frac{{}_4C_4}{k}=1$

$\frac{4}{k}+\frac{6}{k}+\frac{4}{k}+\frac{1}{k}=1,\ \frac{15}{k}=1 \qquad \therefore k=15$

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=2\times\frac{4}{15}+4\times\frac{2}{5}+8\times\frac{4}{15}+16\times\frac{1}{15}=\frac{16}{3}$

$\therefore E(3X+1)=3E(X)+1=3\times\frac{16}{3}+1=17$

## 0497 답 6

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이다.

택한 수를 각각 $a$, $b\,(a<b)$라 하면 순서쌍 $(a, b)$에 대하여 두 수의 차가

(i) 1인 경우는 (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)의 4가지이므로

$P(X=1)=\frac{4}{{}_5C_2}=\frac{2}{5}$

(ii) 2인 경우는 (1, 3), (2, 4), (3, 5)의 3가지이므로

$P(X=2)=\frac{3}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

(iii) 3인 경우는 (1, 4), (2, 5)의 2가지이므로

$P(X=3)=\frac{2}{{}_5C_2}=\frac{1}{5}$

(iv) 4인 경우는 (1, 5)의 1가지이므로

$P(X=4)=\frac{1}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

(i)~(iv)에서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{10}=2$

$E(X^2)=1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{3}{10}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{1}{10}=5$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=5-2^2=1$

따라서 $\sigma(X)=1$이므로

$\sigma(6X-1)=|6|\sigma(X)=6\times1=6$

## 0498 답 6

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 각각의 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_3C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{5}$, $P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1}{{}_6C_2}=\frac{3}{5}$,

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_3C_0}{{}_6C_2}=\frac{1}{5}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{1}{5}=1$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{1}{5}=\frac{7}{5}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{7}{5}-1^2=\frac{2}{5}$

이때 $E(Y)=4$에서

$E(aX+b)=4$, $aE(X)+b=4$ $\therefore a+b=4$ ····· ㉠

또 $V(Y)=10$에서

$V(aX+b)=10$, $a^2V(X)=10$

$\frac{2}{5}a^2=10$, $a^2=25$ $\therefore a=5$ ($\because a>0$)

이를 ㉠에 대입하면

$5+b=4$ $\therefore b=-1$

$\therefore a-b=5-(-1)=6$

## 0499 답 ③

확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(4, \frac{3}{5}\right)$을 따르므로 $X$의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_4C_x\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{2}{5}\right)^{4-x}$ ($x=0, 1, 2, 3, 4$)

$\therefore P(X\ge3)=P(X=3)+P(X=4)$

$={}_4C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{3}{5}\right)^4$

$=\frac{216}{625}+\frac{81}{625}=\frac{297}{625}$

## 0500 답 ①

확률변수 $X$는 이항분포 $B(60, p)$를 따르므로 $X$의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{60}C_xp^x(1-p)^{60-x}$ ($x=0, 1, 2, \cdots, 60$)

$\therefore \frac{P(X=4)}{P(X=3)}=\frac{{}_{60}C_4p^4(1-p)^{56}}{{}_{60}C_3p^3(1-p)^{57}}=\frac{57p}{4(1-p)}$

이때 $\frac{P(X=4)}{P(X=3)}=\frac{19}{2}$에서

$\frac{57p}{4(1-p)}=\frac{19}{2}$

$3p=2-2p$, $5p=2$

$\therefore p=\frac{2}{5}$

## 0501 답 70

$E(X)=8$에서

$32p=8$ $\therefore p=\frac{1}{4}$

즉, 확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(32, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$V(X)=32\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=6$

따라서 $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=6+8^2=70$

## 0502 답 ⑤

나오는 두 눈의 수의 곱이 홀수가 되려면 나오는 두 눈의 수가 모두 홀수이어야 하므로 그 확률은

$\frac{3}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{4}$

즉, 확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(80, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=80\times\frac{1}{4}=20$

$V(X)=80\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=15$

$\therefore E(X)+V(X)=20+15=35$

## 0503 답 ④

$E(3X-1)=17$에서

$3E(X)-1=17$ $\therefore E(X)=6$

이때 확률변수 $X$가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$n\times\frac{1}{3}=6$ $\therefore n=18$

따라서 확률변수 $X$가 이항분포 $B\left(18, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$V(X)=18\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=4$

## 0504 답 80

주머니에 들어 있는 검은 구슬의 개수를 $x$라 하면 한 번의 시행에서 검은 구슬을 꺼낼 확률은 $\frac{x}{12}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(36, \frac{x}{12}\right)$를 따른다.

$\mathrm{E}(X)=6$에서

$36\times\frac{x}{12}=6 \quad \therefore x=2$

따라서 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(36, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$\mathrm{V}(X)=36\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=5$

$\therefore \mathrm{V}(4X+1)=4^2\mathrm{V}(X)=16\times5=80$

## 0505 답 1200원

게임을 한 번 하여 받을 수 있는 금액을 확률변수 $X$라 할 때, $X$가 가질 수 있는 값은 1000, 1200, 2400이고, 각각의 확률은

$\mathrm{P}(X=1000)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(X=1200)=\frac{{}_6\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{5}{12}$,

$\mathrm{P}(X=2400)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{1}{12}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1000 | 1200 | 2400 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | 1 |

…… ⓘ

확률변수 $X$에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1000\times\frac{1}{2}+1200\times\frac{5}{12}+2400\times\frac{1}{12}=1200$

따라서 구하는 기댓값은 1200원이다. …… ⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ 게임을 한 번 하여 받을 수 있는 금액을 $X$로 놓고 $X$의 확률분포를 표로 나타내기 | 50 % |
| ⓘⓘ 게임을 한 번 하여 받을 수 있는 금액의 기댓값 구하기 | 50 % |

## 0506 답 $\frac{2}{5}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{10}+a+\frac{3}{10}+\frac{1}{5}a=1$, $\frac{6}{5}a=\frac{3}{5} \quad \therefore a=\frac{1}{2}$ …… ⓘ

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{1}{10}=\frac{12}{5}$

$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{10}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{3}{10}+4^2\times\frac{1}{10}=\frac{32}{5}$

$\therefore \mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{32}{5}-\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$ …… ⓘⓘ

$\therefore \sigma(aX+2)=\sigma\left(\frac{1}{2}X+2\right)=\left|\frac{1}{2}\right|\sigma(X)$

$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $a$의 값 구하기 | 20 % |
| ⓘⓘ $\sigma(X)$ 구하기 | 50 % |
| ⓘⓘⓘ $\sigma(aX+2)$ 구하기 | 30 % |

## 0507 답 $\frac{1}{3}$

$\mathrm{E}(X)=3$에서 $np=3$ …… ㉠

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=11-3^2=2$이므로

$np(1-p)=2$ …… ㉡ …… ⓘ

㉠을 ㉡에 대입하면

$3(1-p)=2$, $1-p=\frac{2}{3} \quad \therefore p=\frac{1}{3}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{3}n=3 \quad \therefore n=9$ …… ⓘⓘ

따라서 확률변수 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(9, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로 $X$의 확률질량함수는

$\mathrm{P}(X=x)={}_9\mathrm{C}_x\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{9-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 9)$

$\therefore \frac{\mathrm{P}(X=6)}{\mathrm{P}(X=5)}=\frac{{}_9\mathrm{C}_6\left(\frac{1}{3}\right)^6\left(\frac{2}{3}\right)^3}{{}_9\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^4}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{6}{4}\times\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ 평균, 분산에 대한 식 세우기 | 30 % |
| ⓘⓘ $n$, $p$의 값 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘⓘ $\frac{\mathrm{P}(X=6)}{\mathrm{P}(X=5)}$의 값 구하기 | 40 % |

## 실력 향상 91쪽

## 0508 답 $\frac{7}{15}$

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6이다.

(i) $X=4$일 때

3회까지 빨간색 색연필과 파란색 색연필을 각각 2개, 1개씩 꺼내고, 4회에 파란색 색연필을 꺼내는 경우이므로 빨간색 연필을 꺼내는 경우를 빨, 파란색 연필을 꺼내는 경우를 파라 하고, 색연필을 꺼낸 순서대로 순서쌍으로 나타내면

(파, 빨, 빨, 파), (빨, 파, 빨, 파), (빨, 빨, 파, 파)

$\therefore \mathrm{P}(X=4)=\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}$

$+\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}$

$=\frac{1}{5}$

(ii) $X=5$일 때

4회까지 빨간색 색연필과 파란색 색연필을 각각 3개, 1개씩 꺼내고, 5회에 파란색 색연필을 꺼내는 경우이므로 빨간색 연필을 꺼내는 경우를 빨, 파란색 연필을 꺼내는 경우를 파라 하고, 색연필을 꺼낸 순서대로 순서쌍으로 나타내면

(파, 빨, 빨, 빨, 파), (빨, 파, 빨, 빨, 파),

(빨, 빨, 파, 빨, 파), (빨, 빨, 빨, 파, 파)

$$\therefore \mathrm{P}(X=5)=\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$$
$$+\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{4}{15}$$

$$\therefore \mathrm{P}(4\le X\le 5)=\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)$$
$$=\frac{1}{5}+\frac{4}{15}=\frac{7}{15}$$

참고 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

## 0509 답 28

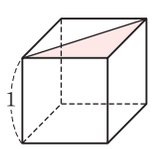
$$\mathrm{E}(Y)$$
$$=\mathrm{P}(Y=1)+2\mathrm{P}(Y=2)+3\mathrm{P}(Y=3)+4\mathrm{P}(Y=4)+5\mathrm{P}(Y=5)$$
$$=\left\{\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=1)+\frac{1}{10}\right\}+2\left\{\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=2)+\frac{1}{10}\right\}$$
$$+3\left\{\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=3)+\frac{1}{10}\right\}+4\left\{\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=4)+\frac{1}{10}\right\}$$
$$+5\left\{\frac{1}{2}\mathrm{P}(X=5)+\frac{1}{10}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\{\mathrm{P}(X=1)+2\mathrm{P}(X=2)+3\mathrm{P}(X=3)+4\mathrm{P}(X=4)$$
$$+5\mathrm{P}(X=5)\}+\frac{1}{10}(1+2+3+4+5)$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{E}(X)+\frac{3}{2}$$
$$=\frac{1}{2}\times 4+\frac{3}{2}\ (\because \mathrm{E}(X)=4)$$
$$=\frac{7}{2}$$

따라서 $a=\frac{7}{2}$이므로

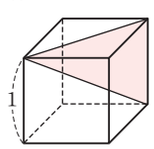
$$8a=8\times\frac{7}{2}=28$$

## 0510 답 3

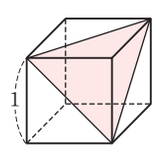
8개의 꼭짓점 중에서 3개를 택하여 만들 수 있는 서로 다른 삼각형의 종류는 다음 그림과 같다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

(i) [그림 1]과 같은 삼각형인 경우

삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 1\times 1=\frac{1}{2}$이므로 그 제곱은

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

이때 정사각형인 한 면에 4개의 삼각형이 존재하므로 그 개수는

$$4\times 6=24$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(X=\frac{1}{4}\right)=\frac{24}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{3}{7}$$

(ii) [그림 2]와 같은 삼각형인 경우

삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 1=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 그 제곱은

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

이때 정사각형인 한 면에 2개의 대각선이 있고, 하나의 대각선에 대하여 2개의 삼각형이 존재하므로 그 개수는

$$2\times 2\times 6=24$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(X=\frac{1}{2}\right)=\frac{24}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{3}{7}$$

(iii) [그림 3]과 같은 삼각형인 경우

삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2=\frac{\sqrt{3}}{2}$이므로 그 제곱은

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

이때 정사각형인 한 면에 2개의 대각선이 있고, 하나의 대각선에 대하여 2개의 삼각형이 존재한다. 그런데 세 변의 길이가 모두 면의 대각선으로 3번 중복되므로 그 개수는

$$2\times 2\times 6\div 3=8$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(X=\frac{3}{4}\right)=\frac{8}{{}_8\mathrm{C}_3}=\frac{1}{7}$$

(i), (ii), (iii)에서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{4}$ | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=\frac{1}{4}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$$

$$\therefore \mathrm{E}(7X)=7\mathrm{E}(X)=7\times\frac{3}{7}=3$$

## 0511 답 ③

주사위를 15번 던져 2 이하의 눈의 수가 나오는 횟수를 확률변수 $Y$라 하면 이동된 점 P의 좌표는

$$(3Y,\ 15-Y)$$

점 P와 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|9Y+4(15-Y)|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|5Y+60|}{5}$$
$$=Y+12\ (\because Y\ge 0)$$

즉, $X=Y+12$이고 확률변수 $Y$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(Y)=15\times\frac{1}{3}=5$$

$$\therefore \mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(Y+12)=\mathrm{E}(Y)+12$$
$$=5+12=17$$

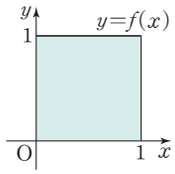
# 06 / 연속확률변수와 정규분포

## A 개념 확인 92~95쪽

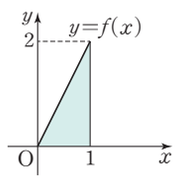
**0512** 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

**0513** 답 ㄱ, ㄴ

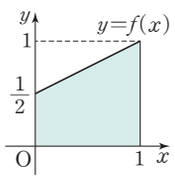
ㄱ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는
$1\times1=1$



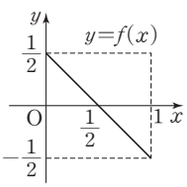

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\frac{1}{2}\times1\times2=1$




ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+1\right)\times1=\frac{3}{4}$



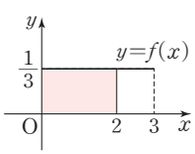

ㄹ. $\frac{1}{2}<x\le1$에서 $f(x)<0$




따라서 보기에서 확률밀도함수가 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ이다.

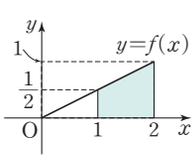
**0514** 답 $\frac{2}{3}$

구하는 확률은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로
$P(X\le2)=2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$




**0515** 답 $\frac{3}{4}$

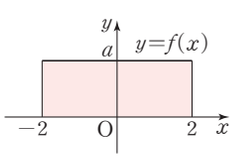
구하는 확률은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로
$P(1\le X\le2)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+1\right)\times1=\frac{3}{4}$




**0516** 답 $\frac{1}{4}$

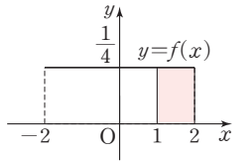
$f(x)\ge0$이므로 $a\ge0$
함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=-2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$4a=1 \quad \therefore a=\frac{1}{4}$




**0517** 답 $\frac{1}{4}$

구하는 확률은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로
$P(X\ge1)=1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$




**0518** 답 $N(4, 2^2)$

**0519** 답 $N(12, 4^2)$

**0520** 답 ㄱ, ㄴ

ㄷ. $x=2$에서 최댓값을 갖는다.
따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

**0521** 답 $a$

$P(m-\sigma\le X\le m)=P(m\le X\le m+\sigma)=a$

**0522** 답 $a+0.5$

$P(X\le m+\sigma)=P(m\le X\le m+\sigma)+P(X\le m)$
$=a+0.5$

**0523** 답 $0.5-b$

$P(X\ge m+2\sigma)=P(X\ge m)-P(m\le X\le m+2\sigma)$
$=0.5-b$

**0524** 답 $b-a$

$P(m+\sigma\le X\le m+2\sigma)$
$=P(m\le X\le m+2\sigma)-P(m\le X\le m+\sigma)$
$=b-a$

**0525** 답 $2b$

$P(m-2\sigma\le X\le m+2\sigma)$
$=P(m-2\sigma\le X\le m)+P(m\le X\le m+2\sigma)$
$=2P(m\le X\le m+2\sigma)$
$=2b$

**0526** 답 0.3085

$P(Z\ge0.5)=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le0.5)$
$=0.5-0.1915$
$=0.3085$

**0527** 답 0.9772

$P(Z\le2)=P(Z\le0)+P(0\le Z\le2)$
$=0.5+0.4772$
$=0.9772$

**0528** 답 0.8413

$P(Z\ge-1)=P(Z\le1)$
$=P(Z\le0)+P(0\le Z\le1)$
$=0.5+0.3413$
$=0.8413$

**0529** 답 **0.0668**

$P(Z\le -1.5)=P(Z\ge 1.5)$
$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1.5)$
$=0.5-0.4332$
$=0.0668$

**0530** 답 **0.1574**

$P(1\le Z\le 3)=P(0\le Z\le 3)-P(0\le Z\le 1)$
$=0.4987-0.3413$
$=0.1574$

**0531** 답 **0.044**

$P(-2\le Z\le -1.5)=P(1.5\le Z\le 2)$
$=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1.5)$
$=0.4772-0.4332$
$=0.044$

**0532** 답 **0.383**

$P(-0.5\le Z\le 0.5)=P(-0.5\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 0.5)$
$=2P(0\le Z\le 0.5)$
$=2\times 0.1915$
$=0.383$

**0533** 답 **0.8351**

$P(-1\le Z\le 2.5)=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2.5)$
$=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2.5)$
$=0.3413+0.4938$
$=0.8351$

**0534** 답 **2**

**0535** 답 **3**

$P(Z\le k)=0.9987$에서
$P(Z\le 0)+P(0\le Z\le k)=0.9987$
$0.5+P(0\le Z\le k)=0.9987$
$\therefore P(0\le Z\le k)=0.4987$
$\therefore k=3$

**0536** 답 **1**

$P(Z\ge k)=0.1587$에서
$P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le k)=0.1587$
$0.5-P(0\le Z\le k)=0.1587$
$\therefore P(0\le Z\le k)=0.3413$
$\therefore k=1$

**0537** 답 **3**

$P(-k\le Z\le k)=0.9974$에서
$P(-k\le Z\le 0)+P(0\le Z\le k)=0.9974$
$2P(0\le Z\le k)=0.9974$
$\therefore P(0\le Z\le k)=0.4987$
$\therefore k=3$

**0538** 답 $Z=\dfrac{X-16}{4}$

**0539** 답 $Z=\dfrac{X-120}{9}$

**0540** 답 $Z=\dfrac{X+4}{5}$

**0541** 답 $Z=\dfrac{X-10}{2}$

**0542** 답 **0.8185**

$P(6\le X\le 12)=P\left(\dfrac{6-10}{2}\le Z\le \dfrac{12-10}{2}\right)$
$=P(-2\le Z\le 1)$
$=P(-2\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1)$
$=P(0\le Z\le 2)+P(0\le Z\le 1)$
$=0.4772+0.3413$
$=0.8185$

**0543** 답 **$N(30,\ 5^2)$**

$E(X)=180\times\dfrac{1}{6}=30$, $V(X)=180\times\dfrac{1}{6}\times\dfrac{5}{6}=25=5^2$
이때 시행횟수 $n=180$은 충분히 크므로 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(30,\ 5^2)$을 따른다.

**0544** 답 **$N(200,\ 10^2)$**

$E(X)=400\times\dfrac{1}{2}=200$, $V(X)=400\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=100=10^2$
이때 시행횟수 $n=400$은 충분히 크므로 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(200,\ 10^2)$을 따른다.

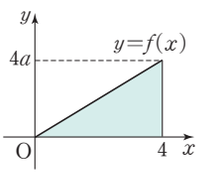
**0545** 답 **$N(360,\ 12^2)$**

$E(X)=600\times\dfrac{3}{5}=360$, $V(X)=600\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=144=12^2$
이때 시행횟수 $n=600$은 충분히 크므로 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(360,\ 12^2)$을 따른다.

## B 유형 완성 96~105쪽

**0546** 답 $\dfrac{1}{8}$

$f(x)\ge 0$이므로 $a\ge 0$
함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로
$\dfrac{1}{2}\times 4\times 4a=1$, $8a=1$
$\therefore a=\dfrac{1}{8}$



## 0547 답 ⑤

① $0 \le x < 1$에서 $f(x) < 0$이므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

② 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이가 $2 \times 1 = 2$이므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

③ $0 \le x \le 2$에서 $f(x) < 0$이므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

④ $0 < x < 2$에서 $f(x) < 0$이므로 확률밀도함수의 그래프가 될 수 없다.

⑤ $0 \le x \le 2$에서 $f(x) \ge 0$이고 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$이므로 확률밀도함수의 그래프이다.

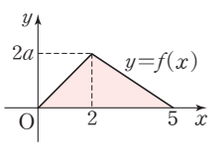
따라서 확률밀도함수 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 있는 것은 ⑤이다.

## 0548 답 $\frac{1}{5}$

$f(x) \ge 0$이므로 $a \ge 0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2} \times 5 \times 2a = 1$, $5a = 1$ $\therefore a = \frac{1}{5}$




## 0549 답 ⑤

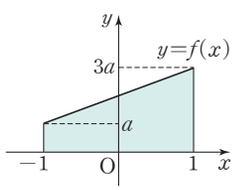
$f(x) \ge 0$이므로 $a \ge 0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2} \times (a+3a) \times 2 = 1$, $4a = 1$

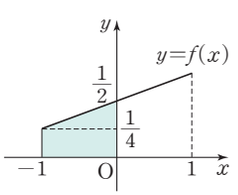
$\therefore a = \frac{1}{4}$

$\therefore f(x) = \frac{1}{4}(x+2)\ (-1 \le x \le 1)$




따라서 구하는 확률은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=-1$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(X \le 0) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \times 1 = \frac{3}{8}$



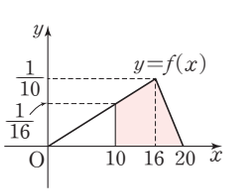

## 0550 답 $\frac{11}{16}$

구하는 확률은 $\mathrm{P}(X \ge 10)$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=10$, $x=20$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(X \ge 10)$

$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{10}\right) \times 6 + \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{10}$

$= \frac{11}{16}$




다른 풀이

$\mathrm{P}(X \ge 10) = 1 - \mathrm{P}(0 \le X \le 10)$

$= 1 - \frac{1}{2} \times 10 \times \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$

## 0551 답 5

함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2} \times a \times \frac{4}{5} = 1$, $\frac{2}{5}a = 1$

$\therefore a = \frac{5}{2}$

한편 $\mathrm{P}(0 \le X \le b)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로 $\mathrm{P}(0 \le X \le b) = \frac{4}{5}$에서

$\frac{1}{2} \times b \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5}$, $\frac{2}{5}b = \frac{4}{5}$ $\therefore b = 2$

$\therefore ab = \frac{5}{2} \times 2 = 5$

## 0552 답 $\frac{1}{4}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=-2$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2} \times 1 \times k + \frac{1}{2} \times 4 \times k = 1$, $\frac{5}{2}k = 1$ $\therefore k = \frac{2}{5}$ …… ❶

$-1 \le x \le 3$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(-1, 0)$, $\left(3, \frac{2}{5}\right)$를 지나는 직선이므로

$f(x) = \frac{\frac{2}{5} - 0}{3 - (-1)}\{x - (-1)\}$

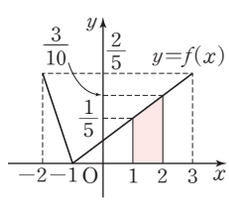
$\therefore f(x) = \frac{1}{10}(x+1)\ (-1 \le x \le 3)$

$\therefore f(1) = \frac{1}{5}$, $f(2) = \frac{3}{10}$ …… ❷

따라서 구하는 확률은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(1 \le X \le 2) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5} + \frac{3}{10}\right) \times 1$

$= \frac{1}{4}$




…… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ $k$의 값 구하기 | 30 % |
| ❷ $f(1)$, $f(2)$의 값 구하기 | 30 % |
| ❸ $\mathrm{P}(1 \le X \le 2)$ 구하기 | 40 % |

## 0553 답 ①

$\mathrm{P}(0 \le X \le 3) = 1$이므로

$3a = 1$ $\therefore a = \frac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{P}(x \le X \le 3) = \frac{1}{3}(3-x)\ (0 \le x \le 3)$에서

$\mathrm{P}\left(0 \le X \le \frac{1}{3}\right) = \mathrm{P}(0 \le X \le 3) - \mathrm{P}\left(\frac{1}{3} \le X \le 3\right)$

$= 1 - \frac{1}{3}\left(3 - \frac{1}{3}\right)$

$= 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$

## 0554 답 ㄱ

ㄱ. 확률변수 $X_1$의 정규분포곡선의 대칭축이 확률변수 $X_2$의 정규분포곡선의 대칭축보다 왼쪽에 있으므로
$\mathrm{E}(X_1)<\mathrm{E}(X_2)$

ㄴ. 확률변수 $X_1$의 정규분포곡선의 가운데 부분의 높이가 확률변수 $X_2$의 정규분포곡선의 가운데 부분의 높이보다 낮으므로
$\sigma(X_1)>\sigma(X_2)$

ㄷ. $\mathrm{E}(X_1)<a$이므로 $\mathrm{P}(X_1\geq a)<0.5$
$\mathrm{E}(X_2)>a$이므로 $\mathrm{P}(X_2\geq a)>0.5$
$\therefore \mathrm{P}(X_1\geq a)<\mathrm{P}(X_2\geq a)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

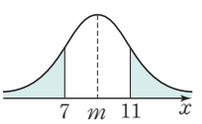
## 0555 답 ④

평균이 클수록 정규분포곡선의 대칭축은 오른쪽에 있고, 표준편차가 클수록 정규분포곡선의 가운데 부분의 높이는 낮아지고 양쪽으로 넓게 퍼진 모양이 된다.

학교 B가 학교 A보다 학생들의 몸무게의 평균과 표준편차가 더 크므로 두 학교에 대한 정규분포곡선으로 알맞은 것은 ④이다.

## 0556 답 18

정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 $\mathrm{P}(X\leq 7)=\mathrm{P}(X\geq 11)$이므로




$m=\dfrac{7+11}{2}=9$ …… ⓘ

또 $\mathrm{V}\left(\dfrac{1}{3}X\right)=9$에서 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\mathrm{V}(X)=9$

$\therefore \mathrm{V}(X)=81$

즉, $\sigma^2=81$이므로 $\sigma=9$ ($\because \sigma>0$) …… ⓘⓘ

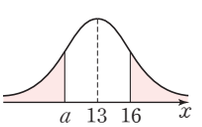
$\therefore m+\sigma=9+9=18$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $m$의 값 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ $\sigma$의 값 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ $m+\sigma$의 값 구하기 | 20 % |

## 0557 답 10

$\mathrm{P}(X\leq a)+\mathrm{P}(X\leq 16)=1$에서

$\mathrm{P}(X\leq a)=1-\mathrm{P}(X\leq 16)$
$=\mathrm{P}(X\geq 16)$



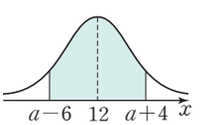

이때 정규분포곡선은 직선 $x=13$에 대하여 대칭이므로

$\dfrac{a+16}{2}=13$, $a+16=26$ $\therefore a=10$

## 0558 답 ③

확률변수 $X$의 평균이 12이므로 $X$의 확률밀도함수는 $x=12$에서 최댓값을 갖고, 정규분포곡선은 직선 $x=12$에 대하여 대칭이다.

따라서 $\mathrm{P}(a-6\leq X\leq a+4)$가 최대가 되려면 $a-6$, $a+4$의 평균이 12이어야 하므로




$\dfrac{(a-6)+(a+4)}{2}=12$, $a-1=12$

$\therefore a=13$

## 0559 답 0.84

$m=45$, $\sigma=3$이므로

$\mathrm{P}(36\leq X\leq 48)=\mathrm{P}(45-9\leq X\leq 45+3)$
$=\mathrm{P}(m-3\sigma\leq X\leq m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(m-3\sigma\leq X\leq m)+\mathrm{P}(m\leq X\leq m+\sigma)$
$=\mathrm{P}(m\leq X\leq m+3\sigma)+\mathrm{P}(m\leq X\leq m+\sigma)$
$=0.4987+0.3413=0.84$

## 0560 답 ③

$\mathrm{P}(m-\sigma\leq X\leq m+\sigma)=a$에서

$\mathrm{P}(m-\sigma\leq X\leq m)+\mathrm{P}(m\leq X\leq m+\sigma)=a$

$2\mathrm{P}(m\leq X\leq m+\sigma)=a$

$\therefore \mathrm{P}(m\leq X\leq m+\sigma)=\dfrac{a}{2}$

$\mathrm{P}(m-2\sigma\leq X\leq m+2\sigma)=b$에서

$\mathrm{P}(m-2\sigma\leq X\leq m)+\mathrm{P}(m\leq X\leq m+2\sigma)=b$

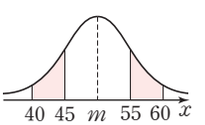
$2\mathrm{P}(m\leq X\leq m+2\sigma)=b$

$\therefore \mathrm{P}(m\leq X\leq m+2\sigma)=\dfrac{b}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(m-2\sigma\leq X\leq m-\sigma)$
$=\mathrm{P}(m-2\sigma\leq X\leq m)-\mathrm{P}(m-\sigma\leq X\leq m)$
$=\mathrm{P}(m\leq X\leq m+2\sigma)-\mathrm{P}(m\leq X\leq m+\sigma)$
$=\dfrac{b}{2}-\dfrac{a}{2}=\dfrac{b-a}{2}$

## 0561 답 0.3641

정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 $\mathrm{P}(40\leq X\leq 45)=\mathrm{P}(55\leq X\leq 60)$이므로




$m=\dfrac{45+55}{2}=50$

$\therefore \mathrm{P}(X\leq 40)+\mathrm{P}(50\leq X\leq 55)=\mathrm{P}(X\leq 40)+\mathrm{P}(45\leq X\leq 50)$
$=\mathrm{P}(X\leq 50)-\mathrm{P}(40\leq X\leq 45)$
$=0.5-0.1359=0.3641$

## 0562 답 ⑤

$\mathrm{P}(X\geq a)=0.1587$에서

$\mathrm{P}(X\geq m)-\mathrm{P}(m\leq X\leq a)=0.1587$

$0.5-\mathrm{P}(m\leq X\leq a)=0.1587$

$\therefore \mathrm{P}(m\leq X\leq a)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(m\leq X\leq m+\sigma)=0.3413$이므로

$a=m+\sigma$

따라서 $m=15$, $\sigma=2$이므로

$a=15+2=17$

## 0563 답 0.5

$\mathrm{P}(m-k\sigma\leq X\leq m+k\sigma)=0.383$에서

$\mathrm{P}(m-k\sigma\leq X\leq m)+\mathrm{P}(m\leq X\leq m+k\sigma)=0.383$

$2\mathrm{P}(m\leq X\leq m+k\sigma)=0.383$

$\therefore \mathrm{P}(m\leq X\leq m+k\sigma)=0.1915$

이때 $\mathrm{P}(m\leq X\leq m+0.5\sigma)=0.1915$이므로

$k=0.5$

## 0564 답 57

$P(X\le a)=0.9332$에서

$P(X\le m)+P(m\le X\le a)=0.9332$

$0.5+P(m\le X\le a)=0.9332$

$\therefore P(m\le X\le a)=0.4332$

이때 $P(m\le X\le m+1.5\sigma)=0.4332$이므로

$a=m+1.5\sigma$

따라서 $m=48$, $\sigma=6$이므로

$a=48+1.5\times6=57$

## 0565 답 4

두 확률변수 $X$, $Y$가 각각 정규분포 $N(7, 3^2)$, $N(0, 4^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-7}{3}$, $Z_Y=\frac{Y}{4}$로 놓으면 두 확률변수 $Z_X$, $Z_Y$는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\ge4k)=P(Y\ge3k)$에서

$P\left(Z_X\ge\frac{4k-7}{3}\right)=P\left(Z_Y\ge\frac{3k}{4}\right)$

따라서 $\frac{4k-7}{3}=\frac{3k}{4}$이므로

$16k-28=9k$, $7k=28$ $\therefore k=4$

## 0566 답 ②

확률변수 $X$가 정규분포 $N(25, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-25}{4}$로 놓으면 두 확률변수 $Z$, $Y$는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\le a)=P(Y\ge a)$에서

$P\left(Z\le\frac{a-25}{4}\right)=P(Y\ge a)$

$P\left(Z\le\frac{a-25}{4}\right)=P(Y\le-a)$

따라서 $\frac{a-25}{4}=-a$이므로

$a-25=-4a$, $5a=25$ $\therefore a=5$

## 0567 답 16

두 확률변수 $X$, $Y$가 각각 정규분포 $N(18, 6^2)$, $N(m, 4^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-18}{6}$, $Z_Y=\frac{Y-m}{4}$으로 놓으면 두 확률변수 $Z_X$, $Z_Y$는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(12\le Y\le2m-12)$에서

$2m-12\ge12$ $\therefore m\ge12$

$2P(18\le X\le24)=P(12\le Y\le2m-12)$에서

$2P\left(\frac{18-18}{6}\le Z_X\le\frac{24-18}{6}\right)=P\left(\frac{12-m}{4}\le Z_Y\le\frac{2m-12-m}{4}\right)$

$2P(0\le Z_X\le1)=P\left(-\frac{m-12}{4}\le Z_Y\le\frac{m-12}{4}\right)$ ($\because m\ge12$)

$2P(0\le Z_X\le1)=P\left(-\frac{m-12}{4}\le Z_Y\le0\right)+P\left(0\le Z_Y\le\frac{m-12}{4}\right)$

$2P(0\le Z_X\le1)=2P\left(0\le Z_Y\le\frac{m-12}{4}\right)$

$\therefore P(0\le Z_X\le1)=P\left(0\le Z_Y\le\frac{m-12}{4}\right)$

따라서 $1=\frac{m-12}{4}$이므로

$m-12=4$ $\therefore m=16$

## 0568 답 0.8185

확률변수 $X$가 정규분포 $N(60, 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-60}{10}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(50\le X\le80)&=P\left(\frac{50-60}{10}\le Z\le\frac{80-60}{10}\right)\\&=P(-1\le Z\le2)\\&=P(-1\le Z\le0)+P(0\le Z\le2)\\&=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le2)\\&=0.3413+0.4772\\&=0.8185\end{aligned}$$

## 0569 답 ⑤

확률변수 $X$가 정규분포 $N(32, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-32}{4}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

ㄱ. $$\begin{aligned}P(20\le X\le32)&=P\left(\frac{20-32}{4}\le Z\le\frac{32-32}{4}\right)\\&=P(-3\le Z\le0)\\&=P(0\le Z\le3)\\&=0.4987\end{aligned}$$

ㄴ. $$\begin{aligned}P(X\ge20)&=P\left(Z\ge\frac{20-32}{4}\right)\\&=P(Z\ge-3)\\&=P(Z\le3)\\&=P(Z\le0)+P(0\le Z\le3)\\&=0.5+0.4987\\&=0.9987\end{aligned}$$

ㄷ. $$\begin{aligned}P(X\ge44)&=P\left(Z\ge\frac{44-32}{4}\right)\\&=P(Z\ge3)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le3)\\&=0.5-0.4987\\&=0.0013\end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

## 0570 답 0.1359

확률변수 $X$가 정규분포 $N(15, 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-15}{3}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$Y=3X+4$이므로

$$\begin{aligned}P(58\le Y\le67)&=P(58\le3X+4\le67)\\&=P(18\le X\le21)\\&=P\left(\frac{18-15}{3}\le Z\le\frac{21-15}{3}\right)\\&=P(1\le Z\le2)\\&=P(0\le Z\le2)-P(0\le Z\le1)\\&=0.4772-0.3413\\&=0.1359\end{aligned}$$

다른 풀이

$\mathrm{E}(X)=15$, $\sigma(X)=3$이므로

$\mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(3X+4)=3\mathrm{E}(X)+4$

$=3\times15+4=49$

$\sigma(Y)=\sigma(3X+4)=|3|\sigma(X)$

$=3\times3=9$

따라서 확률변수 $Y$는 정규분포 $\mathrm{N}(49,\ 9^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{Y-49}{9}$로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ \mathrm{P}(58\le Y\le67)=\mathrm{P}\left(\dfrac{58-49}{9}\le Z\le\dfrac{67-49}{9}\right)$

$=\mathrm{P}(1\le Z\le2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le2)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=0.4772-0.3413$

$=0.1359$

## 0571 답 0.6915

두 확률변수 $X$, $Y$가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(15,\ 5^2)$, $\mathrm{N}(30,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-15}{5}$, $Z_Y=\dfrac{Y-30}{\sigma}$으로 놓으면 두 확률변수 $Z_X$, $Z_Y$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X\le5)+\mathrm{P}(Y\ge26)=1$에서

$\mathrm{P}\left(Z_X\le\dfrac{5-15}{5}\right)+\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\dfrac{26-30}{\sigma}\right)=1$

$\mathrm{P}(Z_X\le-2)+\mathrm{P}\left(Z_Y\ge-\dfrac{4}{\sigma}\right)=1$

즉, $-2=-\dfrac{4}{\sigma}$이므로 $\sigma=2$

따라서 확률변수 $Y$는 정규분포 $\mathrm{N}(30,\ 2^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(Y\ge29)=\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\dfrac{29-30}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_Y\ge-0.5)=\mathrm{P}(Z_Y\le0.5)$

$=\mathrm{P}(Z_Y\le0)+\mathrm{P}(0\le Z_Y\le0.5)$

$=0.5+0.1915$

$=0.6915$

## 0572 답 18

확률변수 $X$가 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 2^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-20}{2}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(a\le X\le23)=0.7745$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{a-20}{2}\le Z\le\dfrac{23-20}{2}\right)=0.7745$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{a-20}{2}\le Z\le1.5\right)=0.7745$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{a-20}{2}\le Z\le0\right)+\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.7745$

$\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{20-a}{2}\right)+0.4332=0.7745$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{20-a}{2}\right)=0.3413$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$\dfrac{20-a}{2}=1$, $20-a=2$

$\therefore\ a=18$

## 0573 답 1.25

확률변수 $X$가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-m}{\sigma}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(m-k\sigma\le X\le m+k\sigma)=0.7888$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{m-k\sigma-m}{\sigma}\le Z\le\dfrac{m+k\sigma-m}{\sigma}\right)=0.7888$

$\mathrm{P}(-k\le Z\le k)=0.7888$

$\mathrm{P}(-k\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.7888$

$2\mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.7888$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le k)=0.3944$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.25)=0.3944$이므로

$k=1.25$

## 0574 답 0.0668

확률변수 $X$가 정규분포 $\mathrm{N}(24,\ 4^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-24}{4}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. …… ❶

$\mathrm{P}(X\le24-k)=0.3085$에서

$\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{24-k-24}{4}\right)=0.3085$

$\mathrm{P}\left(Z\le-\dfrac{k}{4}\right)=0.3085$

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{k}{4}\right)=0.3085$

$\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{k}{4}\right)=0.3085$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{k}{4}\right)=0.3085$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{k}{4}\right)=0.1915$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le0.5)=0.1915$이므로

$\dfrac{k}{4}=0.5$ $\therefore\ k=2$ …… ❷

$\therefore\ \mathrm{P}(X\ge15k)=\mathrm{P}(X\ge30)$

$=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{30-24}{4}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\ge1.5)$

$=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)$

$=0.5-0.4332$

$=0.0668$ …… ❸

채점 기준

| | |
|---|---|
| ❶ 확률변수 $X$ 표준화하기 | 20 % |
| ❷ $k$의 값 구하기 | 50 % |
| ❸ $\mathrm{P}(X\ge15k)$ 구하기 | 30 % |

## 0575 답 2차 필기시험, 실기시험, 1차 필기시험

회사 입사 지원자의 1차 필기시험, 2차 필기시험, 실기시험 성적을 각각 확률변수 $X_\mathrm{A}$, $X_\mathrm{B}$, $X_\mathrm{C}$라 하면 $X_\mathrm{A}$, $X_\mathrm{B}$, $X_\mathrm{C}$는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 9^2)$, $\mathrm{N}(55,\ 12^2)$, $\mathrm{N}(64,\ 10^2)$을 따르므로

$Z_\mathrm{A}=\dfrac{X_\mathrm{A}-60}{9}$, $Z_\mathrm{B}=\dfrac{X_\mathrm{B}-55}{12}$, $Z_\mathrm{C}=\dfrac{X_\mathrm{C}-64}{10}$

로 놓으면 세 확률변수 $Z_\mathrm{A}$, $Z_\mathrm{B}$, $Z_\mathrm{C}$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

다른 지원자보다 민지의 1차 필기시험, 2차 필기시험, 실기시험 성적이 높을 확률은 각각

$P(X_A<68)=P\left(Z_A<\frac{68-60}{9}\right)=P\left(Z_A<\frac{8}{9}\right)$

$P(X_B<67)=P\left(Z_B<\frac{67-55}{12}\right)=P(Z_B<1)$

$P(X_C<73)=P\left(Z_C<\frac{73-64}{10}\right)=P\left(Z_C<\frac{9}{10}\right)$

이때 $P(Z_B<1)>P\left(Z_C<\frac{9}{10}\right)>P\left(Z_A<\frac{8}{9}\right)$이므로

$P(X_B<67)>P(X_C<73)>P(X_A<68)$

따라서 민지의 성적이 상대적으로 높은 시험부터 순서대로 나열하면 2차 필기시험, 실기시험, 1차 필기시험이다.

## 0576 답 ③

세 확률변수 $X$, $Y$, $W$가 각각 정규분포 $N(59, 4^2)$, $N(65, 5^2)$, $N(67, 6^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-59}{4}$, $Z_Y=\frac{Y-65}{5}$, $Z_W=\frac{W-67}{6}$

로 놓으면 세 확률변수 $Z_X$, $Z_Y$, $Z_W$는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$a=P(X\geq65)=P\left(Z_X\geq\frac{65-59}{4}\right)$

$=P(Z_X\geq1.5)$

$b=P(Y\leq57)=P\left(Z_Y\leq\frac{57-65}{5}\right)$

$=P(Z_Y\leq-1.6)=P(Z_Y\geq1.6)$

$c=P(W\geq73)=P\left(Z_W\geq\frac{73-67}{6}\right)$

$=P(Z_W\geq1)$

이때 $P(Z_Y\geq1.6)<P(Z_X\geq1.5)<P(Z_W\geq1)$이므로

$b<a<c$

## 0577 답 A, C, B

1팀, 2팀, 3팀 직원의 하루 스마트폰 사용 시간을 각각 확률변수 $X_1$, $X_2$, $X_3$이라 하면 $X_1$, $X_2$, $X_3$은 각각 정규분포 $N(68, 8^2)$, $N(73, 5^2)$, $N(70, 4^2)$을 따르므로

$Z_1=\frac{X_1-68}{8}$, $Z_2=\frac{X_2-73}{5}$, $Z_3=\frac{X_3-70}{4}$

으로 놓으면 세 확률변수 $Z_1$, $Z_2$, $Z_3$은 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

각 팀 직원의 하루 스마트폰 사용 시간이 64분보다 적을 확률은 각각

$P(X_1<64)=P\left(Z_1<\frac{64-68}{8}\right)=P(Z_1<-0.5)$

$P(X_2<64)=P\left(Z_2<\frac{64-73}{5}\right)=P(Z_2<-1.8)$

$P(X_3<64)=P\left(Z_3<\frac{64-70}{4}\right)=P(Z_3<-1.5)$

이때 $P(Z_1<-0.5)>P(Z_3<-1.5)>P(Z_2<-1.8)$이므로

$P(X_1<64)>P(X_3<64)>P(X_2<64)$

따라서 소속된 각 팀에서 상대적으로 하루 스마트폰 사용 시간이 많은 직원부터 순서대로 나열하면 A, C, B이다.

## 0578 답 0.0013

승용차 1대를 세차하는 데 걸리는 시간을 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(27, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-27}{5}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$P(X\geq42)=P\left(Z\geq\frac{42-27}{5}\right)$

$=P(Z\geq3)$

$=P(Z\geq0)-P(0\leq Z\leq3)$

$=0.5-0.4987=0.0013$

## 0579 답 ⑤

과자 1개의 무게를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(18, 0.3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-18}{0.3}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

과자 1개의 무게가 18.75 g 이하일 확률은

$P(X\leq18.75)=P\left(Z\leq\frac{18.75-18}{0.3}\right)$

$=P(Z\leq2.5)$

$=P(Z\leq0)+P(0\leq Z\leq2.5)$

$=0.5+0.49=0.99$

따라서 무게가 18.75 g 이하인 과자는 전체의 99 %이다.

## 0580 답 ②

학생의 수학 시험 점수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(68, 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-68}{10}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$P(55\leq X\leq78)=P\left(\frac{55-68}{10}\leq Z\leq\frac{78-68}{10}\right)$

$=P(-1.3\leq Z\leq1)$

$=P(-1.3\leq Z\leq0)+P(0\leq Z\leq1)$

$=P(0\leq Z\leq1.3)+P(0\leq Z\leq1)$

$=0.4032+0.3413=0.7445$

## 0581 답 0.0668

집에서 공원까지 가는 데 걸리는 시간을 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(34, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-34}{4}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

집에서 공원까지 가는 데 걸리는 시간이 40분을 초과하면 약속 시간에 늦으므로 구하는 확률은

$P(X>40)=P\left(Z>\frac{40-34}{4}\right)$

$=P(Z>1.5)=P(Z\geq1.5)$

$=P(Z\geq0)-P(0\leq Z\leq1.5)$

$=0.5-0.4332=0.0668$

참고 연속확률변수 $X$가 특정한 값을 가질 확률은 0이므로 $P(X>a)=P(X\geq a)$가 성립한다.

## 0582 답 96

라면 1봉지의 무게를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(120, 12^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-120}{12}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

라면 1봉지의 무게가 $a$ g 이하일 확률은 0.0228이므로

$P(X\le a)=0.0228$

$P\left(Z\le\frac{a-120}{12}\right)=0.0228$

$P\left(Z\ge\frac{120-a}{12}\right)=0.0228$

$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{120-a}{12}\right)=0.0228$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{120-a}{12}\right)=0.0228$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{120-a}{12}\right)=0.4772$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\frac{120-a}{12}=2 \quad \therefore a=96$

## 0583 답 ②

2학년 학생의 키를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(169, 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-169}{6}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

학생의 키가 178 cm 이상일 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge178)&=P\left(Z\ge\frac{178-169}{6}\right)\\&=P(Z\ge1.5)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1.5)\\&=0.5-0.43=0.07\end{aligned}$$

따라서 구하는 학생의 수는

$200\times0.07=14$

## 0584 답 477

키위 1개의 무게를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(62, 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-62}{2}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. …… ❶

키위 1개의 무게가 58 g 이상 66 g 이하일 확률은

$$\begin{aligned}P(58\le X\le66)&=P\left(\frac{58-62}{2}\le Z\le\frac{66-62}{2}\right)\\&=P(-2\le Z\le2)\\&=P(-2\le Z\le0)+P(0\le Z\le2)\\&=2P(0\le Z\le2)\\&=2\times0.477=0.954\end{aligned}$$ …… ❷

따라서 구하는 정상 제품의 개수는

$500\times0.954=477$ …… ❸

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 키위 1개의 무게를 확률변수 $X$로 놓고 $X$ 표준화하기 | 20 % |
| ❷ 키위 1개의 무게가 58 g 이상 66 g 이하일 확률 구하기 | 50 % |
| ❸ 정상 제품의 개수 구하기 | 30 % |

## 0585 답 24

학생의 세계지리 시험 성적을 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(70, 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-70}{8}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

학생의 시험 성적이 62점 이하일 확률은

$$\begin{aligned}P(X\le62)&=P\left(Z\le\frac{62-70}{8}\right)\\&=P(Z\le-1)\\&=P(Z\ge1)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le1)\\&=0.5-0.34\\&=0.16\end{aligned}$$

따라서 구하는 학생의 수는

$150\times0.16=24$

## 0586 답 2766

50대 주민의 최고 혈압을 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(143, 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-143}{6}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

50대 주민의 최고 혈압이 140 mmHg 이상일 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge140)&=P\left(Z\ge\frac{140-143}{6}\right)\\&=P(Z\ge-0.5)\\&=P(Z\le0.5)\\&=P(Z\le0)+P(0\le Z\le0.5)\\&=0.5+0.1915\\&=0.6915\end{aligned}$$

따라서 구하는 50대 주민의 수는

$4000\times0.6915=2766$

## 0587 답 ③

응시자의 시험 점수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(60, 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-60}{2}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

합격자의 최저 점수를 $a$점이라 하면

$P(X\ge a)=\frac{21}{300}=0.07$

$P\left(Z\ge\frac{a-60}{2}\right)=0.07$

$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{a-60}{2}\right)=0.07$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a-60}{2}\right)=0.07$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-60}{2}\right)=0.43$

이때 $P(0\le Z\le1.5)=0.43$이므로

$\frac{a-60}{2}=1.5,\ a-60=3$

$\therefore a=63$

따라서 구하는 최저 점수는 63점이다.

## 0588 답 190초

학생의 오래매달리기 기록을 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(120, 40^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-120}{40}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

메달을 받은 학생의 최저 기록을 $a$초라 하면 기록이 $a$초보다 길거나 같아야 메달을 받으므로

$P(X\geq a)=0.04$

$P\left(Z\geq\frac{a-120}{40}\right)=0.04$

$P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-120}{40}\right)=0.04$

$0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-120}{40}\right)=0.04$

$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{a-120}{40}\right)=0.46$

이때 $P(0\leq Z\leq 1.75)=0.46$이므로

$\frac{a-120}{40}=1.75$, $a-120=70$ $\therefore a=190$

따라서 구하는 최저 기록은 190초이다.

## 0589 답 80점

사원의 평가 점수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(72, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-72}{5}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

11등 이내에 속하는 사원의 최저 점수를 $a$점이라 하면

$P(X\geq a)=\frac{11}{200}=0.055$

$P\left(Z\geq\frac{a-72}{5}\right)=0.055$

$P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-72}{5}\right)=0.055$

$0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-72}{5}\right)=0.055$

$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{a-72}{5}\right)=0.445$

이때 $P(0\leq Z\leq 1.6)=0.445$이므로

$\frac{a-72}{5}=1.6$, $a-72=8$ $\therefore a=80$

따라서 구하는 최저 점수는 80점이다.

## 0590 답 2점

응시자의 점수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(68, 10^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-68}{10}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. …… ❶

1차 합격자의 최저 점수를 $a$점이라 하면

$P(X\geq a)=\frac{30}{600}=0.05$

$P\left(Z\geq\frac{a-68}{10}\right)=0.05$

$P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-68}{10}\right)=0.05$

$0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{a-68}{10}\right)=0.05$

$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{a-68}{10}\right)=0.45$

이때 $P(0\leq Z\leq 1.64)=0.45$이므로

$\frac{a-68}{10}=1.64$, $a-68=16.4$ $\therefore a=84.4$ …… ❷

한편 추가 합격자의 최저 점수를 $b$점이라 하면

$P(X\geq b)=\frac{30+15}{600}=0.075$

$P\left(Z\geq\frac{b-68}{10}\right)=0.075$

$P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq\frac{b-68}{10}\right)=0.075$

$0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{b-68}{10}\right)=0.075$

$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{b-68}{10}\right)=0.425$

이때 $P(0\leq Z\leq 1.44)=0.425$이므로

$\frac{b-68}{10}=1.44$, $b-68=14.4$ $\therefore b=82.4$ …… ❸

$\therefore a-b=84.4-82.4=2$

따라서 1차 합격자와 추가 합격자의 최저 점수의 차는 2점이다. …… ❹

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ❶ 응시자의 점수를 확률변수 $X$로 놓고 $X$ 표준화하기 | 10 % |
| ❷ 1차 합격자의 최저 점수 구하기 | 40 % |
| ❸ 추가 합격자의 최저 점수 구하기 | 40 % |
| ❹ 1차 합격자와 추가 합격자의 최저 점수의 차 구하기 | 10 % |

## 0591 답 0.8351

확률변수 $X$가 이항분포 $B\left(150, \frac{3}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=150\times\frac{3}{5}=90$

$V(X)=150\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=36$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(90, 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-90}{6}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(75\leq X\leq 96)&=P\left(\frac{75-90}{6}\leq Z\leq\frac{96-90}{6}\right)\\&=P(-2.5\leq Z\leq 1)\\&=P(-2.5\leq Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 1)\\&=P(0\leq Z\leq 2.5)+P(0\leq Z\leq 1)\\&=0.4938+0.3413\\&=0.8351\end{aligned}$$

## 0592 답 0.0082

확률변수 $X$가 이항분포 $B(180, p)$를 따르므로 $V(X)=25$에서

$180p(1-p)=25$, $36p^2-36p+5=0$

$(6p-1)(6p-5)=0$

$\therefore p=\frac{5}{6}$ ($\because 0.5<p<1$) …… ❶

확률변수 $X$가 이항분포 $B\left(180, \frac{5}{6}\right)$를 따르므로

$E(X)=180\times\frac{5}{6}=150$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(150, 5^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-150}{5}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다. …… ⅱ

$\therefore P\left(X\geq\frac{135}{p}\right)=P(X\geq162)$

$=P\left(Z\geq\frac{162-150}{5}\right)$

$=P(Z\geq2.4)$

$=P(Z\geq0)-P(0\leq Z\leq2.4)$

$=0.5-0.4918$

$=0.0082$ …… ⅲ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⅰ $p$의 값 구하기 | 30 % |
| ⅱ 확률변수 $X$ 표준화하기 | 30 % |
| ⅲ $P\left(X\geq\frac{135}{p}\right)$ 구하기 | 40 % |

## 0593 답 0.1587

${}_{100}C_x\left(\frac{9}{10}\right)^x\left(\frac{1}{10}\right)^{100-x}$은 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{9}{10}$인 어떤 사건이 100번의 독립시행에서 $x$번 일어날 확률이다.

이 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 이항분포 $B\left(100, \frac{9}{10}\right)$를 따르므로

$E(X)=100\times\frac{9}{10}=90$

$V(X)=100\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}=9$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(90, 3^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-90}{3}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore {}_{100}C_{100}\left(\frac{9}{10}\right)^{100}+{}_{100}C_{99}\left(\frac{9}{10}\right)^{99}\left(\frac{1}{10}\right)^{1}+\cdots+{}_{100}C_{93}\left(\frac{9}{10}\right)^{93}\left(\frac{1}{10}\right)^{7}$

$=P(X=100)+P(X=99)+\cdots+P(X=93)$

$=P(X\geq93)$

$=P\left(Z\geq\frac{93-90}{3}\right)$

$=P(Z\geq1)$

$=P(Z\geq0)-P(0\leq Z\leq1)$

$=0.5-0.3413$

$=0.1587$

## 0594 답 0.0228

6의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 이항분포 $B\left(720, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$E(X)=720\times\frac{1}{6}=120$

$V(X)=720\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=100$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(120, 10^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-120}{10}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$P(X\geq140)=P\left(Z\geq\frac{140-120}{10}\right)$

$=P(Z\geq2)$

$=P(Z\geq0)-P(0\leq Z\leq2)$

$=0.5-0.4772=0.0228$

## 0595 답 ③

초청장을 받은 사람이 공연을 보러 올 확률은 $\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$이다.

실제로 공연을 보러 오는 사람의 수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 이항분포 $B\left(400, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로

$E(X)=400\times\frac{4}{5}=320$

$V(X)=400\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=64$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(320, 8^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-320}{8}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$P(X\leq332)=P\left(Z\leq\frac{332-320}{8}\right)$

$=P(Z\leq1.5)$

$=P(Z\leq0)+P(0\leq Z\leq1.5)$

$=0.5+0.4332=0.9332$

## 0596 답 314

확률변수 $X$가 이항분포 $B\left(450, \frac{2}{3}\right)$를 따르므로

$E(X)=450\times\frac{2}{3}=300$

$V(X)=450\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=100$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(300, 10^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-300}{10}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(300\leq X\leq a)=0.42$에서

$P\left(\frac{300-300}{10}\leq Z\leq\frac{a-300}{10}\right)=0.42$

$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{a-300}{10}\right)=0.42$

이때 $P(0\leq Z\leq1.4)=0.42$이므로

$\frac{a-300}{10}=1.4$, $a-300=14$

$\therefore a=314$

## 0597 답 0.0062

바닥에 놓인 면에 적힌 수가 2의 배수인 횟수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 이항분포 $B\left(64, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=64\times\frac{1}{2}=32$

$V(X)=64\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=16$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(32, 4^2)$을 따르므로
$Z=\frac{X-32}{4}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.
한편 2의 배수가 아닌 수가 적힌 면이 바닥에 놓이는 횟수는 $64-X$이므로 최종 점수가 146점 이상이 되려면
$4X-(64-X)\geq 146$, $5X\geq 210$ $\therefore X\geq 42$
따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\geq 42)&=P\left(Z\geq\frac{42-32}{4}\right)\\&=P(Z\geq 2.5)\\&=P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 2.5)\\&=0.5-0.4938=0.0062\end{aligned}$$

## 0598 답 $\frac{1}{36}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_0^6 kx(6-x)\,dx&=k\int_0^6(6x-x^2)\,dx=k\left[3x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^6\\&=(108-72)k\\&=36k\end{aligned}$$

즉, $36k=1$이므로 $k=\frac{1}{36}$

## 0599 답 18

함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\begin{aligned}\int_1^4\frac{1}{k}(x-1)(x+1)\,dx&=\frac{1}{k}\int_1^4(x^2-1)\,dx=\frac{1}{k}\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^4\\&=\frac{1}{k}\left\{\left(\frac{64}{3}-4\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\}\\&=\frac{18}{k}\end{aligned}$$

즉, $\frac{18}{k}=1$이므로 $k=18$

## 0600 답 ②

함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 kx^2\,dx=\left[\frac{1}{3}kx^3\right]_0^3=9k$$

즉, $9k=1$이므로 $k=\frac{1}{9}$

따라서 구하는 확률은 함수 $y=\frac{1}{9}x^2$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$$\begin{aligned}P(1\leq X\leq 2)&=\int_1^2\frac{1}{9}x^2\,dx=\left[\frac{1}{27}x^3\right]_1^2\\&=\frac{8}{27}-\frac{1}{27}=\frac{7}{27}\end{aligned}$$

## 0601 답 $\frac{5}{2}$

확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(25, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=25\times\frac{1}{5}=5$

$V(X)=25\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=4$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(5, 2^2)$을 따르므로
$Z=\frac{X-5}{2}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &\sum_{n=3}^{7}P(X\leq n)\\&=\sum_{n=3}^{7}P\left(Z\leq\frac{n-5}{2}\right)\\&=P(Z\leq -1)+P\left(Z\leq -\frac{1}{2}\right)+P(Z\leq 0)+P\left(Z\leq\frac{1}{2}\right)\\&\qquad+P(Z\leq 1)\\&=P(Z\geq 1)+P\left(Z\geq\frac{1}{2}\right)+P(Z\leq 0)+P\left(Z\leq\frac{1}{2}\right)+P(Z\leq 1)\\&=\{P(Z\geq 1)+P(Z\leq 1)\}+\left\{P\left(Z\geq\frac{1}{2}\right)+P\left(Z\leq\frac{1}{2}\right)\right\}\\&\qquad+P(Z\leq 0)\\&=1+1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

## 0602 답 0.8664

확률변수 $X$가 이항분포 $B\left(192, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=192\times\frac{1}{4}=48$

$V(X)=192\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=36$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(48, 6^2)$을 따르므로
$Z=\frac{X-48}{6}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore\ &\sum_{x=39}^{57}{}_{192}C_x\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{192-x}=P(39\leq X\leq 57)\\&=P\left(\frac{39-48}{6}\leq Z\leq\frac{57-48}{6}\right)\\&=P(-1.5\leq Z\leq 1.5)\\&=2P(0\leq Z\leq 1.5)\\&=2\times 0.4332=0.8664\end{aligned}$$

## 0603 답 0.1574

확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=100\times\frac{1}{2}=50$

$V(X)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(50, 5^2)$을 따르므로
$Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

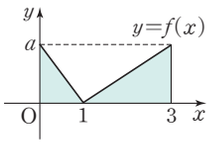
$$\begin{aligned}\therefore\ &\sum_{x=55}^{65}p_x=P(55\leq X\leq 65)\\&=P\left(\frac{55-50}{5}\leq Z\leq\frac{65-50}{5}\right)\\&=P(1\leq Z\leq 3)\\&=P(0\leq Z\leq 3)-P(0\leq Z\leq 1)\\&=0.4987-0.3413=0.1574\end{aligned}$$

## AB 유형 점검 106~108쪽

### 0604 답 ④

$f(x) \geq 0$이어야 하므로 $a \geq 0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로




$\frac{1}{2}\times 1\times a+\frac{1}{2}\times 2\times a=1$, $\frac{3}{2}a=1$

$\therefore a=\frac{2}{3}$

### 0605 답 ②

ㄱ. A, B의 정규분포곡선의 대칭축이 같으므로 동아리 A 회원들과 동아리 B 회원들은 평균적으로 연습량이 같다.

ㄴ. A의 정규분포곡선의 대칭축보다 C의 정규분포곡선의 대칭축이 더 오른쪽에 있으므로 연습량이 많은 회원이 동아리 A보다 동아리 C에 더 많이 있다.

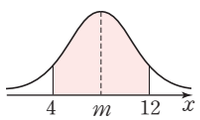
ㄷ. B의 정규분포곡선이 C의 정규분포곡선보다 가운데 부분의 높이가 높고 좁게 모여 있으므로 동아리 B 회원들이 동아리 C 회원들보다 연습량이 더 고른 편이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

### 0606 답 8

정규분포 $N(m, 4)$를 따르는 확률변수 $X$의 확률밀도함수는 $x=m$에서 최댓값을 갖고, 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

따라서 $g(k)$가 $k=12$일 때 최댓값 $g(12)=P(4\leq X\leq 12)$를 가지려면 4와 12의 평균이 $m$이어야 하므로




$m=\frac{4+12}{2}=8$

### 0607 답 ④

$P(X\leq m-\sigma)=0.1587$에서

$P(X\leq m)-P(m-\sigma\leq X\leq m)=0.1587$

$0.5-P(m-\sigma\leq X\leq m)=0.1587$

$\therefore P(m-\sigma\leq X\leq m)=0.3413$

$\therefore P(m-\sigma\leq X\leq m+\sigma)$

$=P(m-\sigma\leq X\leq m)+P(m\leq X\leq m+\sigma)$

$=2P(m-\sigma\leq X\leq m)$

$=2\times 0.3413=0.6826$

### 0608 답 70

$P(X\geq k)=0.0062$에서

$P(X\geq m)-P(m\leq X\leq k)=0.0062$

$0.5-P(m\leq X\leq k)=0.0062$

$\therefore P(m\leq X\leq k)=0.4938$

이때 $P(m\leq X\leq m+2.5\sigma)=0.4938$이므로

$k=m+2.5\sigma$

따라서 $m=50$, $\sigma=8$이므로

$k=50+2.5\times 8=70$

### 0609 답 6

두 확률변수 $X$, $Y$가 각각 정규분포 $N(35, 4^2)$, $N(24, \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-35}{4}$, $Z_Y=\frac{Y-24}{\sigma}$로 놓으면 두 확률변수 $Z_X$, $Z_Y$는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(25\leq X\leq 31)=P(5\sigma\leq Y\leq 39)$에서

$P\left(\frac{25-35}{4}\leq Z_X\leq\frac{31-35}{4}\right)=P\left(\frac{5\sigma-24}{\sigma}\leq Z_Y\leq\frac{39-24}{\sigma}\right)$

$P\left(-2.5\leq Z_X\leq -1\right)=P\left(\frac{5\sigma-24}{\sigma}\leq Z_Y\leq\frac{15}{\sigma}\right)$

$P\left(1\leq Z_X\leq 2.5\right)=P\left(\frac{5\sigma-24}{\sigma}\leq Z_Y\leq\frac{15}{\sigma}\right)$ ($\because \sigma>0$)

따라서 $1=\frac{5\sigma-24}{\sigma}$, $2.5=\frac{15}{\sigma}$이므로

$\sigma=6$

### 0610 답 ④

확률변수 $X$가 정규분포 $N(20, 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-20}{6}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$Y=4X-1$이므로

$P(Y\leq 91)=P(4X-1\leq 91)=P(X\leq 23)$

$=P\left(Z\leq\frac{23-20}{6}\right)=P(Z\leq 0.5)$

$=P(Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 0.5)$

$=0.5+0.1915=0.6915$

다른 풀이

$E(X)=20$, $\sigma(X)=6$이므로

$E(Y)=E(4X-1)=4E(X)-1=4\times 20-1=79$

$\sigma(Y)=\sigma(4X-1)=|4|\sigma(X)=4\times 6=24$

따라서 확률변수 $Y$는 정규분포 $N(79, 24^2)$을 따르므로

$Z=\frac{Y-79}{24}$로 놓으면 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$\therefore P(Y\leq 91)=P\left(Z\leq\frac{91-79}{24}\right)=P(Z\leq 0.5)$

$=P(Z\leq 0)+P(0\leq Z\leq 0.5)$

$=0.5+0.1915=0.6915$

### 0611 답 ③

확률변수 $X$가 정규분포 $N(40, 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{2}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\geq k)=0.0228$에서

$P\left(Z\geq\frac{k-40}{2}\right)=0.0228$

$P(Z\geq 0)-P\left(0\leq Z\leq\frac{k-40}{2}\right)=0.0228$

$0.5-P\left(0\leq Z\leq\frac{k-40}{2}\right)=0.0228$

$\therefore P\left(0\leq Z\leq\frac{k-40}{2}\right)=0.4772$

이때 $P(0\leq Z\leq 2)=0.4772$이므로

$\frac{k-40}{2}=2$, $k-40=4$ $\therefore k=44$

## 0612 답 ②

지민이네 학교 학생의 물리학, 화학, 생명과학, 지구과학 시험 성적을 각각 확률변수 $X_A$, $X_B$, $X_C$, $X_D$라 하면 $X_A$, $X_B$, $X_C$, $X_D$는 각각 정규분포 $N(44, 16^2)$, $N(42, 12^2)$, $N(52, 14^2)$, $N(68, 10^2)$을 따르므로

$Z_A=\frac{X_A-44}{16}$, $Z_B=\frac{X_B-42}{12}$, $Z_C=\frac{X_C-52}{14}$, $Z_D=\frac{X_D-68}{10}$

로 놓으면 네 확률변수 $Z_A$, $Z_B$, $Z_C$, $Z_D$는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

다른 학생보다 지민이의 물리학, 화학, 생명과학, 지구과학 시험 성적이 높을 확률은 각각

$P(X_A<56)=P\left(Z_A<\frac{56-44}{16}\right)=P\left(Z_A<\frac{3}{4}\right)$

$P(X_B<54)=P\left(Z_B<\frac{54-42}{12}\right)=P(Z_B<1)$

$P(X_C<59)=P\left(Z_C<\frac{59-52}{14}\right)=P\left(Z_C<\frac{1}{2}\right)$

$P(X_D<74)=P\left(Z_D<\frac{74-68}{10}\right)=P\left(Z_D<\frac{3}{5}\right)$

이때 $P(Z_B<1)>P\left(Z_A<\frac{3}{4}\right)>P\left(Z_D<\frac{3}{5}\right)>P\left(Z_C<\frac{1}{2}\right)$이므로

$P(X_B<54)>P(X_A<56)>P(X_D<74)>P(X_C<59)$

즉, 지민이의 성적이 상대적으로 높은 과목부터 차례대로 나열하면 화학, 물리학, 지구과학, 생명과학이다.

ㄱ. 물리학 성적이 지구과학 성적보다 상대적으로 높다.

ㄴ. 상대적으로 화학 성적이 가장 높고 생명과학 성적이 가장 낮다.

ㄷ. 화학 성적이 54점으로 가장 낮지만 물리학 성적보다 상대적으로 높다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄷ이다.

## 0613 답 ⑤

호르몬의 양을 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(30.2, 0.6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-30.2}{0.6}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(29.6\le X\le 31.4)&=P\left(\frac{29.6-30.2}{0.6}\le Z\le\frac{31.4-30.2}{0.6}\right)\\&=P(-1\le Z\le 2)\\&=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)\\&=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 2)\\&=0.3413+0.4772=0.8185\end{aligned}$$

## 0614 답 138

신입 사원의 시험 점수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(63, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-63}{5}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

응시자의 점수가 69점 이상일 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge 69)&=P\left(Z\ge\frac{69-63}{5}\right)\\&=P(Z\ge 1.2)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1.2)\\&=0.5-0.385=0.115\end{aligned}$$

따라서 구하는 신입 사원의 수는

$1200\times 0.115=138$

## 0615 답 51 m

선수의 기록을 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(45, 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-45}{3}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

3등 이내에 속하는 선수의 최저 기록을 $a$ m라 하면

$P(X\ge a)=\frac{3}{150}=0.02$, $P\left(Z\ge\frac{a-45}{3}\right)=0.02$

$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{a-45}{3}\right)=0.02$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a-45}{3}\right)=0.02$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-45}{3}\right)=0.48$

이때 $P(0\le Z\le 2)=0.48$이므로

$\frac{a-45}{3}=2$, $a-45=6$ $\quad\therefore a=51$

따라서 구하는 최저 기록은 51 m이다.

## 0616 답 ④

${}_{169}C_x\left(\frac{9}{13}\right)^x\left(\frac{4}{13}\right)^{169-x}$은 한 번의 시행에서 일어날 확률이 $\frac{9}{13}$인 어떤 사건이 169번의 독립시행에서 $x$번 일어날 확률이다.

확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(169, \frac{9}{13}\right)$를 따르므로

$E(X)=169\times\frac{9}{13}=117$, $V(X)=169\times\frac{9}{13}\times\frac{4}{13}=36$

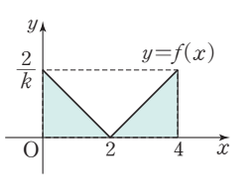
즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(117, 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-117}{6}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(120\le X\le 126)&=P\left(\frac{120-117}{6}\le Z\le\frac{126-117}{6}\right)\\&=P(0.5\le Z\le 1.5)\\&=P(0\le Z\le 1.5)-P(0\le Z\le 0.5)\\&=0.4332-0.1915=0.2417\end{aligned}$$

## 0617 답 $\frac{3}{8}$

$f(x)\ge 0$이므로 $k>0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축, $y$축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

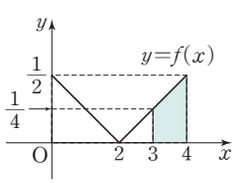



$2\times\left(\frac{1}{2}\times 2\times\frac{2}{k}\right)=1$, $\frac{4}{k}=1$

$\therefore k=4$ ····· ❶

$\therefore f(x)=\frac{|x-2|}{4}$ $(0\le x\le 4)$

따라서 구하는 확률은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=3$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로




$P(3\le X\le 4)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right)\times 1$

$=\frac{3}{8}$ ····· ❷

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $k$의 값 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ $\mathrm{P}(3\le X\le 4)$ 구하기 | 60 % |

## 0618 답 0.927

$f(52-x)=f(52+x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=52$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ m=52$ …… ⓘ

확률변수 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(52,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-52}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(m\le X\le m+4)=0.4772$에서

$\mathrm{P}(52\le X\le 56)=0.4772$

$\mathrm{P}\left(\dfrac{52-52}{\sigma}\le Z\le\dfrac{56-52}{\sigma}\right)=0.4772$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{4}{\sigma}\right)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2)=0.4772$이므로

$\dfrac{4}{\sigma}=2\qquad\therefore\ \sigma=2$ …… ⓘⓘ

$\therefore\ \mathrm{P}(49\le X\le 57)=\mathrm{P}\left(\dfrac{49-52}{2}\le Z\le\dfrac{57-52}{2}\right)$

$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 2.5)$

$=\mathrm{P}(-1.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)$

$=0.4332+0.4938=0.927$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $m$의 값 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘ $\sigma$의 값 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘⓘ $\mathrm{P}(49\le X\le 57)$ 구하기 | 40 % |

## 0619 답 21

3의 배수가 적힌 공을 꺼내는 횟수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(48,\ \dfrac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=48\times\dfrac{1}{4}=12$

$\mathrm{V}(X)=48\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=9$ …… ⓘ

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(12,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\dfrac{X-12}{3}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다. …… ⓘⓘ

$\mathrm{P}(X\ge a)=0.0013$이므로

$\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{a-12}{3}\right)=0.0013$

$\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-12}{3}\right)=0.0013$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-12}{3}\right)=0.0013$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\dfrac{a-12}{3}\right)=0.4987$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 3)=0.4987$이므로

$\dfrac{a-12}{3}=3,\ a-12=9\qquad\therefore\ a=21$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{V}(X)$ 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘ 확률변수 $X$ 표준화하기 | 20 % |
| ⓘⓘⓘ $a$의 값 구하기 | 50 % |

# 실력 향상 109쪽

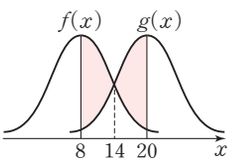
## 0620 답 0.54

두 확률변수 $X$, $Y$가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 5^2)$, $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-8}{5}$, $Z_Y=\dfrac{Y-20}{5}$으로 놓으면 두 확률변수 $Z_X$, $Z_Y$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

두 확률변수 $X$, $Y$의 표준편차가 같으므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 모양은 같다.

즉, $8\le x\le 20$에서 두 그래프의 교점의 $x$좌표는

$\dfrac{8+20}{2}=14$




따라서 구하는 부분의 넓이는

$\mathrm{P}(8\le X\le 14)-\mathrm{P}(8\le Y\le 14)$

$+\mathrm{P}(14\le Y\le 20)-\mathrm{P}(14\le X\le 20)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{8-8}{5}\le Z_X\le\dfrac{14-8}{5}\right)-\mathrm{P}\left(\dfrac{8-20}{5}\le Z_Y\le\dfrac{14-20}{5}\right)$

$+\mathrm{P}\left(\dfrac{14-20}{5}\le Z_Y\le\dfrac{20-20}{5}\right)-\mathrm{P}\left(\dfrac{14-8}{5}\le Z_X\le\dfrac{20-8}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(0\le Z_X\le 1.2)-\mathrm{P}(-2.4\le Z_Y\le -1.2)$

$+\mathrm{P}(-1.2\le Z_Y\le 0)-\mathrm{P}(1.2\le Z_X\le 2.4)$

$=\mathrm{P}(0\le Z_X\le 1.2)-\mathrm{P}(1.2\le Z_Y\le 2.4)$

$+\mathrm{P}(0\le Z_Y\le 1.2)-\mathrm{P}(1.2\le Z_X\le 2.4)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.2)-2\mathrm{P}(1.2\le Z\le 2.4)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le 1.2)-2\{\mathrm{P}(0\le Z\le 2.4)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.2)\}$

$=4\mathrm{P}(0\le Z\le 1.2)-2\mathrm{P}(0\le Z\le 2.4)$

$=4\times 0.38-2\times 0.49$

$=0.54$

## 0621 답 ④

두 확률변수 $X$, $Y$는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 3^2)$, $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로 $Z_X=\dfrac{X-8}{3}$, $Z_Y=\dfrac{Y-m}{\sigma}$으로 놓으면 두 확률변수 $Z_X$, $Z_Y$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(4\le X\le 8)+\mathrm{P}(Y\ge 8)=\dfrac{1}{2}$에서

$\mathrm{P}\left(\dfrac{4-8}{3}\le Z_X\le\dfrac{8-8}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\dfrac{8-m}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{P}\left(-\dfrac{4}{3}\le Z_X\le 0\right)+\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\dfrac{8-m}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\mathrm{P}\left(0\le Z_X\le\dfrac{4}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z_Y\ge\dfrac{8-m}{\sigma}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \dfrac{8-m}{\sigma}=\dfrac{4}{3}$ …… ㉠

$$\therefore\ P\left(Y\le 8+\frac{2\sigma}{3}\right)=P\left(Z_Y\le\frac{8+\frac{2\sigma}{3}-m}{\sigma}\right)$$
$$=P\left(Z_Y\le\frac{8-m}{\sigma}+\frac{2}{3}\right)$$
$$=P\left(Z_Y\le\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\right)\ (\because\ ㉠)$$
$$=P(Z_Y\le 2)$$
$$=P(Z_Y\le 0)+P(0\le Z_Y\le 2)$$
$$=0.5+0.4772=0.9772$$

**0622** 답 ⑤

직원의 출근 시간을 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(66.4,\ 15^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-66.4}{15}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

출근 시간이 73분 이상일 확률은

$$P(X\ge 73)=P\left(Z\ge\frac{73-66.4}{15}\right)=P(Z\ge 0.44)$$
$$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 0.44)$$
$$=0.5-0.17=0.33$$
$$\therefore\ P(X<73)=1-P(X\ge 73)=1-0.33=0.67$$

따라서 출근 시간이 73분 이상인 직원들 중에서 40 %, 출근 시간이 73분 미만인 직원들 중에서 20 %가 지하철을 이용하였으므로 구하는 확률은

$$P(X\ge 73)\times 0.4+P(X<73)\times 0.2=0.33\times 0.4+0.67\times 0.2$$
$$=0.132+0.134=0.266$$

**0623** 답 0.0228

입장한 어린이의 수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 이항분포 $B\left(100,\ \frac{1}{10}\right)$을 따르므로

$$E(X)=100\times\frac{1}{10}=10,\ V(X)=100\times\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}=9$$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(10,\ 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-10}{3}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따른다.

$P(X\ge a)=0.1587$이므로 $P\left(Z\ge\frac{a-10}{3}\right)=0.1587$

$$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{a-10}{3}\right)=0.1587$$
$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a-10}{3}\right)=0.1587$$
$$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{a-10}{3}\right)=0.3413$$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{a-10}{3}=1$, $a-10=3$ $\quad\therefore\ a=13$

따라서 100명 중에서 어른은 $(100-X)$명이므로 구하는 확률은

$$P(100-X\ge 7a+5)=P(100-X\ge 7\times 13+5)$$
$$=P(X\le 4)=P\left(Z\le\frac{4-10}{3}\right)$$
$$=P(Z\le -2)=P(Z\ge 2)$$
$$=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)$$
$$=0.5-0.4772=0.0228$$

# 07 / 통계적 추정

## A 개념 확인 110~113쪽

**0624** 답 전수조사

**0625** 답 표본조사

**0626** 답 표본조사

**0627** 답 전수조사

**0628** 답 표본조사

**0629** 답 25

서로 다른 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_5\Pi_2=5^2=25$

**0630** 답 20

서로 다른 5개에서 서로 다른 2개를 택하는 순열의 수와 같으므로

${}_5P_2=20$

**0631** 답 10

서로 다른 5개에서 서로 다른 2개를 택하는 조합의 수와 같으므로

${}_5C_2=10$

**0632** 답 $\frac{1}{3}$

크기가 2인 표본을 $X_1$, $X_2$라 하면 순서쌍 $(X_1,\ X_2)$에 대하여 $\overline{X}=1$인 경우는 $(0,\ 2)$, $(1,\ 1)$, $(2,\ 0)$

$$\therefore\ P(\overline{X}=1)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

**0633** 답 $\frac{1}{9}$

크기가 2인 표본을 $X_1$, $X_2$라 하면 순서쌍 $(X_1,\ X_2)$에 대하여 $\overline{X}=2$인 경우는 $(2,\ 2)$

$$\therefore\ P(\overline{X}=2)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$$

**0634** 답 2, 3, 4, 5, 6

모집단 $\{2,\ 4,\ 6\}$에서 크기가 2인 표본 $X_1$, $X_2$를 임의추출할 때, 표본평균 $\overline{X}$는 $\overline{X}=\frac{X_1+X_2}{2}$이므로 추출한 표본에 따른 표본평균 $\overline{X}$는 다음 표와 같다.

| $X_1$ \ $X_2$ | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 3 | 4 | 5 |
| 6 | 4 | 5 | 6 |

따라서 $\overline{X}$가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5, 6이다.

**0635** 답

| $\overline{X}$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(\overline{X}=\overline{x})$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | 1 |

**0636** 답 **평균: 4, 분산: $\frac{4}{3}$, 표준편차: $\frac{2\sqrt{3}}{3}$**

$E(\overline{X})=2\times\frac{1}{9}+3\times\frac{2}{9}+4\times\frac{1}{3}+5\times\frac{2}{9}+6\times\frac{1}{9}=4$

$V(\overline{X})=E(\overline{X}^2)-\{E(\overline{X})\}^2$

$=2^2\times\frac{1}{9}+3^2\times\frac{2}{9}+4^2\times\frac{1}{3}+5^2\times\frac{2}{9}+6^2\times\frac{1}{9}-4^2$

$=\frac{52}{3}-16=\frac{4}{3}$

$\sigma(\overline{X})=\sqrt{V(\overline{X})}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

**0637** 답 **평균: 60, 분산: 4, 표준편차: 2**

모평균 $m=60$, 모분산 $\sigma^2=16=4^2$, 표본의 크기 $n=4$이므로

$E(\overline{X})=m=60$

$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{16}{4}=4$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{4}{\sqrt{4}}=2$

**0638** 답 **평균: 60, 분산: 1, 표준편차: 1**

모평균 $m=60$, 모분산 $\sigma^2=16=4^2$, 표본의 크기 $n=16$이므로

$E(\overline{X})=m=60$

$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{16}{16}=1$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{4}{\sqrt{16}}=1$

**0639** 답 **평균: 60, 분산: $\frac{1}{4}$, 표준편차: $\frac{1}{2}$**

모평균 $m=60$, 모분산 $\sigma^2=16=4^2$, 표본의 크기 $n=64$이므로

$E(\overline{X})=m=60$

$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{16}{64}=\frac{1}{4}$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{4}{\sqrt{64}}=\frac{1}{2}$

**0640** 답 **평균: 200, 분산: 16, 표준편차: 4**

모평균 $m=200$, 모분산 $\sigma^2=40^2$, 표본의 크기 $n=100$이므로

$E(\overline{X})=m=200$

$V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}=\frac{40^2}{100}=16$

$\sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\frac{40}{\sqrt{100}}=4$

**0641** 답 **$N(200, 4^2)$**

**0642** 답 **$Z=\frac{\overline{X}-200}{4}$**

**0643** 답 **0.9332**

$P(\overline{X}\geq194)=P\left(Z\geq\frac{194-200}{4}\right)$

$=P(Z\geq-1.5)=P(Z\leq1.5)$

$=P(Z\leq0)+P(0\leq Z\leq1.5)$

$=0.5+P(0\leq Z\leq1.5)$

$=0.5+0.4332=0.9332$

**0644** 답 **$\frac{3}{5}$**

$p=\frac{240}{400}=\frac{3}{5}$

**0645** 답 **$\frac{1}{2}$**

$\hat{p}=\frac{25}{50}=\frac{1}{2}$

**0646** 답 (1) **$\frac{2}{3}$** (2) **$\frac{1}{324}$** (3) **$\frac{1}{18}$**

모비율 $p=\frac{2}{3}$, 표본의 크기 $n=72$이므로

(1) $E(\hat{p})=p=\frac{2}{3}$

(2) $V(\hat{p})=\frac{pq}{n}=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}{72}=\frac{1}{324}$ → $q=1-p$

(3) $\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{pq}{n}}=\sqrt{\frac{1}{324}}=\frac{1}{18}$ → $q=1-p$

**0647** 답 **평균: 0.2, 분산: 0.0016, 표준편차: 0.04**

모비율 $p=0.2$, 표본의 크기 $n=100$이므로

$E(\hat{p})=p=0.2$

$V(\hat{p})=\frac{pq}{n}=\frac{0.2\times0.8}{100}=0.0016$ → $q=1-p$

$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{pq}{n}}=\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{100}}=0.04$ → $q=1-p$

**0648** 답 **$N(0.2, 0.04^2)$**

**0649** 답 **$Z=\frac{\hat{p}-0.2}{0.04}$**

**0650** 답 **0.1587**

$P(\hat{p}\geq0.24)=P\left(Z\geq\frac{0.24-0.2}{0.04}\right)=P(Z\geq1)$

$=P(Z\geq0)-P(0\leq Z\leq1)$

$=0.5-0.3413=0.1587$

**0651** 답 (1) **$146.08\leq m\leq153.92$**

(2) **$144.84\leq m\leq155.16$**

표본의 크기 $n=81$, 표본평균 $\overline{x}=150$, 모표준편차 $\sigma=18$이므로

(1) 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$150-1.96\times\frac{18}{\sqrt{81}}\leq m\leq150+1.96\times\frac{18}{\sqrt{81}}$

$\therefore\ 146.08\leq m\leq153.92$

(2) 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$150-2.58\times\frac{18}{\sqrt{81}}\leq m\leq150+2.58\times\frac{18}{\sqrt{81}}$

$\therefore\ 144.84\leq m\leq155.16$

**0652** 답 (1) $199.02 \le m \le 200.98$ (2) $198.71 \le m \le 201.29$

표본의 크기 $n=144$, 표본평균 $\overline{x}=200$이고, $n$은 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 6을 이용하면

(1) 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$200-1.96\times\frac{6}{\sqrt{144}} \le m \le 200+1.96\times\frac{6}{\sqrt{144}}$$

$\therefore\ 199.02 \le m \le 200.98$

(2) 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$200-2.58\times\frac{6}{\sqrt{144}} \le m \le 200+2.58\times\frac{6}{\sqrt{144}}$$

$\therefore\ 198.71 \le m \le 201.29$

**0653** 답 (1) $0.3216 \le p \le 0.4784$ (2) $0.2968 \le p \le 0.5032$

표본의 크기 $n=150$, 표본비율 $\hat{p}=0.4$이고, $n$은 충분히 크므로

(1) 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.4-1.96\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{150}} \le p \le 0.4+1.96\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{150}}$$

$\therefore\ 0.3216 \le p \le 0.4784$

(2) 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.4-2.58\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{150}} \le p \le 0.4+2.58\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{150}}$$

$\therefore\ 0.2968 \le p \le 0.5032$

## 유형 완성 114~123쪽

**0654** 답 51

모평균이 10, 모표준편차가 4, 표본의 크기가 8이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=10$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4^2}{8}=2$

따라서 $\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2$에서

$\mathrm{E}(\overline{X}^2)=\mathrm{V}(\overline{X})+\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=2+10^2=102$

$\therefore\ \frac{\mathrm{E}(\overline{X}^2)}{\mathrm{V}(\overline{X})}=\frac{102}{2}=51$

**0655** 답 ④

모평균이 20, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 16이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=20$, $\sigma(\overline{X})=\frac{5}{\sqrt{16}}=\frac{5}{4}$

$\therefore\ \mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X})=\frac{85}{4}$

**0656** 답 7

모평균이 $m$, 모표준편차가 6, 표본의 크기가 $n$이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=m=11$

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{6^2}{n}=9$ $\therefore\ n=4$

$\therefore\ m-n=11-4=7$

**0657** 답 1600

모표준편차가 8, 표본의 크기가 $n$이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{8}{\sqrt{n}}$

이때 $\sigma(\overline{X}) \ge 0.2$이어야 하므로

$\frac{8}{\sqrt{n}} \ge 0.2$, $\sqrt{n} \le 40$ $\therefore\ n \le 1600$

따라서 $n$의 최댓값은 1600이다.

**0658** 답 $\frac{1}{4}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}=1$ $\therefore\ a=\frac{1}{8}$

따라서 확률변수 $X$에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{8}+3\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{8}=\frac{5}{2}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{8}+3^2\times\frac{1}{2}+4^2\times\frac{1}{8}-\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$=\frac{29}{4}-\frac{25}{4}=1$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$

이때 표본의 크기가 16이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{1}{\sqrt{16}}=\frac{1}{4}$

**0659** 답 ④

확률변수 $X$에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{2}{5}+3\times\frac{3}{10}+5\times\frac{1}{5}+7\times\frac{1}{10}=3$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{2}{5}+3^2\times\frac{3}{10}+5^2\times\frac{1}{5}+7^2\times\frac{1}{10}-3^2$

$=13-9=4$

표본의 크기가 $n$이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{4}{n}$

이때 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{2}$에서 $\frac{4}{n}=\frac{1}{2}$ $\therefore\ n=8$

**0660** 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{6}+a+b=1$ $\therefore\ a+b=\frac{5}{6}$ …… ㉠

$\mathrm{E}(X^2)=\frac{16}{3}$에서

$0^2\times\frac{1}{6}+2^2\times a+4^2\times b=\frac{16}{3}$

$4a+16b=\frac{16}{3}$ $\therefore\ a+4b=\frac{4}{3}$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 2 | 4 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{6}+2\times\frac{2}{3}+4\times\frac{1}{6}=2$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{16}{3}-2^2=\frac{4}{3}$

이때 표본의 크기가 20이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{4}{3}}{20}=\frac{1}{15}$

## 0661 답 1

확률의 총합은 1이므로

$\mathrm{P}(X=-1)+\mathrm{P}(X=0)+\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)=1$

$\frac{-k+2}{10}+\frac{1}{5}+\frac{k+2}{10}+\frac{k+1}{5}=1$

$\frac{k+4}{5}=1$, $k+4=5$ $\quad\therefore k=1$ …… ⓘ

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | $-1$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{5}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$\mathrm{E}(X)=-1\times\frac{1}{10}+0\times\frac{1}{5}+1\times\frac{3}{10}+2\times\frac{2}{5}=1$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=(-1)^2\times\frac{1}{10}+0^2\times\frac{1}{5}+1^2\times\frac{3}{10}+2^2\times\frac{2}{5}-1^2$

$=2-1=1$

$\therefore\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=1$ …… ⓘⓘ

이때 표본의 크기가 9이므로

$\sigma(\overline{X})=\frac{1}{\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$

$\therefore\sigma(3\overline{X}+5)=|3|\sigma(\overline{X})=3\times\frac{1}{3}=1$ …… ⓘⓘⓘ

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ⓘ $k$의 값 구하기 | 20 % |
| ⓘⓘ $\sigma(X)$ 구하기 | 50 % |
| ⓘⓘⓘ $\sigma(3\overline{X}+5)$ 구하기 | 30 % |

## 0662 답 12

공 1개를 임의로 꺼낼 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 $X$라 하고 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{6}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{6}=\frac{5}{3}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{3}\right)^2$

$=\frac{10}{3}-\frac{25}{9}=\frac{5}{9}$

이때 표본의 크기가 4이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{5}{3}$, $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{5}{9}}{4}=\frac{5}{36}$

$\therefore\frac{\mathrm{E}(\overline{X})}{\mathrm{V}(\overline{X})}=\frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{36}}=12$

## 0663 답 13000

동전의 앞면을 H, 뒷면을 T라 하고 게임을 한 번 하여 나오는 모든 경우를 표로 나타내면 다음과 같다.

| 500원 | 100원 | 상금(원) |
|---|---|---|
| H | H | 600 |
| H | T | 500 |
| T | H | 100 |
| T | T | 0 |

게임을 한 번 하여 받을 수 있는 금액을 확률변수 $X$라 하고 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 100 | 500 | 600 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{1}{4}+100\times\frac{1}{4}+500\times\frac{1}{4}+600\times\frac{1}{4}=300$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=0^2\times\frac{1}{4}+100^2\times\frac{1}{4}+500^2\times\frac{1}{4}+600^2\times\frac{1}{4}-300^2$

$=155000-90000=65000$

이때 표본의 크기가 5이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{65000}{5}=13000$

## 0664 답 32

구슬 1개를 임의로 꺼낼 때, 구슬에 적힌 숫자를 확률변수 $X$라 하고 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 3 | 5 | 7 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{2}{7}$ | 1 |

따라서 확률변수 $X$에 대하여

$\mathrm{E}(X)=3\times\frac{2}{7}+5\times\frac{3}{7}+7\times\frac{2}{7}=5$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=3^2\times\frac{2}{7}+5^2\times\frac{3}{7}+7^2\times\frac{2}{7}-5^2$

$=\frac{191}{7}-25=\frac{16}{7}$

표본의 크기가 $n$이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\frac{16}{7}}{n}=\frac{16}{7n}$

이때 $\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{14}$에서

$\frac{16}{7n}=\frac{1}{14}$ $\quad\therefore n=32$

**0665** 답 **0.8185**

모집단이 정규분포 $N(60, 8^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 귤 16개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(60, \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $N(60, 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-60}{2}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(58\le\overline{X}\le64)&=P\left(\frac{58-60}{2}\le Z\le\frac{64-60}{2}\right)\\&=P(-1\le Z\le2)\\&=P(-1\le Z\le0)+P(0\le Z\le2)\\&=P(0\le Z\le1)+P(0\le Z\le2)\\&=0.3413+0.4772=0.8185\end{aligned}$$

**0666** 답 **0.6915**

모집단이 정규분포 $N(350, 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 9이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(350, \frac{12^2}{9}\right)$, 즉 $N(350, 4^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-350}{4}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(\overline{X}\ge348)&=P\left(Z\ge\frac{348-350}{4}\right)\\&=P(Z\ge-0.5)=P(Z\le0.5)\\&=P(Z\le0)+P(0\le Z\le0.5)\\&=0.5+0.1915=0.6915\end{aligned}$$

**0667** 답 ②

모집단이 정규분포 $N(m, 20^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(m, \frac{20^2}{100}\right)$, 즉 $N(m, 2^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-m}{2}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(|\overline{X}-m|\le2)&=P(-2\le\overline{X}-m\le2)\\&=P(m-2\le\overline{X}\le m+2)\\&=P\left(\frac{m-2-m}{2}\le Z\le\frac{m+2-m}{2}\right)\\&=P(-1\le Z\le1)\\&=P(-1\le Z\le0)+P(0\le Z\le1)\\&=2P(0\le Z\le1)\\&=2\times0.3413=0.6826\end{aligned}$$

**0668** 답 **0.0062**

모집단이 정규분포 $N(500, 16^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 한 조가 하루에 만드는 빵의 개수의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(500, \frac{16^2}{4}\right)$, 즉 $N(500, 8^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-500}{8}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(4\overline{X}\ge2080)&=P(\overline{X}\ge520)=P\left(Z\ge\frac{520-500}{8}\right)\\&=P(Z\ge2.5)=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le2.5)\\&=0.5-0.4938=0.0062\end{aligned}$$

**0669** 답 **36**

모집단이 정규분포 $N(300, 33^2)$을 따르고 표본의 크기가 $n$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(300, \frac{33^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(300, \left(\frac{33}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-300}{\frac{33}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\ge289)=0.9772$에서

$$P\left(Z\ge\frac{289-300}{\frac{33}{\sqrt{n}}}\right)=0.9772$$

$$P\left(Z\ge-\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.9772$$

$$P\left(Z\le\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.9772$$

$$P(Z\le0)+P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.9772$$

$$0.5+P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.9772$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{3}\right)=0.4772$$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{3}=2$, $\sqrt{n}=6$ $\quad\therefore n=36$

**0670** 답 **144**

모집단이 정규분포 $N(150, 24^2)$을 따르고 표본의 크기가 $n$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(150, \frac{24^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(150, \left(\frac{24}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-150}{\frac{24}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\ge153)=0.0668$에서

$$P\left(Z\ge\frac{153-150}{\frac{24}{\sqrt{n}}}\right)=0.0668$$

$$P\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.0668$$

$$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.0668$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.0668$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{8}\right)=0.4332$$

이때 $P(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{8}=1.5$, $\sqrt{n}=12$ $\quad\therefore n=144$

**0671** 답 **4**

모집단이 정규분포 $N(40, 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 $n$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(40, \frac{10^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(40, \left(\frac{10}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-40}{\frac{10}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(30\le\overline{X}\le50)\ge0.9544$에서

$$P\left(\frac{30-40}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\le Z\le\frac{50-40}{\frac{10}{\sqrt{n}}}\right)\ge0.9544$$

$P(-\sqrt{n}\le Z\le\sqrt{n})\ge0.9544$

$P(-\sqrt{n}\le Z\le0)+P(0\le Z\le\sqrt{n})\ge0.9544$

$2P(0\le Z\le\sqrt{n})\ge0.9544$

$\therefore P(0\le Z\le\sqrt{n})\ge0.4772$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\sqrt{n}\ge2 \quad \therefore n\ge4$

따라서 $n$의 최솟값은 4이다.

## 0672 답 355

모집단이 정규분포 $N(350, 50^2)$을 따르고 표본의 크기가 100이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(350, \dfrac{50^2}{100}\right)$, 즉 $N(350, 5^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-350}{5}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\ge k)=0.1587$에서

$$P\left(Z\ge\frac{k-350}{5}\right)=0.1587$$

$$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{k-350}{5}\right)=0.1587$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{k-350}{5}\right)=0.1587$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{k-350}{5}\right)=0.3413$$

이때 $P(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$\dfrac{k-350}{5}=1$, $k-350=5 \quad \therefore k=355$

## 0673 답 3

모집단이 정규분포 $N(180, 10^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(180, \dfrac{10^2}{25}\right)$, 즉 $N(180, 2^2)$을 따른다. …… ❶

$Z=\dfrac{\overline{X}-180}{2}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(|\overline{X}-180|\le a)=0.8664$에서

$P(-a\le\overline{X}-180\le a)=0.8664$

$P(-a+180\le\overline{X}\le a+180)=0.8664$

$$P\left(\frac{-a+180-180}{2}\le Z\le\frac{a+180-180}{2}\right)=0.8664$$

$$P\left(-\frac{a}{2}\le Z\le\frac{a}{2}\right)=0.8664$$

$$P\left(-\frac{a}{2}\le Z\le0\right)+P\left(0\le Z\le\frac{a}{2}\right)=0.8664$$

$$2P\left(0\le Z\le\frac{a}{2}\right)=0.8664$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a}{2}\right)=0.4332$$

이때 $P(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$\dfrac{a}{2}=1.5 \quad \therefore a=3$ …… ❷

| 채점 기준 | |
|---|---|
| ❶ 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포 구하기 | 30 % |
| ❷ $a$의 값 구하기 | 70 % |

## 0674 답 ⑤

모집단이 정규분포 $N(104, 4^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 4상자의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(104, \dfrac{4^2}{4}\right)$, 즉 $N(104, 2^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-104}{2}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(a\le\overline{X}\le106)=0.5328$에서

$$P\left(\frac{a-104}{2}\le Z\le\frac{106-104}{2}\right)=0.5328$$

$$P\left(\frac{a-104}{2}\le Z\le1\right)=0.5328$$

$$P\left(\frac{a-104}{2}\le Z\le0\right)+P(0\le Z\le1)=0.5328$$

$$P\left(0\le Z\le\frac{104-a}{2}\right)+0.3413=0.5328$$

$$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{104-a}{2}\right)=0.1915$$

이때 $P(0\le Z\le0.5)=0.1915$이므로

$\dfrac{104-a}{2}=0.5 \quad \therefore a=103$

## 0675 답 ④

모비율이 0.25, 표본의 크기가 108이므로

$$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{108}}=\frac{1}{24}$$

## 0676 답 ④

모비율이 0.6, 표본의 크기가 80이므로

$E(\hat{p})=0.6$

$V(\hat{p})=\dfrac{0.6\times0.4}{80}=0.003$

$$\therefore \frac{E(\hat{p})}{V(\hat{p})}=\frac{0.6}{0.003}=200$$

## 0677 답 490

모비율이 $\dfrac{2}{7}$, 표본의 크기가 $n$이므로

$$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{\frac{2}{7}\times\frac{5}{7}}{n}}=\frac{1}{7}\sqrt{\frac{10}{n}}$$

이때 $\sigma(\hat{p})=\dfrac{1}{49}$이므로

$\dfrac{1}{7}\sqrt{\dfrac{10}{n}}=\dfrac{1}{49}$, $\sqrt{\dfrac{10}{n}}=\dfrac{1}{7}$, $\dfrac{10}{n}=\dfrac{1}{49}$

$\therefore n=490$

## 0678 답 0.0655

임의추출한 100명 중에서 기부를 한 적이 있는 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율이 0.2, 표본의 크기가 100이므로

$E(\hat{p})=0.2$

$V(\hat{p})=\dfrac{0.2\times0.8}{100}=0.0016=0.04^2$

표본의 크기 100은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.2,\ 0.04^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\hat{p}-0.2}{0.04}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P\left(\frac{26}{100}\le\hat{p}\le\frac{32}{100}\right)&=P(0.26\le\hat{p}\le0.32)\\&=P\left(\frac{0.26-0.2}{0.04}\le Z\le\frac{0.32-0.2}{0.04}\right)\\&=P(1.5\le Z\le3)\\&=P(0\le Z\le3)-P(0\le Z\le1.5)\\&=0.4987-0.4332=0.0655\end{aligned}$$

## 0679 답 0.02

임의추출한 400가구 중에서 TV 프로그램을 시청한 가구의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율이 0.1, 표본의 크기가 400이므로

$E(\hat{p})=0.1$

$V(\hat{p})=\dfrac{0.1\times0.9}{400}=0.000225=0.015^2$

표본의 크기 400은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.1,\ 0.015^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\hat{p}-0.1}{0.015}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(\hat{p}\ge0.13)&=P\left(Z\ge\frac{0.13-0.1}{0.015}\right)\\&=P(Z\ge2)\\&=P(Z\ge0)-P(0\le Z\le2)\\&=0.5-0.48=0.02\end{aligned}$$

## 0680 답 ②

임의추출한 300명 중에서 자전거를 타고 등교하는 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율이 0.25, 표본의 크기가 300이므로

$E(\hat{p})=0.25$

$V(\hat{p})=\dfrac{0.25\times0.75}{300}=0.000625=0.025^2$

표본의 크기 300은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.25,\ 0.025^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\hat{p}-0.25}{0.025}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P\left(\hat{p}\ge\dfrac{\alpha}{100}\right)=0.0228$에서

$$P\left(Z\ge\frac{\frac{\alpha}{100}-0.25}{0.025}\right)=0.0228$$

$$P\left(Z\ge\frac{\alpha-25}{2.5}\right)=0.0228$$

$$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{\alpha-25}{2.5}\right)=0.0228$$

$$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{\alpha-25}{2.5}\right)=0.0228$$

$$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{\alpha-25}{2.5}\right)=0.4772$$

이때 $P(0\le Z\le2)=0.4772$이므로

$\dfrac{\alpha-25}{2.5}=2$ $\quad\therefore\ \alpha=30$

## 0681 답 600

모비율이 0.6, 표본의 크기가 $n$이므로

$E(\hat{p})=0.6$

$V(\hat{p})=\dfrac{0.6\times0.4}{n}=\dfrac{0.24}{n}=\left(\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}\right)^2$

표본의 크기 $n$은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N\left(0.6,\ \left(\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\hat{p}-0.6}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P(\hat{p}\ge0.59)=0.6915$에서

$$P\left(Z\ge\frac{0.59-0.6}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right)=0.6915$$

$$P\left(Z\ge-\frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right)=0.6915,\ P\left(Z\le\frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right)=0.6915$$

$$P(Z\le0)+P\left(0\le Z\le\frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right)=0.6915$$

$$0.5+P\left(0\le Z\le\frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right)=0.6915$$

$$\therefore\ P\left(0\le Z\le\frac{0.01}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}\right)=0.1915$$

이때 $P(0\le Z\le0.5)=0.1915$이므로

$\dfrac{0.01}{\sqrt{\frac{0.24}{n}}}=0.5$, $\sqrt{\dfrac{0.24}{n}}=\dfrac{1}{50}$

$\dfrac{0.24}{n}=\dfrac{1}{2500}$ $\quad\therefore\ n=600$

## 0682 답 $79.84\le m\le90.16$

표본의 크기가 49, 표본평균이 85, 모표준편차가 14이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$85-2.58\times\dfrac{14}{\sqrt{49}}\le m\le85+2.58\times\dfrac{14}{\sqrt{49}}$

$\therefore\ 79.84\le m\le90.16$

## 0683 답 ⑤

표본의 크기 256이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 16을 이용할 수 있고, 표본평균이 64이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$64-1.96\times\dfrac{16}{\sqrt{256}}\le m\le64+1.96\times\dfrac{16}{\sqrt{256}}$

$\therefore\ 62.04\le m\le65.96$

## 0684 답 180.58

표본의 크기 100이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 10을 이용할 수 있고, 표본평균이 $\bar{x}$이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\bar{x}-2.58\times\dfrac{10}{\sqrt{100}}\le m\le\bar{x}+2.58\times\dfrac{10}{\sqrt{100}}$

이 신뢰구간이 $175.42 \le m \le a$와 같으므로

$\overline{x} - 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{100}} = 175.42$ $\quad \therefore \overline{x} = 178$

$\therefore a = \overline{x} + 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{100}} = 178 + 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{100}} = 180.58$

## 0685 답 91

표본의 크기가 225, 표본평균이 50, 모표준편차가 3이므로

$\mathrm{P}(|Z| \le k) = \frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 $m$에 대한 신뢰도 $\alpha\,\%$의 신뢰구간은

$50 - k \times \frac{3}{\sqrt{225}} \le m \le 50 + k \times \frac{3}{\sqrt{225}}$ …… ⓘ

이 신뢰구간이 $49.66 \le m \le 50.34$와 같으므로

$50 - k \times \frac{3}{\sqrt{225}} = 49.66$, $50 + k \times \frac{3}{\sqrt{225}} = 50.34$

따라서 $k \times \frac{3}{\sqrt{225}} = 0.34$이므로 $k = 1.7$ …… ⓘⓘ

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.7) = 0.455$이므로

$\mathrm{P}(|Z| \le 1.7) = \mathrm{P}(-1.7 \le Z \le 1.7)$

$= 2\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.7)$

$= 2 \times 0.455 = 0.91$

따라서 $\frac{\alpha}{100} = 0.91$이므로 $\alpha = 91$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

| | |
|---|---|
| ⓘ $\mathrm{P}(\lvert Z\rvert \le k) = \frac{\alpha}{100}$일 때, 모평균 $m$에 대한 신뢰도 $\alpha\,\%$의 신뢰구간을 $k$에 대하여 나타내기 | 40 % |
| ⓘⓘ $k$의 값 구하기 | 30 % |
| ⓘⓘⓘ $\alpha$의 값 구하기 | 30 % |

## 0686 답 16

표본의 크기가 $n$, 표본평균이 42, 모표준편차가 8이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$42 - 2.58 \times \frac{8}{\sqrt{n}} \le m \le 42 + 2.58 \times \frac{8}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간이 $36.84 \le m \le 47.16$과 같으므로

$42 - 2.58 \times \frac{8}{\sqrt{n}} = 36.84$, $42 + 2.58 \times \frac{8}{\sqrt{n}} = 47.16$

따라서 $2.58 \times \frac{8}{\sqrt{n}} = 5.16$이므로

$\sqrt{n} = 4$ $\quad \therefore n = 16$

## 0687 답 ④

표본의 크기를 $n$이라 하면 표본평균이 50, 모표준편차가 10이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$50 - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \le m \le 50 + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간이 $49.51 \le m \le 50.49$와 같으므로

$50 - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 49.51$, $50 + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 50.49$

따라서 $1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 0.49$이므로

$\sqrt{n} = 40$ $\quad \therefore n = 1600$

따라서 1600가구를 대상으로 조사한 것이다.

## 0688 답 0.98

표본의 크기가 256, 모표준편차가 4이므로 모평균을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2 \times 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{256}} = 0.98$

## 0689 답 1.72

표본의 크기가 900, 모표준편차가 10일 때, 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이므로 그 신뢰구간의 길이는

$b - a = 2 \times 2.58 \times \frac{10}{\sqrt{900}} = 1.72$

## 0690 답 6.81

표본의 크기가 400, 모표준편차가 15이므로 모평균을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$a = 2 \times 1.96 \times \frac{15}{\sqrt{400}} = 2.94$ …… ⓘ

한편 모평균을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$b = 2 \times 2.58 \times \frac{15}{\sqrt{400}} = 3.87$ …… ⓘⓘ

$\therefore a + b = 2.94 + 3.87 = 6.81$ …… ⓘⓘⓘ

채점 기준

| | |
|---|---|
| ⓘ $a$의 값 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ $b$의 값 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ $a+b$의 값 구하기 | 20 % |

## 0691 답 92

표본의 크기가 25, 모표준편차가 10일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le k) = \frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균을 신뢰도 $\alpha\,\%$로 추정한 신뢰구간의 길이는 7이므로

$2k \times \frac{10}{\sqrt{25}} = 7$ $\quad \therefore k = 1.75$

이때 $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.75) = 0.46$이므로

$\mathrm{P}(|Z| \le 1.75) = \mathrm{P}(-1.75 \le Z \le 1.75)$

$= 2\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.75)$

$= 2 \times 0.46 = 0.92$

따라서 $\frac{\alpha}{100} = 0.92$이므로 $\alpha = 92$

## 0692 답 97

표본의 크기가 $n$, 모표준편차가 0.5이므로 모평균을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2 \times 1.96 \times \frac{0.5}{\sqrt{n}}$

신뢰구간의 길이가 0.2 이하이어야 하므로

$2 \times 1.96 \times \frac{0.5}{\sqrt{n}} \le 0.2$, $\sqrt{n} \ge 9.8$

$\therefore n \ge 96.04$

따라서 $n$의 최솟값은 97이다.

## 0693 답 64

표본의 크기가 $n$, 모표준편차가 $\sigma$일 때, 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은 $a \le m \le b$이므로 그 신뢰구간의 길이는

$b - a = 2 \times 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이때 $b-a=0.645\sigma$이므로

$2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.645\sigma$, $\sqrt{n}=8$

$\therefore\ n=64$

## 0694 답 ⑤

표본의 크기가 $n$, 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 10이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{10}{\sqrt{n}}$

$-\frac{25.8}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{25.8}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ |m-\overline{x}|\le\frac{25.8}{\sqrt{n}}$

이때 $|m-\overline{x}|\le6$이어야 하므로

$\frac{25.8}{\sqrt{n}}\le6$, $\sqrt{n}\ge4.3$

$\therefore\ n\ge18.49$

따라서 $n$의 최솟값은 19이다.

## 0695 답 2401

모평균을 $m$, 표본평균을 $\overline{x}$, 모표준편차를 $\sigma$라 하면 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$-\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ |m-\overline{x}|\le\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}$

이때 $|m-\overline{x}|\le\frac{\sigma}{25}$이어야 하므로

$\frac{1.96\sigma}{\sqrt{n}}\le\frac{\sigma}{25}$, $\sqrt{n}\ge49$

$\therefore\ n\ge2401$

따라서 $n$의 최솟값은 2401이다.

## 0696 답 ②

표본의 크기를 $n$, 모평균을 $m$, 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 20이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{20}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{20}{\sqrt{n}}$

$-\frac{39.2}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{39.2}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ |m-\overline{x}|\le\frac{39.2}{\sqrt{n}}$

이때 $|m-\overline{x}|\le7$이어야 하므로

$\frac{39.2}{\sqrt{n}}\le7$, $\sqrt{n}\ge5.6$

$\therefore\ n\ge31.36$

따라서 최소 32개를 조사해야 한다.

## 0697 답 ②

표본의 크기를 $n$, 모표준편차를 $\sigma$, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균을 신뢰도 $\alpha$ %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

① 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도가 낮아지면 $k$의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

② 표본의 크기가 커지면 $\sqrt{n}$의 값이 커지고, 신뢰도가 낮아지면 $k$의 값이 작아지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

③ 표본평균의 값은 신뢰구간의 길이에 영향을 주지 않는다.

④ 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 커지면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

⑤ 동일한 표본을 사용할 때, 신뢰도가 99 %일 때의 $k$의 값이 신뢰도가 95 %일 때의 $k$의 값보다 크므로 신뢰도 99 %의 신뢰구간은 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 포함한다.

따라서 옳은 것은 ②이다.

## 0698 답 ②

$\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 $m$을 신뢰도 $\alpha$ %로 추정한 신뢰구간의 길이는 각각 다음과 같다.

① $2k\times\frac{5}{\sqrt{25}}=2k$ ② $2k\times\frac{10}{\sqrt{25}}=4k$

③ $2k\times\frac{3}{\sqrt{36}}=k$ ④ $2k\times\frac{6}{\sqrt{36}}=2k$

⑤ $2k\times\frac{9}{\sqrt{36}}=3k$

따라서 신뢰구간의 길이가 가장 긴 것은 ②이다.

## 0699 답 $\frac{1}{9}$

처음 표본의 크기를 $n$, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모표준편차가 $\sigma$이므로 모평균 $m$을 신뢰도 $\alpha$ %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이때 표본의 크기가 $a$배, 즉 $an$일 때 신뢰구간의 길이는 3배가 되므로

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{an}}=3\times2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\sqrt{a}=\frac{1}{3}$

$\therefore\ a=\frac{1}{9}$

## 0700 답 ④

표본의 크기가 150, 표본비율이 $\frac{60}{150}=0.4$이고, 표본의 크기는 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.4-1.96\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{150}}\le p\le0.4+1.96\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{150}}$

$\therefore\ 0.3216\le p\le0.4784$

## 0701 답 3.48

표본의 크기가 900, 표본비율 $\hat{p}=\frac{810}{900}=0.9$이고, 표본의 크기는 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.9-2.58\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{900}}\le p\le0.9+2.58\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{900}}$

이 신뢰구간이 $\hat{p}-c\le p\le\hat{p}+c$와 같으므로

$0.9-2.58\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{900}}=\hat{p}-c$, $0.9+2.58\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{900}}=\hat{p}+c$

$\therefore\ c=2.58\sqrt{\dfrac{0.9\times0.1}{900}}=0.0258$

$\therefore\ \hat{p}+100c=0.9+2.58=3.48$

## 0702 답 82

표본의 크기가 400, 표본비율이 $\dfrac{320}{400}=0.8$이고, 표본의 크기는 충분히 크므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 하면 모비율 $p$에 대한 신뢰도 $\alpha\,\%$의 신뢰구간은

$0.8-k\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{400}}\le p\le0.8+k\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{400}}$

이 신뢰구간이 $0.7732\le p\le0.8268$과 같으므로

$0.8-k\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{400}}=0.7732,\ 0.8+k\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{400}}=0.8268$

즉, $k\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{400}}=0.0268$이므로 $k=1.34$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.34)=0.41$이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le1.34)=\mathrm{P}(-1.34\le Z\le1.34)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le1.34)$

$=2\times0.41=0.82$

따라서 $\dfrac{\alpha}{100}=0.82$이므로 $\alpha=82$

## 0703 답 ③

표본비율이 0.1이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.1-2.58\sqrt{\dfrac{0.1\times0.9}{n}}\le p\le0.1+2.58\sqrt{\dfrac{0.1\times0.9}{n}}$

이 신뢰구간이 $0.0226\le p\le0.1774$와 같으므로

$0.1-2.58\sqrt{\dfrac{0.1\times0.9}{n}}=0.0226$

$0.1+2.58\sqrt{\dfrac{0.1\times0.9}{n}}=0.1774$

따라서 $2.58\sqrt{\dfrac{0.1\times0.9}{n}}=0.0774$이므로

$\sqrt{n}=10\qquad\therefore\ n=100$

## 0704 답 75

표본비율이 0.75이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.75-1.96\sqrt{\dfrac{0.75\times0.25}{n}}\le p\le0.75+1.96\sqrt{\dfrac{0.75\times0.25}{n}}$ …… ⓘ

이 신뢰구간이 $0.652\le p\le0.848$과 같으므로

$0.75-1.96\sqrt{\dfrac{0.75\times0.25}{n}}=0.652$

$0.75+1.96\sqrt{\dfrac{0.75\times0.25}{n}}=0.848$

따라서 $1.96\sqrt{\dfrac{0.75\times0.25}{n}}=0.098$이므로

$\sqrt{\dfrac{n}{3}}=5\qquad\therefore\ n=75$ …… ⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간을 $n$에 대하여 나타내기 | 50 % |
| ⓘⓘ $n$의 값 구하기 | 50 % |

## 0705 답 400

표본비율이 0.9이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$를 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\sqrt{\dfrac{0.9\times0.1}{n}}$

신뢰구간의 길이가 0.0588 이하이어야 하므로

$2\times1.96\sqrt{\dfrac{0.9\times0.1}{n}}\le0.0588$

$\sqrt{n}\ge20\qquad\therefore\ n\ge400$

따라서 $n$의 최솟값은 400이다.

## 0706 답 ⑤

표본의 크기가 2100, 표본비율이 0.3이고, 표본의 크기는 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\sqrt{\dfrac{0.3\times0.7}{2100}}=0.0516$

## 0707 답 ②

표본의 크기가 100, 표본비율이 $\dfrac{50+30}{100}=\dfrac{80}{100}=0.8$이고 표본의 크기가 충분히 클 때, 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a\le p\le b$이므로 그 신뢰구간의 길이는

$b-a=2\times1.96\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{100}}=0.1568$

$\therefore\ 5000(b-a)=5000\times0.1568=784$

## 0708 답 196

표본의 크기가 $n$, 표본비율이 0.5일 때, 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a\le p\le b$이므로 그 신뢰구간의 길이는

$b-a=2\times1.96\sqrt{\dfrac{0.5\times0.5}{n}}=\dfrac{1.96}{\sqrt{n}}$

이때 $b-a=0.14$이므로

$\dfrac{1.96}{\sqrt{n}}=0.14,\ \sqrt{n}=14$

$\therefore\ n=196$

## 0709 답 900

표본비율이 0.2이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.2-2.58\sqrt{\dfrac{0.2\times0.8}{n}}\le p\le0.2+2.58\sqrt{\dfrac{0.2\times0.8}{n}}$

$-2.58\sqrt{\dfrac{0.2\times0.8}{n}}\le p-0.2\le2.58\sqrt{\dfrac{0.2\times0.8}{n}}$

$|p-0.2|\le2.58\sqrt{\dfrac{0.2\times0.8}{n}}$

이때 모비율과 표본비율의 차가 0.0344 이하이어야 하므로

$2.58\sqrt{\dfrac{0.2\times0.8}{n}}\le0.0344$

$\sqrt{n}\ge30\qquad\therefore\ n\ge900$

따라서 $n$의 최솟값은 900이다.

## 0710 답 0.0392

표본의 크기가 600, 표본비율이 0.4이고, 표본의 크기는 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$0.4-1.96\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{600}}\le p\le0.4+1.96\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{600}}$$

$$-1.96\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{600}}\le p-0.4\le1.96\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{600}}$$

$$|p-0.4|\le1.96\sqrt{\frac{0.4\times0.6}{600}}$$

$$|p-0.4|\le0.0392$$

따라서 모비율과 표본비율의 차의 최댓값은 0.0392이다.

## 0711 답 ④

표본비율이 0.1이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$0.1-2.58\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}\le p\le0.1+2.58\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}$$

$$-2.58\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}\le p-0.1\le2.58\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}$$

$$|p-0.1|\le2.58\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}$$

모비율과 표본비율의 차가 3.87 % 이하이어야 하므로

$$2.58\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}\le0.0387$$

$$\sqrt{n}\ge20 \qquad \therefore\ n\ge400$$

따라서 $n$의 최솟값은 400이다.

# AB 유형 점검 124~126쪽

## 0712 답 45

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=5$이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\mathrm{E}(\overline{X}^2)-\{\mathrm{E}(\overline{X})\}^2=30-5^2=5$

표본의 크기가 4이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{4}=5 \qquad \therefore\ \mathrm{V}(X)=20$$

따라서 $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$에서

$\mathrm{E}(X^2)=\mathrm{V}(X)+\{\mathrm{E}(X)\}^2=20+5^2=45$

## 0713 답 ④

과일 바구니 1개를 임의로 택할 때, 과일 바구니의 무게를 확률변수 $X$라 하고 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{4}=2$$

$$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$

$$=1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{4}-2^2=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

표본의 크기가 $n$이므로

$$\sigma(\overline{X})=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}$$

$$\therefore\ \sigma(6\overline{X}-2)=|6|\sigma(\overline{X})=6\times\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

이때 $\sigma(6\overline{X}-2)=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{n}=6$$

$$\therefore\ n=36$$

## 0714 답 16

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ 16^2)$을 따르고 표본의 크기가 $n$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(60,\ \frac{16^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(60,\ \left(\frac{16}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-60}{\frac{16}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\le64)\le0.8413$에서

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{64-60}{\frac{16}{\sqrt{n}}}\right)\le0.8413$$

$$\mathrm{P}\left(Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)\le0.8413$$

$$\mathrm{P}(Z\le0)+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)\le0.8413$$

$$0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)\le0.8413$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{4}\right)\le0.3413$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1)=0.3413$이므로

$$\frac{\sqrt{n}}{4}\le1,\ \sqrt{n}\le4 \qquad \therefore\ n\le16$$

따라서 $n$의 최댓값은 16이다.

## 0715 답 16

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(50,\ \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(50,\ \frac{\sigma^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(50,\ \left(\frac{\sigma}{4}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-50}{\frac{\sigma}{4}}$으로 놓으면 $\mathrm{P}(50\le\overline{X}\le56)=0.4332$에서

$$\mathrm{P}\left(\frac{50-50}{\frac{\sigma}{4}}\le Z\le\frac{56-50}{\frac{\sigma}{4}}\right)=0.4332$$

$$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{24}{\sigma}\right)=0.4332$$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$$\frac{24}{\sigma}=1.5 \qquad \therefore\ \sigma=16$$

## 0716 답 ③

모비율이 0.55, 표본의 크기는 $n$이므로

$$\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{0.55\times0.45}{n}=\frac{99}{400n}$$

이때 $V(\hat{p})=\frac{3}{400}$이므로

$\frac{99}{400n}=\frac{3}{400}$, $3n=99$

$\therefore n=33$

## 0717 답 15

임직원 400명 중에서 새로운 교육 제도에 대하여 찬성하는 사람의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율이 0.2, 표본의 크기는 400이므로

$E(\hat{p})=0.2$

$V(\hat{p})=\frac{0.2\times0.8}{400}=0.0004=0.02^2$

표본의 크기 400은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.2,\ 0.02^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\hat{p}-0.2}{0.02}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0,\ 1)$을 따르므로 $P\left(\hat{p}\ge\frac{\alpha}{100}\right)=0.9938$에서

$P\left(Z\ge\frac{\frac{\alpha}{100}-0.2}{0.02}\right)=0.9938$

$P\left(Z\ge\frac{\alpha-20}{2}\right)=0.9938$, $P\left(Z\le\frac{20-\alpha}{2}\right)=0.9938$

$P(Z\le0)+P\left(0\le Z\le\frac{20-\alpha}{2}\right)=0.9938$

$0.5+P\left(0\le Z\le\frac{20-\alpha}{2}\right)=0.9938$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{20-\alpha}{2}\right)=0.4938$

이때 $P(0\le Z\le2.5)=0.4938$이므로

$\frac{20-\alpha}{2}=2.5$ $\therefore \alpha=15$

## 0718 답 ②

표본의 크기가 49, 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 5이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{49}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{49}}$

$\therefore \overline{x}-1.4\le m\le\overline{x}+1.4$

이 신뢰구간이 $a\le m\le\frac{6}{5}a$와 같으므로

$\overline{x}-1.4=a$ ····· ㉠

$\overline{x}+1.4=\frac{6}{5}a$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\overline{x}=15.4$, $a=14$

## 0719 답 ③

표본의 크기가 $n$, 표본평균이 64, 모표준편차가 5이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$64-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le64+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

이때 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $63.02\le m\le64.98$이므로

$64-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=63.02$, $64+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=64.98$

따라서 $1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}=0.98$이므로

$\sqrt{n}=10$ $\therefore n=100$

## 0720 답 2.58

표본의 크기가 36, 모표준편차가 3이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\times\frac{3}{\sqrt{36}}=2.58$

## 0721 답 ②

모표준편차를 $\sigma$, $P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 표본의 크기가 4일 때, 모평균을 신뢰도 $\alpha$ %로 추정한 신뢰구간의 길이가 2.45이므로

$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{4}}=2.45$ $\therefore k\sigma=2.45$

한편 표본의 크기가 $n$일 때, 모평균을 신뢰도 $\alpha$ %로 추정한 신뢰구간의 길이가 0.49가 되려면

$2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.49$, $2\times\frac{2.45}{\sqrt{n}}=0.49$

$\sqrt{n}=10$ $\therefore n=100$

## 0722 답 196

표본의 크기를 $n$, 모평균을 $m$, 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 300이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{300}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{300}{\sqrt{n}}$

$-\frac{588}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{588}{\sqrt{n}}$ $\therefore |m-\overline{x}|\le\frac{588}{\sqrt{n}}$

이때 $|m-\overline{x}|\le42$이어야 하므로

$\frac{588}{\sqrt{n}}\le42$, $\sqrt{n}\ge14$ $\therefore n\ge196$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 196이다.

## 0723 답 ①

$P(|Z|\le k)=\frac{x}{100}$라 하면 모평균 $m$을 신뢰도 $x$ %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. 표본의 크기가 일정할 때, 신뢰도가 높아지면 $k$의 값이 커지므로 $b-a$의 값은 커진다.

ㄴ. 신뢰도가 일정할 때, 표본의 크기가 2배가 되면 $2n$이므로 신뢰구간의 길이는

$2k\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\times2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

즉, $b-a$의 값은 $\frac{\sqrt{2}}{2}$배가 된다.

ㄷ. 신뢰도가 높아지면 $k$의 값이 커지고, 표본의 크기가 커지면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 $b-a$의 값은 반드시 커진다고 할 수 없다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

## 0724 답 ④

표본의 크기가 100, 표본비율이 0.9이고, 표본의 크기는 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.9-2.58\times\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{100}}\le p\le0.9+2.58\times\sqrt{\frac{0.9\times0.1}{100}}$

$\therefore\ 0.8226\le p\le0.9774$

## 0725 답 225

표본의 크기가 300, 표본비율이 $\hat{p}$이고, 표본의 크기는 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}}\le p\le\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}}$

이 신뢰구간이 $0.701\le p\le0.799$와 같으므로

$\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}}=0.701$ …… ㉠

$\hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{300}}=0.799$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면 $2\hat{p}=1.5$ $\therefore\ \hat{p}=0.75$

따라서 구하는 학생 수는 $300\times0.75=225$

## 0726 답 320

주민 400명 중에서 올림픽 유치를 희망하는 주민의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 표본의 크기가 400일 때, 모비율 $p$를 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는 0.1032이고, 표본의 크기는 충분히 크므로

$2\times2.58\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{400}}=0.1032$

$\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}=0.4,\ \hat{p}(1-\hat{p})=0.16$

$25\hat{p}^2-25\hat{p}+4=0,\ (5\hat{p}-1)(5\hat{p}-4)=0$

$\therefore\ \hat{p}=\frac{1}{5}$ 또는 $\hat{p}=\frac{4}{5}$

이때 $\hat{p}=\frac{n}{400}$이므로 $\frac{n}{400}=\frac{1}{5}$ 또는 $\frac{n}{400}=\frac{4}{5}$

$\therefore\ n=80$ 또는 $n=320$

이때 $n>100$이므로 $n=320$

## 0727 답 3

확률의 총합은 1이므로

$a+2a+3a=1,\ 6a=1$ $\therefore\ a=\frac{1}{6}$ …… ⓘ

따라서 확률변수 $X$에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{2}=\frac{11}{3}$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{3}+5^2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{11}{3}\right)^2$

$=\frac{47}{3}-\frac{121}{9}=\frac{20}{9}$

$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{20}{9}}=\frac{2\sqrt{5}}{3}$ …… ⓘⓘ

이때 표본의 크기가 5이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=\frac{11}{3},\ \sigma(\overline{X})=\frac{\frac{2\sqrt{5}}{3}}{\sqrt{5}}=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \mathrm{E}(\overline{X})-\sigma(\overline{X})=\frac{11}{3}-\frac{2}{3}=3$ …… ⓘⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ $a$의 값 구하기 | 20 % |
| ⓘⓘ $\mathrm{E}(X)$, $\sigma(X)$ 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ $\mathrm{E}(\overline{X})-\sigma(\overline{X})$의 값 구하기 | 40 % |

## 0728 답 124

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 2^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 임의 추출한 커피 분말 16봉지의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(20,\ \frac{2^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(20,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다. …… ⓘ

$Z=\frac{\overline{X}-20}{\frac{1}{2}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 한 상자가 불량품으로 판정될 확률은

$\mathrm{P}(16\overline{X}\le300)=\mathrm{P}(\overline{X}\le18.75)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le\frac{18.75-20}{\frac{1}{2}}\right)$

$=\mathrm{P}(Z\le-2.5)$

$=\mathrm{P}(Z\ge2.5)$

$=\mathrm{P}(Z\ge0)-\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)$

$=0.5-0.4938$

$=0.0062$ …… ⓘⓘ

따라서 구하는 상자의 개수는

$20000\times0.0062=124$ …… ⓘⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ 커피 분말 16봉지의 무게의 평균을 $\overline{X}$로 놓고 표본평균 $\overline{X}$가 따르는 정규분포 구하기 | 20 % |
| ⓘⓘ 한 상자가 불량품으로 판정될 확률 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘⓘ 상자의 개수 구하기 | 40 % |

## 0729 답 108

모비율을 $p$라 하면 표본의 크기가 $n$, 표본비율이 0.75이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.75-2.58\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{n}}\le p\le0.75+2.58\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{n}}$ …… ⓘ

$-2.58\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{n}}\le p-0.75\le2.58\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{n}}$

$|p-0.75|\le2.58\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{n}}$

이때 모비율과 표본비율의 차가 0.1075 이하이어야 하므로

$2.58\sqrt{\frac{0.75\times0.25}{n}}\le0.1075$

$\sqrt{\frac{n}{3}}\ge6$ $\therefore\ n\ge108$

따라서 $n$의 최솟값은 108이다. …… ⓘⓘ

**채점 기준**

| | |
|---|---|
| ⓘ 모비율에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간 구하기 | 40 % |
| ⓘⓘ $n$의 최솟값 구하기 | 60 % |

## 실력 향상 127쪽

### 0730 답 ①

정규분포 $N(50, 8^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 16인 표본의 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(50, \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $N(50, 2^2)$을 따른다.

또 정규분포 $N(75, \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 25인 표본의 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $N\left(75, \frac{\sigma^2}{25}\right)$, 즉 $N\left(75, \left(\frac{|\sigma|}{5}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-50}{2}$, $Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-75}{\frac{|\sigma|}{5}}$로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\le 53)+P(\overline{Y}\le 69)=1$에서

$$P\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{53-50}{2}\right)+P\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{69-75}{\frac{|\sigma|}{5}}\right)=1$$

$$P(Z_{\overline{X}}\le 1.5)+P\left(Z_{\overline{Y}}\le-\frac{30}{|\sigma|}\right)=1$$

$$P(Z_{\overline{X}}\le 1.5)+P\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{30}{|\sigma|}\right)=1$$

즉, $1.5=\frac{30}{|\sigma|}$이므로 $|\sigma|=20$

$$\begin{aligned}\therefore P(\overline{Y}\ge 71)&=P\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{71-75}{4}\right)\\&=P(Z_{\overline{Y}}\ge-1)\\&=P(Z_{\overline{Y}}\le 1)\\&=P(Z_{\overline{Y}}\le 0)+P(0\le Z_{\overline{Y}}\le 1)\\&=0.5+0.3413=0.8413\end{aligned}$$

### 0731 답 ②

표본의 크기가 100, 모표준편차가 $\sigma$이므로 표본평균이 $\overline{x_1}$일 때, 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x_1}-1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}\le m\le\overline{x_1}+1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{100}}$$

$\therefore \overline{x_1}-0.196\sigma\le m\le\overline{x_1}+0.196\sigma$

이 신뢰구간이 $a\le m\le b$와 같으므로

$a=\overline{x_1}-0.196\sigma$, $b=\overline{x_1}+0.196\sigma$

표본의 크기가 400, 모표준편차가 $\sigma$이므로 표본평균이 $\overline{x_2}$일 때, 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$\overline{x_2}-2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}\le m\le\overline{x_2}+2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{400}}$$

$\therefore \overline{x_2}-0.129\sigma\le m\le\overline{x_2}+0.129\sigma$

이 신뢰구간이 $c\le m\le d$와 같으므로

$c=\overline{x_2}-0.129\sigma$

$a=c$에서 $\overline{x_1}-0.196\sigma=\overline{x_2}-0.129\sigma$

$\overline{x_1}-\overline{x_2}=0.067\sigma$

이때 $\overline{x_1}-\overline{x_2}=1.34$이므로

$0.067\sigma=1.34$ $\therefore \sigma=20$

$$\begin{aligned}\therefore b-a&=(\overline{x_1}+0.196\sigma)-(\overline{x_1}-0.196\sigma)=0.392\sigma\\&=0.392\times 20=7.84\end{aligned}$$

### 0732 답 ④

$P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 $f(n, \alpha)=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. 표본의 크기 $n$이 일정할 때, 신뢰도가 높아지면 신뢰구간의 길이가 길어지므로

$\alpha<\beta$이면 $f(n, \alpha)<f(n, \beta)$

ㄴ. 신뢰도 $\alpha$ %가 일정할 때, 표본의 크기가 커지면 신뢰구간의 길이는 짧아진다.

이때 $n>2$이면 $n^2>2n$이므로

$f(n^2, \alpha)<f(2n, \alpha)$

ㄷ. $f(16n, \alpha)=2k\times\frac{\sigma}{\sqrt{16n}}=\frac{1}{4}\times 2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$=\frac{1}{4}f(n, \alpha)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

### 0733 답 400

어느 모집단에서 임의추출한 100명의 표본비율을 $\hat{p}_1$,

$P(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 표본의 크기가 100으로 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 $\alpha$ %의 신뢰구간은

$$\hat{p}_1-k\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{100}}\le p\le\hat{p}_1+k\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{100}}$$

이 신뢰구간이 $\frac{1}{5}-c\le p\le\frac{1}{5}+c$와 같으므로

$$\hat{p}_1-k\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{100}}=\frac{1}{5}-c \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$\hat{p}_1+k\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{100}}=\frac{1}{5}+c \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠+㉡을 하면 $2\hat{p}_1=\frac{2}{5}$ $\therefore \hat{p}_1=\frac{1}{5}$

㉡−㉠을 하면 $2k\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{100}}=2c$

$$\therefore c=k\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{100}}=k\sqrt{\frac{\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}}{100}}=\frac{k}{25}$$

또 같은 모집단에서 임의추출한 $n$명의 표본비율을 $\hat{p}_2$이라 하면 표본의 크기가 $n$이므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 $\alpha$ %의 신뢰구간은

$$\hat{p}_2-k\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}\le p\le\hat{p}_2+k\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}$$

이 신뢰구간이 $\frac{1}{10}-\frac{3}{8}c\le p\le\frac{1}{10}+\frac{3}{8}c$와 같으므로

$$\hat{p}_2-k\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}=\frac{1}{10}-\frac{3}{8}c \quad \cdots\cdots ㉢$$

$$\hat{p}_2+k\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}=\frac{1}{10}+\frac{3}{8}c \quad \cdots\cdots ㉣$$

㉢+㉣을 하면 $2\hat{p}_2=\frac{1}{5}$ $\therefore \hat{p}_2=\frac{1}{10}$

㉣−㉢을 하면 $2k\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}=\frac{3}{4}c$

$$\therefore c=\frac{8}{3}k\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}=\frac{8}{3}k\sqrt{\frac{\frac{1}{10}\times\frac{9}{10}}{n}}=\frac{4k}{5\sqrt{n}}$$

이때 $c=\frac{k}{25}$이므로

$\frac{k}{25}=\frac{4k}{5\sqrt{n}}$, $\sqrt{n}=20$ $\therefore n=400$

# 01 / 중복순열과 같은 것이 있는 순열 2~7쪽

## 중단원 기출 문제 1회

**1** 답 ③

${}_nC_2+{}_n\Pi_2=92$에서

$\frac{n(n-1)}{2}+n^2=92$, $3n^2-n-184=0$

$(3n+23)(n-8)=0$

$\therefore n=8$ ($\because n$은 자연수)

**2** 답 672

7명의 학생 중에서 5명을 뽑는 경우의 수는 ${}_7C_5={}_7C_2=21$

뽑은 5명의 학생을 2개의 학급에 배정하는 경우의 수는 2개의 학급에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_5=2^5=32$

따라서 구하는 경우의 수는 $21\times32=672$

**3** 답 ④

구하는 경우의 수는 지민이가 가위를 냈다고 생각하고 가위, 바위, 보의 3개에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$

**4** 답 ③

짝수의 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 4, 6의 2가지

나머지 자리에 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 자연수의 개수는 $2\times125=250$

**5** 답 ③

(i) 0, 2, 4, 6에서 택하여 자연수를 만드는 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4, 6의 3가지

나머지 자리에 4개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 세 자리의 자연수의 개수는 $3\times16=48$

(ii) 6을 제외하고 0, 2, 4에서 택하여 자연수를 만드는 경우

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 2, 4의 2가지

나머지 자리에 3개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_3\Pi_2=3^2=9$

따라서 숫자 6을 포함하지 않는 세 자리의 자연수의 개수는

$2\times9=18$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는 $48-18=30$

**6** 답 ④

구하는 신호의 개수는 ${}_3\Pi_6=3^6=729$

**7** 답 ④

두 집합 $A$, $B$는 서로소이므로 전체집합 $U$의 원소 1, 2, 3, 4, 5는 세 집합 $A$, $B$, $(A\cup B)^C$ 중에서 어느 하나의 원소이다.

따라서 구하는 경우의 수는 3개의 집합에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$

**8** 답 ②

$n(A-B)=3$, $n(A\cap B)=1$이므로 전체집합 $U$의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 중에서 4개를 택하여 그중 3개는 $A-B$의 원소로, 1개는 $A\cap B$의 원소로 하는 경우의 수는

${}_7C_4\times{}_4C_3={}_7C_3\times{}_4C_1=35\times4=140$

두 집합 $A-B$, $A\cap B$에 속하지 않는 나머지 3개의 원소는 두 집합 $B-A$, $(A\cup B)^C$ 중에서 어느 하나의 원소이므로 나머지 3개의 원소가 속하는 집합을 정하는 경우의 수는 2개의 집합에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같다.

$\therefore {}_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 구하는 경우의 수는 $140\times8=1120$

**9** 답 ③

$f(e)\neq1$이므로 $f(e)$의 값이 될 수 있는 수는 2, 3, 4의 3가지

또 $f(a)=4$이므로 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 $X$의 원소 $b$, $c$, $d$에 대응시키는 경우의 수는

${}_4\Pi_3=4^3=64$

따라서 구하는 함수의 개수는 $3\times64=192$

**10** 답 112

(i) $f(1)=1$인 함수의 개수는 집합 $X$의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 $X$의 원소 2, 3, 4에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

(ii) $f(4)=4$인 함수의 개수는 집합 $X$의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 $X$의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\Pi_3=4^3=64$

(iii) $f(1)=1$, $f(4)=4$인 함수의 개수는 집합 $X$의 원소 1, 2, 3, 4의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 $X$의 원소 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 함수의 개수는 $64+64-16=112$

## 11 답 ④

구하는 경우의 수는

$\frac{9!}{5!\times4!}=126$

## 12 답 44

$a$, $a$, $b$, $b$, $b$, $c$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times3!}=60$

(i) 양 끝에 $a$가 오는 경우

나머지 문자 $b$, $b$, $b$, $c$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}=4$

(ii) 양 끝에 $b$가 오는 경우

나머지 문자 $a$, $a$, $b$, $c$를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!}=12$

(i), (ii)에서 양 끝에 서로 같은 문자가 오도록 배열하는 경우의 수는

$4+12=16$

따라서 구하는 경우의 수는

$60-16=44$

## 13 답 ①

$b$, $d$의 순서가 정해져 있으므로 $b$, $d$를 모두 X로 바꾸어 생각하여 $a$, X, X, $c$, $e$를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X를 $b$로, 두 번째 X를 $d$로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

## 14 답 420

s, c, c의 순서가 정해져 있으므로 s, c, c를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, X, X, i, e, e, n을 일렬로 배열한 후 첫 번째 X를 c로, 두 번째 X를 s로, 세 번째 X를 c로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\frac{7!}{3!\times2!}=420$

## 15 답 ①

(i) 일의 자리에 1이 오는 경우

나머지 숫자 1, 2, 2, 2, 3, 4를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{3!}=120$

(ii) 일의 자리에 3이 오는 경우

나머지 숫자 1, 1, 2, 2, 2, 4를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times3!}=60$

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$120+60=180$

## 16 답 130

여덟 개의 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3에서 숫자 1, 2, 3이 적어도 1개씩 포함되도록 5개를 택하는 경우는

(1, 1, 1, 2, 3) 또는 (1, 1, 2, 2, 3) 또는 (1, 1, 2, 3, 3)

또는 (1, 2, 2, 3, 3) 또는 (1, 2, 3, 3, 3)

(i) 1, 1, 1, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

(ii) 1, 1, 2, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

(iii) 1, 1, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

(iv) 1, 2, 2, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!\times2!}=30$

(v) 1, 2, 3, 3, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{3!}=20$

(i)~(v)에서 구하는 자연수의 개수는

$20+30+30+30+20=130$

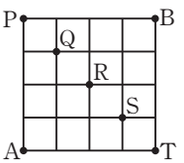
## 17 답 90

구하는 경우의 수는

$\frac{6!}{4!\times2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=15\times6=90$

## 18 답 ④

오른쪽 그림과 같이 다섯 개의 지점 P, Q, R, S, T를 잡으면 수빈이와 보름이는 지점 P, Q, R, S, T 중 한 지점에서 서로 만난다.




(i) P 지점에서 만나는 경우의 수는 $1\times1=1$

(ii) Q 지점에서 만나는 경우의 수는

$\left(\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{3!}\right)\times\left(\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{3!}\right)=16\times16=256$

(iii) R 지점에서 만나는 경우의 수는

$\left(\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}\right)\times\left(\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}\right)=36\times36=1296$

(iv) S 지점에서 만나는 경우의 수는

$\left(\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{3!}\right)\times\left(\frac{4!}{3!}\times\frac{4!}{3!}\right)=16\times16=256$

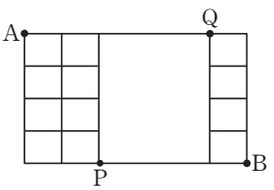
(v) T 지점에서 만나는 경우의 수는 $1\times1=1$

(i)~(v)에서 구하는 경우의 수는

$1+256+1296+256+1=1810$

## 19 답 20

오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단거리로 가는 경우는




A → P → B 또는 A → Q → B

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$\frac{6!}{2!\times4!}\times1=15$

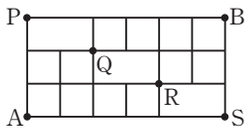
(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$1\times\frac{5!}{4!}=5$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$15+5=20$

## 20 답 ①




오른쪽 그림과 같이 네 지점 P, Q, R, S를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는

A → P → B 또는 A → Q → B

또는 A → R → B 또는 A → S → B

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$1\times1=1$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{5!}{4!}=6\times5=30$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{4!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=5\times6=30$

(iv) A → S → B로 가는 경우의 수는

$1\times1=1$

(i)~(iv)에서 구하는 경우의 수는

$1+30+30+1=62$

# 중단원 기출 문제 2회

## 1 답 ⑤

구하는 경우의 수는 3개의 시설에서 5개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_5=3^5=243$

## 2 답 160

두 접시 A, B에 담을 빵을 1개씩 택하는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$

나머지 3개의 빵을 담는 경우의 수는 2개의 접시에서 3개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로 ${}_2\Pi_3=2^3=8$

따라서 구하는 경우의 수는

$20\times8=160$

## 3 답 100

천의 자리에 올 수 있는 숫자는 3, 4의 2가지

홀수의 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 3의 2가지

나머지 자리에 5개의 숫자에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 일렬로 배열하는 경우의 수는

${}_5\Pi_2=5^2=25$

따라서 구하는 자연수의 개수는

$2\times2\times25=100$

## 4 답 252

(i) 네 자리의 자연수는 1, 2, 3, 4의 4개의 숫자에서 중복을 허용하여 4개를 택하여 일렬로 배열하면 되므로 그 개수는

${}_4\Pi_4=4^4=256$

(ii) 모두 같은 숫자로만 이루어진 네 자리의 자연수는

1111, 2222, 3333, 4444의 4가지

(i), (ii)에서 구하는 자연수의 개수는

$256-4=252$

## 5 답 ②

두 부호를 1개, 2개, 3개, …, 7개 사용하여 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 ${}_2\Pi_1$, ${}_2\Pi_2$, ${}_2\Pi_3$, …, ${}_2\Pi_7$이므로 구하는 신호의 개수는

${}_2\Pi_1+{}_2\Pi_2+{}_2\Pi_3+{}_2\Pi_4+{}_2\Pi_5+{}_2\Pi_6+{}_2\Pi_7$

$=2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7$

$=2+4+8+16+32+64+128$

$=254$

## 6 답 5

네 깃발을 1번, 2번, 3번, …, $n$번 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는 각각 ${}_4\Pi_1$, ${}_4\Pi_2$, ${}_4\Pi_3$, …, ${}_4\Pi_n$이므로 깃발을 $n$번 이하로 들어 올려서 만들 수 있는 신호의 개수는

${}_4\Pi_1+{}_4\Pi_2+{}_4\Pi_3+\cdots+{}_4\Pi_n=4^1+4^2+4^3+\cdots+4^n$

$n=4$일 때, $4^1+4^2+4^3+4^4=4+16+64+256$

$=340<1000$

$n=5$일 때, $4^1+4^2+4^3+4^4+4^5=4+16+64+256+1024$

$=1364>1000$

따라서 $n$의 최솟값은 5이다.

## 7 답 ⑤

$A\subset B$이므로 전체집합 $U$의 원소 $a$, $b$, $c$, $d$는 세 집합 $A$, $B-A$, $B^C$ 중에서 어느 하나의 원소이다.

따라서 구하는 경우의 수는 3개의 집합에서 4개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_4=3^4=81$

## 8 답 64

$A\cup B=U$이므로 $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

이때 $A\cap B=\varnothing$이므로 집합 $A\cup B$의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6은 두 집합 $A$, $B$ 중에서 어느 하나의 원소이다.

따라서 구하는 경우의 수는 2개의 집합에서 6개를 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_2\Pi_6=2^6=64$

## 9 답 64

$f(1)+f(2)=8$이므로

$f(1)=1$, $f(2)=7$ 또는 $f(1)=3$, $f(2)=5$

또는 $f(1)=5$, $f(2)=3$ 또는 $f(1)=7$, $f(2)=1$

각각의 경우에 대하여 함수의 개수는 집합 $Y$의 원소 1, 3, 5, 7의 4개에서 중복을 허용하여 2개를 택하여 집합 $X$의 원소 0, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4\Pi_2=4^2=16$

따라서 구하는 함수의 개수는

$4\times16=64$

## 10 답 ⑤

$f(2)\le4$이므로 $f(2)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3, 4의 4가지

또 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 3개를 택하여 집합 $X$의 원소 1, 3, 4에 대응시키는 경우의 수는

${}_5\Pi_3=5^3=125$

따라서 구하는 함수의 개수는

$4\times125=500$

## 11 답 630

구하는 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!\times2!\times2!}=630$

## 12 답 2520

9개의 공을 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\dfrac{9!}{3!\times2!\times3!}=5040$

(i) 흰 공이 모두 서로 이웃하지 않는 경우

흰 공을 제외한 나머지 6개의 공을 일렬로 배열한 후 그 사이사이와 양 끝의 7개의 자리에 3개를 택하여 흰 공을 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$\dfrac{6!}{2!\times3!}\times{}_7C_3=60\times35=2100$

(ii) 흰 공이 모두 서로 이웃하는 경우

흰 공을 한 묶음으로 생각하여 나머지 6개의 공과 함께 일렬로 배열하면 되므로 그 경우의 수는

$\dfrac{7!}{2!\times3!}=420$

(i), (ii)에서 흰 공이 모두 서로 이웃하지 않거나 모두 서로 이웃하는 경우의 수는 $2100+420=2520$

따라서 구하는 경우의 수는

$5040-2520=2520$

## 13 답 3024

a, t, i, o, n의 순서가 정해져 있으므로 a, t, i, o, n을 모두 X로 바꾸어 생각하여 e, d, u, c, X, X, X, X, X를 일렬로 배열한 후 첫 번째, 두 번째, 세 번째, 네 번째, 다섯 번째 X를 각각 a, t, i, o, n으로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$\dfrac{9!}{5!}=3024$

## 14 답 ④

A, B를 제외한 5가지 업무 중에서 오늘 해야 할 업무 2가지를 택하는 경우의 수는

${}_5C_2=10$

오늘 해야 할 업무를 A, B, C, D라 하면 A, B의 순서가 정해져 있으므로 A, B를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, X, C, D를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X는 A로, 두 번째 X는 B로 바꾸면 되므로 택한 업무의 순서를 정하는 경우의 수는

$\dfrac{4!}{2!}=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times12=120$

## 15 답 7

5의 배수이므로 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 5이다.

나머지 자리에 올 수 있는 숫자는

(2, 2, 2) 또는 (2, 2, 4) 또는 (2, 4, 4)

(i) 2, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는 1

(ii) 2, 2, 4를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}=3$

(iii) 2, 4, 4를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{3!}{2!}=3$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수의 개수는

$1+3+3=7$

## 16 답 ③

(i) 1□□□□ 꼴인 경우

나머지 자리에 올 수 있는 숫자는

(0, 1, 2, 2) 또는 (0, 1, 2, 3) 또는 (0, 2, 2, 2) 또는 (0, 2, 2, 3) 또는 (1, 2, 2, 2) 또는 (1, 2, 2, 3) 또는 (2, 2, 2, 3)

ⓘ 0, 1, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

ⓘⓘ 0, 1, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!=24$

ⓘⓘⓘ 0, 2, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$

ⓘⓥ 0, 2, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

ⓥ 1, 2, 2, 2를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$

ⓥⓘ 1, 2, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!}=12$

ⓥⓘⓘ 2, 2, 2, 3을 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{3!}=4$

ⓘ~ⓥⓘⓘ에서 1□□□□ 꼴인 자연수의 개수는

$12+24+4+12+4+12+4=72$

(ii) 2□□□□ 꼴인 경우

20113보다 작은 수는 20112뿐이다.

(i), (ii)에서 20113보다 작은 자연수의 개수는

$72+1=73$

따라서 20113은 74번째 수이다.

## 17 답 ③

구하는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times1\times\frac{4!}{3!}=6\times1\times4=24$

## 18 답 ③

(i) A 지점에서 P 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}=6$

(ii) P 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{7!}{4!\times3!}=35$

P 지점에서 Q 지점을 거쳐 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{3!}{2!}=6\times3=18$

따라서 P 지점에서 Q 지점을 거치지 않고 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

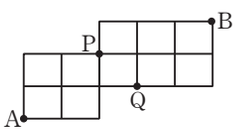
$35-18=17$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$6\times17=102$

## 19 답 42

오른쪽 그림과 같이 두 지점 P, Q를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는




A → P → B 또는 A → Q → B

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{4!}{3!}=6\times4=24$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

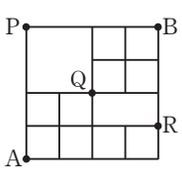
$\left(\frac{3!}{2!}\times1\right)\times\frac{4!}{2!\times2!}=3\times6=18$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$24+18=42$

## 20 답 ④

오른쪽 그림과 같이 세 지점 P, Q, R를 잡으면 A 지점에서 B 지점까지 최단 거리로 가는 경우는




A → P → B 또는 A → Q → B

또는 A → R → B

(i) A → P → B로 가는 경우의 수는

$1\times1=1$

(ii) A → Q → B로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{2!\times2!}\times\frac{4!}{2!\times2!}=6\times6=36$

(iii) A → R → B로 가는 경우의 수는

$\frac{5!}{4!}\times1=5$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$1+36+5=42$

# 02 / 중복조합과 이항정리

8~13쪽

## 중단원 기출 문제 1회

## 1 답 ①

구하는 경우의 수는 3명의 학생에서 9명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_9={}_{11}C_9={}_{11}C_2=55$

## 2 답 78

3종류의 만두에서 중복을 허용하여 $n$개를 사는 경우의 수는

${}_3H_n={}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_2$

즉, ${}_{n+2}C_2=171$이므로 $\frac{(n+2)(n+1)}{2\times1}=171$

$(n+2)(n+1)=342=19\times18$

$\therefore n=17$ ($\because n$은 자연수)

만두를 종류별로 적어도 2개씩 포함하여 17개를 사려면 먼저 만두를 종류별로 각각 2개씩 사고, 나머지 11개의 만두를 사면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 3종류의 만두에서 11개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{11}={}_{13}C_{11}={}_{13}C_2=78$

## 3 답 ①

서로 다른 종류의 케이크 4개를 4개의 그릇에 각각 1개씩 담으면 그릇은 서로 구별된다.

이때 초콜릿을 1개 이상씩 담으려면 먼저 서로 다른 4개의 그릇에 초콜릿을 각각 1개씩 담고, 나머지 2개의 초콜릿을 담으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 4개의 그릇에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2={}_5C_2=10$

## 4 답 ②

$(a+b+c)^n$의 전개식의 항의 개수는 3개의 문자 $a$, $b$, $c$에서 $n$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_n={}_{n+2}C_n={}_{n+2}C_2$

즉, ${}_{n+2}C_2=45$이므로 $\frac{(n+2)(n+1)}{2\times1}=45$

$(n+2)(n+1)=90=10\times9$ $\therefore n=8$ ($\because n$은 자연수)

## 5 답 100

$4<x<y\le9$에서 $x$, $y$의 값을 정하는 경우의 수는 5, 6, 7, 8, 9의 5개의 자연수에서 2개를 택한 후 크기가 작은 수부터 순서대로 $x$, $y$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5C_2=10$

$9<z\le w<14$에서 $z$, $w$의 값을 정하는 경우의 수는 10, 11, 12, 13의 4개의 자연수에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 $z$, $w$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_4H_2={}_5C_2=10$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는
$10\times10=100$

## 6 답 ③

$x\geq3$, $y\geq2$, $z\geq2$인 자연수이므로 $X=x-3$, $Y=y-2$, $Z=z-2$라 하면 $X$, $Y$, $Z$는 음이 아닌 정수이다.
$x=X+3$, $y=Y+2$, $z=Z+2$를 부등식 $x+y+z\leq11$에 대입하면
$(X+3)+(Y+2)+(Z+2)\leq11$
$\therefore X+Y+Z\leq4$
(i) 방정식 $X+Y+Z=0$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $X$, $Y$, $Z$의 순서쌍 $(X, Y, Z)$는 $(0, 0, 0)$의 1개
(ii) 방정식 $X+Y+Z=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $X$, $Y$, $Z$의 순서쌍 $(X, Y, Z)$의 개수는 3개의 문자 $X$, $Y$, $Z$에서 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_1={}_3C_1=3$
(iii) 방정식 $X+Y+Z=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $X$, $Y$, $Z$의 순서쌍 $(X, Y, Z)$의 개수는 3개의 문자 $X$, $Y$, $Z$에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_2={}_4C_2=6$
(iv) 방정식 $X+Y+Z=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $X$, $Y$, $Z$의 순서쌍 $(X, Y, Z)$의 개수는 3개의 문자 $X$, $Y$, $Z$에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$
(v) 방정식 $X+Y+Z=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $X$, $Y$, $Z$의 순서쌍 $(X, Y, Z)$의 개수는 3개의 문자 $X$, $Y$, $Z$에서 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$
(i)~(v)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$1+3+6+10+15=35$

## 7 답 42

$x$, $y$, $z$, $w$가 자연수이므로 $X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$, $W=w-1$이라 하면 $X$, $Y$, $Z$, $W$는 음이 아닌 정수이다.
$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$, $w=W+1$을 방정식 $x+y+z+5w=15$에 대입하면
$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)+5(W+1)=15$
$\therefore X+Y+Z+5W=7$
이때 $W$의 계수가 가장 크므로 $W$가 될 수 있는 수를 구하면
$W=0$ 또는 $W=1$
(i) $W=0$일 때
방정식 $X+Y+Z+5W=7$에서
$X+Y+Z=7$
따라서 순서쌍 $(x, y, z, w)$의 개수는 방정식 $X+Y+Z=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $X$, $Y$, $Z$의 순서쌍 $(X, Y, Z)$의 개수, 즉 3개의 문자 $X$, $Y$, $Z$에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_7={}_9C_7={}_9C_2=36$
(ii) $W=1$일 때
방정식 $X+Y+Z+5W=7$에서
$X+Y+Z=2$
따라서 순서쌍 $(x, y, z, w)$의 개수는 방정식 $X+Y+Z=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 $X$, $Y$, $Z$의 순서쌍 $(X, Y, Z)$의 개수, 즉 3개의 문자 $X$, $Y$, $Z$에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_3H_2={}_4C_2=6$
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍의 개수는
$36+6=42$

## 8 답 ②

천의 자리, 백의 자리, 십의 자리, 일의 자리의 숫자를 각각 $a$, $b$, $c$, $d$라 하면
$a+b+c+d=8$ ····· ㉠
(단, $a$, $b$, $c$, $d$는 $1\leq a\leq9$, $0\leq b\leq9$, $0\leq c\leq9$, $0\leq d\leq9$인 정수)
$A=a-1$이라 하면 $A$는 $0\leq A\leq8$인 정수이고, $a=A+1$을 방정식 ㉠에 대입하면
$(A+1)+b+c+d=8$
$A+b+c+d=7$
따라서 구하는 자연수의 개수는 방정식 $A+b+c+d=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $A$, $b$, $c$, $d$의 순서쌍 $(A, b, c, d)$의 개수, 즉 4개의 문자 $A$, $b$, $c$, $d$에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_4H_7={}_{10}C_7={}_{10}C_3=120$

## 9 답 ④

집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4, 5의 5개에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 $-3$, $-1$, 1, 3에 대응시키면 되므로 구하는 함수의 개수는
${}_5H_4={}_8C_4=70$

## 10 답 840

㈎의 $f(1)\leq f(2)\leq f(3)$에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $Y$의 원소 3, 4, 5, 6, 7, 8의 6개에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 1, 2, 3에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_6H_3={}_8C_3=56$
㈏의 $f(4)>f(5)$에서 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $Y$의 원소 3, 4, 5, 6, 7, 8의 6개에서 2개를 택한 후 크기가 큰 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로
${}_6C_2=15$
따라서 구하는 함수의 개수는
$56\times15=840$

## 11 답 84

$(x-1)^n$의 전개식의 일반항은
${}_nC_r x^{n-r}(-1)^r={}_nC_r(-1)^r x^{n-r}$
$x^2$항은 $n-r=2$일 때이므로 $r=n-2$

이때 $x^2$의 계수가 $-36$이므로

${}_nC_{n-2}\times(-1)^{n-2}=-36$

즉, ${}_nC_{n-2}={}_nC_2=36$, $(-1)^{n-2}=-1$이므로

$\frac{n(n-1)}{2\times1}=36$

$n(n-1)=72=9\times8$

$\therefore n=9$ ($\because n$은 자연수)

따라서 $x^3$의 계수는

${}_9C_6\times(-1)^6={}_9C_3\times1=84$

## 12 답 ③

$(1+\sqrt{2}x)^{15}$의 전개식의 일반항은

${}_{15}C_r(\sqrt{2}x)^r={}_{15}C_r(\sqrt{2})^r x^r$

계수가 유리수이려면 $r$가 0 또는 2의 배수이어야 한다.

이때 $0\le r\le15$이므로 $r$는 0, 2, 4, ..., 14의 8개이다.

따라서 계수가 유리수인 항의 개수는 8이다.

## 13 답 ④

$(1+x)^6$의 전개식의 일반항은 ${}_6C_r x^r$ ····· ㉠

이때

$(2x+1)(1+x)^6=2x(1+x)^6+(1+x)^6$

이므로 $x^3$항은 $2x$와 ㉠의 $x^2$항을 곱하는 경우, 1과 ㉠의 $x^3$항을 곱하는 경우에 나타난다.

(i) $2x$와 ㉠의 $x^2$항을 곱하는 경우

㉠의 $x^2$항은 $r=2$일 때이므로

${}_6C_2\times x^2=15x^2$

따라서 $2x$와 ㉠의 $x^2$항을 곱하면

$2x\times15x^2=30x^3$

(ii) 1과 ㉠의 $x^3$항을 곱하는 경우

㉠의 $x^3$항은 $r=3$일 때이므로

${}_6C_3\times x^3=20x^3$

따라서 1과 ㉠의 $x^3$항을 곱하면

$1\times20x^3=20x^3$

(i), (ii)에서 구하는 $x^3$의 계수는

$30+20=50$

## 14 답 ⑤

$(ax-y)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r(ax)^{3-r}(-y)^r={}_3C_r(-1)^r a^{3-r}x^{3-r}y^r$

$(x+y)^4$의 전개식의 일반항은 ${}_4C_s x^{4-s}y^s$

따라서 $(ax-y)^3(x+y)^4$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r(-1)^r a^{3-r}x^{3-r}y^r\times{}_4C_s x^{4-s}y^s$

$={}_3C_r\times{}_4C_s(-1)^r a^{3-r}x^{7-r-s}y^{r+s}$

$xy^6$항은 $r+s=6$ ($r$, $s$는 $0\le r\le3$, $0\le s\le4$인 정수)일 때이므로

$r$, $s$의 순서쌍 $(r, s)$는

$(2, 4)$, $(3, 3)$

이때 $xy^6$의 계수가 8이므로

${}_3C_2\times{}_4C_4\times(-1)^2\times a+{}_3C_3\times{}_4C_3\times(-1)^3=8$

$3a-4=8$ $\therefore a=4$

## 15 답 ①

${}_2C_0+{}_2C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_8C_7={}_3C_1+{}_3C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_8C_7$

$={}_4C_2+{}_4C_3+\cdots+{}_8C_7$

$={}_5C_3+{}_5C_4+\cdots+{}_8C_7$

$\vdots$

$={}_8C_6+{}_8C_7$

$={}_9C_7$

$={}_9C_2$

## 16 답 1820

주어진 항등식에서 $a_{11}$의 값은 $x^{11}$의 계수와 같다.

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^r$

$x^{11}$항은 $(1+x)^{11}$의 전개식부터 나오므로

$(1+x)^{11}$의 전개식에서 $x^{11}$의 계수는 ${}_{11}C_{11}$

$(1+x)^{12}$의 전개식에서 $x^{11}$의 계수는 ${}_{12}C_{11}$

$(1+x)^{13}$의 전개식에서 $x^{11}$의 계수는 ${}_{13}C_{11}$

$(1+x)^{14}$의 전개식에서 $x^{11}$의 계수는 ${}_{14}C_{11}$

$(1+x)^{15}$의 전개식에서 $x^{11}$의 계수는 ${}_{15}C_{11}$

$\therefore a_{11}={}_{11}C_{11}+{}_{12}C_{11}+{}_{13}C_{11}+{}_{14}C_{11}+{}_{15}C_{11}$

$={}_{12}C_{12}+{}_{12}C_{11}+{}_{13}C_{11}+{}_{14}C_{11}+{}_{15}C_{11}$

$={}_{13}C_{12}+{}_{13}C_{11}+{}_{14}C_{11}+{}_{15}C_{11}$

$={}_{14}C_{12}+{}_{14}C_{11}+{}_{15}C_{11}$

$={}_{15}C_{12}+{}_{15}C_{11}$

$={}_{16}C_{12}$

$={}_{16}C_4$

$=1820$

## 17 답 ③

${}_{50}C_0-{}_{50}C_1+{}_{50}C_2-{}_{50}C_3+{}_{50}C_4-\cdots-{}_{50}C_{49}+{}_{50}C_{50}=0$이므로

${}_{50}C_0-({}_{50}C_1-{}_{50}C_2+{}_{50}C_3-{}_{50}C_4+\cdots+{}_{50}C_{49})+{}_{50}C_{50}=0$

$\therefore {}_{50}C_1-{}_{50}C_2+{}_{50}C_3-{}_{50}C_4+\cdots+{}_{50}C_{49}={}_{50}C_0+{}_{50}C_{50}$

$=1+1=2$

## 18 답 127

원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 ${}_8C_2$

원소의 개수가 4인 부분집합의 개수는 ${}_8C_4$

원소의 개수가 6인 부분집합의 개수는 ${}_8C_6$

원소의 개수가 8인 부분집합의 개수는 ${}_8C_8$

따라서 구하는 부분집합의 개수는

${}_8C_2+{}_8C_4+{}_8C_6+{}_8C_8=2^{8-1}-{}_8C_0$

$=2^7-1=127$

## 19 답 ④

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_n x^n$의 양변에 $x=2$, $n=30$을 대입하면

$3^{30}={}_{30}C_0+{}_{30}C_1\times2+{}_{30}C_2\times2^2+{}_{30}C_3\times2^3+\cdots+{}_{30}C_{30}\times2^{30}$

$\therefore {}_{30}C_1\times2+{}_{30}C_2\times2^2+{}_{30}C_3\times2^3+\cdots+{}_{30}C_{30}\times2^{30}=3^{30}-{}_{30}C_0$

$=3^{30}-1$

## 20 답 ③

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$의 양변에 $x=10$, $n=21$을 대입하면

$11^{21}={}_{21}C_0+{}_{21}C_1\times10+{}_{21}C_2\times10^2+\cdots+{}_{21}C_{21}\times10^{21}$

$\therefore 11^{21}-1$

$={}_{21}C_0+{}_{21}C_1\times10+{}_{21}C_2\times10^2+\cdots+{}_{21}C_{21}\times10^{21}-1$

$=21\times10+210\times100+10^3({}_{21}C_3+{}_{21}C_4\times10+\cdots+{}_{21}C_{21}\times10^{18})$

$=210+10^3(21+{}_{21}C_3+{}_{21}C_4\times10+\cdots+{}_{21}C_{21}\times10^{18})$

이때 $10^3(21+{}_{21}C_3+\cdots+{}_{21}C_{21}\times10^{18})$은 1000으로 나누어떨어지므로 $11^{21}-1$을 1000으로 나누었을 때의 나머지는 210이다.

# 중단원 기출 문제 2회

## 1 답 ③

${}_{13-r}H_{r+1}={}_{13}C_{r+1}$, ${}_{14-2r}H_{2r}={}_{13}C_{2r}$이므로

$r+1=2r$ 또는 $(r+1)+2r=13$

$\therefore r=1$ 또는 $r=4$

따라서 모든 자연수 $r$의 값의 합은

$1+4=5$

## 2 답 ⑤

서로 다른 종류의 음료수 3개를 3명에게 나누어 주는 경우의 수는 3명에서 3명을 택하는 중복순열의 수와 같으므로

${}_3\Pi_3=3^3=27$

같은 종류의 빵 2개를 3명에게 나누어 주는 경우의 수는 3명에서 2명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_2={}_4C_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$27\times6=162$

## 3 답 45

먼저 3종류의 송편을 각각 4개씩 넣고, 나머지 8개의 송편을 넣으면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는 3종류의 송편에서 8개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_8={}_{10}C_8={}_{10}C_2=45$

## 4 답 504

㈎에서 각 학생에게 적어도 1개의 펜을 나누어 주어야 하므로 1명의 학생은 반드시 2개의 펜을 받게 된다.

3명의 학생 중에서 2개의 펜을 받을 1명의 학생을 택하는 경우의 수는

${}_3C_1=3$

먼저 학생 A가 2개의 펜을 받는다고 하면 2명의 학생 B, C가 각각 펜을 1개씩 받는 경우의 수는

${}_4C_2\times{}_2P_2=6\times2=12$

이 각각에 대하여 4개의 지우개를 3명의 학생에게 나누어 주는 경우의 수는 3명의 학생에서 4명을 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_4={}_6C_4={}_6C_2=15$

이때 펜과 지우개를 합하여 5개 이하로 나누어 주려면 학생 A가 지우개 4개를 모두 받는 경우의 수를 빼면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$3\times12\times(15-1)=504$

## 5 답 ⑤

$(a-b)^2$의 전개식의 항의 개수는 2개의 문자 $a$, $b$에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

$(x+y+z)^3$의 전개식의 항의 개수는 3개의 문자 $x$, $y$, $z$에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_3={}_5C_3={}_5C_2=10$

$(p+q+r+s)^2$의 전개식의 항의 개수는 4개의 문자 $p$, $q$, $r$, $s$에서 2개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4H_2={}_5C_2=10$

따라서 구하는 항의 개수는

$3\times10\times10=300$

## 6 답 ④

$a\le b\le c\le d$에서 $a$, $b$, $c$, $d$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개의 자연수에서 중복을 허용하여 4개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 $a$, $b$, $c$, $d$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로 구하는 순서쌍의 개수는

${}_6H_4={}_9C_4=126$

## 7 답 ③

$1\le|a|\le|b|\le|c|\le8$에서 $|a|$, $|b|$, $|c|$의 값을 정하는 경우의 수는 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8의 8개의 자연수에서 중복을 허용하여 3개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 $|a|$, $|b|$, $|c|$에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_8H_3={}_{10}C_3=120$

$a$, $b$, $c$는 $|a|$, $|b|$, $|c|$의 각 값에 대하여 각각 음의 정수와 양의 정수의 값을 가질 수 있으므로 순서쌍 $(a, b, c)$의 개수는 순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$의 개수의 $2^3$배와 같다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$120\times2^3=960$

## 8 답 ③

음이 아닌 정수 $x$, $y$, $z$의 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수는 3개의 문자 $x$, $y$, $z$에서 10개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3H_{10}={}_{12}C_{10}={}_{12}C_2=66$ $\therefore a=66$

한편 $x$, $y$, $z$가 자연수일 때, $X=x-1$, $Y=y-1$, $Z=z-1$이라 하면 $X$, $Y$, $Z$는 음이 아닌 정수이다.

$x=X+1$, $y=Y+1$, $z=Z+1$을 방정식 $x+y+z=10$에 대입하면

$(X+1)+(Y+1)+(Z+1)=10$

$\therefore X+Y+Z=7$

따라서 자연수 $x$, $y$, $z$의 순서쌍 $(x, y, z)$의 개수는 방정식 $X+Y+Z=7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 $X$, $Y$, $Z$의 순서쌍 $(X, Y, Z)$의 개수, 즉 3개의 문자 $X$, $Y$, $Z$에서 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=36 \quad \therefore b=36$

$\therefore a+b=66+36=102$

## 9 답 ③

㈎에서 $a$, $b$, $c$, $d$의 4개 중 2개의 홀수를 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

이때 $a$, $b$를 홀수라 하면 음이 아닌 정수 $A$, $B$, $C$, $D$에 대하여

$a=2A+1$, $b=2B+1$, $c=2C+2$, $d=2D+2$

이를 ㈏의 방정식 $a+b+c+d=12$에 대입하면

$(2A+1)+(2B+1)+(2C+2)+(2D+2)=12$

$\therefore A+B+C+D=3$

이 방정식을 만족시키는 음이 아닌 정수 $A$, $B$, $C$, $D$의 순서쌍 $(A, B, C, D)$의 개수는 4개의 문자 $A$, $B$, $C$, $D$에서 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$6\times20=120$

## 10 답 75

$f(1)\le f(2)$에서 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $Y$의 원소 1, 3, 5, 7, 9의 5개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 1, 2에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_5\mathrm{H}_2={}_6\mathrm{C}_2=15$

$f(3)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 3, 5, 7, 9의 5개이다.

따라서 구하는 함수의 개수는

$15\times5=75$

## 11 답 252

㈎에서 $f(3)$의 값이 될 수 있는 수는 3, 6이다.

(i) $f(3)=3$일 때

㈏에서 $f(1)\le f(2)\le3\le f(4)\le f(5)$

$f(1)\le f(2)\le3$에서 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 1, 2에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

$3\le f(4)\le f(5)$에서 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $Y$의 원소 3, 4, 5, 6, 7, 8의 6개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$

따라서 $f(3)=3$인 함수의 개수는

$6\times21=126$

(ii) $f(3)=6$일 때

㈏에서 $f(1)\le f(2)\le6\le f(4)\le f(5)$

$f(1)\le f(2)\le6$에서 $f(1)$, $f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $Y$의 원소 1, 2, 3, 4, 5, 6의 6개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 1, 2에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_6\mathrm{H}_2={}_7\mathrm{C}_2=21$

$6\le f(4)\le f(5)$에서 $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 집합 $Y$의 원소 6, 7, 8의 3개에서 중복을 허용하여 2개를 택한 후 크기가 작거나 같은 수부터 순서대로 집합 $X$의 원소 4, 5에 대응시키는 경우의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2={}_4\mathrm{C}_2=6$

따라서 $f(3)=6$인 함수의 개수는

$21\times6=126$

(i), (ii)에서 구하는 함수의 개수는

$126+126=252$

## 12 답 ②

$(x^2-2x)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r(x^2)^{4-r}(-2x)^r={}_4\mathrm{C}_r(-2)^r x^{8-r}$

$x^6$항은 $8-r=6$일 때이므로 $r=2$

따라서 $x^6$의 계수는

${}_4\mathrm{C}_2\times(-2)^2=6\times4=24$

## 13 답 5

$\left(x^3+\frac{1}{x^n}\right)^{10}$의 전개식의 일반항은

${}_{10}\mathrm{C}_r(x^3)^{10-r}\left(\frac{1}{x^n}\right)^r={}_{10}\mathrm{C}_r\frac{x^{30-3r}}{x^{nr}}$

상수항은 $30-3r=nr$일 때이므로

$(n+3)r=30$ (단, $n$은 자연수, $r$는 $0\le r\le10$인 정수)

이를 만족시키는 $n$, $r$의 순서쌍 $(n, r)$는

$(27, 1)$, $(12, 2)$, $(7, 3)$, $(3, 5)$, $(2, 6)$

따라서 구하는 자연수 $n$의 개수는 5이다.

## 14 답 8

$(x-1)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r(-1)^{4-r}x^r \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때

$(x^2+a)(x-1)^4=x^2(x-1)^4+a(x-1)^4$

이므로 $x^2$항은 $x^2$과 ㉠의 상수항을 곱하는 경우, $a$와 ㉠의 $x^2$항을 곱하는 경우에 나타난다.

(i) $x^2$과 ㉠의 상수항을 곱하는 경우

㉠의 상수항은 $r=0$일 때이므로

${}_4\mathrm{C}_0\times(-1)^4=1\times1=1$

따라서 $x^2$과 ㉠의 상수항을 곱하면

$x^2\times1=x^2$

(ii) $a$와 ㉠의 $x^2$항을 곱하는 경우

㉠의 $x^2$항은 $r=2$일 때이므로

${}_4C_2\times(-1)^2\times x^2=6\times1\times x^2=6x^2$

따라서 $a$와 ㉠의 $x^2$항을 곱하면

$a\times6x^2=6ax^2$

(i), (ii)에서 $x^2$의 계수는 $1+6a$

즉, $1+6a=13$이므로 $a=2$

또 $x^4$항은 $x^2$과 ㉠의 $x^2$항을 곱하는 경우, 2와 ㉠의 $x^4$항을 곱하는 경우에 나타난다.

(iii) $x^2$과 ㉠의 $x^2$항을 곱하는 경우

㉠의 $x^2$항은 $r=2$일 때이므로

${}_4C_2\times(-1)^2\times x^2=6\times1\times x^2=6x^2$

따라서 $x^2$과 ㉠의 $x^2$항을 곱하면

$x^2\times6x^2=6x^4$

(iv) 2와 ㉠의 $x^4$항을 곱하는 경우

㉠의 $x^4$항은 $r=4$일 때이므로

${}_4C_4\times x^4=1\times x^4=x^4$

따라서 2와 ㉠의 $x^4$항을 곱하면

$2\times x^4=2x^4$

(iii), (iv)에서 구하는 $x^4$의 계수는 $6+2=8$

## 15 답 −12

$(x+2)^3$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r x^{3-r}2^r={}_3C_r 2^r x^{3-r}$

$(x-2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_4C_s x^{4-s}(-2)^s={}_4C_s(-2)^s x^{4-s}$

따라서 $(x+2)^3(x-2)^4$의 전개식의 일반항은

${}_3C_r 2^r x^{3-r}\times{}_4C_s(-2)^s x^{4-s}={}_3C_r\times{}_4C_s 2^r(-2)^s x^{7-r-s}$

$x^5$항은 $7-r-s=5$, 즉 $r+s=2$($r$, $s$는 $0\le r\le3$, $0\le s\le4$인 정수)일 때이므로 $r$, $s$의 순서쌍 $(r, s)$는

$(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$

따라서 $x^5$의 계수는

${}_3C_0\times{}_4C_2\times(-2)^2+{}_3C_1\times{}_4C_1\times2\times(-2)+{}_3C_2\times{}_4C_0\times2^2$

$=24+(-48)+12=-12$

## 16 답 ③

${}_5C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5$

$={}_5C_0+{}_5C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5-{}_5C_0$

$={}_6C_1+{}_6C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5-1$

$={}_7C_2+{}_7C_3+{}_8C_4+{}_9C_5-1$

$={}_8C_3+{}_8C_4+{}_9C_5-1$

$={}_9C_4+{}_9C_5-1$

$={}_{10}C_5-1$

$=252-1=251$

## 17 답 ③

주어진 다항식의 전개식에서 $x^6$항은 $x^3$과 $(1+x)^n$의 $x^3$항의 곱일 때 나타나므로 $x^6$의 계수는 $(1+x)^n$의 전개식에서 $x^3$의 계수와 같다.

$(1+x)^n$의 전개식의 일반항은 ${}_nC_r x^r$

$x^3$항은 $(1+x)^3$의 전개식부터 나오므로

$(1+x)^3$의 전개식에서 $x^3$의 계수는 ${}_3C_3$

$(1+x)^4$의 전개식에서 $x^3$의 계수는 ${}_4C_3$

$(1+x)^5$의 전개식에서 $x^3$의 계수는 ${}_5C_3$

$(1+x)^6$의 전개식에서 $x^3$의 계수는 ${}_6C_3$

$(1+x)^7$의 전개식에서 $x^3$의 계수는 ${}_7C_3$

따라서 구하는 $x^6$의 계수는

${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3={}_4C_4+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3$

$={}_5C_4+{}_5C_3+{}_6C_3+{}_7C_3$

$={}_6C_4+{}_6C_3+{}_7C_3$

$={}_7C_4+{}_7C_3$

$={}_8C_4=70$

## 18 답 ②

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$이므로

${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n-1$

$n=1$일 때, $2^1-1=1$

$n=2$일 때, $2^2-1=4-1=3$

$n=3$일 때, $2^3-1=8-1=7$

$n=4$일 때, $2^4-1=16-1=15$

⋮

따라서 ${}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$의 값이 3의 배수가 되려면 $n$이 짝수이어야 하므로 자연수 $n$은 2, 4, 6, …, 30의 15개이다.

## 19 답 0

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$ ····· ㉠

㉠의 양변에 $x=3$, $n=10$을 대입하면

$4^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1\times3+{}_{10}C_2\times3^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\times3^{10}$

$\therefore A=4^{10}$

㉠의 양변에 $x=-5$, $n=10$을 대입하면

$(-4)^{10}={}_{10}C_0+{}_{10}C_1\times(-5)+{}_{10}C_2\times(-5)^2+\cdots+{}_{10}C_{10}\times(-5)^{10}$

즉, $4^{10}={}_{10}C_0-{}_{10}C_1\times5+{}_{10}C_2\times5^2-\cdots+{}_{10}C_{10}\times5^{10}$이므로

$B=4^{10}$

$\therefore A-B=4^{10}-4^{10}=0$

## 20 답 ④

$n(U)=9$이므로 원소의 개수가 $k(0\le k\le9)$인 집합 $B$를 정하는 경우의 수는 ${}_9C_k$

또 $A\subset B$이므로 원소의 개수가 $k$인 집합 $B$에 대하여 집합 $A$를 정하는 경우의 수는 $2^k$

즉, 집합 $B$의 원소의 개수가 $k$일 때, 두 집합 $A$, $B$를 정하는 경우의 수는

${}_9C_k\times2^k$

따라서 구하는 모든 경우의 수는

${}_9C_0+{}_9C_1\times2^1+{}_9C_2\times2^2+\cdots+{}_9C_9\times2^9=(1+2)^9$

$=3^9$

# 03 / 확률의 개념과 활용 14~19쪽

## 중단원 기출 문제 1회

**1** 답 5

$ab$의 값이 8 또는 12가 되는 사건 $A$는

$A=\{(2, 4), (2, 6), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (6, 2)\}$

(i) $B_1=\varnothing$이므로 $A\cap B_1=\varnothing$

따라서 $A$와 $B_1$은 서로 배반사건이다.

(ii) $B_2=\{(1, 1)\}$이므로 $A\cap B_2=\varnothing$

따라서 $A$와 $B_2$는 서로 배반사건이다.

(iii) $B_3=\{(1, 2), (2, 1)\}$이므로 $A\cap B_3=\varnothing$

따라서 $A$와 $B_3$은 서로 배반사건이다.

(iv) $B_4=\{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$이므로 $A\cap B_4=\varnothing$

따라서 $A$와 $B_4$는 서로 배반사건이다.

(v) $B_5=\{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$이므로 $A\cap B_5=\varnothing$

따라서 $A$와 $B_5$는 서로 배반사건이다.

(vi) $B_6=\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$이므로

$A\cap B_6=\{(2, 4), (4, 2)\}$

따라서 $A$와 $B_6$은 서로 배반사건이 아니다.

(i)~(vi)에서 사건 $A$와 서로 배반인 사건은 $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$이므로 자연수 $n$은 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

**2** 답 256

표본공간을 $S$라 하면 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 14\}$이므로

$A=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

사건 $A$와 서로 배반인 사건은 $A^C$의 부분집합이므로

$A^C=\{5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14\}$

따라서 구하는 사건의 개수는 $A^C$의 부분집합의 개수와 같으므로

$2^8=256$

**3** 답 $\frac{7}{36}$

모든 경우의 수는 $6\times6=36$

이차방정식 $x^2+2ax+b=0$이 허근을 가지려면 판별식을 $D$라 할 때, $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-b<0 \quad \therefore a^2<b$

(i) $a=1$일 때, $b=2, 3, 4, 5, 6$의 5가지

(ii) $a=2$일 때, $b=5, 6$의 2가지

(i), (ii)에서 주어진 이차방정식이 허근을 갖는 경우의 수는 $5+2=7$

따라서 구하는 확률은 $\frac{7}{36}$

**4** 답 ②

answer에 있는 6개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$6!=720$

a와 r를 양 끝에 고정시키고 그 사이에 n, s, w, e를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $4!=24$

a와 r끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!=2$

즉, a와 r가 양 끝에 오도록 배열하는 경우의 수는 $24\times2=48$

따라서 구하는 확률은 $\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$

**5** 답 ①

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지이므로 만들 수 있는 세 자리의 자연수의 개수는

${}_5\Pi_2=5\times6^2=180$

5의 배수이면 일의 자리에 올 수 있는 숫자는 0, 5의 2가지

백의 자리에 올 수 있는 숫자는 1, 2, 3, 4, 5의 5가지

즉, 만들 수 있는 5의 배수의 개수는 $5\times6\times2=60$

따라서 구하는 확률은 $\frac{60}{180}=\frac{1}{3}$

**6** 답 $\frac{1}{6}$

process에 있는 7개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{7!}{2!}$

p, c, r를 모두 X로 바꾸어 생각하여 X, X, o, X, e, s, s를 일렬로 배열한 후 첫 번째 X는 p로, 두 번째 X는 c로, 세 번째 X는 r로 바꾸면 되므로 그 경우의 수는 $\frac{7!}{3!\times2!}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{\frac{7!}{3!\times2!}}{\frac{7!}{2!}}=\frac{1}{6}$

**7** 답 ④

5개의 공 중에서 3개를 꺼내는 경우의 수는

${}_5C_3=10$

흰 공 2개, 검은 공 1개를 꺼내는 경우의 수는

${}_3C_2\times{}_2C_1=3\times2=6$

따라서 구하는 확률은 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

**8** 답 $\frac{1}{16}$

집합 $X$의 부분집합의 개수는

$2^6=64$

(가)에서 집합 $A$는 집합 $B=\{1, 2, 3\}$과 서로소이므로

$A\cap B=\varnothing$, 즉 $A\subset B^C$이다.

이때 $B^C=\{4, 5, 6\}$이고, (나)에서 집합 $A$의 원소의 개수가 2 이상이므로 집합 $A$의 개수는

${}_3C_2+{}_3C_3=4$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4}{64}=\frac{1}{16}$

**9** 답 ①

방정식 $x+y+z+w=10$을 만족시키는 자연수 $x$, $y$, $z$, $w$의 순서쌍 $(x, y, z, w)$의 개수는

${}_4H_{10-4}={}_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

$z\geq3$을 만족시키는 자연수 $x$, $y$, $z$, $w$의 순서쌍 $(x, y, z, w)$의 개수는 ${}_4H_{10-3-3}={}_4H_4={}_7C_4={}_7C_3=35$

따라서 구하는 확률은 $\frac{35}{84}=\frac{5}{12}$

## 10 답 $\frac{10}{27}$

$X$에서 $Y$로의 함수 $f$의 개수는 ${}_3\Pi_5=3^5=243$

주어진 조건에서 $f(1)\le f(3)\le f(5)$이므로 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

$f(2)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_2=3^2=9$

즉, 조건을 만족시키는 함수의 개수는 $10\times9=90$

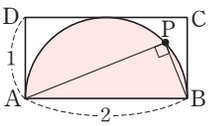
따라서 구하는 확률은 $\frac{90}{243}=\frac{10}{27}$

## 11 답 ③

구하는 확률은 $\frac{12}{1000}=\frac{3}{250}$

## 12 답 $\frac{\pi}{4}$

오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원을 그리면 반원 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAB는 직각삼각형이므로 삼각형 PAB가 둔각삼각형이려면 점 P가 색칠한 부분에 있어야 한다.




따라서 구하는 확률은

$$\frac{(\text{색칠한 부분의 넓이})}{(\square\mathrm{ABCD}\text{의 넓이})}=\frac{\frac{\pi}{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$$

## 13 답 ④

ㄱ. [반례] $\mathrm{P}(A)=\frac{3}{4}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{4}$이면

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{3}{2}$이므로 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)>1$

ㄴ. $0\le\mathrm{P}(A)\le1$, $0\le\mathrm{P}(B)\le1$이므로 $0\le\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\le1$

ㄷ. $\varnothing\subset(A\cup B)\subset S$이므로 $0\le\mathrm{P}(A\cup B)\le1$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

## 14 답 $\frac{7}{60}$

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{3}{4}$에서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\frac{4}{5}=\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\mathrm{P}(A\cap B)$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{60}$

## 15 답 $\frac{13}{24}$

$A$와 $B^C$가 서로 배반사건이면 $A\cap B=A$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{8}$에서 $\mathrm{P}(A)=\frac{1}{8}$

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$에서

$\frac{1}{8}+\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B)=\frac{13}{24}$

## 16 답 ②

취업을 희망하는 학생인 사건을 $A$, 대학원 진학을 희망하는 학생인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{8}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{5}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}=\frac{29}{40}\end{aligned}$$

## 17 답 $\frac{22}{35}$

파란 공이 1개만 나오는 사건을 $A$, 하나도 나오지 않는 사건을 $B$라 하자.

(i) 파란 공 1개, 빨간 공 2개를 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(A)=\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{18}{35}$

(ii) 빨간 공 3개를 꺼낼 확률은

$\mathrm{P}(B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=\frac{4}{35}$

(i), (ii)에서 $A$와 $B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{18}{35}+\frac{4}{35}=\frac{22}{35}$

## 18 답 ④

$33=3\times11$이므로 3의 배수인 사건을 $A$, 11의 배수인 사건을 $B$라 하면 3의 배수도 아니고 11의 배수도 아닌 사건은

$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$이다.

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{30}{90}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{8}{90}$이고, $A\cap B$는 3과 11의 공배수, 즉 33의 배수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{90}$

$\therefore\ \mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{30}{90}+\frac{8}{90}-\frac{2}{90}=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((A\cup B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$

## 19 답 3

뽑은 2개의 제비 중에서 적어도 1개는 당첨 제비인 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 모두 당첨 제비가 아닌 사건이므로

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{{}_{12-k}\mathrm{C}_2}{{}_{12}\mathrm{C}_2}=\frac{\frac{(12-k)(11-k)}{2}}{66}=\frac{(12-k)(11-k)}{132}$

이때 $\mathrm{P}(A)=\frac{5}{11}$이므로

$\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=1-\frac{5}{11}=\frac{6}{11}$

즉, $\frac{(12-k)(11-k)}{132}=\frac{6}{11}$이므로

$(12-k)(11-k)=72=9\times8$

$\therefore\ k=3\ (\because\ k\le12)$

## 20 답 ③

꺼낸 3장의 카드에 적힌 수의 최댓값이 10 이상인 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 최댓값이 10 미만, 즉 9 이하인 사건이다.

즉, $A^C$는 9 이하의 수가 적힌 9장의 카드에서 3장을 꺼내는 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_9C_3}{{}_{13}C_3}=\frac{84}{286}=\frac{42}{143}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{42}{143}=\frac{101}{143}$$

# 중단원 기출 문제 2회

## 1 답 ㄴ

표본공간을 $S$라 하면 $S=\{1, 2, 3, \cdots, 20\}$이므로

$A=\{1, 3, 5, 15\}$, $B=\{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\}$, $C=\{7, 14\}$

ㄱ. $A\cap B=\{5\}$이므로 $A$와 $B$는 서로 배반사건이 아니다.

ㄴ. $A\cap C=\varnothing$이므로 $A$와 $C$는 서로 배반사건이다.

ㄷ. $B\cap C=\{14\}$이므로 $B$와 $C$는 서로 배반사건이 아니다.

따라서 보기에서 서로 배반사건인 것은 ㄴ이다.

## 2 답 4

사건 $A$와 서로 배반인 사건은 $A^C$의 부분집합이고, 사건 $B$와 서로 배반인 사건은 $B^C$의 부분집합이므로 두 사건 $A$, $B$와 모두 배반인 사건은 $A^C\cap B^C$의 부분집합이다.

이때 $A^C=\{2, 5, 7, 11, 13\}$, $B^C=\{2, 3, 5\}$이므로

$A^C\cap B^C=\{2, 5\}$

따라서 구하는 사건의 개수는 $A^C\cap B^C$의 부분집합의 개수와 같으므로 $2^2=4$

## 3 답 ②

한 개의 주사위를 3번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6=216$

$b=1$일 때, $a<3\le c$를 만족시키는 순서쌍 $(a, c)$의 개수는

$2\times4=8$

$b=2$일 때, $a<4\le c$를 만족시키는 순서쌍 $(a, c)$의 개수는

$3\times3=9$

$b=3$일 때, $a<5\le c$를 만족시키는 순서쌍 $(a, c)$의 개수는

$4\times2=8$

$b=4$일 때, $a<6\le c$를 만족시키는 순서쌍 $(a, c)$의 개수는

$5\times1=5$

즉, $a<b+2\le c$를 만족시키는 순서쌍 $(a, b, c)$의 개수는

$8+9+8+5=30$

따라서 구하는 확률은 $\frac{30}{216}=\frac{5}{36}$

## 4 답 $\frac{1}{35}$

8명이 일렬로 서는 경우의 수는 $8!$

남학생과 여학생이 교대로 서는 경우의 수는 $2\times4!\times4!$

따라서 구하는 확률은 $\frac{2\times4!\times4!}{8!}=\frac{1}{35}$

## 5 답 $\frac{1}{16}$

$X$에서 $Y$로의 함수 $f$의 개수는 ${}_4\Pi_5=4^5$

$a+b=5$이면 $f(a)=f(b)$이므로

$f(1)=f(4)$, $f(2)=f(3)$

이를 만족시키는 함수 $f$의 개수는 ${}_4\Pi_3=4^3$

따라서 구하는 확률은 $\frac{4^3}{4^5}=\frac{1}{16}$

## 6 답 $\frac{1}{81}$

한 개의 주사위를 4번 던져서 나오는 모든 경우의 수는

$6\times6\times6\times6=1296$

$abcd=6$인 경우는

$(1, 1, 1, 6)$ 또는 $(1, 1, 2, 3)$

1, 1, 1, 6과 1, 1, 2, 3을 각각 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{2!}=4+12=16$

따라서 구하는 확률은 $\frac{16}{1296}=\frac{1}{81}$

## 7 답 ①

website에 있는 7개의 문자를 일렬로 배열하는 경우의 수는

$\frac{7!}{2!}$

s와 t를 양 끝에 고정시키고 그 사이에 w, e, b, i, e를 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!}$

s와 t가 자리를 바꾸는 경우의 수는 $2!$

즉, s와 t가 양 끝에 오도록 배열하는 경우의 수는 $\frac{5!}{2!}\times2!=5!$

따라서 구하는 확률은 $\frac{5!}{\frac{7!}{2!}}=\frac{1}{21}$

## 8 답 ⑤

10명의 학생 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

${}_{10}C_3=120$

7번, 8번, 9번 학생을 뽑지 않으려면 7명의 학생 중에서 3명을 뽑아야 하므로 그 경우의 수는

${}_7C_3=35$

따라서 구하는 확률은 $\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$

## 9 답 $\frac{6}{625}$

$X$에서 $X$로의 함수 $f$의 개수는 ${}_5\Pi_5=5^5$

(가), (나)에서 $f(1)\le f(2)=3\le f(3)\le f(4)\le f(5)$

$f(1)$의 값이 될 수 있는 수는 1, 2, 3의 3개이다.

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

즉, 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$3\times10=30$

따라서 구하는 확률은 $\dfrac{30}{5^5}=\dfrac{6}{625}$

## 10 답 3

7개의 공 중에서 2개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_7\mathrm{C}_2=21$

빨간 공의 개수를 $n$이라 하면 2개 모두 빨간 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$

따라서 2개의 공이 모두 빨간 공일 확률은

$\dfrac{\frac{n(n-1)}{2}}{21}=\dfrac{n(n-1)}{42}$

즉, $\dfrac{n(n-1)}{42}=\dfrac{1}{7}$이므로

$n(n-1)=6=3\times2$

$\therefore n=3$ ($\because n$은 자연수)

따라서 주머니 속에 들어 있는 빨간 공의 개수는 3이다.

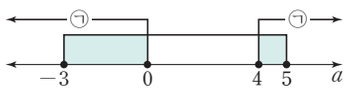
## 11 답 ④

이차방정식 $x^2+3ax+9a=0$이 실근을 가지려면 판별식을 $D$라 할 때, $D\ge0$이어야 하므로

$D=9a^2-36a\ge0$

$9a(a-4)\ge0$ $\quad\therefore a\le0$ 또는 $a\ge4$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

이때 $-3\le a\le5$와 ㉠을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.




$\therefore -3\le a\le0$ 또는 $4\le a\le5$

따라서 구하는 확률은

$\dfrac{\{0-(-3)\}+(5-4)}{5-(-3)}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$

## 12 답 ②

ㄱ. $0\le\mathrm{P}(A)\le1$, $0\le\mathrm{P}(B)\le1$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=2$이면 $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)=1$

$\therefore S=A=B$

ㄴ. $\varnothing\subset(A\cap B)\subset A$이므로

$0\le\mathrm{P}(A\cap B)\le\mathrm{P}(A)$

ㄷ. [반례] $\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{3}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{2}{3}$이면

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{4}{3}$이고, $\mathrm{P}(S)=1$이므로

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)>\mathrm{P}(S)$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

## 13 답 ①

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\dfrac{1}{2}$에서 $\mathrm{P}((A\cup B)^C)=\dfrac{1}{2}$

$1-\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$ $\quad\therefore \mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=\dfrac{1}{5}+\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{10}$

## 14 답 ②

$A$와 $B$가 서로 배반사건이므로 $\mathrm{P}(A\cup B)=\dfrac{5}{7}$에서

$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\dfrac{5}{7}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

여사건의 확률에 의하여 $\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^C)=\dfrac{2}{5}$에서

$\mathrm{P}(A)+\{1-\mathrm{P}(B)\}=\dfrac{2}{5}$

$\therefore \mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(B)=-\dfrac{3}{5}$ $\quad\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{2}{35}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{23}{35}$

$\therefore \mathrm{P}(B^C)=1-\mathrm{P}(B)=1-\dfrac{23}{35}=\dfrac{12}{35}$

## 15 답 $\dfrac{33}{100}$

뽑은 카드에 적힌 수가 5의 배수인 사건을 $A$, 6의 배수인 사건을 $B$라 하면 $A\cap B$는 30의 배수인 사건이므로

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{20}{100}$, $\mathrm{P}(B)=\dfrac{16}{100}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{100}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\dfrac{20}{100}+\dfrac{16}{100}-\dfrac{3}{100}=\dfrac{33}{100}$

## 16 답 $\dfrac{4}{7}$

교사끼리 서로 이웃하여 서는 사건을 $A$, 양 끝에 학생이 서는 사건을 $B$라 하자.

(i) 교사끼리 서로 이웃하여 서는 경우

2명의 교사를 1명으로 생각하여 일렬로 서는 경우의 수는 6!

교사끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!

즉, 교사끼리 서로 이웃하여 서는 경우의 수는 $6!\times2!$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{6!\times2!}{7!}=\dfrac{2}{7}$

(ii) 양 끝에 학생이 서는 경우

2명의 학생이 양 끝에 서는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_2=20$

그 사이에 나머지 5명이 일렬로 서는 경우의 수는 5!

즉, 양 끝에 학생이 서는 경우의 수는 $20\times5!$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\dfrac{20\times5!}{7!}=\dfrac{10}{21}$

(iii) 교사끼리 서로 이웃하여 서고, 양 끝에 학생이 서는 경우

2명의 학생이 양 끝에 서는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{P}_2=20$

2명의 교사를 1명으로 생각하여 그 사이에 일렬로 서는 경우의 수는 4!

교사끼리 자리를 바꾸는 경우의 수는 2!

즉, 교사끼리 서로 이웃하여 서고, 양 끝에 학생이 서는 경우의 수는 $20\times4!\times2!$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{20\times4!\times2!}{7!}=\dfrac{4}{21}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=\frac{2}{7}+\frac{10}{21}-\frac{4}{21}=\frac{4}{7}$$

### 17 답 $\frac{13}{27}$

4명의 학생이 모두 같은 것을 내는 사건을 $A$, 2명이 같은 것을 내고 나머지는 다른 것을 내는 사건을 $B$라 하자.

(i) 모두 같은 것을 내는 경우

(가위, 가위, 가위, 가위), (바위, 바위, 바위, 바위), (보, 보, 보, 보)의 3가지

$\therefore P(A)=\frac{3}{{}_3\Pi_4}=\frac{3}{3^4}=\frac{1}{27}$

(ii) 2명이 같은 것을 내고 나머지는 다른 것을 내는 경우

(가위, 가위, 바위, 보), (가위, 바위, 바위, 보), (가위, 바위, 보, 보)의 3가지

각각의 경우에 대하여 일렬로 배열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!}=12$

즉, 2명이 같은 것을 내고 나머지는 다른 것을 내는 경우의 수는 $3\times12=36$

$\therefore P(B)=\frac{36}{{}_3\Pi_4}=\frac{36}{3^4}=\frac{4}{9}$

(i), (ii)에서 $A$와 $B$는 서로 배반사건이므로 구하는 확률은

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$
$$=\frac{1}{27}+\frac{4}{9}=\frac{13}{27}$$

### 18 답 $\frac{19}{49}$

여행 장소가 같은 학생이 있는 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 여행 장소가 모두 다른 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_7P_3}{{}_7\Pi_3}=\frac{7\times6\times5}{7^3}=\frac{30}{49}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{30}{49}=\frac{19}{49}$$

### 19 답 $\frac{9}{20}$

뽑은 2개의 우산 중에서 적어도 1개는 분홍색 우산인 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 분홍색이 아닌 우산만 2개 뽑는 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_{12}C_2}{{}_{16}C_2}=\frac{66}{120}=\frac{11}{20}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{11}{20}=\frac{9}{20}$$

### 20 답 ②

서로 다른 5개의 동전 중에서 뒷면이 2개 이상 나오는 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 뒷면이 0개 또는 1개 나오는 사건이므로

$$P(A^C)=\frac{{}_5C_0+{}_5C_1}{2^5}=\frac{6}{32}=\frac{3}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{3}{16}=\frac{13}{16}$$

## 04 / 조건부확률 20~25쪽

### 중단원 기출 문제 1회

### 1 답 ①

$P(A^C\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$이므로

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{2}-P(A\cap B)$$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{10}$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{2}$$

### 2 답 $\frac{19}{40}$

교복을 착용하는 학생인 사건을 $A$, 남학생인 사건을 $B$라 하면

$P(A)=0.8$, $P(A\cap B^C)=\frac{126}{300}=0.42$

$$\therefore P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap B^C)$$
$$=0.8-0.42$$
$$=0.38$$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0.38}{0.8}=\frac{19}{40}$$

### 3 답 $\frac{12}{13}$

$2a>b$인 사건을 $A$, $a=2$인 사건을 $B$라 하자.

$2a>b$인 경우는

$a=2$, $b=1$ 또는 $a=3$, $b=0$

(i) $a=2$, $b=1$일 확률은 $\frac{{}_3C_2\times{}_4C_1}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$

(ii) $a=3$, $b=0$일 확률은 $\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$

(i), (ii)에서 $P(A)=\frac{12}{35}+\frac{1}{35}=\frac{13}{35}$

따라서 구하는 확률은

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{12}{35}}{\frac{13}{35}}=\frac{12}{13}$$

### 4 답 $\frac{5}{6}$

지훈이가 열어 본 상자에 불고기 피자가 들어 있는 사건을 $A$, 규진이가 열어 본 상자에 불고기 피자가 들어 있는 사건을 $B$라 하자.

두 사람이 열어 본 상자 중에서 적어도 1개는 고구마 피자가 들어 있는 사건은 $(A\cap B)^C$이고, 이때 $A\cap B$는 두 사람이 열어 본 상자에 모두 불고기 피자가 들어 있는 사건이다.

$P(A)=\frac{4}{9}$, $P(B|A)=\frac{3}{8}$이므로

$$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}=\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$P((A\cap B)^C)=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

## 5 답 3

반장이 남학생인 사건을 $A$, 부반장이 남학생인 사건을 $B$라 하면

$P(A)=\frac{n+2}{2n+2}$, $P(B|A)=\frac{n+1}{2n+1}$

따라서 반장과 부반장이 모두 남학생일 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$

$=\frac{n+2}{2n+2}\times\frac{n+1}{2n+1}=\frac{n+2}{4n+2}$

즉, $\frac{n+2}{4n+2}=\frac{5}{14}$이므로

$14(n+2)=5(4n+2)$

$6n=18$ $\therefore n=3$

## 6 답 ③

어느 날 비가 오는 사건을 $A$, 경기에서 이기는 사건을 $B$라 하면

$P(A)=0.2$, $P(A^C)=1-0.2=0.8$

$P(B|A)=0.5$, $P(B|A^C)=0.6$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=0.2\times0.5=0.1$,

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=0.8\times0.6=0.48$

따라서 구하는 확률은

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)=0.1+0.48=0.58$

## 7 답 $\frac{11}{60}$

상자 A를 택하는 사건을 $A$, 빨간색 사탕 2개를 꺼내는 사건을 $B$라 하면

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(A^C)=\frac{1}{2}$

$P(B|A)=\frac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\frac{1}{15}$, $P(B|A^C)=\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{15}=\frac{1}{30}$,

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{20}$

따라서 구하는 확률은

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)$

$=\frac{1}{30}+\frac{3}{20}=\frac{11}{60}$

## 8 답 $\frac{5}{9}$

남학생인 사건을 $A$, 수시 모집에 응시하지 않은 학생인 사건을 $B$라 하면

$P(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$, $P(A^C)=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$

$P(B|A)=\frac{1}{12}$, $P(B|A^C)=\frac{1}{10}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{12}=\frac{1}{20}$,

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{25}$

따라서 구하는 확률은

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A^C\cap B)}$

$=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20}+\frac{1}{25}}=\frac{5}{9}$

## 9 답 ①

우대 고객인 사건을 $A$, 보험에 재가입하지 않은 고객인 사건을 $B$라 하면

$P(A)=\frac{3}{10}$, $P(A^C)=\frac{7}{10}$

$P(B|A)=1-\frac{80}{100}=\frac{1}{5}$, $P(B|A^C)=1-\frac{40}{100}=\frac{3}{5}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{50}$,

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{7}{10}\times\frac{3}{5}=\frac{21}{50}$

따라서 구하는 확률은

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A^C\cap B)}$

$=\frac{\frac{3}{50}}{\frac{3}{50}+\frac{21}{50}}=\frac{1}{8}$

## 10 답 ②

$A=\{(2, 1), (2, 2), (2, 3), \cdots, (6, 6)\}$,

$B=\{(5, 6), (6, 5)\}$,

$C=\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \cdots, (6, 6)\}$

이므로

$P(A)=\frac{3\times6}{36}=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$, $P(C)=\frac{6\times4}{36}=\frac{2}{3}$

ㄱ. $A\cap B=\{(6, 5)\}$이므로 $P(A\cap B)=\frac{1}{36}$

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)$

따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이다.

ㄴ. $A\cap C=\{(2, 1), (2, 2), (2, 3), \cdots, (6, 6)\}$이므로

$P(A\cap C)=\frac{3\times4}{36}=\frac{1}{3}$

$\therefore P(A\cap C)=P(A)P(C)$

따라서 두 사건 $A$, $C$는 서로 독립이다.

ㄷ. $B\cap C=\{(5, 6)\}$이므로 $P(B\cap C)=\frac{1}{36}$

$\therefore P(B\cap C)\neq P(B)P(C)$

따라서 두 사건 $B$, $C$는 서로 종속이다.

따라서 보기에서 서로 독립인 사건은 ㄱ, ㄴ이다.

## 11 답 3

$S=\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$이므로

$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

이때 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이면 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이므로 $\frac{1}{3}=\frac{1}{2}P(B)$ $\therefore P(B)=\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$

즉, $n(B)=4$이고, $\{3, 4\}\subset B$, $2\notin B$이어야 한다.

따라서 구하는 사건 $B$의 개수는 1, 6, 12에서 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_3C_2=3$

## 12 답 ㄱ, ㄷ

ㄱ. $A\cap A^C=\varnothing$이므로 $P(A\cap A^C)=0$

$\therefore P(A\cap A^C)\neq P(A)P(A^C)$

따라서 두 사건 $A$, $A^C$는 서로 종속이다.

ㄴ. [반례] 표본공간을 $S=\{1, 2, 3\}$이라 하고 $A=\{1\}$, $B=\{2\}$라 하면

$P(A)=P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=0$

$\therefore P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$

이때 $A\cap B=\varnothing$이므로 두 사건 $A$, $B$가 서로 배반사건이지만 $A$, $B$는 서로 종속이다.

ㄷ. 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이면 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$이므로

$$\begin{aligned}P(A^C\cap B)&=P(B)-P(A\cap B)\\&=P(B)-P(A)P(B)\\&=\{1-P(A)\}P(B)\\&=P(A^C)P(B)\end{aligned}$$

따라서 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이면 두 사건 $A^C$, $B$도 서로 독립이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 13 답 ④

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$P(A|B)=P(A)=\frac{3}{20}$

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이면 두 사건 $A$, $B^C$도 서로 독립이므로

$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C)=\frac{1}{8}$에서

$\frac{3}{20}\times\{1-P(B)\}=\frac{1}{8}$, $1-P(B)=\frac{5}{6}$

$\therefore P(B)=\frac{1}{6}$

## 14 답 ⑤

갑과 을이 화살을 던져 성공하는 사건을 각각 $A$, $B$라 하면

$P(A)=\frac{3}{4}$, $P(B)=\frac{2}{3}$

이때 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$P(A\cap B)=P(A)P(B)$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=P(A)+P(B)-P(A)P(B)\\&=\frac{3}{4}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{11}{12}\end{aligned}$$

## 15 답 ③

전체 학생 수를 $n$이라 하자.

남학생인 사건을 $A$, 방과 후 학교를 신청한 학생인 사건을 $B$라 하면

$P(A)=\frac{20+40}{n}=\frac{60}{n}$, $P(B)=\frac{20+30}{n}=\frac{50}{n}$,

$P(A\cap B)=\frac{20}{n}$

이때 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$P(A)P(B)=P(A\cap B)$

$\frac{60}{n}\times\frac{50}{n}=\frac{20}{n}$

$\therefore n=150$

따라서 방과 후 학교를 신청하지 않은 여학생 수는

$150-20-40-30=60$

## 16 답 ⑤

1발 이상 10점 과녁에 맞히는 사건을 $A$라 하면 $A^C$는 1발도 10점 과녁에 맞히지 못하는 사건이므로

$P(A^C)={}_5C_0\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{1}{1024}$

따라서 구하는 확률은

$P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{1}{1024}=\frac{1023}{1024}$

## 17 답 $\frac{1}{4}$

(i) 예선 3문제를 모두 맞힐 확률은

${}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

(ii) 예선 3문제 중 2문제를 맞히고, 추가 문제를 맞힐 확률은

${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{8}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

## 18 답 ②

A 팀이 우승하려면 6번째 경기 또는 7번째 경기에서 우승해야 한다.

이때 A 팀이 B 팀을 이길 확률이 $\frac{1}{3}$이고 비기는 경우는 없으므로 B 팀이 A 팀을 이길 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

(i) A 팀이 6번째 경기에서 우승할 확률은

${}_3C_3\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

(ii) A 팀이 7번째 경기에서 우승할 확률은

${}_3C_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{27}+\frac{2}{27}=\frac{1}{9}$

## 19 답 $\frac{3}{32}$

동전의 앞면이 3번 이상 나오려면 카드에 적힌 수의 약수의 개수는 3 이상이어야 한다.

이때 약수의 개수가 3 이상인 수는 4, 6, 8로 약수의 개수가 3인 수는 4, 약수의 개수가 4인 수는 6, 8이다.

(i) 카드에 적힌 수의 약수의 개수가 3이고, 한 개의 동전을 3번 던져서 동전의 앞면이 3번 나올 확률은

$\frac{1}{8}\times{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{64}$

(ii) 카드에 적힌 수의 약수의 개수가 4이고, 한 개의 동전을 4번 던져서 동전의 앞면이 3번 이상 나올 확률은

$\frac{2}{8}\times\left\{{}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1+{}_4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}=\frac{5}{64}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{64}+\frac{5}{64}=\frac{3}{32}$

## 20 답 $\frac{135}{4096}$

서로 다른 두 개의 동전을 동시에 던져서 모두 앞면이 나올 확률은

$\frac{1}{2\times2}=\frac{1}{4}$

서로 다른 두 개의 동전을 동시에 6번 던져서 모두 앞면이 나오는 횟수를 $x$, 적어도 1개가 뒷면이 나오는 횟수를 $y$라 하면

$x+y=6$ ····· ㉠

원점에서 출발한 점 P가 다시 원점으로 돌아와야 하므로

$x-2y=0$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$x=4$, $y=2$

따라서 구하는 확률은

${}_6C_4\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{135}{4096}$

# 중단원 기출 문제 2회

## 1 답 ④

$P(A^C)=0.7$에서

$P(A)=1-0.7=0.3$

$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C|A)=0.3\times0.2=0.06$

$\therefore P(B)=P(A\cup B)-P(A\cap B^C)$

$=0.8-0.06=0.74$

## 2 답 $\frac{15}{26}$

여학생인 사건을 $A$, 담양을 선호하는 학생인 사건을 $B$라 하면

$P(A)=\frac{26}{60}=\frac{13}{30}$, $P(A\cap B)=\frac{15}{60}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{13}{30}}=\frac{15}{26}$

다른 풀이

구하는 확률은 여학생 중에서 담양을 선호하는 학생을 택할 확률과 같으므로

$\frac{\text{(담양을 선호하는 여학생 수)}}{\text{(여학생 수)}}=\frac{15}{26}$

## 3 답 $\frac{2}{15}$

자음끼리 서로 이웃하지 않도록 배열하는 사건을 $A$, a와 e가 서로 이웃하도록 배열하는 사건을 $B$라 하면

$P(A)=\frac{5!\times{}_6P_4}{9!}=\frac{5}{42}$, $P(A\cap B)=\frac{4!\times{}_5P_4\times2!}{9!}=\frac{1}{63}$

따라서 구하는 확률은

$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{63}}{\frac{5}{42}}=\frac{2}{15}$

## 4 답 $\frac{5}{14}$

첫 번째에 흰 공을 꺼내는 사건을 $A$, 두 번째에 흰 공을 꺼내는 사건을 $B$라 하면

$P(A)=\frac{5}{8}$, $P(B|A)=\frac{4}{7}$

따라서 구하는 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{5}{8}\times\frac{4}{7}=\frac{5}{14}$

## 5 답 $\frac{15}{28}$

다온이와 채윤이가 배를 꺼내는 사건을 각각 $A$, $B$라 하자.

(i) 다온이가 배를 꺼내고 채윤이가 사과를 꺼낼 확률

$P(A)=\frac{5}{8}$, $P(B^C|A)=\frac{3}{7}$이므로

$P(A\cap B^C)=P(A)P(B^C|A)=\frac{5}{8}\times\frac{3}{7}=\frac{15}{56}$

(ii) 다온이가 사과를 꺼내고 채윤이가 배를 꺼낼 확률

$P(A^C)=\frac{3}{8}$, $P(B|A^C)=\frac{5}{7}$이므로

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{3}{8}\times\frac{5}{7}=\frac{15}{56}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은 $\frac{15}{56}+\frac{15}{56}=\frac{15}{28}$

## 6 답 $\frac{11}{18}$

주머니 A에서 흰 공을 꺼내는 사건을 $A$, 주머니 B에서 흰 공을 꺼내는 사건을 $B$라 하자.

(i) 주머니 A에서 흰 공을 꺼내면 주머니 B에 흰 공 2개를 넣어야 하므로 주머니 B에는 흰 공 5개, 검은 공 1개가 들어 있다.

따라서 주머니 A에서 흰 공을 꺼내고, 주머니 B에서 흰 공을 꺼낼 확률은

$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)=\frac{2}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{18}$

(ii) 주머니 A에서 검은 공을 꺼내면 주머니 B에 검은 공 2개를 넣어야 하므로 주머니 B에는 흰 공 3개, 검은 공 3개가 들어 있다.

따라서 주머니 A에서 검은 공을 꺼내고, 주머니 B에서 흰 공을 꺼낼 확률은

$P(A^C\cap B)=P(A^C)P(B|A^C)=\frac{4}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$P(B)=P(A\cap B)+P(A^C\cap B)=\frac{5}{18}+\frac{1}{3}=\frac{11}{18}$

## 7 답 $\frac{12}{19}$

버스로 등교한 학생인 사건을 $A$, 지각한 학생인 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=\frac{30}{100}=\frac{3}{10}$, $\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$

$\mathrm{P}(B|A)=\frac{1}{5}$, $\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{1}{20}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{3}{10}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{50}$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{7}{10}\times\frac{1}{20}=\frac{7}{200}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)}$$
$$=\frac{\frac{3}{50}}{\frac{3}{50}+\frac{7}{200}}=\frac{12}{19}$$

## 8 답 $\frac{3}{11}$

어떤 사람이 참말을 하는 사건을 $A$, 거짓말 탐지기가 거짓으로 판정하는 사건을 $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=0.6$, $\mathrm{P}(A^C)=1-0.6=0.4$

$\mathrm{P}(B|A)=1-0.8=0.2$, $\mathrm{P}(B|A^C)=0.8$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=0.6\times0.2=0.12$,

$\mathrm{P}(A^C\cap B)=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B|A^C)=0.4\times0.8=0.32$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)}$$
$$=\frac{0.12}{0.12+0.32}=\frac{3}{11}$$

## 9 답 ④

$A=\{2, 3, 5\}$, $B=\{2, 4, 6\}$, $C=\{3, 6\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

ㄱ. $A\cap B=\{2\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)\neq\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

따라서 두 사건 $A$, $B$는 서로 종속이다.

ㄴ. $A\cap C=\{3\}$이므로 $\mathrm{P}(A\cap C)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(A\cap C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 $A$, $C$는 서로 독립이다.

ㄷ. $B\cap C=\{6\}$이므로 $\mathrm{P}(B\cap C)=\frac{1}{6}$

$\therefore \mathrm{P}(B\cap C)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)$

따라서 두 사건 $B$, $C$는 서로 독립이다.

따라서 보기에서 서로 독립인 사건은 ㄴ, ㄷ이다.

## 10 답 9

$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A=\{1, 2, 3\}$이므로

$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

㈏에서 $n(A\cap B)=2$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

㈎에서 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

이때 $\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$이므로 $n(B)=4$

따라서 구하는 사건 $B$의 개수는 두 사건 $A$, $A^C$에서 원소를 각각 2개씩 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_2=9$

## 11 답 ②

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이면

$\mathrm{P}(A\cap B)=\boxed{\text{㈎ }\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}$

$A^C\cap B^C=(\boxed{\text{㈏ }A\cup B})^C$이므로

$\mathrm{P}(A^C\cap B^C)=\mathrm{P}((\boxed{\text{㈏ }A\cup B})^C)=1-\mathrm{P}(A\cup B)$

$=1-\{\boxed{\text{㈐ }\mathrm{P}(A)}+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\}$

$=1-\{\boxed{\text{㈐ }\mathrm{P}(A)}+\mathrm{P}(B)-\boxed{\text{㈎ }\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)}\}$

$=\{1-\boxed{\text{㈐ }\mathrm{P}(A)}\}\{1-\mathrm{P}(B)\}$

$=\mathrm{P}(A^C)\mathrm{P}(B^C)$

따라서 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이면 두 사건 $A^C$, $B^C$도 서로 독립이다.

## 12 답 ④

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)-\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$에서

$\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)-\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$

$\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\mathrm{P}(B)$

$\frac{7}{6}\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{4}{7}$

## 13 답 $\frac{1}{6}$

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$에서

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$\frac{4}{9}=\frac{1}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)$

$\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{9}$

$\therefore \mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

## 14 답 $\frac{23}{24}$

두 축구 선수 A, B가 승부차기에 성공하지 못하는 사건을 각각 $A$, $B$라 하면

$\mathrm{P}(A)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$, $\mathrm{P}(B)=1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

A, B 중에서 적어도 1명이 승부차기를 성공하는 사건은 $(A\cap B)^C$이고, 이때 $A\cap B$는 A, B가 모두 승부차기를 성공하지 못하는 사건이다.

이때 두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}((A\cap B)^C)=1-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=1-\frac{1}{24}=\frac{23}{24}$

다른 풀이

두 축구 선수 A, B가 승부차기에 성공하는 사건을 각각 $A$, $B$라 하면 두 사건 $A$, $B$는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

$=\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{8}$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\frac{3}{4}+\frac{5}{6}-\frac{5}{8}=\frac{23}{24}$

## 15 답 $\frac{11}{21}$

(i) 주머니 A에서 빨간 구슬 1개를 꺼내고, 주머니 B에서 검은 구슬 1개를 꺼낼 확률은

$\frac{2}{6}\times\frac{3}{7}=\frac{1}{7}$

(ii) 주머니 A에서 검은 구슬 1개를 꺼내고, 주머니 B에서 빨간 구슬 1개를 꺼낼 확률은

$\frac{4}{6}\times\frac{4}{7}=\frac{8}{21}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{7}+\frac{8}{21}=\frac{11}{21}$

## 16 답 $\frac{96}{625}$

공에 적힌 수가 모두 4 이하이려면 1, 2, 3, 4가 적힌 공 중에서 2개를 꺼내야 하므로 그 확률은

$\frac{{}_4\mathrm{C}_2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}$

따라서 구하는 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{5}\right)^3\left(\frac{3}{5}\right)^1=\frac{96}{625}$

## 17 답 $\frac{243}{256}$

청팀이 우승하려면 7번째 경기 또는 8번째 경기 또는 9번째 경기에서 우승해야 한다.

이때 청팀이 백팀을 이길 확률이 $\frac{3}{4}$이고 비기는 경우는 없으므로 백팀이 청팀을 이길 확률은 $\frac{1}{4}$이다.

(i) 청팀이 7번째 경기에서 우승할 확률은

${}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

(ii) 청팀이 8번째 경기에서 우승할 확률은

${}_2\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^1\times\frac{3}{4}=\frac{9}{32}$

(iii) 청팀이 9번째 경기에서 우승할 확률은

${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{3}{4}=\frac{27}{256}$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$\frac{9}{16}+\frac{9}{32}+\frac{27}{256}=\frac{243}{256}$

## 18 답 $\frac{7}{32}$

(i) 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 5 이상이고, 한 개의 동전을 5번 던져서 앞면이 1번 나올 확률은

$\frac{2}{6}\times{}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{5}{96}$

(ii) 한 개의 주사위를 던져서 나오는 눈의 수가 4 이하이고, 한 개의 동전을 4번 던져서 앞면이 1번 나올 확률은

$\frac{4}{6}\times{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{6}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{5}{96}+\frac{1}{6}=\frac{7}{32}$

## 19 답 ③

동전의 앞면이 나오는 횟수를 $x$, 뒷면이 나오는 횟수를 $y$라 하면 $x$축의 방향으로 4만큼, $y$축의 방향으로 2만큼 움직여야 하므로

$x=4$, $y=2$

따라서 구하는 확률은

${}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{15}{64}$

## 20 답 $\frac{1}{4}$

한 개의 동전을 4번 던져서 앞면이 나오는 횟수를 $x$, 뒷면이 나오는 횟수를 $y$라 하면

$x+y=4$

$\therefore\ y=4-x$ ····· ㉠

점 P가 꼭짓점 A에 있으려면 $2x-y$가 5의 배수가 되어야 하므로

$2x-y=5k$ (단, $k$는 정수)

이 식에 ㉠을 대입하면

$2x-(4-x)=5k$

$\therefore\ 3x-4=5k$

이때 $x$는 $0\le x\le 4$인 정수이므로 $x=3$

따라서 구하는 확률은

${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{4}$

# 05 / 이산확률변수와 이항분포 26~31쪽

## 중단원 기출 문제 1회

**1** 답 9

확률의 총합은 1이므로

$P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

$\frac{1}{a}+\frac{3}{a}+\frac{5}{a}=1$, $\frac{9}{a}=1$ $\therefore a=9$

**2** 답 $\frac{1}{4}$

확률의 총합은 1이므로

$2k+k+3k+12k+6k=1$, $24k=1$ $\therefore k=\frac{1}{24}$

$\therefore P(X\le 0)=P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=0)$

$=2k+k+3k=6k=6\times\frac{1}{24}=\frac{1}{4}$

**3** 답 ⑤

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, …, 12이다.

$X^2-14X+48\le 0$에서

$(X-6)(X-8)\le 0$ $\therefore 6\le X\le 8$

서로 다른 두 개의 주사위를 동시에 던져서 나오는 눈의 수를 각각 $a$, $b$라 하면 순서쌍 $(a, b)$에 대하여 두 눈의 수의 합이

(i) 6인 경우는 (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)의 5가지이므로

$P(X=6)=\frac{5}{6\times 6}=\frac{5}{36}$

(ii) 7인 경우는 (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)의 6가지이므로

$P(X=7)=\frac{6}{6\times 6}=\frac{1}{6}$

(iii) 8인 경우는 (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)의 5가지이므로

$P(X=8)=\frac{5}{6\times 6}=\frac{5}{36}$

(i), (ii), (iii)에서

$P(X^2-14X+48\le 0)=P(6\le X\le 8)$

$=P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)$

$=\frac{5}{36}+\frac{1}{6}+\frac{5}{36}=\frac{4}{9}$

**4** 답 3

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4이고, 각각의 확률은

$P(X=1)=\frac{{}_5C_1\times{}_3C_3}{{}_8C_4}=\frac{1}{14}$, $P(X=2)=\frac{{}_5C_2\times{}_3C_2}{{}_8C_4}=\frac{3}{7}$,

$P(X=3)=\frac{{}_5C_3\times{}_3C_1}{{}_8C_4}=\frac{3}{7}$, $P(X=4)=\frac{{}_5C_4\times{}_3C_0}{{}_8C_4}=\frac{1}{14}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{14}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{3}{7}$ | $\frac{1}{14}$ | 1 |

이때 $P(X=3)+P(X=4)=\frac{3}{7}+\frac{1}{14}=\frac{1}{2}$이므로

$P(X\ge 3)=\frac{1}{2}$ $\therefore a=3$

**5** 답 ④

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{2}+a+b=1$ $\therefore a+b=\frac{1}{2}$ …… ㉠

$E(X)=3$에서

$2\times\frac{1}{2}+3\times a+6\times b=3$

$\therefore 3a+6b=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 $X$에 대하여

$E(X^2)=2^2\times\frac{1}{2}+3^2\times\frac{1}{3}+6^2\times\frac{1}{6}=11$

**6** 답 $\frac{9}{20}$

$P(X=3)=a$라 하면

$P(X=2)=3P(X=3)=3a$

$P(X=1)=3P(X=2)=3\times 3a=9a$

$P(X=0)=3P(X=1)=3\times 9a=27a$

확률의 총합은 1이므로

$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1$

$27a+9a+3a+a=1$

$40a=1$ $\therefore a=\frac{1}{40}$

따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{27}{40}$ | $\frac{9}{40}$ | $\frac{3}{40}$ | $\frac{1}{40}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=0\times\frac{27}{40}+1\times\frac{9}{40}+2\times\frac{3}{40}+3\times\frac{1}{40}=\frac{9}{20}$

**7** 답 $\frac{3}{5}$

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 각각의 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\times{}_3C_3}{{}_5C_3}=\frac{1}{10}$, $P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_3C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{5}$,

$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\times{}_3C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{3}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$,

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{10}+1^2\times\frac{3}{5}+2^2\times\frac{3}{10}=\frac{9}{5}$이므로

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{9}{5}-\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$
$$\therefore\ \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$$

## 8 답 $\frac{13}{2}$

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 4, 6, 8, 10이다.

(i) 두 수의 합이 4인 경우는 A에서 2, B에서 2가 나와야 하므로
$3\times1=3$(가지)
$$\therefore\ P(X=4)=\frac{3}{4\times4}=\frac{3}{16}$$

(ii) 두 수의 합이 6인 경우는 A에서 2, B에서 4가 나오거나 A에서 4, B에서 2가 나와야 하므로
$3\times2+1\times1=7$(가지)
$$\therefore\ P(X=6)=\frac{7}{4\times4}=\frac{7}{16}$$

(iii) 두 수의 합이 8인 경우는 A에서 2, B에서 6이 나오거나 A에서 4, B에서 4가 나와야 하므로
$3\times1+1\times2=5$(가지)
$$\therefore\ P(X=8)=\frac{5}{4\times4}=\frac{5}{16}$$

(iv) 두 수의 합이 10인 경우는 A에서 4, B에서 6이 나와야 하므로
$1\times1=1$(가지)
$$\therefore\ P(X=10)=\frac{1}{4\times4}=\frac{1}{16}$$

(i)~(iv)에서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 4 | 6 | 8 | 10 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{7}{16}$ | $\frac{5}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여
$$E(X)=4\times\frac{3}{16}+6\times\frac{7}{16}+8\times\frac{5}{16}+10\times\frac{1}{16}=\frac{13}{2}$$

## 9 답 ②

복권 1장으로 받을 수 있는 당첨금을 확률변수 $X$라 할 때, $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 20 | 50 | 100 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{13}{20}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여
$$E(X)=0\times\frac{13}{20}+20\times\frac{1}{5}+50\times\frac{1}{10}+100\times\frac{1}{20}=14$$
따라서 구하는 기댓값은 14만 원이다.

## 10 답 2

게임을 한 번 하여 받을 수 있는 금액을 확률변수 $X$라 할 때, $X$가 가질 수 있는 값은 2700, 9000이고, 그 확률은 각각
$$P(X=2700)=\frac{7}{a+7},\ P(X=9000)=\frac{a}{a+7}$$
따라서 확률변수 $X$에 대하여
$$E(X)=2700\times\frac{7}{a+7}+9000\times\frac{a}{a+7}=\frac{18900+9000a}{a+7}$$
이때 $E(X)=4100$이므로
$$\frac{18900+9000a}{a+7}=4100$$
$$189+90a=41a+287$$
$$49a=98\qquad\therefore\ a=2$$

## 11 답 5

$E(X)=1$이므로 $E(Y)=-1$에서
$E(aX+b)=-1$, $aE(X)+b=-1$
$\therefore\ a+b=-1$ …… ㉠
또 $V(X)=9$이므로 $V(Y)=36$에서
$V(aX+b)=36$, $a^2V(X)=36$
$9a^2=36$, $a^2=4$ $\therefore\ a=2$ ($\because\ a>0$)
이를 ㉠에 대입하면
$2+b=-1$ $\therefore\ b=-3$
$\therefore\ a-b=2-(-3)=5$

## 12 답 $\frac{5}{4}$

$V(X)=\frac{5}{8}$에서
$$V(Y)=V(8X-2)=8^2V(X)=64\times\frac{5}{8}=40$$
이때 $E(Y)=a$라 하면 $E(Y^2)=13a$이므로
$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=13a-a^2$
$40=13a-a^2$이므로
$a^2-13a+40=0$, $(a-5)(a-8)=0$
$\therefore\ a=5$ 또는 $a=8$
즉, $E(Y)=5$ 또는 $E(Y)=8$이므로
$E(8X-2)=5$ 또는 $E(8X-2)=8$
$8E(X)-2=5$ 또는 $8E(X)-2=8$
$$\therefore\ E(X)=\frac{7}{8}\text{ 또는 }E(X)=\frac{5}{4}$$
따라서 $E(X)$의 최댓값은 $\frac{5}{4}$이다.

## 13 답 $\sqrt{15}$

확률의 총합은 1이므로
$$\frac{3}{10}+a+\frac{3}{10}=1\qquad\therefore\ a=\frac{2}{5}$$
따라서 확률변수 $X$에 대하여
$$E(X)=0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{3}{10}=1$$
$$E(X^2)=0^2\times\frac{3}{10}+1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{3}{10}=\frac{8}{5}$$
$$\therefore\ V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$$
$$=\frac{8}{5}-1^2=\frac{3}{5}$$
따라서 $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$이므로
$\sigma(5X-1)=|5|\sigma(X)$
$$=5\times\frac{\sqrt{15}}{5}=\sqrt{15}$$

## 14 답 ③

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 각각의 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_3C_0\times{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{2}{7}$, $P(X=1)=\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}=\frac{4}{7}$,

$P(X=2)=\frac{{}_3C_2\times{}_4C_0}{{}_7C_2}=\frac{1}{7}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{2}{7}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{1}{7}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=0\times\frac{2}{7}+1\times\frac{4}{7}+2\times\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{2}{7}+1^2\times\frac{4}{7}+2^2\times\frac{1}{7}=\frac{8}{7}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=\frac{8}{7}-\left(\frac{6}{7}\right)^2=\frac{20}{49}$

$\therefore V(Y)=V(7X+3)=7^2V(X)$

$=49\times\frac{20}{49}=20$

## 15 답 ⑤

확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(3, \frac{3}{4}\right)$을 따르므로 $X$의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_3C_x\left(\frac{3}{4}\right)^x\left(\frac{1}{4}\right)^{3-x}$ $(x=0, 1, 2, 3)$

$\therefore P(X\geq1)=1-P(X=0)$

$=1-{}_3C_0\left(\frac{1}{4}\right)^3=\frac{63}{64}$

## 16 답 12

확률변수 $X$가 이항분포 $B\left(6, \frac{2}{5}\right)$를 따르므로 $X$의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_6C_x\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{6-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 6)$

$\therefore P(X>4)=P(X=5)+P(X=6)$

$={}_6C_5\left(\frac{2}{5}\right)^5\left(\frac{3}{5}\right)^1+{}_6C_6\left(\frac{2}{5}\right)^6$

$=\frac{18\times2^5}{5^6}+\frac{2^6}{5^6}$

$=\frac{20\times2^5}{5^6}=\frac{2^7}{5^5}$

따라서 $a=7$, $b=5$이므로

$a+b=12$

## 17 답 10

확률변수 $X$가 이항분포 $B(20, p)$를 따르므로 $X$의 표준편차는

$\sigma(X)=\sqrt{20\times p\times(1-p)}=\sqrt{-20p^2+20p}$

이때 $\sigma(X)=\frac{5}{3}$이므로

$\sqrt{-20p^2+20p}=\frac{5}{3}$, $-20p^2+20p=\frac{25}{9}$

$36p^2-36p+5=0$, $(6p-1)(6p-5)=0$

$\therefore p=\frac{5}{6}$ $\left(\because p>\frac{1}{2}\right)$

따라서 $X$의 확률질량함수는

$P(X=x)={}_{20}C_x\left(\frac{5}{6}\right)^x\left(\frac{1}{6}\right)^{20-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 20)$

$\therefore \frac{P(X=7)}{P(X=6)}=\frac{{}_{20}C_7\left(\frac{5}{6}\right)^7\left(\frac{1}{6}\right)^{13}}{{}_{20}C_6\left(\frac{5}{6}\right)^6\left(\frac{1}{6}\right)^{14}}=\frac{2\times\frac{5}{6}}{\frac{1}{6}}=10$

## 18 답 ⑤

한 번의 가위바위보에서 서하가 이길 확률은 $\frac{1}{3}$이므로 확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{3}\right)$을 따른다.

$V(X)=4$에서

$n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=4$ $\therefore n=18$

따라서 확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(18, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$E(X)=18\times\frac{1}{3}=6$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$E(X^2)=V(X)+\{E(X)\}^2=4+6^2=40$

$\therefore E(X)+E(X^2)=6+40=46$

## 19 답 ④

$E(3X-2)=5$에서

$3E(X)-2=5$, $3E(X)=7$

$\therefore E(X)=\frac{7}{3}$

이때 확률변수 $X$가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{6}\right)$을 따르므로

$n\times\frac{1}{6}=\frac{7}{3}$ $\therefore n=14$

## 20 답 60

주사위를 40번 던질 때 소수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 $Y$라 하면 소수가 아닌 눈이 나오는 횟수는 $40-Y$이므로

$X=5Y-2(40-Y)=7Y-80$

확률변수 $Y$는 이항분포 $B\left(40, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(Y)=40\times\frac{1}{2}=20$

$\therefore E(X)=E(7Y-80)=7E(Y)-80$

$=7\times20-80=60$

# 중단원 기출 문제 2회

## 1 답 $\frac{1}{3}$

확률의 총합은 1이므로

$2a^2+2a+a^2=1$, $3a^2+2a-1=0$

$(a+1)(3a-1)=0$

$\therefore a=-1$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

이때 $0 \le P(X=x) \le 1$이므로

$a=\frac{1}{3}$

## 2 답 ①

확률의 총합은 1이므로

$P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=1$

$\frac{k}{2\times1}+\frac{k}{3\times2}+\frac{k}{4\times3}+\frac{k}{5\times4}+\frac{k}{6\times5}=1$

$k\left(\frac{1}{2\times1}+\frac{1}{3\times2}+\frac{1}{4\times3}+\frac{1}{5\times4}+\frac{1}{6\times5}\right)=1$

$k\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\right\}=1$

$k\left(1-\frac{1}{6}\right)=1$, $\frac{5}{6}k=1$ $\quad\therefore k=\frac{6}{5}$

$X^2-9X+18=0$에서 $(X-3)(X-6)=0$

$\therefore X=3$ 또는 $X=6$

$\therefore P(X^2-9X+18=0)=P(X=3 \text{ 또는 } X=6)$

$=P(X=3)+P(X=6)$

$=\frac{k}{3\times2}+\frac{k}{6\times5}=\frac{k}{5}$

$=\frac{1}{5}\times\frac{6}{5}=\frac{6}{25}$

## 3 답 $\frac{11}{14}$

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 각각의 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_4C_0\times{}_4C_2}{{}_8C_2}=\frac{3}{14}$, $P(X=1)=\frac{{}_4C_1\times{}_4C_1}{{}_8C_2}=\frac{4}{7}$,

$P(X=2)=\frac{{}_4C_2\times{}_4C_0}{{}_8C_2}=\frac{3}{14}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{3}{14}$ | $\frac{4}{7}$ | $\frac{3}{14}$ | 1 |

$\therefore P(X\le1)=P(X=0)+P(X=1)=\frac{3}{14}+\frac{4}{7}=\frac{11}{14}$

다른 풀이

$P(X\le1)=1-P(X=2)=1-\frac{3}{14}=\frac{11}{14}$

## 4 답 $\frac{2}{5}$

확률변수가 가질 수 있는 값은 1, 2, 3, 4, 5이다.

(i) $X=3$일 때

2회까지 딸기맛 사탕이 아닌 사탕을 꺼내고, 3회에 딸기맛 사탕을 꺼내는 경우이므로

$P(X=3)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$

(ii) $X=4$일 때

3회까지 딸기맛 사탕이 아닌 사탕을 꺼내고, 4회에 딸기맛 사탕을 꺼내는 경우이므로

$P(X=4)=\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{5}$

$\therefore P(2<X\le4)=P(X=3)+P(X=4)$

$=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$

## 5 답 $\frac{7}{6}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{3}+a=1$ $\quad\therefore a=\frac{5}{12}$

따라서 확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{12}+2\times\frac{1}{3}+3\times\frac{5}{12}=2$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{6}+1^2\times\frac{1}{12}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{5}{12}=\frac{31}{6}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{31}{6}-2^2=\frac{7}{6}$

## 6 답 $\frac{8}{15}$

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 0, 1, 2이고, 각각의 확률은

$P(X=0)=\frac{{}_2C_0\times{}_8C_2}{{}_{10}C_2}=\frac{28}{45}$, $P(X=1)=\frac{{}_2C_1\times{}_8C_1}{{}_{10}C_2}=\frac{16}{45}$,

$P(X=2)=\frac{{}_2C_2\times{}_8C_0}{{}_{10}C_2}=\frac{1}{45}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{28}{45}$ | $\frac{16}{45}$ | $\frac{1}{45}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=0\times\frac{28}{45}+1\times\frac{16}{45}+2\times\frac{1}{45}=\frac{2}{5}$

$E(X^2)=0^2\times\frac{28}{45}+1^2\times\frac{16}{45}+2^2\times\frac{1}{45}=\frac{4}{9}$

$\therefore V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{4}{9}-\left(\frac{2}{5}\right)^2=\frac{64}{225}$

$\therefore \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{64}{225}}=\frac{8}{15}$

## 7 답 75원

게임을 한 번 하여 받을 수 있는 금액을 확률변수 $X$라 할 때, $X$가 가질 수 있는 값은 $-600$, 500, 1000이고, 각각의 확률은

$P(X=-600)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

$P(X=500)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, $P(X=1000)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | $-600$ | 500 | 1000 | 합계 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=-600\times\frac{1}{2}+500\times\frac{1}{4}+1000\times\frac{1}{4}=75$

따라서 구하는 기댓값은 75원이다.

## 8 답 ①

$E(X)=a$, $E(X^2)=6a+7$이므로

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=6a+7-a^2$

$\therefore$ $\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(4X+3)=4^2\mathrm{V}(X)$
$=16(-a^2+6a+7)$
$=-16(a-3)^2+256$ $(-1\le a\le 5)$
따라서 $\mathrm{V}(Y)$는 $a=3$일 때 최댓값 256을 가지므로 $\sigma(Y)$의 최댓값은 $\sqrt{256}=16$

## 9 답 20

확률변수 $X$에 대하여
$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{2}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{2}{5}=2$
$\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{2}{5}+2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{2}{5}=\frac{24}{5}$
$\therefore$ $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2=\frac{24}{5}-2^2=\frac{4}{5}$
$\therefore$ $\mathrm{V}(5X+8)=5^2\mathrm{V}(X)=25\times\frac{4}{5}=20$

## 10 답 16

확률의 총합은 1이므로
$\mathrm{P}(X=3)+\mathrm{P}(X=4)+\mathrm{P}(X=5)+\mathrm{P}(X=6)+\mathrm{P}(X=7)=1$
$a+2a+3a+4a+5a=1$
$15a=1$ $\therefore$ $a=\frac{1}{15}$
따라서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{2}{15}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{1}{3}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여
$\mathrm{E}(X)=3\times\frac{1}{15}+4\times\frac{2}{15}+5\times\frac{1}{5}+6\times\frac{4}{15}+7\times\frac{1}{3}=\frac{17}{3}$
$\therefore$ $\mathrm{E}(3X-1)=3\mathrm{E}(X)-1=3\times\frac{17}{3}-1=16$

## 11 답 ④

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 2, 3, 4, 5이다.
뽑은 카드에 적힌 수를 각각 $a$, $b$ $(a<b)$라 하면 순서쌍 $(a, b)$에 대하여 두 수 중에서 큰 수가
(i) 2인 경우는 (1, 2)의 1가지이므로
$\mathrm{P}(X=2)=\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{10}$
(ii) 3인 경우는 (1, 3), (2, 3)의 2가지이므로
$\mathrm{P}(X=3)=\frac{2}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{1}{5}$
(iii) 4인 경우는 (1, 4), (2, 4), (3, 4)의 3가지이므로
$\mathrm{P}(X=4)=\frac{3}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{3}{10}$
(iv) 5인 경우는 (1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)의 4가지이므로
$\mathrm{P}(X=5)=\frac{4}{{}_5\mathrm{C}_2}=\frac{2}{5}$
(i)~(iv)에서 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{2}{5}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여
$\mathrm{E}(X)=2\times\frac{1}{10}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{2}{5}=4$
$\mathrm{E}(X^2)=2^2\times\frac{1}{10}+3^2\times\frac{1}{5}+4^2\times\frac{3}{10}+5^2\times\frac{2}{5}=17$
$\therefore$ $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$=17-4^2=1$
$\therefore$ $\mathrm{V}(7X-2)=7^2\mathrm{V}(X)=49\times1=49$

## 12 답 $\sqrt{26}$

확률변수 $X$가 가질 수 있는 값은 1, 2, 4, $a$이므로 확률변수 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 2 | 4 | $a$ | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여
$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{2}{5}+4\times\frac{1}{5}+a\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}a+\frac{9}{5}$
이때 $\mathrm{E}(5X-3)=9$에서
$5\mathrm{E}(X)-3=9$, $5\left(\frac{1}{5}a+\frac{9}{5}\right)-3=9$ $\therefore$ $a=3$
$\therefore$ $\mathrm{E}(X)=\frac{1}{5}\times3+\frac{9}{5}=\frac{12}{5}$
즉, $\mathrm{E}(X^2)=1^2\times\frac{1}{5}+2^2\times\frac{2}{5}+4^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{1}{5}=\frac{34}{5}$이므로
$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$
$=\frac{34}{5}-\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{26}{25}$
따라서 $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{V}(X)}=\sqrt{\frac{26}{25}}=\frac{\sqrt{26}}{5}$이므로
$\sigma(5X-3)=|5|\sigma(X)$
$=5\times\frac{\sqrt{26}}{5}=\sqrt{26}$

## 13 답 ⑤

양궁 선수가 화살을 10번 쏠 때, 10점 과녁에 맞히는 횟수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}(10, 0.8)$, 즉 $\mathrm{B}\left(10, \frac{4}{5}\right)$를 따르므로 $X$의 확률질량함수는
$\mathrm{P}(X=x)={}_{10}\mathrm{C}_x\left(\frac{4}{5}\right)^x\left(\frac{1}{5}\right)^{10-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 10)$
따라서 구하는 확률은
$\mathrm{P}(X\ge8)=\mathrm{P}(X=8)+\mathrm{P}(X=9)+\mathrm{P}(X=10)$
$={}_{10}\mathrm{C}_8\left(\frac{4}{5}\right)^8\left(\frac{1}{5}\right)^2+{}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{4}{5}\right)^9\left(\frac{1}{5}\right)^1+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{10}$
$=\frac{45\times4^8}{5^{10}}+\frac{10\times4^9}{5^{10}}+\frac{4^{10}}{5^{10}}$
$=\frac{101\times4^8}{5^{10}}$

## 14 답 ④

실제로 관람하는 사람의 수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}(34, 0.9)$를 따르므로 $X$의 확률질량함수는
$\mathrm{P}(X=x)={}_{34}\mathrm{C}_x0.9^x\times0.1^{34-x}$ $(x=0, 1, 2, \cdots, 34)$

이때 좌석이 부족하려면 관람하는 사람의 수가 32명을 초과해야 하므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X>32)&=P(X=33)+P(X=34)\\&={}_{34}C_{33}0.9^{33}\times0.1^{1}+{}_{34}C_{34}0.9^{34}\\&=34\times0.9^{33}\times0.1+0.9^{34}=3.4\times0.9^{33}+0.9\times0.9^{33}\\&=4.3\times0.9^{33}=4.3\times0.031\\&=0.1333\end{aligned}$$

## 15 답 21

확률변수 $X$가 이항분포 $B\left(48,\ \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$$E(X)=48\times\frac{1}{4}=12$$

$$\sigma(X)=\sqrt{48\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}=3$$

이때 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 $E(X)$, $\sigma(X)$, 즉 12, 3이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$12+3=-a$, $12\times3=b$

$\therefore\ a=-15$, $b=36$

$\therefore\ a+b=21$

## 16 답 541

$E(X)=90$에서

$np=90$ ····· ㉠

$\sigma(X)=5\sqrt{3}$에서

$\sqrt{np(1-p)}=5\sqrt{3}$ $\therefore\ np(1-p)=75$ ····· ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$90(1-p)=75$

$1-p=\frac{5}{6}$ $\therefore\ p=\frac{1}{6}$

이를 ㉠에 대입하면

$\frac{1}{6}n=90$ $\therefore\ n=540$

$\therefore\ n+6p=540+6\times\frac{1}{6}=541$

## 17 답 ⑤

주사위를 한 번 던져서 2의 약수의 눈이 나올 확률은

$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

즉, 확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(9,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$E(X)=9\times\frac{1}{3}=3$$

$$V(X)=9\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=2$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$이므로

$$\begin{aligned}E(X^2)&=V(X)+\{E(X)\}^2\\&=2+3^2=11\end{aligned}$$

## 18 답 6

주머니에서 1개의 바둑돌을 꺼낼 때 검은 바둑돌을 꺼낼 확률은

$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

즉, 확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(n,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$E(X)=n\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}n$$

$$V(X)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}n$$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$에서

$$\begin{aligned}E(X^2)&=V(X)+\{E(X)\}^2\\&=\frac{2}{9}n+\left(\frac{1}{3}n\right)^2\\&=\frac{1}{9}n^2+\frac{2}{9}n\end{aligned}$$

이때 $E(X^2)=\frac{16}{3}$이므로

$\frac{1}{9}n^2+\frac{2}{9}n=\frac{16}{3}$

$n^2+2n-48=0$

$(n+8)(n-6)=0$

$\therefore\ n=6$ ($\because\ n>0$)

## 19 답 98

확률변수 $X$는 이항분포 $B\left(50,\ \frac{1}{50}\right)$을 따르므로

$$V(X)=50\times\frac{1}{50}\times\frac{49}{50}=\frac{49}{50}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ V(10X+1)&=10^2V(X)\\&=100\times\frac{49}{50}=98\end{aligned}$$

## 20 답 ③

확률변수 $X$가 이항분포 $B\left(n,\ \frac{5}{6}\right)$를 따르므로 $X$의 확률질량함수는

$$P(X=x)={}_nC_x\left(\frac{5}{6}\right)^x\left(\frac{1}{6}\right)^{n-x}\ (x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

이때 $P(X=5)=20P(X=4)$에서

$${}_nC_5\left(\frac{5}{6}\right)^5\left(\frac{1}{6}\right)^{n-5}=20\,{}_nC_4\left(\frac{5}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)^{n-4}$$

$\frac{n-4}{5}\times\frac{5}{6}=20\times\frac{1}{6}$

$n-4=20$

$\therefore\ n=24$

따라서 확률변수 $X$가 이항분포 $B\left(24,\ \frac{5}{6}\right)$를 따르므로

$$V(X)=24\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{10}{3}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ V(6X)&=6^2V(X)\\&=36\times\frac{10}{3}=120\end{aligned}$$

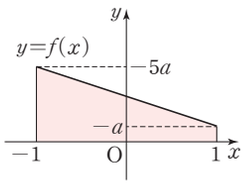
# 06 / 연속확률변수와 정규분포 32~37쪽

## 중단원 기출 문제 1회

**1** 답 ⑤

$f(x) \geq 0$이므로 $a \leq 0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=-1$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

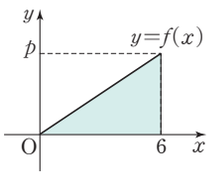



$\frac{1}{2} \times \{-5a+(-a)\} \times 2=1$, $-6a=1$

$\therefore a=-\frac{1}{6}$

**2** 답 $\frac{1}{9}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 직선 $x=6$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로




$\frac{1}{2} \times 6 \times p=1$, $3p=1$ $\therefore p=\frac{1}{3}$

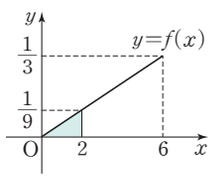
$0 \leq x \leq 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 점 $(0, 0)$, $\left(6, \frac{1}{3}\right)$을 지나는 직선이므로

$f(x)=\frac{\frac{1}{3}}{6}x$

$\therefore f(x)=\frac{1}{18}x$ $(0 \leq x \leq 6)$

$\therefore f(6p)=f(2)=\frac{1}{9}$

구하는 확률은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로



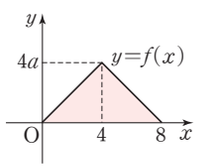

$\mathrm{P}(0 \leq X \leq 6p)=\mathrm{P}(0 \leq X \leq 2)$

$=\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{1}{9}=\frac{1}{9}$

**3** 답 $\frac{15}{16}$

㈐에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=4$에 대하여 대칭이다.

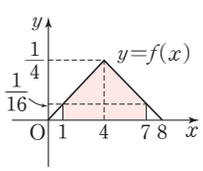
㈎, ㈏에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.




함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2} \times 8 \times 4a=1$, $16a=1$ $\therefore a=\frac{1}{16}$

$\mathrm{P}(16a \leq X \leq 8-16a)$, 즉 $\mathrm{P}(1 \leq X \leq 7)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=1$, $x=7$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로




$\mathrm{P}(16a \leq X \leq 8-16a)=\mathrm{P}(1 \leq X \leq 7)$

$=2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{16}+\frac{1}{4}\right) \times 3=\frac{15}{16}$

**4** 답 ③

ㄱ. 확률변수 $X_1$의 정규분포곡선의 대칭축이 확률변수 $X_2$의 정규분포곡선의 대칭축보다 왼쪽에 있으므로

$\mathrm{E}(X_1)<\mathrm{E}(X_2)$

ㄴ. 확률변수 $X_1$의 정규분포곡선의 가운데 부분의 높이가 확률변수 $X_2$의 정규분포곡선의 가운데 부분의 높이보다 높으므로

$\sigma(X_1)<\sigma(X_2)$ $\therefore \mathrm{V}(X_1)<\mathrm{V}(X_2)$

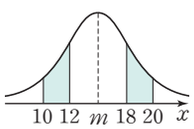
ㄷ. $f(\mathrm{E}(X_1))=f(x_1)$, $g(\mathrm{E}(X_2))=g(x_2)$이고, $f(x_1)>g(x_2)$이므로

$f(\mathrm{E}(X_1))>g(\mathrm{E}(X_2))$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

**5** 답 15

정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이고 $\mathrm{P}(10 \leq X \leq 12)=\mathrm{P}(18 \leq X \leq 20)$이므로




$m=\frac{12+18}{2}=15$

**6** 답 0.3413

곡선 $y=x^2+2Xx-X+2$와 직선 $y=4x$가 만나지 않으려면 $x$에 대한 이차방정식 $x^2+2Xx-X+2=4x$, 즉 $x^2+2(X-2)x-X+2=0$이 허근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(X-2)^2-(-X+2)<0$

$X^2-3X+2<0$, $(X-1)(X-2)<0$

$\therefore 1<X<2$

이때 $m=2$, $\sigma=1$이므로

$\mathrm{P}(1<X<2)=\mathrm{P}(2-1<X<2)$

$=\mathrm{P}(m-\sigma<X<m)$

$=\mathrm{P}(m \leq X \leq m+\sigma)$

$=0.3413$

**7** 답 52

$\mathrm{P}(X \leq a)=0.9772$에서

$\mathrm{P}(X \leq m)+\mathrm{P}(m \leq X \leq a)=0.9772$

$0.5+\mathrm{P}(m \leq X \leq a)=0.9772$

$\therefore \mathrm{P}(m \leq X \leq a)=0.4772$

이때 $\mathrm{P}(m \leq X \leq m+2\sigma)=0.4772$이므로

$a=m+2\sigma$

따라서 $m=40$, $\sigma=6$이므로

$a=40+2 \times 6=52$

**8** 답 62

양계장 A와 양계장 B에서 생산하는 달걀 1개의 무게를 각각 확률변수 $X$, $Y$라 하면 $X$, $Y$는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(60, 10^2)$, $\mathrm{N}(65, 15^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-60}{10}$, $Z_Y=\frac{Y-65}{15}$로 놓으면 두 확률변수 $Z_X$, $Z_Y$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$P(X \geq a)=P(Y \leq a)$이므로

$$P\left(Z_X \geq \frac{a-60}{10}\right)=P\left(Z_Y \leq \frac{a-65}{15}\right)$$

$$=P\left(Z_Y \geq \frac{65-a}{15}\right)$$

따라서 $\frac{a-60}{10}=\frac{65-a}{15}$이므로

$3a-180=130-2a$, $5a=310$ $\therefore a=62$

## 9 답 ④

확률변수 $X$가 정규분포 $N(40, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-40}{5}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\therefore P(34 \leq X \leq 43)=P\left(\frac{34-40}{5} \leq Z \leq \frac{43-40}{5}\right)$$

$$=P(-1.2 \leq Z \leq 0.6)$$

$$=P(-1.2 \leq Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 0.6)$$

$$=P(0 \leq Z \leq 1.2)+P(0 \leq Z \leq 0.6)$$

$$=0.3849+0.2257=0.6106$$

## 10 답 25.5

확률변수 $X$가 정규분포 $N(21, 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-21}{3}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(15 \leq X \leq a)=0.9104$에서

$$P\left(\frac{15-21}{3} \leq Z \leq \frac{a-21}{3}\right)=0.9104$$

$$P\left(-2 \leq Z \leq \frac{a-21}{3}\right)=0.9104$$

$$P(-2 \leq Z \leq 0)+P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-21}{3}\right)=0.9104$$

$$P(0 \leq Z \leq 2)+P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-21}{3}\right)=0.9104$$

$$0.4772+P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-21}{3}\right)=0.9104$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{a-21}{3}\right)=0.4332$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{a-21}{3}=1.5$, $a-21=4.5$ $\therefore a=25.5$

## 11 답 ④

세 확률변수 $X$, $Y$, $W$가 각각 정규분포 $N(40, 3^2)$, $N(45, 4^2)$, $N(45, 6^2)$을 따르므로

$Z_X=\frac{X-40}{3}$, $Z_Y=\frac{Y-45}{4}$, $Z_W=\frac{W-45}{6}$

로 놓으면 세 확률변수 $Z_X$, $Z_Y$, $Z_W$는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$a=P(X \leq 46)=P\left(Z_X \leq \frac{46-40}{3}\right)=P(Z_X \leq 2)$$

$$b=P(Y \geq 35)=P\left(Z_Y \geq \frac{35-45}{4}\right)$$

$$=P(Z_Y \geq -2.5)=P(Z_Y \leq 2.5)$$

$$c=P(W \leq 51)=P\left(Z_W \leq \frac{51-45}{6}\right)=P(Z_W \leq 1)$$

이때 $P(Z_W \leq 1)<P(Z_X \leq 2)<P(Z_Y \leq 2.5)$이므로

$c<a<b$

## 12 답 ④

학생의 키를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(171, 7^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-171}{7}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

학생의 키가 164 cm 이상 178 cm 이하일 확률은

$$P(164 \leq X \leq 178)=P\left(\frac{164-171}{7} \leq Z \leq \frac{178-171}{7}\right)$$

$$=P(-1 \leq Z \leq 1)$$

$$=P(-1 \leq Z \leq 0)+P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$=2P(0 \leq Z \leq 1)$$

$$=2 \times 0.34=0.68$$

따라서 키가 164 cm 이상 178 cm 이하인 학생은 전체 학생의 68 %이다.

## 13 답 8

응시자의 시험 점수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(68, \sigma^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-68}{\sigma}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X \geq 80)=\frac{28}{400}=0.07$이므로

$$P\left(Z \geq \frac{80-68}{\sigma}\right)=0.07,\ P\left(Z \geq \frac{12}{\sigma}\right)=0.07$$

$$P(Z \geq 0)-P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right)=0.07$$

$$0.5-P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right)=0.07$$

$$\therefore P\left(0 \leq Z \leq \frac{12}{\sigma}\right)=0.43$$

이때 $P(0 \leq Z \leq 1.5)=0.43$이므로

$\frac{12}{\sigma}=1.5$ $\therefore \sigma=8$

## 14 답 ④

과자 1봉지의 무게를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(121, 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-121}{2}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

과자 1봉지의 무게가 118 g 이하일 확률은

$$P(X \leq 118)=P\left(Z \leq \frac{118-121}{2}\right)$$

$$=P(Z \leq -1.5)=P(Z \geq 1.5)$$

$$=P(Z \geq 0)-P(0 \leq Z \leq 1.5)$$

$$=0.5-0.4332=0.0668$$

따라서 구하는 과자는

$5000 \times 0.0668=334$(봉지)

## 15 답 163점

학생의 점수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(132, 20^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-132}{20}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

상품을 받는 학생의 최저 점수를 $a$점이라 하면

$P(X \geq a)=\frac{15}{250}=0.06$

$\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{a-132}{20}\right)=0.06$

$\mathrm{P}(Z \geq 0)-\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{a-132}{20}\right)=0.06$

$0.5-\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{a-132}{20}\right)=0.06$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{a-132}{20}\right)=0.44$

이때 $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.55)=0.44$이므로

$\frac{a-132}{20}=1.55$ , $a-132=31$

$\therefore a=163$

따라서 구하는 최저 점수는 163점이다.

## 16 답 0.8413

확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}\left(48, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=48 \times \frac{1}{4}=12$

$\mathrm{V}(X)=48 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}=9$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(12, 3^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-12}{3}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X \leq 15)=\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{15-12}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \leq 1)$

$=\mathrm{P}(Z \leq 0)+\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)$

$=0.5+0.3413$

$=0.8413$

## 17 답 0.3085

확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}(490, p)$를 따르므로

$\sigma(X)=\sqrt{490p(1-p)}$

이때 $\sigma(X)=10$이므로

$\sqrt{490p(1-p)}=10$, $490p(1-p)=100$

$49p^2-49p+10=0$, $(7p-2)(7p-5)=0$

$\therefore p=\frac{2}{7}$ ($\because 0<p<0.5$)

즉, 확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}\left(490, \frac{2}{7}\right)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X)=490 \times \frac{2}{7}=140$

따라서 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(140, 10^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-140}{10}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\therefore \mathrm{P}(X \leq 135)=\mathrm{P}\left(Z \leq \frac{135-140}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \leq -0.5)=\mathrm{P}(Z \geq 0.5)$

$=\mathrm{P}(Z \geq 0)-\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 0.5)$

$=0.5-0.1915$

$=0.3085$

## 18 답 ②

5의 약수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(162, \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=162 \times \frac{1}{3}=54$

$\mathrm{V}(X)=162 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}=36$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(54, 6^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-54}{6}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(42 \leq X \leq 60)=\mathrm{P}\left(\frac{42-54}{6} \leq Z \leq \frac{60-54}{6}\right)$

$=\mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 1)$

$=\mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 0)+\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)$

$=\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2)+\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1)$

$=0.4772+0.3413=0.8185$

## 19 답 0.9452

앞면이 나오는 횟수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(100, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=100 \times \frac{1}{2}=50$

$\mathrm{V}(X)=100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}=25$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(50, 5^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-50}{5}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

한편 뒷면이 나오는 횟수는 $100-X$이므로 점 P의 좌표가 26 이상이려면

$2X-(100-X) \geq 26$

$3X \geq 126$ $\therefore X \geq 42$

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(X \geq 42)=\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{42-50}{5}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \geq -1.6)=\mathrm{P}(Z \leq 1.6)$

$=\mathrm{P}(Z \leq 0)+\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 1.6)$

$=0.5+0.4452=0.9452$

## 20 답 ③

맞힌 문제의 개수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 이항분포 $\mathrm{B}\left(25, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=25 \times \frac{1}{5}=5$

$\mathrm{V}(X)=25 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5}=4$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(5, 2^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-5}{2}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(X \geq a)=0.01$이므로

$\mathrm{P}\left(Z \geq \frac{a-5}{2}\right)=0.01$

$\mathrm{P}(Z \geq 0)-\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{a-5}{2}\right)=0.01$

$0.5-\mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{a-5}{2}\right)=0.01$

$\therefore \mathrm{P}\left(0 \leq Z \leq \frac{a-5}{2}\right)=0.49$

이때 $\mathrm{P}(0 \leq Z \leq 2.5)=0.49$이므로

$\frac{a-5}{2}=2.5$, $a-5=5$ $\quad \therefore a=10$

## 중단원 기출 문제 2회

### 1 답 $\frac{1}{3}$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

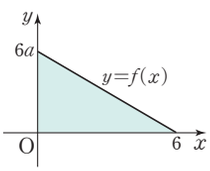
$\frac{1}{2} \times (1+5) \times k=1$, $3k=1$ $\quad \therefore k=\frac{1}{3}$

### 2 답 ⑤

$f(x) \geq 0$이므로 $a \geq 0$

함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축, $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 1이므로

$\frac{1}{2} \times 6 \times 6a=1$, $18a=1$ $\quad \therefore a=\frac{1}{18}$

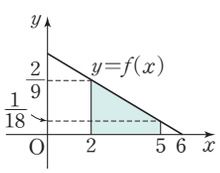



$\therefore f(x)=\frac{1}{18}(6-x)\ (0 \leq x \leq 6)$

따라서 구하는 확률은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 $x$축 및 두 직선 $x=2$, $x=5$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같으므로

$\mathrm{P}(2 \leq X \leq 5)=\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{9}+\frac{1}{18}\right) \times 3$

$=\frac{5}{12}$




### 3 답 ④

두 학교 A, B의 정규분포곡선의 대칭축이 같고, 학교 C의 정규분포곡선의 대칭축이 두 학교 A, B의 정규분포곡선의 대칭축보다 오른쪽에 있으므로

$m_1=m_2<m_3$

또 두 학교 B, C의 정규분포곡선의 모양이 같고, 학교 A의 정규분포곡선이 두 학교 B, C의 정규분포곡선보다 가운데 부분의 높이가 높고 좁게 모여 있으므로

$\sigma_1<\sigma_2=\sigma_3$

따라서 옳은 것은 ④이다.

### 4 답 10

확률변수 $X$의 확률밀도함수는 $x=m$에서 최댓값을 갖고, 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이다.

따라서 $f(k)$가 $k=9$일 때 최댓값 $f(9)=\mathrm{P}(5 \leq X \leq 15)$를 가지려면 5와 15의 평균이 $m$이어야 하므로

$m=\frac{5+15}{2}=10$

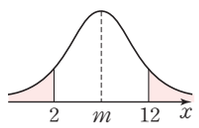
### 5 답 0.44

$\mathrm{P}(X \leq 12)=0.72$에서

$\mathrm{P}(X \geq 12)=1-0.72=0.28$

즉, $\mathrm{P}(X \leq 2)=\mathrm{P}(X \geq 12)$이고 정규분포곡선은 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$m=\frac{2+12}{2}=7$




$\therefore \mathrm{P}(|X-m| \leq 5)=\mathrm{P}(-5 \leq X-7 \leq 5)$

$=\mathrm{P}(2 \leq X \leq 12)$

$=\mathrm{P}(X \leq 12)-\mathrm{P}(X \leq 2)$

$=0.72-0.28=0.44$

### 6 답 ⑤

$m=60$, $\sigma=4$이므로

$\mathrm{P}(48 \leq X \leq 68)=\mathrm{P}(60-12 \leq X \leq 60+8)$

$=\mathrm{P}(m-3\sigma \leq X \leq m+2\sigma)$

$=\mathrm{P}(m-3\sigma \leq X \leq m)+\mathrm{P}(m \leq X \leq m+2\sigma)$

$=\mathrm{P}(m \leq X \leq m+3\sigma)+\mathrm{P}(m \leq X \leq m+2\sigma)$

$=0.4987+0.4772=0.9759$

### 7 답 36

확률변수 $X$가 정규분포 $\mathrm{N}(30, 6^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-30}{6}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(18 \leq X \leq a)=\mathrm{P}(-1 \leq Z \leq 2)$이므로

$\mathrm{P}\left(\frac{18-30}{6} \leq Z \leq \frac{a-30}{6}\right)=\mathrm{P}(-1 \leq Z \leq 2)$

$\mathrm{P}\left(-2 \leq Z \leq \frac{a-30}{6}\right)=\mathrm{P}(-1 \leq Z \leq 2)$

$\mathrm{P}\left(-2 \leq Z \leq \frac{a-30}{6}\right)=\mathrm{P}(-2 \leq Z \leq 1)$

따라서 $\frac{a-30}{6}=1$이므로

$a-30=6$ $\quad \therefore a=36$

### 8 답 45

두 확률변수 $X$, $Y$가 각각 정규분포 $\mathrm{N}(20, 4^2)$, $\mathrm{N}(30, 5^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-20}{4}$, $Z_Y=\frac{Y-30}{5}$으로 놓으면 두 확률변수 $Z_X$, $Z_Y$는 모두 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(24 \leq X \leq 32)=\mathrm{P}(35 \leq Y \leq k)$에서

$\mathrm{P}\left(\frac{24-20}{4} \leq Z_X \leq \frac{32-20}{4}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{35-30}{5} \leq Z_Y \leq \frac{k-30}{5}\right)$

$\mathrm{P}(1 \leq Z_X \leq 3)=\mathrm{P}\left(1 \leq Z_Y \leq \frac{k-30}{5}\right)$

따라서 $3=\frac{k-30}{5}$이므로

$k-30=15$ $\quad \therefore k=45$

## 9 답 0.8543

확률변수 $X$가 정규분포 $N(55, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-55}{4}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(|X-54|\le 6)&=P(-6\le X-54\le 6)\\&=P(48\le X\le 60)\\&=P\left(\frac{48-55}{4}\le Z\le\frac{60-55}{4}\right)\\&=P(-1.75\le Z\le 1.25)\\&=P(-1.75\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.25)\\&=P(0\le Z\le 1.75)+P(0\le Z\le 1.25)\\&=0.4599+0.3944=0.8543\end{aligned}$$

## 10 답 ③

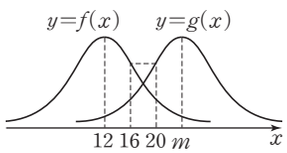
정규분포를 따르는 두 확률변수 $X$, $Y$의 표준편차가 같으므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모양은 같다.

㈎에서 $P(X\le 12)\le P(Y\ge 20)$이고 확률변수 $X$의 평균은 12이므로

$0.5\le P(Y\ge 20)$

확률변수 $Y$의 평균이 $m$이므로

$m\ge 20$




㈏에서 $f(16)=g(20)$이므로

$|12-16|=|m-20|$

$4=m-20 \quad \therefore m=24$

확률변수 $Y$가 정규분포 $N(24, 3^2)$을 따르므로 $Z=\frac{Y-24}{3}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(Y\ge 27)&=P\left(Z\ge\frac{27-24}{3}\right)\\&=P(Z\ge 1)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 1)\\&=0.5-0.3413=0.1587\end{aligned}$$

## 11 답 6

확률변수 $X$가 정규분포 $N(10, 2^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-10}{2}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(4\le X\le k+7)=0.9319$에서

$P\left(\frac{4-10}{2}\le Z\le\frac{k+7-10}{2}\right)=0.9319$

$P\left(-3\le Z\le\frac{k-3}{2}\right)=0.9319$

$P(-3\le Z\le 0)+P\left(0\le Z\le\frac{k-3}{2}\right)=0.9319$

$P(0\le Z\le 3)+P\left(0\le Z\le\frac{k-3}{2}\right)=0.9319$

$0.4987+P\left(0\le Z\le\frac{k-3}{2}\right)=0.9319$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{k-3}{2}\right)=0.4332$

이때 $P(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{k-3}{2}=1.5$, $k-3=3$

$\therefore k=6$

## 12 답 ①

지형이네 반 학생의 국어, 영어, 수학 시험 성적을 각각 확률변수 $X_A$, $X_B$, $X_C$라 하면 $X_A$, $X_B$, $X_C$는 각각 정규분포 $N(56, 8^2)$, $N(58, 10^2)$, $N(64, 14^2)$을 따르므로

$Z_A=\frac{X_A-56}{8}$, $Z_B=\frac{X_B-58}{10}$, $Z_C=\frac{X_C-64}{14}$

로 놓으면 세 확률변수 $Z_A$, $Z_B$, $Z_C$는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

다른 학생보다 지형이의 국어, 영어, 수학 시험 성적이 높을 확률은 각각

$P(X_A<72)=P\left(Z_A<\frac{72-56}{8}\right)=P(Z_A<2)$

$P(X_B<75)=P\left(Z_B<\frac{75-58}{10}\right)=P(Z_B<1.7)$

$P(X_C<78)=P\left(Z_C<\frac{78-64}{14}\right)=P(Z_C<1)$

이때 $P(Z_A<2)>P(Z_B<1.7)>P(Z_C<1)$이므로

$P(X_A<72)>P(X_B<75)>P(X_C<78)$

따라서 지형이의 성적이 상대적으로 높은 과목부터 순서대로 나열하면 국어, 영어, 수학이다.

## 13 답 0.6687

밥 1공기의 열량을 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(320, 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-320}{8}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(304\le X\le 324)&=P\left(\frac{304-320}{8}\le Z\le\frac{324-320}{8}\right)\\&=P(-2\le Z\le 0.5)\\&=P(-2\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 0.5)\\&=P(0\le Z\le 2)+P(0\le Z\le 0.5)\\&=0.4772+0.1915\\&=0.6687\end{aligned}$$

## 14 답 165

로봇 청소기가 완전히 충전되었을 때 청소할 수 있는 시간을 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(150, 15^2)$을 따르므로

$Z=\frac{X-150}{15}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\ge a)=0.1587$이므로

$P\left(Z\ge\frac{a-150}{15}\right)=0.1587$

$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{a-150}{15}\right)=0.1587$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a-150}{15}\right)=0.1587$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-150}{15}\right)=0.3413$

이때 $P(0\le Z\le 1)=0.3413$이므로

$\frac{a-150}{15}=1$, $a-150=15$

$\therefore a=165$

## 15 답 344

학생의 음악 수행 평가 점수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(58, 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-58}{8}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

학생의 음악 수행 평가 점수가 46점 이상 70점 이하일 확률은

$$\begin{aligned}P(46\le X\le 70)&=P\left(\frac{46-58}{8}\le Z\le\frac{70-58}{8}\right)\\&=P(-1.5\le Z\le 1.5)\\&=P(-1.5\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.5)\\&=2P(0\le Z\le 1.5)=2\times 0.43=0.86\end{aligned}$$

따라서 구하는 학생의 수는 $400\times 0.86=344$

## 16 답 ②

학생의 평가 점수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $N(70, 5^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-70}{5}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

상위 8 %에 속하는 학생의 최저 점수를 $a$점이라 하면

$P(X\ge a)=0.08$, $P\left(Z\ge\frac{a-70}{5}\right)=0.08$

$P(Z\ge 0)-P\left(0\le Z\le\frac{a-70}{5}\right)=0.08$

$0.5-P\left(0\le Z\le\frac{a-70}{5}\right)=0.08$

$\therefore P\left(0\le Z\le\frac{a-70}{5}\right)=0.42$

이때 $P(0\le Z\le 1.4)=0.42$이므로

$\frac{a-70}{5}=1.4$, $a-70=7$ $\quad\therefore a=77$

따라서 구하는 최저 점수는 77점이다.

## 17 답 0.9772

확률변수 $X$가 이항분포 $B\left(400, \frac{1}{5}\right)$을 따르므로

$E(X)=400\times\frac{1}{5}=80$, $V(X)=400\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=64$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(80, 8^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-80}{8}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$$\begin{aligned}\therefore P(X\le 96)&=P\left(Z\le\frac{96-80}{8}\right)\\&=P(Z\le 2)=P(Z\le 0)+P(0\le Z\le 2)\\&=0.5+0.4772=0.9772\end{aligned}$$

## 18 답 ④

앞면이 나오는 횟수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 이항분포 $B\left(64, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=64\times\frac{1}{2}=32$, $V(X)=64\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=16$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(32, 4^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-32}{4}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(28\le X\le 44)&=P\left(\frac{28-32}{4}\le Z\le\frac{44-32}{4}\right)\\&=P(-1\le Z\le 3)\\&=P(-1\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 3)\\&=P(0\le Z\le 1)+P(0\le Z\le 3)\\&=0.3413+0.4987=0.84\end{aligned}$$

## 19 답 0.0228

10점을 얻은 횟수를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 이항분포 $B\left(1200, \frac{1}{4}\right)$을 따르므로

$E(X)=1200\times\frac{1}{4}=300$

$V(X)=1200\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=225$

즉, 확률변수 $X$는 근사적으로 정규분포 $N(300, 15^2)$을 따르므로 $Z=\frac{X-300}{15}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

한편 2점을 잃은 횟수는 $1200-X$이므로 최종 점수가 1560점 이상이 되려면

$10X-2(1200-X)\ge 1560$

$12X\ge 3960$ $\quad\therefore X\ge 330$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}P(X\ge 330)&=P\left(Z\ge\frac{330-300}{15}\right)\\&=P(Z\ge 2)\\&=P(Z\ge 0)-P(0\le Z\le 2)\\&=0.5-0.4772=0.0228\end{aligned}$$

## 20 답 45

한 번의 시행에서 숫자 1이 적힌 공을 꺼낼 확률은 $\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, 숫자 3이 적힌 공을 꺼낼 확률은 $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$이다.

두 확률변수 $X$, $Y$는 각각 이항분포 $B\left(100, \frac{1}{5}\right)$, $B\left(100, \frac{1}{2}\right)$을 따르므로

$E(X)=100\times\frac{1}{5}=20$, $V(X)=100\times\frac{1}{5}\times\frac{4}{5}=16$

$E(Y)=100\times\frac{1}{2}=50$, $V(Y)=100\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=25$

즉, 두 확률변수 $X$, $Y$는 각각 근사적으로 정규분포 $N(20, 4^2)$, $N(50, 5^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-20}{4}$, $Z_Y=\frac{Y-50}{5}$으로 놓으면 두 확률변수 $Z_X$, $Z_Y$는 모두 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따른다.

$P(X\le 24)=P(Y\ge a)$에서

$P\left(Z_X\le\frac{24-20}{4}\right)=P\left(Z_Y\ge\frac{a-50}{5}\right)$

$P(Z_X\le 1)=P\left(Z_Y\le\frac{50-a}{5}\right)$

따라서 $1=\frac{50-a}{5}$이므로

$50-a=5$ $\quad\therefore a=45$

# 07 / 통계적 추정

38~43쪽

## 중단원 기출 문제 1회

**1** 답 237

모평균이 15, 모표준편차가 6, 표본의 크기가 3이므로

$E(\overline{X})=15$, $V(\overline{X})=\frac{6^2}{3}=12$

따라서 $V(\overline{X})=E(\overline{X}^2)-\{E(\overline{X})\}^2$에서

$E(\overline{X}^2)=V(\overline{X})+\{E(\overline{X})\}^2=12+15^2=237$

**2** 답 $\frac{35}{18}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{1}{4}+a+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=1 \quad \therefore a=\frac{1}{6}$

따라서 확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{3}=\frac{5}{3}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{3}-\left(\frac{5}{3}\right)^2$

$=\frac{25}{6}-\frac{25}{9}=\frac{25}{18}$

이때 표본의 크기가 5이므로

$E(\overline{X})=\frac{5}{3}$, $V(\overline{X})=\frac{\frac{25}{18}}{5}=\frac{5}{18}$

$\therefore E(\overline{X})+V(\overline{X})=\frac{5}{3}+\frac{5}{18}=\frac{35}{18}$

**3** 답 21

3장의 카드를 동시에 한 번 뽑을 때, 3장의 카드에 적힌 수 중에서 두 번째로 큰 수를 확률변수 $X$라 하면 $X$의 확률분포는

$P(X=2)=\frac{{}_4C_1}{{}_6C_3}=\frac{1}{5}$, $P(X=3)=\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_6C_3}=\frac{3}{10}$,

$P(X=4)=\frac{{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_6C_3}=\frac{3}{10}$, $P(X=5)=\frac{{}_4C_1}{{}_6C_3}=\frac{1}{5}$

이므로 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=x)$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{5}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$E(X)=2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{3}{10}+4\times\frac{3}{10}+5\times\frac{1}{5}=\frac{7}{2}$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$=2^2\times\frac{1}{5}+3^2\times\frac{3}{10}+4^2\times\frac{3}{10}+5^2\times\frac{1}{5}-\left(\frac{7}{2}\right)^2$

$=\frac{133}{10}-\frac{49}{4}=\frac{21}{20}$

이때 표본의 크기가 20이므로

$V(\overline{X})=\frac{\frac{21}{20}}{20}=\frac{21}{400}$

$\therefore V(20\overline{X}+3)=20^2V(\overline{X})=400\times\frac{21}{400}=21$

**4** 답 $\frac{11}{54}$

크기가 3인 표본을 $X_1$, $X_2$, $X_3$이라 하면 순서쌍 $(X_1, X_2, X_3)$에 대하여 $\overline{X}=2$인 경우는

(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1), (2, 2, 2)

$\therefore P(\overline{X}=2)=6\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{11}{54}$

**5** 답 ④

모집단이 정규분포 $N(220, 20^2)$을 따르고 표본의 크기가 4이므로 화장품 4개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(220, \frac{20^2}{4}\right)$, 즉 $N(220, 10^2)$을 따른다.

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-220}{10}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 생산한 상자를 판매하지 못할 확률은

$P(4\overline{X}\le800)=P(\overline{X}\le200)$

$=P\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{200-220}{10}\right)$

$=P(Z_{\overline{X}}\le-2)=P(Z_{\overline{X}}\ge2)$

$=P(Z_{\overline{X}}\ge0)-P(0\le Z_{\overline{X}}\le2)$

$=0.5-0.48=0.02$

판매하지 못하는 상자의 개수를 확률변수 $Y$라 하면 $Y$는 이항분포 $B(10000, 0.02)$를 따르므로

$E(Y)=10000\times0.02=200$

$V(Y)=10000\times0.02\times0.98=196=14^2$

이때 시행 횟수 10000은 충분히 크므로 확률변수 $Y$는 근사적으로 정규분포 $N(200, 14^2)$을 따른다.

$Z_Y=\frac{Y-200}{14}$으로 놓으면 확률변수 $Z_Y$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$P(Y\le193)=P\left(Z_Y\le\frac{193-200}{14}\right)$

$=P(Z_Y\le-0.5)=P(Z_Y\ge0.5)$

$=P(Z_Y\ge0)-P(0\le Z_Y\le0.5)$

$=0.5-0.19=0.31$

**6** 답 9

모집단이 정규분포 $N(100, 12^2)$을 따르고 표본의 크기가 $n$이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N\left(100, \frac{12^2}{n}\right)$, 즉 $N\left(100, \left(\frac{12}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-100}{\frac{12}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\le94)=0.0668$에서

$P\left(Z\le\frac{94-100}{\frac{12}{\sqrt{n}}}\right)=0.0668$

$P\left(Z\le-\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0668$, $P\left(Z\ge\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0668$

$P(Z\ge0)-P\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0668$

$0.5-\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.0668$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{\sqrt{n}}{2}\right)=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)=0.4332$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{2}=1.5,\ \sqrt{n}=3\qquad\therefore\ n=9$

## 7 답 18

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 8^2)$을 따르고 표본의 크기가 16이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(40,\ \frac{8^2}{16}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(40,\ 2^2)$을 따른다.

또 모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(60,\ \sigma^2)$을 따르고 표본의 크기가 36이므로 표본평균 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(60,\ \frac{\sigma^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(60,\ \left(\frac{\sigma}{6}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-40}{2}$, $Z_{\overline{Y}}=\frac{\overline{Y}-60}{\frac{\sigma}{6}}$으로 놓으면 두 확률변수 $Z_{\overline{X}}$, $Z_{\overline{Y}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 $\mathrm{P}(\overline{X}\le 42)=\mathrm{P}(\overline{Y}\ge 57)$에서

$\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{42-40}{2}\right)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\ge\frac{57-60}{\frac{\sigma}{6}}\right)$

$\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le 1)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\ge-\frac{18}{\sigma}\right)$, $\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le 1)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{Y}}\le\frac{18}{\sigma}\right)$

따라서 $1=\frac{18}{\sigma}$이므로 $\sigma=18$

## 8 답 525

모비율이 $\frac{84}{84+16}=\frac{84}{100}=0.84$, 표본의 크기가 $n$이므로

$\sigma(\hat{p})=\sqrt{\frac{0.84\times 0.16}{n}}$

이때 $\hat{p}$의 표준편차가 0.016 이하이어야 하므로

$\sqrt{\frac{0.84\times 0.16}{n}}\le 0.016$

$\sqrt{n}\ge 5\sqrt{21}\qquad\therefore\ n\ge 525$

따라서 $n$의 최솟값은 525이다.

## 9 답 ③

임의추출한 400명 중에서 축제에 참여한 학생의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율이 0.2, 표본의 크기가 400이므로

$\mathrm{E}(\hat{p})=0.2$

$\mathrm{V}(\hat{p})=\frac{0.2\times 0.8}{400}=0.0004=0.02^2$

표본의 크기 400은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(0.2,\ 0.02^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\hat{p}-0.2}{0.02}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(\hat{p}\ge\frac{92}{400}\right)&=\mathrm{P}(\hat{p}\ge 0.23)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{0.23-0.2}{0.02}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 1.5)\\&=\mathrm{P}(Z\ge 0)-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\\&=0.5-0.4332=0.0668\end{aligned}$$

## 10 답 19.6

표본의 크기가 225, 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 150이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{150}{\sqrt{225}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{150}{\sqrt{225}}$

이 신뢰구간이 $\overline{x}-c\le m\le\overline{x}+c$와 같으므로

$c=1.96\times\frac{150}{\sqrt{225}}=19.6$

## 11 답 ①

표본의 크기가 $n$, 표본평균이 1500, 모표준편차가 20이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$1500-2.58\times\frac{20}{\sqrt{n}}\le m\le 1500+2.58\times\frac{20}{\sqrt{n}}$

이 신뢰구간이 $1474.2\le m\le 1525.8$과 같으므로

$1500-2.58\times\frac{20}{\sqrt{n}}=1474.2,\ 1500+2.58\times\frac{20}{\sqrt{n}}=1525.8$

따라서 $2.58\times\frac{20}{\sqrt{n}}=25.8$이므로

$\sqrt{n}=2\qquad\therefore\ n=4$

## 12 답 172

표본의 크기가 196, 모표준편차가 $\sigma$일 때, 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a\le m\le b$이므로 그 신뢰구간의 길이는

$$\begin{aligned}b-a&=2\times 1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{196}}\\&=0.28\sigma\end{aligned}$$

이때 $b-a=1.96$이므로

$0.28\sigma=1.96$

$\therefore\ \sigma=7$

표본의 크기가 441, 모표준편차가 7일 때, 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간이 $c\le m\le d$이므로 그 신뢰구간의 길이는

$$\begin{aligned}d-c&=2\times 2.58\times\frac{7}{\sqrt{441}}\\&=1.72\end{aligned}$$

$\therefore\ 100(d-c)=100\times 1.72=172$

## 13 답 96

표본의 크기가 64, 모표준편차가 32일 때, $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{\alpha}{100}$라 하면 모평균을 신뢰도 $\alpha$ %로 추정한 신뢰구간의 길이는 16.4이므로

$2k\times\frac{32}{\sqrt{64}}=16.4$

$\therefore\ k=2.05$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le 2.05)=0.48$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(|Z|\le 2.05)&=\mathrm{P}(-2.05\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 2.05)\\&=2\mathrm{P}(0\le Z\le 2.05)\\&=2\times 0.48\\&=0.96\end{aligned}$$

따라서 $\frac{\alpha}{100}=0.96$이므로

$\alpha=96$

## 14 답 196

표본의 크기가 $n$, 모표준편차가 5이므로 모평균을 신뢰도 95 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

신뢰구간의 길이가 1.4 이하이어야 하므로

$2\times1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le1.4$

$\sqrt{n}\ge14$ $\therefore\ n\ge196$

따라서 $n$의 최솟값은 196이다.

## 15 답 ③

모평균을 $m$, 표본평균을 $\overline{x}$라 하면 모표준편차가 8이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-2.58\times\frac{8}{\sqrt{64}}\le m\le\overline{x}+2.58\times\frac{8}{\sqrt{64}}$

$-2.58\le m-\overline{x}\le2.58$

$\therefore\ |m-\overline{x}|\le2.58$

따라서 모평균과 표본평균의 차의 최댓값은 2.58이다.

## 16 답 ⑤

정규분포 $N(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 $n$인 표본을 임의추출할 때, 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은 $a_n\le m\le b_n$이므로 그 신뢰구간의 길이는

$b_n-a_n=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은 $c_n\le m\le d_n$이므로 그 신뢰구간의 길이는

$d_n-c_n=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. $b_n-a_n=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

$b_{2n}-a_{2n}=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$

$=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

이므로

$b_{2n}-a_{2n}\le b_n-a_n$

ㄴ. $d_n-c_n=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

$d_{9n}-c_{9n}=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{9n}}$

$=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times\frac{1}{3}$

이므로

$d_n-c_n=3(d_{9n}-c_{9n})$

ㄷ. $b_n-a_n=2\times1.96\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$,

$d_n-c_n=2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이므로

$b_n-a_n\le d_n-c_n$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

## 17 답 ④

표본의 크기가 196, 표본비율이 $\frac{98}{196}=0.5$이고, 표본의 크기는 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.5-1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{196}}\le p\le0.5+1.96\sqrt{\frac{0.5\times0.5}{196}}$

$\therefore\ 0.43\le p\le0.57$

## 18 답 400

표본비율이 0.2이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.2-2.58\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}\le p\le0.2+2.58\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}$

이 신뢰구간이 $0.1484\le p\le0.2516$과 같으므로

$0.2-2.58\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}=0.1484$

$0.2+2.58\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}=0.2516$

따라서 $2.58\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{n}}=0.0516$이므로

$\sqrt{n}=20$ $\therefore\ n=400$

## 19 답 441

표본비율이 $\hat{p}$이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$를 신뢰도 96 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$l=2\times2.1\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

표본의 크기가 36, 표본비율이 $\hat{p}$이고, 표본의 크기가 충분히 크므로 모비율 $p$를 신뢰도 98 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\times2.4\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{36}}$

이때 $2\times2.4\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{36}}=4l$이므로

$2\times2.4\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{36}}=4\times2\times2.1\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$\sqrt{n}=21$ $\therefore\ n=441$

## 20 답 144

표본비율이 0.1이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$0.1-1.96\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}\le p\le0.1+1.96\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}$

$-1.96\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}\le p-0.1\le1.96\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}$

$|p-0.1|\le1.96\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}$

이때 모비율과 표본비율의 차가 4.9 % 이하이어야 하므로

$1.96\sqrt{\frac{0.1\times0.9}{n}}\le0.049$

$\sqrt{n}\ge12$ $\therefore\ n\ge144$

따라서 $n$의 최솟값은 144이다.

## 중단원 기출 문제 2회

### 1 답 75

모평균이 60, 모표준편차가 5, 표본의 크기가 16이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=60,\ \sigma(\overline{X})=\frac{5}{\sqrt{16}}=\frac{5}{4}$

$\therefore\ \mathrm{E}(\overline{X})\sigma(\overline{X})=60\times\frac{5}{4}=75$

### 2 답 $\frac{1}{2}$

확률의 총합은 1이므로

$\frac{5}{12}+\frac{1}{4}+a+b=1$

$\therefore\ a+b=\frac{1}{3}$ ····· ㉠

확률변수 $X$에 대하여

$\mathrm{E}(X)=0\times\frac{5}{12}+1\times\frac{1}{4}+2\times a+3\times b=2a+3b+\frac{1}{4}$

이때 $\mathrm{E}(X)=\mathrm{E}(\overline{X})=1$이므로

$2a+3b+\frac{1}{4}=1$

$\therefore\ 2a+3b=\frac{3}{4}$ ····· ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{12}$

따라서 확률변수 $X$에 대하여

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=0^2\times\frac{5}{12}+1^2\times\frac{1}{4}+2^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{12}-1^2$

$=2-1=1$

이때 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{1}{2}$

### 3 답 10

공 1개를 임의로 택할 때, 공에 적힌 숫자를 확률변수 $X$라 하고 $X$의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $X$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 합계 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{P}(X=x)$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{4}$ | 1 |

확률변수 $X$에 대하여

$\mathrm{E}(X)=1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{4}+7\times\frac{1}{4}=4$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$

$=1^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}+5^2\times\frac{1}{4}+7^2\times\frac{1}{4}-4^2$

$=21-16=5$

이때 표본의 크기가 2이므로

$\mathrm{E}(\overline{X})=4,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{5}{2}$

$\therefore\ \mathrm{E}(\overline{X})\mathrm{V}(\overline{X})=4\times\frac{5}{2}=10$

### 4 답 0.8185

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(260,\ 15^2)$을 따르고 표본의 크기가 25이므로 25명의 제자리멀리뛰기 기록의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(260,\ \frac{15^2}{25}\right)$, 즉 $\mathrm{N}(260,\ 3^2)$을 따른다.

$Z=\frac{\overline{X}-260}{3}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$\mathrm{P}(257\le\overline{X}\le266)=\mathrm{P}\left(\frac{257-260}{3}\le Z\le\frac{266-260}{3}\right)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le2)$

$=\mathrm{P}(-1\le Z\le0)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le1)+\mathrm{P}(0\le Z\le2)$

$=0.3413+0.4772$

$=0.8185$

### 5 답 225

공장에서 생산하는 제품 1개의 무게를 확률변수 $X$라 하면 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 40^2)$을 따르므로 $Z_X=\frac{X-300}{40}$으로 놓으면 확률변수 $Z_X$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$\therefore\ p_1=\mathrm{P}(X\ge200)=\mathrm{P}\left(Z_X\ge\frac{200-300}{40}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_X\ge-2.5)=\mathrm{P}(Z_X\le2.5)$

$=\mathrm{P}(Z_X\le0)+\mathrm{P}(0\le Z_X\le2.5)$

$=0.5+0.4938=0.9938$

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(300,\ 40^2)$을 따르고 표본의 크기가 $n$이므로 $n$개의 무게의 평균을 $\overline{X}$라 하면 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(300,\ \frac{40^2}{n}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(300,\ \left(\frac{40}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z_{\overline{X}}=\frac{\overline{X}-300}{\frac{40}{\sqrt{n}}}$으로 놓으면 확률변수 $Z_{\overline{X}}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따르므로 구하는 확률은

$p_2=\mathrm{P}(\overline{X}\ge296)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge\frac{296-300}{\frac{40}{\sqrt{n}}}\right)$

$=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\ge-\frac{\sqrt{n}}{10}\right)=\mathrm{P}\left(Z_{\overline{X}}\le\frac{\sqrt{n}}{10}\right)$

$=\mathrm{P}(Z_{\overline{X}}\le0)+\mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{\sqrt{n}}{10}\right)$

$=0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{\sqrt{n}}{10}\right)$

$p_1-p_2=0.0606$이므로

$0.9938-\left\{0.5+\mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{\sqrt{n}}{10}\right)\right\}=0.0606$

$\therefore\ \mathrm{P}\left(0\le Z_{\overline{X}}\le\frac{\sqrt{n}}{10}\right)=0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$\frac{\sqrt{n}}{10}=1.5,\ \sqrt{n}=15$

$\therefore\ n=225$

### 6 답 $\frac{81}{2}$

모집단이 정규분포 $\mathrm{N}(40,\ 3^2)$을 따르고 표본의 크기가 36이므로 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(40,\ \frac{3^2}{36}\right)$, 즉 $\mathrm{N}\left(40,\ \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\overline{X}-40}{\frac{1}{2}}$으로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P(\overline{X}\geq k)\leq 0.1587$에서

$$P\left(Z\geq\frac{k-40}{\frac{1}{2}}\right)\leq 0.1587$$

$P(Z\geq 2k-80)\leq 0.1587$

$P(Z\geq 0)-P(0\leq Z\leq 2k-80)\leq 0.1587$

$0.5-P(0\leq Z\leq 2k-80)\leq 0.1587$

$\therefore P(0\leq Z\leq 2k-80)\geq 0.3413$

이때 $P(0\leq Z\leq 1)=0.3413$이므로

$2k-80\geq 1$, $2k\geq 81$

$\therefore k\geq\dfrac{81}{2}$

따라서 $k$의 최솟값은 $\dfrac{81}{2}$이다.

## 7 답 32

임의추출한 150명 중에서 홈페이지를 통해 SNS에 가입한 사람의 비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율이 0.4, 표본의 크기가 150이므로

$E(\hat{p})=0.4$

$V(\hat{p})=\dfrac{0.4\times 0.6}{150}=0.0016=0.04^2$

표본의 크기 150은 충분히 크므로 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $N(0.4, 0.04^2)$을 따른다.

$Z=\dfrac{\hat{p}-0.4}{0.04}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $N(0, 1)$을 따르므로 $P\left(\hat{p}\geq\dfrac{a}{100}\right)=0.9772$에서

$$P\left(Z\geq\frac{\frac{a}{100}-0.4}{0.04}\right)=0.9772$$

$P\left(Z\geq\dfrac{a-40}{4}\right)=0.9772$

$P\left(Z\leq\dfrac{40-a}{4}\right)=0.9772$

$P(Z\leq 0)+P\left(0\leq Z\leq\dfrac{40-a}{4}\right)=0.9772$

$0.5+P\left(0\leq Z\leq\dfrac{40-a}{4}\right)=0.9772$

$\therefore P\left(0\leq Z\leq\dfrac{40-a}{4}\right)=0.4772$

이때 $P(0\leq Z\leq 2)=0.4772$이므로

$\dfrac{40-a}{4}=2$ $\therefore a=32$

## 8 답 7

표본의 크기가 100, 표본평균이 120, 모표준편차가 20이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$120-1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}\leq m\leq 120+1.96\times\frac{20}{\sqrt{100}}$$

$\therefore 116.08\leq m\leq 123.92$

따라서 신뢰구간에 속하는 자연수는 117, 118, 119, …, 123의 7개이다.

## 9 답 22.71

표본의 크기 $n$이 충분히 크므로 모표준편차 대신 표본표준편차 6을 이용할 수 있고, 표본평균이 $\overline{x}$이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}\leq m\leq\overline{x}+1.96\times\frac{6}{\sqrt{n}}$$

이 신뢰구간이 $11.02\leq m\leq 12.98$과 같으므로

$\overline{x}-1.96\times\dfrac{6}{\sqrt{n}}=11.02$ …… ㉠

$\overline{x}+1.96\times\dfrac{6}{\sqrt{n}}=12.98$ …… ㉡

㉠+㉡을 하면

$2\overline{x}=24$ $\therefore \overline{x}=12$

㉡−㉠을 하면

$2\times 1.96\times\dfrac{6}{\sqrt{n}}=1.96$, $\sqrt{n}=12$

$\therefore n=144$

모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$$12-2.58\times\frac{6}{\sqrt{144}}\leq m\leq 12+2.58\times\frac{6}{\sqrt{144}}$$

$\therefore 10.71\leq m\leq 13.29$

이 신뢰구간이 $a\leq m\leq b$와 같으므로

$a=10.71$

$\therefore \overline{x}+a=12+10.71=22.71$

## 10 답 70

$P(|Z|\leq 2.04)=2P(0\leq Z\leq 2.04)=2\times 0.48=0.96$이고,

표본의 크기가 $n$, 표본평균이 $\overline{x}$이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 96 %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-2.04\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq m\leq\overline{x}+2.04\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이 신뢰구간이 $\overline{x}-c\leq m\leq\overline{x}+c$와 같으므로

$c=2.04\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$P(|Z|\leq k)=\dfrac{\alpha}{100}$라 하면 모평균 $m$에 대한 신뢰도 $\alpha$ %의 신뢰구간은

$$\overline{x}-k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq m\leq\overline{x}+k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이 신뢰구간이 $\overline{x}-\dfrac{1}{2}c\leq m\leq\overline{x}+\dfrac{1}{2}c$와 같으므로

$$\frac{1}{2}c=k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

이때 $c=2.04\times\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$이므로

$$\frac{1}{2}\times 2.04\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$\therefore k=1.02$

이때 $P(0\leq Z\leq 1.02)=0.35$이므로

$$\begin{aligned}P(|Z|\leq 1.02)&=P(-1.02\leq Z\leq 1.02)\\&=2P(0\leq Z\leq 1.02)\\&=2\times 0.35=0.7\end{aligned}$$

따라서 $\dfrac{\alpha}{100}=0.7$이므로

$\alpha=70$

## 11 답 7.74

표본의 크기가 16, 모표준편차가 6이므로 모평균을 신뢰도 99 %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\times\frac{6}{\sqrt{16}}=7.74$

## 12 답 30.5

$f(x)=\beta-\alpha$의 값은 신뢰도 $x$ %로 추정한 모평균의 신뢰구간의 길이와 같으므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{x}{100}$라 하면

$f(x)=2k\times\frac{5}{\sqrt{25}}=2k$

$f(x_1)=2$에서 $k=1$이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le1)=\mathrm{P}(-1\le Z\le1)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le1)$

$=2\times0.3413=0.6826$

즉, $\frac{x_1}{100}=0.6826$이므로

$x_1=68.26$

$f(x_2)=5$에서 $k=2.5$이므로

$\mathrm{P}(|Z|\le2.5)=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le2.5)$

$=2\mathrm{P}(0\le Z\le2.5)$

$=2\times0.4938=0.9876$

즉, $\frac{x_2}{100}=0.9876$이므로

$x_2=98.76$

$\therefore\ x_2-x_1=98.76-68.26$

$=30.5$

## 13 답 74

표본의 크기가 $n$, 모표준편차가 $\sigma$이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

이때 신뢰구간의 길이는 $\frac{3}{5}\sigma$ 이하이어야 하므로

$2\times2.58\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\frac{3}{5}\sigma$

$\sqrt{n}\ge8.6\qquad\therefore\ n\ge73.96$

따라서 $n$의 최솟값은 74이다.

## 14 답 97

표본의 크기가 $n$, 표본평균이 $\overline{x}$, 모표준편차가 5이므로 모평균 $m$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간은

$\overline{x}-1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}\le m\le\overline{x}+1.96\times\frac{5}{\sqrt{n}}$

$-\frac{9.8}{\sqrt{n}}\le m-\overline{x}\le\frac{9.8}{\sqrt{n}}$

$\therefore\ |m-\overline{x}|\le\frac{9.8}{\sqrt{n}}$

이때 $|m-\overline{x}|\le1$이어야 하므로

$\frac{9.8}{\sqrt{n}}\le1,\ \sqrt{n}\ge9.8$

$\therefore\ n\ge96.04$

따라서 $n$의 최솟값은 97이다.

## 15 답 ④

표본의 크기가 $n$, 모표준편차가 $\sigma$이므로 $\mathrm{P}(|Z|\le k)=\frac{x}{100}$라 하면 모평균 $m$을 신뢰도 $x$ %로 추정한 신뢰구간의 길이는

$b-a=2k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ㄱ. $x$의 값이 일정할 때, $n$의 값이 커지면 $\sqrt{n}$의 값이 커지므로 $b-a$의 값은 작아진다.

ㄴ. $n$의 값이 일정할 때, $x$의 값이 작아지면 $k$의 값이 작아지므로 $b-a$의 값도 작아진다.

ㄷ. $x$의 값이 커지면 $k$의 값이 커지고, $n$의 값이 작아지면 $\sqrt{n}$의 값이 작아지므로 $b-a$의 값은 커진다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

## 16 답 157

표본의 크기 $n$이 충분히 크면 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}\right)$을 따르므로 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$로 놓으면 확률변수 $Z$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

$|\hat{p}-p|\le0.12\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$에서

$\left|\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}\right|\le0.12$

$-0.12\le\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}\le0.12$

$\therefore\ -0.12\sqrt{n}\le\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}\le0.12\sqrt{n}$

즉, $\mathrm{P}(-0.12\sqrt{n}\le Z\le0.12\sqrt{n})\ge0.8664$이므로

$2\mathrm{P}(0\le Z\le0.12\sqrt{n})\ge0.8664$

$\therefore\ \mathrm{P}(0\le Z\le0.12\sqrt{n})\ge0.4332$

이때 $\mathrm{P}(0\le Z\le1.5)=0.4332$이므로

$0.12\sqrt{n}\ge1.5,\ \sqrt{n}\ge12.5$

$\therefore\ n\ge156.25$

따라서 자연수 $n$의 최솟값은 157이다.

## 17 답 $0.1855\le p\le0.3145$

표본의 크기가 300, 표본비율이 $\frac{75}{300}=0.25$이고, 표본의 크기는 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간은

$0.25-2.58\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{300}}\le p\le0.25+2.58\sqrt{\frac{0.25\times0.75}{300}}$

$\therefore\ 0.1855\le p\le0.3145$

## 18 답 0.0784

표본의 크기가 600, 표본비율이 0.6이고, 표본의 크기가 충분히 클 때, 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95 %의 신뢰구간이 $a \le p \le b$이므로 그 신뢰구간의 길이는

$$b-a=2\times 1.96\sqrt{\frac{0.6\times 0.4}{600}}$$
$$=0.0784$$

## 19 답 400

표본비율이 0.8이고, $n$은 충분히 크므로 모비율 $p$에 대한 신뢰도 99 %의 신뢰구간의 길이는

$$2\times 2.58\sqrt{\frac{0.8\times 0.2}{n}}$$

이때 신뢰구간의 길이는 0.1032 이하이어야 하므로

$$2\times 2.58\sqrt{\frac{0.8\times 0.2}{n}} \le 0.1032$$

$\sqrt{n} \ge 20 \quad \therefore\ n \ge 400$

따라서 $n$의 최솟값은 400이다.

## 20 답 900

표본비율이 0.1이고, $n$은 충분히 크므로  모비율 $p$에 대한 신뢰도 92 %의 신뢰구간은

$$0.1-1.7\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{n}} \le p \le 0.1+1.7\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{n}}$$

$$-1.7\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{n}} \le p-0.1 \le 1.7\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{n}}$$

$$|p-0.1| \le 1.7\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{n}}$$

이때 모비율과 표본비율의 차가 0.017 이하이어야 하므로

$$1.7\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{n}} \le 0.017$$

$\sqrt{n} \ge 30 \quad \therefore\ n \ge 900$

따라서 $n$의 최솟값은 900이다.

memo

memo

memo