



정답과 해설

대수

01 / 지수

A 개념 확인

8~9쪽

0001 답 5, $\frac{-5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$

125의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=125$

$$x^3-125=0$$

$$(x-5)(x^2+5x+25)=0$$

$$\therefore x=5 \text{ 또는 } x=\frac{-5 \pm 5\sqrt{3}i}{2}$$

0002 답 -2, $1 \pm \sqrt{3}i$

-8의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=-8$

$$x^3+8=0$$

$$(x+2)(x^2-2x+4)=0$$

$$\therefore x=-2 \text{ 또는 } x=1 \pm \sqrt{3}i$$

0003 답 $\pm\sqrt{3}$, $\pm\sqrt{3}i$

9의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=9$

$$x^4-9=0$$

$$(x^2-3)(x^2+3)=0$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{3} \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{3}i$$

0004 답 -3

-27의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=-27$

$$x^3+27=0$$

$$(x+3)(x^2-3x+9)=0$$

$$\therefore x=-3 \text{ 또는 } x=\frac{3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 -27의 세제곱근 중 실수인 것은 -3이다.

0005 답 $\pm\sqrt{2}$

4의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=4$

$$x^4-4=0$$

$$(x^2-2)(x^2+2)=0$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{2} \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{2}i$$

따라서 4의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{2}$ 이다.

0006 답 $\pm\sqrt{7}$

$$(-7)^2=49 \text{ 이므로}$$

49의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=49$

$$x^4-49=0$$

$$(x^2-7)(x^2+7)=0$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{7} \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{7}i$$

따라서 $(-7)^2$ 의 네제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{7}$ 이다.

0007 답 4

$$\sqrt[3]{64}=\sqrt[3]{4^3}=4$$

0008 답 -0.2

$$\sqrt[3]{-0.008}=\sqrt[3]{(-0.2)^3}=-0.2$$

0009 답 -4

$$-\sqrt[4]{256}=-\sqrt[4]{4^4}=-4$$

0010 답 $\frac{3}{2}$

$$\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\sqrt[4]{\left(\frac{3}{2}\right)^4}=\frac{3}{2}$$

0011 답 2

$$\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2 \times 4}=\sqrt[3]{2^3}=2$$

0012 답 3

$$\frac{\sqrt[4]{486}}{\sqrt[4]{6}}=\sqrt[4]{\frac{486}{6}}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$$

0013 답 7

$$(\sqrt[8]{49})^4=\sqrt[8]{49^4}=\sqrt[8]{(7^2)^4}=\sqrt[8]{7^8}=7$$

0014 답 3

$$\sqrt[3]{\sqrt{729}}=\sqrt[6]{729}=\sqrt[6]{3^6}=3$$

0015 답 5

$$\sqrt[18]{5^6} \times \sqrt[15]{25^5}=\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$$

0016 답 1

0017 답 $\frac{1}{8}$

$$2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$$

0018 답 $\frac{81}{625}$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{5}\right)^4=\frac{3^4}{5^4}=\frac{81}{625}$$

0019 답 $\frac{7}{3}$

0020 답 $-\frac{5}{6}$

$$\frac{1}{\sqrt[6]{2^5}}=\frac{1}{2^{\frac{5}{6}}}=2^{-\frac{5}{6}}$$

0021 답 $\frac{1}{4}$

$$\frac{1}{\sqrt[8]{3^{-2}}}=\frac{1}{3^{-\frac{1}{4}}}=3^{\frac{1}{4}}$$

0022 답 a^3

$$(a^{\frac{5}{6}})^3 \times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{2}} \times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}=a^3$$

0023 답 $a^{\frac{5}{6}}$

$$(a^{\frac{1}{2}})^3 \div (a^{\frac{1}{3}})^2=a^{\frac{3}{2}} \div a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{3}{2}-\frac{2}{3}}=a^{\frac{5}{6}}$$

0024 **답** $a^{\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned} (3\sqrt[3]{a^4} \times \sqrt{a} \times a^{-\frac{1}{6}})^{\frac{1}{5}} &= (a^{\frac{4}{3}} \times a^{\frac{1}{2}} \times a^{-\frac{1}{6}})^{\frac{1}{5}} \\ &= (a^{\frac{4}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6}})^{\frac{1}{5}} \\ &= (a^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

0025 **답** 25

$$5^{\sqrt{7}+1} \div 5^{\sqrt{7}-1} = 5^{\sqrt{7}+1-(\sqrt{7}-1)} = 5^2 = 25$$

0026 **답** $3^{\frac{3}{3}}$

$$3^{\sqrt{3}} \times 3^{\sqrt{48}} \div 3^{\sqrt{12}} = 3^{\sqrt{3} + \sqrt{48} - \sqrt{12}} = 3^{\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3}} = 3^{\frac{3}{3}}$$

0027 **답** 4

$$(4^{\sqrt{2}})^{2\sqrt{2}} \div (4^{\frac{3}{\sqrt{3}}})^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 4^4 \div 4^3 = 4^{4-3} = 4$$

B 유형 완성

10~17쪽

0028 **답** ⑤① 27의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=27$

$$x^3 - 27 = 0, (x-3)(x^2+3x+9)=0$$

$$\therefore x=3 \text{ 또는 } x=\frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 27의 세제곱근은 3, $\frac{-3 \pm 3\sqrt{3}i}{2}$ 의 3개이다.② $-\sqrt{36}=-6$ 의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-6}$ 이다.③ $0.1^2=0.01$ 의 제곱근 중 실수인 것은 ± 0.1 이다.⑤ n 이 짝수일 때, -9 의 n 제곱근 중 실수인 것은 없다.
따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.0029 **답** ③

$$\sqrt{256}=16 \text{ 이므로}$$

16의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=16$

$$x^4 - 16 = 0, (x+2)(x-2)(x^2+4)=0$$

$$\therefore x=\pm 2 \text{ 또는 } x=\pm 2i$$

따라서 $\sqrt{256}$ 의 네제곱근 중 음의 실수인 것은 -2 이므로

$$a=-2$$

 -343 의 세제곱근을 y 라 하면 $y^3=-343$

$$y^3 + 343 = 0, (y+7)(y^2-7y+49)=0$$

$$\therefore y=-7 \text{ 또는 } y=\frac{7 \pm 7\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 -343 의 세제곱근 중 실수인 것은 -7 이므로

$$b=-7$$

$$\therefore ab = -2 \times (-7) = 14$$

0030 **답** 4 $n=3$ 일 때, $2n^2-9n=-9<0$ 이고 n 은 홀수이므로

$$f(3)=1$$

 $n=4$ 일 때, $2n^2-9n=-4<0$ 이고 n 은 짝수이므로

$$f(4)=0$$

 $n=5$ 일 때, $2n^2-9n=5>0$ 이고 n 은 홀수이므로

$$f(5)=1$$

 $n=6$ 일 때, $2n^2-9n=18>0$ 이고 n 은 짝수이므로

$$f(6)=2$$

$$\therefore f(3)+f(4)+f(5)+f(6)=1+0+1+2=4$$

0031 **답** $\neg, \perp$ $\neg$. 6의 제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{6}$ 의 2개이고, -7 의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{-7}$ 의 1개이다.

$$\therefore N(6, 2) + N(-7, 3) = 2 + 1 = 3$$

 $\perp$. n 이 짝수일 때,

$$x>0 \text{ 이면 } N(x, n)=2$$

$$x=0 \text{ 이면 } N(x, n)=1$$

$$x<0 \text{ 이면 } N(x, n)=0$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg, \perp$ 이다.0032 **답** 18(i) $-n^2+11n-28<0$ 일 때,

$$n^2-11n+28>0 \text{ 에서}$$

$$(n-4)(n-7)>0 \quad \therefore n<4 \text{ 또는 } n>7$$

그런데 $2 \leq n \leq 10$ 이므로 $2 \leq n < 4$ 또는 $7 < n \leq 10$ 이때 $-n^2+11n-28$ 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하려면 n 은 홀수이어야 하므로 $n=3$ 또는 $n=9$ (ii) $-n^2+11n-28>0$ 일 때,

$$n^2-11n+28<0 \text{ 에서}$$

$$(n-4)(n-7)<0 \quad \therefore 4<n<7$$

이때 $-n^2+11n-28$ 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재하려면 n 은 짝수이어야 하므로 $n=6$ (i), (ii)에서 모든 n 의 값의 합은 $3+6+9=18$ **만렙 Note**2 이상인 자연수 n 에 대하여 실수 a 의 n 제곱근 중 음의 실수가 존재할 조건은 다음과 같다.(i) $a<0$ 이고 n 이 홀수 또는 (ii) $a>0$ 이고 n 이 짝수0033 **답** ④

$$\textcircled{1} \sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

$$\textcircled{2} \frac{\sqrt[3]{-125}}{\sqrt[3]{-27}} = \frac{\sqrt[3]{(-5)^3}}{\sqrt[3]{(-3)^3}} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}, \quad -\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = -\sqrt[3]{\left(\frac{5}{3}\right)^3} = -\frac{5}{3}$$

$$\therefore \frac{\sqrt[3]{-125}}{\sqrt[3]{-27}} \neq -\sqrt[3]{\frac{125}{27}}$$

$$\textcircled{3} \sqrt[3]{2^6} \div (\sqrt[5]{32})^2 = \sqrt[3]{4^3} \div (\sqrt[5]{2^5})^2 = 4 \div 2^2 = 1$$

$$\textcircled{4} \sqrt{\sqrt{81}} \times \sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[4]{81} \times \sqrt[6]{64} = \sqrt[4]{3^4} \times \sqrt[6]{2^6} = 3 \times 2 = 6$$

$$\textcircled{5} \sqrt[9]{4^6} \times \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[3]{4^2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{4^3} = 4$$

따라서 옳은 것은 ④이다.

0034 **답** ④

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{54} - \sqrt[6]{16} \times \sqrt[3]{4} + 3\sqrt[3]{2} &= \sqrt[3]{3^3 \times 2} - \sqrt[6]{2^4} \times \sqrt[3]{2^2} + 3\sqrt[3]{2} \\ &= 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2^2} \times \sqrt[3]{2^2} + 3\sqrt[3]{2} \\ &= 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2^4} + 3\sqrt[3]{2} \\ &= 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

0035 $\sqrt[3]{3}$

$$\frac{\sqrt[3]{81}+\sqrt[6]{36}}{\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{3^4}+\sqrt[6]{2^6}}{\sqrt[3]{3^2}\times\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{6}}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2^2}}\\=\frac{\sqrt[3]{3}(3+\sqrt[3]{2})}{3+\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{3}$$

0036 **답 1**

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{3\sqrt[3]{a}}} \times \sqrt{\frac{\sqrt[3]{a}}{4\sqrt[4]{a}}} \times 3\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a}}{a}} &= \frac{\sqrt[4]{\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{3\sqrt[3]{a}}} \times \frac{\sqrt{\sqrt[3]{a}}}{\sqrt{4\sqrt[4]{a}}} \times \frac{3\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}}{\sqrt[3]{a}} \\ &= \frac{8\sqrt[8]{a}}{12\sqrt[12]{a}} \times \frac{6\sqrt[6]{a}}{8\sqrt[8]{a}} \times \frac{12\sqrt[12]{a}}{6\sqrt[6]{a}} = 1 \end{aligned}$$

0037 **답** 7

$$\begin{aligned} & \sqrt[3]{a^3b^4} \times \sqrt{a^5b^2} \div 4\sqrt[3]{a^9b^5} \\ &= \sqrt[3]{a^3b^4} \times \sqrt{a^5b^2} \div 12\sqrt[3]{a^9b^5} \\ &= \sqrt[3]{a^6b^8} \times \sqrt[3]{a^5b^2} \div 12\sqrt[3]{a^9b^5} \\ &= \sqrt[3]{a^6b^8} \times \sqrt[3]{a^{15}b^6} \div 12\sqrt[3]{a^9b^5} \\ &= \sqrt[3]{\frac{a^{21}b^{14}}{a^9b^5}} \\ &= \sqrt[3]{a^{12}b^9} = a^4\sqrt[3]{b^3} \end{aligned}$$

따라서 $p=4, q=3$ 이므로

$$p+q=7$$

0038 **답** ④

$\sqrt[3]{27} = \sqrt[6]{27}$, $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{20}$ 에서 6, 3, 6의 최소공배수가 6이므로
 $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

이때 $20 < 25 < 27$ 이므로

$$\sqrt[6]{20} < \sqrt[6]{25} < \sqrt[6]{27}$$

$$\therefore \sqrt[3]{\sqrt{20}} < \sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{\sqrt{27}}$$

0039 **답** 6

$$\sqrt[3]{\sqrt{16}} = \sqrt[6]{16}, \sqrt{3\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{3^3 \times 2} = \sqrt[6]{54},$$

$$\sqrt{2^3\sqrt{6}} = \sqrt[3]{2^3 \times 6} = \sqrt[6]{48}$$

이때 $16 < 48 < 54$ 이므로

$$\sqrt[6]{16} < \sqrt[6]{48} < \sqrt[6]{54}$$

$$\therefore \sqrt[3]{\sqrt{16}} < \sqrt{2^3\sqrt{6}} < \sqrt{3^3\sqrt{2}}$$

따라서 $a=\sqrt[3]{\sqrt{16}}$, $b=\sqrt{3^3\sqrt{2}}$ 이므로

$$ab^2 = \sqrt[6]{16} \times (\sqrt[6]{54})^2 = \sqrt[6]{16 \times 54^2}$$

$$= \sqrt[6]{2^6 \times 3^6} = 2 \times 3 = 6$$

... i

• • • • • **ii**

• • • • • **iii**

채점 기준

❶ 세 수 $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{3\sqrt{2}}$, $\sqrt{2\sqrt{6}}$ 을 간단히 하기	30 %
❷ 세 수 $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{3\sqrt{2}}$, $\sqrt{2\sqrt{6}}$ 의 대소 비교하기	30 %
❸ ab^2 의 값 구하기	40 %

0040 답 ①

$$\begin{aligned} \text{(i) } A - B &= (2\sqrt{2} + {}^3\sqrt{3}) - (\sqrt{2} + 2{}^3\sqrt{3}) \\ &= \sqrt{2} - {}^3\sqrt{3} \\ &= {}^6\sqrt{2^3} - {}^6\sqrt{3^2} = {}^6\sqrt{8} - {}^6\sqrt{9} < 0 \end{aligned}$$

$$\therefore A < B$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } B-C &= (\sqrt{2}+2^3\sqrt{3})-(2^4\sqrt{5}+\sqrt{2}) \\ &= 2(\sqrt{3}-4\sqrt{5}) \\ &= 2(\sqrt[12]{3^4}-\sqrt[12]{5^3}) \\ &= 2(\sqrt[12]{81}-\sqrt[12]{125}) < 0 \end{aligned}$$

$$\therefore B < C$$

(i), (ii)에서 $A < B < C$

0041 답 ①

$$\begin{aligned} \frac{25^{-2}+5^{-5}}{3} \times \frac{5}{3^7+3^5} &= \frac{(5^2)^{-2}+5^{-5}}{3} \times \frac{5}{3^7+3^5} \\ &= \frac{5^{-4}+5^{-5}}{3} \times \frac{5}{3^7+3^5} \\ &= \frac{5^{-5}(5+1)}{3} \times \frac{5}{3^5(3^2+1)} \\ &= 5^{-5} \times 3^{-5} = 15^{-5} \end{aligned}$$

0042 **답** -3

$$3^{-3} \div (3^{-2})^{-4} \times 3^8 = 3^{-3} \div 3^8 \times 3^8 = 3^{-3-8+8} = 3^{-3}$$

$$\therefore k = -3$$

0043 답 ④

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{8^{-4}+4^{-11}}{8^{-10}+4^{-10}}} &= \sqrt{\frac{(2^3)^{-4}+(2^2)^{-11}}{(2^3)^{-10}+(2^2)^{-10}}} = \sqrt{\frac{2^{-12}+2^{-22}}{2^{-30}+2^{-20}}} \\ &= \sqrt{\frac{2^{-22}(2^{10}+1)}{2^{-30}(1+2^{10})}} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16\end{aligned}$$

0044 **답** 2

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^{-3}+1} + \frac{1}{2^{-1}+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^3+1} \\ &= \frac{2^3}{2^3(2^{-3}+1)} + \frac{2}{2(2^{-1}+1)} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^3+1} \\ &= \frac{2^3}{1+2^3} + \frac{2}{1+2} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^3+1} \\ &= \frac{2^3+1}{2^3+1} + \frac{2+1}{2+1} = 1+1=2 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^{-3}+1} + \frac{1}{2^{-1}+1} + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^3+1} \\ &= \left(\frac{1}{2^{-3}+1} + \frac{1}{2^3+1} \right) + \left(\frac{1}{2^{-1}+1} + \frac{1}{2+1} \right) \\ &= \frac{2^3+1+2^{-3}+1}{(2^{-3}+1)(2^3+1)} + \frac{2+1+2^{-1}+1}{(2^{-1}+1)(2+1)} \\ &= \frac{2^3+1+2^{-3}+1}{1+2^{-3}+2^3+1} + \frac{2+1+2^{-1}+1}{1+2^{-1}+2+1} \\ &= 1+1=2 \end{aligned}$$

0045 답 ③

$$\begin{aligned} \left\{ \left(\frac{16}{9} \right)^{-\frac{2}{3}} \right\}^{\frac{3}{4}} \times \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{6}{5}} \right\}^{-\frac{5}{2}} &= \left(\frac{16}{9} \right)^{-\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}} \times \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{6}{5} \times \left(-\frac{5}{2} \right)} \\ &= \left(\frac{16}{9} \right)^{-\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{4} \right)^{-3} \\ &= \left\{ \left(\frac{4}{3} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \times 4^3 \\ &= \frac{3}{4} \times 4^3 = 48 \end{aligned}$$

0046 **답 1**

$$\begin{aligned}\sqrt{81} \times 3^{-\frac{1}{3}} \div \left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{3}} &= 4\sqrt{3^4} \times 3^{-\frac{1}{3}} \div (3^{-2})^{-\frac{1}{3}} \\ &= 3 \times 3^{-\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{2}{3}} \\ &= 3^{1-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} = 3^0 = 1\end{aligned}$$

0047 **답 $\frac{1}{3}$**

$$\begin{aligned}(a^{\sqrt{3}})^{3\sqrt{2}} \times (a^k)^{6\sqrt{6}} \div a^{4\sqrt{6}} &= a^{3\sqrt{6}} \times a^{6\sqrt{6}k} \div a^{4\sqrt{6}} \\ &= a^{3\sqrt{6}+6\sqrt{6}k-4\sqrt{6}} \\ &= a^{6\sqrt{6}k-\sqrt{6}}\end{aligned}$$

따라서 $a^{6\sqrt{6}k-\sqrt{6}} = a^{\sqrt{6}}$ 이므로

$$6\sqrt{6}k - \sqrt{6} = \sqrt{6}$$

$$6\sqrt{6}k = 2\sqrt{6} \quad \therefore k = \frac{1}{3}$$

채점 기준

❶ 주어진 등식의 좌변을 간단히 하기

60 %

❷ 실수 k 의 값 구하기

40 %

0048 **답 4**

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \{2^a \times 2^\beta + (49^a)^\beta + 1\}^{\alpha\beta} &= (2^{a+\beta} + 7^{2a\beta} + 1)^{\alpha\beta} \\ &= (2^3 + 7^{2 \times \frac{1}{2}} + 1)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2^3 + 8)^{\frac{1}{2}} \\ &= (2 \times 2^3)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^2 = 4\end{aligned}$$

0049 **답 ③**

$$\begin{aligned}\sqrt{a^3 \sqrt[3]{a} \times a^2} &= \{a \times (a^{\frac{1}{3}} \times a^2)^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}} = \{a \times (a^{\frac{7}{3}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{2}} \\ &= (a \times a^{\frac{7}{9}})^{\frac{1}{2}} = (a^{\frac{16}{9}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{8}{9}}\end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{8}{9}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}\sqrt{a^3 \sqrt[3]{a} \times a^2} &= \sqrt{a \times \sqrt[3]{a^3 \times a} \times \sqrt[3]{a^2}} = \sqrt{a \times 18\sqrt{a} \times 3\sqrt{a}} \\ &= a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{1}{18}} \times a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{18} + \frac{1}{3}} = a^{\frac{8}{9}}\end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{8}{9}$$

0050 **답 $\frac{29}{24}$**

$$\begin{aligned}\sqrt{3 \times 3\sqrt{9} \times 4\sqrt{27}} &= (3 \times 9^{\frac{1}{3}} \times 27^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{2}} = (3 \times 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} \\ &= (3^{1+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}} = (3^{\frac{29}{12}})^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{29}{24}}\end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{29}{24}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}\sqrt{3 \times 3\sqrt{9} \times 4\sqrt{27}} &= \sqrt{3 \times \sqrt[3]{3^2} \times \sqrt[4]{3^3}} = \sqrt{3 \times 3\sqrt{3} \times 8\sqrt{3}} \\ &= 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{3}{8}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{3}{8}} = 3^{\frac{29}{24}}\end{aligned}$$

$$\therefore k = \frac{29}{24}$$

0051 **답 59**

$$\begin{aligned}3\sqrt[3]{2^3 \sqrt[3]{2^3 \sqrt[3]{2}}} &= \{2 \times (2 \times 2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{3}} = \{2 \times (2^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{3}}\}^{\frac{1}{3}} \\ &= (2 \times 2^{\frac{4}{9}})^{\frac{1}{3}} = (2^{\frac{13}{9}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{13}{27}}\end{aligned}$$

$$6\sqrt[6]{4^6 \sqrt[4]{4}} = (4 \times 4^{\frac{1}{6}})^{\frac{1}{6}} = (2^2 \times 2^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{6}} = (2^{\frac{7}{3}})^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{7}{18}}$$

$$\therefore \frac{3\sqrt[3]{2^3 \sqrt[3]{2^3 \sqrt[3]{2}}}}{6\sqrt[6]{4^6 \sqrt[4]{4}}} = \frac{2^{\frac{13}{27}}}{2^{\frac{7}{18}}} = 2^{\frac{13}{27} - \frac{7}{18}} = 2^{\frac{5}{54}}$$

따라서 $p=54, q=5$ 이므로

$$p+q=59$$

채점 기준

❶ 주어진 등식의 좌변의 분모, 분자를 간단히 하기

50 %

❷ 주어진 식의 값 구하기

30 %

❸ $p+q$ 의 값 구하기

20 %

다른 풀이

$$\begin{aligned}3\sqrt[3]{2^3 \sqrt[3]{2^3 \sqrt[3]{2}}} &= 3\sqrt[3]{2 \times 3\sqrt[3]{2}} \times 3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}} = 3\sqrt[3]{2 \times 9\sqrt[3]{2}} \times 27\sqrt[3]{2} \\ &= 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{9}} \times 2^{\frac{1}{27}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}} = 2^{\frac{13}{27}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}6\sqrt[6]{4^6 \sqrt[4]{4}} &= 6\sqrt[6]{4 \times 6\sqrt[4]{4}} = 6\sqrt[6]{2^2 \times 6\sqrt[4]{2}} = 3\sqrt[3]{2 \times 18\sqrt[4]{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{18}} = 2^{\frac{1}{3} + \frac{1}{18}} = 2^{\frac{7}{18}}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{3\sqrt[3]{2^3 \sqrt[3]{2^3 \sqrt[3]{2}}}}{6\sqrt[6]{4^6 \sqrt[4]{4}}} = \frac{2^{\frac{13}{27}}}{2^{\frac{7}{18}}} = 2^{\frac{13}{27} - \frac{7}{18}} = 2^{\frac{5}{54}}$$

따라서 $p=54, q=5$ 이므로

$$p+q=59$$

0052 **답 14**

$$\begin{aligned}3\sqrt[3]{a^4 \sqrt[3]{a^3} \times \sqrt{a}} \div 6\sqrt[6]{a^k \times a} \\ &= (a \times a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \div (a^{\frac{k}{4}} \times a)^{\frac{1}{6}} \\ &= (a^{1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \div (a^{\frac{k+4}{4}})^{\frac{1}{6}} \\ &= (a^{\frac{9}{4}})^{\frac{1}{3}} \div a^{\frac{k+4}{24}} \\ &= a^{\frac{3}{4} - \frac{k+4}{24}} \\ &= a^{\frac{14-k}{24}}\end{aligned}$$

따라서 $a^{\frac{14-k}{24}} = 1$ 이므로

$$\frac{14-k}{24} = 0 \quad (\because a \neq 1)$$

$$\therefore k = 14$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}3\sqrt[3]{a^4 \sqrt[3]{a^3} \times \sqrt{a}} \div 6\sqrt[6]{a^k \times a} \\ &= (3\sqrt[3]{a} \times 3\sqrt[4]{a^3} \times 3\sqrt[3]{a}) \div (6\sqrt[4]{a^k} \times 6\sqrt{a}) \\ &= 3\sqrt[3]{a} \times 4\sqrt[4]{a} \times 6\sqrt[6]{a} \div 24\sqrt[4]{a^k} \div 6\sqrt{a} \\ &= \frac{1}{3} \times a^{\frac{1}{4}} \times a^{\frac{1}{6}} \div a^{\frac{k}{24}} \div a^{\frac{1}{6}} \\ &= a^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{k}{24} - \frac{1}{6}} \\ &= a^{\frac{14-k}{24}}\end{aligned}$$

따라서 $a^{\frac{14-k}{24}} = 1$ 이므로

$$\frac{14-k}{24} = 0 \quad (\because a \neq 1)$$

$$\therefore k = 14$$

0053 답 ④

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{m} \sqrt[n]{a} &= a^{\frac{1}{mn}} \text{이므로 } f(m, n) = \frac{1}{mn} \\ \therefore f(3, 5) + f(5, 7) + f(7, 9) + f(9, 11) \\ &= \frac{1}{3 \times 5} + \frac{1}{5 \times 7} + \frac{1}{7 \times 9} + \frac{1}{9 \times 11} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{11} \right) = \frac{4}{33} \end{aligned}$$

공통수학2 다시보기

분모가 두 인수의 곱으로 되어 있으면 다음을 이용하여 식을 변형한다.

→ 두 다항식 A, B에 대하여

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \quad (\text{단, } A \neq B, AB \neq 0)$$

0054 답 2

넓이가 $\sqrt[n]{64}$ 인 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt[n]{64}$ 이므로

$$f(n) = \sqrt[n]{64} = 2^n \sqrt[n]{64} = 2^n \sqrt[n]{2^6} = 2^{\frac{6}{n}}$$

$$\therefore f(4) \times f(12) = 2^{\frac{3}{4}} \times 2^{\frac{1}{4}} = 2$$

0055 답 ③

$$3^5 = a \text{에서 } 3 = a^{\frac{1}{5}}$$

$$16^2 = b \text{에서 } (2^4)^2 = b, 2^8 = b \quad \therefore 2 = b^{\frac{1}{8}}$$

$$\therefore 18^6 = (2 \times 3^2)^6 = 2^6 \times 3^{12}$$

$$= (b^{\frac{1}{8}})^6 \times (a^{\frac{1}{5}})^{12} = a^{\frac{12}{5}} b^{\frac{3}{4}}$$

0056 답 ④

$$25^2 = a \text{에서 } (5^2)^2 = a, 5^4 = a \quad \therefore 5 = a^{\frac{1}{4}}$$

$$\therefore 125^{10} = (5^3)^{10} = 5^{30} = (a^{\frac{1}{4}})^{30} = a^{\frac{15}{2}}$$

0057 답 $\frac{7}{12}$

$$a = \sqrt[3]{5} \text{에서 } a^3 = 5$$

$$b = \sqrt{3} \text{에서 } b^2 = 3$$

..... ①

$$\therefore \sqrt[12]{45} = \sqrt[12]{3^2 \times 5} = (3^2 \times 5)^{\frac{1}{12}} = 3^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{12}}$$

$$= (b^2)^{\frac{1}{6}} \times (a^3)^{\frac{1}{12}} = a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{3}}$$

..... ②

$$\text{따라서 } m = \frac{1}{4}, n = \frac{1}{3} \text{이므로 } m + n = \frac{7}{12}$$

..... ③

채점 기준

① 5, 3을 각각 a, b의 거듭제곱으로 나타내기

30 %

② $\sqrt[12]{45}$ 를 a, b에 대한 식으로 나타내기

50 %

③ m+n의 값 구하기

20 %

0058 답 ①

$\left(\frac{1}{729} \right)^{\frac{1}{n}} = (3^{-6})^{\frac{1}{n}} = 3^{-\frac{6}{n}}$ 이 자연수가 되려면 $-\frac{6}{n}$ 이 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 정수 n의 값은 -6, -3, -2, -1이므로 구하는 합은

$$-6 + (-3) + (-2) + (-1) = -12$$

0059 답 42

$$a^3 = 5, b^6 = 7, c^7 = 13 \text{에서 } a = 5^{\frac{1}{3}}, b = 7^{\frac{1}{6}}, c = 13^{\frac{1}{7}}$$

$$\therefore (abc)^n = (5^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{1}{6}} \times 13^{\frac{1}{7}})^n = 5^{\frac{n}{3}} \times 7^{\frac{n}{6}} \times 13^{\frac{n}{7}} \quad \dots\dots \text{①}$$

따라서 $(abc)^n$, 즉 $5^{\frac{n}{3}} \times 7^{\frac{n}{6}} \times 13^{\frac{n}{7}}$ 이 자연수가 되려면 자연수 n은 3, 6, 7의 공배수이어야 하므로 자연수 n의 최솟값은 42이다. ②

채점 기준

① $(abc)^n$ 을 지수를 사용하여 나타내기

50 %

② 자연수 n의 최솟값 구하기

50 %

0060 답 ③

$$(\sqrt[n]{a})^3 = a^{\frac{3}{n}}$$

a=4일 때, $4^{\frac{3}{n}} = (2^2)^{\frac{3}{n}} = 2^{\frac{6}{n}}$ 이 자연수가 되려면 $\frac{6}{n}$ 이 음이 아닌 정수이어야 하므로 2 이상의 자연수 n의 값은 2, 3, 6이다.

$$\therefore f(4) = 6$$

a=27일 때, $27^{\frac{3}{n}} = (3^3)^{\frac{3}{n}} = 3^{\frac{9}{n}}$ 이 자연수가 되려면 $\frac{9}{n}$ 이 음이 아닌 정수이어야 하므로 2 이상의 자연수 n의 값은 3, 9이다.

$$\therefore f(27) = 9$$

$$\therefore f(4) + f(27) = 6 + 9 = 15$$

0061 답 12

$$\sqrt[6]{3 \times 5} = (3 \times 5^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{12}}$$

즉, $3^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{12}}$ 이 자연수 N의 n제곱근이라 하면

$$(3^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{12}})^n = 3^{\frac{n}{6}} \times 5^{\frac{n}{12}} = N$$

따라서 $3^{\frac{n}{6}} \times 5^{\frac{n}{12}}$ 이 자연수가 되려면 자연수 n은 6, 12의 공배수이어야 한다.

이때 $2 \leq n \leq 150$ 이므로 자연수 n은 12, 24, 36, ..., 144의 12개이다.

0062 답 ⑤

$$(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) + (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$$

$$= \{(a^{\frac{1}{3}})^3 - (b^{\frac{1}{3}})^3\} + \{(a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2\}$$

$$= (a - b) + (a - b) = 2a - 2b$$

0063 답 ④

$$5^{2+\sqrt{2}} = A, 5^{2-\sqrt{2}} = B \text{로 놓으면}$$

$$(5^{2+\sqrt{2}} + 5^{2-\sqrt{2}})^2 - (5^{2+\sqrt{2}} - 5^{2-\sqrt{2}})^2$$

$$= (A+B)^2 - (A-B)^2 = (A^2 + 2AB + B^2) - (A^2 - 2AB + B^2)$$

$$= 4AB = 4 \times 5^{2+\sqrt{2}} \times 5^{2-\sqrt{2}} = 4 \times 5^4$$

0064 답 4

$$a = \sqrt[3]{4} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \text{에서 } a = 4^{\frac{1}{3}} - 4^{-\frac{1}{3}} \text{이므로}$$

양변을 세제곱하면

$$a^3 = (4^{\frac{1}{3}} - 4^{-\frac{1}{3}})^3 = 4 - 3 \times 4^{\frac{2}{3}} \times 4^{-\frac{1}{3}} + 3 \times 4^{\frac{1}{3}} \times 4^{-\frac{2}{3}} - 4^{-1}$$

$$= 4 - 3(4^{\frac{1}{3}} - 4^{-\frac{1}{3}}) - \frac{1}{4}$$

$$\text{이때 } 4^{\frac{1}{3}} - 4^{-\frac{1}{3}} = a \text{이므로 } a^3 = 4 - 3a - \frac{1}{4} \quad \therefore a^3 + 3a + \frac{1}{4} = 4$$

0065 **답 4**

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{1-a^{-1}} + \frac{1}{1+a^{-1}} + \frac{2}{1+a^{-2}} + \frac{4}{1-a^4} \\
&= \frac{1+a^{-1}+1-a^{-1}}{(1-a^{-1})(1+a^{-1})} + \frac{2}{1+a^{-2}} + \frac{4}{1-a^4} \\
&= \frac{2}{1-a^{-2}} + \frac{2}{1+a^{-2}} + \frac{4}{1-a^4} \\
&= \frac{2(1+a^{-2})+2(1-a^{-2})}{(1-a^{-2})(1+a^{-2})} + \frac{4}{1-a^4} \\
&= \frac{4}{1-a^{-4}} + \frac{4}{1-a^4} \\
&= \frac{4(1-a^4)+4(1-a^{-4})}{(1-a^4)(1-a^{-4})} \\
&= \frac{8-4a^4-4a^{-4}}{2-a^4-a^{-4}} \\
&= \frac{4(2-a^4-a^{-4})}{2-a^4-a^{-4}} \\
&= 4
\end{aligned}$$

0066 **답 ⑤**

$$\begin{aligned}
a+a^{-1} &= (a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2 \\
&= (\sqrt{6})^2-2=4 \\
\therefore a^3+a^{-3} &= (a+a^{-1})^3-3(a+a^{-1}) \\
&= 4^3-3 \times 4 \\
&= 52
\end{aligned}$$

0067 **답 18**

$$\begin{aligned}
8^x+8^{-x} &= (2^3)^x+(2^3)^{-x} \\
&= (2^x)^3+(2^{-x})^3 \\
&= (2^x+2^{-x})^3-3(2^x+2^{-x}) \\
&= 3^3-3 \times 3 \\
&= 18
\end{aligned}$$

0068 **답 5**

$$\begin{aligned}
x^2+x^{-2} &= (x+x^{-1})^2-2=14 \text{이므로} \\
(x+x^{-1})^2 &= 16 \\
\text{그런데 } x > 0 \text{이므로} \\
x+x^{-1} &= 4 \quad \dots \text{ ①} \\
x+x^{-1} &= (x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2-2=4 \text{이므로} \\
(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})^2 &= 6 \\
\text{그런데 } x > 0 \text{이므로} \\
x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}} &= \sqrt{6} \quad \dots \text{ ②} \\
\therefore x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}+x+x^{-1} &= 4+\sqrt{6} \\
\text{따라서 } a=4, b=1 \text{이므로} \\
a+b &= 5 \quad \dots \text{ ③}
\end{aligned}$$

채점 기준

① $x+x^{-1}$ 의 값 구하기	40%
② $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}$ 의 값 구하기	40%
③ $a+b$ 의 값 구하기	20%

0069 **답 3**

$$\begin{aligned}
& a^{3x}-a^{-3x}=4 \text{에서} \\
& (a^x-a^{-x})^3+3(a^x-a^{-x})=4 \\
& \text{이때 } a^x-a^{-x}=t \text{ (} t \text{는 실수)로 놓으면} \\
& t^3+3t=4, t^3+3t-4=0 \\
& (t-1)(t^2+t+4)=0 \\
& \therefore t=1 \text{ (} \because t \text{는 실수)} \\
& \text{즉, } a^x-a^{-x}=1 \text{이므로} \\
& a^{2x}+a^{-2x}=(a^x-a^{-x})^2+2=1+2=3 \\
& \therefore \frac{a^{2x}+a^{-2x}}{a^x-a^{-x}}=\frac{3}{1}=3
\end{aligned}$$

0070 **답 ③**

구하는 식의 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\begin{aligned}
\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}} &= \frac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})} \\
&= \frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1} \\
&= \frac{5+1}{5-1}=\frac{3}{2}
\end{aligned}$$

0071 **답 $\frac{3}{5}$**

$$\begin{aligned}
4^{\frac{1}{x}} &= 9 \text{에서 } 4=9^x \quad \therefore 3^{2x}=4 \\
& \text{구하는 식의 분모, 분자에 각각 } 3^x \text{을 곱하면} \\
\frac{3^x-3^{-x}}{3^x+3^{-x}} &= \frac{3^x(3^x-3^{-x})}{3^x(3^x+3^{-x})} = \frac{3^{2x}-1}{3^{2x}+1} = \frac{4-1}{4+1} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

0072 **답 $\frac{5}{2}$**

$$\begin{aligned}
& \frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=3 \text{의 좌변의 분모, 분자에 각각 } a^x \text{을 곱하면} \\
& \frac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=3, \frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=3 \\
& a^{2x}+1=3a^{2x}-3, 2a^{2x}=4 \quad \therefore a^{2x}=2 \quad \dots \text{ ①} \\
& \therefore a^{2x}+a^{-2x}=a^{2x}+(a^{2x})^{-1}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2} \quad \dots \text{ ②}
\end{aligned}$$

채점 기준

① a^{2x} 의 값 구하기	70%
② $a^{2x}+a^{-2x}$ 의 값 구하기	30%

0073 **답 5**

구하는 식의 분모, 분자에 각각 3^x 을 곱하면

$$\begin{aligned}
\frac{9^x-3^{-x}}{3^x-1} &= \frac{3^x(3^{2x}-3^{-x})}{3^x(3^x-1)} \\
&= \frac{3^{3x}-1}{3^x(3^x-1)} \\
&= \frac{(3^x-1)(3^{2x}+3^x+1)}{3^x(3^x-1)} \\
&= \frac{3^{2x}+3^x+1}{3^x}=3^x+1+3^{-x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{이때 } 9^x+9^{-x}=3^{2x}+3^{-2x}=(3^x+3^{-x})^2-2=14 \text{이므로} \\
& (3^x+3^{-x})^2=16 \\
& \text{그런데 } 3^x > 0 \text{이므로 } 3^x+3^{-x}=4 \\
& \therefore \frac{9^x-3^{-x}}{3^x-1}=3^x+1+3^{-x}=4+1=5
\end{aligned}$$

0074 답 1

$$3^x = 15 \text{에서 } 3 = 15^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$5^y = 15 \text{에서 } 5 = 15^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

① × ②을 하면

$$15 = 15^{\frac{1}{x}} \times 15^{\frac{1}{y}}, \quad 15^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = 15$$

$$\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$$

0075 답 ②

$$2.16^a = 10 \text{에서 } 2.16 = 10^{\frac{1}{a}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$216^b = 10 \text{에서 } 216 = 10^{\frac{1}{b}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

① ÷ ②을 하면

$$100 = 10^{\frac{1}{b}} \div 10^{\frac{1}{a}}, \quad 10^{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}} = 10^2$$

$$\therefore \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = 2$$

0076 답 ④

$$15^x = 8 = 2^3 \text{에서 } 15 = 2^{\frac{3}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a^y = 2 \text{에서 } a = 2^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

① × ②을 하면

$$15 \times a = 2^{\frac{3}{x}} \times 2^{\frac{1}{y}} \quad \therefore 15a = 2^{\frac{3}{x} + \frac{1}{y}}$$

$$\text{이때 } \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 2 \text{이므로}$$

$$15a = 2^2 \quad \therefore a = \frac{4}{15}$$

0077 답 6

$$3^x = k \text{에서 } 3 = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$8^y = k \text{에서 } 8 = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$9^z = k \text{에서 } 9 = k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{㉢} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

① × ② × ③을 하면

$$3 \times 8 \times 9 = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \times k^{\frac{1}{z}}$$

$$\therefore k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}} = 6^3 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\text{이때 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3 \text{이므로}$$

$$k^3 = 6^3 \quad \therefore k = 6 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 3, 8, 9를 k 의 거듭제곱으로 나타내기	30 %
② $k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}$ 의 값 구하기	40 %
③ 양수 k 의 값 구하기	30 %

0078 답 49

$a^x = b^y = 7^z = k$ ($k > 0$)로 놓으면 $xyz \neq 0$ 이므로 $k \neq 1$

$$a^x = k \text{에서 } a = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$b^y = k \text{에서 } b = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$7^z = k \text{에서 } 7 = k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$$\text{이때 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{z} = 0, \quad \text{즉 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z} \text{이므로}$$

$$k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} = k^{\frac{2}{z}}, \quad k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} = (k^{\frac{1}{z}})^2$$

$$\textcircled{㉠} \sim \textcircled{㉢} \text{에서 } ab = 7^2 = 49$$

0079 답 ⑤

$$3^a = 7^c \text{에서 } (3^a)^b = (7^c)^b$$

$$\therefore 3^{ab} = 7^{bc}$$

$$4^b = 7^c \text{에서 } (4^b)^a = (7^c)^a$$

$$\therefore 4^{ab} = 7^{ac}$$

이때 $ab = 2$ 이므로

$$3^2 = 7^{bc}, \quad 4^2 = 7^{ac}$$

$$\therefore 7^{ac-bc} = 7^{ac} \div 7^{bc} = 4^2 \div 3^2 = \frac{16}{9}$$

다른 풀이

$$7^{ac-bc} = (7^c)^a \div (7^c)^b = (4^b)^a \div (3^a)^b$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^{ab} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$$

0080 답 $\frac{6}{5}$

$$P = A \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{4}} \text{에서}$$

$$A = 80, \quad t = 7 \text{일 때}, \quad P_1 = 80 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{7}{4}}$$

$$A = 100, \quad t = 3 \text{일 때}, \quad P_2 = 100 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$$

$$\therefore \frac{P_1}{P_2} = \frac{80 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{7}{4}}}{100 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{5}$$

0081 답 32배

증식하기 전 박테리아 A, B의 개체 수를 a 라 하면 박테리아 A는 3분마다 4배로 증가하므로 30분 후 A의 개체 수는

$$a \times 4^{10} = a \times 2^{20}$$

박테리아 B는 2분마다 2배로 증가하므로 30분 후 B의 개체 수는

$$a \times 2^{15}$$

따라서 30분 후 A의 개체 수는 B의 개체 수의 $\frac{a \times 2^{20}}{a \times 2^{15}} = 2^5 = 32$ (배)

이다.

0082 답 ①

$$D = k \left(\frac{Q}{V}\right)^{\frac{1}{2}} \text{에서}$$

$$Q_A = \frac{2}{3}Q_B, \quad V_A = \frac{8}{27}V_B \text{이므로}$$

$$D_A = k \left(\frac{\frac{2}{3}Q_B}{\frac{8}{27}V_B}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= k \left\{ \frac{\frac{2}{3}Q_B}{\left(\frac{2}{3}\right)^3 V_B} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= k \times \frac{3}{2} \left(\frac{Q_B}{V_B}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} D_B$$

$$D_A - D_B = 60 \text{에서}$$

$$\frac{3}{2} D_B - D_B = 60, \quad \frac{1}{2} D_B = 60$$

$$\therefore D_B = 120$$

0083 답 4

6의 세제곱근 중 실수인 것은 $\sqrt[3]{6}$ 의 1개이므로 $a=1$
 -7 의 네제곱근 중 실수인 것은 없으므로 $b=0$
 -512 의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=-512$
 $x^3+512=0, (x+8)(x^2-8x+64)=0$
 $\therefore x=-8$ 또는 $x=4\pm 4\sqrt{3}i$
 $\therefore c=3$
 $\therefore a+b+c=1+0+3=4$

0084 답 ⑤

양수 k 의 세제곱근 중 실수인 것이 a 이므로
 $a^3=k$
 a 의 네제곱근 중 양수인 것이 $\sqrt[3]{4}$ 이므로
 $(\sqrt[3]{4})^4=a \quad \therefore a=\sqrt[3]{4}$
 $\therefore k=(\sqrt[3]{4})^3=4^4=256$

0085 답 ①

$$\begin{aligned}\sqrt{a^3\sqrt{a^4\sqrt{a^3}}}&=\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}} \\&=\sqrt{a}\times\sqrt[6]{a}\times\sqrt[4]{a^3} \\&=24\sqrt{a^{12}\times a^4\times a^3}=24\sqrt{a^{19}}\end{aligned}$$

따라서 $p=24, q=19$ 이므로 $p+q=43$

0086 답 ⑤

$A=\sqrt[4]{5}, B=\sqrt[3]{\sqrt{10}}=\sqrt[6]{10}, C=\sqrt[4]{\sqrt[3]{98}}=\sqrt[12]{98}$ 에서
 $4, 6, 12$ 의 최소공배수가 12 이므로
 $A=\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}=\sqrt[12]{125}, B=\sqrt[6]{10}=\sqrt[12]{10^2}=\sqrt[12]{100}$
 이때 $98<100<125$ 이므로
 $\sqrt[12]{98}<\sqrt[12]{100}<\sqrt[12]{125}$
 $\therefore C<B<A$

0087 답 ②

$$\begin{aligned}(a^{-3}b^4)^{-2}\times(ab^{-2})^3&=a^6b^{-8}\times a^3b^{-6} \\&=a^9b^{-14}\end{aligned}$$

따라서 $m=9, n=-14$ 이므로
 $m+n=-5$

0088 답 ④

- ① $a^2\div a^{-4}\times a^3=a^{2-(-4)+3}=a^9$
 ② $81^{0.75}=81^{\frac{3}{4}}=(3^4)^{\frac{3}{4}}=3^3=27$
 ③ $\frac{\sqrt{8}}{9}\times 3^{\frac{5}{2}}\times 2^{-1}=\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3^2}\times 3^{\frac{5}{2}}\times 2^{-1}=2^{\frac{3}{2}-1}\times 3^{-2+\frac{5}{2}}$
 $=2^{\frac{1}{2}}\times 3^{\frac{1}{2}}=(2\times 3)^{\frac{1}{2}}=6^{\frac{1}{2}}=\sqrt{6}$
 ④ $\sqrt[3]{\frac{\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[4]{a^4}}}=\left(\frac{a^{\frac{3}{4}}}{a^1}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{3}}}=a^{\frac{1}{4}-\frac{1}{3}}=a^{-\frac{1}{12}}$
 ⑤ $(a^{\sqrt{2}}b^{\frac{\sqrt{2}}{2}})^{-\sqrt{2}}=a^{-2}b^{-1}=(a^2b)^{-1}=\frac{1}{a^2b}$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0089 답 $2^{\frac{1}{8}}$

$x=4+\sqrt{11}, y=4-\sqrt{11}$ 이므로
 $x+y=8, xy=4^2-(\sqrt{11})^2=5$
 $\therefore \frac{\{(a^2)^x\}^y}{\sqrt[4]{a^x a^y}}=\frac{a^{2xy}}{(a^{x+y})^{\frac{1}{4}}}=\frac{a^{2\times 5}}{(a^8)^{\frac{1}{4}}}=\frac{a^{10}}{a^2}=a^8$
 따라서 $a^8=2$ 이므로 $a=2^{\frac{1}{8}} (\because a>0)$

0090 답 3

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[3]{a^3}&=(a^2\times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}\div(a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}} \\&=(a^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{3}{4}} \\&=a^{\frac{5}{6}}\times a^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{3}{4}} \\&=a^{\frac{5}{6}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}=a^{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

$$\sqrt[6]{a^2}\times\sqrt{a^k}=(a^3\times a^{\frac{k}{2}})^{\frac{1}{6}}=(a^{\frac{6+k}{2}})^{\frac{1}{6}}=a^{\frac{6+k}{12}}$$

따라서 $a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{6+k}{12}}$ 이므로

$$\frac{3}{4}=\frac{6+k}{12} \quad \therefore k=3$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt{a}\times\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[3]{a^3}&=\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[3]{\sqrt{a}}\times\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[3]{a^3} \\&=\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt[6]{a}\times\sqrt[3]{a^2}\div\sqrt[3]{a^3} \\&=a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{1}{6}}\times a^{\frac{2}{3}}\div a^{\frac{3}{4}} \\&=a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}}=a^{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

$$\sqrt[6]{a^2}\times\sqrt{a^k}=\sqrt[6]{a^3}\times\sqrt[6]{a^k}=\sqrt[6]{a^{12}}=a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{k}{12}}=a^{\frac{6+k}{12}}$$

따라서 $a^{\frac{3}{4}}=a^{\frac{6+k}{12}}$ 이므로

$$\frac{3}{4}=\frac{6+k}{12} \quad \therefore k=3$$

0091 답 15

정육면체의 한 모서리의 길이를 a 라 하면 정육면체의 부피가 2^4 이므로

$$a^3=2^4 \quad \therefore a=2^{\frac{4}{3}}$$

$\overline{AF}=\overline{FC}=\overline{CA}=\sqrt{2}a$ 이므로 삼각형 AFC는

정삼각형이고 높이를 h 라 하면

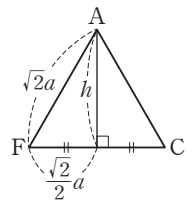
$$h=\sqrt{(\sqrt{2}a)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}a$$

즉, 삼각형 AFC의 넓이는

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\times\sqrt{2}a\times\frac{\sqrt{6}}{2}a&=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\times(2^{\frac{4}{3}})^2 \\&=\sqrt{3}\times 2^{\frac{8}{3}-1}=\sqrt{3}\times 2^{\frac{5}{3}}\end{aligned}$$

따라서 $p=3, q=5$ 이므로

$$pq=15$$



0092 답 ①

$5^{x+1}-5^x=a$ 에서 $5\times 5^x-5^x=a, 4\times 5^x=a$

$$\therefore 5^x=\frac{a}{4}$$

$3^{x+1}+3^x=b$ 에서 $3\times 3^x+3^x=b, 4\times 3^x=b$

$$\therefore 3^x=\frac{b}{4}$$

$$\therefore 45^x=(3^2\times 5)^x=(3^x)^2\times 5^x=\left(\frac{b}{4}\right)^2\times \frac{a}{4}=\frac{ab^2}{64}$$

0093 답 22

$n+1\sqrt[3]{8}$ 이 자연수 N 의 네제곱근이라 하면

$$(n+1\sqrt[3]{8})^4 = n+1\sqrt{(2^3)^4} = n+1\sqrt{2^{12}} = 2\frac{12}{n+1} = N$$

즉, $2\frac{12}{n+1}$ 이 자연수가 되려면 $\frac{12}{n+1}$ 가 음이 아닌 정수이어야 하므로

$n+1$ 의 값은 1, 2, 3, 4, 6, 12이다.

따라서 자연수 n 의 값은 1, 2, 3, 5, 11이므로 구하는 합은

$$1+2+3+5+11=22$$

0094 답 ⑤

$a^{-\frac{1}{3}}=A$, $a^{\frac{2}{3}}=B$ 로 놓으면

$$\begin{aligned} & (a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}})^3 + (a^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{2}{3}})^3 \\ &= (A+B)^3 + (A-B)^3 \\ &= (A^3+3A^2B+3AB^2+B^3) + (A^3-3A^2B+3AB^2-B^3) \\ &= 2A^3+6AB^2 \\ &= 2(a^{-\frac{1}{3}})^3 + 6 \times a^{-\frac{1}{3}} \times (a^{\frac{2}{3}})^2 \\ &= 2a^{-1}+6a = 2 \times \frac{1}{2} + 6 \times 2 = 13 \end{aligned}$$

0095 답 ②

$5^{2x}-5^{x+1}-1=0$ 의 양변을 5^x 으로 나누면

$$5^x - 5 - 5^{-x} = 0$$

$$\therefore 5^x - 5^{-x} = 5$$

$$5^{2x} + 5^{-2x} = (5^x - 5^{-x})^2 + 2 = 5^2 + 2 = 27$$

$$5^{3x} - 5^{-3x} = (5^x - 5^{-x})^3 + 3(5^x - 5^{-x}) = 5^3 + 3 \times 5 = 140$$

$$\therefore \frac{5^{2x} + 5^{-2x} + 2}{5^{3x} - 5^{-3x} + 5} = \frac{27+2}{140+5} = \frac{1}{5}$$

0096 답 ②

$\frac{a^x+a^{-x}}{a^x-a^{-x}}=5$ 의 좌변의 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^x(a^x+a^{-x})}{a^x(a^x-a^{-x})}=5$$

$$\frac{a^{2x}+1}{a^{2x}-1}=5$$

$$a^{2x}+1=5a^{2x}-5, 4a^{2x}=6$$

$$\therefore a^{2x}=\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore a^{4x}-a^{-2x} &= (a^{2x})^2 - (a^{2x})^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \\ &= \frac{9}{4} - \frac{2}{3} = \frac{19}{12} \end{aligned}$$

0097 답 $\frac{2}{3}$

$$a^x=216=6^3 \text{에서 } a=6^{\frac{3}{x}} \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$b^y=216=6^3 \text{에서 } b=6^{\frac{3}{y}} \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

$$c^z=216=6^3 \text{에서 } c=6^{\frac{3}{z}} \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

$$\textcircled{㉠} \times \textcircled{㉡} \times \textcircled{㉢} \text{을 하면 } abc = 6^{\frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{3}{z}}$$

$$\text{이때 } abc=36 \text{이므로 } 6^{\frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{3}{z}} = 36 = 6^2$$

$$\text{따라서 } \frac{3}{x} + \frac{3}{y} + \frac{3}{z} = 2, \text{ 즉 } 3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 2 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$$

0098 답 ③

$$B = \frac{kIr^2}{2(x^2+r^2)^{\frac{3}{2}}} \text{에서}$$

$$I=I_0, r=r_1, x=x_1 \text{일 때,}$$

$$B_1 = \frac{kI_0r_1^2}{2(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$I=I_0, r=3r_1, x=3x_1 \text{일 때,}$$

$$B_2 = \frac{kI_0(3r_1)^2}{2\{(3x_1)^2+(3r_1)^2\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{kI_0 \times 9r_1^2}{2(9x_1^2+9r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{9kI_0r_1^2}{2 \times 9^{\frac{3}{2}}(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{kI_0r_1^2}{2 \times 9^{\frac{1}{2}}(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{kI_0r_1^2}{2 \times (3^2)^{\frac{1}{2}} \times (x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{kI_0r_1^2}{6(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \frac{B_2}{B_1} = \frac{\frac{kI_0r_1^2}{6(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{kI_0r_1^2}{2(x_1^2+r_1^2)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{3}$$

0099 답 2

$$a^6=3, b^{12}=27=3^3 \text{에서}$$

$$a=3^{\frac{1}{6}}, b=3^{\frac{1}{4}}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sqrt[4]{a^3b^6})^k &= (a^3b^6)^{\frac{k}{4}} = \{(3^{\frac{1}{6}})^3 \times (3^{\frac{1}{4}})^6\}^{\frac{k}{4}} \\ &= (3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{3}{2}})^{\frac{k}{4}} = (3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}})^{\frac{k}{4}} \\ &= (3^2)^{\frac{k}{4}} = 3^{\frac{k}{2}} \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{i}$$

따라서 $(\sqrt[4]{a^3b^6})^k$, 즉 $3^{\frac{k}{2}}$ 이 자연수가 되려면 자연수 k 는 2의 배수이어야 하므로 자연수 k 의 최솟값은 2이다. ②

채점 기준

① $(\sqrt[4]{a^3b^6})^k$ 을 3의 거듭제곱으로 나타내기	50 %
② 자연수 k 의 최솟값 구하기	50 %

0100 답 2

$$a+a^{-1}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^2-2$$

$$=3^2-2=7$$

$$a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}=(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})^3-3(a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}})$$

$$=3^3-3 \times 3=18$$

$$\therefore \frac{a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}}{a+a^{-1}+2} = \frac{18}{7+2} = 2$$

채점 기준

① $a+a^{-1}$ 의 값 구하기	40 %
② $a^{\frac{3}{2}}+a^{-\frac{3}{2}}$ 의 값 구하기	40 %
③ 주어진 식의 값 구하기	20 %

0101 **답** $\frac{3}{4}$

$9^x = 16^y = a^z = k (k > 0)$ 로 놓으면

$xyz \neq 0$ 이므로 $k \neq 1$

$$9^x = k \text{에서 } 9 = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$16^y = k \text{에서 } 16 = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$a^z = k \text{에서 } a = k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{㉢} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이때 $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$ 이므로 $k^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = k^{\frac{2}{z}}$

$$k^{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} = (k^{\frac{1}{z}})^2$$

$$\textcircled{㉠} \sim \textcircled{㉢} \text{에서 } \frac{9}{16} = a^2$$

$$\therefore a = \frac{3}{4} (\because a > 0) \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① 9, 16, a 를 k 의 거듭제곱으로 나타내기	30 %
② 양수 a 의 값 구하기	70 %

C 실력 향상

21쪽

0102 **답** ①

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } (\sqrt[3]{a})^m = b \quad \therefore b = a^{\frac{m}{3}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\textcircled{㉡} \text{에서 } (\sqrt{b})^n = c \quad \therefore c = b^{\frac{n}{2}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉢} \text{에서 } c^4 = a^{12} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

①을 ③에 대입하면

$$(b^{\frac{n}{2}})^4 = a^{12}, b^{2n} = a^{12} \quad \dots\dots \textcircled{㉣}$$

①을 ④에 대입하면

$$(a^{\frac{m}{3}})^{2n} = a^{12}, a^{\frac{2mn}{3}} = a^{12}$$

$$\text{즉, } \frac{2mn}{3} = 12 \text{이므로}$$

$$mn = 18$$

따라서 조건을 만족시키는 순서쌍 (m, n) 은

$(2, 9), (3, 6), (6, 3), (9, 2)$ 의 4개이다.

↳ m, n 이 10이 아닌 자연수이므로 $(1, 18), (18, 1)$ 은 될 수 없다.

0103 **답** ①

$$(i) \sqrt{\frac{2^a \times 5^b}{2}} = (2^{a-1} \times 5^b)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{a-1}{2}} \times 5^{\frac{b}{2}} \text{이 자연수이므로 } 2^{\frac{a-1}{2}}, 5^{\frac{b}{2}}$$

이 각각 자연수이어야 한다.

$2^{\frac{a-1}{2}}$ 이 자연수이려면 $\frac{a-1}{2}$ 이 음이 아닌 정수이어야 하므로

$a-1=2k$ (k 는 음이 아닌 정수) 꼴이어야 한다.

즉, $a=2k+1$ 이므로 a 의 값은 $\rightarrow a$ 는 자연수이므로 $k=0$ 일 때도 성립한다.

1, 3, 5, 7, ...

$5^{\frac{b}{2}}$ 이 자연수이려면 $\frac{b}{2}$ 가 자연수이어야 한다.

즉, b 는 2의 배수이어야 하므로 b 의 값은

2, 4, 6, 8, ...

$$(ii) \sqrt[3]{\frac{3^b}{2^{a+1}}} = \frac{3^{\frac{b}{3}}}{2^{\frac{a+1}{3}}} \text{이 유리수이므로 } 2^{\frac{a+1}{3}}, 3^{\frac{b}{3}} \text{이 각각 자연수이어야 한다.}$$

$2^{\frac{a+1}{3}}$ 이 자연수이려면 $\frac{a+1}{3}$ 이 자연수이어야 하므로

$a+1=3l$ (l 은 자연수) 꼴이어야 한다.

즉, $a=3l-1$ 이므로 a 의 값은

2, 5, 8, 11, ...

$3^{\frac{b}{3}}$ 이 자연수이려면 $\frac{b}{3}$ 가 자연수이어야 한다.

즉, b 는 3의 배수이어야 하므로 b 의 값은

3, 6, 9, 12, ...

(i), (ii)에서

a 의 값은 5, 11, 17, 23, ...

b 의 값은 6, 12, 18, 24, ...

따라서 a 의 최솟값은 5, b 의 최솟값은 6이므로 $a+b$ 의 최솟값은

$$5+6=11$$

0104 **답** $21\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} \frac{a^2+a^3}{1+a} - \frac{a^{-2}+a^{-3}}{1+a^{-1}} &= \frac{a^2(1+a)}{1+a} - \frac{a^{-2}(1+a^{-1})}{1+a^{-1}} \\ &= a^2 - a^{-2} \\ &= (a+a^{-1})(a-a^{-1}) \end{aligned}$$

$$\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = 3 \text{에서}$$

$$a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$$

$$a+a^{-1} = (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

$$(a-a^{-1})^2 = (a+a^{-1})^2 - 4 = 7^2 - 4 = 45$$

$$\therefore a-a^{-1} = 3\sqrt{5} (\because a > 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a^2+a^3}{1+a} - \frac{a^{-2}+a^{-3}}{1+a^{-1}} &= (a+a^{-1})(a-a^{-1}) \\ &= 7 \times 3\sqrt{5} = 21\sqrt{5} \end{aligned}$$

0105 **답** 8

$$4^x \times 3^y = 1 \text{에서 } 4^x = 3^{-y}$$

$$4^x = 3^{-y} = k (k > 0) \text{로 놓으면}$$

$$4^x = k \text{에서 } 4 = k^{\frac{1}{x}}, 2^2 = k^{\frac{1}{x}}$$

$$\therefore 2 = k^{\frac{1}{2x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$3^{-y} = k \text{에서 } 3 = k^{-\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

① $\times$ ②을 하면

$$6 = k^{\frac{1}{2x}} \times k^{-\frac{1}{y}} \quad \therefore k^{\frac{1}{2x} - \frac{1}{y}} = 6$$

$$\text{이때 } \frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = -1 \text{이므로 } k^{-1} = 6$$

$$\therefore k = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \frac{9^y}{16^x} = \frac{3^{2y}}{4^{2x}} = 3^{2y} \times 4^{-2x} = (4^x)^{-2} \times (3^{-y})^{-2}$$

$$= k^{-2} \times k^{-2} = k^{-4} = \left(\frac{1}{6}\right)^{-4} = 6^4$$

$$= 2^4 \times 3^4$$

따라서 $a=4, b=4$ 이므로

$$a+b=8$$

02 / 로그

A 개념 확인

22~25쪽

0106 **답** $-3 = \log_{\frac{1}{3}} 27$

0107 **답** $\frac{1}{2} = \log_{100} 10$

0108 **답** 49

$\log_{\sqrt{7}} x = 4$ 에서 $x = (\sqrt{7})^4 = 49$

0109 **답** 2

$\log_x \frac{1}{8} = -3$ 에서

$x^{-3} = \frac{1}{8} = 2^{-3} \quad \therefore x = 2$

0110 **답** 5

$\log_x \sqrt{125} = \frac{3}{2}$ 에서

$x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{125} = 5^{\frac{3}{2}} \quad \therefore x = 5$

0111 **답** $0 < x < 5$

진수의 조건에서 $-x^2 + 5x > 0$

$x^2 - 5x < 0, x(x-5) < 0$

$\therefore 0 < x < 5$

0112 **답** $-4 < x < -3$ 또는 $x > -3$

밑의 조건에서 $x+4 > 0, x+4 \neq 1$

$x > -4, x \neq -3$

$\therefore -4 < x < -3$ 또는 $x > -3$

0113 **답** $0 < x < 1$ 또는 $x > 3$

밑의 조건에서 $x > 0, x \neq 1$

..... ㉠

진수의 조건에서 $x^2 - 4x + 3 > 0$

$(x-1)(x-3) > 0 \quad \therefore x < 1$ 또는 $x > 3$

..... ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은

$0 < x < 1$ 또는 $x > 3$

0114 **답** 3

$\log_2 1 + \log_2 24 + \log_2 \frac{1}{3} = 0 + \log_2 \left(24 \times \frac{1}{3} \right)$

$= \log_2 8$

$= \log_2 2^3$

$= 3$

0115 **답** 0

$\log_3 8 + \log_3 \sqrt{7} - \log_3 8\sqrt{7} = \log_3 \frac{8 \times \sqrt{7}}{8\sqrt{7}}$

$= \log_3 1$

$= 0$

0116 **답** $\frac{1}{2}$

$\log_5 \sqrt{3} + \log_5 10 + \log_5 \frac{1}{2\sqrt{15}}$

$= \log_5 \left(\sqrt{3} \times 10 \times \frac{1}{2\sqrt{15}} \right)$

$= \log_5 \sqrt{5}$

$= \log_5 5^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}$

0117 **답** 2

$\log_5 4 \times \log_2 5 = \log_5 2^2 \times \frac{1}{\log_5 2} = 2 \log_5 2 \times \frac{1}{\log_5 2} = 2$

0118 **답** 1

$\log_2 3 \times \log_3 7 \times \log_7 2 = \log_2 3 \times \frac{\log_2 7}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 2}{\log_2 7} = 1$

0119 **답** 4

$\log_2 48 - \frac{1}{\log_3 2}$

$= \log_2 48 - \log_2 3$

$= \log_2 \frac{48}{3} = \log_2 16$

$= \log_2 2^4 = 4$

0120 **답** 2

$(\log_2 45 - \log_2 15)(\log_3 24 - \log_3 6)$

$= \log_2 \frac{45}{15} \times \log_3 \frac{24}{6}$

$= \log_2 3 \times \log_3 4$

$= \log_2 3 \times \log_3 2^2$

$= \log_2 3 \times 2 \log_3 2$

$= \log_2 3 \times \frac{2}{\log_2 3} = 2$

0121 **답** 1

$\log_5 (\log_2 3) + \log_5 (\log_3 32)$

$= \log_5 (\log_2 3 \times \log_3 32)$

$= \log_5 (\log_2 3 \times \log_3 2^5)$

$= \log_5 (\log_2 3 \times 5 \log_3 2)$

$= \log_5 \left(\log_2 3 \times \frac{5}{\log_2 3} \right)$

$= \log_5 5 = 1$

0122 **답** $\frac{2}{3}$

$\log_{125} 25 = \log_{5^3} 5^2 = \frac{2}{3}$

0123 **답** $\frac{3}{4}$

$\log_4 2\sqrt{2} = \log_{2^2} 2^{\frac{3}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$

0124 **답** 625

$$16^{\log_5 5} = 5^{\log_5 16} = 5^{\log_5 2^4} = 5^4 = 625$$

0125 **답** $\frac{3}{4}$

$$\begin{aligned}\log_4 2 + \log_{16} 2 \\&= \log_{2^2} 2 + \log_{2^4} 2 \\&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \\&= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

0126 **답** $\frac{15}{8}$

$$\begin{aligned}(\log_2 3 + \log_4 3)(\log_3 2 + \log_{31} 2) \\&= (\log_2 3 + \log_{2^2} 3)(\log_3 2 + \log_{3^1} 2) \\&= \left(\log_2 3 + \frac{1}{2} \log_2 3\right) \left(\log_3 2 + \frac{1}{4} \log_3 2\right) \\&= \frac{3}{2} \log_2 3 \times \frac{5}{4} \log_3 2 \\&= \frac{15}{8} \times \log_2 3 \times \frac{1}{\log_2 3} \\&= \frac{15}{8}\end{aligned}$$

0127 **답** 25

$$7^{\log_7 125 - \log_7 5} = 7^{\log_7 \frac{125}{5}} = 7^{\log_7 25} = 25^{\log_7 7} = 25$$

0128 **답** $2a+b$

$$\begin{aligned}\log_2 45 &= \log_2 (3^2 \times 5) \\&= \log_2 3^2 + \log_2 5 \\&= 2\log_2 3 + \log_2 5 \\&= 2a + b\end{aligned}$$

0129 **답** $\frac{1+b}{a} - 2$

$$\begin{aligned}\log_3 \frac{10}{9} &= \log_3 10 - \log_3 9 \\&= \frac{\log_2 10}{\log_2 3} - \log_3 3^2 \\&= \frac{\log_2 (2 \times 5)}{\log_2 3} - 2 \\&= \frac{\log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 3} - 2 \\&= \frac{1+b}{a} - 2\end{aligned}$$

0130 **답** -2

$$\log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2$$

0131 **답** -4

$$\log 0.0001 = \log 10^{-4} = -4$$

0132 **답** $\frac{3}{5}$

$$\log \sqrt[5]{1000} = \log \sqrt[5]{10^3} = \log 10^{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5}$$

0133 **답** 1.5843

$$\begin{aligned}\log 38.4 &= \log (10 \times 3.84) = \log 10 + \log 3.84 \\&= 1 + 0.5843 = 1.5843\end{aligned}$$

0134 **답** -0.4157

$$\begin{aligned}\log 0.384 &= \log (10^{-1} \times 3.84) = \log 10^{-1} + \log 3.84 \\&= -1 + 0.5843 = -0.4157\end{aligned}$$

0135 **답** 4.5843

$$\begin{aligned}\log 38400 &= \log (10^4 \times 3.84) = \log 10^4 + \log 3.84 \\&= 4 + 0.5843 = 4.5843\end{aligned}$$

0136 **답** -4.4157

$$\begin{aligned}\log 0.000384 &= \log (10^{-5} \times 3.84) = \log 10^{-5} + \log 3.84 \\&= -5 + 0.5843 = -4.4157\end{aligned}$$

0137 **답** 0.7945

0138 **답** 2.7796

$$\begin{aligned}\text{상용로그표에서 } \log 6.02 &= 0.7796 \text{이므로} \\ \log 602 &= \log (10^2 \times 6.02) \\&= \log 10^2 + \log 6.02 \\&= 2 + 0.7796 = 2.7796\end{aligned}$$

0139 **답** -3.1931

$$\begin{aligned}\text{상용로그표에서 } \log 6.41 &= 0.8069 \text{이므로} \\ \log 0.000641 &= \log (10^{-4} \times 6.41) \\&= \log 10^{-4} + \log 6.41 \\&= -4 + 0.8069 = -3.1931\end{aligned}$$

0140 **답** 0.4041

$$\begin{aligned}\text{상용로그표에서 } \log 6.43 &= 0.8082 \text{이므로} \\ \log \sqrt{6.43} &= \log 6.43^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log 6.43 = \frac{1}{2} \times 0.8082 = 0.4041\end{aligned}$$

0141 **답** 정수 부분: 1, 소수 부분: 0.6170

$$\begin{aligned}\log 41.4 &= \log (10 \times 4.14) \\&= \log 10 + \log 4.14 \\&= 1 + 0.6170\end{aligned}$$

따라서 $\log 41.4$ 의 정수 부분은 1, 소수 부분은 0.6170이다.

0142 **답** 정수 부분: 3, 소수 부분: 0.6170

$$\begin{aligned}\log 4140 &= \log (10^3 \times 4.14) \\&= \log 10^3 + \log 4.14 \\&= 3 + 0.6170\end{aligned}$$

따라서 $\log 4140$ 의 정수 부분은 3, 소수 부분은 0.6170이다.

0143 **답** 정수 부분: -3, 소수 부분: 0.6170

$$\begin{aligned}\log 0.00414 &= \log (10^{-3} \times 4.14) \\&= \log 10^{-3} + \log 4.14 \\&= -3 + 0.6170\end{aligned}$$

따라서 $\log 0.00414$ 의 정수 부분은 -3, 소수 부분은 0.6170이다.

0144 [답] 정수 부분: -5, 소수 부분: 0.6170

$$\begin{aligned}\log 0.0000414 &= \log (10^{-5} \times 4.14) \\ &= \log 10^{-5} + \log 4.14 \\ &= -5 + 0.6170\end{aligned}$$

따라서 $\log 0.0000414$ 의 정수 부분은 -5, 소수 부분은 0.6170이다.

0145 [답] 18.8

$$\begin{aligned}\log N &= 1.2742 \text{에서} \\ \log N &= 1 + 0.2742 \\ &= \log 10 + \log 1.88 \\ &= \log (10 \times 1.88) \\ &= \log 18.8 \\ \therefore N &= 18.8\end{aligned}$$

0146 [답] 18800

$$\begin{aligned}\log N &= 4.2742 \text{에서} \\ \log N &= 4 + 0.2742 \\ &= \log 10^4 + \log 1.88 \\ &= \log (10^4 \times 1.88) \\ &= \log 18800 \\ \therefore N &= 18800\end{aligned}$$

0147 [답] 0.188

$$\begin{aligned}\log N &= -0.7258 \text{에서} \\ \log N &= -1 + 0.2742 \\ &= \log 10^{-1} + \log 1.88 \\ &= \log (10^{-1} \times 1.88) \\ &= \log 0.188 \\ \therefore N &= 0.188\end{aligned}$$

0148 [답] 0.000188

$$\begin{aligned}\log N &= -3.7258 \text{에서} \\ \log N &= -4 + 0.2742 \\ &= \log 10^{-4} + \log 1.88 \\ &= \log (10^{-4} \times 1.88) \\ &= \log 0.000188 \\ \therefore N &= 0.000188\end{aligned}$$

0149 [답] 711

$$\begin{aligned}\log N &= 2.8519 \text{에서} \\ \log N &= 2 + 0.8519 \\ &= \log 10^2 + \log 7.11 \\ &= \log (10^2 \times 7.11) = \log 711 \\ \therefore N &= 711\end{aligned}$$

0150 [답] 7110

$$\begin{aligned}\log N &= 3.8519 \text{에서} \\ \log N &= 3 + 0.8519 \\ &= \log 10^3 + \log 7.11 \\ &= \log (10^3 \times 7.11) = \log 7110 \\ \therefore N &= 7110\end{aligned}$$

0151 [답] 0.00711

$$\begin{aligned}\log N &= -2.1481 \text{에서} \\ \log N &= -3 + 0.8519 \\ &= \log 10^{-3} + \log 7.11 \\ &= \log (10^{-3} \times 7.11) \\ &= \log 0.00711 \\ \therefore N &= 0.00711\end{aligned}$$

0152 [답] 0.00000711

$$\begin{aligned}\log N &= -5.1481 \text{에서} \\ \log N &= -6 + 0.8519 \\ &= \log 10^{-6} + \log 7.11 \\ &= \log (10^{-6} \times 7.11) \\ &= \log 0.00000711 \\ \therefore N &= 0.00000711\end{aligned}$$

B 유형 완성

26~35쪽

0153 [답] $\sqrt{3}$

$$\begin{aligned}\log_a 2 &= 4 \text{에서 } a^4 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \\ \log_2 9 &= b \text{에서 } 2^b = 9 \quad \dots\dots \textcircled{㉡} \\ \textcircled{㉠} \text{을 } \textcircled{㉡} \text{에 대입하면} \\ (a^4)^b &= 9 \\ (a^b)^4 &= 9 \\ \therefore a^b &= \sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3} \quad (\because a > 0)\end{aligned}$$

0154 [답] ③

$$\begin{aligned}\log_2 \frac{a}{4} &= b \text{에서} \\ \frac{a}{4} &= 2^b \quad \therefore \frac{2^b}{a} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

0155 [답] 25

$$\begin{aligned}\log_2 (\log_3 a) &= 1 \text{에서} \\ \log_3 a &= 2^1 = 2 \\ \therefore a &= 3^2 = 9 \quad \dots\dots \textcircled{i} \\ \log_3 \{ \log_2 (\log_4 b) \} &= 0 \text{에서} \\ \log_2 (\log_4 b) &= 3^0 = 1 \\ \log_4 b &= 2^1 = 2 \\ \therefore b &= 4^2 = 16 \quad \dots\dots \textcircled{ii} \\ \therefore a + b &= 9 + 16 = 25 \quad \dots\dots \textcircled{iii}\end{aligned}$$

채점 기준

① a의 값 구하기	40 %
② b의 값 구하기	50 %
③ a+b의 값 구하기	10 %

0156 답 ④

$$x = \log_5(1 + \sqrt{2}) \text{에서 } 5^x = 1 + \sqrt{2}$$

$$\therefore 5^x + 5^{-x} = 5^x + \frac{1}{5^x} = (1 + \sqrt{2}) + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

$$= (1 + \sqrt{2}) + (-1 + \sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

0157 답 ①

밑의 조건에서 $x - 3 > 0$, $x - 3 \neq 1$
 $\therefore x > 3$, $x \neq 4$ ㉠
 진수의 조건에서 $-x^2 + 7x + 8 > 0$
 $x^2 - 7x - 8 < 0$, $(x + 1)(x - 8) < 0$
 $\therefore -1 < x < 8$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분은
 $3 < x < 4$ 또는 $4 < x < 8$
 따라서 구하는 정수 x 는 5, 6, 7의 3개이다.

0158 답 3

$\log_x(x - 2)^2$ 이 정의되려면
 밑의 조건에서 $x > 0$, $x \neq 1$ ㉠
 진수의 조건에서 $(x - 2)^2 > 0$
 $\therefore x \neq 2$ ㉡ i
 $\log_{(5-x)}|x - 5|$ 가 정의되려면
 밑의 조건에서 $5 - x > 0$, $5 - x \neq 1$
 $\therefore x < 5$, $x \neq 4$ ㉢
 진수의 조건에서 $|x - 5| > 0$
 $\therefore x \neq 5$ ㉣ ii
 ㉠~㉣의 공통부분은
 $0 < x < 1$ 또는 $1 < x < 2$ 또는 $2 < x < 4$ 또는 $4 < x < 5$
 따라서 구하는 정수 x 의 값은 3이다. iii

채점 기준

i $\log_x(x - 2)^2$ 의 밑과 진수의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위 구하기	40 %
ii $\log_{(5-x)} x - 5 $ 의 밑과 진수의 조건을 만족시키는 x 의 값의 범위 구하기	40 %
iii 정수 x 의 값 구하기	20 %

0159 답 ①

밑의 조건에서 $a > 0$, $a \neq 1$ ㉠
 진수의 조건에서 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 2ax + 5a > 0$ 이어야 하
 므로 이차방정식 $x^2 + 2ax + 5a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = a^2 - 5a < 0$, $a(a - 5) < 0$
 $\therefore 0 < a < 5$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분은
 $0 < a < 1$ 또는 $1 < a < 5$
 따라서 정수 a 의 값은 2, 3, 4이므로 구하는 합은
 $2 + 3 + 4 = 9$

공통수학1 다시보기

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 이 성립하려면
 $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$

0160 답 1

$$2\log_2 \sqrt{6} + \frac{1}{2} \log_2 5 - \log_2 3\sqrt{5}$$

$$= \log_2 (\sqrt{6})^2 + \log_2 5^{\frac{1}{2}} - \log_2 3\sqrt{5}$$

$$= \log_2 6 + \log_2 \sqrt{5} - \log_2 3\sqrt{5}$$

$$= \log_2 \frac{6 \times \sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$$

$$= \log_2 2$$

$$= 1$$

0161 답 ②

$$\log_5 \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \log_5 \left(1 + \frac{1}{3}\right) + \log_5 \left(1 + \frac{1}{4}\right) + \cdots + \log_5 \left(1 + \frac{1}{49}\right)$$

$$= \log_5 \frac{3}{2} + \log_5 \frac{4}{3} + \log_5 \frac{5}{4} + \cdots + \log_5 \frac{50}{49}$$

$$= \log_5 \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \cdots \times \frac{50}{49}\right)$$

$$= \log_5 25$$

$$= \log_5 5^2$$

$$= 2$$

0162 답 9

$36 = 6^2$ 이므로 36의 양의 약수를 작은 것부터 차례로
 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ 라 하면
 $a_1 a_9 = a_2 a_8 = a_3 a_7 = a_4 a_6 = 6^2$, $a_5 = 6$
 $\therefore \log_6 a_1 + \log_6 a_2 + \log_6 a_3 + \cdots + \log_6 a_9$
 $= \log_6 (a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_9)$
 $= \log_6 (a_1 a_9 \times a_2 a_8 \times a_3 a_7 \times a_4 a_6 \times a_5)$
 $= \log_6 \{(6^2)^4 \times 6\}$
 $= \log_6 6^9$
 $= 9$

0163 답 ④

$$\log_3 25 \times \log_5 \sqrt{7} \times \log_7 27$$

$$= \log_3 25 \times \frac{\log_3 \sqrt{7}}{\log_3 5} \times \frac{\log_3 27}{\log_3 7}$$

$$= \log_3 5^2 \times \frac{\log_3 7^{\frac{1}{2}}}{\log_3 5} \times \frac{\log_3 3^3}{\log_3 7}$$

$$= 2\log_3 5 \times \frac{\frac{1}{2} \log_3 7}{\log_3 5} \times \frac{3}{\log_3 7}$$

$$= 3$$

0164 답 10

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_5 x} + \frac{1}{\log_{10} x}$$

$$= \log_x 2 + \log_x 5 + \log_x 10$$

$$= \log_x (2 \times 5 \times 10)$$

$$= \log_x 10^2$$

$$= 2\log_x 10$$

즉, $2\log_x 10 = 2$ 이므로
 $\log_x 10 = 1$
 $\therefore x = 10$

0165 답 ④

$$\begin{aligned}
 & (\log_{10} 5)^2 + \frac{\log_{10} 50}{1 + \log_2 5} \\
 &= (\log_{10} 5)^2 + \frac{\log_{10} (2 \times 5^2)}{\log_2 2 + \log_2 5} \\
 &= (\log_{10} 5)^2 + \frac{\log_{10} 2 + 2\log_{10} 5}{\log_2 10} \\
 &= (\log_{10} 5)^2 + (\log_{10} 2 + 2\log_{10} 5) \times \log_{10} 2 \\
 &= (\log_{10} 5)^2 + (\log_{10} 2)^2 + 2\log_{10} 5 \times \log_{10} 2 \\
 &= (\log_{10} 5 + \log_{10} 2)^2 \\
 &= (\log_{10} 10)^2 = 1
 \end{aligned}$$

0166 답 2

$$\begin{aligned}
 & \log_3 (\log_2 3) + \log_3 (\log_3 4) + \log_3 (\log_4 5) + \cdots + \log_3 (\log_{511} 512) \\
 &= \log_3 (\log_2 3 \times \log_3 4 \times \log_4 5 \times \cdots \times \log_{511} 512) \\
 &= \log_3 \left(\log_2 3 \times \frac{\log_2 4}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 5}{\log_2 4} \times \cdots \times \frac{\log_2 512}{\log_2 511} \right) \\
 &= \log_3 (\log_2 512) = \log_3 (\log_2 2^9) \\
 &= \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2
 \end{aligned}$$

0167 답 ④

$$\begin{aligned}
 & \log_a b = \log_b a \text{에서 } \log_a b = \frac{1}{\log_a b} \\
 & (\log_a b)^2 = 1 \\
 & \therefore \log_a b = 1 \text{ 또는 } \log_a b = -1 \\
 & \text{이때 } a \neq b \text{이므로 } \log_a b = -1 \quad \therefore b = \frac{1}{a} \\
 & a > 0, b > 0 \text{이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여} \\
 & 2a + 8b = 2a + \frac{8}{a} \\
 & \geq 2\sqrt{2a \times \frac{8}{a}} = 8 \text{ (단, 등호는 } a=2 \text{일 때 성립)} \\
 & \text{따라서 } 2a + 8b \text{의 최솟값은 8이다.}
 \end{aligned}$$

공통수학2 다시보기

산술평균과 기하평균의 관계

$a > 0, b > 0$ 일 때,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \text{ (단, 등호는 } a=b \text{일 때 성립)}$$

0168 답 ⑤

$$\begin{aligned}
 & \text{주어진 식의 지수에서} \\
 & 3\log_2 5 + \log_2 3 - \log_2 15 \\
 &= \log_2 5^3 + \log_2 3 - \log_2 15 \\
 &= \log_2 \frac{5^3 \times 3}{15} = \log_2 5^2 \\
 &= \log_2 25 \\
 & \therefore 2^{3\log_2 5 + \log_2 3 - \log_2 15} = 2^{\log_2 25} = 25
 \end{aligned}$$

0169 답 ⑤

$$\begin{aligned}
 & ab = \log_5 2 \times \log_2 11 \\
 &= \log_5 2 \times \frac{\log_5 11}{\log_5 2} = \log_5 11 \\
 & \therefore 25^{ab} = 25^{\log_5 11} = 11^{\log_5 25} = 11^{\log_5 5^2} = 11^2 = 121
 \end{aligned}$$

0170 답 ①

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{2}{\log_3 16} + \log_{16} 27 - \frac{\log_{\sqrt{5}} 3}{\log_{\sqrt{5}} 2} \\
 &= 2\log_{16} 3 + \log_{16} 27 - \log_2 3 \\
 &= \log_{16} 3^2 + \log_{16} 3^3 - \log_{16} 3^4 \\
 &= \log_{16} \frac{3^2 \times 3^3}{3^4} \\
 &= \log_{16} 3 \\
 \therefore 16^x &= 16^{\log_{16} 3} = 3
 \end{aligned}$$

0171 답 $A < B < C$

$$\begin{aligned}
 A &= 4^{\log_2 8 - \log_2 12} = 4^{\log_2 \frac{8}{12}} = 4^{\log_2 \frac{2}{3}} \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_2 2^2} \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \quad \dots\dots \textcircled{i} \\
 B &= \log_9 \sqrt{3} - \log_{16} \frac{1}{2} \\
 &= \log_9 3^{\frac{1}{2}} - \log_{2^4} 2^{-1} \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{ii} \\
 C &= \log_{\frac{1}{2}} \{\log_9 (\log_4 64)\} \\
 &= \log_{\frac{1}{2}} \{\log_9 (\log_4 4^3)\} \\
 &= \log_{\frac{1}{2}} (\log_9 3) \\
 &= \log_{\frac{1}{2}} (\log_{3^2} 3) \\
 &= \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{iii} \\
 \therefore A < B < C \quad \dots\dots \textcircled{iv}
 \end{aligned}$$

채점 기준

① A의 값 구하기	30 %
② B의 값 구하기	30 %
③ C의 값 구하기	30 %
④ 세 수 A, B, C의 대소 비교하기	10 %

0172 답 ③

두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$\begin{aligned}
 y - \log_4 a &= \frac{\log_2 b - \log_4 a}{3 - 2} \times (x - 2) \\
 \therefore y &= (\log_2 b - \log_4 a)x - 2\log_2 b + 3\log_4 a \\
 \text{이 직선이 원점을 지나므로} \\
 0 &= -2\log_2 b + 3\log_4 a \\
 2\log_2 b &= 3\log_4 a \\
 2\log_2 b &= \frac{3}{2}\log_2 a \\
 \frac{\log_2 b}{\log_2 a} &= \frac{3}{4} \quad (\because a \neq 1) \\
 \therefore \log_a b &= \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

공통수학2 다시보기

두 점 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \text{ (단, } x_1 \neq x_2 \text{)}$$

다른 풀이

두 점 $(2, \log_4 a)$, $(3, \log_2 b)$ 를 각각 A, B라 하고 원점을 O라 하면 세 점 O, A, B가 한 직선 위에 있으므로
(직선 OA의 기울기)=(직선 OB의 기울기)

직선 OA의 기울기는 $\frac{\log_4 a}{2}$, 직선 OB의 기울기는 $\frac{\log_2 b}{3}$ 이므로

$$\frac{\log_4 a}{2} = \frac{\log_2 b}{3}$$

$$\frac{\log_2 a}{4} = \frac{\log_2 b}{3}$$

$$\frac{\log_2 b}{\log_2 a} = \frac{3}{4} \quad (\because a \neq 1) \quad \therefore \log_a b = \frac{3}{4}$$

0173 답 ④

$$\log_{20} \sqrt{50} = \log_{20} 50^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_{20} 50$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\log_6 50}{\log_6 20}$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\log_6 (2 \times 5^2)}{\log_6 (2^2 \times 5)}$$

$$= \frac{\log_6 2 + 2 \log_6 5}{2(2 \log_6 2 + \log_6 5)}$$

$$= \frac{a + 2b}{2(2a + b)}$$

$$= \frac{a + 2b}{4a + 2b}$$

0174 답 $\frac{3+2a}{1+ab}$

$$\log_3 2 = \frac{1}{a}, \log_3 15 = b \text{이므로}$$

$$\log_{30} 72 = \frac{\log_3 72}{\log_3 30}$$

$$= \frac{\log_3 (2^3 \times 3^2)}{\log_3 (2 \times 15)}$$

$$= \frac{3 \log_3 2 + 2}{\log_3 2 + \log_3 15}$$

$$= \frac{\frac{3}{a} + 2}{\frac{1}{a} + b}$$

$$= \frac{3 + 2a}{1 + ab}$$

0175 답 ②

$5^a = x$, $5^b = y$ 에서 $\log_5 x = a$, $\log_5 y = b$ 이므로

$$\log_{xy^2} \sqrt{xy} = \log_{xy^2} (xy)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \log_{xy^2} xy$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\log_5 xy}{\log_5 xy^2}$$

$$= \frac{\log_5 x + \log_5 y}{2(\log_5 x + 2 \log_5 y)}$$

$$= \frac{a + b}{2(a + 2b)}$$

$$= \frac{a + b}{2a + 4b}$$

0176 답 $\frac{m+n}{2n}$

$a^m = b^n = 2$ 에서 $\log_a 2 = m$, $\log_b 2 = n$ 이므로

$$\log_2 a = \frac{1}{m}, \log_2 b = \frac{1}{n} \quad \dots \textcircled{i}$$

$$\therefore \log_a ab = \frac{\log_2 ab}{\log_2 a^2} = \frac{\log_2 a + \log_2 b}{2 \log_2 a}$$

$$= \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{2 \times \frac{1}{m}} = \frac{m+n}{2n} \quad \dots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① $\log_2 a$, $\log_2 b$ 를 m , n 에 대한 식으로 나타내기	40 %
② $\log_a ab$ 를 m , n 에 대한 식으로 나타내기	60 %

0177 답 ③

$\log_2 5 = x$, $\log_5 3 = y$, $\log_3 11 = z$ 에서

$$y = \log_5 3 = \frac{\log_2 3}{\log_2 5} = \frac{\log_2 3}{x} \quad \therefore \log_2 3 = xy$$

$$z = \log_3 11 = \frac{\log_2 11}{\log_2 3} = \frac{\log_2 11}{xy} \quad \therefore \log_2 11 = xyz$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_3 66 &= \frac{\log_2 66}{\log_2 3} = \frac{\log_2 (2 \times 3 \times 11)}{\log_2 3} \\ &= \frac{\log_2 2 + \log_2 3 + \log_2 11}{\log_2 3} = \frac{1 + xy + xyz}{xy} \end{aligned}$$

0178 답 ②

$5^x = 27$ 에서 $x = \log_5 27 = \log_5 3^3 = 3 \log_5 3$

$45^y = 243$ 에서 $y = \log_{45} 243 = \log_{45} 3^5 = 5 \log_{45} 3$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{3}{x} - \frac{5}{y} &= \frac{3}{3 \log_5 3} - \frac{5}{5 \log_{45} 3} \\ &= \log_3 5 - \log_3 45 = \log_3 \frac{5}{45} \\ &= \log_3 \frac{1}{9} = \log_3 3^{-2} = -2 \end{aligned}$$

다른 풀이

$$5^x = 27 = 3^3 \text{에서 } 5 = 3^{\frac{3}{x}} \quad \dots \textcircled{\ominus}$$

$$45^y = 243 = 3^5 \text{에서 } 45 = 3^{\frac{5}{y}} \quad \dots \textcircled{\omin�}$$

$$\textcircled{\ominus} \div \textcircled{\omin�} \text{을 하면 } \frac{1}{9} = 3^{\frac{3}{x} \div \frac{5}{y}}$$

$$3^{-2} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{5}{y}} \quad \therefore \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = -2$$

0179 답 ④

$a^3 b^2 = 1$ 의 양변에 a 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_a a^3 b^2 = \log_a 1, \log_a a^3 + \log_a b^2 = 0$$

$$3 + 2 \log_a b = 0 \quad \therefore \log_a b = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a a^4 b^3 &= \log_a a^4 + \log_a b^3 = 4 + 3 \log_a b \\ &= 4 + 3 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

다른 풀이

$$a^3 b^2 = 1 \text{에서 } b^2 = \frac{1}{a^3} = a^{-3} \quad \therefore b = a^{-\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a a^4 b^3 &= \log_a \{a^4 \times (a^{-\frac{3}{2}})^3\} = \log_a (a^4 \times a^{-\frac{9}{2}}) \\ &= \log_a a^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

0180 [답] ①

$$a^2=b^5 \text{에서 } b=a^{\frac{2}{5}} \quad \therefore A=\log_a b=\log_a a^{\frac{2}{5}}=\frac{2}{5}$$

$$b^5=c^7 \text{에서 } c=b^{\frac{5}{7}} \quad \therefore B=\log_b c=\log_b b^{\frac{5}{7}}=\frac{5}{7}$$

$$a^2=c^7 \text{에서 } a=c^{\frac{7}{2}} \quad \therefore C=\log_c a=\log_c c^{\frac{7}{2}}=\frac{7}{2}$$

$$\therefore A < B < C$$

0181 [답] ④

$$\log_a x=2, \log_b x=7, \log_c x=14 \text{에서}$$

$$\log_x a=\frac{1}{2}, \log_x b=\frac{1}{7}, \log_x c=\frac{1}{14} \text{이므로}$$

$$\log_x abc=\log_x a+\log_x b+\log_x c=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}=\frac{5}{7}$$

$$\therefore \log_{abc} x=\frac{7}{5}$$

$$\therefore \log_{abc} \sqrt{x}=\log_{abc} x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2} \log_{abc} x=\frac{1}{2} \times \frac{7}{5}=\frac{7}{10}$$

[다른 풀이]

$$\log_a x=2, \log_b x=7, \log_c x=14 \text{에서}$$

$$a^2=x, b^7=x, c^{14}=x \text{이므로 } a=x^{\frac{1}{2}}, b=x^{\frac{1}{7}}, c=x^{\frac{1}{14}}$$

$$\therefore abc=x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{14}}=x^{\frac{5}{7}}$$

$$\therefore \log_{abc} \sqrt{x}=\log_{x^{\frac{5}{7}}} x^{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{5}{7}}=\frac{7}{10}$$

0182 [답] ①

$$\log_a b=\frac{\log_b c}{2} \text{에서 } \log_b c=2 \log_a b$$

$$\log_a b=\frac{\log_c a}{4} \text{에서 } \log_c a=4 \log_a b$$

$$\text{이때 } \log_a b \times \log_b c \times \log_c a=\log_a b \times \frac{\log_a c}{\log_a b} \times \frac{\log_a a}{\log_a c}=1 \text{이므로}$$

$$\log_a b \times 2 \log_a b \times 4 \log_a b=1$$

$$8(\log_a b)^3=1, (\log_a b)^3=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\therefore \log_a b=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a b+\log_b c+\log_c a &= \log_a b+2 \log_a b+4 \log_a b \\ &= 7 \log_a b \\ &= 7 \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

0183 [답] ⑤

(가)에서 $\sqrt[4]{a}=\sqrt[3]{b}=\sqrt{c}=k(k>0, k \neq 1)$ 로 놓으면

$$a=k^4, b=k^3, c=k^2$$

(나)에서

$$\begin{aligned} \log_{16} a+\log_8 b+\log_4 c &= \log_{2^4} a+\log_{2^3} b+\log_{2^2} c \\ &= \log_{2^4} k^4+\log_{2^3} k^3+\log_{2^2} k^2 \\ &= \log_2 k+\log_2 k+\log_2 k=3 \log_2 k \end{aligned}$$

$$\text{즉, } 3 \log_2 k=3 \text{이므로 } \log_2 k=1 \quad \therefore k=2$$

$$\therefore \log_2 abc=\log_2 (k^4 \times k^3 \times k^2)=\log_2 k^9=\log_2 2^9=9$$

0184 [답] ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_{10} a+\log_{10} b=6, \log_{10} a \times \log_{10} b=1$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a \sqrt{b}+\log_b \sqrt{a} &= \log_a b^{\frac{1}{2}}+\log_b a^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}(\log_a b+\log_b a) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\log_{10} b}{\log_{10} a}+\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(\log_{10} b)^2+(\log_{10} a)^2}{\log_{10} a \times \log_{10} b} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(\log_{10} a+\log_{10} b)^2-2 \log_{10} a \times \log_{10} b}{\log_{10} a \times \log_{10} b} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{6^2-2 \times 1}{1}=17 \end{aligned}$$

0185 [답] -1

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=10, \alpha \beta=4$$

..... i

$$\begin{aligned} \therefore \log_{\alpha \beta}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\log_{\frac{1}{\alpha \beta}}(\alpha+\beta) &= \log_{\alpha \beta} \frac{\alpha+\beta}{\alpha \beta}+\log_{\frac{1}{\alpha \beta}}(\alpha+\beta) \\ &= \log_4 \frac{10}{4}+\log_{\frac{1}{4}} 10 \\ &= \log_4 10-\log_4 4+\log_{4^{-1}} 10 \\ &= \log_4 10-1-\log_4 10=-1 \end{aligned}$$

..... ii

채점 기준

i 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\alpha+\beta, \alpha \beta$ 의 값 구하기	30 %
ii $\log_{\alpha \beta}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\log_{\frac{1}{\alpha \beta}}(\alpha+\beta)$ 의 값 구하기	70 %

0186 [답] ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=3 \log_6 2, \alpha \beta=-2 \log_6 3+\log_6 2$$

$$\begin{aligned} \therefore (\alpha-1)(\beta-1) &= \alpha \beta-(\alpha+\beta)+1 \\ &= -2 \log_6 3+\log_6 2-3 \log_6 2+1 \\ &= -2 \log_6 3-2 \log_6 2+1 \\ &= -2(\log_6 3+\log_6 2)+1 \\ &= -2 \log_6 6+1=-2+1=-1 \end{aligned}$$

0187 [답] ①

$$\log_3 9 < \log_3 24 < \log_3 27, \text{ 즉 } 2 < \log_3 24 < 3 \text{이므로}$$

$$a=2, b=\log_3 24-2=\log_3 24-\log_3 9=\log_3 \frac{8}{3}$$

$$\therefore 3^a+3^b=3^2+3^{\log_3 \frac{8}{3}}=9+\frac{8}{3}=\frac{35}{3}$$

0188 [답] ⑤

$$\log_2 8 < \log_2 12 < \log_2 16, \text{ 즉 } 3 < \log_2 12 < 4 \text{이므로}$$

$$a=\log_2 12-3=\log_2 12-\log_2 8=\log_2 \frac{3}{2}$$

$$\therefore 2^a=2^{\log_2 \frac{3}{2}}=\frac{3}{2}$$

0189 **답 4**

$$\begin{aligned}\frac{\log_5 9}{\log_5 4} &= \frac{2 \log_5 3}{2 \log_5 2} = \log_2 3 \text{이고} \\ \log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4, \text{ 즉 } 1 < \log_2 3 < 2 \text{이므로} \\ a &= 1, b = \log_2 3 - 1 = \log_2 3 - \log_2 2 = \log_2 \frac{3}{2} \\ \therefore \frac{b-a}{a+b} &= \frac{\log_2 \frac{3}{2} - 1}{1 + (\log_2 3 - 1)} = \frac{\log_2 \frac{3}{2} - \log_2 2}{\log_2 3} = \frac{\log_2 \frac{3}{4}}{\log_2 3} \\ &= \log_3 \frac{3}{4} = \log_3 3 - \log_3 4 = 1 - \log_3 4 \\ \therefore k &= 4\end{aligned}$$

0190 **답 ①**

$$\begin{aligned}\log 2 + \log 75 &= \log 150 \\ &= \log (3 \times 5 \times 10) \\ &= \log 3 + \log 5 + 1 \\ &= 0.4771 + 0.6990 + 1 = 2.1761\end{aligned}$$

0191 **답 11.9**

$$\begin{aligned}\log \sqrt[3]{x} &= 1.32 \text{에서 } \frac{1}{3} \log x = 1.32 \quad \therefore \log x = 3.96 \\ \therefore \log 100x^2 + \log \sqrt{x} &= 2 + 2 \log x + \frac{1}{2} \log x \\ &= 2 + \frac{5}{2} \log x \\ &= 2 + \frac{5}{2} \times 3.96 = 11.9\end{aligned}$$

0192 **답 5**

$$\begin{aligned}\text{ㄱ. } \log 5 &= \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 \\ &= 1 - 0.3010 = 0.6990 \\ \text{ㄴ. } \log 200 &= \log (10^2 \times 2) = \log 10^2 + \log 2 \\ &= 2 + 0.3010 = 2.3010 \\ \text{ㄷ. } \log 5000 &= \log (10^3 \times 5) = \log 10^3 + \log 5 \\ &= 3 + 0.6990 = 3.6990 \\ \text{ㄹ. } \log 0.5 &= \log \frac{1}{2} = \log 2^{-1} = -\log 2 = -0.3010 \\ \text{ㅁ. } \log 0.005 &= \log (10^{-3} \times 5) = \log 10^{-3} + \log 5 \\ &= -3 + 0.6990 = -2.3010 \\ \text{ㅂ. } \log 0.02 &= \log (10^{-2} \times 2) = \log 10^{-2} + \log 2 \\ &= -2 + 0.3010 = -1.6990\end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㅁ, ㅂ의 5개이다.

0193 **답 ③**

$$\begin{aligned}\text{상용로그표에서 } \log 6.07 &= 0.7832 \text{이므로} \\ \log 607 &= \log (10^2 \times 6.07) \\ &= \log 10^2 + \log 6.07 \\ &= 2 + 0.7832 = 2.7832 \\ \log 0.607 &= \log (10^{-1} \times 6.07) \\ &= \log 10^{-1} + \log 6.07 \\ &= -1 + 0.7832 = -0.2168 \\ \therefore \log 607 + \log 0.607 &= 2.7832 + (-0.2168) = 2.5664\end{aligned}$$

0194 **답 ①**

$$\begin{aligned}\log \frac{1}{x^2} + \log \sqrt[4]{x} &= -2 \log x + \frac{1}{4} \log x \\ &= -\frac{7}{4} \log x \\ &= -\frac{7}{4} \times 2.8 \\ &= -4.9 \\ &= -5 + 0.1\end{aligned}$$

따라서 $\log \frac{1}{x^2} + \log \sqrt[4]{x}$ 의 정수 부분은 -5 , 소수 부분은 0.1 이다.

0195 **답 ③**

$$\begin{aligned}\log a \text{의 정수 부분이 } 2 \text{이므로 } 2 &\leq \log a < 3 \\ \therefore 10^2 &\leq a < 10^3 \\ \text{따라서 구하는 자연수 } a \text{의 개수는 } &1000 - 100 = 900\end{aligned}$$

0196 **답 ⑤**

$$\begin{aligned}\log N \text{과 } \log \frac{1000}{N} \text{의 소수 부분을 각각 } \alpha, \beta \text{ (} 0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < 1 \text{)} \\ \text{라 하면} \\ \log N = m + \alpha, \log \frac{1000}{N} &= n + \beta \\ \text{한편 } \log N + \log \frac{1000}{N} &= \log \left(N \times \frac{1000}{N} \right) = \log 1000 = 3 \text{이므로} \\ m + \alpha + n + \beta &= 3 \quad \cdots \cdots \text{㉠} \\ 0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < 1 \text{에서} \\ 0 \leq \alpha + \beta &< 2 \quad \cdots \cdots \text{㉡} \\ \text{㉠에 의하여 } m, n \text{은 정수이므로 } \alpha + \beta &\text{도 정수이다.} \\ \text{또 ㉡에 의하여} \\ \alpha + \beta &= 0 \text{ 또는 } \alpha + \beta = 1 \\ \text{이를 ㉠에 대입하면} \\ m + n &= 3 \text{ 또는 } m + n = 2\end{aligned}$$

0197 **답 ⑤**

$$\begin{aligned}\log 1, \log 3, \dots, \log 9 \text{의 정수 부분은 모두 } 0 \text{이므로} \\ f(1) = f(3) = f(5) = f(7) = f(9) &= 0 \\ \log 11, \log 13, \dots, \log 99 \text{의 정수 부분은 모두 } 1 \text{이므로} \\ f(11) = f(13) = f(15) = \dots = f(99) &= 1 \\ \log 101, \log 103, \dots, \log 149 \text{의 정수 부분은 모두 } 2 \text{이므로} \\ f(101) = f(103) = f(105) = \dots = f(149) &= 2 \\ \therefore f(1) + f(3) + f(5) + \dots + f(149) &= 0 \times 5 + 1 \times 45 + 2 \times 25 \\ &= 95\end{aligned}$$

0198 **답 2.0949**

$$\begin{aligned}a = \log 121 &= \log (10^2 \times 1.21) = \log 10^2 + \log 1.21 \\ &= 2 + 0.0828 = 2.0828 \\ \text{한편 } \log b &= -1.9172 \text{에서} \\ \log b &= -2 + 0.0828 = \log 10^{-2} + \log 1.21 \\ &= \log (10^{-2} \times 1.21) = \log 0.0121 \\ \therefore b &= 0.0121 \\ \therefore a + b &= 2.0828 + 0.0121 = 2.0949\end{aligned}$$

0199 답 0.00582

$$\log 582 = \log (10^2 \times 5.82) = \log 10^2 + \log 5.82$$

$$= 2 + \log 5.82$$

즉, $2 + \log 5.82 = 2.7649$ 이므로 $\log 5.82 = 0.7649$ ①

한편 $\log N = -2.2351$ 에서

$$\log N = -3 + 0.7649 = \log 10^{-3} + \log 5.82$$

$$= \log (10^{-3} \times 5.82) = \log 0.00582$$

$\therefore N = 0.00582$ ②

채점 기준

① $\log 582$ 의 값을 이용하여 $\log 5.82$ 의 값 구하기	50 %
② 양수 N 의 값 구하기	50 %

0200 답 4

$\log N = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)라 하면 이차방정식 $5x^2 - 12x + k = 0$ 의 두 근이 n, α 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$n + \alpha = \frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5} \quad \dots\dots ①$$

$$n\alpha = \frac{k}{5} \quad \dots\dots ②$$

이때 n 은 정수이고, $0 \leq \alpha < 1$ 이므로 ①에서

$$n = 2, \alpha = \frac{2}{5}$$

$$\text{이를 ②에 대입하면 } 2 \times \frac{2}{5} = \frac{k}{5}$$

$$\therefore k = 4$$

0201 답 ②

$\log 800 = \log (10^2 \times 8) = 2 + \log 8$ 이므로 $\log 800$ 의 정수 부분은 2, 소수 부분은 $\log 8$ 이다.

즉, 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 2, $\log 8$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2 + \log 8 = -a, 2 \times \log 8 = b \quad \therefore a = -2 - \log 8, b = 2 \log 8$$

$$\therefore a + b = (-2 - \log 8) + 2 \log 8 = -2 + \log 8$$

$$= \log 10^{-2} + \log 8 = \log (10^{-2} \times 8) = \log 0.08$$

0202 답 ③

$\log A = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)라 하면 이차방정식

$ax^2 + (2-3a)x + a+1 = 0$ 의 두 근이 n, α 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$n + \alpha = \frac{3a-2}{a} = 3 - \frac{2}{a} = 2 + \left(1 - \frac{2}{a}\right) \quad \dots\dots ①$$

$$n\alpha = \frac{a+1}{a} \quad \dots\dots ②$$

$$\text{이때 } a > 2 \text{이므로 } 0 < 1 - \frac{2}{a} < 1$$

$$\text{따라서 ①에서 } n = 2, \alpha = 1 - \frac{2}{a}$$

이를 ②에 대입하면

$$2\left(1 - \frac{2}{a}\right) = \frac{a+1}{a}, 2(a-2) = a+1$$

$$\therefore a = 5$$

0203 답 $-\frac{9}{5}$

$\log N = n + \alpha$ (n 은 정수, $0 < \alpha < 1$)라 하면 이차방정식

$x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 n, α 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$n + \alpha = -a \quad \dots\dots ①$$

$$n\alpha = b \quad \dots\dots ②$$

$$\text{한편 } \log \frac{1}{N} = -\log N = -(n + \alpha) = -n - 1 + (1 - \alpha) \text{이고}$$

$0 < 1 - \alpha < 1$ 이므로 $\log \frac{1}{N}$ 의 정수 부분은 $-n-1$, 소수 부분은 $1-\alpha$ 이다.

이차방정식 $x^2 - ax + b - \frac{8}{5} = 0$ 의 두 근이 $-n-1, 1-\alpha$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(-n-1) \times (1-\alpha) = b - \frac{8}{5} \quad \dots\dots ③$$

②을 ③에 대입하면

$$-n + n\alpha - 1 + \alpha = n\alpha - \frac{8}{5}$$

$$n - \alpha = \frac{3}{5} = 1 - \frac{2}{5} \quad \therefore n = 1, \alpha = \frac{2}{5} \quad (\because n \text{은 정수, } 0 < \alpha < 1)$$

$$\text{이를 ①, ②에 각각 대입하면 } 1 + \frac{2}{5} = -a, 1 \times \frac{2}{5} = b$$

$$\text{따라서 } a = -\frac{7}{5}, b = \frac{2}{5} \text{이므로 } a - b = -\frac{9}{5}$$

0204 답 10000

$$\log \sqrt{x} - \log \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \log x + \log x = \frac{3}{2} \log x \leftarrow \text{정수}$$

$$10 < x < 100 \text{이므로 } 1 < \log x < 2 \quad \therefore \frac{3}{2} < \frac{3}{2} \log x < 3$$

$$\text{이때 } \frac{3}{2} \log x \text{가 정수이므로 } \frac{3}{2} \log x = 2$$

$$\log x = \frac{4}{3} \quad \therefore x = 10^{\frac{4}{3}}$$

$$\therefore x^3 = (10^{\frac{4}{3}})^3 = 10^4 = 10000$$

0205 답 ⑤

두 상용로그의 소수 부분의 합이 1이면 두 상용로그의 합이 정수이므로

$$\log x^2 + \log \sqrt{x} = 2 \log x + \frac{1}{2} \log x = \frac{5}{2} \log x \leftarrow \text{정수}$$

$$\log x \text{의 정수 부분이 2이므로 } 2 \leq \log x < 3$$

$$\therefore 5 \leq \frac{5}{2} \log x < \frac{15}{2}$$

$$\text{이때 } \frac{5}{2} \log x \text{가 정수이므로}$$

$$\frac{5}{2} \log x = 5 \text{ 또는 } \frac{5}{2} \log x = 6 \text{ 또는 } \frac{5}{2} \log x = 7$$

$$\log x = 2 \text{ 또는 } \log x = \frac{12}{5} \text{ 또는 } \log x = \frac{14}{5}$$

이때 $\log x = 2$ 이면 $\log x^2, \log \sqrt{x}$ 의 소수 부분이 모두 0이므로

$$\log x = \frac{12}{5} \text{ 또는 } \log x = \frac{14}{5}, \text{ 즉 } x = 10^{\frac{12}{5}} \text{ 또는 } x = 10^{\frac{14}{5}}$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은 $10^{\frac{12}{5}} \times 10^{\frac{14}{5}} = 10^{\frac{26}{5}}$ 이므로

$$p = 5, q = 26 \quad \therefore p + q = 31$$

0206 **답** 360

(나), (다)에서 두 상용로그의 소수 부분이 같으면 두 상용로그의 차가 정수이고 $b=3a$ 이므로

$$\log a^2 - \log 3b = \log a^2 - \log 9a = \log \frac{a}{9} \leftarrow \text{정수}$$

즉, $\frac{a}{9}$ 는 10의 거듭제곱이다.

(가)에서 $10 < a < 100$ 이므로

$$\frac{10}{9} < \frac{a}{9} < \frac{100}{9}$$

따라서 $\frac{a}{9} = 10$ 이므로 $a = 90$

$$\therefore b = 270 \quad (\because \text{나})$$

$$\therefore a + b = 90 + 270 = 360$$

0207 **답** ④

(가)에서 $\log x$ 와 $\log \frac{1}{5}$ 의 소수 부분이 같다.

이때 $\log \frac{1}{5} = \log \frac{2}{10} = -1 + \log 2$ 에서 $0 < \log 2 < 1$ 이므로

$\log \frac{1}{5}$ 의 소수 부분은 $\log 2$ 이다.

즉, $\log x$ 의 소수 부분도 $\log 2$ 이다. ㉠

(나)에서 $[\log x] = n$ (n 은 정수)이라 하면

$$n^2 = n + 6, \quad n^2 - n - 6 = 0$$

$$(n+2)(n-3) = 0$$

$$\therefore n = -2 \text{ 또는 } n = 3 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에 의하여

$$\log x = -2 + \log 2 = \log (10^{-2} \times 2) = \log \frac{1}{50} \quad \therefore x = \frac{1}{50}$$

$$\log x = 3 + \log 2 = \log (10^3 \times 2) = \log 2000 \quad \therefore x = 2000$$

따라서 모든 양수 x 의 값의 곱은

$$\frac{1}{50} \times 2000 = 40$$

0208 **답** 1.8

pH 4.6인 용액의 수소 이온 농도를 a , pH 6.4인 용액의 수소 이온 농도를 b 라 하면

$$4.6 = -\log a \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$6.4 = -\log b \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠ - ㉡을 하면

$$1.8 = -\log b - (-\log a)$$

$$\log \frac{a}{b} = 1.8$$

$$\therefore \frac{a}{b} = 10^{1.8}$$

따라서 pH 4.6인 용액의 수소 이온 농도는 pH 6.4인 용액의 수소 이온 농도의 $10^{1.8}$ 배이므로 $k = 1.8$

0209 **답** ②

두 열차 A, B가 지점 P를 통과할 때의 속력을 각각 v_A , v_B 라 하면

$$v_A = 0.9v_B \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$L_A = 80 + 28 \log \frac{v_A}{100} - 14 \log \frac{75}{25} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$L_B = 80 + 28 \log \frac{v_B}{100} - 14 \log \frac{75}{25} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

㉠ - ㉢을 하면

$$\begin{aligned} L_B - L_A &= 28 \log \frac{v_B}{100} - 28 \log \frac{v_A}{100} \\ &= 28 \log \frac{v_B}{v_A} = 28 \log \frac{v_B}{0.9v_B} \quad (\because \text{㉠}) \\ &= 28 \log \frac{10}{9} = 28(1 - 2 \log 3) \\ &= 28 - 56 \log 3 \end{aligned}$$

0210 **답** 0.98

어느 외부 자극의 세기가 30일 때의 감각의 세기가 0.74이므로

$$0.74 = k \log 30 = k \log (10 \times 3)$$

$$= k(1 + \log 3)$$

$$= k(1 + 0.48) = 1.48k$$

$$\therefore k = \frac{1}{2}$$

따라서 이 외부 자극의 세기가 90일 때의 감각의 세기는

$$\frac{1}{2} \log 90 = \frac{1}{2} \log (10 \times 3^2) = \frac{1}{2}(1 + 2 \log 3)$$

$$= \frac{1}{2}(1 + 2 \times 0.48)$$

$$= 0.98$$

0211 **답** ⑤

5년 전 매출액을 A원이라 하고 매출액이 매년 $r\%$ 씩 증가했다고 하면

$$A \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 2A \quad \therefore \left(1 + \frac{r}{100}\right)^5 = 2$$

양변에 상용로그를 취하면

$$5 \log \left(1 + \frac{r}{100}\right) = \log 2$$

$$\log \left(1 + \frac{r}{100}\right) = \frac{1}{5} \log 2 = \frac{1}{5} \times 0.3 = 0.06$$

이때 $\log 1.15 = 0.06$ 이므로

$$1 + \frac{r}{100} = 1.15, \quad \frac{r}{100} = 0.15$$

$$\therefore r = 15$$

따라서 매출액은 매년 15%씩 증가했다.

0212 **답** 32.7%

현재 가격을 A원이라 하면 중고 물품의 가격은 매년 20%씩 떨어지므로 5년 후의 가격은

$$A \left(1 - \frac{20}{100}\right)^5 = A \times 0.8^5 (\text{원})$$

0.8^5 에 상용로그를 취하면

$$\log 0.8^5 = 5 \log 0.8 = 5 \log \frac{8}{10} = 5(3 \log 2 - 1)$$

$$= 5(3 \times 0.301 - 1)$$

$$= -0.485 = -1 + 0.515$$

이때 $\log 3.27 = 0.515$ 이므로

$$\log 0.8^5 = -1 + 0.515 = \log 10^{-1} + \log 3.27$$

$$= \log (10^{-1} \times 3.27) = \log 0.327$$

$$\therefore 0.8^5 = 0.327$$

따라서 이 중고 물품의 5년 후 가격은 $0.327A$ 원이므로 현재 가격의 32.7%이다.

0213 답 ④

$$\begin{aligned}\log_a 3 &= 2 \text{에서 } a^2 = 3 \\ \log_2 b &= 2 \text{에서 } b = 2^2 = 4 \\ \therefore a^{2b} &= (a^2)^b = 3^4 = 81\end{aligned}$$

0214 답 ②

$$\begin{aligned}(\text{ㄱ}) \text{에서 } \log_2 a &= 0 \text{ 또는 } \log_b 3 = 0 \\ \text{이때 } \log_b 3 &\neq 0 \text{이므로 } \log_2 a = 0 \quad \dots\dots \text{㉠} \\ \therefore a &= 2^0 = 1 \\ (\text{ㄴ}) \text{에서 } \log_b 3 &= 2 \quad (\because \text{㉠}) \\ \therefore b^2 &= 3 \\ \therefore a^2 + b^2 &= 1^2 + 3 = 4\end{aligned}$$

0215 답 ④

$$\begin{aligned}f(n) &= \frac{2\log_3(n+1) - \log_3(n^2+n)}{n+1-n} \\ &= \log_3(n+1)^2 - \log_3(n^2+n) \\ &= \log_3 \frac{(n+1)^2}{n(n+1)} = \log_3 \frac{n+1}{n} \\ \therefore f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(80) \\ &= \log_3 \frac{2}{1} + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \dots + \log_3 \frac{81}{80} \\ &= \log_3 \left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{81}{80} \right) \\ &= \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4\end{aligned}$$

0216 답 $\log_2 3$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} + \frac{1}{b} &= \frac{a+b}{ab} = \frac{\log_2 7}{\log_3 7} \\ &= \frac{\frac{1}{\log_7 2}}{\frac{1}{\log_7 3}} = \frac{\log_7 3}{\log_7 2} = \log_2 3\end{aligned}$$

0217 답 80

$$\begin{aligned}(\text{ㄱ}) \text{에서 } \log_4 a &= 2 \quad \therefore a = 4^2 = 16 \\ (\text{ㄴ}) \text{에서} \\ \log_a 5 \times \log_5 b &= \log_a 5 \times \frac{\log_a b}{\log_a 5} = \log_a b \\ \text{즉, } \log_a b &= \frac{3}{2} \text{이므로} \\ b &= a^{\frac{3}{2}} = (4^2)^{\frac{3}{2}} = 4^3 = 64 \\ \therefore a + b &= 16 + 64 = 80\end{aligned}$$

0218 답 ③

$$\begin{aligned}& (5^{\log_5 3 + \log_5 2})^2 + (3^{\log_5 3 + \log_{5/3} 3\sqrt{3}})^{\log_5 2\sqrt{2}} \\ &= \{5^{\log_5 (3 \times 2)}\}^2 + (3^{\log_5 3 + \log_{5/3} 3^{\frac{3}{2}}})^{\log_5 2^{\frac{3}{2}}} \\ &= (5^{\log_5 6})^2 + (3^{\log_5 3 + 3\log_5 3})^{\frac{3}{4}\log_5 2} \\ &= (6^{\log_5 5})^2 + 3^{4\log_5 3 \times \frac{3}{4}\log_5 2} \\ &= 6^2 + 3^3 = 36 + 27 \\ &= 63\end{aligned}$$

0219 답 ④

$$\begin{aligned}\log_2 15 &= a \text{에서} \\ \log_2 3 + \log_2 5 &= a \quad \dots\dots \text{㉠} \\ \log_2 \frac{3}{5} &= b \text{에서} \\ \log_2 3 - \log_2 5 &= b \quad \dots\dots \text{㉡} \\ \text{㉠} + \text{㉡} \text{을 하면 } 2 \log_2 3 &= a + b \\ \therefore \log_2 3 &= \frac{a+b}{2} \\ \text{㉠} - \text{㉡} \text{을 하면 } 2 \log_2 5 &= a - b \\ \therefore \log_2 5 &= \frac{a-b}{2} \\ \therefore \log_2 45 &= \log_2 (3^2 \times 5) \\ &= 2\log_2 3 + \log_2 5 \\ &= 2 \times \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \\ &= \frac{3a+b}{2}\end{aligned}$$

0220 답 $\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned}\log_{16} a &= \frac{1}{\log_4 4} \text{에서 } \log_4 a = \log_4 b \text{이므로} \\ \frac{1}{2} \log_4 a &= \log_4 b \\ \log_4 \sqrt{a} &= \log_4 b \\ \sqrt{a} &= b \quad \therefore a = b^2 \\ \therefore \log_a b + \log_b a &= \log_{b^2} b + \log_b b^2 \\ &= \frac{1}{2} + 2 \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

0221 답 ①

$$\begin{aligned}\text{이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여} \\ \log_2 a + \log_2 b &= -6, \log_2 a \times \log_2 b = 3 \\ \therefore \log_a b + \log_b a &= \frac{\log_2 b}{\log_2 a} + \frac{\log_2 a}{\log_2 b} \\ &= \frac{(\log_2 b)^2 + (\log_2 a)^2}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ &= \frac{(\log_2 a + \log_2 b)^2 - 2\log_2 a \times \log_2 b}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ &= \frac{(-6)^2 - 2 \times 3}{3} \\ &= 10\end{aligned}$$

0222 답 ⑤

$$\begin{aligned}\log_5 5 < \log_5 15 < \log_5 25 \\ \text{즉, } 1 < \log_5 15 < 2 \text{이므로} \\ x &= 1, y = \log_5 15 - 1 = \log_5 15 - \log_5 5 = \log_5 3 \\ \therefore \frac{5^x + 5^y}{5^x - 5^y} &= \frac{5^1 + 5^{\log_5 3}}{5^1 - 5^{\log_5 3}} = \frac{5+3}{5-3} = 4\end{aligned}$$

0223 **답** 2.0333

$$\begin{aligned}\log 108 &= \log (2^2 \times 3^3) \\ &= 2\log 2 + 3\log 3 \\ &= 2 \times 0.3010 + 3 \times 0.4771 \\ &= 2.0333\end{aligned}$$

0224 **답** ①

$$\begin{aligned}\log \frac{100x}{y^2} &= \log 100x - \log y^2 = \log (10^2 \times x) - \log y^2 \\ &= 2 + \log x - 2\log y = 2 + \frac{3}{5} - 2 \times \frac{7}{4} \\ &= -0.9 = -1 + 0.1\end{aligned}$$

따라서 $\log \frac{100x}{y^2}$ 의 정수 부분은 -1 , 소수 부분은 0.1 이므로
 $a = -1, b = 0.1$
 $\therefore a^2 + 10b = (-1)^2 + 10 \times 0.1 = 2$

0225 **답** 20.1

상용로그표에서 $\log 4.04 = 0.6064$ 이므로

$$\begin{aligned}\log \sqrt{404} &= \frac{1}{2} \log 404 = \frac{1}{2} \log (10^2 \times 4.04) \\ &= \frac{1}{2} (\log 10^2 + \log 4.04) = \frac{1}{2} (2 + 0.6064) \\ &= 1 + 0.3032\end{aligned}$$

이때 상용로그표에서 $\log 2.01 = 0.3032$ 이므로
 $\log \sqrt{404} = 1 + 0.3032 = \log 10 + \log 2.01$
 $= \log (10 \times 2.01) = \log 20.1$
 $\therefore \sqrt{404} = 20.1$

0226 **답** $x^2 - 19x + 90 = 0$

$\log 900 = \log (10^2 \times 9) = 2 + \log 9$ 이므로 $\log 900$ 의 정수 부분은 2 , 소수 부분은 $\log 9$ 이다.
 $\therefore a = 2, b = \log 9 = 2\log 3$
 즉, $3^a = 3^2 = 9$ 이고
 $\frac{2}{b} = \frac{2}{2\log 3} = \log_3 10$ 에서
 $3^{\frac{2}{b}} = 3^{\log_3 10} = 10$
 따라서 x^2 의 계수가 1 이고 $3^a, 3^{\frac{2}{b}}$, 즉 $9, 10$ 을 두 근으로 하는 이차방정식은
 $x^2 - (9 + 10)x + 9 \times 10 = 0$
 $\therefore x^2 - 19x + 90 = 0$

0227 **답** $\frac{1}{2}$ 배

어느 상품의 현재 수요량을 D_1 , 판매 가격을 P_1 이라 하면
 $\log_a D_1 = k - \frac{1}{3} \log_a P_1$ ㉠

판매 가격이 현재의 8 배가 될 때의 수요량을 D_2 라 하면 판매 가격은 $8P_1$ 이므로
 $\log_a D_2 = k - \frac{1}{3} \log_a 8P_1$
 $\log_a D_2 = k - \frac{1}{3} (\log_a P_1 + \log_a 8)$
 $\log_a D_2 = k - \frac{1}{3} \log_a P_1 - \log_a 2$ ㉡

㉠-㉡을 하면

$$\begin{aligned}\log_a D_2 - \log_a D_1 &= -\log_a 2, \log_a D_2 = \log_a D_1 - \log_a 2 \\ \log_a D_2 &= \log_a \frac{D_1}{2} \quad \therefore D_2 = \frac{D_1}{2}\end{aligned}$$

따라서 판매 가격이 현재의 8 배가 되면 수요량은 현재의 $\frac{1}{2}$ 배가 된다.

0228 **답** 3

밑의 조건에서 $|a-1| > 0, |a-1| \neq 1$
 $\therefore a \neq 0, a \neq 1, a \neq 2$ ㉠

진수의 조건에서 모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + ax + a > 0$ 이어야 하므로 이차방정식 $x^2 + ax + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $D = a^2 - 4a < 0, a(a-4) < 0$
 $\therefore 0 < a < 4$ ㉡

㉠, ㉡의 공통부분은
 $0 < a < 1$ 또는 $1 < a < 2$ 또는 $2 < a < 4$
 따라서 구하는 정수 a 의 값은 3 이다. ㉢

채점 기준

㉠ 밑의 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위 구하기	30 %
㉡ 진수의 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위 구하기	50 %
㉢ 정수 a 의 값 구하기	20 %

0229 **답** 0

$2^x = 5^y = 50^z = k (k > 0)$ 로 놓으면
 $xyz \neq 0$ 이므로 $k \neq 1$
 $x = \log_2 k, y = \log_5 k, z = \log_{50} k$ 이므로
 $\frac{1}{x} = \log_k 2, \frac{1}{y} = \log_k 5, \frac{1}{z} = \log_k 50$ ㉠

$\therefore \frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} = \log_k 2 + 2\log_k 5 - \log_k 50$
 $= \log_k 2 + \log_k 5^2 - \log_k 50$
 $= \log_k \frac{2 \times 5^2}{50}$
 $= \log_k 1$
 $= 0$ ㉡

채점 기준

㉠ $2^x = 5^y = 50^z = k (k > 0)$ 로 놓고 $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ 을 k 에 대한 식으로 나타내기	40 %
㉡ $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z}$ 의 값 구하기	60 %

0230 **답** $10^{\frac{34}{5}}$

두 상용로그의 소수 부분의 합이 1 이면 두 상용로그의 합이 정수이므로
 $\log x + \log x\sqrt{x} = \log x + \frac{3}{2} \log x$
 $= \frac{5}{2} \log x \leftarrow$ 정수 ㉠

$\log x$ 의 정수 부분이 3 이므로
 $3 \leq \log x < 4$
 $\therefore \frac{15}{2} \leq \frac{5}{2} \log x < 10$ ㉡

이때 $\frac{5}{2} \log x$ 가 정수이므로 $\frac{5}{2} \log x = 8$ 또는 $\frac{5}{2} \log x = 9$
 $\log x = \frac{16}{5}$ 또는 $\log x = \frac{18}{5}$
 $\therefore x = 10^{\frac{16}{5}}$ 또는 $x = 10^{\frac{18}{5}}$ ③
 따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은 $10^{\frac{16}{5}} \times 10^{\frac{18}{5}} = 10^{\frac{34}{5}}$ ④

채점 기준

① $\log x$ 의 소수 부분과 $\log x\sqrt{x}$ 의 소수 부분의 합이 1임을 이용하여 $\frac{5}{2} \log x$ 가 정수임을 알기	30 %
② $\frac{5}{2} \log x$ 의 값의 범위 구하기	30 %
③ x 의 값 구하기	30 %
④ 모든 실수 x 의 값의 곱 구하기	10 %

C 실력 향상

39쪽

0231 답 1

$$\log_2 \left(\frac{1}{2} - x \right) + \log_2 \left(\frac{1}{2} - y \right) = 0 \text{에서}$$

$$\log_2 \left(\frac{1}{2} - x \right) \left(\frac{1}{2} - y \right) = 0, \log_2 \left(\frac{1}{4} - \frac{y}{2} - \frac{x}{2} + xy \right) = 0$$

$$\frac{1}{4} - \frac{y}{2} - \frac{x}{2} + xy = 1 \quad \therefore xy - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = \frac{3}{4} \quad \dots\dots ①$$

이때 진수의 조건에서 $\frac{1}{2} - x > 0, \frac{1}{2} - y > 0$

$$\therefore x < \frac{1}{2}, y < \frac{1}{2}$$

$x^2 > 0, y^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 y^2}$ ②

이때 등호는 $x^2 = y^2$ 일 때 성립하므로 $x = -y$ 또는 $x = y$

(i) $x = -y$ 일 때,

$$① \text{에서 } x^2 = -\frac{3}{4}$$

이를 만족시키는 실수 x 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $x = y$ 일 때,

$$① \text{에서 } x^2 - x = \frac{3}{4}$$

$$4x^2 - 4x - 3 = 0, (2x+1)(2x-3) = 0$$

$$\therefore x = -\frac{1}{2} \left(\because x < \frac{1}{2} \right)$$

$$② \text{에서 } x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 $x^2 + y^2$ 의 최솟값은 $\frac{1}{2}$ 이므로 $m = 2, n = 1$

$$\therefore m - n = 1$$

0232 답 45

집합 A 의 원소 중 자연수인 원소는 다음과 같다.

a	1	4	9	16	25	36	49	64	...	→ 완전제곱수
$\sqrt{a}$	1	②	3	④	5	⑥	7	8	...	

$\log_{\sqrt{3}} b = \log_{3^{\frac{1}{2}}} b = 2 \log_3 b$ 이므로
 집합 B 의 원소 중 자연수인 원소는 다음과 같다.

b	3	9	27	81	...	→ 3의 거듭제곱인 수
$\log_{\sqrt{3}} b$	②	④	⑥	8	...	

즉, $n(C) = 3$ 이 되려면 $C = \{2, 4, 6\}$ 이어야 한다.

$$\{2, 4, 6\} \subset A \text{에서 } k \geq 36 \quad \dots\dots ⑦$$

$$\{2, 4, 6\} \subset B \text{에서 } k \geq 27 \quad \dots\dots ⑧$$

⑦, ⑧의 공통부분은 $k \geq 36$

이때 $k \geq 81$ 이면 $\{2, 4, 6, 8\} \subset C$ 이므로 $k < 81$ 이어야 한다.

$$\therefore 36 \leq k < 81$$

따라서 자연수 k 는 36, 37, 38, ..., 80의 45개이다.

0233 답 $\sqrt{3}$

(가)에서

$$\sqrt{a} = \sqrt[4]{b} = \sqrt[6]{c} = k (k > 0) \text{로 놓으면}$$

$$a = k^2, b = k^4, c = k^6$$

(나)에서

$$\log_2 \frac{bc}{a} = \log_2 \frac{k^4 \times k^6}{k^2} = \log_2 k^8 = 8 \log_2 k$$

$$\text{즉, } 8 \log_2 k = 2 \text{이므로 } \log_2 k = \frac{1}{4}$$

$$\therefore k = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

$$\therefore a = (\sqrt[4]{2})^2 = \sqrt{2}, b = (\sqrt[4]{2})^4 = 2, c = (\sqrt[4]{2})^6 = 2\sqrt{2} \quad \dots\dots ①$$

$$\log_2 a \times \log_m b \times \log_n c = 1 \text{에서}$$

$$\log_2 a \times \frac{\log_2 b}{\log_2 m} \times \frac{\log_2 c}{\log_2 n} = 1$$

$$\log_2 m \times \log_2 n = \log_2 a \times \log_2 b \times \log_2 c \quad \dots\dots ②$$

$m > 1, n > 1$ 에서 $\log_2 m > 0, \log_2 n > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\log_2 mn = \log_2 m + \log_2 n \geq 2\sqrt{\log_2 m \times \log_2 n}$$

(단, 등호는 $\log_2 m = \log_2 n$, 즉 $m = n$ 일 때 성립)

이때 ①, ②에 의하여

$$\begin{aligned} \log_2 m \times \log_2 n &= \log_2 a \times \log_2 b \times \log_2 c \\ &= \log_2 \sqrt{2} \times \log_2 2 \times \log_2 2\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } \log_2 mn \geq 2 \times \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3} \text{이므로}$$

$\log_2 mn$ 의 최솟값은 $\sqrt{3}$ 이다.

0234 답 794

10년 후의 매출액은

$$A(1-0.2)^5(1+0.2)^5 = A(1-0.2^2)^5 = A \times 0.96^5 (\text{원})$$

$$\therefore k = 0.96^5$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log k &= \log 0.96^5 = 5 \log 0.96 \\ &= 5 \log (10^{-1} \times 9.6) = 5(-1 + \log 9.6) \\ &= 5(-1 + 0.98) = -0.1 \\ &= -1 + 0.9 = \log 10^{-1} + \log 7.94 \\ &= \log (10^{-1} \times 7.94) = \log 0.794 \end{aligned}$$

따라서 $k = 0.794$ 이므로 $1000k = 794$

03 / 지수함수

A 개념 확인

40~43쪽

0235 답 ㄱ, ㄴ

0236 답 81

$$f(4)=3^4=81$$

0237 답 $3\sqrt{3}$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{3^3}=3\sqrt{3}$$

0238 답 $\frac{1}{27}$

$$f(-3)=3^{-3}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$$

0239 답 27

$$\frac{f(1)}{f(-2)}=\frac{3^1}{3^{-2}}=3^1 \times 3^2=3^3=27$$

0240 답 1

$$f(0)=\left(\frac{1}{5}\right)^0=1$$

0241 답 $\frac{1}{125}$

$$f(3)=\left(\frac{1}{5}\right)^3=\frac{1}{125}$$

0242 답 25

$$f(-2)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=5^2=25$$

0243 답 $\frac{1}{5}$

$$f(-3)f(4)=\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^4=\frac{1}{5}$$

0244 답 ㄴ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. 치역은 $\{y|y>0\}$ 이다.

ㄴ. $f(x)=a^x$ 은 일대일함수이므로 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.

즉, $f(x_1)=f(x_2)$ 이면 $x_1=x_2$ 이다.

ㄷ. $a>1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하므로

$x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) < f(x_2)$ 이다.

ㄹ. 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다.

ㅁ. $f(0)=a^0=1$ 이므로 그래프는 점 $(0, 1)$ 을 지난다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

0245 답 $4^{10} < 8^7$

$$4^{10}=(2^2)^{10}=2^{20}, 8^7=(2^3)^7=2^{21}$$

이때 $20 < 21$ 이고 밑이 1보다 크므로 $2^{20} < 2^{21}$

$$\therefore 4^{10} < 8^7$$

0246 답 $\frac{1}{625} < \left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^5$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^5=\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{2}}, \frac{1}{625}=\left(\frac{1}{5}\right)^4$$

이때 $\frac{5}{2} < 4$ 이고 밑이 1보다 작으므로 $\left(\frac{1}{5}\right)^4 < \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{5}{2}}$

$$\therefore \frac{1}{625} < \left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^5$$

0247 답 $\sqrt{3} < \sqrt[3]{9} < \sqrt{27}$

$$\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}, \sqrt[3]{9}=3^{\frac{2}{3}}, \sqrt{27}=\sqrt{3^3}=3^{\frac{3}{2}}$$

이때 $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{2}$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$3^{\frac{1}{2}} < 3^{\frac{2}{3}} < 3^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \sqrt{3} < \sqrt[3]{9} < \sqrt{27}$$

0248 답 $\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^5 < \frac{1}{7} < \left(\frac{1}{7}\right)^{-0.1}$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^5=\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{5}{2}}$$

이때 $-0.1 < 1 < \frac{5}{2}$ 이고 밑이 1보다 작으므로

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{5}{2}} < \frac{1}{7} < \left(\frac{1}{7}\right)^{-0.1}$$

$$\therefore \left(\sqrt{\frac{1}{7}}\right)^5 < \frac{1}{7} < \left(\frac{1}{7}\right)^{-0.1}$$

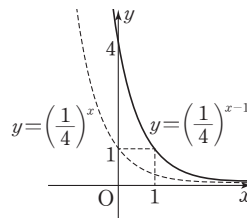
0249 답 풀이 참조

함수 $y=\left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$ 의 그래프는 함수

$y=\left(\frac{1}{4}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

1만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y|y>0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다.



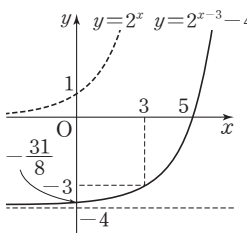
0250 답 풀이 참조

함수 $y=2^{x-3}-4$ 의 그래프는 함수

$y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만

큼, y 축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 치역은 $\{y|y>-4\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y=-4$ 이다.



0251 답 풀이 참조

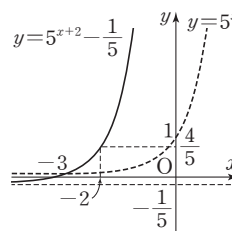
함수 $y=5^{x+2}-\frac{1}{5}$ 의 그래프는 함수

$y=5^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2만

큼, y 축의 방향으로 $-\frac{1}{5}$ 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

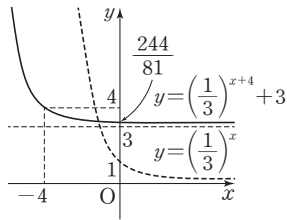
따라서 치역은 $\{y|y>-\frac{1}{5}\}$ 이고, 점근

선의 방정식은 $y=-\frac{1}{5}$ 이다.



0252 **답** 풀이 참조

함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+4} + 3$ 의 그래프는 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 3 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.



따라서 치역은 $\{y | y > 3\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $y = 3$ 이다.

0253 **답** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+6} - 3$

0254 **답** $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} + 5$

함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 5$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 5 \quad \therefore y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} + 5$$

0255 **답** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} - 5$

0256 **답** $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} + 5$

함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 5$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} - 5 \quad \therefore y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{-x+2} + 5$$

0257 **답** 최댓값: 49, 최솟값: $\frac{1}{7}$

함수 $y = 7^x$ 의 밑이 1보다 크므로 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $y = 7^x$ 은 $x = 2$ 에서 최댓값 $7^2 = 49$, $x = -1$ 에서 최솟값 $7^{-1} = \frac{1}{7}$ 을 갖는다.

0258 **답** 최댓값: 125, 최솟값: $\frac{1}{25}$

함수 $y = 5^{-x} = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ 의 밑이 1보다 작으므로 $-3 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $y = 5^{-x}$ 은 $x = -3$ 에서 최댓값 $5^{-(-3)} = 5^3 = 125$, $x = 2$ 에서 최솟값 $5^{-2} = \frac{1}{25}$ 을 갖는다.

0259 **답** 최댓값: 27, 최솟값: -1

함수 $y = 2^{x+2} - 5$ 의 밑이 1보다 크므로 $0 \leq x \leq 3$ 일 때 함수 $y = 2^{x+2} - 5$ 는 $x = 3$ 에서 최댓값 $2^{3+2} - 5 = 2^5 - 5 = 27$, $x = 0$ 에서 최솟값 $2^{0+2} - 5 = 2^2 - 5 = -1$ 을 갖는다.

0260 **답** 최댓값: 28, 최솟값: 2

함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 1$ 의 밑이 1보다 작으므로 $-2 \leq x \leq 1$ 일 때 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} + 1$ 은 $x = -2$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2-1} + 1 = 3^3 + 1 = 28$, $x = 1$ 에서 최솟값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{1-1} + 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^0 + 1 = 2$ 를 갖는다.

0261 **답** 최댓값: 3, 최솟값: $\frac{1}{27}$

$f(x) = x^2 - 4x + 1$ 이라 하면

$$f(x) = (x-2)^2 - 3$$

$$1 \leq x \leq 4 \text{에서}$$

$$f(1) = -2, f(2) = -3, f(4) = 1 \text{이므로}$$

$$-3 \leq f(x) \leq 1$$

이때 함수 $y = 3^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 크므로 함수 $y = 3^{f(x)}$ 은 $f(x) = 1$

에서 최댓값 $3^1 = 3$, $f(x) = -3$ 에서 최솟값 $3^{-3} = \frac{1}{27}$ 을 갖는다.

0262 **답** 최댓값: 4, 최솟값: $\frac{1}{4}$

$f(x) = -x^2 + 6x - 7$ 이라 하면

$$f(x) = -(x-3)^2 + 2$$

$$1 \leq x \leq 3 \text{에서}$$

$$f(1) = -2, f(3) = 2 \text{이므로}$$

$$-2 \leq f(x) \leq 2$$

이때 함수 $y = 2^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 크므로 함수 $y = 2^{f(x)}$ 은 $f(x) = 2$

에서 최댓값 $2^2 = 4$, $f(x) = -2$ 에서 최솟값 $2^{-2} = \frac{1}{4}$ 을 갖는다.

0263 **답** 최댓값: 125, 최솟값: $\frac{1}{5}$

$f(x) = x^2 + 2x - 2$ 라 하면

$$f(x) = (x+1)^2 - 3$$

$$-2 \leq x \leq 1 \text{에서}$$

$$f(-2) = -2, f(-1) = -3, f(1) = 1 \text{이므로}$$

$$-3 \leq f(x) \leq 1$$

이때 함수 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 작으므로 함수 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)}$ 은

$f(x) = -3$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 5^3 = 125$, $f(x) = 1$ 에서 최솟값

$\left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{1}{5}$ 을 갖는다.

0264 **답** 최댓값: 6, 최솟값: $\frac{1}{216}$

$f(x) = -x^2 + 2x + 2$ 라 하면

$$f(x) = -(x-1)^2 + 3$$

$$0 \leq x \leq 3 \text{에서}$$

$$f(0) = 2, f(1) = 3, f(3) = -1 \text{이므로}$$

$$-1 \leq f(x) \leq 3$$

이때 함수 $y = \left(\frac{1}{6}\right)^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 작으므로 함수 $y = \left(\frac{1}{6}\right)^{f(x)}$ 은

$f(x) = -1$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} = 6$, $f(x) = 3$ 에서 최솟값

$\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$ 을 갖는다.

0265 **답** $x = \frac{5}{2}$

$$3^{x-1} = 3^{\frac{3}{2}} \text{에서}$$

$$x-1 = \frac{3}{2} \quad \therefore x = \frac{5}{2}$$

0266 답 $x=3$

$$49^x = 7^{x+3} \text{에서 } 7^{2x} = 7^{x+3}$$

$$\text{따라서 } 2x = x+3 \text{이므로 } x=3$$

0267 답 $x=\frac{1}{4}$

$$\left(\frac{7}{6}\right)^{5x} = \left(\frac{6}{7}\right)^{3x-2} \text{에서 } \left(\frac{7}{6}\right)^{5x} = \left(\frac{7}{6}\right)^{-3x+2}$$

$$\text{따라서 } 5x = -3x+2 \text{이므로 } 8x=2$$

$$\therefore x = \frac{1}{4}$$

0268 답 $x=\frac{5}{3}$

$$5^{x+1} = 0.2^{2x-6} \text{에서 } 5^{x+1} = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-6}$$

$$5^{x+1} = 5^{-2x+6}$$

$$\text{따라서 } x+1 = -2x+6 \text{이므로 } 3x=5$$

$$\therefore x = \frac{5}{3}$$

0269 답 $x=3$

$$2^{2x} - 6 \times 2^x - 16 = 0 \text{에서}$$

$$(2^x)^2 - 6 \times 2^x - 16 = 0$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 6t - 16 = 0, \ (t+2)(t-8) = 0$$

$$\therefore t = 8 \ (\because t > 0)$$

$$\text{따라서 } 2^x = 8 = 2^3 \text{이므로 } x=3$$

0270 답 $x=-2$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} - 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 27 = 0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^x - 27 = 0$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 6t - 27 = 0, \ (t+3)(t-9) = 0$$

$$\therefore t = 9 \ (\because t > 0)$$

$$\text{따라서 } \left(\frac{1}{3}\right)^x = 9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \text{이므로 } x = -2$$

0271 답 $x > \frac{1}{2}$

$$8^{2-x} < 8^{x+1} \text{에서}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로}$$

$$2-x < x+1$$

$$-2x < -1$$

$$\therefore x > \frac{1}{2}$$

0272 답 $x \geq -1$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{4x} \text{에서}$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로}$$

$$x-3 \leq 4x$$

$$-3x \leq 3$$

$$\therefore x \geq -1$$

0273 답 $x \leq 1$

$$4^x \leq 2^{5-3x} \text{에서}$$

$$2^{2x} \leq 2^{5-3x}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로}$$

$$2x \leq 5-3x, \ 5x \leq 5$$

$$\therefore x \leq 1$$

0274 답 $-1 < x < 3$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3} \text{에서}$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로}$$

$$x^2 < 2x+3$$

$$x^2 - 2x - 3 < 0$$

$$(x+1)(x-3) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 3$$

0275 답 $x \leq 2$

$$3^{2x} - 8 \times 3^x - 9 \leq 0 \text{에서 } (3^x)^2 - 8 \times 3^x - 9 \leq 0$$

$$3^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 8t - 9 \leq 0$$

$$(t+1)(t-9) \leq 0$$

$$\therefore -1 \leq t \leq 9$$

$$\text{그런데 } t > 0 \text{이므로 } 0 < t \leq 9$$

$$\text{즉, } 0 < 3^x \leq 3^2 \text{이고 밑이 1보다 크므로 } x \leq 2$$

0276 답 $x \leq -2$ 또는 $x \geq -1$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} - 6 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + 125 \geq 0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2 - 30 \times \left(\frac{1}{5}\right)^x + 125 \geq 0$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 30t + 125 \geq 0, \ (t-5)(t-25) \geq 0$$

$$\therefore t \leq 5 \text{ 또는 } t \geq 25$$

$$\text{그런데 } t > 0 \text{이므로}$$

$$0 < t \leq 5 \text{ 또는 } t \geq 25$$

$$\text{즉, } 0 < \left(\frac{1}{5}\right)^x \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \text{ 또는 } \left(\frac{1}{5}\right)^x \geq \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \text{이고}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq -1$$

B 유형 완성

44~55쪽

0277 답 ㄱ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } f(m)f(-m) = a^m \times a^{-m} = a^0 = 1$$

$$\text{ㄴ. } f(2m) = a^{2m}, \ 2f(m) = 2a^m \quad \therefore f(2m) \neq 2f(m)$$

$$\text{ㄷ. } f(m-n) = a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n} = \frac{f(m)}{f(n)}$$

따라서 보기에서 항상 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0278 [답] ③

$$f(4)=m \text{에서 } a^4=m$$

$$f(9)=n \text{에서 } a^9=n$$

$$\therefore f(5)=a^5=a^{9-4}=a^9 \div a^4=\frac{n}{m}$$

0279 [답] $\frac{1}{27}$

$$f(1)=3 \text{에서 } 3^{a+b}=3 \quad \therefore a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(2)=27 \text{에서 } 3^{2a+b}=3^3 \quad \therefore 2a+b=3 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=2, b=-1$$

따라서 $f(x)=3^{2x-1}$ 이므로

$$f(-1)=3^{-3}=\frac{1}{27}$$

0280 [답] $\frac{28}{27}$

$$f(2a) \times f(b)=3^{-2a} \times 3^{-b}=9 \text{에서}$$

$$3^{-2a-b}=9=3^2 \quad \therefore -2a-b=2 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$f(a-b)=3^{-(a-b)}=3 \text{에서}$$

$$3^{-a+b}=3 \quad \therefore -a+b=1 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=-1, b=0$$

..... ①

$$\therefore 3^{3a}+3^{3b}=3^{-3}+3^0=\frac{1}{27}+1=\frac{28}{27}$$

..... ②

채점 기준

① a, b의 값 구하기

70%

② $3^{3a}+3^{3b}$ 의 값 구하기

30%

0281 [답] ⑤

ㄱ. 정의역은 실수 전체의 집합이다.

ㄴ. $f(x)=a^x$ 은 일대일함수이므로 $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.

ㄷ. $0 < a < 1$ 일 때, $f(x)=a^x$ 은 x 의 값이 증가하면 $f(x)$ 의 값은 감소하므로 $x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 이다.

ㄹ. $f(0)=1, f(1)=a$ 이므로 그래프는 두 점 $(0, 1), (1, a)$ 를 지난다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

0282 [답] ④

임의의 실수 a, b 에 대하여 $a < b$ 일 때, $f(a) > f(b)$ 를 만족시키는 함수는 x 의 값이 증가할 때 $f(x)$ 의 값은 감소하는 함수이므로 $0 < (\text{밑}) < 1$ 인 지수함수이다.

이때 $f(x)=\left(\frac{10}{9}\right)^{-x}=\left(\frac{9}{10}\right)^x$ 은 $0 < \frac{9}{10} < 1$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 함수는 ④이다.

0283 [답] $a < -3$ 또는 $a > 2$

$y=(a^2+a-5)^x$ 에서 x 의 값이 증가할 때 y 의 값도 증가하려면

$$a^2+a-5 > 1 \text{이어야 하므로}$$

$$a^2+a-6 > 0$$

$$(a+3)(a-2) > 0$$

$$\therefore a < -3 \text{ 또는 } a > 2$$

0284 [답] 1

함수 $y=3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=3^{x-1}-2$$

이 그래프가 점 $(2, a)$ 를 지나므로

$$a=3^{2-1}-2=1$$

0285 [답] ④

함수 $y=4^x-6$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=4^{x-a}-6+b$$

이 그래프의 점근선이 직선 $y=-6+b$ 이므로

$$-6+b=-2$$

$$\therefore b=4$$

$$\therefore y=4^{x-a}-2$$

이 그래프가 원점을 지나므로

$$0=4^{-a}-2$$

$$2^{-2a}=2$$

$$-2a=1$$

$$\therefore a=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore ab=-\frac{1}{2} \times 4=-2$$

0286 [답] ④

ㄱ. 함수 $y=4^x+3$ 의 그래프는 함수 $y=4^x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y=-4 \times 2^{x-2}=-2^2 \times 2^{x-2}=-2^x$ 이므로 그래프는 함수 $y=4^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄷ. $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^x+2=-4^{-x}+2$ 이므로 그래프는 함수 $y=4^x$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후 y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y=2^{2x-4}-2=(2^2)^{x-2}-2=4^{x-2}-2$ 이므로 그래프는 함수 $y=4^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 보기의 함수에서 그 그래프가 함수 $y=4^x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

0287 [답] -3

함수 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}=3^x$$

이 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=3^{x-a}+b$$

..... ①

이 그래프의 점근선의 방정식이 $y=b$ 이므로 $b=3$

..... ②

또 그래프가 점 $(0, 6)$ 을 지나므로

$$6=3^{-a}+3, 3^{-a}=3$$

$$-a=1 \quad \therefore a=-1$$

..... ③

$$\therefore ab=-1 \times 3=-3$$

..... ④

채점 기준

i 함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 후 평행이동한 그래프의 식 구하기	40%
ii b 의 값 구하기	20%
iii a 의 값 구하기	30%
iv ab 의 값 구하기	10%

0288 답 ①

함수 $y = 5^{-x+1} + k = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} + k$ 의 그래프는 함수 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

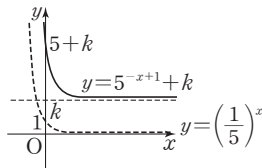
따라서 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$5+k \geq 0$$

$x=0$ 일 때의 함숫값

$$\therefore k \geq -5$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 -5 이다.

0289 답 $k < 2$

$$x \geq -1 \text{ 이면}$$

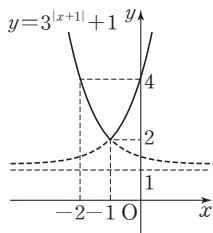
$$y = 3^{x+1} + 1$$

$$x < -1 \text{ 이면}$$

$$y = 3^{-(x+1)} + 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 1$$

따라서 함수 $y = 3^{|x+1|} + 1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 직선 $y = k$ 가 그래프와 만나지 않으려면

$$k < 2$$



0290 답 ④

함수 $y = 2^x$ 의 그래프가 두 점 (a, p) , (b, q) 를 지나므로

$$p = 2^a, q = 2^b$$

이때 $pq = 16$ 이므로

$$2^a \times 2^b = 16, 2^{a+b} = 2^4$$

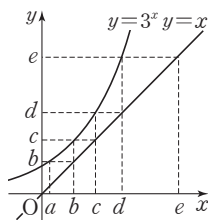
$$\therefore a+b=4$$

0291 답 ①

오른쪽 그림에서 $b = 3^a, d = 3^c$ 이므로

$$bd = 3^a \times 3^c = 3^{a+c}$$

$$\therefore k = a+c$$



0292 답 2

$A(a, 3^a)$, $B(b, 3^b)$ 에서 직선 AB 의 기울기가 2이므로

$$\frac{3^b - 3^a}{b - a} = 2$$

$$\therefore b - a = \frac{1}{2}(3^b - 3^a) \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\text{또 } \overline{AB} = \sqrt{5} \text{에서 } (b-a)^2 + (3^b - 3^a)^2 = (\sqrt{5})^2$$

⑦을 대입하면

$$\frac{1}{4}(3^b - 3^a)^2 + (3^b - 3^a)^2 = 5$$

$$\frac{5}{4}(3^b - 3^a)^2 = 5, (3^b - 3^a)^2 = 4$$

$$\therefore 3^b - 3^a = 2 \quad (\because 3^a < 3^b)$$

0293 답 $\frac{1}{8}$

사각형 $ACDB$ 가 정사각형이고 그 넓이가 9이므로 사각형 $ACDB$ 의 한 변의 길이는 3이다.

점 C 의 좌표를 $(a, 0)$ 이라 하면

$$\overline{CD} = 3 \text{이므로 } D(a+3, 0)$$

$$\overline{AC} = \overline{BD} = 3 \text{이므로 } A(a, 3), B(a+3, 3)$$

점 $A(a, 3)$ 이 함수 $y = 2^x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$3 = 2^a \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

또 점 $B(a+3, 3)$ 이 함수 $y = k \times 2^x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$3 = k \times 2^{a+3}, k \times 2^a \times 8 = 3$$

$$\text{이때 } \textcircled{7} \text{에 의하여 } k \times 3 \times 8 = 3 \quad \therefore k = \frac{1}{8}$$

0294 답 $\frac{25}{2}$

함수 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ 의 그래프가 직선 $y = 25$ 와 만나는 점 A 의 x 좌표는

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = 25 = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \text{에서 } x = -2$$

$$\therefore A(-2, 25) \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

함수 $y = \left(\frac{1}{25}\right)^x$ 의 그래프가 직선 $y = 25$ 와 만나는 점 B 의 x 좌표는

$$\left(\frac{1}{25}\right)^x = 25 = \left(\frac{1}{25}\right)^{-1} \text{에서 } x = -1$$

$$\therefore B(-1, 25) \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore \triangle OBA = \frac{1}{2} \times \{-1 - (-2)\} \times 25 = \frac{25}{2} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

i 점 A 의 좌표 구하기	40%
ii 점 B 의 좌표 구하기	40%
iii 삼각형 OBA 의 넓이 구하기	20%

0295 답 ⑤

점 C 의 x 좌표를 a ($a > 0$)라 하면

점 C 는 함수 $y = 2^x$ 의 그래프 위의 점이므로 $C(a, 2^a)$

이때 직선 $y = -x + p$ 의 기울기가 -1 이므로 삼각형 BDC 는 직각 이등변삼각형이다.

$$\text{즉, } \overline{CD} = \overline{BD} = a \text{이므로 } \triangle BDC = \frac{1}{2}a^2$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{2}a^2 = 8 \text{이므로 } a^2 = 16 \quad \therefore a = 4 \quad (\because a > 0)$$

$$\therefore C(4, 16)$$

한편 점 C 가 직선 $y = -x + p$ 위의 점이므로

$$16 = -4 + p \quad \therefore p = 20$$

$$\therefore \triangle OAC = \frac{1}{2} \times 20 \times 16 = 160$$

0296 [답] ③

$$A = \sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{\frac{3}{2}}$$

$$B = 16^{\frac{1}{5}} = (2^4)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{4}{5}}$$

$$C = \left(\frac{1}{8}\right)^{-0.6} = (2^{-3})^{-0.6} = 2^{1.8} = 2^{\frac{9}{5}}$$

이때 $\frac{4}{5} < \frac{3}{2} < \frac{9}{5}$ 이고 밑이 1보다 크므로 $2^{\frac{4}{5}} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{\frac{9}{5}}$

$\therefore B < A < C$

0297 [답] ⑤

$$A = n^{n+1}\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n+1}}, B = n^{n+2}\sqrt[n+1]{a^{n+1}} = a^{\frac{n+1}{n+2}}, C = n^{n+3}\sqrt[n+2]{a^{n+2}} = a^{\frac{n+2}{n+3}}$$

$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \frac{n+1}{n+2} = 1 - \frac{1}{n+2}, \frac{n+2}{n+3} = 1 - \frac{1}{n+3}$ 이고 n 이 자연수이므로

$$\frac{1}{n+3} < \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$$

따라서 $1 - \frac{1}{n+1} < 1 - \frac{1}{n+2} < 1 - \frac{1}{n+3}$, 즉

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+2} < \frac{n+2}{n+3}$$
이고 $0 < a < 1$ 이므로

$$a^{\frac{n+2}{n+3}} < a^{\frac{n+1}{n+2}} < a^{\frac{n}{n+1}} \quad \therefore C < B < A$$

0298 [답] ②

$0 < a < \frac{1}{b} < 1$ 에서 $0 < a < 1, b > 1$

$0 < a < 1$ 이고 $a < b$ 이므로 $a^a > a^b$

$b > 1$ 이고 $a < b$ 이므로 $b^a < b^b$

이때 $a > 0, b > 0$ 이고 $a < b$ 이므로 $a^a < b^a, a^b < b^b$

$\therefore a^b < a^a < b^a < b^b$

0299 [답] $\frac{17}{4}$

함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + k$ 의 밑이 1보다 작으므로 $-2 \leq x \leq 1$ 일 때 함수

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + k$ 는 $x = -2$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + k$, $x = 1$ 에서 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + k$ 를 갖는다.

$$\text{즉, } \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + k = 6 \text{ 이므로 } 2 + k = 6 \quad \therefore k = 4$$

따라서 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} + 4$ 의 최솟값은 $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{17}{4}$

0300 [답] ③

함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{a-x} = 3^{x-a}$ 의 밑이 1보다 크므로 $2 \leq x \leq 4$ 일 때 함수

$y = 3^{x-a}$ 은 $x = 4$ 에서 최댓값 3^{4-a} , $x = 2$ 에서 최솟값 3^{2-a} 을 갖는다.

즉, $3^{4-a} = 3$ 이므로

$$4 - a = 1$$

$$\therefore a = 3$$

따라서 $m = 3^{2-a} = \frac{1}{3}$ 이므로

$$am = 3 \times \frac{1}{3} = 1$$

0301 [답] ④

함수 $y = 3^x \times 2^{-2x} + 5 = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 5$ 의 밑이 1보다 작으므로

$-1 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 5$ 는 $x = -1$ 에서 최댓값

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-1} + 5 = \frac{4}{3} + 5 = \frac{19}{3} \text{를 갖는다.}$$

따라서 $a = -1, M = \frac{19}{3}$ 이므로

$$a + M = \frac{16}{3}$$

0302 [답] ⑤

함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+b} + 1$ 의 밑이 1보다 작으므로 $a \leq x \leq 3$ 일 때

함수 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+b} + 1$ 은 $x = a$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{a+b} + 1$,

$x = 3$ 에서 최솟값 $\left(\frac{1}{3}\right)^{3+b} + 1$ 을 갖는다.

$$\text{즉, } \left(\frac{1}{3}\right)^{a+b} + 1 = 28, \left(\frac{1}{3}\right)^{3+b} + 1 = 4 \text{ 이므로}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{a+b} = 27 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}, \left(\frac{1}{3}\right)^{3+b} = 3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$a + b = -3, 3 + b = -1$$

따라서 $a = 1, b = -4$ 이므로 $a - b = 5$

0303 [답] ③

$$f(x) = 2^{|x|} = \begin{cases} 2^x & (x \geq 0) \\ 2^{-x} & (x < 0) \end{cases} \text{이므로}$$

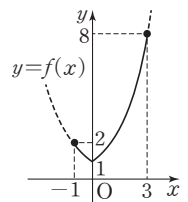
$-1 \leq x \leq 3$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

$-1 \leq x \leq 3$ 일 때 함수 $f(x) = 2^{|x|}$ 은

$x = 3$ 에서 최댓값 $f(3) = 2^3 = 8$,

$x = 0$ 에서 최솟값 $f(0) = 2^0 = 1$ 을 갖는다.

따라서 구하는 합은 $8 + 1 = 9$



0304 [답] $\frac{26}{5}$

$1 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $y = a^x - 1$ 은

(i) $a > 1$ 이면

$x = 2$ 에서 최댓값 $a^2 - 1$, $x = 1$ 에서 최솟값 $a - 1$ 을 갖는다.

$$\text{즉, } M = a^2 - 1, m = a - 1 \text{ 이므로}$$

$$a^2 - 1 = 5(a - 1) + 4$$

$$a^2 - 5a = 0, a(a - 5) = 0$$

$$\therefore a = 5 (\because a > 1)$$

..... i

(ii) $0 < a < 1$ 이면

$x = 1$ 에서 최댓값 $a - 1$, $x = 2$ 에서 최솟값 $a^2 - 1$ 을 갖는다.

$$\text{즉, } M = a - 1, m = a^2 - 1 \text{ 이므로}$$

$$a - 1 = 5(a^2 - 1) + 4$$

$$5a^2 - a = 0, a(5a - 1) = 0$$

$$\therefore a = \frac{1}{5} (\because 0 < a < 1)$$

..... ii

(i), (ii)에서 모든 실수 a 의 값의 합은

$$5 + \frac{1}{5} = \frac{26}{5}$$

..... iii

채점 기준

① $a > 1$ 일 때, 조건을 만족시키는 a 의 값 구하기	40%
② $0 < a < 1$ 일 때, 조건을 만족시키는 a 의 값 구하기	40%
③ 모든 실수 a 의 값의 합 구하기	20%

0305 답 4

$$f(x) = -x^2 + 2x + k \text{라 하면 } f(x) = -(x-1)^2 + k+1$$

$$0 \leq x \leq 2 \text{에서 } f(0)=k, f(1)=k+1, f(2)=k \text{이므로}$$

$$k \leq f(x) \leq k+1$$

$$\text{이때 함수 } y=2^{f(x)} \text{의 밑이 1보다 크므로 함수 } y=2^{f(x)} \text{은}$$

$$f(x)=k+1 \text{에서 최댓값 } 2^{k+1}, f(x)=k \text{에서 최솟값 } 2^k \text{을 갖는다.}$$

$$\text{즉, } 2^k=2 \text{이므로 } k=1$$

$$\text{따라서 함수 } y=2^{-x^2+2x+1} \text{의 최댓값은 } 2^2=4$$

0306 답 ②

$$f(x) = x^2 - 6x + 8 \text{이라 하면 } f(x) = (x-3)^2 - 1$$

$$2 \leq x \leq 3 \text{에서 } f(2)=0, f(3)=-1 \text{이므로 } -1 \leq f(x) \leq 0$$

$$\text{이때 함수 } y=3^{f(x)} \text{의 밑이 1보다 크므로 함수 } y=3^{f(x)} \text{은 } f(x)=0,$$

$$\text{즉 } x=2 \text{에서 최댓값 } 3^0=1 \text{을 갖는다.}$$

$$\text{따라서 } a=2, M=1 \text{이므로 } a+M=3$$

0307 답 2

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$$

$$1 \leq x \leq 4 \text{에서 } f(1)=2, f(2)=1, f(4)=5 \text{이므로}$$

$$1 \leq f(x) \leq 5$$

$$\text{함수 } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = a^{f(x)} \text{은}$$

$$(i) a > 1 \text{이면}$$

$$f(x)=5 \text{에서 최댓값 } a^5, f(x)=1 \text{에서 최솟값 } a \text{를 갖는다.}$$

$$\text{즉, } a^5=32=2^5 \text{이므로 } a=2$$

$$\text{따라서 함수 } y=2^{f(x)} \text{의 최솟값은 } m=a=2$$

$$(ii) 0 < a < 1 \text{이면}$$

$$f(x)=1 \text{에서 최댓값 } a, f(x)=5 \text{에서 최솟값 } a^5 \text{을 갖는다.}$$

$$\therefore a=32$$

$$\text{그런데 } 0 < a < 1 \text{이므로 조건을 만족시키지 않는다.}$$

$$(i), (ii) \text{에서 } m=2$$

0308 답 ④

$$y = 4^x - 2^{x+1} + 5 = (2^x)^2 - 2 \times 2^x + 5$$

$$2^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면 } -2 \leq x \leq 0 \text{에서}$$

$$2^{-2} \leq 2^x \leq 2^0 \quad \therefore \frac{1}{4} \leq t \leq 1$$

$$\text{이때 주어진 함수는 } y = t^2 - 2t + 5 = (t-1)^2 + 4$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{4} \leq t \leq 1 \text{일 때 함수 } y = (t-1)^2 + 4 \text{는}$$

$$t = \frac{1}{4}, \text{ 즉 } x = -2 \text{에서 최댓값 } \frac{73}{16},$$

$$t = 1, \text{ 즉 } x = 0 \text{에서 최솟값 } 4 \text{를 갖는다.}$$

$$\text{따라서 } a = -2, b = \frac{73}{16}, c = 0, d = 4 \text{이므로}$$

$$ac + 4bd = -2 \times 0 + 4 \times \frac{73}{16} \times 4 = 73$$

0309 답 ②

$$y = \frac{1 - 2 \times 5^x + 4 \times 25^x}{25^x} = \left\{ \left(\frac{1}{5} \right)^x \right\}^2 - 2 \times \left(\frac{1}{5} \right)^x + 4$$

$$\left(\frac{1}{5} \right)^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면 } -1 \leq x \leq 0 \text{에서}$$

$$\left(\frac{1}{5} \right)^0 \leq \left(\frac{1}{5} \right)^x \leq \left(\frac{1}{5} \right)^{-1}$$

$$\therefore 1 \leq t \leq 5$$

$$\text{이때 주어진 함수는 } y = t^2 - 2t + 4 = (t-1)^2 + 3$$

$$\text{따라서 } 1 \leq t \leq 5 \text{일 때 함수 } y = (t-1)^2 + 3 \text{은 } t=5 \text{에서 최댓값 } 19,$$

$$t=1 \text{에서 최솟값 } 3 \text{을 가지므로 구하는 합은}$$

$$19 + 3 = 22$$

0310 답 1

$$y = \left(\frac{1}{9} \right)^x - 2k \times \left(\frac{1}{3} \right)^{x-1} + 4 = \left\{ \left(\frac{1}{3} \right)^x \right\}^2 - 6k \times \left(\frac{1}{3} \right)^x + 4$$

$$\left(\frac{1}{3} \right)^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면 주어진 함수는}$$

$$y = t^2 - 6kt + 4 = (t-3k)^2 - 9k^2 + 4 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\text{따라서 함수 } y = (t-3k)^2 - 9k^2 + 4 \text{는 } t=3k \text{에서 최솟값 } -9k^2 + 4$$

$$\text{를 갖는다.}$$

$$\text{즉, } -9k^2 + 4 = -5 \text{이므로 } -9k^2 = -9, k^2 = 1$$

$$\therefore k=1 \ (\because k > 0) \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① 주어진 함수를 $\left(\frac{1}{3} \right)^x = t \ (t > 0)$ 로 놓고 t 에 대한 식으로 나타내기	50%
② k 의 값 구하기	50%

0311 답 ②

$$3^x + 3^{-x} = t \text{로 놓으면 } 3^x > 0, 3^{-x} > 0 \text{이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여}$$

$$t = 3^x + 3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \times 3^{-x}} = 2 \text{ (단, 등호는 } x=0 \text{일 때 성립)}$$

$$\text{이때 } 9^x + 9^{-x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 = t^2 - 2 \text{이므로 주어진 함수는}$$

$$y = t^2 - 2 - 8t = (t-4)^2 - 18$$

$$\text{따라서 } t \geq 2 \text{일 때 함수 } y = (t-4)^2 - 18 \text{는 } t=4 \text{에서 최솟값 } -18 \text{을}$$

$$\text{갖는다.}$$

0312 답 ⑤

$$y = \frac{3^{2x} + 3^x + 9}{3^x} = 3^x + 1 + 9 \times 3^{-x} = 3^x + 3^{-x+2} + 1$$

$$3^x > 0, 3^{-x+2} > 0 \text{이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여}$$

$$y = 3^x + 3^{-x+2} + 1$$

$$\geq 2\sqrt{3^x \times 3^{-x+2}} + 1$$

$$= 2 \times 3 + 1 = 7 \text{ (단, 등호는 } x=1 \text{일 때 성립)}$$

$$\text{따라서 주어진 함수의 최솟값은 7이다. } \xrightarrow{x=-x+2 \text{에서 } x=1}$$

0313 답 8

$$2^x > 0, 8^y = 2^{3y} > 0 \text{이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여}$$

$$2^x + 8^y \geq 2\sqrt{2^x \times 8^y} = 2\sqrt{2^x \times 2^{3y}} = 2\sqrt{2^{x+3y}}$$

$$\text{(단, 등호는 } x=3y \text{일 때 성립)}$$

$$\text{이때 } x+3y=4 \text{이므로 } 2\sqrt{2^{x+3y}} = 2\sqrt{2^4} = 2 \times 2 = 8$$

$$\text{따라서 } 2^x + 8^y \text{의 최솟값은 8이다.}$$

0314 답 2

$2 \times 3^{a+x} > 0$, $8 \times 3^{a-x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y = 2 \times 3^{a+x} + 8 \times 3^{a-x} \geq 2\sqrt{2 \times 3^{a+x} \times 8 \times 3^{a-x}} = 2\sqrt{2^4 \times 3^{2a}} = 8 \times 3^a$$

(단, 등호는 $3^x = 2$ 일 때 성립)

따라서 주어진 함수의 최솟값이 8×3^a 이므로

$$8 \times 3^a = 72, \quad 3^a = 9 = 3^2$$

$$\therefore a = 2$$

0315 답 ②

$$(\sqrt{3})^{x^2-x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1} \text{에서 } 3^{\frac{1}{2}(x^2-x)} = 3^{-x+1}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2}(x^2-x) = -x+1 \text{이므로}$$

$$x^2+x-2=0, \quad (x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 모든 근의 곱은 $-2 \times 1 = -2$

0316 답 ①

$$5^{x^2-5x+9} - 125^{x+k} = 0 \text{에서}$$

$$5^{x^2-5x+9} = 5^{3x+3k}$$

$$\text{즉, } x^2-5x+9 = 3x+3k \text{이므로}$$

$$x^2-8x+9-3k=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 주어진 방정식의 한 근이 3이므로 $x=3$ 을 ①에 대입하면

$$9-24+9-3k=0, \quad -3k=6$$

$$\therefore k = -2$$

0317 답 $\frac{13}{9}$

$$\frac{8^{x^2+1}}{2^{x+3}} = 4 \text{에서 } \frac{2^{3(x^2+1)}}{2^{x+3}} = 2^2 \text{이므로}$$

$$2^{3x^2+3-(x+3)} = 2^2, \quad 2^{3x^2-x} = 2^2 \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

$$\text{즉, } 3x^2-x=2 \text{이므로}$$

$$3x^2-x-2=0$$

$$(3x+2)(x-1)=0$$

$$\therefore x = -\frac{2}{3} \text{ 또는 } x = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$$

따라서 주어진 방정식의 두 근은 $-\frac{2}{3}, 1$ 이므로

$$a^2 + \beta^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2 = \frac{13}{9} \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 주어진 방정식을 간단히 하기	50 %
② 방정식 풀기	30 %
③ $a^2 + \beta^2$ 의 값 구하기	20 %

0318 답 12

점 A의 좌표는 (0, 1)이므로 점 B의 y좌표는 1이다.

$$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3} \text{에 } y=1 \text{을 대입하면}$$

$$1 = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$$

$$\text{즉, } x-3=0 \text{이므로 } x=3$$

$$\therefore B(3, 1)$$

또 점 C는 두 함수 $y=9^x, y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}$ 의 그래프의 교점이므로

$$9^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-3}, \quad 3^{2x} = 3^{-x+3}$$

$$\text{즉, } 2x = -x+3 \text{이므로 } 3x=3 \quad \therefore x=1$$

$$\therefore C(1, 9)$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 3 \times (9-1) = 12$$

0319 답 -3

$$2^x + 8 \times 2^{-x} - 9 = 0 \text{의 양변에 } 2^x \text{을 곱하면}$$

$$(2^x)^2 - 9 \times 2^x + 8 = 0$$

$$2^x = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 9t + 8 = 0, \quad (t-1)(t-8) = 0$$

$$\therefore t=1 \text{ 또는 } t=8$$

$$\text{즉, } 2^x=1 \text{ 또는 } 2^x=8 \text{이므로 } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

따라서 $a=0, \beta=3$ 이므로 $a-\beta=-3$

0320 답 ②

$$a^{2x} + a^x = 12 \text{에서 } (a^x)^2 + a^x - 12 = 0$$

$$a^x = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 + t - 12 = 0, \quad (t+4)(t-3) = 0$$

$$\therefore t=3 (\because t > 0)$$

$$\text{즉, } a^x=3 \text{에서 방정식의 해가 } x=\frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$a^{\frac{1}{3}}=3 \quad \therefore a=3^3=27$$

0321 답 4

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 17 \\ 2^{2x-y} = \frac{1}{16} \end{cases} \text{에서 } \begin{cases} 2^x + 2^y = 17 \\ (2^x)^2 \div 2^y = \frac{1}{16} \end{cases}$$

$$2^x = X, \quad 2^y = Y (X > 0, Y > 0) \text{로 놓으면}$$

$$\begin{cases} X+Y=17 \\ X^2 \div Y = \frac{1}{16} \end{cases}, \quad \text{즉 } \begin{cases} X+Y=17 \\ Y=16X^2 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $X=1, Y=16 (\because X > 0, Y > 0)$

$$\text{즉, } 2^x=1, \quad 2^y=16 \text{이므로 } x=0, y=4$$

따라서 $a=0, \beta=4$ 이므로 $a+\beta=4$

0322 답 ②

$$3^x + 3^{-x} = X (X \geq 2) \text{로 놓으면}$$

$$9^x + 9^{-x} = (3^x + 3^{-x})^2 - 2 = X^2 - 2 \text{이므로}$$

주어진 방정식은

$$3(X^2 - 2) - 7X - 4 = 0, \quad 3X^2 - 7X - 10 = 0$$

$$(X+1)(3X-10) = 0 \quad \therefore X = \frac{10}{3} (\because X \geq 2)$$

$$3^x + 3^{-x} = \frac{10}{3} \text{의 양변에 } 3 \times 3^x \text{을 곱하면}$$

$$3 \times (3^x)^2 + 3 = 10 \times 3^x \quad \therefore 3 \times (3^x)^2 - 10 \times 3^x + 3 = 0$$

$$3^x = t (t > 0) \text{로 놓으면 } 3t^2 - 10t + 3 = 0$$

$$(3t-1)(t-3) = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{3} \text{ 또는 } t = 3$$

$$\text{즉, } 3^x = \frac{1}{3} \text{ 또는 } 3^x = 3 \text{이므로 } x = -1 \text{ 또는 } x = 1$$

따라서 $a=-1, \beta=1$ 이므로 $\beta-a=2$

0323 답 ②

점 B와 점 C의 x 좌표는 k 이고

점 B는 곡선 $y=2^x$ 위의 점이므로 $B(k, 2^k)$

또 점 C는 곡선 $y=4^x$ 위의 점이므로 $C(k, 4^k)$

점 C와 점 D의 y 좌표가 같으므로 점 D의 x 좌표는

$$4^k = 2^x \text{에서}$$

$$2^{2k} = 2^x \quad \therefore x = 2k$$

$$\therefore D(2k, 4^k)$$

이때 삼각형 BDC의 넓이가 삼각형 OAB의 넓이의 3배이므로

$$\frac{1}{2} \times (2k - k) \times (4^k - 2^k) = 3 \times \left(\frac{1}{2} \times k \times 2^k \right)$$

$$4^k - 2^k = 3 \times 2^k$$

$$(2^k)^2 - 4 \times 2^k = 0$$

$$2^k = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 4t = 0, t(t - 4) = 0$$

$$\therefore t = 4 (\because t > 0)$$

$$\text{즉, } 2^k = 4 \text{이므로 } k = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle BDC &= \frac{1}{2} \times k \times (4^k - 2^k) = \frac{1}{2} \times 2 \times (4^2 - 2^2) \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \times 12 = 12 \end{aligned}$$

0324 답 ③

(i) 밑이 같으면 $x^2 + 4x + 5 = x + 9$

$$x^2 + 3x - 4 = 0, (x + 4)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -4 \text{ 또는 } x = 1$$

(ii) 지수가 0이면 $x - 6 = 0$

$$\therefore x = 6$$

(i), (ii)에서 모든 근의 곱은

$$-4 \times 1 \times 6 = -24$$

0325 답 $x = \frac{1}{5}$ 또는 $x = 3$

$$x^{10x-2} = (2x+3)^{5x-1} \text{에서 } (x^2)^{5x-1} = (2x+3)^{5x-1}$$

(i) 밑이 같으면 $x^2 = 2x + 3$

$$x^2 - 2x - 3 = 0, (x + 1)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 3 (\because x > 0)$$

(ii) 지수가 0이면 $5x - 1 = 0$

$$\therefore x = \frac{1}{5}$$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는 $x = \frac{1}{5}$ 또는 $x = 3$

0326 답 ①

$$(x^2 - x + 1)^{x+2} = 1 \text{에서 } (x^2 - x + 1)^{x+2} = (x^2 - x + 1)^0$$

(i) 지수가 같으면 $x + 2 = 0$

$$\therefore x = -2$$

(ii) 밑이 1이면 $x^2 - x + 1 = 1$

$$x^2 - x = 0, x(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 1$$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은

$$-2 + 0 + 1 = -1$$

0327 답 84

$$9^x - 4 \times 3^{x+1} + 30 = 0 \text{에서}$$

$$(3^x)^2 - 12 \times 3^x + 30 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$3^x = t (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 - 12t + 30 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

방정식 ⑦의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식 ⑧의 두 근은 $3^\alpha, 3^\beta$

따라서 ⑧에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$3^\alpha + 3^\beta = 12, 3^\alpha \times 3^\beta = 30$$

$$\begin{aligned} \therefore 3^{2\alpha} + 3^{2\beta} &= (3^\alpha + 3^\beta)^2 - 2 \times 3^\alpha \times 3^\beta \\ &= 12^2 - 2 \times 30 = 84 \end{aligned}$$

0328 답 ①

$2^x + 2^{-x} - 3 = 0$ 의 양변에 2^x 을 곱하면

$$2^{2x} - 3 \times 2^x + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$2^x = t (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 - 3t + 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

방정식 ⑦의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식 ⑧의 두 근은 $2^\alpha, 2^\beta$

따라서 ⑧에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2^\alpha \times 2^\beta = 1, 2^{\alpha+\beta} = 2^0$$

$$\therefore \alpha + \beta = 0$$

0329 답 ③

$$a^{2x} - 6a^x + 3 = 0 \text{에서 } (a^x)^2 - 6a^x + 3 = 0$$

$$a^x = t (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 - 6t + 3 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식 ⑦의 두 근은 a^α, a^β

a^β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a^\alpha \times a^\beta = 3, a^{\alpha+\beta} = 3$$

이때 $\alpha + \beta = 4$ 이므로

$$a^4 = 3 \quad \therefore a = \sqrt[4]{3} (\because a > 0)$$

0330 답 3

$$49^x - 2(a+1)7^x + a + 7 = 0 \text{에서}$$

$$(7^x)^2 - 2(a+1)7^x + a + 7 = 0$$

$$7^x = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2(a+1)t + a + 7 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식이 서로 다른 두 실근을 가지려면 이차방정식 ⑦은 서로 다른 두 양의 실근을 가져야 한다.

(i) 이차방정식 ⑦의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a-1)^2 - (a+7) > 0$$

$$a^2 + a - 6 > 0, (a+3)(a-2) > 0$$

$$\therefore a < -3 \text{ 또는 } a > 2$$

(ii) 이차방정식 ⑦의 (두 근의 합) > 0 이어야 하므로

$$2(a+1) > 0 \quad \therefore a > -1$$

(iii) 이차방정식 ⑦의 (두 근의 곱) > 0 이어야 하므로

$$a + 7 > 0 \quad \therefore a > -7$$

(i)~(iii)에서 $a > 2 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$

따라서 정수 a 의 최솟값은 3이다. $\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① $7^x = t (t > 0)$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 세우기	30 %
② 조건을 만족시키는 a 의 값의 범위 구하기	60 %
③ 정수 a 의 최솟값 구하기	10 %

이차방정식의 실근의 부호

계수가 실수인 이차방정식의 판별식을 D , 두 실근을 α, β 라 하면

- (1) 두 근이 모두 양수 $\Rightarrow D \geq 0, \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$
 (2) 두 근이 모두 음수 $\Rightarrow D \geq 0, \alpha + \beta < 0, \alpha\beta > 0$
 (3) 두 근이 서로 다른 부호 $\Rightarrow \alpha\beta < 0$

0331 답 ③

$16 \times 3^{-x} + 3^{x+2} = 2a$ 의 양변에 3^x 를 곱하면

$$16 + 9 \times 3^{2x} = 2a \times 3^x$$

$3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$9t^2 - 2at + 16 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

주어진 방정식이 단 하나의 해를 가지면 이차방정식 ㉠은 양수인 중근을 갖는다.

(i) 이차방정식 ㉠의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-a)^2 - 9 \times 16 = 0$$

$$a^2 - 144 = 0$$

$$a^2 = 144$$

$$\therefore a = -12 \text{ 또는 } a = 12$$

(ii) 이차방정식 ㉠의 (두 근의 합) > 0 이므로

$$\frac{2a}{9} > 0 \quad \therefore a > 0$$

(i), (ii)에서 $a = 12$

0332 답 ③

$9^x + 2k \times 3^x + 15 - 2k = 0$ 에서

$$(3^x)^2 + 2k \times 3^x + 15 - 2k = 0$$

$3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$t^2 + 2kt + 15 - 2k = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

주어진 방정식의 두 실근을 $\alpha, 2\alpha (\alpha \neq 0)$ 라 하면 이차방정식 ㉠의 두 근은 $3^\alpha, 3^{2\alpha}$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$3^\alpha + 3^{2\alpha} = -2k, \quad 3^\alpha \times 3^{2\alpha} = 15 - 2k$$

$3^\alpha = m (m > 0)$ 으로 놓으면

$$m + m^2 = -2k, \quad m^3 = 15 - 2k$$

위의 두 식을 연립하면

$$m^3 = 15 + (m + m^2)$$

$$m^3 - m^2 - m - 15 = 0$$

$$(m-3)(m^2+2m+5)=0$$

$$\therefore m=3 \quad (\because m^2+2m+5>0)$$

따라서 $m + m^2 = -2k$ 에서

$$-2k = 3 + 9 = 12 \quad \therefore k = -6$$

0333 답 ③

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x \leq \left(\frac{1}{9}\right)^{x-3} \text{에서} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}x} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-6}$$

밑이 1보다 작으므로

$$\frac{1}{2}x \geq 2x - 6, \quad -\frac{3}{2}x \geq -6$$

$$\therefore x \leq 4$$

0334 답 $a < x < d$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{f(x)} > \left(\frac{1}{5}\right)^{g(x)} \text{에서 밑이 1보다 작으므로 } f(x) < g(x)$$

따라서 주어진 부등식의 해는 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 직선 $y=g(x)$ 보다 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위이므로 $a < x < d$

0335 답 ②

$$2^{3x-1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+1} < 4^{x+1} \text{에서 } 2^{3x-1} < 2^{-x^2-1} < 2^{2x+2}$$

밑이 1보다 크므로

$$3x-1 < -x^2-1 < 2x+2$$

$$(i) \quad 3x-1 < -x^2-1 \text{에서 } x^2+3x < 0$$

$$x(x+3) < 0 \quad \therefore -3 < x < 0$$

$$(ii) \quad -x^2-1 < 2x+2 \text{에서 } x^2+2x+3 > 0$$

이때 $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2$ 이므로 이 부등식은 항상 성립한다.

$$(i), (ii) \text{에서 주어진 부등식의 해는 } -3 < x < 0$$

따라서 정수 x 의 값은 $-2, -1$ 이므로 구하는 합은

$$-2 + (-1) = -3$$

0336 답 ①

$$(i) \quad 2^x - 8 \geq 0, \quad \frac{1}{3^x} - 9 \geq 0 \text{일 때,}$$

$$2^x - 8 \geq 0 \text{에서 } 2^x \geq 2^3$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x \geq 3 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\frac{1}{3^x} - 9 \geq 0 \text{에서 } \left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } x \leq -2 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡의 공통부분은 없다.

$$(ii) \quad 2^x - 8 \leq 0, \quad \frac{1}{3^x} - 9 \leq 0 \text{일 때,}$$

$$2^x - 8 \leq 0 \text{에서 } 2^x \leq 2^3$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x \leq 3 \quad \dots\dots ㉢$$

$$\frac{1}{3^x} - 9 \leq 0 \text{에서 } \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } x \geq -2 \quad \dots\dots ㉣$$

㉢, ㉣의 공통부분은

$$-2 \leq x \leq 3$$

$$(i), (ii) \text{에서 주어진 부등식의 해는 } -2 \leq x \leq 3$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1, 2, 3$ 의 6개이다.

0337 답 $6 < a \leq 8$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{ax} \text{에서 } \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{ax}$$

밑이 1보다 작으므로

$$2x^2 < ax$$

$$2x^2 - ax < 0, \quad x(2x-a) < 0$$

$$\therefore 0 < x < \frac{a}{2} \quad (\because a > 0)$$

이때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 가 3개이므로

$$3 < \frac{a}{2} \leq 4$$

$$\therefore 6 < a \leq 8$$

0338 답 3

$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+6} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2}$ 에서 밑이 1보다 작으므로 $x+6 > x^2$

$$x^2 - x - 6 < 0, (x+2)(x-3) < 0 \quad \therefore -2 < x < 3$$

$$\therefore A = \{x \mid -2 < x < 3\} \quad \dots \textcircled{i}$$

$2^{|x-1|} \leq 2^a$ 에서 밑이 1보다 크므로 $|x-1| \leq a$

$$-a \leq x-1 \leq a \quad \therefore -a+1 \leq x \leq a+1$$

$$\therefore B = \{x \mid -a+1 \leq x \leq a+1\} \quad \dots \textcircled{ii}$$

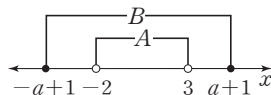
이때 $A \cap B = A$, 즉 $A \subset B$ 가 성립하려면

오른쪽 그림에서

$$-a+1 \leq -2, a+1 \geq 3$$

$$\therefore a \geq 3$$

따라서 양수 a 의 최솟값은 3이다. $\dots \textcircled{iii}$



채점 기준

① 집합 A 구하기	30%
② 집합 B 구하기	30%
③ 양수 a의 최솟값 구하기	40%

0339 답 4

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x - 28 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} + 3 \leq 0$$

$$\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^x\right\}^2 - \frac{28}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^x + 3 \leq 0$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = t (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 - \frac{28}{3}t + 3 \leq 0$$

$$3t^2 - 28t + 9 \leq 0, (3t-1)(t-9) \leq 0 \quad \therefore \frac{1}{3} \leq t \leq 9$$

$$\text{즉, } \frac{1}{3} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \text{ 이고 밑이 1보다 작으므로 } -2 \leq x \leq 1$$

따라서 정수 x 는 $-2, -1, 0, 1$ 의 4개이다.

0340 답 ④

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-6} \leq 2^x \text{에서 } 2^{-x^2+6} \leq 2^x$$

밑이 1보다 크므로 $-x^2+6 \leq x$

$$x^2 + x - 6 \geq 0, (x+3)(x-2) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 2$$

$$\therefore A = \{x \mid x \leq -3 \text{ 또는 } x \geq 2\}$$

$$4^x - 3 \times 2^x - 4 > 0 \text{에서 } (2^x)^2 - 3 \times 2^x - 4 > 0$$

$$2^x = t (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 - 3t - 4 > 0$$

$$(t+1)(t-4) > 0 \quad \therefore t > 4 (\because t > 0)$$

즉, $2^x > 2^4$ 이고 밑이 1보다 크므로 $x > 2$

$$\therefore B = \{x \mid x > 2\}$$

$$\therefore A \cap B = \{x \mid x > 2\}$$

따라서 $A \cap B$ 에 속하는 정수 x 의 최솟값은 3이다.

0341 답 ①

$$4^{x+1} + a \times 2^x + b < 0 \text{에서}$$

$$4 \times (2^x)^2 + a \times 2^x + b < 0$$

$$2^x = t (t > 0) \text{로 놓으면 } 4t^2 + at + b < 0 \quad \dots \textcircled{7}$$

주어진 부등식의 해가 $-2 < x < 1$ 이므로

$$2^{-2} < 2^x < 2^1 \text{에서 } \frac{1}{4} < t < 2$$

따라서 t^2 의 계수가 4이고 해가 $\frac{1}{4} < t < 2$ 인 이차부등식은

$$4\left(t - \frac{1}{4}\right)(t-2) < 0$$

$$\therefore 4t^2 - 9t + 2 < 0$$

이 부등식이 ⑦과 일치하므로

$$a = -9, b = 2$$

$$\therefore b - a = 11$$

공통수학1 다시보기

(1) 해가 $\alpha < x < \beta$ 이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식

$$\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta) < 0$$

(2) 해가 $x < \alpha$ 또는 $x > \beta$ ($\alpha < \beta$)이고 x^2 의 계수가 1인 이차부등식

$$\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta) > 0$$

0342 답 8

(i) $0 < x < 1$ 일 때,

$$2x+3 < 3x-4 \text{에서 } x > 7$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 존재하지 않는다.

(ii) $x=1$ 일 때, $1 > 1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 일 때,

$$2x+3 > 3x-4 \text{에서 } x < 7$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x < 7$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는

$$1 < x < 7$$

따라서 $\alpha=1, \beta=7$ 이므로

$$\alpha + \beta = 8$$

0343 답 ⑤

(i) $0 < x < 1$ 일 때,

$$x^2 \leq 4x+5 \text{에서 } x^2-4x-5 \leq 0$$

$$(x+1)(x-5) \leq 0 \quad \therefore -1 \leq x \leq 5$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 $0 < x < 1$

(ii) $x=1$ 일 때, $1 \geq 1$ 이므로 부등식이 성립한다.

(iii) $x > 1$ 일 때,

$$x^2 \geq 4x+5 \text{에서 } x^2-4x-5 \geq 0$$

$$(x+1)(x-5) \geq 0 \quad \therefore x \leq -1 \text{ 또는 } x \geq 5$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $x \geq 5$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $0 < x \leq 1$ 또는 $x \geq 5$

따라서 $S = \{x \mid 0 < x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq 5\}$ 이므로 집합 S의 원소인 것은

⑤이다.

0344 답 -4

$$16^x - 4^{x+1} - k \geq 0 \text{에서}$$

$$(4^x)^2 - 4 \times 4^x - k \geq 0$$

$$4^x = t (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 - 4t - k \geq 0$$

$$\therefore (t-2)^2 - k - 4 \geq 0$$

이 부등식이 $t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면

$$-k-4 \geq 0 \quad \therefore k \leq -4$$

따라서 실수 k 의 최댓값은 -4 이다.

0345 [답] ④

$$25^x - 2k \times 5^x + 4 > 0 \text{에서 } (5^x)^2 - 2k \times 5^x + 4 > 0$$

$$5^x = t (t > 0) \text{로 놓으면 } t^2 - 2kt + 4 > 0$$

$$\therefore (t-k)^2 - k^2 + 4 > 0 \quad \dots\dots ㉠$$

부등식 ㉠이 $t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면

(i) $k > 0$ 일 때,

$$-k^2 + 4 > 0 \text{에서 } k^2 - 4 < 0$$

$$(k+2)(k-2) < 0 \quad \therefore -2 < k < 2$$

$$\text{그런데 } k > 0 \text{이므로 } 0 < k < 2$$

(ii) $k \leq 0$ 일 때,

$$t=0 \text{이면 } ㉠ \text{에서 } 4 > 0 \text{이므로 } t > 0 \text{인 모든 실수 } t \text{에 대하여 부등}$$

$$\text{식 } ㉠ \text{이 성립한다.}$$

(i), (ii)에서 $k < 2$

0346 [답] 3시간

미생물 A는 매시간 8배씩 증가하므로 n 시간 후의 수는

$$16 \times 8^n$$

미생물 B는 매시간 2배씩 증가하므로 n 시간 후의 수는

$$1024 \times 2^n$$

n 시간 후에 미생물 A, B의 수가 같아진다고 하면

$$16 \times 8^n = 1024 \times 2^n$$

$$2^4 \times 2^{3n} = 2^{10} \times 2^n$$

$$2^{3n+4} = 2^{n+10}$$

$$\text{즉, } 3n+4 = n+10 \text{이므로}$$

$$2n = 6 \quad \therefore n = 3$$

따라서 미생물 A, B의 수가 같아지는 것은 3시간 후이다.

0347 [답] ④

$$C_g = 2, C_d = \frac{1}{4}, x = a, n = \frac{1}{200} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{200} = \frac{1}{4} \times 2 \times 10^{\frac{4}{5}(a-9)}$$

$$10^{\frac{4}{5}(a-9)} = \frac{1}{100}, 10^{\frac{4}{5}(a-9)} = 10^{-2}$$

$$\text{즉, } \frac{4}{5}(a-9) = -2 \text{이므로 } a-9 = -\frac{5}{2}$$

$$\therefore a = \frac{13}{2}$$

0348 [답] ②

처음 박테리아의 수는 $t=0$ 일 때이므로 $15 \times 10^0 = 15$

관찰하기 시작한 지 x 시간 후에 박테리아의 수가 처음의 10000배가 된다고 하면

$$15 \times 10^{\frac{x}{3}} = 10000 \times 15, 10^{\frac{x}{3}} = 10^4$$

$$\text{즉, } \frac{x}{3} = 4 \text{이므로 } x = 12$$

따라서 박테리아의 수가 처음의 10000배가 되는 것은 관찰하기 시작한 지 12시간 후이다.

0349 [답] 4번

처음 불순물의 양을 a 라 하면 정수 필터를 x 번 통과한 후 불순물의 양은

$$a \left(1 - \frac{40}{100} \right)^x = a \left(\frac{60}{100} \right)^x$$

정수 필터를 x 번 통과한 후 불순물의 양이 처음 양의 $\frac{81}{625}$ 이하가 된다고 하면

$$a \left(\frac{60}{100} \right)^x \leq \frac{81}{625} a$$

$$a > 0 \text{이므로 } \left(\frac{3}{5} \right)^x \leq \left(\frac{3}{5} \right)^4$$

$$\therefore x \geq 4$$

따라서 정수 필터를 최소한 4번 통과해야 한다.

0350 [답] 6

음원 A의 다운로드 수는 1시간마다 2배가 되므로 n 시간 후의 다운로드 수는 100×2^n

음원 B의 다운로드 수는 1시간마다 $\frac{1}{2}$ 배가 되므로 n 시간 후의 다운로드 수는 $320000 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n$

$$n \text{시간 후에 음원 A의 다운로드 수가 음원 B의 다운로드 수보다}$$

1400 이상 더 많아진다고 하면

$$100 \times 2^n \geq 320000 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n + 1400$$

$$100 \times 2^n - 320000 \times \left(\frac{1}{2} \right)^n - 1400 \geq 0$$

$$2^n - \frac{3200}{2^n} - 14 \geq 0$$

$$2^n = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t - \frac{3200}{t} - 14 \geq 0$$

$$t^2 - 14t - 3200 \geq 0$$

$$(t+50)(t-64) \geq 0 \quad \therefore t \geq 64 (\because t > 0)$$

$$\text{즉, } 2^n \geq 64 \text{이므로 } 2^n \geq 2^6 \quad \therefore n \geq 6$$

따라서 음원 A의 다운로드 수가 음원 B의 다운로드 수보다 1400 이상 더 많아질 것으로 예측되는 것은 현재로부터 최소 6시간 후이다.

$$\therefore m = 6$$

AB 유형 점검

56~58쪽

0351 [답] ⑤

ㄱ. $(a, b) \in A$ 이면 $b = 2^a$ 에서

$$\frac{b}{2} = \frac{1}{2} \times 2^a = 2^{a-1}$$

$$\therefore \left(a-1, \frac{b}{2} \right) \in A$$

ㄴ. $(a, b) \in A$ 이면 $b = 2^a$ 에서

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2^a} = 2^{-a}$$

$$\therefore \left(-a, \frac{1}{b} \right) \in A$$

ㄷ. $(a_1, b_1) \in A, (a_2, b_2) \in A$ 이면 $b_1 = 2^{a_1}, b_2 = 2^{a_2}$ 에서

$$b_1 b_2 = 2^{a_1} \times 2^{a_2} = 2^{a_1+a_2}$$

$$\therefore (a_1+a_2, b_1 b_2) \in A$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

0352 답 ㄱ, ㄴ

$$f(4) = \frac{1}{81} \text{이므로 } a^4 = \frac{1}{81} \quad \therefore a = \frac{1}{3} (\because a > 0)$$

$$\therefore f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$\text{ㄱ. } f(x+y) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+y} = \left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^y = f(x)f(y)$$

$$\text{ㄴ. } f(-2) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9, f(1) = \frac{1}{3} \text{이므로 } f(1) < f(-2)$$

ㄷ. 그래프의 점근선의 방정식은 $y=0$ 이다.

$$\text{ㄹ. } f(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3 \text{이므로 그래프는 점 } (-1, 3) \text{을 지난다.}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0353 답 $\frac{7}{2}$

함수 $y = a^{1-x} + b$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=b$ 이므로 $b = -3$

함수 $y = a^{1-x} - 3$ 의 그래프가 점 $(3, 1)$ 을 지나므로

$$1 = a^{-2} - 3, a^{-2} = 4, a^2 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} (\because a > 0)$$

$$\therefore a - b = \frac{1}{2} - (-3) = \frac{7}{2}$$

0354 답 ⑤

$A\left(a, \frac{1}{3}\right)$ 이라 하면 점 A가 함수 $y=3^x$ 의 그래프 위에 있으므로

$$3^a = \frac{1}{3}, 3^a = 3^{-1} \quad \therefore a = -1$$

점 B가 함수 $y=3^x$ 의 그래프 위에 있으므로 $B(b, 3^b)$ 이라 하면 선분 AB를 1:2로 내분하는 점 C의 x좌표는

$$\frac{1 \times b + 2 \times (-1)}{1+2} = \frac{b-2}{3}$$

점 C가 y축 위에 있으므로

$$\frac{b-2}{3} = 0 \quad \therefore b = 2$$

따라서 점 B의 y좌표는 $3^2 = 9$

다른 풀이

$A\left(a, \frac{1}{3}\right)$ 이라 하면 점 A가 함수 $y=3^x$ 의 그래프 위에 있으므로

$$3^a = \frac{1}{3}, 3^a = 3^{-1}$$

$$\therefore a = -1$$

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 A'이라 하면

$$A'(-1, 0)$$

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 B'이라

하면 점 C가 선분 AB를 1:2로 내분하므로

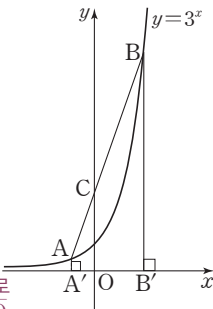
$$\overline{AC} : \overline{BC} = 1 : 2$$

$$\therefore \overline{A'O} : \overline{B'O} = 1 : 2 \rightarrow \frac{\overline{AA'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CO}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{B'O}} \text{이므로}$$

$$\text{이때 } \overline{A'O} = 1 \text{이므로 } \overline{B'O} = 2$$

따라서 점 B의 x좌표는 2이므로 점 B의 y좌표는

$$3^2 = 9$$



공통수학2 다시보기

좌표평면 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 에 대하여 선분 AB를 $m:n (m>0, n>0)$ 으로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right)$$

0355 답 $\frac{3}{2}$

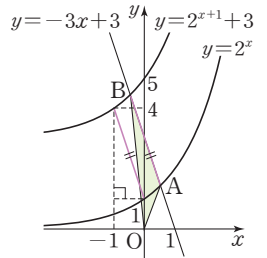
함수 $y=2^{x+1}+3$ 의 그래프는 함수 $y=2^x$ 의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이고, 직선 $y=-3x+3$ 의 기울기는 -3이므로 점 B는 점 A를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

$$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

직선 $3x+y-3=0$ 과 원점 사이의 거리는

$$\frac{|-3|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{2}$$



0356 답 ①

세 수 $A = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x}$, $B = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2}$, $C = 5^x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x}$ 에서

$0 < x < 1$ 이므로 $2x > 0$, $x^2 > 0$, $-x < 0$

또 $2x - x^2 = x(2-x) > 0$ 이므로 $2x > x^2$

$$\therefore -x < x^2 < 2x$$

이때 밑이 1보다 작으므로

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2} < \left(\frac{1}{5}\right)^{-x} \quad \therefore A < B < C$$

0357 답 $\frac{1}{32}$

$f(x) = -x^2 + 4x - 5$ 라 하면 $f(x) = -(x-2)^2 - 1$

$0 \leq x \leq 3$ 에서 $f(0) = -5$, $f(2) = -1$, $f(3) = -2$ 이므로

$$-5 \leq f(x) \leq -1$$

이때 함수 $y = a^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 크므로 함수 $y = a^{f(x)}$ 은

$f(x) = -1$ 에서 최댓값 a^{-1} , $f(x) = -5$ 에서 최솟값 a^{-5} 을 갖는다.

$$\text{즉, } a^{-1} = \frac{1}{2} \text{이므로 } a = 2$$

$$\text{따라서 함수 } y = a^{-x^2+4x-5} \text{의 최솟값은 } 2^{-5} = \frac{1}{32}$$

0358 답 11

$$y = 2 \times 3^{x+1} - 3^{2x} + a = -(3^x)^2 + 6 \times 3^x + a$$

$3^x = t (t > 0)$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 2$ 에서

$$3 \leq 3^x \leq 3^2 \quad \therefore 3 \leq t \leq 9$$

이때 주어진 함수는 $y = -t^2 + 6t + a = -(t-3)^2 + 9 + a$

따라서 $3 \leq t \leq 9$ 일 때 함수 $y = -(t-3)^2 + 9 + a$ 는 $t=3$ 에서 최댓값 $9+a$, $t=9$ 에서 최솟값 $-27+a$ 를 갖는다.

$$\text{즉, } -27+a = -25 \text{이므로 } a = 2$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $9+2=11$

0359 [답] 9

$4^x > 0, 4^{-x+2} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$y = 4^x + 4^{-x+2} \geq 2\sqrt{4^x \times 4^{-x+2}} = 2 \times 4 = 8$$

이때 등호는 $4^x = 4^{-x+2}$ 일 때 성립하므로

$$x = -x + 2 \quad \therefore x = 1$$

따라서 $a = 1, m = 8$ 이므로 $a + m = 9$

0360 [답] 2

함수 $y = 2^{a-x} + 1 = 2^a \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ 의 밑이 1보다 작으므로

$-1 \leq x \leq 1$ 일 때 함수 $y = 2^{a-x} + 1$ 은 $x = -1$ 에서 최댓값 $2^{a+1} + 1$, $x = 1$ 에서 최솟값 $2^{a-1} + 1$ 을 갖는다.

이때 최댓값과 최솟값의 차가 6이므로

$$2^{a+1} + 1 - (2^{a-1} + 1) = 6$$

$$2^{a+1} - 2^{a-1} = 6, 2 \times 2^a - \frac{1}{2} \times 2^a = 6$$

$$\frac{3}{2} \times 2^a = 6, 2^a = 4 \quad \therefore a = 2$$

0361 [답] ①

$2^x - 2^{1-x} = 2$ 의 양변에 2^x 을 곱하면

$$(2^x)^2 - 2 = 2 \times 2^x$$

$$\therefore (2^x)^2 - 2 \times 2^x - 2 = 0$$

$2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면

$$t^2 - 2t - 2 = 0 \quad \therefore t = 1 + \sqrt{3} (\because t > 0)$$

즉, $2^a = 1 + \sqrt{3}$ 이므로

$$4^a = (2^a)^2 = (1 + \sqrt{3})^2 = 4 + 2\sqrt{3}$$

따라서 $a = 4, b = 2$ 이므로 $a + b = 6$

0362 [답] ⑤

$(x+1)^{x^2+1} = (x+1)^{2x+1}$ 에서

(i) 지수가 같으면 $x^2 + 1 = 2x + 1$

$$x^2 - 2x = 0, x(x-2) = 0 \quad \therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

(ii) 밑이 1이면 $x + 1 = 1 \quad \therefore x = 0$

(i), (ii)에서 $a = 0 + 2 = 2$

$(x+2)^{x-5} = 4^{x-5}$ 에서

(iii) 밑이 같으면 $x + 2 = 4 \quad \therefore x = 2$

(iv) 지수가 0이면 $x - 5 = 0 \quad \therefore x = 5$

(iii), (iv)에서 $b = 2 + 5 = 7$

$$\therefore b - a = 7 - 2 = 5$$

0363 [답] ③

함수 $y = \frac{1}{16} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{x-m} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-m+4}$

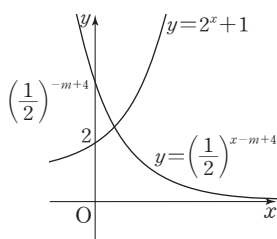
의 그래프가 곡선 $y = 2^x + 1$ 과 제1사분면에서 만나려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-m+4} > 2, 2^{m-4} > 2$$

밑이 1보다 크므로

$$m - 4 > 1 \quad \therefore m > 5$$

따라서 자연수 m 의 최솟값은 6이다.



0364 [답] -2

$$\left(\frac{1}{16}\right)^x - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4x-2} - 8 > 0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^x\right\}^2 - 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^x - 8 > 0$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2t - 8 > 0, (t+2)(t-4) > 0$$

$$\therefore t > 4 (\because t > 0)$$

$$\text{즉, } \left(\frac{1}{4}\right)^x > \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \text{이고 밑이 1보다 작으므로}$$

$$x < -1$$

따라서 정수 x 의 최댓값은 -2이다.

0365 [답] $1 < x < 5$

(i) $0 < x < 1$ 일 때,

$$x^2 - 5 > 4x \text{에서 } x^2 - 4x - 5 > 0$$

$$(x+1)(x-5) > 0$$

$$\therefore x < -1 \text{ 또는 } x > 5$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 존재하지 않는다.

(ii) $x = 1$ 일 때,

$1 < 1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 일 때,

$$x^2 - 5 < 4x \text{에서 } x^2 - 4x - 5 < 0$$

$$(x+1)(x-5) < 0$$

$$\therefore -1 < x < 5$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x < 5$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $1 < x < 5$

0366 [답] ③

$$2^{x+1} - 2^{\frac{x+4}{2}} + a > 0 \text{에서}$$

$$2 \times 2^x - 2^2 \times 2^{\frac{x}{2}} + a > 0$$

$$2^{\frac{x}{2}} = t (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$2t^2 - 4t + a > 0$$

$$\therefore 2(t-1)^2 + a - 2 > 0$$

이 부등식이 $t > 0$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면

$$a - 2 > 0$$

$$\therefore a > 2$$

따라서 정수 a 의 최솟값은 3이다.

0367 [답] 4회

약품 A를 1회 투입할 때 세균의 수가 70% 감소하므로 남은 세균의 수는 30%이다.

처음 세균의 수를 a 라 하면 약품 A를 n 회 투입한 후 세균의 수는

$$0.3^n \times a \text{이므로}$$

$$0.3^n \times a = 0.0081a$$

$$0.3^n = 0.3^4$$

$$\therefore n = 4$$

따라서 세균의 수가 처음 수의 0.81%가 되도록 하려면 약품 A를 4회 투입해야 한다.

0368 답 -6

함수 $y=2^{2x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=2^{2(x-m)}+n \quad \dots \textcircled{i}$$

이 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면

$$y=-2^{2(x-m)}-n=-2^{-2m} \times 4^x-n \quad \dots \textcircled{ii}$$

이 식이 $y=-64 \times 4^x+3=-2^6 \times 4^x+3$ 과 일치하므로
 $-2m=6, -n=3$

따라서 $m=-3, n=-3$ 이므로

$$m+n=-6 \quad \dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 평행이동한 그래프의 식 구하기	30 %
② 대칭이동한 그래프의 식 구하기	30 %
③ $m+n$ 의 값 구하기	40 %

0369 답 $-3 < k < -2$

$$3^{2x+1}+3k \times 3^x+k^2-k-6=0 \text{에서}$$

$$3 \times (3^x)^2+3k \times 3^x+k^2-k-6=0$$

$$3^x=t (t>0) \text{로 놓으면}$$

$$3t^2+3kt+k^2-k-6=0 \quad \dots \textcircled{i} \quad \dots \textcircled{ii}$$

주어진 방정식의 두 근을 $\alpha, \beta (\alpha < 0 < \beta)$ 라 하면 이차방정식 ①의 두 근은 $3^\alpha, 3^\beta$ 이므로

$$0 < 3^\alpha < 1, 3^\beta > 1$$

즉, 이차방정식 ①은 0과 1 사이의 한 개의 근을 갖고, 1보다 큰 한 개의 근을 갖는다. $\dots \textcircled{ii}$

$f(t)=3t^2+3kt+k^2-k-6$ 이라 하면 함수
 $y=f(t)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$(i) f(0)=k^2-k-6 > 0$$

$$(k+2)(k-3) > 0$$

$$\therefore k < -2 \text{ 또는 } k > 3$$

$$(ii) f(1)=3+3k+k^2-k-6 < 0$$

$$k^2+2k-3 < 0, (k+3)(k-1) < 0$$

$$\therefore -3 < k < 1$$

$$(i), (ii) \text{에서 } -3 < k < -2 \quad \dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $3^x=t (t>0)$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 세우기	20 %
② ①에서 구한 방정식이 조건을 만족시키는 경우 알기	30 %
③ 실수 k 의 값의 범위 구하기	50 %

0370 답 4

미생물 A의 수는 1주마다 4배가 되므로 2주마다 16배가 된다.

미생물 A 10마리와 미생물 B 40마리를 동시에 배양했을 때, 2n주 후 미생물 A, B의 수는 각각

$$10 \times 16^n, 40 \times 4^n$$

2n주 후에 미생물 A, B의 수의 합이 3200 이상이 된다고 하면

$$10 \times 16^n+40 \times 4^n \geq 3200 \quad \dots \textcircled{i}$$

$$(4^n)^2+4 \times 4^n-320 \geq 0$$

$$4^n=t (t>0) \text{로 놓으면 } t^2+4t-320 \geq 0$$

$$(t+20)(t-16) \geq 0 \quad \therefore t \geq 16 (\because t>0) \quad \dots \textcircled{ii}$$

즉, $4^n \geq 4^2$ 이고 밑이 1보다 크므로 $n \geq 2$

따라서 미생물 A, B의 수의 합이 3200 이상이 되는 것은 최소 (2×2) 주, 즉 4주 후이다.

$$\therefore m=4 \quad \dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 조건을 만족시키는 지수부등식 세우기	40 %
② $4^n=t (t>0)$ 로 놓고 t 에 대한 이차부등식 풀기	30 %
③ 자연수 m 의 값 구하기	30 %

C 실력 향상

59쪽

0371 답 6

함수 $y=2^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프와 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식이 각각 $y=2^{x-3}, y=2^x+3$ 이다.

점 A를 지나고 x 축에 수직인 직선이 함수 $y=2^x$ 의 그래프와 만나는 점을 D라 하면 $\overline{AD}=3$

또 점 D를 지나고 x 축에 평행한 직선이 함수 $y=2^{x-3}$ 의 그래프와 만나는 점을 C'이라 하면 $\overline{DC'}=3$

$\triangle ADC'$ 은 직각이등변삼각형이므로 직선 AC'의 기울기는 -1이다. 따라서 점 C와 점 C'은 같은 점이다.

점 B에서 직선 AD에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{BC}=2\overline{AB} \text{이므로}$$

$$\overline{AH}=\frac{1}{3}\overline{AD}=\frac{1}{3} \times 3=1$$

$\overline{AH}=\overline{BH}=1$ 이므로 점 B의 좌표를 $(t, 2^t) (t>0)$ 이라 하면 점 A의 좌표는 $(t-1, 2^{t-1}+3)$ 이다.

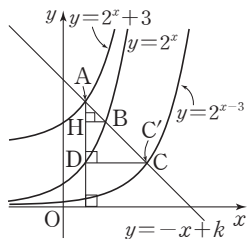
이때 $\overline{AH}=2^{t-1}+3-2^t=1$ 이므로

$$3-2^{t-1}=1, 2^{t-1}=2$$

$$\text{즉, } t-1=1 \text{이므로 } t=2$$

따라서 점 B의 좌표는 $(2, 4)$ 이고, 점 B는 직선 $y=-x+k$ 위의 점 이므로

$$4=-2+k \quad \therefore k=6$$



0372 답 128

$k(x)=g(x)-a$ 라 하면

$$k(x)=(x-1)(x-3)-a=x^2-4x+3-a=(x-2)^2-1-a$$

$$0 \leq x \leq 5 \text{에서 } k(0)=3-a, k(2)=-1-a, k(5)=8-a \text{이므로}$$

$$-1-a \leq k(x) \leq 8-a$$

이때 함수 $h(x)=(f \circ g)(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{g(x)-a}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k(x)}$ 의 밑이 1보다 작으므로 함수 $h(x)$ 는

$$k(x)=-1-a \text{에서 최댓값 } \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-a},$$

$$k(x)=8-a \text{에서 최솟값 } \left(\frac{1}{2}\right)^{8-a} \text{을 갖는다.}$$

$$\text{즉, } \left(\frac{1}{2}\right)^{8-a} = \frac{1}{4} \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{8-a} = \left(\frac{1}{2}\right)^2, 8-a=2 \quad \therefore a=6$$

$$\therefore M = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-6} = 2^7 = 128$$

0373 답 6

$$\left(\frac{1}{7}\right)^{f(x)} \leq \frac{1}{49} \text{에서 } \left(\frac{1}{7}\right)^{f(x)} \leq \left(\frac{1}{7}\right)^2$$

밑이 1보다 작으므로 $f(x) \geq 2$

즉, $x \leq 1$ 일 때 $f(x) \geq 2$ 이므로 $f(1)=2$

$f(x)=ax+b$ (a, b 는 상수, $a \neq 0$)라 하면

$$f(1)=2, f(2)=0 \text{이므로}$$

$$a+b=2, 2a+b=0$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=-2, b=4$$

따라서 $f(x)=-2x+4$ 이므로

$$f(-1)=-2 \times (-1)+4=6$$

0374 답 12

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - (3n+16) \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 48n \leq 0 \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^x\right\}^2 - (3n+16) \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 48n \leq 0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = t \ (t > 0) \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - (3n+16)t + 48n \leq 0$$

$$(t-3n)(t-16) \leq 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $3n \leq 16$ 일 때,

$\textcircled{1}$ 에서 $3n \leq t \leq 16$ 이므로

$$3n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 16$$

$$3n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

이 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 2가 되려면

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} < 3n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \text{이어야 하므로 } 4 < 3n \leq 8$$

$$\therefore \frac{4}{3} < n \leq \frac{8}{3}$$

그런데 n 은 자연수이므로 $n=2$

(ii) $3n > 16$ 일 때,

$\textcircled{1}$ 에서 $16 \leq t \leq 3n$ 이므로

$$16 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 3n$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \leq 3n$$

이 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수가 2가 되려면

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \leq 3n < \left(\frac{1}{2}\right)^{-6} \text{이어야 하므로 } 32 \leq 3n < 64$$

$$\therefore \frac{32}{3} \leq n < \frac{64}{3}$$

그런데 n 은 자연수이므로 11, 12, 13, ..., 21이다.

(i), (ii)에서 구하는 자연수 n 의 개수는 $1+11=12$ 이다.

04 / 로그함수

A 개념 확인

60~63쪽

0375 답 $y=\log_3 x-2$

$y=3^{x+2}$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$x+2=\log_3 y \quad \therefore x=\log_3 y-2$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y=\log_3 x-2$$

0376 답 $y=5^x+3$

$y=\log_5 (x-3)$ 에서 로그의 정의에 의하여

$$x-3=5^y \quad \therefore x=5^y+3$$

x 와 y 를 서로 바꾸면

$$y=5^x+3$$

0377 답 -2

$$f\left(\frac{1}{25}\right)=\log_5 \frac{1}{25}=\log_5 5^{-2}=-2$$

0378 답 2

$$f(15)+f\left(\frac{5}{3}\right)=\log_5 15+\log_5 \frac{5}{3}=\log_5 \left(15 \times \frac{5}{3}\right)=\log_5 5^2=2$$

0379 답 -1

$$\begin{aligned} f(6)-f(30) &= \log_5 6 - \log_5 30 = \log_5 \frac{6}{30} \\ &= \log_5 \frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -1 \end{aligned}$$

0380 답 $-\frac{3}{2}$

$$f(3\sqrt{3})=\log_{\frac{1}{3}} 3\sqrt{3}=\log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{3}{2}}=\log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}=-\frac{3}{2}$$

0381 답 -2

$$\begin{aligned} f(36)+f\left(\frac{1}{4}\right) &= \log_{\frac{1}{3}} 36 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{3}} \left(36 \times \frac{1}{4}\right) \\ &= \log_{\frac{1}{3}} 9 = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = -2 \end{aligned}$$

0382 답 3

$$\begin{aligned} f(2)-f(54) &= \log_{\frac{1}{3}} 2 - \log_{\frac{1}{3}} 54 = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} \\ &= \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 3 \end{aligned}$$

0383 답 ㄱ, ㄷ

ㄴ. $0 < a < 1$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하므로

$x_1 < x_2$ 이면 $f(x_1) > f(x_2)$ 이다.

ㄷ. $f(a)=\log_a a=1$ 이므로 그래프는 점 $(a, 1)$ 을 지난다.

ㄹ. 그래프는 지수함수 $y=a^x$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

0384 **답** $\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 5 < \log_{\frac{1}{3}} 2$

$$\frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 5 = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{5}$$

이때 $2 < \sqrt{5}$ 이고 밑이 1보다 작으므로

$$\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{5} < \log_{\frac{1}{3}} 2$$

$$\therefore \frac{1}{2} \log_{\frac{1}{3}} 5 < \log_{\frac{1}{3}} 2$$

0385 **답** $\log_{25} 64 < 2 \log_5 3$

$$2 \log_5 3 = \log_5 3^2 = \log_5 9, \log_{25} 64 = \log_{5^2} 8^2 = \log_5 8$$

이때 $8 < 9$ 이고 밑이 1보다 크므로

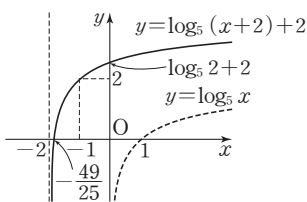
$$\log_5 8 < \log_5 9$$

$$\therefore \log_{25} 64 < 2 \log_5 3$$

0386 **답** 풀이 참조

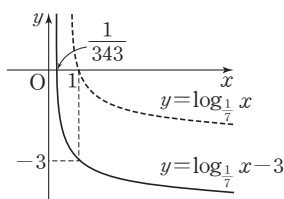
함수 $y = \log_5 (x+2) + 2$ 의 그래프는 함수 $y = \log_5 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x | x > -2\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x = -2$ 이다.

**0387** **답** 풀이 참조

함수 $y = \log_{\frac{1}{7}} x - 3$ 의 그래프는 함수 $y = \log_{\frac{1}{7}} x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x | x > 0\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x = 0$ 이다.

**0388** **답** 풀이 참조

함수 $y = \log_4 (x-5) - \frac{1}{4}$ 의

그래프는 함수 $y = \log_4 x$ 의

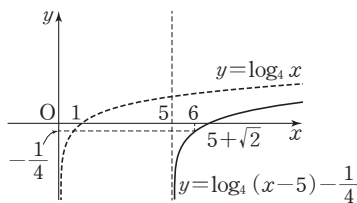
그래프를 x 축의 방향으로 5

만큼, y 축의 방향으로 $-\frac{1}{4}$

만큼 평행이동한 것이므로

오른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x | x > 5\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x = 5$ 이다.

**0389** **답** 풀이 참조

함수 $y = -\log_2 (-x-1) + 2$

의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의

그래프를 원점에 대하여 대칭

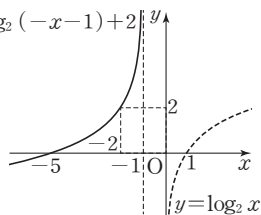
이동한 후 x 축의 방향으로

-1 만큼, y 축의 방향으로 2

만큼 평행이동한 것이므로 오

른쪽 그림과 같다.

따라서 정의역은 $\{x | x < -1\}$ 이고, 점근선의 방정식은 $x = -1$ 이다.

**0390** **답** $y = \log_3 (x-2) - 4$ **0391** **답** $y = -\log_3 (x+1) + 2$

함수 $y = \log_3 (x+1) - 2$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \log_3 (x+1) - 2 \quad \therefore y = -\log_3 (x+1) + 2$$

0392 **답** $y = \log_3 (-x+1) - 2$ **0393** **답** $y = -\log_3 (-x+1) + 2$

함수 $y = \log_3 (x+1) - 2$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \log_3 (-x+1) - 2 \quad \therefore y = -\log_3 (-x+1) + 2$$

0394 **답** $y = 3^{x+2} - 1$

함수 $y = \log_3 (x+1) - 2$ 의 그래프를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$x = \log_3 (y+1) - 2$$

$$x+2 = \log_3 (y+1), y+1 = 3^{x+2}$$

$$\therefore y = 3^{x+2} - 1$$

0395 **답** 최댓값: 4, 최솟값: -1

함수 $y = \log_3 x$ 의 밑이 1보다 크므로

$\frac{1}{3} \leq x \leq 81$ 일 때 함수 $y = \log_3 x$ 는

$x = 81$ 에서 최댓값 $\log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$,

$x = \frac{1}{3}$ 에서 최솟값 $\log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1$ 을 갖는다.

0396 **답** 최댓값: 2, 최솟값: -3

함수 $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ 의 밑이 1보다 작으므로

$\frac{1}{25} \leq x \leq 125$ 일 때 함수 $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ 는

$x = \frac{1}{25}$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{5}} \frac{1}{25} = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^2 = 2$,

$x = 125$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{5}} 125 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = -3$ 을 갖는다.

0397 **답** 최댓값: 9, 최솟값: 8

함수 $y = \log_7 (x-5) + 8$ 의 밑이 1보다 크므로

$6 \leq x \leq 12$ 일 때 함수 $y = \log_7 (x-5) + 8$ 은

$x = 12$ 에서 최댓값 $\log_7 (12-5) + 8 = \log_7 7 + 8 = 9$,

$x = 6$ 에서 최솟값 $\log_7 (6-5) + 8 = \log_7 1 + 8 = 8$ 을 갖는다.

0398 **답** 최댓값: -3 , 최솟값: -9

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} (-x+1) - 4$ 의 밑이 1보다 작으므로

$-31 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 일 때 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} (-x+1) - 4$ 는

$x = \frac{1}{2}$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2}+1\right) - 4 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} - 4 = -3$,

$x = -31$ 에서 최솟값

$\log_{\frac{1}{2}} \{ -(-31)+1 \} - 4 = \log_{\frac{1}{2}} 32 - 4 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} - 4 = -9$

를 갖는다.

0399 [답] 최댓값: 6, 최솟값: 0

$$f(x) = x^2 - 4x + 4 \text{라 하면 } f(x) = (x-2)^2$$

$$3 \leq x \leq 10 \text{에서 } f(3)=1, f(10)=64 \text{이므로}$$

$$1 \leq f(x) \leq 64$$

이때 함수 $y = \log_2 f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로 함수 $y = \log_2 f(x)$ 는

$$f(x) = 64 \text{에서 최댓값 } \log_2 64 = \log_2 2^6 = 6,$$

$$f(x) = 1 \text{에서 최솟값 } \log_2 1 = 0 \text{을 갖는다.}$$

0400 [답] 최댓값: 2, 최솟값: $\log_3 5$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8 \text{이라 하면 } f(x) = -(x-1)^2 + 9$$

$$-1 \leq x \leq 3 \text{에서 } f(-1)=5, f(1)=9, f(3)=5 \text{이므로}$$

$$5 \leq f(x) \leq 9$$

이때 함수 $y = \log_3 f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로 함수 $y = \log_3 f(x)$ 는

$$f(x) = 9 \text{에서 최댓값 } \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2,$$

$$f(x) = 5 \text{에서 최솟값 } \log_3 5 \text{를 갖는다.}$$

0401 [답] 최댓값: 0, 최솟값: -1

$$f(x) = x^2 - 8x + 17 \text{이라 하면 } f(x) = (x-4)^2 + 1$$

$$3 \leq x \leq 6 \text{에서 } f(3)=2, f(4)=1, f(6)=5 \text{이므로}$$

$$1 \leq f(x) \leq 5$$

이때 함수 $y = \log_{\frac{1}{5}} f(x)$ 의 밑이 1보다 작으므로 함수

$$y = \log_{\frac{1}{5}} f(x) \text{는}$$

$$f(x) = 1 \text{에서 최댓값 } \log_{\frac{1}{5}} 1 = 0,$$

$$f(x) = 5 \text{에서 최솟값 } \log_{\frac{1}{5}} 5 = \log_{\frac{1}{5}} \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = -1 \text{을 갖는다.}$$

0402 [답] 최댓값: -1, 최솟값: $\log_{\frac{1}{2}} 11$

$$f(x) = -x^2 + 4x + 7 \text{이라 하면 } f(x) = -(x-2)^2 + 11$$

$$0 \leq x \leq 5 \text{에서 } f(0)=7, f(2)=11, f(5)=2 \text{이므로}$$

$$2 \leq f(x) \leq 11$$

이때 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}} f(x)$ 의 밑이 1보다 작으므로 함수

$$y = \log_{\frac{1}{2}} f(x) \text{는}$$

$$f(x) = 2 \text{에서 최댓값 } \log_{\frac{1}{2}} 2 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = -1,$$

$$f(x) = 11 \text{에서 최솟값 } \log_{\frac{1}{2}} 11 \text{을 갖는다.}$$

0403 [답] $x=82$

$$\text{진수의 조건에서 } x-1 > 0 \quad \therefore x > 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_3(x-1)=4 \text{에서 로그의 정의에 의하여}$$

$$x-1=3^4=81 \quad \therefore x=82$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $x=82$

0404 [답] $x=-\frac{1}{4}$

$$\text{진수의 조건에서 } 2x+1 > 0 \quad \therefore x > -\frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_4(2x+1)=-\frac{1}{2} \text{에서 로그의 정의에 의하여}$$

$$2x+1=4^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}, 2x=-\frac{1}{2} \quad \therefore x=-\frac{1}{4}$$

$$\text{이때 } \textcircled{1} \text{에 의하여 } x=-\frac{1}{4}$$

0405 [답] $x=8$

$$\text{진수의 조건에서 } 2x-5 > 0$$

$$\therefore x > \frac{5}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-5)=\log_{\frac{1}{2}} 11 \text{에서}$$

$$2x-5=11 \text{이므로}$$

$$2x=16$$

$$\therefore x=8$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $x=8$

0406 [답] $x=2$

$$\text{진수의 조건에서 } 5x-7 > 0, x+1 > 0$$

$$\therefore x > \frac{7}{5} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\log_5(5x-7)=\log_5(x+1) \text{에서}$$

$$5x-7=x+1 \text{이므로}$$

$$4x=8$$

$$\therefore x=2$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $x=2$

0407 [답] $x=1$ 또는 $x=1000$

$$\text{진수의 조건에서 } x > 0, x^3 > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(\log x)^2 - \log x^3 = 0 \text{에서 } (\log x)^2 - 3 \log x = 0$$

$$\log x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 3t = 0, t(t-3) = 0$$

$$\therefore t=0 \text{ 또는 } t=3$$

$$\text{즉, } \log x = 0 \text{ 또는 } \log x = 3 \text{이므로}$$

$$x = 10^0 = 1 \text{ 또는 } x = 10^3 = 1000$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $x=1$ 또는 $x=1000$

0408 [답] $x=\frac{1}{27}$ 또는 $x=81$

$$\text{진수의 조건에서 } x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 12 = 0 \text{에서 } \log_3 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - t - 12 = 0, (t+3)(t-4) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 4$$

$$\text{즉, } \log_3 x = -3 \text{ 또는 } \log_3 x = 4 \text{이므로}$$

$$x = 3^{-3} = \frac{1}{27} \text{ 또는 } x = 3^4 = 81$$

$$\text{이때 } \textcircled{1} \text{에 의하여 } x = \frac{1}{27} \text{ 또는 } x = 81$$

0409 [답] $x=\frac{1}{64}$ 또는 $x=4$

$$\text{진수의 조건에서 } x > 0, x^4 > 0$$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$(\log_2 x)^2 + \log_2 x^4 - 12 = 0 \text{에서 } (\log_2 x)^2 + 4 \log_2 x - 12 = 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 + 4t - 12 = 0, (t+6)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = -6 \text{ 또는 } t = 2$$

$$\text{즉, } \log_2 x = -6 \text{ 또는 } \log_2 x = 2 \text{이므로}$$

$$x = 2^{-6} = \frac{1}{64} \text{ 또는 } x = 2^2 = 4$$

$$\text{이때 } \textcircled{1} \text{에 의하여 } x = \frac{1}{64} \text{ 또는 } x = 4$$

0410 답 $x=\sqrt{2}$ 또는 $x=16$ 진수의 조건에서 $x>0$, $x^5>0$

$$\therefore x>0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$(2\log_4 x - 1)^2 - \log_4 x^5 + 1 = 0 \text{에서}$$

$$4(\log_4 x)^2 - 4\log_4 x + 1 - 5\log_4 x + 1 = 0$$

$$4(\log_4 x)^2 - 9\log_4 x + 2 = 0$$

 $\log_4 x = t$ 로 놓으면

$$4t^2 - 9t + 2 = 0$$

$$(4t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = \frac{1}{4} \text{ 또는 } t = 2$$

즉, $\log_4 x = \frac{1}{4}$ 또는 $\log_4 x = 2$ 이므로

$$x = 4^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \text{ 또는 } x = 4^2 = 16$$

이때 $\textcircled{7}$ 에 의하여 $x = \sqrt{2}$ 또는 $x = 16$ **0411** 답 $-3 < x < 22$ 진수의 조건에서 $x+3>0$

$$\therefore x > -3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_5(x+3) < 2 \text{에서}$$

$$\log_5(x+3) < \log_5 25$$

밑이 1보다 크므로

$$x+3 < 25$$

$$\therefore x < 22 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 의 공통부분은 $-3 < x < 22$ **0412** 답 $3 < x \leq 5$ 진수의 조건에서 $12-2x>0$, $x-3>0$

$$\therefore 3 < x < 6 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_6(12-2x) \geq \log_6(x-3) \text{에서}$$

밑이 1보다 크므로

$$12-2x \geq x-3$$

$$-3x \geq -15$$

$$\therefore x \leq 5 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 의 공통부분은 $3 < x \leq 5$ **0413** 답 $\frac{1}{2} < x < 2$ 진수의 조건에서 $2x-1>0$

$$\therefore x > \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) > -1 \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) > \log_{\frac{1}{3}} 3$$

밑이 1보다 작으므로

$$2x-1 < 3, 2x < 4$$

$$\therefore x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 의 공통부분은 $\frac{1}{2} < x < 2$ **0414** 답 $x \geq 10$ 진수의 조건에서 $2x+4>0$, $x+14>0$

$$\therefore x > -2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+4) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x+14) \text{에서}$$

밑이 1보다 작으므로

$$2x+4 \geq x+14$$

$$\therefore x \geq 10 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 의 공통부분은

$$x \geq 10$$

0415 답 $\frac{1}{100} \leq x \leq 10$ 진수의 조건에서 $x>0$ $\dots\dots \textcircled{7}$

$$(\log x)^2 + \log x \leq 2 \text{에서}$$

$$(\log x)^2 + \log x - 2 \leq 0$$

 $\log x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + t - 2 \leq 0$$

$$(t+2)(t-1) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq t \leq 1$$

즉, $-2 \leq \log x \leq 1$ 이므로

$$\log 10^{-2} \leq \log x \leq \log 10^1$$

밑이 1보다 크므로

$$\frac{1}{100} \leq x \leq 10 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 의 공통부분은

$$\frac{1}{100} \leq x \leq 10$$

0416 답 $0 < x < 1$ 또는 $x > 64$ 진수의 조건에서 $x>0$, $x^6>0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$(\log_2 x)^2 - \log_2 x^6 > 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - 6\log_2 x > 0$$

 $\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 6t > 0$$

$$t(t-6) > 0$$

$$\therefore t < 0 \text{ 또는 } t > 6$$

즉, $\log_2 x < 0$ 또는 $\log_2 x > 6$ 이므로

$$\log_2 x < \log_2 1 \text{ 또는 } \log_2 x > \log_2 2^6$$

밑이 1보다 크므로

$$x < 1 \text{ 또는 } x > 64 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

 $\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 의 공통부분은

$$0 < x < 1 \text{ 또는 } x > 64$$

0417 답 $0 < x \leq 3$ 또는 $x \geq 243$ 진수의 조건에서 $x>0$, $x^6>0$

$$\therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 + \log_{\frac{1}{3}} x^6 + 5 \geq 0 \text{에서}$$

$$(\log_{\frac{1}{3}} x)^2 + 6\log_{\frac{1}{3}} x + 5 \geq 0$$

 $\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 6t + 5 \geq 0$$

$$(t+5)(t+1) \geq 0$$

$$\therefore t \leq -5 \text{ 또는 } t \geq -1$$

즉, $\log_{\frac{1}{3}} x \leq -5$ 또는 $\log_{\frac{1}{3}} x \geq -1$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} \quad \text{또는} \quad \log_{\frac{1}{3}} x \geq \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

밑이 1보다 작으므로

$$x \leq 3 \quad \text{또는} \quad x \geq 243 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

①, ㉔의 공통부분은

$$0 < x \leq 3 \quad \text{또는} \quad x \geq 243$$

0418 답 5 < x < 25

$$\text{진수의 조건에서 } x > 0, \frac{x^3}{25} > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

$$(\log_5 x)^2 - \log_5 \frac{x^3}{25} < 0 \text{에서}$$

$$(\log_5 x)^2 - (\log_5 x^3 - \log_5 25) < 0$$

$$(\log_5 x)^2 - 3\log_5 x + 2 < 0$$

$$\log_5 x = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 3t + 2 < 0$$

$$(t-1)(t-2) < 0$$

$$\therefore 1 < t < 2$$

$$\text{즉, } 1 < \log_5 x < 2 \text{이므로}$$

$$\log_5 5 < \log_5 x < \log_5 5^2$$

밑이 1보다 크므로

$$5 < x < 25 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

①, ㉔의 공통부분은

$$5 < x < 25$$

B 유형 완성

64~77쪽

0419 답 ④

$$f(2)=5 \text{에서 } \log_a 7 + 4 = 5$$

$$\log_a 7 = 1 \quad \therefore a = 7$$

$$\therefore f(16) = \log_7 49 + 4 = 2 + 4 = 6$$

0420 답 3

$$f(-6) = 2^{-6} = \frac{1}{64} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(-6) &= g(f(-6)) = g\left(\frac{1}{64}\right) \\ &= \log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{64} = \log_{\frac{1}{4}} \left(\frac{1}{4}\right)^3 = 3 \end{aligned}$$

0421 답 ④

$$\textcircled{1} f(1) = \log_5 1 = 0$$

$$\textcircled{2} f(25x) = \log_5 25x = \log_5 x + \log_5 25 = f(x) + 2$$

$$\textcircled{3} f\left(\frac{1}{x}\right) = \log_5 \frac{1}{x} = -\log_5 x = -f(x)$$

$$\textcircled{4} 25^{f(x)} = 25^{\log_5 x} = x^{\log_5 25} = x^2$$

$$\textcircled{5} f(x^3) = \log_5 x^3 = 3\log_5 x = 3f(x)$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0422 답 16

$$f(2) + f(3) + f(4) + \dots + f(n)$$

$$\begin{aligned} &= \log_{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log_{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log_{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{4}\right) \\ &\quad + \dots + \log_{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{2}{3} + \log_{\frac{1}{2}} \frac{3}{4} + \dots + \log_{\frac{1}{2}} \frac{n-1}{n}$$

$$= \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n}\right) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{n} = \log_2 n$$

$$\text{따라서 } \log_2 n = 4 \text{이므로 } n = 2^4 = 16$$

0423 답 ④

③ $y = \log_5 x = -\log_{\frac{1}{5}} x = -\log_{0.2} x$ 이므로 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_5 x$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.

④ 그래프의 점근선이 y 축이므로 y 축과 만나지 않는다.

⑤ $f(x)$ 는 일대일함수이므로 $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$ 이다.

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0424 답 6

$\log(-x^2 + 5x + 24)$ 의 진수의 조건에서

$$-x^2 + 5x + 24 > 0$$

$$x^2 - 5x - 24 < 0, (x+3)(x-8) < 0 \quad \therefore -3 < x < 8$$

$$\therefore A = \{x \mid -3 < x < 8\} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$\log_2(\log_2 x)$ 의 진수의 조건에서

$$x > 0, \log_2 x > 0 \quad \therefore x > 1$$

$$\therefore B = \{x \mid x > 1\} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 $A \cap B = \{x \mid 1 < x < 8\}$ 이므로 집합 $A \cap B$ 의 원소 중 정수는

2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다. $\dots\dots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 진수의 조건을 이용하여 집합 A 구하기	40 %
② 진수의 조건을 이용하여 집합 B 구하기	40 %
③ 집합 A ∩ B의 원소 중 정수의 개수 구하기	20 %

0425 답 ①

함수 $y = ax + b$ 의 그래프에서 $a > 0, 0 < b < 1$

$y = \log_b ax$ 에서 $0 < b < 1$ 이므로 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

또 $a > 0$ 이므로 $ax > 0$ 에서 $x > 0$ 이다.

따라서 함수 $y = \log_b ax$ 의 그래프의 개형은 ①이다.

0426 답 ④

함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 그래프의 식은 $y = \log_2(x-a) + b$

이 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \log_2(x-a) + b \quad \therefore y = -\log_2(x-a) - b$$

이 식이 $y = \log_{\frac{1}{2}}(4x-8)$ 과 일치하므로

$$y = \log_{\frac{1}{2}}(4x-8) = -\log_2 4(x-2)$$

$$= -\log_2(x-2) - \log_2 4 = -\log_2(x-2) - 2$$

따라서 $a=2, b=2$ 이므로 $a+b=4$

0427 [답 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅁ]

ㄱ. 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

ㄴ. $y = \log_2 x^2 = 2\log_2 |x|$ 이므로 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㄷ. $y = \log_2 4x = \log_2 x + 2$ 이므로 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2 만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. $y = \log_2 \frac{1}{x} = -\log_2 x$ 이므로 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

ㅁ. 함수 $y = 2^{2x} - 1$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐질 수 없다.

ㅂ. 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동한 후 y 축에 대하여 대칭이동한 것이다. 따라서 보기의 함수에서 그 그래프가 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지는 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ, ㅂ이다.

0428 [답 ①]

함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 a 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_2(x-a) + 1$$

이 그래프가 점 $(9, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \log_2(9-a) + 1$$

$$\log_2(9-a) = 2, 9-a = 2^2$$

$$\therefore a = 5$$

0429 [답 ③]

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+3\sqrt{3}) + k$ 의 그래프는 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-3\sqrt{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

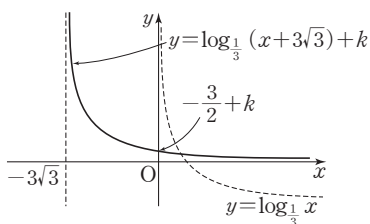
따라서 그래프가 제3사분면을 지나지 않으려면 오른쪽 그림과 같아야 하므로

$$-\frac{3}{2} + k \geq 0$$

→ $x=0$ 일 때의 함수값

$$\therefore k \geq \frac{3}{2}$$

따라서 실수 k 의 최솟값은 $\frac{3}{2}$ 이다.



0430 [답 1/3]

오른쪽 그림에서

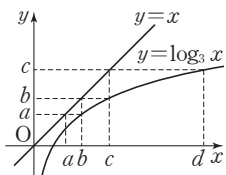
$$a = \log_3 b, c = \log_3 d \text{ 이므로}$$

$$a - c = \log_3 b - \log_3 d = \log_3 \frac{b}{d}$$

이때 $d = 3b$ 이므로

$$a - c = \log_3 \frac{b}{3b} = \log_3 \frac{1}{3} = -1$$

$$\therefore 3^{a-c} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$



0431 [답 ④]

네 점 $A(a, \log_4 a)$, $B(a, \log_{16} a)$, $C(b, \log_4 b)$, $D(b, \log_{16} b)$ 에 대하여

$$\overline{AB} = \log_4 a - \log_{16} a = \log_4 a - \frac{1}{2} \log_4 a = \frac{1}{2} \log_4 a$$

$$\overline{CD} = \log_4 b - \log_{16} b = \log_4 b - \frac{1}{2} \log_4 b = \frac{1}{2} \log_4 b$$

이때 $\overline{AB} : \overline{CD} = 1 : 2$ 에서 $\overline{CD} = 2\overline{AB}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \log_4 b = 2 \times \frac{1}{2} \log_4 a, \log_4 b = \log_4 a^2$$

$$\therefore b = a^2$$

0432 [답 ①]

$A_1(p, 1)$ 이라 하면 점 A_1 이 곡선 $y = \log_a x$ 위에 있으므로 $1 = \log_a p \quad \therefore p = a \quad \therefore A_1(a, 1)$

$B_1(q, 1)$ 이라 하면 점 B_1 이 곡선 $y = \log_b x$ 위에 있으므로 $1 = \log_b q \quad \therefore q = b \quad \therefore B_1(b, 1)$

이때 선분 A_1B_1 의 중점의 좌표가 $\left(\frac{a+b}{2}, 1\right)$ 이므로

$$\frac{a+b}{2} = 2 \quad \therefore a+b=4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \overline{A_1B_1} = 1 \text{ 이므로 } b-a=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ 을 연립하여 풀면 } a = \frac{3}{2}, b = \frac{5}{2}$$

$A_2(r, 2)$ 라 하면 점 A_2 가 곡선 $y = \log_{\frac{3}{2}} x$ 위에 있으므로

$$\log_{\frac{3}{2}} r = 2 \quad \therefore r = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \quad \therefore A_2\left(\frac{9}{4}, 2\right)$$

$B_2(s, 2)$ 라 하면 점 B_2 가 곡선 $y = \log_{\frac{5}{2}} x$ 위에 있으므로

$$\log_{\frac{5}{2}} s = 2 \quad \therefore s = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \quad \therefore B_2\left(\frac{25}{4}, 2\right)$$

$$\therefore \overline{A_2B_2} = \frac{25}{4} - \frac{9}{4} = 4$$

다른 풀이 인수분해 이용하기

$A_1(a, 1)$, $B_1(b, 1)$ 이므로 선분 A_1B_1 의 중점의 좌표는 $\left(\frac{a+b}{2}, 1\right)$

$$\text{즉, } \frac{a+b}{2} = 2 \text{ 이므로 } a+b=4$$

$$\text{또 } \overline{A_1B_1} = 1 \text{ 이므로 } b-a=1$$

$$\text{이때 점 } A_2 \text{의 } x \text{좌표는 } 2 = \log_a x \text{에서 } x = a^2 \quad \therefore A_2(a^2, 2)$$

$$\text{점 } B_2 \text{의 } x \text{좌표는 } 2 = \log_b x \text{에서 } x = b^2 \quad \therefore B_2(b^2, 2)$$

$$\therefore \overline{A_2B_2} = b^2 - a^2 = (b+a)(b-a) = 4 \times 1 = 4$$

0433 [답 9]

함수 $y = 3^x - k$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$0 = 3^x - k \text{에서 } 3^x = k \quad \therefore x = \log_3 k \quad \therefore A(\log_3 k, 0)$$

함수 $y = \log_3(x-2k)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 구하면

$$0 = \log_3(x-2k) \text{에서 } x-2k=1 \quad \therefore x=2k+1$$

$$\therefore B(2k+1, 0)$$

이때 $\overline{AB} = 2k$ 이므로

$$2k+1 - \log_3 k = 2k$$

$$\log_3 k = 1 \quad \therefore k=3$$

함수 $y=3^x-k$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $y=-k$ 이고, 함수 $y=\log_3(x-2k)$ 의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=2k$ 이므로 $a=2k=2 \times 3=6$, $b=-k=-3$
 $\therefore a-b=9$

0434 답 4 $\log_2 5$

$g(x)=\log_2 5x=\log_2 x+\log_2 5=f(x)+\log_2 5$ 이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 $\log_2 5$ 만큼 평행이동한 것이다.

$A(1, 0)$, $B(5, \log_2 5)$,

$C(5, \log_2 25)$, $D(1, \log_2 5)$ 이

므로 점 $(5, 0)$ 을 E라 하면

$\overline{AE}=\overline{DB}$, $\overline{BE}=\overline{BC}$

이때 함수 $y=g(x)$ 의 그래프는

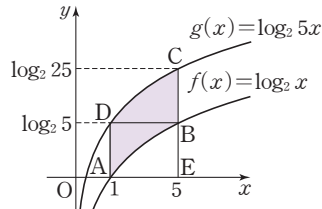
함수 $y=f(x)$ 의 그래프를 평행

이동한 것이므로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 선분 DB, 선분 BC로 둘러싸인 부분의 넓이는 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 선분 AE, 선분 BE로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

즉, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프와 선분 AD, 선분 BC로 둘러싸인 부분의 넓이는 사각형 AEBD의 넓이와 같다.

따라서 구하는 넓이는

$$\overline{AE} \times \overline{AD} = (5-1) \times \log_2 5 = 4 \log_2 5$$



0435 답 $\frac{20}{3}$

$y=\log_{\frac{1}{9}} x$ 에서

$$x=\frac{1}{3} \text{ 일 때, } y=\log_{\frac{1}{9}} \frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

$$x=3 \text{ 일 때, } y=\log_{\frac{1}{9}} 3=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), C\left(3, -\frac{1}{2}\right) \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

$y=\log_{\sqrt{3}} x$ 에서

$$x=\frac{1}{3} \text{ 일 때, } y=\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}=-2$$

$$x=3 \text{ 일 때, } y=\log_{\sqrt{3}} 3=2$$

$$\therefore B\left(\frac{1}{3}, -2\right), D(3, 2) \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$$

$$\therefore \square ABCD = \left\{ \frac{1}{2} - (-2) \right\} \times \left(3 - \frac{1}{3} \right) = \frac{20}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 두 점 A, C의 좌표 구하기	40 %
② 두 점 B, D의 좌표 구하기	40 %
③ 사각형 ABCD의 넓이 구하기	20 %

0436 답 ⑤

두 함수 $y=f(x)$, $y=\log_5(4x+a)$ 의 그래프가 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 $f(x)$ 는 $y=\log_5(4x+a)$ 의 역함수이다.

따라서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 점 $(2, 4)$ 를 지나므로

함수 $y=\log_5(4x+a)$ 의 그래프는 점 $(4, 2)$ 를 지난다.

즉, $2=\log_5(16+a)$ 이므로

$$16+a=5^2$$

$$\therefore a=9$$

0437 답 ⑤

$$y=\log(x+3)+a \text{에서 } y-a=\log(x+3)$$

$$x+3=10^{y-a} \quad \therefore x=10^{y-a}-3$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=10^{x-a}-3$

이 식이 $y=b^{x-3}+c$ 와 일치하므로

$$a=3, b=10, c=-3$$

$$\therefore a+b+c=10$$

0438 답 ②

$$y=\log_2(x+a)+b \text{에서 } y-b=\log_2(x+a)$$

$$x+a=2^{y-b} \quad \therefore x=2^{y-b}-a$$

x 와 y 를 서로 바꾸면 $y=2^{x-b}-a$

$$\therefore g(x)=2^{x-b}-a$$

이때 곡선 $y=2^{x-b}-a$ 의 점근선이 직선 $y=1$ 이므로

$$a=-1$$

따라서 곡선 $y=2^{x-b}+1$ 이 점 $(3, 2)$ 를 지나므로

$$2=2^{3-b}+1, 2^{3-b}=1, 3-b=0$$

$$\therefore b=3$$

$$\therefore a+b=-1+3=2$$

0439 답 ②

$$f(8)=\log_2 8-1=2 \text{이므로 } g(2)=8$$

$$g(g(a))=8 \text{에서 } g(a)=2$$

$$f(2)=2-3=-1 \text{이므로 } g(-1)=2$$

$$g(a)=2 \text{에서 } a=-1$$

0440 답 5

함수 $y=\log_a x+b$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점은

함수 $y=\log_a x+b$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.

이때 두 교점의 x 좌표가 각각 1, 2이므로 함수 $y=\log_a x+b$ 의 그래프는 두 점 $(1, 1)$, $(2, 2)$ 를 지난다. ①

$$1=\log_a 1+b \text{에서 } b=1 \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$$

$$2=\log_a 2+1 \text{에서 } \log_a 2=1 \quad \therefore a=2 \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

$$\therefore a^2+b^2=2^2+1^2=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{iv}$$

채점 기준

① 함수 $y=\log_a x+b$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프의 교점의 좌표 구하기	30 %
② b 의 값 구하기	30 %
③ a 의 값 구하기	30 %
④ a^2+b^2 의 값 구하기	10 %

0441 답 6

$y=\log_a x$ 는 $y=a^x$ 의 역함수이므로 두 함수 $y=a^x$, $y=\log_a x$ 의 그래프는 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이다.

점 A의 좌표를 $(k, 8-k)$ 라 하면 점 B의 좌표는 $(8-k, k)$ 이므로

$$\overline{AB}^2=(8-2k)^2+(2k-8)^2=(4\sqrt{2})^2$$

$$2(2k-8)^2=32, 8(k-4)^2=32$$

$$(k-4)^2=4, k-4=\pm 2 \quad \therefore k=2 \text{ 또는 } k=6$$

이때 점 A의 x 좌표는 점 B의 x 좌표보다 작으므로 $k=2$

따라서 A(2, 6), B(6, 2)이고, 점 A가 함수 $y=a^x$ 의 그래프 위의 점이므로 $a^2=6$

0442 [답] ④

$$A = 2 \log_{0.1} 4\sqrt{2} = \log_{0.1} (4\sqrt{2})^2 = \log_{0.1} 32$$

$$B = \log_{0.1} 2 - 1 = \log_{0.1} 2 - \log_{0.1} 0.1 = \log_{0.1} \frac{2}{0.1} = \log_{0.1} 20$$

$$C = \log \frac{1}{50} = -\log 50 = \log_{0.1} 50$$

이때 $20 < 32 < 50$ 이고 밑이 1보다 작으므로

$$\log_{0.1} 50 < \log_{0.1} 32 < \log_{0.1} 20$$

$$\therefore C < A < B$$

0443 [답] $A < C < B$

$\frac{1}{9} < x < \frac{1}{3}$ 의 각 변에 밑이 $\frac{1}{3}$ 인 로그를 취하면

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{3} < \log_{\frac{1}{3}} x < \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$$

$$\therefore 1 < \log_{\frac{1}{3}} x < 2$$

$$A = \log_3 x = -\log_{\frac{1}{3}} x \text{이므로}$$

$$1 < \log_{\frac{1}{3}} x < 2 \text{에서 } -2 < -\log_{\frac{1}{3}} x < -1$$

$$\therefore -2 < A < -1$$

$$1 < \log_{\frac{1}{3}} x < 2 \text{에서 } 1 < (\log_{\frac{1}{3}} x)^2 < 4 \text{이므로}$$

$$1 < B < 4$$

$1 < \log_{\frac{1}{3}} x < 2$ 의 각 변에 밑이 $\frac{1}{2}$ 인 로그를 취하면

$$\log_{\frac{1}{2}} 2 < \log_{\frac{1}{2}} (\log_{\frac{1}{3}} x) < \log_{\frac{1}{2}} 1$$

$$-1 < \log_{\frac{1}{2}} (\log_{\frac{1}{3}} x) < 0 \quad \therefore -1 < C < 0$$

$$\therefore A < C < B$$

0444 [답] ①

$0 < a < 1$ 이므로 $a < 1 < b$ 의 각 변에 밑이 a 인 로그를 취하면

$$\log_a b < \log_a 1 < \log_a a \quad \therefore \log_a b < 0 < 1$$

또 $b > 1$ 이므로 $a < 1 < b$ 의 각 변에 밑이 b 인 로그를 취하면

$$\log_b a < \log_b 1 < \log_b b$$

$$\log_b a < 0 < 1 \quad \therefore -\log_b a > 0$$

$$\log_b \frac{b}{a} = \log_b b - \log_b a = 1 - \log_b a \text{이므로}$$

$$1 - \log_b a > -\log_b a$$

$$\therefore \log_a b < -\log_b a < \log_b \frac{b}{a}$$

$$\therefore A < B < C$$

0445 [답] 7

함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+4) - 3$ 의 밑이 1보다 작으므로

$$-3 \leq x \leq 5 \text{일 때 함수 } y = \log_{\frac{1}{3}}(x+4) - 3 \text{은}$$

$$x = -3 \text{에서 최댓값 } \log_{\frac{1}{3}}(-3+4) - 3 = -3,$$

$$x = 5 \text{에서 최솟값 } \log_{\frac{1}{3}}(5+4) - 3 = -2 - 3 = -5 \text{를 갖는다.}$$

$$\text{따라서 } M = -3, m = -5 \text{이므로 } M - 2m = -3 - 2 \times (-5) = 7$$

0446 [답] -4

함수 $y = \log_5(x-a) - 3$ 의 밑이 1보다 크므로 $1 \leq x \leq 4$ 일 때 함수 $y = \log_5(x-a) - 3$ 은 $x = 1$ 에서 최솟값 $\log_5(1-a) - 3$ 을 갖는다.

$$\text{즉, } \log_5(1-a) - 3 = -2 \text{이므로}$$

$$\log_5(1-a) = 1, 1-a=5 \quad \therefore a = -4$$

0447 [답] ④

함수 $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{2}}(x+k)$ 의 밑이 1보다 작으므로 $0 \leq x \leq 12$ 일 때

함수 $f(x) = 2 \log_{\frac{1}{2}}(x+k)$ 는 $x=0$ 에서 최댓값 $2 \log_{\frac{1}{2}} k$,

$x=12$ 에서 최솟값 $2 \log_{\frac{1}{2}}(12+k)$ 를 갖는다.

$$\text{즉, } 2 \log_{\frac{1}{2}} k = -4 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{2}} k = -2$$

$$\therefore k = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$$

$$\therefore m = 2 \log_{\frac{1}{2}}(12+4) = 2 \log_{\frac{1}{2}} 16 = 2 \times (-4) = -8$$

$$\therefore k+m = 4 + (-8) = -4$$

0448 [답] 4

함수 $(f \circ g)(x) = \log_3(6x+a)$ 의 밑이 1보다 크므로

$-2 \leq x \leq 11$ 일 때 함수 $(f \circ g)(x) = \log_3(6x+a)$ 는

$x=11$ 에서 최댓값 $\log_3(66+a)$,

$x=-2$ 에서 최솟값 $\log_3(-12+a)$ 를 갖는다.

$$\text{즉, } \log_3(-12+a) = 1 \text{이므로}$$

$$-12+a=3$$

$$\therefore a=15$$

따라서 함수 $(f \circ g)(x) = \log_3(6x+15)$ 의 최댓값은

$$\log_3(66+15) = \log_3 81 = 4$$

0449 [답] $\log_2 10$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 9 \text{라 하면}$$

$$f(x) = -(x-1)^2 + 10$$

$$1 \leq x \leq 4 \text{에서 } f(1)=10, f(4)=1 \text{이므로}$$

$$1 \leq f(x) \leq 10$$

이때 함수 $y = \log_2 f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로 함수 $y = \log_2 f(x)$ 는

$f(x)=10$, 즉 $x=1$ 에서 최댓값 $\log_2 10$ 을 갖는다.

따라서 $a=1, M=\log_2 10$ 이므로

$$aM = \log_2 10$$

0450 [답] ①

진수의 조건에서 $x+2 > 0, 4-x > 0$

$$\therefore -2 < x < 4$$

$$y = \log_{\frac{1}{3}}(x+2) + \log_{\frac{1}{3}}(4-x) = \log_{\frac{1}{3}}(-x^2+2x+8) \text{이므로}$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 8 \text{이라 하면}$$

$$f(x) = -(x-1)^2 + 9$$

$$-2 < x < 4 \text{에서 } f(-2)=f(4)=0, f(1)=9 \text{이므로}$$

$$0 < f(x) \leq 9$$

이때 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 의 밑이 1보다 작으므로 함수

$$y = \log_{\frac{1}{3}} f(x) \text{는 } f(x)=9 \text{에서 최솟값 } \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2 \text{를 갖는다.}$$

0451 [답] $\frac{1}{2}$

$$f(x) = -x^2 + 4x \text{라 하면}$$

$$f(x) = -(x-2)^2 + 4$$

$$1 \leq x \leq 3 \text{에서 } f(1)=f(3)=3, f(2)=4 \text{이므로}$$

$$3 \leq f(x) \leq 4$$

..... ①

이때 $y = \log_a f(x)$ 에서 $0 < a < 1$ 이므로 함수 $y = \log_a f(x)$ 는 $f(x) = 4$ 에서 최솟값 $\log_a 4$ 를 갖는다. ②
 즉, $\log_a 4 = -2$ 이므로 $a^{-2} = 4$
 $a^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore a = \frac{1}{2} \quad (\because 0 < a < 1)$ ③

채점 기준

① $f(x) = -x^2 + 4x$ 로 놓고 $f(x)$ 의 값의 범위 구하기	40 %
② 주어진 범위에서 함수 $y = \log_a f(x)$ 의 최솟값 구하기	20 %
③ a 의 값 구하기	40 %

0452 답 ④

$g(x) = x^2 - 6x + k$ 라 하면
 $g(x) = (x-3)^2 + k-9$
 $0 \leq x \leq 5$ 에서 $g(0) = k, g(3) = k-9, g(5) = k-5$ 이므로
 $k-9 \leq g(x) \leq k$
 이때 함수 $f(x) = \log_3 g(x)$ 의 밑이 1보다 크므로 함수
 $f(x) = \log_3 g(x)$ 는
 $g(x) = k$ 에서 최댓값 $\log_3 k$,
 $g(x) = k-9$ 에서 최솟값 $\log_3 (k-9)$ 를 갖는다.
 따라서 $\log_3 k + \log_3 (k-9) = 2 + \log_3 18$ 이므로
 $\log_3 (k-9) + \log_3 k = \log_3 9 + \log_3 18$
 $\therefore k = 18$

0453 답 ④

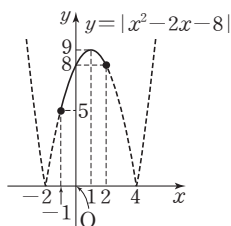
$x + 2y = 20$ 에서 $2y = 20 - x \quad (0 < x < 20)$
 $\therefore \log x + \log 2y = \log (x \times 2y) = \log x(20-x)$
 $= \log (-x^2 + 20x)$
 $f(x) = -x^2 + 20x$ 라 하면 $f(x) = -(x-10)^2 + 100$
 $0 < x < 20$ 에서 $f(0) = f(20) = 0, f(10) = 100$ 이므로
 $0 < f(x) \leq 100$
 이때 함수 $\log f(x)$ 의 밑이 1보다 크므로 함수 $\log f(x)$ 는
 $f(x) = 100$ 에서 최댓값 $\log 100 = 2$ 를 갖는다.

다른 풀이

$\log x + \log 2y = \log 2xy$ 이고 밑이 1보다 크므로
 $\log 2xy$ 는 xy 가 최대일 때 최댓값을 갖는다.
 이때 $x > 0, y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $x + 2y \geq 2\sqrt{2xy}$ (단, 등호는 $x = 2y$ 일 때 성립)
 또 $x + 2y = 20$ 이므로 $20 \geq 2\sqrt{2xy}, 10 \geq \sqrt{2xy}$
 $100 \geq 2xy \quad \therefore xy \leq 50$
 따라서 xy 의 최댓값은 50이므로 $\log 2xy$ 의 최댓값은
 $\log 100 = 2$

0454 답 2

$f(x) = |x^2 - 2x - 8|$ 이라 하면
 $f(x) = |(x-1)^2 - 9|$
 $-1 \leq x \leq 2$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프
 는 오른쪽 그림과 같으므로 $5 \leq f(x) \leq 9$
 이때 함수 $y = \log_3 f(x)$ 의 밑이 1보다 크
 므로 함수 $y = \log_3 f(x)$ 는 $f(x) = 9$ 에서
 최댓값 $\log_3 9 = 2$ 를 갖는다.



0455 답 8

$\log_{\frac{1}{2}} x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ 에서 $\log_{\frac{1}{2}} 2 \leq \log_{\frac{1}{2}} x \leq \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$
 $\therefore -1 \leq t \leq 1$
 이때 주어진 함수는 $y = 2t^2 + 4t = 2(t+1)^2 - 2$
 따라서 $-1 \leq t \leq 1$ 일 때 함수 $y = 2(t+1)^2 - 2$ 는 $t = 1$ 에서 최댓값 6,
 $t = -1$ 에서 최솟값 -2 를 가지므로 $M = 6, m = -2$
 $\therefore M - m = 8$

0456 답 ④

$y = \log_3 3x \times \log_{\frac{1}{3}} \frac{9}{x^2} = \log_3 3x \times \log_3 \frac{x^2}{9}$
 $= (\log_3 3 + \log_3 x)(\log_3 x^2 - \log_3 9)$
 $= (1 + \log_3 x)(2 \log_3 x - 2)$
 $= 2(\log_3 x)^2 - 2$
 $\log_3 x = t$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 27$ 에서 $\log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 27$
 $\therefore 0 \leq t \leq 3$
 이때 주어진 함수는 $y = 2t^2 - 2$
 따라서 $0 \leq t \leq 3$ 일 때 함수 $y = 2t^2 - 2$ 는 $t = 3$ 에서 최댓값 16, $t = 0$
 에서 최솟값 -2 를 가지므로 구하는 합은 $16 + (-2) = 14$

0457 답 ⑤

$y = \log_4 x \times \log_4 \frac{16}{x} + k$
 $= \log_4 x \times (\log_4 16 - \log_4 x) + k$
 $= \log_4 x \times (2 - \log_4 x) + k$
 $= -(\log_4 x)^2 + 2 \log_4 x + k$
 $\log_4 x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는
 $y = -t^2 + 2t + k = -(t-1)^2 + k + 1$
 따라서 함수 $y = -(t-1)^2 + k + 1$ 은 $t = 1$ 에서 최댓값 $k + 1$ 을 가지
 므로
 $k + 1 = 10 \quad \therefore k = 9$

0458 답 160

$x^{\log 3} = 3^{\log x}$ 이므로
 $y = 3^{\log x} \times x^{\log 3} - 3(3^{\log x} + x^{\log 3}) + 25$
 $= 3^{\log x} \times 3^{\log x} - 3(3^{\log x} + 3^{\log x}) + 25$
 $= (3^{\log x})^2 - 6 \times 3^{\log x} + 25$ ①
 $3^{\log x} = t$ 로 놓으면 주어진 함수는
 $y = t^2 - 6t + 25 = (t-3)^2 + 16$
 따라서 함수 $y = (t-3)^2 + 16$ 은 $t = 3$ 에서 최솟값 16을 가지므로
 $m = 16$ ②
 $3^{\log x} = 3$ 에서 $\log x = 1 \quad \therefore x = 10$
 $\therefore a = 10$ ③
 $\therefore am = 10 \times 16 = 160$ ④

채점 기준

① 로그의 성질을 이용하여 주어진 함수식을 간단히 하기	30 %
② $3^{\log x} = t$ 로 놓고 t 에 대한 함수의 최솟값을 이용하여 m 의 값 구하기	30 %
③ a 의 값 구하기	30 %
④ am 의 값 구하기	10 %

0459 답 ①

삼각형 ABC에서 $\angle A = 90^\circ$ 이므로

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \\ &= \frac{1}{2} \times 2 \log_2 x \times \log_4 \frac{16}{x} \\ &= \log_2 x \times (\log_4 16 - \log_4 x) \\ &= \log_2 x \times \left(2 - \frac{1}{2} \log_2 x\right) \\ &= -\frac{1}{2} (\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x \end{aligned}$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $1 < x < 16$ 에서

$$\log_2 1 < \log_2 x < \log_2 16$$

$$\therefore 0 < t < 4$$

이때 $S(x)$ 에서

$$y = -\frac{1}{2}t^2 + 2t = -\frac{1}{2}(t-2)^2 + 2$$

따라서 $0 < t < 4$ 일 때 함수 $y = -\frac{1}{2}(t-2)^2 + 2$ 는 $t=2$ 에서 최댓값

2를 가지므로 $M=2$

$$t=2 \text{에서 } \log_2 x = 2 \quad \therefore x = 2^2 = 4$$

$$\therefore a=4$$

$$\therefore a+M=4+2=6$$

0460 답 $\frac{1}{81}$

$y = x^{-4+\log_3 x}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log_3 y &= \log_3 x^{-4+\log_3 x} \\ &= (-4 + \log_3 x) \log_3 x \\ &= (\log_3 x)^2 - 4 \log_3 x \end{aligned}$$

$\log_3 x = t$ 로 놓으면 $1 \leq x \leq 27$ 에서

$$\log_3 1 \leq \log_3 x \leq \log_3 27 \quad \therefore 0 \leq t \leq 3$$

이때 주어진 함수는 $\log_3 y = t^2 - 4t = (t-2)^2 - 4$

따라서 $0 \leq t \leq 3$ 일 때 $t=0$ 에서 최댓값 0, $t=2$ 에서 최솟값 -4를 가지므로

$$\log_3 y = 0 \text{에서 } y=1$$

$$\log_3 y = -4 \text{에서 } y = 3^{-4} = \frac{1}{81}$$

$$\text{즉, } M=1, m=\frac{1}{81} \text{이므로 } Mm=\frac{1}{81}$$

0461 답 1000

$y = \frac{10x^4}{x^{\log x}}$ 에서 $y = 10x^{4-\log x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\begin{aligned} \log y &= \log 10x^{4-\log x} \\ &= \log 10 + \log x^{4-\log x} \\ &= 1 + (4 - \log x) \log x \\ &= -(\log x)^2 + 4 \log x + 1 \end{aligned}$$

$\log x = t$ 로 놓으면 $\log y = -t^2 + 4t + 1 = -(t-2)^2 + 5$

따라서 $t=2$ 에서 최댓값 5를 가지므로

$$\log x = 2 \text{에서 } x = 10^2 \quad \therefore a = 10^2$$

$$\log y = 5 \text{에서 } y = 10^5 \quad \therefore M = 10^5$$

$$\therefore \frac{M}{a} = \frac{10^5}{10^2} = 10^3 = 1000$$

0462 답 ③

$$\begin{aligned} y &= \log x - \log_x \frac{1}{10000} = \log x - \log_x 10^{-4} \\ &= \log x + 4 \log_x 10 = \log x + \frac{4}{\log x} \end{aligned}$$

이때 $x > 1$ 에서 $\log x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\log x + \frac{4}{\log x} \geq 2\sqrt{\log x \times \frac{4}{\log x}} = 2 \times 2 = 4$$

(단, 등호는 $\log x = 2$ 일 때 성립)

따라서 구하는 최솟값은 4이다.

0463 답 $\frac{5}{3}$

$$\frac{1}{9} < x < 4 \text{에서 } 9x > 1, \frac{4}{x} > 1 \text{이므로 } \log_6 9x > 0, \log_6 \frac{4}{x} > 0$$

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\log_6 9x + \log_6 \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{\log_6 9x \times \log_6 \frac{4}{x}}$$

$$\text{이때 } \log_6 9x + \log_6 \frac{4}{x} = \log_6 \left(9x \times \frac{4}{x}\right) = \log_6 36 = 2 \text{이므로}$$

$$2 \geq 2\sqrt{\log_6 9x \times \log_6 \frac{4}{x}}, \sqrt{\log_6 9x \times \log_6 \frac{4}{x}} \leq 1$$

$$\therefore 0 < \log_6 9x \times \log_6 \frac{4}{x} \leq 1$$

즉, $\log_6 9x \times \log_6 \frac{4}{x}$ 의 최댓값은 1이므로 $M=1$

한편 등호는 $\log_6 9x = \log_6 \frac{4}{x}$, 즉 $9x = \frac{4}{x}$ 일 때 성립하므로

$$x^2 = \frac{4}{9} \quad \therefore x = \frac{2}{3} \left(\because \frac{1}{9} < x < 4 \right) \quad \therefore a = \frac{2}{3}$$

$$\therefore a+M = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

0464 답 $x = \frac{5}{3}$

$$\text{진수의 조건에서 } x+1 > 0, 3x-2 > 0 \quad \therefore x > \frac{2}{3} \quad \dots\dots ㉠$$

$$\log_8 (x+1) = 1 - \frac{1}{3} \log_2 (3x-2) \text{에서}$$

$$\frac{1}{3} \log_2 (x+1) + \frac{1}{3} \log_2 (3x-2) = 1$$

$$\frac{1}{3} \{\log_2 (x+1)(3x-2)\} = 1, \log_2 (3x^2+x-2) = 3$$

따라서 $3x^2+x-2=2^3=8$ 이므로 $3x^2+x-10=0$

$$(x+2)(3x-5)=0 \quad \therefore x=-2 \text{ 또는 } x=\frac{5}{3}$$

$$\text{이때 ㉠에 의하여 } x = \frac{5}{3}$$

0465 답 ②

$$\text{진수의 조건에서 } x-1 > 0, 4-x > 0 \quad \therefore 1 < x < 4 \quad \dots\dots ㉠$$

$$\log_2 (x-1) - 1 = \log_4 (4-x) \text{에서}$$

$$\log_4 (x-1)^2 = \log_4 (4-x) + 1$$

$$\therefore \log_4 (x-1)^2 = \log_4 4(4-x)$$

즉, $(x-1)^2 = 4(4-x)$ 이므로 $x^2+2x-15=0$

$$(x+5)(x-3)=0 \quad \therefore x=-5 \text{ 또는 } x=3$$

$$\text{이때 ㉠에 의하여 } x=3$$

따라서 $a=3$ 이므로 $a^2=9$

0466 답 ②

진수의 조건에서

$$|x-1| > 0 \quad \therefore x \neq 1 \quad \dots\dots ㉠$$

$$2\log_2 |x-1| = 1 - \log_2 \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$2\log_2 |x-1| = 1 - (-1)$$

$$\log_2 |x-1| = 1$$

$$\log_2 |x-1| = \log_2 2$$

$$x-1 = -2 \text{ 또는 } x-1 = 2$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

이때 ㉠에 의하여 $x = -1$ 또는 $x = 3$

따라서 모든 근의 곱은

$$-1 \times 3 = -3$$

0467 답 $-\frac{2}{3}$

밑과 진수의 조건에서

$$x^2 - 2x + 1 > 0, x^2 - 2x + 1 \neq 1, 2 - 3x > 0$$

$$\therefore x < 0 \text{ 또는 } 0 < x < \frac{2}{3} \quad \dots\dots ㉠$$

(i) $x^2 - 2x + 1 = 4$ 일 때,

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -1 \text{ 또는 } x = 3$$

이때 ㉠에 의하여 $x = -1$

(ii) $2 - 3x = 1$ 일 때,

$$3x = 1 \quad \therefore x = \frac{1}{3}$$

(i), (ii)에서 $x = -1$ 또는 $x = \frac{1}{3}$

따라서 모든 근의 합은

$$-1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

..... ㉠

..... ㉡

..... ㉢

채점 기준

㉠ 밑과 진수의 조건에서 x 의 값의 범위 구하기	30 %
㉡ 방정식 풀기	60 %
㉢ 모든 근의 합 구하기	10 %

0468 답 ④

진수의 조건에서 $x > 0, y > 0 \quad \dots\dots ㉠$

$$\log_2 \{\log(x^2 + y^2)\} = 0 \text{에서}$$

$$\log(x^2 + y^2) = 1$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 10$$

$$\log_3 \sqrt{x} + \log_3 y = \frac{1}{2} \text{에서 } \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{2} \log_3 y = \frac{1}{2}$$

$$\log_3 x + \log_3 y = 1$$

$$\log_3 xy = 1 \quad \therefore xy = 3$$

즉, 주어진 연립방정식은 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ xy = 3 \end{cases}$ 이므로

$$\begin{aligned} (x+y)^2 &= x^2 + y^2 + 2xy \\ &= 10 + 2 \times 3 = 16 \end{aligned}$$

㉠에 의하여 $x + y = 4$

$$\therefore \alpha + \beta = 4$$

0469 답 ④

$$\log_2 x^2 + \log_2 y^2 = \log_2 (x+y+3)^2 \text{에서}$$

$$\log_2 x^2 y^2 = \log_2 (x+y+3)^2$$

$$(xy)^2 = (x+y+3)^2$$

이때 x, y 는 양의 정수이므로

$$xy = x+y+3 \quad \therefore (x-1)(y-1) = 4$$

(i) $x-1=1, y-1=4$ 일 때, $x=2, y=5$

(ii) $x-1=2, y-1=2$ 일 때, $x=3, y=3$

(iii) $x-1=4, y-1=1$ 일 때, $x=5, y=2$

(i)~(iii)에서 $x+2y$ 의 최댓값은 12이다.

0470 답 ④

진수의 조건에서 $x > 0, x^6 > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots ㉠$

$$(\log_2 x)^2 - \log_4 x^6 + 2 = 0 \text{에서}$$

$$(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 3t + 2 = 0, (t-1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 1 \text{ 또는 } t = 2$$

즉, $\log_2 x = 1$ 또는 $\log_2 x = 2$ 이므로

$$x = 2 \text{ 또는 } x = 2^2 = 4$$

이때 ㉠에 의하여 $x = 2$ 또는 $x = 4$

$$\text{따라서 } \alpha\beta = 2 \times 4 = 8$$

0471 답 32

진수의 조건에서 $\frac{x}{2} > 0, 4x > 0 \quad \therefore x > 0 \quad \dots\dots ㉠$

$$\left(\log_2 \frac{x}{2}\right)(\log_2 4x) = 4 \text{에서}$$

$$(\log_2 x - \log_2 2)(\log_2 4 + \log_2 x) = 4$$

$$(\log_2 x - 1)(2 + \log_2 x) = 4$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 + \log_2 x - 6 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + t - 6 = 0, (t+3)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = -3 \text{ 또는 } t = 2$$

즉, $\log_2 x = -3$ 또는 $\log_2 x = 2$ 이므로

$$x = 2^{-3} = \frac{1}{8} \text{ 또는 } x = 2^2 = 4$$

이때 ㉠에 의하여 $x = \frac{1}{8}$ 또는 $x = 4$

$$\therefore 64\alpha\beta = 64 \times \frac{1}{8} \times 4 = 32$$

다른 풀이 이차방정식의 근과 계수의 관계 이용하기

$$\left(\log_2 \frac{x}{2}\right)(\log_2 4x) = 4 \text{에서 } (\log_2 x)^2 + \log_2 x - 6 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + t - 6 = 0 \quad \dots\dots ㉠$$

주어진 방정식의 두 실근이 α, β 이므로 이차방정식 ㉠의 두 근은

$$\log_2 \alpha, \log_2 \beta$$

㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = -1$$

$$\log_2 \alpha\beta = -1 \quad \therefore \alpha\beta = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 64\alpha\beta = 64 \times \frac{1}{2} = 32$$

0472 답 ②

밑과 진수의 조건에서 $x^2 > 0$, $x > 0$, $x \neq 1$

$\therefore x > 0$, $x \neq 1$ ㉠

$\log_9 x^2 + 3 \log_x 3 + 4 = 0$ 에서 $\log_3 x + \frac{3}{\log_3 x} + 4 = 0$

$\log_3 x = t$ ($t \neq 0$)로 놓으면

$$t + \frac{3}{t} + 4 = 0, \quad t^2 + 4t + 3 = 0$$

$$(t+3)(t+1) = 0 \quad \therefore t = -3 \text{ 또는 } t = -1$$

즉, $\log_3 x = -3$ 또는 $\log_3 x = -1$ 이므로

$$x = 3^{-3} = \frac{1}{27} \text{ 또는 } x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

이때 ㉠에 의하여 $x = \frac{1}{27}$ 또는 $x = \frac{1}{3}$

따라서 $\alpha < \beta$ 이므로 $\alpha = \frac{1}{27}$, $\beta = \frac{1}{3}$ $\therefore \log_\alpha \beta = \log_{\frac{1}{27}} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

0473 답 ④

진수의 조건에서 $x > 0$, $y > 0$ ㉠

$\log_3 x = X$, $\log_2 y = Y$ 로 놓으면

$$\begin{cases} X+Y=4 \\ XY=3 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $X=1$, $Y=3$ 또는 $X=3$, $Y=1$

즉, $\log_3 x = 1$, $\log_2 y = 3$ 또는 $\log_3 x = 3$, $\log_2 y = 1$ 이므로

$$x=3, y=2^3=8 \text{ 또는 } x=3^3=27, y=2$$

이때 ㉠에 의하여 $x=3$, $y=8$ 또는 $x=27$, $y=2$

따라서 $\alpha < \beta$ 이므로 $\alpha=3$, $\beta=8$ $\therefore \beta - \alpha = 5$

0474 답 8

$2 \log_x y - 2 \log_y x = 3$ 에서

$$2 \log_x y - \frac{2}{\log_x y} = 3$$

$\log_x y = t$ 로 놓으면 $x > 1$, $y > 1$ 에서 $t > 0$ 이고

$$2t - \frac{2}{t} = 3, \quad 2t^2 - 3t - 2 = 0$$

$$(2t+1)(t-2) = 0 \quad \therefore t = 2 \quad (\because t > 0)$$

즉, $\log_x y = 2$ 이므로 $y = x^2$

따라서 $1 < x < 100$, $1 < y < 100$ 이므로 조건을 만족시키는 x , y 의 순서쌍 (x, y) 는 $(2, 2^2)$, $(3, 3^2)$, $(4, 4^2)$, ..., $(9, 9^2)$ 의 8개이다.

0475 답 ④

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$x^{\log_3 x} = 4x$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 x^{\log_3 x} = \log_2 4x, \quad (\log_2 x)^2 = \log_2 4 + \log_2 x$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 - \log_2 x - 2 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $t^2 - t - 2 = 0$, $(t+1)(t-2) = 0$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 2$$

즉, $\log_2 x = -1$ 또는 $\log_2 x = 2$ 이므로

$$x = 2^{-1} = \frac{1}{2} \text{ 또는 } x = 2^2 = 4$$

이때 ㉠에 의하여 $x = \frac{1}{2}$ 또는 $x = 4$

$$\therefore \log_\alpha \beta + \log_\beta \alpha = \log_{\frac{1}{2}} 4 + \log_4 \frac{1}{2} = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$$

0476 답 $x = \frac{1}{15}$

진수의 조건에서 $3x > 0$, $5x > 0$ $\therefore x > 0$ ㉠

$3^{\log 3x} = 5^{\log 5x}$ 의 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 3^{\log 3x} = \log 5^{\log 5x}$$

$$\log 3x \times \log 3 = \log 5x \times \log 5$$

$$(\log 3 + \log x) \log 3 = (\log 5 + \log x) \log 5$$

$$(\log 5 - \log 3) \log x = (\log 3)^2 - (\log 5)^2$$

$$\therefore \log x = -\frac{(\log 5 - \log 3)(\log 5 + \log 3)}{\log 5 - \log 3}$$

$$= -(\log 5 + \log 3)$$

$$= -\log 15 = \log \frac{1}{15}$$

이때 ㉠에 의하여 $x = \frac{1}{15}$

0477 답 ④

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$x^{\log_3 2} = 2^{\log_3 x}$ 이므로

$$2^{\log_3 x} \times x^{\log_3 2} - 6 \times 2^{\log_3 x} - 16 = 0$$

$$(2^{\log_3 x})^2 - 6 \times 2^{\log_3 x} - 16 = 0$$

$2^{\log_3 x} = t$ ($t > 0$)로 놓으면

$$t^2 - 6t - 16 = 0, \quad (t+2)(t-8) = 0$$

$$\therefore t = 8 \quad (\because t > 0)$$

즉, $2^{\log_3 x} = 8$ 이므로

$$2^{\log_3 x} = 2^3, \quad \log_3 x = 3 \quad \therefore x = 3^3 = 27$$

이때 ㉠에 의하여 $x = 27$

0478 답 9

$(\log_3 x)^2 - 2 \log_3 9x = 0$ 에서

$$(\log_3 x)^2 - 2(\log_3 9 + \log_3 x) = 0$$

$$\therefore (\log_3 x)^2 - 2 \log_3 x - 4 = 0$$

$$\log_3 x = t$$
로 놓으면 $t^2 - 2t - 4 = 0$ ㉠

주어진 방정식의 두 근을 α , β 라 하면 이차방정식 ㉠의 두 근은

$\log_3 \alpha$, $\log_3 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_3 \alpha + \log_3 \beta = 2, \quad \log_3 \alpha \beta = 2 \quad \therefore \alpha \beta = 3^2 = 9$$

0479 답 74

$(\log_2 x)^2 - 8 \log_2 x - 5 = 0$ 에서 $\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 - 8t - 5 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이 이차방정식의 두 근은 $\log_2 \alpha$, $\log_2 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = 8, \quad \log_2 \alpha \times \log_2 \beta = -5 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\log_2 \alpha)^2 + (\log_2 \beta)^2 &= (\log_2 \alpha + \log_2 \beta)^2 - 2(\log_2 \alpha \times \log_2 \beta) \\ &= 8^2 - 2 \times (-5) = 74 \quad \dots\dots \textcircled{iii} \end{aligned}$$

채점 기준

① $\log_2 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 이차방정식 세우기	20 %
② 이차방정식의 근과 계수의 관계를 이용하여 $\log_2 \alpha + \log_2 \beta$, $\log_2 \alpha \times \log_2 \beta$ 의 값 구하기	40 %
③ $(\log_2 \alpha)^2 + (\log_2 \beta)^2$ 의 값 구하기	40 %

0480 [답] ⑤

$$\log_5 x + a \log_x 5 = a + 1 \text{에서 } \log_5 x + \frac{a}{\log_5 x} - (a+1) = 0$$

$$\log_5 x = t (t \neq 0) \text{로 놓으면 } t + \frac{a}{t} - (a+1) = 0$$

$$\therefore t^2 - (a+1)t + a = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식 ⑦의 두 근은 $\log_5 \alpha, \log_5 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_5 \alpha + \log_5 \beta = a + 1, \log_5 \alpha \beta = a + 1$$

이때 $\alpha \beta = 125$ 이므로

$$\log_5 125 = a + 1, 3 = a + 1$$

$$\therefore a = 2$$

0481 [답] ①

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-\log_2 a)^2 - 4(3 + \log_2 a) = 0$$

$$\therefore (\log_2 a)^2 - 4\log_2 a - 12 = 0$$

$$\log_2 a = t \text{로 놓으면 } t^2 - 4t - 12 = 0$$

$$(t+2)(t-6) = 0 \quad \therefore t = -2 \text{ 또는 } t = 6$$

즉, $\log_2 a = -2$ 또는 $\log_2 a = 6$ 이므로

$$a = 2^{-2} = \frac{1}{4} \text{ 또는 } a = 2^6 = 64$$

따라서 모든 양수 a 의 값의 곱은 $\frac{1}{4} \times 64 = 16$

0482 [답] ①

진수의 조건에서 $-x+3>0, x+9>0$

$$\therefore -9 < x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(-x+3) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x+9) \text{에서}$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(-x+3) \leq \log_{\frac{1}{4}}(x+9)^2$$

$$\log_{\frac{1}{4}}(-x+3) \leq \log_{\frac{1}{4}}(x^2+18x+81)$$

밑이 1보다 작으므로 $-x+3 \geq x^2+18x+81$

$$x^2+19x+78 \leq 0, (x+13)(x+6) \leq 0$$

$$\therefore -13 \leq x \leq -6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧의 공통부분은 $-9 < x \leq -6$

따라서 $\alpha = -9, \beta = -6$ 이므로 $\alpha + \beta = -15$

0483 [답] $1 < x < 2$

$$4^{-x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{4x} \text{에서 } 2^{-2x^2} > 2^{-4x}$$

밑이 1보다 크므로 $-2x^2 > -4x$

$$2x^2 - 4x < 0, 2x(x-2) < 0$$

$$\therefore 0 < x < 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$\log_2(x^2-2x+3) < \log_2 2x$ 의 진수의 조건에서

$$x^2-2x+3 > 0, 2x > 0$$

$$x^2-2x+3 = (x-1)^2+2 > 0 \text{이므로}$$

$$x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$\log_2(x^2-2x+3) < \log_2 2x$ 에서 밑이 1보다 크므로

$$x^2-2x+3 < 2x$$

$$x^2-4x+3 < 0, (x-1)(x-3) < 0$$

$$\therefore 1 < x < 3 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

⑦~⑨의 공통부분은 $1 < x < 2$

0484 [답] ①

진수의 조건에서 $\frac{2}{3}x+k>0, x-2>0$

$$\therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{2}{3}x+k\right) \leq \log_{\frac{1}{7}}(x-2)$ 에서 밑이 1보다 작으므로

$$\frac{2}{3}x+k \geq x-2$$

$$\frac{1}{3}x \leq k+2$$

$$\therefore x \leq 3k+6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧의 공통부분은 $2 < x \leq 3k+6$

이 부등식을 만족시키는 정수 x 는 7개이므로

$$9 \leq 3k+6 < 10$$

$$3 \leq 3k < 4 \quad \therefore 1 \leq k < \frac{4}{3}$$

따라서 자연수 k 의 값은 1이다.

0485 [답] ⑤

진수의 조건에서 $6x+1>0, x^2+9>0$

$$\therefore x > -\frac{1}{6} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

(i) $0 < a < 1$ 일 때,

$$6x+1 > x^2+9, x^2-6x+8 < 0$$

$$(x-2)(x-4) < 0$$

$$\therefore 2 < x < 4 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧의 공통부분은 $2 < x < 4$

(ii) $a > 1$ 일 때,

$$6x+1 < x^2+9, x^2-6x+8 > 0$$

$$(x-2)(x-4) > 0$$

$$\therefore x < 2 \text{ 또는 } x > 4 \quad \dots\dots \textcircled{9}$$

⑦, ⑨의 공통부분은 $-\frac{1}{6} < x < 2$ 또는 $x > 4$

이때 주어진 부등식의 해가 $2 < x < 4$ 이므로

$$0 < a < 1$$

따라서 a 의 값이 될 수 없는 것은 ⑤이다.

0486 [답] 31

진수의 조건에서 $x>0, \log_5 x>0, \log_8(\log_5 x)>0$

$$\log_8(\log_5 x) > \log_8 1 \text{에서 } \log_5 x > 1$$

$$\log_5 x > \log_5 5 \quad \therefore x > 5 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\log_3\{\log_8(\log_5 x)\} \leq -1 \text{에서}$$

$$\log_3\{\log_8(\log_5 x)\} \leq \log_3 \frac{1}{3}$$

밑이 1보다 크므로 $\log_8(\log_5 x) \leq \frac{1}{3}$

$$\log_8(\log_5 x) \leq \log_8 2$$

밑이 1보다 크므로 $\log_5 x \leq 2$

$$\log_5 x \leq \log_5 25$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } x \leq 25 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

⑦, ⑧의 공통부분은 $5 < x \leq 25$

따라서 정수 x 의 최댓값은 25, 최솟값은 6이므로 구하는 합은

$$25+6=31$$

0487 답 4

진수의 조건에서 $|x-1| > 0$, $x+2 > 0$

$$x \neq 1, x > -2$$

$$\therefore -2 < x < 1 \text{ 또는 } x > 1$$

(i) $-2 < x < 1$ 일 때,

$$\log(-x+1) + \log(x+2) \leq 1 \text{ 에서}$$

$$\log(-x+1)(x+2) \leq \log 10$$

밑이 1보다 크므로

$$-x^2 - x + 2 \leq 10, x^2 + x + 8 \geq 0$$

즉, 모든 실수 x 에 대하여 부등식이 성립하므로

$$-2 < x < 1$$

(ii) $x > 1$ 일 때,

$$\log(x-1) + \log(x+2) \leq 1 \text{ 에서}$$

$$\log(x-1)(x+2) \leq \log 10$$

밑이 1보다 크므로

$$x^2 + x - 2 \leq 10, x^2 + x - 12 \leq 0$$

$$(x+4)(x-3) \leq 0 \quad \therefore -4 \leq x \leq 3$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x \leq 3$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는

$$-2 < x < 1 \text{ 또는 } 1 < x \leq 3$$

따라서 정수 x 의 값은 $-1, 0, 2, 3$ 이므로 구하는 합은

$$-1 + 0 + 2 + 3 = 4$$

0488 답 4

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{9} \times \log_3 \frac{x}{27} \geq 0 \text{ 에서}$$

$$(\log_{\frac{1}{3}} x - \log_{\frac{1}{3}} 9)(\log_3 x - \log_3 27) \geq 0$$

$$(-\log_3 x + 2)(\log_3 x - 3) \geq 0$$

$$\therefore (\log_3 x)^2 - 5\log_3 x + 6 \leq 0$$

$$\log_3 x = t \text{ 로 놓으면 } t^2 - 5t + 6 \leq 0$$

$$(t-2)(t-3) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq t \leq 3$$

즉, $2 \leq \log_3 x \leq 3$ 이므로 $\log_3 3^2 \leq \log_3 x \leq \log_3 3^3$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } 9 \leq x \leq 27 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $9 \leq x \leq 27$

따라서 $\alpha=9, \beta=27$ 이므로 $\frac{\beta}{\alpha}=3$

0489 답 8

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$\log_2 x \times \log_2 16x \leq 21 \text{ 에서}$$

$$\log_2 x(4 + \log_2 x) \leq 21$$

$$(\log_2 x)^2 + 4\log_2 x - 21 \leq 0$$

$$\log_2 x = t \text{ 로 놓으면 } t^2 + 4t - 21 \leq 0$$

$$(t+7)(t-3) \leq 0 \quad \therefore -7 \leq t \leq 3$$

즉, $-7 \leq \log_2 x \leq 3$ 이므로 $\log_2 2^{-7} \leq \log_2 x \leq \log_2 2^3$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{128} \leq x \leq 8 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분은 $\frac{1}{128} \leq x \leq 8$

따라서 자연수 x 의 최댓값은 8이다.

0490 답 5

$(\log_{\frac{1}{5}} x)^2 + a\log_{\frac{1}{5}} x + b < 0$ 에서 $\log_{\frac{1}{5}} x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + at + b < 0 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

주어진 부등식의 해가 $5 < x < 25$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{5}} 25 < \log_{\frac{1}{5}} x < \log_{\frac{1}{5}} 5 \text{ 에서 } -2 < \log_{\frac{1}{5}} x < -1$$

$$\therefore -2 < t < -1$$

t^2 의 계수가 1이고 해가 $-2 < t < -1$ 인 이차부등식은

$$(t+2)(t+1) < 0$$

$$\therefore t^2 + 3t + 2 < 0$$

이 부등식이 ㉠과 일치하므로 $a=3, b=2$

$$\therefore a+b=5$$

0491 답 3

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$x^{\log_5 25x} \leq 25x$ 의 양변에 밑이 5인 로그를 취하면

$$\log_5 x^{\log_5 25x} \leq \log_5 25x$$

$$\log_5 x(\log_5 25 + \log_5 x) \leq \log_5 25 + \log_5 x$$

$$\therefore (\log_5 x)^2 + \log_5 x - 2 \leq 0$$

$$\log_5 x = t \text{ 로 놓으면 } t^2 + t - 2 \leq 0$$

$$(t+2)(t-1) \leq 0 \quad \therefore -2 \leq t \leq 1$$

즉, $-2 \leq \log_5 x \leq 1$ 이므로 $\log_5 5^{-2} \leq \log_5 x \leq \log_5 5$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{25} \leq x \leq 5 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분은

$$\frac{1}{25} \leq x \leq 5$$

따라서 정수 x 는 1, 2, 3, 4, 5의 5개이다.

0492 답 $0 < x < \frac{1}{10}$ 또는 $x > \frac{\sqrt{10}}{10}$

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$x^{\log_{0.1} x} < \sqrt{10x^3}$ 의 양변에 밑이 0.1인 로그를 취하면

$$\log_{0.1} x^{\log_{0.1} x} > \log_{0.1} \sqrt{10x^3}$$

$$(\log_{0.1} x)^2 > \frac{1}{2}(\log_{0.1} 10 + 3\log_{0.1} x)$$

$$(\log_{0.1} x)^2 > \frac{3}{2}\log_{0.1} x - \frac{1}{2}$$

$$\therefore (\log_{0.1} x)^2 - \frac{3}{2}\log_{0.1} x + \frac{1}{2} > 0$$

$$\log_{0.1} x = t \text{ 로 놓으면}$$

$$t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2} > 0$$

$$2t^2 - 3t + 1 > 0, (2t-1)(t-1) > 0$$

$$\therefore t < \frac{1}{2} \text{ 또는 } t > 1$$

즉, $\log_{0.1} x < \frac{1}{2}$ 또는 $\log_{0.1} x > 1$ 이므로

$$\log_{0.1} x < \log_{0.1} 0.1^{\frac{1}{2}} \text{ 또는 } \log_{0.1} x > \log_{0.1} 0.1$$

밑이 1보다 작으므로

$$x > \frac{\sqrt{10}}{10} \text{ 또는 } x < \frac{1}{10} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡의 공통부분은

$$0 < x < \frac{1}{10} \text{ 또는 } x > \frac{\sqrt{10}}{10}$$

0493 [답] ②

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠
 $x^{\log 2} = 2^{\log x}$ 이므로 $2^{\log x} \times x^{\log 2} - \frac{3}{2}(2^{\log x} + x^{\log 2}) + 2 < 0$ 에서
 $(2^{\log x})^2 - 3 \times 2^{\log x} + 2 < 0$
 $2^{\log x} = t (t > 0)$ 로 놓으면 $t^2 - 3t + 2 < 0$
 $(t-1)(t-2) < 0 \quad \therefore 1 < t < 2$
 즉, $1 < 2^{\log x} < 2$ 이므로 $2^0 < 2^{\log x} < 2^1$
 밑이 1보다 크므로 $0 < \log x < 1$, $\log 1 < \log x < \log 10$
 밑이 1보다 크므로 $1 < x < 10$ ㉡
 ㉠, ㉡의 공통부분은 $1 < x < 10$
 따라서 정수 x 의 최댓값은 9, 최솟값은 2이므로 구하는 곱은
 $9 \times 2 = 18$

0494 [답] ②

$(\log_4 x)^2 + \log_4 16x^2 - \log_2 k \geq 0$ 에서
 $(\log_4 x)^2 + 2\log_4 x + 2 - \log_2 k \geq 0$
 $\log_4 x = t$ 로 놓으면 $t^2 + 2t + 2 - \log_2 k \geq 0$
 이 부등식이 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식
 $t^2 + 2t + 2 - \log_2 k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = 1 - (2 - \log_2 k) \leq 0$, $\log_2 k \leq 1 \quad \therefore k \leq 2$
 이때 $k > 0$ 이므로 $0 < k \leq 2$
 따라서 정수 k 의 값은 1, 2이므로 구하는 합은 $1 + 2 = 3$

0495 [답] 6

모든 실수 x 에 대하여 이차부등식 $3x^2 - 2(\log_2 n)x + \log_2 n > 0$ 이
 성립해야 하므로 이차방정식 $3x^2 - 2(\log_2 n)x + \log_2 n = 0$ 의 판별
 식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (-\log_2 n)^2 - 3\log_2 n < 0$
 $\log_2 n = t$ 로 놓으면 $t^2 - 3t < 0$, $t(t-3) < 0 \quad \therefore 0 < t < 3$
 즉, $0 < \log_2 n < 3$ 이므로 $\log_2 2^0 < \log_2 n < \log_2 2^3$
 밑이 1보다 크므로 $1 < n < 8$
 따라서 자연수 n 은 2, 3, 4, 5, 6, 7의 6개이다.

0496 [답] $a \geq 10$

이차방정식 $(\log a + 3)x^2 - 2(\log a + 1)x + 1 = 0$ 이 실근을 가져야
 하므로 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (-\log a - 1)^2 - (\log a + 3) \geq 0$
 $\therefore (\log a)^2 + \log a - 2 \geq 0$ ㉠
 $\log a = t$ 로 놓으면 $t^2 + t - 2 \geq 0$
 $(t+2)(t-1) \geq 0 \quad \therefore t \leq -2$ 또는 $t \geq 1$ ㉡
 즉, $\log a \leq -2$ 또는 $\log a \geq 1$ 이므로
 $\log a \leq \log 10^{-2}$ 또는 $\log a \geq \log 10 \quad \therefore a \leq \frac{1}{100}$ 또는 $a \geq 10$
 이때 $a > 1$ 이므로 $a \geq 10$ ㉢

채점 기준

㉠ 주어진 조건을 이용하여 로그부등식 세우기	30 %
㉡ $\log a = t$ 로 놓고 t 에 대한 부등식 풀기	30 %
㉢ 양수 a 의 값의 범위 구하기	40 %

0497 [답] ①

$x^{\log_3 x} \geq (9x^2)^k$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면
 $\log_3 x^{\log_3 x} \geq \log_3 (9x^2)^k$, $(\log_3 x)^2 \geq k(2 + 2\log_3 x)$
 $\therefore (\log_3 x)^2 - 2k\log_3 x - 2k \geq 0$
 $\log_3 x = t$ 로 놓으면
 $t^2 - 2kt - 2k \geq 0$
 이 부등식이 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식
 $t^2 - 2kt - 2k = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (-k)^2 + 2k \leq 0$
 $k^2 + 2k \leq 0$, $k(k+2) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq k \leq 0$
 따라서 $a = -2$, $\beta = 0$ 이므로
 $\alpha + \beta = -2$

0498 [답] 15개월

영업을 시작한 달의 매출액을 a 원이라 하면 n 개월 후의 매출액은
 $a(1+0.05)^n = 1.05^n a$ (원)
 n 개월이 지난 후의 매출액이 영업을 시작한 달의 매출액의 2배가 된
 다고 하면
 $1.05^n a = 2a$, $1.05^n = 2$
 양변에 상용로그를 취하면
 $\log 1.05^n = \log 2$, $n \log 1.05 = \log 2$
 $n \times 0.02 = 0.3 \quad \therefore n = 15$
 따라서 영업을 시작한 달의 매출액의 2배가 되는 것은 영업을 시작한
 지 15개월 후이다.

0499 [답] ④

$t = 30$, $C = 2$ 이므로
 $\log 8 = 1 - 30k$
 $30k = 1 - \log 8$, $30k = \log \frac{5}{4}$
 $\therefore k = \frac{1}{30} \log \frac{5}{4}$
 $t = 60$, $C = a$ 이므로
 $\log(10-a) = 1 - 60 \times \frac{1}{30} \log \frac{5}{4}$
 $\log(10-a) = \log 10 - \log \frac{25}{16}$
 $\log(10-a) = \log \frac{32}{5}$
 $10-a = \frac{32}{5} \quad \therefore a = \frac{18}{5} = 3.6$

0500 [답] ④

골동품의 현재 가격을 a 원이라 하면 n 년 후의 가격은
 $a(1+0.11)^n = 1.11^n a$ (원)
 n 년 후의 가격이 현재 가격의 8배 이상이 된다고 하면
 $1.11^n a \geq 8a$, $1.11^n \geq 8$
 양변에 상용로그를 취하면 $n \log 1.11 \geq \log 8$
 $n \times 0.045 \geq 0.9 \quad \therefore n \geq 20$
 따라서 골동품의 가격이 처음으로 현재 가격의 8배 이상이 되는 것은
 20년 후이다.

0501 답 $\frac{1}{10000}$ 기압 이상 $\frac{1}{100}$ 기압 이하

평균 해수면에서 높이가 9960 m 인 곳의 기압이 $\frac{1}{1000}$ 기압이므로

$$9.96 = k \log \frac{1}{1000}$$

$$9.96 = -3k$$

$$\therefore k = -3.32$$

평균 해수면에서 높이가 6640 m 이상 13280 m 이하일 때의 기압을 x 기압이라 하면

$$6.64 \leq -3.32 \log x \leq 13.28$$

$$-4 \leq \log x \leq -2$$

$$10^{-4} \leq x \leq 10^{-2}$$

$$\therefore \frac{1}{10000} \leq x \leq \frac{1}{100}$$

따라서 평균 해수면에서 높이가 6640 m 이상 13280 m 이하일 때의 기압의 범위는 $\frac{1}{10000}$ 기압 이상 $\frac{1}{100}$ 기압 이하이다.

0502 답 7

처음 미세 먼지 농도를 $a \mu\text{m}$ 라 하면 공기 정화 식물을 1개씩 추가하여 n 개 두었을 때의 미세 먼지 농도는

$$a(1-0.1)^n = 0.9^n a (\mu\text{m})$$

공기 정화 식물을 n 개째 두었을 때의 미세 먼지 농도가 처음의 $\frac{1}{2}$ 배 이하로 낮아진다고 하면

$$0.9^n a \leq \frac{1}{2} a, \quad 0.9^n \leq \frac{1}{2}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 0.9^n \leq \log \frac{1}{2}$$

$$n \log 0.9 \leq -\log 2$$

$$n(2 \log 3 - 1) \leq -\log 2$$

$$n(2 \times 0.4771 - 1) \leq -0.3010$$

$$-0.0458n \leq -0.3010$$

$$\therefore n \geq 6.5 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 7이다.

AB 유형 점검

78~80쪽

0503 답 2

$$f(m) = 2 \text{에서 } \log_a m = 2$$

$$f(n) = 3 \text{에서 } \log_a n = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{m^4}{n^2}\right) &= \log_a \frac{m^4}{n^2} = 4 \log_a m - 2 \log_a n \\ &= 4 \times 2 - 2 \times 3 = 2 \end{aligned}$$

0504 답 ③

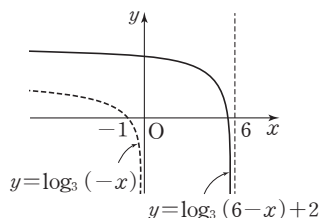
$y = \log_3(6-x) + 2 = \log_3\{-(x-6)\} + 2$ 이므로 함수

$y = \log_3(-x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 6만큼, y 축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

이때 함수 $y = \log_3(-x)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 함수 $y = \log_3(6-x) + 2$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

③ x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소한다.

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.



0505 답 ④

함수 $y = \log_2 4x = \log_2 x + 2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_2(x-m) + 2 + n$$

이 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \log_2(x-m) + 2 + n$$

$$\therefore y = -\log_2(x-m) - (2+n) = \log_{\frac{1}{2}}(x-m) - (2+n)$$

그래프의 점근선의 방정식이 $x = -1$ 이므로 $m = -1$

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1) - (2+n)$ 의 그래프가 원점을 지나므로

$$0 = -(2+n) \quad \therefore n = -2$$

$$\therefore m - n = -1 - (-2) = 1$$

0506 답 ⑤

선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점의 좌표는

$$\left(\frac{2 \times (m+3) + 1 \times m}{2+1}, \frac{2 \times (m-3) + 1 \times (m+3)}{2+1} \right)$$

$$\therefore (m+2, m-1)$$

점 $(m+2, m-1)$ 이 곡선 $y = \log_4(x+8) + m - 3$ 위에 있으므로

$$m-1 = \log_4(m+10) + m-3$$

$$\log_4(m+10) = 2, \quad m+10 = 4^2 \quad \therefore m = 6$$

0507 답 2

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 $y = f(x)$ 는 $y = \log_2 x$ 의 역함수이다.

점 $(1, b)$ 가 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위의 점이므로 점 $(b, 1)$ 은 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점이다.

$$\therefore 1 = \log_2 b \text{이므로 } b = 2$$

또 점 $(a, 2)$ 가 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프 위의 점이므로

$$2 = \log_2 a \quad \therefore a = 2^2 = 4$$

$$\therefore a - b = 4 - 2 = 2$$

0508 답 ㄴ, ㄷ

$1 < \log_a c < 2 < \log_a b$ 에서

$$\log_a a < \log_a c < \log_a a^2 < \log_a b$$

이때 $a > 1$ 이므로 $a < c < a^2 < b$

$$\therefore c < b \text{이고, } b > 1 \text{에서 } b < b^2 \text{이므로 } c < b^2$$

$$\therefore a < b \text{이고, } c > 1 \text{이므로 } c^a < c^b$$

$$\therefore a^2 < b \text{이고, } c > 1 \text{이므로}$$

$$0 < \log_c a^2 < \log_c b, \quad 0 < 2 \log_c a < \log_c b$$

$$\frac{2}{\log_c b} < \frac{1}{\log_c a} \quad \therefore \log_a c > 2 \log_b c$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0509 답 -12

함수 $y = \log_4(x-5) + b$ 의 밑이 1보다 크므로 $a \leq x \leq 69$ 일 때 함수 $y = \log_4(x-5) + b$ 는 $x=69$ 에서 최댓값 $\log_4 64 + b = 3 + b$, $x=a$ 에서 최솟값 $\log_4(a-5) + b$ 를 갖는다.

즉, $3 + b = 1$ 이므로 $b = -2$

또 $\log_4(a-5) - 2 = -2$ 이므로 $\log_4(a-5) = 0$

$a-5=1 \quad \therefore a=6 \quad \therefore ab=6 \times (-2) = -12$

0510 답 $\frac{1}{3}$

$f(x) = x^2 - 2x + 10$ 이라 하면 $f(x) = (x-1)^2 + 9$

$f(1) = 9$ 이므로 $f(x)$ 의 최솟값은 9이고 최댓값은 없다.

그런데 주어진 함수가 최댓값을 가지므로 $0 < a < 1$

따라서 함수 $y = \log_a f(x)$ 는 $x=1$ 에서 최댓값 $\log_a 9$ 를 갖는다.

즉, $\log_a 9 = -2$ 이므로 $a^{-2} = 9$, $a^2 = \frac{1}{9}$

$\therefore a = \frac{1}{3} \quad (\because 0 < a < 1)$

0511 답 6

$y = 2(\log_{\frac{1}{5}} x)^2 + a \log_{\frac{1}{5}} x + b = 2(\log_{\frac{1}{5}} x)^2 + a \log_{\frac{1}{5}} x + b$

$\log_{\frac{1}{5}} x = t$ 로 놓으면 주어진 함수는

$$y = 2t^2 + at + b = 2\left(t + \frac{a}{4}\right)^2 - \frac{a^2}{8} + b$$

따라서 $t = -\frac{a}{4}$ 에서 최솟값 $-\frac{a^2}{8} + b$ 를 갖는다.

이때 주어진 함수는 $x=25$ 에서 최솟값 -6 을 가지므로

$$-\frac{a}{4} = \log_{\frac{1}{5}} 25 \text{에서 } -\frac{a}{4} = -2 \quad \therefore a = 8$$

$$-\frac{a^2}{8} + b = -6 \text{에서 } -8 + b = -6 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a - b = 8 - 2 = 6$$

0512 답 21

점 P의 좌표를 $(a, 3\log_2 a)$ 라 하면 $\overline{PQ} = 6$ 이므로

$$Q(a+6, 3\log_2 a)$$

즉, 점 R의 x좌표가 $a+6$ 이므로 $R(a+6, 3\log_2(a+6))$

이때 $\overline{QR} = 6$ 이므로 $3\log_2(a+6) - 3\log_2 a = 6$

$$\log_2(a+6) - \log_2 a = 2, \log_2 \frac{a+6}{a} = 2$$

$$\frac{a+6}{a} = 2^2 = 4, 3a = 6 \quad \therefore a = 2$$

$$\therefore R(8, 3\log_2 8), \text{ 즉 } R(8, 9)$$

즉, 점 S의 y좌표가 9이므로

$$3^{x-7} = 9 = 3^2 \text{에서 } x-7=2 \quad \therefore x=9 \quad \therefore S(9, 9)$$

$$\therefore \square PQSR = \triangle PQR + \triangle RQS$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6 + \frac{1}{2} \times (9-8) \times 6 = 21$$

0513 답 ④

$$\log_5 25x + \log_x 25 = \log_5 25 + \log_5 x + 2\log_x 5$$

$$= 2 + \log_5 x + \frac{2}{\log_5 x}$$

이때 $x > 1$ 에서 $\log_5 x > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2 + \log_5 x + \frac{2}{\log_5 x} \geq 2 + 2\sqrt{\log_5 x \times \frac{2}{\log_5 x}} = 2 + 2\sqrt{2}$$

즉, $\log_5 25x + \log_x 25$ 의 최솟값은 $2 + 2\sqrt{2}$ 이므로

$$m = 2 + 2\sqrt{2}$$

한편 등호는 $\log_5 x = \frac{2}{\log_5 x}$ 일 때 성립하므로

$$(\log_5 x)^2 = 2 \quad \therefore \log_5 x = -\sqrt{2} \text{ 또는 } \log_5 x = \sqrt{2}$$

$$\therefore x = 5^{\sqrt{2}} \quad (\because x > 1)$$

따라서 $a = 5^{\sqrt{2}}$ 이므로

$$m \log_{25} a = (2 + 2\sqrt{2}) \times \log_{25} 5^{\sqrt{2}} = (2 + 2\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

0514 답 3

$x^{\log_3 x} = 16x^{k-1}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 x^{\log_3 x} = \log_2 16x^{k-1}$$

$$(\log_2 x)^2 = \log_2 16 + (k-1)\log_2 x$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 - (k-1)\log_2 x - 4 = 0$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - (k-1)t - 4 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

주어진 방정식의 두 근을 α, β 라 하면 이차방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근은

$\log_2 \alpha, \log_2 \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 \alpha + \log_2 \beta = k-1, \log_2 \alpha\beta = k-1$$

$$\text{이때 } \alpha\beta = 4 \text{이므로 } \log_2 4 = k-1, 2 = k-1 \quad \therefore k = 3$$

0515 답 ④

$g(x) = mx + 5$ 라 하면 진수의 조건에서 $g(x) > 0$ 이므로

$$g(-1) > 0 \text{에서 } -m + 5 > 0 \quad \therefore m < 5$$

$$g(1) > 0 \text{에서 } m + 5 > 0 \quad \therefore m > -5$$

$$\therefore -5 < m < 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

이때 $f(-1) < f(1)$ 이어야 하므로

$$-\log_3(-m+5) < -\log_3(m+5)$$

$$\log_3(-m+5) > \log_3(m+5)$$

밑이 1보다 크므로

$$-m+5 > m+5 \quad \therefore m < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{의 공통부분은 } -5 < m < 0$$

따라서 정수 m 은 $-4, -3, -2, -1$ 의 4개이다.

0516 답 15

$(\log_3 x)^2 < \log_3 \frac{x^4}{27}$ 의 진수의 조건에서 $x > 0, \frac{x^4}{27} > 0$

$$\therefore x > 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(\log_3 x)^2 < \log_3 \frac{x^4}{27} \text{에서 } (\log_3 x)^2 < \log_3 x^4 - \log_3 27$$

$$\therefore (\log_3 x)^2 - 4\log_3 x + 3 < 0$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 4t + 3 < 0$$

$$(t-1)(t-3) < 0 \quad \therefore 1 < t < 3$$

$$\text{즉, } 1 < \log_3 x < 3 \text{이므로 } \log_3 3 < \log_3 x < \log_3 3^3$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } 3 < x < 27 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } A = \{x \mid 3 < x < 27\}$$

$$\log_2 |x-3| < 2 \text{의 진수의 조건에서 } |x-3| > 0$$

$$x-3 \neq 0 \quad \therefore x \neq 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\log_2 |x-3| < 2 \text{에서 } \log_2 |x-3| < \log_2 4$$

밑이 1보다 크므로

$$|x-3| < 4, -4 < x-3 < 4$$

$$\therefore -1 < x < 7 \quad \dots\dots \textcircled{㉔}$$

$$\textcircled{㉔}, \textcircled{㉔} \text{에서 } B = \{x | -1 < x < 7, x \neq 3\}$$

$$\therefore A \cap B = \{x | 3 < x < 7\}$$

따라서 정수 x 의 값은 4, 5, 6이므로 구하는 합은

$$4+5+6=15$$

0517 답 125

$$C=40, I=5 \text{이므로}$$

$$5 = k \log 40 + a \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$C=10, I=4 \text{이므로}$$

$$4 = k \log 10 + a \quad \dots\dots \textcircled{㉒}$$

$\textcircled{㉑} - \textcircled{㉒}$ 을 하면

$$1 = k(\log 40 - \log 10), 1 = k \log 4$$

$$\therefore k = \frac{1}{\log 4} = \log_4 10 \quad \dots\dots \textcircled{㉓}$$

$\textcircled{㉓}$ 을 $\textcircled{㉒}$ 에 대입하면

$$4 = \frac{\log 10}{\log 4} + a \quad \therefore a = 4 - \log_4 10$$

$$C=p, I=2.5 \text{이므로}$$

$$2.5 = \log_4 10 \times \log p + 4 - \log_4 10$$

$$-1.5 = (\log p - 1) \log_4 10$$

$$\frac{-1.5}{\log_4 10} = \log p - \log 10$$

$$-1.5 \log 4 + \log 10 = \log p$$

$$\log(4^{-1.5} \times 10) = \log p$$

$$\log\{(2^2)^{-\frac{3}{2}} \times 10\} = \log p$$

$$\log\left(\frac{1}{8} \times 10\right) = \log p$$

$$\therefore \log p = \log \frac{5}{4}$$

$$\text{따라서 } p = \frac{5}{4} \text{이므로 } 100p = 125$$

0518 답 4

처음 아이스크림 1개당 무게와 가격을 각각 A g, B 원이라 하면 1번 시행할 때마다 아이스크림의 무게가 10%씩 줄어들므로 n 번 시행 후 아이스크림의 무게는

$$A(1-0.1)^n = 0.9^n A(\text{g})$$

한편 처음 아이스크림 1g의 가격은 $\frac{(\text{가격})}{(\text{무게})} = \frac{B}{A}(\text{원})$ 이고, 아이스크

림의 가격은 변함이 없으므로 n 번 시행 후 아이스크림 1g의 가격은

$$\frac{B}{0.9^n A} \text{원}$$

n 번 시행 후 아이스크림 1g의 가격이 처음의 1.5배 이상이 되어야 하므로

$$\frac{B}{0.9^n A} \geq 1.5 \times \frac{B}{A}$$

$$0.9^n \leq \frac{2}{3}$$

양변에 상용로그를 취하면

$$\log 0.9^n \leq \log \frac{2}{3}, n(2 \log 3 - 1) \leq \log 2 - \log 3$$

$$n(2 \times 0.4771 - 1) \leq 0.3010 - 0.4771, -0.0458n \leq -0.1761$$

$$\therefore n \geq 3.8\dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 4이다.

0519 답 20

$y = x^{4 - \log_2 x}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 y = \log_2 x^{4 - \log_2 x} = (4 - \log_2 x) \log_2 x$$

$$= -(\log_2 x)^2 + 4 \log_2 x \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$\log_2 y = -t^2 + 4t = -(t-2)^2 + 4 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 $t=2$ 에서 최댓값 4를 가지므로

$$\log_2 x = 2 \text{에서 } x = 2^2 = 4 \quad \therefore a = 4$$

$$\log_2 y = 4 \text{에서 } y = 2^4 = 16 \quad \therefore M = 16 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

$$\therefore a + M = 4 + 16 = 20 \quad \dots\dots \textcircled{iv}$$

채점 기준

① $\log_2 x$ 꼴이 반복되도록 주어진 식을 변형하기	30 %
② $\log_2 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 함수로 나타내기	20 %
③ a, M 의 값 구하기	40 %
④ $a + M$ 의 값 구하기	10 %

0520 답 2

$$\text{밑의 조건에서 } x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\begin{cases} \log_x 4 - \log_y 2 = 2 \\ \log_x 16 - \log_y \frac{1}{8} = -1 \end{cases} \text{에서 } \begin{cases} 2 \log_x 2 - \log_y 2 = 2 \\ 4 \log_x 2 + 3 \log_y 2 = -1 \end{cases} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\log_x 2 = X, \log_y 2 = Y \text{로 놓으면 } \begin{cases} 2X - Y = 2 \\ 4X + 3Y = -1 \end{cases}$$

$$\text{이 연립방정식을 풀면 } X = \frac{1}{2}, Y = -1 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

$$\text{즉, } \log_x 2 = \frac{1}{2}, \log_y 2 = -1 \text{이므로 } x = 4, y = \frac{1}{2}$$

$$\therefore xy = 2 \quad \dots\dots \textcircled{iv}$$

채점 기준

① 밑의 조건에서 x, y 의 값의 범위 구하기	10 %
② 주어진 연립방정식을 간단히 하기	30 %
③ $\log_x 2 = X, \log_y 2 = Y$ 로 놓고 연립방정식 풀기	30 %
④ xy 의 값 구하기	30 %

0521 답 $-\frac{3}{2}$

$$\text{진수의 조건에서 } x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉑}$$

$$x^{\log_2 x} \leq \frac{16}{x^3} \text{의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면}$$

$$\log_2 x^{\log_2 x} \leq \log_2 \frac{16}{x^3}, (\log_2 x)^2 \leq \log_2 16 - \log_2 x^3$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 + 3 \log_2 x - 4 \leq 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면

$$t^2 + 3t - 4 \leq 0, (t+4)(t-1) \leq 0$$

$$\therefore -4 \leq t \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

즉, $-4 \leq \log_2 x \leq 1$ 이므로 $\log_2 2^{-4} \leq \log_2 x \leq \log_2 2$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{16} \leq x \leq 2$ ㉔

㉑, ㉔의 공통부분은 $\frac{1}{16} \leq x \leq 2$ ㉕

따라서 $\alpha = \frac{1}{16}$, $\beta = 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \log_4 \alpha + \log_4 \beta &= \log_4 \alpha \beta = \log_4 \frac{1}{8} \\ &= \log_{2^2} 2^{-3} = -\frac{3}{2} \end{aligned} \quad \text{..... ㉖}$$

채점 기준

㉑ $\log_2 x = t$ 로 놓고 t 에 대한 부등식 풀기	40 %
㉕ x 의 값의 범위 구하기	30 %
㉖ $\log_4 \alpha + \log_4 \beta$ 의 값 구하기	30 %

0522 [답 16]

이차방정식 $x^2 - 2(2 + \log_2 a)x + 6(2 + \log_2 a) = 0$ 이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (-2 - \log_2 a)^2 - 6(2 + \log_2 a) < 0 \\ \therefore (\log_2 a)^2 - 2\log_2 a - 8 &< 0 \end{aligned} \quad \text{..... ㉑}$$

$$\begin{aligned} \log_2 a = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2t - 8 &< 0 \\ (t+2)(t-4) < 0 \quad \therefore -2 < t < 4 \end{aligned} \quad \text{..... ㉒}$$

즉, $-2 < \log_2 a < 4$ 이므로 $\log_2 2^{-2} < \log_2 a < \log_2 2^4$

밑이 1보다 크므로 $\frac{1}{4} < a < 16$ ㉓

따라서 자연수 a 의 최댓값은 15, 최솟값은 1이므로 구하는 합은 $15 + 1 = 16$ ㉔

채점 기준

㉑ 주어진 조건을 이용하여 로그부등식 세우기	20 %
㉒ $\log_2 a = t$ 로 놓고 t 에 대한 부등식 풀기	30 %
㉓ a 의 값의 범위 구하기	40 %
㉔ 자연수 a 의 최댓값과 최솟값의 합 구하기	10 %

C 실력 향상

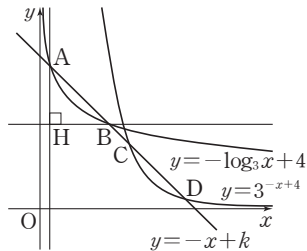
81쪽

0523 [답 ②]

두 함수 $y = -\log_3 x + 4$, $y = 3^{-x+4}$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

즉, $\overline{AB} = \overline{CD}$ 이고 $\overline{AD} - \overline{BC} = 4\sqrt{2}$ 이므로 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ ㉑

점 A를 지나고 y 축에 평행한 직선과 점 B를 지나고 x 축에 평행한 직선이 만나는 점을 H라 하자. 직선 AB의 기울기가 -1 이므로 $\overline{AH} = \overline{BH} = 2$ ($\because$ ㉑) 따라서 점 A의 x 좌표는 a ($a > 0$)라 하면 점 B의 x 좌표는 $a+2$ 이고, 점 A와 점 B는 직선 $y = -x + k$ 위의 점이므로 $A(a, -a+k)$, $B(a+2, -a+k-2)$



이때 점 A와 점 B는 함수 $y = -\log_3 x + 4$ 의 그래프 위의 점이므로 $-a+k = -\log_3 a + 4$, $-a+k-2 = -\log_3(a+2) + 4$ 따라서 두 식을 연립하여 풀면 $a = \frac{1}{4}$, $k = \frac{17}{4} + 2\log_3 2$

0524 [답 3]

함수 $f(x) = 2^{x-2} + 3$ 의 밑이 1보다 크므로 함수 $f(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가하는 함수이고

함수 $g(x) = -\log_3(2x-3) + 5 = \log_{\frac{1}{3}}(2x-3) + 5$ 의 밑이 1보다 작으므로 함수 $g(x)$ 는 x 의 값이 증가하면 y 의 값은 감소하는 함수이다.

즉, $2 \leq x \leq a$ 일 때 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 최솟값 $2^{2-2} + 3 = 4$ 를 갖고, 함수 $g(x)$ 는 $x=a$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{3}}(2a-3) + 5$ 를 갖는다.

이때 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 의 최솟값이 서로 같으므로

$$4 = \log_{\frac{1}{3}}(2a-3) + 5, \log_{\frac{1}{3}}(2a-3) = -1$$

$$2a-3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = 3 \quad \therefore a = 3$$

0525 [답 ③]

(i) $0 < t < 1$ 일 때,

$$f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) = 0 + \log_3 \frac{1}{t} \left(\because \frac{1}{t} > 1\right)$$

$$\text{즉, } \log_3 \frac{1}{t} = 2 \text{이므로 } \frac{1}{t} = 3^2 = 9$$

$$\therefore t = \frac{1}{9}$$

(ii) $t = 1$ 일 때,

$$f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) = 0 + 0 = 0$$

즉, 주어진 등식을 만족시키지 않는다.

(iii) $t > 1$ 일 때,

$$f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) = \log_3 t + 0 \left(\because 0 < \frac{1}{t} < 1\right)$$

$$\text{즉, } \log_3 t = 2 \text{이므로 } t = 3^2 = 9$$

(i)~(iii)에서 $t = \frac{1}{9}$ 또는 $t = 9$

$$\text{따라서 구하는 합은 } \frac{1}{9} + 9 = \frac{82}{9}$$

0526 [답 $-3 < x < -1$]

주어진 부등식의 진수의 조건에서 $f(x)g(x) > 0$, $f(x) > 0$

$$\therefore f(x) > 0, g(x) > 0$$

이때 그림에서 위의 부등식을 만족시키는 x 의 값의 범위는 $x < -1$ ㉑

한편 $g(x) = a(x+1)(x-1)$ ($a > 0$)이라 하면

함수 $y = g(x)$ 의 그래프가 점 $(-2, 3)$ 을 지나므로 $3 = 3a$

$$\therefore a = 1 \quad \therefore g(x) = x^2 - 1$$

$$\log_2 \{f(x)g(x)\} + \log_{\frac{1}{2}} f(x) < 3 \text{에서}$$

$$\log_2 \{f(x)g(x)\} - \log_2 f(x) < \log_2 8$$

$$\log_2 g(x) < \log_2 8, g(x) < 8$$

$$x^2 - 1 < 8, x^2 - 9 < 0, (x+3)(x-3) < 0$$

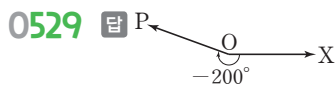
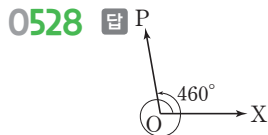
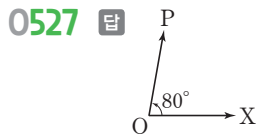
$$\therefore -3 < x < 3 \quad \text{..... ㉒}$$

㉑, ㉒의 공통부분은 $-3 < x < -1$

05 / 삼각함수

A 개념 확인

84~87쪽



0531 답 $360^\circ \times n + 115^\circ$
 $475^\circ = 360^\circ \times 1 + 115^\circ$ 이므로
 $360^\circ \times n + 115^\circ$

0532 답 $360^\circ \times n + 90^\circ$
 $810^\circ = 360^\circ \times 2 + 90^\circ$ 이므로
 $360^\circ \times n + 90^\circ$

0533 답 $360^\circ \times n + 190^\circ$
 $-530^\circ = 360^\circ \times (-2) + 190^\circ$ 이므로
 $360^\circ \times n + 190^\circ$

0534 답 $360^\circ \times n + 80^\circ$
 $-1000^\circ = 360^\circ \times (-3) + 80^\circ$ 이므로
 $360^\circ \times n + 80^\circ$

0535 답 제4사분면
 $640^\circ = 360^\circ \times 1 + 280^\circ$
 따라서 640° 는 제4사분면의 각이다.

0536 답 제1사분면
 $765^\circ = 360^\circ \times 2 + 45^\circ$
 따라서 765° 는 제1사분면의 각이다.

0537 답 제3사분면
 $-490^\circ = 360^\circ \times (-2) + 230^\circ$
 따라서 -490° 는 제3사분면의 각이다.

0538 답 제2사분면
 $-980^\circ = 360^\circ \times (-3) + 100^\circ$
 따라서 -980° 는 제2사분면의 각이다.

0539 답 $\frac{5}{6}\pi$
 $150^\circ = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{6}\pi$

0540 답 $-\frac{4}{3}\pi$
 $-240^\circ = -240 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{4}{3}\pi$

0541 답 144°
 $\frac{4}{5}\pi = \frac{4}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 144^\circ$

0542 답 -200°
 $-\frac{10}{9}\pi = -\frac{10}{9}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -200^\circ$

0543 답 $2n\pi + \pi$
 $5\pi = 2\pi \times 2 + \pi$ 이므로 $2n\pi + \pi$

0544 답 $2n\pi + \frac{4}{3}\pi$
 $\frac{10}{3}\pi = 2\pi \times 1 + \frac{4}{3}\pi$ 이므로 $2n\pi + \frac{4}{3}\pi$

0545 답 $2n\pi + \frac{\pi}{2}$
 $-\frac{7}{2}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{\pi}{2}$ 이므로 $2n\pi + \frac{\pi}{2}$

0546 답 $2n\pi + \frac{5}{4}\pi$
 $-\frac{3}{4}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{5}{4}\pi$ 이므로 $2n\pi + \frac{5}{4}\pi$

0547 답 호의 길이: 3π , 넓이: 3π
 부채꼴의 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면
 $l = 2 \times \frac{3}{2}\pi = 3\pi$

$$S = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{3}{2}\pi = 3\pi$$

다른 풀이

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 3\pi = 3\pi$$

0548 답 호의 길이: $\frac{5}{2}\pi$, 넓이: $\frac{15}{4}\pi$
 부채꼴의 호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$l = 3 \times \frac{5}{6}\pi = \frac{5}{2}\pi$$

$$S = \frac{1}{2} \times 3^2 \times \frac{5}{6}\pi = \frac{15}{4}\pi$$

다른 풀이

$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{5}{2}\pi = \frac{15}{4}\pi$$

0549 답 (1) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (2) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ (3) -2

$$OP = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$
이므로

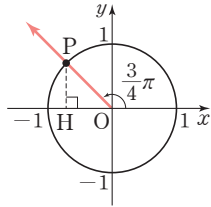
$$(1) \sin \theta = \frac{-2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$(2) \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$(3) \tan \theta = \frac{-2}{1} = -2$$

0550 **답** $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = -1$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{3}{4}\pi$ 를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OP}=1, \angle POH=\pi-\frac{3}{4}\pi=\frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

$$\overline{PH}=\overline{OP} \sin \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

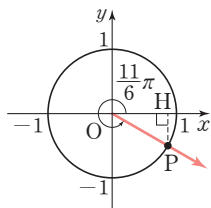
$$\overline{OH}=\overline{OP} \cos \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 점 P의 좌표는 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = -1$$

0551 **답** $\sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{11}{6}\pi$ 를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OP}=1, \angle POH=2\pi-\frac{11}{6}\pi=\frac{\pi}{6} \text{이므로}$$

$$\overline{PH}=\overline{OP} \sin \frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

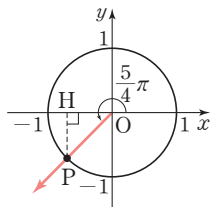
$$\overline{OH}=\overline{OP} \cos \frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 점 P의 좌표는 $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{1}{2}, \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

0552 **답** $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = 1$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{5}{4}\pi$ 를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OP}=1, \angle POH=\frac{5}{4}\pi-\pi=\frac{\pi}{4} \text{이므로}$$

$$\overline{PH}=\overline{OP} \sin \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

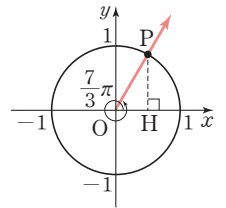
$$\overline{OH}=\overline{OP} \cos \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 점 P의 좌표는 $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \tan \theta = 1$$

0553 **답** $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = \frac{1}{2}, \tan \theta = \sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{7}{3}\pi$ 를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면



$$\overline{OP}=1, \angle POH=\frac{7}{3}\pi-2\pi=\frac{\pi}{3} \text{이므로}$$

$$\overline{PH}=\overline{OP} \sin \frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{OH}=\overline{OP} \cos \frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

따라서 점 P의 좌표는 $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = \frac{1}{2}, \tan \theta = \sqrt{3}$$

0554 **답** $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$

$\frac{17}{3}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{5}{3}\pi$ 이므로 θ 는 제4사분면의 각이다.

$$\therefore \sin \theta < 0, \cos \theta > 0, \tan \theta < 0$$

0555 **답** 제1사분면

$\sin \theta > 0$ 이면 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고,
 $\cos \theta > 0$ 이면 θ 는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.
 따라서 θ 는 제1사분면의 각이다.

0556 **답** 제3사분면

$\sin \theta < 0$ 이면 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이고,
 $\cos \theta < 0$ 이면 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.
 따라서 θ 는 제3사분면의 각이다.

0557 **답** 제2사분면

$\sin \theta > 0$ 이면 θ 는 제1사분면 또는 제2사분면의 각이고,
 $\tan \theta < 0$ 이면 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.
 따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.

0558 **답** 제4사분면

$\cos \theta > 0$ 이면 θ 는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이고,
 $\tan \theta < 0$ 이면 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.
 따라서 θ 는 제4사분면의 각이다.

0559 **답** $\cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3}$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

이때 θ 가 제1사분면의 각이므로 $\cos \theta > 0$

$$\therefore \cos \theta = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

0560 [답] $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3}$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

이때 θ 가 제2사분면의 각이므로 $\sin \theta > 0$

$\therefore \sin \theta = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

0561 [답] $\cos \theta = -\frac{12}{13}, \tan \theta = \frac{5}{12}$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169}$

이때 θ 가 제3사분면의 각이므로 $\cos \theta < 0$

$\therefore \cos \theta = -\sqrt{\frac{144}{169}} = -\frac{12}{13}$

$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$

0562 [답] $\sin \theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \tan \theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 이므로

$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}$

이때 θ 가 제4사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0$

$\therefore \sin \theta = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

0563 [답] 2

$$\begin{aligned} & (\sin \theta - \cos \theta)^2 + (\sin \theta + \cos \theta)^2 \\ &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 2 \sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta = 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

0564 [답] $\frac{2}{\cos \theta}$

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} &= \frac{\cos \theta(1 + \sin \theta) + \cos \theta(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{\cos \theta + \cos \theta \sin \theta + \cos \theta - \cos \theta \sin \theta}{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \frac{2 \cos \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{2}{\cos \theta} \end{aligned}$$

0565 [답] $-\frac{4}{9}$

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$

$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$

0566 [답] $-\frac{3}{4}$

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta + \sin \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\frac{1}{3}}{-\frac{4}{9}} = -\frac{3}{4}$$

B 유형 완성

88~95쪽

0567 [답] ③

① $-935^\circ = 360^\circ \times (-3) + 145^\circ$

② $-595^\circ = 360^\circ \times (-2) + 125^\circ$

③ $-225^\circ = 360^\circ \times (-1) + 135^\circ$

④ $875^\circ = 360^\circ \times 2 + 155^\circ$

⑤ $1505^\circ = 360^\circ \times 4 + 65^\circ$

따라서 동경 OP가 나타낼 수 있는 각은 ③이다.

0568 [답] ⑤

① $370^\circ = 360^\circ \times 1 + 10^\circ$

② $780^\circ = 360^\circ \times 2 + 60^\circ$

③ $1200^\circ = 360^\circ \times 3 + 120^\circ$

④ $-30^\circ = 360^\circ \times (-1) + 330^\circ$

⑤ $-550^\circ = 360^\circ \times (-2) + 170^\circ$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

0569 [답] ㄴ, ㄹ, ㅁ, ㅂ

$390^\circ = 360^\circ \times 1 + 30^\circ$

ㄱ. $-1380^\circ = 360^\circ \times (-4) + 60^\circ$ ㄴ. $-690^\circ = 360^\circ \times (-2) + 30^\circ$

ㄷ. $-300^\circ = 360^\circ \times (-1) + 60^\circ$ ㄹ. $420^\circ = 360^\circ \times 1 + 60^\circ$

ㅁ. $750^\circ = 360^\circ \times 2 + 30^\circ$ ㅂ. $1110^\circ = 360^\circ \times 3 + 30^\circ$

따라서 보기의 각을 나타내는 동경 중에서 390° 를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄴ, ㄹ, ㅁ, ㅂ이다.

0570 [답] 제1사분면, 제3사분면

θ 가 제2사분면의 각이므로

$360^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 180^\circ$ (단, n 은 정수)

$\therefore 180^\circ \times n + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 90^\circ$

(i) $n=2k$ (k 는 정수)일 때,

$360^\circ \times k + 45^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 90^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n=2k+1$ (k 는 정수)일 때,

$360^\circ \times k + 225^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 270^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제1사분면 또는 제3사분면이다.

0571 [답] ③

ㄱ. $120^\circ \Rightarrow$ 제2사분면의 각
 ㄴ. $425^\circ = 360^\circ \times 1 + 65^\circ \Rightarrow$ 제1사분면의 각
 ㄷ. $-60^\circ = 360^\circ \times (-1) + 300^\circ \Rightarrow$ 제4사분면의 각
 ㄹ. $-250^\circ = 360^\circ \times (-1) + 110^\circ \Rightarrow$ 제2사분면의 각
 ㅁ. $800^\circ = 360^\circ \times 2 + 80^\circ \Rightarrow$ 제1사분면의 각
 ㅂ. $1300^\circ = 360^\circ \times 3 + 220^\circ \Rightarrow$ 제3사분면의 각
 따라서 같은 사분면의 각은 ㄱ-ㄹ, ㄴ-ㅁ이다.

0572 [답] ④

3θ 가 제1사분면의 각이므로
 $360^\circ \times n + 0^\circ < 3\theta < 360^\circ \times n + 90^\circ$ (단, n 은 정수)
 $\therefore 120^\circ \times n + 0^\circ < \theta < 120^\circ \times n + 30^\circ$
 (i) $n=3k$ (k 는 정수)일 때,
 $360^\circ \times k + 0^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 30^\circ$
 따라서 θ 는 제1사분면의 각이다.
 (ii) $n=3k+1$ (k 는 정수)일 때,
 $360^\circ \times k + 120^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 150^\circ$
 따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.
 (iii) $n=3k+2$ (k 는 정수)일 때,
 $360^\circ \times k + 240^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 270^\circ$
 따라서 θ 는 제3사분면의 각이다.
 (i)~(iii)에서 각 θ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제4사분면이다.

0573 [답] 120°

각 θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 일치하므로
 $4\theta - \theta = 360^\circ \times n$ (단, n 은 정수)
 $3\theta = 360^\circ \times n$
 $\therefore \theta = 120^\circ \times n$ ㉠
 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 에서 $90^\circ < 120^\circ \times n < 180^\circ$
 $\therefore \frac{3}{4} < n < \frac{3}{2}$
 이때 n 은 정수이므로 $n=1$
 이를 ㉠에 대입하면 $\theta = 120^\circ$

0574 [답] ⑤

각 2θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭이므로
 $6\theta - 2\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$ (단, n 은 정수)
 $4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$
 $\therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ$ ㉠
 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 에서 $0^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 180^\circ$
 $\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$
 이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$
 이를 ㉠에 대입하면 $\theta = 45^\circ$ 또는 $\theta = 135^\circ$
 따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은
 $45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$

0575 [답] $\frac{1}{2}$

각 θ 를 나타내는 동경과 각 7θ 를 나타내는 동경이 일치선 위에 있고 방향이 반대이므로
 $7\theta - \theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$ (단, n 은 정수)
 $6\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad \therefore \theta = 60^\circ \times n + 30^\circ$ ㉠
 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ 에서 $180^\circ < 60^\circ \times n + 30^\circ < 270^\circ$
 $\therefore \frac{5}{2} < n < 4$
 이때 n 은 정수이므로 $n=3$
 이를 ㉠에 대입하면 $\theta = 210^\circ$
 $\therefore \sin(\theta - 180^\circ) = \sin(210^\circ - 180^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

0576 [답] 150°

각 θ 를 나타내는 동경과 각 5θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로
 $\theta + 5\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ$ (단, n 은 정수)
 $6\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad \therefore \theta = 60^\circ \times n + 30^\circ$ ㉠
 $90^\circ < \theta < 180^\circ$ 에서 $90^\circ < 60^\circ \times n + 30^\circ < 180^\circ$
 $\therefore 1 < n < \frac{5}{2}$
 이때 n 은 정수이므로 $n=2$
 이를 ㉠에 대입하면 $\theta = 150^\circ$

0577 [답] $\frac{1}{2}$

각 2θ 를 나타내는 동경과 각 6θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로
 $2\theta + 6\theta = 360^\circ \times n$ (단, n 은 정수)
 $8\theta = 360^\circ \times n \quad \therefore \theta = 45^\circ \times n$ ㉠ i
 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 에서 $0^\circ < 45^\circ \times n < 90^\circ$
 $\therefore 0 < n < 2$
 이때 n 은 정수이므로 $n=1$
 이를 ㉠에 대입하면 $\theta = 45^\circ$ ii
 $\therefore \sin \theta \cos \theta = \sin 45^\circ \times \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$ iii

채점 기준

i 조건을 만족시키는 각 θ 를 정수 n 에 대한 식으로 나타내기	40 %
ii 각 θ 의 크기 구하기	30 %
iii $\sin \theta \cos \theta$ 의 값 구하기	30 %

0578 [답] ⑤

각 θ 를 나타내는 동경과 각 4θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로
 $\theta + 4\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ$ (단, n 은 정수)
 $5\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ \quad \therefore \theta = 72^\circ \times n + 18^\circ$
 $0^\circ < \theta < 360^\circ$ 에서 $0^\circ < 72^\circ \times n + 18^\circ < 360^\circ$
 $\therefore -\frac{1}{4} < n < \frac{19}{4}$
 이때 n 은 정수이므로
 $n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$ 또는 $n=4$
 따라서 구하는 각 θ 의 개수는 5이다.

0579 [답] ④

- ① $40^\circ = 40 \times \frac{\pi}{180} = \frac{2}{9}\pi$ ② $135^\circ = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3}{4}\pi$
 ③ $\frac{5}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 150^\circ$ ④ $\frac{5}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 300^\circ$
 ⑤ $\frac{7}{5}\pi = \frac{7}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 252^\circ$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

0580 [답] ㄱ, ㄷ, ㄹ

ㄱ. $60^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}$ 이므로 $\frac{\pi}{60^\circ} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} = 3$

ㄴ. $-\frac{11}{5}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{9}{5}\pi$ 이므로 $-\frac{11}{5}\pi$ 는 제4사분면의 각이다.

ㄷ. $-\frac{20}{3}\pi = 2\pi \times (-4) + \frac{4}{3}\pi$ 이므로 동경의 일반각은 $2n\pi + \frac{4}{3}\pi$ (단, n 은 정수)

ㄹ. $\frac{17}{4}\pi = 2\pi \times 2 + \frac{\pi}{4}$, $-\frac{15}{4}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{\pi}{4}$ 이므로 $\frac{\pi}{4}$, $\frac{17}{4}\pi$, $-\frac{15}{4}\pi$ 를 나타내는 동경은 모두 일치한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

0581 [답] ⑤

- ① $-\frac{27}{4}\pi = 2\pi \times (-4) + \frac{5}{4}\pi \Rightarrow$ 제3사분면의 각
 ② $-515^\circ = 360^\circ \times (-2) + 205^\circ \Rightarrow$ 제3사분면의 각
 ③ $-\frac{25}{9}\pi = 2\pi \times (-2) + \frac{11}{9}\pi \Rightarrow$ 제3사분면의 각
 ④ $930^\circ = 360^\circ \times 2 + 210^\circ \Rightarrow$ 제3사분면의 각
 ⑤ $\frac{19}{3}\pi = 2\pi \times 3 + \frac{\pi}{3} \Rightarrow$ 제1사분면의 각

따라서 각을 나타내는 동경이 존재하는 사분면이 나머지 넷과 다른 하나는 ⑤이다.

0582 [답] 72

반지름의 길이가 a , 중심각의 크기가 $\frac{5}{6}\pi$ 인 부채꼴의 호의 길이가 10π 이므로

$$a \times \frac{5}{6}\pi = 10\pi \quad \therefore a = 12$$

즉, 반지름의 길이가 12, 호의 길이가 10π 인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 10\pi = 60\pi \quad \therefore b = 60$$

$$\therefore a + b = 12 + 60 = 72$$

0583 [답] $6 + 4\pi$

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 중심각의 크기가 $\frac{4}{3}\pi$ 이고 넓이가 6π 이므로

$$\frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{4}{3}\pi = 6\pi, r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 (\because r > 0)$$

즉, 부채꼴의 호의 길이는 $3 \times \frac{4}{3}\pi = 4\pi$

따라서 부채꼴의 둘레의 길이는

$$2 \times 3 + 4\pi = 6 + 4\pi$$

0584 [답] $\frac{16}{3}\pi$

반지름의 길이가 4인 원의 넓이는 $\pi \times 4^2 = 16\pi$ ①

부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면 반지름의 길이가 6인 부채꼴의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \theta = 18\theta$$

이때 원의 넓이와 부채꼴의 넓이가 같으므로

$$16\pi = 18\theta \quad \therefore \theta = \frac{8}{9}\pi \quad \dots\dots ②$$

따라서 부채꼴의 호의 길이는

$$6 \times \frac{8}{9}\pi = \frac{16}{3}\pi \quad \dots\dots ③$$

채점 기준

① 반지름의 길이가 4인 원의 넓이 구하기	20 %
② 부채꼴의 중심각의 크기 구하기	50 %
③ 부채꼴의 호의 길이 구하기	30 %

0585 [답] ④

원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같으므로 옆면인 부채꼴의 호의 길이는

$$2\pi \times 3 = 6\pi$$

옆면인 부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 부채꼴의 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 이므로

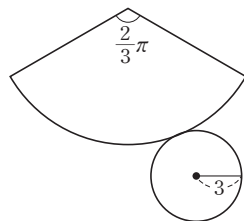
$$r \times \frac{2}{3}\pi = 6\pi \quad \therefore r = 9$$

즉, 옆면인 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 9 \times 6\pi = 27\pi$

또 밑면인 원의 넓이는 $\pi \times 3^2 = 9\pi$

따라서 원뿔의 겉넓이는

$$27\pi + 9\pi = 36\pi$$



0586 [답] $(100 + 56\pi)$ cm

와이퍼의 전체 길이를 r cm라 하면

$$\frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{4}{5}\pi - \frac{1}{2} \times (r - 50)^2 \times \frac{4}{5}\pi = 1400\pi$$

$$r^2 - (r - 50)^2 = 3500$$

$$100r = 6000 \quad \therefore r = 60$$

따라서 와이퍼의 고무판이 회전하면서 닦은 유리창의 둘레의 길이는

$$60 \times \frac{4}{5}\pi + (60 - 50) \times \frac{4}{5}\pi + 50 \times 2 = 100 + 56\pi \text{ (cm)}$$

0587 [답] ②

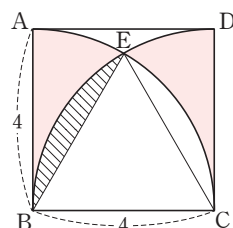
오른쪽 그림과 같이 두 호 CA, DB의 교점을 E라 하면

$$\overline{BE} = \overline{CE} = \overline{BC} = 4$$

즉, 삼각형 BCE는 정삼각형이므로

$$\angle EBC = \angle ECB = \frac{\pi}{3},$$

$$\angle ABE = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$



빗금 친 부분의 넓이는 부채꼴 CEB의 넓이에서 정삼각형 BCE의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\begin{aligned} (\text{빗금 친 부분의 넓이}) &= \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

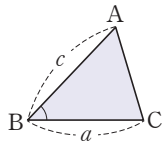
따라서 색칠한 부분의 넓이는 부채꼴 BEA의 넓이에서 빗금 친 부분의 넓이를 뺀 후 2배 한 것과 같으므로

$$\begin{aligned} (\text{색칠한 부분의 넓이}) &= 2 \left\{ \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{6} - \left(\frac{8}{3}\pi - 4\sqrt{3} \right) \right\} \\ &= 2 \left(\frac{4}{3}\pi - \frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3} \right) \\ &= 2 \left(4\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \right) = 8\sqrt{3} - \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

중3 다시보기

삼각형 ABC에서 두 변의 길이 a , c 와 그 끼인 각 B 를 알 때, 삼각형 ABC의 넓이 S 는

$$S = \frac{1}{2}ac \sin B$$



0588 답 $\frac{\pi}{2}$

$\angle COA = \theta$ 라 하면 부채꼴 OAC의 넓이는 3π 이므로

$$\frac{1}{2} \times 6^2 \times \theta = 3\pi \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

삼각형 BOA₁에서 $\angle BOA_1 = 2\theta = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$\overline{OA_1} = \overline{OB} \cos \frac{\pi}{3} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

따라서 부채꼴 OA₁C₁의 호의 길이는 $3 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$

0589 답 ①

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 둘레의 길이가 8이므로 호의 길이는 $8 - 2r$ 이다.

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r(8 - 2r) = -r^2 + 4r \\ &= -(r - 2)^2 + 4 \quad (0 < r < 4) \end{aligned}$$

따라서 S 는 $r = 2$ 에서 최댓값 4를 가지므로 $a = 2$, $M = 4$

$$\therefore a + M = 6$$

0590 답 ④

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면 둘레의 길이가 10이므로 호의 길이는 $10 - 2r$ 이다.

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}r(10 - 2r) = -r^2 + 5r \\ &= -\left(r - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \quad (0 < r < 5) \end{aligned}$$

즉, S 는 $r = \frac{5}{2}$ 에서 최댓값 $\frac{25}{4}$ 를 갖는다.

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times \theta = \frac{25}{4} \quad \therefore \theta = 2$$

0591 답 16 m

부채꼴 모양의 화단의 반지름의 길이를 r m, 호의 길이를 l m라 하면 넓이가 16 m^2 이므로

$$\frac{1}{2}rl = 16 \quad \therefore l = \frac{32}{r}$$

부채꼴 모양의 화단의 둘레의 길이는

$$2r + l = 2r + \frac{32}{r} \text{ (m)}$$

이때 $2r > 0$, $\frac{32}{r} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2r + \frac{32}{r} \geq 2\sqrt{2r \times \frac{32}{r}} = 16$$

(단, 등호는 $2r = \frac{32}{r}$, 즉 $r = 4$ 일 때 성립)

따라서 화단의 둘레의 길이의 최솟값은 16 m이다.

0592 답 ②

$$\overline{OP} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5 \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = -\frac{4}{5}, \tan \theta = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore 5 \sin \theta + 10 \cos \theta + 4 \tan \theta$$

$$\begin{aligned} &= 5 \times \frac{3}{5} + 10 \times \left(-\frac{4}{5}\right) + 4 \times \left(-\frac{3}{4}\right) \\ &= -8 \end{aligned}$$

0593 답 -3

오른쪽 그림과 같이 $-\frac{2}{3}\pi$ 를 나타내는 동경과 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원의 교점을 P, 점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{OP} = 1, \angle POH = \pi - \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3} \text{ 이므로}$$

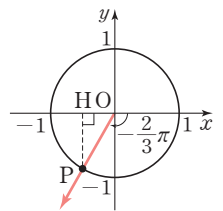
$$\overline{PH} = \overline{OP} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{OH} = \overline{OP} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

즉, 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 이므로

$$\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \theta = -\frac{1}{2}, \tan \theta = \sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore 3 \cos \theta + \sin \theta \tan \theta &= 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \sqrt{3} \\ &= -3 \end{aligned}$$



0594 답 ③

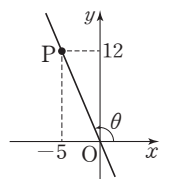
$$12x + 5y = 0 \text{ 에서 } y = -\frac{12}{5}x \quad \therefore \tan \theta = -\frac{12}{5}$$

$0 < \theta < \pi$ 이고 $\tan \theta = -\frac{12}{5}$ 이므로 점 P의 좌표를 $(-5, 12)$ 라 하고 동경 OP를 좌표평면 위에 나타내면 오른쪽 그림과 같다.

따라서 $\overline{OP} = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ 이므로

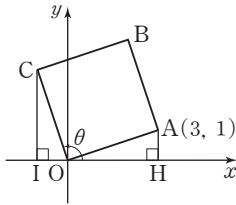
$$\sin \theta = \frac{12}{13}, \cos \theta = -\frac{5}{13}$$

$$\therefore 13(\sin \theta + \cos \theta) = 13 \left\{ \frac{12}{13} + \left(-\frac{5}{13}\right) \right\} = 7$$



0595 답 $-\frac{3}{10}$

오른쪽 그림과 같이 두 점 A, C에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 H, I라 하면 $\triangle AOH \equiv \triangle OCI$ (RHA 합동) 따라서 점 C의 좌표는 $(-1, 3)$ 이고 $OC = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ 이므로



$$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{10}}, \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{10}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{3}{10}$$

0596 답 ②

(i) $\sin \theta \cos \theta < 0$ 일 때,

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0 \text{ 또는 } \sin \theta < 0, \cos \theta > 0$$

따라서 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(ii) $\sin \theta \tan \theta < 0$ 일 때,

$$\sin \theta > 0, \tan \theta < 0 \text{ 또는 } \sin \theta < 0, \tan \theta > 0$$

따라서 θ 는 제2사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제2사분면의 각이다.

0597 답 ②

θ 가 제3사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$

$$\therefore \cos \theta \tan \theta < 0$$

$$\therefore \frac{\sin \theta}{\cos \theta \tan \theta} > 0$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

0598 답 제2사분면

$$\sin \theta \cos \theta \neq 0 \text{이고 } \frac{\sqrt{\sin \theta}}{\sqrt{\cos \theta}} = -\sqrt{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \text{이므로}$$

$$\cos \theta < 0, \sin \theta > 0$$

따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.

공통수학1 다시보기

0이 아닌 두 실수 a, b 에 대하여

$$(1) \sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab} \text{이면 } \Rightarrow a < 0, b < 0$$

$$(2) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\frac{a}{b}} \text{ 이면 } \Rightarrow a > 0, b < 0$$

0599 답 ①

(i) $\sin \theta \cos \theta > 0$ 일 때,

$$\sin \theta > 0, \cos \theta > 0 \text{ 또는 } \sin \theta < 0, \cos \theta < 0$$

따라서 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

(ii) $\cos \theta \tan \theta < 0$ 일 때,

$$\cos \theta > 0, \tan \theta < 0 \text{ 또는 } \cos \theta < 0, \tan \theta > 0$$

따라서 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제3사분면의 각이다.

따라서 $\sin \theta < 0, \cos \theta < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} & |-2\sin \theta| + \sqrt{(\sin \theta + \cos \theta)^2} - |\cos \theta| \\ &= -2\sin \theta + \{-(\sin \theta + \cos \theta)\} - (-\cos \theta) \\ &= -2\sin \theta - \sin \theta - \cos \theta + \cos \theta = -3\sin \theta \end{aligned}$$

0600 답 ⑤

$$\begin{aligned} \frac{\tan \theta \sin \theta}{\tan \theta - \sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta} &= \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \sin \theta}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta} - \sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta - \sin \theta \cos \theta}{\cos \theta}} - \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta(1 - \cos \theta)} - \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta(1 - \cos \theta)} - \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta} \end{aligned}$$

0601 답 1

$$\begin{aligned} \frac{(\tan^2 \theta + 1)(1 - \cos^2 \theta)}{\tan^2 \theta} &= \frac{(\tan^2 \theta + 1) \times \sin^2 \theta}{\tan^2 \theta} \\ &= \frac{\tan^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^2 \theta}{\tan^2 \theta} \\ &= \sin^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\tan^2 \theta} \\ &= \sin^2 \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta}} \\ &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \end{aligned}$$

0602 답 ③

$$\begin{aligned} ① \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta - \sin^3 \theta} &= \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta(1 - \sin^2 \theta)} = \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta} \\ ② \sin^4 \theta - \cos^4 \theta &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) \\ &= 2\sin^2 \theta - 1 \\ ③ \sin^2 \theta - \cos^2 \theta &= \cos^2 \theta \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - 1 \right) \\ &= \cos^2 \theta (\tan^2 \theta - 1) \\ ④ \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{1 - \cos \theta} \\ &= \frac{\sin^2 \theta(1 - \cos \theta) + \sin^2 \theta(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{2\sin^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} = \frac{2\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 2 \\ ⑤ \tan \theta + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \\ &= \frac{\sin \theta(1 + \sin \theta) + \cos^2 \theta}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{\sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} \\ &= \frac{1}{\cos \theta} \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

0603 답 $-2\sin\theta$

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta}-\sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta} \\ &= \sqrt{\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}-\sqrt{\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta} \\ &= \sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2}-\sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2} \quad \dots\dots \textcircled{i} \\ &= |\sin\theta-\cos\theta|-|\sin\theta+\cos\theta| \\ &= -(\sin\theta-\cos\theta)-(\sin\theta+\cos\theta) \quad (\because 0<\sin\theta<\cos\theta) \\ &= -2\sin\theta \quad \dots\dots \textcircled{ii} \end{aligned}$$

채점 기준

① $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 임을 이용하여 근호 안을 완전제곱 꼴로 나타내기	60%
② 주어진 식을 간단히 하기	40%

0604 답 -8

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}$$

이때 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ 이므로 $\cos\theta>0$

$$\therefore \cos\theta=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

$$\text{따라서 } \tan\theta=\frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{8\tan\theta-2}{5\cos\theta-3}=\frac{8\times\left(-\frac{3}{4}\right)-2}{5\times\frac{4}{5}-3}=-8$$

0605 답 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}&=\frac{1-\sin\theta+1+\sin\theta}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} \\ &=\frac{2}{1-\sin^2\theta} \end{aligned}$$

$$\frac{2}{1-\sin^2\theta}=\frac{7}{2} \text{에서 } 7-7\sin^2\theta=4 \quad \therefore \sin^2\theta=\frac{3}{7}$$

$$\text{즉, } \cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{3}{7}=\frac{4}{7} \text{이므로}$$

$$\tan^2\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\frac{3}{7}}{\frac{4}{7}}=\frac{3}{4}$$

이때 θ 가 제2사분면의 각이므로 $\tan\theta<0$

$$\therefore \tan\theta=-\sqrt{\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

0606 답 ②

$$\tan\theta=-\frac{1}{2} \text{에서 } \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{1}{2} \quad \therefore \cos\theta=-2\sin\theta$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \text{이므로 } \sin^2\theta+(-2\sin\theta)^2=1$$

$$5\sin^2\theta=1 \quad \therefore \sin^2\theta=\frac{1}{5}$$

이때 θ 가 제4사분면의 각이므로 $\sin\theta<0$

$$\therefore \sin\theta=-\sqrt{\frac{1}{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\text{따라서 } \cos\theta=-2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{2}{\sqrt{5}} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}=-\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

0607 답 ①

$$\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}=2-\sqrt{3} \text{에서}$$

$$1-\tan\theta=(2-\sqrt{3})(1+\tan\theta)$$

$$(3-\sqrt{3})\tan\theta=-1+\sqrt{3} \quad \therefore \tan\theta=\frac{-1+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3} \text{의 양변을 제곱하면 } \tan^2\theta=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{3}, \quad \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1}{3}$$

$$3-3\cos^2\theta=\cos^2\theta \quad \therefore \cos^2\theta=\frac{3}{4}$$

이때 $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$ 이므로 $\cos\theta<0$

$$\therefore \cos\theta=-\sqrt{\frac{3}{4}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

0608 답 ②

$$\begin{aligned} \frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{1-\cos\theta}{\tan\theta}&=\frac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}+\frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta} \\ &=\frac{\sin^2\theta\cos\theta+\cos\theta(1-\cos\theta)^2}{(1-\cos\theta)\sin\theta} \\ &=\frac{\cos\theta(\sin^2\theta+1-2\cos\theta+\cos^2\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta} \\ &=\frac{2\cos\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta} \\ &=\frac{2\cos\theta}{\sin\theta} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{2\cos\theta}{\sin\theta}=1 \text{이므로 } \sin\theta=2\cos\theta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \text{이므로 } (2\cos\theta)^2+\cos^2\theta=1$$

$$5\cos^2\theta=1 \quad \therefore \cos^2\theta=\frac{1}{5}$$

이때 $\pi<\theta<2\pi$ 이고, ①에서 $\sin\theta$ 와 $\cos\theta$ 의 값의 부호가 서로 같으므로 $\cos\theta<0$

$$\therefore \cos\theta=-\sqrt{\frac{1}{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

0609 답 $\frac{\sqrt{31}}{4}$

$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{4}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{16}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{16} \quad \therefore \sin\theta\cos\theta=-\frac{15}{32}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sin\theta-\cos\theta)^2 &= \sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta \\ &= 1-2\times\left(-\frac{15}{32}\right)=\frac{31}{16} \end{aligned}$$

이때 θ 가 제2사분면의 각이면 $\sin\theta>0$, $\cos\theta<0$ 이므로 $\sin\theta-\cos\theta>0$

$$\therefore \sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{31}{16}}=\frac{\sqrt{31}}{4}$$

0610 답 $\sqrt{15}$

$$\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\sin\theta}=\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

$$\begin{aligned} (\sin\theta-\cos\theta)^2 &= \sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta \\ &= 1-2\times\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{3} \end{aligned}$$

이때 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 이면 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta - \cos \theta < 0$$

$$\therefore \sin \theta - \cos \theta = -\sqrt{\frac{5}{3}} = -\frac{\sqrt{15}}{3} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\therefore \frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta - \cos \theta}{\cos \theta \sin \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{15}}{3}}{-\frac{1}{3}} = \sqrt{15} \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① $\sin \theta - \cos \theta$ 의 값 구하기	70%
② $\frac{1}{\cos \theta} - \frac{1}{\sin \theta}$ 의 값 구하기	30%

0611 답 ①

$$\tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 2 \text{이므로 } \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

이때 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이면 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta < 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = -\sqrt{2}$$

0612 답 $\frac{3}{5}$

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{5} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{2}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{2}{5} = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

이때 θ 가 제1사분면의 각이면 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^4 \theta - \cos^4 \theta &= (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \\ &= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

0613 답 ②

$$\log_2 \sin \theta + \log_2 \cos \theta = -1 \text{에서}$$

$$\log_2 (\sin \theta \cos \theta) = \log_2 \frac{1}{2} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{2} = 2 \end{aligned}$$

이때 θ 가 제1사분면의 각이면 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$$

$$\log_2 (\sin \theta + \cos \theta) = \log_2 x - \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\log_2 (\sin \theta + \cos \theta) = \log_2 x - \log_2 \sqrt{2} \quad \therefore \log_2 \sqrt{2} = \log_2 \frac{x}{\sqrt{2}}$$

따라서 $\frac{x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ 이므로 $x = 2$

0614 답 ①

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{9} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9}$$

따라서 ㉡에서 $\frac{k}{3} = -\frac{4}{9}$ 이므로 $k = -\frac{4}{3}$

0615 답 -1

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta - \cos \theta) = 1 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) = \frac{k}{2} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } 2 \sin \theta = 1 \quad \therefore \sin \theta = \frac{1}{2}$$

㉡의 좌변을 간단히 하면

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) &= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta - (1 - \sin^2 \theta) \\ &= 2 \sin^2 \theta - 1 \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -\frac{1}{2} = \frac{k}{2} \text{이므로 } k = -1$$

0616 답 ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{9}$$

이때 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 이면 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta < 0$ 이므로 $\sin \theta \cos \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

이므로

$$\sin \theta + \cos \theta = -\sqrt{\frac{5}{3}} = -\frac{\sqrt{15}}{3} \quad (\because \sin \theta < 0, \cos \theta < 0)$$

$$\therefore \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{1}{3}} = -\sqrt{15}$$

0617 **답** $3x^2+8x+3=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{4} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{4} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{3}{8}$$

$$\text{즉, } \textcircled{2} \text{에서 } \frac{k}{4} = -\frac{3}{8} \text{이므로 } k = -\frac{3}{2}$$

이때 $\tan \theta$ 와 $\frac{1}{\tan \theta}$ 의 합과 곱을 구하면

$$\begin{aligned} \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

$$\tan \theta \times \frac{1}{\tan \theta} = 1$$

따라서 $\tan \theta$, $\frac{1}{\tan \theta}$ 을 두 근으로 하고 x^2 의 계수가

$$-2k = -2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) = 3 \text{인 이차방정식은}$$

$$3\left(x^2 + \frac{8}{3}x + 1\right) = 0$$

$$\therefore 3x^2 + 8x + 3 = 0$$

AB 유형 점검

96~98쪽

0618 **답** ②

$$\textcircled{1} \quad -1300^\circ = 360^\circ \times (-4) + 140^\circ \Rightarrow \alpha = 140$$

$$\textcircled{2} \quad -590^\circ = 360^\circ \times (-2) + 130^\circ \Rightarrow \alpha = 130$$

$$\textcircled{3} \quad 500^\circ = 360^\circ \times 1 + 140^\circ \Rightarrow \alpha = 140$$

$$\textcircled{4} \quad 1220^\circ = 360^\circ \times 3 + 140^\circ \Rightarrow \alpha = 140$$

$$\textcircled{5} \quad 1940^\circ = 360^\circ \times 5 + 140^\circ \Rightarrow \alpha = 140$$

따라서 α 의 값이 나머지 넷과 다른 하나는 ②이다.

0619 **답** ①

θ 가 제4사분면의 각이므로

$$360^\circ \times n + 270^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 360^\circ \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$\therefore 120^\circ \times n + 90^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 120^\circ$$

(i) $n = 3k$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 90^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 120^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제2사분면의 각이다.

(ii) $n = 3k + 1$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 210^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 240^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n = 3k + 2$ (k 는 정수)일 때,

$$360^\circ \times k + 330^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 360^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각이다.

(i)~(iii)에서 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 없는 사분면은 제1사분면이다.

0620 **답** $\frac{7}{9}\pi$

$\frac{\pi}{9}$ 와 각 θ 의 크기를 각각 3배 하면 $\frac{\pi}{3}$, 3θ 이다.

$\frac{\pi}{3}$ 를 나타내는 동경과 각 3θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$3\theta - \frac{\pi}{3} = 2n\pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$3\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3} \quad \therefore \theta = \frac{2}{3}n\pi + \frac{\pi}{9} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$0 < \theta < \pi \text{에서 } 0 < \frac{2}{3}n\pi + \frac{\pi}{9} < \pi$$

$$\therefore -\frac{1}{6} < n < \frac{4}{3}$$

이때 n 은 정수이므로 $n = 0$ 또는 $n = 1$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } \theta = \frac{\pi}{9} \text{ 또는 } \theta = \frac{7}{9}\pi$$

$$\text{그런데 } \theta \neq \frac{\pi}{9} \text{이므로 } \theta = \frac{7}{9}\pi$$

0621 **답** 2π

각 4θ 를 나타내는 동경과 각 8θ 를 나타내는 동경이 y 축에 대하여 대칭이므로

$$4\theta + 8\theta = 2n\pi + \pi \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$12\theta = 2n\pi + \pi \quad \therefore \theta = \frac{n}{6}\pi + \frac{\pi}{12} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$0 < \theta < 2\pi \text{에서 } 0 < \frac{n}{6}\pi + \frac{\pi}{12} < 2\pi$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{23}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n = 0, 1, 2, \dots, 11$

따라서 각 θ 는 $n = 11$ 에서 최댓값 $\frac{23}{12}\pi$, $n = 0$ 에서 최솟값 $\frac{\pi}{12}$ 를 가지므로 구하는 합은

$$\frac{23}{12}\pi + \frac{\pi}{12} = 2\pi$$

0622 **답** ③

$$\textcircled{1} \quad 315^\circ = 315 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{4}\pi$$

$$\textcircled{2} \quad 162^\circ = 162 \times \frac{\pi}{180} = \frac{9}{10}\pi$$

$$\textcircled{3} \quad -690^\circ = -690 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{23}{6}\pi$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{9}{5}\pi = \frac{9}{5}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 324^\circ$$

$$\textcircled{5} \quad -\frac{17}{18}\pi = -\frac{17}{18}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = -170^\circ$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

0623 답 ④

오른쪽 그림과 같이 반원 C의 중심을 Q,

선분 OB와 반원 C의 접점을 H라 하자.

반원 C의 반지름의 길이를 r라 하면

$\overline{OA}=4$, $\overline{QH}=\overline{QA}=r$ 이므로

$\overline{OQ}=4-r$

이때 $\angle OHQ = \frac{\pi}{2}$ 이므로 직각삼각형 OQH에서

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{\overline{QH}}{\overline{OQ}} = \frac{r}{4-r}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{r}{4-r}, 4-r=2r \quad \therefore r = \frac{4}{3}$$

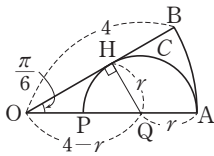
부채꼴 OAB의 넓이 S_1 은

$$S_1 = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{4}{3}\pi$$

반지름의 길이가 $\frac{4}{3}$ 인 반원 C의 넓이 S_2 는

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}\pi$$

$$\therefore S_1 - S_2 = \frac{4}{3}\pi - \frac{8}{9}\pi = \frac{4}{9}\pi$$



0624 답 16

두 각 θ , 3θ 를 나타내는 동경이 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 3\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$4\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta = \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{8} \quad \dots\dots ①$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \text{에서 } \frac{\pi}{2} < \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{8} < \pi$$

$$\therefore \frac{3}{4} < n < \frac{7}{4}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1$

이를 ①에 대입하면 $\theta = \frac{5}{8}\pi$

따라서 부채꼴의 반지름의 길이를 r라 하면 호의 길이가 10π 이므로

$$r \times \frac{5}{8}\pi = 10\pi \quad \therefore r = 16$$

0625 답 ②

부채꼴의 반지름의 길이를 r m라 하면 둘레의 길이가 200 m이므로

호의 길이는 $(200-2r)$ m이다.

부채꼴의 넓이를 $S \text{ m}^2$ 라 하면

$$S = \frac{1}{2}r(200-2r) = -r^2 + 100r$$

$$= -(r-50)^2 + 2500 \quad (0 < r < 100)$$

$\rightarrow r > 0, 200-2r > 0$ 이므로 $0 < r < 100$

따라서 S는 $r=50$ 에서 최댓값 2500을 가지므로 호수의 넓이의 최댓값은 2500 m^2 이다.

0626 답 ③

$$\overline{OP} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \text{이므로}$$

$$\cos \theta = -\frac{3}{5}, \tan \theta = -\frac{4}{3}$$

$$\therefore 15(\cos \theta - \tan \theta)$$

$$= 15 \left\{ -\frac{3}{5} - \left(-\frac{4}{3} \right) \right\} = 11$$

0627 답 $\frac{2}{5}$

$$\overline{AD}=8, \overline{AB}=4 \text{이므로 } A(-4, 2)$$

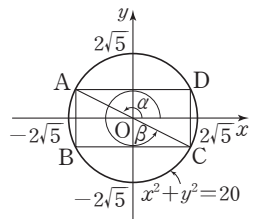
$$\overline{OA}=2\sqrt{5} \text{이므로 } \sin \alpha = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

두 점 A, C가 원점에 대하여 대칭이므로

$$C(4, -2)$$

$$\overline{OC}=2\sqrt{5} \text{이므로 } \cos \beta = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}$$



0628 답 $-\cos \theta$

θ 가 제2사분면의 각이므로

$$\sin \theta > 0, \cos \theta < 0, \tan \theta < 0$$

$$\therefore |\cos \theta - \sin \theta + \tan \theta| - \sqrt{\tan^2 \theta} - \sin \theta$$

$$= -(\cos \theta - \sin \theta + \tan \theta) - |\tan \theta| - \sin \theta$$

$$= -\cos \theta + \sin \theta - \tan \theta - (-\tan \theta) - \sin \theta$$

$$= -\cos \theta$$

0629 답 $\tan \theta$

$$\sin \theta \cos \theta \neq 0 \text{이고 } \frac{\sqrt{\cos \theta}}{\sqrt{\sin \theta}} = -\sqrt{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}} \text{이므로}$$

$$\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$$

즉, θ 가 제4사분면의 각이므로 $\tan \theta < 0$

$$\therefore |\cos \theta| - \sqrt{(\cos \theta - \tan \theta)^2}$$

$$= \cos \theta - |\cos \theta - \tan \theta|$$

$$= \cos \theta - (\cos \theta - \tan \theta) = \tan \theta$$

0630 답 ④

$$\frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos \theta(1 + \cos \theta)}{\sin \theta(1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \cos \theta}{\sin \theta(1 + \cos \theta)}$$

$$= \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta(1 + \cos \theta)} = \frac{1}{\sin \theta}$$

0631 답 ①

$$\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} = \frac{1 + \sin \theta + 1 - \sin \theta}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)}$$

$$= \frac{2}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{2}{\cos^2 \theta}$$

$$\therefore \frac{2}{\cos^2 \theta} = 8 \text{이므로 } \cos^2 \theta = \frac{1}{4}$$

$$\text{이때 } \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi \text{이므로 } \cos \theta < 0$$

$$\therefore \cos \theta = -\sqrt{\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2}$$

0632 답 ①

$$\sin \theta = \frac{a}{r}, \cos \theta = \frac{5}{r} \text{이므로}$$

$$\sin \theta + 2 \cos \theta = 1 \text{에서 } \frac{a}{r} + \frac{10}{r} = 1$$

$$\therefore r=a+10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ 이므로 } \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{5}{r}\right)^2 = 1$$

$$\frac{a^2}{r^2} + \frac{25}{r^2} = 1 \quad \therefore r^2 = a^2 + 25$$

$$\text{이 식에 } \textcircled{1} \text{ 을 대입하면 } (a+10)^2 = a^2 + 25$$

$$a^2 + 20a + 100 = a^2 + 25$$

$$20a = -75 \quad \therefore a = -\frac{15}{4}$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{ 에 대입하면 } r = \frac{25}{4}$$

$$\therefore a+r = -\frac{15}{4} + \frac{25}{4} = \frac{5}{2}$$

0633 답 ②

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{의 양변을 제곱하면}$$

$$\sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$1 - 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sin \theta + \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

이때 θ 가 제1사분면의 각이면 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta > 0$ 이므로

$$\sin \theta + \cos \theta > 0$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$$

$$\therefore \frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{3}}{\frac{1}{3}} = \sqrt{15}$$

0634 답 5-3√2

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -k \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 의 양변을 제곱하면

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = (-k)^2$$

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = k^2$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = k^2$$

이 식에 $\textcircled{2}$ 을 대입하면

$$1 + 2 \times (-k) = k^2$$

$$k^2 + 2k - 1 = 0 \quad \therefore k = -1 + \sqrt{2} \quad (\because k > 0)$$

이때

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \cos \theta)^2 &= (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 4 \sin \theta \cos \theta \\ &= (-k)^2 - 4 \times (-k) \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2}) \\ &= k^2 + 4k \\ &= (-1 + \sqrt{2})^2 + 4 \times (-1 + \sqrt{2}) \\ &= -1 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} k(\sin \theta - \cos \theta)^2 &= (-1 + \sqrt{2}) \times (-1 + 2\sqrt{2}) \\ &= 5 - 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

0635 답 504 m²

$\angle AOB = \theta$, $\overline{OA} = r$ m라 하면

부채꼴 OAB에서 호 AB의 길이는 40 m이므로

$$40 = r\theta \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

부채꼴 OCD에서 호 CD의 길이는 16 m이므로

$$16 = (r-18)\theta$$

$$16 = r\theta - 18\theta$$

이 식에 $\textcircled{1}$ 을 대입하면

$$16 = 40 - 18\theta$$

$$18\theta = 24 \quad \therefore \theta = \frac{4}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$40 = \frac{4}{3}r \quad \therefore r = 30 \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$$

따라서 도형 ABDC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 30 \times 40 - \frac{1}{2} \times (30-18) \times 16 = 504 (\text{m}^2) \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 부채꼴의 중심각의 크기 구하기	50 %
② 부채꼴 OAB의 반지름의 길이 구하기	20 %
③ 도형 ABDC의 넓이 구하기	30 %

0636 답 -√3

$$\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta} = 3 \text{에서 } 1+\cos \theta = 3(1-\cos \theta)$$

$$4 \cos \theta = 2 \quad \therefore \cos \theta = \frac{1}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

이때 θ 가 제4사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0$

$$\therefore \sin \theta = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① $\cos \theta$ 의 값 구하기	40 %
② $\sin \theta$ 의 값 구하기	40 %
③ $\tan \theta$ 의 값 구하기	20 %

0637 답 1

이차방정식 $4x^2 + 3x - 9 = 0$ 의 두 근이 $\frac{1}{\sin \theta}$, $\frac{1}{\cos \theta}$ 이므로 이차

방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{3}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{9}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{3}{4}$$

이 식에 $\textcircled{2}$ 을 대입하면

$$(\sin \theta + \cos \theta) \times \left(-\frac{9}{4}\right) = -\frac{3}{4} \quad \therefore \sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{3}$$

또 ㉠에서 $\frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = -\frac{9}{4}$ 이므로

$$\sin \theta \cos \theta = -\frac{4}{9} \quad \dots\dots \text{ii}$$

한편 이차방정식 $9x^2 + ax - b = 0$ 의 두 근이 $\sin \theta, \cos \theta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{a}{9}, \sin \theta \cos \theta = -\frac{b}{9} \quad \dots\dots \text{iii}$$

따라서 $-\frac{a}{9} = \frac{1}{3}, -\frac{b}{9} = -\frac{4}{9}$ 이므로 $a = -3, b = 4$

$$\therefore a + b = -3 + 4 = 1 \quad \dots\dots \text{iv}$$

채점 기준

① 이차방정식 $4x^2 + 3x - 9 = 0$ 에서 근과 계수의 관계를 이용하여 $\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta}, \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{1}{\cos \theta}$ 의 값 구하기	20%
② $\sin \theta + \cos \theta, \sin \theta \cos \theta$ 의 값 구하기	40%
③ 이차방정식 $9x^2 + ax - b = 0$ 에서 근과 계수의 관계를 이용하여 $\sin \theta + \cos \theta, \sin \theta \cos \theta$ 의 식 구하기	20%
④ ②, ③에서 구한 식이 같음을 이용하여 a, b 의 값을 구한 후 $a + b$ 의 값 구하기	20%

C 실력 향상

99쪽

0638 답 $\frac{7}{8}\pi$

두 각 $\theta, 15\theta$ 가 모두 제1사분면의 각이고,

$\sin \theta = \cos 15\theta$ 가 성립하므로 두 각 $\theta, 15\theta$ 를 나타내는 동경은 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

$$\theta + 15\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\text{단, } n \text{은 정수})$$

$$16\theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad \therefore \theta = \frac{n}{8}\pi + \frac{\pi}{32} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{에서 } 0 < \frac{n}{8}\pi + \frac{\pi}{32} < \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore -\frac{1}{4} < n < \frac{15}{4}$$

이때 n 은 정수이므로

$$n = 0 \text{ 또는 } n = 1 \text{ 또는 } n = 2 \text{ 또는 } n = 3$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\theta = \frac{\pi}{32} \text{ 또는 } \theta = \frac{5}{32}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{9}{32}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{13}{32}\pi$$

$$\text{따라서 구하는 합은 } \frac{\pi}{32} + \frac{5}{32}\pi + \frac{9}{32}\pi + \frac{13}{32}\pi = \frac{7}{8}\pi$$

0639 답 ①

원 C의 반지름의 길이를 r , $\angle OPA = \theta$ 라

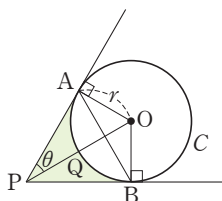
하자.

점 Q가 선분 OP의 중점이므로 $\overline{OP} = 2r$

삼각형 OAP에서 $\angle OAP = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$$

$$\text{이때 } 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \theta = \frac{\pi}{6} \quad \therefore \angle APB = 2\theta = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$



즉, $\overline{PA} = \overline{PB}$ 이고, $\angle APB = \frac{\pi}{3}$ 이므로 삼각형 APB는 정삼각형이다.

삼각형 APB의 둘레의 길이가 $6\sqrt{2}$ 이므로

$$\overline{PA} = \overline{PB} = 2\sqrt{2}$$

$$\overline{OA} = \overline{PA} \tan \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$\therefore r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

한편 $\angle AOB = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ 이므로 부채꼴 OAB의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{9}\pi$$

또 직각삼각형 OAP의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

따라서 구하는 넓이는 삼각형 OAP의 넓이를 2배 한 것에서 부채꼴 OAB의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$$\frac{4\sqrt{3}}{3} \times 2 - \frac{8}{9}\pi = \frac{8\sqrt{3}}{3} - \frac{8}{9}\pi$$

0640 답 -1

점 A의 x좌표를 k ($k > 0$)라 하면 점 B의

x좌표는 $-k$ 이므로

$$A(k, 1), B(-k, 1)$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{1}{r}, \cos \beta = -\frac{k}{r}$$

$$\sin \alpha + \cos \beta = 0 \text{에서 } \frac{1}{r} + \left(-\frac{k}{r}\right) = 0$$

$$\frac{1-k}{r} = 0$$

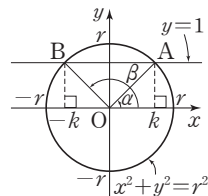
$$\therefore k = 1$$

이때 점 A(1, 1)은 원 $x^2 + y^2 = r^2$ 위의 점이므로

$$r^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$\therefore r = \sqrt{2} \quad (\because r > 1)$$

$$\therefore 2 \sin \alpha \cos \beta = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -1$$



0641 답 $-\frac{\sqrt{15}}{16}$

$$\frac{1 - 2 \sin \theta \cos \theta}{\cos \theta - \sin \theta} + \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta}{\cos \theta - \sin \theta} + \frac{\cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta}{\cos \theta + \sin \theta}$$

$$= \frac{(\cos \theta - \sin \theta)^2}{\cos \theta - \sin \theta} + \frac{(\cos \theta + \sin \theta)^2}{\cos \theta + \sin \theta}$$

$$= \cos \theta - \sin \theta + \cos \theta + \sin \theta$$

$$= 2 \cos \theta$$

$$\text{즉, } 2 \cos \theta = \frac{1}{2} \text{이므로 } \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

이때 θ 가 제4사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0$

$$\therefore \sin \theta = -\sqrt{\frac{15}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \left(-\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \times \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{15}}{16}$$

06 / 삼각함수의 그래프

A 개념 확인

100~103쪽

0642 답 3

함수 $f(x)$ 의 주기가 3이므로 모든 실수 x 에 대하여
 $f(x+3)=f(x)$
 $\therefore f(13)=f(10)=f(7)=f(4)=f(1)=3$

0643 답 2

함수 $f(x)$ 의 주기가 2이므로 모든 실수 x 에 대하여
 $f(x+2)=f(x)$
 $\therefore f(7)=f(5)=f(3)=f(1)=1+1=2$

0644 답 (1) $\{y|-2 \leq y \leq 2\}$ (2) 2π (3) 원점

(1) $-1 \leq \sin x \leq 1$ 에서 $-2 \leq 2 \sin x \leq 2$ 이므로 치역은 $\{y|-2 \leq y \leq 2\}$ 이다.
 (2) $2 \sin x = 2 \sin(x+2\pi)$ 이므로 주기는 2π 이다.

0645 답 (1) $\{y|-1 \leq y \leq 1\}$ (2) π (3) y 축

(1) $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ 이므로 치역은 $\{y|-1 \leq y \leq 1\}$ 이다.
 (2) $\cos 2x = \cos(2x+2\pi) = \cos 2(x+\pi)$ 이므로 주기는 π 이다.

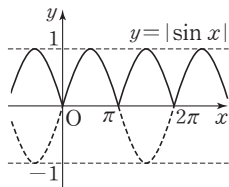
0646 답 (1) 실수 전체의 집합 (2) 2π

(3) $x=(2n+1)\pi$ (4) 원점

(2) $\tan \frac{x}{2} = \tan\left(\frac{x}{2} + \pi\right) = \tan \frac{1}{2}(x+2\pi)$ 이므로 주기는 2π 이다.
 (3) 그래프의 점근선의 방정식은
 $\frac{x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서 $x = 2n\pi + \pi = (2n+1)\pi$ (n 은 정수)

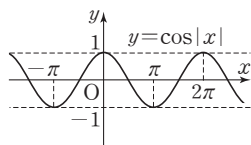
0647 답 π

함수 $y=|\sin x|$ 의 그래프는 함수
 $y=\sin x$ 의 그래프를 그린 후 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
 따라서 함수 $y=|\sin x|$ 의 주기는 π 이다.



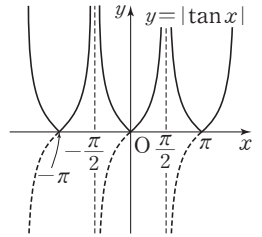
0648 답 2π

함수 $y=\cos |x|$ 의 그래프는 함수
 $y=\cos x$ 의 그래프를 $x \geq 0$ 인 부분만 그린 후 $x < 0$ 인 부분은 $x \geq 0$ 인 부분을 y 축에 대하여 대칭이동하여 그린 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
 따라서 함수 $y=\cos |x|$ 의 주기는 2π 이다.



0649 답 π

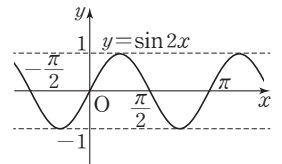
함수 $y=|\tan x|$ 의 그래프는 함수
 $y=\tan x$ 의 그래프를 그린 후 $y \geq 0$ 인 부분은 그대로 두고, $y < 0$ 인 부분을 x 축에 대하여 대칭이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.
 따라서 함수 $y=|\tan x|$ 의 주기는 π 이다.



0650 답 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: π ,

그래프는 풀이 참조

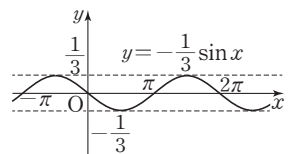
최댓값은 1, 최솟값은 -1이고, 주기는 $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$ 이므로 함수 $y=\sin 2x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0651 답 최댓값: $\frac{1}{3}$, 최솟값: $-\frac{1}{3}$, 주기: 2π ,

그래프는 풀이 참조

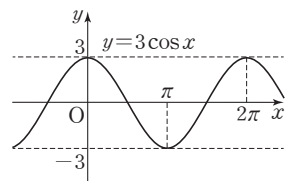
최댓값은 $\frac{1}{3}$, 최솟값은 $-\frac{1}{3}$ 이고, 주기는 2π 이므로 함수 $y=-\frac{1}{3}\sin x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0652 답 최댓값: 3, 최솟값: -3, 주기: 2π ,

그래프는 풀이 참조

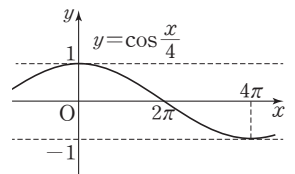
최댓값은 3, 최솟값은 -3이고, 주기는 2π 이므로 함수 $y=3\cos x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0653 답 최댓값: 1, 최솟값: -1, 주기: 8π ,

그래프는 풀이 참조

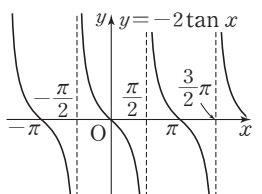
최댓값은 1, 최솟값은 -1이고, 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$ 이므로 함수 $y=\cos \frac{x}{4}$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0654 답 주기: π , 점근선의 방정식: $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n 은 정수),

그래프는 풀이 참조

주기는 π 이고, 그래프의 점근선의 방정식은 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)이므로 함수 $y=-2\tan x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0655 **답** 주기: $\frac{\pi}{2}$, 점근선의 방정식: $x = \frac{2n+1}{4}\pi$ (n 은 정수),

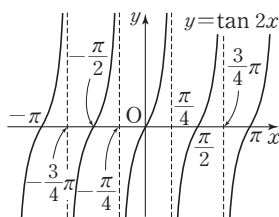
그래프는 풀이 참조

주기는 $\frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$ 이고, 그래프의 점

근선의 방정식은 $2x = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$x = \frac{n}{2}\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{2n+1}{4}\pi$ (n 은 정수)

따라서 함수 $y = \tan 2x$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.



0656 **답** 최댓값: 1, 최솟값: -3, 주기: 2π

최댓값은 $|2| - 1 = 1$, 최솟값은 $-|2| - 1 = -3$ 이고, 주기는 2π 이다.

0657 **답** 최댓값: 4, 최솟값: 2, 주기: π

$y = -\cos(2x - \pi) + 3 = -\cos 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$

최댓값은 $|-1| + 3 = 4$, 최솟값은 $-|-1| + 3 = 2$ 이고, 주기는

$\frac{2\pi}{|2|} = \pi$ 이다.

0658 **답** 최댓값: 없다., 최솟값: 없다., 주기: $\frac{\pi}{2}$

$y = 3 \tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) - 4 = 3 \tan 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 4$

최댓값, 최솟값은 없고, 주기는 $\frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$ 이다.

0659 **답** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin \frac{7}{3}\pi = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

0660 **답** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 750^\circ = \cos(360^\circ \times 2 + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

0661 **답** 1

$\tan \frac{9}{4}\pi = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

0662 **답** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin(-45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

0663 **답** $\frac{1}{2}$

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

0664 **답** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

0665 **답** $-\frac{1}{2}$

$\sin \frac{7}{6}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$

0666 **답** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos \frac{5}{4}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

0667 **답** $\sqrt{3}$

$\tan 240^\circ = \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

0668 **답** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin \frac{2}{3}\pi = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

0669 **답** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos \frac{5}{6}\pi = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

0670 **답** -1

$\tan \frac{3}{4}\pi = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$

0671 **답** -0.9659

$\sin(-105^\circ) = -\sin 105^\circ = -\sin(90^\circ + 15^\circ) = -\cos 15^\circ = -0.9659$

0672 **답** -0.9563

$\cos 197^\circ = \cos(180^\circ + 17^\circ) = -\cos 17^\circ = -0.9563$

0673 **답** 0.2867

$\tan 376^\circ = \tan(360^\circ + 16^\circ) = \tan 16^\circ = 0.2867$

0674 **답** $x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

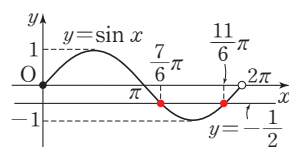
오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선

$y = -\frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표는 $\frac{7}{6}\pi$,

$\frac{11}{6}\pi$ 이므로 주어진 방정식의 해는

$x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$



0675 **답** $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

$2\cos^2 x - \cos x = 0$ 에서

$\cos x(2\cos x - 1) = 0$

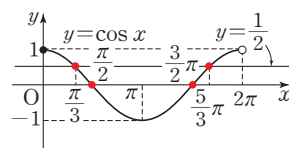
$\therefore \cos x = 0$ 또는 $\cos x = \frac{1}{2}$

(i) $\cos x = 0$ 일 때, $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi$

(ii) $\cos x = \frac{1}{2}$ 일 때, $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

(i), (ii)에서 주어진 방정식의 해는

$x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$



0676 [답] $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi \leq x < 2\pi$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

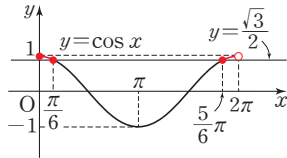
부등식 $\cos x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는 함수

$y = \cos x$ 의 그래프가 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

과 만나거나 위쪽에 있는 x 의 값의

범위와 같으므로

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } \frac{5}{6}\pi \leq x < 2\pi$$



0677 [답] $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$

$2\sin^2 x + 5\sin x + 2 < 0$ 에서 $(2\sin x + 1)(\sin x + 2) < 0$

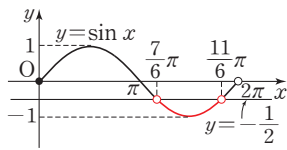
그런데 $\sin x + 2 > 0$ 이므로

$$2\sin x + 1 < 0 \quad \therefore \sin x < -\frac{1}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 부

등식의 해는

$$\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$$



B 유형 완성

104~117쪽

0678 [답] ⑤

함수 $f(x)$ 의 주기가 p 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+p) = f(x)$$

$$\therefore f(p) = f(0) = \sin 0 + \cos 0 + \tan 0 = 1$$

0679 [답] ③

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2) = f(x)$ 이므로

$$f(102) = f(100) = f(98) = \dots = f(0) = 1$$

$$f(101) = f(99) = f(97) = \dots = f(1) = 3$$

$$\therefore f(100) + f(101) + f(102) = 1 + 3 + 1 = 5$$

0680 [답] $\frac{\sqrt{3}}{2}$

모든 실수 x 에 대하여 $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 이므로 이 식의 양변

에 x 대신 $x + \frac{\pi}{2}$ 를 대입하면

$$f\left(x + \pi\right) = f(x)$$

따라서 함수 $f(x)$ 는 주기가 π 인 주기함수이므로

$$f\left(\frac{22}{3}\pi\right) = f\left(\frac{19}{3}\pi\right) = f\left(\frac{16}{3}\pi\right) = \dots = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

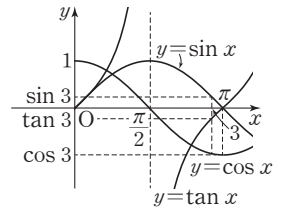
$$= \cos\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

0681 [답] ④

$\frac{5}{6}\pi < 3 < \pi$ 이므로 오른쪽 그림에서

$$\cos 3 < \tan 3 < \sin 3$$

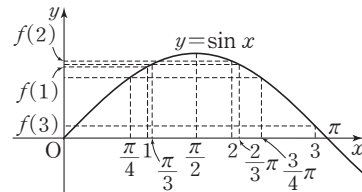
$$\therefore B < C < A$$



0682 [답] ⑤

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 x 의 값이 증가하면 $\sin x$ 의 값도 증가하고,

$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ 에서 x 의 값이 증가하면 $\sin x$ 의 값은 감소한다.



$$\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3} \text{이므로 } \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin 1 < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\pi}{2} < 2 < \frac{2}{3}\pi \text{이므로 } \frac{\sqrt{3}}{2} < \sin 2 < 1$$

$$\frac{3}{4}\pi < 3 < \pi \text{이므로 } 0 < \sin 3 < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

따라서 $\sin 3 < \sin 1 < \sin 2$ 이므로 $f(3) < f(1) < f(2)$

0683 [답] ㄴ, ㄷ

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 세 함수 $y = \sin x$,

$y = \cos x$, $y = \tan x$ 의 그래프는 오른

쪽 그림과 같으므로

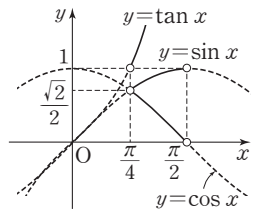
$$\cos x < \sin x < \tan x$$

$$\therefore \cos x - \sin x < 0$$

$$\therefore \sin x - \tan x < 0$$

$$\therefore \tan x - \cos x > 0$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.



0684 [답] ②

ㄱ. 주기는 $\frac{2\pi}{|2|} = \pi$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+\pi) = f(x)$

ㄴ. 최댓값은 $|-1| - 1 = 0$, 최솟값은 $-|-1| - 1 = -2$ 이므로 $-2 \leq f(x) \leq 0$

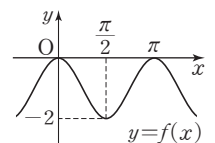
ㄷ. 함수 $f(x) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1 = -\sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ 의 그래프는 함수 $y = \sin 2x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.

ㄹ. 함수 $f(x) = -\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{에서 } x \text{의 값이 증가하면 } f(x)$$

의 값은 감소한다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.



0685 답 4

$$y = 3 \sin \left(\pi x - \frac{1}{2} \right) + 1 = 3 \sin \pi \left(x - \frac{1}{2\pi} \right) + 1$$

$$p = \frac{2\pi}{|\pi|} = 2, M = |3| + 1 = 4, m = -|3| + 1 = -2$$

$$\therefore p + M + m = 2 + 4 + (-2) = 4$$

0686 답 ③

① 함수 $y = \sin(2x - \pi) = \sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 의 그래프는 함수

$y = \sin 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼 평행이동한 것이다.

② 함수 $y = \sin 2x + 1$ 의 그래프는 함수 $y = \sin 2x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

③ 함수 $y = 2 \sin x + 3$ 의 그래프는 함수 $y = \sin x$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 2배 한 후 y 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

④ 함수 $y = -\sin 2x$ 의 그래프는 함수 $y = \sin 2x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 것이다.

⑤ 함수 $y = -\sin(2x + 2) - 4 = -\sin 2(x + 1) - 4$ 의 그래프는 함수 $y = \sin 2x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 후 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 -4 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y = \sin 2x$ 의 그래프를 평행이동 또는 대칭이동하여 겹쳐지지 않는 것은 ③이다.

0687 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

ㄱ. 최댓값은 $|2| - 3 = -1$, 최솟값은 $-|2| - 3 = -5$ 이다.

ㄴ. 주기가 $\frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$ 이므로 모든 실수 x 에 대하여 $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$

$$\text{ㄷ. } f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos\left(\frac{4}{3}\pi - \pi\right) - 3 = 2 \cos \frac{\pi}{3} - 3 = 2 \times \frac{1}{2} - 3 = -2$$

즉, 그래프는 점 $\left(\frac{\pi}{3}, -2\right)$ 를 지난다.

ㄹ. 함수 $f(x) = 2 \cos(4x - \pi) - 3 = 2 \cos 4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 3$ 의 그래

프는 직선 $x = \frac{\pi}{4}$ 에 대하여 대칭이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

0688 답 36

$$y = -4 \cos\left(\frac{\pi}{2}x - 3\right) + 5 = -4 \cos \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{6}{\pi}\right) + 5$$

$$p = \frac{2\pi}{|\frac{\pi}{2}|} = 4, M = |-4| + 5 = 9, m = -|-4| + 5 = 1$$

$$\therefore pMm = 4 \times 9 \times 1 = 36$$

0689 답 $\frac{4}{3}\pi$

함수 $y = \cos 2x - 3$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$-y = \cos 2x - 3 \quad \therefore y = -\cos 2x + 3 \quad \dots\dots \text{ㄱ}$$

이 함수의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = -\cos 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 + a = -\cos\left(2x + \frac{2}{3}\pi\right) + 3 + a \quad \dots\dots \text{ㄴ}$$

이 식이 $y = -\cos(2x + b) + 5$ 와 일치하므로

$$5 = 3 + a, b = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore a = 2 \quad \dots\dots \text{ㄴ}$$

$$\therefore ab = \frac{4}{3}\pi \quad \dots\dots \text{ㄴ}$$

재검 기준

ㄱ 대칭이동한 그래프의 식 구하기	30 %
ㄴ 평행이동한 그래프의 식 구하기	30 %
ㄴ a, b의 값 구하기	20 %
ㄴ ab의 값 구하기	20 %

0690 답 ④

① 주기가 $\frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$ 인 주기함수이다.

② 최댓값과 최솟값은 없다.

③ 그래프는 원점을 지나지 않는다.

④ 그래프의 점근선의 방정식은

$$2x - \frac{\pi}{4} = n\pi + \frac{\pi}{2} \text{에서 } x = \frac{n}{2}\pi + \frac{3}{8}\pi (n \text{은 정수})$$

⑤ 함수 $y = 4 \tan\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 4 \tan 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$ 의 그래프는 함수

$y = 4 \tan 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{8}$ 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

0691 답 ⑤

함수 $y = \tan \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{|\frac{1}{3}|} = 3\pi$ 이다.

주어진 함수의 주기를 각각 구해 보면 다음과 같다.

$$\text{① } \frac{2\pi}{|\frac{1}{2}|} = 4\pi \quad \text{② } \frac{2\pi}{|2|} = \pi \quad \text{③ } \frac{\pi}{|1|} = \pi$$

$$\text{④ } \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi \quad \text{⑤ } \frac{2\pi}{|\frac{2}{3}|} = 3\pi$$

따라서 함수 $y = \tan \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}\pi\right)$ 와 주기가 같은 함수는 ⑤이다.

0692 답 ③

$$y = 2 \tan\left(\frac{\pi}{2}x - \pi\right) - 3 = 2 \tan \frac{\pi}{2}(x - 2) - 3$$

$$\text{주기는 } \frac{\pi}{|\frac{\pi}{2}|} = 2$$

또 그래프의 점근선의 방정식은 $\frac{\pi}{2}x - \pi = n\pi + \frac{\pi}{2}$ 에서

$$\frac{\pi}{2}x = n\pi + \frac{3}{2}\pi \quad \therefore x = 2n + 1 \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

0693 답 $\frac{5}{2}$

최솟값이 -6 이고 $a > 0$ 이므로

$$-a + c = -6 \quad \dots\dots \text{ㄱ}$$

또 주기가 4π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

즉, $f(x) = a \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + c$ 이고 $f(\pi) = 0$ 이므로

$$a \sin \frac{\pi}{6} + c = 0 \quad \therefore \frac{a}{2} + c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{C}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 4$, $c = -2$

$$\therefore a + b + c = 4 + \frac{1}{2} + (-2) = \frac{5}{2}$$

0694 답 2π

주기가 2π 이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a} = 2\pi \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

따라서 함수 $y = -\tan\left(\frac{x}{2} - b\right) + 1$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$$\frac{x}{2} - b = n\pi + \frac{\pi}{2} \text{에서}$$

$$\frac{x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{2} + b \quad \therefore x = 2n\pi + \pi + 2b \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

이 방정식이 $x = 2n\pi$ 와 일치하므로 $\pi + 2b = 2k\pi$ (k 는 정수)

$$\text{이때 } 0 < b < \pi \text{이므로 } b = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore 8ab = 8 \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

0695 답 ⑤

㉠에서 주기가 π 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

㉡에서 $a > 0$ 이므로 $a + c = 3$, $-a + c = 1$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 1$, $c = 2$

따라서 $f(x) = \cos 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$ 이므로

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\pi + 2 = 1 + 2 = 3$$

0696 답 2π

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -2 이고 $a > 0$ 이므로 $a = 2$

또 주기가 $\frac{3}{4}\pi - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

따라서 주어진 함수는 $y = 2 \cos(2x - c)$ 이고 그래프가 원점을 지나므로

$$0 = 2 \cos(-c) \quad \therefore \cos(-c) = 0$$

이때 $0 < c < \pi$ 에서 $-\pi < -c < 0$ 이므로

$$-c = -\frac{\pi}{2} \quad \therefore c = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore abc = 2 \times 2 \times \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

0697 답 -6

주어진 그래프에서 함수의 최댓값이 2, 최솟값이 -4 이고 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 2, \quad -a + c = -4$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3$, $c = -1$

또 주기가 $\frac{17}{4}\pi - \frac{\pi}{4} = 4\pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi \quad \therefore b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 4abc = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} \times (-1) = -6$$

..... ③

채점 기준

① a, c 의 값 구하기	40 %
② b 의 값 구하기	40 %
③ $4abc$ 의 값 구하기	20 %

0698 답 2π

주어진 그래프에서 함수의 주기가 $\frac{5}{4}\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi$ 이고 $a > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{a} = \frac{3}{4}\pi \quad \therefore a = \frac{4}{3}$$

따라서 주어진 함수는 $y = \tan\left(\frac{4}{3}x - b\right)$ 이고 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$

을 지나므로 $0 = \tan\left(\frac{\pi}{6} - b\right)$

이때 $0 < b < \frac{\pi}{2}$ 에서 $-\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6} - b < \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\frac{\pi}{6} - b = 0 \quad \therefore b = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore 9ab = 9 \times \frac{4}{3} \times \frac{\pi}{6} = 2\pi$$

0699 답 $-\frac{4}{3}\pi$

함수 $y = \tan x$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, d\right)$ 를 지나므로

$$d = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

함수 $y = a \sin(bx + c)$ 의 최댓값이 2, 최솟값이 -2 이고 $a > 0$ 이므로 $a = 2$

또 주기가 $\frac{7}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \pi \quad \therefore b = 2$$

따라서 주어진 함수는 $y = 2 \sin(2x + c)$ 이고 그래프가 점 $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

을 지나므로

$$1 = 2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + c\right) \quad \therefore \sin\left(\frac{\pi}{2} + c\right) = \frac{1}{2}$$

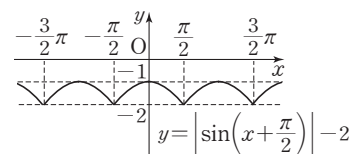
이때 $-\frac{\pi}{2} < c \leq 0$ 에서 $0 < \frac{\pi}{2} + c \leq \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\frac{\pi}{2} + c = \frac{\pi}{6} \quad \therefore c = -\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore abcd = 2 \times 2 \times \left(-\frac{\pi}{3}\right) \times 1 = -\frac{4}{3}\pi$$

0700 답 2π

함수 $y = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| - 2$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



즉, $a = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$, $M = -1$, $m = -2$ 이므로

$$aMm = 2\pi$$

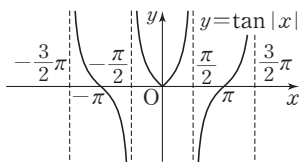
0701 답 ⑤

함수 $y=\tan |x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

⑤ 그래프의 점근선은 직선

$$x=n\pi+\frac{\pi}{2} \quad (n \text{은 정수}) \text{이다.}$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.



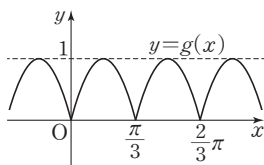
0702 답 ②

$a>0$ 이므로 함수 $f(x)=\cos(ax)+1$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{a}$ 이다.

함수 $g(x)=|\sin 3x|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 함수 $g(x)$ 의 주기는 $\frac{\pi}{3}$ 이다.

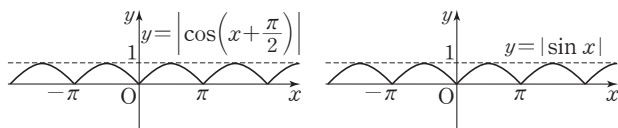
이때 두 함수 $f(x), g(x)$ 의 주기가 서로 같으므로

$$\frac{2\pi}{a}=\frac{\pi}{3} \quad \therefore a=6$$

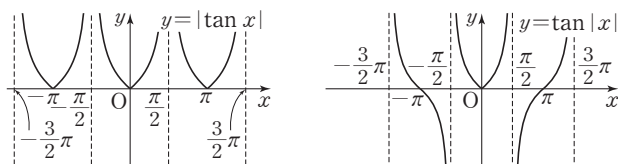


0703 답 ①

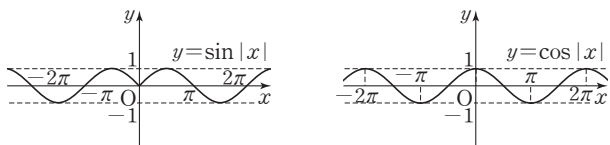
ㄱ. $y=|\cos(x+\frac{\pi}{2})|$, $y=|\sin x|$ 의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



ㄴ. $y=|\tan x|$, $y=\tan |x|$ 의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



ㄷ. $y=\sin |x|$, $y=\cos |x|$ 의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



따라서 보기에서 두 함수의 그래프가 일치하는 것은 ㄱ이다.

0704 답 2

함수 $y=\sin \frac{\pi}{6}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$

이므로 점 E의 좌표는 (6, 0)이다.

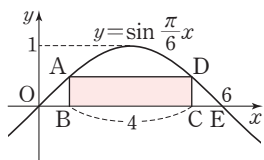
또 주어진 그래프는 직선 $x=3$ 에 대하여 대칭이고 $\overline{BC}=4$ 이므로

$$\overline{OB}=\frac{1}{2} \times (6-4)=1 \quad \therefore B(1, 0), C(5, 0)$$

즉, 점 A의 x좌표는 1이므로 점 A의 y좌표는

$$\sin \frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \quad \therefore A(1, \frac{1}{2})$$

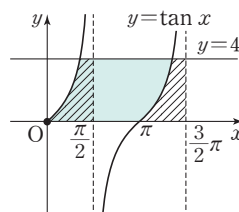
따라서 직사각형 ABCD의 넓이는 $4 \times \frac{1}{2}=2$



0705 답 ③

오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 함수 $y=\tan x$ 의 그래프와 x축 및 직선 $y=4$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

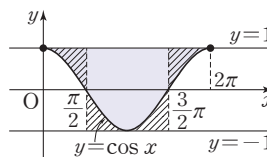
$$4 \times \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2} \right) = 4\pi$$



0706 답 2\pi

오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 함수 $y=\cos x$ 의 그래프와 직선 $y=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{\pi}{2} \right) \times \{1 - (-1)\} = 2\pi$$



0707 답 12\pi

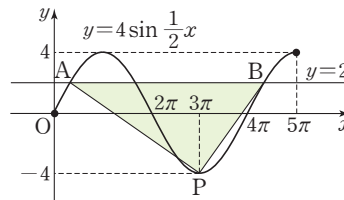
오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}$ 의 길이가 최대이고, 높이가 최대가 되는 점 P에서 삼각형 PAB의 넓이는 최대가 된다.

함수 $y=4\sin \frac{1}{2}x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi \text{이므로 } \overline{AB}=4\pi$$

또 최솟값은 -4 이므로 높이가 최대가 되는 점 P의 y좌표는 -4 이다. 따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최댓값은

$$\frac{1}{2} \times 4\pi \times \{2 - (-4)\} = 12\pi$$



0708 답 -1

함수 $y=\cos x$ 의 그래프에서 $\frac{a+b}{2}=-\pi$, $\frac{c+d}{2}=\pi$ 이므로

$$a+b=-2\pi, c+d=2\pi$$

$$\therefore \frac{a+b}{c+d}=\frac{-2\pi}{2\pi}=-1$$

0709 답 -\pi

함수 $y=\cos x$ 의 그래프에서

$$\frac{a+c}{2}=\pi \quad \therefore a+c=2\pi$$

함수 $y=\sin x$ 의 그래프에서

$$\frac{b+d}{2}=\frac{3}{2}\pi \quad \therefore b+d=3\pi$$

$$\therefore a-b+c-d=(a+c)-(b+d)=2\pi-3\pi=-\pi$$

0710 답 ③

$$\sin \frac{11}{3}\pi=\sin \left(2\pi+2\pi-\frac{\pi}{3} \right)=\sin \left(2\pi-\frac{\pi}{3} \right)=-\sin \frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{5}{3}\pi=\tan \left(2\pi-\frac{\pi}{3} \right)=-\tan \frac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$$

$$\cos \frac{7}{6}\pi=\cos \left(\pi+\frac{\pi}{6} \right)=-\cos \frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{주어진 식}) &= 2 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) - 3 \times (-\sqrt{3}) + 4 \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= -\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0 \end{aligned}$$

0711 답 0.7661

$$\begin{aligned}\sin 110^\circ &= \sin(90^\circ + 20^\circ) = \cos 20^\circ = 0.9397 \\ \cos 260^\circ &= \cos(90^\circ \times 3 - 10^\circ) = -\sin 10^\circ = -0.1736 \\ \therefore \sin 110^\circ + \cos 260^\circ &= 0.9397 + (-0.1736) = 0.7661\end{aligned}$$

0712 답 ㄱ

$$\begin{aligned}\text{ㄱ. } \cos 1080^\circ &= \cos(360^\circ \times 3 + 0^\circ) = \cos 0^\circ = 1 \\ \sin(-330^\circ) &= -\sin 330^\circ = -\sin(360^\circ - 30^\circ) \\ &= \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \\ \tan 240^\circ &= \tan(180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \\ \cos 150^\circ &= \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \therefore (\text{주어진 식}) &= 1 \times \frac{1}{2} + \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 \\ \text{ㄴ. } \sin \frac{13}{4}\pi &= \sin\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\left(-\frac{4}{3}\pi\right) &= \cos \frac{4}{3}\pi = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ \tan\left(-\frac{7}{6}\pi\right) &= -\tan \frac{7}{6}\pi = -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \therefore (\text{주어진 식}) &= \sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\ &= -1 - 1 - 1 = -3 \\ \text{ㄷ. } \sin \frac{7}{3}\pi &= \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan \frac{13}{6}\pi &= \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos \frac{11}{3}\pi &= \cos\left(2\pi + 2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \therefore (\text{주어진 식}) &= \log_2 \frac{\sqrt{3}}{2} + \log_2 \frac{\sqrt{3}}{3} + \log_2 \frac{1}{2} \\ &= \log_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2}\right) \\ &= \log_2 \frac{1}{4} = -2\end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

0713 답 -1

$$\begin{aligned}& \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cos^2(2\pi - \theta)}{\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right)} - \frac{\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} \\ &= \frac{\cos \theta \cos^2 \theta}{-\cos \theta} - \frac{-\sin \theta \cos \theta}{\frac{1}{\tan \theta}} \\ &= -\cos^2 \theta - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\frac{\cos \theta}{\sin \theta}} \\ &= -\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = -1\end{aligned}$$

0714 답 -4

직선 $2x - \sqrt{2}y + 1 = 0$ 의 기울기가 $\sqrt{2}$ 이므로 $\tan \theta = \sqrt{2}$ ①

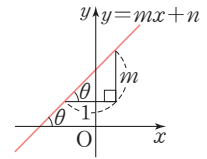
$$\begin{aligned}\therefore \frac{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{1 - \sin(-\theta)} + \frac{\sin(\theta - \pi)}{1 + \sin(\pi + \theta)} \\ = \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{-\sin \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{\sin \theta - \sin^2 \theta - \sin \theta - \sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} \\ = \frac{-2\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} = -2\tan^2 \theta = -2 \times (\sqrt{2})^2 = -4 \quad \dots \dots \text{②}\end{aligned}$$

채점 기준

① 직선의 기울기를 이용하여 $\tan \theta$ 의 값 구하기	30 %
② 주어진 식의 값 구하기	70 %

공통수학2 다시보기

직선 $y = mx + n$ 이 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ 라 하면
(기울기) = $\frac{(y \text{의 값의 증가량})}{(x \text{의 값의 증가량})} = \tan \theta = m$



0715 답 $-\frac{4}{5}$

$\overline{AB}$ 가 원의 지름이므로 $\angle C = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$
삼각형 ABC에서 $\overline{AB} = 10$ 이므로 $\overline{BC} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$
 $\therefore \cos(2\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$
 $= -\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$

0716 답 ⑤

$A + B + C = \pi$ 이므로

$$\begin{aligned}\text{① } \cos(B + C) &= \cos(\pi - A) = -\cos A \\ \text{② } \sin(B + C) &= \sin(\pi - A) = \sin A \\ \text{③ } \sin \frac{B+C}{2} &= \sin \frac{\pi - A}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos \frac{A}{2} \\ \text{④ } \tan(A + C) &= \tan(\pi - B) = -\tan B \text{이므로} \\ \tan B \tan(A + C) &= \tan B \times (-\tan B) = -\tan^2 B \\ \text{⑤ } \tan \frac{B+C}{2} &= \tan \frac{\pi - A}{2} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \frac{1}{\tan \frac{A}{2}} \text{이므로} \\ \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B+C}{2} &= \tan \frac{A}{2} \times \frac{1}{\tan \frac{A}{2}} = 1\end{aligned}$$

따라서 항상 옳은 것은 ⑤이다.

0717 답 ④

$$\begin{aligned}\cos 10^\circ &= \cos(90^\circ - 80^\circ) = \sin 80^\circ \\ \cos 20^\circ &= \cos(90^\circ - 70^\circ) = \sin 70^\circ \\ \cos 30^\circ &= \cos(90^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ \\ \cos 40^\circ &= \cos(90^\circ - 50^\circ) = \sin 50^\circ \\ \therefore (\text{주어진 식}) &= (\sin^2 80^\circ + \cos^2 80^\circ) + (\sin^2 70^\circ + \cos^2 70^\circ) \\ &\quad + (\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ) + (\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ) + \cos^2 90^\circ \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 0 = 4\end{aligned}$$

0718 [답] ④

$$1^\circ + \theta = A \text{로 놓으면 } \theta = A - 1^\circ$$

$$89^\circ - \theta = 89^\circ - (A - 1^\circ) = 90^\circ - A$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = \tan A \times \tan(90^\circ - A) = \tan A \times \frac{1}{\tan A} = 1$$

0719 [답] 0

$$\begin{aligned} \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \cdots + \sin 180^\circ + \sin 181^\circ + \sin 182^\circ + \cdots + \sin 360^\circ \\ = \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \cdots + \sin 180^\circ + \sin(180^\circ + 1^\circ) + \sin(180^\circ + 2^\circ) \\ + \cdots + \sin(180^\circ + 180^\circ) \\ = \sin 1^\circ + \sin 2^\circ + \cdots + \sin 180^\circ - \sin 1^\circ - \sin 2^\circ - \cdots - \sin 180^\circ \\ = 0 \end{aligned}$$

0720 [답] ㄱ, ㄴ

$$10\theta = 2\pi \text{이므로 } \theta = \frac{\pi}{5}$$

$$\text{ㄱ. } \cos 6\theta = \cos(5\theta + \theta) = \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta \text{이므로}$$

$$\cos \theta + \cos 6\theta = \cos \theta + (-\cos \theta) = 0$$

$$\text{ㄴ. } \sin(-7\theta) = -\sin 7\theta = -\sin(5\theta + 2\theta)$$

$$= -\sin(\pi + 2\theta) = \sin 2\theta$$

$$\text{ㄷ. } \cos 9\theta = \cos(10\theta - \theta) = \cos(2\pi - \theta) = \cos \theta$$

$$\text{ㄹ. } \tan 6\theta = \tan(5\theta + \theta) = \tan(\pi + \theta) = \tan \theta \text{이므로}$$

$$\frac{1}{\tan 6\theta} = \frac{1}{\tan \theta}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

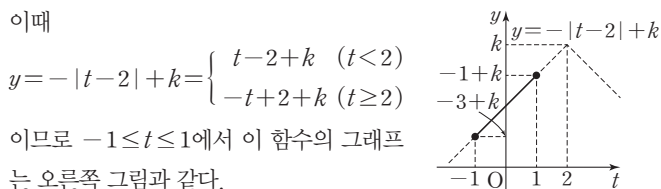
0721 [답] ⑤

$$y = -|\tan x - 2| + k \text{에서}$$

$$\tan x = t \text{로 놓으면 } y = -|t - 2| + k$$

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{에서 } -1 \leq \tan x \leq 1 \quad \therefore -1 \leq t \leq 1$$

이때



이므로 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 이 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

따라서 주어진 함수는 $t=1$ 에서 최댓값 $-1+k$, $t=-1$ 에서 최솟값 $-3+k$ 를 갖고 그 합이 4이므로

$$(-1+k) + (-3+k) = 4 \quad \therefore k = 4$$

다른 풀이

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{에서 } -1 \leq \tan x \leq 1 \text{이므로 } \tan x - 2 < 0$$

$$\therefore y = -|\tan x - 2| + k = \tan x - 2 + k$$

$$\text{즉, } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{에서 } -1 \leq \tan x \leq 1 \text{이므로}$$

$$-3 + k \leq \tan x - 2 + k \leq -1 + k$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $-1+k$, 최솟값은 $-3+k$ 이므로

$$(-1+k) + (-3+k) = 4 \quad \therefore k = 4$$

0722 [답] 4

$$\begin{aligned} y &= \sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - \cos x + 2 = -\cos x - \cos x + 2 \\ &= -2\cos x + 2 \end{aligned}$$

이때 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로 $-2 \leq -2\cos x \leq 2$

$$\therefore 0 \leq -2\cos x + 2 \leq 4$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 4, 최솟값은 0이므로

$$M = 4, m = 0$$

$$\therefore M + m = 4$$

0723 [답] -6

$$-1 \leq \cos 5x \leq 1 \text{에서 } \cos 5x + 4 > 0$$

$$\therefore y = a|\cos 5x + 4| + b = a\cos 5x + 4a + b$$

$a > 0$ 이므로 주어진 함수의 최댓값은

$$a + 4a + b = 7 \quad \therefore 5a + b = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

최솟값은

$$-a + 4a + b = 3 \quad \therefore 3a + b = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 2, b = -3$

$$\therefore ab = -6$$

0724 [답] 8

$$y = a|\sin bx| + c \text{에서 } -1 \leq \sin bx \leq 1 \text{이므로}$$

$$0 \leq |\sin bx| \leq 1$$

$$\therefore c \leq a|\sin bx| + c \leq a + c \quad (\because a > 0)$$

즉, 주어진 함수의 최댓값은 $a+c$, 최솟값은 c 이고 (π) 에서 최댓값과 최솟값의 차가 6이므로

$$a + c - c = 6 \quad \therefore a = 6$$

$(\frac{\pi}{3})$ 에서 함수 $y = \cos 3x$ 의 주기는 $\frac{2}{3}\pi$ 이고, $b > 0$ 이므로 주어진 함

수의 주기는 $\frac{\pi}{b}$

$$\text{즉, } \frac{\pi}{b} = \frac{2}{3}\pi \text{이므로 } b = \frac{3}{2}$$

$(\frac{\pi}{2})$ 에서 함수 $y = 6|\sin \frac{3}{2}x| + c$ 의 그래프가 점 $(0, 1)$ 을 지나므로

$$6|\sin 0| + c = 1 \quad \therefore c = 1$$

$$\therefore ab - c = 6 \times \frac{3}{2} - 1 = 8$$

0725 [답] ②

$$y = \cos^2 x - 4\sin(\pi + x) + 2$$

$$= (1 - \sin^2 x) + 4\sin x + 2$$

$$= -\sin^2 x + 4\sin x + 3$$

$\sin x = t$ 로 놓으면

$$y = -t^2 + 4t + 3 = -(t-2)^2 + 7 \text{이고 } -1 \leq t \leq 1$$

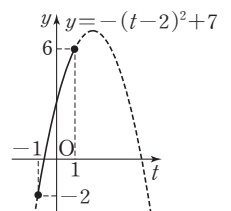
즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으

로 $t=1$ 에서 최댓값 6, $t=-1$ 에서 최솟값

-2를 갖는다.

따라서 $M = 6, m = -2$ 이므로

$$M + m = 4$$



0726 [답] 1

$$y = -2\sin^2 x - 2\cos x + k$$

$$= -2(1 - \cos^2 x) - 2\cos x + k$$

$$= 2\cos^2 x - 2\cos x + k - 2$$

$\cdots \cdots \textcircled{1}$

$\cos x = t$ 로 놓으면

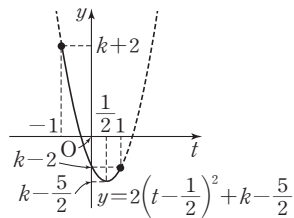
$$y = 2t^2 - 2t + k - 2 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + k - \frac{5}{2} \text{이고 } -1 \leq t \leq 1$$

즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t=-1$ 에서 최댓값 $k+2$, $t=\frac{1}{2}$ 에서 최솟값 $k-\frac{5}{2}$ 를 갖는다.

..... ②

따라서 그 합이 $\frac{3}{2}$ 이므로

$$(k+2) + \left(k-\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \quad \therefore k=1 \quad \text{..... ③}$$



채점 기준

① 주어진 함수를 $\cos x$ 에 대한 식으로 나타내기	30 %
② 최댓값과 최솟값 구하기	50 %
③ k 의 값 구하기	20 %

0727 답 ④

$$y = a \sin^2 x + 2a \cos x + 1$$

$$= a(1 - \cos^2 x) + 2a \cos x + 1$$

$$= -a \cos^2 x + 2a \cos x + a + 1$$

$\cos x = t$ 로 놓으면

$$y = -at^2 + 2at + a + 1 = -a(t-1)^2 + 2a + 1 \text{이고 } -1 \leq t \leq 1$$

즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

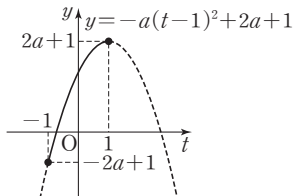
$t=1$ 에서 최댓값 $2a+1$ 을 가지므로

$$2a+1=3 \quad \therefore a=1$$

$t=-1$ 에서 최솟값 $-2a+1$ 을 가지므로

$$b = -2a + 1 = -1$$

$$\therefore a-b = 1 - (-1) = 2$$



0728 답 ⑤

$$y = \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) + \cos^2(\pi + x) - 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= \cos^2 x + \cos^2 x - 2\cos x$$

$$= 2\cos^2 x - 2\cos x$$

$\cos x = t$ 로 놓으면

$$y = 2t^2 - 2t = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} \text{이고 } -1 \leq t \leq 1$$

즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으

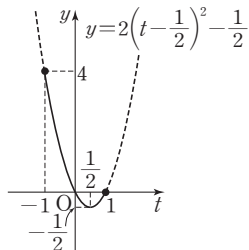
므로 $t=-1$ 에서 최댓값 4, $t=\frac{1}{2}$ 에서

최솟값 $-\frac{1}{2}$ 을 갖는다.

따라서 주어진 함수의 치역은

$$\left\{y \mid -\frac{1}{2} \leq y \leq 4\right\} \text{이므로}$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = 4 \quad \therefore ab = -2$$



0729 답 3

$$f(x) = -\cos^2 x - 2\sin x + 1$$

$$= -(1 - \sin^2 x) - 2\sin x + 1$$

$$= \sin^2 x - 2\sin x$$

$\sin x = t$ 로 놓으면

$$y = t^2 - 2t = (t-1)^2 - 1 \text{이고 } -1 \leq t \leq 1$$

이 함수는 $t=-1$ 에서 최댓값 3, $t=1$ 에서 최솟값 -1 을 가지므로 $-1 \leq f(x) \leq 3$

$f(x) = s$ 로 놓으면

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(s) = -s^2 + 4s + 2 = -(s-2)^2 + 6$$

이고 $-1 \leq s \leq 3$

이 함수는 $s=2$ 에서 최댓값 6, $s=-1$ 에서 최솟값 -3 을 가지므로

$$M=6, m=-3$$

$$\therefore M+m=3$$

0730 답 ①

$\sin x = t$ 로 놓으면

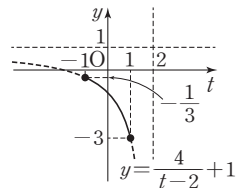
$$y = \frac{t+2}{t-2} = \frac{4}{t-2} + 1 \text{이고 } -1 \leq t \leq 1$$

즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으

므로 $t=-1$ 에서 최댓값 $-\frac{1}{3}$, $t=1$ 에서 최솟값 -3 을 갖는다.

따라서 $M = -\frac{1}{3}$, $m = -3$ 이므로

$$Mm = 1$$



0731 답 $\frac{\pi}{2}$

$\tan x = t$ 로 놓으면

$$y = \frac{3t+1}{t+1} = -\frac{2}{t+1} + 3$$

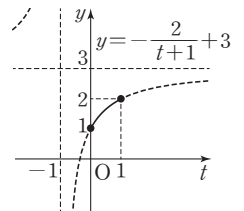
$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{에서 } 0 \leq t \leq 1$$

즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으
므로 $t=1$ 에서 최댓값 2, $t=0$ 에서 최솟
값 1을 갖는다.

이때 $\tan x = 1$ 에서 $x = \frac{\pi}{4}$, $\tan x = 0$ 에서
 $x = 0$ 이므로

$$a = \frac{\pi}{4}, M=2, b=0, m=1$$

$$\therefore (a+b) \times Mm = \left(\frac{\pi}{4} + 0\right) \times 2 \times 1 = \frac{\pi}{4} \times 2 = \frac{\pi}{2}$$



0732 답 $-\frac{1}{4}$

$$y = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin x + 3} = \frac{\sin x}{\sin x + 3}$$

..... ①

$\sin x = t$ 로 놓으면

$$y = \frac{t}{t+3} = -\frac{3}{t+3} + 1 \text{이고 } -1 \leq t \leq 1$$

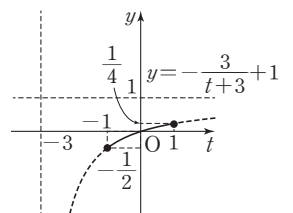
즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과

같으므로 $t=1$ 에서 최댓값 $\frac{1}{4}$, $t=-1$

에서 최솟값 $-\frac{1}{2}$ 을 갖는다. ②

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$$\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \quad \text{..... ③}$$



채점 기준

① 주어진 함수를 $\sin x$ 에 대한 식으로 나타내기	30%
② 최댓값과 최솟값 구하기	50%
③ 최댓값과 최솟값의 합 구하기	20%

0733 답 ④

$\cos x = t$ 로 놓으면

$$y = \frac{at}{t-2} = \frac{2a}{t-2} + a \text{이고 } -1 \leq t \leq 1$$

이때 $a > 0$ 이므로 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같다.

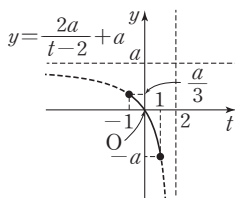
따라서 $t = -1$ 에서 최댓값 $\frac{a}{3}$ 를 가지므로

$$\frac{a}{3} = 1 \quad \therefore a = 3$$

$t = 1$ 에서 최솟값 $-a$ 를 가지므로

$$b = -a = -3$$

$$\therefore a - b = 3 - (-3) = 6$$



0734 답 ⑤

$|\cos x| = t$ 로 놓으면

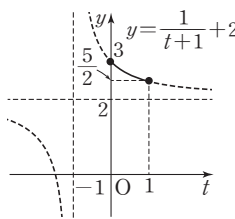
$$y = \frac{2t+3}{t+1} = \frac{1}{t+1} + 2 \text{이고 } 0 \leq t \leq 1$$

즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 $t = 0$ 에서 최댓값 3, $t = 1$ 에서 최솟값 $\frac{5}{2}$ 를 갖는다.

따라서 주어진 함수의 치역은

$$\left\{ y \mid \frac{5}{2} \leq y \leq 3 \right\} \text{이므로 } a = \frac{5}{2}, b = 3$$

$$\therefore ab = \frac{15}{2}$$



0735 답 $x = 0$ 또는 $x = \frac{\pi}{6}$

$$2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} = 0 \text{에서 } \sin \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = t \text{로 놓으면 } \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{한편 } 0 \leq x < \pi \text{에서 } \frac{\pi}{3} \leq 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3} \quad \therefore \frac{\pi}{3} \leq t < \frac{7\pi}{3}$$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{7\pi}{3}$ 에서

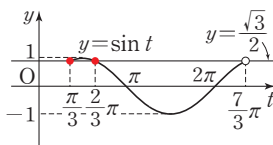
함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{의 교점의 } t \text{좌표는 } \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \text{이}$$

므로

$$2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{\pi}{6}$$



0736 답 ③

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) - \sin (\pi + x) = \sqrt{2} \text{에서 } \sin x - (-\sin x) = \sqrt{2}$$

$$2 \sin x = \sqrt{2} \quad \therefore \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 4\pi$ 에서

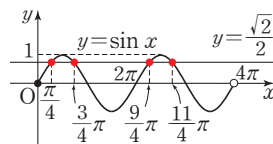
함수 $y = \sin x$ 의 그래프와 직선

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{의 교점의 } x \text{좌표는 } \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4},$$

$$\frac{9\pi}{4}, \frac{11\pi}{4} \text{이므로}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{3\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{9\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{11\pi}{4}$$

따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 ③이다.



0737 답 $x = \frac{2}{3}\pi$

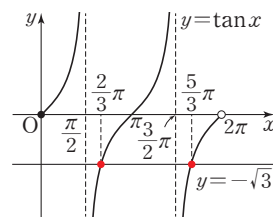
오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선

$$y = -\sqrt{3} \text{의 교점의 } x \text{좌표는 } \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$$

이므로 방정식 $\tan x = -\sqrt{3}$ 의 해는

$$x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{5}{3}\pi \quad \dots\dots ㉠$$



$$2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1 \text{에서 } \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

$$x + \frac{\pi}{6} = t \text{로 놓으면 } \sin t = \frac{1}{2}$$

$$\text{한편 } 0 \leq x < 2\pi \text{에서 } \frac{\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} < \frac{13\pi}{6}$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} \leq t < \frac{13\pi}{6}$$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{6} \leq t < \frac{13\pi}{6}$ 에

서 함수 $y = \sin t$ 의 그래프와 직선

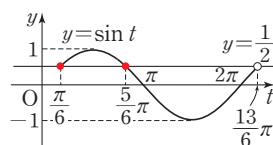
$$y = \frac{1}{2} \text{의 교점의 } t \text{좌표는 } \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \text{이}$$

므로

$$x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \frac{2}{3}\pi \quad \dots\dots ㉡$$

$$\text{㉠, ㉡에서 주어진 연립방정식의 해는 } x = \frac{2}{3}\pi \quad \dots\dots ㉢$$



채점 기준

① 방정식 $\tan x = -\sqrt{3}$ 의 해 구하기	40%
② 방정식 $2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = 1$ 의 해 구하기	40%
③ 연립방정식의 해 구하기	20%

0738 답 $\frac{5}{2}\pi$

$$\sin x + \cos x = 0 \text{에서 } \sin x = -\cos x$$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에서

두 함수 $y = \sin x$, $y = -\cos x$ 의 그

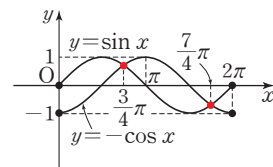
래프의 교점의 x 좌표는 $\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$ 이

므로

$$x = \frac{3}{4}\pi \text{ 또는 } x = \frac{7}{4}\pi$$

따라서 모든 x 의 값의 합은

$$\frac{3}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = \frac{5}{2}\pi$$



다른 풀이

$\sin x + \cos x = 0$ 에서 $\sin x = -\cos x$

$x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}\pi$ 는 등식을 만족시키지 않고

$x \neq \frac{\pi}{2}, x \neq \frac{3}{2}\pi$ 일 때, $\cos x \neq 0$ 이므로 양변을 $\cos x$ 로 나누면

$$\frac{\sin x}{\cos x} = -1 \quad \therefore \tan x = -1$$

$0 \leq x < 2\pi$ 이므로 $x = \frac{3}{4}\pi$ 또는 $x = \frac{7}{4}\pi$

따라서 모든 x 의 값의 합은 $\frac{3}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = \frac{5}{2}\pi$

0739 답 $\frac{\pi}{2}$

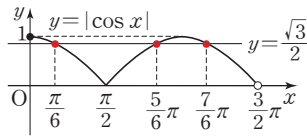
오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < \frac{3}{2}\pi$

에서 함수 $y = |\cos x|$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 교점의 x 좌표

는 $\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi$ 이므로

$$x_1 = \frac{\pi}{6}, x_2 = \frac{5}{6}\pi, x_3 = \frac{7}{6}\pi$$

$$\therefore x_1 - x_2 + x_3 = \frac{\pi}{2}$$



0740 답 ④

$2x = t$ 로 놓으면 $\sin t = \sqrt{3} \cos t$

한편 $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$ 에서 $-\frac{\pi}{2} < 2x < \frac{\pi}{2}$

$$\therefore -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

이때 $\cos t \neq 0$ 이므로 양변을 $\cos t$ 로 나누면

$$\frac{\sin t}{\cos t} = \sqrt{3} \quad \therefore \tan t = \sqrt{3}$$

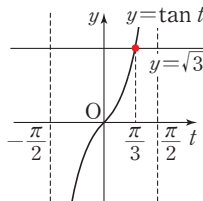
즉, 오른쪽 그림과 같이 $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ 에서

함수 $y = \tan t$ 의 그래프와 직선 $y = \sqrt{3}$ 의 교점의 t 좌표는 $t = \frac{\pi}{3}$ 이므로

$$2x = \frac{\pi}{3} \quad \therefore x = \frac{\pi}{6}$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$



0741 답 ④

$\pi \sin x = t$ 로 놓으면 $\cos t = 0$

한편 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-\pi \leq \pi \sin x \leq \pi \quad \therefore -\pi \leq t \leq \pi$

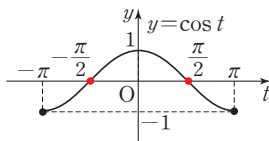
즉, 오른쪽 그림과 같이 $-\pi \leq t \leq \pi$

에서 함수 $y = \cos t$ 의 그래프와 직선 $t = 0$ 의 교점의 t 좌표는

$$t = -\frac{\pi}{2} \text{ 또는 } t = \frac{\pi}{2}$$

즉, $\pi \sin x = -\frac{\pi}{2}$ 또는 $\pi \sin x = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ 또는 } \sin x = \frac{1}{2}$$



$0 \leq x < 2\pi$ 에서

(i) $\sin x = -\frac{1}{2}$ 일 때,

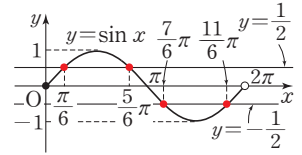
$$x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{11}{6}\pi$$

(ii) $\sin x = \frac{1}{2}$ 일 때,

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$

(i), (ii)에서 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{7}{6}\pi$ 또는 $x = \frac{11}{6}\pi$

따라서 주어진 방정식의 해가 아닌 것은 ④이다.



0742 답 $x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

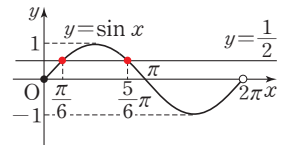
$2\cos^2 x - 5\sin x + 1 = 0$ 에서 $2(1 - \sin^2 x) - 5\sin x + 1 = 0$

$$2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0, (\sin x + 3)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = \frac{1}{2} (\because -1 \leq \sin x \leq 1)$$

$0 \leq x < 2\pi$ 이므로

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ 또는 } x = \frac{5}{6}\pi$$



0743 답 ⑤

$3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$ 에서

$$(3\tan x - \sqrt{3})(\tan x - \sqrt{3}) = 0 \quad \therefore \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 또는 } \tan x = \sqrt{3}$$

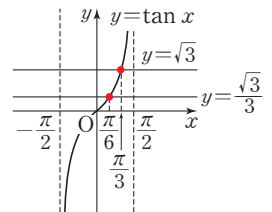
$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서

(i) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 일 때, $x = \frac{\pi}{6}$

(ii) $\tan x = \sqrt{3}$ 일 때, $x = \frac{\pi}{3}$

(i), (ii)에서 $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{3} (\because \alpha < \beta)$

$$\therefore \cos(\beta - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



0744 답 2π

$2\sin^2 x = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ 에서 $2\sin^2 x = 3\cos x$

$$2(1 - \cos^2 x) = 3\cos x, 2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$$

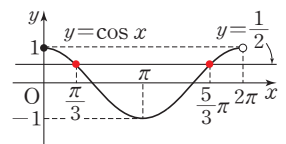
$$(\cos x + 2)(2\cos x - 1) = 0$$

$$\therefore \cos x = \frac{1}{2} (\because -1 \leq \cos x \leq 1)$$

$0 \leq x < 2\pi$ 이므로 $x = \frac{\pi}{3}$ 또는 $x = \frac{5}{3}\pi$

따라서 모든 해의 합은

$$\frac{\pi}{3} + \frac{5}{3}\pi = 2\pi$$



0745 답 $\frac{\pi}{6}$

$\sqrt{3}\sin \theta = \sqrt{2}\cos \theta$ 의 양변을 제곱하면

$$3\sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta, 3\sin^2 \theta = 2(1 - \sin^2 \theta)$$

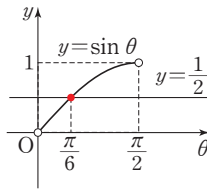
$$2\sin^2 \theta + 3\sin \theta - 2 = 0, (\sin \theta + 2)(2\sin \theta - 1) = 0$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{1}{2} (\because 0 < \sin \theta < 1)$$

..... ①

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\theta = \frac{\pi}{6}$

..... ②



채점 기준

① 주어진 식을 $\sin \theta$ 에 대한 식으로 나타내기	70 %
② θ 의 값 구하기	30 %

0746 답 ②

$2\cos^2 A - \sin A \cos A + \sin^2 A - 1 = 0$ 에서
 $2\cos^2 A - \sin A \cos A + (1 - \cos^2 A) - 1 = 0$
 $\cos^2 A - \sin A \cos A = 0 \quad \therefore \cos A(\cos A - \sin A) = 0$
 한편 삼각형 ABC는 직각삼각형이 아니므로 $\cos A \neq 0$
 $\therefore \cos A = \sin A$

$\therefore A = \frac{\pi}{4} \quad (\because 0 < A < \pi)$

이때 $A + B + C = \pi$ 이므로

$$\begin{aligned} \tan(B+C) &= \tan(\pi - A) = -\tan A \\ &= -\tan \frac{\pi}{4} = -1 \end{aligned}$$

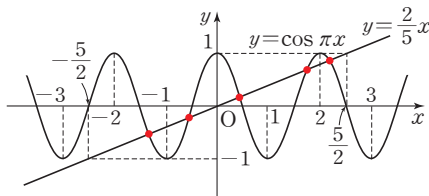
0747 답 $-\sqrt{2}$

$5\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta - 2 = 0$ 에서
 $5\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta - 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 0$
 $3\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta - 2\cos^2 \theta = 0$
 $(3\sin \theta + 2\cos \theta)(\sin \theta - \cos \theta) = 0$
 이때 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$ 에서 $3\sin \theta + 2\cos \theta < 0$ 이므로
 $\sin \theta - \cos \theta = 0 \quad \therefore \sin \theta = \cos \theta$
 $\therefore \theta = \frac{5}{4}\pi \quad (\because \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi)$

따라서 $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로
 $\sin \theta + \cos \theta = -\sqrt{2}$

0748 답 ①

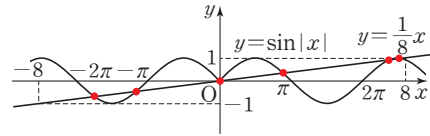
방정식 $\cos \pi x = \frac{2}{5}x$ 의 실근은 함수 $y = \cos \pi x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{2}{5}x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.



위의 그림에서 교점이 5개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 5이다.

0749 답 6

방정식 $\sin |x| = \frac{1}{8}x$ 의 실근은 함수 $y = \sin |x|$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{8}x$ 의 교점의 x 좌표와 같다.



위의 그림에서 교점이 6개이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

0750 답 ②

$0 < x \leq 2\pi$ 에서 방정식 $f(x) - g(x) = 0$, 즉 $f(x) = g(x)$ 의 실근은 두 함수 $y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프의 교점의 x 좌표와 같다.

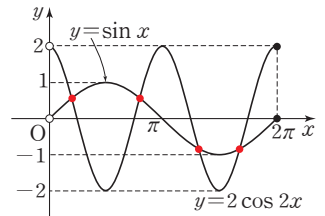
즉, 오른쪽 그림에서 두 함수

$y = f(x), y = g(x)$ 의 그래프의

교점이 4개이므로 방정식

$f(x) - g(x) = 0$ 의 서로 다른 실

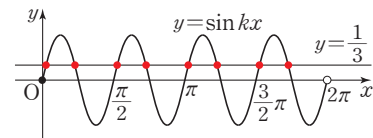
근의 개수는 4이다.



0751 답 ③

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 방정식 $\sin kx = \frac{1}{3}$ 의 서로 다른 실근의 개수가 8이

므로 다음 그림과 같이 함수 $y = \sin kx$ 의 주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이어야 한다.



즉, $\frac{2\pi}{k} = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $k = 4$

함수 $y = \sin 4x$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{3}$ 의 교점의 x 좌표를 작은 것

부터 차례로 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$ 이라 하면 위의 그래프에서

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\pi}{8}, \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{5}{8}\pi, \frac{x_5 + x_6}{2} = \frac{9}{8}\pi, \frac{x_7 + x_8}{2} = \frac{13}{8}\pi$$

$$\therefore x_1 + x_2 = \frac{\pi}{4}, x_3 + x_4 = \frac{5}{4}\pi, x_5 + x_6 = \frac{9}{4}\pi, x_7 + x_8 = \frac{13}{4}\pi$$

따라서 주어진 방정식의 모든 해의 합은

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_8 = \frac{\pi}{4} + \frac{5}{4}\pi + \frac{9}{4}\pi + \frac{13}{4}\pi = 7\pi$$

0752 답 ④

$4\sin^2 x + 4\cos x - 2 + k = 0$ 에서 $4(1 - \cos^2 x) + 4\cos x - 2 + k = 0$

$$\therefore 4\cos^2 x - 4\cos x - 2 = k$$

따라서 주어진 방정식이 실근을 갖기 위해서는 함수

$y = 4\cos^2 x - 4\cos x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 교점을 가져야 한다.

$y = 4\cos^2 x - 4\cos x - 2$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면

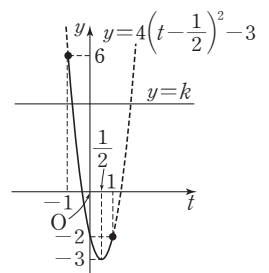
$$y = 4t^2 - 4t - 2 = 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - 3 \text{ 이고 } -1 \leq t \leq 1$$

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 방정식

이 실근을 갖도록 하는 실수 k 의 값의

범위는 $-3 \leq k \leq 6$ 이므로 k 의 최댓값

은 6이다.



0753 [답] $-\frac{4}{3}$

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{에서 } -1 \leq \tan x \leq 1$$

$$a \tan x = 2a + 1 \text{에서 } a(\tan x - 2) = 1$$

$$\therefore a = \frac{1}{\tan x - 2} \quad (\because \tan x \neq 2)$$

따라서 주어진 방정식이 실근을 갖기 위해서는 함수 $y = \frac{1}{\tan x - 2}$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 교점을 가져야 한다.

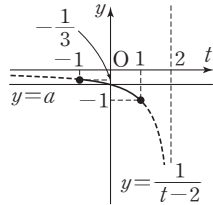
$\tan x = t$ 로 놓으면

$$y = \frac{1}{t-2} \text{이고 } -1 \leq t \leq 1$$

즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 주어진 방정식이 실근을 갖도록 하는 실수 a 의 값의 범위는

$$-1 \leq a \leq -\frac{1}{3}$$

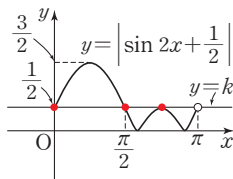
$$\text{따라서 } a = -1, \beta = -\frac{1}{3} \text{이므로 } a + \beta = -\frac{4}{3}$$



0754 [답] ③

방정식 $\left| \sin 2x + \frac{1}{2} \right| = k$ 가 서로 다른 3개의 실근을 가지려면 함수 $y = \left| \sin 2x + \frac{1}{2} \right|$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

$0 \leq x < \pi$ 에서 함수 $y = \left| \sin 2x + \frac{1}{2} \right|$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로 이 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점이 3개이려면 $k = \frac{1}{2}$



0755 [답] ⑤

$$x + \frac{\pi}{4} = t \text{로 놓으면 } \sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{한편 } 0 \leq x < 2\pi \text{에서 } \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{4} \quad \therefore \frac{\pi}{4} \leq t < \frac{9\pi}{4}$$

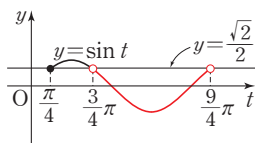
즉, 오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{9\pi}{4}$ 에

서 부등식 $\sin t < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 해는

$$\frac{3\pi}{4} < t < \frac{9\pi}{4} \text{이므로}$$

$$\frac{3\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{9\pi}{4} \quad \therefore \frac{\pi}{2} < x < 2\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{2}, \beta = 2\pi \text{이므로 } \alpha + \beta = \frac{5\pi}{2}$$

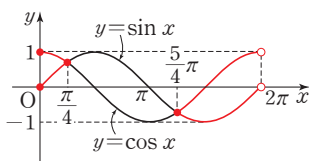


0756 [답] $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ 또는 $\frac{5\pi}{4} \leq x < 2\pi$

부등식 $\cos x \geq \sin x$ 의 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그래프가 함수

$y = \sin x$ 와 만나거나 위쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같으므로 오른쪽 그림에서

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{5\pi}{4} \leq x < 2\pi$$



0757 [답] ④

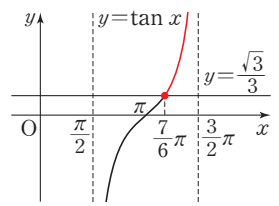
$$3 \tan x - \sqrt{3} \geq 0 \text{에서 } \tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

오른쪽 그림과 같이 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ 에서

부등식 $\tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 해는

$$\frac{7\pi}{6} \leq x < \frac{3\pi}{2}$$

따라서 구하는 x 의 최솟값은 $\frac{7\pi}{6}$ 이다.



0758 [답] $\frac{\pi}{6} < \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{2\pi}{3} \leq \alpha < \frac{5\pi}{6}$

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{에서 } \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$1 < \sin \alpha + \cos \beta \leq \sqrt{3} \text{에서}$$

$$1 < \sin \alpha + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \leq \sqrt{3}$$

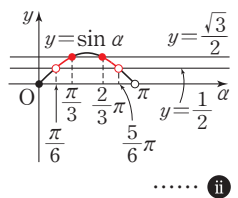
$$1 < 2 \sin \alpha \leq \sqrt{3}$$

$$\therefore \frac{1}{2} < \sin \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

오른쪽 그림과 같이 $0 \leq \alpha < \pi$ 에서 부등

식 $\frac{1}{2} < \sin \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{6} < \alpha \leq \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{2\pi}{3} \leq \alpha < \frac{5\pi}{6}$$



채점 기준

i 주어진 부등식을 $\sin \alpha$ 에 대한 부등식으로 나타내기	60 %
ii α 의 값의 범위 구하기	40 %

0759 [답] $\frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{12}$

테니스공의 처음 속력이 20 m/s이므로 $v = 20$ 을 $f(\theta) = \frac{v^2 \sin 2\theta}{10}$

에 대입하면

$$f(\theta) = \frac{20^2 \times \sin 2\theta}{10} = 40 \sin 2\theta$$

이때 테니스공이 날아간 거리가 20 m 이상이 되게 하면 $f(\theta) \geq 20$ 이므로

$$40 \sin 2\theta \geq 20 \quad \therefore \sin 2\theta \geq \frac{1}{2}$$

$$2\theta = t \text{로 놓으면 } \sin t \geq \frac{1}{2}$$

한편 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 에서 $0 \leq 2\theta \leq \pi$

$$\therefore 0 \leq t \leq \pi$$

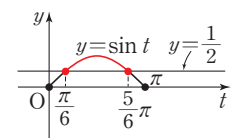
따라서 오른쪽 그림과 같이 $0 \leq t \leq \pi$ 에서

부등식 $\sin t \geq \frac{1}{2}$ 의 해는 $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$ 이므로

로

$$\frac{\pi}{6} \leq 2\theta \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore \frac{\pi}{12} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{12}$$



0760 [답] $-\frac{1}{2}$

$2\cos^2 x - 3 \geq 3\sin x$ 에서 $2(1 - \sin^2 x) - 3 \geq 3\sin x$
 $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 \leq 0$, $(\sin x + 1)(2\sin x + 1) \leq 0$

$$\therefore -1 \leq \sin x \leq -\frac{1}{2}$$

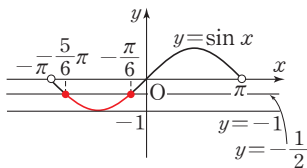
오른쪽 그림과 같이 $-\pi < x < \pi$

에서 부등식 $-1 \leq \sin x \leq -\frac{1}{2}$

의 해는 $-\frac{5}{6}\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\alpha = -\frac{5}{6}\pi, \beta = -\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \cos(\beta - \alpha) = \cos\left\{-\frac{\pi}{6} - \left(-\frac{5}{6}\pi\right)\right\} = \cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$$



0761 [답] $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$

$\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x < -\sqrt{3}$ 에서

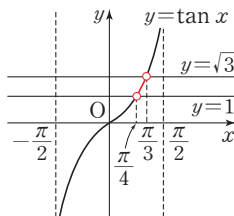
$\tan^2 x - (1 + \sqrt{3})\tan x + \sqrt{3} < 0$

$(\tan x - \sqrt{3})(\tan x - 1) < 0 \quad \therefore 1 < \tan x < \sqrt{3}$

오른쪽 그림과 같이 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서

부등식 $1 < \tan x < \sqrt{3}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{3}$$



0762 [답] ⑤

$\sin^2 \theta + 2\cos \theta - a < 0$ 에서 $(1 - \cos^2 \theta) + 2\cos \theta - a < 0$

$\cos^2 \theta - 2\cos \theta > 1 - a$

$\cos \theta = t$ 로 놓으면

$t^2 - 2t > 1 - a$ 이고 $-1 \leq t \leq 1$

오른쪽 그림과 같이 $-1 \leq t \leq 1$ 에서 부

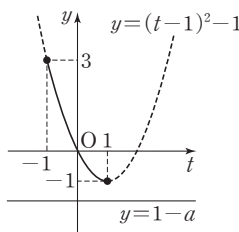
등식 $t^2 - 2t > 1 - a$ 가 항상 성립하려면

함수 $y = t^2 - 2t = (t - 1)^2 - 1$ 의 그래프

가 직선 $y = 1 - a$ 보다 위쪽에 있어야 하

므로

$$1 - a < -1 \quad \therefore a > 2$$



0763 [답] ①

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차방정식

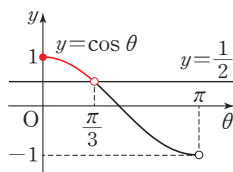
$x^2 - 2x + 2\cos \theta = 0$ 이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식

의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = 1 - 2\cos \theta < 0 \quad \therefore \cos \theta > \frac{1}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 θ 의 값의 범위는

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}$$



0764 [답] $0 \leq \theta < \frac{\pi}{3}$ 또는 $\frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$

이차방정식 $x^2 - 2(2\cos \theta - 1)x + 8\cos \theta - 4 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (2\cos \theta - 1)^2 - (8\cos \theta - 4) < 0$$

$$4\cos^2 \theta - 12\cos \theta + 5 < 0$$

$$(2\cos \theta - 5)(2\cos \theta - 1) < 0$$

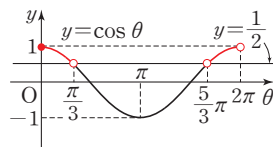
그런데 $2\cos \theta - 5 < 0$ 이므로 $2\cos \theta - 1 > 0$

$$\therefore \cos \theta > \frac{1}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 구하는 θ 의

값의 범위는

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{3} \quad \text{또는} \quad \frac{5}{3}\pi < \theta < 2\pi$$



채점 기준

① 이차방정식이 실근을 갖지 않도록 하는 조건을 이용하여 $\cos \theta$ 의 값의 범위 구하기	70 %
② θ 의 값의 범위 구하기	30 %

0765 [답] $\frac{\pi}{3}$

이차함수 $y = x^2 - 2\sqrt{3}x \tan \theta + 1$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않으려면 이차방정식 $x^2 - 2\sqrt{3}x \tan \theta + 1 = 0$ 이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-\sqrt{3} \tan \theta)^2 - 1 < 0$$

$$3\tan^2 \theta - 1 < 0, (\sqrt{3} \tan \theta + 1)(\sqrt{3} \tan \theta - 1) < 0$$

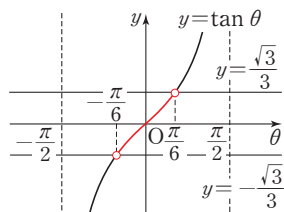
$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{3} < \tan \theta < \frac{\sqrt{3}}{3}$$

즉, 오른쪽 그림에서 θ 의 값의 범위는

$$-\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$$

따라서 $\alpha = -\frac{\pi}{6}, \beta = \frac{\pi}{6}$ 이므로

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{3}$$



0766 [답] ①

이차방정식 $x^2 - (2\sin \theta)x - 3\cos^2 \theta - 5\sin \theta + 5 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-\sin \theta)^2 - (-3\cos^2 \theta - 5\sin \theta + 5) \geq 0$$

$$\sin^2 \theta + 3\cos^2 \theta + 5\sin \theta - 5 \geq 0$$

$$\sin^2 \theta + 3(1 - \sin^2 \theta) + 5\sin \theta - 5 \geq 0$$

$$2\sin^2 \theta - 5\sin \theta + 2 \leq 0, (2\sin \theta - 1)(\sin \theta - 2) \leq 0$$

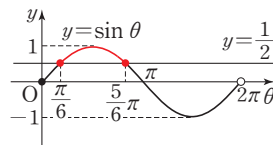
$$\text{그런데 } \sin \theta - 2 < 0 \text{이므로 } 2\sin \theta - 1 \geq 0 \quad \therefore \sin \theta \geq \frac{1}{2}$$

즉, 오른쪽 그림에서 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5}{6}\pi$$

따라서 $\alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi$ 이므로

$$4\beta - 2\alpha = 4 \times \frac{5}{6}\pi - 2 \times \frac{\pi}{6} = 3\pi$$



0767 답 ⑤

모든 실수 x 에 대하여 $f(x+1)=f(x-2)$ 를 만족시키므로 이 식의 양변에 x 대신 $x+2$ 를 대입하면

$$f(x+3)=f(x)$$

따라서 $f(x)$ 는 주기가 3인 주기함수이므로

$$f(20)=f(17)=f(14)=\cdots=f(2)=3$$

$$f(10)=f(7)=f(4)=f(1)=5$$

$$\therefore 2f(20)+5f(10)=2 \times 3+5 \times 5=31$$

0768 답 ⑤

② 주기가 $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ 인 주기함수이다.

③ 최댓값은 $|3|-2=1$, 최솟값은 $-|3|-2=-5$ 이다.

$$④ y=3\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)-2=3\sin 4\left(x-\frac{\pi}{12}\right)-2$$

즉, 주어진 함수의 그래프는 함수 $y=3\sin 4x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{12}$ 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.

따라서 함수 $y=3\cos 4x$ 의 그래프를 평행이동하면 주어진 함수의 그래프와 겹쳐진다.

⑤ $x=\frac{3}{8}\pi$ 를 대입하면 $y=3\sin \frac{7}{6}\pi-2=3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)-2=-\frac{7}{2}$ 이므로 점 $\left(\frac{3}{8}\pi, -\frac{7}{2}\right)$ 을 지난다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

0769 답 ②

ㄱ. 주기는 $\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ 이다.

ㄴ. 최댓값과 최솟값은 없다.

ㄷ. 정의역은 $3x-\pi \neq n\pi + \frac{\pi}{2}$, 즉 $x \neq \frac{n}{3}\pi + \frac{\pi}{2}$ (n 은 정수)인 실수 전체의 집합이다.

ㄹ. $y=\tan(3x-\pi)$ 에 $x=0$ 을 대입하면 $y=\tan(-\pi)=0$ 이므로 그래프는 원점을 지난다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄹ이다.

0770 답 ④

(가)에서 주기가 2π 이므로 주어진 함수의 주기를 각각 구하면

$$① \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=4\pi \quad ② \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=4\pi \quad ③ \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=2\pi \quad ④ 2\pi \quad ⑤ 2\pi$$

그러므로 (가)를 만족시키는 함수는 ③, ④, ⑤이다.

또 (나)에서 그래프가 원점에 대하여 대칭인 함수이므로

$y=\sin x$, $y=\tan x$ 의 함수이다.

그러므로 (가), (나)를 만족시키는 함수는 ③, ④이다.

그런데 (다)에서 최댓값과 최솟값의 차는 10이므로 (가)~(다)를 만족시키는 함수는 ④이다.

0771 답 12 π

주어진 함수의 최댓값이 4, 최솟값이 0이고 $a>0$ 이므로

$$a+d=4, -a+d=0$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $d=2$

또 주기가 $\frac{5}{6}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3}\pi$ 이고 $b>0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore b=3$$

즉, 함수 $y=2\cos(3x-c)+2$ 의 그래프가 점 $\left(\frac{2}{3}\pi, 0\right)$ 을 지나므로

$$0=2\cos(2\pi-c)+2 \quad \therefore \cos(2\pi-c)=-1$$

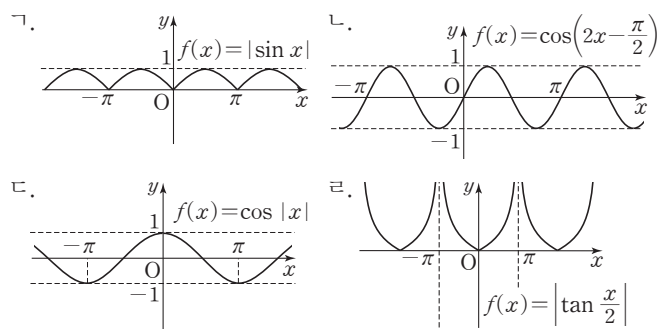
이때 $0<c<2\pi$ 에서 $0<2\pi-c<2\pi$ 이므로

$$2\pi-c=\pi \quad \therefore c=\pi$$

$$\therefore abcd=2 \times 3 \times \pi \times 2=12\pi$$

0772 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 를 만족시키면 그래프가 y 축에 대하여 대칭이고, 주어진 함수의 그래프는 각각 다음 그림과 같다.



따라서 모든 실수 x 에 대하여 $f(-x)=f(x)$ 인 함수는 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

0773 답 ③

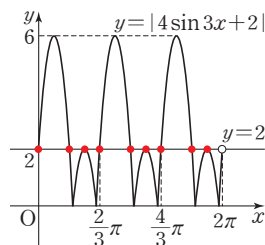
$0 \leq x < 2\pi$ 에서 곡선

$y=|4\sin 3x+2|$ 는 오른쪽 그림과

같으므로 곡선 $y=|4\sin 3x+2|$ 와

직선 $y=2$ 가 만나는 서로 다른 점의

개수는 9이다.



0774 답 ②

$$ㄱ. \sin 330^\circ = \sin(360^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{9}{4}\pi = \tan\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{5}{2}\pi - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 1$$

$$ㄴ. \sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ$$

$$\sin 70^\circ = \sin(90^\circ - 20^\circ) = \cos 20^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ$$

$$\sin 50^\circ = \sin(90^\circ - 40^\circ) = \cos 40^\circ$$

$$\therefore 2^{\sin^2 10^\circ} \times 2^{\sin^2 20^\circ} \times 2^{\sin^2 30^\circ} \times \cdots \times 2^{\sin^2 80^\circ}$$

$$= 2^{\sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \cdots + \sin^2 80^\circ}$$

$$= 2^{(\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + (\sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ) + (\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ) + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ)}$$

$$= 2^4 = 16$$

$$\begin{aligned}
 & \therefore (\sin 20^\circ + \cos 20^\circ)^2 + (\sin 70^\circ - \cos 70^\circ)^2 \\
 &= \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ + 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ \\
 &\quad + \sin^2 70^\circ + \cos^2 70^\circ - 2\sin 70^\circ \cos 70^\circ \\
 &= 2 + 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ - 2\sin (90^\circ - 20^\circ) \cos (90^\circ - 20^\circ) \\
 &= 2 + 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ - 2\sin 20^\circ \cos 20^\circ = 2 \\
 & \therefore \sin^2 \theta + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) + \cos^2 \left(\frac{3}{2}\pi + \theta \right) + \cos^2 (\pi - \theta) \\
 &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 2 \\
 & \text{따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.}
 \end{aligned}$$

0775 답 $\frac{5}{2}$

$$\begin{aligned}
 \angle P_n O A &= \frac{\pi}{2} \times \frac{n}{6} = \frac{n}{12} \pi, \overline{OP_n} = 1 \text{이므로} \\
 \overline{P_n Q_n} &= \overline{OP_n} \sin \frac{n}{12} \pi = \sin \frac{n}{12} \pi \\
 \therefore \overline{P_1 Q_1}^2 + \overline{P_2 Q_2}^2 + \overline{P_3 Q_3}^2 + \overline{P_4 Q_4}^2 + \overline{P_5 Q_5}^2 \\
 &= \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{2}{12} \pi + \sin^2 \frac{3}{12} \pi + \sin^2 \frac{4}{12} \pi + \sin^2 \frac{5}{12} \pi \\
 &= \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{2}{12} \pi + \sin^2 \frac{3}{12} \pi \\
 &\quad + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{12} \pi \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \\
 &= \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{2}{12} \pi + \sin^2 \frac{3}{12} \pi + \cos^2 \frac{2}{12} \pi + \cos^2 \frac{\pi}{12} \\
 &= 2 + \sin^2 \frac{\pi}{4} = 2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

0776 답 ②

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{1}{\tan^2 \left(\frac{3}{2} \pi + x \right)} + 2 \tan x + 6 \\
 &= (-\tan x)^2 + 2 \tan x + 6 \\
 &= \tan^2 x + 2 \tan x + 6 \\
 \tan x = t \text{로 놓으면 } y &= t^2 + 2t + 6 = (t+1)^2 + 5
 \end{aligned}$$

한편 $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ 에서 $t \geq 0$

즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과 같음 $y = (t+1)^2 + 5$

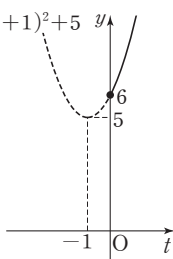
따라서 $t=0$ 에서 최솟값 6을 갖는다.

$$\therefore m=6$$

이때 $t=0$, 즉 $\tan x=0$ 이고

$$0 \leq x < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } x=0 \quad \therefore a=0$$

$$\therefore a+m=0+6=6$$



0777 답 $-\frac{1}{2}$

$$y = \frac{2 \cos x}{\cos x + 3} \text{에서 } \cos x = t \text{로 놓으면}$$

$$y = \frac{2t}{t+3} = -\frac{6}{t+3} + 2 \text{이고 } -1 \leq t \leq 1$$

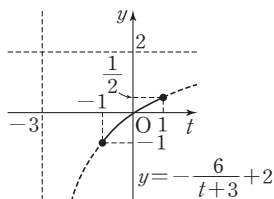
즉, 함수의 그래프는 오른쪽 그림과

같으므로 $t=1$ 에서 최댓값 $\frac{1}{2}$,

$t=-1$ 에서 최솟값 -1 을 갖는다.

따라서 최댓값과 최솟값의 합은

$$\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{1}{2}$$



0778 답 2π

$$\begin{aligned}
 y &= x^2 - 4x \cos \theta - 4 \sin^2 \theta \\
 &= (x - 2 \cos \theta)^2 - 4 \cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta \\
 &= (x - 2 \cos \theta)^2 - 4
 \end{aligned}$$

이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2 \cos \theta, -4)$ 이고, 이 점이 직선 $y=4x$ 위에 있으므로

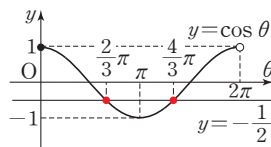
$$-4 = 4 \times 2 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 θ 의 값은

$$\theta = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } \theta = \frac{4}{3}\pi$$

따라서 모든 θ 의 값의 합은

$$\frac{2}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi = 2\pi$$



0779 답 $\frac{4}{3}$

함수 $y = \cos \frac{\pi}{4} x$ 의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8 \text{이므로 점 E의 좌표는}$$

$(2, 0)$, 점 F의 좌표는 $(6, 0)$ 이다.

점 B의 x 좌표의 범위는 $2 < x < 4$

$\overline{AB} = \frac{1}{2}$ 이므로 점 B의 y 좌표는 $-\frac{1}{2}$ 이고

$$\cos \frac{\pi}{4} x = -\frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\frac{\pi}{4} x = t \text{로 놓으면 } \cos t = -\frac{1}{2}$$

$$2 < x < 4 \text{에서 } \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{4} x < \pi \quad \therefore \frac{\pi}{2} < t < \pi$$

즉, $\frac{\pi}{2} < t < \pi$ 에서 방정식 $\cos t = -\frac{1}{2}$ 의 해는 $t = \frac{2}{3}\pi$ 이므로

$$\frac{\pi}{4} x = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore x = \frac{8}{3}$$

즉, 점 B의 x 좌표가 $\frac{8}{3}$ 이므로 점 A의 좌표는 $(\frac{8}{3}, 0)$ 이다.

한편 주어진 그래프는 직선 $x=4$ 에 대하여 대칭이므로 점 D의 좌표는 $(\frac{16}{3}, 0)$ 이다.

$$\therefore \overline{AD} = \frac{16}{3} - \frac{8}{3} = \frac{8}{3}$$

따라서 직사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{8}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$

0780 답 $x = \frac{\pi}{4}$

$\log \cos x, \log \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$ 에서 진수의 조건에 의하여

$$\cos x > 0, \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) > 0 \quad \therefore 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < x < \pi)$$

$$\log \cos x + \log \sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \log \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$\log \cos x + \log \cos x = \log \frac{1}{2}, \log \cos^2 x = \log \frac{1}{2}$$

따라서 $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ 이므로 $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\because 0 < x < \frac{\pi}{2})$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4}$$

0781 **답** ④

$A+B+C=\pi$ 이므로

$$\sin(B+C)=\sin(\pi-A)=\sin A$$

$$\sin A+\sin(B+C)\geq 1 \text{에서}$$

$$\sin A+\sin A\geq 1$$

$$2\sin A\geq 1 \quad \therefore \sin A\geq \frac{1}{2}$$

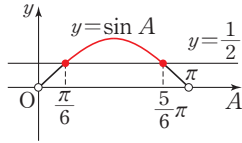
$0 < A < \pi$ 이므로 오른쪽 그림에서 부등

식 $\sin A \geq \frac{1}{2}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{6} \leq A \leq \frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos A \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 $\cos A$ 의 최댓값은 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 이다.



0782 **답** $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

(i) 이차방정식 $x^2 - 4x \sin \theta + 6 \cos \theta = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (-2 \sin \theta)^2 - 6 \cos \theta \geq 0$$

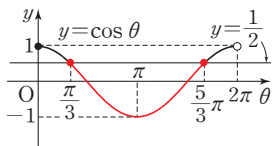
$$2 \sin^2 \theta - 3 \cos \theta \geq 0, 2(1 - \cos^2 \theta) - 3 \cos \theta \geq 0$$

$$2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 2 \leq 0, (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 2) \leq 0$$

$$\text{그런데 } \cos \theta + 2 > 0 \text{이므로 } 2 \cos \theta - 1 \leq 0 \quad \therefore \cos \theta \leq \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 θ 의 값의 범위는

$$\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3} \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi)$$



(ii) (두 근의 합) > 0 이어야 하므로 $4 \sin \theta > 0$

즉, $\sin \theta > 0$ 이므로

$$0 < \theta < \pi \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi)$$

(iii) (두 근의 곱) > 0 이어야 하므로 $6 \cos \theta > 0$

즉, $\cos \theta > 0$ 이므로

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \quad (\because 0 \leq \theta < 2\pi)$$

(i)~(iii)에서 $\frac{\pi}{3} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$

0783 **답** $\frac{9}{2}$

함수 $y = \cos \frac{\pi}{4}x + 4$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{1}{2}$ 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \cos \frac{\pi}{4} \left(x - \frac{1}{2} \right) + 4 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이 그래프가 점 $\left(\frac{11}{6}, a \right)$ 를 지나므로

$$\begin{aligned} a &= \cos \frac{\pi}{4} \left(\frac{11}{6} - \frac{1}{2} \right) + 4 \\ &= \cos \frac{\pi}{3} + 4 = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2} \quad \dots\dots \textcircled{ii} \end{aligned}$$

채점 기준

① 평행이동한 그래프의 식 구하기	60 %
② a 의 값 구하기	40 %

0784 **답** -32

주기는 $\frac{\pi}{2}$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b = 4 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

최댓값은 2이고 $a > 0$ 이므로

$$a + c = 2 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$f\left(\frac{\pi}{24}\right) = 0 \text{에서 } a \sin \frac{\pi}{6} + c = 0 \text{이므로}$$

$$\frac{1}{2}a + c = 0 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

$$\textcircled{ii}, \textcircled{iii} \text{을 연립하여 풀면 } a = 4, c = -2 \quad \dots\dots \textcircled{iv}$$

$$\therefore abc = 4 \times 4 \times (-2) = -32 \quad \dots\dots \textcircled{v}$$

채점 기준

① 주기를 이용하여 b 의 값 구하기	30 %
② 최댓값과 $f\left(\frac{\pi}{24}\right) = 0$ 임을 이용하여 a, c 의 값 구하기	60 %
③ abc 의 값 구하기	10 %

0785 **답** 9

$$4 \cos^2 x + 4 \sin(x + 4\pi) + k = 0 \text{에서}$$

$$4(1 - \sin^2 x) + 4 \sin x + k = 0$$

$$\therefore 4 \sin^2 x - 4 \sin x - 4 = k$$

이 방정식이 실근을 가지려면 함수 $y = 4 \sin^2 x - 4 \sin x - 4$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 교점을 가져야 한다. $\dots\dots \textcircled{i}$

이때 $\sin x = t$ 로 놓으면

$$y = 4t^2 - 4t - 4 = 4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - 5 \text{이고 } -1 \leq t \leq 1$$

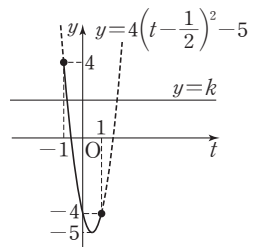
따라서 오른쪽 그림에서 실근을 갖도록

하는 실수 k 의 값의 범위는

$$-5 \leq k \leq 4 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 $M = 4, m = -5$ 이므로

$$M - m = 4 - (-5) = 9 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$



채점 기준

① 주어진 방정식을 정리하고, 실근을 가질 조건 알기	40 %
② 실수 k 의 값의 범위 구하기	50 %
③ $M - m$ 의 값 구하기	10 %

0786 **답** 9

$$x - \frac{\pi}{3} = t \text{로 놓으면 } x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + t$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{에서 } -\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3} \quad \therefore -\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5\pi}{3}$$

$$2 \cos^2 \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - 1 \geq 0 \text{에서}$$

$$2 \cos^2 t - \cos \left(\frac{\pi}{2} + t \right) - 1 \geq 0$$

$$2(1 - \sin^2 t) + \sin t - 1 \geq 0$$

$$2 \sin^2 t - \sin t - 1 \leq 0, (2 \sin t + 1)(\sin t - 1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \sin t \leq 1 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

오른쪽 그림에서 부등식

$$-\frac{1}{2} \leq \sin t \leq 1 \text{의 해는}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{7}{6}\pi \text{이므로}$$

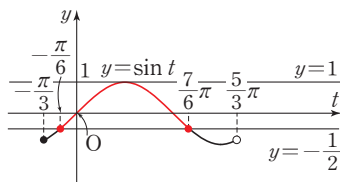
$$-\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{7}{6}\pi$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$$

..... ②

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{3}{2}\pi \text{이므로 } \frac{\beta}{\alpha} = 9$$

..... ③



채점 기준

① $x - \frac{\pi}{3} = t$ 로 놓고, $\sin t$ 의 값의 범위 구하기	60%
② x 의 값의 범위 구하기	30%
③ $\frac{\beta}{\alpha}$ 의 값 구하기	10%

C 실력 향상

121쪽

0787 답 ③

$0 < x < \pi$ 에서 함수 $y = \sin x$ 의 그래프는

오른쪽 그림과 같고, $0 < \alpha < \pi$, $0 < \beta < \pi$

인 서로 다른 두 실수 α, β 에 대하여

$$\sin \alpha = \sin \beta \text{이면 } \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\pi}{2} \text{이므로}$$

$$\alpha + \beta = \pi \quad \therefore \beta = \pi - \alpha \quad \left(\text{단, } \alpha \neq \frac{\pi}{2}, \beta \neq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \cos \alpha + \cos (\pi - \alpha)$$

$$= \cos \alpha - \cos \alpha$$

$$= 0$$

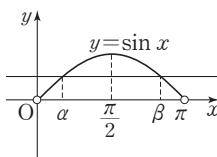
$$\tan 2\alpha + \tan 2\beta = \tan 2\alpha + \tan (2\pi - 2\alpha)$$

$$= \tan 2\alpha + \tan (-2\alpha)$$

$$= \tan 2\alpha - \tan 2\alpha$$

$$= 0$$

$$\therefore \cos \alpha + \cos \beta + \tan 2\alpha + \tan 2\beta = 0$$



0788 답 ②

$$2 \sin^2 x - 3 \cos x = k \text{에서 } 2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x = k$$

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x + k - 2 = 0 \quad \dots\dots ①$$

한편 상수 a ($-1 \leq a \leq 1$)에 대하여

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 곡선 $y = \cos x$ 와 직

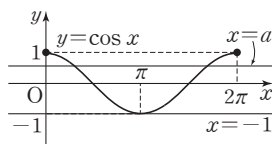
선 $y = a$ 가 만나는 서로 다른 점의 개

수는 $a = -1$ 일 때 1이고,

$-1 < a \leq 1$ 일 때 2이다.

$0 \leq x < 2\pi$ 일 때, 방정식 ①의 서로 다른 실근의 개수가 3이려면

$\cos x = -1$, 즉 $x = \pi$ 가 이 방정식의 한 실근이어야 한다.



$x = \pi$ 를 ①에 대입하면

$$2 \cos^2 \pi + 3 \cos \pi + k - 2 = 0$$

$$2 \times (-1)^2 + 3 \times (-1) + k - 2 = 0 \quad \therefore k = 3$$

이를 ①에 대입하면

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

$$(\cos x + 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\therefore \cos x = -1 \text{ 또는 } \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$(i) \cos x = -1 \text{ 일 때, } x = \pi$$

$$(ii) \cos x = -\frac{1}{2} \text{ 일 때, } x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

$$(i), (ii) \text{에서 } x = \frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{4}{3}\pi$$

따라서 세 실근 중 가장 큰 실근은 $\frac{4}{3}\pi$ 이므로 $\alpha = \frac{4}{3}\pi$

$$\therefore k \times \alpha = 3 \times \frac{4}{3}\pi = 4\pi$$

0789 답 ③

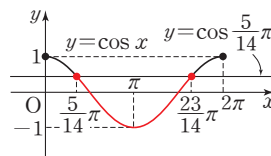
$$\sin \frac{\pi}{7} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} \right) = \cos \frac{5}{14}\pi \text{이므로 } 0 \leq x \leq 2\pi \text{에서 방정식}$$

$$\cos x = \sin \frac{\pi}{7}, \text{ 즉 } \cos x = \cos \frac{5}{14}\pi \text{의 해는}$$

$$x = \frac{5}{14}\pi \text{ 또는 } x = \frac{23}{14}\pi$$

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 부등식 $\cos x \leq \sin \frac{\pi}{7}$ 의 해는 함수 $y = \cos x$ 의 그

래프가 직선 $y = \cos \frac{5}{14}\pi$ 와 만나거나 아래쪽에 있는 x 의 값의 범위와 같다.



따라서 주어진 부등식의 해는 $\frac{5}{14}\pi \leq x \leq \frac{23}{14}\pi$ 이므로

$$\alpha = \frac{5}{14}\pi, \beta = \frac{23}{14}\pi$$

$$\therefore \beta - \alpha = \frac{23}{14}\pi - \frac{5}{14}\pi = \frac{9}{7}\pi$$

0790 답 $\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi$ 또는 $\pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$

$$f(x) = 2x^2 + 3x \cos \theta - 2 \sin^2 \theta + 1 \text{이라 하}$$

면 방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근 사이에 1이 존재
해야 하므로

$$f(1) < 0$$

$$2 + 3 \cos \theta - 2 \sin^2 \theta + 1 < 0$$

$$2 + 3 \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) + 1 < 0, 2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta + 1 < 0$$

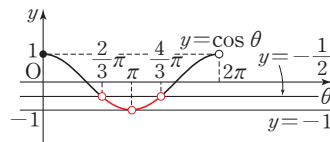
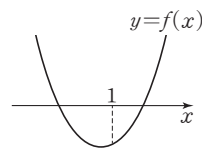
$$(2 \cos \theta + 1)(\cos \theta + 1) < 0$$

$$\therefore -1 < \cos \theta < -\frac{1}{2}$$

따라서 오른쪽 그림에서 θ 의 값

의 범위는

$$\frac{2}{3}\pi < \theta < \pi \text{ 또는 } \pi < \theta < \frac{4}{3}\pi$$



07 / 사인법칙과 코사인법칙

A 개념 확인

122~123쪽

0791 [답] $3\sqrt{2}$

사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$ 이므로

$$b = \frac{2\sqrt{3} \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2}$$

0792 [답] $4\sqrt{6}$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{\sin 30^\circ}$ 이므로

$$a = \frac{4\sqrt{3} \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 4\sqrt{6}$$

0793 [답] 90°

사인법칙에 의하여 $\frac{1}{\sin 30^\circ} = \frac{2}{\sin B}$ 이므로

$$\sin B = 2 \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로

$$B = 90^\circ$$

0794 [답] $60^\circ, 120^\circ$

사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{6}}{\sin B} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$$\sin B = \frac{\sqrt{6} \sin 45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로

$$B = 60^\circ \text{ 또는 } B = 120^\circ$$

0795 [답] 6

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{6}{\sin 30^\circ} = 2R \text{ 이므로}$$

$$R = \frac{6}{2 \sin 30^\circ} = \frac{6}{2 \times \frac{1}{2}} = 6$$

0796 [답] $4\sqrt{2}$

$$C = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\frac{8}{\sin 45^\circ} = 2R \text{ 이므로}$$

$$R = \frac{8}{2 \sin 45^\circ} = \frac{8}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4\sqrt{2}$$

0797 [답] $2\sqrt{13}$

코사인법칙에 의하여

$$b^2 = 8^2 + 6^2 - 2 \times 8 \times 6 \times \cos 60^\circ$$

$$= 64 + 36 - 96 \times \frac{1}{2} = 52$$

$$\therefore b = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \quad (\because b > 0)$$

0798 [답] $3\sqrt{10}$

코사인법칙에 의하여

$$c^2 = (3\sqrt{2})^2 + 6^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 6 \times \cos 135^\circ$$

$$= 18 + 36 - 36\sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 90$$

$$\therefore c = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} \quad (\because c > 0)$$

0799 [답] 60°

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \times 5 \times 8} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 60^\circ$

0800 [답] 120°

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 3 \times 5} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 120^\circ$

0801 [답] $6\sqrt{3}$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin 60^\circ = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

0802 [답] 18

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} \times 8 \times 9 \times \sin 150^\circ = 36 \times \frac{1}{2} = 18$$

0803 [답] (1) $\frac{1}{15}$ (2) $\frac{4\sqrt{14}}{15}$ (3) $6\sqrt{14}$

(1) 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{9^2 + 5^2 - 10^2}{2 \times 9 \times 5} = \frac{1}{15}$$

(2) $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 이므로

$$\sin^2 A = 1 - \left(\frac{1}{15}\right)^2 = \frac{224}{225}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $\sin A > 0$

$$\therefore \sin A = \sqrt{\frac{224}{225}} = \frac{4\sqrt{14}}{15}$$

(3) 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 9 \times 5 \times \frac{4\sqrt{14}}{15} = 6\sqrt{14}$$

0804 [답] $12\sqrt{2}$

평행사변형 ABCD의 넓이는

$$4 \times 6 \times \sin 45^\circ = 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 12\sqrt{2}$$

0805 [답] 18

평행사변형 ABCD의 넓이는

$$3 \times 4\sqrt{3} \times \sin 120^\circ = 3 \times 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18$$

0806 [답] 36

$B=D=60^\circ$ 이므로 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$3\sqrt{3} \times 8 \times \sin 60^\circ = 3\sqrt{3} \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 36$$

0807 [답] 27

$B=D=150^\circ$ 이므로 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$6 \times 9 \times \sin 150^\circ = 6 \times 9 \times \frac{1}{2} = 27$$

0808 [답] $\frac{15}{2}$

사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \sin 150^\circ = \frac{1}{2} \times 5 \times 6 \times \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$$

B 유형 완성

124~133쪽

0809 [답] $\frac{37}{64}$

사인법칙에 의하여 $\frac{4}{\sin 60^\circ} = \frac{3}{\sin C}$ 이므로

$$\sin C = \frac{3 \sin 60^\circ}{4} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\therefore \cos^2 C = 1 - \sin^2 C = 1 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^2 = \frac{37}{64}$$

0810 [답] ③

사인법칙에 의하여 $\frac{6\sqrt{2}}{\sin A} = \frac{3\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$ 이므로

$$\sin A = \frac{6\sqrt{2} \sin 30^\circ}{3\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2} \times \frac{1}{2}}{3\sqrt{2}} = 1$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A=90^\circ$

$$\therefore C = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$$

0811 [답] ⑤

사인법칙에 의하여 $\frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = \frac{2}{\sin C}$ 이므로

$$\sin C = \frac{2 \sin 120^\circ}{2\sqrt{3}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C=30^\circ$ 또는 $C=150^\circ$

그런데 $C=150^\circ$ 이면 $A+C > 180^\circ$ 이므로 $C=30^\circ$

$$\therefore B = 180^\circ - (120^\circ + 30^\circ) = 30^\circ$$

$$\therefore \cos B = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

0812 [답] ③

원주각의 성질에 의하여

$$\angle BAC = \angle BDC = 60^\circ$$

즉, 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여 $\frac{4\sqrt{6}}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}$ 이므로

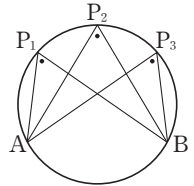
$$\overline{AB} = \frac{4\sqrt{6} \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{4\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 8$$

중3 다시보기

원주각의 성질

한 원에서 한 호에 대한 원주각의 크기는 모두 같다.

$$\Rightarrow \angle AP_1B = \angle AP_2B = \angle AP_3B$$



0813 [답] $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

오른쪽 그림과 같이 꼭짓점 A에서

BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼각형 ABH에서

$$\overline{BH} = \overline{AB} \cos 30^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

삼각형 AHC에서

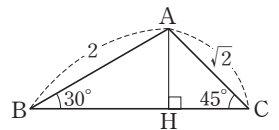
$$\overline{CH} = \overline{AC} \cos 45^\circ = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$$

$$\therefore \overline{BC} = \overline{BH} + \overline{CH} = \sqrt{3} + 1$$

$\angle BAC = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$ 이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sin 105^\circ} = \frac{2}{\sin 45^\circ}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin 105^\circ &= \frac{(\sqrt{3}+1) \sin 45^\circ}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+1) \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$



0814 [답] $\frac{3}{2}$

$\angle ADB = \theta$ 라 하면 $\angle ADC = 180^\circ - \theta$

$\overline{BD} = \overline{CD} = k$ 라 하면

삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{k}{\sin \alpha} = \frac{4}{\sin \theta} \quad \therefore k = \frac{4 \sin \alpha}{\sin \theta}$$

삼각형 ACD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{k}{\sin \beta} = \frac{6}{\sin(180^\circ - \theta)}$$

$$\therefore k = \frac{6 \sin \beta}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{6 \sin \beta}{\sin \theta}$$

따라서 $\frac{4 \sin \alpha}{\sin \theta} = \frac{6 \sin \beta}{\sin \theta}$ 이므로

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{3}{2}$$

0815 [답] $12\sqrt{2}$

$$B = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\sin 60^\circ}$ 이므로

$$a = \frac{6 \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{또 } \frac{6}{\sin 60^\circ} = 2R \text{에서 } R = \frac{6}{2 \sin 60^\circ} = \frac{6}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$\therefore aR = 2\sqrt{6} \times 2\sqrt{3} = 12\sqrt{2}$$

0816 [답] $\frac{1}{3}$

사인법칙에 의하여 $\frac{4}{\sin B} = 2 \times 6 = 12$ 이므로

$$\sin B = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

0817 [답] ④

$0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $\sin A > 0$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의

하여 $\frac{4}{\sin A} = 2R$ 이므로

$$R = \frac{4}{2 \sin A} = \frac{4}{2 \times \frac{2}{3}} = 3$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는 $\pi R^2 = \pi \times 3^2 = 9\pi$

0818 [답] ④

$A + B + C = 180^\circ$ 이므로 $\sin(B + C) = \sin(180^\circ - A) = \sin A$

$$5 \sin A \sin(B + C) = 4 \text{에서 } 5 \sin^2 A = 4 \quad \therefore \sin^2 A = \frac{4}{5}$$

$$\text{이때 } 0^\circ < A < 180^\circ \text{이므로 } \sin A > 0 \quad \therefore \sin A = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$ 이므로 사인법칙에 의

$$\frac{\overline{BC}}{\sin A} = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

$$\therefore \overline{BC} = 4\sqrt{5} \sin A = 4\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 8$$

0819 [답] $\frac{7}{2}$

$$(b+c):(c+a):(a+b) = 5:6:7 \text{에서}$$

$$b+c=5k, c+a=6k, a+b=7k (k>0) \quad \dots\dots ①$$

라 하고, 세 식을 변끼리 더하면

$$2a+2b+2c=18k \quad \therefore a+b+c=9k \quad \dots\dots ②$$

②에서 ①의 각 식을 빼면 $a=4k, b=3k, c=2k$

즉, 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = 4k : 3k : 2k = 4 : 3 : 2$$

따라서 $\sin A = 4m, \sin B = 3m, \sin C = 2m (m>0)$ 이라 하면

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{4m + 3m}{2m} = \frac{7}{2}$$

0820 [답] ⑤

$A + B + C = 180^\circ$ 이고 $A : B : C = 2 : 3 : 1$ 이므로

$$A = 180^\circ \times \frac{2}{2+3+1} = 60^\circ, B = 180^\circ \times \frac{3}{2+3+1} = 90^\circ,$$

$$C = 180^\circ \times \frac{1}{2+3+1} = 30^\circ$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin 60^\circ : \sin 90^\circ : \sin 30^\circ \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 : \frac{1}{2} = \sqrt{3} : 2 : 1$$

0821 [답] 4:2:5

$$\frac{a+b}{6} = \frac{b+c}{7} = \frac{c+a}{9} = k (k>0) \text{라 하면}$$

$$a+b=6k, b+c=7k, c+a=9k \quad \dots\dots ①$$

세 식을 변끼리 더하면

$$2a+2b+2c=22k \quad \therefore a+b+c=11k \quad \dots\dots ②$$

②에서 ①의 각 식을 빼면

$$a=4k, b=2k, c=5k$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c \\ = 4k : 2k : 5k \\ = 4 : 2 : 5$$

0822 [답] $\frac{7}{4}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 8 이므로 사인법칙에 의

$$\sin A = \frac{a}{2 \times 8} = \frac{a}{16}, \sin B = \frac{b}{2 \times 8} = \frac{b}{16}, \sin C = \frac{c}{2 \times 8} = \frac{c}{16}$$

$$\therefore \sin A + \sin B + \sin C = \frac{a}{16} + \frac{b}{16} + \frac{c}{16} = \frac{a+b+c}{16} \\ = \frac{28}{16} = \frac{7}{4}$$

0823 [답] ①

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$a \times \left(\frac{a}{2R}\right)^2 = b \times \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = c \times \left(\frac{c}{2R}\right)^2 \quad \therefore a^3 = b^3 = c^3$$

이때 a, b, c 는 실수이므로 $a=b=c$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

0824 [답] $C=90^\circ$ 인 직각삼각형

$A + B + C = 180^\circ$ 이므로

$$\sin(A + B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$$

$$a \sin A + b \sin B - c \sin(A + B) = 0 \text{에서}$$

$$a \sin A + b \sin B - c \sin C = 0 \quad \dots\dots ①$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$a \times \frac{a}{2R} + b \times \frac{b}{2R} - c \times \frac{c}{2R} = 0$$

$$a^2 + b^2 - c^2 = 0 \quad \therefore a^2 + b^2 = c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $C=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

0825 [답] A=90°인 직각삼각형

주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4} = \sin^2 C - (\sin A + \sin B)(\sin A - \sin B) = 0$$

$$\sin^2 C - (\sin^2 A - \sin^2 B) = 0$$

$$\sin^2 C - \sin^2 A + \sin^2 B = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 ㉠에 대입하면

$$\left(\frac{c}{2R}\right)^2 - \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = 0$$

$$c^2 - a^2 + b^2 = 0 \quad \therefore a^2 = b^2 + c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $A=90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

0826 [답] ②

$$C = 180^\circ - (105^\circ + 30^\circ) = 45^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{AC}}{\sin 30^\circ} = \frac{6}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$$\overline{AC} = \frac{6 \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{6 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2}(\text{m})$$

따라서 두 지점 A, C 사이의 거리는 $3\sqrt{2}$ m이다.

0827 [답] $200(\sqrt{3}+1)$ m

삼각형 AHC에서

$$\angle ACH = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$$

또 삼각형 BHC에서

$$\angle BCH = \angle CBH = 45^\circ \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

이때 $\overline{BH} = \overline{CH} = x$ m라 하면

삼각형 AHC에서 사인법칙에 의하여 $\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{400+x}{\sin 60^\circ}$ 이므로

$$x \sin 60^\circ = (400+x) \sin 30^\circ$$

$$x \times \frac{\sqrt{3}}{2} = (400+x) \times \frac{1}{2}, (\sqrt{3}-1)x = 400$$

$$\therefore x = \frac{400}{\sqrt{3}-1} = 200(\sqrt{3}+1)$$

따라서 빌딩의 높이는 $200(\sqrt{3}+1)$ m이다. ㉠

채점 기준

㉠ $\angle ACH, \angle BCH$ 의 크기 구하기	30 %
㉠ 사인법칙을 이용하여 빌딩의 높이 구하기	70 %

0828 [답] $81\sqrt{2}$ m

삼각형 ABQ에서 $\angle AQB = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BQ}}{\sin 45^\circ} = \frac{81}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore \overline{BQ} = \frac{81 \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{81 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 27\sqrt{6}(\text{m})$$

이때 삼각형 PBQ에서 $\tan 60^\circ = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}$ 이므로

$$\overline{PQ} = \overline{BQ} \tan 60^\circ = 27\sqrt{6} \times \sqrt{3} = 81\sqrt{2}(\text{m})$$

따라서 전망대의 높이는 $81\sqrt{2}$ m이다.

0829 [답] ①

사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $A+C=180^\circ$

$$\therefore C = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

$\overline{CD} = x$ 라 하면 삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{5})^2 = (2\sqrt{2})^2 + x^2 - 2 \times 2\sqrt{2} \times x \times \cos 45^\circ$$

$$5 = 8 + x^2 - 4\sqrt{2}x \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0, (x-1)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = 3 (\because \overline{CD} > \overline{BC})$$

따라서 $\overline{CD}$ 의 길이는 3이다.

0830 [답] $\sqrt{19}$

사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $A+C=180^\circ$

$$\therefore A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos 120^\circ \\ &= 4 + 9 - 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 19 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{BD} = \sqrt{19} (\because \overline{BD} > 0)$$

0831 [답] ④

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \text{이므로 } \cos \theta > 0$$

$$\therefore \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{14}}{9}\right)^2} = \frac{5}{9}$$

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos \theta \\ &= 9 + 36 - 36 \times \frac{5}{9} = 25 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{25} = 5 (\because \overline{AC} > 0)$$

0832 [답] $5\sqrt{3}$

$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = 3 : 4 : 5$ 이므로

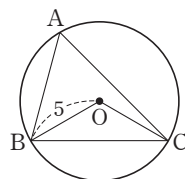
$$\angle BOC = 360^\circ \times \frac{4}{3+4+5} = 120^\circ$$

$\overline{OB} = \overline{OC} = 5$ 이므로 삼각형 OBC에서

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= 5^2 + 5^2 - 2 \times 5 \times 5 \times \cos 120^\circ \\ &= 25 + 25 - 50 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 75 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{BC} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} (\because \overline{BC} > 0)$$



0833 [답] $\sqrt{3}$

코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \times x \times \frac{1}{x} \times \cos 120^\circ = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1$$

$x^2 > 0$, $\frac{1}{x^2} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{BC}^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 1 \geq 2\sqrt{x^2 \times \frac{1}{x^2}} + 1 = 2 + 1 = 3$$

(단, 등호는 $x^2 = \frac{1}{x^2}$, 즉 $x=1$ 일 때 성립)

$$\therefore \overline{BC} \geq \sqrt{3} (\because \overline{BC} > 0)$$

따라서 $\overline{BC}$ 의 길이의 최솟값은 $\sqrt{3}$ 이다.

0834 [답] $3\sqrt{3}$

주어진 원뿔의 전개도를 그리면 오른쪽 그림과 같으므로 원뿔의 옆면의 전개도에서 구하는 최단 거리는 선분 AP의 길이이다.

이때 원뿔의 밑면의 둘레의 길이가

$$2\pi \times 2 = 4\pi \text{이므로}$$

$$\widehat{AB} = \frac{1}{2} \widehat{AA'} = \frac{1}{2} \times 4\pi = 2\pi$$

부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 θ 라 하면

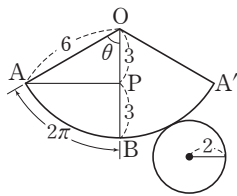
$$6\theta = 2\pi \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

삼각형 OAP에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AP}^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \times 6 \times 3 \times \cos \frac{\pi}{3} = 36 + 9 - 36 \times \frac{1}{2} = 27$$

$$\therefore \overline{AP} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} (\because \overline{AP} > 0)$$

따라서 구하는 최단 거리는 $3\sqrt{3}$ 이다.



0835 [답] $\sqrt{10}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{4^2 + 8^2 - 6^2}{2 \times 4 \times 8} = \frac{11}{16}$$

또 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \times 4 \times 4 \times \cos B = 16 + 16 - 32 \times \frac{11}{16} = 10$$

$$\therefore \overline{AD} = \sqrt{10} (\because \overline{AD} > 0)$$

0836 [답] ⑤

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} b^2 &= 6^2 + 10^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \cos 120^\circ \\ &= 36 + 100 - 120 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 196 \end{aligned}$$

$$\therefore b = \sqrt{196} = 14 (\because b > 0)$$

또 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{14^2 + 6^2 - 10^2}{2 \times 14 \times 6} = \frac{11}{14}$$

$$\cos C = \frac{10^2 + 14^2 - 6^2}{2 \times 10 \times 14} = \frac{13}{14}$$

$$\therefore \cos A + \cos C = \frac{11}{14} + \frac{13}{14} = \frac{12}{7}$$

0837 [답] 135°

삼각형에서 길이가 가장 긴 변의 대각의 크기가 가장 크므로 그 크기를 θ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{1^2 + (\sqrt{2})^2 - (\sqrt{5})^2}{2 \times 1 \times \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $\theta = 135^\circ$

0838 [답] ①

$$c^2 = a^2 + b^2 + ab \text{에서 } a^2 + b^2 - c^2 = -ab$$

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{-ab}{2ab} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 120^\circ$

$$\therefore \tan C = \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$$

0839 [답] $\frac{\sqrt{2}}{2}$

정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 12이므로

$$\overline{AM} = \overline{DM} = 6$$

선분 CD를 1 : 2로 내분하는 점이 E이므로

$$\overline{CE} = 12 \times \frac{1}{3} = 4, \overline{DE} = 12 \times \frac{2}{3} = 8$$

세 직각삼각형 ABM, BCE, DME에서

$$\overline{BM} = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5}, \overline{BE} = \sqrt{12^2 + 4^2} = 4\sqrt{10},$$

$$\overline{EM} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

따라서 삼각형 BEM에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{(6\sqrt{5})^2 + (4\sqrt{10})^2 - 10^2}{2 \times 6\sqrt{5} \times 4\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

0840 [답] ③

사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$$

$a=k, b=\sqrt{2}k, c=\sqrt{3}k (k>0)$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{(\sqrt{2}k)^2 + (\sqrt{3}k)^2 - k^2}{2 \times \sqrt{2}k \times \sqrt{3}k} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

0841 [답] $\frac{\sqrt{21}}{3}$

코사인법칙에 의하여

$$a^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos 60^\circ = 9 + 4 - 12 \times \frac{1}{2} = 7$$

$$\therefore a = \sqrt{7} (\because a > 0)$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\sqrt{7}}{\sin 60^\circ} = 2R \quad \therefore R = \frac{\sqrt{7}}{2 \sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{7}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

0842 [답] $\frac{\sqrt{2}}{4}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{3^2 + 3^2 - (2\sqrt{3})^2}{2 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $\sin B > 0$

$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

..... ①

..... ②

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{8}{\sin B} = \frac{3}{\sin C}$$

$$\therefore \sin C = \frac{3 \sin B}{8} = \frac{3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

❶ cos B의 값 구하기	40 %
❷ sin B의 값 구하기	20 %
❸ sin C의 값 구하기	40 %

0843 답 7

$\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 1 : 2 : \sqrt{2}$ 이므로

$\overline{AB} = k, \overline{BC} = 2k, \overline{CA} = \sqrt{2}k (k > 0)$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{k^2 + (2k)^2 - (\sqrt{2}k)^2}{2 \times k \times 2k} = \frac{3}{4}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $\sin B > 0$

$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 외접원의 넓이가 28π 이므로

$$\pi R^2 = 28\pi \quad \therefore R = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \quad (\because R > 0)$$

따라서 사인법칙에 의하여 $\frac{\overline{CA}}{\sin B} = 2 \times 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$ 이므로

$$\overline{CA} = 4\sqrt{7} \sin B = 4\sqrt{7} \times \frac{\sqrt{7}}{4} = 7$$

0844 답 $3\sqrt{2}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여 $\frac{\sqrt{6}}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\sin A}$ 이므로

$$\sin A = \frac{\sqrt{3} \sin 45^\circ}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 30^\circ$ 또는 $A = 150^\circ$

그런데 $A = 150^\circ$ 이면 $A + B > 180^\circ$ 이므로 $A = 30^\circ$

$\overline{AD} = x$ 라 하면 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{2})^2 = (\sqrt{6})^2 + x^2 - 2 \times \sqrt{6} \times x \times \cos 30^\circ$$

$$2 = 6 + x^2 - 2\sqrt{6}x \times \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$$

$$(x - \sqrt{2})(x - 2\sqrt{2}) = 0 \quad \therefore x = \sqrt{2} \text{ 또는 } x = 2\sqrt{2}$$

따라서 모든 $\overline{AD}$ 의 길이의 합은 $\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

0845 답 ⑤

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} + \frac{ab}{c} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = c$$

$$(c^2 + a^2 - b^2) + (a^2 + b^2 - c^2) + (b^2 + c^2 - a^2) = 2c^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2c^2 \quad \therefore a^2 + b^2 = c^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $C = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

0846 답 $a=c$ 인 이등변삼각형

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\text{이를 주어진 식에 대입하면 } \frac{b}{2R} = 2 \times \frac{a}{2R} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$b^2 = a^2 + b^2 - c^2, \quad a^2 = c^2 \quad \therefore a = c \quad (\because a > 0, c > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$ 인 이등변삼각형이다.

0847 답 ④

$A + B + C = 180^\circ$ 이므로

$$\sin(A + B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C$$

$$\cos(A + B) = \cos(180^\circ - C) = -\cos C$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\sin A \cos A + \sin C \times (-\cos C) = 0$$

$$\sin A \cos A = \sin C \cos C \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}, \quad \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\text{이를 ①에 대입하면 } \frac{a}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{c}{2R} \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) = c^2(a^2 + b^2 - c^2)$$

$$a^4 - c^4 + b^2c^2 - a^2b^2 = 0, \quad (a^2 + c^2)(a^2 - c^2) - b^2(a^2 - c^2) = 0$$

$$(a^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2) = 0$$

이때 $a > 0, c > 0$ 이므로 $a = c$ 또는 $a^2 + c^2 = b^2$

따라서 삼각형 ABC는 $a=c$ 인 이등변삼각형 또는 $B=90^\circ$ 인 직각삼각형이므로 보기에서 삼각형 ABC가 될 수 있는 것은 ㄴ, ㄷ이다.

0848 답 ③

코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = 120^2 + 80^2 - 2 \times 120 \times 80 \times \cos 60^\circ$$

$$= 14400 + 6400 - 19200 \times \frac{1}{2} = 11200$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{11200} = 40\sqrt{7}(\text{m}) \quad (\because \overline{AB} > 0)$$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $40\sqrt{7}$ m이다.

0849 답 $\frac{169}{3}\pi \text{ m}^2$

코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{7^2 + 8^2 - 13^2}{2 \times 7 \times 8} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 120^\circ$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R m라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{13}{\sin 120^\circ} = 2R \quad \therefore R = \frac{13}{2 \sin 120^\circ} = \frac{13}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{13\sqrt{3}}{3}$$

따라서 덮개의 넓이는

$$\pi R^2 = \pi \times \left(\frac{13\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{169}{3}\pi(\text{m}^2)$$

0850 **답** $10\sqrt{21}$ m

$\overline{BC}=a$ m, $\overline{AC}=b$ m, $\overline{AB}=c$ m라 하면

삼각형 ADC에서 $b=\frac{30}{\sin 60^\circ}=20\sqrt{3}$

삼각형 BEC에서 $a=\frac{45}{\sin 60^\circ}=30\sqrt{3}$

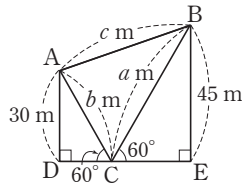
$\angle ACB=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$ 이므로

삼각형 ACB에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} c^2 &= (30\sqrt{3})^2 + (20\sqrt{3})^2 - 2 \times 30\sqrt{3} \times 20\sqrt{3} \times \cos 60^\circ \\ &= 2700 + 1200 - 3600 \times \frac{1}{2} = 2100 \end{aligned}$$

$$\therefore c = \sqrt{2100} = 10\sqrt{21} \quad (\because c > 0)$$

따라서 두 지점 A, B 사이의 거리는 $10\sqrt{21}$ m이다.



0851 **답** $2\sqrt{19}$

삼각형 ABC의 넓이가 $6\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin A = 6\sqrt{3} \quad \therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $A > 90^\circ$ 이므로 $A = 120^\circ$

따라서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} a^2 &= 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \cos 120^\circ \\ &= 36 + 16 - 48 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 76 \end{aligned}$$

$$\therefore a = \sqrt{76} = 2\sqrt{19} \quad (\because a > 0)$$

0852 **답** ③

$$\sin(A+B) = \sin(180^\circ - C) = \sin C = \frac{1}{3}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \frac{1}{3} = 8$$

0853 **답** ③

$\widehat{AB} : \widehat{BC} : \widehat{CA} = 5 : 3 : 4$ 이므로

$$\angle AOB = 360^\circ \times \frac{5}{5+3+4} = 150^\circ, \angle BOC = 360^\circ \times \frac{3}{5+3+4} = 90^\circ,$$

$$\angle COA = 360^\circ \times \frac{4}{5+3+4} = 120^\circ$$

$$\therefore \triangle ABC = \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COA$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \times 18 \times 18 \times \sin 150^\circ + \frac{1}{2} \times 18 \times 18 \times \sin 90^\circ \\ &\quad + \frac{1}{2} \times 18 \times 18 \times \sin 120^\circ \\ &= 81 + 162 + 81\sqrt{3} = 81(3 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

0854 **답** $\frac{15}{4}$

$$\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$\overline{AD}=x$ 라 하면 $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 10 \times 6 \times \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 10 \times x \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times x \times 6 \times \sin 60^\circ \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$15\sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{2}x + \frac{3\sqrt{3}}{2}x, \quad 15\sqrt{3} = 4\sqrt{3}x \quad \therefore x = \frac{15}{4} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

따라서 $\overline{AD}$ 의 길이는 $\frac{15}{4}$ 이다.

채점 기준

① $\angle BAD, \angle CAD$ 의 크기 구하기	20 %
② $\overline{AD}=x$ 라 하고, $\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 임을 이용하여 식 세우기	50 %
③ $\overline{AD}$ 의 길이 구하기	30 %

0855 **답** ③

부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 θ 라 하면 호의 길이가 π 이므로

$$4\theta = \pi \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

부채꼴 OAB의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2} \times 4 \times \pi = 2\pi$$

또 삼각형 OAP의 넓이 T는

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OP} \times \sin(\angle AOP) = \frac{1}{2} \times 4 \times \overline{OP} \times \sin \frac{\pi}{4} \\ &= 2 \times \overline{OP} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \times \overline{OP} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \frac{S}{T} = \pi \text{에서 } T = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$\text{즉, } \sqrt{2} \times \overline{OP} = 2 \text{이므로 } \overline{OP} = \sqrt{2}$$

0856 **답** ②

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle ABC) = \frac{3^2 + 4^2 - 2^2}{2 \times 3 \times 4} = \frac{7}{8}$$

이때 $\angle ABD = 90^\circ + \angle ABC$ 이므로

$$\sin(\angle ABD) = \sin(90^\circ + \angle ABC) = \cos(\angle ABC) = \frac{7}{8}$$

따라서 삼각형 ABD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BD} \times \sin(\angle ABD) = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{7}{8} = \frac{21}{4}$$

0857 **답** ②

삼각형 ACD의 넓이가 $4\sqrt{2}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin D = 4\sqrt{2} \quad \therefore \sin D = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이때 $0^\circ < D < 90^\circ$ 이므로 $\cos D > 0$

$$\therefore \cos D = \sqrt{1 - \sin^2 D} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$$B + D = 180^\circ \quad \therefore B = 180^\circ - D$$

$$\therefore \cos B = \cos(180^\circ - D) = -\cos D = -\frac{1}{3}$$

$\overline{AB}=x$ 라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= x^2 + 2^2 - 2 \times x \times 2 \times \cos B \\ &= x^2 + 4 - 4x \times \left(-\frac{1}{3}\right) = x^2 + \frac{4}{3}x + 4 \end{aligned}$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 3^2 + 4^2 - 2 \times 3 \times 4 \times \cos D \\ &= 9 + 16 - 24 \times \frac{1}{3} = 17 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } x^2 + \frac{4}{3}x + 4 = 17 \text{이므로}$$

$$3x^2 + 4x - 39 = 0, \quad (3x+13)(x-3) = 0 \quad \therefore x = 3 \quad (\because x > 0)$$

따라서 $\overline{AB}$ 의 길이는 3이다.

0858 답 $\sqrt{5}$

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{7^2 + 8^2 - 9^2}{2 \times 7 \times 8} = \frac{2}{7}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $\sin C > 0$

$$\therefore \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{7}$$

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \frac{3\sqrt{5}}{7} = 12\sqrt{5}$$

이때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

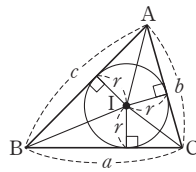
$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \text{에서}$$

$$12\sqrt{5} = \frac{1}{2} \times r \times (7+8+9) \quad \therefore r = \sqrt{5}$$

참고 삼각형의 넓이와 내접원의 반지름의 길이

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 내심을 I, 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA \\ &= \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br \\ &= \frac{1}{2}r(a+b+c) \end{aligned}$$



0859 답 ④

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R, 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{abc}{4R} \text{에서 } 2\sqrt{3} = \frac{abc}{4 \times 3} \quad \therefore abc = 24\sqrt{3}$$

따라서 세 변의 길이의 곱은 $24\sqrt{3}$ 이다.

0860 답 ④

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{abc}{4R} \text{에서 } \frac{15\sqrt{7}}{4} = \frac{4 \times 5 \times 6}{4R} \quad \therefore R = \frac{8\sqrt{7}}{7}$$

또 $S = \frac{1}{2}r(a+b+c)$ 에서

$$\frac{15\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{2}r(4+5+6) \quad \therefore r = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\therefore Rr = \frac{8\sqrt{7}}{7} \times \frac{\sqrt{7}}{2} = 4$$

0861 답 $2(\sqrt{3}-1)$

삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 8 \times \sin 30^\circ = 8\sqrt{3}$$

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} c^2 &= (4\sqrt{3})^2 + 8^2 - 2 \times 4\sqrt{3} \times 8 \times \cos 30^\circ \\ &= 48 + 64 - 64\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 16 \end{aligned}$$

$$\therefore c = 4 \quad (\because c > 0)$$

삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \text{에서}$$

$$8\sqrt{3} = \frac{1}{2}r(4\sqrt{3}+8+4)$$

$$8\sqrt{3} = 2(\sqrt{3}+3)r \quad \therefore r = \frac{8\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+3)} = 2(\sqrt{3}-1)$$

0862 답 $4\sqrt{6}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R, 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{abc}{4R} \text{에서}$$

$$10 = \frac{5ab}{4 \times 3} \quad \therefore ab = 24$$

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{24} = 4\sqrt{6} \quad (\text{단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립})$$

따라서 $a+b$ 의 최솟값은 $4\sqrt{6}$ 이다.

0863 답 $14\sqrt{3}+6\sqrt{35}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$ 를 그으면 삼각형

ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 7^2 + 8^2 - 2 \times 7 \times 8 \times \cos 120^\circ \\ &= 49 + 64 - 112 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 169 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{169} = 13 \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

또 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos D = \frac{8^2 + 9^2 - 13^2}{2 \times 8 \times 9} = -\frac{1}{6}$$

이때 $0^\circ < D < 180^\circ$ 이므로 $\sin D > 0$

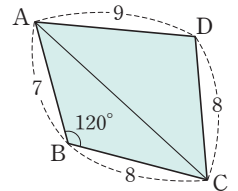
$$\therefore \sin D = \sqrt{1 - \cos^2 D} = \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{6}$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \times 9 \times 8 \times \sin D$$

$$= \frac{1}{2} \times 7 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 9 \times 8 \times \frac{\sqrt{35}}{6}$$

$$= 14\sqrt{3} + 6\sqrt{35}$$



0864 답 $3+4\sqrt{3}$

$\overline{BD} = x$ 라 하면 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{6})^2 = (2\sqrt{3})^2 + x^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times x \times \cos 45^\circ$$

$$6 = 12 + x^2 - 4\sqrt{3}x \times \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x^2 - 2\sqrt{6}x + 6 = 0$$

$$(x - \sqrt{6})^2 = 0 \quad \therefore x = \sqrt{6}$$

$\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 이므로 $\angle DBC = \angle ADB = 45^\circ$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABD + \triangle DBC$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times 2\sqrt{3} \times \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times 8 \times \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \sqrt{6} \times 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 3 + 4\sqrt{3}$$

0865 답 $\frac{45\sqrt{3}}{4}$

사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$$B + D = 180^\circ \quad \therefore D = 180^\circ - B$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 9^2 - 2 \times 6 \times 9 \times \cos B$$

$$= 117 - 108 \cos B$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 3 \times \cos (180^\circ - B)$$

$$= 18 + 18 \cos B$$

즉, $117 - 108 \cos B = 18 + 18 \cos B$ 이므로

$$126 \cos B = 99 \quad \therefore \cos B = \frac{11}{14}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $\sin B > 0$

$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{14}\right)^2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 9 \times \sin B + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin (180^\circ - B)$$

$$= 27 \sin B + \frac{9}{2} \sin B$$

$$= \frac{63}{2} \sin B$$

$$= \frac{63}{2} \times \frac{5\sqrt{3}}{14} = \frac{45\sqrt{3}}{4}$$

0866 답 $\frac{15\sqrt{7}}{2}$

$\overline{AD} = \overline{BC} = 5$ 이므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{5^2 + 4^2 - 6^2}{2 \times 5 \times 4} = \frac{1}{8}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $\sin A > 0$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$4 \times 5 \times \sin A = 4 \times 5 \times \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{15\sqrt{7}}{2}$$

0867 답 120°

$\overline{CD} = \overline{AB} = 5$ 이고, 평행사변형 ABCD의 넓이가 $15\sqrt{3}$ 이므로

$$5 \times 6 \times \sin C = 15\sqrt{3} \quad \therefore \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $90^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C = 120^\circ$

0868 답 $24\sqrt{3}$

$\overline{CD} = x$ 라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{13})^2 = 6^2 + x^2 - 2 \times 6 \times x \times \cos 60^\circ$$

$$52 = 36 + x^2 - 12x \times \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 6x - 16 = 0, (x+2)(x-8) = 0$$

$$\therefore x = 8 \quad (\because x > 0)$$

..... i

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$6 \times 8 \times \sin 60^\circ = 6 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$$

..... ii

채점 기준

i $\overline{CD}$ 의 길이 구하기

60 %

ii 평행사변형 ABCD의 넓이 구하기

40 %

0869 답 ②

$0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $\sin \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 \times \frac{\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15}$$

0870 답 34

사각형 ABCD의 넓이가 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times p \times q \times \sin 120^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{1}{2} \times p \times q \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} pq = \frac{15\sqrt{3}}{4} \quad \therefore pq = 15$$

$$\therefore p^2 + q^2 = (p+q)^2 - 2pq$$

$$= 8^2 - 2 \times 15 = 34$$

0871 답 ⑤

두 대각선의 길이를 각각 a, b 라 하면 $a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, 20 \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\therefore ab \leq 100 \quad (\text{단, 등호는 } a = b \text{일 때 성립})$$

사각형 ABCD의 두 대각선이 이루는 각의 크기를 θ , 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \theta \leq \frac{1}{2} \times 100 \times 1 = 50 \quad (\because 0 < \sin \theta \leq 1)$$

따라서 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은 50이다.

AB 유형 점검

134~136쪽

0872 답 ②

$$A = 180^\circ - (105^\circ + 45^\circ) = 30^\circ$$

사인법칙에 의하여 $\frac{6}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{AB}}{\sin 45^\circ}$ 이므로

$$\overline{AB} = \frac{6 \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{2}$$

0873 답 ③

삼각형 ADC는 $A = 90^\circ$ 인 직각삼각형이고 $\overline{AD} = 2$ 이므로

$$\overline{CD} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

또 $\overline{AB} = \overline{AC}$ 이면 삼각형 ABC는 직각이등변삼각형이므로

$$B = C = 45^\circ$$

삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의

$$\text{하여 } \frac{2\sqrt{5}}{\sin 45^\circ} = 2R \text{이므로}$$

$$R = \frac{2\sqrt{5}}{2 \sin 45^\circ} = \frac{2\sqrt{5}}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{10}$$

따라서 삼각형 BCD의 외접원의 넓이는

$$\pi R^2 = \pi \times (\sqrt{10})^2 = 10\pi$$

0874 [답] 3 : 5 : 7

$$a - 2b + c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$3a + b - 2c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$2 \times \textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면

$$5a - 3b = 0 \quad \therefore b = \frac{5}{3}a$$

$\textcircled{1} + 2 \times \textcircled{2}$ 을 하면

$$7a - 3c = 0 \quad \therefore c = \frac{7}{3}a$$

따라서 사인법칙에 의하여

$$\sin A : \sin B : \sin C = a : b : c = a : \frac{5}{3}a : \frac{7}{3}a \\ = 3 : 5 : 7$$

0875 [답] $B = 90^\circ$ 인 직각삼각형

$$\cos^2 B = 1 - \sin^2 B \text{이므로}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 B + \sin^2 C = 1 \text{에서}$$

$$\sin^2 A + (1 - \sin^2 B) + \sin^2 C = 1$$

$$\sin^2 A + \sin^2 C = \sin^2 B \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{c}{2R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 \quad \therefore a^2 + c^2 = b^2$$

따라서 삼각형 ABC는 $B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

0876 [답] ③

$$C = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$$

$$\text{사인법칙에 의하여 } \frac{90}{\sin 60^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ} \text{이므로}$$

$$\overline{BC} = \frac{90 \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{90 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 30\sqrt{6}(\text{m})$$

따라서 두 지점 B, C 사이의 거리는 $30\sqrt{6}$ m이다.

0877 [답] ①

코사인법칙에 의하여

$$7^2 = b^2 + 3^2 - 2 \times b \times 3 \times \cos 120^\circ$$

$$49 = b^2 + 9 - 6b \times \left(-\frac{1}{2}\right), b^2 + 3b - 40 = 0$$

$$(b+8)(b-5) = 0 \quad \therefore b = 5 (\because b > 0)$$

0878 [답] $2\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{4^2 + 6^2 - (2\sqrt{7})^2}{2 \times 4 \times 6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{점 D가 } \overline{BC} \text{를 } 1:2 \text{로 내분하는 점이므로 } \overline{BD} = \frac{1}{3}\overline{BC} = 2$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \times 4 \times 2 \times \cos B \\ = 16 + 4 - 16 \times \frac{1}{2} = 12$$

$$\therefore \overline{AD} = 2\sqrt{3} (\because \overline{AD} > 0)$$

0879 [답] $\frac{\sqrt{21}}{7}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \cos 60^\circ \\ = 4 + 16 - 16 \times \frac{1}{2} = 12$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} (\because \overline{AC} > 0)$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 4^2 + 2^2 - 2 \times 4 \times 2 \times \cos 120^\circ \\ = 16 + 4 - 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 28$$

$$\therefore \overline{BD} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} (\because \overline{BD} > 0)$$

평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로

$$\cos \alpha = \frac{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{7})^2 - 2^2}{2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

0880 [답] ④

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \times 3 \times 1 \times \cos \frac{\pi}{3} \\ = 9 + 1 - 6 \times \frac{1}{2} = 7$$

$$\therefore \overline{BC} = \sqrt{7} (\because \overline{BC} > 0)$$

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BP} : \overline{CP}$ 가 성립하므로

$$\overline{BP} : \overline{CP} = 3 : 1$$

$$\therefore \overline{CP} = \frac{1}{4}\overline{BC} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

삼각형 APC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의

$$\text{하여 } \frac{\overline{CP}}{\sin(\angle CAP)} = 2R \text{이므로}$$

$$R = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{2 \sin \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

따라서 삼각형 APC의 외접원의 넓이는

$$\pi R^2 = \pi \times \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}\pi$$

0881 [답] ④

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코

$$\text{사인법칙에 의하여 } \sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R},$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$\frac{a}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{b}{2R} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)$$

$$2a^2c + 2ac^2 = ab^2 + ac^2 - a^3 + a^2c + b^2c - c^3$$

$$a^2c + ac^2 - ab^2 - b^2c + a^3 + c^3 = 0$$

$$ac(a+c) - b^2(a+c) + (a+c)(a^2 - ac + c^2) = 0$$

$$(a+c)(a^2 + c^2 - b^2) = 0$$

$$\therefore a^2 + c^2 = b^2 (\because a > 0, c > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $B = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

0882 **10 m**

$\overline{AP} = x$ m라 하면 삼각형 PAB는 직각이등변삼각형이므로

$$\overline{AB} = x \text{ m}$$

삼각형 PAC에서

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{\overline{AC}}, \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{\overline{AC}} \quad \therefore \overline{AC} = \sqrt{3}x(\text{m})$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{3}x)^2 = x^2 + 10^2 - 2 \times x \times 10 \times \cos 120^\circ$$

$$3x^2 = x^2 + 100 - 20x \times \left(-\frac{1}{2}\right), x^2 - 5x - 50 = 0$$

$$(x+5)(x-10) = 0 \quad \therefore x = 10 (\because x > 0)$$

따라서 물 로켓의 최고 높이는 10 m이다.

0883 $\frac{64}{3}\pi - 16\sqrt{3}$

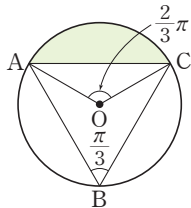
삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 하면

$$\angle AOC = 2\angle ABC = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

따라서 색칠한 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 8^2 \times \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \times 8^2 \times \sin \frac{2}{3}\pi$$

$$= \frac{64}{3}\pi - 16\sqrt{3}$$



0884 $\frac{7}{10}$

$\angle AOC = \theta$ 라 하면 삼각형 OAC에서 코사인 법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{2^2 + 2^2 - 1^2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{7}{8}$$

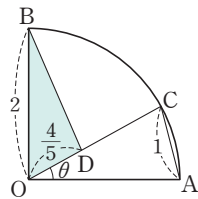
이때 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\angle BOD = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\therefore \sin(\angle BOD) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta = \frac{7}{8}$$

따라서 삼각형 BOD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OB} \times \overline{OD} \times \sin(\angle BOD) = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{10}$$



0885 **⑤**

사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 2 : 3 : 3$$

$a = 2k, b = 3k, c = 3k (k > 0)$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{(3k)^2 + (2k)^2 - (3k)^2}{2 \times 3k \times 2k} = \frac{1}{3}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $\sin B > 0$

$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 3k \times 2k \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}k^2$$

$$\text{즉, } 2\sqrt{2}k^2 = 32\sqrt{2} \text{이므로 } k^2 = 16$$

$$\therefore k = 4 (\because k > 0)$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

$$2k + 3k + 3k = 8k = 8 \times 4 = 32$$

0886 $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$ 를 그으면

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 3^2 + 1^2 - 2 \times 3 \times 1 \times \cos 120^\circ$$

$$= 9 + 1 - 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= 13$$

$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{13} (\because \overline{AC} > 0)$$

이때 사각형 ABCD가 원에 내접하므로

$$\angle ADC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$\overline{CD} = x$ 라 하면 삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$(\sqrt{13})^2 = 3^2 + x^2 - 2 \times 3 \times x \times \cos 60^\circ$$

$$13 = 9 + x^2 - 6x \times \frac{1}{2}$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$(x+1)(x-4) = 0$$

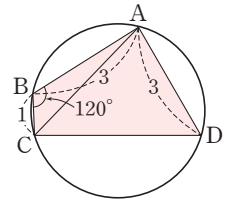
$$\therefore x = 4 (\because x > 0)$$

$$\therefore \square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 1 \times \sin 120^\circ + \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{4}$$



0887 $20\sqrt{3}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \times 5 \times 7} = \frac{1}{7}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $\sin B > 0$

$$\therefore \sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{7}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는

$$5 \times 7 \times \sin B = 5 \times 7 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 20\sqrt{3}$$

0888 $\frac{\sqrt{10}}{10}$

사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (6+12) \times 6 = 54$$

두 삼각형 ABC, BCD는 직각삼각형이므로

$$\overline{AC} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{6^2 + 12^2} = 6\sqrt{5}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 6\sqrt{5} \times \sin \theta = 54 \text{이므로}$$

$$18\sqrt{10} \sin \theta = 54$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{54}{18\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

이때 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 이므로 $\cos \theta > 0$

$$\therefore \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

0889 답 $2\sqrt{7}$

사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $A+C=180^\circ$

$$\therefore C=180^\circ-A \quad \dots\dots \text{i}$$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 2^2 + 4^2 - 2 \times 2 \times 4 \times \cos A \\ &= 20 - 16 \cos A \end{aligned}$$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BD}^2 &= 4^2 + 6^2 - 2 \times 4 \times 6 \times \cos(180^\circ - A) \\ &= 52 + 48 \cos A \end{aligned}$$

즉, $20 - 16 \cos A = 52 + 48 \cos A$ 이므로

$$-64 \cos A = 32 \quad \therefore \cos A = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots \text{ii}$$

따라서 $\overline{BD}^2 = 20 - 16 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 28$ 이므로

$$\overline{BD} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7} \quad (\because \overline{BD} > 0) \quad \dots\dots \text{iii}$$

채점 기준

i C를 A로 나타내기	20 %
ii $\cos A$ 의 값 구하기	50 %
iii $\overline{BD}$ 의 길이 구하기	30 %

0890 답 $\frac{8\sqrt{7}}{7}$

코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{5^2 + 6^2 - 4^2}{2 \times 5 \times 6} = \frac{3}{4} \quad \dots\dots \text{i}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $\sin A > 0$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad \dots\dots \text{ii}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의

하여 $\frac{4}{\sin A} = 2R$ 이므로

$$R = \frac{4}{2 \sin A} = \frac{4}{2 \times \frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{8\sqrt{7}}{7} \quad \dots\dots \text{iii}$$

채점 기준

i $\cos A$ 의 값 구하기	40 %
ii $\sin A$ 의 값 구하기	20 %
iii 외접원의 반지름의 길이 구하기	40 %

0891 답 $\frac{9\sqrt{3}+3\sqrt{6}}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AC}$ 를 그으면 삼각형

ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos 60^\circ \\ &= 9 + 36 - 36 \times \frac{1}{2} = 27 \end{aligned}$$

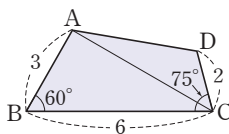
$$\therefore \overline{AC} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \quad (\because \overline{AC} > 0) \quad \dots\dots \text{i}$$

$\angle ACB = \theta$ 라 하면 사인법칙에 의하여 $\frac{3}{\sin \theta} = \frac{3\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$ 이므로

$$\sin \theta = \frac{3 \sin 60^\circ}{3\sqrt{3}} = \frac{3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < \theta < 75^\circ$ 이므로 $\theta = 30^\circ$

$$\therefore \angle ACD = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ \quad \dots\dots \text{ii}$$



$$\therefore \square ABCD = \triangle ABC + \triangle ACD$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 2 \times \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times 3\sqrt{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{9\sqrt{3} + 3\sqrt{6}}{2} \quad \dots\dots \text{iii}$$

채점 기준

i $\overline{AC}$ 의 길이 구하기	30 %
ii $\angle ACD$ 의 크기 구하기	30 %
iii 사각형 ABCD의 넓이 구하기	40 %

C 실력 향상

137쪽

0892 답 $\frac{18}{5}$

$\angle AQP = \angle ARP = 90^\circ$ 이므로 사각형

AQPR는 $\overline{AP}$ 를 지름으로 하는 원에 내접한다.

삼각형 AQR의 외접원의 지름의 길이는

$\overline{AP} = 6$ 이므로 사인법칙에 의하여

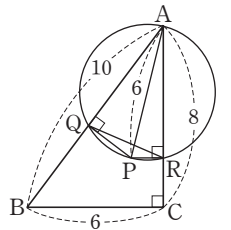
$$\frac{\overline{QR}}{\sin A} = 6$$

$$\therefore \overline{QR} = 6 \sin A \quad \dots\dots \text{㉠}$$

이때 삼각형 ABC는 직각삼각형이므로 $\sin A = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

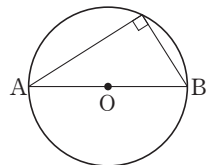
이를 ㉠에 대입하면

$$\overline{QR} = 6 \times \frac{3}{5} = \frac{18}{5}$$



중3 다시보기

원 O에서 $\overline{AB}$ 가 지름이면 $\widehat{AB}$ 에 대한 중심각의 크기는 180° 이고, 원주각의 크기는 90° 이다.



0893 답 ③

$\overline{AC} = a (a > 3)$ 라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$2^2 = a^2 + 3^2 - 2 \times a \times 3 \times \cos(\angle BAC)$$

$$4 = a^2 + 9 - 6a \times \frac{7}{8}, \quad a^2 - \frac{21}{4}a + 5 = 0$$

$$4a^2 - 21a + 20 = 0, \quad (4a-5)(a-4) = 0 \quad \therefore a = 4 \quad (\because a > 3)$$

$$\therefore \overline{AM} = \overline{MC} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

삼각형 ABM에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BM}^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \times 2 \times 3 \times \cos(\angle BAC)$$

$$= 4 + 9 - 12 \times \frac{7}{8} = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \overline{BM} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \quad (\because \overline{BM} > 0)$$

이때 호 AB에 대한 원주각의 크기는 서로 같으므로

$$\angle ADB = \angle BCA$$

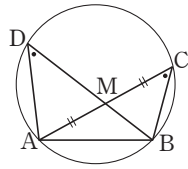
또 $\angle AMD = \angle BMC$ 이므로 삼각형 AMD와 삼각형 BMC는 서로 닮음이다.

따라서 $\overline{AM} : \overline{MD} = \overline{BM} : \overline{MC}$ 이므로

$$\overline{MD} \times \overline{BM} = \overline{AM} \times \overline{MC}$$

$$\overline{MD} \times \frac{\sqrt{10}}{2} = 2 \times 2$$

$$\therefore \overline{MD} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$



0894 답 ①

$\angle BAC = \angle CAD = \theta$ 라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{BC}^2 &= 5^2 + (3\sqrt{5})^2 - 2 \times 5 \times 3\sqrt{5} \times \cos \theta \\ &= 70 - 30\sqrt{5} \cos \theta \end{aligned}$$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{CD}^2 &= 7^2 + (3\sqrt{5})^2 - 2 \times 7 \times 3\sqrt{5} \times \cos \theta \\ &= 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta \end{aligned}$$

한편 $\angle BAC = \angle CAD$ 에서 $\widehat{BC} = \widehat{CD}$ 이므로

$$\overline{BC} = \overline{CD}$$

따라서 $\overline{BC}^2 = \overline{CD}^2$ 이므로

$$70 - 30\sqrt{5} \cos \theta = 94 - 42\sqrt{5} \cos \theta$$

$$12\sqrt{5} \cos \theta = 24 \quad \therefore \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{즉, } \overline{BC}^2 = 70 - 30\sqrt{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = 10 \text{이므로}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{10} \quad (\because \overline{BC} > 0)$$

한편 $\cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ 이고, $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

따라서 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법

칙에 의하여 $\frac{\overline{BC}}{\sin \theta} = 2R$ 이므로

$$R = \frac{\overline{BC}}{2 \sin \theta} = \frac{\sqrt{10}}{2 \times \frac{\sqrt{5}}{5}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

0895 답 $\frac{1}{36}$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R, 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{abc}{4R} \text{에서 } S = \frac{abc}{24}$$

한편 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이를 r라 하면

$$S = \frac{1}{2}r(a+b+c) \text{에서 } S = \frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\text{즉, } \frac{abc}{24} = \frac{3}{2}(a+b+c) \text{이므로}$$

$$\frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{36}$$

$$\therefore \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} = \frac{a+b+c}{abc} = \frac{1}{36}$$

08 / 등차수열과 등비수열

A 개념 확인

140~143쪽

0896 답 9

$1 - (-3) = 4$ 에서 공차가 4이므로 주어진 수열은

$-3, 1, 5, \boxed{9}, 13, \dots$

0897 답 $-1, -10$

$-7 - (-4) = -3$ 에서 공차가 -3 이므로 주어진 수열은

$\boxed{-1}, -4, -7, \boxed{-10}, -13, \dots$

0898 답 0, 6

$-3 - (-6) = 3$ 에서 공차가 3이므로 주어진 수열은

$-6, -3, \boxed{0}, 3, \boxed{6}, \dots$

0899 답 $a_n = -2n + 5$

$$a_n = 3 + (n-1) \times (-2) = -2n + 5$$

0900 답 $a_n = n - 6$

$$a_n = -5 + (n-1) \times 1 = n - 6$$

0901 답 $a_n = 3n - 10$

첫째항이 -7 , 공차가 $-4 - (-7) = 3$ 이므로

$$a_n = -7 + (n-1) \times 3 = 3n - 10$$

0902 답 $a_n = -4n + 3$

첫째항이 -1 , 공차가 $-5 - (-1) = -4$ 이므로

$$a_n = -1 + (n-1) \times (-4) = -4n + 3$$

0903 답 -8

$$a_n = 20 + (n-1) \times (-4) = -4n + 24$$

$$\therefore a_8 = -4 \times 8 + 24 = -8$$

0904 답 10

$$a_k = -16 \text{에서 } -4k + 24 = -16$$

$$-4k = -40 \quad \therefore k = 10$$

0905 답 4

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d라 하면 $a_1 = 11, a_5 = 27$ 이므로

$$11 + (5-1)d = 27, 4d = 16 \quad \therefore d = 4$$

0906 답 6

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d라 하면 $a_1 = -3, a_{11} = 57$ 이므로

$$-3 + (11-1)d = 57, 10d = 60 \quad \therefore d = 6$$

0907 답 $x = -2, y = 8$

x 는 -7 과 3 의 등차중항이므로 $x = \frac{-7+3}{2} = -2$

y 는 3 과 13 의 등차중항이므로 $y = \frac{3+13}{2} = 8$

0908 **답** $x=9, y=1$

x 는 13과 5의 등차중항이므로 $x = \frac{13+5}{2} = 9$

y 는 5와 -3의 등차중항이므로 $y = \frac{5+(-3)}{2} = 1$

0909 **답** -110

$$\frac{10\{1+(-23)\}}{2} = -110$$

0910 **답** 95

$$\frac{10(-13+32)}{2} = 95$$

0911 **답** 25

$$\frac{10\{2 \times 16 + (10-1) \times (-3)\}}{2} = 25$$

0912 **답** 90

$$\frac{10\{2 \times (-9) + (10-1) \times 4\}}{2} = 90$$

0913 **답** 260

첫째항이 -6, 공차가 $-4 - (-6) = 2$ 이므로

$$\frac{20\{2 \times (-6) + (20-1) \times 2\}}{2} = 260$$

0914 **답** 1030

첫째항이 -15, 공차가 $-8 - (-15) = 7$ 이므로

$$\frac{20\{2 \times (-15) + (20-1) \times 7\}}{2} = 1030$$

0915 **답** 21

수열 -9, -5, -1, ..., 15는 첫째항이 -9, 공차가

$-5 - (-9) = 4$ 인 등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = -9 + (n-1) \times 4 = 4n - 13$$

15를 제 k 항이라 하면

$$4k - 13 = 15, 4k = 28 \quad \therefore k = 7$$

$$\therefore -9 + (-5) + (-1) + \cdots + 15 = \frac{7(-9+15)}{2} = 21$$

0916 **답** 27

수열 31, 24, 17, ..., -25는 첫째항이 31, 공차가 $24 - 31 = -7$ 인

등차수열이므로 일반항 a_n 은

$$a_n = 31 + (n-1) \times (-7) = -7n + 38$$

-25를 제 k 항이라 하면

$$-7k + 38 = -25, -7k = -63 \quad \therefore k = 9$$

$$\therefore 31 + 24 + 17 + \cdots + (-25) = \frac{9\{31+(-25)\}}{2} = 27$$

0917 **답** 2

$S_n = n^2 - 3n + 6$ 에서

$$a_3 = S_3 - S_2$$

$$= 3^2 - 3 \times 3 + 6 - (2^2 - 3 \times 2 + 6)$$

$$= 6 - 4 = 2$$

0918 **답** 12

$S_n = n^2 - 3n + 6$ 에서

$$a_8 = S_8 - S_7$$

$$= 8^2 - 3 \times 8 + 6 - (7^2 - 3 \times 7 + 6)$$

$$= 46 - 34 = 12$$

0919 **답** $a_n = 4n + 3$

$S_n = 2n^2 + 5n$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 2n^2 + 5n - \{2(n-1)^2 + 5(n-1)\}$$

$$= 4n + 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 + 5 \times 1 = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{2}$ 이 같으므로

$$a_n = 4n + 3$$

0920 **답** $a_1 = -1, a_n = 2n - 5 (n \geq 2)$

$S_n = n^2 - 4n + 2$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n^2 - 4n + 2 - \{(n-1)^2 - 4(n-1) + 2\}$$

$$= 2n - 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 4 \times 1 + 2 = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{2}$ 이 같지 않으므로

$$a_1 = -1, a_n = 2n - 5 (n \geq 2)$$

0921 **답** 1, 16

$\frac{4}{2} = 2$ 에서 공비가 2이므로 주어진 수열은

$$\boxed{1}, 2, 4, 8, \boxed{16}, \dots$$

0922 **답** $-3, \frac{3}{2}$

$\frac{6}{-12} = -\frac{1}{2}$ 에서 공비가 $-\frac{1}{2}$ 이므로 주어진 수열은

$$-12, 6, \boxed{-3}, \boxed{\frac{3}{2}}, -\frac{3}{4}, \dots$$

0923 **답** $a_n = -3 \times (\sqrt{2})^{n-1}$

0924 **답** $a_n = 6 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

0925 **답** $a_n = 7 \times 2^{n-1}$

첫째항이 7, 공비가 $\frac{14}{7} = 2$ 이므로 $a_n = 7 \times 2^{n-1}$

0926 **답** $a_n = 243 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

첫째항이 243, 공비가 $\frac{-81}{243} = -\frac{1}{3}$ 이므로

$$a_n = 243 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

0927 답 -96

$$a_n = 3 \times (-2)^{n-1} \quad \therefore a_6 = 3 \times (-2)^{6-1} = -96$$

0928 답 8

$$a_k = -384 \text{에서 } 3 \times (-2)^{k-1} = -384 \\ (-2)^{k-1} = -128 = (-2)^7, k-1=7 \quad \therefore k=8$$

0929 답 $\frac{1}{2}$

$$\text{등비수열 } \{a_n\} \text{의 공비를 } r \text{라 하면 } a_1=4, a_8=\frac{1}{32} \text{이므로} \\ 4 \times r^{8-1} = \frac{1}{32}, r^7 = \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^7 \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$

0930 답 -1

$$\text{등비수열 } \{a_n\} \text{의 공비를 } r \text{라 하면 } a_1=5, a_{10}=-5 \text{이므로} \\ 5 \times r^{10-1} = -5, r^9 = -1 \quad \therefore r = -1$$

0931 답 $x=14, y=56$

$$x \text{는 } 7 \text{과 } 28 \text{의 등비중항이므로} \\ x^2 = 7 \times 28 = 14^2 \quad \therefore x = 14 (\because x > 0) \\ y \text{는 } 28 \text{과 } 112 \text{의 등비중항이므로} \\ y^2 = 28 \times 112 = 56^2 \quad \therefore y = 56 (\because y > 0)$$

0932 답 $x=\frac{4}{3}, y=\frac{4}{27}$

$$x \text{는 } 4 \text{와 } \frac{4}{9} \text{의 등비중항이므로} \\ x^2 = 4 \times \frac{4}{9} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \quad \therefore x = \frac{4}{3} (\because x > 0) \\ y \text{는 } \frac{4}{9} \text{와 } \frac{4}{81} \text{의 등비중항이므로} \\ y^2 = \frac{4}{9} \times \frac{4}{81} = \left(\frac{4}{27}\right)^2 \quad \therefore y = \frac{4}{27} (\because y > 0)$$

0933 답 93

$$\frac{48 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 96 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 \right\} = 93$$

0934 답 -279

$$\frac{-9(2^5-1)}{2-1} = -279$$

0935 답 $\frac{1023}{512}$

$$\text{첫째항이 } 1, \text{ 공비가 } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{이므로} \\ 1 \times \frac{\left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \right\} = \frac{1023}{512}$$

0936 답 1023

$$\text{첫째항이 } -3, \text{ 공비가 } \frac{6}{-3} = -2 \text{이므로} \\ \frac{-3 \{ 1 - (-2)^{10} \}}{1 - (-2)} = 1023$$

B 유형 완성

144~159쪽

0937 답 ③

$$\text{등차수열 } \{a_n\} \text{의 첫째항을 } a, \text{ 공차를 } d \text{라 하면} \\ a_2=44, a_7=9 \text{이므로} \\ a+d=44, a+6d=9 \\ \text{두 식을 연립하여 풀면 } a=51, d=-7 \\ \therefore a_{15}=51+14 \times (-7) = -47$$

0938 답 ④

$$\text{주어진 등차수열의 첫째항이 } -2, \text{ 공차가 } 3 - (-2) = 5 \text{이므로 제 } 30 \\ \text{항은} \\ -2 + 29 \times 5 = 143$$

0939 답 $a_n = \log(2^n \times 3)$

$$\text{등차수열 } \{a_n\} \text{의 첫째항을 } a, \text{ 공차를 } d \text{라 하면} \\ a_2=\log 12, a_4=\log 48 \text{이므로} \\ a+d=\log 12, a+3d=\log 48 \\ \text{두 식을 연립하여 풀면} \\ a=\log 6, d=\log 2 \\ \therefore a_n=\log 6 + (n-1) \times \log 2 \\ =\log 6 + \log 2^{n-1} \\ =\log(6 \times 2^{n-1}) \\ =\log(2^n \times 3)$$

0940 답 ㄱ, ㄷ

$$\begin{aligned} \text{ㄱ. 수열 } \{a_{2n}\} \text{은 } a_2, a_4, a_6, a_8, \dots \text{이므로} \\ a_4 - a_2 &= (a_1 + 3d_1) - (a_1 + d_1) = 2d_1 \\ a_6 - a_4 &= (a_1 + 5d_1) - (a_1 + 3d_1) = 2d_1 \\ &\vdots \\ \therefore a_4 - a_2 &= a_6 - a_4 = \dots = 2d_1 \\ \text{따라서 수열 } \{a_{2n}\} \text{은 공차가 } 2d_1 \text{인 등차수열이다.} \\ \text{ㄴ. 수열 } \{b_n^2\} \text{은 } b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2, \dots \text{이므로} \\ b_2^2 - b_1^2 &= (b_1 + d_2)^2 - b_1^2 \\ &= 2b_1d_2 + d_2^2 \\ b_3^2 - b_2^2 &= (b_1 + 2d_2)^2 - (b_1 + d_2)^2 \\ &= 2b_1d_2 + 3d_2^2 \\ \therefore b_2^2 - b_1^2 &\neq b_3^2 - b_2^2 \\ \text{따라서 수열 } \{b_n^2\} \text{은 등차수열이 아니다.} \\ \text{ㄷ. 수열 } \{a_n + b_n\} \text{은 } a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots \text{이므로} \\ a_2 + b_2 - (a_1 + b_1) &= \{(a_1 + d_1) + (b_1 + d_2)\} - (a_1 + b_1) \\ &= d_1 + d_2 \\ a_3 + b_3 - (a_2 + b_2) &= \{(a_1 + 2d_1) + (b_1 + 2d_2)\} \\ &\quad - \{(a_1 + d_1) + (b_1 + d_2)\} \\ &= d_1 + d_2 \\ &\vdots \\ \therefore a_2 + b_2 - (a_1 + b_1) &= a_3 + b_3 - (a_2 + b_2) = \dots = d_1 + d_2 \\ \text{따라서 수열 } \{a_n + b_n\} \text{은 공차가 } d_1 + d_2 \text{인 등차수열이다.} \\ \text{따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.} \end{aligned}$$

0941 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_3 + a_{12} = 25$ 에서 $(a + 2d) + (a + 11d) = 25$
 $\therefore 2a + 13d = 25 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $a_{10} - a_4 = 30$ 에서 $(a + 9d) - (a + 3d) = 30$
 $6d = 30 \quad \therefore d = 5$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하여 풀면 $a = -20$
 $\therefore a_n = -20 + (n-1) \times 5 = 5n - 25$
 60을 제 k 항이라 하면
 $5k - 25 = 60, 5k = 85$
 $\therefore k = 17$
 따라서 60은 제17항이다.

0942 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면
 $4(a_2 + a_3) = a_{10}$ 에서
 $4\{(3+d) + (3+2d)\} = 3+9d$
 $4(6+3d) = 3+9d$
 $24+12d = 3+9d$
 $3d = -21$
 $\therefore d = -7$

0943 답 18

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_3 + a_6 + a_9 = 15$ 에서 $(a + 2d) + (a + 5d) + (a + 8d) = 15$
 $\therefore 3a + 15d = 15 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $a_4 + a_7 + a_{10} = 17$ 에서 $(a + 3d) + (a + 6d) + (a + 9d) = 17$
 $\therefore 3a + 18d = 17 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면
 $a = \frac{5}{3}, d = \frac{2}{3} \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$
 $\therefore a_n = \frac{5}{3} + (n-1) \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}n + 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$
 $a_k = 13$ 에서 $\frac{2}{3}k + 1 = 13$
 $\frac{2}{3}k = 12 \quad \therefore k = 18 \quad \cdots \cdots \textcircled{iii}$

채점 기준

① 첫째항과 공차 구하기	50 %
② 일반항 a_n 구하기	20 %
③ 자연수 k 의 값 구하기	30 %

0944 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면 $a_3 a_7 = 64$ 에서
 $\{a + 2 \times (-3)\} \{a + 6 \times (-3)\} = 64$
 $(a-6)(a-18) = 64$
 $a^2 - 24a + 44 = 0, (a-2)(a-22) = 0$
 $\therefore a = 2$ 또는 $a = 22$
 $a_8 > 0$ 에서 $a + 7 \times (-3) > 0$, 즉 $a > 21$ 이므로
 $a = 22$
 $\therefore a_2 = 22 + (-3) = 19$

0945 답 -6

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 (7) 에서
 $(a + 4d) + (a + 6d) = 0$
 $2a = -10d \quad \therefore a = -5d \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 (4) 에서
 $|a + 2d| + |a + 7d| = 15$
 $\textcircled{1}$ 을 대입하면
 $|-3d| + |2d| = 15$
 이때 $d > 0$ 이므로
 $5d = 15 \quad \therefore d = 3$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면
 $a = -15$
 $\therefore a_4 = -15 + 3 \times 3 = -6$

0946 답 제11항

$a_n = 7 + (n-1) \times \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}n + \frac{31}{4}$
 $-\frac{3}{4}n + \frac{31}{4} < 0$ 에서
 $\frac{3}{4}n > \frac{31}{4}$
 $\therefore n > \frac{31}{3} = 10.3\cdots$
 따라서 처음으로 음수가 되는 항은 제11항이다.

0947 답 10

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 $a_2 + a_6 = -32$ 에서
 $(a + d) + (a + 5d) = -32$
 $\therefore 2a + 6d = -32 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $a_5 + a_{10} = -11$ 에서
 $(a + 4d) + (a + 9d) = -11$
 $\therefore 2a + 13d = -11 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -25, d = 3$
 $\therefore a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$
 $3n - 28 > 0$ 에서 $n > \frac{28}{3} = 9.3\cdots$
 따라서 자연수 n 의 최솟값은 10이다.

0948 답 제31항

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면
 제3항과 제7항은 절댓값이 같고 부호가 반대이므로
 $a_3 + a_7 = 0, (a + 2d) + (a + 6d) = 0$
 $2a + 8d = 0 \quad \therefore a + 4d = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $a_{10} = 20$ 에서 $a + 9d = 20 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = -16, d = 4$
 $\therefore a_n = -16 + (n-1) \times 4 = 4n - 20$
 $4n - 20 > 100$ 에서 $4n > 120$
 $\therefore n > 30$
 따라서 처음으로 100보다 커지는 항은 제31항이다.

0949 답 ③

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 5, 공차가 $\frac{14}{3}-5=-\frac{1}{3}$ 인 등차수열이므로

$$a_n=5+(n-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}n+\frac{16}{3}$$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 -15, 공차가 $-\frac{29}{2}-(-15)=\frac{1}{2}$ 인 등차수열이므로

$$b_n=-15+(n-1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}n-\frac{31}{2}$$

따라서 수열 $\{b_n-a_n\}$ 의 일반항은

$$\frac{1}{2}n-\frac{31}{2}-\left(-\frac{1}{3}n+\frac{16}{3}\right)=\frac{5}{6}n-\frac{125}{6}$$

$$\frac{5}{6}n-\frac{125}{6}>0 \text{에서 } \frac{5}{6}n>\frac{125}{6} \quad \therefore n>25$$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제26항이다.

0950 답 8

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 첫째항이 6, 제6항이 -14이므로

$$6+5d=-14, 5d=-20 \quad \therefore d=-4$$

$$x=6+d=6+(-4)=2$$

$$y=x+d=2+(-4)=-2$$

$$z=y+d=-2+(-4)=-6$$

$$w=z+d=-6+(-4)=-10$$

$$\therefore x-y+z-w=2-(-2)+(-6)-(-10)=8$$

0951 답 35

첫째항이 -7, 공차가 $\frac{2}{3}$ 인 등차수열의 제 $(m+2)$ 항이 17이므로

$$-7+(m+2-1)\times\frac{2}{3}=17$$

$$\frac{2}{3}(m+1)=24, m+1=36 \quad \therefore m=35$$

0952 답 ②

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 첫째항이 13, 제 $(m+2)$ 항이 103이므로

$$13+(m+2-1)d=103, (m+1)d=90 \quad \therefore m=\frac{90}{d}-1$$

이때 m 은 자연수이므로 d 는 90을 제외한 90의 약수이어야 한다.

따라서 주어진 수열의 공차가 될 수 없는 것은 ②이다.

0953 답 20

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 첫째항이 -4, 제27항이 74이므로

$$-4+(27-1)d=74, 26d=78 \quad \therefore d=3$$

수열 74, $y_1, y_2, \dots, y_n, 137$ 에서 74를 첫째항으로 생각하면

제 $(n+2)$ 항이 137이므로

$$74+\{(n+2)-1\}\times 3=137, 3(n+1)=63$$

$$n+1=21 \quad \therefore n=20$$

0954 답 1

세 수 $a-1, a^2+1, 3a+1$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2(a^2+1)=(a-1)+(3a+1) \text{에서 } 2(a^2+1)=4a$$

$$a^2-2a+1=0, (a-1)^2=0 \quad \therefore a=1$$

0955 답 -6

다항식 $f(x)$ 를 $x-1, x+1, x+2$ 로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여 각각

$$f(1)=1+a+b, f(-1)=1-a+b, f(-2)=4-2a+b$$

세 수 $f(1), f(-1), f(-2)$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2f(-1)=f(1)+f(-2)$$

$$2(1-a+b)=(1+a+b)+(4-2a+b)$$

$$2-2a+2b=5-a+b \quad \therefore a=-3$$

이때 $f(x)$ 는 $x-2$ 로 나누어떨어지므로

$$f(2)=4+2a+b=0 \quad \therefore b=2 \quad \therefore ab=-3\times 2=-6$$

공통수학1 다시보기

나머지 정리

다항식 $f(x)$ 를 $x-a$ 로 나누었을 때의 나머지를 R 라 하면

$$\rightarrow R=f(a)$$

0956 답 ⑤

세 수 $\log_2 3, \log_2 a, \log_2 12$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\log_2 a=\log_2 3+\log_2 12, \log_2 a^2=\log_2 36$$

$$a^2=36 \quad \therefore a=6 (\because a>0)$$

세 수 $\log_2 a, \log_2 12, \log_2 b$, 즉 $\log_2 6, \log_2 12, \log_2 b$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\log_2 12=\log_2 6+\log_2 b, \log_2 12^2=\log_2 6b$$

$$6b=144 \quad \therefore b=24 \quad \therefore b-a=24-6=18$$

0957 답 ③

세 수 1, α, β 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2\alpha=1+\beta \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이차방정식 $x^2-nx+4(n-4)=0$ 에서

$$(x-4)\{x-(n-4)\}=0 \quad \therefore x=4 \text{ 또는 } x=n-4$$

(i) $4<n-4$, 즉 $n>8$ 일 때,

$$\alpha<\beta \text{이므로 } \alpha=4, \beta=n-4$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 8=1+(n-4) \quad \therefore n=11$$

(ii) $n-4<4$, 즉 $n<8$ 일 때,

$$\alpha<\beta \text{이므로 } \alpha=n-4, \beta=4$$

$$\text{이를 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } 2(n-4)=1+4 \quad \therefore n=\frac{13}{2}$$

그런데 n 은 자연수이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $n=11$

다른 풀이

$$\textcircled{1} \text{에서 } 2\alpha-\beta=1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이차방정식 $x^2-nx+4(n-4)=0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=n \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\alpha\beta=4(n-4) \quad \dots\dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{을 연립하여 풀면 } \alpha=\frac{n+1}{3}, \beta=\frac{2n-1}{3}$$

이를 $\textcircled{4}$ 에 대입하여 정리하면

$$2n^2-35n+143=0, (2n-13)(n-11)=0$$

$$\therefore n=\frac{13}{2} \text{ 또는 } n=11$$

이때 n 은 자연수이므로 $n=11$

0958 답 3

세 수 6, a , 10이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$a = \frac{6+10}{2} = 8$$

세 수 6, b , 0도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$b = \frac{6+0}{2} = 3$$

세 수 a , 5, c , 즉 8, 5, c 도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$5 = \frac{8+c}{2}, 10 = 8+c \quad \therefore c = 2$$

세 수 10, 7, d 도 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$7 = \frac{10+d}{2}, 14 = 10+d \quad \therefore d = 4$$

$$\therefore a - b + c - d = 8 - 3 + 2 - 4 = 3$$

0959 답 ③

세 수를 $a-d$, a , $a+d$ 라 하면

$$(a-d) + a + (a+d) = 12 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(a-d) \times a \times (a+d) = 48 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 3a = 12 \quad \therefore a = 4$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$(4-d) \times 4 \times (4+d) = 48, 16-d^2 = 12$$

$$d^2 = 4 \quad \therefore d = -2 \text{ 또는 } d = 2$$

따라서 세 수는 2, 4, 6이므로 세 수의 제곱의 합은

$$2^2 + 4^2 + 6^2 = 56$$

0960 답 2

삼차방정식의 세 실근을 $a-d$, a , $a+d$ 라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$(a-d) + a + (a+d) = -3, 3a = -3 \quad \therefore a = -1$$

따라서 주어진 방정식의 한 근이 -1 이므로 방정식에 $x = -1$ 을 대입하면

$$(-1)^3 + 3 \times (-1)^2 + p \times (-1) + q = 0$$

$$2 - p + q = 0 \quad \therefore p - q = 2$$

공통수학1 다시보기

삼차방정식 $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ 의 세 근을 α , β , γ 라 하면

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

0961 답 -1

네 수를 $a-3d$, $a-d$, $a+d$, $a+3d$ 라 하면

$$(a-3d) + (a-d) + (a+d) + (a+3d) = 8 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$(a-d)(a+d) = (a-3d)(a+3d) + 8 \quad \cdots \textcircled{2} \quad \textcircled{i}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 4a = 8 \quad \therefore a = 2$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$(2-d)(2+d) = (2-3d)(2+3d) + 8$$

$$4 - d^2 = 4 - 9d^2 + 8$$

$$8d^2 = 8, d^2 = 1$$

$$\therefore d = -1 \text{ 또는 } d = 1 \quad \cdots \textcircled{ii}$$

따라서 네 수는 -1 , 1 , 3 , 5 이므로 가장 작은 수는 -1 이다.

$$\cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 네 수를 a , d 를 이용하여 나타내고, a , d 에 대한 연립방정식 세우기	40%
② a , d 의 값 구하기	40%
③ 가장 작은 수 구하기	20%

0962 답 $81\sqrt{5}$

$\overline{AD} = a - d$, $\overline{CD} = a$, $\overline{AB} = a + d$ 라 하면

$$\triangle ABD \sim \triangle ACB \text{이므로 } \overline{AB}^2 = \overline{AD} \times \overline{AC}$$

$$(a+d)^2 = (a-d)(2a-d)$$

$$a^2 = 5ad \quad \therefore a = 5d \quad (\because a > 0)$$

즉, $\overline{AB} = 6d$, $\overline{BC} = 9\sqrt{5}$, $\overline{AC} = 9d$ 이므로 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$$(9d)^2 = (6d)^2 + (9\sqrt{5})^2$$

$$45d^2 = 405, d^2 = 9 \quad \therefore d = 3 \quad (\because d > 0)$$

따라서 $\overline{AB} = 18$ 이므로 직각삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 9\sqrt{5} \times 18 = 81\sqrt{5}$$

0963 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_2 = 5$, $a_8 = 17$ 이므로

$$a + d = 5, a + 7d = 17$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 3, d = 2$$

따라서 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\frac{15\{2 \times 3 + (15-1) \times 2\}}{2} = 255$$

0964 답 162

$$a_1 = 5 \times 1 - 7 = -2, a_9 = 5 \times 9 - 7 = 38 \text{이므로}$$

$$\text{첫째항부터 제9항까지의 합은 } \frac{9(-2+38)}{2} = 162$$

0965 답 -2

첫째항이 8, 제 k 항이 -30 인 등차수열의 첫째항부터 제 k 항까지의 합이 -220 이므로

$$\frac{k\{8 + (-30)\}}{2} = -220 \quad \therefore k = 20$$

즉, $a_{20} = -30$ 이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$8 + 19d = -30 \quad \therefore d = -2$$

0966 답 8

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = 3 \text{에서 } a + 2d = 3 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$a_7 = 3a_5 \text{에서 } a + 6d = 3(a + 4d)$$

$$2a + 6d = 0 \quad \therefore a + 3d = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 9$, $d = -3$

$$\therefore S_n = \frac{n\{2 \times 9 + (n-1) \times (-3)\}}{2} = \frac{n(21-3n)}{2}$$

$$\frac{n(21-3n)}{2} < 0 \text{에서 } n(21-3n) < 0$$

$$\text{이때 } n \text{은 자연수이므로 } 21-3n < 0 \quad \therefore n > 7$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 8이다.

0967 답 ④

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차를 각각 d_1 , d_2 라 하면

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9)$$

$$=\frac{9(a_1+a_9)}{2}+\frac{9(b_1+b_9)}{2}=\frac{9\{(a_1+b_1)+(a_9+b_9)\}}{2}$$

$$=\frac{9(10+a_9+b_9)}{2}$$

즉, $\frac{9(10+a_9+b_9)}{2}=54$ 이므로 $10+a_9+b_9=12$

$\therefore a_9+b_9=2$

다른 풀이

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차를 각각 d_1 , d_2 라 하면

$$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_9)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9)$$

$$=\frac{9(2a_1+8d_1)}{2}+\frac{9(2b_1+8d_2)}{2}=\frac{9\{2(a_1+b_1)+8(d_1+d_2)\}}{2}$$

$$=\frac{9\{2\times 10+8(d_1+d_2)\}}{2}=90+36(d_1+d_2)$$

즉, $90+36(d_1+d_2)=54$ 이므로 $d_1+d_2=-1$

$\therefore a_9+b_9=(a_1+8d_1)+(b_1+8d_2)=(a_1+b_1)+8(d_1+d_2)$

$$=10+8\times(-1)=2$$

0968 답 281

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_1=43$, $a_{10}=7$ 이므로

$$43+9d=7 \quad \therefore d=-4$$

$\therefore a_n=43+(n-1)\times(-4)=-4n+47$

$$-4n+47<0 \text{에서 } 4n>47 \quad \therefore n>\frac{47}{4}=11.75$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제11항까지는 양수이고, 제12항부터 음수이다.

이때 $a_{11}=3$, $a_{12}=-1$, $a_{15}=-13$ 이므로

$$|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{15}|$$

$$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{11})-(a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15})$$

$$=\frac{11(43+3)}{2}-\frac{4\{-1+(-13)\}}{2}=253+28=281$$

0969 답 ①

첫째항이 6, 끝항이 48, 항수가 $(m+2)$ 인 등차수열의 합이 594이므로

$$\frac{(m+2)(6+48)}{2}=594, m+2=22 \quad \therefore m=20$$

0970 답 -252

첫째항이 5, 끝항이 -33, 항수가 20인 등차수열의 합은

$$\frac{20\{5+(-33)\}}{2}=-280$$

따라서 $5+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}+(-33)=-280$ 이므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{18}=-252$$

0971 답 ③

$-4+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m+50=-4+391+50=437$

즉, 첫째항이 -4, 끝항이 50, 항수가 $(m+2)$ 인 등차수열의 합이 437이므로

$$\frac{(m+2)(-4+50)}{2}=437, m+2=19 \quad \therefore m=17$$

0972 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=80$$

$$\therefore 2a+9d=16 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_{20}=\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}=360$$

$$\therefore 2a+19d=36 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=-1$, $d=2$

$$\therefore S_{30}=\frac{30\{2\times(-1)+(30-1)\times 2\}}{2}=840$$

0973 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_4=\frac{4\{2a+(4-1)d\}}{2}=34$$

$$\therefore 2a+3d=17 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_8=\frac{8\{2a+(8-1)d\}}{2}=116$$

$$\therefore 2a+7d=29 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=4$, $d=3$

$$\therefore a_9+a_{10}+a_{11}+\cdots+a_{20}=S_{20}-S_8$$

$$=\frac{20\{2\times 4+(20-1)\times 3\}}{2}-116$$

$$=650-116=534$$

0974 답 -65

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 에 대하여 ㉠에서

$$S_{10}=\frac{10\{2a+(10-1)d\}}{2}=-15$$

$$\therefore 2a+9d=-3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

㉡에서

$$S_{20}-S_{10}=\frac{20\{2a+(20-1)d\}}{2}-(-15)=-115$$

$$\therefore 2a+19d=-13 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면 $a=3$, $d=-1$

$$\therefore a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{15}$$

$$=S_{15}-S_5$$

$$=\frac{15\{2\times 3+(15-1)\times(-1)\}}{2}-\frac{5\{2\times 3+(5-1)\times(-1)\}}{2}$$

$$=-60-5=-65$$

0975 답 121

$a_n=21+(n-1)\times(-2)=-2n+23$

$-2n+23<0$ 에서

$$n>\frac{23}{2}=11.5$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 제12항부터 음수이므로 첫째항부터 제11항까지의 합이 최대이다.

이때 $a_{11}=-2\times 11+23=1$ 이므로 구하는 최댓값은

$$S_{11}=\frac{11(21+1)}{2}=121$$

다른 풀이

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{n\{2 \times 21 + (n-1) \times (-2)\}}{2} \\
 &= -n^2 + 22n \\
 &= -(n-11)^2 + 121
 \end{aligned}$$

따라서 S_n 은 $n=11$ 에서 최댓값 121을 갖는다.

0976 답 -42

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_4 = -7, a_{12} = 9 \text{ 이므로}$$

$$a + 3d = -7, a + 11d = 9$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -13, d = 2$$

$$\therefore a_n = -13 + (n-1) \times 2 = 2n - 15$$

$$2n - 15 > 0 \text{ 에서 } n > \frac{15}{2} = 7.5$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 제8항부터 양수이므로 첫째항부터 제7항까지의 합이 최소이다.

이때 $a_7 = 2 \times 7 - 15 = -1$ 이므로 첫째항부터 제7항까지의 합은

$$\frac{7\{-13 + (-1)\}}{2} = -49$$

따라서 $k=7, m=-49$ 이므로

$$k+m = -42$$

다른 풀이

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{n\{2 \times (-13) + (n-1) \times 2\}}{2} \\
 &= n^2 - 14n \\
 &= (n-7)^2 - 49
 \end{aligned}$$

따라서 S_n 은 $n=7$ 에서 최솟값 -49 를 가지므로 $k=7, m=-49$

$$\therefore k+m = -42$$

0977 답 5

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$S_3 = \frac{3\{2 \times (-9) + (3-1)d\}}{2} = -27 + 3d$$

$$S_7 = \frac{7\{2 \times (-9) + (7-1)d\}}{2} = -63 + 21d \quad \cdots \textcircled{i}$$

$S_3 = S_7$ 에서

$$-27 + 3d = -63 + 21d$$

$$18d = 36$$

$$\therefore d = 2$$

$$\therefore a_n = -9 + (n-1) \times 2 = 2n - 11 \quad \cdots \textcircled{ii}$$

$$2n - 11 > 0 \text{ 에서 } n > \frac{11}{2} = 5.5$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 제6항부터 양수이므로 첫째항부터 제5항까지의 합이 최소이다.

$$\therefore n = 5 \quad \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 공차를 d 로 놓고 S_3, S_7 을 d 에 대한 식으로 나타내기	40%
② 일반항 a_n 구하기	30%
③ S_n 이 최소가 되도록 하는 자연수 n 의 값 구하기	30%

0978 답 ⑤

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_n = 21 + (n-1)d$$

이때 최댓값이 S_{11} 이므로 $a_{11} > 0, a_{12} < 0$ 이어야 한다.

$$a_{11} = 21 + 10d > 0 \text{ 에서 } d > -\frac{21}{10}$$

$$a_{12} = 21 + 11d < 0 \text{ 에서 } d < -\frac{21}{11}$$

$$\therefore -\frac{21}{10} < d < -\frac{21}{11}$$

그런데 d 는 정수이므로 $d = -2$

$$\therefore S_{20} = \frac{20\{2 \times 21 + (20-1) \times (-2)\}}{2} = 40$$

0979 답 ④

두 자리의 자연수 중에서 6으로 나누었을 때의 나머지가 5인 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$11, 17, 23, \dots, 95$$

이때 $95 = 11 + 14 \times 6$ 에서 구하는 총합은 첫째항이 11, 끝항이 95, 항수가 15인 등차수열의 합이므로

$$\frac{15(11+95)}{2} = 795$$

0980 답 ③

50 이상 100 이하의 자연수 중에서 2의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$50, 52, 54, \dots, 100 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

이때 $100 = 50 + 25 \times 2$ 에서 ㉠은 첫째항이 50, 끝항이 100, 항수가 26인 등차수열이므로 그 합은

$$\frac{26(50+100)}{2} = 1950$$

또 50 이상 100 이하의 자연수 중에서 3의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$51, 54, 57, \dots, 99 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

이때 $99 = 51 + 16 \times 3$ 에서 ㉡은 첫째항이 51, 끝항이 99, 항수가 17인 등차수열이므로 그 합은

$$\frac{17(51+99)}{2} = 1275$$

한편 50 이상 100 이하의 자연수 중에서 6의 배수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$54, 60, 66, \dots, 96 \quad \cdots \textcircled{㉢}$$

이때 $96 = 54 + 7 \times 6$ 에서 ㉢은 첫째항이 54, 끝항이 96, 항수가 8인 등차수열이므로 그 합은

$$\frac{8(54+96)}{2} = 600$$

따라서 50 이상 100 이하의 자연수 중에서 2 또는 3으로 나누어떨어지는 수의 총합은

$$1950 + 1275 - 600 = 2625$$

0981 답 508

$$A = \{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, \dots\},$$

$$B = \{6, 11, 16, 21, 26, \dots\}$$

$$\therefore A \cap B = \{11, 26, 41, 56, \dots\}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 11, 공차가 15인 등차수열이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8 = \frac{8\{2 \times 11 + (8-1) \times 15\}}{2} = 508$$

0982 답 7

연속하는 30개의 자연수 중에서 가장 작은 수를 a 라 하면 30개의 자연수는 첫째항이 a , 공차가 1인 등차수열을 이루므로

$$\frac{30\{2a + (30-1) \times 1\}}{2} = 645$$

$$2a + 29 = 43, 2a = 14 \quad \therefore a = 7$$

따라서 구하는 가장 작은 수는 7이다.

0983 답 6

n 각형의 내각의 크기의 합은

$$180^\circ \times (n-2) = 180^\circ \times n - 360^\circ \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

첫째항이 70° , 공차가 20° 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\frac{n\{2 \times 70^\circ + (n-1) \times 20^\circ\}}{2} = 10^\circ \times n^2 + 60^\circ \times n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

따라서 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 에서

$$180^\circ \times n - 360^\circ = 10^\circ \times n^2 + 60^\circ \times n$$

$$n^2 - 12n + 36 = 0, (n-6)^2 = 0$$

$$\therefore n = 6$$

0984 답 ②

제 n 행의 왼쪽 끝에 적힌 수를 l_n 이라 하면

$$l_n = 100 - 1 - 2 - 3 - \cdots - (n-1)$$

$$= 100 - \{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\}$$

$$= 100 - \frac{(n-1)\{1 + (n-1)\}}{2} \quad \begin{array}{l} \text{첫째항이 1, 끝항이 } n-1, \text{ 항수가 } \\ (n-1) \text{인 등차수열의 합} \end{array}$$

$$= 100 - \frac{n(n-1)}{2}$$

제 n 행에 적힌 모든 수의 합 a_n 은 첫째항이 $100 - \frac{n(n-1)}{2}$, 공차가 -1 , 항수가 n 인 등차수열의 합과 같으므로

$$a_n = \frac{n\left[2 \times \left\{100 - \frac{n(n-1)}{2}\right\} + (n-1) \times (-1)\right]}{2}$$

$$= \frac{n(201 - n^2)}{2}$$

$$\therefore a_{13} - a_{12} = \frac{13(201 - 13^2)}{2} - \frac{12(201 - 12^2)}{2} \\ = 208 - 342 = -134$$

0985 답 30

두 곡선 $y = x^2 + ax + b$, $y = x^2$ 사이에 y 축과 평행하게 그은 선분의 길이를 $f(x)$ 라 하면

$$f(x) = x^2 + ax + b - x^2 = ax + b$$

이때 $f(x)$ 는 x 에 대한 일차식이므로 같은 간격의 x 좌표에 대하여 각각의 선분의 길이는 등차수열을 이룬다.

따라서 10개의 선분의 길이의 합은 첫째항이 1, 제10항이 5인 등차수열의 합과 같으므로

$$\frac{10(1+5)}{2} = 30$$

0986 답 ②

$S_n = 3n^2 - n + 1$ 에서

$$a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 - 1 + 1 = 3$$

$$a_{10} = S_{10} - S_9$$

$$= (3 \times 10^2 - 10 + 1) - (3 \times 9^2 - 9 + 1)$$

$$= 291 - 235 = 56$$

$$\therefore a_1 + a_{10} = 3 + 56$$

$$= 59$$

다른 풀이

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= 3n^2 - n + 1 - \{3(n-1)^2 - (n-1) + 1\}$$

$$= 6n - 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3 \times 1^2 - 1 + 1 = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{2}$ 이 같지 않으므로

$$a_1 = 3, a_n = 6n - 4 \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_1 + a_{10} = 3 + (6 \times 10 - 4) = 59$$

0987 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n = n^2 - 5n$ 이므로 $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n^2 - 5n - \{(n-1)^2 - 5(n-1)\}$$

$$= 2n - 6$$

$$\therefore a_1 + d = a_2 = 2 \times 2 - 6 = -2$$

다른 풀이

$$a_1 + d = a_2 = S_2 - S_1$$

$$= (2^2 - 5 \times 2) - (1^2 - 5 \times 1)$$

$$= -6 - (-4)$$

$$= -2$$

0988 답 ②

$S_n = -2n^2 + 9n$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= -2n^2 + 9n - \{-2(n-1)^2 + 9(n-1)\}$$

$$= -4n + 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = -2 \times 1^2 + 9 \times 1 = 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{2}$ 이 같으므로

$$a_n = -4n + 11$$

$$-4n + 11 > 0 \text{에서 } 4n < 11$$

$$\therefore n < \frac{11}{4} = 2.75$$

따라서 자연수 n 은 1, 2의 2개이다.

0989 답 11

나머지 정리에 의하여

$$S_n = (-n)^2 + 3(-n) = n^2 - 3n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 3n - \{(n-1)^2 - 3(n-1)\} \\ &= 2n - 4 \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 3 \times 1 = -2 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 ⑦에 $n=1$ 을 대입한 값과 ⑧이 같으므로

$$a_n = 2n - 4$$

따라서 $2k - 4 = 18$ 에서 $k = 11$

다른 풀이

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 3 \times 1 = -2 \text{이므로 } k \neq 1$$

$$\begin{aligned} \therefore a_k &= S_k - S_{k-1} \\ &= k^2 - 3k - \{(k-1)^2 - 3(k-1)\} = 2k - 4 \end{aligned}$$

따라서 $2k - 4 = 18$ 에서 $k = 11$

0990 답 ④

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 각각

$$A_n = n^2 + kn, B_n = -2n^2 + 23n \text{이라 하면}$$

$n \geq 2$ 일 때, $a_n = A_n - A_{n-1}$, $b_n = B_n - B_{n-1}$ 이므로

$$a_4 = A_4 - A_3 = 4^2 + 4k - (3^2 + 3k) = 7 + k$$

$$b_4 = B_4 - B_3 = -2 \times 4^2 + 23 \times 4 - (-2 \times 3^2 + 23 \times 3) = 9$$

$$\text{이때 } a_4 = b_4 \text{이므로 } 7 + k = 9 \quad \therefore k = 2$$

0991 답 10

$$S_n = -n^2 + 7n \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= -n^2 + 7n - \{-(n-1)^2 + 7(n-1)\} \\ &= -2n + 8 \quad \dots\dots \textcircled{7} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = -1^2 + 7 \times 1 = 6 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

이때 ⑦에 $n=1$ 을 대입한 값과 ⑧이 같으므로

$$a_n = -2n + 8$$

$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2k}$ 는 첫째항이 $a_2 = 4$, 끝항이 $a_{2k} = -4k + 8$, 항수가 k 인 등차수열의 합이므로

$$a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2k} = \frac{k\{4 + (-4k + 8)\}}{2} = -2k^2 + 6k$$

$$\text{즉, } -2k^2 + 6k = -140 \text{이므로 } 2k^2 - 6k - 140 = 0$$

$$k^2 - 3k - 70 = 0, (k+7)(k-10) = 0$$

$$\therefore k = 10 (\because k > 0)$$

0992 답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_3 = 3$, $a_5 = 12$ 이므로

$$ar^2 = 3 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$ar^4 = 12 \quad \dots\dots \textcircled{8}$$

$$\textcircled{8} \div \textcircled{7} \text{을 하면 } r^2 = 4 \quad \therefore r = 2 (\because r > 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } 4a = 3 \quad \therefore a = \frac{3}{4}$$

$$\therefore a_8 = \frac{3}{4} \times 2^7 = 96$$

0993 답 첫째항: 15, 공비: $\frac{1}{25}$

$$a_1 = 3 \times 5^{3-2} = 15, a_2 = 3 \times 5^{3-4} = \frac{3}{5} \text{이므로 } \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{5} \div 15 = \frac{1}{25}$$

따라서 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항은 15, 공비는 $\frac{1}{25}$ 이다.

0994 답 ④

주어진 등비수열의 일반항을 a_n 이라 하면 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 공비가

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \div \frac{1}{4} = \sqrt{2} \text{이므로}$$

$$a_n = \frac{1}{4} \times (\sqrt{2})^{n-1}$$

$$8 \text{을 제 } k \text{항이라 하면 } \frac{1}{4} \times (\sqrt{2})^{k-1} = 8, (\sqrt{2})^{k-1} = 32$$

$$2^{\frac{k-1}{2}} = 2^5, \frac{k-1}{2} = 5, k-1 = 10$$

$$\therefore k = 11$$

따라서 8은 제 11항이다.

0995 답 100

$$a_n = 2 \times 4^{n-1} = 2 \times 2^{2(n-1)} = 2^{2n-1}$$

$$\therefore \log_2 a_n = \log_2 2^{2n-1} = 2n-1 = 1+2(n-1)$$

따라서 수열 $\{\log_2 a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 2인 등차수열이므로 구하는 합은

$$\frac{10\{2 \times 1 + (10-1) \times 2\}}{2} = 100$$

0996 답 ③

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_4 = 2 \text{에서 } ar^3 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a_{10} = \frac{1}{8} a_7 \text{에서 } ar^9 = \frac{1}{8} ar^6 \text{이므로 } r^3 = \frac{1}{8} \quad \therefore r = \frac{1}{2}$$

$$\text{이를 } \textcircled{7} \text{에 대입하면 } \frac{1}{8} a = 2 \quad \therefore a = 16$$

$$\therefore a_9 = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{16}$$

0997 답 ④

모든 항이 양수이므로 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항과 공비는 양수이다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_3^2 = a_6 \text{에서 } (a_1 r^2)^2 = a_1 r^5, a_1 r^4 (a_1 - r) = 0$$

$$a_1 > 0, r > 0 \text{이므로}$$

$$a_1 - r = 0 \quad \therefore a_1 = r \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$$a_2 - a_1 = 2 \text{에서 } a_1 r - a_1 = 2, r^2 - r = 2 (\because \textcircled{7})$$

$$r^2 - r - 2 = 0, (r+1)(r-2) = 0 \quad \therefore r = 2 (\because r > 0)$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } a_1 = 2$$

$$\therefore a_5 = 2 \times 2^4 = 32$$

0998 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_6}{a_1} = \frac{a_1 r^5}{a_1} = r^5, \frac{a_7}{a_2} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r} = r^5, \dots, \frac{a_{25}}{a_{20}} = \frac{a_1 r^{24}}{a_1 r^{19}} = r^5 \text{이므로}$$

$$\frac{a_6}{a_1} + \frac{a_7}{a_2} + \frac{a_8}{a_3} + \dots + \frac{a_{25}}{a_{20}} = 20r^5 = 100 \quad \therefore r^5 = 5$$

$$\therefore \frac{a_{25}}{a_{10}} = \frac{a_1 r^{24}}{a_1 r^9} = r^{15} = (r^5)^3 = 5^3 = 125$$

0999 [답] ②

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_2=9$, $a_5=243$ 이므로

$$ar=9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^4=243 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$r^3=27 \quad \therefore r=3$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$3a=9 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore a_n=3 \times 3^{n-1}=3^n$$

$3^n > 3000$ 에서 $3^7=2187$, $3^8=6561$ 이므로 $n \geq 8$

따라서 처음으로 3000보다 커지는 항은 제8항이다.

1000 [답] ⑤

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_5=8$, $a_7=16$ 이므로

$$ar^4=8 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$ar^6=16 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$r^2=2 \quad \therefore r=\sqrt{2} \quad (\because r>0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$4a=8 \quad \therefore a=2$$

따라서 $a_n=2 \times (\sqrt{2})^{n-1}$ 이므로

$$a_n^2=\{2 \times (\sqrt{2})^{n-1}\}^2=2^2 \times \{(\sqrt{2})^2\}^{n-1}=4 \times 2^{n-1}$$

$$4 \times 2^{n-1} > 1600 \text{에서 } 2^{n-1} > 400$$

$$\text{이때 } 2^8=256, 2^9=512 \text{이므로 } n-1 \geq 9 \quad \therefore n \geq 10$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10이다.

1001 [답] 12

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_3+a_6=\frac{7}{16} \text{에서 } ar^2+ar^5=\frac{7}{16}$$

$$\therefore ar^2(1+r^3)=\frac{7}{16} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4+a_7=-\frac{7}{32} \text{에서 } ar^3+ar^6=-\frac{7}{32}$$

$$\therefore ar^3(1+r^3)=-\frac{7}{32} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$r=-\frac{1}{2}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$a \times \frac{1}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{16} \quad \therefore a=2$$

따라서 $a_n=2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\left|2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right| < \frac{1}{1000} \text{에서 } 2 \times \left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right| < \frac{1}{1000}$$

$$\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right| < \frac{1}{2000}$$

$$\text{이때 } \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}, \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{2048} \text{이므로}$$

$$n-1 \geq 11 \quad \therefore n \geq 12$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 12이다.

1002 [답] 84

주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 첫째항이 6, 제5항이 96이므로

$$6r^4=96, r^4=16 \quad \therefore r=2 \quad (\because r>0)$$

$$x=6 \times r=6 \times 2=12$$

$$y=x \times r=12 \times 2=24$$

$$z=y \times r=24 \times 2=48$$

$$\therefore x+y+z=12+24+48=84$$

1003 [답] ②

첫째항이 12이고 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열의 제 $(m+2)$ 항이 $\frac{4}{243}$ 이므로

$$12 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{m+1} = \frac{4}{243}, \left(\frac{1}{3}\right)^{m+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^6$$

$$m+1=6 \quad \therefore m=5$$

1004 [답] ③

주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 첫째항이 4, 제9항이 324이므로

$$4r^8=324, r^8=81 \quad \therefore r=\sqrt{3} \quad (\because r>0)$$

따라서

$$a_1=4 \times \sqrt{3}, a_2=4 \times (\sqrt{3})^2, a_3=4 \times (\sqrt{3})^3, \dots, a_7=4 \times (\sqrt{3})^7$$

이므로

$$\begin{aligned} a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_7 &= 4^7 \times \{\sqrt{3} \times (\sqrt{3})^2 \times (\sqrt{3})^3 \times \dots \times (\sqrt{3})^7\} \\ &= 4^7 \times (\sqrt{3})^{1+2+3+\dots+7} \\ &= 2^{14} \times 3^{14} = 6^{14} \end{aligned}$$

$$\therefore k=14$$

1005 [답] 4

세 수 a , 6, b 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$12=a+b \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

세 수 2, a , b 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a^2=2b \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면

$$12=a+\frac{a^2}{2}, a^2+2a-24=0$$

$$(a+6)(a-4)=0 \quad \therefore a=4 \quad (\because a>0)$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$4+b=12 \quad \therefore b=8$$

$$\therefore 5a-2b=5 \times 4-2 \times 8=4$$

1006 [답] 2

세 양수 9a, $a+4$, a 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$(a+4)^2=9a \times a$$

$$a^2+8a+16=9a^2, a^2-a-2=0$$

$$(a+1)(a-2)=0 \quad \therefore a=2 \quad (\because a>0)$$

1007 [답] ②

세 수 a , 3, b 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$9=ab$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{\log_a 3} + \frac{1}{\log_b 3} &= \log_3 a + \log_3 b \\ &= \log_3 ab \\ &= \log_3 9 = 2 \end{aligned}$$

1008 답 ④

세 항 a_2, a_5, a_{14} 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$a_5^2 = a_2 a_{14}$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$(a+4d)^2 = (a+d)(a+13d)$$

$$a^2 + 8ad + 16d^2 = a^2 + 14ad + 13d^2$$

$$3d^2 - 6ad = 0, 3d(d-2a) = 0$$

이때 $d \neq 0$ 이므로 $d=2a$ ㉠

$$\therefore \frac{a_{23}}{a_3} = \frac{a+22d}{a+2d} = \frac{45a}{5a} (\because \text{㉠})$$

$$= 9$$

1009 답 2

$A(k, 2\sqrt{k}), B(k, \sqrt{k}), C(k, 0)$ 이므로

$$\overline{BC} = \sqrt{k}, \overline{OC} = k, \overline{AC} = 2\sqrt{k} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$\overline{BC}, \overline{OC}, \overline{AC}$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$k^2 = \sqrt{k} \times 2\sqrt{k}, k^2 = 2k$$

$$k^2 - 2k = 0, k(k-2) = 0 \quad \therefore k=2 (\because k>0) \quad \dots\dots \text{㉡}$$

채점 기준

㉠ $\overline{BC}, \overline{OC}, \overline{AC}$ 를 k 에 대한 식으로 나타내기	30 %
㉡ 양수 k 의 값 구하기	70 %

1010 답 정삼각형

세 변의 길이 a, b, c 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$b = \frac{a+c}{2} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또 $\sin A, \sin B, \sin C$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$\sin^2 B = \sin A \times \sin C$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면

사인법칙에 의하여

$$\left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \frac{a}{2R} \times \frac{c}{2R}$$

$$\therefore b^2 = ac \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = ac, a^2 + 2ac + c^2 = 4ac$$

$$(a-c)^2 = 0 \quad \therefore a=c$$

이를 ㉠에 대입하면 $b=c \quad \therefore a=b=c$

따라서 삼각형 ABC는 정삼각형이다.

1011 답 ①

삼차방정식의 세 실근을 a, ar, ar^2 이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = -p$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = -p \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a = -6 \text{에서}$$

$$a^2r + a^2r^3 + a^2r^2 = -6$$

$$\therefore a^2r(1+r+r^2) = -6 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$a \times ar \times ar^2 = -8 \text{에서}$$

$$a^3r^3 = -8, (ar)^3 = -8$$

$$\therefore ar = -2 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\text{㉡} \div \text{㉢} \text{을 하면 } ar = \frac{6}{p}$$

$$\text{따라서 ㉢에서 } \frac{6}{p} = -2 \quad \therefore p = -3$$

1012 답 27

세 실수를 a, ar, ar^2 이라 하면

$$a + ar + ar^2 = 21$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = 21 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a \times ar \times ar^2 = -729, a^3r^3 = -729, (ar)^3 = -729$$

$$\therefore ar = -9 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠ $\div$ ㉡을 하면

$$\frac{a(1+r+r^2)}{ar} = \frac{21}{-9} = -\frac{7}{3}$$

$$3(1+r+r^2) = -7r, 3r^2 + 3r + 3 = -7r$$

$$3r^2 + 10r + 3 = 0, (r+3)(3r+1) = 0$$

$$\therefore r = -3 \text{ 또는 } r = -\frac{1}{3}$$

이를 ㉡에 대입하여 풀면

$$r = -3 \text{일 때 } a=3, r = -\frac{1}{3} \text{일 때 } a=27$$

따라서 세 실수는 3, -9, 27이므로 가장 큰 수는 27이다.

1013 답 ②

두 곡선 $y=3x^3+5x-3, y=kx^2-8x$ 의 교점의 x 좌표는 방정식

$$3x^3+5x-3=kx^2-8x, \text{ 즉 } 3x^3-kx^2+13x-3=0 \text{의 세 실근이다.}$$

이 삼차방정식의 세 실근을 a, ar, ar^2 이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = \frac{k}{3}$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = \frac{k}{3} \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a = \frac{13}{3}$$

$$\therefore a^2r(1+r+r^2) = \frac{13}{3} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$a \times ar \times ar^2 = 1 \text{에서 } (ar)^3 = 1 \quad \therefore ar = 1 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\text{㉡} \div \text{㉢} \text{을 하면 } ar = \frac{13}{k}$$

$$\text{㉢에서 } \frac{13}{k} = 1 \quad \therefore k = 13$$

1014 답 64

직육면체의 가로 길, 세로 길, 높이를 각각 a, ar, ar^2 이라 하면 모든 모서리의 길이의 합은 56이므로

$$4(a+ar+ar^2) = 56$$

$$\therefore a(1+r+r^2) = 14 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

또 겹넓이가 112이므로

$$2(a \times ar + ar \times ar^2 + a \times ar^2) = 112$$

$$\therefore a^2r(1+r+r^2) = 56 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉡} \div \text{㉠} \text{을 하면 } ar = 4$$

따라서 직육면체의 부피는

$$a \times ar \times ar^2 = (ar)^3 = 4^3 = 64$$

1015 [답] 46

한 변의 길이가 9인 정사각형의 넓이는 $9 \times 9 = 81$ 이고
첫 번째 시행 후 남은 도형의 넓이는

$$81 \times \frac{8}{9}$$

두 번째 시행 후 남은 도형의 넓이는

$$81 \times \left(\frac{8}{9}\right)^2$$

⋮

n 번째 시행 후 남은 도형의 넓이는

$$81 \times \left(\frac{8}{9}\right)^n$$

따라서 10번째 시행 후 남은 도형의 넓이는

$$81 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{10} = \frac{8^{10}}{9^8} = \frac{2^{30}}{3^{16}}$$

따라서 $p=16$, $q=30$ 이므로 $p+q=46$

1016 [답] ④

박테리아의 수가 일정하게 증가하는 비율을 $r(r>0)$ 라 하면
현재 a 만 마리인 박테리아가 10시간 후에는 6만 마리, 20시간 후에는
9만 마리가 되므로

$$a(1+r)^{10}=6 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a(1+r)^{20}=9 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠} \text{을 하면 } (1+r)^{10} = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{㉠} \text{에서 } \frac{3}{2}a=6 \quad \therefore a=4$$

1017 [답] ③

첫 번째 튀어 올랐을 때의 높이는 $27 \times \frac{2}{3}$ (m)

두 번째 튀어 올랐을 때의 높이는 $27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2$ (m)

세 번째 튀어 올랐을 때의 높이는 $27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$ (m)

⋮

n 번째 튀어 올랐을 때의 높이는 $27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ (m)

따라서 6번째 튀어 올랐을 때의 높이는 $27 \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{2^6}{3^3}$ (m)

1018 [답] ③

직선 OA_n 의 기울기를 a_n 이라 하면

$$a_1 = \frac{3}{5}$$

$$a_2 = \frac{3}{5} \times \frac{5}{3}$$

$$a_3 = \frac{3}{5} \times \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

⋮

$$a_n = \frac{3}{5} \times \left(\frac{5}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{n-2}$$

이때 $a_n = \frac{1}{\overline{OB_n}}$ 이므로 $\overline{OB_n} = \frac{1}{a_n} = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-2}$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^6 \text{에서 } n-2=6 \quad \therefore n=8$$

따라서 구하는 선분은 $\overline{OB_8}$ 이다.

1019 [답] -129

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_3 = -12$,

$a_7 = -192$ 이므로

$$ar^2 = -12 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$ar^6 = -192 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠} \text{을 하면 } r^4 = 16 \quad \therefore r = -2 \quad (\because r < 0)$$

$$\text{이를 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } 4a = -12 \quad \therefore a = -3$$

따라서 첫째항부터 제7항까지의 합은

$$\frac{-3\{1-(-2)^7\}}{1-(-2)} = -129$$

1020 [답] ②

주어진 등비수열은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{6}{2}=3$ 이므로

$$S_n = \frac{2(3^n-1)}{3-1} = 3^n - 1$$

$$S_k = 728 \text{에서 } 3^k - 1 = 728$$

$$3^k = 729 = 3^6 \quad \therefore k=6$$

1021 [답] 64

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r(r \neq 1)$ 라 하면

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{1-r^6}{1-r}}{\frac{1-r^3}{1-r}} = \frac{1-r^6}{1-r^3} = \frac{(1-r^3)(1+r^3)}{1-r^3} = 1+r^3$$

$$2a_4 - 7 = 2r^3 - 7$$

$$\text{즉, } 1+r^3 = 2r^3 - 7 \text{이므로}$$

$$r^3 = 8 \quad \therefore r = 2$$

$$\therefore a_7 = 2^6 = 64$$

1022 [답] ④

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_4 = 1$, $a_8 = 5$ 이므로

$$a + 3d = 1, a + 7d = 5$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -2, d = 1$$

$$\therefore a_n = -2 + (n-1) \times 1 = n-3$$

$$\therefore 5^{a_n} = 5^{n-3} = \frac{1}{25} \times 5^{n-1}$$

따라서 수열 $\{5^{a_n}\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{25}$, 공비가 5인 등비수열이므로

첫째항부터 제20항까지의 합은

$$\frac{\frac{1}{25}(5^{20}-1)}{5-1} = \frac{1}{100}(5^{20}-1)$$

1023 [답] ③

$a_n = (-3)^{n-1}$ 이므로 수열 $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$, $a_3 + a_4$, ...의 일반항은

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+1} &= (-3)^{n-1} + (-3)^n \\ &= (-3)^{n-1}\{1+(-3)\} \\ &= -2 \times (-3)^{n-1} \end{aligned}$$

따라서 첫째항이 -2, 공비가 -3인 등비수열이므로 첫째항부터

제10항까지의 합은

$$\frac{-2\{1-(-3)^{10}\}}{1-(-3)} = -\frac{1}{2}(1-3^{10}) = \frac{1}{2}(3^{10}-1)$$

1024 답 11

등비수열 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$ 이므로

$$S_n = \frac{1 \times \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \quad \dots \textcircled{i}$$

$|S_n - 2| < 0.001$ 에서

$$\left| \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) - 2 \right| < 0.001$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} < 0.001, \quad 2^{n-1} > 1000$$

이때 $2^9 = 512, 2^{10} = 1024$ 이므로

$$n-1 \geq 10 \quad \therefore n \geq 11 \quad \dots \textcircled{ii}$$

$$\text{따라서 자연수 } n \text{의 최솟값은 } 11 \text{이다.} \quad \dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① S_n 구하기	40 %
② n 의 값의 범위 구하기	40 %
③ 자연수 n 의 최솟값 구하기	20 %

1025 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 첫째항이 1이므로

$$r^4 = 16 \quad \therefore r = 2 \quad (\because r > 0)$$

$$S_n = \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$$

$$S_n > 10^6 \text{에서 } 2^n - 1 > 10^6$$

$$\therefore 2^n > 10^6 + 1$$

즉, $2^n > 10^6$ 이므로 양변에 상용로그를 취하면

$$\log 2^n > \log 10^6, \quad n \log 2 > 6$$

$$\therefore n > \frac{6}{\log 2} = \frac{6}{0.301} = 19.9 \dots$$

따라서 첫째항부터 제20항까지의 합이 처음으로 10^6 보다 크게 된다.

$$\therefore n = 20$$

1026 답 $\frac{95}{3}$

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 $r(r \neq 1)$ 라 하면 $S_3 = 15$,

$S_6 = 25$ 이므로

$$\frac{a(1-r^3)}{1-r} = 15 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a(1-r^6)}{1-r} = 25$$

$$\therefore \frac{a(1-r^3)(1+r^3)}{1-r} = 25 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } 15(1+r^3) = 25$$

$$1+r^3 = \frac{5}{3} \quad \therefore r^3 = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore S_9 &= \frac{a(1-r^9)}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^3)(1+r^3+r^6)}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^3)}{1-r} \times (1+r^3+r^6) \\ &= 15 \times \left\{ 1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{95}{3} \end{aligned}$$

1027 답 -128

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 $r(r \neq 1)$ 라 하면 $S_4 = -5$,

$S_8 = -85$ 이므로

$$\frac{a(1-r^4)}{1-r} = -5 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\frac{a(1-r^8)}{1-r} = -85$$

$$\therefore \frac{a(1-r^4)(1+r^4)}{1-r} = -85 \quad \dots \textcircled{2} \quad \dots \textcircled{i}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } -5(1+r^4) = -85$$

$$1+r^4 = 17, \quad r^4 = 16 \quad \therefore r = -2 \quad (\because r < 0)$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$\frac{a\{1-(-2)^4\}}{1-(-2)} = -5, \quad -5a = -5$$

$$\therefore a = 1 \quad \dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore a_8 = 1 \times (-2)^7 = -128 \quad \dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① S_4, S_8 을 a, r 에 대한 식으로 나타내기	30 %
② a, r 의 값 구하기	50 %
③ a_8 구하기	20 %

1028 답 ①

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 $r(r \neq 1)$ 라 하면 수열 $a_1, a_3,$

a_5, a_7 의 공비는 r^2 이므로

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 17 \text{에서 } \frac{a\{1-(r^2)^4\}}{1-r^2} = 17$$

$$\therefore \frac{a(1-r^8)}{(1-r)(1+r)} = 17 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = -34 \text{에서 } \frac{a(1-r^8)}{1-r} = -34 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } \frac{-34}{1+r} = 17$$

$$1+r = -2 \quad \therefore r = -3$$

1029 답 -64

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면 첫째항이 2이므로 $r=1$ 이면 모든

자연수 n 에 대하여 $a_n = 2$

그런데 $r=1$ 이면

$$S_{10} - S_8 = a_9 + a_{10} = 4 > 0$$

이므로 ㉞를 만족시키지 않는다.

$$\therefore r \neq 1$$

㉞에서

$$\frac{2(1-r^{10})}{1-r} - \frac{2(1-r^2)}{1-r} = 4 \times \frac{2(1-r^8)}{1-r}$$

$$-r^{10} + r^2 = 4(1-r^8)$$

$$r^2(1-r^8) = 4(1-r^8)$$

그런데 $r \neq 1$ 이므로 $r = -1$ 또는 $r^2 = 4$

$$\therefore r = -2 \text{ 또는 } r = -1 \text{ 또는 } r = 2$$

이때 ㉞에서

$$S_{10} - S_8 = a_9 + a_{10} = 2r^8 + 2r^9 = 2r^8(1+r) < 0$$

이므로

$$r < -1 \quad \therefore r = -2$$

$$\therefore a_6 = 2 \times (-2)^5 = -64$$

1030 [답] ④ $4\pi \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \right\}$

$$a_1 = \pi \times 2 = 2\pi$$

$$a_2 = \pi \times 2 \times \frac{1}{2} = 2\pi \times \frac{1}{2}$$

$$a_3 = \pi \times 2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 2\pi \times \left(\frac{1}{2} \right)^2$$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2π , 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{10} = \frac{2\pi \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 4\pi \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{10} \right\}$$

1031 [답] ②

(나)에서 네 번째 줄의 네 번째 칸에 들어갈 수는

$$4 \times 2 = 8$$

(㉞)에서 네 번째 줄에 있는 수들은 왼쪽 칸부터 차례로 공비가 2인 등비수열을 이루므로 첫째항을 a 라 하면 제4항이 8이므로

$$a \times 2^3 = 8$$

$$\therefore a = 1$$

따라서 네 번째 줄에 있는 모든 수의 합은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열의 첫째항부터 제7항까지의 합과 같으므로

$$\frac{1 \times (2^7 - 1)}{2 - 1} = 127$$

1032 [답] ⑤

전날 이동한 거리의 10%씩 늘려서 이동하므로 일주일 동안 이동하는 거리는

$$5 + 5 \times (1 + 0.1) + 5 \times (1 + 0.1)^2 + \cdots + 5 \times (1 + 0.1)^6$$

$$= \frac{5 \{ (1 + 0.1)^7 - 1 \}}{(1 + 0.1) - 1}$$

$$= \frac{5(1.9 - 1)}{0.1}$$

$$= 45(\text{km})$$

1033 [답] $\frac{16}{9}$ 배

2008년의 신규 가입자의 수를 a , 매년 증가하는 신규 가입자의 수의 비율을 r ($r \neq 1$)라 하면 n 년 후의 신규 가입자의 수는 ar^n

2008년부터 2015년까지 8년 동안의 신규 가입자의 수가 12만이므로

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^7 = 120000$$

$$\therefore \frac{a(1 - r^8)}{1 - r} = 120000 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

2016년부터 2023년까지 8년 동안의 신규 가입자의 수가 16만이므로

$$ar^8 + ar^9 + ar^{10} + \cdots + ar^{15} = 160000$$

$$\therefore \frac{ar^8(1 - r^8)}{1 - r} = 160000 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } 120000r^8 = 160000$$

$$\therefore r^8 = \frac{4}{3}$$

$$\text{따라서 2024년의 신규 가입자의 수는 } ar^{16} = a(r^8)^2 = \frac{16}{9}a \text{이므로}$$

2008년의 신규 가입자의 수의 $\frac{16}{9}$ 배이다.

1034 [답] ④

$$S_n = 3^n - 1 \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (3^n - 1) - (3^{n-1} - 1)$$

$$= 3^{n-1} \times (3 - 1)$$

$$= 2 \times 3^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{2}$ 이 같으므로

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

$$\therefore \frac{a_6 + a_7}{a_1 + a_2} = \frac{2 \times 3^5 + 2 \times 3^6}{2 + 2 \times 3} = \frac{2 \times 3^5 \times (1 + 3)}{2 \times (1 + 3)} = 3^5 = 243$$

1035 [답] ⑤

$$S_n = 7 \times 3^n - 7 \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (7 \times 3^n - 7) - (7 \times 3^{n-1} - 7)$$

$$= 7 \times 3^{n-1} \times (3 - 1)$$

$$= 14 \times 3^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 7 \times 3^1 - 7 = 14 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{2}$ 이 같으므로

$$a_n = 14 \times 3^{n-1}$$

따라서 $p = 14$, $q = 3$ 이므로

$$p - q = 11$$

1036 [답] ①

$$S_n = 6 \times 8^n + k \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (6 \times 8^n + k) - (6 \times 8^{n-1} + k)$$

$$= 6 \times 8^{n-1} \times (8 - 1) = 42 \times 8^{n-1} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 6 \times 8^1 + k = 48 + k \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항부터 등비수열을 이루려면 $\textcircled{1}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{2}$ 이 같아야 하므로

$$42 = 48 + k \quad \therefore k = -6$$

1037 [답] 6

$$S_n = 3^{n+1} - 3 \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = (3^{n+1} - 3) - (3^n - 3)$$

$$= 3^n \times (3 - 1) = 2 \times 3^n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3^2 - 3 = 6 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{2}$ 이 같으므로 $a_n = 2 \times 3^n$

$$2 \times 3^n > 1000 \text{에서 } 3^n > 500$$

$$\text{이때 } 3^5 = 243, 3^6 = 729 \text{이므로}$$

$$n \geq 6$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

1038 [답] 30

$\log_3 a_1 + \log_3 a_2 + \log_3 a_3 + \cdots + \log_3 a_n = S_n$ 이라 하면

$$S_n = \frac{n^2 - n}{2} \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} \log_3 a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{n^2 - n}{2} - \frac{(n-1)^2 - (n-1)}{2} \\ &= \frac{2n-2}{2} = n-1 \quad \cdots \cdots \text{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$\log_3 a_1 = S_1 = \frac{1^2 - 1}{2} = 0 \quad \cdots \cdots \text{㉡}$$

이때 ㉠에 $n=1$ 을 대입한 값과 ㉡이 같으므로

$$\log_3 a_n = n-1 \quad \therefore a_n = 3^{n-1}$$

$$\therefore a_2 + a_4 = 3 + 3^3 = 30$$

1039 [답] 1620만 원

연이율이 8%이고, 1년마다 복리로 매년 초에 100만 원씩 10년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} &100(1+0.08) + 100(1+0.08)^2 + \cdots + 100(1+0.08)^{10} \\ &= \frac{100(1+0.08)\{(1+0.08)^{10} - 1\}}{(1+0.08) - 1} \\ &= \frac{100 \times 1.08 \times (2.2 - 1)}{0.08} = 1620(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 10년째 말의 적립금의 원리합계는 1620만 원이다.

1040 [답] ③

연이율이 5%이고, 1년마다 복리로 매년 말에 10만 원씩 10년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} &10 + 10(1+0.05) + \cdots + 10(1+0.05)^9 \\ &= \frac{10\{(1+0.05)^{10} - 1\}}{(1+0.05) - 1} = \frac{10(1.63 - 1)}{0.05} = 126(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 10년째 말의 적립금의 원리합계는 126만 원이다.

1041 [답] ②

월 이율이 0.4%이고, 1개월마다 복리로 매월 초에 20만 원씩 3년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} &20(1+0.004) + 20(1+0.004)^2 + \cdots + 20(1+0.004)^{36} \\ &= \frac{20(1+0.004)\{(1+0.004)^{36} - 1\}}{(1+0.004) - 1} \\ &= \frac{20 \times 1.004 \times (1.15 - 1)}{0.004} = 753(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 3년째 말의 적립금의 원리합계는 753만 원이다.

1042 [답] 50

연이율이 4%이고, 1년마다 복리로 매년 초에 a 만 원씩 10년 동안 적립할 때, 적립금의 원리합계는

$$\begin{aligned} &a(1+0.04) + a(1+0.04)^2 + \cdots + a(1+0.04)^{10} \\ &= \frac{a(1+0.04)\{(1+0.04)^{10} - 1\}}{(1+0.04) - 1} \\ &= \frac{a \times 1.04 \times (1.5 - 1)}{0.04} = 13a(\text{만 원}) \end{aligned}$$

따라서 $13a = 650$ 이므로 $a = 50$

AB 유형 점검

160~162쪽

1043 [답] -158

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_{13} = -58$,

$$a_{21} = -98 \text{이므로}$$

$$a + 12d = -58, \quad a + 20d = -98$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = 2, \quad d = -5$$

$$\therefore a_{33} = 2 + 32 \times (-5) = -158$$

1044 [답] ②

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_1 = a_3 + 8 \text{에서}$$

$$a_1 = (a_1 + 2d) + 8$$

$$2d = -8 \quad \therefore d = -4$$

$$2a_4 - 3a_6 = 3 \text{에서 } 2(a_1 + 3d) - 3(a_1 + 5d) = 3$$

$$\therefore a_1 + 9d = -3 \quad \cdots \cdots \text{㉠}$$

$d = -4$ 를 ㉠에 대입하면

$$a_1 - 36 = -3 \quad \therefore a_1 = 33$$

$$\therefore a_n = 33 + (n-1) \times (-4) = -4n + 37$$

$$a_k < 0 \text{에서 } -4k + 37 < 0$$

$$\therefore k > \frac{37}{4} = 9.25$$

따라서 자연수 k 의 최솟값은 10이다.

1045 [답] ③

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 $a-d$, a , $a+d$ 라 하면 모든 모서리의 길이의 합은 36이므로

$$4 \times \{(a-d) + a + (a+d)\} = 36$$

$$12a = 36 \quad \therefore a = 3$$

또 부피가 24이므로

$$(a-d) \times a \times (a+d) = 24$$

$$a(a^2 - d^2) = 24$$

$a = 3$ 을 대입하면

$$3(9 - d^2) = 24$$

$$9 - d^2 = 8$$

$$d^2 = 1 \quad \therefore d = -1 \text{ 또는 } d = 1$$

따라서 가로, 세로, 높이는 각각 2, 3, 4이므로 구하는 겉넓이는

$$2(2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 2) = 52$$

1046 [답] 75

주어진 등차수열의 일반항을 a_n 이라 하면 첫째항이 26, 공차가

$$23 - 26 = -3 \text{이므로}$$

$$a_n = 26 + (n-1) \times (-3) = -3n + 29$$

-16을 제 k 항이라 하면

$$-3k + 29 = -16 \quad \therefore k = 15$$

따라서 첫째항부터 제15항까지의 합은

$$\frac{15\{26 + (-16)\}}{2} = 75$$

1047 답 86

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 첫째항이 5, 제 $(m+2)$ 항이 38
이므로

$$5 + \{(m+2)-1\}d = 38 \quad \therefore m = \frac{33}{d} - 1$$

이때 m 은 자연수이므로 d 는 33을 제외한 33의 약수이어야 한다.

따라서 가능한 순서쌍 (d, m) 은

$$(11, 2), (3, 10), (1, 32)$$

한편 첫째항이 5, 끝항이 38, 항수가 $(m+2)$ 인 등차수열의 합은

$$\frac{(m+2)(5+38)}{2} = \frac{43}{2}(m+2)$$

따라서 $m=2$ 일 때 최소가 되므로 구하는 최솟값은

$$\frac{43}{2} \times 4 = 86$$

1048 답 145

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_{10} = \frac{10\{2a + (10-1)d\}}{2} = -80$$

$$\therefore 2a + 9d = -16 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_{20} = \frac{20\{2a + (20-1)d\}}{2} = 40$$

$$\therefore 2a + 19d = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면

$$a = -17, d = 2$$

$$\therefore a_n = -17 + (n-1) \times 2 = 2n - 19$$

$$2n - 19 > 0 \text{에서}$$

$$n > \frac{19}{2} = 9.5$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제9항까지는 음수이고, 제10항부터 양수이다.

$$\text{이때 } a_9 = -1, a_{10} = 1, a_{17} = 15 \text{이므로}$$

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_{17}|$$

$$= -(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_9) + (a_{10} + a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{17})$$

$$= -\frac{9\{-17 + (-1)\}}{2} + \frac{8(1 + 15)}{2}$$

$$= 81 + 64$$

$$= 145$$

1049 답 13

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_2 = 35 \text{에서 } a + d = 35 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_7 = a_5 - 6 \text{에서}$$

$$a + 6d = a + 4d - 6, 2d = -6$$

$$\therefore d = -3$$

이를 $\textcircled{㉠}$ 에 대입하여 풀면 $a = 38$

$$\therefore a_n = 38 + (n-1) \times (-3) = -3n + 41$$

$$-3n + 41 < 0 \text{에서}$$

$$n > \frac{41}{3} = 13.6\cdots$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 제14항부터 음수이므로 첫째항부터 제13항까지의 합이 최대이다.

$$\therefore n = 13$$

1050 답 155

탑의 각 층의 벽돌의 개수는 한 층씩 위로 올라갈수록 일정한 개수만큼 줄어들므로 등차수열을 이룬다.

10층의 벽돌의 개수부터 한 층씩 내려가면서 차례로 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$ 이라 하고 전체 벽돌의 개수를 S_{10} , 공차를 d 라 하면 $a_1 = 2$ 이고

$$S_{10} = 7a_7 + 15 \text{이므로}$$

$$\frac{10\{2 \times 2 + (10-1)d\}}{2} = 7(2 + 6d) + 15$$

$$20 + 45d = 14 + 42d + 15, 3d = 9$$

$$\therefore d = 3$$

따라서 필요한 전체 벽돌의 개수는

$$\frac{10\{2 \times 2 + (10-1) \times 3\}}{2} = 155$$

1051 답 ③

$$S_n = 2n^2 + 9n \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 + 9n - \{2(n-1)^2 + 9(n-1)\} \\ &= 4n + 7 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 + 9 \times 1 = 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

이때 $\textcircled{㉠}$ 에 $n = 1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{㉡}$ 이 같으므로

$$a_n = 4n + 7 = 4(n-1) + 11$$

따라서 $a = 11, d = 4$ 이므로

$$a - d = 7$$

1052 답 -3

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\begin{aligned} \frac{a_3 + a_5 + a_7}{a_1 + a_3 + a_5} &= \frac{a_1 r^2 + a_1 r^4 + a_1 r^6}{a_1 + a_1 r^2 + a_1 r^4} \\ &= \frac{a_1 r^2 (1 + r^2 + r^4)}{a_1 (1 + r^2 + r^4)} = r^2 \end{aligned}$$

$$\text{즉, } r^2 = 9 \text{이므로}$$

$$r = -3 \quad (\because r < 0)$$

1053 답 55

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항이 5, 공비가 2이므로

$$a_n = 5 \times 2^{n-1}$$

$$5 \times 2^{n-1} < 5000 \text{에서 } 2^{n-1} < 1000$$

$$\text{이때 } 2^9 = 512, 2^{10} = 1024 \text{이므로}$$

$$n-1 \leq 9 \quad \therefore n \leq 10$$

따라서 자연수 n 의 값은 1, 2, 3, ..., 10이므로 구하는 합은

$$\frac{10(1+10)}{2} = 55$$

1054 답 90

주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 첫째항이 3, 제7항이 30이므로

$$3r^6 = 30 \quad \therefore r^6 = 10$$

$$\text{따라서 } a_1 = 3r, a_5 = 3r^5 \text{이므로}$$

$$a_1 a_5 = 3r \times 3r^5 = 9r^6 = 9 \times 10 = 90$$

1055 답 ①

세 정수 $x, 2y, 10$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$4y = x + 10 \quad \dots\dots ㉠$$

세 정수 $4, x, 13-y$ 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$x^2 = 4(13-y) \quad \therefore x^2 = 52 - 4y \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$x^2 = 52 - (x+10), x^2 + x - 42 = 0$$

$$(x+7)(x-6) = 0 \quad \therefore x = -7 \text{ 또는 } x = 6$$

이를 ㉠에 대입하여 풀면 $x = -7$ 일 때 $y = \frac{3}{4}$, $x = 6$ 일 때 $y = 4$

그런데 x, y 는 정수이므로 $x = 6, y = 4$

따라서 등차수열 $6, 8, 10$ 의 공차는 2 , 등비수열 $4, 6, 9$ 의 공비는

$$\frac{3}{2} \text{이므로 } d = 2, r = \frac{3}{2}$$

$$\therefore dr = 3$$

1056 답 ②

오른쪽 그림에서 $\triangle ADE$ 와 $\triangle ABC$ 는

닮음이므로 $\overline{AD} : \overline{DE} = \overline{AB} : \overline{BC}$

$$(1-a_1) : a_1 = 1 : 2, 2-2a_1 = a_1$$

$$\therefore a_1 = \frac{2}{3}$$

$\triangle EFG$ 와 $\triangle ABC$ 는 닮음이므로

$$\overline{EF} : \overline{FG} = \overline{AB} : \overline{BC}$$

$$(a_1-a_2) : a_2 = 1 : 2, 2a_1-2a_2 = a_2$$

$$\therefore a_2 = \frac{2}{3}a_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

$\triangle GHI$ 와 $\triangle ABC$ 는 닮음이므로

$$\overline{GH} : \overline{HI} = \overline{AB} : \overline{BC}$$

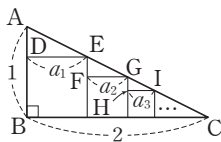
$$(a_2-a_3) : a_3 = 1 : 2, 2a_2-2a_3 = a_3$$

$$\therefore a_3 = \frac{2}{3}a_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{2}{3}$, 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \therefore a_6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$



1057 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

$$\text{ㄱ. } a_n + S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1 \times \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 2$$

$$\text{ㄴ. } \log_3 b_n = \log_3 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \log_3 3^{1-n} = 1-n = -(n-1)$$

따라서 수열 $\{\log_3 b_n\}$ 은 첫째항이 0 , 공차가 -1 인 등차수열이다.

$$\text{ㄷ. } a_n b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_n b_n\}$ 은 첫째항이 1 , 공비가 $\frac{1}{6}$ 인 등비수열이다.

$$\begin{aligned} \text{ㄹ. } b_{n+1} - b_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3} - 1\right) \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \\ &= -\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

따라서 수열 $\{b_{n+1} - b_n\}$ 은 첫째항이 $-\frac{2}{3}$, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

1058 답 896

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하면 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 에 대하여

$$S_4 = 14 \text{에서 } \frac{a(1-r^4)}{1-r} = 14 \quad \dots\dots ㉠$$

$$S_8 = 14 + 112 = 126 \text{에서 } \frac{a(1-r^8)}{1-r} = 126$$

$$\therefore \frac{a(1-r^4)(1+r^4)}{1-r} = 126 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면 $14(1+r^4) = 126$

$$1+r^4 = 9 \quad \therefore r^4 = 8$$

$$\therefore S_{12} = \frac{a(1-r^{12})}{1-r} = \frac{a(1-r^4)(1+r^4+r^8)}{1-r}$$

$$= \frac{a(1-r^4)}{1-r} \times (1+r^4+r^8)$$

$$= 14 \times (1+8+64) = 1022$$

$$\therefore a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = S_{12} - S_8 = 1022 - 126 = 896$$

1059 답 $\frac{37+14\sqrt{3}}{16}$

$\angle XOY = 30^\circ$ 이므로

$$\overline{P_1 P_2} = \overline{OP_1} \sin 30^\circ = 2 \times \frac{1}{2} = 1$$

$\angle OP_1 P_2 = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{P_2 P_3} = \overline{P_1 P_2} \sin 60^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle P_3 P_2 P_4 = 60^\circ$ 이므로

$$\overline{P_3 P_4} = \overline{P_2 P_3} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{\overline{P_n P_{n+1}}\}$ 은 첫째항이 1 , 공비가 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 인 등비수열이므로

$$\overline{P_1 P_2} + \overline{P_2 P_3} + \overline{P_3 P_4} + \overline{P_4 P_5} + \overline{P_5 P_6} = \frac{1 \times \left\{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5\right\}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{37+14\sqrt{3}}{16}$$

1060 답 ⑤

ㄱ. $S_n = 2^n - 1$ 에서

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) \\ &= 2^{n-1} \times (2 - 1) \\ &= 2^{n-1} \quad \dots\dots ㉠ \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1 \quad \dots\dots ㉡$$

이때 ㉠에 $n = 1$ 을 대입한 값과 ㉡이 같으므로 $a_n = 2^{n-1}$

$$\begin{aligned} \text{ㄴ. } a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 &= 1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 + 2^8 \\ &= \frac{1 \times \{(2^2)^5 - 1\}}{2^2 - 1} \\ &= \frac{1}{3}(2^{10} - 1) = 341 \end{aligned}$$

$$\text{ㄷ. 수열 } \{a_{2n}\}: a_2, a_4, a_6, \dots \text{의 공비는 } \frac{a_4}{a_2} = \frac{2^3}{2} = 2^2 = 4$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

1061 답 4

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 18, 공차가 $16 - 18 = -2$ 인 등차수열이므로

$$a_n = 18 + (n-1) \times (-2) = -2n + 20$$

수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 12, 공차가 $9 - 12 = -3$ 인 등차수열이므로

$$b_n = 12 + (n-1) \times (-3) = -3n + 15 \quad \dots \textcircled{i}$$

$$a_n \leq 4b_n \text{에서 } -2n + 20 \leq 4(-3n + 15)$$

$$-2n + 20 \leq -12n + 60 \quad \therefore n \leq 4 \quad \dots \textcircled{ii}$$

따라서 자연수 n 은 1, 2, 3, 4의 4개이다. \dots \textcircled{iii}

채점 기준

① 일반항 a_n, b_n 구하기	40 %
② n 의 값의 범위 구하기	40 %
③ 자연수 n 의 개수 구하기	20 %

1062 답 580

3으로 나누었을 때의 나머지가 1인 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \dots \quad \dots \textcircled{㉠}$$

또 4로 나누어떨어지는 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$4, 8, 12, 16, 20, \dots \quad \dots \textcircled{㉡}$$

\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}에서 공통인 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$4, 16, 28, \dots \quad \dots \textcircled{i}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 4, 공차가 $16 - 4 = 12$ 인 등차수열이므로 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\frac{10\{2 \times 4 + (10-1) \times 12\}}{2} = 580 \quad \dots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① 수열 $\{a_n\}$ 구하기	70 %
② 첫째항부터 제10항까지의 합 구하기	30 %

1063 답 1.025배

예린이와 서연이의 적립금의 원리합계를 각각 S, T 라 하면

$$\begin{aligned} S &= 5(1+0.01) + 5(1+0.01)^2 + \dots + 5(1+0.01)^{10} \\ &= \frac{5(1+0.01)\{(1+0.01)^{10}-1\}}{(1+0.01)-1} = \frac{5 \times 1.01 \times (1.01^{10}-1)}{0.01} \\ &= 505(1.01^{10}-1) \text{(만 원)} \quad \dots \textcircled{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= 10(1+0.01) + 10(1+0.01)^2 + \dots + 10(1+0.01)^5 \\ &= \frac{10(1+0.01)\{(1+0.01)^5-1\}}{(1+0.01)-1} = \frac{10 \times 1.01 \times (1.01^5-1)}{0.01} \\ &= 1010(1.01^5-1) \text{(만 원)} \quad \dots \textcircled{ii} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{S}{T} &= \frac{505(1.01^{10}-1)}{1010(1.01^5-1)} = \frac{505(1.01^5-1)(1.01^5+1)}{1010(1.01^5-1)} \\ &= \frac{1.01^5+1}{2} = \frac{1.05+1}{2} = 1.025 \end{aligned}$$

따라서 예린이가 받는 금액은 서연이가 받는 금액의 1.025배이다.

\dots \textcircled{iii}

채점 기준

① 예린이가 10년 후 연말에 받는 금액 구하기	40 %
② 서연이가 5년 후 연말에 받는 금액 구하기	40 %
③ 예린이가 받는 금액은 서연이가 받는 금액의 몇 배인지 구하기	20 %

C 실력 향상

163쪽

1064 답 250

(㉠)에서 $S_5 = S_{15}$ 이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15}$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{15} = 0$$

$$\frac{10(a_6 + a_{15})}{2} = 0 \quad \text{첫째항이 } a_6, \text{ 끝항이 } a_{15}, \text{ 항수가 10인 등차수열의 합}$$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_6 + a_{15} = 0$ 이므로

$$(a+5d) + (a+14d) = 0$$

$$2a + 19d = 0 \quad \therefore a = -\frac{19}{2}d \quad \dots \textcircled{㉡}$$

$$\therefore a_n = -\frac{19}{2}d + (n-1)d = \left(n - \frac{21}{2}\right)d$$

즉, $d < 0$ 이므로 등차수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항부터 제10항까지는 양수이고 제11항부터는 음수이다.

따라서 S_n 의 최댓값은 S_{10} 이므로 (㉠)에서

$$S_{10} = \frac{10(2a+9d)}{2} = 200$$

$$10a + 45d = 200 \quad \therefore 2a + 9d = 40 \quad \dots \textcircled{㉢}$$

\textcircled{㉡}, \textcircled{㉢}을 연립하여 풀면 $a = 38, d = -4$

$$\therefore a_n = -4n + 42$$

$$\begin{aligned} \therefore T_{15} &= |a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_{15}| \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10} - (a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{15}) \\ &= S_{10} - (a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{15}) \\ &= S_{10} - \frac{5(a_{11} + a_{15})}{2} \\ &= 200 - \frac{5(-2-18)}{2} \\ &= 250 \end{aligned}$$

1065 답 16

네 수 a, b, c, d 를 각각 a, ar, ar^2, ar^3 이라 하면

(㉠)에서 $\log_2 a - \log_2 ar^2 = 2$ 이므로

$$\log_2 \frac{a}{ar^2} = 2, \log_2 \frac{1}{r^2} = 2$$

$$\frac{1}{r^2} = 4 \quad \therefore r = \frac{1}{2} \quad (\because r > 0)$$

(㉡)에서 $2^a \times 2^b \times 2^c \times 2^d = 2^{15}$ 이므로

$$2^{a+b+c+d} = 2^{15} \quad \therefore a+b+c+d = 15$$

즉, $a + ar + ar^2 + ar^3 = 15$ 이므로 $a\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 15$

$$\frac{15}{8}a = 15 \quad \therefore a = 8$$

따라서 $b=8 \times \frac{1}{2}=4$, $c=4 \times \frac{1}{2}=2$, $d=2 \times \frac{1}{2}=1$ 이므로
 $ad+bc=8 \times 1+4 \times 2=16$

1066 답 ②

기울기가 2이고 원 $x^2+y^2=\frac{1}{2^n}$ 과 제2사분면에서 접하는 직선 l_n 의
 방정식을 $y=2x+k$ ($k>0$)라 하면 원의 중심 (0, 0)과 직선
 $2x-y+k=0$ 사이의 거리는 원의 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{\frac{1}{2^n}} \quad \therefore k=\sqrt{\frac{5}{2^n}} \quad (\because k>0)$$

즉, 직선 l_n 의 방정식은 $y=2x+\sqrt{\frac{5}{2^n}}$

이때 직선 l_n 의 x 절편이 a_n , y 절편이 b_n 이므로

$$a_n=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2^n}}, b_n=\sqrt{\frac{5}{2^n}}$$

$$\therefore a_nb_n=-\frac{1}{2} \times \frac{5}{2^n}=-\frac{5}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

따라서 수열 $\{a_nb_n\}$ 은 첫째항이 $-\frac{5}{4}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

$$\begin{aligned} a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_{15}b_{15} &= \frac{-\frac{5}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{15}\right\}}{1-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2^{15}}-1\right) \end{aligned}$$

공통수학2 다시보기

원점과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

1067 답 ③

첫째 해의 연봉은 a 원

2년째 해의 연봉은 $a+a \times 0.06=a(1+0.06)$ (원)

3년째 해의 연봉은

$$a(1+0.06)+a(1+0.06) \times 0.06=a(1+0.06)^2(\text{원})$$

⋮

20년째 해의 연봉은 $a(1+0.06)^{19}$ (원)

즉, 입사 후 20년째 해까지의 연봉의 합은

$$a+a(1+0.06)+a(1+0.06)^2+\cdots+a(1+0.06)^{19}$$

$$= \frac{a(1.06^{20}-1)}{1.06-1}$$

$$= \frac{a(3 \times 1.06-1)}{0.06}$$

$$= \frac{109}{3}a(\text{원}) \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

한편 21년째 해의 연봉은 $a(1+0.06)^{19} \times \frac{2}{3}$ (원)이므로 21년째 해부터
 30년째 해까지 10년 동안의 연봉의 합은

$$a(1+0.06)^{19} \times \frac{2}{3} \times 10=20a(\text{원}) \quad \cdots \cdots \textcircled{8}$$

따라서 30년 동안 근무하여 받는 연봉의 총합은 ⑦, ⑧의 합과 같으므로

$$\frac{109}{3}a+20a=\frac{169}{3}a(\text{원})$$

09 / 수열의 합

A 개념 확인

164~165쪽

1068 답 $3+7+11+\cdots+27$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 (4k-1) &= (4 \times 1-1) + (4 \times 2-1) + (4 \times 3-1) + \cdots + (4 \times 7-1) \\ &= 3+7+11+\cdots+27 \end{aligned}$$

1069 답 $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{27}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 \frac{1}{3k} &= \frac{1}{3 \times 1} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{3 \times 3} + \cdots + \frac{1}{3 \times 9} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{27} \end{aligned}$$

1070 답 $-2+4-8+16-32$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^5 (-2)^k &= (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 \\ &= -2+4-8+16-32 \end{aligned}$$

1071 답 $\sum_{k=1}^{11} (2k-3)$

수열 $-1, 1, 3, \dots, 19$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n=2n-3$$

이때 $19=2 \times 11-3$ 이므로

$$-1+1+3+\cdots+19=\sum_{k=1}^{11} (2k-3)$$

1072 답 $\sum_{k=1}^7 (3k-1)^2$

수열 $2^2, 5^2, 8^2, \dots, 20^2$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n=(3n-1)^2$$

이때 $20^2=(3 \times 7-1)^2$ 이므로

$$2^2+5^2+8^2+\cdots+20^2=\sum_{k=1}^7 (3k-1)^2$$

1073 답 $\sum_{k=1}^{10} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$

수열 $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{1024}$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

이때 $\frac{1}{1024}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}$ 이므로

$$-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{1024}=\sum_{k=1}^{10} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$$

1074 답 3

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{10} a_k-\sum_{k=1}^{10} b_k=2-(-1)=3$$

1075 답 28

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (4a_k+2) &= 4 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 2 \\ &= 4 \times 2 + 2 \times 10 = 28 \end{aligned}$$

1076 **답** -6

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(3a_k+2b_k-1) &= 3\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k-\sum_{k=1}^{10}1 \\ &= 3\times 2+2\times(-1)-1\times 10=-6\end{aligned}$$

1077 **답** 300

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100}(k^2+2)-\sum_{k=1}^{100}(k^2-1) &= \sum_{k=1}^{100}\{(k^2+2)-(k^2-1)\} \\ &= \sum_{k=1}^{100}3=3\times 100=300\end{aligned}$$

1078 **답** 50

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{50}(k-1)^2+\sum_{k=1}^{50}(2k-k^2) &= \sum_{k=1}^{50}\{(k-1)^2+(2k-k^2)\} \\ &= \sum_{k=1}^{50}(k^2-2k+1+2k-k^2) \\ &= \sum_{k=1}^{50}1=1\times 50=50\end{aligned}$$

1079 **답** 185

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(3k+2) &= 3\sum_{k=1}^{10}k+\sum_{k=1}^{10}2 \\ &= 3\times\frac{10\times 11}{2}+2\times 10=185\end{aligned}$$

1080 **답** -132

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^8(3-k)(3+k) &= \sum_{k=1}^8(9-k^2)=\sum_{k=1}^89-\sum_{k=1}^8k^2 \\ &= 9\times 8-\frac{8\times 9\times 17}{6}=-132\end{aligned}$$

1081 **답** 447

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^6(k+1)(k^2-k+1) &= \sum_{k=1}^6(k^3+1)=\sum_{k=1}^6k^3+\sum_{k=1}^61 \\ &= \left(\frac{6\times 7}{2}\right)^2+1\times 6=447\end{aligned}$$

1082 **답** 60

수열 $-3, -1, 1, \dots, 15$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n=2n-5$$

이때 $15=2\times 10-5$ 이므로

$$\begin{aligned}-3-1+1+\dots+15 &= \sum_{k=1}^{10}(2k-5)=2\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}5 \\ &= 2\times\frac{10\times 11}{2}-5\times 10=60\end{aligned}$$

1083 **답** 591

수열 $1^2, 4^2, 7^2, \dots, 16^2$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n=(3n-2)^2$$

이때 $16^2=(3\times 6-2)^2$ 이므로

$$\begin{aligned}1^2+4^2+7^2+\dots+16^2 &= \sum_{k=1}^6(3k-2)^2 \\ &= \sum_{k=1}^6(9k^2-12k+4) \\ &= 9\sum_{k=1}^6k^2-12\sum_{k=1}^6k+\sum_{k=1}^64 \\ &= 9\times\frac{6\times 7\times 13}{6}-12\times\frac{6\times 7}{2}+4\times 6 \\ &= 591\end{aligned}$$

1084 **답** 3850

수열 $1\times 2^2, 2\times 3^2, 3\times 4^2, \dots, 10\times 11^2$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n=n(n+1)^2$$

$$\therefore 1\times 2^2+2\times 3^2+3\times 4^2+\dots+10\times 11^2$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{k=1}^{10}k(k+1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{10}(k^3+2k^2+k) \\ &= \sum_{k=1}^{10}k^3+2\sum_{k=1}^{10}k^2+\sum_{k=1}^{10}k \\ &= \left(\frac{10\times 11}{2}\right)^2+2\times\frac{10\times 11\times 21}{6}+\frac{10\times 11}{2} \\ &= 3850\end{aligned}$$

1085 **답** $\frac{15}{16}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{15}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{16}\right) \\ &= 1-\frac{1}{16} \\ &= \frac{15}{16}\end{aligned}$$

1086 **답** $\frac{10}{21}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\dots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right) \\ &= \frac{10}{21}\end{aligned}$$

1087 **답** 3

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{15}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})} \\ &= \sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \\ &= (\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\dots+(\sqrt{16}-\sqrt{15}) \\ &= \sqrt{16}-\sqrt{1} \\ &= 3\end{aligned}$$

1088 **답** 3

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{24}\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{24}\frac{\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1}-\sqrt{2k+1})} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{24}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}) \\ &= \frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\dots+(\sqrt{49}-\sqrt{47})\} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{49}-\sqrt{1}) \\ &= 3\end{aligned}$$

1089 답 ①

$$\sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n})$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} a_k$$

$$\text{즉, } \sum_{k=1}^{2n} a_k = n^2 + 3n \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 5^2 + 3 \times 5 = 40$$

1090 답 ③

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^n 5k = 5 \times 1 + 5 \times 2 + 5 \times 3 + \cdots + 5 \times n$$

$$= 5 + 10 + 15 + \cdots + 5n$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=2}^{10} (2k-1) = (2 \times 2 - 1) + (2 \times 3 - 1) + (2 \times 4 - 1)$$

$$+ \cdots + (2 \times 10 - 1)$$

$$= 3 + 5 + 7 + \cdots + 19$$

$$\textcircled{3} \sum_{k=1}^n 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n$$

$$\textcircled{4} \sum_{k=1}^7 (-1)^k = (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4$$

$$+ (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7$$

$$= -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$$

$$\textcircled{5} \sum_{k=1}^{10} (k+1)^2 = (1+1)^2 + (2+1)^2 + (3+1)^2 + \cdots + (10+1)^2$$

$$= 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 11^2$$

$$= 4 + 9 + 16 + \cdots + 121$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

1091 답 66

$$\sum_{k=1}^{14} f(k+1) - \sum_{k=3}^{16} f(k-2)$$

$$= \{f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(15)\}$$

$$- \{f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(14)\}$$

$$= f(15) - f(1) = 70 - 4 = 66$$

1092 답 ④

$$\sum_{k=1}^5 ka_k = 60 \text{에서 } a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 = 60 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^5 ka_{k+1} = 100 \text{에서 } a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_5 + 5a_6 = 100 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①-②을 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 - 5a_6 = -40$$

$$\text{즉, } \sum_{k=1}^5 a_k - 5a_6 = -40 \text{ 이므로}$$

$$20 - 5a_6 = -40 \quad \therefore a_6 = 12$$

1093 답 ㄱ, ㄷ, ㄹ

$$\text{ㄱ. } \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$\sum_{k=0}^n k = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n k = \sum_{k=0}^n k$$

$$\text{ㄴ. } \sum_{k=1}^n 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$$

$$\sum_{k=0}^n 2^k = 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n 2^k \neq \sum_{k=0}^n 2^k$$

$$\text{ㄷ. } \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 a_{k+5}$$

$$= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) + (a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}) = \sum_{k=1}^{10} a_k$$

$$\text{ㄹ. } \sum_{i=1}^{20} (2i-1)^2 + \sum_{j=1}^{20} (2j)^2$$

$$= (1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 39^2) + (2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + 40^2)$$

$$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 40^2 = \sum_{k=1}^{40} k^2$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ, ㄹ이다.

1094 답 5

$$\sum_{k=1}^{12} b_k = \sum_{k=1}^{12} (a_{2k} + a_{2k+1})$$

$$= (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5) + (a_6 + a_7) + \cdots + (a_{24} + a_{25})$$

$$= \sum_{k=2}^{25} a_k$$

$$\text{즉, } \sum_{k=2}^{25} a_k = 47 \text{ 이므로 } \sum_{k=1}^{25} a_k = 52 \text{ 에서}$$

$$a_1 + \sum_{k=2}^{25} a_k = 52$$

$$a_1 + 47 = 52 \quad \therefore a_1 = 5$$

1095 답 ①

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 중 -1 이 a 개, 2 가 b 개라 하면

$$\sum_{k=1}^n a_k = (-1) \times a + 2 \times b = 50$$

$$\therefore a - 2b = -50 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = (-1)^2 \times a + 2^2 \times b = 130$$

$$\therefore a + 4b = 130 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면 $a = 10, b = 30$

$$\therefore \sum_{k=1}^n |a_k| = |-1| \times 10 + |2| \times 30 = 70$$

1096 답 ④

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k - 1)^2 = \sum_{k=1}^{10} (4a_k^2 - 4a_k + 1)$$

$$= 4 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 - 4 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} 1$$

$$= 4 \times 10 - 4 \times 6 + 1 \times 10 = 26$$

1097 답 ①

$$\sum_{k=1}^8 ca_k = 48 + \sum_{k=1}^8 c \text{에서 } c \sum_{k=1}^8 a_k = 48 + c \times 8$$

$$16c = 48 + 8c \quad \therefore c = 6$$

1098 답 65

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \alpha, \sum_{k=1}^{20} b_k = \beta \text{라 하면}$$

$$\sum_{k=1}^{20} (a_k + b_k) = 8 \text{에서 } \sum_{k=1}^{20} a_k + \sum_{k=1}^{20} b_k = 8$$

$$\therefore \alpha + \beta = 8 \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^{20} (a_k - b_k) = -2 \text{에서 } \sum_{k=1}^{20} a_k - \sum_{k=1}^{20} b_k = -2$$

$$\therefore \alpha - \beta = -2 \quad \dots\dots \textcircled{L}$$

①, ㉔을 연립하여 풀면 $\alpha = 3, \beta = 5$

$$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k = 3, \sum_{k=1}^{20} b_k = 5 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{20} (5a_k - 2b_k + 3) &= 5 \sum_{k=1}^{20} a_k - 2 \sum_{k=1}^{20} b_k + \sum_{k=1}^{20} 3 \\ &= 5 \times 3 - 2 \times 5 + 3 \times 20 \\ &= 65 \quad \dots\dots \textcircled{ii} \end{aligned}$$

채점 기준

① $\sum_{k=1}^{20} a_k, \sum_{k=1}^{20} b_k$ 의 값 구하기	60 %
② $\sum_{k=1}^{20} (5a_k - 2b_k + 3)$ 의 값 구하기	40 %

1099 답 -105

$$\sum_{k=1}^n a_k = 2n \text{이므로}$$

$$\sum_{k=11}^{15} a_k = \sum_{k=1}^{15} a_k - \sum_{k=1}^{10} a_k = 2 \times 15 - 2 \times 10 = 10$$

$$\sum_{k=1}^n b_k = \frac{1}{3} n^2 \text{이므로}$$

$$\sum_{k=11}^{15} b_k = \sum_{k=1}^{15} b_k - \sum_{k=1}^{10} b_k = \frac{1}{3} \times 15^2 - \frac{1}{3} \times 10^2 = \frac{125}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=11}^{15} (2a_k - 3b_k) &= 2 \sum_{k=11}^{15} a_k - 3 \sum_{k=11}^{15} b_k \\ &= 2 \times 10 - 3 \times \frac{125}{3} = -105 \end{aligned}$$

1100 답 ⑤

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1-a_k}{1+a_k} &= \sum_{k=1}^n \frac{2-(1+a_k)}{1+a_k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{1+a_k} - 1 \right) \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{1+a_k} - \sum_{k=1}^n 1 = 2(n^2 + 2n) - 1 \times n \\ &= 2n^2 + 3n \end{aligned}$$

1101 답 -400

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_3 = 2, a_8 = -8$ 이므로 $a + 2d = 2, a + 7d = -8$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 6, d = -2$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{200} a_{2k} - \sum_{k=1}^{200} a_{2k-1} &= (a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{400}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{399}) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + (a_6 - a_5) + \dots + (a_{400} - a_{399}) \\ &= 200d = 200 \times (-2) = -400 \end{aligned}$$

1102 답 16

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_3 + a_7}{a_1 + a_5} = \frac{a_1 r^2 + a_1 r^6}{a_1 + a_1 r^4} = \frac{a_1 r^2(1 + r^4)}{a_1(1 + r^4)} = r^2$$

$$\text{즉, } r^2 = 4 \text{이므로 } r = 2 \quad (\because r > 0) \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\sum_{k=1}^3 a_{2k-1} = a_1 + a_3 + a_5 = 42 \text{에서}$$

$$a_1 + a_1 r^2 + a_1 r^4 = 42$$

$$a_1 + 4a_1 + 16a_1 = 42, 21a_1 = 42 \quad \therefore a_1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\therefore a_4 = 2 \times 2^3 = 16 \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비 구하기	40 %
② 등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항 구하기	40 %
③ a_4 구하기	20 %

1103 답 10

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{50} \frac{5^k - 3^k}{4^k} &= \sum_{k=1}^{50} \left(\frac{5}{4} \right)^k - \sum_{k=1}^{50} \left(\frac{3}{4} \right)^k \\ &= \frac{5}{4} \left\{ \left(\frac{5}{4} \right)^{50} - 1 \right\} - \frac{3}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{50} \right\} \\ &= \frac{5}{4} - 1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^{50} \\ &= 5 \left\{ \left(\frac{5}{4} \right)^{50} - 1 \right\} - 3 \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{50} \right\} \\ &= 5 \left(\frac{5}{4} \right)^{50} + 3 \left(\frac{3}{4} \right)^{50} - 8 \end{aligned}$$

따라서 $a = 5, b = 3, c = -8$ 이므로

$$a - b - c = 10$$

1104 답 ⑤

$a_n = 1 + 2^n$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (1 + 2^k) = \sum_{k=1}^{10} 1 + \sum_{k=1}^{10} 2^k \\ &= 1 \times 10 + \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} \\ &= 2056 \end{aligned}$$

1105 답 ④

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} 2^{-k} \sin \frac{k\pi}{2} &= \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2^2} \sin \pi + \frac{1}{2^3} \sin \frac{3\pi}{2} + \dots + \frac{1}{2^{20}} \sin 10\pi \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} - \dots - \frac{1}{2^{19}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \left\{ 1 - \left(-\frac{1}{4} \right)^{10} \right\}}{1 - \left(-\frac{1}{4} \right)} \\ &= \frac{2}{5} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{20} \right\} \end{aligned}$$

1106 답 35

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_{10} = 20 \text{에서 } a + 9d = 20 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^9 k(a_k - a_{k+1}) &= (a_1 - a_2) + 2(a_2 - a_3) + 3(a_3 - a_4) + \dots + 9(a_9 - a_{10}) \\ &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_9 - 9a_{10} \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^9 a_k - 9 \times 20 = \sum_{k=1}^9 a_k - 180$$

$$\text{즉, } \sum_{k=1}^9 a_k - 180 = -135 \text{이므로 } \sum_{k=1}^9 a_k = 45$$

$$\frac{9\{2a + (9-1)d\}}{2} = 45$$

$$\therefore a + 4d = 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②을 연립하여 풀면

$$a = -7, d = 3$$

$$\therefore a_{15} = -7 + 14 \times 3 = 35$$

1107 [답] 101

수열 3, 33, 333, ..., 333333333의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{3}(10^n - 1) \\ \therefore 3 + 33 + 333 + \cdots + 333333333 \\ &= \sum_{k=1}^9 a_k = \sum_{k=1}^9 \frac{1}{3}(10^k - 1) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^9 10^k - \sum_{k=1}^9 \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \frac{10(10^9 - 1)}{10 - 1} \right\} - \frac{1}{3} \times 9 \\ &= \frac{10^{10} - 91}{27} \end{aligned}$$

따라서 $a = 10$, $b = 91$ 이므로

$$a + b = 101$$

1108 [답] ③

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} (3k-2)^2 - \sum_{k=1}^{10} (3k)^2 &= \sum_{k=1}^{10} (9k^2 - 12k + 4) - \sum_{k=1}^{10} 9k^2 \\ &= \sum_{k=1}^{10} (-12k + 4) = -12 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 4 \\ &= -12 \times \frac{10 \times 11}{2} + 4 \times 10 \\ &= -660 + 40 = -620 \end{aligned}$$

1109 [답] ①

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (6-2k) &= \sum_{k=1}^n 6 - 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= 6n - 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= -n^2 + 5n \end{aligned}$$

$$\text{즉, } -n^2 + 5n = -50 \text{이므로 } n^2 - 5n - 50 = 0$$

$$(n+5)(n-10) = 0 \quad \therefore n = -5 \text{ 또는 } n = 10$$

이때 n 은 자연수이므로 $n = 10$

1110 [답] 3157

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 f(2k) &= \sum_{k=1}^7 \left\{ \frac{1}{2} \times (2k)^3 + 3 \right\} \\ &= \sum_{k=1}^7 (4k^3 + 3) = 4 \sum_{k=1}^7 k^3 + \sum_{k=1}^7 3 \\ &= 4 \times \left(\frac{7 \times 8}{2} \right)^2 + 3 \times 7 = 3157 \end{aligned}$$

1111 [답] ②

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{20} \frac{1+2+3+\cdots+k}{k+1} &= \sum_{k=1}^{20} \frac{\frac{k(k+1)}{2}}{k+1} = \sum_{k=1}^{20} \frac{k}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{20} k = \frac{1}{2} \times \frac{20 \times 21}{2} = 105 \end{aligned}$$

1112 [답] 245

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = -3$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} (\alpha - k)(\beta - k) &= \sum_{k=1}^{10} \{\alpha\beta - (\alpha + \beta)k + k^2\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} (k^2 - 2k - 3) = \sum_{k=1}^{10} k^2 - 2 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 3 \\ &= \frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 2 \times \frac{10 \times 11}{2} - 3 \times 10 \\ &= 245 \end{aligned}$$

1113 [답] ①

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^7 (c-k)^2 &= \sum_{k=1}^7 (k^2 - 2ck + c^2) \\ &= \sum_{k=1}^7 k^2 - 2c \sum_{k=1}^7 k + \sum_{k=1}^7 c^2 \\ &= \frac{7 \times 8 \times 15}{6} - 2c \times \frac{7 \times 8}{2} + c^2 \times 7 \\ &= 7c^2 - 56c + 140 \\ &= 7(c-4)^2 + 28 \end{aligned}$$

즉, $c = 4$ 에서 최솟값 28을 가지므로 $m = 28$

$$\therefore c + m = 32$$

1114 [답] 882

직선 $y = x + a_n$ 이 원의 중심 $(n, 2n^2 + n)$ 을 지나야 하므로

$$\begin{aligned} 2n^2 + n &= n + a_n \quad \therefore a_n = 2n^2 \\ \therefore \sum_{k=1}^6 ka_k &= \sum_{k=1}^6 2k^3 = 2 \times \left(\frac{6 \times 7}{2} \right)^2 = 882 \end{aligned}$$

1115 [답] ⑤

자연수 k 에 대하여

(i) n 은 홀수, 즉 $n = 2k - 1$ 일 때,

$$a_n = a_{2k-1} = \frac{\{(2k-1)+1\}^2}{2} = 2k^2$$

(ii) n 은 짝수, 즉 $n = 2k$ 일 때,

$$a_n = a_{2k} = \frac{(2k)^2}{2} + 2k + 1 = 2k^2 + 2k + 1$$

(i), (ii)에서

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{10} a_n &= \sum_{n=1}^5 (a_{2n-1} + a_{2n}) \\ &= \sum_{n=1}^5 \{2n^2 + (2n^2 + 2n + 1)\} \\ &= \sum_{n=1}^5 (4n^2 + 2n + 1) \\ &= 4 \sum_{n=1}^5 n^2 + 2 \sum_{n=1}^5 n + \sum_{n=1}^5 1 \\ &= 4 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + 2 \times \frac{5 \times 6}{2} + 1 \times 5 \\ &= 255 \end{aligned}$$

1116 [답] 55

$$\begin{aligned} S^2 &= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 10^2) + (2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 10^2) \\ &\quad + (3^2 + 4^2 + 5^2 + \cdots + 10^2) + \cdots + (9^2 + 10^2) + 10^2 \\ &= 1^2 \times 1 + 2^2 \times 2 + 3^2 \times 3 + \cdots + 9^2 \times 9 + 10^2 \times 10 \\ &= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + 10^3 \\ &= \sum_{k=1}^{10} k^3 = \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 = 55^2 \end{aligned}$$

그런데 $S > 0$ 이므로 $S = 55$

1117 [답] 91

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{13} \left\{ \sum_{k=1}^l (2k-l) \right\} &= \sum_{l=1}^{13} \left(2 \sum_{k=1}^l k - \sum_{k=1}^l l \right) \\ &= \sum_{l=1}^{13} \left\{ 2 \times \frac{l(l+1)}{2} - l \times l \right\} \\ &= \sum_{l=1}^{13} l = \frac{13 \times 14}{2} \\ &= 91 \end{aligned}$$

1118 답 ①

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{l=1}^m \left(\sum_{k=1}^l 1 \right) \right\} &= \sum_{m=1}^n \left(\sum_{l=1}^m l \right) \\ &= \sum_{m=1}^n \frac{m(m+1)}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{m=1}^n m^2 + \sum_{m=1}^n m \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\ \therefore, \frac{n(n+1)(n+2)}{6} &= 56 \text{ 이므로} \\ n(n+1)(n+2) &= 6 \times 7 \times 8 \\ \therefore n &= 6\end{aligned}$$

1119 답 32

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^m \left\{ \sum_{l=1}^n (k+l) \right\} &= \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=1}^n k + \sum_{l=1}^n l \right) \\ &= \sum_{k=1}^m \left\{ kn + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= n \sum_{k=1}^m k + \sum_{k=1}^m \frac{n(n+1)}{2} \\ &= n \times \frac{m(m+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \times m \\ &= \frac{mn(m+n+2)}{2} \\ &= \frac{8 \times (6+2)}{2} = 32\end{aligned}$$

1120 답 ②

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{10} \left[\sum_{k=1}^n \{ (-1)^{n-1} \times (2k-1) \} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{10} \left\{ (-1)^{n-1} \times \sum_{k=1}^n (2k-1) \right\} \\ &= \sum_{n=1}^{10} \left[(-1)^{n-1} \times \left\{ 2 \times \frac{n(n+1)}{2} - n \right\} \right] \\ &= \sum_{n=1}^{10} \{ (-1)^{n-1} \times n^2 \} \\ &= 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 9^2 - 10^2 \\ &= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + \dots + (9-10)(9+10) \\ &= -(1+2+3+4+\dots+9+10) \\ &= -\frac{10 \times 11}{2} \\ &= -55\end{aligned}$$

1121 답 ④

수열 $1 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 4, \dots, 15 \times 16$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n(n+1)$$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제15항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{15} a_k &= \sum_{k=1}^{15} k(k+1) = \sum_{k=1}^{15} (k^2 + k) \\ &= \sum_{k=1}^{15} k^2 + \sum_{k=1}^{15} k \\ &= \frac{15 \times 16 \times 31}{6} + \frac{15 \times 16}{2} \\ &= 1360\end{aligned}$$

1122 답 4

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = (3n-1)^2$$

$$\begin{aligned}\therefore S_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (3k-1)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (9k^2 - 6k + 1) \\ &= 9 \sum_{k=1}^n k^2 - 6 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= 9 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6 \times \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{n(6n^2 + 3n - 1)}{2}\end{aligned}$$

따라서 $a=3, b=-1$ 이므로 $a-b=4$

1123 답 220

수열 $1, 1+2, 1+2+3, \dots, 1+2+3+\dots+10$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1+2+3+\dots+n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \dots \textcircled{i}$$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} \right) \\ &= 220 \quad \dots \textcircled{ii}\end{aligned}$$

채점 기준

① 수열 $1, 1+2, 1+2+3, \dots, 1+2+3+\dots+10$ 의 일반항 a_n 구하기	50 %
② 주어진 식의 값 구하기	50 %

1124 답 260

$$\begin{aligned}a_n &= \overline{A_n B_n} = g(n) - f(n) \\ &= (n+2)^2 - n^2 = 4n + 4 \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} (4k+4) = 4 \sum_{k=1}^{10} k + \sum_{k=1}^{10} 4 \\ &= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} + 4 \times 10 = 260\end{aligned}$$

1125 답 $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

수열 $1 \times n, 3 \times (n-1), 5 \times (n-2), \dots, (2n-1) \times 1$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = (2k-1)\{n-(k-1)\}$$

따라서 주어진 식은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n (2k-1)\{n-(k-1)\} \\ &= \sum_{k=1}^n \{-2k^2 + (2n+3)k - (n+1)\} \\ &= -2 \sum_{k=1}^n k^2 + (2n+3) \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n (n+1) \\ &= -2 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+3) \times \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \times n \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

1126 [답] ④

주어진 수열의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = \left(\frac{k+n}{n}\right)^2$$

따라서 주어진 수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{k+n}{n}\right)^2 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k^2}{n^2} + \frac{2k}{n} + 1\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} + n \\ &= \frac{(2n+1)(7n+1)}{6n}\end{aligned}$$

1127 [답] ②

$$\begin{aligned}f(n) &= \sum_{k=1}^n \frac{6k^2}{n+1} = \frac{6}{n+1} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{6}{n+1} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= n(2n+1) = 2n^2 + n \\ \therefore \sum_{n=1}^{10} f(n) &= \sum_{n=1}^{10} (2n^2 + n) = 2 \sum_{n=1}^{10} n^2 + \sum_{n=1}^{10} n \\ &= 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 825\end{aligned}$$

1128 [답] ③

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - n - \{(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 2n - 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 1 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 ①에 $n=1$ 을 대입한 값과 ②이 같으므로

$$a_n = 2n - 2$$

따라서 $a_{2k-1} = 2(2k-1) - 2 = 4k - 4$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^5 (4k - 4) = 4 \sum_{k=1}^5 k - \sum_{k=1}^5 4 \\ &= 4 \times \frac{5 \times 6}{2} - 4 \times 5 = 40\end{aligned}$$

1129 [답] 35

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \frac{2n}{n+1}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} = \frac{2n}{n+1} - \frac{2(n-1)}{n} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = \frac{2 \times 1}{1+1} = 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 ①에 $n=1$ 을 대입한 값과 ②이 같으므로

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)}$$

따라서 $\frac{1}{a_k} = \frac{k(k+1)}{2}$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 \frac{1}{a_k} &= \sum_{k=1}^5 \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^5 k^2 + \sum_{k=1}^5 k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{5 \times 6 \times 11}{6} + \frac{5 \times 6}{2} \right) \\ &= 35\end{aligned}$$

1130 [답] ②

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = 3^n - 1$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 3^n - 1 - (3^{n-1} - 1) \\ &= 3^{n-1}(3 - 1) \\ &= 2 \times 3^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 3^1 - 1 = 2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 ①에 $n=1$ 을 대입한 값과 ②이 같으므로

$$a_n = 2 \times 3^{n-1}$$

따라서 $a_{2k} = 2 \times 3^{2k-1} = \frac{2}{3} \times 9^k$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^6 a_{2k} &= \sum_{k=1}^6 \left(\frac{2}{3} \times 9^k \right) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{9(9^6 - 1)}{9 - 1} \\ &= \frac{3(3^{12} - 1)}{4} = \frac{3^{13} - 3}{4}\end{aligned}$$

따라서 $p=4$, $q=13$ 이므로

$$p+q=17$$

1131 [답] 58

$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{4k-3}{a_k} = 2n^2 + 7n$ 에서 $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}\frac{4n-3}{a_n} &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 + 7n - \{2(n-1)^2 + 7(n-1)\} \\ &= 4n + 5\end{aligned}$$

이때 $4n+5 > 0$ 이므로 $\frac{4n-3}{a_n} = 4n+5$ 에서

$$a_n = \frac{4n-3}{4n+5} \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_5 \times a_7 \times a_9 = \frac{17}{25} \times \frac{25}{33} \times \frac{33}{41} = \frac{17}{41}$$

따라서 $p=41$, $q=17$ 이므로

$$p+q=58$$

1132 [답] $\frac{10}{31}$

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1} \right) \\ &= \frac{1}{3} \left\{ \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{28} - \frac{1}{31}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{31}\right) = \frac{10}{31}\end{aligned}$$

1133 답 37

수열 $\frac{1}{3^2-1}, \frac{1}{5^2-1}, \frac{1}{7^2-1}, \dots, \frac{1}{23^2-1}$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{(2n+1)^2-1} = \frac{1}{4n^2+4n} = \frac{1}{4n(n+1)}$$

주어진 식의 좌변은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제11항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{11} a_k &= \sum_{k=1}^{11} \frac{1}{4k(k+1)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{11} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{12}\right) = \frac{11}{48}\end{aligned}$$

따라서 $p=48, q=11$ 이므로

$$p-q=37$$

1134 답 $\frac{100}{101}$

수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2+4}, \frac{1}{2+4+6}, \dots, \frac{1}{2+4+6+\cdots+200}$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{1}{2+4+6+\cdots+2n} \\ &= \frac{1}{2(1+2+3+\cdots+n)} \\ &= \frac{1}{2 \times \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{n(n+1)} \quad \dots\dots \textcircled{i}\end{aligned}$$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제100항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{100} a_k &= \sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)} \\ &= \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101} \quad \dots\dots \textcircled{ii}\end{aligned}$$

채점 기준

① 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2+4}, \frac{1}{2+4+6}, \dots, \frac{1}{2+4+6+\cdots+200}$ 의 일반항 a_n 구하기	70 %
② 주어진 식의 값 구하기	30 %

1135 답 $\frac{30}{31}$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n + \beta_n = -2, \alpha_n \beta_n = -(4n^2 - 1)$$

$$\text{즉, } \frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} = \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \frac{-2}{-(4n^2 - 1)} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{15} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right) &= \sum_{n=1}^{15} \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{15} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{29} - \frac{1}{31}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{31} = \frac{30}{31}\end{aligned}$$

1136 답 $-\frac{10}{19}$

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - 2n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 2n - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\} \\ &= 2n - 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \times 1 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 ①에 $n=1$ 을 대입한 값과 ②이 같으므로

$$a_n = 2n - 3$$

따라서 $\frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{(2k-3)(2k-1)}$ 이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k-3)(2k-1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k-3} - \frac{1}{2k-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ (-1-1) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{17} - \frac{1}{19}\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{19}\right) = -\frac{10}{19}\end{aligned}$$

1137 답 ⑤

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$S_n - a_n = S_{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

(ii) $n=1$ 일 때, $S_1 - a_1 = 0$

$$\text{즉, } S_1 - a_1 = 0, S_n - a_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \quad (n \geq 2) \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} (S_k - a_k) &= (S_1 - a_1) + \sum_{k=2}^{10} (S_k - a_k) \\ &= \sum_{k=2}^{10} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}\end{aligned}$$

다른 풀이

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (S_k - a_k) = \sum_{k=1}^{10} S_k - \sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} S_k - S_{10} = \sum_{k=1}^9 S_k$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

1138 [답] $2\sqrt{2}$

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제16항까지의 합은

$$\sum_{k=1}^{16} a_k = \sum_{k=1}^{16} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2}}$$

$$= \sum_{k=1}^{16} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k+2})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k+2})}$$

$$= \sum_{k=1}^{16} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k+1})$$

$$= (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - \sqrt{4}) + \cdots + (\sqrt{18} - \sqrt{17})$$

$$= -\sqrt{2} + \sqrt{18}$$

$$= -\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

1139 [답] 4

$a_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{40} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}}$$

$$= \sum_{k=1}^{40} \frac{1}{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{40} \frac{\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1}}{(\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+1})(\sqrt{2k-1} - \sqrt{2k+1})}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{40} (\sqrt{2k+1} - \sqrt{2k-1})$$

$$= \frac{1}{2} \{(\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3}) + (\sqrt{7} - \sqrt{5}) + \cdots + (\sqrt{81} - \sqrt{79})\}$$

$$= \frac{1}{2} (\sqrt{81} - \sqrt{1}) = 4$$

1140 [답] 15

$$\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})}$$

$$= \sum_{k=1}^m (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{m+1} - \sqrt{m})$$

$$= \sqrt{m+1} - 1$$

즉, $\sqrt{m+1} - 1 = 3$ 이므로

$$\sqrt{m+1} = 4, m+1 = 16$$

$$\therefore m = 15$$

1141 [답] $3+2\sqrt{2}$

$P_n(n, \sqrt{n+2}), Q_n(n, -\sqrt{n})$ 에서

$$a_n = P_n Q_n = \sqrt{n+2} + \sqrt{n}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{48} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{48} \frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{48} \frac{\sqrt{k+2} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+2} + \sqrt{k})(\sqrt{k+2} - \sqrt{k})}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{48} (\sqrt{k+2} - \sqrt{k})$$

$$= \frac{1}{2} \{(\sqrt{3} - \sqrt{1}) + (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{5} - \sqrt{3})$$

$$+ \cdots + (\sqrt{49} - \sqrt{47}) + (\sqrt{50} - \sqrt{48})\}$$

$$= \frac{1}{2} (-\sqrt{1} - \sqrt{2} + \sqrt{49} + \sqrt{50})$$

$$= \frac{1}{2} (-1 - \sqrt{2} + 7 + 5\sqrt{2})$$

$$= 3 + 2\sqrt{2}$$

1142 [답] ②

$a_n = 3 \times 9^{n-1} = 3^{2n-1}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{20} \log_9 a_k = \sum_{k=1}^{20} \log_9 3^{2k-1} = \sum_{k=1}^{20} \log_{3^2} 3^{2k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{20} \frac{2k-1}{2} = \sum_{k=1}^{20} k - \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{20 \times 21}{2} - \frac{1}{2} \times 20 = 200$$

1143 [답] 55

$$\sum_{k=1}^{20} \log_3 a_k = \sum_{k=1}^{10} (\log_3 a_{2k-1} + \log_3 a_{2k})$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \log_3 (a_{2k-1} a_{2k})$$

$$= \sum_{k=1}^{10} \log_3 \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^k \times 6^k \right\} = \sum_{k=1}^{10} \log_3 3^k$$

$$= \sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \times 11}{2} = 55$$

1144 [답] 2

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \log_3 \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= \log_3 \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \log_3 \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \log_3 \frac{n+2}{n} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = \log_3 3 = 1 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{2}$ 이 같으므로

$$a_n = \log_3 \frac{n+2}{n}$$

따라서 $a_{2k} = \log_3 \frac{2k+2}{2k} = \log_3 \frac{k+1}{k}$ 이므로

$$\sum_{k=1}^8 a_{2k} = \sum_{k=1}^8 \log_3 \frac{k+1}{k}$$

$$= \log_3 \frac{2}{1} + \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \cdots + \log_3 \frac{9}{8}$$

$$= \log_3 \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{9}{8} \right)$$

$$= \log_3 9 = 2$$

1145 [답] 18

주어진 수열을 (2), (2, 4), (2, 4, 6), (2, 4, 6, 8), ...과 같이 첫째항이 2가 되도록 묶으면 n 번째 묶음의 항의 개수는 n 이므로 첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

이때 첫 번째 묶음부터 9번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^9 k = \frac{9 \times 10}{2} = 45, \text{ 10번째 묶음까지의 항의 개수는}$$

$$\sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \times 11}{2} = 55 \text{ 이므로 제54항은 10번째 묶음에서 9번째 항이다.}$$

즉, 10번째 묶음은 2, 4, 6, ..., 18, 20이므로 9번째 항은 18이다.

따라서 제54항은 18이다.

1146 [답] ④

주어진 수열을 (1), (2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4, 4), ...와 같이 같은 수끼리 묶으면 n 번째 묶음의 항의 개수는 n 이므로 첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

15는 15번째 묶음에서 처음으로 나타난다.

이때 첫 번째 묶음부터 14번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{14} k = \frac{14 \times 15}{2} = 105$$

따라서 처음으로 나타나는 15는 제106항이다.

1147 [답] 제68항

주어진 수열을 $\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \dots$ 와 같이 분모가 같은 항끼리 묶으면 n 번째 묶음의 항의 개수는 n 이므로 첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$\frac{2}{13}$ 는 12번째 묶음에서 두 번째 항이다.

이때 첫 번째 묶음부터 11번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{11} k = \frac{11 \times 12}{2} = 66$$

따라서 $66+2=68$ 이므로 처음으로 나타나는 $\frac{2}{13}$ 는 제68항이다.

1148 [답] ④

주어진 수열을 $\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}\right), \dots$ 와 같이 분모와 분자의 합이 같은 것끼리 묶으면 n 번째 묶음의 항의 개수는 n 이므로 첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

한편 n 번째 묶음은 분모와 분자의 합이 $n+1$ 이고 $\frac{11}{13}$ 에서

$11+13=24$ 이므로 $\frac{11}{13}$ 은 23번째 묶음에서 11번째 항이다.

이때 첫 번째 묶음부터 22번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^{22} k = \frac{22 \times 23}{2} = 253$$

따라서 $253+11=264$ 이므로 처음으로 나타나는 $\frac{11}{13}$ 은 제264항이다.

1149 [답] 74

위에서 n 번째 줄에는 $(2n-1)$ 개의 자연수가 있으므로 첫 번째 줄부터 8번째 줄까지의 자연수의 개수는

$$\sum_{k=1}^8 (2k-1) = 2 \times \frac{8 \times 9}{2} - 8 = 64$$

따라서 위에서 9번째 줄의 왼쪽에서 10번째에 있는 수는

$$64+10=74$$

1150 [답] 39

위에서 n 번째 줄에 있는 순서쌍의 두 수의 합은 $n+1$ 이고, 위에서 n 번째 줄의 왼쪽에서 k 번째의 순서쌍은 $(k, n+1-k)$ 이다.

이때 순서쌍 (8, 24)에서 $8+24=32=31+1$ 이므로 순서쌍

(8, 24)는 위에서 31번째 줄의 왼쪽에서 8번째에 있다.

따라서 $p=31, q=8$ 이므로 $p+q=39$

1151 [답] 1705

n 행에 나열되는 수들의 합은 첫째항이 n , 공차가 n 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이므로

$$a_n = \frac{n\{2n + (n-1) \times n\}}{2} = \frac{n^3 + n^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{k^3 + k^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{10} k^3 + \sum_{k=1}^{10} k^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 + \frac{10 \times 11 \times 21}{6} \right\} \\ &= 1705 \end{aligned}$$

1152 [답] ②

주어진 표의 첫 번째 줄의 수는 왼쪽에서부터 차례로 $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$ 이므로 첫 번째 줄의 왼쪽에서 9번째 칸에 있는 수는 9^2 이다.

이때 첫 번째 줄의 왼쪽에서 9번째 칸에 있는 수부터 8번째 줄의 왼쪽에서 9번째 칸에 있는 수까지 1씩 작아지므로 8번째 줄의 왼쪽에서 9번째 칸에 있는 수는

$$9^2 - 7 = 74$$

AB 유형 점검

176~178쪽

1153 [답] ⑤

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^n (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6) + \dots + (a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n}) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=1}^{3n} a_k$$

즉, $\sum_{k=1}^{3n} a_k = 3n^2 - 2n$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{30} a_k = 3 \times 10^2 - 2 \times 10 = 280$$

1154 [답] 36

$$\sum_{k=1}^{20} (a_k - b_k)^2 = \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 - 2a_k b_k + b_k^2) \\ = \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + b_k^2) - 2 \sum_{k=1}^{20} a_k b_k$$

$$\text{즉, } 8 = \sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + b_k^2) - 2 \times 14 \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{20} (a_k^2 + b_k^2) = 36$$

1155 [답] 80

$$\sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \\ = \sum_{k=1}^{2n} a_k$$

$$\text{즉, } \sum_{k=1}^{2n} a_k = 3n^2 - 2n \text{이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 3 \times 5^2 - 2 \times 5 = 65$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} (2a_k - 5) = 2 \sum_{k=1}^{10} a_k - \sum_{k=1}^{10} 5 \\ = 2 \times 65 - 5 \times 10 = 80$$

1156 [답] ⑤

다항식 $P(x) = x^{n-1}(3x-1)$ 을 $x-3$ 으로 나누었을 때의 나머지는 $P(3)$ 이므로

$$a_n = 3^{n-1} \times (9-1) = 8 \times 3^{n-1}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (8 \times 3^{k-1}) = \frac{8(3^n - 1)}{3-1} = 4(3^n - 1)$$

1157 [답] 502

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$S_3 = 7a_3 \text{에서}$$

$$a + ar + ar^2 = 7ar^2$$

$$6r^2 - r - 1 = 0 \quad (\because a > 0)$$

$$(3r+1)(2r-1) = 0 \quad \therefore r = \frac{1}{2} \quad (\because r > 0)$$

즉, 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$a_n = a \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}, S_n = \frac{a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{2}} = 2a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^8 \frac{S_n}{a_n} = \sum_{n=1}^8 \frac{2a \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right\}}{a \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}} = \sum_{n=1}^8 (2^n - 1) \\ = \sum_{n=1}^8 2^n - \sum_{n=1}^8 1 = \frac{2(2^8 - 1)}{2-1} - 1 \times 8 = 502$$

1158 [답] ②

$$\sum_{k=1}^4 (k+1)^3 - 3 \sum_{k=1}^4 k(k+1) \\ = \sum_{k=1}^4 (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) - \sum_{k=1}^4 (3k^2 + 3k) \\ = \sum_{k=1}^4 (k^3 + 1) = \sum_{k=1}^4 k^3 + \sum_{k=1}^4 1 \\ = \left(\frac{4 \times 5}{2} \right)^2 + 1 \times 4 = 104$$

1159 [답] 160

첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$\sum_{k=1}^5 a_k = 55 \text{에서 } \frac{5\{2 \times 3 + (5-1) \times d\}}{2} = 55$$

$$3 + 2d = 11, 2d = 8 \quad \therefore d = 4$$

따라서 $a_n = 3 + (n-1) \times 4 = 4n - 1$ 이므로

$$\sum_{k=1}^5 k(a_k - 3) = \sum_{k=1}^5 k(4k - 4) = 4 \sum_{k=1}^5 k^2 - 4 \sum_{k=1}^5 k \\ = 4 \times \frac{5 \times 6 \times 11}{6} - 4 \times \frac{5 \times 6}{2} \\ = 160$$

1160 [답] ④

$$\sum_{n=1}^k \left\{ \sum_{m=1}^n (m+n) \right\} = \sum_{n=1}^k \left(\sum_{m=1}^n m + \sum_{m=1}^n n \right) \\ = \sum_{n=1}^k \left\{ \frac{n(n+1)}{2} + n^2 \right\} \\ = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^k n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^k n \\ = \frac{3}{2} \times \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{k(k+1)}{2} \\ = \frac{k(k+1)^2}{2}$$

$$\text{즉, } \frac{k(k+1)^2}{2} = 147 \text{이므로}$$

$$k(k+1)^2 = 6 \times 7^2$$

$$\therefore k = 6$$

1161 [답] 1014

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = 2 + 5 + 8 + \cdots + (3n-1) = \sum_{k=1}^n (3k-1) \\ = 3 \times \frac{n(n+1)}{2} - n = \frac{3n^2 + n}{2}$$

따라서 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^{12} a_k = \sum_{k=1}^{12} \frac{3k^2 + k}{2} = \frac{3}{2} \sum_{k=1}^{12} k^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{12} k \\ = \frac{3}{2} \times \frac{12 \times 13 \times 25}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{12 \times 13}{2} \\ = 1014$$

1162 [답] ⑤

수열 $2 \times (2n-1), 4 \times (2n-3), 6 \times (2n-5), \dots, 2n \times 1$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = 2k \{ 2n - (2k-1) \}$$

따라서 주어진 식의 좌변은

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n 2k \{ 2n - (2k-1) \} \\ = \sum_{k=1}^n \{ (4n+2)k - 4k^2 \} \\ = (4n+2) \sum_{k=1}^n k - 4 \sum_{k=1}^n k^2 \\ = (4n+2) \times \frac{n(n+1)}{2} - 4 \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$\text{즉, } a=1, b=1, c=1 \text{이므로 } a+b+c=3$$

1163 124

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - 11n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 11n - \{(n-1)^2 - 11(n-1)\} \\ &= 2n - 12 \quad \dots\dots \textcircled{㉠} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 11 = -10 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

이때 $\textcircled{㉠}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{㉡}$ 이 같으므로

$$a_n = 2n - 12$$

따라서 $a_{2k} = 2 \times 2k - 12 = 4k - 12$ 이고, $a_{2k} \geq 0$ 을 만족시키는 k 의 값의 범위는

$$\begin{aligned} 4k - 12 &\geq 0 \quad \therefore k \geq 3 \\ \therefore \sum_{k=1}^{10} |a_{2k}| &= -\sum_{k=1}^2 a_{2k} + \sum_{k=3}^{10} a_{2k} = -\sum_{k=1}^2 a_{2k} + \left(\sum_{k=1}^{10} a_{2k} - \sum_{k=1}^2 a_{2k} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{10} a_{2k} - 2 \sum_{k=1}^2 a_{2k} = \sum_{k=1}^{10} (4k - 12) - 2 \sum_{k=1}^2 (4k - 12) \\ &= 4 \times \frac{10 \times 11}{2} - 12 \times 10 - 2 \left(4 \times \frac{2 \times 3}{2} - 12 \times 2 \right) \\ &= 124 \end{aligned}$$

1164 40/7

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{2n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6(2n+1)} \\ &= \frac{n(n+1)}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{20}} \\ &= \sum_{k=1}^{20} \frac{1}{a_k} = \sum_{k=1}^{20} \frac{6}{k(k+1)} = 6 \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 6 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{20} - \frac{1}{21} \right) \right\} \\ &= 6 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{40}{7} \end{aligned}$$

1165 4

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \frac{1}{f(k)} &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{\sqrt{3k+9} + \sqrt{3k+6}} \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\sqrt{3k+9} - \sqrt{3k+6}}{(\sqrt{3k+9} + \sqrt{3k+6})(\sqrt{3k+9} - \sqrt{3k+6})} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^m (\sqrt{3k+9} - \sqrt{3k+6}) \\ &= \frac{1}{3} \{ (\sqrt{12} - \sqrt{9}) + (\sqrt{15} - \sqrt{12}) + (\sqrt{18} - \sqrt{15}) \\ &\quad + \dots + (\sqrt{3m+9} - \sqrt{3m+6}) \} \\ &= \frac{1}{3} (\sqrt{3m+9} - 3) \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{3} (\sqrt{3m+9} - 3) = 1 \text{ 이므로}$$

$$\sqrt{3m+9} - 3 = 3, \sqrt{3m+9} = 6$$

$$3m+9=36 \quad \therefore m=9$$

1166 1

$$\begin{aligned} a_n &= \log_2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \log_2 \frac{n+1}{n} \\ \therefore \sum_{k=1}^m a_k &= \sum_{k=1}^m \log_2 \frac{k+1}{k} \\ &= \log_2 \frac{2}{1} + \log_2 \frac{3}{2} + \log_2 \frac{4}{3} + \dots + \log_2 \frac{m+1}{m} \\ &= \log_2 \left(\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \dots \times \frac{m+1}{m} \right) \\ &= \log_2 (m+1) \end{aligned}$$

즉, $\log_2 (m+1) = 5$ 이므로

$$m+1 = 2^5 = 32$$

$$\therefore m = 31$$

1167 1

주어진 수열을

(1, 5, 9), (11, 15, 19, 51, 55, 59, 91, 95, 99),

(111, 115, 119, 151, ..., 999), ...

와 같이 자릿수가 같은 항끼리 묶으면 n 번째 묶음의 항의 개수는 3^n

이므로 첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^n 3^k = \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3(3^n - 1)}{2}$$

이때 첫 번째 묶음부터 5번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\frac{3(3^5 - 1)}{2} = 363$$

이므로 제365항은 6번째 묶음에서 2번째 항이다.

따라서 제365항은 여섯 자리 수 중에서 2번째 수이므로 111115이다.

1168 11

$$\begin{aligned} &(1^3 - 2) + (2^3 - 4) + (3^3 - 6) + \dots + (n^3 - 2n) \\ &= \sum_{k=1}^n (k^3 - 2k) = \sum_{k=1}^n k^3 - 2 \sum_{k=1}^n k \\ &= \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - 2 \times \frac{n(n+1)}{2} \quad \dots\dots \textcircled{i} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2 - 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = 65^2 - 1 \text{ 이므로}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = t \text{로 놓으면}$$

$$t^2 - 2t = 65^2 - 1$$

$$t^2 - 2t - 64 \times 66 = 0$$

$$(t+64)(t-66) = 0$$

$$\therefore t = 66 \quad (\because t > 0) \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\text{따라서 } \frac{n(n+1)}{2} = 66 \text{ 이므로}$$

$$n^2 + n - 132 = 0$$

$$(n+12)(n-11) = 0$$

$$\therefore n = 11 \quad (\because n > 0) \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 주어진 식의 좌변을 자연수의 거듭제곱의 합을 이용하여 나타내기	50 %
② $\frac{n(n+1)}{2} = t$ 로 놓고 t 의 값 구하기	30 %
③ 자연수 n 의 값 구하기	20 %

1169 답 116

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 은

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 2n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 2n - \{(n-1)^2 + 2(n-1)\} \\ &= 2n + 1 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 2 \times 1 = 3 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

이때 ㉠에 $n = 1$ 을 대입한 값과 ㉡이 같으므로

$$a_n = 2n + 1 \quad \cdots \textcircled{i}$$

따라서 $(2k-1)a_k = (2k-1)(2k+1) = 4k^2 - 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^4 (2k-1)a_k &= \sum_{k=1}^4 (4k^2 - 1) = 4 \sum_{k=1}^4 k^2 - \sum_{k=1}^4 1 \\ &= 4 \times \frac{4 \times 5 \times 9}{6} - 1 \times 4 \\ &= 116 \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① 일반항 a_n 구하기	60 %
② $\sum_{k=1}^4 (2k-1)a_k$ 의 값 구하기	40 %

1170 답 2

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 = 7, a_6 = 13 \text{이므로}$$

$$a + 2d = 7, a + 5d = 13$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 3, d = 2$

$$\therefore a_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1 \quad \cdots \textcircled{i}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right. \\ &\quad \left. + \cdots + \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{ii}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} \right) < \frac{1}{9} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+3} < \frac{2}{9}$$

$$\frac{1}{2n+3} > \frac{1}{9}$$

$$2n+3 < 9 \quad \therefore n < 3 \quad \cdots \textcircled{iii}$$

$$\text{따라서 자연수 } n \text{의 최댓값은 } 2 \text{이다.} \quad \cdots \textcircled{iv}$$

채점 기준

① 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 구하기	30 %
② $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 간단히 하기	40 %
③ n 의 값의 범위 구하기	20 %
④ 자연수 n 의 최댓값 구하기	10 %

C 실력 향상

179쪽

1171 답 ②

$$1 \leq n \leq 9 \text{일 때, } \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor = 0 \text{이므로 } a_n = n$$

$$10 \leq n \leq 19 \text{일 때, } \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor = 1 \text{이므로 } a_n = n - 10$$

$$20 \leq n \leq 29 \text{일 때, } \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor = 2 \text{이므로 } a_n = n - 20$$

$$30 \leq n \leq 39 \text{일 때, } \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor = 3 \text{이므로 } a_n = n - 30$$

$$40 \leq n \leq 49 \text{일 때, } \left\lfloor \frac{n}{10} \right\rfloor = 4 \text{이므로 } a_n = n - 40$$

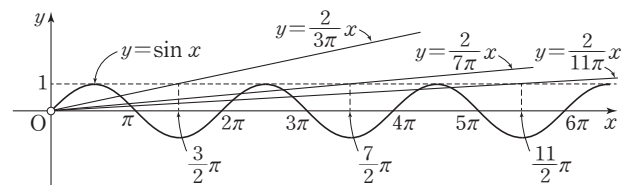
$$n = 50 \text{일 때, } \left\lfloor \frac{50}{10} \right\rfloor = 5 \text{이므로 } a_{50} = 50 - 50 = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{50} a_k &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_9) + (a_{10} + a_{11} + \cdots + a_{19}) \\ &\quad + \cdots + (a_{40} + a_{41} + \cdots + a_{49}) + a_{50} \\ &= (1 + 2 + \cdots + 9) \\ &\quad + \{(10 - 10) + (11 - 10) + \cdots + (19 - 10)\} \\ &\quad + \cdots + \{(40 - 40) + (41 - 40) + \cdots + (49 - 40)\} + 0 \\ &= 5(1 + 2 + 3 + \cdots + 9) \\ &= 5 \sum_{k=1}^9 k \\ &= 5 \times \frac{9 \times 10}{2} \\ &= 225 \end{aligned}$$

1172 답 9

방정식 $\sin x = \frac{2}{(4n-1)\pi} x$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)의 양의 실근의 개수

a_n 은 두 함수 $y = \sin x$ 와 $y = \frac{2}{(4n-1)\pi} x$ 의 그래프가 $x > 0$ 에서 만나는 점의 개수와 같다.



위의 그림에서 $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, \dots$ 이므로

$$a_n = 2n - 1$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{n=1}^9 \frac{40}{(a_n+1)(a_n+3)} &= \sum_{n=1}^9 \frac{40}{2n(2n+2)} \\ &= 10 \sum_{n=1}^9 \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 10 \sum_{n=1}^9 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 10 \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10} \right) \right\} \\ &= 10 \left(1 - \frac{1}{10} \right) \\ &= 9 \end{aligned}$$

1173 **답** 160

$27 \times 2^{n-1} = 3^3 \times 2^{n-1}$ 이므로 자연수 $27 \times 2^{n-1}$ 의 양의 약수의 개수

a_n 은

$$a_n = (3+1)\{(n-1)+1\} = 4n$$

$$\begin{aligned} \therefore f(n) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4k} + \sqrt{4k+4}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \\ &= \frac{1}{2} \{(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) \\ &\quad + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{n+1} - 1) \end{aligned}$$

$f(n)$ 의 값이 자연수가 되려면 $\sqrt{n+1}$ 은 3 이상의 홀수이어야 한다.

이때 n 은 100 이하의 자연수이므로

$$3 \leq \sqrt{n+1} \leq \sqrt{101} < 11$$

즉, $\sqrt{n+1}$ 의 값이 3, 5, 7, 9일 때 $f(n)$ 의 값이 자연수가 된다.

$$\sqrt{n+1}=3 \text{ 이면 } n=8$$

$$\sqrt{n+1}=5 \text{ 이면 } n=24$$

$$\sqrt{n+1}=7 \text{ 이면 } n=48$$

$$\sqrt{n+1}=9 \text{ 이면 } n=80$$

따라서 구하는 합은

$$8+24+48+80=160$$

1174 **답** $\sqrt{6}$

공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면

$$a_3 = a+4, a_5 = a+8$$

(i) $a_3 \geq 0$ 이면 $|a_3| = |a_5|$ 에서 $a_3 = a_5$ 이므로

$$a+4 = a+8$$

즉, 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_3 < 0$ 이면 $|a_3| = |a_5|$ 에서 $-a_3 = a_5$ 이므로

$$-(a+4) = a+8$$

$$2a = -12 \quad \therefore a = -6$$

(i), (ii)에서 $a = -6$

$$\therefore a_n = -6 + (n-1) \times 2 = 2n-8$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^6 \frac{1}{\sqrt{|a_{k+1}|} + \sqrt{|a_k|}} \\ &= \sum_{k=1}^6 \frac{1}{\sqrt{|2k-6|} + \sqrt{|2k-8|}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{0} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{0}} + \frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{2}} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{4}} \\ &= \frac{1}{2} \{(\sqrt{6} - \sqrt{4}) + (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{0}) + (\sqrt{2} - \sqrt{0}) \\ &\quad + (\sqrt{4} - \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - \sqrt{4})\} \\ &= \frac{1}{2} \times 2\sqrt{6} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

10 / 수학적 귀납법

A 개념 확인

180~181쪽

1175 **답** 32

$a_{n+1} = a_n + 3n$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 3 \times 1 = 2 + 3 = 5$$

$$a_3 = a_2 + 3 \times 2 = 5 + 6 = 11$$

$$a_4 = a_3 + 3 \times 3 = 11 + 9 = 20$$

$$\therefore a_5 = a_4 + 3 \times 4 = 20 + 12 = 32$$

1176 **답** -1

$a_{n+1} = a_n + (-1)^n$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + (-1)^1 = -1 - 1 = -2$$

$$a_3 = a_2 + (-1)^2 = -2 + 1 = -1$$

$$a_4 = a_3 + (-1)^3 = -1 - 1 = -2$$

$$\therefore a_5 = a_4 + (-1)^4 = -2 + 1 = -1$$

1177 **답** -3

$a_{n+1} = -a_n + 4$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2 = -a_1 + 4 = -(-3) + 4 = 7$$

$$a_3 = -a_2 + 4 = -7 + 4 = -3$$

$$a_4 = -a_3 + 4 = -(-3) + 4 = 7$$

$$\therefore a_5 = -a_4 + 4 = -7 + 4 = -3$$

1178 **답** -1

$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ 의 n 에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$$a_3 = a_1 + a_2 = -2 + 1 = -1$$

$$a_4 = a_2 + a_3 = 1 + (-1) = 0$$

$$\therefore a_5 = a_3 + a_4 = -1 + 0 = -1$$

1179 **답** $\frac{1}{360}$

$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+2}$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{a_1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2+2} = \frac{\frac{1}{3}}{4} = \frac{1}{12}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{3+2} = \frac{\frac{1}{12}}{5} = \frac{1}{60}$$

$$\therefore a_5 = \frac{a_4}{4+2} = \frac{\frac{1}{60}}{6} = \frac{1}{360}$$

1180 **답** 53

$a_{n+1} = a_n + 6$, 즉 $a_{n+1} - a_n = 6$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 6인 등차수열이고, 첫째항이 -1이므로

$$a_{10} = -1 + 9 \times 6 = 53$$

1181 [답] -15

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고, 첫째항이 3, 공차가 $a_2-a_1=1-3=-2$ 이므로
 $a_{10}=3+9 \times (-2)=-15$

1182 [답] 3^{10}

$a_{n+1}=3a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 3인 등비수열이고, 첫째항이 3이므로
 $a_{10}=3 \times 3^9=3^{10}$

1183 [답] $-\frac{1}{128}$

$a_{n+1}=\frac{a_n}{2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이고, 첫째항이 -4 이므로
 $a_{10}=-4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9=-\left(\frac{1}{2}\right)^7=-\frac{1}{128}$

1184 [답] -3^7

$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고, 첫째항이 $\frac{1}{9}$, 공비가
 $a_2 \div a_1 = -\frac{1}{3} \div \frac{1}{9} = -3$ 이므로
 $a_{10}=\frac{1}{9} \times (-3)^9=-3^7$

1185 [답] $a_n=\frac{-n^2+n+10}{2}$

$a_{n+1}=a_n-n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면
 $a_2=a_1-1$
 $a_3=a_2-2=a_1-1-2$
 $a_4=a_3-3=a_1-1-2-3$
 $\vdots$
 $\therefore a_n=a_{n-1}-(n-1)$
 $=a_1-1-2-3-\cdots-(n-1)$
 $=5-\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}$
 $=5-\sum_{k=1}^{n-1}k=5-\frac{(n-1)n}{2}$
 $=\frac{-n^2+n+10}{2}$

1186 [답] $a_n=\frac{3n^2-3n+2}{2}$

$a_{n+1}=a_n+3n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면
 $a_2=a_1+3 \times 1$
 $a_3=a_2+3 \times 2=a_1+3 \times 1+3 \times 2$
 $a_4=a_3+3 \times 3=a_1+3 \times 1+3 \times 2+3 \times 3$
 $\vdots$
 $\therefore a_n=a_{n-1}+3 \times (n-1)$
 $=a_1+3 \times 1+3 \times 2+3 \times 3+\cdots+3 \times (n-1)$
 $=1+3\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}$
 $=1+3\sum_{k=1}^{n-1}k=1+3 \times \frac{(n-1)n}{2}$
 $=\frac{3n^2-3n+2}{2}$

1187 [답] $a_n=2^n+1$

$a_{n+1}-a_n=2^n$ 에서 $a_{n+1}=a_n+2^n$
 $a_{n+1}=a_n+2^n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면
 $a_2=a_1+2^1$
 $a_3=a_2+2^2=a_1+2^1+2^2$
 $a_4=a_3+2^3=a_1+2^1+2^2+2^3$
 $\vdots$
 $\therefore a_n=a_{n-1}+2^{n-1}=a_1+2^1+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}$
 $=3+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=3+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}$
 $=2^n+1$

1188 [답] $a_n=\frac{6}{2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n}$

$a_{n+1}=\frac{a_n}{n+1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면
 $a_2=\frac{a_1}{2}$
 $a_3=\frac{a_2}{3}=\frac{a_1}{2} \times \frac{1}{3}$
 $a_4=\frac{a_3}{4}=\frac{a_1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}$
 $\vdots$
 $\therefore a_n=\frac{a_{n-1}}{n}=\frac{a_1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \cdots \times \frac{1}{n}$
 $=\frac{6}{2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times n}$

1189 [답] $a_n=\frac{4}{n+1}$

$a_{n+1}=\frac{n+1}{n+2}a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면
 $a_2=\frac{2}{3}a_1$
 $a_3=\frac{3}{4}a_2=\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}a_1$
 $a_4=\frac{4}{5}a_3=\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}a_1$
 $\vdots$
 $\therefore a_n=\frac{n}{n+1}a_{n-1}=\frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times a_1$
 $=\frac{2}{n+1} \times 2=\frac{4}{n+1}$

1190 [답] $a_n=(-2)^{\frac{(n-1)n}{2}}$

$a_{n+1}=(-2)^na_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면
 $a_2=(-2)^1a_1$
 $a_3=(-2)^2a_2=(-2)^2 \times (-2)^1a_1$
 $a_4=(-2)^3a_3=(-2)^3 \times (-2)^2 \times (-2)^1a_1$
 $\vdots$
 $\therefore a_n=(-2)^{n-1}a_{n-1}$
 $=(-2)^{n-1} \times (-2)^{n-2} \times \cdots \times (-2)^3 \times (-2)^2 \times (-2)^1a_1$
 $=(-2)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+3+2+1} \times 1$
 $=(-2)^{\frac{(n-1)n}{2}}$

1191 [답] (가) 1 (나) $k+1$

1192 답 ⑤

$a_{n+1}-a_n=3$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 3인 등차수열이고, 첫째항이 -2 이므로

$$a_n = -2 + (n-1) \times 3 = 3n-5$$

$$a_k = 232 \text{에서 } 3k-5=232$$

$$3k=237 \quad \therefore k=79$$

1193 답 124

$a_{n+1}=a_n-4$, 즉 $a_{n+1}-a_n=-4$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 -4 인 등차수열이고, 첫째항이 200 이므로

$$a_{20}=200+19 \times (-4)=124$$

1194 답 53

$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$, 즉 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_6=8 \text{에서 } a+5d=8 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_{12}=20 \text{에서 } a+11d=20 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a=-2, d=2$$

$$\therefore a_n = -2 + (n-1) \times 2 = 2n-4 \quad \cdots \textcircled{i}$$

$$a_k > 100 \text{에서 } 2k-4 > 100$$

$$2k > 104 \quad \therefore k > 52 \quad \cdots \textcircled{ii}$$

$$\text{따라서 구하는 자연수 } k \text{의 최솟값은 } 53 \text{이다.} \quad \cdots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 일반항 a_n 구하기	60 %
② $a_k > 100$ 을 만족시키는 k 의 값의 범위 구하기	30 %
③ 자연수 k 의 최솟값 구하기	10 %

1195 답 $\frac{16}{17}$

$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$, 즉 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고, 첫째항이 2 , 공차가 $a_2-a_1=4-2=2$ 이므로

$$S_n = \frac{n\{2 \times 2 + (n-1) \times 2\}}{2} = n(n+1)$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{16} \frac{1}{S_k} &= \sum_{k=1}^{16} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{16} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{17} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{17} = \frac{16}{17} \end{aligned}$$

1196 답 9

$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_4=56 \text{에서 } \frac{4\{2a+(4-1)d\}}{2}=56$$

$$\therefore 2a+3d=28 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_8=80 \text{에서 } \frac{8\{2a+(8-1)d\}}{2}=80$$

$$\therefore 2a+7d=20 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=17, d=-2$

$$\therefore a_n = 17 + (n-1) \times (-2) = -2n+19$$

$$a_n < 0 \text{에서 } -2n+19 < 0$$

$$2n > 19 \quad \therefore n > \frac{19}{2} = 9.5$$

따라서 제10항부터 음수이므로 첫째항부터 제9항까지의 합이 최대가 된다.

$$\therefore n=9$$

1197 답 ④

$a_n=2a_{n+1}$, 즉 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로 첫째항을 a 라 하면

$$a_2=4 \text{에서 } a \times \frac{1}{2}=4 \quad \therefore a=8$$

$$\therefore a_n = 8 \times \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n-4}$$

$$a_k = \frac{1}{32} \text{에서 } \left(\frac{1}{2} \right)^{k-4} = \left(\frac{1}{2} \right)^5$$

$$k-4=5 \quad \therefore k=9$$

1198 답 ②

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3$, 즉 $a_{n+1}=3a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 3인 등비수열이고, 첫째항이 3이므로

$$a_n = 3 \times 3^{n-1} = 3^n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^5 a_k = \sum_{k=1}^5 3^k = \frac{3(3^5-1)}{3-1} = 363$$

1199 답 ④

$a_{n+1}=\sqrt{a_n a_{n+2}}$, 즉 $a_{n+1}^2=a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고, 첫째항이 1이므로 공비를 r 라 하면

$$\frac{a_4}{a_1} + \frac{a_5}{a_2} + \frac{a_6}{a_3} = 81 \text{에서 } r^3 + r^3 + r^3 = 81$$

$$3r^3=81, r^3=27 \quad \therefore r=3$$

$$\therefore \frac{a_{20}}{a_{10}} = r^{10} = 3^{10}$$

1200 답 3069

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 즉 $a_{n+1}^2=a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고, 첫째항이 3이므로 공비를 r 라 하면

$$a_4=24 \text{에서 } 3r^3=24$$

$$r^3=8 \quad \therefore r=2$$

$$\therefore S_{10} = \frac{3(2^{10}-1)}{2-1} = 3069$$

1201 답 510

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$D = (-a_{n+1})^2 - 4a_n^2 = 0$$

$$a_{n+1}^2 - 4a_n^2 = 0, (a_{n+1}+2a_n)(a_{n+1}-2a_n) = 0$$

이때 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로

$$a_{n+1}-2a_n=0$$

$$\therefore a_{n+1}=2a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$$\sum_{k=1}^8 a_k = \frac{2(2^8-1)}{2-1} = 510$$

1202 답 ①

$a_{n+1}=a_n+2n^2$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 6을 차례로 대입하면

$$a_2=a_1+2 \times 1^2$$

$$a_3=a_2+2 \times 2^2=a_1+2 \times 1^2+2 \times 2^2$$

$$a_4=a_3+2 \times 3^2=a_1+2 \times 1^2+2 \times 2^2+2 \times 3^2$$

⋮

$$\therefore a_7=a_6+2 \times 6^2=a_1+2 \times 1^2+2 \times 2^2+\cdots+2 \times 6^2$$

$$=a_1+2(1^2+2^2+3^2+\cdots+6^2)$$

$$=2+2 \sum_{k=1}^6 k^2$$

$$=2+2 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6}=184$$

1203 답 ②

$a_{n+1}=a_n+3^n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2=a_1+3^1$$

$$a_3=a_2+3^2=a_1+3^1+3^2$$

$$a_4=a_3+3^3=a_1+3^1+3^2+3^3$$

⋮

$$\therefore a_n=a_{n-1}+3^{n-1}=a_1+3^1+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1}$$

$$=a_1+(3^1+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1})$$

$$=4+\sum_{k=1}^{n-1} 3^k$$

$$=4+\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}=\frac{3^n+5}{2}$$

$$\text{즉, } a_k=124 \text{에서 } \frac{3^k+5}{2}=124$$

$$3^k+5=248, 3^k=243=3^5 \quad \therefore k=5$$

1204 답 165

$a_{n+1}=a_n+f(n)$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2=a_1+f(1)$$

$$a_3=a_2+f(2)=a_1+f(1)+f(2)$$

$$a_4=a_3+f(3)=a_1+f(1)+f(2)+f(3)$$

⋮

$$\therefore a_n=a_{n-1}+f(n-1)$$

$$=a_1+f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)$$

$$=a_1+\{f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n-1)\}$$

$$=2+\sum_{k=1}^{n-1} f(k)=2+2(n-1)^2+1$$

$$=2n^2-4n+5$$

$$\therefore a_{10}=2 \times 10^2-4 \times 10+5=165$$

1205 답 41

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$a_{n+1}=a_n+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \text{의 } n \text{에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면}$$

$$a_2=a_1+2\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$a_3=a_2+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=a_1+2\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

$$a_4=a_3+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=a_1+2\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

⋮

$$\therefore a_n=a_{n-1}+2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=a_1+2\left(1-\frac{1}{2}\right)+2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)$$

$$+\cdots+2\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$=a_1+2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\right.$$

$$\left.+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$=5+2\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$=7-\frac{2}{n}$$

$$\text{즉, } |a_k-7|<\frac{1}{20} \text{에서 } \left|-\frac{2}{k}\right|<\frac{1}{20}$$

$$\frac{2}{k}<\frac{1}{20} (\because k>0) \quad \therefore k>40$$

따라서 구하는 자연수 k 의 최솟값은 41이다.

1206 답 496

$a_{n+1}=\frac{n+3}{n+1}a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 29를 차례로 대입하면

$$a_2=\frac{4}{2}a_1$$

$$a_3=\frac{5}{3}a_2=\frac{5}{3} \times \frac{4}{2}a_1$$

$$a_4=\frac{6}{4}a_3=\frac{6}{4} \times \frac{5}{3} \times \frac{4}{2}a_1$$

⋮

$$\therefore a_{30}=\frac{32}{30}a_{29}=\frac{32}{30} \times \frac{31}{29} \times \frac{30}{28} \times \cdots \times \frac{5}{3} \times \frac{4}{2}a_1$$

$$=\frac{32 \times 31}{3 \times 2} \times 3=496$$

1207 답 ⑤

$$\sqrt{n+1}a_{n+1}=\sqrt{na_n} \text{에서 } a_{n+1}=\frac{\sqrt{na_n}}{\sqrt{n+1}}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}a_n$$

$$a_{n+1}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}a_n \text{의 } n \text{에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면}$$

$$a_2=\sqrt{\frac{1}{2}}a_1$$

$$a_3=\sqrt{\frac{2}{3}}a_2=\sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{1}{2}}a_1$$

$$a_4=\sqrt{\frac{3}{4}}a_3=\sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{1}{2}}a_1$$

⋮

$$\therefore a_n=\sqrt{\frac{n-1}{n}}a_{n-1}=\sqrt{\frac{n-1}{n}} \times \cdots \times \sqrt{\frac{3}{4}} \times \sqrt{\frac{2}{3}} \times \sqrt{\frac{1}{2}}a_1$$

$$=\sqrt{\frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}} \times 1$$

$$=\sqrt{\frac{1}{n}}$$

$$\text{즉, } a_k=\frac{1}{7} \text{에서 } \sqrt{\frac{1}{k}}=\frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{k}=\frac{1}{49} \quad \therefore k=49$$

1208 [답] 165

$a_{n+1}=2^n a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2=2^1 a_1$$

$$a_3=2^2 a_2=2^2 \times 2^1 a_1$$

$$a_4=2^3 a_3=2^3 \times 2^2 \times 2^1 a_1$$

⋮

$$\therefore a_n=2^{n-1} a_{n-1}=2^{n-1} \times \cdots \times 2^3 \times 2^2 \times 2^1 a_1$$

$$=2^{(n-1)+\cdots+3+2+1} \times 1=2^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} \log_2 a_k &= \sum_{k=1}^{10} \log_2 2^{\frac{(k-1)k}{2}} = \sum_{k=1}^{10} \frac{(k-1)k}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{10} k^2 - \sum_{k=1}^{10} k \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \times 11 \times 21}{6} - \frac{10 \times 11}{2} \right) = 165 \end{aligned}$$

1209 [답] ②

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{n+1} \text{에서 } \frac{1}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{a_n}$$

$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{a_n}$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 39를 차례로 대입하면

$$\frac{1}{a_2}=\frac{2}{a_1}=2 \times 1$$

$$\frac{1}{a_3}=\frac{3}{a_2}=3 \times 2 \times 1$$

$$\frac{1}{a_4}=\frac{4}{a_3}=4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$\frac{1}{a_5}=\frac{5}{a_4}=5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

⋮

$$\frac{1}{a_{40}}=\frac{40}{a_{39}}=40 \times 39 \times \cdots \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

이때 $3 \times 4 \times 5 = 60$ 이므로 $\frac{1}{a_5}, \frac{1}{a_6}, \frac{1}{a_7}, \dots, \frac{1}{a_{40}}$ 은 모두 60으로 나누어떨어진다.

즉, $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{40}}$ 을 60으로 나누었을 때의 나머지는

$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}$ 을 60으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

따라서 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} = 1 + 2 + 6 + 24 = 33$ 이므로 구하는 나머지는 33이다.

1210 [답] ①

$a_{n+1}=-2a_n+6$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2=-2a_1+6=-2 \times (-2)+6=10$$

$$a_3=-2a_2+6=-2 \times 10+6=-14$$

$$a_4=-2a_3+6=-2 \times (-14)+6=34$$

$$a_5=-2a_4+6=-2 \times 34+6=-62$$

$$\therefore a_5-a_3=-62-(-14)=-48$$

1211 [답] $\frac{1}{11}$

$a_{n+1}=\frac{a_n}{1+na_n}$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2=\frac{a_1}{1+a_1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$a_3=\frac{a_2}{1+2a_2}=\frac{\frac{1}{2}}{1+2 \times \frac{1}{2}}=\frac{1}{4}$$

$$a_4=\frac{a_3}{1+3a_3}=\frac{\frac{1}{4}}{1+3 \times \frac{1}{4}}=\frac{1}{7}$$

$$\therefore a_5=\frac{a_4}{1+4a_4}=\frac{\frac{1}{7}}{1+4 \times \frac{1}{7}}=\frac{1}{11}$$

1212 [답] 7

$a_{n+1}=(-1)^n a_n + \frac{n+1}{2}$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2=(-1)^1 a_1 + \frac{1+1}{2}=-a_1+1$$

$$a_3=(-1)^2 a_2 + \frac{2+1}{2}=a_2+\frac{3}{2}=-a_1+1+\frac{3}{2}=-a_1+\frac{5}{2}$$

$$a_4=(-1)^3 a_3 + \frac{3+1}{2}=-a_3+2=-\left(-a_1+\frac{5}{2}\right)+2=a_1-\frac{1}{2}$$

$$a_5=(-1)^4 a_4 + \frac{4+1}{2}=a_4+\frac{5}{2}=a_1-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=a_1+2 \quad \cdots \cdots \textcircled{i}$$

$$\text{즉, } a_5=9 \text{에서 } a_1+2=9 \quad \therefore a_1=7 \quad \cdots \cdots \textcircled{ii}$$

채점 기준

① 주어진 식의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하여 a_5 를 a_1 에 대한 식으로 나타내기	70 %
② a_1 구하기	30 %

1213 [답] ③

$a_{3n-1}=2a_n+1$, $a_{3n}=-a_n+2$, $a_{3n+1}=a_n+1$ 이므로

$$a_{11}=2a_4+1=2(a_1+1)+1$$

$$=2a_1+3=2 \times 1+3=5$$

$$a_{12}=-a_4+2=-(a_1+1)+2$$

$$=-a_1+1=-1+1=0$$

$$a_{13}=a_4+1=(a_1+1)+1$$

$$=a_1+2=1+2=3$$

$$\therefore a_{11}+a_{12}+a_{13}=5+0+3=8$$

1214 [답] ⑤

$a_{n+1}=a_n^2+a_n$ 의 양변을 a_n 으로 나누면 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_n+1$

$$\therefore \sum_{k=1}^{100} \log(a_k+1)=\sum_{k=1}^{100} \log \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

$$=\log \frac{a_2}{a_1} + \log \frac{a_3}{a_2} + \log \frac{a_4}{a_3} + \cdots + \log \frac{a_{101}}{a_{100}}$$

$$=\log \left(\frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \cdots \times \frac{a_{101}}{a_{100}} \right)$$

$$=\log a_{101}$$

1215 [답] 6

$a_{n+1}=\begin{cases} \frac{1}{2}a_n & (a_n \text{은 짝수}) \\ a_n+3 & (a_n \text{은 홀수}) \end{cases}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2=\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2} \times 6=3, a_3=a_2+3=3+3=6,$$

$$a_4=\frac{1}{2}a_3=\frac{1}{2} \times 6=3, a_5=a_4+3=3+3=6,$$

$$a_6=\frac{1}{2}a_5=\frac{1}{2} \times 6=3, a_7=a_6+3=3+3=6, \dots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 6, 3이 이 순서대로 반복된다.

이때 $135=2 \times 67+1$ 이므로 $a_{135}=6$

1216 **답 2**

$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 2 & (a_n \geq 3) \\ a_n + 1 & (a_n < 3) \end{cases}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 1 = 1 + 1 = 2, \quad a_3 = a_2 + 1 = 2 + 1 = 3,$$

$$a_4 = a_3 - 2 = 3 - 2 = 1, \quad a_5 = a_4 + 1 = 1 + 1 = 2,$$

$$a_6 = a_5 + 1 = 2 + 1 = 3, \quad a_7 = a_6 - 2 = 3 - 2 = 1, \dots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 2, 3이 이 순서대로 반복된다.

이때 $29 = 3 \times 9 + 2$ 이므로 $a_{29} = 2$

1217 **답 ④**

$a_n a_{n+1} a_{n+2} = 1$ 에서 $a_{n+2} = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$

$a_{n+2} = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_3 = \frac{1}{a_1 a_2} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = 1,$$

$$a_5 = \frac{1}{a_3 a_4} = \frac{1}{\frac{1}{2} \times 1} = 2, \quad a_6 = \frac{1}{a_4 a_5} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2},$$

$$a_7 = \frac{1}{a_5 a_6} = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} = 1, \dots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 2, $\frac{1}{2}$ 이 이 순서대로 반복된다.

이때 $50 = 3 \times 16 + 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{50} a_k &= 16(a_1 + a_2 + a_3) + a_1 + a_2 \\ &= 16\left(1 + 2 + \frac{1}{2}\right) + 1 + 2 = 59 \end{aligned}$$

1218 **답 4**

$a_{n+1} = (7a_n \text{을 } 5 \text{로 나누었을 때의 나머지})$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = (14 \text{를 } 5 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 4$$

$$a_3 = (28 \text{를 } 5 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 3$$

$$a_4 = (21 \text{를 } 5 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 1$$

$$a_5 = (7 \text{를 } 5 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 2$$

$$a_6 = (14 \text{를 } 5 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 4$$

$$a_7 = (28 \text{를 } 5 \text{로 나누었을 때의 나머지}) = 3$$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 2, 4, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $100 = 4 \times 25$, $101 = 4 \times 25 + 1$, $102 = 4 \times 25 + 2$,

$103 = 4 \times 25 + 3$ 이므로

$$a_{100} + a_{101} + a_{102} - a_{103} = 1 + 2 + 4 - 3 = 4$$

1219 **답 11**

$a_2 = p$ (p 는 상수)라 하고, (가)에서 주어진 식의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_3 = a_1 - 4 = 7 - 4 = 3$$

$$a_4 = a_2 - 4 = p - 4$$

$$a_5 = a_3 - 4 = 3 - 4 = -1$$

$$a_6 = a_4 - 4 = (p - 4) - 4 = p - 8$$

(나)에서 수열 $\{a_n\}$ 은 6개의 수가 반복되고, $50 = 6 \times 8 + 2$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{50} a_k &= 8(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) + a_1 + a_2 \\ &= 8\{7 + p + 3 + (p - 4) + (-1) + (p - 8)\} + 7 + p \\ &= 25p - 17 \end{aligned}$$

즉, $25p - 17 = 258$ 이므로

$$25p = 275 \quad \therefore p = 11$$

$$\therefore a_2 = p = 11$$

1220 **답 ④**

$S_n = 3a_n - 4$ 에서 $S_{n+1} = 3a_{n+1} - 4$

한편 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = 3a_{n+1} - 4 - (3a_n - 4)$$

$$2a_{n+1} = 3a_n \quad \therefore a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공비가 $\frac{3}{2}$ 인 등비수열이므로

$$a_{20} = 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{19} = \frac{3^{19}}{2^{18}}$$

1221 **답 $-\frac{1}{24}$**

$S_{n+1} = \frac{1}{2}S_n + \frac{1}{3}$ 의 n 에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$$S_2 = \frac{1}{2}S_1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$S_3 = \frac{1}{2}S_2 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{2}S_3 + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = \frac{17}{24}$$

$$\therefore a_4 = S_4 - S_3 = \frac{17}{24} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{24}$$

1222 **답 -62**

$S_n = 2a_n + 2n$ 에서 $S_{n+1} = 2a_{n+1} + 2(n+1)$

한편 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = 2a_{n+1} + 2(n+1) - (2a_n + 2n)$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n - 2$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2 = 2a_1 - 2 = 2 \times (-2) - 2 = -6$$

$$a_3 = 2a_2 - 2 = 2 \times (-6) - 2 = -14$$

$$a_4 = 2a_3 - 2 = 2 \times (-14) - 2 = -30$$

$$\therefore a_5 = 2a_4 - 2 = 2 \times (-30) - 2 = -62$$

1223 **답 10**

$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = S_n$ 이므로

$$S_1 = a_1 = 5, \quad a_{n+1} = S_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

한편 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)이므로

$$S_{n+1} - S_n = S_n \quad \therefore S_{n+1} = 2S_n$$

즉, 수열 $\{S_n\}$ 은 첫째항이 5, 공비가 2인 등비수열이므로

$$S_n = 5 \times 2^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\therefore a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 5 \times 2^{n-1} - 5 \times 2^{n-2} \\ &= 5 \times 2^{n-2} \quad (n \geq 2)\end{aligned}$$

$$5 \times 2^{k-2} > 1000 \text{에서 } 2^{k-2} > 200$$

$$\text{이때 } 2^7 = 128, 2^8 = 256 \text{이므로}$$

$$k-2 \geq 8 \quad \therefore k \geq 10$$

따라서 구하는 자연수 k 의 최솟값은 10이다.

1224 답 136

$$a_1 = 2 \times (12 - 4) = 16$$

이 용기에 n 시간 후 살아 있는 세균의 수가 a_n 이면 1시간 동안 4마리는 죽고 나머지는 각각 2마리로 분열하므로 $(n+1)$ 시간 후 살아 있는 세균의 수 a_{n+1} 은

$$a_{n+1} = 2(a_n - 4) \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2 = 2(a_1 - 4) = 2 \times (16 - 4) = 24$$

$$a_3 = 2(a_2 - 4) = 2 \times (24 - 4) = 40$$

$$a_4 = 2(a_3 - 4) = 2 \times (40 - 4) = 72$$

$$\therefore a_5 = 2(a_4 - 4) = 2 \times (72 - 4) = 136$$

1225 답 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 8 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

물 a_n L의 절반을 버리고 다시 8 L의 물을 채워 넣었을 때 수조에 들어 있는 물의 양이 a_{n+1} L이므로

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 8 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

1226 답 7048

$$a_1 = 10000 \times (1 - 0.2) + 1000 = 9000$$

$a_{n+1} = a_n \times (1 - 0.2) + 1000$ 이므로 이 식의 n 에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 \times (1 - 0.2) + 1000 = 9000 \times 0.8 + 1000 = 8200$$

$$a_3 = a_2 \times (1 - 0.2) + 1000 = 8200 \times 0.8 + 1000 = 7560$$

$$\therefore a_4 = a_3 \times (1 - 0.2) + 1000 = 7560 \times 0.8 + 1000 = 7048$$

1227 답 $\frac{11}{6}$

6%의 소금물 50 g에 들어 있는 소금의 양은

$$50 \times \frac{6}{100} = 3 \text{ (g)}$$

$a_n\%$ 의 소금물 250 g에 들어 있는 소금의 양은

$$250 \times \frac{a_n}{100} = \frac{5}{2}a_n \text{ (g)} \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{\frac{5}{2}a_n + 3}{300} \times 100 = \frac{5}{6}a_n + 1 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

$$\text{따라서 } p = \frac{5}{6}, q = 1 \text{이므로 } p + q = \frac{11}{6} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① 6%의 소금물 50 g에 들어 있는 소금의 양과 $a_n\%$ 의 소금물 250 g에 들어 있는 소금의 양 구하기	40 %
② a_n, a_{n+1} 사이의 관계식 구하기	50 %
③ $p+q$ 의 값 구하기	10 %

1228 답 $a_{n+1} = a_n + 4n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 4 \times 1$$

$$a_3 = a_2 + 4 \times 2$$

$$a_4 = a_3 + 4 \times 3$$

⋮

$$\therefore a_{n+1} = a_n + 4n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

1229 답 30

n 개의 원이 그려진 평면에 1개의 원을 추가하면 이 원은 기존의 n 개의 원과 각각 2개의 점에서 만나므로 $2n$ 개의 새로운 교점이 생긴다. 즉, $(n+1)$ 개의 원의 교점은 n 개의 원의 교점보다 $2n$ 개가 많으므로

$$a_{n+1} = a_n + 2n$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 2 \times 1$$

$$a_3 = a_2 + 2 \times 2 = a_1 + 2 \times 1 + 2 \times 2$$

$$a_4 = a_3 + 2 \times 3 = a_1 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3$$

⋮

$$\therefore a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$$

$$= a_1 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + 2(n-1)$$

$$= a_1 + 2\{1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)\}$$

$$= 0 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k = 2 \times \frac{(n-1)n}{2} = n^2 - n$$

$$\therefore a_6 = 6^2 - 6 = 30$$

1230 답 250

$a_1 = 2, a_2 = 4$ 이므로 a_3 은 점 A가 꼭짓점 P_4 를 출발하여 4만큼 이동하므로 꼭짓점 P_3 에 도착한다.

$$\therefore a_3 = 3$$

또 a_4 는 점 A가 꼭짓점 P_3 을 출발하여 3만큼 이동하므로 꼭짓점 P_1 에 도착한다.

$$\therefore a_4 = 1$$

또 a_5 는 점 A가 꼭짓점 P_1 을 출발하여 1만큼 이동하므로 꼭짓점 P_2 에 도착한다.

$$\therefore a_5 = 2$$

또 a_6 은 점 A가 꼭짓점 P_2 를 출발하여 2만큼 이동하므로 꼭짓점 P_4 에 도착한다.

$$\therefore a_6 = 4$$

⋮

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 2, 4, 3, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $100 = 4 \times 25$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{100} a_k = 25(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 25 \times (2 + 4 + 3 + 1) = 250$$

1231 답 ⑤

$p(1)$ 이 참이면 $p(3), p(5)$ 가 참이다.

$p(3)$ 이 참이면 $p(3 \times 3) = p(9), p(5 \times 3) = p(15)$ 가 참이다.

$p(5)$ 가 참이면 $p(5 \times 5) = p(25)$ 가 참이다.

⋮

즉, $p(1)$ 이 참이면 음이 아닌 정수 a, b 에 대하여 $p(3^a \times 5^b)$ 이 참이다.

- ① $p(30)=p(2 \times 3 \times 5)$
 ② $p(60)=p(2^2 \times 3 \times 5)$
 ③ $p(105)=p(3 \times 5 \times 7)$
 ④ $p(120)=p(2^3 \times 3 \times 5)$
 ⑤ $p(225)=p(3^2 \times 5^2)$

따라서 반드시 참인 것은 ⑤ $p(225)$ 이다.

1232 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

- ㄱ. $p(1)$ 이 참이면 $p(3), p(5), p(7)$ 이 참이다.
 ㄴ. $p(2)$ 가 참이면 $p(4), p(6), p(8), \dots, p(20)$ 이 참이다.
 ㄷ. $p(1)$ 이 참이면 $p(3), p(5), p(7), \dots, p(2n+1)$ 이 참이고,
 $p(2)$ 가 참이면 $p(4), p(6), p(8), \dots, p(2n)$ 이 참이므로 모든
 자연수 n 에 대하여 $p(n)$ 이 참이다.
 따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

1233 답 ㄱ, ㄴ, ㄷ

- ㄱ. $p(1)$ 이 참이면 $p(3), p(5), p(7), \dots, p(2n+1)$ 이 참이다.
 이때 $125=2 \times 62+1$ 이므로 $p(125)$ 는 참이다.
 ㄴ. $p(1)$ 이 참이면
 $p(2 \times 1+3)=p(5),$
 $p(2 \times 5+3)=p(13),$
 $p(2 \times 13+3)=p(29),$
 $p(2 \times 29+3)=p(61),$
 $p(2 \times 61+3)=p(125), \dots$
 가 참이다.
 ㄷ. 명제 ' $p(n+4)$ 가 거짓이면 $p(n)$ 이 거짓이다.'의 대우는
 ' $p(n)$ 이 참이면 $p(n+4)$ 가 참이다.'
 따라서 $p(1)$ 이 참이면 $p(5), p(9), p(13), \dots, p(4n+1)$ 이
 참이다.
 이때 $125=4 \times 31+1$ 이므로 $p(125)$ 는 참이다.
 따라서 보기에서 조건 ㄴ이 될 수 있는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

1234 답 ③

- (i) $n=1$ 일 때,
 $(좌변)=1 \times 2=2, (우변)=\frac{1}{3} \times 1 \times 2 \times 3=2$
 이므로 주어진 등식이 성립한다.
 (ii) $n=k$ 일 때,
 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + k(k+1)$
 $=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)$
 이 등식의 양변에 $\boxed{(7) \frac{1}{(k+1)(k+2)}}$ 를 더하면
 $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + k(k+1) + \boxed{(7) \frac{1}{(k+1)(k+2)}}$
 $=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2) + \boxed{(7) \frac{1}{(k+1)(k+2)}}$
 $= (k+1)(k+2) \left(\frac{1}{3}k+1 \right)$
 $=\frac{1}{3}(k+1)(k+2) \boxed{(4) k+3}$
 따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.
 (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

1235 답 (7) $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ (4) $\frac{k+1}{k+2}$ (다) $k+1$

- (i) $n=1$ 일 때,
 $(좌변)=\frac{1}{1 \times 2}=\frac{1}{2}, (우변)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$
 이므로 주어진 등식이 성립한다.
 (ii) $n=k$ 일 때,
 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1}$
 이 등식의 양변에 $\boxed{(7) \frac{1}{(k+1)(k+2)}}$ 을 더하면
 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} + \boxed{(7) \frac{1}{(k+1)(k+2)}}$
 $=\frac{k}{k+1} + \boxed{(7) \frac{1}{(k+1)(k+2)}}$
 $=\frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} = \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$
 $=\boxed{(4) \frac{k+1}{k+2}}$

따라서 $n=\boxed{(다) k+1}$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

- (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

1236 답 ③

- (i) $n=1$ 일 때,
 $(좌변)=1, (우변)=1$
 이므로 주어진 등식이 성립한다.
 (ii) $n=m$ 일 때,
 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $\sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} (m+1-k)^2$
 $=(-1)^0 \times m^2 + (-1)^1 \times (m-1)^2 + \dots + (-1)^{m-1} \times 1^2$
 $=\sum_{k=1}^m k$
 $n=m+1$ 일 때,
 $\sum_{k=1}^{m+1} (-1)^{k-1} (m+2-k)^2$
 $=(-1)^0 \times (m+1)^2 + (-1)^1 \times m^2 + (-1)^2 \times (m-1)^2$
 $\quad \quad \quad + \dots + (-1)^m \times 1^2$
 $=(m+1)^2 + (-1) \times \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} (m+1-k)^2$
 $=(m+1)^2 - \sum_{k=1}^m k$
 $=(m+1)^2 - \boxed{(7) \frac{m(m+1)}{2}}$
 $=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$
 $=\sum_{k=1}^{m+1} k$
 따라서 $n=m+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.
 (i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.
 따라서 $f(m)=\frac{m(m+1)}{2}$ 이므로
 $f(8)=\frac{8 \times 9}{2}=36$

1237 [답] 풀이 참조

(i) $n=1$ 일 때,

$$1 \times (1^2 + 5) = 6 \text{이므로 } 6 \text{의 배수이다.}$$

(ii) $n=k$ 일 때,

$k(k^2+5)=6m$ (m 은 자연수)이라 가정하면 $n=k+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} (k+1)\{(k+1)^2+5\} &= k^3+3k^2+8k+6 \\ &= k(k^2+5)+3k(k+1)+6 \\ &= 6m+6+3k(k+1) \\ &= 6(m+1)+3k(k+1) \end{aligned}$$

이때 k 또는 $k+1$ 이 2의 배수이므로 $3k(k+1)$ 은 6의 배수이다.

따라서 $n=k+1$ 일 때도 $n(n^2+5)$ 가 6의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $n(n^2+5)$ 는 6의 배수이다.

1238 [답] (가) 5^{k-1} (나) $2m$

(i) $n=1$ 일 때,

$$7^1+5^{1-1}=8=2 \times 4 \text{이므로 } 2 \text{로 나누어떨어진다.}$$

(ii) $n=k$ 일 때,

$7^k+5^{k-1}=2m$ (m 은 자연수)이라 가정하면

$n=k+1$ 일 때,

$$\begin{aligned} 7^{k+1}+5^k &= 7 \times 7^k + 5 \times \boxed{(가) 5^{k-1}} \\ &= 7(7^k+5^{k-1}) - 2 \times \boxed{(가) 5^{k-1}} \\ &= 7 \times \boxed{(나) 2m} - 2 \times \boxed{(가) 5^{k-1}} \\ &= 2(7m-5^{k-1}) \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 7^n+5^{n-1} 은 2로 나누어떨어진다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 7^n+5^{n-1} 은 2로 나누어떨어진다.

1239 [답] 풀이 참조

(i) $n=3$ 일 때,

$$(\text{좌변})=2^4=16, (\text{우변})=3 \times 2=6$$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 3)$ 일 때,

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2^{k+1} > k(k-1)$$

이 부등식의 양변에 2를 곱하면

$$2^{k+2} > 2k(k-1) = k^2 + k(k-2)$$

이때 $k^2+k(k-2) \geq k^2+k=k(k+1)$ 이므로

$$2^{k+2} > k(k+1)$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

1240 [답] (가) $\frac{2k+1}{k+1}$ (나) k

(i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변})=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}, (\text{우변})=\frac{2 \times 2}{2+1}=\frac{4}{3}$$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때,

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1}$$

이 부등식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1} &> \frac{2k}{k+1}+\frac{1}{k+1} \\ &= \boxed{(가) \frac{2k+1}{k+1}} \end{aligned}$$

$$\text{이때 } \boxed{(가) \frac{2k+1}{k+1}} - \frac{2(k+1)}{k+2} = \frac{\boxed{(나) k}}{(k+1)(k+2)} > 0 \text{이므로}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

1241 [답] ⑤

(i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변})=(1+h)^2=1+2h+h^2,$$

$$(\text{우변})=\boxed{(가) 1+2h}$$

이때 $h^2 > 0$ 이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때,

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$(1+h)^k > 1+kh$$

이 부등식의 양변에 $1+h$ 를 곱하면

$$\begin{aligned} (1+h)^{k+1} &> (1+kh)(1+h) \\ &= 1+(k+1)h+kh^2 \\ &> 1+\boxed{(나) k+1}h \end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 $f(h)=1+2h, g(k)=k+1$ 이므로

$$f(2)+g(-3)=1+2 \times 2+\{(-3)+1\}=3$$

AB 유형 점검

192~194쪽

1242 [답] 44

$$\log_2 a_{n+1}+1=\log_2 a_{n+1}+\log_2 2=\log_2 2a_{n+1} \text{이므로}$$

$$\log_2 2a_{n+1}=\log_2 (a_n+a_{n+2})$$

$$\therefore 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$$

수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3=8, a_7=20 \text{이므로}$$

$$a+2d=8, a+6d=20$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, d=3$

$$\therefore a_{15}=2+14 \times 3=44$$

1243 [답] 제8항

$a_{n+1}=2a_n$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 2인 등비수열이고, 첫째항이 8이므로

$$a_n = 8 \times 2^{n-1} = 2^{n+2}$$

수열 $\{a_n\}$ 이 제 n 항에서 처음으로 1000보다 커진다고 하면

$$2^{n+2} > 1000$$

$$\text{이때 } 2^9 = 512, 2^{10} = 1024 \text{이므로}$$

$$n+2 \geq 10 \quad \therefore n \geq 8$$

따라서 처음으로 1000보다 커지는 항은 제8항이다.

1244 [답] ④

$$a_{n+1} - a_n = 2n \text{에서 } a_{n+1} = a_n + 2n$$

$a_{n+1} = a_n + 2n$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 2 \times 1$$

$$a_3 = a_2 + 2 \times 2 = a_1 + 2 \times 1 + 2 \times 2$$

$$a_4 = a_3 + 2 \times 3 = a_1 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$$

$$= a_1 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 2(n-1)$$

$$= a_1 + 2\{1+2+3+\cdots+(n-1)\}$$

$$= 10 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} k = 10 + 2 \times \frac{(n-1)n}{2}$$

$$= n^2 - n + 10$$

$$a_m = 82 \text{에서 } m^2 - m + 10 = 82, m^2 - m - 72 = 0$$

$$(m+8)(m-9) = 0 \quad \therefore m = 9 \quad (\because m > 0)$$

1245 [답] 210

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) a_n = \frac{n+1}{n} a_n \text{의 } n \text{에 } 1, 2, 3, \dots \text{을 차례로 대입하면}$$

$$a_2 = \frac{2}{1} a_1$$

$$a_3 = \frac{3}{2} a_2 = \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} a_1$$

$$a_4 = \frac{4}{3} a_3 = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} a_1$$

$\vdots$

$$\therefore a_n = \frac{n}{n-1} a_{n-1} = \frac{n}{n-1} \times \cdots \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{1} a_1 = n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} (a_{2k-1} + a_{2k}) = \sum_{k=1}^{20} a_k = \sum_{k=1}^{20} k = \frac{20 \times 21}{2} = 210$$

1246 [답] ④

$$a_{n+2} = a_n + 3 \text{의 } n \text{에 } 1, 2, 3, \dots, 7 \text{을 차례로 대입하면}$$

$$a_3 = a_1 + 3 = 1 + 3 = 4, a_4 = a_2 + 3 = 2 + 3 = 5,$$

$$a_5 = a_3 + 3 = 4 + 3 = 7, a_6 = a_4 + 3 = 5 + 3 = 8,$$

$$a_7 = a_5 + 3 = 7 + 3 = 10, a_8 = a_6 + 3 = 8 + 3 = 11,$$

$$a_9 = a_7 + 3 = 10 + 3 = 13$$

$$\therefore a_8 + a_9 = 11 + 13 = 24$$

1247 [답] 33

$$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n \text{의 } n \text{에 } 1, 2, 3, \dots \text{을 차례로 대입하면}$$

$$a_3 = a_2 - a_1 = 3 - 9 = -6$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = -6 - 3 = -9$$

$$a_5 = a_4 - a_3 = -9 - (-6) = -3$$

$$a_6 = a_5 - a_4 = -3 - (-9) = 6$$

$$a_7 = a_6 - a_5 = 6 - (-3) = 9$$

$$a_8 = a_7 - a_6 = 9 - 6 = 3$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 9, 3, -6, -9, -3, 6이 이 순서대로 반복된다.

이때 $|a_k| = 3$ 을 만족시키는 항은 항의 값이 -3 또는 3일 때이므로 첫째항부터 제6항까지 a_2, a_5 의 2개이다.

즉, $100 = 6 \times 16 + 4$ 이므로 구하는 자연수 k 의 개수는

$$16 \times 2 + 1 = 33$$

1248 [답] 16

$$3S_n = a_{n+1} + 7 \text{에서 } 3S_{n-1} = a_n + 7$$

한편 $a_n = S_n - S_{n-1} (n=2, 3, 4, \dots)$ 이므로

$$3a_n = 3S_n - 3S_{n-1} = (a_{n+1} + 7) - (a_n + 7) = a_{n+1} - a_n$$

$$\therefore a_{n+1} = 4a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 4인 등비수열이므로 첫째항을 a 라 하면

$$a_n = a \times 4^{n-1}$$

$$\text{즉, } a_{20} = ka_{18} \text{에서 } a \times 4^{19} = k \times (a \times 4^{17})$$

$$\therefore k = 4^2 = 16$$

1249 [답] ①

점 P_1 의 y 좌표는 점 A 의 y 좌표와 같으므로 2^{64}

$$\text{점 } P_1 \text{의 } x \text{좌표는 } 2^{64} = 16^x \text{에서 } 16^{16} = 16^x \quad \therefore x = 16$$

$$\therefore P_1(16, 2^{64})$$

점 Q_1 의 x 좌표는 점 P_1 의 x 좌표와 같으므로 $x_1 = 16$

점 Q_n 의 x 좌표는 x_n 이므로 y 좌표는 2^{x_n} 이다. $\therefore Q_n(x_n, 2^{x_n})$

점 P_{n+1} 의 x 좌표는 점 Q_{n+1} 의 x 좌표와 같고, 점 P_{n+1} 의 y 좌표는 점 Q_n 의 y 좌표와 같으므로

$$16^{x_{n+1}} = 2^{x_n}$$

$$2^{4x_{n+1}} = 2^{x_n}, 4x_{n+1} = x_n \quad \therefore x_{n+1} = \frac{1}{4} x_n$$

따라서 수열 $\{x_n\}$ 은 첫째항이 16, 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이므로

$$x_n = 16 \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-3}$$

$x_n < \frac{1}{k}$ 을 만족시키는 n 의 최솟값이 6이 되려면 $x_6 < \frac{1}{k} \leq x_5$ 이므로

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 < \frac{1}{k} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\frac{1}{64} < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{16} \quad \therefore 16 \leq k < 64$$

따라서 자연수 k 는 16, 17, 18, ..., 63의 48개이다.

1250 [답] ④

ㄱ. $p(1)$ 이 참이면 $p(4), p(7), p(10), \dots, p(3k+1)$ 이 참이다.

ㄴ. $p(2)$ 가 참이면 $p(5), p(8), p(11), \dots, p(3k+2)$ 가 참이다.

ㄷ. $p(1), p(2), p(3)$ 이 참이면 $p(4), p(5), p(6), \dots, p(k)$ 가 참이다.

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

1251 답 27

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변})=1^2=1, (\text{우변})=\frac{1}{6} \times 1 \times 2 \times 3=1$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때,

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

이 등식의 양변에 $\boxed{(7) (k+1)^2}$ 을 더하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+\boxed{(7) (k+1)^2}$$

$$=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+\boxed{(7) (k+1)^2}$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+k+\boxed{(4) 6k+6})$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

따라서 $f(k)=(k+1)^2$, $g(k)=6k+6$ 이므로

$$f(2)+g(2)=(2+1)^2+(6 \times 2+6)=27$$

1252 답 (7) 3 (4) 5 (다) 3m

(i) $n=1$ 일 때,

$$a_5=a_3+a_4=(a_1+a_2)+(a_2+a_3)=a_1+2a_2+a_3$$

$$=a_1+2a_2+(a_1+a_2)=2a_1+3a_2=5$$

이므로 주어진 명제는 참이다.

(ii) $n=k$ 일 때,

$a_{5k}=5m$ (m 은 자연수)이라 가정하면

$n=k+1$ 일 때,

$$a_{5(k+1)}=a_{5k+3}+a_{5k+4}$$

$$=(a_{5k+1}+a_{5k+2})+(a_{5k+2}+a_{5k+3})$$

$$=a_{5k+1}+2a_{5k+2}+a_{5k+3}$$

$$=a_{5k+1}+2a_{5k+2}+(a_{5k+1}+a_{5k+2})$$

$$=2a_{5k+1}+3a_{5k+2}$$

$$=2a_{5k+1}+3(a_{5k}+a_{5k+1})$$

$$=\boxed{(7) 3} a_{5k}+\boxed{(4) 5} a_{5k+1}$$

$$=15m+5a_{5k+1}$$

$$=5(\boxed{(다) 3m}+a_{5k+1})$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 명제가 참이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 명제는 참이다.

1253 답 ②

(i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변})=\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}, (\text{우변})=\boxed{(7) \sqrt{2}}$$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 2$)일 때,

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}>\sqrt{k}$$

이 부등식의 양변에 $\frac{1}{\sqrt{k+1}}$ 을 더하면

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

이때

$$\begin{aligned} \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{\boxed{(4) k+1}}{\sqrt{k+1}} &= \frac{\sqrt{k}\sqrt{k+1}+1-(k+1)}{\sqrt{k+1}} \\ &= \frac{\sqrt{k^2+k}-k}{\sqrt{k+1}} > 0 \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>\sqrt{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식은 성립한다.

(i), (ii)에서 2 이상의 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

1254 답 60

$$(n+1)a_{n+1}=(n+2)a_n \text{에서 } a_{n+1}=\frac{n+2}{n+1}a_n \quad \cdots \text{ i}$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., 18을 차례로 대입하면

$$a_2=\frac{3}{2}a_1$$

$$a_3=\frac{4}{3}a_2=\frac{4}{3} \times \frac{3}{2}a_1$$

$$a_4=\frac{5}{4}a_3=\frac{5}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2}a_1$$

⋮

$$\therefore a_{19}=\frac{20}{19}a_{18}=\frac{20}{19} \times \cdots \times \frac{5}{4} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2}a_1$$

$$=10 \times 6=60 \quad \cdots \text{ ii}$$

채점 기준

i 주어진 a_n, a_{n+1} 사이의 관계식 변형하기	30 %
ii a_{19} 구하기	70 %

1255 답 6

$$a_n a_{n+2}=a_{n-1} a_{n+1} \text{에서 } a_{n+2}=\frac{a_{n-1} a_{n+1}}{a_n} \quad \cdots \text{ i}$$

위의 식의 n 에 2, 3, 4, ...를 차례로 대입하면

$$a_4=\frac{a_1 a_3}{a_2}=\frac{1 \times 4}{2}=2, a_5=\frac{a_2 a_4}{a_3}=\frac{2 \times 2}{4}=1,$$

$$a_6=\frac{a_3 a_5}{a_4}=\frac{4 \times 1}{2}=2, a_7=\frac{a_4 a_6}{a_5}=\frac{2 \times 2}{1}=4,$$

$$a_8=\frac{a_5 a_7}{a_6}=\frac{1 \times 4}{2}=2, \dots$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 1, 2, 4, 2가 이 순서대로 반복된다. $\cdots \text{ ii}$

이때 $50=4 \times 12+2$, $52=4 \times 13$, $54=4 \times 13+2$ 이므로

$$a_{50}+a_{52}+a_{54}=2+2+2=6 \quad \cdots \text{ iii}$$

채점 기준

i 주어진 a_n, a_{n+1} 사이의 관계식 변형하기	20 %
ii 수열 $\{a_n\}$ 구하기	60 %
iii $a_{50}+a_{52}+a_{54}$ 의 값 구하기	20 %

1256 **답** 81 km

여행 n 일째 이동한 거리를 a_n km라 하면 $(n+1)$ 일째 이동한 거리 a_{n+1} km는 a_n km의 절반에 5 km를 더 이동한 것이므로

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 5 \quad \dots\dots \textcircled{i}$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + 5 = \frac{1}{2} \times 26 + 5 = 18$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + 5 = \frac{1}{2} \times 18 + 5 = 14$$

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 + 5 = \frac{1}{2} \times 14 + 5 = 12$$

$$a_5 = \frac{1}{2}a_4 + 5 = \frac{1}{2} \times 12 + 5 = 11 \quad \dots\dots \textcircled{ii}$$

따라서 여행 첫날부터 5일째까지 이동한 거리는

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 26 + 18 + 14 + 12 + 11 = 81 \text{ (km)} \quad \dots\dots \textcircled{iii}$$

채점 기준

① a_n, a_{n+1} 사이의 관계식 구하기	50 %
② a_2, a_3, a_4, a_5 구하기	30 %
③ 여행 첫날부터 5일째까지 이동한 거리 구하기	20 %

C 실력 향상

195쪽

1257 **답** ①

(㉞)에서 $a_n = n$ ($n=1, 2, 3, 4$)이므로

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4$$

(㉞)에서 주어진 식의 k 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_5 = 2a_1 = 2 \times 1, a_6 = 2a_2 = 2 \times 2, a_7 = 2a_3 = 2 \times 3, a_8 = 2a_4 = 2 \times 4,$$

$$a_9 = 2a_5 = 2^2 \times 1, a_{10} = 2a_6 = 2^2 \times 2, a_{11} = 2a_7 = 2^2 \times 3,$$

$$a_{12} = 2a_8 = 2^2 \times 4, \dots$$

$$\therefore a_{4k+i} = 2^k \times i \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{28} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{25} + a_{26} + a_{27} + a_{28}$$

$$= (1+2+3+4) + (2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 + 2 \times 4)$$

$$+ \dots + (2^6 \times 1 + 2^6 \times 2 + 2^6 \times 3 + 2^6 \times 4)$$

$$= (1+2+3+4) + 2(1+2+3+4)$$

$$+ \dots + 2^6(1+2+3+4)$$

$$= (1+2+3+4) \times (1+2+2^2+\dots+2^6)$$

$$= 10 \times \frac{1 \times (2^7 - 1)}{2 - 1} = 1270$$

1258 **답** ③

$a_n + b_{n+1} = 7n - 1$, $a_{n+1} + b_n = 7n - 4$ 를 같은 변끼리 더하면

$$a_n + a_{n+1} + b_n + b_{n+1} = 14n - 5$$

위의 식의 n 에 1, 3, 5, 7, 9를 차례로 대입하면

$$a_1 + a_2 + b_1 + b_2 = 14 \times 1 - 5 = 9$$

$$a_3 + a_4 + b_3 + b_4 = 14 \times 3 - 5 = 37$$

$$a_5 + a_6 + b_5 + b_6 = 14 \times 5 - 5 = 65$$

$$a_7 + a_8 + b_7 + b_8 = 14 \times 7 - 5 = 93$$

$$a_9 + a_{10} + b_9 + b_{10} = 14 \times 9 - 5 = 121$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k &= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{10}) + (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{10}) \\ &= (a_1 + a_2 + b_1 + b_2) + (a_3 + a_4 + b_3 + b_4) \\ &\quad + (a_5 + a_6 + b_5 + b_6) + (a_7 + a_8 + b_7 + b_8) \\ &\quad + (a_9 + a_{10} + b_9 + b_{10}) \\ &= 9 + 37 + 65 + 93 + 121 = 325 \end{aligned}$$

1259 **답** ③

자연수 n 에 대하여 $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$ 이므로

$$(n+1)S_{n+1} = (n+3)S_n \text{에서}$$

$$(n+1)(S_n + a_{n+1}) = nS_n + 3S_n$$

$$(n+1)a_{n+1} = 2S_n \quad \dots\dots \textcircled{㉞}$$

㉞에 n 대신 $n-1$ 을 대입하면

$$na_n = 2S_{n-1} \quad (n \geq 2) \quad \dots\dots \textcircled{㉟}$$

㉞-㉟을 하면

$$(n+1)a_{n+1} - na_n = 2(S_n - S_{n-1}) = 2a_n$$

$$(n+1)a_{n+1} = (\textcircled{㉞} - \textcircled{㉟})a_n$$

양변을 $(n+1)(n+2)$ 로 나누면

$$\frac{a_{n+1}}{n+2} = \frac{a_n}{(\textcircled{㉞} - \textcircled{㉟})n+1}$$

이때 $b_n = \frac{a_n}{(\textcircled{㉞} - \textcircled{㉟})n+1}$ 이라 하면 $b_{n+1} = b_n$ ($n \geq 2$)이므로

$$b_n = b_{n-1} = \dots = b_2$$

$$\text{즉, } b_n = b_2 \text{에서 } \frac{a_n}{n+1} = \frac{a_2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

한편 $(n+1)S_{n+1} = (n+3)S_n$ 에 $n=1$ 을 대입하면

$$2S_2 = 4S_1 \quad \therefore S_2 = 2S_1 = 2 \times 1 = 2$$

$$a_1 + a_2 = 2 \text{이므로 } a_2 = 2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$

이를 ㉡에 대입하면

$$\frac{a_n}{n+1} = \frac{1}{3} \quad \therefore a_n = \frac{n+1}{3} \quad (n \geq 2)$$

따라서 $f(n) = n+2$, $g(n) = n+1$, $h(n) = \frac{n+1}{3}$ 이므로

$$\frac{f(4)g(4)}{h(8)} = \frac{6 \times 5}{3} = 10$$

1260 **답** 55

(i) 흰 공을 처음에 놓는 방법의 수

$(n-1)$ 개의 공을 나열하는 방법의 수와 같으므로 a_{n-1}

(ii) 검은 공을 처음에 놓는 방법의 수

$(n-2)$ 개의 공을 나열하는 방법의 수와 같으므로 a_{n-2}

(i), (ii)에서 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 의 n 에 3, 4, 5, 6, 7, 8을 차례로 대입하면

$$a_3 = a_2 + a_1 = 3 + 2 = 5, a_4 = a_3 + a_2 = 5 + 3 = 8,$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 8 + 5 = 13, a_6 = a_5 + a_4 = 13 + 8 = 21,$$

$$a_7 = a_6 + a_5 = 21 + 13 = 34$$

$$\therefore a_8 = a_7 + a_6 = 34 + 21 = 55$$

01 / 지수

2~7쪽

중단원 기출문제 1회

1 답 ②

① 8의 세제곱근을 x 라 하면 $x^3=8$

$$x^3-8=0, (x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$$\therefore x=2 \text{ 또는 } x=-1 \pm \sqrt{3}i$$

따라서 8의 세제곱근은 2, $-1 \pm \sqrt{3}i$ 이다.

② $(-4)^2=16$ 의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=16$

$$(x+2)(x-2)(x^2+4)=0$$

$$\therefore x=\pm 2 \text{ 또는 } x=\pm 2i$$

따라서 $(-4)^2$ 의 네제곱근 중 실수인 것은 ± 2 이다.

③ $\sqrt{25}=5$ 의 제곱근 중 실수인 것은 $\pm\sqrt{5}$ 이다.

④ -81 의 네제곱근 중 실수인 것은 없다.

⑤ n 이 짝수일 때, -36 의 n 제곱근 중 실수인 것은 없다.

따라서 옳은 것은 ②이다.

2 답 6

$n=3$ 일 때, $x^3=3 \times 3 - 9=0$ 이므로 $f(3)=1$

$n=4$ 일 때, $x^4=3 \times 4 - 9=3 > 0$ 이고 n 은 짝수이므로

$$f(4)=2$$

$n=6$ 일 때, $x^6=3 \times 6 - 9=9 > 0$ 이고 n 은 짝수이므로

$$f(6)=2$$

$n=7$ 일 때, $x^7=3 \times 7 - 9=12 > 0$ 이고 n 은 홀수이므로

$$f(7)=1$$

$$\therefore f(3)+f(4)+f(6)+f(7)=1+2+2+1=6$$

3 답 11

$$5\sqrt{a^2} \times 3\sqrt{a^4}=15\sqrt{a^6} \times 15\sqrt{a^{20}}=15\sqrt{a^{26}}$$

따라서 $m=15$, $n=26$ 이므로

$$n-m=11$$

4 답 ⑤

$$① \sqrt[3]{9} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$② \frac{\sqrt[3]{75}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{\frac{75}{5}} = \sqrt[3]{15}$$

$$③ \sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{6}$$

$$④ \sqrt[8]{4^3} = \sqrt[8]{(2^2)^3} = \sqrt[8]{2^6} = \sqrt[4]{2^3}$$

$$\begin{aligned} ⑤ \left(\sqrt{7} \times \frac{1}{\sqrt[3]{7}} \right)^6 &= (\sqrt{7})^6 \times \left(\frac{1}{\sqrt[3]{7}} \right)^6 \\ &= \sqrt{7^6} \times \frac{1}{\sqrt[3]{7^6}} \\ &= 7^3 \times \frac{1}{7^2} = 7 \end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

5 답 ⑤

$A=\sqrt[3]{3}$, $B=\sqrt[6]{5}$, $C=\sqrt[12]{10}$ 에서 3, 6, 12의 최소공배수가 12이므로

$$A=\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{81}, B=\sqrt[6]{5}=\sqrt[12]{25}$$

이때 $10 < 25 < 81$ 이므로

$$\sqrt[12]{10} < \sqrt[12]{25} < \sqrt[12]{81}$$

$$\therefore C < B < A$$

6 답 ①

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{4^{12}+16^9}{4^8+16^7}} &= \sqrt{\frac{4^{12}+4^{18}}{4^8+4^{14}}} = \sqrt{\frac{4^{12}(1+4^6)}{4^8(1+4^6)}} \\ &= \sqrt{4^4} = 4^2 = 16 \end{aligned}$$

7 답 10

$$\begin{aligned} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{4}} \right\}^{\frac{8}{3}} \times 125^{-\frac{2}{3}} \times 100^{\frac{3}{2}} &= \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{4} \times \frac{8}{3}} \times (5^3)^{-\frac{2}{3}} \times (10^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times 5^{-2} \times 10^3 \\ &= 2^{-2} \times 5^{-2} \times 10^3 \\ &= 10^{-2} \times 10^3 \\ &= 10^{-2+3} = 10 \end{aligned}$$

8 답 ④

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{xy^2} \div \sqrt{xy} \times \sqrt[4]{x^3y} &= \sqrt[3]{xy^2} \div \sqrt{xy} \times \sqrt[4]{x^3y} \\ &= \sqrt[6]{xy^2} \div \sqrt[4]{xy} \times \sqrt[4]{x^3y} \\ &= x^{\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{3}} \div x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{4}} \times x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{4}} \\ &= x^{\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}} y^{\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} \\ &= x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

9 답 ⑤

$$\begin{aligned} 4\sqrt{\frac{6\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{3\sqrt{a}}{4\sqrt{a^5}}} \div \sqrt{\frac{4\sqrt{a^5}}{\sqrt{a}}} &= \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{4}} \times \left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{5}{4}}} \right)^{\frac{1}{2}} \div \left(\frac{a^{\frac{5}{4}}}{a^{\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{a^{\frac{1}{12}}}{a^{\frac{1}{8}}} \times \frac{a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{5}{8}}} \times \frac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{5}{8}}} = \frac{a^{\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{5}{8}}} \\ &= a^{\frac{1}{2} - \frac{11}{8}} = a^{-\frac{7}{8}} \end{aligned}$$

$$\therefore k = -\frac{7}{8}$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} 4\sqrt{\frac{6\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}}} \times \sqrt{\frac{3\sqrt{a}}{4\sqrt{a^5}}} \div \sqrt{\frac{4\sqrt{a^5}}{\sqrt{a}}} &= \frac{4\sqrt[4]{6\sqrt{a^2}}}{\sqrt[4]{\sqrt{a}}} \times \frac{\sqrt[4]{3\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{4\sqrt{a^5}}} \div \frac{\sqrt[4]{4\sqrt{a^5}}}{\sqrt[4]{\sqrt{a}}} \\ &= \frac{12\sqrt{a}}{8\sqrt{a}} \times \frac{6\sqrt{a}}{8\sqrt{a^5}} \times \frac{4\sqrt{a}}{8\sqrt{a^5}} \\ &= \frac{a^{\frac{1}{12}} \times a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{8}} \times a^{\frac{5}{8}} \times a^{\frac{5}{8}}} \\ &= a^{\frac{1}{2} - \frac{11}{8}} = a^{-\frac{7}{8}} \end{aligned}$$

$$\therefore k = -\frac{7}{8}$$

10 답 ④

$$a = \sqrt[5]{4} \text{에서 } a^5 = 4$$

$$b = \sqrt[4]{3} \text{에서 } b^4 = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt[20]{12} &= \sqrt[20]{3 \times 4} = \sqrt[20]{3} \times \sqrt[20]{4} \\ &= 3^{\frac{1}{20}} \times 4^{\frac{1}{20}} \\ &= (b^4)^{\frac{1}{20}} \times (a^5)^{\frac{1}{20}} \\ &= a^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

11 답 ④

$(\frac{1}{256})^{\frac{1}{n}} = (2^{-8})^{\frac{1}{n}} = 2^{-\frac{8}{n}}$ 이 자연수가 되려면 $-\frac{8}{n}$ 이 음이 아닌 정수이어야 한다.

따라서 정수 n 은 $-8, -4, -2, -1$ 의 4개이다.

12 답 90

$$a^2=3, b^5=7, c^6=11 \text{에서}$$

$$a=3^{\frac{1}{2}}, b=7^{\frac{1}{5}}, c=11^{\frac{1}{6}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt[3]{(abc)^n} &= \sqrt[3]{(3^{\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{1}{5}} \times 11^{\frac{1}{6}})^n} \\ &= 3^{\frac{n}{6}} \times 7^{\frac{n}{15}} \times 11^{\frac{n}{18}} \end{aligned}$$

따라서 $\sqrt[3]{(abc)^n}$, 즉 $3^{\frac{n}{6}} \times 7^{\frac{n}{15}} \times 11^{\frac{n}{18}}$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 값은 6, 15, 18의 공배수이므로 자연수 n 의 최솟값은 90이다.

13 답 -16

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+1}{a}\right)p &= \left(\frac{a+1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{a^4}\right)\left(1+\frac{1}{a^8}\right) \\ &= \left(\frac{a+1}{a}\right)\left(\frac{a-1}{a}\right)\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)\left(\frac{a^4+1}{a^4}\right)\left(\frac{a^8+1}{a^8}\right) \\ &= \left(\frac{a^2-1}{a^2}\right)\left(\frac{a^2+1}{a^2}\right)\left(\frac{a^4+1}{a^4}\right)\left(\frac{a^8+1}{a^8}\right) \\ &= \left(\frac{a^4-1}{a^4}\right)\left(\frac{a^4+1}{a^4}\right)\left(\frac{a^8+1}{a^8}\right) \\ &= \left(\frac{a^8-1}{a^8}\right)\left(\frac{a^8+1}{a^8}\right) = \frac{a^{16}-1}{a^{16}} \\ &= 1 - a^{-16} \end{aligned}$$

$$\therefore k = -16$$

14 답 ①

$2^a = X (X > 0), 2^b = Y (Y > 0)$ 로 놓으면

$$2^a + 2^{5-b} = 4 \text{에서}$$

$$X + \frac{32}{Y} = 4$$

$$\therefore XY + 32 = 4Y \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{또 } 2^{-a} + 2^{b-5} = 2 \text{에서}$$

$$\frac{1}{X} + \frac{Y}{32} = 2$$

$$\therefore 32 + XY = 64X \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 을 하면

$$4Y - 64X = 0 \quad \therefore Y = 16X$$

$$\therefore 2^{-a+b} = \frac{Y}{X} = 16$$

15 답 ⑤

$x = \sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ 의 양변을 세제곱하면

$$\begin{aligned} x^3 &= \sqrt{5}+2 + 3 \times 1 \times (\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}) + \sqrt{5}-2 \\ &= 2\sqrt{5} + 3x \end{aligned}$$

$$x^3 - 3x = 2\sqrt{5}$$

$$\therefore 2x^3 - 6x = 2 \times 2\sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

16 답 ③

$$a + a^{-1} = (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2 - 2 = (\sqrt{5})^2 - 2 = 3$$

$$\therefore a^2 + a^{-2} = (a + a^{-1})^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

17 답 ⑤

$\frac{a^x + a^{-x}}{a^x - a^{-x}} = 3$ 의 좌변의 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^x(a^x + a^{-x})}{a^x(a^x - a^{-x})} = 3$$

$$\frac{a^{2x} + 1}{a^{2x} - 1} = 3, a^{2x} + 1 = 3a^{2x} - 3$$

$$2a^{2x} = 4, a^{2x} = 2$$

$$\therefore a^{8x} = (a^{2x})^4 = 2^4 = 16$$

18 답 ④

$$45^x = 27 = 3^3 \text{에서 } 45 = 3^{\frac{3}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$5^y = 3 \text{에서 } 5 = 3^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \div \textcircled{2}$ 을 하면

$$9 = 3^{\frac{3}{x}} \div 3^{\frac{1}{y}}, 3^{\frac{3}{x} - \frac{1}{y}} = 3^2$$

$$\therefore \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 2$$

19 답 ①

$$125^{\frac{1}{a}} = 1000 \text{에서 } 5^{\frac{3}{a}} = 1000$$

$$\therefore 5 = 1000^{\frac{a}{3}} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$16^{\frac{1}{b}} = 1000 \text{에서 } 2^{\frac{4}{b}} = 1000$$

$$\therefore 2 = 1000^{\frac{b}{4}} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1} \times \textcircled{2}$ 을 하면

$$10 = 1000^{\frac{a}{3} + \frac{b}{4}}, 10 = 10^{\frac{1}{4}(4a+3b)}$$

$$\text{따라서 } \frac{1}{4}(4a+3b) = 1 \text{이므로 } 4a+3b=4$$

20 답 3

원본의 글자 크기를 a 라 하면 6번째 복사본의 글자 크기가 원본의 2배이므로

$$a\left(\frac{r}{100}\right)^6 = 2a \quad \therefore \left(\frac{r}{100}\right)^6 = 2$$

이때 9번째 복사본의 글자 크기는 $a\left(\frac{r}{100}\right)^9$ 이므로

$$\frac{a\left(\frac{r}{100}\right)^9}{a\left(\frac{r}{100}\right)^6} = \left(\frac{r}{100}\right)^3 = \left\{\left(\frac{r}{100}\right)^6\right\}^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$$

따라서 $p=2, q=1$ 이므로 $p+q=3$

중단원 기출문제 2회

1 답 ③

$\sqrt{625}=25$ 이므로

25의 네제곱근을 x 라 하면 $x^4=25$

$$x^4-25=0, (x^2-5)(x^2+5)=0$$

$$\therefore x=\pm\sqrt{5} \text{ 또는 } x=\pm\sqrt{5}i$$

따라서 $\sqrt{625}$ 의 네제곱근 중 양의 실수인 것은 $\sqrt{5}$ 이므로

$$a=\sqrt{5}$$

-216 의 세제곱근을 y 라 하면 $y^3=-216$

$$y^3+216=0, (y+6)(y^2-6y+36)=0$$

$$\therefore y=-6 \text{ 또는 } y=3\pm3\sqrt{3}i$$

따라서 -216 의 세제곱근 중 실수인 것은 -6 이므로

$$b=-6$$

$$\therefore a^2b=(\sqrt{5})^2 \times (-6)=-30$$

2 답 ⑤

모든 실수 x 에 대하여 $\sqrt[3]{-x^2-2ax-10a}$ 가 음수가 되려면

$$-x^2-2ax-10a<0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$x^2+2ax+10a>0$$

이차방정식 $x^2+2ax+10a=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-10a<0$$

$$a(a-10)<0$$

$$\therefore 0<a<10$$

따라서 모든 자연수 a 는 1, 2, 3, ..., 9의 9개이다.

3 답 ②

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\frac{3\sqrt{81}}{81}} \times \sqrt[3]{\frac{\sqrt{81}}{81}} &= \frac{12\sqrt{3^4}}{4\sqrt{3^4}} \times \frac{4\sqrt[4]{3^4}}{6\sqrt[4]{3^4}} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3^2}} = 3\sqrt{\frac{3}{3^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \end{aligned}$$

4 답 ③

$$\textcircled{1} \sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$$

$$\textcircled{2} \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{125}=\sqrt[3]{5^3}=5$$

$$\textcircled{3} (\sqrt[6]{3})^3=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt{3}$$

$$\textcircled{4} \sqrt[6]{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{2^6}=2$$

$$\textcircled{5} \frac{\sqrt[7]{256}}{\sqrt[7]{2}}=\sqrt[7]{\frac{256}{2}}=\sqrt[7]{128}=\sqrt[7]{2^7}=2$$

따라서 옳지 않은 것은 ③이다.

5 답 A<C<B

$$A=\sqrt{3\sqrt[3]{3}}=\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}=\sqrt[6]{81}$$

$$B=\sqrt[4]{4\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{4\sqrt[3]{2}}=\sqrt[6]{128}$$

$$C=\sqrt[3]{5\sqrt{5}}=\sqrt[3]{\sqrt{5^2} \times 5}=\sqrt[6]{125}$$

이때 $81<125<128$ 이므로

$$\sqrt[6]{81}<\sqrt[6]{125}<\sqrt[6]{128}$$

$$\therefore A<C<B$$

6 답 ②

$$\begin{aligned} \frac{4^{-3}+2^{-3}}{9} \times \frac{10}{27^2+3^8} &= \frac{(2^2)^{-3}+2^{-3}}{9} \times \frac{10}{(3^3)^2+3^8} \\ &= \frac{2^{-6}+2^{-3}}{9} \times \frac{10}{3^6+3^8} \\ &= \frac{2^{-6}(1+2^3)}{9} \times \frac{10}{3^6(1+3^2)} \\ &= 2^{-6} \times 3^{-6} = 6^{-6} \end{aligned}$$

7 답 ④

$$\begin{aligned} (a^{\sqrt{3}})^{3\sqrt{2}} \times (a^{\frac{1}{3}})^{6\sqrt{6}} \div a^{4\sqrt{6}} &= a^{3\sqrt{6}} \times a^{2\sqrt{6}} \div a^{4\sqrt{6}} \\ &= a^{3\sqrt{6}+2\sqrt{6}-4\sqrt{6}} \\ &= a^{\sqrt{6}} \end{aligned}$$

$$\therefore k=\sqrt{6}$$

8 답 ②

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a\sqrt{a^4\sqrt{a^3}}} &= \{a \times (a \times a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} \\ &= \{a \times (a^{\frac{7}{4}})^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{3}} \\ &= (a \times a^{\frac{7}{8}})^{\frac{1}{3}} \\ &= (a^{\frac{15}{8}})^{\frac{1}{3}} \\ &= a^{\frac{5}{8}} \end{aligned}$$

따라서 $p=8, q=5$ 이므로

$$p+q=13$$

다른 풀이

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a\sqrt{a^4\sqrt{a^3}}} &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} \times \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}} \\ &= \sqrt[3]{a} \times \sqrt[6]{a} \times \sqrt[8]{a} \\ &= a^{\frac{1}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} \times a^{\frac{1}{8}} \\ &= a^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} = a^{\frac{5}{8}} \end{aligned}$$

따라서 $p=8, q=5$ 이므로

$$p+q=13$$

9 답 ⑤

$\sqrt[3]{\frac{5^b}{7^{a+1}}}=\frac{5^{\frac{b}{3}}}{7^{\frac{a+1}{3}}}$ 이 유리수이므로 $5^{\frac{b}{3}}, 7^{\frac{a+1}{3}}$ 이 각각 자연수이어야 한다.

이때 a, b 가 자연수이므로 $a+1, b$ 가 각각 3의 배수이어야 한다.

또 $\sqrt[5]{\frac{5^{b+1}}{7^a}}=\frac{5^{\frac{b+1}{5}}}{7^{\frac{a}{5}}}$ 이 유리수이므로 $5^{\frac{b+1}{5}}, 7^{\frac{a}{5}}$ 이 각각 자연수이어야 한다.

다. 이때 a, b 가 자연수이므로 $a, b+1$ 이 각각 5의 배수이어야 한다.

즉, $a+1$ 은 3의 배수, a 는 5의 배수이므로 a 의 최솟값은 5이다.

또 b 는 3의 배수, $b+1$ 은 5의 배수이므로 b 의 최솟값은 9이다.

따라서 $a+b$ 의 최솟값은

$$5+9=14$$

10 답 ④

$$4^3=a \text{ 에서 } (2^2)^3=a, 2^6=a \quad \therefore 2=a^{\frac{1}{6}}$$

$$27^2=b \text{ 에서 } (3^3)^2=b, 3^6=b \quad \therefore 3=b^{\frac{1}{6}}$$

$$\begin{aligned} \therefore 36^5 &= (2^2 \times 3^2)^5 = 2^{10} \times 3^{10} \\ &= (a^{\frac{1}{6}})^{10} \times (b^{\frac{1}{6}})^{10} = a^{\frac{5}{3}} b^{\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

11 답 ①

$$a^5=5, b^6=11, c^9=13 \text{에서}$$

$$a=5^{\frac{1}{5}}, b=11^{\frac{1}{6}}, c=13^{\frac{1}{9}}$$

$$\begin{aligned} \therefore (abc)^n &= (5^{\frac{1}{5}} \times 11^{\frac{1}{6}} \times 13^{\frac{1}{9}})^n \\ &= 5^{\frac{n}{5}} \times 11^{\frac{n}{6}} \times 13^{\frac{n}{9}} \end{aligned}$$

따라서 $(abc)^n$, 즉 $5^{\frac{n}{5}} \times 11^{\frac{n}{6}} \times 13^{\frac{n}{9}}$ 이 자연수가 되도록 하는 자연수 n 의 값은 5, 6, 9의 공배수이므로 200 이하의 자연수 n 은 90, 180의 2개이다.

12 답 ①

$$(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$$

$$= \{(a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2\}(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$$

$$= (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})$$

$$= (a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2$$

$$= a - b$$

13 답 ④

$$3^{2+\sqrt{2}}=A, 3^{2-\sqrt{2}}=B \text{로 놓으면}$$

$$(3^{2+\sqrt{2}} + 3^{2-\sqrt{2}})^2 - (3^{2+\sqrt{2}} - 3^{2-\sqrt{2}})^2$$

$$= (A+B)^2 - (A-B)^2$$

$$= A^2 + 2AB + B^2 - (A^2 - 2AB + B^2)$$

$$= 4AB$$

$$= 4 \times 3^{2+\sqrt{2}} \times 3^{2-\sqrt{2}}$$

$$= 4 \times 3^4$$

14 답 ③

$$a = \sqrt[3]{5} - \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \text{에서 } a = 5^{\frac{1}{3}} - 5^{-\frac{1}{3}}$$

양변을 세제곱하면

$$a^3 = 5 - 3(5^{\frac{1}{3}} - 5^{-\frac{1}{3}}) - \frac{1}{5}$$

$$\text{이때 } 5^{\frac{1}{3}} - 5^{-\frac{1}{3}} = a \text{이므로}$$

$$a^3 = 5 - 3a - \frac{1}{5}$$

$$\therefore a^3 + 3a + \frac{1}{5} = 5$$

15 답 ①

$$f(k) = 5 \text{에서 } a^k + a^{-k} = 5$$

$$\therefore f(3k) = a^{3k} + a^{-3k}$$

$$= (a^k + a^{-k})^3 - 3(a^k + a^{-k})$$

$$= 5^3 - 3 \times 5 = 110$$

16 답 ①

구하는 식의 분모, 분자에 각각 a^x 을 곱하면

$$\frac{a^x + a^{-x}}{a^{3x} + a^{-3x}} = \frac{a^x(a^x + a^{-x})}{a^x(a^{3x} + a^{-3x})}$$

$$= \frac{a^{2x} + 1}{a^{4x} + a^{-2x}} = \frac{a^{2x} + 1}{(a^{2x})^2 + a^{-2x}}$$

$$= \frac{3+1}{3^2 + \frac{1}{3}} = \frac{4}{\frac{28}{3}} = \frac{3}{7}$$

17 답 ②

$$\frac{5^x + 5^{-x}}{5^x - 5^{-x}} = 2 \text{의 좌변의 분모, 분자에 각각 } 5^x \text{을 곱하면}$$

$$\frac{5^x(5^x + 5^{-x})}{5^x(5^x - 5^{-x})} = 2$$

$$\frac{5^{2x} + 1}{5^{2x} - 1} = 2$$

$$5^{2x} + 1 = 2 \times 5^{2x} - 2$$

$$\therefore 5^{2x} = 3$$

$$\therefore 25^x + 25^{-x} = 5^{2x} + 5^{-2x} = 5^{2x} + \frac{1}{5^{2x}}$$

$$= 3 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

18 답 256

$$25^x = 2 \text{에서 } 25 = 2^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$a^y = 4 \text{에서 } a = 4^{\frac{1}{y}} = 2^{\frac{2}{y}}$$

$$\therefore \sqrt{a} = 2^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$200^z = 8 \text{에서 } 200 = 8^{\frac{1}{z}} = 2^{\frac{3}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠} \times \textcircled{㉡} \div \textcircled{㉢}$ 을 하면

$$\frac{25\sqrt{a}}{200} = 2^{\frac{1}{x}} \times 2^{\frac{1}{y}} \div 2^{\frac{3}{z}}$$

$$\therefore 2^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z}} = \frac{\sqrt{a}}{8}$$

$$\text{이때 } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} = 1 \text{이므로}$$

$$2 = \frac{\sqrt{a}}{8}, \sqrt{a} = 16$$

$$\therefore a = 256$$

19 답 ①

$$2^x = 3^y = 6^z = k (k > 0) \text{로 놓으면 } xyz \neq 0 \text{에서 } k \neq 1$$

$$2^x = k \text{에서 } 2 = k^{\frac{1}{x}} \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$3^y = k \text{에서 } 3 = k^{\frac{1}{y}} \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$$

$$6^z = k \text{에서 } 6 = k^{\frac{1}{z}} \quad \dots\dots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠} \times \textcircled{㉡} \div \textcircled{㉢}$ 을 하면

$$2 \times 3 \div 6 = k^{\frac{1}{x}} \times k^{\frac{1}{y}} \div k^{\frac{1}{z}}$$

$$k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z}} = 1$$

그런데 $k \neq 1$ 이므로

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$$

20 답 2

$$m_t = m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{15}} \text{에서}$$

$$t = 30 \text{일 때, } m_{30} = m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{30}{15}} = m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$t = 45 \text{일 때, } m_{45} = m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{45}{15}} = m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\therefore \frac{m_{30}}{m_{45}} = \frac{m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{m_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3} = 2$$

중단원 기출문제 ①

1 답 192

$$\log_a 16 = \frac{2}{3} \text{에서 } a^{\frac{2}{3}} = 16 = 4^2$$

$$\therefore a = (4^2)^{\frac{3}{2}} = 4^3 = 64$$

$$\log_{\sqrt{3}} b = -2 \text{에서 } b = (\sqrt{3})^{-2} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{64}{\frac{1}{3}} = 192$$

2 답 ④

$$\log_8 27 = x \text{에서 } 8^x = 27$$

$$\therefore 2^x = 3$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{8^x + 8^{-x}}{2^x + 2^{-x}} &= \frac{(2^x)^3 + (2^{-x})^3}{2^x + 2^{-x}} \\ &= \frac{3^3 + 3^{-3}}{3 + 3^{-1}} = \frac{73}{9} \end{aligned}$$

3 답 ①

$$\text{밑의 조건에서 } (a-1)^2 > 0, (a-1)^2 \neq 1$$

$$\therefore a \neq 0, a \neq 1, a \neq 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

진수의 조건에서 모든 실수 x 에 대하여

$$x^2 + ax + a > 0 \text{이어야 하므로}$$

이차방정식 $x^2 + ax + a = 0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$D = a^2 - 4a < 0$$

$$a(a-4) < 0$$

$$\therefore 0 < a < 4 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

①, ②의 공통부분은

$$0 < a < 1 \text{ 또는 } 1 < a < 2 \text{ 또는 } 2 < a < 4$$

따라서 정수 a 는 3의 1개이다.

4 답 ④

$$\log_3 12 + \log_3 3\sqrt{2} - \frac{5}{2} \log_3 2$$

$$= \log_3 12 + \log_3 3\sqrt{2} - \log_3 2^{\frac{5}{2}}$$

$$= \log_3 12 + \log_3 3\sqrt{2} - \log_3 4\sqrt{2}$$

$$= \log_3 \frac{12 \times 3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$$

$$= \log_3 9$$

$$= \log_3 3^2$$

$$= 2$$

5 답 ②

$$\log_4 x + \log_4 2y + \log_4 4z = 1 \text{에서}$$

$$\log_4 (x \times 2y \times 4z) = 1, \log_4 8xyz = 1$$

$$8xyz = 4$$

$$\therefore xyz = \frac{1}{2}$$

6 답 ②

$$\neg. \log_{2\sqrt{2}} 8 = \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^3 = 2$$

$$\neg. 4^{\log_2 27 - \log_2 3} = 4^{\log_2 9} = 9^{\log_2 4} = 9^{\log_2 2^2} = 9^2$$

$$\begin{aligned} \neg. \log_2 \{ \log_{16} (\log_5 25) \} &= \log_2 \{ \log_{16} (\log_5 5^2) \} \\ &= \log_2 (\log_{16} 2) \\ &= \log_2 (\log_{2^4} 2) \\ &= \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg. \log_2 (\log_3 7) + \log_2 (\log_7 10) + \log_2 (\log_{10} 81) \\ &= \log_2 (\log_3 7 \times \log_7 10 \times \log_{10} 81) \\ &= \log_2 \left(\log_3 7 \times \frac{\log_3 10}{\log_3 7} \times \frac{\log_3 81}{\log_3 10} \right) \\ &= \log_2 (\log_3 81) = \log_2 (\log_3 3^4) \\ &= \log_2 4 = 2 \end{aligned}$$

따라서 보기에서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

7 답 $\frac{25}{4}$

$$\begin{aligned} &(\log_3 2 + \log_9 \sqrt{2})(\log_2 3 + \log_{\sqrt{2}} 9) \\ &= (\log_3 2 + \log_{3^2} 2^{\frac{1}{2}})(\log_2 3 + \log_{2^{\frac{1}{2}}} 3^2) \\ &= \left(\log_3 2 + \frac{1}{4} \log_3 2 \right) (\log_2 3 + 4 \log_2 3) \\ &= \frac{5}{4} \log_3 2 \times 5 \log_2 3 \\ &= \frac{25}{4} \log_3 2 \times \frac{1}{\log_3 2} \\ &= \frac{25}{4} \end{aligned}$$

8 답 $C < A < B$

$$A = 4^{\log_2 8 - \log_2 12} = 4^{\log_2 \frac{2}{3}} = \left(\frac{2}{3} \right)^{\log_2 4} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$B = \log_{25} \sqrt{5} - \log_{81} \frac{1}{3} = \log_{5^2} 5^{\frac{1}{2}} - \log_{3^4} 3^{-1}$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\frac{-1}{4} \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$C = \log_2 \{ \log_9 (\log_4 64) \} = \log_2 (\log_9 3) = \log_2 \frac{1}{2} = -1$$

$$\therefore C < A < B$$

9 답 ②

$$(7^{\log_7 3 + \log_7 2})^2 + (3^{\log_2 3 + \log_{\sqrt{2}} 3\sqrt{3}})^{\log_9 \sqrt{2}}$$

$$= (7^{\log_7 6})^2 + (3^{\log_2 3 + 3 \log_2 3})^{\frac{1}{4} \log_3 2}$$

$$= (6^{\log_7 7})^2 + 3^{4 \log_2 3 \times \frac{1}{4} \log_3 2}$$

$$= 6^2 + 3 = 39$$

10 답 ③

$$\log_3 2 = a, \log_3 5 = b \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \log_{10} 40 &= \frac{\log_3 40}{\log_3 10} = \frac{\log_3 (2^3 \times 5)}{\log_3 (2 \times 5)} \\ &= \frac{\log_3 2^3 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 5} = \frac{3 \log_3 2 + \log_3 5}{\log_3 2 + \log_3 5} \\ &= \frac{3a + b}{a + b} \end{aligned}$$

11 답 17/4

$$\log_a c : \log_b c = 4 : 1 \text{에서}$$

$$\log_a c = 4 \log_b c, \frac{1}{\log_c a} = \frac{4}{\log_c b}$$

$$\log_c b = 4 \log_c a \quad \therefore b = a^4$$

$$\therefore \log_a b + \log_b a = \log_a a^4 + \log_{a^4} a = 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$$

12 답 ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log_2 a + \log_2 b = 4, \log_2 a \times \log_2 b = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \log_a b + \log_b a &= \frac{\log_2 b}{\log_2 a} + \frac{\log_2 a}{\log_2 b} = \frac{(\log_2 b)^2 + (\log_2 a)^2}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ &= \frac{(\log_2 a + \log_2 b)^2 - 2 \log_2 a \times \log_2 b}{\log_2 a \times \log_2 b} \\ &= \frac{4^2 - 2 \times 2}{2} = 6 \end{aligned}$$

13 답 ①

$$\log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8, \text{ 즉 } 2 < \log_2 7 < 3 \text{이므로}$$

$$a = 2, b = \log_2 7 - 2 = \log_2 7 - \log_2 4 = \log_2 \frac{7}{4}$$

$$\therefore 4(a + 2^b) = 4(2 + 2^{\log_2 \frac{7}{4}}) = 4 \times \left(2 + \frac{7}{4}\right) = 15$$

14 답 3.3343

$$\begin{aligned} \log 12 + \log 180 &= \log (2^2 \times 3) + \log (2 \times 3^2 \times 10) \\ &= 2 \log 2 + \log 3 + \log 2 + 2 \log 3 + \log 10 \\ &= 3(\log 2 + \log 3) + 1 \\ &= 3 \times (0.3010 + 0.4771) + 1 \\ &= 3.3343 \end{aligned}$$

15 답 ④

상용로그표에서 $\log 2.72 = 0.4346$ 이므로

$$\log 0.0272 = \log (10^{-2} \times 2.72) = -2 + 0.4346 = -1.5654$$

16 답 ③

$$a = \log 374 = \log (10^2 \times 3.74) = 2 + 0.5729 = 2.5729$$

$$\log b = -0.4271 \text{에서}$$

$$\log b = -1 + 0.5729$$

$$= \log 10^{-1} + \log 3.74$$

$$= \log (10^{-1} \times 3.74) = \log 0.374$$

$$\therefore b = 0.374$$

$$\therefore a + b = 2.5729 + 0.374 = 2.9469$$

17 답 ④

$$f(2n+3) = f(n) + 1 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(i) $1 \leq n < 10$ 일 때, $f(n) = 0$

이를 ①에 대입하면 $f(2n+3) = 1$ 이므로

$$10 \leq 2n+3 < 100$$

$$\therefore \frac{7}{2} \leq n < \frac{97}{2}$$

그런데 $1 \leq n < 10$ 이므로 자연수 n 은

4, 5, 6, 7, 8, 9의 6개이다.

(ii) $10 \leq n < 100$ 일 때, $f(n) = 1$

이를 ①에 대입하면 $f(2n+3) = 2$ 이므로

$$100 \leq 2n+3 < 1000$$

$$\therefore \frac{97}{2} \leq n < \frac{997}{2}$$

그런데 $10 \leq n < 100$ 이므로 자연수 n 은

49, 50, ..., 99의 51개이다.

(iii) $n = 100$ 일 때, $f(n) = 2$

이때 $f(2n+3) = f(203) = 2$ 이므로

①을 만족시키지 않는다.

(i)~(iii)에서 구하는 자연수 n 의 개수는 57이다.

18 답 -6

$\log N = n + a$ (n 은 정수, $0 \leq a < 1$)라 하면 이차방정식

$3x^2 + 7x + k = 0$ 의 두 근이 n, a 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$n + a = -\frac{7}{3} = -3 + \frac{2}{3} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$na = \frac{k}{3} \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 n 은 정수이고, $0 \leq a < 1$ 이므로 ①에서

$$n = -3, a = \frac{2}{3}$$

이를 ②에 대입하면

$$-3 \times \frac{2}{3} = \frac{k}{3} \quad \therefore k = -6$$

19 답 ③

$\log x^2$ 의 소수 부분과 $\log x^4$ 의 소수 부분이 같으므로

$$\begin{aligned} \log x^4 - \log x^2 &= 4 \log x - 2 \log x \\ &= 2 \log x \leftarrow \text{정수} \end{aligned}$$

$$10 \leq x < 100 \text{이므로}$$

$$1 \leq \log x < 2 \quad \therefore 2 \leq 2 \log x < 4$$

이때 $2 \log x$ 가 정수이므로

$$2 \log x = 2 \text{ 또는 } 2 \log x = 3$$

$$\log x = 1 \text{ 또는 } \log x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore x = 10 \text{ 또는 } x = 10^{\frac{3}{2}}$$

따라서 모든 실수 x 의 값의 곱은

$$10 \times 10^{\frac{3}{2}} = 10^{\frac{5}{2}}$$

20 답 12

처음 벽면의 음향 투과 손실을 L_1 , 벽의 단위 면적당 질량을 m , 음향의 주파수를 f 라 하면

$$L_1 = 20 \log mf - 48 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

벽의 단위 면적당 질량이 4배가 되었을 때의 벽면의 음향 투과 손실을 L_2 , 벽의 단위 면적당 질량을 $4m$ 이라 하면

$$L_2 = 20 \log 4mf - 48 = 20 (\log 4 + \log mf) - 48$$

$$\therefore L_2 = 40 \log 2 + 20 \log mf - 48 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

②-①을 하면

$$L_2 - L_1 = 40 \log 2 = 40 \times 0.3 = 12$$

$$\therefore L_2 = L_1 + 12$$

따라서 벽면의 음향 투과 손실은 12dB만큼 증가하므로

$$k = 12$$

중단원 기출문제 2회

1 답 ②

$\log_{\sqrt{5}} a = 6$ 에서

$$a = (\sqrt{5})^6 = 5^3 = 125$$

$$\log_{\frac{1}{8}} b = -\frac{1}{3} \text{에서 } b = \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} = 2$$

$$\therefore ab = 125 \times 2 = 250$$

2 답 ③

$\log_5 \{\log_5 (\log_2 x)\} = 0$ 에서

$$\log_5 (\log_2 x) = 1$$

$$\log_2 x = 5$$

$$\therefore x = 2^5 = 32$$

3 답 2

밑의 조건에서 $x-1 > 0$, $x-1 \neq 1$

$$\therefore x > 1, x \neq 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

진수의 조건에서 $-x^2 + 5x > 0$

$$x^2 - 5x < 0, x(x-5) < 0$$

$$\therefore 0 < x < 5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 의 공통부분은

$$1 < x < 2 \text{ 또는 } 2 < x < 5$$

따라서 정수 x 는 3, 4의 2개이다.

4 답 $\frac{5}{2}$

$$\log_2 24 + \log_2 \frac{2}{3} - \log_2 2\sqrt{2}$$

$$= \log_2 \left(24 \times \frac{2}{3}\right) - \log_2 2^{\frac{3}{2}}$$

$$= \log_2 16 - \frac{3}{2} = \log_2 2^4 - \frac{3}{2}$$

$$= 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

5 답 ③

$$\log_2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \log_2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \log_2 \left(1 - \frac{1}{4}\right) + \dots + \log_2 \left(1 - \frac{1}{64}\right)$$

$$= \log_2 \frac{1}{2} + \log_2 \frac{2}{3} + \log_2 \frac{3}{4} + \dots + \log_2 \frac{63}{64}$$

$$= \log_2 \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{63}{64}\right)$$

$$= \log_2 \frac{1}{64} = \log_2 2^{-6}$$

$$= -6$$

6 답 18

$$\log_2 125 \times \log_3 8 \times \log_5 9$$

$$= \log_2 125 \times \frac{\log_2 8}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 9}{\log_2 5}$$

$$= \log_2 5^3 \times \frac{\log_2 2^3}{\log_2 3} \times \frac{\log_2 3^2}{\log_2 5}$$

$$= 3 \log_2 5 \times \frac{3}{\log_2 3} \times \frac{2 \log_2 3}{\log_2 5}$$

$$= 18$$

7 답 ④

$$(\log_3 4 + \log_9 8)(\log_2 27 - \log_4 9)$$

$$= (\log_3 2^2 + \log_{3^2} 2^3)(\log_2 3^3 - \log_{2^2} 3^2)$$

$$= \left(2 \log_3 2 + \frac{3}{2} \log_3 2\right)(3 \log_2 3 - \log_2 3)$$

$$= \frac{7}{2} \log_3 2 \times 2 \log_2 3$$

$$= 7 \log_3 2 \times \frac{1}{\log_3 2} = 7$$

8 답 ②

두 점 $(3, \log_9 a)$, $(4, \log_3 b)$ 를 지나는 직선의 방정식은

$$y - \log_3 b = \frac{\log_3 b - \log_9 a}{4 - 3}(x - 4)$$

$$\therefore y = (\log_3 b - \log_9 a)(x - 4) + \log_3 b$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 = (\log_3 b - \log_9 a) \times (-4) + \log_3 b$$

$$3 \log_3 b = 4 \log_9 a$$

$$\log_3 b = \frac{4}{3} \log_9 a, \log_3 b = \frac{2}{3} \log_3 a$$

$$\log_3 b = \log_3 a^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore b = a^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \log_a b = \log_a a^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

9 답 ④

$\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$ 이므로

$$\log_{72} 225 = \frac{\log_3 225}{\log_3 72} = \frac{\log_3 (3^2 \times 5^2)}{\log_3 (2^3 \times 3^2)} = \frac{2 + 2 \log_3 5}{3 \log_3 2 + 2} = \frac{2b + 2}{3a + 2}$$

10 답 $\frac{3}{2}$

$a^4 b^3 = 1$ 의 양변에 b 를 밑으로 하는 로그를 취하면

$$\log_b a^4 b^3 = \log_b 1, \log_b a^4 + \log_b b^3 = 0$$

$$4 \log_b a + 3 = 0 \quad \therefore \log_b a = -\frac{3}{4}$$

$$\therefore \log_b a^2 b^3 = \log_b a^2 + \log_b b^3 = 2 \log_b a + 3$$

$$= 2 \times \left(-\frac{3}{4}\right) + 3 = \frac{3}{2}$$

다른 풀이

$$a^4 b^3 = 1 \text{에서 } a^4 = \frac{1}{b^3} = b^{-3} \quad \therefore a = b^{-\frac{3}{4}}$$

$$\therefore \log_b a^2 b^3 = \log_b \{(b^{-\frac{3}{4}})^2 \times b^3\} = \log_b (b^{-\frac{3}{2}} \times b^3)$$

$$= \log_b b^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

11 답 24

(가)에서 $\log_3 abc = 9$

$$\therefore abc = 3^9 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(나)에서 $a^3 = b^4 = c^6 = k$ ($k > 0$, $k \neq 1$)로 놓으면

$$a = k^{\frac{1}{3}}, b = k^{\frac{1}{4}}, c = k^{\frac{1}{6}}$$

이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면

$$abc = k^{\frac{1}{3}} \times k^{\frac{1}{4}} \times k^{\frac{1}{6}} = k^{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}} = k^{\frac{3}{4}}$$

$$\text{즉, } k^{\frac{3}{4}} = 3^9 \text{이므로 } k = (3^9)^{\frac{4}{3}} = 3^{12}$$

따라서

$$a=k^{\frac{1}{3}}=(3^{12})^{\frac{1}{3}}=3^4,$$

$$b=k^{\frac{1}{4}}=(3^{12})^{\frac{1}{4}}=3^3,$$

$$c=k^{\frac{1}{6}}=(3^{12})^{\frac{1}{6}}=3^2$$

이므로

$$\begin{aligned}\log_3 a \times \log_3 b \times \log_3 c &= \log_3 3^4 \times \log_3 3^3 \times \log_3 3^2 \\ &= 4 \times 3 \times 2 = 24\end{aligned}$$

12 답 ⑤

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2 + \log_3 5 = a, \quad 2 \times \log_3 5 = b \text{ 이므로}$$

$$a = 2 + \log_3 5 = \log_3 3^2 + \log_3 5 = \log_3 45,$$

$$b = 2 \log_3 5 = \log_3 5^2 = \log_3 25$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{\log_3 45}{\log_3 25} = \log_{25} 45 = \log_{5^2} 45 = \frac{1}{2} \log_5 45 = \frac{1}{2} (1 + 2 \log_5 3)$$

13 답 $\frac{8}{9}$

$$\log_4 12 = \log_4 (4 \times 3) = 1 + \log_4 3$$

따라서 $x=1$, $y=\log_4 3$ 이므로

$$\frac{4^y + 4^{-y}}{4^x - 4^{-x}} = \frac{4^{\log_4 3} + 4^{-\log_4 3}}{4 - 4^{-1}} = \frac{3 + \frac{1}{3}}{4 - \frac{1}{4}} = \frac{8}{9}$$

14 답 ⑤

$$\begin{aligned}\log 15 + \log 150 &= \log (3 \times 5) + \log (2 \times 3 \times 5^2) \\ &= \log 3 + \log 5 + \log 2 + \log 3 + 2 \log 5 \\ &= 2 \log 3 + 2 \log 5 + 1 \\ &= 2 \times 0.4771 + 2 \times 0.6990 + 1 = 3.3522\end{aligned}$$

15 답 ①

$$\begin{aligned}\log \sqrt[5]{321^2} &= \log (10^2 \times 3.21)^{\frac{2}{5}} \\ &= \frac{2}{5} (\log 10^2 + \log 3.21) \\ &= \frac{2}{5} (2 + \log 3.21) \\ &= \frac{2}{5} \times (2 + 0.5065) \\ &= \frac{2}{5} \times 2.5065 = 1.0026\end{aligned}$$

16 답 ④

$$\begin{aligned}\textcircled{1} \log 63.3 &= \log (10 \times 6.33) = \log 10 + \log 6.33 \\ &= 1 + 0.8014 = 1.8014 \\ \textcircled{2} \log 6330 &= \log (10^3 \times 6.33) = \log 10^3 + \log 6.33 \\ &= 3 + 0.8014 = 3.8014 \\ \textcircled{3} \log 0.633 &= \log (10^{-1} \times 6.33) = \log 10^{-1} + \log 6.33 \\ &= -1 + 0.8014 = -0.1986 \\ \textcircled{4} \log 0.0633 &= \log (10^{-2} \times 6.33) = \log 10^{-2} + \log 6.33 \\ &= -2 + 0.8014 = -1.1986 \\ \textcircled{5} \log \sqrt{6.33} &= \frac{1}{2} \log 6.33 = \frac{1}{2} \times 0.8014 = 0.4007\end{aligned}$$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

17 답 ②

$$\begin{aligned}\log x^2 - \log \sqrt{x} &= 2 \log x - \frac{1}{2} \log x \\ &= \frac{3}{2} \log x \\ &= \frac{3}{2} \times (-3.6) \\ &= -5.4 \\ &= -6 + 0.6\end{aligned}$$

따라서 $\log x^2 - \log \sqrt{x}$ 의 정수 부분은 -6 , 소수 부분은 0.6 이다.

18 답 0.000412

$$\log 412 = \log (10^2 \times 4.12) = 2 + \log 4.12$$

즉, $2 + \log 4.12 = 2.6149$ 이므로

$$\log 4.12 = 0.6149$$

$$\log N = -3.3851$$

$$= -4 + 0.6149$$

$$= \log 10^{-4} + \log 4.12$$

$$= \log 0.000412$$

$$\therefore N = 0.000412$$

19 답 3

$2 \log x$ 와 $\log \frac{x}{2}$ 의 차가 정수이므로

$$\begin{aligned}2 \log x - \log \frac{x}{2} &= \log x^2 - \log \frac{x}{2} \\ &= \log \left(x^2 \times \frac{2}{x} \right) \\ &= \log 2x \leftarrow \text{정수}\end{aligned}$$

이때 $\log 2x$ 가 정수이므로 $2x$ 는 10의 거듭제곱이다.

$$100 \leq x < 1000 \text{에서}$$

$$200 \leq 2x < 2000 \text{이므로}$$

$$2x = 1000$$

$$\therefore \log 2x = \log 1000 = \log 10^3 = 3$$

20 답 ③

올해 이 회사의 복지 예산이 1억 원이고 복지 예산을 매년 전년도 복지 예산의 $r\%$ 씩 늘린다고 하면 10년 후의 복지 예산은 2억 원이므로

$$1 \times \left(1 + \frac{r}{100} \right)^{10} = 2$$

양변에 상용로그를 취하면

$$10 \log \left(1 + \frac{r}{100} \right) = \log 2$$

$$\begin{aligned}\log \left(1 + \frac{r}{100} \right) &= \frac{1}{10} \log 2 \\ &= \frac{1}{10} \times 0.3 \\ &= 0.03\end{aligned}$$

이때 $\log 1.07 = 0.03$ 이므로

$$1 + \frac{r}{100} = 1.07$$

$$\frac{r}{100} = 0.07$$

$$\therefore r = 7$$

따라서 복지 예산을 매년 7% 씩 늘려야 한다.

중단원 기출문제 ①

1 답 ②

$$f(4) = \frac{1}{16} \text{에서 } a^4 = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\therefore a = \frac{1}{2} (\because a > 0)$$

$$\begin{aligned} \therefore f(-1) + f(-3) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \\ &= 2 + 8 = 10 \end{aligned}$$

2 답 8

$$f(k_1) = 2 \text{에서 } a^{k_1} = 2$$

$$f(k_2) = 4 \text{에서 } a^{k_2} = 4$$

$$\therefore f(k_1 + k_2) = a^{k_1 + k_2} = a^{k_1} \times a^{k_2} = 2 \times 4 = 8$$

3 답 ④

④ $0 < a < 1$ 일 때, $x < y$ 이면 $f(x) > f(y)$ 이므로

$$f(-2) > f(1)$$

⑤ $f(x)f(y) = a^x \times a^y = a^{x+y} = f(x+y)$

따라서 옳지 않은 것은 ④이다.

4 답 -4

함수 $y = 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2} - 3$ 의 그래프는 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2만큼, y 축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다.

$$\therefore a = 2, b = -3$$

또 점근선의 방정식은 $y = -3$ 이므로

$$c = -3$$

$$\therefore a + b + c = 2 + (-3) + (-3) = -4$$

5 답 $\frac{4}{7}$ 두 점 P, Q의 x 좌표를 각각 a , $2a$ 라 하면

$$k \times \left(\frac{3}{2}\right)^a = \left(\frac{3}{2}\right)^{-a} \text{에서 } \left(\frac{3}{2}\right)^{2a} = \frac{1}{k} \quad \dots\dots ①$$

$$k \times \left(\frac{3}{2}\right)^{2a} = -4 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{2a} + 8 \text{에 } ① \text{을 대입하면}$$

$$k \times \frac{1}{k} = -4 \times \frac{1}{k} + 8$$

$$\therefore k = \frac{4}{7}$$

6 답 $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{2}$ $\overline{AB} = 6\sqrt{2}$ 이고 직선 AB의 기울기가 1이므로 $\overline{CD} = 6$ 이다.

따라서 점 A의 좌표를 (k, k) 라 하면 점 B의 좌표는 $(k+6, k+6)$ 이다.

이때 사각형 ACDB의 넓이가 36이므로

$$\frac{1}{2} \times \{k + (k+6)\} \times 6 = 36$$

$$\therefore k = 3$$

한편 두 점 A(3, 3), B(9, 9)가 모두 곡선 $y = 3^{ax+b}$ 위에 있으므로

$$3 = 3^{3a+b} \text{에서 } 3a + b = 1 \quad \dots\dots ⑦$$

$$9 = 3^{9a+b} \text{에서 } 9a + b = 2 \quad \dots\dots ⑧$$

$$⑦, ⑧ \text{을 연립하여 풀면 } a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{2}$$

7 답 $\frac{15}{2}$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{16}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}, \sqrt[5]{\frac{1}{128}} = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^7} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{5}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{1}{32}} = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}}, \sqrt[6]{\frac{1}{8}} = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

이때 $\frac{1}{2} < \frac{5}{4} < \frac{4}{3} < \frac{7}{5}$ 이고 밑이 1보다 작으므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{5}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{4}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \sqrt[5]{\frac{1}{128}} < \sqrt[3]{\frac{1}{16}} < \sqrt[4]{\frac{1}{32}} < \sqrt[6]{\frac{1}{8}}$$

$$\text{즉, } a = \sqrt[5]{\frac{1}{128}}, b = \sqrt[6]{\frac{1}{8}} \text{이므로}$$

$$a^5 b = \left(\sqrt[5]{\frac{1}{128}}\right)^5 \times \sqrt[6]{\frac{1}{8}} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{5}}\right\}^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{2}}$$

$$\text{따라서 } \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{15}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \text{이므로}$$

$$k = \frac{15}{2}$$

8 답 3

함수 $f(x) = 3^x$ 의 밑이 1보다 크므로 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $f(x) = 3^x$ 은 $x=2$ 에서 최댓값 $f(2) = 3^2 = 9$ 를 갖는다.또 함수 $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ 의 밑이 1보다 작으므로 $-1 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ 은 $x=2$ 에서 최솟값

$$g(2) = \frac{1}{3} \text{을 갖는다.}$$

$$\text{따라서 } M = 9, m = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$Mm = 3$$

9 답 28

$$g(x) = -x^2 + 6x - 5 = -(x-3)^2 + 4 \text{이므로}$$

함수 $g(x)$ 는 $x=3$ 에서 최댓값 4를 갖는다.

한편 함수 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{5})^{g(x)}$ 의 밑이 1보다 크므로 함수 $(f \circ g)(x)$ 는 $g(x) = 4$, 즉 $x=3$ 에서 최댓값 $(\sqrt{5})^4 = 25$ 를 갖는다.

따라서 $a = 3, b = 25$ 이므로

$$a + b = 28$$

10 답 ①

$$y = 36^{-x} - 6^{-x+1} = \left(\frac{1}{6}\right)^{2x} - 6 \times \left(\frac{1}{6}\right)^x$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^x = t (t > 0) \text{로 놓으면 주어진 함수는}$$

$$y = t^2 - 6t = (t-3)^2 - 9$$

따라서 함수 $y = (t-3)^2 - 9$ 는 $t=3$ 에서 최솟값 -9를 갖는다.

11 답 50

$5^{2-x} > 0$, $5^{2+x} > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $y = 5^{2-x} + 5^{2+x} \geq 2\sqrt{5^{2-x} \times 5^{2+x}} = 2\sqrt{5^4} = 2 \times 5^2 = 50$
 (단, 등호는 $x=0$ 일 때 성립)
 따라서 주어진 함수의 최소값은 50이다.

12 답 $-\frac{5}{2}$

$4^x = 8 \times \left(\frac{1}{32}\right)^x$ 에서
 $2^{2x} = 2^3 \times 2^{-5x}$, $2^{2x} = 2^{3-5x}$
 즉, $2x = 3 - 5x$ 이므로
 $2x^2 + 5x - 3 = 0$, $(x+3)(2x-1) = 0$
 $\therefore x = -3$ 또는 $x = \frac{1}{2}$
 따라서 모든 근의 합은
 $-3 + \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$

13 답 4

점 A의 좌표를 $(a, 2^a)$ 이라 하면 두 점 A, B의 y 좌표가 같으므로
 점 B의 y 좌표는 2^a 이다.
 점 B는 함수 $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ 의 그래프 위의 점이므로
 $\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2^a$ 에서 $2^{-2x} = 2^a$
 $-2x = a$, $x = -\frac{a}{2}$
 $\therefore B\left(-\frac{a}{2}, 2^a\right)$
 이때 $\overline{AB} = 3$ 이므로
 $a - \left(-\frac{a}{2}\right) = 3$, $\frac{3}{2}a = 3$ $\therefore a = 2$
 따라서 상수 k 의 값은 점 A의 y 좌표와 같으므로
 $2^2 = 4$

14 답 1

$3^x + 3^{3-x} = 12$ 의 양변에 3^x 를 곱하면
 $(3^x)^2 + 27 = 12 \times 3^x$
 $\therefore (3^x)^2 - 12 \times 3^x + 27 = 0$
 $3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $t^2 - 12t + 27 = 0$, $(t-3)(t-9) = 0$
 $\therefore t = 3$ 또는 $t = 9$
 즉, $3^x = 3$ 또는 $3^x = 9$ 이므로 $x = 1$ 또는 $x = 2$
 이때 $\alpha < \beta$ 이므로 $\alpha = 1$, $\beta = 2$ $\therefore \beta - \alpha = 1$

15 답 ⑤

$25^x - 24 \times 5^x + k = 0$ 에서 $(5^x)^2 - 24 \times 5^x + k = 0$
 $5^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $t^2 - 24t + k = 0$ ㉠
 주어진 방정식의 두 근을 α , β 라 하면 $\alpha + \beta = 3$ 이고 방정식 ㉠의 두
 근은 5^α , 5^β 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
 $k = 5^\alpha \times 5^\beta = 5^{\alpha+\beta} = 5^3 = 125$

16 답 ④

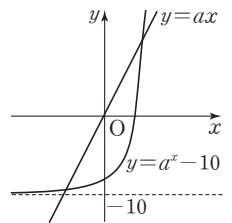
$2^{2x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{ax}$ 에서 $2^{2x} < 2^{-ax}$
 밑이 1보다 크므로 $2x^2 < -ax$
 $2x^2 + ax < 0$, $x(2x+a) < 0$
 그런데 a 는 자연수이므로 $-\frac{a}{2} < x < 0$
 이때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 5이므로
 $-6 \leq -\frac{a}{2} < -5$
 $\therefore 10 < a \leq 12$
 따라서 자연수 a 의 값은 11, 12이므로 구하는 합은
 $11 + 12 = 23$

17 답 ①

$4^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 에서 $2^{2x} \geq 2^{-x+1}$
 밑이 1보다 크므로
 $2x \geq -x+1$ $\therefore x \geq \frac{1}{3}$
 $\therefore A = \left\{x \mid x \geq \frac{1}{3}\right\}$
 $3^{2x+1} - 82 \times 3^x + 27 < 0$ 에서
 $3 \times (3^x)^2 - 82 \times 3^x + 27 < 0$
 $3^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면
 $3t^2 - 82t + 27 < 0$, $(3t-1)(t-27) < 0$
 $\therefore \frac{1}{3} < t < 27$
 즉, $3^{-1} < 3^x < 3^3$ 이고 밑이 1보다 크므로 $-1 < x < 3$
 $\therefore B = \{x \mid -1 < x < 3\}$
 $\therefore A \cap B = \left\{x \mid \frac{1}{3} \leq x < 3\right\}$
 따라서 $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = 3$ 이므로 $\alpha + \beta = \frac{10}{3}$

18 답 ④

곡선 $y = a^x - 10$ 과 직선 $y = ax$ 가 서로 다
 른 두 점에서 만나려면 오른쪽 그림과 같
 아야 하므로 $a > 1$ 이다.
 따라서 $(a^3)^{a^2-2a-4} \leq (a^2)^{a^2-a}$ 에서
 $a^{3(a^2-2a-4)} \leq a^{2(a^2-a)}$
 $a > 1$ 이므로 $3(a^2-2a-4) \leq 2(a^2-a)$
 $3a^2 - 6a - 12 \leq 2a^2 - 2a$, $a^2 - 4a - 12 \leq 0$
 $(a+2)(a-6) \leq 0$
 $\therefore -2 \leq a \leq 6$
 그런데 $a > 1$ 이므로 $1 < a \leq 6$
 따라서 양수 a 의 최댓값은 6이다.



19 답 $0 \leq a \leq 8$

$4^x - 2(a-4) \times 2^x + 2a \geq 0$ 에서
 $(2^x)^2 - 2(a-4) \times 2^x + 2a \geq 0$
 $2^x = t$ ($t > 0$)로 놓으면 $t^2 - 2(a-4)t + 2a \geq 0$
 $f(t) = t^2 - 2(a-4)t + 2a$ 라 하면
 $f(t) = (t-a+4)^2 - (a-4)^2 + 2a$

$t > 0$ 에서 부등식 $f(t) \geq 0$ 이 성립하려면

(i) $a - 4 \geq 0$, 즉 $a \geq 4$ 일 때,

$$-(a-4)^2 + 2a \geq 0 \text{ 이어야 하므로}$$

$$a^2 - 10a + 16 \leq 0, (a-2)(a-8) \leq 0 \quad \therefore 2 \leq a \leq 8$$

그런데 $a \geq 4$ 이므로 $4 \leq a \leq 8$

(ii) $a - 4 < 0$, 즉 $a < 4$ 일 때,

$$f(0) \geq 0 \text{ 이어야 하므로 } 2a \geq 0 \quad \therefore a \geq 0$$

그런데 $a < 4$ 이므로 $0 \leq a < 4$

(i), (ii)에서 $0 \leq a \leq 8$

20 답 ②

$$S_0 \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{6}{a}} = \frac{1}{16} S_0 \text{에서 } \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{6}{a}} = \left(\frac{1}{4} \right)^2$$

$$\text{즉, } \frac{6}{a} = 2 \text{ 이므로 } a = 3$$

$$\text{따라서 } S_0 \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{12}{a}} = k S_0 \text{에서}$$

$$S_0 \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{12}{3}} = k S_0 \quad \therefore k = \left(\frac{1}{4} \right)^4 = \frac{1}{256}$$

따라서 이 광섬유를 따라 12 km를 지난 곳에서의 신호의 세기는 처음 신호의 세기의 $\frac{1}{256}$ 배이다.

중단원 기출문제 2회

1 답 ①

$$f(1) = 3 \text{에서 } a^{b+c} = 3 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$f(2) = 27 \text{에서 } a^{2b+c} = 27 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } a^b = 9$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } a^{b+c} = a^b \times a^c = 9a^c = 3 \text{이므로 } a^c = \frac{1}{3}$$

$$\therefore f(-1) = a^{-b+c} = a^{-b} \times a^c = (a^b)^{-1} \times a^c = \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

2 답 ⑤

$$\textcircled{1} f(x+y) = a^{x+y} = a^x a^y = f(x)f(y)$$

$$\textcircled{2} f(x-y) = a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} = \frac{f(x)}{f(y)}$$

$$\textcircled{3} f(x^2) = a^{x^2} = (a^x)^x = \{f(x)\}^x$$

$$\textcircled{4} f\left(\frac{x}{2}\right) = a^{\frac{x}{2}} = (a^x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{f(x)}$$

$$\textcircled{5} f(3x) = a^{3x} = (a^x)^3 = \{f(x)\}^3 \neq 3f(x)$$

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

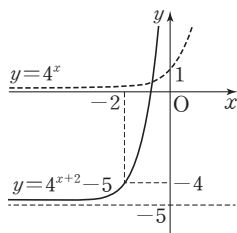
3 답 ②

함수 $y = 4^{x+2} - 5$ 의 그래프는 함수 $y = 4^x$

의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 -5 만큼 평행이동한 것이므로 오른쪽 그림과 같다.

② 점근선의 방정식은 $y = -5$ 이다.

따라서 옳지 않은 것은 ②이다.



4 답 ④

함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = 3^{x-m} + n$$

이 식이 $y = \frac{1}{9} \times 3^x - 1 = 3^{x-2} - 1$ 과 일치하므로

$$m = 2, n = -1$$

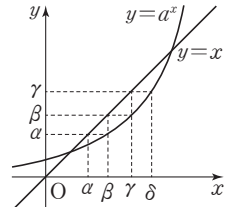
$$\therefore m + n = 1$$

5 답 ②

오른쪽 그림에서

$$a^\beta = \alpha, a^\gamma = \beta \text{이므로}$$

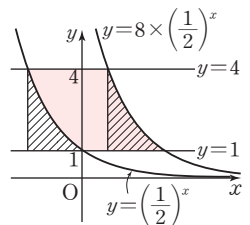
$$a^{2\beta+\gamma} = (a^\beta)^2 \times a^\gamma = \alpha^2 \beta$$



6 답 ③

함수 $y = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}$ 의 그래프는 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다.

따라서 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의 넓이는 서로 같으므로 구하는 넓이는 $3 \times 3 = 9$



7 답 ②

$$f(x) = -x^2 - 2x \text{라 하면 } f(x) = -(x+1)^2 + 1$$

$$-2 \leq x \leq 1 \text{에서 } f(-2) = 0, f(-1) = 1, f(1) = -3 \text{이므로}$$

$$-3 \leq f(x) \leq 1$$

이때 함수 $y = 5^{-x^2-2x} = 5^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 크므로 함수 $y = 5^{f(x)}$ 은 $f(x) = 1$ 에서 최댓값 $5^1 = 5$,

$f(x) = -3$ 에서 최솟값 $5^{-3} = \frac{1}{125}$ 을 갖는다.

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은

$$5 \times \frac{1}{125} = \frac{1}{25}$$

8 답 34

$$f(x) = x^2 - 2x \text{라 하면 } f(x) = (x-1)^2 - 1$$

$$-1 \leq x \leq 2 \text{에서 } f(-1) = 3, f(1) = -1, f(2) = 0 \text{이므로}$$

$$-1 \leq f(x) \leq 3$$

이때 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 의 밑이 1보다 작으므로 함수 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)}$ 은

$f(x) = -1$ 에서 최댓값 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$,

$f(x) = 3$ 에서 최솟값 $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ 을 갖는다.

따라서 치역은 $\left\{y \mid \frac{1}{8} \leq y \leq 2\right\}$ 이므로

$$M = 2, m = \frac{1}{8}$$

$$\therefore 16(M+m) = 16\left(2 + \frac{1}{8}\right) = 34$$

9 답 9

$$y=2^{x+1}-4^x=-(2^x)^2+2 \times 2^x$$

$2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$-1 \leq x \leq 2 \text{에서 } \frac{1}{2} \leq t \leq 4$$

이때 주어진 함수는 $y=-t^2+2t=-(t-1)^2+1$

따라서 $\frac{1}{2} \leq t \leq 4$ 일 때 함수 $y=-(t-1)^2+1$ 은

$t=1$ 에서 최댓값 1, $t=4$ 에서 최솟값 -8 을 갖는다.

따라서 $M=1$, $m=-8$ 이므로 $M-m=9$

10 답 $a=13$, $b=0$

$3^x+3^{-x}=t$ 로 놓으면 $3^x>0$, $3^{-x}>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$t=3^x+3^{-x} \geq 2\sqrt{3^x \times 3^{-x}}=2 \text{ (단, 등호는 } x=0 \text{일 때 성립)} \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 $9^x+9^{-x}=(3^x+3^{-x})^2-2=t^2-2$ 이므로

$$f(t)=t^2-2-4t+a$$

$$=(t-2)^2+a-6$$

따라서 $t \geq 2$ 일 때 $f(t)$ 는 $t=2$ 에서 최솟값 $a-6$ 을 가지므로

$$a-6=7 \quad \therefore a=13$$

①에 의하여 $x=0$ 에서 최솟값을 가지므로 $b=0$

11 답 -2

$$6^{x^2-x+6}=\left(\frac{1}{216}\right)^{x-3} \text{에서 } 6^{x^2-x+6}=6^{-3x+9}$$

$$\text{즉, } x^2-x+6=-3x+9 \text{이므로 } x^2+2x-3=0$$

$$(x+3)(x-1)=0 \quad \therefore x=-3 \text{ 또는 } x=1$$

따라서 모든 근의 합은

$$-3+1=-2$$

12 답 ③

$$\frac{4^a+4^{-a}+2}{4^a-4^{-a}}=\frac{(2^a+2^{-a})^2}{(2^a+2^{-a})(2^a-2^{-a})}$$

$$\therefore \frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$$

$2^a=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$\frac{t+\frac{1}{t}}{t-\frac{1}{t}}=-2, \frac{t^2+1}{t^2-1}=-2$$

$$3t^2=1 \quad \therefore t=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (} \because t>0 \text{)}$$

$$\therefore 2^a+2^{-a}=t+\frac{1}{t}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

13 답 ⑤

$$x^{2x-6}=(5x+6)^{x-3} \text{에서 } (x^2)^{x-3}=(5x+6)^{x-3}$$

(i) 밑이 같으면 $x^2=5x+6$

$$x^2-5x-6=0, (x+1)(x-6)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ 또는 } x=6$$

그런데 $x>0$ 이므로 $x=6$

(ii) 지수가 0이면 $x-3=0$

$$\therefore x=3$$

(i), (ii)에서 모든 근의 합은 $3+6=9$

14 답 ①

$$4^x-2^{x+3}+5=0 \text{에서 } (2^x)^2-8 \times 2^x+5=0$$

$2^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$t^2-8t+5=0$$

이 이차방정식의 두 근은 2^a , 2^b 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$2^a \times 2^b=5, 2^{a+b}=5$$

$$\therefore a+b=\log_2 5$$

$$\therefore 5^{\frac{1}{a+b}}=5^{\frac{1}{\log_2 5}}=5^{\log_5 2}=2$$

15 답 ④

$$3^{2x}-k \times 3^x+k=0 \text{에서}$$

$$(3^x)^2-k \times 3^x+k=0$$

$3^x=t$ ($t>0$)로 놓으면

$$t^2-kt+k=0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

주어진 방정식의 서로 다른 두 실근이 0과 1 사이에 존재하려면 방정식 ①의 두 근은 $3^0=1$ 과 $3^1=3$ 사이에 존재해야 한다.

$f(t)=t^2-kt+k$ 라 할 때,

(i) 이차방정식 ①의 판별식을 D 라 하면

$$D=(-k)^2-4k>0$$

$$k^2-4k>0, k(k-4)>0$$

$$\therefore k<0 \text{ 또는 } k>4$$

(ii) 함수 $y=f(t)$ 의 그래프의 축의 방정식이 $t=\frac{k}{2}$ 이므로

$$1<\frac{k}{2}<3 \quad \therefore 2<k<6$$

(iii) $f(1)>0$, $f(3)>0$ 이므로

$$f(1)=1-k+k>0$$

$$f(3)=9-3k+k>0 \quad \therefore k<\frac{9}{2}$$

(i)~(iii)에서 $4<k<\frac{9}{2}$

16 답 ②

$$\begin{cases} 8^{x-1} \leq 4^{x+2} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \leq \frac{1}{\sqrt{2^{x+4}}} \end{cases} \text{에서 } \begin{cases} 2^{3(x-1)} \leq 2^{2(x+2)} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x+4}{2}} \end{cases}$$

(i) $2^{3(x-1)} \leq 2^{2(x+2)}$ 에서

$$\text{밑이 1보다 크므로 } 3(x-1) \leq 2(x+2)$$

$$3x-3 \leq 2x+4 \quad \therefore x \leq 7$$

(ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x+4}{2}}$ 에서

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } x-1 \geq \frac{x+4}{2}$$

$$2x-2 \geq x+4 \quad \therefore x \geq 6$$

(i), (ii)에서 주어진 부등식의 해는 $6 \leq x \leq 7$

따라서 자연수 x 는 6, 7의 2개이다.

17 답 ③

$$9^n-(2n+1) \times 3^{n+1}+18n \leq 0 \text{에서}$$

$$(3^n)^2-3(2n+1) \times 3^n+18n \leq 0$$

$$(3^n-6n)(3^n-3) \leq 0$$

그런데 n 은 자연수이므로 $3 \leq 3^n \leq 6n$

이때 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x 의 개수는 3이므로 정수 x 는 1, 2, 3이다.

$$\text{즉, } 27 \leq 6n < 81 \text{이므로 } \frac{9}{2} \leq n < \frac{27}{2}$$

그런데 n 은 자연수이므로 $m=5$, $M=13$

$$\therefore m+M=18$$

18 답 ④

(i) $0 < x < 1$ 일 때,

$$x^2 - 4x > 12 \text{에서 } x^2 - 4x - 12 > 0$$

$$(x+2)(x-6) > 0$$

$$\therefore x < -2 \text{ 또는 } x > 6$$

그런데 $0 < x < 1$ 이므로 해가 존재하지 않는다.

(ii) $x=1$ 일 때,

$1 < 1$ 이므로 부등식이 성립하지 않는다.

(iii) $x > 1$ 일 때,

$$x^2 - 4x < 12 \text{에서 } x^2 - 4x - 12 < 0$$

$$(x+2)(x-6) < 0$$

$$\therefore -2 < x < 6$$

그런데 $x > 1$ 이므로 $1 < x < 6$

(i)~(iii)에서 주어진 부등식의 해는 $1 < x < 6$

따라서 $\alpha=1$, $\beta=6$ 이므로 $\alpha+\beta=7$

19 답 $a < \frac{4}{5}$

$$\left(\frac{1}{25}\right)^x - \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} > a \text{에서}$$

$$\left\{\left(\frac{1}{5}\right)^x\right\}^2 - \frac{1}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^x - a > 0$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x = t \text{로 놓으면 } x \leq 0 \text{에서 } t \geq 1 \text{이고}$$

$$t^2 - \frac{1}{5}t - a > 0$$

$$\therefore \left(t - \frac{1}{10}\right)^2 - a - \frac{1}{100} > 0$$

이 부등식이 $t \geq 1$ 인 모든 실수 t 에 대하여 성립하려면

$$f(t) = \left(t - \frac{1}{10}\right)^2 - a - \frac{1}{100} \text{이라 할 때}$$

$$f(1) > 0 \text{이어야 하므로 } \frac{4}{5} - a > 0$$

$$\therefore a < \frac{4}{5}$$

20 답 ④

80만 원, 즉 800×10^3 원을 투자한 지 t 년 후의 이익금은

$$800 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{5}} \times 10^3 \text{원이므로}$$

$$800 \times \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{5}} \times 10^3 = 2700 \times 10^3$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{5}} = \frac{27}{8}, \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{t}{5}} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$\frac{t}{5} = 3 \quad \therefore t = 15$$

따라서 이익금이 270만 원이 되는 것은 투자한 지 15년 후이다.

04 / 로그함수

20~25쪽

중단원 기출문제 1회

1 답 2

$$f(3)=6 \text{에서 } \log_a 2 + 7 = 6$$

$$\log_a 2 = -1, a^{-1} = 2$$

$$\therefore a = \frac{1}{2}$$

$$f(9)=b \text{에서}$$

$$b = \log_{\frac{1}{2}} 8 + 7 = -\log_2 2^3 + 7 = -3 + 7 = 4$$

$$\therefore ab = \frac{1}{2} \times 4 = 2$$

2 답 ⑤

$$\textcircled{5} \quad y = \log_{\frac{1}{3}}(3-x) - 5$$

$$= -\log_3(3-x) - 5$$

이므로 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}}(3-x) - 5$ 의 그래프는 함수

$y = \log_3(3-x) + 5$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

3 답 ⑤

함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \log_3(x-m) + n$$

이 식이 $y = \log_3 9(x-1) + 2$ 와 일치하므로

$$y = \log_3 9(x-1) + 2$$

$$= \log_3 9 + \log_3(x-1) + 2$$

$$= \log_3(x-1) + 4$$

따라서 $m=1$, $n=4$ 이므로

$$m+n=5$$

4 답 -3

오른쪽 그림에서

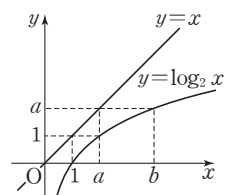
$$\log_2 a = 1 \text{이므로 } a = 2$$

$$\log_2 b = a, \text{ 즉 } \log_2 b = 2 \text{이므로}$$

$$b = 4$$

$$\therefore \log_{\frac{1}{4}} 8ab = \log_{\frac{1}{4}} 64$$

$$= -\log_4 4^3 = -3$$



5 답 5

함수 $y = \log_2(x-k)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 k 만큼 평행이동한 것이다.

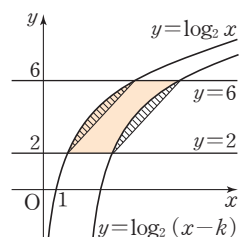
즉, 오른쪽 그림에서 빗금 친 두 부분의

넓이가 서로 같으므로 구하는 넓이는

$$k \times (6-2) = 4k$$

따라서 $4k=20$ 이므로

$$k=5$$



6 답 ②

$(f \circ g)(x) = x$ 이므로 $g(x)$ 는 $f(x)$ 의 역함수이다.

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = a \text{라 하면 } f(a) = -\frac{1}{2} \text{이므로}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^a - 1 = -\frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^a = \frac{1}{2} \quad \therefore a = 1$$

또 $g(1) = b$ 라 하면 $f(b) = 1$ 이므로

$$\left(\frac{1}{2}\right)^b - 1 = 1, \left(\frac{1}{2}\right)^b = 2 \quad \therefore b = -1$$

$$\therefore (g \circ g) = \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

7 답 ⑤

$$A = \log_3 10$$

$$B = 2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$$

$$C = \log_9 80 = \log_{3^2} 80 = \frac{1}{2} \log_3 80 = \log_3 80^{\frac{1}{2}} = \log_3 \sqrt{80}$$

이때 $\sqrt{80} < 9 < 10$ 이고 밑이 1보다 크므로

$$\log_3 \sqrt{80} < \log_3 9 < \log_3 10 \quad \therefore C < B < A$$

8 답 ⑤

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+a) + 2$ 의 밑이 1보다 작으므로 $-2 \leq x \leq 4$ 일 때

함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+a) + 2$ 는

$$x = -2 \text{에서 최댓값 } \log_{\frac{1}{2}}(-2+a) + 2,$$

$$x = 4 \text{에서 최솟값 } \log_{\frac{1}{2}}(4+a) + 2 \text{를 갖는다.}$$

$$\text{즉, } \log_{\frac{1}{2}}(-2+a) + 2 = 1 \text{이므로}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(-2+a) = -1, -2+a = 2 \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore b = \log_{\frac{1}{2}}(4+4) + 2 = -3 + 2 = -1$$

$$\therefore a+b = 4 + (-1) = 3$$

9 답 ④

$$f(x) = x^2 - 4x + 6 \text{이라 하면 } f(x) = (x-2)^2 + 2$$

$$3 \leq x \leq 7 \text{에서 } f(3) = 3, f(7) = 27 \text{이므로 } 3 \leq f(x) \leq 27$$

이때 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$ 의 밑이 1보다 작으므로 함수 $y = \log_{\frac{1}{3}} f(x)$

는 $f(x) = 3$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1$, $f(x) = 27$ 에서 최솟값

$$\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3 \text{을 갖는다.}$$

$$\text{따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 곱은 } -1 \times (-3) = 3$$

10 답 ②

$$y = \log_3 x \times \log_{\frac{1}{3}} x + \log_{\sqrt{3}} 9x + 6$$

$$= (\log_3 x)(-\log_3 x) + 4 + 2 \log_3 x + 6$$

$$= -(\log_3 x)^2 + 2 \log_3 x + 10$$

$$\log_3 x = t \text{로 놓으면 } 1 \leq x \leq 27 \text{에서 } 0 \leq t \leq 3$$

이때 주어진 함수는

$$y = -t^2 + 2t + 10 = -(t-1)^2 + 11$$

$$\text{따라서 } 0 \leq t \leq 3 \text{일 때 함수 } y = -(t-1)^2 + 11 \text{은}$$

$$t = 1 \text{에서 최댓값 } 11, t = 3 \text{에서 최솟값 } 7 \text{을 갖는다.}$$

$$\log_3 x = 1 \text{에서 } x = 3 \quad \therefore a = 3$$

$$\log_3 x = 3 \text{에서 } x = 27 \quad \therefore b = 27$$

$$\therefore aM + bm = 3 \times 11 + 27 \times 7 = 222$$

11 답 ⑤

$y = x^{\log_2 4x}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면

$$\log_2 y = \log_2 x^{\log_2 4x} = \log_2 4x \times \log_2 x$$

$$= (2 + \log_2 x) \log_2 x$$

$$= (\log_2 x)^2 + 2 \log_2 x$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $2 \leq x \leq 8$ 에서

$$\log_2 2 \leq \log_2 x \leq \log_2 8 \quad \therefore 1 \leq t \leq 3$$

$$\text{이때 주어진 함수는 } \log_2 y = t^2 + 2t = (t+1)^2 - 1$$

따라서 $1 \leq t \leq 3$ 일 때 $t = 3$ 에서 최댓값 15, $t = 1$ 에서 최솟값 3을 가지므로

$$\log_2 y = 15 \text{에서 } y = 2^{15}, \log_2 y = 3 \text{에서 } y = 2^3$$

$$\text{즉, } M = 2^{15}, m = 2^3 \text{이므로 } \frac{M}{m} = \frac{2^{15}}{2^3} = 2^{12}$$

12 답 ④

$$\log_2 4a + \log_a 4 = \log_2 4 + \log_2 a + \log_a 4$$

$$= 2 + \log_2 a + \log_a 4$$

이때 $a > 1$ 에서 $\log_2 a > 0$, $\log_a 4 > 0$ 이므로

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$2 + \log_2 a + \log_a 4 \geq 2 + 2\sqrt{\log_2 a \times \log_a 4}$$

$$= 2 + 2\sqrt{2} \text{ (단, 등호는 } \log_2 a = \log_a 4 \text{일 때 성립)}$$

$$\therefore p = 2 + 2\sqrt{2}$$

한편 $\log_2 a = \log_a 4$ 에서

$$\log_2 a = 2 \log_a 2, \log_2 a = \frac{2}{\log_2 a}, (\log_2 a)^2 = 2$$

$$\log_2 a = \sqrt{2} \text{ (} \because \log_2 a > 0 \text{)} \quad \therefore a = 2^{\sqrt{2}}$$

$$\therefore q = 2^{\sqrt{2}}$$

$$\therefore p \log_4 q = (2 + 2\sqrt{2}) \log_4 2^{\sqrt{2}} = (2 + 2\sqrt{2}) \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + \sqrt{2}$$

13 답 4

$$\text{진수의 조건에서 } x > 0, x - \frac{3}{2} > 0 \quad \therefore x > \frac{3}{2}$$

$$\log_{\sqrt{2}} x - \log_2 \left(x - \frac{3}{2}\right) = 3 \text{에서}$$

$$\log_2 x^2 = \log_2 8 + \log_2 \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore \log_2 x^2 = \log_2 8 \left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{즉, } x^2 = 8 \left(x - \frac{3}{2}\right) \text{이므로 } x^2 - 8x + 12 = 0$$

$$(x-2)(x-6) = 0 \quad \therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 6$$

$$\text{따라서 } a = 2, \beta = 6 \text{이므로 } \beta - a = 4$$

14 답 ①

밑과 진수의 조건에서 $x > 0, x \neq 1$

$$\log_3 x - \log_x 27 = 2 \text{에서 } \log_3 x - 3 \log_x 3 = 2$$

$$\therefore \log_3 x - \frac{3}{\log_3 x} = 2$$

$$\log_3 x = t \text{ (} t \neq 0 \text{)} \text{로 놓으면 } t - \frac{3}{t} = 2$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0, (t+1)(t-3) = 0$$

$$\therefore t = -1 \text{ 또는 } t = 3$$

즉, $\log_3 x = -1$ 또는 $\log_3 x = 3$ 이므로

$$x = 3^{-1} = \frac{1}{3} \text{ 또는 } x = 3^3 = 27$$

따라서 $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = 27$ 이므로 $\log_a \beta = \log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$

15 답 ④

진수의 조건에서 $x > 0$ 이므로 $a > 0$

방정식 $(\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + k = 0$ 의 한 근이 4이므로

$$(\log_2 4)^2 - 5\log_2 4 + k = 0$$

$$2^2 - 5 \times 2 + k = 0 \quad \therefore k = 6$$

$$\therefore (\log_2 x)^2 - 5\log_2 x + 6 = 0$$

$\log_2 x = t$ 로 놓으면 $t^2 - 5t + 6 = 0$

$$(t-2)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 2 \text{ 또는 } t = 3$$

즉, $\log_2 x = 2$ 또는 $\log_2 x = 3$ 이므로

$$x = 4 \text{ 또는 } x = 8 \quad \therefore a = 8$$

$$\therefore a + k = 8 + 6 = 14$$

16 답 $\frac{16}{5}$

$\log x = t$ 로 놓으면 $pt^2 - 3pt + 4 = 0$ ㉠

주어진 방정식의 두 근이 α, β 이므로 이차방정식 ㉠의 두 근은

$\log \alpha, \log \beta$ 이고 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\log \alpha + \log \beta = 3 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\log \alpha \times \log \beta = \frac{4}{p} \quad \dots\dots \text{㉢}$$

이때 $\log \alpha - \log \beta = 2$ 에서 $\log \alpha = 2 + \log \beta$ 이므로

$$\text{이를 ㉡에 대입하여 풀면 } \log \alpha = \frac{5}{2}, \log \beta = \frac{1}{2}$$

$$\text{㉢에서 } \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{p} \text{ 이므로 } p = \frac{16}{5}$$

17 답 22

$\log_6 |x-2| < 1$ 의 진수의 조건에서 $x \neq 2$

(i) $x > 2$ 일 때,

$$\log_6 (x-2) < 1 \text{에서 } x-2 < 6 \quad \therefore x < 8$$

$$\text{그런데 } x > 2 \text{이므로 } 2 < x < 8 \quad \dots\dots \text{㉠}$$

(ii) $x < 2$ 일 때,

$$\log_6 (-x+2) < 1 \text{에서 } -x+2 < 6 \quad \therefore x > -4$$

$$\text{그런데 } x < 2 \text{이므로 } -4 < x < 2 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠, ㉡에서 $-4 < x < 2$ 또는 $2 < x < 8$

$$\therefore A = \{x \mid -4 < x < 2 \text{ 또는 } 2 < x < 8\}$$

$\log_2 2x - \log_{\frac{1}{2}} (x-2) \geq 4$ 의 진수의 조건에서

$$x > 0, x-2 > 0 \quad \therefore x > 2 \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\log_2 2x - \log_{\frac{1}{2}} (x-2) \geq 4 \text{에서}$$

$$(1 + \log_2 x) + \log_2 (x-2) \geq 4$$

$$\log_2 x + \log_2 (x-2) \geq 3, \log_2 x(x-2) \geq \log_2 8$$

밑이 1보다 크므로 $x(x-2) \geq 8$

$$x^2 - 2x - 8 \geq 0, (x+2)(x-4) \geq 0$$

$$\therefore x \leq -2 \text{ 또는 } x \geq 4 \quad \dots\dots \text{㉣}$$

㉢, ㉣의 공통부분은 $x \geq 4$

$$\therefore B = \{x \mid x \geq 4\}$$

$$\therefore A \cap B = \{x \mid 4 \leq x < 8\}$$

따라서 정수 x 는 4, 5, 6, 7이므로 구하는 합은

$$4 + 5 + 6 + 7 = 22$$

18 답 3

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$$(1 - \log_{\frac{1}{2}} x) \times \log_2 x < 6 \text{에서}$$

$$(1 + \log_2 x) \log_2 x < 6$$

$$\log_2 x = t \text{로 놓으면 } (1+t)t < 6$$

$$t^2 + t - 6 < 0, (t+3)(t-2) < 0$$

$$\therefore -3 < t < 2$$

즉, $-3 < \log_2 x < 2$ 이므로

$$\log_2 \frac{1}{8} < \log_2 x < \log_2 4$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } \frac{1}{8} < x < 4 \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡의 공통부분은 } \frac{1}{8} < x < 4$$

따라서 정수 x 의 최댓값은 3이다.

19 답 $\frac{5}{8}$

진수의 조건에서 $x > 0$ ㉠

$x^{\log_{\frac{1}{2}} x} > 8x^4$ 의 양변에 밑이 $\frac{1}{2}$ 인 로그를 취하면

$$\log_{\frac{1}{2}} x^{\log_{\frac{1}{2}} x} < \log_{\frac{1}{2}} 8x^4$$

$$(\log_{\frac{1}{2}} x)^2 < \log_{\frac{1}{2}} 8 + 4 \log_{\frac{1}{2}} x$$

$$\therefore (\log_{\frac{1}{2}} x)^2 - 4 \log_{\frac{1}{2}} x + 3 < 0$$

$$\log_{\frac{1}{2}} x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 4t + 3 < 0$$

$$(t-1)(t-3) < 0 \quad \therefore 1 < t < 3$$

즉, $1 < \log_{\frac{1}{2}} x < 3$ 이므로

$$\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$$

$$\text{밑이 1보다 작으므로 } \frac{1}{8} < x < \frac{1}{2} \quad \dots\dots \text{㉡}$$

$$\text{㉠, ㉡의 공통부분은 } \frac{1}{8} < x < \frac{1}{2}$$

따라서 $\alpha = \frac{1}{8}$, $\beta = \frac{1}{2}$ 이므로

$$\alpha + \beta = \frac{5}{8}$$

20 답 ①

$$(\log x)^2 - \log ax^2 > 0 \text{에서 } (\log x)^2 - (\log a + \log x^2) > 0$$

$$\therefore (\log x)^2 - 2\log x - \log a > 0$$

$$\log x = t \text{로 놓으면 } t^2 - 2t - \log a > 0$$

이 부등식이 모든 실수 t 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식

$$t^2 - 2t - \log a = 0 \text{의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = 1 + \log a < 0, \log a < -1$$

$$\log a < \log 10^{-1}$$

$$\text{밑이 1보다 크므로 } a < \frac{1}{10}$$

$$\text{이때 } a > 0 \text{이므로 } 0 < a < \frac{1}{10}$$

중단원 기출 문제 2회

1 답 ⑤

$$f(m)=2 \text{에서 } \log_a m=2$$

$$f(n)=3 \text{에서 } \log_a n=3$$

$$\begin{aligned} \therefore f\left(\frac{m^4}{n^2}\right) &= \log_a \frac{m^4}{n^2} = 4\log_a m - 2\log_a n \\ &= 4 \times 2 - 2 \times 3 = 2 \end{aligned}$$

2 답 -4

함수 $y=\log_5(x+a)+b$ 의 그래프의 점근선은 직선 $x=-a$ 이므로 $-a=4 \quad \therefore a=-4$

즉, 함수 $y=\log_5(x-4)+b$ 의 그래프의 x 절편이 5이므로

$$0=\log_5(5-4)+b \quad \therefore b=0$$

$$\therefore a+b=-4+0=-4$$

3 답 -5

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\log_{\frac{1}{3}}(x-m)+n$$

주어진 그래프의 점근선의 방정식이 $x=-5$ 이므로

$$m=-5$$

$$\therefore y=\log_{\frac{1}{3}}(x+5)+n$$

또 주어진 그래프가 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$0=\log_{\frac{1}{3}}(-2+5)+n$$

$$0=-1+n \quad \therefore n=1$$

$$\therefore \frac{m}{n}=\frac{-5}{1}=-5$$

4 답 ③

$$\text{함수 } y=\log_2 16x+8=\log_2 16+\log_2 x+8=\log_2 x+12$$

의 그래프를 x 축의 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y=\log_2(x-3)+12$$

이 함수의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동한 그래프의 식은

$$y=-\log_2(x-3)-12$$

이 함수의 그래프가 점 $(5, k)$ 를 지나므로

$$k=-\log_2 2-12=-13$$

5 답 3

$$\overline{AB}=\log_3 k-\log_{27} \frac{1}{k}=\log_3 k+\frac{1}{3}\log_3 k=\frac{4}{3}\log_3 k$$

$$\overline{CD}=\log_3(k+6)+\frac{1}{3}\log_3(k+6)=\frac{4}{3}\log_3(k+6)$$

사다리꼴 ABDC의 넓이가 12이므로

$$\frac{1}{2} \times \left\{ \frac{4}{3}\log_3 k + \frac{4}{3}\log_3(k+6) \right\} \times 6 = 12$$

$$\log_3 k(k+6)=\log_3 3^3$$

$$k(k+6)=27, k^2+6k-27=0$$

$$(k+9)(k-3)=0 \quad \therefore k=3 (\because k>1)$$

6 답 $3^{26}-1$

함수 $y=g(x)$ 는 함수 $y=\log_3 x$ 의 역함수이므로 $g(x)=3^x$ 이고,

점 A는 y 축 위의 점이므로 $A(0, 1)$

따라서 함수 $y=\log_3 x$ 의 그래프 위의 점 B의 y 좌표가 1이므로 x 좌표는 $1=\log_3 x$ 에서

$$x=3 \quad \therefore B(3, 1)$$

점 C의 x 좌표가 3이므로 y 좌표는 $y=3^3=27$

$$\therefore C(3, 27)$$

점 D의 y 좌표가 27이므로 x 좌표는 $27=\log_3 x$ 에서

$$x=3^{27} \quad \therefore D(3^{27}, 27)$$

따라서 $\overline{AB}=3, \overline{CD}=3^{27}-3$ 이므로

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\frac{3^{27}-3}{3}=3^{26}-1$$

7 답 ④

$1<\log_a c<2<\log_a b$ 에서

$$\log_a a<\log_a c<\log_a a^2<\log_a b$$

$a>1$ 이므로 $a<c<a^2<b$

ㄱ. $c<b$ 이고, $b>1$ 에서 $b<b^2$ 이므로 $c<b^2$

ㄴ. $a<b$ 이고, $c>1$ 이므로 $c^a<c^b$

ㄷ. $a^2<b$ 이고, $c>1$ 이므로 $0<\log_c a^2<\log_c b$

$$\frac{1}{\log_c a} > \frac{2}{\log_c b}$$

$$\therefore \log_a c > 2\log_b c$$

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

8 답 ②

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+6)+a$ 의 밑이 1보다 작으므로

$-2 \leq x \leq 2$ 일 때 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+6)+a$ 는

$x=-2$ 에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}}(-2+6)+a$,

$x=2$ 에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}}(2+6)+a$ 를 갖는다.

즉, $\log_{\frac{1}{2}}(-2+6)+a=3$ 이므로

$$-2+a=3 \quad \therefore a=5$$

따라서 구하는 최솟값은

$$\log_{\frac{1}{2}}(2+6)+5=-3+5=2$$

9 답 $\frac{1}{3}$

$0 \leq x \leq \sqrt{5}$ 일 때 함수 $y=\log_a(x^2+4)$ 는

(i) $0<a<1$ 이면

$x=\sqrt{5}$ 에서 최솟값 $\log_a\{(\sqrt{5})^2+4\}$ 를 가지므로

$$\log_a 9=-2, a^{-2}=9 \quad \therefore a=\frac{1}{3}$$

(ii) $a>1$ 이면

$x=0$ 에서 최솟값 $\log_a(0+4)$ 를 가지므로

$$\log_a 4=-2, a^{-2}=4 \quad \therefore a=\frac{1}{2}$$

그런데 $a>1$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 a 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=\frac{1}{3}$

10 답 ③

$y = 3^{\log x} \times x^{\log 3} - 2 \times 3^{\log 100x} = (3^{\log x})^2 - 2 \times 3^{\log 100 + \log x}$
 $= (3^{\log x})^2 - 18 \times 3^{\log x}$
 $3^{\log x} = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{100} \leq x \leq 100$ 에서
 $-2 \leq \log x \leq 2, 3^{-2} \leq 3^{\log x} \leq 3^2 \quad \therefore \frac{1}{9} \leq t \leq 9$
 이때 주어진 함수는 $y = t^2 - 18t = (t-9)^2 - 81$
 따라서 $\frac{1}{9} \leq t \leq 9$ 일 때 함수 $y = (t-9)^2 - 81$ 은
 $t = \frac{1}{9}$ 에서 최댓값 $-\frac{161}{81}$, $t = 9$ 에서 최솟값 -81 을 갖는다.
 따라서 $M = -\frac{161}{81}$, $m = -81$ 이므로 $Mm = 161$

11 답 ④

$y = a \times x^{3-\log_2 x}$ 의 양변에 밑이 2인 로그를 취하면
 $\log_2 y = \log_2 (a \times x^{3-\log_2 x})$
 $= \log_2 a + \log_2 x^{3-\log_2 x}$
 $= \log_2 a + (3-\log_2 x) \log_2 x$
 $= -(\log_2 x)^2 + 3 \log_2 x + \log_2 a$
 $\log_2 x = t$ 로 놓으면 $\frac{1}{2} \leq x \leq 8$ 에서 $-1 \leq t \leq 3$
 이때 주어진 함수는
 $\log_2 y = -t^2 + 3t + \log_2 a = -\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \log_2 a + \frac{9}{4}$
 따라서 $-1 \leq t \leq 3$ 일 때 $t = -1$ 에서 최솟값 $-4 + \log_2 a$ 를 갖는다.
 주어진 함수의 최솟값이 32이므로 $-4 + \log_2 a = \log_2 32$
 $\log_2 a = 9 \quad \therefore a = 2^9 = 512$

12 답 ④

$\log_2 a > 0, \log_2 b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여
 $\log_2 a + \log_2 b \geq 2\sqrt{\log_2 a \times \log_2 b}$ (단, 등호는 $a=b$ 일 때 성립)
 이때 $\log_2 a + \log_2 b = \log_2 ab = \log_2 400 = 2 \log_2 20$ 이므로
 $2 \log_2 20 \geq 2\sqrt{\log_2 a \times \log_2 b}, 2 + \log_2 5 \geq \sqrt{\log_2 a \times \log_2 b}$
 따라서 $\sqrt{\log_2 a \times \log_2 b}$ 의 최댓값은 $2 + \log_2 5$ 이다.

13 답 ①

$2^x - 8 \times 16^{-y} = 14$ 에서 $2^x - 2^{3-4y} = 14 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\log_2 \left(\frac{1}{2}x - 1\right) - \log_2 y = 1$ 에서 $\log_2 \frac{x-2}{2y} = 1$
 $\frac{x-2}{2y} = 2 \quad \therefore 4y = x-2 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 이를 $\textcircled{1}$ 에 대입하면 $2^x - 2^{3-(x-2)} = 14$
 $\therefore 2^x - 2^{5-x} = 14$
 양변에 2^x 을 곱하면
 $(2^x)^2 - 14 \times 2^x - 32 = 0$
 $2^x = t (t > 0)$ 로 놓으면 $t^2 - 14t - 32 = 0$
 $(t+2)(t-16) = 0 \quad \therefore t = 16 (\because t > 0)$
 즉, $2^x = 16$ 이므로 $x = 4$
 이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하여 풀면 $y = \frac{1}{2}$
 따라서 $a = 4, \beta = \frac{1}{2}$ 이므로 $a\beta = 2$

14 답 ③

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $(\log_2 x)^2 - \log_2 x^7 + 10 = 0$ 에서
 $(\log_2 x)^2 - 7 \log_2 x + 10 = 0$
 $\log_2 x = t$ 로 놓으면 $t^2 - 7t + 10 = 0$
 $(t-2)(t-5) = 0 \quad \therefore t = 2$ 또는 $t = 5$
 즉, $\log_2 x = 2$ 또는 $\log_2 x = 5$ 이므로
 $x = 4$ 또는 $x = 32$
 이때 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $x = 4$ 또는 $x = 32$
 따라서 주어진 방정식의 두 근의 차는
 $32 - 4 = 28$

15 답 $14 + \sqrt{3}$

$\log_{\frac{1}{3}}(x-2) = \log_{\frac{1}{9}}(2x-1)$ 의 진수의 조건에서
 $x-2 > 0, 2x-1 > 0$
 $\therefore x > 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $\log_{\frac{1}{3}}(x-2) = \log_{\frac{1}{9}}(2x-1)$ 에서
 $\log_{\frac{1}{9}}(x-2)^2 = \log_{\frac{1}{9}}(2x-1), (x-2)^2 = 2x-1$
 $x^2 - 6x + 5 = 0, (x-1)(x-5) = 0$
 $\therefore x = 1$ 또는 $x = 5$
 이때 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $x = 5 \quad \therefore a = 5$
 $(\log_9 x)^2 - 5 \log_9 x + 1 = 0$ 의 진수의 조건에서
 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{2}$
 $(\log_9 x)^2 - 5 \log_9 x + 1 = 0$ 에서
 $4(\log_9 x)^2 - 5 \log_9 x + 1 = 0$
 $\log_9 x = t$ 로 놓으면 $4t^2 - 5t + 1 = 0$
 $(4t-1)(t-1) = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{4}$ 또는 $t = 1$
 즉, $\log_9 x = \frac{1}{4}$ 또는 $\log_9 x = 1$ 이므로
 $x = \sqrt[4]{9}$ 또는 $x = 9$
 이때 $\textcircled{2}$ 에 의하여
 $\beta = \sqrt[4]{9}, \gamma = 9$ 또는 $\beta = 9, \gamma = \sqrt[4]{9}$
 $\therefore a + \beta + \gamma = 5 + \sqrt[4]{9} + 9 = 14 + \sqrt[4]{9}$

16 답 ①

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$
 $x^{\log_3 x} = \frac{27}{x^2}$ 의 양변에 밑이 3인 로그를 취하면
 $\log_3 x^{\log_3 x} = \log_3 \frac{27}{x^2}$
 $(\log_3 x)^2 = 3 - 2 \log_3 x, (\log_3 x)^2 + 2 \log_3 x - 3 = 0$
 $\log_3 x = t$ 로 놓으면 $t^2 + 2t - 3 = 0$
 $(t+3)(t-1) = 0$
 $\therefore t = -3$ 또는 $t = 1$
 즉, $\log_3 x = -3$ 또는 $\log_3 x = 1$ 이므로
 $x = \frac{1}{27}$ 또는 $x = 3$
 이때 $\textcircled{1}$ 에 의하여 $x = \frac{1}{27}$ 또는 $x = 3$
 따라서 모든 근의 곱은 $\frac{1}{27} \times 3 = \frac{1}{9}$

17 답 59

진수의 조건에서 $x > 0$, $\log_4 x > 0$, $\log_3(\log_4 x) > 0$
 $\log_3(\log_4 x) > \log_3 1$ 에서 밑이 1보다 크므로
 $\log_4 x > 1 \quad \therefore x > 4 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $\log_{\frac{1}{3}}\{\log_3(\log_4 x)\} > 0$ 에서 $\log_{\frac{1}{3}}\{\log_3(\log_4 x)\} > \log_{\frac{1}{3}} 1$
 밑이 1보다 작으므로 $\log_3(\log_4 x) < 1$
 $\log_3(\log_4 x) < \log_3 3$
 밑이 1보다 크므로 $\log_4 x < 3 \quad \therefore x < 64 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 의 공통부분은 $4 < x < 64$
 따라서 구하는 정수 x 의 개수는
 $64 - 4 - 1 = 59$

18 답 81

진수의 조건에서 $x > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $\log_{\frac{1}{3}} x \times \log_{\frac{1}{3}} \frac{x}{9} \leq 8$ 에서 $\log_{\frac{1}{3}} x \times (\log_{\frac{1}{3}} x + 2) \leq 8$
 $\log_{\frac{1}{3}} x = t$ 로 놓으면 $t^2 + 2t - 8 \leq 0$
 $(t+4)(t-2) \leq 0 \quad \therefore -4 \leq t \leq 2$
 즉, $-4 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq 2$ 이므로
 $\log_{\frac{1}{3}} 81 \leq \log_{\frac{1}{3}} x \leq \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{9}$
 밑이 1보다 작으므로 $\frac{1}{9} \leq x \leq 81 \quad \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠}$, $\textcircled{㉡}$ 의 공통부분은 $\frac{1}{9} \leq x \leq 81$
 따라서 자연수 x 의 최댓값은 81이다.

19 답 $0 < a < \frac{1}{27}$ 또는 $a > 9$

진수의 조건에서 $a > 0 \quad \dots\dots \textcircled{㉠}$
 주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = (\log_3 a + 3)^2 - 5(3 + \log_3 a) > 0$
 $(\log_3 a)^2 + \log_3 a - 6 > 0$
 $\log_3 a = t$ 로 놓으면 $t^2 + t - 6 > 0$
 $(t+3)(t-2) > 0 \quad \therefore t < -3$ 또는 $t > 2$
 즉, $\log_3 a < -3$ 또는 $\log_3 a > 2$ 이므로
 $a < \frac{1}{27}$ 또는 $a > 9$
 이때 $\textcircled{㉠}$ 에 의하여
 $0 < a < \frac{1}{27}$ 또는 $a > 9$

20 답 ②

처음 방사능의 양을 a 라 하면 $\left(\frac{75}{100}\right)^n a \leq \frac{5}{100} a$
 양변에 상용로그를 취하면
 $n \log \frac{75}{100} \leq \log \frac{5}{100}$
 $n \log \frac{3}{4} \leq \log 5 - 2$
 $n(\log 3 - 2 \log 2) \leq \log 5 - 2$
 $n(0.4 - 2 \times 0.3) \leq (1 - 0.3) - 2, \quad -0.2n \leq -1.3$
 $\therefore n \geq 6.5$
 따라서 이 벽을 최소한 7번 통과시켜야 한다.

05 / 삼각함수

26~31쪽

중단원 기출문제 1회

1 답 ②

① $-1420^\circ = 360^\circ \times (-4) + 20^\circ$ ② $-710^\circ = 360^\circ \times (-2) + 10^\circ$
 ③ $-340^\circ = 360^\circ \times (-1) + 20^\circ$ ④ $380^\circ = 360^\circ \times 1 + 20^\circ$
 ⑤ $1100^\circ = 360^\circ \times 3 + 20^\circ$
 따라서 동경 OP가 나타낼 수 없는 각은 ②이다.

2 답 ㄱ, ㄴ, ㄹ

$420^\circ = 360^\circ \times 1 + 60^\circ$
 ㄱ. $-1740^\circ = 360^\circ \times (-5) + 60^\circ$
 ㄴ. $-660^\circ = 360^\circ \times (-2) + 60^\circ$
 ㄷ. $-30^\circ = 360^\circ \times (-1) + 330^\circ$
 ㄹ. $390^\circ = 360^\circ \times 1 + 30^\circ$
 ㅁ. $780^\circ = 360^\circ \times 2 + 60^\circ$
 ㅂ. $1130^\circ = 360^\circ \times 3 + 50^\circ$
 따라서 420° 를 나타내는 동경과 일치하는 것은 ㄱ, ㄴ, ㄹ이다.

3 답 제2사분면, 제4사분면

2θ 가 제3사분면의 각이므로
 $360^\circ \times n + 180^\circ < 2\theta < 360^\circ \times n + 270^\circ$ (단, n 은 정수)
 $\therefore 180^\circ \times n + 90^\circ < \theta < 180^\circ \times n + 135^\circ$
 (i) $n = 2k$ (k 는 정수)일 때,
 $360^\circ \times k + 90^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 135^\circ$
 따라서 θ 는 제2사분면의 각이다.
 (ii) $n = 2k + 1$ (k 는 정수)일 때,
 $360^\circ \times k + 270^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 315^\circ$
 따라서 θ 는 제4사분면의 각이다.
 (i), (ii)에서 θ 는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

4 답 ③

θ 가 제1사분면의 각이므로
 $360^\circ \times n + 0^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 90^\circ$ (단, n 은 정수)
 $\therefore 180^\circ \times n + 0^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \times n + 45^\circ$
 (i) $n = 2k$ (k 는 정수)일 때,
 $360^\circ \times k + 0^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 45^\circ$
 따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제1사분면의 각이다.
 (ii) $n = 2k + 1$ (k 는 정수)일 때,
 $360^\circ \times k + 180^\circ < \frac{\theta}{2} < 360^\circ \times k + 225^\circ$
 따라서 $\frac{\theta}{2}$ 는 제3사분면의 각이다.
 (i), (ii)에서 각 $\frac{\theta}{2}$ 를 나타내는 동경이 존재할 수 있는 사분면은 제1사분면 또는 제3사분면이다.

5 답 ③

각 θ 를 나타내는 동경과 각 9θ 를 나타내는 동경이 일치하므로

$$9\theta - \theta = 360^\circ \times n \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$8\theta = 360^\circ \times n \quad \therefore \theta = 45^\circ \times n \quad \dots\dots ㉠$$

$$0^\circ < \theta < 90^\circ \text{에서 } 0^\circ < 45^\circ \times n < 90^\circ$$

$$\therefore 0 < n < 2$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=45^\circ$

6 답 225°

$$8\theta - 4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad \therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ \quad \dots\dots ㉠$$

$$180^\circ < \theta < 270^\circ \text{에서 } 180^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 270^\circ$$

$$\therefore \frac{3}{2} < n < \frac{5}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=2$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=225^\circ$

7 답 22.5°, 67.5°

$$3\theta + 5\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$8\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad \therefore \theta = 45^\circ \times n + \frac{45^\circ}{2} \quad \dots\dots ㉠$$

$$0^\circ < \theta < 90^\circ \text{에서 } 0^\circ < 45^\circ \times n + \frac{45^\circ}{2} < 90^\circ$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=0$ 또는 $n=1$

이를 ㉠에 대입하면

$$\theta = \frac{45^\circ}{2} = 22.5^\circ \text{ 또는 } \theta = 45^\circ + \frac{45^\circ}{2} = 67.5^\circ$$

8 답 ②

$$\textcircled{2} \quad 210^\circ = 210 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7}{6}\pi$$

따라서 옳지 않은 것은 ㉠이다.

9 답 ⑤

$$\textcircled{1} \quad -250^\circ = 360^\circ \times (-1) + 110^\circ \Rightarrow \text{제2사분면의 각}$$

$$\textcircled{2} \quad 120^\circ \Rightarrow \text{제2사분면의 각}$$

$$\textcircled{3} \quad -\frac{4}{3}\pi = 2\pi \times (-1) + \frac{2}{3}\pi \Rightarrow \text{제2사분면의 각}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{3}{4}\pi \Rightarrow \text{제2사분면의 각}$$

$$\textcircled{5} \quad \frac{7}{6}\pi = \pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow \text{제3사분면의 각}$$

따라서 동경이 위치하는 사분면이 다른 하나는 ㉠이다.

10 답 ④

호의 길이를 l , 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl \text{에서 } 12\pi = \frac{1}{2} \times r \times 4\pi \quad \therefore r=6$$

$$l = r\theta \text{에서 } 4\pi = 6\theta \quad \therefore \theta = \frac{2}{3}\pi$$

$$\therefore \frac{r\pi}{\theta} = \frac{6\pi}{\frac{2}{3}\pi} = 9$$

11 답 ①

주어진 원뿔의 전개도는 오른쪽 그림과 같고, 옆면인 부채꼴의 호의 길이는

$$2\pi \times 3 = 6\pi$$

즉, 부채꼴의 넓이는

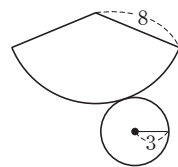
$$\frac{1}{2} \times 8 \times 6\pi = 24\pi$$

또 밑면인 원의 넓이는

$$\pi \times 3^2 = 9\pi$$

따라서 원뿔의 겉넓이는

$$24\pi + 9\pi = 33\pi$$



12 답 호의 길이: 6π, 넓이: 27π

각 θ 를 나타내는 동경과 각 11θ 를 나타내는 동경이 x 축에 대하여 대칭이므로

$$\theta + 11\theta = 2\pi \times n \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$12\theta = 2\pi \times n \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{6} \times n \quad \dots\dots ㉠$$

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{5}{6}\pi \text{에서 } \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6} \times n < \frac{5}{6}\pi$$

$$\therefore 3 < n < 5$$

이때 n 은 정수이므로 $n=4$

$$\text{이를 ㉠에 대입하면 } \theta = \frac{2}{3}\pi$$

따라서 반지름의 길이가 9이고, 중심각의 크기가 $\frac{2}{3}\pi$ 인 부채꼴의

$$\text{호의 길이는 } 9 \times \frac{2}{3}\pi = 6\pi$$

$$\text{넓이는 } \frac{1}{2} \times 9 \times 6\pi = 27\pi$$

13 답 18

부채꼴의 둘레의 길이가 12이므로

$$l = 12 - 2r$$

$$\therefore S + l = \frac{1}{2}rl + l = l\left(\frac{1}{2}r + 1\right)$$

$$= (12 - 2r)\left(\frac{1}{2}r + 1\right)$$

$$= -r^2 + 4r + 12$$

$$= -(r - 2)^2 + 16 \quad (0 < r < 6)$$

따라서 $S + l$ 은 $r=2$ 에서 최댓값 16을 가지므로

$$a=2, M=16$$

$$\therefore a + M = 18$$

14 답 -1

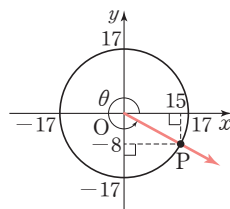
$$OP = \sqrt{15^2 + (-8)^2} = 17 \text{이므로}$$

$$\sin \theta = -\frac{8}{17}, \cos \theta = \frac{15}{17},$$

$$\tan \theta = -\frac{8}{15}$$

$$\therefore \frac{17 \cos \theta + 15 \tan \theta}{17 \sin \theta + 1}$$

$$= \frac{17 \times \frac{15}{17} + 15 \times \left(-\frac{8}{15}\right)}{17 \times \left(-\frac{8}{17}\right) + 1} = -1$$



15 답 ③

$\sin \theta \cos \theta > 0$, $\sin \theta + \cos \theta < 0$ 이려면 $\sin \theta < 0$, $\cos \theta < 0$ 이어야 하므로 θ 는 제3사분면의 각이다.

16 답 ④

θ 가 제2사분면의 각이면 $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$ 이므로

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sin^2 \theta} - \sqrt{\cos^2 \theta} + \sqrt{(\cos \theta - \sin \theta)^2} \\ &= \sin \theta - (-\cos \theta) - (\cos \theta - \sin \theta) \\ &= 2\sin \theta \end{aligned}$$

17 답 ④

$$\begin{aligned} & \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{\cos \theta(1 - \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 - \sin \theta)} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos \theta - \sin \theta \cos \theta}{1 - \sin^2 \theta} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos \theta - \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \end{aligned}$$

18 답 ③

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{21}{25}$$

이때 θ 가 제3사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0$

$$\therefore \sin \theta = -\sqrt{\frac{21}{25}} = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\text{즉, } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-\frac{\sqrt{21}}{5}}{-\frac{2}{5}} = \frac{\sqrt{21}}{2} \text{ 이므로}$$

$$\sin \theta + \tan \theta = -\frac{\sqrt{21}}{5} + \frac{\sqrt{21}}{2} = \frac{3\sqrt{21}}{10}$$

19 답 ④

$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{3} \quad \therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan^2 \theta + \frac{1}{\tan^2 \theta} &= \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 - 2\sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} \\ &= \frac{1 - 2(\sin \theta \cos \theta)^2}{(\sin \theta \cos \theta)^2} = \frac{1 - 2 \times \frac{1}{9}}{\frac{1}{9}} = 7 \end{aligned}$$

20 답 $-\frac{7}{8}$

이차방정식 $4x^2 + 3x + k = 0$ 에서 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -\frac{3}{4} \quad \dots\dots ㉠$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k}{4} \quad \dots\dots ㉡$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{9}{16}$$

$$1 + 2\sin \theta \cos \theta = \frac{9}{16}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{7}{32}$$

따라서 ㉡에서 $\frac{k}{4} = -\frac{7}{32}$ 이므로 $k = -\frac{7}{8}$

중단원 기출문제 2회

1 답 ③

① $-980^\circ = 360^\circ \times (-3) + 100^\circ$

② $-620^\circ = 360^\circ \times (-2) + 100^\circ$

③ $-170^\circ = 360^\circ \times (-1) + 190^\circ$

④ $460^\circ = 360^\circ \times 1 + 100^\circ$

⑤ $1180^\circ = 360^\circ \times 3 + 100^\circ$

따라서 각을 나타내는 동경이 나머지 넷과 다른 하나는 ③이다.

2 답 4

$360^\circ \times n + 90^\circ < 2\theta < 360^\circ \times n + 180^\circ$ (단, n 은 정수)

$\therefore 180^\circ \times n + 45^\circ < \theta < 180^\circ \times n + 90^\circ$

(i) $n = 2k$ (k 는 정수)일 때,

$360^\circ \times k + 45^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 90^\circ$

따라서 θ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n = 2k + 1$ (k 는 정수)일 때,

$360^\circ \times k + 225^\circ < \theta < 360^\circ \times k + 270^\circ$

따라서 θ 는 제3사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제1사분면 또는 제3사분면의 각이다.

따라서 a 의 값은 1, 3이므로 구하는 합은

$1 + 3 = 4$

3 답 ②

θ 가 제3사분면의 각이면

$360^\circ \times n + 180^\circ < \theta < 360^\circ \times n + 270^\circ$ (단, n 은 정수)

$\therefore 120^\circ \times n + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 120^\circ \times n + 90^\circ$

(i) $n = 3k$ 일 때,

$360^\circ \times k + 60^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 90^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면의 각이다.

(ii) $n = 3k + 1$ 일 때,

$360^\circ \times k + 180^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 210^\circ$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제3사분면의 각이다.

(iii) $n=3k+2$ 일 때,

$$360^\circ \times k + 300^\circ < \frac{\theta}{3} < 360^\circ \times k + 330^\circ$$

따라서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제4사분면의 각이다.

(i)~(iii)에서 $\frac{\theta}{3}$ 는 제1사분면 또는 제3사분면 또는 제4사분면의 각
이므로 각 $\frac{\theta}{3}$ 를 나타내는 동경이 존재하지 않는 사분면은 제2사분면
이다.

4 답 135°

$$7\theta - 3\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \text{ (단, } n \text{의 정수)}$$

$$4\theta = 360^\circ \times n + 180^\circ \quad \therefore \theta = 90^\circ \times n + 45^\circ \quad \dots\dots ㉠$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ \text{에서 } 90^\circ < 90^\circ \times n + 45^\circ < 180^\circ$$

$$\therefore \frac{1}{2} < n < \frac{3}{2}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=1$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=135^\circ$

5 답 ②

$$6\theta - \theta = 360^\circ \times n \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$5\theta = 360^\circ \times n \quad \therefore \theta = 72^\circ \times n \quad \dots\dots ㉠$$

$$270^\circ < \theta < 360^\circ \text{에서 } 270^\circ < 72^\circ \times n < 360^\circ$$

$$\therefore \frac{15}{4} < n < 5$$

이때 n 은 정수이므로 $n=4$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=288^\circ$

6 답 ⑤

$$3\theta + 6\theta = 360^\circ \times n \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$9\theta = 360^\circ \times n \quad \therefore \theta = 40^\circ \times n \quad \dots\dots ㉠$$

$$180^\circ < \theta < 270^\circ \text{에서 } 180^\circ < 40^\circ \times n < 270^\circ$$

$$\therefore \frac{9}{2} < n < \frac{27}{4}$$

이때 n 은 정수이므로 $n=5$ 또는 $n=6$

이를 ㉠에 대입하면 $\theta=200^\circ$ 또는 $\theta=240^\circ$

따라서 모든 각 θ 의 크기의 합은 $200^\circ + 240^\circ = 440^\circ$

7 답 6

$$\theta + 5\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ \text{ (단, } n \text{은 정수)}$$

$$6\theta = 360^\circ \times n + 90^\circ \quad \therefore \theta = 60^\circ \times n + 15^\circ \quad \dots\dots ㉠$$

$$0^\circ < \theta < 360^\circ \text{에서 } 0^\circ < 60^\circ \times n + 15^\circ < 360^\circ$$

$$\therefore -\frac{1}{4} < n < \frac{23}{4}$$

이때 n 은 정수이므로

$n=0$ 또는 $n=1$ 또는 $n=2$ 또는 $n=3$ 또는 $n=4$ 또는 $n=5$

이를 ㉠에 대입하면

$\theta=15^\circ$ 또는 $\theta=75^\circ$ 또는 $\theta=135^\circ$ 또는 $\theta=195^\circ$ 또는 $\theta=255^\circ$

또는 $\theta=315^\circ$

따라서 각 θ 의 개수는 6이다.

8 답 67

$$600^\circ = 600 \times \frac{\pi}{180} = \frac{10}{3}\pi \text{이므로 } a=3, b=10$$

$$\text{또 } \frac{3}{10}\pi = \frac{3}{10}\pi \times \frac{180^\circ}{\pi} = 54^\circ \text{이므로 } c=54$$

$$\therefore a+b+c=3+10+54=67$$

9 답 4π

부채꼴의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$12\pi = \frac{1}{2} \times r^2 \times \frac{2}{3}\pi$$

$$r^2 = 36 \quad \therefore r = 6 \quad (\because r > 0)$$

따라서 부채꼴의 호의 길이는

$$6 \times \frac{2}{3}\pi = 4\pi$$

10 답 ⑤

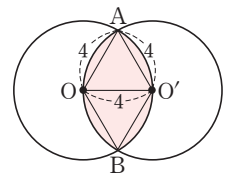
오른쪽 그림과 같이 색칠한 부분에 내접하
는 두 개의 삼각형은 한 변의 길이가 4인
정삼각형이므로 부채꼴 OAB의 중심각의
크기는 $\frac{2}{3}\pi$ 이다.

부채꼴 OAB의 호의 길이를 l 이라 하면

$$l = 4 \times \frac{2}{3}\pi = \frac{8}{3}\pi$$

따라서 색칠한 부분의 둘레의 길이는 부채꼴 OAB의 호의 길이의
2배이므로

$$2 \times \frac{8}{3}\pi = \frac{16}{3}\pi$$



11 답 ③

두 부채꼴 A, B의 호의 길이는 각각 $\frac{3}{2}r_A$, $\frac{3}{2}r_B$ 이므로

$$\frac{3}{2}r_A + \frac{3}{2}r_B = 9 \quad \therefore r_A + r_B = 6$$

두 부채꼴 A, B의 넓이는 각각 $\frac{3}{4}r_A^2$, $\frac{3}{4}r_B^2$ 이므로

$$\frac{3}{4}r_A^2 + \frac{3}{4}r_B^2 = 18 \quad \therefore r_A^2 + r_B^2 = 24$$

$$(r_A + r_B)^2 = r_A^2 + 2r_A r_B + r_B^2 \text{에서}$$

$$6^2 = 24 + 2r_A r_B \quad \therefore r_A r_B = 6$$

12 답 호의 길이: 5, 중심각의 크기: 2

부채꼴의 반지름의 길이를 r , 호의 길이를 l 이라 하면

$$l = 10 - 2r$$

부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}rl = \frac{1}{2}r(10 - 2r)$$

$$= -r^2 + 5r = -\left(r - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} \quad (0 < r < 5)$$

따라서 S 는 $r = \frac{5}{2}$ 에서 최댓값 $\frac{25}{4}$ 를 갖는다.

이때 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

$$\frac{25}{4} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 \times \theta \quad \therefore \theta = 2$$

또 부채꼴의 호의 길이는

$$l = 10 - 2r = 10 - 2 \times \frac{5}{2} = 5$$

13 답 ②

동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\theta_1 = \pi + \theta, \theta_2 = -\theta$$

$$\sin \theta = \frac{4}{5}, \cos \theta = \frac{3}{5}, \tan \theta = \frac{4}{3} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 + \tan \theta_2 &= \sin(\pi + \theta) + \tan(-\theta) \\ &= -\sin \theta - \tan \theta \\ &= -\frac{4}{5} - \frac{4}{3} = -\frac{32}{15} \end{aligned}$$

14 답 ⑤

$\overline{AD}=4, \overline{AB}=2$ 이므로

$$A(-2, 1)$$

$$\overline{OA} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

두 점 A, C가 원점에 대하여 대

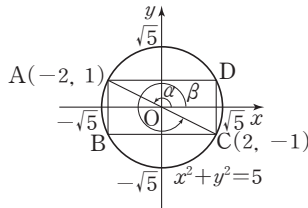
칭이므로 $C(2, -1)$

$$\overline{OC} = \sqrt{5} \text{이므로}$$

$$\sin \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \times \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -1$$



15 답 제4사분면

$$(i) \frac{\cos \theta}{\tan \theta} < 0 \text{에서}$$

$\cos \theta, \tan \theta$ 의 값의 부호가 서로 다르므로 θ 는 제3사분면 또는 제4사분면의 각이다.

$$(ii) \sin \theta \tan \theta > 0 \text{에서}$$

$\sin \theta, \tan \theta$ 의 값의 부호가 서로 같으므로 θ 는 제1사분면 또는 제4사분면의 각이다.

(i), (ii)에서 θ 는 제4사분면의 각이다.

16 답 ④

θ 가 제4사분면의 각이므로 $\sin \theta < 0, \cos \theta > 0$

$$\begin{aligned} \therefore |\sin \theta - \cos \theta| - \sqrt{\sin^2 \theta} &= -(\sin \theta - \cos \theta) - (-\sin \theta) \\ &= -\sin \theta + \cos \theta + \sin \theta \\ &= \cos \theta \end{aligned}$$

17 답 ②

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{에서}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

이때 θ 가 제2사분면의 각이므로 $\sin \theta > 0$

$$\therefore \sin \theta = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{따라서 } \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = -2\sqrt{2} \text{이므로}$$

$$9 \sin \theta \tan \theta = 9 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times (-2\sqrt{2}) = -24$$

18 답 ①

$$\frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} = 2 - \sqrt{3} \text{에서}$$

$$1 + \tan \theta = (2 - \sqrt{3})(1 - \tan \theta)$$

$$(3 - \sqrt{3}) \tan \theta = 1 - \sqrt{3}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{1 - \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{(1 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

이때 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 의 양변을 $\cos^2 \theta$ 로 나누면

$$\tan^2 \theta + 1 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \text{이므로}$$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 1 = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \cos^2 \theta = \frac{3}{4}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{이므로}$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

이때 $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ 이므로 $\sin \theta > 0, \cos \theta < 0$

$$\text{따라서 } \sin \theta = \frac{1}{2}, \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{이므로}$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

19 답 ④

$\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{3}$ 의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4}{9}$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4}{9}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = -\frac{5}{18}$$

$$\therefore \sin^3 \theta + \cos^3 \theta$$

$$= (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= \frac{2}{3} \times \left\{1 - \left(-\frac{5}{18}\right)\right\} = \frac{23}{27}$$

20 답 ②

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\sin \theta + \cos \theta = -k \quad \dots\dots \text{㉠}$$

$$\sin \theta \cos \theta = -k \quad \dots\dots \text{㉡}$$

㉠의 양변을 제곱하면

$$\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = (-k)^2$$

$$1 + 2 \sin \theta \cos \theta = k^2$$

$$1 + 2 \times (-k) = k^2 \quad (\because \text{㉡})$$

$$k^2 + 2k - 1 = 0 \quad \therefore k = -1 + \sqrt{2} \quad (\because k > 0) \quad \dots\dots \text{㉢}$$

$$\therefore (\sin \theta - \cos \theta)^2 = (\sin \theta + \cos \theta)^2 - 4 \sin \theta \cos \theta$$

$$= (-k)^2 - 4 \times (-k) \quad (\because \text{㉠, ㉡})$$

$$= k^2 + 4k$$

$$= (-1 + \sqrt{2})^2 + 4 \times (-1 + \sqrt{2}) \quad (\because \text{㉢})$$

$$= 2\sqrt{2} - 1$$

중단원 기출문제 ①

1 답 ②

함수 $f(x)$ 의 주기가 p 이므로 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+2p)=f(x+p)=f(x)$$

$$\begin{aligned}\therefore f(2p) &= f(0) = \frac{\sin 0 + \cos 0 - 3}{\tan 0 + 2} \\ &= \frac{-2}{2} = -1\end{aligned}$$

2 답 ③

$$\textcircled{1} f(\pi) = 3\sin(2\pi - \pi) + 1 = 1$$

$\textcircled{2}$ 정의역은 실수 전체의 집합이다.

$$\textcircled{3} \text{ 주기는 } \frac{2\pi}{|2|} = \pi \text{이다.}$$

$$\textcircled{4} \text{ 최댓값은 } 3+1=4, \text{ 최솟값은 } -3+1=-2 \text{이다.}$$

$$\textcircled{5} \text{ 함수 } f(x) = 3\sin(2x - \pi) + 1 = 3\sin 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1 \text{의 그래프}$$

는 함수 $y = 3\sin 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{\pi}{2}$ 만큼, y 축의

방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 $\textcircled{3}$ 이다.

3 답 -8

함수 $y = \cos 2x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼, y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동한 그래프의 식은

$$y = \cos 2(x-1) + a = \cos(2x-2) + a$$

이 식이 $y = \cos(2x+b) + 4$ 와 같아야 하므로

$$a=4, b=-2 \quad \therefore ab=-8$$

4 답 ㄴ, ㄷ

정의역에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+\pi) = f(x)$ 이면 함수

$f(x)$ 는 주기가 $\frac{\pi}{n}$ (n 은 자연수)인 주기함수이다.

$$\neg. f(x) = 2\sin x - 1 \text{의 주기는 } 2\pi$$

이때 $\frac{\pi}{n} = 2\pi$ 를 만족시키는 자연수 n 이 존재하지 않으므로

$$f(x+\pi) \neq f(x)$$

$$\neg. f(x) = \frac{1}{4}\cos 2x \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{|2|} = \pi$$

$$\therefore f(x+\pi) = f(x)$$

$$\neg. f(x) = \tan 2x \text{의 주기는 } \frac{\pi}{|2|} = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore f(x+\pi) = f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$$

$$\neg. f(x) = 3\sin \sqrt{2}x \text{의 주기는 } \frac{2\pi}{|\sqrt{2}|} = \sqrt{2}\pi$$

이때 $\frac{\pi}{n} = \sqrt{2}\pi$ 를 만족시키는 자연수 n 이 존재하지 않으므로

$$f(x+\pi) \neq f(x)$$

따라서 보기 중 정의역에 속하는 모든 실수 x 에 대하여

$f(x+\pi) = f(x)$ 를 만족시키는 함수는 ㄴ, ㄷ이다.

5 답 ②

(가)에서 함수 $f(x)$ 의 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b=2$$

즉, 함수 $y = a \tan 2\left(x + \frac{c}{2}\right) + d$ 의 그래프는 함수 $y = a \tan 2x$ 의

그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{c}{2}$ 만큼, y 축의 방향으로 d 만큼 평행이

동한 것이므로

(나)에서

$$-\frac{c}{2} = \frac{\pi}{6}, d = -1 \quad \therefore c = -\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore f(x) = a \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$$

(다)에서 $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3} - 1$ 이므로

$$a \tan \frac{\pi}{3} - 1 = 3\sqrt{3} - 1, a\sqrt{3} - 1 = 3\sqrt{3} - 1 \quad \therefore a=3$$

$$\therefore abcd = 3 \times 2 \times \left(-\frac{\pi}{3}\right) \times (-1) = 2\pi$$

6 답 -6π

주어진 함수의 최댓값이 1, 최솟값이 -3 이고 $a > 0$ 이므로

$$a+d=1, -a+d=-3$$

두 식을 연립하여 풀면 $a=2, d=-1$

또 주기가 $\frac{7}{6}\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\pi$ 이고 $b > 0$ 이므로

$$\frac{2\pi}{b} = \frac{2}{3}\pi \quad \therefore b=3$$

따라서 주어진 함수는 $y = 2\sin(3x+c) - 1$ 이고 그래프가 점

$\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ 을 지나므로

$$1 = 2\sin\left(\frac{3}{2}\pi + c\right) - 1 \quad \therefore \sin\left(\frac{3}{2}\pi + c\right) = 1$$

이때 $0 < c < 2\pi$ 에서 $\frac{3}{2}\pi < \frac{3}{2}\pi + c < \frac{7}{2}\pi$ 이므로

$$\frac{3}{2}\pi + c = \frac{5}{2}\pi \quad \therefore c = \pi$$

$$\therefore abcd = 2 \times 3 \times \pi \times (-1) = -6\pi$$

7 답 ④

오른쪽 그림에서 $C(3, 0), D(9, 0)$

이라 하고 $x \geq 9$ 에서 그래프와 x 축의

첫 번째 교점을 E 라 하면 $\overline{OC} = \overline{DE}$

이므로 점 E 의 x 좌표는

$$9+3=12$$

따라서 $y = a \sin bx$ 의 주기는 $12 \times \frac{2}{3} = 8$ 이고 $b > 0$ 이므로

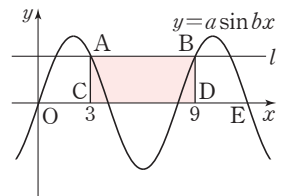
$$\frac{2\pi}{b} = 8 \quad \therefore b = \frac{\pi}{4}$$

즉, $y = a \sin \frac{\pi}{4}x$ 이므로 $\overline{AC} = a \sin \frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

직사각형 $ACDB$ 의 넓이가 $60\sqrt{2}$ 이므로

$$6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}a = 60\sqrt{2} \quad \therefore a=20$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{20}{\frac{\pi}{4}} = \frac{80}{\pi}$$

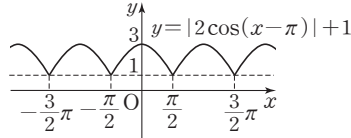


8 답 6π

$y = \sin x$ 의 그래프에서 $\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{x_3+x_4}{2} = \frac{5}{2}\pi$ 이므로
 $x_1+x_2 = \pi$, $x_3+x_4 = 5\pi$
 $\therefore x_1+x_2+x_3+x_4 = 6\pi$

9 답 ①

함수 $y = |2\cos(x-\pi)| + 1$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같으므로
 $a = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$,
 $M = 3$, $m = 1$
 $\therefore a(M+m) = \pi(3+1) = 4\pi$



10 답 ②

$\sin \frac{7}{6}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$
 $\cos \frac{15}{4}\pi = \cos\left(2\pi + 2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\cos \frac{5}{3}\pi = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$
 $\tan \frac{5}{4}\pi = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$
 $\therefore (\text{주어진 식}) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \times \frac{1}{2} + 1$
 $= -1 + 1 - 2 + 1 = -1$

11 답 0

$\theta = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ 이므로 $5\theta = \pi$
 $\therefore \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \dots + \cos 10\theta$
 $= \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos \pi$
 $+ \cos(\pi + \theta) + \cos(\pi + 2\theta) + \cos(\pi + 3\theta)$
 $+ \cos(\pi + 4\theta) + \cos 2\pi$
 $= \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta - 1$
 $- \cos \theta - \cos 2\theta - \cos 3\theta - \cos 4\theta + 1$
 $= 0$

12 답 ⑤

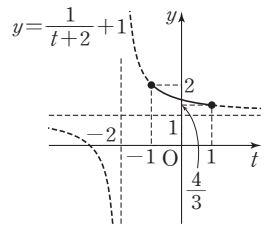
$-1 \leq \sin 2x \leq 1$ 에서 $2\sin 2x - 3 < 0$ 이므로
 $y = -2a\sin 2x + 3a + b$
 $a > 0$ 이므로 주어진 함수의 최댓값은
 $2a + 3a + b = 1 \quad \therefore 5a + b = 1 \quad \dots\dots ㉠$
 최솟값은
 $-2a + 3a + b = -3 \quad \therefore a + b = -3 \quad \dots\dots ㉡$
 ㉠, ㉡을 연립하여 풀면
 $a = 1$, $b = -4 \quad \therefore a - b = 5$

13 답 $\frac{10}{3}$

$y = \frac{\cos x + 3}{\cos x + 2}$ 에서 $\cos x = t$ 로 놓으면 $-1 \leq t \leq 1$ 이고
 $y = \frac{t+3}{t+2} = \frac{(t+2)+1}{t+2} = \frac{1}{t+2} + 1$

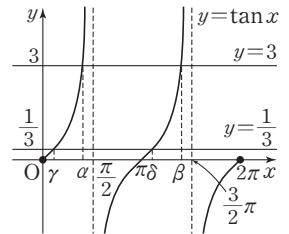
오른쪽 그림에서 $t = -1$ 일 때 최댓값은
 2 , $t = 1$ 일 때 최솟값은 $\frac{4}{3}$ 이므로

$M = 2$, $m = \frac{4}{3}$
 $\therefore M + m = \frac{10}{3}$



14 답 ⑤

$0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = 3$ 의 두 교점의 x 좌표가 각각 α , β 이므로 $\alpha < \beta$ 라 하면
 $\beta = \pi + \alpha$
 또 직선 $y = \frac{1}{3}$ 의 두 교점의 x 좌표가 각각 γ , δ 이므로 $\gamma < \delta$ 라 하면
 $\delta = \pi + \gamma$



이때 $\tan \alpha = 3$, $\tan \gamma = \frac{1}{3}$ 이므로 $\tan \alpha = \frac{1}{\tan \gamma} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)$ 에서
 $\alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma \quad \therefore \alpha + \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \dots\dots ㉠$
 $\therefore \beta + \delta = (\pi + \alpha) + (\pi + \gamma) = 2\pi + (\alpha + \gamma) = \frac{5}{2}\pi \quad \dots\dots ㉡$
 ㉠, ㉡에서 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 3\pi$
 $\therefore \cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta) = \cos 3\pi = -1$

15 답 ④

$3\tan^2 x - 4\sqrt{3}\tan x + 3 = 0$ 에서
 $(3\tan x - \sqrt{3})(\tan x - \sqrt{3}) = 0$
 $\therefore \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 또는 $\tan x = \sqrt{3}$
 $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 이므로
 $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 에서 $x = \frac{\pi}{6}$
 $\tan x = \sqrt{3}$ 에서 $x = \frac{\pi}{3}$
 따라서 구하는 서로 다른 모든 실수 x 의 값의 합은
 $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$

16 답 ②

$4\sin^2 A + 4\cos A = 5$ 에서
 $4(1 - \cos^2 A) + 4\cos A = 5$
 $4\cos^2 A - 4\cos A + 1 = 0$
 $(2\cos A - 1)^2 = 0 \quad \therefore \cos A = \frac{1}{2}$
 그런데 $0 < A < \pi$ 이므로 $A = \frac{\pi}{3}$
 이때 $A + B + C = \pi$ 이므로
 $B + C - 2\pi = (\pi - A) - 2\pi = -\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{4}{3}\pi$
 $\therefore \sin \frac{B+C-2\pi}{2} = \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(-\pi + \frac{\pi}{3}\right)$
 $= -\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

17 [답] $-5 \leq k \leq 0$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+4\sin(\pi+x)=k \text{에서}$$

$$(-\sin x)\sin x-4\sin x=k \quad \therefore -\sin^2 x-4\sin x=k$$

이 방정식이 실근을 가지려면 $y=-\sin^2 x-4\sin x$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 의 교점이 존재해야 한다.

이때 $\sin x=t$ 로 놓으면

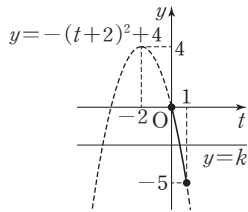
$$y=-t^2-4t=-(t+2)^2+4 \text{이고}$$

$$0 \leq x \leq \pi \text{에서 } 0 \leq t \leq 1$$

따라서 주어진 방정식이 실근을 가지려면

오른쪽 그림에서

$$-5 \leq k \leq 0$$



18 [답] ④

$x-\frac{\pi}{3}=t$ 로 놓으면 $0 < x < 2\pi$ 에서 $-\frac{\pi}{3} < t < \frac{5\pi}{3}$ 이고, 주어진 부등식은

$$\cos t \leq \frac{1}{2}$$

오른쪽 그림에서 부등식

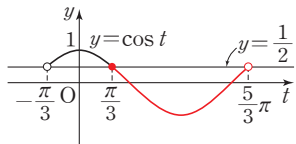
$$\cos t \leq \frac{1}{2} \text{의 해는 } \frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5\pi}{3} \text{이}$$

므로

$$\frac{\pi}{3} \leq x - \frac{\pi}{3} < \frac{5\pi}{3}$$

$$\therefore \frac{2\pi}{3} \leq x < 2\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{2\pi}{3}, \beta = 2\pi \text{이므로 } \beta - \alpha = \frac{4\pi}{3}$$



19 [답] $a \geq 2$

$$\cos^2 x - 4\sin x - 2a \leq 0 \text{에서 } (1 - \sin^2 x) - 4\sin x - 2a \leq 0$$

$$\therefore \sin^2 x + 4\sin x + 2a - 1 \geq 0$$

$\sin x=t$ 로 놓으면

$$t^2 + 4t + 2a - 1 \geq 0 \text{이고 } -1 \leq t \leq 1$$

$y=t^2+4t+2a-1$ 이라 하면

$$y=t^2+4t+2a-1$$

$$=(t+2)^2+2a-5$$

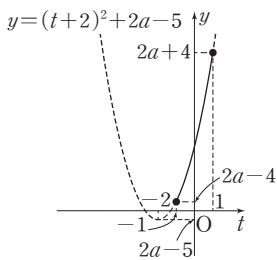
$-1 \leq t \leq 1$ 일 때 $t=-1$ 에서 최솟값

$2a-4$ 를 갖는다.

이때 부등식이 항상 성립하려면

$$2a-4 \geq 0 \text{이어야 하므로}$$

$$a \geq 2$$



20 [답] ④

모든 실수 x 에 대하여 주어진 부등식이 성립하려면 이차방정식

$$x^2 - 2\sqrt{2}x \sin \theta + 1 = 0 \text{이 실근을 갖지 않아야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 } D \text{라 하면}$$

$$\frac{D}{4} = (-\sqrt{2} \sin \theta)^2 - 1 < 0, 2 \sin^2 \theta - 1 < 0$$

$$(\sqrt{2} \sin \theta + 1)(\sqrt{2} \sin \theta - 1) < 0$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin \theta < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

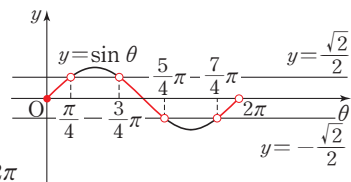
$0 \leq \theta < 2\pi$ 이므로 오른쪽 그

림에서 θ 의 값의 범위는

$$0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \text{ 또는}$$

$$\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4} \text{ 또는 } \frac{7\pi}{4} < \theta < 2\pi$$

따라서 θ 의 값이 아닌 것은 ④이다.

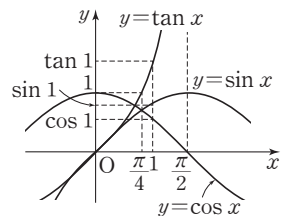


중단원 기출문제 2회

1 [답] ③

$\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{2}$ 이므로 오른쪽 그림에서

$$\cos 1 < \sin 1 < \tan 1$$



2 [답] -1

함수 $y=2\sin \frac{1}{2}x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{2\pi}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면

$$y=2\sin \frac{1}{2}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)-2$$

이 함수의 그래프가 점 (π, a) 를 지나므로

$$a=2\sin \frac{1}{2}\left(\pi-\frac{2\pi}{3}\right)-2=2\times \sin \frac{\pi}{6}-2=2\times \frac{1}{2}-2=-1$$

3 [답] ⑤

$$\textcircled{1} \text{ 최댓값은 } 2+2=4$$

$$\textcircled{2} \text{ 최솟값은 } -2+2=0$$

$$\textcircled{3} y=2\cos(4x+\pi)+2 \text{에 } x=0 \text{을 대입하면 } y=2\cos \pi+2=0 \text{이므로 그래프는 원점을 지난다.}$$

$$\textcircled{4} \text{ 주기는 } \frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2} \text{이므로 임의의 실수 } x \text{에 대하여}$$

$$f(x+\pi)=f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=f(x)$$

$$\textcircled{5} \text{ 함수 } f(x)=2\cos(4x+\pi)+2=2\cos 4\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+2 \text{의 그래프}$$

는 함수 $y=2\cos 4x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{\pi}{4}$ 만큼, y 축

의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 옳지 않은 것은 ⑤이다.

4 [답] ②

$$y=\tan\left(\pi x-\frac{\pi}{3}\right) \text{에서 주기는 } \frac{\pi}{|\pi|}=1$$

$$\text{점근선의 방정식은 } \pi x-\frac{\pi}{3}=n\pi+\frac{\pi}{2}$$

$$\pi x=n\pi+\frac{5\pi}{6} \quad \therefore x=n+\frac{5}{6}$$

5 답 ①

$f(x) = a \cos \frac{\pi}{4}x + b$ 의 최댓값이 7이고 $a < 0$ 이므로

$$-a + b = 7 \quad \cdots \cdots ㉠$$

$f(8) = 3$ 이므로 $a \cos 2\pi + b = 3$

$$\therefore a + b = 3 \quad \cdots \cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -2$, $b = 5$

$$\therefore ab = -10$$

6 답 2

$b > 0$ 이고 주어진 그래프에서 주기가 $\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\frac{\pi}{b} = \frac{\pi}{2} \quad \therefore b = 2$$

함수 $y = a \tan 2x + c$ 의 그래프가 원점을 지나므로 $c = 0$

함수 $y = a \tan 2x$ 의 그래프가 점 $(\frac{\pi}{8}, 4)$ 를 지나므로

$$4 = a \tan \frac{\pi}{4} \quad \therefore a = 4$$

$$\therefore a - b - c = 4 - 2 - 0 = 2$$

7 답 ②

함수 $y = 4 \sin \frac{\pi}{12}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{12}} = 24$

이므로 오른쪽 그림과 같이 함수

$y = 4 \sin \frac{\pi}{12}x$ 의 그래프는 직선 $x = 6$ 에

대하여 대칭이다.

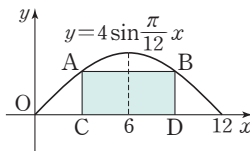
즉, 점 C의 x좌표는

$$6 - \frac{1}{2}\overline{CD} = 6 - \frac{1}{2} \times 6 = 3$$

이때 선분 AC의 길이는 점 A의 y좌표와 같으므로

$$\overline{AC} = 4 \times \sin\left(\frac{\pi}{12} \times 3\right) = 4 \times \sin \frac{\pi}{4} = 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

따라서 직사각형 ACDB의 넓이는 $6 \times 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$



8 답 ④

함수 $y = \cos x$ 의 그래프에서

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \pi \text{이므로 } \alpha + \beta = 2\pi$$

$$\gamma = 2\pi + \alpha$$

$$\therefore \cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos(2\pi + 2\pi + \alpha) = \cos(2\pi + \alpha) \\ = \cos \alpha = a$$

9 답 ①

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 에서

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

이때 $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 이므로 $\cos \theta > 0$

$$\therefore \cos \theta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

따라서 $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\frac{3}{4}$ 이므로

$$8 \tan(\pi + \theta) - 5 \cos(\pi - \theta) = 8 \times \tan \theta - 5 \times (-\cos \theta)$$

$$= 8 \times \left(-\frac{3}{4}\right) - 5 \times \left(-\frac{4}{5}\right) = -2$$

10 답 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\overline{AB}$ 는 반원 O의 지름이므로 $\angle ADB = \frac{\pi}{2}$

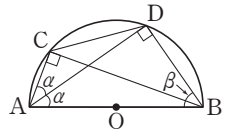
삼각형 ABD에서 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\therefore \cos(\beta - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = \sin 2\alpha$$

한편 삼각형 ABC에서 $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ 이므로 $\overline{BC} = \sqrt{6^2 - 2^2} = 4\sqrt{2}$

$$\therefore \cos(\beta - \alpha) = \sin 2\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



11 답 ①

$$\sin 5^\circ = \sin(90^\circ - 85^\circ) = \cos 85^\circ$$

$$\sin 10^\circ = \sin(90^\circ - 80^\circ) = \cos 80^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \sin(90^\circ - 75^\circ) = \cos 75^\circ$$

⋮

$$\sin 40^\circ = \sin(90^\circ - 50^\circ) = \cos 50^\circ$$

$$\therefore (\text{주어진 식}) = (\cos^2 85^\circ + \sin^2 85^\circ) + (\cos^2 80^\circ + \sin^2 80^\circ) \\ + \cdots + (\cos^2 50^\circ + \sin^2 50^\circ) + \sin^2 45^\circ$$

$$= 1 + \cdots + 1 + \sin^2 45^\circ = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$$

12 답 ③

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ 이므로 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 에서

$$\cos x - 3 < 0 \quad \therefore y = \cos x - 3 + k$$

따라서 주어진 함수의 최댓값은 $1 - 3 + k = -2 + k$, 최솟값은

$$-1 - 3 + k = -4 + k \text{이므로}$$

$$(-2 + k) + (-4 + k) = 4 \quad \therefore k = 5$$

13 답 ④

$$y = \sin^2 x + 2 \cos x = (1 - \cos^2 x) + 2 \cos x \\ = -\cos^2 x + 2 \cos x + 1$$

$\cos x = t$ 로 놓으면

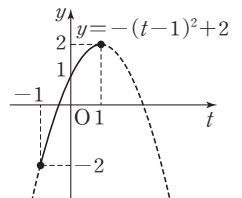
$$y = -t^2 + 2t + 1 = -(t-1)^2 + 2 \text{이고 } -1 \leq t \leq 1$$

오른쪽 그림에서 $t = 1$ 일 때 최댓값은 2,

$t = -1$ 일 때 최솟값은 -2이므로

$$M = 2, m = -2$$

$$\therefore M - m = 4$$



14 답 $\frac{13}{3}\pi$

$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = t$ 로 놓으면 주어진 방정식은 $\tan t = \sqrt{3}$ 이고 $0 \leq x < 4\pi$ 에서

$$-\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{7}{4}\pi$$

$$\therefore t = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } t = \frac{4}{3}\pi$$

$$\text{즉, } \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} \text{ 또는 } \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{4}{3}\pi \text{이므로 } x = \frac{7}{6}\pi \text{ 또는 } x = \frac{19}{6}\pi$$

따라서 모든 근의 합은 $\frac{7}{6}\pi + \frac{19}{6}\pi = \frac{13}{3}\pi$

15 ②

$$\sin^2 x + \sin x = \cos^2 x + \cos x \text{에서}$$

$$(\sin x - \cos x)(\sin x + \cos x + 1) = 0$$

$$\therefore \sin x - \cos x = 0 \text{ 또는 } \sin x + \cos x + 1 = 0$$

(i) $\sin x = \cos x$ 일 때,

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ 또는 } x = \frac{5\pi}{4} \quad (\because 0 \leq x < 2\pi)$$

(ii) $\sin x + \cos x + 1 = 0$ 일 때,

$$\sin x + 1 = -\cos x \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

양변을 제곱하면

$$\sin^2 x + 2\sin x + 1 = \cos^2 x$$

$$\sin^2 x + 2\sin x + 1 = 1 - \sin^2 x$$

$$2\sin x(\sin x + 1) = 0$$

$$\therefore \sin x = 0 \text{ 또는 } \sin x = -1$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{3\pi}{2} \quad (\because 0 \leq x < 2\pi)$$

그런데 $x = 0$ 은 ①을 만족시키지 않으므로

$$x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{3\pi}{2}$$

(i), (ii)에서 구하는 모든 근은 $\frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}$ 이므로

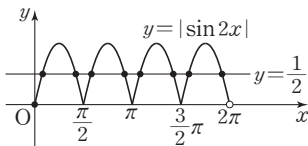
$$a = 4, \alpha = \frac{3\pi}{2}, \beta = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore a \cos(\alpha + \beta) = 4 \cos \frac{7\pi}{4} = 4 \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{4} \right) = 4 \cos \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}$$

16 ③

$0 \leq x < 2\pi$ 에서 방정식 $|\sin 2x| = \frac{1}{2}$ 의 실근은 함수 $y = |\sin 2x|$ 의

그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 x 좌표와 같다.



위의 그림에서 함수 $y = |\sin 2x|$ 의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}$ 의 교점의 개수는 8이므로 주어진 방정식의 모든 실근의 개수는 8이다.

17 ④ $2 \leq k \leq 6$

$$\cos^2 x - 2\sin x + 4 = k \text{에서 } (1 - \sin^2 x) - 2\sin x + 4 = k$$

$$\therefore -\sin^2 x - 2\sin x + 5 = k$$

즉, 주어진 방정식이 실근을 가지려면 함수

$y = -\sin^2 x - 2\sin x + 5$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 교점을 가져야 한다.

$$y = -\sin^2 x - 2\sin x + 5 \text{에서}$$

$$\sin x = t \text{로 놓으면}$$

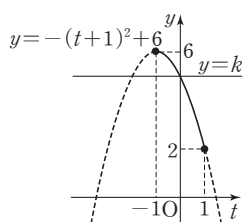
$$y = -t^2 - 2t + 5 = -(t+1)^2 + 6 \text{이고 } -1 \leq t \leq 1$$

따라서 오른쪽 그림에서 주어진 방정식

이 실근을 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범

위는

$$2 \leq k \leq 6$$



18 ③

$$4\sin^2 x + 8\cos x < 7 \text{에서}$$

$$4(1 - \cos^2 x) + 8\cos x - 7 < 0$$

$$4\cos^2 x - 8\cos x + 3 > 0$$

$$(2\cos x - 1)(2\cos x - 3) > 0$$

$$\therefore \cos x < \frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x > \frac{3}{2}$$

그런데 $0 \leq x < 2\pi$ 에서 $-1 \leq \cos x \leq 1$ 이므로

$$\cos x < \frac{1}{2}$$

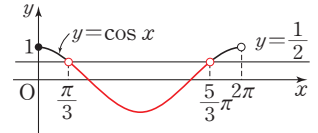
오른쪽 그림과 같이 $0 \leq x < 2\pi$ 에

서 부등식 $\cos x < \frac{1}{2}$ 의 해는

$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{5\pi}{3} \text{이므로}$$

$$\beta - \alpha = \frac{4\pi}{3}$$



19 ④ $\frac{3\pi}{2}$

$$x - \frac{\pi}{3} = t \text{로 놓으면 } 0 \leq x < 2\pi \text{에서 } -\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5\pi}{3}$$

이때 주어진 부등식은

$$2\cos^2 t - \cos \left(\frac{\pi}{2} + t \right) - 1 \geq 0$$

$$2(1 - \sin^2 t) + \sin t - 1 \geq 0$$

$$2\sin^2 t - \sin t - 1 \leq 0$$

$$(2\sin t + 1)(\sin t - 1) \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq \sin t \leq 1$$

오른쪽 그림과 같이

$$-\frac{\pi}{3} \leq t < \frac{5\pi}{3} \text{에서 부등식}$$

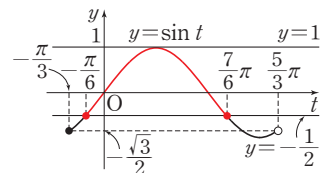
$$-\frac{1}{2} \leq \sin t \leq 1 \text{의 해는}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{7\pi}{6} \text{이므로}$$

$$-\frac{\pi}{6} \leq x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{6}$$

$$\therefore \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 x 의 최댓값은 $\frac{3\pi}{2}$ 이다.



20 ④ $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$$y = x^2 - 4x \cos \theta - 4 \sin^2 \theta$$

$$= (x - 2 \cos \theta)^2 - 4 \cos^2 \theta - 4 \sin^2 \theta$$

$$= (x - 2 \cos \theta)^2 - 4(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$= (x - 2 \cos \theta)^2 - 4$$

이 이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(2 \cos \theta, -4)$ 이고, 이 점

이 직선 $y = 4x$ 위에 있으므로

$$-4 = 4 \times 2 \cos \theta \quad \therefore \cos \theta = -\frac{1}{2}$$

$$0 \leq x < 2\pi \text{이므로 } \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ 또는 } \theta = \frac{4\pi}{3}$$

중단원 기출문제 ①

1 답 ⑤

사인법칙에 의하여 $\frac{4\sqrt{2}}{\sin B} = \frac{6}{\sin 30^\circ}$ 이므로

$$\sin B = \frac{4\sqrt{2} \sin 30^\circ}{6} = \frac{4\sqrt{2} \times \frac{1}{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

$$\sin^2 B + \cos^2 B = 1 \text{에서 } \cos^2 B = 1 - \sin^2 B = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$$

이때 $0^\circ < B < 90^\circ$ 이므로 $\cos B > 0$

$$\therefore \cos B = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

2 답 $4\sqrt{2}$

$B = 180^\circ - (45^\circ + 105^\circ) = 30^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 30^\circ} \quad \therefore b = \frac{4 \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{4 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{또 } \frac{4}{\sin 45^\circ} = 2R \text{ 이므로 } R = \frac{4}{2 \sin 45^\circ} = \frac{4}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore b + R = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

3 답 ③

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 6이므로 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{a}{12}, \sin B = \frac{b}{2R} = \frac{b}{12}, \sin C = \frac{c}{2R} = \frac{c}{12}$$

$$\therefore 4(\sin A + \sin B + \sin C) = 4\left(\frac{a}{12} + \frac{b}{12} + \frac{c}{12}\right) = \frac{a+b+c}{3} = \frac{42}{3} = 14$$

4 답 ③

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\sin B = \frac{b}{2R}, \sin C = \frac{c}{2R}$$

이를 주어진 식에 대입하면

$$b \times \frac{b}{2R} = c \times \frac{c}{2R}, b^2 = c^2 \quad \therefore b = c \quad (\because b > 0, c > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

5 답 $5(\sqrt{3}+1)$ m

삼각형 AHC에서

$$\angle ACH = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$$

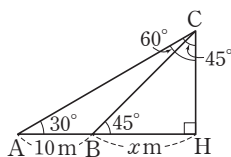
또 삼각형 BHC에서

$$\angle BCH = \angle CBH = 45^\circ$$

이때 $\overline{BH} = \overline{CH} = x$ m 라 하면

삼각형 AHC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{10+x}{\sin 60^\circ}$$



$$x \sin 60^\circ = (10+x) \times \sin 30^\circ, x \times \frac{\sqrt{3}}{2} = (10+x) \times \frac{1}{2}$$

$$(\sqrt{3}-1)x = 10 \quad \therefore x = 5(\sqrt{3}+1)$$

따라서 조형물의 높이는 $5(\sqrt{3}+1)$ m이다.

6 답 ①

코사인법칙에 의하여

$$(2\sqrt{5})^2 = a^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times a \times 2\sqrt{2} \times \cos 45^\circ$$

$$20 = a^2 + 8 - 2 \times a \times 2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}, a^2 - 4a - 12 = 0$$

$$(a-6)(a+2) = 0 \quad \therefore a = 6 \quad (\because a > 0)$$

7 답 ③

$$\text{삼각형 ABC에서 } \overline{AC} = \frac{6}{\sin 60^\circ} = 4\sqrt{3}$$

$$\text{삼각형 CDE에서 } \overline{CE} = \frac{9}{\sin 60^\circ} = 6\sqrt{3}$$

$\angle ACE = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$ 이므로 삼각형 ACE에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AE}^2 &= (4\sqrt{3})^2 + (6\sqrt{3})^2 - 2 \times 4\sqrt{3} \times 6\sqrt{3} \times \cos 60^\circ \\ &= 48 + 108 - 144 \times \frac{1}{2} = 84 \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AE} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21} \quad (\because \overline{AE} > 0)$$

8 답 ⑤

점 D가 $\overline{BC}$ 를 1:2로 내분하므로

$$\overline{BD} = 3 \times \frac{1}{1+2} = 1, \overline{CD} = 3 \times \frac{2}{1+2} = 2$$

$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{BD} : \overline{CD} = 1 : 2$ 이므로 $\overline{AD}$ 는 $\angle BAC$ 의 이등분선이다.

$\overline{AD} = x$ 라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos(\angle BAD) = \frac{2^2 + x^2 - 1^2}{2 \times 2 \times x} = \frac{x^2 + 3}{4x}$$

$$\cos(\angle CAD) = \frac{4^2 + x^2 - 2^2}{2 \times 4 \times x} = \frac{x^2 + 12}{8x}$$

$$\text{이때 } \angle BAD = \angle CAD \text{ 이므로 } \frac{x^2 + 3}{4x} = \frac{x^2 + 12}{8x}$$

$$2x^2 + 6 = x^2 + 12, x^2 = 6 \quad \therefore x = \sqrt{6} \quad (\because x > 0)$$

9 답 ③

코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos 60^\circ = 16 + 9 - 24 \times \frac{1}{2} = 13$$

$$\therefore \overline{BC} = \sqrt{13} \quad (\because \overline{BC} > 0)$$

$$\therefore \cos B - \cos C = \frac{3^2 + (\sqrt{13})^2 - 4^2}{2 \times 3 \times \sqrt{13}} - \frac{4^2 + (\sqrt{13})^2 - 3^2}{2 \times 4 \times \sqrt{13}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}} - \frac{5}{2\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{26}$$

10 답 $\frac{3\sqrt{10}}{10}$

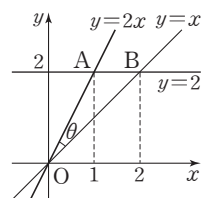
오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=2x, y=x$ 와

직선 $y=2$ 의 교점을 각각 A, B라 하면

$$A(1, 2), B(2, 2)$$

$$\therefore \overline{OA} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},$$

$$\overline{OB} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \overline{AB} = 1$$



따라서 삼각형 AOB에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos \theta = \frac{(\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 1}{2 \times \sqrt{5} \times 2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

11 답 ⑤

사인법칙에 의하여

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C = 7 : 8 : 13$$

$a=7k, b=8k, c=13k (k>0)$ 로 놓으면 가장 긴 변의 대각의 크기가 가장 크므로 각의 크기가 가장 큰 각은 C이다.

코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{(7k)^2 + (8k)^2 - (13k)^2}{2 \times 7k \times 8k} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $C=120^\circ$

12 답 $\frac{33\sqrt{2}}{8}$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{9^2 + 10^2 - 11^2}{2 \times 9 \times 10} = \frac{1}{3}$$

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1 \text{에서 } \sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$\text{이때 } 0^\circ < C < 180^\circ \text{이므로 } \sin C > 0 \quad \therefore \sin C = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{11}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 2R \quad \therefore R = \frac{33\sqrt{2}}{8}$$

13 답 $b=c$ 인 이등변삼각형, $A=120^\circ$ 인 삼각형

$$(b-c) \cos^2 A = b \cos^2 B - c \cos^2 C \text{에서}$$

$$(b-c)(1 - \sin^2 A) = b(1 - \sin^2 B) - c(1 - \sin^2 C)$$

$$(b-c) \sin^2 A = b \sin^2 B - c \sin^2 C$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$$(b-c) \times \frac{a^2}{4R^2} = b \times \frac{b^2}{4R^2} - c \times \frac{c^2}{4R^2}$$

$$(b-c)a^2 = b^3 - c^3, (b-c)(b^2 + bc + c^2 - a^2) = 0$$

$$\therefore b-c=0 \text{ 또는 } b^2 + bc + c^2 - a^2 = 0$$

(i) $b-c=0$, 즉 $b=c$ 일 때,

삼각형 ABC는 $b=c$ 인 이등변삼각형이다.

(ii) $b^2 + bc + c^2 - a^2 = 0$ 일 때,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A=120^\circ$

따라서 삼각형 ABC는 $A=120^\circ$ 인 삼각형이다.

(i), (ii)에서 삼각형 ABC는 $b=c$ 인 이등변삼각형 또는 $A=120^\circ$ 인 삼각형이다.

14 답 $\sqrt{37}$ km

코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \cos 120^\circ = 37$$

$$\therefore \overline{AB} = \sqrt{37} \text{ (km)} (\because \overline{AB} > 0)$$

따라서 건설되는 도로의 길이는 $\sqrt{37}$ km이다.

15 답 60°

삼각형 ABC의 넓이가 $33\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 12 \times 11 \times \sin B = 33\sqrt{3}$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 90^\circ$ 이므로 $B=60^\circ$

16 답 ③

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 8이므로 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{16}, \sin B = \frac{b}{16}, \sin C = \frac{c}{16}$$

이를 $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3}{2}$ 에 대입하면

$$\frac{a}{16} + \frac{b}{16} + \frac{c}{16} = \frac{3}{2}$$

$$\therefore a + b + c = 24$$

이때 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 4이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 4 \times (a + b + c) = \frac{1}{2} \times 4 \times 24 = 48$$

17 답 ③

$\overline{AP}=x, \overline{AQ}=y$ 라 하면 삼각형 APQ의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times x \times y \times \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} xy$$

삼각형 APQ의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{4}$ 이 되려면

$$\frac{\sqrt{3}}{4} xy = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 10 \times \sin 60^\circ \right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} xy = 5\sqrt{3} \quad \therefore xy = 20$$

삼각형 APQ에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 60^\circ$$

$$= x^2 + y^2 - xy = x^2 + y^2 - 20$$

$x^2 > 0, y^2 > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\overline{PQ}^2 = x^2 + y^2 - 20 \geq 2\sqrt{x^2 y^2} - 20 = 2 \times 20 - 20 = 20$$

(단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립)

$$\therefore \overline{PQ} \geq 2\sqrt{5} (\because \overline{PQ} > 0)$$

따라서 $\overline{PQ}$ 의 길이의 최솟값은 $2\sqrt{5}$ 이다.

18 답 ②

오른쪽 그림과 같이 $\overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}$ 를 그으면

$$\angle BOC = 2\pi \times \frac{3}{8} = \frac{3}{4}\pi$$

$$\angle DOC = 2\pi \times \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

삼각형 OCB의 넓이는

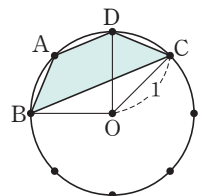
$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \frac{3}{4}\pi = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

삼각형 OCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \square ABCD = 3 \times \triangle OCD - \triangle OCB$$

$$= 3 \times \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



19 [답] 45°, 135°

평행사변형 ABCD의 넓이는

$$5 \times 8\sqrt{2} \times \sin A = 40\sqrt{2} \sin A$$

이때 평행사변형 ABCD의 넓이가 40이므로

$$40\sqrt{2} \sin A = 40 \quad \therefore \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 45^\circ$ 또는 $A = 135^\circ$

20 [답] 30°

사각형 ABCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{BD} \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \sin \theta = 24 \sin \theta$$

이때 사각형 ABCD의 넓이가 12이므로

$$24 \sin \theta = 12 \quad \therefore \sin \theta = \frac{1}{2}$$

이때 θ 는 예각이므로 $\theta = 30^\circ$

중단원 기출 문제 2회

1 [답] ①

사인법칙에 의하여 $\frac{2}{\sin B} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 120^\circ}$ 이므로

$$\sin B = \frac{2 \sin 120^\circ}{2\sqrt{3}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $B = 30^\circ$ 또는 $B = 150^\circ$

그런데 $B + C < 180^\circ$ 이어야 하므로 $B = 30^\circ$

$$\therefore A = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ) = 30^\circ$$

2 [답] ④

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 $4\sqrt{2}$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\sin A = \frac{a}{8\sqrt{2}}, \sin B = \frac{b}{8\sqrt{2}}, \sin C = \frac{c}{8\sqrt{2}}$$

이를 $\sin A + \sin B + \sin C = \sqrt{2} + 2$ 에 대입하면

$$\frac{a}{8\sqrt{2}} + \frac{b}{8\sqrt{2}} + \frac{c}{8\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 2$$

$$\frac{a+b+c}{8\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 2$$

$$\therefore a+b+c = 8\sqrt{2}(\sqrt{2}+2) = 16 + 16\sqrt{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $16 + 16\sqrt{2}$ 이다.

3 [답] ②

$\angle ADB = \angle ACB = 30^\circ$ 이므로 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{16\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ}$$

$$\therefore \overline{AD} = \frac{16\sqrt{2} \sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{16\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 32$$

4 [답] ②

$A = 180^\circ \times \frac{3}{3+4+5} = 45^\circ$, $B = 180^\circ \times \frac{4}{3+4+5} = 60^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{4}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore b = \frac{4 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{6}$$

5 [답] $a=b$ 인 이등변삼각형

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙과 코사인법칙에 의하여 $2 \sin A \cos B = \sin C$ 에서

$$2 \times \frac{a}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{c}{2R}$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = c^2, a^2 - b^2 = 0$$

$$(a+b)(a-b) = 0 \quad \therefore a=b \quad (\because a>0, b>0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

6 [답] $10\sqrt{6}$ m

$C = 180^\circ - (60^\circ + 75^\circ) = 45^\circ$ 이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{20}{\sin 45^\circ} = \frac{\overline{BC}}{\sin 60^\circ}$$

$$\therefore \overline{BC} = \frac{20 \sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{20 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 10\sqrt{6} \text{ (m)}$$

따라서 두 지점 B, C 사이의 거리는 $10\sqrt{6}$ m이다.

7 [답] ③

사각형 ABCD가 원에 내접하므로 $B + D = 180^\circ$

즉, $D = 180^\circ - B$ 이므로

$$\cos D = \cos (180^\circ - B) = -\cos B = -\frac{1}{9}$$

따라서 삼각형 DAC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = 3^2 + 6^2 - 2 \times 3 \times 6 \times \cos D$$

$$= 9 + 36 - 36 \times \left(-\frac{1}{9}\right) = 49$$

$$\therefore \overline{AC} = 7 \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

8 [답] $6\sqrt{3}$

원뿔의 옆면의 전개도에서 부채꼴의 호의 길이는 원뿔의 밑면인 원의 둘레의 길이와 같으므로

$$2\pi \times 4 = 8\pi$$

이때 $\widehat{AB} = 8\pi \times \frac{1}{2} = 4\pi$ 이고, 부채꼴의 중심각의 크기를 θ 라 하면

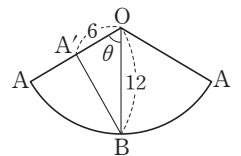
$$12\theta = 4\pi \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{3}$$

점 P가 움직인 최단 거리는 $\overline{A'B}$ 이므로

$$\overline{A'B}^2 = 6^2 + 12^2 - 2 \times 6 \times 12 \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= 36 + 144 - 144 \times \frac{1}{2} = 108$$

$$\therefore \overline{A'B} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \quad (\because \overline{A'B} > 0)$$



9 [답] 135°

가장 긴 변의 대각의 크기가 가장 큰 내각이므로 이 내각의 크기를 θ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{1^2 + (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \times 1 \times 2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이때 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ 이므로 $\theta = 135^\circ$

따라서 크기가 가장 큰 내각의 크기는 135° 이다.

10 [답] $\frac{8\sqrt{6}}{3}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{8^2 + 6^2 - 6^2}{2 \times 8 \times 6} = \frac{2}{3}$$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= 8^2 + 8^2 - 2 \times 8 \times 8 \times \cos B \\ &= 64 + 64 - 128 \times \frac{2}{3} = \frac{128}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AC} = \frac{8\sqrt{6}}{3} \quad (\because \overline{AC} > 0)$$

11 [답] $-\frac{4}{3}$

$5a^2 = 5b^2 + 6bc + 5c^2$ 에서 $5b^2 + 5c^2 - 5a^2 = -6bc$

$$\therefore b^2 + c^2 - a^2 = -\frac{6bc}{5}$$

따라서 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-\frac{6bc}{5}}{2bc} = -\frac{3}{5}$$

$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 에서

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$$

이때 $90^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $\sin A > 0$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

12 [답] 117

$\cos A = -\frac{3}{7}$ 이므로 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ 에서

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(-\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{40}{49}$$

이때 $90^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $\sin A > 0$

$$\therefore \sin A = \sqrt{\frac{40}{49}} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$$

$\overline{BC} = a$ 라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$a^2 = 6^2 + 7^2 - 2 \times 6 \times 7 \times \cos A = 36 + 49 - 84 \times \left(-\frac{3}{7}\right) = 121$$

$$\therefore a = 11 \quad (\because a > 0)$$

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 사인법칙에 의하여

$$\frac{\frac{11}{2\sqrt{10}}}{7} = 2R \quad \therefore R = \frac{11}{2 \times \frac{2\sqrt{10}}{7}} = \frac{77\sqrt{10}}{40}$$

따라서 $p = 40$, $q = 77$ 이므로 $p + q = 117$

13 [답] $a=b$ 인 이등변삼각형

$a \cos B = b \cos A$ 에서 코사인법칙에 의하여

$$a \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = b \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$c^2 + a^2 - b^2 = b^2 + c^2 - a^2$$

$$a^2 = b^2$$

$$\therefore a = b \quad (\because a > 0, b > 0)$$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$ 인 이등변삼각형이다.

14 [답] ③

$\overline{PC} = h$ km라 하면

삼각형 PAC에서

$$\overline{AC} = \frac{h}{\tan 60^\circ} = \frac{h}{\sqrt{3}}$$

삼각형 PBC에서

$$\overline{BC} = \overline{PC} = h$$

삼각형 BAC에서 코사인법칙에 의하여

$$h^2 = 5^2 + \frac{h^2}{3} - 2 \times 5 \times \frac{h}{\sqrt{3}} \times \cos 120^\circ$$

$$h^2 = 25 + \frac{h^2}{3} - 10 \times \frac{h}{\sqrt{3}} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$2h^2 - 5\sqrt{3}h - 75 = 0$$

$$(2h + 5\sqrt{3})(h - 5\sqrt{3}) = 0$$

$$\therefore h = 5\sqrt{3} \quad (\because h > 0)$$

따라서 $\overline{PC}$ 의 길이는 $5\sqrt{3}$ km이다.

15 [답] $\frac{48\sqrt{3}}{7}$

$\angle BAD = \angle CAD = 30^\circ$

$\overline{AD} = x$ 라 하면

$\triangle ABC = \triangle ABD + \triangle ADC$ 이므로

$$\frac{1}{2} \times 16 \times 12 \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 \times x \times \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times x \times 12 \times \sin 30^\circ$$

$$48\sqrt{3} = 4x + 3x$$

$$7x = 48\sqrt{3}$$

$$\therefore x = \frac{48\sqrt{3}}{7}$$

따라서 $\overline{AD}$ 의 길이는 $\frac{48\sqrt{3}}{7}$ 이다.

16 [답] ④

코사인법칙에 의하여

$$\cos B = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times 8 \times 5} = \frac{1}{2}$$

$\sin^2 B + \cos^2 B = 1$ 에서

$$\sin^2 B = 1 - \cos^2 B = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

이때 $0^\circ < B < 180^\circ$ 이므로 $\sin B > 0$

$$\therefore \sin B = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 5 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

17 답 ⑤

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A = \frac{6^2 + 5^2 - 4^2}{2 \times 6 \times 5} = \frac{3}{4}$$

이때 $0^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $\sin A > 0$

$$\therefore \sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 5 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

한편 $\overline{PF} = x$ 라 하면

$\triangle ABC = \triangle ABP + \triangle BCP + \triangle CAP$ 이므로

$$\frac{15\sqrt{7}}{4} = \frac{1}{2} \times 6 \times x + \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{7} + \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\frac{15\sqrt{7}}{4} = 3x + 2\sqrt{7} + \frac{5\sqrt{7}}{4}, \quad 3x = \frac{\sqrt{7}}{2} \quad \therefore x = \frac{\sqrt{7}}{6}$$

따라서 삼각형 EFP의 넓이는

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{7}}{6} \times \frac{\sqrt{7}}{2} \times \sin(\pi - A) &= \frac{7}{24} \sin A \\ &= \frac{7}{24} \times \frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{7\sqrt{7}}{96} \end{aligned}$$

18 답 $\frac{39\sqrt{3}}{4}$

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 120^\circ$$

$$= 25 + 9 - 30 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 49$$

$\therefore \overline{BD} = 7$ ($\because \overline{BD} > 0$)

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos C = \frac{8^2 + 3^2 - 7^2}{2 \times 8 \times 3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 C + \cos^2 C = 1 \text{이므로 } \sin^2 C = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

이때 $0^\circ < C < 180^\circ$ 이므로 $\sin C > 0$

$$\therefore \sin C = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \triangle BCD = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 \times \sin C = \frac{1}{2} \times 8 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

$$\text{또 } \triangle ABD = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \sin 120^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4} \text{이므로}$$

$$\square ABCD = \triangle ABD + \triangle BCD = \frac{15\sqrt{3}}{4} + 6\sqrt{3} = \frac{39\sqrt{3}}{4}$$

19 답 ②

$\overline{AD} = \overline{BC} = 8$ 이므로

$$7 \times 8 \times \sin A = 28\sqrt{3} \quad \therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

이때 $90^\circ < A < 180^\circ$ 이므로 $A = 120^\circ$

20 답 ⑤

사각형 ABCD의 넓이가 2이므로

$$\frac{1}{2} \times a \times b \times \sin 30^\circ = 2$$

$$\frac{1}{2} ab \times \frac{1}{2} = 2 \quad \therefore ab = 8$$

$$\therefore a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 6^2 - 2 \times 8 = 20$$

08 / 등차수열과 등비수열

44~49쪽

중단원 기출문제 1회

1 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_4 = 22$, $a_9 = 42$ 이므로

$$a + 3d = 22, \quad a + 8d = 42$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = 10$, $d = 4$

$$\therefore a_7 = 10 + 6 \times 4 = 34$$

2 답 1

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면 $a_{11} = -11$ 이므로

$$19 + 10d = -11$$

$$10d = -30 \quad \therefore d = -3$$

$$\therefore a_n = 19 + (n-1) \times (-3) = -3n + 22$$

$$-3n + 22 < 0 \text{에서 } 3n > 22$$

$$\therefore n > \frac{22}{3} = 7.3\cdots$$

이때 $a_7 = -3 \times 7 + 22 = 1$, $a_8 = -3 \times 8 + 22 = -2$ 이므로

$$|a_7| = 1, \quad |a_8| = 2$$

따라서 $|a_n|$ 의 최솟값은 1이다.

3 답 $\frac{5}{7}$

주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면 첫째항이 9, 제4항이 27이므로

$$9 + 3d = 27, \quad 3d = 18 \quad \therefore d = 6$$

따라서 $x = 9 + 6 = 15$, $y = 15 + 6 = 21$ 이므로

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{7}$$

4 답 24

세 수 a , b , 10이 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2b = a + 10 \quad \therefore a = 2b - 10 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

또 $a < b < 10$ 이므로 직각삼각형에서 피타고라스 정리에 의하여

$$a^2 + b^2 = 100 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면

$$(2b-10)^2 + b^2 = 100, \quad 5b^2 - 40b = 0$$

$$b^2 - 8b = 0, \quad b(b-8) = 0$$

$$\therefore b = 8 \quad (\because b > 0)$$

이를 ①에 대입하면 $a = 6$

따라서 직각삼각형의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$$

5 답 120

세 수를 $a-d$, a , $a+d$ 라 하면

$$(a-d) + a + (a+d) = 18 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(a-d)^2 + a^2 + (a+d)^2 = 140 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 3a = 18 \quad \therefore a = 6$$

이를 ②에 대입하면

$$108 + 2d^2 = 140, \quad 2d^2 = 32$$

$$d^2=16 \quad \therefore d=-4 \text{ 또는 } d=4$$

따라서 세 수는 2, 6, 10이므로 세 수의 곱은
 $2 \times 6 \times 10 = 120$

6 답 -170

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_3 + a_5 = 22 \text{에서 } (a+2d) + (a+4d) = 22$$

$$2a + 6d = 22 \quad \therefore a + 3d = 11 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a_6 + a_{10} = -2 \text{에서 } (a+5d) + (a+9d) = -2$$

$$2a + 14d = -2 \quad \therefore a + 7d = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$a = 20, d = -3$$

$$\therefore S_{20} = \frac{20\{2 \times 20 + (20-1) \times (-3)\}}{2} = -170$$

7 답 23

첫째항이 2, 끝항이 74, 항수가 $(m+2)$ 인 등차수열의 합이 950이므로

$$\frac{(m+2)(2+74)}{2} = 950, m+2=25$$

$$\therefore m=23$$

8 답 -525

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_5 = \frac{5\{2a + (5-1)d\}}{2} = -5$$

$$\therefore a + 2d = -1 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$S_{15} = \frac{15\{2a + (15-1)d\}}{2} = -165$$

$$\therefore a + 7d = -11 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②를 연립하여 풀면 $a=3, d=-2$

$$\therefore S_{25} = \frac{25\{2 \times 3 + (25-1) \times (-2)\}}{2} = -525$$

9 답 ③

3으로 나누었을 때의 나머지가 2이고 4로 나누었을 때의 나머지가 3인 수는 3의 배수보다 1이 작고 4의 배수보다 1이 작은 수이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키는 수는 12의 배수보다 1이 작은 수이다. 두 자리의 자연수 중에서 12의 배수보다 1이 작은 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$11, 23, 35, 47, \dots, 95$$

이때 $95 = 11 + 12 \times 7$ 에서 구하는 값은 첫째항이 11, 끝항이 95, 항수가 8인 등차수열의 합이므로

$$\frac{8(11+95)}{2} = 424$$

10 답 ④

연속하는 15개의 자연수 중에서 가장 작은 수를 a 라 하면 15개의 자연수는 첫째항이 a , 공차가 1인 등차수열을 이루므로

$$\frac{15\{2a + (15-1) \times 1\}}{2} = 315$$

$$a + 7 = 21 \quad \therefore a = 14$$

따라서 구하는 가장 큰 수는 $14 + 14 = 28$

11 답 ①

$S_n = -2n^2 + 3n + 1$ 에서

$$a_1 = S_1 = -2 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1 = 2$$

$$a_3 = S_3 - S_2$$

$$= (-2 \times 3^2 + 3 \times 3 + 1) - (-2 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1)$$

$$= -8 - (-1) = -7$$

$$a_5 = S_5 - S_4$$

$$= (-2 \times 5^2 + 3 \times 5 + 1) - (-2 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1)$$

$$= -34 - (-19) = -15$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = 2 + (-7) + (-15) = -20$$

다른 풀이

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= -2n^2 + 3n + 1 - \{-2(n-1)^2 + 3(n-1) + 1\}$$

$$= -4n + 5 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = -2 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1 = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

이때 ①에 $n=1$ 을 대입한 값과 ②이 같지 않으므로

$$a_1 = 2, a_n = -4n + 5 \quad (n \geq 2)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 = 2 + (-4 \times 3 + 5) + (-4 \times 5 + 5) = -20$$

12 답 324

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_2=4, a_5=108$ 이므로

$$ar = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$ar^4 = 108 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠} \text{을 하면 } r^3 = 27 \quad \therefore r = 3$$

$$\text{이를 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } 3a = 4 \quad \therefore a = \frac{4}{3}$$

$$\text{따라서 } a_n = \frac{4}{3} \times 3^{n-1} \text{이므로 } a_6 = \frac{4}{3} \times 3^5 = 324$$

13 답 ④

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_4 = 4 \text{이므로 } a_1 r^3 = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_4 + a_7 + a_{10}}{a_2 + a_5 + a_8 + a_{11}} &= \frac{a_1 + a_1 r^3 + a_1 r^6 + a_1 r^9}{a_1 r + a_1 r^4 + a_1 r^7 + a_1 r^{10}} \\ &= \frac{a_1(1 + r^3 + r^6 + r^9)}{a_1 r(1 + r^3 + r^6 + r^9)} = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\text{즉, } \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \text{이므로 } r = 2$$

$$\text{이를 } \textcircled{㉠} \text{에 대입하면 } 8a_1 = 4 \quad \therefore a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a_{12} = \frac{1}{2} \times 2^{11} = 2^{10}$$

14 답 제8항

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_3=36, a_6=972$ 이므로

$$ar^2 = 36 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$ar^5 = 972 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\textcircled{㉡} \div \textcircled{㉠} \text{을 하면 } r^3 = 27 \quad \therefore r = 3$$

이를 ①에 대입하면

$$9a=36 \quad \therefore a=4$$

따라서 $a_n=4 \times 3^{n-1}$ 이므로

$$4 \times 3^{n-1} > 4000 \text{에서 } 3^{n-1} > 1000$$

이때 $3^6=729$, $3^7=2187$ 이므로

$$n-1 \geq 7 \quad \therefore n \geq 8$$

따라서 구하는 항은 제8항이다.

15 답 ④

세 수 a , 4 , b 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$8=a+b$$

세 수 a , 3 , b 가 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$$9=ab$$

$$\therefore a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=8^2-2 \times 9=46$$

16 답 ②

한 변의 길이가 1인 정삼각형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ 이고, 각 시행에

서 정삼각형의 한 변의 길이는 $\frac{1}{2}$ 배가 되고, 개수는 3배가 된다.

첫 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{3}{4}$$

두 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

⋮

n 번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는 $\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

따라서 10번째 시행 후 남아 있는 도형의 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

17 답 242

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 $r(r \neq 1)$ 라 하면

$$\frac{S_6}{S_3} = \frac{\frac{2(1-r^6)}{1-r}}{\frac{2(1-r^3)}{1-r}} = \frac{(1+r^3)(1-r^3)}{1-r^3} = 1+r^3$$

$$\text{즉, } 1+r^3=28 \text{이므로 } r^3=27 \quad \therefore r=3$$

$$\therefore S_5 = \frac{2(3^5-1)}{3-1} = 242$$

18 답 ①

$$\begin{aligned} S_7 - S_4 &= a_5 + a_6 + a_7 = a_1 r^4 + a_1 r^5 + a_1 r^6 \\ &= a_1 r^4 (1+r+r^2) \end{aligned}$$

$$\therefore a_1 r^4 (1+r+r^2) = 351 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} S_5 - S_2 &= a_3 + a_4 + a_5 = a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 \\ &= a_1 r^2 (1+r+r^2) \end{aligned}$$

$$\therefore a_1 r^2 (1+r+r^2) = 39 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \text{을 하면 } r^2 = 9 \quad \therefore r = 3 \quad (\because r > 0)$$

이를 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$9a_1(1+3+9)=39, 117a_1=39 \quad \therefore a_1=\frac{1}{3}$$

$$\therefore \frac{a_1}{r-1} = \frac{\frac{1}{3}}{3-1} = \frac{1}{6}$$

19 답 $9\pi \left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$

$$l_1 = \pi \times 3 = 3\pi$$

선분 A_1B 를 1 : 2로 내분하는 점이 A_2 이므로

$$\overline{A_2B} = 3 \times \frac{2}{3} = 2$$

$$\therefore l_2 = \pi \times 2 = 2\pi$$

선분 A_2B 를 1 : 2로 내분하는 점이 A_3 이므로

$$\overline{A_3B} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore l_3 = \pi \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}\pi$$

⋮

따라서 수열 $\{l_n\}$ 은 첫째항이 3π , 공비가 $\frac{2}{3}$ 인 등비수열이므로

$$l_1 + l_2 + l_3 + \dots + l_{10} = \frac{3\pi \left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}}{1 - \frac{2}{3}} = 9\pi \left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right\}$$

20 답 336만 원

연이율 5%, 1년마다 복리로 매년 초에 20만 원씩 12년 동안 적립

할 때, 적립금의 원리합계는

$$20(1+0.05) + 20(1+0.05)^2 + \dots + 20(1+0.05)^{12}$$

$$= \frac{20(1+0.05)\{(1+0.05)^{12}-1\}}{(1+0.05)-1}$$

$$= \frac{20 \times 1.05 \times (1.8-1)}{0.05}$$

$$= 336(\text{만 원})$$

따라서 12년 말의 적립금의 원리합계는 336만 원이다.

중단원 기출문제 2회

1 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_4=14$, $a_8=26$ 이므로

$$a+3d=14, a+7d=26$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a=5, d=3$$

$$\therefore a_6=5+5 \times 3=20$$

2 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_1+a_2+a_3=-30 \text{에서 } a+(a+d)+(a+2d)=-30$$

$$3a+3d=-30$$

$$\therefore a+d=-10 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_4+a_5+a_6=15 \text{에서 } (a+3d)+(a+4d)+(a+5d)=15$$

$$3a+12d=15$$

$$\therefore a+4d=5 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{을 연립하여 풀면 } a=-15, d=5$$

$$\therefore a_{10}=-15+9 \times 5=30$$

3 답 ④

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_2 = -74$, $a_{13} = -30$ 이므로

$$a + d = -74, a + 12d = -30$$

두 식을 연립하여 풀면

$$a = -78, d = 4$$

$$\therefore a_n = -78 + (n-1) \times 4 = 4n - 82$$

$$4n - 82 > 0 \text{에서 } n > \frac{82}{4} = 20.5$$

따라서 처음으로 양수가 되는 항은 제21항이다.

4 답 $\frac{3}{2}$

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d_1 이라 하면

$$y = x + 6d_1, 6d_1 = y - x$$

$$\therefore d_1 = \frac{y-x}{6}$$

등차수열 $\{b_n\}$ 의 공차를 d_2 라 하면

$$y = x + 4d_2, 4d_2 = y - x$$

$$\therefore d_2 = \frac{y-x}{4}$$

$$\therefore \frac{b_3 - b_2}{a_5 - a_4} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{\frac{y-x}{4}}{\frac{y-x}{6}} = \frac{3}{2}$$

5 답 ④

세 수 a, a^2, a^2+2 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$2a^2 = a + (a^2 + 2) \text{에서 } a^2 - a - 2 = 0$$

$$(a+1)(a-2) = 0 \quad \therefore a = 2 \quad (\because a > 0)$$

6 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_4 = 7 \text{에서 } a + 3d = 7 \quad \dots\dots ㉠$$

$$a_{20} - a_{10} = 30 \text{에서 } (a + 19d) - (a + 9d) = 30$$

$$10d = 30 \quad \therefore d = 3$$

이를 ㉠에 대입하면

$$a + 9 = 7 \quad \therefore a = -2$$

따라서 첫째항부터 제12항까지의 합은

$$\frac{12\{2 \times (-2) + (12-1) \times 3\}}{2} = 174$$

7 답 27

첫째항이 $\log_3 9 = 2$, 끝항이 $\log_3 729 = \log_3 3^6 = 6$, 항수가 $(n+2)$ 인 등차수열의 합이 48이므로

$$\frac{(n+2)(2+6)}{2} = 48, n+2 = 12 \quad \therefore n = 10$$

이때 6은 제12항이므로 주어진 등차수열의 공차를 d 라 하면

$$2 + (12-1)d = 6 \text{에서 } 2 + 11d = 6 \quad \therefore d = \frac{4}{11}$$

$$\log_3 a_7 - \log_3 a_3 = 4d = 4 \times \frac{4}{11} = \frac{16}{11} \text{이므로}$$

$$\log_3 \frac{a_7}{a_3} = \frac{16}{11} \quad \therefore \frac{a_7}{a_3} = 3^{\frac{16}{11}}$$

따라서 $p = 11$, $q = 16$ 이므로 $p+q = 27$

8 답 -710

주어진 등차수열의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$S_5 = \frac{5\{2a + (5-1)d\}}{2} = 85$$

$$\therefore a + 2d = 17 \quad \dots\dots ㉠$$

$$S_{10} = \frac{10\{2a + (10-1)d\}}{2} = -5$$

$$\therefore 2a + 9d = -1 \quad \dots\dots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = 31$, $d = -7$

$$\therefore S_{20} = \frac{20\{2 \times 31 + (20-1) \times (-7)\}}{2} = -710$$

9 답 ③

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$S_4 = \frac{4\{2 \times (-22) + (4-1)d\}}{2}$$

$$= -88 + 6d$$

$$S_8 = \frac{8\{2 \times (-22) + (8-1)d\}}{2}$$

$$= -176 + 28d$$

$S_4 = S_8$ 에서

$$-88 + 6d = -176 + 28d \quad \therefore d = 4$$

$$\therefore a_n = -22 + (n-1) \times 4 = 4n - 26$$

$$4n - 26 > 0 \text{에서 } n > \frac{13}{2} = 6.5$$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 제7항부터 양수이므로 첫째항부터 제6항까지의 합이 최소이다.

이때 $a_6 = 4 \times 6 - 26 = -2$ 이므로 구하는 최솟값은

$$S_6 = \frac{6\{-22 + (-2)\}}{2} = -72$$

10 답 676

두 자리의 자연수 중에서 7로 나누었을 때의 나머지가 3인 수를 작은 것부터 차례로 나열하면

$$10, 17, 24, 31, \dots, 94$$

이때 $94 = 10 + 7 \times 12$ 에서 구하는 값은 첫째항이 10, 끝항이 94, 항수가 13인 등차수열의 합이므로

$$\frac{13(10+94)}{2} = 676$$

11 답 ③

$A_n(a_n, 3a_n+2n)$, $B_n(\beta_n, 3\beta_n+2n)$ 이라 하면 a_n, β_n 은 이차방정식 $x^2 = 3x + 2n$, 즉 $x^2 - 3x - 2n = 0$ 의 두 근이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n + \beta_n = 3, a_n \beta_n = -2n$$

$$\therefore l_n^2 = (a_n - \beta_n)^2 + (3a_n - 3\beta_n)^2$$

$$= 10(a_n - \beta_n)^2$$

$$= 10\{(a_n + \beta_n)^2 - 4a_n \beta_n\}$$

$$= 10\{3^2 - 4 \times (-2n)\}$$

$$= 80n + 90$$

따라서 $l_2^2 = 80 \times 2 + 90 = 250$, $l_{10}^2 = 80 \times 10 + 90 = 890$ 이므로

$$l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + \dots + l_{10}^2 = \frac{9(250+890)}{2} = 5130$$

12 답 ④

나머지 정리에 의하여

$$S_n = (-2n)^2 - 3 \times (-2n) = 4n^2 + 6n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (4n^2 + 6n) - \{4(n-1)^2 + 6(n-1)\} \\ &= 8n + 2 \end{aligned} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

(ii) $n=1$ 일 때, $a_1 = S_1 = 10 \quad \dots\dots \textcircled{2}$

이때 ①에 $n=1$ 을 대입한 값과 ②이 같으므로

$$a_n = 8n + 2$$

따라서 $a_3 = 8 \times 3 + 2 = 26$, $a_6 = 8 \times 6 + 2 = 50$ 이므로

$$a_3 + a_6 = 76$$

13 답 ④

$$a_n = 4 \times 3^{2n-1} = 12 \times 9^{n-1}$$

따라서 $a = 12$, $r = 9$ 이므로 $\frac{a}{r} = \frac{4}{3}$

14 답 ②

$$a_2 = 2 \text{에서 } ar = 2 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a_3 : a_5 = 1 : 4 \text{에서}$$

$$ar^2 : ar^4 = 1 : 4, 4ar^2 = ar^4$$

$$\therefore r^2 = 4$$

그런데 $r > 0$ 이므로 $r = 2$

이를 ①에 대입하면

$$2a = 2 \quad \therefore a = 1$$

$$\therefore a + r = 3$$

15 답 ②

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d , 등비수열 $\{b_n\}$ 의 공비를 r 라 하면

$$a_6 = a_5 + d, b_6 = b_5 \times r \text{이므로}$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } 11 + d = 11r \quad \therefore r = 1 + \frac{d}{11} \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

이때 r 은 자연수이므로 d 는 11의 배수이다.

$$\textcircled{2} \text{에서 } a_{12} = a_5 + 7d = 11 + 7d \text{이므로}$$

$$70 < 11 + 7d < 150, 59 < 7d < 139$$

$$\therefore 8.428 \dots < d < 19.857 \dots$$

이때 d 는 11의 배수이므로 $d = 11$

이를 ①에 대입하면 $r = 2$

$$\begin{aligned} \therefore a_7 - b_4 &= (a_5 + 2d) - \frac{b_5}{r} \\ &= (11 + 22) - \frac{11}{2} \\ &= \frac{55}{2} \end{aligned}$$

16 답 -9

주어진 등비수열의 공비를 r 라 하면 첫째항이 24, 제5항이 $\frac{3}{2}$ 이므로

$$24r^4 = \frac{3}{2}, r^4 = \frac{1}{16} \quad \therefore r = \frac{1}{2} (\because r > 0)$$

따라서 $a_1 = 24 \times \frac{1}{2} = 12$, $a_3 = 24 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3$ 이므로

$$a_3 - a_1 = 3 - 12 = -9$$

17 답 ②

삼차방정식의 세 실근을 a, ar, ar^2 이라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a + ar + ar^2 = 19$$

$$\therefore a(1 + r + r^2) = 19 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$a \times ar + ar \times ar^2 + ar^2 \times a = 114 \text{에서}$$

$$a^2r + a^2r^3 + a^2r^2 = 114$$

$$\therefore a^2r(1 + r + r^2) = 114 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$a \times ar \times ar^2 = -k \text{에서 } a^3r^3 = -k$$

$$\therefore (ar)^3 = -k \quad \dots\dots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \div \textcircled{1} \text{을 하면 } ar = 6$$

이를 ③에 대입하면

$$6^3 = -k \quad \therefore k = -216$$

18 답 ⑤

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r ($r \neq 1$)라 하면

$$S_5 = 20 \text{이므로 } \frac{a(1-r^5)}{1-r} = 20 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

$$S_{10} = 60 \text{이므로 } \frac{a(1-r^{10})}{1-r} = 60$$

$$\therefore \frac{a(1-r^5)(1+r^5)}{1-r} = 60 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{을 } \textcircled{2} \text{에 대입하면 } 20(1+r^5) = 60$$

$$1 + r^5 = 3 \quad \therefore r^5 = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore S_{15} &= \frac{a(1-r^{15})}{1-r} = \frac{a(1-r^5)(1+r^5+r^{10})}{1-r} \\ &= \frac{a(1-r^5)}{1-r} \times (1+r^5+r^{10}) \\ &= 20(1+2+2^2) = 140 \end{aligned}$$

19 답 ②

매일 증가하는 읽은 양의 비율을 r ($r \neq 0$)라 하면

$$n \text{째 날에 읽은 양은 } 10(1+r)^{n-1}$$

7째 날에 읽은 양은 첫째 날 읽은 양의 69%가 증가한 것이므로

$$10(1+r)^6 = 10 \times (1+0.69)$$

$$\therefore (1+r)^6 = 1.69 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

넷째 날에 읽은 양은

$$\begin{aligned} 10(1+r)^3 &= 10 \times 1.3 (\because \textcircled{1}) \\ &= 10(1+0.3) \end{aligned}$$

따라서 넷째 날에는 첫째 날 읽은 양의 30%가 증가한다.

20 답 ④

$$S_n = 2^n - 3 \text{에서}$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} = (2^n - 3) - (2^{n-1} - 3) \\ &= 2^{n-1} \times (2 - 1) = 2^{n-1} \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 2^1 - 3 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 ①에 $n=1$ 을 대입한 값과 ②이 같지 않으므로

$$a_1 = -1, a_n = 2^{n-1} (n \geq 2)$$

$$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = -1 + 2^2 + 2^4 + 2^6 = -1 + 4 + 16 + 64 = 83$$

중단원 기출문제 ①

1 답 184

$$\sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n})$$

$$= \sum_{k=1}^{2n} a_k$$

따라서 $\sum_{k=1}^{2n} a_k = 3n^2 - n$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{16} a_k = 3 \times 8^2 - 8 = 184$$

2 답 25

$$\sum_{k=1}^{19} a_{k+1} - \sum_{k=2}^{20} a_{k-1}$$

$$= (a_2 + a_3 + \cdots + a_{20}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{19})$$

$$= a_{20} - a_1 = 30 - 5 = 25$$

3 답 ②

$$\sum_{k=1}^n (3a_k + b_k)^2 = n^2 + 2n, \quad \sum_{k=1}^n (a_k - 3b_k)^2 = 6n + 10 \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (3a_k + b_k)^2 = 10^2 + 2 \times 10 = 120 \quad \cdots \textcircled{A}$$

$$\sum_{k=1}^{10} (a_k - 3b_k)^2 = 6 \times 10 + 10 = 70 \quad \cdots \textcircled{B}$$

① + ②을 하면

$$\sum_{k=1}^{10} \{ (3a_k + b_k)^2 + (a_k - 3b_k)^2 \}$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (10a_k^2 + 10b_k^2)$$

$$= 10 \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + b_k^2) = 190$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + b_k^2) = 19$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} \left(a_k^2 + b_k^2 - \frac{1}{2} \right) = \sum_{k=1}^{10} (a_k^2 + b_k^2) - \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2}$$

$$= 19 - \frac{1}{2} \times 10 = 14$$

4 답 ①

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하면 공차가 4, 제9항이 -5 이므로

$$-5 = a + (9-1) \times 4 \quad \therefore a = -37$$

즉, 등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은

$$a_n = -37 + 4(n-1) = 4n - 41$$

이때 $1 \leq n \leq 10$ 에서 $a_n < 0$, $11 \leq n \leq 20$ 에서 $a_n > 0$ 이므로

$$\sum_{n=1}^{20} |a_n| = \sum_{n=1}^{10} (41 - 4n) + \sum_{n=11}^{20} (4n - 41)$$

$$= \frac{10(37+1)}{2} + \frac{10(3+39)}{2} = 400$$

5 답 -1530

등차수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = -1 + (n-1) \times (-2) = -2n + 1$$

등차수열 $\{b_n\}$ 의 일반항 b_n 은

$$b_n = 3 + (n-1) \times 2 = 2n + 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k b_k = \sum_{k=1}^{10} (-2k+1)(2k+1)$$

$$= \sum_{k=1}^{10} (-4k^2 + 1)$$

$$= -4 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + 10$$

$$= -1540 + 10 = -1530$$

6 답 120

$f(x) = n$ 에서 $\sqrt{x}$ 의 정수 부분이 n 이므로

$$n \leq \sqrt{x} < n+1$$

이때 $\sqrt{x} > 0$, $n > 0$ 이므로 $n^2 \leq x < (n+1)^2$

이 부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수는

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

따라서 $a_n = 2n + 1$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} (2k+1)$$

$$= 2 \times \frac{10 \times 11}{2} + 10 = 120$$

7 답 ②

$$\sum_{k=1}^{10} \left(\sum_{m=1}^5 km \right) = \sum_{k=1}^{10} \left\{ k \sum_{m=1}^5 m \right\} = \sum_{k=1}^{10} \left(k \times \frac{5 \times 6}{2} \right)$$

$$= 15 \sum_{k=1}^{10} k = 15 \times \frac{10 \times 11}{2} = 825$$

$$\sum_{k=1}^4 \left\{ \sum_{m=1}^6 (k+m) \right\} = \sum_{k=1}^4 \left(\sum_{m=1}^6 k + \sum_{m=1}^6 m \right)$$

$$= \sum_{k=1}^4 \left(6k + \frac{6 \times 7}{2} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^4 (6k + 21)$$

$$= 6 \times \frac{4 \times 5}{2} + 21 \times 4 = 144$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10} \left(\sum_{m=1}^5 km \right) - \sum_{k=1}^4 \left\{ \sum_{m=1}^6 (k+m) \right\} = 825 - 144 = 681$$

8 답 3164

수열 $1 \times 2^2, 3 \times 4^2, 5 \times 6^2, \dots, 11 \times 12^2$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = (2n-1) \times (2n)^2 = 8n^3 - 4n^2$$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제6항까지의 합이므로

$$\sum_{k=1}^6 a_k = \sum_{k=1}^6 (8k^3 - 4k^2)$$

$$= 8 \times \left(\frac{6 \times 7}{2} \right)^2 - 4 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6}$$

$$= 3528 - 364 = 3164$$

9 답 ⑤

선분 OA를 $4^n : 1$ 로 내분하는 점 P_n 의 좌표는 $\left(\frac{4 \times 4^n}{4^n + 1}, 0 \right)$ 이므로

$$\overline{OP_n} = l_n = \frac{4 \times 4^n}{4^n + 1}$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{20} \frac{12}{l_n} = \sum_{n=1}^{20} \left\{ 12 \times \left(\frac{4^n + 1}{4 \times 4^n} \right) \right\} = 3 \sum_{n=1}^{20} \left(1 + \frac{1}{4^n} \right)$$

$$= 3 \times \left[20 + \frac{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4^{20}} \right)}{1 - \frac{1}{4}} \right] = 61 - \frac{1}{4^{20}}$$

10 답 $\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$

수열 $1 \times (n-1), 2 \times (n-2), 3 \times (n-3), \dots, (n-1) \times 1$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = k(n-k) = nk - k^2$$

따라서 주어진 식은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n-1} a_k &= \sum_{k=1}^{n-1} (nk - k^2) = n \sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= n \times \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n(n-1)\{3n - (2n-1)\}}{6} \\ &= \frac{n(n-1)(n+1)}{6}\end{aligned}$$

11 답 ③

1보다 큰 자연수 n 으로 나누었을 때의 몫과 나머지가 서로 같은 자연수는

$$kn + k \quad (k=1, 2, \dots, n-1)$$

이므로 모두 $(n-1)$ 개이다.

$$\begin{aligned}\therefore a_n &= \sum_{k=1}^{n-1} (kn + k) = \sum_{k=1}^{n-1} k(n+1) = (n+1) \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= (n+1) \times \frac{n(n-1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(n+1)}{2}\end{aligned}$$

$$a_n < 300 \text{에서 } \frac{n(n-1)(n+1)}{2} < 300$$

$$n(n-1)(n+1) < 600$$

$$\text{이때 } 7 \times 8 \times 9 = 504, 8 \times 9 \times 10 = 720 \text{이므로}$$

$$1 < n \leq 8$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최댓값은 8이다.

12 답 ⑤

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} \\ &= \left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \frac{a_3}{4} + \dots + \frac{a_n}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{2}(a_1 - 1) + \frac{1}{3}(a_2 - 1) + \frac{1}{4}(a_3 - 1) + \dots + \frac{1}{n+1}(a_n - 1)\end{aligned}$$

$$\text{이때 } \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k+1} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = n+1 \text{이므로}$$

$$(n+1) - n = \frac{1}{n+1}(a_n - 1)$$

$$a_n - 1 = n+1 \quad \therefore a_n = n+2$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^5 a_k^2 &= \sum_{k=1}^5 (k+2)^2 = \sum_{k=1}^5 (k^2 + 4k + 4) \\ &= \sum_{k=1}^5 k^2 + 4 \sum_{k=1}^5 k + \sum_{k=1}^5 4 \\ &= \frac{5 \times 6 \times 11}{6} + 4 \times \frac{5 \times 6}{2} + 20 = 135\end{aligned}$$

13 답 ②

수열 $\frac{1}{1 \times 3}, \frac{1}{3 \times 5}, \frac{1}{5 \times 7}, \dots, \frac{1}{19 \times 21}$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10} a_k &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{19} - \frac{1}{21} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{10}{21}\end{aligned}$$

14 답 ③

$$\begin{aligned}a_n &= \sum_{k=1}^n k(k+1) = \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{n=1}^{10} \frac{n+2}{a_n} &= \sum_{n=1}^{10} \frac{3}{n(n+1)} = 3 \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 3 \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11} \right) \right\} \\ &= 3 \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{30}{11}\end{aligned}$$

15 답 18

$S_n = n^2 + 6n$ 이므로

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 + 6n) - \{(n-1)^2 + 6(n-1)\} \\ &= 2n+5 \quad \dots\dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

(ii) $n=1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1+6=7 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{2}$ 이 같으므로

$$a_n = 2n+5$$

$$\begin{aligned}\therefore \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k+5)(2k+7)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k+5} - \frac{1}{2k+7} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n+5} - \frac{1}{2n+7} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{2n+7} \right) = \frac{n}{7(2n+7)}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} < \frac{3}{50} \text{에서 } \frac{n}{7(2n+7)} < \frac{3}{50}$$

$$50n < 42n + 147, 8n < 147 \quad \therefore n < 18.375$$

따라서 구하는 자연수 n 의 최댓값은 18이다.

16 답 $\frac{8-\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= \sum_{k=1}^{31} \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k+2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{31} (\sqrt{2k+2} - \sqrt{2k}) \\ &= \frac{1}{2} \{ (2 - \sqrt{2}) + (\sqrt{6} - 2) + (\sqrt{8} - \sqrt{6}) + \dots + (8 - \sqrt{62}) \} \\ &= \frac{8 - \sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

17 [답] ④

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$$

$$= (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$= \sqrt{n+1} - 1$$

$$\sum_{k=1}^n a_k = 11 \text{ 에서 } \sqrt{n+1} - 1 = 11$$

$$\sqrt{n+1} = 12, n+1 = 144 \quad \therefore n = 143$$

18 [답] ⑤

$$a_n = \log_2 \sqrt{\frac{2(n+1)}{n+2}} = \frac{1}{2} \{1 + \log_2(n+1) - \log_2(n+2)\} \text{ 이므로}$$

$$a_1 = \frac{1}{2} (1 + \log_2 2 - \log_2 3)$$

$$a_2 = \frac{1}{2} (1 + \log_2 3 - \log_2 4)$$

$$\vdots$$

$$a_m = \frac{1}{2} \{1 + \log_2(m+1) - \log_2(m+2)\}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^m a_k = \frac{1}{2} \{1 \times m + 1 - \log_2(m+2)\}$$

$$= \frac{1}{2} \{m + 1 - \log_2(m+2)\}$$

$\sum_{k=1}^m a_k$ 의 값이 500 이하의 자연수가 되기 위해서는

$m - \log_2(m+2)$ 가 1 이상 999 이하의 홀수이면

$m+2=2^k$ (k 는 정수) 꼴이어야 한다.

즉, 가능한 자연수 m 의 값은

$$m+2=2^3 \text{ 일 때 } m=6$$

$$m+2=2^5 \text{ 일 때 } m=30$$

$$m+2=2^7 \text{ 일 때 } m=126$$

$$m+2=2^9 \text{ 일 때 } m=510$$

따라서 모든 자연수 m 의 값의 합은

$$6 + 30 + 126 + 510 = 672$$

19 [답] 15

주어진 수열을

$$(3), (3, 6), (3, 6, 9), (3, 6, 9, 12), \dots$$

와 같이 첫째항이 3이 되도록 묶으면 n 번째 묶음의 항의 개수는 n 이

므로 첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

이때 첫 번째 묶음부터 9번째 묶음까지의 항의 개수는 $\frac{9 \times 10}{2} = 45$,

10번째 묶음까지의 항의 개수는 $\frac{10 \times 11}{2} = 55$ 이므로 제50항은 10번째

묶음의 5번째 항이다.

따라서 10번째 묶음은 3, 6, 9, 12, 15, 18, ..., 30이므로 5번째 항은 15이다.

20 [답] ②

위에서 n 번째 줄에 있는 n 개의 수의 합을 a_n 이라 하면

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

따라서 구하는 합은

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = \sum_{k=1}^{10} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} \right) = 220$$

중단원 기출문제 2호

1 [답] ③

$$\neg. \sum_{k=1}^{2n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2n}$$

$$\sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k}) = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2n-1} + a_{2n})$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^n (a_{2k-1} + a_{2k})$$

$$\neg. \sum_{k=m}^n a_k = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

$$\sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^m a_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n)$$

$$- (a_1 + a_2 + \cdots + a_m)$$

$$= a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$$

$$\therefore \sum_{k=m}^n a_k \neq \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^m a_k$$

$$\neg. \sum_{k=1}^n k(k-1) = 1 \times 0 + 2 \times 1 + 3 \times 2 + \cdots + n(n-1)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k(k+1) = 0 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + (n-1)n$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n k(k-1) = \sum_{k=0}^{n-1} k(k+1)$$

따라서 옳은 것은 $\neg$, $\neg$ 이다.

2 [답] ④

$$\sum_{k=2}^{n+2} a_k - \sum_{k=1}^n a_k = 2 \text{ 에서 } a_{n+1} + a_{n+2} - a_1 = 2$$

$$\therefore a_{n+1} + a_{n+2} = a_1 + 2$$

$$\sum_{k=1}^{201} a_k = 503 \text{ 에서 } a_1 + 100 \times (a_1 + 2) = 503$$

$$101a_1 + 200 = 503 \quad \therefore a_1 = 3$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{101} a_k = a_1 + 50 \times (a_1 + 2)$$

$$= 51a_1 + 100 = 153 + 100 = 253$$

3 [답] ③

$$\sum_{k=1}^{20} (3a_k - 4b_k + 2) = 3 \sum_{k=1}^{20} a_k - 4 \sum_{k=1}^{20} b_k + \sum_{k=1}^{20} 2$$

$$= 3 \times 15 - 4 \times 18 + 2 \times 20 = 13$$

4 [답] ⑤

수열 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 중 0, 1, 2의 개수를 각각 x, y, z ($x+y+z=n$)라 하면

$$\sum_{k=1}^n a_k = 0 \times x + 1 \times y + 2 \times z = 16$$

$$\therefore y + 2z = 16 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 = 0 \times x + 1^2 \times y + 2^2 \times z = 26$$

$$\therefore y + 4z = 26 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$y=6, z=5$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n a_k^4 &= 0 \times x + 1^4 \times y + 2^4 \times z \\ &= y + 16z = 6 + 16 \times 5 = 86 \end{aligned}$$

5 답 40

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면

$$a_{10}=21 \text{에서 } a+9d=21 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_4+a_8=10 \text{에서 } (a+3d)+(a+7d)=10$$

$$2a+10d=10$$

$$\therefore a+5d=5 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-15, d=4$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_{2k} - \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} &= (a_2+a_4+a_6+\cdots+a_{20}) - (a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{19}) \\ &= (a_2-a_1) + (a_4-a_3) + \cdots + (a_{20}-a_{19}) \\ &= 10d = 10 \times 4 = 40 \end{aligned}$$

6 답 1707

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면

$$a_5 a_{13} = 400 \text{에서 } ar^4 \times ar^{12} = 400$$

$$a^2 r^{16} = 400 \quad \therefore ar^8 = 20 \quad (\because a > 0, r > 0) \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_9 + a_{13} = 100 \text{에서 } ar^8(1+r^4) = 100$$

㉠을 대입하면

$$20(1+r^4) = 100$$

$$\therefore r^4 = 4$$

이를 ㉠에 대입하면

$$a \times 4^2 = 20 \quad \therefore a = \frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^5 a_{4k-1} &= a_3 + a_7 + a_{11} + a_{15} + a_{19} \\ &= \frac{ar^2\{(r^4)^5-1\}}{r^4-1} \\ &= \frac{\frac{5}{4} \times 2 \times (4^5-1)}{4-1} = \frac{1705}{2} \end{aligned}$$

따라서 $p=1705$, $q=2$ 이므로 $p+q=1707$

7 답 ③

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$a_n + b_n = -n, a_n b_n = -2n \text{이므로}$$

$$\begin{aligned} (a_n^2-1)(b_n^2-1) &= (a_n b_n)^2 - (a_n^2 + b_n^2) + 1 \\ &= (a_n b_n)^2 - \{(a_n + b_n)^2 - 2a_n b_n\} + 1 \\ &= (-2n)^2 - \{(-n)^2 - 2 \times (-2n)\} + 1 \\ &= 3n^2 - 4n + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^6 (a_k^2-1)(b_k^2-1) &= \sum_{k=1}^6 (3k^2-4k+1) \\ &= 3 \sum_{k=1}^6 k^2 - 4 \sum_{k=1}^6 k + \sum_{k=1}^6 1 \\ &= 3 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - 4 \times \frac{6 \times 7}{2} + 6 \\ &= 195 \end{aligned}$$

8 답 335

점 (n, n) 과 직선 $3x+4y-5=0$ 사이의 거리 a_n 은

$$a_n = \frac{|3n+4n-5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{7n-5}{5} \quad (\because n \text{은 자연수})$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} 5a_k &= \sum_{k=1}^{10} \left(5 \times \frac{7k-5}{5} \right) = \sum_{k=1}^{10} (7k-5) \\ &= 7 \sum_{k=1}^{10} k - \sum_{k=1}^{10} 5 \\ &= 7 \times \frac{10 \times 11}{2} - 5 \times 10 = 335 \end{aligned}$$

9 답 ⑤

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^m (m+k) \right\} &= \sum_{m=1}^n \left\{ m^2 + \frac{m(m+1)}{2} \right\} = \sum_{m=1}^n \left(\frac{3}{2}m^2 + \frac{m}{2} \right) \\ &= \frac{3}{2} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)^2}{2} \end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^n \left\{ \sum_{k=1}^m (m+k) \right\} = 90 \text{에서 } \frac{n(n+1)^2}{2} = 90$$

$$n(n+1)^2 = 180 = 5 \times 6^2$$

$$\therefore n=5$$

10 답 ①

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n (i+j) \right\} &= \sum_{i=1}^m \left\{ in + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\ &= \frac{m(m+1)}{2} \times n + \frac{n(n+1)}{2} \times m \\ &= \frac{mn(m+n+2)}{2} \end{aligned}$$

이때 $m+n=10$, $mn=40$ 이므로

$$\sum_{i=1}^m \left\{ \sum_{j=1}^n (i+j) \right\} = \frac{40 \times (10+2)}{2} = 240$$

11 답 ②

수열 $1^2 \times 2, 2^2 \times 3, 3^2 \times 4, \dots, 10^2 \times 11$ 의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = n^2(n+1) = n^3 + n^2$$

따라서 구하는 값은 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제10항까지의 합이므로

$$1^2 \times 2 + 2^2 \times 3 + 3^2 \times 4 + \cdots + 10^2 \times 11$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} (n^3 + n^2) \\ &= \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 + \frac{10 \times 11 \times 21}{6} \\ &= 3410 \end{aligned}$$

12 답 $\frac{n(n-1)(n+1)}{3}$

수열 $1^2-1, 2^2-2, 3^2-3, \dots, n^2-n$ 의 제 k 항을 a_k 라 하면

$$a_k = k^2 - k$$

$$\therefore (1^2-1) + (2^2-2) + (3^2-3) + \cdots + (n^2-n)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n (k^2 - k) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(n+1)}{3} \end{aligned}$$

13 **답** 310

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 하면

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = n^2 - 2n$$

(i) $n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 - 2n - \{(n-1)^2 - 2(n-1)\} \\ &= 2n - 3 \quad \dots\dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ 일 때,

$$a_1 = S_1 = 1^2 - 2 \times 1 = -1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

이때 $\textcircled{1}$ 에 $n=1$ 을 대입한 값과 $\textcircled{2}$ 이 같으므로

$$a_n = 2n - 3$$

따라서 $(2k+3)a_k = (2k+3)(2k-3) = 4k^2 - 9$ 이므로

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 (2k+3)a_k &= \sum_{k=1}^6 (4k^2 - 9) \\ &= 4 \times \frac{6 \times 7 \times 13}{6} - 9 \times 6 \\ &= 310 \end{aligned}$$

14 **답** ③

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{21} a_k a_{k+1} &= \sum_{k=1}^{21} \left(\frac{1}{2k+1} \times \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{21} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \dots + \left(\frac{1}{43} - \frac{1}{45} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{45} \right) = \frac{7}{45} \end{aligned}$$

15 **답** ②

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{a_{10}} - \frac{1}{a_{11}} \right) \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{11}} \\ &= \frac{1}{5} - \frac{1}{a_{11}} \\ \therefore \frac{1}{5} - \frac{1}{a_{11}} &= \frac{2}{35} \text{이므로 } \frac{1}{a_{11}} = \frac{1}{7} \\ \therefore a_{11} &= 7 \end{aligned}$$

16 **답** ①

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{19} \frac{5}{\sqrt{5k-1} + \sqrt{5k+4}} &= \sum_{k=1}^{19} \frac{5(\sqrt{5k-1} - \sqrt{5k+4})}{(\sqrt{5k-1} + \sqrt{5k+4})(\sqrt{5k-1} - \sqrt{5k+4})} \\ &= \sum_{k=1}^{19} (\sqrt{5k+4} - \sqrt{5k-1}) \\ &= (3-2) + (\sqrt{14}-3) + (\sqrt{19}-\sqrt{14}) + \dots + (3\sqrt{11}-\sqrt{94}) \\ &= 3\sqrt{11} - 2 \end{aligned}$$

따라서 $a=11$, $b=2$ 이므로

$$a+b=13$$

17 **답** ④

$A_n(n, \sqrt{n-1})$, $B_n(n, 2\sqrt{n-1})$ 이므로

$$a_n = 2\sqrt{n-1} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n-1}$$

$$\therefore \frac{1}{a_n + a_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k + a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) \\ &= (1-0) + (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) \\ &= \sqrt{n} \end{aligned}$$

즉, $\sqrt{n}=10$ 이므로 $n=100$

18 **답** 4

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{160} \log_3 \left(1 + \frac{1}{1+k} \right) &= \sum_{k=1}^{160} \log_3 \frac{2+k}{1+k} \\ &= \log_3 \frac{3}{2} + \log_3 \frac{4}{3} + \log_3 \frac{5}{4} + \dots + \log_3 \frac{162}{161} \\ &= \log_3 \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} \times \dots \times \frac{162}{161} \right) \\ &= \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4 \end{aligned}$$

19 **답** 486

주어진 수열을 두 수의 곱이 같은 순서쌍끼리 묶음으로 묶으면

$\{(1, 3), (3, 1)\}$, $\{(1, 9), (3, 3), (9, 1)\}$,

$\{(1, 27), (3, 9), (9, 3), (27, 1)\}$, ...

n 번째 묶음의 순서쌍의 두 수의 곱이 3^n 이고, 항의 개수는 $n+1$ 이다.

따라서 첫 번째 묶음부터 n 번째 묶음까지의 항의 개수는

$$\sum_{k=1}^n (k+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+3)}{2}$$

$n=9$ 일 때 $\frac{9 \times 12}{2} = 54$ 이므로 제60항은 10번째 묶음의 6번째 항이다.

이때 n 번째 묶음의 k 번째 항은 $(3^{k-1}, 3^{n-k+1})$ 이므로 10번째 묶음의 6번째 항은 $(3^5, 3^5)$ 이다.

따라서 $a=3^5$, $b=3^5$ 이므로

$$a+b=3^5 \times 2=486$$

20 **답** ②

제 n 행의 모든 수의 합은

$$a_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}$$

$$= \frac{1 \times (3^n - 1)}{3 - 1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{10} a_{2k-1} &= \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{3^{2k-1} - 1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{10} 3^{2k-1} - 10 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3(9^{10} - 1)}{9 - 1} - 10 \right\} \\ &= \frac{3^{21} - 83}{16} \end{aligned}$$

중단원 기출문제 ①

1 답 19

$a_{n+1} - a_n = -5$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공차가 -5 인 등차수열이고, 첫째 항이 120이므로

$$a_n = 120 + (n-1) \times (-5) = -5n + 125$$

$$a_k = 30 \text{에서 } -5k + 125 = 30$$

$$5k = 95 \quad \therefore k = 19$$

2 답 ④

$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$, 즉 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고 공차를 d 라 하면

$$a_2 = 2a_1 \text{에서 } a_1 + d = 2a_1 \quad \therefore d = a_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$a_{10} = 50 \text{에서 } a_1 + 9d = 50 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①을 ②에 대입하면 $a_1 + 9a_1 = 50$

$$\therefore a_1 = 5$$

$$\textcircled{1} \text{에서 } d = 5$$

$$\therefore a_6 = 5 + 5 \times 5 = 30$$

3 답 $\frac{40}{3}$

$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, 즉 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고 첫째항을 a , 공비를 r 라 하면 $a_4 = 9$, $a_7 = 243$ 이므로

$$ar^3 = 9 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$ar^6 = 243 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

① $\div$ ②을 하면

$$r^3 = 27 \quad \therefore r = 3$$

이를 ①에 대입하면

$$a \times 3^3 = 9 \quad \therefore a = \frac{1}{3}$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{3}$, 공비가 3인 등비수열이므로

$$\sum_{k=1}^4 a_k = \frac{\frac{1}{3}(3^4 - 1)}{3 - 1} = \frac{40}{3}$$

4 답 ③

$a_{n+1} = a_n + 2n - 1$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 19를 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 2 \times 1 - 1$$

$$a_3 = a_2 + 2 \times 2 - 1 = a_1 + 2 \times 1 - 1 + 2 \times 2 - 1$$

$$= a_1 + 2 \times 1 + 2 \times 2 - 2$$

$$a_4 = a_3 + 2 \times 3 - 1 = a_1 + 2 \times 1 + 2 \times 2 - 2 + 2 \times 3 - 1$$

$$= a_1 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + 2 \times 3 - 3$$

$\vdots$

$$\therefore a_{20} = a_{19} + 2 \times 19 - 1$$

$$= a_1 + 2 \times 1 + 2 \times 2 + \cdots + 2 \times 18 - 18 + 2 \times 19 - 1$$

$$= a_1 + 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 19) - 19$$

$$= 1 + 2 \sum_{k=1}^{19} k - 19 = 2 \times \frac{19 \times 20}{2} - 18 = 362$$

5 답 51

$na_{n+1} = (n+1)a_n$, 즉 $a_{n+1} = \frac{n+1}{n}a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 16을 차례로 대입하면

$$a_2 = 2a_1$$

$$a_3 = \frac{3}{2}a_2 = \frac{3}{2} \times 2a_1$$

$$a_4 = \frac{4}{3}a_3 = \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \times 2a_1$$

$\vdots$

$$\therefore a_{17} = \frac{17}{16}a_{16} = \frac{17}{16} \times \frac{16}{15} \times \cdots \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{2} \times 2a_1 \\ = 17a_1 = 17 \times 3 = 51$$

6 답 $\frac{17}{4}$

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 2$ 의 n 에 1, 2, 3, 4를 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{2}a_1 + 2 = \frac{1}{2} \times 8 + 2 = 6$$

$$a_3 = \frac{1}{2}a_2 + 2 = \frac{1}{2} \times 6 + 2 = 5$$

$$a_4 = \frac{1}{2}a_3 + 2 = \frac{1}{2} \times 5 + 2 = \frac{9}{2}$$

$$\therefore a_5 = \frac{1}{2}a_4 + 2$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{9}{2} + 2 = \frac{17}{4}$$

7 답 ③

$a_{n+1} = \begin{cases} (-1)^n \times 2a_n & (a_n < 5) \\ (-1)^{n+1}(a_n - 3) & (a_n \geq 5) \end{cases}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = (-1) \times 2a_1 = (-1) \times 2 \times (-2) = 4$$

$$a_3 = (-1)^2 \times 2a_2 = 1 \times 2 \times 4 = 8$$

$$a_4 = (-1)^4(a_3 - 3) = 1 \times (8 - 3) = 5$$

$$a_5 = (-1)^5(a_4 - 3) = (-1) \times (5 - 3) = -2$$

$$a_6 = (-1)^5 \times 2a_5 = (-1) \times 2 \times (-2) = 4$$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 $-2, 4, 8, 5$ 가 이 순서대로 반복된다.

이때 $62 = 4 \times 15 + 2$ 이므로

$$\sum_{k=1}^{62} a_k = (-2 + 4 + 8 + 5) \times 15 + (-2 + 4) \\ = 227$$

8 답 48

$S_n = 2a_n - 1$ 이므로 $S_{n+1} = 2a_{n+1} - 1$

한편 $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$ ($n=1, 2, 3, \dots$)이므로

$$a_{n+1} = 2a_{n+1} - 1 - (2a_n - 1)$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n$$

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n = 2^{n-1}$$

$$\therefore a_5 + a_6 = 2^4 + 2^5 = 48$$

9 답 ②

교점의 개수가 최대가 되려면 어느 두 직선도 평행하지 않아야 하고, 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않아야 한다. 이와 같은 방법으로 $(n+1)$ 개의 직선을 그었을 때는 n 개의 직선을 그었을 때보다 n 개의 교점이 더 생기고, $(n+1)$ 개의 새롭게 분할된 평면이 만들어진다.

즉, a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식은

$$a_{n+1} = a_n + n + 1$$

위의 식의 n 에 1, 2, 3, ..., 19를 차례로 대입하면

$$a_2 = a_1 + 2$$

$$a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 2 + 3$$

$$a_4 = a_3 + 4 = a_1 + 2 + 3 + 4$$

⋮

$$\therefore a_{20} = a_{19} + 20 = a_1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 20$$

$$= 2 + \sum_{k=1}^{19} (k+1)$$

$$= 2 + \frac{19 \times 20}{2} + 19$$

$$= 211$$

10 답 ⑤

a_n 개의 당근 중 500개를 남겨 두고, 다시 심은 나머지의 30%에서 수확하는 당근의 개수가 a_{n+1} 이므로

$$a_{n+1} = 10 \times \left\{ (a_n - 500) \times \frac{30}{100} \right\}$$

$$\therefore a_{n+1} = 3a_n - 1500$$

이 식의 n 에 1, 2, 3을 차례로 대입하면

$$a_2 = 3a_1 - 1500 = 3 \times 800 - 1500 = 900$$

$$a_3 = 3a_2 - 1500 = 3 \times 900 - 1500 = 1200$$

$$a_4 = 3a_3 - 1500 = 3 \times 1200 - 1500 = 2100$$

$$\therefore a_4 - a_2 = 2100 - 900 = 1200$$

11 답 ④

$p(1)$ 이 참이면 $p(2)$ 도 참이다.

$p(2)$ 가 참이면 $p(2 \times 2) = p(4)$ 도 참이다.

$p(4)$ 가 참이면 $p(2 \times 4) = p(8)$ 도 참이다.

⋮

따라서 $p(1)$ 이 참이면 $p(2^n)$ 도 참이다.

이때 $32 = 2^5$ 이므로 $p(32)$ 는 참이다.

12 답 $\frac{3}{2}$

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{2},$$

$$(\text{우변}) = 2 - \frac{3}{2} = \boxed{(\text{㉞}) \frac{1}{2}}$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때,

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{k+2}{2^k}$$

이 등식의 양변에 $\boxed{(\text{㉞}) \frac{k+1}{2^{k+1}}}$ 을 더하면

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{k}{2^k} + \boxed{(\text{㉞}) \frac{k+1}{2^{k+1}}}$$

$$= 2 - \frac{k+2}{2^k} + \boxed{(\text{㉞}) \frac{k+1}{2^{k+1}}}$$

$$= 2 - \boxed{(\text{㉞}) \frac{k+3}{2^{k+1}}}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

따라서 $a = \frac{1}{2}$, $f(k) = \frac{k+1}{2^{k+1}}$, $g(k) = \frac{k+3}{2^{k+1}}$ 이므로

$$f(2a) + g(2a) = f(1) + g(1) = \frac{2}{2^2} + \frac{4}{2^2} = \frac{3}{2}$$

13 답 17

(i) $n=1$ 일 때,

$$2^2 - 1 = 3 \text{이므로 } 3 \text{의 배수이다.}$$

(ii) $n=k$ 일 때,

$2^{2k} - 1 = 3m$ (m 은 자연수)이라 가정하면 $n=k+1$ 일 때

$$2^{2(k+1)} - 1 = \boxed{(\text{㉞}) 4} \times 2^{2k} - 1 = 4(3m+1) - 1$$

$$= 4 \times 3m + 3 = 3 \boxed{(\text{㉞}) 4m+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 3의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{2n} - 1$ 은 3의 배수이다.

따라서 $a=4$, $f(m) = 4m+1$ 이므로

$$f(a) = f(4) = 4 \times 4 + 1 = 17$$

14 답 ⑤

(i) $n=4$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24,$$

$$(\text{우변}) = 2^4 = 16$$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ ($k \geq 4$)일 때,

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k > 2^k$$

이 부등식의 양변에 $\boxed{(\text{㉞}) k+1}$ 을 곱하면

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k \times \boxed{(\text{㉞}) k+1} > 2^k \times \boxed{(\text{㉞}) k+1}$$

$$\text{이때 } 2^k \times \boxed{(\text{㉞}) k+1} > \boxed{(\text{㉞}) 2^{k+1}} \text{이므로}$$

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times k \times \boxed{(\text{㉞}) k+1} > \boxed{(\text{㉞}) 2^{k+1}}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 4$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

15 답 ④

(i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4},$$

$$(\text{우변}) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

이므로 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때,

주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{k}$$

이 부등식의 양변에 $\boxed{(\gamma) \frac{1}{(k+1)^2}}$ 을 더하면

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{k^2} + \boxed{(\gamma) \frac{1}{(k+1)^2}}$$

$$< 2 - \frac{1}{k} + \boxed{(\gamma) \frac{1}{(k+1)^2}}$$

이때

$$\left\{ 2 - \frac{1}{k} + \boxed{(\gamma) \frac{1}{(k+1)^2}} \right\} - \left(2 - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= -\frac{1}{k} + \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1}$$

$$= \frac{-(k+1)^2 + k + k(k+1)}{k(k+1)^2}$$

$$= -\frac{\boxed{(\gamma) 1}}{k(k+1)^2} < 0$$

$$\text{이므로 } 2 - \frac{1}{k} + \boxed{(\gamma) \frac{1}{(k+1)^2}} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

$$\therefore \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{(k+1)^2} < 2 - \frac{1}{k+1}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

따라서 $f(k) = \frac{1}{(k+1)^2}$, $a=1$ 이므로

$$f(1) = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

중단원 기출 문제 2회

1 답 70

$a_n - 2a_{n+1} + a_{n+2} = 0$, 즉 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이고 첫째항을 a , 공차를 d 라 하면 $a_4 = 5$, $a_{20} = 33$ 이므로

$$a + 3d = 5, a + 19d = 33$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } a = -\frac{1}{4}, d = \frac{7}{4}$$

$$\therefore a_n = -\frac{1}{4} + (n-1) \times \frac{7}{4} = \frac{7}{4}n - 2$$

$$\text{따라서 } a_{2n} = \frac{7}{4} \times 2n - 2 = \frac{7}{2}n - 2,$$

$$a_{2n-1} = \frac{7}{4}(2n-1) - 2 = \frac{7}{2}n - \frac{15}{4} \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^{40} a_{2k} - \sum_{k=1}^{40} a_{2k-1} = \sum_{k=1}^{40} \left(\frac{7}{2}k - 2 \right) - \sum_{k=1}^{40} \left(\frac{7}{2}k - \frac{15}{4} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{40} \left\{ \frac{7}{2}k - 2 - \left(\frac{7}{2}k - \frac{15}{4} \right) \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{40} \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \times 40 = 70$$

2 답 ③

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $\frac{1}{4}$ 인 등비수열이고, 첫째항이 $\frac{1}{2}$

이므로

$$a_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{2n-1}$$

$$\text{따라서 } a_{12} = \left(\frac{1}{2} \right)^{23} = \frac{1}{2^{23}} \text{ 이므로 } k=23$$

3 답 60

$a_{n+1} = \sqrt{a_n a_{n+2}}$, 즉 $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이고,

첫째항이 15이므로 공비를 r 라 하면

$$a_n = 15r^{n-1}$$

$$\text{즉, } a_{2k} = 15r^{2k-1}, a_{2k-1} = 15r^{2k-2} \text{ 이므로}$$

$$\sum_{k=1}^4 a_k^2 = 5 \sum_{k=1}^4 (a_{2k-1} - a_{2k}) \text{에서}$$

$$\sum_{k=1}^4 (15r^{k-1})^2 = 5 \sum_{k=1}^4 (15r^{2k-2} - 15r^{2k-1})$$

$$\sum_{k=1}^4 225r^{2k-2} = 5 \sum_{k=1}^4 \{15r^{2k-2}(1-r)\}$$

$$225(1+r^2+r^4+r^6) = 75(1-r)(1+r^2+r^4+r^6)$$

$$1-r=3 \quad \therefore r=-2$$

$$\therefore a_3 = 15 \times (-2)^2 = 60$$

4 답 ②

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = a_1 + 6$$

$$a_3 = a_2 + 8$$

$$a_4 = a_3 + 10$$

$\vdots$

이때 6, 8, 10, ...은 첫째항이 6, 공차가 2인 등차수열이므로

$$f(n) = 6 + (n-1) \times 2 = 2n + 4$$

$$\therefore f(10) = 2 \times 10 + 4 = 24$$

5 답 ②

$a_{n+1} = 9^n a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 9를 차례로 대입하면

$$a_2 = 9 \times a_1$$

$$a_3 = 9^2 \times a_2 = 9^2 \times 9 \times a_1$$

$$a_4 = 9^3 \times a_3 = 9^3 \times 9^2 \times 9 \times a_1$$

$\vdots$

$$\therefore a_{10} = 9^9 \times a_9 = 9^9 \times 9^8 \times 9^7 \times \cdots \times 9^2 \times 9 \times a_1$$

$$= 9^{9+8+7+\cdots+2+1} \times a_1$$

$$= 9^{\frac{9 \times 10}{2}} \times 1 = 9^{45}$$

$$\therefore \log_3 a_{10} = \log_3 9^{45} = \log_3 3^{90} = 90$$

6 답 $\frac{6}{29}$

$a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n+1} a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, ..., 14를 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{1}{3} a_1$$

$$a_3 = \frac{3}{5} a_2 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} a_1$$

$$a_4 = \frac{5}{7} a_3 = \frac{5}{7} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} a_1$$

∴

$$\begin{aligned} \therefore a_{15} &= \frac{27}{29} a_{14} = \frac{27}{29} \times \frac{25}{27} \times \cdots \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} a_1 \\ &= \frac{1}{29} \times 6 = \frac{6}{29} \end{aligned}$$

7 답 0

$a_{n+1} + a_n = n$, 즉 $a_{n+1} = n - a_n$ 의 n 에 1, 2, 3, 4, 5를 차례로 대입하면

$$a_2 = 1 - a_1 = 1 - 3 = -2$$

$$a_3 = 2 - a_2 = 2 - (-2) = 4$$

$$a_4 = 3 - a_3 = 3 - 4 = -1$$

$$a_5 = 4 - a_4 = 4 - (-1) = 5$$

$$\therefore a_6 = 5 - a_5 = 5 - 5 = 0$$

8 답 9

$a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n - 1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{a_1}{2a_1 - 1} = \frac{5}{2 \times 5 - 1} = \frac{5}{9}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2a_2 - 1} = \frac{\frac{5}{9}}{2 \times \frac{5}{9} - 1} = 5$$

$$a_4 = \frac{a_3}{2a_3 - 1} = \frac{5}{2 \times 5 - 1} = \frac{5}{9}$$

∴

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 5, $\frac{5}{9}$ 가 이 순서대로 반복된다.

이때 $13 = 2 \times 6 + 1$, $20 = 2 \times 10$ 이므로

$$a_{13} = 5, a_{20} = \frac{5}{9}$$

$$\therefore \frac{a_{13}}{a_{20}} = \frac{5}{\frac{5}{9}} = 9$$

9 답 $\frac{1}{2}$

$a_{n+1} = \frac{2a_n - 1}{3a_n - 1}$ 의 n 에 1, 2, 3, ...을 차례로 대입하면

$$a_2 = \frac{2a_1 - 1}{3a_1 - 1} = \frac{2 \times \frac{1}{2} - 1}{3 \times \frac{1}{2} - 1} = 0$$

$$a_3 = \frac{2a_2 - 1}{3a_2 - 1} = \frac{2 \times 0 - 1}{3 \times 0 - 1} = 1$$

$$a_4 = \frac{2a_3 - 1}{3a_3 - 1} = \frac{2 \times 1 - 1}{3 \times 1 - 1} = \frac{1}{2}$$

∴

따라서 수열 $\{a_n\}$ 은 $\frac{1}{2}$, 0, 1이 이 순서대로 반복된다.

이때 $10 = 3 \times 3 + 1$, $11 = 3 \times 3 + 2$ 이므로

$$a_{10} = \frac{1}{2}, a_{11} = 0$$

$$\therefore a_{10} + a_{11} = \frac{1}{2}$$

10 답 $\frac{9}{5}$

n 회 시행 후 농도가 $a_n\%$ 인 소금물 500g에서 소금물 100g을 덜어내고 남은 400g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{a_n}{100} \times 400 = 4a_n(\text{g})$$

또 농도 5%인 소금물 100g에 들어 있는 소금의 양은

$$\frac{5}{100} \times 100 = 5(\text{g})$$

그러므로 $(n+1)$ 회 시행 후 소금물 500g의 농도 $a_{n+1}\%$ 는

$$a_{n+1} = \frac{4a_n + 5}{500} \times 100 = \frac{4}{5}a_n + 1$$

$$\text{따라서 } p = \frac{4}{5}, q = 1 \text{이므로 } p + q = \frac{9}{5}$$

11 답 $\frac{1}{8}$

n 회 시행 후 삼각형의 내부에 흰색으로 칠해진 부분의 넓이는 a_n 이므로 검은색으로 칠해진 부분의 넓이는 $1 - a_n$ 이다.

n 회 시행 후 삼각형의 내부에 있는 흰색으로 칠해진 사각형 1개와 검은색으로 칠해진 삼각형 1개에 대하여 $(n+1)$ 회 시행하였을 때 생기는 흰색으로 칠해진 삼각형은 각각 3개, 1개이므로

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}(1 - a_n)$$

$$\therefore a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}$$

$$\text{따라서 } p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{4} \text{이므로 } pq = \frac{1}{8}$$

12 답 풀이 참조

(i) $n=1$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 2 \times 1 - 1 = 1, (\text{우변}) = 1^2 = 1$$

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때,

주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2$$

이 등식의 양변에 $(2k+1)$ 을 더하면

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) + (2k+1)$$

$$= k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

13 답 (가) 9 (나) 8 (다) $9m+1$

(i) $n=1$ 일 때,

$$3^2 - 1 = 8 \text{이므로 } 8 \text{의 배수이다.}$$

(ii) $n=k$ 일 때,

$$3^{2k} - 1 = 8m \text{ (} m \text{은 자연수)} \text{이라 가정하면 } n=k+1 \text{일 때,}$$

$$3^{2(k+1)} - 1 = \boxed{\text{(가) } 9} \times 3^{2k} - 1$$

$$= 9(3^{2k} - 1) + \boxed{\text{(나) } 8}$$

$$= 9 \times 8m + \boxed{\text{(다) } 8}$$

$$= 8(\boxed{\text{(다) } 9m+1})$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 8의 배수이다.

(i), (ii)에서 모든 자연수 n 에 대하여 $3^{2n} - 1$ 은 8의 배수이다.

14 **답** ①

(i) $n=3$ 일 때,

$$a_3 = \frac{8}{(3-1) \times (3-2)} = 4 \text{이므로 성립한다.}$$

(ii) $n=k(k \geq 3)$ 일 때,

$$a_k = \frac{8}{(k-1)(k-2)} \text{이 성립한다고 가정하면}$$

$$\begin{aligned} k(k-2)a_{k+1} &= \sum_{i=1}^k a_i = a_k + \sum_{i=1}^{k-1} a_i \\ &= a_k + (k-1)(k-3)a_k \\ &= a_k \times \boxed{(7) (k-2)^2} \\ &= \frac{8}{(k-1)(k-2)} \times \boxed{(7) (k-2)^2} \\ &= \frac{\boxed{(4) 8(k-2)}}{k-1} \end{aligned}$$

그러므로

$$a_{k+1} = \frac{1}{k(k-2)} \times \frac{\boxed{(4) 8(k-2)}}{k-1} = \frac{8}{\boxed{(4) k(k-1)}}$$

이다.

따라서 $n=k+1$ 일 때 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 3$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n = \frac{8}{(n-1)(n-2)}$ 이다.

따라서 $f(k) = (k-2)^2$, $g(k) = 8(k-2)$, $h(k) = k(k-1)$ 이므로

$$\begin{aligned} \frac{f(12) \times g(17)}{h(10)} &= \frac{(12-2)^2 \times 8 \times (17-2)}{10 \times 9} \\ &= \frac{400}{3} \end{aligned}$$

15 **답** 10

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} \text{이므로}$$

주어진 부등식의 양변을 $\frac{n(n+1)}{2}$ 로 나누면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \frac{2n}{n+1} \quad \cdots \cdots \textcircled{7}$$

이다.

(i) $n=2$ 일 때,

$$(\text{좌변}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, (\text{우변}) = \frac{2 \times 2}{2+1} = \frac{4}{3}$$

이므로 부등식 $\textcircled{7}$ 이 성립한다.

(ii) $n=k(k \geq 2)$ 일 때,

부등식 $\textcircled{7}$ 이 성립한다고 가정하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} > \frac{2k}{k+1}$$

이 부등식의 양변에 $\frac{1}{k+1}$ 을 더하면

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \boxed{(7) \frac{2k+1}{k+1}}$$

$$\text{이때 } \boxed{(7) \frac{2k+1}{k+1}} - \frac{2(k+1)}{k+2} = \frac{\boxed{(4) k}}{(k+1)(k+2)} > 0 \text{이므로}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} > \frac{2(k+1)}{k+2}$$

따라서 $n=k+1$ 일 때도 부등식 $\textcircled{7}$ 이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n \geq 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여 부등식 $\textcircled{7}$ 이 성립하므로 주어진 부등식도 성립한다.

$$\text{따라서 } f(k) = \frac{2k+1}{k+1}, g(k) = k \text{이므로}$$

$$f(2)g(6) = \frac{5}{3} \times 6 = 10$$

memo ✨

Handwriting practice lines consisting of 25 horizontal dotted lines.